Laboratorio di Calcolo Numerico
Equazioni non lineari.

Ángeles Martínez Calomardo
http://www.math.unipd.it/~acalomar/DIDATTICA/
angeles.martinez@unipd.it

Laurea in Informatica
A.A. 2018–2019

Equazioni non lineari

Problema Risolvere $f(x) = 0$ con $x \in [a, b] \subseteq \mathbb{R}$, $f \in C([a, b])$.

- Esempio 1: equazioni polinomiali $p_N(x) = 0$ con p_N polinomio di grado N. Possibili problemi (nessuna soluzione in $\mathbb{R}$, soluzioni multiple).
- Esempio 2: $f(x) = \sin(x) - x$. Soluzione unica poichè f decrescente (vedi derivata).

Soluzione: Metodi iterativi, generano una successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ che si desidera convergere ad α tale che $f(\alpha) = 0$.

Metodi iterativi per risolvere $f(x) = 0$

- **Ordine di convergenza** di un metodo iterativo:

  sia $\{x_n\}$ una successione convergente ad α e sia $\varepsilon_n = x_n - \alpha$ l'errore al passo n. Se esiste un numero $p > 0$ e una costante $C \neq 0$ tale che

  $$\lim_{n\to\infty} \frac{|\varepsilon_{n+1}|}{|\varepsilon_n|^p} = C$$

  allora p è chiamato *ordine di convergenza* della successione e C è la *costante asintotica di errore*.

  Per $p = 1$ la convergenza di dice **lineare**, per $p = 2$ si dice **quadratica**.

Metodo di bisezione

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua e supponiamo $f(a) \cdot f(b) < 0$.

Il metodo di bisezione genera una successione di intervalli (a_n, b_n) con

- $f(a_n) \cdot f(b_n) < 0$,
- $[a_n, b_n] \subset [a_{n-1}, b_{n-1}]$,
- $|b_n - a_n| = \frac{1}{2}|b_{n-1} - a_{n-1}|$.

Fissata una tolleranza ϵ, si arresta l'algoritmo quando:

- la semilunghezza dell'intervallo corrente è minore della tolleranza

$$\frac{1}{2}|b_n - a_n| \leq \epsilon$$

- oppure usando il test sul residuo (non sempre affidabile)

$$\left| f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) \right| \leq \epsilon.$$

Metodo bisezione: esempio

Operativamente dati $a \leq b$ con $f(a) \cdot f(b) < 0$ calcola $c = (a+b)/2$. Se $f(a) \cdot f(c) > 0$ sostituisce c ad a, viceversa sostituisce c a b, fermandosi se le condizioni d'arresto sono verificate.

Studiamo $f(x) = 0$ con $f(x) = \sin(x) - x$. Osserviamo che se $x < 0$ allora $f(x) > 0$ altrimenti $f(x) \leq 0$.

1. $\mathbf{a} = -0.30000000, \ \mathbf{b} = 0.40000000 \rightarrow \mathbf{c} = 0.05000000.$
2. $\mathbf{a} = -0.30000000, \ \mathbf{b} = 0.05000000 \rightarrow \mathbf{c} = -0.12500000$
3. $\mathbf{a} = -0.12500000, \ \mathbf{b} = 0.05000000 \rightarrow \mathbf{c} = -0.03750000$
4. $\mathbf{a} = -0.03750000, \ \mathbf{b} = 0.05000000 \rightarrow \mathbf{c} = 0.00625000$
5. $\ldots$

Metodo bisezione: alcuni fatti

- Non ha un ordine di convergenza nel senso della definizione vista prima. Esempio: se applico bisezione per risolvere $\sin(x) - x = 0$, in $[a, b] = [-3, 2]$ la successione $|\varepsilon_{n+1}/\varepsilon_n|$ alterna valori 1.5 e $1/6$ e quindi non converge con ordine 1.
- Usa solo il segno della funzione.
- Se $f(a) \cdot f(b) < 0$ e $f \in C([a, b])$ allora converge (sempre!!) a un α tale che $f(\alpha) = 0$.
- Il test del residuo $|f(x_n)| \leq$ tol, con *tol* tolleranza prefissata, può essere non adatto a funzioni *piatte* o con *picchi* intorno al punto cui converge.
- Fissata una tolleranza ϵ, e due punti iniziali a, b tali che $f(a) \cdot f(b) < 0$ (con $f \in C([a, b])$) per avere un'errore assoluto $|x_n - \alpha|$ sulla soluzione α inferiore ad ϵ occorrono al più

$$n = \left\lceil \log_2 \left(\frac{b-a}{\epsilon} \right) - 1 \right\rceil$$

iterazioni del metodo.

Metodo bisezione: implementazione in MATLAB/OCTAVE

```
function [xv, slv, fxv, n] = bisezione (f, a, b, toll, nmax)
% BISEZIONE Metodo di Bisezione
%
% Uso: [xv, slv, fxv, n] = bisezione (f, a, b, toll, nmax)
%
% Dati di ingresso:
%   f:      funzione (inline function)
%   a:      estremo sinistro
%   b:      estremo destro
%   toll:   tolleranza richiesta per il test di arresto
%   nmax:   massimo indice dell'iterata permesso
%
% Dati di uscita:
%   xv:     vettore contenente le iterate
%   slv:    vettore contenente le semilunghezze degli
    intervalli
%   fxv:    vettore contenente i corrispondenti residui
%   n:      indice dell'iterata finale calcolata
```

Metodo bisezione: implementazione in MATLAB/OCTAVE

```
for index=1:nmax
% calcola nuovo punto medio c e il valore di f in esso fc


% calcola semilunghezza del nuovo intervallo


% calcola residuo


% salva i dati (punto medio, semilunghezza, residuo) nei vettori
    corrispondenti


% effettua TEST DI ARRESTO
    if (res < toll) | ...
       (semilun < toll)
       n=index; return;
    end
% calcola il nuovo intervallo di lunghezza dimezzata

    if sign(fc) == sign(fa)
         a=c; fa=fc;
              else
         b=c; fb=fc;
    end
end
n=nmax;
```

Bisezione in Matlab/Octave: `demobisezione.m`

Salviamo in `demobisezione.m` il seguente file

```
f=inline('x.^2-2'); a=1; b=2;
tolres=10^(-15);maxit=100;
[vc,sl,vr,iter]=bisezione(f,a,b,tolres,maxit);
for k=1:iter
fprintf('\n [n]:%3.0f [c]: %15.15f [AMP]: %5.2e [RES]:%5.2e  '
    ,k,vc(k),sl(k),vr(k))
end
fprintf('\n');
```

dove:

- a,b: intervallo iniziale bisezione (input);
- tolres,maxit: tolleranza e massimo numero di iterazioni(input);
- f: passaggio di funzione come variabile (input);
- vc: vettore delle approssimazioni successive (punti medi)(output);
- sl,vr: vettori delle semilunghezze e dei residui (output);
- iter: numero di iterazioni di bisezione (output);

Esercizio

Si scriva uno script MATLAB per risolvere l'equazione:

$$\boxed{5x = \exp(-x)}$$

con il metodo di bisezione. Si usino tolleranze pari a 10^{-8}.

Prima di eseguire la `function bisezione` si rappresenti graficamente la funzione e l'asse x nella stessa finestra grafica, e, dopo aver individuato la posizione della radice dal grafico, si scelga un opportuno intervallo iniziale per il metodo di bisezione.

Si confronti il numero di iterazioni effettivamente eseguite dal metodo con il numero stimato mediante

$$n = \left\lceil \log_2 \left(\frac{b-a}{\epsilon} \right) - 1 \right\rceil$$

Creazione di un profilo di convergenza

Una volta eseguita la function `bisezione.m`:

```
[vc,sl,res,iter]=bisezione(f,a,b,toll,maxit);
```

per rappresentare graficamente l'evoluzione dei residui si possono usare, ad esempio, le seguenti istruzioni:

```
figure(2)
semilogy(1:iter,abs(res),'m-*');
title('Profilo di convergenza Bisezione ( caso f(x)=5*x - exp
    (-x))');
xlabel('Indice di iterazione');
ylabel('Residuo');
legend('bisezione');
print('-f2','grafico1','-dpdf');
```