Laboratorio Calcolo Numerico

Esercizio 1 (definizione di funzione inline con variabile di tipo stringa)
Si desidera visualizzare una funzione data in un certo intervallo $[a, b]$. L'algoritmo è molto semplice:

> **assegna** a estremo sinistro
> **assegna** b estremo destro
> **assegna** f funzione
> **assegna** n numero di punti
> **definisci** $x_i, i = 1 : n$ ascisse
> **definisci** $y_i = f(x_i), i = 1 : n$ ordinate
> **disegna la curva per punti** $(x_i, y_i), i = 1 : n$

Ad esempio, supponiamo di voler disegnare nell'intervallo $[-5, 5]$ la funzione $f(x) = x^2 - 2e^x/x$. La funzione in Matlab viene scritta in ingresso come una stringa (sequenza di caratteri). Pertanto deve essere inserita entro due apici. Alcuni degli operatori da usare nella descrizione sono gli operatori "con punto" (a meno che uno degli operandi non sia una costante). Ovvero:

```
+   Addition
-   Subtraction
.*   Multiplication
./   Division
.^   Power
```

Quindi la traduzione dell'algoritmo in Matlab è

```
% estremo sinistro
a = -5;
% estremo destro
b = 5;
% definisco la variabile stringa
funs = 'x.^2-2*exp(x)./x';
% definisco la inline function fun
fun = inline(funs);
% numero punti
n = 101;
% vettore delle ascisse
x = linspace(a, b, n);
% vettore delle ordinate
y = fun(x);
%
% Disegna la curva nell'intervallo [a,b]
plot(x,y)
```

Per la definizione della funzione abbiamo preferito utilizzare il comando `inline` anzichè la struttura delle anonymous functions.
Si noti che tale funzione ha un asintoto verticale in $x = 0$ e si guardi la figura. Ovviamente non essendo uno studio di funzione nelle vicinanze di $x = 0$ la curva non viene rappresentata bene, perchè quello che Matlab effettua è unire i punti con una spezzata. Ma perchè la parte centrale non è connessa? (Si guardi quanto vale `x(51)` e `y(51)`).
Se si prova ad aumentare il valore di n ponendolo uguale a 1001 l'aspetto risulta migliore ma la parte centrale risulta ancora non connessa.
Si inserisca ora il valore $n = 100$. Cosa cambia nella figura? Perchè?

Esercizio 2 (commenti, comandi `input`, `disp`, `hold on` e `hold off`, creare ed eseguire uno script). Vogliamo rendere il nostro script più generale in modo da non doverlo cambiare quando vogliamo considerare un intervallo diverso oppure una funzione diversa. Inoltre vogliamo anche inserire l'asse delle ascisse sulla stessa figura visto che le intersezioni con l'asse x della curva che rappresenta la funzione sono le soluzioni dell'equazione non lineare $f(x) = 0$ presenti nell'intervallo $[a, b]$. Disegnare l'asse delle ascisse corrisponde a tracciare una retta ed, in Matlab, basta unire due punti della retta stessa ottenendo il segmento che unisce tali due punti.
Si consideri pertanto il seguente script che serve a visualizzare una funzione data in un certo intervallo, e lo si trascriva in un file esterno, di nome `disegna.m`:

```
% DISEGNA Script per disegnare una funzione in un intervallo [a,b]
%
% Parte di ingresso dati
a = input(' Dammi l''estremo sinistro: ');
b = input(' Dammi l''estremo destro: ');
funs = input(' Dammi la stringa funzione: ');
n = input(' Dammi il numero di punti: ');
%
disp(' Estremo sinistro'); disp(a)
disp(' Estremo destro'); disp(b)
disp(' Numero di punti'); disp(n)
fun = inline(funs);
disp(' Funzione'); disp(fun)
%
% Definisce il vettore delle ascisse
x = linspace(a, b, n);
%
% Definisce il vettore delle ordinate
y = fun(x);
%
% Disegna la curva nell'intervallo [a,b]
plot(x,y)
% Disegna l'asse x nell'intervallo [a,b]
hold on
plot([a,b],[0,0],'k-')
hold off
```

Poi mettiamoci nella finestra comandi e diamo semplicemente

```
>> disegna
```

fornendo i dati richiesti. Quindi, nel caso del nostro esempio, nella finestra comandi avremo:

```
>> disegna
 Dammi l'estremo sinistro: -5
 Dammi l'estremo destro: 5
 Dammi la stringa funzione: 'x.^2-2*exp(x)./x'
 Estremo sinistro
    -5
 Estremo destro
     5
 Numero di punti
   101
 Funzione
     Inline function:
     fun(x) = x.^2-2*exp(x)./x
>>
```

Esercizio 3 (salvare una figura in formato `.fig` e `.pdf`).
Si studino graficamente le seguenti funzioni identificando per ognuna di esse tutte le soluzioni (od alcune di esse) dell'equazione $f(x) = 0$ e gli intervalli che ne contengono una ed una sola. Per far pratica in preparazione del test finale, si salvi qualche figura in formato `.fig` (formato del Matlab) e `.pdf`.

$$\begin{aligned}
f(x) &= 1 - x - e^{-2x} \\
f(x) &= 2xe^x - 1 \\
f(x) &= e^{x^2} - 1 \\
f(x) &= x + \log x \\
f(x) &= x^3 - x - 2 \\
f(x) &= x^2 - 2 - \sin x \\
f(x) &= 3x - \cos x \\
f(x) &= \sin x - x^2/2 \\
f(x) &= e^x - 5 + x^2 \\
f(x) &= x^2 - 2x - e^{-x+1} \\
f(x) &= x^3 - 4x^2 + \log x \\
f(x) &= 2 + \log(1 + x^2) - x \\
f(x) &= x^2 + 3 - \frac{\sin x}{x^2} \\
f(x) &= \log(3x^2 - x + 1) - 4 \\
f(x) &= 6 - (1 + x)\frac{(1 + x)^5 - 1}{x} \\
f(x) &= e^x - 4x^2 \\
f(x) &= \sqrt{x + 2} - e^{-x} \\
f(x) &= x^2 + 3 - \tan(x) \\
f(x) &= (x - 2)(x - 1)\log(x) \\
f(x) &= 3 + \log(2 + x^2) - x \\
f(x) &= e^x - 2x^2 \\
f(x) &= \sqrt{x + 1} - e^{-x}
\end{aligned}$$

Esercizio 4, da svolgere entro il successivo laboratorio (comandi `help`, `title`, `xlabel`, `ylabel` e `gtext`).
Si *abbellisca* qualche figura ottenuta cambiando il tipo di tratto o il colore per rappresentare la curva (modifica del terzo parametro del comando `plot`, si dia il comando `help plot`) inserendo un titolo (comando `title`), inserendo delle didascalie sugli assi (comandi `xlabel` e `ylabel`), inserendo il proprio nome e cognome ovunque desiderato utilizzando il mouse (comando `gtext`).

Esercizio 5, da svolgere entro il successivo laboratorio
Ogni equazione del tipo $f(x) = 0$ può essere trasformata algebricamente in una delle possibili forme $f_1(x) = f_2(x)$ (basta portare al secondo membro una parte della funzione $f(x)$). Ad esempio $f(x) = 3x - \cos x = 0$ si può scrivere come $3x = \cos x$.
Si scriva uno script di nome `disegna2.m` (modificando lo script precedente) che rappresenti in un certo intervallo $[a, b]$ le due funzioni $f_1(x)$ e $f_2(x)$. Le soluzioni dell'equazione $f(x) = 0$ presenti nell'intervallo $[a, b]$ coincidono con le ascisse dei punti di intersezione delle due funzioni $f_1(x)$ e $f_2(x)$.
Scelta la funzione $f(x) = 3x - \cos x$ e l'intervallo $[-2, 2]$ si verifichi che nelle due figure ottenute con `disegna.m` e `disegna2.m` venga individuata la medesima soluzione.

Esercizio 6, da svolgere entro il successivo laboratorio (punto fisso)

Sia data l'equazione non lineare $x = g(x)$ dove

$$g(x) = \exp(-2x) + x^2 - 0.181734. \tag{1}$$

Si scriva uno script chiamato `eser6.m` che definisca la funzione g, crei un grafico della funzione stessa e della bisettrice in modo che siano visibili i due punti fissi di $x = g(x)$.
Dall'osservazione del grafico si individui l'unica delle due soluzioni dell'equazione data, α_1 e α_2, con $\alpha_1 < \alpha_2$, a cui il metodo di punto fisso può convergere in virtù della teoria vista in aula sulle condizioni di convergenza dello schema iterativo di punto fisso.