Exploration Numérique 2

27 septembre 2023

Ce cas se base sur l'article : The Relation of Sex and Sense of Direction to Spatial Orientation in an Unfamiliar Environment, Journal of Environmental Psychology, Vol. 20, pp. 17-28.

Dans cette étude, les compétences en orientation spatiale de deux groupes d'étudiants, que nous appellerons 0 et 1, de Boston College ont été mises à l'épreuve à Houghton Garden Park, un parc boisé proche du campus à Newton, Massachusetts. 30 étudiants du groupe 0 et 30 étudiants. Les détails du protocole expérimental sont donnés dans l'article. Dans le parc, les étudiants ont reçu pour instruction de pointer vers des repères prédéfinis et également dans la direction du sud. Les étudiants ont réalisé le pointage en déplaçant un pointeur attaché à un rapporteur de 360° ; l'angle de la réponse de pointage était ensuite enregistré au degré le plus proche.

Nous rapportons ci-dessous le erreurs absolues de pointage, en degrés, des participants.

		0					1		
13	130	39	33	10	14	8	20	3	138
13	68	18	3	11	122	78	69	111	3
38	23	60	5	9	128	31	18	35	111
59	5	86	22	70	109	36	27	32	35
58	3	167	15	30	12	27	8	3	80
8	20	67	26	19	91	68	66	176	15

L'objectif est de tester si en moyenne, les membres du groupe 0 ont un meilleur sens de l'orientation. Nous formalisons ce test d'hypothèses ci-dessous. Nous notons par n le cardinal du groupe '0' et p le cardinale du groupe 1 ; Nous considérons le modèle statistique

$$\left(\mathbb{R}^{n+p}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+p}), \left\{p_\theta \cdot \mathrm{dLeb}^{\otimes(n+p)} := \left(\mathrm{N}(\mu_0, \sigma_0^2)\right)^{\otimes n} \otimes \left(\mathrm{N}(\mu_1, \sigma_1^2)\right)^{\otimes p} \;:\; \theta := (\mu_0, \mu_1, \sigma_0^2, \sigma_1^2) \in \mathbb{R}^2 \times (\mathbb{R}_+^*)^2\right\}\right) .$$

Sous $\mathbb{P}_\theta$, les observations sont indépendantes et gaussiennes ; les paramètres de la gaussienne dépendent uniquement des groupes. Nous noterons $X_1, \ldots, X_n$ les observations du groupe "0", et $Y_1, \ldots, Y_p$ les observations du groupe "1".

1. Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance du paramètre $\theta = (\mu_0, \mu_1, \sigma_0^2, \sigma_1^2)$
2. En utilisant la méthode du rapport de vraisemblance généralisé, déterminer un test de niveau α de l'hypothèse

$$H_0 : \sigma_0^2 = \sigma_1^2, \quad \text{contre} \quad H_1 : \sigma_0^2 > \sigma_1^2$$

3. Ecrire un code Python pour calculer la p-valeur du test [PS : il est demandé d'écrire le test et de ne pas utiliser des procédures toutes faites comme on peut les trouver dans `pingouin` par exemple]

Nous considérons dans la suite le modèle statistique

$$\left(\mathbb{R}^{n+p}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+p}), \left\{p_\theta \cdot \mathrm{dLeb}^{\otimes(n+p)} := \left(\mathrm{N}(\mu_0, \sigma^2)\right)^{\otimes n} \otimes \left(\mathrm{N}(\mu_1, \sigma^2)\right)^{\otimes p} \,:\, \theta := (\mu_0, \mu_1, \sigma^2) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+^*\right\}\right) .$$

4. Construire un intervalle de confiance de $\mu_0 - \mu_1$ de niveau de confiance $1 - \alpha$.
5. En déduire un test de niveau $\alpha = 0.01$ de l'hypothèse

$$H_0 :\ \mu_0 = \mu_1, \quad \text{contre} \quad H_1 :\ \mu_0 \neq \mu_1$$

6. Calculer la p-valeur du test.
7. Construire un test de niveau $\alpha = 0.01$ de l'hypothèse

$$H_0 :\ \mu_0 \leq \mu_1, \quad \text{contre} \quad H_1 :\ \mu_0 > \mu_1$$

8. Ecrire un code Python pour calculer la p-valeur du test [PS : écrire la procédure vous-même sans utiliser des procédures toute faite]

Pour chacune des questions, faire les applications numériques en utilisant l'observation donnée par le Tableau ci-dessus et conclure.