(1) soit $n \geq 0$. soit $\theta, \theta'$ tq $P_{n,\theta} = P_{n,\theta'}$ et on a donc que pour tout $1 \leq i \leq n$ $Ber(\varphi(\theta^t x_i)) = Ber(\varphi(\theta'^t x_i))$

ainsi : $\forall i \in [1, n]$ $\varphi(\theta^T x_i) = \varphi(\theta'^T x_i)$.

D'autre part : $\forall t \geq 0$ $\varphi'(t) = \left(\frac{e^t}{1+e^t}\right)' = \frac{e^t(1+e^t) - e^t e^t}{(1+e^t)^2}$

$$= \frac{e^t}{(1+e^t)^2} \geq 0$$

et donc $\varphi$ est croissante strictement, continue, et donc $\varphi$ est bijective. on en déduit que : $\forall 1 \leq i \leq n$ $\theta^T x_i = \theta'^T x_i$

et donc $X_n \theta = X_n \theta'$. La matrice $X_n$ est de rang $p$ et ~~des~~ élément de $\mathcal{M}_{n \times p}(\mathbb{R})$ donc elle est injective.

Ainsi, nous obtenons que $\theta = \theta'$ et donc le modèle est identifiable.

(2) . soit $\theta \in \mathbb{R}^p$. $F_n(\theta)^T = \sum_{i=1}^n h(\theta^T x_i)(x_i x_i^T)^T = F_n(\theta)$

donc $F_n$ est bien symétrique.

. soit $u \in \mathbb{R}^p$, $u^T F_n(\theta) u = \sum_{i=1}^n h(\theta^T x_i) \underbrace{u^T x_i x_i^T u}_{\|x_i^T u\|^2}$

or, pour tout $t \in \mathbb{R}$ : $h(t) = \frac{e^t}{1+e^t}\left(1 - \frac{e^t}{1+e^t}\right) = \frac{e^t}{(1+e^t)^2} > 0$

et donc $u^T F_n(\theta) u \geq 0$. Ceci pour tout $u \in \mathbb{R}^p$ et

donc $F_n(\theta)$ est définie positive.

(3) on a : $\forall t \in \mathbb{R}$ $\quad h(t) = \dfrac{e^t}{(1+e^t)^2} = \dfrac{e^t}{1+2e^t+e^{2t}}$

$$= \frac{1}{2+e^{-t}+e^t}$$

et donc $h(t) = \dfrac{1}{2+2\,ch(t)}$. Ainsi $h'(t) = \dfrac{sh(t)}{2(1+ch(t))^2}$

or comme $|sh(t)| \leq ch(t)$ :

$$|h'(t)| = \frac{|sh(t)|}{2(1+2ch(t)+ch^2(t))} \leq \frac{|sh(t)|}{4\,ch(t)} \leq 1/4 \text{ et}$$

donc $h$ est 1-Lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

(4) soit $\theta \in \mathbb{R}^p$. $L_n(\theta) = P_{n,\theta}(Y_1, \dots, Y_n)$

$$= \prod_{i=1}^{n} \varphi(\theta^T x_i)^{Y_i} (1-\varphi(\theta^T x_i))^{1-Y_i}$$

et donc $\ell_n(\theta) = \sum_{i=1}^{n} Y_i \ln \varphi(\theta^T x_i) + (1-Y_i) \ln(1-\varphi(\theta^T x_i))$

(5) soit $\theta \in \mathbb{R}^p$.

$$\nabla \ell_n(\theta) = \sum_{i=1}^{n} Y_i \frac{\nabla(\varphi(\theta^T x_i))}{\varphi(\theta^T x_i)} + \sum_{i=1}^{n} (1-Y_i) \frac{-\nabla(\varphi(\theta^T x_i))}{1-\varphi(\theta^T x_i)}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} Y_i \frac{x_i\, \varphi'(\theta^T x_i)}{\varphi(\theta^T x_i)} + \sum_{i=1}^{n} (1-Y_i)\, x_i \times \frac{-\varphi'(\theta^T x_i)}{1-\varphi(\theta^T x_i)}$$

$$\Rightarrow \nabla l_n(\theta) = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i \frac{\varphi'(\theta^T x_i)}{\varphi(\theta^T x_i)} - \sum_{i=1}^{n} (1-y_i) x_i \frac{\varphi'(\theta^T x_i)}{1-\varphi(\theta^T x_i)}$$

avec $\varphi'(t) = \dfrac{e^t}{(1+e^t)^2} = \dfrac{e^{-t}}{(1+e^{-t})^2} = \varphi(t)\varphi(1-t)$ donc

$\dfrac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} = \varphi(1-t)$, ainsi on obtient que :

$$\nabla l_n(\theta) = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i [1-\varphi(\theta^T x_i)] - \sum_{i=1}^{n} (1-y_i) x_i \varphi(\theta^T x_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} y_i x_i - x_i \varphi(\theta^T x_i)$$

et donc $\boxed{\nabla l_n(\theta) = \sum_{i=1}^{n} \{y_i - \varphi(\theta^T x_i)\} x_i = X_n^T \{Y_n - f_n(\theta)\}}$

• soit $0 \leq i, j \leq n$ $\quad \dfrac{\partial^2 l_n(\theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{\partial}{\partial \theta_i} \left[ -\varphi'(\theta^T x_k)(x_k)_j \right]$

$$= -\sum_{k=1}^{n} \varphi'(\theta^T x_k)(x_k)_i (x_k)_j$$

or $\forall t \in \mathbb{R}$ $\varphi'(t) = h(t)$ et pour $(i,j)$ $(x_k x_k^T)_{i,j} = (x_k)_i (x_k)_j$

et donc $\dfrac{\partial^2 l_n(\theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} = -\sum_{k=1}^{n} h(\theta^T x_k)(x_k x_k^T)_{i,j}$,

ainsi $\nabla^2 l_n(\theta) = \sum_{k=1}^{n} h(\theta^T x_k) x_k x_k^T = -F_n(\theta)$

• La matrice Hessienne de ~~la~~ $l_n(\theta)$ est symétrique défini négative donc $l_n$ est concave.

- D'après le cours on a : $\mathbb{I}(\theta) = E_\theta\left[\nabla \ell_n(\theta) \nabla \ell_n(\theta)'\right]$

$$= - E_\theta\left[\nabla^2 \ell_n(\theta)\right]$$

avec $\mathbb{I}$ l'information de Fisher et donc d'après ce qui précède :

$$\boxed{E_{n,\theta}\left[\nabla \ell_n(\theta) \nabla \ell_n(\theta)^T\right] = F_n(\theta)}$$

(c) on a : $\ell_n(\theta) = \sum_{i=1}^{n} \left[Y_i \ln(\varphi(\theta^T x_i)) + (1-Y_i)\ln(1-\varphi(\theta^T x_i))\right]$

ainsi : $\ell_n(\lambda\theta_*) = \sum_{i=1}^{n} \left[Y_i \ln(\varphi(\lambda\theta_*^T x_i)) + (1-Y_i)\ln(1-\varphi(\lambda\theta_*^T x_i))\right]$

$$= \sum_{\substack{i=1 \\ Y_i=0}}^{n} \ln(1-\varphi(\lambda\theta_*^T x_i)) + \sum_{\substack{i=1 \\ Y_i=1}}^{n} \ln(\varphi(\lambda\theta_*^T x_i))$$

or pour $i$ tq $Y_i = 1$, $\theta_*^T x_i > 0$ ainsi $\lim_{\lambda \to +\infty} \ln(\varphi(\lambda\theta_*^T x_i))$

$$= \lim_{t \to 1} \ln(t)$$

$$= 0.$$

pour $i$ tq $Y_i = 0$, $\theta_*^T x_i < 0$ ainsi $\lim_{\lambda \to +\infty} \varphi(\lambda\theta_*^T x_i) = 0$

ainsi $\lim_{\lambda \to +\infty} (\ln(1-\varphi(\lambda\theta_*^T x_i))) = \lim_{t \to 1} \ln(t) = 0$

et donc finalement : $\boxed{\lim_{\lambda \to +\infty} \ell_n(\lambda\theta_*^T) = 0.}$

• on sait que $0 < L(\theta) < 1$ car $\varphi(t) \in ]0,1[$ et donc $\ln(\theta) < 0$. Ainsi, $\forall \theta \in \mathbb{R}^p$ il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tq $\ln(\theta) < \ln(\lambda \theta_*)$ car $\lim_{\lambda \to +\infty} \ln(\lambda \theta_*) = 0$. et donc le maximum de vraisemblance n'existe pas dans ce cas là.

(7) soit $\bar{\theta} \in \mathbb{R}^p$. on évalue $L(\theta)$ en $\theta_\lambda = \lambda \theta_* + (\bar{\theta} - \theta_*)$

$$L_n(\theta_\lambda) = \prod_{i=1}^{n} \varphi(\theta_\lambda^T x_i)^{Y_i} (1-\varphi(\theta_\lambda^T x_i))^{1-Y_i}$$

$$= \prod_{\substack{i=1 \\ i \in \mathcal{E}}}^{n} \varphi(\bar{\theta}^T x_i)^{Y_i} (1-\varphi(\bar{\theta} x_i))^{1-Y_i} \prod_{\substack{i=1 \\ i \notin \mathcal{E}}}^{n} \varphi(\bar{\theta}_\lambda^T x_i) \prod_{\substack{i=1 \\ i \notin \mathcal{E}}}^{n} (1-\varphi(\bar{\theta}_\lambda^T x_i))$$

pour $i \notin \mathcal{E}$ et $Y_i = 1$ on a $\theta_*^T x_i > 0$ ainsi :

$$e^{-\theta_\lambda^T x_i} = e^{-\lambda \theta_*^T x_i} \, e^{-(\bar{\theta} - \theta_*)^T x_i} \xrightarrow[\lambda \to +\infty]{} 0$$

et donc $\varphi(\theta_\lambda^T x_i) \xrightarrow[\lambda \to +\infty]{} 1$.

De m̂ pour $i \notin \mathcal{E}$ et $Y_i = 0$ on a $\theta_*^T x_i < 0$ ainsi

$$e^{-\theta_\lambda^T x_i} = e^{-\lambda \theta_*^T x_i} \, e^{-(\bar{\theta} - \theta_*)^T x_i} \xrightarrow[\lambda \to +\infty]{} +\infty$$

et donc $\varphi(\theta_\lambda^T x_i) \xrightarrow[\lambda \to +\infty]{} 0$ ainsi $1 - \varphi(\theta_\lambda^T x_i) \xrightarrow[\lambda \to +\infty]{}$

Comme $\varphi$ est croissante, on a que les deux derniers produits converge en croissance vers 1 quand $\lambda \to +\infty$

et le premier produit est cte en $\lambda$ et donc pour tout $\bar\vartheta \in \mathbb{R}^p$ il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tq $L_n(\vartheta_\lambda) \geq L_n(\bar\vartheta)$ et donc le maximum de vrai-semblance n'existe pas dans une telle situation.

(8) Supposons l'existence d'un recouvrement.

notons $k_{1,\vartheta} = \underset{\{1,\dots,n\}}{\arg\max}\ \bar\vartheta x_k$ , $k_{2,\vartheta} = \underset{\{1,\dots,n\}}{\arg\max}\ \bar\vartheta^T x_k$.

Comme $\exists\, k_1, k_2$ tq $\bar\vartheta^T x_{k_1} > 0$ et $\bar\vartheta^T x_{k_2} < 0$ alors

~~$k_{1,\vartheta} \leq 0$ et~~ on déduit $\begin{cases} \vartheta^T x_{k_{1,\vartheta}} > 0 \\ \vartheta^T x_{k_{2,\vartheta}} < 0 \end{cases}$

. les fonctions $\Phi_1 : \vartheta \longrightarrow \vartheta^T x_{k_{1,\vartheta}} > 0$ et $\Phi_2 : \vartheta \longrightarrow \vartheta^T x_{k_{2,\vartheta}} < 0$ sont bornées sur $S(0,1)$ car :

$$|\vartheta^T x_{k_{1,\vartheta}}| \leq \sqrt{\underbrace{\|\vartheta\|}_{1}\ \|x_{k_{1,\vartheta}}\|} \quad \text{(inégalité de Cauchy-Shwarz)}$$

$$\leq \sqrt{\|x_{k_{1,\vartheta}}\|} \leq C = \max_k \sqrt{\|x_k\|}$$

de m̂ $|\bar\vartheta^T x_{k_{2,\vartheta}}| \leq C = \max_k \sqrt{\|x_k\|}$. et donc comme $\Phi_1$ et $\Phi_2$ bornées sur $S(0,1)$ compacte alors elles admettent un minimum et un maximum. soit $M_1 = \min_\vartheta \bar\vartheta^T x_{k_{1,\vartheta}}$ et $M_2 = \min_\vartheta \bar\vartheta^T x_{k_{2,\vartheta}}$ alors si on prend $\xi = \min(M_1, -M_2)$, on aura bien : $\forall\, \vartheta \in S(0,1)$ $\bar\vartheta^T x_{k_{1,\vartheta}} > \xi$ et $\bar\vartheta^T x_{k_{2,\vartheta}} < -\xi$.

. Soit $\lambda > 0$, calculons maintenant $l_n(\lambda\theta)$.

$$l_n(\lambda\theta) = \sum_{i=1}^{n} \left[ Y_i \ln(\varphi(\theta^T x_i)) + (1-Y_i)\ln(1-\varphi(\theta^T x_i)) \right]$$

$$\leqslant Y_{k_1,0} \ln(\varphi(\theta^T x_{k_1,0})) + (1-Y_{k_1,0})\ln(1-\varphi(\theta^T x_{k_1,0}))$$

(car $\varphi$ est à valeur dans $]0,1[$ donc les termes $\ln$ sont négatifs)

$$= \ln(1-\varphi(\theta^T x_{k_1,0})) - Y_{k_1,0} \ln\left(\frac{1-\varphi}{\varphi}(\lambda\theta^T x_{k_1,0})\right)$$

et donc : $l_n(\lambda\theta) \leqslant \ln\left(\dfrac{e^{-\lambda\theta^T x_{k_1,0}}}{1+e^{-\lambda\theta^T x_{k_1,0}}}\right) - Y_{k_1,0} \ln\left(e^{-\lambda\theta^T x_{k_1,0}}\right)$

$$\leqslant \ln\left(e^{-\lambda\theta^T x_{k_1,0}}\right) - Y_{k_1,0}\ln\left(e^{-\lambda\theta^T x_{k_1,0}}\right)$$

$$= -\lambda\theta^T x_{k_1,0}(1+Y_{k_1,0})$$

$$\leqslant -\lambda\xi.$$

et donc on voit que si on prend $\lambda_M = \dfrac{M}{\xi}$ on aura que :

pour tout $\lambda > \lambda_m$ $\quad l_n(\lambda\theta) \leqslant -\lambda\xi \leqslant -\dfrac{M}{\xi}\xi = -M$

et Donc $\displaystyle\lim_{\|\theta\| \to +\infty} l_n(\theta) = -\infty$, Ainsi comme $l_n$ est ona que concave alors elle admet un unique maximum sur $\mathbb{R}^p$.

(9) soit $n>0$. comme $h$ est 1-lipschitzienne alors : $\forall i \in \{1,\dots,n\}$

$$|h(\theta^T x_i) - h(u^T x_i)| < |(\theta^T - u^T) x_i| \text{ pour tout } \theta, u \in \mathbb{R}^p.$$

ainsi : soit $x \in \mathbb{R}^p$ tq $\|x\| = 1$

$$\| F_n(\theta) - F_n(u x) \| = \left| \sum_{i=1}^{n} \left( h(\theta^T x_i) - h(u^T x_i) \right) x_i x_i^T x \right|$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} |h(\theta^T x_i) - h(u^T x_i)| \, \|x_i x_i^T x\|$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \|\theta - u\| \, \|x_i\| \, \|x_i\| \, \|x_i\| \, \|x\|$$

$$\leq n \|\theta - u\| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^3$$

or $C = \sup \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^3 < \infty$ donc on a finalement :

$\forall \theta, u \in \mathbb{R}^p, n > 0$

$$\| F_n(\theta) - F_n(u) \| \leq C n \|\theta - u\|$$

(10) on fait un developpement limité à l'ordre 1 de la log-vraisemblance :

$$\frac{\nabla l_n(\hat{\theta}_n^{MV}) - \nabla l_n(\theta)}{\sqrt{n}} = \left[ \frac{\overbrace{\nabla^2 l_n(\theta)}^{-F_n(\theta)}}{n} + h_{n,\theta}(\hat{\theta}^{MV} - \theta) \right] \sqrt{n} (\hat{\theta}_n^{MV} - \theta)$$

avec $h_{n,\theta}(0) = 0$ et $h_{n,\theta}(h) = o(\|h\|)$.

ainsi $R_n = h_{n,\theta}(\hat{\theta}^{MV} - \theta)$, or $\hat{\theta}^{MV} \xrightarrow{\mathbb{P}_{n,\theta}\text{-Prob}} \theta$

on a alors $R_n = h_{n,\theta}(\hat{\theta}^{MV} - \theta) = O(\|\hat{\theta}^{MV} - \theta\|) = o(1)$

et donc $R_n \xrightarrow{\mathbb{P}_{n,\theta}-\text{Prob}} 0$.

(11) on a : $\nabla \ell_n(\theta) = \sum_{i=1}^{n} \left[ Y_i x_i - x_i \varphi(\theta^T x_i) \right]$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $k_n = n$ et $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ $Y_{n,i} = \frac{Y_i x_i - x_i \varphi(\theta^T x_i)}{\sqrt{n}}$.

on sait que les $Y_{n,i}$ sont indépendents et

$E_\theta[Y_{n,i}] = (E_\theta(Y_i) - \varphi(\theta^T x_i) x_i) = 0$. montrons que

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}_\theta\left[ \|Y_{n,i}\|^2 \mathbb{1}_{\|Y_{n,i}\| > \varepsilon} \right] = 0, \text{ pour tout } \varepsilon > 0$$

et que $\lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} \operatorname{var}_\theta(Y_{n,i}) = \mathcal{I}(\theta)$.

soit $\varepsilon > 0$ et $n > 0$. $\|Y_{n,i}\|^2 = \frac{(Y_i - \varphi(\theta^T x_i))^2}{n} \|x_i\|^2$

$$\leq \frac{\|x_i\|^2}{n}$$

ainsi $\|Y_{n,i}\| > \varepsilon \Rightarrow \|x_i\|^2 \geq n\varepsilon \Rightarrow \|x_i\|^2 \geq \sqrt{n\varepsilon}$. ainsi

$$0 \leq \sum_{i=}^{n} E_\theta\left[ \|Y_{n,i}\|^2 \mathbb{1}_{\|Y_{n,i}\| > \varepsilon} \right] \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{\|x_i\|^2}{n} \mathbb{1}_{\|x_i\| > \sqrt{n\varepsilon}}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\|x_i\|^3}{n \|x_i\|} \mathbb{1}_{\|x_i\| > \sqrt{n\varepsilon}}$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{n\varepsilon}} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \frac{\|x_i\|^3}{1}, \text{ or } \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^3 \leq C$$

$$\leq \frac{C}{\sqrt{n\varepsilon}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

et donc : $\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}_\theta \left[ \|Y_{n,i}\|^2 \mathbb{1}_{\|Y_{n,i}\| > \varepsilon} \right] = 0$.

Maintenant on calcule :

$$\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}_\theta (Y_{n,i}) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}_\theta \left[ Y_{n,i} Y_{n,i}^{T} \right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \mathbb{E}_\theta \left( (Y_i - \varphi(\theta^T x_i))^2 \right) x_i x_i^T$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \left[ \varphi(\theta^T x_i)(1 - \varphi(\theta^T x_i))^2 + (1 - \varphi(\theta^T x_i)) \varphi(\theta^T x_i)^2 \right] x_i x_i^T$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} (1 - \varphi(\theta^T x_i)) \varphi(\theta^T x_i) x_i x_i^T .$$

$$= \frac{F_n(\theta)}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \mathcal{I}(\theta)$$

et donc en conclusion, selon le théorème de Lindelberg-Feller, on a ainsi :

$$\frac{\nabla l_n(\theta)}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathbb{P}_{n,\theta}} \mathcal{N}(0, \mathcal{I}(\theta)).$$

(12) on a l'expression : $\frac{\nabla l_n(\theta)}{\sqrt{n}} = \left( \frac{F_n(\theta)}{n} - R_n \right) \sqrt{n} (\hat{\theta}_n^{MV} - \theta)$

et donc $\frac{F_n(\theta)}{n} \sqrt{n} (\hat{\theta}_n^{MV} - \theta) = \frac{\nabla l_n(\theta)}{\sqrt{n}} + R_n \sqrt{n} (\hat{\theta}^{MV} - \theta)$.

or $R_n \xrightarrow{P_{n,\theta}-\text{Prob}} 0$ et $\frac{\nabla l_n(\theta)}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathbb{P}_{n,\theta}} \mathcal{N}(0, \mathcal{I}(\theta))$ alors

d'après Slutsky $\frac{F_n(\theta)}{n} \sqrt{n} (\hat{\theta}^{MV} - \theta) \xrightarrow{P_{n,\theta}} \mathcal{N}(0, \mathcal{I}(\theta))$

D'autre part $\dfrac{F_n(\theta)}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \varphi(\theta)$ et donc encore en utilisant Slutsky : $\varphi(\theta)\sqrt{n}\left(\hat{\theta}_n^{MV} - \vartheta\right) \xrightarrow{\mathbb{P}_{n,\theta}} \mathcal{N}(0, \varphi(\theta))$

$$\Rightarrow \boxed{\sqrt{n}\left(\hat{\theta}_n^{MV} - \vartheta\right) \xrightarrow{\mathbb{P}_{n,\theta}} \mathcal{N}\left(0, \varphi(\theta)^{-1}\right)}$$

$\varphi(\theta)$ étant inversible car définie ~~négative~~ positive.

(13) La suite $\left(\hat{\theta}_n^{MV}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est consistante :

$$\left\| \frac{F_n\left(\hat{\theta}_n^{MV}\right)}{n} - \varphi(\theta) \right\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \text{ et Donc } \frac{F_n\left(\hat{\theta}_n^{MV}\right)}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \varphi(\theta)$$

et donc

$$\left( \frac{F_n\left(\hat{\theta}_n^{MV}\right)}{n} \right)^{-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \varphi(\theta)^{-1}$$

et on déduit donc que

$$\beta_{n,k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \left\{\varphi(\theta)^{-1}\right\}_{k,k}$$

d'autre part :

$$\hat{\theta}_{n,k}^{MV} - \vartheta_k = \underbrace{\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & & k & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & & \cdots & & 0 \\ & 0 & & & \\ \vdots & & 1 & & \vdots \\ & & & 0 & \\ 0 & & \cdots & & 0 \end{pmatrix} \end{array}}_{X} \left(\hat{\vartheta}_n^{MV} - \vartheta\right)$$

et donc comme $\sqrt{n}\left(\hat{\theta}_n^{MV} - \vartheta\right) \xrightarrow{\mathbb{P}_{n,\theta}} \mathcal{N}\left(0, \varphi(\theta)^{-1}\right)$

alors :

$$\sqrt{n}\, X\left(\hat{\theta}_n^{MV} - \theta_k\right) \xrightarrow{\mathbb{P}_{n,\theta}} \mathcal{N}\left(0, X^T \varphi(\theta)^{-1} X\right)$$

$$= \mathcal{N}\left(0, \left(\varphi(\theta)^{-1}\right)_{k,k}\right)$$

et donc d'après slutsky car $\beta_{n,k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} (\varphi(\theta)^{-1})_{k,k}$

on a: $$\sqrt{\frac{n}{\beta_{n,k}}}\left(\hat{\theta}_k^{MV} - \theta_k\right) \longrightarrow \mathcal{N}\left(0, \frac{(\varphi(\theta)^{-1})_{k,k}}{(\varphi(\theta)^{-1})_{k,k}}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\sqrt{\frac{n}{\beta_{n,k}}}\left(\hat{\theta}_k^{MV} - \theta_k\right) \xrightarrow{\mathbb{P}_{n,\theta}} \mathcal{N}(0,1)}$$

14) d'après ce qui précède $\sqrt{\frac{n}{\beta_{n,k}}}\left(\hat{\theta}_{n,k}^{MV} - \theta_k\right) \xrightarrow{\mathbb{P}_{n,\theta}} \mathcal{N}(0,1)$

ainsi $$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}_\theta\left(\sqrt{\frac{n}{\beta_{n,k}}}\left(\hat{\theta}_{n,k}^{MV} - \theta_k\right) \in \left[-q_{1-\alpha/2}, q_{1-\frac{\alpha}{2}}\right]\right) = 1-\alpha$$

avec $q_{1-\alpha/2}$ le quantile d'ordre $1-\alpha/2$ du loi $\mathcal{N}(0,1)$

ainsi, on trouve un intervalle de confiance asymptotique de niveau $1-\alpha$ :

$$I(\alpha) = \left[\hat{\theta}_{n,k}^{MV} - \sqrt{\frac{\beta_{n,k}}{n}}\, q_{1-\alpha/2}\,,\ \hat{\theta}_{n,k}^{MV} + \sqrt{\frac{\beta_{n,k}}{n}}\, q_{1-\alpha/2}\right]$$

15) on considère le test associé à la statistique $|\hat{\theta}_{n,k}^{MV}|$

et $$\Phi(Y_n) = \mathbb{1}_{\{|\hat{\theta}_{n,k}^{MV}| > \sqrt{\frac{\beta_{n,k}}{n}}\, q_{1-\alpha/2}\}}$$

et donc d'après la question précédente $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}_0\left(0 \notin I(\alpha)\right) = \alpha$

Ainsi ce test $\Phi$ répond au question

(16) La p-valeur asymptotique $\hat{\alpha}(Z)$ vérifie

$$|\hat{\theta}_{n,k}^{MV}| = \sqrt{\frac{\beta_{n,k}}{n}}\, q_{1-\frac{\hat{\alpha}(Z)}{2}} \quad \text{et donc}$$

$$q_{1-\frac{\hat{\alpha}(Z)}{2}} = \sqrt{\frac{n}{\beta_{n,k}}}\, |\hat{\theta}_{n,k}^{MV}|$$

$$\Rightarrow \quad 1 - \frac{\hat{\alpha}(Z)}{2} = F\left(\sqrt{\frac{n}{\beta_{n,k}}}\, |\hat{\theta}_{n,k}^{MV}|\right)$$

avec $F$ la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0,1)$.