PC1 : Modèles Statistiques

Dernière modification 4 septembre 2023

Exercice 1 : Transformation de variables aléatoire

Soit un n-échantillon $(X_1, ..., X_n)$ du modèle statistique

$$\left(\mathbb{R}^k, \mathcal{B}(\mathbb{R}^k), \left\{p_\theta \cdot Leb^{\otimes k} : \theta \in \Theta\right\}\right).$$

On suppose qu'il existe un ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}^k$ tel que $\int_{\mathcal{O}} p_\theta dLeb^{\otimes k} = 1$ pour tout $\theta \in \Theta$. Soit $\phi_\theta : \mathcal{O} \to \mathbb{R}^k$ une application continûement différentiable, injective sur $\mathcal{O}$ et dont le jacobien ne s'annule pas sur $\mathcal{O}$.

1. Sous $p_\theta \cdot Leb^{\otimes k}$, quelle est la loi de $\phi_\theta(X_i)$?

2. On se place dans le cas $k = 1$, $\theta = (a_1, b_1, ..., a_n, b_n)$ et $\Theta = (\mathbb{R} \times \mathbb{R}_*)^n$. Quel est le modèle statistique induit par $(a_1 + b_1 X_1, ..., a_n + b_n X_n)$? Il est d'usage d'appeller a_i le **paramètre de translation** et b_i le **paramètre d'échelle**.

Exercice 2 : Modèle de translation et d'échelle

Soit g une densité par rapport à Leb. On considère le modèle statistique

$$\left(\mathbb{R}^k, \mathcal{B}(\mathbb{R}^k), \left\{p_{n,\theta} \cdot Leb^{\otimes n} : \theta \in \Theta = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*\right\}\right)$$

où

$$p_{n,\theta}(x_1, ..., x_n) = \sigma^{-n} \prod_{k=1}^{n} g\left(\frac{x_k - \mu}{\sigma}\right), \quad \theta = (\mu, \sigma).$$

On note $(X_1, ..., X_n)$ les variables canoniques : pour tout $i \in \{1, ..., n\}$ et $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, on a $X_i(x_1, ..., x_n) = x_i$.

1. Montrer que sous $p_{n,\theta} \cdot Leb^{\otimes n}$, les statistiques $(X_1, ..., X_n)$ sont i.i.d. et identifier leur loi.

2. Soit $\theta = (\mu, \sigma) \in \Theta$. Montrer que sous $p_{n,\theta} \cdot Leb^{\otimes n}$, les variables aléatoires réelles

$$\frac{X_i - \mu}{\sigma}, \quad i \in \{1, ..., n\}$$

sont i.i.d de loi de densité g par rapport à Leb.

Supposons que g est une densité gaussienne centrée réduite. On définit les statistiques

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i, \quad K_n = \sum_{k=1}^{n} (X_k - n^{-1} S_n)^2.$$

3. Proposer un estimateur de μ puis de σ^2.

4. Déterminer le modèle statistique induit par les statistiques (S_n, K_n).