# Bitka za Ivo Džimu

*Osnove matematičkog modeliranja*

- Seminarski rad -

**Autori:**

Radovan Božić     Marija Škorić     Danilo Matić

*Profesor: Zorica Dražić*

Matematički fakultet
Beograd
maj 2023.

# Sadržaj

# 1 Uvod

Važna bitka u II svetskom ratu se odvijala na ostrvu Ivo Džima. Tamo je 21500 japanskih vojnika dočekalo iskrcavanje 54000 Amerikanaca. Stope efikasnosti dve vojske su procenjene na $\lambda_A = 0.0106$ i $\lambda_J = 0.0544$ po danu borbe za američku i japansku vojsku, respektivno. Razvijamo matematički model bitke baziran na sistemu diferencijalnih jednačina.

# 2 Model

Baziramo model na Lančesterovom zakonu bitke naoružanih vojski (Lanchester's Square Law) [1]. Označićemo sa $A$ — Amerikance, a sa $J$ — Japance.

$$\frac{dA}{dt} = -\lambda_J J \tag{1}$$

$$\frac{dJ}{dt} = -\lambda_A A \tag{2}$$

Ovaj sistem diferencijalnih jednačina možemo rešiti deljenjem ove dve jednačine, i iz toga dobijamo:

$$\frac{\frac{dA}{dt}}{\frac{dJ}{dt}} = \frac{dA}{dJ}$$

$$\frac{dA}{dJ} = \frac{\lambda_J J}{\lambda_A A}$$

$$\lambda_A A\, dA = \lambda_J J\, dJ \tag{3}$$

integralimo jednačinu (3):

$$\lambda_A \int A\, dA = \lambda_J \int J\, dJ$$

$$\lambda_A \frac{A^2}{2} + \underbrace{c\lambda_A}_{c_1} = \lambda_J \frac{J^2}{2} + \underbrace{c\lambda_J}_{c_2}$$

$$\lambda_A \frac{A^2}{2} - \lambda_J \frac{J^2}{2} = c_2 - c_1 = c \tag{4}$$

Za trenutak $t = t_0 = 0$, sledi $A(t_0) = A_0$ i $J(t_0) = J_0$. Menjamo u jednačini (4) i dobijamo:

$$\lambda_A \frac{A_0^2}{2} - \lambda_J \frac{J_0^2}{2} = c \tag{5}$$

Izjednačavamo jednačine (4) i (5):

$$\lambda_A \frac{A^2}{2} - \lambda_J \frac{J^2}{2} = \lambda_A \frac{A_0^2}{2} - \lambda_J \frac{J_0^2}{2}$$

Sređivanjem dobijamo:

$$\lambda_A A^2 - \lambda_A A_0^2 = \lambda_J J^2 - \lambda_J J_0^2 \tag{6}$$

Bitka traje dok jedna od strana ne izgubi sve vojnike. Ako uzmemo da je broj Japanca na kraju jednak nuli ($J = 0$), sređivanjem jednačine (6) se dobija da je broj Američkih vojnika na kraju bitke jednak:

$$\lambda_A A^2 - \lambda_A A_0^2 = -\lambda_J J_0^2,$$

$$\lambda_A A^2 = \lambda_A A_0^2 - \lambda_J J_0^2 \tag{7}$$

$$A^2 = A_0^2 - \frac{\lambda_J}{\lambda_A} J_0^2,$$

$$A = \sqrt{A_0^2 - \frac{\lambda_J}{\lambda_A} J_0^2} \tag{8}$$

Iz jednačine (7) sledi uslov:

$$\lambda_A A_0^2 \geq \lambda_J J_0^2. \tag{9}$$

Analogno se izvodi kad je broj Amerikanaca na kraju nula ($A = 0$):

$$J = \sqrt{J_0^2 - \frac{\lambda_A}{\lambda_J} A_0^2},$$

$$\lambda_A A_0^2 \leq \lambda_J J_0^2 \tag{10}$$

Uslove (9) i (10) mozemo da koristimo kako bi na početku videli koja je vojska snažnija [2].

Početni sistem jednačina (1) i (2) možemo rešiti i na sledeći način, difereciramo jednačinu (1) po $t$:

$$A'' = -\lambda_J J'$$

Izrazimo $J'$ preko (2):

$$A'' = -\lambda_J(-\lambda_A A) = \lambda_A \lambda_J A$$

$$A'' - \lambda_A \lambda_J A = 0$$

Dobili smo linearnu diferencijalnu jednačinu drugog reda sa konstantnim koeficijentima. Nju rešavamo metodom karakterističnih funkcija: $a^2 - \lambda_A \lambda_J = 0$, i dobijamo da je:

$$a_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda_J \lambda_A}$$

Kako su $a_1$ i $a_2$ realna i različita rešenja, onda je

$$A(t) = c_1 e^{t\sqrt{\lambda_J \lambda_A}} + c_2 e^{-t\sqrt{\lambda_J \lambda_A}} \tag{11}$$

Kada gornju jednačinu diferenciramo po $t$, dobijamo

$$A'(t) = c_1\sqrt{\lambda_J\lambda_A}e^{t\sqrt{\lambda_J\lambda_A}} - c_2\sqrt{\lambda_J\lambda_A}e^{-t\sqrt{\lambda_J\lambda_A}} \tag{12}$$

Jednačine (11) i (12) čine sistem preko koga mozemo da dobijemo koeficijente $c_1$ i $c_2$. Za $t = 0$, imamo $A(0) = A_0$ i $A'(0) = -\lambda_J J_0$, pa važi:

$$A_0 = c_1 + c_2$$

$$-\lambda_J J_0 = c_1\sqrt{\lambda_J\lambda_A} - c_2\sqrt{\lambda_J\lambda_A}$$

Pomnožimo prvu jednačinu sa $\sqrt{\lambda_J\lambda_A}$ i dodamo je drugoj kako bi dobili koef $c_1$:

$$A_0\sqrt{\lambda_J\lambda_A} - \lambda_J J_0 = 2c_1\sqrt{\lambda_J\lambda_A}$$

$$c_1 = \frac{A_0\sqrt{\lambda_J\lambda_A} - \lambda_J J_0}{2\sqrt{\lambda_J\lambda_A}}$$

Zamenom $c_1$ u prvu jednačinu dobija se $c_2$:

$$c_2 = \frac{A_0\sqrt{\lambda_J\lambda_A} + \lambda_J J_0}{2\sqrt{\lambda_J\lambda_A}}$$

Zamenom u jednačinu (11) dobijamo izvedeno $A(t)$:

$$A(t) = \frac{A_0\sqrt{\lambda_J\lambda_A} - \lambda_J J_0}{2\sqrt{\lambda_J\lambda_A}}e^{t\sqrt{\lambda_J\lambda_A}} + \frac{A_0\sqrt{\lambda_J\lambda_A} + \lambda_J J_0}{2\sqrt{\lambda_J\lambda_A}}e^{-t\sqrt{\lambda_J\lambda_A}} \tag{13}$$

Analognim izvođjenjem se dobija $J(t)$:

$$J(t) = c_1e^{t\sqrt{\lambda_J\lambda_A}} + c_2e^{-t\sqrt{\lambda_J\lambda_A}} \tag{14}$$

$$c_1 = \frac{J_0\sqrt{\lambda_J\lambda_A} - \lambda_A A_0}{2\sqrt{\lambda_J\lambda_A}},\ c_2 = \frac{J_0\sqrt{\lambda_J\lambda_A} + \lambda_A A_0}{2\sqrt{\lambda_J\lambda_A}}$$

## 2.1 Bitka do istrebljenja

**Zadatak 1:** Koliko je dugo trajala bitka do istrebljenja jednog od učesnika? Koliko je preostalo vojnika na pobedničkoj strani?

Zamenom konkretnih vrednosti u $\lambda_A A_0^2$ i u $\lambda_J J_0^2$ dobijamo da je $\lambda_A A_0^2 \geq \lambda_J J_0^2$. Odatle sledi da ce Japanci izgubiti bitku. Kako je $J(t) = 0$ mozemo da izrazimo $t$ koristeci jednačinu (14).

$$0 = c_1 e^{t\sqrt{\lambda_J \lambda_A}} + c_2 e^{-t\sqrt{\lambda_J \lambda_A}}$$

$$-c_1 e^{t\sqrt{\lambda_J \lambda_A}} = c_2 e^{-t\sqrt{\lambda_J \lambda_A}}$$

Logaritmujemo celu jednačinu i posle malo sređivanja dobijamo:

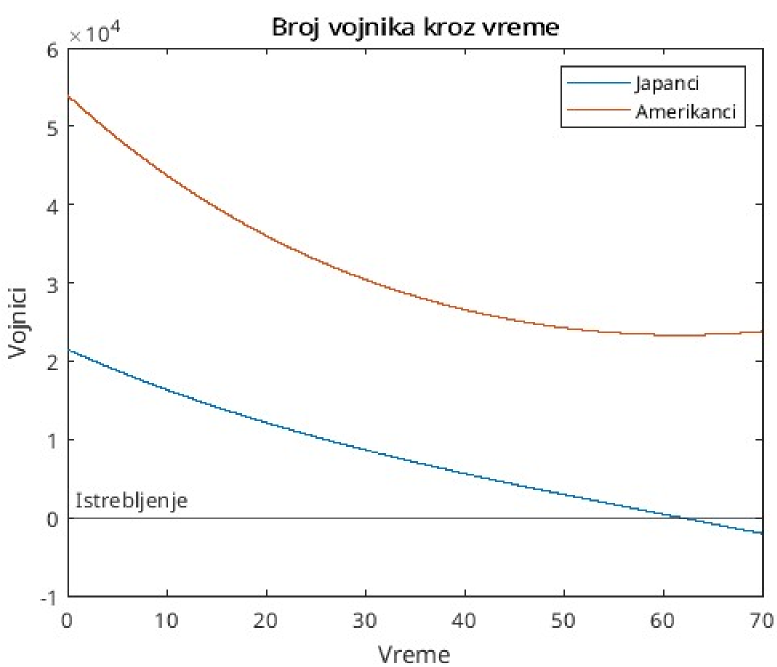
$$ln(-c_1) + t\sqrt{\lambda_J \lambda_A} = ln(c_2) - t\sqrt{\lambda_J \lambda_A}$$

$$t = \frac{ln(c_2) - ln(-c_1)}{2\sqrt{\lambda_J \lambda_A}},$$

Zamenom konkretnih vrednosti računamo koeficijente $c_1$ i $c_2$ i dobijamo da je vreme trajanja bitke $t = 61.778 \approx 62$ dana. Broj američkih vojnika mozemo da izračunamo iz jednačine (8):

$$A = \sqrt{A_0^2 - \frac{\lambda_J}{\lambda_A} J_0^2},$$

gde dobijamo da je $A = 23317.335 \approx 23317$ vojnika.



## 2.2 Pojačanje posle 30 dana

> **Zadatak 2:** Posle 30 dana, koliko pojačanje bi trebalo da stigne Japancima da ne bi izgubili bitku?

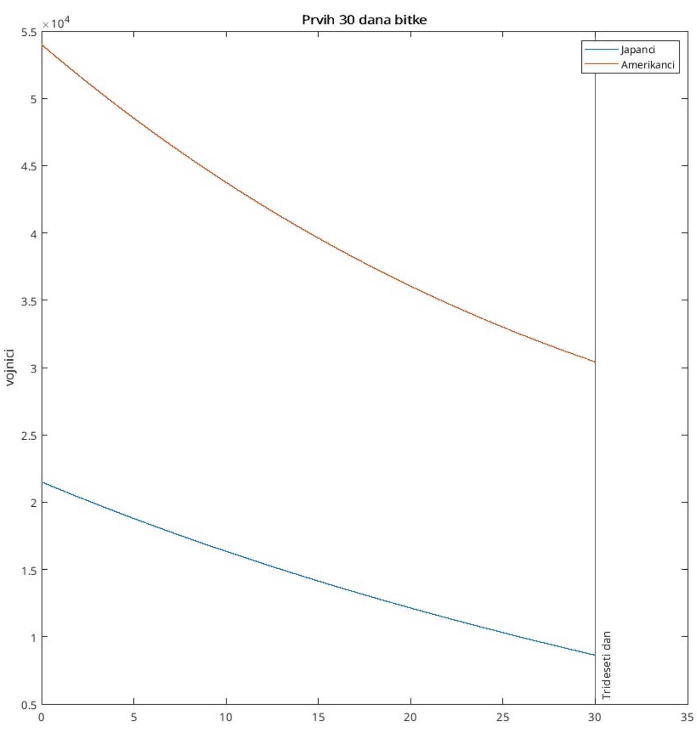
Koliko vojnika ostane posle 30 dana možemo egzaktno izračunati koristeći formule (13) i (14), ubacivanjem $t = 30$ u jednačine. Dobijamo da je $A(30) = 30426$ i $J(30) = 8628$. Preko uslova (10) možemo izračunati koliko najmanje Japanca treba da bi oni pobedeili Amerikance. Naime, kako znamo da uslov (10) važi ako su Japanci snažniji, odatle mozemo da izvučemo koliko je $J_0$.

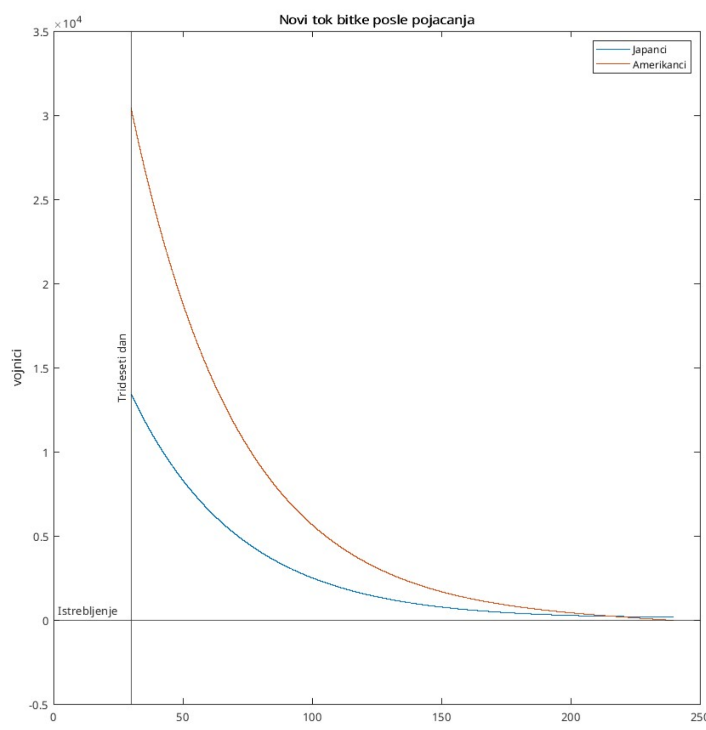
$$\lambda_A A_0^2 \leq \lambda_J J_0^2$$

$$J_0^2 \geq \frac{\lambda_A}{\lambda_J} A_0^2$$

$$J_0 \geq \sqrt{\frac{\lambda_A}{\lambda_J} A_0^2}$$

Ako je novo $A_0 = A(30)$ i novo $J_0 = J(30) + \Delta J$, zamenom novog $A_0$ u gornju formulu i zaokruživanjem na gornji ceo broj dobija se da je 13432 početni broj Japanaca za pobedu ($J_0$). Odatle možemo da izrazimo $\Delta J = J_0 - J(30) = 4804$ koje predstavlja pojačanje Japanaca.



## 2.3 Kraj bitke za 28 dana

**Zadatak 3:** Ukoliko je potrebno da se pobeda ostvari za 28 dana, koliko vojnika je neophodno da Amerikanci imaju u početku?

Pošto će Amerikanci pobediti, onda ce Japanca biti nula posle 28 dana, tačnije $J(28) = 0$. Potrebno je pronaći $A_0$ koje će biti dovoljno za to. Koristićemo jednačinu (14), gde je $t = 28$.

$$0 = \frac{J_0\sqrt{\lambda_J\lambda_A} - \lambda_A A_0}{2\sqrt{\lambda_J\lambda_A}} e^{28\sqrt{\lambda_J\lambda_A}} + \frac{J_0\sqrt{\lambda_J\lambda_A} + \lambda_A A_0}{2\sqrt{\lambda_J\lambda_A}} e^{-28\sqrt{\lambda_J\lambda_A}},$$

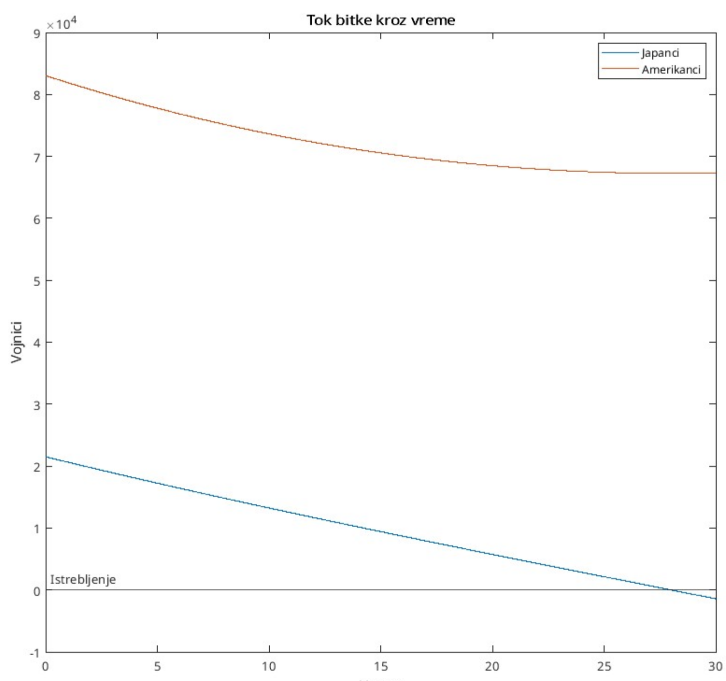
Skratimo imenioce i pomnožimo:

$$0 = J_0\sqrt{\lambda_J\lambda_A} e^{28\sqrt{\lambda_J\lambda_A}} - \lambda_A A_0 e^{28\sqrt{\lambda_J\lambda_A}} + J_0\sqrt{\lambda_J\lambda_A} e^{-28\sqrt{\lambda_J\lambda_A}} + \lambda_A A_0 e^{-28\sqrt{\lambda_J\lambda_A}}$$

$$A_0\lambda_A(e^{28\sqrt{\lambda_J\lambda_A}} - e^{-28\sqrt{\lambda_J\lambda_A}}) = J_0\sqrt{\lambda_J\lambda_A}(e^{28\sqrt{\lambda_J\lambda_A}} + e^{-28\sqrt{\lambda_J\lambda_A}})$$

$$A_0 = \frac{J_0\sqrt{\lambda_J\lambda_A}(e^{28\sqrt{\lambda_J\lambda_A}} + e^{-28\sqrt{\lambda_J\lambda_A}})}{\lambda_A(e^{28\sqrt{\lambda_J\lambda_A}} - e^{-28\sqrt{\lambda_J\lambda_A}})}$$

Zamenom konkretnih vrednosti dobije se da početni broj američkih vojnika jednak $A_0 = 83040$.



## Literatura


[1] Lanchester's square law on wikipedia

[2] Alan Washburn, "Lanchester systems", https://faculty.nps.edu/awashburn/Files/Notes/Lanchester.pdf