Bitka za Ivo Džimu - formule

6. maj 2023.

Uvod

$A_0 = 54000$, efikasnost $\lambda_A = 0.0106$
$J_0 = 21500$, efikasnost $\lambda_J = 0.0544$

$\frac{dA}{dt} = -\lambda_J * J$
$\frac{dJ}{dt} = -\lambda_A A$

Resenje moze da se dobije tako sto uklonimo t deljenjem jedacina:

$$\frac{\frac{dA}{dt}}{\frac{dJ}{dt}} = \frac{dA}{dJ}$$

$$\frac{dA}{dJ} = \frac{\lambda_J J}{\lambda_A A}$$

$$\lambda_A A\, dA = \lambda_J J\, dJ$$

integralimo jednacinu:

$$\lambda_A \int A\, dA = \lambda_J \int J\, dJ$$

$$\lambda_A \frac{A^2}{2} + \underbrace{c\lambda_A}_{c_1} = \lambda_J \frac{J^2}{2} + \underbrace{c\lambda_J}_{c_2}$$

$$\lambda_A \frac{A^2}{2} - \lambda_J \frac{J^2}{2} = c_2 - c_1 = c$$

uzmemo da je $t = t_0 = 0$, onda $A(t_0) = A_0$ i $J(t_0) = J_0$, dobijamo:

$$\lambda_A \frac{A_0^2}{2} - \lambda_J \frac{J_0^2}{2} = c$$

, spojimo ovu jednacinu i jednacinu ?? da bi dobili

$$\lambda_A \frac{A^2}{2} - \lambda_J \frac{J^2}{2} = \lambda_A \frac{A_0^2}{2} - \lambda_J \frac{J_0^2}{2}$$

kad se sredi, jednacina izgleda ovako:

$$\lambda_A A^2 - \lambda_A A_0^2 = \lambda_J J^2 - \lambda J J_0^2$$

Bitka traje dok jedna od strana ne izgubi sve vojnike. Ako je broj Japanca na kraju 0 ($J = 0$), sredjivanjem (gornje) jednacine ?? se dobija da je broj Americkih vojnika na kraju bitke jednak:

$$\lambda_A A^2 - \lambda_A A_0^2 = -\lambda_J J_0^2,$$

$$\lambda_A A^2 = \lambda_A A_0^2 - \lambda_J J_0^2$$

$$A^2 = A_0^2 - \frac{\lambda_J}{\lambda_A} J_0^2,$$

$$A = \sqrt{A_0^2 - \frac{\lambda_J}{\lambda_A} J_0^2}$$

I to vazi samo pri uslovu da je $\lambda_A A_0^2 \geq \lambda_J J_0^2$ (br. formule ??). Analogno se izvodi kad je broj Amerikanaca na kraju 0 ($A = 0$):

$$J = \sqrt{J_0^2 - \frac{\lambda_A}{\lambda_J} A_0^2}, \ \lambda_A A_0^2 \leq \lambda_J J_0^2$$

Te uslove mozemo da koristimo kako bi na pocetku videli koja je vojska snaznija.

Resenje pocetnog sistema mozemo da dobijemo i preko t, tako sto cemo jednacinu (1) diferencirati po t:

$$A'' = -\lambda_J J'$$

Izrazimo J' preko (2):

$$A'' = -\lambda_J(-\lambda_A A) = \lambda_A \lambda_J A$$

$$A'' - \lambda_A \lambda_J A = 0$$

Dobili smo linearnu diferencijabilnu jednacinu drugog reda sa konstantnim koeficijentima. Nju resavamo metodom karakteristicnih funkcija: $a^2 - \lambda_A \lambda_J = 0$, i dobijamo da je:

$$a_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda_J \lambda_A}$$

Kako su a_1 i a_2 realna i razlicita resenja, onda je

$$A(t) = c_1 e^{t\sqrt{\lambda_J \lambda_A}} + c_2 e^{-t\sqrt{\lambda_J \lambda_A}} \ broj??$$

Kada gornju jednacinu diferenciramo po t, dobijamo

$$A'(t) = c_1 \sqrt{\lambda_J \lambda_A} e^{t\sqrt{\lambda_J \lambda_A}} - c_2 \sqrt{\lambda_J \lambda_A} e^{-t\sqrt{\lambda_J \lambda_A}}$$

Jednacine ?? i ?? cine sistem preko koga mozemo da dobijemo koeficijente c_1 i c_2. Posto znamo da je $A(0) = A_0$ i $A'(0) = -\lambda_J J_0$, resavamo sistem za $t = 0$.

$$A_0 = c_1 + c_2$$

$$-\lambda_J J_0 = c_1 \sqrt{\lambda_J \lambda_A} - c_2 \sqrt{\lambda_J \lambda_A}$$

Pomnozimo prvu jednacinu sa $\sqrt{\lambda_J \lambda_A}$ i dodamo je drugoj kako bi dobili koef c_1:

$$A_0 \sqrt{\lambda_J \lambda_A} - \lambda_J J_0 = 2c_1 \sqrt{\lambda_J \lambda_A}$$

$$c_1 = \frac{A_0\sqrt{\lambda_J\lambda_A} - \lambda_J J_0}{2\sqrt{\lambda_J\lambda_A}}$$

Zamenom c_1 u prvu jednacinu dobija se c_2:

$$c_2 = \frac{A_0\sqrt{\lambda_J\lambda_A} + \lambda_J J_0}{2\sqrt{\lambda_J\lambda_A}}$$

Zamenom u jednacinu ?? dobijamo izvedeno $A(t)$:

$$A(t) = \frac{A_0\sqrt{\lambda_J\lambda_A} - \lambda_J J_0}{2\sqrt{\lambda_J\lambda_A}} e^{t\sqrt{\lambda_J\lambda_A}} + \frac{A_0\sqrt{\lambda_J\lambda_A} + \lambda_J J_0}{2\sqrt{\lambda_J\lambda_A}} e^{-t\sqrt{\lambda_J\lambda_A}}$$

Analognim izvodjenjem se dobija $J(t)$:

$$J(t) = c1e^{t\sqrt{\lambda_J\lambda_A}} + c2e^{-t\sqrt{\lambda_J\lambda_A}}$$

$$c_1 = \frac{J_0\sqrt{\lambda_J\lambda_A} - \lambda_A A_0}{2\sqrt{\lambda_J\lambda_A}},\ c_2 = \frac{J_0\sqrt{\lambda_J\lambda_A} + \lambda_A A_0}{2\sqrt{\lambda_J\lambda_A}}$$

(oznaci ove koeficijente i jednacinu)

Bitka do istrebljenja

Koliko je dugo trajala bitka do istrebljenja jednog od učesnika? Koliko je preostalo vojnika na pobedničkoj strani?

Zbog uslova ?? mozemo da zakljucimo da ce Japanci izgubiti bitku. *dodaj racun*
Kako je $J(t) = 0$ mozemo da izrazimo t koristeci jednacinu ??.

$$0 = c_1 e^{t\sqrt{\lambda_J\lambda_A}} + c_2 e^{-t\sqrt{\lambda_J\lambda_A}}$$

$$-c_1 e^{t\sqrt{\lambda_J\lambda_A}} = c_2 e^{-t\sqrt{\lambda_J\lambda_A}}$$

celu jednacinu mozemo da pomnozimo sa ln i posle malo sredjivanja se dobije:

$$ln(-c_1) + t\sqrt{\lambda_J\lambda_A} = ln(c_2) - t\sqrt{\lambda_J\lambda_A}$$

$$t = \frac{ln(c_2) - ln(-c_1)}{2\sqrt{\lambda_J\lambda_A}},$$

gde su c_1 i c_2 koeficijenti vezani za jednacinu ?? Kad se unesu konkretne vrednosti dobija se da je vreme $t = ... \approx ....$ Broj americkih vojnika mozemo da izracunamo po formuli ?? i to je ....
Dodati sliku ovde

Pojacanje posle 30 dana

Posle 30 dana, koliko pojačanje bi trebalo da stigne Japancima da ne bi izgubili bitku?

Koliko vojnika ostane posle 30 dana mozemo egzaktno izracunati koristeci formule ?? i ??, ubacivanjem $t = 30$ u jednacine. Preko uslova ?? mozemo izracunati koliko najmanje Japanca treba da bi oni pobedeili Amerikance. Naime, kako znamo da uslov ?? vazi ako su Japanci snazniji, odatle mozemo da izvucemo koliko je J_0.

$$\lambda_A A_0^2 \leq \lambda_J J_0^2$$

$$J_0^2 \geq \frac{\lambda_A}{\lambda_J} A_0^2$$

$$J_0 \geq \sqrt{\frac{\lambda_A}{\lambda_J} A_0^2}$$

Zamenom brojeva u formulu i dodatkom jedinice dobija se ... pocetni broj japanaca za pobedu (J_0). Ako je novo $A_0 = A(30)$ i novo $J_0 = J(30) + \Delta J$, odatle mozemo da izrazimo $\Delta J = J_0 - J(30) = ...$ koje predstavlja pojacanje Japanaca.
Dodati slike

Kraj bitke za 28 dana

Ukoliko je potrebno da se pobeda ostvari za 28 dana, koliko vojnika je neophodno da Amerikanci imaju u početku?

Posto ce Amerikanci pobediti, onda ce Japanca biti nula posle 28 dana, tacnije $J(28) = 0$. Potrebno je pronaci A_0 koje ce biti dovoljno za to. Koristicemo jednacinu ?? (onu J(t)), gde je $t = 28$.

$$0 = \frac{J_0\sqrt{\lambda_J\lambda_A} - \lambda_A A_0}{2\sqrt{\lambda_J\lambda_A}} e^{28\sqrt{\lambda_J\lambda_A}} + \frac{J_0\sqrt{\lambda_J\lambda_A} + \lambda_A A_0}{2\sqrt{\lambda_J\lambda_A}} e^{-28\sqrt{\lambda_J\lambda_A}},$$

Skratimo imenioce i pomnozimo:

$$0 = J_0\sqrt{\lambda_J\lambda_A} e^{28\sqrt{\lambda_J\lambda_A}} - \lambda_A A_0 e^{28\sqrt{\lambda_J\lambda_A}} + J_0\sqrt{\lambda_J\lambda_A} e^{-28\sqrt{\lambda_J\lambda_A}} - \lambda_A A_0 e^{-28\sqrt{\lambda_J\lambda_A}}$$

$$A_0\lambda_A(e^{28\sqrt{\lambda_J\lambda_A}} - e^{-28\sqrt{\lambda_J\lambda_A}}) = J_0\sqrt{\lambda_J\lambda_A}(e^{28\sqrt{\lambda_J\lambda_A}} + e^{-28\sqrt{\lambda_J\lambda_A}})$$

$$A_0 = \frac{J_0\sqrt{\lambda_J\lambda_A}(e^{28\sqrt{\lambda_J\lambda_A}} + e^{-28\sqrt{\lambda_J\lambda_A}})}{\lambda_A(e^{28\sqrt{\lambda_J\lambda_A}} - e^{-28\sqrt{\lambda_J\lambda_A}})}$$

Zamenom konkretnih vrednosti dobije se da pocetno broj americkih vojnika jednak $A_0 = ...$

dodaj sliku