Notatki z AiSD. Nr 2. 27 lutego 2019

Kopiec

IIUWr. II rok informatyki. Przygotował: Krzysztof Loryś

1 Definicja

Definicja 1 *Niech T będzie drzewem binarnym o wysokości d, którego wierzchołki zawierają klucze z liniowo uporządkowanego zbioru. Drzewo T nazywamy* kopcem *iff T spełnia następujące warunki:*

(1) *Struktura drzewa*

- *wszystkie jego liście znajdują się na głębokości d lub $d-1$;*
- *wszystkie liście z poziomu $d-1$ leżą na prawo od wszystkich wierzchołków wewnętrznych z tego poziomu;*
- *położony najbardziej na prawo wierzchołek wewnętrzny z poziomu $d-1$ jest jedynym wierzchołkiem wewnętrznym w T, który może mieć jednego syna (co implikuje, że pozostałe wierzchołki wewnętrzne mają po dwóch synów);*

(2) *Uporządkowanie*

- *klucz w każdym wierzchołku wewnętrznym jest nie mniejszy od kluczy w jego potomkach.*

Warunki określające strukturę kopca mogą się wydać nieco skomplikowane. W rzeczywistości mówią one, że dobrą strukturę mają drzewa binarne powstałe przez dopisywanie do początkowo pustego drzewa wierzchołków do kolejnych poziomów drzewa, zapełniając każdy poziom od lewej strony do prawej strony.

2 Implementacja kopców

Kopce w bardzo efektywny sposób mogą być pamiętane w tablicach. Do pamiętania kopca n-elementowego używamy n-elementowej tablicy K:

- korzeń kopca pamiętany jest w $K[1]$,
- lewy syn korzenia pamiętany jest w $K[2]$, prawy syn korzenia - w $K[3]$, itd ... .

Uogólniając: wierzchołki z poziomu k-tego pamiętane są kolejno od lewej do prawej w $K[2^k], K[2^k+1], \ldots, K[2^{k+1}-1]$.

Fakt 1 *Ojciec wierzchołka pamiętanego w $K[i]$ znajduje się w $K[i$ **div** $2]$ zaś jego dzieci (o ile istnieją) w $K[2i]$ i $K[2i+1]$.*

2.1 Ważniejsze procedury

2.1.1 Procedury przywracające tablicy K własności kopca

Zmiana klucza w wierzchołku kopca może spowodować zaburzenie własności (2). Jeśli nowy klucz jest większy od starego, należy sprawdzić, czy nie jest on większy także od klucza znajdującego się w ojcu. Jeśli tak jest, możemy zamienić miejscami te klucze i sprawdzić czy zaburzenie nie przeniosło się poziom wyżej. Jeśli nowy klucz jest mniejszy od starego, to możemy zamienić go z większym z kluczy znajdujących w jego synach, a następnie sprawdzić czy zaburzenie mnie przeniosło się na niższy poziom.

```
procedure zmień-element (K[1..n], i, u)
   x ← K[i]
   K[i] ← u
   if u < x   then przesuń-niżej (K, i)
              else przesuń-wyżej (K, i)


procedure przesuń-niżej (K[1..n], i)
   k ← i
   repeat
      j ← k
      if 2j ≤ n   and K[2j] > K[k]   then k ← 2j
      if 2j < n   and K[2j + 1] > K[k]   then k ← 2j + 1
      K[j] ↔ K[k]
   until j = k


procedure przesuń-wyżej  (K[1..n], i)
   k ← i
   repeat
      j ← k
      if j > 1  and K[j div 2] < K[k]   then k ← j div 2
      K[j] ↔ K[k]
   until j = k
```

2.1.2 Procedura budująca kopiec

Kopiec można budować na wiele sposobów. Można np. zacząć od tablicy jednoelementowej, a następnie dodawać na jej koniec po jednym elemencie, za każdym razem używając procedury *przesuń-wyżej* do przywrócenia własności (2). Ten sposób realizuje poniższa procedura.

```
procedure wolna − budowa − kopca(K[1..n])
   for i ← 2   to n  przesuń-wyżej  (K, i)
```

łatwo sprawdzić, że ta procedura może wymagać czasu $n \log n$, a więc takiego samego jak sortowanie np. metodą *quicksort*, dając jednak znacznie mniej uporządkowaną strukturę.

Inna metoda polega na budowaniu kopca od dołu. Startujemy od kopców 1-elementowych. Następnie używamy tych kopców oraz nowych elementów do utworzenia kopców 3-elementowych: nowy element umieszczamy w korzeniu takiego kopca, a jego synami czynimy korzenie kopców 1-elementowych; następnie używamy procedury *przesuń-niżej* do przywrócenia własności (2). W analogiczny sposób, dla dowolnego k, tworzymy z dwóch kopców $(2^k - 1)$-elementowych i jednego nowego elementu kopiec $(2^{k+1} - 1)$-elementowy.

```
procedure buduj − kopiec(K[1..n])
   for i ← (n div 2)   downto 1  przesuń-niżej   (K, i)
```

Twierdzenie 1 *Procedura $buduj - kopiec$ tworzy kopiec w czasie $O(n)$.*

3 Zastosowania kopców

3.1 Heapsort - sortowanie przy użyciu kopca

procedure $heapsort(K[1..n])$
  $buduj - kopiec(K)$
  for $i \leftarrow n$ **step** -1 **to** 2 **do**
    $K[1] \leftrightarrow K[i]$
    przesuń-niżej $(K[1..i-1], 1)$
  return K

Twierdzenie 2 *Algorytm heapsort działa w czasie* $O(n \log n)$.

3.1.1 Przyspieszenie *heapsortu*

Po usunięciu maksimum na szczycie kopca powstaje dziura, w którą *heapsort* wstawia element z dołu kopca. Element taki jest, z dużym prawdopodobieństwem, mały i zostanie przez procedurę *przesuń-niżej* zsunięty z powrotem nisko. Przesuwając go o jeden poziom w dół *przesuń-niżej* wykonuje dwa porównania. Tak więc z dużym prawdopodobieństwem potrzeba będzie 2·`wysokość kopca` porównań na przywrócenie własności kopca.

Można postępować nieco oszczędniej. Otóż można najpierw przesunąć dziurę na dół kopca, następnie wstawić w nią ostatni element kopca i używając procedury *przesuń-wyżej* znaleźć dla niego odpowiednie miejsce w kopcu. Oszczędność wynika z tego, że na przesunięcie dziury o jedno miejsce w dół potrzeba tylko jednego porównania oraz z tego, że w średnim przypadku *przesuń-wyżej* będzie przesuwać element o nie więcej niż 2 poziomy w górę.

3.2 Kolejka priorytetowa

Kolejka priorytetowa jest strukturą danych przeznaczoną do pamiętania zbioru S (elementów z jakiegoś uporządkowanego uniwersum) i wykonywania operacji wstawiania elementów do S oraz znajdowania i usuwania największego elementu z S.

Wprost idealnie do implementacji kolejek priorytetowych nadają się kopce.

3.2.1 Procedury realizujące operacje kolejki priorytetowej

function $find - max(K[1..n])$
  return $K[1]$

procedure $delete - max(K[1..n])$
  $K[1] \leftarrow K[n]$
  przesuń-niżej $(K[1..n-1], 1)$

procedure $insert - node(K[1..n], v)$
  $K[n+1] \leftarrow v$
  przesuń-wyżej $(K[1..n+1], n+1)$

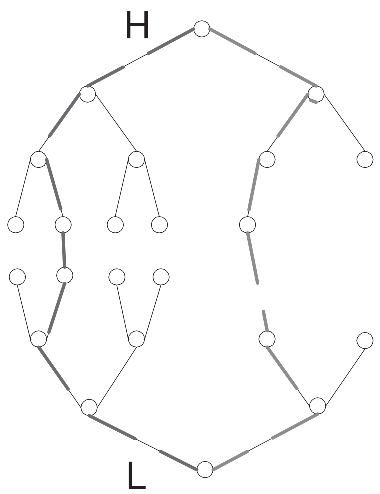
3.3 Podwójna kolejka priorytetowa

Podwójna kolejka priorytetowa umożliwia wykonywanie operacji znajdowania i usuwania zarówno maksymalnego jak i minimalnego elementu.

Prosta implementacja takiej kolejki mogłaby polegać na wykorzystaniu dwóch kopców: jeden z nich byłby uporządkowany malejąco, a drugi - rosnąco. Każdy element kolejki umieszczany byłby w obydwu kopcach. Na użytek operacji *deletemin* i *deletemax* należałoby powiązać ze sobą elementy kopców pamiętające ten sam element kolejki. Zasadniczym mankamentem takiego rozwiązania jest nieoszczędność pamięci. Poniżej przedstawiamy rozwiązanie wolne od tej wady.

Idea rozwiązania:

1. Wykorzystujemy dwa kopce: L i H.
2. W kopcu H pamiętamy $\lceil n/2 \rceil$ elementów, a w kopcu L - $\lfloor n/2 \rfloor$ elementów (n oznacza liczbę elementów kolejki).
3. Kopiec L uporządkowany jest malejąco, a H - rosnąco.
4. Na uporządkowanie z poprzedniego punktu nakładamy dodatkowy warunek. Otóż w kopcach H i L w naturalny sposób zdefiniowane są ścieżki biegnące od korzenia kopca L do korzenia kopca H (patrz Rysunek 1). Chcemy, by na każdej takiej ścieżce klucze były uporządkowane niemalejąco.



Rysunek 1: *Dwie przykładowe ścieżki łączące korzenie kopców.*

3.3.1 Implementacja operacji *insert(x)*

Jeśli kolejka zawiera parzystą liczbę elementów, x wstawiamy do kopca H. W przeciwnym razie x wstawiamy do kopca L. Wstawienia dokonujemy w zwykły sposób, tj. wstawiając element do pierwszego wolnego liścia. Teraz jednak, zanim użyjemy procedury *przesuń-wyżej*, musimy sprawdzić, w którą stronę należy przesunąć wstawiony element: czy w stronę korzenia kopca H, czy też w stronę korzenia kopca L. Załóżmy, że x został wstawiony do H (przypadek wstawienia do L jest symetryczny) . Niech y będzie poprzednikiem x-a ze ścieżki prowadzącej do korzenia L (oczywiście y jest liściem kopca L). Porównujemy x i y. Jeśli $x < y$, przestawiamy te elementy a następnie procedurą *przesuń-wyżej* przesuwamy x w odpowiednie miejsce w kierunku korzenia L. Zauważmy, że przesunięcie y-ka z kopca L do H nie zaburzyło porządku w tym kopcu. Jeśli $x \geq y$, używamy procedury *przesuń-wyżej* do ewentualnego naprawienia porządku w kopcu H.

3.3.2 Implementacja operacji *deletemin*

Usuwamy element z korzenia kopca L. W jego miejsce wstawiamy y - ostatni element kopca L (jeśli przed operacją kopce L i H były równoliczne) albo ostatni element kopca H (jeśli przed operacją L

zawierał o jeden element mniej niż H). Następnie procedurą *przesuń-niżej* przywracamy porządek w kopcu L. Jeśli procedura *przesuń-niżej* przesunęła y na sam dół kopca L, wówczas porównujemy y z odpowiednim (znajdującym się na tej samej pozycji) elementem kopca H. Jeśli y jest od niego większy, zamieniamy te elementy miejscami, a następnie procedurą *przesuń-wyżej* przesuwamy y na odpowiednie miejsce kopca H.

3.3.3 Implementacja operacji *deletemax*

Analogicznie do operacji *deletemin*.

3.3.4 Uwagi końcowe

W literaturze można znaleźć wiele implementacji kolejek podwójnych opartych na strukturze kopców. Implementacja podana przez nas oparta jest na symetrycznych kopcach minimaksowych przedstawionych w [1]. Inne metody można znaleźć np. w [2], [3] i [4].

Literatura

[1] A. Arvind, C. Pandu Rangan, Symmetric Min-Max heap: A simpler data structure for double-ended priority queue, *Inform. Process. Lett.*, 69(1999), 197-199.

[2] M.D. Atkinson, J.-R. Sack, T. Strothotte, Min-Max heaps and generalized priority queues, *Comm.ACM*, 29(1986), 996-1000.

[3] S. Carlsson, The Deap - a double-ended heap to implement double-ended priority queues, *Inform. Process. Lett.*, 26(1987), 33-36.

[4] S.C. Chang, M.W. Du, Diamond deque: A simple data structure for priority deques, *Inform. Process. Lett.*, 46(1993), 231-237.