Komentarz do 1. wykładu **27. lutego 2020**

Przestrzeń probabilistyczna

Niech $\Omega \neq \emptyset$. Zbiór Ω nazywamy przestrzenią zdarzeń elementarnych. Intuicyjnie jest to zbiór możliwych wyników.

Drugim elementem konstrukcji jest rodzina zbiorów $\mathcal{F} \subset 2^\Omega$. Elementy tej rodziny nazywamy zdarzeniami. Rodzina zdarzeń spełnia następujące warunki:

1. $\Omega \in \mathcal{F}$,
2. $A \in \mathcal{F} \Longrightarrow A^C = (\Omega \setminus A) \in \mathcal{F}$,
3. $A_i \in \mathcal{F},\ (i = 1, 2, \ldots) \Longrightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

Rodzinę zbiorów spełniającą powyższe warunki nazywamy σ-ciałem zbiorów (zdarzeń). W skrócie: zbiór Ω jest zdarzeniem, dopełnienie zdarzenia jest zdarzeniem, suma skończonej lub przeliczalnej rodziny zdarzeń jest zdarzeniem. Chodzi o to, aby elementarne operacje mnogościowe na zdarzeniach nie dawały w wyniku nie-zdarzeń.

Ostatnim elementem jest funkcja $P : \mathcal{F} \to [0, 1]$ nazywana prawdopodobieństwem lub gęstością taka, że

1. $P(\Omega) = 1$.
2. Jeżeli $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$ oraz $A_i \cap A_j = \emptyset$ dla $i \neq j$, to $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.

Definicja 1. *Przestrzenią probabilistyczną nazywamy obiekt $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, gdzie Ω jest przestrzenią zdarzeń elementarnych, $\mathcal{F}$ – σ-ciałem zdarzeń, natomiast P jest prawdopodobieństwem.*

Zmienna losowa

Rozważamy zbiory otwarte na prostej rzeczywistej. Przez operację elementarną rozumiemy sumę, przekrój i dopełnienie mnogościowe.

Definicja 2. *σ-ciałem borelowskim $\mathcal{B}$ nazywamy klasę zbiorów otrzymanych ze zbiorów otwartych za pomocą przeliczalnej liczby operacji elementarnych. Jeżeli $B \in \mathcal{B}$ to mówimy, że zbiór B jest zbiorem borelowskim.*

Definicja 3. *Niech będzie dana funkcja $X : \Omega \to \mathbb{R}$. X nazywamy* zmienną losową *jedynie wtedy gdy $\forall\, B \in \mathcal{B}\ \ X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$.*

$X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}$. Słownie: przeciwobraz zbioru borelowskiego jest zdarzeniem.

Ciągłe i dyskretne zmienne losowe

Dyskretną zmienną losową nazywamy ciąg wartości (skończony lub przeliczalny) $\{x_i\}$ oraz ciąg prawdopodobieństw $\{p_i\}$. Ten drugi powinien spełniać warunki: $p_i \geqslant 0$ oraz $\sum_{i \in I} p_i = 1$. σ-ciałem zdarzeń jest najczęściej 2^I.

Przykłady:

1. Rzut kostką. Tutaj $\Omega = \{1, 2, \ldots, 6\}$, $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$ oraz $p_i = 1/6$, dla $i = 1, 2, \ldots, 6$.

2. Rzut kostką z rozróżnieniem parzyste-nieparzyste. Teraz $\Omega = \{1, 2, \ldots, 6\}$, rodziną zdarzeń jest $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1, 3, 5\}, \{2, 4, 6\}, \Omega\}$, $p_1 = P(\{1, 3, 5\}) = 1/2$, $p_1 = P(\{2, 4, 6\}) = 1/2$.

3. Schemat Bernoulliego. Przeprowadzamy n prób, ppb[a] sukcesu w każdej próbie jest liczba p taka, że $0 < p < 1$. O próbach zakładamy, że są niezależne. Na razie nie wprowadzamy formalnej definicji niezależności, zakładamy, że każda z prób jest przeprowadzana w tych samych warunkach, bez znajomości poprzednich wyników. Innymi słowy: wraz z kolejną próbą świat rozpoczyna się od nowa.

Wartością zmiennej losowej X jest liczba sukcesów w n próbach. Stąd $\Omega = \{0, 1, \ldots, n\}$, $p_k = P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$. Zwrot: zmienna losowa X podlega rozkładowi Bernoulliego z parametrami n, p, zapisujemy krótko: $X \sim B(n, p)$.

4. Rozkład Poissona. Zliczanie zdarzeń w ustalonej jednostce czasu. Parametr rozkładu to rzeczywista, dodatnia liczba λ. $\Omega = \{0, 1, 2, \ldots\}$, $p_k = P(X = k) = \mathrm{e}^{-\lambda} \dfrac{\lambda^k}{k!}$. Oznaczenie: $X \sim \mathrm{Poisson}(\lambda)$.

[a] skrót ppb oznaczać będzie: *Nominativus, Genetivus, Dativus, Accusativus, Locativus, Instrumentalis* lub *Vocativus* od rzeczownika prawdopodobieństwo (*singularis*) lub rzeczownika prawdopodobieństwa (*pluralis*).

Witold Karczewski