El TEOREMA DE FUBINI

Curso 2019-2020

Imagen: www.universoformulas.com

Un ejemplo de función no integrable

Denominamos **función de Dirichlet de parámetros α, β en $\mathbb{R}^n$** a $d_{\alpha,\beta} \colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$d_{\alpha,\beta}(x) = \begin{cases} \alpha, & \text{si } x \in \mathbb{Q}^n, \\ \beta, & \text{si } x \notin \mathbb{Q}^n. \end{cases}$$

Un ejemplo de función no integrable

Denominamos **función de Dirichlet de parámetros α, β en $\mathbb{R}^n$** a $d_{\alpha,\beta} \colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$d_{\alpha,\beta}(x) = \begin{cases} \alpha, & \text{si } x \in \mathbb{Q}^n, \\ \beta, & \text{si } x \notin \mathbb{Q}^n. \end{cases}$$

- Si R es <u>no degenerado</u>, identificaremos $d_{\alpha,\beta}$ con su restricción a R.

Un ejemplo de función no integrable

Denominamos **función de Dirichlet de parámetros α, β en $\mathbb{R}^n$** a $d_{\alpha,\beta}\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$d_{\alpha,\beta}(x) = \begin{cases} \alpha, & \text{si } x \in \mathbb{Q}^n, \\ \beta, & \text{si } x \notin \mathbb{Q}^n. \end{cases}$$

- Si R es no degenerado, identificaremos $d_{\alpha,\beta}$ con su restricción a R.
- Si R es no degenerado, $d_{\alpha,\beta}$ es integrable Riemann en el rectángulo R sii $\alpha = \beta$, en cuyo caso es una función constante

Un ejemplo de función no integrable

Denominamos **función de Dirichlet de parámetros α, β en $\mathbb{R}^n$** a $d_{\alpha,\beta}\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$d_{\alpha,\beta}(x) = \begin{cases} \alpha, & \text{si } x \in \mathbb{Q}^n, \\ \beta, & \text{si } x \notin \mathbb{Q}^n. \end{cases}$$

- Si R es no degenerado, identificaremos $d_{\alpha,\beta}$ con su restricción a R.
- Si R es no degenerado, $d_{\alpha,\beta}$ es integrable Riemann en el rectángulo R sii $\alpha = \beta$, en cuyo caso es una función constante
- $d_{\alpha,\beta} = \alpha d + \beta(1-d) = \beta + (\alpha-\beta)d$, donde $d = d_{1,0}$

Un ejemplo de función no integrable

Denominamos **función de Dirichlet de parámetros α, β en $\mathbb{R}^n$** a $d_{\alpha,\beta} \colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$d_{\alpha,\beta}(x) = \begin{cases} \alpha, & \text{si } x \in \mathbb{Q}^n, \\ \beta, & \text{si } x \notin \mathbb{Q}^n. \end{cases}$$

- Si R es no degenerado, identificaremos $d_{\alpha,\beta}$ con su restricción a R.
- Si R es no degenerado, $d_{\alpha,\beta}$ es integrable Riemann en el rectángulo R sii $\alpha = \beta$, en cuyo caso es una función constante
- $d_{\alpha,\beta} = \alpha d + \beta(1-d) = \beta + (\alpha-\beta)d$, donde $d = d_{1,0}$
- $d_{1,-1} \notin \mathscr{R}(R)$, pero $|d_{1,-1}| = d_{1,-1}^2 \in \mathscr{R}(R)$.

Un ejemplo de función no integrable

Denominamos **función de Dirichlet de parámetros α, β en $\mathbb{R}^n$** a $d_{\alpha,\beta}\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$d_{\alpha,\beta}(x) = \begin{cases} \alpha, & \text{si } x \in \mathbb{Q}^n, \\ \beta, & \text{si } x \notin \mathbb{Q}^n. \end{cases}$$

- Si R es no degenerado, identificaremos $d_{\alpha,\beta}$ con su restricción a R.
- Si R es no degenerado, $d_{\alpha,\beta}$ es integrable Riemann en el rectángulo R sii $\alpha = \beta$, en cuyo caso es una función constante
- $d_{\alpha,\beta} = \alpha d + \beta(1-d) = \beta + (\alpha - \beta)d$, donde $d = d_{1,0}$
- $d_{1,-1} \notin \mathscr{R}(R)$, pero $|d_{1,-1}| = d_{1,-1}^2 \in \mathscr{R}(R)$.

• Cuestión 3: Demostrar que $d(x) = \lim\limits_{m\to\infty} \lim\limits_{n\to\infty} \cos^{2n}(m!\,\pi\, x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Integrales Iteradas

Si $f(x,y) = x + y^2$, calcular $\displaystyle\int_R f$ donde

$$R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1,\ |y| \leq 2\right\}$$

Integrales Iteradas

Sean $R = [a,b] \times [c,d]$ y $f \in \mathscr{R}([a,b] \times [c,d])$

Integrales Iteradas

Sean $R = [a,b] \times [c,d]$ y $f \in \mathscr{R}([a,b] \times [c,d])$

- Para cada $x \in [a,b]$, $y \in [c,d]$, $f_x \colon [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f_y \colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f_x(y) = f^y(x) = f(x,y)$$

Integrales Iteradas

$$\boxed{\text{Sean } R = [a,b]\times[c,d] \text{ y } f \in \mathscr{R}([a,b]\times[c,d])}$$

- Para cada $x \in [a,b]$, $y \in [c,d]$, $f_x\colon [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f_y\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\boxed{f_x(y) = f^y(x) = f(x,y)}$$

1. Si $x \in [a,b]$ ¿ $f_x \in \mathscr{R}([c,d])$? Si $y \in [c,d]$ ¿ $f^y \in \mathscr{R}([a,b])$?

Integrales Iteradas

Sean $R = [a,b] \times [c,d]$ y $f \in \mathscr{R}([a,b] \times [c,d])$

- Para cada $x \in [a,b]$, $y \in [c,d]$, $f_x \colon [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f_y \colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\boxed{f_x(y) = f^y(x) = f(x,y)}$$

1. Si $x \in [a,b]$ ¿ $f_x \in \mathscr{R}([c,d])$? Si $y \in [c,d]$ ¿ $f^y \in \mathscr{R}([a,b])$?
2. Si $F(x) = \displaystyle\int_c^d f_x = \int_c^d f(x,y)dy$, ¿es cierto que $F \in \mathscr{R}([a,b])$?

Integrales Iteradas

Sean $R = [a,b] \times [c,d]$ y $f \in \mathscr{R}([a,b] \times [c,d])$

- Para cada $x \in [a,b]$, $y \in [c,d]$, $f_x \colon [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f_y \colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\boxed{f_x(y) = f^y(x) = f(x,y)}$$

1. Si $x \in [a,b]$ ¿ $f_x \in \mathscr{R}([c,d])$? Si $y \in [c,d]$ ¿ $f^y \in \mathscr{R}([a,b])$?
2. Si $F(x) = \int_c^d f_x = \int_c^d f(x,y)dy$, ¿es cierto que $F \in \mathscr{R}([a,b])$?
3. Si $G(y) = \int_a^b f^y = \int_a^b f(x,y)dx$, ¿es cierto que $G \in \mathscr{R}([c,d])$?

Integrales Iteradas

$$\boxed{\text{Sean } R=[a,b]\times[c,d] \text{ y } f\in\mathscr{R}([a,b]\times[c,d])}$$

- Para cada $x\in[a,b]$, $y\in[c,d]$, $f_x\colon[c,d]\longrightarrow\mathbb{R}$, $f_y\colon[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$

$$\boxed{f_x(y)=f^y(x)=f(x,y)}$$

1. Si $x\in[a,b]$ ¿ $f_x\in\mathscr{R}([c,d])$? Si $y\in[c,d]$ ¿ $f^y\in\mathscr{R}([a,b])$?
2. Si $F(x)=\displaystyle\int_c^d f_x=\int_c^d f(x,y)dy$, ¿es cierto que $F\in\mathscr{R}([a,b])$?
3. Si $G(y)=\displaystyle\int_a^b f^y=\int_a^b f(x,y)dx$, ¿es cierto que $G\in\mathscr{R}([c,d])$?
4. ¿ $\displaystyle\int_c^d\left[\int_a^b f(x,y)dx\right]dy=\int_a^b\int_c^d f(x,y)dydx=\int_a^b\left[\int_c^d f(x,y)dy\right]dx$?

Integrales Iteradas

$$\boxed{\text{Sean } R = [a,b]\times[c,d] \text{ y } f \in \mathscr{R}([a,b]\times[c,d])}$$

- Para cada $x \in [a,b]$, $y \in [c,d]$, $f_x\colon [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f_y\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\boxed{f_x(y) = f^y(x) = f(x,y)}$$

- Ejemplo: Sea $f\colon [0,1]\times[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \neq \frac{1}{2} \\ 1, & \text{si } x = \frac{1}{2},\ y \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{si } x = \frac{1}{2},\ y \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

$$\boxed{\text{Sean } R = [a,b] \times [c,d] \text{ y } f \in \mathscr{R}([a,b] \times [c,d])}$$

- Para cada $x \in [a,b]$, $y \in [c,d]$, $f_x \colon [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f_y \colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\boxed{f_x(y) = f^y(x) = f(x,y)}$$

- Ejemplo: Sea $f \colon [0,1] \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \neq \frac{1}{2} \\ 1, & \text{si } x = \frac{1}{2},\ y \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{si } x = \frac{1}{2},\ y \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

- $f \in \mathscr{R}([0,1] \times [0,1])$ e $\displaystyle\int_0^1 \int_0^1 f = 1$.

Integrales Iteradas

$$\boxed{\text{Sean } R = [a,b]\times[c,d] \text{ y } f \in \mathscr{R}([a,b]\times[c,d])}$$

- Para cada $x \in [a,b]$, $y \in [c,d]$, $f_x\colon [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f_y\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\boxed{f_x(y) = f^y(x) = f(x,y)}$$

- Ejemplo: Sea $f\colon [0,1]\times[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \neq \frac{1}{2} \\ 1, & \text{si } x = \frac{1}{2},\ y \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{si } x = \frac{1}{2},\ y \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

- $f \in \mathscr{R}([0,1]\times[0,1])$ e $\displaystyle\int_0^1\int_0^1 f = 1$.
- $f_{\frac{1}{2}} \notin \mathscr{R}([0,1])$

Integrales Iteradas

Sean $R = [a,b] \times [c,d]$ y $f \in \mathscr{R}([a,b] \times [c,d])$

- Para cada $x \in [a,b]$, $y \in [c,d]$, $f_x \colon [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f_y \colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\boxed{f_x(y) = f^y(x) = f(x,y)}$$

- Ejemplo: Sea $f \colon [0,1] \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \neq \frac{1}{2} \\ 1, & \text{si } x = \frac{1}{2},\ y \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{si } x = \frac{1}{2},\ y \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

- $f \in \mathscr{R}([0,1] \times [0,1])$ e $\displaystyle\int_0^1 \int_0^1 f = 1$.
- $f_{\frac{1}{2}} \notin \mathscr{R}([0,1])$, $f_x = 1$ si $x \neq \frac{1}{2} \Longrightarrow F(x) = \displaystyle\int_0^1 f_x = 1$

Integrales Iteradas

$$\boxed{\text{Sean } R = [a,b]\times[c,d] \text{ y } f \in \mathscr{R}([a,b]\times[c,d])}$$

- Para cada $x \in [a,b]$, $y \in [c,d]$, $f_x\colon [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f_y\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\boxed{f_x(y) = f^y(x) = f(x,y)}$$

- Ejemplo: Sea $g\colon [0,1]\times[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$g(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{si } (x,y) \notin \mathbb{Q}\times\mathbb{Q} \text{ ó } x = 0 \\ 1 - \frac{1}{q}, & \text{si } x = \frac{p}{q}, \text{ irreducible e } y \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

$$\boxed{\text{Sean } R = [a,b] \times [c,d] \text{ y } f \in \mathscr{R}([a,b] \times [c,d])}$$

- Para cada $x \in [a,b]$, $y \in [c,d]$, $f_x \colon [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f_y \colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\boxed{f_x(y) = f^y(x) = f(x,y)}$$

- Ejemplo: Sea $g \colon [0,1] \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$g(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{si } (x,y) \notin \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \text{ ó } x = 0 \\ 1 - \frac{1}{q}, & \text{si } x = \frac{p}{q}, \text{ irreducible e } y \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

- $g \in \mathscr{R}([0,1] \times [0,1])$ e $\displaystyle\int_0^1 \int_0^1 g = 1$.

Integrales Iteradas

Sean $R = [a,b]\times[c,d]$ y $f \in \mathscr{R}([a,b]\times[c,d])$

- Para cada $x \in [a,b]$, $y \in [c,d]$, $f_x\colon [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f_y\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\boxed{f_x(y) = f^y(x) = f(x,y)}$$

- Ejemplo: Sea $g\colon [0,1]\times[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$g(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{si } (x,y) \notin \mathbb{Q}\times\mathbb{Q} \text{ ó } x = 0 \\ 1-\frac{1}{q}, & \text{si } x = \frac{p}{q}, \text{ irreducible e } y \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

- $g \in \mathscr{R}([0,1]\times[0,1])$ e $\displaystyle\int_0^1\int_0^1 g = 1$.
- Si $x \notin \mathbb{Q}$ ó $x = 0$, $f_x = 1 \in \mathscr{R}([0,1])$

Integrales Iteradas

$$\boxed{\text{Sean } R = [a,b] \times [c,d] \text{ y } f \in \mathscr{R}([a,b] \times [c,d])}$$

- Para cada $x \in [a,b]$, $y \in [c,d]$, $f_x \colon [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f_y \colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\boxed{f_x(y) = f^y(x) = f(x,y)}$$

- **Ejemplo:** Sea $g \colon [0,1] \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$g(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{si } (x,y) \notin \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \text{ ó } x = 0 \\ 1 - \frac{1}{q}, & \text{si } x = \frac{p}{q}, \text{ irreducible e } y \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

- $g \in \mathscr{R}([0,1] \times [0,1])$ e $\displaystyle\int_0^1 \int_0^1 g = 1$.
- Si $x \notin \mathbb{Q}$ ó $x = 0$, $f_x = 1 \in \mathscr{R}([0,1])$
- Si $x \neq 0$ y $x = \frac{p}{q}$, $f_x = 1 - \frac{1}{q}\, d$, con d la función de Dirichlet

Integrales Iteradas

Sean $R \subset \mathbb{R}^k$, $\widehat{R} \subset \mathbb{R}^m$ rectángulos y consideremos $f\colon R \times \widehat{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

Para $x \in R$ e $y \in \widehat{R}$ se definen $f_x\colon \widehat{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $f^y\colon R \longrightarrow \mathbb{R}$ como

$$f_x(y) = f^y(x) = f(x, y).$$

Integrales Iteradas

Sean $R \subset \mathbb{R}^k$, $\widehat{R} \subset \mathbb{R}^m$ rectángulos y consideremos $f\colon R \times \widehat{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.
Para $x \in R$ e $y \in \widehat{R}$ se definen $f_x\colon \widehat{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $f^y\colon R \longrightarrow \mathbb{R}$ como

$$f_x(y) = f^y(x) = f(x, y).$$

Teorema de Fubini

Supongamos que $f \in \mathscr{R}(R \times \widehat{R})$ y consideremos $\Phi\colon R \longrightarrow \mathbb{R}$ y $\Psi\colon \widehat{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que para cada $x \in R$ y cada $y \in \widehat{R}$

$$\underline{\int_{\widehat{R}}} f_x \le \Phi(x) \le \overline{\int_{\widehat{R}}} f_x \quad \text{e} \quad \underline{\int_{R}} f^y \le \Psi(y) \le \overline{\int_{R}} f^y.$$

Entonces $\Phi \in \mathscr{R}(R)$, $\Psi \in \mathscr{R}(\widehat{R})$ y se satisface que

$$\int_R \Phi = \int_{R \times \widehat{R}} f = \int_{\widehat{R}} \Psi.$$

Teorema de Fubini

Supongamos que $f \in \mathscr{R}(R \times \widehat{R})$ y consideremos $\Phi\colon R \longrightarrow \mathbb{R}$ y $\Psi\colon \widehat{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que para cada $x \in R$ y cada $y \in \widehat{R}$

$$\underline{\int_{\widehat{R}}} f_x \le \Phi(x) \le \overline{\int_{\widehat{R}}} f_x \quad \text{e} \quad \underline{\int_{R}} f^y \le \Psi(y) \le \overline{\int_{R}} f^y.$$

Entonces $\Phi \in \mathscr{R}(R)$, $\Psi \in \mathscr{R}(\widehat{R})$ y se satisface que

$$\int_R \Phi = \int_{R\times\widehat{R}} f = \int_{\widehat{R}} \Psi.$$

- Si $f_x \in \mathscr{R}(\widehat{R})$ para todo $x \in R$

$$\int_{R\times\widehat{R}} f = \int_R \left[\int_{\widehat{R}} f(x,y)dy\right] dx$$

Teorema de Fubini

Supongamos que $f \in \mathscr{R}(R \times \widehat{R})$ y consideremos $\Phi\colon R \longrightarrow \mathbb{R}$ y $\Psi\colon \widehat{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que para cada $x \in R$ y cada $y \in \widehat{R}$

$$\underline{\int_{\widehat{R}}} f_x \leq \Phi(x) \leq \overline{\int_{\widehat{R}}} f_x \quad \text{e} \quad \underline{\int_{R}} f^y \leq \Psi(y) \leq \overline{\int_{R}} f^y.$$

Entonces $\Phi \in \mathscr{R}(R)$, $\Psi \in \mathscr{R}(\widehat{R})$ y se satisface que

$$\int_R \Phi = \int_{R\times\widehat{R}} f = \int_{\widehat{R}} \Psi.$$

- Si $f^y \in \mathscr{R}(R)$ para todo $y \in \widehat{R}$

$$\int_{R\times\widehat{R}} f = \int_{\widehat{R}} \left[\int_R f(x,y)dx \right] dy$$

Teorema de Fubini

Supongamos que $f \in \mathscr{R}(R \times \widehat{R})$ y consideremos $\Phi\colon R \longrightarrow \mathbb{R}$ y $\Psi\colon \widehat{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que para cada $x \in R$ y cada $y \in \widehat{R}$

$$\underline{\int_{\widehat{R}}} f_x \le \Phi(x) \le \overline{\int_{\widehat{R}}} f_x \quad \text{e} \quad \underline{\int_{R}} f^y \le \Psi(y) \le \overline{\int_{R}} f^y.$$

Entonces $\Phi \in \mathscr{R}(R)$, $\Psi \in \mathscr{R}(\widehat{R})$ y se satisface que

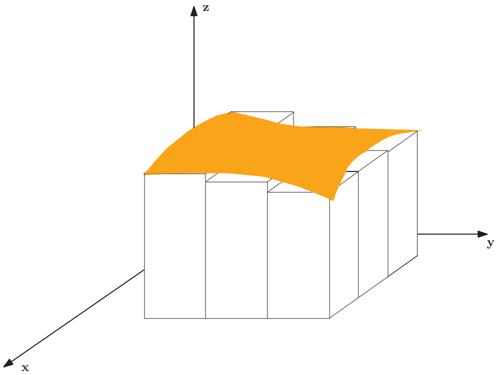
$$\int_R \Phi = \int_{R\times\widehat{R}} f = \int_{\widehat{R}} \Psi.$$

- $f_x \in \mathscr{R}(\widehat{R})$ $\underline{\text{para todo } x \in R}$ y $f^y \in \mathscr{R}(R)$ $\underline{\text{para todo } y \in \widehat{R}}$

$$\int_R \left[\int_{\widehat{R}} f(x,y)dy\right]dx = \int_{R\times\widehat{R}} f(x,y)dxdy = \int_{\widehat{R}} \left[\int_R f(x,y)dx\right]dy$$

Integrales Iteradas

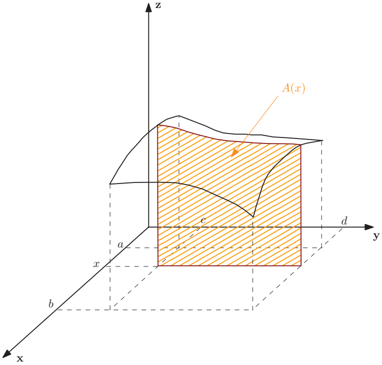
Si $f \geq 0$, queremos hallar $\displaystyle\int_a^b \int_c^d f$, el volumen del sólido limitado por f



Integrales Iteradas

Si $f \geq 0$, queremos hallar $\displaystyle\int_a^b \int_c^d f$, el volumen del sólido limitado por f

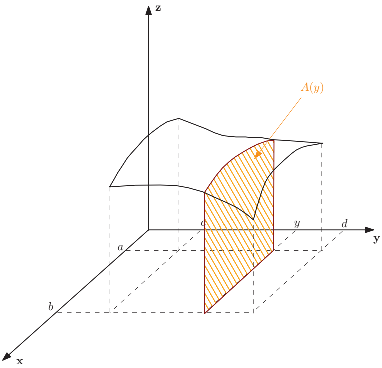
- Fijada x, tenemos una región plana cuya área es $A(x) = \displaystyle\int_c^d f(x,y)\,dy$



Integrales Iteradas

Si $f \geq 0$, queremos hallar $\int_a^b \int_c^d f$, el volumen del sólido limitado por f

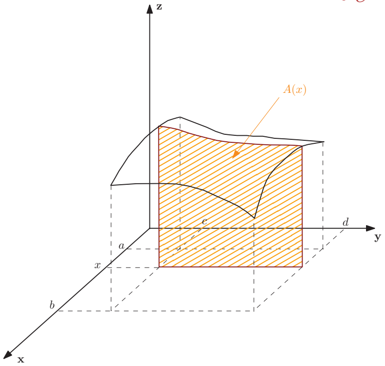
- Fijada y, tenemos una región plana cuya área es $A(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$

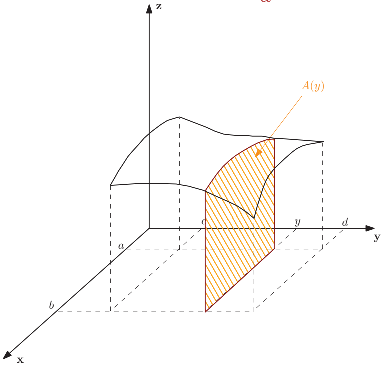


Integrales Iteradas

Si $f \geq 0$, queremos hallar $\displaystyle\int_a^b \int_c^d f$, el volumen del sólido limitado por f

- Fijadas x, y, tenemos $A(x) = \displaystyle\int_c^d f(x,y)\,dy$ y $A(y) = \displaystyle\int_a^b f(x,y)\,dx$





Integrales Iteradas

Sean $R \subset \mathbb{R}^k$, $\widehat{R} \subset \mathbb{R}^m$ rectángulos y consideremos $f\colon R \times \widehat{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

Para $x \in R$ e $y \in \widehat{R}$ se definen $f_x\colon \widehat{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $f^y\colon R \longrightarrow \mathbb{R}$ como

$$f_x(y) = f^y(x) = f(x, y).$$

Integrales Iteradas

Sean $R \subset \mathbb{R}^k$, $\widehat{R} \subset \mathbb{R}^m$ rectángulos y consideremos $f\colon R \times \widehat{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

Para $x \in R$ e $y \in \widehat{R}$ se definen $f_x\colon \widehat{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $f^y\colon R \longrightarrow \mathbb{R}$ como

$$f_x(y) = f^y(x) = f(x,y).$$

Teorema de Fubini para funciones continuas

Supongamos que $f \in \mathscr{C}(R \times \widehat{R})$. Entonces,

$$\int_R \left[\int_{\widehat{R}} f(x,y)dy\right]dx = \int_{R\times\widehat{R}} f(x,y)dxdy = \int_{\widehat{R}} \left[\int_R f(x,y)dx\right]dy.$$

Teorema de Fubini para funciones continuas

Supongamos que $f \in \mathscr{C}(R \times \widehat{R})$. Entonces,

$$\int_R \left[\int_{\widehat{R}} f(x,y)dy \right] dx = \int_{R\times\widehat{R}} f(x,y)dxdy = \int_{\widehat{R}} \left[\int_R f(x,y)dx \right] dy.$$

- $f_x \in \mathscr{C}(\widehat{R}) \subset \mathscr{R}(\widehat{R})$ para todo $x \in R$

$$\int_{R\times\widehat{R}} f = \int_R \left[\int_{\widehat{R}} f(x,y)dy \right] dx$$

Teorema de Fubini para funciones continuas

Supongamos que $f \in \mathscr{C}(R \times \widehat{R})$. Entonces,

$$\int_R \left[\int_{\widehat{R}} f(x,y)dy \right] dx = \int_{R\times\widehat{R}} f(x,y)dxdy = \int_{\widehat{R}} \left[\int_R f(x,y)dx \right] dy.$$

- $f^y \in \mathscr{C}(R) \subset \mathscr{R}(R)$ para todo $y \in \widehat{R}$

$$\int_{R\times\widehat{R}} f = \int_{\widehat{R}} \left[\int_R f(x,y)dx \right] dy$$

Teorema de Fubini para funciones continuas

Supongamos que $f \in \mathscr{C}(R \times \widehat{R})$. Entonces,

$$\int_R \left[\int_{\widehat{R}} f(x,y)dy \right] dx = \int_{R \times \widehat{R}} f(x,y)dxdy = \int_{\widehat{R}} \left[\int_R f(x,y)dx \right] dy.$$

- $f_x \in \mathscr{C}(\widehat{R})$ para todo $x \in R$ y $f^y \in \mathscr{C}(R)$ para todo $y \in \widehat{R}$

$$\int_R \left[\int_{\widehat{R}} f(x,y)dy \right] dx = \int_{R \times \widehat{R}} f(x,y)dxdy = \int_{\widehat{R}} \left[\int_R f(x,y)dx \right] dy$$

Integrales Iteradas

Teorema de Fubini para funciones continuas

Si $R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ y $f \colon R \longrightarrow \mathbb{R}$ es <u>continua</u>, entonces

$$\int_R f = \int_{a_1}^{b_1} \left[\cdots \left[\int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \ldots, x_n) dx_n \right] \cdots \right] dx_1.$$

Además, para cada permutación de $\{1, \ldots, n\}$, σ, se tiene que

$$\int_R f = \int_{a_{\sigma(1)}}^{b_{\sigma(1)}} \left[\cdots \left[\int_{a_{\sigma(n)}}^{b_{\sigma(n)}} f(x_1, \ldots, x_n) dx_{\sigma(n)} \right] \cdots \right] dx_{\sigma(1)}.$$

Teorema de Fubini para funciones continuas

Si $R = [a,b] \times [c,d]$ y $f\colon R \longrightarrow \mathbb{R}$ es <u>continua</u>, entonces

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy.$$

Integrales Iteradas

Teorema de Fubini para funciones continuas

Si $R = [A, B] \times [a, b] \times [c, d]$ y $f\colon R \longrightarrow \mathbb{R}$ es <u>continua</u>, entonces

$$\begin{aligned}\int_R f &= \int_A^B \left[\int_a^b \left[\int_c^d f(x,y,z)\,dz\right] dy\right] dx = \int_A^B \left[\int_c^d \left[\int_a^b f(x,y,z)dy\right] dz\right] dx \\ &= \int_a^b \left[\int_A^B \left[\int_c^d f(x,y,z)dz\right] dx\right] dy = \int_a^b \left[\int_c^d \left[\int_A^B f(x,y,z)dx\right] dz\right] dy \\ &= \int_c^d \left[\int_A^B \left[\int_a^b f(x,y,z)dy\right] dx\right] dz = \int_c^d \left[\int_a^b \left[\int_A^B f(x,y,z)dx\right] dy\right] dz.\end{aligned}$$

Funciones de variables separables

Para cada $j = 1, \dots, m$ consideramos $A_j \subset \mathbb{R}^{k_j}$ y $f_j \colon A_j \longrightarrow \mathbb{R}$. La función $f_1 \otimes \cdots \otimes f_m \colon A_1 \times \cdots \times A_m \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$(f_1 \otimes \cdots \otimes f_m)(x_1, \dots, x_m) = f_1(x_1) \cdots f_m(x_m)$$

se denomina **de variables separables en $A_1 \times \cdots \times A_m$**.

Funciones de variables separables

Para cada $j = 1, \ldots, m$ consideramos $A_j \subset \mathbb{R}^{k_j}$ y $f_j \colon A_j \longrightarrow \mathbb{R}$. La función $f_1 \otimes \cdots \otimes f_m \colon A_1 \times \cdots \times A_m \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$(f_1 \otimes \cdots \otimes f_m)(x_1, \ldots, x_m) = f_1(x_1) \cdots f_m(x_m)$$

se denomina **de variables separables en $A_1 \times \cdots \times A_m$**.

Teorema de Fubini para productos tensoriales

Sean $k, m \in \mathbb{N}^*$, $R \subset \mathbb{R}^k$ un rectángulo k-dimensional, $\widehat{R} \subset \mathbb{R}^m$ un rectángulo m-dimensional y las funciones $f \in \mathscr{R}(R)$ y $g \in \mathscr{R}(\widehat{R})$. Entonces $f \otimes g \in \mathscr{R}(R \times \widehat{R})$ y además

$$\int_{R \times \widehat{R}} f \otimes g = \left(\int_R f \right) \left(\int_{\widehat{R}} g \right).$$

Funciones de variables separables

Para cada $j = 1, \ldots, m$ consideramos $A_j \subset \mathbb{R}^{k_j}$ y $f_j \colon A_j \longrightarrow \mathbb{R}$. La función $f_1 \otimes \cdots \otimes f_m \colon A_1 \times \cdots \times A_m \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$(f_1 \otimes \cdots \otimes f_m)(x_1, \ldots, x_m) = f_1(x_1) \cdots f_m(x_m)$$

se denomina **de variables separables en $A_1 \times \cdots \times A_m$**.

Teorema de Fubini para productos tensoriales

Si $R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ y para cada $j = 1, \ldots, n$ consideramos $f_j \in \mathscr{R}([a_j, b_j])$, entonces $f_1 \otimes \cdots \otimes f_n \in \mathscr{R}(R)$ y además,

$$\int_R f_1 \otimes \cdots \otimes f_n = \left(\int_{a_1}^{b_1} f_1 \right) \cdots \left(\int_{a_n}^{b_n} f_n \right).$$

Funciones de variables separables

Para cada $j = 1, \dots, m$ consideramos $A_j \subset \mathbb{R}^{k_j}$ y $f_j\colon A_j \longrightarrow \mathbb{R}$. La función $f_1 \otimes \cdots \otimes f_m\colon A_1 \times \cdots \times A_m \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$(f_1 \otimes \cdots \otimes f_m)(x_1, \dots, x_m) = f_1(x_1) \cdots f_m(x_m)$$

se denomina **de variables separables en $A_1 \times \cdots \times A_m$**.

Teorema de Fubini para productos tensoriales

Si $R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ y para cada $j = 1, \dots, n$ consideramos $f_j \in \mathscr{R}([a_j, b_j])$, entonces $f_1 \otimes \cdots \otimes f_n \in \mathscr{R}(R)$ y además,

$$\int_R f_1 \otimes \cdots \otimes f_n = \left(\int_{a_1}^{b_1} f_1 \right) \cdots \left(\int_{a_n}^{b_n} f_n \right).$$

Ejemplo: Calcular $\displaystyle\int_R f$ donde $f(x_1, \dots, x_n) = x_1^{m_1} \cdots x_m^{m_n}$

Conjuntos Elementales

Un **Conjunto Elemental en $\mathbb{R}^n$** se define inductivamente como:

- Si $n = 1$, $E = [a, b]$.
- **TIPO I**: Si $n > 1$, $E = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^n : x \in A,\ \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\big\}$, donde $A \subset \mathbb{R}^{n-1}$ es elemental y $\varphi, \psi \in \mathscr{C}(A)$ con $\varphi \leq \psi$.
- **TIPO II**: Si $n > 1$, $F = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^n : y \in A,\ \varphi(y) \leq x \leq \psi(y)\big\}$, donde $A \subset \mathbb{R}^{n-1}$ es elemental y $\varphi, \psi \in \mathscr{C}(A)$ con $\varphi \leq \psi$.

Conjuntos Elementales

Un **Conjunto Elemental en $\mathbb{R}^n$** se define inductivamente como:

- Si $n = 1$, $E = [a, b]$.
- **TIPO I**: Si $n > 1$, $E = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^n : x \in A,\ \varphi(x) \le y \le \psi(x)\big\}$, donde $A \subset \mathbb{R}^{n-1}$ es elemental y $\varphi, \psi \in \mathscr{C}(A)$ con $\varphi \le \psi$.
- **TIPO II**: Si $n > 1$, $F = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^n : y \in A,\ \varphi(y) \le x \le \psi(y)\big\}$, donde $A \subset \mathbb{R}^{n-1}$ es elemental y $\varphi, \psi \in \mathscr{C}(A)$ con $\varphi \le \psi$.

- Los conjuntos elementales así definidos, son compactos

Conjuntos Elementales

Un **Conjunto Elemental en $\mathbb{R}^n$** se define inductivamente como:

- Si $n = 1$, $E = [a, b]$.
- **TIPO I**: Si $n > 1$, $E = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^n : x \in A,\ \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\big\}$, donde $A \subset \mathbb{R}^{n-1}$ es elemental y $\varphi, \psi \in \mathscr{C}(A)$ con $\varphi \leq \psi$.
- **TIPO II**: Si $n > 1$, $F = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^n : y \in A,\ \varphi(y) \leq x \leq \psi(y)\big\}$, donde $A \subset \mathbb{R}^{n-1}$ es elemental y $\varphi, \psi \in \mathscr{C}(A)$ con $\varphi \leq \psi$.

Teorema de Fubini en conjuntos elementales

E y F conjuntos elementales de Tipo I o II; $f \in \mathscr{C}(E)$, $g \in \mathscr{C}(F)$

$$\int_E f(x, y)\,dxdy = \int_A \left[\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\,dy\right] dx,$$

$$\int_F g(x, y)\,dxdy = \int_A \left[\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} g(x, y)\,dx\right] dy.$$

Conjuntos Elementales

Un **Conjunto Elemental en $\mathbb{R}^n$** se define inductivamente como:

- Si $n = 1$, $E = [a, b]$.
- **TIPO I**: Si $n > 1$, $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n : x \in A,\, \varphi(x) \le y \le \psi(x)\}$, donde $A \subset \mathbb{R}^{n-1}$ es elemental y $\varphi, \psi \in \mathscr{C}(A)$ con $\varphi \le \psi$.
- **TIPO II**: Si $n > 1$, $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n : y \in A,\, \varphi(y) \le x \le \psi(y)\}$, donde $A \subset \mathbb{R}^{n-1}$ es elemental y $\varphi, \psi \in \mathscr{C}(A)$ con $\varphi \le \psi$.

▶ Conjuntos Elementales en $\mathbb{R}^2$:

$\rightsquigarrow$ Existen $[a, b] \subset \mathbb{R}$ un intervalo y $\varphi, \psi \in \mathscr{C}([a, b])$ tales que $\varphi \le \psi$.

TIPO I: $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b,\ \varphi(x) \le y \le \psi(x)\}$

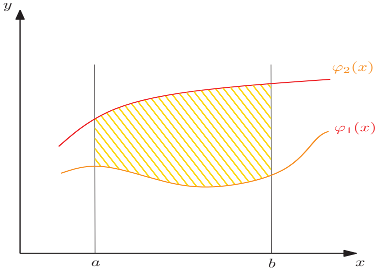
TIPO II: $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \le y \le b,\ \varphi(y) \le x \le \psi(y)\}$

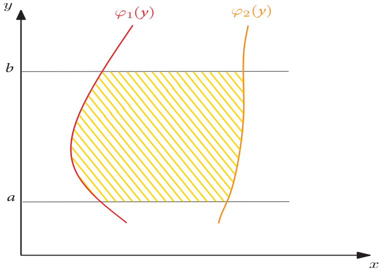
Conjuntos Elementales

Un **Conjunto Elemental en $\mathbb{R}^n$** se define inductivamente como:

- Si $n = 1$, $E = [a, b]$.
- **TIPO I**: Si $n > 1$, $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n : x \in A,\ \varphi(x) \le y \le \psi(x)\}$, donde $A \subset \mathbb{R}^{n-1}$ es elemental y $\varphi, \psi \in \mathscr{C}(A)$ con $\varphi \le \psi$.
- **TIPO II**: Si $n > 1$, $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n : y \in A,\ \varphi(y) \le x \le \psi(y)\}$, donde $A \subset \mathbb{R}^{n-1}$ es elemental y $\varphi, \psi \in \mathscr{C}(A)$ con $\varphi \le \psi$.

- Conjuntos Elementales en $\mathbb{R}^2$: $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathscr{C}([a, b])$ con $\varphi_1 \le \varphi_2$





Conjuntos Elementales

Un **Conjunto Elemental en $\mathbb{R}^n$** se define inductivamente como:

- Si $n = 1$, $E = [a, b]$.
- **TIPO I**: Si $n > 1$, $E = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^n : x \in A,\ \varphi(x) \le y \le \psi(x)\big\}$, donde $A \subset \mathbb{R}^{n-1}$ es elemental y $\varphi, \psi \in \mathscr{C}(A)$ con $\varphi \le \psi$.
- **TIPO II**: Si $n > 1$, $F = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^n : y \in A,\ \varphi(y) \le x \le \psi(y)\big\}$, donde $A \subset \mathbb{R}^{n-1}$ es elemental y $\varphi, \psi \in \mathscr{C}(A)$ con $\varphi \le \psi$.

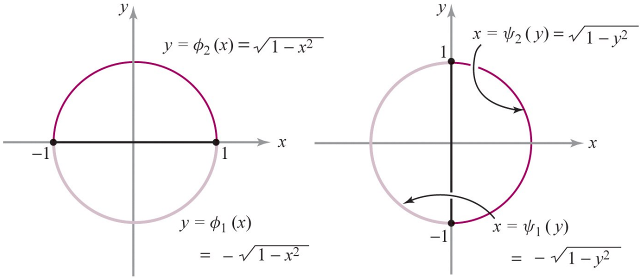


Imagen: J.E. Marsden, A.J. Tromba, *Calculo Vectorial*, Addison-Wesley Iberoamericana, 2004

Conjuntos Elementales

Un **Conjunto Elemental en $\mathbb{R}^n$** se define inductivamente como:

- Si $n = 1$, $E = [a, b]$.
- **TIPO I**: Si $n > 1$, $E = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^n : x \in A,\ \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\big\}$, donde $A \subset \mathbb{R}^{n-1}$ es elemental y $\varphi, \psi \in \mathscr{C}(A)$ con $\varphi \leq \psi$.
- **TIPO II**: Si $n > 1$, $F = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^n : y \in A,\ \varphi(y) \leq x \leq \psi(y)\big\}$, donde $A \subset \mathbb{R}^{n-1}$ es elemental y $\varphi, \psi \in \mathscr{C}(A)$ con $\varphi \leq \psi$.

▶ Si $f \in \mathscr{C}(E)$ y $g \in \mathscr{C}(F)$,

$$\int_E f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy \right) dx$$

$$\int_F g(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} g(x, y)\, dx \right) dy$$

Conjuntos Elementales

Un **Conjunto Elemental en $\mathbb{R}^n$** se define inductivamente como:

- Si $n = 1$, $E = [a, b]$.
- **TIPO I**: Si $n > 1$, $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n : x \in A,\ \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$, donde $A \subset \mathbb{R}^{n-1}$ es elemental y $\varphi, \psi \in \mathscr{C}(A)$ con $\varphi \leq \psi$.
- **TIPO II**: Si $n > 1$, $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n : y \in A,\ \varphi(y) \leq x \leq \psi(y)\}$, donde $A \subset \mathbb{R}^{n-1}$ es elemental y $\varphi, \psi \in \mathscr{C}(A)$ con $\varphi \leq \psi$.

▶ Conjuntos Elementales en $\mathbb{R}^3$:

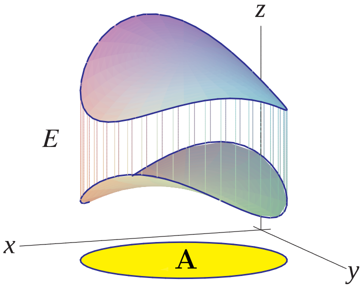


Imagen: L.A. Tristán, *Análisis Matemático*, UVA, 2014

Conjuntos Elementales

- Conjuntos Elementales en $\mathbb{R}^3$: Existen $[a,b]\subset\mathbb{R}$ un intervalo y $\varphi,\psi\in\mathscr{C}([a,b]), \phi\le\psi$ y $\phi,\rho\in\mathscr{C}\Big(\big\{a\le t\le b,\ \varphi(t)\le y\le\psi(t)\big\}\Big), \phi\le\rho$.

$$G_1=\Big\{(x,y,z):\ a\le x\le b,\ \varphi(x)\le y\le\psi(x),\ \phi(x,y)\le z\le\rho(x,y)\Big\}$$

$$G_2=\Big\{(x,y,z):\ a\le x\le b,\ \varphi(x)\le z\le\psi(x),\ \phi(x,z)\le y\le\rho(x,z)\Big\}$$

$$G_3=\Big\{(x,y,z):\ a\le y\le b,\ \varphi(y)\le x\le\psi(y),\ \phi(y,x)\le z\le\rho(y,x)\Big\}$$

$$G_4=\Big\{(x,y,z):\ a\le y\le b,\ \varphi(y)\le z\le\psi(y),\ \phi(y,z)\le x\le\rho(y,z)\Big\}$$

$$G_5=\Big\{(x,y,z):\ a\le z\le b,\ \varphi(z)\le x\le\psi(z),\ \phi(z,x)\le y\le\rho(z,x)\Big\}$$

$$G_6=\Big\{(x,y,z):\ a\le z\le b,\ \varphi(z)\le y\le\psi(z),\ \phi(z,y)\le x\le\rho(z,y)\Big\},$$

Conjuntos Elementales

- Si $f_j \in \mathscr{C}(G_j)$, para $j = 1\ldots,6$

$$\int_{G_1} f_1 = \int_a^b \left[\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \left[\int_{\phi(x,y)}^{\rho(x,y)} f_1(x,y,z)dz\right] dy\right] dx$$

$$\int_{G_2} f_2 = \int_a^b \left[\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \left[\int_{\phi(x,z)}^{\rho(x,z)} f_2(x,y,z)dy\right] dz\right] dx$$

$$\int_{G_3} f_3 = \int_a^b \left[\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} \left[\int_{\phi(y,x)}^{\rho(y,x)} f_3(x,y,z)dz\right] dx\right] dy$$

$$\int_{G_4} f_4 = \int_a^b \left[\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} \left[\int_{\phi(y,z)}^{\rho(y,z)} f_4(x,y,z)dx\right] dz\right] dy$$

$$\int_{G_5} f_5 = \int_a^b \left[\int_{\varphi(z)}^{\psi(z)} \left[\int_{\phi(z,x)}^{\rho(z,x)} f_5(x,y,z)dy\right] dx\right] dz$$

$$\int_{G_6} f_6 = \int_a^b \left[\int_{\varphi(z)}^{\psi(z)} \left[\int_{\phi(z,y)}^{\rho(z,y)} f_6(x,y,z)dx\right] dy\right] dz$$