LONGITUD DE CURVAS PARAMETRIZADAS

Curso 2019-2020

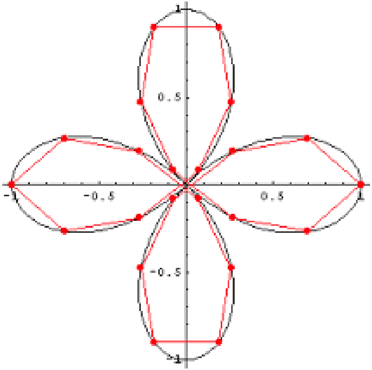


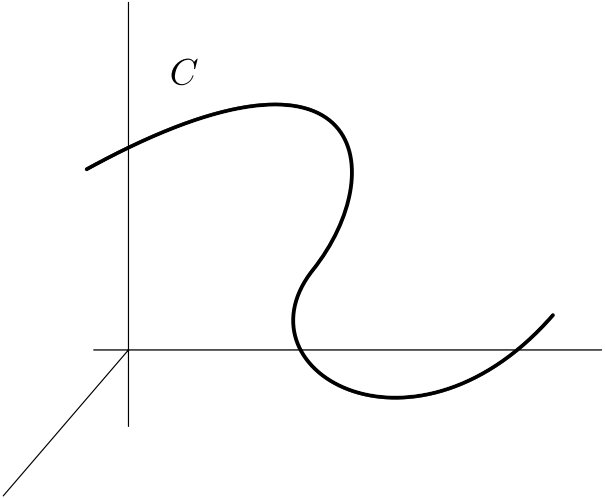
Imagen: Aplicaciones_integral.nb, ugr.es

Longitud de Curvas en $\mathbb{R}^n$

Sea $\alpha \in \mathcal{C}([a,b];\mathbb{R}^n)$ una curva parametrizada, $\alpha(t) = \big(\alpha_1(t), \ldots, \alpha_n(t)\big)$

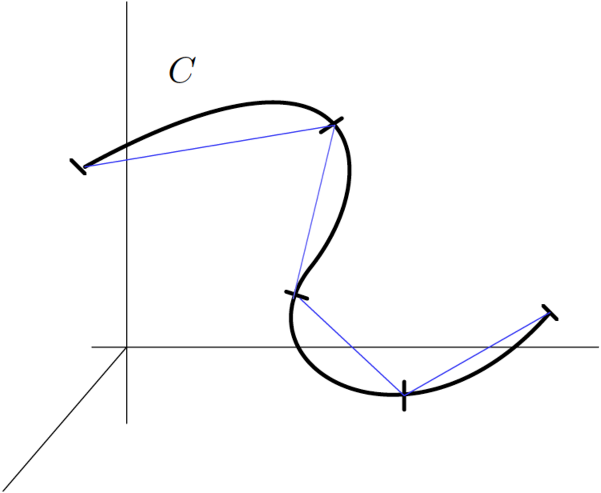
Longitud de Curvas en $\mathbb{R}^n$

Sea $\alpha \in \mathcal{C}([a,b];\mathbb{R}^n)$ una curva parametrizada, $\alpha(t) = \big(\alpha_1(t), \ldots, \alpha_n(t)\big)$



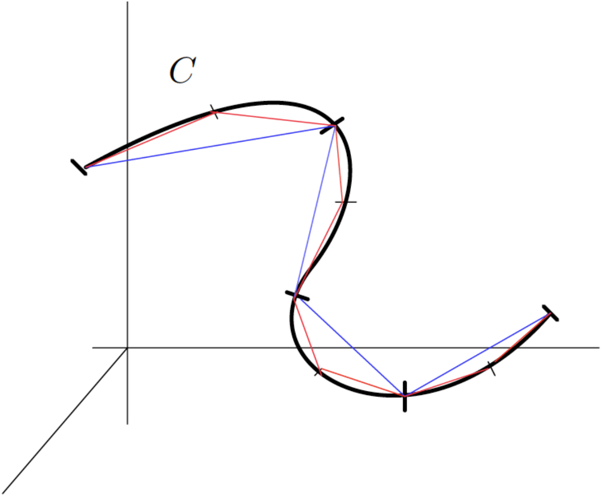
Longitud de Curvas en $\mathbb{R}^n$

Sea $\alpha \in \mathcal{C}([a,b];\mathbb{R}^n)$ una curva parametrizada, $\alpha(t) = \big(\alpha_1(t), \ldots, \alpha_n(t)\big)$



Longitud de Curvas en $\mathbb{R}^n$

Sea $\alpha \in \mathcal{C}([a,b];\mathbb{R}^n)$ una curva parametrizada, $\alpha(t) = \big(\alpha_1(t), \dots, \alpha_n(t)\big)$



Longitud de Curvas en $\mathbb{R}^n$

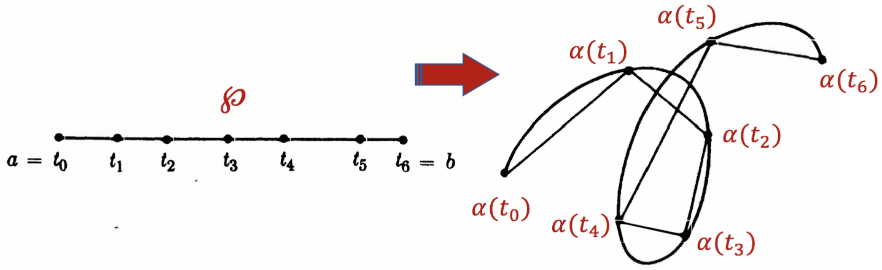
Sea $\alpha \in \mathcal{C}([a,b];\mathbb{R}^n)$ una curva parametrizada, $\alpha(t) = \big(\alpha_1(t),\dots,\alpha_n(t)\big)$

Sea $\mathcal{P} \in \mathscr{P}([a,b])$ partición de $[a,b]$: $\mathcal{P} = \big\{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b\big\}$

Longitud de Curvas en $\mathbb{R}^n$

Sea $\alpha \in \mathcal{C}([a,b];\mathbb{R}^n)$ una curva parametrizada, $\alpha(t) = \big(\alpha_1(t), \ldots, \alpha_n(t)\big)$

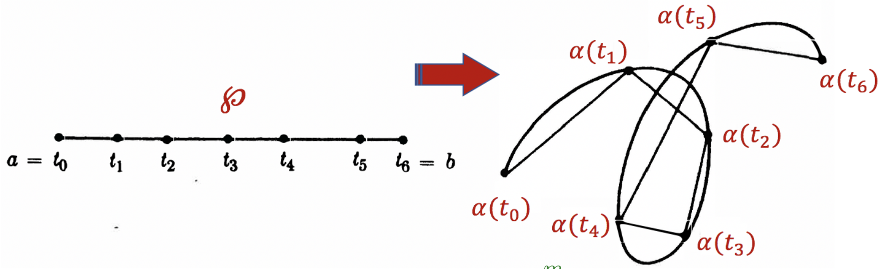
Sea $\mathcal{P} \in \mathscr{P}([a,b])$ partición de $[a,b]$: $\mathcal{P} = \big\{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b\big\}$



Longitud de Curvas en $\mathbb{R}^n$

Sea $\alpha \in \mathcal{C}([a,b];\mathbb{R}^n)$ una curva parametrizada, $\alpha(t) = \big(\alpha_1(t), \ldots, \alpha_n(t)\big)$

Sea $\mathcal{P} \in \mathscr{P}([a,b])$ partición de $[a,b]$: $\mathcal{P} = \big\{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b\big\}$

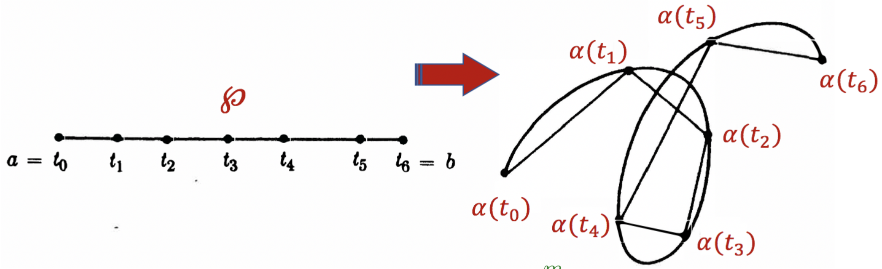


- La **longitud** de la poligonal es $\ell(\alpha,\mathcal{P}) = \sum_{j=1}^{m} \big|\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1})\big|$

Longitud de Curvas en $\mathbb{R}^n$

Sea $\alpha \in \mathcal{C}([a,b];\mathbb{R}^n)$ una curva parametrizada, $\alpha(t) = \big(\alpha_1(t), \ldots, \alpha_n(t)\big)$

Sea $\mathcal{P} \in \mathscr{P}([a,b])$ partición de $[a,b]$: $\mathcal{P} = \big\{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b\big\}$



- La **longitud** de la poligonal es $\ell(\alpha,\mathcal{P}) = \displaystyle\sum_{j=1}^{m} \big|\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1})\big|$
- Por la desigualdad triangular, si $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}' \Longrightarrow \ell(\alpha,\mathcal{P}) \le \ell(\alpha,\mathcal{P}')$

Longitud de Curvas en $\mathbb{R}^n$

Sea $\alpha \in \mathcal{C}([a,b];\mathbb{R}^n)$ una curva parametrizada, $\alpha(t) = \big(\alpha_1(t), \dots, \alpha_n(t)\big)$

Sea $\mathcal{P} \in \mathscr{P}([a,b])$ partición de $[a,b]$: $\mathcal{P} = \big\{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b\big\}$

- La **longitud** de la poligonal es $\ell(\alpha,\mathcal{P}) = \sum_{j=1}^{m} \big|\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1})\big|$
- Por la desigualdad triangular, si $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}' \Longrightarrow \ell(\alpha,\mathcal{P}) \le \ell(\alpha,\mathcal{P}')$
- La **longitud** de α es $\ell(\alpha) = \sup_{\mathcal{P}\in\mathscr{P}([a,b])} \big\{\ell(\alpha,\mathcal{P})\big\} \in [0,+\infty]$.

Longitud de Curvas en $\mathbb{R}^n$

Sea $\alpha \in \mathcal{C}([a,b];\mathbb{R}^n)$ una curva parametrizada, $\alpha(t) = \big(\alpha_1(t),\dots,\alpha_n(t)\big)$

Sea $\mathcal{P} \in \mathscr{P}([a,b])$ partición de $[a,b]$: $\mathcal{P} = \big\{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b\big\}$

- La **longitud** de la poligonal es $\ell(\alpha,\mathcal{P}) = \sum_{j=1}^{m} \big|\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1})\big|$
- Por la desigualdad triangular, si $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}' \Longrightarrow \ell(\alpha,\mathcal{P}) \le \ell(\alpha,\mathcal{P}')$
- La **longitud** de α es $\ell(\alpha) = \sup_{\mathcal{P}\in\mathscr{P}([a,b])} \big\{\ell(\alpha,\mathcal{P})\big\} \in [0,+\infty]$.

  La curva parametrizada α se denomina **rectificable** si $\ell(\alpha) < +\infty$.

Longitud de Curvas en $\mathbb{R}^n$

Sea $\alpha \in \mathcal{C}([a,b];\mathbb{R}^n)$ una curva parametrizada, $\alpha(t) = \big(\alpha_1(t), \dots, \alpha_n(t)\big)$

Sea $\mathcal{P} \in \mathscr{P}([a,b])$ partición de $[a,b]$: $\mathcal{P} = \big\{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b\big\}$

- La **longitud** de la poligonal es $\ell(\alpha, \mathcal{P}) = \sum_{j=1}^{m} \big|\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1})\big|$
- Por la desigualdad triangular, si $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}' \Longrightarrow \ell(\alpha, \mathcal{P}) \le \ell(\alpha, \mathcal{P}')$
- La **longitud** de α es $\ell(\alpha) = \sup_{\mathcal{P} \in \mathscr{P}([a,b])} \big\{\ell(\alpha, \mathcal{P})\big\} \in [0, +\infty]$.

  La curva parametrizada α se denomina **rectificable** si $\ell(\alpha) < +\infty$.
- α es rectificable sii $\big\{\ell(\alpha, \mathcal{P}) : \mathcal{P} \in \mathscr{P}([a,b])\big\} \subset \mathbb{R}$ es acotado

Longitud de Curvas en $\mathbb{R}^n$

Sea $\alpha \in \mathcal{C}([a,b];\mathbb{R}^n)$ una curva parametrizada, $\alpha(t) = \big(\alpha_1(t),\dots,\alpha_n(t)\big)$

Sea $\mathcal{P} \in \mathscr{P}([a,b])$ partición de $[a,b]$: $\mathcal{P} = \big\{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b\big\}$

- La **longitud** de la poligonal es $\ell(\alpha,\mathcal{P}) = \sum_{j=1}^{m} \big|\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1})\big|$
- Por la desigualdad triangular, si $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}' \Longrightarrow \ell(\alpha,\mathcal{P}) \le \ell(\alpha,\mathcal{P}')$
- La **longitud** de α es $\ell(\alpha) = \sup_{\mathcal{P}\in\mathscr{P}([a,b])} \big\{\ell(\alpha,\mathcal{P})\big\} \in [0,+\infty]$.

  La curva parametrizada α se denomina **rectificable** si $\ell(\alpha) < +\infty$.
- La noción de curva rectificable y su longitud son independientes de la parametrización: $\ell(\alpha) = \ell(\alpha\circ\varphi)$

Longitud de Curvas en $\mathbb{R}^n$

Sea $\alpha \in \mathcal{C}([a,b];\mathbb{R}^n)$ una curva parametrizada, $\alpha(t) = \big(\alpha_1(t),\dots,\alpha_n(t)\big)$

Sea $\mathcal{P} \in \mathscr{P}([a,b])$ partición de $[a,b]$: $\mathcal{P} = \big\{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b\big\}$

- La **longitud** de la poligonal es $\ell(\alpha,\mathcal{P}) = \sum_{j=1}^{m} \big|\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1})\big|$
- Por la desigualdad triangular, si $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}' \Longrightarrow \ell(\alpha,\mathcal{P}) \le \ell(\alpha,\mathcal{P}')$
- La **longitud** de α es $\ell(\alpha) = \sup_{\mathcal{P}\in\mathscr{P}([a,b])} \big\{\ell(\alpha,\mathcal{P})\big\} \in [0,+\infty]$.

  La curva parametrizada α se denomina **rectificable** si $\ell(\alpha) < +\infty$.
- La noción de curva rectificable y su longitud son independientes de la parametrización: $\ell(\alpha) = \ell(\alpha\circ\varphi)$
- Si α es inyectiva y C es su traza, se define $\ell(C) = \ell(\alpha)$

Longitud de Curvas en $\mathbb{R}^n$

Sea $\alpha \in \mathcal{C}([a,b];\mathbb{R}^n)$ una curva parametrizada, $\alpha(t) = \big(\alpha_1(t), \dots, \alpha_n(t)\big)$

Sea $\mathcal{P} \in \mathscr{P}([a,b])$ partición de $[a,b]$: $\mathcal{P} = \big\{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b\big\}$

- La **longitud** de la poligonal es $\ell(\alpha,\mathcal{P}) = \displaystyle\sum_{j=1}^{m} \big|\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1})\big|$
- Por la desigualdad triangular, si $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}' \Longrightarrow \ell(\alpha,\mathcal{P}) \le \ell(\alpha,\mathcal{P}')$
- La **longitud** de α es $\ell(\alpha) = \displaystyle\sup_{\mathcal{P}\in\mathscr{P}([a,b])} \big\{\ell(\alpha,\mathcal{P})\big\} \in [0,+\infty]$.

  La curva parametrizada α se denomina **rectificable** si $\ell(\alpha) < +\infty$.
- La noción de curva rectificable y su longitud son independientes de la parametrización: $\ell(\alpha) = \ell(\alpha \circ \varphi)$
- α es rectificable sii α_j es rectificable (de variación acotada)

Longitud de Curvas en $\mathbb{R}^n$

Sea $\alpha \in \mathcal{C}([a,b];\mathbb{R}^n)$ una curva parametrizada, $\alpha(t) = \big(\alpha_1(t), \dots, \alpha_n(t)\big)$

Sea $\mathcal{P} \in \mathscr{P}([a,b])$ partición de $[a,b]$: $\mathcal{P} = \big\{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b\big\}$

- La **longitud** de la poligonal es $\ell(\alpha,\mathcal{P}) = \displaystyle\sum_{j=1}^{m} \big|\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1})\big|$
- Por la desigualdad triangular, si $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}' \Longrightarrow \ell(\alpha,\mathcal{P}) \le \ell(\alpha,\mathcal{P}')$
- La **longitud** de α es $\ell(\alpha) = \displaystyle\sup_{\mathcal{P}\in\mathscr{P}([a,b])} \big\{\ell(\alpha,\mathcal{P})\big\} \in [0,+\infty]$.

  La curva parametrizada α se denomina **rectificable** si $\ell(\alpha) < +\infty$.
- La noción de curva rectificable y su longitud son independientes de la parametrización: $\ell(\alpha) = \ell(\alpha \circ \varphi)$
- $\ell(\alpha_j) \le \ell(\alpha) \le \ell(\alpha_1) + \cdots + \ell(\alpha_n)$

Longitud de Curvas en $\mathbb{R}^n$

Sea $\alpha \in \mathcal{C}([a,b];\mathbb{R}^n)$ una curva parametrizada, $\alpha(t) = \big(\alpha_1(t), \dots, \alpha_n(t)\big)$
La **longitud** de α es $\ell(\alpha) = \sup\limits_{\mathcal{P} \in \mathscr{P}([a,b])} \big\{\ell(\alpha, \mathcal{P})\big\} \in [0, +\infty]$, donde si

$$\mathcal{P} = \{t_j\}_{j=0}^m \in \mathscr{P}([a,b]) \Longrightarrow \ell(\alpha, \mathcal{P}) = \sum_{j=1}^m \big|\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1})\big|$$

La curva parametrizada α se denomina **rectificable** si $\ell(\alpha) < +\infty$

Longitud de Curvas en $\mathbb{R}^n$

Sea $\alpha \in \mathcal{C}([a,b];\mathbb{R}^n)$ una curva parametrizada, $\alpha(t) = \big(\alpha_1(t), \dots, \alpha_n(t)\big)$
La **longitud** de α es $\ell(\alpha) = \sup\limits_{\mathcal{P}\in\mathscr{P}([a,b])} \big\{\ell(\alpha,\mathcal{P})\big\} \in [0,+\infty]$, donde si

$$\mathcal{P} = \{t_j\}_{j=0}^m \in \mathscr{P}([a,b]) \Longrightarrow \ell(\alpha,\mathcal{P}) = \sum_{j=1}^m \big|\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1})\big|$$

La curva parametrizada α se denomina **rectificable** si $\ell(\alpha) < +\infty$

- $\ell(\alpha) = 0 \Longleftrightarrow \alpha$ es constante $\Longleftrightarrow$ la traza de α es un punto de $\mathbb{R}^n$

Longitud de Curvas en $\mathbb{R}^n$

Sea $\alpha \in \mathcal{C}([a,b];\mathbb{R}^n)$ una curva parametrizada, $\alpha(t) = \big(\alpha_1(t), \dots, \alpha_n(t)\big)$
La **longitud** de α es $\ell(\alpha) = \sup\limits_{\mathcal{P}\in\mathscr{P}([a,b])} \big\{\ell(\alpha,\mathcal{P})\big\} \in [0,+\infty]$, donde si

$$\mathcal{P} = \{t_j\}_{j=0}^m \in \mathscr{P}([a,b]) \Longrightarrow \ell(\alpha,\mathcal{P}) = \sum_{j=1}^m \big|\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1})\big|$$

La curva parametrizada α se denomina **rectificable** si $\ell(\alpha) < +\infty$

- $\ell(\alpha) = 0 \Longleftrightarrow \alpha$ es constante $\Longleftrightarrow$ la traza de α es un punto de $\mathbb{R}^n$
- Si $a < c < b$ y definimos $\gamma = \alpha_{|_{[a,c]}}$, $\beta = \alpha_{|_{[c,b]}} \Longrightarrow \ell(\alpha) = \ell(\gamma) + \ell(\beta)$

Longitud de Curvas en $\mathbb{R}^n$

Sea $\alpha \in \mathcal{C}([a,b];\mathbb{R}^n)$ una curva parametrizada, $\alpha(t) = \big(\alpha_1(t),\dots,\alpha_n(t)\big)$
La **longitud** de α es $\ell(\alpha) = \sup\limits_{\mathcal{P}\in\mathscr{P}([a,b])} \big\{\ell(\alpha,\mathcal{P})\big\} \in [0,+\infty]$, donde si

$$\mathcal{P} = \{t_j\}_{j=0}^m \in \mathscr{P}([a,b]) \Longrightarrow \ell(\alpha,\mathcal{P}) = \sum_{j=1}^m \big|\alpha(t_j)-\alpha(t_{j-1})\big|$$

La curva parametrizada α se denomina **rectificable** si $\ell(\alpha) < +\infty$

- $\ell(\alpha) = 0 \Longleftrightarrow \alpha$ es constante $\Longleftrightarrow$ la traza de α es un punto de $\mathbb{R}^n$
- Si $a<c<b$ y definimos $\gamma = \alpha_{|_{[a,c]}}$, $\beta = \alpha_{|_{[c,b]}} \Longrightarrow \ell(\alpha) = \ell(\gamma)+\ell(\beta)$
- $\ell(\alpha*\beta) = \ell(\alpha)+\ell(\beta) \Longrightarrow \ell(\alpha_1*\cdots*\alpha_k) = \ell(\alpha_1)+\cdots\ell(\alpha_k)$

Longitud de Curvas en $\mathbb{R}^n$

Sea $\alpha \in \mathcal{C}([a,b];\mathbb{R}^n)$ una curva parametrizada, $\alpha(t) = \big(\alpha_1(t),\dots,\alpha_n(t)\big)$
La **longitud** de α es $\ell(\alpha) = \sup\limits_{\mathcal{P}\in\mathscr{P}([a,b])} \big\{\ell(\alpha,\mathcal{P})\big\} \in [0,+\infty]$, donde si

$$\mathcal{P} = \{t_j\}_{j=0}^m \in \mathscr{P}([a,b]) \Longrightarrow \ell(\alpha,\mathcal{P}) = \sum_{j=1}^m \big|\alpha(t_j)-\alpha(t_{j-1})\big|$$

La curva parametrizada α se denomina **rectificable** si $\ell(\alpha) < +\infty$

- $\ell(\alpha) = 0 \iff \alpha$ es constante $\iff$ la traza de α es un punto de $\mathbb{R}^n$
- Si $a<c<b$ y definimos $\gamma = \alpha_{|_{[a,c]}}$, $\beta = \alpha_{|_{[c,b]}} \Longrightarrow \ell(\alpha) = \ell(\gamma)+\ell(\beta)$
- $\ell(\alpha*\beta) = \ell(\alpha)+\ell(\beta) \Longrightarrow \ell(\alpha_1*\cdots*\alpha_k) = \ell(\alpha_1)+\cdots\ell(\alpha_k)$
- Si $\ell\colon [a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$, $\ell(t) = \ell\big(\alpha_{|_{[a,t]}}\big) \Rightarrow \ell$ es creciente, continua y $\ell(a)=0$

Longitud de Curvas en $\mathbb{R}^n$

Sea $\alpha \in \mathcal{C}([a,b];\mathbb{R}^n)$ una curva parametrizada, $\alpha(t) = \big(\alpha_1(t),\dots,\alpha_n(t)\big)$
La **longitud** de α es $\ell(\alpha) = \sup\limits_{\mathcal{P}\in\mathscr{P}([a,b])} \big\{\ell(\alpha,\mathcal{P})\big\} \in [0,+\infty]$, donde si

$$\mathcal{P} = \{t_j\}_{j=0}^m \in \mathscr{P}([a,b]) \Longrightarrow \ell(\alpha,\mathcal{P}) = \sum_{j=1}^m \big|\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1})\big|$$

La curva parametrizada α se denomina **rectificable** si $\ell(\alpha) < +\infty$

- $\ell(\alpha) = 0 \Longleftrightarrow \alpha$ es constante $\Longleftrightarrow$ la traza de α es un punto de $\mathbb{R}^n$
- Si $a < c < b$ y definimos $\gamma = \alpha_{|_{[a,c]}}$, $\beta = \alpha_{|_{[c,b]}} \Longrightarrow \ell(\alpha) = \ell(\gamma) + \ell(\beta)$
- $\ell(\alpha * \beta) = \ell(\alpha) + \ell(\beta) \Longrightarrow \ell(\alpha_1 * \cdots * \alpha_k) = \ell(\alpha_1) + \cdots \ell(\alpha_k)$
- Si $\ell\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $\ell(t) = \ell\big(\alpha_{|_{[a,t]}}\big) \Rightarrow \ell$ es creciente, continua y $\ell(a) = 0$
- Si α no es constante en ningún subintervalo de $[a,b]$
  $\Longrightarrow \ell$ es estrictamente creciente

Longitud de Curvas en $\mathbb{R}^n$

Sea $\alpha \in \mathcal{C}([a,b];\mathbb{R}^n)$ una curva parametrizada, $\alpha(t) = \big(\alpha_1(t), \dots, \alpha_n(t)\big)$
La **longitud** de α es $\ell(\alpha) = \sup\limits_{\mathcal{P} \in \mathscr{P}([a,b])} \big\{\ell(\alpha,\mathcal{P})\big\} \in [0,+\infty]$, donde si

$$\mathcal{P} = \{t_j\}_{j=0}^m \in \mathscr{P}([a,b]) \Longrightarrow \ell(\alpha,\mathcal{P}) = \sum_{j=1}^m \big|\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1})\big|$$

La curva parametrizada α se denomina **rectificable** si $\ell(\alpha) < +\infty$

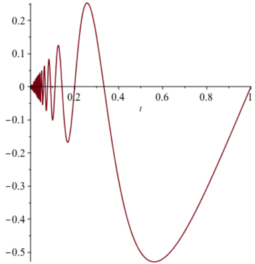
- Existen curvas <u>no</u> rectificables. Ejemplo: $\alpha(t) = t\cos\Big(\dfrac{\pi}{2t}\Big)$, $t \in [0,1]$

Sea $\alpha \in \mathcal{C}([a,b];\mathbb{R}^n)$ una curva parametrizada, $\alpha(t) = \big(\alpha_1(t),\dots,\alpha_n(t)\big)$
La **longitud** de α es $\ell(\alpha) = \sup\limits_{\mathcal{P}\in\mathscr{P}([a,b])} \big\{\ell(\alpha,\mathcal{P})\big\} \in [0,+\infty]$, donde si

$$\mathcal{P} = \{t_j\}_{j=0}^m \in \mathscr{P}([a,b]) \Longrightarrow \ell(\alpha,\mathcal{P}) = \sum_{j=1}^m \big|\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1})\big|$$

La curva parametrizada α se denomina **rectificable** si $\ell(\alpha) < +\infty$

- Existen curvas no rectificables. Ejemplo: $\alpha(t) = t\cos\Big(\dfrac{\pi}{2t}\Big)$, $t \in [0,1]$



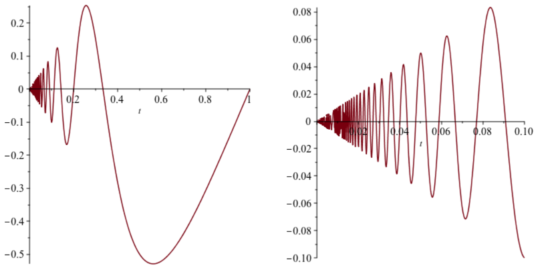
Longitud de Curvas en $\mathbb{R}^n$

Sea $\alpha \in \mathcal{C}([a,b];\mathbb{R}^n)$ una curva parametrizada, $\alpha(t) = \big(\alpha_1(t),\dots,\alpha_n(t)\big)$
La **longitud** de α es $\ell(\alpha) = \sup\limits_{\mathcal{P}\in\mathscr{P}([a,b])} \big\{\ell(\alpha,\mathcal{P})\big\} \in [0,+\infty]$, donde si

$$\mathcal{P} = \{t_j\}_{j=0}^m \in \mathscr{P}([a,b]) \Longrightarrow \ell(\alpha,\mathcal{P}) = \sum_{j=1}^m \big|\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1})\big|$$

La curva parametrizada α se denomina **rectificable** si $\ell(\alpha) < +\infty$

- Existen curvas no rectificables. Ejemplo: $\alpha(t) = t\cos\left(\dfrac{\pi}{2t}\right)$, $t \in [0,1]$



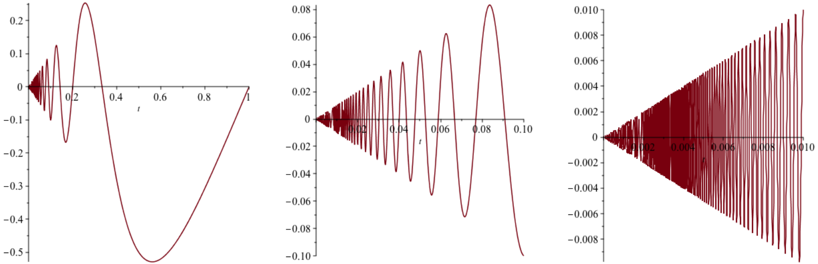
Longitud de Curvas en $\mathbb{R}^n$

Sea $\alpha \in \mathcal{C}([a,b];\mathbb{R}^n)$ una curva parametrizada, $\alpha(t) = \big(\alpha_1(t),\dots,\alpha_n(t)\big)$
La **longitud** de α es $\ell(\alpha) = \sup\limits_{\mathcal{P}\in\mathscr{P}([a,b])} \big\{\ell(\alpha,\mathcal{P})\big\} \in [0,+\infty]$, donde si

$$\mathcal{P} = \{t_j\}_{j=0}^m \in \mathscr{P}([a,b]) \Longrightarrow \ell(\alpha,\mathcal{P}) = \sum_{j=1}^m \big|\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1})\big|$$

La curva parametrizada α se denomina **rectificable** si $\ell(\alpha) < +\infty$

- Existen curvas no rectificables. Ejemplo: $\alpha(t) = t\cos\Big(\dfrac{\pi}{2t}\Big)$, $t \in [0,1]$



Longitud de Curvas en $\mathbb{R}^n$

Sea $\alpha \in \mathcal{C}([a,b];\mathbb{R}^n)$ una curva parametrizada, $\alpha(t) = \big(\alpha_1(t), \dots, \alpha_n(t)\big)$
La **longitud** de α es $\ell(\alpha) = \sup\limits_{\mathcal{P}\in\mathscr{P}([a,b])} \big\{\ell(\alpha,\mathcal{P})\big\} \in [0,+\infty]$, donde si

$$\mathcal{P} = \{t_j\}_{j=0}^m \in \mathscr{P}([a,b]) \Longrightarrow \ell(\alpha,\mathcal{P}) = \sum_{j=1}^m \big|\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1})\big|$$

La curva parametrizada α se denomina **rectificable** si $\ell(\alpha) < +\infty$

- ¿Qué curvas son rectificables?

Longitud de Curvas en $\mathbb{R}^n$

Sea $\alpha \in \mathcal{C}([a,b];\mathbb{R}^n)$ una curva parametrizada, $\alpha(t) = \big(\alpha_1(t),\dots,\alpha_n(t)\big)$
La **longitud** de α es $\ell(\alpha) = \sup\limits_{\mathcal{P}\in\mathscr{P}([a,b])} \big\{\ell(\alpha,\mathcal{P})\big\} \in [0,+\infty]$, donde si

$$\mathcal{P} = \{t_j\}_{j=0}^m \in \mathscr{P}([a,b]) \Longrightarrow \ell(\alpha,\mathcal{P}) = \sum_{j=1}^m \big|\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1})\big|$$

La curva parametrizada α se denomina **rectificable** si $\ell(\alpha) < +\infty$

- ¿Qué curvas son rectificables?
- Si α es Lipschitziana: $|\alpha(t) - \alpha(s)| \le L|t-s| \Longrightarrow \ell(\alpha) \le L(b-a)$

Longitud de Curvas en $\mathbb{R}^n$

Sea $\alpha \in \mathcal{C}([a,b];\mathbb{R}^n)$ una curva parametrizada, $\alpha(t) = \big(\alpha_1(t),\dots,\alpha_n(t)\big)$
La **longitud** de α es $\ell(\alpha) = \sup\limits_{\mathcal{P}\in\mathscr{P}([a,b])} \big\{\ell(\alpha,\mathcal{P})\big\} \in [0,+\infty]$, donde si

$$\mathcal{P} = \{t_j\}_{j=0}^m \in \mathscr{P}([a,b]) \Longrightarrow \ell(\alpha,\mathcal{P}) = \sum_{j=1}^m \big|\alpha(t_j)-\alpha(t_{j-1})\big|$$

La curva parametrizada α se denomina **rectificable** si $\ell(\alpha) < +\infty$

- ¿Qué curvas son rectificables?
- Si α es Lipschitziana: $|\alpha(t)-\alpha(s)| \le L|t-s| \Longrightarrow \ell(\alpha) \le L(b-a)$

  $\rightsquigarrow$ Si $\alpha \in \mathcal{C}^1([a,b];\mathbb{R}^n)$, entonces α es rectificable

Longitud de Curvas en $\mathbb{R}^n$

Sea $\alpha \in \mathcal{C}([a,b];\mathbb{R}^n)$ una curva parametrizada, $\alpha(t) = \big(\alpha_1(t),\dots,\alpha_n(t)\big)$
La **longitud** de α es $\ell(\alpha) = \sup\limits_{\mathcal{P}\in\mathscr{P}([a,b])} \big\{\ell(\alpha,\mathcal{P})\big\} \in [0,+\infty]$, donde si

$$\mathcal{P} = \{t_j\}_{j=0}^m \in \mathscr{P}([a,b]) \Longrightarrow \ell(\alpha,\mathcal{P}) = \sum_{j=1}^m \big|\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1})\big|$$

La curva parametrizada α se denomina **rectificable** si $\ell(\alpha) < +\infty$

- ¿Qué curvas son rectificables?
- Si α es Lipschitziana: $|\alpha(t) - \alpha(s)| \le L|t-s| \Longrightarrow \ell(\alpha) \le L(b-a)$

  $\rightsquigarrow$ Si $\alpha \in \mathcal{C}^1_s([a,b];\mathbb{R}^n)$, entonces α es rectificable

Longitud de Curvas en $\mathbb{R}^n$

Sea $\alpha \in \mathcal{C}([a,b];\mathbb{R}^n)$ una curva parametrizada, $\alpha(t) = \big(\alpha_1(t),\dots,\alpha_n(t)\big)$
La **longitud** de α es $\ell(\alpha) = \sup\limits_{\mathcal{P}\in\mathscr{P}([a,b])} \big\{\ell(\alpha,\mathcal{P})\big\} \in [0,+\infty]$, donde si

$$\mathcal{P} = \{t_j\}_{j=0}^m \in \mathscr{P}([a,b]) \Longrightarrow \ell(\alpha,\mathcal{P}) = \sum_{j=1}^m \big|\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1})\big|$$

La curva parametrizada α se denomina **rectificable** si $\ell(\alpha) < +\infty$

- ¿Qué curvas son rectificables?
- Si α es Lipschitziana: $|\alpha(t)-\alpha(s)| \le L|t-s| \Longrightarrow \ell(\alpha) \le L(b-a)$

  $\rightsquigarrow$ Si $\alpha \in \mathcal{C}^1_s([a,b];\mathbb{R}^n)$, entonces α es rectificable
- Si $\alpha \in \mathcal{C}^1_s([a,b];\mathbb{R}^n)$, entonces

  $$\ell(\alpha) = \int_a^b |\alpha'(t)|dt = \int_a^b \sqrt{\alpha_1'(t)^2 + \cdots + \alpha_n'(t)^2}dt$$

Longitud de Curvas en $\mathbb{R}^n$

Sea $\alpha \in \mathcal{C}([a,b];\mathbb{R}^n)$ una curva parametrizada, $\alpha(t) = \big(\alpha_1(t),\dots,\alpha_n(t)\big)$
La **longitud** de α es $\ell(\alpha) = \sup\limits_{\mathcal{P}\in\mathscr{P}([a,b])} \big\{\ell(\alpha,\mathcal{P})\big\} \in [0,+\infty]$, donde si

$$\mathcal{P} = \{t_j\}_{j=0}^m \in \mathscr{P}([a,b]) \Longrightarrow \ell(\alpha,\mathcal{P}) = \sum_{j=1}^m \big|\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1})\big|$$

La curva parametrizada α se denomina **rectificable** si $\ell(\alpha) < +\infty$

- Si $\alpha \in \mathcal{C}_s^1([a,b];\mathbb{R}^n)$, entonces

$$\ell(\alpha) = \int_a^b |\alpha'(t)|dt = \int_a^b \sqrt{\alpha_1'(t)^2 + \cdots + \alpha_n'(t)^2}dt$$

- Ejemplo: Calcular la longitud de la **elipse**

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1, \quad a > b > 0$$

Longitud de Curvas en $\mathbb{R}^n$

Sea $\alpha \in \mathcal{C}([a,b];\mathbb{R}^n)$ una curva parametrizada, $\alpha(t) = \big(\alpha_1(t),\dots,\alpha_n(t)\big)$
La **longitud** de α es $\ell(\alpha) = \sup\limits_{\mathcal{P}\in\mathscr{P}([a,b])} \big\{\ell(\alpha,\mathcal{P})\big\} \in [0,+\infty]$, donde si

$$\mathcal{P} = \{t_j\}_{j=0}^m \in \mathscr{P}([a,b]) \Longrightarrow \ell(\alpha,\mathcal{P}) = \sum_{j=1}^m \big|\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1})\big|$$

La curva parametrizada α se denomina **rectificable** si $\ell(\alpha) < +\infty$

- Si $\alpha \in \mathcal{C}_s^1([a,b];\mathbb{R}^n)$, entonces

$$\ell(\alpha) = \int_a^b |\alpha'(t)|dt = \int_a^b \sqrt{\alpha_1'(t)^2 + \cdots + \alpha_n'(t)^2}dt$$

- Ejemplo: Calcular la longitud de la Curva de Viviani

$$C = \big\{x^2+y^2+z^2 = a^2,\ x^2+y^2 = ay\big\},\ \ a>0$$

Longitud de Curvas en $\mathbb{R}^n$

Sea $\alpha \in \mathcal{C}(I;\mathbb{R}^n)$ una curva parametrizada, $\alpha(t) = \big(\alpha_1(t),\ldots,\alpha_n(t)\big)$.
La **longitud** de α es $\ell(\alpha) = \sup\limits_{[a,b]\subset I} \big\{\ell(\alpha|_{[a,b]})\big\}$

Longitud de Curvas en $\mathbb{R}^n$

Sea $\alpha \in \mathcal{C}(I;\mathbb{R}^n)$ una curva parametrizada, $\alpha(t) = \big(\alpha_1(t),\dots,\alpha_n(t)\big)$.
La **longitud** de α es $\ell(\alpha) = \sup\limits_{[a,b]\subset I} \big\{\ell(\alpha_{|_{[a,b]}})\big\}$

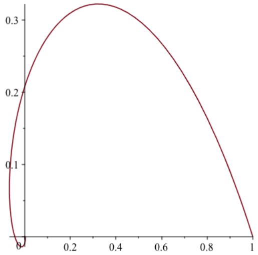
- Si $\alpha \in \mathcal{C}^1_s(I;\mathbb{R}^n) \Longrightarrow \ell(\alpha) = \displaystyle\int_I |\alpha'(t)|dt$ como integral impropia

Longitud de Curvas en $\mathbb{R}^n$

Sea $\alpha \in \mathcal{C}(I;\mathbb{R}^n)$ una curva parametrizada, $\alpha(t) = \big(\alpha_1(t),\dots,\alpha_n(t)\big)$.
La **longitud** de α es $\ell(\alpha) = \sup\limits_{[a,b]\subset I} \big\{\ell(\alpha|_{[a,b]})\big\}$

- Si $\alpha \in \mathcal{C}^1_s(I;\mathbb{R}^n) \Longrightarrow \ell(\alpha) = \displaystyle\int_I |\alpha'(t)|dt$ como integral impropia
- Ejemplo: Calcular la longitud de la **espiral logarítmica**

$$\alpha\colon (0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \alpha(\theta) = \big(e^{-\theta}\cos(\theta), e^{-\theta}\mathrm{sen}(\theta)\big)$$



Campos Escalares y Vectoriales

Consideremos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto no vacío (habitualmente, $n = 2, 3$).

1. Un campo escalar en Ω es una aplicación $u \colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$. El campo u se denomina de clase $\mathcal{C}^k(\Omega)$, $k \geq 0$, si u es de clase $\mathcal{C}^k(\Omega)$.

   Los campos escalares serán habitualmente denotados por u, v, f, g.

2. Un campo vectorial en Ω es una aplicación $\mathsf{f} \colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

   Como $\mathsf{f}(x) = \big(f_1(x), \ldots, f_n(x)\big)$, a los campos escalares o funciones $f_j \colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $j = 1, \ldots, n$, se las denomina componentes del campo f.
   El campo f se denomina de clase $\mathcal{C}^k(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $k \geq 0$ si f es de clase $\mathcal{C}^k(\Omega, \mathbb{R}^n)$; es decir, si para cada $j = 1, \ldots, n$, $f_j \in \mathcal{C}^k(\Omega)$.

   Los campos vectoriales serán denotados por $\mathsf{f}, \mathsf{g}, \mathsf{u}, \boldsymbol{F}$.

Campos Escalares y Vectoriales

Consideremos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto no vacío (habitualmente, $n = 2, 3$).

1. Un campo escalar en Ω es una aplicación $u\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$. El campo u se denomina de clase $\mathcal{C}^k(\Omega)$, $k \geq 0$, si u es de clase $\mathcal{C}^k(\Omega)$.

   Los campos escalares serán habitualmente denotados por u, v, f, g.

2. Un campo vectorial en Ω es una aplicación $\mathsf{f}\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

   Como $\mathsf{f}(x) = \big(f_1(x), \dots, f_n(x)\big)$, a los campos escalares o funciones $f_j\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $j = 1, \dots, n$, se las denomina componentes del campo f.
   El campo f se denomina de clase $\mathcal{C}^k(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $k \geq 0$ si f es de clase $\mathcal{C}^k(\Omega, \mathbb{R}^n)$; es decir, si para cada $j = 1, \dots, n$, $f_j \in \mathcal{C}^k(\Omega)$.

   Los campos vectoriales serán denotados por $\mathsf{f}, \mathsf{g}, \mathsf{u}, \boldsymbol{F}$.

$\rightsquigarrow$ El campo $\mathsf{r}\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definido como $\mathsf{r}(x) = (x_1, \dots, x_n)$ se denomina campo radial de $\mathbb{R}^n$. Por tanto, si $j = 1, \dots, n$, la componente j-ésima del campo radial es $\mathsf{r}_j(x) = x_j$. Claramente, $\mathsf{r} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.

Integral de Línea de campos escalares

Sean $\alpha \in \mathcal{C}^1_s([a,b],\mathbb{R}^n)$ y $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto tal que $C_\alpha \subset \Omega$.

Integral de Línea de campos escalares

Sean $\alpha \in \mathcal{C}^1_s([a,b],\mathbb{R}^n)$ y $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto tal que $C_\alpha \subset \Omega$.

Si $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ es un campo escalar continuo, (basta que $f\colon C_\alpha \longrightarrow \mathbb{R}$ sea continuo) se define la integral de f sobre α o integral de línea como

$$\int_\alpha f\,d\ell = \int_a^b f\big(\alpha(t)\big)||\alpha'(t)||\,dt.$$

Si α es **inyectiva**, se denomina integral de f sobre la curva C_α a $\displaystyle\int_{C_\alpha} f d\ell = \int_\alpha f d\ell$

Integral de Línea de campos escalares

Sean $\alpha \in \mathcal{C}^1_s([a,b],\mathbb{R}^n)$ y $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto tal que $C_\alpha \subset \Omega$.

Si $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ es un campo escalar continuo, (basta que $f\colon C_\alpha \longrightarrow \mathbb{R}$ sea continuo) se define la integral de f sobre α o integral de línea como

$$\int_\alpha f\, d\ell = \int_a^b f\big(\alpha(t)\big)\,||\alpha'(t)||\, dt.$$

Si α es **inyectiva**, se denomina integral de f sobre la curva C_α a $\displaystyle\int_{C_\alpha} f d\ell = \int_\alpha f d\ell$

- Si $f = 1$, recuperamos la noción de longitud de la curva parametrizada

Integral de Línea de campos escalares

Sean $\alpha \in \mathcal{C}^1_s([a,b],\mathbb{R}^n)$ y $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto tal que $C_\alpha \subset \Omega$.

Si $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ es un campo escalar continuo, (basta que $f\colon C_\alpha \longrightarrow \mathbb{R}$ sea continuo) se define la integral de f sobre α o integral de línea como

$$\int_\alpha f\, d\ell = \int_a^b f\big(\alpha(t)\big)||\alpha'(t)||\, dt.$$

Si α es **inyectiva**, se denomina integral de f sobre la curva C_α a $\displaystyle\int_{C_\alpha} f d\ell = \int_\alpha f d\ell$

- Si $f = 1$, recuperamos la noción de longitud de la curva parametrizada
- La función $d\ell(t) = |\alpha'(t)|$ se denomina también elemento de longitud

Integral de Línea de campos escalares

Sean $\alpha \in \mathcal{C}^1_s([a,b],\mathbb{R}^n)$ y $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto tal que $C_\alpha \subset \Omega$.

Si $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ es un campo escalar continuo, (basta que $f\colon C_\alpha \longrightarrow \mathbb{R}$ sea continuo) se define la integral de f sobre α o integral de línea como

$$\int_\alpha f\,d\ell = \int_a^b f\big(\alpha(t)\big)||\alpha'(t)||\,dt.$$

Si α es **inyectiva**, se denomina integral de f sobre la curva C_α a $\displaystyle\int_{C_\alpha} f d\ell = \int_\alpha f d\ell$

- Si $f = 1$, recuperamos la noción de longitud de la curva parametrizada
- Si $\varphi\colon [c,d] \longrightarrow [a,b]$ es difeomeorfismo de clase $\mathcal{C}^1([c,d])$ y $\beta = \alpha \circ \varphi$

$$\int_\beta f d\ell = \int_\alpha f d\ell$$

Integral de Línea de campos escalares

Sean $\alpha \in \mathcal{C}^1_s([a,b],\mathbb{R}^n)$ y $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto tal que $C_\alpha \subset \Omega$.

Si $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ es un campo escalar continuo, (basta que $f\colon C_\alpha \longrightarrow \mathbb{R}$ sea continuo) se define la integral de f sobre α o integral de línea como

$$\int_\alpha f\,d\ell = \int_a^b f\big(\alpha(t)\big)\,||\alpha'(t)||\,dt.$$

Si α es **inyectiva**, se denomina integral de f sobre la curva C_α a $\displaystyle\int_{C_\alpha} f d\ell = \int_\alpha f d\ell$

- Si I es un intervalo la integral de línea ha de entenderse como impropia

Integral de Línea de campos escalares

Sean $\alpha \in \mathcal{C}^1_s([a,b],\mathbb{R}^n)$ y $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto tal que $C_\alpha \subset \Omega$.

Si $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ es un campo escalar continuo, (basta que $f\colon C_\alpha \longrightarrow \mathbb{R}$ sea continuo) se define la integral de f sobre α o integral de línea como

$$\int_\alpha f\, d\ell = \int_a^b f\big(\alpha(t)\big)||\alpha'(t)||\, dt.$$

Si α es **inyectiva**, se denomina integral de f sobre la curva C_α a $\displaystyle\int_{C_\alpha} f d\ell = \int_\alpha f d\ell$

- Ejemplo: Calcular $\displaystyle\int_C x^2 d\ell$, donde C es la intersección de la **esfera** $x^2+y^2+z^2=1$ y del **plano** $x+y+z=0$

Integral de Línea de campos escalares

Sean $\alpha \in \mathcal{C}^1_s([a,b],\mathbb{R}^n)$ y $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto tal que $C_\alpha \subset \Omega$.

Si $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ es un campo escalar continuo, (basta que $f\colon C_\alpha \longrightarrow \mathbb{R}$ sea continuo) se define la integral de f sobre α o integral de línea como

$$\int_\alpha f\,d\ell = \int_a^b f\big(\alpha(t)\big)||\alpha'(t)||\,dt.$$

Si α es **inyectiva**, se denomina integral de f sobre la curva C_α a $\displaystyle\int_{C_\alpha} f d\ell = \int_\alpha f d\ell$

- Si $\alpha = \beta_1 * \cdots * \beta_k$, donde $\beta_k \in \mathcal{C}^1_s([a_{j-1},a_j])$, $j = 1,\dots,k$

$$\int_\alpha f d\ell = \int_{\beta_1} f d\ell + \cdots + \int_{\beta_k} f d\ell$$

Circulación de campos vectoriales

Sean $\alpha \in \mathcal{C}^1_s([a,b],\mathbb{R}^n)$ y $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto tal que $C_\alpha \subset \Omega$.

Circulación de campos vectoriales

Sean $\alpha \in \mathcal{C}^1_s([a,b],\mathbb{R}^n)$ y $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto tal que $C_\alpha \subset \Omega$.

Si $\mathsf{f}\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es un campo vectorial continuo, (basta que $\mathsf{f}\colon C_\alpha \longrightarrow \mathbb{R}$ sea continuo) se define la integral de f sobre α o integral de línea o **circulación de f a lo largo de α**, como

$$\int_\alpha \mathsf{f}\, d\boldsymbol{\ell} = \int_a^b \big\langle \mathsf{f}\big(\alpha(t)\big), \alpha'(t)\big\rangle\, dt.$$

Circulación de campos vectoriales

Sean $\alpha \in \mathcal{C}^1_s([a,b],\mathbb{R}^n)$ y $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto tal que $C_\alpha \subset \Omega$.

Si $\mathsf{f}\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es un campo vectorial continuo, (basta que $\mathsf{f}\colon C_\alpha \longrightarrow \mathbb{R}$ sea continuo) se define la integral de f sobre α o integral de línea o **circulación de f a lo largo de α**, como

$$\int_\alpha \mathsf{f}\, d\boldsymbol{\ell} = \int_a^b \big\langle \mathsf{f}\big(\alpha(t)\big), \alpha'(t)\big\rangle\, dt.$$

- Si $\mathsf{f} = (f_1,\dots,f_n)$ y $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_n)$, entonces

$$\int_\alpha \mathsf{f}\, d\boldsymbol{\ell} = \int_a^b \Big(f_1\big(\alpha(t)\big)\alpha_1'(t) + \cdots + f_n\big(\alpha(t)\big)\alpha_n'(t)\Big)dt$$

Circulación de campos vectoriales

Sean $\alpha \in \mathcal{C}^1_s([a,b],\mathbb{R}^n)$ y $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto tal que $C_\alpha \subset \Omega$.

Si $\mathsf{f}\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es un campo vectorial continuo, (basta que $\mathsf{f}\colon C_\alpha \longrightarrow \mathbb{R}$ sea continuo) se define la integral de f sobre α o integral de línea o **circulación de f a lo largo de α**, como

$$\int_\alpha \mathsf{f}\, d\boldsymbol{\ell} = \int_a^b \big\langle \mathsf{f}\big(\alpha(t)\big), \alpha'(t)\big\rangle\, dt.$$

- Si $\mathsf{f} = (f_1,\dots,f_n)$ y $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_n)$, entonces
$$\int_\alpha \mathsf{f}\, d\boldsymbol{\ell} = \int_a^b \Big(f_1\big(\alpha(t)\big)\alpha_1'(t) + \cdots + f_n\big(\alpha(t)\big)\alpha_n'(t)\Big) dt$$
- Si $\mathsf{f} = (f_1,\dots,f_n)$, entonces la circulación de f también se denota
$$\int_\alpha \mathsf{f}\, d\boldsymbol{\ell} = \int_\alpha \Big(f_1 dx_1 + \cdots + f_n dx_n \Big)$$

Circulación de campos vectoriales

Sean $\alpha \in \mathcal{C}^1_s([a,b],\mathbb{R}^n)$ y $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto tal que $C_\alpha \subset \Omega$.

Si $\mathsf{f}\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es un campo vectorial continuo, (basta que $\mathsf{f}\colon C_\alpha \longrightarrow \mathbb{R}$ sea continuo) se define la integral de f sobre α o integral de línea o **circulación de f a lo largo de α**, como

$$\int_\alpha \mathsf{f}\, d\boldsymbol{\ell} = \int_a^b \big\langle \mathsf{f}\big(\alpha(t)\big), \alpha'(t)\big\rangle\, dt.$$

- Si la curva α es cerrada, entonces la circulación se denota como

$$\oint_\alpha \mathsf{f}\, d\boldsymbol{\ell} = \oint_\alpha \Big(f_1 dx_1 + \cdots + f_n dx_n\Big)$$

Circulación de campos vectoriales

Sean $\alpha \in \mathcal{C}^1_s([a,b],\mathbb{R}^n)$ y $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto tal que $C_\alpha \subset \Omega$.

Si $\mathsf{f}\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es un campo vectorial continuo, (basta que $\mathsf{f}\colon C_\alpha \longrightarrow \mathbb{R}$ sea continuo) se define la integral de f sobre α o integral de línea o **circulación de f a lo largo de α**, como

$$\int_\alpha \mathsf{f}\, d\boldsymbol{\ell} = \int_a^b \big\langle \mathsf{f}\big(\alpha(t)\big), \alpha'(t)\big\rangle\, dt.$$

- Si α es regular: $\alpha'(t) = \dfrac{\alpha'(t)}{|\alpha'(t)|}\,|\alpha'(t)| = \mathsf{t}(t)\,|\alpha'(t)|$

Circulación de campos vectoriales

Sean $\alpha \in \mathcal{C}^1_s([a,b],\mathbb{R}^n)$ y $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto tal que $C_\alpha \subset \Omega$.

Si $\mathsf{f}\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es un campo vectorial continuo, (basta que $\mathsf{f}\colon C_\alpha \longrightarrow \mathbb{R}$ sea continuo) se define la integral de f sobre α o integral de línea o **circulación de f a lo largo de α**, como

$$\int_\alpha \mathsf{f}\, d\boldsymbol{\ell} = \int_a^b \big\langle \mathsf{f}\big(\alpha(t)\big), \alpha'(t)\big\rangle\, dt.$$

- Si α es regular: $\alpha'(t) = \dfrac{\alpha'(t)}{|\alpha'(t)|}\,|\alpha'(t)| = \mathsf{t}(t)\,|\alpha'(t)|$
- El campo escalar $\mathsf{f}_\mathsf{t} = \langle \mathsf{f}, \mathsf{t}\rangle$ es la componente tangencial de f

Circulación de campos vectoriales

Sean $\alpha \in \mathcal{C}^1_s([a,b],\mathbb{R}^n)$ y $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto tal que $C_\alpha \subset \Omega$.

Si $\mathsf{f}\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es un campo vectorial continuo, (basta que $\mathsf{f}\colon C_\alpha \longrightarrow \mathbb{R}$ sea continuo) se define la integral de f sobre α o integral de línea o **circulación de f a lo largo de α**, como

$$\int_\alpha \mathsf{f}\, d\boldsymbol{\ell} = \int_a^b \big\langle \mathsf{f}\big(\alpha(t)\big), \alpha'(t)\big\rangle\, dt.$$

- Si α es <u>regular</u>: $\alpha'(t) = \dfrac{\alpha'(t)}{|\alpha'(t)|}\,|\alpha'(t)| = \mathsf{t}(t)\,|\alpha'(t)|$
- El campo escalar $\mathsf{f}_\mathsf{t} = \langle \mathsf{f}, \mathsf{t}\rangle$ es la componente tangencial de f
- $\boxed{\displaystyle\int_\alpha \mathsf{f}\, d\boldsymbol{\ell} = \int_\alpha \mathsf{f}_\mathsf{t}\, d\ell}$

Circulación de campos vectoriales

Sean $\alpha \in \mathcal{C}_s^1([a,b],\mathbb{R}^n)$ y $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto tal que $C_\alpha \subset \Omega$.

Si $\mathsf{f}\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es un campo vectorial continuo, (basta que $\mathsf{f}\colon C_\alpha \longrightarrow \mathbb{R}$ sea continuo) se define la integral de f sobre α o integral de línea o **circulación de f a lo largo de α**, como

$$\int_\alpha \mathsf{f}\, d\boldsymbol{\ell} = \int_a^b \big\langle \mathsf{f}\big(\alpha(t)\big), \alpha'(t)\big\rangle\, dt.$$

- Si $\alpha = \alpha_1 * \cdots * \alpha_k$, donde $\alpha_k \in \mathcal{C}_s^1([a_{j-1},a_j])$, $j = 1,\dots,k$

$$\int_\alpha \mathsf{f} d\boldsymbol{\ell} = \int_{\alpha_1} \mathsf{f} d\boldsymbol{\ell} + \cdots + \int_{\alpha_k} \mathsf{f} d\boldsymbol{\ell}$$

Circulación de campos vectoriales

Sean $\alpha \in \mathcal{C}^1_s([a,b],\mathbb{R}^n)$ y $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto tal que $C_\alpha \subset \Omega$.

Si $\mathsf{f}\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es un campo vectorial continuo, (basta que $\mathsf{f}\colon C_\alpha \longrightarrow \mathbb{R}$ sea continuo) se define la integral de f sobre α o integral de línea o **circulación de f a lo largo de α**, como

$$\int_\alpha \mathsf{f}\, d\boldsymbol{\ell} = \int_a^b \big\langle \mathsf{f}\big(\alpha(t)\big), \alpha'(t)\big\rangle\, dt.$$

- Si $\varphi\colon [c,d] \longrightarrow [a,b]$ es difeomeorfismo de clase $\mathcal{C}^1([c,d])$ y $\beta = \alpha \circ \varphi$

$$\int_\beta \mathsf{f} d\boldsymbol{\ell} = \pm \int_\alpha \mathsf{f} d\boldsymbol{\ell}$$

donde el signo depende de si α y β tienen la misma orientación u opuesta.

Circulación de campos vectoriales

Sean $\alpha \in \mathcal{C}^1_s([a,b],\mathbb{R}^n)$ y $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto tal que $C_\alpha \subset \Omega$.

Si $\mathsf{f}\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es un campo vectorial continuo, (basta que $\mathsf{f}\colon C_\alpha \longrightarrow \mathbb{R}$ sea continuo) se define la integral de f sobre α o integral de línea o **circulación de f a lo largo de α**, como

$$\int_\alpha \mathsf{f}\, d\boldsymbol{\ell} = \int_a^b \big\langle \mathsf{f}\big(\alpha(t)\big), \alpha'(t)\big\rangle\, dt.$$

- Si $\varphi\colon [c,d] \longrightarrow [a,b]$ es difeomeorfismo de clase $\mathcal{C}^1([c,d])$ y $\beta = \alpha \circ \varphi$

$$\int_\beta \mathsf{f} d\boldsymbol{\ell} = \pm \int_\alpha \mathsf{f} d\boldsymbol{\ell}$$

donde el signo depende de si α y β tienen la misma orientación u opuesta.

- Si α es **inyectiva**, se denomina circulación de f a lo largo de la curva orientada C_α a $\displaystyle\int_{C_\alpha} \mathsf{f} d\boldsymbol{\ell} = \int_\alpha \mathsf{f} d\boldsymbol{\ell}$

Circulación de campos vectoriales

Sean $\alpha \in \mathcal{C}^1_s([a,b],\mathbb{R}^n)$ y $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto tal que $C_\alpha \subset \Omega$.

Si $\mathsf{f}\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es un campo vectorial continuo, (basta que $\mathsf{f}\colon C_\alpha \longrightarrow \mathbb{R}$ sea continuo) se define la integral de f sobre α o integral de línea o **circulación de f a lo largo de α**, como

$$\int_\alpha \mathsf{f}\, d\boldsymbol{\ell} = \int_a^b \big\langle \mathsf{f}\big(\alpha(t)\big), \alpha'(t)\big\rangle\, dt.$$

- Si $\varphi\colon [c,d] \longrightarrow [a,b]$ es difeomeorfismo de clase $\mathcal{C}^1([c,d])$ y $\beta = \alpha \circ \varphi$

$$\int_\beta \mathsf{f} d\boldsymbol{\ell} = \pm \int_\alpha \mathsf{f} d\boldsymbol{\ell}$$

donde el signo depende de si α y β tienen la misma orientación u opuesta.

- Si α es **inyectiva** y $-C_\alpha$ es la curva C_α con la orientación opuesta

$$\int_{-C_\alpha} \mathsf{f} d\boldsymbol{\ell} = -\int_{C_\alpha} \mathsf{f} d\boldsymbol{\ell}$$

Circulación de campos vectoriales

Sean $\alpha \in \mathcal{C}^1_s([a,b],\mathbb{R}^n)$, $\beta \in \mathcal{C}^1_s([c,d],\mathbb{R}^n)$, inyectivas y equivalentes y $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto tal que $C_\alpha = C_\beta = C \subset \Omega$.
Para cada campo vectorial continuo $\mathsf{f}\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ (basta que f sea continuo en C) se tiene que $\displaystyle\int_\alpha \mathsf{f} d\boldsymbol{\ell} = \pm \int_\beta \mathsf{f} d\boldsymbol{\ell}$, dependiendo de si α y β tienen la misma orientación $(+)$ u orientación opuesta $(-)$.

Circulación de campos vectoriales

Sean $\alpha \in \mathcal{C}^1_s([a,b],\mathbb{R}^n)$, $\beta \in \mathcal{C}^1_s([c,d],\mathbb{R}^n)$, inyectivas y equivalentes y $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto tal que $C_\alpha = C_\beta = C \subset \Omega$.
Para cada campo vectorial continuo $\mathsf{f}\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ (basta que f sea continuo en C) se tiene que $\displaystyle\int_\alpha \mathsf{f}\, d\boldsymbol{\ell} = \pm \int_\beta \mathsf{f}\, d\boldsymbol{\ell}$, dependiendo de si α y β tienen la misma orientación ($+$) u orientación opuesta ($-$).

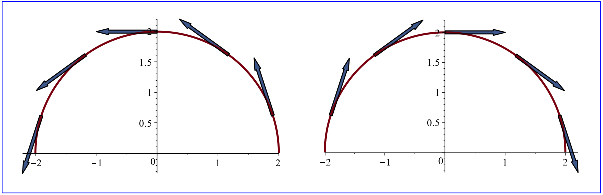
- **Ejemplo:** Calcular la circulación de $\mathsf{f}(x,y) = (x, yx)$ a lo largo de la semicircunferencia $x^2 + y^2 = 4$, con $y \geq 0$ utilizando las siguientes parametrizaciones:

1. $\alpha(t) = \big(2\cos(t), 2\mathrm{sen}(t)\big)$, $t \in [0,\pi]$.
2. $\beta(t) = \big(2\cos(t), -2\mathrm{sen}(t)\big)$, $t \in [-\pi, 0]$.

Circulación de campos vectoriales

Sean $\alpha \in \mathcal{C}^1_s([a,b],\mathbb{R}^n)$, $\beta \in \mathcal{C}^1_s([c,d],\mathbb{R}^n)$, inyectivas y equivalentes y $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto tal que $C_\alpha = C_\beta = C \subset \Omega$.
Para cada campo vectorial continuo $\mathsf{f}\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ (basta que f sea continuo en C) se tiene que $\displaystyle\int_\alpha \mathsf{f} d\boldsymbol{\ell} = \pm \int_\beta \mathsf{f} d\boldsymbol{\ell}$, dependiendo de si α y β tienen la misma orientación ($+$) u orientación opuesta ($-$).

▶ Ejemplo: Calcular la circulación de $\mathsf{f}(x,y) = (x, yx)$ a lo largo de la semicircunferencia $x^2 + y^2 = 4$, con $y \geq 0$



Orientación positiva (α izquierda) y opuesta (β derecha)

Circulación de campos vectoriales

Calculeu les integrals de línia $\displaystyle\int_C \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{\ell}$ següents:

1. $\mathbf{F}(x, y) = (x + y, y - x)$, C és l'arc de l'el·lipse $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ orientat des del punt $(1, 0)$ fins al $(0, 2)$.
2. $\mathbf{F}(x, y) = (2x + y^2, 3y - 4x)$, C és la frontera de $R = \left\{(x, y) : y^2 \leq x,\ \ y \geq x^2\right\}$, recorreguda en sentit positiu.
3. $\displaystyle\oint_C \big(ydx + zdy + xdz\big)$, on C és la corba intersecció de $z = xy$ amb $x^2 + y^2 = 1$, orientada de manera que la seva projecció sobre el pla XY sigui positiva.

SUPERFICIES PARAMETRIZADAS

Curso 2019-2020

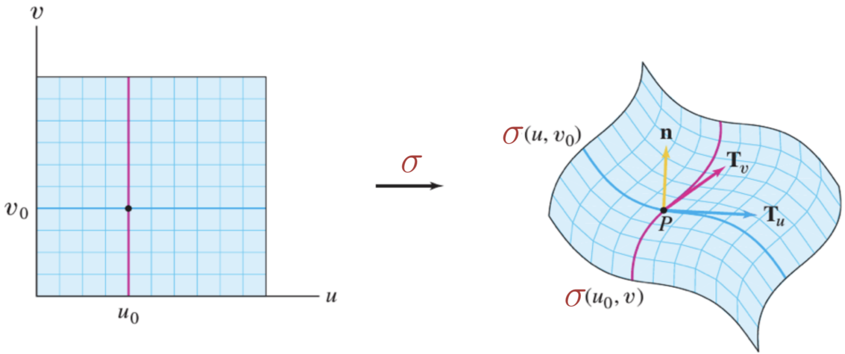


Imagen: Evy Salcedo, pbx-brasil.com

Superficies Simples Parametrizadas

Consideraremos $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un abierto, y $\sigma\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$ de clase $\mathcal{C}^k(\Omega;\mathbb{R}^n)$, $k \geq 1$; es decir, si $\sigma(u,v) = \big(\sigma_1(u,v), \sigma_2(u,v), \sigma_3(u,v)\big)$, entonces $\sigma_j \in \mathcal{C}^k(\Omega)$, $j = 1,2,3$. Supondremos, además, que σ es **inyectiva**

- El conjunto $S = \big\{\sigma(u,v) : (u,v) \in \Omega\big\} \subset \mathbb{R}^3$ se denomina superficie parametrizada y la aplicación σ, parametrización de S.
- S se denomina regular si $\mathrm{D}_\sigma = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \sigma_1}{\partial u} & \dfrac{\partial \sigma_1}{\partial v} \\ \dfrac{\partial \sigma_2}{\partial u} & \dfrac{\partial \sigma_2}{\partial v} \\ \dfrac{\partial \sigma_3}{\partial u} & \dfrac{\partial \sigma_3}{\partial v} \end{bmatrix}$ tiene rango 2.
- Si S es regular, $\sigma_u = \left(\dfrac{\partial \sigma_1}{\partial u}, \dfrac{\partial \sigma_2}{\partial u}, \dfrac{\partial \sigma_3}{\partial u}\right)^\top$ y $\sigma_v = \left(\dfrac{\partial \sigma_1}{\partial v}, \dfrac{\partial \sigma_2}{\partial v}, \dfrac{\partial \sigma_3}{\partial v}\right)^\top$ se denominan campos tangentes a S.

Superficies Simples Parametrizadas

Consideraremos $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un abierto, y $\sigma\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$ de clase $\mathcal{C}^k(\Omega;\mathbb{R}^n)$, $k \geq 1$; es decir, si $\sigma(u,v) = \big(\sigma_1(u,v), \sigma_2(u,v), \sigma_3(u,v)\big)$, entonces $\sigma_j \in \mathcal{C}^k(\Omega)$, $j = 1,2,3$. Supondremos, además, que σ es **inyectiva**

- El conjunto $S = \big\{\sigma(u,v) : (u,v) \in \Omega\big\} \subset \mathbb{R}^3$ se denomina superficie parametrizada y la aplicación σ, parametrización de S.
- S se denomina regular si $\mathsf{D}_\sigma = [\sigma_u, \sigma_v]$ tiene rango 2.
- Si S es regular, σ_u y σ_v se denominan campos tangentes a S.
- Si S es regular, $\mathrm{sg}\{\sigma_u, \sigma_v\}$ se denomina plano tangente a S.
- Si S es regular, $\sigma_u \times \sigma_v \neq 0$ se denomina campo normal a S.

Superficies Simples Parametrizadas

Consideraremos $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un abierto, y $\sigma\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$ de clase $\mathcal{C}^k(\Omega;\mathbb{R}^n)$, $k \geq 1$; es decir, si $\sigma(u,v) = \big(\sigma_1(u,v), \sigma_2(u,v), \sigma_3(u,v)\big)$, entonces $\sigma_j \in \mathcal{C}^k(\Omega)$, $j = 1,2,3$. Supondremos, además, que σ es **inyectiva**

- El conjunto $S = \big\{\sigma(u,v) : (u,v) \in \Omega\big\} \subset \mathbb{R}^3$ se denomina superficie parametrizada y la aplicación σ, parametrización de S.
- S se denomina regular si $\mathsf{D}_\sigma = [\sigma_u, \sigma_v]$ tiene rango 2.
- Si S es regular, σ_u y σ_v se denominan campos tangentes a S.
- Si S es regular, $\mathrm{sg}\{\sigma_u, \sigma_v\}$ se denomina plano tangente a S.
- Si S es regular, $\sigma_u \times \sigma_v \neq 0$ se denomina campo normal a S

  $\rightsquigarrow$ $\mathsf{n}(u,v) = \dfrac{\sigma_u \times \sigma_v}{|\sigma_u \times \sigma_v|}$ es el campo normal unitario exterior a S

  $\rightsquigarrow$ Diremos que S tiene la **orientación** determinada por σ

Superficies Simples Parametrizadas

Consideraremos $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un abierto, y $\sigma\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$ de clase $\mathcal{C}^k(\Omega;\mathbb{R}^n)$, $k \geq 1$; es decir, si $\sigma(u,v) = \big(\sigma_1(u,v), \sigma_2(u,v), \sigma_3(u,v)\big)$, entonces $\sigma_j \in \mathcal{C}^k(\Omega)$, $j = 1,2,3$. Supondremos, además, que σ es **inyectiva**

- El conjunto $S = \big\{\sigma(u,v) : (u,v) \in \Omega\big\} \subset \mathbb{R}^3$ se denomina superficie parametrizada y la aplicación σ, parametrización de S.
- S se denomina regular si $\mathsf{D}_\sigma = [\sigma_u, \sigma_v]$ tiene rango 2.
- Si S es regular, σ_u y σ_v se denominan campos tangentes a S.
- Si S es regular, $\mathrm{sg}\{\sigma_u, \sigma_v\}$ se denomina plano tangente a S.
- Si S es regular, $\sigma_u \times \sigma_v \neq 0$ se denomina campo normal a S

- $|\sigma_u \times \sigma_v| = \sqrt{g(u,v)} = \sqrt{EG - F^2}$, donde $g(u,v) = \det(\mathsf{D}_\sigma^\top \mathsf{D}_\sigma)$ y es el área del paralelogramo de lados σ_u y σ_v.

Superficies Simples Parametrizadas

Consideraremos $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un abierto, y $\sigma\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$ de clase $\mathcal{C}^k(\Omega;\mathbb{R}^n)$, $k \geq 1$; es decir, si $\sigma(u,v) = \big(\sigma_1(u,v), \sigma_2(u,v), \sigma_3(u,v)\big)$, entonces $\sigma_j \in \mathcal{C}^k(\Omega)$, $j = 1,2,3$. Supondremos, además, que σ es **inyectiva**

- El conjunto $S = \big\{\sigma(u,v) : (u,v) \in \Omega\big\} \subset \mathbb{R}^3$ se denomina superficie parametrizada y la aplicación σ, parametrización de S.
- S se denomina regular si $\mathsf{D}_\sigma = [\sigma_u, \sigma_v]$ tiene rango 2.
- Si S es regular, σ_u y σ_v se denominan campos tangentes a S.
- Si S es regular, $\operatorname{sg}\{\sigma_u, \sigma_v\}$ se denomina plano tangente a S.
- Si S es regular, $\sigma_u \times \sigma_v \neq 0$ se denomina campo normal a S

- $|\sigma_u \times \sigma_v| = \sqrt{g(u,v)} = \sqrt{EG - F^2}$, donde $g(u,v) = \det(\mathsf{D}_\sigma^\top \mathsf{D}_\sigma)$ y es el área del paralelogramo de lados σ_u y σ_v.

- Ejemplo: $\sigma\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\sigma(x,y) = \big(x, y, u(x,y)\big)$, $u \in \mathcal{C}^1(\Omega)$

Superficies Simples Parametrizadas

Consideraremos $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un abierto, y $\sigma\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$ de clase $\mathcal{C}^k(\Omega;\mathbb{R}^n)$, $k \geq 1$; es decir, si $\sigma(u,v) = \big(\sigma_1(u,v), \sigma_2(u,v), \sigma_3(u,v)\big)$, entonces $\sigma_j \in \mathcal{C}^k(\Omega)$, $j = 1,2,3$. Supondremos, además, que σ es **inyectiva**

- El conjunto $S = \big\{\sigma(u,v) : (u,v) \in \Omega\big\} \subset \mathbb{R}^3$ se denomina superficie parametrizada y la aplicación σ, parametrización de S.
- S se denomina regular si $\mathsf{D}_\sigma = [\sigma_u, \sigma_v]$ tiene rango 2.
- Si S es regular, σ_u y σ_v se denominan campos tangentes a S.
- Si S es regular, $\mathrm{sg}\{\sigma_u, \sigma_v\}$ se denomina plano tangente a S.
- Si S es regular, $\sigma_u \times \sigma_v \neq 0$ se denomina campo normal a S

- Si $\widehat{\Omega} = \big\{(v,u) \in \mathbb{R}^2 : (u,v) \in \Omega\big\}$ y $\widehat{\sigma}\colon \widehat{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ está dada por $\widehat{\sigma}(v,u) = \sigma(u,v)$, $\widehat{\Omega}$ es abierto y $\widehat{\sigma}$ es también una parametrización de S, cuyo campo normal unitario es $\widehat{\mathsf{n}}(v,u) = -\mathsf{n}(u,v)$. A $\widehat{\sigma}$ se le denomina parametrización opuesta a σ y se denotará como $-S$.

Superficies Simples Parametrizadas

Consideraremos $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un abierto, y $\sigma\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$ de clase $\mathcal{C}^k(\Omega;\mathbb{R}^n)$, $k \geq 1$; es decir, si $\sigma(u,v) = \big(\sigma_1(u,v), \sigma_2(u,v), \sigma_3(u,v)\big)$, entonces $\sigma_j \in \mathcal{C}^k(\Omega)$, $j = 1,2,3$. Supondremos, además, que σ es **inyectiva**

- El conjunto $S = \big\{\sigma(u,v) : (u,v) \in \Omega\big\} \subset \mathbb{R}^3$ se denomina superficie parametrizada y la aplicación σ, parametrización de S.
- S se denomina regular si $\mathrm{D}_\sigma = [\sigma_u, \sigma_v]$ tiene rango 2.
- Si S es regular, σ_u y σ_v se denominan campos tangentes a S.
- Si S es regular, $\mathrm{sg}\{\sigma_u, \sigma_v\}$ se denomina plano tangente a S.
- Si S es regular, $\sigma_u \times \sigma_v \neq 0$ se denomina campo normal a S

- Si $\widehat{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$ es abierto y $\widehat{\sigma} \in \mathcal{C}^k(\widehat{\Omega};\mathbb{R}^n)$, diremos que σ y $\widehat{\sigma}$ son **equivalentes** si existe $\varphi\colon \widehat{\Omega} \longrightarrow \Omega$ difeomorfismo de clase $\mathcal{C}^1(\widehat{\Omega};\Omega)$ tal que $\widehat{\sigma} = \sigma \circ \varphi$.

Superficies Simples Parametrizadas

Consideraremos $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ un abierto, y $\sigma\colon\Omega\longrightarrow\mathbb{R}^3$ de clase $\mathcal{C}^k(\Omega;\mathbb{R}^n)$, $k\geq 1$; es decir, si $\sigma(u,v)=\big(\sigma_1(u,v),\sigma_2(u,v),\sigma_3(u,v)\big)$, entonces $\sigma_j\in\mathcal{C}^k(\Omega)$, $j=1,2,3$. Supondremos, además, que σ es **inyectiva**

- El conjunto $S=\big\{\sigma(u,v):(u,v)\in\Omega\big\}\subset\mathbb{R}^3$ se denomina superficie parametrizada y la aplicación σ, parametrización de S.
- S se denomina regular si $\mathsf{D}_\sigma=[\sigma_u,\sigma_v]$ tiene rango 2.
- Si S es regular, σ_u y σ_v se denominan campos tangentes a S.
- Si S es regular, $\mathrm{sg}\{\sigma_u,\sigma_v\}$ se denomina plano tangente a S.
- Si S es regular, $\sigma_u\times\sigma_v\neq 0$ se denomina campo normal a S

- Si $\widehat{\Omega}\subset\mathbb{R}^n$ es abierto y $\widehat{\sigma}\in\mathcal{C}^k(\widehat{\Omega};\mathbb{R}^n)$, diremos que σ y $\widehat{\sigma}$ son **equivalentes** si existe $\varphi\colon\widehat{\Omega}\longrightarrow\Omega$ difeomorfismo de clase $\mathcal{C}^1(\widehat{\Omega};\Omega)$ tal que $\widehat{\sigma}=\sigma\circ\varphi\Longrightarrow\mathsf{D}_{\widehat{\sigma}}=\mathsf{D}_\sigma\mathsf{D}_\varphi$ y $\widehat{\sigma}_{\hat{u}}\times\widehat{\sigma}_{\hat{v}}=(\det\mathsf{D}_\varphi)\sigma_u\times\sigma_v$.

Superficies Simples Parametrizadas

Consideraremos $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un abierto, y $\sigma\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$ de clase $\mathcal{C}^k(\Omega;\mathbb{R}^n)$, $k \geq 1$; es decir, si $\sigma(u,v) = \big(\sigma_1(u,v), \sigma_2(u,v), \sigma_3(u,v)\big)$, entonces $\sigma_j \in \mathcal{C}^k(\Omega)$, $j = 1,2,3$. Supondremos, además, que σ es **inyectiva**

- El conjunto $S = \big\{\sigma(u,v) : (u,v) \in \Omega\big\} \subset \mathbb{R}^3$ se denomina superficie parametrizada y la aplicación σ, parametrización de S.
- S se denomina regular si $\mathsf{D}_\sigma = [\sigma_u, \sigma_v]$ tiene rango 2.
- Si S es regular, σ_u y σ_v se denominan campos tangentes a S.
- Si S es regular, $\mathrm{sg}\{\sigma_u, \sigma_v\}$ se denomina plano tangente a S.
- Si S es regular, $\sigma_u \times \sigma_v \neq 0$ se denomina campo normal a S

- Si $\widehat{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$ es abierto y $\widehat{\sigma} \in \mathcal{C}^k(\widehat{\Omega};\mathbb{R}^n)$, diremos que σ y $\widehat{\sigma}$ son **equivalentes** si existe $\varphi\colon \widehat{\Omega} \longrightarrow \Omega$ difeomorfismo de clase $\mathcal{C}^1(\widehat{\Omega};\Omega)$ tal que $\widehat{\sigma} = \sigma \circ \varphi \Longrightarrow \mathsf{D}_{\widehat{\sigma}} = \mathsf{D}_\sigma \mathsf{D}_\varphi$. Si $\widehat{\Omega}$ es <u>conexo</u>, $\det \mathsf{D}_\varphi$ tiene signo constante y $\widehat{\sigma}$ y σ tienen la **misma orientación** si $\det \mathsf{D}_\varphi > 0$

Superficies Simples Parametrizadas

Consideraremos $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un abierto, y $\sigma\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$ de clase $\mathcal{C}^k(\Omega;\mathbb{R}^n)$, $k \geq 1$; es decir, si $\sigma(u,v) = \big(\sigma_1(u,v),\sigma_2(u,v),\sigma_3(u,v)\big)$, entonces $\sigma_j \in \mathcal{C}^k(\Omega)$, $j = 1,2,3$. Supondremos, además, que σ es **inyectiva**

- El conjunto $S = \big\{\sigma(u,v) : (u,v) \in \Omega\big\} \subset \mathbb{R}^3$ se denomina superficie parametrizada y la aplicación σ, parametrización de S.
- S se denomina regular si $\mathsf{D}_\sigma = [\sigma_u, \sigma_v]$ tiene rango 2.
- Si S es regular, σ_u y σ_v se denominan campos tangentes a S.
- Si S es regular, $\mathrm{sg}\{\sigma_u,\sigma_v\}$ se denomina plano tangente a S.
- Si S es regular, $\sigma_u \times \sigma_v \neq 0$ se denomina campo normal a S

- Si $\widehat{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$ es abierto y $\widehat{\sigma} \in \mathcal{C}^k(\widehat{\Omega};\mathbb{R}^n)$, diremos que σ y $\widehat{\sigma}$ son **equivalentes** si existe $\varphi\colon \widehat{\Omega} \longrightarrow \Omega$ difeomorfismo de clase $\mathcal{C}^1(\widehat{\Omega};\Omega)$ tal que $\widehat{\sigma} = \sigma\circ\varphi \Longrightarrow \mathsf{D}_{\widehat{\sigma}} = \mathsf{D}_\sigma \mathsf{D}_\varphi$. Si $\widehat{\Omega}$ es <u>conexo</u>, $\det \mathsf{D}_\varphi$ tiene signo constante y $\widehat{\sigma}$ y σ tienen la **misma orientación** sii $\widehat{\mathsf{n}}(\hat{u},\hat{v}) = \mathsf{n}(u,v)$

Integral de Campos Escalares sobre Superficies

Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un abierto y $\sigma\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$ de clase $\mathcal{C}^k(\Omega;\mathbb{R}^n)$, $k \geq 1$. Supondremos, además, que σ es **inyectiva** y consideraremos la superficie parametrizada $S = \sigma(\Omega)$, que supondremos **regular**.

Si $f\colon S \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función, que habitualmente supondremos continua, entonces se define la integral de f sobre la superficie S como

$$\int_S f\,dS = \int_\Omega f\big(\sigma(u,v)\big)|\sigma_u \times \sigma_v|\,dudv.$$

Integral de Campos Escalares sobre Superficies

Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un abierto y $\sigma\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$ de clase $\mathcal{C}^k(\Omega;\mathbb{R}^n)$, $k \geq 1$. Supondremos, además, que σ es **inyectiva** y consideraremos la superficie parametrizada $S = \sigma(\Omega)$, que supondremos **regular**.

Si $f\colon S \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función, que habitualmente supondremos continua, entonces se define la integral de f sobre la superficie S como

$$\int_S f\,dS = \int_\Omega f\big(\sigma(u,v)\big)|\sigma_u \times \sigma_v|\,dudv.$$

- La integral existe si se satisfacen las siguientes condiciones:
  1. Ω es medible Jordan y $\overline{\Omega}$ es compacto.
  2. $\sigma \in \mathcal{C}^k(\widehat{\Omega};\mathbb{R}^n)$ donde $\widehat{\Omega}$ es un abierto tal que $\overline{\Omega} \subset \widehat{\Omega}$.
  3. $f\colon \widetilde{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua, donde $\widetilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^3$ es abierto y $\overline{S} \subset \widetilde{\Omega}$

Integral de Campos Escalares sobre Superficies

Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un abierto y $\sigma\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$ de clase $\mathcal{C}^k(\Omega;\mathbb{R}^n)$, $k \geq 1$. Supondremos, además, que σ es **inyectiva** y consideraremos la superficie parametrizada $S = \sigma(\Omega)$, que supondremos **regular**.

Si $f\colon S \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función, que habitualmente supondremos continua, entonces se define la integral de f sobre la superficie S como

$$\int_S f\, dS = \int_\Omega f\big(\sigma(u,v)\big)|\sigma_u \times \sigma_v|\, dudv.$$

- La integral existe si se satisfacen las siguientes condiciones:
  1. Ω es medible Jordan y $\overline{\Omega}$ es compacto.
  2. $\sigma \in \mathcal{C}^k(\widehat{\Omega};\mathbb{R}^n)$ donde $\widehat{\Omega}$ es un abierto tal que $\overline{\Omega} \subset \widehat{\Omega}$.
  3. $f\colon \widetilde{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua, donde $\widetilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^3$ es abierto y $\overline{S} \subset \widetilde{\Omega}$
- También podemos entenderla como integral impropia

Integral de Campos Escalares sobre Superficies

Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un abierto y $\sigma\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$ de clase $\mathcal{C}^k(\Omega;\mathbb{R}^n)$, $k \geq 1$. Supondremos, además, que σ es **inyectiva** y consideraremos la superficie parametrizada $S = \sigma(\Omega)$, que supondremos **regular**.

Si $f\colon S \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función, que habitualmente supondremos continua, entonces se define la integral de f sobre la superficie S como

$$\int_S f\, dS = \int_\Omega f\big(\sigma(u,v)\big)|\sigma_u \times \sigma_v|\, dudv.$$

Cuando $f = 1$, el valor

$$\mathsf{a}(S) = \int_S dS = \int_\Omega |\sigma_u \times \sigma_v|\, dudv$$

define el área de S.

Integral de Campos Escalares sobre Superficies

Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un abierto y $\sigma\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$ de clase $\mathcal{C}^k(\Omega;\mathbb{R}^n)$, $k \geq 1$. Supondremos, además, que σ es **inyectiva** y consideraremos la superficie parametrizada $S = \sigma(\Omega)$, que supondremos **regular**.

Si $f\colon S \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función, que habitualmente supondremos continua, entonces se define la integral de f sobre la superficie S como

$$\int_S f\, dS = \int_\Omega f\big(\sigma(u,v)\big)|\sigma_u \times \sigma_v|\, dudv.$$

Cuando $f = 1$, el valor

$$\mathsf{a}(S) = \int_S dS = \int_\Omega |\sigma_u \times \sigma_v|\, dudv$$

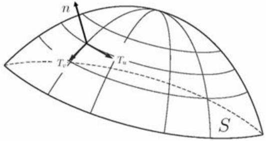
define el área de S.

- La función $dS(u,v) = |\sigma_u \times \sigma_v|$ se denomina elemento de área

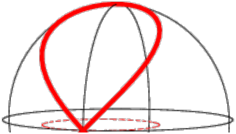
Integral de Campos Escalares sobre Superficies

Calculeu:

1. L'àrea del **Casquet esfèric** d'alçada h en l'esfera de radi a.



2. L'àrea de la **Superfície de Viviani**: Si
$a > 0$, $S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = a^2,\ x^2+y^2 = ay,\ \ z \geq 0\right\}$.



3. L'área de la superfície de $\mathbb{R}^3$ parametritzada per la funció
$g(u,v) = (u-v, u+v, uv)$, $u^2+v^2 < 1$.
4. La integral de $f(x,y,z) = z$, sobre $z = 1-x^2-y^2$, $z > 0$.

Integral de Campos Vectoriales sobre Superficies

Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un abierto y $\sigma\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$ de clase $\mathcal{C}^k(\Omega;\mathbb{R}^n)$, $k \geq 1$. Supondremos, además, que σ es **inyectiva** y consideraremos la superficie parametrizada $S = \sigma(\Omega)$, que supondremos **regular**.

Si $f\colon S \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es un campo vectorial, que habitualmente supondremos continuo, entonces se define la integral de f sobre la superficie S, orientada con la orientación de σ, como

$$\int_\sigma \mathsf{f}\, d\boldsymbol{S} = \int_S \mathsf{f}\, d\boldsymbol{S} = \int_\Omega \langle \mathsf{f}\big(\sigma(u,v)\big), \sigma_u \times \sigma_v \rangle \, du dv.$$

Integral de Campos Vectoriales sobre Superficies

Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un abierto y $\sigma\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$ de clase $\mathcal{C}^k(\Omega;\mathbb{R}^n)$, $k \geq 1$. Supondremos, además, que σ es **inyectiva** y consideraremos la superficie parametrizada $S = \sigma(\Omega)$, que supondremos **regular**.

Si $f\colon S \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es un campo vectorial, que habitualmente supondremos continuo, entonces se define la integral de f sobre la superficie S, orientada con la orientación de σ, como

$$\int_\sigma \mathsf{f}\, d\boldsymbol{S} = \int_S \mathsf{f}\, d\boldsymbol{S} = \int_\Omega \langle \mathsf{f}\big(\sigma(u,v)\big), \sigma_u \times \sigma_v \rangle\, du dv.$$

- La integral existe si se satisfacen las siguientes condiciones:
  1. Ω es medible Jordan y $\overline{\Omega}$ es compacto.
  2. $\sigma \in \mathcal{C}^k(\widehat{\Omega};\mathbb{R}^n)$ donde $\widehat{\Omega}$ es un abierto tal que $\overline{\Omega} \subset \widehat{\Omega}$.
  3. $\mathsf{f}\colon \widetilde{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es continuo, donde $\widetilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^3$ es abierto y $\overline{S} \subset \widetilde{\Omega}$

Integral de Campos Vectoriales sobre Superficies

Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un abierto y $\sigma\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$ de clase $\mathcal{C}^k(\Omega;\mathbb{R}^n)$, $k \geq 1$. Supondremos, además, que σ es **inyectiva** y consideraremos la superficie parametrizada $S = \sigma(\Omega)$, que supondremos **regular**.

Si $f\colon S \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es un campo vectorial, que habitualmente supondremos continuo, entonces se define la integral de f sobre la superficie S, orientada con la orientación de σ, como

$$\int_\sigma \mathsf{f}\, d\boldsymbol{S} = \int_S \mathsf{f}\, d\boldsymbol{S} = \int_\Omega \langle \mathsf{f}\big(\sigma(u,v)\big), \sigma_u \times \sigma_v \rangle \, du dv.$$

- La integral existe si se satisfacen las siguientes condiciones:
  1. Ω es medible Jordan y $\overline{\Omega}$ es compacto.
  2. $\sigma \in \mathcal{C}^k(\widehat{\Omega};\mathbb{R}^n)$ donde $\widehat{\Omega}$ es un abierto tal que $\overline{\Omega} \subset \widehat{\Omega}$.
  3. $\mathsf{f}\colon \widetilde{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es continuo, donde $\widetilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^3$ es abierto y $\overline{S} \subset \widetilde{\Omega}$
- También podemos entenderla como integral impropia

Integral de Campos Vectoriales sobre Superficies

Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un abierto y $\sigma\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$ de clase $\mathcal{C}^k(\Omega;\mathbb{R}^n)$, $k \geq 1$. Supondremos, además, que σ es **inyectiva** y consideraremos la superficie parametrizada $S = \sigma(\Omega)$, que supondremos **regular**.

Si $f\colon S \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es un campo vectorial, que habitualmente supondremos continuo, entonces se define la integral de f sobre la superficie S, orientada con la orientación de σ, como

$$\int_\sigma \mathsf{f}\, d\boldsymbol{S} = \int_S \mathsf{f}\, d\boldsymbol{S} = \int_\Omega \langle \mathsf{f}\big(\sigma(u,v)\big), \sigma_u \times \sigma_v\rangle\, dudv.$$

- Si $\mathsf{f} = (f_1, \dots, f_n)$, entonces la integral de f sobre la superficie S también se denota por

$$\int_S \mathsf{f}\, d\boldsymbol{S} = \int_S \big(f_1 dx_2 \wedge dx_3 + f_2 dx_3 \wedge dx_1 + f_3 dx_1 \wedge dx_2\big)$$

Integral de Campos Vectoriales sobre Superficies

Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un abierto y $\sigma\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$ de clase $\mathcal{C}^k(\Omega;\mathbb{R}^n)$, $k \geq 1$. Supondremos, además, que σ es **inyectiva** y consideraremos la superficie parametrizada $S = \sigma(\Omega)$, que supondremos **regular**.

Si $f\colon S \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es un campo vectorial, que habitualmente supondremos continuo, entonces se define la integral de f sobre la superficie S, orientada con la orientación de σ, como

$$\int_\sigma \mathsf{f}\, d\boldsymbol{S} = \int_S \mathsf{f}\, d\boldsymbol{S} = \int_\Omega \langle \mathsf{f}\big(\sigma(u,v)\big), \sigma_u \times \sigma_v \rangle\, dudv.$$

- $\mathsf{n}(u,v) = \dfrac{\sigma_u \times \sigma_v}{|\sigma_u \times \sigma_v|}$ es el campo normal unitario exterior a S

Integral de Campos Vectoriales sobre Superficies

Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un abierto y $\sigma\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$ de clase $\mathcal{C}^k(\Omega;\mathbb{R}^n)$, $k \geq 1$. Supondremos, además, que σ es **inyectiva** y consideraremos la superficie parametrizada $S = \sigma(\Omega)$, que supondremos **regular**.

Si $f\colon S \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es un campo vectorial, que habitualmente supondremos continuo, entonces se define la integral de f sobre la superficie S, orientada con la orientación de σ, como

$$\int_\sigma \mathsf{f}\, d\boldsymbol{S} = \int_S \mathsf{f}\, d\boldsymbol{S} = \int_\Omega \langle \mathsf{f}\big(\sigma(u,v)\big), \sigma_u \times \sigma_v \rangle\, du dv.$$

- $\mathsf{n}(u,v) = \dfrac{\sigma_u \times \sigma_v}{|\sigma_u \times \sigma_v|}$ es el campo normal unitario exterior a S
- El campo escalar $\mathsf{f}_\mathsf{n} = \langle \mathsf{f}, \mathsf{n} \rangle$ es la componente normal de f sobre S

Integral de Campos Vectoriales sobre Superficies

Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un abierto y $\sigma\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$ de clase $\mathcal{C}^k(\Omega;\mathbb{R}^n)$, $k \geq 1$. Supondremos, además, que σ es **inyectiva** y consideraremos la superficie parametrizada $S = \sigma(\Omega)$, que supondremos **regular**.

Si $f\colon S \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es un campo vectorial, que habitualmente supondremos continuo, entonces se define la integral de f sobre la superficie S, orientada con la orientación de σ, como

$$\int_\sigma \mathsf{f}\, d\boldsymbol{S} = \int_S \mathsf{f}\, d\boldsymbol{S} = \int_\Omega \langle \mathsf{f}\big(\sigma(u,v)\big), \sigma_u \times \sigma_v \rangle\, dudv.$$

- $\mathsf{n}(u,v) = \dfrac{\sigma_u \times \sigma_v}{|\sigma_u \times \sigma_v|}$ es el campo normal unitario exterior a S
- El campo escalar $\mathsf{f}_\mathsf{n} = \langle \mathsf{f}, \mathsf{n} \rangle$ es la componente normal de f sobre S
- $$\boxed{\int_S \mathsf{f}\, d\boldsymbol{S} = \int_S \mathsf{f}_\mathsf{n}\, dS}$$

Integral de Campos Vectoriales sobre Superficies

Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un abierto y $\sigma\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$ de clase $\mathcal{C}^k(\Omega;\mathbb{R}^n)$, $k \geq 1$. Supondremos, además, que σ es **inyectiva** y consideraremos la superficie parametrizada $S = \sigma(\Omega)$, que supondremos **regular**.

Si $f\colon S \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es un campo vectorial, que habitualmente supondremos continuo, entonces se define la integral de f sobre la superficie S, orientada con la orientación de σ, como

$$\int_\sigma \mathsf{f}\, d\boldsymbol{S} = \int_S \mathsf{f}\, d\boldsymbol{S} = \int_\Omega \langle \mathsf{f}\big(\sigma(u,v)\big), \sigma_u \times \sigma_v \rangle\, dudv.$$

- $\mathsf{n}(u,v) = \dfrac{\sigma_u \times \sigma_v}{|\sigma_u \times \sigma_v|}$ es el campo normal unitario exterior a S
- El campo escalar $\mathsf{f_n} = \langle \mathsf{f}, \mathsf{n} \rangle$ es la componente normal de f sobre S
- $\displaystyle\int_S \mathsf{f}\, d\boldsymbol{S} = \int_S \mathsf{f_n}\, dS \Longrightarrow$ La integral de f sobre S se denomina **flujo** de f a través de σ (hacia el exterior de σ)

Integral de Campos Vectoriales sobre Superficies

Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un abierto y $\sigma\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$ de clase $\mathcal{C}^k(\Omega;\mathbb{R}^n)$, $k \geq 1$. Supondremos, además, que σ es **inyectiva** y consideraremos la superficie parametrizada $S = \sigma(\Omega)$, que supondremos **regular**.

Si $f\colon S \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es un campo vectorial, que habitualmente supondremos continuo, entonces se define la integral de f sobre la superficie S, orientada con la orientación de σ, como

$$\int_\sigma \mathsf{f}\, d\boldsymbol{S} = \int_S \mathsf{f}\, d\boldsymbol{S} = \int_\Omega \langle \mathsf{f}\big(\sigma(u,v)\big), \sigma_u \times \sigma_v \rangle \, dudv.$$

- Si $\widehat{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$ es abierto, $\varphi\colon \widehat{\Omega} \longrightarrow \Omega$ es difeomeorfismo de clase $\mathcal{C}^1(\widehat{\Omega})$ y $\beta = \alpha \circ \varphi$

$$\int_\beta \mathsf{f} d\boldsymbol{S} = \pm \int_\alpha \mathsf{f} d\boldsymbol{S}$$

donde el signo depende de si α y β tienen la misma orientación ($+$) u orientación opuesta ($-$).

Integral de Campos Vectoriales sobre Superficies

Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un abierto y $\sigma\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$ de clase $\mathcal{C}^k(\Omega;\mathbb{R}^n)$, $k \geq 1$. Supondremos, además, que σ es **inyectiva** y consideraremos la superficie parametrizada $S = \sigma(\Omega)$, que supondremos **regular**.

Si $f\colon S \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es un campo vectorial, que habitualmente supondremos continuo, entonces se define la integral de f sobre la superficie S, orientada con la orientación de σ, como

$$\int_\sigma \mathsf{f}\, d\boldsymbol{S} = \int_S \mathsf{f}\, d\boldsymbol{S} = \int_\Omega \langle \mathsf{f}\big(\sigma(u,v)\big), \sigma_u \times \sigma_v \rangle\, du dv.$$

- Si $-S$ es la superficie S con la orientación opuesta

$$\int_{-s} \mathsf{f}\, d\boldsymbol{S} = -\int_S \mathsf{f}\, d\boldsymbol{S}$$

Integral de Campos Vectoriales sobre Superficies

Calculeu les integrals de superfície $\int_S \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{S}$ indicades:

1. $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^3, x^2y, x^2z)$, a través de la frontera del conjunt $\left\{x^2 + y^2 \leq a^2,\ 0 \leq z \leq b\right\}$, orientada cap a l'exterior.
2. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathsf{i} + z\mathsf{j} + y\mathsf{k}$, a través de la frontera del conjunt $V = \left\{x^2 + y^2 \leq R^2,\ z \geq 0,\ x \geq z\right\}$, orientada cap a l'exterior.
3. $\mathbf{F}(x, y, z) = (x + e^y, z - y, x + y + z)$, a través de la superfície formada per la unió de $\{x^2 + y^2 + z^2 = 10z,\ 0 \leq z \leq 2\}$ i $\{x^2 + y^2 = (z-6)^2,\ 2 \leq z \leq 6\}$ orientada cap a l'exterior.

Variedades Simples Parametrizadas

Consideraremos $k, m, n \in \mathbb{N}^*$ con $\boldsymbol{m < n}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ un abierto, y $\sigma\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ **inyectiva** y de clase $\mathcal{C}^k(\Omega;\mathbb{R}^n)$; es decir, si

$$\sigma(u_1,\dots,u_m) = \big(\sigma_1(u_1,\dots,u_m),\cdots,\sigma_n(u_1,\dots,u_m)\big),$$

entonces $\sigma_j \in \mathcal{C}^k(\Omega)$, $j = 1,\dots,n$.

- El conjunto $M = \big\{\sigma(u) : u = (u_1,\dots,u_m) \in \Omega\big\} \subset \mathbb{R}^n$ se denomina superficie parametrizada y la aplicación σ, parametrización de M.
- M se denomina regular si $\mathrm{D}_\sigma = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial\sigma_1}{\partial u_1} & \dots & \dfrac{\partial\sigma_1}{\partial u_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial\sigma_n}{\partial u_1} & \dots & \dfrac{\partial\sigma_n}{\partial u_m} \end{bmatrix}$ tiene rango m.

Variedades Simples Parametrizadas

Consideraremos $k, m, n \in \mathbb{N}^*$ con $\boldsymbol{m < n}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ un abierto, y $\sigma\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ **inyectiva** y de clase $\mathcal{C}^k(\Omega;\mathbb{R}^n)$; es decir, si

$$\sigma(u_1,\dots,u_m) = \big(\sigma_1(u_1,\dots,u_m),\cdots,\sigma_n(u_1,\dots,u_m)\big),$$

entonces $\sigma_j \in \mathcal{C}^k(\Omega)$, $j = 1,\dots,n$.

- El conjunto $M = \big\{\sigma(u) : u = (u_1,\dots,u_m) \in \Omega\big\} \subset \mathbb{R}^n$ se denomina superficie parametrizada y la aplicación σ, parametrización de M.
- M se denomina regular si D_σ tiene rango m.
- Si M es regular, los vectores $\sigma_{u_j} = \Big(\dfrac{\partial \sigma_1}{\partial u_j},\dots,\dfrac{\partial \sigma_n}{\partial u_j}\Big)^\top$, $j = 1,\dots,m$ se denominan campos tangentes a S.

Variedades Simples Parametrizadas

Consideraremos $k, m, n \in \mathbb{N}^*$ con $\boldsymbol{m < n}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ un abierto, y $\sigma\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ **inyectiva** y de clase $\mathcal{C}^k(\Omega;\mathbb{R}^n)$; es decir, si

$$\sigma(u_1,\dots,u_m) = \big(\sigma_1(u_1,\dots,u_m),\cdots,\sigma_n(u_1,\dots,u_m)\big),$$

entonces $\sigma_j \in \mathcal{C}^k(\Omega)$, $j = 1,\dots,n$.

- El conjunto $M = \big\{\sigma(u) : u = (u_1,\dots,u_m) \in \Omega\big\} \subset \mathbb{R}^n$ se denomina superficie parametrizada y la aplicación σ, parametrización de M.
- M se denomina regular si D_σ tiene rango m.
- Si M es regular, $\big\{\sigma_{u_j}\big\}_{j=1}^m$ se denominan campos tangentes a M
- Si M es regular, $\operatorname{sg}\{\sigma_{u_1},\dots,\sigma_{u_m}\}$ es el hiperplano tangente a M.

Variedades Simples Parametrizadas

Consideraremos $k, m, n \in \mathbb{N}^*$ con $\boldsymbol{m < n}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ un abierto, y $\sigma\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ **inyectiva** y de clase $\mathcal{C}^k(\Omega;\mathbb{R}^n)$; es decir, si

$$\sigma(u_1,\dots,u_m) = \big(\sigma_1(u_1,\dots,u_m),\cdots,\sigma_n(u_1,\dots,u_m)\big),$$

entonces $\sigma_j \in \mathcal{C}^k(\Omega)$, $j = 1,\dots,n$.

- El conjunto $M = \big\{\sigma(u) : u = (u_1,\dots,u_m) \in \Omega\big\} \subset \mathbb{R}^n$ se denomina superficie parametrizada y la aplicación σ, parametrización de M.
- M se denomina regular si D_σ tiene rango m.
- Si M es regular, $\big\{\sigma_{u_j}\big\}_{j=1}^{m}$ se denominan campos tangentes a M
- Si M es regular, $\operatorname{sg}\{\sigma_{u_1},\dots,\sigma_{u_m}\}$ es el hiperplano tangente a M.

- Si $g(u) = \det(\mathsf{D}_\sigma^\top \mathsf{D}_\sigma)$, $\sqrt{g(u)}$ es el área del paralelepípedo de lados $\sigma_{u_1},\dots,\sigma_{u_m}$.

Integral de Campos Escalares sobre Variedades

Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ un abierto y $\sigma\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de clase $\mathcal{C}^k(\Omega;\mathbb{R}^n)$, $k \geq 1$. Supondremos, además, que σ es **inyectiva** y consideraremos la variedad parametrizada $M = \sigma(\Omega)$, que supondremos **regular**.

Si $f\colon M \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función, que habitualmente supondremos continua, entonces se define la integral de f sobre la variedad M como

$$\int_M f\,dV = \int_\Omega f\big(\sigma(u_1,\ldots,u_m)\big)\sqrt{g(u_1,\ldots,u_m)}\,du_1\cdots du_m.$$

Integral de Campos Escalares sobre Variedades

Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ un abierto y $\sigma\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de clase $\mathcal{C}^k(\Omega;\mathbb{R}^n)$, $k \geq 1$. Supondremos, además, que σ es **inyectiva** y consideraremos la variedad parametrizada $M = \sigma(\Omega)$, que supondremos **regular**.

Si $f\colon M \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función, que habitualmente supondremos continua, entonces se define la integral de f sobre la variedad M como

$$\int_M f\,dV = \int_\Omega f\big(\sigma(u_1,\dots,u_m)\big)\sqrt{g(u_1,\dots,u_m)}\,du_1\cdots du_m.$$

- La integral existe si se satisfacen las siguientes condiciones:
  1. Ω es medible Jordan y $\overline{\Omega}$ es compacto.
  2. $\sigma \in \mathcal{C}^k(\widehat{\Omega};\mathbb{R}^n)$ donde $\widehat{\Omega}$ es un abierto tal que $\overline{\Omega} \subset \widehat{\Omega}$.
  3. $f\colon \widetilde{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua, donde $\widetilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$ es abierto y $\overline{M} \subset \widetilde{\Omega}$

Integral de Campos Escalares sobre Variedades

Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ un abierto y $\sigma\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de clase $\mathcal{C}^k(\Omega;\mathbb{R}^n)$, $k \geq 1$. Supondremos, además, que σ es **inyectiva** y consideraremos la variedad parametrizada $M = \sigma(\Omega)$, que supondremos **regular**.

Si $f\colon M \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función, que habitualmente supondremos continua, entonces se define la integral de f sobre la variedad M como

$$\int_M f\,dV = \int_\Omega f\big(\sigma(u_1,\dots,u_m)\big)\sqrt{g(u_1,\dots,u_m)}\,du_1\cdots du_m.$$

- La integral existe si se satisfacen las siguientes condiciones:
  1. Ω es medible Jordan y $\overline{\Omega}$ es compacto.
  2. $\sigma \in \mathcal{C}^k(\widehat{\Omega};\mathbb{R}^n)$ donde $\widehat{\Omega}$ es un abierto tal que $\overline{\Omega} \subset \widehat{\Omega}$.
  3. $f\colon \widetilde{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua, donde $\widetilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$ es abierto y $\overline{M} \subset \widetilde{\Omega}$
- También podemos entenderla como integral impropia

Integral de Campos Escalares sobre Variedades

Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ un abierto y $\sigma\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de clase $\mathcal{C}^k(\Omega;\mathbb{R}^n)$, $k \geq 1$. Supondremos, además, que σ es **inyectiva** y consideraremos la variedad parametrizada $M = \sigma(\Omega)$, que supondremos **regular**.

Si $f\colon M \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función, que habitualmente supondremos continua, entonces se define la integral de f sobre la variedad M como

$$\int_M f\, dV = \int_\Omega f\big(\sigma(u_1,\dots,u_m)\big)\sqrt{g(u_1,\dots,u_m)}\, du_1\cdots du_m.$$

Cuando $f = 1$, el valor

$$\mathsf{v}(M) = \int_M dV = \int_\Omega \sqrt{g(u_1,\dots,u_m)}\, du_1\cdots du_m$$

define el volumen m-dimensional de M.

Integral de Campos Escalares sobre Variedades

Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ un abierto y $\sigma\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de clase $\mathcal{C}^k(\Omega;\mathbb{R}^n)$, $k \geq 1$. Supondremos, además, que σ es **inyectiva** y consideraremos la variedad parametrizada $M = \sigma(\Omega)$, que supondremos **regular**.

Si $f\colon M \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función, que habitualmente supondremos continua, entonces se define la integral de f sobre la variedad M como

$$\int_M f\, dV = \int_\Omega f\big(\sigma(u_1,\ldots,u_m)\big)\sqrt{g(u_1,\ldots,u_m)}\, du_1\cdots du_m.$$

Cuando $f = 1$, el valor

$$\mathsf{v}(M) = \int_M dV = \int_\Omega \sqrt{g(u_1,\ldots,u_m)}\, du_1\cdots du_m$$

define el volumen m-dimensional de M.

- La función $dS(u) = \sqrt{g(u)}$ se denomina elemento de volumen

Integral de Campos Escalares sobre Variedades

Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ un abierto y $\sigma\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de clase $\mathcal{C}^k(\Omega;\mathbb{R}^n)$, $k \geq 1$. Supondremos, además, que σ es **inyectiva** y consideraremos la variedad parametrizada $M = \sigma(\Omega)$, que supondremos **regular**.

Si $f\colon M \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función, que habitualmente supondremos continua, entonces se define la integral de f sobre la variedad M como

$$\int_M f\,dV = \int_\Omega f\big(\sigma(u_1,\ldots,u_m)\big)\sqrt{g(u_1,\ldots,u_m)}\,du_1\cdots du_m.$$

Cuando $f = 1$, el valor

$$\mathsf{v}(M) = \int_M dV = \int_\Omega \sqrt{g(u_1,\ldots,u_m)}\,du_1\cdots du_m$$

define el volumen m-dimensional de M.

- Las expresiones anteriores no dependen de la parametrización