TEOREMAS INTEGRALES

PROBLEMAS

Curso 2019-2020

Problemas 2,3 y 4

Dados $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ abierto, $u \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ y $\mathsf{f}, \mathsf{g} \in \mathcal{C}^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$, entonces

1. $\operatorname{rot}(u\mathsf{f}) = u \operatorname{rot}(\mathsf{f}) + \nabla(u) \times \mathsf{f}$.
2. $\operatorname{div}(\mathsf{f} \times \mathsf{g}) = \langle \mathsf{g}, \operatorname{rot}(\mathsf{f}) \rangle - \langle \mathsf{f}, \operatorname{rot}(\mathsf{g}) \rangle$.
3. $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}(\mathsf{f}) = \nabla\big(\operatorname{div}(\mathsf{f})\big) - \boldsymbol{\Delta}(\mathsf{f})$.
4. $\operatorname{rot}(\mathsf{f} \times \mathsf{g}) = \mathsf{f}\operatorname{div}(\mathsf{g}) - \mathsf{g}\operatorname{div}(\mathsf{f}) + (\mathsf{g} \cdot \nabla)\mathsf{f} - (\mathsf{f} \cdot \nabla)\mathsf{g}$, donde
$$(\mathsf{f} \cdot \nabla)\mathsf{g} = \Big(\langle \mathsf{f}, \nabla g_1 \rangle, \langle \mathsf{f}, \nabla g_2 \rangle, \langle \mathsf{f}, \nabla g_3 \rangle \Big)$$

Problemas 2,3 y 4

Dados $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ abierto, $u \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ y $\mathsf{f}, \mathsf{g} \in \mathcal{C}^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$, entonces

1. $\mathrm{rot}(u\mathsf{f}) = u\,\mathrm{rot}(\mathsf{f}) + \nabla(u) \times \mathsf{f}$.
2. $\mathrm{div}(\mathsf{f} \times \mathsf{g}) = \langle \mathsf{g}, \mathrm{rot}(\mathsf{f})\rangle - \langle \mathsf{f}, \mathrm{rot}(\mathsf{g})\rangle$.
3. $\mathrm{rot}(\mathrm{rot}(\mathsf{f}) = \nabla\big(\mathrm{div}(\mathsf{f})\big) - \boldsymbol{\Delta}(\mathsf{f})$.
4. $\mathrm{rot}(\mathsf{f} \times \mathsf{g}) = \mathsf{f}\mathrm{div}(\mathsf{g}) - \mathsf{g}\mathrm{div}(\mathsf{f}) + (\mathsf{g} \cdot \nabla)\mathsf{f} - (\mathsf{f} \cdot \nabla)\mathsf{g}$, donde
$$(\mathsf{f} \cdot \nabla)\mathsf{g} = \Big(\langle \mathsf{f}, \nabla g_1\rangle, \langle \mathsf{f}, \nabla g_2\rangle, \langle \mathsf{f}, \nabla g_3\rangle\Big)$$

Si r és el camp radial de $\mathbb{R}^3$, calculeu el rotacional dels camps vectorials $\mathsf{a} \times \mathsf{r}$ i $\langle \mathsf{a}, \mathsf{r}\rangle \cdot \mathsf{b}$ on $\mathsf{a}, \mathsf{b} \in \mathbb{R}^3$ són vectors constants.

Problemas 2,3 y 4

Dados $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ abierto, $u \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ y $\mathsf{f}, \mathsf{g} \in \mathcal{C}^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$, entonces

1. $\mathrm{rot}(u\mathsf{f}) = u\,\mathrm{rot}(\mathsf{f}) + \nabla(u) \times \mathsf{f}$.
2. $\mathrm{div}(\mathsf{f} \times \mathsf{g}) = \langle \mathsf{g}, \mathrm{rot}(\mathsf{f}) \rangle - \langle \mathsf{f}, \mathrm{rot}(\mathsf{g}) \rangle$.
3. $\mathrm{rot}(\mathrm{rot}(\mathsf{f}) = \nabla\big(\mathrm{div}(\mathsf{f})\big) - \boldsymbol{\Delta}(\mathsf{f})$.
4. $\mathrm{rot}(\mathsf{f} \times \mathsf{g}) = \mathsf{f}\mathrm{div}(\mathsf{g}) - \mathsf{g}\mathrm{div}(\mathsf{f}) + (\mathsf{g} \cdot \nabla)\mathsf{f} - (\mathsf{f} \cdot \nabla)\mathsf{g}$, donde
$$(\mathsf{f} \cdot \nabla)\mathsf{g} = \Big(\langle \mathsf{f}, \nabla g_1 \rangle, \langle \mathsf{f}, \nabla g_2 \rangle, \langle \mathsf{f}, \nabla g_3 \rangle\Big)$$

Si r és el camp radial de $\mathbb{R}^3$, calculeu el rotacional dels camps vectorials $\mathsf{a} \times \mathsf{r}$ i $\langle \mathsf{a}, \mathsf{r} \rangle \cdot \mathsf{b}$ on $\mathsf{a}, \mathsf{b} \in \mathbb{R}^3$ són vectors constants.

- $\mathrm{rot}(\mathsf{a} \times \mathsf{r}) = 2\mathsf{a}$, $\mathrm{rot}(\langle \mathsf{a}, \mathsf{r} \rangle \cdot \mathsf{b}) = \mathsf{a} \times \mathsf{b}$

Problemas 2,3 y 4

Dados $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ abierto, $u \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ y $\mathsf{f}, \mathsf{g} \in \mathcal{C}^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$, entonces

1. $\mathrm{rot}(u\mathsf{f}) = u\,\mathrm{rot}(\mathsf{f}) + \nabla(u) \times \mathsf{f}$.
2. $\mathrm{div}(\mathsf{f} \times \mathsf{g}) = \langle \mathsf{g}, \mathrm{rot}(\mathsf{f})\rangle - \langle \mathsf{f}, \mathrm{rot}(\mathsf{g})\rangle$.
3. $\mathrm{rot}(\mathrm{rot}(\mathsf{f}) = \nabla\big(\mathrm{div}(\mathsf{f})\big) - \boldsymbol{\Delta}(\mathsf{f})$.
4. $\mathrm{rot}(\mathsf{f} \times \mathsf{g}) = \mathsf{f}\mathrm{div}(\mathsf{g}) - \mathsf{g}\mathrm{div}(\mathsf{f}) + (\mathsf{g} \cdot \nabla)\mathsf{f} - (\mathsf{f} \cdot \nabla)\mathsf{g}$, donde
$$(\mathsf{f} \cdot \nabla)\mathsf{g} = \Big(\langle \mathsf{f}, \nabla g_1\rangle, \langle \mathsf{f}, \nabla g_2\rangle, \langle \mathsf{f}, \nabla g_3\rangle\Big)$$

Si f i g són camps escalars de classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3)$, què val $\mathrm{div}(\nabla f \times \nabla g)$?

Problemas 2,3 y 4

Dados $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ abierto, $u \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ y $\mathsf{f}, \mathsf{g} \in \mathcal{C}^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$, entonces

1. $\mathrm{rot}(u\mathsf{f}) = u\,\mathrm{rot}(\mathsf{f}) + \nabla(u) \times \mathsf{f}$.
2. $\mathrm{div}(\mathsf{f} \times \mathsf{g}) = \langle \mathsf{g}, \mathrm{rot}(\mathsf{f})\rangle - \langle \mathsf{f}, \mathrm{rot}(\mathsf{g})\rangle$.
3. $\mathrm{rot}(\mathrm{rot}(\mathsf{f}) = \nabla\big(\mathrm{div}(\mathsf{f})\big) - \boldsymbol{\Delta}(\mathsf{f})$.
4. $\mathrm{rot}(\mathsf{f} \times \mathsf{g}) = \mathsf{f}\mathrm{div}(\mathsf{g}) - \mathsf{g}\mathrm{div}(\mathsf{f}) + (\mathsf{g} \cdot \nabla)\mathsf{f} - (\mathsf{f} \cdot \nabla)\mathsf{g}$, donde
$$(\mathsf{f} \cdot \nabla)\mathsf{g} = \Big(\langle \mathsf{f}, \nabla g_1\rangle, \langle \mathsf{f}, \nabla g_2\rangle, \langle \mathsf{f}, \nabla g_3\rangle\Big)$$

Si f i g són camps escalars de classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3)$, què val $\mathrm{div}(\nabla f \times \nabla g)$?

- $\mathrm{div}(\nabla f \times \nabla g) = 0$

Problemas 2,3 y 4

Dados $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ abierto, $u \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ y $\mathsf{f}, \mathsf{g} \in \mathcal{C}^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$, entonces

1. $\mathrm{rot}(u\mathsf{f}) = u\,\mathrm{rot}(\mathsf{f}) + \nabla(u) \times \mathsf{f}$.
2. $\mathrm{div}(\mathsf{f} \times \mathsf{g}) = \langle \mathsf{g}, \mathrm{rot}(\mathsf{f})\rangle - \langle \mathsf{f}, \mathrm{rot}(\mathsf{g})\rangle$.
3. $\mathrm{rot}(\mathrm{rot}(\mathsf{f}) = \nabla\big(\mathrm{div}(\mathsf{f})\big) - \boldsymbol{\Delta}(\mathsf{f})$.
4. $\mathrm{rot}(\mathsf{f} \times \mathsf{g}) = \mathsf{f}\mathrm{div}(\mathsf{g}) - \mathsf{g}\mathrm{div}(\mathsf{f}) + (\mathsf{g} \cdot \nabla)\mathsf{f} - (\mathsf{f} \cdot \nabla)\mathsf{g}$, donde
$$(\mathsf{f} \cdot \nabla)\mathsf{g} = \Big(\langle \mathsf{f}, \nabla g_1\rangle, \langle \mathsf{f}, \nabla g_2\rangle, \langle \mathsf{f}, \nabla g_3\rangle\Big)$$

Un fluid gira al voltant de l'eix OZ amb velocitat angular $\omega(x, y, z)$.

1. Calculeu el seu camp de velocitats $\mathsf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathsf{r}$, on $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega)$.
2. Calculeu el rotacional de v.
3. En el cas que ω només depengui de la distància ρ a l'eix OZ, esbrineu quan v ès irrotacional.

Problema 5

Estudieu si els camps vectorials següents admeten funció potencial. En cas afirmatiu, calculeu-la.

1. $\mathsf{f}(x,y) = (xy, 1)$.
2. $\mathsf{f}(x,y) = (y, x)$.
3. $\mathsf{f}(x,y) = (x + 2y, 2x + y^3)$.
4. $\mathsf{f}(x,y) = (x^2 - 3xy, x^2 - x^3 + y)$.
5. $\mathsf{f}(x,y) = \big(e^{x-y}(1 + x + y), e^{x-y}(1 - x - y)\big)$.
6. $\mathsf{f}(x,y) = \left(\dfrac{2x}{x^2 + y}, \dfrac{1}{y + x^2}\right)$.

Problema 5

Estudieu si els camps vectorials següents admeten funció potencial. En cas afirmatiu, calculeu-la.

1. $\mathsf{f}(x,y) = (xy, 1)$.
2. $\mathsf{f}(x,y) = (y, x)$.
3. $\mathsf{f}(x,y) = (x+2y, 2x+y^3)$.
4. $\mathsf{f}(x,y) = (x^2-3xy, x^2-x^3+y)$.
5. $\mathsf{f}(x,y) = \big(e^{x-y}(1+x+y), e^{x-y}(1-x-y)\big)$.
6. $\mathsf{f}(x,y) = \left(\dfrac{2x}{x^2+y}, \dfrac{1}{y+x^2}\right)$.

- $\Omega = \mathbb{R}^2$ (excepto 6) y por tanto en forma de estrella con centro en $(0,0)$

Problema 5

Estudieu si els camps vectorials següents admeten funció potencial. En cas afirmatiu, calculeu-la.

1. $\mathsf{f}(x,y) = (xy, 1)$.
2. $\mathsf{f}(x,y) = (y, x)$.
3. $\mathsf{f}(x,y) = (x + 2y, 2x + y^3)$.
4. $\mathsf{f}(x,y) = (x^2 - 3xy, x^2 - x^3 + y)$.
5. $\mathsf{f}(x,y) = \big(e^{x-y}(1 + x + y), e^{x-y}(1 - x - y)\big)$.
6. $\mathsf{f}(x,y) = \left(\dfrac{2x}{x^2 + y}, \dfrac{1}{y + x^2}\right)$.

- $\Omega = \mathbb{R}^2$ (excepto 6) y por tanto en forma de estrella con centro en $(0,0)$
- $\mathsf{f} = (f_1, f_2) \Longrightarrow$ f admite una funció potencial sii $\dfrac{\partial f_1}{\partial y} = \dfrac{\partial f_2}{\partial x}$.

Problema 5

Estudieu si els camps vectorials següents admeten funció potencial. En cas afirmatiu, calculeu-la.

1. $\mathsf{f}(x,y) = (xy, 1)$.
2. $\mathsf{f}(x,y) = (y, x)$.
3. $\mathsf{f}(x,y) = (x+2y, 2x+y^3)$.
4. $\mathsf{f}(x,y) = (x^2-3xy, x^2-x^3+y)$.
5. $\mathsf{f}(x,y) = \big(e^{x-y}(1+x+y), e^{x-y}(1-x-y)\big)$.
6. $\mathsf{f}(x,y) = \left(\dfrac{2x}{x^2+y}, \dfrac{1}{y+x^2}\right)$.

- $\Omega = \mathbb{R}^2$ (excepto 6) y por tanto en forma de estrella con centro en $(0,0)$
- $\mathsf{f} = (f_1, f_2) \Longrightarrow$ f admite una funció potencial sii $\dfrac{\partial f_1}{\partial y} = \dfrac{\partial f_2}{\partial x}$.
- Por el Lema de Poincaré, $u(x,y) = \displaystyle\int_0^1 \big(xf_1(tx,ty) + yf_2(tx,ty)\big)dt.$

Problemas 6,7,8 y 9

Comproveu que la integral de línia

$$\int_{(0,0,0)}^{(1,1,1)} (3x^2 + yz)dx + (3y^2 + xz)dy + (3z^2 + xy)dz$$

no depèn del camí, i calculeu-la.

Problemas 6,7,8 y 9

Comproveu que la integral de línia

$$\int_{(0,0,0)}^{(1,1,1)} (3x^2 + yz)dx + (3y^2 + xz)dy + (3z^2 + xy)dz$$

no depèn del camí, i calculeu-la.

- $\displaystyle\int_{(0,0,0)}^{(1,1,1)} (3x^2 + yz)dx + (3y^2 + xz)dy + (3z^2 + xy)dz = 4$

Problemas 6,7,8 y 9

Comproveu que la integral de línia

$$\int_{(0,0,0)}^{(1,1,1)} (3x^2 + yz)dx + (3y^2 + xz)dy + (3z^2 + xy)dz$$

no depèn del camí, i calculeu-la.

Donada la relació $\nabla \times \mathsf{f} = \big(x(y^2 + z^2), y(x^2 + z^2) - z(x^2 + y^2 + az^2)\big)$, determineu a.

Problemas 6,7,8 y 9

Comproveu que la integral de línia

$$\int_{(0,0,0)}^{(1,1,1)} (3x^2 + yz)dx + (3y^2 + xz)dy + (3z^2 + xy)dz$$

no depèn del camí, i calculeu-la.

Donada la relació $\nabla \times \mathsf{f} = \big(x(y^2 + z^2), y(x^2 + z^2) - z(x^2 + y^2 + az^2)\big)$, determineu a.

- $a = \dfrac{2}{3}$

Problemas 6,7,8 y 9

Comproveu que la integral de línia

$$\int_{(0,0,0)}^{(1,1,1)} (3x^2+yz)dx + (3y^2+xz)dy + (3z^2+xy)dz$$

no depèn del camí, i calculeu-la.

Donada la relació $\nabla \times \mathsf{f} = \big(x(y^2+z^2), y(x^2+z^2) - z(x^2+y^2+az^2)\big)$, determineu a.

Trobeu $P(x,y,z)$ per tal que $\operatorname{rot}(P,(x-z)y,0) = (y,z,x)$.

Problemas 6,7,8 y 9

Comproveu que la integral de línia

$$\int_{(0,0,0)}^{(1,1,1)} (3x^2 + yz)dx + (3y^2 + xz)dy + (3z^2 + xy)dz$$

no depèn del camí, i calculeu-la.

Donada la relació $\nabla \times \mathsf{f} = \big(x(y^2+z^2), y(x^2+z^2) - z(x^2+y^2+az^2)\big)$, determineu a.

Trobeu $P(x,y,z)$ per tal que $\operatorname{rot}(P,(x-z)y,0) = (y,z,x)$.

- $P(x,y,z) = \frac{1}{2}(y^2+z^2-2xy) + \phi(x)$, con $\phi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$

Problemas 6,7,8 y 9

Comproveu que la integral de línia

$$\int_{(0,0,0)}^{(1,1,1)} (3x^2 + yz)dx + (3y^2 + xz)dy + (3z^2 + xy)dz$$

no depèn del camí, i calculeu-la.

Donada la relació $\nabla \times \mathsf{f} = \big(x(y^2 + z^2), y(x^2 + z^2) - z(x^2 + y^2 + az^2)\big)$, determineu a.

Trobeu $P(x, y, z)$ per tal que $\operatorname{rot}(P, (x - z)y, 0) = (y, z, x)$.

Demostreu que el camp vectorial

$$\mathsf{f}(x, y, z) = (y - z)\mathsf{i} + (z - x)\mathsf{j} + (x - y)\mathsf{k}$$

és solenoïdal, i obteniu un camp vectorial g tal que $\mathsf{f} = \operatorname{rot}\mathsf{g}$.

Problemas 6,7,8 y 9

Comproveu que la integral de línia

$$\int_{(0,0,0)}^{(1,1,1)} (3x^2+yz)dx + (3y^2+xz)dy + (3z^2+xy)dz$$

no depèn del camí, i calculeu-la.

Donada la relació $\nabla \times \mathsf{f} = \big(x(y^2+z^2), y(x^2+z^2) - z(x^2+y^2+az^2)\big)$, determineu a.

Trobeu $P(x,y,z)$ per tal que $\mathrm{rot}(P,(x-z)y,0) = (y,z,x)$.

Demostreu que el camp vectorial

$$\mathsf{f}(x,y,z) = (y-z)\mathsf{i} + (z-x)\mathsf{j} + (x-y)\mathsf{k}$$

és solenoïdal, i obteniu un camp vectorial g tal que $\mathsf{f} = \mathrm{rot}\mathsf{g}$.

- $\mathsf{g}(x,y,z) = \dfrac{1}{3}\big(y^2+z^2-x(y+z), x^2+z^2-y(x+z), x^2+y^2-z(x+y)\big)$

Problemas 10 y 11

Sigui φ una funció de classe $\mathcal{C}^1$ en un obert simplement connex D, i f un camp vectorial conservatiu de classe $\mathcal{C}^1$ en D. Proveu que el camp vectorial φf és conservatiu sii φ i f són en cada punt proporcionals.

Problemas 10 y 11

Sigui φ una funció de classe $\mathcal{C}^1$ en un obert simplement connex D, i f un camp vectorial conservatiu de classe $\mathcal{C}^1$ en D. Proveu que el camp vectorial φf és conservatiu sii φ i f són en cada punt proporcionals.

- $\mathrm{rot}(\varphi \mathsf{f}) = \varphi\, \mathrm{rot}(\mathsf{f}) + \nabla\varphi \times \mathsf{f}$

Problemas 10 y 11

Sigui φ una funció de classe $\mathcal{C}^1$ en un obert simplement connex D, i f un camp vectorial conservatiu de classe $\mathcal{C}^1$ en D. Proveu que el camp vectorial φf és conservatiu sii φ i f són en cada punt proporcionals.

Comproveu que els camps vectorials següents són conservatius, i calculeu-ne potencials escalars.

1. $\mathsf{f} = \dfrac{\mathsf{r}}{r}$.
2. $\mathsf{f} = \dfrac{\mathsf{r}}{r^2}$.
3. $\mathsf{f} = r^\alpha \mathsf{r}$, $\alpha \neq -2$.
4. $\mathsf{f}(x, y, z) = (2xy + z^3, x^2, 3xz^2)$.
5. $\mathsf{f}(x, y, z) = (y^2 z, 2xyz, xy^2 - 1)$.

- $\mathrm{div}(r^\alpha \mathsf{r}) = (3+\alpha) r^\alpha$
- $\nabla r^\alpha = \alpha r^{\alpha-2} \mathsf{r}$

Problema 12

Sigui el camp vectorial $\mathsf{f} = \dfrac{\mathsf{r}}{r^{\frac{3}{2}}}$ definit a $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$.

1. Proveu que no existeix un camp vectorial g tal que $\mathsf{f} = \mathrm{rot}\,\mathsf{g}$.
2. Proveu que $\mathsf{f} = \nabla(u)$, per a cert camp escalar u; trobeu-lo.

- $\mathrm{div}(r^\alpha \mathsf{r}) = (3+\alpha) r^\alpha$
- $\nabla r^\alpha = \alpha r^{\alpha-2} \mathsf{r}$