Siguin $(E, \langle , \rangle)$ un espai euclidià i $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ una base ortonormal. Orientem E per la base $\mathcal{B}$ i denotem per $\boldsymbol{\sigma}_n = \boldsymbol{e}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}_n$ l'element de volum corresponent.

Definició. Per a cada $p \geq 0$, es defineix l'aplicació $* : \mathcal{A}^p(E) \longrightarrow \mathcal{A}^{n-p}(E)$ com l'aplicació lineal que sobre els elements de la base de $\mathcal{A}_p(E)$ està determinada per

$$*\boldsymbol{e}_{i_1} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}_{i_p} = \varepsilon(\sigma)\boldsymbol{e}_{j_1} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}_{j_{n-p}},$$

on $1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n$, $1 \leq j_1 < \cdots < j_{n-p} \leq n$ són els índexs complementaris de I i σ és la permutació $\sigma = (i_1, \ldots, i_p, j_1, \ldots j_{n-p})$.

1. Calculeu l'aplicació adjunta per a $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$, amb el producte escalar ordinari, $p \geq 0$.

2. Si $u, v, w \in \mathbb{R}^3$, proveu que se satisfà

$$\begin{aligned} *(u \wedge v) &= u \times v \\ *(u \wedge v \wedge w) &= det(u, v, w). \end{aligned}$$

3. Proveu que $*$ satisfà les propietats següents:
(a) $\langle *f, g\rangle = (-1)^{p(n-p)}\langle f, *g\rangle$, $f \in \mathcal{A}^p(E), g \in \mathcal{A}^{n-p}(E)$.
(b) $** = (-1)^{p(n-p)}$.
(c) $\langle f, g\rangle = *(g \wedge *f) = *(f \wedge *g)$, $\quad f, g \in \mathcal{A}^p(E)$.
(d) Si $f, g \in \mathcal{A}^p(E)$, aleshores $f \wedge *g = g \wedge *f = \langle f, g\rangle\boldsymbol{\sigma}_n$.

4. Proveu que si $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ és una base ortonormal qualsevol de E, aleshores

$$*\boldsymbol{u}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{u}_p = \pm\boldsymbol{u}_{p+1} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{u}_n,$$

indicant quan es dona el signe + o el signe -. (Indicació: Proveu prèviament el resultat següent.
Lema. Si M és una matriu ortogonal i considerem una descomposició per blocs de la forma

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

aleshores se satisfà

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A^T & C^T \\ B^T & D^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ C^T & D^T \end{pmatrix}.$$

I deduïu que $\det D = \det M \det A$.)

5. Proveu que si els vectors $v_1, \ldots, v_p$ són linealment independents, aleshores existeix una base $w_1, \ldots, w_{n-p}$ del subespai $F^\perp = \langle v_1, \ldots, v_p \rangle^\perp$ tal que la base de E formada pels vectors $v_1, \ldots, v_p,\ w_1, \ldots, w_{n-p}$ és positiva i

$$*v_1 \wedge \cdots \wedge v_p = w_1 \wedge \cdots \wedge w_{n-p}.$$

Deduïu que

$$\operatorname{vol}(v_1, \ldots, v_p) = \operatorname{vol}(w_1, \ldots, w_{n-p}).$$

6. Sigui $v \in E$ i $\boldsymbol{v}^\wedge = v \wedge - : \mathcal{A}^p(E) \longrightarrow \mathcal{A}^{p+1}(E)$ l'aplicació lineal $w \mapsto v \wedge w$. Sigui $\boldsymbol{v}^*$ l'aplicació adjunta de $\boldsymbol{v}^\wedge$, proveu que

$$\boldsymbol{v}^*(w) = (-1)^{np} * (v \wedge (*w)).$$