Pràctica 1. Zeros de funcions

Índex

Índex **1**

1 Un exemple del mètode de Newton **1**

2 Un exemple del mètode de la Secant **3**

3 Aplicació: punts d'equilibri del PCRTBP **3**

3.1 Punts d'equilibri . . . 4

3.1.1 Càlcul de L_1 . . . 5

3.1.2 Càlcul de L_2 . . . 5

3.1.3 Càlcul de L_3 . . . 6

4 Presentació de la pràctica **6**

5 Referències **7**

1 Un exemple del mètode de Newton

Volem aplicar el mètode de Newton per a calcular els zeros del polinomi $f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$. Amb la regla de Ruffini es troba fàcilment que les arrels son $s = 1$ (amb multiplicitat 2) i $s = 2$. Anem ara a calcular-les numèricament per a determinar la convergència del mètode així com la constant asimptótica.

Per tal d'obtenir aproximacions de l'arrel $s = 1$ construïm la recurrència

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \qquad n = 0, 1, 2, \dots \tag{1}$$

i, per a controlar l'error a les aproximacions successives, introduïm les quantitats

$$\varepsilon_n := |x_n - s|, \quad n = 0, 1, 2, \dots \qquad \epsilon_n := |x_n - x_{n-1}|, \quad n = 1, 2, 3, \dots \tag{2}$$

A la taula 1 es donen els termes de la seqüència (1) corresponents al valor inicial $x_0 = 0{\cdot}8$, així com els errors ε_n, ϵ_n definits per (2), i els quocients ${}^{\epsilon_n}/_{\epsilon_{n-1}}$. D'aquesta manera, s'aprecia que amb 23 iterats l'error a l'arrel és $\varepsilon_{23} = 3{\cdot}054 \times 10^{-8}$ i que les ratios ${}^{\epsilon_n}/_{\epsilon_{n-1}}$ de la darrera columna tendeixen a $1/2$, que és el que cal esperar ja que la constant asimptòtica de l'error en el mètode de Newton és $L = 1 - 1/q$ si l'arrel té multiplicitat q.

Remarca. Notem però que en el càlcul de ${}^{\epsilon_{22}}/_{\epsilon_{21}}$ i de ${}^{\epsilon_{23}}/_{\epsilon_{22}}$ es perd precisió respecte el valor $1/2$ de la predicció teòrica per a la constant asimptòtica. Això és degut a que dividim per nombres molt petits els quals, al seu torn, vénen de la resta de nombres molt propers a zero.

En canvi, si suposem coneguda la multiplicitat de l'arrel, $q = 2$, i modifiquem l'algorisme (1) substituint-lo per

$$x_{n+1} = x_n - q\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \qquad n = 0, 1, 2, \dots \tag{3}$$

s'obté, per a la mateixa aproximació inicial, $x_0 = 0{\cdot}8$, la taula 2, on es veu que amb 3 iterats ja tenim un error a l'arrel de $6{\cdot}687 \times 10^{-9}$ i s'aprecia que la convergència és quadràtica. D'altra banda, sabem que la constant asimptòtica corresponent a l'algorisme (3) és $L = |{}^{h(s)}/_{qh'(s)}|$, on $h(x)$ es defineix per $f(x) = (x - s)^q h(x)$ amb

n	x_n	ε_n	ϵ_n	$\epsilon_n/\epsilon_{n-1}$
0	$8{\cdot}000\,000\,000 \times 10^{-01}$	$2{\cdot}000 \times 10^{-01}$	—	—
1	$8{\cdot}923\,076\,923 \times 10^{-01}$	$1{\cdot}077 \times 10^{-01}$	$9{\cdot}231 \times 10^{-02}$	—
2	$9{\cdot}436\,576\,668 \times 10^{-01}$	$5{\cdot}634 \times 10^{-02}$	$5{\cdot}135 \times 10^{-02}$	$5{\cdot}563 \times 10^{-01}$
3	$9{\cdot}710\,970\,632 \times 10^{-01}$	$2{\cdot}890 \times 10^{-02}$	$2{\cdot}744 \times 10^{-02}$	$5{\cdot}344 \times 10^{-01}$
4	$9{\cdot}853\,483\,648 \times 10^{-01}$	$1{\cdot}465 \times 10^{-02}$	$1{\cdot}425 \times 10^{-02}$	$5{\cdot}194 \times 10^{-01}$
5	$9{\cdot}926\,216\,689 \times 10^{-01}$	$7{\cdot}378 \times 10^{-03}$	$7{\cdot}273 \times 10^{-03}$	$5{\cdot}104 \times 10^{-01}$
6	$9{\cdot}962\,973\,735 \times 10^{-01}$	$3{\cdot}703 \times 10^{-03}$	$3{\cdot}676 \times 10^{-03}$	$5{\cdot}054 \times 10^{-01}$
7	$9{\cdot}981\,452\,783 \times 10^{-01}$	$1{\cdot}855 \times 10^{-03}$	$1{\cdot}848 \times 10^{-03}$	$5{\cdot}027 \times 10^{-01}$
8	$9{\cdot}990\,717\,815 \times 10^{-01}$	$9{\cdot}282 \times 10^{-04}$	$9{\cdot}265 \times 10^{-04}$	$5{\cdot}014 \times 10^{-01}$
9	$9{\cdot}995\,356\,757 \times 10^{-01}$	$4{\cdot}643 \times 10^{-04}$	$4{\cdot}639 \times 10^{-04}$	$5{\cdot}007 \times 10^{-01}$
10	$9{\cdot}997\,677\,840 \times 10^{-01}$	$2{\cdot}322 \times 10^{-04}$	$2{\cdot}321 \times 10^{-04}$	$5{\cdot}003 \times 10^{-01}$
11	$9{\cdot}998\,838\,785 \times 10^{-01}$	$1{\cdot}161 \times 10^{-04}$	$1{\cdot}161 \times 10^{-04}$	$5{\cdot}002 \times 10^{-01}$
12	$9{\cdot}999\,419\,359 \times 10^{-01}$	$5{\cdot}806 \times 10^{-05}$	$5{\cdot}806 \times 10^{-05}$	$5{\cdot}001 \times 10^{-01}$
13	$9{\cdot}999\,709\,671 \times 10^{-01}$	$2{\cdot}903 \times 10^{-05}$	$2{\cdot}903 \times 10^{-05}$	$5{\cdot}000 \times 10^{-01}$
14	$9{\cdot}999\,854\,833 \times 10^{-01}$	$1{\cdot}452 \times 10^{-05}$	$1{\cdot}452 \times 10^{-05}$	$5{\cdot}000 \times 10^{-01}$
15	$9{\cdot}999\,927\,416 \times 10^{-01}$	$7{\cdot}258 \times 10^{-06}$	$7{\cdot}258 \times 10^{-06}$	$5{\cdot}000 \times 10^{-01}$
16	$9{\cdot}999\,963\,708 \times 10^{-01}$	$3{\cdot}629 \times 10^{-06}$	$3{\cdot}629 \times 10^{-06}$	$5{\cdot}000 \times 10^{-01}$
17	$9{\cdot}999\,981\,853 \times 10^{-01}$	$1{\cdot}815 \times 10^{-06}$	$1{\cdot}815 \times 10^{-06}$	$5{\cdot}000 \times 10^{-01}$
18	$9{\cdot}999\,990\,928 \times 10^{-01}$	$9{\cdot}072 \times 10^{-07}$	$9{\cdot}074 \times 10^{-07}$	$5{\cdot}001 \times 10^{-01}$
19	$9{\cdot}999\,995\,460 \times 10^{-01}$	$4{\cdot}540 \times 10^{-07}$	$4{\cdot}533 \times 10^{-07}$	$4{\cdot}995 \times 10^{-01}$
20	$9{\cdot}999\,997\,730 \times 10^{-01}$	$2{\cdot}270 \times 10^{-07}$	$2{\cdot}270 \times 10^{-07}$	$5{\cdot}007 \times 10^{-01}$
21	$9{\cdot}999\,998\,865 \times 10^{-01}$	$1{\cdot}135 \times 10^{-07}$	$1{\cdot}135 \times 10^{-07}$	$5{\cdot}000 \times 10^{-01}$
22	$9{\cdot}999\,999\,452 \times 10^{-01}$	$5{\cdot}484 \times 10^{-08}$	$5{\cdot}868 \times 10^{-08}$	$5{\cdot}171 \times 10^{-01}$
23	$9{\cdot}999\,999\,695 \times 10^{-01}$	$3{\cdot}054 \times 10^{-08}$	$2{\cdot}429 \times 10^{-08}$	$4{\cdot}140 \times 10^{-01}$

Taula 1: Iterats del mètode de Newton (1) corresponents a $x_0 = 0{\cdot}8$.

n	x_n	ε_n	ϵ_n	$\epsilon_n/\epsilon_{n-1}^2$
0	$8{\cdot}000\,000\,000 \times 10^{-01}$	$2{\cdot}000 \times 10^{-01}$	—	—
1	$9{\cdot}846\,153\,846 \times 10^{-01}$	$1{\cdot}538 \times 10^{-02}$	$1{\cdot}846 \times 10^{-01}$	—
2	$9{\cdot}998\,843\,262 \times 10^{-01}$	$1{\cdot}157 \times 10^{-04}$	$1{\cdot}527 \times 10^{-02}$	$4{\cdot}480 \times 10^{-01}$
3	$9{\cdot}999\,999\,933 \times 10^{-01}$	$6{\cdot}687 \times 10^{-09}$	$1{\cdot}157 \times 10^{-04}$	$4{\cdot}961 \times 10^{-01}$

Taula 2: Iterats del mètode de Newton (3) corresponents a $x_0 = 0{\cdot}8$.

$h'(s) \neq 0$. En el nostre cas $q = 2, s = 1$ i $h(x) = x - 2$, per tant $L = 1/2$, que és el valor al qual hi tendeixen els quocients $\epsilon_n/\epsilon_{n-1}^2$ de l'última columna.

Per últim, podem considerar la funció $u(x) = f(x)/f'(x)$ que tindrà $s = 1$ com arrel simple. Així, prenent $x_0 = 0.8$ a l'algorisme

$$x_{n+1} = x_n - \frac{u(x_n)}{u'(x_n)}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{4}$$

es troben les aproximacions de l'arrel que apareixen a la taula 4 (fixem-nos que caldrà calcular la derivada segona de $f(x)$ a cada iteració). Observem, com abans, que la convergència és quadràtica. A més sabem que la constant asimptòtica de l'error per l'algorisme (4) és $L = |u''(s)/2u'(s)|$, i fent els càlculs es comprova que $L = 1/2$, valor cap al qual tendeixen els quocients $\epsilon_n/\epsilon_{n-1}^2$ de l'última columna de la taula.

Pel que fa a l'arrel simple, $s = 2$, a la taula 4 es mostren els iterats obtinguts per la recurrència (1) a partir de $x_0 = 2{\cdot}1$. Es veu que la convergència és quadràtica i s'intueix dels valors de la quarta columna que la constant asimptòtica de l'error és $L = 2$, com es comprova calculant $L = |f''(s)/2f'(s)|$ per al polinomi $f(x)$ donat.

n	x_n	ε_n	ϵ_n	$\epsilon_n/\epsilon_{n-1}^2$
0	$8{\cdot}000\,000\,000 \times 10^{-01}$	$2{\cdot}000 \times 10^{-01}$	—	—
1	$1{\cdot}013\,698\,630 \times 10^{+00}$	$1{\cdot}370 \times 10^{-02}$	$2{\cdot}137 \times 10^{-01}$	—
2	$1{\cdot}000\,096\,441 \times 10^{+00}$	$9{\cdot}644 \times 10^{-05}$	$1{\cdot}360 \times 10^{-02}$	$2{\cdot}979 \times 10^{-01}$
3	$1{\cdot}000\,000\,005 \times 10^{+00}$	$4{\cdot}651 \times 10^{-09}$	$9{\cdot}644 \times 10^{-05}$	$5{\cdot}212 \times 10^{-01}$
4	$1{\cdot}000\,000\,000 \times 10^{+00}$	$0{\cdot}000 \times 10^{+00}$	$4{\cdot}651 \times 10^{-09}$	$5{\cdot}001 \times 10^{-01}$

Taula 3: Iterats del mètode de Newton (4) corresponents a $x_0 = 0{\cdot}8$.

n	x_n	ε_n	ϵ_n	$\epsilon_n/\epsilon_{n-1}^2$
0	$2{\cdot}100\,000\,000 \times 10^{+00}$	$1{\cdot}000 \times 10^{-01}$	—	—
1	$2{\cdot}015\,384\,615 \times 10^{+00}$	$1{\cdot}538 \times 10^{-02}$	$8{\cdot}462 \times 10^{-02}$	—
2	$2{\cdot}000\,452\,489 \times 10^{+00}$	$4{\cdot}525 \times 10^{-04}$	$1{\cdot}493 \times 10^{-02}$	$2{\cdot}086 \times 10^{+00}$
3	$2{\cdot}000\,000\,409 \times 10^{+00}$	$4{\cdot}089 \times 10^{-07}$	$4{\cdot}521 \times 10^{-04}$	$2{\cdot}028 \times 10^{+00}$
4	$2{\cdot}000\,000\,000 \times 10^{+00}$	$3{\cdot}335 \times 10^{-13}$	$4{\cdot}089 \times 10^{-07}$	$2{\cdot}001 \times 10^{+00}$
5	$2{\cdot}000\,000\,000 \times 10^{+00}$	$4{\cdot}441 \times 10^{-16}$	$3{\cdot}340 \times 10^{-13}$	$1{\cdot}997 \times 10^{+00}$

Taula 4: Iterats del mètode de Newton (1) corresponents a $x_0 = 2{\cdot}1$.

n	x_n	ϵ_n	$\epsilon_n/\epsilon_{n-1}$	$\epsilon_n/\epsilon_{n-1}^2$	$\epsilon_n/\epsilon_{n-1}^\sigma$
0	$-2{\cdot}600\,000\,000 \times 10^{+00}$	—	—	—	—
1	$-2{\cdot}400\,000\,000 \times 10^{+00}$	$2{\cdot}000 \times 10^{-01}$	—	—	—
2	$-2{\cdot}106\,598\,985 \times 10^{+00}$	$2{\cdot}934 \times 10^{-01}$	$1{\cdot}467 \times 10^{+00}$	$7{\cdot}335 \times 10^{+00}$	$3{\cdot}967 \times 10^{+00}$
3	$-2{\cdot}022\,641\,412 \times 10^{+00}$	$8{\cdot}396 \times 10^{-02}$	$2{\cdot}862 \times 10^{-01}$	$9{\cdot}753 \times 10^{-01}$	$6{\cdot}106 \times 10^{-01}$
4	$-2{\cdot}001\,511\,097 \times 10^{+00}$	$2{\cdot}113 \times 10^{-02}$	$2{\cdot}517 \times 10^{-01}$	$2{\cdot}998 \times 10^{+00}$	$1{\cdot}164 \times 10^{+00}$
5	$-2{\cdot}000\,022\,536 \times 10^{+00}$	$1{\cdot}489 \times 10^{-03}$	$7{\cdot}045 \times 10^{-02}$	$3{\cdot}334 \times 10^{+00}$	$7{\cdot}641 \times 10^{-01}$
6	$-2{\cdot}000\,000\,023 \times 10^{+00}$	$2{\cdot}251 \times 10^{-05}$	$1{\cdot}512 \times 10^{-02}$	$1{\cdot}016 \times 10^{+01}$	$8{\cdot}453 \times 10^{-01}$
7	$-2{\cdot}000\,000\,000 \times 10^{+00}$	$2{\cdot}269 \times 10^{-08}$	$1{\cdot}008 \times 10^{-03}$	$4{\cdot}476 \times 10^{+01}$	$7{\cdot}510 \times 10^{-01}$
8	$-2{\cdot}000\,000\,000 \times 10^{+00}$	$3{\cdot}406 \times 10^{-13}$	$1{\cdot}501 \times 10^{-05}$	$6{\cdot}619 \times 10^{+02}$	$7{\cdot}960 \times 10^{-01}$

Taula 5: Iterats del mètode de la secant per a la funció $f(x) = x^3 - 3x + 2$.

2 Un exemple del mètode de la Secant

Volem il·lustrar que el mètode de la secant té ordre de convergència $\sigma = (1+\sqrt{5})/2 = 1{\cdot}618\ldots$. Per a això considerem la funció $f(x) = x^3 - 3x + 2$ i anem a calcular l'arrel $s = 2$ numèricament amb el mètode de la secant. Prenem $x_0 = -2{\cdot}6$ i $x_1 = -2{\cdot}4$ i, amb aquest mètode obtenim la,taula 5 on s'observa a la quarta columna que la convergència és més ràpida que lineal, a la cinquena, veiem que és menys que quadràtica i, a la darrera, veiem que l'ordre és efectivament $(1+\sqrt{5})/2$.

3 Aplicació: punts d'equilibri del PCRTBP

Anem a considerar un problema en el món de la mecànica celeste i la astrodinàmica (els interessats en una perspectiva històrica del problema poden consultar [1]). Suposem que volem enviar una missió a la Lluna o una nau no tripulada a estudiar l'activitat solar.

Un primer model aproximat de la realitat és l'anomenat Problema Restringit dels tres cossos circular pla (PCRTBP). Aquest consisteix en suposar que es tenen dos cossos massius, anomenats primaris (per exemple la Terra i la LLuna) que descriuen òrbites circulars en un mateix pla al voltant del seu centre de masses, i un tercer cos (nau espacial) de massa infinitesimal (comparada amb la massa dels primaris), que es mou en el mateix pla, sotmès a l'atracció gravitatòria dels primaris però sense alterar el seu moviment.

Es pot veure a [2] que si es pren un sistema de referència que giri amb els primaris (de manera que aquests romanen fixos en el nou eix x), i prenent unitats adequades de longitud, massa i temps, llavors les equacions diferencials que descriuen la trajectòria $(x(t), y(t))$ i velocitat $(x'(t), y'(t))$ del cos infinitessimal són, si denotem $X = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (x, y, x', y')$,

$$\begin{aligned} x_1' &= x_3, \\ x_2' &= x_4, \\ x_3' &= 2x_4 + \frac{\partial \Omega}{\partial x_1}, \\ x_4' &= -2x_3 + \frac{\partial \Omega}{\partial x_2} \end{aligned} \tag{5}$$

o, més breument $X' = F(X)$, on X pertany a un obert d'$\mathbb{R}^4$, on

$$\Omega(x_1, x_2) = \Omega(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} + \frac{1}{2}\mu(1-\mu),$$

essent r_1, r_2, respectivament, les distàncies del tercer cos al primari gran (Terra) i al petit (Lluna), i.e.,

$$r_1 = \sqrt{(x-\mu)^2 + y^2}, \qquad r_2 = \sqrt{(x-\mu+1)^2 + y^2}$$

i on $\mu \in (0, 1/2]$ és l'anomenat *paràmetre de masses* (quocient entre la massa del primari petit i de la suma de les masses dels dos primaris). En particular, el primari gran de massa $1-\mu$ està localitzat al punt $(\mu, 0)$ i el petit de massa μ al punt $(\mu - 1, 0)$. Per exemple, prenent com primaris la Terra i la Lluna, s'obté $\mu = 0{\cdot}012\,29$ (vegeu la figura 1).

Es pot comprovar molt fàcilment que el sistema diferencial (5) té una integral primera, l'anomenada *integral de Jacobi* i que s'expressa per

$$C(x, y, x', y') = 2\Omega(x, y) - (x'^2 + y'^2) \tag{6}$$

de manera que F roman constant per a cada solució, i ho expressarem per

$$2\Omega(x, y) - (x'^2 + y'^2) = C. \tag{7}$$

3.1 Punts d'equilibri

Quan s'estudia un sistema $X' = F(X)$, $X \in \mathbb{R}^n$, l'objectiu més ambiciós és conéixer totes les solucions del. Això, en general, no és possible i el que s'acostuma a fer és començar per les solucions més senzilles, és a dir, les anomenades solucions o punts d'equilibri que són constants al llarg del temps, $X(t) = p$, on p és tal que $F(p) = 0$.

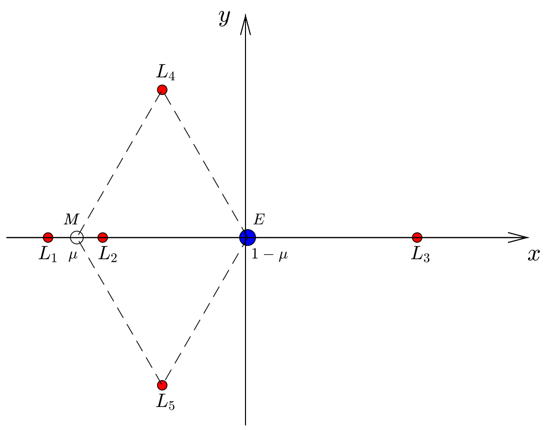


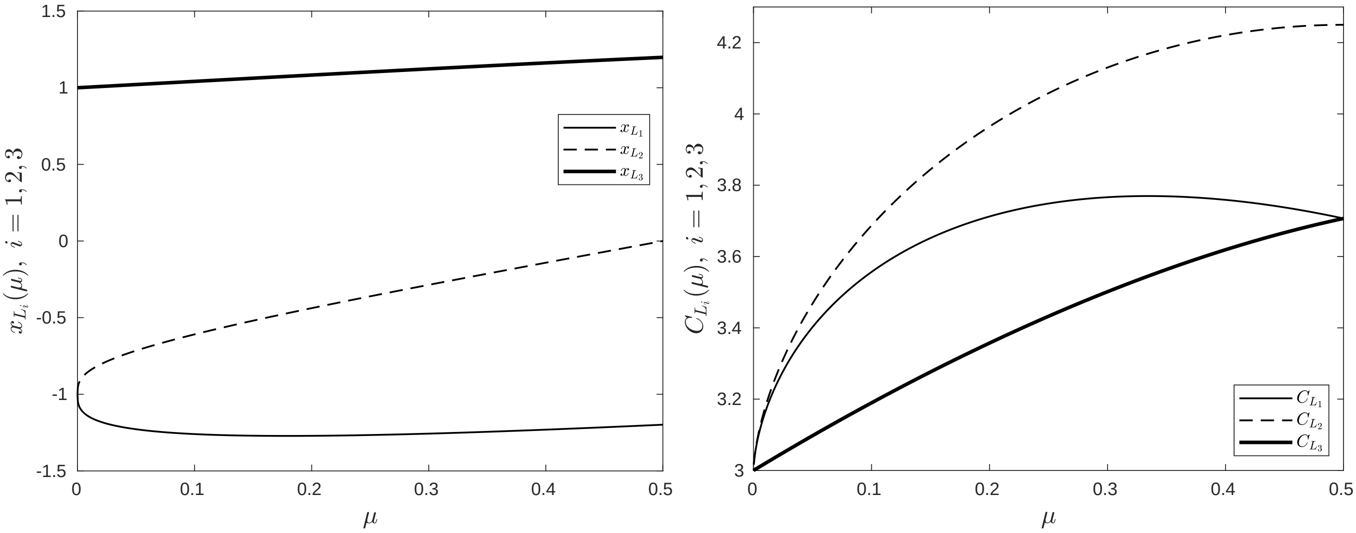
Figura 1: Punts d'equilibri del PCRTBP.

L'objectiu d'aquesta pràctica és calcular els punts d'equilibri del PCRTBP en variar el paràmetre de masses a l'interval $(0, 1/2]$. Es pot veure que hi ha 5 punts d'equilibri anomenats $L_1, \dots, L_5$, on L_1, L_2 i L_3 (o punts colineals) estan localitzats sobre l'eix x, mentre que els punts L_4 i L_5 (o punts triangulars) estan localitzats formant un triangle equilàter amb els primaris, és a dir, a les posicions:

$$L_{4,5} = (\mu - 1/2, \pm\sqrt{3}/2).$$

Vegeu la figura 1, on es mostren el punts d'equilibri del sistema Terra-Lluna.

Per a calcular la posició dels punts colineals, cal resoldre una equació polinòmica de cinquè grau, l'anomenada *quíntica d'Euler*. El que farem será resoldre aquesta equació polinòmica, primer re-escrivint-la de manera adequada per tal d'aplicar el teorema del punt fix i després comprovarem els càlculs amb els mètodes de la secant i de Newton, tal com s'indica a la secció 4.



(a) (b)

Figura 2: (a) posició dels punts d'equilibri en funció del paràmetre de masses, $\mu \in (0, 1/2]$. La gràfica en traç continu correspon a x_{L_1}, la gràfica en traç discontinu a x_{L_2} i la gràfica en traç continu més gruix a x_{L_3}. (b) valor de constant de Jacobi, C, per a cada valor de $\mu \in (0, 1/2]$ als punts d'equilibri L_1 (traç continu), L_2 (traç discontinu) i L_3 (traç continu més gruix).

3.1.1 Càlcul de L_1

L_1 és el punt colineal situat sobre l'eix x a l'esquerra del primari petit (vegeu la figura 1). Si introduïm la translació $x = \mu - 1 - s$ (notem que llavors la posició del primari petit correspon a $s = 0$) la posició s_{L_1} de L_1 ve donada per l'única arrel real positiva de la quíntica

$$s^5 + (3 - \mu)s^4 + (3 - 2\mu)s^3 - \mu s^2 - 2\mu s - \mu = 0 \tag{8}$$

o, equivalentment, pel punt fix de la funció

$$G_1(s) = \sqrt[3]{\frac{\mu(1+s)^2}{3 - 2\mu + s(3 - \mu + s)}}$$

que podem trobar de la recurrència $s_n = G_1(s_{n-1})$, $n \in \mathbb{N}$, prenent

$$s_0 = \sqrt[3]{\frac{\mu}{3(1-\mu)}} \tag{9}$$

com a valor inicial (vegeu [2], sec. 4.4). Un cop hem determinat s_{L_1}, la posició de L_1 en les coordenades originals és $(x_{L_1}, 0)$ amb $x_{L_1} = \mu - 1 - s_{L_1}$. Comprovarem també el càlcul pels mètodes de la secant i de Newton (vegeu la remarca 3.1).

3.1.2 Càlcul de L_2

El punt d'equilibri colineal L_2 es troba sobre l'eix x entre els dos primaris (vegeu la figura 1). Si fem la translació $x = \mu - 1 + s$ (de manera que $s = 0$ dóna la posició del primari més petit), el valor de s que correspon a la posició de L_1 és solució de l'equació quíntica

$$s^5 - (3 - \mu)s^4 + (3 - 2\mu)s^3 - \mu s^2 + 2\mu s - \mu = 0 \tag{10}$$

amb $s > 0$ o, equivalentment, un punt fix de la funció

$$G_2(s) = \sqrt[3]{\frac{\mu(1-s)^2}{3 - 2\mu - s(3 - \mu - s)}} \tag{11}$$

que obtindrem de la recurrència $s_n = G_2(s_{n-1})$, $n \in \mathbb{N}$, agafant el mateix valor (9) de s_0. Així, si s_{L_2} és el punt fix de (10) trobat, la posició del punt L_2 és $(x_{L_2}, 0)$ amb $x_{L_2} = \mu - 1 + s_{L_1}$. Comprovarem també el resultat pels mètodes de la secant i de Newton (vegeu la remarca 3.1).

3.1.3 Càlcul de L_3

El punt d'equilibri colineal L_3 és situa sobre l'eix x a la dreta del primari gran (vegeu la figura 1). En aquest cas convé fer la translació $x = \mu + s$, de manera que $s = 0$ dóna la posició del primari gran. En aquesta nova coordenada s, per determinar la posició de L_3 busquem l'única arrel positiva, s_{L_3}, de la quíntica

$$s^5 + (2+\mu)s^4 + (1+2\mu)s^3 - (1-\mu)s^2 - 2(1-\mu)s - (1-\mu) = 0 \tag{12}$$

o, equivalentment, l'únic punt fix de la funció

$$G_3(s) = \sqrt[3]{\frac{(1-\mu)(1+s)^2}{1+2\mu+s(2+\mu+s)}}$$

calculant els termes de la recurrència $s_n = G_3(x_{s-1})$, $n \in \mathbb{N}$, agafant

$$s_0 = 1 - \frac{7\mu}{12} \tag{13}$$

(vegeu [2], sec. 4.4). Un cop conegut s_{L_3}, la posició del punt L_3 és $(x_{L_3}, 0)$ amb $x_{L_3} = \mu + s_{L_3}$. Igualment, caldrà comprovar els valors obtinguts pels mètodes de la secant i de Newton. (vegeu la remarca 3.1).

Remarca 3.1. Quan repetiu els càlculs pel mètode de Newton podeu fer servir, per a L_1 i L_2, el valor inicial s_0 donat per (9) i, per L_3, el donat per (13). Al mètode de la secant podeu agafar el mateix l'interval inicial $[s_0, s_1] = [0{\cdot}3, 0{\cdot}8]$ per a tots els valors de μ.

4 Presentació de la pràctica

Haureu de pujar els fitxers següents:

1. Un fitxer `iteracio_simple.m` amb la funció

   ```
   function [xk, res, it] = iteracio_simple(x0, tol, itmax, fun)
   ```

   que calculi el punt fix de la funció $f(x)$ proper a un valor donat, x_0, pel mètode d'iteració simple; on els paràmetres d'entrada són:

   `x0`: aproximació inicial, x_0, del punt fix que busquem,

   `tol`: tolerància. La iteració s'atura quan $|x_n - x_{n-1}| <$ `tol`,

   `itmax`: nombre màxim d'iterats permesos. Si no hi ha convergència en `itmax` iteracions del mètode, s'ha d'emetre un missatge,

   `fun`: la funció $f(x)$,

   i els paràmetres de sortida són:

   `xk`: vector amb les aproximacions successives del punt fix,

   `res`: vector que conté els "residus" per al mètode del punt fix, i.e., $\mathrm{res}_k := f(x_k) - x_k$.

   `it`: nombre d'iteracions del mètode que s'han dut a terme.

2. Un fitxer `newton.m` amb la funció

   ```
   function [xk, res, it] = newton(x0, tol, itmax, fun, dfun)
   ```

   que calculi el zero de $f(x)$ proper a un valor donat, x_0, pel mètode de Newton; on els paràmetres d'entrada són:

   `x0`: aproximació inicial, x_0, del zero de $f(x)$ que busquem,

   `tol`: tolerància. La iteració s'atura quan $|x_n - x_{n-1}| <$ `tol`,

   `itmax`: nombre màxim d'iterats permesos. Si no hi ha convergència en `itmax` iteracions del mètode, s'ha d'emetre un missatge,

   `fun`: la funció $f(x)$,

dfun: la derivada $f'(x)$ de la funció $f(x)$,

i els de sortida són:

xk: vector amb les aproximacions successives dels zeros de la funció,

res: vector que conté els "residus" per al mètode de Newton, i.e., el valor de la funció per a cadascuna de les components de `xk`: $\text{res}_k := f(x_k)$,

it: nombre d'iteracions del mètode de Newton que s'han dut a terme.

3. Un fitxer `secant.m` amb la funció

```
function [xk, res, it] = secant(a, b, tol, itmax, fun)
```

que calculi el zero de la funció $f(x)$ a l'interval $[a, b]$ pel mètode de la secant; on els paràmetres d'entrada són:

a, b: extrems de l'interval on es troba de l'arrel ($a < b$),

tol: tolerància. La iteració s'atura quan $|x_n - x_{n-1}| < \texttt{tol}$,

itmax: nombre màxim d'iterats permesos. Si no hi ha convergència en `itmax` iteracions del mètode, s'ha d'emetre un missatge,

fun: la funció $f(x)$,

i els de sortida són:

xk: vector amb les aproximacions successives dels zeros de la funció,

res: vector que conté els "residus" per al mètode de la secant, i.e., el valor de la funció per a cadascuna de les components de `xk`: $\text{res}_k := f(x_k)$,

it: nombre d'iteracions del mètode de la secant que s'han dut a terme.

4. tres fitxers de comandes, `pEulerIteracioSimple.m`, `pEulerNewton.m` i `pEulerSecant.m` que cridin les funcions `iteracio_simple`, `newton` i `secant` respectivament, calculin les posicions de L_1, L_2 (vegeu la remarca 3.1). L_3 per valors de μ a l'interval $(0, 1/2]$ i dibuixin les gràfiques de la figura 2.

5 Referències

[1] J. Barrow-Green. *Poincare and the Three Body Problem*. History of mathematics. American Mathematical Society, 1997. 3

[2] V.G. Szebehely. *Theory of Orbits, the Restricted Problem of Three Bodies*. Academic Press, New York, 1967. 3, 5, 6