

15. Siguin $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ estrictament creixent i $G: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida per $G(x, y) = (f(x), -y + xf(x))$.

(a) Demostreu que G satisfà les hipòtesis del teorema de la funció inversa, en tots els punts de \mathbb{R}^2 .

(b) Donat $(u_0, v_0) \in \text{Im } G$, calculeu $DG^{-1}(u_0, v_0)$.

(c) Demostreu que G és injectiva i calculeu l'expressió explícita de G^{-1} .

19. Considereu el sistema d'equacions

$$\begin{cases} x - u - v = 0 \\ y - u^2 - v^2 = 0 \\ z - u^3 - v^3 = 0. \end{cases}$$

Trobeu els punts $p = (x_0, y_0, z_0, u_0, v_0) \in \mathbb{R}^5$ que compleixin les dues condicions següents:

(a) el sistema defineix funcions implícites diferenciables, $z = f_1(x, y), u = f_2(x, y), v = f_3(x, y)$, al voltant de p .

(b) la derivada direccional de f_1 en (x_0, y_0) és màxima en la direcció del vector $(1, 0)$, i el valor d'aquesta derivada és 3.