EDOs lineales de orden n

Rafael Ramírez Ros

Clases 10, 11 & 12 (de problemas de EDOs-GM)

Índice

Abreviaturas

- EDO = Ecuación diferencial ordinaria
- EDOL = EDO lineal
- EDOLH/EDOLNH = EDO lineal homogénea/no homogénea
- SL = Sistema lineal
- SLH/SLNH = Sistema lineal homogéneo/no homogéneo
- CC = Coeficientes constantes
- CI = Condición inicial
- PVI = Problema de valor inicial (o de Cauchy)
- SEV = Subespacio vectorial
- LI/LD = Linealmente independiente/dependiente

Definiciones

- Una EDOL de orden n es una ecuación de la forma

$$x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)x' + a_0(t)x = f(t)$$

  donde:
  - $t \in I \subset \mathbf{R}$ es la variable independiente;
  - $x = x(t) \in \mathbf{R}$ es la incógnita (o variable dependiente);
  - $a_0(t), a_1(t), \ldots, a_{n-1}(t)$ son funciones continuas en I;
  - $f(t)$ es el término no homogéneo, también continuo en I;
  - I es un intervalo de $\mathbf{R}$.
- La EDOL es homogénea cuando $f(t) \equiv 0$.
- La EDOL es a CC cuando los coeficientes $a_j(t)$ son constantes.
- La EDOL está normalizada: $a_n(t) \equiv 1$.
- CI $= \{x^{(j)}(t_0) = x_j : j = 0, \ldots, n-1\}$, $t_0 =$ tiempo inicial, $x_j =$ valores iniciales.

EDOL orden n $\rightsquigarrow$ SL 1er orden y dimensión n

Esa EDOL de orden n equivale al SL de 1er orden

$$\boldsymbol{x}' = A(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}(t), \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ x' \\ \vdots \\ x^{(n-2)} \\ x^{(n-1)} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{pmatrix},$$

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) & -a_2(t) & \cdots & -a_{n-2}(t) & -a_{n-1}(t) \end{pmatrix}$$

Nota: $\operatorname{traza}[A(t)] = -a_{n-1}(t)$.

Relaciones entre las EDOLs y sus SLs

- $x(t)$ sol. EDOL $\Leftrightarrow \boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$ sol. SL, luego

  1. La soluciones de una EDOLH forman un SEV de dimensión n:
  $$x_{\mathrm{h}}(t) = c_1 x_1(t) + \cdots + c_n x_n(t), \qquad c_1, \ldots, c_n \in \mathbf{R}.$$
  2. La solución general de una EDOLNH tiene la forma
  $$x_{\mathrm{g}}(t) = x_{\mathrm{h}}(t) + x_{\mathrm{p}}(t) = c_1 x_1(t) + \cdots + c_n x_n(t) + x_{\mathrm{p}}(t),$$
  donde $x_{\mathrm{p}}(t)$ es cualquier solución particular de la EDOLNH.

- CIs: $\left.\begin{array}{rcl} x(t_0) & = & x_0 \\ & \vdots & \\ x^{(n-1)}(t_0) & = & x_{n-1} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0 := \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}$

- Teorema $\exists!$ para SLs $\Rightarrow$ Teorema $\exists!$ para EDOLs.

Índice

Wronskiano & funciones LI

- Tenemos n soluciones $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ de la EDOLH.
- Pregunta: ¿Son LI? Es decir,

$$c_1 x_1(t) + \cdots + c_n x_n(t) = 0, \forall t \in I \Rightarrow c_1 = \cdots = c_n = 0.$$

- Su Wronskiano $W(t) = W[x_1(t), \ldots, x_n(t)]$ es el determinante

$$W(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \cdots & x_n(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) & \cdots & x_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{(n-1)}(t) & x_2^{(n-1)}(t) & \cdots & x_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}.$$

- Fórmula de Liouville: $W'(t) = -a_{n-1}(t)W(t)$, luego
  1. O bien, $W(t) \neq 0, \forall t \in I$ ($\rightsquigarrow$ son LI);
  2. O bien, $W(t) \equiv 0, \forall t \in I$ ($\rightsquigarrow$ son LD).
- Problemas 30, 31 y 32.

Reducción de orden

- EDOLH 2o orden normalizada: $x'' + a_1(t)x' + a_0(t)x = 0$.
- Si $x_1(t)$ es una solución tal que $x_1(t) \neq 0$ para todo $t \in I$, entonces
$$x_2(t) = x_1(t) \int \frac{e^{-\int a_1(t)dt}}{x_1(t)^2} dt$$
es una segunda solución LI con $x_1(t)$.
- Prueba: Al imponer que $x_2(t) = x_1(t)v(t)$ sea solución, obtenemos una EDOLH de 1er orden en la incógnita $u = v'$.
- Esta reducción también funciona en EDOLHs de orden n.
- Ejemplo: Si $m \in \mathbf{R}$ es un parámetro arbitrario, entonces
$$\left.\begin{array}{l} \text{EDOLH: } x'' - 2mx' + m^2x = 0 \\ \text{1a solución: } x_1(t) = e^{mt} \neq 0,\ \forall t \end{array}\right\} \Rightarrow \text{2a sol.: } x_2(t) = te^{mt}.$$
- Problemas 34 y 49.

EDOLHs a CC: Notaciones & definiciones

- EDOLH a CC: $x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \cdots + a_1 x' + a_0 x = 0$.
- Operador diferencial: $D = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$. En particular, $D^j = \frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}t^j}$.
- EDOLH a CC en forma compacta: $P(D)[x] = 0$.
- Polinomio característico[1]:

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0.$$

- Idea clave: $D^j[\mathrm{e}^{\lambda t}] = \lambda^j \mathrm{e}^{\lambda t}$, luego $P(D)[\mathrm{e}^{\lambda t}] = P(\lambda)\mathrm{e}^{\lambda t}$.
- Corolarios:
  1. $m \in \mathbf{C}$ raíz de $P(\lambda) \Leftrightarrow x(t) = \mathrm{e}^{mt}$ solución.
  2. Si los coeficientes son reales: $P(\lambda) \in \mathbf{R}_n[\lambda]$, entonces

$$\alpha \pm \beta\mathrm{i} \text{ raíces de } P(\lambda) \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} y(t) = \mathrm{e}^{\alpha t}\cos(\beta t) \\ z(t) = \mathrm{e}^{\alpha t}\sin(\beta t) \end{array}\right\} \text{ soluciones.}$$

- Reto: Buscar k soluciones LI por cada raíz de multiplicidad k.

[1] $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$ SLH asociado $\Rightarrow P(\lambda) = (-1)^n Q_A(\lambda)$.

EDOLHs a CC: Conjunto fundamental de soluciones

- Ejercicio: $P(D)[t^r \mathrm{e}^{mt}] = \mathrm{e}^{mt} P(D + m\mathrm{Id})[t^r]$, $\forall m \in \mathbf{C}, \forall r \geq 0$.
- $x(t) = t^r \mathrm{e}^{mt}$ solución $\Leftrightarrow$ m raíz de multiplicidad $> r$.
- Si los coeficientes son reales: $P(\lambda) \in \mathbf{R}_n[\lambda]$, entonces

$$\left.\begin{array}{l} y(t) = t^r \mathrm{e}^{\alpha t} \cos(\beta t) \\ z(t) = t^r \mathrm{e}^{\alpha t} \sin(\beta t) \end{array}\right\} \text{ soluciones } \Leftrightarrow \begin{array}{l} \alpha \pm \beta \mathrm{i} \text{ raíces de} \\ \text{multiplicidad } > r \end{array}$$

- Asociamos a cada raíz de $P(\lambda)$ unas funciones según la tabla

Raíz	Mul.	Soluciones LI
$m \in \mathbf{R}$	k	$t^r \mathrm{e}^{mt}$ con $r = 0, 1, \ldots, k-1$
$\alpha \pm \beta \mathrm{i} \in \mathbf{C}$	k	$\left.\begin{array}{l} t^r \mathrm{e}^{\alpha t} \cos \beta t \\ t^r \mathrm{e}^{\alpha t} \sin \beta t \end{array}\right\}$ con $r = 0, 1, \ldots, k-1$

- Esas funciones forman un conjunto fundamental de soluciones.
- Problemas 33, 35, 36 y 37.

Índice

Variación de las constantes: Caso general

- EDOLNH: $x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)x' + a_0(t)x = f(t)$.
- Solución general EDOLH: $x_\mathrm{h}(t) = c_1x_1(t) + \cdots + c_nx_n(t)$.
- Buscamos una solución particular $x_\mathrm{p}(t)$ de la EDOLNH sustituyendo las constantes c_j por funciones $u_j(t)$.
- Fórmula de variación de las constantes (vía Cramer):

$$u_j(t) = \int \frac{W_j(t)}{W(t)}\mathrm{d}t, \qquad j = 1, \ldots, n,$$

  donde $W(t) = W[x_1(t), \ldots, x_n(t)]$ es el Wronskiano y $W_j(t)$ es el determinante de la matriz que se obtiene a sustituir la j-ésima columna de $W(t)$ por el término independiente $\boldsymbol{b}(t)$.
- No se necesita ninguna constante de integración al calcular las primitivas, pues solo queremos una solución particular.
- Ejemplo: Problema 39.

Variación de las constantes: Caso 2o orden

- EDOLNH normalizada: $x'' + a_1(t)x' + a_0(t)x = f(t)$.
- Sol. general EDOLH: $x_\mathrm{h}(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t)$, $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$.
- Fórmula de variación de las constantes: Si

$$u_1(t) = -\int \frac{x_2(t)f(t)}{W(t)}\mathrm{d}t, \quad u_2(t) = \int \frac{x_1(t)f(t)}{W(t)},$$

  entonces

$$x_\mathrm{p}(t) = u_1(t)x_1(t) + u_2(t)x_2(t)$$

  es una solución particular de la EDOLNH.
- Ejemplos: Problemas 44 y 45.

Coeficientes indeterminados: Método

- Condiciones necesarias para poder aplicarlo:
  1. EDOLNH a CC: $P(D)[x] = f(t)$, $P(\lambda)$ pol. característico; y
  2. Existe otro polinomio $Q(\lambda)$ tal que $Q(D)[f(t)] = 0$.
- Construimos la siguiente tabla:

Términos dentro de $f(t)$	Términos dentro de $x_p(t)$
$R(t)e^{mt}$, $\operatorname{gr}[R(t)] = l$	$t^k\tilde{R}(t)e^{mt}$, $\operatorname{gr}[\hat{R}(t)] = l$
$\left.\begin{array}{c} C(t)e^{\alpha t}\cos\beta t,\ C(t)\in \mathbf{R}_l[t] \\ S(t)e^{\alpha t}\sin\beta t,\ S(t)\in \mathbf{R}_l[t] \end{array}\right\}$	$\left.\begin{array}{c} t^k\tilde{C}(t)e^{\alpha t}\cos\beta t,\ \hat{C}(t)\in \mathbf{R}_l[t] \\ t^k\tilde{S}(t)e^{\alpha t}\sin\beta t,\ \hat{S}(t)\in \mathbf{R}_l[t] \end{array}\right\}$

con k = multiplicidad de m (resp., $\alpha \pm \beta i$) como raíz de $P(\lambda)$.

- Teorema: $\exists! x_p(t)$ "con" esos términos.
- Explicación: Si $x_g(t) = x_h(t) + x_p(t)$ es la solución general de la EDOLNH $P(D)[x] = f(t)$, entonces

$$P(D)[x_h(t)] = 0, \qquad Q(D)P(D)[x_p(t)] = Q(D)[f(t)] = 0.$$

- Ejemplos: Problemas 40, 41, 43 y 46.

EDOs de Euler

- Las EDOs de Euler son las ecuaciones de la forma

$$L[y] := a_n s^n y^{(n)} + a_{n-1} s^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 s y' + a_0 y = g(s).$$

- Son singulares en $s = 0$.
- 1a forma: EDO Euler (variable s) $\overset{s=e^t}{\leftrightarrow}$ EDOL a CC (variable t).
- 2a forma: Polinomio característico. Buscamos $P(\lambda) \in \mathbf{R}_n[\lambda]$ tal que $L[s^\lambda] = P(\lambda) s^\lambda$. Asociamos a cada raíz de $P(\lambda)$ unas funciones según la tabla

Raíz	Mul.	Soluciones LI
$m \in \mathbf{R}$	k	$(\log s)^r s^m$ con $r = 0, \ldots, k-1$
$\alpha \pm \beta i$	k	$\left.\begin{array}{c}(\log s)^r s^\alpha \cos(\beta \log s) \\ (\log s)^r s^\alpha \sin(\beta \log s)\end{array}\right\}$ con $r = 0, \ldots, k-1$

- Ejemplos: Problemas 47, 48 y 49.