Señales y Sistemas

Tema 3: Transformada de Fourier de secuencias

Asunción Moreno

Departamento de Teoría de la Señal y Comunicaciones
Universitat Politècnica de Catalunya (UPC)
<asuncion.moreno@upc.edu>

Noviembre 2018
v. 1.15

Capítulo 3.

3. Transformada de Fourier de secuencias

3.1 Autofunciones en la ecuación de convolución

Supongamos un sistema LI caracterizado por h[n] a cuya entrada se aplica x[n] = z^n
La señal de salida será

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z^{n-k} = z^n \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z^{-k} = z^n H(z)$$

Donde H(z) es la Transformada Z de h[n] o Función de Transferencia (ver tema IV)

Si tomamos $z = e^{j2\pi F}$queda

$$y[n] = e^{j2\pi Fn} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[k]\, e^{-j2\pi Fk} = e^{j2\pi Fn}\, H(e^{j2\pi F})$$

Llamaremos indistintamente, mientras no haya confusión, $H(e^{j2\pi F}) = H(F)$ y definimos H(F) la transformada de Fourier de h[n]

$$H(F) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j2\pi Fn}$$

3.2 Transformada de Fourier de secuencias

Por analogía definimos la Transformada de Fourier de una secuencia x[n]

$$X(F) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j2\pi Fn}$$

Usaremos la notación $\mathfrak{F}$ [x[n]] =X(F) y también $x[n] \leftrightarrow X(F)$

Es inmediato comprobar que:
a) La Transformada de Fourier de una secuencia es una función continua en F
b) Es periódica en F de periodo 1

$$X(F+1) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j2\pi(F+1)n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j2\pi Fn}\, e^{-j2\pi n} = X(F)$$

ya que $e^{-j2\pi n} = 1$

EJEMPLO 3-1

Hallar la Transformada de Fourier de la secuencia $h[n] = \begin{cases} 1 & 0 \le n \le N-1 \\ 0 & resto \end{cases} = p_N[n]$

$$H(F) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j2\pi Fn} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j2\pi Fn} = \frac{1 - e^{-j2\pi F(N-1)}e^{-j2\pi F}}{1 - e^{-j2\pi F}} =$$
$$= \frac{e^{-j\pi FN}(e^{j\pi FN} - e^{-j\pi FN})}{e^{-j\pi F}(e^{j\pi F} - e^{-j\pi F})} =$$
$$= e^{-j\pi F(N-1)} \frac{sen(\pi FN)}{sen(\pi F)}$$

Para dibujar esta función periódica de periodo 1 vemos que:
$H(0) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j2\pi 0n} = N$
Los ceros del numerador están en πFN=kπ → F=k/N
Los ceros del denominador están en πF=mπ → F=m
Y para N=5 queda

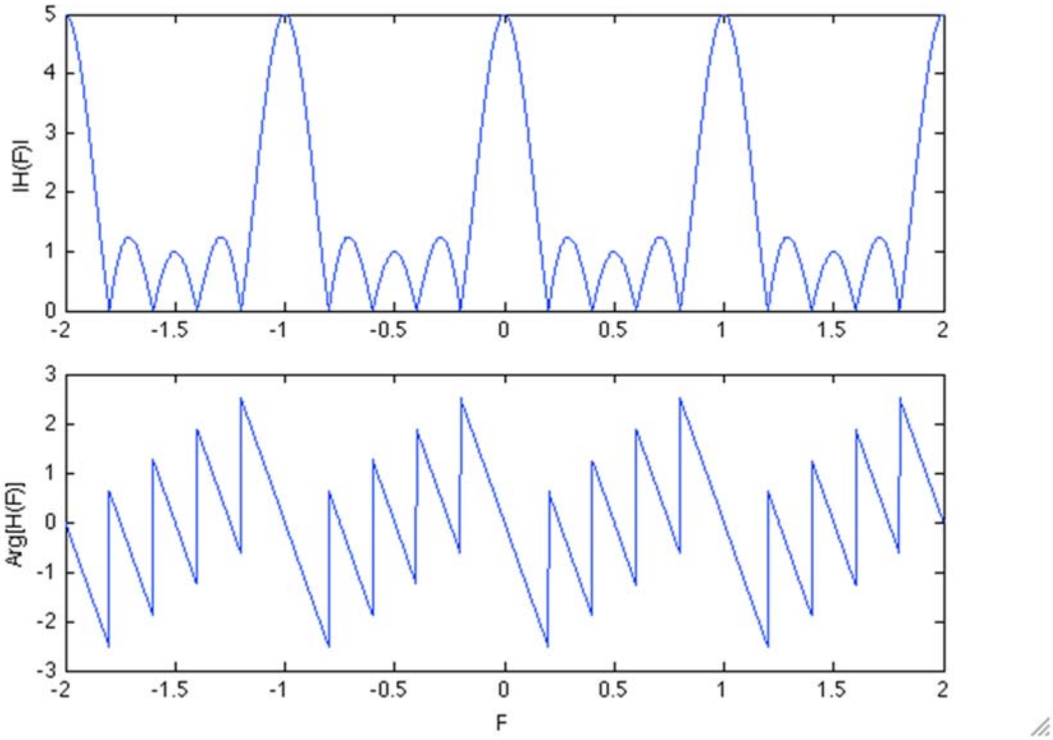

Figura 3.1 Transformada de Fourier de $p_N[n]$ con N=5. Superior: módulo, Inferior: fase

---

EJEMPLO 3-2

Hallar la T.F de la secuencia $x[n] = a^n u[n]$ con |a|<1

$$X(F) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u[n]e^{-j2\pi Fn} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j2\pi Fn} =$$

$$= \frac{1}{1 - ae^{-j2\pi F}}$$

Para su representación buscamos el módulo y la fase

$$|X(f)|^2 = \frac{1}{1 - ae^{-j2\pi F}} \frac{1}{1 - ae^{j2\pi F}} =$$
$$= \frac{1}{1 - 2\,a\cos(2\pi F) + a^2}$$

Como X(f) se puede expresar:

$$X(f) = \frac{1}{1 - a\cos(2\pi F) + ja sen(2\pi F)}$$

$$Arg[X(F)] = -arctg \frac{a\ sen(2\pi F)}{1 - a\cos(2\pi F)}$$

En la Figura se muestra el módulo y la fase de X(F) para a>0. |X(0)|= 1/(1-a); |X(0.5)|= 1/(1+a). Se deja como ejercicio el dibujo del módulo y la fase de X(F) para a<0

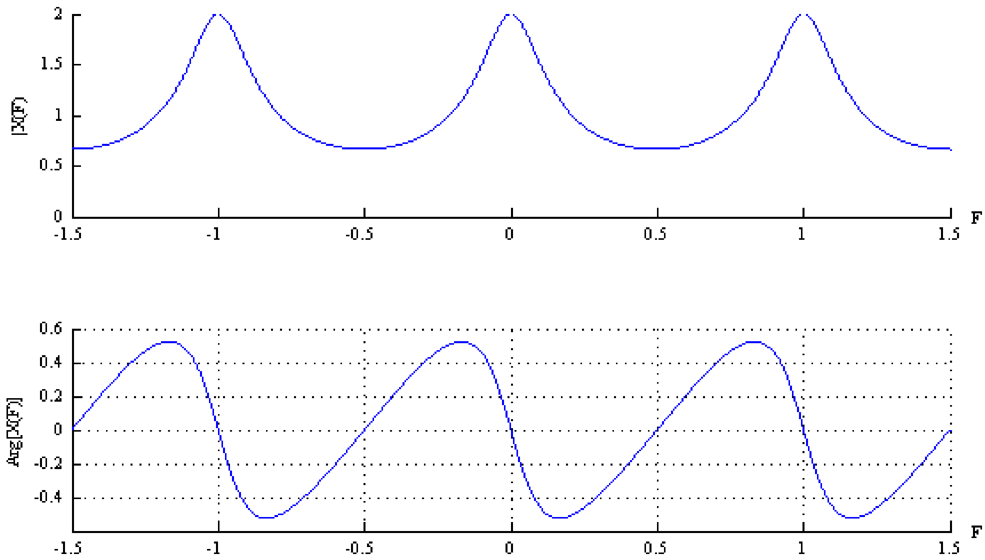

Figura 3.2 Transformada de Fourier de x[n]=a^{n}u[n] con 0<a<1. X(0)=1/(1-a), X(0.5)=1/(1+a)

EJEMPLO 3-3

Hallar la T.F de la secuencia $x[n] = \delta[n]$

$$X(F) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n] e^{-j2\pi Fn} = e^0 = 1$$

3.3 Transformada Inversa de Fourier de secuencias

La expresión

$$X(F) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j2\pi Fn}$$

es la descomposición en serie de Fourier de la señal periódica X(F). Para hallar los coeficientes, dado que el periodo es 1 tenemos:

$$x[n] = \int_{<1>} X(F) e^{j2\pi Fn} dF$$

La convergencia es puntual si x[n] es módulo sumable. La convergencia es cuadrática si x[n] es cuadrado sumable (presenta rizado en las discontinuidades de X(F) y en la discontinuidad toma el valor medio). También veremos que con el uso de funcionales, extendemos la T.F. a otras funciones.

Nota: Según lo visto en el Tema II, con los DSF en exponenciales positivas vemos que con un simple cambio de variable en el sumatorio tenemos:

$$X(F) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j2\pi Fn} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[-n] e^{j2\pi Fn}$$

y los coeficientes del DSF son

$$x[-n] = \int_{-0.5}^{0.5} X(F) e^{-j2\pi Fn} dF$$

por tanto

$$x[n] = \int_{-0.5}^{0.5} X(F) e^{j2\pi Fn} dF$$

EJEMPLO 3-4

Demostrar el siguiente par de transformadas

$$1 \leftrightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(F-k)$$

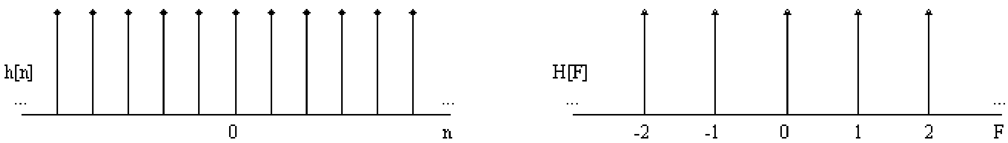

Figura 3.3

$$\mathfrak{F}^{-1}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(F-k)\right] = \int_{-0.5}^{0.5} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(F-k) e^{j2\pi Fn}\, dF =$$

$$= \int_{-0.5}^{0.5} \delta(F) e^{j2\pi Fn}\, dF = e^0 = 1$$

EJEMPLO 3-5

Hallar la respuesta impulsional de un filtro paso bajo ideal

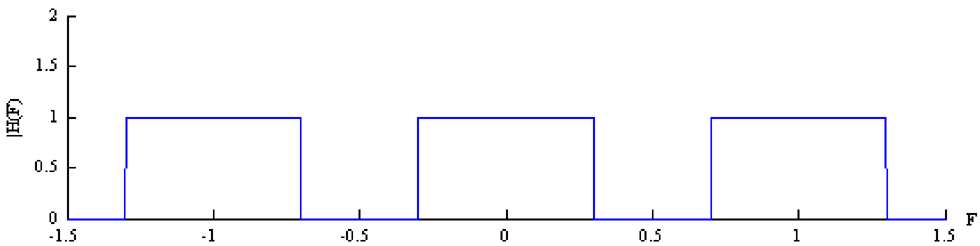

Figura 3.4

$$H(F) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \prod \left(\frac{F-k}{2F_0}\right)$$

$$h[n] = \int_{-0.5}^{0.5} H(F)e^{j2\pi Fn}dF = \int_{-F_0}^{F_0} e^{j2\pi Fn}dF =$$
$$= \frac{\sin 2\pi F_0 n}{\pi n} = 2F_0 sinc(2F_0 n)$$

h[n] no es causal porque h[n]$\neq 0$ $para\ n < 0$; h[n] no es módulo sumable, por tanto tampoco es estable.

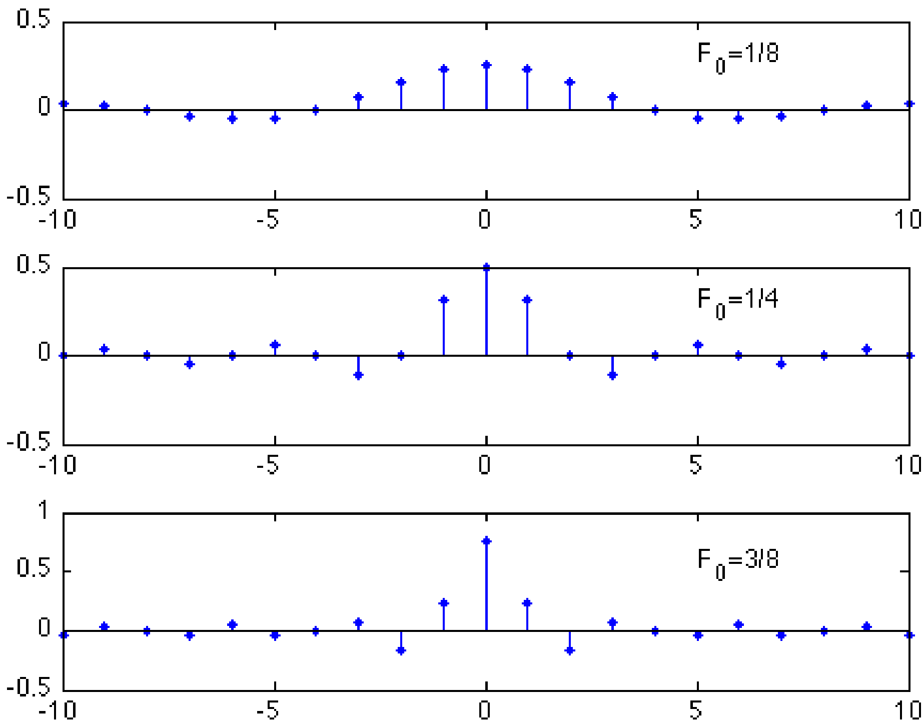

Figura 3.5

3.4 Propiedades de la Transformada de Fourier de secuencias

Son análogas a las de la TF de señales continuas con alguna diferencia

1. Linealidad

$\mathfrak{F}$ [a_1x_1[n] + a_2x_2[n]] = a_1 $\mathfrak{F}$ [x_1[n]] + a_2 $\mathfrak{F}$ [x_2[n]]

2. Simetría

Es fácil demostrar los siguientes pares de transformadas:
Si $x[n] \leftrightarrow X(F)$, entonces:

$$x[-n] \leftrightarrow X(-F)$$
$$x^*[n] \leftrightarrow X^*(-F)$$

A partir de esos pares de transformadas podemos demostrar fácilmente las propiedades de simetría

$$x[n] real \leftrightarrow X(F) Hermítica$$

ya que

$$x[n] = x^*[n] \leftrightarrow X(F) = X^*(-F)$$

La propiedad es análoga a la de señales analógicas pero hay que tener en cuenta además que X(F) es periódica y por tanto

$$X(F_0) = X^*(-F_0) = X^*(1 - F_0)$$

Como se muestra en el dibujo. Habitualmente representaremos X(F) entre (0,1) o entre (-0.5, 0.5). Si la señal es real, por las propiedades de simetría basta representarla entre (0, 0.5)

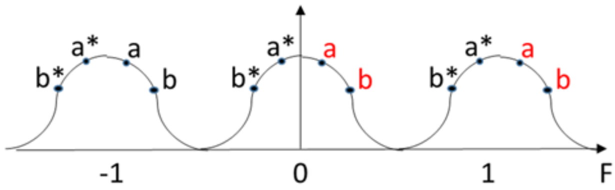

Figura 3.6

Las demás propiedades se demuestran de forma análoga:

$$x[n]par \leftrightarrow X(F)par$$
$$x[n]impar \leftrightarrow X(F)impar$$
$$x[n]real\ y\ par \leftrightarrow X(F)real\ y\ par$$
$$x[n]real\ impar \leftrightarrow X(F)imaginaria\ pura\ impar$$

3. Retardo

$$x[n - n_0] \leftrightarrow X(F)e^{-j2\pi F n_0}$$

EJEMPLO 3-6

Hallar la transformada de Fourier de un pulso rectangular centrado en el origen entre (-L y L).
El pulso tiene duración N=2L+1 y se puede expresar como $p_N[n + \frac{N-1}{2}]$. En el ejemplo 3.1 se dedujo que $p_N[n] \leftrightarrow\ e^{-j\pi F(N-1)} \frac{sen(\pi FN)}{sen(\pi F)}$ por tanto

$$p_N\left[n + \frac{N-1}{2}\right] \leftrightarrow e^{-j\pi F(N-1)} \frac{sen(\pi FN)}{sen(\pi F)} e^{j2\pi F(N-1)/2} = \frac{sen(\pi FN)}{sen(\pi F)}$$

$$p_{2L+1}[n + L] \leftrightarrow \frac{sen(\pi F(2L+1))}{sen(\pi F)}$$

---

4. Modulación o desplazamiento frecuencial

$$x[n]e^{j2\pi F_0 n} \leftrightarrow X(F - F_0)$$

EJEMPLO 3-7

Demostrar que se puede realizar un filtro paso alto a partir de un filtro paso bajo multiplicando su respuesta impulsional por $(-1)^n$

Si F_0=0.5 se tiene que

$$e^{j2\pi F_0 n} = e^{j\pi n} = (-1)^n$$

Del ejemplo 3-5 se tiene que

$$2F_0 sinc(2F_0 n) \leftrightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} \prod\left(\frac{F-k}{2F_0}\right)$$

Por tanto

$$(-1)^n 2F_0 sinc(2F_0 n) \leftrightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} \prod\left(\frac{F-0.5-k}{2F_0}\right)$$

Que efectivamente es un filtro paso alto

EJEMPLO 3-8

Sea x[n]= 0.2 sinc^2[n/5]. Hallar la transformada de Fourier de y[n]=$(-1)^n$ x[n]

Análogamente al ejemplo 3-5 obtenemos $\mathfrak{F}\,[0.2\ \text{sinc}^2[n/5]\,] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Delta\left(\frac{F-k}{0.2}\right)$, un filtro paso bajo triangular con frecuencia de corte Fc=0.2.

$$x[n] = \int_{-0.5}^{0.5} \Delta\left(\frac{F}{0.2}\right) e^{j2\pi F n} dF$$

Que es la transformada inversa de $\Delta\left(\frac{F}{0.2}\right)$ evaluada en t=n

$$x[n]=0.2\ \text{sinc}^2(0.2\ n)$$

Como $(-1)^n=e^{j\pi n}$, podemos aplicar la propiedad de modulación con F_0=0.5 para resolver el ejemplo:

$$y[n] = (-1)^n 0.2\ sinc^2\left(\frac{n}{5}\right) \leftrightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Delta\left(\frac{F-0.5-k}{0.2}\right)$$

y[n] es un filtro paso alto ideal con frecuencia de corte Fc=0.5-0.2=0.3

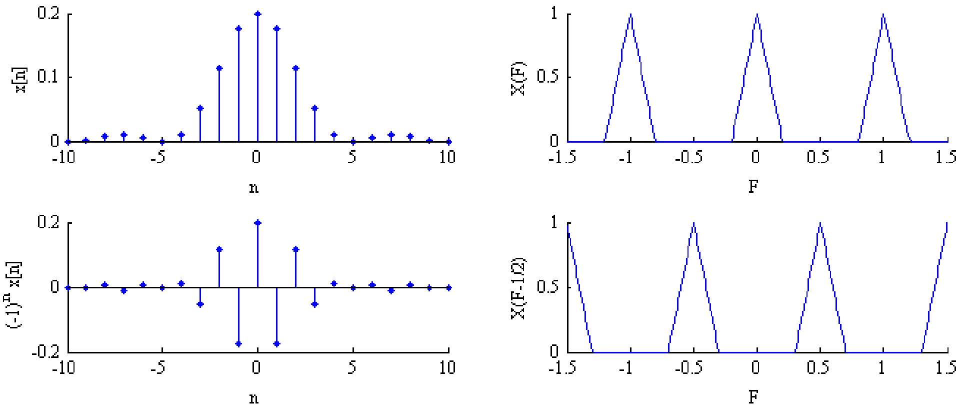

Figura 3.7

EJEMPLO 3-9

Hallar la TF de x[n]= $\cos(2\pi F_0 n)$

A partir de la expresión: $\cos(2\pi F_0 n) = \frac{1}{2} e^{j2\pi F_0 n} + \frac{1}{2} e^{-j2\pi F_0 n}$ y del resultado del ejemplo 3.4 $1 \leftrightarrow \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta(F-r)$, aplicando la propiedad de modulación con x[n]=1 obtenemos:

$$e^{j2\pi F_0 n} \leftrightarrow \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta(F - F_0 - r)$$

Y finalmente por la propiedad de linealidad:

$$\mathfrak{F}[\cos(2\pi F_o n)] = \frac{1}{2} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta(F - F_o - r) + \frac{1}{2} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta(F + F_o - r)$$

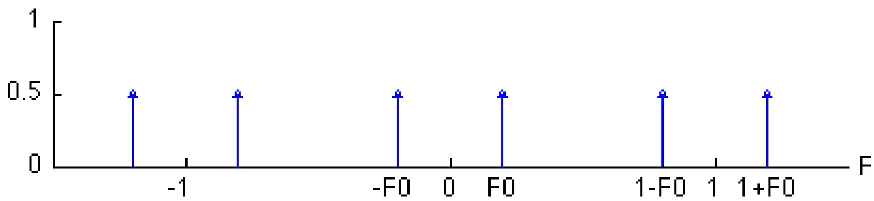

Figura 3.8

---

5. Convolución

$$y[n] = x[n] * h[n] \leftrightarrow Y(F) = X(F)H(F)$$

Dem:

$$Y(F) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \right] \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\mathrm{F}n} =$$
$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n-k]\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\mathrm{F}n} =$$
$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]H(F)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\mathrm{F}k} =$$
$$= X(F)H(F)$$

6. Derivada frecuencial

$$-j2\pi n x[n] \leftrightarrow \frac{dX(F)}{dF}$$

7. Escalado

En señales analógicas la señal x(at) puede obtenerse a partir de la señal x(t) puesto es una señal de variable continua. No ocurre lo mismo para señales discretas puesto que para pasar de x[n] a x[an] cuando a<1 se precisa 'definir' valores intermedios de la nueva secuencia. Nos vamos a ceñir ahora a un caso particular.

Sea la señal x[n] y una constante k entera positiva. Definimos una señal y[n]

$$y[n] = \begin{cases} x[n/k] & n\ \text{múltiplo de}\ k \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

$$Y(F) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n]e^{-j2\pi Fn} =$$

$$= \sum_{r=-\infty}^{\infty} y[rk]e^{-j2\pi Frk} =$$
$$= \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[r]e^{-j2\pi Frk} =$$
$$= X(kF)$$

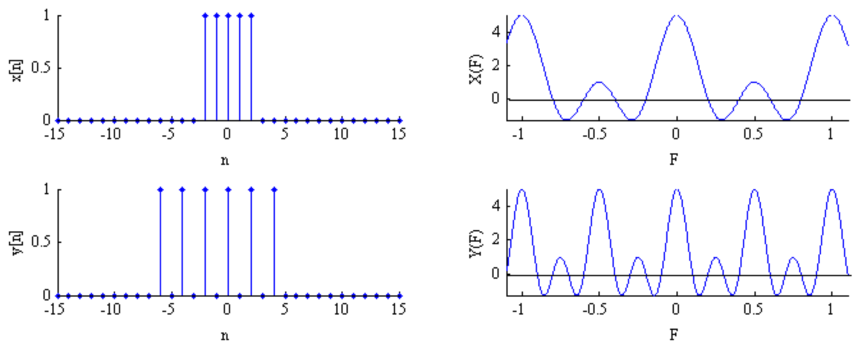

Figura 3.9

8. Producto de secuencias

$$x[n]y[n] \leftrightarrow X(F) \circledast Y(F)$$

Donde $\circledast$ simboliza la convolución periódica o convolución circular entre X(F) e Y(F) como se define a continuación

$$\mathfrak{F}\big[x[n]y[n]\big] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y[n]e^{-j2\pi Fn} =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\int_{-0.5}^{0.5} X(F')\, e^{j2\pi F'n} dF'\right] y[n]e^{-j2\pi Fn} =$$

$$= \int_{-0.5}^{0.5} X(F') \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n]e^{-j2\pi(F-F')n}\, dF' =$$

$$= \int_{-0.5}^{0.5} X(F')\; Y(F-F')dF' = X(F) \circledast Y(F)$$

Nótese que la integración en la convolución circular se realiza en un periodo, de hecho, si fuera en (-∞, ∞) la integral no convergería.

Llamando $X_b(F)$ y $Y_b(F)$ a un periodo (-0.5,0.5) de X(F) e Y(F) respectivamente, se tiene que:

$$X(F) \circledast Y(F) = \int_{-0.5}^{0.5} X_b(F')\; Y(F-F')dF' = X_b(F) * Y(F) = X_b(F) * Y_b(F) * \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta(F-r)$$

Por tanto, la convolución periódica entre dos secuencias periódicas $X(F) \circledast Y(F)$ es la convolución lineal de un periodo de una con toda la otra y también es la convolución lineal de sus periodos $X_b(F) * Y_b(F)$ periodificada con periodo F_0=1.

EJEMPLO 3-10

La secuencia x[n] tiene como transformada de Fourier X(F). Hallar $\mathfrak{F}\big[x[n]cos[2\pi F_0 n]\big]$

$$\mathfrak{F}\big[x[n]cos[2\pi F_0 n]\big] = X(F) \circledast \left(\frac{1}{2}\sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta(F-F_o-r) + \frac{1}{2}\sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta(F+F_o-r)\right)$$

Elegimos un periodo de la TF del coseno, por ejemplo, el centrado en el origen (r=0) y realizamos la convolución lineal entre X(F) y el periodo seleccionado

$$\mathfrak{F}\big[x[n]cos[2\pi F_0 n]\big] = X(F) * \left(\frac{1}{2}\delta(F-F_o) + \frac{1}{2}\delta(F+F_o)\right) = \frac{1}{2}X(F-F_o) + \frac{1}{2}X(F+F_o)$$

---

9. Teorema de Parseval

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y^*[n] = \int_{-0.5}^{0.5} X(F)Y^*(F)dF$$

Si x[n]=y[n]

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \int_{-0.5}^{0.5} |X(F)|^2 dF$$

EJEMPLO 3-11

Hallar la respuesta frecuencial de un sistema que calcula la diferencia finita de la señal de entrada Δx[n]=x[n]-x[n-1]. Relaciónela con la respuesta frecuencial de un derivador analógico.

La respuesta impulsional es

$$h[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$$

$$H(F) = 1 - e^{-j2\pi F} = e^{(-j\pi F)(e^{j\pi F} - e^{-j\pi F})} =$$

$$= 2jsen(\pi F)e^{-j\pi F}$$

La respuesta frecuencial de un derivador analógico es $H_a(f)=j2\pi f$

Comprobamos que para $F \ll 1$ el seno se puede aproximar por el ángulo y queda $H(F) \approx j2\pi F e^{-j\pi F}$

Vemos que para $F \ll 1$ $H(F)$ y $H_a(f)$ tienen un comportamiento similar. El término de fase aparece porque el sistema que realiza la diferencia finita tiene un retardo de media muestra.

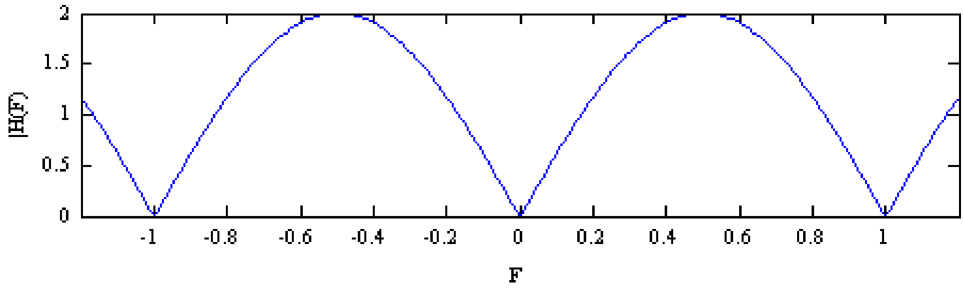

Figura 3.10

Compruebe que la fase es lineal en (0,1). La recta corta el eje en F=0.5, en F=0 es discontinua con valor $\pi/2$ $F=0^+$ y $-\pi/2$ $F=0^-$

EJEMPLO 3-12

Hallar la transformada de Fourier de x[n]=sgn[n]

Usamos la igualdad

$$\mathrm{sgn}[n]-\mathrm{sgn}[n-1]=\delta[n]+\delta[n-1]$$

Tomando TF

$$\mathfrak{F}[sgn[n]](1-e^{-j2\pi F}) = 1+e^{-j2\pi F}$$

Y despejando

$$\mathfrak{F}[sgn[n]] = \frac{1+e^{-j2\pi F}}{1-e^{-j2\pi F}} = \frac{\cos(\pi F)}{jsen(\pi F)} = \frac{1}{jtg(\pi F)}$$

Con F<<1, se aproxima por $1/j\pi F$

Se deja como ejercicio comparar los módulos y las fases de las TF de sgn(t) y sgn[n]

EJEMPLO 3-13

Hallar la transformada de Fourier de x[n]=u[n]

Usamos la igualdad

$$u[n]=(1+\mathrm{sgn}[n]+\mathrm{delta}\,[n])/2$$

$$\mathfrak{F}[u[n]] = \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(F-k) + \frac{1}{2}\frac{1+e^{-j2\pi F}}{1-e^{-j2\pi F}} + \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(F-k) + \frac{1}{1-e^{-j2\pi F}}$$

Esta transformada es particularmente útil ya que u[n] es la respuesta impulsional de un sumador:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k] = x[n]*u[n]$$

$$Y(F) = \frac{1}{2}X(0)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(F-k) + \frac{X(F)}{1-e^{-j2\pi F}}$$

EJEMPLO 3-14

Demostrar que la transformada de Fourier de un tren de deltas es otro tren de deltas

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta[n-kN] \leftrightarrow \frac{1}{N}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(F-\frac{k}{N}\right)$$

Partimos de la secuencia

$$1 = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta[n-k]$$

Tomando T.F. en ambos miembros, a la izquierda según el resultado del ejemplo 3.4 y a la derecha aplicando linealidad y la propiedad del retardo, tenemos

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(F-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{-j2\pi Fk}$$

Y escalando la frecuencia:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(NF-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{-j2\pi NFk}$$

Finalmente

$$\mathfrak{F}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta[n-kN]\right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{-j2\pi FkN} = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(NF-k) = \frac{1}{N}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(F-\frac{k}{N}\right)$$

Donde la última igualdad la hemos obtenido a partir de la propiedad de escalado de la delta[1].

3.5 Respuesta frecuencial de un sistema definido por ecuaciones en diferencias.

Tal y como vimos en el Cap.1, un sistema lineal e invariante caracterizado por una ecuación en diferencias con coeficientes constantes, tiene una relación entrada salida que se puede expresar de la forma

$$\sum_{k=0}^{N}a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M}b_k x[n-k]$$

El sistema tiene una respuesta impulsional h[n] con una transformada de Fourier H(F). Por la propiedad de convolución se tiene que:

$$H(F) = \frac{Y(F)}{X(F)}$$

Aplicando TF a ambos lados de la ecuación en diferencias se tiene

$$\sum_{k=0}^{N}a_k Y(F)e^{-j2\pi Fk} = \sum_{k=0}^{M}b_k X(F)e^{-j2\pi Fk}$$

Por consiguiente

---

[1] Aplicando la igualdad a través de un *retardador* de k/N, ambos deben dar lo mismo

$$\delta(NF) = \frac{1}{N}\delta(F) \rightarrow \delta\left(N\left(F-\frac{k}{N}\right)\right) = \frac{1}{N}\delta\left(F-\frac{k}{N}\right)$$

$$H(F)=\frac{Y(F)}{X(F)}=\frac{\sum_{k=0}^{M} b_k e^{-j2\pi Fk}}{\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-j2\pi Fk}}$$

EJEMPLO 3-15

Considere el sistema de primer orden inicialmente en reposo caracterizado por la ecuación en diferencias con $|a|<1$:

$$y[n]-ay[n-1]=x[n]$$

Su respuesta frecuencial es:

$$H(F)=\frac{1}{1-ae^{-j2\pi F}}$$

Como vimos en el ejemplo 3-2, la respuesta impulsional es:

$$h[n]=a^n u[n]$$

3.6 Relación entre la TF de una señal analógica y la TF de una secuencia formada por muestras de la analógica

Sea una señal analógica $x_a(t)$ con TF $X_a(f)$. Tomamos muestras de $x_a(t)$ cada T_m seg y formamos la señal $x_m(t)$

$$x_m(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT_m)\delta(t-nT_m)$$

La TF de la señal muestreada idealmente, según vimos en el tema II es

$$X_m(f)=\frac{1}{T_m}\sum_{n=-\infty}^{\infty} X_a(f-nf_m)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT_m)e^{-j2\pi nfT_m}$$

Donde $f_m=1/T_m$

Por otra parte formamos la secuencia $x_d[n]$ con los valores de las muestras de $x_a(nT_m)$

$$x_d[n]=x_a(nT_m)$$

y tomamos TF

$$X_d(F)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_d[n]e^{-j2\pi Fn}=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT_m)e^{-j2\pi Fn}$$

Comparando $X_m(f)$ y $X_d(F)$ vemos que

$$X_d(F)=X_m(f)|_{f=Ff_m}$$

o equivalentemente

$$X_d(F)=\frac{1}{T_m}\sum_{n=-\infty}^{\infty} X_a(f-nf_m)\Bigg|_{f=Ff_m}$$

y también

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} X_a(f-nf_m)=T_m X_d(F)\Bigg|_{F=f/f_m}$$

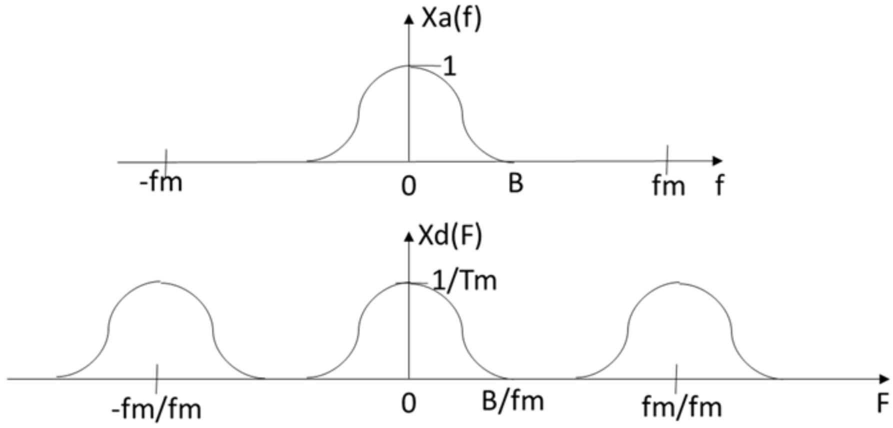

Figura 3.11 Con f_m>2B

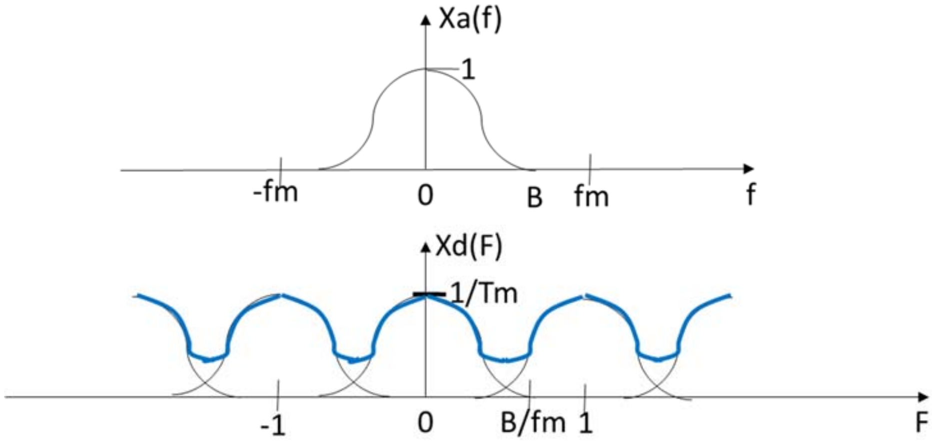

Figura 3.12. Con f_m<2B

Si la señal analógica es de banda limitada $|X_a(f)|=0$, $|f|>B$ y la frecuencia de muestreo $f_m \geq 2B$

$$X_a(f) = \frac{1}{fm} X_d\left(\frac{f}{fm}\right) \quad -\frac{fm}{2} \leq f \leq \frac{fm}{2}$$

EJEMPLO 3-16

Sea $x_a(t) = \cos(2\pi f_0 t)$. La señal se digitaliza por un conversor Analógico Digital (A/D) que trabaja a una frecuencia de muestreo fm (o un intervalo entre muestras $T_m=1/f_m$). La señal resultante es:

$$x_d[n] = x_a(nT_m) = \cos(2\pi f_0 nT_m) = \cos(2\pi f_0 n/f_m) = \cos(2\pi F_0 n)$$

Donde $F_0=f_0/f_m$. A partir del resultado del apartado anterior, calcule $X_d(F)$.

Del par de transformadas

$$x_a(t) = \cos(2\pi f_0 t) \leftrightarrow X_a(F) = \frac{1}{2}\big(\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)\big)$$

Se tiene

$$X_d(F)=\frac{1}{T_m}\sum_{r=-\infty}^{\infty}X_a(f-rf_m)\bigg|_{f=Ff_m}=\frac{1}{2T_m}\sum_{r=-\infty}^{\infty}\left(\delta(f-f_0-rf_m)+\delta(f+f_0-rf_m)\right)\bigg|_{f=Ff_m}$$

$$=\frac{1}{2T_m}\sum_{r=-\infty}^{\infty}\left(\delta(Ff_m-f_0-rf_m)+\delta(Ff_m+f_0-rf_m)\right)$$

$$=\frac{1}{2T_m}\sum_{r=-\infty}^{\infty}\left(\delta\left(f_m\left(F-\frac{f_0}{f_m}-r\right)\right)+\delta\left(f_m(F+\frac{f_0}{f_m}-r)\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{r=-\infty}^{\infty}\left(\delta((F-F_0-r))+\delta(F+F_0-r)\right)$$

Donde en la última igualdad se ha aplicado la propiedad de escalado de la delta

3.7 Transformada de Fourier de secuencias periódicas (opcional)

Hasta aquí hemos visto ya la transformada de Fourier de algunas señales periódicas, en particular la exponencial compleja, el coseno y el tren de deltas. En este apartado vamos a desarrollar con detalle la TF de señales periódicas por su futura aplicación práctica.

Una secuencia periódica de periodo N cumple

$$\tilde{x}[n]=\tilde{x}[n+N]$$

Cualquier secuencia periódica se puede expresar en función de una básica $x_b[n]$

$$\tilde{x}[n]=x_b[n]*\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta[n-kN]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x_b[n-kN]$$

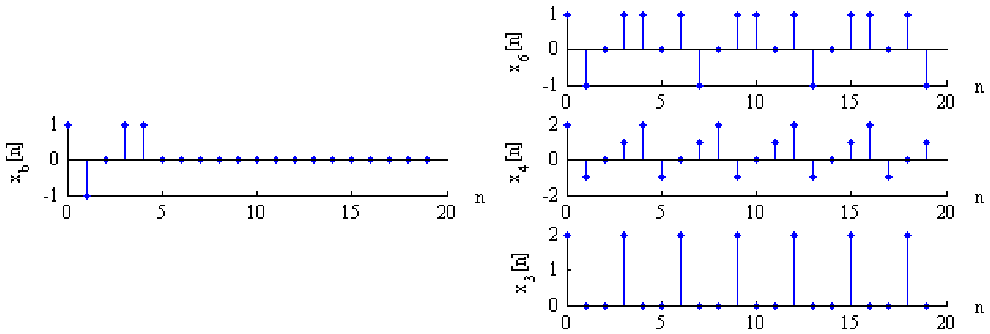

Figura 3.13

La Figura muestra una señal $x_b[n]$ de L=5 muestras. Con esta señal se han realizado 3 señales periódicas diferentes. La primera de ellas, $x_6[n]$ se ha realizado con N=6. Tiene periodo N>L y por tanto el periodo (0,N-1) coincide exactamente con $x_b[n]$. Las señales $x_4[n]$ y $x_3[n]$ se han obtenido con un periodo N=4 y N=3 respectivamente. Nótese que la señal básica no coincide con un periodo de ninguna de estas dos señales debido al solapamiento que implica realizar la fórmula anterior. Tomando transformada de Fourier:

$$x_b[n]\leftrightarrow X_b(F)$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta[n-kN]\leftrightarrow\frac{1}{N}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(F-\frac{k}{N}\right)$$

$$\tilde{X}(F)=X_b(F)\frac{1}{N}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(F-\frac{k}{N}\right)=\frac{1}{N}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X_b\left(\frac{k}{N}\right)\delta\left(F-\frac{k}{N}\right)$$

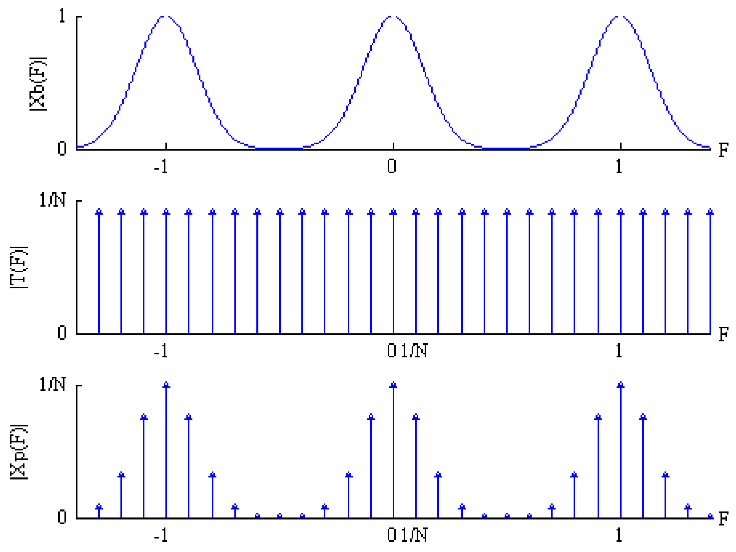

Figura 3.14

$\tilde{X}(F)$ es periódica de periodo 1, está formada por el producto de otras dos señales periódicas y está compuesta por deltas cada 1/N. Una forma alternativa de escribir $\tilde{X}(F)$ es eligiendo un periodo cualquiera (N deltas consecutivas) y periodificarlo como se muestra en la figura. De esta forma podemos expresar.

$$\tilde{X}(F) = \frac{1}{N} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \sum_{k=<N>} X_b\left(\frac{k}{N}\right) \delta\left(F - r - \frac{k}{N}\right)$$

3.8 Desarrollo en serie de Fourier (opcional)

Tomando transformada inversa

$$\tilde{x}[n] = \int_{<1>} \frac{1}{N} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \sum_{k=<N>} X_b\left(\frac{k}{N}\right) \delta\left(F - r - \frac{k}{N}\right) e^{j2\pi F n} dF$$

La integral se realiza en un periodo cualquiera de duración frecuencial 1. Elegimos por ejemplo r=0 y tenemos

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=<N>} X_b\left(\frac{k}{N}\right) \int_{<1>} \delta\left(F - \frac{k}{N}\right) e^{j2\pi F n} dF =$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{k=<N>} X_b\left(\frac{k}{N}\right) e^{j2\pi nk/N} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_b[n - kN]$$

En definitiva la señal periódica $\tilde{x}[n]$ de periodo N se puede descomponer como suma de N exponenciales complejas. Esta expresión es el DSF de $\tilde{x}[n]$. Llamando

$$c_k = \frac{1}{N} X_b\left(\frac{k}{N}\right)$$

Se obtiene la expresión general

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=<N>} c_k \, e^{j2\pi nk/N}$$

Donde

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_b[n] e^{-j2\pi nk/N} \ \textit{periódico de periodo N}$$

En el caso particular de elegir $x_b[n]=\tilde{x}[n]$ en un periodo el sumatorio se reduce a un periodo

$$c_k = \frac{1}{N}\sum_{n=<N>} \tilde{x}[n]e^{-j2\pi nk/N}$$

Nótese que el sumatorio se extiende únicamente a N exponenciales complejas en contraposición al caso analógico donde la suma se extiende entre (-∞, ∞). En la colección de problemas se verá que las exponenciales complejas del tipo $e^{j2\pi nk/N}$ son ortogonales en un intervalo N.

3.9 Potencia de una secuencia periódica (opcional)

Sea una secuencia periódica $\tilde{x}[n]$ de periodo N. Su potencia media

$$P_x = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}|\tilde{x}[n]|^2 = \sum_{k=0}^{N-1}|c_k|^2$$

Demostración

$$P_x = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}|\tilde{x}[n]|^2 = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}[n]\sum_{k=0}^{N-1}c_k^* e^{-j2\pi nk/N} =$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}c_k^*\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}[n]e^{-j2\pi nk/N} = \sum_{k=0}^{N-1}c_k^*\, c_k = \sum_{k=0}^{N-1}|c_k|^2$$

EJEMPLO 3-17 (opcional)

Hallar la transformada de Fourier y el DSF de las señales periódicas $x_1[n]$, $x_2[n]$ y $x_3[n]$ de la Figura 3.3.
La tres señales se pueden descomponer en función de una señal básica

$$x_b[n] = \delta[n] - \delta[n-1] + \delta[n-3] + \delta[n-4]$$

Su transformada de Fourier

$$X_b(F) = 1 - e^{-j2\pi F} + e^{-j2\pi 3F} + e^{-j2\pi 4F}$$

Los coeficientes del DSF son:

$$c_k = \frac{1}{N}X_b\left(\frac{k}{N}\right)$$

Para $x_6[n]$ son:

$$c_k = \frac{1}{6}X_b(k/6) = \frac{1}{6}(1 - e^{-\frac{j\pi k}{3}} + e^{-j\pi k} + e^{-\frac{j\pi 4k}{3}}) = \frac{1}{6}(1 - e^{-\frac{j\pi k}{3}} + (-1)^k + e^{\frac{j2\pi k}{3}})$$

De donde sustituyendo k=0, …5 se obtienen los seis valores de un periodo de la secuencia periódica c_k
c_k=[2/6, (-1+j1.73)/6, 2/6, 2/6, 2/6, (-1-j1.73)/6

Análogamente para $x_4[n]$ se obtiene c_k= (1/4) X_b(k/4) = [1/2, (1+j)/2, ½, (1-j)/2]

Y finalmente para $x_3[n]$ c_k=(1/3) X_b(k/3) [2/3, 2/3, 2/3] como corresponde a los coeficientes del DSF de un tren de deltas de amplitud 2 y periodo 3.

La transformada de Fourier en cada caso se obtendrá sustituyendo el valor de N y los coeficientes en la expresión

$$\tilde{X}(F) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\delta\left(F - \frac{k}{N}\right)$$

y el DSF se obtendrá por medio de la expresión

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=<N>} c_k\, e^{j2\pi nk/N}$$

Las figuras 3.15 a) y b) muestra el módulo y la fase de la transformada de Fourier de $X_b(F)$. Las siguientes figuras muestran las transformadas de Fourier de las señales periódicas $x_6[n]$, $x_4[n]$ y $x_3[n]$,.

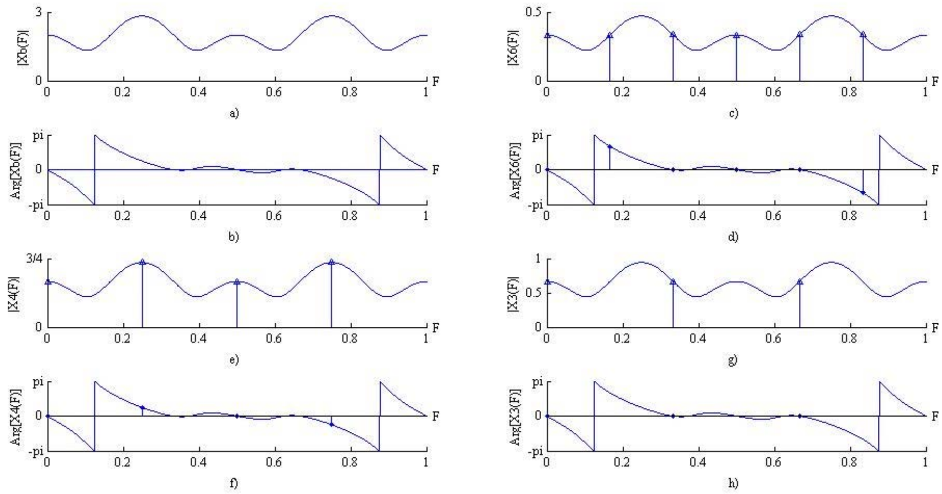

Figura 3.15

3.10 Convolución circular de dos secuencias periódicas

Dadas dos secuencias periódicas $\tilde{x}_1[n], \tilde{x}_2[n]$ de periodo N, la convolución

$$\tilde{x}_1[n] * \tilde{x}_2[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{x}_1[k]\tilde{x}_2[n-k]$$

No converge. Se define la convolución circular o periódica de dos secuencias periódicas como:

$$\tilde{x}_1[n] \circledast \tilde{x}_2[n] = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{x}_1[k]\tilde{x}_2[n-k]$$

Se realiza la suma en un intervalo finito de N muestras, es decir, en un periodo.

La notación se extiende a la convolución circular de dos señales de duración N

$$x_1[n] \circledast x_2[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x_1[k]\tilde{x}_2[n-k]$$

Donde $\tilde{x}_2[n]$ es la extensión periódica de $x_2[n]$ con periodo N

EJEMPLO 3-18

Demostrar que $y[n] = \tilde{x}_1[n] \circledast \tilde{x}_2[n]$ es periódica de periodo N.

$$\tilde{y}[n+N] = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{x}_1[k]\tilde{x}_2[n+N-k]$$

Y por ser $\tilde{x}_2[n]$ periódica se cumple que $\tilde{x}_2[n-k] = \tilde{x}_2[n+N-k]$. Sustituyendo queda:

$$\tilde{y}[n+N] = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{x}_1[k]\tilde{x}_2[n-k] = \tilde{y}[n]$$

EJEMPLO 3-19

Demostrar que si $x_1[n] = \tilde{x}_1[n]$ (0≤n≤N-1) y $x_2[n] = \tilde{x}_2[n]$ (0≤n≤N-1) entonces si $y_1[n] = x_1[n]*x_2[n]$

$$\tilde{y}[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \tilde{y}_1[n-rN]$$

Esta propiedad nos permite calcular convoluciones circulares mediante la convolución lineal de dos periodos.

$$\tilde{y}[n] = x_1[n] \circledast \tilde{x}_2[n] = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{x}_1[k]\tilde{x}_2[n-k] = \sum_{k=0}^{N-1} x_1[k]\tilde{x}_2[n-k]$$

$$= x_1[n] * \tilde{x}_2[n] = x_1[n] * \sum_{r=-\infty}^{\infty} x_2[n-rN] = x_1[n] * x_2[n] * \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta[n-rN]$$

Llamando $y_1[n] = x_1[n]*x_2[n]$ queda

$$\tilde{y}[n] = y_1[n] * \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta[n-rN] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} y_1[n-rN]$$

Nótese que $y_1[n]$ puede ser de duración mayor que N, de hecho durará 2N-1 muestras si no existe un L<N tal que $x_1[n]=0$ o $x_2[n]=0$ para $L-1 \leq n \leq N-1$

EJEMPLO 3-20 (opcional)

Demostrar que los coeficientes del DSF de y[n], c_{yk} son $c_{yk}=Nc_{x1k}c_{x2k}$ donde c_{x1k} y c_{x2k} son los coeficientes del DSF de $x_1[n]$ y $x_2[n]$ respectivamente.
Del apartado anterior tenemos:

$$\tilde{y}[n] = x_1[n] * x_2[n] * \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta[n-rN]$$

Tomando transformada de Fourier

$$\mathfrak{F}\{\tilde{y}[n]\} = X_1(F)X_2(F)\frac{1}{N}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(F-\frac{k}{N}\right) =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_1\left(\frac{k}{N}\right)X_2\left(\frac{k}{N}\right)\frac{1}{N}\delta\left(F-\frac{k}{N}\right)$$

Dado que $X_1\left(\frac{k}{N}\right)$ y $X_2\left(\frac{k}{N}\right)$ son periódicas en k de periodo N, la expresión anterior se puede expresar como

$$\sum_{k=0}^{N-1} X_1\left(\frac{k}{N}\right)X_2\left(\frac{k}{N}\right)\frac{1}{N}\delta\left(F-\frac{k}{N}\right) * \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta(F-r) = \sum_{k=0}^{N-1} X_1\left(\frac{k}{N}\right)X_2\left(\frac{k}{N}\right)\frac{1}{N}\sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta\left(F-\frac{k}{N}-r\right)$$

Y tomando transformada inversa

$$\tilde{y}[n] = \sum_{k=0}^{N-1} X_1\left(\frac{k}{N}\right)X_2\left(\frac{k}{N}\right)\frac{1}{N}e^{-j2\pi nk/N}$$

Finalmente, identificando los coeficientes del DSF $c_{x_1k} = \frac{1}{N}X_1\left(\frac{k}{N}\right)$ $c_{x_2k} = \frac{1}{N}X_2\left(\frac{k}{N}\right)$ y sustituyendo, queda:

$$\tilde{y}[n] = \sum_{k=0}^{N-1} Nc_{x_1k}\,c_{x_2k}e^{-j2\pi nk/N} = \sum_{k=0}^{N-1} c_{yk}\,e^{-j2\pi nk/N}$$

EJEMPLO 3-21

Calcular la convolución circular de las secuencias periódicas de la Figura con $\tilde{x}_1[n] = p_3[n]$ y periodo N=5, y $\tilde{x}_2[n] = np_5[n]$ y periodo N=5

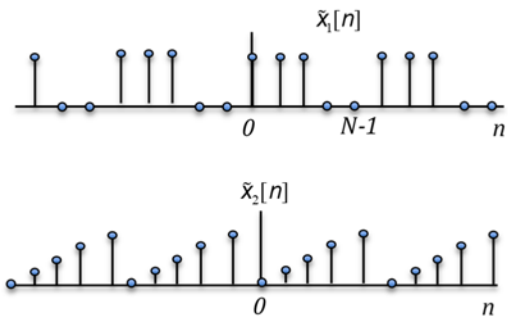

Figura 3.16

Para realizar la convolución circular

$$\tilde{x}_1[n] \circledast \tilde{x}_2[n] = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{x}_1[k]\tilde{x}_2[n-k]$$

Dibujamos las dos señales en función de la variable k. Dejamos $\tilde{x}_1[k]$ fija y representamos $\tilde{x}_2[n-k]$ para distintos valores de n. La figura muestra la situación relativa entre las dos secuencias para distintos valores de n. El intervalo de suma es el que está entre las dos líneas verticales.

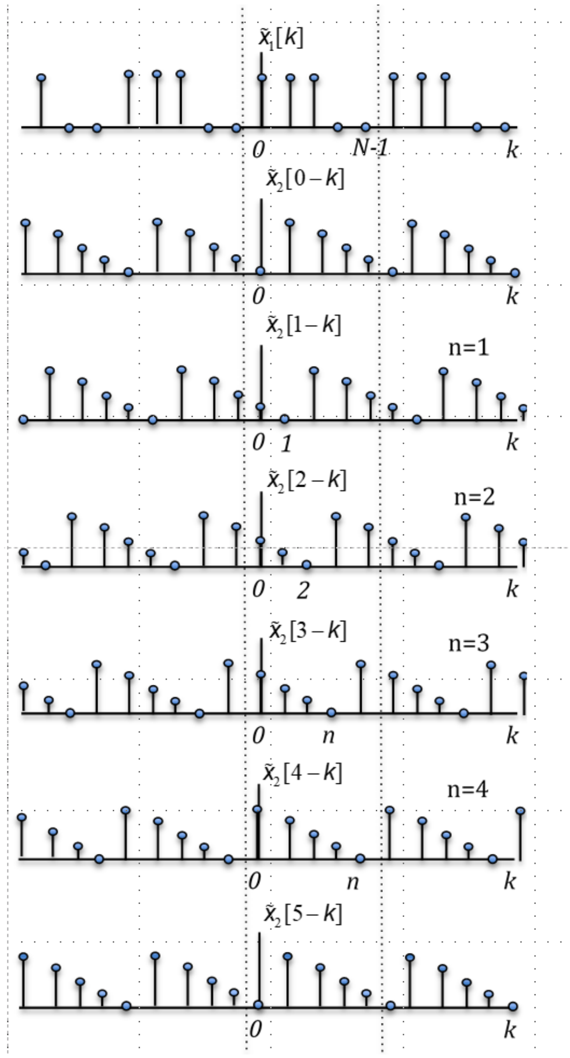

Figura 3.17

Dado que $\tilde{x}_1[n]$ solo tiene tres valores distintos de cero, es fácil hallar la convolución:

$$\tilde{y}_1[0] = \sum_{k=0}^{3} \tilde{x}_2[0-k] = 1 + 0{,}75 = 1{,}75$$

$$\tilde{y}_1[1] = \sum_{k=0}^{3} \tilde{x}_2[1-k] = 0{,}25 + 1 = 1{,}25$$

$$\tilde{y}_1[2] = \sum_{k=0}^{3} \tilde{x}_2[2-k] = 0{,}5 + 0{,}25 = 0{,}75$$

$$\tilde{y}_1[3] = \sum_{k=0}^{3} \tilde{x}_2[3-k] = 0{,}75 + 0{,}5 + 0{,}25 = 1{,}5$$

$$\tilde{y}_1[4] = \sum_{k=0}^{3} \tilde{x}_2[4-k] = 1 + 0{,}75 + 0{,}5 = 2{,}25$$

Y $\tilde{y}_1[5] = \tilde{y}_1[0]$ dado que la posición relativa de las secuencias es la misma. Este resultado corrobora el Ejercicio 3.14 anterior. Según hemos comprobado en el Ejercicio 3.15 podemos llegar al mismo resultado a partir de la convolución lineal de dos periodos de las señales periódicas. La figura muestra los dos periodos elegidos y el resultado de la convolución lineal entre ellos, donde $y_1[n]$ = [0, 0.25, 0.75, 1.5, 2.25, 1.75, 1, 0, 0], para $0 \le n \le 2N-1$

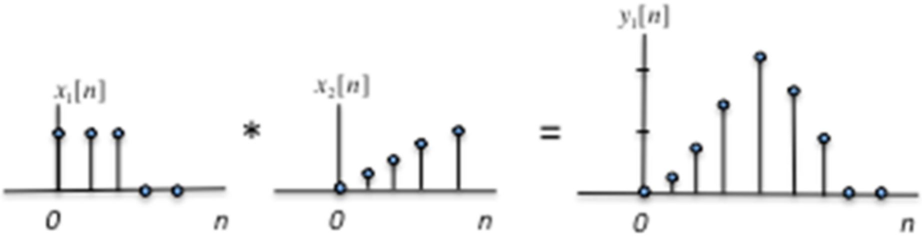

Figura 3.18

Como se vio en el Ejercicio 3.15 la convolución circular entre las dos secuencias periódicas se obtiene mediante la suma

$$\tilde{y}[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} y_1[n - rN]$$

Que se ilustra en la siguiente figura para los valores de un periodo $0 \le n \le N-1$. Los resultados son

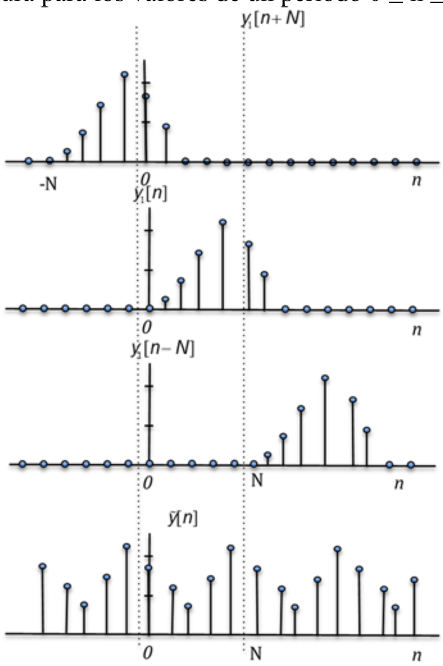

Figura 3.19

$\tilde{y}[0] = y_1[0+N] + y_1[0] = 1.75 + 0 = 1.75$
$\tilde{y}[1] = y_1[1+N] + y_1[1] = 1 + 0.25 = 1.25$
$\tilde{y}[2] = y_1[2] = 0.75$
$\tilde{y}[3] = y_1[3] = 1.5$
$\tilde{y}[4] = y_1[4] = 2.25$

EJEMPLO 3-22

Demostrar

$$t[n]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}e^{\frac{j2\pi nk}{N}}=\sum_{r=-\infty}^{\infty}\delta[n-rN]$$

Realizando la suma:

$$t[n]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}e^{\frac{j2\pi nk}{N}}=\frac{1}{N}\frac{1-e^{j2\pi n}}{1-e^{j2\pi n/N}}$$

El numerador es cero, el denominador es cero para n=rN. En este caso

$$t[rN]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}e^{j2\pi rk}=1$$

Por lo que

$$t[n]=\begin{Bmatrix}1, & n=rN\\ 0, & resto\end{Bmatrix}=\sum_{r=-\infty}^{\infty}\delta[n-rN]$$

3.11 DFT Transformada Discreta de Fourier

El desarrollo del empleo de métodos de análisis de Fourier de secuencias viene determinado por la existencia de algoritmos muy eficientes para su cálculo. Uno de ellos es el que se conoce como DFT (Discrete Fourier Transform de sus siglas en inglés). Su deducción es inmediata a partir de lo que hemos estudiado sobre el análisis de secuencias periódicas.

Sea x[n] una secuencia de duración finita L, esto es,

$$x[n]=0 \quad \text{para } n<0 \text{ y } n\geq L \qquad (3.10.1)$$

Definimos la DFT de N puntos de x[n]

$$DFT_N\{x[n]\}=X_N[k]=\sum_{n=0}^{N-1}x[n]e^{-j2\pi nk/N} \qquad 0\leq k\leq N-1 \qquad (3.10.2)$$

$X_N[k]$ es una secuencia periódica de periodo N (comprobarlo). La DFT de x[n] es la colección de puntos en un periodo $0 \leq k \leq N-1$

3.11.1 Relación entre la DFT y la TF de una secuencia

Vamos a interpretar la ecuación (3.10.2)

Si N≥L

$$X_N[k]=\sum_{n=0}^{N-1}x[n]e^{-j2\pi nk/N}=\sum_{n=0}^{L-1}x[n]e^{-j2\pi nk/N}=X(F)\Big|_{F=k/N} \qquad 0\leq k\leq N-1$$

$X_N[k]$ la componen N muestras equiespaciadas de X(F) en el intervalo [0,1)

Si N<L

definimos $x_w[n]=x[n]\,p_N[n]$ es decir, la secuencia truncada o enventanada a N muestras con Transformada de Fourier $X_w(F)=X(F) \circledast W(F)$ siendo W(F) la TF del pulso $p_N[n]$. En este caso

$$X_N[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j2\pi nk/N} = X_w(F)\Big|_{F=k/N} = X(F) \circledast W(F)\Big|_{F=k/N} \qquad 0 \le k \le N-1$$

$X_N[k]$ la componen N muestras equiespaciadas de $X_w(F) \neq X(F)$ en el intervalo [0,1)

Únicamente en el caso de que N ≥ L la DFT de N muestras de x[n] coincide con muestras equiespaciadas de X(F) en el intervalo [0,1)

EJEMPLO 3-23

Dada la secuencia $x[n]=p_L[n]$ con L=5, comparar X(F) con la DFT de 5, 10 y 20 puntos respectivamente de dicha señal.

La transformada de Fourier de la secuencia es:

$$X(F) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j2\pi Fn}$$

La DFT de N puntos de la secuencia x[n] es:

$$X_N[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j2\pi nk/N} \qquad 0 \le k \le N-1$$

$$X_N[k] = \sum_{n=0}^{L-1} e^{-\frac{j2\pi nk}{N}} = \frac{1-e^{-\frac{j2\pi Lk}{N}}}{1-e^{-\frac{j2\pi k}{N}}} = \frac{e^{-\frac{j\pi kL}{N}}\sin\left(\frac{\pi Lk}{N}\right)}{e^{-\frac{j\pi k}{N}}\sin\left(\frac{\pi k}{N}\right)} =$$

$$= \frac{\sin(\pi Lk/N)}{\sin(\pi k/N)} e^{-j\pi(L-1)k/N} \qquad 0 \le k \le N-1$$

x=[1,1,1,1,1]

x=[1,1,1,1,1]

x=[1,1,1,1,1,0,0,0,0,0]

x=[1,1,1,1,1,0,0,0,0,0,0
,0,0,0,0,0,0,0,0,0]

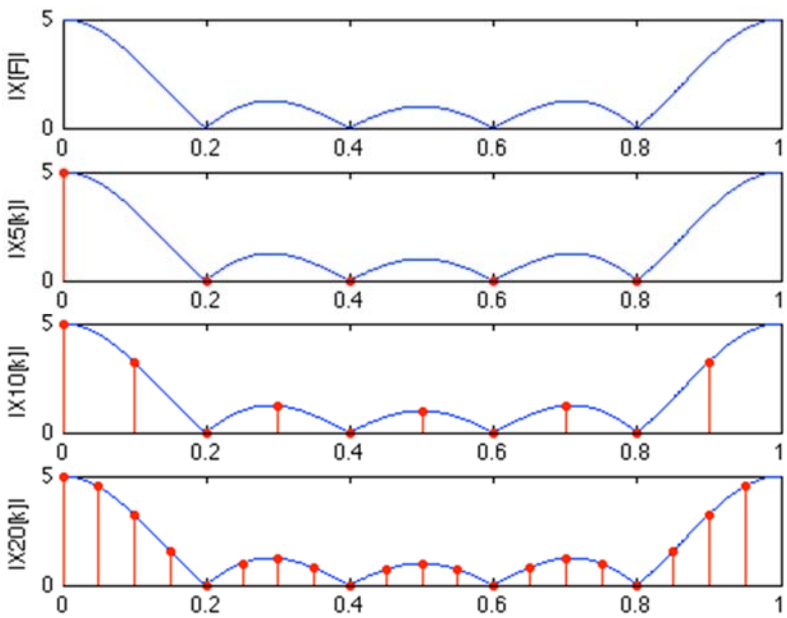

Figura 3.20

Por otra parte, la TF de la secuencia x[n] es:

$$x[n] = p_L[n] \leftrightarrow X(F) = \frac{\sin(\pi FL)}{\sin(\pi F)} e^{-j2\pi\left(\frac{L-1}{2}\right)F}$$

Comparando las expresiones de X(F) y $X_N[k]$, dado que la duración de la señal x[n] se extiende entre (0, L-1) y eligiendo $N \geq L$ se tiene

$$X_N[k] = X(F)\big|_{F=\frac{k}{N}} \qquad con\ N \geq L$$

La figura muestra en la parte superior la secuencia x[n] y su transformada de Fourier X(F). A continuación se muestran las secuencias de N puntos que se relacionan mediante la DFT $x[n] \leftrightarrow X_N[k]$ para N=5, 10 y 20 puntos respectivamente. Las secuencias $X_N[k]$ se muestran superpuestas a X(F) para resaltar que efectivamente coinciden con muestras equiespaciadas de X(F).

3.12 DFT Inversa. Transformada Discreta de Fourier Inversa

La DFT inversa de N puntos se realiza mediante la expresión:

$$DFT_N^{-1}[X_N[k]] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_N[k]e^{j2\pi nk/N} \qquad 0 \leq n \leq N-1 \tag{3.10.3}$$

Para relacionar esta expresión con x[n], formamos la secuencia auxiliar de N puntos:

$$x_N[n] = \begin{cases} x[n]p_N[n], & N < L \\ x[n], & N \geq L \end{cases}$$

Donde en el segundo caso, la secuencia se completa con ceros hasta la muestra N-1

Sustituimos $X_N[k]$ en la definición de la DFT inversa:

$$DFT_N^{-1}\big[X_N[k]\big] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left[\sum_{m=0}^{N-1} x_N[m]e^{-j2\pi mk/N}\right]e^{j2\pi nk/N} =$$

$$= \sum_{m=0}^{N-1} x_N[m]\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} e^{j2\pi(n-m)k/N} \qquad 0 \leq n \leq N-1$$

Que puede interpretarse como la convolución entre $x_N[n]$ y t[n]

$$DFT_N^{-1}\big[X_N[k]\big] = \sum_{m=0}^{N-1} x_N[m]t[n-m] = x_N[n] * t[n] \qquad 0 \leq n \leq N-1$$

Aplicando el resultado del ejemplo 3-22 se tiene

$$DFT_N^{-1}[X_N[k]] = x_N[n] * \sum_{r=-\infty}^{\infty}\delta[n-rN] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x_N[n-rN] = \tilde{x}_N[n] \quad 0 \leq n \leq N-1 \tag{5}$$

$\tilde{x}_N[n]$ es la señal $x_N[n]$ periodificada con periodo N. $\tilde{x}_N[n]$ coincide con x[n] en el intervalo $0 \leq n \leq N-1$

$X_N[k]$ se denomina la DFT de N muestras de x[n] y permite recuperar x[n] siempre que N sea mayor o igual que la longitud de x[n].
Existe un algoritmo rápido para calcular la DFT y se denomina FFT (Fast Fourier Transform) que es muy eficiente si la elección de N es potencia de 2. Este algoritmo nos permitirá, entre otras cosas, calcular convoluciones entre señales de forma eficiente. A continuación se muestran unos ejemplos de utilización de la DFT resaltando las peculiaridades que tiene el hecho de que la DFT se obtiene a partir de la relación de dos secuencias periódicas: $\tilde{x}[n]$ y $X_N[k]$.

EJERCICIO

Sea la señal x[n] = δ[n] - δ[n-1] + δ[n-3] +δ[n-4]. Se realiza una DFT de N puntos y se realiza una DFT^{-1} de N muestras. Hallar la señal resultante para los tres casos siguientes: a) N=6, b) N=4 y c) N=3.

Solución:
a) $x_r[n]$= [<u>1</u>, -1, 0, 1, 1, 0]
b) $x_r[n]$= [<u>1</u>, -1, 0, 1]
c) $x_r[n]$= [<u>1</u>, -1, 0]
Donde el subrayado indica el valor de la posición x[0]

3.13 Muestreo de la Transformada de Fourier

Sea una señal x[n] con transformada de Fourier X(F). Se toman N muestras equiespaciadas de X(F) en el intervalo [0,1)

$$X[k]=X(F)|_{F=k/N} \quad 0 \le k \le N-1$$

Tomando DFT inversa

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]e^{\frac{j2\pi nk}{N}} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]e^{\frac{-j2\pi mk}{N}}\right]e^{\frac{j2\pi nk}{N}} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} e^{\frac{j2\pi(n-m)k}{N}}$$

y como vimos en la sección 3.10 es equivalente a

$$\tilde{x}[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]t[n-m] = x[n] * t[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n-kN]$$

Por tanto

$$DFT_N^{-1}\{X[k]\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n-kN] = \tilde{x}[n] \quad 0 \le \mathrm{n} \le \mathrm{N}-1 \qquad (6)$$

Que coincide con x[n] si el número de puntos tomados en X(F) es mayor o igual que la duración de la secuencia x[n] (N ≥ L)

EJERCICIO
Sea la señal x[n] = δ[n] - δ[n-1] + δ[n-3] +δ[n-4]. Se toman N muestras de su transformada de Fourier y se realiza una DFT^{-1} de N muestras. Hallar la señal resultante para los tres casos siguientes: a) N=6, b) N=4 y c) N=3.

Solución:
a) $x_r[n]$= [<u>1</u>, -1, 0, 1, 1, 0]
b) $x_r[n]$= [<u>2</u>, -1, 0, 1]
c) $x_r[n]$= [<u>2</u>, 0, 0]
Donde el subrayado indica el valor de la posición x[0]. Compare los resultados con los del ejercicio anterior.

EJEMPLO 3-24

Sea x[n]=cos $2\pi F_0 n$.
1. Hallar y dibujar la DFT de N puntos de x[n].
2. Hallar y dibujar la DFT de 2N puntos de x[n].
3. Hallar y dibujar la DFT de 2N puntos de un segmento de N puntos de x[n]
Para resolver el problema vamos a enventanar el coseno entre 0≤n≤L-1, es decir, formamos la señal auxiliar $x_w[n]=x[n]p_L[n]$ donde elegiremos L = N en los apartados 1 y 3, y L=2N en el apartado 3.
Su T.F. será

$$X_w(F) = \mathcal{F}\big[x[n]p_L[n]\big] = \frac{1}{2}\mathcal{F}\left[e^{j2\pi F_0 n}\, p_L[n]\right] + \frac{1}{2}\mathcal{F}\left[e^{-j2\pi F_0 n}\, p_L[n]\right]$$

Aplicando la propiedad de modulación de la T.F.

$$X_w(F) = \frac{1}{2}P_L(F-F_0) + \frac{1}{2}P_L(F-F_0)$$

<u>Apartado 1</u>

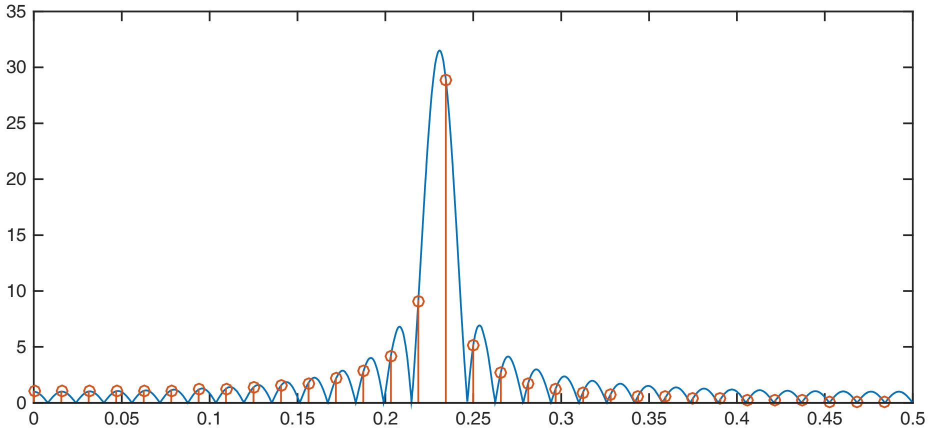

Figura 3.21

La DFT se obtiene con L=N y muestreando $X_w(F)$ cada k/N puntos

$$X_N[k] = \frac{1}{2}P_N(F-F_0)\Big|_{F=\frac{k}{N}} + \frac{1}{2}P_N(F-F_0)|_{F=k/N}$$

$$= \frac{\sin(\pi\left(\frac{k}{N}-F_0\right)N)}{2\sin(\pi k/N)}e^{-j2\pi\left(\frac{N-1}{2}\right)\left(\frac{k}{N}-F_0\right)} + \frac{\sin(\pi\left(\frac{k}{N}+F_0\right)N)}{2\sin(\pi k/N)}e^{-j2\pi\left(\frac{N-1}{2}\right)\left(\frac{k}{N}-F_0\right)}$$

La gráfica muestra, en el intervalo $0 \leq F \leq 0.5$, $|X_w(F)|$ y $|X_N[k]|$ con $F_0=3/13$, L=64 y N=64.

<u>Apartado 2</u>

La DFT se obtiene con L=2N y muestreando $X_w(F)$ cada k/2N puntos

$$X_{2N}[k] = \frac{1}{2}P_{2N}(F-F_0)\Big|_{F=\frac{k}{2N}} + \frac{1}{2}P_{2N}(F-F_0)|_{F=k/2N}$$

$$= \frac{\sin(\pi\left(\frac{k}{2N}-F_0\right)2N)}{2\sin(\pi k/2N)}e^{-j2\pi\left(\frac{2N-1}{2}\right)\left(\frac{k}{2N}-F_0\right)} + \frac{\sin(\pi\left(\frac{k}{2N}+F_0\right)2N)}{2\sin(\pi k/2N)}e^{-j2\pi\left(\frac{2N-1}{2}\right)\left(\frac{k}{2N}-F_0\right)}$$

La gráfica muestra, en el intervalo $0 \leq F \leq 0.5$, $|X_w(F)|$ y $|X_N[k]|$ con $F_0=3/13$, L=128, y N=128.

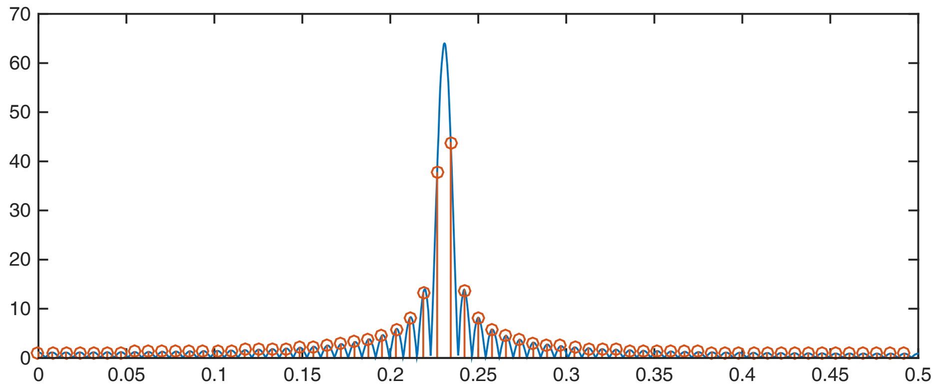

Figura 3.22

<u>Apartado 3</u>

La DFT se obtiene con L=N y muestreando $X_w(F)$ cada k/2N puntos

$$X_{2N}[k] = \frac{1}{2}P_N(F-F_0)\Big|_{F=\frac{k}{2N}} + \frac{1}{2}P_N(F-F_0)|_{F=k/2N}$$

$$= \frac{\sin(\pi\left(\frac{k}{2N}-F_0\right)N)}{2\sin(\pi k/2N)}e^{-j2\pi\left(\frac{N-1}{2}\right)\left(\frac{k}{2N}-F_0\right)} + \frac{\sin(\pi\left(\frac{k}{2N}+F_0\right)N)}{2\sin(\pi k/2N)}e^{-j2\pi\left(\frac{N-1}{2}\right)\left(\frac{k}{2N}-F_0\right)}$$

La gráfica muestra, en el intervalo $0 \le F \le 0.5$, $|X_w(F)|$ y $|X_N[k]|$ con $F_0=3/13$, $L=64$ y $N=128$.

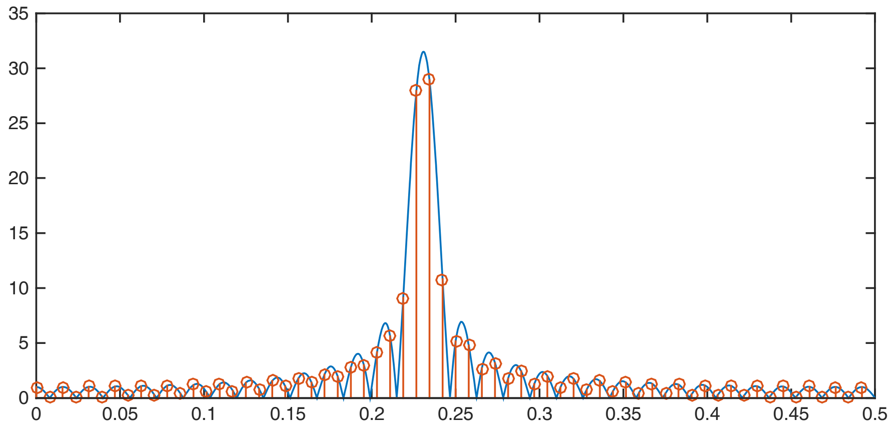

Figura 3.23

Nótese que el número de puntos de la DFT nos dice cuántas muestras en frecuencia estamos tomando. La longitud de la ventana, L, hace que el lóbulo de la sinc sea cada vez más estrecho conforme L aumenta.

3.14 Propiedades de la DFT

Enumeramos aquí las más útiles y algunos ejemplos de utilización. Salvo que se diga lo contrario, supondremos las señales $x[n]=0$ para $n < 0$ y $n \ge N$ (y en su caso, $y[n]$ también) y $X_N[k] = DFT_N\{x[n]\}$, $0 \le k \le N-1$. Denotaremos con un tilde $(\tilde{x}[n], \tilde{X}_N[k])$ la versión periodificada de una señal, por ejemplo:

$$\tilde{x}[n] = x[n] * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n-kN] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n-kN]$$

Las propiedades de la DFT se demuestran a partir de las propiedades de la TF de secuencias aplicadas a señales periódicas y limitando su validez al intervalo $0 \le n \le N-1$ y $0 \le k \le N-1$

3.14.1 Linealidad

$$DFT_N\{a_1x[n] + a_2y[n]\} = a_1 X_N[k] + a_2Y_N[k]$$

EJEMPLO 3-25

Sean las secuencias $x[n]$ definida en el intervalo $0 \le n \le L_1-1$ e $y[n]$ definida en el intervalo $0 \le n \le L_2-1$ de longitudes L_1 y L_2 respectivamente. Sería totalmente erróneo sumar DFTs de distinto número de puntos ya que estaríamos sumando valores correspondientes a distintas frecuencias. Por ejemplo, si $L2 > L1$

$$DFT_{L2}\{x[n] + y[n]\} \neq X_{L1}[k] + Y_{L2}[k]$$

3.14.2 Simetría

<u>*Señal real.*</u>

Si $x[n]=x^*[n]$ entonces $X_N(k)=X_N^*(N-k)$ $k=1,\ldots N-1$

Demostración:

Por ser $X(F)=X^*(-F)=X^*(1-F)$ se cumple

$$X\left(\frac{k}{N}\right) = X^*\left(\frac{-k}{N}\right) = X^*\left(\frac{N-k}{N}\right)$$

Y la relación con la DFT periodificada es $\tilde{X}_N[k] = \tilde{X}_N^*[-k]$ que en el intervalo $0 \le n \le N-1$ es:

$$X_N(k)=X_N^*(N-k) \quad k=1,\ldots N-1$$

Se deja como ejercicio demostrar
a) si x[n]=x[N-n] n=1,…N-1entonces X_N(k)=X_N (N-k)   k=1,…N-1
b) si x[n]=-x[N-n] n=1,…N-1 entonces X_N(k)=-X_N (N-k)   k=1,…N-1, x[0]=0
c) si x[n] es imaginaria entonces X_N(k)=-X_N* (N-k)   k=1,…N-1
d) x[n]=x*[n]=x[N-n] n=1,…N-1entonces X_N(k)=X_N (N-k)= X_N*(N-k]   k=1,…N-1

3.14.3 Retardo *circular*

$$\tilde{x}[n-n_0] \overset{DFT_N}{\longleftrightarrow} X_N[k]e^{-\frac{j2\pi n_0 k}{N}} \qquad (0 \le \mathrm{n,k} \le \mathrm{N}-1)$$

$$DFT^{-1}\{X_N[k]e^{-\frac{j2\pi n_0 k}{N}}\} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_N\,[k]e^{-\frac{j2\pi n_0 k}{N}}e^{\frac{j2\pi nk}{N}} =$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_N\,[k]e^{\frac{j2\pi(n-n_0)k}{N}} = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[n-n_0-rN]$$

EJEMPLO 3-26

Supongamos la secuencia x = [$\underline{3}$ 2 1] de duración L=3 muestras. Se realiza X_N[k], su DFT de N=6 puntos. La DFT inversa de $X_N[k]e^{-j2\pi n_0 k/N}$ será

a) para n_0=2 x_2[n]=[$\underline{0}$ 0 3 2 1 0]
b) para n_0=5 x_5[n]=[$\underline{2}$ 1 0 0 0 3]

Si la duración de x[n] más el retardo n_0 verifican L+n_0 ≤ N, el retardo circular coincide con el retardo lineal.

3.14.4 Modulación

$$x[n]\,e^{\frac{j2\pi nl}{N}} \overset{DFT_N}{\longleftrightarrow} \tilde{X}_N[k-l] \qquad (0 \le n, k \le N-1)$$

Esta propiedad es dual de la anterior

$$DFT\left\{x[n]e^{\frac{j2\pi nl}{N}}\right\} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\,e^{\frac{j2\pi nl}{N}}e^{\frac{-j2\pi nk}{N}} =$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} x\,[n]e^{\frac{j2\pi n(k-l)}{N}} = \square\{\mathrm{X(F)}\}_{F=(k-l)/N} = \tilde{X}_N(k-l) \quad 0 \le \mathrm{k} \le \mathrm{N}-1$$

EJEMPLO 3-27

Sea una secuencia x[n] de 5 puntos que tiene como DFTde 5 puntos la secuencia X_5[k]=[$\underline{a}$ b c d e], la secuencia x[n] exp(j2πn3/5) tendrá como DTF la secuencia $\tilde{X}_5[k-3]$=[$\underline{c}$ d e a b].

3.14.5 Convolución circular

$$x[n] \circledast \mathrm{y[n]} \overset{DFT_N}{\longleftrightarrow} X_N[k]Y_N[k] \qquad (0 \le \mathrm{n,k} \le \mathrm{N}-1)$$

Sean x[n] e y[n] dos secuencias de duración 0 ≤ n < Lx y 0 ≤ n < Ly respectivamente. Su convolución lineal z[n] = x[n]*y[n] es una secuencia de longitud Lz = Lx + Ly-1 muestras. Su Transformada de Fourier es Z(F) = X(F)Y(F). Si tomamos N muestras de Z(F) tenemos $Z_N[k] = Z(F)|_{F=k/N}$. Tomando DFT^{-1} tenemos según (6)

$$DFT^{-1}\{Z_N[k]\} = \sum_{r=-\infty}^{\infty} z[n-rN] = z[n]*t[n] = x[n]*y[n]*t[n] = x[n] \circledast \mathrm{y[n]}$$

Donde x[n]*y[n] es la convolución *lineal* de las dos secuencias y x[n]*y[n]*t[n] es su convolución *circular* de N puntos. Para que z[n] (0≤n≤N-1) coincida con la convolución lineal x[n]*y[n], se debe cumplir que N≥Lx+Ly-1

Es una de las propiedades con más aplicaciones porque puede utilizarse para calcular la convolución *lineal* entre secuencias eligiendo adecuadamente el número de muestras frecuenciales N. La metodología para calcular una convolución *lineal* entre dos secuencias x[n] e y[n] de longitud Lx y Ly respectivamente será:
1. Calcular N≥Lx+Ly-1
2. Hallar la DFT de N muestras de las dos secuencias
3. Multiplicar las DFTs
4. Hallar la DFT inversa

3.14.6 Producto

$$x[n]\,\mathrm{y[n]} \overset{DFT_N}{\longleftrightarrow} X_N[k] \circledast Y_N[k] \qquad (0 \le \mathrm{n,k} \le \mathrm{N}-1)$$

$$DFT\{x[n]y[n]\} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]y[n]e^{-j2\pi nk/N} = \sum_{n=0}^{N-1}\left[\frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1} X[l]e^{\frac{j2\pi nl}{N}}\right]y[n]e^{-\frac{j2\pi nk}{N}} =$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1} X[l]\sum_{n=0}^{N-1} y[n]\,e^{-\frac{j2\pi n(k-l)}{N}} = \frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1} X[l]Y[k-l] = \frac{1}{N}X[k] \circledast Y[k]$$

3.14.7 Dualidad

Contrariamente a la TF de secuencias, la DFT sí tiene la propiedad de dualidad

$$X_N[n] \overset{DFT_N}{\longleftrightarrow} N\tilde{x}[-k] = \begin{cases} Nx[0] & k=0 \\ Nx[N-k] & 1 \le k \le N-1 \end{cases}, (0 \le \mathrm{n,k} \le \mathrm{N}-1)$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} X_N[n]e^{-j2\pi nk/N} = \sum_{n=0}^{\infty} X_N[n]e^{j2\pi n(N-k)/N} = N\tilde{x}[N-k], \qquad 1 \le k \le N-1$$

y en k=0 $N\tilde{x}[N-0] = N\tilde{x}[N] = Nx[0]$

Son propiedades duales: Modulación y Retardo; Convolución y Producto

3.14.8 Parseval

$$\sum_{n=0}^{N-1} x[n]y^*[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_N[k]Y_N^*[k]$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} x[n]y^*[n] = \sum_{n=0}^{N-1}\frac{1}{N}\left[\sum_{k=0}^{N-1} X_N[k]e^{j2\pi nk/N}\right]y^*[n] = \sum_{k=0}^{N-1}\frac{1}{N}X_N[k]\left[\sum_{n=0}^{N-1} y^*[n]e^{j2\pi nk/N}\right]$$
$$= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_N[k]Y_N^*[k]$$

En el caso x[n]=y[n]

$$E_x = \sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} |X_N[k]|^2$$

EJEMPLO 3-28

Sea la señal x[n] = n, -L ≤ n ≤ L. Mediante el uso del algoritmo de la DFT, hallar N ≥ 2L+1 muestras de la TF de x[n].

En este caso la secuencia x[n] no es cero para n<0. Para utilizar el algoritmo de la DFT, la secuencia debe tener valores en un intervalo 0≤n≤N-1. Generamos* la señal x[n] periodificada

$$y[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[n-rN]$$

y elegimos el periodo 0 ≤ n ≤ N-1 para calcular su DFT. En definitiva, se forma la secuencia y[n]= x[n] para 0 ≤ n ≤ L y y[N-n]=x[-n] para 1 ≤ n ≤ L y se procede a hallar la DFT de y[n]. Con L=4 y N=16 se obtendría:

x=[-4 -3 -2 -1 $\underline{0}$ 1 2 3 4] y= [$\underline{0}$ 1 2 3 4 0 0 0 0 0 0 0 -4 -3 -2 -1]

(*)

$$X(F)|_{F=k/N} = \sum_{n=-L}^{L} x[n]e^{-\frac{j2\pi nk}{N}} = \sum_{n=-L}^{-1} x[n]e^{-\frac{j2\pi nk}{N}} + \sum_{n=0}^{L} x[n]e^{-\frac{j2\pi nk}{N}}$$

Sustituyendo por los valores de y[n] se tiene

$$\sum_{n=1}^{L} x[-n]e^{\frac{j2\pi nk}{N}} + \sum_{n=0}^{L} x[n]e^{-\frac{j2\pi nk}{N}} = \sum_{n=1}^{L} y[N-n]e^{\frac{j2\pi nk}{N}} + \sum_{n=0}^{L} y[n]e^{-\frac{j2\pi nk}{N}}$$

Y haciendo un cambio en el índice del sumatorio y teniendo en cuenta que las exponenciales son periódicas de periodo N se tiene

$$\sum_{n=N-L}^{N-1} y[n]e^{\frac{-j2\pi nk}{N}} + \sum_{n=0}^{L} y[n]e^{-\frac{j2\pi nk}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} y[n]e^{-\frac{j2\pi nk}{N}} = Y(F)|_{F=k/N}$$

Con lo que efectivamente, las muestras de la TF de las secuencias x[n] –L≤n≤L y y[n] 0≤n≤N-1 son idénticas

3.15 Resumen de propiedades de la DFT

Supondremos las señales x[n]=0 para n < 0 y n ≥ N (y en su caso, y[n] también) y $X_N[k]$ =DFT_N{x[n]}, 0≤k≤N-1. Denotaremos con un tilde ($\tilde{x}[n], \tilde{X}_N[k]$) la versión periodificada de una señal, por ejemplo:

$$\tilde{x}[n] = x[n] * \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta[n - rN] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[n - rN]$$

$$X_N[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j2\pi nk/N} \qquad 0 \leq k \leq N-1$$

$$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_N[k]e^{j2\pi nk/N} \qquad 0 \leq n \leq N-1$$

Linealidad

$$DFT_N\ \{a_1x[n] + a_2y[n]\} = a_1X_N[k] + a_2Y_N[k]$$

Simetría

si x[n]=x*[n]	entonces	$X_N(k)=X_N^*(N-k]$ k=1,…N-1
si x[n]=x[N-n] n=1,…N-1	entonces	$X_N(k)=X_N(N-k)$ k=1,…N-1
si x[n]=-x[N-n] n=1,…N-1	entonces	$X_N(k)=-X_N(N-k)$ k=1,…N-1, x[0]=0
si x[n] es imaginaria	entonces	$X_N(k)=-X_N^*(N-k)$ k=1,…N-1

Retardo *circular*

$$\tilde{x}[n-n_0] \xleftrightarrow{DFT_N} X_N[k]e^{-\frac{j2\pi n_0 k}{N}} \qquad (0 \leq \mathrm{n,k} \leq \mathrm{N}-1)$$

Modulación

$$x[n]\, e^{\frac{j2\pi nl}{N}} \xleftrightarrow{DFT_N} \tilde{X}_N[k-l] \qquad (0 \leq n, k \leq N-1)$$

Convolución

$$x[n] \circledast \mathrm{y[n]} \xleftrightarrow{DFT_N} X_N[k]Y_N[k] \qquad (0 \leq \mathrm{n,k} \leq \mathrm{N}-1)$$

Producto

$$x[n]\,\mathrm{y[n]} \xleftrightarrow{DFT_N} \frac{1}{N}X_N[k] \circledast Y_N[k] \qquad (0 \leq \mathrm{n,k} \leq \mathrm{N}-1)$$

Dualidad

$$X_N[n] \xleftrightarrow{DFT_N} N\tilde{x}[-k] = \begin{cases} Nx[0] & k=0 \\ Nx[N-k] & 1 \leq k \leq N-1 \end{cases}, (0 \leq \mathrm{n,k} \leq \mathrm{N}-1)$$

Parseval

$$\sum_{n=0}^{N-1} x[n]y^*[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_N[k]Y_N^*[k]$$

$$E_x = \sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} |X_N[k]|^2$$