Tema 5. Connexió

5.1 X espai topològic, $(C_i)_{i\in I}$ família de subespais connexos tals que $C_i \cap C_j \neq \varnothing$ per a qualssevol i, j.
Proveu que $C = \cup_{i\in I} C_i$ és connex.

Recordem que un espai topològic X és ***no connex*** quan es pot escriure $X = U \sqcup V$, unió disjunta d'oberts no buits.

En primer lloc, podem suposar que I no és buit (altrament $C = \varnothing$, que és connex).

Suposem que podem escriure el conjunt C com $C = U \sqcup V$, unió disjunta d'oberts de C. Provarem que un d'ells és buit.

Cada C_i és un subespai de C, i amb la descomposició anterior es pot escriure $C_i = (C_i \cap U) \sqcup (C_i \cap V)$, unió disjunta d'oberts de C_i.
Com que C_i és connex, un d'aquests conjunts ha de ser buit, l'altre el total.
En deduïm que cada C_i es troba contingut bé en U, bé en V.

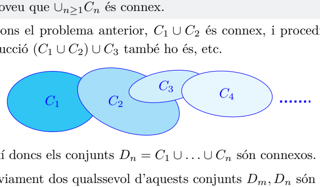
Suposem que, per a un cert índex $i_\circ$, tenim $C_{i_\circ} \subset U$.
Per hipòtesi, per a qualsevol índex i tenim $C_{i_\circ} \cap C_i \neq \varnothing$, i a més $C_{i_\circ} \cap C_i \subset U$.
En deduïm que C_i talla U, i, per l'observació prèvia, $C_i \subset U$.

Així doncs $C \subset U$, de manera que $V = \varnothing$.

Hem provat, doncs, que C és connex.

5.2 Sigui $(C_n)_{n\geq 1}$ una successió de subconjunts connexos tals que $C_n \cap C_{n+1} \neq \varnothing$ per a tot n.
Proveu que $\cup_{n\geq 1} C_n$ és connex.

Segons el problema anterior, $C_1 \cup C_2$ és connex, i procedint per inducció $(C_1 \cup C_2) \cup C_3$ també ho és, etc.



Així doncs els conjunts $D_n = C_1 \cup \ldots \cup C_n$ són connexos.

Òbviament dos qualssevol d'aquests conjunts D_m, D_n són no disjunts; de fet, un està contingut dins de l'altre.
Aplicant de nou el problema anterior (o bé que la unió de conjunts connexos amb intersecció no buida és connex), deduïm que $\cup_{n\geq 1} D_n = \cup_{n\geq 1} C_n$ és connex.

5.3 Siguin $A \subset B \subset \overline{A}$ subconjunts d'un espai topològic X.
Si A és connex, B també.

Suposarem que B no és connex, i en deduïrem que A tampoc no ho és.

Si B ***no*** és connex, podem trobar oberts $U, V \subset X$ tals que

$$B \subset U \cup V\,, \quad B \cap U \neq \varnothing\,, \quad B \cap V \neq \varnothing\,, \quad B \cap U \cap V = \varnothing\,.$$

Ara bé, tots els punts de B són adherents a A. Recordem que si $x \in \overline{A}$, tot obert que contingui x talla A. Per tant

$$A \cap U \neq \varnothing\,, \quad A \cap V \neq \varnothing\,.$$

Com que $A \subset B$, en deduïm

$$A \subset U \cup V\,, \quad A \cap U \neq \varnothing\,, \quad A \cap V \neq \varnothing\,, \quad A \cap U \cap V = \varnothing\,,$$

i doncs A no és connex.

Això implica en particular que:
Si $A \subset X$ és connex, també $\overline{A}$ és connex.

5.4 Si $A \subset X$ és connex, també ho són el seu interior i la seva frontera?

És fàcil pensar contraexemples en els dos casos.

- $A = \{(x, y \in \mathbf{R}^2 \mid xy \geq 0\}$
  és la unió del primer i el tercer quadrants tancats del pla,
  i és connex (els dos quadrants són connexos i tenen intersecció no buida).
  El seu interior és la unió (disjunta) dels mateixos quadrants però oberts.
- $A = [0, 1] \subset \mathbf{R}$
  és connex per ser un interval de $\mathbf{R}$;
  la seva frontera és $\partial A = \{0, 1\}$, que no és connex.

Si $\overline{A}$ és connex, també ho és A?
No necessàriament.

- $A = \mathbf{R} - \{0\} \subset \mathbf{R}$
  no és connex, però $\overline{A} = \mathbf{R}$ sí.

5.5 Sigui $C \subset X$ un subconjunt d'un espai topològic. Es considera la condició següent:
per a tot parell d'oberts $U, V \subset X$ que siguin disjunts i recobreixin C, o bé $C \cap U = \varnothing$, o bé $C \cap V = \varnothing$.
Aquesta condició implica que C és connex?

No.

Notem la crucial diferència amb la definició de connexió per a C, on es requereix que per a tot parell d'oberts $U, V \subset X$ tals que $C \cap U$ ***i*** $C \cap V$ ***siguin disjunts***...

El problema que ens podem trobar és que l'espai X no tingui prou oberts disjunts per separar punts, però tanmateix sí que en tingui quan veiem aquests oberts en un subespai.

Aquí en tenim un exemple:

- Sigui X un espai topològic ***infinit*** amb la ***topologia cofinita***.
  Recordem que els seus conjunts tancats són X i els conjunts finits.
  Notem que:
  - Un subespai $C \subset X$ també té la topologia cofinita.
  - Si C és finit, la topologia cofinita és la discreta,
    i per tant és connex sii C és buit o un singletó.

  És possible trobar oberts $U, V \subset X$ disjunts no buits?
  No.
  $U \cap V$ és obert i doncs buit o cofinit.
  Però en un conjunt infinit la intersecció de dos subconjunts cofinits és cofinit, no pas buit.
  Dit altrament:
  donats dos oberts disjunts $U, V \subset X$, un d'ells ha de ser buit.
  Així doncs, la presumpta condició de connexió de l'enunciat es compleix trivialment sigui quin sigui C.
  Però si C és finit amb més d'un element, C no és connex.

  Remarca En la discussió anterior hem provat:
  Un conjunt amb la topologia cofinita és connex sii té cardinal 0, 1 o infinit.

5.6 Sigui $A \subset X$ un subconjunt d'un espai topològic.
Demostreu que si un subconjunt connex $C \subset X$ talla A i el seu complementari A^c, també talla la frontera ∂A.

Recordem que

$$X = A^\circ \sqcup \partial A \sqcup (A^c)^\circ\,.$$

També tenim

$$A \subset A^\circ \sqcup \partial A\,, \quad A^c \subset (A^c)^\circ \sqcup \partial A\,.$$

Suposem que C no tallés ∂A. Aleshores

$$C \subset A^\circ \sqcup (A^c)^\circ$$

i C estaria dins la unió d'oberts disjunts tallant-los tots dos, en contradicció amb la hipòtesi de ser connex.

5.7 Un espai topològic és connex sii no existeix una aplicació contínua suprajectiva $f\colon X \to \{0, 1\}$ (espai discret de dos punts).

Altrament: X no es connex sii existeix una aplicació contínua suprajectiva $f\colon X \to \{0, 1\}$.

Si X no és connex i $X = U \cup V$ amb U, V oberts no buits disjunts, es defineix $f\colon X \to \{0, 1\}$ posant

$$f|_U = 0\,, \quad f|_V = 1\,,$$

que és trivialment contínua i suprajectiva.

Recíprocament, donada f amb aquestes condicions,

$$X = f^{-1}(0) \sqcup f^{-1}(1)$$

és una separació de X.

5.9 La intersecció d'una successió decreixent de conjunts connexos no és necessàriament connexa.
(Agafeu una escala infinita i aneu traient-ne esglaons.)

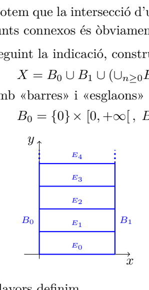
Notem que la intersecció d'una successió decreixent ***finita*** de conjunts connexos és òbviament connexa.

Seguint la indicació, construïm dins de $\mathbf{R}^2$ una ***escala*** infinita

$$X = B_0 \cup B_1 \cup (\cup_{n\geq 0} E_n)\,,$$

amb «barres» i «esglaons»

$$B_0 = \{0\} \times [0, +\infty[\,,\; B_1 = \{1\} \times [0, +\infty[\,,\; E_n = [0, 1] \times \{n\}\,.$$



Llavors definim

$$X_N = B_0 \cup B_1 \cup (\cup_{n\geq N} E_n)\,,$$

traient-ne els esglaons inferiors.

Els conjunts $X = X_0 \supset X_1 \supset X_2 \supset \ldots$ són òbviament connexos, però la seva intesecció

$$\cap_{N\geq 0} X_N = B_0 \cup B_1$$

no ho és.

5.10 Siguin X un espai topològic, R una relació d'equivalència en X, i $Q = X/R$ l'espai quocient.

Si X és connex, aleshores Q també ho és?

És immediat:
Q és la imatge contínua de X
per la projecció canònica $\pi\colon X \to Q = X/R$.

Demostreu que:
si Q és un espai connex
i cada classe d'equivalència $[x] \subset X$ és un subconjunt connex, aleshores X també és connex.

Algunes observacions prèvies sobre relacions d'equivalència.
Un subconjunt $A \subset X$ es diu ***saturat*** per R quan

$$x \in A\,,\; y\,R\,x\,,\; \text{impliquen } y \in A\,.$$

Les tres propietats següents són equivalents:

- A és saturat;
- A és unió de classes d'equivalència;
- $A = \pi^{-1}(\pi(A))$.

Tenim dues observacions:

- Si $A, B \subset X$ són conjunts saturats disjunts, $\pi(A), \pi(B) \subset Q$ també son disjunts.
- Tenint en compte la definició de la topologia quocient,

$$U \subset X \text{ obert saturat} \implies \pi(U) \subset X/R \text{ obert.}$$

Dit això, tornem a l'enunciat a demostrar.

Suposem que X no és connex:

$$X = U \sqcup V\,,$$

unió disjunta d'oberts no buits.

Si $[x] \subset X$ és una classe d'equivalència, pel fet de ser connexa ha d'estar continguda en U o en V; altrament la fórmula

$$[x] = ([x] \cap U) \sqcup ([x] \cap V)$$

provaria que $[x]$ no és connexa.

Concloem doncs que els oberts U i V han de ser saturats.

Per l'observació anterior, $\pi(U)$ i $\pi(V)$ són oberts disjunts i

$$Q = \pi(U) \sqcup \pi(V)\,,$$

unió disjunta d'oberts no buits, de manera que Q no seria connex.

5.11 Demostreu que els espais topològics
$\mathbf{S}^1$, $\mathbf{R}^2$, $I \subset \mathbf{R}$ (interval qualsevol)
no són homeomorfs dos a dos.

Ens basarem en dos fets:

- Si dos espais topològics són homeomorfs, tenen el mateix nombre de components connexos.
- Si $f\colon X \to Y$ és un homeomorfisme i $A \subset X$ és qualsevol subespai, l'aplicació «birestringida» $f|_A\colon A \to f(A)$ és un homeomorfisme.

Prenent de manera adequada subespais del tipus $A = X - \{x\}$, etc, provarem que un homeomorfisme entre els espais de l'enunciat no pot existir.

La idea és que l'eliminació de subconjunts apropiats de X en canviï el nombre de components connexos.

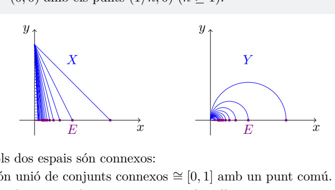
Els intervals degenerats (buit, un punt) són òbviament no homeomorfs ni entre ells ni als altres.
Tots els espais de l'enunciat són connexos; tanmateix:

- $\mathbf{S}^1$: si en traiem un punt qualsevol, el que queda continua sent connex (és homeomorf a $\mathbf{R}$); si en traiem dos punts qualssevol, el que queda té dos components connexos.
- $\mathbf{R}^2$: si en traiem un o dos punts, continua sent connex.
- Un interval no-degenerat:
  - I obert: si en traiem un punt qualsevol, el que queda té dos components connexos.
  - I semiobert $[a, b[$: si en traiem el punt a continua connex; si en traiem qualsevol altre punt, té dos components.
  - I interval tancat $[a, b]$: si en traiem qualsevol dels dos punts extrems continua connex; si en traiem qualsevol altre punt, té dos components.

Podem sistematitzar millor la darrera anàlisi.
Si X és un espai connex i $x \in X$, diem que x és un ***punt de tall*** quan $X - \{x\}$ ***no*** és connex.
Òbviament un homeomorfisme preserva els punts de tall (o no tall).
Com hem vist, la circumferència no té cap punt de tall, i en un interval no degenerat tots els punts són de tall si és obert, tots menys un si és semiobert, i tots menys dos si és tancat.

5.12 Proveu que aquests dos subespais de $\mathbf{R}^2$ ***no*** són homeomorfs:

- X: la reunió dels segments que uneixen el punt $(0, 1)$ amb els punts $(1/n, 0)$ $(n \geq 1)$.
- Y: la reunió de les semicircumferències que uneixen el punt $(0, 0)$ amb els punts $(1/n, 0)$ $(n \geq 1)$.



Els dos espais són connexos:
són unió de conjunts connexos $\cong [0, 1]$ amb un punt comú.
Analitzem-ne els respectius punts de tall.

És clar que tots els punts «interiors» dels segments o circumferències són de tall.
Una observació atenta també demostra que els punts $(0, 1) \in X$ i $(0, 0) \in Y$ són punts de tall.
(Si esborrem aquests punts dels seus respectius espais, és fàcil establir una separació dels espais resultants.)

En ambdós casos concloem que el conjunt de punts de ***no tall*** és

$$E = \{(1/n, 0) \mid n \geq 1\}\,.$$

Un homeomorfisme $f\colon X \to Y$ necessàriament ha de complir que $f(E) = E$.

Ara bé:

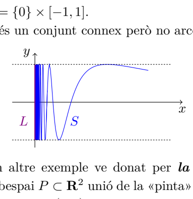
- el subespai $E \subset X$ és tancat;
- $E \subset Y$ no és tancat, ja que el punt $(0, 0)$ n'és adherent.

Per tant no pot existir tal homeomorfisme.

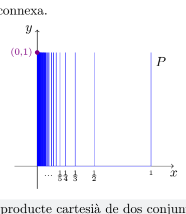
5.13 Digueu si són arcconnexos els conjunts següents:

L'adherència d'un conjunt arcconnex.
No.

L'exemple més senzill ve donat pel ***sinus dels topòlegs***.
Sigui $S \subset \mathbf{R}^2$ el graf de la funció $y = \sin\frac{1}{x}$ per a $0 < x \leq 1$.
Aquest conjunt és òbviament arcconnex, i doncs connex.
La seva adherència $\overline{S} \subset \mathbf{R}^2$ s'obté afegint-hi el segment vertical $L = \{0\} \times [-1, 1]$.
$\overline{S}$ és un conjunt connex però no arcconnex (problema 5.16).



Un altre exemple ve donat per ***la pinta i la puça***, que és el subespai $P \subset \mathbf{R}^2$ unió de la «pinta» $[0, 1] \times \{0\} \cup \left(\bigcup_n \{\frac{1}{n}\} \times [0, 1]\right)$ i la «puça» $(0, 1)$.
La pinta és òbviament arcconnexa, i la pinta i la puça és connexa però no arcconnexa (vist a teoria).
Per tant, *com a subespai de P*, l'adherència de la pinta no és arcconnexa.



El producte cartesià de dos conjunts arcconnexos.
Sí.
Si $X = \prod_i X_i$, $a, b \in X$, i $\gamma_i\colon [0, 1] \to X_i$ uneix a_i amb b_i, aleshores

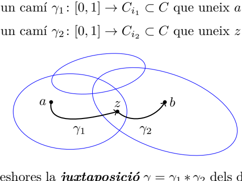
$$\gamma = (\gamma_i)_{i\in I}\colon [0, 1] \to \prod_i X_i = X$$

uneix a amb b.

La reunió de conjunts arcconnexos amb un punt comú.
Sí.

La reunió de conjunts arcconnexos tals que dos d'ells tenen intersecció no buida.
Sí.
Siguin $a, b \in C = \cup C_i$, suposem que $a \in C_{i_1}$, $b \in C_{i_2}$, i sigui $z \in C_{i_1} \cap C_{i_2}$. Aleshores hi ha:

- un camí $\gamma_1\colon [0, 1] \to C_{i_1} \subset C$ que uneix a amb z, i
- un camí $\gamma_2\colon [0, 1] \to C_{i_2} \subset C$ que uneix z amb b.



Aleshores la ***juxtaposició*** $\gamma = \gamma_1 * \gamma_2$ dels dos camins és un camí

$$\gamma\colon [0, 1] \to C\,,$$

$$\gamma(t) = \gamma_1(2t) \text{ si } 0 \leq t \leq 1/2\,,$$

$$\gamma(t) = \gamma_2(2t - 1) \text{ si } 1/2 \leq t \leq 1\,,$$

en C que uneix a amb b.

5.14 Sigui $A \subset X$ un subconjunt.
Tot camí que comenci en A i acabi fora de A passa per la frontera.

És conseqüència del problema 5.6, tenint en compte que la imatge d'un camí és sempre un conjunt connex.

5.15 Digueu si els espais següents són, o no, connexos o arcconnexos:

1. Esfera n-dimensional: $\mathbf{S}^n$.

És arcconnex per a $n \geq 1$.

En efecte, és la unió dels hemisferis nord i sud tancats:
• són arcconnexos per ser homeomorfs a discos tancats;
• la seva intersecció no és buida (és l'equador de l'esfera).

Si $n = 0$ l'esfera 0-dimensional és $\mathbf{S}^0 = \{-1, 1\}$, no connex.

2. Complementari de l'esfera n-dimensional: $\mathbf{R}^{n+1} - \mathbf{S}^n$.

No és connex.

En efecte, és la unió disjunta de dos oberts no buits:
• la bola euclidiana $\|\mathbf{x}\| < 1$,
• i el seu exterior.

Si $n \geq 1$, aquests són els components connexos del conjunt.

Si $n = 0$, $\mathbf{R} - \mathbf{S}^0$ té tres components.

3. Punts de $\mathbf{R}^n$ amb totes les coordenades racionals: $\mathbf{Q}^n \subset \mathbf{R}^n$.

No és connex $(n \geq 1)$.

De fet, els components connexos de $\mathbf{Q}^n$ són els singletons ($\mathbf{Q}^n$ és ***totalment desconnex***.)

Vegem-ho en el cas de $n = 1$. Un subespai $C \subset \mathbf{Q}$ és connex sii ho és com a subespai de $\mathbf{R}$, però això només passa quan C és un interval. Els únics intervals de $\mathbf{R}$ continguts en $\mathbf{Q}$ són degenerats (ja que tot interval no-degenerat de $\mathbf{R}$ conté nombres irracionals). Per tant els subconjunts connexos maximals de $\mathbf{Q}$ són els punts.

També podem raonar-ho en termes de descomposicions en *clopens*.
Si $S \subset \mathbf{Q}$ conté dos elements, no pot ser connex. En efecte:
Suposem per exemple que $a < b$ són de S, i sigui z un irracional tal que $a < z < b$. Aleshores la descomposició

$$S = (S \cap \{x \mid x < z\}) \cup (S \cap \{x \mid x > z\})$$

prova que S no és connex.

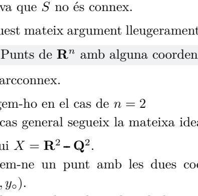
Aquest mateix argument lleugerament modificat serveix per a $\mathbf{Q}^n$.

4. Punts de $\mathbf{R}^n$ amb alguna coordenada irracional: $\mathbf{R}^n - \mathbf{Q}^n$.

És arcconnex.

Vegem-ho en el cas de $n = 2$
(el cas general segueix la mateixa idea).

Sigui $X = \mathbf{R}^2 - \mathbf{Q}^2$.
Fixem-ne un punt amb les dues coordenades irracionals, sigui $(x_\circ, y_\circ)$.
Podem unir-lo amb qualsevol altre punt $(a, b) \in X$ de la manera següent:
si a és irracional (per exemple), la recta $y = y_\circ$ ens permet anar de $(x_\circ, y_\circ)$ a $(a, y_\circ)$, i després la recta $x = a$ ens permet anar de $(a, y_\circ)$ a (a, b), sense sortir de X.



A partir d'això és clar que dos punts qualssevol es poden connectar per un camí dins de X.

5. Recta real amb la topologia del límit inferior: $\mathbf{R}_{\text{li}}$.

No és connex.

Recordem que és la topologia generada pels intervals $[a, b[$, i és més fina que la topologia euclidiana.
Llavors tenim

$$\mathbf{R}_{\text{li}} =]-\infty, a[\,\cup\, [a, +\infty[\,,$$

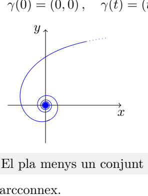
unió disjunta d'oberts no buits.
Aquesta fórmula també prova que dos punts diferents pertanyen a components connexos diferents. Per tant, els components connexos són reduïts a un punt ($\mathbf{R}_{\text{li}}$ és ***totalment desconnex***).

6. Espiral $\{(0, 0)\} \cup \{\frac{1}{t}(\cos t, \sin t) \mid t > 0\}$.

És arcconnex.

En efecte, és la imatge de l'aplicació contínua $\gamma\colon [0, +\infty[\to \mathbf{R}^2$ definida per

$$\gamma(0) = (0, 0)\,, \quad \gamma(t) = (t\cos(1/t), t\sin(1/t)) \;\text{ si } t > 0\,.$$



7. El pla menys un conjunt numerable: $\mathbf{R}^2 - N$, N numerable.

És arcconnex.

Sigui $A = \mathbf{R}^2 - N$, i siguin $p, q \in A$ dos punts diferents.
El conjunt de rectes del pla que passen per p i ***no tallen*** N és ***no numerable***, igual que el de les rectes per q que no tallen N.
Agafant-ne una de cada que no siguin paral·leles podem unir p amb q.

8. El subespai $\mathbf{R}_{\text{cf}} - \{0\}$ de $\mathbf{R}_{\text{cf}}$.

És arcconnex.

Tota aplicació injectiva $\gamma\colon [0, 1] \to \mathbf{R}_{\text{cf}}$ és contínua.
Si $T \subset \mathbf{R}_{\text{cf}}$ és tancat, o bé és el total, de manera que $\gamma^{-1}(T) = [0, 1]$, o bé és un conjunt finit, de manera que per la injectivitat $\gamma^{-1}(T) \subset [0, 1]$ és finit. En qualsevol cas $\gamma^{-1}(T)$ és tancat.

Donats dos punts qualssevol $a, b \in \mathbf{R}_{\text{cf}} - \{0\}$, és fàcil construir una aplicació injectiva $\gamma\colon [0, 1] \to \mathbf{R}_{\text{cf}} - \{0\}$ tal que $\gamma(0) = a$, $\gamma(1) = b$.

D'aquí es dedueix que $\mathbf{R}_{\text{cf}} - \{0\}$ és arcconnex.

9. El subespai $\mathbf{R}_{\text{cf}} - \mathbf{Q}$ de la recta amb la topologia cofinita, $\mathbf{R}_{\text{cf}}$.

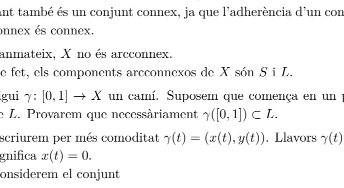
Mateix argument, tenint en compte que els conjunts $[0, 1]$ i $\mathbf{R} - \mathbf{Q}$ són equipotents.

5.16 ***El sinus dels topòlegs***

El subespai $X = S \cup L \subset \mathbf{R}^2$ unió de

$$S = \left\{\left(x, \sin\frac{1}{x}\right) \mid x > 0\right\}\,, \quad L = \{0\} \times [-1, 1]\,,$$

és connex però no arcconnex.



El subespai S és òbviament arcconnex perquè és la imatge contínua d'un interval. Per tant també és connex.

L'adherència $\overline{S}$ de S dins de $\mathbf{R}^2$ és precisament $X = S \cup L$, i per tant també és un conjunt connex, ja que l'adherència d'un conjunt connex és connex.

Tanmateix, X no és arcconnex.
De fet, els components arcconnexos de X són S i L.

Sigui $\gamma\colon [0, 1] \to X$ un camí. Suposem que comença en un punt de L. Provarem que necessàriament $\gamma([0, 1]) \subset L$.

Escriurem per més comoditat $\gamma(t) = (x(t), y(t))$. Llavors $\gamma(t) \in L$ significa $x(t) = 0$.
Considerem el conjunt

$$J = \{t \in [0, 1] \mid x(t) = 0\}\,.$$

El nostre propòsit és provar que $J = [0, 1]$.

- J no és buit, ja que $x(0) = 0$.
- J és tancat, ja que $J = x^{-1}(0)$ i x és contínua.
- J és obert (dins de $[0, 1]$).
  Sigui $t_\circ \in J$. Per continuïtat de γ, donada $\varepsilon > 0$, existeix $\delta > 0$ tal que $t \in [0, 1]$, $|t - t_\circ| < \delta$ implica $|x(t)| < \varepsilon$, $|y(t) - y(t_\circ)| < \varepsilon$.
  Prenem una t_1 d'aquest interval, per exemple $t_\circ < t_1 < t_\circ + \delta$, i suposem que $x(t_1) \neq 0$.
  Pel teorema del valor intermedi, $x|_{[t_\circ, t_1]}$ pren tots els valors entre $x(t_\circ) = 0$ i $x(t_1) \neq 0$, i en particular els valors $\dfrac{1}{2k\pi \pm \pi/2}$ per a k enters prou grans.
  Això implica que $y|_{[t_\circ, t_1]}$ pren els valors $\sin(2k\pi \pm \pi/2) = \pm 1$.
  Això contradiu $|y(t) - y(t_\circ)| < \varepsilon$ si per exemple prenem $\varepsilon = 1/3$.
  Concloem doncs que $x(t) = 0$ per als t tals que $|t - t_\circ| < \delta$, de manera que $t_\circ$ és un punt interior de J.

Com que $[0, 1]$ és connex, en deduïm que $J = [0, 1]$, i $\gamma([0, 1]) \subset L$.

Hem vist doncs que és impossible unir un punt de L amb un punt de S amb un camí, de manera que X no és arcconnex.

5.17 Determineu els components connexos i arcconnexos dels espais topològics següents.

1. $\mathbf{Q}$ i $\mathbf{R} - \mathbf{Q}$

Són subespais de $\mathbf{R}$, i un subespai de $\mathbf{Q}$ o $\mathbf{R} - \mathbf{Q}$ només pot ser connex si ho és com a subespai de $\mathbf{R}$.
Els subespais connexos de $\mathbf{R}$ són els intervals, i aquests, si són no degenerats, contenen tant nombres racionals com irracionals.
Per tant els subconjunts connexos de $\mathbf{Q}$ o $\mathbf{R} - \mathbf{Q}$ són el buit i els singletons.

Així, els components connexos de $\mathbf{Q}$ i $\mathbf{R} - \mathbf{Q}$ són els singletons.

Els components arcconnexos són els mateixos.

2. $\mathbf{Q}^2$, $(\mathbf{R} - \mathbf{Q})^2$, $\mathbf{R}^2 - \mathbf{Q}^2$, $\mathbf{R}^2 - (\mathbf{R} - \mathbf{Q})^2$.

Als dos primers els components connexos són els singletons.
De fet, es pot provar en general que *els components connexos d'un espai producte són els productes dels components connexos.*

El tercer espai és arcconnex, com s'ha vist al problema 5.15, apartat 4. El quart espai també, i es faria com amb el tercer.

3. El sinus topològic

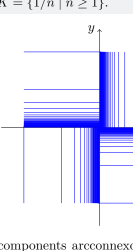
Hem vist al problema 5.16 que és connex i té dos components arcconnexos.

4. $\mathbf{R}$ amb la topologia del límit inferior.

S'ha vist al problema 5.15 que és totalment desconnex.

5. El subespai $\left(\{0\} \cup \{\frac{1}{n} \mid n \geq 1\}\right) \times [0, 1] \subset \mathbf{R}^2$.

Cadascun dels segments verticals $\{x\} \times [0, 1]$ amb els $x = 1/n$ o $x = 0$ és arcconnex, i doncs connex.
Tanmateix, no hi ha conjunts connexos més grans. En efecte, dos qualssevol d'aquests segments es poden separar per semiplans oberts del pla.



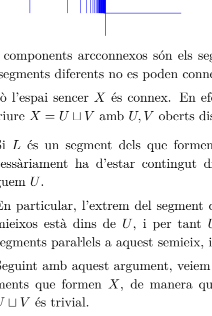
6. El subespai anterior afegint-hi el segment $[0, 1] \times \{0\}$.

Aquest espai és arcconnex i doncs té un únic component.

7. El subespai de $\mathbf{R}^2$

$$K \times [0, 1] \cup (-K) \times [-1, 0] \cup [0, 1] \times (-K) \cup [-1, 0] \times K\,,$$

on $K = \{1/n \mid n \geq 1\}$.



Els components arcconnexos són els segments, ja que dos punts en segments diferents no es poden connectar amb un camí.

Però l'espai sencer X és connex. En efecte, suposem que es pot escriure $X = U \sqcup V$ amb U, V oberts disjunts.

- Si L és un segment dels que formen X, per ser connex, necessàriament ha d'estar contingut dins d'un dels oberts, diguem U.
- En particular, l'extrem del segment que pertany a un dels semieixos està dins de U, i per tant U talla una infinitat dels segments paral·lels a aquest semieix, i doncs també els conté.
- Seguint amb aquest argument, veiem que U conté *tots* els segments que formen X, de manera que la descomposició $X = U \sqcup V$ és trivial.

5.23 ***Connexió i arcconnexió locals***

Un espai topològic es diu ***localment (arc)connex*** si tot punt té una base de veïnats (arc)connexos.

Doneu exemples d'espais connexos que no siguin localment connexos i d'espais localment connexos que no siguin connexos.

El mateix canviant *connex* per *arcconnex*.

A partir de la definició, és clar que

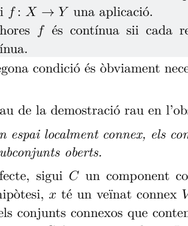
- Tot espai localment arcconnex és localment connex.
- Si X és un espai localment (arc)connex i $Y \subset X$ un subespai ***obert***, llavors Y també és localment (arc)connex.

Els exemples demanats:

- $\mathbf{R}^n$ és localment arcconnex (ja que les boles $\mathrm{B}(x; r)$ són arcconnexes).
  Per tant, qualsevol subespai obert no (arc)connex $Y \subset \mathbf{R}^n$ és un exemple d'espai localment (arc)connex no (arc)connex.
- Considerem la «pinta tancada»

$$X = [0, 1] \times \{0\} \bigcup \left(\{0\} \cup \left\{\frac{1}{n} \mid n \geq 1\right\}\right) \times [0, 1]\,.$$

  És un espai arcconnex, però cap dels punts $(0, y)$ $(0 < y \leq 1)$ no té una base de veïnats connexos, de manera que no és localment connex.



5.26 Sigui X localment connex amb components $C_i \subset X$.
Sigui $f\colon X \to Y$ una aplicació.
Aleshores f és contínua sii cada restricció $f|_{C_i}\colon C_i \to Y$ és contínua.

La segona condició és òbviament necessària. Vegem que és suficient.

La clau de la demostració rau en l'observació següent:

En un espai localment connex, els components connexos són sempre subconjunts oberts.

En efecte, sigui C un component connex de X, i sigui $x \in C$. Per hipòtesi, x té un veïnat connex V. Com que C és la unió de tots els conjunts connexos que contenen x, tenim $x \in V \subset C$, de manera que C és un veïnat de x. I un conjunt que és veïnat de cadascun dels seus punts és obert.

En aquestes condicions, X és la unió disjunta dels ***oberts*** C_i, i per tant f és contínua sii ho són les $f|_{C_i}$.

Doneu contraexemples on aquesta propietat falli quan X no és localment arcconnex.

- Podem prendre qualsevol aplicació ***no contínua*** $f\colon \mathbf{Q} \to Y$.
  Els components connexos de $\mathbf{Q}$ són els punts, i doncs les restriccions de f a aquests són aplicacions (contínues) $f|_{\{x\}}$.