1. Trobeu la imatge de la recta $L = (2,0,-1) \vee (2,0,1)$ per la projectivitat $f : \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ de matriu A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Considerem un pla projectiu $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$.

(a) Trobeu les equacions de l'homografia de $\mathbb{P}^2$ que deixa fixos els punts $(1,2,0), (1,-1,\sqrt{3})$ i $(1,-1,-\sqrt{3})$ i envia $(1,0,0)$ a $(0,1,0)$.

(b) Trobeu les equacions de l'homografia de $\mathbb{P}^2$ que deixa fix el punt $(1,0,-1)$, tal que $x+y+2z=0$ és una recta de punts fixes i que transforma $(1,-1,1)$ en el punt $(-5,1,3)$.

3. A $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$ considerem tres rectes l_1, l_2, l_3 disjuntes dues a dues.

(a) Proveu que existeix una referència projectiva en la qual les equacions de les rectes són:

$$\begin{aligned} l_1 &= \{y = t = 0\} \\ l_2 &= \{x = z = 0\} \\ l_3 &= \{x = y, z = t\} \end{aligned}$$

(b) Si r_1, r_2, r_3 són tres rectes disjuntes de $\mathbb{P}^3$, proveu que existeix una projectivitat $f : \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$ tal que $f(l_i) = r_i$, per a $1 \le i \le 3$.

4. Trobeu els punts fixos i les rectes invariants de les homografies de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ donades per les matrius següents:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Trobeu els punts fixos, les rectes invariants i els plans invariants de les homografies de $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$ donades per les matrius següents:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 & 1 \\ 1 & 6 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2-a & -1 & -a & a \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1-a & -1 & 1-a & a \\ 3-3a & -2 & 1-3a & 3a \end{pmatrix} \quad a \neq 0, 1.$$

6. Sigui f una homografia de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$, $f = [\varphi]$. Suposem que φ té un valor propi doble i que és diagonalitzable. Proveu que f té un punt fix p i una recta de punts fixos L, $p \notin L$. Suposem que coneixem la imatge d'un punt $s \notin L$, $s \neq p$. És possible caracteritzar la imatge d'un punt q qualsevol?

7. Estudieu l'homografia $f : \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ d'equacions $x' = y + z$, $y' = x + z$, $z' = x + y$.

8. Estudieu les homografies de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ i de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ tals que $f^4 = \mathrm{Id}$.

9. Estudieu la composició de dues homologies generals amb el mateix centre i eixos diferents.

10. Sigui f una involució de $\mathbb{P}^n$ amb varietats de punts fixos V_1 i V_2.

(a) Sigui p un punt qualsevol. Descriviu geomètricament com es pot calcular $f(p)$ a partir de p, V_1 i V_2.

(b) Trobeu tots els hiperplans f-invariants i descriviu l'afinitat que f defineix en els seus complementaris.

11. Sigui f una homologia general de $\mathbb{P}^n$, amb varietats de punts fixos p_0 i H.

(a) Sigui p un punt qualsevol. Descriviu geomètricament com es pot calcular $f(p)$ a partir de p, p_0, H i la relació entre els valors propis de f.

(b) Trobeu tots els hiperplans f-invariants i descriviu l'afinitat que f defineix en els seus complementaris.

12. Estudieu l'homografia del pla que s'obté en composar dues homologies generals tals que el centre de cada una d'elles està sobre l'eix de l'altra.

13. Sigui $f : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ una homografia amb un punt fix p i una recta invariant L que no conté p. Proveu que les homologies de centre p i eix L commuten amb f.

14. Siguin $V_1, V_2 \subset \mathbf{P}^n$ dues varietats disjuntes de la mateixa dimensió d. Proveu que tota projectivitat de V_1 en V_2 és una perspectivitat.

15. *Projecció i secció.* Sigui $L \subset \mathbb{P}^n$ una recta i $V \subset \mathbb{P}^n$ una varietat de dimensió $d = n - 2$, disjunta de L, $L \cap V = \emptyset$. Es defineix la *projecció* $\Phi : L \longrightarrow V^*$ com l'aplicació $\Phi(P) = P \vee V$ i la *secció* $\Psi : V^* \longrightarrow L$ per $\Psi(H) = H \cap L$.

(a) Proveu que Φ, Ψ estan ben definides i són inverses l'una de l'altra.

(b) Proveu que Φ i Ψ conserven les raons dobles i, per tant, són projectivitats.

(c) Deduïu de l'apartat anterior que le perspectivitats conserven les raons dobles i, per tant, són projectivitats. (Aquest resultat l'hem vist a teoria amb una demostració alternativa. Indicació: per a π_W i punts alineats sobre una recta L, treballeu a $\mathbb{P}^n = W \vee L$ i comproveu que $(\pi_W)_{|L} = \Psi \circ \Phi$.)

16. Sigui $f : \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}} \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ una homografia. Suposant conegudes les imatges de tres punts A, B i C, construïu la imatge d'un punt D.

17. Estudieu les homografies $f : \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}} \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ que deixen invariants tres punts A, B i C, potser intercanviant-los. En la referència $\mathcal{R} = \{A, B; C\}$ trobeu llurs equacions.

18. Sigui $f : \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}} \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ una homografia tal que $f^2 = \mathrm{id}$ i amb dos punts fixos. Doneu una construcció de la imatge d'un punt arbitrari.

19. Siguin f_1, f_2 dues involucions diferents (i diferents de l'identitat) de la recta projectiva, la primera amb punts fixos A, B i la segona amb punts fixos C, D, essent aquests 4 punts diferents. Demostreu que $f_1 f_2 = f_2 f_1$ si i només si $(A, B, C, D) = -1$.

20. Siguin r i s dues rectes diferents de $\mathbb{P}^2$, O el punt d'intersecció i $\varphi : r \longrightarrow s$ una projectivitat.

(a) Proveu que φ és una perspectivitat si, i només si, O és un punt fix.

(b) Proveu que, en variar $P, Q \in r$, els punts de la forma $(P \vee \varphi(Q)) \cap (Q \vee \varphi(P))$, determinen una recta. L'anomenem l'*eix de la projectivitat.*

(c) Deduïu un mètode per a construir gràficament la imatge d'un punt de r coneguts l'eix de la projectivitat i la imatge d'un punt $P \neq O$.

(d) Caracteritzeu els punts d'intersecció de les rectes r i s amb l'eix de la projectivitat. Podeu caracteritzar les perspectivitats en funció de l'eix?

(e) Deduïu el teorema de Pappus dels apartats anteriors.

21 . Donats dos triangles ABC i $A'B'C'$ i un punt O de manera que AA', BB', CC' són rectes diferents i concurrents en O, proveu que se satisfà:

(a) Existeix una única projectivitat que transforma A, B, C en A', B', C' respectivament i deixa O invariant.

(b) Aquesta projectivitat té una recta de punts fixos.

(c) Deduïu el teorema de Desargues dels apartats anteriors.

22 . Siguin L_1 i L_2 dos plans de $\mathbb{P}^3$ que es tallen en la recta L. Sigui $f : L_1 \longrightarrow L_2$ una projectivitat que té dos punts fixos $p, q \in L$. Demostreu que existeixen dues rectes r i s, una per p i l'altra per q, tals que per a tot punt $m \in L_1$ la recta $m \vee f(m)$ talla r i s.

23 . Sigui $f : \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ una homografia del pla projectiu real $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$. Suposem que $f(x, y, z) = (4x - 4z, -x + 2y + 2z, x)$.

(a) Classifiqueu-la i trobeu una recta que es pugui prendre com a recta de l'infinit.

(b) Estudieu l'afinitat corresponent i trobeu les seves equacions en un sistema de referència afí.

24 . Sigui $f : \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ una homografia del pla projectiu real $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$. Suposem que $f(x, y, z) = (x, y + 2z, z)$.

(a) Trobeu els punts fixos i les rectes invariants.

(b) Per a cada recta invariant, estudieu l'afinitat que s'obté en restringir l'homografia a l'espai projectiu menys la recta invariant.