Àlgebra Lineal

Problemes del Tema 1: Matrius, sistemes lineals i determinants

1. Quines de les matrius següents poden multiplicar-se entre elles?

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ -2 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

En els casos en què sigui possible, feu les operacions següents:

$$AD^t + E + FC, \qquad (A+D)E, \qquad BECF, \qquad (B+E)C.$$

2. Comproveu que les matrius

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & -1 & 7 \\ 7 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

no commuten entre elles, és a dir, que $AB \neq BA$.

3. Considereu les matrius següents:

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Calculeu DA i AD. Què observeu? Descriviu l'acció d'una matriu diagonal en multiplicar-la per la dreta o per l'esquerra per una altra matriu. Quines matrius diagonals commuten amb qualsevol altra matriu?

4. Considereu la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Doneu una fórmula tancada per als coeficients de A^n, $n \geq 1$.

5. Demostreu que el producte de dues matrius quadrades de la mateixa dimensió que siguin triangulars inferiors també és triangular inferior.

6. Quina relació han de satisfer dues matrius $A, B \in \mathcal{M}_n$ per tal que les igualtats

$$(A+B)(A-B) = A^2 - B^2, \qquad (A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

siguin certes?

7. Donada una matriu quadrada $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n$, definim la seva traça com la suma dels coeficients de la diagonal:

$$\operatorname{tr} A = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}.$$

Demostreu les propietats següents:

(a) $\operatorname{tr}(A+B) = \operatorname{tr} A + \operatorname{tr} B$.

(b) $\operatorname{tr}(\lambda A) = \lambda \operatorname{tr} A$ per a qualsevol $\lambda \in \mathbb{R}$.

(c) $\operatorname{tr}(A^t) = \operatorname{tr} A$.

(d) $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.

8. Determineu totes les matrius $A \in \mathcal{M}_2$ tals que $A^2 = I$. Determineu també les que satisfan $A^2 = \mathbf{0}$.

9. Siguin $A, B \in \mathcal{M}_n$ matrius simètriques.

(a) Demostreu que AB és simètrica si, i només si, A i B commuten.

(b) Comproveu que, si A és invertible, aleshores A^{-1} és simètrica.

(c) Comproveu que, per a tota matriu $C \in \mathcal{M}_{n\times m}$, la matriu $C^t A\, C$ és simètrica.

(d) Esbrineu quines de les matrius següents són simètriques:

$$A^2 - B^2, \quad (A+B)(A-B), \quad ABA.$$

10. Sigui $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n$ una matriu simètrica tal que $A^2 = A$. Demostreu que, si $a_{ii} = 0$, llavors tots els coeficients de la fila i i de la columna i són nuls.

11. Trobeu una forma esglaonada i el rang de les matrius següents, explicitant les transformacions elementals (per files) fetes i les corresponents matrius elementals.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 3 & 6 & -1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 8 & 2 \\ 4 & 9 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

12. Sigui $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ una matriu qualsevol. Escriviu les matrius elementals que corresponen a les transformacions elementals següents:

(a) Permutació de les files i, j.

(b) Permutació de les columnes i, j.

(c) Suma de la fila j multiplicada per λ a la fila i.

(d) Suma de la columna j multiplicada per λ a la columna i.

13. La notació $A \sim B$ (resp. $A \sim_c B$) significa que la matriu B es pot obtenir de la matriu A mitjançant transformacions elementals per files (resp. columnes). Proveu:

(i) $A \sim B \Longleftrightarrow B = FA$ per a alguna matriu F que és producte de matrius elementals.

(ii) $A \sim_c B \Longleftrightarrow B = AC$ per a alguna matriu C que és producte de matrius elementals.

14. Demostreu que la matriu $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}$ amb entrades $a_{ij} = i + j$ té rang 2.

15. Sigui $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ una matriu de rang r. Demostreu que existeix una matriu invertible $S \in \mathcal{M}_m$ tal que les últimes $m - r$ files de la matriu SA són nul·les.

16. Trobeu les solucions dels sistemes d'equacions lineals següents:

$$\left.\begin{aligned} 2x - 3y + 2z &= 0 \\ y - 4z &= 3 \\ 2z &= -1 \end{aligned}\right\}, \qquad \left.\begin{aligned} x + 2y - 3z + 4t &= 4 \\ z - 2t &= -1 \end{aligned}\right\}.$$

17. Resoleu els sistemes d'equacions següents:

$$\left.\begin{array}{l} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 1 \\ 4x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 2 \\ 5x_1 + 4x_2 + 7x_3 = 3 \\ 6x_1 + 7x_2 + 8x_3 = 4 \end{array}\right\}, \qquad \left.\begin{array}{l} x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_5 = 1 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 + 2x_5 = 1 \end{array}\right\}.$$

18. Resoleu els sistemes següents, discutint-los segons els valors reals dels paràmetres:

$$\left.\begin{array}{l} x + y + mz = m \\ x + my + z = m \\ mx + y + z = m \end{array}\right\}, \qquad \left.\begin{array}{l} (a-1)x - ay = 2 \\ 6ax - (a-2)y = 5 - a \end{array}\right\}.$$

19. Trobeu X tal que $AX = B$, essent

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ i } B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ i } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ i } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ i } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

20. Calculeu el determinant de les matrius següents:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & -1 & 7 \\ 7 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 0 \\ 7 & 8 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

21. Siguin $A, B \in \mathcal{M}_3$ tals que $\det A = 10$, $\det B = 12$. Calculeu:

$$\det(AB), \qquad \det(A^4), \qquad \det(2B), \qquad \det(A^t), \qquad \det(A^{-1}).$$

22. Sigui A una matriu quadrada amb coeficients enters, de manera que tots els coeficients de la diagonal són senars i tots els coeficients per sota de la diagonal són parells. Demostreu que A és invertible.

23. Comproveu que

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a-1)^3(a+3).$$

24. Comproveu la identitat següent, coneguda amb el nom de *determinant de Vandermonde*:

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i>j}(a_i - a_j).$$

25. Resoleu pel mètode de Cramer el sistema següent:

$$\left.\begin{array}{l} x - 3y + 7z = 13 \\ x + y + z = 1 \\ x - 2y + 3z = 4 \end{array}\right\}.$$

26. Considereu el sistema d'equacions

$$\begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

on els coeficients a_i són nombres reals diferents entre ells. Determineu la component x_n de la solució.

27. Trobeu la inversa, si existeix, de les matrius següents:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

28. Calculeu la inversa de la matriu següent per als valors del paràmetre a per als quals existeixi:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ a & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

29. Determineu la inversa de les matrius següents:

$$A = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & -a & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

30. Calculeu, per a cada enter $n \in \mathbb{Z}$ per al qual tingui sentit, la potència n-èsima de les matrius següents:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

31. Sigui $AX = B$ un sistema compatible i determinat, on la matriu A és quadrada. Quantes solucions té el sistema $A^8X = B$?