Problemes de Variable Complexa FME, curs 2019-20

Tema 3: Teoria Local de Cauchy

1. Calculeu les següents integrals al llarg dels contorns γ que s'indiquen.

(i) $\int_\gamma |z|^2 dz$, on γ és la frontera del quadrat amb vèrtexs $0, 1, 1+i, i$, orientada en aquest ordre.

(ii) $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{\overline{z}^2}$, on γ és l'arc de la circumferència unitat de i a 1 pel semiplà superior.

2. Calculeu $\int_C (x^2 - \mathrm{i}y^2)\, dz$, sent C:

(i) La paràbola $y = 3x^2 - 2x$ des de $(1,1)$ a $(2,8)$.

(ii) L'unió dels dos segments de $(1,1)$ a $(1,8)$ i de $(1,8)$ a $(2,8)$.

(iii) El segment de $(1,1)$ a $(2,8)$.

3. Siguin a i b nombres reals amb $a > 0$. Avalueu les integrals

$$I_1 = \int_0^\infty e^{-ax}\cos(bx)dx, \quad I_2 = \int_0^\infty e^{-ax}\sin(bx)dx$$

integrant la funció $e^{-z(a+ib)}$ al llarg del segment $[0, R]$.

4. Sigui $P(z)$ un polinomi i γ la circumferència de centre z_0, radi R i orientació positiva. Demostreu que

$$\int_\gamma P(z)d\overline{z} = -2\pi i R^2 P'(z_0).$$

5. Sigui f analítica en un $\bar{D}_1(0)$. Demostreu que

$$f(\omega) = \frac{1}{\pi}\int\int_{\bar{D}_1(0)} \frac{f(z)}{(1-\bar{z}\omega)^2}\, dS(z), \quad \forall \omega \in D_1(0).$$

6. Calculeu, parametritzant els cercles amb orientació directa,

$$\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z^n}dz, \qquad \int_{|z|=2} \frac{z^n}{(1-z)^m}dz, \qquad n, m \in \mathbb{N}.$$

7. Proveu

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2\cos^2 t + b^2 \sin^2 t} = \frac{2\pi}{ab}$$

usant $\int_\gamma \frac{dz}{z}$ on γ és la corba amb parametrització $z(t) = a\cos t + ib\sin t$, $t \in [0, 2\pi]$.

8. Calculeu, parametritzant els cercles amb orientació directa,

(i) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{dz}{(z-1)(z+3)}$.

(ii) $\displaystyle\int_{|z|=4} \frac{dz}{(z-1)(z+3)}$.

(iii) $\displaystyle\int_{|z|=3} \frac{dz}{z^2-1}$.

9. Sigui γ la frontera del quadrat amb vèrtexs ± 4, $\pm 4i$, parametritzada en sentit directe. Calculeu

(i) $\displaystyle\int_{\gamma} \frac{e^z}{(z-\pi i)^4} dz$.

(ii) $\displaystyle\int_{\gamma} \frac{\sin(2z)}{(z-\pi)^4} dz$.

(iii) $\displaystyle\int_{\gamma} \frac{e^z \cos z}{(z-\pi)^3} dz$.

10. Trobeu una primitiva holomorfa per la funció $f(z) = z \log z$ (log branca principal del logaritme) i useu-la per calcular $\int_\gamma z \log z \, dz$ per a γ definida pel segment de 0 a i.

11. Comproveu que $F(z) = \frac{\mathrm{i}}{2} \log(z+\mathrm{i}) - \frac{\mathrm{i}}{2} \log(z-\mathrm{i})$ (log branca principal del logaritme) és una primitiva holomorfa de $\dfrac{1}{1+z^2}$ en $\mathcal{U} = \{\mathrm{Re}\ (z) > 0\}$. És $F(z) = \arctan z$?

12. Demostreu $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}$. Indicació: Integreu la funció $f(z) = \dfrac{e^{iz}-1}{z}$ sobre la corba tancada definida per la unió del segment $[-R, R]$ i el semicercle de centre 0 i radi R.

13. Integreu $f(z) = e^{\mathrm{i}z^2}$ sobre el sector circular que format pel segment de 0 a $R > 0$, l'arc de circumfèrencia de centre 0 i radi R que va de R a $Re^{\mathrm{i}\pi/4}$ i el segment de $Re^{\mathrm{i}\pi/4}$ a 0. Useu el resultat per calcular les **Integrals de Fresnel**: $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx = \int_0^{\infty} \cos(x^2) dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}$. (Recordeu que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.)

14. Integreu $f(z) = e^{-z^2}$ sobre la vora del rectangle de vèrtexs $R, R+\mathrm{i}/2, -R+\mathrm{i}/2$ i $-R$. Useu el resultat per calcular $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \cos x \, dx$. (Recordeu de nou que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.)

15. Siguin f i g funcions holomorfes en un obert connex Ω que no s'anul·len en cap punt. Suposeu que existeix una successió $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, amb tots els termes diferents i que convergeix a $z_0 \in \Omega$, tal que $\dfrac{f'(z_n)}{f(z_n)} = \dfrac{g'(z_n)}{g(z_n)}$. Demostreu que existeix $c \in \mathbb{C}$ tal que $f(z) = cg(z)$.

16. Sigui f una funció holomorfa a tot $\mathbb{C}$ i tal que per a tot $z_0 \in \mathbb{C}$ almenys un dels coeficients de l'expansió $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ és igual a zero. Demostreu que f és un polinomi. (Indicació: Recordeu que $c_n n! = f^{(n)}(z_0)$ i useu un argument d'enumerabilitat.)

17. Demostreu que la funció definida per $f(z) = \int_0^{\infty} t^3 e^{-zt}\, dt$ és holomorfa al semiplà Re $(z) > 0$. Trobeu la seva prolongació analítica al pla puntejat $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. (Indicació: Integreu per parts per obtenir la prolongació de f.)

18. Sigui f una funció holomorfa en $D(0,1)$. Definim el *diàmetre de* f com

$$d = \sup_{z,w\in D(0,1)} |f(z) - f(w)|\,.$$

Demostreu que $2|f'(0)| \le d$. Doneu una funció f diferent de la identitat per a la que se satisfaci la igualtat. (Indicació: Vegeu que podeu combinar la fórmula de Cauchy per $f'(0)$ amb $f'(0) = -\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{(|z|=r)^+} \frac{f(-z)}{z^2}\, dz$, per $0 < r < 1$.)

19. Trobeu el màxim de $|f(z)|$ en cada cas.

(i) $f(z) = z^2 - 3z + 2$ en $|z| \le 1$.

(ii) $f(z) = z^2 + z$ en el triangle de vèrtex $(0,0)$, $(-1,0)$ i $(0,-2)$.

20. Sigui Ω un obert connex fitat i f una funció holomorfa en Ω, contínua en $\overline{\Omega}$ i que no s'anul·la en $\overline{\Omega}$. Demostreu que si $|f|$ és constant en $\partial\Omega$, aleshores f és constant.

21. Sigui $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una funció holomorfa (es diu que f és entera). Demostreu que que si f no és constant llavors $f(\mathbb{C})$ és un conjunt dens en $\mathbb{C}$. Doneu un exemple de f entera no constant tal que $f(\mathbb{C}) \neq \mathbb{C}$.

22. Sigui f una funció entera. Suposeu que existeixen r, M, λ nombres reals positius tals que per $|z| > r$ es té $|f(z)| \le M|z|^{\lambda}$. Demostreu que f és un polinomi de grau $\le \lambda$.

23. Sigui f una funció entera tal que Re $(f(z)) \le M$, per alguna constant M. Demostreu que f és constant. (Indicació: considereu la funció $e^{f(z)}$.)

24. Demostreu que no hi ha cap funció f entera no constant tal que $f(z+1) = f(z)$ i $f(z+\mathrm{i}) = f(z)$ per a tot $z \in \mathbb{C}$. (Indicació: Proveu que f és una funció acotada en $\mathbb{C}$.)

25. Demostreu que f holomorfa i injectiva ha de complir $f'(z) \neq 0$ per a tot z del domini. És cert el recíproc?

26. Determineu el disc més gran centrat en l'origen tal que $f(z) = z^2 + z$ és injectiva.

27. Determineu el disc més gran centrat en l'origen tal que $f(z) = \mathrm{e}^z$ és injectiva.

28. Sigui f holomorfa entorn del 0 amb $f'(0) \neq 0$. Donat $n \in \mathbb{N}$, proveu que existeix una funció holomorfa g tal que $f(z^n) = f(0) + [g(z)]^n$ localment entorn del zero.