TEORIA DE LA PROBABILITAT

GM, FME, curs 2021–22

Tema 2: Variables aleatòries

1. Siguin F i G dues funcions de distribució. Sigui $0 \leq \lambda \leq 1$. Proveu que $\lambda F + (1-\lambda)G$ és també una funció de distribució. És el producte FG una funció de distribució?

2. Siguin F una funció de distribució i r un enter positiu. Proveu que les següents són funcions de distribució.

   (a) $F(x)^r$.

   (b) $1 - (1 - F(x))^r$.

   (c) $F(x) + (1 - F(x)) \log (1 - F(x))$.

   (d) $(F(x) - 1)\, e + \exp (1 - F(x))$.

3. Es diu que el nombre real m és una *mediana* d'una funció de distribució F si

$$\lim_{y \uparrow m} F(y) \leq \frac{1}{2} \leq F(m).$$

   Proveu que tota funció de distribució F té almenys una mediana i que el conjunt de medianes de F és un conjunt tancat d'$\mathbb{R}$.

4. Demostreu que si $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ és funció de distribució d'una variable aleatòria X, aleshores F té un nombre numerable de discontinuïtats, i per tant hi ha un nombre numerable de punts x tals que $p(X = x) > 0$.

5. Expreseu la funció de distribució de

$$X^+ = \max\{0, X\}, X^- = -\min\{0, X\}, |X| = X^+ + X^-$$

   en termes de la funció distribució F_X de X.

6. Determineu quines de les següents són funcions de distribució per algun valor de les constants:

   (a) $F(x) = (1 - e^{-x^2})\mathbb{I}_{x \geq 0}(x)$.

   (b) $F(x) = ce^{-1/x}\mathbb{I}_{x>0}(x)$.

(c) $F(x) = \frac{e^x}{e^x+e^{-x}}$, $x \in \mathbb{R}$.

(d) $F(x) = e^{-x^2} + \frac{e^x}{e^x+e^{-x}}$, $x \in \mathbb{R}$.

Solució: (a) sí; (b) per a $c = 1$; (c) sí; (d) no.

7. Sigui X una variable aleatòria amb funció de distribució F i sigui G una funció contínua i estrictament creixent. Doneu les expressions de les funcions de distribució de les següents variables aleatòries:

   (a) X^2,

   (b) $\sqrt{X}$,

   (c) $G^{-1}(X)$,

   (d) $F(X)$,

   (e) $G^{-1}(F(X))$.

8. Sigui X una variable aleatòria positiva tal que $\mathbb{E}[\exp(-X)] = \exp(-a)$, per un cert valor de a. Demostreu que

$$p(X \geq c) \leq \frac{1-\exp(-a)}{1-\exp(-c)}.$$

9. Demostreu la desigualtat de Paley-Zygmund: Sigui X una variable aleatòria que pren valors no negatius amb variància finita. Si $0 \leq a \leq 1$ aleshores

$$p(X > a\mathbb{E}[X]) \geq (1-a)^2 \frac{\mathbb{E}[X]^2}{\mathbb{E}[X^2]}.$$

10. Sigui X una variable aleatòria amb esperança i variància finita. Demostreu que, per tota tria de $a \in \mathbb{R}$ es compleix que

$$\mathbb{E}[(X-a)^2] = \mathbb{V}\text{ar}[X] + (\mathbb{E}[X]-a)^2.$$

Conclogueu que $\mathbb{V}\text{ar}[X] = \inf_{a\in\mathbb{R}}\{\mathbb{E}[(X-a)^2]\}$.

11. Es llença una moneda equilibrada dues vegades. Sigui X el nombre de cares i sigui W la funció indicadora de l'esdeveniment $\{X = 2\}$. Trobeu $p(X = x, W = w)$ per tots els possibles valors x i w.

12. Sigui $F = F_{X,Y,Z}$ la funció distribució conjunta de (X, Y, Z). Fent servir el princpi d'inclusió–exclusió, doneu una expressió de $p((X, Y, Z) \in (0, 1]^3)$ en termes de $F_{X,Y,Z}$.

Solució:

$F(1, 1, 1) - F(0, 1, 1) - F(1, 0, 1) - F(1, 1, 0) + F(0, 0, 1) + F(1, 0, 0) + F(0, 1, 0) - F(0, 0, 0)$.

13. Es llença una moneda equilibrada n vegades. Una sèrie és una successió de resultats iguals (per exemple la successió 00111011 conté quatre sèries). Quin és el nombre $\mathbb{E}[R]$ esperat de sèries? Quina n'és la variància?

Solució: $\mathbb{E}[R] = 1 + (n-1)/2$; $\mathbb{V}\mathrm{ar}[R] = (n-1)/4$

14. Una urna conté n boles numerades de 1 a n. N'extreiem una mostra de k sense reemplaçament i diem X la suma dels seus nombres. Trobeu $\mathbb{E}[X]$ i $\mathbb{V}\mathrm{ar}[X]$.

Solució: $\mathbb{E}[X] = k(n+1)/2$; $\mathbb{V}\mathrm{ar}[X] = (n+1)k(n-k)/12$.

15. Es tiren n daus. Diem X la variable aleatòria que compta el nombre de parells de daus amb el mateix resultat. Trobeu l'esperança i la variància de X.

Solució: $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{6}\binom{n}{2}$; $\mathbb{V}\mathrm{ar}[X] = \frac{5}{36}\binom{n}{2}$.

16. *(Mètode de Monte-carlo)* Considereu el mètode següent per estimar el nombre π: generem n punts uniformement en un quadrat de costat 1, i prenem X_i la variable indicadora del succés "el punt i-'esim cau al cercle de radi $1/2$ inscrit al quadrat". Comproveu que $\mathbb{E}[X_i] = \pi/4$. La Llei dels Grans Nombres ens diu que $\overline{X}_n = (\sum_{i=1}^n X_i)/n$ s'apropa a $\pi/4$ amb alta probabilitat. Calculeu el valor mínim de n per tal d'obtenir els tres primers decimals de π correctes amb probabilitat almenys 0.99.

17. Sigui $X_1, X_2, \ldots$ una successió de variables aleatòries, dues a dues incorrelades, tals que $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ per a tot i i $\mathbb{V}\mathrm{ar}[X_i] = \sigma_i^2$. Definim $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ per tot $n \geq 1$. Demostreu que si $\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n \sigma_i^2 \longrightarrow 0$ aleshores

$$\lim_{n\to\infty} p\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mu\right| > \varepsilon\right) = 0 \qquad \text{per a tot } \varepsilon > 0.$$