Resum d'Anàlisi Real

ApuntsFME

Barcelona, Abril 2019

Índex

1 Successions i sèries funcionals

Definició 1.1. Sigui (f_n) una successió de funcions, $f_i\colon E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, i sigui $f\colon A \subseteq E \to \mathbb{R}$. Diem que (f_n) convergeix puntualment cap a f en A si

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \; \forall x \in A.$$

Diem que (f_n) convergeix uniformement cap a f en A si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tal que } |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \forall n \geq N, \forall x \in A.$$

Observació 1.2. (f_n) convergeix uniformement cap a f en A si, i només si,

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

Observació 1.3. La convergència uniforme implica la convergència puntual.

Proposició 1.4. *Criteri de Cauchy.* Sigui (f_n) una successió de funcions, $f_i\colon E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, i sigui $f\colon A \subseteq E \to \mathbb{R}$. (f_n) convergeix uniformement cap a f en A si, i només si,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tal que } |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon, \forall n, m \geq N, \forall x \in A.$$

Teorema 1.5. Sigui (f_n) una successió de funcions contínues que convergeix uniformement cap a f en A. Aleshores, f és contínua en A.

Lema 1.6. *Lema de Dini.* Sigui (f_n) una successió de funcions puntualment monòtona (no estrictament) que convergeix puntualment cap a f en un compacte K. Aleshores, (f_n) convergeix uniformement cap a f.

Teorema 1.7. Sigui (f_n) una successió de funcions integrables Riemann a $[a, b]$ que convergeix uniformement cap a f en $[a, b]$. Aleshores, f és integrable Riemann a $[a, b]$ i

$$\int_a^b f = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n.$$

Corol·lari 1.8. Sota les mateixes condicions, si $x \in [a, b]$,

$$\left(\int_a^x f_n\right) \to \int_a^x f$$

uniformement.

Teorema 1.9. Sigui (f_n) una successió de funcions derivables en $[a, b]$ tal que (f_n') convergeix uniformement cap a g en $[a, b]$ i tal que $(f_n(x_0))$ convergeix per un cert $x_0 \in [a, b]$. Aleshores, (f_n) convergeix uniformement cap a una funció f derivable a $[a, b]$ que satisfà que $f' = g$. En particular,

$$\lim_{n\to\infty} f_n' = \left(\lim_{n\to\infty} f_n\right)'.$$

Comentari: quan no s'especifiqui el domini de les funcions ni en quin subconjunt del domini tenen certes propietats, s'entendrà que tot passa en un mateix subconjunt qualsevol dels reals.

Proposició 1.10. *Criteri de Weierstrass.* Sigui (f_n) una successió de funcions tal que, per tot n, $|f_n| \leq M_n$, per a cert $M_n \in \mathbb{R}$ i tal que $\sum_{n\geq 1} M_n$ és convergent. Aleshores, $\sum f_n$ convergeix uniformement.

Lema 1.11. *Fórmula de sumació d'Abel.* Siguin $(a_n), (b_n)$ successions de nombres reals i sigui $s_n = \sum_{i=1}^n a_i$. Aleshores,

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i = s_n b_{n+1} - \sum_{i=1}^n s_i (b_{i+1} - b_i) = s_n b_1 + \sum_{i=1}^n (s_n - s_i)(b_{i+1} - b_i).$$

Aquest és un lema auxiliar que s'utilitza per demostrar els següents dos criteris.

Proposició 1.12. *Test d'Abel.* Siguin (f_n) i (g_n) successions de funcions tals que

(i) $\sum f_n$ convergeix uniformement,

(ii) $\forall n, |g_n| < M$,

(iii) (g_n) és puntualment monòtona (no estrictament).

Aleshores, $\sum f_n g_n$ convergeix uniformement.

Proposició 1.13. *Test de Dirichlet.* Siguin (f_n) i (g_n) successions de funcions tals que

(i) $\forall n, \left|\sum_{i=1}^{n} f_i\right| < M$, és a dir, que $\sum f_n$ és uniformement fitada.

(ii) (g_n) és puntualment monòtona (no estrictament),

(iii) (g_n) convergeix uniformement a 0.

Aleshores, $\sum f_n g_n$ convergeix uniformement.

Definició 1.14. Anomenem sèrie de potències a una expressió de la forma

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n (x-a)^n .$$

El canvi de variable $y = x - a$ és un desplaçament que transforma l'expressió en

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n y^n,$$

de manera que només considerarem sèries de potències d'aquesta forma.

Observació 1.15. Observem que una sèrie de potències $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ defineix la successió de funcions $\left(\sum_{i=1}^{n} a_n x^n\right)$. Quan parlem de la convergència de la sèrie ens referirem a la convergència d'aquesta successió de funcions que defineix.

Proposició 1.16. Sigui $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ una sèrie de potències. Aleshores,

(i) Si $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ convergeix en $x_0 \neq 0$, aleshores convergeix absolutament en tot $x \in (-|x_0|, |x_0|)$. A més, convergeix uniformement en tot $[a, b] \subset (-|x_0|, |x_0|)$.

(ii) Si $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ divergeix en x_0, aleshores divergeix en tot $x \in \mathbb{R}$ tal que $|x| > |x_0|$.

Definició 1.17. Anomenem radi de convergència de la sèrie de potències $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ a

$$R = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \in [0, +\infty] .$$

Proposició 1.18. Sigui $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ una sèrie de potències i sigui $R \in [0, +\infty]$ el seu radi de convergència. Aleshores,

(i) $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ convergeix a $(-R, R)$,

(ii) $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ divergeix a $(-\infty, R) \cup (R, +\infty)$.

El resultat també val canviant R per $-R$ en les sèries i considerant $[-R, 0]$ i $\lim\limits_{x\to -R^+}$.

Teorema 1.19. *Teorema d'Abel.*
Sigui $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ una sèrie de potències amb radi de convergència $R \in [0, +\infty)$ tal que $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ convergeix a R, és a dir, si $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n R^n = A$. Aleshores,

(i) $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ convergeix uniformement a $[0, R]$,

(ii) $\lim\limits_{x\to R^-} \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n = A$.

Observació 1.20. Sigui $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ una sèrie de potències. Observem que $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ defineix una funció

$$\begin{aligned} f\colon\ (-R,R) &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n. \end{aligned}$$

Lema 1.21. Les sèries de potències $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ i $\sum_{n\in\mathbb{N}} n a_n x^{n-1}$ tenen el mateix radi de convergència.

Proposició 1.22. Sigui $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ una sèrie de potències i sigui R el seu radi de convergència. Aleshores, $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ és derivable a $(-R,R)$ i

$$f'(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} n a_n x^{n-1}.$$

Proposició 1.23. Sigui $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ una sèrie de potències. Aleshores,

(i) $f(x) = \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ és integrable Riemann a $(-R,R)$,

(ii) $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{x_0}^{x} a_n t^n \,\mathrm{d}t$ és una sèrie de potències en la variable x amb radi de convergència R, per tot $x_0 \in (-R,R)$,

(iii) $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n t^n \,\mathrm{d}t = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{x_0}^{x} a_n t^n \,\mathrm{d}t$, per tot $x_0, x \in (-R,R)$.

Teorema 1.24. *Teorema de Taylor.*
Sigui $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ una sèrie de potències que convergeix a $f(x)$ a la regió $(-R,R)$ i sigui $c \in (-R,R)$. Aleshores,

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

per a tot x tal que $|x-c| < R - |c|$.

Teorema 1.25. Sigui f una funció suau a (a,b) tal que

$$\left|f^{(n)}(x)\right| \leq \gamma,\ \forall x \in (a,b)\,,\ \forall n$$

per a cert $\gamma > 0$. Aleshores, f té una sèrie de Taylor de radi no nul al voltant de cada punt $c \in (a,b)$.

2 Espais de funcions contínues

Definició 2.1. Sigui E un espai vectorial. Diem que E és un espai de Banach si és normat i complet.

Teorema 2.2. Sigui $K \subseteq \mathbb{R}$ un compacte. $\mathscr{C}(K,\mathbb{R})$ dotat de la norma del suprem és un espai de Banach.

Definició 2.3. Sigui E un espai vectorial. Diem que E és una àlgebra si admet un producte intern distributiu respecte la suma.

Definició 2.4. Sigui E un espai de Banach. Diem que E és una àlgebra de Banach si és una àlgebra que satisfà que

(i) $\|1\| = 1$,

(ii) $\|f \cdot g\| \leq \|f\| \cdot \|g\|$.

Teorema 2.5. Sigui $K \subseteq \mathbb{R}$ un compacte. $\mathscr{C}(K, \mathbb{R})$ dotat de la norma del suprem és una àlgebra de Banach.

Definició 2.6. Sigui $A \subseteq \mathbb{R}$ i sigui $\mathcal{F} \subseteq \mathscr{C}(A, \mathbb{R})$ una família de funcions contínues de A a $\mathbb{R}$. Fixat un $x \in A$, notarem

$$\mathcal{F}_x = \{f(x) \mid f \in \mathcal{F}\}.$$

Diem que $\mathcal{F}$ és puntualment fitada si $\mathcal{F}_x$ és fitat per tot $x \in A$ i que $\mathcal{F}$ és uniformement fitada si existeix un $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\|f\| < \alpha$ per tota $f \in \mathcal{F}$. Aquestes definicions per famílies de funcions d'estenen naturalment a les successions de funcions.

Proposició 2.7. Sigui $K \subseteq \mathbb{R}$ un compacte i sigui (f_n) una successió de funcions de $\mathscr{C}(K, \mathbb{R})$ uniformement convergent. Aleshores, $\mathcal{F} = (f_n)$ és uniformement fitada.

Definició 2.8. Sigui $A \subseteq \mathbb{R}$ i sigui $\mathcal{F} \subseteq \mathscr{C}(A, \mathbb{R})$ una família de funcions contínues de A a $\mathbb{R}$. Diem que $\mathcal{F}$ és equicontínua si, per tot $\varepsilon > 0$, existeix un $\delta > 0$ tal que, per tota $f \in \mathcal{F}$,

$$|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Aquesta definició per famílies de funcions d'estén naturalment a les successions de funcions.

Proposició 2.9. Sigui $K \subseteq \mathbb{R}$ un compacte i sigui (f_n) una successió de funcions de $\mathscr{C}(K, \mathbb{R})$ uniformement convergent. Aleshores, $\mathcal{F} = (f_n)$ és equicontínua.

Lema 2.10. Sigui $K \subseteq \mathbb{R}$ un compacte i sigui (f_n) una successió de funcions de $\mathscr{C}(K, \mathbb{R})$ equicontínua i puntualment fitada. Aleshores, (f_n) és uniformement fitada.

Teorema 2.11. *Teorema d'Arzelà-Ascoli.*
Sigui $K \subseteq \mathbb{R}$ un compacte i sigui $\mathcal{F}$ una família de funcions de $\mathscr{C}(K, \mathbb{R})$. Són equivalents

(i) $\mathcal{F}$ és puntualment fitada i equicontínua.

(ii) De tota successió de funcions de $\mathcal{F}$ se'n pot extreure una parcial convergent.

Afegint que $\mathcal{F}$ sigui tancada obtenim una altra versió del teorema.

Teorema 2.12. Sigui $K \subseteq \mathbb{R}$ un compacte i sigui $\mathcal{F}$ una família de funcions de $\mathscr{C}(K, \mathbb{R})$. Són equivalents

(i) $\mathcal{F}$ és tancada, puntualment fitada i equicontínua.

(ii) $\mathcal{F}$ és compacta.

Teorema 2.13. *Teorema d'aproximació de Weierstrass.*
$\mathbb{R}[x]$ és dens a $\mathscr{C}([a, b], \mathbb{R})$.

Definició 2.14. Sigui $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$. Definim el polinomi de Bernstein d'ordre n de f com

$$B_{n,f}(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

Teorema 2.15. *Teorema d'aproximació de Bernstein.*
Sigui $f \in ([0,1], \mathbb{R})$. Per a tot $\varepsilon > 0$, existeix un $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left\| f - B_{n,f} \right\| < \varepsilon.$$

Definició 2.16. Siguin $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Definim els operadors binaris $\wedge$ i $\vee$ com

$$\begin{aligned}(f \wedge g)(x) &= \min(f(x), g(x)),\\ (f \vee g)(x) &= \max(f(x), g(x)).\end{aligned}$$

Observació 2.17. Clarament, es tenen les identitats

$$\begin{aligned}f \wedge g &= \frac{f+g}{2} - \frac{|f-g|}{2},\\ f \vee g &= \frac{f+g}{2} + \frac{|f-g|}{2}.\end{aligned}$$

Corol·lari 2.18. Un espai vectorial de funcions és un reticle si, i només si, és tancat pel valor absolut.

Definició 2.19. Sigui $\mathcal{B} \subseteq \mathscr{C}([a,b], \mathbb{R})$. Diem que $\mathcal{B}$ és un reticle si és tancat per $\wedge$ i $\vee$.

Definició 2.20. Sigui $\mathcal{F} \subseteq$ una família de funcions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Diem que $\mathcal{F}$ separa punts si, donats $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$, existeix una funció $f \in \mathcal{F}$ tal que $f(x_0) \neq f(x_1)$. Diem que $\mathcal{F}$ interpola punts si, donats $x_0, x_1, y_0, y_1 \in \mathbb{R}$, existeix una funció $f \in \mathcal{F}$ tal que $f(x_0) = y_0$ i $f(x_1) = y_1$.

Teorema 2.21. *Teorema d'aproximació de Stone.*
Sigui $\mathcal{B} \in \mathscr{C}([a,b], \mathbb{R})$ un reticle que interpola punts. Aleshores, $\mathcal{B}$ és dens a $\mathscr{C}([a,b], \mathbb{R})$.

Proposició 2.22. Sigui $\mathcal{B} \subseteq \mathscr{C}([a,b), \mathbb{R})$ un espai vectorial que separa punts i que conté les constants. Aleshores, $\mathcal{B}$ interpola punts.

Lema 2.23. Sigui $\mathcal{B} \subseteq \mathscr{C}([a,b], \mathbb{R})$ una subàlgebra que conté les constants. Aleshores, per tota $f \in \mathcal{B}$, es té que $|f| \in \overline{\mathcal{B}}$.

Teorema 2.24. *Teorema de Stone-Weierstrass.*
Sigui $\mathcal{B} \subseteq \mathscr{C}([a,b], \mathbb{R})$ una subàlgebra que conté les constants i separa punts. Aleshores, $\mathcal{B}$ és dens en $\mathscr{C}([a,b], \mathbb{R})$.

3 La integral de Lebesgue

Definició 3.1. Sigui X un conjunt. Diem que $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{P}(X)$ és una σ-àlgebra d'X si satisfà que

(i) $\varnothing \in \mathcal{X}$,

(ii) $A \in \mathcal{X} \implies \overline{A} \in \mathcal{X}$,

(iii) $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{X} \implies \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathcal{X}$.

Diem també que $(X, \mathcal{X})$ és un espai mesurable i els elements de $\mathcal{X}$ els anomenem conjunts $\mathcal{X}$-mesurables (o, simplement, mesurables).

Observació 3.2. La intersecció numerable de conjunts mesurables és un conjunt mesurable.

Observació 3.3. La intersecció de σ-àlgebres sobre un mateix conjunt és una σ-àlgebra sobre aquest conjunt.

Definició 3.4. Anomenem àlgebra de Borel, i la notem per $\mathcal{B}$, a la σ-àlbegra generada pels intervals oberts $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$. Dit d'una altra manera, $\mathcal{B}$ és la intersecció de totes les σ-àlgebres sobre $X = \mathbb{R}$ que contenen els intervals oberts $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$. Anomenem borelians als conjunts de $\mathcal{B}$.

Observació 3.5. L'àlgebra de Borel coincideix amb les àlgebres generades perls intervals tancats, els intervals semioberts, les semirectes tancades i les semirectes obertes.

Definició 3.6. Sigui $(X, \mathcal{X})$ un espai mesurable. Diem que una aplicació $\mu\colon \mathcal{X} \to \mathbb{R}^*$ és una mesura si satisfà

(i) $\mu(\varnothing) = 0$,

(ii) $\mu(A) \geq 0$, $\forall A \in \mathcal{X}$,

(iii) Si $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{X}$ són disjunts dos a dos, aleshores

$$\mu\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(A_i).$$

Si $\mu(X) < +\infty$, diem que μ és una mesura finita.

Definició 3.7. Anomenem espai de mesura a un espai mesurable dotat d'una mesura, és a dir, a una tripleta $(X, \mathcal{X}, \mu)$, on $\mathcal{X}$ és una σ-àlgebra sobre X i μ és una mesura definida a $(X, \mathcal{X})$.

Proposició 3.8. Sigui $(X, \mathcal{X}, \mu)$ un espai de mesura i siguin $E, F \in \mathcal{X}$ tals que $E \subseteq F$. Aleshores, $\mu(E) \leq \mu(F)$. A més, si $\mu(F) < +\infty$, es té que $\mu(F \setminus E) = \mu(F) - \mu(E)$.

Proposició 3.9. Sigui $(X, \mathcal{X}, \mu)$ un espai de mesura. Si $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és una successió creixent de $\mathcal{X}$, aleshores

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n).$$

Si $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és una successió decreixent de $\mathcal{X}$ i $\mu(F_0) < +\infty$, aleshores

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(F_n).$$

Definició 3.10. Sigui $(X, \mathcal{X})$ un espai mesurable i sigui $f\colon X \to \mathbb{R}$. Diem que f és $\mathcal{X}$-mesurable si, per tot $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$A_\alpha = f^{-1}((\alpha, +\infty)) \in \mathcal{X}.$$

Proposició 3.11. Sigui $(X, \mathcal{X})$ un espai mesurable. Són equivalents

(i) $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ f^{-1}((\alpha, +\infty)) \in \mathcal{X}$,

(ii) $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ f^{-1}((-\infty, \alpha]) \in \mathcal{X}$,

(iii) $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ f^{-1}([\alpha, +\infty)) \in \mathcal{X}$,

(iv) $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ f^{-1}((-\infty, \alpha)) \in \mathcal{X}$.

Proposició 3.12. Sigui $(X, \mathcal{X})$ un espai mesurable, siguin f, g funcions $\mathcal{X}$-mesurables i sigui $c \in \mathbb{R}$. Aleshores, les funcions $cf, f^2, f+g, fg$ i $|f|$ són mesurables.

Definició 3.13. Sigui $f\colon X \to \mathbb{R}$ una funció que pren valors reals. Definim les funcions $f^+, f^-\colon X \to \mathbb{R}$ com

$$f^+ = f \vee 0, \quad f^- = (-f) \vee 0.$$

Proposició 3.14. Sigui $(X, \mathcal{X})$ un espai de mesura i sigui $f\colon X \to \mathbb{R}$. Aleshores, f és $\mathcal{X}$-mesurable si, i només si, f^+ i $f-$ són mesurables.

Definició 3.15. Sigui $(X, \mathcal{X})$ un espai de mesura i sigui $f\colon X \to \mathbb{R}^*$. Diem que f és $\mathcal{X}$-mesurable si, per tot $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$f^{-1}((\alpha, +\infty]) \in \mathcal{X}.$$

A més, definim el conjunt $\mathcal{M}(X, \mathcal{X}) = \{f\colon X \to \mathbb{R}^* \mid f \text{ és } \mathcal{X}\text{-mesurable}\}$, és a dir, el conjunt de funcions de X a $\mathbb{R}$ que són $\mathcal{X}$-mesurables.

Proposició 3.16. Sigui $(X, \mathcal{X})$ un espai mesurable i sigui $f\colon X \to \mathbb{R}^*$. Considerem els conjunts

$$\begin{aligned} A &= \{x \in X \mid f(x) = +\infty\}, \\ B &= \{x \in X \mid f(x) = -\infty\}. \end{aligned}$$

Aleshores, f és $\mathcal{X}$-mesurable si, i només si, $A, B \in \mathcal{X}$ i la funció $f_1\colon X \to \mathbb{R}$ definida per

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \notin A \cup B \\ 0 & \text{si } x \in A \cup B \end{cases}.$$

Lema 3.17. Sigui $(X, \mathcal{X})$ un espai mesurable i sigui (f_n) una successió de funcions de $\mathcal{M}(X, \mathcal{X})$. Aleshores, les funcions

$$\begin{aligned} f(x) &= \inf f_n(x), \\ F(x) &= \sup f_n(x), \\ f^*(x) &= \liminf f_n(x), \\ F^*(x) &= \limsup f_n(x), \end{aligned}$$

són $\mathcal{X}$-mesurables.

Corol·lari 3.18. Sigui $(X, \mathcal{X})$ un espai mesurable i sigui (f_n) una successió de funcions de $\mathcal{M}(X, \mathcal{X})$ que convergeix puntualment a $f\colon X \to \mathbb{R}^*$. Aleshores, $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{X})$.

Definició 3.19. Sigui $\varphi\colon X \to \mathbb{R}$ una funció. Diem que φ és simple si $|\varphi(X)| \in \mathbb{N}$.

Observació 3.20. Sigui $(X, \mathcal{X})$ un espai mesurable i sigui $\varphi\colon X \to \mathbb{R}$ una funció simple $\mathcal{X}$-mesurable. Aleshores, φ es pot escriure com

$$\varphi = \sum_{j=1}^{n} a_j \mathbb{I}_{E_j},$$

amb $a_j \in \mathbb{R}$ i $E_j \in \mathcal{X}$.

Definició 3.21. Sigui $(X, \mathcal{X})$ un espai mesurable i sigui $\varphi\colon X \to \mathbb{R}$ una funció simple $\mathcal{X}$-mesurable. Diem que una representació

$$\varphi = \sum_{j=1}^{n} a_j \mathbb{I}_{E_j},$$

és canònica si els valors a_j són tots diferents, els conjunts E_j són disjunts dos a dos i llur reunió és X.

Observació 3.22. La representació canònica d'una funció simple mesurable és única.

Definició 3.23. Sigui φ una funció simple de $\mathcal{M}^+(X, \mathcal{X}) = \{f \in \mathcal{M}(x, \mathcal{X}) \mid f \geq 0\}$ i sigui μ una mesura sobre $(X, \mathcal{X})$. Definim la integral de φ respecte de μ a

$$\int \varphi \, \mathrm{d}\mu = \sum_{j=1}^{n} a_j \mu\left(E_j\right),$$

convenint que $0 \cdot \infty = 0$.

Lema 3.24. Sigui $(X, \mathcal{X}, \mu)$ un espai de mesura, siguin $\varphi, \psi \in \mathcal{M}^+(X, \mathcal{X})$ funcions simples i siguin $c, c' \in \mathbb{R}^+$. Aleshores,

(i) $\displaystyle\int c\varphi + c'\psi \, \mathrm{d}\mu = c \int \varphi \, \mathrm{d}\mu + c' \int \psi \, \mathrm{d}\mu.$

(ii) L'aplicació

$$\begin{aligned} \lambda\colon \mathcal{X} &\to \mathbb{R}^* \\ E &\mapsto \int \varphi \mathbb{I}_E \, \mathrm{d}\mu \end{aligned}$$

és una mesura sobre $(X, \mathcal{X})$.

Definició 3.25. Sigui $(X, \mathcal{X}, \mu)$ un espai de mesura i sigui $f \in \mathcal{M}^+(X, \mathcal{X}, \mu)$. Definim la integral de f respecte de μ com

$$\int f \, \mathrm{d}\mu = \sup_{\varphi \in \Phi} \int \varphi \, \mathrm{d}\mu \in \mathbb{R}^*,$$

on $\Phi = \left\{\varphi \in \mathcal{M}^+(X, \mathcal{X}) \mid \varphi \leq f\right\}$.
Sigui $E \in \mathcal{X}$. Definim també la integral de f respecte de μ sobre E com

$$\int_E f \, \mathrm{d}\mu = \int f \mathbb{I}_E \, \mathrm{d}\mu,$$

Lema 3.26. Sigui $(X, \mathcal{X}, \mu)$ un espai de mesura, siguin $f, g \in \mathcal{M}^+(X, \mathcal{X}, \mu)$ i siguin $E, F \in \mathcal{X}$. Aleshores,

(i) Si $f \leq g$, aleshores $\int f \, \mathrm{d}\mu \leq \int g \, \mathrm{d}\mu$.

(ii) Si $E \subseteq F$, aleshores $\int_E f \, \mathrm{d}\mu \leq \int_F f \, \mathrm{d}\mu$.

Teorema 3.27. *Teorema de la convergència monòtona.*
Sigui $(X, \mathcal{X}, \mu)$ un espai de mesura i sigui (f_n) una successió monòtonament creixent de funcions de $\mathcal{M}^+(X, \mathcal{X})$. Aleshores, $f = \lim f_n \in \mathcal{M}^+(X, \mathcal{X})$ i es té que

$$\int f \, \mathrm{d}\mu = \lim \int f_n \, \mathrm{d}\mu.$$

Corol·lari 3.28. Sigui $(X, \mathcal{X}, \mu)$ un espai de mesura, siguin $f, g \in \mathcal{M}^+(X, \mathcal{X})$ i siguin $c, c' \geq 0$. Aleshores,

$$\int cf + c'g \, \mathrm{d}\mu = c \int f \, \mathrm{d}\mu + c' \int g \, \mathrm{d}\mu.$$

Lema 3.29. *Lema de Fatou.* Sigui $(X, \mathcal{X}, \mu)$ un espai de mesura i sigui (f_n) una successió de funcions de $\mathcal{M}^+(X, \mathcal{X})$. Aleshores,

$$\int \liminf f_n \, \mathrm{d}\mu \leq \liminf \int f_n \, \mathrm{d}\mu.$$

Corol·lari 3.30. Sigui $(X, \mathcal{X}, \mu)$ un espai de mesura i sigui $f \in \mathcal{M}^+(X, \mathcal{X})$. Aleshores, l'aplicació

$$\begin{aligned} \lambda \colon \mathcal{X} &\to \mathbb{R}^* \\ E &\mapsto \int_E f \, \mathrm{d}\mu \end{aligned}$$

és una mesura sobre $(X, \mathcal{X})$.

Corol·lari 3.31. Sigui $(X, \mathcal{X}, \mu)$ un espai de mesura i sigui $f \in \mathcal{M}^+(X, \mathcal{X})$. Aleshores,

$$\int f \, \mathrm{d}\mu = 0 \iff f = 0 \quad \mu\text{-g.a.}$$

Corol·lari 3.32. Sigui $(X, \mathcal{X}, \mu)$ un espai de mesura i sigui (f_n) una successió de funcions de $\mathcal{M}^+(X, \mathcal{X})$ monòtonament creixent cap a f μ-g.a.. Aleshores,

$$\int f \, \mathrm{d}\mu = \lim \int f_n \, \mathrm{d}\mu.$$

Corol·lari 3.33. Sigui $(X, \mathcal{X}, \mu)$ un espai de mesura i sigui (f_n) una successió de funcions de $\mathcal{M}^+(X, \mathcal{X})$. Aleshores,

$$\int \left(\sum_{n=1}^{\infty} g_n \right) \mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int g_n \, \mathrm{d}\mu.$$

Definició 3.34. Sigui $(X, \mathcal{X}, \mu)$ un espai de mesura. Anomenem conjunt de funcions integrables o sumables a

$$L(X, \mathcal{X}, \mu) = \left\{ f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{X}) \mid \int f^+ \, \mathrm{d}\mu \in \mathbb{R}, \int f^- \, \mathrm{d}\mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

Definició 3.35. Sigui $(X, \mathcal{X}, \mu)$ un espai de mesura i sigui $f \in L(X, \mathcal{X}, \mu)$. Anomenem integral d'$f$ respecte de μ a

$$\int f \, \mathrm{d}\mu = \int f^+ \, \mathrm{d}\mu - \int f^- \, \mathrm{d}\mu.$$

Sigui $E \in \mathcal{X}$. Anomenem integral d'f sobre E respecte de μ a

$$\int_E f \, \mathrm{d}\mu = \int f \cdot \mathbb{I}_E \, \mathrm{d}\mu.$$

Comentari: a partir d'aquí, serem menys rigorosos amb la notació i no especificarem cada vegada l'espai de mesura.

Teorema 3.36. Sigui f una funció mesurable. Aleshores,

$$f \in L \iff |f| \in L.$$

En aquest cas,

$$\left| \int f \right| \leq \int |f| \, .$$

Corol·lari 3.37. Siguin f una funció mesurable i g una funció integrable tals que $|f| \leq |g|$. Aleshores, f és integrable i

$$\int |f| \leq \int |g| \, .$$

Teorema 3.38. Siguin $f, g \in L$ i siguin $c, c' \in \mathbb{R}$. Aleshores, $cf + c'g \in L$ i

$$\int \left(cf + c'g \right) = c \int f + c' \int g.$$

Teorema 3.39. *Teorema de la convergència dominada.*
Sigui (f_n) una successió de funcions mesurables que convergeix μ-g.a. a f tal que existeix una funció integrable g amb $|f_n| \leq g$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Aleshores, f és integrable i

$$\int f = \lim \int f_n.$$

Teorema 3.40. Sigui f una funció integrable Riemann a $[a, b]$. Aleshores $f \cdot \mathbb{I}_{[a,b]} \in L(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \lambda)$ i

$$\int f \cdot \mathbb{I}_{[a,b]} \, \mathrm{d}\lambda = \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x.$$

Definició 3.41. Siguin $f, g \in L$. Diem que f i g són μ-equivalents si $f = g$ μ-g.a. Escrivim $f \overset{\mu}{\sim} g$.

Lema 3.42. $\overset{\mu}{\sim}$ és una relació d'equivalència.

Definició 3.43. Sigui $(X, \mathcal{X}, \mu)$ un espai de mesura. Anomenem espai de Lebesgue L_1 a

$$L_1(X, \mathcal{X}, \mu) = {}^{L(X, \mathcal{X}, \mu)}\!\big/_{\overset{\mu}{\sim}},$$

és a dir, el conjunt de classes d'equivalència d'L respecte de $\overset{\mu}{\sim}$. Sovint notarem simplement L_1 i $f \in L_1$ en comptes de $[f] \in L_1$. Definim la norma $\|\cdot\|_1$ com

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_1 : L_1 &\to \mathbb{R} \\ [f] &\mapsto \|[f]\|_1 \equiv \int |f| \, \mathrm{d}\mu. \end{aligned}$$

Teorema 3.44. $\left(L_1, \|\cdot\|_1\right)$ és un espai normat.

Definició 3.45. Sigui $(X, \mathcal{X}, \mu)$ un espai de mesura i sigui $p \geq 1$. Anomenem espai de Lebesgue L_p a

$$L_p\left(X, \mathcal{X}, \mu\right) = \left\{f \in \mathcal{M}\left(X, \mathcal{X}, \mu\right) : |f|^p \in L\left(X, \mathcal{X}, \mu\right)\right\}\Big/\overset{\mu}{\sim},$$

és a dir, el conjunt de classes d'equivalència de les funcions f mesurables tals que $|f|^p$ és integrable respecte de la relació d'equivalència $\overset{\mu}{\sim}$. Sovint notarem simplement L_p i $f \in L_p$ en comptes de $[f] \in L_p$. Definim la norma $\|\cdot\|_p$ com

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_p : L_p &\to \mathbb{R} \\ [f] &\mapsto \|[f]\|_p \equiv \int |f|^p \, \mathrm{d}\mu. \end{aligned}$$

Lema 3.46. *Desigualtat de Young.* Siguin $a, b \geq 0$ i siguin $p, q > 1$ tals que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Aleshores,

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Lema 3.47. *Desigualtat de Hölder.* Siguin $f \in L_p, g \in L_q$, amb $p, q > 1$ tals que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Aleshores, $fg \in L_1$ i

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q.$$

Proposició 3.48. *Desigualtat de Cauchy-Bunyakovskii-Schwarz.* Siguin $f, g \in L_2$. Aleshores, fg és integrable i

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_2 \cdot \|g\|_2.$$

Lema 3.49. *Desigualtat de Minkowski.* Siguin $f, g \in L_p$. Aleshores, $f + g \in L_p$ i

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Teorema 3.50. $\left(L_p, \|\cdot\|_p\right)$ és un espai normat.

Teorema 3.51. *Teorema de completesa de L_p.*
$\left(L_p, \|\cdot\|_p\right)$ és un espai de Banach.