12.Construcció de Proves d'Hipòtesi

Estadística
Grau en Matemàtiques

Josep A. Sanchez
Dept. Estadística i I.O.(UPC)

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH

Lema de Neyman-Pearson

- Sigui $X_1, \ldots, X_n$ una m.a.s d'una variable amb funció de densitat $f(.;\theta)$
- Volem testar:

$$\begin{cases} H_0 : \theta = \theta_0 \\ H_1 : \theta = \theta_1 \end{cases}$$

- Sigui $L(\theta; \underset{\sim}{X})$ la funció de versemblnça
- El test més potent de mida α té com a regió crítica:

$$C = \left\{ \underset{\sim}{X} \in \mathcal{X}^n : \frac{L(\theta_1 | \underset{\sim}{X})}{L(\theta_0 | \underset{\sim}{X})} \geq C_\alpha \right\}$$

on $C_\alpha > 0$ es calcula per tal que $P(\underset{\sim}{X} \in C | \theta_0) \leq \alpha$

Exemple: Distribució Binomial

Suposem que la proporció p de peces defectuoses en un lot es desconeguda. Tenim una m.a.s. $Y_1, \ldots, Y_n$, amb $Y_i \sim Bern(p)$ i volem executar el test:

$$\left\{ \begin{array}{l} H_0 : p = p_0 \\ H_1 : p = p_1 \end{array} \right.$$

on $p_1 > p_0$. La funció de versemblança és:$L(p; \underset{\sim}{Y}) = \binom{n}{X} p^X (1-p)^{(n-X)}$ on $X = \sum_{i=1}^{n} Y_i$

El Lema de Neyman-Pearson estableix com a regió crítica del test més potent de mida α:

$$C = \left\{ \underset{\sim}{Y} \in \mathcal{Y}^n : \frac{L(p_1|\underset{\sim}{Y})}{L(p_0|\underset{\sim}{Y})} \geq A \right\} = \left\{ \underset{\sim}{Y} \in \mathcal{Y}^n : \frac{\binom{n}{X} p_1^X (1-p_1)^{(n-X)}}{\binom{n}{X} p_0^X (1-p_0)^{(n-X)}} \geq A \right\} =$$

$$= \left\{ \underset{\sim}{Y} \in \mathcal{Y}^n : \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^X \left(\frac{1-p_1}{1-p_0}\right)^{n-X} \geq A \right\}$$

Exemple: Distribució Binomial

Treballant l'expressió de la inequació:

$$= \left\{ \underset{\sim}{Y} \in \mathcal{Y}^n : X \log\left(\frac{p_1}{p_0}\right) + (n - X)\log\left(\frac{1-p_1}{1-p_0}\right) \geq \log A \right\} =$$

$$= \left\{ \underset{\sim}{Y} \in \mathcal{Y}^n : X \left[\log\left(\frac{p_1}{p_0}\right) - \log\left(\frac{1-p_1}{1-p_0}\right)\right] \geq -n\log\left(\frac{1-p_1}{1-p_0}\right) + \log A \right\} =$$

$$= \left\{ \underset{\sim}{Y} \in \mathcal{Y}^n : X \geq \frac{\log A - n\log\left(\frac{1-p_1}{1-p_0}\right)}{\log\left(\frac{p_1(1-p_0)}{p_0(1-p_1)}\right)} \right\} = \{\underset{\sim}{Y} \in \mathcal{Y}^n : X \geq A'\}$$

on A' es determina de forma que $P(\underset{\sim}{Y} \in C | p_0) \leq \alpha$

Nota: S'ha fet servir el fet que si $p_1 > p_0$ llavors $\log\left(\frac{p_1(1-p_0)}{p_0(1-p_1)}\right) > 0$

Exemple: Distribució Binomial

Podem determinar el valor de A' perquè coneixem la distribució de X sota H_0.

Per exemple, considerem $n = 10, p_0 = 0.5$ i $p_1 = 0.8$ i fixem $\alpha = 0.05$ Pels diferents valors de A' tenim els següents valors de α i β

x	alpha	beta
0	1.0000	0.0000
1	0.9990	0.0000
2	0.9893	0.0001
3	0.9453	0.0009
4	0.8281	0.0064
5	0.6230	0.0328
6	0.3770	0.1209
7	0.1719	0.3222
8	0.0547	0.6242
9	0.0107	0.8926
10	0.0010	1.0000

Com 0.05 és el màxim acceptable per α, prenem $C = \{X : X \geq 9\}$ i per tant $P(X \geq 9) = 0.0107 \leq 0.05$. La potència del test és $1 - \beta = 1 - 0.8926 = 0.1074$

Exemple: Distribució Normal

Sigui $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, σ^2 coneguda. Volem testar:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu = \mu_1 \end{cases}$$

on $\mu_1 > \mu_0$. Intuitivament, rebutgem H_0 si $\bar{X}$ es "gran"

Neyman-Pearson:

$$L_0 = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i-\mu_0}{\sigma}\right)^2} \qquad L_1 = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i-\mu_1}{\sigma}\right)^2}$$

Exemple: Distribució Normal

$$C = \left\{ \underset{\sim}{X} : \frac{L_1}{L_0} \geq C_\alpha \right\} \rightarrow \frac{\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i-\mu_1}{\sigma}\right)^2}}{\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i-\mu_0}{\sigma}\right)^2}} \geq C_\alpha$$

$$e^{\frac{1}{2\sigma^2}\left(-\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_1)^2+\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2\right)} \geq C_\alpha$$

$$-\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_1)^2 + \sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2 \geq C'_\alpha$$

$$-\sum_{i=1}^{n}(x_i^2 - 2x_i\mu_1 + \mu_1^2) + \sum_{i=1}^{n}(x_i^2 - 2x_i\mu_0 + \mu_0^2) \geq C'_\alpha$$

$$2n\bar{X}(\mu_1-\mu_0) \geq C''_\alpha \rightarrow C = \{\underset{\sim}{X} : \bar{X} \geq C'''_\alpha\}$$

Exemple: Distribució Normal

Sigui $\mu_0 = 0, \mu_1 = 1, \sigma^2 = 1, \alpha = 0.05, n = 10$

Llavors, sota H_0

$$\bar{X} \sim N(\mu_0, \sigma^2 = 1/10)$$

$$P(\text{Error Tipus I}) = P(\underset{\sim}{X} \in C | H_0 \text{ cert}) = P(\bar{X} \geq k | \mu = 0) = \alpha = 0.05$$

$$P(\bar{X} \geq k | \mu = 0) = P\left(Z \geq \frac{k - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = 0.05$$

$$\frac{k - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = 1.65 \rightarrow k = \mu_0 + 1.65\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{1.65}{\sqrt{10}} = 0.52$$

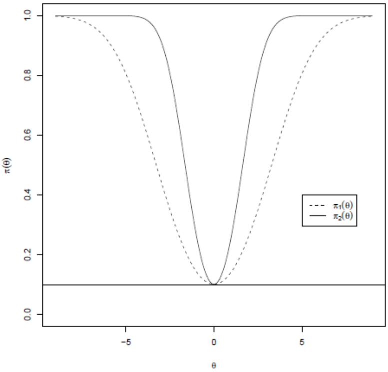
Per tant, en aquest cas:

$$C = \{\underset{\sim}{X} : \bar{X} \geq 0.52\}$$

Tests Uniformement més potents (UMP)

Definició: Un test de mida α és **uniformement més potent (UMP)** pel contrast $H_0 : \theta \in \Theta_0$ versus $H_1 : \theta \in \Theta_1$ amb funció de potència $\pi(\theta)$ i amb $\sup_{\theta\in\Theta_0} \pi(\theta) = \alpha$, si per qualsevol altra funció de potència $\pi^*(\theta)$ també amb $\sup_{\theta\in\Theta_0} \pi^*(\theta) = \alpha$ tenim

$$\pi(\theta) \geq \pi^*(\theta) \qquad \forall\theta \in \Theta_1$$



Lema de Neyman-Pearson per alternatives compostes

Volem testar:

$$\begin{cases} H_0 : \theta \in \Theta_0 = \{\theta_0\} \\ H_1 : \theta \in \Theta_1 \end{cases}$$

Per a cada $\theta_1 \in \Theta_1$, considerem els conjunts

$$C(\theta_1) = \left\{ \underset{\sim}{X} : \frac{L(\theta_1|\underset{\sim}{X})}{L(\theta_0|\underset{\sim}{X})} \geq A(\theta_1) \right\}$$

que són les regions crítiques dels tests més potents de mida α per testar

$$\begin{cases} H_0 : \theta = \theta_0 \\ H_1 : \theta = \theta_1 \end{cases}$$

fent servir el lema de Neyman-Pearson per hipòtesis simples.

Si aquestes regions crítiques no depenen de θ_1, llavors el test que té C com a regió crítica és el test **UMP** (Uniformement Més Potent) de mida α

Exemple: Distribució Normal

Tenim una m.a.s. $X_1, \ldots, X_n$ on $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ amb σ^2 coneguda. Volem testar

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu > \mu_0 \end{cases}$$

Considerem $\mu_1 > \mu_0$, i apliquem el Lema de Neyman-Pearson per hipòtesis simple.

La funció de versemblança:

$$L(\mu|\underset{\sim}{X}) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i-\mu_0}{\sigma}\right)^2}$$

El quocient de versemblances:

$$\frac{L(\mu_1|\underset{\sim}{X})}{L(\mu_0|\underset{\sim}{X})} = \frac{(2\pi\sigma^2)^{-n/2} \exp\left\{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_1)^2}{2\sigma^2}\right\}}{(2\pi\sigma^2)^{-n/2} \exp\left\{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2}{2\sigma^2}\right\}}$$

Exemple: Distribució Normal

$$\frac{L(\mu_1|\underset{\sim}{X})}{L(\mu_0|\underset{\sim}{X})} = \exp\left\{\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left((x_i-\mu_0)^2-(x_i-\mu_1)^2\right)\right\} =$$

$$= \exp\left\{\frac{n}{2\sigma^2}\left(2\bar{X}(\mu_1-\mu_0)^2+(\mu_0^2-\mu_1^2)\right)\right\}$$

Per tant, la regió crítica és

$$C = \left\{\underset{\sim}{X} : \exp\left\{\frac{n}{2\sigma^2}\left(2\bar{X}(\mu_1-\mu_0)^2+(\mu_0^2-\mu_1^2)\right)\right\} \geq A\right\}$$

$$C = \{\underset{\sim}{X} : \bar{X} \geq B\}$$

on B és tal que $P(\bar{X} \geq B|H_0) = \alpha$. Sota H_0,

$$\bar{X} \sim N(\mu_0, \sigma^2/n)$$

Així, $B = \mu_0 + Z_{1-\alpha}\sigma/\sqrt{n}$ i la regió crítica és la mateixa per tots els possibles valors $\mu_1 \in \Theta_1 = (\mu_0, +\infty)$ Llavors, el test amb regió crítica C és UMP de mida α per

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu > \mu_0 \end{cases}$$

Construint la funció de potència

La funció de potència del test és:

$$\pi(\mu) = P(\underset{\sim}{X} \in C|\mu) = P\left(\bar{X} \geq \mu_0 + Z_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}|\mu\right) =$$

$$= P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \geq \frac{\mu_0-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} + Z_{1-\alpha}|\mu\right) = P\left(Z \geq \frac{\mu_0-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} + Z_{1-\alpha}\right)$$

amb $Z \sim N(0,1)$

Per exemple, considerem $\mu = 5, \mu_1 = 6, \sigma^2 = 1, n = 4$. La mostra observada és $\underset{\sim}{x} = (6.1, 5.5, 5.9, 6.3)$ amb $\bar{X} = 5.95$

Rebutgem H_0 si

$$\bar{X} \geq \mu_0 + Z_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Amb aquestes dades tenim,

$$\frac{5.95-5}{1/\sqrt{4}} = 1.9 \geq 1.645$$

i per tant rebutgem H_0

Construint la funció de potència

Calculem la potència para estos vaores de μ_0 i μ_1:

$$\pi(\mu_1) = P(\underset{\sim}{X} \in C|\mu = \mu_1) = P\left(\bar{X} \geq \mu_0 + Z_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}|\mu = \mu_1\right) =$$

$$= P\left(\frac{\bar{X} - \mu_1}{\sigma/\sqrt{n}} \geq \frac{\mu_0 + Z_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} - \mu_1}{\sigma/\sqrt{n}}|\mu = \mu_1\right) = P\left(Z \geq \frac{\mu_0 - \mu_1}{\sigma/\sqrt{n}} + Z_{1-\alpha}\right) =$$

$$= P\left(Z \geq \frac{5-6}{1/2} + 1.645\right) = P(Z \geq 1.645 - 2) =$$

$$= P(Z \geq -0.355) = 0.64$$

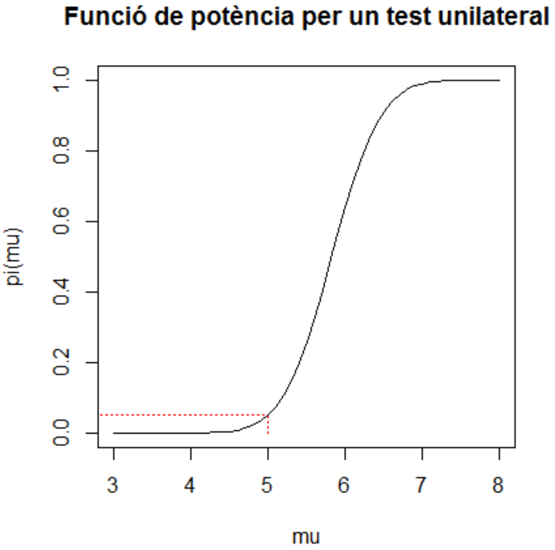
Per qualsevol valor de μ, l'expressió de la funció de potència és:

$$\pi(\mu) = P\left(Z \geq 11.645 - 2\mu\right) = 1 - \Phi(11.645 - 2\mu)$$

on Φ representa la funció de distribució de la Normal estandarditzada

Construint la funció de potència

μ	$\pi(\mu)$
3.0	0.00
3.5	0.00
4.0	0.00
4.5	0.00
5.0	0.05
5.5	0.26
6.0	0.64
6.5	0.91
7.0	0.99
7.5	1.00
8.0	1.00



Raó de versemblança monòtona

- Sigui $f(\underset{\sim}{X}|\theta)$ la funció de densitat conjunta d'una m.a.s. $X_1, \ldots, X_n$
- Sigui $T = r(\underset{\sim}{X})$ un estadístic
- Definició: $f(\underset{\sim}{X}|\theta)$ té **raó de versemblança monòtona** respecte a l'estadístic T si:
  - Per a cada $\theta_1 \in \Theta$ and $\theta_2 \in \Theta$ amb $\theta_1 < \theta_2$, la raó de versemblances $\frac{f(\underset{\sim}{X}|\theta_2)}{f(\underset{\sim}{X}|\theta_1)}$ depen de $\underset{\sim}{X}$ a través de l'estadístic $T = r(\underset{\sim}{X})$ i és una funció creixent de $r(\underset{\sim}{X})$

Teorema: Si $f(\underset{\sim}{X}|\theta)$ té raó de versemblança monòtona en l'estadístic T, i si t i α_0 són constants que compleixen $P(T \geq t|\theta = \theta_0) = \alpha_0$, llavors:

el test que rebutja H_0 amb regió crítica $C = \{\underset{\sim}{X} : T = r(\underset{\sim}{X}) \geq t\}$ en el test $H_0 : \theta = \theta_0$ vs. $H_1 : \theta > \theta_0$ is un test UMP amb mida α_0

Exemple: Distribució de Bernouilli

- Sigui $X_1, \ldots, X_n$ una m.a.s. amb $X_i \sim Bern(p)$
- Volem resoldre el test:

$$\begin{cases} H_0 : p = 0.1 \\ H_1 : p > 0.1 \end{cases}$$

- Funció de versemblança: $f(\underset{\sim}{X}|p) = p^y(1-p)^{n-y}$ on $y = \sum_{i=1}^n X_i$
- Suposem $p_2 > p_1$, llavors

$$\frac{f(\underset{\sim}{X}|p_2)}{f(\underset{\sim}{X}|p_1)} = \frac{p_2^y(1-p_2)^{n-y}}{p_1^y(1-p_1)^{n-y}} = \left(\frac{p_2(1-p_1)}{p_1(1-p_2)}\right)^y \left(\frac{1-p_2}{1-p_1}\right)^n$$

- Això és una funció creixent en y, ja que la base de la funció exponencial és més gran que 1
- Si definim com a regió crítica del test $C = \{\underset{\sim}{X} : y = \sum_{i=1}^n X_i \geq A\}$ el test serà UMP

Exemple: Distribució de Bernouilli

Suposem $n = 20, \alpha = 0.01$. Sota H_0, $y \sim B(n = 20, p = 0.1)$

A	$P(y \geq A \mid H_0)$
0	1.00000
1	0.87842
2	0.60825
3	0.32307
4	0.13295
5	0.04317
6	0.01125
7	0.00239
8	0.00042
9	0.00006
10	0.00001
11	0.00000
⋮	⋮
20	0.00000

Test randomitzat:

- Si $y \leq 5$ no rebugtem H_0. Si $y \geq 7$ rebutgem H_0
- Si $y = 6$ rebutgem H_0 amb probabilitat q, on

$$\alpha = P(Y \geq 7 \mid H_0) + qP(Y = 6 \mid H_0) = 0.01$$

d'on surt que $q = \frac{0.01 - 0.00239}{0.01125 - 0.00239} = 0.08582$

Test de la raó de versemblança generalitzat

Sigui $X_1, \ldots, X_n$ una m.a.s. de X amb densitat $f(x|\theta)$ per algun $\theta \in \Theta$ Volem resoldre el test:

$$\begin{cases} H_0 : \theta \in \Theta_0 \\ H_1 : \theta \in \Theta_1 \end{cases}$$

on $\Theta = \Theta_0 \cup \Theta_1$ i $\Theta_0 \cap \Theta_1 = \emptyset$

Definició: **L'estadístic de raó de versemblança** és $\lambda = \lambda(\underset{\sim}{X}) = \frac{\max_{\theta \in \Theta_0} L(\theta|\underset{\sim}{X})}{\max_{\theta \in \Theta} L(\theta|\underset{\sim}{X})}$

Definim el **Test de la raó de versemblança**, també anomenat **Test de la raó de versemblança generalitzat** (per distingir-ho del test obtingut pel lema de Neyman-Pearson) el test que té regió crítica de forma:

$$C = \{\underset{\sim}{X} : \lambda(\underset{\sim}{X}) \leq A\}$$

per una certa constant A determinada imposant que la mida del test sigui α (A és tal que $\sup_{\theta \in \Theta_0} P(\underset{\sim}{X} \in C|\theta)) \leq \alpha$))

Nota: $0 \leq \lambda \leq 1$. Quan més a prop del valor 1, és més verosimil que $\theta \in \Theta_0$, mentres que quna més lluny de 1, més versemblant és que $\theta \in \Theta_1$

Relació entre el test de raó de versemblança

Si H_0 i H_1 són hipòtesis simples, llavors

$$\lambda = \lambda(\underset{\sim}{X}) = \frac{L(\theta_0|\underset{\sim}{X})}{\max\{L(\theta_0|\underset{\sim}{X}), L(\theta_1|\underset{\sim}{X})\}} = \min\left\{1, \frac{L(\theta_0|\underset{\sim}{X})}{L(\theta_1|\underset{\sim}{X})}\right\}$$

Un test que rebutja H_0 quan $\lambda \leq A$ té la mateixa regió crítica que el que rebutja quan $\frac{L(\theta_1|\underset{\sim}{X})}{L(\theta_0|\underset{\sim}{X})} \geq \frac{1}{A}$ que és la mateixa regió crítica que el que ens proporciona el lema de Neyman-Pearson.

Exemple: Distribució Normal

Sigui $X_1, \ldots, X_n$ una m.a.s. on $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ amb σ^2 desconeguda.$\theta = (\mu, \sigma^2)$

Volem testar:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu \neq \mu_0 \end{cases}$$

Funció de versemblança:

$$L(\theta|\underset{\sim}{X}) = (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \exp\left\{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

Exemple: Distribució Normal

- Estimador ML sota H_0 és $\tilde{\theta} = (\mu_0, \tilde{\sigma}^2)$, on

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu_0)^2$$

  - Valor de la versemblança en aquest punt,

$$max_{\theta \in \Theta_0} L(\theta | \underset{\sim}{X}) = (2\pi\tilde{\sigma}^2)^{-n/2} \exp\left\{-\frac{n}{2}\right\}$$

- Estimador ML en general és $\hat{\theta} = (\bar{X}, \hat{\sigma}^2)$, on

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{n-1}{n}S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

  - Valor de la versemblança en aquest punt,

$$max_{\theta \in \Theta} L(\theta | \underset{\sim}{X}) = (2\pi\hat{\sigma}^2)^{-n/2} \exp\left\{-\frac{n}{2}\right\}$$

Exemple: Distribució Normal

Calculem λ:

$$\lambda = \lambda(\underset{\sim}{X}) = \left(\frac{\tilde{\sigma}^2}{\hat{\sigma}^2}\right)^{-n/2} = \left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu_0)^2}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}\right)^{-n/2} =$$

$$= \left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 + n(\bar{X} - \mu_0)^2}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}\right)^{-n/2} = \left(1 + \frac{t^2}{n-1}\right)^{-n/2}$$

on $t = \sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)/S$. L'estadístic λ és decreixent en |t|.

El test de la raó de versemblança rebutja H_0 si $\lambda \leq A$, per un cert A.

$$\left(1 + \frac{t^2}{n-1}\right)^{-n/2} \leq A$$

De forma equivalent,

$$\left(1 + \frac{t^2}{n-1}\right)^{n/2} \leq \frac{1}{A} \Leftrightarrow t^2 > B \quad \text{per un cert B}$$

Per tant, el test de raó de versemblança rebutja H_0 si

$$\frac{|\bar{X} - \mu_0|}{S/\sqrt{n}} > C$$

on C es determina per que el test tingui mida α