Comentaris adicionals (no requerits) al problema 2 del Parcial

(2a) Aquest apartat és molt similar al pb4* de la llista 2, fet a classe. Com es va dir a la classe de problemes, per veure que N envia $G = C([0,t_0]; L^2(0,1))$ a si mateix (i com a la definició de N apareixen tant T_t com T_{t-s}) caldrà veure que, donada una funció $\tilde{v} \in L^2(0,1)$, l'aplicació

$$t \in [0,t_0] \longmapsto T_t \tilde{v} = \tilde{v}_e(\cdot - t)$$

és contínua (en t). Això no és trivial doncs no hi ha una manera simple de veure que

$$\| T_t \tilde{v} - T_{t_0} \tilde{v} \|^2_{L^2(0,1)} = \int_0^1 | \tilde{v}_e(y-t) - \tilde{v}_e(y-t_0) |^2 dy$$

tendeix a 0 quan $t \to t_0$ (hi ha convergència puntual a 0 qpt punt però no podem aplicar el tma de la convergència dominada). La manera de veure-ho usa un resultat important d'Anàlisi Real (que POTSER heu vist) que diu que les funcions de $C([0,1])$ són denses a $L^2(0,1)$. Per tant, donat un $\varepsilon > 0$ existeix una funció $\tilde{w} \in C([0,1])$ tq $\| \tilde{v} - \tilde{w} \|_{L^2(0,1)} \leq \varepsilon$.

Llavors

$$\|T_t\hat{\tilde{v}} - T_{t_0}\hat{\tilde{v}}\|_{L^2(0,1)} \leq \|T_t\hat{\tilde{v}} - T_t\hat{\tilde{w}}\|_{L^2(0,1)} + \|T_t\hat{\tilde{w}} - T_{t_0}\hat{\tilde{w}}\|_{L^2(0,1)} + \|T_{t_0}\hat{\tilde{w}} - T_{t_0}\hat{\tilde{v}}\|_{L^2(0,1)}$$

$$\leq \|\hat{\tilde{v}} - \hat{\tilde{w}}\|_{L^2(0,1)} + \|T_t\hat{\tilde{w}} - T_{t_0}\hat{\tilde{w}}\|_{L^2(0,1)} + \|\hat{\tilde{w}} - \hat{\tilde{v}}\|_{L^2(0,1)} \leq 2\varepsilon + \|T_t\hat{\tilde{w}} - T_{t_0}\hat{\tilde{w}}\|_{C([0,1])}$$

Tenim finalment que

$$\|T_t\hat{\tilde{w}} - T_{t_0}\hat{\tilde{w}}\|_{C([0,1])} = \|\tilde{w}_e(\cdot - t) - \tilde{w}_e(\cdot - t_0)\|_{C([0,1])} \leq \varepsilon.$$

si $|t - t_0| \leq \delta$ (per un cert $\delta > 0$),

doncs $\tilde{w}_e$ és una funció (unif) contínua

[ja que $\tilde{w}$ ho és i l'extensió $\tilde{w}_e$ també ho serà si $\tilde{w}(0) = 0$; això no és problema doncs el resultat d'Anàlisi Real diu inclús que les funcions contínues amb suport compacte a $(0,1)$ són denses a $L^2(0,1)$.]

(2b) Aquest problema es podria resoldre, POTSER, usant una teoria que s'escapa a aquest curs. Primer hauríem de tenir un resultat d'existència i unicitat per l'EDP

$u_t = u_x^2 + f(x,t)$, per una f donada arbitrària, (que s'anomena equació de Hamilton-Jacobi). (Per això començaríem per intentar resoldre l'homogènia $u_t = u_x^2$: EDP de 1er ordre però NO quasi-lineal). Un cop tinguéssim l'operador resolució : $R = R[f]$, podríem intentar estudiar el nostre problema, com un de punt fix :

$$u_t = u_x^2 + Au$$

$$u = R[Au].$$
