Primer problema per lliurar d'anàlisi real. Una introducció a l'anàlisi funcional.

L'objectiu d'aquest problema és presentar algunes aplicacions dels resultats desenvolupats en aquesta assignatura a l'anàlisi funcional, centrant-nos en els espais de Banach i de Hilbert. A més, acabarem per introduir l'espai ℓ^2 format per les successions de quadrat sumable, la qual cosa serveix de motivació per a la darrera part del curs, on treballarem els seu anàlegs continus, i també per l'estudi de les sèries de Fourier.
Si E és un espai normat, escriurem $\mathcal{L}(E)$ per denotar el conjunt dels seus endomorfismes continus. Recordi's que, com s'ha vist al problema 2 del segon tema, aquest darrer espai està equipat amb una norma,

$$||T|| = \sup_{||x||<1} ||Tx|| = \sup_{||x||\leq 1} ||Tx||.$$

Diem que un operador $T \in \mathcal{L}(E)$ està fitat si $||T|| < \infty$, i que no ho està altrament.
L'estructura de la primera part de l'exercici és la següent: el primer apartat discuteix exemples d'operadors fitats i no fitats; el segon apartat generalitza el problema 2 del segon tema; el tercer, relaciona el fet que un operador sigui continu amb que sigui fitat; i el quart introdueix la noció de compacitat.

(a) Proveu que si E té dimensió finita, aleshores qualsevol operador lineal $T : E \to E$ està fitat, és a dir, la seva norma no és infinit.

Veieu en canvi que si E té dimensió infinita, aleshores el resultat anterior pot ser fals. Més concretament, doneu un exemple d'un operador lineal $T : E \to E$ que no estigui fitat. *Indicació: considereu l'espai c_{00} format per les successions de nombres reals amb un nombre finit de termes no zero, amb la norma ℓ^∞ donada per*

$$||(a_n)||_{\ell^\infty} = \sup |a_n|.$$

Podeu donar altres exemples diferents d'operadors no fitats?

Més en general, donats dos espais normats E i F, es considera

$$\mathcal{L}(E, F) = \{T : E \to F \text{ de manera que } T \text{ és lineal i fitat}\}.$$

Com que E i F són espais topològics, té sentit parlar de la continuïtat de T en un punt de E.

(b) Siguin E i F dos espais normats. Proveu que $\mathcal{L}(E, F)$ és un espai normat amb la norma donada per

$$||T||_{\mathcal{L}(E,F)} = \sup_{||x||_E\leq 1} ||Tx||_F,$$

i que si F és un espai de Banach, aleshores $\mathcal{L}(E, F)$ també ho és.

(c) Siguin E i F dos espais normats i $T : E \to F$ un operador lineal. Proveu que les següents condicions són equivalents:

(i) T és continu a l'origen.
(ii) T és continu a cada punt.
(iii) $T(\overline{B_1(0)})$ és un conjunt fitat, on $B_1(0)$ la bola oberta de radi 1 a l'espai E i la barra denota la seva adherència.
(iv) $||T|| < \infty$.
(v) Existeix una constant real C de manera que $||Tx||_F \leq C||x||_E$.

Indicació: totes les implicacions són de tipus estàndard, només cal escriure clarament les definicions!

A l'anàlisi funcional hi ha un concepte clau i que té nombroses aplicacions, que és el de compacitat d'un operador. Un operador $T : E \to F$ entre espais de Banach es diu que és compacte si per a tot $A \subset E$ fitat, se satisfà que $\overline{T(A)}$ és compacte.

(d) Proveu que les següents propietats són equivalents.

   (i) T és compacte.

   (ii) Qualsevol bola $B_r(p)$ de l'espai E satisfà que $\overline{T(B_r(p))}$ és compacte. Com és habitual, $B_r(p)$ és la bola de radi r i centre p.

   (iii) $\overline{T(B_1(0))}$ és compacte.

   (iv) Tota successió (x_n) a $\overline{B_1(0)}$ satisfà que $\{T(x_n)\}$ té una subsuccessió convergent.

   Com a corol·lari, veieu que si T és un operador lineal i continu de manera que la imatge de E és de dimensió finita, aleshores T és compacte.

   Indicació: comproveu fent servir les definicions que les tres primeres propietats són equivalents. Pel que fa la relació amb la quarta, potser va bé considerar el conjunt $\overline{T(\overline{B_1(0)})}$.

En aquesta segona part del problema s'introdueixen els espais de Hilbert. Un espai pre-Hilbert és un espai vectorial real H equipat amb un producte escalar $(\langle \cdot, \cdot \rangle)$. Aquest producte escalar defineix de forma natural una norma que satisfà la desigualtat de Cauchy–Schwarz, la identitat de polarització i la identitat del paral·lelogram. Si $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ és un espai pre-Hilbert, diem que x i y són ortogonals si $\langle x, y \rangle = 0$. A més, si $A \subset H$, definim el seu ortogonal $A^\perp$ com

$$A^\perp = \{x \in H \text{ que satisfan } \langle x, y \rangle = 0, \text{ per a tot } y \in A\}.$$

Un espai pre-Hilbert es diu Hilbert si és complet.

(e) Sigui H un espai de Hilbert. Proveu que l'aplicació $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \to \mathbb{R}$ és contínua.

   Sigui $H^\vee = \mathcal{L}(H, \mathbb{R})$. Proveu que l'aplicació $F : H \to H^\vee$ definida per $x \mapsto \langle \cdot, x \rangle$ és lineal, injectiva i a més és una isometria. *Bonus: podeu dir alguna cosa sobre la exhaustivitat d'aquesta aplicació?*

   Sigui ℓ^2 el conjunt de successions de nombres reals (a_n) que satisfan $\sum_{n=1}^\infty |a_n|^2 < \infty$. Consideri's el producte escalar donat per

$$\langle (a_n), (b_n) \rangle = \sum_{i=1}^\infty a_i b_i.$$

(f) Proveu que ℓ^2 és un espai de Hilbert. Podeu donar altres exemples?