FACULTAT DE MATEMÀTIQUES I ESTADÍSTICA

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA - BARCELONATECH

Apunts d'Àlgebra Lineal (Primer curs del Grau de Matemàtiques)

Àlex Batlle Casellas

October 8, 2018

Índex

1 Matrius, determinants i sistemes lineals.

2 Espais vectorials.

Considerem el conjunt d'n-tuples de nombres reals:

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) | x_i \in \mathbb{R}\}.$$

2.1 Operacions a $\mathbb{R}^n$.

1. **Suma:** Sigui $u = (x_1, x_2, \ldots, x_n), v = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Aleshores:

$$u + v = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n) \in \mathbb{R}^n.$$

2. **Multiplicació per un escalar:** Sigui $u = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R}$. Aleshores:

$$cu = (cx_1, cx_2, \ldots, cx_n) \in \mathbb{R}^n.$$

<u>PROPIETATS:</u>

- $u + v = v + u$. (commutativitat)
- $(u + v) + w = u + (v + w)$. (associativitat)
- $\exists \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n : \ u + \mathbf{0} = u$. (vector zero; notació alternativa, $\vec{0}$)
- $\forall u \in \mathbb{R}^n \exists -u \in \mathbb{R}^n : \ u + (-u) = \mathbf{0}$.
- $c(u + v) = cu + cv$. (distributivitat)
- $(c + d)u = cu + du$. (distributivitat)
- $c(du) = (cd)u$.
- $1u = u$.

2.2 Espai vectorial sobre un cos $\mathbb{K}$.

Sigui $\mathbb{K}$ un cos commutatiu (per exemple $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$). Un espai vectorial sobre $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K}$-e.v.) és un conjunt de vectors E amb dues operacions $+$ i $\cdot$.

- $+$: Donats $u, v \in E$ dóna un element $u + v$ també d'E.
  És una operació commutativa, associativa, té element neutre ($\mathbf{0}$ o $\vec{0}$) i tot $u \in E$ té invers respecte $+$ $(-u)$.
- $\cdot$: Donats $u \in E$ i $c \in \mathbb{K}$ dóna un element cu d'E.

La suma i el producte compleixen

$$c(u + v) = cu + cv \quad (c + d)u = cu + du \quad c(du) = (cd)u \quad 1u = u \quad \forall u, v \in E, c, d \in \mathbb{K}.$$

Exemples d'espais vectorials:

- $\mathbb{K}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) | x_i \in \mathbb{K}\}$ és un $\mathbb{K}$-e.v. amb la suma i el producte naturals heretats de $\mathbb{K}$.
- $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ és un $\mathbb{K}$-e.v. format per matrius de dimensions $m \times n$ amb entrades a $\mathbb{K}$ i les operacions naturals de la suma de matrius i el producte per un escalar.
- El conjunt de polinomis de grau $\leq d$, $\mathbb{R}_d[x] = \{p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_dx^d | a_i \in \mathbb{R}\}$ és un espai vectorial amb la suma de polinomis i el producte per un escalar.
- $\mathbb{R}[x] = \{\text{polinomis en una variable } x \text{ i coeficients en els reals}\}$ és un $\mathbb{R}$-e.v.
- El conjunt $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ de funcions $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ és un $\mathbb{R}$-e.v.

PROPIETATS:

1. $0u = \mathbf{0} = c\mathbf{0}$.
2. $(-1)u = -u$.
3. $(-c)u = c(-u) = -(cu) = -cu$.
4. $cu = \mathbf{0} \iff c = 0 \vee u = \mathbf{0}$.

Demostració:

1. Sigui $v = 0u = (0+0)u = 0u + 0u = v + v$. Aleshores $v = v + v \iff v + (-v) = v + v + (-v) \iff v = \mathbf{0}$.$\square$
2. Sigui $v = (-1)u$. Aleshores si $u + v = \mathbf{0}$, $v = -u$.

   $$u+v = u+(-1)u = (u_1, \ldots, u_n)+(-u_1, \ldots, -u_n) = (u_1-u_1, \ldots, u_n-u_n) = (0, \ldots, 0) = \mathbf{0}.\square$$
3. **PENDENT D'ACABAR.**

Definició:

Un vector u és combinació lineal dels vectors $u_1, u_2, \ldots, u_k$ si existeixen escalars $c_1, c_2, \ldots, c_k$ tals que $u = c_1u_1 + c_2u_2 + \ldots + c_ku_k$. Els escalars c_i són els coeficients de la combinció lineal.

Esbrinar si un vector a $\mathbb{K}^n$ és combinació lineal d'una colecció de vectors donada és equivalent a resoldre un sistema lineal d'equacions:

$$\exists c_1, c_2, \ldots, c_k \in \mathbb{K} : u = c_1u_1 + c_2u_2 + \ldots + c_ku_k?$$

$$c_1 \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{pmatrix} + \ldots + c_k \begin{pmatrix} x_{1k} \\ x_{2k} \\ \vdots \\ x_{nk} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1k} \\ x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \ldots & x_{nk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_k \end{pmatrix}$$

Proposició:

Un sistema $Ax = b$ és compatible si i només si b és una combinació lineal de les columnes d'A.

Demostració:

$Ax = b$ és compatible $\iff \exists c_1, \ldots, c_n$ solució de:

$$\begin{pmatrix} a^1 & \ldots & a^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \end{pmatrix} \iff c_1(a^1) + \ldots + c_n(a^n) = (b) \iff b \text{ és una combinació}$$

lineal dels vectors columna d'A amb coeficients $c_1, \ldots, c_n$.$\square$

2.3 Subespais vectorials.

Sigui E un $\mathbb{K}$-e.v. Aleshores un subconjunt $V \neq \emptyset$ d'E és un subespai vectorial si V és un espai vectorial en si mateix (amb la suma i el producte d'E). Això és equivalent a:

$$\forall u, v \in V \ \forall c, d \in \mathbb{K} \quad cu + dv \in V.$$

Exemple:

- $V = \mathbb{K}^n$ és un subespai vectorial de $\mathbb{K}^n$.
- $V = \{\mathbf{0}\}$ és un subespai vectorial de qualsevol E.
- $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x - y = 0, 3z = 0\}$ és un subespai vectorial d'$\mathbb{R}^3$.
- $F = \{(a + 2b, 0, b) \in \mathbb{R}^3 | a, b \in \mathbb{R}\}$ és un subespai vectorial d'$\mathbb{R}^3$.