

FACULTAT DE MATEMÀTIQUES I ESTADÍSTICA

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA - BARCELONATECH

**Exercicis resolts de Fonaments de les  
Matemàtiques (Primer curs del Grau de  
Matemàtiques)**

*Àlex Batlle Casellas*

November 13, 2018

## Índex

1	Formalisme matemàtic: enunciats i demostracions.	2
2	Conjunts i aplicacions.	3
3	Relacions, operacions i estructures.	5
4	Conjunts de nombres. Numerabilitat.	7
5	El cos dels nombres complexos.	8
6	Aritmètica	9
7	Polinomis.	10

## 1 Formalisme matemàtic: enunciats i demostracions.

## 2 Conjunts i aplicacions.

21. **Sigueu**  $A_1, A_2, B_1, B_2 \neq \emptyset$ . **Demostreu:**

$$21.3. (A_1 \cup A_2) \times (B_1 \cup B_2) = (A_1 \times B_1) \cup (A_1 \times B_2) \cup (A_2 \times B_1) \cup (A_2 \times B_2).$$

Sigueu  $y \in (A_1 \cup A_2) \times (B_1 \cup B_2)$ . Aleshores,  $\exists y_1 \in A_1 \cup A_2, y_2 \in B_1 \cup B_2 : y = (y_1, y_2)$ .

$$\begin{aligned} \iff (y_1 \in A_1 \vee y_1 \in A_2) \wedge (y_2 \in B_1 \vee y_2 \in B_2) &\iff (y_1 \in A_1 \wedge y_2 \in B_1) \\ \vee (y_1 \in A_2 \wedge y_2 \in B_1) \wedge (y_1 \in A_1 \wedge y_2 \in B_2) &\vee (y_1 \in A_2 \wedge y_2 \in B_2) \\ \iff y \in (A_1 \times B_1) \cup (A_2 \times B_2) \cup (A_1 \times B_2) &\cup (A_2 \times B_1). \square \end{aligned}$$

30. **Considerem una aplicació**  $f : A \mapsto B$  **i subconjunts**  $A', A'' \subseteq A$  **i**  $B', B'' \subseteq B$ .

30.1. **Demostreu que si**  $A' \subseteq A''$ , **aleshores**  $f(A') \subseteq f(A'')$ .

Sigueu  $A' \subseteq A''$ . Aleshores  $f(A') = \{y \in B : (\exists x \in A' : f(x) = y)\}$

$$\subseteq \{y \in B : (\exists x \in A'' : f(x) = y)\} = f(A'') \implies f(A') \subseteq f(A''). \square$$

30.3. **Demostreu que si**  $B' \subseteq B''$ , **aleshores**  $f^{-1}(B') \subseteq f^{-1}(B'')$ .

Sigueu  $B' \subseteq B''$ . Aleshores,  $f^{-1}(B') = \{x \in A : (\exists y \in B' : f^{-1}(\{y\}) = \{x\})\} \subseteq$

$$\{x \in A : (\exists y \in B'' : f^{-1}(\{y\}) = \{x\})\} = f^{-1}(B'') \implies f^{-1}(B') \subseteq f^{-1}(B''). \square$$

30.2. **Demostreu que**  $f(A') \subseteq f(A'')$  **implica que**  $A' \subseteq A''$ , **per a tot**  $A', A'' \subseteq A$ , **si, i només si,  $f$  és injectiva.**

Si fem el conjunt antiimatge dels dos costats de la hipòtesi ( $f(A') \subseteq f(A'')$ ):

$$f^{-1}(f(A')) \subseteq f^{-1}(f(A'')) \implies (f^{-1} \circ f)(A') \subseteq (f^{-1} \circ f)(A'') \implies$$

$$Id_A(A') \subseteq Id_A(A'') \implies A' \subseteq A''.$$

Això només passarà quan  $f$  és injectiva, doncs en tal cas  $A'$  i  $A''$  no podrien ser disjunts.  $\square$

Si  $f$  no fos injectiva, en canvi,  $A'$  i  $A''$  podrien ser disjunts però donar el mateix conjunt imatge sense inconvenient.

30.4. **Demostreu que**  $f^{-1}(B') \subseteq f^{-1}(B'')$  **implica que**  $B' \subseteq B''$ , **per a tot**  $B', B'' \subseteq B$ , **si, i només si,  $f$  és exhaustiva.**

31. **Considerem una aplicació**  $f : A \mapsto B$ . **Demostreu:**

31.1. **Si**  $A' \subseteq A$ , **aleshores**  $A' \subseteq f^{-1}(f(A'))$ .

$$f(A') = \{y \in B : (\exists x \in A' : f(x) = y)\}.$$

$$f^{-1}(f(A')) = \{x \in A : f(x) \in f(A')\}.$$

Tenint en compte que podrien existir elements d' $A$  que corresponguessin amb l'aplicació a elements d' $f(A')$ , el conjunt antiimatge  $f^{-1}(f(A'))$  és un superconjunt d' $A'$ .

$$\implies A' \subseteq f^{-1}(f(A')). \square$$

31.2.  **$f$  és injectiva si i només si  $A' = f^{-1}(f(A')) \forall A' \subseteq A$ .**

Agafant la igualtat que volem demostrar, si apliquem  $f$  als dos costats, ens ha de quedar una identitat per poder afirmar que  $f$  és injectiva. Com podem efectivament comprovar,

$$f(A') = f(f^{-1}(f(A'))) = Id_B(f(A')) = f(A')$$

i  $A' = A'$ , per tant, queda demostrat l'enunciat.  $\square$

### 3 Relacions, operacions i estructures.

28. Considerem a  $\mathbb{Z}$  les operacions

$$a \oplus b = a + b - 6;$$

$$a \odot b = ab + \alpha(a + b) + 42,$$

on  $\alpha \in \mathbb{Z}$ .

1) **Comproveu que  $(\mathbb{Z}, \oplus)$  és un grup commutatiu.**

Per ser un grup commutatiu, l'operació  $\oplus$  ha de complir les propietats associativa i commutativa i ha de tenir element neutre i invers per tots els elements de  $\mathbb{Z}$ . Comprovem-ho:

- Associativa: comprovem que  $\forall a, b \in \mathbb{Z}, a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c = a \oplus b \oplus c$ .

$$a \oplus (b \oplus c) = a + (b \oplus c) - 6 = a + (b + c - 6) - 6 =$$

$$(a + b - 6) + c - 6 = (a \oplus b) + c - 6 = (a \oplus b) \oplus c. \square$$

- Commutativa: comprovem que  $\forall a, b \in \mathbb{Z}, a \oplus b = b \oplus a$ .

$$a \oplus b = a + b - 6 = b + a - 6 = b \oplus a. \square$$

- Existència del neutre: suposem que  $\exists e \in \mathbb{Z} : a \oplus e = a$  i el trobem.

$$a \oplus e = a \iff a + e - 6 = a \iff e - 6 = 0 \iff e = 6.$$

En ser  $\oplus$  commutativa, ens podem estalviar comprovar per l'altre costat.

- Existència de l'invers: suposem que  $\exists a' \in \mathbb{Z} : a \oplus a' = e$  i el trobem.

$$a \oplus a' = e \iff a + a' - 6 = 6 \iff a' = 12 - a.$$

2) **Demostreu que l'operació  $\odot$  és associativa si, i només si,  $\alpha = -6$  o  $\alpha = 7$ .**

L'operació  $\odot$  serà associativa quan  $a \odot (b \odot c) = (a \odot b) \odot c = a \odot b \odot c$ . Veiem què passa quan igulem les expressions per cada un dels costats de la tesi:

- $a \odot (b \odot c) = a(bc + \alpha(b + c) + 42) + \alpha(a + bc + \alpha(b + c) + 42) + 42$
- $(a \odot b) \odot c = (ab + \alpha(a + b) + 42)c + \alpha(ab + \alpha(a + b) + 42 + c) + 42$

En igualar,

$$\begin{aligned} & a(bc + \alpha(b + c) + 42) + \alpha(a + bc + \alpha(b + c) + 42) + 42 \\ &= (ab + \alpha(a + b) + 42)c + \alpha(ab + \alpha(a + b) + 42 + c) + 42. \end{aligned}$$

Treiem els 42 d'ambdós costats i desenvolupem els productes amb la distributivitat del producte sobre la suma usual:

$$abc + a\alpha b + a\alpha c + 42a + a\alpha + bc\alpha + \alpha^2 b + \alpha^2 c + 42\alpha =$$

$$abc + c\alpha a + c\alpha b + 42c + ab\alpha + \alpha^2 a + \alpha^2 b + 42\alpha + c\alpha.$$

Cancel·lant els termes iguals,

$$42a + a\alpha + c\alpha^2 = 42c + a\alpha^2 + c\alpha,$$

i ara reescrivint com una equació de segon grau en  $\alpha$  queda:

$$(c - a)\alpha^2 + (a - c)\alpha + 42(a - c) = 0.$$

Aquesta equació la dividim entre  $(c - a)$ , que és diferent de zero ja que si  $a = c$ ,  $(a \odot b) \odot a = a \odot (b \odot a)$  si  $\odot$  és commutativa. Ho podem veure ràpid:

$$a \odot b = ab + \alpha(a + b) + 42 = ba + \alpha(b + a) + 42 = b \odot a.$$

Per tant, com que  $a \neq c$ , dividim;

$$\alpha^2 - \alpha - 42 = 0,$$

i calculem les solucions amb la fórmula pel càlcul de les arrels dels polinomis de segon grau:

$$\alpha = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4(-42)}}{2}$$

$$\alpha_1 = -6 \quad \alpha_2 = 7.$$

Per tant, seguint el curs de les implicacions i tal com volíem demostrar,  $\odot$  només és associativa quan  $\alpha = -6$  o  $\alpha = 7$ .  $\square$

- 3) **Demostreu que l'operació  $\odot$  té element neutre si, i només si,  $\alpha = -6$  o  $\alpha = 7$ .**

Si existeix un element neutre,  $\exists e \in \mathbb{Z} : a \odot e = a$ . Per tant, ho escrivim:

$$a \odot e = ae + \alpha(a + e) + 42 = a.$$

Si podem aïllar  $e$ , haurem trobat el neutre. Ho fem:

$$a - 42 - a\alpha = ae + e\alpha \iff a(1 - \alpha - e) = e\alpha$$

- 4) **Per a quins valors de  $\alpha$  és  $(\mathbb{Z}, \oplus, \odot)$  un anell?**

## 4 Conjunts de nombres. Numerabilitat.



## 5 El cos dels nombres complexos.

## 6 Aritmètica

## 7 Polinomis.