Resumen Tema 1

Transformación de la variable independiente

Reflexión o giro	y(t)=x(-t)	y[n]=x[-n]
Escalado	y(t)=x(at)	y[n]=x[an] a entero>1
Desplazamiento	$y(t)=x(t-t_o)$	$y[n]=x[n-n_o]$

Señales básicas

Definiciones

Escalón unitario:	$u(t)=\begin{cases}1 & t>0\\0 & t<0\end{cases}$	$u[n]=\begin{cases}1 & n\geq 0\\0 & n<0\end{cases}$
Función signe:	$sign(t)=\begin{cases}1 & t>0\\-1 & t<0\end{cases}$	$sgn[n]=\begin{cases}1 & n>0\\0 & n=0\\-1 & n<0\end{cases}$
Pulso rectangular:	$\prod(t)=\begin{cases}1 & \lvert t\rvert<\frac{1}{2}\\0 & \text{resto}\end{cases}$	$p_L[n]=\begin{cases}1 & 0\leq n\leq L-1\\0 & resto\end{cases}$
Pulso triangular:	$\Lambda(t)=\begin{cases}1-\lvert t\rvert & \lvert t\rvert<1\\0 & \text{resto}\end{cases}$	
Función sinc:	$sinc(t)=\dfrac{sin(\pi t)}{\pi t}$	
Función delta de Dirac / Kronecker o impulso unitario:	$\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\delta(t)dt=x(0)$	$\boldsymbol{\delta[n]=\begin{cases}1 & n=0\\0 & resto\end{cases}}$
Exponencial compleja:	$e^{st}=e^{(\sigma+j2\pi f)t}$	

Propiedades

Señal par	*x(-t)=x(t)*	*x[-n]=x[n]*
Señal impar	*x(-t)=-x(t)*	*x[-n]=-x[n]*
Parte par	Par {x(t) }= $\dfrac{x(t)+x(-t)}{2}$	Par {x[n] }= $\dfrac{x[n]+x[-n]}{2}$
Parte Impar	Impar {x(t) }= $\dfrac{x(t)-x(-t)}{2}$	Impar {x[n] }= $\dfrac{x[n]-x[-n]}{2}$
Periodicidad	*x(t)=x(t+T)*	*x[n]=x[n+N] N entero*
Energía	$E_x=\int_{-\infty}^{\infty}\lvert x(t)\rvert^2\,dt$	$E_x=\sum_{n=\infty}^{\infty}\lvert x[n]\rvert^2$
Potencia media	$P_x=\lim_{T\to\infty}\dfrac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\lvert x(t)\rvert^2\,dt$	$P_x=\lim_{N\to\infty}\dfrac{1}{N+1}\sum_{n=N/2}^{N/2}\lvert x[n]\rvert^2$

Propiedades de la función delta

Definición	$\int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{x(t)\delta(t)dt = x(0)}$	$\boldsymbol{\delta[n]} = \begin{cases} \mathbf{1} & \boldsymbol{n = 0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{resto} \end{cases}$
Área unitaria	$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t).dt = 1$	
Escalado	$\delta(at) = \frac{1}{\lvert a \rvert}.\delta(t)$	
Simetría par	$\delta(-t) = \delta(t)$	
Representación de una señal	$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau).\delta(t-\tau).d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau).\delta(\tau - t).d\tau$	$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$
Producto por una señal	$x(t).\delta(t-t_o) = x(t_o).\delta(t-t_o)$	$x[n].\delta[n-n_o] = x[n_o].\delta[n-n_o]$
Relación con la función escalón	$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau).d\tau = \int_{0}^{+\infty} \delta(t-\tau).d\tau$ $\delta(t) = \frac{\partial}{\partial t}\left[u(t)\right]$	$u[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta[k] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k]$ $\delta[n] = u[n] - u[n-1]$

Sistemas y sus propiedades

y(t) = T[x(t)]
y[n] = T[x[n]]

Propiedades

P1: Linealidad

$$T[a_1.x_1(t) + a_2.x_2(t)] = a_1.T[x_1(t)] + a_2.T[x_2(t)]$$

$$T[a_1.x_1[n] + a_2.x_2[n]] = a_1.T[x_1[n]] + a_2.T[x_2[n]]$$

P2: Invariancia

Si T[x(t)] = y(t) entonces T[x(t-t_0)] = y(t-t_0)
Si T[x[n]] = y[n] entonces T[x[n-n_0]] = y[n-n_0]

P3: Causalidad

La salida no depende de valores futuros de la entrada

P4: Estabilidad

$\forall$ $|x(t)| \leq B_1$ entonces $|y(t)| \leq B_2$
$\forall$ $|x[n]| \leq B_1$ entonces $|y[n]| \leq B_2$

P5: Memoria

Para calcular y(t_0) (y[n_0]) con t_0 (n_0) arbitrario, se precisan valores de la entrada pasados o futuros

P6: Invertibilidad

Invertible si a partir de la salida y(t) (y[n]) se puede volver a obtener la entrada x(t) (x[n])

Sistemas lineales e invariantes

Respuesta impulsional h(t), h[n]

$h(t)= T[\delta(t)]$
$h[n]=T[\delta[n]]$

Ecuación de convolución

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = x(t)*h(t)$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = x[n] * h[n]$$

Propiedades de la convolución

Conmutativa	$x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$	$x[n] * h[n] = h[n] * x[n]$
Asociativa	$x(t) * [h_1(t)*h_2(t)]=[x(t)*h_1(t)]*h_2(t)$	$x[n] * [h_1[n]*h_2[n]]=[x[n]*h_1[n]]*h_2[n]$
Distributiva respecto a la suma	$x(t) * [h_1(t)+h_2(t)]=x(t)*h_1(t)+ x(t)*h_2(t)$	$x[n] * [h_1[n]+h_2[n]]=x[n]*h_1[n]+ x[n]*h_2[n]$
Elemento neutro	$x(t) * \delta(t) = x(t)$	$x[n] * \delta[n] = x[n]$

Relación entre las propiedades de los sistemas LI y su respuesta impulsional

Causalidad	$h(t)=0$ para $t < 0$	$h[n] = 0$ para $n < 0$
Estabilidad	$\int_{-\infty}^{\infty} \mid h(t) \mid dt < \infty$	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \lvert h[n] \rvert < \infty$
Sistemas sin memoria	$h(t) = k\delta(t)$	$h[n] = k\delta[n]$
Invertibilidad de sistemas	$\exists\ h_i(t) \mid h(t)*h_i(t)=\delta(t)$	$\exists\ h_i[n] \mid h[n]*h_i[n]=\delta[n]$