PROBLEMA 3, esquema de la resolució

Sigui $E = \mathbb{R}_2[t]$ l'espai vectorial dels polinomis de grau 2 en una variable amb coeficients reals, amb base $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_0 = 1, \boldsymbol{e}_1 = t, \boldsymbol{e}_2 = t^2\}$. Sigui $\mathcal{B}^* = \{\boldsymbol{e}^0, \boldsymbol{e}^1, \boldsymbol{e}^2\}$ la base dual.

(a) *Considerem l'aplicació*

$$\begin{aligned} T : E \times E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (P(t), Q(t)) &\mapsto \int_0^1 P'(t)Q(t)\,dt. \end{aligned}$$

Proveu que T defineix un tensor covariant $T \in \mathcal{T}_2(E)$.

És un 2-tensor perquè derivar $(P'(t))$ i integrar són lineals. Per exemple,

$$T(P_1(t)+P_2(t), Q(t)) = \int_0^1 (P_1'(t)+P_2'(t))q(t)\,dt = \int_0^1 P_1'(t)Q(t)\,dt + \int_0^1 P_2'(t)Q(t)\,dt = T(P_1(t), Q(t)) + T(P_2'(t), Q(t)),$$

i, anàlogament per la segona variable o pel producte per escalars.

(b) *Determineu les coordenades de T en la base $\boldsymbol{e}^i \otimes \boldsymbol{e}^j$.*

Observem que si $P(t) = a_2t^2 + a_1t + a_0, Q(t) = P(t) = b_2t^2 + b_1t + b_0$, aleshores

$$T(P(t), Q(t)) = \int_0^1 (P'(t)Q(t))\,dt = \frac{1}{2}a_2b_2 + \frac{1}{3}(a_1b_2 + 2a_2b_1) + \frac{1}{2}(2a_2b_0 + a_1b_1) + a_1b_0,$$

d'on resulta

$$T = \frac{1}{2}\boldsymbol{e}^2 \otimes \boldsymbol{e}^2 + \frac{1}{3}(\boldsymbol{e}^1 \otimes \boldsymbol{e}^2 + 2\boldsymbol{e}^2 \otimes \boldsymbol{e}^1) + \frac{1}{2}(2\boldsymbol{e}^2 \otimes \boldsymbol{e}^0 + \boldsymbol{e}^1 \otimes \boldsymbol{e}^1) + \boldsymbol{e}^1 \otimes \boldsymbol{e}^0,$$

o, matricialment

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

(Equivalentment, es podia fer calculant $T(\boldsymbol{e}^i, \boldsymbol{e}^j)$.)

(c) *Sigui $d : E \longrightarrow E$ l'aplicació $d(P(t)) = P'(t)$. Expresseu d^*T en termes de la base $\boldsymbol{e}^i \otimes \boldsymbol{e}^j$.*

Calculem d^*T:

$$d^*T(P(t), Q(t)) = T(P'(t), Q'(t)) = \int_0^1 (P''(t)Q'(t))\,dt = \int_0^1 2a_2(2b_2t + b_1)\;dt = 2a_2b_2 + 2a_2b_1,$$

per tant,

$$d^*T = 2(\boldsymbol{e}^2 \otimes \boldsymbol{e}^2 + \boldsymbol{e}^2 \otimes \boldsymbol{e}^1).$$

(d) *Raoneu que, per a tot $p \geq 1$, $d^* : \mathcal{T}_p(E) \longrightarrow \mathcal{T}_p(E)$ és un endomorfisme nilpotent (és a dir, tal que hi ha un m amb $(d^*)^m = 0$) i determineu el seu polinomi mínim. Quina és l'alçada del vector propi generalitzat T?*

Observem que $d : E \longrightarrow E$ satisfà $d^3 = 0$. Si $S \in \mathcal{T}_p(E)$,

$$(d^*)^m S(P_1, \dots, P_m) = S((d^*)^m P_1, \dots, (d^*)^m P_p) = S(0, \dots, 0) = 0$$

per a $m \geq 3$. D'altra banda, $(d^*)^2 \neq 0$: si prenem, per exemple, $S = \boldsymbol{e}^0 \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{e}^0$, aleshores

$$S(P_1, \dots, P_p) = 2^p \prod_{i=1}^{p} a_0^i, \qquad \text{on } P_i(t) = a_2^i t^2 + a_1^i t + a_0^i,$$

per la qual cosa $(d^*)^2 S(t^2, \dots, t^2) = 2^p$. És a dir, $(d^*)^2 S \neq 0$. En definitiva, d^* és nilpotent d'ordre 3.

Finalment: $(d^*)^2 T(P, Q) = T(P''', Q'') = T(0, Q'') = 0$, és a dir, T és d'alçada 2.