Facultat de Matemàtiques i Estadística

Universitat Politècnica de Catalunya - BarcelonaTech

Càlcul Diferencial (Q2)

Àlex Batlle Casellas

March 19, 2019

Índex

1 Topologia d'$\mathbb{R}^n$.

Preliminars.

Estructura afí de $\mathbb{R}^n$. $\mathbb{A} = (A, E, \phi)$ és un espai afí, amb

$$\begin{aligned} \phi \colon A \times A &\to E \\ q &\mapsto \phi(p,q) \end{aligned}$$

com a funció d'assignació de vectors entre dos punts. Es té que, per $p \in A$ fixat,

$$\begin{aligned} \phi_p \colon A &\to E \\ q &\mapsto \phi(p,q) \end{aligned}$$

és bijectiva. En aquest curs, prendrem $A = \mathbb{R}^n$.

1.1 Nocions de topologia.

1.1.1 Espais mètrics i normats.

<u>**Definició**</u>:
Sigui M un conjunt. Una **distància en** M és una aplicació

$$\begin{aligned} d \colon M \times M &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto d(x,y). \end{aligned}$$

tal que compleix, $\forall x, y, z \in M$:

1. Definida positiva: $d(x,y) \geq 0$.
2. No degeneració: $d(x,y) = 0 \iff x = y$.
3. Simetria: $d(x,y) = d(y,x)$.
4. Desigualtat triangular: $d(x,y) \leq d(x,z) + d(y,z)$.

Un **espai mètric** és un parell (M, d).
<u>**Definició**</u>:
Sigui E un $\mathbb{R}$-e.v. de dimensió arbitrària. Una **norma en** E és una aplicació

$$\begin{aligned} ||\cdot|| \colon E &\to \mathbb{R} \\ v &\mapsto ||v|| \end{aligned}$$

tal que compleix, $\forall u, v \in E$:

1. Definida positiva: $||u|| \geq 0$.
2. No degeneració: $||u|| = 0 \iff u = \vec{0}$.
3. Multiplicació per escalar: $||\lambda u|| = |\lambda|\ ||u|| \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

4. Desigualtat triangular: $||u+v|| \leq ||u|| + ||v||$.

Un **espai normat** és un parell $(E, ||\cdot||)$.
Proposició:
Si $(E, ||\cdot||)$ és un espai normat, aleshores (E, d) és un espai mètric, amb d la distància associada a la norma $||\cdot||$, $d(u,v) := ||u-v||$.
Demostració:
Les propietats (1),(2), i (4) d'espai mètric són immediates (s'hereten de les propietats de la norma). Comprovem la propietat (3) d'espai mètric: siguin $u, v \in E$, aleshores

$$d(u,v) := ||u-v|| = ||-(v-u)|| = |-1| \; ||v-u|| = ||v-u|| =: d(v,u). \square$$

Definició:
Sigui E un $\mathbb{R}$-e.v. Un **producte escalar euclidià** en E és una aplicació

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E &\to \mathbb{R} \\ (u,v) &\mapsto \langle u, v \rangle \end{aligned}$$

tal que compleix, $\forall u, v, w \in E, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

1. Linealitat: $\langle \alpha u + \beta v, w \rangle = \alpha \langle u, w \rangle + \beta \langle v, w \rangle$.
2. Simetria: $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$.
3. Definida positiva: $\langle v, v \rangle \geq 0$.
4. No degeneració: $\langle v, v \rangle = 0 \iff v = \vec{0}$.

Un **espai euclidià** és un parell $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.
Proposició:
Si $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ és un espai euclidià, aleshores $(E, ||\cdot||)$ és un espai normat, amb $||\cdot||$ la norma inuïda per el producte escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$, $||u|| := +\sqrt{\langle u, u \rangle}$.
Demostració:

Proposició:
El producte escalar i la seva norma associada tenen les següents propietats, $\forall u, v \in E$:

1. $|\langle \cdot, \cdot \rangle| \leq ||u|| \; ||v||$. (Desigualtat de Cauchy-Schwarz)
2. $||u-v|| \geq ||u|| - ||v||$.
3. $||u+v||^2 + ||u-v||^2 = 2||u||^2 + 2||v||^2$. (Identitat del paral·lelogram)
4. $||u+v||^2 - ||u-v||^2 = 4 \langle u, v \rangle$. (Identitat de polarització)
5. Si $u = (u_i)$, aleshores $|u_i| \leq ||u|| \leq \sum_{i=1}^{n} |u_i|$.

Demostració:

Proposició:
A $\mathbb{R}^n$ es defineix:

1. $\langle u, v \rangle_2 := \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$, on $u = (u_i), v = (v_i)$.
2. $||u||_2 := \sqrt{\langle u, u \rangle_2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} u_i v_i}$.
3. $d(u, v)_2 := ||u - v||_2 = \sqrt{\langle u - v, u - v \rangle_2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (u_i - v_i)^2}$.

Demostració:

1.1.2 Boles i entorns.

(M, d) espai mètric.
Definició:
$p \in M, r \in \mathbb{R}^+$.

1. **Esfera** amb centre a p i radi r:

$$S_r(p) \equiv S(p, r) = \{q \in M \mid d(p, q) = r\}.$$

2. **Bola oberta** amb centre a p i radi r:

$$B_r(p) \equiv B(p, r) = \{q \in M \mid d(p, q) < r\}.$$

3. **Bola tancada** amb centre a p i radi r:

$$\bar{B}_r(p) \equiv \bar{B}(p, r) = \{q \in M \mid d(p, q) \leq r\}.$$

4. **Bola perforada** amb centre a p i radi r (pot ser oberta o tancada):

$$B_r^*(p) \equiv B^*(p, r) = \{q \in M \mid d(p, q) \leq r\} - \{p\}.$$

Definició:
$A \subseteq M$. A és un **conjunt fitat** si $\exists B_r(p), p \in A: \ A \subseteq B_r(p)$.
Definició:
$p \in M$. Un **entorn de** p és un conjunt $E(p) \subseteq M$ fitat tal que $\exists B_r(p) \subseteq E(p)$.