Àlex Batlle Casellas

12. Si $A \subset \mathbb{R}^{\mathrm{m}}$, demostreu que:

a) $\mathring{A}$ és el conjunt obert més gran contingut en A. És a dir, si B és un obert dins A, aleshores $B \subset \mathring{A}$.

b) $\bar{A}$ és el conjunt tancat més petit que conté A. És a dir, si C és un tancat que conté A, aleshores $\bar{A} \subset C$.

Resolució

a) B és obert $\iff \mathring{B} = B \iff \forall p \in B\ \exists B_r(p) \subset B \implies \forall p \in B \subset A\ \exists B_r(p) \subset B \subset A \implies \mathring{B} \subset \mathring{A} \implies B \subset \mathring{A}.\square$

b) $\forall p \in \bar{A}\ (\forall B_r(p)\ A \cap B_r(p) \neq \emptyset) \implies \forall p \in \bar{A}\ (\forall B_r(p)\ C \cap B_r(p) \neq \emptyset) \implies \forall p \in \bar{A}, p \in \bar{C} = C \implies \bar{A} \subset C.\square$

13. Donats dos conjunts A, B, es defineix $A + B = \{x + y \mid x \in A, y \in B\}$. Suposeu A obert.

a) Demostreu que si $y \in B$, el conjunt $A + \{y\}$ és obert.

b) Demostreu que el conjunt $A + B$ és obert.

Resolució

a) $A + \{y\} = \{a + y \mid a \in A\}$. Com que la suma ha d'estar ben definida, sumar y al conjunt és anàleg a fer un desplaçament fixat de tot el conjunt A. Aquesta operació no modifica l'estructura d'A, doncs només el desplaça a una altra localització dins del conjunt ambient M, i els elements de la frontera d'A segueixen sense pertànyer a $A + \{y\}$. Per tant, sabent que $\operatorname{Int} A, \operatorname{Fr} A, \operatorname{Ext} A$ formen una partició del conjunt ambient per qualsevol conjunt A, segueix que $A + \{y\} = \operatorname{Int}(A + \{y\})$, i per tant, $A + \{y\}$ és un obert.$\square$

b) Això ho podem veure utilitzant l'apartat anterior; $A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$ és el mateix que la unió següent:

$$\bigcup_{y \in B} (A + \{y\}).$$

Com que $A + \{y\}$ és obert i és sabut que la unió arbitrària d'oberts és oberta, es dedueix que $A + B$ és un obert.

15. Demostreu que:

a) La intersecció d'un nombre arbitrari (finit o infinit) de subconjunts compactes de $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ també és compacte.

b) La unió d'un nombre finit de subconjunts compactes de $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ també és compacte.

c) La unió d'un nombre infinit de subconjunts compactes de $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ pot no ser compacte. (Doneu-ne exemples).

Resolució

a) Com que ens trobem a $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$, n'hi ha prou amb veure que la intersecció arbitrària de tancats és tancada (vist a teoria) i que la intersecció arbitrària de fitats és fitada.

Tancada. Vist a teoria.

Fitada. Tenim un nombre arbitrari de conjunts fitats $\{A_\alpha\}, A_\alpha \subseteq M$. Sabem, com a propietat elemental de conjunts, que $\bigcap_\alpha A_\alpha \subseteq A_i \ \forall i$. Com que els A_i són fitats, existeix una bola $B_{r_i}(p_i)$, per algun $p_i \in A_i$ tal que $A_i \subseteq B_{r_i}(p_i)$. Per tant, sigui $B_{r_0}(p_0)$ la bola més gran que fita els conjunts A_i; aleshores tenim $\bigcap_\alpha A_\alpha \subseteq A_i \subseteq B_{r_0}(p_0) \ \forall i$ i, per tant, $\bigcap_\alpha A_\alpha$ està fitat.$\square$

b) Com que ens trobem a $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$, n'hi ha prou amb veure que la unió finita de tancats és tancada (vist a teoria) i que la unió finita de fitats és fitada.

Tancada. Vist a teoria.

Fitada. Sigui $\{A_\alpha\}$ una família finita de n subconjunts fitats de $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$. Aleshores, segueix que $\forall \alpha \ \exists p_\alpha \in A_\alpha, r_\alpha \in \mathbb{R}^+ : A_\alpha \subseteq B_{r_\alpha}(p_\alpha)$. Aleshores, siguin p_0 un p_α qualsevol i $r_0 = \max\{r_1, \ldots, r_n\} + \max_j\{d(p_0, p_j)\}$. Llavors tenim

$$\bigcup_\alpha A_\alpha \subseteq B_{r_0}(p_0).$$

c) Donaré dos exemples:

(1) Siguin $I_n = [-n, n] \subset \mathbb{R}$. Aleshores, tenim $\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n = \mathbb{R}$, que no és compacte.

(2) Siguin $T_n \equiv \bar{B}_n(0) \subset \mathbb{R}^m$. Aleshores, tenim $\bigcup_{n=1}^{\infty} T_n = \mathbb{R}^{\mathrm{m}}$, que tampoc és compacte.

En tots dos exemples, tant I_n com T_n són compactes doncs són tancats i fitats (i sabem que a $\mathbb{R}^n$ això equival a ser compacte).