Entregable 3: Descomposició de $\mathscr{T}^3(E)$.

Àlgebra Multilineal i Geometria. Grau en Matemàtiques, UPC, tardor 2020.

Àlex Batlle Casellas

Sigui E un espai vectorial sobre un cos $\mathbf{k}$, de dimensió finita n. Sabem que per als 2-tensors contravariants se satisfà $\mathscr{T}^2(E) = \mathcal{S}^2(E)\oplus\mathcal{A}^2(E)$. L'objectiu és donar una descomposició similar per als 3-tensors $\mathscr{T}^3(E) = E\otimes E\otimes E$. Denotem per $\mathcal{S}^{1,2}(E)\otimes E$ la imatge de l'aplicació lineal $\rho_{1,2} : \mathscr{T}^3(E) \to \mathscr{T}^3(E)$ que sobre els tensors descomponibles està definida per

$$\rho_{1,2}(\mathbf{v}_1\otimes\mathbf{v}_2\otimes\mathbf{v}_3) = \frac{1}{2}(\mathbf{v}_1\otimes\mathbf{v}_2\otimes\mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_2\otimes\mathbf{v}_1\otimes\mathbf{v}_3).$$

És a dir, simetritza les dues primeres posicions. Anàlogament es poden definir les aplicacions $\rho_{1,3}, \rho_{2,3}$, que simetritzen les posicions 1,3 i 2,3 respectivament.
Denotem per $\mathcal{S}_{1,3}(E)\otimes E$ la imatge de l'aplicació lineal $\rho^{1,3} : \mathscr{T}^3(E) \to \mathscr{T}^3(E)$ que sobre els tensors descomponibles està definida per

$$\rho^{1,3}(\mathbf{v}_1\otimes\mathbf{v}_2\otimes\mathbf{v}_3) = \frac{1}{2}(\mathbf{v}_1\otimes\mathbf{v}_2\otimes\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_3\otimes\mathbf{v}_2\otimes\mathbf{v}_1).$$

És a dir, antisimetritza les posicions 1 i 3. Anàlogament es poden definir les aplicacions $\rho^{1,2}, \rho^{2,3}$ que antisimetritzen les posicions 1,2 i 2,3 respectivament.
1. Proveu que $\rho_{1,2}$ és un projector i calculeu la dimensió de $\mathcal{S}^{1,2}(E)\otimes E$. Trobeu la dimensió de $\mathcal{S}^{1,2}(E)\otimes E\cap\mathcal{S}^3(E)$ i de $\mathcal{S}^{1,2}(E)\otimes E\cap\mathcal{A}^3(E)$.

Vegem que si tenim un $T\in\mathcal{S}^{1,2}(E)\otimes E$, aleshores $\rho_{1,2}(T) = T$: per a tots els $\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \mathbf{v}^3 \in E^*$

$$\begin{aligned}\rho_{1,2}(T)(\mathbf{v}^1,\mathbf{v}^2,\mathbf{v}^3) &= \frac{1}{2}(T(\mathbf{v}^1,\mathbf{v}^2,\mathbf{v}^3) + T(\mathbf{v}^2,\mathbf{v}^1,\mathbf{v}^3)) = \\ &\qquad 2\cdot\frac{1}{2}T(\mathbf{v}^1,\mathbf{v}^2,\mathbf{v}^3) = T(\mathbf{v}^1,\mathbf{v}^2,\mathbf{v}^3).\end{aligned}$$

Per tant, $\rho_{1,2}(T) = T$ per qualsevol $T\in\mathcal{S}^{1,2}(E)\otimes E$, i per tant, $\rho_{1,2}$ és un projector. Com que $\mathcal{B} = \{e_i\otimes e_j\otimes e_k : 1\le i,j,k\le n\}$ és base de $\mathscr{T}^3(E)$ i $\rho_{1,2}$ és un projector (en particular, exhaustiu sobre la seva pròpia imatge), sabem que $\rho_{1,2}(\mathcal{B})$ és un conjunt generador de $\mathcal{S}^{1,2}(E)\otimes E$. Com que $\rho_{1,2}(e_i\otimes e_j\otimes e_k) = \rho_{1,2}(e_j\otimes e_i\otimes e_k)$, hi ha tantes tries pels dos primers elements com combinacions d'n elements agafats de 2 en 2 amb repetició. Això val $\binom{n+2-1}{2} = \binom{n+1}{2} = \frac{n^2+n}{2}$. Pel tercer, tenim n tries, perquè triem el que triem sortiran dos elements diferents de la base. Per tant, tenim

$$\dim\left(\mathcal{S}^{1,2}(E)\otimes E\right) = n\frac{n^2+n}{2} = \frac{n^3+n^2}{2} < n^3 = \dim\mathscr{T}^3(E).$$

Per calcular les dimensions de les interseccions, observem primer que $\mathcal{S}^3(E)\subset\mathcal{S}^{1,2}(E)\otimes E$: si $T\in\mathcal{S}^3(E)$, aleshores $\forall\sigma\in\mathfrak{S}_3$ es té que $\sigma T = T$. Per tant, en particular, per $\tau = \begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}\in\mathfrak{S}_3$, que intercanvia les dues primeres posicions, tenim que $\tau T = T$, i per tant, que $T\in\mathcal{S}^{1,2}(E)\otimes E$. Per tant, $\mathcal{S}^{1,2}(E)\otimes E\cap\mathcal{S}^3(E) = \mathcal{S}^3(E)$, i la dimensió de la intersecció és per tant la mateixa que la de l'espai dels tensors simètrics. Aquesta es pot calcular seguint el mateix raonament que abans: com que dos elements de la base de $\mathscr{T}^3(E)$ seran iguals si tenen els mateixos elements, en ordre arbitrari, ara comptem el nombre de combinacions amb repetició de n elements agafats de 3 en 3, que és $\binom{n+3-1}{3} = \binom{n+2}{3} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} = \frac{n^3+3n^2+2n}{6}$. Aquest nombre té sentit, ja que és menor (o igual) que

$\frac{n^3+n^2}{2}$ per a tota $n \in \mathbb{N}$.

Observem ara que $\mathcal{A}^3(E)$ i $\mathcal{S}^{1,2}(E) \otimes E$ tenen intersecció $\{0\}$:

$$T \in \mathcal{A}^3(E) \iff \forall \sigma \in \mathfrak{S}_3,\ \sigma T = \varepsilon(\sigma) T.$$

Si $T \in \mathcal{S}^{1,2}(E) \otimes E$, aleshores $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ i $T = \tau T = \varepsilon(\sigma) T = -T \implies T = 0$. Per tant, la intersecció és $\{0\}$ i aleshores, la dimensió de la intersecció és 0. En resum,

- $\dim\left(\mathcal{S}^{1,2}(E) \otimes E\right) = \dfrac{n^3+n^2}{2}$
- $\dim\left(\mathcal{S}^{1,2}(E) \otimes E \cap \mathcal{S}^3(E)\right) = \dfrac{n^3+3n^2+2n}{6}$
- $\dim\left(\mathcal{S}^{1,2}(E) \otimes E \cap \mathcal{A}^3(E)\right) = 0$

2. Proveu que $\rho^{1,3}$ és un projector i calculeu la dimensió d'$\mathcal{A}^{1,3}(E) \otimes E$. Trobeu la dimensió de $\mathcal{S}_{1,3}(E) \otimes E \cap \mathcal{S}^3(E)$ i de $\mathcal{S}_{1,3}(E) \otimes E \cap \mathcal{A}^3(E)$.

Si $T \in \mathcal{S}_{1,3}(E) \otimes E$, aleshores $\rho^{1,3}(T)(\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \mathbf{v}^3) = \frac{1}{2} T(\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \mathbf{v}^3) - \frac{1}{2} T(\mathbf{v}^3, \mathbf{v}^2, \mathbf{v}^1) = \frac{1}{2} T(\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \mathbf{v}^3) + \frac{1}{2} T(\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \mathbf{v}^3) = T(\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \mathbf{v}^3)$. Per tant, $\rho^{1,3}$ és un projector. Per aquest motiu, precisament, sabem que el conjunt següent

$$\left\{\rho^{1,3}\left(e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes e_{i_3}\right)\right\}_{1 \leq i_j \leq n}$$

és generador de $\mathcal{S}_{1,3}(E) \otimes E$. Com que $\rho^{1,3}\left(e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes e_{i_3}\right) = -\rho^{1,3}\left(e_{i_3} \otimes e_{i_2} \otimes e_{i_1}\right)$, podem escollir n elements per i_2, i per les altres dues components, altre cop les combinacions amb repetició de 2 elements sobre un conjunt d'n elements. En definitiva, ens queda la mateixa dimensió que hem calculat a l'apartat anterior, $\dfrac{n^3+n^2}{2}$.
Ara comprovem que $\mathcal{S}_{1,3}(E) \otimes E \cap \mathcal{S}^3(E) = \{0\}$. Si fos un $T \in \mathcal{S}_{1,3}(E) \otimes E \cap \mathcal{S}^3(E)$, per a tota permutació del grup simètric de 3 elements, la seva acció sobre T el deixa invariant. Per ser de la imatge de $\rho^{1,3}$, per la permutació $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, és $\tau T = -T$. Però, com que $\tau \in \mathfrak{S}_3$, tenim que $T = \tau T = -T \implies T \equiv 0$.
Vegem que $\mathcal{A}^3(E) \subseteq \mathcal{S}_{1,3}(E) \otimes E$: si $T \in \mathcal{A}^3(E)$, aleshores $\sigma T = \varepsilon(\sigma) T$ per a qualsevol $\sigma \in \mathfrak{S}_3$. En particular, tenim que per τ és $\tau T = -T$, i per tant, que $T \in \mathcal{S}_{1,3}(E) \otimes E$. Per tant, la dimensió de $\dim\left(\mathcal{S}_{1,3}(E) \otimes E \cap \mathcal{A}^3(E)\right) = \dim\left(\mathcal{A}^3(E)\right) = \binom{n}{3}$.

3. Definim $\mathcal{S}_3^{1,2}$ com la imatge de la composició

$$\mathscr{T}^3(E) \xrightarrow{\rho_{1,3}} \mathscr{T}^3(E) \xrightarrow{\rho^{1,2}} \mathscr{T}^3(E)$$

Proveu que

(a) $\mathcal{S}_3^{1,2} \cap \mathcal{S}^3(E) = \{0\}, \mathcal{S}_3^{1,2} \cap \mathcal{A}^3(E) = \{0\}$.

(b) $\mathcal{S}_3^{1,2} \cap \mathcal{S}_2^{1,3} = \{0\}$.

(a)
Veiem que els elements de $\mathcal{S}_3^{1,2}$ (diferents de 0) no són ni simètrics ni antisimètrics. Sigui $\tau_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Aleshores, $\tau_{1,2}T = -T$ per definició de l'espai $\mathcal{S}_3^{1,2}$. Si T fos simètric, $\tau_{1,2}T$ seria igual a T. Aleshores, tindríem $T = -T$, i per tant, $T \equiv 0$.
Veurem que T no és antisimètric veient que hi ha una transposició per la qual no surt $-T$. T serà de la forma

$$T = \left(\rho^{1,2} \circ \rho_{1,3}\right)(\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{v}_3) = \rho^{1,2}\left(\frac{1}{2}v_1 \otimes \mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{v}_3 + \frac{1}{2}\mathbf{v}_3 \otimes \mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{v}_1\right) =$$
$$\frac{1}{4}v_1 \otimes \mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{v}_3 + \frac{1}{4}\mathbf{v}_3 \otimes \mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{v}_1 - \frac{1}{4}v_2 \otimes \mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_3 - \frac{1}{4}\mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{v}_3 \otimes \mathbf{v}_1.$$

Nota: a partir d'ara, obviarem el producte $\otimes$; quan vulguem escriure $\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2$, escriurem $\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2$.
Es comprova immediatament que $\tau_{1,2}$ sí que compleix que $\tau_{1,2}T = -T$, però per $\tau_{1,3}$ (definida per analogia amb $\tau_{1,2}$), veiem que $\tau_{1,3}T \neq -T$. Per tant, T tampoc és antisimètric. Per tant, hem vist que $\mathcal{S}_3^{1,2} \cap \mathcal{S}^3(E) = \{0\}$, i que $\mathcal{S}_3^{1,2} \cap \mathcal{A}^3(E) = \{0\}$.

(b)
D'una banda, si $T \in \mathcal{S}_3^{1,2}$, aleshores $\tau_{1,2}T = -T$. Com que també tenim que $T \in \mathcal{S}_2^{1,3}$, aleshores T és de la forma

$$T = \frac{1}{4}\left(\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2\mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_2\mathbf{v}_1\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_3\mathbf{v}_2\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_3\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2\right).$$

Si fem $\tau_{1,2}T$, ens surt

$$\tau_{1,2}T = \frac{1}{4}\left(\mathbf{v}_2\mathbf{v}_1\mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_1\mathbf{v}_2\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_2\mathbf{v}_3\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_1\mathbf{v}_3\mathbf{v}_2\right).$$

Veiem que $\tau_{1,2}T = -T \iff T \equiv 0$.

4. Deduïu que es té una descomposició de $\mathscr{T}^3(E)$ en suma directa

$$\mathscr{T}^3(E) = \mathcal{S}^3(E) \oplus \mathcal{S}_3^{1,2} \oplus \mathcal{S}_2^{1,3} \oplus \mathcal{A}^3(E).$$

Com que ja hem vist que les interseccions són buides, ara observem que tot tensor T de $\mathscr{T}^3(E)$ es pot escriure com

$$T = S + A + T_3 + T_2,$$

amb $S \in \mathcal{S}^3(E), A \in \mathcal{A}^3(E), T_2 \in \mathcal{S}_2^{1,3}, T_3 \in \mathcal{S}_3^{1,2}$. Veiem que, en efecte, $T = \mathbf{v}_1\mathbf{v}_2\mathbf{v}_3$ es pot escriure com:

$$T = \mathbf{v}_1\mathbf{v}_2\mathbf{v}_3 = \frac{4}{3}\left(\rho^{1,2} \circ \rho_{1,3}\right)(T) + \frac{4}{3}\left(\rho^{1,3} \circ \rho_{1,2}\right)(T) + S(T) + A(T).$$

Primer de tot, calculem cadascun dels summands:

$$S(T) = \frac{1}{6}\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_3} \sigma T = \frac{1}{6}\left(\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2\mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_1\mathbf{v}_3\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_2\mathbf{v}_1\mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_2\mathbf{v}_3\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3\mathbf{v}_2\mathbf{v}_1\right) \in \mathcal{S}^3(E);$$
$$A(T) = \frac{1}{6}\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_3} \varepsilon(\sigma)\sigma T = \frac{1}{6}\left(\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_1\mathbf{v}_3\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_2\mathbf{v}_1\mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_2\mathbf{v}_3\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3\mathbf{v}_2\mathbf{v}_1\right) \in \mathcal{A}^3(E);$$
$$T_3 = \frac{4}{3}\left(\rho^{1,2} \circ \rho_{1,3}\right)(T) = \frac{1}{3}\left(\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2\mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_3\mathbf{v}_2\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\mathbf{v}_1\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_2\mathbf{v}_3\mathbf{v}_1\right) \in \mathcal{S}_3^{1,2};$$
$$T_2 = \frac{4}{3}\left(\rho^{1,3} \circ \rho_{1,2}\right)(T) = \frac{1}{3}\left(\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_3\mathbf{v}_2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2\mathbf{v}_1\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_3\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2\right) \in \mathcal{S}_2^{1,3}.$$

No és immediat, però observem que en sumar aquests quatre elements, ens queda $T = \mathbf{v}_1\mathbf{v}_2\mathbf{v}_3$. Per tant, concloem que $\mathscr{T}^3(E) = \mathcal{S}^3(E) \oplus \mathcal{S}_3^{1,2} \oplus \mathcal{S}_2^{1,3} \oplus \mathcal{A}^3(E)$.

5. La descomposició anterior no és canònica, podríem utilitzar en el seu lloc els subespais $\mathcal{S}_2^{3,1}$ i $\mathcal{S}_1^{3,2}$, per exemple. Proveu que

$$\mathcal{S}_1^{3,2} \subseteq \mathcal{S}_2^{1,3} \oplus \mathcal{S}_3^{1,2}.$$

Sigui $T = \mathbf{v}_1\mathbf{v}_2\mathbf{v}_3$. Aleshores, $\left(\rho^{3,2} \circ \rho_{3,1}\right)(v_1v_2v_3) = \dfrac{1}{4}\left(\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2\mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_3\mathbf{v}_2\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_1\mathbf{v}_3\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2\right) \in \mathcal{S}_1^{3,2}$, i ho podem escriure també com

$$\left(\rho^{3,2} \circ \rho_{3,1}\right)(\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2\mathbf{v}_3) = \left(\rho^{1,2} \circ \rho_{1,3}\right)(\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2\mathbf{v}_3) - \left(\rho^{1,3} \circ \rho_{1,2}\right)(\mathbf{v}_1\mathbf{v}_3\mathbf{v}_2).$$

Vegem-ho: primer, calculem les imatges de la dreta:

$$\begin{aligned}
\left(\rho^{1,2} \circ \rho_{1,3}\right)(\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2\mathbf{v}_3) &= \frac{1}{4}\left(\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2\mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_3\mathbf{v}_2\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\mathbf{v}_1\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_2\mathbf{v}_3\mathbf{v}_1\right) \in \mathcal{S}_3^{1,2};\\
\left(\rho^{1,3} \circ \rho_{1,2}\right)(\mathbf{v}_1\mathbf{v}_3\mathbf{v}_2) &= \frac{1}{4}\left(\mathbf{v}_1\mathbf{v}_3\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_2\mathbf{v}_3\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\mathbf{v}_1\mathbf{v}_3\right) \in \mathcal{S}_2^{1,3}.
\end{aligned}$$

Aleshores, en efecte, tenim que

$$\begin{aligned}
\left(\rho^{1,2} \circ \rho_{1,3}\right)(\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2\mathbf{v}_3) - \left(\rho^{1,3} \circ \rho_{1,2}\right)(\mathbf{v}_1\mathbf{v}_3\mathbf{v}_2) &= \frac{1}{4}\left(\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2\mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_3\mathbf{v}_2\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\mathbf{v}_1\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_2\mathbf{v}_3\mathbf{v}_1\right)\\
&\quad -\frac{1}{4}\left(\mathbf{v}_1\mathbf{v}_3\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_2\mathbf{v}_3\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\mathbf{v}_1\mathbf{v}_3\right)\\
= \frac{1}{4}\left(\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2\mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_3\mathbf{v}_2\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\mathbf{v}_1\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_2\mathbf{v}_3\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_1\mathbf{v}_3\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_2\mathbf{v}_3\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2\mathbf{v}_1\mathbf{v}_3\right)&\\
&= \frac{1}{4}\left(\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2\mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_3\mathbf{v}_2\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_1\mathbf{v}_3\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2\right)\\
&= \left(\rho^{3,2} \circ \rho_{3,1}\right)(\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2\mathbf{v}_3).
\end{aligned}$$