Connexió

5.1 X espai topològic, $(C_i)_{i\in I}$ família de subespais connexos tals que $C_i \cap C_j \neq \varnothing$ per a qualssevol i, j.
Proveu que $C = \cup_{i\in I} C_i$ és connex.

Recordem que un espai topològic X és ***no connex*** quan es pot escriure $X = U \sqcup V$, unió disjunta d'oberts no buits.

En primer lloc, podem suposar que I no és buit (altrament $C = \varnothing$, que és connex).

Suposem que podem escriure el conjunt C com $C = U \sqcup V$, unió disjunta d'oberts de C. Provarem que un d'ells és buit.

Cada C_i és un subespai de C, i amb la descomposició anterior es pot escriure $C_i = (C_i \cap U) \sqcup (C_i \cap V)$, unió disjunta d'oberts de C_i. Com que C_i és connex, un d'aquests conjunts ha de ser buit, l'altre el total.
En deduïm que cada C_i es troba contingut bé en U, bé en V.

Suposem que, per a un cert índex $i_\circ$, tenim $C_{i_\circ} \subset U$.
Per hipòtesi, per a qualsevol índex i tenim $C_{i_\circ} \cap C_i \neq \varnothing$, i a més $C_{i_\circ} \cap C_i \subset U$.
En deduïm que C_i talla U, i, per l'observació prèvia, $C_i \subset U$.

Així doncs $C \subset U$, de manera que $V = \varnothing$.

Hem provat, doncs, que C és connex.

5.2 Sigui $(C_n)_{n\geq 1}$ una successió de subconjunts connexos tals que $C_n \cap C_{n+1} \neq \varnothing$ per a tot n.
Proveu que $\cup_{n\geq 1} C_n$ és connex.

Segons el problema anterior, $C_1 \cup C_2$ és connex, i procedint per inducció $(C_1 \cup C_2) \cup C_3$ també ho és, etc.

Així doncs els conjunts $D_n = C_1 \cup \ldots \cup C_n$ són connexos.

Òbviament dos qualssevol d'aquests conjunts D_m, D_n són no disjunts; de fet, un està contingut dins de l'altre.
Aplicant de nou el problema anterior (o bé que la unió de conjunts connexos amb intersecció no buida és connex), deduïm que $\cup_{n\geq 1} D_n = \cup_{n\geq 1} C_n$ és connex.

5.3 Siguin $A \subset B \subset \overline{A}$ subconjunts d'un espai topològic X.
Si A és connex, B també.

Suposarem que B no és connex, i en deduïrem que A tampoc no ho és.

Si B ***no*** és connex, podem trobar oberts $U, V \subset X$ tals que

$$B \subset U \cup V\,, \quad B \cap U \neq \varnothing\,, \quad B \cap V \neq \varnothing\,, \quad B \cap U \cap V = \varnothing\,.$$

Ara bé, tots els punts de B són adherents a A. Recordem que si $x \in \overline{A}$, tot obert que contingui x talla A. Per tant

$$A \cap U \neq \varnothing\,, \quad A \cap V \neq \varnothing\,.$$

Com que $A \subset B$, en deduïm

$$A \subset U \cup V\,, \quad A \cap U \neq \varnothing\,, \quad A \cap V \neq \varnothing\,, \quad A \cap U \cap V = \varnothing\,,$$

i doncs A no és connex.

Això implica en particular que:
Si $A \subset X$ és connex, també $\overline{A}$ és connex.

5.4 Si $A \subset X$ és connex, també ho són el seu interior i la seva frontera?

És fàcil pensar contraexemples en els dos casos.

- $A = \{(x, y \in \mathbf{R}^2 \mid xy \geq 0\}$
  és la unió del primer i el tercer quadrants tancats del pla,
  i és connex (els dos quadrants són connexos i tenen intersecció no buida).

  El seu interior és la unió (disjunta) dels mateixos quadrants però oberts.
- $A = [0, 1] \subset \mathbf{R}$
  és connex per ser un interval de $\mathbf{R}$;
  la seva frontera és $\partial A = \{0, 1\}$, que no és connex.

Si $\overline{A}$ és connex, també ho és A?

No necessàriament.

- $A = \mathbf{R} - \{0\} \subset \mathbf{R}$
  no és connex, però $\overline{A} = \mathbf{R}$ sí.

5.5 Sigui $C \subset X$ un subconjunt d'un espai topològic. Es considera la condició següent:
per a tot parell d'oberts $U, V \subset X$ que siguin disjunts i recobreixin C, o bé $C \cap U = \varnothing$, o bé $C \cap V = \varnothing$.
Aquesta condició implica que C és connex?

No.

Notem la crucial diferència amb la definició de connexió per a C, on es requereix que per a tot parell d'oberts $U, V \subset X$ tals que $C \cap U$ ***i*** $C \cap V$ ***siguin disjunts***...

El problema que ens podem trobar és que l'espai X no tingui prou oberts disjunts per separar punts, però tanmateix sí que en tingui quan veiem aquests oberts en un subespai.

Aquí en tenim un exemple:

- Sigui X un espai topològic ***infinit*** amb la ***topologia cofinita***.
  Recordem que els seus conjunts tancats són X i els conjunts finits.

  Notem que:
  - Un subespai $C \subset X$ també té la topologia cofinita.
  - Si C és finit, la topologia cofinita és la discreta,
    i per tant és connex sii C és buit o un singletó.

  És possible trobar oberts $U, V \subset X$ disjunts no buits?
  No.
  $U \cap V$ és obert i doncs buit o cofinit.
  Però en un conjunt infinit la intersecció de dos subconjunts cofinits és cofinit, no pas buit.

  Dit altrament:
  donats dos oberts disjunts $U, V \subset X$, un d'ells ha de ser buit.

  Així doncs, la presumpta condició de connexió de l'enunciat es compleix trivialment sigui quin sigui C.

  Però si C és finit amb més d'un element, C no és connex.

  Remarca En la discussió anterior hem provat:
  Un conjunt amb la topologia cofinita és connex sii té cardinal 0, 1 o infinit.

5.6 Sigui $A \subset X$ un subconjunt d'un espai topològic.
Demostreu que si un subconjunt connex $C \subset X$ talla A i el seu complementari A^{c}, també talla la frontera ∂A.

Recordem que

$$X = A^\circ \sqcup \partial A \sqcup (A^{\mathrm{c}})^\circ\,.$$

També tenim

$$A \subset A^\circ \sqcup \partial A\,, \quad A^{\mathrm{c}} \subset (A^{\mathrm{c}})^\circ \sqcup \partial A\,.$$

Suposem que C no tallés ∂A. Aleshores

$$C \subset A^\circ \sqcup (A^{\mathrm{c}})^\circ$$

i C estaria dins la unió d'oberts disjunts tallant-los tots dos,
en contradicció amb la hipòtesi de ser connex.

5.7 Un espai topològic és connex sii
no existeix una aplicació contínua suprajectiva $f\colon X \to \{0, 1\}$
(espai discret de dos punts).

Altrament: X no es connex sii existeix una aplicació contínua suprajectiva $f\colon X \to \{0, 1\}$.

Si X no és connex i $X = U \cup V$ amb U, V oberts no buits disjunts, es defineix $f\colon X \to \{0, 1\}$ posant

$$f|_U = 0\,, \quad f|_V = 1\,,$$

que és trivialment contínua i suprajectiva.

Recíprocament, donada f amb aquestes condicions,

$$X = f^{-1}(0) \sqcup f^{-1}(1)$$

és una separació de X.