Tema 8: Classificació de superfícies compactes connexes

Contents

8.1 Varietats

Def 8.1.1. *Un espai topològic X es diu n-varietat o varietat n-dimensional si:*

- *És Hausdorff.*
- *Compleix el segon axioma de numerabilitat (té base numerable d'oberts).*
- *És localment homeomorf a $\mathbb{R}^n$ ($\forall x \in X \quad \exists U_x \subset X, V \subset \mathbb{R}^n$ oberts tq $x \in U_x$ i $U_x \cong V$).*

Una 1-varietat s'anomena corba i una 2-varietat s'anomena superfície.

Exemple 8.1.1. *1. U obert de $\mathbb{R}^n$ és una n-varietat.*

2. *S^n és una n-varietat. En particular, S^1 és una corba i S^2 una superfície.*
3. *Si M és una m-varietat i N és una n-varietat $\Rightarrow$ $M \times N$ és una $(m+n)$-varietat.*
4. *$\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$ és una superfície (per ser producte de 2 corbes).*
5. *Si X és una n-varietat i $C(X)$ és una component connexa $\Rightarrow$ $C(X)$ és una n-varietat.*

Obs 8.1.2. *Per l'estudi de superfícies és suficient classificar les connexes (per l'exemple 5).*

Obs 8.1.3. *No és esperable poder classificar superfícies no compactes. Per exemple, no és esperable poder classificar oberts del pla. Així, ens limitem a superfícies compactes i connexes.*

En dimensió 1 tenim el resultat següent:

Proposició 8.1.4. *Sigui X una corba compacta i connexa. Aleshores $X \cong S^1$*

Proof. Navarro-Pascual, *Topologia Algebraica* □

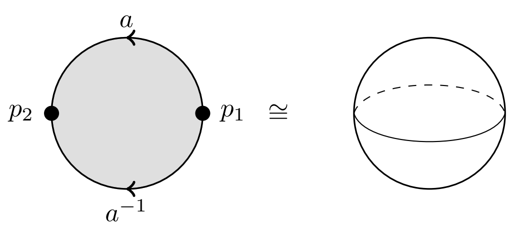
8.2 Superfícies poligonals

Def 8.2.1. *Una superfície poligonal és un e.t. X de la forma $D/\sim$ o $P/\sim$ on:*

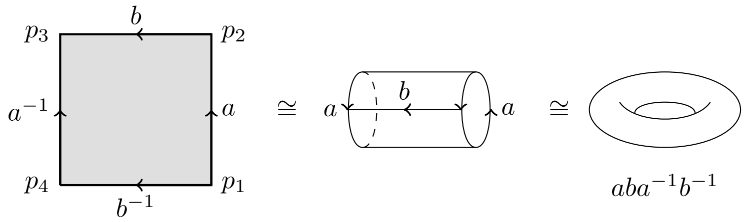
- *D és un disc on hem marcat $2n$ punts equiespaiats enumerats de forma creixent en sentit antihorari $p_1, \dots, p_{2n}$ (o P és un polígon regular de $2n$ vèrtexs $p_1, \dots, p_{2n}$ enumerats anàlogament).*
- *Cada arc (aresta) $\widehat{p_i p_{i+1}}$ s'identifica directament amb un únic altre arc $\widehat{p_j p_{j+1}}$ (o sigui, p_i va a p_j i p_{i+1} va a p_{j+1}) o inversament. Anomenem $\pi_{ij} : \widehat{p_i p_{i+1}} \to \widehat{p_j p_{j+1}}$ l'homeomorfisme entre aquest dos.*

Així doncs, $X = D \big/ < x \sim \pi_{ij}(x), \forall x \in \widehat{p_i p_{i+1}} >$
Per denotar X comencem anomenant el primer costat $a := p_1 p_2$. Si el següent costat $p_2 p_3$ no s'identifica amb l'anterior li donem una nova lletra b. Així successivament fins que arribem a un costat que s'identifica amb un anterior z. Si la identicació és directa, li donem la mateixa lletra z. Si és inversa, li donem el nom de z^{-1}.
Així, X queda determinat per una paraula A de $2n$ caràcters on surten n lletres $a_1, \dots, a_n$ i n lletres que poden ser $a_1^{\pm 1}, \dots, a_n^{\pm 1}$.
Denotem $X = X_A$

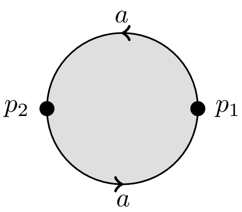
Exemple 8.2.1 (L'esfera S^2).



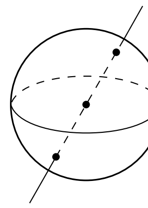
Exemple 8.2.2 (<u>El tor $\mathbb{T}^2$</u>).



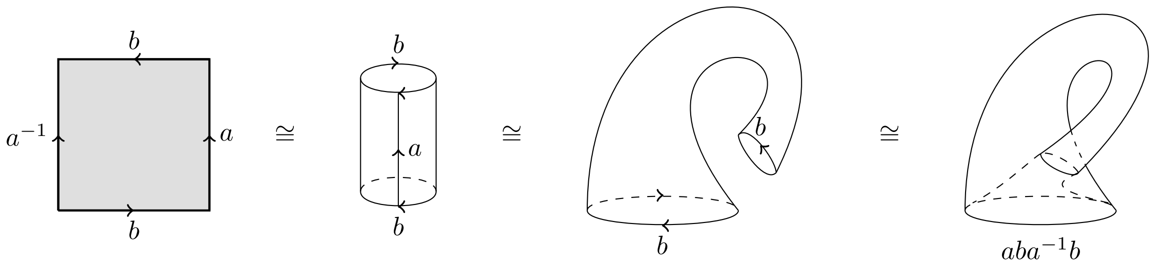
Exemple 8.2.3 (<u>El projectiu $\mathbb{P}^2$</u>).



Recordem que el pla projectiu es defineix com:
$\mathbb{P}^2 = \{\textit{rectes de } \mathbb{R}^3 \textit{ pel } 0\} \cong S^2 \big/ < p \sim -p >$
Donat que l'hemisferi Nord s'identifica amb el Sud, tenim
$\mathbb{P}^2 = S^2_+ \big/ < p \sim -p, p \in \textit{Equador} > \cong D^2 \big/ < p \sim -p, p \in \textit{Equador} >$



Exemple 8.2.4 (<u>L'ampolla de Klein $\mathbb{K}$</u>).



Abans de continuar amb més exemples, cal constatar que:

Proposició 8.2.2. *Sigui X una superfície poligonal. Aleshores X és, efectivament, una 2-varietat. A més, X és compacta i connexa.*

Proof. A [Navarro-Pascual, *Topologia Algebraica*] es demostra que és una 2-varietat. Com que $\pi : D \to D/\sim = X$ és contínua i D és compacte i connex $\Rightarrow X$ és compacte i connex. $\square$

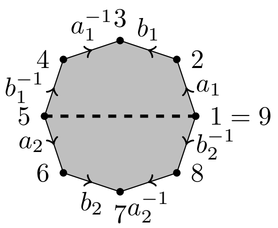
8.3 <u>Superfícies standard</u>

Def 8.3.1. *Les <u>superfícies standard</u> són les superfícies poligonals definides per una de les paraules següents:*

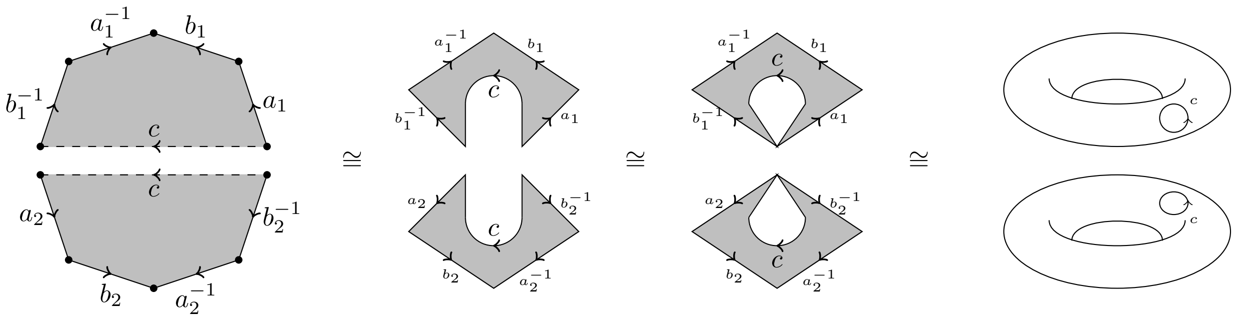
- X_{A_0} *on* $A_0 = aa^{-1}$;
- X_{A_g} *on* $A_g = a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}\cdots a_gb_ga_g^{-1}b_g^{-1}$, $g \geqslant 1$;
- X_{B_g} *on* $B_g = a_1a_1^{-1}\cdots a_ga_g^{-1}$, $g \geqslant 1$.

Obs 8.3.2. $X_{A_0} = S^2$, $X_{A_1} = \mathbb{T}^2$ *i* $X_{B_1} = \mathbb{P}^2$

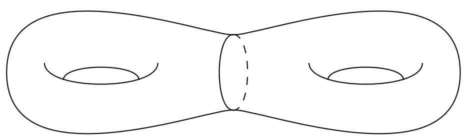
Pregunta 8.3.3. *Què és X_{A_2}?* $\quad A_2 = a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}a_2b_2a_2^{-1}b_2^{-1}$



En primer lloc, observem que tots els vèrtexs s'acaben identificant en un sol punt. Anem a veure què és tallant pel mig:

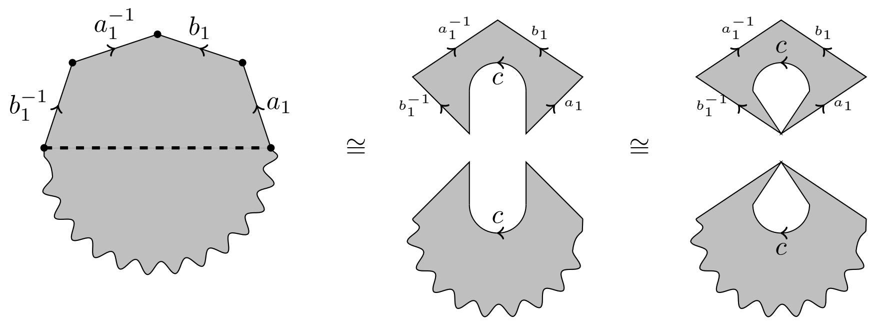


Enganxant per c ens queda:

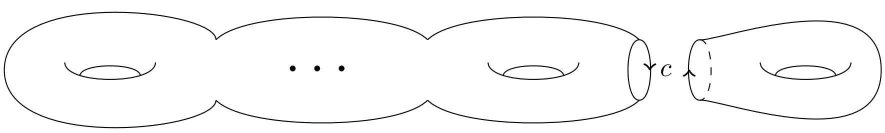


Un <u>*doble tor*</u> *(tor amb dos forats), que denotarem* $2\mathbb{T}^2$

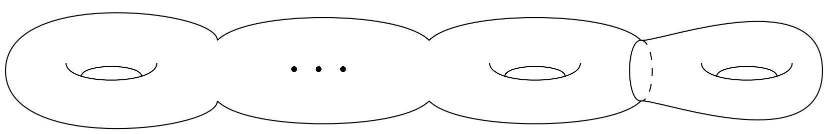
Obs 8.3.4. *Anàlogament* $X_{A_g} = g\mathbb{T}^2$ *ja que* $A_g = A_2 A_{g-1}$ *si* $g > 2$



Per hipòtesi d'inducció

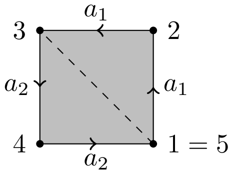


$(g-1)\mathbb{T}^2$ $\mathbb{T}^2$

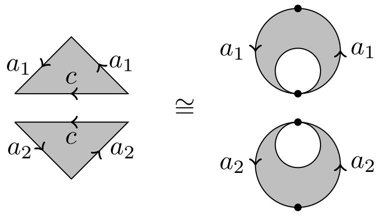


$g\mathbb{T}^2$

Obs 8.3.5. *I què és* X_{B_2}*?* $B_2 = a_1 a_1 a_2 a_2$



Com abans, observem que tots els vèrtexs s'acaben identificant en un sol punt. Tallem per $\overline{13}$*:*



$\frac{\mathbb{P}^2\setminus\mathring{D}_1\sqcup\mathbb{P}^2\setminus\mathring{D}_2}{\partial D_1\sim_h\partial D_2} = 2\mathbb{P}^2$ *On $h: \partial D_1 \to \partial B_2$ és un homeomorfisme*

Aquesta superfície és la suma connexa de dos plans projectius, és a dir, a dos $\mathbb{P}^2$ se'ls treu l'interior de dos discs i s'identifiquen les vores.

Def 8.3.6. *La suma connexa de dues superfícies S_1 i S_2 és l'e.t. $S_1\sharp S_2$ definit per*

$$S_1\sharp S_2 := {(S_1\setminus \mathring{D}_1 \sqcup S_2\setminus \mathring{D}_2)}\Big/{< x \sim f_2^{-1}f_1(x), x\in\partial D_1 >}$$

on $D_i \subseteq S_i$ i on $f_i:\ D_i \xrightarrow{\cong} D\ = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\leqslant 1\}$

Proposició 8.3.7. *Si S_1 i S_2 són superfícies compactes i connexes $\Rightarrow$ $S_1\sharp S_2$ també és una superfície compacta i connexa.*

Proof. Navarro-Pascual, *Topologia Algebraica* □

Proposició 8.3.8. *La definició de $S_1\sharp S_2$ no depén dels discs escollits ni dels homeomorfismes.*

Proof. Navarro-Pascual, *Topologia Algebraica* □

Proposició 8.3.9. *La suma connexa de superfícies compactes i connexes és una operació commutativa i associativa que té S^2 com a element neutre.*

Obs 8.3.10. *Així doncs, les superfícies standard són:*

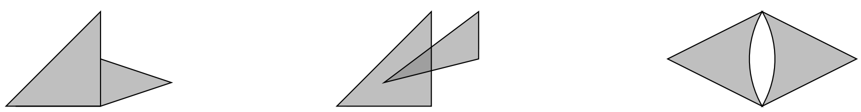
- $X_{A_0} = S^2$;
- $X_{A_g} = g\mathbb{T}^2 = \mathbb{T}^2\sharp \overset{g)}{\cdots} \sharp\mathbb{T}^2$, *suma connexa de g tors, $g\geqslant 1$;*
- $X_{B_g} = g\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}^2\sharp \overset{g)}{\cdots} \sharp\mathbb{P}^2$, *suma connexa de g plans projectius, $g\geqslant 1$.*

8.4 Triangulació de superfícies

Def 8.4.1. *Sigui X una superfície compacta. Una triangulació de X és una família finita de subconjunts tancats $\{T_1,\dots,T_n\}$ que recobreixen $X=\bigcup_{i=1}^n T_i$ i una família d'homeomorfismes $\varphi_i: T\to T_i$ on T és un triangle de $\mathbb{R}^2$.*
Els T_i s'anomenen també triangles, les imatges dels tres vèrtexs de T s'anomenen també vèrtexs i les imatges de les arestes de T s'anomenen també arestes.
Es requereix que dos triangles diferents T_i, T_j siguin:

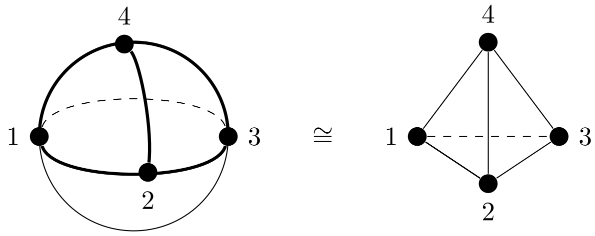
- *O bé disjunts;*
- *O bé tinguin un únic vèrtex comú;*
- *O bé tinguin una única aresta (sencera) en comú*

Exemple 8.4.1. *No pot passar:*



Def 8.4.2. *Anomenem la característica d'Euler d'una superfície S a $\chi(S)=v-a+c$, on v = número de vèrtexs, a = número d'arestes i c = número de cares d'una triangulació.*

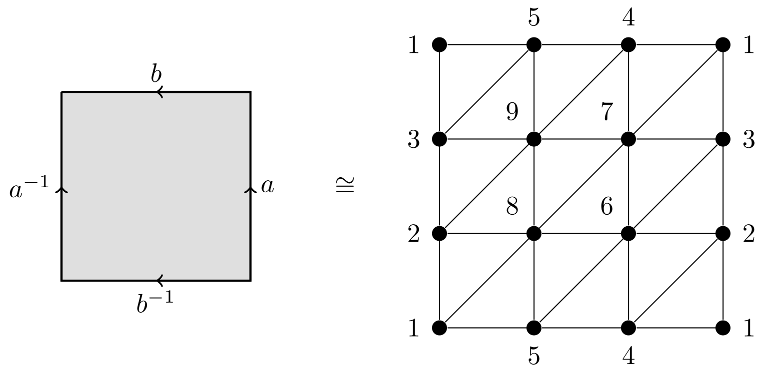
Exemple 8.4.2.



$\chi(S^2) = 4 - 6 + 4 = 2$

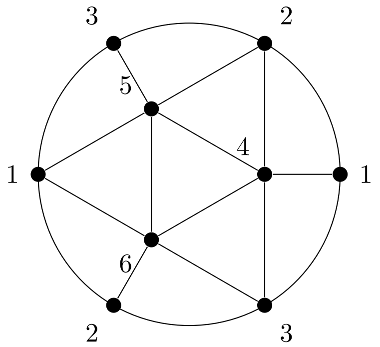
S^2 és triangulable i té $\chi = 2$.

Exemple 8.4.3. *$\mathbb{T}^2$ és triangulable i té $\chi(\mathbb{T}^2) = 0$*



$\chi(\mathbb{T}^2) = 9 - 27 + 18 = 0$

Exemple 8.4.4. *$\mathbb{P}^2$ és triangulable i $\chi(\mathbb{P}^2) = 1$.*



$\chi(\mathbb{P}^2) = 6 - 15 + 10 = 1$

Proposició 8.4.3. *Dues triangulacions d'una superfície S tenen la mateixa característica. És a dir $\chi(S)$ està ben definit: no depen de la triangulació. En particular si $S_1 \cong S_2 \Rightarrow \chi(S_1) = \chi(S_2)$*

Proof. Navarro-Pascual o Massey □

Proposició 8.4.4. *Siguin S_1 i S_2 dues superfícies compactes triangulables. Aleshores $S_1 \sharp S_2$ és superfície compacta triangulable i $\chi(S_1 \sharp S_2) = \chi(S_1) + \chi(S_2) - 2$.*

Proof. Treiem de S_1 l'interior d'un triangle T_{11}.
Treiem de S_2 l'interior d'un triangle T_{21}.
Identifiquem la vora de T_{11} amb la de T_{21} obtenint $S_1 \sharp S_2$.
Aleshores

$$\begin{array}{rcccccc}
\chi(S_1 \sharp S_2) & = & (v_1 - 3) & + & (v_2 - 3) & + & 3 \\
 & - & [(a_1 - 3) & + & (a_2 - 3) & + & 3] \\
 & + & (c_1 - 1) & + & (c_2 - 1) & & \\
 & = & (v_1 - a_1 + c_1) & + & (v_2 - a_2 + c_2) & + & 3 - 3 + 2 \\
 & = & \chi(S_1) & + & \chi(S_2) & - & 2
\end{array}$$

. □

Corol·lari 8.4.5. *Les superfícies standard tenen característica*

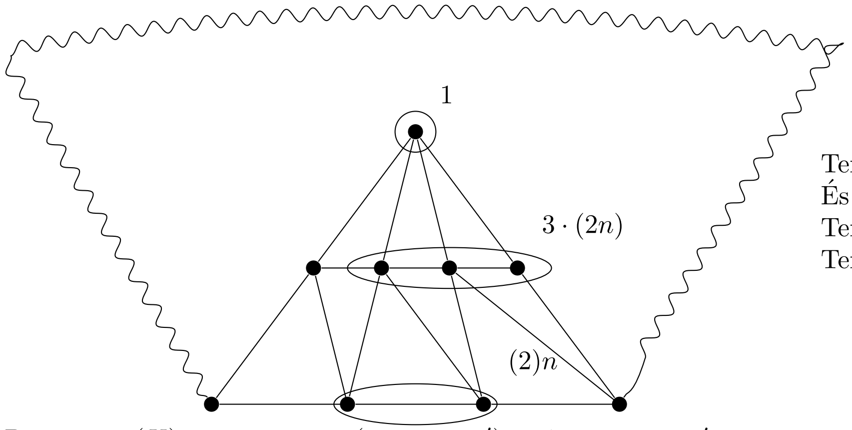
- $\chi(S^2) = 2$;

- $\chi(g\mathbb{T}^2) = 2 - 2g$, $g \geqslant 1$;
- $\chi(g\mathbb{P}^2) = 2 - g$, $g \geqslant 1$.

Corol·lari 8.4.6.
- $n\mathbb{T}^2 \cong m\mathbb{T}^2 \Leftrightarrow n = m$;
- $S^2 \ncong g\mathbb{T}^2$, *per a tot* $g \geqslant 1$; $S^2 \ncong g\mathbb{P}^2$ *per a tot* $g \geqslant 1$;
- $n\mathbb{P}^2 \cong m\mathbb{P}^2 \Leftrightarrow n = m$.

Proposició 8.4.7. *Sigui X una superfície poligonal obtinguda del quocient d'un disc (o polígon) de $2n$ costats. Aleshores X és triangulable i $\chi(X) = v' - n + 1$ on v' és el número de vèrtexs de la vora que queden diferents després de fer el quocient.*

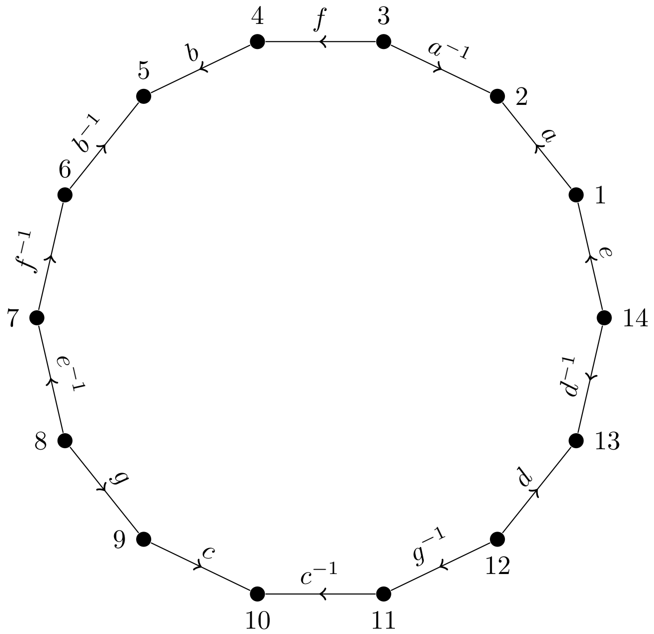
Idea de la demostració.



Tenim $v = 1 + 3 \cdot (2n) + (2) \cdot n + v'$.
És a dir, $v = 1 + 8n + v'$.
Tenim $a = (12)(2n) + (3)n = 27n$
Tenim $c = 9 \cdot (2n) = 18n$

Per tant, $\chi(X) = v - a + c = (1 + 8n + v') - 27n + 18n = v' - n + 1$ □

Exemple 8.4.5. *Si* $X = X_A$ *amb* $A = aa^{-1}fbb^{-1}f^{-1}e^{-1}gcc^{-1}f^{-1}dd^{-1}e$



Els vèrtexs compleixen:
1=3=7
2
4=6
5
8=12=14
9=11
10
Tenim doncs que $v' = 8$ *i*
$\chi(X) = 8 - 7 + 1 = 2$
(De fet, $X = S^2$*)*

8.5 Teorema de classificació

Teorema 8.5.1. *Sigui S una superfície compacta i connexa. Aleshores*

$$S \cong S^2 \text{ o bé } S \cong g\mathbb{T}^2 \text{ o bé } S \cong g\mathbb{P}^2,\ g \geqslant 1.$$

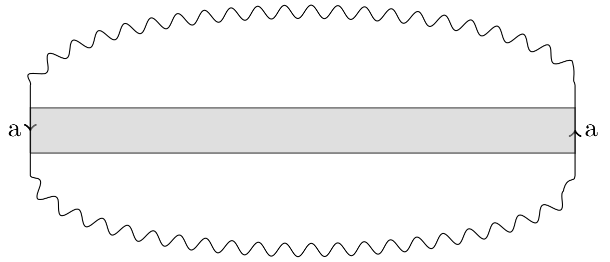
Notació 8.5.2. *g s'anomena el gènere de la superfície S. Si $S \cong S^2$, $g = 0$*
Si $S \cong S^2$ o $S \cong g\mathbb{T}^2$ es diu que S és orientable
Si $S \cong g\mathbb{P}^2$ es diu que S és no orientable (conté una cinta de Möbius)

Obs 8.5.3. *Sabent si S és orientable o no, es pot trobar el gènere a partir de la $\chi(S)$:*

$$g = \begin{cases} \frac{1}{2}(2 - \chi(S)) \\ 2 - \chi(S) \end{cases}$$

Obs 8.5.4. *Com distinguir si una superfície poligonal és orientable o no?*
Si la paraula conté un parell de lletres amb el mateix exponent, aleshores és no orientable (aquest parell de lletres s'anomena del segon tipus. En cas contrari, es diuen de primer tipus)

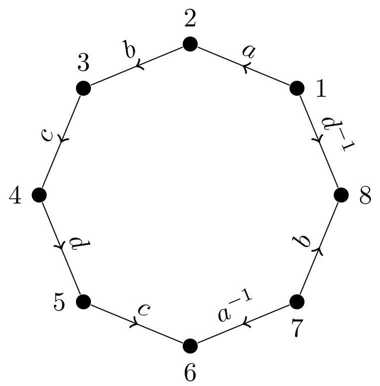
Idea de la demostració.



Si $S = X_A$ i A conté un parell aa de segon tipus, aleshores podem incloure una cinta de Möbius dins de S.

□

Exemple 8.5.1. *$S = X_A$ amb $A = abcdca^{-1}bd^{-1}$*
Com que hi ha un parell de 2a espècie cc (i bb) $\Rightarrow$ S és no orientable. A més:



Com que és no orientable:
$2 - g = \chi(S) = v' - n + 1$. Però $1 = 7 = 2 = 6 = 4$ i $3 = 8 = 5$. O sigui $v' = 2$ i $\chi(S) = -1$. Per tant, $g = 3$ i $S \cong 3\mathbb{P}^2$.

La demostració del teorema de reducció es basa en diversos resultats previs.

Teorema 8.5.5 (Teorema de Radó). *Sigui S una superfície compacte. Aleshores S és triangulable.*

Proof. Aquest teorema usa el teorema de la corba de Jordan. Veure Navarro-Pascual. □

Teorema 8.5.6. *Sigui S una superfície compacte (i per tant triangulable) i connexa. Aleshores S és una superfície poligonal.*

Proof. Veure Navarro-Pascual o Massey □

Nosaltres ens limitarem a provar el resultat següent:

Teorema 8.5.7. *Sigui S una superfície compacta i connexa. Aleshores*

$$S \cong S^2 \text{ o bé } S \cong g\mathbb{T}^2 \text{ o bé } S \cong g\mathbb{P}^2,\ g \geqslant 1.$$

Proof. Farem servir la notació següent:

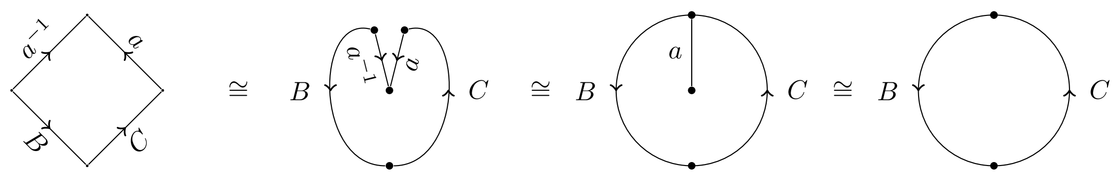
- Lletres majúscules $A, B, C, \ldots$ voldran dir paraules.

- Lletres minúscules $a, b, c, \dots$ són les lletres d'aquestes paraules que donen nom a les arestes.
- $2n$ serà el número de costats del polígon o disc a partir del qual s'obté la superfície S identificant-los 2 a 2.
- aa^{-1} serà una aresta de 1r tipus. aa serà una aresta de 2n tipus.
- Escriurem $S = X_A$ ó S_A per denotar la superfície definida per A
- Dues paraules seran equivalents $A \sim B$ si les corresponents superfícies poligonals $S_A \cong S_B$ són homeomorfes (és clar que és una relació d'equivalència).

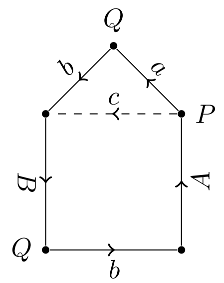
Comencem la demostració:

$$\text{Si } n = 1 \Rightarrow S = S_A \text{ on } \begin{cases} A = aa^{-1} & \Rightarrow \quad S \cong S^2 \\ A = aa & \Rightarrow \quad S \cong \mathbb{P}^2 \end{cases}$$

Podem suposar doncs que $n \geqslant 2$ i que $S = S_A$ és quocient d'un polígon d'almenys 4 arestes. Per tal de demostrar el teorema, reduïrem el problema a casos més senzills.
Primera reducció R1 Eliminació d'arestes adjacents del 1r tipus aa^{-1}.



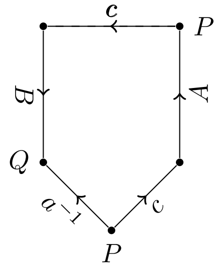
Segona reducció R2: Polígon amb tots els vèrtexs identificats.
Suposem que hi ha dos vèrtexs que no s'identifiquen $\Rightarrow$ hi ha d'haver dos vèrtexs adjacents que no s'identifiquen. Els anomenem P i Q.



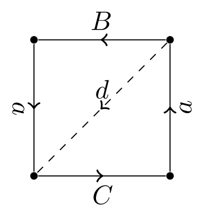
(on $a \neq b^{-1}$ per R1 i $a \neq b$ per $P \neq Q$)

$\cong$

Tallem per $c = ab$ i enganxem per $b = a^{-1}c$

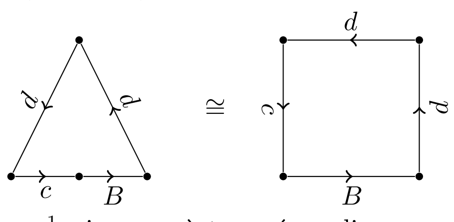


Observeu que ha desaparegut un vèrtex de la classe de Q i ha augmentat un vèrtex de la classe de P. Si és possible, tornem a aplicar R1, que no fa augmentar vèrtexs.
Apliquem R2 recursivament fins que desaparegui tota la classe de Q.
Tercera reducció R3: Ajuntar parelles d'arestes del 2n tipus aa (si n'hi ha).



$\cong$

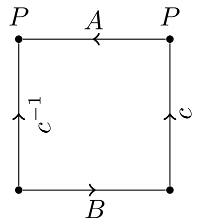
Tallem per $d = Ba$
Enganxem per $a = B^{-1}d$



Continuem fent aquest procès (que no fa aparèixer arestes aa^{-1} ni nous vèrtexs, és a dir, conserva les reduccions R1 i R2) fins que tots els parells de segon tipus són adjacents (si és que n'hi havia).
Si no hi ha cap aprella de 1r tipus $\Rightarrow$ tenim $a_1a_1 \dots a_na_n$ i per tant, $S \cong n\mathbb{P}^2$ i ja hem acabat.
Suposem que hi ha un parell de 2n tipus cc^{-1}.

Afirmació 8.5.8. *Han d'existir d i d^{-1} i la paraula ha de ser de la forma $AcBdCc^{-1}Dd^{-1}E$.*

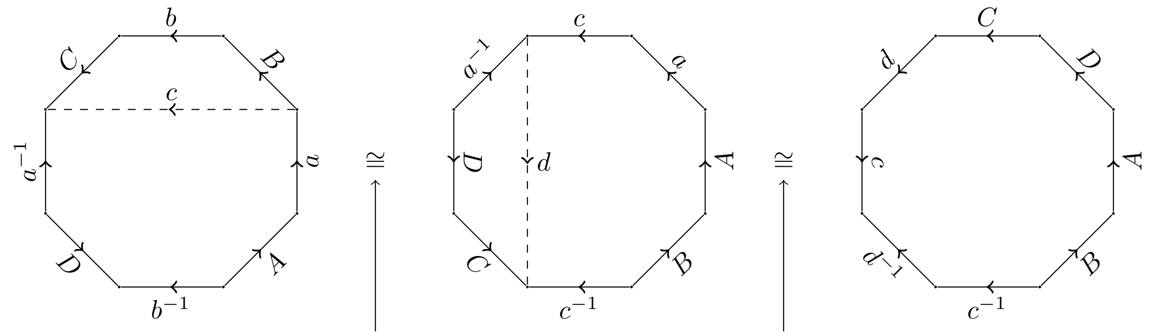
Proof.



Suposem que no. Aleshores totes les arestes de A s'identifiquen amb arestes de A i anàlogament amb B (ja que les arestes de 2n tipus van juntes). Per tant, existeixen dos classes diferents de vèrtexs, arribant a una contradicció.

$\square$

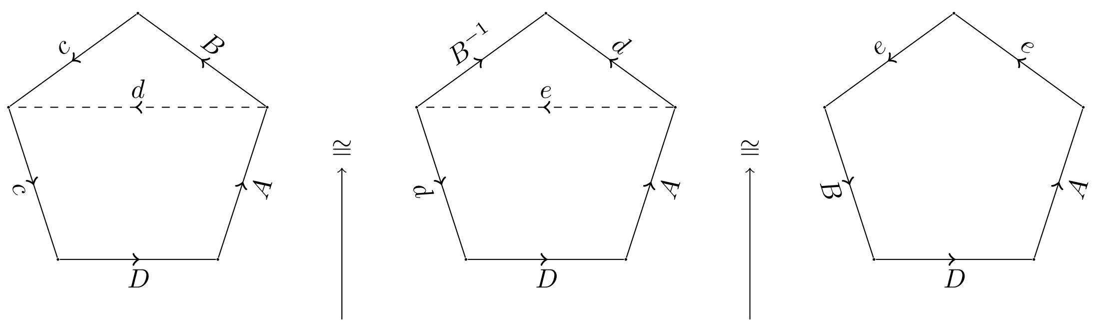
<u>Quarta reducció R4</u>: Ajuntar seqüències del tipus $aba^{-1}b^{-1}$.



Tallem per $c = BbC$
Enganxem per $b^{-1} = Cc^{-1}B$

Tallem per $d^{-1} = a^{-1}DC$
Enganxem per $a = DCd$

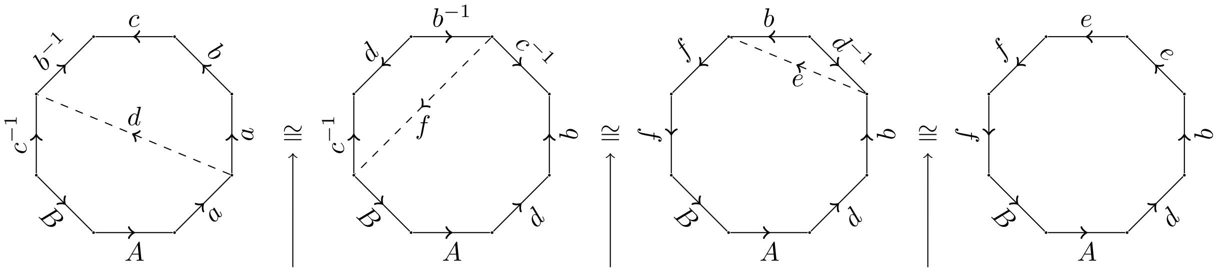
Per tant $AaBbCa^{-1}Db^{-1} \sim ADCdcd^{-1}c^{-1}B$.
Continuem aquest procés (que respecta les reduccions anteriors) fins ajuntar totes les parelles de primer tipus a paraules $dcd^{-1}c^{-1}$.
Si no hi ha parelles de 2n tipus, aleshores arribem a $a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}\dots a_nb_na_n^{-1}b_n^{-1} \cong n\mathbb{T}^2$
<u>Cinquena reducció R5</u>: Ordenar tors i projectius:
Tenim una paraula amb uns quants tors i uns quants projectius. Anem a posar tots els projectius junts i després tots els tors.



Tallem per $d = Bc$
Enganxem per $c = B^{-1}d$

Tallem per $e = dB^{-1}$
Enganxem per $d = eB$

Per tant, $ABccD \sim AeeBD$.
<u>Sisena reducció R6:</u> "Fondre un tor i un projectiu en tres projectius". Vegem que $Aaabcb^{-1}c^{-1}B \sim AddeeffB$



Tallem per $d = abcb^{-1}$
Enganxem $a = dbc^{-1}b^{-1}$

Tallem per $f = b^{-1}dc^{-1}$
Enganxem per $c^{-1} = d^{-1}bf$

Tallem per $e = d^{-1}b$
Enganxem per $b = de$

Conclusió:

- O bé S és S^2 o $\mathbb{P}^2$
- O bé és $n\mathbb{P}^2$ (final R3)
- O bé és $n\mathbb{T}^2$ (final R4)
- O bé (després de 5 i 6), "fonent tors en projectius" és $n\mathbb{T}^2$

$\square$

Referències:

Massey: Introducción a la Topología Algebraica. Editorial Reverté.
Navarro, Pascual: Topologia Algebraica. Edicions UB.