1 . Considerem la quàdrica Q de $\mathbb{P}^3$ d'equació

$$x^2 + y^2 + t^2 + xz - yz + 2yt - zt = 0.$$

(a) Trobeu el pla tangent a Q en el punt $P = (1, 2, -1, -2)$ i proveu que la intersecció d'aquest pla amb Q és una cònica degenerada. Trobeu totes les rectes contingudes a Q passant per P.

(b) Determineu per a quins valors de a la recta $x - y + az = 0, 2x + t = 0$ és tangent a Q.

2 . Trobeu els plans tangents a la quàdrica Q de $\mathbb{P}^3$ d'equació $x^2 + 2y^2 - 4zt = 0$ que contenen la recta $x - 2y - t = 0, 2y - z = 0$.

3 . Sigui Q una quàdrica de $\mathbb{P}^n$ i $P \notin Q$.

(a) Trobeu l'equació que han de verificar els punts que estan sobre una recta tangent a Q passant per P. Demostreu que aquests punts estan en una quàdrica Q' i que, si és no buida, P és un punt singular de Q'. Aquesta quàdrica s'anomena *con tangent a Q des de P*.

(b) Demostreu que $Q \cap Q' = Q \cap H_p(Q)$. Aquesta intersecció s'anomena *contorn aparent de Q des de P*.

(c) Feu els càlculs anteriors per a Q definida per $x^2 + 2y^2 + zt = 0$ i $p = (1, 0, 0, 0)$.

4 . Siqui Q una quàdrica de $\mathbb{P}^n$ i $P \in Q$ un punt singular.

(a) Sigui V una varietat lineal tal que $P \in V \nsubseteq Q$. Demostreu que P és també un punt singular de $Q \cap V$. Deduiu que, si $k = \mathbb{R}$, qualsevol pla contenint P, o està contingut a Q, o la seva intersecció amb Q és el punt P, o una recta doble o dues rectes diferents tallant-se a P.

(b) Demostreu que per a qualsevol $P' \in Q$, la recta $P \vee P'$ està continguda a Q. En particular, si H és un hiperplà, la quàdrica Q es pot entendre com un con amb vèrtex P sobre $Q \cap H$.

(c) Sigui W la varietat lineal de punts singulars de Q. Sigui W' una varietat lineal complementària. Demostreu que $W' \cap Q$ ès una quàdrica no degenerada i que per a tot $P' \in W' \cap Q$, es verifica que $P' \vee W \subseteq Q$.

5 . Determineu les equacions de les còniques que satisfan:

(a) Passen pels punts $(1, 0, -1), (1, 0, 4), (1, 2, 1), (1, 2, -1)$ i $(1, 3, 0)$.

(b) Passen pels punts $(1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1)$ i són tangents a la recta $x + y + z = 0$ en el punt $(-1, 0, 1)$.

(c) Passen pels punts $(1, 0, 1), (1, 2, 1), (1, 1, 2)$ i són tangents a la cònica $x^2 + y^2 - 4z^2 - 2xy + 3xz = 0$ en el punt $(1, 1, 0)$.

6 . Trobeu l'equació d'una cònica no degenerada en $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ quan es pren com a triangle de referència:

(a) Un triangle inscrit.

(b) Un triangle circumscrit.

(c) Un triangle autopolar.

(d) El triangle format per dues tangents i la polar del punt d'intersecció.

(e) El cas anterior si, a més, s'agafa un punt de la cònica com a punt unitat.

7. Sigui $\mathcal{R} = \{A, B, C, U\}$ una referència projectiva de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$. Doneu l'equació general de les còniques tangents en B i U a les rectes $A \vee B$ i $A \vee U$ respectivament.

8. Proveu que el triangle diagonal d'un quadrivèrtex inscrit en una cònica no degenerada és autopolar.

9. Proveu que un quadrivèrtex inscrit en una cònica no degenerada i el quadrilàter circumscrit format per les tangents a la cònica en els vèrtexs de l'anterior tenen el mateix triangle diagonal.

10. Sigui ABC un triangle de $\mathbb{P}^2$ inscrit en una cònica no degenerada Q. Proveu que per a qualsevol punt p que pertanyi a un costat del triangle, les interseccions de la polar de p respecte de Q amb els altres dos costats són punts conjugats respecte de Q.

11. (a) Calculeu els punts d'intersecció de les còniques:

$$2x^2 + 5y^2 - 7xy + 2yz - 2z^2 = 0 \text{ i } x^2 + 3y^2 - 4xy + yz - z^2 = 0.$$

(b) Donades les còniques

$$44x^2 + 16y^2 + 9z^2 + 56xy + 28xz + 16yz = 0 \text{ i } 13x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 16xy + 8xz + 4yz = 0.$$

doneu les equacions de totes les rectes tangents a les dues (no necessàriament en el mateix punt).

12. Siguin A i B dos punts diferents d'una cònica Q no degenerada. Siguin A^* i B^* els feixos de rectes per A i B. Sigui $j_A : A^* \to Q$ l'aplicació que assigna a cada recta L de A^*, la intersecció $(L \setminus \{A\}) \cap Q$. Si L és la tangent a Q per A, li assignem el propi A. Proveu que l'aplicació $f : A^* \to B^*$ definida per $f = j_B^{-1} \circ j_A$ és una projectivitat. Enuncieu el recíproc.

13. (a) Proveu que per cinc punts de $\mathbb{P}^2$, de manera que no n'hi ha tres d'alineats, passa una única cònica Q, i que Q és no degenerada.

(b) Proveu que donades 5 rectes de $\mathbb{P}^2$, de manera que no n'hi ha tres d'elles concurrents, hi ha una única cònica Q a la que són tangents, i que Q és no degenerada.

14. Siguin A, B, C, D quatre punts d'una cònica no degenerada Q. Proveu que, per a $E \in Q$, la raó doble de les rectes $A \vee E$, $B \vee E$, $C \vee E$ i $D \vee E$ no depèn de E (entenent que, per exemple, $A \vee A$ és la recta tangent en A).

15. Sigui C una cònica no degenerada de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ i A, B dos punts diferents de C. Proveu que el lloc geomètric dels punts P tals que el punt polar de la recta $P \vee A$ respecte de C pertany a la recta $P \vee B$ és una cònica C'.

16. Classifiqueu projectivament les còniques de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$:

(a) $x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2xz - 2yz = 0$;

(b) $2x^2 - 2y^2 + z^2 + 6xy - 2xz - 2yz = 0$.

i la família de quàdriques de $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$:

(c) $x^2 + y^2 - 2z^2 + at^2 + 2xy - 2yz + 2zt = 0$, en funció d'$a$.

17. Sigui Q una quàdrica de $\mathbb{P}^n$ representada per una forma quadràtica q. Sigui $f = [\psi]$ una homografia. Definim $f(Q)$ com la quàdrica representada per la forma quadràtica $q \circ \psi^{-1}$.

(a) Demostreu que $p \in Q \Leftrightarrow f(p) \in f(Q)$.

(b) Fixada una referència R, digueu quina és la relació entre les matrius en aquesta referència de Q, $f(Q)$ i f.

(c) Demostreu que p_1 i p_2 són polars respecte de Q si i només si $f(p_1)$ i $f(p_2)$ són polars respecte de $f(Q)$.

(d) Demostreu que p és un punt singular de Q si i només si $f(p)$ és un punt singular de $f(Q)$.

18. Considereu la projectivitat f de $\mathbb{P}^3$ definida per $f(x, y, z, t) = (-y - t, x + t, z, t)$ i la quàdrica Q d'equació $2x^2 + 2y^2 - z^2 + 3t^2 + 4xt - 4yt = 0$. Determineu l'equació de $f(Q)$.

19. Estudieu les projectivitats que deixen invariant una cònica no degenerada i dos punts exteriors (els punts es poden intercanviar entre ells).

20. Trobeu l'equació del con de $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ que té per vèrtex $(1, 1, 1)$ i que talla el pla xy segons la cònica $x^2 + y^2 + 2x + 2y + 1 = 0$.

21. Trobeu l'equació de la cònica de $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ que té les mateixes direccions assimptòtiques que $x^2 - 2y^2 + 2xy - x + y + 1 = 0$, que passa per l'origen i que té centre en el punt $(1, 1)$.

22. Trobeu unes equacions reduïdes i la referència en la qual s'assoleixen per a les quàdriques de $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$

(a) $x^2 + y^2 - 2xz + 4yz - 2y + 6z - 1 = 0$.

(b) $x^2 + y^2 + 2xy + 2x - 2y + 2z + 1 = 0$.

23. Determineu, en funció dels paràmetres a i b, el tipus afí de les quàdriques de $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$

$$bx^2 + (2b + a)y^2 + bz^2 + 2bxy - 2byz - b = 0.$$

24. Considerem la quàdrica Q de $\mathbb{A}^3$ d'equació $x^2 + 2yz + 2z - 1 = 0$.

(a) Trobeu-ne les equacions reduïdes.

(b) Proveu que les interseccions de Q amb els plans paral·lels al pla $y = z$ són còniques no degenerades amb centre i determineu el lloc geomètric dels centres així obtingts.

25. Trobeu l'equació del con de $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ que té per vèrtex $(1, 1, 1)$ i que talla el pla xy segons la cònica $x^2 + y^2 + 2x + 2y + 1 = 0$.

26. Considerem la quàdrica Q de $\mathbb{A}^3$ d'equació $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4y - 4z + 11 = 0$, el pla V d'equació $x + y + z + 10 = 0$ i la recta r d'equacions $x - 4 = y + z = 0$. Supossem que Q és un objecte opac. Trobeu des de quin punt $p \in r$ l'hem d'il.luminar per tal que l'ombra produïda sobre el pla V tingui un contorn parabòlic.