Teorema de Cauchy global i fórmula de Cauchy global

Teorema

$\Omega \subset \mathbb{C}$ obert, $f \in H(\Omega)$ i $\Gamma \subset \Omega$ cicle tal que $\Gamma \sim 0$ en Ω. Llavors:

(i) $\displaystyle\int_\Gamma f(z)\,dz = 0$ *(teorema integral de Cauchy global).*

(ii) $\displaystyle\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\Gamma \frac{f(z)}{z-a}\,dz = n(\Gamma, a)\cdot f(a), \quad \forall a \in \Omega \setminus \Gamma$ *(fórmula integral de Cauchy global).*

(iii) $\displaystyle\frac{k!}{2\pi\mathrm{i}}\int_\Gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}}\,dz = n(\Gamma, a)\cdot f^{(k)}(a), \quad \forall a \in \Omega \setminus \Gamma,\ k \geq 0.$

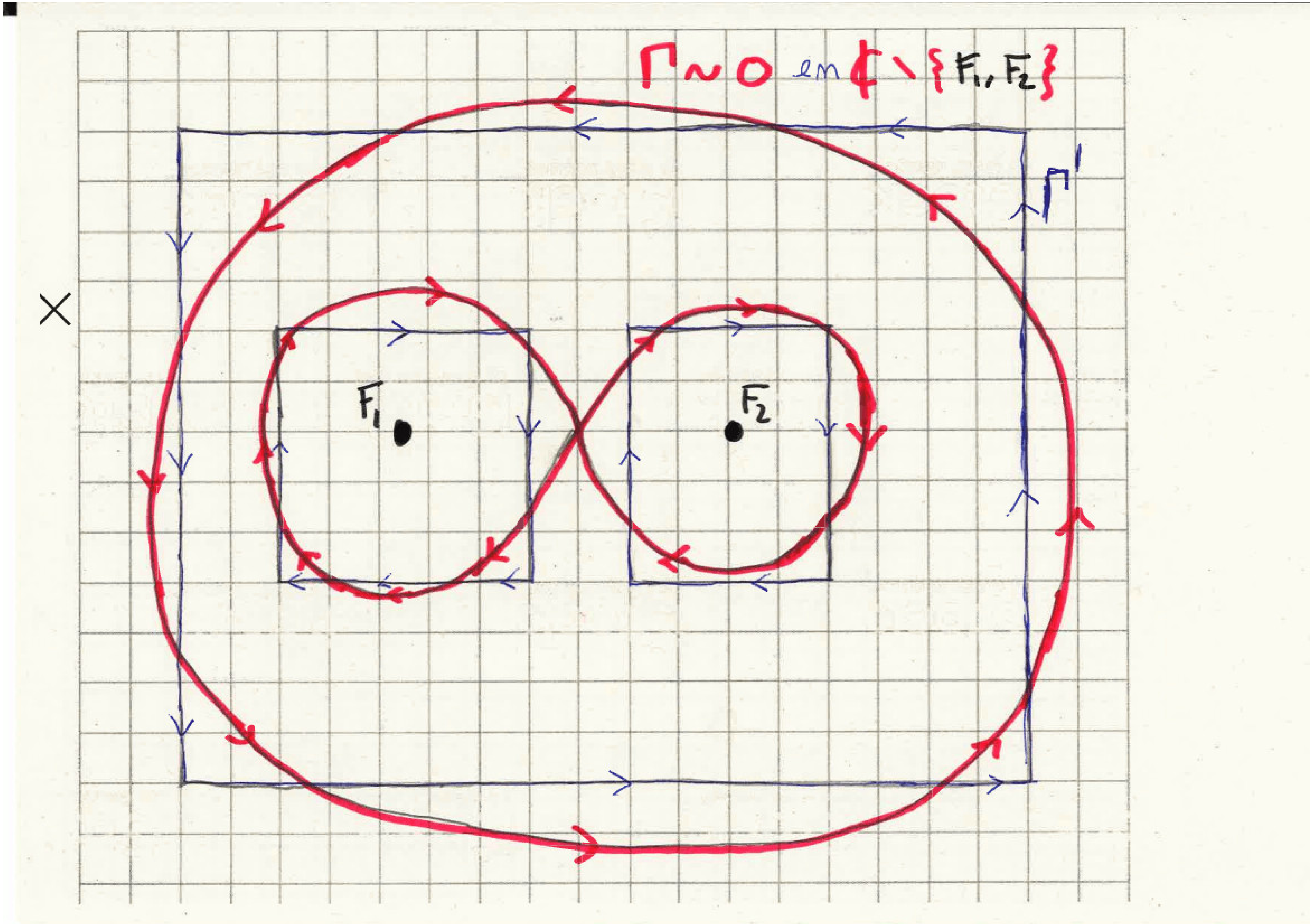
Tot seguit farem una prova **esquemàtica** de l'apartat (i). A partir d'ell deduïrem els altres dos apartats. Per veure (i) recordem:

- $f \in H(D)$, on $D \subset \mathbb{C}$ disc obert $\Longrightarrow$ f admet primitiva en D $\Longrightarrow$ $C_1, C_2 \subset D$ arcs de corba amb mateixos extrems i orientació, llavors $\int_{C_1} f(z)\,dz = \int_{C_2} f(z)\,dz$ $\Longrightarrow$ podem "deformar" corbes dins D (fixant els extrems) tot mantenint el valor de la integral.

- D'inici $\Gamma \subset \Omega$ és un cicle i no pas una única corba. Així, no és cap problema si per fer la prova substituïm alguna corba del cicle per 2 o més corbes tancades en Ω mantenint el valor de la integral.

Tot seguit fem (esquemàticament) la prova de l'apartat (i) pas a pas.

1. **Recobriment de Γ per discs del mateix radi:** Com que $\Gamma \subset \Omega$ és compacte $\implies \exists \delta_0 > 0$ tal que $D(z, \delta_0) \subset \Omega$, $\forall z \in \Gamma$.
2. **Quadriculació de $\mathbb{C}$:** Recobrim tot $\mathbb{C}$ per quadrats de costats de longitud δ i paral·lels als eixos coordenats, **on $\delta \ll 1$ és prou petit** de forma que es compleixi el que segueix (no fem tots els detalls).
3. **Cicle poligonal Γ':** Deformem Γ de forma homòtopa dins Ω en un cicle $\Gamma' \approx \Gamma$ de forma que Γ' sigui unió d'arcs de corba definits per costats de longitud δ de la quadriculació.
4. **Arcs corresponents entre Γ i Γ':** El cicle Γ i la poligonal Γ' han de poder descomposar-se en un nombre finit d'arcs de corba (el mateix número en cada cas) complint que cadascun d'aquests arcs de corba de Γ es **correspon** amb un dels de Γ', de forma que ambdós arcs tenen els mateixos punts extrems (que viuen doncs en $\Gamma \cap \Gamma'$, però no tenen perquè ser vèrtexs de cap dels quadrats!).


$\Gamma \sim 0$ en $\mathbb{C} \setminus \{F_1, F_2\}$
Γ'
F_1
F_2

5. **Deformació d'arcs dins dels discs:** Cadascuna d'aquestes parelles d'arcs de corba de Γ i Γ' **corresponents** ha d'estar continguda dins d'un dels discs $D(z, \delta_0) \subset \Omega$ del recobriment de Γ, de forma que és possible deformar l'arc de Γ en el corresponent de Γ' dins d'aquest disc del recobriment (i.e., el disc conté tot el continu de corbes de la deformació), mantenint fixos els extrems dels arcs al llarg de tota la deformació.
6. Cada quadrat de la quadriculació que contingui algun arc de Γ' ha d'estar integrament contingut en algun d'aquests discs.
7. $\Gamma' \approx \Gamma$ dins $\Omega \implies n(\Gamma', z) = n(\Gamma, z) = 0, \forall z \notin \Omega \implies \Gamma' \sim 0$ en Ω.
8. El fet de que generem Γ' deformant arcs de Γ dins de discs on f és holomorfa i mantenint els extrems fixats $\implies \int_\Gamma f = \int_{\Gamma'} f$.
9. (i) $\iff \int_{\Gamma'} f = 0$ si $\Gamma' \sim 0$ en Ω cicle poligonal en la quadriculació.
10. $A \subset \mathbb{R}$ conjunt (compacte) unió de totes les components connexes de $\mathbb{C}$ tancades per corbes del cicle Γ' (A no té perquè ser connex).
11. $\mathcal{R} = \bigcup_{j=1}^{n} R_j$ rectangle de $\mathbb{C}$ format unint n quadrats (diferents 2 a 2) de la quadiculació de $\mathbb{C}$, prou gran per tal que $A \subset \mathcal{R}$. Ordenem els quadrats $\{R_j\}_{j=1}^{n}$, p. ex., de dalt a baix i d'esquerra a dreta.

12. **Cicle Π equivalent a Γ' com a suma de costats de quadrats:** Sigui Π el cicle $\Pi = \sum_{j=1}^{n} n(\Gamma', z_j) \cdot \partial R_j^+$, on $z_j \in \mathring{R}_j$ punt qualsevol interior del rectangle R_j, $\forall j = 1, \ldots, n$.
   - $n(\Gamma', z_j)$ no depèn del $z_j \in \mathring{R}_j$ triat. (L'índex de Γ' només pot canviar si travessem un dels seus costats i, per tant, mai en l'interior d'un dels quadrats de la quadriculació de $\mathbb{C}$.)
   - Si $\mathring{R}_j$ conté algun $z_j \notin \Omega$, llavors $n(\Gamma', z_j) = 0$ en quant $\Gamma' \sim 0$ en Ω. Per tant, si $n(\Gamma', z_j) \neq 0$ per algun $z_j \in \mathring{R}_j \implies R_j \subset \Omega$.
13. **Fi de la prova de (i) en el cas d'equivalència de les integrals:** La integral de f sobre Π val: $\int_\Pi f = \sum_{j=1}^{n} n(\Gamma', z_j) \cdot \int_{\partial R_j^+} f = 0$, ja que si $n(\Gamma', z_j) \neq 0 \implies R_j \subset \Omega \implies f \in H(R_j) \implies \int_{\partial R_j^+} f = 0$.
   Per tant, si veiem que $\int_{\Gamma'} f = \int_\Pi f$, llavors $\int_\Gamma f = \int_{\Gamma'} f = \int_\Pi f = 0$.
14. **Re-definim $f = 0$ en $\mathbb{C} \setminus \Omega$:** En el càlcul de $\int_\Pi f$ apareix $\int_{\partial R_j^+} f$, $j = 1, \ldots, n$, quan potser f no està ben definida en tots els costats de R_j: només està garantit en aquells que formen part del cicle poligonal Γ'. Evitem problemes "formals" fent $f = 0$ en $\mathbb{C} \setminus \Omega$, si ve en el cas en que R_j no està completament inclòs en Ω llavors $n(\Gamma', z_j)$ i per tant "realment" no importa quant val $\int_{\partial R_j^+} f = 0$.

15 Prova esquemàtica de l'equivalència $\int_{\Gamma'} f = \int_{\Pi} f$ (PART I):

- $A \subset \mathcal{R} = \bigcup_{j=1}^{n} R_j \implies$ tots els arcs de corba de Γ' els podem obtenir a partir de costats dels quadrats $\{R_j\}_{j=1}^{n}$.
  (Ull: ∂R_j té 4 costats i si un d'ells és recorregut per Γ' no vol dir pas que els altres hagin de formar part de Γ'!)
- Farem la prova de l'equivalència $\int_{\Gamma'} f = \int_{\Pi} f$ per **inducció finita** respecte del rectangles $\{R_j\}_{j=1}^{n}$.
- Considerarem una llista de cicles $\{\Gamma'_k\}_{k=0}^{n}$, amb $\Gamma'_0 = \Gamma'$ i $\Gamma'_n = \emptyset$, que definiren suprimint de forma successiva de Γ' la "possible" contribució de ∂R_1^+, ∂R_2^+, etc.
- Cadascuna d'aquestes contribucions suprimides de Γ' s'anirà acumulant successivament en una nova llista de cicles $\{\Pi_k\}_{k=0}^{n}$, amb $\Pi_0 = \emptyset$ i $\Pi_n = \Pi$.
- L'objectiu és mantenir iterativament la igualtat $\int_{\Gamma'} f = \int_{\Gamma'_k} f + \int_{\Pi_k} f$, $k = 0, \ldots, n$.
- Aquesta equivalència iterativa d'integrals serà certa per a qualsevol f i no usarà que f sigui holomorfa.
- Fent $k = n$ en la igualtat $\int_{\Gamma'} f = \int_{\Gamma'_k} f + \int_{\Pi_k} f$, i usant $\Gamma'_n = \emptyset$, $\Pi_n = \Pi$, obtenim el resultat perseguit: $\int_{\Gamma'} f = \int_{\Pi} f$.

15 Prova esquemàtica de l'equivalència $\int_{\Gamma'} f = \int_{\Pi} f$ (PART II):

Definim, per a $k = 0, \ldots, n$:

- $\mathcal{R}_k = \bigcup_{j=k+1}^{n} R_j$ successió de dominis definits a partir del rectangle inicial $\mathcal{R}_0 = \mathcal{R} = \bigcup_{j=1}^{n} R_j$ tot suprimint successivament els quadrats R_1, R_2, etc. (d'equerra a dreta i de dalt a baix). Finalment, $\mathcal{R}_n = \emptyset$.
- $\Pi_k = \sum_{j=1}^{k} n(\Gamma', z_j) \cdot \partial R_j^+$ successió de cicles acumulant de forma succesiva la contribució dels costats dels quadrats ∂R_1^+, ∂R_2^+, etc. a Γ'. Inicialment, $\Pi_0 = \emptyset$ i finalment $\Pi_n = \Pi = \sum_{j=1}^{n} n(\Gamma', z_j) \cdot \partial R_j^+$.
- $\Gamma'_k = \Gamma' - \Pi_k$ successió de cicles que inicialment és $\Gamma'_0 = \Gamma'$. El que veurem és que Γ'_k s'obté suprimint de Γ' la contribució dels costats dels quadrats ∂R_1^+, ∂R_2^+, etc. de forma successiva.

El que es prova per inducció (finita) respecte de $k = 0, \ldots, n$ és:

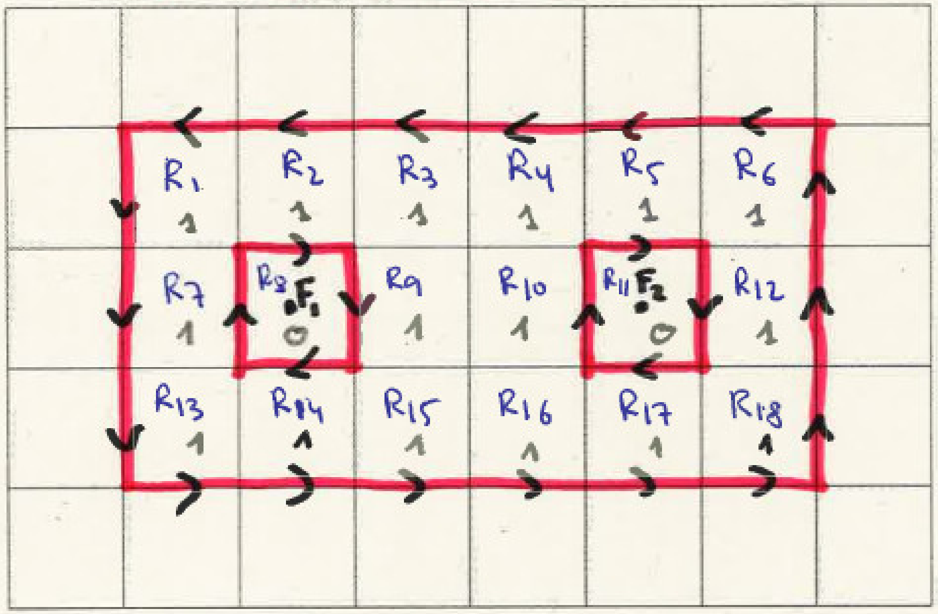
- $\int_{\Gamma'} f = \int_{\Gamma'_k} f + \int_{\Pi_k} f$.
- Γ'_k és un cicle contingut en $\mathcal{R}_k$. Això és, a mesura que eliminem de Γ' la contribució de més costats ∂R_1^+, ∂R_2^+, etc. el domini que conté el cicle Γ'_k es va encongint. Finalment doncs, $\mathcal{R}_n = \emptyset \implies \Gamma'_n = \emptyset$.
- Si $z_j \in \mathring{R}_j$, per $j = k+1, \ldots, n$, llavors $n(\Gamma'_k, z_j) = n(\Gamma', z_j)$. Això és, si z_j és un punt interior d'algun dels quadrats R_{k+1}, R_{k+2}, etc. que encara formen part de $\mathcal{R}_k$, llavors el nombre de voltes que el "cicle reduït" Γ'_k dóna a aquest punt és el mateix que donava el cicle Γ'.

15 Prova esquemàtica de l'equivalència $\int_{\Gamma'} f = \int_{\Pi} f$ (PART III):

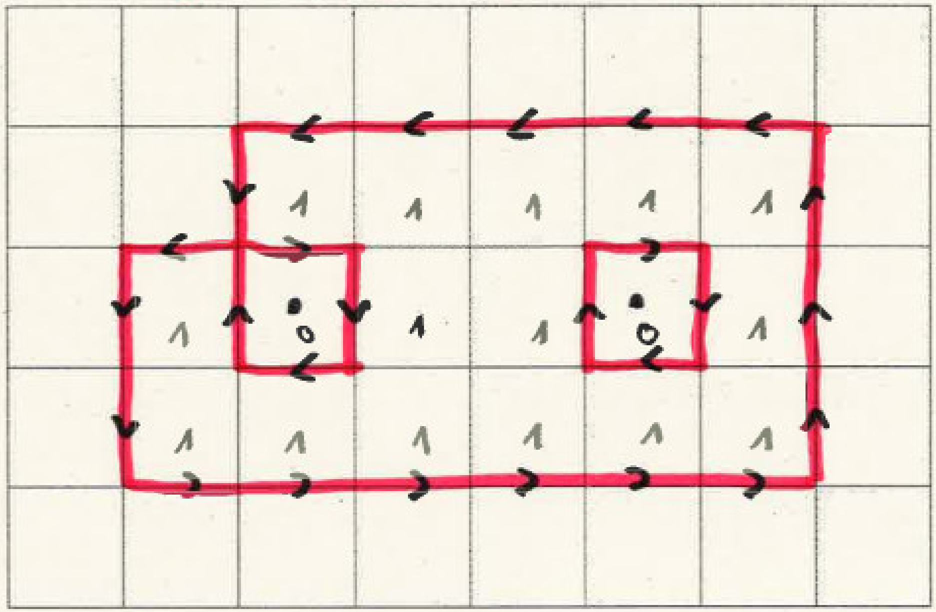
El cas $k = 0$ de la inducció és obvi (és la "configuració inicial"). Tot seguit fem **només** el pas $k = 1$, restant de Γ' la contribució de R_1.

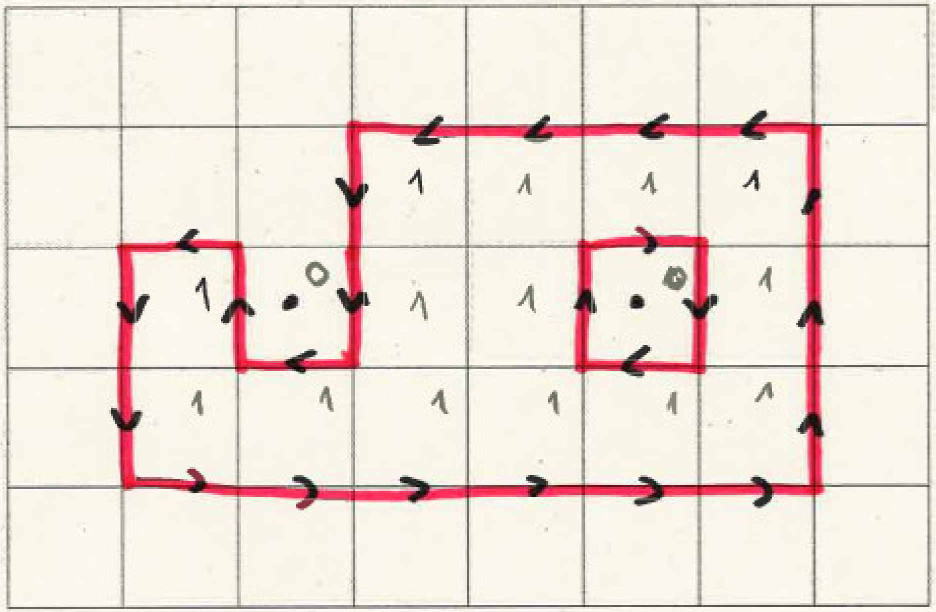
- R_1 és el quadrat del vèrtex superior esquerre del rectangle $\mathcal{R}_0 = \mathcal{R} = \bigcup_{j=1}^{n} R_j$ i $\mathcal{R}_1$ és el rectangle $\mathcal{R}_0$ "esqueixat" treint-li R_1.
- Expressem $\partial R_1^+ = C^s + C^i + C^d + C^e$, suma dels seus 4 costats superior, inferior, dret i esquerre (orientats com toca).
- $n^s, n^e \in \mathbb{Z}$ nombre de cops que $\Gamma'_o = \Gamma'$ recorre C^s i C^e, resp.
- En èsser C^s i C^e **costats exteriors** a $\mathcal{R}_0$ i Γ'_0 cicle **tancat**, és clar que $n^s = n^e = n(\Gamma', z_1)$, on $z_1 \in \mathring{R}_1$.
- Considerem ara el cicle obtingut **restant** de Γ'_0 la corba tancada $n(\Gamma', z_1) \cdot \partial R_1^+$. Concretament, obtenim el cicle $\Gamma'_1 = \Gamma'_0 - \Pi_1$.
- $\Gamma'_1 \subset \mathcal{R}_1$ ja que hem suprimit de Γ'_0 la contribució dels costats C^s i C^e de R_1, mentres els costats C^i i C^d encara formen part de $\mathcal{R}_1$.
- Γ'_1 pot obtenir-se deformant homòtopament Γ'_0 sobre Γ'_1 ("aixafant" C^s en C^d i C^e en C^i). Per tant, es té $n(\Gamma'_1, z_j) = n(\Gamma'_0, z_j)$, si $z_j \in \mathring{R}_j$, per $j = 2, \ldots, n$, ja que l'índex no es veu modificat per l'homotopia en tots aquells punts que no són travessats per cap de les corbes intermèdies del procés de deformació de Γ'_0 en Γ'_1.
- La igualtat $\int_{\Gamma'} f = \int_{\Gamma'_1} f + \int_{\Pi_1} f$ és òbvia en quant $\Gamma'_1 = \Gamma'_0 - \Pi_1$.

$\Gamma_0' = \Gamma_0 \subset \mathcal{R}_0 = \mathcal{R}$

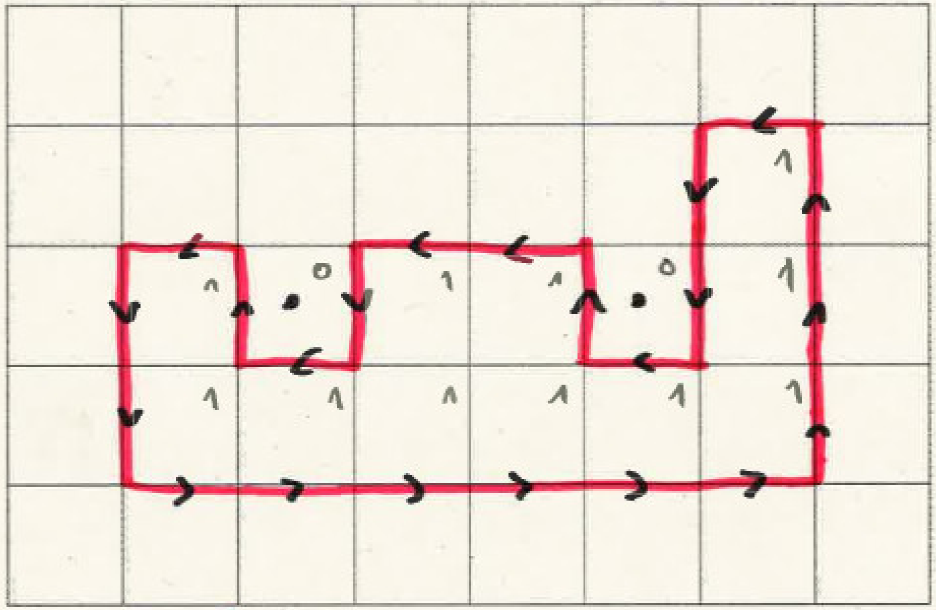


$\Gamma_1' \subset \mathcal{R}_1 = \mathcal{R} \setminus R_1$





$\Gamma_2' \subset \mathcal{R}_2$



$\Gamma_5' \subset \mathcal{R}_5$

Tot Seguit fem la prova de l'apartat (ii). Aquesta prova és "idèntica" a la de la fòrmula de Cauchy local.

1. Definim: $g(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z)-f(a)}{z-a} & \text{si } z \neq a \\ f'(a) & \text{si } z = a \end{cases}$
2. És clar, per definició, que $g \in C^0(\Omega) \cap H(\Omega \setminus \{a\})$.
3. El fet de que una funció sigui o no $\mathbb{C}$-diferenciable en un punt és una propietat **local** $\implies$ la teoria de Cauchy local és suficient per concloure que g també és holomorfa en $z = a \implies g \in H(\Omega)$.
4. $g \in H(\Omega)$ & $\Gamma \sim 0$ en $\Omega \overset{\text{apartat (i)}}{\Longrightarrow} 0 = \int_\Gamma g(z)\, dz = \int_\Gamma \frac{f(z)-f(a)}{z-a}\, dz = 0$. Per tant:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(z)}{z-a}\, dz = f(a)\cdot\left(\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{dz}{z-a}\right) \overset{\text{def. índex}}{=} f(a)\cdot n(\Gamma, a).$$

Finalment, l'apartat (iii) surt directament derivant (ii) sota el signe integral n cops (indènticament al fet en la teoria de Cauchy local).