2 Sistemes Lineals: mètodes directes

1. Compteu el nombre d'operacions necessàries per calcular la solució d'un sistema lineal $Ax = b$, A matriu $n \times n$ regular, usant eliminació gaussiana (suposeu que tots els pivots són no nuls) i resolent el corresponent sistema triangular superior per substitució cap enrera.

2. Considereu la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Calculeu la descomposició LU d'A (sense pivotatge).

b) Useu l'apartat anterior per calcular A^{-1}.

3. a) Donada la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix},$$

triangularitzeu-la aplicant pivotatge parcial i especificant P, L, U.

b) Comproveu $PA = LU$.

4. Donada la matriu

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & 6 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Triangularitzeu-la aplicant pivotatge parcial esglaonat, especificant P, L, U.

b) Comproveu $PA = LU$.

c) Calculeu $\det A$ a partir de b).

d) Calculeu A^{-1} (tenint en compte la matriu de permutació P).

5. Sigui A una matriu regular donada. Volem resoldre el sistema lineal $A^2 x = b$ i comparem 2 estratègies.

a) Calculeu el nombre d'operacions si primer calculem A^2 i després resolem el sistema aplicant la descomposició LU a la matriu A^2

b) Calculeu el nombre d'operacions si resolem els sistemes $Ay = b$, $Ax = y$ fent servir (una nova) descomposició LU per a la matriu A

c) Quina és més eficient?

6. Sigui A la matriu definida positiva següent:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aleshores,

a) Calculeu la seva descomposició de Choleski $A = LL^\top$. Noteu que L és "plena".

b) Demostreu que si A és una matriu del tipus

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & c_2 & c_3 & c_4 & \cdots & c_n \\ c_2 & a_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ c_3 & 0 & a_3 & 0 & \cdots & \vdots \\ c_4 & 0 & 0 & a_4 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ c_n & 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix}$$

amb $a_j > 0$, $j = 1 \div n$, aleshores $PAP^\top$ admet la descomposició $PAP^\top = LL^\top$ amb

$$L = \begin{pmatrix} \ell_{11} & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \ell_{22} & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & \ell_{33} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_{n-1} & \ell_{nn} \end{pmatrix}$$

i P una matriu de permutació convenient. Quantes operacions en calen?

c) Resoleu el sistema $Ax = b$, amb A la matriu del primer apartat, usant els apartats anteriors. Compteu el nombre d'operacions necessàries.

d) Feu servir la descomposició $PAP^\top = LL^\top$ per calcular A^{-1} i $\det A$.

7. a) Si $A = (a_{ij})$ és una matriui simètrica i definida positiva, demostreu que:

i) $a_{ii} > 0$ $(i = 1 \div n)$;

ii) $\max_{i,j} |a_{ij}| = \max_i a_{ii}$;

iii) les submatrius $A^{(k)} = (a_{ij}^{(k)})_{i,j=k\div n}$ $(k = 2 \div n)$, trobades en aplicar el mètode de Gauss, són definides positives i, per tant, que es pot portar a terme el procés sense haver de recórrer als pivotatges;

b) Aplicació: Demostreu que la matriu

$$\begin{pmatrix} 13 & 11 & 11 \\ 11 & 13 & 11 \\ 11 & 11 & 13 \end{pmatrix}$$

és definida positiva, trobeu-ne la factorització de Choleski i el seu determinant.

8. Compteu el nombre d'operacions per resoldre $Ax = b$, coneguda la factoritzacio $A = LU$.

9. Considerem la matriu $n \times n$

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & & & & & \\ 1 & a & 1 & & & & \\ & 1 & a & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & 1 & a & 1 \\ & & & & & 1 & a \end{pmatrix}.$$

a) Demostreu que la matriu A és definida positiva per a $a \geq 2$.

b) Si $a \geq 2$, trobeu un mètode recurrent per fer la factorització de Choleski de la matriu A, $A = LL^\top$ amb

$$L = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & & & \\ \beta_2 & \alpha_2 & & & & \\ & \beta_3 & \alpha_3 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & \beta_{n-1} & \alpha_{n-1} & \\ & & & & & \beta_n & \alpha_n \end{pmatrix}.$$

c) Si l'element a_{11} d'A té un error absolut δ i els altres elements són exactes, doneu una estimació de l'error relatiu de α_n en fer la factorització, suposant δ prou petit.

10. Resoleu el sistema lineal $Ax = b$, treballant només amb 3 dígits on

$$A = \begin{pmatrix} -10^{-5} & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Resoleu ara

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -10^{-5} & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(Calculeu també la solució exacta).

11. Resoleu el sistema lineal $Ax = b$, treballant només amb 3 dígits on

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 10000 \\ 1 & 0.0001 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 10000 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Resoleu ara

$$A = \begin{pmatrix} 0.0001 & 1 \\ 1 & 0.0001 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(Calculeu també la solució exacta).

12. Sigui A una matriu regular $n \times n$ que considerem partida en quatre blocs

$$A = \begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix} ,$$

amb P i S matrius $p \times p$ i $s \times s$, respectivament ($p + s = n$).

Suposant que P i $S - RP^{-1}Q$ tenen inversa:

a) Doneu un mètode per trobar la inversa d'A.

b) En general, quantes operacions calen per trobar A^{-1} usant aquest mètode?

c) Quan serà útil el mètode esmentat?

d) Expliciteu un procediment per invertir una matriu A, emprant $n-1$ vegades el procediment anterior.

e) Sota quines condicions funcionarà el procediment de l'apartat d)?

f) Demostreu que segur que funciona si A és definida positiva.

g) Aplicació: Trobeu

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right)^{-1} \text{, usant l'apartat a) i}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \text{, usant l'apartat d) .}$$

13. Demostreu que les normes matricials subordinades a les normes vectorials

$$\|x\|_1 = \sum_i |x_i| \ , \quad \|x\|_\infty = \max_i |x_i| \ ,$$

són, respectivament:

$$\|A\|_1 = \max_j \sum_i |a_{ij}| \ , \quad \|A\|_\infty = \max_i \sum_j |a_{ij}| \ .$$

14. a) a.1) Demostreu que la norma de matrius (multiplicativa)

$$\|A\|_E = (\sum_{i,j} |a_{ij}|^2)^{\frac{1}{2}}$$

no està subordinada a cap norma vectorial.
(Indicació: Considereu la norma de la matriu identitat).

a.2) Proveu $\|A\|_E = (\text{tr } A^\top A)^{1/2}$.

b) Demostreu que la norma subordinada a la norma euclidiana

$$\|x\|_2 = (\sum_i |x_i|^2)^{\frac{1}{2}}$$

és

$$(\rho(A^\top A))^{\frac{1}{2}} \ .$$

c) $\|A\|_2 = \max\limits_{x,y\neq 0} \dfrac{|y^* A x|}{\|x\|_2 \|y\|_2}$.

d) $\|A\|_2 = \|A^\top\|_2$.

e) $\|A\|_2^2 = \|A^\top A\|_2$.

f) $\|U^\top A U\|_2 = \|AU\|_2 = \|UA\|_2$, si U és ortogonal ($U^{-1} = U^\top$).

g) $\|A\|_2 \leq \|A\|_E \leq \sqrt{n}\|A\|_2$ i $\frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_E \leq \|A\|_2 \leq \|A\|_E$.

15. Considereu les normes $\|\cdot\|_p$ i $\|\cdot\|_\infty$ en $\mathbb{R}^n$. Demostreu que,

$$\lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty.$$

16. a) Resoleu

$$\begin{pmatrix} 1.0 & 0.5 & 0.33 \\ 0.5 & 0.33 & 0.25 \\ 0.33 & 0.25 & 0.20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \end{pmatrix}$$

b) $x = (9, -36, 30)^\top$ és la solució exacta del sistema $Ax = b$ on ara

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix}$$

Compareu les dades i els resultats de a). Calculeu $\dfrac{\|\,\delta x\,\|_\infty}{\|\,x + \delta x\,\|_\infty}$ per justificar la resposta.

Aproximació i sistemes lineals sobredeterminats

17. Ajusteu per mínims quadrats la taula de dades: (0.25,0.40), (0.50,0.50), (0.75,0.90), (1.00,1.28), (1.25,1.60), (1.50,1.66), (1.75,2.02), a una funció del tipus

a) $p_1^* = a_0 + a_1 x$.

b) $p_2^* = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$. En ambdós casos, apliqueu el mètode de Gram-Schmidt modificat per tal de trobar la descomposició de matrius $M = QR$ i resoleu el sistema d'equacions normals utilitzant Q i R.

c) Calculeu l'error de les aproximacions $\|f - p_j^*\|_2^2$, $j = 1, 2$.

18. Trobeu la recta $p(x) = Mx + B$ per a la qual $S = \sum_{i=0}^{N}(y_i - Mx_i - B)^2$ és un mínim amb les dades (x_i, y_i), $i = 0, \ldots, N$. Concretament

a) Trobeu el sistema d'equacions normals. Comproveu que és compatible determinat. Resoleu-lo.

b) Comproveu que la solució B, M trobada correspon a un mínim de S.

19. Useu els pesos moleculars dels sis òxids de nitrògen donats per calcular els pesos atòmics de l'hidrògen i oxigen: NO : 30.006, N_2O : 40.013, NO_2 : 46.006, N_2O_3 : 76.012, N_2O_5 : 108.010, N_2O_4 : 92.011.

DESCOMPOSICIÓ EN VALOR SINGULARS (SVD)

20. a) Calculeu la SVD de la matriu

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}$$

b) Comproveu que V i U són els VEP de VAP σ^2 de les matrius $A^\top A$ i $AA^\top$ respectivament.

21. a) Calculeu la SVD de la matriu

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

b) Quins són els VAP de $AA^\top$? I els VEP?