Topologia FME
Resum de teoria i llista de problemes

Curs 2019/2020

31 de gener de 2020

2 Espais topològics

Definició 2.1 (Topologia, espai topològic) *Una* topologia *en un conjunt X és una família de subconjunts $\mathscr{T} \subseteq \mathscr{P}(X)$ que conté el conjunt buit i el conjunt total i és tancada per reunions arbitràries i per interseccions finites.*

Un espai topològic *és un conjunt on hi ha donada una topologia. Es denota $(X, \mathscr{T})$, o simplement X si la topologia $\mathscr{T}$ se sobreentén.*

Els elements de $\mathscr{T}$ s'anomenen *subconjunts oberts* de X. Els complementaris dels conjunts oberts s'anomenen *subconjunts tancats*. Un *entorn* d'un punt és un conjunt que conté algun obert que contingui el punt. Un obert que contingui un punt és un *entorn obert* del punt.

Dues topologies $\mathscr{T}_1, \mathscr{T}_2 \subseteq \mathscr{P}(X)$ en un mateix conjunt es poden comparar mirant si una està continguda en l'altra. Si $\mathscr{T}_1 \subseteq \mathscr{T}_2$ la que té més oberts es diu *més fina* que l'altra i la que en té menys es diu *més grollera*.

La intersecció de topologies és una topologia. La *topologia generada* per un subconjunt $\mathscr{S} \subseteq \mathscr{P}(X)$ és la més fina que el conté: la intersecció de totes les topologies que contenen $\mathscr{S}$. Aquesta topologia es pot denotar $\mathscr{T} = \langle \mathscr{S} \rangle$ i es diu que $\mathscr{S}$ és una subbase de $\mathscr{T}$.

Exemples 2.2 *Els subconjunts oberts d'un espai mètric formen una topologia: la* topologia mètrica. *En un conjunt X qualsevol, la* topologia discreta $\mathscr{T}_{\mathsf{dis}} = \mathscr{P}(X)$ *és aquella en què tots els subconjunts són oberts; la* topologia grollera *o trivial* $\mathscr{T}_{\mathsf{gro}} = \{\varnothing, X\}$ *té per oberts només el buit i el total; la* topologia dels complementaris finits $\mathscr{T}_{\mathsf{cf}} = \{U \subseteq X : |U^c| < \infty\} \cup \{\varnothing\}$ *està formada pel conjunt buit i els subconjunts que tenen complementari finit. En un conjunt totalment ordenat X la* topologia de l'ordre *té per oberts les reunions d'intervals oberts $(a, b) = \{x \in X : a < x < b\}$ amb $a, b \in X \cup \{\pm\infty\}$.*

Definició 2.3 (Espais de Hausdorff) *Un espai topològic es diu que és* de Hausdorff *si els punts es poden separar: dos punts diferents tenen entorns oberts disjunts.*

Proposició 2.4 (Punts tancats) *En un espai de Hausdorff els punts són tancats però el recíproc no sempre és cert.*

Definició 2.5 (Bases i subbases) *Una* base *d'una topologia* $\mathscr{T}$ *és un subconjunt* $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{T}$ *tal que tot obert de* $\mathscr{T}$ *és reunió de conjunts de* $\mathscr{B}$.

Una subbase *de* $\mathscr{T}$ *és un subconjunt* $\mathscr{S} \subseteq \mathscr{T}$ *que genera* $\mathscr{T}$.

Proposició 2.6 (Caracterització de les bases) *Un subconjunt* $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{P}(X)$ *és base d'alguna topologia en el conjunt* X *si, i només si, compleix les condicions següents:*

1. $X = \cup_{B\in\mathscr{B}} B$*: per a cada* $x \in X$ *existeix* $B \in \mathscr{B}$ *amb* $x \in B$*;*
2. *si* $B_1, B_2 \in \mathscr{B}$*, per a cada* $x \in B_1 \cap B_2$ *existeix un* $B \in \mathscr{B}$ *tal que* $x \in B \subseteq B_1 \cap B_2$.

Definició 2.7 (Tipus de punts en relació a un subconjunt) *Sigui* $A \subseteq X$ *un subconjunt d'un espai topològic* X*. Un punt* $x \in X$ *es diu*

- interior *de* A *si existeix un obert que conté* x *i està contingut en* A*;*
- adherent *de* A *si tot obert que conté* x *talla* A*;*
- frontera *de* A *si tot obert que conté* x *talla* A *i també talla* A^c*;*
- *d'*acumulació *de* A *(o* punt límit*) si tot obert que conté* x *també conté punts de* A *diferents del propi* x*;*
- aïllat *de* A *si existeix un obert que talla* A *només en el punt* x.

Els conjunts formats pels punts de cada tipus es diuen interior*,* adherència*,* frontera*,* acumulació *i* subconjunt de punts aïllats*, respectivament, del conjunt* A*, i es denoten* A°, $\overline{A}$, δA, A' *i* A^{a}*, respectivament. Es tenen inclusions* $A^\circ \subseteq A \subseteq \overline{A}$, $A^{\mathsf{a}} \subseteq A$, $A' \subseteq \overline{A}$ *i* $\delta A \subseteq \overline{A}$.

Un punt *exterior* de A és un punt interior del complementari A^c.
Un subconjunt $A \subseteq X$ és *dens* si $\overline{A} = X$.
A la definició 2.7 es pot canviar arreu "obert que conté x" per "entorn de x".

Proposició 2.8 *Algunes propietats de l'interior, l'adherència, la frontera, els punts d'acumulació i els punts aïllats:*

1. *L'interior és obert; l'adherència i la frontera són tancats; els conjunts de punts d'acumulació i de punts aïllats no tenen perquè ser cap de les dues coses.*
2. *L'interior d'un conjunt és l'obert més gran que conté: la reunió de tots els oberts que conté.*
3. *L'adherència d'un conjunt és el tancat més petit que el conté: la intersecció de tots els tancats que el contenen.*
4. *L'adherència és la reunió disjunta de l'interior i la frontera i també és la reunió disjunta dels conjunts de punts d'acumulació i de punts aïllats:* $\overline{A} = A^\circ \sqcup \delta A = A' \sqcup A^{\mathsf{a}}$.

Definició 2.9 (Continuïtat) *Una aplicació* $f\colon X \to Y$ *entre espais topològics és* contínua *en un punt* $x \in X$ *si tot entorn de* $f(x)$ *conté la imatge d'algun entorn de* x.

L'aplicació es diu contínua *si ho és en cada punt de l'espai on està definida.*

Un homeomorfisme *és una aplicació contínua bijectiva amb inversa contínua.*

Una immersió *és una aplicació contínua injectiva* $f\colon X \to Y$ *que dóna un homeomorfisme entre l'espai* X *i el subespai* $f(X) \subseteq Y$.

Proposició 2.10 (Caracterització de la continuïtat) *Una aplicació entre espais topològics és contínua si, i només si, l'antiimatge de tot obert és un obert (resp. el mateix per a tancats).*

Que $f^{-1}(U)$ sigui obert per a tots els oberts U d'una base o d'una subbase ja és suficient per garantir la continuïtat.

Proposició 2.11 *La continuïtat es comporta bé respecte la composició d'aplicacions.*

Definició 2.12 (Aplicacions obertes i tancades) *Una aplicació contínua es diu* oberta *si la imatge de tot obert és un obert. El mateix per a tancats. Ull, no són equivalents.*

Exercicis de repàs i/o discutits a classe de teoria

2.1. *Topologia dels complementaris finits.* Sigui X un conjunt. La topologia dels complementaris finits (resp. numerables) a X és la que té per oberts el conjunt buit i els subconjunts amb complementari finit (resp. numerable).

Comproveu que és efectivament una topologia i, per a cada subconjunt $A \subseteq X$, digueu segons el seu cardinal quins són el seu interior, adherència, frontera, punts d'acumulació i punts aïllats.

2.2. *Topologia de l'ordre.* Sigui $(X, \leqslant)$ un conjunt amb un ordre total. Per simplificar les notacions és convenient considerar el conjunt i l'ordre estesos afegint dos nous elements $-\infty$ i ∞ que siguin més petit i més gran que tots els altres, respectivament: $-\infty < a$ i $a < \infty$ per a tot $a \in X$. Aleshores es poden definir els intervals de X de la manera habitual:

$$\begin{aligned}(\alpha, \beta) &= \{x \in X : \alpha < x < \beta\}\\ [a, \beta) &= \{x \in X : a \leqslant x < \beta\}\\ (\alpha, b] &= \{x \in X : \alpha < x \leqslant b\}\\ [a, b] &= \{x \in X : a \leqslant x \leqslant b\}\end{aligned}$$

per a elements $\alpha, \beta \in X \cup \{\pm\infty\}$ i $a, b \in X$.

La topologia de l'ordre a X és

$$\mathscr{T}_{\leqslant} = \big\{U \subseteq X : \text{per a tot } x \in U \text{ existeixen } a, b \in X \cup \{\pm\infty\} \text{ tals que } x \in (a, b) \subseteq U\big\}.$$

1. Comproveu que la definició anterior dóna efectivament una topologia.
2. Comproveu que els intervals oberts $\big\{(a, b) : a, b \in X \cup \{\pm\infty\}\big\}$ són una base d'aquesta topologia.
3. Comproveu que la topologia de l'ordre a $\mathbb{N}$ i a $\mathbb{Z}$ és la topologia discreta.
4. Comproveu tot espai topològic amb la topologia de l'ordre és de Hausdorff.
5. Descriviu els oberts de la topologia de l'ordre lexicogràfic a $\mathbb{R}^2$:

   $$(a, b) \leqslant (c, d) \Leftrightarrow a < c \text{ o } a = c \text{ i } b \leqslant d$$

   i comproveu que aquesta topologia és estrictament més fina que l'euclidiana.
6. Determineu els oberts de la topologia de l'ordre lexicogràfic als espais $\{1, 2\} \times \mathbb{N}$, $\{1, 2\} \times \mathbb{Z}$, $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ i $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$.

2.3. *Bases i subbases a* $\mathbb{R}^2$. Digueu quines de les famílies següents són base o subbase de la topologia euclidiana a $\mathbb{R}^2$:

1. els "interiors" de les paràboles d'eix vertical:

   $$\big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > ax^2 + bx + c; \quad a, b, c \in \mathbb{R}, a > 0\big\} \\ \cup \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < ax^2 + bx + c; \quad a, b, c \in \mathbb{R}, a < 0\big\};$$

2. els interiors dels rectangles:

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : a<x<b \text{ i } c<y<d;\quad a,b,c,d\in\mathbb{R}\};$$

3. Els exteriors dels discs:

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x-a)^2+(y-b)^2>r^2;\quad a,b\in\mathbb{R}, r>0\};$$

4. Els interiors de quadrants limitats per dues rectes perpendiculars:

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : ax+by+c>0 \text{ i } ex+dy+f>0;\ a,b,c,d,e,f\in\mathbb{R} \text{ amb } ae+bd=0\};$$

5. Les bandes d'amplada 1 limitades per dues rectes paral·leles:

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0<ax+by+c<1;\quad a,b,c\in\mathbb{R}\}.$$

6. Els interiors de corones circulars:

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : r^2<(x-a)^2+(y-b)^2<R^2;\quad a,b\in\mathbb{R}, 0<r<R\};$$

7. Els complementaris de rectes:

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : ax+by+c\neq 0;\quad a,b,c\in\mathbb{R}, (a,b)\neq(0,0)\}.$$

2.4. Determineu l'interior, l'exterior, l'adherència, la frontera, l'acumulació i els punts aïllats dels conjunts següents:

1. $\{(x,\sin\frac{1}{x}) : x>0\}\subset\mathbb{R}^2$ amb la topologia euclidiana;
2. $\mathbb{Q}^n\subset\mathbb{R}^n$ amb la topologia euclidiana;
3. $\{\frac{1}{n} : n\in\mathcal{N}\}\subset\mathbb{R}$ amb la topologia euclidiana;
4. Un subconjunt de $\mathbb{R}$ amb la topologia del complementari finit;
5. $(0,1)\subset\mathbb{R}$ amb la topologia del complementari finit.

Problemes

2.5. *Topologia del límit inferior.* En un conjunt totalment ordenat $(X, \leqslant)$ es defineix la topologia del límit inferior com:

$$\mathscr{T}_\ell = \big\{U \subseteq X : \text{per a tot } x \in U \text{ existeix } b \in X \cup \{\infty\} \text{ tal que } [x, b) \subseteq U\big\},$$

i es denota X_ℓ l'espai topològic corresponent.

1. Comproveu que la definició anterior dóna efectivament una topologia.
2. Comproveu que els intervals semitancats inferiors $\big\{[a, b) : a, b \in X \cup \{\infty\}\big\}$ són una base d'aquesta topologia.
3. Calculeu a $\mathbb{R}_\ell$ l'adherència, interior, frontera, acumulació i punts aïllats dels subconjunts següents: $(a, b), [a, b), (a, b], [a, b], \{0\} \cup \{1/n\}_{n\geqslant 1}, \{0\} \cup \{-1/n\}_{n\geqslant 1}$.

2.6. *Topologia dels intervals semi-infinits.* En un conjunt totalment ordenat $(X, \leqslant)$ es defineix la topologia dels intervals semi-infinits inferiors com:

$$\mathscr{T}_{-\infty} = \{U \subseteq X : \text{ per a tot } \ x \in U \ \text{ existeix } \ a \in X \cup \{\infty\} \ \text{ tal que } \ x \in (-\infty, a) \subseteq U \ \}.$$

1. Comproveu que la definició anterior dóna efectivament una topologia.
2. Comproveu que els intervals semi-infinits inferiors $\big\{(-\infty, a) : a \in X \cup \{\infty\}\big\}$ són una base d'aquesta topologia.
3. El conjunt $\{(-\infty, a) : a \in X\}$, és també una base?
4. Quina condició sobre l'ordre $\leqslant$ equival al fet que $\mathscr{T}_{-\infty} = \big\{(-\infty, a) : a \in X \cup \{\infty\}\big\}$?
5. Calculeu a l'espai $\mathbb{R}_{-\infty}$ l'adherència, interior, frontera, acumulació i punts aïllats dels subconjunts següents: $(a, b), [a, b), (a, b], [a, b], \{0\} \cup \{1/n\}_{n\geqslant 1}$ i $F \subset \mathbb{R}$ finit.

2.7. *Topologia de Zariski.* Sigui $I \subseteq K[X_1, \ldots, X_n]$ una família de polinomis en n variables a coeficients en un cos K. El *conjunt de zeros de* I és el conjunt

$$V_I = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in K^n : f(x) = 0, \forall f \in I\}.$$

Els subconjunts de K^n que són conjunts de zeros d'alguna família de polinomis s'anomenen *conjunts algebraics.*

1. Demostreu que els conjunts algebraics de K^n compleixen els axiomes dels tancats d'una topologia: se li diu la topologia de Zariski a l'espai K^n.
2. Quina topologia s'obté en el cas $n = 1$?
3. Demostreu que si K és un cos finit, la topologia de Zariski a K^n coincideix amb la topologia discreta.
4. Demostreu, per inducció sobre n, que l'únic polinomi $f \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ que s'anul.la en el conjunt $[0, 1]^n$ és el polinomi zero, i deduïu que la topologia de Zariski a $\mathbb{R}^n$ és estrictament menys fina que la topologia euclidiana.

5. Sigui $A = \{(x, \sin x) : x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$ la gràfica de la funció sinus com a subconjunt de l'espai topològic $\mathbb{R}^2$ amb la topologia de Zariski. Calculeu $\overline{A}$.

2.8. *Sistemes d'entorns.* El sistema d'entorns d'un punt x d'un espai topològic és el conjunt $\mathscr{N}_x$ de tots els entorns d'aquest punt. Comproveu que els sistemes d'entorns compleixen les propietats següents:

1. $\mathscr{N}_x \neq \varnothing$;
2. $x \in N$ per a tot $N \in \mathscr{N}_x$;
3. $N \in \mathscr{N}_x$ i $N \subseteq A \subseteq X \;\Rightarrow\; A \in \mathscr{N}_x$;
4. $N_1, N_2 \in \mathscr{N}_x \;\Rightarrow\; N_1 \cap N_2 \in \mathscr{N}_x$;
5. per a tot entorn $N \in \mathscr{N}_x$ existeix un entorn $U \in N_x$ amb $U \subseteq N$ que és entorn de tots els seus punts: per a tot $y \in U$ és $U \in \mathscr{N}_y$.

Donat un conjunt X i, per a cada punt $x \in X$, una família de conjunts $\mathscr{N}_x \subseteq \mathscr{P}(X)$ que satisfacin les condicions anteriors, demostreu que existeix una única topologia en X per a la qual aquests $\mathscr{N}_x$ són els sistemes d'entorns dels seus punts.

2.9. *Base d'entorns.* Una *base d'entorns* d'un punt $x \in X$ és un subconjunt $\mathscr{B}_x \subseteq \mathscr{N}_x$ d'*entorns bàsics* de x tal que tot entorn de x conté algun entorn bàsic: per a tot $N \in \mathscr{N}_x$ existeix un $B \in \mathscr{B}_x$ tal que $B \subseteq N$. Una *base d'entorns* de l'espai topològic X és una família $(\mathscr{B}_x)_{x \in X}$ de bases d'entorns, un per a cada punt de l'espai. Demostreu que una base d'entorns d'un espai topològic X compleix les condicions següents:

1. Si $x \in X$ es té $\mathscr{B}_x \neq \varnothing$ i $x \in B$ per a tot $B \in \mathscr{B}_x$;
2. Per a tot parell $B_1, B_2 \in \mathscr{B}_x$ existeix $B \in \mathscr{B}_x$ tal que $B \subseteq B_1 \cap B_2$.
3. Per tot $B \in \mathscr{B}_x$ existeix un subconjunt $U \subseteq X$ amb $x \in U \subseteq B$ i tal que per a tot punt $y \in U$ existeix un $B_y \in \mathscr{B}_y$ amb $B_y \subseteq U$.

Demostreu que donats un conjunt X i, per a cada punt $x \in X$, una família de conjunts $\mathscr{B}_x \subseteq \mathscr{P}(X)$ que satisfacin les condicions anteriors, existeix una única topologia en X tal que aquestes famílies formen una base d'entorns de l'espai.

2.10. Comproveu que les boles tancades són una base d'entorns per a la topologia mètrica.

2.11. Sigui $(\mathbb{Z}, \mathscr{T}_p)$ l'espai topològic induït per la distància p-àdica a $\mathbb{Z}$, que es defineix com $d(a,b) = 0$ si $a = b$ i, per a enters diferents $a \neq b$, com

$$d(a,b) = p^{-n} \qquad \text{si} \qquad p^n \mid b - a \quad \text{i} \quad p^{n+1} \nmid b - a.$$

1. Demostreu que tot subconjunt finit $A \subseteq \mathbb{Z}$ és tancat.
2. Demostreu que $\mathscr{T}_p$ és més fina que la topologia dels complements finits a $\mathbb{Z}$.
3. Demostreu que l'aplicació $(\mathbb{Z}, \mathscr{T}_p) \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ de pas al quocient $a \mapsto a \pmod p$ és contínua, on a $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ es considera la topologia discreta.

2.12. Sigui X un espai topològic. Es consideren les cinc aplicacions $\mathscr{P}(X) \to \mathscr{P}(X)$ que envien un conjunt A al seu interior A°, la seva adherència $\overline{A}$, la seva frontera δA, la seva acumulació A' i el conjunt dels seus punts aïllats A^{a}, respectivament. L'objectiu d'aquest problema és estudiar com es comporten aquestes aplicacions en relació amb l'estructura del conjunt de les parts de X; o sigui, respecte l'ordre, la reunió, la intersecció, el complementari i la diferència. Demostreu les propietats següents:

1. *Relació d'inclusió amb la imatge.* $A^\circ \subseteq A$, $A \subseteq \overline{A}$, $A^{\text{a}} \subseteq A$, però en general no hi ha relacions d'inclusió entre A i δA ni entre A i A'.
2. *Inclusió.* Si $A \subseteq B$ aleshores $A^\circ \subseteq B^\circ$, $\overline{A} \subseteq \overline{B}$, $A' \subseteq B'$, però en general no hi ha relacions d'inclusió entre δA i δB ni entre A^{a} i B^{a}.
3. *Idempotència.* $(A^\circ)^\circ = A^\circ$, $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$ i $(A^{\text{a}})^{\text{a}} = A^{\text{a}}$; $\delta(\delta A) \subseteq \delta A$ i no sempre es compleix la igualtat; els conjunts $(A')'$ i A' no tenen relacions d'inclusió en general.
4. *Reunió i intersecció.* $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$; $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$ però en general no hi ha igualtat. Què es pot dir dels interiors de la reunió i de la intersecció?
5. *Composició de $\int$ i adh* $(\overline{A})^\circ \supseteq A^\circ$, $\overline{A^\circ} \subseteq \overline{A}$, però en general no hi ha igualtat.
6. *Complementari.* $(A^\circ)^c = \overline{A^c}$, $\overline{A}^c = (A^c)^\circ$.

2.13. *Comparació de topologies a partir de bases.* Siguin X un conjunt i $\mathscr{T}, \mathscr{T}' \subseteq \mathscr{P}(X)$ dues topologies amb bases $\mathscr{B}$ i $\mathscr{B}'$, respectivament. Demostreu que $\mathscr{T}$ és més fina que $\mathscr{T}'$ si, i només si, per a tot $B' \in \mathscr{B}'$ i tot punt $x \in B'$ existeix $B \in \mathscr{B}$ tal que $x \in B \subseteq B'$.

2.14. *Dues caracteritzacions de la continuitat.* Demostreu que la continuïtat d'una aplicació entre espais topològics $f\colon X \to Y$ és equivalent a cadascuna de les dues condicions següents:

1. Per a tot subconjunt $A \subseteq X$ es té $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.
2. Per a tot subconjunt $B \subseteq Y$ es té $\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(\overline{B})$.

2.15. Comproveu que la identitat $\mathrm{Id}\colon (\mathbb{R}, \mathscr{T}_{\text{euc}}) \to (\mathbb{R}, \mathscr{T}_{\text{cf}})$ entre els reals amb la topologia euclidiana i amb la dels complements finits és una aplicació bijectiva i contínua però no és un homeomorfisme.

2.16. Sigui $f\colon X \to Y$ una aplicació contínua entre espais topològics. Demostreu que f és tancada si i només si $\overline{f(A)} \subseteq f(\overline{A})$.

Enuncieu i demostreu una proposició anàloga per a aplicacions obertes.

2.17. Demostreu que els intervals de nombres reals següents són homeomorfs:

1. $(a, b) \cong \mathbb{R}$ per a tot $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ amb $a < b$.
2. $[a, b] \cong [0, 1]$ per a tot $a, b \in \mathbb{R}$ amb $a < b$.
3. $[a, b) \cong [0, 1) \cong (a, b]$ per a tot $a, b \in \mathbb{R}$ amb $a < b$.

L'espai format per un únic punt $\{a\} \subset \mathbb{R}$, és homeomorf a algun dels intervals anteriors? i l'interval $[0, \infty)$?

2.18. Demostreu que un interval tancat $[a, b]$ amb $a, b \in \mathbb{R}$ tals que $a < b$ no és mai homeomorf a cap interval obert (c, d) amb $c, d \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ tals que $c < d$.

2.19. Demostreu que els espais següents són homeomorfs entre ells, establint homeomorfismes explícits.

1. $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.
2. $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2, z > 0\}$.
3. $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, -1 < z < 1\}$.
4. $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$.
5. $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 1\}$.

2.20. Doneu un homeomorfisme entre el quadrat $[0, 1]^2$ i el disc tancat $\mathbb{D}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 1\}$.

2.21. Demostreu que els tres espais següents són homeomorfs entre ells:

1. $\mathbb{D}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 1\}$.
2. $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2, 0 \leqslant z \leqslant 1\}$.
3. $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \leqslant 3/4\}$.

2.22. Demostreu que els subespais de $\mathbb{R}^2$ següents són homeomorfs entre ells:

1. El disc obert $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$.
2. El semiplà superior $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$.
3. Una banda $\mathbb{R} \times (0, 1)$.
4. Una banda $(0, \infty) \times (0, 1)$.
5. Un sector angular $A_\theta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0, 0 < \arctan(y/x) < \theta\}$ d'angle $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$.

2.23. Siguin $\mathbb{S}^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ i $I = [0, 1)$ amb les topologies usuals, i sigui $f \colon I \to \mathbb{S}^1$ l'aplicació definida per $f(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$.

Demostreu que f és bijectiva i contínua però no és un homeomorfisme.

2.24. Demostreu que per a cada $n \geqslant 1$ l'espai $\mathbb{R}^n \setminus \{(0, \dots, 0)\} \subset \mathbb{R}^n$ és homeomorf a l'espai $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Quins són aquests espais quan $n = 1, 2, 3$?

2.25. *Projecció estereogràfica.* Sigui $\mathbb{S}^n = \{(x_0, \dots, x_n) : x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ l'esfera unitat n-dimensional dins de l'espai euclidià de dimensió $n + 1$. Sigui $N = (1, 0, \dots, 0)$ el *pol nord* de l'esfera. La *projecció estereogràfica* estableix una correspondència entre els punts de $\mathbb{S}^n \setminus \{N\}$ i l'espai euclidià $\mathbb{R}^n$ de dimensió n vist com el subconjunt de punts de $\mathbb{R}^{n+1}$ amb primera coordenada zero, enviant cada punt d'un dels dos subconjunts a la intersecció de la recta que passa per N i pel punt en qüestió amb l'altre subconjunt.

Trobeu les equacions de la *projecció estereogràfica* en termes de les coordenades cartesianes dels punts, i comproveu que estableix un homeomorfisme $\mathbb{S}^n \setminus \{N\} \simeq \mathbb{R}^n$.

Problemes complementaris i/o d'ampliació

2.26. *Topologies finites.* Trobeu totes les topologies possibles en un conjunt de tres elements $X = \{a, b, c\}$.
INDICACIÓ: n'hi ha 29 de diferents.

2.27. *Recta amb un punt doble.* Sigui $X = \big(\mathbb{R} \smallsetminus \{0\}\big) \cup \{0^-, 0^+\}$. Sigui $\mathscr{T} \subseteq \mathscr{P}(X)$ la família formada pels dos tipus de subconjunts següents:

- $U \subset \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$ un obert de $\mathbb{R}$ que no contingui 0, i
- $U = \big(U' \smallsetminus \{0\}\big) \cup S$ amb U' un obert de $\mathbb{R}$ que contingui 0 i $S \subseteq \{0^-, 0^+\}$ un subconjunt qualsevol.

Proveu que $\mathscr{T}$ és una topologia en X que no és de Hausdorff. Deduïu que $\mathscr{T}$ no és la topologia mètrica de cap distància que es pugui definir a X.

2.28. *Clausura de Kuratowski.* Sigui X un conjunt i sigui $\psi\colon \mathscr{P}(X) \to \mathscr{P}(X)$ una aplicació que verifica:

1. $\psi(\varnothing) = \varnothing$,
2. $A \subseteq \psi(A)$,
3. $\psi(\psi(A)) = \psi(A)$,
4. $\psi(A \cup B) = \psi(A) \cup \psi(B)$.

Demostreu que existeix una única topologia $\mathscr{T}$ en X tal que l'adherència $\overline{A}$ de cada subconjunt $A \subseteq X$ és el conjunt $\psi(A)$.

2.29. Per a cada punt $(p, q) \in \mathbb{R}^2$ es defineix la família $\mathscr{B}_{(p,q)} \subseteq \mathscr{P}(\mathbb{R}^2)$ com la formada pels subconjunts $B \subseteq \mathbb{R}^2$ que són la reunió del punt (p, q) amb el conjunt obtingut eliminant de cada bola oberta de centre (p, q) i radi r els punts d'un conjunt finit de rectes que passen pel centre:

$$B = \{(p, q)\} \cup \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-p)^2 + (y-q)^2 < r, a_i(x-p) + b_i(y-q) \neq 0, i = 1, \dots, n\big\}$$

amb $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ no tots dos zero.

Demostreu que aquesta família és una base d'entorns d'una topologia.

2.30. *Topologia de les progressions aritmètiques.* Demostreu que a $\mathbb{Z}$ les progressions aritmètiques $a + r\mathbb{Z} = \{a + rn : n \in \mathbb{Z}\}$ per a $a \in \mathbb{Z}$ i $r \geqslant 1$ són una base d'una topologia, i compareu-la amb les topologies p-àdiques.

Doneu una "demostració topològica de l'existència d'infinits primers" a partir del fet que
$$\cup\{0 + p\mathbb{Z} : p \text{ primer}\} = \mathbb{Z} \smallsetminus \{-1, 1\}.$$