Topologia FME
Resum de teoria i llista de problemes

Curs 2019/2020

18 de maig de 2020

Índex

7 Grup fonamental **1**

7.1 Homotopia de camins 1

7.2 El grup fonamental 5

7.3 Propietats functorials 7

7.4 Càlcul de grups fonamentals 9

7 Grup fonamental

7.1 Homotopia de camins

Sigui $\mathbb{I}$ l'interval compacte $[0,1] \subset \mathbb{R}$. Es recorda que un *camí* en un espai topològic X és una aplicació contínua $\sigma\colon \mathbb{I} \to X$. Els punts de l'espai $\sigma(0)$ i $\sigma(1)$ són l'*origen* i el *final* del camí: els dos *extrems* del camí. Si tots dos coincideixen es diu que el camí és tancat, o que és un *llaç* i els extrems comuns es diuen el *punt base*. A través de l'isomorfisme $\mathbb{I}/\{0 \sim 1\} \cong \mathbb{S}^1$ donar un camí tancat en X equival a donar a donar una aplicació contínua $z \mapsto \sigma(z)\colon \mathbb{S}^1 \to X$, on com a punt base s'agafa el punt $\sigma(1)$, imatge del punt $1 \in \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$.

Per a cada punt $x \in X$ es denotarà ε_x el camí constant $\varepsilon_x(t) = x$ per a tot $t \in \mathbb{I}$.

Per a cada camí $\sigma\colon \mathbb{I} \to X$ es denotarà σ^- el camí que fa el mateix recorregut en sentit invers, definit posant $\sigma^-(x) = \sigma(1-x)$. Tots dos camins tenen l'origen i el final intercanviats. Si σ és un llaç aleshores σ^- també i té el mateix punt base.

Definició 7.1 (Concatenació) *Donats camins $\sigma, \tau\colon \mathbb{I} \to X$ tals que el final de σ coincideix amb l'origen de τ es defineix la seva concatenació $\mu = \sigma * \tau$ com el camí:*

$$\mu\colon \mathbb{I} \to X, \qquad \mu(x) = \begin{cases} \sigma(2x), & 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}, \\ \tau(2x-1), & \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

Aquest camí μ està ben definit gràcies a la condició que $\sigma(1) = \tau(0)$, que implica que per a $x = \frac{1}{2}$ es té $\sigma(2x) = \tau(2x-1)$. És clarament una aplicació contínua. Té l'origen de σ i el final de τ: $\mu(0) = \sigma(0)$ i $\mu(1) = \tau(1)$.

Una homotopia de camins amb el mateix origen i final és el mateix que una homotopia com a aplicacions amb la condició afegida que la deformació de l'un en l'altre manté els extrems fixos:

Definició 7.2 (Homotopia de camins) *Siguin $\sigma, \tau\colon \mathbb{I} \to X$ dos camins amb el mateix origen i final: $\sigma(0) = \tau(0)$ i $\sigma(1) = \tau(1)$. Una* homotopia de camins *entre tots dos és una aplicació contínua*

$$F\colon \mathbb{I} \times [0,1] \to X \quad \textit{tal que} \quad \begin{cases} F(x,0) = \sigma(x), & \forall x \in \mathbb{I}, \\ F(x,1) = \tau(x), & \forall x \in \mathbb{I}, \\ F(0,t) = \sigma(0) = \tau(0), & \forall t \in [0,1], \\ F(1,t) = \sigma(1) = \tau(1), & \forall t \in [0,1]. \end{cases}$$

Si existeix una homotopia entre tots dos es diuen camins homòtops. *Es denota $\sigma \simeq \tau$.*

Igual que l'homotopia d'aplicacions contínues, la de camins és una relació d'equivalència entre camins amb el mateix origen i final i es denota $[\sigma]$ la classe d'homotopia d'un camí σ.

En endavant, sempre que es parli d'homotopia entre dos camins se sobreentendrà homotopia en aquest sentit i no només com a aplicacions. La distinció és fonamental: tots els camins amb imatge en $\mathbb{S}^1$ són homòtops com a aplicacions, però hi ha infinites classes d'homotopia de camins.

En el cas que els camins siguin llaços amb el mateix punt base, identificats amb aplicacions contínues $\sigma, \tau\colon \mathbb{S}^1 \to X$ tals que $\sigma(1) = \tau(1)$, una *homotopia de llaços* és una aplicació contínua $F\colon \mathbb{S}^1 \times [0,1] \to X$ que deforma σ en τ: $F(z,0) = \sigma(z)$ i $F(z,1) = \tau(z)$, $\forall z \in \mathbb{S}^1$ mantenint fix el punt base durant la deformació: $F(1,t) = \sigma(1) = \tau(1)$ $\forall t \in [0,1]$.

Proposició 7.3 (Estructura de grup) *Siguin $\sigma, \tau, \mu\colon \mathbb{I} \to X$ tres camins amb $\sigma(1) = \tau(0)$ i $\tau(1) = \mu(0)$. Es tenen les homotopies següents entre concatenacions de camins:*

1. $\varepsilon_{\sigma(0)} * \sigma \simeq \sigma \simeq \sigma * \varepsilon_{\sigma(1)}$;
2. $\sigma * \sigma^- \simeq \varepsilon_{\sigma(0)}$;
3. $(\sigma * \tau) * \mu \simeq \sigma * (\tau * \mu)$.

PROVA:

1. Es considera l'aplicació

$$F\colon \mathbb{I} \times [0,1] \to X, \qquad F(x,t) = \begin{cases} \sigma(0), & 0 \leqslant x \leqslant \frac{t}{2}, \\ \sigma\left(\frac{2x-t}{2-t}\right), & \frac{t}{2} \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

Està ben definida ja que el paràmetre de la funció σ en l'expressió quan $\frac{t}{2} \leqslant x \leqslant 1$ és positiu (numerador i denominador ho són) i menor que 1 ja que $2x \leqslant 2 \Rightarrow 2x - t \leqslant 2 - t$.

És contínua ja que en els punts amb $x = \frac{t}{2}$ on coincideixen els dos dominis totes dues expressions prenen el mateix valor $\sigma(0)$.

És una homotopia entre els camins σ i $\varepsilon_{\sigma(0)} * \sigma$ ja que $F(x,0) = \sigma(\frac{2x-0}{2-0}) = \sigma(x)$, $\forall x \in \mathbb{I}$,

$$F(x,1) = \left\{\begin{array}{ll} \sigma(0) = \varepsilon_{\sigma(0)}(2x), & 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{2}, \\ \sigma\left(\dfrac{2x-1}{2-1}\right) = \sigma(2x-1), & \dfrac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1, \end{array}\right\} = (\varepsilon_{\sigma(0)} * \sigma)(x), \quad \forall x \in \mathbb{I},$$

i manté fixos els extrems: $F(0,t) = \sigma(0) = (\varepsilon_{\sigma(0)} * \sigma)(0)$ i $F(1,t) = \sigma(1) = (\varepsilon_{\sigma(0)} * \sigma)(1)$.

La comprovació que en compondre a la dreta amb el camí constant igual a $\sigma(1)$ també s'obté un camí homòtop és completament anàloga, usant en aquest cas l'homotopia:

$$F(x,t) = \begin{cases} \sigma\left(\frac{2x}{2-t}\right), & 0 \leqslant x \leqslant 1 - \frac{t}{2}, \\ \sigma(1), & 1 - \frac{t}{2} \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

que deforma $F(x,0) = \sigma(x)$ en $F(x,1) = (\sigma * \varepsilon_{\sigma(1)})(x)$.

2. Es considera l'aplicació

$$F\colon \mathbb{I} \times [0,1] \to X, \qquad F(x,t) = \begin{cases} \sigma(2tx), & 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}, \\ \sigma\big(2t(1-x)\big), & \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

Està ben definida ja que els paràmetres de σ en totes dues expressions es mouen en l'interval $\mathbb{I}$. És contínua ja que en els punts d'intersecció dels dos dominis, que són els de paràmetre $x = \frac{1}{2}$, totes dues expressions prenen el mateix valor: $\sigma(2t\frac{1}{2}) = \sigma(t) = \sigma\big(2t(1-\frac{1}{2})\big)$.

Deforma contínuament el camí constant $F(x,0) = \sigma(0) = \varepsilon_{\sigma(0)}(x)$ en el camí

$$F(x,1) = \left\{\begin{array}{ll} \sigma(2x), & 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{2}, \\ \sigma\big(2(1-x)\big) = \sigma^{-}(2x-1), & \dfrac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1, \end{array}\right\} = (\sigma * \sigma^{-})(x), \quad \forall x \in \mathbb{I},$$

i manté fixos els extrems: $F(0,t) = \sigma(0) = (\sigma * \sigma^{-})(0)$ i $F(1,t) = \sigma(0) = (\sigma * \sigma^{-})(1)$.

3. Les dues maneres de concatenar els tres camins donen lloc als camins

$$\big((\sigma * \tau) * \mu\big)(x) = \begin{cases} (\sigma * \tau)(2x) = \begin{cases} \sigma(4x), & 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{4}, \\ \tau(4x-1), & \frac{1}{4} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}, \end{cases} \\ \mu(2x-1), & \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1, \end{cases}$$

$$\big(\sigma * (\tau * \mu)\big)(x) = \begin{cases} \sigma(2x), & 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}, \\ (\tau * \mu)(2x-1) = \begin{cases} \tau(4x-2), & \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3}{4}, \\ \mu(4x-3), & \frac{3}{4} \leqslant x \leqslant 1. \end{cases} \end{cases}$$

L'aplicació
$$F(x,t) = \begin{cases} \sigma\left(\frac{4x}{1+t}\right), & 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{4} + \frac{t}{4}, \\ \tau(4x - t - 1), & \frac{1}{4} + \frac{t}{4} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2} + \frac{t}{4}, \\ \mu\left(\frac{4x-t-2}{2-t}\right), & \frac{1}{2} + \frac{t}{4} \leqslant x \leqslant 1, \end{cases}$$
és una homotopia entre aquests dos camins. La comprovació d'això es fa de la manera habitual: els comprova que els paràmetres on s'avaluen σ, τ i μ pertanyen a l'interval $\mathbb{I}$ per als valors de x i t corresponents; es comprova que els valors coincideixen en els punts d'intersecció dels tres intervals de definició (en $x = \frac{1}{4} + \frac{t}{4}$ valen $\sigma(1) = \tau(0)$ i en $x = \frac{1}{2} + \frac{t}{4}$ valen $\tau(1) = \mu(0)$); es comprova que deformen un camí en l'altre: $x \mapsto F(x,0)$ és $(\sigma * \tau) * \mu$ i $x \mapsto F(x,1)$ és $\sigma * (\tau * \mu)$; finalment, es comprova que deixa els extrems fixos: $F(0,t) = \sigma(0)$ i que $F(1,t) = \mu(1)$ per a tot $t \in [0,1]$. $\square$

Proposició 7.4 (Compatibilitat) *L'homotopia de camins és compatible amb la concatenació: donats $\sigma_1, \sigma_2, \tau_1, \tau_2 \colon \mathbb{I} \to X$ tals que σ_i i τ_i tenen el mateix origen i final, i el final dels primers és l'origen dels segons, aleshores:*
$$\left.\begin{matrix} \sigma_1 \simeq \sigma_2 \\ \tau_1 \simeq \tau_2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \sigma_1 * \tau_1 \simeq \sigma_2 * \tau_2.$$

Prova: Siguin F una homotopia entre σ_1 i σ_2 i G una homotopia entre τ_1 i τ_2. Es defineix l'aplicació
$$H \colon \mathbb{I} \times [0,1] \to X, \qquad H(x,t) = \begin{cases} F(2x,t), & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}, \\ G(2x-1,t), & \text{si} \quad \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$
Per veure que és contínua s'ha de comprovar que les fórmules (contínues) de la definició coincideixen en la intersecció dels dos rectangles on s'ha definit amb fórmules diferents: si $x = \frac{1}{2}$ aleshores
$$F(2\tfrac{1}{2},t) = F(1,t) = \sigma_1(1) = \sigma_2(1) = \tau_1(0) = \tau_2(0) = G(0,t) = G(2\tfrac{1}{2} - 1, t), \quad \forall t \in [0,1].$$
Per veure que és una homotopia es té:
$$H(x,0) = \left\{\begin{matrix} F(2x,0) = \sigma_1(2x), & 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{2}, \\ G(2x-1,0) = \sigma_2(2x-1), & \dfrac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1, \end{matrix}\right\} = (\sigma_1 * \sigma_2)(x),$$
i anàlogament es comprova que $H(x,1) = (\tau_1 * \tau_2)(x)$.

També és clar que manté fixos els extrems: $H(0,t) = F(0,t) = \sigma_i(0) = (\sigma_i * \tau_i)(0)$ i $H(1,t) = G(1,t) = \tau_i(1) = (\sigma_i * \tau_i)(1)$ per a tot $t \in [0,1]$. $\square$

7.2 El grup fonamental

Sigui X un espai topològic. Es fixa un punt $x \in X$. Els llaços en x amb extrems en el punt x es poden compondre entre ells en qualsevol ordre. Això permet definir el

Definició 7.5 (Grup fonamental) *El grup fonamental de l'espai X amb base en el punt $x \in X$ és el conjunt de classes d'homotopia*

$$\pi_1(X,x) = \big\{[\sigma] : \sigma \text{ llaç en } X \text{ amb extrems } \sigma(0) = \sigma(1) = x\big\}$$

amb l'operació definida posant $[\sigma] \cdot [\tau] := [\sigma * \tau]$.

Es coneix també com el (primer) grup d'homotopia.

Per veure que aquest grup està ben definit es fan servir les dues proposicions de l'apartat anterior: la proposició 7.4 assegura que l'operació definida en les classes d'homotopia de llaços a través de la concatenació de representants està ben definida; els tres apartats de la proposició 7.3 permeten comprovar l'estructura de grup: el primer diu que la classe $[\varepsilon_x]$ del camí constant és l'element neutre; el segon que la classe $[\sigma^-]$ és inversa de la classe $[\sigma]$; el tercer que l'operació és associativa. Observi's que en general aquesta operació no és commutativa: l'ordre en què es componen els llaços és important.

La notació π_1 es refereix a *primer* grup d'homotopia, ja que hi ha també els grups d'homotopia superior $\pi_n(X,x)$. Quan només es treballa amb grup fonamental es pot simplificar la notació si es vol eliminant el subíndex 1.

El punt base $x \in X$ triat és relativament poc important en molts casos, en el sentit de la següent

Proposició 7.6 (Independència del punt base) *En un espai arc-connex els grups fonamentals amb diferents punts base són isomorfs:*

$$\pi_1(X,x) \cong \pi_1(X,y), \qquad \forall x,y \in X.$$

PROVA: Sigui $\tau \colon \mathbb{I} \to X$ un camí amb origen x i final y. Per a cada llaç $\sigma \colon \mathbb{I} \to X$ amb punt base x el camí $\tau^- * \sigma * \tau$ és un llaç amb punt base y. Es defineix l'aplicació

$$[\sigma] \mapsto [\tau^- * \sigma * \tau] \colon \pi_1(X,x) \to \pi_1(X,y).$$

És una aplicació ben definida gràcies a què la concatenació és compatible amb l'homotpia: $\sigma_1 \simeq \sigma_2 \Rightarrow \tau^- * \sigma_1 * \tau \simeq \tau^- * \sigma_2 * \tau$. És un homomorfisme de grups ja que si $\sigma = \sigma_1 * \sigma_2$ són llaços amb base x es té

$$[\tau^- * \sigma_1 * \tau][\tau^- * \sigma_2 * \tau] = [\tau^- * \sigma_1 * \tau * \tau^- * \sigma_2 * \tau] = [\tau^- * \sigma_1 * \sigma_2 * \tau] = [\tau^- * \sigma * \tau]$$

ja que la concatenació $\tau * \tau^-$ és homòtopa al llaç constant ε_x.

És injectiva ja que si $[\tau^- * \sigma * \tau] = [\varepsilon_y]$ aleshores $[\sigma] = [\tau * \varepsilon_y * \tau^-] = [\varepsilon_x]$. Finalment, és exhaustiva ja que tot element $[\sigma] \in \pi_1(X,y)$ és imatge de la classe $[\tau * \sigma * \tau^-] \in \pi_1(X,x)$. $\square$

O sigui, la classe d'isomorfisme del grup fonamental d'un espai arc-connex no depèn del punt base. Per això de vegades es denota $\pi_1(X)$ aquest grup fonamental. A pesar d'això en moltes situacions convé mantenir el punt base, ja que, tot i que els grups siguin isomorfs, els isomorfismes entre ells juguen un paper important en alguns arguments.

En general, per a un espai X qualsevol, el grup fonamental $\pi_1(X, x)$ només depèn de la component arc-conexa del punt base x. En efecte, tots els llaços basats en aquest punt han de tenir la imatge dins d'aquesta component arc-connexa i, per tant, les altres components arc-connexes, si n'hi ha, no juguen cap paper en aquest grup. Per aquest motiu moltes vegades hom es redueix a considerar espais arc-connexos quan es treballa amb grups fonamentals.

Exemples 7.7 *El grup fonamental d'un subespai convex de $\mathbb{R}^n$ és trivial. En canvi el grup fonamental d'un espai arc-connex no té perquè ser trivial.*

PROVA: Ja s'ha vist abans que les aplicacions contínues amb valors en un subespai convex de $\mathbb{R}^n$ són homòtopes entre elles; aquí però, cal que les homotopies siguin de camins: que fixin els extrems.

Sigui $\boldsymbol{x} \in X$ un punt qualsevol. Tot llaç σ amb punt base $\sigma(0) = \sigma(1) = \boldsymbol{x}$ és homòtop al llaç constant $\varepsilon_{\boldsymbol{x}}(x) = \boldsymbol{x}\ \forall x \in \mathbb{I}$. Es pot agafar com a homotopia la que uneix cada punt $\sigma(x)$ amb $\boldsymbol{x}$ a través del segment que va de l'un a l'altre:

$$F(x, t) = (1 - t)\sigma(x) + t\boldsymbol{x}.$$

En efecte, està ben definida per ser l'espai imatge convex, és òbviament contínua, transforma $F(x, 0) = \sigma(x)$ en $F(x, 1) = \boldsymbol{x} = \varepsilon_{\boldsymbol{x}}(x)$, i manté fixos els extrems: $F(0, t) = (1-t)\sigma(0)+t\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$ i $F(1, t) = (1 - t)\sigma(1) + t\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$.

Per tant, tots els llaços amb punt base $\boldsymbol{x}$ són homòtops entre ells i el grup fonamental conté un únic element: la classe del llaç constant, que és l'element neutre.

La segona afirmació és rellevant en el sentit següent: s'ha vist en un exemple de classes d'homotopia d'aplicacions que si X és un espai arc-connex aleshores $[\mathbb{I}, X]$ és trivial. És a dir, tots els camins en X són homòtops a un camí constant qualsevol *com a aplicacions contínues*; en particular ho són tots els llaços σ amb punt base x són homòtops al llaç constant ε_x *com a aplicacions contínues*.

Ull! això no vol dir que el grup fonamental de X sigui trivial. Els elements del grup fonamental són les *classes d'homotopia de llaços* i no tota homotopia com a aplicacions contínues és una homotopia de llaços: falta la condició de deixar fix el punt base durant la deformació.

Per exemple, com que $\mathbb{S}^1$ és un espai arc-connex, l'aplicació constant $x \mapsto 1$ i l'aplicació $x \mapsto e^{2\pi i x}$ són homòtopes com a aplicacions contínues $[0, 1] \to \mathbb{S}^1$. Una homotopia és $F(x, t) = e^{2\pi i t x}$, amb $F(x, 0) = e^0 = 1$ i $F(x, 1) = e^{2\pi i x}$. Però no són homòtopes com a llaços: no existeix cap homotopia que mantingui fix el punt base. És a dir, amb $F(0, t) = F(1, t) = 1$ per a tot $t \in [0, 1]$. Per exemple en la homotopia d'aplicacions anterior el punt inicial del camí es manté fix $F(0, t) = 1$ però en canvi el punt final no: $F(1, t) = e^{2\pi i t}$ es mou a través de tota la circumferència.

De fet, ni tan sols n'existeix cap que satisfaci $F(0, t) = F(1, t)$ per a tot $t \in [0, 1]$, encara que aquest valor depengui de t i no es mantingui fix, ja que per pas al quocient donaria lloc a una homotopia entre l'aplicació constant i l'aplicació identitat $\mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$, que no són homòtopes ja que tenen graus zero i u, respectivament. $\square$

Proposició 7.8 (Espais simplement connexos) *Les condicions següents en un espai topològic arc-connex són equivalents:*

1. *dos camins amb el mateix origen i final són homòtops;*
2. *tot llaç és homòtop al llaç constant sobre el punt base;*
3. *el grup fonamental $\pi_1(X)$ és trivial.*

Un espai arc-connex que satisfaci aquestes condicions s'anomena simplement connex.

PROVA: Observi's que com que l'espai és arc-connex la classe d'isomorfisme del grup fonamental no depèn del punt base. La condició 3 diu, doncs, que $\pi_1(X, x)$ és trivial per a tot punt base x.

- $1 \Rightarrow 2$. Si σ és un llaç amb base x té el mateix origen i final que el llaç constant ε_x; per tant són homòtops.
- $2 \Rightarrow 3$. Tot llaç amb base x és homòtop al llaç constant i per tant té classe d'homotopia trivial.
- $3 \Rightarrow 1$. Siguin σ i τ dos camins amb el mateix origen x i final y. La concatenació $\sigma^- * \tau$ és un llaç amb punt base y. Com que el grup d'homotopia $\pi_1(X, y)$ és trivial aquest llaç és homòtop al llaç constant ε_y. Usant les propietats demostrades a la proposició 7.3 es dedueix:

  $$\sigma \simeq \sigma * \varepsilon_y \simeq \sigma * (\sigma^- * \tau) \simeq (\sigma * \sigma^-) * \tau \simeq \varepsilon_x * \tau \simeq \tau,$$

  i per tant tots dos camins són homòtops. □

7.3 Propietats functorials

L'objectiu d'aquesta secció és veure que les aplicacions contínues entre espais topològics indueixen homomorfismes entre els grups d'homotopia corresponent. A partir d'això es veurà que (la classe d'isomorfisme de) el grup fonamental és un invariant no només de la classe d'homeomorfisme, el qual és força natural, sinó també del tipus d'homotopia de l'espai. Així, si dos espais topològics tenen grups fonamentals no isomorfs necessàriament han de ser de tipus d'homotopia diferents. L'invariant, però, no caracteritza: espais de diferents tipus d'homotopia poden tenir el mateix grup fonamental. Per exemple, l'esfera $\mathbb{S}^2$ té grup fonamental trivial però no és contràctil.

Definició 7.9 (Homomorfisme induït per una aplicació contínua) *Sigui $f\colon X \to Y$ una aplicació contínua amb $f(x) = y$. Es defineix*

$$f_*\colon \pi_1(X, x) \to \pi_1(Y, y), \qquad f_*\big([\sigma]\big) = [f \circ \sigma].$$

Proposició 7.10 *L'aplicació f_* induïda per una aplicació contínua està ben definida i és un homomorfisme de grups. A més $f \mapsto f_*$ és compatible amb la composició: $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$.*

PROVA: En efecte, donats camins σ, τ en X com que la composició d'aplicacions contínues conserva l'homotopia es té $\sigma \simeq \tau \Rightarrow f \circ \sigma \simeq f \circ \tau$ com a aplicacions contínues. Es comprova immediatament que l'homotopia dels camins en Y que es construeix en la demostració d'aquest fet a partir d'una de camins en X i de l'aplicació f també manté fixos els extrems: si $F\colon \mathbb{I} \times [0,1] \to X$ és una homotopia de camins entre σ i τ aleshores $f \circ F\colon \mathbb{I} \times [0,1] \to Y$ és una homotopia també de camins entre $f \circ \sigma$ i $f \circ \tau$.

Per tant, per a llaços σ i τ en X basats en x es té $[\sigma] = [\tau] \Rightarrow [f \circ \sigma] = [f \circ \tau]$ i l'aplicació f_* està ben definida. Com que $f \circ (\sigma * \tau) = (f \circ \sigma) * (f \circ \tau)$ l'aplicació és morfisme de grups.

L'afirmació que aquesta construcció és compatible amb la composició d'aplicacions contínues es dedueix immediatament del fet que $(g \circ f) \circ \sigma = g \circ (f \circ \sigma)$. □

Corol·lari 7.11 (Invariància per homeomorfisme) *Si X i Y són espais arc-connexos homeomorfs aleshores $\pi_1(X) \cong \pi_1(Y)$.*

Lema 7.12 (Compatibilitat amb la homotopia) *Siguin $f, g\colon X \to Y$ aplicacions contínues homòtopes: $f \simeq g$. Donat un punt $p \in X$ existeix un isomorfisme*

$$\gamma\colon \pi_1\big(Y, f(p)\big) \to \pi_2\big(Y, g(p)\big) \quad \textit{tal que} \quad g_* = \gamma \circ f_*.$$

PROVA: Sigui $F\colon X \times [0,1] \to Y$ una homotopia entre f i g. Aleshores l'aplicació $\tau\colon \mathbb{I} \to Y$ definida posant $\tau(x) = F(p, x)$ és un camí en Y que uneix $f(p) = F(p,0)$ amb $g(p) = F(p,1)$. En particular aquests punts pertanyen a la mateixa component arc-connexa de Y. En la prova de la proposició 7.6 s'ha construït un isomorfisme com el que es demana a l'enunciat, donat per l'aplicació $[\sigma] \mapsto [\tau^- * \sigma\tau]$. S'agafa com a γ aquest isomorfisme i per demostrar l'afirmació s'ha de comprovar que per a tot llaç en X basat en el punt p es té

$$[g \circ \sigma] = g_*\big([\sigma]\big) = (\gamma \circ f_*)\big([\sigma]\big) = [\tau^- * (f \circ \sigma) * \tau] \quad \Leftrightarrow \quad g \circ \sigma \simeq \tau^- * (f \circ \sigma) * \tau.$$

Per comprovar això es dona una homotopia entre aquests camins. De fet, per simplificar la homotopia el primer camí es canvia per la concatenació $\varepsilon_{g(p)} * (g \circ \sigma) * \varepsilon_{g(p)}$ amb camins constants a cada costat. Per concretar, aquestes concatenacions construeixen concatenant primer els dos primers i després el tercer: $\big(\varepsilon_{g(p)} * (g \circ \sigma)\big) * \varepsilon_{g(p)}$ i $\big(\tau^- * (f \circ \sigma)\big) * \tau$.

Una homotopia és, per exemple,

$$G\colon \mathbb{I} \times [0,1] \to Y, \qquad G(x,t) = \begin{cases} F(p, 1 - 4xt), & 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{4}, \\ F(\sigma(4x-1), 1-t), & \frac{1}{4} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}, \\ F(p, 2t(x-1)+1), & \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

S'ha de comprovar que això és, efectivament, una homotopia entre els camins considerats: està ben definida ja que en $x = \frac{1}{4}$ totes dues expressions donen $F(p, 1-t)$ i en $x = \frac{1}{2}$ donen $F(p, 1-t)$. Deformen un camí en l'altre:

$$G(x,0) = \begin{cases} F(p,1) = g(p) = \varepsilon_{g(p)}(4x), & 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{4}, \\ F(\sigma(4x-1), 1) = (g \circ \sigma)(4x-1), & \frac{1}{4} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}, \\ F(p,1) = g(p) = \varepsilon_{g(p)}(2x-1), & \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

$$G(x,1) = \begin{cases} F(p, 1-4x) = \tau(1-4x) = \tau^-(4x), & 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{4}, \\ F(\sigma(4x-1), 0) = (f \circ \sigma)(4x-1), & \frac{1}{4} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}, \\ F(p, 2x-1) = \tau(2x-1), & \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1, \end{cases}$$

tot mantenint fixos els extrems: $G(0,t) = G(1,t) = F(p,1) = g(p)$. $\square$

Corol·lari 7.13 (Invariància per homotopia) *Si X i Y són espais arc-connexos homòtps aleshores $\pi_1(X) \cong \pi_1(Y)$.*

PROVA: Siguin $f\colon X \to Y$ i $g\colon Y \to X$ aplicacions contínues que proporcionen una equivalència homotòpica entre tots dos espais, de manera que $\mathrm{Id}_X \simeq g \circ f$ i $\mathrm{Id}_Y \simeq f \circ g$. Observi's que l'homomorfisme Id_* induït per una aplicació identitat Id d'un espai és la identitat en el grup corresponent.

Sigui $p \in X$ un punt qualsevol i sigui $q = f(p)$. Es veurà que l'aplicació $f_*\colon \pi_1(X,p) \to \pi_1(Y,q)$ és un isomorfisme.

Aplicant el lema 7.12 a les dues aplicacions homòtopes Id_X i $g \circ f$ existeix un isomorfisme γ entre els grups d'homotopia de X basats en els punts $p = \mathrm{Id}_X(p)$ i $(g \circ f)(p)$

$$\gamma\colon \pi_1(X,p) \to \pi_1\big(X, (g \circ f)(p)\big)$$

tal que

$$\gamma = \gamma \circ \mathrm{Id}_{\pi_1(X,p)} = \gamma \circ (\mathrm{Id}_X)_* = (g \circ f)_* = g_* \circ f_*.$$

Com que γ és un isomorfisme aquesta igualtat implica que f_* és injectiva i g_* és exhaustiva.

Tornant a aplicar el lema amb les aplicacions homòtopes Id_Y i $f \circ g$ s'obté un isomorfisme

$$\gamma'\colon \pi_1(Y,q) \to \pi_1\big(Y, (f \circ g)(q)\big)$$

amb

$$\gamma' = \gamma' \circ \mathrm{Id}_{\pi_1(Y,q)} = \gamma' \circ (\mathrm{Id}_Y)_* = (f \circ g)_* = f_* \circ g_*,$$

i d'aquí es dedueix que f_* és exhaustiva i g_* injectiva. Per tant totes dues f_* i g_* són isomorfismes. $\square$

7.4 Càlcul de grups fonamentals

En aquesta secció es calculen els grups fonamentals d'alguns espais topològics. Es comença amb el grup fonamental de la circumferència, el qual s'obté a partir de la classificació de les classes d'homotopia d'aplicacions de $\mathbb{S}^1$ en $\mathbb{S}^1$ feta anteriorment:

Proposició 7.14 (Grup fonamental de $\mathbb{S}^1$) *El grup fonamental $\pi_1(\mathbb{S}^1)$ és isomorf al grup $\mathbb{Z}$ dels nombres enters.*

PROVA: Com que $\mathbb{S}^1$ és arc-connex la classe d'isomorfisme del grup no depèn del punt base. S'agafa com a punt base el punt $1 \in \mathbb{S}^1$. Per demostrar la proposició es construirà un isomorfisme de grups entre $\pi_1(\mathbb{S}^1, 1)$ i el grup $[\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1]$ calculat anteriorment.

Tot llaç $\sigma\colon \mathbb{I} \to \mathbb{S}^1$ amb punt base $\sigma(0) = \sigma(1) = 1$ indueix per pas al quocient una aplicació contínua $f_\sigma\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$, amb $\sigma = f_\sigma \circ \exp$. Es defineix l'aplicació

$$[\sigma] \mapsto [f_\sigma]\colon \pi^1(\mathbb{S}^1, 1) \to [\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1].$$

S'ha de veure que aquesta aplicació està ben definida, és bijectiva i és morfisme de grups.

Que està ben definida és immediat: una homotopia $F\colon \mathbb{I}\times[0,1]\to\mathbb{S}^1$ entre dos llaços σ i τ deixa fix el punt base: $F(0,t)=F(1,t)=1\ \forall t\in[0,1]$ i per tant indueix una homotopia $\mathbb{S}^1\times[0,1]\to\mathbb{S}^1$ entre les aplicacions f_σ i f_τ corresponents.

És injectiva: si f_σ és homòtopa a una constant també ho és a la constant 1 (les constants tenen totes grau zero) i per tant σ és homòtopa al llaç constant.

Per veure que és exhaustiva n'hi ha prou a observar que per a tot enter $n\in\mathbb{Z}$ el llaç $x\mapsto e^{2\pi i n x}$ té imatge l'aplicació f_σ de grau n.

Finalment, s'ha de comprovar que és morfisme de grups. Donats llaços σ,τ siguin $\widetilde{f}_\sigma$ i $\widetilde{f}_\tau\colon\mathbb{I}\to\mathbb{R}$ aixecaments de les aplicacions corresponents, de manera que $\exp\circ\widetilde{f}_\sigma=f_\sigma\circ\exp=\sigma$ i anàlogament per a τ.

Els valors $\widetilde{f}_\sigma(1)$ i $\widetilde{f}_\tau(0)$ difereixen en un enter ja que $\exp\widetilde{f}_\sigma(1)=\sigma(1)=1=\tau(0)=\exp\widetilde{f}_\tau(0)$. Com que els aixecaments queden determinats només llevat de sumar un enter es poden agafar $\widetilde{f}_\sigma$ i $\widetilde{f}_\tau$ de tal manera que $\widetilde{f}_\sigma(1)=\widetilde{f}_\tau(0)$. Aleshores l'aplicació

$$\phi(t)=\begin{cases}\widetilde{f}_\sigma(2x), & 0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2},\\ \widetilde{f}_\tau(2x-1), & \frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1,\end{cases}$$

és un aixecament de l'aplicació $f_{\sigma*\tau}$ corresponent a la concatenació $\sigma*\tau$. Aquesta aplicació és contínua en el punt $x=\frac{1}{2}$ gràcies a què l'aixecament de f_τ comença on acaba el de f_σ.

Aleshores el grau de la concatenació és

$$\deg(f_{\sigma*\tau})=\phi(1)-\phi(0)=\widetilde{f}_\tau(1)-\widetilde{f}_\sigma(0)=\widetilde{f}_\tau(1)-\widetilde{f}_\tau(0)+\widetilde{f}_\sigma(1)-\widetilde{f}_\sigma(0)=\deg(f_\sigma)+\deg(f_\tau).$$

Tenint en compte l'isomorfisme entre $[\mathbb{S}^1,\mathbb{S}^1]$ i $\mathbb{Z}$ donat pel grau això diu que $[f_{\sigma*\tau}]=[f_\sigma][f_\tau]$ i, efectivament, l'aplicació és un isomorfisme de grups. $\square$

A continuació es dona un resultat que és el cas particular més simple del resultat més important de cara al càlcul de grups fonamentals: el Teorema de Seifert i Van-Kampen.

Lema 7.15 *Sigui X un espai topològic amb una descomposició $X=\mathcal{U}\cup\mathcal{V}$ en dos subespais oberts simplement connexos tal que $\mathcal{U}\cap\mathcal{V}$ és arc-connex i no buit. Aleshores $\pi(X)$ és trivial.*

Prova: L'espai és arc-connex ja que és reunió de subespais arc-connexos amb intersecció no buida. El grup fonamental no depèn, llevat d'isomorfisme, del punt base escollit. S'agafa un punt base $p\in\mathcal{U}\cap\mathcal{V}$. Sigui $\sigma\colon\mathbb{I}\to X$ un llaç basat en p.

Per a tot punt $x\in\mathbb{I}$, si $\sigma(x)\in\mathcal{U}$ existeix un entorn $\mathcal{U}_x$ tal que $\sigma(\mathcal{U}_x)\subseteq\mathcal{U}$ i si $\sigma(x)\in\mathcal{V}$ existeix un entorn $\mathcal{U}_x$ tal que $\sigma(\mathcal{U}_x)\subseteq\mathcal{V}$. Els entorns oberts $\mathcal{U}_x$ formen un recobriment de l'interval $\mathbb{I}$. Per compacitat es pot aplicar el lema del nombre de Lebesgue: existeix un $\delta>0$ tal que per a tot punt $x\in\mathbb{I}$ es té $(x-\delta,x+\delta)\cap\mathbb{I}\subseteq\mathcal{U}_x$ i, per tant, $\sigma\big((x-\delta,x+\delta)\cap\mathbb{I}\big)\subseteq\sigma(\mathcal{U}_x)$ està continguda en un dels dos oberts: en $\mathcal{U}$ o en $\mathcal{V}$.

Es dedueix que existeix una partició $0=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=1$ tal que $\sigma([x_{i-1},x_i])$ està contingut en algun dels oberts $\mathcal{U}$ o $\mathcal{V}$. Siguin $p_i=\sigma(x_i)$ les imatges dels punts de la partició, amb $p_0=p_n=p$.

Sigui, per a cada índex $i > 0$, $\sigma_i \colon \mathbb{I} \to X$ el camí obtingut composant la restricció $\sigma|_{[x_{i-1},x_i]}$ amb un homeomorfisme $[x_{i-1}, x_i] \cong [0,1]$, que uneix el punt p_{i-1} amb el punt p_i. Cadascun d'aquests camins té imatge dins de $\mathcal{U}$ o dins de $\mathcal{V}$. A més, és clar que $\sigma \simeq \sigma_1 * \cdots * \sigma_n$ és homòtop a la concatenació de tots ells.

Per ser $\mathcal{U}$ arc-connex per a cada punt $p_i \in \mathcal{U}$ existeix un camí τ_i dins de $\mathcal{U}$ amb origen p i final p_i. Anàlogament per als punts $p_i \in \mathcal{V}$ hi ha un camí τ_i en $\mathcal{V}$ que uneix p amb el punt. En el cas dels punts $p_i \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ es pot agafar el camí τ_i contingut en aquesta intersecció, que per hipòtesi també és un obert arc-connex.

Aleshores es té

$$\begin{aligned}
\sigma \simeq \sigma_1 * \sigma_2 * \cdots * \sigma_{n-1} * \sigma_n &\simeq \sigma_1 * \varepsilon_{p_1} * \sigma_2 * \varepsilon_{p_2} * \sigma_3 * \cdots * \sigma_{n-1} * \varepsilon_{p_{n-1}} * \sigma_n \\
&\simeq \sigma_1 * \tau_1^- * \tau_1 * \sigma_2 * \tau_2^- * \tau_2 * \sigma_3 * \cdots * \sigma_{n-1} * \tau_{n-1}^- * \tau_{n-1} * \sigma_n \\
&= (\sigma_1 * \tau_1^-) * (\tau_1 * \sigma_2 * \tau_2^-) * (\tau_2 * \sigma_3 * \tau_3^-) * \cdots * (\tau_{n-2} * \sigma_{n-1} * \tau_{n-1}^-) * (\tau_{n-1} * \sigma_n) \\
&\simeq \varepsilon_p * \varepsilon_p * \varepsilon_p * \cdots * \varepsilon_p * \varepsilon_p = \varepsilon_p
\end{aligned}$$

ja que cada concatenació de camins en cada parèntesi és un llaç de base p dins de l'obert simplement connex $\mathcal{U}$ o bé dins de l'obert simplement connex $\mathcal{V}$, el qual per tant és homòtop en $\mathcal{U}$ o $\mathcal{V}$ (i, per tant, en X) al llaç constant. Es dedueix, doncs, que tot llaç en X basat en p és homòtop al llaç constant. $\square$

Teorema 7.16 *$\pi_1(\mathbb{S}^n)$ és trivial per a tot $n \geqslant 2$.*

Prova: L'esfera n-dimensional és reunió dels dos oberts obtinguts traient el pol nord i el pol sud, respectivament. Aquests oberts són homeomorfs a $\mathbb{R}^n$, i per tant són simplement connexos. La seva intersecció és un subespai arc-connex de $\mathbb{S}^n$. Aplicant el lema es dedueix l'afirmació de l'enunciat.

Observi's que això no s'aplica quan $n = 1$: els oberts són simplement connexos però la seva intersecció no és arc-connexa ja que en treure dos punts de la circumferència $\mathbb{S}^1$ se separa. $\square$

Teorema 7.17 *Siguin X i Y espais arc-connexos. Aleshores $\pi_1(X \times Y) \simeq \pi_1(X) \times \pi_1(Y)$.*

Prova: El producte cartesià d'espais arc-connexos és arc-connex. Siguin π_X i π_Y les projeccions en els espais components. Donat un punt $(x,y) \in X \times Y$ es defineix l'aplicació

$$[\sigma] \mapsto \big([\pi_X \circ \sigma], [\pi_Y \circ \sigma]\big) \colon \pi_1\big(X \times Y, (x,y)\big) \to \pi_1(X,x) \times \pi_1(Y,y).$$

Aquesta aplicació està ben definida; de fet, $[\pi_X \circ \sigma] = (\pi_X)_*\big([\sigma]\big)$, on $(\pi_X)_* \colon \pi_1\big(X \times Y, (x,y)\big) \to \pi_1(X,x)$ és l'homomorfisme de grups induït per l'aplicació contínua π_X, i anàlogament per a l'altra projecció. És un morfisme de grups perquè totes dues components ho són.

Per veure que és injectiva, si $\pi_X \circ \sigma \simeq \varepsilon_x$ en X ve donada per l'homotopia $F \colon \mathbb{I} \times [0,1] \to X$ i $\pi_Y \circ \sigma \simeq \sigma_y$ en Y ve donada per l'homotopia $G \colon \mathbb{I} \times [0,1] \to X$ aleshores l'aplicació

$$H \colon \mathbb{I} \times [0,1] \to X \times Y, \qquad H(x,t) = \big(F(x,t), G(x,t)\big)$$

és una homotopia entre σ i $\sigma_{(x,y)}$ en el producte cartesià.

Per veure que és exhaustiva n'hi ha prou a observar que donats llaços σ_X i σ_Y en els dos espais amb base en els punts x i y, respectivament, l'aplicació $\sigma\colon \mathbb{I} \to X \times Y$ definida posant $\sigma(t) = \big(\sigma_X(t), \sigma_Y(t)\big)$ és un llaç en $X \times Y$ basat en (x, y) la classe del qual té per imatge el parell format per les classes dels llaços donats. $\square$

Corol·lari 7.18 *El grup fonamental del tor és* $\pi(\mathbb{T}^2) \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Lema 7.19 *Sigui* $\pi\colon \mathbb{S}^n \to \mathbb{P}^n$ *la projecció canònica. Per a tot camí* $\sigma\colon \mathbb{I} \to \mathbb{P}^n$ *existeixen exactament dos aixecaments diferents* $\widetilde{\sigma}\colon \mathbb{I} \to \mathbb{S}^n$ *tals que* $\pi \circ \widetilde{\sigma} = \sigma$. *Si* $\widetilde{\sigma}$ *és un,* $-\widetilde{\sigma}$ *és l'altre.*

Prova: La demostració és anàloga a la del lema d'aixecament per a la circumferència, i de fet a la demostració en general d'existència d'aixecaments en espais recobridors.

Es considera un recobriment de $\mathbb{P}^n$ per $n+1$ oberts sobre els quals la projecció canònica té inversa per la dreta que es construeix de la manera següent. L'esfera n-dimensional $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ es recobreix per $2(n+1)$ casquets oberts, corresponents als punts $\boldsymbol{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ que tenen la coordenada i-èsima $x_i > 0$ o bé $x_i < 0$, per a $i = 0, 1, \ldots, n$.

Els oberts de $\mathbb{P}^n$ són les imatges comunes dels casquets de coordenada positiva o negativa. Clarament són oberts ja que la seva antiimatge per la projecció és l'obert de $\mathbb{S}^n$ reunió dels dos casquets amb coordenada i-èsima positiva i negativa.

Sobre cadascun d'aquests oberts hi ha exactament dues inverses per la dreta contínues de la projecció π: les que l'envien a un dels dos casquets, que són homeomorfismes de l'obert en el casquet. La imatge d'un punt qualsevol determina de quina d'aquestes inverses es tracta.

Per construir un aixecament de σ s'agafa una partició $0 = x_0 \leqslant x_1 \leqslant \cdots \leqslant x_n = 1$ tal que cada imatge $\sigma\big([x_{i-1}, x_i]\big)$ estigui completament continguda en algun dels oberts del recobriment de $\mathbb{P}^n$. L'existència d'una partició amb aquesta propietat està garantida pel lema del nombre de Lebesgue.

Existeixen dues inverses per la dreta $\widetilde{\sigma}_i$ amb $\pi \circ \widetilde{\sigma}_i = \sigma_i$ per a cada restricció $\sigma_i = \sigma|_{[x_{i-1}, x_i]}$. Per construir una inversa global n'hi ha prou a agafar inverses com aquestes que siguin compatibles: que coincideixin en cada extrem comú de dos intervals. Això es pot fer de la manera següent:

- es tria $\widetilde{\sigma}_1$ de manera arbitraria entre les dues eleccions possibles;
- es tria $\widetilde{\sigma}_2$ de manera que coincideixi amb l'anterior en el punt $\sigma(x_1)$;
- i així successivament mentre $i < n$ es va triant $\widetilde{\sigma}_{i+1}$ de manera que coincideixi amb $\widetilde{\sigma}_i$ en el punt x_i.

S'obté així un aixecament global continu en tot $\mathbb{I} = [0, 1]$. Donats dos aixecaments $\widetilde{\sigma}$ i $\widetilde{\sigma}'$ s'ha de complir $\widetilde{\sigma}(t) = \pm\widetilde{\sigma}'(t)$ per a tot $t \in \mathbb{I}$. En efecte, l'aplicació $\frac{1}{2}(\widetilde{\sigma} + \widetilde{\sigma}')$ és continua com a aplicació a valors en $\mathbb{R}^n$, però en realitat pren valors a $\{\mathbf{0}\} \sqcup \mathbb{S}^n$. Com que $\mathbb{I}$ és arc-connex la seva imatge també ho és i per tant ha d'estar continguda en $\{\mathbf{0}\}$ o bé en $\mathbb{S}^n$. En el primer cas els dos aixecaments difereixen en el signe en tot punt de $\mathbb{I}$. En el segon han de ser iguals ja que no poden diferir en el signe en cap punt de $\mathbb{I}$. $\square$

Teorema 7.20 *El grup fonamental de l'espai projectiu és* $\pi_1(\mathbb{P}^n) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ *per a tot* $n \geqslant 2$.

PROVA: Es fixa un punt $[p] \in \mathbb{P}^n$ qualsevol, amb $p \in \mathbb{S}^n$. Existeixen llaços $\sigma_0, \sigma_1 \colon \mathbb{I} \to \mathbb{P}^n$ basats en el punt $[p]$ amb aixecaments $\widetilde{\sigma}_0$ que té tots dos extrems en el punt p i $\widetilde{\sigma}_1$ que té un extrem en p i l'altre en $-p$.

En efecte, es poden agafar per exemple $\sigma_0 = \pi \circ \widetilde{\sigma}_0$ amb $\widetilde{\sigma}_0$ un llaç qualsevol en $\mathbb{S}^n$ basat en el punt p (per exemple el llaç constant, o qualsevol altre) i $\sigma_1 = \pi \circ \widetilde{\sigma}_1$ amb $\widetilde{\sigma}_1$ un camí qualsevol en l'espai arc-connex $\mathbb{S}^n$ que uneixi p amb $-p$.

Es vol veure que $\pi_1\big(\mathbb{P}^n, [p]\big) = \big\{[\sigma_0], [\sigma_1]\big\}$ amb $[\sigma_0]$ l'element neutre i $[\sigma_1]^2 = [\sigma_0]$. Que $[\sigma_0]$ és l'element neutre és degut a què és la imatge per l'homomorfisme de grups π_* induït per la projecció canònica $\pi \colon \mathbb{S}^n \twoheadrightarrow \mathbb{P}^n$ de la classe del llaç $\widetilde{\sigma}_0$ en $\mathbb{S}^n$, que és trivial.

Sigui ara σ un llaç qualsevol en $\mathbb{P}^n$ basat en el punt $[p]$. Sigui $\widetilde{\sigma}$ un aixecament. Si $\widetilde{\sigma}$ té tots dos extrems en p aleshores per ser $\pi_1(\mathbb{S}^n)$ trivial es tenen homotopies de camins:

$$\widetilde{\sigma} \simeq \widetilde{\sigma}_0 \quad \Rightarrow \quad \sigma = \pi \circ \widetilde{\sigma} \simeq \pi \circ \widetilde{\sigma}_0 = \sigma_0 \quad \Rightarrow \quad [\sigma] = [\sigma_0] \in \pi_1\big(\mathbb{P}^n, [p]\big).$$

Com que $\sigma_1 * \sigma_1$ admet l'aixecament $\widetilde{\sigma}_1 * \widetilde{\sigma}_1$ que és un llaç amb els dos extrems en el mateix punt p, i per tant homòtop al camí constant, o a $\widetilde{\sigma}_0$, es dedueix que

$$[\sigma_1]^2 = [\sigma_1 * \sigma_1] = 1,$$

i en particular que $[\sigma_1]^{-1} = [\sigma_1^-] = [\sigma_1]$.

Per a tot camí σ en $\mathbb{P}^n$ basat en $[p]$ tal que $\widetilde{\sigma}$ té els extrems diferents aquest mateix argument, tenint en compte que $\sigma * \sigma_1$ o $\sigma_1 * \sigma$ serà un llaç basat en p, demostra que $[\sigma] = [\sigma_1]$.

L'únic que queda és el més difícil: justificar que $[\sigma_1]$ no és trivial; és a dir, que el grup conté, efectivament, dos punts diferents.

L'argument per fer-ho és el mateix que s'ha fet servir en el càlcul de $[\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1]$: aixecament d'homotopies. El mateix argument usat en el lema 7.19 d'aixecament de camins, que consisteix a descompondre el domini en trossos on hi hagi aixecaments locals, i a enganxar aquests aixecaments locals de manera que coincideixin en la intersecció dels trossos successius, es pot aplicar a homotopies com es va fer en la circumferència, descomponent el quadrat $\mathbb{I} \times [0,1]$ en rajoles on hi hagi aixecaments locals. D'aquesta manera es demostra que tota homotopia $F \colon \mathbb{I} \times [0,1] \to \mathbb{P}^n$ admet exactament dos aixecaments diferents a valors a l'esfera $\mathbb{S}^n$. Si $\widetilde{F}$ és un d'ells aleshores $-\widetilde{F}$ és l'altre.

Si existís una homotopia F en $\mathbb{P}^n$ entre els camins σ_0 i σ_1, amb $F(0,t) = \sigma_0(t)$ i $F(1,t) = \sigma_1(t)$ agafant l'aixecament d'aquesta homotopia $\widetilde{F}$ que aixeca el punt $[p]$ en p, s'obtindria un aixecament $\widetilde{F}(1,t)$ de σ_1 amb origen i final en p, en contradicció amb el fet que d'aixecaments d'un camí σ només n'hi ha dos, si $\widetilde{\sigma}$ és l'un aleshores $-\widetilde{\sigma}$ és l'altre, i s'havia partit d'un camí σ_1 amb un aixecament que té origen i final en els dos punts p i $-p$, i per tant l'únic altre aixecament els té en $-p$ i p. $\square$

Amb arguments semblants als anteriors es pot veure que el grup fonamental de l'ampolla de Klein és un grup no abelià. D'aquí es dedueix que les superfícies compactes $\mathbb{S}^2$, $\mathbb{T}^2$, $\mathbb{P}^2$ i $\mathbb{K}^2$ són totes quatre de tipus d'homotopia diferents. Amb arguments elementals no és fàcil ni tan sols veure que dues d'aquestes superfícies no són homeomorfes entre elles.

Alguns dels mètodes que s'han vist són casos particulars del resultat següent:

Teorema 7.21 *Sigui X un espai topològic simplement connex. Sigui G un grup d'homeomorfismes $f\colon X \to X$ tal que per a tot punt $x \in X$ existeix un entorn $\mathcal{U}_x$ tal que $f(\mathcal{U}_x) \cap g(\mathcal{U}_x) = \varnothing$ per a tot parell d'elements diferents $f, g \in G$.*

Sigui X/G l'espai quocient de X per la relació d'equivalència $x \sim y \Leftrightarrow \exists f \in G, y = f(x)$. Les seves classes són amb classes $[x] = \{f(x) : f \in G\}$.

Aquest espai quocient és arc-connex amb grup fonamental $\pi_1(X/G) \simeq G$.

Un grup que satisfaci la condició del teorema es diu que opera sobre X pròpiament discontínuament. Per exemple,

- la circumferència $\mathbb{S}^1$ és l'espai quocient $\mathbb{R}/G$ amb $G = \{x \mapsto x + n : n \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}$;
- l'espai projectiu és l'espai quocient $\mathbb{S}^n/G$ amb $G = \{x \mapsto x, x \mapsto -x\} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, el teorema només s'aplica quan $n \geqslant 2$ en què $\mathbb{S}^n$ és simplement connex;
- el tor és el quocient $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/G$ amb $G = \{(x, y) \mapsto (x+n, y+m) : n, m \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$;
- l'ampolla de Klein és el quocient de $\mathbb{R}^2$ pel grup d'automorfismes de l'exercici **7.6**.

La demostració del Teorema es fa amb els mateixos arguments que s'han fet servir en el càlcul de $[\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1]$ i de $\pi_1(\mathbb{P}^n)$, i es basa en dos lemes fonamentals, que es demostren exactament igual que els casos particulars vistos:

- *Lema d'aixecament de camins:* Tot camí $\sigma\colon \mathbb{I} \to X/G$ amb origen $\sigma(0) = [x]$ té un únic aixecament $\widetilde{\sigma}\colon \mathbb{I} \to X$ amb origen $\widetilde{\sigma}(0) = x$;

- *Lema d'aixecament d'homotopies:* Tota aplicació contínua $F\colon [0,1]^2 \to X/G$ té un aixecament $\widetilde{F}\colon [0,1]^2 \to X$, el qual queda unívocament determinat per la imatge d'un punt qualsevol.

Problemes

7.1. *Reparametrització de camins.* Sigui $\rho\colon \mathbb{I} \to \mathbb{I}$ un homeomorfisme. Donat un camí $\sigma\colon \mathbb{I} \to X$ el camí $\sigma \circ \rho$ s'anomena *reparametrització* de σ; es diu *positiva* si ρ és creixent i *negativa* si ρ és decreixent. Demostreu que

1. ρ és sempre estrictament creixent o bé estrictament decreixent;
2. una reparametrització positiva d'un camí té els mateixos extrems; una reparametrització negativa intercanvia els extrems;
3. $\sigma \circ \rho \simeq \sigma$ per a reparametritzacions positives;
4. $\sigma \circ \rho \simeq \sigma^-$ per a reparametritzacions negatives.

7.2. Demostreu que l'espai de Sierpinski $X = \{a, b\}$ amb topologia $\mathscr{T} = \big\{\varnothing, \{a\}, X\big\}$ és un espai simplement connex.

7.3. Calculeu els grups fonamentals dels espais següents:

1. el tor sòlid $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1$;
2. el cilindre $\mathbb{S}^1 \times I$ amb $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval;
3. l'exterior d'un disc tancat $\big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > r\big\} \subset \mathbb{R}^2$;
4. l'exterior d'un disc obert $\big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geqslant r\big\} \subset \mathbb{R}^2$;
5. un espai euclidià menys un punt $\mathbb{R}^n \smallsetminus \{\boldsymbol{x}\}$;
6. l'espai tridimensional menys una recta $\mathbb{R}^3 \smallsetminus \big\{(0, 0, t) : t \in \mathbb{R}\big\}$;
7. una esfera menys un punt $\mathbb{S}^n \smallsetminus \{\boldsymbol{x}\}$;

7.4. Sigui $X = \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$ una descomposició d'un espai topològic en reunió de dos oberts. Suposi's que $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ i $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ són arc-connexos. Sigui $x \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$. Demostreu que el grup $\pi_1(X, x)$ està generat per les imatges $\imath_*\big(\pi_1(\mathcal{U}, x)\big)$ $\jmath_*\big(\pi_1(\mathcal{V}, x)\big)$, on $\imath\colon \mathcal{U} \hookrightarrow X$ i $\jmath\colon \mathcal{V} \hookrightarrow X$ són les inclusions.

7.5. Sigui X un espai topològic. Demostreu que les condicions següents són equivalents:

1. X és contràctil;
2. la identitat Id_X és homòtopa a una aplicació constant;
3. dues aplicacions contínues d'un espai Y en l'espai X sempre són homòtopes;
4. tot punt de X és un retracte de deformació.

7.6. Comproveu que l'espai quocient $\mathbb{R}^2/\!\sim$ per la relació d'equivalència que identifica cada punt (x, y) del pla amb els punts $\big((-1)^m x{+}n, y{+}m\big)$ per a enters $n, m \in \mathbb{Z}$ és homeomorf a l'ampolla de Klein $\mathbb{K}$ i calculeu el grup d'homotopia de $\mathbb{K}$.
Observació: els detalls són llargs. Veure el text de Pascual-Roig.