SNLAs 2D: Coordenadas polares

Rafael Ramírez Ros

Clase SNL8

Outline

Índice

Introducción

- Abreviaturas:
  - SNLA 2D = Sistema no lineal autónomo bidimensional
  - PEQ = Punto de equilibrio
- Principio básico: Las coordenadas polares son útiles en problemas planos con simetría radial.
- Idea fundamental: Escribir las dos ecuaciones del SNLA 2D en polares y comprobar si las nuevas ecuaciones
  - Se desacoplan;
  - Se simplifican; o
  - Permiten resolver la ecuación de las órbitas.

Índice

Relaciones entre ambas coordenadas

- Polares $\rightsquigarrow$ Cartesianas:

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta.$$

- Cartesianas $\rightsquigarrow$ polares:

$$r^2 = x^2 + y^2 \geq 0, \qquad \theta = \operatorname{atan}(y/x) \in [0, 2\pi].$$

- Derivando las segundas relaciones respecto t vemos que

$$rr' = xx' + yy', \qquad r^2\theta' = xy' - yx'.$$

Demostración de la segunda fórmula:

$$\theta' = \frac{(y/x)'}{1 + (y/x)^2} = \frac{(xy' - yx')/x^2}{1 + y^2/x^2} = \frac{xy' - yx'}{x^2 + y^2} = \frac{xy' - yx'}{r^2}.$$

Transformación a polares

- Las ecuaciones en coordenadas Cartesianas

$$\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases}$$

se transforman en las ecuaciones en coordenadas polares

$$\begin{cases} r' = F(r, \theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)\cos\theta + g(r\cos\theta, r\sin\theta)\sin\theta \\ r\theta' = G(r, \theta) = g(r\cos\theta, r\sin\theta)\cos\theta - f(r\cos\theta, r\sin\theta)\sin\theta \end{cases}$$

- Demostración:

$$r' = \frac{x}{r}x' + \frac{y}{r}y' = f(r\cos\theta, r\sin\theta)\cos\theta + g(r\cos\theta, r\sin\theta)\sin\theta$$

$$r\theta' = \frac{x}{r}y' - \frac{y}{r}x' = g(r\cos\theta, r\sin\theta)\cos\theta - f(r\cos\theta, r\sin\theta)\sin\theta.$$

- Ecuación de las órbitas en polares: $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = \frac{rF(r,\theta)}{G(r,\theta)}$.

Observaciones

- El signo de $F(r, \theta)$ determina donde nos acercamos y alejamos del origen.
- El signo de $G(r, \theta)$ determina el sentido de giro.
- No estudiamos radios negativos: $r \geq 0$.
- θ es una coordenada angular, definida módulo 2π.
- La ecuación $\theta' = G(r, \theta)/r$ puede ser singular en $r = 0$.
- Si las ecuaciones en polares se desacoplan: $\begin{cases} r' = F(r) \\ \theta' = H(\theta) \end{cases}$ entonces se cumplen las siguientes propiedades:
  - $F(0) = 0 \Rightarrow$ El origen es un PEQ;
  - $F(r_\star) = 0 \Rightarrow \{r = r_\star > 0\}$ es una circunferencia invariante (un ciclo límite si $H(\theta)$ no se anula en $[0, 2\pi]$ y $F(r) \not\equiv 0$);
  - $H(\theta_\star) = 0 \Rightarrow \{\theta = \theta_\star\}$ es una semirecta invariante

Índice

Focos “circulares”

Consideramos los SLHs 2D de la forma

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & \alpha x - \beta y \\ y' & = & \beta x + \alpha y \end{array} \right.$$

donde α y β son parámetros arbitrarios no nulos.

a) Escribir las ecuaciones en coordenadas polares.
b) Expresar la solución general en términos de las coordenadas polares (r_0, θ_0) de la condición inicial.
c) Escribir la ecuación de las órbitas en polares.
d) Deducir que las órbitas forman espirales logarítmicas.
e) Probar que cualquier rotación respecto al origen de una órbita, también es una órbita.

SNLA 2D con un ciclo límite: Enunciado

Consideramos el SNLA 2D dado por

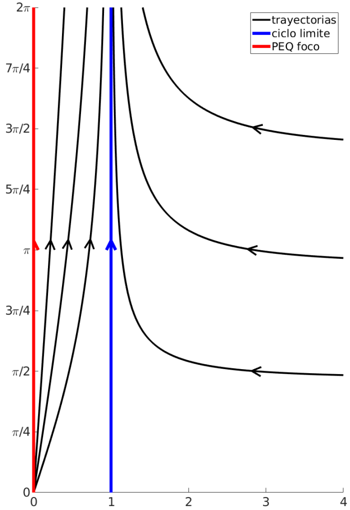
$$\begin{cases} x' = x(1 - x^2 - y^2) - y \\ y' = x + y(1 - x^2 - y^2) \end{cases}$$

a) Escribir las ecuaciones en coordenadas polares.

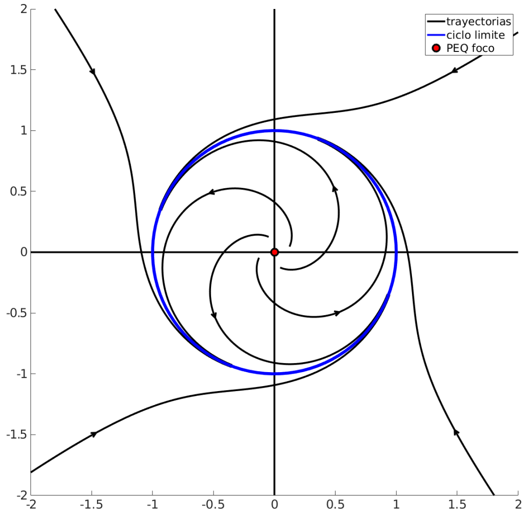
b) Dibujar el croquis en coordenadas polares; o sea, en la semibanda horizontal $(r, \theta) \in [0, \infty) \times [0, 2\pi]$.

c) Dibujar el croquis en coordenadas Cartesianas; o sea, en el plano $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

SNLA 2D con un ciclo límite: Croquis en polares



SNLA 2D con un ciclo límite: Croquis en Cartesianas



SNLA 2D sin ciclo límite: Enunciado

Consideramos el SNLA 2D dado por

$$\begin{cases} x' = 2x(1-r) - y(1-x/r) \\ y' = 2y(1-r) + x(1-x/r) \end{cases}, \qquad \text{si } r = \sqrt{x^2+y^2} \neq 0,$$

y $(x', y') = (0,0)$ cuando $r = 0$.

a) Escribir las ecuaciones en coordenadas polares.

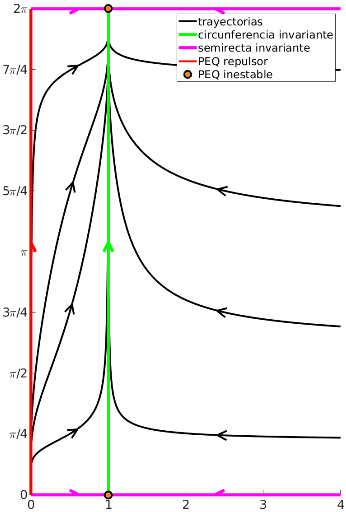
b) Dibujar el croquis en coordenadas polares; o sea, en la semibanda horizontal $(r, \theta) \in [0, +\infty) \times [0, 2\pi]$.

c) Dibujar el croquis en coordenadas Cartesianas; o sea, en el plano $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

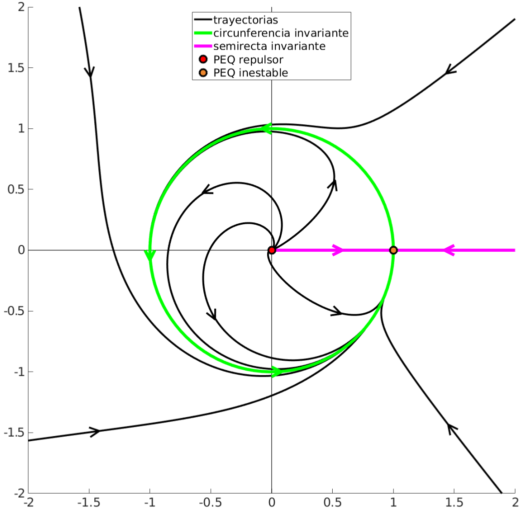
d) Dar la estabilidad de cada PEQ.

e) ¿Hay alguna trayectoria que de más de una vuelta alrededor del origen?

SNLA 2D sin ciclo límite: Croquis en polares



SNLA 2D sin ciclo límite: Croquis en Cartesianas



Polares adaptadas: Fórmulas

- Polares adaptadas $\rightsquigarrow$ Cartesianas:

$$x = a\rho\cos\varphi, \qquad y = b\rho\sin\varphi.$$

- Cartesianas $\rightsquigarrow$ polares adaptadas:

$$\rho^2 = (x/a)^2 + (y/b)^2 \geq 0, \qquad \varphi = \operatorname{atan}(ay/bx) \in [0, 2\pi].$$

- Derivando las segunas relaciones respecto t vemos que

$$\rho\rho' = xx'/a^2 + yy'/b^2, \qquad ab\rho^2\varphi' = xy' - yx'.$$

- El SNLA en Cartesianas $\left\{\begin{array}{l} x' = f(x,y) \\ y' = g(x,y) \end{array}\right.$ se transforman en el SNLA en polares adaptadas

$$\left\{\begin{array}{rl} \rho' &= \cos\varphi f(a\rho\cos\varphi, b\rho\sin\varphi)/a + \sin\varphi g(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)/b \\ \rho\varphi' &= \cos\varphi g(a\rho\cos\varphi, b\rho\sin\varphi)/b - \sin\varphi f(a\rho\cos\varphi, b\rho\sin\varphi)/a \end{array}\right.$$

Polares adaptadas: Ejemplo

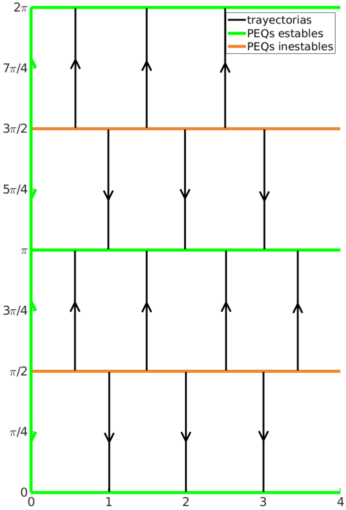
Consideramos el SNLA 2D cúbico

$$\begin{cases} x' = a^2 x y^2 \\ y' = -b^2 x^2 y \end{cases}$$

donde a y b son parámetros positivos.

a) Escribir las ecuaciones en polares adaptadas.
b) Dibujar el croquis en polares adaptadas; o sea, en la semibanda horizontal $(\rho, \varphi) \in [0, +\infty) \times [0, 2\pi]$.
c) Dibujar el croquis en Cartesianas; o sea, en $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.
d) Dar la estabilidad de cada PEQ.
e) ¿Hay alguna trayectoria que de más de una vuelta alrededor del origen?

Polares adaptadas: Croquis en polares



Polares adaptadas: Croquis en Cartesianas