

FACULTAT DE MATEMÀTIQUES I ESTADÍSTICA

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA - BARCELONATECH

**Apunts de Fonaments de les  
Matemàtiques (Primer curs del Grau de  
Matemàtiques)**

*Àlex Batlle Casellas*

October 15, 2018

# Índex

<b>1</b>	<b>2</b>
<b>2 Conjunts i aplicacions.</b>	<b>3</b>
2.1 Operacions amb conjunts. . . . .	3
2.2 Conjunt de les parts. . . . .	5
2.3 Aplicacions. . . . .	6
2.3.1 Injectivitat, exhaustivitat i bijectivitat. . . . .	6
2.3.2 Composició d'aplicacions. . . . .	7
<b>3 Relacions, operacions i estructures.</b>	<b>8</b>
3.1 Relacions d'equivalència. . . . .	8



## 2 Conjunts i aplicacions.

**Axioma 2.1.** *Axioma d'extensionalitat.*

$$A = B \iff \forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B).$$

**Definició 2.1.** *Relació d'inclusió.*

$$B \subseteq A \iff \forall x(x \in B \rightarrow x \in A).$$

PROPIETATS:

1.  $A \subseteq A$ ;
2.  $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \implies A \subseteq C$ ;
3.  $A \subseteq B \wedge B \subseteq A \iff A = B$ ;
4.  $\forall A, \emptyset \subseteq A$ .

Inclusió estricta:

1.  $A \not\subset A$ ;
2.  $B \subset A \implies A \not\subset B$ ;
3.  $A \subset B \wedge B \subset C \implies A \subset C$ ;
4.  $A \neq \emptyset \iff \emptyset \subset A$ .

### 2.1 Operacions amb conjunts.

**Definició 2.2.** *Unió d'A i B ( $A \cup B$ ).*

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}.$$

PROPIETATS:

1.  $A \cup A = A$ ;
2.  $A \cup B = B \cup A$ ;
3.  $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$ ;
4.  $A \cup \emptyset = A$ ;
5.  $A \subseteq A \cup B, B \subseteq A \cup B$ ;
6.  $A \subseteq B \iff A \cup B = B$ ;
7.  $A \cup B \subset C \iff A \subseteq C \wedge B \subseteq C$ .

**Definició 2.3.** *Intersecció d'A i B ( $A \cap B$ ).*

$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}.$$

PROPIETATS:

1.  $A \cap A = A$ ;
2.  $A \cap B = B \cap A$ ;
3.  $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$ ;
4.  $A \cap \emptyset = \emptyset$ ;
5.  $A \cap B \subseteq A$ ,  $A \cap B \subseteq B$ ;
6.  $A \subseteq B \iff A \cap B = A$ ;
7.  $C \subseteq A \cap B \iff C \subseteq A \wedge C \subseteq B$ .

**Definició 2.4.** *Diferència d'A i B ( $A - B$  o  $A \setminus B$ ).*

$$A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}.$$

PROPIETATS:

1.  $A - \emptyset = A$ ,  $\emptyset - A = \emptyset$ ,  $A - A = \emptyset$ ;
2.  $A - B \subseteq A$ ;
3.  $(A - B) \cap B = \emptyset$ ;
4.  $A \subseteq B \iff A - B = \emptyset$ ;
5.  $C \subseteq A - B \iff (C \subseteq A) \wedge (C \cap B = \emptyset)$ .

PROPIETATS DE LA UNIÓ I LA INTERSECCIÓ:

1.  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ ;
2.  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ ;
3.  $A \cap (A \cup B) = A$ ;
4.  $A \cup (A \cap B) = A$ .

**Definició 2.5.** *Conjunt complementari:*

*Fixem un conjunt  $\Omega$  i considerem només subconjunts d' $\Omega$ . El complementari d'un subconjunt  $A$  d' $\Omega$  és el conjunt de tots els elements d' $\Omega$  que no pertanyen a  $A$ . (Notació:  $A^c$  o  $\bar{A}$ ):*

$$A^c = \{x \in \Omega : x \notin A\} = \Omega - A.$$

PROPIETATS:

1.  $\emptyset^c = \Omega, \Omega^c = \emptyset;$
2.  $(A^c)^c = A;$
3.  $A \cap A^c = \emptyset;$   
 $A \cup A^c = \Omega;$
4.  $A \subseteq B \iff B^c \subseteq A^c;$
5.  $A \cap B = \emptyset \iff A \subseteq B^c \iff B \subseteq A^c;$
6.  $A \cup B = \Omega \iff A^c \subseteq B \iff B^c \subseteq A;$
7.  $A - B = A \cap B^c;$
8.  $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c.$

**Definició 2.6.** *Parell ordenat.* El parell ordenat de  $x$  i  $y$  és un objecte que denotem per  $(x, y)$  que compleix:

$$(x, y) = (z, t) \iff x = z \wedge y = t.$$

*Definició de Kuratowski:*

$$(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}.$$

**Definició 2.7.** *Producte cartesià.* El producte cartesià de dos conjunts  $A, B$  és el conjunt format per tots els parells ordenats  $(x, y)$  tals que  $x \in A$  i  $y \in B$ . (Notació:  $A \times B$ )

$$A \times B = \{(x, y) : x \in A \wedge y \in B\};$$

anàlogament,

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in A_i \forall i\}.$$

PROPIETATS:

1.  $A \times \emptyset = \emptyset = \emptyset \times A;$
2.  $A \times B = B \times A \iff A = B \vee A = \emptyset \vee B = \emptyset.$

## 2.2 Conjunt de les parts.

**Definició 2.8.** *Conjunt de les parts.* Anomenem el conjunt de les parts d' $A$  el conjunt que té per elements tots els subconjunts d' $A$ . Notació:  $\mathcal{P}(A)$ .

$$\mathcal{P}(A) = \{X : X \subseteq A\}$$

PROPIETATS:

1.  $X \in \mathcal{P}(A) \iff X \subseteq A;$
2.  $\emptyset \in \mathcal{P}(A), A \in \mathcal{P}(A).$

## 2.3 Aplicacions.

**Definició 2.9.** *Correspondència.* Una correspondència és una terna  $(A, B, G)$  on  $A$  i  $B$  són conjunts i  $G \subseteq A \times B$ .

**Definició 2.10.** *Aplicació.* Una aplicació és una correspondència  $(A, B, f)$  on  $f \subseteq A \times B$ :

$$\forall x \in A \exists! y \in B : (x, y) \in f.$$

Anomenem a  $f(x) = y$  la imatge d' $x$  per  $f$ .

Notació:

$$f : A \mapsto B.$$

$$A \xrightarrow{f} B.$$

Al conjunt  $A$  l'anomenem domini, i al conjunt  $B$  codomini.

**Definició 2.11.** *Restricció.* Donada una aplicació  $f : A \mapsto B$  i un subconjunt  $A' \subseteq A$ , anomenem la restricció d' $f$  per  $A'$  a l'aplicació  $f|_{A'} : A' \mapsto B$ .

**Definició 2.12.** *Conjunt imatge.* Si  $f : A \mapsto B$  i  $A' \subseteq A$ , aleshores

$$f(A') = \{y \in B : \exists a \in A' (y = f(a))\} = \{f(a) : a \in A'\}$$

és el conjunt imatge d' $A'$  per  $f$ .

**Definició 2.13.** *Conjunt antiimatge.* Si  $f : A \mapsto B$  i  $B' \subseteq B$ , aleshores

$$f^{-1}(B') = \{x \in A : f(x) \in B'\} \subseteq A$$

és el conjunt antiimatge de  $B'$  per  $f$ .

**Una qüestió de notació:** notem per  $f^{-1}$  tant el conjunt antiimatge com la funció inversa. És important saber distingir entre aquests dos significats:

- $f^{-1}(\{b\})$  és el conjunt antiimatge del conjunt  $\{b\}$  per  $f$ .
- $f^{-1}(b)$  pot ser (fent un abús de notació) el conjunt antiimatge del conjunt que té per únic element a  $b$ , com s'indica a 1., però també pot ser l'aplicació inversa (definida més endavant), que no sempre existeix.

### 2.3.1 Injectivitat, exhaustivitat i bijectivitat.

**Definició 2.14.** *Injectivitat.*  $f : A \mapsto B$  és injectiva si i només si

$$\forall a_1, a_2 \in A (a_1 \neq a_2 \implies f(a_1) \neq f(a_2)).$$

Se sol utilitzar el recíproc,

$$\forall a_1, a_2 \in A (f(a_1) = f(a_2) \implies a_1 = a_2).$$

**Definició 2.15.** *Exhaustivitat.*  $f : A \mapsto B$  és exhaustiva si i només si

$$\forall b \in B \exists a \in A : f(a) = b.$$

Observació:

1.  $|A| > |B|$  : no hi ha aplicacions injectives  $A \mapsto B$ . Si n'hi hagués,  $|A| \leq |B|$ .
2.  $|B| > |A|$  : no hi ha aplicacions exhaustives  $A \mapsto B$ . Si n'hi hagués,  $|A| \geq |B|$ .

**Definició 2.16.** *Bijectivitat.*  $f : A \mapsto B$  és exhaustiva si i només si  $f$  és injectiva i exhaustiva.

Observació:  $A, B$  finits i existeix una bijecció.

$$A \mapsto B \implies (|A| \leq |B|) \wedge (|A| \geq |B|) \implies |A| = |B|.$$

Aleshores,  $f$  és bijectiva si i només si  $|A| = |B|$ . Donat un  $y \in B$ ,

- $f$  és injectiva  $\implies \exists x \in A : f(x) = y$ .
- $f$  és exhaustiva  $\implies \exists! x \in A : f(x) = y$ .

**Definició 2.17.** *Aplicació inversa.* L'aplicació inversa d'una bijecció  $f$  és aquella aplicació que a cada membre del codomini li assigna l'antiimatge per  $f$ .

$$\forall y \in B \exists! x \in A : f(x) = y$$

Es nota  $f^{-1} : B \mapsto A$ . Si  $f$  bijectiva, aleshores

$$f(x) = y \iff f^{-1}(y) = x$$

### 2.3.2 Composició d'aplicacions.

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

$$a \rightarrow f(a) \rightarrow g(f(a))$$



### 3 Relacions, operacions i estructures.

**Definició 3.1.**  $R$  és una relació binària en un conjunt  $A$  si  $R \subseteq A \times A$ .

PROPIETATS:

- **Reflexiva:**  $\forall x \in A(xRx)$ .
- **Simètrica:**  $\forall x, y \in A(xRy \rightarrow yRx)$ .
- **Antisimètrica:**  $\forall x, y \in A(xRy \wedge yRx \rightarrow x = y)$ .
- **Transitiva:**  $\forall x, y, z \in A(xRy \wedge yRz \rightarrow xRz)$ .
- **Connexa:**  $\forall x, y \in A(xRy \vee yRx)$ .

#### 3.1 Relacions d'equivalència.

**Definició 3.2.** Una relació  $R$  en un conjunt  $A \neq \emptyset$  s'anomena d'equivalència si compleix les propietats reflexiva, simètrica i transitiva.

**Definició 3.3.** Definim la classe d'equivalència d'un element  $x \in A$  com:

$$[x]_R = \{y \in A \mid yRx\}.$$

També escrivim  $[x]$  o  $\bar{x}$  quan no hi ha risc de confusió.

PROPIETATS:

1.  $\forall x \in A(x \in [x])$ .
2.  $\forall x, y \in A(xRy \iff [x] = [y])$ .
3.  $A = \bigcup_{x \in A} [x]$ .

**Definició 3.4.** Anomenem una partició d'un conjunt a una família  $\Pi$  de subconjunts d' $A$  i diferents del buit, disjunts dos a dos, tals que la seva unió és tot  $A$ . És a dir,  $\Pi \subseteq \mathcal{P}(A)$ .

PROPIETATS:

1.  $X \neq \emptyset \forall X \in \Pi$ .
2.  $X \cap Y = \emptyset$  si  $X, Y \in \Pi, X \neq Y$ .
3.  $A = \bigcup_{X \in \Pi} X$ .

Els subconjunts  $X \in \Pi$  s'anomenen les *parts* o *blocs* de la partició.

**Definició 3.5.** Anomenem el conjunt quocient d'un altre conjunt  $A$  respecte la relació  $R$  al conjunt format per totes les classes d'equivalència definides a partir d' $R$ .

$$A/R = \{\alpha \mid \exists x \in A([x] = \alpha)\}.$$

**Proposició 3.1.** El conjunt quocient és una partició d' $A$ .

**Demostració:**