1. Considera l'endomorfisme $f\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ donat (en base canònica) per la matriu següent en funció del paràmetre a:

$$A_a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 2 & 1 & 1 \\ a & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Calcula el polinomi característic de A_a, i comprova que no depèn del paràmetre a.

b) Calcula el polinomi mínim de A_a en funció de a. Hi ha algun valor de a pel qual A_a diagonalitza ?

c) Calcula la forma de Jordan i una base de Jordan per a A_0.

d) Calcula la forma de Jordan i una base de Jordan per a A_2.

e) Calcula $(A_0)^n$ i e^{A_2}.

f) Calcula $(A_0 - 2)\big(I_5 + (A_{13} - 2)^{10}(A_{13} - 1)^{32} + (A_0 - 1)^2\big)$.

1. Considera l'endomorfisme $\boldsymbol{f}\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ donat (en base canònica) per la matriu següent en funció del paràmetre $\boldsymbol{a}$:

$$\boldsymbol{A_a} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{3} & \mathbf{-2} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \boldsymbol{a} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

a) Calcula el polinomi característic de $\boldsymbol{A_a}$, i comprova que no depèn del paràmetre $\boldsymbol{a}$.

$$P_{A_a}(x) = \begin{vmatrix} -x & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2-x & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 2-x & 1 & 1 \\ a & 0 & 0 & 1-x & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 1-x \end{vmatrix} = (2-x)(1-x) \begin{vmatrix} -x & 1 & 0 \\ -1 & 2-x & 0 \\ a & 0 & 1-x \end{vmatrix} =$$

$$= -(x-2)(x-1)^2 \begin{vmatrix} -x & 1 \\ -1 & 2-x \end{vmatrix} = -(x-2)(x-1)^2(x^2-2x+1) = -(x-2)(x-1)^4.$$

b) Calcula el polinomi mínim de $\boldsymbol{A_a}$ en funció de $\boldsymbol{a}$. Hi ha algun valor de $\boldsymbol{a}$ pel qual $\boldsymbol{A_a}$ diagonalitza ?

Per l'exponent de l'arrel 2 al característic sabem que $\dim(\ker(A-2)) = 1$ i hi ha una sola caixa de Jordan de valor propi 2 i tamany 1, independentment de a (per cert, examinant la matriu es veu directament que $\ker(A-2) = \langle(0,0,1,0,0)\rangle$, també independentment de a). Per altra banda,

$$A_a - 1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

té rang 4 si $a \neq 0$ i rang 3 si $a = 0$.

Cas $\boldsymbol{a \neq 0}$: $\dim(\ker(A_a - 1)) = 5 - 4 = 1$, la qual cosa indica que hi ha una sola caixa de Jordan de valor propi 1, que serà per tant de tamany 4. Per tant, $m_{A_a}(x) = (x-2)(x-1)^4$ en aquest cas.

Cas $\boldsymbol{a = 0}$: $\dim(\ker(A_a - 1)) = 5 - 3 = 2$, la qual cosa indica que hi ha dues caixes de Jordan de valor propi 1; amb quatre dimensions en total només poden ser de tamanys

1+3 ó 2+2. Qui sap això és la matriu $(A_0 - 1)^2 =$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

com que té rang 1, veiem que $\dim(\ker(A_0 - 1)^2) = 5 - 1 = 4$, i la resta de dimensions $\dim(\ker(A_0 - 1)^2) - \dim(\ker(A_0 - 1)) = 4 - 2 = 2$, la qual cosa ens diu que hi ha dues caixes de tamany $\geqslant 2$. Per tant, el valor propi 1 té exactament dues caixes de Jordan de tamany 2 i $m_{A_0}(x) = (x-2)(x-1)^2$ en aquest cas.

c) Calcula la forma de Jordan i una base de Jordan per a A_0.

Observant les columnes de les matrius anteriors (o resolent el corresponent sistema d'equacions) veiem que $\ker(A_0 - 1) = \langle (0,0,1,0,-1),\ (1,1,-1,0,0) \rangle$ i $\ker(A_0 - 1)^2 = \langle (1,0,-1,0,0),\ (0,0,1,0,-1),\ (0,1,0,0,0),\ (0,0,0,1,0) \rangle$. Per muntar una base de Jordan del primer bloc agafem, per exemple, $v_1 = (0,1,0,0,0) \in \ker(A_0 - 1)^2 \setminus \ker(A_0 - 1)$ i la seva imatge $v_2 = (A_0 - 1)v_1 = (1,1,-2,0,1)$. Pel segon bloc ens serviran $w_1 = (0,0,0,1,0) \in \ker(A_0 - 1)^2 \setminus \ker(A_0 - 1)$ i la seva imatge $w_2 = (A_0 - 1)w_1 = (0,0,1,0,-1)$, ja que tots quatre són linealment independents. Juntament amb el vector propi de valor propi 2 temim la base de Jordan

$$\mathcal{B} = \{(0,0,1,0,0),\ (0,1,0,0,0),\ (1,1,-2,0,1),\ (0,0,0,1,0),\ (0,0,1,0,-1)\},$$

en la qual f té matriu

$$J_0 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

d) Calcula la forma de Jordan i una base de Jordan per a A_2.

Calculem $(A_2 - 1)^2 =$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

i també $(A_2-1)^4=(A_2-1)^2(A_2-1)^2=$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Observant les columnes de les matrius anteriors (o resolent el corresponent sistema d'equacions) veiem que $\ker(A_0-1)^4 = \langle (1,0,-1,0,0), (0,0,1,0,-1), (0,1,0,0,0), (0,0,0,1,0)\rangle$. Com que $(0,1,0,0,0)\in \ker(A_2-1)^4\setminus\ker(A_2-1)^3$, tindrem una base de Jordan per al bloc de 4 fent $v_1=(0,1,0,0,0)$, $v_2=(A_2-1)v_1=(1,1,-2,0,1)$, $v_3=(A_2-1)^2v_1=(0,0,0,2,0)$ i $v_4=(A_2-1)v_3=(0,0,2,0,-2)$. Juntament amb el vector propi de valor propi 2 temim la base de Jordan

$$\mathcal{B}=\{(0,0,1,0,0),\ (0,1,0,0,0),\ (1,1,-2,0,1),\ (0,0,0,2,0),\ (0,0,2,0,-2)\},$$

en la qual f té matriu

$$J_2=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

e) Calcula $(A_0)^n$ i e^{A_2}.

Muntant les matrius de canvi de base,

$$Q=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad Q^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

tenim $A_0=QJ_0Q^{-1}$. Per tant, $(A_0)^n=(QJ_0Q^{-1})^n=QJ^nQ^{-1}=$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$=\begin{pmatrix} 1-n & n & 0 & 0 & 0 \\ -n & 1+n & 0 & 0 & 0 \\ 2^n+2n-1 & -2n & 2^n & n & 2^n-1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -n & n & 0 & -n & 1 \end{pmatrix}.$$

Finalment, per calcular e^{A_2}, calculem primer l'exponencial del bloc de Jordan:

$$e^{\begin{pmatrix} 1&0&0&0\\1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1 \end{pmatrix}} = e^{I_4+\begin{pmatrix} 0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0 \end{pmatrix}} = e^{I_4} e^{\begin{pmatrix} 0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0 \end{pmatrix}} =$$

$$= e\Big(I_4 + \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2!}\begin{pmatrix} 0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0 \end{pmatrix}^2 + \frac{1}{3!}\begin{pmatrix} 0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0 \end{pmatrix}^3\Big) =$$

$$= e\Big(I_4 + \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0 \end{pmatrix} + \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0 \end{pmatrix}\Big) =$$

$$= e\begin{pmatrix} 1&0&0&0\\1&1&0&0\\1/2&1&1&0\\1/6&1/2&1&1 \end{pmatrix}.$$

Muntem les matrius de l'altre canvi de base

$$R = \begin{pmatrix} 0&0&1&0&0\\0&1&1&0&0\\1&0&-2&0&2\\0&0&0&2&0\\0&0&1&0&-2 \end{pmatrix}, \quad R^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2&0&2&0&2\\-2&2&0&0&0\\2&0&0&0&0\\0&0&0&1&0\\1&0&0&0&-1 \end{pmatrix},$$

i tenim $A_2 = RJ_2R^{-1}$. Per tant, $e^{A_2} = e^{RJ_2R^{-1}} = Re^{J_2}R^{-1} =$

$$\frac{e}{2}\begin{pmatrix} 0&0&1&0&0\\0&1&1&0&0\\1&0&-2&0&2\\0&0&0&2&0\\0&0&1&0&-2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&1&1&0&0\\0&1/2&1&1&0\\0&1/6&1/2&1&1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2&0&2&0&2\\-2&2&0&0&0\\2&0&0&0&0\\0&0&0&1&0\\1&0&0&0&-1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{e}{3}\begin{pmatrix} 0&3&0&0&0\\-3&6&0&0&0\\3e+5&-5&3e&3&3e-3\\3&3&0&3&0\\-5&2&0&-3&3 \end{pmatrix}.$$

f) Calcula $\boldsymbol{(A_0-2)\big(I_5+(A_{13}-2)^{10}(A_{13}-1)^{32}+(A_0-1)^2\big)}$.

Sabent que el polinomi mínim d'una matriu anul·la la pròpia matriu, $m_{A_a}(A_a) = (0)$, tenim

$$
\begin{gathered}
(A_0 - 2)\big(I_5 + (A_{13} - 2)^{10}(A_{13} - 1)^{32} + (A_0 - 1)^2\big) = \\
(A_0 - 2) + (A_0 - 2)(A_{13} - 2)^{10}(A_{13} - 1)^{32} + (A_0 - 2)(A_0 - 1)^2) = \\
(A_0 - 2) + (A_0 - 2)m_{A_{13}}(A_{13})(A_{13} - 2)^9(A_{13} - 1)^{28} + m_{A_0}(A_0) = \\
= A_0 - 2 + (0) + (0) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.
\end{gathered}
$$