Señales y sistemas

Problemas Tema III

Asunción Moreno

3.1) Compruebe las siguientes igualdades

a) cos (22πn) = cos (2πn)

b) cos (4πn/3 –π/4) = cos(2πn/3 +π/4)

c) exp (j2π0.6n) = exp(-j2π0.4n)

d) exp (j2π0.8n) + exp(-j2π0.8n) =2 cos(2π0.2n)

e) exp (j2π0.8n) exp(j0.1) + exp(-j2π0.8n) exp(-j0.1) = 2 cos(2π0.2n-0.1)

f) cos (2π3n/5) = cos(2π2n/5)

g) sen (2π3n/5) = -sen(2π2n/5)

3.2) Dos secuencias discretas $f_k[n]$ y $f_m[n]$ se dice que son ortogonales en el intervalo (N_1 y N_2) si

$$\sum_{n=N_1}^{N_2} f_k[n]f_m^*[n] = \begin{cases} A_k & k = m \\ 0 & k \neq m \end{cases}$$

Si el valor de las constantes A_k y A_m es 1, entonces se dice que las señales son ortonormales.

a) Considere las señales $f_k[n]=\delta[n-k]$, k= 0, ±1, ±2, …, ±N Demuestre que estas señales son ortonormales en el intervalo (-N, N)

b) Demuestre que las señales $f_k[n]=e^{j(2\pi/N)nk}$, k= 0, 1, …, N-1 son ortogonales en cualquier intervalo de longitud N

c) Demuestre que si

$$x[n] = \sum_{i=1}^{M} c_i f_i[n]$$

Donde las $f_i[n]$ son ortogonales en el intervalo (N1, N2), entonces

$$\sum_{n=N_1}^{N_2} |x[n]|^2 = \sum_{i=1}^{M} |c_i|^2 A_i$$

3.3) Calcule la transformada de Fourier de las siguientes secuencias:

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n+1]$

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^n (u[n+4] - u[n-2])$

c) $|a|^n sen(2\pi F_0 n)$

d) $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n \delta[n-3k]$

e) $\delta[4-2n]$

3.4) Sea la secuencia

$$x[n] = \begin{cases} 1, & |n| \leq N/2 \\ 0, & resto \end{cases}$$

Halle y dibuje la transformada de Fourier de $y[n]=x[n]\cos(2\pi F_0 n)$ con $F_0 < 0.5$

3.5) Dada la señal $x[n]= \cos(2\pi F_0 n) \cos(2\pi F_1 n)$.

a) Halle la Transformada de Fourier de x[n]

b) Represente el resultado si $F_0=0{,}2$ y $F_1=0{,}25$ en el intervalo $0 \leq F \leq 0.5$

c) Represente el resultado si $F_0=0{,}2$ y $F_1=0{,}4$ en el intervalo $0 \leq F \leq 0.5$

3.6) Considere un sistema lineal e invariante con respuesta al impulso $h[n] = (1/2)^{|n|}$

a) Demuestre que la respuesta frecuencial es $H(F) = \frac{1-a^2}{1-2a\cos(2\pi F)+a^2}$ con a=1/2

Encuentre la la salida y[n] para cada una de las siguientes entradas

b) $x[n] = \mathrm{sen}(3\pi n/4)$

c) $x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n-4k]$

3.7) Considere un sistema lineal e invariante con respuesta al impulso $h[n] = a^n u[n]$ con $|a|<1$.

a) Halle la salida cuando a la entrada se aplica $x[n] = \cos\frac{2\pi n}{N}$

b) Particularice el resultado para N=4

3.8) Sea la secuencia $x[n] = \{\ldots 0, -2, -1, \underline{2}, -1, -1, 0, -1, -1, 2, -1, -2, 0, 0, \ldots\}$

Halle, sin calcular explícitamente X(F):

a) X(0)

b) $\int_{-0.5}^{0.5} X(F)dF$

c) X(F) ¿tiene fase lineal?

d) X(0.5)

e) $\int_{-0.5}^{0.5} |X(F)|^2 dF$

3.9) Halle y compare las transformadas de Fourier de las ventanas rectangular, triangular y de Hanning con M=4 y M=16

$$w_R[n] = \begin{cases} 1 & -M \leq n \leq M \\ 0 & resto \end{cases}$$

$$w_T[n] = \begin{cases} 1 - \dfrac{|n|}{M+1} & -M \leq n \leq M \\ 0 & resto \end{cases}$$

$$w_H[n] = \begin{cases} \frac{1}{2}\left[1+\cos(\frac{\pi n}{M})\right] & -M \le n \le M \\ 0 & resto \end{cases}$$

3.10) El esquema de la figura 3.10) es un SLI en reposo. Se pide:

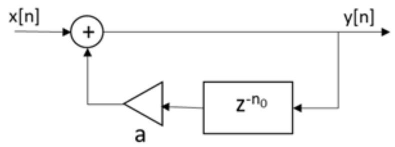


Figura 3.10)

a) Relación entrada-salida.

b) Respuesta frecuencial H(F)

c) Respuesta impulsional h[n]

Si la secuencia de entrada es el resultado de convertir la señal x(t)= 3 cos ($2\pi f_x t$) por un conversor A/D

d) Encuentre y[n] si f_x=3KHz y fm=8KHz.

e) Encuentre y[n] si f_x=5KHz y fm=8KHz.

3.11) Demostrar que

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} e^{\frac{j2\pi nk}{N}} = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta[k-rN]$$

3.12) Demostrar que las señales de periodo N (en n) $\phi_k[n]=e^{j2\pi nk/N}$, k=0, ±1, ±2, … son periódicas en k de periodo N, es decir $\phi_0[n]=\phi_N[n]$, $\phi_1[n]=\phi_{N+1}[n]$, y que por tanto solo hay N señales diferentes del conjunto $\phi_k[n]$

3.13) Sea L=2N+1. Demostrar que

$$Lsinc(LF) * \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta[F-r] = \frac{sen\,\pi FL}{sen \pi F}$$

3.14) Se adquieren L muestras de una señal sinusoidal mediante un conversor A / D, trabajando a una frecuencia de muestreo de 8000 muestras / seg. Se calcula la transformada de Fourier de la secuencia obtenida y se obtiene el módulo que se representa en la figura. en el intervalo frecuencial de [0,0.5].

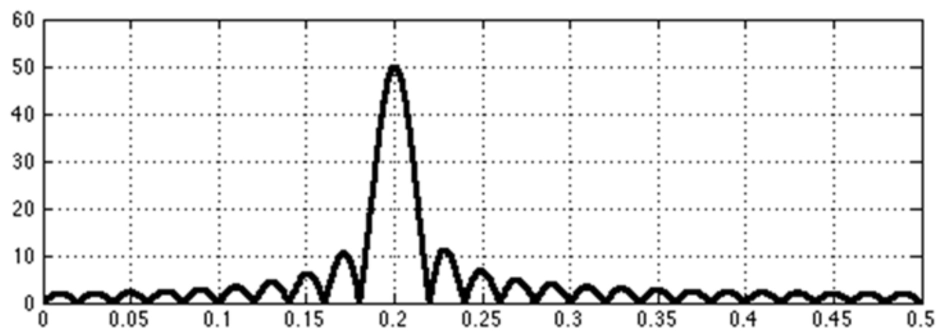
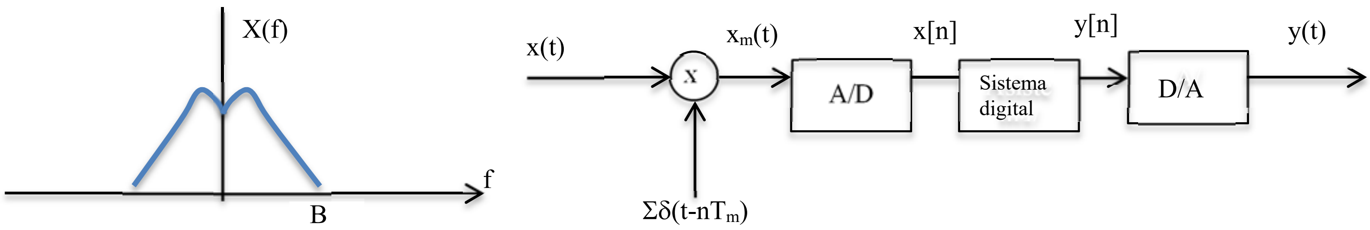


Figura 3.14)

Obtenga el número de muestras de la secuencia, la frecuencia normalizada de la secuencia sinusoidal, la duración temporal de la señal sinusoidal original, así como los parámetros, amplitud y frecuencia de esta señal temporal original.

3.15) Una señal x(t) real de ancho de banda B Hz cuya transformada de Fourier se muestra en la figura 3.15) a), se pasa a través del sistema mostrado en la figura 3.15) b). En primer lugar, se muestrea idealmente a una frecuencia de muestreo fm=2B.



a) Figura 3.15) b)

a) Calcule y dibuje la transformada de Fourier de la señal muestreada $x_m(t)$. Especifique en su dibujo las frecuencias y amplitudes más significativas.

Con los valores de las muestras se genera la secuencia x[n]=x(nTm) con Tm=1/fm.

b) Dibuje X(F), la TF de la secuencia x[n]. Especifique en su dibujo los valores de F y las amplitudes más significativas.

x[n] se pasa por un sistema que genera la secuencia

$$y[n] = (-1)^n\, x[n]$$

c) Calcule la TF de la secuencia y[n] en función de X(F). Note que $(-1)^n = e^{-j\pi n}$

d) Dibuje Y(F)

La secuencia y[n] se utiliza para generar una señal analógica mediante un conversor D/A ideal, esto es, utiliza un filtro paso bajo ideal de ancho de banda B y ganancia Tm para generar la señal

$$y(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} y[n] sinc\left(\frac{t-nT_m}{T_m}\right)$$

e) Dibuje la transformada de Fourier de la señal de salida. ¿Qué efecto ha producido todo el procedimiento sobre x(t)?

3.16) Sea $x(t) = Acos(2\pi f_o t) + Bcos(2\pi f_1 t)$ con f0 = f1/2. Se desea eliminar el tono (coseno) a la frecuencia fo. Para ello se digitaliza la señal en un conversor A/D, se filtra adecuadamente y se recupera la señal resultante con un conversor D/A. El conversor D/A utiliza un Sample & Hold (también llamado ZOH), que genera la señal resultante manteniendo constante el valor de una muestra hasta la siguiente muestra. Se pide:

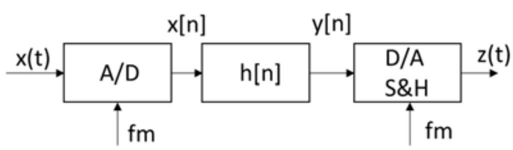


Figura 3.16)

a) Mínima frecuencia de muestreo para representar exactamente x(t).

Suponga a partir de ahora la frecuencia de muestreo fm=10 f1 Hz

b) Expresión de la señal x[n] a la salida del conversor A/D

c) Expresión de X(F), la transformada de Fourier de x[n]. Dibújela.

d) Se desea realizar un filtro digital para que a la salida de todo el sistema se haya cancelado el tono a la frecuencia f1, especifique el ancho de banda de un filtro paso bajo ideal discreto que le permita realizar esa cancelación. Dibuje H(F) en el intervalo -1 < F < 1

e) Respuesta impulsional del filtro diseñado

g) Expresión de y[n], la señal de salida del filtro.

f) Expresión de z(t) la señal a la salida del conversor D/A

3.17) Sea x[n] una secuencia <u>cualquiera</u>, X(F) su Transformada de Fourier, $X_N[k]$ su DFT_N. Justifique si se puede afirmar que

a) $x[n]=DFT^{-1}_N\{X(F)|_{F=k/N}\}$ $0\leq n\leq N-1$

b) Para $x[n]=p_N[n]$, $|X(F)|_{F=k/N}|=N\delta[k]$ $0\leq n\leq N-1$

c) Para x[n] real, $X(F)|_{F=k/N}$ real

d) $DFT_N^{-1}\left\{X_N[k]e^{-\frac{j2\pi k}{N}}\right\}=\begin{cases}x[N-1] & n=0\\ x[n-1] & 1\leq n\leq N-1\end{cases}$

3.18) Las muestras de la DFT de una secuencia x[n] con N=8 vienen dados por la expresión $X[k]=\cos(\pi k/4)+\mathrm{sen}(3\pi k/4)$. Halle x[n] en el intervalo $0\leq n\leq 7$

3.19) Considérese la secuencia

$$x[n]=\{\ldots,0,\underline{1},2,2,2,0,\ldots\}$$

A continuación, se indican distintas operaciones sobre su DFT y el número de muestras de la misma. Encuentre la secuencia y[n] $0\leq n\leq N-1$, resultante de aplicar DFT inversa.

a) $Y[k]=X[k]\,e^{-j2\pi k/N}$ N=4

b) $Y[k]=X[k]\,e^{-j4\pi k/N}$ N=5

c) $Y[k]=X[k]\,e^{j4\pi k/N}$ N=6

d) $Y[k]=X[k]\,e^{j4\pi k/N}$ N=4

3.20) Sean las secuencias

$$x_1[n]=\{\ldots,0,\underline{1},1,1,1,0,0,1,1,1,0,\ldots\}$$

$$x_2[n]=\{\ldots,0,\underline{0},0,1,1,1,1,1,0,\ldots\}$$

e $y[n]=DTF^{-1}\{X_1[k]\,X_2[k]\}$ donde $X_1[k]$ y $X_2[k]$ son las DFT de 9 puntos correspondientes a $x_1[n]$ y $x_2[n]$ respectivamente. Halle la secuencia y[n]

3.21) Sea la secuencia de longitud L=9 muestras impar:

$$x[n]=\{\ldots0,0,-4,-3,-2,-1,\underline{0},1,2,3,4,0,0,\ldots\}$$

Halle N=13 (> L) muestras de X(F) mediante la DFT

3.22) Sea una secuencia de duración finita x[n] definida entre 0 y N-1 y transformada de Fourier X(F). Se toman N valores equiespaciados $X_N[k]= X(F)|_{F=k/N}$ $0 \le k \le N-1$ que equivale a la DFT de N muestras de x[n]. Demuestre que X(F) se puede determinar exactamente a partir de $X_N[k]$ mediante la fórmula de interpolación:

$$X(F) = \sum_{k=0}^{N-1} X_N[k]\Phi(F - \frac{k}{N})$$

con

$$\Phi(F) = \frac{1}{N} e^{-j2\pi(\frac{N-1}{2})} \frac{sen\ \pi NF}{sen\ \pi F}$$

3.23) Sea una secuencia de duración finita x[n] definida entre 0 y L-1 y transformada de Fourier X(F). Se toman N valores equiespaciados $X_N[k]= X(F)|_{F=k/N}$ $0 \le k \le N-1$

a) Demuestre que la DFT inversa de N muestras de $X_N[k]$ cumple

$$DFT_N^{-1}\{X_N[k]\} = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[n-rN]$$

b) Sea la secuencia x[n]=δ[n]- δ[n-2]+ δ[n-4]

Si se toman N muestras equiespaciadas de su transformada de Fourier y se realiza una DFT inversa, dibuje los N puntos obtenidos de la señal resultante si

b.1) N= 7 puntos

b.2) N=5 puntos

b.3) N=4 puntos

c) Se desea hallar s[n]=x [n]*y[n] siendo x [n] y y[n] las secuencias

x[n]=δ[n]- δ[n-2]+ δ[n-4]

y[n]= $p_3[n]$

utilizando la DFT. Para ello se realizan los siguientes pasos:

Cálculo de $X_N(k)=DFT_N\{x[n]\}$

Cálculo de $Y_N(k)=DFT_N\{y[n]\}$

Cálculo de $Z_N(k)=X_N(k)\ Y_N(k)$

Finalmente $z[n]=DFT^{-1}_N\ \{Z_N(k)\}$ $0 \le n \le N-1$

c.1) Calcule y dibuje s[n]

c.2) Calcule y dibuje z[n] eligiendo N=10

c.3) Calcule y dibuje z[n] eligiendo N=3

3.24) Una sinusoide x[n] real a la frecuencia Fo y potencia P se multiplica por una ventana rectangular v[n] de L puntos y a continuación se calcula la DFT de N puntos (N ≥ L). Si X es la amplitud del pico espectral que observa en la DFT y sabiendo que la Transformada de Fourier V(F) toma el valor L en F=0, demuestre que P vale aproximadamente $2(X/L)^2$

3.25) Se tiene una secuencia f[n] de duración L_f muestras y se desea expandirla generando una secuencia de $2L_f+1$ muestras. La expansión se realiza intercalando entre dos muestras consecutivas de f[n] una nueva muestra calculada como el valor intermedio de dos muestras adyacentes. Este proceso se denomina interpolador lineal y para realizarlo seguiremos los siguientes pasos:

A partir de la secuencia f[n] se forma la secuencia x[n] que intercala ceros entre muestras:

$$x[n] = \begin{cases} f[\frac{n}{2}], & n\ par \\ 0, & n\ impar \end{cases}$$

La señal x[n] se aplica a un filtro interpolador de respuesta impulsional

$$h[n] = 0.5\ \delta[n+1] + \delta[n] + 0.5\delta[n-1]$$

de forma que la señal interpolada es y[n]=x[n]*h[n]

a) Para la secuencia de L=5 muestras: $f[n] = \delta[n] + 4\delta[n-1] + 9\delta[n-2] + 7\delta[n-3] + 5\delta[n-4]$ calcule y dibuje y[n].

b) Calcule H(F), la transformada de Fourier de h[n]. Dibújela en el intervalo $-1 \leq F \leq 1$

Se desea realizar el filtrado por medio de DFTs de N muestras. Para ello se siguen los siguientes pasos:

- Se genera el filtro adecuado h1[n] $0 \leq n \leq N$
- Se calcula la DFT de N muestras de h1[n]
- Se calcula la DFT de N muestras de x[n]
- Se multiplican las dos DFTs y se calcula la DFT inversa:

$$z[n] = DFT_N^{-1}\{DFT_N\{x[n]\}DFT_N\{h1[n]\}\} \quad 0 \leq n \leq N-1$$

-Se relaciona z[n] con y[n]

c) ¿Cuál debe ser el mínimo número de muestras para poder obtener y[n] a partir de z[n]? Justifique la respuesta.

d) Especifique h1[n] $0 \leq n \leq N-1$ para poder realizar la interpolación deseada mediante el método propuesto para N=16.

e) Calcule la DFT de N muestras de h1[n]

f) Dibuje z[n] $0 \leq n \leq N-1$ para N=16

g) ¿Cómo obtendría y[n] a partir de z[n]?

3.26) Sea la secuencia x[n]=p6[n]

a) Realice y dibuje la convolución $y[n] = p_6[n] * p_6[n]$.

b) ¿Cuál es la longitud de y[n]?

c) Compruebe que la relación entre las transformadas de Fourier de x[n] e y [n] es $Y(F)=X^2(F)$

Sea $X_N[k] = DFT_N\{x[n]\}$, la DFT de N muestras de la secuencia x[n].

d) Si se genera $Z_N[k] = X_N^2[k]$ para $k = 0, 1, \ldots, N-1$, obtenga y dibuje $z[n] = DFT_N^{-1}[Z_N[k]]$ para

d.1) N=15 d.2) N=9 d.3) N=6 d.4) N=4

e) Para cada uno de los valores de N anteriores, discuta si se puede afirmar que:

e.1) $X_N[k]=X(F)|_{F=k/N}$ e.2) $Z_N[k] = Y(F)|_{F=k/N}$

3.27) A continuación, se va a estudiar una aplicación de la propiedad de convolución entre secuencias y sus DFTs. Sean dos secuencias x[n] y h[n] definidas en el intervalo $0 \le n \le N-1$. La propiedad de convolución establece que:

$$x[n] \circledast h[n] \overset{DFT_N}{\longleftrightarrow} X_N[k]H_N[k] \qquad (0 \le n, k \le N-1)$$

Donde $\circledast$ denota la convolución *circular* de N puntos de las secuencias x[n] y h[n]. Se desea realizar la convolución *lineal* y[n]=x[n]*h[n] entre una secuencia x[n] $0 \le n \le L_x-1$ y un filtro de respuesta impulsional h[n] $0 \le n \le L_h-1$. Para ello se generan las DFTs $X_N[k]$ $H_N[k]$ de ambas secuencias. A continuación, se multiplican ambas DFTs y se realiza una DFT inversa de N muestras:

$$z[n]=DFT_N^{-1}\{X_N[k]\ H_N[k]\} \quad 0 \le n \le N-1$$

a) Si $N \ge \max(L_x, L_h)$, los valores del producto $X_N[k]$ $H_N[k]$, ¿son muestras de Y(F) tomadas cada k/N?. Justifique la respuesta.

b) Si $N \ge \max(L_x, L_h)$, relacione z[n] con y[n].

c) ¿Qué condición debe cumplir N para que z[n]=y[n] en el intervalo $0 \le n \le N-1$? ¿por qué?

3.28) Sea una secuencia x[n] de longitud L=6 puntos (con x[n]=0 para n < 0 y n ≥ L) de valores

x[n] = [$\underline{a}$, b, c, d, e, f] (el subrayado indica el valor que está en n=0). Se realiza una DFT de N=6 puntos y se obtiene X[k]=[$\underline{A}$, B, C, D, E, F]. Marque la respuesta correcta para cada subapartado

a) La DFT_6[$\underline{a}$*, b*, c*, d*, e*, f*] es:
- ☐ [$\underline{A}$*,B*, C*, D*, E*, F*]
- ☐ [$\underline{F}$*, E*, D*, C*, B*, A*]
- ☐ [$\underline{A}$*, F*, E*, D*, C*, B*]
- ☐ [-$\underline{F}$*, -E*, -D*, -C*, -B*, -A*]
- ☐ [$\underline{F}$*, E*, D*, A*, B*, C*]

b) La DFT_6[$\underline{a}$, -b, c, -d, e, -f] es
- ☐ [$\underline{A}$, -B, C, -D, E, -F]
- ☐ [$\underline{D}$, E, F, A, B, C]
- ☐ [$\underline{A}$, B, C, F, E, D]
- ☐ [$\underline{A+D}$, B+E, C+F, A*+D*, B*+E*, C*+F*]
- ☐ Ninguna de las anteriores

c) La DFT_3^{-1}[$\underline{A}$, C, E]
- ☐ [$\underline{a}$, c, e]
- ☐ [$\underline{a+d}$, b+e, c+f]
- ☐ [$\underline{a}$, 0, b, 0, c, 0]
- ☐ [$\underline{a}$, b, c]
- ☐ Ninguna de las anteriores

d) La DFT_6[$\underline{a}$, f, e, d, c, b] es
- ☐ [$\underline{A}$, -B, C, -D, E, -F]
- ☐ [$\underline{A}$, F, E, D, C, B]
- ☐ [$\underline{A}$, B, C, F, E, D]
- ☐ [$\underline{A+D}$, B+E, C+F, A*+D*, B*+E*, C*+F*]
- ☐ Ninguna de las anteriores

e) Si x[n] es real, la DFT_6[a, b, c, d, e, f] es

☐ [A, B, C, D, C, B]
☐ [A, B, C, D, C*, B*]
☐ [A, B, C, C*, B*, A*]
☐ [A, B, C, D, -C*, -B*]
☐ [A, B, C, -C*, -B*, -A*]

3.29) Sea la secuencia definida por x[n]= [1, 2, 3, 4] cuya transformada de Fourier es X(F).

Sea $X_N[k]$ $0 \le k \le N-1$ la DFT de N muestras de x[n].

a) ¿Cuál es el número de puntos N mínimo para que se verifique $X_N[k]=X(F)|_{F=k/N}$ $0 \le k \le N-1$?

b) Obtenga los valores de $y[n] = DFT_N^{-1}\left[X_N[k]\right]$ $0 \le n \le N-1$ para el caso b.1) N=9, b.2) N=3

c) Obtenga los valores de $y[n] = DFT_N^{-1}[X_N[k]\exp(-j4\pi k/N)]$ $0 \le n \le N-1$ para el caso c.1) N=9, c.2) N=3

Suponga ahora que genera la secuencia $X_N[k]=X(F)|_{F=k/N}$ $0 \le k \le N-1$.

d) Obtenga los valores de $y[n] = DFT_N^{-1}\left[X_N[k]\right]$ $0 \le n \le N-1$ para el caso d.1) N=9, d.2) N=3

e) Obtenga los valores de $y[n] = DFT_N^{-1}[X_N[k]\exp(-j4\pi k/N)]$ $0 \le n \le N-1$ para el caso e.1) N=9, e.2) N=3

f) Obtenga los valores de $y[n] = DFT_N^{-1}[X_N[k]\exp(j4\pi k/N)]$ $0 \le n \le N-1$ para el caso f.1) N=9, f.2) N=3

g) Obtenga los valores de $y[n] = DFT_N^{-1}\left[\frac{1}{N}X_N[k] \circledast X_N[k]\right]$ $0 \le n \le N-1$ para el caso g.1) N=9, g.2) N=3

3.30) La señal $x[n] = A\ \cos(2\pi F_x n)$ con A=4, Fx=0.25 se enventana con una ventana w[n] de 19 muestras centrada en n=0, obteniéndose $y[n] = x[n] \cdot w[n]$

Utilizando una ventana cuya T.F. es $W(F) = \frac{1}{10}\frac{\sin^2(\pi 10F)}{\sin^2(\pi F)}$

a) Encuentre la transformada de Fourier $Y(F)$ para $-\infty < F < \infty$.
b) Dibuje cuidadosamente los módulos de $X(F)$ y de $Y(F)$ en el margen $0 \le F < 1$
c) Se desplaza $y[n]$ para obtener una señal causal $y_1[n] = y[n-9]$ de forma que $Y_1(F) = Y(F) \cdot e^{-j2\pi 9F}$. Se muestrea $Y_1(F)$ con N=100 puntos en el margen $0 \le F < 1$ obteniéndose $Y_1[k] = Y_1(F)|_{F=\frac{k}{N}}$. Encuentre el valor y la posición de los máximos absolutos de $|Y_1[k]|$.
d) A partir de la señal $Z[k] = (Y_1[k])^2$, se calcula la transformada inversa $z[n] = DFT_N^{-1}\{Z[k]\}$. Exprese z[n] en función de $y_1[n]$ y justifique para qué valores de N se cumple que $z[n] = y_1[n] * y_1[n]$.

3.31) Se desea realizar una monitorización de un paciente para detectar posibles arritmias, es decir, variaciones en su ritmo cardiaco. La señal del electrocardiograma (ECG) tomada por un sensor, es prácticamente periódica y se puede expresar según:

$$x(t) = \sum_{m=1}^{M} c_m \cos(2\pi m f_0 t + \varphi_m)$$

donde f_0 es la frecuencia fundamental que queremos detectar (en Hz) y el ritmo cardiaco R_c medido será

$$R_c = 60\ f_0 \text{ (en latidos/min)}$$

Para el análisis se utiliza el siguiente esquema:

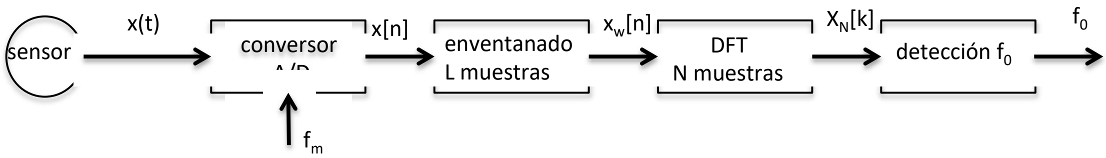


Figura 3.31) a)

a) El ancho de banda que maneja el sensor está limitado a B_x=200 Hz. ¿Qué debe cumplir la frecuencia de muestreo para que no haya aliasing?

b) Expresión de la señal x[n] a la salida del conversor A/D

c) Expresión de la transformada de Fourier de x[n] para el caso concreto de M=2, $c_1=c_2=1$, f_0=1Hz, $\varphi 1=0$, $\varphi 2=\pi/4$ y f_m=500Hz. Dibuje |X(F)| en el intervalo $0 \leq F \leq 0.5$.

d) El enventanado se realiza con una ventana rectangular $w_L[n]$ con transformada de Fourier $W_L(F)$, justifique que la transformada de Fourier de la señal a analizar $x_w[n]=x[n]\, w_L[n]$ es:

$$X_w(F) = \sum_{m=1}^{M} \frac{c_m}{2} e^{j\varphi_m} W_L(F - mF_0) + \sum_{m=1}^{M} \frac{c_m}{2} e^{-j\varphi_m} W_L(F + mF_0)$$

e) La señal se muestrea con fm=500Hz y se analiza por tramos de T=6 seg para hacer un análisis frecuencial. Este se realiza por medio de una DFT de N= 4000 puntos. La figura 3.31) b) muestra la $DFT_N\{x_w[n]\}$ de una señal con M=5, en el intervalo $0 \leq k \leq 51$. Los máximos locales de las figuras están en las posiciones k= 8, 17, 25, 33 y 41. Estime el valor de F_0, el valor de f_0 y el ritmo cardiaco del paciente en latidos/min.

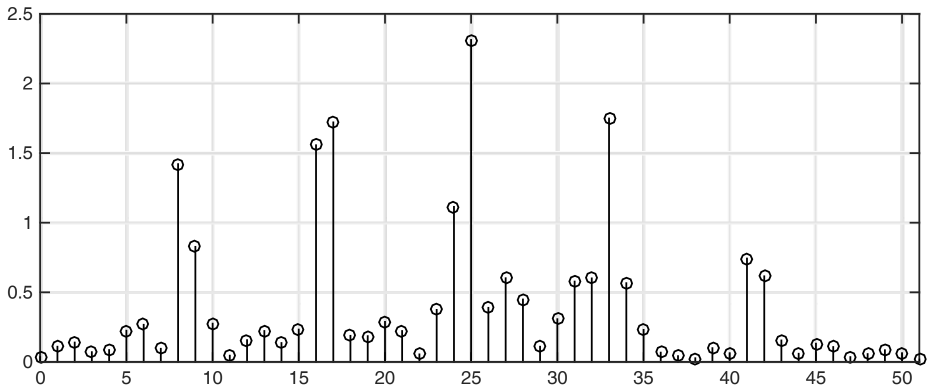


Figura 3.31) b)

f) Por el hecho de usar la DFT está haciendo un muestreo en frecuencia de $X_w(F)$ cada ΔF. Este valor influye en la estimación de F_0 y en definitiva de f_0 y en la del ritmo cardiaco R_c del paciente. ¿Qué error, en latidos/min, tiene el sistema en la estimación del ritmo cardiaco del paciente?

3.32) Sea una secuencia x[n] de duración L_x, $(0 \leq n \leq Lx\text{-}1)$ que se desea filtrar con un filtro h[n] de duración L_h muestras $(0 \leq n \leq Lh\text{-}1)$ para obtener y[n]=x[n]*h[n]. El filtrado se desea realizar mediante la utilización de la DFT. Sea $X_N[k]$=DFTN{x[n]} $0 \leq n \leq N-1$; $H_N[k]$=DFTN{h[n]}; $0 \leq n \leq N-1$. La propiedad de convolución establece que

$$x[n] \underset{N}{\circledast} \mathrm{h}[n]\,;\; 0 \leq \mathrm{n} \leq \mathrm{N}-1 \overset{DFT_N}{\longleftrightarrow} X_N[k] H_N[k]; \quad 0 \leq \mathrm{k} \leq \mathrm{N}-1$$

Donde $\underset{N}{\circledast}$ indica convolución circular de N puntos. Se pide:

a) Justifique que la anterior propiedad se cumple siempre que $N \geq \max\{L_x, L_h\}$

b) ¿Qué condición debe cumplir N para que y[n], la convolución lineal de las dos secuencias, coincida con su convolución circular en el intervalo $0 \leq n \leq N-1$?

c) Si $x[n]=[\underline{1}, 2, 3, 4, 5]$, $h[n]=[\underline{2}, 0, -2]$ obtenga los valores exactos de

$z[n] = DFT_N^{-1}\{X_N[k]H_N[k]\} \quad 0 \leq n \leq N-1$ para N=10 y N=5. Realice el apartado sin efectuar las DFTs

d) Para el caso N=5 indique las muestras que ha obtenido de z[n] que coinciden exactamente con muestras de y[n]. Generalice el resultado para el caso de que las secuencias tengan como duraciones L_x y L_h respectivamente, y se elige N tal que $\max\{L_x, L_y\} \leq N < L_x+L_y-1$

e) Suponga que la duración de x[n] es muy larga y su ordenador no tiene capacidad (numérica o de memoria) para realizar el filtrado de la señal completa ni con la función conv ni con las DFTs. La alternativa es dividir x[n] en segmentos más pequeños, realizar el filtrado de cada segmento y finalmente componer la señal resultante. Suponga que elige dividir x[n] en segmentos consecutivos $x_r[n]$ no solapados de $Nx_r=1000$ muestras, el filtro tiene $L_h=25$ muestras y realiza el filtrado con DFTs de N=1024 muestras.

$$x[n] = \sum_{r=0}^{\infty} x_r\,[n - rN_x]$$

Siendo

$$x_r[n] = \begin{cases} x[n + rN_x] & 0 \leq n \leq N_x - 1 \\ 0 & resto \end{cases}$$

Llamando a los segmentos filtrados $y_r[n]=x_r[n]*h[n]$, indique la longitud de $y_r[n]$ y explique cómo recompondría la señal y[n] a partir de ellos.

3.33) Dada una señal formada por dos tonos muestreados sin aliasing a una frecuencia fs=8KHz : $x[n] = \cos\left(2\pi \frac{5}{16} n\right) + \cos\left(2\pi \frac{3}{8} n\right)$

Se pide:

a) Expresión de la transformada de Fourier X(F)
b) Dibuje X(F) en el intervalo $0 \leq F < 1$
c) ¿Cuál es la frecuencial original de los tonos antes de muestrear?

La secuencia, no obstante, se ha de limitar en duración.

Si la limitación se realiza con una ventana rectangular de duración L muestras (con L impar):

$$w_R[n] = p_L\left[n + \frac{L-1}{2}\right] = \begin{cases} 1 & |n| \leq \frac{L-1}{2} \\ 0 & |n| > \frac{L-1}{2} \end{cases}$$

d) Obtenga la TF de la ventana $W_R(F) = TF\{w_R[n]\}$ a partir de la definición de TF

Otra opción consiste en utilizar una ventana triangular. En este caso, la TF de una ventana de la misma duración L, tiene la siguiente expresión: $W_T(F) = \dfrac{\sin^2\left(\pi F \frac{L+1}{2}\right)}{\sin^2(\pi F)}$

e) Analicemos primero el caso en que x[n] solo contenga el tono de menor frecuencia, obtenga pues

$$X_{T_1}(F) = TF\left\{\cos\left(2\pi\frac{5}{16}n\right).w_T[n]\right\} \quad X_{T1}(F) = F\{\cos\left(2\pi\frac{5}{16}n\right)w_T[n]\}$$

para una L genérica. Para el caso particular de L=31 dibuje $X_{T_1}(F)$ en el intervalo $0 \le F < 1$. Indique claramente la posición de los ceros y el valor y la posición de los dos máximos absolutos.

f) Considerando la señal con los dos tonos, obtenga y dibuje $X_T(F) = TF\{x_T[n]\} = TF\{x[n]w_T[n]\}$ con *L=31*. Para este caso concreto, compare ventajas e inconvenientes de utilizar la ventana rectangular o bien la ventana triangular.

Finalmente, suponga que la señal se limita con la ventana triangular de duración *L=127* y se trabaja valores discretos en frecuencia.

g) Para la DFT de $x_T\left[n - \frac{L-1}{2}\right]$ con *N=512* puntos (puede llamarla $X_T[k]$), encuentre los valores de *k* donde se sitúan los máximos de $|X_T[k]|$ y el valor de estos máximos.

3.34) Se desea medir la frecuencia del sonido emitido por una cuerda al hacerla vibrar. El sonido se puede simular como un tono (coseno) que se va atenuando lentamente,

$$x(t) = e^{-\alpha t}u(t)\cos(2\pi f_0 t)$$

Para medir la frecuencia f_0 se dispone del sistema de la figura 3.1 que consiste en un conversor A/D, un enventanado y un sistema que calcula la DFT de la señal y muestra su módulo en pantalla.

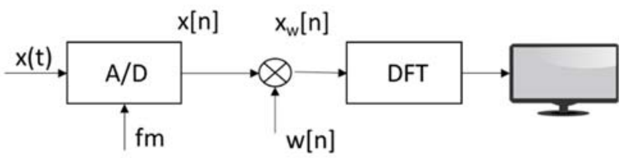


Figura 3.34) a)

El conversor A/D trabaja con una frecuencia de muestreo fm, la señal se enventana con una ventana rectangular de L muestras y la DFT calcula N muestras frecuenciales.

Se pide:

a) Expresión de la señal de salida del conversor A/D, x[n]

b) Calcule la transformada de Fourier de x[n]. Si le resulta más cómodo, puede dejarla en función de $a=e^{-\alpha/fm}$. Responda a esta pregunta detallando todos los pasos necesarios para llegar al resultado.

c) Suponga ahora α=100, fm=8000Hz. La figura 27.2 muestra el módulo de la DFT con N=1000 de la señal enventanada con L=40 y L=500 en el intervalo $0 \le k \le 500$. ¿Qué figura se corresponde con L=40 y con L=500?. Razone la respuesta.

d) El máximo de la figura 27.2 a) se encuentra en k=126 y el máximo de la figura 27.2 b) se encuentra en k= 125. ¿Qué frecuencia (en Hz) ha emitido la cuerda según cada gráfica? ¿Cuál le parece más exacta? Justifique la respuesta.

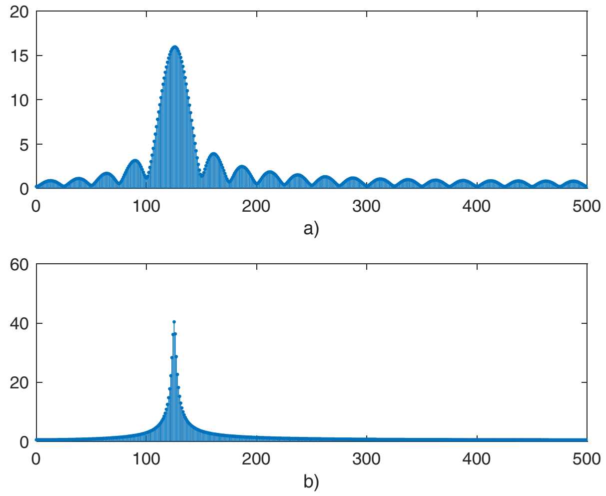


Figura 3.34) b)

Referencias.

Oppenheim Wilsky. Prentice Hall

Tratamiento digital de la señal. Una introducción experimental. Ediciones UPC.

Soluciones

3.4)

$$Y(F) = \frac{1}{2}\left(\frac{sen(\pi(F-F_0)N}{sen(\pi(F-F_0)} + \frac{sen(\pi(F+F_0)N}{sen(\pi(F+F_0)}\right)$$

3.5)

$$a)\ Y(F) = \frac{1}{4}\left(\sum_{r=-\infty}^{\infty}\big(\delta(F-(F_0+F_1)-r) + \delta(F+(F_0+F_1)-r) + \delta(F-(F_0-F_1)-r) + \delta(F+(F_0-F_1)-r)\big)\right)$$

b) en $0 \leq F \leq 0.5$ $Y(F) = \frac{1}{4}[\delta(F-0.45) + \delta(F-0.05)]$

c) en $0 \leq F \leq 0.5$ $Y(F) = \frac{1}{4}[\delta(F-0.4) + \delta(F-0.2)]$

3.6)

$$b)\ y[n] = \frac{1-(1/2)^2}{1-cos3\pi/4+(1/2)^2}\ sen(3\pi n/4)$$

$$c)\ y[n] = \frac{1-(1/2)^2}{4(1/2)^2} + \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1-(1/2)^2}{1-cos\left(\frac{2\pi}{N}\right)+(1/2)^2}cos(2\pi k/N)$$

3.7)

a) $H(F) = \frac{1}{1-ae^{-j2\pi/N}}$

b) $y[n] = \frac{1}{2}\frac{1}{1-ae^{-j2\pi/N}}e^{j2\pi n/N} + \frac{1}{2}\frac{1}{1-ae^{j2\pi/N}}e^{-j2\pi n/N}$

c) $y[n] = \frac{1}{\sqrt{a^2+1}}\cos(\frac{\pi}{2}n - arctg(a))$

3.14)

$x(t) = Acos(2\pi f_0 t) = 2\ cos(2\ \pi\ 1600\ t)$

L=50 muestras, T=6,25 ms

3.15) c) Y(F)=X(F-0.5)

d) El sistema realiza una inversión de bandas

3.16) a) $f_N=2f_1$

b) $x[n] = Acos(2\pi f_o n/f_m\ ) + Bcos(2\pi f_1 n/f_m) = Acos(2\pi 0.05n) + Bcos(2\pi 0.1n)$

c)

$$X(F) = \frac{A}{2}\left[\sum_{r=-\infty}^{\infty}\big(\delta(F-0.05-r)+\delta(F+0.05-r)\big) + \sum_{r=-\infty}^{\infty}(\delta(F-0.1-r)+\ \delta(F+0.1-r))\right]$$

d) $H(F) = \sum_{r=-\infty}^{\infty}\prod\left(\frac{F-r}{2B_h}\right)$ Con $0.05 < B_h < 0.1$

e) $h[n] = 2B_h sinc(2B_h n)$

f) $y[n] = Acos(2\pi 0.05n)$

g) Con Tm=1/fm $z(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A\cos(2\pi(\frac{f_0}{f_m})n)\prod\left(\frac{t-nT_m-T_m/2}{T_m}\right)$

3.17)

correctas b y d

3.18)

x[n]=1/2 (δ[n-1]+δ[n-7]+jδ[n-3]-jδ[n-5]}

3.19)

a) y[n] = [2, 1, 2, 2]

b) y[n] = [2, 0, 1, 2, 2]

c) y[n] = [2, 2, 0, 0, 1, 2]

d) y[n] = [2, 2, 1, 2]

3.20)

y[n] = [$\underline{3}$, 3, 4, 5, 5, 5, 4, 3, 3]

3.21)

$X[k]=DFT_N[0, 1, 2, 3, 4, 0, 0, 0, 0, -4, -3, -2, -1]$

3.23)

b1 =[1, 0, -1, 0, 1, 0, 0]
b2=[1, 0, -1, 0, 1]
b3=[2, 0, -1, 0]
c1= [$\underline{1}$, 1, 0, -1, 0, 1, 1, 0]
c2= [$\underline{1}$, 1, 0, -1, 0, 1, 1, 0, 0]
c3= [$\underline{0}$, 0, 0]

3.25)

a) y[n]={…0, 0.5, $\underline{1}$, 2.5, 4, 6.5, 9, 8, 7, 6, 5, 2.5, 0, 0,…}
b) H (F)=1+cos(2πF);
c) 11;
d) h1[n] no es causal, si aplicamos DFT directamente, perdemos la muestra en n = -1. Para solventarlo, tenemos dos opciones válidas para elegir $h_1[n]$ comprendido en $0 \le n \le N-1$:
Opción 1: generar h1[n] como h[n] retardada

h1[n]= h[n-1]=0.5 δ[n] + δ[n-1]+ 0.5 δ[n-2]
Con lo que la z[n] obtenida será una versión retardada de y[n]

Opción 2: periodificar h[n] con N muestras e igualar h[n] al periodo 0≤n≤N-1

h1[n]= δ[n]+ 0.5 δ[n-1]+ 0.5 δ[n-(N-1)]
Con lo que z[n] y y[n] periodificadas serán iguales y habrá que elegir el periodo correcto para representar y[n]

e) *Opción 1:*

$$H_{16}[k] = e^{\frac{-j2\pi k}{16}}\left(1+\cos\left(\frac{2\pi k}{16}\right)\right)$$

En definitiva $H_{16}[k]=H(F)\, e^{-j2\pi F}|_{F=k/16}$ Que se corresponde con muestras de la transformada de Fourier de h[n] retardada 1 muestra

Opción 2:

$$H_{16}[k] = (1+\cos\left(\frac{2\pi k}{16}\right))$$

En definitiva $H_{16}[k]=H(F)\,|_{F=k/16}$ Ya que las dos secuencias h1[n] y h[n] periodificadas son idénticas

f) *Opción 1:* z[n]=y[n-1]

z[n]= [$\underline{0.5}$, 1, 2.5, 4, 6.5, 9, 8, 7, 6, 5, 2.5]

Opción 2: $z[n] = \sum_{-\infty}^{\infty} y[n-rN], 0 \le n \le N-1$

z[n]= [$\underline{1}$, 2.5, 4, 6.5, 9, 8, 7, 6, 5, 2.5, 0.5]

g) *Opción 1*: y[n]=z[n+1]

Opción 2: $y[n] = \begin{cases} z[n] & 0 \le n \le N-2 \\ z[N-1] & n=-1 \end{cases}$

3.26) a) y=[12345654321],
b) 11,
d.1) z = [1, 2, 3, 4, 5, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0, 0, 0, 0];
d.2 z = [3, 3, 3, 4, 5, 6, 5, 4, 3],
d.3) z = [6, 6, 6, 6, 6, 6];
d.4 z = [4, 4, 4, 4]
e.1) Sí para N=15, 9 y 6;
e.2) Sí para N=15

3.27) a) Sí ya que $X_N[k]$ y $H_N[k]$ son muestras de X(f) y H(F) respectivamente.
b) $z[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} y[n-rN] \quad 0 \le n \le N-1$
c) N ≥ Lx+Ly-1 es la duración de la convolución de una secuencia de Lx muestras con otra de Ly muestras

3.28) a) 3,

b) 2,
c) 2,
d) 2,
e) 2

3.29) a) N=4
b) N=9 y[n]= [$\underline{1}$, 2, 3, 4, 0 ,0 ,0 ,0 ,0]; N=3 y[n]= [$\underline{1}$, 2, 3]
c) N=9 y[n]= [$\underline{0}$, 0, 1, 2, 3, 4, 0 ,0, 0]; N=3 y[n]= [$\underline{2}$, 3, $\underline{1}$]
d) N=9 y[n]= [$\underline{1}$, 2, 3, 4, 0 ,0 ,0 ,0 ,0]; N=3 y[n]= [$\underline{5}$, 2, 3]
e) N=9 y[n]= [$\underline{0}$, 0, 1, 2, 3, 4, 0 ,0, 0]; N=3 y[n]= [$\underline{2}$, 3, 5]
f) N=9 y[n]= [3, 4, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 2]; N=3 y[n]= [$\underline{3}$, 5, 2]
g) N=9 y[n]= [1, 4, 9, 16, 0, 0, 0, 0, 0]; N=3 y[n]= [17, 4, 9]

3.30) a) Y(F) = (A/2)[W(F-F_x)+W(F+F_x)]
c) k1=25; k2=75
d) y_1[n]*y1[n] dura 19x2-1=37 muestras
Si N ≥ 19, $DFT_N^{-1}[Z[k]] = y_1[n] * y_1[n] * t[n] \quad 0 \le n \le N-1$
Si N < 19, $DFT_N^{-1}[Z[k] = [y_1[n]p_N[n]] * [y_1[n]p_N[n]] * t[n] \quad 0 \le n \le N-1$
Para que $z[n] = y_1[n] * y_1[n] \;\; 0 \le n \le N-1$ se debe cumplir N≥ 37 muestras

3.31) a) $f_m \ge 2B_x$=400 Hz
b) Con $T_m=1/f_m$ y $F_0=f_0/f_m$ $\quad x[n] = \sum_{m=1}^{M} c_m \cos(2\pi m F_0 n + \varphi_m)$
c) $X(F) = \frac{1}{2}[\sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta(F - F_0 - r)\delta(F + F_0 - r)] + \frac{1}{2}\sum_{r=-\infty}^{\infty}[e^{j\pi/4}\delta(F - 2F_0 - r) + e^{-j\pi/4}\delta(F + 2F_0 - r)\,]$

d) f_0 = 60 latidos/min
e) ±3,8 latidos/min

3.32) a) se toman N muestras tanto de H(f) como de X(F), por lo que se tienen N muestras de Y(F)=X(F)H(F). Al hacer la DFT inversa, se obtiene y[n] periodificada, esto es, x[n]$\circledast$ $h[n]$

b) N ≥ L_x+L_h-1

c) Con N=10 z[n]=[2, 4, 4, 4, 4, -8, -10, 0, 0, 0]

Con N=5 z[n]= [-6, -6, 4, 4, 4]

d) exactas n=2, n=3, n=4; generalizando, las muestras exactas son Lx+Ly-1-N ≤ n ≤ N-1

e) N_{yr}=1024;

$$y[n] = \sum_{r=0}^{\infty} y_r\,[n - rN_x]$$

3.33) a) $X(F) = \frac{1}{2}\left[\sum_{r=-\infty}^{\infty}\left(\delta\left(F - \frac{5}{16} - r\right) + \delta\left(F + \frac{5}{16} - r\right)\right) + \sum_{r=-\infty}^{\infty}\left(\delta\left(F - \frac{3}{8} - r\right) + \delta\left(F + \frac{3}{8} - r\right)\right)\right]$

b) $X(F) = \frac{1}{2}\left[\delta\left(F - \frac{5}{16}\right) + \delta\left(F - \frac{11}{16}\right) + \delta\left(F - \frac{3}{8}\right) + \delta\left(F - \frac{5}{8}\right)\right]$ en 0≤ F ≤ 1

c) 2500 Hz y 3000 Hz

d) $W_R(F) = \frac{sen(\pi F L)}{sen(\pi F)}$

e) Los máximos absolutos están en 5/16 y 11/16; los ceros están cada 1/16, es decir en

[0, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 14, 15]/16

f) $X_T(F) = W_T(F-5/16) + W_T(F-11/16) + W_T(F-6/16) + W_T(F-10/16)$

g) Con la ventana triangular hay un máximo en 5.5/16 y otro en 10.5/16. Con la ventana rectangular se observan los dos tonos al tener los máximos en 5/16, 6/16, 10/16 y 11/16

3.34) a) $x[n]=x(n/fm)=e^{-\alpha n/fm}\, u(n/fm) \cos(2\pi f_0 n/fm) = a^n u[n] \cos(2\pi F_0 n)$ con $F_0=f_0/fm$

$$b)\ X(F) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-ae^{-j2\pi(F-F_0)}} + \frac{1}{1-ae^{-j2\pi(F+F_0)}}\right]$$

c) A continuación se muestran varias respuestas correctas:

Las figuras muestran las DFTs de N=1000 muestras de la secuencia $x[n]w_L[n]$ con L=40 y L=500. Como en ambos casos N>L, las DFTs son muestras de la TF de $x[n]w_L[n]$, cuyo módulo es la envolvente visual de cada gráfica.

- La exponencial decreciente $\exp(-\alpha t)u(t)$ tiene una constante de tiempo $\tau=1/\alpha=1/100$; al muestrearla con una frecuencia de muestreo fm, la constante de tiempo dura $\tau fm=8000/100=80$ muestras. Una buena estimación de la duración de una exponencial decreciente es 4τ, que en nuestro caso es 320 muestras. Así pues, la ventana de L=40 muestras, apenas toma muestras de la exponencial mientras que la ventana con L=500 toma toda la señal significativa. La TF con L=40 será aproximadamente la de la ventana rectangular de 40 muestras multiplicada por un coseno y es la correspondiente a la figura a). La TF con L=500 será la de la exponencial modulada (resultado del apartado anterior) y es la que se observa en la figura b)
- La ventana con L=40 es mucho más estrecha en n que la de L=500 por tanto en frecuencia, el lóbulo principal de la ventana L=40 será mucho más ancho que el de la ventana con L=500. Por tanto, la gráfica superior se corresponde con L=40.
- Como la gráfica representa muestras de $X(F) \circledast W_L(F)$ y $W_L(F)$ tiene los cruces por cero cada 1/L, la gráfica superior se corresponde con L=40.
- El pico de la gráfica se corresponde con el valor del área de la señal bajo la ventana dividida por dos. Como la exponencial es decreciente, en cada ciclo completo del coseno el área es positiva. La gráfica inferior tiene un valor de pico mayor, lo que implica que se suman muchos más ciclos del coseno, es decir la longitud de la ventana de la gráfica inferior es mayor que la de la gráfica superior

d) Según a) la frecuencia estimada es $\hat{f}_0 = \frac{127x\,8000}{1000}$=1016

Según b) la frecuencia estimada es $\hat{f}_0 = \frac{125x\,8000}{1000}$=1000

La mejor estimación es con la gráfica b) ya que los lóbulos secundarios de la parte de la TF de la ventana centrada en $-F_0$ en el caso a) son muy grandes de forma que influyen en la posición del máximo del lóbulo principal centrado en F_0. En el caso b) el efecto de la ventana es prácticamente despreciable.

También puede decirse que con L=500 prácticamente se toma toda la señal significativa mientras que con L=40 apenas se aprecia la parte decreciente de la exponencial y por esa razón la estimación con toda la señal debe ser mejor.