

# Pràctica 1. Zeros de funcions

## Índex

<b>Índex</b>	<b>1</b>
<b>1 Un exemple del mètode de Newton</b>	<b>1</b>
<b>2 Un exemple del mètode de la Secant</b>	<b>3</b>
<b>3 Aplicació: punts d'equilibri del PCRTBP</b>	<b>4</b>
3.1 Punts d'equilibri . . . . .	5
3.1.1 Càlcul de $L_1$ . . . . .	5
3.1.2 Càlcul de $L_2$ . . . . .	6
3.1.3 Càlcul de $L_3$ . . . . .	6
<b>4 Presentació de la pràctica</b>	<b>7</b>
<b>5 Referències</b>	<b>8</b>

## 1 Un exemple del mètode de Newton

Volem aplicar el mètode de Newton per a calcular els zeros del polinomi  $f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$ . Amb la regla de Ruffini es troba fàcilment que les arrels son  $s = 1$  (amb multiplicitat 2) i  $s = 2$ . Anem ara a calcular-les numèricament per tal de veure la convergència del mètode així com la constant asimptòtica.

Per tal d'obtenir aproximacions de l'arrel  $s = 1$  construïm la recurrència

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

i, per a controlar l'error a les aproximacions successives, introduïm les quantitats

$$\varepsilon_n := |x_n - s|, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad \epsilon_n := |x_n - x_{n-1}|, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2)$$

A la taula 1 es donen els termes de la seqüència (1) corresponents al valor inicial  $x_0 = 0.8$ , així com els errors  $\varepsilon_n$ ,  $\epsilon_n$  definits per (2), i els quocients  $\epsilon_n/\epsilon_{n-1}$ . D'aquesta manera, s'aprecia que amb 23 iterats l'error a l'arrel és  $\varepsilon_{23} = 3.054 \times 10^{-8}$  i que les ratios  $\epsilon_n/\epsilon_{n-1}$  de la darrera columna tendeixen a  $1/2$ , que és el que cal esperar ja que la constant asimptòtica de l'error en el mètode de Newton és  $L = 1 - 1/q$  si l'arrel té multiplicitat  $q$ .

*Remarca.* Notem però que en el càlcul de  $\epsilon_{22}/\epsilon_{21}$  i de  $\epsilon_{23}/\epsilon_{22}$  es perd precisió respecte el valor  $1/2$  de la predicció teòrica per a la constant asimptòtica. Això és degut a que dividim per nombres molt petits els quals, al seu torn, vénen de la resta de nombres molt propers a zero.

$n$	$x_n$	$\varepsilon_n$	$\epsilon_n$	$\epsilon_n/\epsilon_{n-1}$
0	$8.000\,000\,000 \times 10^{-01}$	$2.000 \times 10^{-01}$	—	—
1	$8.923\,076\,923 \times 10^{-01}$	$1.077 \times 10^{-01}$	$9.231 \times 10^{-02}$	—
2	$9.436\,576\,668 \times 10^{-01}$	$5.634 \times 10^{-02}$	$5.135 \times 10^{-02}$	$5.563 \times 10^{-01}$
3	$9.710\,970\,632 \times 10^{-01}$	$2.890 \times 10^{-02}$	$2.744 \times 10^{-02}$	$5.344 \times 10^{-01}$
4	$9.853\,483\,648 \times 10^{-01}$	$1.465 \times 10^{-02}$	$1.425 \times 10^{-02}$	$5.194 \times 10^{-01}$
5	$9.926\,216\,689 \times 10^{-01}$	$7.378 \times 10^{-03}$	$7.273 \times 10^{-03}$	$5.104 \times 10^{-01}$
6	$9.962\,973\,735 \times 10^{-01}$	$3.703 \times 10^{-03}$	$3.676 \times 10^{-03}$	$5.054 \times 10^{-01}$
7	$9.981\,452\,783 \times 10^{-01}$	$1.855 \times 10^{-03}$	$1.848 \times 10^{-03}$	$5.027 \times 10^{-01}$
8	$9.990\,717\,815 \times 10^{-01}$	$9.282 \times 10^{-04}$	$9.265 \times 10^{-04}$	$5.014 \times 10^{-01}$
9	$9.995\,356\,757 \times 10^{-01}$	$4.643 \times 10^{-04}$	$4.639 \times 10^{-04}$	$5.007 \times 10^{-01}$
10	$9.997\,677\,840 \times 10^{-01}$	$2.322 \times 10^{-04}$	$2.321 \times 10^{-04}$	$5.003 \times 10^{-01}$
11	$9.998\,838\,785 \times 10^{-01}$	$1.161 \times 10^{-04}$	$1.161 \times 10^{-04}$	$5.002 \times 10^{-01}$
12	$9.999\,419\,359 \times 10^{-01}$	$5.806 \times 10^{-05}$	$5.806 \times 10^{-05}$	$5.001 \times 10^{-01}$
13	$9.999\,709\,671 \times 10^{-01}$	$2.903 \times 10^{-05}$	$2.903 \times 10^{-05}$	$5.000 \times 10^{-01}$
14	$9.999\,854\,833 \times 10^{-01}$	$1.452 \times 10^{-05}$	$1.452 \times 10^{-05}$	$5.000 \times 10^{-01}$
15	$9.999\,927\,416 \times 10^{-01}$	$7.258 \times 10^{-06}$	$7.258 \times 10^{-06}$	$5.000 \times 10^{-01}$
16	$9.999\,963\,708 \times 10^{-01}$	$3.629 \times 10^{-06}$	$3.629 \times 10^{-06}$	$5.000 \times 10^{-01}$
17	$9.999\,981\,853 \times 10^{-01}$	$1.815 \times 10^{-06}$	$1.815 \times 10^{-06}$	$5.000 \times 10^{-01}$
18	$9.999\,990\,928 \times 10^{-01}$	$9.072 \times 10^{-07}$	$9.074 \times 10^{-07}$	$5.001 \times 10^{-01}$
19	$9.999\,995\,460 \times 10^{-01}$	$4.540 \times 10^{-07}$	$4.533 \times 10^{-07}$	$4.995 \times 10^{-01}$
20	$9.999\,997\,730 \times 10^{-01}$	$2.270 \times 10^{-07}$	$2.270 \times 10^{-07}$	$5.007 \times 10^{-01}$
21	$9.999\,998\,865 \times 10^{-01}$	$1.135 \times 10^{-07}$	$1.135 \times 10^{-07}$	$5.000 \times 10^{-01}$
22	$9.999\,999\,452 \times 10^{-01}$	$5.484 \times 10^{-08}$	$5.868 \times 10^{-08}$	$5.171 \times 10^{-01}$
23	$9.999\,999\,695 \times 10^{-01}$	$3.054 \times 10^{-08}$	$2.429 \times 10^{-08}$	$4.140 \times 10^{-01}$

Taula 1: Iterats del mètode de Newton (1) corresponents a  $x_0 = 0.8$ .

$n$	$x_n$	$\varepsilon_n$	$\epsilon_n$	$\epsilon_n/\epsilon_{n-1}^2$
0	$8.000\,000\,000 \times 10^{-01}$	$2.000 \times 10^{-01}$	—	—
1	$9.846\,153\,846 \times 10^{-01}$	$1.538 \times 10^{-02}$	$1.846 \times 10^{-01}$	—
2	$9.998\,843\,262 \times 10^{-01}$	$1.157 \times 10^{-04}$	$1.527 \times 10^{-02}$	$4.480 \times 10^{-01}$
3	$9.999\,999\,933 \times 10^{-01}$	$6.687 \times 10^{-09}$	$1.157 \times 10^{-04}$	$4.961 \times 10^{-01}$

Taula 2: Iterats del mètode de Newton (3) corresponents a  $x_0 = 0.8$ .

En canvi, si suposem coneguda la multiplicitat de l'arrel,  $q = 2$ , i modifiquem l'algorisme (1) substituint-lo per

$$x_{n+1} = x_n - q \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3)$$

s'obté, per a la mateixa aproximació inicial,  $x_0 = 0.8$ , la taula 2, on es veu que amb 3 iterats ja tenim un error a l'arrel de  $6.687 \times 10^{-9}$  i s'aprecia que la convergència és quadràtica. D'altra banda, sabem que la constant asimptòtica corresponent a l'algorisme (3) és  $L = |h(s)/qh'(s)|$ , on  $h(x)$  es defineix per  $f(x) = (x - s)^q h(x)$  amb  $h'(s) \neq 0$ . En el nostre cas  $q = 2, s = 1$  i  $h(x) = x - 2$ , per tant  $L = 1/2$ , que és el valor al qual hi tendeixen els quocients  $\epsilon_n/\epsilon_{n-1}^2$  de l'última columna.

$n$	$x_n$	$\varepsilon_n$	$\epsilon_n$	$\epsilon_n/\epsilon_{n-1}^2$
0	$8.000\,000\,000 \times 10^{-01}$	$2.000 \times 10^{-01}$	—	—
1	$1.013\,698\,630 \times 10^{+00}$	$1.370 \times 10^{-02}$	$2.137 \times 10^{-01}$	—
2	$1.000\,096\,441 \times 10^{+00}$	$9.644 \times 10^{-05}$	$1.360 \times 10^{-02}$	$2.979 \times 10^{-01}$
3	$1.000\,000\,005 \times 10^{+00}$	$4.651 \times 10^{-09}$	$9.644 \times 10^{-05}$	$5.212 \times 10^{-01}$
4	$1.000\,000\,000 \times 10^{+00}$	$0.000 \times 10^{+00}$	$4.651 \times 10^{-09}$	$5.001 \times 10^{-01}$

Taula 3: Iterats del mètode de Newton (4) corresponents a  $x_0 = 0.8$ .

$n$	$x_n$	$\varepsilon_n$	$\epsilon_n$	$\epsilon_n/\epsilon_{n-1}^2$
0	$2.100\,000\,000 \times 10^{+00}$	$1.000 \times 10^{-01}$	—	—
1	$2.015\,384\,615 \times 10^{+00}$	$1.538 \times 10^{-02}$	$8.462 \times 10^{-02}$	—
2	$2.000\,452\,489 \times 10^{+00}$	$4.525 \times 10^{-04}$	$1.493 \times 10^{-02}$	$2.086 \times 10^{+00}$
3	$2.000\,000\,409 \times 10^{+00}$	$4.089 \times 10^{-07}$	$4.521 \times 10^{-04}$	$2.028 \times 10^{+00}$
4	$2.000\,000\,000 \times 10^{+00}$	$3.335 \times 10^{-13}$	$4.089 \times 10^{-07}$	$2.001 \times 10^{+00}$
5	$2.000\,000\,000 \times 10^{+00}$	$4.441 \times 10^{-16}$	$3.340 \times 10^{-13}$	$1.997 \times 10^{+00}$

Taula 4: Iterats del mètode de Newton (1) corresponents a  $x_0 = 2.1$ .

Per últim, podem considerar la funció  $u(x) = f(x)/f'(x)$  que tindrà  $s = 1$  com arrel simple. Així, prenent  $x_0 = 0.8$  a l'algorisme

$$x_{n+1} = x_n - \frac{u(x_n)}{u'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4)$$

es troben les aproximacions de l'arrel que apareixen a la taula 4 (fixem-nos que caldrà calcular la derivada segona de  $f(x)$  a cada iteració). Observem, com abans, que la convergència és quadràtica. A més sabem que la constant asimptòtica de l'error per l'algorisme (4) és  $L = |u''(s)/2u'(s)|$ , i fent els càlculs es comprova que  $L = 1/2$ , valor cap al qual tendeixen els quocients  $\epsilon_n/\epsilon_{n-1}^2$  de l'última columna de la taula.

Pel que fa a l'arrel simple,  $s = 2$ , a la taula 4 es mostren els iterats obtinguts per la recurrència (1) a partir de  $x_0 = 2.1$ . Es veu que la convergència és quadràtica i s'intueix dels valors de la quarta columna que la constant asimptòtica de l'error és  $L = 2$ , com es comprova calculant  $L = |f''(s)/2f'(s)|$  per al polinomi  $f(x)$  donat.

## 2 Un exemple del mètode de la Secant

Volem il·lustrar que el mètode de la secant té ordre de convergència  $\sigma = (1+\sqrt{5})/2 = 1.618\dots$ . Per a això considerem la funció  $f(x) = x^3 - 3x + 2$  i anem a calcular l'arrel  $s = 2$  numèricament amb el mètode de la secant. Prenem  $x_0 = -2.6$  i  $x_1 = -2.4$  i, amb aquest mètode obtenim la taula 5 on s'observa a la quarta columna que la convergència és més ràpida que lineal, a la cinquena, veiem que és menys que quadràtica i, a la darrera, veiem que l'ordre és efectivament  $(1+\sqrt{5})/2$ .

$n$	$x_n$	$\epsilon_n$	$\epsilon_n/\epsilon_{n-1}$	$\epsilon_n/\epsilon_{n-1}^2$	$\epsilon_n/\epsilon_{n-1}^\sigma$
0	$-2.600\,000\,000 \times 10^{+00}$	—	—	—	—
1	$-2.400\,000\,000 \times 10^{+00}$	$2.000 \times 10^{-01}$	—	—	—
2	$-2.106\,598\,985 \times 10^{+00}$	$2.934 \times 10^{-01}$	$1.467 \times 10^{+00}$	$7.335 \times 10^{+00}$	$3.967 \times 10^{+00}$
3	$-2.022\,641\,412 \times 10^{+00}$	$8.396 \times 10^{-02}$	$2.862 \times 10^{-01}$	$9.753 \times 10^{-01}$	$6.106 \times 10^{-01}$
4	$-2.001\,511\,097 \times 10^{+00}$	$2.113 \times 10^{-02}$	$2.517 \times 10^{-01}$	$2.998 \times 10^{+00}$	$1.164 \times 10^{+00}$
5	$-2.000\,022\,536 \times 10^{+00}$	$1.489 \times 10^{-03}$	$7.045 \times 10^{-02}$	$3.334 \times 10^{+00}$	$7.641 \times 10^{-01}$
6	$-2.000\,000\,023 \times 10^{+00}$	$2.251 \times 10^{-05}$	$1.512 \times 10^{-02}$	$1.016 \times 10^{+01}$	$8.453 \times 10^{-01}$
7	$-2.000\,000\,000 \times 10^{+00}$	$2.269 \times 10^{-08}$	$1.008 \times 10^{-03}$	$4.476 \times 10^{+01}$	$7.510 \times 10^{-01}$
8	$-2.000\,000\,000 \times 10^{+00}$	$3.406 \times 10^{-13}$	$1.501 \times 10^{-05}$	$6.619 \times 10^{+02}$	$7.960 \times 10^{-01}$

Taula 5: Iterats del mètode de la secant per a la funció  $f(x) = x^3 - 3x + 2$ .

### 3 Aplicació: punts d'equilibri del PCRTBP

Anem a considerar un problema en el món de la mecànica celeste i la astrodinàmica (els interessats en una perspectiva històrica del problema poden consultar [1]). Suposem que volem enviar una missió a la Lluna o una nau no tripulada a estudiar l'activitat solar.

Un primer model aproximat de la realitat és l'anomenat Problema Restringit dels tres cossos circular pla (PCRTBP). Aquest consisteix en suposar que es tenen dos cossos massius, anomenats primaris (per exemple la Terra i la Lluna) que descriuen òrbites circulars en un mateix pla al voltant del seu centre de masses, i un tercer cos (nau espacial) de massa infinitesimal (comparada amb la massa dels primaris), que es mou en el mateix pla, sotmès a l'atracció gravitatòria dels primaris però sense alterar el seu moviment.

Es pot veure a [2] que si es pren un sistema de referència que giri amb els primaris (de manera que aquests romanen fixos en el nou eix  $x$  de referència), i prenent unitats adequades de longitud, massa i temps, llavors les equacions diferencials que descriuen la trajectòria  $(x(t), y(t))$  i velocitat  $(x'(t), y'(t))$  del cos infinitesimal són, si denotem  $X = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (x, y, x', y')$ ,

$$\begin{aligned}
x'_1 &= x_3, \\
x'_2 &= x_4, \\
x'_3 &= 2x_4 + \frac{\partial \Omega}{\partial x_1}, \\
x'_4 &= -2x_3 + \frac{\partial \Omega}{\partial x_2}
\end{aligned} \tag{5}$$

o, més breument  $X' = F(X)$ , on  $X$  pertany a un obert d' $\mathbb{R}^4$ , on

$$\Omega(x_1, x_2) = \Omega(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} + \frac{1}{2}\mu(1-\mu),$$

essent  $r_1$ ,  $r_2$ , respectivament, les distàncies del tercer cos al primari gran (Terra) i al petit (Lluna), i.e.,

$$r_1 = \sqrt{(x-\mu)^2 + y^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x-\mu+1)^2 + y^2}$$

i on  $\mu \in (0, 1/2]$  és l'anomenat *paràmetre de masses* (quocient entre la massa del primari petit i de la suma de les masses dels dos primaris). En particular, el primari gran de massa  $1 - \mu$

està localitzat al punt  $(\mu, 0)$  i el petit de massa  $\mu$  al punt  $(\mu - 1, 0)$ . Per exemple, prenent com primaris la Terra i la Lluna, s'obté  $\mu = 0.01229$  (vegeu la figura 1).

Es pot comprovar molt fàcilment que el sistema diferencial (5) té una integral primera, l'anomenada *integral de Jacobi* i que s'expressa per

$$C(x, y, x', y') = 2\Omega(x, y) - (x'^2 + y'^2) \quad (6)$$

de manera que  $F$  roman constant per a cada solució, i ho expressarem per

$$2\Omega(x, y) - (x'^2 + y'^2) = C. \quad (7)$$

### 3.1 Punts d'equilibri

Quan s'estudia un sistema  $X' = F(X)$ ,  $X \in \mathbb{R}^n$ , l'objectiu més ambiciós és conèixer totes les solucions del. Això, en general, no és possible i el que s'acostuma a fer és començar per les solucions més senzilles, és a dir, les anomenades solucions o punts d'equilibri que són constants al llarg del temps,  $X(t) = p$ , on  $p$  és tal que  $F(p) = 0$ .

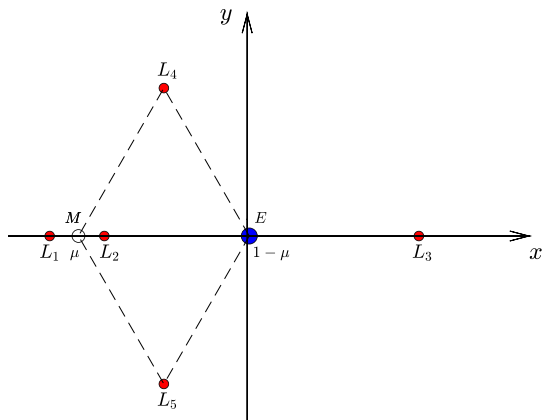


Figura 1: Punts d'equilibri del PCRTBP.

L'objectiu d'aquesta pràctica és calcular els punts d'equilibri del PCRTBP en variar el paràmetre de masses a l'interval  $(0, 1/2]$ . Es pot veure que hi ha 5 punts d'equilibri anomenats  $L_1, \dots, L_5$ , on  $L_1, L_2$  i  $L_3$  (o punts colineals) estan localitzats sobre l'eix  $x$ , mentre que els punts  $L_4$  i  $L_5$  (o punts triangulars) estan localitzats formant un triangle equilàter amb els primaris, és a dir, a les posicions:

$$L_{4,5} = (\mu - 1/2, \pm\sqrt{3}/2).$$

Vegeu la figura 1, on es mostren els punts d'equilibri del sistema Terra-Lluna.

Per a calcular la posició dels punts colineals, cal resoldre una equació polinòmica de cinquè grau, l'anomenada *quíntica d'Euler*. El que farem serà resoldre aquesta equació polinòmica, primer reescriuint-la de manera adequada per tal d'aplicar el teorema del punt fix i després comprovarem els càlculs amb els mètodes de la secant i de Newton, tal com s'indica a la secció 4.

#### 3.1.1 Càlcul de $L_1$

$L_1$  és el punt colineal situat sobre l'eix  $x$  a l'esquerra del primari petit (vegeu la figura 1). Si introduïm la translació  $x = \mu - 1 - s$  (notem que llavors la posició del primari petit correspon a  $s = 0$ ) la posició  $s_{L_1}$  de  $L_1$  ve donada per l'única arrel real positiva de la quintica

$$s^5 + (3 - \mu)s^4 + (3 - 2\mu)s^3 - \mu s^2 - 2\mu s - \mu = 0 \quad (8)$$

o, equivalentment, pel punt fix de la funció

$$G_1(s) = \sqrt[3]{\frac{\mu(1+s)^2}{3 - 2\mu + s(3 - \mu + s)}}$$

que podem trobar de la recurrència  $s_n = G_1(s_{n-1})$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , prenent

$$s_0 = \sqrt[3]{\frac{\mu}{3(1 - \mu)}} \quad (9)$$

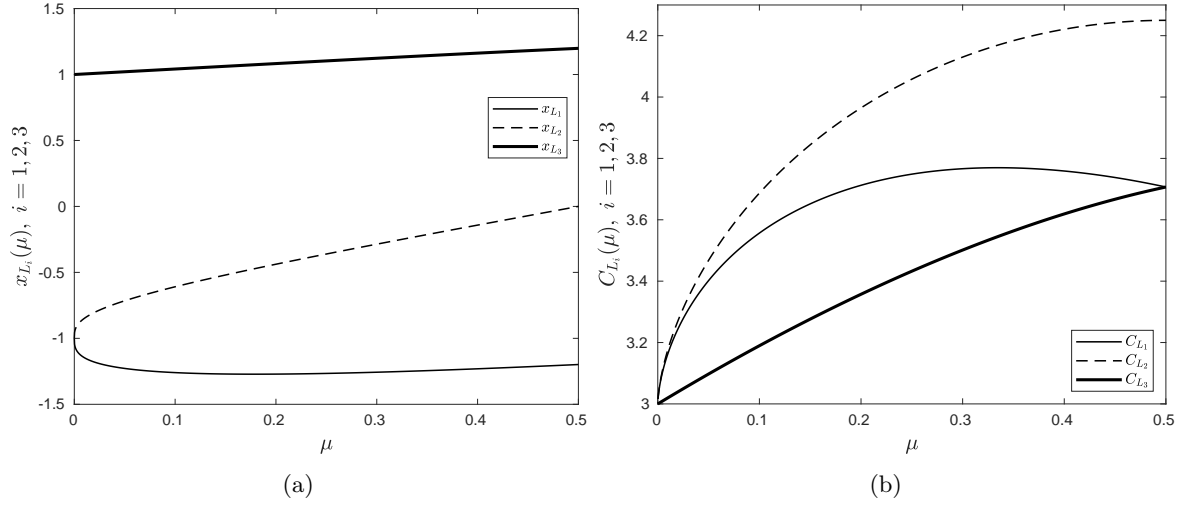


Figura 2: (a) posició dels punts d'equilibri en funció del paràmetre de masses,  $\mu \in (0, 1/2]$ . La gràfica en traç continu correspon a  $x_{L_1}$ , la gràfica en traç discontinu a  $x_{L_2}$  i la gràfica en traç continu més gruix a  $x_{L_3}$ . (b) valor de constant de Jacobi,  $C$ , per a cada valor de  $\mu \in (0, 1/2]$  als punts d'equilibri  $L_1$  (traç continu),  $L_2$  (traç discontinu) i  $L_3$  (traç continu més gruix).

com a valor inicial (vegeu [2], sec. 4.4). Un cop hem determinat  $s_{L_1}$ , la posició de  $L_1$  en les coordenades originals és  $(x_{L_1}, 0)$  amb  $x_{L_1} = \mu - 1 - s_{L_1}$ . Comprovarem també el càlcul pels mètodes de la secant i de Newton (vegeu la remarca 3.1).

### 3.1.2 Càlcul de $L_2$

El punt d'equilibri colineal  $L_2$  es troba sobre l'eix  $x$  entre els dos primaris (vegeu la figura 1. Si fem la translació  $x = \mu - 1 + s$  (de manera que  $s = 0$  dóna la posició del primari més petit), el valor de  $s$  que correspon a la posició de  $L_1$  és solució de l'equació quàntica

$$s^5 - (3 - \mu)s^4 + (3 - 2\mu)s^3 - \mu s^2 + 2\mu s - \mu = 0 \quad (10)$$

amb  $s > 0$  o, equivalentment, un punt fix de la funció

$$G_2(s) = \sqrt[3]{\frac{\mu(1-s)^2}{3-2\mu-s(3-\mu-s)}} \quad (11)$$

que obtindrem de la recurrència  $s_n = G_2(s_{n-1})$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , agafant el mateix valor (9) de  $s_0$ . Així, si  $s_{L_2}$  és el punt fix de (10) trobat, la posició del punt  $L_2$  és  $(x_{L_2}, 0)$  amb  $x_{L_2} = \mu - 1 + s_{L_1}$ . Comprovarem també el resultat pels mètodes de la secant i de Newton (vegeu la remarca 3.1).

### 3.1.3 Càlcul de $L_3$

El punt d'equilibri colineal  $L_3$  és situa sobre l'eix  $x$  a la dreta del primari gran (vegeu la figura 1). En aquest cas convé fer la translació  $x = \mu + s$ , de manera que  $s = 0$  dóna la posició del primari gran. En aquesta nova coordenada  $s$ , per determinar la posició de  $L_3$  busquem l'única arrel positiva,  $s_{L_3}$ , de la quàntica

$$s^5 + (2 + \mu)s^4 + (1 + 2\mu)s^3 - (1 - \mu)s^2 - 2(1 - \mu)s - (1 - \mu) = 0 \quad (12)$$

o, equivalentment, l'únic punt fix de la funció

$$G_3(s) = \sqrt[3]{\frac{(1-\mu)(1+s)^2}{1+2\mu+s(2+\mu+s)}}$$

calculant els termes de la recurrència  $s_n = G_3(x_{s-1})$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , agafant

$$s_0 = 1 - \frac{7\mu}{12} \quad (13)$$

(vegeu [2], sec. 4.4). Un cop conegut  $s_{L_3}$ , la posició del punt  $L_3$  és  $(x_{L_3}, 0)$  amb  $x_{L_3} = \mu + s_{L_3}$ . Igualment, caldrà comprovar els valors obtinguts pels mètodes de la secant i de Newton. (vegeu la remarca 3.1).

*Remarca 3.1.* Quan repetiu els càlculs pel mètode de Newton podeu fer servir, per a  $L_1$  i  $L_2$ , el valor inicial  $s_0$  donat per (9) i, per  $L_3$ , el donat per (13). Al mètode de la secant podeu agafar el mateix l'interval inicial  $[s_0, s_1] = [0.3, 0.8]$  per a tots els valors de  $\mu$ .

## 4 Presentació de la pràctica

Haureu de pujar els fitxers següents:

1. Un fitxer `iteracio_simple.m` amb la funció

```
function [xk, res, it] = iteracio_simple(x0, tol, itmax, fun)
```

que calculi el zero de la funció  $f(x)$  a l'interval  $[a, b]$  pel mètode d'iteració del punt fix, on els paràmetres d'entrada són:

**x0:** aproximació inicial  $x_0 \in [a, b]$  de l'arrel,

**tol:** tolerància. La iteració s'atura quan  $|x_n - x_{n-1}| < \text{tol}$ ,

**itmax:** nombre màxim d'iterats permesos. Si no hi ha convergència en **itmax** iteracions del mètode, la funció ha d'emetre un missatge,

**fun:** la funció  $f(x)$ ,

i els paràmetres de sortida són:

**xk:** vector amb les aproximacions successives de l'arrel,

**res:** vector que conté els "residus", i.e., els valors de la funció en **xk**,

**it:** nombre d'iterats del mètode que s'han dut a terme,

2. Un fitxer `newton.m` amb la funció

```
function [xk, res, it] = newton(x0, tol, itmax, fun, dfun)
```

que calculi el zero de  $f(x)$  a l'interval  $[a, b]$  pel mètode de Newton. Els paràmetres d'entrada **x0**, **tol**, **itmax** i **fun** són els mateixos que els de la funció anterior, mentre que **dfun** és la derivada de la funció. Els paràmetres de sortida, **xk**, **res**, **it** són el mateixos que els de la funció anterior.

3. Un fitxer `secant.m` amb la funció

```
function [xk, res, it] = secant(a, b, tol, itmax, fun)
```

que calculi el zero de la funció  $f(x)$  a l'interval  $[a, b]$  pel mètode de la secant. Els paràmetres d'entrada **tol**, **itmax** i **fun** són els mateixos que els de les dues funcions anteriors, mentre que **a** i **b** són els extrems de l'interval on es troba el zero de la funció. Els paràmetres de sortida **xk**, **res**, **it** són els mateixos que els de les dues funcions anteriors.

4. tres fitxers de comandes, `pEulerIteracioSimple.m`, `pEulerNewton.m` i `pEulerSecant.m` que cridin les funcions `iteracio_simple`, `newton` i `secant` respectivament, calculin les posicions de  $L_1$ ,  $L_2$  (vegeu la remarca 3.1).  $L_3$  per valors de  $\mu$  a l'interval  $(0, 1/2]$  i dibuixin les gràfiques de la figura 2.

## 5 Referències

- [1] J. Barrow-Green. *Poincare and the Three Body Problem*. History of mathematics. American Mathematical Society, 1997. [4](#)
- [2] V.G. Szebehely. *Theory of Orbits, the Restricted Problem of Three Bodies*. Academic Press, New York, 1967. [4](#), [6](#), [7](#)