Problemes de Variable Complexa FME, curs 2019-20

Tema 5: APLICACIONS CONFORMES I FUNCIONS HARMÒNIQUES

1. Si f és analítica en $D_1(0)$, contínua en $\bar{D}_1(0)$ i $|f(z)| \leq 1$ per $|z| < 1$, llavors

$$\frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \leq \frac{1}{1 - |z|^2}.$$

2. Demostreu que les transformacions conformes del semi-plà $\pi^+ = \{z \,:\, \text{Im } z > 0\}$ en el disc unitat $D_1(0)$ són de la forma

$$w = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0},$$

sent $z_0 \in \pi^+$ i $0 \leq \theta < 2\pi$.

3. Si f analítica en π^+ compleix que $\text{Im }(z) > 0 \implies \text{Im }(f(z)) \geq 0$, llavors és té:

$$\frac{|f(z) - f(z_0)|}{|f(z) - \overline{f(z_0)}|} \leq \frac{|z - z_0|}{|z - \bar{z}_0|}, \qquad \frac{|f(z)|}{\text{Im }(f(z))} \leq \frac{1}{\text{Im }(z)}.$$

4. f holomorfa en $D_1(0)$ amb $\|f\|_{D_1(0)} = \sup_{z \in D_1(0)} |f(z)| \leq 1$. Si existeixen $a, b \in D_1(0)$, $a \neq b$, tals que $f(a) = a$ i $f(b) = b$, demostreu que $f(z) = z$, $\forall z \in D_1(0)$.

5. Demostreu que $f(z) = \left(\dfrac{1+z}{1-z}\right)^2$ aplica conformement $D_1(0) \cap \pi^+$ en π^+. (Indicació: estudieu prèviament la transformació $w = \frac{1+z}{1-z}$.)

6. Trobeu transformacions conformes en π^+ dels oberts següents:

(i) $A_m = \{z \,:\, 0 < \arg z < \frac{\pi}{m}\}$, $m \geq 1$.

(ii) $B_a = \{z \,:\, 0 < \text{Im } z < a\}$, $a > 0$.

7. Demostreu que $f(z) = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$ aplica conformement

(i) $D_1(0) \setminus \{0\}$ en $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$.

(ii) $\pi^+ \setminus \bar{D}_1(0)$ en π^+.

8. Demostreu que $\varphi(z) = \dfrac{(1+z)^2 - \mathrm{i}(1-z)^2}{(1+z)^2 + \mathrm{i}(1-z)^2}$ és una transformació conforme del sector $\{z \,:\, 0 < \arg z < \pi\} \cap D_1(0)$ en $D_1(0)$.

9. Trobeu una transformació conforme de $\mathbb{C} \setminus \{z \,:\, \text{Im } z = 0,\ (\text{Re } z)^2 \geq \frac{1}{4}\}$ en $D_1(0)$.

10. Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert i $[a,b] \subset \Omega$ un segment. Si $f \in H(\Omega \setminus [a,b]) \cap C^0(\Omega)$, demostreu que $f \in H(\Omega)$.

11. Sigui $f \in H(\pi^+) \cap C^0(\bar{\pi}^+)$ amb $f(x) \in \mathbb{R}$ si $x \in \mathbb{R}$. Definim $g(z) = \begin{cases} f(z), & z \in \bar{\pi}^+ \\ \overline{f(\bar{z})}, & z \in \mathbb{C} \setminus \bar{\pi}^+ \end{cases}$.

Demostreu que $g \in H(\Omega)$.

12. Suposem que u i v són funcions harmòniques i reals en un domini $\Omega \subset \mathbb{C}$ (obert i connex).

(i) Sota quines condicions és $u \cdot v$ harmònica en Ω?

(ii) Proveu que u^2 no és harmònica en Ω a menys que u sigui constant.

(iii) Per a quines funcions holomorfes $f \in H(\Omega)$ es compleix que $|f^2|$ és harmònica?

13. Suposem que f és una funció complexa en un obert $\Omega \subset \mathbb{C}$ i que f i f^2 són harmòniques a Ω. Proveu que f ó $\bar{f}$ són holomorfes a Ω.

14. Sigui $f = u + \mathrm{i}v$ una funció analítica al disc $D_R(0)$ i contínua al disc tancat $\bar{D}_R(0)$. Proveu que $f(z) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} u(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\frac{R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + z}{R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - z}\, dt + \mathrm{i}v(0)$.

15. Proveu que si f és una funció analítica a tot $\mathbb{C}$ i $\displaystyle\lim_{z\to\infty} \frac{f(z)}{z} = 0$, aleshores f és constant. (Indicació: Utilitzeu l'exercici anterior.)