# Mètodes numèrics per a EDO

Considerem el problema de Cauchy o de valors inicials

$$(1)\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

on $x \in [a,b]$, $y(x) \in \mathbb{R}^m$, $y_0 \in \mathbb{R}^m$ i $f:[a,b]\times\mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ prou regular de manera que existeix una única solució.

Ens agradaria poder tenir la solució expressada en forma analítica, però en molts casos, de fet, en general, això no és possible.

Els mètodes numèrics no donaran la solució analítica, sinó els valors (aproximats) de la solució en una xarxa de valors $x_0, x_1, \dots, x_n \in [a,b]$.

Denotarem per $y(x_n)$ la solució en $x_n$, $y_n$ la solució obtinguda pel mètode numèric.

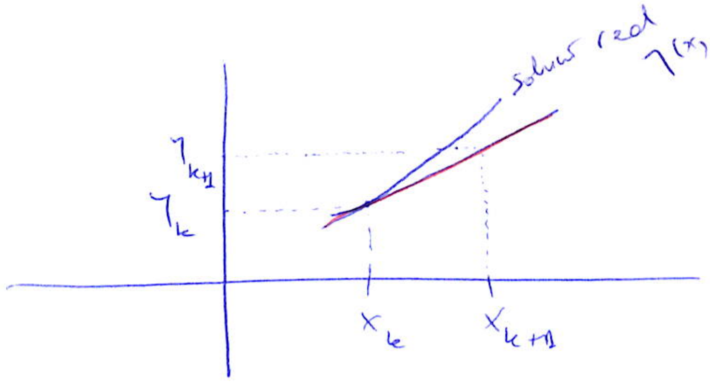
<u>Mètodes d'un pas</u>. Prenem, de moment, $m=1$

La idea és aproximar $y(x)$ en $[x_0, x_1]$ pel seu desenvolupament de Taylor de 1r ordre:

$$y(x) \simeq y(x_0) + y'(x_0)(x-x_0) = y_0 + f(x_0,y_0)(x-x_0), \quad x \in [x_0, x_1]$$

En $x = x_1$: $\quad y(x_1) \simeq y_0 + f(x_0,y_0)\underbrace{(x_1-x_0)}_{h} = y_0 + f(x_0,y_0)h = y_1$

Geomètricament, equival a considerar que en $[x_0,x_1]$ la tangent a $y(x)$ en $x_0$ és una "bona" aproximació de la corba solució




Suposant que $y_1$ és una bona aproximació de $y(x_1)$, considerem el problema de Cauchy

$$\begin{cases} y_1' = f(x, y_1) \\ y_1(x_1) = y_1 \end{cases}$$

i aproximem

$$y(x) \simeq y_1(x) \approx y_1 + y'(x_1)(x - x_1) = y_1 + f(x_1, y_1)(x - x_1), \text{ per a } x \in [x_1, x_2]$$

i en $x = x_2$

$$y(x_2) \simeq y_1(x_2) \approx y_1 + f(x_1, y_1)\overbrace{(x_2 - x_1)}^{h} \equiv y_2$$

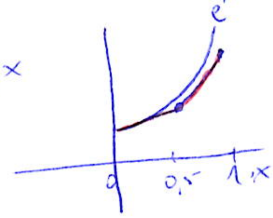
Etc. El mètode d'Euler ve donat per

$$\begin{cases} y_0 = y(x_0) \\ y_{n+1} = y_n + h f(x_n, y_n) \end{cases}, \quad n = 0 \div N-1$$

<u>Exemple</u>

$$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad x \in [0, 1]$$

de solució analítica $y(x) = e^x$




Mètode d'Euler: $y_0 = y(0) = 1$

$$y_{n+1} = y_n + h y_n = (1 + h) y_n, \quad n = 0 \div N-1, \quad h = \frac{1}{N}$$

Si prenem $h = 0{,}5$ obtenim

| | | |
|---|---|---|
| $x_0 = 0$ | $y_0 = 1$ | $y(x_0) = 1$ |
| $x_1 = 0{,}5$ | $y_1 = 1{,}5$ | $y(x_1) = 1{,}6487$ |
| $x_2 = 1$ | $y_2 = 2{,}25$ | $y(x_2) = 2{,}71828$ |

<u>Exercici</u>. Fer els càlculs amb $h = 0{,}125$.

| $h = 0.5$ | | |
|---|---|---|
| $x_n$ | $y_n$ | $y(x_n)$ |
| 0 | 1 | 1 |
| 0.5 | 1.50000 | 1.64872 |
| 1 | 2.25000 | 2.71828 |

| $h = 0.125$ | | |
|---|---|---|
| $x_n$ | $y_n$ | $y(x_n)$ |
| 0 | 1 | 1 |
| 0.125 | 1.12500 | 1.23148 |
| 0.250 | 1.26562 | 1.28402 |
| 0.375 | 1.42382 | 1.45499 |
| 0.500 | 1.60180 | 1.64872 |
| 0.625 | 1.80203 | 1.86824 |
| 0.750 | 2.02728 | 2.11700 |
| 0.875 | 2.28069 | 2.39887 |
| 1 | 2.56578 | 2.71828 |

Parlem ara de l'error

Considerem el problema de Cauchy (1) i apliquem-li un mètode d'integració d'un pas, és a dir, un mètode definit per un algorisme del tipus

$$\begin{cases} y_0 = y(a) \\ y_{n+1} = y_n + h\,\Phi(x_n, y_n, h), \quad n = 0 \div N-1 \end{cases}$$

on $\Phi$ és una funció contínua a $[a,b]\times\mathbb{R}\times[0,h_0]$ i Lipschitz en $y$ (uniformement en $x,h$) és a dir

$$|\Phi(x,y,h) - \Phi(x,\bar{y},h)| \leq L\,|y-\bar{y}| \qquad y,\bar{y}\in\mathbb{R}$$

$\forall x\in[a,b]$, $\forall h\in[0,h_0]$ i $L$ independent de $x, h, y$

Def Anomenem error en el punt $x_n$ al valor

$$\varepsilon_n = |y(x_n) - y_n|$$

Def Diem que un mètode d'integració té ordre global $p$, $p\in\mathbb{N}$, i escrivim $O(h^p)$ si i només si existeixen $h_0>0$ i $K>0$ tq per a tot pas d'integració $h\in[0,h_0]$ es compleix $\varepsilon_n \leq K h^p$, $n=0\div N$

Teorema

Si $|y(x+h) - y(x) - h\,\Phi(x, y(x), h)| \leq \hat{K} h^{p+1}$ per a certa $K>0$ $\forall x\in[a,b]$ i $h\in[0,h_0]$, per a cert $h_0$, (escrivim simplement $y(x+h) - y(x) - h\,\Phi(x, y(x), h) = O(h^{p+1})$), llavors el mètode d'integració té ordre global $p$. o també $\left|\frac{y(x+h)-y(x)}{h} - \Phi(x,y(x),h)\right| \leq \hat{K} h^p$ com $\varepsilon_n \leq K h^p$

Prova. Volem fitar l'error de truncament

Primer, però, observem que
Per hipòtesi sabem que existeixen $h_0>0$ i $k>0$ tq

$$\left| y(x+h) - y(x) - h\Phi(x, y(x), h) \right| \leq \hat{k} h^{p+1} \qquad (1)$$

per a $h \in [0, h_0]$ i que $\Phi$ s'lipschitz respecte de $y$ uniformement en $x$ i $h$ és a dir

$$\left| \Phi(x, y, h) - \Phi(x, \bar{y}, h) \right| \leq L |y - \bar{y}| \qquad (2) \qquad \forall y, \bar{y} \in \mathbb{R}$$

on $L$ és una constant independent de $x, h$. Llavors

$$\varepsilon_n = |y(x_n) - y_n|$$

$$\leq |y(x_n) - y(x_{n-1}) - h\Phi(x_{n-1}, y(x_{n-1}), h)| +$$

$$+ |y(x_{n-1}) + h\Phi(x_{n-1}, y(x_{n-1}), h) - y_n| \leq \qquad y_n = y_{n-1} + h\Phi(x_{n-1}, y_{n-1}, h)$$

$$\leq \underbrace{|y(x_{n-1}+h) - y(x_{n-1}) - h\Phi(x_{n-1}, y(x_{n-1}), h)|}_{} +$$

$$+ \underbrace{|y(x_{n-1}) - y_{n-1}|}_{} + h\left|\Phi(x_{n-1}, y(x_{n-1}), h) - \Phi(x_{n-1}, y_{n-1}, h)\right|$$

$$\underset{\substack{(1)\\(2)}}{\leq} \hat{k} h^{p+1} + \varepsilon_{n-1} + hL \underbrace{|y(x_{n-1}) - y_{n-1}|}_{\varepsilon_{n-1}} = \hat{k} h^{p+1} + (1+hL)\varepsilon_{n-1}$$

Per $h \in [0, h_0]$ i $n = 0 \div N$. Llavors

$$\varepsilon_n \leq \hat{k} h^{p+1} + (1+hL)\varepsilon_{n-1} \leq \hat{k} h^{p+1} + (1+hL)\left[\hat{k} h^{p+1} + (1+hL)\varepsilon_{n-2}\right]$$

$$= \hat{k} h^{p+1} + (1+hL)\hat{k} h^{p+1} + (1+hL)^2 \varepsilon_{n-2} \leq$$

$$\leq \hat{k} h^{p+1} + (1+hL)\hat{k} h^{p+1} + (1+hL)^2 \hat{k} h^{p+1} + \dots + (1+hL)^{n-1}\varepsilon_1 \leq$$

Exo 5

$$\underset{p}{\leq} \hat{k} h^{p+1} \left[ 1 + (1+hL) + \dots + (1+hL)^{n-1} \right] =$$

$$\varepsilon_1 \leq \hat{k} h^{p+1} + (1+hL) \underset{0}{\underbrace{\varepsilon_0}} \Leftarrow \text{prenem } y(x_0) = y_0$$

$$= \hat{k} h^{p+1} \frac{1 - (1+hL)^n}{-hL} = \frac{\hat{k} h^p}{L} \left( (1+hL)^n - 1 \right) \leq$$

$$\underset{\uparrow}{\leq} \frac{\hat{k}}{L} h^p \left( e^{(b-a)L} - 1 \right) = K h^p \quad \text{per a } h \in [0, h_0]$$

$$(1+hL)^n = (1+hL)^{\frac{b-a}{h}} \leq \Big( \underbrace{1 + hL + \frac{h^2 L^2}{2!} + \dots}_{e^{hL}} \Big)^{\frac{b-a}{h}} = e^{(b-a)L}$$

Teorema (Arnold) p. 221-222

Avem $\dot{x} = v(x,t)$ (1) $x \in U \subset \mathbb{R}^n$

$v$ $\mathcal{C}^r$ în vecinătatea de $(x_0, t_0)$

Atunci soluția de (1) cu c.i. $g(t, t_0) = x$ ~~depinde de~~ ~~diferențiabil~~ față de x. în vecinătatea de $(t_0, x_0)$

și dacă $v \in \mathcal{C}^r \Rightarrow g \in \mathcal{C}^{r-1}_{x,t}$

p. 223

Dacă $v \in \mathcal{C}^\infty \Rightarrow g \in \mathcal{C}^\infty$

Dacă $v$ analitică $\Rightarrow g$ și analitică. Cours de théorie analytique des éq. diff. V. Golubev

---

Vezi Hurewicz p. 95

Dacă $y' = f(x,y)$, $y(x_0) = y_0$

$f$ continuă și lipschitz față de $y$ în $|x - x_0| \leq a$ $|y - y_0| \leq$

p. 10 teorema: Dacă $f(x,y)$ și cont. lipsch. în $y$ într-un domeniu $D$, atunci

$\forall (x_0, y_0) \in D$ $\exists$ una ! soluție pe $|x - x_0| \leq h$

---

Vezi Cristescu p. 197

Ecuația $x' = f(t, x)$ cu

$I$ interval.

1. $f$ e continuă în $t, x$
2. $f$ e continuă și lipschitz față de $x$: $\exists L$

$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq L |x_1 - x_2|$, $\forall t \in I$, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

Atunci $\exists$ soluție $x = x(t)$ și $\in \mathcal{C}^1(I)$

NOTA.- Observem de $\varepsilon_n \leq k h^p$ que si $p \geq 1$, es té que quan $h \to 0$ llavors $\varepsilon_n \to 0$ $\forall n = 0 \div N$, $N = \frac{b-a}{h}$. En aquest cas direm que el mètode és convergent. Això ens indica que, llevat errors d'arrodoniment (i.e. molts més càlculs vol dir acumulació d'errors), com més petita sigui la $h$, millor serà l'aproximació i com més gran sigui la $p$, més ràpida serà la convergència.

Pel que fa a aquest teorema aplicat al mètode d'Euler tenim el següent resultat

Proposició

El mètode d'Euler té ordre 1.

Prova

$$\Phi(x, y(x), h) = f(x, y(x))$$

desenvolupant per Taylor, existeix $\eta(x) \in [a,b]$ tal que

$$\left| \frac{y(x+h) - y(x)}{h} - \Phi(x, y(x), h) \right| = \left| \frac{y(x+h) - y(x)}{h} - f(x, y(x)) \right| =$$

$$= \left| \cancel{y'(x)} + \frac{y''(\eta(x))}{2!} h - \cancel{y'(x)} \right| = \left| \frac{y''(\eta(x))}{2!} \right| h \leq k \cdot h.$$

suposant $y \in C^2[a,b]$

# Mètode de Taylor

Voldrem trobar mètodes d'ordre superior.

De forma anàloga al mètode d'Euler, els mètodes de Taylor es basen en aproximar la funció corresponent $y(x)$ en $[x_n, x_{n+1}]$, $n=0 \div N-1$, pel desenvolupament de Taylor fins a ordre $k$ de la solució del problema de valors inicials,

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), & x \in [x_n, x_{n+1}] \\ y(x_n) = y_n \end{cases}$$

al ~~voltant~~ de $x_n$. S'obté així un mètode d'integració d'ordre $k$. De fet, el mètode d'Euler no és més que el mètode de Taylor d'ordre 1.

Construïm ara el mètode de Taylor d'ordre 2:

prenem el

$$PVI \begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(\underset{x_0}{\overset{\shortparallel}{a}}) = y_0 \end{cases}$$

llavors coneixem $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$

Calculem $y''(x_0)$: primer

$$y''(x) = f_x(x,y) + f_y(x,y)y'(x) = f_x(x,y) + f_y(x,y)f(x,y) \quad (A)$$

llavors

$$y''(x_0) = f_x(x, y_0) + f_y(x_0, y_0) f(x_0, y_0)$$

Aproximem ara $y(x)$ per $[x_0, x_1]$ pel seu desenvolupament de Taylor fins ordre 2, al ~~voltant~~ de $x_0$:

$$y(x) \approx y(x_0) + y'(x_0)(x-x_0) + y''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2!} =$$

$$= y_0 + f(x_0, y_0)(x-x_0) + [f_x(x_0,y_0) + f_y(x_0,y_0)f(x_0,y_0)]\frac{(x-x_0)^2}{2}$$

Així en $x = x_1$:

$$y(x_1) \approx y_0 + h f(x_0,y_0) + \frac{h^2}{2}[f_x(x_0,y_0) + f_y(x_0,y_0)f(x_0,y_0)] = y_1.$$

El procés es segueix de forma recurrent i l'algorisme és:

$$\begin{cases} y(a) = y_0 \\ y_{n+1} = y_n + h f(x_n,y_n) + \frac{h^2}{2}[f_x(x_n,y_n) + f_y(x_n,y_n)f(x_n,y_n)], \; n = 0 \div N-1 \end{cases}$$

que geomètricament, equival a considerar aproximacions per paràboles. Es té

<u>Proposició</u>

El mètode de Taylor de 2n ordre just construït té ordre 2.

<u>Prova.-</u>

Aquest mètode és un mètode d'un pas amb

$$\Phi(x, y, h) = f(x,y) + \frac{h}{2}[f_x(x,y) + f_y(x,y)f(x,y)]$$

Llavors desenvolupant per Taylor al voltant de $x$, existeix $\eta(x) \in [a,b]$ tal que

$$\left|\frac{y(x+h)-y(x)}{h} - \Phi(x,y,h)\right| = \left|\frac{y(x+h)-y(x)}{h} - f(x,y) - \frac{h}{2}[f_x(x,y) + f_y(x,y)f(x,y)]\right|$$

$$= \left|y'(x) + y''(x)\frac{h}{2} + y'''(\eta(x))\frac{h^2}{6} - f(x,y) - \frac{h}{2}[f_x(x,y) + f_y(x,y)f(x,y)]\right| =$$

$$(\bar{A})\; \left|y'''(\eta(x))\frac{h^2}{6}\right| \leq K \cdot h^2 \quad \text{suposant } y \in \mathcal{C}^3([a,b])$$

EDO-9

*Exemple.* Considerem el problema de valors inicials

$$\begin{cases} y'(x) = y(x) \\ y(0) = 1 \end{cases}, \quad x \in [0,1].$$

Sabem que la solució exacta d'aquest problema és $y(x) = e^x$. Anem però a integrar l'equació en $[0,1]$ pel mètode de Taylor de segon ordre global . Aquí $f(x,y) = y$, $f_x(x,y) = 0$, $f_y(x,y) = 1$, $y_0 = 1$, $a = 0$ i $b = 1$, per tant, l'algorisme esdevé

$$\begin{cases} y_0 = y(0) = 1 \\ y_{n+1} = y_n + hy_n + \dfrac{h^2}{2}[y_n] = y_n\left(1 + h + \dfrac{h^2}{2}\right) \quad n = 0 \div N-1\,, \end{cases}$$

d'on per a $h = 0.5$ i per a $h = 0.125$ s'obtenen les taules de valors següents:

| $h = 0.5$ | | |
|---|---|---|
| $x_n$ | $y_n$ | $y(x_n)$ |
| 0 | 1 | 1 |
| 0.5 | 1.62500 | 1.64872 |
| 1 | 2.64062 | 2.71828 |

| $h = 0.125$ | | |
|---|---|---|
| $x_n$ | $y_n$ | $y(x_n)$ |
| 0 | 1 | 1 |
| 0.125 | 1.13281 | 1.23148 |
| 0.250 | 1.28326 | 1.28402 |
| 0.375 | 1.45369 | 1.45499 |
| 0.500 | 1.64676 | 1.64872 |
| 0.625 | 1.86547 | 1.86824 |
| 0.750 | 2.11323 | 2.11700 |
| 0.875 | 2.39390 | 2.39887 |
| 1 | 2.71184 | 2.71828 |