Grau en Matemàtiques, FME

Programació Matemàtica

Tema 2 : Programació Lineal

Teoria de dualitat

Jordi Castro, F.-Javier Heredia, Josep Homs

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH

Departament d'Estadística
i Investigació Operativa

Tema 3: Teoria de dualitat

1. *Introducció i propietats geomètriques.*

2. *L'algorisme del símplex primal.*

3. **Teoria de dualitat.**

   – Definició i formulació del problema dual [1].

   – Teoremes de dualitat [1].

   – Algorisme del símplex dual.

   – Aplicacions (fora temari):

     ❖ Teoria de jocs: jocs finits de suma zero.

     ❖ Teoria de grafs: problemes de flux màxim-tall mínim.

(1) Bibliografia: Cap. 2 - 5 "*Introduction to Linear Optimization*", D. Bertsimas, N. Tsitsiklis

Definició problema dual (D) (1/3)

- Els problema dual (D) està relacionat amb la idea de problema Lagrangià estudiat a extrems condicionats.

Definició Relaxació Lagrangiana:

Sigui el problema de programació matemàtica

$$(P) \quad \min_{x\in\mathbb{R}^n}\{f(x)|h(x)=0, x\in\Omega\subset\mathbb{R}^n\}$$

*La relaxació Lagrangiana de (P) associada al vector $\lambda\in\mathbb{R}^m$ (**multiplicadors de Lagrange**) és el problema:*

$$(L) \quad \min_{x\in\mathbb{R}^n}\{\mathcal{L}(x,\lambda)=f(x)+\lambda' h(x)|x\in\Omega\}$$

Definició $\boldsymbol{x(\lambda)}$: *solució òptima del problema (L) associat a λ.*

Proposició 10: Relaxació Lagrangiana

i. *Tota solució factible (P) és factible (L).*

ii. *Per a tot $\lambda\in\mathbb{R}^n$ es satisfà:* $\mathcal{L}(x(\lambda),\lambda)\leq f(x^*)+\lambda'\underbrace{h(x^*)}_{=0}=f(x^*)$

Definició problema dual (D) (2/3)

- **Problema dual**: hem vist que per a tot valor de λ la relaxació Lagrangiana (L) proporciona una fita inferior del valor òptim de la funció objectiu de (P). El problema dual busca el **valor dels multiplicadors de Lagrange λ que maximitza aquesta la fita inferior** (millor fita inferior).

Definició funció dual $\phi(\boldsymbol{\lambda})$: $\quad \phi(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{L}(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{\lambda}), \lambda)$.

Definició problema dual $(\boldsymbol{D})$: $\quad (D)\ \max_{\lambda \in \mathbb{R}^m} \phi(\lambda)$.

- **Dual d'un problema PL en forma estàndard** :
  - Considerem ara un problema de PL en forma estàndard:

$$(P)_e \quad \min_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ z_P = c'x \,\middle|\, \overbrace{b - Ax = 0}^{h(x)=0}, \overbrace{x \geq 0}^{x \in \Omega} \right\}.$$

$$(D) \quad \max_{\lambda \in \mathbb{R}^m} z_D = \phi(\lambda) \quad = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \{\mathcal{L}(x, \lambda) = c'x + \lambda'(b - Ax) | x \geq 0\} =$$

$$= \min_{x \in \mathbb{R}^n} \{\mathcal{L}(x, \lambda) = (c' - \lambda' A)x | x \geq 0\} + \lambda' b$$

Definició problema dual (D) (3/3)

– Sabem que:

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n}\{\mathcal{L}(x,\lambda)=(c'-\lambda'A)x|x\geq 0\}=\begin{cases}0 & \text{si } c'-\lambda'A\geq 0\\ -\infty & \text{altrament}\end{cases}$$

i l'expressió de la funció dual $z_D=\phi(\lambda)$ és doncs:

$$z_D=\phi(\lambda)=\begin{cases}\lambda' b & \text{si } \boldsymbol{c'-\lambda' A\geq 0} \quad (1)\\ -\infty & \text{altrament}\end{cases}.$$

– Com que volem maximitzar $z_D=\phi(\lambda)$ podem descartar els valors de λ pels quals $z_D=\phi(\lambda)=-\infty$ imposant la condició (1) en la definició de (D):

$$(P)_e\begin{cases}\min\limits_{x\in\mathbb{R}^n} & z_P=c'x\\ \text{s.a.:} & Ax=b\\ & x\geq 0\end{cases}\rightarrow\boxed{(D)\begin{cases}\max\limits_{\lambda\in\mathbb{R}^m} & z_D=\lambda' b\\ \text{s.a.:} & \boldsymbol{\lambda' A\leq c'}\end{cases}}.$$

– Així doncs, podem assegurar $z_D^*=b'\lambda^*\leq z_P^*=c'x^*$ (veurem aquesta relació com a *Ta feble de dualitat*).

Formulació problemes duals (D) (1/2)

- De forma anàloga a com s'ha obtingut el problema dual de $(P)_e$, es pot definir el problema dual d'un problema $(P)\min\{c'x|x \in P\}$ qualsevol a través de la següent taula de transformacions:

Problema primal (P)				**Problema dual (D)**
Funció objectiu	$\min c'x$	$\leftrightarrow$	$\max \lambda' b$	**Funció objectiu**
Constriccions primals $j = 1, 2, \dots, m$	$a_j' x \geq b_j$	$\leftrightarrow$	$\lambda_j \geq 0$	**Variables Duals $j = 1, 2, \dots, m$**
	$a_j' x \leq b_j$	$\leftrightarrow$	$\lambda_j \leq 0$	
	$a_j' x = b_j$	$\leftrightarrow$	λ_j lliure	
Variables primals $i = 1, 2, \dots, n$	$x_i \geq 0$	$\leftrightarrow$	$\lambda' A_i \leq c_i$	**Constriccions duals $i = 1, 2, \dots, n$**
	$x_i \leq 0$	$\leftrightarrow$	$\lambda' A_i \geq c_i$	
	x_i lliure	$\leftrightarrow$	$\lambda' A = c_i$	

- Usarem aquesta taula per a formular el problema dual de qualsevol problema PL.

Definició del problema dual (D) (2/3)

- Exemple formulació problema dual:

$$
(P)\left\{\begin{array}{lrrrcl}
\min z_P = & 1x_1 & +2x_2 & +3x_3 & & \\
\text{s.a.:} & & & & & \\
 & -1x_1 & +3x_2 & & = 5 & (1)\\
 & +2x_1 & -1x_2 & +3x_3 & \geq 6 & (2)\\
 & & & +1x_3 & \leq 4 & (3)\\
 & x_1 & & & \geq 0 & \\
 & & x_2 & & \leq 0 & \\
 & & & x_3 & \lesseqgtr 0 &
\end{array}\right.
\rightarrow
(D)\left\{\begin{array}{lrrrc}
\max z_D = & \overbrace{5\lambda_1}^{(1)} & \overbrace{+6\lambda_2}^{(2)} & \overbrace{+4\lambda_3}^{(3)} & \\
\text{s.a.:} & & & & \\
x_1 \rightarrow & -1\lambda_1 & +2\lambda_2 & & \leq 1\\
x_2 \rightarrow & +3\lambda_1 & -1\lambda_2 & & \geq 2\\
x_3 \rightarrow & & +3\lambda_2 & +1\lambda_3 & = 3\\
(1) \Rightarrow & \lambda_1 & & & \lesseqgtr 0\\
(2) \Rightarrow & & \lambda_2 & & \geq 0\\
(3) \Rightarrow & & & \lambda_3 & \leq 0
\end{array}\right.
$$

Proposició 11: Simetria dual: *El dual del dual és el primal.*

$$
(D) \equiv (\tilde{P})\left\{\begin{array}{lrrrc}
\min z_{\tilde{P}} = & -5\lambda_1 & -6\lambda_2 & -4\lambda_3 & \\
\text{s.a.:} & & & & \\
 & -1\lambda_1 & +2\lambda_2 & & \leq 1\\
 & +3\lambda_1 & -1\lambda_2 & & \geq 2\\
 & & +3\lambda_2 & +1\lambda_3 & = 3\\
 & \lambda_1 & & & \lesseqgtr 0\\
 & & \lambda_2 & & \geq 0\\
 & & & \lambda_3 & \leq 0
\end{array}\right.
\rightarrow
(\tilde{D})\left\{\begin{array}{lrrrc}
\max z_{\tilde{D}} = & 1\tilde{x}_1 & +2\tilde{x}_2 & +3\tilde{x}_3 & \\
\text{s.a.:} & & & & \\
 & -1\tilde{x}_1 & +3\tilde{x}_2 & & = -5\\
 & +2\tilde{x}_1 & -1\tilde{x}_2 & +3\tilde{x}_3 & \leq -6\\
 & & & +1\tilde{x}_3 & \geq -4\\
 & \tilde{x}_1 & & & \leq 0\\
 & & \tilde{x}_2 & & \geq 0\\
 & & & \tilde{x}_3 & \lesseqgtr 0
\end{array}\right\}
\overset{\tilde{x}=-x}{\triangleq} (P)
$$

Teoremes de dualitat

3. Teoria de dualitat.

- *Definició i formulació del problema dual* [1].
- Teoremes de dualitat [1].
  - Ta. equivalència duals de la forma estàndard.
  - Ta. feble de dualitat.
  - Ta. fort de dualitat.
  - Ta. de folga complementària
- Algorisme del símplex dual.
- Aplicacions.

(1) Bibliografia: Cap. 2 - 5 “*Introduction to Linear Optimization*”, D. Bertsimas, N. Tsitsiklis

Relacions $(P) - (D)$: teoremes de dualitat.

- **Teoremes de dualitat:** Estudien les relacions entre les propietats dels problemes (P) i (D).
- En ocasions usarem el fet que **el dual (D) d'un problema (P) qualsevol i el dual $(D)_e$ de la seva forma estàndard $(P)_e$ son equivalents**:

Teorema 8 (Ta. 4.2 B&T) : Equivalència duals forma estàndard.

Suposem que hem transformat un problema (P) a la seva forma estàndard $(P)_e$ de rang complet. Llavors els problemes duals de (P) i $(P)_e$ són equivalents en el sentit que o bé són tots dos infactibles o bé tenen el mateix cost òptim.

Demo: exercici 55.

Exemple: $(P)\ \min\{x_1 + 2x_2 | 3x_1 + 4x_2 \leq 5, x \geq 0\}$

Teorema feble de dualitat

Teorema 9 (Ta. 4.3 B&T): Ta. feble de dualitat.

Sigui x solució factible del problema (P), i sigui λ solució factible del problema dual (D) associat. Llavors es satisfà que

$$\lambda' b \leq c' x.$$

Demo: pissarra

Corol·lari 9.1:

i. *Si (P) és il·limitat llavors (D) infactible.* (**Demo:** $\nexists \lambda \in \mathbb{R}^m$: $\lambda' b \leq -\infty$)

ii. *Si (D) és il·limitat llavors (P) infactible.* (**Demo:** $\nexists x \in \mathbb{R}^n$: $c' x \geq +\infty$)

iii. *Siguin x i λ factibles (P) i (D) resp. tals que $\lambda' b = c' x$. Llavors x i λ òptimes.* (**Demo**: *trivial*)

- **Exemples**: $\begin{cases} (P) \min\{x_1 + 2x_2 \mid 3x_1 + 4x_2 \leq 5, x \geq 0\} \\ (P) \min\{x_1 + x_2 \mid x_1 + x_2 \geq 1, x \geq 0\} \end{cases}$.

Teorema fort de dualitat

Teorema 10: Ta. fort de dualitat (V*on Neumann 1947, Ta. Minimax*).

Si un problema de programació lineal (P) té solució òptima, el seu dual (D) també en té, i els valors respectius de la funció objectiu coincideixen.

Demo: pissarra

Exemple: $(P)\ \min\{x_1 + x_2 | x_1 + x_2 \geq 1, x \geq 0\}$.

Corol·lari 10.1:

i. *Si $(P)_e$ de rang complet té solució llavors la solució de (D) és $\lambda^{*\prime} = c_B' B^{-1}$.*

ii. *x i λ factibles (P) i (D) resp. són òptimes sii. $\lambda' b = c' x$.* (**Demo:** *C9.iii+Ta10*)

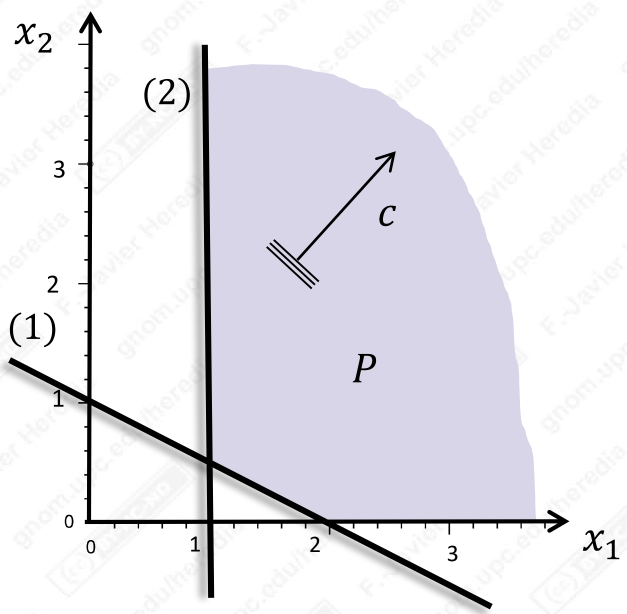
- **Possibles combinación $(\boldsymbol{P}) - (\boldsymbol{D})$:** els Ta. de dualitat fixen la següent relació de possibles casos:

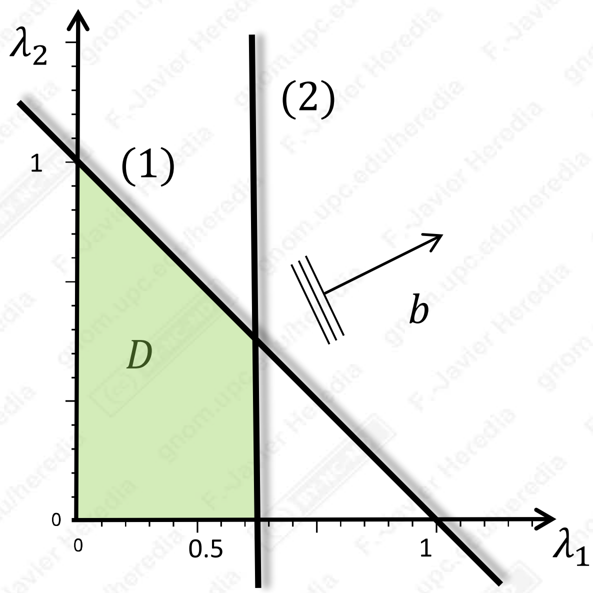
		(D)		
		Òptim	**Il·limitat**	**Infactible**
(P)	**Òptim**	Possible	Impossible	Impossible
	Il·limitat	Impossible	Impossible	Possible
	Infactible	Impossible	Possible	Possible

Teorema fort de dualitat, exemple (1/2)

- **Exemple:** (P) i (D) amb solució òptima

$$
(P)\begin{cases}
\min z_P = & x_1 & +x_2 & & \\
\text{s.a.:} & x_1 & +2x_2 & \geq 2 & (1) \\
 & x_1 & & \geq 1 & (2) \\
 & x_1, & x_2 & \geq 0 &
\end{cases}
\qquad
(D)\begin{cases}
\max z_D = & 2\lambda_1 & +\lambda_2 & & \\
\text{s.a.:} & \lambda_1 & +\lambda_2 & \leq 1 & (1) \\
 & 2\lambda_1 & & \leq 1 & (2) \\
 & \lambda_1, & \lambda_2 & \geq 0 &
\end{cases}
$$



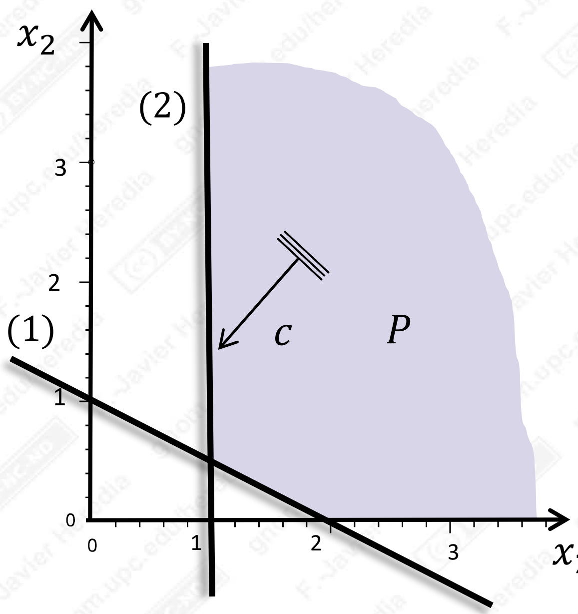


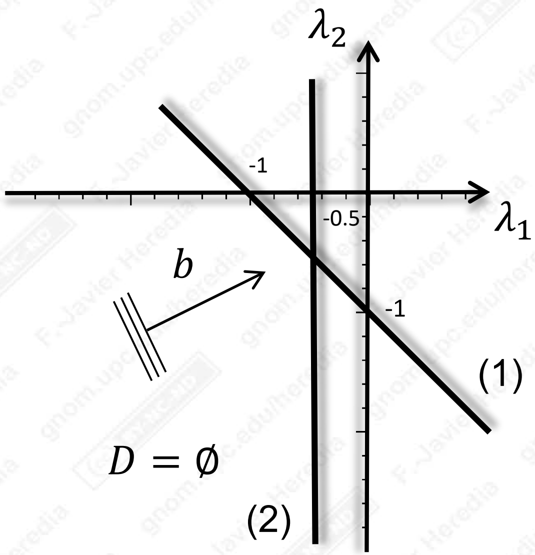
Teorema fort de dualitat, exemple (2/2)

- **Exemple:** (P) il·limitat i (D) infactible

$$(P)\begin{cases} \min z_P = & -x_1 & -x_2 & & \\ \text{s.a.:} & x_1 & +2x_2 & \geq 2 & (1) \\ & x_1 & & \geq 1 & (2) \\ & x_1, & x_2 & \geq 0 & \end{cases}$$

$$(D)\begin{cases} \max z_D = & 2\lambda_1 & +\lambda_2 & & \\ \text{s.a.:} & \lambda_1 & +\lambda_2 & \leq -1 & (1) \\ & 2\lambda_1 & & \leq -1 & (2) \\ & \lambda_1, & \lambda_2 & \geq 0 & \end{cases}$$





- **Exercici:** penseu i representeu gràficament les dues situacions que queden: (D) il·limitat - (P) infactible i (P) infactible - (D) infactible

Ta. de folga complementària

Teorema 11: Ta. de folga complementària (TFC).

Siguin x i λ ***solucions factibles de $(\boldsymbol{P})$ i $(\boldsymbol{D})$*** *respectivament.*

Els vectors x i λ són solucions òptimes si i només si satisfan les condicions de folga complementària (CFC):

$$(CFC)\begin{cases}\lambda_j\left(a_j'x-b_j\right)=0 & j=1,2,\dots,m\\ (c_i-\lambda' A_i)x_i=0 & i=1,2,\dots,n\end{cases}$$

Demo: pissarra

Exemple : Calculem x^* i λ^* per al problema

$$(P)\min\left\{x_1\,\middle|\,\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}x\geq\begin{bmatrix}1\\ 1/2\end{bmatrix}, x\geq 0\right\}.$$

Comproveu

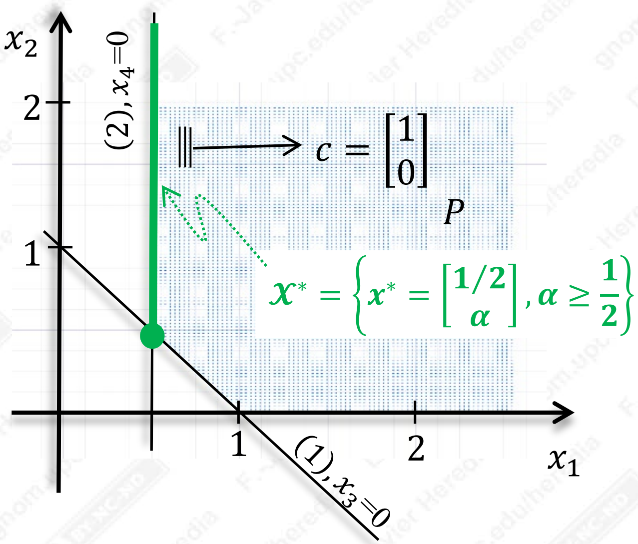
a) x^* i λ^*satisfan el TFC.

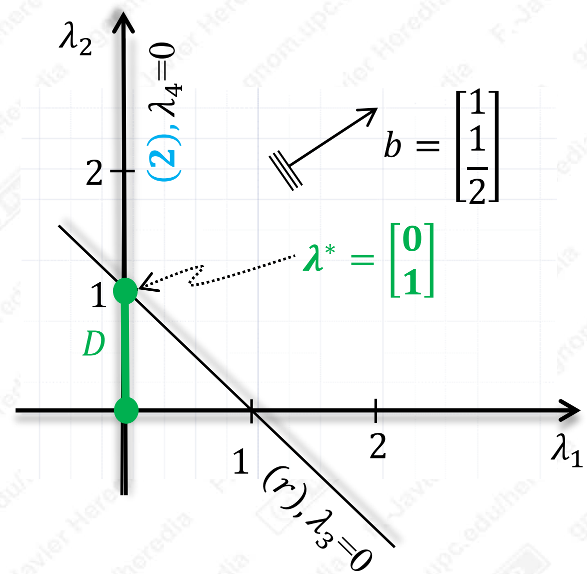
b) **Hi ha solucions $\boldsymbol{x}$ i $\boldsymbol{\lambda}$ de les $(\boldsymbol{CFC})$ que no són solucions òptimes!!!**

TFC: Exemple (1/2)

$$(P)\begin{cases} \min & x_1 \\ \text{s.a.:} & \\ (1) & x_1 + x_2 \geq 1 \\ (2) & x_1 \geq \frac{1}{2} \\ & x_1,\ x_2,\ \geq 0 \end{cases}$$

$$(D)\begin{cases} \max & \lambda_1 + \frac{1}{2}\lambda_2 \\ \text{s.a.:} & \\ (1) & \lambda_1 + \lambda_2 \leq 1 \\ (2) & \lambda_1 \leq 0 \\ & \lambda_1,\ \lambda_2,\ \geq 0 \end{cases}$$



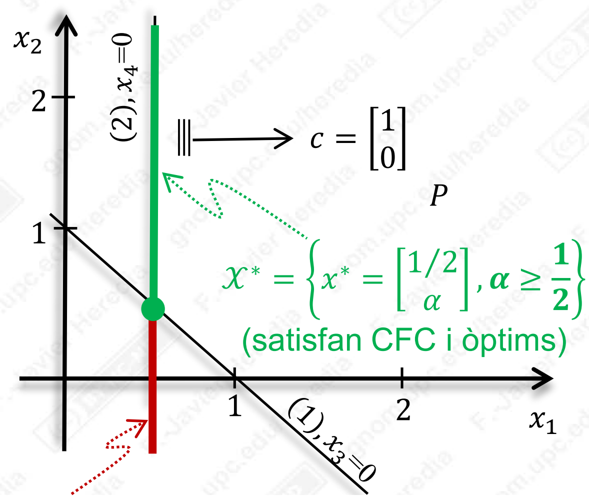


TFC: Exemple (2/2)

- Comprovem que $x^* \in \mathcal{X}^* = \left\{x^* = \begin{bmatrix} 1/2 \\ \alpha \end{bmatrix}, \alpha \geq \frac{1}{2}\right\}$ i $\lambda^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ són òptimes. Com que són factibles (P) i (D) serán òptimes sii:

$$(CFC)\begin{cases} \lambda_1(x_1+x_2-1) & =0 \quad (1) \\ \lambda_2\left(x_1-\frac{1}{2}\right) & =0 \quad (2) \\ (1-\lambda_1-\lambda_2)x_1 & =0 \quad (3) \\ (-\lambda_1)x_2 & =0 \quad (4) \end{cases} \xrightarrow{x^*\in\mathcal{X}^*,\lambda^*} \begin{cases} 0\cdot\left(\frac{1}{2}+\alpha-1\right) & =0 \quad (1) \\ 1\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right) & =0 \quad (2) \\ (1-0-1)\cdot\frac{1}{2} & =0 \quad (3) \\ 0\cdot\alpha & =0 \quad (4) \end{cases}$$

- Podem veure que, efectivament:
  a) $x^* \in \mathcal{X}^*$ i λ^* son factibles i satisfan les CFC $\Rightarrow$ satisfan el TFC $\Rightarrow$ són òptimes.
  b) **Les CFC es satisfan per a tot $\alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow$ els vectors $x^* \in \mathcal{C} = \left\{x^* = \begin{bmatrix} 1/2 \\ \alpha \end{bmatrix}, \alpha < \frac{1}{2}\right\}$ satisfan, amb $\lambda^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, les CFC però no són òptims (són infactibles).**



$\mathcal{C} = \left\{x^* = \begin{bmatrix} 1/2 \\ \alpha \end{bmatrix}, \alpha < \frac{1}{2}\right\}$ **(satisfan CFC i no òptims)**

Algorisme del símplex dual.

3. Teoria de dualitat.

- *Definició i formulació del problema dual* [1].
- *Teoremes de dualitat* [1].
- Algorisme del símplex dual.
  - Solucions bàsiques factibles duals del poliedre primal.
  - Solucions bàsiques factibles primals del políedre dual.
  - Costos reduïts i DBF duals.
  - Algorisme del símplex dual (ASD).
  - Convergència de l'ASD.
- Aplicacions.

(1) ***Bibliografia:*** *Cap. 2 - 5 "Introduction to Linear Optimization", D. Bertsimas, N. Tsitsiklis*

Solucions bàsiques factibles duals

Def. Solució bàsica primal factible dual $(\boldsymbol{SB_P F_D})$:

Sigui el problema de programació lineal $(P)_e$ *en forma estàndard.*

Una ***solució bàsica primal factible dual*** $(\boldsymbol{SB_P F_D})$ *és una SB de* $(P)_e$ *tal que* $\boldsymbol{r_N \geq 0}$.

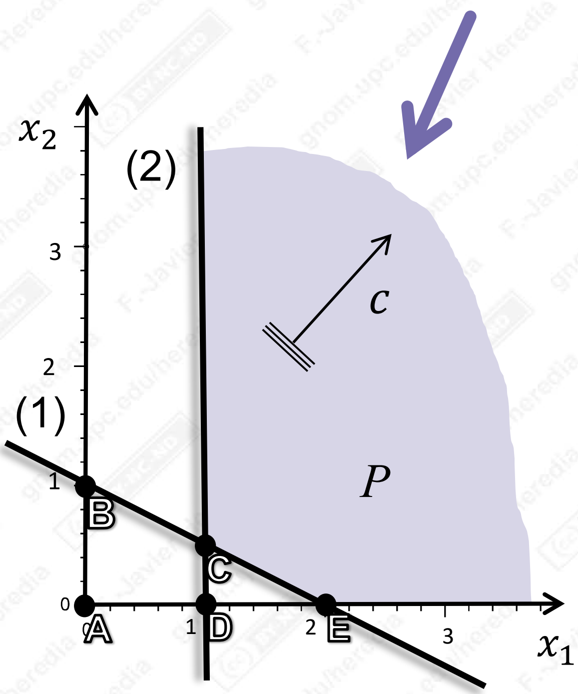
- Si $r_N \geq 0$ llavors pel Tª fort de dualitat sabem que $\boldsymbol{\lambda' = c'_B B^{-1}}$ **és una solució factible pel problema dual** $(\boldsymbol{D})$.
- Una solució bàsica factible dual **pot no ser factible primal**.
- Una solució bàsica **factible dual i factible primal** és **òptima**:
  - **Factibilitat primal**: $x_B = B^{-1} b \geq 0$
  - **Factibilitat dual**: $r'_N = c'_N - \lambda' A_N \geq 0$
- La factibilitat primal i dual de la SB $\mathcal{B}$ són propietats independents:

Solució Bàsica:	Factible $(\boldsymbol{D})$	Infactible $(\boldsymbol{D})$
Factible $(\boldsymbol{P})$	$x_B \geq 0 \quad r_N \geq 0$	$x_B \geq 0 \quad r_N \ngeq 0$
Infactible $(\boldsymbol{P})$	$x_B \ngeq 0 \quad r_N \geq 0$	$x_B \ngeq 0 \quad r_N \ngeq 0$

$(SB_P F_D)$: exemple

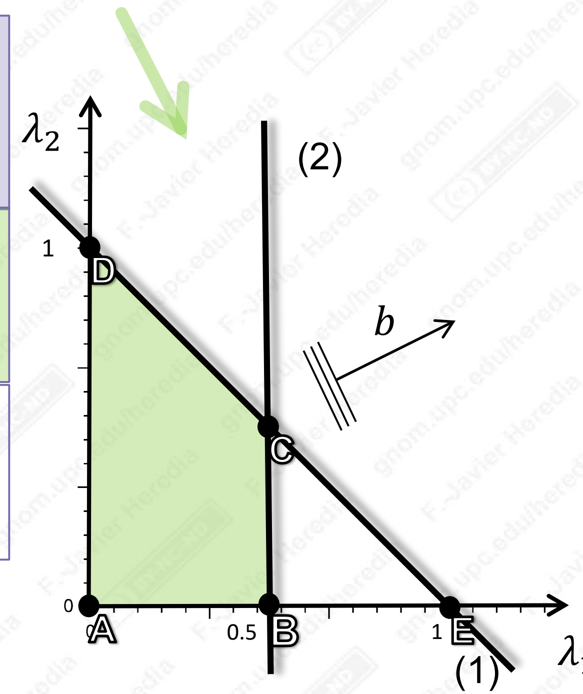
- Estudiem les factibilitats primals i duals de les SB de:

$$(P)\begin{cases} \min z_P = & x_1 & +x_2 & & \\ \text{s.a.:} & x_1 & +2x_2 & \geq 2 & (1) \\ & x_1 & & \geq 1 & (2) \\ & x_1, & x_2 & \geq 0 & \end{cases} \qquad (D)\begin{cases} \max z_D = & 2\lambda_1 & +\lambda_2 & & \\ \text{s.a.:} & \lambda_1 & +\lambda_2 & \leq 1 & (1) \\ & 2\lambda_1 & & \leq 1 & (2) \\ & \lambda_1, & \lambda_2 & \geq 0 & \end{cases}$$



Solucións bàsiques **factibles primal**: C , E
Solucións bàsiques **factibles dual**: A , B , C , D
C solució bàsica **factible primal i dual** $\Rightarrow$ **òptima**

Pregunta: poden existir bases infactibles (P) i (D)?



(SB_PF_D) i algorisme del símplex dual

- L'algorisme del símplex dual és un algorisme que permet resoldre problemes de PL en forma estàndard **a partir de solucions bàsiques factibles dual** basant-se en la següent estratègia:
  a) Es determina si la (SB_PF_D) actual és factible $(P) \Rightarrow$ òptima.
  b) Si la $(\boldsymbol{SB_PF_D})$ **actual no és factible** $(\boldsymbol{P})$ **(→** $(\boldsymbol{SB_PI_PF_D})$**)**, es troba, si existeix, una (SB_PF_D) adjacent a l'actual que millori el valor de la f.o. dual, i es pren aquesta com a nova solució bàsica actual.
- **Interès del símplex dual**:
  - Situacions on es disposa d'una $(SB_PI_PF_D)$:
    - Anàlisi de sensibilitat: canvis en A i/o b.
    - Algorismes de **Programació Lineal Entera** (*Branch&Bound, Cutting Planes, Branch&Cut*).

SB duals: (D) en forma estàndard

- **Idea**: aplicarem el mateix desenvolupament del símplex primal a la forma estàndard **modificada** del problema (D)

$$(P)_e \begin{cases} \min z_P = & c'x \\ s.a. & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{cases} \rightarrow (D) \begin{cases} \max z_D = & \lambda' b \\ s.a. & A'\lambda \leq c \end{cases}$$

$$\rightarrow (D) \begin{cases} \min \; -z_D = & -\lambda' b \\ s.a. & A'\lambda + I_n r = c \\ & r \geq 0 \\ & \boldsymbol{\lambda} \textbf{ lliure} \end{cases}$$

$$\rightarrow (D)_e \begin{cases} \min -z_D = & -b'\lambda \\ s.a. & \begin{bmatrix} A' & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ r \end{bmatrix} = c \\ & r \geq 0 \end{cases}$$

SBF de D_e: definició del políedre estàndard D_e

- Considerem ara $(P)_e$ i la seva base $\mathcal{B}(SB_PF_D)$ (no necessàriament factible primal).
- $\mathcal{B}\ (SB_PF_D) \Rightarrow r_N' = c_N' - c_B'B^{-1}A_N \geq 0$

Def.: partició de les constriccions duals induïda per la base primal $\mathcal{B}$:

$$[A' \quad I_n]\begin{bmatrix}\lambda \\ r\end{bmatrix} = \begin{array}{c}\mathcal{B} \rightarrow \\ \mathcal{N} \rightarrow\end{array}\begin{bmatrix}B' & 0 & I_m \\ A_N' & I_{n-m} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda \\ r_N \\ r_B\end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix}B' & 0 \\ A_N{}' & I_{n-m}\end{bmatrix}}^{B_D}\overbrace{\begin{bmatrix}\lambda \\ r_N\end{bmatrix}}^{y_B} + \begin{bmatrix}I_m \\ 0\end{bmatrix}\overbrace{r_B}^{y_N} = \begin{bmatrix}c_B \\ c_N\end{bmatrix} \qquad (1)$$

Def.: solució dual y associada a una (SB_PF_D) de $(P)_e$:

Solució de (1) amb $r_B = [0]$: $y_B = \begin{bmatrix}\lambda \\ r_N\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad , \ y_N = r_B = [0] \in \mathbb{R}^m$

- Veurem que $y' = [y_B' \quad y_N']$ és una SBF del políedre dual en forma estàndard:

$$D_e = \left\{ y = \begin{bmatrix}\lambda \\ r\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+m} \mid [A' \quad I_n]\begin{bmatrix}\lambda \\ r\end{bmatrix} = c\ , r \geq 0 \right\}$$

Com que D_e està en **forma estàndard modificada**, necessitem una **definició alternativa de SBF**.

SBF de D_e (SB_DF_P): definició

Definició alternativa de solució bàsica factible primal (def. 2.9 B&T):

El vector $x \in P \subset \mathbb{R}^n$ és una solució bàsica factible primal del políedre $P \Leftrightarrow$ hi ha almenys n constriccions actives linealment independents sobre x.

Una SBF serà degenerada si hi ha més de n constriccions actives sobre x.

Comentari: és fàcil demostrar que si $P \equiv P_e$ aquesta definició coincideix amb la vista al tema 1 (**exercici**).

Proposició 12: Solució bàsica factible primal del políedre dual $(\boldsymbol{SB_DF_P})$.

La solució dual y associada a una (SB_PF_D) és una solució bàsica dual factible primal, (SB_DF_P), amb matriu bàsica

$$B_D = \begin{bmatrix} B' & 0 \\ A_N{}' & I_{n-m} \end{bmatrix}.$$

Demo: pissarra

Símplex dual: costos reduïts duals

- Es tracta ara de reproduir la passa del símplex primal aplicada a la resolució del problema dual **amb $\boldsymbol{D_e}$ no degenerat** a partir de la (SB_DF_P) $(D)_e$ $y' = [\lambda' \quad r_N' \quad 0]$:
- **Costos reduïts duals:**
  - $y_B' = [\lambda' \quad r_N']\,, b_B' = [-b' \quad 0]\,, B_D^{-1} = \begin{bmatrix} B^{-T} & 0 \\ -A_N' B^{-T} & I_{n-m} \end{bmatrix}, B^{-T} = [B^{-1}]^T$
  - $y_N = r_B\,,\;\; b_N' = [0]$
  - Costos reduïts duals:

$$\boldsymbol{r_D'} = b_N' - b_B' B_D^{-1} \begin{bmatrix} I_m \\ 0 \end{bmatrix} = [0] - [-b' \quad 0] \begin{bmatrix} B^{-T} & 0 \\ -A_N' B^{-T} & I_{n-m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_m \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= [b' B^{-T} \quad 0] \begin{bmatrix} I_m \\ 0 \end{bmatrix} = b' B^{-T} = \boldsymbol{x_B'}$$

  - **Condició d'optimalitat de $(D)_e$ (opt. dual) :** $\boxed{x_B \geq 0}$ **(≡ fac. primal)**

Símplex dual: DBF duals.

- **DBF de $(\boldsymbol{D})_{\boldsymbol{e}}$ $(\boldsymbol{DBF_D})$, d_{B_D}:**
  - Sigui $r_{B(p)}$ VNB dual entrant amb $\boxed{x_{B(p)} < 0}$
  - $d_{B_D} = \begin{bmatrix} d^\lambda \\ d_N^r \end{bmatrix} = -B_D^{-1} \begin{bmatrix} e_p \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -B^{-T} & 0 \\ A_N' B^{-T} & -I_{n-m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_p \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -B^{-T} e_p \\ A_N' B^{-T} e_p \end{bmatrix}$
  - Si indiquem per β_p la fila $p-$èssima de B^{-1}, $\beta_p = e_p' B^{-1}$:

$$d_{B_D} = \begin{bmatrix} d^\lambda \\ d_N^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -B^{-T} e_p \\ A_N' B^{-T} e_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\beta_p' \\ A_N' \beta_p' \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{d^\lambda = -\beta_p'} \\ \boxed{d_N^r = (\beta_p A_N)'} \end{cases}$$

  - d_{B_D} **és direcció de descens**: $[-b' \quad 0] d_{B_D} = x_{B(p)} < 0$
- **Longitud de pas dual θ_D^*:** passa màxima que conserva la factibilitat dual
  - $\begin{bmatrix} \lambda \\ r_N \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \lambda \\ r_N \end{bmatrix} + \theta_D^* \begin{bmatrix} d^\lambda \\ d_N^r \end{bmatrix} \begin{matrix} \lesseqgtr 0 \\ \geq 0 \end{matrix} \Bigg\} \Rightarrow \boxed{\theta_D^* = \min_{\{j=1,\dots,n-m \mid d_{N_j}^r < 0\}} \left\{ \frac{-r_{N_j}}{d_{N_j}^r} \right\}}$
- **Problema $(\boldsymbol{D})_{\boldsymbol{e}}$ il·limitat:** $d_{r_N} \geq 0 \Rightarrow (D)_e$ il·limitat

Algorisme del símplex dual

1. Sigui $(\boldsymbol{P})_{\boldsymbol{e}}$ i la $(\boldsymbol{SB_PF_D})$ $\mathcal{B}$ definida per: $B, x_B\ , r_N, c_B\ , c_N\ , A_N, z.$

2. Identificació de SB òptima i selecció de la variable bàsica sortint $\boldsymbol{B(p)}$:

2.1. Si $x_B\ \geq\ [0]$ $\mathcal{B}$ és SB factible primal i dual ⇒òptima. **STOP**.

Altrament, es selecciona una VB p amb $x_{B(p)} < 0$ (VB sortint).

3. Càlcul de la DBF dual:

3.1. Es calcula $d_N^r = (\beta_p A_N)'$ (β_p: fila p-èssima de B^{-1})

3.2. Si $d_N^r \geq [0]$ llavors problema $(D)_e$ il·limitat (⇒ $(P)_e$ infactible): **STOP**

4. Selecció de la variable no bàsica entrant $\boldsymbol{q}$:

4.1. Càlcul de $\theta_D^* = \min\limits_{\left\{j=1,\dots,n-m \mid d^r_{N_j}<0\right\}} \left\{\frac{-r_{N_j}}{d^r_{N_j}}\right\} = \frac{-r_{N_l}}{d_{r_{N_l}}}$. Es selecciona $q = N(l)$, l –èssima VNB, com a VNB entrant.

5. Canvi de base i actualitzacions :

5.2. Act. variables duals: $r_N := r_N + \theta_D^* d_N^r,\ \ \lambda := \lambda - \theta_D^* \beta_p',\ \ r_{B(p)}\ := \theta_D^*$; $z := z - \theta_D^* x_{B(p)}$

5.1. Act. variables primals: $d_B = -B^{-1}A_q,\ \ \theta^*\ = -\frac{x_{B(p)}}{d_{B(p)}}, x_B := x_B + \theta^* d_B,\ x_q := \theta^*$

5.2. Act. base: $\mathcal{B} := \mathcal{B}\backslash\{B(p)\} \cup \{q\}$, $\mathcal{N} := \mathcal{N}\backslash\{q\} \cup \{B(p)\}$.

6. Anada a 2.

Algorisme del símplex dual : exemple (1/4)

Exemple: Trobeu la solució òptima del següent problema (P) aplicant l'algorisme del símplex dual com a SB inicial l'associada a $x' = [0,0]$.

$$(P)\begin{cases} \min\ z = & x_1 & +x_2 & \\ \text{s.a:} & x_1 & +2x_2 & \geq 2 \\ & x_1 & & \geq 1 \\ & x_1, & x_2 & \geq 0 \end{cases} \rightarrow (P)_e \begin{cases} \min\ z = & x_1 & +x_2 & & & \\ \text{s.a:} & x_1 & +2x_2 & -x_3 & & = 2 \\ & x_1 & & & -x_4 & = 1 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4 & \geq 0 \end{cases}$$

- **Càlculs previs:**

$$x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} \mathcal{B} = \{3,4\}, B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, x_B = B^{-1}b = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}, c_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \mathcal{N} = \{1,2\}, A_N = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, c_N = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \lambda' = c_B' B^{-1} = [0], r_N' = c_N' - \lambda' A_N = [1 \quad 1] \geq 0 \end{cases}$$

Algorisme del símplex dual : exemple (2/4)

- **1ª iteració:** $\mathcal{B}=\{3,4\}, \mathcal{N}=\{1,2\}$
  - Identificació de SB òptima i selecció de la VB sortint $B(p)$:
  $$x_B=[-2 \quad -1]' \ngeq 0 \Rightarrow p=1, B(1)=3 \text{ VB sortint}$$
  - Identificació de problema (D) il·limitat :
  $$\beta_1 = e_1' B^{-1} = [-1 \quad 0], {d_N^r}' = \beta_1 A_N = [-1 \quad 0]\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\end{bmatrix} = [-1 \quad -2] \ngeq 0$$
  - Selecció de la VNB entrant q: $\theta_D^* = \min_{\{j=1,2 \mid d_{N\,j}^r<0\}} \left\{\frac{-r_{N\,j}}{d_{N\,j}^r}\right\} = \min\left\{1,\frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{2} \Rightarrow q=2$
  - Canvi de base i actualitzacions:
    - $r_N = \begin{bmatrix}r_1\\ r_2\end{bmatrix} := r_N + \theta_D^* d_N^r = \begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1\\ -2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1/2\\ 0\end{bmatrix}, r_{B(1)} = r_3 := \theta_D^* = \frac{1}{2},$
    - $\lambda = \begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{bmatrix} := \lambda - \theta_D^* \beta_p' = \begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1\\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1/2\\ 0\end{bmatrix}, \; z := z - \theta_D^* x_{B(3)} = 0 - \frac{1}{2}(-2) = 1$
    - $d_B = -B^{-1}A_2 = -\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\ 0\end{bmatrix}, \theta^* = -\frac{x_{B(1)}}{d_{B(1)}} = 1$
    - $x_B = \begin{bmatrix}x_3\\ x_4\end{bmatrix} := x_B + \theta^* d_B = \begin{bmatrix}-2\\ -1\end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix}2\\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ -1\end{bmatrix}, x_2 := \theta^* = 1$
    - $\mathcal{B} := \{2,4\}, \mathcal{N} := \{1,3\}, \; B^{-1} = \begin{bmatrix}1/2 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}, x_B = \begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}, r_N = \begin{bmatrix}1/2\\ 1/2\end{bmatrix}, \lambda = \begin{bmatrix}-1/2\\ 0\end{bmatrix}$

Algorisme del símplex dual : exemple (3/4)

- **2ª iteració:** $\mathcal{B} = \{2,4\}, \mathcal{N} = \{1,3\}$
  - Identificació de SB òptima i selecció de la VB sortint $B(p)$:

$$x_B = [1 \quad -1]' \ngeq 0 \Rightarrow p = 2, B(2) = 4 \text{ VB sortint}$$

  - Identificació de problema (D) il·limitat :

$$\beta_2 = e_2' B^{-1} = [0 \quad -1], {d_N^r}' = \beta_2 A_N = [0 \quad -1]\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = [-1 \quad 0] \ngeq 0$$

  - Selecció de la VNB entrant q: $\theta_D^* = \min_{\{j=1,2 | d_{N_j}^r < 0\}} \left\{ \frac{-r_{N_j}}{d_{N_j}^r} \right\} = \min\left\{ -\frac{1/2}{-1} \right\} = \frac{1}{2} \Rightarrow q = 1$
  - Canvi de base i actualitzacions:
    - $r_N = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_3 \end{bmatrix} := r_N + \theta_D^* d_N^r = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \end{bmatrix}, r_{B(2)} = r_4 := \theta_D^* = \frac{1}{2}$
    - $\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} := \lambda - \theta_D^* \beta_p' = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}, \ z := z - \theta_D^* x_{B(2)} = 1 - \frac{1}{2}(-1) = \frac{3}{2}$
    - $d_B = -B^{-1}A_1 = -\begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1 \end{bmatrix}, \theta^* = -\frac{x_{B(2)}}{d_{B(2)}} = -\frac{-1}{1} = 1$
    - $x_B = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} := x_B + \theta^* d_B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} -1/2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}, x_q = x_1 := \theta^* = 1$
    - $\mathcal{B} := \{2, 1\}, \mathcal{N} := \{3, 4\}, \ B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, x_B = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \end{bmatrix}, r_N = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}, \lambda = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$

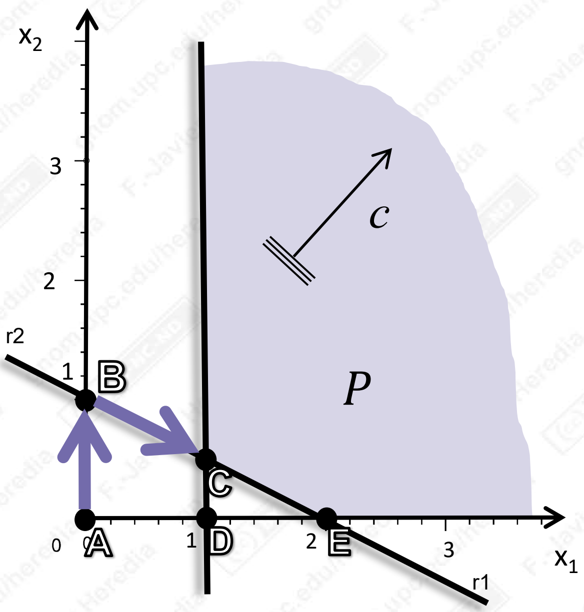
Algorisme del símplex dual : exemple (4/4)

- **3a iteració:** $\mathcal{B} = \{2,1\}, \mathcal{N} = \{3,4\}$
  – Identificació de SB òptima i selecció de la VB sortint $B(p)$:

$$x_B = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \end{bmatrix} \geq 0 \Rightarrow \text{SB factible primal i dual: òptim}$$

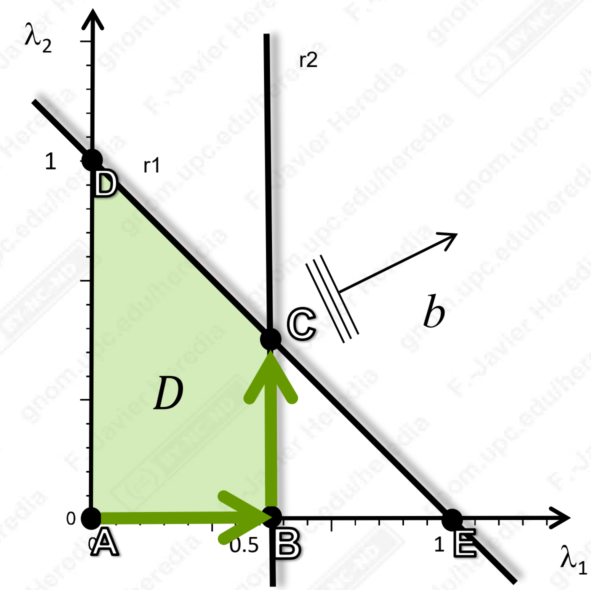
- **Solució òptima:** $\boxed{\mathcal{B}^* = \{2,1\}, \mathcal{N}^* = \{3,4\}, x_B^* = [1/2 \quad 1]', z^* = 3/2}$

- **Interpretació geomètrica:**



Iteració 1: A → B

Iteració 2: B → C



Solucions bàsiques $\mathcal{B}$ degenerades duals

Def. Solució bàsica primal degenerada dual $(\boldsymbol{SB_P D_D})$:
Sigui el problema de programació lineal $(P)_e$ *en forma estàndard.*
Una ***solució bàsica primal*** $\mathcal{B}$ *és* ***degenerada dual*** *si* $\exists j$: $r_{N(j)} = 0$.

Proposició 13:
$\mathcal{B}$ *és* $(SB_P D_D) \Leftrightarrow$ *La* $\mathcal{B}_D$ *associada a* $\mathcal{B}$ *és degenerada primal* $(SB_D D_P)$.

Demo: immediata, a partir de la relació $y_B' = [\lambda' \quad r_N']$.

- La propietat de degeneració primal-dual de la SB primal $x = B^{-1}b$ i de la seva SB dual associada $\lambda' = c_B' B^{-1}$ són simètriques:

$\boldsymbol{x = B^{-1}b}$ **és SB de** $\boldsymbol{(P)_e}$		$\boldsymbol{\lambda' = c_B' B^{-1}}$ **és SB de** $\boldsymbol{(D)_e}$
degenerada dual	$\Leftrightarrow$	degenerada primal
degenerada primal	$\Leftrightarrow$	degenerada dual

- **Exemple**: Comproveu la degeneracio dual i primal de les SB $\mathcal{B} = \{2,4\}$ i $\mathcal{B} = \{1,3\}$ de (P) $\min_{x\in\mathbb{R}^2}\{x_1 | x_1 + x_2 \geq 2; 2x_1 - 2x_2 \geq 0; x \geq 0\}$.

Algorisme del símplex dual : convergència

- Si tenim en compte que **l'aplicació del l'ASD al problema (P) és equivalent a l'aplicació de l'ASP al problema (D)**, podem derivar de forma directe les propietats de convergència de l'ASD de les que vàrem establir per a l'ASP (Teoremes 6 i 7):

Teorema 12: convergència de l'algorisme del símplex dual

Si el problema $(P)_e$ no té cap SB degenerada dual, llavors l'algorisme del símplex dual convergeix en un nombre finit d'iteracions.

Demo: cada iteració augmenta estrictament el valor de la funció dual $\lambda' b \Rightarrow$ no es repeteix cap $(SB_P F_D)$ de $(P)_e$ i el nombre de $(SB_P F_D)$ és finit.

- Si $(P)_e$ té $(SB_P D_D)$, tal com passava a l'ASP, la regla de Bland (entre d'altres) assegura la convergència de l'ASD.

Caracterització Completa de SB

- La degeneració dual és l'última propietat de les SB que ens quedava per establir en aquest curs.
- Així doncs, **les quatre propietats**, mútuament independents, **que caracteritzen completament qualsevol solució bàsica** són:

1. **Factibilitat primal**: $x_B \geq 0$.
2. **Factibilitat dual**: $r_N \geq 0$.
3. **Degeneració primal**: $\exists i : x_{B(i)} = 0$.
4. **Degeneració dual**: $\exists j : r_{N(j)} = 0$.

- **Exemple**: trobeu la caracterització completa de les SB de

$$(P)\ \min_{x\in\mathbb{R}^2}\{x_1 | x_1 + x_2 \geq 2; 2x_1 - 2x_2 \geq 0; x \geq 0\}.$$

CCSB	F_P	F_D	D_P	D_D
$\mathcal{B}^1 = \{1,2\}$	V	V	X	X
$\mathcal{B}^2 = \{1,3\}$	X	V	V	X
$\mathcal{B}^3 = \{1,4\}$	V	X	X	X
$\mathcal{B}^4 = \{2,3\}$	X	V	V	V
$\mathcal{B}^5 = \{2,4\}$	X	V	X	V
$\mathcal{B}^6 = \{3,4\}$	X	V	V	V

Teoria de dualitat : aplicacions a teoria de jocs.

3. Teoria de dualitat.

- *Definició i formulació del problema dual* [1].
- *Teoremes de dualitat* [1].
- *Algorisme del símplex dual.*
- Aplicacions:
  - Teoria de jocs: jocs finits de suma zero amb dos jugadors.
    - Estratègies pures i mixtes.
    - Jugades òptimes i relació parells primal-dual.
    - Teorema minimax i relació Ta. fort de dualitat.
  - Teoria de grafs: problemes de flux màxim-tall mínim.

*(1) **Bibliografia:** Cap. 2 - 5 "Introduction to Linear Optimization", D. Bertsimas, N. Tsitsiklis*

Origens de la dualitat: teoria de jocs (1/8)

- **Joc finit de suma zero amb dos jugadors**.
  - *John von Neumann's work in the theory of games and mathematical economics*. H. W. **Kuhn** and A. W. **Tucker** Bull. Amer. Math. Soc. Volume 64, Number 3, Part 2 (1958), 100-122. Permanent link: http://projecteuclid.org/euclid.bams/1183522375

- Cada jugador té un conjunt d'**estratègies pures**:
  - Estratègies pures jugador 1: $J_1 = \{1, 2, \dots, m\}$
  - Estratègies pures jugador 2: $J_2 = \{1, 2, \dots, n\}$

- Matriu de guanys (J_1) / pèrdues (J_2) associades a les estratègies pures:

$$\text{"payoff matrix": } A = \begin{array}{c} \text{estratègies jugador 2} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \text{estratègies} \\ \text{jugador 1} \end{array}$$

Si es produeix la jugada $(J_1, J_2) = (i, j) \Rightarrow$ el jugador 1 rep a_{ij} i el jugador 2 paga a_{ij} (**joc de suma zero**).

Origens de la dualitat: teoria de jocs (2/8)

- **Estratègia mixta**: distribució de probabilitat del conjunt d'estratègies pures (freqüència amb la que es jugarà cada estratègia):
  - **Jugador 1**: $Y = \{y \in \mathbb{R}^m : \sum_{i=1}^m y_i = 1, 0 \leq y_i \leq 1, i = 1, \ldots, m\}$
  - **Jugador 2**: $X = \{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n x_i = 1, 0 \leq x_i \leq 1, i = 1, \ldots, n\}$
- Valor esperat dels guanys/pèrdues associada a una estratègia mixta:

J_1/J_2	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
y_1	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1n}
y_2	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
y_m	a_{m1}	a_{m2}	$\cdots$	a_{mn}

$$E[\text{pèrdues } J_2 = x \mid J_1 = y_j]$$
$$\downarrow$$
$$\sum_{i=1}^n a_{1i} x_i$$
$$\sum_{i=1}^n a_{2i} x_i$$
$$\vdots$$
$$\sum_{i=1}^n a_{mi} x_i$$

$$E[\text{guanys } J_1 = y \mid J_2 = x_i] \rightarrow \sum_{j=1}^m a_{j1} y_j \quad \sum_{j=1}^m a_{j2} y_j \quad \cdots \quad \sum_{j=1}^m a_{jn} y_j$$

Origens de la dualitat: teoria de jocs (3/8)

- **Jugada òptima jugador 1, criteri $maximin$:**

  "El jugador 1 maximitza l'esperança matemàtica del seu guany mínim"

$$z_1^* = \max_{y} \left\{ z_1(y) = \min_{i=1,\dots,n} \left\{ \sum_{j=1}^{m} a_{ji} y_j \right\} \right\}$$

- **El problema de (PL) associat a la jugada òptima del jugador 1 és:**

$$(P_1) \begin{cases} \max\limits_{y,z_1} & z_1 & & \\ \text{s.a.:} & \sum_{j=1}^{m} a_{ji} y_j & \geq z_1 & i = 1, \dots, n \\ & \sum_{j=1}^{m} y_j & = 1 & \\ & y_j & \geq 0 & j = 1, \dots, m \end{cases}$$

Origens de la dualitat: teoria de jocs (4/8)

- **Jugada òptima jugador 2, criteri $\boldsymbol{minimax}$:**

  "El jugador 2 minimitza l'esperança matemàtica de la seva pèrdua màxima"

$$z_2^* = \min_x \left\{ z_2(x) = \max_{j=1,\dots,m} \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i \right\} \right\}$$

- **El problema de (PL) associat a la jugada òptima del jugador 2 és:**

$$(P_2)\begin{cases} \min\limits_{x,z_2} & z_2 & & \\ \text{s.a.:} & \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ji} x_i & \le z_2 & j = 1, \dots, m \\ & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i & = 1 & \\ & x_i & \ge 0 & i = 1, \dots, n \end{cases}$$

Origens de la dualitat: teoria de jocs (5/8)

- **Exemple: “pares o nones” amb dos dits**
  - Si la suma dels dits és senar, el jugador 1 rep del jugador 2 la suma dels dits en euros.
  - Si la suma dels dits és parell, el jugador 1 paga al jugador 2 la suma dels dits en euros.
  - Matriu de guanys J_1:

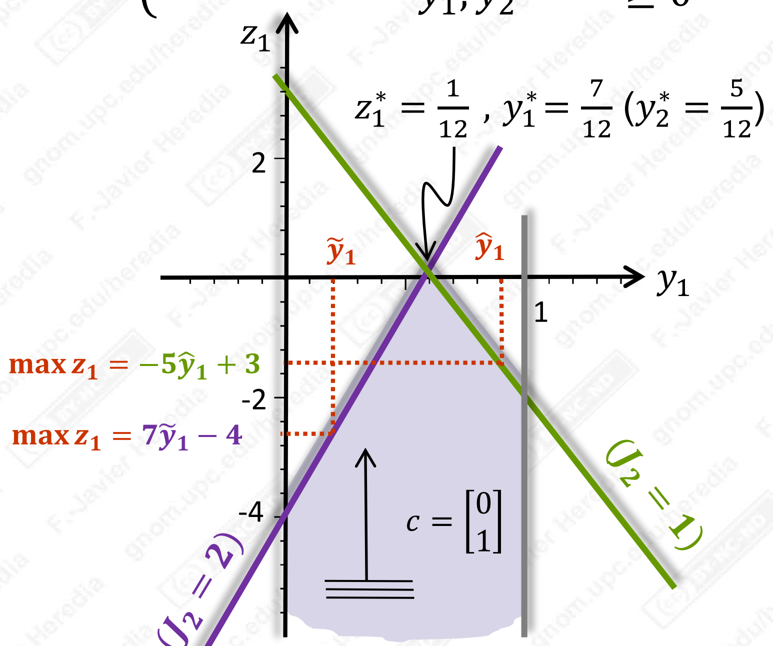
$$A = \begin{array}{c} \overbrace{\begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array}}^{J_2} \\ \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \Big\} J_1$$

  - Problema maximin jugador 1: $(P_1)\left\{\begin{array}{lrl} \max\limits_{y,z_1} & z_1 & \\ \text{s.a.:} & & \\ & -2y_1 + 3y_2 & \geq z_1 \\ & 3y_1 - 4y_2 & \geq z_1 \\ & y_1 + y_2 & = 1 \\ & y_1, y_2 & \geq 0 \end{array}\right.$

Origens de la dualitat: teoria de jocs (6/8)

- **Exemple: “pares o nones” amb dos dits**
  - Resolució del problema maximin jugador 1:

$$(P_1)\begin{cases} \max\limits_{y_1,y_2,z_1} & z_1 \\ \text{s.a.:} & \\ & -2y_1+3y_2 \ge z_1 \\ & 3y_1-4y_2 \ge z_1 \\ & y_1+y_2 = 1 \\ & y_1,y_2 \ge 0 \end{cases} \xrightarrow{y_2=1-y_1} (P_1)\begin{cases} \max\limits_{y_1,z_1} & z_1 \\ \text{s.a.:} & \\ & -5y_1+3 \ge z_1 \quad (J_2=1) \\ & 7y_1-4 \ge z_1 \quad (J_2=2) \\ & y_1\in[0,1] \end{cases}$$



- La **recta** $z_1 = -5y_1 + 3$ representa el valor esperat dels beneficis de J_1 en funció del valor de y_1 a les partides on J_2 juga l'estratègia 1.
- La **recta** $z_1 = 7y_1 - 4$ representa el valor esperat dels beneficis de J_1 en funció del valor de y_1 en les partides on J_2 juga l'estratègia 2.
- Per a cada valor de $y_1 \in [0,1]$:

$$\max z_1 = \min\{-5y_1 + 3 , 7y_1 - 4\}.$$

- $y_1^* = \frac{7}{12}$ $(y_2^* = \frac{5}{12})$ és el valor de y_1 on el mínim entre les dues rectes és màxim $(z_1^* = \frac{1}{12})$.

Origens de la dualitat: teoria de jocs (7/8)

- **PL jugador 1:** $(P_1)\begin{cases}\max\limits_{y,z_1} & z_1 & & \\ \text{s.a.:} & \sum_{j=1}^{m} a_{ji}y_j - z_1 & \geq 0 & i=1,\dots,n \\ & \sum_{j=1}^{m} y_j & =1 & \\ & y_j & \geq 0 & j=1,\dots,m\end{cases}$

- **PL jugador 2:** $(P_2)\begin{cases}\min\limits_{x,z_2} & z_2 & & \\ \text{s.a.:} & \sum_{i=1}^{n} a_{ji}x_i - z_2 & \leq 0 & \text{j}=1,\dots,m \\ & \sum_{i=1}^{n} x_i & =1 & \\ & x_i & \geq 0 & i=1,\dots,n\end{cases}$

- **Ta. Minimax (Ta. Principal de Ta. de Jocs, von Neumann 1928[(1)]) :**

  Les estratègies òptimes y^* i x^* pels jugadors 1 i 2 existeixen i satisfan:

$$z_1^* = z_2^*.$$

(1) : Von Neumann, J: *Zur Theorie der Gesellschaftsspiele* Math. Annalen. **100** (1928) 295-320, DOI: 10.1007/BF01448847

Origens de la dualitat: teoria de jocs (8/8)

- **Exemple 2 : "pares o nones" amb tres dits**
  - Si la suma dels dits és senar, el jugador 1 rep del jugador 2 la suma dels dits en euros.
  - Si la suma dels dits és parell, el jugador 1 paga al jugador 2 la suma dels dits en euros.
  - Si ensenyen el mateix nombre de dits, hi ha empat i ningú paga
  - Matriu de guanys J_1: $A = \begin{array}{c} \overbrace{\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array}}^{J_2} \\ \begin{bmatrix} 0 & 3 & -4 \\ 3 & 0 & 5 \\ -4 & 5 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \left.\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\right\} J_1 \end{array}$
  - Estratègia òptima (**AMPL**):
    - ❖ $J_1 : y^* \approx [0.36 \quad 0.57 \quad 0.07]'$; $J_2 : x^* \approx [0.36 \quad 0.57 \quad 0.07]'$
    - ❖ $z_1^* = z_2^* \approx 1{,}43€ > 0 \Rightarrow$ l'esperança matemàtica dels guanys del jugador 1 és estrictament positiva: el joc beneficia al jugador 1

Teoria de dualitat : aplicacions a teoria de grafs.

3. Teoria de dualitat.

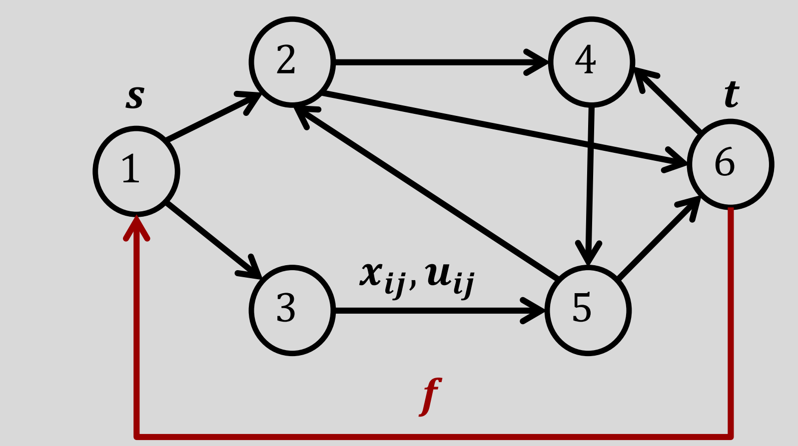
- *Definició i formulació del problema dual [1].*
- *Teoremes de dualitat [1].*
- *Algorisme del símplex dual.*
- Aplicacions:
  - *Teoria de jocs: jocs finits de suma zero.*
  - Teoria de grafs: problema de flux màxim-tall mínim.
    - Problema de flux màxim.
    - Problema de tall mínim.
    - Dual del problema de flux màxim.
    - Relacions talls – solucions factibles duals.
    - Teorema max flow-min cut.

*(1) **Bibliografia:** Cap. 2 - 5 "Introduction to Linear Optimization", D. Bertsimas, N. Tsitsiklis*

Dualitat del Problema de flux màxim

- **Problema de flux màxim:** el problema de flux màxim associat al graf $\mathcal{G} = (\mathcal{N}, \mathcal{A})$ amb $|\mathcal{N}| = m$ nodes, $|\mathcal{A}| = n$ arcs, capacitats u i nodes font s i pou t respectivament:

$$(PFM)\begin{cases} \max\limits_{x\in\mathbb{R}^n, f\in\mathbb{R}} & \boldsymbol{f} \\ \text{s.a.:} & \sum\limits_{(i,j)\in\mathcal{A}} x_{ij} - \sum\limits_{(j,i)\in\mathcal{A}} x_{ji} = \begin{cases} \boldsymbol{f} & i=s \\ 0 & i \neq s,t \\ -\boldsymbol{f} & i=t \end{cases}, \quad i \in \mathcal{N} \\ & x_{ij} \le u_{ij}, (i,j) \in \mathcal{A} \\ & \boldsymbol{f}, x_{ij} \ge 0, (i,j) \in \mathcal{A} \end{cases}$$



$$\mathcal{A} = \{(1,2),(1,3),(2,4),(2,6),(3,5),(4,5),(5,2),(5,6),(6,4)\}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Expressió matricial:

$$(PFM)\begin{cases} \max & \boldsymbol{f} \\ \text{s.a.:} & Ax + e\boldsymbol{f} = 0 \\ & x \le u \\ & \boldsymbol{f}, x \ge 0 \end{cases}$$

amb A matriu d'incidències nodes-arc i

$$e = \big[0, \dots, 0, \underbrace{-1}_{s}, 0, \dots, 0, \underbrace{+1}_{t}, 0, \dots, 0\big]' \in \mathbb{R}^m.$$

Problema de tall mínim

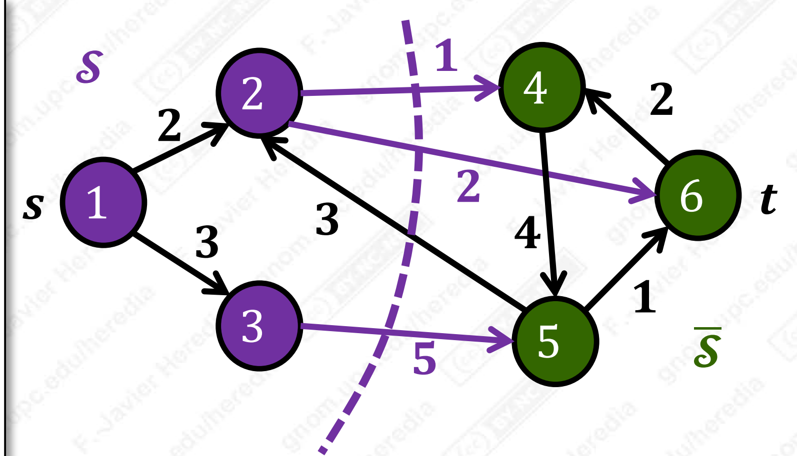
Definicions:

Tall $\boldsymbol{s-t}$: *subconjunt $\mathcal{S}$ del conjunt de nodes $\mathcal{N}$ tal que $s \in \mathcal{S}$ i $t \in \bar{\mathcal{S}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{N} \backslash \mathcal{S}$.*

Capacitat del tall $\mathcal{S}$: *suma de les capacitats u_{ij} dels arc que travessen el tall des de $\mathcal{S}$ fins $\bar{\mathcal{S}}$: $u(\mathcal{S}) = \sum_{\{(i,j)\in\mathcal{A} | i\in\mathcal{S}, j\in\bar{\mathcal{S}}\}} u_{ij}$*

Problema de tall mínim:

$$(PTM) \min_{\mathcal{S}}\{u(\mathcal{S}) | \mathcal{S} \text{ tall s−t } \in\}$$



$$\boldsymbol{\mathcal{S} = \{1,2,3\} \quad u(\mathcal{S}) = 1 + 2 + 5 = 8}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{S}^* = \{1,2,3,4,5\}, u(\mathcal{S}^*) = 3}$$

Teorema 13: relació capacitat tall $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ – flux $\boldsymbol{s-t}$.

Per a tot flux factible $[x' \quad f]$ i tall $\mathcal{S}$ del (PFM) es satisfà:

a) $f = \sum_{\{(i,j)\in\mathcal{A} | i\in\mathcal{S}, j\in\bar{\mathcal{S}}\}} x_{ij} - \sum_{\{(i,j)\in\mathcal{A} | i\in\bar{\mathcal{S}}, j\in\mathcal{S}\}} x_{ij}$

b) $f \leq u(\mathcal{S})$.

Demo: evident, en base al principi de conservació de flux als nodes.

- El Ta 13-a) sembla el Ta feble de dualitat: **són $(PFM) - (PTM)$ parell $(P) - (D)$**?

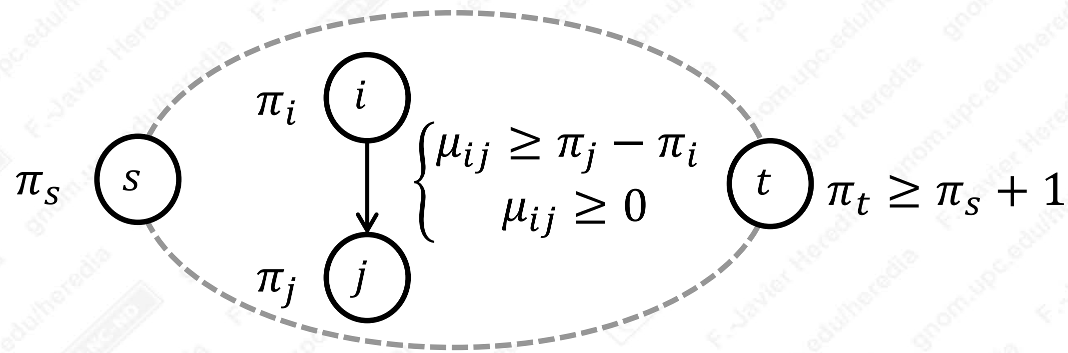
Dual del problema de flux màxim.

Teorema 14: dual del problema de flux màxim.

El dual del problema de flux màxim associat al graf $\mathcal{G} = (\mathcal{N}, \mathcal{A})$ *amb* $|\mathcal{N}| = m$ *nodes,* $|\mathcal{A}| = n$ *arcs, capacitats* u *i nodes font* s *i pou* t *és:*

$$(D_{PFM}) \begin{cases} \min\limits_{\pi \in \mathbb{R}^m, \mu \in \mathbb{R}^n} & \mu' u & \\ \text{s.a.:} & \pi_i - \pi_j + \mu_{ij} \geq 0 & (i,j) \in \mathcal{A} \\ & \pi_t - \pi_s \geq 1 & \\ & \mu_{ij} \geq 0 & (i,j) \in \mathcal{A} \end{cases}$$

Demo: exercici



$\mathcal{G} = (\mathcal{N}, \mathcal{A}), u$

Relació talls - solucions factibles duals.

Teorema 15: relacions talls – solucions factibles duals

i. *Per a tot tall $\mathcal{S}$, els vectors $\pi(\mathcal{S}) \in \mathbb{R}^m$, $\mu(\mathcal{S}) \in \mathbb{R}^n$ definits per:*

$$\boldsymbol{\pi_i}(\mathcal{S}) = \begin{cases} \alpha & i \in \mathcal{S} \\ \alpha + 1 & i \in \bar{\mathcal{S}} \end{cases}, \qquad \boldsymbol{\mu_{ij}}(\mathcal{S}) = \begin{cases} 1 & i \in \mathcal{S}, j \in \bar{\mathcal{S}} \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

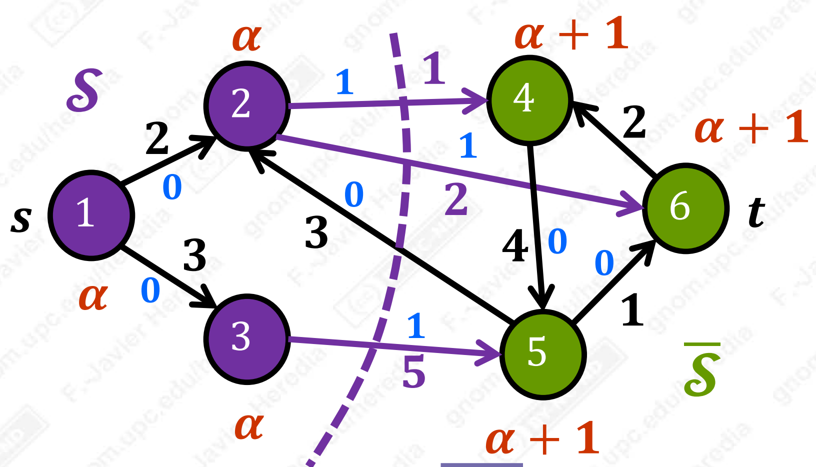
son una solució factible del problema dual amb $\mu(\mathcal{S})'u = u(\mathcal{S})$.

ii. $\mathcal{U} = \bigcup_{\mathcal{S}} \begin{bmatrix} \pi(\mathcal{S}) \\ \mu(\mathcal{S}) \end{bmatrix} \subset P_D$ *(no tota solució factible dual té associat un tall).*

Demo: exercici.

- Sabem que tot tall "és factible dual". Si demostrem que l'òptim dual "és un tall" llavors pel Ta fort de dualitat podrem assegurar que $f^* = u(\mathcal{S}^*)$ i

$$(PTM) \equiv (D_{PFM})$$



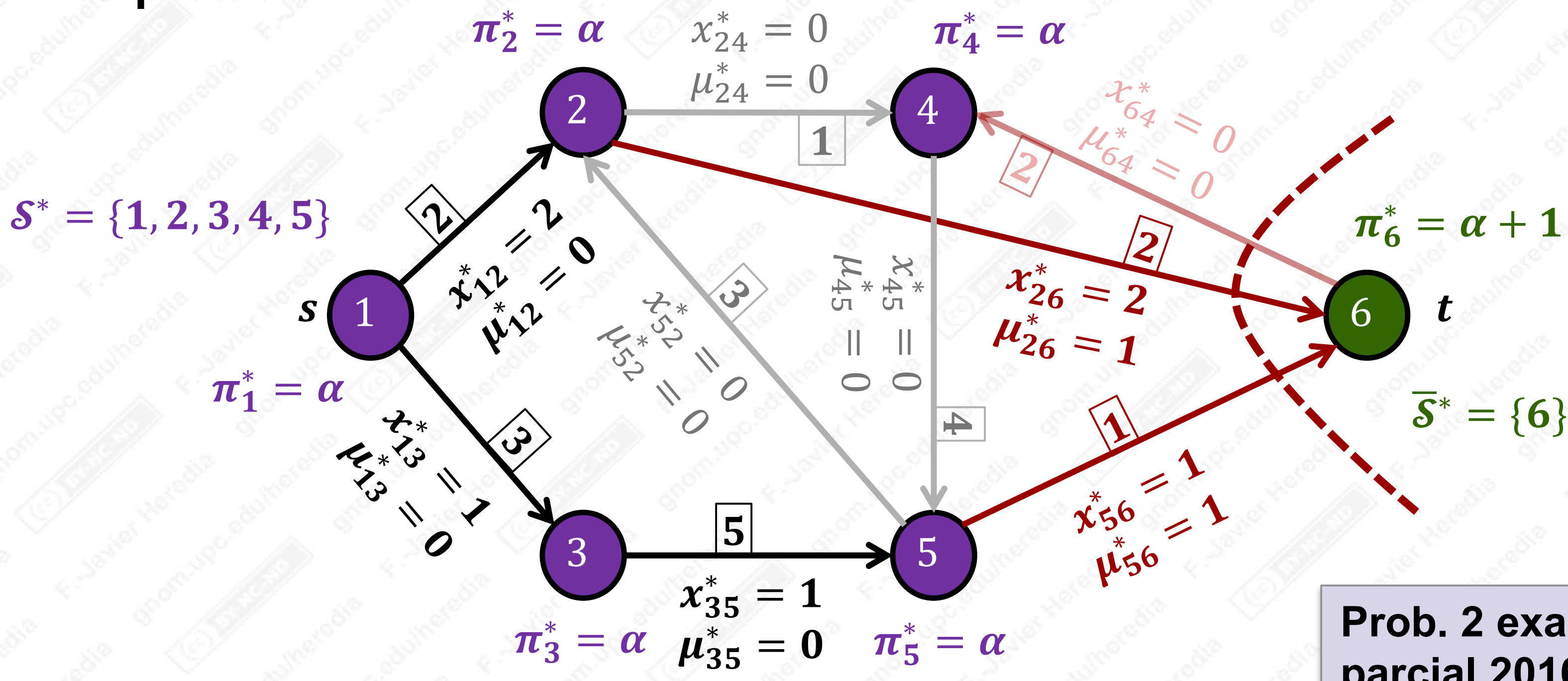
Teorema *max-flow min-cut*.

Teorema 16: *Max-flow min-cut theorem (Fulkerson & Dantzig 1955)*

El valor màxim del flux f és igual al valor mínim de la capacitat de tall $u(\mathcal{S})$.

Demo: pissarra

- **Interpretació:**



Prob. 2 examen parcial 2016-17