Tema 3: Diferenciabilitat

1. **Definició** Sigui $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $p \in A$, $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. La **derivada de f en la direcció de v en el punt p** (o derivada direccional de f en el punt p en la direcció de v), si existeix, és:

$$f'_v(p) = D_v f(p) = \lim_{t \to 0} \frac{f(p+tv) - f(p)}{t}$$

2. **Definició** Quan $v = e_j$, vector de la base canònica, llavors la derivada direccional s'anomena **derivada parcial** i s'escriu:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(p) = D_{e_j} f(p)$$

3. **Propietat** Derivar parcialment f respecte x_j en $p = (p_1, \cdots, p_n)$ és el mateix que derivar $g_j(t) = f(p_1, \cdots, p_{j-1}, t, p_{j+1}, \cdots, p_n)$ a $t = p_j$.

4. **Definició** Considerem $F : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, A un obert i $p \in A$, on $f = (f_1, \cdots, f_m)$. La **matriu jacobiana** de f en p és la matriu de les derivades parcials:

$$Jf(p) = (Jf)_p = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(p) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(p) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(p) \end{pmatrix}$$

5. **Definició** Sigui $F : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, A un obert i $p \in A$. Direm que F **és diferenciable en p** si existeix una aplicació lineal $L_p : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ tal que:

$$\lim_{x \to p} \frac{\|F(x) - F(p) - L_p(x-p)\|}{\|x - p\|} = 0$$

6. **Proposició** Si F és diferenciable en p aleshores l'aplicació lineal L_p és única i els elements de la matriu associada a L_p en bases canòniques són:

$$(L_p)_{i,j} = \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(p)$$

7. **Definició** Si f és diferenciable en $p \in A$, l'aplicació lineal (en bases canòniques) associada a la matriu jacobiana s'anomena **aplicació diferencial** i la notem com $(DF)_p$ o bé $DF(p)$.

8. **Proposició** Sigui $F : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, A un obert i $p \in A$. Aleshores F és diferenciable en p si i només si $F_1, \cdots, F_m$ són diferenciables en p.

9. **Proposició** Si $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ és diferenciable en $p \in A$, on A obert, aleshores existeix l'hiperplà tangent a f en p i té equació

$$x_{n+1} - f(p) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)(x_i - p_i)$$

10. **Proposició** Sigui $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, A obert. Si f és diferenciable en $p \in A$, aleshores existeix $D_v f(p)$ per a tot $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, i es té:

$$D_v f(p) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(p) v_j$$

11. **Definició** Sigui $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, on A obert. Si f és diferenciable en $p \in A$, el **gradient de f** en p, $\nabla f(p)$, és el vector $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(p), \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_m}(p)\right)$.

12. **Corol·lari** Si f és diferenciable en $p \in A$, aleshores $\nabla f(p)$ és l'únic vector que satisfà

$$D_v f(p) = < v, \nabla f(p) > \qquad \forall\, v \in \mathbb{R}^n,\ v \neq 0$$

13. **Proposició** Si $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ és diferenciable en l'obert A i $C_h = \{x \in A \,|\, f(x) = h\}$ és el conjunt de nivell $h \in \mathbb{R}$ de f, llavors $\nabla f(p) \perp C_h$ en $p \in C_h$.

14. **Proposició** Sigui $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, A obert, $p \in A$ i f diferenciable en p, aleshores:

    (i) $\max\limits_{v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},\, ||v||=1} \{D_v f(p)\} = \|\nabla f(p)\|$ i s'assoleix quan $v = \frac{\nabla f(p)}{\|\nabla f(p)\|}$.

    (ii) $\min\limits_{v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},\, ||v||=1} \{(D_v f)(p)\} = -\|\nabla f(p)\|$ i s'assoleix quan $v = -\frac{\nabla f(p)}{\|\nabla f(p)\|}$.

15. **Teorema** Si f és diferenciable en p aleshores f és contínua en p.

16. **Lema** Si $L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ és lineal, aleshores existeix $M > 0$ tal que $\|L(x)\| \leq M\|x\|$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

17. **Proposició** Si $A \subseteq \mathbb{R}^n$ és un obert i $F : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$ és diferenciable en $p \in A$, aleshores existeix $\delta > 0$ tal que si $\|x - p\| < \delta$ i $x \in A$, llavors $\|F(x) - F(p)\| \leq M\|x - p\|$, per a cert $M > 0$.
    En altre paraules, F és **localment Lipschitz** en p.

18. **Proposició** Si F és localment Lipschitz en p aleshores F és contínua en p.

19. **Proposició** Siguin $F, G : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ diferenciables en $p \in A$, amb A obert, aleshores:

    (i) $F + G$ és diferenciable en p, i $D(F + G)(p) = DF(p) + DG(p)$.

    (ii) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, λF és diferenciable en p, i $D(\lambda F)(p) = \lambda DF(p)$.

    (iii) $\langle F, G\rangle$ és diferenciable en p, i per a tot $v \in \mathbb{R}^n$, $D\langle F, G\rangle(p)(v) = \langle G(p), DF(p)(v)\rangle + \langle F(p), DG(p)(v)\rangle$.

20. **Proposició** (**Regla de la cadena**) Sigui $F : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ diferenciable en $p \in A$, amb A obert i $G : B \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^k$ diferenciable en $F(p) \in B$, amb B obert i tal que $F(A) \subseteq B$. Aleshores, $(G \circ F) : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k$ és diferenciable en p i

$$D\,(G \circ F)\,(p) = DG(F(p)) \circ DF(p)$$

21. **Definició** Diem que una funció $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ és **diferenciable amb continuïtat** en A, o de **classe** C^1 en A, si les derivades parciales de cadascuna de les funcions components de f, $\dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}$ $(1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq m)$, existeixen i són contínues en A.

22. **Teorema** (**Condició suficient de diferenciabilitat**) Donada $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, on A obert i $p \in A$, si f és de classe C^1 en un entorn de p, aleshores f es diferenciable en p.

23. **Teorema del valor mitjà (1ª versió)**
    Siguin $F : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una funció diferenciable en l'obert A i $p_1, p_2 \in A$ tals que $\overline{p_1 p_2} \subset A$, aleshores existeixen $q_1, \cdots, q_m \in \overline{p_1 p_2}$ tals que $F_j(p_2) - F_j(p_1) = DF_j(q_j)(p_2 - p_1)$.

24. **Teorema del valor mitjà (2ª versió)**
    Siguin $F : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una funció diferenciable en l'obert A obert, i $p_1, p_2 \in A$ tals que $\overline{p_1 p_2} \subset A$, aleshores existeix $q \in \overline{p_1 p_2}$ tal que $\|F(p_2) - F(p_1)\| \leq \|DF(q)(p_2 - p_1)\|$.