Àlgebra Multilineal i Geometria FME, curs 2020-2021
Entregable 6 Correlacions

Fixem $\mathbf{k} = \mathbb{R}$ i $n \geq 2$. Denotarem per $\mathbb{P}, \overline{\mathbb{P}}$ espais projectius de dimensió n i per $\mathbb{P}^*, \overline{\mathbb{P}}^*$ els seus duals.
Donada una aplicació bijectiva $f : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{P}$, el teorema fonamental estableix una equivalència entre les versions geomètrica i algebraica de projectivitat:

$$f \text{ és una colineació} \iff f \text{ és una projectivitat.}$$

Així, les colineacions transformen punts en punts, tectes en rectes, plans en plans, etc. Hi ha una altra mena de transformacions projectives: la dualitat estableix una bijecció

$$\perp : Subv(\mathbb{P}) \longrightarrow Subv(\mathbb{P}^*),$$

que trasnforma punts en hiperplans, hiperplans en punts, etc. La definició següent generalitza aquesta situació:

Definició. Una *correlació* de $\mathbb{P}$ en $\overline{\mathbb{P}}$, $F : \mathbb{P} \rightsquigarrow \overline{\mathbb{P}}$, és una aplicació bijectiva

$$F : Subv(\mathbb{P}) \longrightarrow Subv(\overline{\mathbb{P}})$$

monòtona decreixent, això és,

$$V \subset W \iff F(V) \supset F(W), \quad V, W \subset \mathbb{P}.$$

1. Proveu que $\perp$ és una correlació $\perp : \mathbb{P} \rightsquigarrow \mathbb{P}^*$. L'anomenarem la *correlació canònica*. Identificant $\mathbb{P}$ amb $\mathbb{P}^{**}$, denotarem de la mateixa forma la correlació canònica $\perp : \mathbb{P}^* \rightsquigarrow \mathbb{P}$.

2. Proveu que si F és una correlació, aleshores

$$F(V \cap W) = F(V) \vee F(W), \qquad f(V \vee W) = F(V) \cap F(W).$$

3. Proveu que la composició de dues correlacions és una projectivitat i que la composició d'una correlació i una projectivitat és una correlació.

4. Proveu que, si F és una correlació, existeix una projectivitat $g : \mathbb{P} \longrightarrow \overline{\mathbb{P}}^*$ tal que $F = \perp \circ g$.

5. A partir d'aquest punt, suposarem que $\overline{\mathbb{P}} = \mathbb{P} = \mathbb{P}(E)$. Si $F = \perp \circ g$ és una correlació, sigui $F^* = \perp \circ g^*$, on g^* és la projectivitat dual de g. Proveu que $F^* = F^{-1}$.

6. Proveu que $P \in F(Q) \iff Q \in F^*(P)$. Direm que F és una *correlació simètrica* si $F = F^*$. Deduïu que F és simètrica si, i només si, $P \in F(Q) \iff Q \in F(P)$.

7. Si $\mathcal{Q}$ és una quàdrica no degenerada, l'aplicació $P \mapsto H_P(\mathcal{Q})$ indueix una correlació simètrica.

8. De fet, l'exemple de l'apartat 7 és universal: proveu que el conjunt de correlacions simètriques F està en bijecció al conjunt de classes de formes bilineals simètriques no degenerades sobre E, determinades llevat de proporcionalitat per un escalar no nul.