Anàlisi Real – notes ampliades del curs
Capítol 3: Sèries de Fourier
3.2.- Sèries de Fourier trigonomètriques i exponencials per a funcions suaus.

Si recordeu la lliçó anterior, vam estar parlant (en abstracte) de sistemes ortonormals, generalitzacions del teorema de Pitàgores i, per la part que ens toca, el resultat més important: la igualtat de Parseval.

Ara tornarem als casos concrets. D'aquí en endavant estudiarem funcions més generals que les funcions contínues en intervals.

Definició 1. Considerem les següents famílies de funcions:

- (**Funcions contínues a troços**) Denotarem per $\mathtt{PC}[a,b]$ el conjunt de funcions contínues definides en $[a,b]$ que són contínues llevat d'un nobre finit de punts, on els límits laterals existeixen.
- (**Funcions suaus**) Denotarem per $\mathtt{PS}[a,b]$ les funcions f definides en $[a,b]$ tal que tant f com f' són elements de $\mathtt{PC}[a,b]$.

Anem a precisar una mica més que volem dir amb la definició de funció suau. És clar que si tenim una funció contínua a troços f, en cada punt de continuïtat de f, aleshores en tot punt de continuïtat podem tenir (o no) derivada. El que ens diu la segona condició es que els punts on no és derivable és un conjunt finit. Dient-ho de manera informal: els punts on la funció f no és derivable són aquells on f té "punxes"o bé en els punts on f no és derivable.

Què passa amb f' en els punts on f té una discontinuïtat de salt? Aquest és un tema delicat que parlarem més endavant (especialment en la part de conseqüències). La qüestió és que en termes de definir funció suau (dit d'altra manera, de saber identificar si una funció és suau o no ho és), ens podem ficar amb el següent conveni: en els punts x on f té una discontinuïtat (que és un conjunt discret), definirem $f'(x)$ com un dels dos límits laterals. Veurem que el que passa en el punt és una mica delicat tècnicament desde el punt de vista de l'integració (ho discutirem més endavant).

Observeu que és clar que les funcions $\mathtt{PS}[a,b]$ só clarament integrables Riemann, i per tant podem definir la norma 2 de la que hem estat parlant fins ara. En particular, podem parlar també de convergència quadràtica en aquest espai.

Serà útll també pensar en la generalització d'aquests espais de funcions quan el domini és tot $\mathbb{R}$: denotarem per $\mathtt{PC}(\mathbb{R})$ i $\mathtt{PS}(\mathbb{R})$ les funcions definides a $\mathbb{R}$ tal que en qualsevol interval fitat defineixen una funció contínua a troços o suau, respectivament.

Observeu que ambdues situacions, tota funció $f \in \mathtt{PS}[a,b]$ (o en $\mathtt{PC}[a,b]$) defineix una funció en $\mathtt{PS}(\mathbb{R})$ (resp. $\mathtt{PC}(\mathbb{R})$) tot prenent l'extensió periòdica de la funció.Per tal de no tenir problemes de definició podem pensar que en la periodificació de la funció $f(a) = f(b)$. Altrament quan prenem la periodificació de la funció el que obtenim és una discontinüitat de salt en els punts de la forma $a + (b-a)k$, on k és un enter.

Ja podem passar a fer la definició fonamental d'aquest capítol:

Definició 2. Sigui $f \in \mathtt{PS}[-\pi,\pi]$. La sèrie de Fourier trigonomètrica de f és la funció $S_f(x)$, que dóna, per cada $x \in [-\pi,\pi]$, el valor

$$S_f(x) = \lim_N S_f^N(x) = \lim_N \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx),$$

on

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx,\; a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx,\; b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx\,.$$

Anem a comparar aquests valors amb els que varem veure a la lliçó anterior. Per una banda si fem

$$\phi_m = \cos(mx),\; \psi_n(x) = \sin(nx),$$

en el primer cas per $m \geq 0$ i pel segon per $n \geq 1$, aleshores

$$(\phi_0, \phi_0) = 2\pi,\; (\phi_n,\, \phi_n) = (\psi_n, \psi_n) = \pi,$$

si $n \geq 1$. Per altra banda, tenim que, per exemple pels a_n tenim que

$$a_n = \frac{(f, \phi_n)}{(\phi_n, \phi_n)},$$

Si ho compareu amb el que varem veure a la lliçó anterior,el càlcul el varem realitzar per un sistema ortonormal (i per tant normalitzat). En el nostre cas que estem veient ara els cosinus i els sinues (i la constant) no estan normalitzats , i es per això que cal normalitzar-lo

Ho podeu pensar de la seguent forma: si $g = \sum_{i=1}^{N} a_i v_i$, i els v_i són ortogonals, aleshores

$$(f, v_i) = (\sum_{i=1}^{N} a_i v_i, v_i) = a_i(v_i, v_i),$$

d'on surt el que deiem abans.

Remarca 1. Diversos comentaris

- Observeu que el terme a_0 apareix dividit entre 2. Això passa pr a que la definició de a_n sigui consistent amb els cosinus.
- Si prenem l'interval $[-L/2, L/2]$, teni també sèries de Fourier però intergrant respecte a $\cos(\frac{2\pi}{L}nx)$ i no $\cos(nx)$.
- El mateix aplica si prenem intervals oberts en lloc d'intervals tancats (les integrals no varien si afegim o traiem els punts extrems de l'interval)

Observeu que la sèrie de Fourier trigonomètrica $S_f(x)$ l'hem definit com el límit (puntual) de la successió de funcions $\{S_f^N(x)\}_{n\geq 1}$. Es bo que identifiqueu la definició amb els termes que hem vist a la lliçó anterior (recordeu que els sinus i els cosinus són ortogonals).

El nostre objectiu és veure com es comporta S_f en relació a f. En particular, el que veurem és que:

1. **Convergència puntual:** veurem que per tot punt x de continuïtat de f, $S_f^N(x)$ convergirà puntualment cap a $f(x)$. Pels punts de discontinuïtat també veurem què passa (Teorema de Dirichlet).
2. **Convergència en norma:** Veurem que no només hi haurà convergència puntual, sino que hi haurà convergència en la norma quadràtica: veurem que $\|S_f^N - f\|_2$ tendirà a 0. Per tant, tindrem una relació de tpus Parseval.

Fixeu-vos que en cap moment estem dient que els sinus i els cosinus són una base: el que estem dient és que les sumes infinites definides per les sèries de Fourier convergeixen puntualment (en els punts de continuïtat) i que no només això, sino que la convergència que hi ha és de tipus quadràtic. Comentarem més endavant què passa amb la convergència uniforme, que veurem que en general NO es satisfarà.

Remarca 2. Observeu que la funció $S_f(x)$ (si f està definida en $[-\pi, \pi]$, de fet està definida en tot $\mathbb{R}$. Això el que diu és que la sèrie de Fourier de fet defineix una funció $\mathtt{PS}(\mathbb{R})$. Els únics punts on cal anar amb compte és enels múltiples de π. Quan enunciem el teorema de Dirichlet veurem què passa en aquests punts (podria ser que la funció no enganxi bé).

Per les proves (i en la llista de problemes), estudiarem també una variació de la definició de sèrie de Fourier trigonomètrica, en el context de funcions reals que prenen valors complexos.

Usant la realació $e^{i\alpha} = \cos(\alpha) + i\sin(\alpha)$ i la relació inversa

$$\cos(\alpha) = \frac{1}{2}\left(e^{i\alpha} + e^{-\alpha}\right), \sin(\alpha) = \frac{1}{2i}\left(e^{i\alpha} - e^{-\alpha}\right)$$

Si substituïm aquestes expressions del sinus i el cosinus en la sèrie de Fourier trigonomèrica obtenim l'expressió equivalent

$$S_f^N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{2}(e^{inx} + e^{-inx}) + \frac{b_n}{2i}(e^{inx} + e^{-inx}),$$

que pot escriure's com

$$\sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ikx}, c_0 = \frac{a_0}{2}, \; c_k = \frac{a_k - ib_k}{2} \; (k>0), \; c_k = \frac{a_{-k} + ib_{-k}}{2} \; (k<0),$$

o, en sentit contrari, $a_k = 2\mathtt{Re}(c_k)$, $b_k = -2\mathtt{Im}(c_k)$.

Tot això ho podem ficar en una definició

__**Definició**__ **3.** Sigui $f \in \mathtt{PS}[-\pi,\pi]$. La __sèrie de Fourier complexa__ de f és la funció $SC_f(x)$, que dóna, per cada $x \in [-\pi,\pi]$, el valor

$$SC_f(x) = \lim_N SC_f(x) = \lim_N \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ikx} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx},$$

on

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx}\, dx.$$

Fixeu-vos que la sèrie de Fourier trigonomètrica i la sèrie de Fourier complexa són essencialment el mateix, el que passa és que usem diferents sistemes ortonormals. Fixeu-vos que, de fet, el conjunt $\{\tau_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$, amb $\tau_k(x) = e^{ikx}$ forma un conjunt ortogonal en $[-\pi,\pi]$ (amb valors complexos), i que per tant tot el que hem dit funciona igual.

L'únic punt que cal remarcar aquí és que si les funcions que considerem són de variable real PERÒ prenent valors complexos (com està passant aquí), el producte escalar que cal prendre és el seguent:

$$(f,g) = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\, dx$$

altrament no podriem afirmar que $(f,f) \geq 0$ sempre.

Dit tot això, en la propera lliçó començarem ja a demostrar resultats relatius a la convergència puntual.Un tal resultat de fet serà igualment vàlid per les sèries de Fourier trigonomètriques com les complexes. Com veurem, treballar amb exponencials farà la cosa molt més fàcil.