EXAMEN F

SOLUCIONS

8 de gener de 2019

Càlcul Integral, Curs 2018-19, FME

Problema 1. [1.5 pt]

(a) Estudieu la convèrgencia de la sèrie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arc\,tang}(n)}{\pi^2(1+n^2)^\alpha}$ en funció del paràmetre real α.

(b) Proveu que $\displaystyle\frac{3}{32} \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arc\,tang}(n)}{\pi^2(1+n^2)} \le \frac{3}{32} + \frac{1}{8\pi}$.

Solución: En todo el problema tendremos en cuenta que si $h(x) = \operatorname{arc\,tang}(x)$, entonces h es estrictamente creciente, $h(0) = 0$, $h(1) = \dfrac{\pi}{4}$ y $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} h(x) = \frac{\pi}{2}$.

(a) Si para cada $n \in \mathbb{N}^*$ definimos $a_n = \dfrac{\operatorname{arc\,tang}(n)}{\pi^2(1+n^2)^\alpha}$ y $b_n = \dfrac{1}{n^{2\alpha}}$, entonces $a_n, b_n \ge 0$ y además,

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{2\alpha}\operatorname{arc\,tang}(n)}{\pi^2(1+n^2)^\alpha} = \frac{1}{\pi^2} \lim_{n\to\infty} \frac{n^{2\alpha}}{(1+n^2)^\alpha} \lim_{n\to\infty} \operatorname{arc\,tang}(n) = \frac{2}{\pi}}$$

Aplicando el Criterio de comparación, las series $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ tienen el mismo carácter. Como esta última es una serie de Riemann (o armónica) de exponente 2α, concluimos que

$$\boxed{\text{la serie } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arc\,tang}(n)}{\pi^2(1+n^2)^\alpha} \text{ converge si } \alpha > \frac{1}{2} \text{ y diverge si } \alpha \le \frac{1}{2}}$$

(b) Si definimos $f\colon (0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ como $f(x) = \dfrac{\operatorname{arc\,tang}(x)}{\pi^2(1+x^2)}$, entonces f es continua y positiva y además decreciente en $[1,+\infty)$. Para demostrar esta última propiedad observemos que $f'(x) = \dfrac{1-2x\operatorname{arc\,tang}(x)}{\pi^2(1+x^2)^2}$. Si consideramos la función $h(x) = 1-2x\operatorname{arc\,tang}(x)$, entonces $h'(x) = -2\operatorname{arc\,tang}(x) - \dfrac{2x}{1+x^2}$ y por tanto, $h'(x) < 0$ cuando $x > 0$, lo que implica que h es estrictamente decreciente en $(0,+\infty)$. Como $h(1) = 1-\frac{\pi}{2} < 0$, obtenemos que $h(x) < 0$ para $x \geq 1$ y por tanto que $f'(x) < 0$ si $x \geq 1$, de manera que f es decreciente en $[1,+\infty)$.

Por otra parte, como $F(x) = \frac{1}{2\pi^2}\operatorname{arc\,tang}(x)^2$ es una primitiva de $f(x)$, aplicando el Criterio de la integral, obtenemos que

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} F(x) - F(1) \leq \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \leq \lim_{x\to+\infty} F(x) - F(1) + f(1),}$$

es decir,

$$\boxed{\frac{3}{32} = \frac{1}{2\pi^2}\Big[\frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{16}\Big] \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arc\,tang}(n)}{\pi^2(1+n^2)} \leq \frac{1}{2\pi^2}\Big[\frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{16}\Big] + \frac{\frac{\pi}{4}}{2\pi^2} = \frac{3}{32} + \frac{1}{8\pi}}$$

Nota: También podemos dilucidar la convergencia de la serie comparándola con dos series armónicas: Como para cada $n \geq 1$ se tiene que $\frac{\pi}{4} \leq \operatorname{arc\,tang}(n) \leq \frac{\pi}{2}$ y $n^2 \leq 1+n^2 \leq 2n^2$, resulta que

$$\frac{1}{2^{\alpha+2}\pi}\,\frac{1}{n^{2\alpha}} \leq \frac{\operatorname{arc\,tang}(n)}{\pi^2(1+n^2)^{\alpha}} \leq \frac{1}{2\pi}\,\frac{1}{n^{2\alpha}}, \quad n \geq 1$$

que además implica que

$$\frac{1}{2^{\alpha+2}\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2\alpha}} \leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{arc\,tang}(n)}{\pi^2(1+n^2)^{\alpha}} \leq \frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2\alpha}}.$$

En particular, teniendo en cuenta que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, obtenemos que

$$\frac{\pi}{48} = \frac{1}{2^3\pi}\,\frac{\pi^2}{6} \leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{arc\,tang}(n)}{\pi^2(1+n^2)} \leq \frac{1}{2\pi}\,\frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi}{12}.$$

cotas que son menos finas que las obtenidas con el criterio de la integral.

Problema 2. [2.2 pt] Sigui $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x < +\infty,\ \dfrac{1}{x} \le y \le 1\right\}$. Sigui $\alpha > 1$.

(a) Justifiqueu que la integral impròpia $\displaystyle\int_D \frac{e^{y^2}}{x^\alpha}\,dxdy$ es pot calcular com $\displaystyle\lim_{b\to+\infty}\int_{D_b} \frac{e^{y^2}}{x^\alpha}\,dxdy$ essent $D_b = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x < b,\ \dfrac{1}{x} \le y \le 1\right\}$

(b) Proveu que $\displaystyle\int_D \frac{e^{y^2}}{x^\alpha}\,dxdy \le \frac{I}{\alpha-1}$, essent $I = \displaystyle\int_0^1 e^{y^2}\,dy$.

(c) Calculeu $\displaystyle\int_D \frac{e^{y^2}}{x^2}\,dxdy$.

Solución: (a) Si consideramos $f\colon (0,+\infty)\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(x,y) = \dfrac{e^{y^2}}{x^\alpha}$, entonces f es continua y positiva. Además, para cada $b > 1$ el conjunto $\bar{D}_b$ es elemental (y por tanto medible Jordan) y $\displaystyle\int_{\bar{D}_b} f = \int_{D_b} f$.

Definamos ahora $\Phi\colon [1,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ como $\boxed{\Phi(b) = \displaystyle\int_{D_b} f(x,y)dxdy.}$ Entonces, Φ es positiva y creciente, lo que implica que

existe $\displaystyle\lim_{b\to+\infty}\Phi(b) = \Phi \in (0,+\infty]$, $\Phi = \displaystyle\sup_{b\ge1}\{\Phi(b)\}$ y además para cada $\{b_n\}_{n=1}^\infty$ sucesión creciente y no acotada con $b_1 > 1$; es decir tal que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$, se satisface que $\Phi = \displaystyle\lim_{n\to\infty}\Phi(b_n)$

En consecuancia, si fijamos $\{b_n\}_{n=1}^\infty$, una sucesión creciente y no acotada con $b_1 > 1$, entonces $\{D_{b_n}\}_{n=1}^\infty$ es una exhaución de D y $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{D_{b_n}} f = \Phi$, lo que significa que

existe la integral impropia $\displaystyle\int_D \frac{e^{y^2}}{x^\alpha}\,dxdy$ y además $\displaystyle\int_D \frac{e^{y^2}}{x^\alpha}\,dxdy = \lim_{b\to+\infty}\int_{D_b}\frac{e^{y^2}}{x^\alpha}\,dxdy.$

(b) Con las notaciones anteriores, si $b > 1$, entonces

$$\boxed{D_b = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1 \le x < b,\ \frac{1}{x} \le y \le 1\right\} = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \frac{1}{b} \le y < 1,\ \frac{1}{y} \le x \le b\right\}}$$

de manera que

$$\begin{aligned}
\int_{D_b} f(x,y)dxdy &= \int_{\frac{1}{b}}^{1}\int_{\frac{1}{y}}^{b} \frac{e^{y^2}}{x^\alpha}dxdy = \frac{1}{1-\alpha}\int_{\frac{1}{b}}^{1} e^{y^2}\left[\frac{1}{x^{\alpha-1}}\right]_{\frac{1}{y}}^{b} dy \\
&= \frac{1}{\alpha-1}\int_{\frac{1}{b}}^{1} y^{\alpha-1}e^{y^2}dy - \frac{1}{b^{\alpha-1}(\alpha-1)}\int_{\frac{1}{b}}^{1} e^{y^2}dy \\
&\le \frac{1}{\alpha-1}\int_{\frac{1}{b}}^{1} y^{\alpha-1}e^{y^2}dy \le \frac{1}{\alpha-1}\int_{\frac{1}{b}}^{1} e^{y^2}dy \le \frac{1}{\alpha-1}\int_{0}^{1} e^{y^2}dy
\end{aligned}$$

y por tanto,

$$\boxed{\int_D \frac{e^{y^2}}{x^\alpha}\,dxdy = \sup_{b>1}\int_{D_b}\frac{e^{y^2}}{x^\alpha}\,dxdy \le \frac{1}{\alpha-1}\int_0^1 e^{y^2}dy.}$$

(c) Con el mismo razonamiento que en el apartado (b), para $\alpha = 2$ obtenemos

$$\begin{aligned}
\int_{D_b}\frac{e^{y^2}}{x^2}\,dxdy &= \int_{\frac{1}{b}}^{1}\int_{\frac{1}{y}}^{b}\frac{e^{y^2}}{x^2}dxdy = \int_{\frac{1}{b}}^{1} ye^{y^2}dy - \frac{1}{b}\int_{\frac{1}{b}}^{1} e^{y^2}dy \\
&= \frac{1}{2}\left[e^{y^2}\right]_{\frac{1}{b}}^{1} - \frac{1}{b}\int_{\frac{1}{b}}^{1} e^{y^2}dy = \frac{1}{2}\left[e - e^{\frac{1}{b^2}}\right] - \frac{1}{b}\int_{\frac{1}{b}}^{1} e^{y^2}dy
\end{aligned}$$

Finalmente, como $\lim\limits_{b\to+\infty} e^{\frac{1}{b^2}} = 1$ y $\lim\limits_{b\to+\infty}\frac{1}{b}\int_{\frac{1}{b}}^{1} e^{y^2}dy = 0$, resulta que

$$\boxed{\int_D \frac{e^{y^2}}{x^2}\,dxdy = \lim_{b\to+\infty}\int_{D_b}\frac{e^{y^2}}{x^2}\,dxdy = \frac{e-1}{2}.}$$

Problema 3. [2 pt] Sigui M el fragment de la semiesfera de radi $2a$ definida per les equacions $x^2+y^2+z^2=4a^2$ $z\geq 0$, comprès dintre del cilindre $x^2+y^2=2ax$. Sigui C la corba intersecció de la semiesfera i el cilindre, orientada de manera que la seva projecció al pla XY es recorri positivament.

(a) Calculeu l'àrea de M.

(b) Calculeu la circulació $\displaystyle\int_C \boldsymbol{F} d\boldsymbol{\ell}$, on $\boldsymbol{F}$ és el camp vectorial $\boldsymbol{F}(x,y,z)=(-y,x+1,4z^3)$.

Solución: Como $2a$ es el radio de la esfera, necesariamente $a\geq 0$ y de hecho $a>0$, ya que si $a=0$, entonces M se reduce al punto $(0,0,0)$ y por tanto, no es una superficie.

Si consideramos el disco $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x-a)^2+y^2<a^2\}$, entonces $\sigma\colon D\longrightarrow\mathbb{R}^3$ definida como $\sigma(x,y)=\left(x,y,\sqrt{4a^2-x^2-y^2}\right)$ es una parametrización de M. Además,

$$\boxed{\begin{aligned}\sigma_x&=\left(1,0,\frac{-x}{\sqrt{4a^2-x^2-y^2}}\right),\\ \sigma_y&=\left(0,1,\frac{-y}{\sqrt{4a^2-x^2-y^2}}\right)\\ \sigma_x\times\sigma_y&=\left(\frac{x}{\sqrt{4a^2-x^2-y^2}},\frac{y}{\sqrt{4a^2-x^2-y^2}},1\right)\end{aligned}}$$

de manera que la orientación inducida por M en la curva C corresponde a su proyección en el plano XY que se recorre positivamente (*en sentido antihorario*).

(a) Con las notaciones anteriores tenemos que

$$||\sigma_x\times\sigma_y||=\sqrt{\frac{x^2}{4a^2-x^2-y^2}+\frac{y^2}{4a^2-x^2-y^2}+1}=\frac{2a}{\sqrt{4a^2-x^2-y^2}}$$

lo que implica que

$$\boxed{\mathsf{a}(M)=\int_D ||\sigma_x\times\sigma_y||dxdy=2a\int_D\frac{dxdy}{\sqrt{4a^2-x^2-y^2}}}$$

Si consideramos $T\colon (0,+\infty)\times(0,2\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ el cambio a coordenadas polares dado por $T(r,\theta)=\big(r\cos(\theta), r\,\mathrm{sen}(\theta)\big)$, entonces, el jacobiano es $\det \mathsf{J}_T = r>0$ y además la desigualdad $x^2+y^2<2ax$ es equivalente a la desigualdad $r^2<2ar\cos(\theta)$; es decir $0<r<2a\cos(\theta)$, lo que implica que $\cos(\theta)>0$ y por tanto que $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$. En definitiva,

$$T^{-1}(D)=\Big\{(r,\theta): -\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2},\ 0<r<2a\cos(\theta)\Big\}$$

de manera que aplicando el Teorema del cambio de variable

$$\begin{aligned}
\mathsf{a}(M) &= 2a\int_D \frac{dxdy}{\sqrt{4a^2-x^2-y^2}} = 2a\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2a\cos(\theta)}\frac{r\,dr\,d\theta}{\sqrt{4a^2-r^2}}\\
&= 2a\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\Big[-\sqrt{4a^2-r^2}\Big]_0^{2a\cos(\theta)} = 2a\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\Big[2a-\sqrt{4a^2-4a^2\cos^2(\theta)}\Big]d\theta\\
&= 4a^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\Big[1-\sqrt{1-\cos^2(\theta)}\Big]d\theta = 4a^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\Big[1-|\,\mathrm{sen}(\theta)|\Big]d\theta\\
&= 8a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Big[1-\mathrm{sen}(\theta)\Big]d\theta = 8a^2\Big[\theta+\cos(\theta)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 8a^2\Big[\frac{\pi}{2}-1\Big] = 4a^2(\pi-2)
\end{aligned}$$

(b) Observemos primero que

$$\mathrm{rot}\,(\boldsymbol{F})(x,y,z)=\det\begin{bmatrix}\mathsf{i} & \mathsf{j} & \mathsf{k}\\ \partial_x & \partial_y & \partial_z\\ -y & x+1 & 4z^3\end{bmatrix}=(0,0,2)$$

Si aplicamos el Teorema de Kelvin-Stokes, resulta que

$$\begin{aligned}
\int_C \boldsymbol{F}d\boldsymbol{\ell} &= \int_M \mathrm{rot}\,(\boldsymbol{F})d\boldsymbol{S} = \int_D \langle \mathrm{rot}\,\big(\boldsymbol{F}(\sigma)\big), \sigma_x\times\sigma_y\rangle dxdy\\
&= \int_D \langle (0,0,2), \big(\tfrac{x}{\sqrt{4a^2-x^2-y^2}}, \tfrac{y}{\sqrt{4a^2-x^2-y^2}}, 1\big)\rangle dxdy = 2\mathsf{a}(D) = 2\pi a^2
\end{aligned}$$

Nota 1: La superficie M descrita es la superficie de Viviani y la curva C es la curva de Viviani, ver la Figura 1

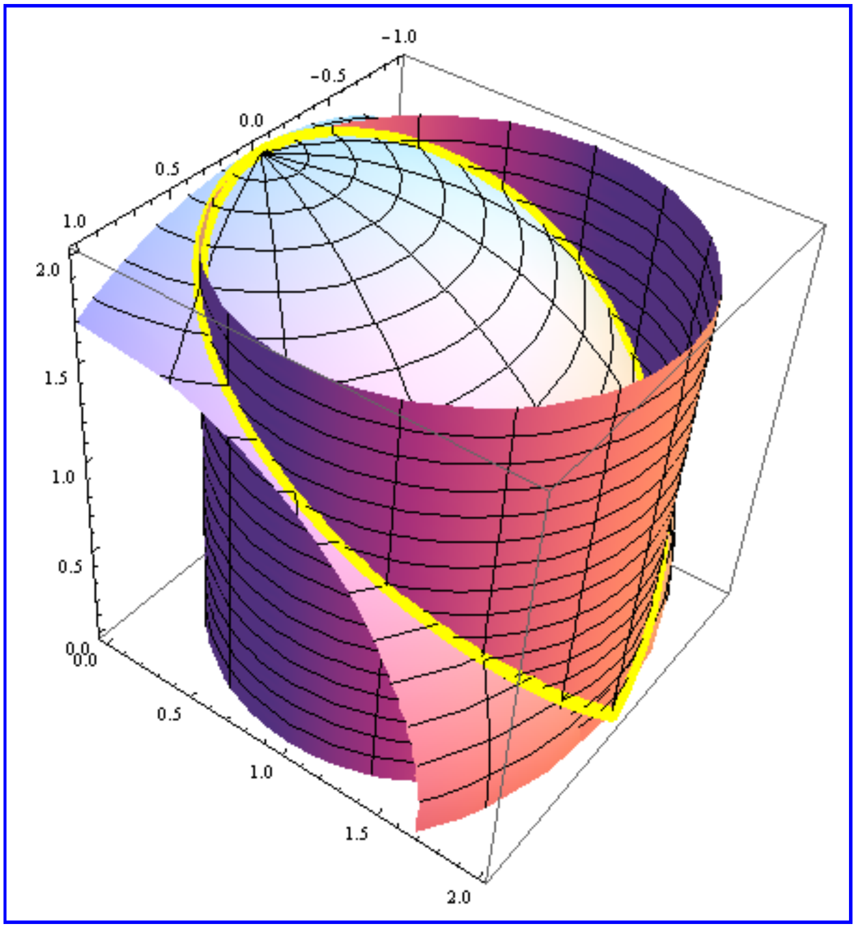

Figura 1: Superficie y curva de Viviani. (Fuente: forum.lawebdefisica.com)

Nota 2: Si describimos la superficie de Viviani en coordenadas cilíndricas, entonces una parametrización de M es $\tau\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida como $\tau(\theta, r) = \big(r\cos(\theta), r\,\mathrm{sen}(\theta), \sqrt{4a^2 - r^2}\big)$, donde $\Omega = \big\{(\theta, r) : -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2},\ 0 < r < 2a\cos(\theta)\big\}$. Como

$$\tau_\theta = \Big(-r\,\mathrm{sen}(\theta), r\cos(\theta), 0\Big) \ \text{ y } \ \tau_r = \Big(\cos(\theta), \mathrm{sen}(\theta), \frac{-r}{\sqrt{4a^2 - r^2}}\Big)$$

resulta que

$$\tau_\theta \times \tau_r = \Big(\frac{-r^2\cos(\theta)}{\sqrt{4a^2 - r^2}}, \frac{-r^2\,\mathrm{sen}(\theta)}{\sqrt{4a^2 - r^2}}, -r\Big)$$

lo que implica que $||\tau_\theta \times \tau_r|| = \dfrac{2ar}{\sqrt{4a^2 - r^2}}$ y por tanto que

$$\mathsf{a}(M) = 2a\int_\Omega \frac{r\,dr\,d\theta}{\sqrt{4a^2 - r^2}} = 2a\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2a\cos(\theta)} \frac{r\,dr\,d\theta}{\sqrt{4a^2 - r^2}} = 4a^2(\pi - 2)$$

Nota 3: Si consideramos las coordenadas esféricas $T\colon (-\pi,\pi)\times(0,\pi)\longrightarrow\mathbb{R}^3$, dadas por $T(\theta,\varphi)=\big(2a\cos(\theta)\operatorname{sen}(\varphi),2a\operatorname{sen}(\theta)\operatorname{sen}(\varphi),2a\cos(\varphi)\big)$, necesariamente $\varphi\in\big[0,\frac{\pi}{2}\big]$ para que $z\ge 0$, mientras que $\theta\in\big[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\big]$ puesto que $2ax\ge x^2+y^2\ge 0$ implica que $x\ge 0$.

Por otra parte, como

$$\boxed{\begin{aligned} x^2+y^2\le 2ax &\Longleftrightarrow 4a^2\cos^2(\theta)\operatorname{sen}^2(\varphi)+4a^2\operatorname{sen}^2(\theta)\operatorname{sen}^2(\varphi)\le 4a^2\cos(\theta)\operatorname{sen}(\varphi)\\ &\Longleftrightarrow \operatorname{sen}(\varphi)\le\cos(\theta)\end{aligned}}$$

una parametrización de de la superficie de Viviani en coordenadas esféricas, es $\eta\colon A\longrightarrow\mathbb{R}^3$ definida como $\eta(\theta,\varphi)=\big(2a\cos(\theta)\operatorname{sen}(\varphi),2a\operatorname{sen}(\theta)\operatorname{sen}(\varphi),2a\cos(\varphi)\big)$, donde

$$\begin{aligned} A&=\Big\{(\theta,\varphi):-\tfrac{\pi}{2}<\theta<\tfrac{\pi}{2},\ 0<\varphi<\tfrac{\pi}{2},\ \operatorname{sen}(\varphi)<\cos(\theta)\Big\}\\ &=\Big\{(\theta,\varphi):-\tfrac{\pi}{2}<\theta<\tfrac{\pi}{2},\ 0<\varphi<\operatorname{arc\,sen}\big(\cos(\theta)\big)\Big\}\end{aligned}.$$

Como

$$\begin{aligned}\eta_\theta&=2a\big(-\operatorname{sen}(\theta)\operatorname{sen}(\varphi),\cos(\theta)\operatorname{sen}(\varphi),0\big),\\ \eta_\varphi&=2a\big(\cos(\theta)\cos(\varphi),\operatorname{sen}(\theta)\cos(\varphi),-\operatorname{sen}(\varphi)\big)\\ \eta_\theta\times\eta_\varphi&=-4a^2\operatorname{sen}(\varphi)\big(\cos(\theta)\operatorname{sen}(\varphi),\operatorname{sen}(\theta)\operatorname{sen}(\varphi),\cos(\varphi)\big)\end{aligned}$$

resulta que $||\eta_\theta\times\eta_\varphi||=4a^2\operatorname{sen}(\varphi)$ y por tanto que

$$\begin{aligned}\mathsf{a}(M)&=4a^2\int_A\operatorname{sen}(\varphi)d\theta d\varphi=4a^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\operatorname{arc\,sen}(\cos(\theta))}\operatorname{sen}(\varphi)d\varphi d\theta\\ &=4a^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\Big[-\cos(\varphi)\Big]_0^{\operatorname{arc\,sen}(\cos(\theta))}d\theta=4a^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\Big[1-|\operatorname{sen}(\theta)|\Big]d\theta\\ &=8a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Big[1-\operatorname{sen}(\theta)\Big]d\theta=8a^2\Big[\theta+\cos(\theta)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=4a^2(\pi-2)\end{aligned}$$

Nota 4: Si describimos la circunferencia $\partial D=\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:(x-a)^2+y^2=a^2\big\}$ en coordenadas polares centradas en $(a,0)$, entonces $x=a+a\cos(\theta)$, $y=a\operatorname{sen}(\theta)$, $\theta\in(0,2\pi)$ y

$$z^2=4a^2-x^2-y^2=2a^2\big(1-\cos(\theta)\big)=4a^2\operatorname{sen}^2\Big(\frac{\theta}{2}\Big)$$

lo que implica que una parametrización de la curva de Viviani es $\alpha\colon(0,2\pi)\longrightarrow\mathbb{R}^3$ definida como

$$\alpha(\theta)=\Big(a\big(1+\cos(\theta)\big),a\operatorname{sen}(\theta),2a\operatorname{sen}\Big(\frac{\theta}{2}\Big)\Big)$$

y por tanto que

$$\begin{aligned}\int_C \boldsymbol{F} d\boldsymbol{\ell} &= \int_0^{2\pi} \langle \boldsymbol{F}\big(\alpha(\theta)\big), \alpha'(\theta)\rangle \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[a^2 + a(a+1)\cos(\theta) + 8a^4 \operatorname{sen}^3\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] d\theta \\ &= \left[a^2\theta + a(a+1)\operatorname{sen}(\theta) + 2a^4 \operatorname{sen}^4\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]_0^{2\pi} = 2\pi a^2\end{aligned}$$

Problema 4. [2 pt] Siguin α un nombre natural, $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, i la 1-forma diferencial $\omega = x^\alpha y dx + h(x)dy \in \Omega^1(\mathbb{R}^2)$.

(a) Calculeu $\displaystyle\int_S w$, on S és el segment que va des del punt $(0,0)$ al punt $(1,1)$.

(b) Calculeu $\displaystyle\int_P w$, on P és la poligonal que uneix els punts $(0,0)$, $(0,1)$ i $(1,1)$ en aquest ordre.

(c) Doneu la condició necessària y suficient per tal que la integral $\displaystyle\int_C w$, on C és una corba regular arbitrària, només depengui de ∂C. Quines són las funcions h que satisfan aquesta condició ?

Solución: Supongamos que $C \subset \mathbb{R}^2$ es una curva regular y que $\alpha\colon I \longrightarrow \mathbb{R}^2$, donde $\alpha(t) = \big(\alpha_1(t), \alpha_2(t)\big)$ es una parametrización de C. Entonces,

$$\boxed{\alpha^*(dx) = \alpha_1'(t)dt, \quad \alpha^*(dy) = \alpha_2'(t)dt}$$

lo que implica que

$$\boxed{\begin{aligned}\alpha^*(\omega) &= \alpha^*\big(x^\alpha y dx + h(x)dy\big) = \alpha^*\big(x^\alpha y dx\big) + \alpha^*\big(h(x)dy\big) \\ &= \alpha^*\big(x^\alpha y\big)\alpha^*(dx) + \alpha^*\big(h(x)\big)\alpha^*(dy) \\ &= \alpha_1(t)^\alpha \alpha_2(t)\alpha_1'(t)dt + h\big(\alpha_1(t)\big)\alpha_2'(t)dt \\ &= \big[\alpha_1(t)^\alpha \alpha_2(t)\alpha_1'(t) + h\big(\alpha_1(t)\big)\alpha_2'(t)\big]dt\end{aligned}}$$

y por tanto que

$$\boxed{\int_C \omega = \int_I \alpha^*(\omega) = \int_I \alpha_1(t)^\alpha \alpha_2(t)\alpha_1'(t)dt + \int_I h\big(\alpha_1(t)\big)\alpha_2'(t)dt}$$

(a) Una parametrización del segmento S es $\alpha\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, dada por $\alpha(t) = (t,t)$ y por tanto,

$$\boxed{\int_S \omega = \int_0^1 t^{\alpha+1}dt + \int_0^1 h(t)dt = \frac{1}{\alpha+2} + \int_0^1 h(t)dt}$$

(b) Si S_1 es el segmento que une $(0,0)$ con $(0,1)$ y S_2 es el segmento que une $(0,1)$ con $(1,1)$, resulta que $\displaystyle\int_P \omega = \int_{S_1} \omega + \int_{S_2} \omega$

Como una parametrización del segmento S_1 es $\alpha\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, dada por $\alpha(t) = (0,t)$ y una parametrización del segmento S_2 es $\beta\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, dada por $\beta(t) = (t,1)$, obtenemos que

$$\boxed{\int_{S_1} \omega = \int_0^1 h(0)dt = h(0) \ \text{ e } \ \int_{S_2} \omega = \int_0^1 t^\alpha dt = \frac{1}{\alpha+1},}$$

lo que implica que

$$\boxed{\int_P \omega = \int_{S_1} \omega + \int_{S_2} \omega = h(0) + \frac{1}{\alpha+1}}$$

(c) La condición necesaria y suficiente para que se satisfaga que $\displaystyle\int_C \omega$ solo depende de ∂C es que ω sea exacta. Como $\mathbb{R}^2$ es estrellado, la anterior condición es equivalente a que ω sea cerrada; es decir

$$\boxed{0 = d\omega = x^\alpha dy \wedge dx + h'(x)dx \wedge dy = \Big[h'(x) - x^\alpha\Big]dx \wedge dy}$$

En definitiva,

> la condición necesaria y suficiente para que $\displaystyle\int_C \omega$ solo dependa de ∂C es que $h'(x) = x^\alpha$ o, equivalentemente, que $h(x) = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + k$, donde $k \in \mathbb{R}$.

Nota 1: La 1-forma ω es exacta si y sólo si existe $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ tal que $df = \omega$; es decir tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x^\alpha y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = h(x)$$

lo que implica que $f(x,y) = h(x)y + \phi(x)$ y por tanto que $\dfrac{\partial f}{\partial x} = h'(x)y + \phi'(x) = x^\alpha y$. Como la anterior identidad ha de satisfacerse para cada $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, tomando $y = 0$ obtenemos que $\phi'(x) = 0$, de donde $h'(x)y = x^\alpha y$ para cada $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ y por tanto, $h'(x) = x^\alpha$. En definitiva, ω es exacta si y sólo si $h'(x) = x^\alpha$ y en este caso, las primitivas de ω están determinadas por la identidad $f(x,y) = \dfrac{x^{\alpha+1}y}{\alpha+1} + k$.

Nota 2: Con las notaciones del problema, si $-P$ es la poligonal que une los puntos $(0,0)$, $(0,1)$ y $(1,1)$ con la orientación opuesta a P; es decir la poligonal que une $(1,1)$, $(0,1)$ y $(0,0)$ recorrida en ese orden, y $T = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1,\ x \le y \le 1\big\}$, entonces $\partial T = S \cup -P$ y aplicando el Teorema de Stokes, resulta que

$$\int_S \omega - \int_P \omega = \int_S \omega + \int_{-P} \omega = \int_{\partial T} \omega = \int_T d\omega$$

lo que implica que

$$\int_P \omega = \int_S \omega - \int_T d\omega$$

Por otra parte, como $d\omega = \Big[h'(x) - x^\alpha\Big] dx \wedge dy$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_T d\omega &= \int_0^1 \int_x^1 \Big[h'(x) - x^\alpha\Big] dx dy = \int_0^1 \Big[h'(x) - x^\alpha\Big](1-x)dx \\
&= \begin{bmatrix} u = 1-x, & du = -dx \\ dv = [h'(x) - x^\alpha]dx, & v = h(x) - \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \end{bmatrix} \\
&= \left[(1-x)\left[h(x) - \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]\right]_0^1 + \int_0^1 \left[h(x) - \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]dx \\
&= -h(0) + \int_0^1 h(x)dx - \left[\frac{x^{\alpha+2}}{(\alpha+1)(\alpha+2)}\right]_0^1 \\
&= -h(0) + \int_0^1 h(x)dx - \frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)}
\end{aligned}$$

En definitiva,

$$\begin{aligned}
\int_P \omega &= \int_S \omega - \int_T d\omega = \frac{1}{\alpha+2} + \int_0^1 h(t)dt + h(0) - \int_0^1 h(x)dx + \frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)} \\
&= h(0) + \frac{1}{\alpha+1}
\end{aligned}$$

Nota 3: Con las notaciones del problema $\int_S \omega = \int_P \omega$ si y sólo si

$$\int_0^1 h(t)dt = h(0) + \frac{1}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+2} = h(0) + \frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)}$$

La condición anterior es satisfecha por infinitas familias de funciones: Si $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, es tal que $g(0) \neq \int_0^1 g(t)dt$, entonces basta considerar

$$h(x) = \frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)}\Big(\int_0^1 g(t)dt - g(0)\Big)^{-1} g(x) + k, \quad k \in \mathbb{R}$$

Por otra parte, es claro que si $h(x) = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + k$, entonces $h(0) = k$ y además

$$\int_0^1 h(t)dt = \int_0^1 \Big[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + k\Big]dt = k + \Big[\frac{x^{\alpha+2}}{(\alpha+1)(\alpha+2)}\Big]_0^1 = k + \frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)}$$