EXAMEN 1

SOLUCIONS
Novembre de 2017

Càlcul Integral, Curs 2017-18, FME

Problema 1.

(a) Si $a > 0$, determineu el caràcter de la sèrie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (a-\sqrt{a})(a-\sqrt[3]{a})\cdots(a-\sqrt[n]{a})$

(b) Si $\alpha \in \mathbb{R}$, determineu el caràcter de la integral impropia $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{1+x}\,dx\,.$

Solución: a) Anomenem $a_n = (a-\sqrt{a})(a-\sqrt[3]{a})\cdots(a-\sqrt[n]{a})$.

Observem que, si $0 < a < 1$ es tracta d'una sèrie alternada, i si $a \geq 1$ és de termes positius.

(i) En el cas $\boxed{0 < a < 1}$ estudiem la convergència absoluta. Si apliquem el criteri del quocient obtenim

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} |a - \sqrt[n+1]{a}| = |a-1| = 1-a < 1}$$

i, per tant, la sèrie és absolutament convergent i aleshores convergent en aquest cas.

(ii) Si $\boxed{a \geq 1,}$ apliquem com abans el criteri del quocient i obtenim $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a-1$ i, per tant, la sèrie és convergent si $1 \leq a < 2$, i divergent si $a > 2$. En el cas $\boxed{a = 2}$ apliquem el criteri de Raabe:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n+1]{2} - 1) = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{1/(n+1)} - 1}{1/n}.}$$

Aquest límit el podem calcular de la manera següent, on fem ús de la regla de L'Hôpital:

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{2^{1/(x+1)}-1}{1/x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\ln 2\cdot 2^{1/(x+1)}\cdot 1/(x+1)^2}{-1/x^2}=\ln 2<1,}$$

i, per tant, la sèrie es divergent en aquest cas. En resum,

la sèrie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(a-\sqrt{a})(a-\sqrt[3]{a})\cdots(a-\sqrt[n]{a})$ és <u>convergent si $0<a<2$, i divergent si $a\geq 2$.</u>

b) Observem primer que la integral donada és de primera espècie si $\alpha\geq 0$, i de primera i segona espècie si $\alpha<0$, i que la funció dins de la integral és no negativa.

(i) En el cas $\boxed{\alpha\geq 0,}$ com que la funció $\dfrac{x^\alpha}{1+x}$ és contínua i per tant integrable en $[0,1]$, el caràcter de la integral donada serà el mateix que el de la integral de la mateixa funció en $[1,+\infty)$. Si apliquem el criteri de comparació en el límit amb $1/x^r$:

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha/(1+x)}{1/x^r}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\alpha+r}}{1+x}}$$

és diferent de zero i de infinit si, i només si, $\alpha+r=1$; aleshores la integral tindrà el mateix caràcter que la de $1/x^r$ si $\alpha=1-r$. Ara bé, $\alpha\geq 0$ implica $r\leq 1$ i per tant integral divergent.

(ii) En el cas $\boxed{\alpha<0,}$ considerem $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^\alpha}{1+x}\,dx=\int_0^1\frac{x^\alpha}{1+x}\,dx+\int_1^{+\infty}\frac{x^\alpha}{1+x}\,dx.$

Per a la segona integral procedim com abans i obtenim que convergeix per a tota $\alpha<0$. Per a la primera,

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+}\frac{x^\alpha/(1+x)}{1/x^r}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^{\alpha+r}}{1+x}}$$

és diferent de zero i de infinit si, i només si, $\alpha+r=0$. Aleshores, $\alpha=-r$, i la convergència només és possible si $r<1$, és a dir, $\alpha>-1$. En resum,

la integral $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^\alpha}{1+x}\,dx$ és <u>convergent si, i només si, $-1<\alpha<0$.</u>

Problema 2. Sigui $R \subset \mathbb{R}^3$ el recinte del primer octant $(x, y, z \geq 0)$ limitat pels paraboloides $z = x^2 + y^2$, $z = 2x^2 + 2y^2$, les superfícies $xy = 1$, $xy = 4$, i els plans $y = x$, $y = 5x$. Calculeu la integral $\displaystyle\int_R xyz\,dxdydz$.

Solución: El recinto de integración puede describirse como

$$R = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq xy \leq 4,\ \ x \leq y \leq 5x,\ \ x^2 + y^2 \leq z \leq 2(x^2 + y^2)\Big\}$$

cuya proyección en el plano $\{z = 0\}$ está representada en la siguiente Figura

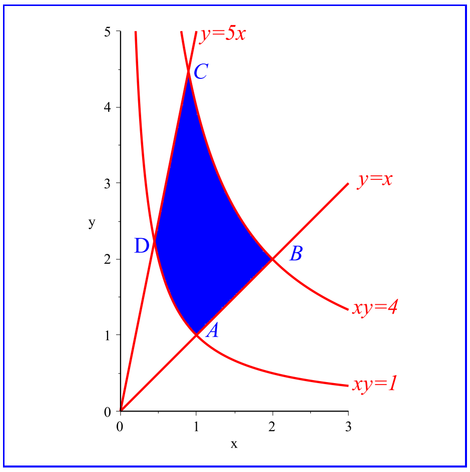

Figura 1: Proyección de R

La recta $y = x$ corta a las hipérbola $xy = 1$ en el punto $A = (1, 1)$ y a la hipérbola $xy = 4$ en el punto $B = (2, 2)$, mientras que la recta $y = 5x$ corta a la hipérbola $xy = 1$ en el punto $D = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \sqrt{5}\right)$ y a la hipérbola $xy = 4$ en el punto $C = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, 2\sqrt{5}\right)$

Como el recinto de integración puede describirse como

$$R = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq xy \leq 4,\ \ 1 \leq \frac{y}{x} \leq 5,\ \ 1 \leq \frac{z}{x^2 + y^2} \leq 2\Big\}$$

consideraremos las variables $u = xy$, $v = \dfrac{y}{x}$ y $w = \dfrac{z}{x^2 + y^2}$. Resulta entonces que $y = xv$ y por tanto $u = x^2 v$, lo que implica que $x = \sqrt{\dfrac{u}{v}}$, $y = \sqrt{uv}$ y $z = \dfrac{uw}{v}(1+v^2)$. En consecuencia, $T\colon (0,+\infty)^3 \longrightarrow (0,+\infty)^3$ dada por $T(x,y,z) = \Big(xy, \dfrac{y}{x}, \dfrac{z}{x^2+y^2}\Big)$ es biyectiva. Como

$$\mathsf{D}_T = \begin{bmatrix} y & x & 0 \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} & 0 \\ \frac{-2xz}{(x^2+y^2)^2} & \frac{-2yz}{(x^2+y^2)^2} & \frac{1}{x^2+y^2} \end{bmatrix} \Longrightarrow \mathsf{J}_T = \frac{2y}{x(x^2+y^2)} = \frac{2v^2}{u(1+v^2)} > 0$$

obtenemos que T es un cambio de variable. Si consideramos $\Phi = T^{-1}$, resulta que su jacobiano está dado por $\mathsf{J}_\Phi = \dfrac{u(1+v^2)}{2v^2}$ y además, $\Phi^{-1}(R) = T(R) = [1,4]\times[1,5]\times[1,2]$. Por otra parte, $xyz = \dfrac{u^2 w}{v}(1+v^2)$ y aplicando el teorema de cambio de variables,

$$\begin{aligned}
\int_R xyz\,dxdydz &= \frac{1}{2}\int_1^4\int_1^5\int_1^2 \frac{u^3 w(1+v^2)^2}{v^3}dudvdw \\
&= \frac{1}{2}\Big(\int_1^4 u^3 du\Big)\Big(\int_1^5 \Big[v + \frac{2}{v} + \frac{1}{v^3}\Big]dv\Big)\Big(\int_1^2 wdw\Big) \\
&= \frac{1}{16}\Big[u^4\Big]_1^4\Big[w^2\Big]_1^2\Big[\frac{v^2}{2} + 2\log(v) - \frac{1}{2v^2}\Big]_1^5 \\
&= \frac{765}{16}\Big[\frac{25}{2} + 2\log(5) - \frac{1}{50}\Big] = \frac{765}{8}\log(5) + \frac{5967}{10}
\end{aligned}$$

Nota: El problema puede resolver de otras cuatro formas diferentes, ver el Apéndice.

Problema 3. Siguin a, b nombres reals tals que $0 < a < b$.

(a) Justiqueu que les integrals de Riemann

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\log(x)}dx, \qquad \int_{[0,1]\times[a,b]} x^y dxdy$$

existeixen.

(b) Trobeu el valor de la primera, calculant prèviament la segona de dues maneres diferents.

Solución: (a) Si definimos la función $g\colon (0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$ como $g(x) = \dfrac{x^b - x^a}{\log(x)}$, entonces g es continua y además, aplicando la regla de L'Hôpital

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} g(x) &= \lim_{x\to 0^+} \frac{x^b - x^a}{\log(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{bx^{b-1} - ax^{a-1}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} (bx^b - ax^a) = 0,\\
\lim_{x\to 1^-} g(x) &= \lim_{x\to 1^-} \frac{x^b - x^a}{\log(x)} = \lim_{x\to 1^-} \frac{bx^{b-1} - ax^{a-1}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 1^-} (bx^b - ax^a) = b - a.
\end{aligned}$$

En definitiva, si definimos $g(0) = 0$ y $g(1) = b - a$, entonces g es continua en $[0,1]$ y por tanto integrable Riemann.

Si consideramos la función $f\colon (0,1] \times [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = x^y = e^{y\log(x)}$, entonces f es continua. Además, para cada $\hat{y} \in [a,b]$ resulta que

$$\lim_{(x,y)\to(0,\hat{y})} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,\hat{y})} e^{y\log(x)} = 0$$

de manera que, definiendo $f(0,y) = 0$ para cada $y \in [a,b]$ resulta que f es continua en $[0,1] \times [a,b]$ y por tanto integrable Riemann.

(b) Como f es continua en $[0,1] \times [a,b]$, podemos aplicar el Teorema de Fubini. Resulta entonces que

$$\begin{aligned}
\int_{[0,1]\times[a,b]} x^y\,dxdy &= \int_0^1 \left[\int_a^b x^y\,dy\right] dx = \int_0^1 \left[\frac{x^y}{\log(x)}\right]_a^b dx = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\log(x)} dx\\
\int_{[0,1]\times[a,b]} x^y\,dxdy &= \int_a^b \left[\int_0^1 x^y\,dx\right] dy = \int_a^b \frac{dy}{1+y}\left[x^{1+y}\right]_0^1 = \int_a^b \frac{dy}{1+y}\\
&= \Big[\log(1+y)\Big]_a^b = \log\left(\frac{1+b}{1+a}\right)
\end{aligned}$$

En resumen,

$$\text{si } 0 < a < b, \text{ entonces } \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\log(x)}\,dx = \log\left(\frac{1+b}{1+a}\right).$$

Problema 4.

(a) Siguin $A \subset \mathbb{R}^n$ un rectangle compacte $f, g \colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ funcions fitades. Proveu que, si $f \leq g$, llavors $\underline{\int_A} f \leq \underline{\int_A} g$ i $\overline{\int_A} f \leq \overline{\int_A} g$.

(b) Siguin $A \subset \mathbb{R}^n$ un rectangle compacte $g \colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció. Se suposa que, per a tot $\varepsilon > 0$, existeixen funcions $f, h \colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ *integrables Riemann* tals que $f \leq g \leq h$ i $\int_A h - \int_A f < \varepsilon$. Proveu que g també es integrable Riemann.

(c) Sigui $S \subset \mathbb{R}^n$ un subconjunt. Se suposa que, per a tot $\varepsilon > 0$, existeixen conjunts $R, T \subset \mathbb{R}^n$ *mesurables Jordan* tals que $R \subset S \subset T$ i $\mathrm{v}(T) - \mathrm{v}(R) < \varepsilon$. Proveu que S també es mesurable Jordan.

Solución: (a) Si $B \subset A$, la desigualdad $f \leq g$ implica que $\inf_{x \in B}\{f(x)\} \leq \inf_{x \in B}\{g(x)\}$ y $\sup_{x \in B}\{f(x)\} \leq \sup_{x \in B}\{g(x)\}$.

Si $\mathcal{P}$ es una partición de A y para cada función acotada $k \colon A \longrightarrow \mathbb{R}$, $S(\mathcal{P}, k)$ y $s(\mathcal{P}, k)$ son las sumas superiores e inferiores, respectivamente, entonces la desigualdad $f \leq g$ implica que $s(\mathcal{P}, f) \leq s(\mathcal{P}, g)$ y $S(\mathcal{P}, f) \leq S(\mathcal{P}, g)$, y en definitiva que

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{\int_A} f &= \sup_{\mathcal{P}}\{s(\mathcal{P}, f)\} \leq \sup_{\mathcal{P}}\{s(\mathcal{P}, g)\} = \underline{\int_A} g \\ \overline{\int_A} f &= \inf_{\mathcal{P}}\{s(\mathcal{P}, f)\} \leq \inf_{\mathcal{P}}\{s(\mathcal{P}, g)\} = \overline{\int_A} g \end{aligned}}$$

(b) Recordemos que una función acotada $k \colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ es integrable Riemann si y sólo si $\underline{\int_A} k = \overline{\int_A} k$ y ese valor común es $\int_A k$.

Si tomamos $\varepsilon = 1$, existen funcions $f, h \colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ integrables Riemann tales que $f \leq g \leq h$ y por tanto, g está acotada en A. Por otra parte, para cada $\varepsilon > 0$ existen funciones $f_\varepsilon, h_\varepsilon \colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ integrables Riemann tales que $f_\varepsilon \leq g \leq h_\varepsilon$ y además $\int_A h_\varepsilon - \int_A f_\varepsilon < \varepsilon$. Aplicando la parte (a),

$$\boxed{\int_A f_\varepsilon = \underline{\int_A} f_\varepsilon \leq \underline{\int_A} g \leq \overline{\int_A} g \leq \overline{\int_A} h_\varepsilon = \int_A h_\varepsilon \Longrightarrow \overline{\int_A} g - \underline{\int_A} g \leq \int_A h_\varepsilon - \int_A f_\varepsilon < \varepsilon}$$

En definitiva,

$$\boxed{0 \le \overline{\int_A} g - \underline{\int_A} g < \varepsilon \text{ para cada } \varepsilon > 0; \text{ es decir, } \overline{\int_A} g - \underline{\int_A} g = 0 \text{ y por tanto, } g \text{ es integrable Riemann}}$$

(c) Recordemos que un conjunto acotado $A \subset \mathbb{R}^n$ es medible Jordan si y sólo si χ_A es integrable Riemann y en este caso $\mathsf{v}(A) = \displaystyle\int_B \chi_A$, donde B es un rectángulo compacto que contiene a A.

Si tomamos $\varepsilon = 1$, existen conjuntos R y T medibles Jordan, y por tanto acotados, tales que $R \subset S \subset T$ lo que implica que S está acotado. Como las inclusiones $R \subset S \subset T$ son equivalentes a que $\chi_R \le \chi_S \le \chi_T$, el resultado es consecuencia directa del apartado anterior aplicado a χ_S.

Apéndice: Tal y como hemos anunciado, el Problema 2 puede resolverse de cinco maneras diferentes entre sí. Todas estas variantes han aparecido en la realización del examen por parte de la/os alumnas/os del curso 2017-18. A continuación detallaremos esos diferentes enfoques, ordenados de menor a mayor volumen de cálculos efectuados. La resolución que ha aparecido en el Problema 2 corresponde a la que menos cálculos precisa.

Método (2): Como el recinto de integración puede describirse como

$$\boxed{R = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \le xy \le 4,\ 1 \le \frac{y}{x} \le 5,\ x^2 + y^2 \le z \le 2(x^2 + y^2)\right\}}$$

consideraremos las variables $u = xy$ y $v = \dfrac{y}{x}$. Resulta entonces que $y = xv$ y por tanto $u = x^2 v$, lo que implica que $x = \sqrt{\dfrac{u}{v}}$ e $y = \sqrt{uv}$. En consecuencia, $T\colon (0, +\infty)^3 \longrightarrow (0, +\infty)^3$ dada por $T(x, y, z) = \left(xy, \dfrac{y}{x}, z\right)$ es biyectiva. Como

$$\boxed{\mathsf{D}_T = \begin{bmatrix} y & x & 0 \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \mathsf{J}_T = \frac{2y}{x} = 2v > 0}$$

obtenemos que T es un cambio de variable. Si consideramos $\Phi = T^{-1}$, resulta que $\mathsf{J}_\Phi = \dfrac{1}{2v}$, $x^2+y^2 = \dfrac{u}{v}(1+v^2)$ y además,

$$\Phi^{-1}(R) = T(R) = \Big\{(u,v,z)\in(0,+\infty)^3 : 1\le u\le 4,\ \ 1\le v\le 5,\ \ \frac{u}{v}(1+v^2)\le z\le \frac{2u}{v}(1+v^2)\Big\},$$

de manera que como $xyz = uz$, aplicando el teorema de cambio de variables,

$$\begin{aligned}
\int_R xyz\,dxdydz &= \frac{1}{2}\int_1^4\int_1^5\int_{\frac{u}{v}(1+v^2)}^{\frac{2u}{v}(1+v^2)}\frac{uz}{v}dudvdz = \frac{1}{4}\int_1^4\int_1^5\Big[z^2\Big]_{\frac{u}{v}(1+v^2)}^{\frac{2u}{v}(1+v^2)}\frac{u}{v}dudv\\
&= \frac{3}{4}\int_1^4\int_1^5\frac{u^3}{v^3}(1+v^2)^2dudv = \frac{3}{4}\left(\int_1^4 u^3du\right)\left(\int_1^5\frac{(1+v^2)^2}{v^3}dv\right)\\
&= \frac{3}{16}\Big[u^4\Big]_1^4\int_1^5\Big[v+\frac{2}{v}+\frac{1}{v^3}\Big]dv = \frac{765}{16}\Big[\frac{v^2}{2}+2\log(v)-\frac{1}{2v^2}\Big]_1^5\\
&= \frac{765}{16}\Big[\frac{312}{25}+2\log(5)\Big] = \frac{765}{8}\log(5)+\frac{5967}{10}
\end{aligned}$$

Método (3), Coordenadas cilíndricas: Consideremos $T\colon (0,+\infty)\times(0,2\pi)\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^2$, el cambio a coordenadas cilíndricas dado por $T(r,\theta,z) = \big(r\cos(\theta), r\operatorname{sen}(\theta), z\big)$. Entonces, el jacobiano del cambio es $\det \mathsf{J}_T = r$ y si $\theta_0 = \operatorname{arctg}(5)\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$

$$T^{-1}(R) = \Big\{\frac{\pi}{4}\le\theta\le\theta_0,\ \ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\operatorname{sen}(2\theta)}}\le r\le\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\operatorname{sen}(2\theta)}},\ \ r^2\le z\le 2r^2\Big\}$$

de manera que aplicando el teorema de cambio de variables,

$$\int_R xyz\,dxdydz = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\theta_0}\int_{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\operatorname{sen}(2\theta)}}}^{\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\operatorname{sen}(2\theta)}}}\int_{r^2}^{2r^2} zr^3\operatorname{sen}(2\theta)\,drd\theta dz$$

$$= \frac{1}{4}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\theta_0}\int_{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\operatorname{sen}(2\theta)}}}^{\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\operatorname{sen}(2\theta)}}} r^3\operatorname{sen}(2\theta)\Big[z^2\Big]_{r^2}^{2r^2} drd\theta dz = \frac{3}{4}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\theta_0}\int_{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\operatorname{sen}(2\theta)}}}^{\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\operatorname{sen}(2\theta)}}} r^7\operatorname{sen}(2\theta)\,drd\theta$$

$$= \frac{3}{32}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\theta_0}\operatorname{sen}(2\theta)\Big[r^8\Big]_{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\operatorname{sen}(2\theta)}}}^{\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\operatorname{sen}(2\theta)}}} d\theta = \frac{765}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\theta_0}\frac{d\theta}{\operatorname{sen}^3(2\theta)} = \left[\begin{array}{rl} \operatorname{tg}(\theta) = t & \\ \operatorname{sen}(\theta) = & \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}} \\ \cos(\theta) = & \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}} \\ d\theta = & \dfrac{dt}{1+t^2} \end{array}\right]$$

$$\Longrightarrow \int\frac{d\theta}{\operatorname{sen}^3(2\theta)} = \int\frac{(1+t^2)^2}{8t^3}dt = \frac{1}{8}\int\left[\frac{1}{t^3}+\frac{2}{t}+t\right]dt = -\frac{1}{16t^2}+4\log(t)+\frac{t^2}{16}$$

$$= \frac{765}{32}\left[4\log\big(\operatorname{tg}(\theta)\big) - \frac{1}{\operatorname{sen}^2(\theta)} + \frac{1}{\cos^2(\theta)}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\theta_0}$$

$$= \frac{765}{32}\left[4\log(5)+26-\frac{26}{25}\right] = \frac{765}{8}\left[\log(5)+\frac{156}{25}\right] = \frac{765}{8}\log(5)+\frac{5967}{10}$$

donde hemos tenido en cuenta que como $\operatorname{tg}(\theta_0)=5$, entonces $\operatorname{sen}^2(\theta_0)=\dfrac{25}{26}$ y $\cos^2(\theta_0)=\dfrac{1}{26}$.

Método (4): El recinto de integración puede expresarse como unión de tres regiones elementales, cuyas proyecciones en el plano $\{z=0\}$ se muestran en la siguiente Figura

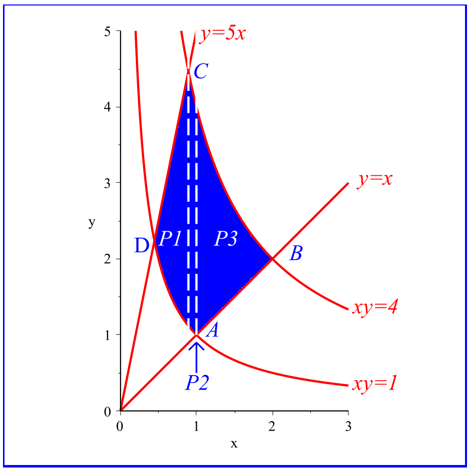

Figura 2: Proyección de R

Por tanto, $R = R_1 \cup R_2 \cup R_3$, donde

$$R_1 = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{1}{\sqrt{5}} \le x \le \frac{2}{\sqrt{5}},\ \frac{1}{x} \le y \le 5x,\ x^2+y^2 \le z \le 2(x^2+y^2)\Big\},$$
$$R_2 = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{2}{\sqrt{5}} \le x \le 1,\ \frac{1}{x} \le y \le \frac{4}{x},\ x^2+y^2 \le z \le 2(x^2+y^2)\Big\},$$
$$R_3 = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \le x \le 2,\ x \le y \le \frac{4}{x},\ x^2+y^2 \le z \le 2(x^2+y^2)\Big\}.$$

Como

$$\begin{aligned}
\int_{R_1} xyzdxdydz &= \int_{\frac{1}{\sqrt{5}}}^{\frac{2}{\sqrt{5}}}\int_{\frac{1}{x}}^{5x}\int_{x^2+y^2}^{2(x^2+y^2)} xyzdxdydz = \int_{\frac{1}{\sqrt{5}}}^{\frac{2}{\sqrt{5}}}\int_{\frac{1}{x}}^{5x}\Big[\frac{z^2}{2}\Big]_{x^2+y^2}^{2(x^2+y^2)} xydxdy \\
&= \frac{3}{2}\int_{\frac{1}{\sqrt{5}}}^{\frac{2}{\sqrt{5}}}\int_{\frac{1}{x}}^{5x}(x^2+y^2)^2xydxdy = \frac{1}{4}\int_{\frac{1}{\sqrt{5}}}^{\frac{2}{\sqrt{5}}}\Big[(x^2+y^2)^3\Big]_{\frac{1}{x}}^{5x} xdxdy \\
&= \frac{1}{4}\int_{\frac{1}{\sqrt{5}}}^{\frac{2}{\sqrt{5}}}\Big[26^3x^7 - \frac{(x^4+1)^3}{x^5}\Big]dx = \frac{1}{4}\int_{\frac{1}{\sqrt{5}}}^{\frac{2}{\sqrt{5}}}\Big[17575x^7 - 3x^3 - \frac{3}{x} - \frac{1}{x^5}\Big]dx \\
&= \frac{1}{32}\Big[17575x^8 - 6x^4 - 24\log(x) + \frac{2}{x^4}\Big]_{\frac{1}{\sqrt{5}}}^{\frac{2}{\sqrt{5}}} = \frac{56961}{256} - \frac{3}{4}\log(2), \\
\int_{R_2} xyzdxdydz &= \int_{\frac{2}{\sqrt{5}}}^{1}\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{4}{x}}\int_{x^2+y^2}^{2(x^2+y^2)} xyzdxdydz = \int_{\frac{2}{\sqrt{5}}}^{1}\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{4}{x}}\Big[\frac{z^2}{2}\Big]_{x^2+y^2}^{2(x^2+y^2)} xydxdy \\
&= \frac{3}{2}\int_{\frac{2}{\sqrt{5}}}^{1}\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{4}{x}}(x^2+y^2)^2xydxdy = \frac{1}{4}\int_{\frac{2}{\sqrt{5}}}^{1}\Big[(x^2+y^2)^3\Big]_{\frac{1}{x}}^{\frac{4}{x}} xdxdy \\
&= \frac{1}{4}\int_{\frac{2}{\sqrt{5}}}^{1}\Big[\frac{(x^4+16)^3-(x^4+1)^3}{x^5}\Big]dx = \frac{1}{4}\Big[\frac{45}{4}x^4 + 765\log(x) - \frac{4095}{4x^4}\Big]_{\frac{2}{\sqrt{5}}}^{1} \\
&= \frac{185571}{1280} - \frac{765}{4}\log(2) + \frac{765}{8}\log(5), \\
\int_{R_3} xyzdxdydz &= \int_{1}^{2}\int_{x}^{\frac{4}{x}}\int_{x^2+y^2}^{2(x^2+y^2)} xyzdxdydz = \int_{1}^{2}\int_{x}^{\frac{4}{x}}\Big[\frac{z^2}{2}\Big]_{x^2+y^2}^{2(x^2+y^2)} xydxdy \\
&= \frac{3}{2}\int_{1}^{2}\int_{x}^{\frac{4}{x}}(x^2+y^2)^2xydxdy = \frac{1}{4}\int_{1}^{2}\Big[(x^2+y^2)^3\Big]_{x}^{\frac{4}{x}} xdxdy \\
&= \frac{1}{4}\int_{1}^{2}\Big[-7x^7 + 48x^3 + \frac{768}{x} + \frac{4096}{x^5}\Big]dx \\
&= \frac{1}{4}\Big[-\frac{7}{8}x^8 + 12x^4 + 768\log(x) + \frac{1024}{x^4}\Big]_{1}^{2} = \frac{7335}{32} + 192\log(2),
\end{aligned}$$

obtenemos que

$$\boxed{\int_R xyzdxdydz = \int_{R_1} xyzdxdydz + \int_{R_2} xyzdxdydz + \int_{R_3} xyzdxdydz = \frac{5967}{10} + \frac{765}{8}\log(5)}$$

Método (5): El recinto de integración puede expresarse como unión de tres regiones elementales, cuyas proyecciones en el plano $\{z = 0\}$ se muestran en la siguiente Figura

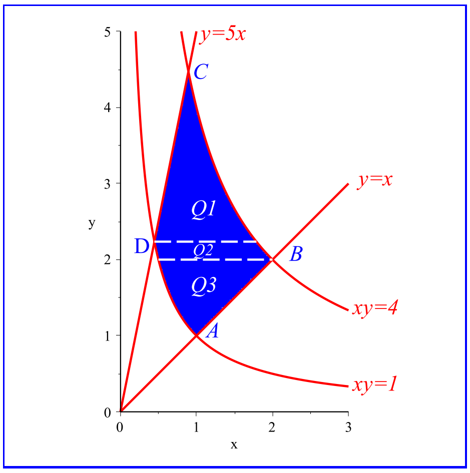

Figura 3: Proyección de R

Por tanto, $R = R_1 \cup R_2 \cup R_3$, donde

$$\boxed{\begin{aligned} R_1 &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \le y \le 2,\ \frac{1}{y} \le x \le y,\ x^2+y^2 \le z \le 2(x^2+y^2)\right\}, \\ R_2 &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2 \le y \le \sqrt{5},\ \frac{1}{y} \le x \le \frac{4}{y},\ x^2+y^2 \le z \le 2(x^2+y^2)\right\}, \\ R_3 &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{5} \le y \le 2\sqrt{5},\ \frac{y}{5} \le x \le \frac{4}{y},\ x^2+y^2 \le z \le 2(x^2+y^2)\right\}. \end{aligned}}$$

Calcularemos la integral de xyz sobre cada uno de los recintos y aplicaremos la aditividad de la integral para realizar la evaluación sobre el recinto propuesto:

Como

$$\int_{R_1} xyzdxdydz = \int_1^2 \int_{\frac{1}{y}}^{y} \int_{x^2+y^2}^{2(x^2+y^2)} xyzdxdydz = \int_1^2 \int_{\frac{1}{y}}^{y} \left[\frac{z^2}{2}\right]_{x^2+y^2}^{2(x^2+y^2)} xydxdy$$
$$= \frac{3}{2}\int_1^2 \int_{\frac{1}{y}}^{y} (x^2+y^2)^2 xydxdy = \frac{1}{4}\int_1^2 \left[(x^2+y^2)^3\right]_{\frac{1}{y}}^{y} ydxdy$$
$$= \frac{1}{4}\int_1^2 \left[8y^7 - \frac{(y^4+1)^3}{y^5}\right]dy = \frac{1}{4}\int_1^2 \left[7y^7 - 3y^3 - \frac{3}{y} - \frac{1}{y^5}\right]dy$$
$$= \frac{1}{32}\left[7\,y^8 - 6\,y^4 - 24\log(y) + \frac{2}{y^4}\right]_1^2 = \frac{13545}{256} - \frac{3}{4}\log(2),$$
$$\int_{R_2} xyzdxdydz = \int_2^{\sqrt{5}} \int_{\frac{1}{y}}^{\frac{4}{y}} \int_{x^2+y^2}^{2(x^2+y^2)} xyzdxdydz = \int_2^{\sqrt{5}} \int_{\frac{1}{y}}^{\frac{4}{y}} \left[\frac{z^2}{2}\right]_{x^2+y^2}^{2(x^2+y^2)} xydxdy$$
$$= \frac{3}{2}\int_2^{\sqrt{5}} \int_{\frac{1}{y}}^{\frac{4}{y}} (x^2+y^2)^2 xydxdy = \frac{1}{4}\int_2^{\sqrt{5}} \left[(x^2+y^2)^3\right]_{\frac{1}{y}}^{\frac{4}{y}} ydy$$
$$= \frac{1}{4}\int_2^{\sqrt{5}} \left[\frac{(y^4+16)^3 - (y^4+1)^3}{y^5}\right]dy = \frac{1}{4}\int_2^{\sqrt{5}} \left[45y^3 + \frac{765}{y} + \frac{4095}{y^5}\right]dy$$
$$= \frac{1}{16}\left[45\,y^4 + 3060\log(y) - \frac{4095}{y^4}\right]_2^{\sqrt{5}}$$
$$= \frac{39771}{1280} + \frac{765}{8}\log(5) - \frac{765}{4}\log(2),$$
$$\int_{R_3} xyzdxdydz = \int_{\sqrt{5}}^{2\sqrt{5}} \int_{\frac{y}{5}}^{\frac{4}{y}} \int_{x^2+y^2}^{2(x^2+y^2)} xyzdxdydz = \int_{\sqrt{5}}^{2\sqrt{5}} \int_{\frac{y}{5}}^{\frac{4}{y}} \left[\frac{z^2}{2}\right]_{x^2+y^2}^{2(x^2+y^2)} xydxdy$$
$$= \frac{3}{2}\int_{\sqrt{5}}^{2\sqrt{5}} \int_{\frac{y}{5}}^{\frac{4}{y}} (x^2+y^2)^2 xydxdy = \frac{1}{4}\int_{\sqrt{5}}^{2\sqrt{5}} \left[(x^2+y^2)^3\right]_{\frac{y}{5}}^{\frac{4}{y}} ydxdy$$
$$= \frac{1}{4}\int_{\sqrt{5}}^{2\sqrt{5}} \left[\frac{(16+y^4)^3}{y^5} - \frac{26^3}{25^3}\,y^7\right]dy$$
$$= \frac{1}{4}\int_{\sqrt{5}}^{2\sqrt{5}} \left[-\frac{1951}{15625}\,y^7 + 48\,y^3 + \frac{768}{y} + \frac{4096}{y^5}\right]dy$$
$$= \frac{1}{4}\left[-\frac{1951}{125000}\,y^8 + 12\,y^4 + 768\log(y) - \frac{1024}{y^4}\right]_{\sqrt{5}}^{2\sqrt{5}}$$
$$= \frac{16407}{32} + 192\log(2),$$

obtenemos que

$$\boxed{\int_R xyz\,dxdydz = \int_{R_1} xyz\,dxdydz + \int_{R_2} xyz\,dxdydz + \int_{R_3} xyz\,dxdydz = \frac{5967}{10} + \frac{765}{8}\log(5)}$$