Àlgebra Lineal

Problemes del Tema 2: Espais Vectorials

1. Esbrineu si el conjunt F és un subespai de l'espai vectorial E en cadascun dels casos següents:

(a) $E = \mathbb{R}^3, \quad F = \{(x, y, z) \in E \mid x + y = z + a\}$, on $a \in \mathbb{R}$;

(b) $E = \mathbb{R}^3, \quad F = \{(x, y, z) \in E \mid x + y \geq z\}$;

(c) $E = \mathbb{R}^4, \quad F = \{(x, y, z, t) \in E \mid x - y = 0\}$;

(d) $E = \mathbb{R}^3, \quad F = \{(x, y, z) \in E \mid x^2 + y^2 = z^2\}$;

(e) $E = \mathbb{R}^3, \quad F = \{(\lambda, \mu, \lambda + \mu) \in E \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$;

(f) $E = \mathbb{R}[x], \quad F = \{p(x) \in E \mid p(1) = 0\}$;

(g) $E = \mathbb{R}[x], \quad F = \{p(x) \in E \mid p(1) = p(0)\}$;

(h) $E = \mathbb{R}[x], \quad F = \{p(x) \in E \mid p'(x) + p''(x) = x + 1\}$;

(i) $E = \mathbb{R}[x], \quad F = \{p(x) \in E \mid p(x) + p'(x) + p''(x) = p'''(x)\}$;

(j) $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad F = \{A \in E \mid \det A = 0\}$, on $\mathbb{K}$ és un cos;

(k) $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \quad F = \{f \in E \mid f(-x) = 5 - f(x)\}$.

2. Sigui E un espai vectorial i siguin $F_1, F_2 \subset E$ dos subespais vectorials de E. Proveu que $F_1 \cup F_2$ és un subespai vectorial de E si, i només si, $F_1 \subset F_2$ o bé $F_2 \subset F_1$.

3. Expresseu, en els casos en què sigui possible, els vectors v_i com a combinació lineal dels vectors u_i, essent:

(a) $v_1 = (8, 3, 0, -3), \ v_2 = (-11, 3, 3, -2), \ v_3 = (29, -2, -6, 2)$,
$u_1 = (3, -1, -1, 1), \ u_2 = (0, -2, -1, 2), \ u_3 = (2, -1, -1, 1)$;

(b) $v_1 = (1, 1, 2), \ v_2 = (x, y, z)$,
$u_1 = (-2, 1, -3), \ u_2 = (0, -1, 1), \ u_3 = (1, 1, 1)$;

(c) $v_1 = (-2, 8, 7, -2), \ v_2 = (-2, 6, 5, -1), \ v_3 = (-2, 4, 3, -1)$,
$u_1 = (1, -6, -5, 2), \ u_2 = (0, -2, -3, 1), \ u_3 = (-3, 14, 9, -4), \ u_4 = (-1, 6, 6, -2)$.

Digueu, en cada cas, si els vectors u_i són linealment independents i si formen un sistema de generadors o una base de l'espai $\mathbb{R}^n$ corresponent.

4. Trobeu bases dels espais vectorials següents:

(a) $\{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] \mid p(1) = p'(2) = p''(3) = 0\}$;

(b) $\{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] \mid p(1) = p'(2) = p''(3)\}$;

(c) $\{p(x) \in \mathbb{R}_n[x] \mid p(1) = p(-1) = 0\}$;

(d) $\{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid A\,M = MA\}$, on $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$;

(e) $\{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid BM = MB\}$, on $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

5. Doneu bases dels subespais de $\mathbb{R}^4$ determinats pels sistemes d'equacions següents:

(a) $2x + 2y - z - t = 0$

(b) $2x + 2y - z - t = x - y + z - t = 0$

(c) $2x + 2y - z - t = x - y + z - t = -3x + y + 2z + 2t = 0$

(d) $2x + 2y - z - t = x - y + z - t = -3x + y + 2z + 2t = x - 2y - t = 0$

(e) $2x + 2y - z - t = x - y + z - t = -3x + y + 2z + 2t = x + 2y - t = 0$

6. Per a cadascun dels subespais vectorials següents, trobeu un sistema d'equacions lineals que tingui per solució l'expressió en coordenades dels vectors del subespai en la base canònica de l'espai corresponent:

(a) $[(1,1,0,1),\ (3,0,-1,2),\ (-1,2,1,0)] \subseteq \mathbb{R}^4$

(b) $[(2,5,1,0),\ (1,1,1,3),\ (1,1,0,0)] \subseteq \mathbb{R}^4$

(c) $\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right] \subseteq \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

(d) $\left[\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\right] \subseteq \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

(e) $[5x^2 + 1] \subseteq \mathbb{R}_3[x]$

(f) $[2 + x,\ 3x + x^2,\ x^2 - 6] \subseteq \mathbb{R}_2[x]$

7. Sigui $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Considereu els subconjunts de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ següents:

$$U = \left\{ M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \;\Big|\; AM = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \qquad V = \{N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid \exists R \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \text{ amb } N = AR\}.$$

(a) Demostreu que U i V són subespais vectorials de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

(b) Siguin

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Demostreu que $\{M_1, M_2, M_3, M_4\}$ és una base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ i que $[M_1, M_2] = U$ i $[M_3, M_4] = V$.

(c) Doneu les coordenades de la matriu identitat I_2 en la base $\{M_1, M_2, M_3, M_4\}$ i trobeu matrius $M \in U$ i $N \in V$ amb $I_2 = M + N$. Són úniques aquestes matrius?

8. Considereu el conjunt $E = \{(u_n)_{n\geq 0} = (u_0, u_1, u_2, \dots) \mid u_i \in \mathbb{R}\}$ de les successions de nombres reals amb la suma i el producte per escalars definides per $(u_n)_{n\geq 0} + (v_n)_{n\geq 0} = (u_n + v_n)_{n\geq 0}$, $\lambda \cdot (u_n)_{n\geq 0} = (\lambda\, u_n)_{n\geq 0}$.

(a) Comproveu que E és un $\mathbb{R}$-espai vectorial amb aquestes operacions.

(b) Demostreu que el subconjunt $F = \{(u_n)_{n\geq 0} \in E \mid u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \ \ \forall n \geq 0\}$ de les successions de Fibonacci és un subespai vectorial de E. Trobeu $\dim F$.

(c) Trobeu els nombres $\alpha \in \mathbb{R}$ per als quals la progressió geomètrica $(\alpha^n)_{n\geq 0}$ pertany a F.

(d) Trobeu el terme general de la successió de Fibonacci $(f_n)_{n\geq 0} \in F$ amb $f_0 = f_1 = 1$.

9. Els polinomis de Bernstein de grau n es defineixen així:

$$B_k^n(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Aquests polinomis són molt útils en el disseny gràfic, perquè permeten definir les anomenades *corbes de Bézier*.

a) Demostreu que $B_0^n(x) + B_1^n(x) + \cdots + B_n^n(x) = 1$.

b) Demostreu que els polinomis de Bernstein de grau n formen una base de l'espai de polinomis $\mathbb{R}_n[x]$.

c) Demostreu que qualsevol corba paramètrica $\gamma(x) = (a(x), b(x))$ amb $a(x), b(x) \in \mathbb{R}_n[x]$ es pot expressar de la forma

$$\gamma(x) = P_0 B_0^n(x) + P_1 B_1^n(x) + \cdots + P_n B_n^n(x)$$

per a certs punts $P_0, P_1, \dots, P_n \in \mathbb{R}^2$, anomenats *punts de control* de la corba.

10. Sigui $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base d'un espai vectorial E. Considereu llavors la família de vectors $\{u_1, \dots, u_n\}$ definida per $u_i = e_{i+1} - e_i$, $i = 1, \dots, n-1$, $u_n = e_n$. Proveu que $\{u_1, \dots, u_n\}$ és també una base de E i expresseu el vector $e_1 + \cdots + e_n$ en aquesta base.

11. Demostreu que els conjunts

$$\mathcal{B} = \{(1,5,6),\ (2,-5,3),\ (1,4,1)\} \qquad \text{i} \qquad \mathcal{B}' = \{(1,3,2),\ (-1,-2,5),\ (0,2,4)\}$$

són bases de $\mathbb{R}^3$. Doneu la matriu del canvi de la base $\mathcal{B}$ a la base $\mathcal{B}'$. Calculeu llavors les coordenades del vector $(2,5,2)$ en ambdues bases.

12. A $\mathbb{R}^3$ es consideren les dues famílies de vectors $\{u_i\}_{1\leq i\leq 3}$ i $\{v_i\}_{1\leq i\leq 3}$ següents:

$$u_1 = (0,1,1), \quad u_2 = (-1,0,0), \quad u_3 = (2,0,1);$$

$$v_1 = u_1 + 2u_2, \quad v_2 = u_1 + 3u_2 - u_3, \quad v_3 = u_3.$$

Comproveu que totes dues famílies són bases i doneu les matrius del canvi de la base canònica a cadascuna d'elles.

13. Sabent que en una certa base de $\mathbb{R}^2$ el vector $(1,2)$ té coordenades $(3,4)$ i el vector $(1,5)$ té coordenades $(6,7)$, trobeu aquesta base.

14. Considereu els polinomis $u(x) = x^2 + x + 2$, $v(x) = 2x^2 + 3$, $w(x) = x^2 + x$ de $\mathbb{R}_2[x]$. En una certa base $\mathcal{B}$ d'aquest espai vectorial, els polinomis $u(x)$, $v(x)$, $w(x)$ tenen aquests vectors de coordenades:

$$u(x)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v(x)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad w(x)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Determineu els polinomis que formen la base $\mathcal{B}$.

15. Trobeu les coordenades del vectors $(1,0,1)$ i $(0,1,1)$ de $\mathbb{R}^3$ en la base $\{u_1, u_2, u_3\}$ definida per

$$u_1 = v_1, \quad u_2 = v_2, \quad u_3 = -3v_1 - 2v_2 + v_3,$$

on $\{v_1, v_2, v_3\}$ és una base que ve donada en relació a una altra base formada pels vectors

$$w_1 = (1,0,0), \quad w_2 = (3,1,1), \quad w_3 = (3,0,1)$$

de la manera següent:

$$w_1 = 5v_1 + 6v_2 - v_3, \quad w_2 = 4v_1 + 9v_2, \quad w_3 = 8v_1 + 11v_2 + v_3.$$

16. Sigui $a \in \mathbb{R}$ un nombre real qualsevol.

(a) Demostreu que els polinomis $1,\ x-a,\ (x-a)^2, \ldots,\ (x-a)^n$ formen una base de l'espai de polinomis $\mathbb{R}_n[x]$.

(b) Trobeu la matriu del canvi de la base canònica a aquesta base.

(c) Doneu els coeficients d'un polinomi qualsevol de $\mathbb{R}_n[x]$ en aquesta base.

17. Trobeu bases dels subespais F, G, $F \cap G$ i $F + G$ de l'espai vectorial E en cadascun dels casos següents:

(a) $E = \mathbb{R}^4$, $\quad F = [(-1,0,1,0), (-2,2,0,1)]$, $\quad G = [(-3,2,1,1), (-1,0,1,0)]$;

(b) $E = \mathbb{R}^4$, $\quad F = [(1,-2,0,3), (1,-1,-1,4), (1,0,-2,5)]$, $\quad G = [(1,2,0,1)]$;

(c) $E = \mathbb{R}^4$, $\quad F = \{(x,y,z,t) \in E \mid y + z + t = 0\}$, $\quad G = \{(x,y,z,t) \in E \mid x + y = z - 2t = 0\}$;

(d) $E = \mathbb{R}^4$, $\quad F = \{(x,y,z,t) \in E \mid x + 3t = y\}$, $\quad G = \{(x,y,z,t) \in E \mid x - y - z - t = 0\}$;

(e) $E = \mathbb{R}_3[x]$, $\quad F = \{p(x) \in E \mid p(1) = p'(1) = 0\}$, $\quad G = \{p(x) \in E \mid p(0) = p(1) = p'(0)\}$;

(f) $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\quad F = \{A \in E \mid \mathrm{tr}(A) = 0\}$, $\quad G = \{A \in E \mid A = A^t\}$.

18. Siguin U, V, W subespais d'un espai vectorial de dimensió finita tals que

$$U + V = U + W \qquad \text{i} \qquad U \cap V = U \cap W.$$

Demostreu que $\dim V = \dim W$. Es pot assegurar que V i W són el mateix subespai?

19. Siguin F, G, H subespais d'un espai vectorial. Demostreu les igualtats següents o doneu-ne contraexemples:

(a) $F \cap (G + H) = (F \cap G) + (F \cap H)$

(b) $F + (G \cap H) = (F + G) \cap (F + H)$

(c) $\dim(F \cap (G + H)) = \dim(F \cap G) + \dim(F \cap H) + \dim(F \cap H \cap G)$

20. Siguin $V_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$ i $V_2 = \{(\alpha, 2\alpha, 3\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$. Proveu que V_1 i V_2 són subespais vectorials, doneu la seva dimensió i una base per a cadascun d'ells. Proveu que $\mathbb{R}^3 = V_1 \oplus V_2$. Doneu la descomposició d'un vector qualsevol de $\mathbb{R}^3$ en suma d'un de V_1 i un de V_2.

21. Considereu els subespais vectorials de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ següents:

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; a = d \right\}, \qquad G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; b = 0,\, a = -d \right\},$$

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; a = b = c,\, d = 0 \right\}, \qquad V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; c + d = 0 \right\}.$$

Estudieu si $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = F \oplus G$ i si $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = U \oplus V$.

22. Trobeu un complementari del subespai vectorial F de E en els casos següents:

(a) $E = \mathbb{R}^4, \qquad F = [(1, 2, 0, 0),\, (1, 0, 0, 1)]$;

(b) $E = \mathbb{R}_3[x], \qquad F = [1 + x,\, 1 - x^2,\, 1]$;

(c) $E = \mathbb{R}_3[x], \qquad F = \{p(x) \in E \mid p(1) = p'(1),\, p(0) = 0\}$.

23. Siguin $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ i $F = \left\{ \begin{pmatrix} a + b & -b \\ b & a - b \end{pmatrix} \in E \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R} \right\}$.

(a) Proveu que F és un subespai vectorial de E. Doneu la seva dimensió i una base.

(b) Determineu un subespai complementari de F en E.

24. Sigui $M_n = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espai vectorial de les matrius quadrades $n \times n$ amb coeficients reals, i siguin $S_n \subseteq M_n$ i $A_n \subseteq M_n$ els subconjunts de les matrius simètriques i antisimètriques, respectivament. Comproveu que S_n i A_n són subespais vectorials de M_n. Trobeu la seva dimensió i demostreu que $M_n = S_n \oplus A_n$.

25. Sigui $V = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \operatorname{tr} A = 0\}$. Demostreu que V és un subespai vectorial de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ i que el subespai generat per la matriu identitat I_n és un complementari de V.

26. Considereu l'espai vectorial $F = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ de les funcions reals de variable real. Una funció $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es diu *parell* si $f(-x) = f(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$, i es diu *senar* si $f(-x) = -f(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$. Comproveu que el subconjunt de les funcions parells i el subconjunt de les funcions senars són subespais vectorials de F i demostreu que la seva suma directa és F.

27. Considereu l'espai quocient de $\mathbb{R}^4$ pel subespai $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x - y = z + t = 0\}$.

(a) Calculeu la suma de $(1, 0, -1, 0) + F$ i $(0, 1, 0, 1) + F$.

(b) Esbrineu si la classe $(0, -1, 2, 0) + F$ és la suma de les classes $(1, -1, 0, 0) + F$ i $(-1, 0, 1, 1) + F$.

(c) Són $(1, -1, 0, 0) + F$ i $(0, 1, -1, 0) + F$ linealment independents?

28. Siguin $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0\}$ i $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0,\ x + z = 0\}$. Trobeu una base per a cadascun dels espais quocients $\mathbb{R}^3/F$ i $\mathbb{R}^3/G$.

29. Sigui $F = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 \mid x_1 + x_3 + x_5 = x_2 = 0\}$. Doneu una base de l'espai quocient $\mathbb{R}^5/F$ i trobeu les coordenades de $(1, 0, 0, 1, 0) + F$ en aquesta base.

30. Sigui $F = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 \mid x_1 - x_3 = x_3 + x_4 - x_5 = x_1 + x_4 - x_5 = 0\}$. Doneu una base de l'espai $\mathbb{R}^5/F$ i trobeu les coordenades de $(0, 1, -1, 0, 0) + F$ en aquesta base.

31. Siguin $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ i $F = \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}\right]$. Esbrineu si la classe $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + F$ genera l'espai quocient E/F.

32. Sigui $\{u_1, \ldots, u_d\}$ una base d'un subespai F d'un espai vectorial E, i sigui $\{v_1, \ldots, v_s\}$ una família de vectors de E. Proveu que $v_1 + F, \ldots, v_s + F$ són linealment independents a E/F si, i només si, els vectors $u_1, \ldots, u_d, v_1, \ldots, v_s$ són linealment independents a E.

33. Siguin M i N subespais d'un espai vectorial de dimensió finita tals que les dimensions de $(M + N)/M$, $(M + N)/N$, $M \cap N$ són 2, 3 i 4, respectivament. Trobeu les dimensions de M, N i $M + N$.