**Anàlisi Real – notes ampliades del curs**
Capítol 4: Teoria de la mesura i integral de Lebesgue
Bestiari de subconjunts en els nombres reals

En aquesta lliçó comentarem (doncs hi hauran aspectes que no demostrarem) com aplica tota la teoria que hem vist fins ara (especialment la d'espais mesurables i mesura) en el cas dels nombres reals. Recordem que $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ és el conjunt de subconjunts de $\mathbb{R}$, a saber: $\mathcal{P}(\mathbb{R}) = \{A \subseteq \mathbb{R}\}$.

Començarem amb la construcció de l'espai mesurable de referència en tot el que seguirà en el curs. Considerem la família $\mathcal{I} = \{(a,b),\ a \le b\}$ d'intervals oberts, amb $a$ i $b$ finits. I considerem la família $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{I})$, corresponent a la $\sigma$-àlgebra generada pels intevals oberts. Aquesta serà la $\sigma$-àlgebra de referència que anomenarem $\sigma$-àlgebra dels **Borelians**. És evident doncs que $\mathcal{I} \subsetneq \mathcal{B}$.

**Quins subconjunts són Borelians?** A partir dels intervals oberts podem construir molts subconjunts "fàcils" dels reals. Entre ells:

- Els punts $\{x\}$ són subconjunts de $\mathcal{B}$: Tenim que $\{x\} = \cap_{n\ge 1}(x - 1/n, x + 1/n)$.
- Els intervals tancats també: un cop tenim els punts, podem fer, per exemple $[a,b) = \{a\} \cup (a,b)$, i com els dos de l'esquerra són de $\mathcal{B}$, aleshores el primer també ho és.
- Els intervals no fitats, ja que es poden ficar com unió numerable d'intervals. Per exemple $[a,\infty) = \cup_{n\ge 1}[a, a+n-1)$.
- Segons vam comentar a classe fa uns dies, tots els conjunts oberts dels reals (amb la topologia induïda per les boles Euclidianes).
- Els conjunts tancats: aquests són els complementaris dels conjunts oberts, i ja sabem que per definició una $\sigma$-àlgebra és tancada per complementaris.
- Els conjunts compactes: pel teorema de Heine-Borel sabem que els compactes són tancats (i de fet, també fitats), i per tant estem en un subcas de l'anterior.

**Quins subconjunts NO són Borelians?** Aquesta pregunta és molt més dificil de respondre. Veurem en una estona que hi ha conjunts de nombres reals que NO són borelians, però en aquest cas les construccions són molt complicades (venen de la teoria de conjunts i de fet necessiten de l'Axioma de l'Elecció). En veurem, però, un exemple clàssic.

Per tant, un primer resum de la primera part és que

$$\boxed{\mathcal{I} \subsetneq \mathcal{B} \subsetneq \mathcal{P}(\mathbb{R})}$$

# Mesura de Lebesgue

Ja tenim el nostre espai mesurable $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$. El següent pas es definir una mesura sobre els elements de $\mathcal{B}$. Hem vist que donat un conjunt podem definir moltes mesures, però el que ens interessaria es poder definir una mesura sobre els elements de $\mathcal{B}$ que sigui "compatible" amb la mesura natural sobre els intervals: la seva longitud. Dit d'altra manera:

**És possible donar una mesura $\lambda$ sobre el conjunt de borelians de tal forma que si $B = (a,b)$ és un interval, aleshores $\lambda(B) = b - a$?**

En particular, una tal mesura donaria que $\lambda(\{x\}) = 0$ (els punts són "intervals" de longitud 0), o per exemple, per la numerabilitat de $\mathbb{Q}$ (que és un borelià per ser l'unió numerable de punts), $\lambda(\mathbb{Q}) = 0$.

La resposta és que SI, i la prova requereix una mica de feina. Els primers detalls els podeu trobar a la secció 3.4. dels apunts de Batlle-Fossas. A grans trets, l'idea va com segueix:

- El conjunt dels intervals de tot tipus $\mathcal{I}'$ (agafem els fitats, no fitats, oberts, tancats, ...) no és una $\sigma$-àlgebra. Ara bé, hi ha una estructura més sencilla, la d'àlgebra de conjunts, on només considerem unions finites (en lloc d'unions numerables). Si diem $\underline{\sigma}(\mathcal{I}')$ a l'àlgebra de conjunts generada pels intervals (mitjançant complementaris i unions finites).
- Podem definir una mesura sobre $\underline{\sigma}(\mathcal{I}')$ tot extenent $\ell$ (la longitud d'un interval) de manera natural.

- Podem ara extendre $\ell$ a tot $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ com segueix: donat un conjunt $B \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, sigui $\mathbf{E} = \{E_i\}_{i\geq 1}$ una família de conjunts en $\mathcal{I}'$ pels quals $B \subseteq \cup_{i\geq 1} E_i$. Aleshores definim:

  $$\ell^*(B) = \inf_{\mathbf{E}} \sum_{i\geq 1} \ell(E_i).$$

  Aquesta funció (anomenada *mesura exterior*), definida per qualsevol subconjunt, no té perquè ser additivament finita (la mesura de la unió disjunta no té perquè ser la suma de les mesures, ja que la unió no té perquè estar definida en la família).

- Per a que tot lligui, ens quedem només amb una subfamília de conjunts $A$ que compleixin la següent propietat (anomeanada Propietat de Carathéodory):

  $$(CC)\ \forall E \subseteq \mathbb{R},\ \ell^*(A) = \ell^*(A \cap E) + \ell^*(A \setminus E).$$

- Definim aleshores $\mathcal{L} = \{A \subseteq \mathbb{R} : A \,\text{compleix}\,(CC)\}$ i anomenem a aquesta família **conjunts mesurables Lebesgue**.

- El teorema fonamental aquí és el teorema de Caratheodory (incloem la prova fora d'aquest apartat, per si teniu curiositat...no és dificil però és un pèl llarga), que afirma que

  (1) $\mathcal{L}$ és una $\sigma$-àlgebra (que conté $\mathcal{I}$).
  (2) $\ell^* = \lambda$ és una mesura sobre $(\mathbb{R}, \mathcal{L})$.

  Com estem dient que $\mathcal{L}$ és una $\sigma$-àlgebra que conté els intervals, en particular conté als Borelians. A més a més del teorema de Caratheodory, tenim que l'extensió de la mesura "longitud" d'interval és essencialment única. Això ho veureu vosaltres al següent entregable. En qualsevol dels casos, treballarem sempre amb $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \lambda)$, ja que la restricció de $\lambda$ (mesura en $\mathcal{L}$) als borelians està ben definida.

  Algunes propietats que se'n dedueixen (i que són útils!):

  - Per un conjunt mesurable $A$, $\lambda(x + A) = \lambda(A)$, on $x + A$ és la translació del conjunt $A$ per $x$ (la mesura de Lebesgue és invariant per translacions).
  - Si $\lambda(A) = 0$ i $A$ és mesurable Lebesgue, aleshores si $B \subseteq A$, tindrem que $B$ és mesurable Lebesgue i de fet $\lambda(B) = 0$.
  - Important! la propietat anterior NO és certa pels borelians. Un exemple és el del conjunt de Cantor (és el complementari d'un tancat, i per tant és un borelià), que té mesura 0 però té subconjunts que no són borelians.

  Per tant, el que tenim és

  $$\boxed{\mathcal{I} \subsetneq \mathcal{B} \overset{(1)?}{\subsetneq} \mathcal{L} \overset{(2)?}{\subsetneq} \mathcal{P}(\mathbb{R})}$$

  Resumint: partim dels intervals, on hi tenim una manera clara de definir una mesura i el que volem és extendre-ho a conjunts més complicats. Al fer-ho (mitjançant la mesura exterior) cal demanar condicions extra (condició de Caratheodory) que fa que no poguem agafar-ho tot, però podem agafar una $\sigma$-àlgebra. El teorema d'extensió de Caratheodory ens diu que ho podem fer, i aquesta $\sigma$-àlgebra (conjunts mesurables Lebesgue) és més gran que els Borelians, i per tant podem restringir la mesura que en resulta a la $\sigma$-àlgebra més petita.

## Un conjunt NO mesurable Lebesgue

Aquest exemple clàssic ens mostrarà (usant la mesura de Lebesgue) la resposta a (2)? en la caixa anterior. La prova de que en (1) l'inclusió és estricta és molt més dificil i requereix d'eines de lògica molt més complicades.

La construcció es deu a Vitalli. Prenem $A = [0, 1]$ i sobre aquest definim la relació d'equivalència següent: $x \sim y$ si i només si $x - y \in \mathbb{Q}$. Per tant, $[0, 1]/\mathbb{Q}$ es divideix en un nombre no numerable de classes d'equivalència: $[0, 1]/\mathbb{Q} = \cup_{i\in I} A_i$.

Ara aquí ve el punt delicat: per l'Axioma de l'Elecció podem definir un subconjunt de $[0,1]$, que direm $V$, tot triant un representant de cadascun dels conjunts $A_i$ (fixeu-vos l'importància de l'Axioma de l'Elecció: aquest resultat ens dóna l'existència de tal conjunt sense saber ni com construir-lo!).

Veguem ara que no podem definir $\lambda(V)$: En efecte, supossem que ho és i sigui $\lambda(V)$ la seva mesura. Prenem una enumeració dels racionals en $[-1,1]$, $\{q_i\}_{i\geq 1}$ i definim $V_k = q_k + V$. Observeu que si $k \neq k'$, aleshores $V_k$ és disjunt de $V_{k'}$: de no ser així, tenim un element en els dos conjunts (diguem-ne $y$), que es pot escriure com $x + q_k = x' + q_{k'}$, on $x, x' \in V$. Pero això ens diu que $x - x'$ és racional, i per tant els dos no poden estar en $V$ (en triem només un per cada classe d'equivalència). Aleshores, $V_k \subseteq [-1,2]$, aquests són disjunts i és compleix que

$$[0,1] \subseteq \cup_{k\geq 1} V_k \subseteq [-1,2].$$

Com ara $V_k = q_k + V$, en resulta que $\lambda(V_k) = \lambda(V)$, i per tant, per la numerabilitat numerable de la mesura en surt que

$$1 = \lambda([0,1]) \leq \sum_{k\geq 1} \lambda(V_k) = \sum_{k\geq 1} \lambda(V) \leq \lambda([-1,2]) = 3,$$

però això no pot ser, ja que si sumem infinits cops un nombre la suma val infinit o 0.