Classe de dilluns 16-3

Definició 0.1 *Una* identificació *és una aplicació contínua exhaustiva entre espais topològics $\phi\colon X \twoheadrightarrow Y$ tal que l'espai d'arribada té la topologia quocient: $\mathcal{U} \in \mathscr{T}_Y \Leftrightarrow \phi^{-1}(\mathcal{U}) \in \mathscr{T}_X$.*

En tal cas l'aplicació induïda $\widetilde{\phi}\colon X/{\sim} \to Y$ és un homeomorfisme, on $\sim$ és la relació d'equivalència $x \sim y \Leftrightarrow \phi(x) = \phi(y)$.

PROVA: L'aplicació induïda satisfà $\widetilde{\phi}\circ\pi = \phi$. És bijectiva: exhaustiva per ser-ho ϕ i injectiva ja que $[x] = [y] \Leftrightarrow x \sim y \Leftrightarrow \phi(x) = \phi(y)$. Transforma oberts en oberts ja que, tenint en compte la caracterització dels oberts de Y per ser espai quocient, i la dels oberts de $X/{\sim}$, per a tot $\mathcal{U} \subseteq Y$ es té

$$\mathcal{U} \in \mathscr{T}_Y \Leftrightarrow \phi^{-1}(\mathcal{U}) \in \mathscr{T}_X \Leftrightarrow \pi^{-1}\big(\widetilde{\phi}^{-1}(\mathcal{U})\big) \in \mathscr{T}_X \Leftrightarrow \widetilde{\phi}^{-1}(\mathcal{U}) \in \mathscr{T}_{X/\sim},$$

de manera que la bijecció $\widetilde{\phi}^{-1}$ transforma oberts en oberts. □

Lema 0.2 *Tota aplicació contínua exhaustiva que sigui oberta o sigui tancada és una identificació.*

PROVA: Sigui $\pi\colon X \twoheadrightarrow Q$ contínua i exhaustiva. Per ser exhaustiva es té $\pi\big(\pi^{-1}(B)\big) = B$ per a tot subconjunt $B \subseteq Q$. Suposi's que és oberta. Per a tot subconjunt $\mathcal{U} \subseteq Q$ es té:

- com que π és contínua, si $\mathcal{U}$ és obert aleshores $\pi^{-1}(\mathcal{U})$ és obert;
- com que π és oberta, si $\pi^{-1}(\mathcal{U})$ és obert aleshores $\pi\big(\pi^{-1}(\mathcal{U})\big) = \mathcal{U}$ és obert.

Per tant, Q té la topologia quocient.

Si l'aplicació és tancada es demostra de manera anàloga, tenint en compte que la topologia quocient també es caracteritza per la propietat $\mathcal{C}$ tancat si, i només si, $\pi^{-1}(\mathcal{C})$ tancat.

Observi's que no tota identificació ha de ser necessàriament oberta o tancada. Es pot veure un contraexemple en el problema 16 (pag. 80) del Pascual-Roig. □

Exemples 0.3 *Moltes construccions habituals en topologia corresponen a espais quocient. A continuació es donen noves construccions com a quocients de subespais de l'espai euclidià: circumferència, esfera, tor, ..., i també definicions de nous espais com a espai quocient: espai projectiu, ampolla de Klein, ...*

1. *identificació dels extrems:* $[0,1]/\{0 \sim 1\} \cong \mathbb{S}^1$;
2. *identificació de traslladats:* $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} = \mathbb{R}^2/\{x \sim x + 2\pi n : n \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{S}^1$;
3. *identificació d'òrbites per arrels de la unitat:* $\mathbb{C}^*/\{z \sim e^{2\pi i k/n} z : k \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{S}^1$
4. *identificació de raigs:* $\big(\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}\big)/\{\boldsymbol{x} \sim \lambda\boldsymbol{x} : \lambda > 0\} \cong \mathbb{S}^1$;
5. *identificació de rectes:* $\mathbb{P}^1 := \big(\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}\big)/\{\boldsymbol{x} \sim \lambda\boldsymbol{x} : \lambda \neq 0\} \cong \mathbb{S}^1$;
6. *identificació de raigs:* $\big(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}\big)/\{\boldsymbol{x} \sim \lambda\boldsymbol{x} : \lambda > 0\} \cong \mathbb{S}^n$;
7. *identificació de rectes:* $\mathbb{P}^n := \big(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}\big)/\{\boldsymbol{x} \sim \lambda\boldsymbol{x} : \lambda \neq 0\}$;

8. *identificació de punts antipodals:* $\mathbb{S}^n/\{\boldsymbol{x} \sim -\boldsymbol{x}\} \cong \mathbb{P}^n$*;*
9. *identificació de circumferències:* $\mathbb{R}^2/\big\{\boldsymbol{x} \sim \boldsymbol{y} \Leftrightarrow \|\boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{y}\|\big\} \cong [0, \infty) \subset \mathbb{R}$*;*
10. *col·lapse d'un subespai:* $\mathbb{D}^2/\mathbb{S}^1 = \mathbb{D}^2/\{\boldsymbol{x} \sim \boldsymbol{y} : \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{S}^1\} \cong \mathbb{S}^2$*;*
11. *identificació de dos costats d'un rectangle* $R = [0, 1] \times (0, 1)$*:*
    - *cilindre:* $R/\big\{(0, y) \sim (1, y)\big\}$*;*
    - *banda de Möbius:* $R/\big\{(0, y) \sim (1, 1 - y)\big\}$*;*
12. *identificació de costats oposats d'un quadrat* $R = [0, 1] \times [0, 1]$*:*
    - *esfera:* $R/\big\{(x, 0) \sim (0, x), (1, y) \sim (y, 1)\big\}$, $abb^{-1}a^{-1}$*;*
    - *tor:* $R/\big\{(x, 0) \sim (x, 1), (0, y) \sim (1, y)\big\}$, $aba^{-1}b^{-1}$*;*
    - *pla projectiu:* $R/\big\{(x, 0) \sim (1 - x, 1), (0, y) \sim (1, 1 - y)\big\}$, $abab$*;*
    - *ampolla de Klein:* $R/\big\{(x, 0) \sim (1 - x, 1), (0, y) \sim (1, y)\big\}$, $abab^{-1}$*;*

Estudieu totes aquestes construccions procurant entendre bé en què consisteixen i trobar homeomorfismes a partir d'identificacions en els casos de subespais de l'euclidià: circumferència, esfera, interval, etc.