Àlgebra Multilineal i Geometria FME, UPC

Entregable 1 Rang de formes bilineals

Sigui E un $\mathbf{k}$-espai vectorial de dimensió n i sigui $f \in \mathscr{T}_2(E)$ un 2-tensor covariant (o forma bilineal). Fixem $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ una base d'E i sigui $A = M_B(f)$.

Definició. *Direm que el tensor f té rang m ($\mathrm{rang}(f) = m$) si i només si existeixen $\boldsymbol{u}^1, \ldots, \boldsymbol{u}^m, \boldsymbol{v}^1, \ldots, \boldsymbol{v}^m \in E^*$ tals que*

$$f = \boldsymbol{u}^1 \otimes \boldsymbol{v}^1 + \boldsymbol{u}^2 \otimes \boldsymbol{v}^2 + \cdots + \boldsymbol{u}^m \otimes \boldsymbol{v}^m \tag{$*$}$$

i m és el nombre mínim de parelles de vectors amb la que es pot fer una descomposició com (*). A una descomposició com aquesta que compleixi que $m = \mathrm{rang}(f)$ l'anomenarem descomposició minimal en tensors de rang 1.

1. Si tenim una descomposició minimal (*), demostreu que els vectors $\{\boldsymbol{u}^1, ..., \boldsymbol{u}^m\}$ són l.i. i els vectors $\{\boldsymbol{v}^1, ..., \boldsymbol{v}^m\}$ també. Deduïu que $\mathrm{rang}(f) \leq n = \mathrm{dim} E$.

2. Amb $n = 3$, considereu $\boldsymbol{u}_{\mathcal{B}^*} = (1, 2, 3)^t$ i $\boldsymbol{v}_{\mathcal{B}^*} = (2, 1, 5)^t$. Calculeu $A = M_B(\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{v})$.

3. Sigui $A = M_B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 6 & 14 \\ 4 & 12 & 28 \end{pmatrix}$. Demostreu que f es pot escriure com a $f = \boldsymbol{u}' \otimes \boldsymbol{v}'$ trobant la descomposició explícitament.

Dels dos apartats anteriors es fàcil generalitzar que els tensors de rang 1 tenen matrius de rang 1 i viceversa. Aquest és un resultat general:

4. Demostreu que per a qualsevol forma bilineal f es té que $\mathrm{rang}(f) = \mathrm{rang}(A)$. Doneu un mètode explícit per a trobar una descomposició minimal de f en tensors de rang 1 a partir de la matriu. Doneu un exemple no trivial amb $n = 3$.

5. Suposem $\mathbf{k} = \mathbb{R}$ i dotem l'espai vectorial E d'un producte escalar $\langle , \rangle$. Suposem que $\mathcal{B}$ és una base ortonormal. Doneu un mètode per tal de trobar una descomposició minimal de f en tensors de rang 1 tals que $\{\boldsymbol{u}^1, \ldots, \boldsymbol{u}^m\}$ siguin vectors ortogonals i $\{\boldsymbol{v}^1, \ldots, \boldsymbol{v}^m\}$ també siguin ortogonals (Indicació: utilitzeu la SVD de la matriu A). Apliqueu-ho al mateix exemple de l'apartat anterior.

6. En les mateixes hipòtesis de l'apartat anterior, suposem que f és una forma bilineal simètrica ($f \in \mathcal{S}_2(E)$). Demostreu que es pot trobar una descomposició minimal de f amb els vectors $\boldsymbol{v}^i = \pm \boldsymbol{u}^i$, essent també els vectors $\{\boldsymbol{u}^1, \ldots, \boldsymbol{u}^m\}$ ortogonals. Trobeu la descomposició quan $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

7. Generalitzeu la definició de rang d'un 2-tensor covariant a un p-tensor covariant i proveu que per a un tensor $f \in \mathscr{T}_p(E)$, $\mathrm{rang}\, f \leq n^p$.