Àlex Batlle Casellas

1. Proveu que $f(x) = \sqrt{x}$ és uniformement contínua a $[0, \infty)$.
   Indicació: Separeu el cas $[0, 1]$ de l'interval $[1, \infty)$. En aquest darrer cas, proveu que f satisfà una condició de Lipschitz.
   Per a que una funció sigui uniformement contínua, ha de complir la següent condició:

   $$\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \; |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

   Si partim l'interval en els intervals $[0, 1]$ i $[1, \infty)$, podem raonar-ho pels dos casos. Per l'interval $[0, 1]$, tenim que $\sqrt{x} \geq x \; \forall x \in [0, 1]$. Aleshores, $|x - y| \leq |\sqrt{x} - \sqrt{y}|$
   Recordem l'enunciat de la condició de K-Lipschitz:

   $$\forall x, y \quad |f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$$

2. Proveu que $f(x) = x^2$ no és uniformement contínua a $[0, \infty)$, veient explícitament que existeix $\epsilon > 0$, i successions $(x_n)_n$ i $(y_n)_n$ no fitades amb $(x_n - y_n)_n$ convergent a zero i tal que $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon$.

3. Proveu que $f(x) = \sin x$ és uniformement contínua a tot $\mathbb{R}$ veient que satisfà una condició 1-Lipschitz a tota la recta real.
   Indicació: Useu que, per tot $a, b \in \mathbb{R}$,

   $$\sin a - \sin b = 2 \sin\left(\frac{a - b}{2}\right) \cos\left(\frac{a + b}{2}\right).$$

   (*Observació:* $f(x) = \sin x$ és, doncs, una funció vàlida com l'exemple que es demana a l'exercici 16 del Tema 3).