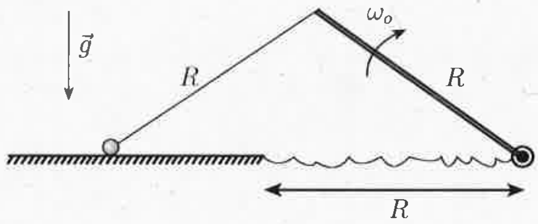
Examen Parcial
Física, CFIS

Barcelona, 23 de Noviembre, 2017

1. (3p) Para pasar un bulto P de masa m de un lado al otro de un río de ancho R se utiliza el método que sigue. P se ata a una cuerda de largo R que está unida al extremo de una vara de largo R. La barra se hace girar desde su posición horizontal con velocidad angular ω_0 en torno a una rótula que une la orilla del río con el otro extremo de la vara. Despreciando el rozamiento:

    a) (1.5p) Demuestra que mientras la carga va por tierra firme la tensión de la cuerda es constante. Determina su valor.

    b) (1.5p) Determina el valor de ω_0 para que P se despegue del suelo justo antes de llegar al río.



2. (3p) Una partícula de masa m se mueve con rapidez constante v_0 por el exterior de un semicilindro horizontal de radio R. Además del peso y la fuerza normal que ejerce la superficie, la partícula está sometida a otras dos fuerzas. La primera es una fuerza $\vec{F_1}$ que está descrita por la expresión:

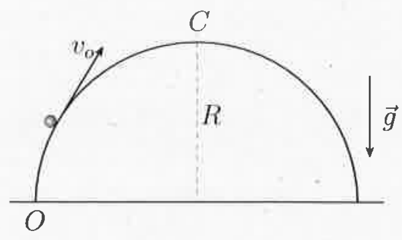
$$\vec{F_1} = -c(xy^2\hat{\imath} + x^2y\hat{\jmath})$$

donde c es una constante conocida y las coordenadas x, y se miden respecto al origen O. La otra fuerza, F_2, para la cual no se cuenta con una expresión explícita, es la que permite que la partícula se mueva con rapidez constante en su trayectoria desde el origen O a la cúspide C. Se pide:

    a) (0.5p) Mostrar que la fuerza $\vec{F_1}$ es conservativa.

    b) (1p) Determinar una expresión para el potencial asociado a $\vec{F_1}$.

    c) (1.5p) Determinar el trabajo efectuado por la fuerza $\vec{F_2}$ en el trayecto de O hasta la cúspide C.



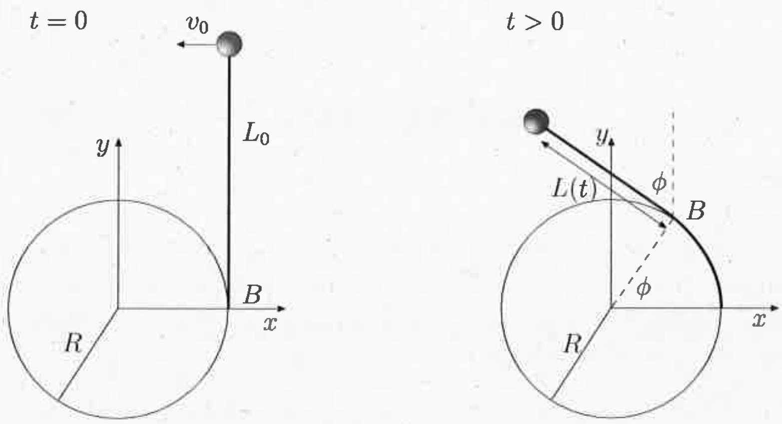
3. (4p) Hay un hilo enrollado alrededor de un cilindro de radio R. En la punta del hilo hay un cuerpo de masa m que se suelta, cuando $\phi = 0$, con velocidad inicial $\vec{v}(t=0) = -v_0\hat{r}$, perpendicular al hilo, lo que determina que el hilo se comienza a enrollar. La distancia inicial entre el cuerpo y el punto B de tangencia del hilo con el cilindro es L_0. Consideraremos que no hay gravedad.
Nota: Las coordenadas polares en este problema siguen al punto de tangencia B, y es conveniente escribir el vector posición de la partícula como: $\vec{r} = R\hat{r} + L(t)\hat{\phi}$.

   a) (1.5p) Determina la ecuación de movimiento para la distancia $L(t)$ correspondiente a la longitud de hilo que queda por enrollar en el tiempo t (distancia entre los puntos B y la posición de la masa).

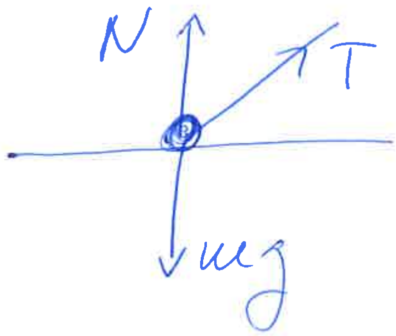
   b) (1p) Calcula $L(t)$. ¿Cuánto tiempo se necesita para enrollar toda la cuerda?

   c) (0.5p) Obtén la velocidad angular $\dot{\phi}$ en función de ϕ.

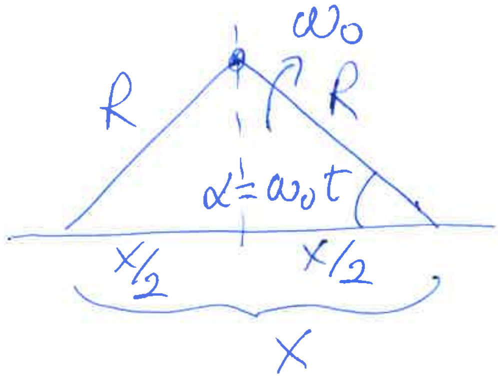
   d) (1p) Suponiendo que el hilo se corta si la tensión sobrepasa el valor T_{max}, obtén el valor de ϕ en el momento del corte.



1.- a) Sobre el bulto actúan tres fuerzas, la tensión de la cuerda, la gravedad, y la normal (la reacción del suelo), que actúa mientras la carga va por tierra firme.



No sabemos ni la tensión, ni la normal, pero la aceleración del bulto viene determinada.



Se cumplirá que:

$$x/2 = R\cos\omega_0 t$$

Por tanto, la posición del bulto es:

$$x(t) = 2R\cos\omega_0 t$$

Y su aceleración:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -2R\omega_0^2\cos\omega_0 t = -2R\omega_0^2\cos\alpha$$

Ahora podemos aplicar la 2ª ley de Newton:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

Por tanto (mientras va por el suelo):

$$\begin{cases} T_x = m\dfrac{d^2x}{dt^2} = 2R\omega_0^2 m\cos\alpha \\[2ex] N + T_y - mg = 0 \end{cases}$$

Pero $T_x = T\cos\alpha \Rightarrow \boxed{T = 2R\omega_0^2 m}$

b) De la segunda ecuación, tenemos que la normal es:

$$N = mg - T_y = mg - T\sin\alpha = mg - 2R\omega_0^2 m\sin\alpha$$

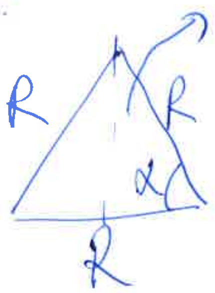
En el momento en que se despega $N=0$

$$\Rightarrow \quad mg = 2R\omega_0^2 m\sin\alpha$$

$$y \quad \omega_0^2 = \frac{\cancel{m}g}{2R\sin\alpha}$$

Pero, si se despega justo antes de llegar al no:

$$\sqrt{R^2 - R^2/4} = R\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



$$\Rightarrow \boxed{\omega_0^2 = \frac{\cancel{m}g}{\sqrt{3}R}}$$

2.- a) $\vec{F}_1 = -c(xy^2\hat{i} + x^2y\hat{j})$

La fuerza será conservable si $\vec{\nabla} \times \vec{F}_1 = 0$

$$= \vec{\nabla} \times \vec{F}_1 = -c \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & 0 \\ xy^2 & x^2y & 0 \end{vmatrix} = -c(\partial_x(x^2y) - \partial_y(xy^2)) =$$

$$= -c(2xy - 2xy) = 0$$

b) La fuerza deriva de un potencial, de forma que: $\vec{F}_1 = -\vec{\nabla} E_p$

$$\Rightarrow F_1^x = -\frac{\partial E_p}{\partial x}, \quad F_1^y = -\frac{\partial E_p}{\partial y}$$

Integrando:

$$\frac{\partial E_p}{\partial x} = -F_1^x = cxy^2 \Rightarrow E_p = \frac{c}{2}x^2y^2 + f(y)$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial y} = -F_1^y \Rightarrow cx^2y + f'(y) = cx^2y \Rightarrow f'(y) = 0$$

$$f(y) = C'$$

Si tomamos (por conveniencia) $C = 0$, entonces

$$\boxed{E_p = \frac{1}{2}cx^2y^2}$$

~~c) La fuerza $\vec{F}_2$ será:~~

$\cancel{\vec{F}_2 =}$

El trabajo total de las fuerzas será:

$$W_T = W_{F_1} + W_{F_2} + W_g + W_N$$

La normal no hace trabajo $W_N = 0$

Tendremos que el trabajo total será igual a la variación de la energía cinética del sistema.

Pero como la velocidad es constante $\Delta E_c = 0$

Por tanto $W_T = \Delta E_c = 0$ y

$$W_{F_2} = -W_{F_1} - W_g$$

Como estas son fuerzas conservativas:

$$W_{F_1} = -\Delta E_p = -\left(\frac{1}{2} c R^2 R^2 - 0\right) = -\frac{1}{2} c R^4$$

$$W_g = -\Delta E_p = -\ mgR$$

Por tanto:

$$W_{F_2} = \frac{1}{2} c R^4 + mgR$$

3.- Las coordenadas de la masa son: $\vec{r} = R\hat{r} + L(t)\hat{\phi}$

Su velocidad es:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = R\dot{\hat{r}} + \dot{L}\hat{\phi} + L\dot{\hat{\phi}}$$

Pero: $\frac{d\hat{r}}{dt} = \frac{d\hat{r}}{d\phi}\frac{d\phi}{dt} = \hat{\phi}\dot{\phi}$, $\frac{d\hat{\phi}}{dt} = -\hat{r}\dot{\phi}$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{r}}{dt} = R\dot{\phi}\hat{\phi} + \dot{L}\hat{\phi} - L\dot{\phi}\hat{r} =$$
$$= (R\dot{\phi} + \dot{L})\hat{\phi} - L\dot{\phi}\hat{r}$$

La longitud de la cuerda es:

$$L_0 = L(t) + R\phi$$

Por tanto $0 = \dot{L} + R\dot{\phi}$, y la velocidad queda:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = -L\dot{\phi}\hat{r}$$

Como la tensión de la cuerda es perpendicular a la trayectoria, no hace trabajo. Por

Tanto la energía cinética se conserva. Esto es, el módulo de la velocidad es constante: $v = v_0$

Por tanto $L\dot{\phi} = v_0$

o bien, sustituyendo: $\dot{\phi} = -\dot{L}/R$

obtenemos que: $L\dot{L} = -Rv_0$

b) Integrando: $\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}L^2\right) = -Rv_0$

$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}L^2 = -Rv_0t + C$

En $t=0 \Rightarrow L = L_0 \Rightarrow C = \frac{1}{2}L_0^2$

Por tanto: $L^2 = L_0^2 - 2Rv_0t$

Se habrá enrollado toda la cuerda cuando

$L=0 \Rightarrow \quad t = \dfrac{L_0^2}{2Rv_0}$

c) De $L\dot{L} = -R v_0$ podemos poner:

$$L = L_0 - R\phi, \quad \dot{L} = -R\dot{\phi}$$

Entonces:

$$(L_0 - R\phi)(-\cancel{R}\dot{\phi}) = -\cancel{R} v_0$$

$$\Rightarrow \dot{\phi} = \frac{v_0}{L_0 - R\phi}$$

d) La aceleración es:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\dot{L}\dot{\phi}\hat{r} - L\ddot{\phi}\hat{r} - L\dot{\phi}\frac{d\hat{r}}{dt} =$$

$$= -\dot{L}\dot{\phi}\hat{r} - L\ddot{\phi}\hat{r} - L\dot{\phi}^2\hat{\phi} =$$

$$= -(\dot{L}\dot{\phi} - L\ddot{\phi})\hat{r} - L\dot{\phi}^2\hat{\phi}$$

La tensión es en la dirección azimutal $\vec{N} = N\hat{\phi}$

$$T = mL\dot{\phi}^2 = m(L_0 - R\phi)\cdot\frac{v_0^2}{(L_0 - R\phi)^{\cancel{2}}}$$

Cuando $T = T_{max}$, entonces:

$$L_0 - R\phi^* = m v_0^2 / T_{max} \Rightarrow \boxed{\phi^* = \frac{L_0}{R} - \frac{m v_0^2}{R\, T_{max}}}$$