Topologia FME
Resum de teoria i llista de problemes

Curs 2019/2020

24 d'abril de 2020

Índex

5 Connexió

El teorema de Bolzano assegura que tota funció contínua $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que $f(a)f(b) \leqslant 0$ s'anul·la en algun punt de $[a,b]$. La propietat de l'interval $[a,b]$ on està definida la funció que permet arribar a aquesta conclusió és la *connexió*. En aquesta secció s'estudia la connexió en espais topològics en general.

El símbol $\sqcup$ denota la reunió disjunta de conjunts: $A \sqcup B$ equival a $A \cup B$ però, a més, indica que aquests dos conjunts són disjunts: $A \cap B = \varnothing$. La notació $\sqcup_{i\in I} A_i$ indica que $A_i \cap A_j = \varnothing$ sempre que $i \neq j$.

5.1 Espais connexos

Definició 5.1 (Espai connex) *Un espai topològic $(X, \mathscr{T})$ és* connex *si no és la reunió de dos oberts no buits disjunts: si $X = \mathcal{U} \sqcup \mathcal{V}$ amb $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathscr{T}$, aleshores $\mathcal{U} = \varnothing$ o $\mathcal{V} = \varnothing$.*

Un subconjunt de l'espai es diu connex si ho és com a subespai.

Es diu *separació* d'un espai X una descomposició $X = \mathcal{U} \sqcup \mathcal{V}$ amb $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathscr{T}$ no buits. Els espais connexos són els que no admeten cap separació. En el cas d'un subespai $S \subseteq X$ les *separacions* que determinen si és o no connex es poden donar en termes d'oberts del propi subespai o també en termes d'oberts de tot l'espai X. En aquest segon cas una separació ve donada per un parell $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ d'oberts de X tals que $S = (\mathcal{U} \cap S) \sqcup (\mathcal{V} \cap S)$ és una separació en oberts del subespai, i això equival a:

$$S \subseteq \mathcal{U} \cup \mathcal{V}, \quad \mathcal{U} \cap \mathcal{V} \cap S = \varnothing, \quad \mathcal{U} \cap S \neq \varnothing, \ \ \mathcal{V} \cap S \neq \varnothing.$$

En aquest segon cas els oberts $\mathcal{U}$ i $\mathcal{V}$ que separen el subespai S poden no ser disjunts, n'hi ha prou que no continguin punts comuns que pertanyin a S, i, a més de ser no buits, cal que tots dos continguin elements de S.

En una separació $X = \mathcal{U} \sqcup \mathcal{V}$ els oberts $\mathcal{U}$ i $\mathcal{V}$ són també tancats, ja que cadascun és complementari de l'altre. Es farà servir el terme anglès clopen per anomenar un subconjunt d'un espai topològic que sigui alhora obert i tancat. Una separació d'un espai és una descomposició en dos clopens disjunts no buits. En tot espai el buit i el total són clopens: els *clopens trivials*. L'espai és connex si, i només si, no n'hi ha més: l'espai no conté clopens no trivials.

Exemples 5.2 *Els espais següents són connexos:*

1. *un punt* $\{x\}$;
2. *un espai groller* X_{gro};
3. *l'adherència d'un espai connex;*
4. *la reunió de dos connexos amb un punt comú,*

i els espais següents no ho són:

5. *un espai discret* X_{dis} *amb més d'un punt:* $|X| > 1$;
6. $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$;
7. $\big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\big\} \cup \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\big\}$.

PROVA:

1. L'espai només té dos subconjunts: el buit i el total. No poden haver-hi clopens no trivials perquè, de fet, no hi ha subconjunts no trivials.
2. L'espai només conté dos oberts: el buit i el total. No poden haver-hi clopens no trivials perquè, de fet, no hi ha oberts no trivials.
3. Suposi's que es té una separació $\overline{X} = \mathcal{U} \sqcup \mathcal{V}$. Sigui $x \in \mathcal{U} \subset \overline{X}$. Tot entorn obert de x a $\overline{X}$ talla X. Per tant, $\mathcal{U} \cap X \neq \varnothing$. Anàlogament, $\mathcal{V} \cap X \neq \varnothing$. Per tant es té una separació $X = (\mathcal{U} \cap X) \sqcup (\mathcal{V} \cap X)$ en oberts disjunts no trivials.
4. Sigui $x \in \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$ un punt en la intersecció de dos conjunts connexos. Sigui $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$. Tota descomposició $\mathcal{C} = \mathcal{U} \sqcup \mathcal{V}$ en dos clopens disjunts de $\mathcal{C}$ dóna descomposicions $\mathcal{C}_i = (\mathcal{U} \cap \mathcal{C}_i) \sqcup (\mathcal{V} \cap \mathcal{C}_i)$, que han de ser trivials. Si $x \in \mathcal{U}$ es té $\mathcal{V} \cap \mathcal{C}_i = \varnothing$ per a $i = 1, 2$ i, per tant, $\mathcal{V} \cap \mathcal{C} = \mathcal{V} \cap (\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2) = (\mathcal{V} \cap \mathcal{C}_1) \cup (\mathcal{V} \cap \mathcal{C}_2) = \varnothing$. Anàlogament si $x \in \mathcal{V}$ ha de ser $\mathcal{U} \cap \mathcal{C} = \varnothing$. Sigui com sigui la descomposició és trivial i $\mathcal{C}$ és connex. L'argument serveix per a un nombre arbitrari de connexos que tinguin intersecció no buida. De fet també serveix per demostrar que la reunió de connexos tals que la intersecció de dos qualsevol d'ells sigui no buida és un connex. Veure problema **5.1**.

5. Tots els subconjunts de X són clopens. Tota descomposició en reunió disjunta d'un subconjunt i el seu complementari és una separació.
6. $\mathbb{Q} = (-\infty, \sqrt{2}) \sqcup (\sqrt{2}, \infty)$ és una separació. De fet, $\mathbb{Q}$ es pot separar per qualsevol irracional.
7. El conjunt $S \subset \mathbb{R}^2$ és reunió dels eixos de coordenades $xy = 0$ i la hipèrbola $xy = 1$. Es pot separar amb els oberts $\mathcal{U} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy < \frac{1}{2}\}$ i $\mathcal{V} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy > \frac{1}{2}\}$, que tenen intersecció buida i cadascun conté un tros de conjunt: el primer els eixos i el segon la hipèrbola. És a dir, se satisfan les condicions:

$$S \subseteq \mathcal{U} \cup \mathcal{V}, \quad S \cap \mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \varnothing, \quad S \cap \mathcal{U} \neq \varnothing, \quad S \cap \mathcal{V} \neq \varnothing.$$

Observi's que els oberts $\mathcal{U} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy < 1\}$ i $\mathcal{V} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \neq 0\}$, tot i tenir intersecció no buida, satisfan aquestes mateixes propietats i, per tant, també donen una separació del conjunt S. □

Proposició 5.3 *Els subconjunts connexos de $\mathbb{R}$ són els intervals: els subconjunts que contenen $[a, b]$ sempre que continguin els reals $a \leqslant b$.*

PROVA: Sigui $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}$ un subconjunt connex. Siguin $a, b \in \mathcal{C}$ amb $a \leqslant b$. Suposi's que $[a, b] \nsubseteq \mathcal{C}$. Aleshores existeix un punt c amb $a < c < b$ tal que $c \notin \mathcal{C}$ i

$$\mathcal{C} = \big(\mathbb{R} \setminus \{c\}\big) \cap \mathcal{C} = \big((-\infty, c) \sqcup (c, \infty)\big) \cap \mathcal{C} = \big((-\infty, c) \cap \mathcal{C}\big) \sqcup \big(\mathcal{C} \cap (c, \infty)\big)$$

és una separació de $\mathcal{C}$, en contradicció amb el fet que era connex. Per tant $\mathcal{C}$ ha de ser un interval.

Recíprocament, sigui I un interval. Suposi's que $I = \mathcal{U} \sqcup \mathcal{V}$ és una separació. Siguin $a \in \mathcal{U}$ i $b \in \mathcal{V}$. Es pot suposar que $a < b$. Com que $[a, b] \subseteq I$ tot punt de $[a, b]$ pertany a $\mathcal{U}$ o a $\mathcal{V}$. Sigui $S \subseteq \mathcal{U}$ el subconjunt format pels elements $x \in \mathbb{R}$ tals que $[a, x] \subseteq \mathcal{U}$. Aquest conjunt és no buit, ja que conté a. Està fitat superiorment per b ja que per a tot $x \geqslant b$ l'interval $[a, x]$ conté $b \notin \mathcal{U}$ i per tant $[a, x] \nsubseteq \mathcal{U} \Rightarrow x \notin S$. Sigui $s \in [a, b] \subseteq I$ el seu suprem. Es vol veure que s pertany a l'adherència tant de $\mathcal{U}$ com de $\mathcal{V}$. En efecte, es considera un entorn obert bàsic de s de la forma $(s - \epsilon, s + \epsilon)$.

- Com que $s - \epsilon$ no és fita superior de S existeix algun element $x \in S \subseteq \mathcal{U}$ tal que $s - \epsilon < x \leqslant s$. Per tant $(s - \epsilon, s + \epsilon) \cap \mathcal{U} \neq \varnothing$ ja que conté x.
- El nombre $y = \min(s + \frac{\epsilon}{2}, b) \in [a, b] \subseteq I$ no pertany a S ja que és més gran que la fita superior (suprem) s. Per tant l'interval $[a, y]$ no està contingut en $\mathcal{U}$. Com que $[a, x] \subseteq \mathcal{U}$ es dedueix que $(x, y] \nsubseteq \mathcal{U} \Rightarrow (x, y] \cap \mathcal{V} \neq \varnothing$. Atenent que $(x, y] \subset (s - \epsilon, s + \epsilon)$ es té $(s - \epsilon, s + \epsilon) \cap \mathcal{V} \neq \varnothing$.

Es té, doncs, $s \in \overline{\mathcal{U}} \cap \overline{\mathcal{V}}$, però com que aquests conjunts són clopens de I coincideixen amb la seva adherència dins de I i es té $s \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$, en contradicció amb el fet que aquests dos conjunts formaven una separació.

De manera que no pot existir cap separació de l'interval I, el qual, per tant, és connex.

Observi's que si $(X, \mathscr{T}_{\leqslant})$ és un espai topològic qualsevol amb topologia induïda per un ordre total l'argument $\mathcal{C} \subseteq X$ connex $\Rightarrow \mathcal{C}$ és un interval segueix essent correcte. En canvi la implicació recíproca no és certa en general. Per demostrar aquesta implicació en l'espai $X = \mathbb{R}$ s'ha fet servir la completesa dels nombres reals, en la seva versió d'existència de suprem de conjunts no buits fitats superiorment. $\square$

5.2 Aplicacions contínues

La propietat de ser connex es manté per imatges d'aplicacions contínues:

Proposició 5.4 *La imatge d'un connex per una aplicació contínua és un connex.*

PROVA: Sigui $f\colon X \to Y$ contínua i $\mathcal{C} \subseteq X$ un subconjunt connex. Considerant la restricció $f|_{\mathcal{C}}\colon \mathcal{C} \to f(\mathcal{C})$ n'hi ha prou a demostrar que si $f\colon X \twoheadrightarrow Y$ és contínua i exhaustiva, aleshores X connex $\Rightarrow Y$ connex.

En efecte, tota separació $Y = \mathcal{U} \sqcup \mathcal{V}$ dóna una separació $X = f^{-1}(\mathcal{U}) \sqcup f^{-1}(\mathcal{V})$. O també, si es vol, l'antiimatge $f^{-1}(\mathcal{U})$ d'un clopen no trivial $\mathcal{U} \subset Y$ és un clopen no trivial de X. $\square$

Corol·lari 5.5 *Tot espai quocient d'un espai connex és connex.*

5.3 Teoremes del valor intermedi

Combinant el fet que la imatge contínua d'un connex és un connex i que els connexos de $\mathbb{R}$ són els intervals es dedueixen una colla de resultats sobre aplicacions contínues que prenen valors en els nombres reals.

Teorema 5.6 (Teorema del valor intermedi) *Sigui $f\colon X \to \mathbb{R}$ una funció contínua, amb X connex. Tot nombre real $\alpha \in \mathbb{R}$ que estigui entre dos valors de la funció també és un valor de la funció:*

$$\exists x, y \in X \text{ amb } f(x) \leqslant \alpha \leqslant f(y) \quad \Rightarrow \quad \exists z \in X \text{ amb } f(z) = \alpha.$$

PROVA: La imatge $f(X) \subseteq \mathbb{R}$ és connexa i per la proposició 5.3 ha de ser un interval I. Si I conté dos punts $f(x)$ i $f(y)$ també conté tots els punts que estiguin entre aquests dos, i com que $I = f(X)$ tots aquests punts són la imatge d'algú. $\square$

Corol·lari 5.7 (Teorema de Bolzano) *Si $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ satisfà $f(a)f(b) \leqslant 0$ aleshores existeix un punt $x \in [a, b]$ amb $f(x) = 0$.*

Corol·lari 5.8 *Conseqüències del teorema del valor intermedi en dimensió 1:*

- *Teorema del punt fix: tota aplicació contínua $[0, 1] \to [0, 1]$ té algun punt fix.*
- *Teorema de Borsuk-Ulam: tota aplicació contínua $\mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ pren el mateix valor en algun parell de punts antipodals.*

PROVA: Es tracta de la versió més senzilla, en dimensió $n = 1$, de dos resultats molt importants que valen en qualsevol dimensió: tota aplicació contínua $\mathbb{D}^n \to \mathbb{D}^n$ del disc unitat tancat en ell mateix té algun punt fix, i tota aplicació contínua $\mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^n$ de l'esfera n-dimensional amb valors vectors n-dimensionals pren el mateix valor en algun parell de punts antipodals. Les demostracions per a n arbitrari són més difícils.

- Donada $f\colon [0,1] \to [0,1]$ contínua es considera la funció $g(x) = f(x) - x$. Aleshores $g(0) = f(0) - 0 \geqslant 0$ i $g(1) = f(1) - 1 \leqslant 1 - 1 = 0$. Aplicant el teorema del valor intermedi es veu que g s'anul·la en algun punt de l'interval, que, tenint en compte la relació entre f i g, és un punt fix de f.

  Naturalment, el resultat val també per a tota aplicació contínua $[a,b] \to [a,b]$ d'un interval compacte qualsevol en ell mateix.

- Donada $f\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ contínua es considera la funció $g(x) = f(x) - f(-x)$. Aleshores $g(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow g(-x) \leqslant 0$. Per tant $g(x)g(-x) \leqslant 0$ per a qualsevol punt $x \in \mathbb{S}^1$.

  De fet, aquesta demostració també val per a aplicacions $\mathbb{S}^n \to \mathbb{R}$. El teorema en dimensió n assegura que el resultat val per a aplicacions $\mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^n$; és a dir, que es pot trobar un parell de punts antipodals en què *totes* les funcions components prenen el mateix valor. Això és molt més difícil de demostrar. $\square$

5.4 Espai producte

La connexió es comporta bé respecte del producte d'espais topològics:

Teorema 5.9 *Sigui $X = \prod_{i\in I} X_i$ un producte d'espais topològics.*

1. *Si tots els X_i són no buits i X és connex aleshores els X_i són connexos.*
2. *Si tots els X_i són connexos aleshores X és connex.*

PROVA: L'enunciat ve a dir que el producte d'espais topològics és connex si, i només si, ho són tots els factors, llevat que la implicació fàcil: X connex $\Rightarrow$ X_i connex per a tot i requereix la condició addicional que els X_i siguin tots no buits. Això és degut a la situació següent: $\varnothing \times X = \varnothing$ és connex sigui quin sigui l'espai X, connex o no.

La hipòtesi que els X_i siguin tots no buits implica que totes les projeccions $\pi_i\colon X \to X_i$ siguin exhaustives. Aplicant la proposició 5.4 (la imatge contínua d'un connex és connexa) es dedueix la primera implicació: si X és connex aleshores tots els X_i ho són.

Es demostra a continuació la implicació recíproca (que és la important) en la qual aquesta suposició no cal. En aquesta demostració es farà servir la generalització donada al problema **5.1** d'un exemple de 5.2: la reunió d'una família arbitrària de connexos que es tallen dos a dos (en particular, si tots ells tenen un punt comú) és un espai connex.

Es demostrarà primer per a productes finits. N'hi ha prou a veure que si X i Y són connexos aleshores $X \times Y$ també ho és. En efecte, les fibres $\{x\}\times Y$ i $X\times\{y\}$ són homeomorfes als espais components i, per tant, són espais connexos. Com que es tallen en el punt (x,y)

la seva reunió $\mathcal{C}_{x,y}$ també és un connex (exemples 5.2). El producte cartesià s'obté com la reunió de tots aquests conjunts connexos:

$$X \times Y = \bigcup_{(x,y)\in X\times Y} \mathcal{C}_{x,y} = \bigcup_{(x,y)\in X\times Y} \big(\{x\} \times Y\big) \cup \big(X \times \{y\}\big).$$

Com que dos d'aquests conjunts $\mathcal{C}_{x_1,y_1}$ i $\mathcal{C}_{x_2,y_2}$ es tallen en els dos punts (x_1, y_2) i (x_2, y_1) es dedueix que aquesta reunió és connexa (problema **5.1**).

A continuació es comprovarà per a productes arbitraris. Sigui $X = \prod X_i$ un producte d'espais connexos. Es pot suposar no buit ja que si és el buit (que equival a què algun dels X_i ho sigui) aleshores ja és un espai connex. Sigui $\boldsymbol{x} = (x_i)_{i\in I} \in X$ un punt qualsevol d'aquest espai. Sigui $\mathcal{C} \subseteq X$ la reunió de tots els subespais connexos $\mathcal{C}_{\boldsymbol{x}} \subseteq X$ que contenen el punt $\boldsymbol{x}$. Novament gràcies a l'exercici **5.1** aquest subespai és connex.

Es vol veure que $X = \overline{\mathcal{C}}$. Sigui $\varnothing \neq \mathcal{B} = \prod_{j\in J} \mathcal{U}_j \times \prod_{i\notin J} X_i \subseteq X$, amb $J \subseteq I$ finit, un obert bàsic no buit del producte cartesià. Es considera el conjunt $\mathcal{C}_{\boldsymbol{x}} = \prod_{j\in J} X_j \times \prod_{i\notin J}\{x_i\} \subseteq X$ format per les tuples del producte que tenen el punt x_i en totes les coordenades i-èsimes excepte en el nombre finit de coordenades d'índex $j \in J$, en què poden tenir qualsevol punt de l'espai corresponent. Aquest conjunt és homeomorf al producte finit $\prod_{j\in J} X_j$ d'espais connexos que, pel cas finit, és connex. A més, conté el punt $\boldsymbol{x}$. Per tant $\mathcal{C}_{\boldsymbol{x}} \subseteq \mathcal{C}$. Aleshores

$$\varnothing \neq \prod_{j\in J} \mathcal{U}_j \times \prod_{i\notin J}\{x_i\} = \mathcal{B} \cap \mathcal{C}_{\boldsymbol{x}} \subseteq \mathcal{C},$$

de manera que l'obert bàsic $\mathcal{B}$ talla $\mathcal{C}$.

Com que tot obert bàsic no buit (i, per tant, tot obert no buit) de X talla $\mathcal{C}$ es té $X = \overline{\mathcal{C}}$. Com que $\mathcal{C}$ és connex i l'adherència d'un connex és connex (exemples 5.2) es dedueix que $X = \overline{\mathcal{C}}$ és connex. □

5.5 Espais arc-connexos

Hi ha un concepte una mica més fort de connexió, que potser és més intuïtiu: que dos punts qualsevol de l'espai es puguin unir per un camí continu. La diferència entre tots dos és molt petita i els espais en què no coincideixen solen ser exemples força patològics.

Definició 5.10 (Camí) *Un* camí *o* corba *en un espai topològic X és una aplicació contínua $\sigma\colon [0,1] \to X$. Els punts $\sigma(0)$ i $\sigma(1)$ es diuen* origen *i* final *del camí. El camí es diu* tancat[1] *o un* llaç *si $\sigma(0) = \sigma(1)$.*

Definició 5.11 (Espai arc-connex) *Un espai topològic es diu* arc-connex *si per a cada parell de punts de l'espai existeix un camí que els té com a origen i final.*

Un subconjunt es diu arc-connex si ho és com a subespai.

Proposició 5.12 *Tot espai arc-connex és connex, però el recíproc no és cert en general.*

[1]Ull! aquest ús de la paraula tancat no és la d'un conjunt tancat d'una topologia.

PROVA: Sigui X arc connex. Suposi's que no és connex. Sigui $X = \mathcal{U} \sqcup \mathcal{V}$ una separació. Siguin $x \in \mathcal{U}$ i $y \in \mathcal{V}$. Per ser arc-connex existeix un camí $\sigma\colon [0,1] \to X$ amb origen $\sigma(0) = x$ i final $\sigma(1) = y$. Aleshores $[0,1] = \sigma^{-1}(\mathcal{U}) \sqcup \sigma^{-1}(\mathcal{V})$ seria una separació de l'interval $[0,1]$, que és connex.

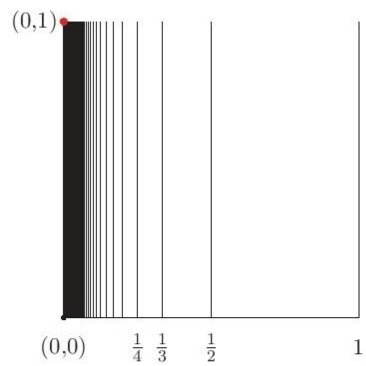
L'exemple típic d'espai connex no arc-connex es dóna a continuació. $\square$

Exemple 5.13 *La* pinta i la puça *és el subespai de* $\mathbb{R}^2$ *següent:*

$$X = \big\{(0,1)\big\} \cup \big([0,1] \times \{0\}\big) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \big(\{\tfrac{1}{n}\} \times [0,1]\big).$$

És un espai connex no arc-connex.

PROVA: Això és un dibuix:



By definition, D is the union of the interval $[0,1]$ along the x-axis together with vertical line segments connecting $(1/n, 0)$ to $(1/n, 1)$ for $n \in \mathbf{Z}^+$ and the single (red) point $(0,1)$:

$$D = ([0,1] \times \{0\}) \cup \bigcup_{n \geq 1} (\{1/n\} \times [0,1]) \cup (0,1).$$

The y-axis strictly between 0 and 1 is not part of this.

Primer es veu que és un espai connex.

La pinta és un espai connex: és la reunió

$$\cup_{n \geqslant 1} \Big(\big([0,1] \times \{0\}\big) \cup \big(\{\tfrac{1}{n}\} \times [0,1]\big)\Big)$$

de conjunts connexos que són cadascun reunió del segment horitzontal i un segment vertical que es tallen en el punt $(\frac{1}{n}, 0)$. Tots els conjunts d'aquesta reunió es tallen en el segment horitzontal. Una altra manera de veure-ho és observar que la pinta és arc-connex: dos punts qualsevol, tan si estan en el segment horitzontal com en segments verticals es poden unir per un camí, el qual es pot obtenir com la concatenació de, com a màxim, tres segments.

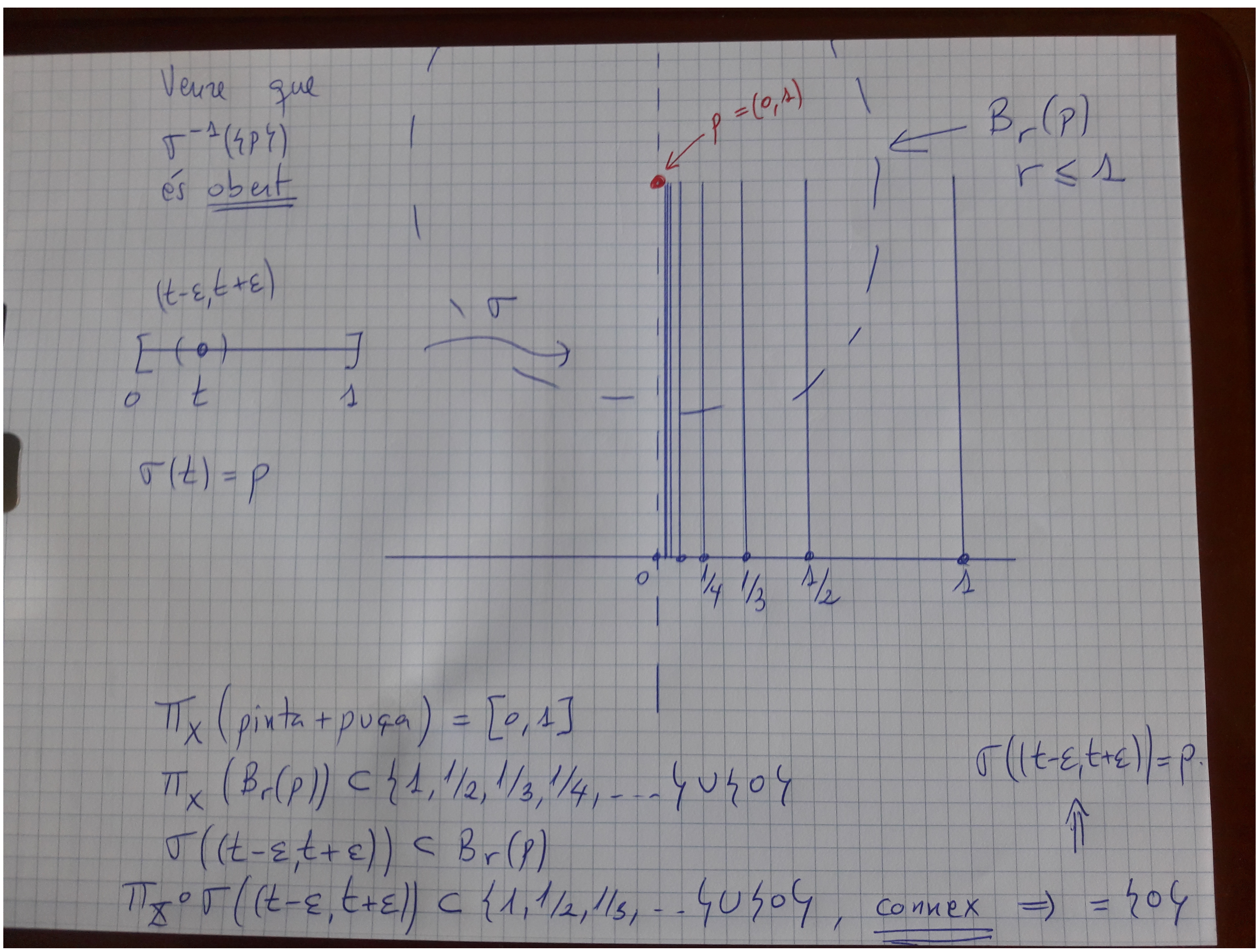
La puça, que és un punt $p = (0,1)$, també és un espai connex. Observi's que tot entorn obert de la puça en l'espai X talla la pinta: tota bola $B_\epsilon(p)$ conté els punts $(\frac{1}{n}, 1)$ de la pinta per a $\frac{1}{n} < \epsilon$.

Donada una descomposició $X = \mathcal{U} \sqcup \mathcal{V}$ en oberts disjunts tant la pinta com la puça (de fet, qualsevol subespai connex) han d'estar completament continguts en un dels dos clopens, ja que altrament fent la intersecció amb el subespai s'obtindria una separació d'aquest subespai. Suposi's que $p \in \mathcal{U}$. Aleshores $\mathcal{U}$ talla la pinta i, per tant, conté la pinta, de manera que ha de ser $\mathcal{U} = X$. Anàlogament $p \in \mathcal{V} \Rightarrow \mathcal{V} = X$. Per tant la descomposició és necessàriament la trivial i l'espai X és connex.

A continuació es veurà que no és arc-connex. Es veurà que la puça no es pot unir a cap punt de la resta del conjunt (la pinta) amb un camí. Suposi's que $\sigma\colon [0,1] \to X$ és un camí amb $\sigma(0) = p$. Es veurà que $\sigma^{-1}(p)$ és obert i tancat a $[0,1]$. Com que és no buit i aquest espai és connex, ha de ser el total. Per tant σ és constant. Així, s'ha vist que tot camí amb origen en la puça és per força constant i, per tant, no pot unir aquest punt amb cap punt de la pinta. Queda veure, per tant, que $\sigma^{-1}(p)$ és obert i tancat a $[0,1]$.

Que és tancat és immediat: és l'antiimatge d'un punt, que és un conjunt tancat, ja que $X \subset \mathbb{R}^2$ és un espai de Hausdorff.

Per veure que és un obert



sigui $t \in \sigma^{-1}(p) \in [0,1]$, que és un punt amb $\sigma(t) = p$. S'agafa $\mathcal{V}_p = B_1(p) \cap X$, que és un entorn de p. Per continuïtat existeix un ϵ tal que l'entorn obert $\mathcal{U}_t = (t-\epsilon, t+\epsilon) \cap [0,1]$ té imatge dins de $\mathcal{V}_p$. Es veurà que $\mathcal{U}_t \subseteq \sigma^{-1}(p)$.

Sigui $\pi_x\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la projecció en la primera component. Es té $\pi_x(\mathcal{V}_p) = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \geqslant 2\}$ ja que $\mathcal{V}_p$ està format per la puça i per trossos de segments verticals. Per tant, $\pi_x \circ \sigma(\mathcal{U}_t) \subseteq \pi_x(\mathcal{V}_p) \subseteq \{0\} = \{\frac{1}{n} : n \geqslant 2\}$. Com que $(\mathcal{U}_t)$ és connex la imatge per una aplicació contínua és un connex. Aquesta imatge conté segur el zero $0 = \pi_x(p) = \pi_x\big(\sigma(t)\big)$. Per tant ha de ser igual a zero, ja que tot subconjunt de $\{0\} = \{\frac{1}{n} : n \geqslant 2\}$ que contingui zero i un altre punt no és connex. Es dedueix que $\sigma(\mathcal{U}_t)$ ha de ser constant igual a p. Per tant, $\mathcal{U}_t \subseteq \sigma^{-1}(p)$ i això demostra que aquest conjunt és obert. □

Proposició 5.14 *La imatge per una aplicació contínua d'un espai arc-connex és arc-connexa.*

PROVA: Sigui $f\colon X \to Y$ contínua, i suposi's que X és arc-connex. Donats dos punts $y_1, y_2 \in f(X)$ siguin $x_1, x_2 \in X$ amb $f(x_i) = y_i$. Per ser X arc-connex existeix un camí $\sigma\colon [0,1] \to X$ amb origen x_1 i final x_2. L'aplicació $f \circ \sigma\colon [0,1] \to f(X) \subseteq Y$ és un camí (composició de contínues) amb origen y_1 i final y_2. □

Corol·lari 5.15 *Tot espai quocient d'un arc-connex és arc-connex.*

Proposició 5.16 *Per a subconjunts oberts de $\mathbb{R}^n$ la condició de connex i d'arc-connex són equivalents.*

PROVA: Sigui $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ un obert connex. Es vol veure que és arc-connex. Sigui $x \in \mathcal{U}$ un punt qualsevol. Sigui $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ el conjunt dels punts que es poden unir amb x a través d'un camí: punts $y \in \mathcal{U}$ tals que existeix un camí $\sigma\colon [0,1] \to \mathcal{U}$ amb origen x i final y. Aquest conjunt $\mathcal{V}$ és alhora obert i tancat:

Obert. Donat $y \in \mathcal{V}$ sigui $B_r(y) \subseteq \mathcal{U}$. Existeix un camí en $\mathcal{U}$ que uneix x amb y; per a cada $z \in B_r(y)$ existeix un camí (un segment, per exemple) en $B_r(y) \subseteq \mathcal{U}$ que uneix y amb z. Concatenant-los es té un camí que uneix x amb z. Per tant, $B_r(y) \subseteq \mathcal{V}$.

Tancat. Sigui $y \in \mathcal{U} \setminus \mathcal{V}$ Tota bola $B_r(y) \subseteq \mathcal{U}$ ha d'estar continguda en $\mathcal{U} \setminus \mathcal{V}$ ja que si algun punt de la bola es pogués unir amb x per un camí en $\mathcal{U}$ aleshores concatenant amb el segment entre aquest punt i y també s'hi podria unir y. Per tant, $\mathcal{U} \setminus \mathcal{V}$ és obert i $\mathcal{V}$ és tancat en $\mathcal{U}$.

Es dedueix que $\mathcal{V}$ és un clopen no buit de $\mathcal{U}$ i, per tant, ha de ser $\mathcal{V} = \mathcal{U}$. □

5.6 Components connexes

Tot espai topològic descompon com a reunió disjunta de subespais connexos maximals: les seves components connexes. Anàlogament pel que fa a arc-connexos.

Definició 5.17 (Components) *S'anomenen components connexes d'un espai topològic els subespais connexos que siguin maximals respecte d'aquesta propietat (no estan continguts pròpiament en cap subespai connex).*

De manera anàloga es defineixen les components arc-connexes.

Proposició 5.18 *Propietats de les components connexes:*

1. *Tot subespai connex està contingut en una component connexa, que és única si l'espai és no buit.*
   El mateix per a arc-connexes.
2. *Les components connexes d'un espai en formen una partició en subespais tancats.*
3. *Les components arc-connexes d'un espai en formen una partició en subespais no necessàriament tancats.*

PROVA:

1. Sigui $S \subseteq X$ un subespai connex no buit.

   $$\mathscr{C} = \{\mathcal{C} \subseteq X : S \subseteq \mathcal{C},\ \mathcal{C} \text{ connex}\}$$

   el conjunt dels subconjunts connexos que contenen S, que és no buit ja que $S \in \mathscr{C}$. Aleshores la seva reunió $\mathcal{C}_S = \cup_{\mathcal{C} \in \mathscr{C}} \mathcal{C}$ és un subespai connex de X ja que tots els espais que s'estan reunint tenen intersecció no buida perquè S està contingut en tots ells.

   Clarament $\mathcal{C}_S$ és un subespai connex maximal que conté S. De fet és l'únic ja que si n'hi hagués dos la seva reunió seria un connex que conté S i per maximalitat han de ser iguals.

   El subespai $S = \varnothing$ està contingut en totes les components connexes. Si $X = \varnothing$ aleshores la única component connexa és el propi X. Altrament tot punt de X està contingut en una única component connexa, que també conté el subespai connex $\varnothing$.

   El cas arc-connex es pot raonar exactament igual. Per a això n'hi ha prou a observar que l'enunciat de l'exercici **5.1** també és cert per a la propietat d'arc-connex (últim apartat de l'exercici **5.13**).

2. Cada punt de x està contingut en alguna component connexa. Per tant X és la reunió de les components connexes dels seus punts, i dues d'aquestes components o són disjuntes o coincideixen. Per tant, es té una descomposició $X = \sqcup \mathcal{C}$ en components connexes disjuntes.

   Com que l'adherència d'un connex és un connex, les components connexes, per ser conjunts connexos maximals, han de coincidir amb la seva adherència, i per tant han de ser necessàriament subespais tancats.

3. Exactament igual que en el cas connex, excepte que ara no es pot fer servir que l'adherència d'un arc-connex és arc-connex i, per tant, les components arc-connexes no tenen perquè ser tancades. Per exemple, les de la pinta i la puça o el sinus topològic no ho són, de tancades: una component ho és però l'altra no. $\square$

Problemes

5.1. Sigui $(\mathcal{C}_i)_{i\in I}$ una família de subespais connexos de l'espai topològic X tals que $\mathcal{C}_i \cap \mathcal{C}_j \neq \varnothing$ per a tot $i, j \in I$. Demostreu que $\cup_{i\in I}\mathcal{C}_i$ és connex.

5.2. Sigui $(\mathcal{C}_n)_{n\geqslant 1}$ una col.lecció numerable de conjunts connexos tal que per a tot $n \geqslant 1$ és $\mathcal{C}_n \cap \mathcal{C}_{n+1} \neq \varnothing$. Demostreu que la seva reunió $\mathcal{C} = \cup_{n\geqslant 1}\mathcal{C}_n$ és connex.

5.3. Sigui $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$. Demostreu que si A és connex aleshores B també ho és. Deduïu que l'adherència d'un connex és connexa. Si A és un conjunt connex, ho són també el seu interior i la seva frontera?

5.4. Si A és connex, són connexos A° i ∂A? Si $\overline{A}$ és connex, és connex A?

5.5. Sigui $\mathcal{C} \subseteq X$ un subconjunt d'un espai topològic. Es considera la condició següent: per a tot parell d'oberts $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ que siguin disjunts i recobreixin $\mathcal{C}$ o bé $\mathcal{U} \cap \mathcal{C} = \varnothing$ o bé $\mathcal{V} \cap \mathcal{C} = \varnothing$. Aquesta condició implica que $\mathcal{C}$ és connex?

5.6. Sigui A un subconjunt d'un espai topològic X. Demostreu que tot subconjunt connex $\mathcal{C} \subseteq X$ que talli A i el seu complementari A^c també talla la frontera ∂A.

5.7. Demostreu que un espai topològic X és connex si, i només si, no existeix cap aplicació contínua exhaustiva $f\colon X \to \{0, 1\}$ de X en un espai topològic discret de dos punts.

5.8. Siguin A i B subconjunts d'un espai X amb A connex i B un clopen. Demostreu que $A \cap B = \varnothing$ o A.

5.9. Demostreu que la intersecció d'una cadena decreixent de conjunts connexos no és necessàriament connexa.
Indicació: Agafeu una escala infinita i aneu traient graons.

5.10. Sigui $\sim$ una relació d'equivalència en un espai X i $Q = X/\!\sim$ l'espai quocient. Si X és connex, aleshores Q també ho és? Demostreu que si cada classe d'equivalència $[x] = \{y \in X : y \sim x\}$ és connexa i Q és connex aleshores l'espai X també ho és.

5.11. Demostreu usant punts separadors que els espais topològics $\mathbb{S}^1$, I i $\mathbb{R}^2$ no són homeomorfs dos a dos, on $I \subseteq \mathbb{R}$ denota un interval qualsevol.

5.12. Es consideren a $\mathbb{R}^2$ els subconjunts següents:

- la reunió dels segments que uneixen el punt $(0, 1)$ amb els punts $(\frac{1}{n}, 0)$;
- la reunió de les semicircumferències que uneixen el punt $(0, 0)$ amb els punts $(\frac{1}{n}, 0)$.

Demostreu que aquests dos conjunts no són homeomorfs.
Indicació: Considereu els punts dels dos espais que no són separadors.

5.13. Digueu si són arc-connexos els conjunts següents:

1. l'adherència $\overline{A}$ d'un conjunt arc-connex A;
2. el producte cartesià $A \times B$ de conjunts arc-connexos;
3. la reunió de conjunts arc-connexos amb un punt comú;
4. la reunió de conjunts arc-connexos tals que dos d'ells tenen intersecció no buida.

5.14. Sigui $A \subseteq X$ un subconjunt. Demostreu que tot camí que comenci en A i acabi fora de A passa per la frontera.

5.15. Digueu si els espais següents són o no connexos o arc-connexos:

1. esfera n-dimensional: $\mathbb{S}^n$;
2. complementari de l'esfera n-dimensional: $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \mathbb{S}^n$.
3. punts de $\mathbb{R}^n$ amb totes les coordenades racionals: $\mathbb{Q}^n \subset \mathbb{R}^n$;
4. punts de $\mathbb{R}^n$ amb alguna coordenada irracional: $\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{Q}^n$;
5. recta real amb la topologia del límit inferior: $\mathbb{R}_\ell$;
6. espiral $\big\{(0,0)\big\} \cup \big\{\frac{1}{t}(\cos t, \sin t) : t > 0\big\}$;
7. el pla menys un conjunt numerable: $\mathbb{R}^2 \setminus N$, on N és numerable;
8. el subespai $\mathbb{R}_{\mathsf{cf}} \setminus \{0\}$;
9. el subespai $\mathbb{R}_{\mathsf{cf}} \setminus \mathbb{Q}$.

5.16. *Sinus topològic.* Demostreu que l'espai $X = \big(\{0\} \times [-1,1]\big) \cup \{(x, \sin\frac{1}{x}) : x > 0\} \subset \mathbb{R}^2$ és connex però no és arc-connex.

5.17. Determineu les components connexes i arc-connexes dels espais topològics següents:

1. $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{Q}^c$ com a subespais de $\mathbb{R}$;
2. $\mathbb{Q}^2$, $(\mathbb{Q}^c)^2$, $(\mathbb{Q}^2)^c$ i $((\mathbb{Q}^c)^2)^c$ com a subespais de $\mathbb{R}^2$;
3. el sinus topològic com a subespai de $\mathbb{R}^2$;
4. $\mathbb{R}_\ell$ (topologia del límit inferior);
5. $\big(\{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \geqslant 1\}\big) \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$;
6. l'espai de l'apartat anterior afegint-hi el segment $[0,1] \times \{0\}$;
7. $K \times [0,1] \cup -K \times [-1,0] \cup [0,1] \times -K \cup [-1,0] \times K \subset \mathbb{R}^2$, amb $K = \{\frac{1}{n} : n \geqslant 1\}$.

5.18. Un espai topològic es diu *totalment discontinu* si les seves components connexes són els punts. Per exemple, els espais discrets ho són. Demostreu que els racionals amb la topologia ordinaria i els enters amb la topologia p-àdica són espais totalment discontinus.

5.19. Sigui X un espai topològic i sigui Q l'espai quocient per la relació d'equivalència "pertànyer a la mateixa component connexa". Demostreu que Q és un espai totalment discontinu.

Problemes complementaris i/o d'ampliació

5.20. Es consideren a $\mathbb{R}^2$ els subespais següents:

- circumferència amb una "cua" interior: $A = \mathbb{S}^1 \cup \big([0,1] \times \{0\}\big)$;
- circumferència amb una "cua" exterior: $B = \mathbb{S}^1 \cup \big([1,2] \times \{0\}\big)$.

Demostreu que $A \cong B$ i que $A^c \cong B^c$ però que no existeix cap homeomorfisme $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que enviï A a B.

5.21. Sigui $X = [0,1] \times [0,1]$ amb la topologia de l'ordre lexicogràfic. Demostreu que

1. Tot subconjunt $S \subseteq X$ té suprem.
2. Tot subconjunt tancat de X conté el seu suprem.
3. X és connex.
4. Si X és un quocient d'un espai topològic Y aleshores Y conté un nombre no numerable d'oberts disjunts.
5. X no és arc-connex.

5.22. *Teoremes del pastís.* Demostreu els dos resultats següents:

1. *Primer teorema*: Donats dos subconjunts acotats de $\mathbb{R}^2$ existeix una recta que els separa tots dos en dues meitats exactament iguals.
2. *Segon teorema*: Donada un subconjunt acotat de $\mathbb{R}^2$ existeixen dues rectes perpendiculars que el separen en quatre trossos que tenen tots quatre la mateixa àrea.

5.23. *Connexió i arc-connexió local.* Un espai topològic es diu *localment connex* (resp. *localment arc-connex*) si tot punt de l'espai té un entorn connex (resp. arc-connex).

Doneu exemples d'espais localment connexos no que no siguin connexos i d'espais connexos que no siguin localment connexos, i el mateix per a la propietat d'arc-connexió.

5.24. Estudieu en els subespais de $\mathbb{R}^2$ següents les propietats de connexió i arc-connexió i les propietats locals corresponents:

1. $X = \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\} \cup \{(x, \frac{1}{n}) : x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}\} \cup \{(0,y) : y \in \mathbb{R}\}$,
2. $Y = \{(tq, 1-t) : 0 \leqslant t \leqslant 1, q \in \mathbb{Q}\}$ (reunió de tots els segments que uneixen $(0,1)$ amb punts racionals de l'eix x)
3. el sinus topològic.
4. $\mathbb{S}^1 \cup [-1,0] \times \{0\} \cup \{(x, \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{x}) : 0 < x \leqslant 1\}$.

5.25. La imatge contínua d'un espai localment arc-connex és sempre localment arc-connexa? Proveu que la imatge per una aplicació contínua tancada sí que té aquesta propietat.

5.26. Sigui X un espai localment connex amb components connexes $\{\mathcal{C}_i\}_{i\in I}$, i sigui $f\colon X \to Y$ una aplicació en un espai topològic Y. Demostreu que f és continua si, i només si, les restriccions $f|_{\mathcal{C}_i}\colon \mathcal{C}_i \to Y$ són contínues per a tot índex $i \in I$, i doneu contraexemples d'aquesta propietat quan sense la hipòtesi de localment connex.