Tema 2

20. Donats els punts A i B sobre una recta r i el punt C fora de r, considerem totes les homologies especials que tenen l'eix passant per A i que transformen C en un punt de r. Determineu el lloc geomètric de les imatges del punt B per totes aquestes homologies.

Considerem la referència $\mathcal{R} = \{A; \vec{AB}, \vec{AC}\}$. Sigui f una homologia especial com la que es descriu a l'enunciat. Aleshores, $f(A) = A$, ja que A està sobre l'eix de l'homologia, i

$$\tilde{f}(\vec{AC}) = \overrightarrow{Af(C)} = c\vec{AB},$$

ja que $f(C) \in r$ i $\vec{AB}$ és vector director de r (O bé, $C = (0,1)$ i $f(C) \in r$, que té equació $y = 0$) Així doncs, en aquesta referència,

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Si f és una homologia especial, el polinomi característic de $\tilde{f}$ ha d'ésser $(t-1)^2$. Per tant,

$$-t(a-t) - bc = (t-1)^2$$

$$t^2 - at - bc = t^2 - 2t + 1$$

$$a = 2 \qquad bc = -1$$

En aquesta referència, la família d'homologies és

$$f_b\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1/b \\ b & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad b \in \mathbb{R} - \{0\}$$

L'eix de f_b és la recta $y = bx$.

Considerem ara el punt $B = (1,0)$ i les seves imatges

$$f_b\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1/b \\ b & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

El lloc geomètric està format pels punts de la recta que passa pel punt $A + 2\vec{AB}$ (que pertany a r) i té direcció $\vec{AC}$, sense el punt $A + 2\vec{AB}$, ja que $b \neq 0$.