Resum temes d'examen teoria AMiG 2019-2020

Edgar Moreno Martínez

Curs 2019-2020

Apunts basats en apunts de Ivet Acosta, ApuntsFME i el curs impartit per Pere Pascual

1 Jordan

Definicio de vector propi generalitzat; base i dimensio del subespai que genera, matriu de 'endomorfisme restringit a aquest subespai. Aplicacio de la matriu de Jordan (cas complex) per al calcul de les potènciek-èssimes d'una matriu.

Definició 1.1 (VEP generalitzat) *Un VEP generalitzat de f de VAP k i alçada l és un vector(v) tal que:*

$$v \in Nuc(f - k \cdot Id)^l, v \notin Nuc(f - k \cdot Id)^{l-1}$$

Genera un subespai de dimensió l amb base: $v, (f - k \cdot Id)v, ..., (f - k \cdot Id)^{l-1}v$. Aquests vectors son l.i. (es pot veure aplicant f a una combinació lineal de la base igualada a 0). Si definim $u_i = (f - k \cdot Id)^i v$, tenim $\forall i \in \{0, ..., l-2\}$, $f(u_i) = k \cdot u_i + u_{i+1}$. (a més u_{l-2} és un VEP). Per tant f restringit al subespai és: $\begin{pmatrix} k & & & & \\ 1 & k & & & \\ & 1 & k & & \\ . & . & . & . & . \\ & & & 1 & k \end{pmatrix}$

Si es escribim la una matriu A en la seva base de Jordan tenim: $A = S^{-1}JS$. Per tant $A^k = S^{-1}JSS^{-1}JS...S^{-1}JS = S^{-1}JJ...JS = S^{-1}J^kS$. Per tant només cal saber elevar J. Sigui D la matriu que només conté la diagonal de J i Q la que conté la diagonal secundaria, tenim que $J^k = (D + Q)^k$, aquestes matrius conmuten i podem calcular la potencia fàcilment utilitzant el teorema binomial. Utilitzarem que $Q^l = 0$.

2 Tensors

Definicio i propietats del morfisme d'antisimetritzacio de tensors. Definicio de producte exterior, calcul del producte exterior de p elements del dual i accio sobre p vectors. Enunciat i demostracio del teorema de la dimensio, base i coordenades de $A_p(E)$.

Definició 2.1 (Morfisme d'antisimetrització) *Definim* $A : T_p(\mathbb{E}) \to T_p(\mathbb{E}), A(f) = \frac{1}{p!}\sum_{s \in S_p} \epsilon(s)sf$

Tenim que $Im(A) = A_p(\mathbb{E})$. A més si $f \in A_p(\mathbb{E})$, $A(f) = f$.

Definició 2.2 (Producte exterior) *Si* $\mathbb{E}$ *e.v,* $w_1, ..., w_p \in T_1(\mathbb{E}) = \mathbb{E}^*$, *definim* $\wedge$, *com:* $w_1 \wedge ... \wedge w_p = p!A(w_1 \bigotimes ... \bigotimes w_p)$

Tenim que $Im(\wedge) \in A_p(\mathbb{E})$, $\wedge$ multilineal. $w_1, ..., w_p = \sum_{r \in S_p} w_{r(1)} \bigotimes ... \bigotimes w_{r(p)}$. Tenim que $(w_1 \wedge ... \wedge w_p)(u_1, ..., u_p) = det(w_j(u_i))$.

Teorema 2.1 (Dimensió de A_p) *Si* $\mathbb{E}$ *e.v.,* B *base de* $\mathbb{E}$. *Tenim que:*

1. *dim* $A_p(\mathbb{E}) = \binom{n}{p}$
2. $\{e^*_{i_1} \wedge ... \wedge e^*_{i_p}\}$, *amb* i_k *estrictament creixents és una base de* A_p
3. *Las coordenades de* $w \in A_p$ *venen donades per:*

$$(w(e_{i_1}, ..., e_{i_p}))_{1 \leq i_1 < ... < i_p \leq n}$$

Demostració 2.1 *Del teorema anterior:*
$2 \implies 1$ *Fàcilment ja que agafat un subconjunt de n imposem directament un ordre.*
2: *Per veure que son l.i: Si* $w = \sum a_I \cdot e_{i_1} \wedge ... \wedge e_{i_p} = 0$. *Apliquem p elements de la base que genera la base dual ordenats a w,* $w(e_{q_1}, ..., e_{q_p})$, *per la propietat que relaciona el producte exterior amb el determinant ens queda només:* $w(e_{q_1}, ..., e_{q_p}) = a_I$. *Aplicant el mateix a totes les posibilitats veiem que tots els coeficients son 0 el que és necessari i suficient per veure que la base es l.i.*
3. Podem veure que coincideixen els valors, palaso.

3 Raó doble

Definició de raó doble, independencia del sistema de referència i caracterització de les homografies de $\mathbb{P}^1$ mitjançant la raó doble.

Definició 3.1 (Raó doble) *Siguin* $q_1, q_2, q_3, q_4 \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$, *amb com a mínim 3 d'ells diferents. Si* R *és un sistema de referència i* $(q_i)_R = (x_i, y_i)$. *Definim la ráo doble:*

$$(q_1, q_2, q_3, q_4) = \frac{\begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} x_4 & y_4 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_4 & y_4 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}} \in k \cup \{\infty\}$$

Observació 3.1 $(p_1, p_2, p_3, p_\infty) = (p_1, p_2, p_3) = \frac{p_3 - p_1}{p_3 - p_2}$, $(p_1, p_2, p_3, p_4) = \frac{(p_1, p_2, p_3)}{(p_1, p_2, p_4)}$

Definició 3.2 *La coordenada absoluta de* $x = (x_0, x_1)$ *és* $\alpha_x = \frac{x_0}{x_1}$. *S'observa que* $(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{\alpha_3 - \alpha_1}{\alpha_3 - \alpha_2} : \frac{\alpha_4 - \alpha_1}{\alpha_4 - \alpha_2}$

Observació 3.2 *La raó doble és independent de la base. Si R, R' referències tenim que*

$$\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} x_i' \\ y_i' \end{pmatrix}$$

Per tant en base R':

$$(q_1, q_2, q_3, q_4)' = \frac{detS \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}}{detS \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}} : \frac{detS \begin{vmatrix} x_4 & y_4 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}}{detS \begin{vmatrix} x_4 & y_4 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}} = (q_1, q_2, q_3, q_4)$$

Teorema 3.1 *Sigui $f : \mathbb{P} \to \mathbb{P}'$ espais projectius de dimensió 1. Si f és injectiva i conserva raons dobles $\implies f$ projectivitat.*

Demostració 3.1 *Si $R = \{p_1, p_2, p_u\}$ de $\mathbb{P}$ referència per la injectivitat tenim que $R' = \{f(p_1), f(p_2); f(p_u)\}$ son diferents i és referència de $\mathbb{P}'$. Definim com a $g : \mathbb{P} \to \mathbb{P}'$ la única projectivitat tal que $g(R) = R'$, veiem $f = g$. Com que f manté raons dobles i g per ser projectivitat també:*

$$\forall q \in \mathbb{P} \qquad (p_1, p_2, p_u, q) = (f(p_1), f(p_2), f(p_u), f(q)) = (g(p_1), g(p_2), g(p_u), g(q))$$

$$\implies \textit{coordenades absoluta de } f(q) = g(q) \implies f(q) = f(q) \implies f = g$$

4 Teorema de Poncelet

Enunciat i demostracio del teorema de Poncelet per a rectes de $\mathbb{P}^3$, amb les resultats previs necessaris.

Definició 4.1 *Projectivitat: Aplicació(f) entre dos espais projectius bijectiva tal que si ϕ és una aplicació lineal, $f = [\phi]$*
Perspectivitat: Si V_1, V_2 varietats projectives de $\mathbb{P}^n$ de dimensió d i W és suplementaria a V_i (generen tot l'espai i disjuntes). Definim perspectivitat de centre W entre V_1 i V_2:

$$f : V_1 \to V_2$$

$$p \to f(p) := (W \wedge p) \cap V_2$$

Teorema 4.1 (Poncelet) *Siguin V_1, V_2 varietats projectives de dim d a $\mathbb{P}^n$. Qualsevol projectivitat $V_1 \to V_2$ pot ser escrita com a composició de perspectivitats.*

Demostració si $d = 1$, $n = 3$ qualsevol.

Lema 4.1 *Si $n = 2$,sigui $f : r \to s$ projectivitat sigui $O = r \cap s$. f perspectivitat $\iff f(O) = O$. La primera implicació surt directament de que $f(O) = Oq \cap s = O$ on q és el centre de la perspectivitat. La contraria la tenim agafant $R_r = \{A, B, O\}$ i $R_s = \{f(A), f(B), O(f(O)\}$. Si considerem $q = Af(A) \cap Bf(B)$ i considerem g perspectivitat desde q tenim que $g(R_r) = R_s$ i per ser f, g projectivitats $f = g$.*

Lema 4.2 *Si* $n = 2$*, sigui* $f : r \to s$ *projectivitat sigui* $O = r \cap s$*. Si* $f(O) \neq O \implies f$ *és composició de dues perspectivitats. Ho farem veient que existeix una perspectivitat* g *que envia* r *a una* l *auxiliar on tindrem que* $g(p) = f(p)$ *amb el que podem aplicar el lema anterior per concluir. Aquesta* g *pot ser una projectivitat que desde* $q \in af(a)$ *que envia* r *a una recta que pasa per* $f(a)$*.*

Lema 4.3 *Siguin* l_1, l_2 *rectes disjuntes a* $\mathbb{P}^3$*, sigui* $p \notin l_1, l_2$*. Llavors* $\exists! s$ *recta tal que pasa per* s *i pasa per* l_1, l_2*. I* s *ve donat per* $(l_1 \wedge p) \cap (l_2 \wedge p)$*. Veiem que aquesta* s *funciona: calculant la dimensió veiem que és una recta,* p *està trivialment contingut i les interseccions definides existeixen.*

Demostració 4.1 (Poncelet per $d = 1, n \geq 3$**)** *Si* r, s *no son disjuntes pel lema 4.1 i 4.2 ho tenim, ampliant el punt* p *desde on es fa la perspectiva a* $p \wedge V$ *amb* V *suplementari a* $r \wedge s$*.*
Si son disjuntes com a màxim generaran un espai de dimensió 3, amb el que podem fer una construcció semblant a l'anterior si sabem fer el cas igual a 3. Anem a veure el cas $n = 3$*.*
Sigui A_i *una referència de* r *i* $B_i = f(A_i)$ *una referència de* s*. Sigui* $l_i = A_i \wedge B_1$*. Veiem les* l_i *que són diferents, i disjuntes ja que si no generarien un pla on estarien contingudes* r, s *amb el que* r, s *no serien disjuntes. Ara sigui* $p \in l_1 \notin r, s$*, i* m *la única recta donada pel lema 4.3 que talla per* l_2, l_3*.* m *no talla* r *ni* s *ja que si no* r, s *serien coplanaries. Ara per la definició de les* l_i *i de* s *la perspectivitat* g *desde* m *compleix que* $g(A_i) = B_i$ *i per tant com envia la mateixa referencia a la mateixa referencia que* f *tenim que* $f = g$ *al ser projectivitats.*

5 Desargues i el seu dual

Enunciat i demostracio del teorema de Desargues i el seu dual.

Teorema 5.1 (Desargues) *Siguin* $ABC, A'B'C'$ *triangles a* $\mathbb{P}^2$ *disjunts. Llavors:*

$$AA' \cap BB' \cap CC' \neq \varnothing \iff \begin{cases} AB \cap A'B' = Z \\ AC \cap A'C' = Y \quad \text{estan alineats} \\ BC \cap B'C' = X \end{cases}$$

Demostració 5.1 $\implies$ *Sigui* $O = AA' \cap BB' \cap CC'$ *i* $R = A, B, C; O$ *una referencia. (Si* $A, B, 0$ *no son l.i.* $AB = A'B'$*, igual per la resta).*
Ara $A' = (a : 1 : 1), B' = (1 : b : 1), C' = (1 : 1 : c)$*.*
I $Z = (a - 1 : 1 - b : 0), Y = (a - 1 : 0 : 1 - c), X = (0 : b - 1 : 1 - c)$*. I per tant* $X + Z = Y$ *pel que estan alineats.*
$\impliedby$ *Si es dualitza el que diu la primera implicació es troba la segona.*

6 Polaritat i tangència

Polaritat i tangencia associades a una quadrica projectiva. Demostracio de les propietats de la polaritat i construccion geometrica de la polar a un punt respecte d'una conica.
Una quàdrica es la classe d'equivalencia d'una forma quadràtica. $Q = [q]$, en aquesta secció utilitzarem ϕ per referirnos a una forma bilineal qualsevol representant de Q, també Q per referirnos

al conjunt de punts de Q. $q(p) = 0 \iff p$ pertany a la quàdrica. Direm que és no degenerada si $\det q \neq 0$

Definició 6.1 *Si L recta, Q quàdrica. L és tangent a $Q \iff L \cap Q =$ 1 punt doble o $L \subset Q$.*

Lema 6.1 *1.Si $L = p \wedge q, p = [v], q = [w]$, L tangent a $Q = [q] \iff \phi(v, w)^2 = \phi(v, v) \cdot \phi(w, w)$*
2. Si $p \in Q$ no degenerada(o punt no degenerat), l'hiperpla tangent t compleix: $\phi(p, t) = 0$

Definició 6.2 *Siguin p, q dos punts, Q una quàdrica $\in \mathbb{P}^n$, diem que p i q són polars respecte $Q(p \sim^Q q)$ si $\phi(p, q) = 0$.*

Lema 6.2 *Siguin p, q dos punts, Q una quàdrica $\in \mathbb{P}^n$:*

1. *$p \sim^Q p \iff p \in Q$*
2. *Si $p, q \in Q$, $p \sim^Q q \iff p \wedge q \subset Q$*
3. *Si $p \in Q, q \notin Q, p \sim^Q q \iff p \wedge q \in T_p(Q)$*
4. *Si $p, q \notin Q, L = p \wedge q$ i $L \cap Q \neq \varnothing$, $p \sim^Q q \iff L$ secant a Q (dos punts de tall diferents) i $(p, q, i_1, i_2) = -1$ si i_j son el punts de intersecció de L i Q.*
5. *Tots els punts polars a p formen un hiperpla ($H_p(Q)$) definit per l'equació $\phi(p, x) = 0$.*
6. *Si $p \in Q$, $H_p(Q) = T_p(Q)$.*
7. *Com que la relació de polaritat és simètrica, $p \in H_q \iff q \in H_p$*

Demostració 6.1 *Utilitzarem $B = M_R(Q \cap L) = \begin{pmatrix} \phi(p,p) & \phi(p,q) \\ \phi(q,p) & \phi(q,q) \end{pmatrix}$*

1. *polar $\iff \phi(p, p) = 0 \iff p \in Q$*
2. *Sabem que $\phi(q, q) = \phi(p, p) = 0$, polars $\iff \phi(p, q) = 0 \iff B = 0 \iff L \subset Q$*
3. *Sabem que $\phi(p, p) = 0$, polars $\iff \phi(p, q) = 0 \iff B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c \neq 0 \end{pmatrix} \iff L \subset T_p(Q)$ utilitzant el lema 6.1.*
4. *Com abans tenim, polars $\iff \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, b, c \neq 0$. Ara si $p = (1 : 0), q = (0 : 1)$, tenim $(m : n) \in L \cap Q \iff (m : n)Q(m : n) = 0 \iff m^2a + n^2b = 0$ trobem els dos punts de tall: $(\pm\sqrt{\frac{-b}{a}} : 1)$, l'últim és trivial de comprovar.*
5. *Trivial de veure desde l'enunciat*
6. *Per 3*
7. *Per simetria*

Per construir la polar de un punt respecte a una quàdrica al pla utilitzarem el resultats 6 i 7 i el fet de que trobar dos punts a la polar ja ens caracteritza tota la recta.
Si el punt és exterior trobem les dues rectes tangents a Q,(apliquem 6 i 7) i aquests punts ens defineixes la recta.
Si el punt esta sobre la quàdrica la recta tangent és la polar.
Si el punt és interior, tracem una recta que passi pel punt. Trobem la intersecció de les dues rectes tangents als punts on la primera recta ha tallat la quàdrica. Aquest punt està sobre la tangent. Repetim el procés i ja tenim dos punts diferents sobre la polar, amb el que hem acabat.

7 Quadràtiques projectives

Definicio de quadriques projectives equivalents. Classificacio de formes quadratiques i classificacio de quadriques projectives reals.
Utilitzarem de forma indiferent cuàdriques, formes cuadràtiques, les matrius asociades a aquestes i el conjunt de punts que hi pertanyen, deixar clar a l'examen que es cada cosa.

Definició 7.1 *Siguin $q_1, q_2 : \mathbb{E} \to \mathbb{K}$ formes quadràtiques, son equivalents si:*

$$q_1 \sim q_2 \iff \exists f \text{ isomorfisme s.t } q_1(f) = q_2$$

Observació 7.1 *A $\mathbb{R}$, $q_1 \sim q_2 \iff rg(q_1) = rg(q_2)$ i l'index de q_1 = index de q_2(tenen els mateix número de positius a la forma diagonal) $\iff S^t q_1 S = q_2$*

Definició 7.2 *Siguin $q_1, q_2 : \mathbb{E} \to \mathbb{K}$ formes quadràtiques i $Q_i = [q_i]$ les seves cuàdriques projectives, direm que Q_1 i Q_2 són equivalents si:*

$$Q_1 \sim Q_2 \iff \exists \lambda \neq 0 \text{ s.t. } q_1 \sim \lambda q_2$$

Observació 7.2 *$Q_1 \sim Q_2 \iff \exists S, detS \neq 0$ s.t. $Q_1 = \lambda S^t Q_2 S \iff \exists f$ homografia s.t. $f(Q_1) = Q_2 \iff \exists R'$ referencia s.t. $M(Q_1, R') = M(Q_2, R') \iff$ rang igual i min(i+, i-) igual*

La classificació és la taula que es pot trobar als apunts de ApuntsFME última pàgina.