

EDOs lineales de orden n

Rafael Ramírez Ros

Clases 10, 11 & 12 (de problemas de EDOs-GM)

Índice

1 Introducción

2 EDOs lineales homogéneas (EDOLHs)

3 EDOs lineales no homogéneas (EDOLNHs)

Abreviaturas

- EDO = Ecuación diferencial ordinaria
- EDOL = EDO lineal
- EDOLH/EDOLNH = EDO lineal homogénea/no homogénea
- SL = Sistema lineal
- SLH/SLNH = Sistema lineal homogéneo/no homogéneo
- CC = Coeficientes constantes
- CI = Condición inicial
- PVI = Problema de valor inicial (o de Cauchy)
- SEV = Subespacio vectorial
- LI/LD = Linealmente independiente/dependiente

Definiciones

- Una EDOL de orden n es una ecuación de la forma

$$x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \dots + a_1(t)x' + a_0(t)x = f(t)$$

donde:

- $t \in I \subset \mathbf{R}$ es la variable independiente;
 - $x = x(t) \in \mathbf{R}$ es la incógnita (o variable dependiente);
 - $a_0(t), a_1(t), \dots, a_{n-1}(t)$ son funciones continuas en I ;
 - $f(t)$ es el término no homogéneo, también continuo en I ;
 - I es un intervalo de \mathbf{R} .
- La EDOL es homogénea cuando $f(t) \equiv 0$.
 - La EDOL es a CC cuando los coeficientes $a_j(t)$ son constantes.
 - La EDOL está normalizada: $a_n(t) \equiv 1$.
 - $CI = \{x^{(j)}(t_0) = x_j : j = 0, \dots, n-1\}$, $t_0 =$ tiempo inicial, $x_j =$ valores iniciales.

EDOL orden $n \rightsquigarrow$ SL 1er orden y dimensión n

Esa EDOL de orden n equivale al SL de 1er orden

$$\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x} + \mathbf{b}(t), \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ x' \\ \vdots \\ x^{(n-2)} \\ x^{(n-1)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{pmatrix},$$

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) & -a_2(t) & \cdots & -a_{n-2}(t) & -a_{n-1}(t) \end{pmatrix}$$

Nota: $\text{traza}[A(t)] = -a_{n-1}(t)$.

Relaciones entre las EDOLs y sus SLs

■ $x(t)$ sol. EDOL $\Leftrightarrow \mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$ sol. SL, luego

1 Las soluciones de una EDOLH forman un SEV de dimensión n :

$$x_h(t) = c_1 x_1(t) + \cdots + c_n x_n(t), \quad c_1, \dots, c_n \in \mathbf{R}.$$

2 La solución general de una EDOLNH tiene la forma

$$x_g(t) = x_h(t) + x_p(t) = c_1 x_1(t) + \cdots + c_n x_n(t) + x_p(t),$$

donde $x_p(t)$ es cualquier solución particular de la EDOLNH.

■ Cls:
$$\left. \begin{array}{rcl} x(t_0) & = & x_0 \\ \vdots & & \\ x^{(n-1)}(t_0) & = & x_{n-1} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 := \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}$$

■ Teorema $\exists!$ para SLs \Rightarrow Teorema $\exists!$ para EDOLs.

Índice

1 Introducción

2 EDOs lineales homogéneas (EDOLHs)

3 EDOs lineales no homogéneas (EDOLNHs)

Wronskiano & funciones LI

- Tenemos n **soluciones** $x_1(t), \dots, x_n(t)$ de la EDOLH.
- Pregunta: ¿Son LI? Es decir,

$$c_1 x_1(t) + \dots + c_n x_n(t) = 0, \forall t \in I \Rightarrow c_1 = \dots = c_n = 0.$$

- Su Wronskiano $W(t) = W[x_1(t), \dots, x_n(t)]$ es el determinante

$$W(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \cdots & x_n(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) & \cdots & x_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{(n-1)}(t) & x_2^{(n-1)}(t) & \cdots & x_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}.$$

- Fórmula de Liouville: $W'(t) = -a_{n-1}(t)W(t)$, luego
 - 1 O bien, $W(t) \neq 0, \forall t \in I$ (\leadsto son LI);
 - 2 O bien, $W(t) \equiv 0, \forall t \in I$ (\leadsto son LD).
- Problemas 30, 31 y 32.

Reducción de orden

- EDOLH 2o orden **normalizada**: $x'' + a_1(t)x' + a_0(t)x = 0$.
- Si $x_1(t)$ es una solución tal que $x_1(t) \neq 0$ para todo $t \in I$, entonces

$$x_2(t) = x_1(t) \int \frac{e^{-\int a_1(t)dt}}{x_1(t)^2} dt$$

es una segunda solución LI con $x_1(t)$.

- Prueba: Al imponer que $x_2(t) = x_1(t)v(t)$ sea solución, obtenemos una EDOLH de 1er orden en la incógnita $u = v'$.
- Esta **reducción** también funciona en EDOLHs de orden n .
- Ejemplo: Si $m \in \mathbf{R}$ es un parámetro arbitrario, entonces

$$\left. \begin{array}{l} \text{EDOLH: } x'' - 2mx' + m^2x = 0 \\ \text{1a solución: } x_1(t) = e^{mt} \neq 0, \forall t \end{array} \right\} \Rightarrow 2 \text{a sol.: } x_2(t) = te^{mt}.$$

- Problemas 34 y 49.

EDOLHs a CC: Notaciones & definiciones

- EDOLH a CC: $x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + a_1x' + a_0x = 0$.
- Operador diferencial: $D = \frac{d}{dt}$. En particular, $D^j = \frac{d^j}{dt^j}$.
- EDOLH a CC en forma compacta: $P(D)[x] = 0$.
- Polinomio característico¹:

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0.$$

- Idea clave: $D^j[e^{\lambda t}] = \lambda^j e^{\lambda t}$, luego $P(D)[e^{\lambda t}] = P(\lambda)e^{\lambda t}$.
- Corolarios:

1 $m \in \mathbf{C}$ raíz de $P(\lambda) \Leftrightarrow x(t) = e^{mt}$ solución.

2 Si los coeficientes son **reales**: $P(\lambda) \in \mathbf{R}_n[\lambda]$, entonces

$$\alpha \pm \beta i \text{ raíces de } P(\lambda) \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} y(t) = e^{\alpha t} \cos(\beta t) \\ z(t) = e^{\alpha t} \sin(\beta t) \end{array} \right\} \text{ soluciones.}$$

- Reto: Buscar k soluciones LI por cada raíz de multiplicidad k .

¹ $x' = Ax$ SLH asociado $\Rightarrow P(\lambda) = (-1)^n Q_A(\lambda)$.

EDOLHs a CC: Conjunto fundamental de soluciones

- Ejercicio: $P(D)[t^r e^{mt}] = e^{mt} P(D + m \text{Id})[t^r]$, $\forall m \in \mathbf{C}, \forall r \geq 0$.
- $x(t) = t^r e^{mt}$ solución $\Leftrightarrow m$ raíz de multiplicidad $> r$.
- Si los coeficientes son **reales**: $P(\lambda) \in \mathbf{R}_n[\lambda]$, entonces

$$\left. \begin{array}{l} y(t) = t^r e^{\alpha t} \cos(\beta t) \\ z(t) = t^r e^{\alpha t} \sin(\beta t) \end{array} \right\} \text{ soluciones } \Leftrightarrow \alpha \pm \beta i \text{ raíces de multiplicidad } > r$$

- Asociamos a cada raíz de $P(\lambda)$ unas funciones según la tabla

Raíz	Mul.	Soluciones LI
$m \in \mathbf{R}$	k	$t^r e^{mt}$ con $r = 0, 1, \dots, k-1$
$\alpha \pm \beta i \in \mathbf{C}$	k	$\left. \begin{array}{l} t^r e^{\alpha t} \cos \beta t \\ t^r e^{\alpha t} \sin \beta t \end{array} \right\}$ con $r = 0, 1, \dots, k-1$

- Esas funciones forman un conjunto fundamental de soluciones.
- Problemas 33, 35, 36 y 37.

Índice

1 Introducción

2 EDOs lineales homogéneas (EDOLHs)

3 EDOs lineales no homogéneas (EDOLNHs)

Variación de las constantes: Caso general

- EDOLNH: $x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \dots + a_1(t)x' + a_0(t)x = f(t)$.
- Solución general EDOLH: $x_h(t) = c_1x_1(t) + \dots + c_nx_n(t)$.
- Buscamos **una** solución particular $x_p(t)$ de la EDOLNH sustituyendo las constantes c_j por funciones $u_j(t)$.
- Fórmula de variación de las constantes (vía Cramer):

$$u_j(t) = \int \frac{W_j(t)}{W(t)} dt, \quad j = 1, \dots, n,$$

donde $W(t) = W[x_1(t), \dots, x_n(t)]$ es el Wronskiano y $W_j(t)$ es el determinante de la matriz que se obtiene a sustituir la j -ésima columna de $W(t)$ por el término independiente **$b(t)$** .

- No se necesita ninguna constante de integración al calcular las primitivas, pues solo queremos **una** solución particular.
- Ejemplo: Problema 39.

Variación de las constantes: Caso 2o orden

- EDOLNH **normalizada**: $x'' + a_1(t)x' + a_0(t)x = f(t)$.
- Sol. general EDOLH: $x_h(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t)$, $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$.
- Fórmula de variación de las constantes: Si

$$u_1(t) = - \int \frac{x_2(t)f(t)}{W(t)} dt, \quad u_2(t) = \int \frac{x_1(t)f(t)}{W(t)} dt,$$

entonces

$$x_p(t) = u_1(t)x_1(t) + u_2(t)x_2(t)$$

es una solución particular de la EDOLNH.

- Ejemplos: Problemas 44 y 45.

Coeficientes indeterminados: Método

- Condiciones necesarias para poder aplicarlo:
 - 1 EDOLNH a **CC**: $P(D)[x] = f(t)$, $P(\lambda)$ pol. característico; y
 - 2 Existe otro polinomio $Q(\lambda)$ tal que $Q(D)[f(t)] = 0$.
- Construimos la siguiente tabla:

Términos dentro de $f(t)$	Términos dentro de $x_p(t)$
$R(t)e^{mt}$, $\text{gr}[R(t)] = l$	$t^k \tilde{R}(t)e^{mt}$, $\text{gr}[\hat{R}(t)] = l$
$\left. \begin{array}{l} C(t)e^{\alpha t} \cos \beta t, C(t) \in \mathbf{R}_l[t] \\ S(t)e^{\alpha t} \sin \beta t, S(t) \in \mathbf{R}_l[t] \end{array} \right\}$	$\left. \begin{array}{l} t^k \tilde{C}(t)e^{\alpha t} \cos \beta t, \hat{C}(t) \in \mathbf{R}_l[t] \\ t^k \tilde{S}(t)e^{\alpha t} \sin \beta t, \hat{S}(t) \in \mathbf{R}_l[t] \end{array} \right\}$

con $k =$ multiplicidad de m (resp., $\alpha \pm \beta i$) como raíz de $P(\lambda)$.

- Teorema: $\exists! x_p(t)$ “con” esos términos.
- Explicación: Si $x_g(t) = x_h(t) + x_p(t)$ es la solución general de la EDOLNH $P(D)[x] = f(t)$, entonces

$$P(D)[x_h(t)] = 0, \quad Q(D)P(D)[x_p(t)] = Q(D)[f(t)] = 0.$$

- Ejemplos: Problemas 40, 41, 43 y 46.

EDOs de Euler

- Las EDOs de Euler son las ecuaciones de la forma

$$L[x] := a_n s^n x^{(n)} + a_{n-1} s^{n-1} x^{(n-1)} + \cdots + a_1 s x' + a_0 x = f(s).$$

- Son singulares en $s = 0$.
- 1a forma: EDO Euler (variable s) $\xleftrightarrow{s=e^t}$ EDOL a CC (variable t).
- 2a forma: Polinomio característico. Buscamos $P(\lambda) \in \mathbf{R}_n[\lambda]$ tal que $L[s^\lambda] = P(\lambda)s^\lambda$. Asociamos a cada raíz de $P(\lambda)$ unas funciones según la tabla

Raíz	Mul.	Soluciones LI
$m \in \mathbf{R}$	k	$(\log s)^r s^m$ con $r = 0, \dots, k-1$
$\alpha \pm \beta i$	k	$\left. \begin{array}{l} (\log s)^r s^\alpha \cos(\beta \log s) \\ (\log s)^r s^\alpha \sin(\beta \log s) \end{array} \right\} \text{ con } r = 0, \dots, k-1$

- Ejemplos: Problemas 47, 48 y 49.