Parcial de Topologia.

Quadrimestre de primavera 2020

1. Sigui X un espai topològic i sigui Y un subespai de X. Diem que Y és *dens* si $\overline{Y} = X$: l'adherència de Y és X. Quins són els espais X tals que tenen un únic subespai dens?
Començarem suposant que $|X| \geq 2$:
X té un sol subespai dens si i només si $\exists!\, Y : \overline{Y} = X$. Aleshores, necessàriament aquest $Y = X$, ja que X és subespai de si mateix i és tancat, per tant si hi hagués un altre subespai dens no tindríem el que volem. Això vol dir, doncs, que per cada $A \subsetneq X$ existeix un únic obert $\mathcal{U} \in \mathcal{T}_X$ tal que $\overline{A} = \mathcal{U}^c \neq X$. Si qualsevol $A \in \mathcal{P}(X) \setminus \{X\}$ té adherència diferent de X, això vol dir que existeixen almenys tres tancats, ja que tant el total com el buit són tancats, i qualsevol conjunt diferent del total ha de tenir adherència estrictament inclosa en el total. Sigui $C = X \setminus \{a\}$ aquest tercer tancat, amb $a \in X$. Tenim que els tancats de X són $\{X, C, \varnothing\}$. En qualsevol cas, sigui $C' = X \setminus \{b\}$, amb $b \in X, b \neq a$. La seva adherència no pot ser C, ja que no hi està inclòs. Per tant, el tancat més petit que el conté és el total. Com que no volem que això passi, fem que C' sigui també tancat. Això ho podem fer per tots els elements de X, i la topologia resultant de la construcció és la **topologia discreta**.
Per $|X| < 2$, totes les topologies són la discreta.

2. Sigui $\mathcal{T}_{\text{euc}}$ la topologia ordinària a $\mathbb{R}$. Es defineix

$$\mathcal{T} = \{\mathcal{U} \in \mathcal{T}_{\text{euc}} : \mathcal{U} \subseteq (-\infty, 0) \text{ o } (-\infty, 0) \subseteq \mathcal{U}\}.$$

1. Comproveu que $\mathcal{T}$ és una topologia. En endavant es considera l'espai $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$.

* $\varnothing \in \mathcal{T} : \varnothing \subseteq (-\infty, 0)$; $\mathbb{R} \in \mathcal{T} : (-\infty, 0) \subseteq \mathbb{R}$.
* Sigui $(U_i)_{i \in I}$ una família d'oberts de $\mathcal{T}$. Aleshores, els separem en

$$J = \{i \in I : U_i \subseteq (-\infty, 0)\}, \quad K = \{i \in I : (-\infty, 0) \subseteq U_i\}.$$

Aleshores,

$$\bigcup_{i \in I} U_i = \bigcup_{i \in J \cup K} U_i = \left(\bigcup_{j \in J} U_j\right) \cup \left(\bigcup_{k \in K} U_k\right).$$

Els oberts indexats per J són tots subconjunts de $(-\infty, 0)$ i per tant, la seva unió també ho és. Els oberts indexats per K són tots superconjunts de $(-\infty, 0)$, i per tant, la seva unió també ho és. Si unim aquestes dues coses, el resultat és superconjunt de $(-\infty, 0)$, i per tant, és de la topologia.

* Siguin $U, V \in \mathcal{T}$. Aleshores, fem els tres casos possibles de la intersecció:
  - $U, V \subseteq (-\infty, 0) \implies U \cap V \subseteq (-\infty, 0) \implies U \cap V \in \mathcal{T}$.
  - $(-\infty, 0) \subseteq U, V \implies (-\infty, 0) \subseteq U \cap V \implies U \cap V \in \mathcal{T}$.
  - $V \subseteq (-\infty, 0) \subseteq U \implies U \cap V = V \in \mathcal{T}$.

2. És de Hausdorff?
No és de Hausdorff; sigui $x > 0, y < 0$. Qualsevol obert U que conté x és tal que $(-\infty, 0) \subseteq U$. En ser $y < 0$, $y \in U$ sempre. Per tant, qualsevol obert que contingui a y tindrà intersecció no buida amb U, ja que com a mínim aquseta contindrà a y.

3. Per què la família dels intervals (a, b) no és una base? Per definició de base, de fet. Una base és $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$, però si fem $\mathcal{I} = \{(a, b) : a < b \in \mathbb{R}\}$, aleshores podem observar que hi ha elements de I que no són de $\mathcal{T}$. Per exemple, l'interval $(4, 5) \in I \setminus \mathcal{T}$.

4. Doneu una base. Una base podria ser el conjunt $\mathcal{I} \cap \mathcal{B}$. Ho podem veure a partir de la condició necessària i suficient per ser una base, demostrada a classe

$$\mathcal{B} \text{ és base } \iff \forall U \in \mathcal{T}, \forall x \in U \exists B_x \in \mathcal{B} : x \in B_x \subseteq U.$$

Ho demostrem. Els oberts de $\mathcal{T}$ són de la forma

- $U = (-\infty, 0)$: en sigui x un element. Aleshores, $x \in B_x = (2x, 0) \subseteq U$
- $U = (-\infty, \beta)$, amb $\beta > 0$: en sigui x un element. Aleshores, si $x < 0$, ens remetem al cas anterior. Si $x > 0$, aleshores $x \in B_x = (x - 1, x + \varepsilon) \subseteq U$, amb $\varepsilon < |\beta - x|$.
- $U = (\alpha, \beta)$, amb $\alpha, \beta < 0$: en sigui x un element. Aleshores, $x \in B_x = (\alpha, x + \varepsilon) \subseteq U$, amb $\varepsilon < |\beta - x|$.

5. Calculeu l'interior i l'adherència de $(-2,-1), (-1,1), (1,2)$.

- $\overset{\circ}{\overbrace{(-2,-1)}} = (-2,-1)$, ja que és un obert de $\mathcal{T}$.
- $\overline{(-2,-1)} = [-2,-1]$.
- $\overset{\circ}{(-1,1)} = (-1,0)$, ja que per qualsevol element $x \in (-1,0)$ existeix un obert $(-1, x/2)$ que el conté i que està contingut en $(-1,1)$, però qualsevol obert que contingui un punt de $(0,1)$ necessàriament conté tota la semirecta real negativa, i per tant no es queda dins del conjunt original.
- $\overline{(-1,1)} = [-1,\infty)$, ja que tots els oberts que contenen punts $x > 0$ contenen la semirecta real negativa i per tant fan intersecció no buida amb el conjunt original.
- $\overset{\circ}{(1,2)} = \varnothing$, ja que qualsevol obert que contingui un punt d'aquest interval conté la semirecta real negativa.
- $\overline{(1,2)} = [1,\infty)$, ja que qualsevol obert que contingui un punt més gran que 1 conté la semirecta real negativa i fa intersecció no buida amb el conjunt original.

3. Sigui X un espai topològic no buit. X és *irreductible* si no es pot escriure com a reunió de dos tancats diferents del total. Proveu que X és irreductible si, i només si, per a tot parell d'oberts no buits U, V, la intersecció és no buida. Deduïu que un obert no buit d'un espai irreductible és irreductible.

$$X \text{ és irreductible} \iff \nexists A, B \subsetneq X : A^c, B^c \in \mathcal{T} \text{ i } A \cup B = X.$$

$\boxed{\implies}$ Suposem que X és irreductible. Això vol dir que no existeixen dos tancats diferents del total A, B tals que $X = A \cup B$. Si prenem el complementari d'aquesta expressió, tampoc existeixen dos tancats de X diferents del total tals que $\varnothing = X^c = A^c \cup B^c$. Com que A i B són tancats, prenem $U = A^c, V = B^c$ oberts, i aleshores tenim que no existeixen dos oberts U, V diferents del buit tals que $U \cap V = \varnothing$.

$\boxed{\impliedby}$ $\forall U, V \in \mathcal{T}_X \setminus \{\varnothing\}, U \cap V \neq \varnothing \implies \nexists U, V \in \mathcal{T}_X \setminus \{\varnothing\} : U \cap V = \varnothing$. Per tant, prenem complementaris, i tenim que $\nexists U, V \in \mathcal{T}_X \setminus \{\varnothing\} : U^c \cup V^c = \varnothing^c = X$. Finalment, concluïm que no existeixen dos tancats diferents del total tals que la seva unió sigui X, i per tant, que X és irreductible.$\square$

Si tenim $U \in \mathcal{T}_X \setminus \{\varnothing\}$ i X és irreductible, vegem que U és irreductible. La topologia induïda en U és $\mathcal{T}_U = \{U \cap V : V \in \mathcal{T}_X\}$. Si W, Z són dos oberts de $\mathcal{T}_U$ diferents del buit, es té que $W = U \cap V_1, Z = U \cap V_2$ per $V_1, V_2 \in \mathcal{T}_X$, i per tant, que $W \cap Z = U \cap V_1 \cap U \cap V_2 = U \cap V_1 \cap V_2$, i per ser tots tres diferents del buit i X irreductible, aquesta intersecció és no buida. Per tant, U és irreductible com a subespai.