Estadística: Entregable 3

Àlex Batlle Casellas

16/4/2021

Considerem la v.a. X amb funció de densitat:

$$f(x;\lambda,\eta) = \frac{\eta^\lambda}{\Gamma(\lambda)} x^{-\lambda-1} e^{-\frac{\eta}{x}},$$

per $x > 0, \lambda > 0, \eta > 0$. Comproveu que és una família exponencial amb els estadístics $T(x) = (\log x, \frac{1}{x})$, trobeu-ne el paràmetre canònic $\theta = (\theta_1, \theta_2)$, i la constant $C(\theta)$. En algun apartat caldrà fer servir la funció digamma $\psi(x)$ que correspon a la derivada del logaritme de la funció $\Gamma(x)$.

$$f(x;\theta) = \frac{h(x) e^{\sum_{i=1}^2 \theta_i T_i(x)}}{C(\theta)},$$

amb $\theta = (\theta_1, \theta_2) = (-\lambda - 1, -\eta), h(x) = 1, C(\theta) = \frac{\Gamma(-\theta_1 - 1)}{(-\theta_2)^{-\theta_1 - 1}} = \frac{\Gamma(\lambda)}{\eta^\lambda}$.

Apartat A

En el cas que sabéssim que $\mathbb{E}[T(x)] = (1.66, 0.23)$, contesteu les preguntes següents:

1. Quin seria el valor de λ?
2. Quin seria el valor de η?

Farem servir que

$$\mathbb{E}[T(X)] = \nabla_\theta \log C(\theta) = (\psi(-\theta_1 - 1) + \log(-\theta_2), \frac{\theta_1 + 1}{\theta_2}).$$

```
equ <- function(t1) {
  return(digamma(-t1-1)+log((-t1-1)/0.23)-1.66)
}
theta1 <- uniroot(equ, c(-10,-2))$root
theta2 <- (theta1+1)/0.23
(lambda <- -theta1-1)
```

```
## [1] 1.352285
```

```
(eta <- -theta2)
```

```
## [1] 5.879502
```

3. Quin seria el valor de $V(\log X)$?
4. Quin seria el valor de $V(\frac{1}{X})$?

Farem servir que

$$\mathbb{V}[T(X)] = (\partial_1^2 \log C(\theta), \partial_2^2 \log C(\theta)) = (\partial_1 \psi(\theta_1), \frac{\theta_1}{\theta_2^2}).$$

```
(v.logx <- trigamma(-theta1-1))
```

```
## [1] 1.074716
```

```
(v.1_x  <- -(theta1+1)/(theta2^2))
```

```
## [1] 0.03911896
```

5. Quin seria el valor de $\mathrm{Cov}(\log X, \frac{1}{X})$?

Farem servir que

$$\mathrm{Cov}(T_1(X), T_2(X)) = \frac{\partial^2}{\partial\theta_1\partial\theta_2}\log C(\theta) = \frac{\partial}{\partial\theta_1}\left(\frac{\partial}{\partial\theta_2}\log C(\theta)\right) = \frac{\partial}{\partial\theta_1}\left(\frac{\theta_1+1}{\theta_2}\right) = \frac{1}{\theta_2}.$$

```
(cov.logx.1_x <- 1/theta2)
```

```
## [1] -0.1700824
```

Apartat B

En la situació habitual no coneixem el valor dels paràmetres, però tenim una mostra: suposeu que la grandària és 343, i la mitjana dels logaritmes de les X ha donat 1.66119 i la de les inverses $\frac{1}{X}$ ha donat 0.22554. Estimeu per màxima versemblança els paràmetres de la distribució λ i η. Calculeu la matriu d'informació en els paràmetres canònics, avalueu la matriu en el màxim versemblant, i contesteu:

Nota: Feu servir la Suficiència, no obstant, les dades són a dades.csv d'Atenea amb el vostre nom.

6. L'estimador m.v. de λ ha donat:
7. L'estimador m.v. de η ha donat:

Ens aprofitarem de la consistència dels estimadors màxim versemblants:

$$\overline{T(X)} = (\overline{T_1(X)}, \overline{T_2(X)}) = (1.66119, 0.22554);$$
$$\overline{T(X)} = \mathbb{E}[T(X)] = \nabla\log C(\theta) = \left(\psi(-\theta_1-1)+\log(-\theta_2), \frac{\theta_1+1}{\theta_2}\right).$$

Aleshores,

```
equ <- function(t1) {
  return(digamma(-t1-1)+log(-(t1+1)/0.22554)-1.66119)
}

theta1.mv <- uniroot(equ, c(-10,-2))$root
theta2.mv <- (theta1.mv+1)/0.22554
(lambda.mv <- -theta1.mv-1)
```

```
## [1] 1.342193
```

```
(eta.mv <- -theta2.mv)
```

```
## [1] 5.951022
```

8. El terme [1,1] de la matriu d'informació obtinguda és:

La matriu d'informació és:

$$I_X(\theta) = [\mathrm{Cov}(T_i(X), T_j(X))]_{i,\ j} = \begin{bmatrix} \frac{d^2}{d\lambda^2}\log\Gamma(\lambda) & \frac{-1}{\eta} \\ \frac{-1}{\eta} & \frac{\lambda}{\eta^2} \end{bmatrix}$$

```
(i11 <- trigamma(-theta1.mv-1))
```

```
## [1] 1.08574
```

9. El terme [2,2] de la matriu d'informació obtinguda és:

```
(i22 <- -(theta1.mv+1)/(theta2.mv^2))
```

```
## [1] 0.03789937
```

10. El terme [1,2] de la matriu d'informació obtinguda és:

```
(i12 <- 1/theta2.mv)
```

```
## [1] -0.1680384
```

Apartat C

En la mateixa situació de l'apartat B), calculeu la fita de Cramer-Rao de l'estimador màxim versemblant de $T(X) = (\mathbb{E}[\log X], \mathbb{E}[\frac{1}{X}])$. Utilitzant el teorema central del límit, calculeu l'interval de confiança asimptòtic (95% dues cues) del paràmetre λ, i també el de η. Contesteu:

La matriu d'informació de Fisher de la mostra és:

$$\frac{1}{343}\begin{bmatrix} \frac{d^2}{d\theta_1^2}\log\Gamma(-\theta_1-1) & \frac{1}{\theta_2} \\ \frac{1}{\theta_2} & \frac{-(\theta_1+1)}{\theta_2^2} \end{bmatrix}$$

Per tant, les fites de Cramer-Rao corresponents a cada estimador $(\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2)$ de les mitjanes de cada estadístic són els elements de la diagonal d'aquesta matriu, és a dir,

$$\begin{cases} CR(\hat{\mu}_1) = & \frac{1}{343}\frac{d^2}{d\theta_1^2}\log\Gamma(-\theta_1-1) \\ CR(\hat{\mu}_2) = & \frac{-(\theta_1+1)}{343\cdot\theta_2^2} \end{cases}$$

11. La fita de Cramer-Rao de l'estimador m.v. d'$\mathbb{E}[\log X]$ és:

```
(cr.mu1.mv <- trigamma(-theta1.mv-1)/343)
```

```
## [1] 0.003165423
```

12. La fita de Cramer-Rao de l'estimador m.v. d'$\mathbb{E}[\frac{1}{X}]$ és:

```
(cr.mu2.mv <- -(theta1.mv+1)/(343*theta2.mv^2))
```

```
## [1] 0.0001104938
```

13. L'interval de confiança de λ és:
14. L'interval de confiança d'η és:

Per contestar aquestes preguntes, farem servir les fites de Cramer-Rao dels paràmetres canònics θ_1, θ_2. Aquestes són els elements de la diagonal de la matriu:

$$\frac{1}{n\det I_X(\theta)}\begin{bmatrix} \frac{-(\theta_1+1)}{\theta_2^2} & \frac{-1}{\theta_2} \\ \frac{-1}{\theta_2} & \frac{d^2}{d\theta_1^2}\log\Gamma(-\theta_1-1) \end{bmatrix}_{|(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2)}.$$

Per tant, tenim que

$$\theta_1 \sim \mathcal{N}\left(\hat{\theta}_1, \frac{-n(\hat{\theta}_1+1)}{\hat{\theta}_2^2}\det I_X(\theta)\right) \implies \lambda \sim \mathcal{N}\left(\hat{\lambda}_{MV}, \frac{-n(\hat{\theta}_1+1)}{\hat{\theta}_2^2}\det I_X(\theta)\right).$$

El determinant que apareix a l'expressió és:

$$\det I_X(\theta) = -\left(\frac{d^2}{d\theta_1^2}\log\Gamma(-\theta_1-1)\right)\frac{\theta_1+1}{\theta_2^2} - \frac{1}{\theta_2^2}.$$

Aleshores, escriurem

$$\sigma_\lambda^2(\theta) := \frac{-n(\theta_1+1)}{\theta_2^2}\det I_X(\theta) = \frac{n(\theta_1+1)}{\theta_2^2}\left(\left(\frac{d^2}{d\theta_1^2}\log\Gamma(-\theta_1-1)\right)\frac{\theta_1+1}{\theta_2^2} - \frac{1}{\theta_2^2}\right).$$

En definitiva, tindrem que $\hat{\lambda}$ segueix (tendeix en llei a) una distribució normal, de mitjana λ i de variància $\sigma^2_\lambda(\theta)$. Per tant, aproximant $\theta \sim \hat{\theta}$, tindrem:

$$\frac{\lambda - \hat{\lambda}}{\sqrt{\sigma^2_\lambda(\hat{\theta})}} \sim \mathcal{N}(0,1),$$

és a dir, que

$$\Pr\left(-\mathcal{Z}_{0.975} \leq \frac{\lambda - \hat{\lambda}}{\sigma_\lambda(\hat{\theta})} \leq \mathcal{Z}_{0.975}\right) = 0.95,$$

i fent canvis algebraics a les desigualtats, arribem a que

$$\lambda_{0.95} \in \left(\hat{\lambda}_{MV} \pm \sigma_\lambda(\hat{\theta})\mathcal{Z}_{0.975}\right)$$

Similarment, definim

$$\sigma^2_\eta(\theta) := n\left(\frac{d^2}{d\theta_1^2}\log\Gamma(-\theta_1 - 1)\right)\det I_X(\theta) = -n\left(\frac{d^2}{d\theta_1^2}\log\Gamma(-\theta_1 - 1)\right)\left(\left(\frac{d^2}{d\theta_1^2}\log\Gamma(-\theta_1 - 1)\right) + \frac{1}{\theta_2^2}\right).$$

Aleshores, η segueix una distribució aproximada de

$$\eta \sim \mathcal{N}\left(\hat{\eta}_{MV}, \sigma^2_\eta(\hat{\theta})\right) \implies \eta_{0.95} \in \left(\hat{\eta}_{MV} \pm \sigma_\eta(\hat{\theta})\mathcal{Z}_{0.975}\right)$$

Si ho escrivim en `R`,

```r
n <- 343

sigma.sq.lambda <- function(t1, t2) {
  return(n*(t1+1)/(t2^2)*(trigamma(-t1-1)*(t1+1)/(t2^2)+1/(t2^2)))
}
sigma.lambda <- function(t1, t2) {
  return(sqrt(sigma.sq.lambda(t1,t2)))
}

sigma.sq.eta <- function(t1,t2) {
  return(-n*trigamma(-t1-1)*(trigamma(-t1-1)*(t1+1)/(t2^2)+1/(t2^2)))
}
sigma.eta <- function(t1,t2) {
  return(sqrt(sigma.sq.eta(t1,t2)))
}

(lower.lambda <- lambda.mv-sigma.lambda(theta1.mv,theta2.mv)*qnorm(0.975))
```

```
## [1] 0.5392084
```

```r
(upper.lambda <- lambda.mv+sigma.lambda(theta1.mv,theta2.mv)*qnorm(0.975))
```

```
## [1] 2.145179
```

```r
(lower.eta <- eta.mv-sigma.eta(theta1.mv,theta2.mv)*qnorm(0.975))
```

```
## [1] 1.653141
```

```r
(upper.eta <- eta.mv+sigma.eta(theta1.mv,theta2.mv)*qnorm(0.975))
```

```
## [1] 10.2489
```