Àlgebra Multilineal i Geometria FME, UPC

Entregable -1 Teorema de Jordan

En aquest projecte es proposa desenvolupar la prova de A.F. Filippov de 1971 del Teorema de Jordan.

Teorema. Sigui E un $\mathbf{k}$-espai vectorial de dimensió n i f un endomorfisme tal que el polinomi característic descompon completament. Aleshores, E té una base formada per cicles de Jordan.

Raonarem per inducció sobre la dimensió de E, n.

1. Proveu que podem suposar que el teorema és cert per a qualsevol subespai invariant de E i deduïu que si $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_r$, $r > 1$, amb E_i invariants, aleshores el teorema és cert.

2. (Aquest punt no és imprescindible, però simplificarà les notacions) Sigui λ un valor propi de f. Proveu que el teorema és cert per a f si, i només si, ho és per a f_λ. Deduïu que podem suposar que 0 és un valor propi.

3. Considerem la successió d'inclusions de subespais

$$\ker f \subseteq \ker f^2 \subseteq \cdots \subseteq \ker f^k \subseteq \cdots$$
$$\mathrm{Im}\ f \supseteq \mathrm{Im}\ f^2 \supseteq \cdots \supseteq \mathrm{Im}\ f^k \supseteq \cdots$$

Demostreu que existeix m tal que

$$\ker f^m = \ker f^{m+k}, \quad \mathrm{Im}\ f^m = \mathrm{Im}\ f^{m+k}, \quad \forall k \geq 0.$$

4. Proveu que $K = \ker f^m, U = \mathrm{Im}\ f^m$ són invariants i que $E = K \oplus U$.

5. Proveu que $K \neq 0$ i deduïu que si $U \neq 0$, el teorema és cert.

6. En endavant, suposem que $U = 0$, és a dir, $E = \ker f^m$. El zero és l'únic valor propi. Notem

$$N = \ker f, \quad W = \mathrm{Im}\ f.$$

Proveu que $N \neq 0$ i deduïu que W admet una base de Jordan. Siguin $\{\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_s\}$ els generadors dels cicles de Jordan d'una base de W, d'alçades ℓ_i, i

$$W_i = \langle \boldsymbol{w}_i, f(\boldsymbol{w}_i), \ldots, f^{\ell_i - 1}(\boldsymbol{w}_i) \rangle$$

els cicles de Jordan que generen. Observeu que $W = W_1 \oplus \cdots \oplus W_s$.

7. Escollim vectors $\boldsymbol{v}_i \in E$ tals que $f(\boldsymbol{v}_i) = \boldsymbol{w}_i$. Proveu que són vectors propis generalitzats d'alçada $\ell_i + 1$, i que si E_i és el cicle de Jordan generat per $\boldsymbol{v}_i$, aleshores

$$f(E_i) = W_i, \qquad E_i \cap E_i = \emptyset, \ i \neq j.$$

8. Proveu que existeix una base de Jordan per a f.