Ecuaciones en Derivadas Parciales

Resolución de problemas

Oscar Balcells

Índice

TEMA 1 EDP del transporte

Método de las curvas características

Supóngase que se dispone de una EDP sobre una función u. El método de las curvas características consiste en hallar curvas sobre las cuales se conoce la evolución de u.

A modo de ejemplo, considérese una EDP sobre $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto u(x, y)$, con condiciones iniciales $u(x, 0) = g(x)$. El método puede extenderse fácilmente a funciones definidas sobre $\mathbb{R}^n$, e incluso adaptarse a problemas con condiciones de contorno.

El esquema del método es el siguiente:

I) Sea $\gamma(s) : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $s \mapsto \gamma(s) := (\tilde{x}(s), \tilde{y}(s))$ una curva parametrizada. Se define la aplicación $v : I \to \mathbb{R}$ como la restricción de $u(x, y)$ sobre dicha curva, es decir, $s \mapsto v(s) := u(\gamma(s)) = u(\tilde{x}(s), \tilde{y}(s))$.

II) Se obtiene la derivada de $v(s)$, que es de la forma $v'(s) = u_x(\gamma(s)) \cdot \tilde{x}'(s) + u_y(\gamma(s)) \cdot \tilde{y}'(s)$. Se igualan las derivadas de las componentes de $\gamma(s)$ a los respectivos coeficientes de las derivadas parciales de la EDP (sistema de EDOs). De esta manera, $u(\gamma(s))$ satisface la EDP, obteniendo una EDO para $v(s)$.

III) Se resuelve la EDO para $\tilde{x}(s)$ y $\tilde{y}(s)$. La solución será una familia de curvas. En general, por comodidad, se impondrá la condición inicial $\gamma(0) = (\overline{x}, 0)$ (es decir, que la curva "comience" allí donde se conocen las condiciones iniciales). Finalmente, se hallará $\overline{x}$ solicitando que la curva contenga un punto genérico (x, y), quedando así completamente determinada (en términos de dicho punto).

IV) Conocida $\gamma(s)$, puede resolverse la EDO en $v(s)$, obteniendo la solución de u sobre las familia de curvas γ (curvas características).

V) Se invertirán las funciones $\tilde{x}(s)$ y $\tilde{y}(s)$ para obtener $s(\tilde{x}, \tilde{y})$. Así, evaluando $v(s(x, y))$, se obtiene la solución $u(x, y)$ en un punto genérico.

Los detalles de la aplicación del método dependerán de cada caso. No siempre podrá aplicarse, y no siempre proporcionará una solución bien definida (nótese que, entre otras condiciones, para que este método funcione se requiere que exista una única curva característica para cada punto del dominio). Estas particularidades se discutirán por separado para cada problema.

Ecuación del transporte a coeficientes constantes (ETCC) [R1]

Esta es una ecuación que aparece frecuentemente en esta lista. El problema asociado con condiciones iniciales es de la forma:

$$\begin{cases} u_t + c\nabla_x u = f(x, t, u) & x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0 \\ u(x, 0) = g(x) & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Donde c es la velocidad de transporte.

A continuación se procede a hallar las curvas características de la EDP (que son rectas).

El sistema de EDOs a resolver es:

$$\begin{cases} \tilde{x}'(s) = c \\ \tilde{t}'(s) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tilde{x}(s) = cs + \tilde{x}(0) \\ \tilde{t}(s) = s + \tilde{y}(0) \end{cases}$$

Y la condición inicial de la curva resulta de solicitar que "comience" donde se conocen las condiciones iniciales de la EDP:

$$\gamma(0) = (\overline{x}, 0) \ \Rightarrow \begin{cases} \tilde{x}(0) = \overline{x} \\ \tilde{t}(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \ \gamma(s) = (cs + \overline{x}, s)$$

Se determina $\overline{x}$ solicitando que la curva pase por un cierto punto $(x, , t)$ (genérico), es decir, $\gamma(\overline{s}) = (x, t)$ para algún $\overline{s}$:

$$\gamma(\overline{s}) = (x, t) = (c\overline{s} + \overline{x}, \overline{s}) \ \Rightarrow \begin{cases} x = c\overline{s} + \overline{x} \\ \overline{s} = t \end{cases} \Rightarrow \ \overline{x} = x - ct$$

Finalmente, las curvas características son las rectas:

$$\gamma(s) = (cs + x - ct, s)$$

Y es evidente que en $s = 0$ la segunda coordenada se anula $(t = 0)$ y en $s = t$ la curva pasa por (x, t).

$\boxed{\textbf{1.1}}$ Resuelva:

$$\begin{cases} u_x + u_y + u = e^{x+2y} & (x,y) \in \mathbb{R}^2 \\ u(x,0) = 0 \end{cases}$$

Solución:

Se resolverá el problema mediante el método de las curvas características.

La EDP es una ETCC (no lineal, no homogénea y con $c = 1$). Por [R1], las curvas características y sus derivadas son:

$$\gamma(s) = (\tilde{x}(s), \tilde{y}(s)) = (s + x - y, s) \qquad\qquad \gamma'(s) = (\tilde{x}'(s), \tilde{y}'(s)) = (1, 1)$$

Derivando $v(s)$ y usando la EDP, se tiene que:

$$v'(s) = u_x(\gamma(s)) \cdot \tilde{x}'(s) + u_y(\gamma(s)) \cdot \tilde{y}'(s) = e^{\tilde{x}(s)+2\tilde{y}(s)} - u(\gamma(s)) = e^{(\overline{x}+s)+2s} - v(s) = e^{x-y+3s} - v(s)$$

Tomando $k = e^{x-y}$ y reordenando:

$$v'(s) + v(s) = ke^{3s}$$

Se procede a resolver dicha ecuación diferencial. Multiplicando por e^s a ambos lados de la igualdad, se obtiene una EDO inmediata. Integrándola:

$$e^s[v'(s) + v(s)] = e^s[ke^{3s}] \;\Rightarrow\; (e^s v(s))' = ke^{4s} \;\Rightarrow\; \int_0^s (e^z v(z))' dz = \int_0^s ke^{4z} dz \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; \Big[e^z v(z)\Big]_0^s = \left[\frac{k}{4}e^{4z}\right]_0^s \;\Rightarrow\; e^s v(s) - v(0) = \frac{k}{4}(e^{4s} - 1)$$

Obsérvese que, de la condición inicial, $v(0) = u(\gamma(0)) = u(\overline{x}, 0) = 0$. Recuperando el valor de k y aislando resulta:

$$v(s) = \frac{1}{4}e^{x-y}(e^{3s} - e^{-s})$$

Finalmente, como $\tilde{y}(s) = s \;\Rightarrow\; s(\tilde{x}, \tilde{y}) = \tilde{y}$, se tiene:

$$u(x,y) = \frac{1}{4}e^{x-y}(e^{3y} - e^{-y})$$

Comentario:

Obsérvese que la solución $u(x,y)$ es válida $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Esto se deduce del hecho de que $\overline{x} = x - y$ siempre tiene solución y es única. Es decir, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, existe una única curva γ tal que $(x,y) \in \gamma$ y γ intersecta el eje de las abcisas en un único punto.

$\boxed{\textbf{1.2}}$ Resuelva:

$$\begin{cases} u_x + 3y^{2/3}u_y = 2 & (x,y) \in \mathbb{R}^2 \\ u(x,1) = 1 + x \end{cases}$$

<u>Solución:</u>

Se resolverá el problema mediante el método de las curvas características. El sistema de EDOs resultante es:

$$\begin{cases} \tilde{x}'(s) = 1 \\ \tilde{y}'(s) = 3\tilde{y}^{2/3}(s) \end{cases}$$

Resolviendo dicho sistema, resulta:

I) Para $\tilde{x}'(s)$:

$$\tilde{x}'(s) = 1 \quad \Rightarrow \quad \tilde{x}(s) = s + \tilde{x}(0)$$

II) Para $\tilde{y}'(s)$:

$$\tilde{y}'(s) = 3\tilde{y}^{2/3}(s) \quad \Rightarrow \quad \int_0^s \frac{1}{3}\tilde{y}^{-2/3}(z)d(\tilde{y}(z)) = \int_0^s dz \quad \Rightarrow \quad \Big[\tilde{y}^{1/3}(z)\Big]_0^s = \Big[z\Big]_0^s \quad \Rightarrow \quad \tilde{y}(s) = (s + \tilde{y}^{1/3}(0))^3$$

Imponiendo la condición inicial sobre la curva:

$$\gamma(0) = (\overline{x}, 1) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \tilde{x}(0) = \overline{x} \\ \tilde{y}(0) = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \gamma(s) = (s + \overline{x}, (s+1)^3)$$

Se determina $\overline{x}$ solicitando que $\gamma(\overline{s}) = (x,y)$ para algún $\overline{s}$.

$$\gamma(\overline{s}) = (x,y) = (\overline{s} + \overline{x}, (\overline{s}+1)^3) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = \overline{s} + \overline{x} \\ y = (\overline{s}+1)^3 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \overline{x} = x - y^{1/3} + 1$$

Derivando $v(s)$, usando las condiciones impuestas para $\tilde{x}'(s)$ e $\tilde{y}'(s)$ y empleando la EDP, se tiene que:

$$v'(s) = u_x(\gamma(s)) \cdot 1 + u_y(\gamma(s)) \cdot 3y^{2/3} = 2$$

Resolviendo dicha ecuación diferencial:

$$v(s) = 2s + v(0)$$

Obsérvese que, de la condición inicial, $v(0) = u(\gamma(0)) = u(\overline{x}, 0) = 1 + \overline{x}$, de donde resulta:

$$v(s) = 2s + 1 + \overline{x} = 2s + x - y^{1/3} + 2$$

Finalmente, como $\tilde{y}(s) = (s+1)^3 \quad \Rightarrow \quad s(\tilde{x}, \tilde{y}) = \tilde{y}^{1/3} - 1$, se tiene:

$$u(x,y) = y^{1/3} + x$$

<u>Comentario:</u>

Obsérvese que la solución $u(x,y)$ es válida $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Esto se deduce del hecho de que $\overline{x} = x - y^{1/3} + 1$ siempre tiene solución y es única. Es decir, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, existe una única curva γ tal que $(x,y) \in \gamma$ y γ intersecta el eje de las abcisas en un único punto.

$\boxed{\textbf{1.3}}$ Considere:

$$\begin{cases} u_t + u_x = -u & x > 0,\ t > 0 \\ u(0,t) = d(t) & t > 0 \\ u(x,0) = g(x) & x > 0 \end{cases}$$

a) ¿Para qué funciones $d(t)$ y $g(x)$ el problema tiene solución clásica?
b) Si $d(t) = 1$ y $g(x) = 0$, demostrad que la solución hallada por el método de las características es solución generalizada (es decir, en sentido integral).

Solución:

Primero, se solucionará el problema por el método de las curvas características. Una vez obtenida la solución se discutirán las cuestiones propuestas.

La EDP es una ETCC (no lineal y con velocidad $c = 1$). Por [R1], las curvas características son rectas.

Considérense las regiones del plano $R_1 = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : t < x,\ x > 0,\ t > 0\}$ y $R_2 = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : t > x,\ x > 0,\ t > 0\}$. Para este problema, será necesario desglosar el análisis según la recta habite en una u otra región. Para cada caso, las curvas características y sus derivadas son:

I) Si $Im(\gamma) \in R_1$:
$$\gamma(s) = (\tilde{x}(s), \tilde{t}(s)) = (s + x - t, s) \qquad \gamma'(s) = (\tilde{x}'(s), \tilde{t}'(s)) = (1,1)$$

II) Si $Im(\gamma) \in R_2$:
$$\gamma(s) = (\tilde{x}(s), \tilde{t}(s)) = (s, s + t - x) \qquad \gamma'(s) = (\tilde{x}'(s), \tilde{t}'(s)) = (1,1)$$

Para ambos casos, como $\tilde{x}'(s) = 1$ y $\tilde{t}'(s) = 1$, empleando la EDP, se tiene que:

$$v'(s) = u_x(\gamma(s)) \cdot \tilde{x}'(s) + u_t(\gamma(s)) \cdot \tilde{t}'(s) = -u(\gamma(s)) = -v(s)$$

Resolviendo dicha ecuación diferencial:

$$\int_0^s \frac{1}{v(z)} d(v(z)) = -\int_0^s dz \ \Rightarrow \ \Big[\ln(v(z))\Big]_0^s = -\Big[z\Big]_0^s \ \Rightarrow \ \ln(v(s)) - \ln(v(0)) = -s$$

Ahora, agrupando logaritmos y exponenciando:
$$v(s) = v(0)e^{-s}$$

Finalmente:

I) Si $(x,t) \in R_1$:
Obsérvese que $v(0) = u(\gamma(0)) = u(\overline{x}, 0) = g(\overline{x}) = g(x - t)$. Además, como $\tilde{t}(s) = s \ \Rightarrow \ s(\tilde{x}, \tilde{t}) = \tilde{t}$, se tiene que:
$$u(x,t) = g(x-t)e^{-t}$$

II) Si $(x,t) \in R_2$:
Obsérvese que $v(0) = u(\gamma(0)) = u(0, \overline{t}) = d(\overline{t}) = d(t - x)$. Además, como $\tilde{x}(s) = s \ \Rightarrow \ s(\tilde{x}, \tilde{t}) = \tilde{x}$, se tiene que:
$$u(x,t) = d(t-x)e^{-x}$$

Es decir, sobre el cuadrante positivo del plano, exceptuando la recta $x = t$, se tiene:

$$u(x,t) = \begin{cases} g(x-t)e^{-t} & \text{si } t < x \\ d(t-x)e^{-x} & \text{si } x < t \end{cases}$$

En cuanto a las cuestiones solicitadas:

a) ¿Para qué funciones $d(t)$ y $g(x)$ el problema tiene solución clásica?

Sea $D = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\ t > 0\}$ el dominio de la EDP. Para que el problema tenga solución clásica, debe cumplirse que $u(x,t) \in \mathcal{C}^1(D)$.

Nótese que la solución obtenida no está definida sobre la recta $t = x$. Para solventar este problema, hay que definir $u(0,0)$ (condición de contorno adicional). De acuerdo con la obtención de la solución, se tiene entonces que $u(x,x) = u(0,0)e^{-x}$.

Para satisfacer $u(x,t) \in \mathcal{C}^0(D)$, debe requerirse que $d(t), g(x) \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_{>0})$, y además, $\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{t \to 0} d(t) = u(0,0)$. Por otro lado, para satisfacer $u(x,t) \in \mathcal{C}^1(D)$, considérense las derivadas parciales de la solución:

I) Si $(x,t) \in R_1$:

$$u_x = g'(x-t)e^{-t}$$
$$u_t = -g'(x-t)e^{-t} - g(x-t)e^{-t}$$

II) Si $(x,t) \in R_2$:

$$u_x = -d'(t-x)e^{-x} - d(t-x)e^{-x}$$
$$u_t = d'(t-x)e^{-x}$$

Así, si $d(t), g(x) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_{>0})$, y con las condiciones ya impuestas, entonces $u(x,t) \in \mathcal{C}^1(R_1 \cup R_2)$. Tan solo resta estudiar la continuidad de las derivadas sobre la recta $t = x$. Igualando las derivadas parciales de ambas regiones evaluadas en dicha recta, se obtiene que $g'(0) = -d'(0) - d(0)$ y $-g'(0) - g(0) = d'(0)$, donde debe entenderse que $g(0) = d(0) = u(0,0)$. Nótese que ambas igualdades proporcionan entonces la misma condición:

$$d'(0) + g'(0) = -u(0,0)$$

b) Si $d(t) = 1$ y $g(x) = 0$, demostrad que la solución hallada por el método de las características es solución generalizada (es decir, en sentido integral).

Recuperando la expresión para la solución $u(x,t)$ y sustituyendo $g(x)$ y $d(t)$ por sus expresiones explícitas:

$$u(x,t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < x \\ e^{-x} & \text{si } x < t \end{cases}$$

En el caso del problema del transporte, la solución se considera solución generalizada si se satisface la conservación de la masa (para cualquier instante, y sobre cualquier región, [tasa de variación temporal de la masa] = [blance de masa que entra/sale por la frontera] + [contribución de las fuentes de masa]). Para este problema en particular, esto se traduce en que $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $0 < a < b$ y $\forall t \in \mathbb{R}$, $0 < t$, se satisfaga:

$$\frac{d}{dt}\int_a^b u(x,t)dx = (u(a,t) - u(b,t)) + \int_a^b -u(x,t)dx$$

La solución del problema requiere estudiar dicha integral en tres casos, según el intervalo $[a,b]$ situado sobre una recta $t = ctt$ esté íntegramente contenido en R_1 o R_2, o si por el contrario intersecta la recta $t = x$.

I) Sobre R_1, $t < a < b$, y $u(x,t) = 0$ $\forall x \in [a,b]$. Entonces, para cada lado de la ecuación:

$$\frac{d}{dt}\int_a^b u(x,t)dx = \frac{d}{dt}\int_a^b 0dx = 0$$
$$(u(a,t) - u(b,t)) + \int_a^b -u(x,t)dx = (0-0) + \int_a^b -0dx = 0$$

II) Sobre R_2, $a < b < t$, y $u(x,t) = e^{-x}$ $\forall x \in [a,b]$. Entonces, para cada lado de la ecuación:

$$\frac{d}{dt}\int_a^b u(x,t)dx = \frac{d}{dt}\int_a^b e^{-x}dx = 0$$
$$(u(a,t) - u(b,t)) + \int_a^b -u(x,t)dx = (e^{-a} - e^{-b}) + \int_a^b e^{-x}dx = (e^{-a} - e^{-b}) + \Big[e^{-x}\Big]_a^b = 0$$

III) Si el intervalo está sobre ambas regiones, $a < t < b$ y $u(x,t) = e^{-x}$ si $x \in [a,t]$ y $u(x,t) = 0$ si $x \in [t,b]$. Ya se ha visto que la evaluación de cada término sobre el segmento en R_1 es nulo, reduciendo el problema al caso del segmento íntegramente contenido en R_2, que se ha comprobado anteriormente.

$\boxed{\textbf{1.4}}$ Considere:

$$\begin{cases} u_t + cu_x = f(x,t) & 0 < x < R,\ t > 0 \\ u(0,t) = 0 & t > 0 \\ u(x,0) = 0 & 0 < x < R \end{cases}$$

a) Discuta la existencia y unicidad de la solución.
b) Demuestre la desigualdad (estimación de estabilidad):

$$\int_0^R u^2(x,t)dx \leq e^t \int_0^t \int_0^R f^2(x,s)dxds \quad \forall t \geq 0$$

(Indicación: suponga $c > 0$ y use $2uf \leq u^2 + f^2$).

Solución:

a) Discuta la existencia y unicidad de la solución.

El procedimiento para obtener las curvas características para este problema es casi idéntico al desarrollado en el problema 1.3. Así, la curva característica asociada a un punto (x,t) del plano es:

I) Si $(x,t) \in R_1 = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : t < cx,\ 0 < x < R,\ t > 0\}$:

$$\gamma(s) = (x + c(s-t), s) \quad \text{con } 0 < s < \frac{R-x}{c} + t$$

II) Si $(x,t) \in R_2 = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : t > cx,\ 0 < x < R,\ t > 0\}$:

$$\gamma(s) = (cs, t - \frac{x}{c} + s) \quad \text{con } 0 < s < \frac{R}{c}$$

Para ambos casos, como $\tilde{x}'(s) = c$ y $\tilde{t}'(s) = 1$, derivando $v(s)$ y empleando la EDP, resulta:

$$v'(s) = u_x(\gamma(s)) \cdot \tilde{x}'(s) + u_t(\gamma(s)) \cdot \tilde{t}'(s) = f(\gamma(s))$$

Resolviendo la anterior ecuación diferencial se tiene que:

$$\int_0^s d(v(s)) = \int_0^s f(\gamma(s))ds \;\Rightarrow\; v(s) - v(0) = \int_0^s f(\gamma(s))ds$$

Obsérvese que $v(0) = u(\gamma(0)) = 0$ (independientemente de la región donde se halle (x,t)). Así:

$$u(x,t) = \begin{cases} \int_0^t f(x + c(s-t), s)ds & \text{si } (x,t) \in R_1 \\ \int_0^{x/c} f(cs, t - x/c + s)ds & \text{si } (x,t) \in R_2 \end{cases}$$

Obteniendo la existencia de la solución para la EDP (obviamente, $f(\gamma(s))$ debe ser integrable).

En cuanto a la unicidad, supóngase que existe otra $v(x,t)$ satisfaciendo las condiciones del enunciado. Entonces:

$$[u_t + cu_x] - [v_t + cv_x] = f(x,t) - f(x,t) = 0 = (u_t - v_t) + c(u_x - v_x) = (u-v)_t + c(u-v)_x$$

Considérese la función $w = u - v$. Nótese que tiene condiciones iniciales y de contorno nulas ($w(0,t) = u(0,t) - v(0,t) = 0$ y $w(x,0) = u(x,0) - v(x,0) = 0$), y satisface la EDP para el caso $f(x,t) = 0$. Aplicando la fórmula hallada para la solución, $w(x,t) = \int_0^A 0ds = 0$, y por lo tanto, $v(x,t) = u(x,t)$, concluyendo que la solución es única.

b) Demuestre la desigualdad (estimación de estabilidad):

$$\int_0^R u^2(x,t)dx \leq e^t \int_0^t \int_0^R f^2(x,s)dxds \quad \forall t \geq 0$$

(Indicación: suponga $c > 0$ y use $2uf \leq u^2 + f^2$).

Por comodidad, en el desarrollo que sigue se omitirán los argumentos de las funciones.

Tomando el término de la izquierda, derivando bajo signo integral y usando la EDP:

$$\frac{d}{dt}\int_0^R u^2 dx = \int_0^R \frac{d}{dt} u^2 dx = \int_0^R 2uu_t dx = \int_0^R 2u(f - cu_x)dx = \int_0^R 2uf dx - 2c\int_0^R uu_x dx$$

Integrando el último término por partes, se tiene que:

$$\int_0^R uu_x dx = \left[u^2\right]_0^R - \int_0^R uu_x dx \;\Rightarrow\; 2\int_0^R uu_x = \left[u^2\right]_0^R \geq 0$$

De acuerdo con lo anterior, y dado que $c > 0$:

$$\int_0^R 2uf dx - 2c\int_0^R uu_x dx \leq \int_0^R 2uf dx \leq \int_0^R (u^2 + f^2) dx = \int_0^R u^2 dx + \int_0^R f^2 dx$$

Resumiendo, se ha obtenido que:

$$\frac{d}{dt}\int_0^R u^2 dx \leq \int_0^R u^2 dx + \int_0^R f^2 dx$$

Nombrando $F(t) = \int_0^R u^2 dx$ y $G(t) = \int_0^R f^2 dx$ (que son funciones de t) y reordenando:

$$F'(t) - F(t) \leq G(t)$$

Multiplicando por e^{-t} a ambos lados de la desigualdad:

$$e^{-t}(F'(t) - F(t)) = (e^{-t}F(t))' \leq e^{-t}G(t)$$

Resolviendo la anterior ecuación diferencial:

$$\int_0^t d(e^{-z}F(z)) \leq \int_0^t e^{-z}G(z)dt \;\;\Rightarrow\;\; e^{-t}F(t) - F(0) \leq \int_0^t e^{-z}G(z)dt$$

Nótese que $F(0) = \int_0^R u^2(x,0)dx = \int_0^R 0dx = 0$. Por otro lado, la función e^{-s} vale 1 en $s = 0$ y es estrictamente decreciente en el intervalo $[0, \infty)$, con lo que $e^{-s} \leq 1$, $\forall s \geq 0$. Así:

$$e^{-t}F(t) \leq \int_0^t G(z)dt$$

Multiplicando por e^t en ambos lados de la desigualdad y recuperando las expresiones para $F(t)$ y $G(t)$ se obtiene lo requerido.

$\boxed{\mathbf{1.5}}$ En el plano $\mathbb{R}^2$, considere la EDP casi lineal de primer orden:

$$a(x,y,u)u_x + b(x,y,u)u_y = c(x,y,u)$$

Para resolverla, se define el campo vectorial en $\mathbb{R}^3$ dado por:

$$X(x,y,z) = (a(x,y,z), b(x,y,z), c(x,y,z))$$

Como la dirección normal a la gráfica de u es $\nu(x,y,z) = (-u_x, -u_y, 1)$, la EDP es equivalente a $\nu \cdot X = 0$. Dado un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, y dada u sobre una parte de la frontera $\partial\Omega$, que está parametrizada por la curva $(\alpha(s), \beta(s))$, se desea hallar u sobre todo (o parte de) Ω.

Fijado un s, se construye la curva característica $\gamma(t) = (\tilde{x}(t), \tilde{y}(t), \tilde{z}(t))$ imponiendo:

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{x}}{dt} = a(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t), \tilde{z}(t)) \\ \frac{d\tilde{y}}{dt} = b(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t), \tilde{z}(t)) \\ \frac{d\tilde{z}}{dt} = c(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t), \tilde{z}(t)) \end{cases}$$

Que define un sistema de EDOs con condiciones iniciales $\tilde{x}(0) = \alpha(s)$, $\tilde{y}(0) = \beta(s)$ y $\tilde{z}(0) = u(\alpha(s), \beta(s))$. Resolviendo el sistema, se obtienen $\tilde{x}(s,t)$, $\tilde{y}(s,t)$ y $\tilde{z}(s,t)$. Si, por el teorema de la función inversa, se puede invertir $\tilde{x}(s,t)$ e $\tilde{y}(s,t)$, obteniendo $s(\tilde{x}, \tilde{y})$ y $t(\tilde{x}, \tilde{y})$, demuestre que entonces $u = z(s(x,y), t(x,y))$ es la solución del problema. Demuestre también que la invertivilidad mencionada requiere que:

$$\begin{vmatrix} \dot{\alpha} & a \\ \dot{\beta} & b \end{vmatrix} \neq 0$$

<u>Solución:</u>

Para ver que la expresión propuesta es solución del problema, se llegará a ella por construcción.

Cabe mencionar que la aplicación del método de las curvas características tal y como se ha presentado hasta ahora es inútil para esta EDP, dada la dependencia de u de los coeficientes a y b. En efecto, con el procedimiento habitual, se define $\gamma(t) = (\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))$, y $v(t) := u(\gamma(t))$. De esta forma, $v'(t) = u_x\tilde{x}'(t) + u_y\tilde{y}'(t)$, y de acuerdo con el método, se impone:

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{x}}{dt} = a(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t), v(t)) \\ \frac{d\tilde{y}}{dt} = b(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t), v(t)) \end{cases}$$

De manera que $v'(t) = c(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t), v(t))$. Nótese que no es posible resolver dicho sistema.

El sistema anterior invita a, de forma natural, intentar completarlo introduciendo una ecuación adicional que relacione el tercer argumento de los coeficientes a y b con $\tilde{x}(t)$ e $\tilde{y}(t)$, y esta es la idea que se presenta en el enunciado del problema.

Reciclando notación, considérese $\gamma(t) = (\tilde{x}(t), \tilde{y}(t), \tilde{z}(t))$. Si se solicita que $\gamma(t)$ esté contenida en la gráfica de u, se obtiene la condición $\tilde{z}(t) = u(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))$.

Ahora, se define $v(t) := u(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))$, ($u$ restringida sobre las dos primeras componentes de $\gamma(t)$). Nótese que, con esta definición, $v(t) = \tilde{z}(t)$, y por lo tanto, $v'(t) = u_x(\gamma(t)) \cdot \tilde{x}'(t) + u_y(\gamma(t)) \cdot \tilde{y}'(t) = \tilde{z}'(t)$.

Ahora, se requiere $\tilde{x}'(t) = a(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t), \tilde{z}(t))$ e $\tilde{y}'(t) = b(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t), \tilde{z}(t))$. De esta manera, usando la EDP, se tiene que $v'(t) = u_x(\gamma(t)) \cdot a(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t), \tilde{z}(t)) + u_y(\gamma(t)) \cdot b(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t), \tilde{z}(t)) = c(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t), \tilde{z}(t)) = \tilde{z}'(t)$, completando así el sistema de ecuaciones anterior:

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{x}}{dt} = a(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t), \tilde{z}(t)) \\ \frac{d\tilde{y}}{dt} = b(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t), \tilde{z}(t)) \\ \frac{d\tilde{z}}{dt} = c(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t), \tilde{z}(t)) \end{cases}$$

Las condiciones iniciales resultan de requerir que la curva $\gamma(t)$ "comience" en un punto donde la gráfica de la función u sea conocida, es decir, que $\gamma(0)$ pertenezca a la imagen de la frontera $\partial\Omega$, o equivalentemente, $\gamma(0) = (\alpha(s), \beta(s), u(\alpha(s), \beta(s)))$ para algún s. Nótese que la curva queda caracterizada por dos parámetros, y que $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ y $\tilde{z}$ son en realidad funciones de (s,t). El razonamiento anterior aplica igualmente.

Así, por construcción, se tiene que $u(\tilde{x}(s,t), \tilde{y}(s,t)) = v(s,t) = \tilde{z}(s,t)$. Dado que el sistema de EDOs anterior proporciona $\tilde{z}(s,t)$, se ha obtenido la solución u restringida a a las curvas proporcionadas por $\tilde{x}(s,t)$ y $\tilde{y}(s,t)$.

Finalmente, lo que se desea es poder evaluar u en un punto (x,y) arbitrario. Si, dado dicho punto, es posible deteminar la curva γ que lo contiene (es decir, determinar s) y el valor del parámetro t tal que $(\tilde{x}(s,t), \tilde{y}(s,t)) = (x,y)$ de forma únivoca, se obtiene lo deseado. Esto último equivale a solicitar que las funciones $\tilde{x}(s,t)$ y $\tilde{y}(s,t)$ sean invertibles, de manera que puedan obtenerse s y t como funciones de x e y, es decir, $s(\tilde{x}, \tilde{y})$ y $t(\tilde{x}, \tilde{y})$. Así, finalmente:

$$u(x,y) = \tilde{z}(s(x,y), t(x,y))$$

En cuanto a las condiciones para la invertibilidad, considérese la función:

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (s,t) &\mapsto \gamma(s,t) = (\tilde{x}(s,t), \tilde{y}(s,t)) \end{aligned}$$

Por el teorema de la función inversa, ϕ será invertible allí donde la matriz diferencial sea invertible. La diferencial de ϕ es:

$$d\phi = \begin{pmatrix} \frac{d\tilde{x}}{ds}(s,t) & \frac{d\tilde{x}}{dt}(s,t) \\ \frac{d\tilde{y}}{ds}(s,t) & \frac{d\tilde{y}}{dt}(s,t) \end{pmatrix}$$

Nótese que las respectivas derivadas respecto el parámetro s tan solo son conocidas en la frontera $\partial\Omega$ (es decir, en $t = 0$). Así, en este caso:

$$d\phi\Big|_{t=0} = \begin{pmatrix} \dot{\alpha} & a \\ \dot{\beta} & b \end{pmatrix}$$

Y la invertibilidad de la matriz $d\phi$ requiere que el determinante de la misma sea no nulo, obteniendo lo enunciado.

$\boxed{\mathbf{1.6}}$ Halle la solución $u = u(x, y)$ del problema:

$$\begin{cases} uu_x + yu_y = x \\ u(x,1) = 2x \end{cases}$$

Solución:

Se resolverá el problema aplicando el método del ejercicio 1,5.

Una posible parametrización de la frontera $\partial\Omega$ es:

$$\begin{aligned} \delta : \mathbb{R} &\to \partial\Omega \\ s &\mapsto \delta(s) = (s, 1) \end{aligned}$$

Por comparación, $a(x, y, z) = z$, $b(x, y, z) = y$ y $c(x, y, z) = x$. Así, el sistema de EDOs a resolver es:

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{x}}{dt}(s,t) = \tilde{z}(s,t) \\ \frac{d\tilde{y}}{dt}(s,t) = \tilde{y}(s,t) \\ \frac{d\tilde{z}}{dt}(s,t) = \tilde{x}(s,t) \end{cases}$$

En cuanto a las condiciones iniciales, solicitando que la curva "comience" (es decir, en $t = 0$) en un punto arbitrario de la frontera (proporcionado por s), resulta $\tilde{x}(s,0) = s$ e $\tilde{y}(s,0) = 1$, y en consecuencia, $\tilde{z}(s,0) = u(\tilde{x}(s,0), \tilde{y}(s,0)) = u(s,1) = 2s$.

Nótese que la solución para $\tilde{y}$ es directa por estar desacoplada del sistema:

$$\frac{d\tilde{y}}{dt}(s,t) = \tilde{y}(s,t) \quad \Rightarrow \quad \tilde{y}(s,t) = \tilde{y}(s,0)e^t = e^t$$

En cambio, las otras dos ecuaciones del sistema están acopladas. A continuación resuelve el sistema reducido mediante dos métodos diferentes:

I) Manipulando el sistema para obtener dos EDOs desacopladas:

Derivando la primera y tercera ecuación respecto de t y sustituyendo según el sistema original, resulta:

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{x}}{dt}(s,t) = \tilde{z}(s,t) \\ \frac{d\tilde{z}}{dt}(s,t) = \tilde{x}(s,t) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \frac{d^2\tilde{x}}{dt^2}(s,t) = \frac{d\tilde{z}}{dt}(s,t) \\ \frac{d^2\tilde{z}}{dt^2}(s,t) = \frac{d\tilde{x}}{dt}(s,t) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \frac{d^2\tilde{x}}{dt^2}(s,t) = \tilde{x}(s,t) \\ \frac{d^2\tilde{z}}{dt^2}(s,t) = \tilde{z}(s,t) \end{cases}$$

Que define dos EDOs de segundo orden desacopladas. El seno y coseno hiperbólicos satisfacen $(\sinh(x))'' = \sinh(x)$ y $(\cosh(x))'' = \cosh(x)$, lo cual sugiere ensayar soluciones de la forma:

$$\begin{aligned} \tilde{x}(s,t) &= A(s)\sinh(t) + B(s)\cosh(t) \\ \tilde{z}(s,t) &= C(s)\sinh(t) + D(s)\cosh(t) \end{aligned}$$

Finalmente, $\tilde{x}(s,0) = B(s) = s$, y $\frac{d\tilde{x}}{dt}(s,0) = A(s) = \tilde{z}(s,0) = 2s$. Por otro lado, $\tilde{z}(s,0) = D(s) = 2s$, y $\frac{d\tilde{x}}{dt}(s,0) = C(s) = \tilde{x}(s,0) = s$. Así:

$$\begin{aligned} \tilde{x}(s,t) &= 2s\sinh(t) + s\cosh(t) \\ \tilde{y}(s,t) &= e^t \\ \tilde{z}(s,t) &= s\sinh(t) + 2s\cosh(t) \end{aligned}$$

II) Reescribiendo el sistema en su forma estándar (EDO lineal de primer orden):

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \tilde{x}(s,t) \\ \tilde{y}(s,t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{x}(s,t) \\ \tilde{y}(s,t) \end{pmatrix}$$

Nombrando $v(s,t) = (\tilde{x}(s,t), \tilde{y}(s,t))^T$ y $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y usando la fórmula exponencial:

$$\frac{d}{dt}v(s,t) = Av(s,t) \quad \Rightarrow \quad v(s,t) = v(s,0)e^{tA} = (s, 2s)e^{tA}$$

Desarrollando la exponencial en serie de potencias y usando que $A^2 = Id$:

$$e^{tA} = A^0 + tA^1 + \frac{t^2}{2}A^2 + \frac{t^3}{3!}A^3 + ... = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & t \\ t & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{t^2}{2} & 0 \\ 0 & \frac{t^2}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{t^3}{3!} \\ \frac{t^3}{3!} & 0 \end{pmatrix} + ...$$

Es decir:

$$A = \begin{pmatrix} 1 + \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!} + ... & t + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + ... \\ t + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + ... & 1 + \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!} + ... \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(t) & \sinh(t) \\ \sinh(t) & \cosh(t) \end{pmatrix}$$

Por lo tanto:

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}(s,t) \\ \tilde{y}(s,t) \end{pmatrix} = (s, 2s) \begin{pmatrix} \cosh(t) & \sinh(t) \\ \sinh(t) & \cosh(t) \end{pmatrix}$$

Finalmente:

$$\tilde{x}(s,t) = s\cosh(t) + 2s\sinh(t)$$
$$\tilde{y}(s,t) = e^t$$
$$\tilde{z}(s,t) = s\sinh(t) + 2s\cosh(t)$$

Una vez resuelto el sistema, siguiendo con el procedimiento presentado en el ejercicio 1,5, será necesario invertir las ecuaciones anteriores para obtener $s(\tilde{x}, \tilde{y})$ y $t(\tilde{x}, \tilde{y})$. Usando la ecuación para $\tilde{y}(s,t)$:

$$\tilde{y}(s,t) = e^t \quad \Rightarrow \quad t(\tilde{x}, \tilde{y}) = \log(\tilde{y})$$

Reescribiendo la ecuación para $\tilde{x}(s,t)$ en términos de la función exponencial:

$$\tilde{x}(s,t) = s\frac{e^t + e^{-t}}{2} + 2s\frac{e^t - e^{-t}}{2} = s\frac{3e^t - e^{-t}}{2} = s\frac{3\tilde{y}(s,t) - 1/\tilde{y}(s,t)}{2} \quad \Rightarrow \quad s(\tilde{x}, \tilde{y}) = \frac{2\tilde{x}}{3\tilde{y} - 1/\tilde{y}}$$

Recuérdese que, con este método, la solución de la EDP era $u(x,y) = \tilde{z}(s(x,y), t(x,y))$. De esta forma:

$$\tilde{z}(x,y) = s(x,y)\Big(\sinh t(x,y) + 2\cosh t(x,y)\Big) = \frac{2x}{3y - 1/y}\left(\frac{3e^{\log(y)} + e^{-\log(y)}}{2}\right)$$

Finalmente, la solución de la EDP es:

$$u(x,y) = \frac{x(3y^2 + 1)}{(3y^2 - 1)}$$

<u>Comentario:</u>

Debería comprobarse que la solución obtenida es válida sobre todo el dominio de definición de la EDP (es decir, comprobar que por cada punto del plano pasa una única curva característica y que dicha curva característica intersecta la frontera convenientemente).

$\boxed{\textbf{1.7}}$ En una autopista rectilínea infinita, $\rho = \rho(x,t)$ representa la densidad de coches, siendo $\rho = 1$ la densidad máxima (todos los coches están tocándose), y $\rho = 0$ la densidad mínima (ausencia de coches).

La velocidad de un coche (el coche es infinitesimal y se representa por un punto x) depende de la densidad en el punto donde se halla, y viene descrita por la ecuación:

$$v(x,t) = k(1 - \rho(x,t))$$

Así, los coches circulan a velocidad máxima $k > 0$ cuando la densidad es mínima y están parados si la densidad es máxima.

a) Escriba la ley de conservación de la masa en cualquier intervalo de espacio en un cierto instante t y deduzca la ecuación de tráfico.
b) Realice un cambio de variable sobre ρ para escribir la ecuación como la de Burgers ($u_t + uu_x = 0$).
c) Sea $g(x) = u(x,0)$ la condición inicial. Use el método de las características para demostrar que u satisface la ecuación funcional $u - g(x - ut) = 0$.
d) Use el teorema de la función implícita para demostrar que, si g tiene derivada acotada sobre todo $\mathbb{R}$, entonces existe una solución clásica para el problema de Cauchy en un intervalo $[0, t_0]$. Estime dicho tiempo t_0.
e) Demuestre que si g es creciente entonces puede tomarse $t_0 = \infty$. Interprete el hecho "g es creciente" traducido al apartdo a) sobre la ecuación de tráfico (despues de hacer el cambio de u a ρ) y comente el sentido de "que no haya choques" y la solución clásica exista para todo tiempo positivo para estas condiciones iniciales. ¿Podría resolverse la ecuación para tiempos negativos?

Solución:

Por comodidad, a lo largo de este problema se obviarán los argumentos de las funciones, siempre que estos no aporten información relevante.

a) Escriba la ley de conservación de la masa en cualquier intervalo de espacio en un cierto instante t y deduzca la ecuación de tráfico.

La ley de la conservación de la masa significa que, en un instante t dado, y en un intervalo de espacio $[a,b]$, la tasa de variación en el tiempo de la cantidad de coches contenida en dicho intervalo debe ser igual a la diferencia entre los coches que estan saliendo y los que están entrando por unidad de tiempo (no hay "fuentes" de densidad de coches). Formalmente:

$$\frac{d}{dt}\int_a^b \rho dx = \rho v\big|_a - \rho v\big|_b$$

Reescribiendo dicha igualdad:

$$\int_a^b \rho_t dx = -\int_a^b (\rho v)_x dx \quad\Rightarrow\quad \int_a^b \Big[\rho_t + (\rho v)_x\Big] dx = 0 \quad\Rightarrow\quad \rho_t + (\rho v)_x = 0$$

Esta última afirmación es consecuencia de:

$$\int_a^{a+h} f(x)dx = 0 \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{h}\int_a^{a+h} f(x)dx = 0 \quad\Rightarrow\quad \lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\int_a^{a+h} f(x)dx = 0 \quad\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\quad \lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\Big[F(x)\Big]_a^{a+h} = 0 \quad\Rightarrow\quad \lim_{h\to 0^+}\frac{F(a+h)-F(a)}{h} = 0 \quad\Rightarrow\quad \frac{d}{dx}F(a) = f(a) = 0$$

Donde $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$. Dado que esto es cierto para todo a, se concluye que $f(x) = 0$.

Sustituyendo $v = k(1-\rho)$ y desarrollando la derivada resulta:

$$\rho_t + (\rho k(1-\rho))_x = \rho_t + \rho_x k(1-\rho) + \rho k(-\rho_x) = \rho_t + \rho_x k - \rho_x k\rho - \rho k\rho_x = 0$$

Finalmente, agrupando términos:

$$\rho_t + k(1-2\rho)\rho_x = 0$$

Que es la ecuación de tráfico buscada.

b) Realice un cambio de variable sobre ρ para escribir la ecuación como la de Burgers ($u_t + uu_x = 0$).

Comparando la ecuación de Burgers con la ecuación de tráfico obtenida, se ensaya el cambio $u = k(1-2\rho)$. Así:

$$u_t = -2k\rho_t$$
$$u_x = -2k\rho_x$$

Sustituyendo en la ecuación de tráfico:

$$\frac{-u_t}{2k} + u\frac{-u_x}{2k} = 0 \quad\Rightarrow\quad u_t + uu_x = 0$$

c) Sea $g(x) = u(x,0)$ la condición inicial. Use el método de las características para demostrar que u satisface la ecuación funcional $u - g(x - ut) = 0$.

De acuerdo con la condición de contorno, una posible parametrización de la frontera $\partial\Omega$ es:

$$\begin{aligned} \delta : \mathbb{R} &\to \partial\Omega \\ s &\mapsto \delta(s) = (s,0) \end{aligned}$$

Se plantea el sistema de EDOs pertinete y se resuelve para hallar la familia de curvas características:

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{x}}{dr}(s,r) = \tilde{z}(s,r) \\ \frac{d\tilde{t}}{dr}(s,r) = 1 \\ \frac{d\tilde{z}}{dr}(s,r) = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \tilde{x}(s,r) = k(s)r + \tilde{x}(s,0) \\ \tilde{t}(s,r) = r + \tilde{t}(s,0) \\ \tilde{z}(s,r) = k(s) \end{cases}$$

De acuerdo con la condición de contorno, se impone $\tilde{x}(s,0) = s$ y $\tilde{t}(s,0) = 0$. Así:

$$\begin{cases} \tilde{x}(s,r) = k(s)r + s \\ \tilde{t}(s,r) = r \\ \tilde{z}(s,r) = k(s) \end{cases}$$

Recuérdese que, con este método, la solución viene dada por $u(x,t) = \tilde{z}(s(x,t), r(x,t))$. En cuanto a las inversiones, es evidente que $r(\tilde{x},\tilde{t}) = t$, pero no es posible obtener $s(\tilde{x},\tilde{t})$ al desconocer $k(s)$.

No obstante, nótese que $\tilde{z}(s,r)$ no depende de r, de donde se deduce:

$$\tilde{z}(s,r) = \tilde{z}(s,0) = u(s,0) = g(s)$$

De esta igualdad, y haciendo uso de la tercera ecuación, se deduce que $g(s) = k(s)$. Además, de la primera ecuación y de la inversión de r resulta $s = \tilde{x}(s,r) - g(s)t$. Finalmente:

$$u(x,t) = \tilde{z}(s(x,t), r(x,t)) = g(s(x,t)) = g(x - g(s)t) = g(x - u(x,t)t)$$

Obteniendo así lo requerido.

d) Use el teorema de la función implícita para demostrar que, si g tiene derivada acotada sobre todo $\mathbb{R}$, entonces existe una solución clásica para el problema de Cauchy en un intervalo $[0, t_0]$. Estime dicho tiempo t_0.

<u>Recordatorio:</u> En este punto del problema, se tiene que:

- No se conoce $u(x,t)$ para cualquier $(x,t) \in \mathbb{R}^2$.
- Se conococe $u(x,t)$ en el instante inicial $t = 0$.
- Se ha obtenido que $u(x,t)$ satisface el funcional $u - g(x - ut) = 0$.

A raíz de estas observaciones, cabe plantearse la posibilidad de limitar la búsqueda de la solución $u(x,t)$ a entornos de $(x,0)$.

De acuerdo con el funcional hallado, se define la función:

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R} \\ (x,t,\nu) &\mapsto \phi(x,t,\nu) = \nu - g(x - \nu t) \end{aligned}$$

Obsérvese que:

$$\phi(s,0,g(s)) = g(s) - g(s - g(s)\cdot 0) = g(s) - g(s) = 0$$

Si $\frac{d}{d\nu}\phi(s,0,g(s)) \neq 0$, por el teorema de la función implícita, existirán abiertos $V \subset \mathbb{R}^3$ y $W \subset \mathbb{R}^2$ tales que $(s,0,g(s)) \in V$, y $\forall (x,t) \in W$, $\exists! \nu$ tal que $(x,t,\nu) \in V$ y $\phi(x,t,\nu) = 0$, definiendo así una función $\nu(x,t)$ que además será contínua y diferenciable. Esta será de hecho la solución $u(x,t)$ de la EDP.

Nótese que el parámetro s, que atiende a la variable x, es arbitrario, y la cuestión será hallar el entorno en la variable tiempo.

Así, derivando $\phi(x,t,\nu)$ respecto de ν:

$$\phi' = 1 + g'(x - \nu t)t$$

Tomando el valor absoluto y acotando:

$$|\phi'| = |1 + g'(x - \nu t)t| \geq 1 - |g'(x - \nu t)t| \geq 1 - ||g'||_\infty |t|$$

Solicitando $\phi' \neq 0$ (es decir, $|\phi'| > 0$):

$$1 - ||g'||_\infty |t| > 0 \quad \Rightarrow \quad |t| < \frac{1}{||g'||_\infty} = t_0$$

Obteniendo así el entorno $(-t_0, t_0)$ requerido.

e) Demuestre que si g es creciente entonces puede tomarse $t_0 = \infty$. Interprete el hecho "g es creciente" traducido al apartdo a) sobre la ecuación de tráfico (despues de hacer el cambio de u a ρ) y comente el sentido de "que no haya choques" y la solución clásica exista para todo tiempo positivo para estas condiciones iniciales. ¿Podría resolverse la ecuación para tiempos negativos?

Recuperando el desarrollo del apartado anterior, se había obtenido que:

$$\phi' = 1 + g'(x - \nu t)t$$

Si $g(x)$ es creciente, $g'(x) \geq 0$ y la derivada de ϕ no se anula nunca si $t > 0$. En este caso, la solución es válida en $[0, +\infty)$.

Recuérdese que $g(x) = u(x, 0) = k(1-2\rho(x, 0))$. Así, si $g(x)$ es creciente, entonces $\rho(x, 0)$ es decreciente. Esto significa que, en el instante inicial, la densidad de coches disminuye a lo largo de la autopista. Esto concuerda con lo obtenido anteriormente, ya que en estas condiciones, cabe esperar que el tráfico evolucione de manera que todos coches vayan acelerando sin chocar. En efecto, dado un coche cualquiera, es cierto que el coche que le precede circula más deprisa que él, dado que percibe una densidad de coches menor, con lo cual no habrá colisión (y el mismo argumento aplica al coche que le sigue).

Formalmente, los choques se corresponden con intersecciones en las curvas características en el plano XT. Más allá del semiplano $t \geq t_0$, donde t_0 corresponde al menor t en el que sucede una intersección de dichas curvas, es imposible resolver la EDP por no haber unicidad de solución ("viajando" por las curvas características, donde la evolución de la solución se conoce, se puede llegar a dos condiciones iniciales diferentes, y por lo tanto, dos estados potencialmente incompatibles).

$\boxed{\textbf{1.8}}$

a) Ordene por orden de fortaleza las topologías que provienen de las normas estándar en los espacios $\mathcal{C}^0([a,b])$, $\mathcal{C}^1([a,b])$, $\mathcal{L}^1([a,b])$ y $\mathcal{L}^2([a,b])$. Discuta la existencia de desigualdades relacionando estas normas (es decir, que una norma sea más pequeña o igual que otra, salvo por constante multiplicativa), y halle las mejores constantes en dichas desigualdades.

b) Diga si las sucesiones $\{x^k\}$, $\{(x/2)^k\}$ y $\{sin(k\pi x)\}$ tienen parciales convergentes en $\mathcal{C}^0([0,1])$, $\mathcal{C}^1([0,1])$, $\mathcal{L}^1([0,1])$ y $\mathcal{L}^2([0,1])$.

$\boxed{\textbf{1.9}}$ Sea E un espacio de Banach, e $I = [-\varepsilon, \varepsilon] \subset \mathbb{R}$ un intervalo. Para $g \in E$ y $u : I \to E$, considere la EDO:

$$\begin{cases} u_t = F(u) & \text{para } t \in I \\ u(0) = g \end{cases}$$

Donde $F : E \to E$ es una función localmente Lipschitz (es decir, es Lipschitz restringida sobre cada conjunto acotado de E). Escribiendo la EDO de forma integral, use el teorema del punto fijo para contracciones en espacios de Banach para demostrar la existencia y unicidad de solución $u \in \mathcal{C}^1(I, E)$ de la EDO si ε es suficientemente pequeño.

<u>Solución:</u>

Reescribiendo la EDO en forma integral:

$$u_t(\cdot, t) = F(u(\cdot, t)) \quad \Rightarrow \quad \int_0^t u_t(\cdot, s) ds = u(\cdot, t) - u(\cdot, 0) = \int_0^t F(u(\cdot, s)) ds \quad \Rightarrow \quad u(\cdot, t) = g + \int_0^t F(u(\cdot, s)) ds$$

En vista de esto, considérese el espacio de Banach $\tilde{E} = \mathcal{C}^0(I, E)$ con la norma:

$$\begin{aligned} || \cdot ||_{\tilde{E}} : \tilde{E} &\to \tilde{E} \\ u &\mapsto ||u||_{\tilde{E}} = \sup_{t \in I} ||u(t)||_E \end{aligned}$$

Así mismo, considérese la aplicación:

$$\begin{aligned} N : \tilde{E} &\to \tilde{E} \\ u &\mapsto Nu := g + \int_0^t F(u(\cdot, s)) ds \end{aligned}$$

Que está bien definida. En efecto, g es función de x pero independiente de t, es decir, constante respecto a t, y por lo tanto, $g \in \mathcal{C}^0(I, E)$. Por otro lado, para el otro sumando:

$$\lim_{h \to 0} \left(\int_0^{t+h} F(u(\cdot, s)) ds - \int_0^t F(u(\cdot, s)) ds \right) = \lim_{h \to 0} \int_t^{t+h} F(u(\cdot, s)) ds = 0$$

Obteniendo la continuidad de $\int_0^t F(u(\cdot, s)) ds$. Así, $Nu \in \tilde{E}$, ya que la continuidad se comporta bien respecto a la suma.

En estas condiciones, hallar una solución para la EDP se reduce a hallar un punto fijo de la aplicación N (dado que, de acuerdo con la formulación integral del problema, la solución satisface $u = Nu$). No obstante, en el enunciado se requiere $u \in \mathcal{C}^1(I, E)$, que obviamente es más restrictivo que $\mathcal{C}^0(I, E)$.

Podría resolverse el problema trabajando en $\tilde{E} = \mathcal{C}^1(I, E)$ con la norma pertinente, pero el desarrollo es más farragoso, las condiciones resultantes en ε son más limitantes y, además, se obtiene que debe solicitarse la condición adicional de que F sea contractiva en un cierto subespacio.

En vez de eso, bastará con observar que si $u \in \mathcal{C}^0(I, E)$, entonces $Nu \in \mathcal{C}^1(I, E)$. Efectivamente, g es $\mathcal{C}^1(I, E)$ por ser constante en t, y en cuanto al otro sumando:

$$\frac{d}{dt} \int_0^t F(u(\cdot, s)) ds = F(u(\cdot, t))$$

Y por lo tanto, la derivada será continua en t si $F(u(\cdot, t))$ es continua. Así, se desea ver que, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que:

$$|t_1 - t_2| < \delta,\ t_1, t_2 \in I \quad \Rightarrow \quad ||F(u(\cdot, t_1)) - F(u(\cdot, t_2))||_E < \varepsilon$$

Como F es Lipschitz de constante L cuando se restringe sobre un subespacio acotado:

$$||F(u(\cdot, t_1)) - F(u(\cdot, t_2))||_E \leq L||u(\cdot, t_1) - u(\cdot, t_2)||_E$$

Como $u \in \tilde{E} = \mathcal{C}^0(I, E)$, para $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{L} > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que:

$$|t_1 - t_2| < \delta,\ t_1, t_2 \in I \quad \Rightarrow \quad ||u(\cdot, t_1) - u(\cdot, t_2)||_E < \varepsilon' = \frac{\varepsilon}{L}$$

Por lo tanto, si $|t_1 - t_2| < \delta$, se tiene que:

$$||F(u(\cdot, t_1)) - F(u(\cdot, t_2))||_E \leq L||u(\cdot, t_1) - u(\cdot, t_2)||_E < L\frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon$$

Obteniendo la continuidad de $F(u(\cdot, t))$. En definitiva, se tiene que basta con que $u \in \mathcal{C}^0(I, E)$ para que $Nu \in \mathcal{C}^1(I, E)$.

Nótese que, para garantizar que $Nu \in \mathcal{C}^1(I, E)$ ya ha sido necesario restringir el estudio a un cierto subespacio acotado. Además, en adelante, dicha restricción también será necesaria para poder realizar las acotaciones pertinentes. Por este motivo, considérese la restricción de N a una bola cerrada $V = B_R(0_{\tilde{E}})$ de radio R centrada en la aplicación $0_{\tilde{E}} \in \tilde{E}$.

Para hallar un punto fijo de la aplicación N en la bola, se usará el teorema del punto fijo en espacios de Banach. Dicho teorema requiere que N sea un endomorfismo contractivo.

En los pasos que siguen, se usará la siguiente desigualdad:

$$\sup_{t\in I} \left|\left| \int_0^t \big(F(u(\cdot,s)) - F(v(\cdot,s))\big)ds \right|\right|_E \leq \sup_{t\in I} \int_0^t ||F(u) - F(v)||_{\tilde{E}} ds = \varepsilon ||F(u) - F(v)||_{\tilde{E}} \leq \varepsilon L ||u - v||_{\tilde{E}}$$

Por comodidad, se usará el símbolo 0 para referirse indistintamente a los elementos neutros respecto a la suma de $\mathbb{R}, \tilde{E}$ y E. Además, se denotará $F_0 := F(0_E) \in E$.

Para imponer la condición de endomorfismo, tómese un elemento $u \in V$ (es decir, $||u||_{\tilde{E}} \leq R$) y solicítese $Nu \in V$ (es decir, $||Nu||_{\tilde{E}} \leq R$). Aplicando la definición de la norma:

$$\sup_{t\in I} ||Nu(\cdot,t)||_E = \sup_{t\in I} \left|\left| g + \int_0^t F(u(\cdot,s))ds \right|\right|_E \leq \sup_{t\in I} ||g||_E + \sup_{t\in I} \left|\left| \int_0^t \big(F(u(\cdot,s)) - F_0\big)ds \right|\right|_E + \sup_{t\in I} \left|\left| \int_0^t F_0 ds \right|\right|_E \leq$$
$$\leq ||g||_{\tilde{E}} + \varepsilon L_R ||u - 0_E||_{\tilde{E}} + \varepsilon ||F_0||_{\tilde{E}} = ||g||_{\tilde{E}} + \varepsilon L_R ||u||_{\tilde{E}} + \varepsilon ||F_0||_{\tilde{E}}$$

Usando que $||u||_{\tilde{E}} \leq R$ e imponiendo la restricción $||Nu||_{\tilde{E}} \leq R$:

$$||Nu||_{\tilde{E}} \leq ||g||_{\tilde{E}} + \varepsilon L_R R + \varepsilon ||F_0||_{\tilde{E}} \leq R$$

De donde resulta finalmente una condición sobre ε en términos del radio de la bola para que N sea endomorfismo:

$$\varepsilon \leq \frac{R - ||g||_{\tilde{E}}}{L_R R + ||F_0||_{\tilde{E}}}$$

Falta estudiar en qué condiciones la aplicación es contractiva. Tomando $u, v \in V$:

$$||Nu - Nv||_{\tilde{E}} = \left|\left| g + \int_0^t F(u(\cdot,s))ds - g - \int_0^t F(v(\cdot,s))ds \right|\right|_{\tilde{E}} = \left|\left| \int_0^t \big(F(u(\cdot,s)) - F(v(\cdot,s))\big)ds \right|\right|_{\tilde{E}} = L_R \varepsilon ||u - v||_{\tilde{E}}$$

Obteniendo que la aplicación será contractiva sobre la bola si se satisface:

$$L_R \varepsilon < 1 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon < \frac{1}{L_R}$$

<u>Comentario:</u>

La conclusión de este ejercicio es que el problema:

$$\begin{cases} u_t = F(u) & \text{para } t \in I \\ u(0) = g \end{cases}$$

Tiene solución si F es suficientemente "simpática". En otras palabras, se dispone de un mecanismo para resolver EDOs en ciertos espacio de Banach (aunque sean no lineales).

Desgraciadamente, el operador "derivada parcial" no es un candidato a ser la aplicación F (dado que no suele operar de E en E). Si fuera así, se dispondría de un mecanismo potente y general para resolver casi cualquier tipo de EDP.

No obstante, este resultado sí que proporciona un mecanismo para resolver algunas EDPs. Si se consigue caracterizar la solución de una EDP con una EDO en t, lo anterior aplica. Esto se consigue, por ejemplo, solicitando la conservación de la masa de la solución (que resulta en las fórmulas de Duhamel y d'Alembert para las ecuaciones del transporte y de las ondas).

Este ejercicio es fundamental para comprender los ejercicios de la segunda lista de problemas.

$\boxed{\textbf{1.10}}$ Use el método de las características para resolver:

$$\begin{cases} u_t + cu_x = e^{-t}\sin(x) & x\in\mathbb{R}, t>0 \\ u(x,0)=0 \end{cases}$$

Compruebe que se obtiene el mismo resultado usando la fórmula de Duhamel.

$$u(x,t) = g(x-ct) + \int_0^t f(x-c(t-s),s)ds$$

<u>Solución:</u>

La EDP es una ETCC (lineal, y no homogénea). Por [R1], las curvas características y sus derivadas son:

$$\gamma(s) = (\tilde{x}(s), \tilde{t}(s)) = (cs + x - ct, s) \qquad \gamma'(s) = (\tilde{x}'(s), \tilde{t}'(s)) = (c,1)$$

Derivando $v(s)$, y usando la EDP, se tiene que:

$$v'(s) = u_t(\gamma(s))\cdot\tilde{t}'(s) + u_x(\gamma(s))\cdot\tilde{x}'(s) = e^{-\tilde{t}(s)}\sin(\tilde{x}(s)) = e^{-s}\sin(cs+\overline{x})$$

Resolviendo la EDO anterior:

$$\int_0^s d(v(z)) = \int_0^s e^{-z}\sin(cz+\overline{x})dz \;\;\Rightarrow\;\; v(s) = v(0) + \int_0^s e^{-z}\sin(cz+\overline{x})dz$$

Donde $v(0) = u(\gamma(0)) = u(\overline{x},0) = 0$. Integrando el término restante por partes:

$$\int_0^s e^{-z}\sin(cz+\overline{x})dz = \quad \to \left\{ \begin{array}{c} u=\sin(cz+\overline{x}),\; du = \cos(cz+\overline{x})cdz \\ dv = e^{-z}dz,\; v=-e^{-z} \end{array} \right\}$$

$$= \Big[-e^{-z}\sin(cz+\overline{x})\Big]_0^s + c\int_0^s e^{-z}\cos(cz+\overline{x})dz = \quad \to \left\{ \begin{array}{c} u=\cos(cz+\overline{x}),\; du = -\sin(cz+\overline{x})cdz \\ dv = e^{-z}dz,\; v=-e^{-z} \end{array} \right\}$$

$$= \Big[-e^{-z}\sin(cz+\overline{x})\Big]_0^s + c\left(\Big[-e^{-z}\cos(cz+\overline{x})\Big]_0^s - c\int_0^s e^{-z}\sin(cz+\overline{x})dz\right) \Rightarrow$$

$$(1+c^2)\int_0^s e^{-z}\sin(cz+\overline{x})dz = \Big[-e^{-z}\sin(cz+\overline{x})\Big]_0^s + c\Big[-e^{-z}\cos(cz+\overline{x})\Big]_0^s =$$

$$= -e^{-s}\sin(cs+\overline{x}) + \sin(\overline{x}) - ce^{-s}\cos(cs+\overline{x}) + c\cos(\overline{x})$$

Finalmente:

$$v(s) = \frac{1}{1+c^2}\Big(\sin(\overline{x}) + c\cos(\overline{x}) - e^{-s}\big(\sin(cs+\overline{x}) + c\cos(cs+\overline{x})\big)\Big)$$

Obsérvese que $\tilde{t}(s) = s \;\;\Rightarrow\;\; s(\tilde{x},\tilde{t}) = t$. Por último, usando la expresión hallada para $\overline{x}$:

$$u(x,t) = \frac{1}{1+c^2}\Big(\sin(x-ct) + c\cos(x-ct)) - e^{-t}\big(\sin(x) + c\cos(x)\big)\Big)$$

Por otro lado, usando la fórmula de Duhamel:

$$u(x,t) = g(x-ct) + \int_0^t f(x-c(t-z),z)dz = 0 + \int_0^t e^{-z}\sin(x-c(t-z))dz$$

Nombrando $\overline{x} = x-ct$, resulta:

$$u(x,t) = \int_0^t e^{-z}\sin(cz+\overline{x})dz$$

Cuyo proceso de integración es identico al desarrollado en el apartado anterior para obtener $v(s)$. Evaluando en $s=t$ se obtiene el mismo resultado para $u(x,t)$.

$\boxed{\mathbf{1.11}}$ Considere:

$$\begin{cases} u_t + b\nabla_x u = -\alpha u & x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0 \\ u(x,0) = g(x) & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

a) Resuelva el (PC). Observe la diferencia en el comportamiento de la solución u según el signo de α. (Comentario: para dimensión $n = 1$ y para $\alpha > 0$, esta ecuación modeliza el transporte en un tubo infinito de un contaminante que se degrada, por ejemplo, debido a descomposición biológica o a que es absorbido por el medio. Este tipo de solución se conoce como onda viajera amortiguada.)

b) La solución u del apartado anterior se puede escribir como $u = T_t g$ donde $T_t : \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n)$ es un semigrupo de operadores lineales. Halle T_t y compruebe la identidad de semigrupo $T_{t+s} = T_t T_s$.

<u>Solución:</u>

a) Resuelva el (PC). Observe la diferencia en el comportamiento de la solución u según el signo de α. (Comentario: para dimensión $n = 1$ y para $\alpha > 0$, esta ecuación modeliza el transporte en un tubo infinito de un contaminante que se degrada, por ejemplo, debido a descomposición biológica o a que es absorbido por el medio. Este tipo de solución se conoce como onda viajera amortiguada.)

Se resolverá el problema mediante el método de las curvas características.

La EDP es una ETCC (no lineal y no homogénea). Por [R1], las curvas características y sus derivadas son:

$$\gamma(s) = (\tilde{x}(s), \tilde{t}(s)) = (bs + x - bt, s) \qquad\qquad \gamma'(s) = (\tilde{x}'(s), \tilde{t}'(s)) = (b, 1)$$

Derivando $v(s)$, y usando la EDP, se tiene que:

$$v'(s) = u_t(\gamma(s)) \cdot \tilde{t}'(s) + \nabla_x u(\gamma(s)) \cdot \tilde{x}'(s) = -\alpha v(s)$$

Resolviendo la anterior ecuación diferencial:

$$\int_0^s \frac{1}{v(z)} d(v(z)) = -\alpha \int_0^s dz \quad\Rightarrow\quad \Big[\ln(v(z))\Big]_0^s = -\alpha s \quad\Rightarrow\quad v(s) = v(0)e^{-\alpha s}$$

Obsérvese que $v(0) = u(\gamma(0)) = u(\overline{x}, 0) = g(\overline{x})$. Sustituyendo $\overline{x}$ resulta:

$$v(s) = g(x - bt)e^{-\alpha s}$$

Finalmente, como $\tilde{t}(s) = s \quad\Rightarrow\quad s(\tilde{x}, \tilde{t}) = \tilde{t}$, se tiene:

$$\boxed{u(x,t) = g(x - bt)e^{-\alpha t}}$$

b) La solución u del apartado anterior se puede escribir como $u = T_t g$ donde $T_t : \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n)$ es un semigrupo de operadores lineales. Halle T_t y compruebe la identidad de semigrupo $T_{t+s} = T_t T_s$.

Observando la solución obtenida en el apartado anterior, se propone definir T_t según:

$$\begin{aligned} T_t : \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n) &\to \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n) \\ g &\mapsto T_t(g) = T_t g := g(\cdot - bt)e^{-\alpha t} \end{aligned}$$

De esta forma, $u = T_t g$ y la aplicación está bien definida. Por último, en cuanto a la propiedad de semigrupo:

$$T_t T_s g = T_t(T_s(g)) = ((T_s g)(\cdot - bt))e^{-\alpha s} = \big[(T_t g)(\cdot - bt)\big]e^{-\alpha s} =$$
$$\big[g((\cdot - bs) - bt)e^{-\alpha t}\big]e^{-\alpha s} = g(\cdot - b(t+s))e^{-\alpha(t+s)} = T_{t+s} g$$

$\boxed{\mathbf{1.12}}$ Un contaminante en un tubo infinito con una corriente de velocidad constante de c $[m/s]$ hacia la derecha, inicialmente con una concentración de $g(x)$ $[g/m]$, se absorbe (en $[g/(ms)]$) proporcionalmente al cuadrado de su concentración. Halle la concentración del contaminante a tiempo $t > 0$ y el semigrupo no lineal asociado. Compruebe que se satisface la ley de semigrupo.

Solución:

Primero, se obtendrá la ley que modela el problema planteado.

Partimos de la aplicación de la ley de conservación de la masa, que en este caso, equivale a solicitar que la variación de la cantidad de contaminante presente en un intervalo de tubo sea igual a la diferencia entre el contaminante que entra y el que sale por sus extremos menos el contaminante absorbido en dicho intervalo.

Formalmente, sea $u(x,t)$ la concentración de contaminante en un punto del tubo x y en un instante de tiempo t. Entonces, omitiendo los argumentos de dicha función:

$$\frac{d}{dt}\int_a^b u dx = cu\big|_a - cu\big|_b - \int_a^b \alpha u^2 dx$$

Desarrollando dicha igualdad:

$$\int_a^b u_t dx = \int_a^b \big[-cu_x - \alpha u^2\big] dx$$

Dado que esto es cierto para cualquier intervalo $[a,b]$, y con el argumento usado en el problema 1.7, se deduce que:

$$u_t + cu_x = \alpha u^2$$

Que es coherente con el comentario del enunciado del problema 1.11. Finalmente, el modelo del problema queda descrito por el (PC):

$$\begin{cases} u_t + cu_x = -\alpha u^2 & x \in \mathbb{R},\, t \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = g(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Que se resolverá mediante el método de las curvas características.

La EDP es una ETCC (no lineal y no homogénea). Por [R1], las curvas características y sus derivadas son:

$$\gamma(s) = (\tilde{x}(s), \tilde{t}(s)) = (cs + x - ct, s) \qquad\qquad \gamma'(s) = (\tilde{x}'(s), \tilde{t}'(s)) = (c, 1)$$

Derivando $v(s)$, y usando la EDP, se tiene que:

$$v'(s) = u_t(\gamma(s)) \cdot \tilde{t}'(s) + u_x(\gamma(s)) \cdot \tilde{x}'(s) = -\alpha v^2(s)$$

Resolviendo la anterior ecuación diferencial:

$$\int_0^s \frac{1}{v^2(z)} d(v(z)) = -\alpha \int_0^s dz \quad \Rightarrow \quad \Big[-\frac{1}{v(z)}\Big]_0^s = -\alpha s \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{v(s)} = \alpha s - \frac{1}{v(0)}$$

Finalmente:

$$v(s) = \frac{1}{\alpha s - \frac{1}{v(0)}} = \frac{v(0)}{v(0)\alpha s + 1}$$

Obsérvese que $v(0) = u(\gamma(0)) = u(\overline{x}, 0) = g(\overline{x}) = g(x - ct)$. Además, $\tilde{t}(s) = t \;\Rightarrow\; s(\tilde{x}, \tilde{t}) = t$. Así, la solución de la EDP es:

$$\boxed{u(x,t) = \frac{g(x-ct)}{g(x-ct)\alpha t + 1}}$$

En cuanto al semigrupo, considérese:

$$\begin{aligned} T_t : \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n) &\to \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n) \\ g &\mapsto T_t(g) = T_t g := \frac{g(\cdot - ct)}{g(\cdot - ct)\alpha t + 1} \end{aligned}$$

Que, en efecto, satisface la propiedad de semigrupo:

$$T_t T_s g = T_t(T_s(g)) = \left(\frac{(T_s g)(\cdot - ct)}{(T_s g)(\cdot - ct)\alpha s + 1}\right) = \frac{\frac{g((\cdot - cs) - ct)}{g((\cdot - cs) - ct)\alpha s + 1}}{\frac{g((\cdot - cs) - ct)}{g((\cdot - cs) - ct)\alpha s + 1}\alpha t + 1} =$$

$$= \frac{g((\cdot - cs) - ct)}{g((\cdot - cs) - ct)\alpha t + g((\cdot - cs) - ct)\alpha s + 1} = \frac{g(\cdot - c(t+s))}{g(\cdot - c(t+s))\alpha(t+s) + 1} = T_{t+s}$$

TEMA 2 EDOs en espacios de Banach

2.1 Considere el operador:

$$(Av)(x) := \frac{1}{x}\int_0^x v(y)dy \qquad x \in (0,1]$$

Actuando sobre funciones $u \in \mathcal{C}^0([0,1])$. Demuestre que, para toda $g \in \mathcal{C}^0([0,1])$, el problema:

$$\begin{cases} u_t = Au + \sin(u) \\ u(x,0) = g(x) \end{cases}$$

Admite una única solución $u = u(x,t)$ que es contínua sobre todo $[0,1]$ para cada tiempo t en un cierto intervalo. ¿Cuál es el intervalo máximo de tiempo en el que la solución u existe?

Solución:

Primero de todo, se denotará $I = [-\varepsilon, \varepsilon]$ y $D = [0,1]$. Así mismo, considérense los espacios de Banach:

$$E := \mathcal{C}^0(D, \mathbb{R}) \qquad \tilde{E} := \mathcal{C}^0(I, E)$$

Sobre dichos espacios se definen las siguientes normas:

$$\begin{aligned} ||\cdot||_E : E &\to \mathbb{R} \\ u(t) &\mapsto ||u(t)||_E = \sup_{x\in D} |u(x,t)| \end{aligned} \qquad \begin{aligned} ||\cdot||_{\tilde{E}} : \tilde{E} &\to \mathbb{R} \\ u &\mapsto ||u||_{\tilde{E}} = \sup_{t\in I} ||u(\cdot,t)||_E \end{aligned}$$

Hay que verificar que A opera de E en E, es decir, que define una aplicación:

$$\begin{aligned} A : E &\to E \\ v &\mapsto A(v) = Av \end{aligned}$$

En efecto, fijado un t, la función $I(x) = \int_0^x v(y,t)dy$ es continua $\forall x \in [0,1]$ (mismo argumento que en el problema 1.9). Por otro lado, $D(x) = \frac{1}{x}$ es continua $\forall x \in (0,1]$. Así, el producto $D(x)I(x) = (Av(t))(x)$ es continuo en $(0,1]$. Nótese que la continuidad en 0 no está garantizada. No obstante, el límite de dicho producto cuando $x \to 0$ es:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\int_0^x v(y,t)dy = \lim_{x\to 0} \frac{\left(\int_0^x v(y,t)dy\right)'}{(x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{v(x,t)}{1} = v(0,t)$$

Y por lo tanto, la discontinuidad en 0 es evitable.

Dicho esto, a continuación se procede a resolver el problema. Reescribiéndolo en forma integral, resulta:

$$\int_0^t u_t(\cdot,s)ds = u(\cdot,t) - u(\cdot,0) = \int_0^t \left[\frac{1}{\cdot}\int_0^{\cdot} u(y,s)dy + \sin(u(\cdot,s))\right]ds \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad u(t) = g + \int_0^t \frac{1}{\cdot}\int_0^{\cdot} u(y,s)dyds + \int_0^t \sin(u(\cdot,s))ds$$

En vista de este resultado, se define la aplicación:

$$\begin{aligned} N : \tilde{E} &\to \tilde{E} \\ u &\mapsto N(u) = Nu := g + \int_0^t \frac{1}{\cdot}\int_0^{\cdot} u(y)dyds + \int_0^t \sin(u(\cdot s))ds \end{aligned}$$

Que está bien definida, dado que g es independiente de t, por lo tanto constante en t, y en consecuencia, contínua. Los otros dos sumandos son continuos en t por ser dicha variable el límite superior de la integral, argumento que se ha usado anteriormente. Obviamente, los tres sumandos definen funciones en x.

Así, hallar una solución del problema se reduce a hallar un punto fijo de la aplicación N. Evidentemente, por estar bien definida, se ha comprobado que define un endomorfismo de $\tilde{E}$ a $\tilde{E}$. Tan solo resta comprobar que es una aplicación contractiva con la norma en dicho espacio. En efecto:

$$||Nu - Nv||_{\tilde{E}} = \left|\left|\int_0^t \left[\frac{1}{\cdot}\int_0^{\cdot}(u(y,s) - v(y,s))dy + \big(\sin(u(\cdot,s)) - \sin(v(\cdot,s))\big)\right]ds\right|\right|_{\tilde{E}} \leq$$

$$\leq \varepsilon\left(\left|\left|\frac{1}{\cdot}\int_0^{\cdot}(u(y,s) - v(y,s))dy\right|\right|_{\tilde{E}} + ||\sin(u) - \sin(v)||_{\tilde{E}}\right) \leq$$

$$\leq \varepsilon\left(||u-v||_{\tilde{E}}\left|\frac{1}{\cdot}\int_0^{\cdot} ds\right| + ||(\cos(\xi))(u-v)||_{\tilde{E}}\right) \leq \varepsilon||u-v||_{\tilde{E}}\left(\left|\frac{\cdot}{\cdot}\right| + 1\right) = 2\varepsilon||u-v||_{\tilde{E}}$$

Donde se ha usado el teorema del valor medio. Así, la apliación será contractiva si se satisface:

$$2\varepsilon < 1 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon < \frac{1}{2}$$

Es decir, se ha obtenido la existencia y unicidad de la solución $u(x,t)$ para $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ con $\varepsilon < \frac{1}{2}$.

Obsérvese, no obstante, que la cota para el tiempo no depende de la condición inicial $g(x)$. Así, tómese $g_1(x) = u(x,\varepsilon)$ (solución para $u(x,t)$ en $t = \varepsilon$ y $\forall x \in [0,1]$). Realizando un cambio de variable en el tiempo de la forma $t' = t - \varepsilon$, dicha función puede interpretarse como una nueva condición inicial en el problema:

$$\begin{cases} u_t = Au + \sin(u) \\ u(x,0) = g_1(x) \end{cases}$$

Con las mismas definiciones que anteriormente para todos los elementos involucrados.

El argumento desarrollado para resolver el problema original aplica a este caso, obteniendo la solución $u(x,t')$ para $t' \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ con $\varepsilon < \frac{1}{2}$. Recuperando la referencia temporal original, se tiene que se conoce $u(x,t)$ para $t \in [0, 2\varepsilon]$. Iterando argumento, resulta que se conoce la solución sobre cualquier intervalo de la forma $[-k\varepsilon, k\varepsilon]$, con $\varepsilon < \frac{1}{2}$ y $k \in \mathbb{N}$. Así, se concluye que puede obtenerse la existencia y unicidad de $u(x,t)$ $\forall x \in [0,1]$ y $\forall t \in \mathbb{R}$.

Comentario:

El resultado anterior es consecuencia de que la aplicación:

$$\begin{aligned} F : E &\to E \\ u(t) &\mapsto F(u(t)) = Au(t) + \sin(u(t)) \end{aligned}$$

Es globalmente Lipschitz. Basta con observar que los operadores A y sin están acotados (de hecho, ya se ha visto de forma implícita en la resolución el problema).

$\boxed{\textbf{2.2}}$ Considere el operador A definido por:

$$(Av)(x) = \int_0^1 (v(y) - v(x))dy$$

a) Compruebe que $A : \mathcal{C}^0([0,1]) \to \mathcal{C}^0([0,1])$ es lineal y continuo.
b) Demuestre la existencia y unicidad de solución (para tiempos suficientemente pequeños) del problema no lineal $u_t - Au = u^3$, $u(x,0) = g(x)$.
c) Halle la solución de $u_t - Au = 0$, $x \in (0,1)$, $t > 0$, con condición inicial $u(x,0) = g(x)$. Calculad $\lim_{t\to\infty} u(x,t)$.
d) ¿Qué vale Av en los puntos donde se alcanzan el máximo y mínimo de $v = v(x)$? En esta línea, comente brevemente las diferencias y similitudes entre el operador A y el Laplaciano.

Solución:

a) Compruebe que $A : \mathcal{C}^0([0,1]) \to \mathcal{C}^0([0,1])$ es lineal y continuo.

Primero de todo, se denotará $I = [0, \varepsilon]$ y $D = [0,1]$. Así mismo, considérense los espacios de Banach:

$$E := \mathcal{C}^0(D, \mathbb{R}) \qquad \tilde{E} := \mathcal{C}^0(I, E)$$

Sobre dichos espacios se definen las siguientes normas:

$$\begin{aligned} ||\cdot||_E : E &\to \mathbb{R} \\ u(t) &\mapsto ||u(t)||_E = \sup_{x\in D} |u(x,t)| \end{aligned} \qquad \begin{aligned} ||\cdot||_{\tilde{E}} : \tilde{E} &\to \mathbb{R} \\ u &\mapsto ||u||_{\tilde{E}} = \sup_{t\in I} ||u(t)||_E \end{aligned}$$

Hay que verificar que A opera de E en E, es decir, que define una aplicación:

$$\begin{aligned} A : E &\to E \\ v(t) &\mapsto A(v(t)) = Av(t) = \int_0^1 v(y,t)dy - v(\cdot,t) \end{aligned}$$

Nótese que el término con la integral es el valor medio del objeto $v(t)$ como función en x (para cada t). En adelante, por comodidad, se denotará $\overline{v}(t) := \int_0^1 v(y,t)dy$. Obsérvese que $\overline{\overline{v}}(t) = \overline{v}(t)$ (el valor medio del valor medio es el valor medio).

En efecto, $Av(t)$ define funciones en $x \in D$, y en cuanto a la continuidad en dicha variable:

$$\lim_{h\to 0} \big((Av(t))(x+h) - (Av(t))(x)\big) = \lim_{h\to 0} \big(\overline{v}(t) - v(x+h,t) - \overline{v}(t) + v(x,t)\big) = \lim_{h\to 0} \big(v(x,t) - v(x+h,t)\big) = 0$$

Donde se ha usado la continuidad de $v(t)$ en x. Por otro lado, la linealidad del operador se comprueba trivialmente:

$$(A(\lambda v + \mu w)(t)) = \overline{(\lambda v + \mu w)}(t) - (\lambda v + \mu w)(t) = \lambda\overline{v}(t) + \mu\overline{w}(t) - \lambda v(t) - \mu w(t) = \lambda A(v(t)) + \mu A(w(t))$$

Sabiendo que A es lineal, bastará con ver que está acotado para comprobar que es un operador continuo en E:

$$||A|| = \sup_{||v(t)||_E \le 1} ||Av(t)||_E = \sup_{||v(t)||_E \le 1} ||\overline{v}(t) - v(\cdot,t))||_E \le \sup_{||v(t)||_E \le 1} (||v(t)||_E + ||v(t)||_E) = 2 \sup_{||v(t)||_E \le 1} ||v(t)||_E = 2$$

Donde se ha acotado el valor medio de $v(t)$ por la norma de $v(t)$.

b) Demuestre la existencia y unicidad de solución (para tiempos suficientemente pequeños) del problema no lineal $u_t - Au = u^3$, $u(x,0) = g(x)$.

Por comodidad, se usará el símbolo 0 para referirse indistintamente a los elementos neutros respecto a la suma de $\mathbb{R}, \tilde{E}$ y E.

De acuerdo con la formulación integral del problema, considérese la bola cerrada $V = B_R(0) \subset \tilde{E}$ de radio R centrada en $0 \in \tilde{E}$, y se propone la aplicación:

$$\begin{aligned} N : V &\to V \\ u &\mapsto N(u) = Nu = g + \int_0^t u^3(\cdot,s)ds + \int_0^t (Au)(\cdot)ds \end{aligned}$$

Y está bien definida, ya que para cada t proporciona una función en continua en $x \in D$, y es continua en t por ser dicha variable el límite superior de una integral sobre objetos de E (argumento usado en el problema 1.9).

Si dicha apliación es un endomorfismo contractivo, podrá aplicarse el teorema del punto fijo en espacios de Banach para probar la existencia y unicidad de la solución del problema.

En cuanto a la contractividad, tómense $u, v \in V$ (es decir, $||u||_{\tilde{E}}, ||v||_{\tilde{E}} \leq R$). Entonces:

$$||Nu - Nv||_{\tilde{E}} = \left|\left| \int_0^t (u^3 - v^3)(s)ds + \int_0^t (A(u-v))(s)ds \right|\right|_{\tilde{E}} \leq \varepsilon(||u^3 - v^3||_{\tilde{E}} + ||A(u-v)||_{\tilde{E}}) \leq$$
$$\leq \varepsilon(||(u-v)(u^2+v^2+uv)||_{\tilde{E}} + ||A|| \cdot ||u-v||_{\tilde{E}}) \leq \varepsilon ||u-v||_{\tilde{E}}(2 + ||u^2+v^2+uv||_{\tilde{E}}) \leq$$
$$\leq \varepsilon ||u-v||_{\tilde{E}}(2 + (||u||^2_{\tilde{E}} + ||v||^2_{\tilde{E}} + ||u||_{\tilde{E}}||v||_{\tilde{E}})) = \varepsilon(2+3R^2)||u-v||_{\tilde{E}}$$

Así, la aplicación será contractiva si se satisface:

$$\varepsilon(2+3R^2) < 1 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon < \frac{1}{2+3R^2}$$

Para que la aplicación sea un endomorfismo de la bola a la bola, tómese $u \in V$ y solicítese $Nu \in V$:

$$||Nu||_{\tilde{E}} = \left|\left| g + \int_0^t u^3(s)ds + \int_0^t (Au)(s)ds \right|\right|_{\tilde{E}} \leq ||g||_{\tilde{E}} + \varepsilon(||u^3||_{\tilde{E}} + ||(Au)||_{\tilde{E}}) \leq$$
$$||g||_{\tilde{E}} + \varepsilon(||u||^3_{\tilde{E}} + ||A|| \cdot ||u||_{\tilde{E}}) \leq ||g||_{\tilde{E}} + \varepsilon(R^3 + 2R) \leq R$$

De donde se deduce la condición adicional:

$$||g||_{\tilde{E}} + \varepsilon(R^3+2R) \leq R \quad \Rightarrow \quad \varepsilon \leq \frac{R - ||g||_{\tilde{E}}}{R^3+2R}$$

c) Halle la solución de $u_t - Au = 0$, $x \in (0,1)$, $t > 0$, con condición inicial $u(x,0) = g(x)$. Calcule $\lim_{t\to\infty} u(x,t)$.

Se ensayaran tres métodos diferentes para resolver la ecuación.

I) Por ser A un operador lineal y continuo, se ensaya la fórmula exponencial para la solución:

$$u(t) = e^{tA}g = \left[1 + tA + \frac{t^2}{2}A^2 + \frac{t^3}{3!}A^3 + \frac{t^4}{4!}A^4 + ...\right]g$$

Nótese que:

$$Au(t) = \overline{u}(t) - u(t)$$
$$A(Au(t)) = A(\overline{u}(t) - u(t)) = \overline{\overline{u}(t) - u(t)} - (\overline{u}(t) - u(t)) = \overline{\overline{u}}(t) - \overline{u}(t) - \overline{u}(t) + u(t) = -\overline{u}(t) + u(t) = -Au(t)$$

De donde se deduce que $A^2 = -A$, $A^3 = A$, $A^4 = -A$, etc. Así:

$$u = \left[1 + tA - \frac{t^2}{2}A + \frac{t^3}{3!}A - \frac{t^4}{4!}A + ...\right]g = g + \left[t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!} - \frac{t^4}{4!} + ...\right]Ag = g + \left[1 - (1 - t + \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + ...)\right]Ag$$

Sustituyendo por la expansión en serie de potencias de e^{-t} entorno a 0:

$$u = g + (1-e^{-t})Ag = g + (1-e^{-t})(\overline{g} - g) = g + \overline{g} - g - e^{-t}(\overline{g} - g) = \overline{g} - e^{-t}(\overline{g} - g)$$

Finalmente, en el límite:

$$\lim_{t\to\infty} u = \overline{g}$$

Obteniendo que u converge en el tiempo al valor medio de g.

II) Se ensaya un cambio de variable. Derivando la ecuación diferencial respecto de x:

$$(u_t(x,t))_x = u_{tx}(x,t) = (Au(t)(x))_x = (\overline{u}(t) - u(x,t))_x = -u_x(x,t)$$

Tomando $v = u_x$ y derivando v respecto de t resulta:

$$v_t = (u_x)_t = u_{xt} = -u_x = -v$$

Que es una EDO ordinaria con condición inicial $v(x,0) = (u(x,0))_x = (g(x))_x = g_x(x)$. La solución a dicha EDO es:

$$v_t = -v \quad \Rightarrow \quad \frac{d(v)}{v} = -1 \quad \Rightarrow \quad \ln\frac{v(t)}{v(0)} = -t \quad \Rightarrow \quad v(t) = v(0)e^{-t} \quad \Rightarrow \quad v(t) = g_x e^{-t}$$

Deshaciendo el cambio de variable e integrando respecto de x:

$$u_x(t) = g_x e^{-t} \quad \Rightarrow \quad u(t) = ge^{-t} + c(t)$$

Como $u(0) = g + c(0) = g$, $c(t) = 0$. Por último, derivando $u(t)$ y aplicando el operador A sobre $u(t)$

$$\begin{cases} u_t(t) = -ge^{-t} + c_t(t) \\ Au(t) = \overline{ge^{-t} + c(t)} - (ge^{-t} + c(t)) = \overline{g}e^{-t} + c(t) - ge^{-t} - c(t) = \overline{g}e^{-t} - ge^{-t} \end{cases}$$

Restando ambos términos, usando la ecuación diferencial e integrando respecto al tiempo:

$$u_t(t) - Au(t) = 0 = c_t(t) - \overline{g}e^{-t} \quad \Rightarrow \quad c_t(t) = \overline{g}e^{-t} \quad \Rightarrow \quad c(t) = -\overline{g}e^{-t} + k$$

Usando la condición $c(0) = 0$, se deduce $k = \overline{g}$. Así, con este método, la solución obtenida es:

$$u(t) = ge^{-t} + c(t) = ge^{-t} - \overline{g}e^{-t} + \overline{g} = \overline{g} - e^{-t}(\overline{g} - g)$$

Que coincide con la hallada anteriormente.

III) Se ensaya el cambio de variable $w(t) = u(t) - \overline{u}(t)$. Derivando respecto del tiempo, se tiene que $w_t(t) = u_t(t) - \overline{u}_t(t)$. En cuanto al último término, usando la ecuación diferencial:

$$\overline{u}_t(t) = \overline{(Au(t))} = \overline{\overline{u}(t) - u(t)} = \overline{\overline{u}}(t) - \overline{u}(t) = 0$$

Lo que indica que $\overline{u}(t)$ es constante en el tiempo, y por lo tanto, $\overline{u}(t) = \overline{u}(0) = \overline{g}$.

Recuperando el desarrollo de la derivada, se tiene que:

$$w_t(t) = u_t(t) - \overline{u}(t) = u_t(t) = Au(t) = \overline{u}(t) - u(t) = -w(t)$$

Esta EDO ya se ha resuelto antes, y su solución es $w(t) = w(0)e^{-t}$. En este caso, la condición inicial se obtiene de la definición de $w(t)$. ya que $w(0) = u(0) - \overline{u}(0) = g - \overline{g}$. Aislando $u(t)$ del cambio de variable y usando todo lo hallado:

$$u(t) = \overline{u}(t) + w(t) = \overline{g}w(0)e^{-t} = \overline{g} + e^{-t}(g - \overline{g}) = \overline{g} - e^{-t}(\overline{g} - g)$$

Obteniendo la misma solución una vez más.

d) ¿Qué vale Av en los puntos donde se alcanzan el máximo y mínimo de $v = v(x)$? En esta línea, comente brevemente las diferencias y similitudes entre el operador A y el Laplaciano.

El operador Av toma valores negativos si se evalúa en puntos tales que $v(x)$ está por encima del valor medio de v, y positivos si está por debajo.

De forma intuitiva, observando la ecuación diferencial, el operador Av actúa como "una fuerza recuperadora" que "empuja" a la función u hacia su valor medio. Esta interpretación es consistente con los resultados obtenidos al estudiar el límite $\lim_{t\to\infty} u(x,t)$ (la función converge hacia su media).

$\boxed{\textbf{2.3}}$ Escribimos la ecuación del transporte lineal $u_t + cu_x$ como $u' = Au$ donde, para cada t, $u = u(t)$ pertenece a un espacio de funciones de x, $u(t)(x) = u(x,t)$, u' denota la derivada respecto del tiempo t, y $A = -\partial_x$ es un operador diferencial lineal. Si bien este operador no es continuo entre el espacio de Banach C^k y él mismo, con k entero, insistimos en usar, al menos formalmente, la fórmula para e^{tA} dada por una serie de potencias (donde $g = g(x)$ es la condición inicial). Hágalo y sume la serie para llegar a una fórmula útil.

Comentario: El cálculo formal realizado requiere, y solo se aplicaría, a condiciones iniciales $g \in \mathcal{C}^\infty$ (y aún más, se necesitaría g analítica). Se puede demostrar no obstante, que aún así el cálculo sigue siendo formal, pues el espacio vectorial de funciones $\mathcal{C}^\infty$ no puede dotarse de una norma que lo haga de Banach y tal que el operador A sea continuo.

Solución:

Tal y como requiere el enunciado, se procede a ensayar la solución:

$$u(x,t) = e^{tA}g(x) = \left[Id + tA + \frac{t^2}{2}A^2 + \frac{t^3}{3!}A^3 + ... + \frac{t^k}{k!}A^k + ...\right]g(x)$$

Nótese que, de acuerdo con la definición del operador A:

$$\begin{gathered} A = -c\partial_x \\ A^2 = A(A) = -c\partial_x(-c\partial_x) = c^2\partial_{xx} \\ A^3 = A(A^2) = -c\partial_x(c^2\partial_{xx}) = -c^3\partial_{xxx} \\ ... \\ A^k = (-c)^k\partial_x^{(k)} \end{gathered}$$

Es decir:

$$u(x,t) = \left[Id + t(-c\partial_x) + \frac{t^2}{2}(c^2\partial_{xx}) + \frac{t^3}{3!}(-c^3\partial_{xxx}) + ... + \frac{t^k}{k!}((-c)^k\partial_x^{(k)}) + ...\right]g(x) =$$

$$= g(x) + (-ct)g^{'}(x) + \frac{(-ct)^2}{2}g^{''}(x) + \frac{(-ct)^3}{3!}g^{'''}(x) + ... + \frac{(-ct)^k}{k!}g^{(k)}(x) + ... = \sum_{k\geq 0}\frac{g^{(k)}(x)}{k!}(-ct)^k$$

Obsérvese que el polinomio de Taylor de $g(s)$ centrado en x_0 es:

$$T^g_{x_0}(s) = \sum_{k\geq 0}\frac{g^{(k)}(x_0)}{k!}(s - x_0)^k$$

Supóngase que dicho polinomio de Taylor tiene radio de convergencia infinito hacia la función g independientemente del punto donde se centre, es decir, $g(s) = T^g_{x_0}(s)$ $\forall s$ y $\forall x_0$. Entonces, centrando el polinomio en $x_0 = x$ y evaluándolo en $s = x_0 - ct = x - ct$, resulta:

$$g(x - ct) = T^g_x(x - ct) = \sum_{k\geq 0}\frac{g^{(k)}(x)}{k!}((x - ct) - x)^k = \sum_{k\geq 0}\frac{g^{(k)}(x)}{k!}(-ct)^k = u(x,t)$$

Obteniendo, sorprendentemente:

$$\boxed{u(x,t) = g(x - ct)}$$

2.4 Considérese la ecuación de evolución no lineal:

$$\begin{cases} u_t = cu_x + u(x,t)\int_0^1 |x-y|^{-1/3}u(y,t)dy & x\in(0,1),\ t\in(0,t_m) \\ u(0,t) = 0 & t\in(0,t_m) \\ u(x,0) = g(x) & x\in(0,1) \end{cases}$$

Con $g\in L^2(0,1)$ dada. Demuestre la existencia y unicidad de solución en sentido integral (en un cierto espacio de Banach a encontrar) para tiempos t_m suficientemente pequeños. Proporcione una cota inferior explícita para el tiempo t_m.

Note y discuta el siguiente hecho: en este problema, para la ecuación diferencial del transporte, ha sido necesario poner una condición de contorno en $x=0$. En cambio, en los problemas que involucran operadores integrales continuos, ya había existencia y unicidad de solución sin imponer condiciones de contorno.

Solución:

Como la solución pertenece a un espacio de Banach, se aspira a hallarla usando el teorema del punto fijo para una cierta aplicación N, de manera que dicho punto fijo satisfaga la EDP. A diferencia de los problemas anteriores, reescribir el problema en forma integral no va a proporcionar una aplicación candidata razonable para N, dado que aparecen derivadas parciales (en x y en t).

Por otro lado, obsérvese que, haciendo algún abuso de notación, la EDP puede reescribirse de la forma $u_t + cu_x = f(x,t,u)$, que es la ecuación del transporte a velocidad constante. La fórmula de Duhamel proporciona una expresión para la solución:

$$u(x,t) = g(x-ct) + \int_0^t f(x-cs,s,u)ds$$

En el caso en que las fuentes no dependan de u, la ecuación anterior es de hecho fórmula explícita para la solución u de la EDP. Por otro lado, si dependen de u, la fórmula no es explícita, pero proporciona una candidata razonable para N, que es lo que se deseaba. Es "razonable" en el sentido que se solicita en el enunciado, es decir, en sentido integral ("integral $\equiv$ conservación de la masa"). Además, el aspecto de dicha fórmula también proporciona una cierta intuición sobre el espacio de Banach en el que trabajar.

En efecto, como $g\in\mathcal{L}^2([0,1],\mathbb{R})$, la imagen de N debe contener el conjunto de funciones $\mathcal{L}^2([0,1],\mathbb{R})$. Por otro lado, el término con la integral define una función en t, que como aparece como límite superior de una integral, es continua. La continuidad en t es coherente con el modelo físico del problema (la masa no se "teletransporta").

Se denotará $I=[0,\varepsilon=t_m]$ y $D=[0,1]$. Así mismo, considérense los espacios de Banach:

$$E := \mathcal{L}^2(D,\mathbb{R}) \qquad \tilde{E} := \mathcal{C}^0(I,E)$$

En dichos espacios se definen las siguientes normas:

$$\begin{aligned} ||\cdot||_E &: E\to\mathbb{R} \\ u(t) &\mapsto ||u(t)||_E = ||u(t)||_2 = \left(\int_D |u(x,t)|^2dx\right)^{1/2} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} ||\cdot||_{\tilde{E}} &: \tilde{E}\to\mathbb{R} \\ u &\mapsto ||u||_{\tilde{E}} = \sup_{t\in I}||u(t)||_E \end{aligned}$$

Vale la pena realizar cierto trabajo previo. Considérese el operador:

$$\begin{aligned} B &: E\to E \\ u(t) &\mapsto Bu(t) := \int_0^1 |x-y|^{-1/3}u(y,t)dy \end{aligned}$$

Se procede a acotar el valor $||Bu(t)||_\infty$:

$$||Bu(t)||_\infty = \sup_{x\in D}|Bu(t)(x)| = \sup_{x\in D}\left|\int_0^1 |x-y|^{-1/3}u(y,t)dy\right| \leq \sup_{x\in D}\left(\int_0^1 |x-y|^{-1/3}|u(y,t)|dy\right)$$

Nótese que el término entre paréntesis corresponde a la norma $\mathcal{L}^1$ de las funciones $f=f(y)=(x-y)^{-1/3}$ y $g=g(y)=u(y,t)$. Usando la desigualdad de Hölder ($||fg||_1\leq||f||_p\cdot||g||_q$ si $1/p+1/q=1$) para el caso $p=q=2$:

$$\int_0^1 |x-y|^{-1/3}|u(y,t)|dy \leq \left(\int_0^1((x-y)^{-1/3})^2dy\right)^{1/2}\left(\int_0^1(u(y,t))^2dy\right)^{1/2} \tag{1}$$

El segundo término corresponde a $||u(t)||_2$. Ahora, para acotar el primero:

$$\int_0^1(x-y)^{-2/3}dy = \int_0^x(x-y)^{-2/3}dy + \int_x^1(x-y)^{-2/3} = \left[\frac{-(x-y)^{1/3}}{1/3}\right]_0^x + \left[\frac{-(x-y)^{1/3}}{1/3}\right]_x^1 = 3\big(x^{1/3}-(x-1)^{1/3}\big)$$

Así, se tiene que:

$$||Bu(t)||_\infty \leq ||u(t)||_2 \sup_{x\in D}\left(\sqrt{3}\big(x^{1/3}-(x-1)^{1/3}\big)^{1/2}\right) \leq k||u(t)||_2 = k||u(t)||_E$$

Donde se ha usado que la función en x en el interior del paréntesis es continua, y por lo tanto, el supremo evaluado en un compacto es de hecho un máximo.

Del desarrollo anterior, se tiene otra cota útil:

$$||uBu||_{\tilde{E}} = \sup_{t\in I}||u(t)Bu(t)||_E \leq \sup_{t\in I}||u(t)\big(k||u(t)||_E\big)||_E = k\sup_{t\in I}||u(t)||_E^2 \leq k\big(\sup_{t\in I}||u(t)||_E\big)^2 = k||u||_{\tilde{E}}^2$$

Regresando al problema, sobre una bola cerrada $V = B_R(0_{\tilde{E}}) \subset \tilde{E}$ se define la aplicación:

$$N : V \to V \tag{2}$$

$$u \mapsto Nu = g(\cdot - ct) + \int_0^t u(\cdot, s)Bu(\cdot, s)ds \tag{3}$$

Que está bien definida. En efecto, para cada t, Nu define una función en x que es continua en t. Para ver que $Nu(t) \in \mathcal{L}^2$, bastará con comprobar que $||Nu||_{\tilde{E}} < \infty$, que implica que $||Nu(t)||_E = ||Nu(t)||_2 < \infty\ \forall t \in I$. Dicho resultado se obtendrá al comprobar la condición de endomorfismo.

Tomando $u \in V$ $(||u||_{\tilde{E}} \leq R)$, y solicitando $Nu \in V$ $(||Nu||_{\tilde{E}} \leq R)$, se obtiene:

$$||Nu||_{\tilde{E}} = \left|\left|g(\cdot - ct) + \int_0^t u(\cdot, s)Bu(\cdot, s)ds\right|\right|_{\tilde{E}} \leq ||g||_{\tilde{E}} + \varepsilon||uBu||_{\tilde{E}} = ||g||_{\tilde{E}} + k\varepsilon||u||_{\tilde{E}} \leq ||g||_{\tilde{E}} + k\varepsilon R^2 \leq R$$

De donde se obtiene una primera condición para ε:

$$\varepsilon \leq \frac{R - ||g||_{\tilde{E}}}{kR^2}$$

Imponiendo ahora la condición de aplicación contractiva para elementos $u, v \in V$:

$$||Nu - Nv||_{\tilde{E}} = \left|\left|\int_0^t u(\cdot, s)Bu(\cdot, s)ds - \int_0^t v(\cdot, s)Bv(\cdot, s)ds\right|\right|_{\tilde{E}} \leq \varepsilon\big(||uBu - vBv||_{\tilde{E}}\big) = \varepsilon\big(||uBu - vBu + vBu - vBv||_{\tilde{E}}\big) \leq$$
$$\varepsilon\big(||(u-v)Bu||_{\tilde{E}} + ||vB(u-v)||_{\tilde{E}}\big) \leq k\varepsilon\big(||u||_{\tilde{E}}||u-v||_{\tilde{E}} + ||v||_{\tilde{E}}||u-v||_{\tilde{E}}\big) \leq 2k\varepsilon||u-v||_{\tilde{E}}$$

Obteniendo la condición:

$$2k\varepsilon < 1 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon < \frac{1}{2k}$$

$\boxed{\mathbf{2.5}}$ Considere el operador:

$$(Bv)(x) := \int_0^x v(y)dy \qquad x \in [0,1]$$

Actuando sobre funciones $v \in \mathcal{C}^0([0,1])$. Considere el problema de evolución, para $u = u(x,t)$:

$$\begin{cases} u_t = Bu \\ u(x,0) = g(x) \quad x \in [0,1] \end{cases}$$

Para cierta $g \in \mathcal{C}^0([0,1])$ dada.

a) Usando la serie de potencias para la exponencial de un operador, halle una fórmula explícita para $u = u(x,t)$ (la fórmula puede involucrar una serie de potencias que no hace falta sumar). Justifique que se puede usar la fórmula exponencial.

b) Demuestre que hay una única solución del problema de evolución, y que es de la forma:

$$u(x,t) = g(x) + \int_0^x tK(t(x-z))g(z)dz$$

Para una cierta función $K : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Halle la EDO y las condiciones iniciales que satisface sta función K, justificando que determinan la función K de forma única. Hallad el nombre y las propiedades de la función K (en Wolfram Alpha, por ejemplo).

Solución:

a) Usando la serie de potencias para la exponencial de un operador, halle una fórmula explícita para $u = u(x,t)$ (la fórmula puede involucrar una serie de potencias que no hace falta sumar). Justifique que se puede usar la fórmula exponencial.

Primero de todo, se denotará $I = [-\varepsilon, \varepsilon]$ y $D = [0,1]$. Así mismo, considérense los espacios de Banach:

$$E := \mathcal{C}^0(D, \mathbb{R}) \qquad \tilde{E} := \mathcal{C}^0(I, E)$$

Sobre dichos espacios se definen las siguientes normas:

$$\begin{aligned} ||\cdot||_E : E &\to \mathbb{R} \\ u(t) &\mapsto ||u(t)||_E = \sup_{x\in D} |u(x,t)| \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} ||\cdot||_{\tilde{E}} : \tilde{E} &\to \mathbb{R} \\ u &\mapsto ||u||_{\tilde{E}} = \sup_{t\in I} ||u(t)||_E \end{aligned}$$

Para poder aplicar la fórmula exponencial, hay que verificar que B define una aplicación lineal y continua de E en E.

$$\begin{aligned} B : E &\to E \\ v(t) &\mapsto B(v(t)) = Bv(t) = \int_0^{\cdot} v(y,t)dy \end{aligned}$$

La aplicación está bien definida, dado que define una función en x que es continua en dicha variable por ser el límite superior de la integral de una función continua. La linealidad del operador es trivial (puesto que el operador integral lo es). Sabiendo que es lineal, para comprobar la continuidad bastará con observar que dicho operador está acotado. En efecto:

$$||B|| = \sup_{||v(t)||_E \le 1} ||Bv(t)||_E = \sup_{||v(t)||_E \le 1} \left|\left| \int_0^{\cdot} v(y,t)dy \right|\right|_E \le |\cdot| \sup_{||v(t)||_E \le 1} ||v(t)||_E = |\cdot| \le 1$$

Ahora, aplicando la fórmula para la exponencial:

$$u(x,t) = e^{tB}g(x) = \left[Id + tB + \frac{t^2}{2}B^2 + \frac{t^3}{3!}B^3 + ... + \frac{t^k}{k!}B^k + ... \right] g(x)$$

Nótese que, de acuerdo con la definición del operador B:

$$Bg(x) = \int_0^x g(y)dy$$

$$B^2 g(x) = B(B(g(x))) = \int_0^x \int_0^y g(z)dzdy = \int_0^x g(z) \int_z^x dydz = \int_0^x (x-z)g(z)dz$$

$$B^3 g(x) = B(B^2 g(x)) = \int_0^x \int_0^y (y-z)g(z)dzdy = \int_0^x g(z) \int_z^x (y-z)dydz = \int_0^x \frac{(x-z)^2}{2} g(z)dz$$

$$...$$

$$B^k g(x) = \int_0^x \frac{(x-z)^{k-1}}{(k-1)!} g(z)dz$$

De donde resulta:

$$u(x,t) = g(x) + \sum_{k\geq 1} \frac{t^k}{k!} B^k g(x) = g(x) + \sum_{k\geq 1} \frac{t^k}{k!} \int_0^x \frac{(x-z)^{k-1}}{(k-1)!} g(z)dz = g(x) + \sum_{k\geq 1} \frac{t^k}{k!(k-1)!} \int_0^x (x-z)^{k-1} g(z)dz$$

Finalmente, desplazando el índice del sumatorio en una unidad:

$$u(x,t) = g(x) + \sum_{k\geq 0} \frac{t^{k+1}}{(k+1)!k!} \int_0^x (x-z)^k g(z)dz$$

b) Demuestre que hay una única solución del problema de evolución, y que es de la forma:

$$u(x,t) = g(x) + \int_0^x tK(t(x-z))g(z)dz$$

Para una cierta función $K : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Halle la EDO y las condiciones iniciales que satisface sta función K, justificando que determinan la función K de forma única. Hallad el nombre y las propiedades de la función K (en Wolfram Alpha, por ejemplo).

Duda: ¿Cómo se demuestra la unicidad?

Si la solución es única, entonces tiene que ser de la forma de la obtenida en el primer apartado. Por comparacion con lo requerido, se deduce que:

$$K(t(x-z)) = \sum_{k\geq 0} \frac{(t(x-z))^k}{(k+1)!k!} \quad \Rightarrow \quad K(m) = \sum_{k\geq 0} \frac{m^k}{(k+1)!k!}$$

Puede obtenerse el mismo resultado sin saber de antemano lo obtenido en el apartado anterior. Supóngase que, en efecto, existe una solución de la forma requerida. Entonces:

$$u_t(x,t) = \frac{d}{dt}\left(g(x) + \int_0^x tK(t(x-z))g(z)dz\right) = \int_0^x g(z)\frac{d}{dt}\Big(tK(t(x-z))\Big)dz =$$
$$= \int_0^x g(z)\Big[K(t(x-z)) + tK'(t(x-z))(x-z)\Big]dz$$

Por otro lado:

$$Bu(x,t) = \int_0^x \left[g(y) + \int_0^y tK(t(y-z))g(z)dz\right]dy = \int_0^x g(y)dy + \int_0^x \int_0^y tK(t(y-z))g(z)dzdy =$$
$$= \int_0^x g(y)dy + \int_0^x g(z) \int_z^x tK(t(y-z))dydz = \int_0^x g(z)\left[1 + \int_z^x tK(t(y-z))dy\right]dz$$

Como u es solución, satisface $u_t = Bu$. Comparando, se tiene que:

$$K(t(x-z)) + tK'(t(x-z))(x-z) = 1 + \int_z^x tK(t(y-z))dy$$

Nombrando $m = t(x-z)$:

$$K(m) + mK'(m) = 1 + \int_z^x tK(m)dy$$

Por último, realizando un cambio de variable en la integral:

$$r = t(y-z) \longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} dr = tdy \\ y = z \to r = 0 \\ y = x \to r = t(x-z) = m \end{array} \right\} \quad \Rightarrow \quad K(m) + mK'(m) = 1 + \int_0^m K(r)dr$$

Derivando la última ecuación respecto de m:

$$2K'(m) + mK''(m) = K(m)$$

Que es una EDO de segundo orden para K. Para resolverla, se requieren dos condiciones iniciales, que se obtienen de evaluar la ecuación anterior y su primitiva en $m = 0$:

$$K(0) + 0 \cdot K'(0) = 1 \int_0^0 K(r)dr \quad \Rightarrow \quad K(0) = 1$$
$$2K'(0) + 0 \cdot K''(0) = K(0) \quad \Rightarrow \quad K'(0) = \frac{1}{2}$$

Suponiendo que K venga dada por una serie de potencias, se tiene que:

$$K(m) = a_0 + a_1 m + \sum_{k\geq 2} a_k m^k = \sum_{k\geq 0} a_k m^k$$

$$2K'(m) = 2\left(a_1 + \sum_{k\geq 2} k a_k m^{k-1}\right) = \sum_{k\geq 0} 2(k+1)a_{k+1}m^k$$

$$mK''(m) = m\left(\sum_{k\geq 2} k(k-1)a_k m^{k-2}\right) = \sum_{k\geq 2} k(k-1)a_k m^{k-1} = \sum_{k\geq 0}(k+1)k a_{k+1}m^k$$

Imponiendo la EDO $(2K'(m) + mK''(m) = K(m))$:

$$\sum_{k\geq 0} 2(k+1)a_{k+1}m^k + \sum_{k\geq 0}(k+1)k a_{k+1}m^k = \sum_{k\geq 0} a_k m^k$$

Agrupando en un único sumatorio:

$$\sum_{k\geq 0}\Big[2(k+1)a_{k+1} + (k+1)k a_{k+1} - a_k\Big]m^k = 0$$

Y dicha igualdad es cierta si todos los coeficientes de la serie son nulos, de donde se obtiene:

$$a_k = 2(k+1)a_{k+1} + (k+1)k a_{k+1} \quad \Rightarrow \quad a_k = (k+1)a_{k+1}(2+k) \quad \Rightarrow \quad a_{k+1} = \frac{a_k}{(k+2)(k+1)}$$

Que, usando las condiciones iniciales:

$$K(0) = 1 = a_0$$
$$K'(0) = a_1 = \frac{1}{2}$$

Proporciona información suficiente para resolver la recurrencia, obteniendo:

$$a_k = \frac{1}{(k+1)!k!}$$

Finalmente, deshaciendo los cambios de variable:

$$K(m) = \frac{m^k}{(k+1)!k!} \quad \Rightarrow \quad K(t(x-z)) = \frac{(t(x-z))^k}{(k+1)!k!}$$

Obteniendo el mismo resultado que el deducido por comparación.

Triángulo característico

En esta lista, a menudo será necesario integrar ciertas funciones de dos variables sobre una región del plano XT que se denominará *triangulo característico* y se denotará por $T(x_0, t_0)$. Como su nombre indica, la región en cuestión corresponderá al triángulo isósceles cuya base sea halla sobre el eje de las abcisas, el vértice opuesto a dicha base tiene coordenadas (x_0, t_0) y la pendiente de los costados restantes será $\pm 1/c$.

En particular, cuando el vértice de dicho triángulo quede por encima de la recta $x = ct$ y a la derecha del eje vertical, tendrá el aspecto mostrado en la figura 1:

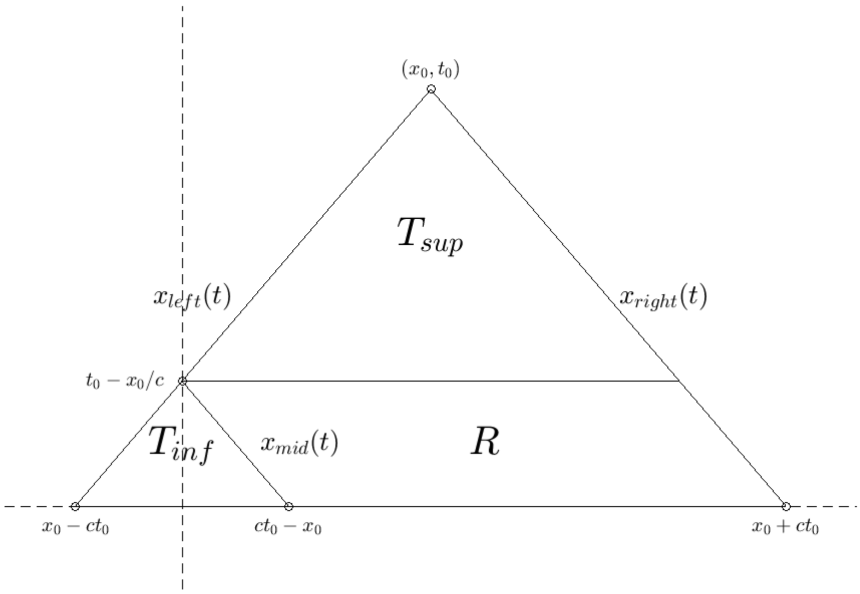

Figura 1: Posición particular del triángulo característico.

Donde se han señalado las coordenadas de los puntos relevantes, se ha dividido el triángulo en tres regiones de interés y se han marcado tres rectas cuyas ecuaciones son:

$$x_{left}(t) = x_l(t) = c(t - t_0) + x_0$$
$$x_{right}(t) = x_r(t) = c(t_0 - t) + x_0$$
$$x_{mid}(t) = x_m(t) = c(t_0 - t) - x_0$$

En la resolución de los problemas se referirá a estas regiones con frecuencia.

$\boxed{\textbf{3.1}}$ (Equipartición de la energía) Sea $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R} \times [0,\infty))$ una solución del problema de la cuerda vibrante:

$$\begin{cases} \rho u_{tt} - \tau u_{xx} = 0 & x \in \mathbb{R}, t \geq 0 \\ u(x,0) = g(x) & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) = h(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Supóngase que g y h son suficientemente regulares y tienen soporte en un intervalo acotado $[a,b]$. La *energía cinética* y *energía interna o potencial* de la cuerda vienen dadas por:

$$K(t) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \rho u_t^2(x,t)dx \qquad\qquad P(t) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \tau u_x^2(x,t)dx$$

Demuestre:

a) $K(t) + P(t)$ es constante en t.
b) $K(t) = P(t)$ para $t > (b-a)/c$, donde $c = \sqrt{\tau/\rho}$ es la velocidad de la onda a lo largo de la cuerda.

<u>Solución:</u>

a) $K(t) + P(t)$ es constante en t.

Bastará con derivar la suma respecto de t y observar que es nula. Para cada sumando:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \rho u_t^2 dx\right) = \rho\int_{\mathbb{R}} u_t u_{tt} dx$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \tau u_x^2 dx\right) = \tau\int_{\mathbb{R}} u_x u_{xt} dx$$

Para la segunda ecuación, considérese:

$$\int_{-R}^{R} u_x u_{xt} dx = \quad \rightarrow \left\{ \begin{array}{c} U = u_x,\ dU = u_{xx}dx \\ dV = u_{xt}dx,\ V = u_t \end{array} \right\}$$
$$= \big[u_x u_t\big]_{-R}^{R} - \int_{-R}^{R} u_t u_{xx} dx$$

Del enunciado, se tiene que $u_t(x,0) = h(x)$ tiene soporte compacto, y como $u(x,0) = g(x)$ tiene soporte compacto, $u_x(x,0) = g'(x)$ también. Ahora, asumiendo que la condición de "suficientemente regulares" puede usarse para afirmar que entonces u_x y u_t tienen soporte compacto $\forall t \geq 0$, entonces es cierto que el término $\big[u_x u_t\big]_{-R}^{R}$ será nulo para un valor de R suficientemente grande. En particular, en el límite:

$$\int_{\mathbb{R}} u_x u_{xt} dx = \lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R} u_x u_{xt} dx = \lim_{R\to+\infty}\big[u_x u_t\big]_{-R}^{R} - \lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R} u_t u_{xx} dx = -\int_{\mathbb{R}} u_t u_{xx} dx$$

Finalmente, usando la EDP:

$$\frac{d}{dt}\big(K(t) + P(t)\big) = \rho\int_{\mathbb{R}} u_t u_{tt} dx + \tau\int_{\mathbb{R}} u_x u_{xt} = \rho\int_{\mathbb{R}} u_t u_{tt} dx - \tau\int_{\mathbb{R}} u_t u_{xx} dx = \int_{\mathbb{R}} u_t\Big[\rho u_{tt} - \tau u_{xx}\Big]dx = 0$$

Tal y como se deseaba.

b) $K(t) = P(t)$ para $t > (b-a)/c$, donde $c = \sqrt{\tau/\rho}$ es la velocidad de la onda a lo largo de la cuerda.

Se solicita ver que, para t suficientemente grande:

$$\int_{\mathbb{R}} \rho u_t^2 dx = \int_{\mathbb{R}} \tau u_x^2 dx$$

Una condición suficiente (aunque no necesaria) para que se satisfaga dicha igualdad es:

$$\rho u_t^2 = \tau u_x^2$$

Usando la definición de c, puede reescribirse la condición anterior como $u_t^2 = c^2 u_x^2$, y la EDP como la ecuación de ondas estándar $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$. La fórmula de Duhamel para la dicha EDP proporciona una expresión explícita para la solución:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\Big(g(x-ct) + g(x+ct)\Big) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} h(y)dy$$

Que puede interpretarse como la superposición de dos ondas que viajan en direcciones opuestas:

$$u(x,t) = F(x+ct) + G(x-ct)$$

Donde:

$$F(x+ct) = \frac{1}{2}g(x+ct) + \frac{1}{2c}\int_0^{x+ct} h(y)dy$$
$$G(x-ct) = \frac{1}{2}g(x-ct) - \frac{1}{2c}\int_0^{x-ct} h(y)dy$$

Con estas definiciones, las derivadas parciales de u en términos de F y G son:

$$u_t = c\big(F'(x+ct) - G'(x-ct)\big)$$
$$u_x = F'(x+ct) + G'(x-ct)$$

Y sus respectivos cuadrados:

$$u_t^2 = c^2\big(F'^2(x+ct) + G'^2(x-ct) - 2F'(x+ct)G'(x-ct)\big)$$
$$u_x^2 = F'^2(x+ct) + G'^2(x-ct) + 2F'(x+ct)G'(x-ct)$$

Imponiendo la condición suficiente:

$$u_t^2 - c^2u_x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad F'(x+ct)G'(x-ct) = 0$$

Que se satisfará si $F' = 0$ o $G' = 0$. Nótese que, de las definiciones de ambas funciones:

$$F'(s) = \frac{1}{2}g'(s) + \frac{1}{2c}h(s)$$
$$G'(s) = \frac{1}{2}g'(s) - \frac{1}{2c}h(s)$$

Como g' y h tienen soporte compacto, $\forall s \notin [a,b]$, $F'(s) = G'(s) = 0$. Como el producto de F' y G' se evalúa en $s = x+ct$ y $s = x-ct$ respectivamente, bastará con que el intervalo $[x-ct, x+ct]$ sea estrictamente más grande que el intervalo $[a,b]$ para que al menos uno de sus extremos del primero se halle fuera del segundo, con lo que F' o G' serán nulos. Así:

$$(x+ct) - (x-ct) = 2ct > b-a \quad \Rightarrow \quad t > \frac{b-a}{2c}$$

Obteniendo lo requerido.

3.2 Considérese:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & x > 0, t > 0 \\ u(0,t) = d(t) & t > 0 \\ u(x,0) = 0 & x > 0 \\ u_t(x,0) = 0 & x > 0 \end{cases}$$

Donde $d \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ y $d(0) = d'(0) = 0$.

a) Resuelva el problema restando $d(t)$ a la solución y realizando una reflexión impar.

b) Alternativamente, resuelva el problema factorizando la ecuación de ondas y usando el método de las curvas características.

c) Para un impulso d de un segundo dado por:

$$d(t) = \begin{cases} 1 - \cos(2\pi t) & t \in (0,1) \\ 0 & t \geq 1 \end{cases}$$

Con $c = 10$ $[m/s]$, determinad la longitud, amplitud y posición de la onda a tiempo $t = 4$ $[s]$. ¿Es solución clásica para esta d?

Solución:

a) Resuelva el problema restando $d(t)$ a la solución y realizando una reflexión impar.

La idea de que hay tras la aplicación de este método es que se conoce la solución del problema de la cuerda vibrante si el problema es lineal, la cuerda es infinita y no hay condiciones de contorno (tan solo condiciones iniciales). El problema en cuestión es sobre una cuerda semiinfinita, inconveniente que se puede solventar realizando una reflexión. Para que dicha reflexión sea coherente con las condición de contorno (que es de Dirichlet), se realiza primero un cambio de variable (restar $d(t)$) que anula dicha condición y luego se hace una reflexión impar. Dado que la ecuación de ondas es invariante por reflexiones y la solución es única, bastará con restringir la solución de este nuevo problema al eje real positivo y deshacer el cambio de variable para obtener la solución del problema original.

Así, tómese $v(x,t) = u(x,t) - d(t)$. Entonces:

$$\begin{cases} v_{tt} - v_{xx} = -d'' & x > 0, t > 0 \\ v(0,t) = 0 & t > 0 \\ v(x,0) = 0 & x > 0 \\ v_t(x,0) = 0 & x > 0 \end{cases}$$

Realizando ahora una reflexión impar:

$$\tilde{v}(x,t) = \begin{cases} v(x,t) & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -v(-x,t) & x < 0 \end{cases} \qquad \tilde{d}''(x,t) = \begin{cases} d''(t) & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -d''(t) & x < 0 \end{cases}$$

El nuevo problema es:

$$\begin{cases} \tilde{v}_{tt} - \tilde{v}_{xx} = \tilde{d}'' & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ \tilde{v}(x,0) = 0 & x \in \mathbb{R} \\ \tilde{v}_t(x,0) = 0 & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Recuérdese que la fórmula general de d'Alembert-Duhamel proporciona una solución explícita para el problema lineal y homogéneo con condiciones de contorno, y es de la forma:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\Big(g(x+ct) - g(x-ct)\Big) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} h(y)dy + \frac{1}{2c}\int\int_{T(x,t)} f(y,s)dyds$$

En el caso que ocupa, $c = 1$, $g(x) = 0$, $h(x) = 0$ y $f(x,t) = -\tilde{d}''(t)$, resultando:

$$\tilde{v}(x,t) = -\frac{1}{2}\int\int_{T(x,t)} \tilde{d}''(s)dyds$$

Dado que $\tilde{d}(x,t)$ está definida a trozos, para resolver la integral anterior completamente habría que estudiar cuatro casos, según la posición del vértice superior del triángulo característico. No obstante, dado que posteriormente se restringirá la solución a $x > 0$, basta con obtener la solución para los casos en que dicho vértice se halla en el primer cuadrante. De todas formas, los otros dos casos se obtiene cambiando el signo del resultado, por la simetría de $\tilde{d}''(x,t)$.

I) Si $T(x,t)$ está íntegramente contenido en el primer cuadrante, entonces $\tilde{d}''(y,s) = d''(s)\ \forall (y,s) \in T(x,t)$. Así:

$$\tilde{v}(x,t) = -\frac{1}{2}\int_0^t \int_{x-(t-s)}^{x+(t-s)} \tilde{d}''(s)dyds = -\frac{1}{2}\int_0^t \tilde{d}''(s)\int_{x-(t-s)}^{x+(t-s)} dyds = -\frac{1}{2}\int_0^t \tilde{d}''(s)\Big[y\Big]_{x-(t-s)}^{x+(t-s)} ds =$$
$$= -\frac{1}{2}\int_0^t \tilde{d}''(s)\Big[x+t-s-(x-t-s)\Big]ds = -\frac{1}{2}\int_0^t \tilde{d}''(s)2(t-s)ds = -\int_0^t \tilde{d}''(s)(t-s)ds$$

Integrando por partes:

$$-\int_0^t \tilde{d}''(s)(t-s)ds = \quad \rightarrow \left\{ \begin{array}{c} u=(t-s),\ du=-ds \\ dv = d''(s)ds,\ v=d'(s) \end{array} \right\}$$
$$= -\big[(t-s)d'(s)\big]_0^t - \int_0^t d'(s)ds = d(t)$$

Donde se ha usado que $d'(0) = d(0) = 0$. Así:

$$\tilde{v}(x,t) = -d(t)$$

II) Si $T(x,t)$ está sobre el primer y segundo cuadrante simultáneamente, entonces $\tilde{d}''(y,s) = -d''(s)$ si $y<0$ y $\tilde{d}''(y,s) = d''(s)$ si $y>0$. Remitiendo al esquema de la figura 1, por la simetría de $\tilde{d}''(x,t)$, la integral será nula sobre la región $T_{inf}(x,t)$, y bastará con sumar las contribuciones sobre $T_{sup}(x,t)$ y $R(x,t)$. En cuanto a la primera:

$$-\frac{1}{2}\int\int_{T_{sup}(x,t)} \tilde{d}''(x,t)dyds = \frac{1}{2}\int_{t-x}^t \int_{x-(t-s)}^{x-(t+s)} d''(s)dyds$$

Nótese que la integral es idéntica a la del caso anterior cambiando los límites de integración en el tiempo. Así, usando la expresión obtenida al integrar por partes:

$$-\frac{1}{2}\int\int_{T_{sup}(x,t)} \tilde{d}''(x,t)dyds = -\big[(t-s)d'(s)\big]_{t-x}^t - \int_{t-x}^t d'(s)ds = xd'(t-x) - d(t) + d(t-x)$$

En cuanto a la integral sobre R:

$$-\frac{1}{2}\int\int_{R(x,t)} \tilde{d}''(x,t)dyds = -\frac{1}{2}\int_0^{t-x}\int_{-x+(t-s)}^{x+(t-s)} d''(s)dyds = -\frac{1}{2}\int_0^{t-x} d''(s)\int_{-x+(t-s)}^{x+(t-s)} dyds =$$
$$= -\frac{1}{2}\int_0^{t-x} d''(s)\Big[y\Big]_{-x+(t-s)}^{x+(t-s)} ds = -\frac{1}{2}\int_0^{t-x} d''(s)\Big[x+(t-s)-(-x+(t-s))\Big]ds = -\frac{1}{2}\int_0^{t-x} d''(s)2xds =$$
$$= -x\int_0^{t-x} d''(s)ds = -xd'(t-x)$$

Donde se ha usado que $d(0) = 0$. Sumando las contribuciones de ambas regiones, se tiene que:

$$\tilde{v}(x,t) = \big(xd'(t-x) - d(t) + d(t-x)\big) + \big(-xd'(t-x)\big) = -d(t) + d(t-x)$$

Así, la solución para $\tilde{v}$ restringida a $x>0$ es:

$$\tilde{v}(x,t)\big|_{x\geq 0} = v(x,t) = \begin{cases} -d(t) & t<x \\ -d(t)+d(t-x) & x<t \end{cases}$$

Deshaciendo el cambio de variable $v = u-d$ (es decir, sumando d a v) se tiene la solución para la EDP original:

$$u(x,t) = \begin{cases} 0 & t<x \\ d(t-x) & x<t \end{cases}$$

b) Alternativamente, resuelva el problema factorizando la ecuación de ondas y usando el método de las curvas características.

Recuérdese que para factorizar la ecuación de ondas hay que asumir que las derivadas parciales cruzadas son iguales. Si la solución es $\mathcal{C}^2$, esto se satisface por la condición de Schwartz, que es suficiente pero no necesaria.

Factorizando la ecuación en derivadas paraciales:

$$u_{tt} - u_{xx} = (\partial_{tt} - \partial_{xx})u = (\partial_t - \partial_x)(\partial_t + \partial_x)u = (\partial_t - \partial_x)(u_t + u_x) = (\partial_t - \partial_x)w = w_t - w_x = 0$$

Donde se ha nombrado $w = u_t + u_x$. Así, se ha reducido el problema a la resolución de dos problemas de transporte.

Para resolver el problema de transporte sobre w, deben obtenerse primero la condición inicial:

$$w(x,0) = u_t(x,0) + u_x(x,0) = 0$$

Dado que $u(x,0)$ es nula (y por lo tanto, $u_x(x,0)$ también). Nótese que:

$$w(0,t) = u_t(0,t) + u_x(0,t) = d'(t) - u_x(0,t)$$

Como $u_x(0,t)$ no se conoce (depende de la solución), $w(0,t)$ no está prescrita a priori (y por lo tanto, no hay condición de contorno). Así, el problema a resolver es:

$$\begin{cases} w_t - w_x = 0 & x > 0, t > 0 \\ w(x,0) = 0 & x > 0 \end{cases}$$

Como este tipo de problema se ha resuelto varias veces en la lista 1, se omitirán los detalles de la resolución. Bastará con razonar que las curvas características de la EDP son las rectas de pendiente unitaria negativa en el plano XT, a lo largo de las cuales la función w no varía. Así, la condición inicial se traslada a lo largo de estas curvas, y dado que dicha condición inicial es nula, se tiene que $\forall x > 0$ y $\forall t > 0$:

$$w(x,t) = 0$$

Conocida w, puede resolverse el segundo problema de transporte sobre u. En este caso, las condiciones iniciales son conocidas, y las de contorno están prescritas, con lo que el problema a resolver es:

$$\begin{cases} u_t + u_x = w = 0 & x > 0, t > 0 \\ u(x,0) = 0 & x > 0 \\ u(0,t) = d(t) & x > 0, t > 0 \end{cases}$$

Con el mismo argumento, pero sobre rectas de pendiente unitaria y positiva, tan solo hay que trasladar la condición inicial sobre las mismas, distinguiendo los casos en que dichas rectas se hallen por encima o por debajo de la recta $t = x$. Así, se tiene que $\forall x > 0$ y $\forall t > 0$:

$$u(x,t) = \begin{cases} 0 & t < x \\ d(t-x) & x < t \end{cases} \tag{4}$$

Obteniendo la misma solución que al hacer la reflexión impar.

c) Para un impulso d de un segundo dado por:

$$d(t) = \begin{cases} 1 - \cos(2\pi t) & t \in (0,1) \\ 0 & t \geq 1 \end{cases}$$

Con $c = 10$ $[m/s]$, determinad la longitud, amplitud y posición de la onda a tiempo $t = 4$ $[s]$. ¿Es solución clásica para esta d?

Primero, nótese que el problema se había resulto para velocidad de propagación unitaria. El problema modificado se obtiene de hacer el cambio de variable $\overline{x} = cx$ en la EDP, y en tal caso la solución es:

$$u(x,t) = \begin{cases} 0 & t < x/c \\ d(t - x/c) & x/c < t \end{cases} \tag{5}$$

Ahora, usando la definición de d, se tiene que $d(t - x/c) = 1 - \cos(2\pi(t - x/c))$ si $(t - x/c) < 1$, que implica $t < x/c + 1$, y 0 si $t > x/c + 1$. Así:

$$u(x,t) = \begin{cases} 0 & t < x/c \\ 1 - \cos(2\pi(t - x/c)) & x/c < t < x/c + 1 \\ 0 & x/c + 1 < t \end{cases} \tag{6}$$

De acuerdo con esto, la longitud de la onda es 10 $[m]$, el período, 1 $[s]$, y en 4 $[s]$ ha recorrido 40 $[m]$.

En cuanto a las derivadas parciales de primer y segundo orden, tan solo son no nulas en la región $x/c < t < x/c + 1$. En el interior de dicha función, la función es $\mathcal{C}^2$, y tan solo queda comprobar si empalman bien en la frontera de la misma:

$$\left.\begin{aligned} u_x(x,t) &= -(1/c)\sin(2\pi(t - x/c)) \\ u_{xx}(x,t) &= (1/c^2)\cos(2\pi(t - x/c)) \\ u_t(x,t) &= \sin(2\pi(t - x/c)) \\ u_{tt}(x,t) &= \cos(2\pi(t - x/c)) \end{aligned}\right. \Rightarrow \begin{aligned} u_x(x, x/c) &= u_x(x, x/c + 1) = 0 \\ u_{xx}(x, x/c) &= u_{xx}(x, x/c + 1) = 1 \\ u_t(x, x/c) &= u_t(x, x/c + 1) = 0 \\ u_{tt}(x, x/c) &= u_{tt}(x, x/c + 1) = 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la solución no es clásica, dado que las derivadas parciales de segundo orden no son continuas. Nótese no obstante que las derivadas parciales cruzadas sí que son iguales, y por eso ha funcionado el método de la factorización del operador.

3.3 Resuelva:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 1 & x > 0, t > 0 \\ u(0,t) = 0 & t > 0 \\ u(x,0) = 0 & x > 0 \\ u_t(x,0) = 0 & x > 0 \end{cases}$$

¿Es u solución clásica?

Solución:

Bastará con realizar una reflexión que respete la condición de contorno, resolver el problema para la cuerda infinita con la fórmula de d'Alembert-Duhamel y restringir la solución a la semirecta real positiva.

Como la condición de contorno es de Dirichlet y homogénea, la reflexión deberá ser impar. Así:

$$\tilde{u}(x,t) = \begin{cases} u(x,t) & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -u(-x,t) & x < 0 \end{cases} \qquad \tilde{f}(x,t) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

Con estas definiciones, la nueva EDP con las condiciones iniciales pertinentes es:

$$\begin{cases} \tilde{u}_{tt} - \tilde{u}_{xx} = \tilde{f} & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ \tilde{u}(x,0) = 0 & x \in \mathbb{R} \\ \tilde{u}_t(x,0) = 0 & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Recuérdese que la fórmula general de d'Alembert-Duhamel es:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\Big(g(x+ct) + g(x-ct)\Big) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} h(y)dy + \frac{1}{2c}\int\int_{T(x,y)} f(y,s)dyds$$

En este caso, $c = 1$, $g = h = 0$ y $f = \tilde{f}$, resultando:

$$\tilde{u}(x,t) = \frac{1}{2}\int\int_{T(x,y)} \tilde{f}(y,s)dyds$$

Como la solución se restringirá a la semirecta real (en x), bastará con estudiar dicha integral cuando (x,t) se halle en el primer cuadrante. Habrá que distinguir dos casos, según el triángulo característico se halle íntegramente contenido en el primer cuadrante o no. Nótese que, como $\tilde{f}$ es constante a trozos (y en particular, igual a ± 1), la integral se reducirá a calcular áreas sobre la región de integración.

I) Si $T(x,t)$ está íntegramente contenido en el primer cuadrante, entonces $\tilde{f}(y,s) = 1\ \forall (y,s) \in T(x,t)$. Así, la solución corresponde al área de dicho triángulo, obteniendo la solución:

$$\tilde{u}(x,t) = \frac{1}{2}|T(x,t)| = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(2t)(t)\right) = \frac{t^2}{2}$$

II) Si $T(x,t)$ está sobre el primer y segundo cuadrante simultáneamente, entonces $\tilde{f}(y,s) = -1$ si $y < 0$ y $\tilde{f}(y,s) = 1(s)$ si $y > 0$. Remitiendo al esquema de la figura 1, por la simetría de $\tilde{f}(x,t)$, la integral será nula sobre la región T_{inf}, y bastará con sumar las contribuciones sobre T_{sup} y R. Dichas contribuciones se reducen a otro cálculo de áreas, obteniendo la solución:

$$\tilde{u}(x,t) = \frac{1}{2}\big(|T_{sup}(x,t)| + |R(x,t)|\big) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(2x)(x) + (2x)(t-x)\right) = \frac{1}{2}\big(x^2 + 2xt - 2x^2\big) = xt - \frac{x^2}{2}$$

Restringiendo $\tilde{u}$ a $x > 0$ se obtiene la solución de la EDP original:

$$u(x,t) = \begin{cases} t^2/2 & t < x \\ xt - x^2/2 & x < t \end{cases}$$

En vista de este resultado, es evidente que u es $\mathcal{C}^2$ en todo el primer cuadrante salvo, quizá, sobre la recta $t = x$. Así, calculando las derivadas parciales de primer y segundo orden se obtiene:

$$u_t(x,t) = \begin{cases} t & t < x \\ x & x < t \end{cases} \qquad u_x(x,t) = \begin{cases} 0 & t < x \\ t - x & x < t \end{cases}$$

$$u_{tt}(x,t) = \begin{cases} 1 & t < x \\ 0 & x < t \end{cases} \qquad u_{xx}(x,t) = \begin{cases} 0 & t < x \\ -1 & x < t \end{cases}$$

Obteniendo que las derivadas parciales de primer orden son continuas sobre la recta $t = x$, pero las de segundo orden no, y por lo tanto la solución no es clásica.

$\boxed{\textbf{3.4}}$ Una onda plana con soporte compacto y altura H rebota en el borde de una piscina. ¿Cuál es la altura máxima que alcanza la onda durante la reflexión?

Solución:

Por tratarse de una onda plana, el modelo puede reducirse al problema homogéneo de la cuerda vibrante semiinfinita con condición de contorno de Neumann constante (el ángulo que forma la superficie del agua en el punto de contacto con la pared es constante debido a los efectos de la tensión superficial). Por simplicidad, supóngase que dicho ángulo es nulo (si no, similarmente al problema 3.4, puede restarse una cierta función a la solución para que la derivada se anule, resolver el nuevo problema y deshacer el cambio de variable). Dicho modelo queda descrito por la EDP:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & x > 0, t > 0 \\ u_x(0,t) = 0 & t > 0 \\ u(x,0) = g(x) & x > 0 \\ u_t(x,0) = h(x) & x > 0 \end{cases}$$

Donde las condiciones iniciales $g(x)$ y $h(x)$ tienen soporte compacto $[a,b]$ con $a \neq 0$ (onda inicialmente lejos de la pared, y por lo tanto, $g(0) = 0$) y $c > 0$ es la velocidad de propagación de la onda.

Nótese que los máximos de altura se alcanzan allí donde el gradiente de u es nulo, es decir, satisfacen:

$$\nabla u(x,t) = (u_x(x,t), u_t(x,t))^T = (0,0)^T$$

En particular, lo anterior es cierto para el instante $t = 0$:

$$(u_x(x,0), u_t(x,0))^T = (0,0)^T \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} g'(x) = 0 \\ h(x) = 0 \end{cases}$$

Para resolver el problema, se realiza una reflexión par sobre las funciones u, g y h. Sean $\tilde{u}$, $\tilde{g}$ y $\tilde{h}$ dichas reflexiones. Así, el nuevo problema es:

$$\begin{cases} \tilde{u}_{tt} - c^2 \tilde{u}_{xx} = 0 & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ \tilde{u}(x,0) = \tilde{g}(x) & x \in \mathbb{R} \\ \tilde{u}_t(x,0) = \tilde{h}(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Cuya solución viene dada por la fórmula de Duhamel:

$$\tilde{u}(x,t) = \frac{1}{2}\Big(\tilde{g}(x+ct) + \tilde{g}(x-ct)\Big) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \tilde{h}(y)dy$$

Y se satisface que $u(x,t) = \tilde{u}(x,t)\big|_{x \geq 0}$.

Nótese que la altura de la onda en la pared tan solo depende del tiempo y viene dada por:

$$u(0,t) = \tilde{u}(0,t) = \frac{1}{2}\Big(\tilde{g}(ct) + \tilde{g}(-ct)\Big) + \frac{1}{2c}\int_{-ct}^{ct} \tilde{h}(y)dy = g(ct) + \frac{1}{c}\int_0^{ct} h(y)dy$$

Donde se ha usado la simetría de $\tilde{g}$ y $\tilde{h}$ respecto a $x = 0$ y que coinciden con g y h en la región positiva de $\mathbb{R}$. Para hallar el máximo de dicha función hay que estudiar los extremos relativos de la misma. Igualando la derivada respecto al tiempo a 0:

$$\frac{d}{dt}u(0,t) = cg'(ct) + h(ct) = 0$$

Nótese que dicha igualdad se satisface si $g'(ct) = 0$ y $h(ct) = 0$ o bien si $cg'(ct) = -h(ct)$. Por el momento, ignórese el segundo caso, que se discutirá más adelante.

En cuanto al primero, de acuerdo con la discusión presentada al inicio de la resolución, dichos ceros corresponden a los extremos relativos de u en $t = 0$. Supóngase que m es el extremo relativo tal que $g(m) = H$. Entonces, debe cumplirse:

$$g'(ct) = g'(m) = 0 \quad \Rightarrow \quad t = m/c$$

Este es un resultado que cabía esperar, ya que $t = m/c$ es el tiempo necesario para que la onda, que se propaga a velocidad c, recorra una distancia m. Es decir, el máximo de la altura en la pared se obtiene cuando el máximo de la condición inicial se transporta y alcanza la pared.

Evaluando la altura en la pared en dicho tiempo:

$$u(0, m/c) = g(m) + \frac{1}{c}\int_0^m h(y)dy$$

Para resolver la expresión anterior debe discutirse la interpretación del enunciado, dado que la condición “una onda de altura H” puede entenderse de varias formas.

La primera interpretación consiste en entender que la condición inicial se obtiene imponiendo una cierta geometría $g(x)$ que está “estática”, es decir, $h(x) = 0$. Dicho de otra manera, a la cuerda se le da la forma $g(x)$, se mantiene dicha forma “congelada en el tiempo” ($h(x) = 0$) y, en el instante $t = 0$, se suelta la cuerda y se deja que evolucione de forma natural.

En esta situación, la onda inicial “se divide” en dos ondas que viajan en direcciones opuestas, una hacia la pared y la otra hacia el infinito (hacia la izquierda y hacia la derecha respectivamente en el eje real). En este caso:

$$u(0, m/c) = g(m) + \frac{1}{c}\int_0^m h(y)dy = g(m) + \frac{1}{c}\int_0^m 0dy = g(m) = H$$

Es decir, al alcanzar la pared, la onda se superpone con la onda “imaginaria” de la reflexión, recuperando la altura original.

La segunda interpretación consiste en entender que la condición inicial se obtiene de “hacer una fotografía” a una onda que ya estaba viajando hacia la pared. Es decir, la onda tiene geometría $g(x)$ pero no está “estática” ($h(x) \neq 0$). Nótese que podría suceder que la “forma” de la onda dependiera del instante en que se tomara la fotografía. Para evitar tal situación, basta con entender que dicha “forma” es invariante, es decir, g se traslada a velocidad constante c hacia la pared (hacia la izquierda en el eje real). Así, $h(x)$ no es una función cualquiera, sino que tiene que ser compatible con esta situación. Imponiendo esta restricción se hallará $h(x)$ y podrá desarrollarse el cálculo de la altura de la onda en la pared.

En esta situación, para los puntos que están en el eje real positivo, y para tiempos suficientemente pequeños (antes de que la onda llegue a la pared y se superponga con la reflexión), se tiene que transcurridas $\Delta t \neq 0$ unidades de tiempo, la onda se ha desplazado $c\Delta t$ unidades de espacio (hacia la izquierda). Requiriendo que la “forma” de la función se mantenga:

$$u(x - c\Delta t, t + \Delta t) = u(x, t)$$

Reordenando y dividiendo por Δt se tiene que:

$$\frac{u(x - c\Delta t, t + \Delta t) - u(x, t)}{\Delta t} = 0$$

Como esto es cierto para tiempos suficientemente pequeños, en particular es cierto en el límite $\Delta t \to 0$. Denotando $\vec{y} = (x, t)$ y $\vec{v} = (-c, 1)$, se tiene:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{u(x - c\Delta t, t + \Delta t) - u(x, t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{u(\vec{y} + \vec{v}\Delta t) - u(\vec{y})}{\Delta t} = D_{\vec{v}}u = 0$$

Que indica que la derivada direccional de u en la dirección $(-c, 1)$ es nula. Escribiéndola en términos del gradiente:

$$D_{\vec{v}}u = \nabla u \cdot \vec{v} = (u_x, u_t) \cdot (-c, 1)^T = -cu_x + u_t = 0 \quad \Rightarrow \quad cu_x = u_t$$

En particular, la igualdad anterior es cierta para $t = 0$:

$$cu_x(x, 0) = u_t(x, 0) \quad \Rightarrow \quad cg'(x) = h(x)$$

Obteniendo la condición de compatibilidad sobre $h(x)$. Recuperando el cálculo de la altura de la onda en la pared:

$$u(0, m/c) = g(m) + \frac{1}{c}\int_0^m h(y)dy = g(m) + \frac{1}{c}\int_0^m cg'(y)dy = 2g(m) - g(0) = 2H$$

Nótese que la situación $cg'(ct) = -h(ct)$, que había quedado pendiente, es superflua en el caso $h(x) = 0$ e imposible si $h(x) = cg'(x)$.

$\boxed{\textbf{3.5}}$ Considere la ecuación de ondas no lineal:

$$u_{tt} - u_{xx} = u^2 + f(x,t) \text{ sobre } Q_\varepsilon := \mathbb{R} \times (0, \varepsilon)$$

Con condiciones iniciales $u(x,0) = u_t(x,0) = 0$, donde f es una función continua y acotada en $\overline{Q_\varepsilon}$ con $||f||_\infty \leq 1$. Trabajando en el espacio de funciones continuas y acotadas en $\overline{Q_\varepsilon}$, demuestre la existencia y unicidad de solución (en sentido integral) para ε suficientemente pequeño. Proporcione una cota inferior explícita para el tiempo ε.

<u>Solución:</u>

Definiendo $F(x,t) = u^2(x,t) + f(x,t)$, la formulación estándar del problema es:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = F & x \in \mathbb{R}, \varepsilon > t > 0 \\ u(x,0) = 0 & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) = 0 & x > 0 \end{cases}$$

Hallar una solución de la EDP en sentido integral invita a buscar una solución que satisfaga la fórmula de d'Alembert-Duhamel. Es decir, $u(x,t)$ será de la forma:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\Big(g(x+ct) + g(x-ct)\Big) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} h(y)dy + \frac{1}{2c}\int\int_{T(x,t)} F(y,s)dyds$$

En este caso, $c = 1$, $g = h = 0$ y $F = u^2 - f$, resultando:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\int\int_{T(x,t)} \big(u^2(y,s) + F(y,s)\big)dyds$$

Tómese el espacio de Banach $E = \mathcal{C}_b^0(\overline{Q_\varepsilon}, \mathbb{R})$ con la norma del supremo. En dicho espacio se define la aplicación:

$$\begin{aligned} N : E &\to E \\ u \mapsto Nu &:= \frac{1}{2}\int\int_T \big(u^2(y,s) + f(y,s)\big)dyds \end{aligned}$$

Que está bien definida. En efecto, Nu define una función de dos variables, dado que la región de integración T lo es. Tan solo resta ver que es continua y de norma acotada.

La continuidad puede obtenerse razonando que, como u y f son continuas sobre $\overline{Q_T}$, Nu variará de forma continua siempre y cuando la región T lo haga. Como T atiende al ya conocido triángulo característico, es evidente que pueden obtenerse triángulos cuya diferencia de áreas es arbitrariamente pequeña si los vértices superiores son suficientemente próximos.

En cuanto a la finitud de la norma:

$$||Nu|| = \left|\left|\frac{1}{2}\int\int_T \big(u^2(y,s) + f(y,s)\big)dyds\right|\right| \leq \frac{|T|}{2}||u^2 + f|| \leq \frac{|T|}{2}\big(||u||^2 + ||f||\big)$$

Donde $|T|$ corresponde al área del triángulo característico. Como $u \in E$, se tiene que $||u|| < +\infty$, y $||f|| < +\infty$ por hipótesis. Así, $||Nu|| < +\infty$ siempre y cuando $|T| < +\infty$. Remitiendo a la figura 1, y como $c = 1$, se tiene que:

$$|T| = \frac{1}{2}(2t)(t) = t^2 \quad \Rightarrow \quad |T| \leq \varepsilon^2$$

De acuerdo con la definición de N, hallar la solución de la EDP es equivalente a encontrar un punto fijo de dicha aplicación. Restringiendo N a una bola cerrada $B_R(0) \subset E$, bastará con ver que N es un endomorfismo contractivo sobre dicha bola.

Para que sea endomorfismo, bastará con solicitar $||Nu|| \leq R$ si $||u|| \leq R$ Aprovechando el desarrollo anterior:

$$||Nu|| \leq \frac{\varepsilon^2}{2}\big(||u||^2 + ||f||\big) \leq \frac{\varepsilon^2}{2}\big(R^2 + ||f||\big) \leq R \quad \Rightarrow \quad \varepsilon \leq \sqrt{\frac{2}{R^2 + ||f||}}$$

En cuanto a la contractividad, tómense $u, v \in B_R(0)$. Entonces:

$$||Nu - Nv|| = \left|\left|\frac{1}{2}\int\int_T \big(u^2(y,s) - v^2(y,s)\big)\right|\right| \leq \frac{|T|}{2}||u^2 - v^2|| = \frac{|T|}{2}||u^2 - v^2 + uv - uv|| =$$

$$= \frac{|T|}{2}||u(u-v) + v(u-v)|| \leq \frac{|T|}{2}\big(||u(u-v)|| + ||v(u-v)||\big) = \frac{|T|}{2}||u-v||\big(||u|| + ||v||\big) \leq |T|R||u-v|| \leq \varepsilon^2 R||u-v||$$

Como $|T| \leq \varepsilon^2$, e imponiendo que N sea contractiva:

$$\varepsilon^2 R < 1 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon < \frac{1}{\sqrt{R}}$$

Y obviamente ε debe cumplir las dos condiciones obtenidas simultáneamente. Nótese la dependencia de ε respecto de $||f||$, que impide extender la solución $\forall t$.

TEMA 4 Miscelánea

Identidad de Parseval [R2]

Sea H un espacio vectorial dotado de un producto interno. Sea B una base ortonormal de H, es decir, un subconjunto ortonoramal tal que el conjunto de sus combinaciones lineales es denso en H. Entonces, $\forall x \in H$:

$$||x||^2 = \langle x, x \rangle = \sum_{v \in B} |\langle x, v \rangle|^2$$

Aplicación:

Tomando $H = \mathcal{L}^2([0, 2\pi])$ con la base ortonormal $B = \{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\} \cup \{\frac{\cos{(kx)}}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin{(kx)}}{\sqrt{\pi}} : k \geq 0\} = \{e_0\} \cup \{e_k, \tilde{e}_k : k \geq 1\}$, las hipótesis del lema se satisfacen.

Tómese $f \in H$. La serie de Fourier asociada es:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k \geq 1} a_k \cos{(kx)} + \sum_{k \geq 1} b_k \sin{(kx)}$$

Donde:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos{(kx)} dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} f(x) e_k dx \qquad b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin{(kx)} dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} f(x) \tilde{e}_k dx$$

Entonces, tomando $f \in H$ y aplicando Parseval:

$$||f||^2_{\mathcal{L}^2} = \sum_{v \in B} |\langle f, v \rangle|^2 = |\langle f, e_0 \rangle|^2 + \sum_{k \geq 1} |\langle f, e_k \rangle|^2 + \sum_{k \geq 1} |\langle f, \tilde{e}_k \rangle|^2$$

Desarrollando la igualdad anterior:

$$||f||^2_{\mathcal{L}^2} = |\langle f, e_0 \rangle|^2 + \sum_{k \geq 1} \left\{ |\langle f, e_k \rangle|^2 + |\langle f, \tilde{e}_k \rangle|^2 \right\} = \left| \int_0^{2\pi} f e_0 dx \right|^2 + \sum_{k \geq 1} \left\{ \left| \int_0^{2\pi} f e_k dx \right|^2 + \left| \int_0^{2\pi} f \tilde{e}_k dx \right|^2 \right\} =$$

$$= |\sqrt{\pi} a_0|^2 + \sum_{k \geq 1} \left\{ |\sqrt{\pi} a_k|^2 + |\sqrt{\pi} b_k|^2 \right\} = \pi \sum_{k \geq 0} \left\{ a_k^2 + b_k^2 \right\} = \pi \left(\sum_{k \geq 0} a_k^2 + \sum_{k \geq 0} b_k^2 \right)$$

Y además, como $f \in H$, entonces $||f||^2_{\mathcal{L}^2} < +\infty$, de donde se deduce que:

$$\sum_{k \geq 0} a_k^2 < +\infty \qquad \sum_{k \geq 0} b_k^2 < +\infty$$

Teorema de la divergencia [R3]

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio Lipschitz y $F \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^n) \cap \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ un campo vectorial. Entonces:

$$\int_\Omega \text{div} F dx = \int_{\partial\Omega} F \cdot \nu dS$$

Donde ν es la normal exterior a $\partial\Omega$.

Teorema de Green [R4]

Este resultado es la particularización del teorema de la divergencia en dimensión $n = 2$.

Sea $\partial\Omega \subset \mathbb{R}^2$ una curva cerrada, simple, diferenciable a trozos y positivamente orientada, y sea Ω la región abierta del plano encerrada por dicha curva. Entonces, si $P, Q \in \mathcal{C}^1(\Omega)$, se tiene que:

$$\int_\Omega (Q_x - P_y) dx dy = \int_{\partial\Omega} (P dx + Q dy)$$

Alternativamente, si $(x(t), y(t))$ es una parametrización de $\partial\Omega$, puede escribirse:

$$\int_\Omega (Q_x - P_y) dx dy = \int_{\partial\Omega} (P x' + Q y') dt$$

$\boxed{\textbf{4.1}}$ [Desigualdad de Wirtinger] Sea $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función $\mathcal{C}^1$ y 2π-periódica. Probad que:

$$\int_0^{2\pi} |u - c_u|^2 dt \leq \int_0^{2\pi} |u'|^2 dt$$

Donde $c_u = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u dx$.

(Indicación: Escribid la desigualdad en términos de la serie de Fourier de u.)

Deducid que si $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función $\mathcal{C}^1$ y $(b-a)$-periódica, entonces:

$$\int_a^b |v - c_v|^2 dt \leq \left(\frac{b-a}{2\pi}\right)^2 \int_a^b |v'|^2 dt$$

Donde $c_v = \frac{1}{b-a} \int_a^b v dx$.

Solución:

Como $u \in \mathcal{C}^1$, u satisface las condiciones de Dirichlet, y por lo tanto, la serie de Fourier asociada converge a u en el intervalo $[0, 2\pi]$. Dicha serie es:

$$u(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \{a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\}$$

Donde:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(x) \cos(kx) dx \qquad\qquad b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(x) \sin(kx) dx$$

Por comodidad, para $k \geq 1$, se define $e_k = \cos(kx)$ y $\tilde{e}_k = \sin(kx)$. Así:

$$u(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \tilde{e}_k$$

Y como la serie converge:

$$u'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \{ - k a_k \sin(kx) + k b_k \cos(kx)\} = \sum_{k=1}^{\infty} -k a_k \tilde{e}_k + \sum_{k=1}^{\infty} k b_k e_k$$

Obsérvese que:

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(x) \cos(0x) dx\right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x) dx = c_u$$

Y por lo tanto:

$$f := u - c_u = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \tilde{e}_k$$

Desarrollando el término de la izquierda de la desigualdad del enunciado:

$$\int_0^{2\pi} |u - c_u|^2 dt = \int_0^{2\pi} |f|^2 dt = ||f||_{\mathcal{L}^2}^2$$

Y recurriendo a la identidad de Parseval (ver [R2]):

$$||f||_{\mathcal{L}^2}^2 = \pi\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k^2\right) \leq \pi\left(\sum_{k=1}^{\infty} k^2 a_k^2 + \sum_{k=1}^{\infty} k^2 b_k^2\right) = ||u'||_{\mathcal{L}^2}^2 = \int_0^{2\pi} |u'|^2 dt \qquad (*)$$

Tal y como se quería demostrar.

Para obtener el segundo resultado, tómese una función $v(x)$ con periodo $(b-a)$, es decir, que satisface:

$$v(x + (b-a)) = v(x)$$

Tomando el cambio de variable $w(x) = v(x\frac{b-a}{2\pi} + a)$, sucede que:

$$w(x + 2\pi) = v\left((x + 2\pi)\frac{b-a}{2\pi} + a)\right) = v\left(\left[x\frac{b-a}{2\pi} + a\right] + (b-a)\right) = v\left(x\frac{b-a}{2\pi} + a\right) = w(x)$$

Y por lo tanto, $w(x)$ es 2π-periódica. Además, se tiene la relación entre derivadas:

$$w'(x) = \frac{d}{dx} w(x) = \frac{d}{dx}\left(v\left(x\frac{b-a}{2\pi} + a\right)\right) = v'\left(x\frac{b-a}{2\pi} + a\right)\left(\frac{b-a}{2\pi}\right)$$

Aplicando el resultado del primer apartado a w, se tiene que:

$$\int_0^{2\pi} |w(t) - c_w|^2 dt \leq \int_0^{2\pi} |w'(t)|^2 dt$$

Donde $c_w = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} w(t)dt$. Tomando el cambio de variable $t = (y-a)\frac{2\pi}{b-a}$:

$$\frac{dt}{dy} = \frac{2\pi}{b-a}$$
$$t = 0 \to y = a$$
$$t = 2\pi \to y = b$$

Y se tienen las siguientes relaciones:

$$w(t) = w\left((y-a)\frac{2\pi}{b-a}\right) = v\left(\left[(y-a)\frac{2\pi}{b-a}\right]\frac{b-a}{2\pi} + a\right) = v(y)$$
$$w'(t) = w'\left((y-a)\frac{2\pi}{b-a}\right) = v'\left(\left[(y-a)\frac{2\pi}{b-a}\right]\frac{b-a}{2\pi} + a\right)\left(\frac{b-a}{2\pi}\right) = v(y)\left(\frac{b-a}{2\pi}\right)$$

Aplicando el cambio de variable a c_w y usando las igualdades anteriores se obtiene que:

$$c_w = \frac{1}{2\pi}\int_a^b w\left((y-a)\frac{2\pi}{b-a}\right)\frac{2\pi}{b-a}dy = \frac{1}{b-a}\int_a^b v(y)dy = c_v$$

Y para la desigualdad a probar:

$$\int_a^b \left|w\left((y-a)\frac{2\pi}{b-a}\right) - c_w\right|^2 \frac{2\pi}{b-a}dy \leq \int_a^b \left|w'\left((y-a)\frac{2\pi}{b-a}\right)\right|^2 \frac{2\pi}{b-a}dy \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \int_a^b |v(y) - c_v|^2 dy \leq \left(\frac{b-a}{2\pi}\right)^2 \int_a^b |v'(y)|^2 dy$$

Obteniendo lo requerido.

$\boxed{4.2}$ [Desigualdad isoperimétrica] Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un dominio regular y acotado, y sea $\Gamma = \partial\Omega$. El objetivo del problema es demostrar que:

$$4\pi|\Omega| \leq |\partial\Omega|^2$$

Con igualdad si, y solo si, Ω es un disco. Por lo tanto, dicha desigualdad establece que de entre todos los conjuntos con misma área, el disco es el que tiene mínimo perímetro.

a) Sea $L = |\partial\Omega|$ y $\gamma : [0, L] \to \mathbb{R}^2$ una paramterización de Γ por el parámetro arco, es decir, $|\gamma'(t)| = 1\ \forall t \in [0, L]$. Sean $x(t)$ e $y(t)$ las funciones coordenadas de γ. Pruebe que:

$$|\partial\Omega| = \int_0^L dt = \int_0^L \left\{|x'(t)|^2 + |y'(t)|^2\right\}dt$$

Y también:

$$|\Omega| = \left|\int_0^L x(t)y'(t)dt\right|$$

b) Usando la desigualdad de Writinger del problema anterior, probad la desigualdad isoperimétrica.

<u>Solución:</u>

Se asumirá que la condición "Ω está acotado y es un dominio regular" implica que sus bordes son curvas cerradas y derivables.

a) Sea $L = |\partial\Omega|$ y $\gamma : [0, L] \to \mathbb{R}^2$ una paramterización de Γ por el parámetro arco, es decir, $|\gamma'(t)| = 1\ \forall t \in [0, L]$. Sean $x(t)$ e $y(t)$ las funciones coordenadas de γ. Pruebe que:

$$|\partial\Omega| = \int_0^L dt = \int_0^L \left\{|x'(t)|^2 + |y'(t)|^2\right\}dt$$

Y también:

$$|\Omega| = \left|\int_0^L x(t)y'(t)dt\right|$$

La primera igualdad es inmediata, dado que la longitud de una curva parametrizada se obtiene de integrar el módulo de la aplicación que la parametriza sobre su intervalo de definición. Usando que $|\gamma'(t)| = 1 = |\gamma'(t)|^2$:

$$|\partial\Omega| = \int_0^L |\gamma'(t)|dt = \int_0^L dt = \int_0^L |\gamma'(t)|^2 dt = \int_0^L \left\{|x'(t)|^2 + |y'(t)|^2\right\}dt = L$$

Para la segunda igualdad, se recurrirá al teorema de Green (ver [R4]). Para obtener lo enunciado basta con imponer:

$$Q_x - P_y = 1$$
$$Px' + Qy' = xy'$$

Si existen funciones $P, Q \in \mathcal{C}^1$ de manera que se satisfagan ambas restricciones, se habrá demostrado lo requerido. Una combinación candidata es $P = 0$ y $Q = x$, que verifica las condiciones mencionadas.

b) Usando la desigualdad de Writinger del problema anterior, probad la desigualdad isoperimétrica.

Obsérvese que:

$$\int_0^L (x(t) - c_x)y'(t)dt = \int_0^L x(t)y'(t)dt - c_x \int_0^L y'(t)dt = \int_0^L x(t)y'(t)dt$$

Donde se ha usado que $Im(\gamma)$ es una curva cerrada, y por lo tanto, $\gamma(0) = \gamma(L)$. Así, se tiene la cadena de desigualdades:

$$4\pi|\Omega| = 4\pi\left|\int_0^L x(t)y'(t)dt\right| = 4\pi\left|\int_0^L (x(t) - c_x)y'(t)dt\right| \leq 4\pi\int_0^L |x(t) - c_x||y'(t)|dt \overset{1)}{\leq}$$

$$\overset{1)}{\leq} 4\pi\left(\int_0^L |x(t) - c_x|^2 dt\right)^{1/2}\left(\int_0^L |y'(t)|^2 dt\right)^{1/2} \overset{2)}{\leq} 4\pi\left(\left(\frac{L}{2\pi}\right)^2\int_0^L |x'(t)|^2 dt\right)^{1/2}\left(\int_0^L |y'(t)|^2 dt\right)^{1/2} \overset{3)}{\leq}$$

$$\overset{3)}{\leq} L\left(\int_0^L |x'(t)|^2 dt + \int_0^L |y'(t)|^2 dt\right) = L\int_0^L \{|x'(t)|^2 + |y'(t)|^2\}dt = L^2 = |\partial\Omega|^2$$

Donde se ha usado:

1) La desigualdad de Cauchy-Schwarz ($||fg|| \leq ||f||_2||g||_2$ con $f = x(t) - c_x$ y $g = y'(t)$).
2) La desigualdad de Writinger aplicada a $x(t)$, que es L-periódica y $\mathcal{C}^1$.
3) La desigualdad $2ab \leq a^2 + b^2$ (tomando $a^2 = \int_0^L |x'(t)|^2 dt$ y $b^2 = \int_0^L |y'(t)|^2 dt$).

Quedando demostrada la desigualdad isoperimétrica.

Véase finalmente que:

$$4\pi|\Omega| = |\partial\Omega|^2 \quad \Leftrightarrow \quad \Omega \text{ es un disco}$$

La implicación $\Leftarrow$ es trivial. Tan solo resta estudiar $\Rightarrow$. Para ello, bastará con determinar en qué condiciones la cadena de desigualdades del desarrollo anterior se convierte en una cadena de igualdades.

Se tiene que:

1) Para la desigualdad de Cauchy-Schwarz, se satisface que $||fg|| = ||f||_2||g||_2 \Leftrightarrow f = \lambda g$ (con $\lambda \in \mathbb{R}$). En este caso, se tiene que $\lambda y'(t) = x(t) - c_x$.

2) Para la desigualdad de Writinger, se obtiene la igualdad si $x(t) = c_x + a_1 \cos\left(\frac{2\pi}{L}t\right) + b_1 \sin\left(\frac{2\pi}{L}t\right)$, donde a_1 y b_1 son los coeficientes de la serie de Fourier de $x(t)$ para $k = 1$.

   Para demostrar esto, acúdase al problema 4.1. En el único punto del desarrollo donde se introduce una desigualdad es en (*), y se establece que:
$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} k^2 a_k^2 + \sum_{k=1}^{\infty} k^2 b_k^2$$
   Para obtener la igualdad, debe requerirse que los coeficientes de la serie de Fourier cumplan $a_k = b_k = 0$ si $k \geq 2$. Obviamente, as funciones seno y coseno verifican tal propiedad, obteniendo lo enunciado.

3) Para la desigualdad $2ab \leq a^2 + b^2$, se tiene igualdad si $a = b$. En este caso, esto implica $\int_0^L |x'(t)|^2 dt = \int_0^L |y'(t)|^2 dt$.

Por comodidad en la notación, nómbrese en adelante $A = \frac{2\pi}{L}$ y $B = \frac{1}{A}$.

Por las condiciones 1) y 2):

$$\lambda y'(t) = a_1 \cos(At) + b_1 \sin(At) \quad \Rightarrow \quad \lambda y(t) = c + Ba_1 \sin(At) - Bb_1 \cos(At)$$

Nótese que:

$$|\lambda x'(t)|^2 = \lambda^2 A^2 \left(b_1 \cos(At) - a_1 \sin(At)\right)^2 = \lambda^2 A^2 \left(b_1^2 \cos^2(At) + a_1^2 \sin^2(At) - 2b_1 a_1 \cos(At) \sin(At)\right)$$
$$|\lambda y'(t)|^2 = \left(a_1 \cos(At) + b_1 \sin(At)\right)^2 = \left(a_1^2 \cos^2(At) + b_1^2 \sin^2(At) + 2a_1 b_1 \cos(At) \sin(At)\right)$$

Usando ahora la condición 3):

$$\int_0^L |x'(t)|^2 dt = \int_0^L |y'(t)|^2 dt \quad \Rightarrow \quad \int_0^L \left(|\lambda x'(t)|^2 - |\lambda y'(t)|^2\right) dt = 0$$

Desarrollando el término a integrar:

$$|\lambda x'(t)|^2 - |\lambda y'(t)|^2 = (\lambda^2 A^2 b_1^2 - a_1^2) \cos^2(At) + (\lambda^2 A^2 a_1^2 - b_1^2) \sin^2(At) - (\lambda^2 A^2 + 1) 2a_1 b_1 \cos(At) \sin(At)$$

Integrando la expresión anterior y usando las siguientes identidades:

$$\int_0^L \sin^2(At) dt = \int_0^L \cos^2(At) dt = \frac{L}{2}$$
$$\int_0^L \cos(At) \sin(At) dt = 0$$

Se obtiene:

$$\frac{L}{2} \left(\lambda^2 A^2 b_1^2 - a_1^2 + \lambda^2 A^2 a_1^2 - b_1^2\right) = 0$$

Que se satisface si $\lambda = \frac{1}{A} = B$. Así:

$$x(t) = c_x + a_1 \cos(At) + b_1 \sin(At)$$
$$y(t) = \frac{1}{\lambda}(c + Ba_1 \sin(At) - Bb_1 \cos(At)) = Ac + a_1 \sin(At) - b_1 \cos(At)$$

Donde se ha usado que $AB = 1$. Finalmente, obsérvese que:

$$(x(t) - c_x)^2 + (y(t) - Ac)^2 = (a_1 \cos(At) + b_1 \sin(At))^2 + (a_1 \sin(At) - b_1 \cos(At))^2 = a_1^2 + b_1^2$$

De donde se deduce que $x(t)$ e $y(t)$ parametrizan una circunferencia, tal y como se quería demostrar.

$\boxed{\textbf{4.3}}$ Considere el dominio del plano:

$$\Omega = \{(x,y) : a < x < b,\, \varphi(x) < y < \psi(x)\}$$

Donde $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ satisfacen $\varphi(x) < \psi(x)$ $\forall x \in (a,b)$.

a) Demuestre que $\forall u \in \mathcal{C}^1(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ se tiene:

$$\int_\Omega \partial_y u dxdy = \int_{\partial\Omega} u\nu^y dl$$

Donde ν^y es la segunda componente de la normal unitaria exterior a $\partial\Omega$.

b) Deducid, en el dominio anterior y para $u, v \in \mathcal{C}^1(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$, la fórmula de integración por partes:

$$\int_\Omega (\partial_y u) v dxdy = -\int_\Omega u\partial_y v dxdy + \int_{\partial\Omega} uv\nu^y dl$$

Nota: La fórmula de integración por partes en $\mathbb{R}^n$ también es válida con una demostración similar. En dicha situación, el enunciado es:
Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio Lipschitz, y sean $u, v \in \mathcal{C}^1(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$. Para todo $i = 1, 2, ..., n$ se tiene que:

$$\int_\Omega (\partial_i u) v dx = -\int_\Omega u\partial_i v dx + \int_{\partial\Omega} uv\nu^i dS$$

Donde ν^i es la i-ésima componente de la normal unitaria exterior a $\partial\Omega$.

<u>Solución:</u>

Supóngase que $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ son diferenciables (en realidad, basta con que sean diferenciables a trozos).

La frontera $\partial\Omega$ se obtiene de concatenar cuatro curvas, que corresponden a las imágenes de las parametrizaciones:

$$\begin{gathered}
\gamma_1(s) = (s, \varphi(s)),\ s \in [a,b] \\
\gamma_2(s) = (b, s),\ s \in [\varphi(b), \psi(b)] \\
\gamma_3(s) = (s, \psi(s)),\ s \in [a,b] \\
\gamma_4(s) = (a, s),\ s \in [\varphi(a), \psi(a)]
\end{gathered}$$

Disponiendo de dichas parametrizaciones, el término de la derecha de la igualdad a demostrar se reduce a calcular las integrales de $u\nu^y$ sobre cada una de dichas curvas y sumar los resultados con el signo pertinente.

Para γ_1, los vectores unitarios tangente y normal exterior a la curva son:

$$\vec{t} = \frac{1}{\sqrt{1+\varphi'^2}}(1, \varphi') \qquad\qquad \vec{n} = \frac{1}{\sqrt{1+\varphi'^2}}(\varphi', -1)$$

En efecto, considérese:

$$\vec{n} \times \vec{t} = \frac{1}{1+\varphi'^2}\begin{pmatrix}\varphi' \\ 1 \\ 0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1 \\ \varphi' \\ 0\end{pmatrix} = \frac{1}{1+\varphi'^2}\begin{pmatrix}0 \\ 0 \\ \varphi'^2+1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 \\ 0 \\ 1\end{pmatrix}$$

De donde se deduce que la la pareja $\{\vec{t}, \vec{n}\}$ es una base ortonormal orientada positivamente.

En estas condiciones, se tiene que:

$$\begin{gathered}
dl = |\gamma_1'|ds \\
\nu^y = \frac{-1}{\sqrt{1+\varphi'^2}} = \frac{-1}{|\gamma_1'|}
\end{gathered}$$

Y entonces:

$$\int_{\gamma_1} u\nu^y dl = -\int_a^b u(s, \varphi(s))ds$$

Análogamente, para γ_3:

$$\int_{\gamma_3} u\nu^y dl = -\int_a^b u(s, \psi(s))ds$$

Ahora, para γ_2, los vectores unitarios tangente y normal exterior a la curva son:

$$\vec{t} = (0, 1) \qquad\qquad \vec{n} = (-1, 0)$$

Ya que:

$$\vec{n} \times \vec{t} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Y como $\nu^y = 0$, la integral sobre γ_2 es nula. Análogamente, se obtiene el mismo resultado para γ_4.

Así, orientando $\partial\Omega$ positivamente, se tiene que:

$$\int_{\partial\Omega} u\nu^y dl = \int_{\gamma_1} u\nu^y dl + \int_{\gamma_2} u\nu^y dl - \int_{\gamma_3} u\nu^y dl - \int_{\gamma_4} u\nu^y dl = \int_a^b \big(u(s,\psi(s)) - u(s,\varphi(s))\big)ds$$

Finalmente, reescribiendo el término de la izquierda de la igualdad a demostrar:

$$\int_{\Omega} \partial_y u dx dy = \int_a^b \int_{\varphi(x)}^{\varphi(x)} u_y dy dx = \int_a^b \big(u(x,\psi(x)) - u(x,\varphi(x))\big)dx$$

Obteniendo lo requerido.

El resultado solicitado en el segundo apartado se obtiene de aplicar lo anterior a la función $w = uv$, ya que $w \in \mathcal{C}^1(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$.

$\boxed{\textbf{4.4}}$ Demuestre que el teorema de la divergencia y la fórmula de integración por partes del problema anterior son equivalentes.

Solución:

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio Lipschitz, y $F \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^n) \cap \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ un campo vectorial y $u, v \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$ funciones escalares. Se desea probar que:

$$\int_\Omega \text{div} F dx = \int_{\partial\Omega} F \cdot \nu dS \quad \Leftrightarrow \quad \int_\Omega (\partial_i u) v dx = -\int_\Omega u \partial_i v dx + \int_{\partial\Omega} u v \nu^i dS$$

Donde ν es la normal exterior a $\partial\Omega$.

La implicación hacia la derecha es sencilla. Dadas u y v con las condiciones del enunciado, si el teorema de la divergencia se satisface para cualquier campo vectorial, en particular se cumple para $F = (F_1, F_2, ..., F_j, ..., F_n)$ con $F_j = 0$ si $j \neq i$ y $F_i = uv$. En tal caso, el término de la izquierda es:

$$\int_\Omega \text{div} F dx = \int_\Omega \left(\sum_{j=0}^{n} \partial_j F_j \right) dx = \int_\Omega \partial_i F_i dx = \int_\Omega \partial_i (uv) dx = \int_\Omega (\partial_i u) v dx + \int_\Omega u (\partial_i v) dx$$

Y el de la derecha:

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot \nu dS = \int_\Omega \left(\sum_{j=0}^{n} F_j \nu^j \right) dS = \int_\Omega F_i \nu^i dS = \int_\Omega u v \nu^i dS$$

Obteniendo la fórmula de integración por partes.

Para la implicación hacia la izquierda, dado cierto campo vectorial $F = (F_1, F_2, ..., F_n)$ con las condiciones del enunciado, tómense las funciones $u = 1$ y $v_j = F_j$. Entonces, aplicando la fórmula de integración por partes:

$$\int_\Omega \text{div} F dx = \int_\Omega \left(\sum_{j=0}^{n} \partial_j F_j \right) dx = \int_\Omega \left(\sum_{j=0}^{n} \partial_j v_j \right) dx = \sum_{j=0}^{n} \left(\int_\Omega \partial_j v_j dx \right) =$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \left(\int_\Omega (1 \cdot \partial_j v_j + 0 \cdot v_j) dx \right) = \sum_{j=0}^{n} \left(\int_\Omega \big(u(\partial_j v_j) + (\partial_j u) v_j \big) dx \right) = \sum_{j=0}^{n} \left(\int_{\partial\Omega} u v_j \nu^j dS \right) =$$

$$= \int_{\partial\Omega} \left(\sum_{j=0}^{n} u v_j \nu^j \right) dS = \int_{\partial\Omega} u \left(\sum_{j=0}^{n} v_j \nu^j \right) dS = \int_{\partial\Omega} u \left(\sum_{j=0}^{n} F_j \nu^j \right) dS = \int_{\partial\Omega} F \cdot \nu dS$$

Obteniendo el teorema de la divergencia.

$\boxed{\textbf{4.5}}$ Resuelva las siguientes cuestiones.

a) Dado el dominio $\Omega = \{(x,y) : x^2/a^2 + y^2 < 1\}$ y la familia de elipses $E_\lambda = \{\sqrt{x^2/a^2 + y^2} < \lambda\}$ $(0 < \lambda < 1)$, realice un cambio de variable parar comparar las integrales:

$$F_\Omega = \int_\Omega u dx dy \qquad\qquad F_\partial = \int_0^1 \int_{\partial E_\lambda} u dl d\lambda$$

Demuestre que las dos integrales son iguales para toda función $u \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ si y solo si $a = 1$.

b) ("Teorema de Fubini esférico") Sea $u \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ con $n \geq 2$. Demuestre que:

$$\int_{\mathbb{R}^n} u dx = \int_0^\infty \int_{\partial B_r} u dS dr$$

Indicación: Primero haga el caso $n = 2$ y $n = 3$ usando coordenadas polares o esféricas. Para dimensión arbitraria $n \geq 2$, por densidad puede suponerse que $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$ y, usando el teorema de la divergencia, demostrar que:

$$\frac{d}{dr}\int_{B_r} u dx = \frac{d}{dr}\int_{B_1} u(ry) r^n dy = \int_{B_1} \dots = \int_{B_r} \dots = \int_{\partial B_r} u dS$$

<u>Solución:</u>

a) Dado el dominio $\Omega = \{(x,y) : x^2/a^2 + y^2 < 1\}$ y la familia de elipses $E_\lambda = \{\sqrt{x^2/a^2 + y^2} < \lambda\}$ $(0 < \lambda < 1)$, realice un cambio de variable parar comparar las integrales:

$$F_\Omega = \int_\Omega u dx dy \qquad\qquad F_\partial = \int_0^1 \int_{\partial E_\lambda} u dl d\lambda$$

Demuestre que las dos integrales son iguales para toda función $u \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ si y solo si $a = 1$.

Como a tan solo influye en la excentricidad de la elipse, supóngase $a > 0$.

Por comodidad, considérese el factor auxiliar:

$$F = \int_0^1 \int_0^{2\pi} u\lambda d\theta d\lambda$$

Que aligerará la notación en la discusión del problema.

Usando coordenadas elípticas, Ω puede describirse según:

$$\Omega = \{\sigma(\lambda,\theta) = (\lambda a \cos\theta, \lambda \sin\theta) : 0 \leq \theta < 2\pi,\ 0 \leq \lambda < 1\}$$

Y, para cada E_λ, la frontera puede parametrizarse por:

$$\partial E_\lambda = \{\gamma(\theta) = (\lambda a \cos\theta, \lambda \sin\theta) : 0 \leq \theta < 2\pi\}$$

Así, F_Ω expresada en coordenadas elípticas es:

$$F_\Omega = \int_\Omega u dx dy = \int_0^1 \int_0^{2\pi} u\lambda a d\theta d\lambda = aF$$

Por otro lado, para F_∂, el parámetro de longitud vale $dl = |\gamma'(\theta)| = \lambda\sqrt{a^2\cos^2\theta + \sin^2\theta}d\theta$, obteniendo:

$$F_\partial = \int_0^1 \int_{\partial E_\lambda} u dl d\lambda = \int_0^1 \int_0^{2\pi} u\lambda\sqrt{a^2\cos^2\theta + \sin^2\theta} d\theta d\lambda$$

En vista de este resultado, es evidente que si $a = 1$, se tiene la igualdad $F_\Omega = F_\partial$. Considérese en adelante $a \neq 1$.

Se define la función $g(\theta) = a^2\cos^2\theta + \sin^2\theta$. Igualando su derivada a cero se obtienen sus extemos relativos:

$$g'(\theta) = -a^2 2\cos\theta\sin\theta + 2\sin\theta\cos\theta = (1-a^2)\sin 2\theta = 0 \ \Leftrightarrow\ \theta = \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$$

Por otro lado, la segunda derivada es:

$$g''(\theta) = (1-a^2)2\cos 2\theta$$

Evaluando $g(\theta)$ y $g''(\theta)$ en los extremos relativos se tiene:

$$g\left(\frac{k\pi}{2}\right) = \begin{cases} a^2 & \text{si } k \text{ par} \\ 1 & \text{si } k \text{ impar} \end{cases} \qquad\qquad g''\left(\frac{k\pi}{2}\right) = \begin{cases} 2(1-a^2) & \text{si } k \text{ par} \\ -2(1-a^2) & \text{si } k \text{ impar} \end{cases}$$

Dénotese $m = \text{mín}\sqrt{g(\theta)}$ y $M = \text{máx}\sqrt{g(\theta)}$. De la discusión anterior se deduce que:

I) Si $a < 1$, $m = a$ y $M = 1$.
II) Si $a > 1$, $m = 1$ y $M = a$.

Finalmente, la comparación de las integrales puede desglosarse en dos casos:

I) Si $a < 1$, F_∂ puede acotarse por:

$$F_\partial = \int_0^1 \int_0^{2\pi} u\lambda\sqrt{g(\theta)}d\theta d\lambda > \int_0^1 \int_0^{2\pi} u\lambda m d\theta d\lambda = mF = aF = F_\Omega$$

II) Si $a > 1$, F_∂ puede acotarse por:

$$F_\partial = \int_0^1 \int_0^{2\pi} u\lambda\sqrt{g(\theta)}d\theta d\lambda < \int_0^1 \int_0^{2\pi} u\lambda M d\theta d\lambda = MF = aF = F_\Omega$$

Obsérvese que las desigualdades estrictas son ciertas debido a que los extremos relativos de $g(\theta)$ se alcanzan en una cantidad numerable de puntos en la recta real (y finita en el intervalo $[0, 2\pi)$).

En resumen, se ha obtenido:

I) Si $a < 1$, $F_\Omega < F_\partial$.
II) Si $a = 1$, $F_\Omega = F_\partial$.
III) Si $a > 1$, $F_\Omega > F_\partial$.

Es decir, se tiene que $a = 1 \Rightarrow F_\Omega = F_\partial$ y que $a \neq 1 \Rightarrow F_\Omega \neq F_\partial$. En consecuencia:

$$a = 1 \quad \Leftrightarrow \quad F_\Omega = F_\partial$$

Tal y como se quería demostrar.

b) ("Teorema de Fubini esférico") Sea $u \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ con $n \geq 2$. Demuestre que:

$$\int_{\mathbb{R}^n} udx = \int_0^\infty \int_{\partial B_r} udSdr$$

Indicación: Primero haga el caso $n = 2$ y $n = 3$ usando coordenadas polares o esféricas. Para dimensión arbitraria $n \geq 2$, por densidad puede suponerse que $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$ y, usando el teorema de la divergencia, demostrar que:

$$\frac{d}{dr}\int_{B_r} udx = \frac{d}{dr}\int_{B_1} u(ry)r^n dy = \int_{B_1} ... = \int_{B_r} ... = \int_{\partial B_r} udS$$

Se resolverá el caso de dimensión arbitraria directamente.

Se desea calcular:

$$\frac{d}{dr}\int_{B_r} u(\vec{x})dV$$

Dado que el dominio de integración depende de r, no puede introducirse el operador d/dr en el integrando sin más. En vista de esto, y de acuerdo con la indicación del enunciado, considérese el cambio de variable $\vec{x} = r\vec{y}$, con $r = |\vec{x}|$ e $\vec{y}$ unitario. Así, los parámetros de volumen se relacionan por $dV = r^n d\overline{V}$, y la integral se convierte en:

$$\frac{d}{dr}\int_{B_r} u(\vec{x})dV = \frac{d}{dr}\int_{B_1} r^n u(r\vec{y})d\overline{V}$$

Y con esta nueva expresión sí que se puede derivar bajo signo integral. Desarrollando la derivada del integrando:

$$\frac{d}{dr}\big(r^n u(r\vec{y})\big) = \left(\frac{d}{dr}r^n\right)u(r\vec{y}) + r^n\left(\frac{d}{dr}u(r\vec{y})\right) = nr^{n-1}u(r\vec{y}) + r^n\nabla u(r\vec{y})\cdot\vec{y}$$

Obsérvese que $\nabla\cdot\vec{y} = \partial_1 y_1 + ... + \partial_n y_n = n$. Por otro lado, definiendo $w(\vec{y}) = u(r\vec{y})$, se tiene la relación $\nabla w(\vec{y}) = r\nabla u(r\vec{y})$. Sustituyendo en la expresión anterior:

$$nr^{n-1}u(r\vec{y}) + r^n\nabla u(r\vec{y})\cdot\vec{y} = r^{n-1}\big(nu(r\vec{y}) + r\nabla u(r\vec{y})\cdot\vec{y}\big) = r^{n-1}\big((\nabla\cdot\vec{y})w(\vec{y}) + (\nabla w(\vec{y}))\cdot\vec{y}\big)$$

Omitiendo en adelante los argumentos de las funciones involucradas, y definiendo $\vec{F} = w\vec{y}$ (campo vectorial de dirección $\vec{y}$ y módulo $w(\vec{y})$), se tiene:

$$r^{n-1}\big((\nabla\cdot\vec{y})w + (\nabla w)\cdot\vec{y}\big) = r^{n-1}\big(\nabla\cdot(w\vec{y})\big) = r^{n-1}\big(\nabla\cdot\vec{F}\big) = r^{n-1}\big(\text{div}\vec{F}\big)$$

Recuperando la integral, se ha obtenido:

$$\frac{d}{dr}\int_{B_r} udV = r^{n-1}\int_{B_1} \text{div}\vec{F}d\overline{V}$$

Que aplicando el teorema de la divergencia (ver [R3]) se convierte en:

$$r^{n-1}\int_{B_1} \mathrm{div}\vec{F}d\overline{V} = r^{n-1}\int_{\partial B_1} (\vec{F}\cdot\vec{\nu})d\overline{S} = r^{n-1}\int_{\partial B_1} (\vec{y}\cdot\vec{\nu})wd\overline{S} = r^{n-1}\int_{\partial B_1} wd\overline{S}$$

Donde se ha usado que $\vec{y}\cdot\vec{\nu} = 1$. Esto se debe a que ∂B_1 es una esfera, y por lo tanto, $\vec{\nu}$ e $\vec{y}$ tienen la misma dirección y sentido, además de ser ambos unitarios.

En resumen, deshaciendo el cambio de variable sobre u, y como $dS = r^{n-1}d\overline{S}$, resulta la igualdad:

$$\frac{d}{dr}\int_{B_r} udV = \int_{\partial B_r} udS$$

Integrando sobre $0 \leq r < \infty$ a cada lado de la igualdad se obtendiene lo deseado.

$$\int_0^\infty \left(\frac{d}{dr}\int_{B_r} udV\right)dr = \int_{B_\infty} udV - \int_{B_0} udV = \int_{\mathbb{R}^n} udV = \int_0^\infty \int_{\partial B_r} udSdr$$

TEMA 5 — EDP del calor y método de separación de variables

Método de separación de variables [R5]

Considérese la EDP del calor:

$$u_t - Du_{xx} = 0$$

Con condiciones de contorno (de Dirichlet o de Neumann) nulas y condición inicial $g(x)$. El método de separación de variables consiste en suponer $u(x,t)$ puede escribirse como:

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

Entonces, se tiene:

$$u_t = XT' \qquad\qquad u_{xx} = X''T$$

Y usando la EDP:

$$u_t - Du_{xx} = XT' - DX''T = 0 \;\Rightarrow\; XT' = DX''T \;\Rightarrow\; \frac{T'}{DT} = \frac{X''}{X}$$

Obsérvese que el término de la izquierda es una función de t, y el de la derecha, de x. Esta situación tan solo es posible si ambos cocientes son constantes. Nombrando $\mu = X''/X$ y $\alpha = \mu D$, se tiene la pareja de EDOs:

$$X'' = \mu X \qquad\qquad T' = \alpha T$$

Que sugieren ensayar soluciones de la forma:

$$X(x) = A\cos(\lambda x) + B\sin(\lambda x)$$
$$T(t) = Ce^{\alpha t}$$

La constante C es de hecho superflua, dado que al considerar el producto XT quedará "absorbida" por las constantes A y B, que quedan completamente determinadas por las condiciones de contorno de la EDP.

En general, el carácter trigonométrico de X proporciona soluciones para valores λ_k con $k \in \mathbb{N}$. Para cada k, se calcula el valor de $\mu_k = X_k''/X_k = \lambda_k^2$, de donde se obtiene $\alpha_k = \mu_k D$, y finalmente, T_k.

De esta manera, se tiene que las funciones de la forma:

$$v_k(x,t) = X_k(x)T_k(t) = \big(A\cos(\lambda_k x) + B\sin(\lambda_k x)\big)e^{-\alpha_k t}$$

Satisfacen $(v_k)_t - D(v_k)_{xx} = 0$ con condiciones de contorno nulas. Por lo tanto, las combinaciones lineales:

$$u(x,t) = \sum_{k\in\mathbb{N}} c_k v_k(x,t)$$

Con $c_k \in \mathbb{R}$, verifican $u_t - Du_{xx} = 0$ con condiciones de contorno también nulas, obteniendo la solución general de la EDP. Finalmente, para determinar los coeficientes c_k, basta con solicitar:

$$u(x,0) = \sum_{k\in\mathbb{N}} c_k v_k(x,0) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \big(a_k \sin(\lambda_k x) + b_k\cos(\lambda_k x)\big) = g(x)$$

En general, a_k y b_k se determinarán, si es posible, a partir de la serie de Fourier de $g(x)$.

Comentario: [R6]

A menudo, la discusión anterior lleva al requisito de expresar una cierta función $g(x)$ en términos de $\cos(\lambda_k x)$ o $\sin(\lambda_k x)$ (exclusivamente). Si la función es $\mathcal{L}^2((0,L))$, realizando una extensión par o impar sobre $(-L,L)$ se obtiene una función $\tilde{g}(x)$ que es $2L$-periódica. Dicha función podrá expresarse en términos de su serie de Fourier:

$$\tilde{g}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k\geq 1} a_k\cos(\lambda_k x) + \sum_{k\geq 1} b_k \sin(\lambda_k x)$$

Donde:

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{g}(x)\cos(\lambda_k x)dx \qquad\qquad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{g}(x)\sin(\lambda_k x)dx$$

Si $g(x)$ se extiende de forma par, se tiene que $b_k = 0$, y si se extiende de forma impar, $a_k = 0$, de acuerdo con la definición de las integrales. En ambos casos, por simetría, los coeficientes no nulos pueden calcularse restringiendo la integral pertinente a $(0,\pi)$ y duplicando el resultado.

$\boxed{\textbf{5.1}}$ Se tiene la ecuación del calor con condiciones de frontera de Neumann:

$$\begin{cases} u_t - Du_{xx} = 0 & 0 < x < \pi,\ t > 0 \\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0 & t > 0 \\ u(x,0) = g(x) & 0 < x < \pi \end{cases}$$

Con $D > 0$ y $g \in \mathcal{L}^2((0,\pi))$.

a) Calcule u por separación de variables y demuestre la convergencia uniforme de u hacia la media de las temperaturas iniciales $m = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi g(x)dx$ cuando $t \to \infty$.
b) Pruebe que si $g \in \mathcal{C}^1([0,\pi])$, entonces $u \in \mathcal{C}^0([0,\pi] \times [0,\infty))$.
c) Pruebe que si $g \in \mathcal{C}^2([0,\pi])$ y $g'(0) = g'(\pi) = 0$, entonces $u_x(\cdot,t)$ converge uniformemente a g' en $[0,\pi]$ cuando $t \to 0$. Discuta la necesidad de la condición $g'(0) = g'(\pi) = 0$.

Solución:

a) Calcule u por separación de variables y demuestre la convergencia uniforme de u hacia la media de las temperaturas iniciales cuando $t \to \infty$.

Usando el método de separación de variables, por [R5], para X se obtiene la EDO:

$$\begin{cases} X'' = \mu X & 0 < x < \pi \\ X'(0) = X'(\pi) = 0 \end{cases}$$

Cuya solución y su derivada son:

$$X(x) = A\cos(\lambda x) + B\sin(\lambda x) \qquad\qquad X'(x) = -A\lambda\sin(\lambda x) + B\lambda\cos(\lambda x)$$

Usando la primera condición de contorno:

$$X'(0) = B\lambda = 0$$

De donde resulta $B = 0$ o $\lambda = 0$. Si $\lambda = 0$, se obtiene $X = A$, que es solución de la EDO. Si $\lambda \neq 0$, entonces $B = 0$. Usando ahora la segunda condición de contorno:

$$X'(\pi) = -A\lambda\sin(\lambda\pi) = 0$$

Si $A = 0$, se obtiene la solución trivial $X = 0$. Si $A \neq 0$, la ecuación anterior requiere $\lambda = k$ con $k \in \mathbb{Z}$. Así, para cada $k \in \mathbb{Z}$, $X_k(x) = A\cos(kx)$ es solución de la EDO, y como $\cos(kx) = \cos(-kx)$, basta de hecho con considerar $k \geq 0$. Entonces:

$$X_k(x) = a_k\cos(kx)$$

De esta manera, para cada k, $\mu_k = X_k''/X_k = -k^2$, y $\alpha_k = \mu_k D = -Dk^2$. Entonces, para T_k se obtiene:

$$T_k(t) = e^{-Dk^2t}$$

Obteniendo así la candidata a solución:

$$u(x,t) = \sum_{k\geq 0} a_k\cos(kx)e^{-Dk^2t}$$

Para resolver la EDP tan solo queda solicitar:

$$u(x,0) = \sum_{k\geq 0} a_k\cos(kx) = g(x)$$

Por [R6], la solución de la EDP es:

$$u(x,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k\geq 1} a_k\cos(kx)e^{-Dk^2t} \qquad\qquad a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi g(x)\cos(kx)dx$$

En cuanto a la convergencia uniforme hacia la media m de $g(x)$, obsérvese que:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi g(x)\cos(0x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi g(x)dx = 2m \quad\Rightarrow\quad u(x,t) - m = \sum_{k\geq 1} a_k\cos(kx)e^{-Dk^2t}$$

Y se desea probar:

$$\lim_{t\to\infty}\left(\sup_{x\in I}|u(x,t) - m|\right) = 0$$

Desarrollando el valor absoluto:

$$|u(x,t)-m| = \left|\sum_{k\geq 1} a_k \cos(kx) e^{-Dk^2t}\right| \leq \sum_{k\geq 1} |a_k||\cos(kx)||e^{-Dk^2t}| \leq \sum_{k\geq 1} |a_k| e^{-D(k^2-1+1)t} = e^{-Dt}\sum_{k\geq 1}|a_k|e^{-D(k^2-1)t}$$

Para $|a_k|$, usando la desigualdad de Cauchy-Schwartz, se tiene la cota:

$$|c_k| = \left|\frac{2}{\pi}\int_0^\pi g(x)\cos(kx)dx\right| \leq \frac{2}{\pi}\int_0^\pi |g(x)||\cos(kx)|dx \leq \frac{2}{\pi}||g||_1||\cos(k\cdot)||_1 \leq C_1 < \infty$$

Por otro lado, se tiene que:

$$e^{-D(k^2-1)t} \leq \frac{C_2}{k^2} \quad \Rightarrow \quad \sum_{k\geq 1} e^{-D(k^2-1)t} \leq \sum_{k\geq 1}\frac{C_2}{k^2} \leq C_3 \tag{*}$$

Resultando:

$$|u(x,t)-m| \leq C_4 e^{-Dt}$$

Y haciendo el límite.

$$\lim_{t\to\infty}\left(\sup_{x\in I}|u(x,t)-m|\right) = \lim_{t\to\infty}\left(\sup_{x\in I}(C_4e^{-Dt})\right) = \lim_{t\to\infty}(C_4e^{-Dt}) = 0$$

Obteniendo lo enunciado.

b) Pruebe que si $g \in \mathcal{C}^1([0,\pi])$, entonces $u \in \mathcal{C}^0([0,\pi]\times[0,\infty))$.

Se define:

$$u_N = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^N a_k \cos(kx) e^{-Dk^2t}$$

Entendiendo que si $N=0$, entonces $u_N = a_0/2$. De esta manera:

$$u(x,t) = \lim_{N\to\infty} u_N(x,t)$$

Es decir, u_N converge a u puntualmente. Obsérvese que $u_N \in \mathcal{C}^0([0,\pi]\times[0,\infty))$. Así, si se prueba que dicha convergencia es uniforme, se habrá probado $u \in \mathcal{C}^0([0,\pi]\times[0,\infty))$. Aplicando la definición de convergencia uniforme, lo que se desea ver es:

$$\lim_{N\to\infty}\left(\sup_{x\in I}|u(x,t)-u_N(x,t)|\right) = 0$$

Desarrollando el valor absoluto:

$$|u(x,t)-u_N(x,t)| \leq \sum_{k=N+1} |a_k||\cos(kx)||e^{-Dk^2t}|$$

Así, probar la convergencia uniforme es equivalente a demostrar:

$$S = \sum_{N\geq 0} |a_k||\cos(kx)||e^{-Dk^2t}| < \infty$$

Como $|\cos(kx)| \leq 1$ y $|e^{-Dk^2t}| \leq 1$:

$$S \leq \sum_{N\geq 0}|a_k|$$

Donde a_k puede calcularse integrando por partes (dado que $g \in \mathcal{C}^1([0,\pi])$).

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi g(x)\cos(kx)dx = -\frac{2}{k\pi}\big[g(x)\sin(kx)\big]_0^\pi - \frac{2}{\pi}\int_0^{k\pi} g'(x)\sin(kx)dx = \frac{b_k'}{k}$$

Donde b_k' son los coeficientes de g' en serie de Fourier en $\sin(kx)$. Por la identidad de Parseval (ver problema 4.1):

$$g' \in \mathcal{C}^0([0,\pi]) \subseteq \mathcal{L}^2([0,\pi]) \quad \Rightarrow \quad \sum_{k\geq 0} b_k'^2 = \sum_{k\geq 0} k^2 a_k^2 < +\infty$$

Donde a_k son los coeficientes de g en serie de Fourier en $\cos(kx)$. Así, utilizando Cauchy-Schwartz:

$$\sum_{k\geq 0}|c_k| = \sum_{k\geq 0}\frac{k|c_k|}{k} = \sum_{k\geq 0}\frac{|b_k'|}{k} \leq \left(\sum_{k\geq 0} b_k'^2\right)^{1/2}\left(\sum_{k\geq 0}\frac{1}{k^2}\right)^{1/2} < \infty$$

Obteniendo $S < \infty$, tal y como se deseaba.

c) Pruebe que si $g \in \mathcal{C}^2([0,\pi])$ y $g'(0) = g'(\pi) = 0$, entonces $u_x(\cdot, t)$ converge uniformemente a g' en $[0,\pi]$ cuando $t \to 0$. Discuta la necesidad de la condición $g'(0) = g'(\pi) = 0$.

Se usará el siguiente resultado de análisis real:

$$\left.\begin{array}{ll} f'_N & \xrightarrow{\text{unif.}} g \\ f_N & \xrightarrow{\text{punt.}} f \end{array}\right\} \Rightarrow f' = g$$

Aplicado a $f_N = u_N$ definida como en el apartado anterior y derivando en x. Así:

$$(u_N)_x = -\sum_{k=1}^{N} a_k k \sin(kx) e^{-Dk^2 t}$$

Como antes, bastará con ver que

$$S = \sum_{k=1}^{N} |a_k| k| \sin(kx)||e^{-Dk^2 t}| < \sum_{k=1}^{N} k|a_k| < \infty \tag{7}$$

Análogamente al apartado anterior, integrando por partes dos veces (ya que $g \in \mathcal{C}^2([0,\pi])$) se obtiene $a_k = -a''_k/k^2$, donde a''_k son los coeficientes de g'' en serie de Fourier en $\cos(kx)$. Como $g'' \in \mathcal{C}^0([0,\pi]) \subseteq \mathcal{L}^2([0,\pi])$, se cumple también que $\sum_{k\geq 0}(a''_k)^2 = \sum_{k\geq 0} k^2 a_k^2$. Finalmente, utilizando Cauchy-Schwartz:

$$\sum_{k\geq 0} k|a_k| = \sum_{k\geq 0} \frac{k^2|a_k|}{k} = \sum_{k\geq 0} \frac{|a''_k|}{k} \leq \left(\sum_{k\geq 0} a''^2_k\right)^{1/2} \left(\sum_{k\geq 0} \frac{1}{k^2}\right)^{1/2} < \infty$$

Obteniendo lo deseado.

$\boxed{5.2}$ Determine la temperatura de una barra de longitud π, si inicialmente la temperatura es $x(\pi - x)$, en el extremo de la izquierda la temperatura es siempre nula y en el de la derecha no hay flujo de calor. Tomad el coeficiente de difusión $D = 1$.

Solución:

El modelo físico queda descrito por la EDP:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & 0 < x < \pi,\ t > 0 \\ u(0,t) = 0 & t > 0 \\ u_x(\pi, t) = 0 & t > 0 \\ u(x,0) = g(x) = x(\pi - x) & 0 < x < \pi \end{cases}$$

Usando el método de separación de variables, por [R5], para X se obtiene tiene la EDO:

$$\begin{cases} X'' = \mu X & 0 < x < \pi \\ X(0) = 0 \\ X'(\pi) = 0 \end{cases}$$

Cuya solución y su derivada son:

$$X(x) = A\cos(\lambda x) + B\sin(\lambda x) \qquad\qquad X'(x) = -A\lambda\sin(\lambda x) + B\lambda\cos(\lambda x)$$

Usando la primera condición de contorno, se obtiene $X(0) = A = 0$. Así, para la segunda:

$$X(\pi) = -B\lambda\cos(\lambda\pi) = 0$$

Si $B = 0$ o $\lambda = 0$ se obtiene la solución trivial $X = 0$. Suponiendo $B, \lambda \neq 0$, se obtiene el requisito $\lambda\pi = k\frac{\pi}{2}$, con $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 0$ e impar. Dicho de otro modo:

$$\lambda_k = \frac{2k+1}{2},\ k \in \mathbb{Z},\ k \geq 0$$

Obteniendo $X(x) = B\sin(\lambda_k)$. Así, para cada k, $\mu_k = X_k''/X_k = -\lambda_k^2$, y $\alpha_k = \mu_k = -\lambda_k^2$. Entonces, para T_k se tiene:

$$T_k(t) = e^{-\lambda_k^2 t}$$

Resultando de esta manera la candidata a solución:

$$u(x,t) = \sum_{k\geq 0} b_k \sin(\lambda_k x) e^{\lambda_k^2 t}$$

Para resolver la EDP tan solo queda solicitar:

$$u(x,0) = \sum_{k\geq 0} c_k \sin(\lambda_k x) = \sum_{k\geq 0} c_k \sin\left(\frac{2k+1}{2}x\right) = g(x) = x(\pi - x)$$

Por [R6], dichos coeficientes son:

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi g(x)\sin(\lambda_k x)dx$$

Como $g \in \mathcal{C}^2$, puede aplicarse la integración por partes dos veces, y usando:

$$g(0) = g(\pi) = 0 \qquad g'(\pi) = -\pi \qquad \cos(\lambda_k\pi) = 0 \qquad \sin(\lambda_k\pi) = (-1)^k$$

Se obtiene:

$$\frac{\pi b_k}{2} = \int_0^\pi g(x)\sin(\lambda_k x)dx = \frac{1}{\lambda_k}\left(\big[-g(x)\cos(\lambda_k x)\big]_0^\pi + \int_0^\pi g'(x)\cos(\lambda_k x)dx\right) =$$
$$= \frac{1}{\lambda_k^2}\left(\big[g'(x)\sin(\lambda_k x)\big]_0^\pi + \int_0^\pi g''(x)\sin(\lambda_k x)dx\right) = \frac{1}{\lambda_k^2}\left(-\pi(-1)^k - 2\int_0^\pi \sin(\lambda_k x)dx\right) =$$
$$= \frac{-1}{\lambda_k^2}\left(\pi(-1)^k + \frac{2}{\lambda_k}\big[\cos(\lambda_k x)\big]_0^\pi\right) = \frac{-1}{\lambda_k^2}\left(\pi(-1)^k - \frac{2}{\lambda_k}\right) = \frac{1}{\lambda_k^3}\big(2 - \pi\lambda_k(-1)^k\big) =$$

Aislando b_k y sustituyendo λ_k por su definición, resulta:

$$b_k = \frac{8\big(4 - \pi(2k+1)(-1)^k\big)}{\pi(2k+1)^3}$$

$\boxed{5.3}$ Se dispone de dos alambres metálicos de longitud π, uno en forma de círculo y el otro rectilíneo (modelados por $[0,\pi]/\{0,\pi\}$ y $[0,\pi]$ respectivamente). Dichos alambres se calientan bruscamente en una sección de los mismos, poniéndolos a una temperatura inicial $U\varepsilon^{-1}\mathbb{I}_{[0,\varepsilon]}(x)$ con $\varepsilon << 1$ y $U > 0$ una constante. Sean $u : [0,\pi) \times [0,\infty)$ y $v : [0,\pi] \times [0,\infty)$ las temperaturas del círculo y la barra respectivamente a tiempo $t > 0$. Se supone que ambos alambres son homogéneos, están perfectamente aislados y el coeficiente de difusión es $D = 1$.

a) Sin hacer ningún cálculo, razone cuáles son los puntos más fríos a tiempo $t > 0$ en cada caso.
b) Calcule u y v (usando separación de variables) en el límite $\varepsilon \to 0$.
c) Probad que:

$$u(\cdot,t) - U/\pi \sim c_1 e^{-\lambda_1 t} \qquad\qquad v(\cdot,t) - U/\pi \sim c_2 e^{-\lambda_2 t}$$

Cuando $t \to \infty$ para ciertos $c_1, \lambda_1, c_2, \lambda_2 > 0$. Calcule estas cuatro constantes e interprételas.
d) Pruebe que el mismo resultado del apartado c) se tiene con los mismos λ_1 y λ_2 para muchas condiciones iniciales de temperatura $g \in \mathcal{L}^2((0,\pi))$ que satisfan $\frac{1}{\pi}\int_0^\pi g = U$. ¿Cuáles?

Solución:

a) Sin hacer ningún cálculo, razone cuáles son los puntos más fríos a tiempo $t > 0$ en cada caso.

Como el calor fluye de los puntos más calientes a los más fríos, y no hay fuentes de calor, los puntos más fríos en cualquier instante de tiempo corresponderan a los puntos más alejados del intervalo $[0,\varepsilon]$ (el único con temperatura diferente de 0 en el instante inicial). En la barra, esto corresponde a $x_c = \pi$, y en el círculo, a $x_c = \pi/2 + \varepsilon/2$.

b) Calcule u y v (usando separación de variables) en el límite $\varepsilon \to 0$.

El modelo físico del problema para el caso de la barra queda descrito por la EDP:

$$\begin{cases} v_t - v_{xx} = 0 & 0 < x < \pi,\ t > 0 \\ v_x(0,t) = v_x(\pi,t) = 0 & t > 0 \\ v(x,0) = g(x) = U\varepsilon^{-1}\mathbb{I}_{[0,\varepsilon]}(x) & 0 < x < \pi \end{cases}$$

Este problema se ha resuelto con todo detalle en el ejercicio 5,1 para D y $g(x)$ arbitrarias. La solución es:

$$v(x,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k\geq 1} a_k \cos(kx) e^{-Dk^2 t} \qquad\qquad a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi g(x)\cos(kx)dx$$

A continuación se calculan los coeficientes a_k. Nótese que la media M de la función $g(x)$ vale $M = \frac{U}{\pi\varepsilon}$. Para $a_0/2$:

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi g(x)dx = M = \frac{U}{\pi\varepsilon}$$

Y para a_k con $k \geq 1$:

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi U\varepsilon^{-1}\mathbb{I}_{[0,\varepsilon]}(x)\cos(kx)dx = 2M\int_0^\varepsilon \cos(kx)dx = \frac{2M}{k}\int_0^\varepsilon k\cos(kx)dx = \frac{2M}{k}\big[\sin(kx)\big]_0^\varepsilon = 2M\frac{\sin(k\varepsilon)}{k}$$

Así, se tiene:

$$v(x,t) = M + 2M\sum_{k\geq 1}\frac{\sin(k\varepsilon)}{k}\cos(kx)e^{-k^2 t}$$

Para el círculo, obsérvese que la distribución de temperatures iniciales es simétrica respecto al eje que pasa por $x = \varepsilon/2$ y $x = \pi/2 + \varepsilon/2$. Aunque no se demostrará, intuitivamente, cabe esperar que $u(x,t)$ presente dicha simetría. Con este razonamiento, las derivadas u_x en dichos puntos deben ser nulas.

Como la ecuación del calor es invariante por traslaciones, tomando el cambio $w(x,t) = u(x+\varepsilon/2,t)$, la EDP resultante es:

$$\begin{cases} w_t - w_{xx} = 0 & 0 < x < \pi,\ t > 0 \\ w_x(0,t) = w_x(\pi/2,t) = 0 & t > 0 \\ w(x,0) = g(x) = U\varepsilon^{-1}\mathbb{I}_{[-\varepsilon/2,\varepsilon/2]}(x) & 0 < x < \pi \end{cases}$$

Usando el método de separación de variables, por [R5], para X se obtiene la EDO:

$$\begin{cases} X'' = \mu X & 0 < x < \pi \\ X'(0) = X'(\pi/2) = 0 \end{cases}$$

Cuya solución y su derivada son:

$$X(x) = A\cos(\lambda x) + B\sin(\lambda x) \qquad\qquad X'(x) = -A\lambda\sin(\lambda x) + B\lambda\cos(\lambda x)$$

Usando las condiciones de contorno:

$$X'(0) = B\lambda = 0$$
$$X'(\pi/2) = -A\lambda \sin(\lambda\pi/2) + B\lambda\cos(\lambda\pi/2) = 0$$

Si $\lambda = 0$, las condiciones anteriores se satisfacen, pero entonces $X = A$, $\mu = X''/X = 0$ y $\alpha = \mu D = 0$, obteniendo $T = e^{\alpha t} = 1$ y $u(x,t) = A$, que es incompatible con la condición inicial. Por lo tanto, $\lambda \neq 0$, de donde resulta $B = 0$.

Si $A = 0$, se obtiene la solución trivial $X = 0$, y entonces $u(x,t) = 0$, que también es incompatible con la condición inicial.

Así, se tiene que $B = 0$ y $A, \lambda \neq 0$, y entonces:

$$\sin(\lambda\pi/2) = 0$$

Obteniendo el requisito $\lambda = 2k$ con $k \in \mathbb{Z}$. Así, para cada k, $X_k(x) = A\cos(2kx)$ es solución de la EDO, y como $\cos(kx) = \cos(-2kx)$, basta de hecho con considerar $k \geq 0$. Entonces:

$$X_k(x) = a_k \cos(2kx)$$

De esta manera, para cada k, $\mu_k = X_k''/X_k = -4k^2$, y $\alpha_k = \mu_k D = -4k^2$. Entonces, para T_k se obtiene:

$$T_k(t) = e^{-4k^2 t}$$

Obteniendo así la candidata a solución:

$$w(x,t) = \sum_{k\geq 0} a_k \cos(2kx) e^{-4k^2 t}$$

Para resolver la EDP tan solo queda solicitar:

$$w(x,0) = \sum_{k\geq 0} a_k \cos(kx) = g(x)$$

Por [R6], los coeficientes a_k son:

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi g(x)\cos(2kx)dx$$

Como antes, $a_0/2 = M = \frac{U}{\pi\varepsilon}$, y para a_k con $k \geq 1$, denotando $\delta = \varepsilon/2$:

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi U\varepsilon^{-1}\mathbb{I}_{[-\delta,\delta]}(x)\cos(2kx)dx = 2M\int_{-\delta}^{\delta}\cos(2kx)dx = 4M\int_0^\delta \cos(2kx)dx =$$
$$= \frac{4M}{2k}\int_0^\delta 2k\cos(2kx)dx = \frac{2M}{k}\big[\sin(2kx)\big]_0^\delta = 2M\frac{\sin(2k\delta)}{k} = 2M$$

Así, se tiene:

$$w(x,t) = M + 2M\sum_{k\geq 1}\frac{\sin(k\varepsilon)}{k}\cos(2kx)e^{-4k^2 t}$$

Y $u(x,t) = w(x - \varepsilon/2, t)$.

Los coeficientes a_k son los mismos para v y u. En el límite $\varepsilon \to 0$, como $\sin(x) \sim x$, y para $k \geq 1$:

$$a_k \sim 2M\varepsilon = \frac{2U}{\pi}$$

Y para $a_0/2$:

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi g(x)dx = \frac{U}{\pi}\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon dx\right) \sim \frac{U}{\pi}$$

Obteniendo:

$$v(x,t) = \frac{U}{\pi}\left(1 + 2\sum_{k\geq 1}\cos(kx)e^{-k^2 t}\right) \qquad w(x,t) = \frac{U}{\pi}\left(1 + 2\sum_{k\geq 1}\cos(2kx)e^{-4k^2 t}\right)$$

c) Probad que:

$$u(\cdot,t) - U/\pi \sim c_1 e^{-\lambda_1 t} \qquad v(\cdot,t) - U/\pi \sim c_2 e^{-\lambda_2 t}$$

Cuando $t \to \infty$ para ciertos $c_1, \lambda_1, c_2, \lambda_2 > 0$. Calcule estas cuatro constantes e interprételas.

Se define:

$$\overline{u}(x,t) = u(x,t) - \frac{U}{\pi} = \frac{2U}{\pi}\sum_{k\geq 1}\cos(kx)e^{-k^2 t} \qquad \overline{w}(x,t) = w(x,t) - \frac{U}{\pi} = \frac{2U}{\pi}\sum_{k\geq 1}\cos(2kx)e^{-4k^2 t}$$

Que son ambas de la forma:

$$f(x,t) = A\sum_{k\geq 1}\cos{(Bkx)}e^{-Ck^2t} = A\cos{(Bx)}e^{-Ct} + A\sum_{k\geq 2}\cos{(Bkx)}e^{-Ck^2t}$$

Con $A > 0$. Dividiendo por Ae^{-Ct} y tomando valor absoluto:

$$\left|\frac{f(x,t)}{Ae^{-Ct}}\right| \leq \left|\cos{(Bx)}\right| + \left|\sum_{k\geq 2}\cos{(Bkx)}e^{-C(k^2+1)t}\right| \leq 1 + \sum_{k\geq 2} e^{-C(k^2-1)t} = 1 + e^{-Ct}\sum_{k\geq 2} e^{-C(k^2-2)t}$$

Similarmente al problema 5,1, en la desigualdad (*), acotando los términos del sumatorio por D/k^2, donde D es una constante convenientemente ajustada, puede probarse que dicho sumatorio converge. Entonces, para $t \to \infty$:

$$0 \leq |f(x,t)| \leq Ae^{-Ct}$$

Y por comparación:

$$c_1 = c_2 = 2U/\pi \qquad \lambda_1 = 1 \qquad \lambda_2 = 4$$

La interpretación de estas constantes es que el círculo converge a la temperatura media inicial más deprisa que la barra.

d) Pruebe que el mismo resultado del apartado *c*) se tiene con los mismos λ_1 y λ_2 para muchas condiciones iniciales de temperatura $g \in \mathcal{L}^2((0,\pi))$ que satisfacen $\frac{1}{\pi}\int_0^\pi g = U$. ¿Cuáles?

La solución general de la EDP del calor es:

$$u(x,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k\geq 1}\left\{a_k\cos{(\lambda_k x)} + b_k\sin{(\lambda_k x)}\right\}e^{-D\lambda_k^2 t}$$

Donde:

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\tilde{g}(x)\cos{(\lambda_k x)}dx \qquad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\tilde{g}(x)\sin{(\lambda_k x)}dx$$

Obsérvese que $a_0/2$ corresponde a la media M de $g(x)$. Considérese:

$$\overline{u}(x,t) = u(x,t) - M = \{a_1\cos{(\lambda_1 x)} + b_1\sin{(\lambda_1 x)}\}e^{-D\lambda_1^2 t} + \sum_{k\geq 2}\left\{a_k\cos{(\lambda_k x)} + b_k\sin{(\lambda_k x)}\right\}e^{-D\lambda_k^2 t}$$

Y por lo tanto, similarmente a lo realizado en el apartado anterior:

$$\left|\frac{\overline{u}(x,t)}{(|a_1| + |b_1|)e^{-D\lambda_1^2 t}}\right| \leq 1 + \sum_{k\geq 2}\left\{|a_k| + |b_k|\right\}e^{-D(\lambda_k^2-\lambda_1^2)t}$$

Donde a_1 y b_1 no son simultáneamente nulos si $g(x) \neq 0$. Si para $t \to \infty$ el sumatorio converge a 0, se tiene lo probado en el apartado *c*) con $A = (|a_1| + |b_1|)$ y $C = \lambda_1$. Esto sucede, por ejemplo, si puede acotarse la suma $a_k + b_k$ (como en el caso de $g(x)$ acotada).

$\boxed{\textbf{5.4}}$ Considere el problema:

$$\begin{cases} v_{tt} - v_{xx} = 0 & 0 < x < \pi,\ t > 0 \\ v(0,t) = v(\pi,t) = 1 & t > 0 \\ v(x,0) = 1 & 0 < x < \pi \\ v_t(x,0) = \sin^2(x) & 0 < x < \pi \end{cases}$$

a) Resuélvalo por separación de variables.
b) Extienda adecuadamente las condiciones iniciales y aplique la fórmula de d'Alembert para calcular $v(\pi/4, 3)$.
c) Calcule:

$$S = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{(2k+1)^2(4-(2k+1)^2)}$$

<u>Solución:</u>

a) Resuélvalo por separación de variables.

Las condiciones de contorno no nulas suponen un inconveniente. Considérese el cambio de variable $u = v - 1$. Entonces, el problema anterior se convierte en:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & 0 < x < \pi,\ t > 0 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & t > 0 \\ u(x,0) = g(x) = 0 & 0 < x < \pi \\ u_t(x,0) = \sin^2(x) = h(x) & 0 < x < \pi \end{cases}$$

Nótese que EDP es la ecuación de ondas y no la del calor. Aplicando el método de separación de variables y nombrando $\mu = X''/X$, se tiene la pareja de EDOs:

$$X'' = \mu X \qquad\qquad T'' = \mu T$$

Nótese que la ecuacion en el tiempo es diferente a la obtenida en la aplicación de este método a la ecuación del calor (es de segundo orden en vez de de primer orden).

De acuerdo con las condiciones de contorno, para X se tiene:

$$\begin{cases} X'' = \mu X & 0 < x < \pi \\ X(0) = X(\pi) = 0 \end{cases}$$

Cuya solución es:

$$X(x) = A\cos(\lambda x) + B\sin(\lambda x)$$

Usando la primera condición de contorno:

$$X(0) = A = 0$$

Usando ahora la segunda:

$$X(\pi) = B\sin(\lambda\pi) = 0$$

Obteniendo el requisito $\lambda = k$ con $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 0$ (obviando los valores negativos). Así, para cada valor de k, se tiene:

$$X_k(x) = b_k \sin(kx)$$

Y por lo tanto, $\mu_k = X_k''/X_k = -k^2$. Para cada k, se plantea la EDO en T:

$$\begin{cases} T_k'' = \mu_k T_k & t \geq 0 \\ T_k(0) = 0 \end{cases}$$

Cuya solución es:

$$T_k(t) = A\cos(\gamma_k t) + B\sin(\gamma_k t)$$

Usando la condición de contorno:

$$T(0) = A = 0$$

Y por lo tanto:

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{-B\gamma_k^2 \sin(\gamma_k t)}{B\sin(\gamma_k t)} = -\gamma_k^2 = \mu_k = -k^2 \ \Rightarrow\ \gamma_k = k$$

Obteniendo las soluciones:

$$T_k(x) = B\sin(kx)$$

Finalmente, tomando las combinaciones lineales, la solución de la EDP es de la forma:

$$u(x,t) = \sum_{k \geq 0} b_k \sin(kt)\sin(kx)$$

Y tan solo queda determinar los coeficientes b_k. Derivando respecto al tiempo:

$$u_t(x,t) = \sum_{k\geq 0} b_k k \cos(kt) \sin(kx)$$

Y usando la condicion inicial:

$$u_t(x,0) = \sum_{k\geq 0} b_k k \sin(kx) = \sum_{k\geq 0} c_k \sin(kx) = h(x)$$

Por [R6], los coeficientes c_k son:

$$c_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi h(x)\sin(kx)dx \quad \Rightarrow \quad \pi c_k = 2\int_0^\pi \sin^2(x)\sin(kx)dx$$

Usando la identidad:

$$2\sin^2(\alpha) = 1 - \cos(2\alpha)$$

Se obtiene:

$$\pi c_k = \int_0^\pi \sin(kx)dx - \int_0^\pi \cos(2x)\sin(kx)dx$$

Usando ahora:

$$2\sin(\alpha)\cos(\beta) = \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)$$

Resulta:

$$\pi c_k = \int_0^\pi \sin(kx)dx - \frac{1}{2}\int_0^\pi \sin((k+2)x)dx - \frac{1}{2}\int_0^\pi \sin((k-2)x)dx$$

Para cada término, basta con usar:

$$\int_0^\pi \sin(Ax)dx = \frac{1}{A}\int_0^\pi A\sin(Ax)dx = \frac{1}{A}\big[-\cos(Ax)\big]_0^\pi = \frac{1}{A}\big(1-\cos(A\pi)\big)$$

Nótese que si $A=0$, no se puede dividir, pero la integral era nula desde un principio. Si A es un entero par, $\cos(Ax)=1$ y el resultado también es nulo. Por último, si A es un entero impar, entonces $\cos(Ax) = -1$. Suponiendo k impar para el siguiente cálculo, se tiene:

$$\int_0^\pi \sin(kx)dx = \frac{2}{k}$$
$$\frac{1}{2}\int_0^\pi \sin((k+2)x)dx = \frac{1}{(k+2)}$$
$$\frac{1}{2}\int_0^\pi \sin((k-2)x)dx = \frac{1}{(k-2)}$$

Nótese que todos los denominadores son siempre diferentes de 0 en el caso de k impar. Así.

$$\pi c_k = \pi k b_k = \frac{2}{k} - \frac{1}{(k+2)} - \frac{1}{(k-2)} = \frac{2(k+2)(k-2) - k(k-2) - k(k+2)}{k(k+2)(k-2)} =$$
$$= \frac{2(k^2-4) - k^2 + 2k - k^2 - 2k}{k(k^2-4)} = \frac{2k^2 - 8 - 2k^2}{4k(k^2-4)} = \frac{-8}{k(k^2-4)} = \frac{8}{k(4-k^2)}$$

Y, aislando b_k, se obtiene:

$$c_k = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ par} \\ \frac{8}{\pi k^2(4-k^2)} & \text{si } k \text{ impar} \end{cases}$$

b) Extienda adecuadamente las condiciones iniciales y aplique la fórmula de d'Alembert para calcular $v(\pi/4, 3)$.

El problema corresponde a la ecuación de ondas con posición $g(x)$ y velocidad $h(x)$ iniciales conocidas y condiciones de contorno de Dirichlet. Realizando una reflexión impar y periódica de las condiciones iniciales, puede aplicarse la fórmula de d'Alembert al problema extendido, y obtener la solución del problema original restringiendo a la recta real positiva. Así:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\big(\tilde{g}(x-ct) + \tilde{g}(x+ct)\big) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \tilde{h}(x)dx$$

En este caso, $c=1$ y $\tilde{g}(x) = 0$, y definiendo $a = \pi/4 - 3$ y $b = \pi/4 + 3$:

$$u(\pi/4, 3) = \frac{1}{2}\int_a^b \tilde{h}(x)dx$$

Como $a < 0$, $0 < -a < b$ y $\tilde{h}(x)$ es impar:

$$u(\pi/4, 3) = \frac{1}{2}\int_a^{-a} \tilde{h}(x)dx + \frac{1}{2}\int_{-a}^{b} \tilde{h}(x)dx = \frac{1}{2}\int_{-a}^{b} h(x)dx = \frac{1}{4}\int_{-a}^{b} 2\sin^2(x)dx$$

Usando una la identidad presentada anteriormente para $2\sin^2(x)$:

$$\begin{aligned} u(\pi/4, 3) &= \frac{1}{4}\int_{-a}^{b} 2\sin^2(x)dx = \frac{1}{4}\int_{-a}^{b} \big(1 - \cos(2x)\big)dx = \frac{1}{4}\left(\int_{-a}^{b} dx - \frac{1}{2}\int_{-a}^{b} 2\cos(2x)dx\right) = \\ &= \frac{1}{4}\left(\big[x\big]_{-a}^{b} - \frac{1}{2}\big[\sin(2x)\big]_{-a}^{b}\right) = \frac{1}{8}\big(2(b+a) - (\sin(2b) + \sin(2a))\big) \end{aligned}$$

Y se tiene:

$$\begin{gathered} 2(b+a) = 2(\pi/4 + 3 + \pi/4 - 3) = \pi \\ \sin(2b) = \sin(\pi/2 + 6) = \sin(\pi/2)\cos(6) + \sin(6)\cos(\pi/2) = \cos(6) \\ \sin(2a) = \sin(\pi/2 - 6) = \sin(\pi/2)\cos(6) - \sin(6)\cos(\pi/2) = \cos(6) \end{gathered}$$

Finalmente:

$$u(\pi/4, 3) = \frac{1}{8}\big(\pi - 2\cos(6)\big)$$

c) Calcule:

$$S = \sum_{k\geq 0} \frac{1}{(2k+1)^2(4-(2k+1)^2)}$$

Por a):

$$u(x,t) = \sum_{k\geq 0} b_k \sin(kt)\sin(kx) \qquad\qquad b_k = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ par} \\ \frac{8}{\pi k^2(4-k^2)} & \text{si } k \text{ impar} \end{cases}$$

Se define $\lambda_k = (2k+1)$, $k \in \mathbb{Z}$ (los enteros impares). Reescribiendo lo anterior:

$$S = \sum_{k\geq 0} \frac{1}{\lambda_k^2(4-\lambda_k^2)} \qquad\qquad u(x,t) = \frac{8}{\pi}\sum_{k\geq 0} \frac{1}{\lambda_k^2(4-\lambda_k^2)}\sin(\lambda_k t)\sin(\lambda_k x)$$

Tomando $x = \pi/2$ y $t = \pi/2$, se tiene que $\sin(\lambda_k\pi/2)\sin(\lambda_k\pi/2) = 1$, y entonces:

$$u(\pi/2, \pi/2) = \frac{8}{\pi}S$$

Definiendo $a = x - t = 0$ y $b = x + t = \pi$, y usando d'Alembert:

$$u(\pi/2, \pi/2) = \frac{1}{2}\int_a^b \tilde{h}(x)dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \tilde{h}(x)dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} h(x)dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \sin^2(x)dx =$$

Análogamente al apartado anterior:

$$u(\pi/2, \pi/2) = \frac{1}{8}\big(2(b+a) - (\sin(2b) + \sin(2a))\big) = \frac{1}{8}\big(2\pi - \sin(2\pi)\big) = \pi/4$$

Finalmente, igualando:

$$\frac{\pi}{4} = u(\pi/2, \pi/2) = \frac{8}{\pi}S \quad\Rightarrow\quad S = \frac{\pi^2}{32}$$

$\boxed{\textbf{5.5}}$ En un instrumento de viento recto (modelizado por un intervalo $I = (0, L)$), $u(x,t)$ representa, para $x \in I$ y $t \geq 0$, la presión del aire dentro del instrumento. Dicha presión satisface la ecuación de ondas $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$. Cuando una solución es T-periódica en el tiempo, se dice que su *frecuencia* es $f = 2\pi/T$.

En un instrumento abierto por ambos extremos, como la flauta, se tienen condiciones de contorno de Dirichlet. En un instrumento abierto por un extremo y cerrado por el otro, como el clarinete, se tienen condiciones de contorno mixtas. Con un cambio de variable, pueden suponerse ambas condiciones nulas (ver el comentario al final del problema).

a) Resuelva el problema de valores iniciales para ambos instrumentos usando series de Fourier.
b) Para cada instrumento, calcule todas las frecuencias que aparecen en la base de Fourier correspondiente al instrumento (llamadas *armónicos* del instrumento). La más grave de todas se llama *frecuencia fundamental.* El resto de armónicos se llaman *sobretonos* del tono fundamental (compruebe que son múltiplos enteros del tono fundamental).
c) Compare los armónicos de la flauta y el clarinete. ¿Por qué se hacen las flautas más largas que los clarinetes en relación a sus diámetros?
d) Compare también los sobretonos que aparecen en cada uno de los instrumentos (que definen el *timbre* del instrumento).

<u>Solución:</u>

a) Resuelva el problema de valores iniciales para ambos instrumentos usando series de Fourier.

Sea u la distribución de presiones en un instrumento tipo flauta, y v la de uno tipo clarinete. Las EDPs a resolver son:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & x \in I,\ t > 0 \\ u(0,t) = 0 & \\ u(L,t) = 0 & t > 0 \\ u(x,0) = g_u(x) & x \in I \\ u_t(x,0) = h_u(x) & x \in I \end{cases} \qquad \begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & x \in I,\ t > 0 \\ u(0,t) = 0 & \\ u_t(L,t) = 0 & t > 0 \\ u(x,0) = g_v(x) & x \in I \\ v_t(x,0) = h_v(x) & x \in I \end{cases}$$

Aplicando el método de separación de variables a la ecuación de ondas y nombrando $\mu = X''/X$ y $\alpha = \mu c^2$, se tiene la pareja de EDOs:

$$X'' = \mu X \qquad T'' = \alpha T$$

Para ambos instrumentos, se tiene la EDO en X:

$$\begin{cases} X'' = \mu X & 0 < x < \pi \\ X(0) = 0 \end{cases}$$

Cuya solución es:

$$X(x) = A\cos(\lambda x) + B\sin(\lambda x)$$

Usando la primera condición de contorno:

$$X(0) = A = 0$$

Obteniendo:

$$X(x) = B\sin(\lambda x)$$

Ahora, cada instrumento tiene una condición de contorno diferente en $x = L$. Sean X_u y X_v las respectivas soluciones en X. Se tiene:

$$X_u(L) = B_u \sin(\lambda_u L) = 0 \qquad X_v'(L) = B_v \lambda_v \cos(\lambda_v L) = 0$$

Y descartando las soluciones triviales, se obtienen los requisitos:

$$\lambda_u = k\pi/L \qquad \lambda_v = (2k-1)\pi/2L$$

Con $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$. Así, para cada valor de k, se tienen las soluciones:

$$X_{uk}(x) = A_{uk}\sin(\lambda_{uk}x) \qquad X_{vk}(x) = A_{vk}\cos(\lambda_{vk}x)$$

Y por lo tanto, $\mu_{uk} = -\lambda_{uk}^2$ y $\mu_{vk} = -\lambda_{vk}^2$. Para cada k, se plantean las EDOs en T:

$$T_{uk}'' = \alpha_{uk} T_{uk} \qquad T_{vk}'' = \alpha_{vk} T_{vk}$$

Con $t \geq 0$. Sus soluciones son de la forma:

$$T_{uk}(t) = A\cos(\gamma_{uk}x) + B\sin(\gamma_{uk}x) \qquad T_{vk}(x) = A\cos(\gamma_{vk}x) + B\sin(\gamma_{vk}x)$$

Con $\gamma_{uk} = c\lambda_{uk}$ y $\gamma_{vk} = c\lambda_{vk}$. Por lo tanto, tomando las combinaciones lineales de los productos:

$$u(x,t) = \sum_{k\geq 1} \left\{a_{uk}\cos(c\lambda_{uk}t) + b_{uk}\sin(c\lambda_{uk}t)\right\}\sin(\lambda_{uk}x) \qquad v(x,t) = \sum_{k\geq 1} \left\{a_{vk}\cos(c\lambda_{vk}t) + b_{vk}\sin(c\lambda_{vk}t)\right\}\sin(\lambda_{vk}x)$$

Finalmente, los respectivos coeficientes se determinan con las condiciones iniciales:

$$u(x,0) = \sum_{k\geq 1} a_{uk} \sin(\lambda_{uk} x) = g_u(x) \qquad v(x,t) = \sum_{k\geq 1} a_{vk} \sin(\lambda_{vk} x) = g_v(x)$$
$$u_t(x,0) = \sum_{k\geq 1} b_{uk} c\lambda_{uk} \sin(\lambda_{uk} x) = h_u(x) \qquad v_t(x,t) = \sum_{k\geq 1} b_{vk} c\lambda_{vk} \sin(\lambda_{vk} x) = h_v(x)$$

Es decir, las condiciones iniciales deben poder escribirse en las bases $\sin(\lambda_{uk}x)$ y $\sin(\lambda_{vk}x)$ en el intervalo $(0, L)$.

b) Para cada instrumento, calcule todas las frecuencias que aparecen en la base de Fourier correspondiente al instrumento (llamadas *armónicos* del instrumento). La más baja de todas, o tono más grave, se llama *frecuencia fundamental*. El resto de armónicos se llaman *sobretonos* del tono fundamental (compruebe que son múltiplos enteros del tono fundamental).

Nótese que la dependencia temporal de u y v es de la forma $A\cos(Dt) + B\sin(Dt)$, y por lo tanto, serán periódicas en dicha variable. Para hallar el periodo T bastará entonces con igualar DT a 2π. Así:

$$\frac{ck\pi T_{uk}}{L} = 2\pi \;\Rightarrow\; T_{uk} = \frac{2L}{ck} \qquad \frac{c(2k-1)\pi T_{vk}}{2L} = 2\pi \;\Rightarrow\; T_{vk} = \frac{4L}{c(2k-1)}$$

Y aplicando la definición de frecuencia $f = 2\pi/T$:

$$f_{uk} = \frac{ck\pi}{L} \qquad f_{vk} = \frac{c(2k-1)\pi}{2L}$$

Las frecuencias fundamentales se obtienen tomando los valores mínimos para $k = 1$:

$$f_{u1} = \frac{c\pi}{L} \qquad f_{v1} = \frac{c\pi}{2L}$$

Y la relación de multiplicidad entre los sobretonos y las mismas es evidente.

c) Compare los armónicos de la flauta y el clarinete. ¿Por qué se hacen las flautas más largas que los clarinetes en relación a sus diámetros?

Sean L_u y L_v las longitudes de la flauta y clarinete respectivamente. Si se desea que las frecuencias fundamentales de ambos instrumentos sean las mismas:

$$f_u = f_v \;\Rightarrow\; \frac{\pi}{L_u} = \frac{\pi}{2L_v} \;\Rightarrow\; L_u = 2L_v$$

Y de ahí que las flautas sean más largas. Nótese que, a igualdad de longitudes, la frecuencia fundamental de la flauta dobla la del clarinete (es más aguda).

d) Compare también los sobretonos que aparecen en cada uno de los instrumentos (que definen el *timbre* del instrumento).

Los sobretonos de la flauta son todos los múltiplos de su frecuencia fundamental, mientras que los del clarinete tan solo son los múltiplos impares.

Comentario:

Sea $w(x,t)$ el desplazamiento del aire en el interior del instrumento respecto a su posición en reposo. Sea $P(x,t)$ la presión absoluta del aire y p_0 la presión atmosférica (presión absoluta en reposo), y se define $p(x,t) = P(x,t) - p_0$ ("término de sobrepresión"). La ley de Hooke para la presión establece:

$$p = -B\frac{\partial w}{\partial x}$$

Que presenta cierta similitud con una fuerza recuperadora, como por ejemplo, un muelle (si el aire se concentra en una zona, la presión aumenta en dicha zona, "expulsando" el aire de allí e "invitándolo" a volver a su posición original). La constante B es un término que depende del estado del aire.

En un extremo abierto del instrumento, la presión absoluta evoluciona hasta alcanzar la presión atmosférica, y el término de sobrepresión es nulo, obteniendo la condición de contorno de Dirichlet mencionada.

En un extremo cerrado, la posición del aire es constante, y por lo tanto, el desplazamiento es nulo. Esto tan solo es posible si el gradiente de presiones es nulo en dicho punto (de otra manera, habría un desequilibrio de fuerzas, y el aire se aceleraría), obteniendo la condición de contorno de Neuman nula sobre la presión.

$\boxed{\mathbf{5.6}}$ Dado el problema:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & x \in (0, \pi),\ t > 0 \\ u(0,t) = u(\pi, t) = 0 & t > 0 \\ u(x,0) = g(x) = x(x-\pi) & x \in (0,\pi) \\ u_t(x,0) = h(x) = \sin(x) & x \in (0,\pi) \end{cases}$$

Calcule $u(\pi/2, 2)$.

<u>Solución:</u>

Fórmula de d'Alembert

El problema corresponde a la ecuación de ondas con posición $g(x)$ y velocidad $h(x)$ iniciales conocidas y condiciones de contorno de Dirichlet. Realizando una reflexión impar y periódica de las condiciones iniciales, puede aplicarse la fórmula de d'Alembert al problema extendido, y obtener la solución del problema original restringiendo a la recta real positiva.

Obsérvese que la función $h(x)$ ya es impar y 2π-periódica. En cuanto a $g(x)$, su extensión es:

$$\tilde{g}(x) = (-1)^k (x - k\pi)(x - (k+1)\pi),\ x \in (k\pi, (k+1)\pi),\ k \in \mathbb{Z}$$

En efecto, es impar, ya que si $x \in (k\pi, (k+1)\pi)$, entonces $-x \in (-(k+1)\pi, -k\pi)$, y por lo tanto:

$$\tilde{g}(-x) = (-1)^{-(k+1)}(x - (k+1)\pi)(x - k\pi) = (-1)(-1)^k (x - k\pi)(x - (k+1)\pi) = -\tilde{g}(x)$$

También es 2π-periódica. Si $x \in (k\pi, (k+1)\pi)$, entonces $x + 2\pi \in ((k+2)\pi, (k+3), \pi)$ y:

$$g(x + 2\pi) = (-1)^{k+2}((x + 2\pi) - (k+2)\pi)((x + 2\pi) - (k+3)\pi) = (-1)^k (x - k\pi)(x - (k+1)\pi) = g(x)$$

Y restringida a $(0, \pi)$ (tomando $k = 0$) coincide con $g(x)$.

Se definen $a = \pi/2 - 2 \in (-\pi, 0)$ y $b = \pi/2 + 2 \in (\pi, 2\pi)$. Aplicando la fórmula de d'Alembert con $c = 1$, se tiene:

$$u(\pi/2, 2) = \frac{1}{2}\big(\tilde{g}(a) + \tilde{g}(b)\big) + \frac{1}{2}\int_a^b \tilde{h}(x)dx$$

Para el primer término, y aplicando la definición de $\tilde{g}(x)$:

$$\frac{1}{2}\big(\tilde{g}(a) + \tilde{g}(b)\big) = 4\pi - 4 - \frac{3\pi^2}{4}$$

Y para el segundo, usando la fórmula del ángulo doble para el coseno

$$\frac{1}{2}\int_a^b \tilde{h}(x)dx = \frac{1}{2}\int_a^b \sin(x)dx = \frac{1}{2}\big[-\cos(x)\big]_a^b = \frac{1}{2}\big(\cos(\pi/2 - 2) - \cos(\pi/2 + 2)\big) = \sin(2)$$

Método de separación de variables

Aplicando separación de variables y nombrando $\mu = X''/X$, se tiene la pareja de EDOs:

$$X'' = \mu X \qquad\qquad T'' = \mu T$$

De acuerdo con las condiciones de contorno, para X se tiene:

$$\begin{cases} X'' = \mu X & 0 < x < \pi \\ X(0) = X(\pi) = 0 \end{cases}$$

Este problema se ha resuelto con detalle en el ejercicio 5,4. Su solución es:

$$X_k(x) = c_k \sin(kx)$$

Con $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 0$. Por lo tanto, $\mu_k = X_k''/X_k = -k^2$. Para cada k, se plantea la EDO en T:

$$T_k'' = \mu_k T_k,\ t \geq 0$$

Cuya solución es:

$$T_k(t) = A\sin(\gamma_k t) + B\cos(\gamma_k t)$$

Y se tiene que $\mu_k = T_k''/T_k = -\gamma_k^2 = -k^2$, obteniendo $\gamma_k = k$. Tomando las combinaciones lineales de los productos $X_k T_k$:

$$u(x,t) = \sum_{k\geq 0} a_k \cos(kt)\sin(kx) + \sum_{k \geq 0} b_k \sin(kt)\sin(kx)$$

Imponiendo la primera condición inicial:

$$u(x,0) = \sum_{k\geq 1} a_k \sin(kx) = g(x) = x(x-\pi)$$

Es decir, $g(x)$ debe escribirse como combinación lineal de $\sin(kx)$ en el intervalo $(0,\pi)$. De acuerdo con la observaciones realizadas al principio de esta lista, realizando una extensión impar se tiene que los coeficientes de cada término son:

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi g(x)\sin(kx)dx$$

Como $g = x(x-\pi) \in \mathcal{C}^2(0,\pi)$, puede aplicarse la integración por partes dos veces, y usando $g(0) = g(\pi) = 0$ y $g''(x) = 2$:

$$\begin{aligned}
\frac{\pi a_k}{2} &= \int_0^\pi g(x)\sin(kx)dx = \frac{1}{k}\left(\big[-g(x)\cos(kx)\big]_0^\pi + \int_0^\pi g'(x)\cos(kx)dx\right) = \\
&= \frac{1}{k^2}\left(\big[g'(x)\sin(kx)\big]_0^\pi - \int_0^\pi g''(x)\sin(kx)dx\right) = \frac{-2}{k^2}\int_0^\pi \sin(kx)dx = \\
&= \frac{-2}{k^3}\big[-\cos(kx)\big]_0^\pi = \frac{-2(1-(-1)^k)}{k^3}
\end{aligned}$$

Es decir:

$$a_k = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ par} \\ \frac{-8}{\pi k^3} & \text{si } k \text{ impar} \end{cases}$$

Derivando u respecto de t, se obtiene:

$$u_t(x,t) = \sum_{k\geq 1} -a_k k \sin(kt)\sin(kx) + \sum_{k\geq 1} b_k k \cos(kt)\sin(kx)$$

Imponiendo ahora la segunda condición inicial:

$$u_t(x,0) = \sum_{k\geq 1} b_k k \sin(kx) = \sum_{k\geq 1} d_k \sin(kx) = h(x) = \sin(x)$$

Obviamente, la serie de Fourier de $\sin(x)$ en $\sin(kx)$ satisface $d_1 = 1$ y $d_k = 0$ para $k \geq 2$. Así, $b_1 = 1$ y $b_k = 0$ para $k \geq 2$. Finalmente, definiendo $\lambda_k = (2k+1)$:

$$u(x,t) = \sin(t)\sin(x) - \sum_{k\geq 0} \frac{8}{\pi\lambda_k^3}\cos(\lambda_k t)\sin(\lambda_k x)$$

Comentario:

Este ejercicio pone de manifiesto una diferencia muy importante entre la aplicación de la fórmula de d'Alembert y el método de separación de variables para resolver la EDP de las ondas.

La fórmula de d'Alembert proporciona una expresión explícita para la solución, que es poco frecuente en el campo de las EDPs. No obstante, dicha fórmula involucra integrales que pueden presentar mucha casuística. Es decir, para evaluar la solución en un punto, dicha fórmula es muy útil, porque solo requiere evaluar integrales definidas, pero a la práctica, es una mala solución genérica para cualquier (x,t).

El método de separación de variables es más farragoso porque requiere calcular las series de Fourier de las condiciones iniciales del problema. No obstante, proporciona la solución en términos de una serie que es válida para cualquier (x,t). Esto es extremadamente útil para evaluar las soluciones numéricamente, ya que los coeficientes de la serie deben calcularse una única vez, y la serie puede aproximarse por sumas parciales.

$\boxed{5.7}$ Una cuerda metálica esta fijada en los puntos $(0,0,0)$ y $(\pi,0,0)$ del eje x de $\mathbb{R}^3$. Para parametrizar el desplazamiento en tres dimensiones de la cuerda utilizamos una función que toma valores complejos $u(x) = u^z(x) + iu^y(x)$. La cuerda está cargada eléctricamente y está inmersa en un campo magnético constante con dirección x. Debido a las fuerzas de Lorentz, la ecuación para pequeñas vibraciones de esta cuerda es:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = i\kappa u_t & x \in (0,\pi),\ t > 0 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & t > 0 \\ u(x,0) = g(x) & x \in (0,\pi) \\ u_t(x,0) = h(x) & x \in (0,\pi) \end{cases}$$

Donde κ será una cierta constante (la densidad lineal de carga de la cuerda multipicada por la intensidad del campo magnético y dividida por la densidad lineal de la cuerda).

Use el método de separación de variables para calcular $u(x,t)$ para $t > 0$ y $\kappa = 1$. ¿Las fuerzas de Lorentz provocan amorgituamiento de las soluciones?

Solución:

Supóngase que la solución es de la forma $u(x,t) = X(t)T(t)$. Entonces, derivando y usando la EDP:

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} - iu_t = XT'' - c^2 X''T - iXT' = X(T'' - iT') - c^2 X''T = 0$$

Reordenando:

$$\frac{T'' - iT'}{c^2 T} = \frac{X''}{X} \tag{8}$$

Como el término de la izquierda tan solo depende de t, y el de la derecha de x, ambos cocientes deben ser iguales a una cierta constante μ. No obstante, en este caso, a priori se tiene que $\mu \in \mathbb{C}$. Por otro lado:

$$X'' = \mu X \quad \Rightarrow \quad X''\overline{X} = \mu X\overline{X} \quad \Rightarrow \quad \int_0^\pi X''\overline{X} = \mu \int_0^\pi X\overline{X}$$

Para el término de la derecha:

$$\mu \int_0^\pi X\overline{X} = \mu \int_0^\pi |X|^2 = \mu R_1$$

Con $R_1 \in \mathbb{R}$. Para el de la izquierda, integrando por partes:

$$\int_0^\pi X''\overline{X} = \big[X'\overline{X}\big]_0^\pi - \int_0^\pi X'\overline{X}' = -\int_0^\pi |X'|^2 = R_2$$

Con $R_2 \in \mathbb{R}$. Entonces, como $\mu = R_1/R_2$, se deduce que $\mu \in \mathbb{R}$.

De acuerdo con las condiciones de contorno, para X se tiene:

$$\begin{cases} X'' = \mu X & 0 < x < \pi \\ X(0) = X(\pi) = 0 \end{cases}$$

Este problema se ha resuelto con detalle en el ejercicio 5,4. Su solución es:

$$X_k(x) = c_k \sin(kx)$$

Y entonces $\mu = -k^2$. Para T, se tiene:

$$T'' - i\kappa T' + k^2c^2 T = 0$$

Con $t > 0$. Dicha EDO sugiere ensayar soluciones de la forma $T = e^{\beta t}$, con $\beta \in \mathbb{C}$. Derivando y usando la ecuación anterior:

$$\big(\beta^2 - i\beta + k^2c^2\big)e^{\beta t} = 0$$

Que será cierta $\forall t > 0$ si y solo si:

$$\beta^2 - i\beta + k^2c^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{i \pm \sqrt{-1 - 4k^2c^2}}{2} = \frac{i}{2}\big(1 \pm \sqrt{1 + 4k^2c^2}\big) = \frac{i}{2}\big(1 \pm \gamma_k\big)$$

Con $\gamma_k = \sqrt{1 + 4k^2c^2} \in \mathbb{R}$. Así, para cada k, la solución es:

$$T_k(t) = A_k e^{\frac{i}{2}(1+\gamma_k)} + B_k e^{\frac{i}{2}(1-\gamma_k)}$$

Con $A_k, B_k \in \mathbb{C}$. Tomando las combinaciones lineales de los productos:

$$u(x,t) = \sum_{k\geq 0} \big\{A_k e^{\frac{i}{2}(1+\gamma_k)} + B_k e^{\frac{i}{2}(1-\gamma_k)}\big\} \sin(kx) \tag{*}$$

En adelante, se denotará:

$$\beta_k^+ = \frac{1+\gamma_k}{2} \qquad \beta_k^- = \frac{1-\gamma_k}{2}$$

Escribiendo la exponencial compleja en términos del seno y coseno:

$$e^{i\beta_k^+} = \cos(\beta_k^+ t) + i\sin(\beta_k^+ t) \qquad e^{i\beta_k^+} = \cos(\beta_k^- t) + i\sin(\beta_k^- t)$$

Separando los coeficientes A_k y B_k en sus respectivas partes reales y complejas:

$$A_k = a_k + ib_k \in \mathbb{C} \qquad B_k = c_k + id_k \in \mathbb{C}$$

Finalmente, desarrollando:

$$\begin{aligned}u(x,t) = \sum_{k\geq 0}\big\{&a_k\cos(\beta_k^+ t) + ib_k\cos(\beta_k^+ t) + ia_k\sin(\beta_k^+ t) - b_k\sin(\beta_k^+ t) + \\ &+ c_k\cos(\beta_k^- t) + id_k\cos(\beta_k^- t) + ic_k\sin(\beta_k^- t) - d_k\sin(\beta_k^- t)\big\}\sin(kx)\end{aligned}$$

Separando las funciones u, g y h en sus respectivas partes reales y complejas:

$$\begin{aligned}u(x,t) &= u^z(x,t) + iu^y(x,t)\\ g(x) &= g^z(x) + ig^y(x)\\ h(x) &= h^z(x) + ih^y(x)\end{aligned}$$

Para u, se tiene que:

$$\begin{aligned}u^z(x,t) &= \sum_{k\geq 0}\big\{a_k\cos(\beta_k^+ t) - b_k\sin(\beta_k^+ t) + c_k\cos(\beta_k^- t) - d_k\sin(\beta_k^- t)\big\}\sin(kx)\\ u^y(x,t) &= \sum_{k\geq 0}\big\{b_k\cos(\beta_k^+ t) + a_k\sin(\beta_k^+ t) + d_k\cos(\beta_k^- t) + c_k\sin(\beta_k^- t)\big\}\sin(kx)\end{aligned}$$

Y su derivada u_t es:

$$\begin{aligned}u_t^z(x,t) &= \sum_{k\geq 0}\big\{-a_k\beta_k^+\sin(\beta_k^+ t) - b_k\beta_k^+\cos(\beta_k^+ t) - c_k\beta_k^-\sin(\beta_k^- t) - d_k\beta_k^-\cos(\beta_k^- t)\big\}\sin(kx)\\ u_t^y(x,t) &= \sum_{k\geq 0}\big\{-b_k\beta_k^+\sin(\beta_k^+ t) + a_k\beta_k^+\cos(\beta_k^+ t) - d_k\beta_k^-\sin(\beta_k^- t) + c_k\beta_k^-\cos(\beta_k^- t)\big\}\sin(kx)\end{aligned}$$

Imponiendo las condiciones iniciales sobre u y u_t:

$$\begin{aligned}u^z(x,0) &= \sum_{k\geq 0}\big\{a_k + c_k\big\}\sin(kx) = g^z(x) &\qquad u_t^z(x,0) &= \sum_{k\geq 0}\big\{-b_k\beta_k^+ - d_k\beta_k^-\big\}\sin(kx) = h^z(x)\\ u^y(x,0) &= \sum_{k\geq 0}\big\{b_k + d_k\big\}\sin(kx) = g^y(x) &\qquad u_t^y(x,0) &= \sum_{k\geq 0}\big\{a_k\beta_k^+ + c_k\beta_k^-\big\}\sin(kx) = h^y(x)\end{aligned}$$

Por [R6], dichos coeficientes son:

$$\begin{aligned}\big\{a_k + c_k\big\} &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi g^z(x)\sin(kx)dx = G_k^z &\qquad -\big\{b_k\beta_k^+ + d_k\beta_k^-\big\} &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi h^z(x)\sin(kx)dx = H_k^z\\ \big\{b_k + d_k\big\} &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi g^y(x)\sin(kx)dx = G_k^y &\qquad \big\{a_k\beta_k^+ + c_k\beta_k^-\big\} &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi h^y(x)\sin(kx)dx = H_k^y\end{aligned}$$

Definiendo:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \beta_k^+ & \beta_k^- \end{pmatrix} \Rightarrow M^{-1} = \frac{-1}{\gamma_k}\begin{pmatrix} \beta_k^- & -1 \\ -\beta_k^+ & 1 \end{pmatrix}$$

Pueden escribirse las ecuaciones anteriores como:

$$M\begin{pmatrix} a_k \\ c_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_k^z \\ H_k^y \end{pmatrix} \qquad M\begin{pmatrix} b_k \\ d_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_k^y \\ -H_k^z \end{pmatrix}$$

Y la solución para cada coeficiente es:

$$\begin{aligned}a_k &= \frac{1}{\pi\gamma_k}\int_0^\pi \big(g^z(x)(\gamma_k - 1) + 2h^y(x)\big)\sin(kx)dx\\ b_k &= \frac{1}{\pi\gamma_k}\int_0^\pi \big(g^y(x)(\gamma_k - 1) - 2h^z(x)\big)\sin(kx)dx\\ c_k &= \frac{1}{\pi\gamma_k}\int_0^\pi \big(g^z(x)(\gamma_k + 1) - 2h^y(x)\big)\sin(kx)dx\\ d_k &= \frac{1}{\pi\gamma_k}\int_0^\pi \big(g^y(x)(\gamma_k + 1) + 2h^z(x)\big)\sin(kx)dx\end{aligned}$$

Finalmente, reuniendo coeficientes:

$$A_k = \frac{1}{\pi\gamma_k}\int_0^\pi \big(g(x)(\gamma_k - 1) + 2ih(x)\big)\sin(kx)dx$$
$$B_k = \frac{1}{\pi\gamma_k}\int_0^\pi \big(g(x)(\gamma_k + 1) - 2ih(x)\big)\sin(kx)dx$$

En cuanto a si las fuerzas de Lorentz amortiguan o no la solución, las exponenciales complejas de (*) invitan a pensar que no (aparecen términos oscilatorios). Para comprobarlo formalmente, basta con probar que la energía se conserva.

La energía mecánica de la cuerda viene dada por (ver problema 3.1):

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^\pi \left(|u_t|^2 + c^2|u_x|^2\right)dx = \int_0^\pi u_t^2 dx + c^2\int_0^\pi u_x^2 dx$$

Derivando:

$$\frac{d}{dt}E(t) = \int_0^\pi u_t u_{tt} dx + c^2\int_0^\pi u_x u_{xt} dx$$

Integrando por partes el segundo término y usando las condiciones de contorno:

$$\int_{-R}^{R} u_x u_{xt} dx = \big[u_x u_t\big]_0^\pi - \int_0^\pi u_t u_{xx} dx = -\int_0^\pi u_t u_{xx} dx$$

Finalmente, agrupando y usando la EDP:

$$\frac{d}{dt}E(t) = \int_0^\pi \left(u_t u_{tt} + c^2 u_x u_{xt}\right)dx = \int_0^\pi \left(u_t u_{tt} - c^2 u_t u_{xx}\right)dx = \int_0^\pi u_t\big[u_{tt} - c^2 u_{xx}\big]dx = \int_0^\pi u_t \cdot 0 dx = 0$$

Tal y como se deseaba.

<u>Comentario:</u>

La deducción del modelo del problema es la siguiente.

Supóngase que, en reposo, la cuerda esta íntegramente contenida en el segmento que une los puntos $(0,0,0)$ y $(\pi,0,0)$. Si se realiza la hipótesis de pequeñas vibraciones, el movimiento de un elemento x de la cuerda es perpendicular a la misma (no hay oscilación en la dirección del eje x). En estas condiciones, la cuerda puede parametrizarse por x, y la posición y velocidad de los puntos de la cuerda viene dada por:

$$r(x,t) = (x, u(x,t)) = (x, y(x,t), z(x,t))$$
$$v(x,t) = r_t(x,t) = (0, u_t(x,t)) = (0, y_t(x,t), z_t(x,t))$$

Por otro lado, la ley de Lorentz establece que la fuerza por unidad de carga que experimenta una partícula cargada eléctricamente en el seno de un campo magnético es $f = v \times B$. Con lo anterior, y tomando un campo magnético unitario y paralelo al eje x:

$$f = v \times B = \begin{pmatrix} 0 \\ y_t \\ z_t \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ z_t \\ -y_t \end{pmatrix}$$

Finalmente, la segunda y tercera componente (en la primera no hay movimiento) satisfarán la ecucación de ondas $w_{tt} - c^2 w_{xx} = F$, donde F son las fuentes de excitación. En este caso, $F = f$ (las fuerzas de Lorentz), obteniendo el sistema de ecuaciones en variables reales:

$$\begin{cases} y_{tt} - c^2 y_{xx} = z_t \\ z_{tt} - c^2 z_{xx} = -y_t \end{cases}$$

Que puede reducirse a una ecuación en una variable identificando el plano ZY con el plano complejo. En efecto, definiendo:

$$u(x,t) = z(x,t) + iy(x,t)$$

Se tiene:

$$u_t(x,t) = z_t(x,t) + iy_t(x,t) \quad \Rightarrow \quad iu_t(x,t) = iz_t(x,t) - y_t(x,t)$$

Finalmente, multiplicando la primera ecuación del sistema por i y usando todo lo anterior:

$$(z_{tt} + iy_{tt}) - c^2(z_{xx} + iy_{xx}) = u_{tt} - c^2 u_{xx} = (z_{tt} - c^2 z_{xx}) + (iy_{tt} - ic^2 y_{xx}) = (-y_t) + (iz_t) = iu_t$$

Obteniendo la ecuación del enunciado para $\kappa = 1$.

$\boxed{5.8}$ (Ecuación de Black-Scholes). Los precios $u(s,t)$ de los principales derivados financieros (como las *European Call Options* (*ECO*)) se modelizan con la ecuación de Black-Scholes:

$$u_t + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 u_{ss} + rsu_s - ru = 0$$

Con $s > 0$, $t \in (0,T)$, σ es la votalidad y r el tipo de interes (ambos constantes y conocidos).

Una *ECO* da derecho a comprar un determinado activo (*asset*) en un tiempo futuro $T > 0$ y a precio P fijados a priori. Nótese que su valor (o precio) teórico $u(s,t)$ a tiempo $t < T$ depende claramente del precio s que tiene el activo a tiempo t.

a) Halle $a > 0$ de forma que el cambio de variable $s = e^{x/a}$ transforme la ecuación de Black-Scholes en:

$$v_t + v_{xx} + cv_x - rv = 0$$

Con $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$ y $u(s,t) = v(a\log(s), t)$.

b) Compruebe que la función $\overline{v}(x,t) = v(x+ct, t)$ con $x \in \mathbb{R}$ y $t \in (0,T)$, satisface:

$$\overline{v}_t + \overline{v}_{xx} - r\overline{v} = 0$$

c) Realice el cambio $w(x,t) = e^{bt}\overline{v}(x, T-t)$, con b apropiada, $x \in \mathbb{R}$ y $t \in (0,T)$, para transformar la ecuación anterior en la del calor:

$$w_t - w_{xx} = 0$$

d) Razone que el precio a tiempo $t = T$ de una *ECO* es $u(s,T) = (s-P)^+$, donde $(\cdot)^+$ denota la parte positiva. ¿Cómo se podría calcular explícitamente el valor de la opción $u(s,t)$ para tiempo $t < T$?

Solución:

Sean $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $\varphi = (\alpha, \beta) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. La matriz Jacobiana de la composición $g = f \circ \varphi$ es:

$$J_g = J_f \cdot J_\varphi = \begin{pmatrix} f_x & f_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_x & \alpha_t \\ \beta_x & \beta_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_x\alpha_x + f_t\beta_x & f_x\alpha_t + f_t\beta_t \end{pmatrix}$$

Las derivadas parciales de g_i se entienden como derivadas direccionales:

$$g_x = J_g \cdot (1,0)^T = f_x\alpha_x + f_t\beta_x \qquad\qquad g_t = J_g \cdot (0,1)^T = f_x\alpha_t + f_t\beta_t$$

a) Halle $a > 0$ de forma que el cambio de variable $s = e^{x/a}$ transforme la ecuación de Black-Scholes en:

$$v_t + v_{xx} + cv_x - rv = 0$$

Con $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$ y $u(s,t) = v(a\log(s), t)$.

Como $v(x,t) = u(e^{x/a}, t)$, se tiene que:

$$v_x = u_x a^{-1}(e^{x/a}) = u_x a^{-1} s \qquad\qquad v_t = u_t$$

Y para la derivada segunda, como $s_x = a^{-1}s$:

$$v_{xx} = (v_x)_x = (u_x)_x \cdot (a^{-1}s) + u_x \cdot (a^{-1}s)_x = (u_{xx}s_x)a^{-1}s + u_x(a^{-1}s_x) = u_{xx}a^{-2}s^2 + u_x a^{-2}s$$

Reordenando y entendiendo que $u_x \equiv u_s$:

$$su_s = av_x \qquad\qquad u_t = v_t \qquad\qquad s^2u_{ss} + su_s = a^2 v_{xx}$$

Nombrando $K = 1/\sigma^2$ y manipulando la ecuación de Black-Scholes:

$$u_t + Ks^2u_{ss} + rsu_s - ru = u_t + K(s^2u_{ss} + su_s) + (r-K)su_s - ru = v_t + Ka^2v_{xx} + (r-K)av_x - rv = 0$$

Finalmente, si $a = \sigma$ y tomando $c = (r-K)a$:

$$v_t + v_{xx} + cv_x - rv = 0$$

Obteniendo lo deseado.

b) Compruebe que la función $\overline{v}(x,t) = v(x+ct, t)$ con $x \in \mathbb{R}$ y $t \in (0,T)$, satisface:

$$\overline{v}_t + \overline{v}_{xx} - r\overline{v} = 0$$

Como $\overline{v}(x,t) = v(x+ct,t)$, se tiene que:

$$\overline{v}_x = v_x \qquad\qquad \overline{v}_t = v_x c + v_t$$

De donde se deduce que $\overline{v}_{xx} = v_{xx}$. Agrupando términos en la ecuación en v:

$$v_t + v_{xx} + cv_x - rv = (v_t + cv_x) + v_{xx} - rv = \overline{v}_t + \overline{v}_{xx} - r\overline{v} = 0$$

Tal y como se deseaba.

c) Realice el cambio $w(x,t) = e^{bt}\overline{v}(x, T-t)$, con b apropiada, $x \in \mathbb{R}$ y $t \in (0,T)$, para transformar la ecuación anterior en la del calor:

$$w_t - w_{xx} = 0$$

Considérese $z(x,t) = \overline{v}(x, T-t)$. Entonces:

$$z_x = \overline{v}_x \qquad\qquad z_t = -\overline{v}_t$$

De donde se deduce que $z_{xx} = \overline{v}_{xx}$. Derivando $w = e^{bt}z$:

$$w_t = be^{bt}z + e^{bt}z_t = e^{bt}(bz + z_t) = e^{bt}(b\overline{v} - \overline{v}_t)$$
$$w_{xx} = e^{bt}z_{xx} = e^{bt}\overline{v}_{xx}$$

Finalmente, si $b = r$, agrupando términos en la ecuación del apartado anterior:

$$\overline{v}_t + \overline{v}_{xx} - r\overline{v} = (\overline{v}_t - b\overline{v}) + \overline{v}_{xx} = -(b\overline{v} - \overline{v}_t) + \overline{v}_{xx} = -e^{-bt}w_t + e^{-bt}w_{xx} = -e^{-bt}(w_t - w_{xx}) = 0 \;\;\Rightarrow\;\; w_t - w_{xx} = 0$$

Como se pretendía.

d) Razone que el precio a tiempo $t = T$ de una *ECO* es $u(s,T) = (s-P)^+$, donde $(\cdot)^+$ denota la parte positiva. ¿Cómo se podría calcular explícitamente el valor de la opción $u(s,t)$ para tiempo $t < T$?

Vale la pena remarcar que $u(s,t)$ es el precio de la *ECO*, mientras que s es el del activo que la *ECO* da derecho a adquirir.

Con una *ECO*, se "hace una reserva" para comprar cierto producto en el instante $t = T$, y por una cantidad P, cuando el precio real es s. Es razonable entonces imponer que, si la reserva se hace en el mismo instante que la compra, la suma de ambas cantidades sea el precio real s del producto ("adelanto" + "a pagar" = "total"). Si en el momento de la compra la suma de la reserva y el dinero a pagar supera el precio real del producto, no se devuelve dinero, y de ahí la parte positiva.

La ecuación de Black-Scholes describe la evolución de u mediante una EDP. Para resolverla, entre otros, se requiere prescribir el valor de u en algun instante de tiempo. En este caso, como se prescribe en $t = T$, es más apropiado hablar de una condición "final" que inicial.

En los apartados anteriores se ha visto como transformar la EDP de Black-Scholes en la del calor, que puede resolverse, por ejemplo, mediante el método de separación de variables. Se precisa una condición inicial (no puede resolverse "hacia atrás en el tiempo"). No obstante, con los cambios realizados, se tiene que $t_{Ec.C} = T - t_{Ec.B-S}$, con lo que la condición "final" de la ecuación de Black-Scholes es una condición inicial en la ecuación del calor.

TEMA 6 El Laplaciano

El Laplaciano de una composición con una función lineal [R7]

A lo largo del documento se ha usado la notación $\partial_i f$ para denotar la derivada parcial i-ésima de f. No obstante, si se desean hacer explícitos los argumentos de f, puede inducir a confusión. En efecto, $\partial_i f(g(x))$ podría entenderse como "derivada parcial i-ésima de (la composición $f \circ g$)" o " derivada parcial i-ésima de f evaluada en $g(x)$". Para este desarrollo (y, si es necesario, en algún problema), se usará $\delta_i f(g(x))$ para el primer caso, y $f_{x_i}(g(x))$ para el segundo.

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, A una matriz $n \times n$ y $b \in \mathbb{R}^n$. La matriz A y el vector b definen una aplicación lineal $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ según $g(x) = Ax + b$. Por ser lineal, su matriz jacobiana es $J_g = A$.

Teniendo en cuenta esto, el Jacobiano de la composición $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ es:

$$J_{f\circ g}(x) = J_f(g(x)) \cdot J_g(x) = \begin{pmatrix} f_{x_1}(g(x)) & ... & f_{x_n}(g(x)) \end{pmatrix} \cdot A$$

Y el de la composición $(f_{x_j} \circ g)(x) = f_{x_j}(g(x))$ es:

$$J_{f_{x_j}\circ g} = J_{f_{x_j}}(g(x)) \cdot J_g(x) = J_{f_{x_j}}(g(x)) \cdot \mathcal{O}(x) = = \begin{pmatrix} f_{x_j x_1}(g(x)) & ... & f_{x_j x_n}(g(x)) \end{pmatrix} \cdot A$$

Así, la derivada parcial i-ésima de $f(g(x))$ corresponde a la i-ésima columna de $J_{f\circ g}(x)$:

$$\partial_i\big(f(g(x))\big) = \sum_j a_{ji} f_{x_j}(g(x))$$

Y la segunda derivada parcial i-ésima es:

$$\partial_{ii}\big(f(g(x))\big) = \partial_i\big[\partial_i\big(f(g(x))\big)\big] = \partial_i\left[\sum_j a_{ji} f_{x_j}(g(x))\right] = \sum_j a_{ji}\partial_i\big(f_{x_j}(g(x))\big)$$

Y el término $\partial_i\big(f_{x_j}(g(x))\big)$ corresponde a la columna i-ésima de $J_{f_{x_j}\circ g}$. Sustituyendo:

$$\sum_j a_{ji}\partial_i(f_{x_j}(g(x))) = \sum_j a_{ji}\left(\sum_k a_{ki} f_{x_j x_k}(g(x))\right) = \sum_{(j,k)} a_{ji}a_{ki} f_{x_j x_k}(g(x))$$

Obteniendo finalmente una expresión para la derivada parcial i-ésima de segundo orden de la composición:

$$\partial_{ii}\big(f(g(x))\big) = \sum_{(j,k)} a_{ji}a_{ki} f_{x_j x_k}(g(x))$$

Así, el Laplaciano de la composición es:

$$\Delta\big(f(g(x))\big) = \sum_i \partial_{ii}\big(f(g(x))\big) = \sum_i\left(\sum_{(j,k)} a_{ji}a_{ki} f_{x_j x_k}(g(x))\right) = \sum_{(j,k)} f_{x_j x_k}(g(x)) \sum_i a_{ji}a_{ki}$$

Fórmula integral de Cauchy [R8]

Sea $f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función holomorfa en un abierto, $\gamma \subset U$ un contorno cerrado y z_0 un punto del interior de la región delimitada por el contorno. La fórmula integral de Cauchy establece:

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0)$$

El núcleo de Gauss [R9]

La solución del problema:

$$\begin{cases} u_t - D\Delta u = 0 & \text{en } \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u(x,0) = g(x) & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Viene dada por:

$$u(x,t) = \big(\Gamma_D(\cdot,t) * g(\cdot)\big)(x)$$

Donde Γ_D es el núcleo de Gauss, y tiene la forma:

$$\Gamma_D(x,t) = \frac{1}{(4\pi Dt)^{n/2}} e^{\frac{-|x|^2}{4Dt}}$$

El principio del máximo [R10]

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado. Se define el cilindro $Q_T = \Omega \times (0, T)$. La frontera parabólica del cilindro es:

$$\partial_p Q_T = \{\overline{\Omega} \times \{0\}\} \cup \{\partial\Omega \times [0, T]\}$$

Sea $u \in \mathcal{C}^2(Q_T) \cap \mathcal{C}^0(\overline{Q_T})$. Se dice que u es subcalórica si $u_t - D\Delta u \leq 0$.

El principio del máximo establece que, si u es subcalórica, entonces:

$$\max_{\overline{Q_T}} u = \max_{\partial_p Q_T} u$$

Este resultado no es cierto si Ω es no acotado.

El principio de comparación [R11]

Este resultado es una consecuencia útil del principio del máximo.

Sea $\Omega \subset R^n$, y u y v sendas funciones sobre $\Omega \times (0, \infty)$. Entonces:

$$\left.\begin{array}{l} u_t - D\Delta u = 0 \\ v_t - D\Delta v \leq 0 \\ u(x,0) = v(x,0) = g(x) \end{array}\right\} \Rightarrow \quad v \leq u$$

Es decir, si ambas funciones tienen las mismas condiciones iniciales, entonces la solución calórica es una cota superior para la solución subcalórica.

$\boxed{\textbf{6.1}}$ Demuestre las siguientes propiedades importantes del Laplaciano.:

a) La definición del Laplaciano no depende de la base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ escogida. Es decir:

$$\sum_i \partial_{e_i e_i} u(x) = \sum_i \partial_{e_i' e_i'} u(x)$$

Para cada pareja de bases ortonormales $\{e_i\}$ y $\{e_i'\}$ de $\mathbb{R}^n$.

b) El Laplaciano es invariante por rotaciones. Es decir, para toda matriz ortogonal $\mathcal{O}$ y $u \in \mathcal{C}^2$, si se define $u^*(x) := u(\mathcal{O}x)$ y $x^* = \mathcal{O}x$, se tiene:

$$\Delta u^*(x) = \Delta u(\mathcal{O}x) = \Delta u(x^*)$$

c) El Laplaciano es invariante por traslaciones.

d) El Laplaciano es invariante por isometrías.

Previo:

Será útil disponer del siguiente resultado.

Sea $A = (a_{ij})_{ij}$ una matriz ortogonal ($A^T = A^{-1}$). Sea $B = (b_{ij})_{ij} = A^T$ su matriz traspuesta (es decir, $b_{ij} = a_{ji}$). Entonces $AB = AA^T = AA^{-1} = \mathbb{I}_n$. Denotando $\mathbb{I}_n = (\delta_{ij})_{ij}$, se tiene que:

$$\sum_k a_{ik} b_{kj} = \sum_k a_{ik} a_{jk} = \delta_{ij}$$

Es decir, el sumatorio ($*1$) se comporta como una delta de Kronecker ($\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$, y $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$).

Sea $g(x) = Ax + b$, con A ortogonal. Entonces, Δf es invariante por composicion con g, ya que por la observación anterior y por [R7]:

$$\Delta\big(f(g(x))\big) = \sum_{(j,k)} u_{x_j x_k}(g(x)) \sum_i a_{ji} a_{ki} = \sum_{(j,k)} (u_{x_j x_k}(g(x)))(\delta_{jk}) = \sum_j (u_{x_j x_j}(g(x))) = \Delta f(x) \tag{*}$$

Solución:

a) La definición del Laplaciano no depende de la base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ escogida. Es decir:

$$\sum_i \delta_{e_i e_i} u(x) = \sum_i \delta_{e_i' e_i'} u(x)$$

Para cada pareja de bases ortonormales $\{e_i\}$ y $\{e_i'\}$ de $\mathbb{R}^n$.

Bastará con probar el resultado para $\mathcal{B} = \mathcal{E}$ la base canónica y $\mathcal{B}'$ una base arbitraria. El resultado entre dos bases arbitrarias será cierto entonces por transitividad.

Sea $\mathcal{O} = (a_{ij})_{ij}$ la matriz del cambio de base entre $\mathcal{E}$ y $\mathcal{B}'$ (es decir, $\forall v$, $v_{\mathcal{B}'} = \mathcal{O} v_{\mathcal{E}}$). Como las bases son ortonormales, $\mathcal{O}$ es ortogonal. En particular, se tiene la relación:

$$e_i' = \mathcal{O} e_i \quad \Rightarrow \quad e_i' = (a_{ji})_j$$

Por comodidad, para la base canónica, se denotará $\partial_{e_i} = \partial_i$. Las derivadas parciales de primer orden $\partial_{e_i'} u$ son de hecho las derivadas direccionales en la base $\mathcal{E}$ en la dirección e_i'. Escribiéndolas en términos del gradient de u:

$$\partial_{e_i'} u = D_{e_i'} u = \nabla u \cdot e_i' = \sum_j a_{ji} \partial_j u = w_i$$

Donde w_i (derivada direccional asociada a e_i'), como u, es una función de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}$: Entonces, iterando el argumento anterior:

$$\partial_{e_i' e_i'} u = \partial_{e_i'}(\partial_{e_i'} u) = \partial_{e_i'} w_i = D_{e_i'} w_i = \nabla w_i \cdot e_i' = \sum_j a_{ji} \partial_j w_i$$

Sustituyendo w_i por su definición:

$$\sum_j a_{ji} \partial_j w_i = \sum_j a_{ji} \partial_j \left(\sum_k a_{ki} \partial_k u \right) = \sum_{(j,k)} a_{ji} a_{ki} \partial_{jk} u$$

Finalmente, usando (*1) (ya que $\mathcal{O}$ es ortogonal), el Laplaciano en la base $\mathcal{B}'$ es:

$$\sum_i \partial_{e_i' e_i'} u = \sum_i \left(\sum_{(j,k)} a_{ji} a_{ki} \partial_{jk} u \right) = \sum_{(j,k)} \sum_i a_{ji} a_{ki} \partial_{jk} u = \sum_{(j,k)} (\partial_{jk} u) \sum_i a_{ji} a_{ki} = \sum_{(j,k)} (\partial_{jk} u)(\delta_{jk}) = \sum_j \delta_{jj} u$$

Es decir, el Laplaciano en la base $\mathcal{E}$ es igual que en la base $\mathcal{B}'$.

b) El Laplaciano es invariante por rotaciones. Es decir, para toda matriz ortogonal $\mathcal{O}$ y $u \in \mathcal{C}^2$, si se define $u^*(x) := u(\mathcal{O}x)$ y $x^* = \mathcal{O}x$, se tiene:

$$\Delta u^*(x) = \Delta u(\mathcal{O}x) = \Delta u(x^*)$$

Como $\mathcal{O}$ es ortogonal, el resultado es directo aplicando $(*)$ a $f = u$ y $g = \mathcal{O}x + 0$.

c) El Laplaciano es invariante por traslaciones.

Como $\mathbb{I}_n$ es ortogonal, el resultado es directo aplicando $(*)$ a $f = u$ y $g = \mathbb{I}_n x + b$, donde b es el vector traslación.

a) El Laplaciano es invariante por isometrías.

Las isometrías pueden escribirse como $g(x) = Ax + b$, con A ortogonal. El resultado es directo aplicando $(*)$ con $f = u$.

$\boxed{\textbf{6.2}}$ Resuelva las siguientes cuestiones.

a) Pruebe que si u es de clase $\mathcal{C}^2$ en un entorno de $x \in \mathbb{R}^n$ entonces:

$$u(x+h) = u(x) + \nabla u(x) \cdot h + \frac{1}{2} h^T D^2 u(x) h + o(|h^2|)$$

Donde $D^2u(x)$ es la matriz Hessiana, es decir, $D^2u(x) = \big(\partial_{ij} u(x)\big)_{1 \leq i,j \leq n}$. [Indicación: Fije $x \in \mathbb{R}^n$, considere la función de una variable $g(t) = u(x+th)$ y aplique la fórmula de Taylor.]

b) Dado un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ y $x \in \Omega$, demuestre que:

$$\Delta u(x) = \lim_{r \to 0} \frac{2n}{r^2} \fint_{\partial B_r} \big(u(y) - u(x)\big) dS(y) = \lim_{r \to 0} \frac{2n}{r^2} \left\{ \left(\fint_{\partial B_r} u(y) dS(y) \right) - u(x) \right\}$$

Donde $\fint_E := \frac{1}{E} \int_E$ denota hacer la media. [Indicación: Utilice la aproximación de Taylor de u entorno al punto x.]

c) Use el apartado b) para dar una prueba alternativa de las cuestiones (a) y (b) del ejercicio anterior.

d) Use el apartado b) para determinar el signo del Laplaciano en un punto de máximo o mínimo local de u.

Solución:

a) Pruebe que si u es de clase $\mathcal{C}^2$ en un entorno de $x \in \mathbb{R}^n$ entonces:

$$u(x+h) = u(x) + \nabla u(x) \cdot h + \frac{1}{2} h^T \cdot D^2 u(x) \cdot h + o(|h^2|)$$

Donde $D^2u(x)$ es la matriz Hessiana, es decir, $D^2u(x) = \big(\partial_{ij} u(x)\big)_{1 \leq i,j \leq n}$. [Indicación: Fije $x \in \mathbb{R}^n$, considere la función de una variable $g(t) = u(x+th)$ y aplique la fórmula de Taylor.]

Se define $\gamma(t) = x + th$ y $g(t) = (u \circ \gamma)(t) = u(\gamma(t)) = u(x+th)$. Aplicando la regla de la cadena:

$$g'(t) = Dg(t) = J_g(x) = J_u(\gamma(t)) \cdot J_\gamma(t) = \big(u_{x_1}(\gamma(t)), ..., u_{x_n}(\gamma(t))\big) \cdot \big(h_1, ..., h_n\big)^T = \sum_i h_i u_{x_i}(\gamma(t)) = \nabla u(\gamma(t)) \cdot h$$

Aplicándola otra vez y usando lo anterior:

$$g''(t) = D^2[g(t)] = D[D[g(t)]] = D\left[\sum_i h_i u_{x_i}(\gamma(t))\right] = \sum_i h_i D[u_{x_i}(\gamma(t))]$$

Y para el término del interior del sumatorio:

$$D[u_{x_i}(\gamma(t))] = J_{u_{x_i} \circ \gamma}(t) = J_{u_{x_i}}(\gamma(t)) \cdot J_\gamma(t) = \big(u_{x_i x_1}(\gamma(t)), ..., u_{x_n x_1}(\gamma(t))\big) \cdot \big(h_1, ..., h_n\big)^T = \sum_j h_j u_{x_i x_j}(\gamma(t))$$

Por último, ustituyendo:

$$g''(t) = \sum_i \sum_j h_i h_j u_{x_i x_j}(\gamma(t)) = h^T \cdot D^2 u(\gamma(t)) \cdot h$$

Por el teorema de Taylor, $g(t)$ puede aproximarse por un polinomio de segundo orden más una cierta función $h(t)$ que satisface $\lim_{t \to 0}(h(t)/t^2) = 0$ (y dicha función suele denotarse por $o(t^2)$). Entonces:

$$g(t) = g(0) + g'(0)t + \frac{1}{2} g''(0) t^2 + o(t^2)$$

Usando la definición de $g(t)$ y las expresiones halladas para su derivada:

$$\begin{aligned} u(x+th) &= [u(x)] + \big[\nabla u(x) \cdot h\big] t + \frac{1}{2} \big[h^T \cdot D^2 u(x) \cdot h\big] t^2 + o(t^2) = \\ &= u(x) + \nabla u(x) \cdot (th) + \frac{1}{2} (th)^T \cdot D^2 u(x) \cdot (th) + o(t^2) \end{aligned}$$

Es decir, en un entorno de x (parametrizado por $x+th$), si el entorno es suficientemente cercano (el vector th es suficientemente pequeño), la expresión anterior aproxima bien la función u. Pedir que th sea suficientemente pequeño es equivalente a fijar h y hacer $t \to 0$, o bien fijar t y hacer $|h| \to 0$. Entonces, en la expresión anterior puede fijarse $t = 1$ y sustituir el término $o(t^2)$ por $o(|h|)^2$, obteniendo:

$$u(x+th) = u(x) + \nabla u(x) \cdot h + \frac{1}{2} h^T \cdot D^2 u(x) \cdot h + o(|h|^2)$$

Tal y como se deseaba.

b) Dado un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ y $x \in \Omega$, demuestre que:

$$\Delta u(x) = \lim_{r\to 0} \frac{2n}{r^2} \fint_{\partial B_r} (u(y) - u(x)) dS(y) = \lim_{r\to 0} \frac{2n}{r^2} \left\{ \left(\fint_{\partial B_r} u(y) dS(y) \right) - u(x) \right\}$$

Donde $\fint_E := \frac{1}{E} \int_E$ denota hacer la media. [Indicación: Utilice la aproximación de Taylor de u entorno al punto x.]

Se entiende que la bola B_r está centrada en el punto x. Tomando el cambio de variable $y = x + h$ con $h \in \partial B_r$ ($|h| = r$) sustituyendo el resultado obtenido en el apartado anterior:

$$\fint_{\partial B_r} \big(u(y) - u(x)\big) dS(y) = \fint_{\partial B_r} \big[\nabla u(x) \cdot h\big] dS(h) + \fint_{\partial B_r} \frac{1}{2} \big[h^T \cdot D^2 u(x) \cdot h\big] dS(h) + \fint_{\partial B_r} o(r^2) dS(h)$$

Para el primer término:

$$\fint_{\partial B_r} \big[\nabla u(x) \cdot h\big] dS(h) = \fint_{\partial B_r} \big[\sum_i h_i u_{x_i}(x)\big] dS(h) = \sum_i u_{x_i}(x) \fint_{\partial B_r} h_i dS(h) = 0$$

Donde se ha usado que la función coordenada h_i es simétrica sobre una bola (y por lo tanto, su integral sobre la bola es nula). Para el tercer término, en el límite satisface:

$$\lim_{r\to 0} \frac{2n}{r^2} \fint_{\partial B_r} o(r^2) dS(h) = 2n \lim_{r\to 0} \frac{o(r^2)}{r^2} \fint_{\partial B_r} dS(h) = 2n \lim_{r\to 0} \frac{o(r^2)}{r^2} = 0$$

Donde se ha usado que la media de la funcion 1 es 1 y la definición de $o(r^2)$. Por último, para el segundo término:

$$\frac{1}{2} \fint_{\partial B_r} \big[h^T \cdot D^2 u(x) \cdot h\big] dS(h) = \frac{1}{2} \fint_{\partial B_r} \big[\sum_{(i,j)} h_i h_j u_{x_i x_j}(x)\big] dS(h) = \frac{1}{2} \sum_{(i,j)} u_{x_i x_j}(x) \fint_{\partial B_r} h_i h_j dS(h)$$

Similarmente al argumento anterior, el producto de las funciones coordenadas $h_i h_j$ es simétrico sobre la bola si $i \neq j$, y su integral es nula. Finalmente, si $i = j$:

$$\fint_{\partial B_r} h_i^2 dS(h) = \fint_{\partial B_r} h_i h_j dS(h) = \fint_{\partial B_r} h_j^2 dS(h) \quad \Rightarrow \quad \sum_k \fint_{\partial B_r} h_k^2 dS(h) = n \fint_{\partial B_r} h_i^2 dS(h)$$

Reordenando:

$$\fint_{\partial B_r} h_i^2 dS(h) = \frac{1}{n} \sum_k \fint_{\partial B_r} h_k^2 dS(h) = \frac{1}{n} \fint_{\partial B_r} \Big[\sum_k h_k^2\Big] dS(h) = \frac{r^2}{n} \fint_{\partial B_r} dS(h) = \frac{r^2}{n}$$

Donde se ha usado que $|h| = \sum_k h_k^2 = r$. Recuperando el límite del enunciado:

$$\lim_{r\to 0} \frac{2n}{r^2} \fint_{\partial B_r} \big(u(y) - u(x)\big) dS(y) = \lim_{r\to 0} \frac{2n}{r^2} \left\{ \frac{1}{2} \sum_i u_{x_i x_i}(x) \fint_{\partial B_r} h_i^2 dS(h) \right\} =$$
$$= \lim_{r\to 0} \frac{n}{r^2} \left\{ \sum_i u_{x_i x_i}(x) \left(\frac{r^2}{n} \right) \right\} = \lim_{r\to 0} \left\{ \sum_i u_{x_i x_i}(x) \right\} = \sum_i u_{x_i x_i}(x) = \Delta u(x)$$

Obteniendo lo deseado. Que el término $u(x)$ puede salir fuera de la integral es evidente, dado que $u(x)$ es una constante y la media de 1 sobre la bola es 1.

c) Use el apartado b) para dar una prueba alternativa de las cuestiones (a) y (b) del ejercicio anterior.

Tal y como se ha visto en el apartado a) del ejercicio anterior, la definición habitual del Laplaciano puede entenderse a partir de derivadas direccionales. No es evidente entonces que el Laplaciano no dependa de la base utilizada. No obstante, con esta nueva caracterización, el Laplaciano evaluado en un punto puede entenderse como la diferencia entre la media de la función sobre una bola que contiene el punto y el valor en el punto (llevando la bola al límite). Esta caracterización no depende de la base en que se expresen los elementos $x \in \mathbb{R}^n$, solo de el valor que toma la función en ellos.

Respecto a la invarianza del Laplaciano frente a rotaciones, se había definido $x^* = \mathcal{O}x$ y $u^*(x) := u(x^*)$. Con esta nueva caracterización, se tiene:

$$\Delta u^*(x) = \lim_{r\to 0} \frac{2n}{r^2} \left\{ \left(\fint_{\partial B_r} u^*(x+h) dS(h) \right) - u^*(x) \right\} =$$
$$= \lim_{r\to 0} \frac{2n}{r^2} \left\{ \left(\fint_{\partial B_r} u(x^* + h^*) dS(h^*) \right) - u(x^*) \right\} = \lim_{r\to 0} \frac{2n}{r^2} \left\{ \left(\fint_{\partial B_r} u(x^* + h) dS(h) \right) - u(x^*) \right\} = \Delta(x^*)$$

Donde ha bastado con usar que $h \in \partial B_r$ implica $h^* \in \partial B_r$ para la tercera igualdad (una bola es invariante frente a rotaciones).

d) Use el apartado b) para determinar el signo del Laplaciano en un punto de máximo o mínimo local de u.

Immediato observando que si x es un máximo local, el término $u(y) - u(x)$ es negativo para todo y en un entorno suficientemente cercano a x.

6.3 Dada una función f en $[0, L]$, considérese el problema:

$$\begin{cases} -u'' = f(x) & x \in (0, L) \\ u(0) = u(L) = 0 \end{cases}$$

Resuelva el problema por simple integración de la EDO. Demuestre que la solución viene dada por la expresión:

$$u(x) = \int_0^L G(x, y) f(y) dy$$

Donde $G(x, y)$ es una función explícita que no depende de f. Dicha función se denomina función de Green del problema. Dibuje la gráfica de G como función de y para un x dado. Compruebe que G satisface las siguientes propiedades: $G(x, y) \geq 0$, $G(x, y) = G(y, x)$ y $G(0, y) = G(L, y)$ $\forall x, y \in [0, L]$.

Solución:

Recuérdese que la forma más sencilla de construir una primitiva de una cierta función $\tilde{f}(x)$ es:

$$\tilde{F}(x) = \int_0^x \tilde{f}(y) dy$$

Separando variables e integrando la EDO:

$$d[u'(z)] = -f(z)dz \quad \Rightarrow \quad \int_0^y d[u'(z)] = u'(y) - u'(0) = -\int_0^y f(z)dz = -F(y)$$

Reordenando, nombrando $c_1 = u'(0)$, separando variables e integrando otra vez:

$$d[u(y)] = cdy - F(y)dy \quad \Rightarrow \quad \int_0^x d[u(y)] = u(x) + u(0) = \int_0^x cdx - \int_0^x F(y)dy$$

Como $u(0) = 0$, se tiene:

$$u(x) = cx - \int_0^x \int_0^y f(z)dzdy$$

Pensando $f(z)$ como una función de dos variables que es constante en la primera, se puede aplicar Fubini, y entonces:

$$\int_0^x \int_0^y f(z)dzdy = \int_0^x f(z) \int_z^x dydz = \int_0^x (x - z) f(z)dz = x \int_0^x f(z)dz - \int_0^x zf(z)dz$$

Vale la pena comprobar que la función es una segunda primitiva de $f(x)$. Derivando una vez y usando la regla de Barrow:

$$\frac{d}{dx}\left[x \int_0^x f(z)dz - \int_0^x zf(z)dz\right] = \frac{d}{dx}\left[x \int_0^x f(z)dz\right] - \frac{d}{dx}\left[\int_0^x zf(z)dz\right] =$$
$$= \left[\int_0^x f(z)dz + xf(x)\right] - \left[xf(x)\right] = \int_0^x f(z)dz$$

Y evidentemente, derivando una segunda vez se obtiene $f(x)$. Renombrando la variable de integración, se obtiene:

$$u(x) = cx - \int_0^x (x - y) f(y)dy$$

Y tan solo resta determinar c usando la segunda condición de contorno, que aún no se ha usado. Así:

$$u(L) = cL - \int_0^L (L - y) f(y)dy = 0 \quad \Rightarrow \quad c = \frac{1}{L} \int_0^L (L - y) f(y)dy = \int_0^L (1 - y/L) f(y)dy$$

Sustituyendo el valor de c hallado y usando una función característica para el segundo término, se obtiene:

$$u(x) = \int_0^L x(1 - y/L) f(y)dy - \int_0^L (x - y)\mathbb{I}_{[0,x]}(y) f(y)dy = \int_0^L \left[x(1 - y/L) - (x - y)\mathbb{I}_{[0,x]}(y)\right] f(y)dy$$

Y, por comparación, la función de Green es:

$$G(x, y) = x(1 - y/L) - (x - y)\mathbb{I}_{[0,x]}(y)$$

Que no depende de f, pero si del dominio y las condiciones de contorno.

Obsérvese que si $x < y$, entonces $\mathbb{I}_{[0,x]}(y) = 0$, y $G(x, y)$ es:

$$G(x, y) = x(1 - y/L)$$

Por otro lado, si $x \geq y$, entonces $\mathbb{I}_{[0,x]}(y) = 1$, y $G(x, y)$ es:

$$G(x, y) = x(1 - y/L) - (x - y) = x - xy/L - x + y = y - xy/L = y(1 - x/L)$$

En resumen:

$$G(x, y) = \begin{cases} x(1 - y/L) & \text{si } x < y \\ y(1 - x/L) & \text{si } x \geq y \end{cases}$$

La positividad de $G(x, y)$ es entonces inmediata. Como $(1 - b/L) > 0$ y $a > 0$ si $a, b \in [0, L]$, su producto también es positivo.

Para la simetría, si $a < b$, entonces $G(a, b) = a(1 - b/L)$, ya que la primera variable es menor que la segunda y aplica el primer caso. Por otro lado, para $G(b, a)$ la primera variable es mayor que la segunda, así que aplica el segundo caso, y $G(b, a) = a(1 - b/L)$. El razonamiento para $a \geq b$ es análogo.

Por último, para $G(0, 0)$ aplica el segundo caso, y $G(0, 0) = 0$. Para $G(0, y)$ con $y > 0$ aplica el primer caso, y $G(0, y) = 0$. Análogamente, $G(L, L) = 0$ y $G(L, y) = 0$ con $y < L$.

$\boxed{\textbf{6.4}}$ Considere el problema de Dirichlet para el Laplaciano en la bola o disco unidad B_1 de $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{en } B_1 \\ u = g & \text{en } \partial B_1 \end{cases}$$

Donde $g : \partial B_1 \to \mathbb{R}$ es una función continua dada. Se desea hallar un método alternativo al de separación de variables (polares) para demostrar que la solución viene dada por la expresión:

$$u(x) = \int_{\partial B_1} P(x,y)g(y)dy \; x \in B_1$$

Donde P se denomina núcleo de Poisson y viene dado (en coordenadas polares) por:

$$P(x,y) = P(re^{i\alpha}, e^{i\beta}) = \frac{1-r^2}{2\pi} \frac{1}{1+r^2-2r\cos(\alpha-\beta)}$$

Para hacerlo, sea u la parte real de una función holomorfa ϕ. Fíjese $z_0 = re^{i\alpha} \in B_1$ y considérense las funciones:

$$\varphi_1(z) = \frac{\phi(z)}{z-z_0} \qquad\qquad \varphi_2(z) = \frac{\phi(z)\overline{z_0}}{1-z\overline{z_0}}$$

Sume sus integrales sobre ∂B_1 y, usando la fórmula de Cauchy para funciones holomorfas, deduzca las conclusiones presentadas en cuanto al núcleo de Poisson.

[Nótese la similitud entre la solución de este ejercicio y el anterior. Fórmulas explícitas como estas para resolver EDPs tan solo existen, en general, en dimensión $n = 1$ o bien, en dimensión $n \geq 2$, para dominios con muchas simetrías, como una bola, un rectánculo, un cilindro, semi-espacios, etc. Para dominios generales, las fórmulas también son válidas y útiles, pero G y P no son explícitos (si bien, como se verá, se pueden calcular numéricamente discretizando).]

Solución:

Se define $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$. Para φ_2, nótese que el polo de $1/(1-z\overline{z_0})$ es $1/\overline{z_0}$, que no pertenece a la bola unidad (ni a su frontera). Así, φ_2 es holomorfa en la bola unidad y no tiene singularidades, y por lo tanto, su integral sobre la frontera ∂B_1 es nula. Aplicando la fórmula integral de Cauchy a φ_1, se obtiene:

$$\int_{\partial B_1} \varphi(z)dz = \int_{\partial B_1} \varphi_1(z)dz + \int_{\partial B_1} \varphi_2(z)dz = \int_{\partial B_1} \frac{\phi(z)}{z-z_0}dz + 0 = 2\pi i\phi(z_0)$$

Por otro lado, parametrizando la frontera ∂B_1 por $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, resulta:

$$\int_{\partial B_1} \varphi(z)dz = \int_0^{2\pi} \varphi(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_0^{2\pi} \varphi(e^{it})ie^{it}dt$$

Por otro lado, desarrollando φ, y omitiendo el argumento de ϕ, se tiene:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{\phi}{z-z_0} + \frac{\phi\overline{z_0}}{1-z\overline{z_0}} = \frac{(1-z\overline{z_0})\phi + (z-z_0)\overline{z_0}\phi}{(z-z_0)(1-z\overline{z_0})} = \frac{\phi - z\overline{z_0}\phi + z\overline{z_0}\phi - z_0\overline{z_0}\phi}{z - z^2\overline{z_0} - z_0 + zz_0\overline{z_0}} = \frac{(1-z_0\overline{z_0})\phi}{z - \overline{z_0}z^2 - z_0 + zz_0\overline{z_0}}$$

Como $z_0 = re^{i\alpha}$, entonces $z_0\overline{z_0} = r^2$ y que $\overline{z_0} = re^{-i\alpha}$. El término a integrar se convierte en:

$$\varphi(e^{it})ie^{it} = \frac{i(1-r^2)\phi(e^{it})e^{it}}{e^{it} - re^{-i\alpha}e^{i2t} - re^{i\alpha} + r^2e^{it}} = \frac{i(1-r^2)\phi(e^{it})}{1 - re^{i(t-\alpha)} - re^{i(\alpha-t)} + r^2} = \frac{i(1-r^2)\phi(e^{it})}{1 + r^2 - r\big(e^{i(t-\alpha)} + e^{i(\alpha-t)}\big)}$$

Finalmente:

$$e^{i(t-\alpha)} + e^{i(\alpha-t)} = \big(\cos(t-\alpha) + i\sin(t-\alpha)\big) + \big(\cos(\alpha-t) + i\sin(\alpha-t)\big) = 2\cos(\alpha-t)$$

Obteniendo:

$$\int_{\partial B_1} \varphi(z)dz = \int_0^{2\pi} \frac{i(1-r^2)\phi(e^{it})}{1+r^2-2r\cos(\alpha-t)}dt$$

Recuperando el resultado obtenido usando la fórmula integral de Cauchy, resulta:

$$2\pi i\phi(z_0) = \int_{\partial B_1} \varphi(z)dz = \int_0^{2\pi} \frac{i(1-r^2)\phi(e^{it})}{1+r^2-2r\cos(\alpha-t)}dt$$

Se define ahora:

$$P(x,y) = P(re^{i\alpha}, e^{it}) = \frac{1-r^2}{2\pi} \frac{1}{1+r^2-2r\cos(\alpha-t)}$$

Sustituyendo en la igualdad hallada y simplificando:

$$\phi(z_0) = \int_0^{2\pi} P(re^{i\alpha}, e^{it})\phi(e^{it})dt$$

Finalmente, separando ϕ en su parte real y compleja, y como u correspondía a la real:

$$u(z_0) + iv(z_0) = \int_0^{2\pi} P(re^{i\alpha}, e^{it})u(e^{it})dt + i\int_0^{2\pi} P(re^{i\alpha}, e^{it})v(e^{it})dt$$

De donde resulta:

$$u(z_0) = \int_0^{2\pi} P(re^{i\alpha}, e^{it})u(e^{it})dt$$

Como e^{it} parametriza ∂B_1, el término $u(e^{it})$ es de hecho la condición de contorno $g(y)$ con $y \in \partial B_1$. Finalmente:

$$u(z_0) = \int_{\partial B_1} P(z_0, y)g(y)dt$$

Tal y como se deseaba.

$\boxed{\textbf{6.5}}$ Considérese el dominio $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$. Supóngase que $\Gamma_a = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 : x > 2\}$ es la parte abierta de la frontera de Ω, y que $\Gamma_c = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2\} \cup \{(0,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ es la parte cerrada de la frontera. Calcule la coordenada y tal que la probabilidad de salir del dominio siguiendo un camino aleatorio que empieza en $(1,y)$ sea máxima.

<u>Solución:</u>

Primero, se deduce el modelo del problema. Se define $u(x)$ $(x \in \mathbb{R}^2)$ como la probabilidad de "salir" de Ω (es decir, tocar por primera vez la frontera en un punto de su parte abierta) siguiendo un camino aleatorio que empieza en x.

Tómese un punto x en el interior de Ω, y una bola B_r suficientemente pequeña (íntegramente contenida en Ω) centrada en él. Entonces, la probabilidad de salir de Ω comenzando en x es igual a la probabilidad de ir de x a un punto de ∂B_r por la probabilidad de salir de Ω desde dicho punto, y sumar (integrar) las contribuciones de todos los puntos de ∂B_r. Si la probabilidad de llegar a cada punto de la frontera es uniforme, y como la probabilidad total es 1, el cálculo anterior es de hecho la media de u en un entorno de x. Así, se tiene:

$$u(x) = \fint_{\partial B_r} u(y)dS(y)$$

Reordenando, multiplicando por $\frac{2n}{r^2}$ y haciendo $r \to 0$:

$$0 = \lim_{r\to 0} \frac{2n}{r^2} \fint_{\partial B_r} \big(u(y) - u(x)\big)dS(y) \quad \Rightarrow \quad \Delta u(x) = 0$$

Las condiciones de contorno son sencillas de obtener. Si el camino empieza en la parte abierta, la probabilidad de tocar por primera vez la frontera en la parte abierta es 1. Por otro lado, para la parte cerrada es 0.

En adelante, los elementos de $\mathbb{R}^2$ se denotarán por (x,y) (nótese que antes x e y denotaban dichos elementos, y ahora denotan sus componentes). Así, la EDP a resolver es:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & (x,y) \in \Omega \\ u = 1 & (x,y) \in \Gamma_a \\ u = 0 & (x,y) \in \Gamma_c \end{cases}$$

Para resolver este problema, se recurrirá al siguiente resultado:

Lema: Sea $w : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ armónica y $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfa. Entonces $u = w \circ \varphi$ es armónica.

La idea consiste en usar φ para "simplificar" el dominio Ω y entonces buscar w armónica que satisfaga las nuevas condiciones de contorno. En el desarrollo que sigue, cuando se usen coordenadas polares, se escogerá la determinación del argumento que tiene el origen de los ángulos en el eje horizontal, y que toma valores en $[0, 2\pi]$.

La parte cerrada de la frontera de Ω "tiene forma de L". "Desdoblando" el plano, puede enviarse el eje vertical al eje horizontal negativo. Así, la frontera es ahora el eje horizontal, si bien el punto de cambio de abierta a cerrada no tiene por que hallarse en el origen. Bastará con desplazar el plano horizontalmente para arreglarlo.

La función $\overline{\varphi}(z) = z^2$ expresada en coordenadas polares es $\overline{\varphi}(r,\theta) = r^2\angle 2\theta$, que manda la semirecta $\{(r,\theta) : r \geq 0, \theta = \pi/2\}$ a la semirecta $\{(r,\theta) : r \geq 0, \theta = \pi\}$, el segmento $\{(r,\theta) : 0 \leq r \leq 2, \theta = 0\}$ al segmento $\{(r,\theta) : 0 \leq r \leq 4, \theta = 0\}$, y la semirecta $\{(r,\theta) : r > 2, \theta = 0\}$ a la semirecta $\{(r,\theta) : r > 4, \theta = 0\}$. Componiendo con un desplazamiento de 4 unidades hacia la izquierda, se obtiene $\varphi(z) = z^2 - 4$, y por lo tanto:

$$\varphi(\Gamma_a) = \{(x,y) : x > 0\}$$
$$\varphi(\Gamma_c) = \{(x,y) : x \leq 0\}$$

Y el problema transformado por φ y en términos de las coordenadas polares es:

$$\begin{cases} \Delta w = 0 & (r,\theta) \in [0,\infty) \times [0,\pi] \\ w(r,0) = 1 \\ w(r,\pi) = 0 \end{cases}$$

El Laplaciano de w en coordenadas polares es:

$$\Delta w = w_{rr} + \frac{1}{r}w_r + \frac{1}{r^2}w_{\theta\theta}$$

Y se desea que sea nulo. Cualquier función independiente de r y lineal en θ satisface dicha condición. Así:

$$w(r,\theta) = k\theta + c$$

Imponiendo $w(r,0) = 1$ se obtiene $c = 1$, e imponiendo $w(r,\pi) = 0$ se obtiene $k = -1/\pi$. Finalmente, transformando a cartesianas:

$$w(x,y) = \frac{1}{\pi}\left\{\pi - \arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right\}$$

Por el lema la composición $u = w \circ \varphi$ es armónica. Por la construcción de ambas funciones, satisface las condiciones de contorno, y resuelve el problema.

Transformando φ a cartesianas:

$$\varphi(z) = z^2 - 4 \;\Rightarrow\; \varphi(x,y) = (x+iy)^2 - 4 = x^2 + 2xyi - y^2 - 4 = [x^2 - y^2 - 4] + i[2xy] = X + iY$$

Componiendo $w \circ \varphi$ se obtiene u:

$$u(x,y) = (w \circ \varphi)(x,y) = w(\varphi(x,y)) = w(X,Y) = \frac{1}{\pi}\left\{\pi - \arctan\left(\frac{Y}{X}\right)\right\} = \frac{1}{\pi}\left\{\pi - \arctan\left(\frac{2xy}{x^2-y^2-4}\right)\right\}$$

Para la segunda parte, considérese la restricción de u a la recta $x = 1$:

$$f(y) = u(1,y) = \frac{1}{\pi}\left\{\pi - \arctan\left(\frac{-2y}{y^2+3}\right)\right\}$$

Derivando respecto de y (usando $(\arctan(z))' = 1/(z^2+1)$) e igualando a 0:

$$-\pi f'(y) = \frac{1}{\left(\frac{-2y}{y^2+3}\right)^2 + 1}\frac{(-2)(y^2+3) - (-2y)(2y)}{(y^2+3)^2} = \frac{-2y^2 - 6 + 4y^2}{4y^2 + (y^2+3)^2} = \frac{2y^2-6}{4y^2+(y^2+3)^2} = 0$$

Obteniendo:

$$2y^2 - 6 = 0 \;\Rightarrow\; y^2 = 3 \;\Rightarrow\; y = \pm\sqrt{3}$$

La solución negativa no pertenece al dominio de la función. Así, $y = \sqrt{3}$ es un extremo relativo de la probabilidad de salida sobre la recta $x = 1$. Como $u(1,0) = 0$ y $u(1,+\infty) = 0$ (intuitivamente, en el infinito, el eje horizontal esta "muy lejos" y el vertical está a 2 unidades de distancia), entonces en $y = \sqrt{3}$ debe ser un máximo.

Comentario:

El mismo problema tiene solución para dominios y condiciones de contorno arbitrarias, y se resuelve análogamente a este ejercicio. La idea radica en que puede hallarse una aplicación holomorfa entre un abierto simplemente conexo y el semiplano superior. Existen teoremas que permiten transformar adecuadamente la frontera del abierto también. Para las condiciones de contorno, en el caso en que las partes abiertas y cerradas de la frontera se definen a trozos, basta con superponer soluciones.

$\boxed{\textbf{6.6}}$ Una imagen en blanco y negro es una función $u : \Omega \in \mathbb{R}^2 \to [0, 255] \in \mathbb{R}$. El valor $u(x, y)$ representa el nivel de gris de la imagen en el punto (x, y), donde 0 corresponde al color negro y 255 al blanco. Si la imagen es digital (o discreta) y rectangular, entonces su dominio de definición viene dado por la discretización de un rectángulo:

$$\{(x_i, y_j) = (ih, ij) : i = 1, ..., I; j = 1, ..., J\}$$

Con $h > 0$. El punto (x_i, y_j) es el centro de un píxel cuadrado de tamaño $h \times h$ (*pixel is the combination of the words "pix" (slang for "picture") and "el" (that stands for "element"))*. Diremo que la imagen tiene medida $I \times J$.

A veces, cuando se transmiten imágenes, se pierde un píxel. Si se trata de un píxel interior (es decir, $1 < i < I$ y $1 < j < J$), una forma natural de reasignarle un valor es tomando la media de su entorno:

$$u(x_i, y_j) = \frac{1}{4}\Big\{u(x_{i+1}, y_j) + u(x_{i-1}, y_j) + u(x_i, y_{j+1}) + u(x_i, y_{j-1})\Big\}$$

A los píxeles no interiores se les llamara píxeles de contorno (son los que forman el borde de la imagen rectangular).

Se dirá que una imagen digital es ideal si, para todo píxel interior, satisface la propiedad de la media enunciada anteriormente (cada pixel es la media de los de su entorno). Equivalentemente, $\Delta_h(x_i, y_j) = 0$ en cada pixel interior, donde:

$$\Delta_h u(x_i, y_j) := \frac{4}{h^2}\Big\{\frac{1}{4}\Big\{u(x_{i+1}, y_j) + u(x_{i-1}, y_j) + u(x_i, y_{j+1}) + u(x_i, y_{j-1})\Big\} - u(x_i, yj)\Big\}$$

Y se denomina Laplaciano discreto de u.

Demuestre que, conocidos los píxeles de contorno de una imagen digital, existe una única imagen digital ideal que los tiene como valores de contorno.

<u>Solución:</u>

Cada píxel interior tiene asociada una ecuación que depende linealmente de los píxeles de su entorno. Los de borde, por otro lado, tienen un valor predeterminado. Así, el problema en cuestión viene descrito por una ecuación de la forma:

$$AX = B$$

Donde A es una matriz y X y B son vectores con las dimensiones pertinentes (ver comentario del problema).

Lo más natural para probar existencia y unicidad de solución sería comprobar que la matriz A es no singular. Para ello, habría que construir explícitamente la matriz y calcular su determinante. La primera de las dos tareas es asequible, pero la segunda es significativamente más complicada (ver comentario del problema).

Alternativamente, se usará:

$$\exists!\, AX = B \quad \Leftrightarrow \quad \exists!\, AX = 0$$

Es decir, se probara que existe una única imagen ideal con valores de borde nulos.

Nótese que la imagen en cuestión no puede tener máximos en su interior. En efecto, supóngase que existe un píxel interior (x^*, y^*) tal que $u(x^*, y^*)$ es un máximo local. Como $u(x^*, y^*)$ es la media de los píxeles de su entorno, y dichos píxeles tienen un valor igual o menor a él, por fuerza tienen que tener el mismo valor (la media de n números no puede dar un número mayor que todos ellos). Así, el valor máximo se propaga hasta el borde de la imagen, donde u vale 0. Análogamente sucede con los mínimos, concluyendo que la imagen debe ser idénticamente nula.

<u>Comentario:</u>

A continuación se construye el sistema lineal del problema.

Se define las cantidad $N = IJ$. Así mismo, se define el vector de incógnitas $X \in \mathbb{R}^N$:

$$X = (x_1, ..., x_k, ..., x_N)$$

Donde $x_k = u_{ab}$ con $a = (k-1) \div J + 1$ ($\div$ denota la división entera) y $b = k - aI$. Es decir, los primeros I elementos de X corresponden a la primera fila de píxeles, los siguientes I elementos a la segunda, etcétera.

Considérese el conjunto $C = \{k : k \leq I\} \cup \{k : k > N - I\} \cup \{k : k \mid mI\} \cup \{k : (k-1) \mid mI\}$ ($a \mid mI$ denota a divide a un múltiplo entero de I). Entonces x_k es un píxel de borde si $k \in C$.

De la ecuación planteada, se tiene que:

$$\sum_j a_{ij} x_j = b_i$$

Es decir, la i-ésima fila de la matriz A corresponde a la ecuación que rige al i-ésimo píxel del vector X. Nótese que los píxeles adyacentes por filas son contiguos en el vector X, y los adyacentes por columnas están separados por I componentes. Vale la pena entonces definir $D_i = \{i+1, i-1, i+I, i-I\}$ (conjunto de índices asociado a los píxeles adyacentes a x_i).

Para los píxeles de borde, dicha ecuación es:

$$x_i = b_i$$

Y b_i corresponde al valor prescrito a priori. Para los píxeles interiores, dicha ecuación es:

$$4x_i = x_{i+1} + x_{i-1} + x_{i+I} + x_{i-I} \quad \Rightarrow \quad 4x_i - x_{i+1} - x_{i-1} - x_{i+I} - x_{i-I} = 0 = b_i$$

Con esta información, es sencillo describir los coeficientes de la matriz A según:

$$\text{si } i \in C,\ a_{ij} = \begin{cases} 1 & j = i \\ 0 & j \neq i \end{cases} \qquad\qquad \text{si } i \notin C,\ a_{ij} = \begin{cases} 4 & j = i \\ -1 & j \in D_i \\ 0 & j \neq i,\ j \notin D_i \end{cases}$$

Y la definición anterior pone de manifiesto que calcular el determinante de la matriz no es trivial.

$\boxed{6.7}$ Las partículas de una sustancia se mueven en $\mathbb{R}$ con longitud de paso h y paseo aleatorio (hacia derecha e izquierda) con probabilidad $p = 1/2 + ah$ de ir a la derecha y probabilidad $p = 1/2 - ah$ de ir a la izquierda ($a > 0$ constante). El paso temporal es $\Delta t = h^2$.

a) Tomando el desarrollo de Taylor de la concentración de partículas $u(x,t)$ en x a tiempo t, demuestre que la ecuación que rige u es:

$$u_t - \frac{1}{2}u_{xx} + 2au_x = 0,\ x \in \mathbb{R}, t > 0$$

En adelante, supóngase que se resuelve la ecuación anterior con condición inicial $u(x,0) = g(x)$ con g impar, estrictamente creciente y acotada en $\mathbb{R}$.

b) Vista la esencia del movimiento aleatorio en a), discuta el signo de $u(0,t)$ para $t > 0$.

c) Sea $v(y,t) := u(y + 2at, t)$. Demuestre que:

$$\begin{cases} v_t - \frac{1}{2}v_{yy} = 0 & (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,+\infty) \\ v(\cdot, 0) = g \end{cases}$$

Deduzca que v es impar en y y que $v_y > 0\, \forall y \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, $u_x > 0$ y u es subarmónica ($u_t - \frac{1}{2}u_{xx} < 0$). Halle ahora rigurosamente el signo de $u(0,t)$ para todo $t > 0$.

Recordatorio:

En general, para f y g arbitrarias, la regla de derivación para un producto de convolución es:

$$\mathcal{D}(f * g) = (\mathcal{D}f) * g = f * (\mathcal{D}g)$$

Solución:

a) Tomando el desarrollo de Taylor de la concentración de partículas $u(x,t)$ en x a tiempo t, demuestre que la ecuación que rige u es:

$$u_t - \frac{1}{2}u_{xx} + 2au_x = 0,\ x \in \mathbb{R}, t > 0$$

Discretizando la recta real y fijando un punto (x,t), se plantea qué concentración de partículas habrá en $(x, t + \Delta t)$. Como no se contempla la posibilidad de que una partícula no se mueva, todas las partículas que estaban en x en el instante t se habrán desplazado a la derecha o a la izquierda. Así, todas las partículas presentes en x en el instante $t + \Delta t$ se deberán a las contribuciones de sus puntos vecinos (ponderando las concentraciones del instante previo según las probabilidades de cada movimiento).

El vecino de la derecha contribuirá con la probabilidad correspondiente a un salto a la izquierda, y viceversa para el de la derecha. Entonces:

$$u(x, t + \Delta t) = \left(\frac{1}{2} - ah\right)u(x+h,t) + \left(\frac{1}{2} + ah\right)u(x-h,t)$$

Reordenando lo anterior:

$$u(x, t+\Delta t) = \frac{1}{2}\big[u(x+h,t) + u(x-h,t)\big] - ah\big[u(x+h,t) - u(x-h,t)\big]$$

Restando $u(x,t)$ a cada lado de la igualdad:

$$u(x,t+\Delta t) - u(x,t) = \frac{1}{2}\big[u(x+h,t) - 2u(x,t) + u(x-h,t)\big] - ah\big[u(x+h,t) - u(x-h,t)\big]$$

Dividiendo a ambos lados por Δt, y como $\Delta t = h^2$, resulta:

$$\frac{u(x,t+\Delta t) - u(x,t)}{\Delta t} = \frac{1}{2}\frac{u(x+h,t) - 2u(x,t) + u(x-h,t)}{h^2} - a\frac{u(x+h,t) - u(x-h,t)}{h}$$

Finalmente, por Taylor, y como $\Delta t \to 0 \;\; \Rightarrow \;\; h \to 0$, se tienen las relaciones:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{u(x,t+\Delta t) - u(x,t)}{\Delta t} = u_t(x,t)$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{u(x+h,t) - 2u(x,t) + u(x-h,t)}{h^2} = u_{xx}(x,t)$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{u(x+h,t) - u(x-h,t)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h,t) - u(x,t)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{u(x,t) - u(x-h,t)}{h} = 2u_x(x,t)$$

Obteniendo la ecuación del enunciado.

Como se indica en el enunciado, en adelante se supone que se ha resuelto dicha ecuación con condición inicial $u(x,0) = g(x)$, donde g es impar y estrictamente creciente y acotada en $\mathbb{R}$.

b) Vista la esencia del movimiento aleatorio en a), discuta el signo de $u(0,t)$ para $t>0$.

Primero, nótese que la condición de imparidad supone aceptar la posibilidad de concentraciones negativas. No obstante, como g está acotada (por M y $-M$ por ejemplo), puede interpretarse que la concentración real toma valores positivos (entre 0 y $2M$) y se desplaza hacia abajo (M unidades) para explotar la imparidad.

Así, inicialmente, $u(0,0)=0$ (por la imparidad de g). Intuitivamente, como en el eje real negativo hay concentraciones estrictamente negativas, y las partículas viajan hacia la derecha con mayor probabilidad que hacia la izquierda, cabe esperar que $u(0,t)<0$.

c) Sea $v(y,t):=u(y+2at,t)$. Demuestre que:

$$\begin{cases} v_t - \frac{1}{2}v_{yy} = 0 & (x,t)\in\mathbb{R}\times(0,+\infty) \\ v(\cdot,0)=g \end{cases}$$

Deduzca que v es impar en y y que $v_y>0\ \forall y\in\mathbb{R}$. Por lo tanto, $u_x>0$ y u es subarmónica ($u_t-\frac{1}{2}u_{xx}<0$). Halle ahora rigurosamente el signo de $u(0,t)$ para todo $t>0$.

Aplicando la regla de la cadena, las derivadas parciales de v son:

$$v_t(y,t) = (u(y+2at,t))_t = u_x(y+2at,t)\cdot 2a + u_t(y+2at,t)$$
$$v_y(y,t) = u_x(y+2at,t)$$
$$v_{yy}(y,t) = u_{xx}(y+2at,t)$$

Y por lo tanto, como u satisface $u_t-\frac{1}{2}u_{xx}+2au_x=0$, se tiene:

$$v_t(y,t)-\frac{1}{2}v_{yy}(y,t) = u_x(y+2at,t)\cdot 2a + u_t(y+2at,t) - \frac{1}{2}u_{xx}(y+2at,t) = 0 \quad\Rightarrow\quad v_t-\frac{1}{2}v_{yy}=0$$

En cuanto a las condiciones iniciales:

$$v(y,0)=u(y,0)=g(y)$$

Obteniendo el problema enunciado.

Con este cambio de variable, se ha reducido la ecuación inicial a la ecuación del calor. Por [R9], su solución es:

$$v(x,t)=\big(\Gamma_{1/2}(\cdot,t)*g(\cdot)\big)(x)$$

Como el núcleo de Gauss presenta simetría par, y g es impar, la imparidad de v es inmediata. En cuanto a la derivada:

$$v_y=\big(\Gamma_{1/2}(\cdot,t)*g'(\cdot)\big)(x)$$

Como $\Gamma_D>0$ (siempre) y $g'>0$ (porque g es estrictamente creciente), se deduce que $v_y>0$. Así:

$$0<v_y(y,t)=u_x(y+2at,t) \quad\Rightarrow\quad u_x>0$$

Por último, se desea probar formalmente que $u(0,t)<0$. De la discusión anterior:

$$u_t-\frac{1}{2}u_{xx}=-2au_x<0$$

Ya que $a>0$. Entonces se tiene:

$$\begin{cases} u_t-\frac{1}{2}u_{xx}<0 \\ v_t-\frac{1}{2}v_{xx}=0 \\ u(x,0)=v(x,0)=g(x) \end{cases}$$

Por el principio de comparación (ver [R11]), $u\le v$. Definiendo $w=u-v$, y se tiene que $w\le 0$. Tan solo queda descartar la igualdad. Restando las ecuaciones anteriores, se tiene que $w_t-\frac{1}{2}w_{xx}<0$. Supóngase que existe (x^*,t^*) tal que $w(x^*,t^*)=0$. En tal caso, es un máximo, y por lo tanto:

$$\left.\begin{matrix} w_t(x^*,y^*)=0 \\ \Delta w(x^*,y^*)\le 0 \end{matrix}\right\} \quad\Rightarrow\quad w_t(x^*,y^*)-\Delta w(x^*,y^*)\ge 0$$

Obteniendo una contradicción, que surge de haber supuesto que había un punto en el que se alcanza el valor máximo. Así, $w<0$ y $u<v$. Finalmente:

$$v(0,t)=c\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-y^2}{ct}}g(y)dy$$

Donde $c\in R>0$ son las constantes pertinentes asociadas al núcleo de Gauss con $D=1/2$. Como el término exponencial es par, y g es impar, el producto es impar y la integral es nula. Así:

$$u(0,t)<v(0,t)=0$$

Tal y como se había anticipado en el apartado anterior.

$\boxed{\mathbf{6.8}}$ ¿Qué regularidad tienen las soluciones de $u_{xx} - 2u_{xy} + 2u_{yy} = 0$ en un abierto de $\mathbb{R}^2$? ¿Y las de $u_{xx} - 3u_{xy} + 2u_{yy} = 0$?

Solución:

Considérese la EDP:

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} = 0$$

El objetivo es realizar un cambio de variables lineal que transforme la ecuación anterior en algo más familiar. Se denotará:

$$M = D^2u = \begin{pmatrix} u_{xx} & u_{xy} \\ u_{xy} & u_{yy} \end{pmatrix} \qquad\qquad N = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$$

Así, se tiene:

$$Lu = tr(MN) = Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} = 0$$

Como A es una matriz simétrica, el teorema de descomposición espectral garantiza la existencia de una matriz $\mathcal{O}$ ortogonal ($\mathcal{O}\mathcal{O}^T = \mathcal{O}\mathcal{O}^{-1} = \mathbb{I}$) tal que:

$$N = \mathcal{O}\mathcal{D}\mathcal{O}^T = \mathcal{O}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\mathcal{O}^T$$

Es decir, existe una base en la que N diagonaliza. Entonces, se tiene:

$$Lu = tr(MN) = tr(M\mathcal{O}\mathcal{D}\mathcal{O}^T) = tr(\mathbb{I}M\mathcal{O}\mathcal{D}\mathcal{O}^{-1}) = tr(\mathcal{O}\mathcal{O}^{-1}M\mathcal{O}\mathcal{D}\mathcal{O}^{-1}) = tr(\mathcal{O}^{-1}M\mathcal{O}\mathcal{D})$$

Donde se ha usado que $tr(\mathcal{O}X\mathcal{O}^{-1}) = tr(X)$.

Las columnas de $\mathcal{O}$ corresponden a los vectores que forman la base $\mathcal{B}'$ en la que N diagonaliza. Es decir, si $\mathcal{B}$ es la base original, $\mathcal{O}$ es la matriz del cambio de $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$. Denotando por $v = (x,t)$ un vector de la base $\mathcal{B}$ y $v' = (x',y')$ su análogo en $\mathcal{B}'$, se define:

$$\tilde{u}(v') := u(\mathcal{O}^{-1}v)$$

Y se tiene:

$$D^2\tilde{u} = \mathcal{O}^{-1}(D^2u)\mathcal{O}$$

Finalmente:

$$Lu = tr(D^2\tilde{u}\mathcal{D}) = \lambda_1 u_{x'x'} + \lambda_2 u_{y'y'} = 0$$

Denotando $s_1 = sign(\lambda_1)$ y $s_2 = sign(\lambda_2)$, y reescalando según $\tilde{x}' = x'/\sqrt{|\lambda_1|}$ y $\tilde{y}' = y'/\sqrt{|\lambda_2|}$ se obtiene:

$$s_1 u_{\tilde{x}'\tilde{x}'} + s_2 u_{\tilde{y}'\tilde{y}'} = 0$$

Es decir, el resultado es la ecuación de Laplace si $s_1 = s_2$ y la de ondas si $s_1 \neq s_2$. Para conocer dichos signos bastará con hallar los valores propios de la matriz N.

Aplicando lo anterior a este problema, para la primera ecuación se tiene:

$$u_{xx} - 2u_{xy} + 2u_{yy} = 0 \;\Rightarrow\; N = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \det(N - \lambda\mathbb{I}) = 0 \;\Rightarrow\; (1-\lambda)(2-\lambda) - 2 = 0$$

Desarrollando:

$$\lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Como $\sqrt{5} < 3$, ambos valores propios tienen el mismo signo y la ecuación corresponde a la de Laplace.

Análogamente, para la segunda ecuación:

$$u_{xx} - 3u_{xy} + 2u_{yy} = 0 \;\Rightarrow\; N = \begin{pmatrix} 1 & -3/2 \\ -3/2 & 2 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \det(N - \lambda\mathbb{I}) = 0 \;\Rightarrow\; (1-\lambda)(2-\lambda) - 9/4 = 0$$

Desarrollando:

$$\lambda^2 - 3\lambda - 1/4 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda = \frac{3 \pm \sqrt{10}}{2}$$

Como $\sqrt{10} > 3$, los valores propios tienen signo diferente, y la ecuación corresponde a la de ondas.

La ecuación de Laplace está asociada al problema de la difusión, que tiene un efecto regularizante sobre la condición inicial, y la solución es de hecho $\mathcal{C}^\infty$. Por otro lado, la ecuación de ondas sencillamente propaga las condiciones iniciales, con lo que la solución hereda la regularidad de la condición inicial.

La regularidad es una propiedad que se conserva con las transformaciones realizadas. Finalmente, respondiendo a las cuestiónes del enunciado, las soluciones de $u_{xx} - 2u_{xy} + 2u_{yy} = 0$ son $\mathcal{C}^\infty$, mientras que las de $u_{xx} - 3u_{xy} + 2u_{yy} = 0$ tienen la misma regularidad que la condición inicial pertinente.

TEMA 7 **Más Laplaciano**

7.1 Considere el dominio $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 4\}$. Sea u la solución del problema:

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{en } \Omega \times (0, +\infty) \\ u_\nu(x, y, t) = 0 & \text{en } \{x^2 + y^2 = 1\} \times (0, +\infty) \\ u_\nu(x, y, t) = \frac{15}{2} xy & \text{en } \{x^2 + y^2 = 4\} \times (0, +\infty) \\ u(x, y, 0) = g(x, y) & \text{en } \Omega \times \{0\} \end{cases}$$

Donde:

$$g(x, y) = 15xy\left(1 - \frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$$

a) ¿Es u par o impar en x? ¿Y en y? Justifique la respuesta. ¿Que relación hay entre $u(3/4, 3\sqrt{3}/4, 100)$ y $u(-3/4, -3\sqrt{3}/4, 100)$?
b) ¿Se conserva en el tiempo la temperatura media?
c) Calcule los equilibrios térmicos del problema.
d) ¿Cuánto vale $\lim_{t \to +\infty} u(x, y, t)$?

$\boxed{\textbf{7.2}}$ Dado un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, halle la interpretación probabilística (en términos de costos o pagos durante el paseo aleatorio discreto) para la solución del problema:

$$\begin{cases} -\Delta u = 1 & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

Cuando $\Omega = B_2 - \overline{B_1} \subset \mathbb{R}^n$, halle los puntos de Ω donde el coste es máximo.

$\boxed{\textbf{7.3}}$ Dado el problema:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 1 & 0 < x < 1,\ t > 0 \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 & t > 0 \\ u(x,0) = 0 & 0 < x < 1 \end{cases}$$

a) Determine la solución estacionaria $u^s(x)$ que satisface las condiciones de contorno.
b) Demuestre que $u(x,t) \leq u^s(x)$ para todo $t > 0$.
c) Determine $\beta > 0$ tal que $u(x,t) \geq (1 - e^{-\beta t})u^s(x)$.
d) Deduzca que $u(x,t) \to u^s(x)$ uniformemente en $[0,1]$ cuando $t \to +\infty$.
e) Resuelva el problema usando separación de variables.

$\boxed{\textbf{7.4}}$ En $B_1^+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1,\ y > 0\}$, sea u la solución del problema:

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0 & \text{en } B_1^+ \\ u(x,y) = x^2 & \text{en } \partial B_1^+,\ y > 0 \\ u_y(x,0) = 0 & -1 < y < 1 \end{cases}$$

Calcule $u(0,0)$.

$\boxed{\textbf{7.5}}$ Sea $g : [, \infty) \to \mathbb{R}$ continua y acotada. Usando el núcleo de Gauss sobre todo $\mathbb{R}$, halle la solución del problema:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & x > 0 \; t > 0 \\ u(0,t) = 0 & t \geq 0 \\ u(x,0) = g(x) & x \geq 0 \end{cases}$$