Segona Pràctica d'Àlgebra Lineal Numèrica

Àlex Batlle Casellas

6 de maig de 2019

1 Demostració.

Objectiu. Volem demostrar que

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{m}(p_q(x_i)-y_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{m}(r_q(x_i)-y_i)^2} \quad \forall r_q(x) \in \mathbb{R}_q[x]$$

$$\iff p_q(x) \text{ és solució de les equacions normals.}$$

Observem que demostrar això es equivalent a demostrar que el vector $a^* \in \mathbb{R}^{q+1}$ minimitza $||Aa-y||_2$ per tota $a \in \mathbb{R}^{q+1}$ si i només si $A^t(Aa^*-y)=0$, amb $A \in \mathcal{M}_{m\times q+1}(\mathbb{R})$ les últimes $q+1$ columnes de la matriu de Vandermonde associada al vector x donat. Aquesta demostració la vam fer a classe i la reproduïm aquí:

$\Longleftarrow$) Suposem que a^* compleix $A^t(Aa^*-y)=0$. Aleshores, prenem $a \in \mathbb{R}^{q+1}$, i cal veure que $||Aa-y||_2 \geq ||Aa^*-y||_2$. Veurem un resultat equivalent amb els quadrats respectius de cada costat, i tenint en compte que $||u-v||_2 = |-1|||v-u||_2 = ||v-u||_2$. Escrivim $y-Aa = y-Aa^*+A(a^*-a)$. Aleshores,

$$||y-Aa||_2^2 = \langle y-Aa, y-Aa\rangle = \langle y-Aa^*+A(a^*-a), y-Aa^*+A(a^*-a)\rangle =$$

$$||y-Aa^*||_2^2 + ||A(a^*-a)||_2^2 + 2\langle y-Aa^*, A(a^*-a)\rangle = ||y-Aa^*||_2^2 + ||A(a^*-a)||_2^2 +$$

$$2\left\langle A^t(y-Aa^*), a^*-a\right\rangle \geq ||y-Aa^*||_2^2.$$

$\Longrightarrow$) Suposem que a^* minimitza la norma que volem i que $A^t(y-Aa^*)=z\neq 0$, i arribem a un absurd. $\forall\epsilon>0$ prenem $a=a^*+\epsilon z$. Aleshores,

$$||y-Aa||_2^2 = ||y-A(a^*+\epsilon z)||_2^2 = \langle y-Aa^*-\epsilon Az, y-Aa^*-\epsilon Az\rangle = ||y-Aa^*||_2^2$$

$$+\epsilon^2||Az||_2 - 2\epsilon\langle y-Aa^*, Az\rangle = ||y-Aa^*||_2^2 + \epsilon^2||Az||_2^2 - 2\epsilon||z||_2^2 = ||y-Aa^*||_2^2 -$$

$$\epsilon(2||z||_2^2 - \epsilon||Az||_2^2) \implies ||y-Aa||_2^2 < ||y-Aa^*||_2, \text{ on tenim una contradicció.}$$

Per tant, agafant a^* la solució de les equacions normals, queda demostrada la proposició. □

2 Justificació del mètode emprat.

Hem utilitzat el mètode de descomposició $A = QR$ per trobar l'ajustament per mínims quadrats. Aquest està justificat doncs, si plantegem altre cop les equacions en forma matricial, tenim

$$\begin{pmatrix} x_1^q & x_1^{q-1} & \cdots & x_1 & 1 \\ x_2^q & x_2^{q-1} & \cdots & x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_m^q & x_m^{q-1} & \cdots & x_m & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_q \\ a_{q-1} \\ \vdots \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Les equacions normals d'aquest sistema són de la forma (dient A a la matriu del sistema, a al vector de coeficients i y al vector de valors de la funció) $A^tAa = A^ty$. Si descomposem $A = QR$ i tornem a escriure les equacions normals, queda (sabent que Q és ortogonal)

$$(QR)^tQRa = (QR)^ty \iff R^tQ^tQRa = R^tQ^ty \iff Ra = Q^ty,$$

i per tant, resoldre el sistema triangular $Ra = Q^ty$ és equivalent a resoldre $A^tAa = A^ty$.

3 Especificació de la funció `polminquad`.

Objectius. La funció `polminquad` té com a objectiu calcular l'ajustament polinòmic pel mètode de mínims quadrats d'una taula de dades $(x_i, y_i)_{i=1,\ldots,m}$ donada. La funció utilitza la descomposició QR per resoldre el sistema d'equacions normals, i per comprovar fins a quin nivell la descomposició és efectiva, treu per pantalla la norma del residu $||Q^tQ - Id_{q+1}||_\infty$ (variable `residu_Q_ortogonal`). Si es demana, la funció dibuixa el polinomi trobat.

Paràmetres d'entrada.

- `x`: vector d'abcisses de la taula de dades donada.
- `y`: vector d'ordenades de la taula de dades donada.
- `grau`: grau del polinomi que es vol trobar pel mètode de mínims quadrats.
- `plt`: paràmetre d'entrada opcional. Si apareix, indica el nombre de punts equiespaiats amb els que es dibuixarà la gràfica del polinomi.

Paràmetres de sortida.

- `coefs`: vector de coeficients del polinomi trobat.
- `norm2Res`: norma-2 del residu que dona el polinomi trobat; si a^* identifica el vector `coefs`, aquest paràmetre de sortida val $||Aa^* - y||_2$.