1. L'anomenat *mètode de Crout* és un mètode compacte (és a dir, sense pivotatge ni intercanvis de fileres) que descomposa una matriu A com a un producte LDU, on L és una matriu triangular inferior amb 1's a la diagonal, D és una matriu diagonal i U és una matriu triangular superior amb 1's també a la diagonal. És a dir,

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ \ell_{21} & 1 & & & & \\ \ell_{31} & \ell_{32} & 1 & & & \\ \ell_{41} & \ell_{42} & \ell_{43} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ \ell_{n1} & \ell_{n2} & \ell_{n3} & \cdots & \ell_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix}, \qquad U = \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} & u_{14} & \cdots & u_{1n} \\ & 1 & u_{23} & u_{24} & \cdots & u_{2n} \\ & & 1 & u_{34} & \cdots & u_{3n} \\ & & & 1 & \ddots & \vdots \\ & & & & \ddots & u_{n-1,n} \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

i $D = \operatorname{diag}\{d_1, d_2, \dots, d_n\}$. Aleshores,

(i) Doneu l'algorisme que determina les matrius L, D i U.

(ii) Demostreu que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

(iii) Calculeu el nombre d'operacions que es necessita per a fer aquesta descomposició. Preneu *1 operació = 1 producte/divisió + 1 suma/resta*. Podeu usar *(ii)* si us fes falta.

Solució:

(i) Si multipliquem LDU s'obté:

$$\begin{pmatrix} d_1 & d_1u_{12} & d_1u_{13} & \cdots & d_1u_{1n} \\ d_1\ell_{21} & d_1u_{12}\ell_{21} + d_2 & d_1u_{13}\ell_{21} + d_2u_{23} & \cdots & d_1u_{1n}\ell_{21} + d_2u_{2n} \\ d_1\ell_{31} & d_1u_{12}\ell_{31} + d_2\ell_{32} & d_1u_{13}\ell_{31} + d_2u_{23}\ell_{32} + d_3 & \cdots & d_1u_{1n}\ell_{31} + d_2u_{2n}\ell_{32} + d_3u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_1\ell_{n1} & d_1u_{12}\ell_{n1} + d_2\ell_{n2} & d_1u_{13}\ell_{41} + d_2u_{23}\ell_{42} + d_3\ell_{43} & \cdots & \sum_{k=1}^{n-1} d_ku_{kn}\ell_{nk} + d_n \end{pmatrix}.$$

Igualant a A i aïllant, ens queda la següent recurrència: a cada pas j, amb $j = 1, 2, \cdots, n$ calculem l'element d_j fde la matriu diagonal D, els elements de la columna j-èsima d'L i els de la filera j-èsima d'U:

$$\begin{aligned} d_j &= a_{jj} - \sum_{p=1}^{j-1} d_p u_{pj} \ell_{jp}, \\ \ell_{ij} &= \frac{1}{d_j}\left(a_{ij} - \sum_{p=1}^{j-1} d_p u_{pj} \ell_{ip}\right), \qquad i = j+1 \div n, \\ u_{jk} &= \frac{1}{d_j}\left(a_{jk} - \sum_{p=1}^{j-1} d_p u_{pk} \ell_{jp}\right), \qquad k = j+1 \div n. \end{aligned}$$

(ii) Usem inducció. Per a $n = 1$ es satisfà trivialment. Suposem que es compleix per a n. Vegem que, aleshores, també és cert per a $n+1$. En efecte,

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 =$$
$$\frac{n+1}{6}\left(n(2n+1) + 6(n+1)\right) = \frac{n+1}{6}\left(2n^2+7n+6\right) = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

(iii) A cada pas j fem les següents operacions:

$$\begin{array}{l} 2(j-1) \\ (2(j-1)+1)\cdot(n-(j+1)+1) = (2j-1)(n-j) \\ (2(j-1)+1)\cdot(n-(j+1)+1) = (2j-1)(n-j), \end{array}$$

és a dir, $2(2j(n+1)-(n+1)-2j^2)$. Si ara sumem pels n passos de l'algorisme:

$$\sum_{j=1}^{n} 2\left((2j(n+1)-(n+1)-2j^2\right) = 4(n+1)\sum_{j=1}^{n} -2(n+1)n - 4\sum_{j=1}^{n} j^2 =$$
$$4(n+1)\frac{n(n+1)}{2} - 2(n+1)n - 4\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} =$$
$$2n(n+1)\left((n+1) - 1 - \frac{2n+1}{3}\right) = \frac{2}{3}n(n+1)(n-1) = \frac{2}{3}n(n^2-1),$$

o sigui, $\mathcal{O}(2n^3/3)$.

2. Per a petites oscil·lacions, el període d'un pèndol ve donat per la fórmula $T = 2\pi\sqrt{\ell/g}$, on ℓ es la longitud del pèndol i g és la constant del camp gravitatori a la terra.

(i) Si suposem g exacta, sense error, determineu amb quin error relatiu (en tant percent) aproximat cal determinar ℓ de manera que l'error relatiu al període T sigui de l'1%. Suposeu sempre que les operacions s'efectuen sense error.

(ii) Feu el mateix si l'error prové de la determinació de g (suposant ara ℓ mesurada exactament).

(iii) Quin dels dos errors ($|e_r(g)|$ o $|e_r(\ell)|$) té major pes a l'error relatiu de T?

Solució:

(i) Fent servir la fórmula de propagació de l'errors a les dades

$$|e_a(T)| \simeq \left|\frac{\partial T}{\partial \ell}(T)\right| |e_a(\ell)| = \frac{\pi}{\sqrt{\ell g}}|e_a(\ell)|.$$

Aleshores, l'error relatiu s'obté a partir de

$$|e_r(T)| = \frac{|e_a(T)|}{T} \simeq \frac{\frac{\pi}{\sqrt{\ell g}}}{2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}}|e_a(\ell)| = \frac{1}{2}|e_r(\ell)|.$$

Per tant, per a tenir un 1% d'error relatiu al càlcul de T podem admetre, com a màxim, un 2% d'error relatiu en la determinació d'ℓ.

(ii) Anàlogament al cas [(i)]:

$$\begin{aligned}
|e_a(T)| &\simeq \left|\frac{\partial T}{\partial g}(T)\right| |e_a(g)| = \frac{\pi}{g}\sqrt{\frac{\ell}{g}}|e_a(g)| \\
|e_r(T)| &= \frac{|e_a(T)|}{T} \simeq \frac{\frac{\pi}{g}\sqrt{\frac{\ell}{g}}}{2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}}|e_a(g)| = \frac{1}{2g}|e_a(g)| = \frac{1}{2}|e_r(g)|,
\end{aligned}$$

que condueix al mateix resultat per a l'error relatiu d'ℓ que a l'apartat anterior: 2%.

(iii) Tenen el mateix pes.

3. a) $\mu_2(A) = \|A\|_2 \cdot \|A^{-1}\|_2 = \sqrt{\rho(A^TA)}\sqrt{\rho((A^{-1})^TA^{-1})}$

$\mu_2(UA) = \|UA\|_2 \cdot \|(UA)^{-1}\|_2 = \sqrt{\rho(A^TU^TUA)}\sqrt{\rho[((UA)^{-1})^T(UA)^{-1}]} =$

$\underset{U^TU=I}{=} \sqrt{\rho(A^TA)}\sqrt{\rho((A^{-1})^TA^{-1})} = \mu_2(A)$

$((UA)^{-1})^T(UA)^{-1} = (A^{-1}U^{-1})^T(UA)^{-1} = (U^{-1})^T(A^{-1})^TA^{-1}U^{-1} =$

$= U(A^{-1})^TA^{-1}U^{-1}$

i els VAP's d' $U(A^{-1})^TA^{-1}U^{-1}$ són els mateixos que els d'$(A^{-1})^TA^{-1}$.

b) Al fer $A = QR$ el nombre de condició del SL $Ax=b$ i $Rx = Q^Tb$ es manté (ja que $\mu_2(A) = \mu_2(QR) = \mu_2(R)$). Es té doncs la garantia que el condicionament del sistema triangular no empitjora, cosa que no es pot assegurar per a la descomposició LU.

4. $a_{ii}^{(k)} = a_{ii}^{(k-1)} - \dfrac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} a_{ki}^{(k-1)} \underset{\substack{\uparrow \\ A^{(k-1)} \text{ simètrica}}}{=}$

$= a_{ii}^{(k-1)} - \dfrac{(a_{ik}^{(k-1)})^2}{a_{kk}^{(k-1)}} \underset{\substack{\uparrow \\ a_{kk}^{(k)} > 0}}{\leq} a_{ii}^{(k-1)}$

per a $k = 1, \dots, n-1$, $i = k+1, \dots, n$