Alguns usos de la integració i l'anàlisi vectorial en física

apunts per a l'assignatura de Càlcul Integral

Grau de Matemàtiques de la FME

Xavier Gràcia

xavier.gracia@upc.edu
http://mat-web.upc.edu/people/xavier.gracia/calint

Departament de Matemàtiques
Facultat de Matemàtiques i Estadística
Universitat Politècnica de Catalunya

desembre 2017

La necessitat de considerar integrals simples o múltiples, o de línia i de superfície, té origen en la geometria però sobretot en la física. En aquestes notes en descrivim uns pocs exemples. Es recomana consultar textos de física per entendre'n millor el significat.

En tots els casos se sobreentén que se satisfan les condicions que permeten calcular les integrals donades, o aplicar els teoremes utilitzats. Per exemple, en el cas d'una integral $\int \rho \, \mathrm{d}V$, que la funció ρ sigui integrable en el sentit de Riemann, o més generalment que tingui integral impròpia. En l'aplicació dels operadors diferencials, caldrà que els camps vectorials siguin de classe C^1, o de classe C^2. En el càlcul de les integrals de línia o de superfície, o en l'aplicació dels teoremes de l'anàlisi vectorial, cal suposar altres condicions addicionals.

Mecànica analítica

Habitualment en mecànica abans de començar a calcular cal triar un sistema de referència inercial. Fet això, els esdeveniments s'identifiquen amb coordenades $(t, \mathbf{r}) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^3$, on t és el temps i $\mathbf{r}$ són les coordenades espacials.

Considerem un cos material; pot venir definit per un sistema de N partícules puntuals amb posicions $\mathbf{r}_i$ i masses m_i. Quan el sistema té una quantitat elevada de partícules pot ser més convenient un model de distribució de massa donada per una «mesura» $\mathrm{d}m$. Aquesta pot venir donada per una *densitat* de massa $\rho(\mathbf{r})$, aleshores $\mathrm{d}m = \rho\,\mathrm{d}V$, essent $\mathrm{d}V$ l'*element de volum*, que en coordenades cartesianes s'expressa $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

(Però la massa també pot estar distribuïda en una superfície, $\mathrm{d}m = \sigma\,\mathrm{d}S$, essent $\mathrm{d}S$ l'«element de superfície» i σ la densitat superficial de massa; o estar distribuïda en una línia, amb $\mathrm{d}m = \lambda\,\mathrm{d}\ell$, amb $\mathrm{d}\ell$ l'«element de longitud», etc.)

Per a un sistema de N partícules puntuals la *massa total* és $M = \sum_{i=1}^{N} m_i$. En el cas general,

$$M = \int \mathrm{d}m\,.$$

Si el cos material ocupa una regió B de l'espai amb una densitat de massa $\rho(\mathbf{r})$, aleshores la massa total es calcula amb la integral

$$M = \int_B \rho(\mathbf{r})\,\mathrm{d}V.$$

Centre de massa

La mitjana d'una magnitud $g(\mathbf{r})$ ponderada respecte a la distribució de massa $\mathrm{d}m$ es defineix com

$$\langle g \rangle_{\mathrm{d}m} = \frac{\int g\,\mathrm{d}m}{\int \mathrm{d}m}\,.$$

En particular, el *centre de massa* $\mathbf{r}_{\mathrm{CM}}$ del cos material és la mitjana de la posició $\mathbf{r} = (x, y, z)$ (per tant en aquest cas es tracta de la mitjana d'una funció vectorial):

$$\mathbf{r}_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{M} \int \mathbf{r}\,\mathrm{d}m\,.$$

Si expressem $\mathrm{d}m = \rho\,\mathrm{d}V$ aleshores

$$\mathbf{r}_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{M}\int_B \mathbf{r}\,\rho(\mathbf{r})\,\mathrm{d}V.$$

Aquest és un vector amb components

$$x_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{M}\int x\,\mathrm{d}m = \frac{1}{M}\int_B x\,\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\,, \quad y_{\mathrm{CM}} = \ldots\,, \quad z_{\mathrm{CM}}\,.$$

Un sòlid es diu *homogeni* quan la densitat de massa és constant sobre l'espai que ocupa. En aquest cas la densitat surt fora de les integrals, de forma que

$$\langle g\rangle_{\mathrm{d}m} = \frac{\int g\,\mathrm{d}m}{\int \mathrm{d}m} = \frac{\int_B g\,\mathrm{d}V}{\int_B \mathrm{d}V} = \langle g\rangle_{\mathrm{d}V} = \frac{1}{\mathrm{vol}(B)}\int_B g(\mathbf{r})\,\mathrm{d}V.$$

En particular,

$$\mathbf{r}_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{\mathrm{vol}(B)}\int_B \mathbf{r}\,\mathrm{d}V, \quad x_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{\mathrm{vol}(B)}\int_B x\,\mathrm{d}V, \;\ldots$$

L'interès del centre de massa rau en el fet que, si les forces d'interacció entre les partícules del sistema satisfan el principi d'acció i reacció, aleshores el centre de massa del sistema es mou seguint la llei de Newton $M\ddot{\mathbf{r}}_{\mathrm{CM}} = \mathbf{F}_{\mathrm{ext}}$, on M és la massa total del cos i $\mathbf{F}_{\mathrm{ext}}$ la resultant de les forces externes. En absència de forces externes, el centre de massa es mou amb velocitat constant.

Moment d'inèrcia

El *moment d'inèrcia* del cos material respecte a un eix $\mathbf{e}$ es defineix com la integral

$$I_{\mathbf{e}} = \int \delta(\mathbf{r})^2\,\mathrm{d}m\,,$$

essent $\delta(\mathbf{r})$ la distància del punt $\mathbf{r}$ a l'eix $\mathbf{e}$. Per exemple, el moment d'inèrcia respecte a l'eix OZ és

$$I_{\mathrm{OZ}} = \int (x^2+y^2)\,\mathrm{d}m\,,$$

que en el cas d'un cos homogeni esdevé

$$I_{\mathrm{OZ}} = \frac{M}{\mathrm{vol}(B)}\int_B (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

El moment d'inèrcia I apareix en la descripció del moviment de rotació d'un sòlid rígid al voltant d'un eix. Si ω és la velocitat angular d'aquesta rotació, aleshores $I\omega$ és el mòdul del moment angular del sistema. L'estudi complet de la rotació d'un sòlid rígid requereix la introducció de l'anomenat *tensor d'inèrcia*, del qual el moment d'inèrcia és una instància particular.

Treball d'una força

Una noció fonamental en mecànica és la del *treball* realitzat per una força $\mathbf{F}$ al llarg d'un desplaçament. Aquest desplaçament ve donat per un camí $\gamma\colon I \to \mathbf{R}^3$, on el paràmetre d'evolució $t \in I$ s'identifica amb el temps físic. Aleshores el treball realitzat es defineix per la integral de línia

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell}\,.$$

Cal remarcar que aquesta força en general pot venir donada per una funció $\mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \mathbf{v})$, i per tant la integral es calcula com $\int_I \mathbf{F}(t, \gamma(t), \boldsymbol{\gamma}'(t)) \cdot \boldsymbol{\gamma}'(t)\,\mathrm{d}t$.

Considerem ara un sistema de N partícules amb posicions $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N)$ i masses $m_1, \ldots, m_N$, sotmeses a forces $\mathbf{F} = (\mathbf{F}_1, \ldots, \mathbf{F}_N)$. El treball realitzat en un desplaçament $\gamma\colon I \to \mathbf{R}^{3N}$ es defineix amb una integral de línia anàloga.

La força es diu *conservadora* quan existeix una funció $U(\mathbf{r})$ (anomenada *energia potencial*) tal que $\mathbf{F} = -\boldsymbol{\nabla} U$ (o sigui, $\mathbf{F}_i = -\boldsymbol{\nabla}_i\, U$, amb $\boldsymbol{\nabla}_i$ denotant el gradient respecte a la i-èsima còpia de $\mathbf{R}^3$). En tal cas, el treball realitzat al llarg d'un desplaçament només depèn dels punts inicial i final. (A més, la funció energia total, suma de les energies cinètica i potencial, és constant a llarg de les solucions de l'equació de Newton $m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i$; la força es diu conservadora precisament pel fet que l'energia total es conserva al llarg de les trajectòries dinàmiques.)

Camp gravitatori o elèctric creat per una distribució

Considerem encara el cos material amb distribució de massa $\mathrm{d}m$. Aquest exerceix una *força gravitacional* sobre una massa puntual $m_\circ$ situada en el punt $\mathbf{r}_\circ$, força que val

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}_\circ) = -G m_\circ \int \frac{\mathbf{r}_\circ - \mathbf{r}}{\|\mathbf{r}_\circ - \mathbf{r}\|^3}\,\mathrm{d}m(\mathbf{r})\,,$$

essent G la constant gravitacional, o de Newton. La norma utilitzada és la norma euclidiana estàndard de $\mathbf{R}^3$. D'altra banda, escrivim $\mathrm{d}m(\mathbf{r})$ per remarcar que la integral es fa respecte a les variables $\mathbf{r}$.
Aquesta força és conservadora, és a dir, $\mathbf{F}(\mathbf{r}_\circ) = -\operatorname{grad} U(\mathbf{r}_\circ)$, on U és l'*energia potencial gravitacional*

$$U(\mathbf{r}_\circ) = -Gm_\circ \int \frac{1}{\|\mathbf{r}_\circ - \mathbf{r}\|} \,\mathrm{d}m(\mathbf{r})\,.$$

Podem escriure fórmules semblants quan $\mathrm{d}m = \rho\,\mathrm{d}V$, i quan la densitat és constant.

Observem també que les expressions anteriors es poden adaptar al cas en què la distribució de massa té una densitat sobre una certa *superfície*, $\mathrm{d}m = \sigma\,\mathrm{d}S$, cosa que dóna lloc a una integral de superfície; semblantment sobre una *corba*, que donaria lloc a una integral de línia.

De manera similar, en electrostàtica podem considerar un sistema de càrregues elèctriques donat per una distribució de càrrega $\mathrm{d}q(\mathbf{r})$. La *càrrega total* és $Q = \int \mathrm{d}q$, i el *camp elèctric* que crea en un punt $\mathbf{r}_\circ$ és

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_\circ) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\mathbf{r}_\circ - \mathbf{r}}{\|\mathbf{r}_\circ - \mathbf{r}\|^3} \,\mathrm{d}q(\mathbf{r})\,.$$

Aquest camp deriva d'un *potencial elèctric*, $\mathbf{E} = -\operatorname{grad} V$, que es calcula com

$$V(\mathbf{r}_\circ) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{1}{\|\mathbf{r}_\circ - \mathbf{r}\|} \,\mathrm{d}q(\mathbf{r})\,.$$

Si la distribució de càrregues ve donada per una densitat de càrrega, de forma que $\mathrm{d}q = \rho\,\mathrm{d}V$, aleshores

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_\circ) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_B \frac{\mathbf{r}_\circ - \mathbf{r}}{\|\mathbf{r}_\circ - \mathbf{r}\|^3}\, \rho(\mathbf{r})\,\mathrm{d}V, \quad V(\mathbf{r}_\circ) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_B \frac{\rho(\mathbf{r})}{\|\mathbf{r}_\circ - \mathbf{r}\|} \,\mathrm{d}V.$$

Electrodinàmica clàssica

Observació En tota aquesta secció les magnituds utilitzades són les del Sistema Internacional d'unitats.

L'electrodinàmica clàssica descriu la interacció de la matèria amb el camp electromagnètic, que identifiquem, un cop fixat un sistema de referència inercial, amb uns camps vectorials dependents del temps, el *camp elèctric* $\mathbf{E}(t, \mathbf{r})$ i el *camp magnètic* $\mathbf{B}(t, \mathbf{r})$.

L'electrodinàmica ve regida per dos grups de lleis. D'una banda hi ha la *llei de la força de Lorentz*, que descriu la força exercida sobre un punt material de càrrega elèctrica q (i velocitat $\mathbf{v}$) pel camp electromagnètic:

$$\mathbf{F} = q\,(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})\,.$$

D'altra banda tenim les *equacions de Maxwell*, que descriuen com la matèria crea els camps elèctric i magnètic.

Equacions de Maxwell

Les equacions de Maxwell en *forma diferencial* són:

- *llei de Gauss elèctrica*

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}\,,$$

- *llei de Gauss magnètica*

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{B} = 0\,,$$

- *llei de Faraday*

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\,,$$

- *llei d'Ampère–Maxwell*

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\,.$$

En elles hi apareixen dues constants universals, la permitivitat ϵ_0 i la permeabilitat μ_0.

Les «fonts» són la densitat de càrrega elèctrica $\rho(t, \mathbf{r})$ i la densitat de corrent $\mathbf{J}(t, \mathbf{r})$. Les equacions de Maxwell són aparentment un conjunt d'equacions en derivades parcials lineals, i conegudes ρ i $\mathbf{J}$, en principi podríem determinar els camps $\mathbf{E}$ i $\mathbf{B}$. Però en realitat les càrregues i corrents depenen al seu torn del camp electromagnètic, de manera que la discussió de les possibles solucions és força complicada i va molt més enllà de l'objectiu d'aquestes notes.

Hi ha també unes equacions de Maxwell que descriuen el camp electromagnètic en medis materials, també dites equacions de Maxwell «macroscòpiques», que no descriurem.

Equació de continuïtat i equació de les ones

Aplicant la divergència a la llei d'Ampère–Maxwell i tot seguit la llei de Gauss s'obté l'anomenada *equació de continuïtat*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{J} = 0\,.$$

D'altra banda, les equacions de Maxwell en absència de fonts s'escriuen

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E} = 0\,, \quad \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{B} = 0\,, \quad \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\,, \quad \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\,.$$

A partir d'elles es dedueix que els camps elèctric i magnètic en absència de fonts satisfan l'*equació de les ones*,

$$\Box \mathbf{E} = 0\,, \quad \Box \mathbf{B} = 0\,,$$

on $\Box = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - \boldsymbol{\nabla}^2$ és l'operador d'alembertià i $1/c^2 = \epsilon_0 \mu_0$.

La deducció de la primera es fa partint de la llei d'Ampère–Maxwell, derivant-la respecte al temps, i aplicant-hi les lleis de Faraday i Gauss.
De manera anàloga es prova la segona, partint de la llei de Faraday.

La quantitat c té dimensions de velocitat i coincideix amb la *velocitat de la llum*; aquest fet experimental és d'una enorme importància, ja que va fer comprendre que la llum és un fenomen electromagnètic.

Equacions de Maxwell en forma integral

En aquest apartat $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ designa un volum, i $\Sigma \subset \mathbf{R}^3$ una superfície orientada.

Amb integrals adequades i l'aplicació dels teoremes de l'anàlisi vectorial es poden obtenir formulacions alternatives de les equacions de Maxwell.

• *Llei de Gauss elèctrica*
Equival a afirmar que, per a tot volum Ω,

$$\oint_{\partial\Omega} \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\Omega} \rho \, \mathrm{d}V \,.$$

La deducció es fa prenent $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E} - \dfrac{\rho}{\epsilon_0} = 0$, integrant-ho en Ω, i aplicant-hi la fórmula de Gauss–Ostrogradskiĭ.

Recíprocament, si aquesta igualtat en forma integral se satisfà per a tota Ω, se'n dedueix que la integral de $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E} - \frac{\rho}{\epsilon_0}$ és nul·la en tot volum Ω, d'on resulta la llei de Gauss en forma diferencial.

Interpretació física: «el flux del camp elèctric sortint de Ω és proporcional a la càrrega elèctrica continguda en Ω».

• *Llei de Gauss magnètica*
Equival a afirmar que, per a tot volum Ω,

$$\oint_{\partial\Omega} \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = 0 \,.$$

La demostració és totalment anàloga a l'anterior.

El significat físic d'aquesta equació és que no existeixen monopols magnètics (que serien l'anàleg de la càrrega elèctrica).

• *Llei de Faraday*
Equival a afirmar que, per a tota superfície Σ,

$$\oint_{\partial\Sigma} \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\Sigma} \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} \,.$$

La seva deducció es fa prenent $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E} + \dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$, integrant-ho en Σ, i aplicant-hi la fórmula de Kelvin–Stokes.

Recíprocament, que la igualtat de les integrals se satisfaci per a tota Σ implica que el flux de $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E} + \partial \mathbf{B}/\partial t$ a través de qualsevol superfície sigui nul, d'on es desprèn la llei de Faraday en forma diferencial.

Interpretació física: «la força electromotriu induïda en un circuit tancat és proporcional a la taxa de canvi del flux magnètic».

• *Llei d'Ampère–Maxwell*
Equival a afirmar que, per a tota superfície Σ,

$$\oint_{\partial\Sigma} \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = \mu_0 \int_{\Sigma} \mathbf{J} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} \,.$$

La demostració és similar a l'anterior: es pren $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{J} - \epsilon_0 \mu_0 \dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$, s'integra en Σ, i s'hi aplica la fórmula de Kelvin–Stokes. Se segueix el mateix procediment per al recíproc.

Conservació de la càrrrega

L'equació de continuïtat també té una expressió en forma integral. És equivalent a afirmar que, per a tot volum Ω,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\Omega} \rho \, \mathrm{d}V = -\oint_{\partial\Omega} \mathbf{J} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} \,.$$

Per provar l'equivalència de les expressions diferencial i integral només cal integrar $\partial\rho/\partial t + \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{J}$ en Ω i aplicar-hi la fórmula de Gauss–Ostrogradskiĭ.

La interpretació física d'aquesta equació és: «la taxa de variació de la càrrega elèctrica continguda en un volum és el flux del corrent a través de la seva vora, canviat de signe». Per tant, si no hi ha corrent sortint, la càrrega continguda en Ω és constant («conservació de la càrrega»).

Potencials electromagnètics

Partim de les equacions de Maxwell homogènies, a saber, la llei de Gauss magnètica i la llei de Faraday. Hi aplicarem el lema de Poincaré en un obert estrellat (que podria ser tot $\mathbf{R}^3$, per exemple).

De $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{B} = 0$ es dedueix que $\mathbf{B}$ és un camp solenoidal, és a dir, que existeix un camp vectorial $\mathbf{A}(t, \mathbf{r})$ tal que $\mathbf{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}$.

Observem ara que amb aquest $\mathbf{A}$ podem reescriure la llei de Faraday com $\boldsymbol{\nabla} \times (\mathbf{E} + \partial\mathbf{A}/\partial t) = 0$. D'aquí es dedueix que el terme entre parèntesis és un camp conservador, és a dir, que existeix un camp escalar $\varphi(t, \mathbf{r})$ tal que $\mathbf{E} + \partial\mathbf{A}/\partial t = -\boldsymbol{\nabla}\varphi$ (el signe negatiu es pren per conveni).

En resum, tenim

$$\mathbf{E} = -\boldsymbol{\nabla}\varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \,, \quad \mathbf{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A} \,.$$

Es diu que φ és el *potencial elèctric* i $\mathbf{A}$ el *potencial magnètic*; també es diuen potencial escalar i potencial vectorial, respectivament.

Cal recordar, però, que els potencials *no* estan definits unívocament. De fet, si $\chi(t, \mathbf{r})$ és una funció qualsevol, aleshores els nous camps

$$\varphi' = \varphi - \frac{\partial \chi}{\partial t}\,, \qquad \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \boldsymbol{\nabla}\chi$$

també són potencials per al *mateix* camp electromagnètic. Això implica que hi ha una certa llibertat per triar els potencials, i que s'hi poden imposar condicions suplementàries, anomenades *condicions de gauge*.

Com s'escriuen les equacions de Maxwell inhomogènies en termes dels potencials? La substitució de les expressions de $\mathbf{E}$ i $\mathbf{B}$ en termes de φ i $\mathbf{A}$ dins de la llei de Gauss elèctrica i la llei d'Ampère–Maxwell dona

$$\Box\varphi - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A}\right) = \frac{\rho}{\epsilon_0}\,,$$

$$\Box\mathbf{A} - \boldsymbol{\nabla}\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A}\right) = \mu_0\mathbf{J}\,.$$

Utilitzant la llibertat d'elecció dels potencials, s'hi pot imposar per exemple la condició suplementària anomenada *gauge de Lorenz*, $\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial \varphi}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A} = 0$, la qual simplifica notablement les dues equacions anteriors, que esdevenen $\Box\varphi = \rho/\epsilon_0$ i $\Box\mathbf{A} = \mu_0\mathbf{J}$.

Bibliografia

Alguns dels conceptes mencionats es poden consultar a la Wikipedia, o en alguns llibres de text de física, com ara aquests:

- Tom W.B. Kibble and Frank H. Berkshire, *Classical Mechanics*, 5th ed., Imperial College Press, 2004.
- John David Jackson, *Classical Electrodynamics*, 3rd ed., John Wiley & Sons, 1999.