C. Cauchy (sèries): $\sum a_n$ conv. $\iff \forall\varepsilon>0, \exists n_0$ t.q. $m>n\ge n_0$ llavors, $|s_m - s_n| = |a_{n+1}+\cdots+a_m| < \varepsilon$.
• La convergència és lineal i associativa.
Sèries geomètriques: $\sum_{n\ge1}\alpha^n$ conv. sii $|\alpha|\le 1$, div sii $\alpha \ge 1$ i oscil·lant sii $\alpha=-1$.
• $\sum a_n$ conv. $\iff \sum p_n, \sum q_n$ conv. Si això passa, $\sum a_n = \sum p_n - \sum q_n$
• $\sum a_n$ cond. conv. $\iff \sum p_n, \sum q_n$ div.
• $\sum a_n$ abs. conv. $\implies \sum a_{\sigma(n)}$ abs. conv. i $\sum a_n = \sum a_{\sigma(n)}$

1 Sèries n. positius

Dins aquest apartat les successions són totes de termes positius.
C. comp. dir.: $a_n \le b_n \forall n\ge n_0 \implies \sum_{n=n_0}^\infty a_n \le \sum_{n=n_0}^\infty b_n \implies$ ($\sum b_n$ conv. $\implies \sum a_n$ conv.) i ($\sum a_n$ div. $\implies \sum b_n$ div.).
C. comp. al límit: (a_n) i (b_n) estr. pos. i $\exists \lim \frac{a_n}{b_n} = l \in [0,+\infty]$. Si $l<\infty$, $\sum b_n$ conv. $\implies \sum a_n$ conv.. Si $l>0$, $\sum a_n$ conv. $\implies \sum b_n$ conv.
C. arrel Cauchy: (a_n) positiva i $\exists \lim a_n^{1/n} = \alpha \implies$ ($\alpha>1$ div.) i ($\alpha<1$ conv.).
C. quo. Alambert: (a_n) estr. pos. i $\exists\lim \frac{a_{n+1}}{a_n}=\alpha \implies$ ($\alpha>1$ div.) i ($\alpha<1$ conv.).
C. Raabe: (a_n) estr. pos. i $\exists \lim n(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}) = L \implies$ ($L>1$ conv.) i ($L<1$ div.).
C. Leibniz sèr. alt.: (a_n) decr. i $\lim a_n = 0$, llavors $\sum(-1)^n a_n$ és conv.. A més, $|s-s_N|<a_{n+1}$.
C. de la integral: $a_n = f(n), f\ge0$ int. i decreixent, $\int_M^\infty f$ convergeix $\iff \sum a_k$ convergeix i $\sum_M^\infty = \sum_M^{N-1} + \int_N^\infty f + \varepsilon_N$, $\varepsilon_N\in[0,a_N]$.
C. logarítmic: $\lim_{n\to\infty}\frac{-\log a_n}{\log n} = L \implies$ ($L>1$ conv.) i ($L<1$ div.).
C. condensació: a_n decreixent, $a_n\ge0$, $\sum a_n$ convergent $\iff \sum 2^n a_{2^n}$ convergent.
Sèrie Rie.: $\sum_{n\ge1}\frac{1}{n^p}$ és conv. sii $p>1$, div. altrament.

2 Altres sèries

T. Riemann: Sèrie cond. conv. $\implies$ podem reordenar per tal que $\sum = s\in[-\infty,+\infty]$.
Sèrie alternada: un pos., un neg., ...
C. Dirichlet: Si s_n d'(a_n) fitades i (b_n) decr., $\lim b_n = 0$, llavors $\sum a_n b_n$ convergeix.

3 Sèries de potències

Radi de convergència: Màxim r t.q. $\sum |a_n| r^n$ és conv.
Domini de conv.: $(-R,R)$, on R és radi de conv.. És possible que convergeixi als exterms.
T. Cauchy-Hadamard: Sigui $\sum a_n x^n, R$ ve donada per $\frac1R = \lim\sup|a_n|^{1/n}$. La sèrie de potències és abs. conv. si $|x|<R$ i div. si $|x|>R$. Si $|x|=R$ no sabem res.
Càlcul radi de conv.: $\frac1R = \lim|a_n|^{1/n}$ o $\frac1R = \lim\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$.

4 Integrals impròpies

• La convergència d'integrals és lineal.
Localm integ: si $f\colon D\to\mathbb{R}$. integ $\forall$interval compacte $K\subseteq D$
C. Cauchy per a int. impròpies: $f\colon[a,b)\to\mathbb R$. $\int_a^b f$ és conv. $\iff \forall\varepsilon>0,\exists c_0\in[a,b)$ t.q. si $c_1,c_2>c_0$, llavors $\left|\int_{c_1}^{c_2} f\right|<\varepsilon$.
C. comp. dir.: $f,g:[a,b)\to\mathbb R$, $f,g>0$, $f\le g$ localment integrables. Aleshores $\int_a^b f\le\int_a^b g$. Si la segona conv., la primera també. Si la primera div., la segona també.
C. comp. al límit: $f,g:[a,b)\to\mathbb R$, $f,g>0$ localment integrables. Suposem $\exists\lim_{x\to b}\frac{f(x)}{g(x)}=l$. Si $l<\infty$, $\int_a^b g$ conv. $\implies \int_a^b f$ conv.. Si $l>0$, $\int_a^b f$ conv. $\implies \int_a^b g$ conv..
C. Dirichlet: $f,g:[a,b)\to\mathbb R$ localment integrables. Suposem $\exists M>0$ t.q. si $a<c<b, \left|\int_a^c f(x)\,\mathrm dx\right|\le M$ i g decreixent amb $\lim_{x\to b} g = 0$. Aleshores $\int_a^b fg$ és conv..

5 Integrals a rectangles

Suma inf. del rect.: $m_R = \inf_{x\in\mathbb R} f(x)$, $s(f;\mathcal P)=\sum_R m_R \operatorname{vol}(R)$.
Suma sup. del rect.: $M_R = \sup_{x\in\mathbb R} f(x)$, $S(f;\mathcal P) = \sum_R M_R\operatorname{vol}(R)$.
Si $\mathcal P'$ més fina que $\mathcal P$: $s(f;\mathcal P)\le s(f;\mathcal P')\le S(f;\mathcal P')\le S(f;\mathcal P)$.
• $\underline{\int}_A f = \sup_{\mathcal P} s(f;\mathcal P)$, $\overline{\int}_A f = \inf_{\mathcal P} S(f;\mathcal P) \to$ si són iguals, f és integrable Riemann.
C. Riemann: f int. Rie. $\iff \forall\varepsilon>0,\exists\mathcal P$ t.q. $S(f;\mathcal P)-s(f;\mathcal P)<\varepsilon$.
• Integrabilitat Riemann és lineal i conserva la positivitat.
Suma de Rie.: Siguin $\xi_k\in R_k$, la suma és $R(f;\mathcal P;\xi)=\sum_k f(\xi_k)\operatorname{vol}(R_k)$.

6 Mesura nul·la

Mesura nul·la: $C\subset\mathbb R^n$ recobert per numerables rectangles de mesura $<\varepsilon, \forall\varepsilon>0$.
Contingut nul: Mesura nul·la amb un nombre finit de rectangles.
• C té un punt interior $\implies$ no té mes. nul·la.
• C té contingut nul $\implies$ fitat i té mes. nul·la.
• C té mes. nul·la i compac. $\implies$ té cont. nul.
• $D\subset\mathbb R^{n+1}$ fitat, $f:D\to\mathbb R$ unif. contínua $\implies$ graf f té mesura nul·la.
• $D\subset\mathbb R^{n+1}$ compacte, $f:D\to\mathbb R$ contínua $\implies$ graf f té mesura nul·la.
Quadrat: volum: c^n, diàmetre: $c\sqrt n$ (a $\mathbb R^n$, on c costat).
• Sigui $z\subset\mathbb R^n$ mesura nul·la. $\forall\varepsilon,\exists$ família numerable de quadrats compactes Q_k t.q. $z\in\bigcup_k Q_k, \sum\operatorname{vol}(Q_k)<\varepsilon$.
• Sigui $f\colon U\to\mathbb R$ classe $\mathscr C^1$ o lipschitziana, $z\subset U$ mesura nul·la, llavors $f(z)\subset\mathbb R^n$ té mesura nul·la.

7 Teorema de Lebesgue

• Sigui X espai mètric, $f\colon X\to\mathbb R$, l'oscil·lació de f sobre $E\subset X$ és el diàmetre de $f(E)$: $\omega(f,E)=\sup_{x,y\in E} \mathrm{d}(f(x),f(y))\in[0,+\infty]$. Finita $\iff f_{|E}$ fitada, 0 $\iff f_{|E}$ constant.
Oscil·lació en $a\in X$: $\omega(f,a) = \lim_{r\to0}\omega(f,B(a;r)) = \inf_{r>0}\omega(f,B(a;r))$.
• f cont. en $a \iff \omega(f,a)=0$.
T. Lebesgue: Sigui $A\subset\mathbb R^n$ rectangle compacte, $f\colon A\to\mathbb R$ fitada. Llavors f és integrable Riemann $\iff$ disc(f) és de mesura nul·la $\iff$ contínua gairebé pertot.

8 Integral de Riemann

• $C\subset\mathbb R^n$ és admissible o mesurable Jordan si és fitat i $\mathrm{Fr}(C)$ té mesura nul·la.
• $\mathrm{Fr}(A\cup A'),\mathrm{Fr}(A\cap A'),\mathrm{Fr}(A\setminus A')\subseteq \mathrm{Fr}(A)\cup\mathrm{Fr}(A')$.
• $\mathrm{Fr}(A\times B) = (\mathrm{Fr}(A)\times\overline B)\cup(\overline A\times\mathrm{Fr}(B))$.
• $A,A'\subset\mathbb R^n$ admissibles $\implies A\cup A', A\cap A', A\setminus A'$ admissibles.
• $A\subset\mathbb R^n, B\subset\mathbb R^m$ admissibles $\implies A\times B\subset\mathbb R^{n+m}$ admissible.
• Els rectangles fitats i les boles euclidianes són admissibles.
Funció característica de $C\subset X$: (o indicatriu) $\chi_C\colon X\to\mathbb R, \chi_C(x)=1$ si $x\in C$, val 0 altrament.
• χ no és contínua a $\mathrm{Fr}(C) \implies$ (C adm. $\iff C$ fitat i $\forall R,\exists\int_R\chi_C$ t.q. $C\subset R$).
• $g\colon E\to\mathbb R,\tilde g\colon X\to\mathbb R(\tilde g(x)=0, \forall x\notin E)$. Aleshores $\mathrm{disc}(g)\subseteq\mathrm{disc}(\tilde g)\subseteq\mathrm{disc}(g)\cup\mathrm{Fr}(E)$.
• $f\chi_C$ integrable Rie. en R $\iff$ disc(f) de mesura nul·la.
Pel T. Lebesgue: $C\subset\mathbb R^n$ admissible. $f\colon C\to\mathbb R$ és integrable Rie. $\iff$ disc(f) mesura nul·la.
• Si C adm., $\operatorname{vol}(C)=\int_C 1$ és la mesura (o contingut) de Jordan o volum (n-dimensional) de C.
• $C\subset\mathbb R^n$ té contingut nul $\iff C$ adm. i $\operatorname{vol}(C)=0$.

9 Propietats de la int. de Rie.

• Sigui $E\subset\mathbb R^n$ mesurable Jordan, $\mathrm{Rie}(E)=\{f|f$ int. Rie. en $E\}$ és un $\mathbb R$-e.v. i $\mathrm{Rie}\colon E\to\mathbb R, \mathrm{Rie}(f)=\int_E f$ és una forma lineal positiva i monòtona.
T. valor mitjà per a integrals: Sigui E m.J., $f\colon E\to\mathbb R$ int. Rie.. $m\le f\le M \implies m\operatorname{vol}(E)\le\int_E f\le M\operatorname{vol}(E)$.
• E m.J. connex, $f\colon E\to\mathbb R$ fitada i cont., $\exists x_0\in E$ t.q. $\int_E f = f(x_0)\operatorname{vol}(E)$.
• E m.J., $f\colon E\to\mathbb R$ int. Rie., $h\colon f(E)\to\mathbb R$ cont., $h\circ f$ és int. Rie..
• f,h int. Rie. no implica $h\circ f$ int. Rie..
• f int. Rie. $\implies |f|$ int. Rie. i $\left|\int_E f\right|\le\int_E|f|$.
• f,g int. Rie. $\implies fg$ int. Rie..
• Siguin $A,B\subset\mathbb R^n$ m.J. $f\colon A\cup B\to\mathbb R$ fitada. Si f és int. Rie. a A i B, aleshores ho és a $A\cap B$ i a $A\cup B$ i es compleix: $\int_{A\cup B} f = \int_A f+\int_B f-\int_{A\cap B} f$.
• E m.J., $f\colon E\to\mathbb R$ positiva i int. Rie., aleshores $\int_E f = 0 \iff f$ nul·la gairebé pertot.
• Dues funcions int. i iguals gairebé pertot tenen la mateixa integral (tot i que canviar els valors en un conjunt de mesura nul·la pot destruir la integrabilitat).

10 Teorema de Fubini

T. Fubini: $A\subset\mathbb R^n, B\subset\mathbb R^m$ rect. comp., $f\colon A\times B\to\mathbb R$ int. Rie.. Sigui

$\Phi\colon A\to\mathbb{R}$ t.q. $\underline{\int}_B f(x,) \le \Phi(x) \le \overline{\int}_B f(x,)$. Aleshores Φ int. Rie. i $\int_{A\times B} f = \int_A \Phi$, ($A \leftrightarrow B$ també).

- $x\in A$ t.q. $f(x,)$ no int. Rie. té mesura nul·la.
- $D\subset X, f\colon D\to\mathbb{R}$ cont., $E=\left\{(x,y)\in X\times\mathbb{R} | x\in D, y\ge f(x)\right\}$, llavors ($D\subset X$ tancat $\implies$ $E\subset X\times\mathbb{R}$ tancat) i ($\mathrm{Fr}(E)\subset \mathrm{graf}(f)\cup(\mathrm{Fr}(D)\times\mathbb{R})$).
- $D\subset\mathbb{R}^{n-1}$ comp., m.J., $\varphi,\psi\colon D\to\mathbb{R}$ cont. t.q. $\varphi\le\psi$, $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R} \mid x\in D, \varphi(x)\le y\le\psi(x)\}\subset\mathbb{R}^n$ és compacte i m.J.. (Si $f\colon E\to\mathbb{R}, \int_E f = \int_D \mathrm{d}x \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \mathrm{d}y\, f(x,y)$).

Regió elemental: A $\mathbb{R}$ és un interval compacte. Si no és de la forma $\{(x,y)\in\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R} | x\in D, \phi(x)\le y\le\psi(x)\}$, on $D\subset\mathbb{R}^{n-1}$ és regió elemental i $\phi\le\psi\colon D\to\mathbb{R}$ contínues.

11 Canvi de variables

- Sigui $V\subset\mathbb{R}^n$ obert, $\varphi\colon V\to\mathbb{R}^n$ injectiva, classe $\mathscr{C}^1$ amb $\det \mathrm{d}\varphi(y)\ne 0, \forall y\in V$. Sigui $U=\varphi(V)(\varphi\colon V\to U$ difeo. classe $\mathscr{C}^1$). Si $f\colon U\to\mathbb{R}$ int., $\int_U f = \int_V (f\circ\varphi)|\det \mathrm{d}\varphi|$.

11.1 Alguns canvis de variables

Polars a $\mathbb{R}^2$: $\int_U f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_V f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi$.

Cilíndriques a $\mathbb{R}^3$: $\int_U f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_V f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi,z)\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z$.

Esfèriques a $\mathbb{R}^3$: $\int_U f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_V f(r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\theta)$ $r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta$.

12 Altres

12.1 Integrals

- $\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$
- $\int \frac{1}{x}dx = \log(|x|)$
- $\int e^x = e^x$
- $\int a^x dx = \frac{a^x}{\log(a)}$
- $\int \sin(x)dx = -\cos(x)$
- $\int \cos(x)dx = \sin(x)$
- $\int \tan(x)dx = -\log(|\cos(x)|)$
- $\int \arcsin\left(\frac{x}{a}\right)dx = x\arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + \sqrt{a^2-x^2}$ $a>0$
- $\int \arccos\left(\frac{x}{a}\right)dx = x\arccos\left(\frac{x}{a}\right) - \sqrt{a^2-x^2}$ $a>0$
- $\int \arctan\left(\frac{x}{a}\right)dx =$ $x\arctan\left(\frac{x}{a}\right) - \frac{a}{2}\log\left(a^2+x^2\right)$ $a>0$
- $\int \sin^2(mx)dx = \frac{1}{2m}(mx-\sin(mx)\cos(mx))$
- $\int \cos^2(mx)dx = \frac{1}{2m}(mx+\sin(mx)\cos(mx))$
- $\int \sec^2(x)dx = \tan(x)$
- $\int \csc^2(x)dx = -\cot(x)$
- $\int \sin^n(x)dx =$ $-\frac{\sin^{n-1}(x)\cos(x)}{n} + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2}(x)dx$
- $\int \cos^n(x)dx =$ $-\frac{\cos^{n-1}(x)\sin(x)}{n} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}(x)dx$
- $\int \tan^n(x)dx = \frac{\tan^{n-1}(x)}{n-1} - \int \tan^{n-2}(x)dx$
- $\int \sinh(x)dx = \cosh(x)$
- $\int \cosh(x)dx = \sinh(x)$
- $\int \tanh(x)dx = \log(|\cosh(x)|)$
- $\int \sinh^2(x)dx = \frac{1}{4}\sinh(2x) - \frac{1}{2}x$
- $\int \cosh^2(x)dx = \frac{1}{4}\cosh(2x) + \frac{1}{2}x$
- $\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}dx = \log\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)$
- $\int \frac{1}{a^2+x^2}dx = \frac{1}{2}\arctan\frac{x}{a}$
- $\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}$
- $\int (a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}dx =$ $\frac{x}{8}(5a^2-2x^2)\sqrt{a^2-x^2} + \frac{3a^4}{8}\arcsin\frac{x}{a}$
- $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \arcsin\frac{x}{a}$
- $\int \frac{1}{a^2-x^2}dx = \frac{1}{2a}\log\left|\frac{x+a}{x-a}\right|$
- $\int \frac{1}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}dx = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2-x^2}}$
- $\int \sqrt{x^2\pm a^2}dx =$ $\frac{x}{2}\sqrt{x^2\pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\log\left|x\pm\sqrt{x^2\pm a^2}\right|$
- $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx = \log\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|$
- $\int \frac{1}{x(a+bx)}dx = \frac{1}{a}\log\left|\frac{x}{a+bx}\right|$
- $\int x\sqrt{a+bx}dx = \frac{2(3bx-2a)(a+bx)^{\frac{3}{2}}}{15b^2}$
- $\int \frac{\sqrt{a+bx}}{x}dx = 2\sqrt{a+bx} + a\int \frac{1}{x\sqrt{a+bx}}dx$
- $\int \frac{x}{\sqrt{a+bx}}dx = \frac{2(bx-2a)\sqrt{a+bx}}{3b^2}$
- $\int \frac{1}{x\sqrt{a+bx}}dx = \frac{1}{\sqrt{a}}\log\left|\frac{\sqrt{a+bx}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+bx}+\sqrt{a}}\right|$
- $\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}dx = \sqrt{a^2-x^2} - a\log\left|\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right|$
- $\int x\sqrt{a^2-x^2}dx = -\frac{1}{3}(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}$
- $\int x^2\sqrt{a^2-x^2} =$ $\frac{a}{8}(2x^2-a^2)\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^4}{8}\arcsin\frac{x}{a}$
- $\int \frac{1}{x\sqrt{a^2-x^2}}dx = -\frac{1}{a}\log\left|\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right|$
- $\int \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = -\sqrt{a^2-x^2}$
- $\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = -\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}$
- $\int \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x}dx = \sqrt{a^2+x^2} - a\log\left|\frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{x}\right|$
- $\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}dx = \sqrt{x^2-a^2} - \arcsin\frac{x}{a}$
- $\int x\sqrt{x^2\pm a^2}dx = \frac{1}{3}(x^2\pm a^2)^{\frac{3}{2}}$
- $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+a^2}}dx = \frac{1}{a}\log\left|\frac{x}{a+\sqrt{x^2+a^2}}\right|$
- $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-a^2}}dx = \frac{1}{a}\arccos\frac{a}{|x|}$
- $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2\pm a^2}}dx = \pm\frac{\sqrt{x^2\pm a^2}}{a^2x}$
- $\int \frac{x}{\sqrt{x^2\pm a^2}}dx = \sqrt{x^2\pm a^2}$
- $\int \frac{1}{ax^2+bx+c}dx =$ $\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}}\log\left|\frac{2ax+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2ax+b+\sqrt{b^2-4ac}}\right| & (b^2>4ac) \\ \frac{2}{\sqrt{b^2-4ac}}\arctan\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} & (b^2<4ac) \end{cases}$
- $\int \frac{x}{ax^2+bx+c}dx =$ $\frac{1}{2a}\log\left|ax^2+bx+c\right| - \frac{b}{2a}\int \frac{1}{ax^2+bx+c}dx$
- $\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx =$ $\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a}}\log\left|2ax+b+2\sqrt{a}\sqrt{ax^2+bx+c}\right| & (a>0) \\ \frac{1}{\sqrt{-a}}\arcsin\frac{-2ax-b}{\sqrt{b^2-4ac}} & (a<0) \end{cases}$
- $\int \sqrt{ax^2+bx+c}dx =$ $\frac{2ax+b}{4a}\sqrt{ax^2+bx+c} - \frac{4ac-b^2}{8a}\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$
- $\int \frac{x}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx =$ $\frac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{a} - \frac{b}{2a}\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$
- $\int x^3\sqrt{x^2+a^2}dx = \left(\frac{1}{5}x^2-\frac{2}{15}a^2\right)\sqrt{(a^2+x^2)^3}$
- $\int \frac{\sqrt{x^2\pm a^2}}{x^4}dx = \frac{\pm\sqrt{(x^2\pm a^2)^3}}{3a^2x^3}$
- $\int \sin(ax)\sin(bx)dx = \frac{\sin(a-b)x}{2(a-b)} - \frac{\sin(a+b)x}{2(a+b)}$
- $\int \sin(ax)\cos(bx)dx = \frac{\cos(a-b)x}{2(a-b)} - \frac{\cos(a+b)x}{2(a+b)}$
- $\int \cos(ax)\cos(bx)dx = \frac{\sin(a-b)x}{2(a-b)} - \frac{\sin(a+b)x}{2(a+b)}$
- $\int x^n\log(ax)dx = x^{n+1}\left(\frac{\log(ax)}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}\right)$
- $\int e^{ax}\sin bx dx = \frac{e^{ax}(b\sin(bx)-b\cos(bx))}{a^2+b^2}$
- $\int e^{ax}\cos bx dx = \frac{e^{ax}(b\sin(bx)+b\cos(bx))}{a^2+b^2}$

12.2 Més sobre integrals

- $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ conv. $\iff$ $\alpha>1$ i és $\frac{1}{\alpha-1}$.
- $\int_0^1\frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ conv. $\iff$ $\alpha<1$ i és $\frac{1}{1-\alpha}$.
- $\int_0^{+\infty}e^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t$ conv. $\iff$ $\alpha>0$ i és $\frac{1}{\alpha}$.
- $\int\sqrt{1-x^2} = \frac{1}{2}(\arcsin(x)+x\sqrt{1-x^2})+C$.

12.3 Taylor

- $e^x = \sum_{n\ge0}\frac{x^n}{n!}$.
- $\cos x = \sum_{n\ge0}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$.
- $\sin x = \sum_{n\ge0}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.
- $\log(1+x) = \sum_{n\ge1}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$.
- $(1+x)^p = \sum_{n\ge0}\binom{p}{n}x^n$.
- $(1+x)^{-1} = \sum_{n\ge0}(-1)^nx^n$.
- $\cosh x = \sum_{n\ge0}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$.
- $\sinh x = \sum_{n\ge0}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.
- $\arctan x = \sum_{n\ge0}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

12.4 Trigonometria

- $\sin(a\pm b) = \sin(a)\cos(b)\pm\cos(a)\sin(b)$.
- $\cos(a\pm b) = \cos(a)\cos(b)\mp\sin(a)\sin(b)$.
- $\tan(a\pm b) = \frac{\tan(a)\pm\tan(b)}{1\mp\tan(a)\tan(b)}$
- $\sin(a)+\sin(b) = 2\sin(\frac{a+b}{2})\cos(\frac{a-b}{2})$.
- $\cos(a)+\cos(b) = 2\cos(\frac{a+b}{2})\cos(\frac{a-b}{2})$.
- $2\cos(a)\cos(b) = \cos(a-b)+\cos(a+b)$
- $2\sin(a)\sin(b) = \cos(a-b)-\cos(a+b)$
- $2\sin(a)\cos(b) = \cos(a+b)+\cos(a-b)$
- $2\cos(a)\sin(b) = \cos(a+b)-\cos(a-b)$
- $\cos^2(a) = \frac{1+\cos(2a)}{2}$
- $\sin^2(a) = \frac{1-\cos(2a)}{2}$

12.5 Còniques

- El·lipse: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$
- Hipèrbola: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0$

12.6 Quàdriques

- El·lipsoide: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$
- Hiperboloide (1 fulla): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}+1=0$
- Hiperboloide (2 fulles): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0$
- Con: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$
- Paraboloide el·líptic: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-z=0$
- Paraboloide hiperbòlic: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-z=0$
- Cilindre el·líptic: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$
- Cilindre hiperbòlic: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0$
- Cilindre parabòlic: $x^2+4ay=0$

12.7 Criteris per límits

- Stolz: (b_n) est. monòtona, $\{\lim b_n=\pm\infty$ o bé $\lim a_n=\lim b_n=0\}$ i $\lim\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=L\in\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$ $\implies$ $\lim\frac{a_n}{b_n}=L$
- Arrel-quocient: (a_n) no nul·la $\forall n\ge n_0$. $\exists\lim\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=L \implies \lim\sqrt[n]{|a_n|}=L$
- Indeterminació 1^∞: $\lim b_n^{c_n} = e^{\lim(b_n-1)c_n}$

Nom: ____________________