# Teoria de la Informació GCED-UPC curs 2019/20
# Problemes; full número 2

14 de setembre de 2019

**2.1.** Calculeu les entropies $H(\boldsymbol{X}_2)$, $H(Y_1)$, $H(Z_1)$, $H(Z_1|Y_1 = x)$ per a $x \in \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}$, l'entropia condicionada $H(Z_1|Y_1)$, i la informació mútua $I(Y_1; Z_1)$ per a les variables aleatòries del problema 3 de la llista número 1 agafant el valor $n = 10$.

**2.2.** L'objectiu d'aquest problema és demostrar que donades dues distribucions de probabilitat $(p_1, \ldots, p_n)$ i $(q_1, \ldots, q_n)$ es compleix la desigualtat

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \log \frac{p_i}{q_i} \geqslant 0,$$

amb igualtat si, i només si, $p_i = q_i$ per a tot $i = 1, \ldots, n$, sense fer servir la desigualtat de Jensen. Per fer-ho, primer:

1. Vegeu que el problema es pot reduir al cas en què tots els $p_i$ i tots els $q_i$ són diferents de zero.
2. Vegeu que n'hi ha prou a demostrar-ho quan la funció logaritme és el logaritme neperià.
3. Demostreu que per a tot $x > 0$ es compleix $\ln x \leqslant x - 1$, amb igualtat si, i només si, $x = 1$.

**2.3.** Donats nombres no negatius $(a_1, \ldots, a_n)$ i $(b_1, \ldots, b_n)$ amb $\sum a_i = A$ i $\sum b_i = B$ demostreu que

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \log \frac{a_i}{b_i} \geqslant A \log \frac{A}{B},$$

amb igualtat només en el cas que $a_i = b_i$ per a tot $i = 1, \ldots, n$.

Escriviu la desigualtat en el cas particular $A = 1$ i $B \leqslant 1$?

**2.4.** Siguin $X, Y$ variables aleatòries tals que $Y = g(X)$ és funció de $X$.

1. Digueu quina relació hi ha entre les entropies $H(X)$ i $H(Y)$.
2. Apliqueu-ho al cas en què $X$ pren valors en $\mathbb{R}$ i $Y = 2^X$, $Y = |X|$ i $Y = \lfloor X \rfloor$.

3. Què es pot dir de les entropies $H(X)$, $H(Y)$, $H(X,Y)$, $H(X|Y)$ i $H(Y|X)$?
4. I de la informació mútua $I(X;Y)$?

**2.5.** Demostreu que si $H(Y|X) = 0$ aleshores $Y = g(X)$ és funció de $X$; o sigui, per a tot $x \in \mathcal{X}$ amb $p(x) \neq 0$ existeix un únic $y \in \mathcal{Y}$ amb $p(x,y) \neq 0$ que permet definir $y = g(x)$.

**2.6.** Un servei de meteorologia prediu el temps. Siguin $X$ la variable aleatòria que indica la predicció i $Y$ la variable aleatòria que diu el temps que realment ha fet. Totes dues prenen valors en el conjunt $\{\mathtt{P}, \mathtt{N}\}$, on $\mathtt{P} =$ "plou" i $\mathtt{N} =$ "no plou". Observant l'històric de prediccions i temps real s'obté la distribució següent per al parell de variables $(X,Y)$:

$$\Pr(X = \mathtt{P}, Y = \mathtt{P}) = \frac{1}{12}, \quad \Pr(X = \mathtt{P}, Y = \mathtt{N}) = \frac{1}{6},$$
$$\Pr(X = \mathtt{N}, Y = \mathtt{P}) = \frac{1}{12}, \quad \Pr(X = \mathtt{N}, Y = \mathtt{N}) = \frac{2}{3}.$$

1. Amb quina probabilitat encerta aquest servei el temps que farà?
2. Un espavilat es dóna compte que si prediu sempre que no plourà l'encerta més vegades que el servei, i s'ofereix a substituir-lo a meitat de preu; amb quina probabilitat encerta?
3. Quina de les dues prediccions dóna més informació? Convé acceptar l'oferta de l'espavilat?

**2.7.** Demostreu que $H(X,Y|Z) = H(X|Z) + H(Y|X,Z)$. Feu-ho directament i també usant la regla de la cadena.

Generalitzeu-ho al cas de més variables:

$$H(X_1, \ldots, X_n|Z) = \sum_{i=1}^{n} H(X_i|X_1, \ldots, X_{i-1}, Z)$$

**2.8.** La *informació mútua condicionada* es defineix posant

$$I(X;Y|Z) := \sum_{x,y,z} p(x,y,z) \log \frac{p(x,y|z)}{p(x|z)p(y|z)} = H(X|Z) - H(X|Y,Z).$$

1. Comproveu la igualtat de la definició.
2. Demostreu la regla de la cadena $I(X,Y;Z) = I(X;Z) + I(Y;Z|X)$.
3. Generalitzeu la regla de la cadena a més variables trobant una expressió per a $I(X_1, X_2, \ldots, X_n; Y)$ i demostrant que és correcta.
4. Doneu exemples de variables per a les quals
   (a) $I(X;Y|Z) < I(X;Y)$;
   (b) $I(X;Y|Z) = I(X;Y)$;
   (c) $I(X;Y|Z) > I(X;Y)$.

5. Discutiu la conveniència de fer servir diagrames de Venn per representar entropies quan es treballa amb tres o més variables.

**2.9.** Les sèries mundials són una competició entre dos equips $A$ i $B$ en què el vencedor és el primer que guanya quatre partits. Per exemple, si $A$ guanya els quatre primers partits s'acaba el torneig i queda guanyador; en canvi, si guanyen alternadament s'han de jugar set partits fins a poder donar per acabada la competició, amb vencedor aquell que n'ha guanyat quatre. Se suposa que tots dos equips tenen les mateixes probabilitats de guanyar en cada partit.

Sigui $X$ la variable aleatòria que dóna tots els resultats possibles (la seqüència d'equips guanyadors) de la sèrie i sigui $Y$ la variable que dóna el nombre de partits que s'han jugat (entre quatre i set).

Calculeu $H(X)$, $H(Y)$, $H(X,Y)$; $H(X|Y)$ i $H(Y|X)$

**2.10.** Sigui $X$ la variable aleatòria que compta el nombre de tirades d'una moneda fins a obtenir una cara. Observeu que $X$ és discreta amb valors al conjunt numerable $\mathcal{X} = \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$.

1. Calculeu $H(X)$. Indicació: recordeu la suma de la sèrie geomètrica i la derivació.
2. Dissenyeu una seqüència de preguntes amb resposta si-no que permetin descobrir el resultat de $X$ de manera òptima.
3. Quina és l'entropia si la moneda està trucada i la probabilitat de treure una cara és $p$?

**2.11.** En una urna hi ha boles de tres colors diferents; siguin $a$, $b$ i $c$ el nombre de boles de cada color. Sigui $X$ la variable aleatòria corresponent a extraure una bola de l'urna. Siguin $Y$ i $Z$ les variables aleatòries corresponents a extraure una segona bola, en la variable $Y$ amb reemplaçament i la variable $Z$ sense reemplaçament.

1. Compareu les entropies d'aquestes tres variables entre elles i amb les entropies condicionades $H(Y|X)$ i $H(Z|X)$.
2. Calculeu aquestes entropies, les entropies conjuntes $H(X,Y)$ i $H(X,Z)$ i les informacions mútues $I(X;Y)$ i $I(X;Z)$ en el cas que els nombres de boles són $(a,b,c) = (3,6,1)$.

**2.12.** Siguin $X$ i $Y$ dues variables aleatòries. Sigui $Z$ la variable aleatòria corresponent a usar $X$ amb probabilitat $p$ i $Y$ amb probabilitat $1-p$. Relacioneu les entropies d'aquestes tres variables.

**2.13.** Sigui $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ un vector aleatori de variables binàries (no necessàriament independents ni amb la mateixa distribució). Sigui $\boldsymbol{R}$ la variable aleatòria que dóna la seqüència del nombre de zeros i uns consecutius en el resultat de $\boldsymbol{X}$; per exemple, si $\boldsymbol{X} = (1,1,1,0,1,1,0,0,0,0)$ aleshores $\boldsymbol{R} = (3,1,2,4)$. Demostreu que

$$H(\boldsymbol{R}) \leqslant H(\boldsymbol{X}) \leqslant H(\boldsymbol{R}) + \min\big(H(X_i) : i = 1, \dots, n\big)$$

Vegeu que la desigualtat de l'esquerra és una desigualtat estricta.

**2.14.** Sigui $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ un vector aleatori de variables binàries que no pren cap valor de $\mathcal{X}^n$ amb un nombre senar de uns i pren tots els valors amb nombre parell de uns amb la mateixa probabilitat. Calculeu

$$I(X_2; X_1), \quad I(X_3; X_2|X_1), \quad \ldots \quad I(X_n; X_{n-1}|X_1, \ldots, X_{n-2})$$

**2.15.** Es considera una variable aleatòria contínua $X$ amb distribució uniforme sobre l'interval $[0, 1]$. que pren valors en el conjunt de les distribucions de Bernoulli donant la probabilitat del valor 1. Calculeu l'esperança de l'entropia $\mathbb{E}\big[H(X)\big]$.

**2.16.** Demostreu que si $X, Y$ són variables independents a valors en un mateix conjunt i amb la mateixa distribució de probabilitats,

$$\Pr(X = Y) \geqslant 2^{-H(X)}$$

amb igualtat si, i només si, la distribució és uniforme.

Demostreu també que si les variables independents tenen distribucions $p$ i $q$ aleshores

$$\Pr(X = Y) \geqslant 2^{-H(X)-D(p\|q)}, \qquad \Pr(X = Y) \geqslant 2^{-H(Y)-D(q\|p)}.$$