Examen Parcial — Barcelona, 14 de Noviembre, 2018

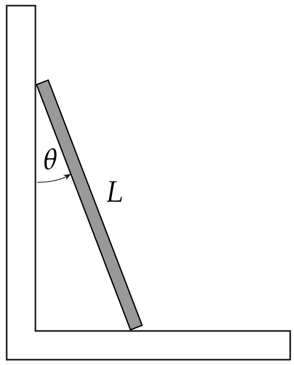
Física, CFIS

1. (3p) Una barra rígida de largo L se mueve apoyada en dos paredes rígidas que forman un ángulo recto entre ellas. Supondremos primero que el ángulo $\theta = \theta(t)$ es una función arbitraria del tiempo.

   a) (1p) Determina el vector posición $\vec{r}(t)$, velocidad $\vec{v}(t)$ y aceleración $\vec{a}(t)$ del punto medio de la barra, en función de $\theta(t)$.

   b) (1p) Calcula el radio de curvatura de esta trayectoria. Interpreta el resultado y dibuja la trayectoria.

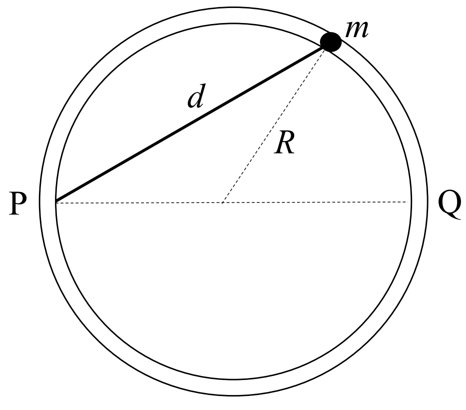
   c) (1p) Supón ahora que el apoyo inferior de la barra se mueve con rapidez constante v_0 a partir del momento en que la barra está en la posición vertical. Encuentra la función $\theta(t)$ que da lugar a ese movimiento y calcula cuánto tiempo tarda la barra en caer al suelo.



2. (3p) Una partícula que se mueve sobre una circunferencia es atraída por un punto P de su perímetro, con una fuerza que es directamente proporcional a la distancia ($F = \alpha d$) y que actúa sobre la recta que une los dos puntos. Suponiendo que la partícula parte del punto Q con velocidad inicial nula, calcula:

   a) (1.5p) La velocidad de la partícula cuando pasa por el punto P

   b) (1.5p) La fuerza de reacción. ¿Cuánto vale en los puntos P y Q? Interpreta el resultado físicamente. Calcula el ángulo para el cual la reacción es nula.



3. (4p) Una partícula de masa m está atada a dos cuerdas independientes de igual largo, cuyos otros extremos están fijos a los puntos A y B, separados entre sí una distancia H. La partícula rota en torno al eje vertical AB, manteniéndose en el plano horizontal ubicado a media distancia entre ambos puntos.

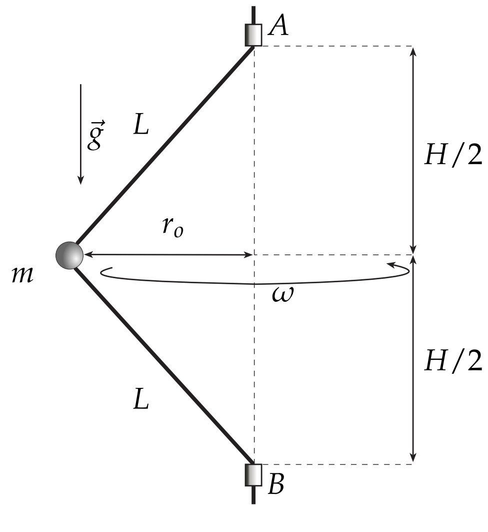
   a) (1p) Determina el mínimo valor de la velocidad angular ω que le permite a la partícula mantener un movimiento circular uniforme con ambas cuerdas tensas (Datos: m, g, H).

   Supongamos ahora que los puntos A y B se transforman en orificios a través de los cuales las dos cuerdas pueden ser recogidas en forma controlada.

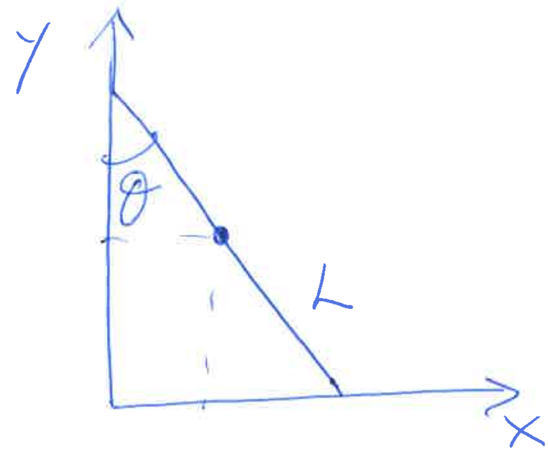
   b) (1p) Si ambas cuerdas son recogidas a una tasa igual y constante, $\dot{L} = -v_o$, muestra que $\ddot{r} \propto r^{-3}$ y obtén la constante de proporcionalidad.

   c) (1p) Si en el recogimiento de las cuerdas se observa que, cuando $r = H$, la velocidad angular de la partícula es $2\sqrt{g/H}$, determina la tensión de las cuerdas.

   d) (1p) Calcula la velocidad angular y la tensión de cada cuerda cuando $r = H/2$. (Pista.: se puede integrar una de las ecuaciones multiplicandola por r).



1.-



Podemos calcular la posición del punto medio de la barra, para un ángulo dado θ(t)

a)

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} L \sin\theta \\ y = \frac{1}{2} L \cos\theta \end{cases}$$

La velocidad será, por tanto:

$$\begin{cases} v_x = \frac{1}{2} L \dot{\theta} \cos\theta \\ v_y = -\frac{1}{2} L \dot{\theta} \sin\theta \end{cases}$$

Y la aceleración:

$$\begin{cases} a_x = -\frac{1}{2} L \dot{\theta}^2 \sin\theta + \frac{1}{2} L \ddot{\theta} \cos\theta \\ a_y = -\frac{1}{2} L \dot{\theta}^2 \cos\theta - \frac{1}{2} L \ddot{\theta} \sin\theta \end{cases}$$

b) El radio de curvatura viene dado por $\rho = \dfrac{v^3}{|\vec{v} \times \vec{a}|}$

Tenemos que: $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \frac{1}{2} L \dot{\theta}$

Además:

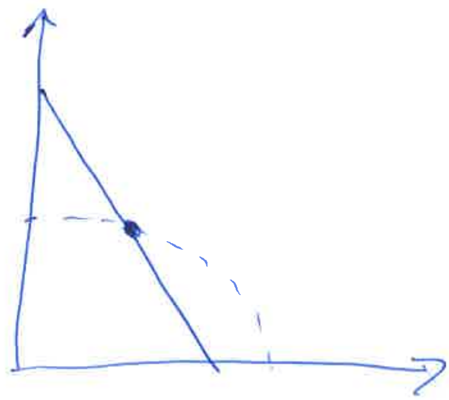
$$\vec{v} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ -\dot{\theta}^2 \sin\theta + \ddot{\theta}\cos\theta & -\dot{\theta}^2\cos\theta - \ddot{\theta}\sin\theta & 0 \end{vmatrix} \frac{1}{4} L^2 \dot{\theta} =$$

$$= \frac{1}{4} L^2 \dot{\theta} \left(-\dot{\theta}^2 \cos^2\theta - \ddot{\theta} \sin\theta\cos\theta - \dot{\theta}^2 \sin^2\theta + \ddot{\theta} \sin\theta\cos\theta \right) =$$

$$= -\frac{1}{4} L^2 \dot{\theta}^3$$

$$\Rightarrow \boxed{\rho = \frac{1/8\, L^3 \dot{\theta}^3}{1/4\, L^2 \dot{\theta}^3} = \frac{L}{2}}$$

El punto medio de la barra describe una circunferencia



c) La posición del punto inferior de la barra es:

$$x = L \sin\theta$$

y su velocidad

$$v_x = L\dot{\theta}\cos\theta$$

Si es constante, tenemos:

$$L\dot{\theta}\cos\theta = v_0 \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \frac{v_0}{L\cos\theta}$$

Separando variables:

$$\cos\theta \, d\theta = \frac{v_0}{L} dt$$

$$\Rightarrow \quad \sin\theta = \frac{v_0}{L} t + c_1$$

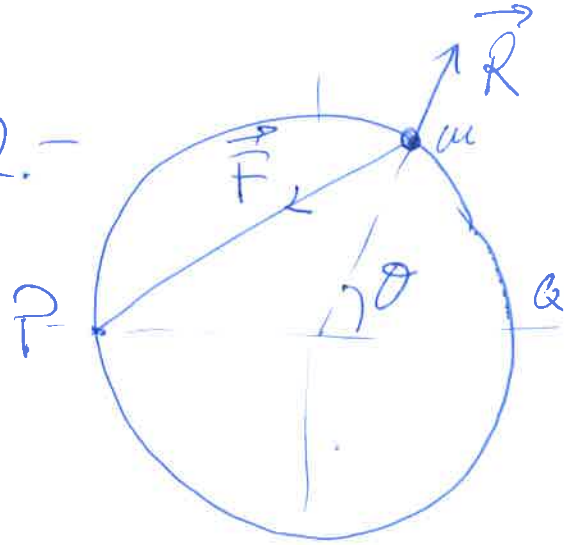
En $t=0 \Rightarrow \theta = 0 \Rightarrow c_1 = 0$

Por tanto: $\boxed{\theta = \arcsin\left(\frac{v_0}{L} t\right)}$

Estará en el suelo cuando $\theta = \pi/2$

$$\Rightarrow \quad t = L/v_0$$

2.-



La posición de la masa a:

$$\begin{cases} x = R\cos\theta \\ y = R\sin\theta \end{cases}$$

La distancia al punto P será:

$$d = \sqrt{R^2(1+\cos\theta)^2 + R^2\sin^2\theta} =$$

$$= R\sqrt{1+2\cos\theta+\cos^2\theta+\sin^2\theta} =$$

$$= R\sqrt{2}\sqrt{1+\cos\theta} = 2R\cos\theta/2$$

La reacción es en la dirección de la normal. Podemos descomponer la fuerza en las direcciones normal y transversal.

La fuerza la podemos escribir como:

$$\vec{F} = -\alpha(\vec{F}_m - \vec{r}_P) = -\alpha\left[(R\cos\theta, R\sin\theta) - (-R, 0)\right] = -\alpha R(1+\cos\theta, \sin\theta)$$

La normal → $\hat{n} \equiv \hat{r} = (\cos\theta, \sin\theta)$

y la tangente $\hat{t} \equiv \hat{\theta} = (-\sin\theta, \cos\theta)$

Por tanto, las componentes de la fuerza son:

$$F_t = \vec{F} \cdot \hat{t} = -\alpha R(-\sin\theta + \sin\theta\cos\theta + \sin\theta\cos\theta) = \alpha R\sin\theta$$

$$F_n = \vec{F} \cdot \hat{n} = -\alpha R(\cos\theta + \cos^2\theta + \sin^2\theta) = -\alpha R(1+\cos\theta)$$

De forma que las ecuaciones de Newton quedan:

$$\vec{F} + \vec{N} = m\vec{a}$$

$$F_t = m a_r \Rightarrow mR\ddot{\theta} = \alpha R\sin\theta$$

$$F_n + N = m a_n \Rightarrow -mR\dot{\theta}^2 = N - \alpha R(1+\cos\theta)$$

a) De la primera ecuación:

$$\ddot{\theta} = \frac{\alpha}{m} \sin\theta$$

Podemos integrarla multiplicando por $\dot{\theta}$:

$$\dot{\theta}\ddot{\theta} = \frac{\alpha}{m} \dot{\theta}\sin\theta$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 = -\frac{\alpha}{m}\cos\theta + C'$$

Cuando $\theta = 0 \Rightarrow \dot{\theta} = 0 \Rightarrow C = \frac{\alpha}{m}$

$$\Rightarrow \dot{\theta}^2 = 2\frac{\alpha}{m}(1-\cos\theta)$$

Cuando la masa pasa por el punto P

$$\rightarrow \theta = \pi \Rightarrow \dot{\theta}^2 = \frac{4\alpha}{m} \Rightarrow \dot{\theta} = 2\sqrt{\frac{\alpha}{m}}$$

La velocidad será $v = R\dot{\theta} = 2R\sqrt{\frac{\alpha}{m}}$

b) La fuerza de reacción viene dada por:

$$N = -mR\dot{\theta}^2 + \alpha R(1+\cos\theta)$$

Utilizando la expresión para $\dot{\theta}$:

$$N = \alpha R(1+\cos\theta) - 2\alpha R(1-\cos\theta)$$

$$= \alpha R(3\cos\theta - 1)$$

En el punto Q, $\theta = 0 \Rightarrow N = 2\alpha R$

En P, $\theta = \pi \Rightarrow N = -4\alpha R$

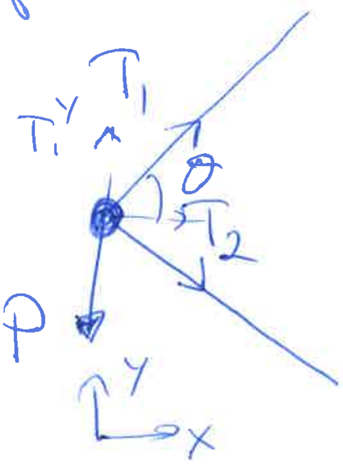
La reacción será nula cuando:

$$3\cos\theta = 1 \Rightarrow \theta = \arccos 1/3$$

c)

8.- Sobre la partícula actúan las fuerzas:

a)

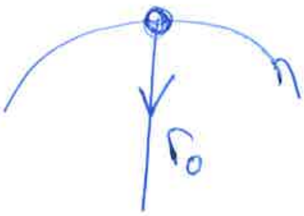


Si se mueve en un plano horizontal, las componentes verticales de las fuerzas deben anular. Entonces:

$$P + T_2^Y = T_1^Y$$

$$mg + T_2 \sin\theta = T_1 \sin\theta$$

Las componentes horizontales darán lugar a una aceleración normal, de forma que



$$T_1^X + T_2^X = m a_n = m \frac{v^2}{r_0}$$

$$\Rightarrow (T_1 + T_2)\cos\theta = m r_0 \omega^2$$

Por tanto:

$$T_1 + T_2 = \frac{m r_0 \omega^2}{\cos\theta}$$

$$T_1 - T_2 = \frac{mg}{\sin\theta}$$

Y las tensiones son:

$$T_1 = \frac{m}{2}\left(\frac{r_0\omega^2}{\cos\theta} + \frac{g}{\sin\theta}\right)$$

$$T_2 = \frac{m}{2}\left(\frac{r_0\omega^2}{\cos\theta} - \frac{g}{\sin\theta}\right)$$

Para que las cuerdas estén tensas $T_1, T_2 > 0$.

El valor límite será cuando $T_2 = 0$

$$\Rightarrow \frac{r_0\omega^2}{\cos\theta} = \frac{g}{\sin\theta} \Rightarrow \omega^2 = \frac{g}{r_0 \tan\theta}$$

$$\Rightarrow \omega^2 = \frac{g}{r_0 \cdot H/2r_0} = \frac{2g}{H} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{2g}{H}}$$

b) Se cumple que:

$$L^2 = \frac{H^2}{4} + r^2$$

Por tanto:

$$2L\dot{L} = 2r\dot{r}$$

Volviendo a derivar:

$$\cancel{2}\dot{L}^2 + L\ddot{L} = \dot{r}^2 + r\ddot{r}$$

Sabemos que $\dot{L} = -v_0$ y $\ddot{L} = 0$

Por tanto:

$$r\ddot{r} + \dot{r}^2 = v_0^2$$

Con: $\dot{r} = \dfrac{L\dot{L}}{r} = -\dfrac{L}{r}v_0$

$$\Rightarrow r\ddot{r} + \frac{L^2}{r^2}v_0^2 = v_0^2$$

$$r\ddot{r} = v_0^2\left(1 - \frac{L^2}{r^2}\right) = v_0^2\left(\frac{r^2 - L^2}{r^2}\right) = v_0^2\,\frac{-H^2/4}{r^2}$$

$$\Rightarrow \ddot{r} = -\frac{H^2 v_0^2}{4r^3}$$

e) ~~Now there is a change in the radius,~~ Ahora hay un cambio en el Radio. Por tanto, tendremos:

$$\begin{cases} (T_1+T_2)\cos\theta = m a_n = m r\dot{\theta}^2 - m\ddot{r} = \\ \qquad = m r \dot{\theta}^2 + m \dfrac{H^2 v_0^2}{4r^3} \\ (T_1-T_2)\sin\theta = mg \end{cases}$$

con $\sin\theta = H/2L$, $\cos\theta = r/L$

Si tenemos que $r=H$, $\omega = 2\sqrt{\dfrac{g}{H}}$

$\Rightarrow L = \sqrt{r^2 + H^2/4} = \dfrac{H\sqrt{5}}{2}$

Por tanto:

$$\begin{cases} T_1+T_2 = \dfrac{\sqrt{5}}{2}\left(mH\cdot\cancel{4}\dfrac{g}{H} + m\dfrac{v_0^2}{4H}\right) = \\ \qquad = \dfrac{\sqrt{5}}{2}m\left(\cancel{4}g + \dfrac{v_0^2}{4H}\right) \\ T_1-T_2 = \sqrt{5}\,mg \end{cases}$$

$$\Rightarrow T_1 = \frac{\sqrt{5}}{2}m\left(3g + \frac{v_0^2}{8H}\right),\quad T_2 = \frac{\sqrt{5}}{2}m\left(g + v_0^2/8H\right)$$

d) En la dirección transversal, como no actúan fuerzas:

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0$$

multiplicando por r:

$$r^2\ddot{\theta} + 2r\dot{r}\dot{\theta} = 0 = \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})$$

Por tanto:

$$r^2\dot{\theta} = C_1$$

Cuando $r = H \Rightarrow \omega = \dot{\theta} = 2\sqrt{\frac{g}{H}}$

Por tanto $C_1 = 2H^2\sqrt{\frac{g}{H}} = 2\sqrt{gH^3}$

Cuando $r = H/2 \Rightarrow \omega = \frac{2}{r^2}\sqrt{gH^3}$

$$\Rightarrow \omega = 8\sqrt{\frac{g}{H}}$$