SNLAs 2D: Espirales de caracoles

Rafael Ramírez Ros

Clase SNL10

Outline

Índice

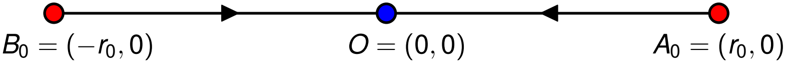
Problema

- Estado inicial: Unos caracoles están situados en los vértices de un polígono regular de n lados y radio r_0 centrado en el origen $O = (0, 0)$.
- Regla de persecución: Cada caracol persigue, con velocidad constante ϵ, al caracol situado en el siguiente vértice en sentido anti-horario.
- Preguntas:
  1. Calcular el tiempo t_n que tardan en reunirse en el origen.
  2. Calcular la distancia d_n que recorren antes de reunirse.
  3. ¿Cuántas vueltas dan alrededor del origen?
  4. ¿Qué curva forman sus órbitas?
  5. ¿Cuánto valen $\lim_{n \to +\infty} t_n$ y $\lim_{n \to +\infty} d_n$?
- Notamos por $R_\omega : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ a la rotación de ángulo ω radianes alrededor del origen

Índice

El segmento

- Tenemos $n = 2$ caracoles situados inicialmente en



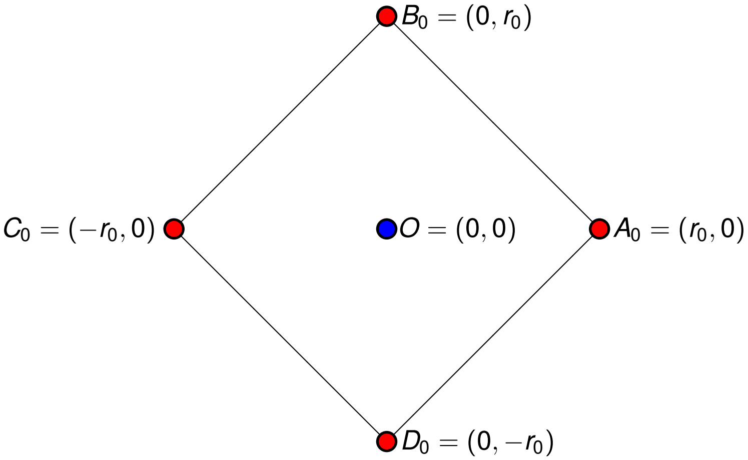
- Cada caracol se mueve en linea recta hacia O, luego

$$d_2 = r_0, \qquad t_2 = d_2/\epsilon = r_0/\epsilon.$$

- Los caracoles no dan ninguna vuelta alrededor del origen.

Índice

Tenemos $n = 4$ caracoles situados inicialmente en



La simetría

- El problema es invariante bajo la rotación $R_{\pi/2}$.
- Si $A(t) = (x(t), y(t))$ es la trayectoria del primer caracol, entonces:
  - $B(t) = R_{\pi/2}(A(t)) = (-y(t), x(t))$ es la trayectoria del 2o;
  - $C(t) = R_{\pi}(A(t)) = (-x(t), -y(t))$ es la trayectoria del 3o; y
  - $D(t) = R_{3\pi/2}(A(t)) = (y(t), -x(t))$ es la trayectoria del 4o.

Velocidad del 1er caracol

La velocidad $A' = (x', y')$ del 1er caracol es el vector

$$\begin{aligned}
(x', y') = A' &= \epsilon \frac{B - A}{\|B - A\|} \\
&= \epsilon \frac{(-y, x) - (x, y)}{\|(-y, x) - (x, y)\|} \\
&= \epsilon \frac{(-y - x, x - y)}{\|(-y - x, x - y)\|} \\
&= \epsilon \frac{(-y - x, x - y)}{\sqrt{(x + y)^2 + (x - y)^2}} \\
&= \epsilon \frac{(-y - x, x - y)}{\sqrt{2x^2 + 2y^2}} \\
&= \epsilon \frac{(-y - x, x - y)}{\sqrt{2}\sqrt{x^2 + y^2}}.
\end{aligned}$$

PVI en Cartesianas

La trayectoria del 1er caracol es la solución del PVI

$$\begin{cases} x' = f(x,y) = -\epsilon(x+y)/\sqrt{2}\, r, & x(0) = r_0, \\ y' = g(x,y) = \quad \epsilon(x-y)/\sqrt{2}\, r, & y(0) = 0, \end{cases}$$

donde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ es la distancia del 1er caracol al origen.

PVI en polares

- Sea $(r(t), \theta(t))$ la trayectoria del 1er caracol en polares.
- Esa trayectoria es la solución del PVI

$$\begin{cases} r' = F(r,\theta) = -\epsilon/\sqrt{2}, & r(0) = r_0, \\ r\theta' = G(r,\theta) = \epsilon/\sqrt{2}, & \theta(0) = 0, \end{cases}$$

pues

$$\begin{aligned} F(r,\theta) &= f(r\cos\theta, r\sin\theta)\cos\theta + g(r\cos\theta, r\sin\theta)\sin\theta \\ &= -\epsilon\big((\cos\theta + \sin\theta)\cos\theta + (\sin\theta - \cos\theta)\sin\theta\big)/\sqrt{2} \\ &= -\epsilon\big(\cos^2\theta + \sin^2\theta\big)/\sqrt{2} = -\epsilon/\sqrt{2}, \\ G(r,\theta) &= g(r\cos\theta, r\sin\theta)\cos\theta - f(r\cos\theta, r\sin\theta)\sin\theta \\ &= \epsilon\big((\sin\theta - \cos\theta)\cos\theta + (\cos\theta + \sin\theta)\sin\theta\big)/\sqrt{2} \\ &= \epsilon\big(\cos^2\theta + \sin^2\theta\big)/\sqrt{2} = \epsilon/\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Ecuación de las órbitas

- La ecuación de las órbitas en polares es

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\mathrm{d}r/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t} = \frac{r'}{\theta'} = \frac{rF(r,\theta)}{G(r,\theta)} = -r.$$

- La solución general de la EDO anterior es

$$r(\theta) = c\mathrm{e}^{-\theta}, \qquad c \in \mathbf{R}.$$

- Determinamos $c \in \mathbf{R}$ imponiendo la CI:

$$c = r(0) = r_0 \Rightarrow c = r_0 \Rightarrow r(\theta) = r_0\mathrm{e}^{-\theta}.$$

- El 1er caracol sigue una espiral logarítmica.
- La espiral no depende de la velocidad ϵ y su "forma" tampoco depende del radio inicial r_0, pues las espirales logarítmicas son auto-similares.

Distancia recorrida, tiempo invertido & vueltas dadas

- La solución de la primera ecuación del PVI en polares es

$$r(t) = r_0 - \epsilon t/\sqrt{2}.$$

- Buscamos el tiempo invertido t_4 imponiendo que la distancia al origen sea igual a cero:

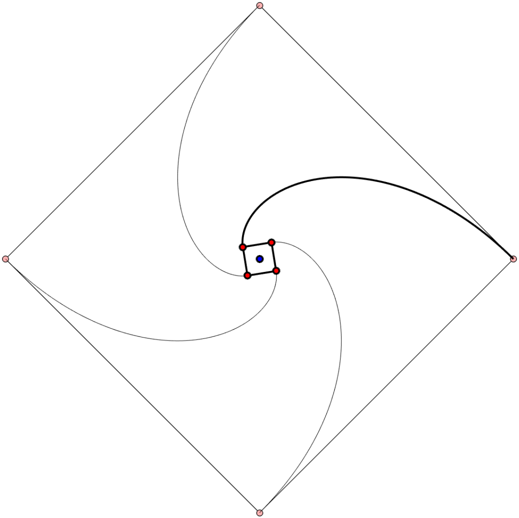
$$r_0 - \epsilon t_4/\sqrt{2} = r(t_4) = 0 \Rightarrow t_4 = \sqrt{2}\, r_0/\epsilon.$$

- La distancia recorrida es $d_4 = \epsilon t_4 = \sqrt{2} r_0$, que es justo la longitud del lado del cuadrado inicial.
- Los caracoles dan infinitas vueltas alrededor de O, pues

$$r(\theta) = r_0 e^{-\theta} \to 0^+ \Leftrightarrow \theta \to +\infty.$$

- Explicación: $\lim_{r\to 0^+} \theta' = (\epsilon/\sqrt{2}) \lim_{r\to 0^+} 1/r = +\infty$.

Resolución con MatLab: $r_0 = \epsilon = 1$



Índice

La simetría

- Si $c_n = \cos(2\pi/n)$ y $s_n = \sin(2\pi/n)$, entonces

$$\sigma_n = \sin(\pi/n) = \sqrt{\frac{1-c_n}{2}} = \frac{\sqrt{(c_n-1)^2+s_n^2}}{2},$$
$$\mu_n = \frac{1-c_n}{s_n} = \frac{2\sigma_n^2}{s_n}.$$

- El problema es invariante bajo la rotación $R_{2\pi/n}$ dada por

$$R_{2\pi/n}(x,y) = (c_n x - s_n y, s_n x + c_n y).$$

- Si $A(t) = (x(t), y(t))$ es la trayectoria del 1er caracol, entonces la trayectoria del segundo es

$$B(t) = R_{2\pi/n}(A(t)) = \big(c_n x(t) - s_n y(t), s_n x(t) + c_n y(t)\big).$$

Velocidad del 1er caracol

La velocidad $A' = (x', y')$ del 1er caracol es el vector

$$
\begin{aligned}
(x', y') = A' &= \epsilon \frac{B - A}{\|B - A\|} \\
&= \epsilon \frac{(c_n x - s_n y, s_n x + c_n y) - (x, y)}{\|(c_n x - s_n y, s_n x + c_n y) - (x, y)\|} \\
&= \epsilon \frac{\big((c_n - 1)x - s_n y, s_n x + (c_n - 1)y\big)}{\big\|\big((c_n - 1)x - s_n y, s_n x + (c_n - 1)y\big)\big\|} \\
&= \epsilon \frac{\big((c_n - 1)x - s_n y, s_n x + (c_n - 1)y\big)}{\sqrt{((c_n - 1)x - s_n y)^2 + (s_n x + (c_n - 1)y)^2}} \\
&= \epsilon \frac{\big((c_n - 1)x - s_n y, s_n x + (c_n - 1)y\big)}{\sqrt{(c_n - 1)^2 + s_n^2}\sqrt{x^2 + y^2}} \\
&= \epsilon \frac{\big((c_n - 1)x - s_n y, s_n x + (c_n - 1)y\big)}{2\sigma_n \sqrt{x^2 + y^2}}.
\end{aligned}
$$

PVI en Cartesianas

La trayectoria del 1er caracol es la solución del PVI

$$\begin{cases} x' = f(x, y) = -\dfrac{\epsilon}{2\sigma_n} \dfrac{(c_n - 1)x - s_n y}{r}, & x(0) = r_0, \\ y' = g(x, y) = \quad \dfrac{\epsilon}{2\sigma_n} \dfrac{s_n x + (c_n - 1)y}{r}, & y(0) = 0, \end{cases}$$

donde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ es la distancia del 1er caracol al origen.

PVI en polares

- Sea $(r(t), \theta(t))$ la trayectoria del 1er caracol en polares.
- Esa trayectoria es la solución del PVI

$$\begin{cases} r' = F(r,\theta) = -\epsilon\sigma_n, & r(0) = r_0, \\ r\theta' = G(r,\theta) = \epsilon s_n/\sigma_n, & \theta(0) = 0, \end{cases}$$

pues

$$\begin{aligned} F(r,\theta) &= f(r\cos\theta, r\sin\theta)\cos\theta + g(r\cos\theta, r\sin\theta)\sin\theta \\ &= \cdots = -\epsilon\sigma_n, \\ G(r,\theta) &= g(r\cos\theta, r\sin\theta)\cos\theta - f(r\cos\theta, r\sin\theta)\sin\theta \\ &= \cdots = \epsilon s_n/2\sigma_n. \end{aligned}$$

Ecuación de las órbitas

- La ecuación de las órbitas en polares es

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\mathrm{d}r/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t} = \frac{r'}{\theta'} = \frac{rF(r,\theta)}{G(r,\theta)} = -\frac{2\sigma_n^2}{s_n}r = -\mu_n r.$$

- La solución general de la EDO anterior es

$$r(\theta) = c\mathrm{e}^{-\mu_n\theta}, \qquad c \in \mathbf{R}.$$

- Determinamos $c \in \mathbf{R}$ imponiendo la CI:

$$c = r(0) = r_0 \Rightarrow c = r_0 \Rightarrow r(\theta) = r_0\mathrm{e}^{-\mu_n\theta}.$$

- El 1er caracol sigue una espiral logarítmica.
- La espiral no depende de la velocidad ϵ, pero sí depende de $n = \#$ caracoles $= \#$ lados del polígono.

Distancia recorrida, tiempo invertido & vueltas dadas

- La solución de la primera ecuación del PVI en polares es

$$r(t) = r_0 - \epsilon\sigma_n t.$$

- Buscamos el tiempo invertido t_n imponiendo que la distancia al origen sea igual a cero:

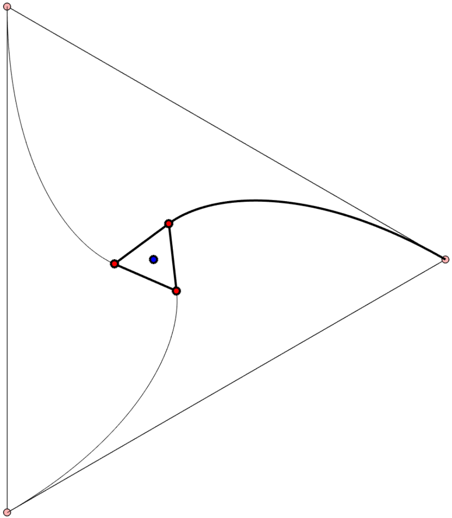
$$r_0 - \epsilon\sigma_n t_n = r(t_n) = 0 \Rightarrow t_n = r_0/\epsilon\sigma_n.$$

- La distancia recorrida es $d_n = \epsilon t_n = r_0/\sigma_n$.
- Los caracoles dan infinitas vueltas alrededor de O, pues

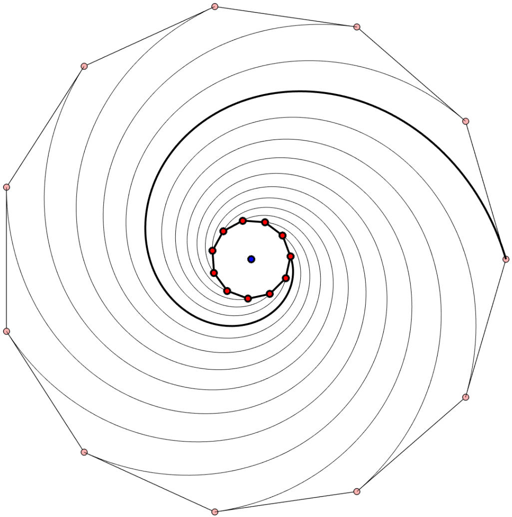
$$r(\theta) = r_0 e^{-\mu_n\theta} \to 0^+ \Leftrightarrow \theta \to +\infty.$$

- Observación: $\lim_{n\to+\infty} t_n = +\infty$ y $\lim_{n\to+\infty} d_n = +\infty$.

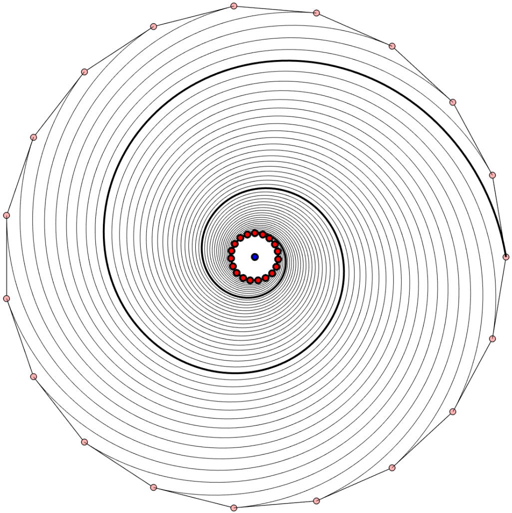
Resolución con MatLab: $r_0 = \epsilon = 1$ & $n = 3$



Resolución con MatLab: $r_0 = \epsilon = 1$ & $n = 11$



Resolución con MatLab: $r_0 = \epsilon = 1$ & $n = 19$



Material adicional

En la página de la asignatura podéis obtener:

- El fichero `Caracoles.m` que contiene una función de MatLab para generar las figuras anteriores (y otras).
- Vídeos del caso triángulo, cuadrado, endecágono y eneadecágono.
- El fichero `CaracolesVideo.m` que contiene una función de MatLab para generar esos y otros vídeos.