

FACULTAT DE MATEMÀTIQUES I ESTADÍSTICA

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA - BARCELONATECH

**Apunts de Fonaments de les
Matemàtiques (Primer curs del Grau de
Matemàtiques)**

Àlex Batlle Casellas

November 15, 2018

Índex

2	Conjunts i aplicacions.	2
2.1	Operacions amb conjunts.	2
2.2	Conjunt de les parts.	4
2.3	Aplicacions.	5
2.3.1	Injectivitat, exhaustivitat i bijectivitat.	6
2.3.2	Composició d'aplicacions.	7
3	Relacions, operacions i estructures.	8
3.1	Relacions d'equivalència.	8
3.1.1	Descomposició canònica d'una aplicació.	9
3.2	Relacions d'ordre.	9

2 Conjunts i aplicacions.

Axioma 2.1. *Axioma d'extensionalitat.*

$$A = B \iff \forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B).$$

Definició 2.1. *Relació d'inclusió.*

$$B \subseteq A \iff \forall x(x \in B \rightarrow x \in A).$$

PROPIETATS:

1. $A \subseteq A$;
2. $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \implies A \subseteq C$;
3. $A \subseteq B \wedge B \subseteq A \iff A = B$;
4. $\forall A, \emptyset \subseteq A$.

Inclusió estricta:

1. $A \not\subseteq A$;
2. $B \subset A \implies A \not\subseteq B$;
3. $A \subset B \wedge B \subset C \implies A \subset C$;
4. $A \neq \emptyset \iff \emptyset \subset A$.

2.1 Operacions amb conjunts.

Definició 2.2. *Unió d'A i B ($A \cup B$).*

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}.$$

PROPIETATS:

1. $A \cup A = A$;
2. $A \cup B = B \cup A$;
3. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$;
4. $A \cup \emptyset = A$;
5. $A \subseteq A \cup B, B \subseteq A \cup B$;
6. $A \subseteq B \iff A \cup B = B$;
7. $A \cup B \subset C \iff A \subseteq C \wedge B \subseteq C$.

Definició 2.3. *Intersecció d'A i B ($A \cap B$).*

$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}.$$

PROPIETATS:

1. $A \cap A = A$;
2. $A \cap B = B \cap A$;
3. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$;
4. $A \cap \emptyset = \emptyset$;
5. $A \cap B \subseteq A$, $A \cap B \subseteq B$;
6. $A \subseteq B \iff A \cap B = A$;
7. $C \subseteq A \cap B \iff C \subseteq A \wedge C \subseteq B$.

Definició 2.4. *Diferència d'A i B ($A - B$ o $A \setminus B$).*

$$A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}.$$

PROPIETATS:

1. $A - \emptyset = A$, $\emptyset - A = \emptyset$, $A - A = \emptyset$;
2. $A - B \subseteq A$;
3. $(A - B) \cap B = \emptyset$;
4. $A \subseteq B \iff A - B = \emptyset$;
5. $C \subseteq A - B \iff (C \subseteq A) \wedge (C \cap B = \emptyset)$.

PROPIETATS DE LA UNIÓ I LA INTERSECCIÓ:

1. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;
2. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
3. $A \cap (A \cup B) = A$;
4. $A \cup (A \cap B) = A$.

Definició 2.5. *Conjunt complementari. Fixem un conjunt Ω i considerem només subconjunts d' Ω . El complementari d'un subconjunt A d' Ω és el conjunt de tots els elements d' Ω que no pertanyen a A . (Notació: A^c o \bar{A}):*

$$A^c = \{x \in \Omega : x \notin A\} = \Omega - A.$$

PROPIETATS:

1. $\emptyset^c = \Omega, \Omega^c = \emptyset;$
2. $(A^c)^c = A;$
3. $A \cap A^c = \emptyset;$
 $A \cup A^c = \Omega;$
4. $A \subseteq B \iff B^c \subseteq A^c;$
5. $A \cap B = \emptyset \iff A \subseteq B^c \iff B \subseteq A^c;$
6. $A \cup B = \Omega \iff A^c \subseteq B \iff B^c \subseteq A;$
7. $A - B = A \cap B^c;$
8. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c.$

Definició 2.6. *Parell ordenat.* El parell ordenat de x i y és un objecte que denotem per (x, y) que compleix:

$$(x, y) = (z, t) \iff x = z \wedge y = t.$$

Definició de Kuratowski:

$$(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}.$$

Definició 2.7. *Producte cartesià.* El producte cartesià de dos conjunts A, B és el conjunt format per tots els parells ordenats (x, y) tals que $x \in A$ i $y \in B$. (Notació: $A \times B$)

$$A \times B = \{(x, y) : x \in A \wedge y \in B\};$$

anàlogament,

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in A_i \forall i\}.$$

PROPIETATS:

1. $A \times \emptyset = \emptyset = \emptyset \times A;$
2. $A \times B = B \times A \iff A = B \vee A = \emptyset \vee B = \emptyset.$

2.2 Conjunt de les parts.

Definició 2.8. *Conjunt de les parts.* Anomenem el conjunt de les parts d' A el conjunt que té per elements tots els subconjunts d' A . Notació: $\mathcal{P}(A)$.

$$\mathcal{P}(A) = \{X : X \subseteq A\}$$

PROPIETATS:

1. $X \in \mathcal{P}(A) \iff X \subseteq A;$
2. $\emptyset \in \mathcal{P}(A), A \in \mathcal{P}(A).$

2.3 Aplicacions.

Definició 2.9. *Correspondència.* Una correspondència és una terna (A, B, G) on A i B són conjunts i $G \subseteq A \times B$.

Definició 2.10. *Aplicació.* Una aplicació és una correspondència (A, B, f) on $f \subseteq A \times B$:

$$\forall x \in A \exists! y \in B : (x, y) \in f.$$

Anomenem a $f(x) = y$ la imatge d' x per f .

Notació:

$$f : A \mapsto B.$$

$$A \xrightarrow{f} B.$$

Al conjunt A l'anomenem domini, i al conjunt B codomini.

Definició 2.11. *Restricció.* Donada una aplicació $f : A \mapsto B$ i un subconjunt $A' \subseteq A$, anomenem la restricció d' f per A' a l'aplicació $f|_{A'} : A' \mapsto B$.

Definició 2.12. *Aplicació identitat.* L'aplicació identitat en un conjunt A està definida per

$$I_A : A \mapsto A \quad I_A(x) = x \quad \forall x \in A.$$

Definició 2.13. *Conjunt imatge.* Si $f : A \mapsto B$ i $A' \subseteq A$, aleshores

$$f(A') = \{y \in B : \exists a \in A' (y = f(a))\} = \{f(a) : a \in A'\}$$

és el conjunt imatge d' A' per f .

Definició 2.14. *Conjunt antiimatge.* Si $f : A \mapsto B$ i $B' \subseteq B$, aleshores

$$f^{-1}(B') = \{x \in A : f(x) \in B'\} \subseteq A$$

és el conjunt antiimatge de B' per f .

Una qüestió de notació: notem per f^{-1} tant el conjunt antiimatge com la funció inversa. És important saber distingir entre aquests dos significats:

- $f^{-1}(\{b\})$ és el conjunt antiimatge del conjunt $\{b\}$ per f .
- $f^{-1}(b)$ pot ser (fent un abús de notació) el conjunt antiimatge del conjunt que té per únic element a b , com s'indica a 1., però també pot ser l'aplicació inversa (definida més endavant), que no sempre existeix.

2.3.1 Injectivitat, exhaustivitat i bijectivitat.

Definició 2.15. *Injectivitat.* $f : A \mapsto B$ és injectiva si i només si

$$\forall a_1, a_2 \in A (a_1 \neq a_2 \implies f(a_1) \neq f(a_2)).$$

Se sol utilitzar el recíproc,

$$\forall a_1, a_2 \in A (f(a_1) = f(a_2) \implies a_1 = a_2).$$

Definició 2.16. *Exhaustivitat.* $f : A \mapsto B$ és exhaustiva si i només si

$$\forall b \in B \exists a \in A : f(a) = b.$$

Observació:

1. $|A| > |B|$: no hi ha aplicacions injectives $A \mapsto B$. Si n'hi hagués, $|A| \leq |B|$.
2. $|B| > |A|$: no hi ha aplicacions exhaustives $A \mapsto B$. Si n'hi hagués, $|A| \geq |B|$.

Definició 2.17. *Bijectivitat.* $f : A \mapsto B$ és exhaustiva si i només si f és injectiva i exhaustiva.

Observació: A, B finits i existeix una bijecció.

$$A \mapsto B \implies (|A| \leq |B|) \wedge (|A| \geq |B|) \implies |A| = |B|.$$

Aleshores, f és bijectiva si i només si $|A| = |B|$. Donat un $y \in B$,

- f és injectiva $\implies \exists x \in A : f(x) = y$.
- f és exhaustiva $\implies \exists! x \in A : f(x) = y$.

Definició 2.18. *Aplicació inversa.* L'aplicació inversa d'una bijecció f és aquella aplicació que a cada membre del codomini li assigna l'antiimatge per f .

$$\forall y \in B \exists! x \in A : f(x) = y$$

Es nota $f^{-1} : B \mapsto A$. Si f bijectiva, aleshores

$$f(x) = y \iff f^{-1}(y) = x$$

PROPIETATS:

1. L'aplicació inversa és única;
2. f bijectiva $\iff f^{-1}$ bijectiva $\wedge (f^{-1})^{-1} = f$;
3. Si $f : A \mapsto B$ i $g : B \mapsto C$ són bijectives, aleshores $g \circ f$ és bijectiva i $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$;
4. f bijectiva, aleshores $f \circ f^{-1} = I_B$, $f^{-1} \circ f = I_A$;
5. $f : A \mapsto B$ és bijectiva $\iff \exists! g : B \mapsto A$ tal que $g \circ f = I_A$ i $f \circ g = I_B$. En tal cas, f i g són inverses mútuament.

2.3.2 Composició d'aplicacions.

Definició 2.19. *Composició d'aplicacions.* Si $f : A \mapsto B$ i $g : B \mapsto C$ són aplicacions, la composició de f i g és l'aplicació $g \circ f : A \mapsto C$ tal que $(g \circ f)(a) = g(f(a))$, per a tot $a \in A$.

$$\begin{aligned} A &\xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \\ a &\rightarrow f(a) \rightarrow g(f(a)) \end{aligned}$$

PROPIETATS:

1. Associativitat. Si $f : A \mapsto B$, $g : B \mapsto C$ i $h : C \mapsto D$, aleshores

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f;$$

2. No commutativitat. En general, la composició d'aplicacions no és commutativa. Si $f : A \mapsto A$ i $g : A \mapsto A$, no sempre és cert que

$$f \circ g = g \circ f;$$

3. Si $f : A \mapsto B$, aleshores $I_B \circ f = f = f \circ I_A$.

PROPIETATS DE LA COMPOSICIÓ D'APLICACIONS: RELACIÓ AMB LA INJECTIVITAT I L'EXHAUSTIVITAT.

1. f i g injectives $\implies g \circ f$ injectiva;
2. $g \circ f$ injectiva $\implies f$ injectiva;
3. $g \circ f$ injectiva i f exhaustiva $\implies g$ injectiva;
4. f i g exhaustives $\implies g \circ f$ exhaustiva;
5. $g \circ f$ exhaustiva $\implies g$ exhaustiva;
6. $g \circ f$ exhaustiva i g injectiva $\implies f$ exhaustiva;
7. f i g bijectives $\implies g \circ f$ bijectiva;
8. $g \circ f$ bijectiva $\implies g$ exhaustiva i f injectiva.

Definició 2.20.

3 Relacions, operacions i estructures.

Definició 3.1. R és una relació binària en un conjunt A si $R \subseteq A \times A$.

PROPIETATS:

- **Reflexiva:** $\forall x \in A (xRx)$.
- **Simètrica:** $\forall x, y \in A (xRy \rightarrow yRx)$.
- **Antisimètrica:** $\forall x, y \in A (xRy \wedge yRx \rightarrow x = y)$.
- **Transitiva:** $\forall x, y, z \in A (xRy \wedge yRz \rightarrow xRz)$.
- **Connexa:** $\forall x, y \in A (xRy \vee yRx)$.

3.1 Relacions d'equivalència.

Definició 3.2. Una relació R en un conjunt $A \neq \emptyset$ s'anomena d'equivalència si compleix les propietats reflexiva, simètrica i transitiva.

Definició 3.3. Definim la classe d'equivalència d'un element $x \in A$ com:

$$[x]_R = \{y \in A \mid yRx\}.$$

També escrivim $[x]$ o \bar{x} quan no hi ha risc de confusió.

PROPIETATS:

1. $\forall x \in A (x \in [x])$.
2. $\forall x, y \in A (xRy \iff [x] = [y])$.
3. $A = \bigcup_{x \in A} [x]$.

Definició 3.4. Anomenem una partició d'un conjunt a una família Π de subconjunts d' A i diferents del buit, disjunts dos a dos, tals que la seva unió és tot A . És a dir, $\Pi \subseteq \mathcal{P}(A)$.

PROPIETATS:

1. $X \neq \emptyset \forall X \in \Pi$.
2. $X \cap Y = \emptyset$ si $X, Y \in \Pi, X \neq Y$.
3. $A = \bigcup_{X \in \Pi} X$.

Els subconjunts $X \in \Pi$ s'anomenen les parts o blocs de la partició.

Definició 3.5. Anomenem el conjunt quocient d'un altre conjunt A respecte la relació R al conjunt format per totes les classes d'equivalència definides a partir d' R .

$$A/R = \{\alpha \mid \exists x \in A ([x] = \alpha)\}.$$

Proposició 3.1. *El conjunt quocient A/R és una partició d' A .*

PROPIETATS:

1. Tota relació d'equivalència definida en un conjunt A indueix una partició d' A : el conjunt quocient A/R ;
2. Recíprocament, associada a tota partició Π d' A definim una relació R_Π en A :

$$xR_\Pi y \iff \exists B \in \Pi : x \in B \wedge y \in B;$$

3. La relació R_Π és d'equivalència.

Proposició 3.2. *Relacions i particions.*

1. Si R és una relació d'equivalència en A , llavors $R_{A/R} = R$;
2. Si Π és una partició d' A , llavors $A/R_\Pi = \Pi$.

3.1.1 Descomposició canònica d'una aplicació.

Sigui $f : A \mapsto B$ una aplicació. Definim a A la relació:

$$xR_f y \iff f(x) = f(y).$$

Proposició 3.3. *R_f és una relació d'equivalència a A .*

Definim les aplicacions:

$$\pi : A \mapsto A/R_f, \quad \pi(x) = [x]_{R_f}. \quad (1)$$

$$\bar{f} : A/R_f \mapsto f(A), \quad \bar{f}([x]_{R_f}) = f(x). \quad (2)$$

$$i : f(A) \mapsto B, \quad i(y) = y. \quad (3)$$

$$\implies f = i \circ \bar{f} \circ \pi.$$

3.2 Relacions d'ordre.

Sigui \leq una relació binària en un conjunt A .

- La relació \leq és un *preordre* si és reflexiva i transitiva. Es diu que (A, \leq) és un *conjunt preordenat*.
- La relació \leq és un *ordre parcial* si és un preordre amb la propietat antisimètrica. Es diu que (A, \leq) és un *conjunt parcialment ordenat*.
- La relació \leq és un *ordre total* si és un ordre parcial amb la propietat connexa. Es diu que (A, \leq) és un *conjunt totalment ordenat*.

PENDENT D'ACABAR. Falten definicions de mínim, màxim, minimal i maximal.

Definició 3.6. *Un conjunt parcialment ordenat (A, \leq) està **ben ordenat** si tot subconjunt $X \subseteq A, X \neq \emptyset$ té un mínim.*