Problemes de Variable Complexa FME, curs 2019-20

Tema 2: Funcions holomorfes

Denotarem per $z = x + \mathrm{i}y$ i $\bar{z} = x - \mathrm{i}y$. En alguns enunciats identifiquem les funcions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ amb les funcions $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ via la identificació $\mathbb{C} \ni z = x + \mathrm{i}y \sim (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

1. Trobeu la part real i imaginària $f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$ de les següents funcions:

(i) $f(z) = \overline{z}$.

(ii) $f(z) = |z|$.

(iii) $f(z) = \frac{1}{z}$.

(iv) $f(z) = z^2$.

2. Tota funció complexa $f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$ es pot escriure en forma polar fent la substitució $z = re^{\mathrm{i}\theta} = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$. Posarem $f(z) = u(r, \theta) + \mathrm{i}v(r, \theta)$ i seguirem anomenant les funcions reals $u(r, \theta), v(r, \theta)$ la part real i imaginària, respectivament, de f. Trobeu la part real i imaginària en coordenades polars de les funcions del problema 1.

3. Expresseu les variables reals x, y en termes de z i $\overline{z}$. Llavors, escriviu les següents funcions en termes de z i $\overline{z}$.

(i) $f(z) = x^2 + y^2$.

(ii) $f(z) = x^2 - y^2 - 5(xy)\mathrm{i}$.

(iii) $f(z) = x - 2y + 2 + (6x + y)\mathrm{i}$.

(iv) $f(z) = 3y^2 + (3x^2)\mathrm{i}$.

4. Comproveu si es verifiquen o no les equacions de Cauchy-Riemann per a les funcions del problema 1.

5. Trobeu constants reals $a, b \in \mathbb{R}$ perquè la funció $f(z) = 3x - y + 5 + \mathrm{i}(ax + by - 3)$ sigui holomorfa en $\mathbb{C}$ i doneu la seva fórmula en termes de z.

6. Donada $f(x, y) = (2x(1 - y) + \lambda x^2 - \mu y^2, 2y - y^2 + xy + x^2)$. Determineu λ i μ perquè sigui holomorfa i expresseu-la en funció de z.

7. Sigui

$$f(z) = \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{1}{z^4}\right), & z \neq 0, \\ 0, & z = 0. \end{cases}$$

Demostreu que

(i) f satisfà les equacions de Cauchy-Riemann a $\mathbb{C}$.

(ii) f és holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ i no és contínua en 0.

8. Demostreu que $f(z)$ i $\overline{f(\overline{z})}$ són simultàniament $\mathbb{C}$-diferenciables en z_0 i $\overline{z_0}$, respectivament.

9. Sigui $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una funció diferenciable (en el sentit real) en z_0. Sigui

$$S = \left\{ z \in \mathbb{C} : \text{ existeix } z_n \to z_0,\ \lim_n \frac{f(z_n) - f(z_0)}{z_n - z_0} = z \right\}.$$

(i) Useu la definició de funció diferenciable en un punt per concloure que es compleix que $f(z) - f(z_0) - \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)\,(z - z_0) - \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0)\,(\bar{z} - \bar{z}_0) = o(|z - z_0|)$. Useu-ho per demostrar que, si $z \in S$, llavors es pot escriure com $z = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0)e^{i\theta}$, per un cert $\theta \in (-\pi, \pi]$.

(ii) Demostreu que si f és $\mathbb{C}$-diferenciable en z_0, aleshores S és un punt.

(iii) Demostreu que si f no és $\mathbb{C}$-diferenciable en z_0, aleshores S és una circumferència.

10. Sigui $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una funció diferenciable (en el sentit real) en z_0. Suposem que el límit

$$\lim_{z \to z_0} \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right|$$

existeix. Demostreu que f o bé $\overline{f}$ és $\mathbb{C}$-diferenciable en z_0.

11. Sigui $\Omega \subset \mathbb{C}$ un obert connex i $f = u + \mathrm{i}v : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ una funció holomorfa.

(i) Demostreu que si f sols pren valors reals, aleshores f és constant en Ω.

(ii) Demostreu que si $|f|$ és constant en Ω, aleshores f és constant en Ω.

12.

(i) Demostreu que, en coordenades polars, les equacions de Cauchy-Riemann prenen la següent forma:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}, \qquad \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} = -\frac{\partial v}{\partial r}\ .$$

(ii) Demostreu que, si f és $\mathbb{C}$-diferenciable llavors:

$$f'(z) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial r}\right) = \frac{1}{r}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\left(\frac{\partial v}{\partial \theta} - \mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial \theta}\right).$$

13. Demostreu que $u(z)$ i $u(\bar{z})$ són simultàniament harmòniques.

14. Demostreu que u és harmònica $\iff \frac{\partial^2 u}{\partial z\, \partial \overline{z}} = 0$.

15. Trobeu el polinomi harmònic més general de la forma $u(x, y) = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3$ i una funció $v(x, y)$ tal que $u + \mathrm{i}v$ sigui holomorfa. Expresseu $f = u + \mathrm{i}v$ en funció de z.

16. Demostreu que $u = \mathrm{e}^{-x}(x \sin y - y \cos y)$ és harmònica i trobeu una funció v tal que $u + \mathrm{i}v$ sigui holomorfa. Expresseu $f = u + \mathrm{i}v$ en funció de z.

17. Demostreu que $u = \log(x^2 + y^2)$ és harmònica en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ però que no existeix una funció v tal que $u + \mathrm{i}v$ sigui holomorfa en aquest conjunt.

18. Determineu el radi de convergència de les sèries següents.

(i) $\sum_{n\geq 1} n^p z^n \ (p \in \mathbb{R})$

(ii) $\sum_{n\geq 1} (-1)^n n^p z^n \ (p \in \mathbb{R})$

(iii) $\sum_{n\geq 0} \frac{n^2}{4^n + 3n} z^n$

(iv) $\sum_{n\geq 0} a^{n^2} z^n \ (|a| < 1)$

(v) $\sum_{n\geq 1} (\log n)^2 z^n$

(vi) $\sum_{n\geq 0} n! z^n$

(vii) $\sum_{n\geq 0} \frac{(n!)^3}{(3n)!} z^n$

(viii) $\sum_{n\geq 0} \cos(in) z^n$

(ix) $\sum_{n\geq 0} z^{5n}$

(x) $\sum_{n\geq 0} z^{n!}$

19. Si el radi de convergència de $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ és R, quins són els de $\sum_{n\geq 0} a_n z^{2n}$ i $\sum_{n\geq 0} a_n^2 z^n$?

20. Escriviu les funcions següents com a sèries de potències $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$. Doneu el radi de convergència en cada cas.

(i) $\frac{1}{2z+5}$

(ii) $\frac{1}{1+z^4}$

(iii) $\frac{1+iz}{1-iz}$

(iv) $\frac{1}{z^2+3z+2}$

(v) $\frac{1}{(i-z)^2}$

21. Desenvolupeu

(i) $(1-z)^{-m}$, $m \in \mathbb{N}$, en sèrie de potències de z.

(ii) $\dfrac{2z+3}{z+1}$ en sèrie de potències de $z-1$.

(iii) $\dfrac{1}{1+z^2}$ en sèrie de potències de $z-a$ ($a \in \mathbb{R}$). Trobeu el coeficient general si $a=1$ i reduïu-lo a la forma més simple possible.

Doneu el radi de convergència en cada cas.

22. Per a quins valors de $z \in \mathbb{C}$ és convergent $\sum_{n\geq 0}\left(\frac{z}{1+z}\right)^n$?

23. Els nombres de Fibonacci són definits per la recurrència $c_0 = c_1 = 1$ i $c_n = c_{n-1} + c_{n-2}$. Demostreu que $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ és el desenvolupament en sèrie d'una funció racional i trobeu una expressió tancada de c_n.

24. La funció de Bessel de primera classe d'ordre zero $J_0(z)$ és l'única funció desenvolupable en sèrie de potències a l'origen tal que

$$z^2 J_0''(z) + zJ_0'(z) + z^2 J_0(z) = 0, \quad J_0(0) = 1, J_0'(0) = 0.$$

Trobeu la seva sèrie de potències $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ i proveu que defineix una funció entera.

25. Considereu la sèrie de potències $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n z^n$ i un nombre complex $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$. Volem trobar una nova sèrie potències $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$ tal que:

$$f(\lambda z) - f(z) = g(z).$$

Dita equació és coneix com *equació cohomolgica* per $f(z)$.

(i) **Càlcul formal.** Si suposem $g_0 = 0$ i $\lambda^n \neq 1$, per a tot $n \in \mathbb{N}$, proveu que existeix una única solució formal per f de l'equació cohomogica excepte pel valor de f_0 que és lliure.

(ii) **Convergència.** Relacioneu el radi de convergència de $f(z)$ amb el de $g(z)$ en els casos següents:

  (a) Si $|\lambda| \neq 1$.

  (b) Si $|\lambda| = 1$ però λ compleix una *condició diofàntica* de la forma:

$$|\lambda^n - 1| \geq C/n^\tau, \qquad \forall n \geq 1,$$

  per unes certes constats $C > 0$ i $\tau > 1$.

26. Sigui $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ amb radi de convergència 1. Definim $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ per $|z| < 1$.

(i) Demostreu que $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2\, d\theta = \sum_{n\geq 0} |a_n|^2 r^{2n}$, $0 \leq r < 1$.

(ii) Si f és injectiva, Àrea$[f(D_r(0))] = \pi \sum_{n\geq 0} n|a_n|^2 r^{2n}$, $0 < r < 1$. (Indicació: Useu el teorema del canvi de variable.)

27. Les sèries de potències següents tenen radi de convergència igual a 1. Demostreu que:

(i) La sèrie de potències $\sum nz^n$ no convergeix en cap punt de la vora del cercle unitat.

(ii) La sèrie de potències $\sum z^n/n^2$ convergeix en tot punt del cercle unitat.

28. El criteri de convergència de Dedekind diu que si $(a_n)_n$ i $(b_n)_n$ són successions de nombres complexos per les quals:

$$\lim_n b_n = 0, \quad \sup_N \left| \sum_{n=0}^{N} a_n \right| < +\infty, \quad \sum_{n\geq 1} |b_n - b_{n-1}| < +\infty,$$

llavors la sèrie $\sum_{n\geq 0} a_n b_n$ és convergent.

(i) Useu el criteri de Dedekind per provar que la sèrie de potències $\sum_{n\geq 1} z^n/n$ (que té radi de convergència 1) convergeix en tot punt del cercle unitat excepte en $z = 1$.

(ii) Demostreu que $\ln(1-z) = -\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n}$ per $z \in \bar{D}_1(0)\setminus\{1\}$ i deduïu les següents fórmules:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln(2), \quad \sum_{n\geq 1} \frac{\cos(n\theta)}{n} = -\ln\left(2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right), \quad \sum_{n\geq 1} \frac{\sin(n\theta)}{n} = \frac{\pi-\theta}{2},$$

per $0 < \theta < 2\pi$.

29. Considereu la sèrie de potències $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$ i considereu les composicions:

$$E(z) = \exp(f(z)) = \sum_{n=0}^{\infty} e_n z^n, \quad C(z) = \cos(f(z)) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \quad S(z) = \cos(f(z)) = \sum_{n=0}^{\infty} s_n z^n.$$

(i) **Càlcul formal.**

(a) Comproveu que $E'(z) = f'(z)E(z)$ i deduïu un mètode eficient pel càlcul recursiu dels coeficients c_n.

(b) Deriveu $C(z)$ i $S(z)$ i deduïu del resultat un mètode eficient pel càlcul recursiu dels coeficients c_n i s_n.

(ii) **Convergència:** Justifiqueu que $E(z)$, $C(z)$ i $S(z)$ tenen, almenys, el mateix radi de convergència que $f(z)$.

30.

(i) Desenvolupeu la determinació principal del logaritme en $z = \mathrm{i}$.

(ii) Desenvolupeu la determinació principal de l'arrel quadrada en $z = 1$.

31. Calculeu el coeficient de z^7 en el desenvolupament de Taylor de $f(z) = \tan z$ en $z = 0$.

32. Desenvolupeu $f(z) = \log\left(\frac{\sin z}{z}\right)$ fins el teme z^6 a l'origen. (Preneu log branca principal del logaritme.)

33. Trobeu

(i) $\sin \mathrm{i}$, $\cos \mathrm{i}$, $\tan(1+\mathrm{i})$.

(ii) Re $(\cos z)$ (useu les fórmules de la suma).

(iii) Si $\sinh(z) = \dfrac{\mathrm{e}^z + \mathrm{e}^{-z}}{2}$ i $\cosh(z) = \dfrac{\mathrm{e}^z - \mathrm{e}^{-z}}{2}$, trobeu com calcular sinh i cosh directament a partir de sin, cos i la multiplicació per i. Deduïu fórmules pel sinus i cosinus hiperbòlics de la suma de dos arguments.

34. Trobeu tots els possibles valors complexos per les expressions següents:

(i) $\mathrm{e}^{-\pi \mathrm{i}/2}$.

(ii) $\log(-1)$.

(iii) $\log(\mathrm{i})$.

(iv) $\log(1+2\mathrm{i})$.

(v) i^{i}.

(vi) 2^{i}.

(vii) Part real i imaginària de z^z.

35. Resoleu les equacions següents.

(i) $\ln(\mathrm{i} - z) = 1$.

(ii) $\mathrm{e}^{\mathrm{i}-z} = \mathrm{e}$.

(iii) $\mathrm{e}^{\mathrm{e}^z} = 1$.

(iv) $z^3 = 2 + \mathrm{i}2\sqrt{3}$.

(v) $\sin z = 2$.

(vi) $\tan z = 2\mathrm{i}$.

(vii) $\cosh z = -1$.

36.

(i) Demostreu que per a cada $a \in \mathbb{C}$, $a \neq \pm\mathrm{i}$, l'equació $\tan(z) = a$ té infinites arrels. Per a $a = \pm\mathrm{i}$, $\tan(z) = a$ no té solució. Aquests valors reben el nom de $\arctan(a)$. (Indicació: Escriviu en termes del logaritme una fórmula per descriure les solucions de $\tan z = a$.)

(ii) Si tenim dues determinacions contínues de $\arctan(z)$ en un connex Ω, aquestes difereixen en un múltiple de π.

(iii) Doneu la determinació de $\arctan(z)$ que correspon a la principal del logaritme.

37. Proveu que existeix una determinació holomorfa per $\sqrt{1-z^2}$ en $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$.