5.Estimació pel mètode dels moments

Estadística
Grau en Matemàtiques

Josep A. Sanchez
Dept. Estadística i I.O.(UPC)

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH

Funció de distribució empírica

- Sigui X una variable aleatòria amb distribució F
- Sigui $X_1, \ldots, X_n$ una m.a.s (v.a.i.i.d.) amb distribució F
- Sigui $x_1, \ldots, x_n$ una realització de la mostra aleatòria simple
- La **Funció de Distribució Empírica** ve donada per,

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \#\{x_i \leq x : i = 1 \ldots n\} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{(-\infty, x]}(x_i)$$

- Aquesta funció assigna, per a cada valor de x, la proporció de valors de la mostra que són iguals o inferiors a x

Teorema de Glivenko-Cantelli

- Sigui $\{X_n\}_{n\geq 1}$ una seqüència de variables aleatòries i.i.d amb distribució F
- Sigui F_n la distribució empírica per n variables $X_1, \ldots, X_n$
- Llavors:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |F_n(x) - F(x)| \to 0 \qquad \text{quasi segurament}$$

Principi de Substitució

- Per tant, és d'esperar que qualsevol funcional de la funció de distribució empírica convergeixi al funcional aplicat a la funció de distribució F (Principio de Substitució):

$$\hat{\theta}_n = \psi(F_n) \to \theta = \psi(F)$$

- Exemple:

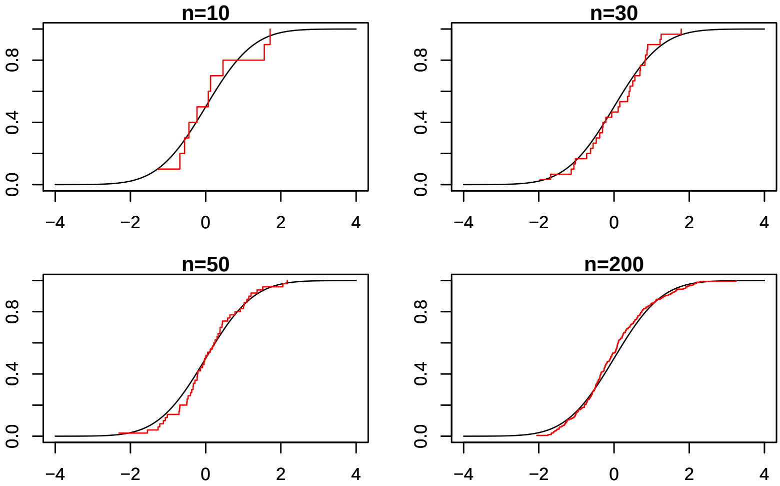
$$X \sim U[0, \theta] \quad \theta = \sup\{x \in \mathbb{R} : F(x) < 1\}$$

pel principi de substitució, podem obtenir un estimador del paràmetre poblacions θ, a partir d'una mostra $X_1, \ldots, X_n$

$$\hat{\theta}_n = \sup\{x \in \mathbb{R} : F(x) < 1\} = X_{(n)}$$

Teorema de Glivenko-Cantelli

```
par(mfrow=c(2,2),mar=c(3,3,1,1))
for (n in c(10,30,50,200)){
  x=rnorm(n,mean=0,sd=1)
  curve(pnorm(x),xlim=c(-4,4),ylim=c(0,1),main=paste0("n=",n),xlab="",ylab="")
  par(new=T)
  plot(sort(x),(1:n)/n,type="s",xlim=c(-4,4),ylim=c(0,1),xlab="",ylab="",col=2)
}
```



Estimació puntual i estimació per interval

- Estimar un paràmetre poblacional amb un únic valor calculat a partir de una mostra se denomina **Estimació Puntual**
- Estimar un paràmetre poblacional con un rango de valores pausibles calculados a partir de la muestra se denomina **Estimació per Interval**

Mètodes per obtenir estimadors

- Mètode dels moments (MM)
- Mètode del màxim de versemblança, *maximum likelihood* (ML)
- Estimadors Puntuals Bayesians

Definició de Moments teòrics

- El moment teòric d'ordre k de una v.a. X ve donat per:

$$\mu'_k = E(X^k)$$

- El moment centrat teòric d'ordre k de una v.a. X ve donat per:

$$\mu_k = E[(X - \mu_1)^k]$$

- La variància poblacional és el moment centrat teòric d'ordre 2

$$V(X) = \mu_2 = E[(X - E(X))^2]$$

Moments mostrals

Aplicant el principi de substitució en l'expressió dels moments teòrics:

- Moment mostral d'ordre k:

$$m'_k = E_{F_n}(X^k) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k$$

- Moment mostral centrat d'ordre k:

$$m_k = E_{F_n}(X^k) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - m_1)^k$$

Mètode dels Moments

Sample	*Population*
$m_1 = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$	$\mu_1 = E(X)$
$m_2' = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n}$	$\mu_2' = E(X^2)$
$m_3' = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^3}{n}$	$\mu_3' = E(X^3)$
$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$
$m_k' = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^k}{n}$	$\mu_k' = E(X^k)$

- Igualem els moments mostrals als moments teòrics corresponents (principi de substitució)
- S'han de fer servir tants moments com paràmetres es volen estimar
- Aillem els paràmetres a estimar, que apareixen en l'expressió dels moments teòrics, en funció dels moments mostrals

Mètode dels Moments (exemple 1)

- Sigui $X_1, \ldots, X_n$ m.a.s d'una v.a. Uniforme en l'interval $[0, \theta]$. Es vol estimar el paràmetre θ pel mètode dels moments

$$X \sim U[0, \theta] \qquad E(X) = \frac{\theta}{2}$$

per tant,

$$\mu_1 = \frac{\theta}{2} \Rightarrow m_1 = \frac{\hat{\theta}_{MM}}{2}$$
$$\hat{\theta}_{MM} = 2m_1 = 2\bar{X}$$

o el que és el mateix, aillem el paràmetre i apliquem el principi de substitució:

$$\theta = 2E(X) = 2\mu_1 \Rightarrow \hat{\theta}_{MM} = 2m_1 = 2\bar{X}$$

Mètode dels Moments (exemple 2)

- Sigui $X_1, \ldots, X_n$ m.a.s d'una v.a. Normal, amb paràmetres deconeguts μ i σ^2. Es volen estimar aquests paràmetres pel mètode dels moments

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \qquad E(X) = \mu \qquad E(X^2) = E(X)^2 + V(X) = \mu^2 + \sigma^2$$

$$\begin{cases} \mu_1 = \mu \\ \mu_2' = \mu^2 + \sigma^2 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} m_1 = \hat{\mu}_{MM} \\ m_2' = \hat{\mu}_{MM}^2 + \hat{\sigma}_{MM}^2 \end{cases}$$

Mètode dels Moments (exemple 2)

Resolent el sistema d'eqüacions:

$$\hat{\mu}_{MM} = m_1 = \bar{X}$$

$$\hat{\sigma}^2_{MM} = m'_2 - m_1^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \bar{X}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

Mètode dels Moments (exemple 3)

- Sigui $X_1, \dots, X_n$ m.a.s d'una v.a. Geomètrica amb paràmetre p. Es volen estimar aquests paràmetres pel mètode dels moments.

$$P(X = x) = (1 - p)^x p \qquad E(X) = \frac{1 - p}{p} \qquad V(X) = \frac{1 - p}{p^2}$$

1. Si ho apliquem al primer moment:

$$\mu_1 = \bar{X} = \frac{1 - p}{p} \Rightarrow m_1 = \frac{1 - \hat{p}_{MM}}{\hat{p}_{MM}}$$

$$\hat{p}_{MM} = \frac{1}{1 + \bar{X}}$$

Mètode dels Moments (exemple 3)

- Sigui $X_1, \ldots, X_n$ m.a.s d'una v.a. Geomètrica amb paràmetre p.

$$P(X = x) = (1-p)^x p \qquad E(X) = \frac{1-p}{p} \qquad V(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

2. Si ho apliquem al segon moment:

$$\mu_2' = E(X^2) = \frac{(1-p)(2-p)}{p^2} \Rightarrow m_2' = \frac{(1-\hat{p}_{MM})(2-\hat{p}_{MM})}{\hat{p}_{MM}^2}$$

$$\hat{p}_{MM} = \frac{3n - \sqrt{n^2 + 8\sum_{i=1}^n X_i^2}}{2(n - \sum_{i=1}^n X_i^2)}$$

Mètode dels Moments (exemple 3)

- Sigui $X_1, \ldots, X_n$ m.a.s d'una v.a. Geomètrica amb paràmetre p. Es volen estimar aquests paràmetres pel mètode dels moments.

$$P(X = x) = (1-p)^x p \qquad E(X) = \frac{1-p}{p} \qquad V(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

3. Si ho apliquem al segon moment centrat:

$$\mu_2 = \frac{(1-p)}{p^2} \Rightarrow m_2 = \frac{(n-1)S^2}{n} = \frac{(1-\hat{p}_{MM})}{\hat{p}_{MM}^2}$$

$$\hat{p}_{MM} = \frac{\sqrt{n^2 + 4n(n-1)S^2} - n}{2(n-1)S^2}$$

Mètode dels Moments (exemple 4)

- Sigui $X_1, \ldots, X_n$ m.a.s d'una v.a. Gamma amb paràmetre de forma α i paràmetre de escala β. Es volen estimar aquests paràmetres pel mètode dels moments.

$$X \sim \Gamma(\alpha, \beta) \qquad f(x; \alpha, \beta) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}} x^{\alpha-1} e^{\frac{x}{\beta}} \mathbb{I}_{(0,+\infty)}(x)$$

$$E(X) = \alpha\beta \qquad V(X) = \alpha\beta^2 \qquad E(X^2) = (\alpha^2 + \alpha)\beta^2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_1 = \alpha\beta \\ \mu_2' = (\alpha^2 + \alpha)\beta^2 \end{array} \right. \qquad \Rightarrow \qquad \left\{ \begin{array}{l} m_1 = \hat{\alpha}_{MM}\hat{\beta}_{MM} \\ m_2' = (\hat{\alpha}_{MM}^2 + \hat{\alpha}_{MM})\hat{\beta}_{MM}^2 \end{array} \right.$$

$$\hat{\alpha}_{MM} = \frac{\bar{X}^2}{\frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n} - \bar{X}^2} \qquad \hat{\beta}_{MM} = \frac{\frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n} - \bar{X}^2}{\bar{X}}$$

Propietats dels estimadors MM

- Els moments mostrals són estimadors sense biaix dels moments poblacionals

$$E(m'_k) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k\right) = E(X_i^k) = \mu_k$$

- Els estimadors MM són **consistents**
  - Definició: una seqüència d'estimadors $\{T_n(X_1, \ldots, X_n)\}$ d'un paràmetre θ és consistent si i només si,

$$T_n(X_1, \ldots, X_n) \xrightarrow[n\to\infty]{P} \theta$$

Estimadors MM

- Són fàcils d'obtenir
- En ocasions, poden ser millorats (p.ex. treient el biaix)
- Es fan servir com a estimacions inicials en procesos iteratius per obtenir estimadors