1. EDP del transport

Mètode de les caracteristiques

$$a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = f(x,y,u)$$

1. Busquem $\gamma(s): I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $s \longmapsto (\tilde{x}(s), \tilde{y}(s))$ tq $\begin{cases} \tilde{x}'(s) = a(\tilde{x}(s), \tilde{y}(s)) \\ \tilde{y}'(s) = b(\tilde{x}(s), \tilde{y}(s)) \end{cases}$
2. Restringim u a $\gamma(s)$ i derivem: $V(s) = u(\gamma(s)) = u(\tilde{x}(s), \tilde{y}(s)) \Rightarrow$
   $\Rightarrow V'(s) = u_x(\gamma(s))\tilde{x}'(s) + u_y(\gamma(s))\tilde{y}'(s) = f(\tilde{x}(s), \tilde{y}(s), V(s)) \Rightarrow$ EDO en $V(s)$.
3. Resolem EDO, imposant $\gamma(0) = (\bar{x}, 0)$ (en general). Imposem que $\gamma(s)$ passi per un punt (x,y) genèric i trobem $\bar{x} = \bar{x}(x,y)$.
4. Trobem $s = s(\tilde{x}, \tilde{y})$ i llavors: $u(x,y) = V(s(x,y))$

- Cas particular: $u_t + c\nabla_x u = f(x,t,u) \Rightarrow \gamma(s) = (cs + x - ct, s)$.
- EDP quasi lineal de 1r ordre:

$$a(x,y,u)u_x + b(x,y,u)u_y = c(x,y,u)$$

Donat un obert $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, coneixem la solució a un tros $\Gamma \subseteq \partial\Omega$. Parametritzem Γ amb $(\alpha(s), \beta(s))$.

Fixat un s, trobem la corba característica $\gamma(t) = (\tilde{x}(t), \tilde{y}(t), \tilde{z}(t))$ imposant:

$$\begin{cases} \dfrac{d\tilde{x}}{dt} = a(x,y,z), & \tilde{x}(0) = \alpha(s) \\ \dfrac{d\tilde{y}}{dt} = b(x,y,z), & \tilde{y}(0) = \beta(s) \\ \dfrac{d\tilde{z}}{dt} = c(x,y,z), & \tilde{z}(0) = u(\alpha(s), \beta(s)) \end{cases}$$

Obtenim $\tilde{x}(s,t), \tilde{y}(s,t), \tilde{z}(s,t)$. Si podem aplicar TF Inversa, obtenim $s(\tilde{x}, \tilde{y}), t(\tilde{x}, \tilde{y})$ i aleshores

$$u(x,y) = z(s(x,y), t(x,y))$$

Fórmula de Duhamel:

- $\begin{cases} u_t + cu_x = f(t,x) \\ u(x,0) = g(x) \end{cases}$: $\quad u(x,t) = g(x-ct) + \int_0^t f(x - c(t-s), s)\,ds$
- En general: $\quad u(x,t) = T_t g + \int_0^t (T_{t-s} f(\cdot, s))(x)\,ds$

  T_t es troba a partir del problema homogeni ($u(x,t) = (T_t g)(x)$)
- $u_t + cu_x = f(t,x,u)$:

$$u(x,t) = T_t g + \int_0^t T_{t-s} f(\cdot, s, \underline{u})\,ds$$

$\Leftrightarrow$ És un problema d'existència i unicitat.

2. EDO's en espai de Banach

Demostrar existència i unicitat de solucions

E espai de Banach, $I=[-\varepsilon,\varepsilon]\subseteq\mathbb{R}$, $g\in E$, $u: I\longrightarrow E$.

$$\begin{cases} u_t = F[u], & t\in I \\ u(0)=g \end{cases}$$

1. Reescrivim l'EDO de forma integral:

$$u_t(\cdot,t)=F(u(\cdot,t)) \Longrightarrow \int_0^t u_t(\cdot,s)ds = u(\cdot,t)-u(\cdot,0)=\int_0^t F[u(\cdot,s)]ds$$

$$\Rightarrow \quad u(\cdot,t)=g+\int_0^t F[u(\cdot,s)]ds$$

En el cas de la fórmula de Duhamel: $Nu=T_t g+\int_0^t T_{t-s} f(\cdot,s,\underline{u})ds$ també hem de trobar $\exists!$ de punt fix. El procediment és el mateix.

2. $\tilde{E}:=C^0(I,E)$: $\|\cdot\|_{\tilde{E}}:\tilde{E}\longrightarrow\tilde{E}$

$$u\longmapsto \|u\|_{\tilde{E}}=\sup_{t\in I}\|u(t)\|_E$$

3. $N:\tilde{E}\longrightarrow\tilde{E}$

$$u\longmapsto Nu = g+\int_0^t F[u(\cdot,s)]ds$$

Cal comprovar que N està ben definida, i.e; que efectivament va de $\tilde{E}$ a $\tilde{E}$.

Si $u\in\tilde{E}=C^0(I,E)$

(i) Comprovar que $Nu: I\longrightarrow E$

(ii) Comprovar que Nu és contínua

(De fet, Nu és C^1:
- $g\in C^1(I,E)$ per ser constant en t
- $F[u(\cdot,s)]$ serà continu per propietats de F (que ens dirà l'enunciat) i perquè u és $C^0(I,E)$.

$\Downarrow$ $\int_0^t F[u(\cdot,s)]ds$ és $C^1(I,E)$)

4. Demostrar que N és contracció.

<u>Cas 1</u>: $F:E\longrightarrow E$ localment Lipschitz

Hem de demostrar que N és contracció a una bola $B_R(0)$ o $B_R(g)$

ε haurà de complir certes condicions:

(i) Demostrar que $N: B_R\longrightarrow B_R$ (i.e; que N és endomorfisme de B_R)

Donat $u\in B_R$ ($\|u\|_E\le R$) ($\|u-g\|_E\le R$), veure que $\|Nu\|\le R$ ($\|Nu-g\|\le R$)

(ii) Demostrar que N és contracció en la bola

<u>Cas 2</u>: F és globalment Lipschitz.

En aquest cas només cal demostrar que N és contracció en $\tilde{E}$

<u>Comentari</u>: Si no tenim informació, millor restringir-nos a una bola (i.e; fer cas 1)

5. Pel T. Punt Fix de Banach, $\exists!$ punt fix, que serà la solució que buscàvem

Operadors

Sigui A operador. $\begin{cases} u_t = Au \\ u(x,0) = g(x) \end{cases}$

Forma explícita → 1. A lineal i continu: $u(x,t) = e^{tA} g(x) = \sum_{k\geq 0} \frac{t^k}{k!}(A^k g)$ (Calcular la forma general de A^k)

$\exists!$ 2. A continu: (Picard) $u(x,t) = g(x) + \int_0^t Au(x,s)\,ds$ + Punt fix

3. Altrament: (Duhamel) (i) Descomposem Au en part lineal i no lineal.

$$Au = Bu + F[u].$$

(ii) Trobem el semigrup T_t a partir del problema lineal $\begin{cases} w_t = Bw \\ w(x,0) = g(x) \end{cases}$

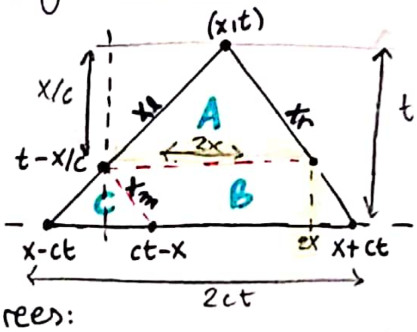
(iii) Duhamel:

$$u(x,t) = T_t g(x) + \int_0^t T_{t-s} F[u(s)]\,ds$$

(iv) Punt fix

3. Equacions d'ones

Triangle característic



$$\iint_{T(x,t)} f(y,s)\,dy\,ds = \int_0^t \int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} f(y,s)\,dy\,ds$$

- $\iint_A f(y,s)\,dy\,ds = \int_{t-x/c}^{t} \int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} f(y,s)\,dy\,ds$
- $\iint_B f(y,s)\,dy\,ds = \int_0^{t-x/c} \int_{-x+c(t-s)}^{x+c(t-s)} f(y,s)\,dy\,ds$
- $\iint_C f(y,s)\,dy\,ds = \int_0^{t-x/c} \int_{x-c(t-s)}^{-x+c(t-s)} f(y,s)\,dy\,ds$

Àrees:

- $A(T(x,t)) = \frac{1}{2}(2ct)t = ct^2$
- $A(A) = \frac{1}{2}(2x)(x/c) = \frac{x^2}{c}$
- $A(B) = (2x)(t - x/c) = 2xt - \frac{2x^2}{c}$
- $A(C) = \frac{1}{2}(2(ct-x))(t - x/c) = \frac{1}{c}(ct-x)^2$

- $x_l(s) = x - c(t-s)$
- $x_r(s) = x + c(t-s)$
- $x_m(s) = -x + c(t-s)$

Ona semi-infinita

- Condicions de Dirichlet.

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(x,t) \\ u(0,t) = d(t) \\ u(x,0) = g(x) \\ u_t(x,0) = h(x) \end{cases}$$

1. Restem $d(t)$ a la solució i trobem nou problema:

$\tilde{V}(x,t) = u(x,t) - d(t)$.

- $\tilde{V}_{tt} = u_{tt} - d''(t)$
- $\tilde{V}_{xx} = u_{xx}$
- $\tilde{V}(0,t) = u(0,t) - d(t) = 0$, $\tilde{V}(x,0) = g(x) - d(0)$, $\tilde{V}_t(x,0) = h(x) - d'(0)$

Aleshores:

$$\begin{cases} \tilde{V}_{tt} - c^2 \tilde{V}_{xx} = f(x,t) - d''(t) =: \tilde{f}(x,t), & x>0, t>0 \\ \tilde{V}(0,t) = 0 & , t>0 \\ \tilde{V}(x,0) = g(x) - d(0) =: \tilde{g}(x) & , x>0 \\ \tilde{V}_t(x,0) = h(x) - d'(0) =: \tilde{h}(x) & , x>0 \end{cases}$$

2. Fem reflexió senar de $\tilde{V}, \tilde{f}, \tilde{g}$ i $\tilde{h}$: $\tilde{V}_s = \begin{cases} \tilde{V}(x,t), & x>0 \\ -\tilde{V}(-x,t), & x<0 \end{cases}$, etc.

i ens queda

$$\begin{cases} \tilde{V}_{stt} - c^2 \tilde{V}_{sxx} = \tilde{f}_s(x,t), & x \in \mathbb{R}, \ t>0 \\ \tilde{V}_s(0,t) = 0, & t>0 \\ \tilde{V}_s(x,0) = \tilde{g}_s(x), & x \in \mathbb{R} \\ \tilde{V}_{st}(x,0) = \tilde{h}_s(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

- Condicions de Neumann

$u_x(0,t) = n(t)$.

Es fa tot equivalentment, però al pas 2 és reflexió parella.

Resolució de l'equació d'ones

Si $f(x,t,\underline{u})$, serà un pb. d'$\exists!$ i es resol similarment al que hem vist abans

① Fórmula de d'Alembert – Duhamel

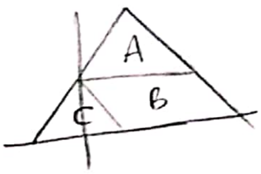
$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(g(x-ct)+g(x+ct)\right) + \int_{x-ct}^{x+ct} h(y) + \iint_{T(x,t)} f(y,s)\,dy\,ds$$

Comentari: A l'hora de calcular $\iint_{T(x,t)}$ hem de diferenciar 2 casos:

(i) $x>t>0$  El triangle característic està contingut completament en el 1r quadrant

En aquest cas, si veniem de reflectir l'ona (de forma parella o senar), la integral serà sobre la funció original.

(ii) $0<x<t$  El triangle característic talla l'eix t.



• Si provenim d'un problema amb condicions de Dirichlet homogènies f_s serà senar respecte l'origen i tindrem que

$$\iint_C f_s = 0$$

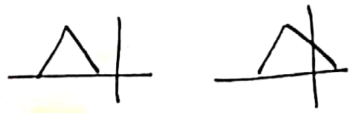
Rec: si no ho són, podem transformar el problema per tal que ho sigui, com hem vist abans

i per tant

$$\iint_{T(x,t)} f_s = \iint_A f + \iint_B f$$

• Si provenim d'un problema amb condicions de Neumann homogènies, f_p serà parella respecte l'eix t i per tant

$$\iint_C f_p = 2\iint_{C_{pos}} f$$

Obs: En realitat hi ha 2 casos més: ($x<0$) ,

però són anàlegs:

- Si provenim d'un problema d'ona semiinfinita, és igual llevat (potser) canvi de signe
- Si provenim d'un problema definit a $x\in\mathbb{R}$ des de l'inici, simplement integrem f i ja està

② <u>Factorització</u>: $u_{tt} - c^2 u_{xx} = (\partial_{tt} - c^2\partial_{xx})u = (\partial_t - c\partial_x)(\partial_t + c\partial_x)u =$

$$= (\partial_t - c\partial_x)\underbrace{(u_t + cu_x)}_{\underset{w}{\parallel}} = w_t - cw_x = f(x,t).$$

Resolem el pb. transport en w:

$$\begin{cases} w_t - cw_x = f(x,t) \\ w(x,0) = u_t(x,0) + cu_x(x,0) = h(x) + cg(x) \end{cases}$$

Un cop trobat w, resolem el pb transport en u

$$\begin{cases} u_t + cu_x = w \\ u(x,0) = g(x) \leftarrow \text{Obs: ja no posem } u_t(x,0) = h(x)\text{!} \end{cases}$$

(+ condicions de vora si n'hi ha)

<u>Comentaris</u>: ① A vegades va bé veure (si el problema és homogeni) la fórmula de d'Alembert com

$$u(x,t) = F(x+ct) + G(x-ct),$$

on:

- $F(x+ct) = \frac{1}{2}g(x+ct) + \frac{1}{2c}\int_0^{x+ct} h(y)\,dy$
- $G(x-ct) = \frac{1}{2}g(x-ct) - \frac{1}{2c}\int_0^{x-ct} h(y)\,dy$

Pot ser útil per fer càlculs més senzills, ja que tenim

- $u_t = c\left(F'(x+ct) - G'(x-ct)\right)$
- $u_x = F'(x+ct) + G'(x+ct)$

on

- $F'(s) = \frac{1}{2}g'(s) + \frac{1}{2c}h(s)$
- $G'(s) = \frac{1}{2}g'(s) - \frac{1}{2c}h(s)$

② En el problema amb condicions de Dirichlet homogènies, les condicions de compatibilitat

$$\begin{cases} g(0) = 0 \\ h(0) = 0 \\ f(0,0) + c^2 g''(0) = 0 \end{cases}$$

són necessàries i suficients per tal que la u trobada amb la fórmula de d'Alembert sigui clàssica (C^2)