Àlgebra Lineal FME
Curs 2014/2015

Jordi Quer

12 de setembre de 2014

Índex

Capítol 0

Resolució de sistemes lineals

Els sistemes d'equacions lineals apareixen en totes les ciències i enginyeries. Des del punt de vista purament matemàtic no presenten cap dificultat: el teorema de Rouché-Frobenius diu com són les seves solucions en termes de certs invariants (el rang i el nombre de variables) i el mètode de Gauss permet trobar totes aquestes solucions de manera relativament simple. No obstant, a la pràctica sovint s'han de resoldre sistemes lineals amb un nombre molt gran d'equacions i d'incògnites, i fer-ho el més ràpid possible; per a afrontar aquests càlculs de manera eficient hi ha tècniques sofisticades de les quals s'ocupen sobretot l'algorísmia i els mètodes numèrics.

L'anàlisi i la resolució de sistemes d'equacions lineals són necessaris en la majoria de problemes d'àlgebra lineal: es fan servir per a estudiar la dependència o independència lineal de vectors, escriure un vector com a combinació lineal d'uns altres, calcular la suma o intersecció de subespais, calcular nuclis i imatges d'aplicacions lineals, invertir matrius, diagonalitzar, trobar la forma de Jordan, etc.

Per aquest motiu és convenient que, en iniciar un curs d'àlgebra lineal universitari, l'estudiant repassi els mètodes que ja coneix de secundària i adquireixi una certa familiaritat amb els sistemes d'equacions lineals. Aquest capítol preliminar conté un recull de propietats i tècniques de resolució que formen part dels continguts de secundària. També serveix per començar a introduir notació i terminologia que s'usarà durant el curs. Les justificacions i les demostracions es deixen per fer-les més endavant, quan es disposi de les definicions i els resultats bàsics de l'àlgebra lineal.

Sistemes d'equacions lineals. Sigui $\mathbb{K}$ el cos $\mathbb{Q}$ dels nombres racionals, o el cos $\mathbb{R}$ dels nombres reals, o el cos $\mathbb{C}$ dels nombres complexos, o qualsevol altre cos. Una *equació lineal* sobre $\mathbb{K}$ en les variables $X_1, \dots, X_n$ és una equació de la forma:

$$a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_nX_n = b,$$

on els *coeficients* a_i de les *variables* X_i i el *terme independent* b són elements del cos $\mathbb{K}$.

Un *sistema d'equacions lineals de* m *equacions i* n *incògnites* és un sistema d'equacions:

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}X_1 & + & a_{12}X_2 & + & \cdots & + & a_{1n}X_n & = & b_1 \\ a_{21}X_1 & + & a_{22}X_2 & + & \cdots & + & a_{2n}X_n & = & b_2 \\ \cdots & & \cdots & & & & \cdots & & \cdots \\ a_{m1}X_1 & + & a_{m2}X_2 & + & \cdots & + & a_{mn}X_n & = & b_m \end{array}\right.$$

on els *coeficients* a_{ij} i els *termes independents* b_i són elements del cos $\mathbb{K}$. Les X_j són les *incògnites* o *variables* del sistema d'equacions lineals.

El sistema es diu *homogeni* si tots els termes independents b_i són zero.

Solucions. Les *solucions* d'un sistema lineal són les n-tuples d'elements de $\mathbb{K}$ que satisfan totes les equacions. O sigui, els elements $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ tals que quan se substitueix cada variable X_i pel valor x_i se satisfan totes les equacions del sistema.

Un sistema pot no tenir cap solució, tenir-ne només una o bé tenir-ne moltes; segons com sigui el conjunt de solucions, el sistema es diu:

- *Incompatible* si no té cap solució: no existeix cap n-tupla d'elements de $\mathbb{K}$ que satisfaci totes les equacions.
- *Compatible* si té solució. En aquest cas el sistema és:
  - *determinat* quan la solució és única, o
  - *indeterminat* si té més d'una solució.

La solució general d'un sistema compatible indeterminat es dóna posant algunes de les variables en funció d'unes altres, que s'interpreten com a paràmetres. El nombre de paràmetres que calen per a descriure les solucions s'anomena *nombre de graus de llibertat* o *dimensió del conjunt de les solucions* del sistema lineal.

Forma matricial. Per a treballar amb sistemes lineals és còmode fer servir la notació matricial següent. La matriu que té per entrades els coeficients de les variables:

$$\boldsymbol{A} = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$$

s'anomena *matriu del sistema.* Té tantes files com equacions i tantes columnes com variables. Dient $\boldsymbol{X}$ a la matriu columna que té per entrades les variables X_j i dient $\boldsymbol{b}$ a la matriu columna amb entrades els termes independents b_i, el sistema lineal es pot escriure en *forma matricial* de la manera següent:

$$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{b}, \qquad \boldsymbol{A} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}), \quad \boldsymbol{X} \in \mathcal{M}_{n\times 1}, \quad \boldsymbol{b} \in \mathcal{M}_{m\times 1}(\mathbb{K}).$$

S'anomena *matriu ampliada* del sistema la matriu:

$$(\boldsymbol{A}|\,\boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \in \mathcal{M}_{m\times(n+1)}(\mathbb{K})$$

obtinguda afegint a la dreta de la matriu del sistema una columna més amb entrades els termes independents b_i. Cada fila de la matriu ampliada correspon a una equació del sistema.

Combinació d'equacions. Els sistemes 2×2 i alguns sistemes 3×3 es resolen molt fàcilment sumant múltiples de les equacions. Per exemple, per resoldre el sistema següent:

$$\begin{cases} 3X_1 - X_2 = -1 \\ 2X_1 + 3X_2 = 14 \end{cases}$$

se suma el triple de la primera equació a la segona i s'obté:

$$9X_1 - 3X_2 + 2X_1 + 3X_2 = -3 + 14 \quad \Rightarrow \quad 11X_1 = 11 \quad \Rightarrow \quad X_1 = 1,$$

i del doble de la primera es resta el triple de la segona i s'obté:

$$6X_1 - 2X_2 - 6X_1 - 9X_2 = -2 - 42 \quad \Rightarrow \quad -11X_2 = -44 \quad \Rightarrow \quad X_2 = 4.$$

Per tant la solució del sistema és $(X_1, X_2) = (1, 4)$.

Per resoldre el sistema següent:

$$\begin{cases} X_1 - X_2 + X_3 = 1 \\ -2X_1 + 2X_2 + X_3 = -2 \\ X_1 + X_2 - X_3 = 2 \end{cases}$$

se suma el doble de la primera equació a la segona i s'obté:

$$2X_1 - 2X_2 + 2X_3 - 2X_1 + 2X_2 + X_3 = 2 - 2 \quad \Rightarrow \quad 4X_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad X_3 = 0,$$

se sumen la primera i la tercera i s'obté:

$$X_1 - X_2 + X_3 + X_1 + X_2 - X_3 = 1 + 2 \quad \Rightarrow \quad 2X_1 = 3 \quad \Rightarrow \quad X_1 = \frac{3}{2},$$

i, finalment, se suma la primera amb el doble de la segona i el triple de la tercera i s'obté:

$$X_1 - X_2 + X_3 - 4X_1 + 4X_2 + 2X_3 + 3X_1 + 3X_2 - 3X_3 = 1 - 4 + 6 \;\Rightarrow\; 6X_2 = 3 \;\Rightarrow\; X_2 = \frac{1}{2}.$$

Per tant la solució és $(X_1, X_2, X_3) = (\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 0)$.

Eliminació i substitució. Una idea molt simple que permet resoldre qualsevol sistema consisteix a usar una equació per posar una variable en funció de les altres i substituir aquesta expressió en les demés equacions, passant d'aquesta manera a un altre sistema que té una equació menys i una variable menys. Repetint aquest procés s'arriba al final a tenir només una única equació. Aleshores es resol aquesta equació posant una de les variables en funció de les altres i es van substituint recursivament aquestes expressions en les equacions anteriors, obtenint-se finalment totes les variables del sistema en funció de les que hagin quedat com a paràmetres en l'última equació.

Per exemple, per resoldre el sistema següent:

$$\begin{cases} 2X_1 + 2X_2 - 8X_3 = -1 \\ 3X_1 - 2X_2 - 2X_3 = 1 \end{cases}$$

s'aïlla X_1 de la primera equació: $X_1 = \frac{-1}{2} - X_2 + 4X_3$ i se substitueix a la segona, que queda:

$$3\left(\frac{-1}{2} - X_2 + 4X_3\right) - 2X_2 - 2X_3 = \frac{-3}{2} - 5X_2 + 10X_3 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad -5X_2 + 10X_3 = \frac{5}{2}.$$

La solució d'aquesta equació es troba posant una variable en funció de l'altra; per exemple: $X_2 = \frac{-1}{2} + 2X_3$. Aleshores, substituint X_2 a l'expressió que es tenia per a X_1 es té:

$$X_1 = \frac{-1}{2} - \left(\frac{-1}{2} + 2X_3\right) + 4X_3 = 2X_3.$$

Així, les solucions del sistema queden en funció de la variable X_3 i són:

$$X_1 = 2X_3, \qquad X_2 = -\frac{1}{2} + 2X_3.$$

El sistema té infinites solucions, que s'obtenen donant valors arbitraris a la variable X_3, que s'ha de considerar com un paràmetre. Per exemple, $(X_1, X_2, X_3) = (0, \frac{-1}{2}, 0), (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4})$ i $(-2, \frac{-5}{2}, -1)$ són les solucions que corresponen als valors $0, \frac{1}{4}$ i -1 del paràmetre X_3.

Forma esglaonada reduïda. Es diu que un sistema d'equacions lineals està en

- *forma esglaonada* si les primeres variables que apareixen en cada equació formen una successió estrictament creixent, i en
- *forma esglaonada reduïda* si, a més, la primera variable de cada equació porta coeficient igual a 1 i no apareix en cap altra equació.

Quan un sistema està en forma esglaonada reduïda la seva solució es troba sense fer res: n'hi ha prou a posar la primera variable de cada equació en funció de les altres.

Per exemple, el sistema lineal

$$\left\{\begin{array}{ccccc} & & 2Z & -3T & = & 4 \\ X & -4Y & & +T & = & -1 \end{array}\right.$$

no està en forma esglaonada reduïda però multiplicant la primera equació per $\frac{1}{2}$ s'aconsegueix que el coeficient de la primera variable que hi apareix, que és la Z, sigui un 1; intercanviant a continuació d'ordre les dues equacions queda el sistema:

$$\left\{\begin{array}{cccccc} X & -4Y & & +T & = & -1 \\ & & Z & -\frac{3}{2}T & = & 2 \end{array}\right.$$

que sí que està en forma esglaonada reduïda. Les solucions són:

$$X = -1 + 4Y - T, \qquad Z = 2 + \frac{3}{2}T,$$

expressades en funció de les dues variables Y i T. És un sistema compatible indeterminat amb dos graus de llibertat.

Un sistema compatible determinat en forma esglaonada reduïda té sempre una forma molt senzilla: cada equació dóna directament el valor d'una de les variables. Per exemple:

$$\begin{cases} X_1 & & & & = & 7 \\ & X_2 & & & = & 0 \\ & & X_3 & & = & -1 \\ & & & X_4 & = & -1 \end{cases}$$

En un sistema d'equacions lineals poden haver-hi equacions on no hi aparegui cap variable; és a dir, en que els coeficients de totes les variables siguin zeros:

$$0X_1 + 0X_2 + \cdots + 0X_n = b.$$

En una equació com aquesta s'han de distingir dos casos: si $b = 0$ l'equació és una igualtat $0 = 0$ que se satisfà sempre i no imposa cap condició; per tant, es pot eliminar del sistema sense canviar les seves solucions. En canvi, si $b \neq 0$ l'equació $0 = b$ no se satisfà mai, i per tant els sistemes que contenen una equació com aquesta són incompatibles.

Quan el sistema està en forma esglaonada, les equacions sense variables $0 = b$, si n'hi ha, queden totes al final. El sistema és compatible si no hi ha equacions d'aquest tipus o bé si totes les que hi ha són de la forma $0 = 0$, i és incompatible si n'hi ha alguna amb constant $b \neq 0$.

Un cop el sistema està en forma esglaonada reduïda el nombre r d'equacions no constants (o sigui, equacions on alguna variable porta un coeficient $\neq 0$) és el *rang* del sistema. Quan el sistema és compatible les seves solucions s'escriuen en funció de $n - r$ paràmetres: $n - r$ és el nombre de graus de llibertat o la dimensió de les solucions del sistema.

Eliminació gaussiana. El mètode estàndard per a resoldre sistemes lineals de manera eficient i sistemàtica es coneix amb els noms d'*eliminació* o *reducció gaussiana* (o de *Gauss-Jordan*); també se li diu *mètode de Gauss* o *mètode del pivot.*

Consisteix a convertir el sistema donat en un altre que estigui en forma esglaonada reduïda aplicant una seqüència de transformacions que no afectin les solucions. Les transformacions permeses s'anomenen *transformacions elementals* i poden ser d'un dels tres tipus següents:

- *Tipus I:* reordenar les equacions,
- *Tipus II:* multiplicar una equació per un element de $\mathbb{K}$ no nul,
- *Tipus III:* sumar a una de les equacions un múltiple d'una altra equació.

A la pràctica, per fer la reducció gaussiana d'un sistema, convé treballar amb la versió matricial. En aquesta forma les transformacions elementals són transformacions de les files de la matriu ampliada. Es pot: (I) canviar d'ordre les files, (II) multiplicar una fila per un escalar no nul i (III) sumar a una fila un múltiple d'una altra. Al final s'arriba a una matriu que correspon a un sistema lineal que està en forma esglaonada reduïda, i aleshores la solució ja és immediata.

Un exemple. Es considera el sistema lineal de cinc equacions amb sis incògnites que té matriu ampliada:

$$\left(\begin{array}{rrrrrr|r} 0 & 0 & -2 & -2 & -9 & -3 & 12 \\ 2 & -4 & 1 & 8 & 14 & 0 & -39 \\ 2 & -4 & 1 & -8 & -10 & 0 & 41 \\ 8 & -16 & 6 & 2 & 17 & 3 & -8 \\ -18 & 36 & -17 & -18 & -69 & -9 & 87 \end{array}\right).$$

S'intercanvien la primera i la segona fila per tenir a l'entrada $(1, 1)$ un element no nul; després es multiplica la primera fila per $\frac{1}{2}$ per convertir aquesta entrada en un 1; a continuació se suma a la fila k-èsima, per $k \geqslant 2$, la primera fila multiplicada per $-a_{k,1}$ per tal que les primeres entrades es converteixin en zero. El resultat és la matriu:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & -2 & \frac{1}{2} & 4 & 7 & 0 & -\frac{39}{2} \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -9 & -3 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & -16 & -24 & 0 & 80 \\ 0 & 0 & 2 & -30 & -39 & 3 & 148 \\ 0 & 0 & -8 & 54 & 57 & -9 & -264 \end{array}\right).$$

El següent pivot és l'entrada $(2, 3)$; es multiplica la segona fila per $-\frac{1}{2}$ per posar un 1 en aquest lloc i després se suma a totes les demés files ($k \neq 2$) multiplicant-la per $-a_{k,3}$. Queda la matriu:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & -2 & 0 & \frac{7}{2} & \frac{19}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{33}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{9}{2} & \frac{3}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -16 & -24 & 0 & 80 \\ 0 & 0 & 0 & -32 & -48 & 0 & 160 \\ 0 & 0 & 0 & 62 & 93 & 3 & -312 \end{array}\right).$$

Ara, es multiplica la tercera fila per $-\frac{1}{16}$ i després es resta a cada fila amb $k \neq 3$ la tercera fila multiplicada per $-a_{k,4}$, i la matriu es transforma en:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & \frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -2 \end{array}\right).$$

S'intercanvien les files quarta i cinquena; després es multiplica la quarta fila per $\frac{1}{3}$ i es resta de cada fila amb $k \neq 4$ la quarta multiplicada per $-a_{k,6}$. La matriu queda:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Aquesta matriu ja està en forma esglaonada reduïda. L'única equació sense variables que ha quedat és la cinquena, que és una equació $0 = 0$. Com que en el sistema reduït no hi ha cap equació del tipus $0 = b$ amb $b \neq 0$, el sistema és compatible.

Aquest sistema té rang $r = 4$, i, com que té sis variables, el nombre de graus de llibertat és $6 - 4 = 2$: les solucions es donen en funció de dos paràmetres. Tal com s'ha resolt, les variables que fan de paràmetres són X_2 i X_5. La solució del sistema, en funció d'aquests paràmetres, és:

$$X_1 = \frac{1}{2} + 2X_2 + \frac{1}{2}X_5, \qquad X_3 = -3X_5, \qquad X_4 = -5 - \frac{3}{2}X_5, \qquad X_6 = -\frac{2}{3}.$$

Dependència de l'ordre. Noti's que en l'algorisme d'eliminació gaussiana es considera que tant les equacions com les variables tenen un ordre. Tot i que les solucions del sistema no depenen d'aquests ordres, la reducció gaussiana i les variables que finalment quedaran com a paràmetres sí que en depenen. Típicament les equacions es consideren ordenades segons l'ordre en que estan donades i les variables en l'ordre en que estan escrites, o l'ordre alfabètic si són lletres diferents, o l'ordre dels subíndexos quan es denoten amb subíndexos.

En l'exemple que s'acaba de veure, si es consideren les equacions en el mateix ordre però les variables ordenades al revés, o sigui, en l'ordre decreixent dels subíndexos $X_6, X_5, X_4, X_3, X_2, X_1$, la matriu ampliada del sistema és:

$$\left(\begin{array}{rrrrrr|r} -3 & -9 & -2 & -2 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 14 & 8 & 1 & -4 & 2 & -39 \\ 0 & -10 & -8 & 1 & -4 & 2 & 41 \\ 3 & 17 & 2 & 6 & -16 & 8 & -8 \\ -9 & -69 & -18 & -17 & 36 & -18 & 87 \end{array}\right)$$

i l'algorisme proporciona la forma esglaonada reduïda següent:

$$\left(\begin{array}{rrrrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -6 & 3 & -\frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -12 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Ara les variables que fan de paràmetres són X_2 i X_1 i l'expressió de les solucions, en funció d'aquestes dues variables, és:

$$X_6 = -\frac{2}{3}, \quad X_5 = -1 - 4X_2 + 2X_1, \quad X_4 = -\frac{7}{2} + 6X_2 - 3X_1, \quad X_3 = 3 + 12X_2 - 6X_1.$$

Naturalment, el conjunt de les solucions és el mateix en tots dos casos i només canvia l'expressió obtinguda per a obtenir-les totes.

Teorema de Rouché-Frobenius. Aquest teorema caracteritza el tipus de sistema en termes del rang de la matriu del sistema i el rang de la matriu ampliada. Al capítol 2 es donarà la definició de rang d'una matriu, i es veurà que el rang de la matriu del sistema $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ és el nombre r de files no nul·les d'aquesta matriu després de fer reducció gaussiana, i el rang de la matriu ampliada $\big(\boldsymbol{A}\,\big|\,\boldsymbol{b}\big)$ és igual a r si en la matriu reduïda les $m-r$ últimes files són totes zero, o és igual a $r+1$ si alguna d'aquestes files té l'última entrada b_i diferent de zero.

L'enunciat del teorema és el següent:

Teorema. *Un sistema lineal és compatible si, i només si, el rang de la matriu del sistema és igual que el rang de la matriu ampliada. En aquest cas, el sistema és determinat o indeterminat segons que aquest rang comú r sigui igual o més petit que el nombre de variables n. Quan el sistema és compatible indeterminat el nombre de graus de llibertat és la diferència entre el nombre de variables i el rang: $n-r$.*

Problemes

0.1. Digueu quines de les equacions següents són equacions lineals:

1. $\cos X + \cos Y = 1$,
2. $2X + \pi Y = 7Z - \cos\frac{\pi}{3}$,
3. $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 0$,
4. $x^y + y^z = x^z$,
5. $(X_1 + X_2 + X_3 + X_4) + (Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4) = Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4$,
6. $(u_1 + u_2 + u_3 + u_4)(v_1 + v_2 + v_3 + v_4) = 8$,
7. $2\sqrt{x} + 3\sqrt{y} + 5\sqrt{z} = \sqrt{7}$,
8. $\sqrt{2}\,x + \sqrt{3}\,y + \sqrt{5}\,z = \sqrt{7}$,
9. $ax + b^2y + c^3z = d, \quad \text{on } a, b, c, d \in \mathbb{R}$,
10. $ax + b^2y + c^3z = d, \quad \text{on } x, y, z \in \mathbb{R}$,
11. $U^2 + V^2 = 1$,
12. $\sum_{i=1}^{n} 2^i x_i = 1$,
13. $\sum_{i=-2}^{2} i^2 X_i^i = 0$.

0.2. Resoleu els sistemes lineals següents fent combinacions de les equacions:

$$(a)\ \begin{cases} 2X + 3Y = 5 \\ 3X - 4Y = 16 \end{cases} \qquad (b)\ \begin{cases} \dfrac{1}{3}X + \dfrac{1}{2}Y = 2 \\ \dfrac{4}{3}X + \dfrac{1}{2}Y = 5 \end{cases}$$

$$(c)\ \begin{cases} X_1 + X_2 - 2X_3 = 1 \\ -X_1 + 2X_2 - X_3 = -1 \\ 2X_1 - X_2 + 2X_3 = 0 \end{cases} \qquad (d)\ \begin{cases} 2X + 3Y - Z = 0 \\ X - 3Y + 2Z = 1 \\ 7X - 3Y + 4Z = -1 \end{cases}$$

Solució: (a) $4 \cdot 1\text{a} + 3 \cdot 2\text{a}$ dóna $17X = 68$; $3 \cdot 1\text{a} - 2 \cdot 2\text{a}$ dóna $17Y = -17$. $(X, Y) = (4, -1)$.
(b) 2a−1a dóna $X = 3$; $4 \cdot 1\text{a} - 2\text{a}$ dóna $\frac{3}{2}Y = 3$. $(X, Y) = (3, 2)$.
(c) 1a+3a dóna $3X_1 = 1$; $2 \cdot 2\text{a} + 3\text{a}$ dóna $3X_2 = -2$; −1a+2a+3a dóna $3X_3 = -2$. $(X_1, X_2, X_3) = (\frac{1}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{-2}{3})$.
(d) $2 \cdot 1\text{a} + 3 \cdot 2\text{a}$ dóna $7X - 3Y + 4Z = 3$. Sistema incompatible.

0.3. Resoleu el sistema següent, que té un grau de llibertat, posant dues de les tres variables en funció de l'altra de totes les maneres possibles:

$$\begin{cases} X + 2Y + 3Z = 0 \\ 3X + 2Y + Z = -1 \end{cases}$$

Solució: $(X, Y) = (-\frac{1}{2} + Z, \frac{1}{4} - 2Z)$, $(Y, Z) = (-\frac{3}{4} - 2X, \frac{1}{2} + X)$, $(X, Z) = (-\frac{3}{8} - \frac{1}{2}Y, \frac{1}{8} - \frac{1}{2}Y)$.

0.4. Resoleu amb el mètode de Gauss els sistemes lineals que tenen les matrius ampliades següents:

$$(a)\ \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -5 & -\frac{9}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & -2 & -2 \end{array}\right), \qquad (b)\ \left(\begin{array}{ccc|c} 7 & 9 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right), \qquad (c)\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ -3 & 4 & -7 & 10 \\ 1 & -1 & 2 & -3 \end{array}\right),$$

$$(d)\ \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -4 & 1 & -1 \\ 5 & 10 & -2 & 1 \\ 9 & 18 & -3 & 2 \end{array}\right), \quad (e)\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -3 & 3 \\ 3 & 6 & -1 & -6 & 10 \\ -1 & -2 & 0 & 7 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \end{array}\right), \quad (f)\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -3 & -3 \\ 3 & 1 & 5 & -8 & -7 \\ 6 & 8 & 4 & -8 & -4 \\ 11 & 18 & 4 & -11 & -1 \end{array}\right),$$

0.5. Expliqueu perquè el sistema

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ x+2y+3z=1 \\ y+2z=0 \end{cases}$$

és incompatible. Canvieu el terme independent de la tercera equació per un valor que faci el sistema compatible (quines possibilitats hi ha?) i doneu-ne la solució.

Feu el mateix, però ara canviant el terme independent de la segona equació. Les solucions són les mateixes?

Solució: Restant de la segona la primera dóna $y+2z=-1$. Canviant a la tercera zero per -1 la solució és $(x,y)=(3+z,-1,-2z)$. Per fer-lo compatible a la segona s'ha de canviar 1 per 2 i aleshores la solució és $(x,y)=(2+z,-2z)$. Les solucions no són les mateixes.

0.6. Calculeu la forma esglaonada reduïda del sistema següent i escriviu la seva solució, considerant les quatre variables ordenades de les maneres següents: (1) ordre normal x_1,x_2,x_3,x_4, (2) ordre invers x_4,x_3,x_2,x_1 i (3) ordre x_2,x_1,x_4,x_3:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=4 \\ x_1-x_2=1 \\ 5x_1+3x_2+x_3-x_4=0 \end{cases}$$

Solució: (1) $(x_1,x_2,x_3)=(-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}x_4,-\frac{4}{3}+\frac{1}{3}x_4,\frac{17}{3}-\frac{5}{3}x_4)$;
(2) $(x_4,x_3,x_2)=(1+3x_1,4-5x_1,-1+x_1)$;
(3) $(x_2,x_1,x_4)=(-\frac{1}{5}-\frac{1}{5}x_3,\frac{4}{5}-\frac{1}{5}x_3,\frac{17}{5}-\frac{3}{5}x_3)$.

0.7. Resoleu els sistemes següents calculant la seva forma esglaonada reduïda, amb les variables ordenades segons l'ordre alfabètic o l'ordre dels subíndexs.

$$\begin{cases} 2X-3Y+8Z=6 \\ Y-4Z=11 \\ Z=-1 \end{cases} \qquad \begin{cases} X_1+4X_2+X_5-2X_6=-4 \\ X_3+X_4-X_5=3 \\ X_4-4X_5+10X_6=-1 \end{cases} \qquad \begin{cases} T+U=1 \\ U+V=1 \\ V+W=1 \\ W+X=1 \end{cases}$$

A continuació torneu-ho a fer considerant les variables ordenades al revés.

Solució: La primera té solució única que independentment de com es resolgui és $(X,Y,Z)=(\frac{35}{2},7,-1)$. Les solucions de la segona són $(X_1,X_3)=(-4-4X_2-X_5+2X_6,4-3X_5+10X_6)$ o bé $(X_6,X_2)=(-\frac{1}{10}+\frac{2}{5}X_5-\frac{1}{10}X_4,-\frac{21}{20}-\frac{1}{20}X_5-\frac{1}{20}X_4-\frac{1}{4}X_1)$, segons l'ordre. Les de la tercera són $(T,U,V)=(1-W,W,1-W)$ o bé $(X,W,V)=(1-U,U,1-U)$, segons l'ordre.

0.8. De vegades s'han de resoldre diversos sistemes lineals $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}_i$ tots amb la mateixa matriu $\boldsymbol{A}$ però amb diferents vectors de termes independents $\boldsymbol{b}_i$. Expliqueu com es pot fer aquest càlcul fent reducció gaussiana d'una única matriu i apliqueu-ho als exemples següents:

$$(a)\ \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -3 & -6 & 2 \\ 5 & 13 & -4 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b}_1=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}_2=\begin{pmatrix} -4 \\ 11 \\ 3 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}_3=\begin{pmatrix} -49 \\ 98 \\ 21 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}_4=\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$(b)\ \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & 7 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -3 & 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}_2=\begin{pmatrix} 14 \\ 36 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}_3=\begin{pmatrix} -9 \\ 21 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

SOLUCIÓ: Es fa una matriu ampliada afegint a la matriu del sistema tots els vectors columna de termes independents de totes les equacions que cal resoldre, i aplicant reducció gaussiana de files es passa a forma esglaonada reduïda, a partir de la qual es troben immediatament les solucions:

(a) $\left(\begin{array}{ccc|cccc} -3 & -6 & 2 & -1 & -4 & -49 & 0 \\ 5 & 13 & -4 & 1 & 11 & 98 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 0 & 3 & 21 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 7 & -3 \end{array}\right)$

Tots quatre sistemes són compatibles determinats i les solucions són les quatre últimes columnes de la matriu reduïda.

(b) $\left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & -1 & 3 & 0 & 1 & 14 & -9 \\ 2 & -2 & 7 & 0 & 3 & 36 & -21 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & -3 \\ -3 & 3 & 0 & 3 & 6 & 10 & -9 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & -2 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 8 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -7 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$

El segon sistema és incompatible i els altres dos són compatibles indeterminats amb un grau de llibertat i solucions $(x_1, x_3, x_4) = (-2 + x_2, 1, 0)$ i $(x_2, x_3, x_4) = (x_2, -3, -3)$, respectivament.

0.9. Donada una matriu quadrada $\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ es considera la matriu $(\boldsymbol{A}|\mathbf{1}_n) \in \mathcal{M}_{n\times 2n}(\mathbb{K})$ formada per dos blocs quadrats: a l'esquerra hi ha la matriu $\boldsymbol{A}$ i a la dreta la matriu identitat. Suposi's que en aplicar eliminació gaussiana a aquesta matriu s'obté una matriu de la forma $(\mathbf{1}_n|\boldsymbol{B})$, amb $\boldsymbol{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Quina propietat té la matriu $\boldsymbol{B}$?

0.10. Calculeu les inverses de les matrius següents:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 8 & 2 \\ 4 & 9 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & 3 & 5 & -5 \\ 3 & -4 & -5 & 8 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & -2 \\ 3 & -12 & -2 & -6 \\ -2 & 10 & 2 & 5 \\ -1 & 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

SOLUCIÓ:

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -26 & -7 & 12 \\ 11 & 3 & -5 \\ -5 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{C}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{9} \\ \frac{11}{9} & \frac{41}{18} & -\frac{5}{3} & -\frac{1}{18} \\ -\frac{5}{9} & -\frac{22}{9} & \frac{5}{3} & -\frac{1}{9} \\ \frac{2}{9} & -\frac{13}{18} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{18} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{D}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{E}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{F}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{4}{9} & -\frac{1}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{1}{9} \\ -\frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{5}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

0.11. Digueu si existeixen sistemes que tinguin les mateixes solucions que el sistema:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{1}{2}X + \frac{1}{3}Y + \frac{1}{6}Z + T & = & 0 \\ 2X - Y - Z + 3T & = & 0 \\ -X + 4Y + 3Z & = & 0 \end{array} \right.$$

que siguin de la forma següent, i en cas que existeixin doneu-ne algun exemple:

1. de 4 equacions que contingui les dues primeres però no la tercera;
2. de 3 equacions que contingui l'equació $X + Y + Z + T = 1$;
3. de 3 equacions que contingui l'equació $\frac{3}{2}X - \frac{8}{9}Y + \frac{13}{6}Z + 4T = 0$;
4. de 2 equacions que contingui la tercera però cap de les altres dues;
5. de 2 equacions que no siguin cap de les tres donades;
6. d'una única equació.

Solució: La primera equació és equivalent a $3X + 2Y + Z + 6T = 0$. Restant a aquesta el doble de la segona s'obté la tercera, que per tant és redundant. La solució del sistema és

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{1}{7}X_3 - \frac{12}{7}X_4, \\ X_2 &= -\frac{5}{7}X_3 - \frac{3}{7}X_4 \end{aligned}.$$

1. Sí. Es poden afegir a les dues primeres qualsevol dues equacions redundants diferents de la tercera.
2. No. Les solucions del sistema no són solucions d'aquesta (terme independent 1).
3. No. La solució del sistema $(1, -5, 7, 0)$ no satisfà l'equació.
4. Sí. Per exemple la tercera i una combinació lineal de les altres dues.
5. Sí. Dues combinacions lineals de les tres equacions.
6. No. Un sistema d'una equació en quatre variables té tres o quatre graus de llibertat.

0.12. Doneu exemples de sistemes del tipus següent, si existeixen:

1. de n equacions amb n incògnites incompatible,
2. de 5 equacions amb 3 incògnites compatible determinat,
3. de 3 equacions amb n incògnites amb $n - 2$ graus de llibertat,
4. de n equacions amb $n + 1$ incògnites compatible determinat.

0.13. Doneu sistemes amb les propietats següents, si existeixen:

1. de tres equacions amb tres incògnites i solució única $(\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 1/2)$,
2. de dues equacions amb quatre incògnites i solució única $(1, 2, 3, 4)$,
3. de tres equacions amb quatre incògnites X_i i solució depenent d'un paràmetre T:

$$X_1 = T, \qquad X_2 = 1 - 4T, \qquad X_3 = -2 + \frac{1}{2}T, \qquad X_4 = -T,$$

4. de tres equacions amb quatre incògnites i solució depenent de dos paràmetres T_1, T_2:

$$X_1 = T_1, \qquad X_2 = 4 - 2T_1 + T_2, \qquad X_3 = T_2, \qquad X_4 = -1 + T_1 - T_2.$$

5. de dues equacions amb dues incògnites i solució depenent de tres paràmetres T_1, T_2, T_3:

$$X_1 = 2 - T_1 + T_2, \qquad X_2 = 3 + T_1 - T_3.$$

0.14. Discutiu els sistemes següents en funció dels paràmetres α i β:

$$\text{(a)} \begin{cases} X + Y + \alpha Z = \alpha \\ X + \alpha Y + Z = \alpha \\ \alpha X + Y + Z = \alpha \end{cases} \qquad \text{(b)} \begin{cases} \alpha X + Y + Z + T = 1 \\ X + \alpha Y + Z + T = \alpha \\ X + Y + \alpha Z + T = \alpha^2 \\ X + Y + Z + \alpha T = \alpha^3 \end{cases}$$

$$\text{(c)} \begin{cases} X + 2Y = 1 \\ X + Y + T = 1 \\ X + 3Y + 2\alpha Z + 2T = 1 \\ 2X + 6Y + 2Z + \alpha T = \beta \end{cases} \qquad \text{(d)} \begin{cases} 2X + \alpha Y + Z = 7 \\ X + \alpha Y + Z + T = \beta \\ X + 2\alpha Y + T = -1 \\ \beta X + \alpha Y = \beta \end{cases}$$

SOLUCIÓ: (a) Si $\alpha = 1$ és compatible indeterminat amb dos graus de llibertat i solució $X = 1 - Y - Z$; si $\alpha = -2$ és incompatible; altrament és compatible determinat amb solució $X = Y = Z = \frac{\alpha}{\alpha+2}$.
(b) Si $\alpha = 1$ és compatible indeterminat amb tres graus de llibertat i solució $X = 1 - Y - Z - T$; si $\alpha = -3$ és incompatible; altrament és compatible determinat amb solució

$$(X, Y, Z, T) = \frac{1}{\alpha + 3}(-\alpha^2 - 2\alpha - 2, -\alpha^2 - \alpha + 1, 2\alpha + 1, \alpha^3 + 3\alpha^2 + 2\alpha + 1).$$

(c) Si $\alpha = 1$ o $\alpha = -3$ aleshores si $\beta \neq 2$ és incompatible i si $\beta = 2$ és compatible indeterminat amb un grau de llibertat i solució $(X, Y, Z) = (1 - 2T, T, \frac{3}{2}T)$; altrament, o sigui, si $\alpha \notin \{1, -3\}$, és compatible determinat amb solució:

$$(X, Y, Z, T) = \frac{1}{\alpha^2 + 2\alpha - 3}\left(\alpha^2 + 6\alpha - 2\alpha\beta - 3, \alpha(\beta - 2), -\frac{3}{2}(\beta - 2), \alpha(\beta - 2)\right).$$

(d) Si $\alpha = 0$ aleshores si $\beta \neq 0, 4$ és incompatible i si $\beta \in \{0, 4\}$ és compatible indeterminat amb un grau de llibertat i solucions $(X, Z, T) = (-\frac{1}{2}(\beta - 6), \beta + 1, \frac{1}{2}(\beta - 8))$ i Y arbitraria (paràmetre); si $\alpha \neq 0$ aleshores si $\beta = 1$ és incompatible i si $\beta \neq 1$ és compatible determinat amb solució:

$$(X, Y, Z, T) = \frac{1}{2(\beta - 1)}\left(3(\beta - 2), -\frac{\beta(\beta - 4)}{\alpha}, \beta^2 + 4\beta - 2, 2\beta^2 - 13\beta + 8\right).$$

0.15. Trobeu els valors del paràmetre λ per als quals la matriu

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ \lambda & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

té inversa. Calculeu la inversa per a $\lambda = 1$.

SOLUCIÓ: Té inversa per als valors del paràmetre $\lambda \neq 0, 7$, que és:

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{\lambda(\lambda - 7)}\begin{pmatrix} 3 & \lambda - 1 & -2\lambda - 1 \\ -\lambda - 3 & 1 - 3\lambda & \lambda^2 + 1 \\ \lambda - 6 & 2 & 2 - \lambda \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix} \quad \text{si } \lambda = 1.$$

Capítol 1

Espais vectorials

1.1 Escalars, vectors i matrius

Definició 1.1.1 (Cos) *Un* cos $\mathbb{K}$ *és un conjunt on hi ha definides dues operacions, que es denoten com la suma i el producte habituals, tals que:*

1. *La suma és associativa, commutativa, té element neutre, que es denota* 0*, i cada element* $x \in \mathbb{K}$ *té un element invers, que es denota* $-x$*.*
2. *El producte és associatiu, commutatiu, té element neutre, que es denota* 1 *i ha de ser* $\neq 0$*, i cada element* $x \neq 0$ *té un element invers, que es denota* x^{-1} *o* $1/x$*.*
3. *El producte és distributiu respecte la suma:* $x(y+z) = xy + xz$*.*

Exemples de cossos són: el cos $\mathbb{Q}$ dels *nombres racionals*, el cos $\mathbb{R}$ dels *nombres reals* i el cos $\mathbb{C}$ dels *nombres complexos*.

En àlgebra lineal els elements d'un cos s'acostumen a anomenar *escalars*.

Definició 1.1.2 (Espai $\mathbb{K}^n$) *Sigui* $\mathbb{K}$ *un cos. Es denota* $\mathbb{K}^n = \mathbb{K} \times \cdots \times \mathbb{K}$ *el conjunt* producte cartesià *de* n *còpies de* $\mathbb{K}$*. Els seus elements són les* n-tuples:

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \qquad \textit{amb components} \qquad x_i \in \mathbb{K}.$$

Definició 1.1.3 (Operacions a $\mathbb{K}^n$) *Al conjunt* $\mathbb{K}^n$ *es defineixen la* suma de n-tuples *i el* producte d'un escalar per una n-tupla *de la manera següent:*

- Suma: *Donats* $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ *i* $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{K}^n$*, la seva suma és:*

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) \in \mathbb{K}^n.$$

- Producte per un escalar: *Donats* $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ *i* $a \in \mathbb{K}$*, el seu producte és:*

$$a\boldsymbol{x} = (ax_1, \ldots, ax_n) \in \mathbb{K}^n.$$

Definició 1.1.4 (Matrius) *Sigui* $\mathbb{K}$ *un cos. Una* matriu $m \times n$ sobre $\mathbb{K}$ *(o* de mida $m \times n$*) és una família d'elements de* $\mathbb{K}$ *amb índexs que són parells* (i,j) *del conjunt* $\{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\}$*,* *que es dóna en una disposició rectangular de la forma següent:*

$$\boldsymbol{A} = \left(a_{ij}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant m}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad a_{ij} \in \mathbb{K}.$$

El conjunt de totes les matrius $m \times n$ sobre $\mathbb{K}$ es denota $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$.

Les entrades $a_{i1}, \dots, a_{in}$ són la *fila i-èsima* de la matriu i les entrades $a_{1j}, \dots, a_{mj}$ són la *columna j-èsima*. La matriu $\boldsymbol{A}$ té m files i n columnes. Els elements de $\mathbb{K}^n$ sovint s'identifiquen amb *matrius columna* de mida $n \times 1$ o amb *matrius fila* de mida $1 \times n$. La *matriu zero* és la matriu que té zeros a totes les entrades; es denota $\mathbf{0}_{m\times n}$ o simplement $\mathbf{0}$ si la mida ja queda determinada pel context.

Quan $m = n$, es diu que $\boldsymbol{A}$ és una *matriu quadrada*. El conjunt $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ de les matrius quadrades de mida $n \times n$ se sol denotar també $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les entrades $a_{11}, \dots, a_{nn}$ d'una matriu quadrada són la seva *diagonal*. Una matriu quadrada (a_{ij}) es diu *diagonal* si totes les seves entrades fora de la diagonal són zeros: $a_{ij} = 0$ sempre que $i \neq j$. La *matriu identitat* de mida n és la matriu de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ que té uns a la diagonal i zeros a les demés entrades; se sol denotar $\mathbf{1}_n$ o també $\boldsymbol{I}_n$, o simplement $\mathbf{1}$ si la mida ja es dedueix del context.

Definició 1.1.5 (Operacions amb matrius) *Les matrius es poden sumar i multiplicar entre elles, i també es poden multiplicar per un escalar, de la manera següent:*

- Suma de matrius: *Donades matrius $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ i $\boldsymbol{B} = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, totes dues de la mateixa mida, la seva* suma *és la matriu $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{C} = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ amb entrades:*

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \qquad 1 \leqslant i \leqslant m, \quad 1 \leqslant j \leqslant n.$$

- Producte d'un escalar per una matriu: *Donats un escalar $x \in \mathbb{K}$ i una matriu $\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, el seu producte és la matriu $x\boldsymbol{A} = \boldsymbol{C} = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ amb entrades:*

$$c_{ij} = x a_{ij}, \qquad 1 \leqslant i \leqslant m, \quad 1 \leqslant j \leqslant n.$$

- Producte de matrius: *Donades matrius $\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ i $\boldsymbol{B} = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$, el seu* producte *és la matriu $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{C} = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{K})$ amb entrades:*

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}, \qquad 1 \leqslant i \leqslant m, \quad 1 \leqslant j \leqslant p.$$

Noti's que el producte de dues matrius $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{B}$ només està definit quan el nombre de columnes de la primera coincideix amb el nombre de files de la segona. En aquest cas, la matriu producte té tantes files com la primera matriu $\boldsymbol{A}$ i tantes columnes com la segona matriu $\boldsymbol{B}$.

La *matriu inversa* d'una matriu quadrada $\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ és una matriu $\boldsymbol{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tal que $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA} = \mathbf{1}_n$. No totes les matrius quadrades tenen inversa; les que sí que en tenen es diuen *matrius invertibles*.

Problemes

1.1. Demostreu que a un cos $\mathbb{K}$ es té:

1. el neutre de la suma i del producte són únics;
2. l'invers per la suma d'un element donat és únic, i també ho és l'invers pel producte d'un element no nul;
3. $-(-x) = x, \quad (-x) + (-y) = -(x + y), \quad (-x)y = -(xy), \quad (-1)(x) = -x, \quad (-x)(-y) = xy;$
4. $0x = 0, \quad xy = 0 \Rightarrow x = 0$ o $y = 0$;
5. $(x^{-1})^{-1} = x, \quad (xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1}, \quad x^{-1} = x \Leftrightarrow x = 1$ o $x = -1$.

1.2. Comproveu que el conjunt $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) := \{r + s\sqrt{2} : r, s \in \mathbb{Q}\} \subseteq \mathbb{R}$ és un cos amb les operacions suma i producte de nombres reals, i que $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subset \mathbb{R}$, amb inclusions estrictes.

1.3. Els nombres complexos es defineixen com el conjunt $\mathbb{C} = \{z = (x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ dels parells de nombres reals amb les operacions següents:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \qquad (x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2).$$

Comproveu que aquestes operacions donen a $\mathbb{C}$ estructura de cos.

1.4. Comproveu que el conjunt $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ és un cos amb les operacions definides a les taules següents:

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

que el conjunt $\mathbb{F}_3 = \{0, 1, 2\}$ és un cos amb les operacions definides a les taules següents:

$+$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

$\cdot$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

i que el conjunt $\mathbb{F}_4 = \{0, 1, x, y\}$ és un cos amb les operacions definides a les taules següents:

$+$	0	1	x	y
0	0	1	x	y
1	1	0	y	x
x	x	y	0	1
y	y	x	1	0

$\cdot$	0	1	x	y
0	0	0	0	0
1	0	1	x	y
x	0	x	y	1
y	0	y	1	x

En altres assignatures de la carrera es veurà que tots els cossos finits tenen nombre d'elements que és una potència d'un nombre primer, i que per a cada potència de primer $q = p^r$ hi ha essencialment un únic cos de q elements, que es denota $\mathbb{F}_q$, tot i que de vegades, especialment en aplicacions a l'enginyeria i les TIC, també es fa servir la notació $\mathrm{GF}(q)$, que es llegeix "Galois Field".

1.5. Calculeu totes les matrius que puguin obtenir-se sumant o multiplicant dues de les matrius següents:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} \pi \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{G} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{K} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

1.6. Es consideren les matrius següents:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 5 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 6 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Calculeu, si estan definides, les matrius següents:

$$3\boldsymbol{A},\ 0\boldsymbol{B},\ \boldsymbol{A}+\boldsymbol{B},\ \boldsymbol{B}+\boldsymbol{C},\ \boldsymbol{C}-\boldsymbol{D},\ 3\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{D},\ 2\boldsymbol{D}-3\boldsymbol{C},\ (\boldsymbol{A}\boldsymbol{C})^2,\ (\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{B})(3\boldsymbol{C}-\boldsymbol{D}),$$

i també les matrius següents, on l'exponent t indica la matriu transposada, que és la matriu que s'obté a partir d'una de donada intercanviant files per columnes:

$$\boldsymbol{A}^t\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^t,\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{D}^t,\ (\boldsymbol{C}\boldsymbol{D})^t,\ \boldsymbol{C}^t\boldsymbol{D}.$$

1.2 Espais vectorials

Definició 1.2.1 (Espai vectorial) *Sigui $\mathbb{K}$ un cos. Un* espai vectorial sobre $\mathbb{K}$ *(o $\mathbb{K}$-espai* vectorial*) és un conjunt V, els elements del qual s'anomenen* vectors*, on hi ha definides:*

- *una operació interna, la* suma de vectors*, que donats dos vectors $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ els fa correspondre un* vector suma $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} \in V$*, i*
- *una operació externa de $\mathbb{K}$ en V, el* producte d'un escalar per un vector*, que donats un escalar $x \in \mathbb{K}$ i un vector $\boldsymbol{v} \in V$ els fa correspondre un* vector producte $x\boldsymbol{v} \in V$*,*

que satisfan les propietats següents:

- *La suma és associativa, commutativa, té element neutre, que es denota $\mathbf{0}$, i tot vector $\boldsymbol{v} \in V$ té un invers respecte la suma, que es denota $-\boldsymbol{v}$.*
- *El producte per escalars satisfà:*

$$(x+y)\boldsymbol{v} = x\boldsymbol{v} + y\boldsymbol{v}, \quad (xy)\boldsymbol{v} = x(y\boldsymbol{v}), \quad 1\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}, \quad x(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = x\boldsymbol{u} + x\boldsymbol{v},$$

  on $x, y, 1 \in \mathbb{K}$ i $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$.

Exemples 1.2.2 *Alguns exemples importants d'espais vectorials són els següents:*

- *$\mathbb{K}^n$ és l'espai de les n-tuples $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ d'elements de $\mathbb{K}$. La suma i el producte per escalars són els de la definició 1.1.3.*
- *$\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ és l'espai vectorial de les matrius $m \times n$ sobre $\mathbb{K}$ amb la suma de matrius i el producte per un escalar de la definició 1.1.5.*
- *$\mathbb{K}[X]$ és l'espai vectorial dels polinomis en la variable X a coeficients en el cos $\mathbb{K}$. La suma és la habitual de polinomis, en que se sumen els coeficients de cada potència de X, i el producte d'un polinomi per un escalar consisteix a multiplicar tots els coeficients del polinomi per aquest escalar.*
- *$\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ és l'espai de les funcions reals de variable real, o sigui les aplicacions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ amb la suma de funcions $f+g$ i el producte af d'un escalar per una funció definits de la manera habitual com $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ i $(af)(x) = a(f(x))$ per a tot $x \in \mathbb{R}$.*

- *L'anterior és un cas particular de l'espai $\mathscr{F}(S, \mathbb{K})$ de les aplicacions definides a un conjunt S qualsevol que prenen valors en un cos $\mathbb{K}$ qualsevol.*

Definició 1.2.3 (Combinació lineal) *Siguin $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ vectors d'un $\mathbb{K}$-espai vectorial V. Una* combinació lineal *d'aquests vectors és un vector $\boldsymbol{v} \in V$ expressat de la forma:*

$$\boldsymbol{v} = x_1\boldsymbol{v}_1 + x_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{v}_n = \sum_{i=1}^{n} x_i\boldsymbol{v}_i, \qquad \textit{amb escalars} \quad x_i \in \mathbb{K}.$$

És a dir, les combinacions lineals dels vectors $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ són aquells vectors de l'espai que es poden obtenir multiplicant cada vector $\boldsymbol{v}_i$ per un escalar x_i i sumant els vectors obtinguts. Els escalars x_i són els *coeficients* de la combinació lineal.

Combinacions lineals a $\mathbb{K}^m$. Un problema que es planteja sovint és decidir a l'espai $\mathbb{K}^m$ si un vector donat és combinació lineal d'uns altres o no ho és, i, en cas que ho sigui, trobar els coeficients corresponents. Per exemple, a l'espai $\mathbb{R}^3$ es vol posar el vector $\boldsymbol{v} = (1, 0, 1)$ com a combinació lineal dels vectors $\boldsymbol{v}_1 = (1, -2, 0)$, $\boldsymbol{v}_2 = (1, -1, 1)$ i $\boldsymbol{v}_3 = (1, 0, -1)$: s'han de trobar els escalars x, y, z (si existeixen) que compleixin:

$$\boldsymbol{v} = x\boldsymbol{v}_1 + y\boldsymbol{v}_2 + z\boldsymbol{v}_3 = x(1, -2, 0) + y(1, -1, 1) + z(1, 0, -1) = (x + y + z, -2x + y, y - z).$$

Igualant cada component això equival al sistema d'equacions lineals:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ -2x + y = 0 \\ y - z = 1 \end{cases}$$

Aplicant reducció gaussiana a la seva matriu ampliada es té:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \end{array}\right),$$

i per tant $\boldsymbol{v}$ és combinació lineal dels $\boldsymbol{v}_i$ de manera única: $\boldsymbol{v} = -\frac{2}{3}\boldsymbol{v}_1 + \frac{4}{3}\boldsymbol{v}_2 + \frac{1}{3}\boldsymbol{v}_3$. Si es canvia el vector $\boldsymbol{v}_3$ pel vector $\boldsymbol{v}_3' = (1, 0, 2)$ la reducció del nou sistema és:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right),$$

que no té solució, i per tant $\boldsymbol{v}$ no és combinació lineal de $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ i $\boldsymbol{v}_3'$. Sigui ara $\boldsymbol{w} = (1, -3, -1)$; a partir de la reducció gaussiana:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

es dedueix que $\boldsymbol{w}$ sí que és combinació lineal d'aquests vectors i, de fet, es pot posar com a combinació lineal seva de moltes maneres diferents: per a cada element $t \in \mathbb{K}$ es té l'expressió $\boldsymbol{w} = (2 + t)\boldsymbol{v}_1 + (-1 - 2t)\boldsymbol{v}_2 + t\boldsymbol{v}_3'$, que dóna $\boldsymbol{w}$ com a combinació lineal.

En general, a l'espai $\mathbb{K}^m$, donats n vectors $\boldsymbol{v}_i = (a_{1i}, a_{2i}, \ldots, a_{mi})$ i un vector $\boldsymbol{v} = (b_1, \ldots, b_m)$, els coeficients de les combinacions lineals $x_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{v}$ són les solucions del sistema lineal de m equacions i n incògnites amb matriu ampliada

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right),$$

que a les columnes de la matriu del sistema hi té les components dels vectors $\boldsymbol{v}_i$, i a la columna dels termes independents de les equacions hi té les components del vector $\boldsymbol{v}$. Per tant, el problema de saber si un vector donat $\boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^m$ és o no combinació lineal dels vectors $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$, i de trobar els coeficients d'aquestes combinacions lineals si existeixen, consisteix a resoldre un sistema de m equacions lineals en n incògnites.

Definició 1.2.4 (Subespai vectorial) *Sigui V un $\mathbb{K}$-espai vectorial. Un* subespai vectorial *de V és un subconjunt $W \subseteq V$ que, en considerar la suma de vectors i el producte per escalars que hereta com a subconjunt de V, és ell mateix un $\mathbb{K}$-espai vectorial. O sigui, tal que:*

1. *si $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in W$ aleshores $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in W$;*
2. *$\mathbf{0} \in W$;*
3. *si $\boldsymbol{u} \in W$ aleshores $-\boldsymbol{u} \in W$; i*
4. *Si $x \in \mathbb{K}$ i $\boldsymbol{v} \in W$ aleshores $x\boldsymbol{v} \in W$.*

Noti's que, de fet, l'únic que cal comprovar per veure que un subconjunt no buit és un subespai és que la suma de vectors i el producte per escalars són operacions "tancades" al subconjunt, que són les condicions 1 i 4; les condicions 2 i 3 són conseqüència de 4 aplicada als escalars 0 i -1 (assegurar la condició 2 a partir de 4 requereix que el subconjunt sigui no buit).

Exemples 1.2.5 *Alguns subespais dels espais dels exemples 1.2.2 són:*

- *El subconjunt $\mathbb{K}_n[X] \subseteq \mathbb{K}[X]$ dels polinomis de grau $\leqslant n$ és un subespai vectorial de l'espai de tots els polinomis.*
- *El subconjunt $\mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \subseteq \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ de les funcions contínues és un subespai vectorial de l'espai de totes les funcions. El subconjunt de les funcions derivables també és subespai vectorial de $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, i com que tota funció derivable és contínua, les funcions derivables també són un subespai vectorial de $\mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.*

Proposició 1.2.6 (Subespai generat) *Es denota $\langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n \rangle$ o també $\langle \boldsymbol{v}_i \rangle_{1 \leqslant i \leqslant n}$ el subconjunt dels vectors de V que són combinació lineal dels vectors $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$:*

$$\langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n \rangle = \{x_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{v}_n : x_i \in \mathbb{K}\} \subseteq V.$$

Aquest subconjunt és un subespai vectorial de V.

PROVA: Per veure que efectivament és un subespai vectorial siguin $\boldsymbol{u} = \sum x_i\boldsymbol{v}_i$ i $\boldsymbol{v} = \sum y_i\boldsymbol{v}_i$ vectors de $\langle \boldsymbol{v}_i \rangle$. Aleshores la suma $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \sum(x_i + y_i)\boldsymbol{v}_i$ i el producte $x\boldsymbol{v} = \sum(xx_i)\boldsymbol{v}_i$ per un escalar $x \in \mathbb{K}$ també són vectors de $\langle \boldsymbol{v}_i \rangle$. $\square$

Si $W \subseteq V$ és un subespai aleshores la inclusió $\langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n \rangle \subseteq W$ del subespai generat pels vectors $\boldsymbol{v}_i$ en el subespai W equival al fet que cadascun dels vectors $\boldsymbol{v}_i$ pertanyi a W. En particular, una igualtat entre dos subespais $\langle \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_m \rangle = \langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n \rangle$ generats per vectors $\boldsymbol{u}_i$ i $\boldsymbol{v}_j$ equival a que cadascun dels vectors $\boldsymbol{u}_i$ sigui combinació lineal dels vectors $\boldsymbol{v}_j$ i, recíprocament, que cadascun dels $\boldsymbol{v}_j$ sigui combinació dels $\boldsymbol{u}_i$.

Proposició 1.2.7 (Solucions de sistemes d'equacions lineals homogenis) *El conjunt de les solucions $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ de m equacions lineals homogènies:*

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 0, \quad \textit{per a tot} \quad i = 1, \ldots, m, \qquad \textit{amb} \quad a_{ij} \in \mathbb{K},$$

és un subespai vectorial de l'espai $\mathbb{K}^n$.

PROVA: Si $\boldsymbol{x} = (x_j)$ i $\boldsymbol{y} = (y_j)$ són solucions aleshores $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (x_j + y_j)$ també ho és ja que per a tot i es té

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_j + y_j) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j = 0$$

i per a tot escalar λ el producte $\lambda \boldsymbol{x}$ òbviament també ho és. □

Subespais definits per generadors i per equacions. Els subespais de $\mathbb{K}^n$ es poden donar tant per generadors com per equacions, de les maneres descrites a les dues proposicions anteriors. O sigui, tot subespai es pot donar com $W = \langle \boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_p \rangle$, on els $\boldsymbol{x}_i \in \mathbb{K}^n$ són p vectors generadors, i també com $W = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n : \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 0 \text{ per a } 1 \leqslant i \leqslant q\}$, definit per q equacions en n variables. Un problema que es planteja sovint és el de passar d'una d'aquestes descripcions a l'altra: trobar generadors d'un subespai definit per equacions o trobar equacions d'un subespai donat per generadors. Tots dos problemes es tradueixen en la resolució d'un sistema d'equacions lineals, tal i com s'explica a continuació.

Donat un sistema d'equacions homogènies $\sum a_{ij} X_j = 0$ la manera de trobar generadors de l'espai de les seves solucions és resoldre el sistema aplicant eliminació Gaussiana. A partir de les solucions, expressades en funció de d paràmetres, donant el valor 1 a un dels paràmetres i zero als altres, de totes les d maneres possibles, s'obtenen generadors de l'espai de solucions (de fet, s'obté una base). Per exemple:

- Sigui $W \subseteq \mathbb{R}^3$ el subespai de les solucions del sistema d'equacions:

$$\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ -2x - y + 3z = 0 \\ -2x - 5y + 11z = 0 \end{cases}$$

  Aquest sistema té rang 2 i per tant un grau de llibertat. Per reducció gaussiana es posen les dues primeres variables en funció de la tercera i les solucions són $(x, y, z) = (\frac{z}{2}, 2z, z) = z(\frac{1}{2}, 2, 1)$. Per tant, $W = \langle (\frac{1}{2}, 2, 1) \rangle = \langle (1, 4, 2) \rangle$.

- El subespai de $\mathbb{R}^4$ format per les solucions de les equacions següents:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

està format per les seves solucions, que, en funció de x_2 i x_4, són:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_2 + x_4, x_2, 0, x_4) = x_2(1, 1, 0, 0) + x_4(1, 0, 0, 1).$$

Per tant, aquest subespai és $\langle(1, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 1)\rangle$.

- Les solucions d'una única equació homogènia $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0$ amb coeficient $a_1 \neq 0$ formen el subespai

$$W = \langle(-a_2, a_1, 0, \ldots, 0), (-a_3, 0, a_1, \ldots, 0), \ldots, (-a_n, 0, 0, \ldots, a_1)\rangle.$$

Es considera ara el problema invers: donat el subespai $W = \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_p\rangle$ generat per p vectors $\boldsymbol{x}_i = (x_{i1}, \ldots, x_{in}) \in \mathbb{K}^n$ es vol trobar un sistema d'equacions lineals que tingui per conjunt de solucions aquest mateix subespai. Això es pot fer de la manera següent: es considera un vector genèric $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n) \in \mathbb{K}^n$, que té incògnites a les components, i se li imposa que sigui combinació lineal dels p generadors donats. Això equival a dir que el sistema d'equacions lineals de matriu ampliada:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{p1} & X_1 \\ x_{12} & x_{22} & \cdots & x_{p2} & X_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_{1n} & x_{2n} & \cdots & x_{pn} & X_n \end{array}\right)$$

tingui solució. Aplicant eliminació Gaussiana (de fet, n'hi ha prou en passar la matriu del sistema a forma esglaonada, que no cal que sigui reduïda) les últimes files de la matriu esglaonada corresponen a equacions de la forma 0 = "combinació lineal en les X_j", i aquestes equacions defineixen l'espai W, ja que el fet que es compleixin totes equival a que el sistema tingui solució. Per exemple:

- El subespai $W = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\rangle \subseteq \mathbb{R}^4$ generat pels vectors $\boldsymbol{v}_1 = (1, 2, -1, 1)$ i $\boldsymbol{v}_2 = (3, 0, 1, 2)$ s'obté a partir d'equacions calculant la reducció gaussiana:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & x \\ 2 & 0 & y \\ -1 & 1 & z \\ 1 & 2 & t \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & x \\ 0 & -6 & y-2x \\ 0 & 4 & z+x \\ 0 & -1 & t-x \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & x \\ 0 & 1 & \frac{1}{6}(2x-y) \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}(-x+2y+3z) \\ 0 & 0 & \frac{1}{6}(-4x-y+6t) \end{array}\right).$$

Per tant, és el conjunt de les solucions del sistema lineal

$$\begin{cases} -x + 2y + 3z = 0 \\ -4x - y + 6t = 0 \end{cases}$$

- Unes equacions que defineixen el subespai $W = \langle(1, 2, 1), (3, -1, 1), (-1, 5, 1)\rangle \subseteq \mathbb{R}^3$ es poden trobar amb la reducció:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & x \\ 2 & -1 & 5 & y \\ 1 & 1 & 1 & z \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & x \\ 0 & -7 & 7 & y-2x \\ 0 & -2 & 2 & z-x \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & x \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{7}(2x-y) \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{7}(-3x-2y+7z) \end{array}\right),$$

de manera que W és el conjunt de solucions de l'equació $-3x - 2y + 7z$.

- El subespai generat per un únic vector $\boldsymbol{v} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ amb la primera coordenada a_1 diferent de zero queda definit per les $n-1$ equacions següents:

$$a_2X_1 - a_1X_2 = a_3X_1 - a_1X_3 = \cdots = a_nX_1 - a_1X_n = 0,$$

en les n variables $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Problemes

1.7. Demostreu que a un $\mathbb{K}$-espai vectorial V es té:

1. $(-1)\boldsymbol{v} = -\boldsymbol{v}$, $\quad 0\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$, $\quad x\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow x = 0$ o $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$.
2. $x\boldsymbol{v} = y\boldsymbol{v}$ i $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0} \Rightarrow x = y$, $\quad x\boldsymbol{u} = x\boldsymbol{v}$ i $x \neq 0 \Rightarrow \boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}$.

1.8. Escriviu, si és possible,

1. a l'espai $\mathbb{R}^4$ els vectors $\boldsymbol{v}_1 = (8, 3, 0, -3), \boldsymbol{v}_2 = (-11, 3, 3, -2), \boldsymbol{v}_3 = (29, -2, -6, 2)$ com a combinacions lineals dels vectors $\boldsymbol{u}_1 = (3, -1, -1, 1), \boldsymbol{u}_2 = (0, -2, -1, 2)$ i $\boldsymbol{u}_3 = (2, -1, -1, 1)$,
2. a l'espai $\mathbb{R}^3$ els vectors $\boldsymbol{v}_1 = (1, 1, 2), \boldsymbol{v}_2 = (x, y, z)$ com a combinacions lineals dels vectors $\boldsymbol{u}_1 = (-2, 1, -3)$, $\boldsymbol{u}_2 = (0, -1, 1)$ i $\boldsymbol{u}_3 = (1, 1, 1)$, i
3. a l'espai $\mathbb{R}^4$ els vectors $\boldsymbol{v}_1 = (-2, 8, 7, -2)$, $\boldsymbol{v}_2 = (-2, 6, 5, -1)$, $\boldsymbol{v}_3 = (-2, 4, 3, -1)$ com a combinacions lineals dels vectors $\boldsymbol{u}_1 = (1, -6, -5, 2)$, $\boldsymbol{u}_2 = (0, -2, -3, 1)$, $\boldsymbol{u}_3 = (-3, 14, 9, -4)$ i $\boldsymbol{u}_4 = (-1, 6, 6, -2)$,

trobant, en cada cas, totes les combinacions lineals que donen el resultat demanat.

Solució: Es tracta de trobar les solucions dels sistemes lineals $x_i\boldsymbol{u}_i = \boldsymbol{v}_j$. Per resoldre's s'aplica reducció Gaussiana a les matrius ampliades corresponents.

1. $$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 3 & 0 & 2 & 8 & -11 & 29 \\ -1 & -2 & -1 & 3 & 3 & -2 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 3 & -6 \\ 1 & 2 & 1 & -3 & -2 & 2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$
   Es dedueix que $\boldsymbol{v}_1 = 2\boldsymbol{u}_1 - 3\boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3$ i $\boldsymbol{v}_3 = 9\boldsymbol{u}_1 - 4\boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3$ són les úniques combinacions lineals que donen aquests dos vectors. En canvi, $\boldsymbol{v}_2$ no és combinació lineal dels vectors $\boldsymbol{u}_i$.
2. $$\left(\begin{array}{rrr|rr} -2 & 0 & 1 & 1 & x \\ 1 & -1 & 1 & 1 & y \\ -3 & 1 & 1 & 2 & z \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrr|lr} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}(-2x+y+z) \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2}(-4x+y+3z) \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -x+y+z \end{array}\right).$$
   Els vectors $\boldsymbol{u}_i$ són una base de $\mathbb{R}^3$ i, per tant, tot vector s'escriu, de manera única, com a combinació lineal d'ells. Es té $\boldsymbol{v}_1 = \frac{1}{2}\boldsymbol{u}_1 + \frac{3}{2}\boldsymbol{u}_2 + 2\boldsymbol{u}_3$ i $\boldsymbol{v}_2 = \frac{1}{2}(-2x + y + z)\boldsymbol{u}_1 + \frac{1}{2}(-4x + y + 3z)\boldsymbol{u}_2 + (-x + y + z)\boldsymbol{u}_3$.
3. $$\left(\begin{array}{rrrr|rrr} 1 & 0 & -3 & -1 & -2 & -2 & -2 \\ -6 & -2 & 14 & 6 & 8 & 6 & 4 \\ -5 & -3 & 9 & 6 & 7 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & -4 & -2 & -2 & -1 & -1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrrr|rrr} 1 & 0 & -3 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$
   $\boldsymbol{v}_3$ no és combinació lineal dels $\boldsymbol{u}_i$ i els altres dos sí que ho són, cadascun d'infinites maneres, les combinacions lineals són: $\boldsymbol{v}_1 = (1 + 3t)\boldsymbol{u}_1 + (2 - 2t)\boldsymbol{u}_2 + t\boldsymbol{u}_3 + 3\boldsymbol{u}_4$ i $\boldsymbol{v}_2 = (2 + 3t)\boldsymbol{u}_1 + (3 - 2t)\boldsymbol{u}_2 + t\boldsymbol{u}_3 + 4\boldsymbol{u}_4$.

1.9. Digueu si els subconjunts definits a continuació són o no subespais vectorials:

1. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = z + a\}$, on $a \in \mathbb{R}$,

2. $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y \geqslant z\}$,
3. $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = z^2\}$,
4. $\{(\lambda,\mu,\lambda+\mu) \in \mathbb{R}^3 : \lambda,\mu \in \mathbb{Z}\}$,
5. $\{P(x) \in \mathbb{R}_3[x] : P(1) = 0\}$,
6. $\{P(x) \in \mathbb{R}_3[x] : P(1) = P(0)\}$,
7. $\{P(x) \in \mathbb{K}_3[x] : P'(x) + P''(x) = x+1\}$,
8. $\{P(x) \in \mathbb{K}_3[x] : P(x) + P'(x) + P''(x) = P'''(x)\}$,
9. $\{\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) : \boldsymbol{A}^t = \boldsymbol{A}\}$,
10. $\{\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) : \det \boldsymbol{A} = 0\}$,
11. $\{\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) : \operatorname{Tr} \boldsymbol{A} = 0\}$

1.10. Digueu si els subconjunts definits a continuació són o no subespais vectorials de l'espai vectorial $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ de les funcions continues $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

1. Funcions creixents: $\{f \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) : \forall x,y \in \mathbb{R},\ x \leqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)\}$,
2. Funcions parells: $\{f \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) : \forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = -f(x)\}$,
3. Funcions senars: $\{f \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) : \forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = f(x)\}$,
4. Funcions periòdiques de període 2π: $\{f \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) : \forall x \in \mathbb{R},\ f(x+2\pi) = f(x)\}$,
5. Funcions que tenen límit (finit o $\pm\infty$) a l'infinit: $\{f \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) : \exists \lim_{x\to\infty} f(x) \in \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}\}$.

1.11. Doneu generadors dels subespais següents:

1. $\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : 2x+2y-z-t = 0\}$,
2. $\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : 2x+2y-z-t = x-y+z-t = 0\}$,
3. $\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : 2x+2y-z-t = x-y+z-t = -3x+y+2z+2t = 0\}$,
4. $\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : 2x+2y-z-t = x-y+z-t = -3x+y+2z+2t = x-2y-t = 0\}$,
5. $\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : 2x+2y-z-t = x-y+z-t = -3x+y+2z+2t = x+2y-t = 0\}$,

1.12. Trobeu sistemes d'equacions lineals que defineixin els subespais de $\mathbb{R}^4$ següents:

1. $\langle(5,-1,1,7)\rangle$,
2. $\langle(-1,3,4,0),(1,1,2,2)\rangle$,
3. $\langle(1,-2,1,-3),(-2,1,-1,-1),(-3,2,-3,1)\rangle$,
4. $\langle(0,1,1,1),(3,-3,2,-2),(2,-1,1,1),(1,1,2,2)\rangle$,
5. $\langle(0,1,1,1),(3,-3,2,-2),(2,-1,1,1),(1,-1,2,-2)\rangle$,

1.13. Compareu els subespais dels dos problemes anteriors.

1.14. Trobeu sistemes d'equacions lineals que tinguin per solució cadascun dels subespais següents:

1. $\langle(1,1,0,1),(3,0,-1,2)(-1,2,1,0)\rangle \subseteq \mathbb{R}^4$,
2. $\langle 5X^2+1\rangle \subseteq \mathbb{R}_3[X]$,
3. $\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
4. $\langle(2,5,1,0),(1,1,1,3),(1,1,0,0)\rangle \subseteq \mathbb{R}^4$,
5. $\langle 2+X, 3X+X^2, X^2-6\rangle \subseteq \mathbb{R}_2[X]$,
6. $\left\langle \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Solució: Es tracta de resoldre els sistemes corresponents. Se sobreentén que les equacions es refereixen a coordenades respecte la base estàndard de cada espai.

1. $-2X - Y + 3T = X - Y + 3Z = 0$,
2. $a_1 = a_2 - 5a_0 = a_3 = 0$,
3. $X + Z = Y = T = 0$,
4. $-X + Y - 3Z + T = 0$,
5. $a_0 - 2a_1 + 6a_2 = 0$,
6. $X - 4Y + Z + T = 0$.

1.15. Trobeu generadors dels subespais vectorials següents:

1. $\{P(X) \in \mathbb{K}_3[X] : P(1) = P'(2) = P''(3) = 0\} \subseteq \mathbb{K}_3[X]$,
2. $\{P(X) \in \mathbb{K}_3[X] : P(1) = P'(2) = P''(3)\} \subseteq \mathbb{K}_3[X]$,
3. $\{P(X) \in \mathbb{K}_n[X] : P(1) = P(-1) = 0\} \subseteq \mathbb{K}_n[X]$,
4. $\{\boldsymbol{M} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : \boldsymbol{AM} = \boldsymbol{MA}\} \subseteq \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$,
5. $\{\boldsymbol{M} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) : \boldsymbol{BM} = \boldsymbol{MB}\} \subseteq \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$,

on les matrius $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{B}$ són:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Solució:

1. Sigui $P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3$. Es té $P'(X) = a_1 + 2a_2X + 3a_3X^2$ i $P''(X) = 2a_2 + 6a_3X$. La condició de pertànyer al subespai és que $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = a_1 + 4a_2 + 12a_3 = 2a_2 + 18a_3 = 0$, que és un sistema d'equacions lineals. Les seves solucions són $(a_0, a_1, a_2) = (-16a_3, 24a_3, -9a_3)$. L'espai de les solucions està generat pel polinomi $X^3 - 9X^2 + 24X - 16$.
2. Ara, la condició de ser del subespai és $a_0 - 3a_2 - 11a_3 = a_0 + a_1 - a_2 - 17a_3 = 0$. Les solucions del sistema són $(a_0, a_1) = (3a_2 + 11a_3, -2a_2 + 6a_3)$ i l'espai està generat pels polinomis $X^2 - 2x + 3$ i $X^3 + 6X + 11$.
3. Sigui $P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n$. La condició de pertànyer al subespai és que $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n = a_0 - a_1 + a_2 - \cdots + (-1)^n a_n = 0$. Les solucions són $(a_0, a_1) = (-a_2 - a_4 - \cdots, -a_1 - a_3 - \cdots)$ i una família generadora és $X^2 - 1, X^3 - X, X^4 - 1, X^5 - X, \cdots$, que conté $n - 1$ polinomis.
4. Sigui $\boldsymbol{M} = \left(\begin{smallmatrix} x & y \\ z & t \end{smallmatrix}\right)$. La condició de ser del subespai equival al sistema de quatre equacions $-y - z = x - y - t = x + z - t = y + z = 0$, que té solucions $(x, y) = (t - z, -z)$ i estan generades per les matrius $\left(\begin{smallmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ i $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.
5. Sigui $\boldsymbol{M} = \left(\begin{smallmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{smallmatrix}\right)$. La condició de ser del subespai equival al sistema de nou equacions $a_{21} = a_{22} - a_{11} = a_{23} - a_{12} = a_{31} = a_{32} - a_{21} = a_{33} - a_{22} = 0 = -a_{31} = -a_{32} = 0$, que té solucions $(a_{21}, a_{31}, a_{32}, a_{22}, a_{23}, a_{33}) = (0, 0, 0, a_{11}, a_{12}, a_{11})$ i estan generades per les matrius $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, i $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

1.3 Vectors independents, generadors i bases

La notació $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$, o bé $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$, o bé $\{\boldsymbol{v}_i\}_{1 \leqslant i \leqslant n}$ o simplement $\{\boldsymbol{v}_i\}$ si el nombre de vectors es dóna per suposat, indica una *família* de n vectors d'un espai vectorial V amb índexs els nombres naturals $1, 2, \ldots, n$.

Definició 1.3.1 (Independents, generadors, bases) *Siguin $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ vectors d'un $\mathbb{K}$-espai vectorial V. Es diu que aquests vectors són:*

- Independents *(o* linealment independents*) si tota combinació lineal seva que sigui igual a zero ha de tenir tots els coeficients iguals a zero:*

$$x_1\boldsymbol{v}_1 + x_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{v}_n = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0.$$

  En cas contrari es diu que són linealment dependents *i una expressió* $\sum x_i\boldsymbol{v}_i = \mathbf{0}$ *amb algun coeficient* $x_i \neq 0$ *s'anomena* relació de dependència lineal *entre aquests vectors.*

- Generadors *de l'espai* V *si tot vector* $\boldsymbol{v} \in V$ *és combinació lineal seva:*

$$\forall \boldsymbol{v} \in V \quad \exists\ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n \quad \textit{tal que} \quad \boldsymbol{v} = x_1\boldsymbol{v}_1 + x_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{v}_n.$$

  O sigui, si el subespai $\langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\rangle$ *generat per aquests vectors és tot l'espai* V*.*

- Base *de l'espai* V *si són alhora independents i generadors.*

Per exemple:

- Els vectors $\boldsymbol{v}_1 = (1, -1, -1)$ i $\boldsymbol{v}_2 = (1, 1, 1)$ són independents però no generadors de $\mathbb{R}^3$: si $x\boldsymbol{v}_1 + y\boldsymbol{v}_2 = (x + y, -x + y, -x + y) = \mathbf{0}$ aleshores $x + y = x - y = 0 \Rightarrow x = y = 0$ i en canvi com que la segona i tercera component de tota combinació lineal de $\boldsymbol{v}_1$ i $\boldsymbol{v}_2$ són iguals, el vector $(1, 2, 3)$, o qualsevol altre amb segona i tercera component diferents, no pot ser combinació lineal dels dos vectors $\boldsymbol{v}_1$ i $\boldsymbol{v}_2$.
- Els vectors $\boldsymbol{v}_1 = (1, 1), \boldsymbol{v}_2 = (1, -1)$ i $\boldsymbol{v}_3 = (0, 3)$ són generadors però no són independents a l'espai $\mathbb{R}^2$. En efecte, tot vector $\boldsymbol{v} = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ es pot posar com a combinació lineal de moltes maneres: $\boldsymbol{v} = \frac{a}{2}\boldsymbol{v}_1 + \frac{a}{2}\boldsymbol{v}_2 + \frac{b}{3}\boldsymbol{v}_3 = \frac{a+b}{2}\boldsymbol{v}_1 + \frac{a-b}{2}\boldsymbol{v}_2 + 0\boldsymbol{v}_3$, etc. però $\frac{1}{2}\boldsymbol{v}_1 - \frac{1}{2}\boldsymbol{v}_2 - \frac{1}{3}\boldsymbol{v}_3 = \mathbf{0}$ és una relació de dependència lineal entre tots tres vectors.
- Els vectors $\boldsymbol{v}_1 = (1, 0, 0), \boldsymbol{v}_2 = (1, 1, 0)$ i $\boldsymbol{v}_3 = (1, 1, 1)$ són una base de $\mathbb{R}^3$: són independents perquè $x\boldsymbol{v}_1 + y\boldsymbol{v}_2 + z\boldsymbol{v}_3 = \mathbf{0} \Leftrightarrow x + y + z = y + z = z = 0 \Leftrightarrow x = y = z = 0$ i cada vector $\boldsymbol{v} = (a, b, c)$ és la combinació lineal $\boldsymbol{v} = (a - b - c)\boldsymbol{v}_1 + (b - c)\boldsymbol{v}_2 + c\boldsymbol{v}_3$.

És clar que tota subfamília d'una família independent també és independent i que tota família que tingui una subfamília generadora també és generadora.

Observi's que, tot i que les famílies finites de vectors porten un ordre, el fet de ser independents, ser generadors, o quin és el subespai que generen, no depèn de l'ordre en que s'agafen els vectors de la família. Moltes vegades, per simplificar les notacions i facilitar els arguments, els vectors de les famílies es reordenen sense que això afecti el que s'està fent, gràcies a què el fet de ser independents o generadors no canvia.

Exemples 1.3.2 *Les bases següents s'acostumen a anomenar bases* canòniques *o* estàndard *dels espais corresponents:*

- *Les n-tuples* $\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $\boldsymbol{e}_2 = (0, 1, \ldots, 0)$, $\ldots$, $\boldsymbol{e}_n = (0, 0, \ldots, 1)$ *són una base de l'espai* $\mathbb{K}^n$*. El vector* $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *és la combinació lineal* $\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^n x_i\boldsymbol{e}_i$*.*
- *Les matrius* $\boldsymbol{E}_{rs} = (a_{ij})$ *amb* $a_{ij} = 0$ *per a tot* i, j *excepte que* $a_{rs} = 0$ *són una base de l'espai* $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$*. La matriu* $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ *és la combinació lineal* $\boldsymbol{A} = \sum_{i,j=1}^{m,n} a_{ij}\boldsymbol{E}_{ij}$*.*
- *Els monomis* $1, X, X^2, \ldots, X^n$ *són una base de l'espai* $\mathbb{K}_n[X]$*. Cada polinomi* $P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n$ *és la combinació lineal d'aquests monomis que porta coeficients* $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$*.*

Proposició 1.3.3 *Els vectors* $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ *són linealment independents si, i només si, tot vector* $\boldsymbol{v} \in W = \langle \boldsymbol{v}_i \rangle_{1 \leqslant i \leqslant n}$ *del subespai que generen es pot posar* de manera única *com a combinació lineal seva:*

$$\boldsymbol{v} = x_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{v}_n = y_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + y_n\boldsymbol{v}_n \quad \Rightarrow \quad x_i = y_i \ \forall i.$$

PROVA: Suposi's que els vectors són independents i siguin $\boldsymbol{v} = \sum x_i\boldsymbol{v}_i = \sum y_i\boldsymbol{v}_i$ dues expressions d'un mateix vector de W com a combinació lineal dels $\boldsymbol{v}_i$. Restant s'obté: $\mathbf{0} = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v} = \sum(x_i - y_i)\boldsymbol{v}_i$ i, per ser independents, es dedueix que $x_i - y_i = 0 \Rightarrow x_i = y_i$ per a tot $i = 1, \ldots, n$.

Recíprocament, suposi's que les expressions de vectors com a combinació lineal dels $\boldsymbol{v}_i$ són úniques. Sigui $\mathbf{0} = \sum x_i\boldsymbol{v}_i$. Com que el vector zero es pot escriure sempre com $\mathbf{0} = \sum 0\boldsymbol{v}_i$ es dedueix que ha de ser $x_i = 0$ per a tot i. Per tant els vectors són independents. □

Per tant, el fet que una família de vectors $\{\boldsymbol{v}_i\}_{1 \leqslant i \leqslant n}$ sigui una base d'un espai V equival a dir que tot vector de l'espai es pot escriure de manera única com a combinació lineal seva:

$$\forall \boldsymbol{v} \in V \quad \exists!(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n \quad \text{tal que} \quad \boldsymbol{v} = x_1\boldsymbol{v}_1 + x_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{v}_n.$$

Lema 1.3.4 *Els vectors* $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ *són linealment dependents si, i només si, algun d'ells és combinació lineal dels altres.*

PROVA: Si $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ són dependents sigui $x_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{v}_n = \mathbf{0}$ una relació de dependència lineal. Algun dels coeficients ha de ser $\neq 0$. Sigui $x_j \neq 0$. Aleshores el vector $\boldsymbol{v}_j$ és igual a $\sum_{i \neq j} \frac{-x_i}{x_j}\boldsymbol{v}_i$, i per tant és combinació lineal dels demés. Recíprocament, si un dels vectors, sigui $\boldsymbol{v}_j$, és combinació lineal dels demés: $\boldsymbol{v}_j = \sum_{i \neq j} x_i\boldsymbol{v}_i$, aleshores $(-1)\boldsymbol{v}_j + \sum_{i \neq j} x_i\boldsymbol{v}_i = \mathbf{0}$ és una relació de dependència lineal entre els vectors $\boldsymbol{v}_i$. □

Definició 1.3.5 (Espai finitament generat) *Es diu que un* $\mathbb{K}$*-espai vectorial* V *és* finitament generat *si existeix una família finita* $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ *de vectors que generen l'espai.*

Teorema 1.3.6 (Existència de base) *Tot espai vectorial finitament generat té alguna base.*

PROVA: Sigui $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ una família finita de generadors de l'espai V. Si aquests vectors són independents ja són una base de l'espai. En cas contrari el lema anterior assegura que algun d'aquests vectors és combinació lineal dels demés. Si $\boldsymbol{v}_j$ és combinació lineal dels $\{\boldsymbol{v}_i\}_{i \neq j}$ aleshores

$$V = \langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n \rangle = \langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{j-1}, \boldsymbol{v}_{j+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_n \rangle,$$

i per tant la família de $n - 1$ vectors que queda en treure $\boldsymbol{v}_j$ de la família inicial també és generadora. Es pot repetir aquest procés mentre la família generadora no sigui independent i, com que es parteix d'un nombre finit de vectors, a base d'anar traient un vector cada vegada al final s'arribarà a una família generadora independent, que és una base. □

El resultat següent es coneix també pel nom de *Lema de substitució de Steinitz*:

Teorema 1.3.7 (Teorema de Steinitz) *Siguin* $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ *vectors independents, i siguin* $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ *vectors generadors d'un espai vectorial* V*. Aleshores ha de ser necessàriament* $n \leqslant m$ *i es poden substituir* n *vectors de la família* $\{\boldsymbol{v}_j\}$ *pels vectors de la família* $\{\boldsymbol{u}_i\}$*, de tal manera la família que resulta segueixi sent generadora.*

PROVA: Es demostra per inducció sobre el nombre n de vectors independents. Si aquest nombre és zero aleshores no cal fer res i el resultat és clarament cert. Sigui $n \geqslant 1$ i suposi's, per hipòtesi d'inducció, que la propietat la compleix tota família de $n-1$ vectors independents.

Sigui $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ una família independent. Els $n-1$ primers vectors són una subfamília, i per tant són també independents. Per hipòtesi d'inducció es dedueix que $n-1 \leqslant m$ i que es poden substituir $n-1$ vectors de la família $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ pels vectors $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_{n-1}$ de manera que la família que resulta sigui generadora. Reordenant els vectors $\boldsymbol{v}_j$ es pot suposar que els vectors substituïts són els $n-1$ primers. Aleshores la família $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_{n-1}, \boldsymbol{v}_n, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ és generadora.

Sigui $\boldsymbol{u}_n = x_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + x_{n-1}\boldsymbol{u}_{n-1} + x_n\boldsymbol{v}_n + \cdots + x_m\boldsymbol{v}_m$ una expressió de $\boldsymbol{u}_n$ com a combinació lineal d'aquests vectors. No pot ser que $n-1 = m$ ni que en aquesta combinació lineal tots els coeficients dels vectors $\boldsymbol{v}_j$ siguin zeros per a $j = n, \ldots, m$, ja que si fos així l'expressió donaria $\boldsymbol{u}_n$ com a combinació lineal dels altres vectors de la família $\boldsymbol{u}_i$, i això contradiu que aquesta família sigui independent. Per tant ha de ser $n-1 < m \Rightarrow n \leqslant m$ i $x_k \neq 0$ per a algun índex $k \geqslant n$. Canviant l'ordre dels vectors $\boldsymbol{v}_n, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ es pot suposar que $k = n$, o sigui, que $x_n \neq 0$. Aleshores es té:

$$\langle \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_{n-1}, \boldsymbol{u}_n, \boldsymbol{v}_{n+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_m \rangle = \langle \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_{n-1}, \boldsymbol{v}_n, \boldsymbol{v}_{n+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_m \rangle = V,$$

ja que cada vector d'un costat és combinació lineal dels de l'altre: els que porten un índex diferent de n són els mateixos a tots dos costats; l'argument anterior dóna la combinació lineal $\boldsymbol{u}_n = x_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + x_{n-1}\boldsymbol{u}_{n-1} + x_n\boldsymbol{v}_n + \cdots + x_m\boldsymbol{v}_m$ i aïllant el vector $\boldsymbol{v}_n$ en aquesta expressió es té la combinació lineal $\boldsymbol{v}_n = \frac{-x_1}{x_n}\boldsymbol{u}_1 + \cdots + \frac{-x_{n-1}}{x_n}\boldsymbol{u}_n + \frac{1}{x_n}\boldsymbol{u}_n + \frac{-x_{n+1}}{x_n}\boldsymbol{v}_{n+1} + \cdots + \frac{-x_m}{x_n}\boldsymbol{v}_m$. □

Corol·lari 1.3.8 *Totes les bases d'un espai vectorial finitament generat tenen el mateix nombre de vectors.*

PROVA: Siguin $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ i $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ dues bases de l'espai vectorial finitament generat V. Aleshores, com que la família $\boldsymbol{u}_i$ és independent i la família $\boldsymbol{v}_j$ és generadora, el teorema de Steinitz assegura que $n \leqslant m$. Com que $\boldsymbol{v}_i$ és independent i $\boldsymbol{u}_j$ és generadora també es compleix la desigualtat $m \leqslant n$. Per tant ha de ser $n = m$. □

Definició 1.3.9 (Dimensió) *La* dimensió *d'un espai finitament generat és el nombre de vectors d'una base. Els espais que no són finitament generats es diu que tenen* dimensió infinita*.*

Corol·lari 1.3.10 *Sigui V un espai vectorial de dimensió (finita) n. Aleshores, tota família de n vectors independents és una base i tota família de n vectors generadors és una base.*

PROVA: Donats n vectors independents $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ sigui $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ una base qualsevol de l'espai. Per Steinitz es poden canviar n vectors dels $\boldsymbol{v}_j$, o sigui tots, pels vectors $\boldsymbol{u}_i$, de manera que el resultat, que és la família $\{\boldsymbol{u}_i\}$, sigui una família generadora. Per tant, com que ja eren independents, la família dels $\boldsymbol{u}_i$ és una base. Donats n vectors generadors, tal i com es fa a la demostració de l'existència de base, començant amb la família generadora es poden anar traient vectors mentre la família no sigui independent fins a arribar a una base. Com que tota base ha de tenir necessàriament n vectors, segur que no se'n pot treure cap, i per tant la família de n vectors generadors ja és una base. □

Corol·lari 1.3.11 *Donats $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_r$ vectors independents i $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ una base de l'espai V, es pot ampliar la família $\boldsymbol{u}_i$ a una base de l'espai afegint-hi vectors de la base $\boldsymbol{v}_j$.*

PROVA: Per Steinitz es poden substituir r dels vectors $\boldsymbol{v}_j$ pels vectors $\boldsymbol{u}_i$ i la família resultant és generadora. Com que té n vectors és una base. Aquesta és la base que demana l'enunciat. $\square$

Com a cas particular especialment important es té la situació següent: si $W \subseteq V$ és un subespai, tota base de W es pot ampliar a una base de V i, fins i tot, es pot fer això afegint-hi vectors amb la condició que pertanyin a una base de V donada.

Definició 1.3.12 (Rang d'una família de vectors) *Es diu* rang *d'una família de vectors a la dimensió del subespai que generen:* $\operatorname{rang}(\{\boldsymbol{v}_i\}) = \dim(\langle \boldsymbol{v}_i \rangle)$*, que és el màxim nombre de vectors independents dins de la família.*

Famílies arbitràries: independents, generadors i bases. Fins ara només s'han considerat famílies finites de vectors. Per a treballar en espais vectorials de dimensió infinita s'han de considerar famílies de vectors qualsevol, no necessàriament finites; és a dir, amb famílies $\{\boldsymbol{v}_i\}_{i\in I}$ amb índexs en un conjunt I infinit. Per exemple, $\{(1+X)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ és una família de vectors de $\mathbb{K}[X]$, $\{\sin nx\}_{n\in\mathbb{Z}}$ és una família de vectors de $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ i $\{\boldsymbol{v}_\alpha = (\alpha, \cos\alpha, \sin\alpha)\}_{\alpha\in\mathbb{R}}$ és una família de vectors de $\mathbb{R}^3$.

Sigui $\{\boldsymbol{v}_i\}_{i\in I}$ una família de vectors de l'espai V amb conjunt d'índexs I arbitrari. Hi ha dues maneres de treballar amb combinacions lineals de vectors d'aquesta família: o bé es defineixen directament com a combinacions lineals de subfamílies finites:

$$\boldsymbol{v} = x_1\boldsymbol{v}_{i_1} + x_2\boldsymbol{v}_{i_2} + \cdots + x_n\boldsymbol{v}_{i_n}, \qquad \{i_1, i_2, \ldots, i_n\} \subseteq I,$$

o bé es considera que són expressions la forma:

$$\boldsymbol{v} = \sum_{i\in I} x_i\boldsymbol{v}_i, \qquad \text{amb} \quad x_i = 0 \quad \text{gairebé per a tot índex} \;\; i \in I,$$

que cal interpretar com a sumes finites, entenent que tots els sumands amb coeficient zero són el vector zero i és com si no fossin al sumatori.

Les definicions de família linealment independent, generadora i base són les generalitzacions naturals de les definicions donades per a famílies finites, adaptades a la noció de combinació lineal en el cas infinit.

Problemes

1.16. Digueu la dimensió i doneu una base dels subespais del problema 9.

SOLUCIÓ:

1. No ho és si $a \neq 0$. Si $a = 0$ té base $\{(1,0,1),(1,1,0)\}$.
2. No és tancat pel producte per escalars negatius.
3. No és tancat per la suma: conté $(1,0,1)$ i $(0,1,1)$ però no $(1,1,2)$.
4. Té dimensió 2 i base $\{(1,0,1),(0,1,1)\}$.
5. Són els polinomis amb suma de coeficients igual a zero: dimensió 3 i base $\{1, x^3 - x^2, x^2 - x\}$.
6. Són els polinomis que tenen suma de coeficients igual al terme constant, que és equivalent a que els coeficients de les potències de x no constants sumin zero: dimensió 3 i base $\{1, x^2 - x, x^3 - x\}$.

7. No conté el polinomi zero,
8. Per a un polinomi $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ les condicions són que $a_0 + a_1 + 2a_2 = 6a_3, a_1 + 2a_2 + 6a_3 = 0, a_2 + 3a_3 = 0, a_3 = 0$, que equivalen a que el polinomi sigui zero: dimensió zero.
9. Està format per les matrius simètriques:
$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}, \quad a, b, c, d, e, f \in K.$$
Té dimensió 6 amb base $\boldsymbol{E}_{11}, \boldsymbol{E}_{22}, \boldsymbol{E}_{33}, \boldsymbol{E}_{12} + \boldsymbol{E}_{21}, \boldsymbol{E}_{13} + \boldsymbol{E}_{31}, \boldsymbol{E}_{23} + \boldsymbol{E}_{32}$.
10. No és tancat per la suma: la suma de les tres matrius $\boldsymbol{E}_{ii}$, cadascuna de determinant zero, té determinant $1 \neq 0$.
11. Són les matrius de traça zero: té dimensió 8 i una base està formada per les sis matrius $\boldsymbol{E}_{ij}$ amb $i \neq j$ i les dues matrius $\boldsymbol{E}_{11} - \boldsymbol{E}_{22}, \boldsymbol{E}_{11} - \boldsymbol{E}_{33}$.

1.17. Trobeu totes les subfamílies linealment independents de la família de vectors de $\mathbb{R}^5$ següent:
$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (1, -1, 1, -1, 1), \\ \boldsymbol{v}_2 &= (0, 1, 1, 0, 0), \\ \boldsymbol{v}_3 &= (2, 1, 3, 2, 4), \\ \boldsymbol{v}_4 &= (1, -1, 0, 1, 2), \\ \boldsymbol{v}_5 &= (0, \pi, \pi, 0, 0). \end{aligned}$$

Solució: Tots els vectors són no nuls i per tant tot subconjunt d'un sol vector és independent. L'únic parell de vectors dependents és el format per $\boldsymbol{v}_2$ i $\boldsymbol{v}_5$; per tant les altres $(5 \cdot 4)/2 - 1 = 9$ famílies de dos vectors són totes independents.

Com que $\langle \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4, \boldsymbol{v}_5 \rangle = \langle \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$ cap subfamília de tres elements d'aquests vectors pot ser independent. Com que $\boldsymbol{v}_1 \notin \langle \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$ hi ha famílies independents de tres vectors. Totes han de contenir $\boldsymbol{v}_1$ i els altres dos vectors poden ser qualsevol parell dels altres quatre llevat del parell format per $\boldsymbol{v}_2$ i $\boldsymbol{v}_5$. En total hi ha per tant, $5 + 9 + 5 = 15$ subfamílies linealment independents (sense tenir en compte l'ordre).

1.18. Sigui $\boldsymbol{x}_i = (x_{i1}, \ldots, x_{in}) \in \mathbb{K}^n$ una família de vectors no nuls tals que les posicions on cada vector té la primera component no nul·la segueixen un ordre estrictament creixent. Demostreu que la família és independent.

1.19. Sigui $\boldsymbol{x}_i = (x_{i1}, \ldots, x_{in}) \in \mathbb{K}^n$ una família de m vectors tal que existeixen enters $j_1, \ldots, j_m$ de manera que per a tot $i = 1, \ldots, m$ es compleix:
$$x_{i,j_i} \neq 0 \quad \text{i} \quad x_{k,j_i} = 0 \quad \text{per a tot} \quad k \neq i.$$

Demostreu que aquests vectors són independents.

Comproveu que els tres vectors de $\mathbb{R}^7$ següents són independents:
$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}_1 &= (\pi^3, -\pi, 2, 0, \pi^{-2}, \pi^2, 0), \\ \boldsymbol{x}_2 &= (\sqrt{21}, 0, \sqrt{7}, 0, -\sqrt{7}, -\sqrt{3}, \sqrt{3}), \\ \boldsymbol{x}_3 &= (e^2, 0, e^{-1}, e, 3e, e^{-2}, 0). \end{aligned}$$

Solució: Sigui $\sum_{k=1}^m x_k \boldsymbol{x}_k = 0$. Aleshores cada component ha de ser zero. Per a cada $i = 1, \ldots, m$ la component j_i-èsima de la combinació lineal és $\sum_{k=1}^m x_k x_{k,j_i} = x_i x_{i,j_i} = 0$ i com que $x_{i,j_i} \neq 0$ ha de ser necessàriament $x_i = 0$.

En l'exemple es pot prendre $j_1 = 2, j_2 = 7$ i $j_3 = 4$. En efecte, $x_{12} = -\pi$ i en canvi $x_{22} = x_{32} = 0$; $x_{27} = \sqrt{3}$ i en canvi $x_{17} = x_{37} = 0$; finalment, $x_{34} = e$ i en canvi $x_{14} = x_{24} = 0$.

1.20. Siguin $p_1, ..., p_n$ polinomis de $\mathbb{K}[X]$. Demostreu que si existeixen escalars $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ tals que els vectors $(p_1(a_1), \dots, p_1(a_n)) \in \mathbb{K}^n, ..., (p_n(a_1), \dots, p_n(a_n)) \in \mathbb{K}^n$ són linealment independents a $\mathbb{K}^n$, aleshores els polinomis $p_1, ..., p_n$ són linealment independents a $\mathbb{K}[X]$.

Solució: En efecte, si els polinomis p_i són linealment dependents com a vectors de $\mathbb{R}[x]$ aleshores una combinació lineal no trivial $\sum \lambda_i p_i = 0$ dóna, en avaluar els polinomis a cada nombre real a_j, la identitat $\sum_{i=1}^r \lambda_i p_i(a_j) = 0$. Per tant es té $\sum_{i=1}^r \lambda_i (p_i(a_1), \dots, p_i(a_n)) = (0, \dots, 0)$, que és una combinació lineal no trivial dels vectors de l'enunciat.

1.21. Vegeu que l'enunciat del problema anterior també és cert si es consideren funcions del $\mathbb{K}$-espai vectorial $\mathscr{F}(S, \mathbb{K})$ de les funcions definides a un conjunt S qualsevol que prenen valors en un cos $\mathbb{K}$. Deduïu que aquest espai vectorial té dimensió finita si, i només si, el conjunt S és finit.

Solució: L'argument no depèn de que siguin polinomis o qualsevol altre tipus de funcions.

Fent servir que el rang per files i per columnes d'una matriu són iguals, un resultat que es demostrarà més endavant, es veu que també es compleix que si els r vectors

$$(f_1(a_1), \cdots, f_n(a_1)), \cdots (f_1(a_r), \cdots, f_n(a_r))$$

són linealment independents a $\mathbb{K}^n$ aleshores les funcions $f_1, \dots, f_n$ són linealment independents a l'espai de funcions.

1.22. A l'espai $\mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ de funcions contínues reals es consideren les famílies de vectors:

1. $\{2^x, 2^{2x}, 2^{3x}, 2^{4x}\}$,
2. $\{e^x, e^{x+\pi/2}, e^{x+\pi}, e^{x+3\pi/2}\}$,
3. $\{\cos x, \cos(x + \pi/2), \cos(x + \pi), \cos(x + 3\pi/2)\}$,
4. $\{\cos x, \cos 2x, \cos 3x, \cos 4x\}$,

Estudieu la seva dependència o independència lineal i digueu quin subespai generen.

Solució: Les tres funcions de l'apartat (a) són múltiples de $e^{\pi t}$: dimensió 1. Les dues de l'apartat (b) són linealment independents: es veu que una no pot ser múltiple no nul de l'altra mirant els seus zeros. La segona de l'apartat (c) és el doble de la primera: dimensió 1.

1.23. Estudieu la dependència o independència lineal a $\mathbb{K}^3$ de la família de tres vectors:

$$\{(1, 1, 1), (a, b, c), (a^2, b^2, c^2)\}, \qquad a, b, c \in \mathbb{K}.$$

Solució: Per saber quants vectors independents hi ha s'ha de resoldre el sistema lineal homogeni de matriu la que té per columnes els tres vectors. Per reducció Gaussiana: el rang de la matriu formada pels tres vectors, que reduint per files queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & a^2 & 0 \\ 1 & b & b^2 & 0 \\ 1 & c & c^2 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & a^2 & 0 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 & 0 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 & 0 \end{array}\right).$$

Si $a = b$ o bé $a = c$ hi ha una fila de zeros i els vectors són dependents. En cas contrari, dividint per $a - b$ i $a - c$ les files queda:

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & a^2 & 0 \\ 0 & 1 & b+a & 0 \\ 0 & 1 & c+a & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & a^2 & 0 \\ 0 & 1 & b+a & 0 \\ 0 & 0 & c-b & 0 \end{array}\right).$$

Si $b = c$ la solució no és única. En canvi, si a, b, c són tots tres diferents aleshores el sistema té solució única i per tant els vectors són independents.

1.24. Substituïu, de totes les maneres possibles, la família de vectors independents $\boldsymbol{u}_i$ en la família de vectors generadors $\boldsymbol{v}_i$, tal i com es descriu en el Teorema de Steinitz, en els casos següents:

1. $\boldsymbol{u}_1 = (1,1), \boldsymbol{u}_2 = (1,-1)$, $\quad \boldsymbol{v}_1 = (0,1), \boldsymbol{v}_2 = (1,-1), \boldsymbol{v}_3 = (-1,1), \boldsymbol{v}_4 = (0,-1)$.
2. $\boldsymbol{u}_1 = (0,0,1,1), \boldsymbol{u}_2 = (0,1,1,0)$, $\quad \boldsymbol{v}_1 = (1,0,0,1)$, $\boldsymbol{v}_2 = (1,0,1,1)$, $\boldsymbol{v}_3 = (0,-1,1,2)$, $\boldsymbol{v}_4 = (1,0,-1,1)$, $\boldsymbol{v}_5 = (0,1,2,1)$.

1.25. Demostreu que els espais $\mathbb{K}[X]$ i $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ tenen dimensió infinita.

1.4 Reducció gaussiana i sistemes lineals

Definició 1.4.1 (Transformacions elementals) *S'anomena* transformació elemental *d'una família de vectors una transformació d'un dels tres tipus següents:*

- Tipus I: *intercanviar dos dels vectors,*
- Tipus II: *multiplicar un dels vectors per un escalar no nul,*
- Tipus III: *sumar a un dels vectors un múltiple qualsevol d'un altre.*

És a dir, una transformació elemental $\mathscr{T}$ transforma una família de n vectors $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ en la família amb el mateix nombre de vectors $\{\boldsymbol{v}'_1, \ldots, \boldsymbol{v}'_n\}$ següent:

- Tipus I: $\mathscr{T}_{r,s}$ intercanvia els vectors $\boldsymbol{v}_r$ i $\boldsymbol{v}_s$:
$$\boldsymbol{v}'_r = \boldsymbol{v}_s, \quad \boldsymbol{v}'_s = \boldsymbol{v}_r, \quad \text{i} \quad \boldsymbol{v}'_i = \boldsymbol{v}_i \quad \text{per a} \quad i \neq r, s.$$
- Tipus II: $\mathscr{T}_r(\lambda)$ multiplica el vector $\boldsymbol{v}_r$ per l'escalar $\lambda \neq 0$:
$$\boldsymbol{v}'_r = \lambda \boldsymbol{v}_r, \quad \text{i} \quad \boldsymbol{v}'_i = \boldsymbol{v}_i \quad \text{per a} \quad i \neq r.$$
- Tipus III: $\mathscr{T}_{r,s}(\lambda)$ suma al vector $\boldsymbol{v}_r$ el vector $\lambda \boldsymbol{v}_s$, amb $\lambda \in \mathbb{K}$ qualsevol i $s \neq r$:
$$\boldsymbol{v}'_r = \boldsymbol{v}_r + \lambda \boldsymbol{v}_s, \quad \text{i} \quad \boldsymbol{v}'_i = \boldsymbol{v}_i \quad \text{per a} \quad i \neq r.$$

Observi's que a base d'aplicar diverses transformacions de tipus I es pot aconseguir qualsevol permutació dels vectors de la família (ja que les transposicions generen el grup simètric), i que aplicar diverses transformacions de tipus III a un mateix vector $\boldsymbol{v}_r$ té l'efecte de sumar-li una combinació lineal qualsevol $\sum_{i \neq r} \lambda_i \boldsymbol{v}_i$ dels altres.

Proposició 1.4.2 *En aplicar transformacions elementals a una família de vectors el subespai que generen no canvia. Per tant, les transformacions elementals conserven el rang de la família de vectors, així com les propietats de ser linealment independents, generadors o bases.*

PROVA: En tots tres tipus de transformacions es té la igualtat:
$$\langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n \rangle = \langle \boldsymbol{v}'_1, \ldots, \boldsymbol{v}'_n \rangle$$
ja que cada vector d'una de les dues famílies és combinació lineal dels de l'altra. En el cas de la transformació de tipus II la condició $\lambda \neq 0$ assegura que $\boldsymbol{v}_r = \lambda^{-1} \boldsymbol{v}'_r$ i en la de tipus III la condició $r \neq s$ assegura que $\boldsymbol{v}'_s = \boldsymbol{v}_s$ i això permet donar l'expressió $\boldsymbol{v}_r = \boldsymbol{v}'_r + (-\lambda)\boldsymbol{v}'_s$. D'aquí es dedueix que les transformacions elementals mantenen el rang de la família i que, per tant, conserven les propietats d'independència lineal i el fet de ser generadors. $\square$

Definició 1.4.3 (Forma esglaonada) *Sigui $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_m$ una família de vectors de l'espai $\mathbb{K}^n$, amb components $\boldsymbol{a}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$. Es diu que els vectors $\boldsymbol{a}_i$ estan en forma esglaonada si existeixen un enter r amb $0 \leqslant r \leqslant m$ i r enters j_i amb $1 \leqslant j_1 < j_2 < \cdots < j_r \leqslant n$ tals que:*

- *per a tot $i > r$ el vector $\boldsymbol{a}_i$ és $\mathbf{0}$; o sigui, $a_{i,j} = 0$ per a tot $i > r$ i tot $j = 1, \dots, n$, i*
- *per a tot i amb $1 \leqslant i \leqslant r$, $a_{i,j} = 0$ per a $j < j_i$, i $a_{i,j_i} \neq 0$.*

Es diu que els vectors estan en forma esglaonada reduïda *si, a més, per a tot $i = 1, \dots, r$,*

- *$a_{i,j_i} = 1$, i*
- *$a_{k,j_i} = 0$ per a tot $k \neq i$.*

Lema 1.4.4 *El rang d'una família de vectors en forma esglaonada és el nombre de vectors diferents de zero.*

Lema 1.4.5 *Si $\{\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_m\}$ i $\{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_m\}$ són dues famílies de m vectors de $\mathbb{K}^n$ que estan en forma esglaonada reduïda i que generen el mateix subespai: $\langle \boldsymbol{u}_i \rangle = \langle \boldsymbol{v}_i \rangle$, aleshores $\boldsymbol{u}_i = \boldsymbol{v}_i$ per a tot $i = 1, \dots, m$.*

PROVA: Si la família $\boldsymbol{u}_i$ està en forma esglaonada reduïda, el nombre r i els enters $j_1, \dots, j_r$ de la definició 1.4.3 queden determinats pel subespai $U = \langle \boldsymbol{u}_i \rangle$: els j_i són els únics enters tals que existeix algun vector no nul del subespai U que té les primeres $j_i - 1$ components iguals a zero i que la seva component j_i-èsima és diferent de zero. En efecte, la primera component no nul.la d'un vector $\boldsymbol{u} = x_1\boldsymbol{u}_1 + x_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + x_r\boldsymbol{u}_r \in U$ és el nombre j_i corresponent al primer coeficient x_i diferent de zero.

Per tant, els nombres r i j_i han de ser iguals per a totes dues famílies. Aleshores els vectors $\boldsymbol{u} = \sum x_i\boldsymbol{u}_i$ i $\boldsymbol{v} = \sum y_i\boldsymbol{v}_i$ d'aquests subespais tenen les components j_i-èsima iguals a x_i i a y_i, respectivament. Per tant, per a cada $i = 1, \dots, r$, hi ha un únic vector en aquests espais que té component j_i-èsima igual a 1 i totes les components j_k-èsimes iguals a zero per a $j \neq i$, que és el vector $\boldsymbol{u}_i = \boldsymbol{v}_i$, $\square$

Transformacions elementals de matrius. Sigui $\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ una matriu de m files i n columnes. Una *transformació elemental de files* de $\boldsymbol{A}$ és una transformació elemental aplicada a les seves files, considerades com a vectors de $\mathbb{K}^n$. És a dir, una transformació d'un dels tres tipus següents: (I) intercanviar dues files; (II) multiplicar una fila per un escalar no nul; (III) sumar a una fila un múltiple d'una altra fila.

Es defineix anàlogament una transformació elemental de columnes.

Es diu que la matriu $\boldsymbol{A}$ està en forma esglaonada per files (resp. forma esglaonada reduïda) si les seves files estan en forma esglaonada (resp. forma esglaonada reduïda), pensades com a vectors de $\mathbb{K}^n$. Definicions anàlogues es donen respecte les columnes.

Proposició 1.4.6 (Reducció gaussiana) *Tota família de vectors de $\mathbb{K}^n$ es pot transformar en una família que està en forma esglaonada reduïda aplicant una seqüència de transformacions elementals.*

PROVA: La demostració es fa mostrant un "algorisme de reducció gaussiana" que passa d'una família de vectors de $\mathbb{K}^n$ qualsevol a una altra família que està en forma esglaonada reduïda, a base d'aplicar-li successives transformacions elementals.

Es considera una família de vectors:

$$\{\boldsymbol{a}_i\}_{1\leqslant i\leqslant m} \quad \text{amb components} \quad \boldsymbol{a}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}) \in \mathbb{K}^n.$$

Es dirà que una família com aquesta està en forma esglaonada reduïda *fins al lloc t* si els primers t vectors $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_t$ estan en forma esglaonada reduïda i, a més, els demés vectors $\boldsymbol{a}_{t+1}, \dots, \boldsymbol{a}_m$ tenen les j_t primeres coordenades iguals a zero: $a_{i,j} = 0$ per a tot $i \geqslant t+1$ i tot $j \leqslant j_t$. En considerar la matriu que té els vectors $\boldsymbol{a}_i$ per files, la condició és que sigui una matriu per caixes de la forma següent:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{R} & \boldsymbol{U} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{V} \end{pmatrix},$$

on $\boldsymbol{R}$ és una matriu de mida $t \times j_t$ en forma esglaonada reduïda per files, $\mathbf{0}$ és la matriu zero de mida $(m-t) \times j_t$ i les dues matrius de la columna de la dreta són matrius qualsevol.

L'algorisme de reducció gaussiana es comença posant el valor $t = 0$, que no demana cap condició sobre el conjunt de vectors. En cada pas s'augmenta t en una unitat i s'apliquen transformacions elementals apropiades per tal que la família quedi en forma esglaonada reduïda fins al lloc t. Quan s'arriba a $t = m$ la família sencera ja està tota en forma esglaonada reduïda.

Sigui $1 \leqslant t \leqslant m$ i suposi's que la família està en forma esglaonada reduïda fins al lloc $t-1$. Si tots els vectors $\boldsymbol{a}_i$ són $\mathbf{0}$ per a $i \geqslant t$ la família completa ja està en forma esglaonada reduïda i el procés de reducció s'ha acabat. En cas contrari sigui j_t l'enter més petit tal que hi ha una component a_{i,j_t} diferent de zero en un vector $\boldsymbol{a}_i$ amb $i \geqslant t$. Com que les primeres j_{t-1} components d'aquests vectors són zero aquest enter ha de ser per força $j_t > j_{t-1}$. Aleshores s'apliquen les transformacions elementals següents:

1. si $i \neq t$ s'intercanvien els vectors $\boldsymbol{a}_i$ i $\boldsymbol{a}_t$, i quedarà $a_{t,j_t} \neq 0$,
2. es multiplica el vector $\boldsymbol{a}_t$ per l'escalar a_{t,j_t}^{-1}, i quedarà $a_{t,j_t} = 1$,
3. se suma a cada vector $\boldsymbol{a}_k$ amb $k \neq t$ el vector $-a_{k,j_t}\boldsymbol{a}_t$, i quedarà $a_{k,j_t} = 0$.

Un cop fetes totes aquestes transformacions la família que resulta ja està en forma esglaonada reduïda fins al lloc t. □

Aplicada a matrius, aquesta proposició assegura que tota matriu es pot transformar en una matriu en forma esglaonada (o esglaonada reduïda) per files fent transformacions elementals de files, i el mateix per columnes.

Sistemes d'equacions lineals. Les equacions lineals sobre el cos $\mathbb{K}$ en les variables $X_1, \dots, X_n$ es poden sumar entre elles i multiplicar per escalars de la manera següent: si F és l'equació $a_1X_1 + \cdots + a_nX_n = b$ i G és l'equació $a_1'X_1 + \cdots + a_n'X_n = b'$ aleshores $F + G$ és l'equació

$$(a_1 + a_1')X_1 + \cdots + (a_n + a_n')X_n = (b + b'),$$

i, per a cada escalar $\lambda \in \mathbb{K}$, el producte λF és l'equació:

$$(\lambda a_1)X_1 + \cdots + (\lambda a_n)X_n = (\lambda b).$$

Amb aquestes operacions el conjunt de totes les equacions lineals en les variables X_i és un $\mathbb{K}$-espai vectorial. Té dimensió $n+1$ i admet com a base la família formada per les n equacions

$X_1 = 0, X_2 = 0, \ldots, X_n = 0$ i l'equació $0 = 1$. L'equació lineal $a_1X_1 + \cdots + a_nX_n = b$ és la combinació lineal de les equacions d'aquesta base amb coeficients $(a_1, \ldots, a_n, b) \in \mathbb{K}^{n+1}$.

Així, un sistema de m equacions lineals $\left\{ \sum_{j=1}^n a_{ij}X_j = b_i : i = 1, \ldots, m \right\}$ en les variables X_j es pot pensar com una família de m vectors en aquest espai. Un sistema com aquest es dóna també en forma matricial com $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{b}$ i té associades una *matriu del sistema* $\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ i una *matriu ampliada* $(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}) \in \mathcal{M}_{m\times(n+1)}(\mathbb{K})$. El *rang del sistema* (o rang de la matriu del sistema) és la dimensió del subespai de $\mathbb{K}^n$ generat per les files de la matriu del sistema $\boldsymbol{A}$; el *rang de la matriu ampliada* del sistema és la dimensió del subespai de $\mathbb{K}^{n+1}$ generat per les files de la matriu ampliada $(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b})$.

Es diu que el sistema lineal $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{b}$ està en forma esglaonada (resp. forma esglaonada reduïda) quan ho està la matriu $\boldsymbol{A}$ corresponent. En sistemes d'aquesta forma els rangs són molt fàcils de veure. El rang r del sistema és el nombre d'equacions $\sum_{j=1}^n a_{ij}X_j = b_i$ en que apareix alguna variable, o sigui, que tenen algun coeficient a_{ij} diferent de zero. Les demés equacions del sistema, per a $i > r$, són de la forma $0 = b_i$; si totes les constants b_i d'aquestes equacions són zero el rang de la matriu ampliada és també igual a r i si alguna d'aquestes b_i amb $i > r$ és diferent de zero aleshores el rang de la matriu ampliada és $r + 1$.

Per exemple, el sistema de sis equacions en set incògnites que té per matriu ampliada la matriu següent:

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & a_{17} & b_1 \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} & a_{27} & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} & a_{35} & a_{36} & a_{37} & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{47} & b_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_6 \end{array}\right),$$

amb les quatre entrades a_{11}, a_{23}, a_{34} i a_{47} diferents de zero és un sistema en forma esglaonada, i el sistema que té matriu ampliada següent:

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & a_{12} & 0 & 0 & a_{15} & a_{16} & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & a_{25} & a_{26} & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a_{35} & a_{36} & 0 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & b_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_6 \end{array}\right).$$

està en forma esglaonada reduïda.

Quan un sistema està en forma esglaonada la seva discussió és immediata: el sistema dels exemples anteriors és compatible si, i només si $b_5 = b_6 = 0$ i, en aquest cas, és indeterminat amb $7 - 4 = 3$ graus de llibertat. En forma esglaonada reduïda es pot no només veure com són les solucions del sistema sinó donar-ne immediatament una expressió, sense haver de fer cap més càlcul: en l'exemple en forma esglaonada reduïda donat, suposant que sigui compatible (o sigui, que $b_5 = b_6 = 0$), les seves solucions són:

$$\begin{aligned} x_1 &= b_1 - a_{12}x_2 - a_{15}x_5 - a_{16}x_6, \\ x_3 &= b_2 - a_{25}x_5 - a_{26}x_6, \\ x_4 &= b_3 - a_{35}x_5 - a_{36}x_6, \\ x_7 &= b_4. \end{aligned}$$

Definició 1.4.7 (Sistemes equivalents) *Dos sistemes d'equacions lineals en les mateixes variables es diuen* equivalents *quan tenen el mateix conjunt de solucions.*

Teorema 1.4.8 (Reducció gaussiana) *La reducció gaussiana transforma un sistema d'equacions lineals en un sistema equivalent. Per tant les solucions del sistema en forma esglaonada reduïda que s'obté al final de la reducció són les solucions del sistema de partida.*

PROVA: En efecte, si es considera un sistema lineal donat per les equacions $F_1, \ldots, F_n$ cada transformació elemental el converteix en un sistema d'equacions $F_1', \ldots, F_n'$. Com que les transformacions elementals conserven el subespai generat cada equació F_j' és combinació lineal de les F_i, i recíprocament. Per tant tota solució de les equacions F_i és també solució de totes les seves combinacions lineals, i per tant és solució de totes les equacions F_j', i el recíproc també és cert.

Per tant les transformacions elementals transformen un sistema en un d'equivalent i la reducció gaussiana, que és una seqüència de transformacions elementals, també. □

Teorema 1.4.9 (Teorema de Rouché-Frobenius) *Un sistema d'equacions lineals és compatible si, i només si, el rang de la matriu del sistema és igual al rang de la matriu ampliada. En aquest cas, el nombre de graus de llibertat és la diferència $n-r$ entre el nombre de variables i el rang. En particular, un sistema compatible és determinat si, i només si, $n=r$.*

PROVA: Com que la reducció gaussiana no afecta les solucions del sistema ni els rangs, aplicant reducció gaussiana es pot passar d'un sistema donat qualsevol a un altre sistema de m equacions que estigui en forma esglaonada reduïda. Sigui r el rang. En aquest nou sistema hi ha alguna equació incompatible $0 = b_i$ si, i només si, el rang de la matriu ampliada és superior (en una unitat) al rang de la matriu del sistema. Quan tots dos rangs són iguals el sistema és compatible i les seves solucions venen donades per les r identitats $x_{j_i} = b_i - \sum_{j \neq j_k} a_{ij} x_j$ per a $i = 1, \ldots, r$, que posen les r variables $x_{j_1}, \ldots, a_{j_r}$ en funció de les altres $n-r$ que són les x_j amb $j \neq j_k$. Per tant les solucions venen donades en funció de $n-r$ paràmetres i el sistema té $n-r$ graus de llibertat. □

Forma vectorial. El sistema lineal $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{b}$ es pot escriure també de la manera següent:

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} X_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} X_2 + \cdots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} X_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Denotant $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ i $\boldsymbol{b}$ els vectors columna aquesta expressió és la identitat vectorial:

$$X_1 \boldsymbol{a}_1 + X_2 \boldsymbol{a}_2 + \cdots + X_n \boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{b}.$$

Per tant, resoldre un sistema lineal vol dir trobar totes les combinacions lineals de les columnes de la matriu del sistema que donin el vector de termes independents. El fet que el sistema sigui compatible o incompatible equival a que el vector $\boldsymbol{b}$ sigui o no combinació lineal de les columnes de la matriu, i el fet que sigui determinat o indeterminat (solució única o moltes solucions) equival a que les columnes de la matriu siguin o no independents.

Equacions lineals i formes lineals. Una *forma lineal* en n variables $X_1, \dots, X_n$ a coeficients en un cos $\mathbb{K}$ és un polinomi homogeni de primer grau $F(X_1, \dots, X_n) = a_1X_1 + \dots + a_nX_n$ amb coeficients $a_i \in \mathbb{K}$.

La suma de polinomis i el producte d'un escalar per un polinomi donen al conjunt de les formes lineals estructura d'espai vectorial, que té dimensió n i admet com a base les formes $X_1, X_2, \dots, X_n$.

Es poden considerar també els *polinomis de grau* $\leqslant 1$ *en les variables* X_i, que són els polinomis de la forma $F(X_1, \dots, X_n) = a_1X_1 + \dots + a_nX_n + b$ amb $a_i, b \in \mathbb{K}$, i que també són un espai vectorial, de dimensió $n+1$, del qual les formes lineals en són un subespai vectorial.

Cada polinomi $F(X_1, \dots, X_n)$ pot identificar-se amb l'equació lineal $F(X_1, \dots, X_n) = 0$, o sigui, amb l'equació $a_1X_1 + \dots + a_nX_n = -b$. D'aquesta manera, l'espai vectorial dels polinomis de grau $\leqslant 1$ s'identifica amb l'espai vectorial de les equacions lineals. El subespai dels polinomis que són formes lineals (tenen el terme constant igual a zero) correspon a les equacions homogènies.

Problemes

1.26. Sigui $\mathscr{B} = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$ una base de l'espai vectorial V. Es diu que una família de vectors $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_m$ de V està en forma esglaonada reduïda respecte la base $\mathscr{B}$ si les seves coordenades en aquesta base ho estan; o sigui, si els vectors $\boldsymbol{a}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}) \in \mathbb{K}^n$ amb components determinades per $\boldsymbol{u}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}\boldsymbol{v}_j$ estan en forma esglaonada reduïda.

Sigui $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_m$ una família de vectors de V. Doneu condicions necessàries i suficients per tal que existeixi una base de V respecte la qual la família donada està en forma esglaonada reduïda. Quan es compleixin aquestes condicions digueu quines són les bases possibles.

Solució: Sigui $r = \dim(\langle \boldsymbol{u}_i \rangle)$ el rang dels vectors $\boldsymbol{u}_i$. Aleshores la condició necessària i suficient és que els r primers vectors $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_r$ siguin una base de l'espai $\langle \boldsymbol{u}_i \rangle$ generat pels $\boldsymbol{u}_i$ i que tots els demés vectors $\boldsymbol{u}_{r+1}, \dots, \boldsymbol{u}_m$ siguin el vector $\mathbf{0}$.

En aquest cas, si $r = n$ és la dimensió de l'espai, aleshores hi ha una única base possible, que és la base formada pels vectors $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n$ en la qual els vectors de coordenades $\boldsymbol{a}_i$ són els vectors de la base canònica de $\mathbb{K}^n$. Si $r < n$ aleshores hi ha moltes bases possibles i de fet qualsevol família $\{\boldsymbol{a}_i\}$ de m vectors de $\mathbb{K}^n$ que estiguin en forma esglaonada reduïda és la dels coeficients dels vectors $\boldsymbol{u}_i$ en alguna base de l'espai: donada una família com aquesta, amb $1 \leqslant j_1 < j_2 < \dots < j_t \leqslant n$ els índexs dels pivots corresponents, es considera la base $\boldsymbol{v}_j$ següent: s'agafa una ampliació de la base $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_r$ del subespai $\langle \boldsymbol{u}_i \rangle$ a una base de tot l'espai. Es reordena aquesta base posant els vectors $\boldsymbol{u}_i$ en les posicions j_i i els vectors de l'ampliació en les posicions que vagin quedant entremig. A aquesta base li corresponen els vectors $\boldsymbol{a}_i$ que són els vectors de la base canònica $\boldsymbol{e}_{j_i}$. Per tenir els vectors que es volien n'hi ha prou a canviar cada $\boldsymbol{v}_{j_i}$ pel vector $\boldsymbol{v}_{j_i} - a_{i,j}\boldsymbol{v}_j$ per a $j \neq j_i$.

1.27. Demostreu que un sistema lineal $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{b}$ és compatible determinat si, i només si, la matriu $\boldsymbol{A}$ és invertible i que, en aquest cas, la solució del sistema és $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$.

1.28. Donat un sistema lineal $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{b}$ el "sistema homogeni associat" és el sistema homogeni amb la mateixa matriu; o sigui, el sistema $\boldsymbol{AX} = \mathbf{0}$. Demostreu que totes les solucions d'un sistema compatible s'obtenen sumant una solució particular qualsevol amb totes les solucions del sistema homogeni associat:

$$\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^n : \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}\} = \{\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{y} : \boldsymbol{y} \in \mathbb{K}^n, \boldsymbol{Ay} = \mathbf{0}\},$$

on $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{K}^n$ és una solució particular: $\boldsymbol{Ax}_0 = \boldsymbol{b}$.

1.29. Sigui $\{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}X_j = b_i : i = 1, \dots, m\}$ un sistema d'equacions lineals en les variables $X_1, \dots, X_n$ a coeficients $a_{ij} \in \mathbb{K}$.

1. Demostreu que existeixen elements α_{jk} i β_j de $\mathbb{K}$ tals que totes les solucions del sistema lineal s'obtenen donant valors arbitraris als paràmetres t_k en una expressió de la forma següent:

$$\begin{array}{ccccccccc} X_1 & = & \beta_1 & + & \alpha_{11}t_1 & + & \cdots & + & \alpha_{1\ell}t_\ell \\ X_2 & = & \beta_2 & + & \alpha_{21}t_1 & + & \cdots & + & \alpha_{2\ell}t_\ell \\ \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\ X_n & = & \beta_n & + & \alpha_{n1}t_1 & + & \cdots & + & \alpha_{n\ell}t_\ell \end{array}$$

2. Interpreteu els vectors $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \in \mathbb{K}^n$ i $(\alpha_{1k}, \alpha_{2k}, \dots, \alpha_{nk}) \in \mathbb{K}^n$ que apareixen en expressions com l'anterior en termes del sistema lineal.
3. Donat un sistema, per a quins enters ℓ existeix una expressió com aquesta que dóna les seves solucions? quin és el mínim valor de ℓ?

1.30. Trobeu sistemes d'equacions lineals en quatre incògnites X, Y, Z, T que tinguin les solucions següents:

1. $\begin{cases} X = 1 - 2t_1 + 3t_2 - 2t_3 \\ Y = -2 + t_2 + 2t_3 \\ Z = 3t_1 - 2t_2 + 8t_3 \\ T = -1 + t_1 - t_2 + t_3 \end{cases}$
2. $\begin{cases} X = 1 + t \\ Y = 1 - t \\ Z = -1 + t \\ T = -1 - t \end{cases}$
3. $\begin{cases} X = 1 - 2t_1 + 3t_2 \\ Y = -2 + t_2 \\ Z = 3t_1 - 2t_2 \\ T = -1 + t_1 - t_2 \end{cases}$

1.31. Siguin $F_1, \dots, F_m$ i $G_1, \dots, G_n$ dos sistemes de m i n equacions lineals en les mateixes variables. Demostreu que aquests dos sistemes són equivalents si, i només si, les seves equacions generen el mateix subespai de l'espai de les equacions lineals: $\langle F_1, \dots, F_m \rangle = \langle G_1, \dots, G_n \rangle$.

SOLUCIÓ: Suposi's que els subespais que generen són el mateix. Aleshores tota solució de les equacions F_i és també solució de qualsevol combinació lineal d'aquestes equacions, i per tant també és solució de cadascuna de les equacions G_j. Recíprocament, tota solució de les equacions G_j també és solució de les totes equacions F_i. Per tant tots dos sistemes tenen les mateixes solucions,

Recíprocament, suposi's que els sistemes tenen les mateixes solucions. Aleshores el sistema format per la reunió de totes les equacions té les mateixes solucions que cadascun dels dos. En particular, els rangs d'aquests tres sistemes han de ser iguals:

$$\dim(\langle F_1, \dots, F_m \rangle) = \dim(\langle F_1, \dots, F_m, G_1, \dots, G_n \rangle) = \dim(\langle G_1, \dots, G_n \rangle).$$

De la igualtat de l'esquerra es dedueix que cada equació G_j és combinació lineal de les equacions F_i i de la de la dreta que cada equació F_i és combinació lineal de les equacions G_j. Per tant es té la igualtat $\langle F_1, \dots, F_m \rangle = \langle G_1, \dots, G_n \rangle$. $\square$

1.32. *Sistemes amb vectors.* Sigui V un $\mathbb{K}$-espai vectorial. Donats escalars $a_{ij} \in \mathbb{K}$ i vectors $\boldsymbol{v}_j \in \mathbb{K}$ es considera el sistema d'equacions:

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}\boldsymbol{X}_1 & + & a_{12}\boldsymbol{X}_2 & + & \cdots & + & a_{1n}\boldsymbol{X}_n & = & \boldsymbol{v}_1 \\ a_{21}\boldsymbol{X}_1 & + & a_{22}\boldsymbol{X}_2 & + & \cdots & + & a_{2n}\boldsymbol{X}_n & = & \boldsymbol{v}_2 \\ \cdots & & \cdots & & & & \cdots & & \cdots \\ a_{m1}\boldsymbol{X}_1 & + & a_{m2}\boldsymbol{X}_2 & + & \cdots & + & a_{mn}\boldsymbol{X}_n & = & \boldsymbol{v}_m \end{array}\right.$$

que té per solucions les n-tuples de vectors $(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n) \in V^n$ tals que en substituir cada variable $\boldsymbol{X}_i$ pel vector $\boldsymbol{x}_i$ se satisfan totes les equacions, com a igualtats entre vectors de V.

Estudieu aquest tipus de sistemes i digueu com resoldre'ls amb un procediment semblant al de la reducció gaussiana. Reduïu la solució d'un sistema com aquests a la resolució de diversos sistemes lineals ordinaris.

1.33. *Dualitat generadors-equacions.* Sigui $W \subseteq \mathbb{K}^n$ un subespai generat per p vectors $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_p$, que és el subespai de les solucions de q equacions homogènies $F_1, \ldots, F_q$. Demostreu que:

$$\dim(\langle \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_p \rangle) + \dim(\langle F_1, \ldots, F_q \rangle) = n.$$

Solució: En efecte, la dimensió de l'espai de les equacions és el rang r de la família d'equacions, i les seves solucions tenen dimensió igual al nombre de graus de llibertat: $n - r$. Per tant, $\dim(\langle \boldsymbol{u}_i \rangle) = n - r = n - \dim(\langle F_i \rangle)$ i d'aquí es dedueix la igualtat. $\square$

1.34. Estudieu les equacions de la forma $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$ per a matrius $\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ i $\boldsymbol{B} \in \mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{K})$, i on $\boldsymbol{X} = (X_{ij}) \in \mathcal{M}_{n\times p}$ és una matriu d'incògnites. Enuncieu i demostreu un resultat anàleg al teorema de Rouché-Frobenius per a aquest problema.

1.5 Coordenades. Canvis de base

En aquesta secció es consideren només espais vectorials de dimensió finita.

Definició 1.5.1 (Coordenades) *Sigui V un $\mathbb{K}$-espai vectorial de dimensió finita n. Sigui $\mathscr{B} = \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ una base. Les* coordenades *d'un vector $\boldsymbol{v} \in V$ en la base $\mathscr{B}$ són els coeficients $x_1, \ldots, x_n$ de l'expressió del vector $\boldsymbol{v}$ com a combinació lineal dels vectors d'aquesta base:*

$$\boldsymbol{v} = x_1\boldsymbol{v}_1 + x_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{v}_n.$$

Així, en fixar una base d'un espai vectorial s'obté una bijecció entre l'espai i el conjunt $\mathbb{K}^n$, que assigna a cada vector la n-tupla $(x_1, \ldots, x_n)$ de les seves coordenades en la base considerada.

És habitual haver de treballar amb bases diferents d'un mateix espai, i això requereix fer *canvis de base* o *canvis de coordenades*. Siguin $\mathscr{B}_u = \{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$ i $\mathscr{B}_v = \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ dues bases de l'espai V. Sigui $\boldsymbol{u}_j = \sum_{i=1}^n a_{ij}\boldsymbol{v}_i$ l'expressió dels vectors de la base $\mathscr{B}_u$ en la base $\mathscr{B}_v$, de manera que les coordenades de cada vector $\boldsymbol{u}_j$ en la base $\mathscr{B}_v$ són els escalars $a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{nj}$. Aleshores, les coordenades d'un vector $\boldsymbol{v}$ qualsevol en la base $\mathscr{B}_v$ s'expressen en funció de les seves coordenades en la base $\mathscr{B}_u$ de la manera següent:

$$\boldsymbol{v} = \sum_{j=1}^n x_j\boldsymbol{u}_j = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n x_j a_{ij}\boldsymbol{v}_i = \sum_{i=1}^n y_i\boldsymbol{v}_i \qquad \text{amb} \quad y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j.$$

Aquesta identitat es pot escriure en forma matricial com:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Així, les coordenades d'un vector en la nova base $\mathscr{B}_v$ s'obtenen multiplicant la matriu $(a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ per la matriu columna de les coordenades del vector en la base $\mathscr{B}_u$.

Definició 1.5.2 (Matriu del canvi de base) *Donades dues bases $\mathscr{B}_u$ i $\mathscr{B}_v$ d'un espai vectorial V de dimensió n, la* matriu del canvi de base *de $\mathscr{B}_u$ a $\mathscr{B}_v$ és la matriu quadrada de mida n que té a la columna j-èsima les coordenades del vector $\boldsymbol{u}_j$ de la base $\mathscr{B}_u$ en la base $\mathscr{B}_v$. Es denotarà* $\mathrm{Mat}(\mathscr{B}_u \to \mathscr{B}_v)$.

Tal com s'ha vist, aquesta matriu del canvi de base permet calcular les coordenades d'un vector en la base $\mathscr{B}_v$ a partir de les seves coordenades en una base $\mathscr{B}_u$.

Proposició 1.5.3 *Donades tres bases $\mathscr{B}_u, \mathscr{B}_v$ i $\mathscr{B}_w$ d'un espai vectorial es compleix:*

$$\mathrm{Mat}(\mathscr{B}_u \to \mathscr{B}_w) = \mathrm{Mat}(\mathscr{B}_v \to \mathscr{B}_w)\, \mathrm{Mat}(\mathscr{B}_u \to \mathscr{B}_v).$$

Com a conseqüència, es dedueix que $\mathrm{Mat}(\mathscr{B}_v, \mathscr{B}_u) = \mathrm{Mat}(\mathscr{B}_u, \mathscr{B}_v)^{-1}$.

PROVA: Siguin $\boldsymbol{u}_j = \sum_{i=1}^n b_{ij}\boldsymbol{v}_i$, $\boldsymbol{v}_j = \sum_{i=1}^n a_{ij}\boldsymbol{w}_i$, i $\boldsymbol{u}_j = \sum_{i=1}^n c_{ij}\boldsymbol{w}_i$ les expressions d'unes bases en funció d'unes altres, de manera que $\mathrm{Mat}(\mathscr{B}_u \to \mathscr{B}_v) = (b_{ij})$, $\mathrm{Mat}(\mathscr{B}_v \to \mathscr{B}_w) = (a_{ij})$ i $\mathrm{Mat}(\mathscr{B}_u \to \mathscr{B}_w) = (c_{ij})$. Aleshores

$$\boldsymbol{u}_j = \sum_{k=1}^n b_{kj}\boldsymbol{v}_k = \sum_{k=1}^n b_{kj}\left(\sum_{i=1}^n a_{ik}\boldsymbol{w}_i\right) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}\right)\boldsymbol{w}_i$$

i per ser els vectors $\boldsymbol{w}_i$ una base els coeficients de les combinacions lineals anteriors han de ser $c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$ per a tot $1 \leqslant i, j \leqslant n$. □

A la literatura s'hi troben moltes notacions diferents per indicar la matriu del canvi de base; per exemple $\mathrm{Mat}(\mathscr{B}_u, \mathscr{B}_v)$, o el mateix canviant Mat per M, o també $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_u}^{\mathscr{B}_v}$ o bé $\mathrm{M}_{\mathscr{B}_u}^{\mathscr{B}_v}$, etc.

Problemes

1.35. A $\mathbb{R}^4$ es consideren les dues famílies de vectors $\mathscr{B}_u = \{\boldsymbol{u}_i\}_{1\leqslant i\leqslant 4}$ i $\mathscr{B}_v = \{\boldsymbol{v}_i\}_{1\leqslant i\leqslant 4}$ amb:

$$\boldsymbol{u}_1 = (0,1,1,0), \quad \boldsymbol{u}_2 = (-1,0,0,1), \quad \boldsymbol{u}_3 = (2,0,1,0), \quad \boldsymbol{u}_4 = (0,0,1,1),$$

$$\boldsymbol{v}_1 = 2\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2, \quad \boldsymbol{v}_2 = -\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_3 + \boldsymbol{u}_4, \quad \boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{u}_2 - 2\boldsymbol{u}_3, \quad \boldsymbol{v}_4 = 3\boldsymbol{u}_4.$$

Demostreu que $\mathscr{B}_u$ i $\mathscr{B}_v$ són bases de $\mathbb{R}^4$. Doneu les matrius de canvi de base $\mathrm{Mat}(\mathscr{B}_u \to \mathscr{B}_v)$, $\mathrm{Mat}(\mathscr{B}_u \to \mathscr{B}_e)$ i $\mathrm{Mat}(\mathscr{B}_v \to \mathscr{B}_e)$, on $\mathscr{B}_e$ és la base canònica de $\mathbb{R}^4$. Quina relació hi ha entre aquestes matrius?

SOLUCIÓ: La matriu de canvi de base $M(B_u \to B_e)$ s'obté posant en columna les coordenades dels vectors u_i en la base e_i, i el mateix per la $M(B_v \to B_e)$:

$$M(B_u \to B_e) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad M(B_v \to B_e) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -5 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

i els canvis recíprocs són els de matriu inversa:

$$M(B_e \to B_u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad M(B_e \to B_v) = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{3}{2} & -\frac{5}{4} & \frac{5}{4} \\ \frac{3}{2} & 2 & -\frac{5}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} \\ -\frac{5}{6} & -\frac{4}{3} & \frac{3}{2} & -\frac{7}{6} \end{pmatrix}.$$

Finalment, com que els vectors v_i estan definits en termes dels u_i, es té:

$$M(B_v \to B_u) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

i la seva inversa és

$$M(B_u \to B_v) = M(B_v \to B_u)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

La relació entre els canvis és: $M(B_u \to B_e) = M(B_v \to B_e)M(B_u \to B_v)$, i altres relacions semblants fins a un total de sis.

1.36. Sabent que en una certa base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^2$ el vector $(1,2)$ té coordenades $(3,4)$ i el vector $(1,5)$ té coordenades $(6,7)$, trobeu aquesta base $\mathscr{B}$.

SOLUCIÓ: Sigui $B = \{v_1, v_2\}$. Aleshores $3v_1 + 4v_2 = (1,2)$ i $6v_1 + 7v_2 = (3,4)$. Restant del doble de la primera igualtat la segona i de quatre vegades la segona set vegades la primera s'obté: $v_2 = (-1,0)$ i $3v_1 = (5,2) \Rightarrow v_1 = (\frac{5}{3}, \frac{2}{3})$.

1.37. Sabent que els vectors $(1,2)$ i $(3,4)$ de $\mathbb{R}^2$ tenen coordenades $(5,6)$ i $(7,8)$, respectivament, en una certa base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^2$, determineu les coordenades d'un vector arbitrari $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ en aquesta base.

SOLUCIÓ: L'equació $(a,b) = xw_1 + yw_2 = (x+3y, 2x+4y)$ té solució $x = \frac{-4a+3b}{2}, y = \frac{2a-b}{2}$. Per tant, $(a,b)_B = \frac{-4a+3b}{2}(5,6)_B + \frac{2a-b}{2}(7,8)_B = (-3a+4b, -4a+5b)_B$.
Una altra manera de fer-ho és calcular primer les coordenades dels vectors de la base $B = \{v_1, v_2\}$ en la base canònica: posant $w_1 = 5v_1 + 6v_2$ i $w_2 = 7v_1 + 8v_2$ s'obté que $v_1 = -4w_1 + 3w_2 = (5,4)$ i $v_2 = \frac{1}{2}(7w_1 - 5w_2) = (-4,-3)$. Ara només cal escriure $(a,b) = xv_1 + yv_2$, que, resolent-lo, dóna $(x,y) = (4b-3a, 5b-4a)$.

1.38. Trobeu les coordenades del vector $(1,0,1)$ de l'espai $\mathbb{R}^3$ en la base

$$\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_3, \quad \boldsymbol{u}_2 = -4\boldsymbol{v}_1 + 7\boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3, \quad \boldsymbol{u}_3 = -2\boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3,$$

on els vectors $\boldsymbol{v}_i$ són una base que està relacionada amb una altra base $\boldsymbol{w}_i$ formada pels vectors $\boldsymbol{w}_1 = (-8,1,-3), \boldsymbol{w}_2 = (-9,1,-3), \boldsymbol{w}_3 = (-24,3,-8)$ de la manera següent:

$$\boldsymbol{w}_1 = -\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_3, \quad \boldsymbol{w}_2 = 3\boldsymbol{v}_1 + 4\boldsymbol{v}_2 + 3\boldsymbol{v}_3, \quad \boldsymbol{w}_3 = 2\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_3.$$

Solució: Per calcular-les es necessita la matriu del canvi de base $\mathrm{Mat}(\mathscr{B}_e \to \mathscr{B}_u)$. De les dades del problema es dedueixen les matrius dels canvis de coordenades següents:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Mat}(\mathscr{B}_u \to \mathscr{B}_v) &= \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 7 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \\
\mathrm{Mat}(\mathscr{B}_w \to \mathscr{B}_e) &= \begin{pmatrix} -8 & -9 & -24 \\ 1 & 1 & 3 \\ -3 & -3 & -8 \end{pmatrix}, \\
\mathrm{Mat}(\mathscr{B}_w \to \mathscr{B}_v) &= \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Aleshores la matriu que es necessita és la següent:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Mat}(\mathscr{B}_e \to \mathscr{B}_u) &= \mathrm{Mat}(\mathscr{B}_u \to \mathscr{B}_v)^{-1}\,\mathrm{Mat}(\mathscr{B}_w \to \mathscr{B}_v)\,\mathrm{Mat}(\mathscr{B}_w \to \mathscr{B}_e)^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 9 & 4 & 8 \\ 2 & 1 & 2 \\ 7 & 3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -1 & -8 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -88 & -458 & 89 \\ -21 & -110 & 21 \\ -71 & -369 & 72 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

I, per tant, les coordenades del vector $(1,0,1)$ són $(1,0,1)$.

Una altra manera: de la relació entre els vectors $\boldsymbol{v}_i$ i $\boldsymbol{w}_j$ es dedueix que:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v}_1 &= 4\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2 + \boldsymbol{w}_3 = (-65, 8, -23), \\
\boldsymbol{v}_2 &= 3\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2 = (-33, 4, -12), \\
\boldsymbol{v}_3 &= -8\boldsymbol{w}_1 - 2\boldsymbol{w}_2 - \boldsymbol{w}_3 = (106, -13, 38),
\end{aligned}$$

tot i que de fet el vector $\boldsymbol{v}_3$ no cal. Aleshores el vector de $(1,0,1) \in \mathbb{R}^3$ és el vector $(1,0,1) = \boldsymbol{v}_1 - 2\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_3$, i per tant té coordenades $1, 0$ i 1 en la base $\boldsymbol{u}_i$.

1.39. Digueu si existeix una base de $\mathbb{R}^3$ tal que:

1. els vectors $(1,1,1), (-1,1,-1), (0,1,2)$ tenen coordenades $(0,1,0), (2,-1,-2), (3,3,3)$;
2. els vectors $(1,1,1), (-1,1,-1), (0,1,0)$ tenen coordenades $(2,3,4), (6,7,8), (4,5,6)$;
3. els vectors $(1,1,1), (-1,1,-1), (0,1,0)$ tenen coordenades $(1,2,3), (4,5,6), (7,8,9)$.

i doneu-ne algun exemple en cas afirmatiu.

1.40. Trobeu les matrius del canvi de base entre les dues bases següents de $\mathbb{R}_n[X]$:

$$\mathscr{B}_0 = \{1, X, X^2, \dots, X^n\} \qquad \mathscr{B}_a = \{1, X-a, (X-a)^2, \dots, (X-a)^n\},$$

on $a \in \mathbb{R}$ és un nombre real donat. Deduïu la *fórmula de Taylor*: per a tot polinomi $f(X) \in \mathbb{R}_n[X]$ es té:

$$f(X) = f(a) + f'(a)(X-a) + \frac{f''(a)}{2!}(X-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(X-a)^n.$$

Solució: Expressant cada polinomi de la segona base en termes dels de la primera (la canònica) amb el binomi de Newton es té:

$$(X-a)^j = \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} (-a)^{j-i} X^i.$$

Per tant, la matriu del canvi $M(\{(X-a)^j\} \to \{X^j\})$ és la següent:

$$\begin{pmatrix} 1 & -a & a^2 & -a^3 & \dots & (-a)^n \\ 0 & 1 & -2a & 3a^2 & \dots & n(-a)^{n-1} \\ 0 & 0 & 1 & -3a & \dots & \binom{n}{2}(-a)^{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & \binom{n}{3}(-a)^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Anàlogament es pot escriure cada polinomi de la base canònica en termes de l'altra posant:

$$X^j = \big((X-a)+a\big)^j = \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} a^{j-i}(X-a)^i,$$

i la matriu de canvi de base $M(\{X^j\} \to \{(X-a)^j\}) \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ és la matriu:

$$(a_{ij})_{0\leqslant i,j\leqslant n} = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 & \dots & a^n \\ 0 & 1 & 2a & 3a^2 & \dots & na^{n-1} \\ 0 & 0 & 1 & 3a & \dots & \binom{n}{2}a^{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & \binom{n}{3}a^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{amb } a_{ij} = \begin{cases} \binom{j}{i}a^{j-i}, & \text{si } i \leqslant j, \\ 0, & \text{si } i > j. \end{cases}$$

Donat el polinomi $f(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n$, que té coeficients $(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n)$ en la base $\{X^j\}$, els seus coeficients en l'altra base s'obtenen multiplicant la matriu del canvi pel vector columna dels a_j. Si $f(X) = b_0 + b_1(X-a) + b_2(X-a)^2 + \cdots + b_n(X-a)^n$ aleshores els coeficients b_i són:

$$\begin{aligned} b_0 &= a_0 + a_1a + a_2a^2 + \cdots + a_na^n = f(a) \\ b_1 &= a_1 + 2a_2a + 3a_3a^2 + \cdots + na_na^{n-1} = f'(a) \\ b_2 &= a_2 + 3a_3a + \cdots + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2} = \frac{1}{2}f''(a) \end{aligned}$$

i, en general, el coeficient i-èsim és:

$$\begin{aligned} b_i = a_i + (i+1)a_{i+1}a + \cdots + \binom{n}{i}a_na^{n-i} &= \sum_{j=i}^{n}\binom{j}{i}a_ja^{j-i} = \sum_{j=i}^{n}\frac{j!}{i!(j-i)!}a_ja^{j-i} \\ &= \frac{1}{i!}\sum_{j=i}^{n} j(j-1)\cdots(j-i+1)a_ja^{j-i} = \frac{f^{(i)}(a)}{i!}, \end{aligned}$$

i d'aquí es dedueix immediatament la "fórmula de Taylor" de l'enunciat.

1.6 Intersecció i suma de subespais

A la proposició següent es descriuen les dues maneres principals de construir subespais d'un espai vectorial a partir d'uns altres subespais donats.

Proposició 1.6.1 (Intersecció i suma de subespais) *Sigui V un $\mathbb{K}$-espai vectorial.*

- Subespai intersecció. *La intersecció $W = W_1 \cap W_2$ de dos subespais $W_1, W_2 \subseteq V$ és un subespai de V. També ho és la intersecció arbitrària de subespais $\bigcap_{i\in I} W_i$.*

- Subespai suma. *La suma* $W = W_1 + W_2$ *de dos subespais* $W_i \subseteq V$*, definida com el conjunt* $W = \{\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2 : \boldsymbol{w}_i \in W_i\}$*, és un subespai de* V*. També ho és la suma d'una família finita de subespais* $W_1 + \cdots + W_n = \{\boldsymbol{w}_1 + \cdots + \boldsymbol{w}_n : \boldsymbol{w}_i \in W_i, i = 1, \ldots, n\}$*. Es pot definir també la suma d'una família arbitrària de subespais* $\{W_i\}_{i \in I}$ *com el subespai format per les sumes finites* $\boldsymbol{w}_{i_1} + \cdots + \boldsymbol{w}_{i_n}$ *de vectors que pertanyen cadascun a un dels subespais.*

Per a calcular la intersecció o la suma de subespais de $\mathbb{K}^n$ és convenient donar els subespais per equacions i per generadors, respectivament: si $W_1 = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^n : F_i(\boldsymbol{x}) = 0, i = 1, \ldots, r\} = \langle \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_p \rangle$ i $W_2 = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^n : G_i(\boldsymbol{x}) = 0, i = 1, \ldots, s\} = \langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_q \rangle$, aleshores $W_1 \cap W_2$ és el conjunt de solucions de totes les equacions F_i i G_i i $W_1 + W_2$ és el subespai generat pels vectors $\boldsymbol{u}_i$ i els vectors $\boldsymbol{v}_i$:

$$
\begin{aligned}
&W_1 \cap W_2 = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^n : F_1(\boldsymbol{x}) = \cdots = F_r(\boldsymbol{x}) = G_1(\boldsymbol{x}) = \cdots = G_s(\boldsymbol{x}) = 0\},\\
&W_1 + W_2 = \langle \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_p, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_q \rangle.
\end{aligned}
$$

Teorema 1.6.2 (Fórmula de Grassmann) *Siguin* $W_1, W_2 \subseteq V$ *dos subespais d'un espai vectorial. Aleshores:*

$$\dim(W_1 + W_2) + \dim(W_1 \cap W_2) = \dim W_1 + \dim W_2.$$

PROVA: La intersecció $W_1 \cap W_2$ és un subespai de tots dos espais W_1 i W_2. Sigui $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_r$ una base de $W_1 \cap W_2$. Sigui $\boldsymbol{v}_{r+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ una ampliació a una base de l'espai W_1 i sigui $\boldsymbol{v}'_{r+1}, \ldots, \boldsymbol{v}'_n$ una ampliació a una base de l'espai W_2. Així, $\dim(W_1 \cap W_2) = r, \dim(W_1) = m, \dim(W_2) = n$.

Aleshores la família $\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_p, \boldsymbol{v}_{r+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_m, \boldsymbol{v}'_{r+1}, \ldots, \boldsymbol{v}'_n\}$ és una base del subespai suma $W_1 + W_2$. En efecte, és clar que aquests vectors són generadors de l'espai suma. S'ha de comprovar que són independents. Sigui $\sum x_i \boldsymbol{u}_i + \sum y_j \boldsymbol{v}_j + \sum z_k \boldsymbol{v}'_k = \boldsymbol{0}$. Aleshores el vector $\boldsymbol{v} = \sum x_i \boldsymbol{u}_i + \sum y_j \boldsymbol{v}_j = \sum (-z_k) \boldsymbol{v}'_k$ pertany a $W_1 \cap W_2$ i, per tant, també es pot escriure com $\boldsymbol{v} = \sum t_i \boldsymbol{u}_i$. Aplicant que les bases dels W_i són famílies independents es dedueix que:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{v} = \sum x_i \boldsymbol{u}_i + \sum y_j \boldsymbol{v}_j &= \sum t_i \boldsymbol{u}_i + \sum 0 \boldsymbol{v}_j \ \text{ a } W_1 \quad \Rightarrow \quad x_i = t_i \quad \text{i} \quad y_j = 0,\\
\boldsymbol{v} = \sum 0 \boldsymbol{u}_i + \sum (-z_k) \boldsymbol{v}'_k &= \sum t_i \boldsymbol{u}_i + \sum 0 \boldsymbol{v}'_k \ \text{ a } W_2 \quad \Rightarrow \quad t_i = 0 \quad \text{i} \quad z_k = 0,
\end{aligned}
$$

de manera que tots els coeficients de la combinació lineal han de ser zero. Per tant,

$$\dim(W_1 + W_2) = r + (m - r) + (n - r) = m + n - r = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2). \quad \square$$

Definició 1.6.3 (Suma directa) *Es diu que una suma de subespais* $W = W_1 + W_2 + \cdots + W_n$ *és una* suma directa *si cada vector de la suma es pot escriure com a suma de vectors dels diferents subespais* de manera única*. O sigui, si:*

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}_1 + \cdots + \boldsymbol{w}_n = \boldsymbol{w}'_1 + \cdots + \boldsymbol{w}'_n \quad \textit{amb} \quad \boldsymbol{w}_i, \boldsymbol{w}'_i \in W_i \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{w}'_i = \boldsymbol{w}_i \ \forall i.$$

En aquest cas es fa servir un símbol especial i es denota $W = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_n$.

De manera anàloga a les propietats dels vectors independents és fàcil comprovar que la condició de ser suma directa és equivalent al fet que la única manera d'obtenir el vector $\boldsymbol{0}$ sumant vectors dels subespais W_i és que tots els sumands siguin zero:

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}_1 + \cdots + \boldsymbol{w}_n = \boldsymbol{0} \quad \text{amb} \quad \boldsymbol{w}_i \in W_i \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{w}_i = \boldsymbol{0} \ \forall i.$$

Proposició 1.6.4 *La suma $W = W_1 + W_2$ de dos subespais és una suma directa si, i només si, aquests dos subespais tenen intersecció trivial: $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$.*

PROVA: Si la suma és directa sigui $\boldsymbol{w} = W_1 \cap W_2$. Aleshores el vector $\mathbf{0} \in W_1 + W_2$ admet les dues expressions $\mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \boldsymbol{w} + (-\boldsymbol{w})$ com a suma de vectors dels dos subespais. Per unicitat ha de ser $\boldsymbol{w} = \mathbf{0}$, i per tant $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$. Recíprocament, si la intersecció és trivial siguin $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{w}'_1 + \boldsymbol{w}'_2$ dues expressions d'un vector del subespai suma. Aleshores es té: $\boldsymbol{w}_1 - \boldsymbol{w}'_1 = \boldsymbol{w}'_2 - \boldsymbol{w}_2 \in W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$, i per tant $\boldsymbol{w}_1 = \boldsymbol{w}'_1$ i $\boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{w}'_2$.

Ull! aquesta propietat val per a dos subespais, però no és certa per més de dos: encara que $\cap W_i = \{\mathbf{0}\}$ o fins i tot que $W_i \cap W_j = \{\mathbf{0}\} \forall\, i \neq j$ no garanteix que la suma $W_1 + \cdots + W_n$ sigui directa si $n \geqslant 3$.

Definició 1.6.5 (Complementari) *Sigui $W \subseteq V$ un subespai d'un $\mathbb{K}$-espai vectorial. Un* complementari *de W és un subespai W' tal que $V = W \oplus W'$.*

Cada subespai té molts subespais complementaris. Donada una base del subespai, qualsevol família de vectors que estengui aquesta base a una base de tot l'espai genera un subespai complementari.

Problemes

1.41. A l'espai $\mathbb{R}^3$ es consideren els subespais següents:

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + z = -x + y + z = 0\},$$
$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = x + 3y + z = 0\},$$

i els vectors $\boldsymbol{v}_1 = (1, -1, 1)$, $\boldsymbol{v}_2 = (-1, 1, 1)$, $\boldsymbol{v}_3 = (1, 1, -1)$, $\boldsymbol{v}_4 = (1, 3, 1)$.

1. Demostreu que $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ és una base de $\mathbb{R}^3$ i calculeu les coordenades de $\boldsymbol{v}_4$ en aquesta base.
2. Doneu una base del subespai $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle \cap \langle \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4 \rangle$ i unes equacions que defineixin el subespai $U + V$.

SOLUCIÓ: (a) Calculant la forma esglaonada reduïda per files de la matriu que té per columnes els vectors $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$ s'obté la matriu:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

d'on es dedueix que la família dels tres vectors $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ té rang 3, i per tant és una base, i que $\boldsymbol{v}_4 = \boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2 + 2\boldsymbol{v}_3$.

(b) Amb un càlcul senzill es comprova que $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle$ té equació $x + y = 0$ i que $\langle \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4 \rangle$ té equació $2x - y + z = 0$. La intersecció té per base el vector $(-1, 1, 3)$. El subespai U té per base $(1, 1, 0)$ i el subespai V té per base $(2, -1, 1)$. El subespai $U + V$ té equació $-x + y + 3z = 0$.

1.42. Doneu una base del subespai de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ següent i doneu un subespai complementari

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c - d & -c + d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{K} \right\} \subseteq \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$$

Solució: Es té que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c-d & -c+d \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (c-d)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

i, per tant, una base està formada per les tres matrius de l'expressió anterior. Un subespai complementari és, per exemple, el generat per la matriu

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

o qualsevol altra que no pertanyi al subespai generat per les tres anteriors; és a dir, qualsevol matriu que a la segona fila no tingui entrades x i $-x$ per a algun $x \in \mathbb{K}$.

1.43. Doneu unes equacions que defineixin el subespai $U = \langle (1,-1,0,0), (0,i,-i,0), (0,0,1+i,-1-i) \rangle$ de $\mathbb{C}^4$. Per a quins valors de $z \in \mathbb{C}$ el subespai $V = \langle (1, z, z^2, z^3) \rangle$ és un complementari de U?

Solució: Fent reducció per files es té:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & i & -i & 0 \\ 0 & 0 & 1+i & -1-i \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

L'espai de solucions d'aquest sistema està generat pel vector $(1,1,1,1)$ i, per tant, U és el conjunt de solucions de l'equació $X+Y+Z+T=0$.

La condició per tal que V sigui un complementari de U és que el vector $(1,\lambda,\lambda^2,\lambda^3)$ no pertanyi a U, el qual equival a dir que $1+\lambda+\lambda^2+\lambda^3 \neq 0$, de manera que λ ha de ser un nombre real que no sigui arrel del polinomi anterior. Aquest polinomi té òbviament la solució $\lambda = -1$, que dóna la descomposició $1+\lambda+\lambda^2+\lambda^3 = (\lambda+1)(\lambda^2+1) = (\lambda+1)(\lambda+i)(\lambda-i)$ i per tant els únics valors per als quals V no és un complementari són els tres nombres complexos -1 i $\pm i$.

1.44. Sigui $V = \{\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) : \mathrm{Tr}(\boldsymbol{A}) = 0\}$. Demostreu que V és un subespai vectorial de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ i que el subespai $\langle \mathbf{1}_n \rangle$ és un complementari de V.

Solució: En efecte, qualsevol combinació lineal de matrius de traça zero té traça zero. El subespai F està format per totes les matrius (a_{ij}) amb $a_{11} + \cdots + a_{nn} = 0$, i té òbviament dimensió n^2-1 ja que és el conjunt de solucions d'un sistema lineal de rang 1 en un espai vectorial de dimensió n^2. Qualsevol vector que no sigui del subespai genera un subespai complementari, i la matriu identitat no té traça zero.

1.45. Siguin U, V, W subespais d'un espai vectorial de dimensió finita tals que $U+V = U+W$ i $U \cap V = U \cap W$. Es pot afirmar que $V = W$? i que $\dim V = \dim W$?

Solució: El primer és fals. Per exemple, donat un subespai propi no trivial $F \subset E$ sempre hi ha subespais complementaris diferents $G, H \subset E$ amb $F \oplus G = F \oplus H = E$ i $F \cap G = F \cap H = \{0\}$. El segon és cert. Per la fórmula de Grassmann:

$$\dim G = \dim(F+G) + \dim(F \cap G) - \dim F = \dim(F+H) + \dim(F \cap H) - \dim F = \dim H.$$

1.46. Sigui $\boldsymbol{A} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. Es consideren els subespais de $\mathcal{M}_2(K)$ següents:

$$U = \{\boldsymbol{M} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) : \boldsymbol{AM} = \boldsymbol{0}\}, \qquad V = \{\boldsymbol{N} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) : \exists \boldsymbol{R} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) \text{ amb } \boldsymbol{N} = \boldsymbol{AR}\}.$$

1. Siguin

$$\boldsymbol{M}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{M}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{M}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{M}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Demostreu que $\{\boldsymbol{M}_i\}_{1 \leqslant i \leqslant 4}$ és una base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ i que $\langle \boldsymbol{M}_1, \boldsymbol{M}_2 \rangle = U$ i $\langle \boldsymbol{M}_3, \boldsymbol{M}_4 \rangle = V$.

2. Doneu les coordenades de la matriu $\mathbf{1}_2$ en la base $\{\boldsymbol{M}_i\}$ i trobeu matrius $\boldsymbol{M} \in U$ i $\boldsymbol{N} \in V$ amb $\mathbf{1}_2 = \boldsymbol{M} + \boldsymbol{N}$. Aquestes matrius, són úniques?

Solució: Noti's que l'enunciat dóna per fet que els subconjunts U i V són subespais vectorials; si es demanés comprovar-ho caldria veure que la suma de matrius i el producte per escalars són operacions tancades en tots dos subconjunts.

1. L'espai $\mathscr{M}_2(\mathbb{K})$ té dimensió 4. Per tant quatre vectors d'aquest subespai que siguin independents per força han de ser generadors, i viceversa. Així, per demostrar que els $\{\boldsymbol{M}_i\}$ són base n'hi ha prou en veure que són independents o que són generadors. Si es consideren els sistemes lineals $\sum \boldsymbol{M}_i X_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ i $\sum \boldsymbol{M}_i X_i = \boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$, on $\boldsymbol{M}$ és una matriu arbitrària de l'espai $\mathscr{M}_2(\mathbb{K})$, que tenen matriu ampliades:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & 1 & y \\ -1 & 0 & 1 & 0 & z \\ 0 & -1 & 0 & 1 & t \end{pmatrix},$$

aleshores la independència dels $\boldsymbol{M}_i$ equival a que el primer sistema sigui determinat i el fet que siguin generadors equival a que el segon sistema sigui compatible. Les formes esglaonades reduïdes són:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(x-z) \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(y-t) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2}(x+z) \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2}(y+t) \end{pmatrix}$$

i per tant totes dos sistemes tenen les propietats requerides.

Les matrius $\boldsymbol{M}_1$ i $\boldsymbol{M}_2$ compleixen $\boldsymbol{A}\boldsymbol{M}_i = \mathbf{0}$, i per tant pertanyen a U. Com que U és un subespai qualsevol combinació lineal seva també hi pertany. Per tant, $[\boldsymbol{M}_1, \boldsymbol{M}_2] \subseteq U$. Si $\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in U$ aleshores la condició $\boldsymbol{A}\boldsymbol{M} = \mathbf{0}$ equival a que $x + z = y + t = 0 \Rightarrow z = -x, t = -y$ i es té que $\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} x & y \\ -x & -y \end{pmatrix} = x\boldsymbol{M}_1 + y\boldsymbol{M}_2 \in [\boldsymbol{M}_1, \boldsymbol{M}_2]$. Per tant, $U \subseteq [\boldsymbol{M}_1, \boldsymbol{M}_2]$. De les dues inclusions es dedueix la igualtat.

Les matrius $\boldsymbol{M}_3$ i $\boldsymbol{M}_4$ són de la forma $\boldsymbol{A}\boldsymbol{R}$, amb matrius $\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ i $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, respectivament (hi ha moltes altres matrius $\boldsymbol{R}$ que també van bé), i per tant pertanyen a V. Com que V és un subespai es té la inclusió $[\boldsymbol{M}_3, \boldsymbol{M}_4] \subseteq V$. Si $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{R}$ és una matriu qualsevol de V, amb $\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$. Aleshores $\boldsymbol{N} = \begin{pmatrix} x+z & y+t \\ x+z & y+t \end{pmatrix} = (x+z)\boldsymbol{M}_3 + (y+t)\boldsymbol{M}_4$, i això demostra la inclusió $V \subseteq [\boldsymbol{M}_3, \boldsymbol{M}_4]$.

2. S'ha de resoldre l'equació $X_1\boldsymbol{M}_1 + X_2\boldsymbol{M}_2 + X_3\boldsymbol{M}_3 + X_4\boldsymbol{M}_4 = \mathbf{1}_2$, que ja se sap que té solució única perquè les $\boldsymbol{M}_i$ són base. En calcular la solució es troba $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ (de fet abans s'ha donat la forma esglaonada reduïda del sistema per a una matriu $\boldsymbol{M}$ arbitrària, i aquí ens demanen el cas particular de la matriu $\boldsymbol{M} = \mathbf{1}_2$).

Amb el que s'ha vist a l'apartat anterior se sap que $\boldsymbol{M}_1, \boldsymbol{M}_2$ són base de U i $\boldsymbol{M}_3, \boldsymbol{M}_4$ són base de V, per tant l'expressió de $\mathbf{1}_2$ en la base $\boldsymbol{M}_i$ ens dóna ja la solució: les dues matrius $\boldsymbol{M} = \frac{1}{2}\boldsymbol{M}_1 - \frac{1}{2}\boldsymbol{M}_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ i $\boldsymbol{N} = \frac{1}{2}\boldsymbol{M}_3 + \frac{1}{2}\boldsymbol{M}_4 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ són dels subespais U i V, respectivament, i la seva suma és $\mathbf{1}_2$.

L'expressió és única ja que si es té $\boldsymbol{M} + \boldsymbol{N} = \mathbf{1}_2$ amb $\boldsymbol{M} \in U$ i $\boldsymbol{N} \in V$ aleshores escrivint $\boldsymbol{M}$ en la base $\boldsymbol{M}_1, \boldsymbol{M}_2$ de U i $\boldsymbol{N}$ en la base $\boldsymbol{M}_3, \boldsymbol{M}_4$ de V es té una expressió de $\mathbf{1}_2$ en la base $\{\boldsymbol{M}_i\}_{1 \leqslant i \leqslant 4}$

de $\mathscr{M}_2(\mathbb{K})$, i per ser una base, l'expressió és única, i per tant les matrius $\boldsymbol{M}$ i $\boldsymbol{N}$ han de ser les que ja s'han donat abans.

També es pot veure demostrant que $\mathscr{M}_2(\mathbb{K}) = U \oplus V$ (suma directa), el qual es pot veure fent servir la fórmula de Grassmann o bé comprovant directament que $U \cap V = \{\mathbf{0}\}$.

1.47. Per als subespais U i V de $\mathbb{R}^3$ que s'indiquen a continuació calculeu una base i la dimensió de la seva suma i la seva intersecció. En cada cas, digueu si la suma és o no una suma directa:

1. $U = \langle (1, 2, -1), (2, -3, 2) \rangle$, $V = \langle (4, 1, 3), (-3, 1, 2) \rangle$.
2. $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y - 3z = 0\}$, $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -x + y + 4z = 0\}$.
3. $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = y + 3z = 0\}$, $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + z = 2y + z = 0\}$.
4. $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y - 3z = 0\}$, $V = \langle (5, 2, a) \rangle$, on $a \in \mathbb{R}$.

Solució:

1. U té equació $X - 4Y - 7Z = 0$ i V té equació $X + 17Y - 7Z = 0$. $U \cap V = \langle (7, 0, 1) \rangle$ i $U + V = \mathbb{R}^3$. Suma no directa.
2. $U = \langle (2, -1, 0), (3, 0, 1) \rangle$, $V = \langle (4, 0, 1), (0, 4, -1) \rangle$. $U \cap V = \langle (11, -1, 3) \rangle$, $U + V = \mathbb{R}^3$. Suma no directa.
3. $U = \langle (3, -3, 1) \rangle$, $V = \langle (2, 1, -2) \rangle$. $U + V = \langle (3, -3, 1), (2, 1, -2) \rangle$ i $U \cap V = \{\mathbf{0}\}$. Suma directa. té base els dos vectors i $F \cap G$ és trivial. La suma és directa.
4. $U = \langle (3, 0, 1), (1, 1, 0) \rangle$. Si $a = 1$ aleshores $V \subset U$ i la suma no és directa. Si $a \neq 1$, $U \cap V$ és trivial, $U + V = \mathbb{R}^3$ i la suma és directa.

1.48. Sigui $M_n = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espai vectorial de les matrius quadrades d'ordre $n \geqslant 2$ amb coeficients reals, i siguin $S_n \subseteq M_n$ i $A_n \subseteq M_n$ els conjunts de les matrius simètriques (o sigui, amb $\boldsymbol{A}^t = \boldsymbol{A}$) i antisimètriques (tals que $\boldsymbol{A}^t = -\boldsymbol{A}$), respectivament. Comproveu que tant S_n com A_n són subespais vectorials de M_n i demostreu que $M_n = S_n \oplus A_n$.

Solució: De les propietats que les defineixen és immediat que són subespais vectorials. És clar que a una simètrica es pot triar la part triangular superior, i per tant tenen dimensió $\frac{1}{2}n(n+1)$ i a una antisimètrica es pot triar la part triangular estrictament superior, i per tant tenen dimensió $\frac{1}{2}n(n-1)$. La intersecció de tots dos espais és òbviament trivial i la seva suma, tenint en compte les dimensions, és el total, ja que $\frac{1}{2}n(n+1) + \frac{1}{2}n(n-1) = \frac{1}{2}n(2n) = n^2$. Tota matriu A es pot escriure com
$$A = \frac{1}{2}(A + A^t) + \frac{1}{2}(A - A^t),$$
i aquesta és òbviament la descomposició corresponent a la suma dels subespais considerats.

1.49. Es considera l'espai vectorial $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ de les funcions reals de variable real. Recordeu que una funció $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és parell si $f(-x) = f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$ i és imparell si $f(-x) = -f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

Comproveu que els subconjunt formats per les funcions parells i les funcions senars són subespais vectorials complementaris de l'espai de les funcions.

Solució: (a) És òbviament un espai vectorial. Si les funcions $f_1, \ldots, f_n$ són linealment dependents aleshores, per a cada família de nombres reals $x_1, \ldots, x_n$, els vectors $v_1 = (f_1(x_1), \ldots, f_1(x_n))$, $\ldots$, $v_n(f_n(x_1), \ldots, f_n(x_n)) \in \mathbb{R}^n$ són linealment dependents. Com que, sigui quin sigui n, existeixen funcions f_i tals que aquests vectors v_i donen una família de n vectors de $\mathbb{R}^n$ prefixats a voluntat, en particular independents, hi ha famílies de funcions independents amb nombre d'elements arbitràriament gran.

(b) Les combinacions lineals de funcions parells o senars tenen aquesta mateixa propietat.

(c) Tota funció f es pot escriure com $f(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(x)-f(-x)}{2}$, que és una suma d'una funció parell i una de senar. Per tant la suma de tots dos subespais és el total. Una funció que sigui alhora parell i senar compleix, per a tot $x \in \mathbb{R}$, que $f(x) = f(-x) = -f(x)$. Per tant $2f(x) = 0$ i es dedueix que $f(x) = 0$ per a tot x. Per tant és la funció zero: la intersecció dels dos subespais és trivial i per tant estan en suma directa.

1.50. A $\mathbb{R}^4$ es consideren els vectors

$$\boldsymbol{v}_1 = (1,0,0,1), \quad \boldsymbol{v}_2 = (1,1,0,1), \quad \boldsymbol{v}_3 = (0,-1,1,0), \quad \boldsymbol{v}_4 = (1,1,1,a),$$

on $a \in \mathbb{R}$, i els subespais $U = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle$, $V = \langle \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4 \rangle$. Calculeu una base de $U + V$ i de $U \cap V$ i expresseu els vectors $\boldsymbol{u} = (1,0,2,2)$ i $\boldsymbol{v} = (1,-1,-1,1)$ de totes les maneres possibles com a suma d'un vector de U i un vector de V.

Solució: Sigui $a \neq 1$. Aleshores els quatre vectors són independents. Per tant, els subespais U i V tenen suma igual a $\mathbb{R}^4$ i intersecció trivial. Tot vector de $\mathbb{R}^4$ s'escriu de manera única com a suma d'un vector de l'un i un de l'altre. Es té $\boldsymbol{v} = 3\boldsymbol{v}_1 - 2\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_3 = (3\boldsymbol{v}_1 - 2\boldsymbol{v}_2) + (-\boldsymbol{v}_3)$ amb $3\boldsymbol{v}_1 - 2\boldsymbol{v}_2 \in U$ i $-\boldsymbol{v}_3 \in V$.

Sigui $a = 1$. En aquest cas els quatre vectors són dependents i generen un subespai de dimensió 3 de $\mathbb{R}^4$. La suma és $F + G = [v_1, v_2, v_3]$ i la intersecció és $F \cap G = [(1,2,0,1)]$. i les descomposicions de v com a suma d'un vector d'un subespai i un de l'altre s'obtenen sumant a l'un i restant a l'altre un mateix múltiple d'aquest vector.

1.51. *Distributivitat de suma i intersecció.* Siguin U, V i W subespais d'un mateix espai vectorial. Compareu els subespais següents, dient si són iguals o si hi ha alguna inclusió entre ells:

1. $U \cap (V + W)$ i $(U \cap V) + (U \cap W)$,
2. $U + (V \cap W)$ i $(U + V) \cap (U + W)$.

1.52. Demostreu que la suma de subespais $W = W_1 + \cdots + W_n$ és una suma directa si, i només si, $\dim W = \sum_{i=1}^n \dim W_i$.

Solució: Sigui $\boldsymbol{w}_{i,1}, \ldots, \boldsymbol{w}_{i,d_i}$ una base del subespai W_i per a cada i, de manera que $d_i = \dim W_i$. Es considera la família de $d = d_1 + d_2 + \cdots + d_n$ vectors que consisteix en agafar totes aquestes bases:

$$\boldsymbol{w}_{1,1}, \ldots, \boldsymbol{w}_{1,d_1}, w_{2,1}, \ldots, \boldsymbol{w}_{2,d_2}, \ldots, \boldsymbol{w}_{n,1}, \ldots, \boldsymbol{w}_{n,d_n}.$$

Aquesta família genera l'espai W ja que donat un vector $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}_1 + \cdots + \boldsymbol{w}_n \in W$ cada sumand $\boldsymbol{w}_i$ és combinació lineal de la base $\boldsymbol{w}_{i,1}, \ldots, \boldsymbol{w}_{i,d_i}$ i per tant el vector $\boldsymbol{w}$ és combinació lineal de tots els $\boldsymbol{w}_{i,j}$. Aleshores $\dim W \leqslant d$ i $\dim W = d \Leftrightarrow$ la família anterior és independent.

Suposi's que és independent, i sigui $\boldsymbol{w} = \sum \boldsymbol{w}_i = \sum \boldsymbol{w}'_i \in W$ un vector escrit de dues maneres com a suma de vectors dels subespais, siguin $\boldsymbol{w}_i = \sum_{j=1}^{d_i} x_{ij} \boldsymbol{w}_{ij}$ i $\boldsymbol{w}'_i = \sum_{j=1}^{d_i} y_{ij} \boldsymbol{w}_{ij}$. Aleshores es té una doble expressió $\boldsymbol{w} = \sum_{i,j} x_{ij} \boldsymbol{w}_{ij} = \sum y_{ij} \boldsymbol{w}_{ij}$ que per ser els $\boldsymbol{w}_{ij}$ independents ha de tenir els mateixos coeficients $x_{ij} = y_{ij}$, i per tant es té que $^\circ w_i = \boldsymbol{w}'_i$ per a tot $i = 1, \ldots, n$. Recíprocament, si la suma és directa aleshores donades dues combinacions lineals $\sum_{i,j} x_{ij} \boldsymbol{w}_{ij} = \sum_{i,j} y_{ij} \boldsymbol{w}_{ij}$ es defineixen els vectors $\boldsymbol{w}_i = \sum_j x_{i,j} \boldsymbol{w}_j$ i $\boldsymbol{w}'_i = \sum_j y_{i,j} \boldsymbol{w}_j$, que pertanyen al subespai W_i. La igualtat de combinacions lineals diu que $\boldsymbol{w}_1 + \cdots + \boldsymbol{w}_n = \boldsymbol{w}'_1 + \cdots + \boldsymbol{w}'_n$. Per ser suma directa $\boldsymbol{w}_i = \boldsymbol{w}'_i$ per a cada i, i fent servir que $\boldsymbol{w}_{i,1}, \ldots, \boldsymbol{w}_{i,d_i}$ és base de W_i es dedueix que $x_{ij} = y_{ij}$ per a tot...

a expressi

1.53. Demostreu que la suma de subespais $W = W_1 + \cdots + W_n$ és una suma directa si, i només si,

$$W_i \cap \sum_{j \neq i} W_j = \{\boldsymbol{0}\}, \qquad \forall i = 1, \ldots, n.$$

Doneu un exemple amb $W_1 \cap W_2 \cap \cdots \cap W_n = \{\boldsymbol{0}\}$ que no sigui una suma directa.

1.54. Doneu una caracterització de la independència lineal d'una família de vectors fent servir el concepte de suma directa de subespais.

Capítol 2

Matrius

Al capítol anterior ja s'ha introduït la notació Shimura per treballar amb matrius i s'han donat les definicions bàsiques. Recordi's que al conjunt $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ hi ha definida una suma i un producte per escalars que li donen estructura de $\mathbb{K}$-espai vectorial, que té dimensió mn i admet com a base les matrius $\boldsymbol{E}_{ij}$ amb zeros a totes les entrades excepte una, on hi ha un 1.

2.1 Producte de matrius

El producte de dues matrius està definit quan el nombre de columnes de la primera coincideix amb el nombre de files de la segona, de la manera següent: donades $\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ i $\boldsymbol{B} = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$ el seu producte és la matriu $\boldsymbol{C} = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{K})$ amb entrades:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}, \qquad 1 \leqslant i \leqslant m, \quad 1 \leqslant j \leqslant p.$$

Producte de matrius en termes de files i columnes. El producte de matrius $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{C}$ es pot interpretar en termes de files i columnes de la manera següent: la columna j-èsima de $\boldsymbol{C}$ és la combinació lineal de les n columnes de $\boldsymbol{A}$ amb coeficients els n escalars de la columna j-èsima de $\boldsymbol{B}$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} b_{1j} + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} b_{2j} + \cdots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} b_{nj} = \begin{pmatrix} c_{1j} \\ c_{2j} \\ \vdots \\ c_{mj} \end{pmatrix},$$

i la fila i-èsima de $\boldsymbol{C}$ és la combinació lineal de les n files de $\boldsymbol{B}$ amb coeficients els n escalars de la fila i-èsima de $\boldsymbol{A}$:

$$a_{i1}\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \end{pmatrix} + a_{i2}\begin{pmatrix} b_{21} & \cdots & b_{2n} \end{pmatrix} + \cdots + a_{in}\begin{pmatrix} b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{i1} & \cdots & c_{in} \end{pmatrix}.$$

Aquestes expressions es poden escriure també usant la notació següent, que més endavant serà útil: les files d'una matriu $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ es denoten $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$, de manera que la fila $\boldsymbol{a}_i$ té components $a_{i1}, \ldots, a_{in}$; les columnes es denoten $\boldsymbol{a}^j$, amb components $a_{1j}, \ldots, a_{mj}$. En aquesta notació les files $\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_m$ de la matriu producte $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB}$ són els productes $\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{B}, \ldots, \boldsymbol{a}_m\boldsymbol{B}$, amb $\boldsymbol{c}_i = \boldsymbol{a}_i\boldsymbol{B} = a_{i1}\boldsymbol{b}_1 + \cdots + a_{im}\boldsymbol{b}_m$, i les columnes $\boldsymbol{c}^1, \ldots, \boldsymbol{c}^n$ de $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB}$ són els productes $\boldsymbol{Ab}^1, \ldots, \boldsymbol{Ab}^n$, amb $\boldsymbol{c}^j = \boldsymbol{Ab}^j = \boldsymbol{a}^1 b_{1j} + \cdots + \boldsymbol{a}^n b_{nj}$.

En particular, la matriu $\boldsymbol{AE}_{ij}$ té totes les columnes zero excepte la columna j-èsima, on hi té la columna i-èsima de $\boldsymbol{A}$, i la matriu $\boldsymbol{E}_{ij}\boldsymbol{A}$ té totes les files zero excepte la fila i-èsima, on hi té la fila j-èsima de $\boldsymbol{A}$.

Proposició 2.1.1 (Propietats del producte de matrius) *El producte de matrius satisfà les propietats següents:*

- Associativa: *Siguin* $\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, $\boldsymbol{B} \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$, *i* $\boldsymbol{C} \in \mathcal{M}_{p\times q}(\mathbb{K})$. *Aleshores:*
$$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC}).$$
- Distributiva: *Siguin* $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2 \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ *i* $\boldsymbol{B}, \boldsymbol{B}_1, \boldsymbol{B}_2 \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$. *Aleshores:*
$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}_1 + \boldsymbol{B}_2) = \boldsymbol{AB}_1 + \boldsymbol{AB}_2 \qquad i \qquad (\boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{A}_2)\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B}.$$
- Elements neutres per cada costat: *Sigui* $\mathbf{1}_r \in \mathcal{M}_r(\mathbb{K})$ *la* matriu identitat *de mida r, amb totes les entrades zero excepte les de la diagonal, que són totes* 1. *Aleshores, per a tota matriu* $\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, *es té:*
$$\mathbf{1}_m \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A} \cdot \mathbf{1}_n = \boldsymbol{A}.$$

PROVA: Es comprovarà només l'associativa; les demés propietats es poden demostrar de manera anàloga i, de fet, són més senzilles. Siguin $\boldsymbol{A} = (a_{ij}), \boldsymbol{B} = (b_{ij}), \boldsymbol{C} = (c_{ij})$. Siguin $\boldsymbol{AB} = (u_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{K})$ i $\boldsymbol{BC} = (v_{ij}) \in \mathcal{M}_{n\times q}(\mathbb{K})$. Siguin $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C} = (\alpha_{ij})$ i $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC}) = (\beta_{ij})$ totes dues a $\mathcal{M}_{m\times q}(\mathbb{K})$. Aleshores, per a tot i i tot j amb $1 \leqslant i \leqslant m$ i $1 \leqslant j \leqslant q$ es té

$$\begin{aligned}\alpha_{ij} = \sum_{s=1}^{p} u_{is}c_{sj} = \sum_{s=1}^{p}\left(\sum_{r=1}^{n} a_{ir}b_{rs}\right)c_{sj} &= \sum_{s=1}^{p}\sum_{r=1}^{n} a_{ir}b_{rs}c_{sj} \\ &= \sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{p} a_{ir}b_{rs}c_{sj} = \sum_{r=1}^{n} a_{ir}\left(\sum_{s=1}^{p} b_{rs}c_{sj}\right) = \sum_{r=1}^{n} a_{ir}v_{rj} = \beta_{ij}. \qquad \square\end{aligned}$$

El producte de matrius defineix una operació interna al conjunt $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de les matrius quadrades. Les propietats de la proposició anterior asseguren que aquest conjunt, amb les operacions suma i producte de matrius, és un anell amb unitat $\mathbf{1}_n$.

Definició 2.1.2 (Matrius invertibles) *La matriu* $\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *es diu* invertible *si existeix una matriu* $\boldsymbol{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *tal que* $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA} = \mathbf{1}_n$; *si és així, la matriu amb aquestes propietats és única, se li diu* matriu inversa *de la matriu* $\boldsymbol{A}$ *i es denota* $\boldsymbol{A}^{-1}$.

El subconjunt de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *format per les matrius invertibles s'anomena* grup lineal *i es denota* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

El *grup lineal* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, tal i com el seu nom indica, té estructura de grup, amb operació el producte de matrius. En efecte, el producte $\boldsymbol{AB}$ de matrius invertibles també és invertible i té per inversa la matriu $(\boldsymbol{AB})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$, producte de les inverses respectives canviades d'ordre, i si $\boldsymbol{A}$ és invertible la seva inversa també ho és, amb $(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1} = \boldsymbol{A}$.

Definició 2.1.3 (Matriu transposada) *Si $\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, la seva matriu* transposada *és la matriu $\boldsymbol{A}^t = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$ amb entrades*

$$c_{ij} = a_{ji}, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n, \quad 1 \leqslant j \leqslant m.$$

Proposició 2.1.4 *La transposició de matrius satisfà les propietats següents:*

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^t = \boldsymbol{A}^t + \boldsymbol{B}^t, \qquad (\boldsymbol{AB})^t = \boldsymbol{B}^t\boldsymbol{A}^t, \qquad (\lambda\boldsymbol{A})^t = \lambda\boldsymbol{A}^t, \qquad (\boldsymbol{A}^t)^t = \boldsymbol{A}.$$

A més, si $\boldsymbol{A}$ és invertible també ho és la seva transposada, amb inversa $(\boldsymbol{A}^t)^{-1} = (\boldsymbol{A}^{-1})^t$.

PROVA: Totes les demostracions són immediates. Es veurà, per exemple, la transposada del producte. Per a tota matriu $\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ les entrades de la transposada es denotaran posant $\boldsymbol{A}^t = (a^t_{ij}) \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$, amb $a^t_{ij} = a_{ji}$. Aleshores, si $\boldsymbol{AB} = (\alpha_{ij})$ i $\boldsymbol{B}^t\boldsymbol{A}^t = (\beta_{ij})$, es té:

$$\alpha^t_{ij} = \alpha_{ji} = \sum a_{jk}b_{ki} = \sum a^t_{kj}b^t_{ik} = \sum b^t_{ik}a^t_{kj} = \beta_{ij}. \qquad \square$$

Definició 2.1.5 (Matriu simètrica) *Una matriu quadrada $\boldsymbol{A}$ es diu* simètrica *si $\boldsymbol{A}^t = \boldsymbol{A}$.*

Definició 2.1.6 (Traça) *La* traça *d'una matriu quadrada $\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ és la suma dels elements de la diagonal:* $\mathrm{Tr}(\boldsymbol{A}) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$.

Proposició 2.1.7 *La* traça *satisfà les propietats següents:*

$$\mathrm{Tr}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = \mathrm{Tr}(\boldsymbol{A}) + \mathrm{Tr}(\boldsymbol{B}), \quad \mathrm{Tr}(x\boldsymbol{A}) = x\,\mathrm{Tr}(\boldsymbol{A}), \quad \mathrm{Tr}(\boldsymbol{A}^t) = \mathrm{Tr}(\boldsymbol{A}), \quad \mathrm{Tr}(\boldsymbol{AB}) = \mathrm{Tr}(\boldsymbol{BA}).$$

PROVA: Totes són immediates. Es veurà, per exemple, la del producte. Donades matrius $\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}$ i $\boldsymbol{B} = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{n\times m}$ amb productes $\boldsymbol{AB} = (x_{ij}) \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ i $\boldsymbol{BA} = (y_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, es té:

$$\mathrm{Tr}(\boldsymbol{AB}) = \textstyle\sum_{i=1}^m x_{ii} = \sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n a_{ij}b_{ji} = \sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^m b_{ji}a_{ij} = \sum_{j=1}^n y_{jj} = \mathrm{Tr}(\boldsymbol{BA}). \qquad \square$$

Matrius amb entrades a un anell. Es poden considerar també matrius amb entrades a coeficients en un anell commutatiu unitari qualsevol que no cal que sigui un cos. Per exemple matrius amb entrades que siguin enters de l'anell $\mathbb{Z}$, o polinomis de $\mathbb{K}[X]$, o elements de l'anell $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ de les classes de congruència mòdul n. Les operacions amb aquest tipus de matrius es defineixen exactament igual i satisfan les mateixes propietats. Tot el que s'ha dit en aquesta secció sobre matrius a coeficients en un cos val també per a matrius a coeficients en un anell commutatiu unitari.

Problemes

2.1. Quin és el resultat de multiplicar una matriu per una matriu diagonal? Quina diferència hi ha quan se la multiplica per l'esquerra o per la dreta?

SOLUCIÓ: L'efecte és el de multiplicar les files (resp. columnes) de la matriu $\boldsymbol{A}$ pels escalars de la diagonal de la matriu diagonal $\boldsymbol{D}$, en fer el producte $\boldsymbol{DA}$ (resp. el producte $\boldsymbol{AD}$).

2.2. Doneu exemples de matrius quadrades amb les característiques següents:

1. dues matrius $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ tals que $\mathbf{0} \neq \boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA} \neq \mathbf{0}$,
2. dues matrius no nul·les amb producte igual a zero,
3. tres matrius $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ tals que $\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{B}$ i amb $\boldsymbol{AC} = \boldsymbol{BC} \neq \mathbf{0}$.

Solució: La primera demana essencialment trobar dues matrius que no commutin amb la condició que els productes siguin no nuls; gairebé qualsevol tria de matrius aleatòries compleix la condició. Per exemple:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{0} \neq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{BA} \neq \boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq \mathbf{0}.$$

La segona s'aconsegueix per exemple amb una matriu nilpotent: una que tingui forma triangular superior estricta:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{A}^2 = \mathbf{0}$$

La tercera demana comprovar que no sempre es pot simplificar en un producte de matrius una matriu fins i tot si és no nul·la: la condició per simplificar és que tingui determinant no nul. Per exemple:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & x_1 \\ b & y_1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} a & x_2 \\ b & y_2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{AC} = \boldsymbol{BC} = \begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix},$$

siguin quins siguin x_1, y_1, x_2, y_2.

2.3. Expliqueu perquè en general no es compleixen, per a matrius $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, les igualtats següents:

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{B}^2, \qquad (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2 = \boldsymbol{A}^2 + 2\boldsymbol{AB} + \boldsymbol{B}^2,$$

i determineu quines són les condicions necessàries i suficients sobre $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{B}$ per tal que es compleixin.

Solució: Les condicions necessàries i suficients són que les matrius commutin.

2.4. Trobeu totes les matrius quadrades de mida 2 i 3, respectivament, que commuten amb les matrius:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Solució: Les matrius que commuten amb $\boldsymbol{A}$ són un subespai de dimensió 2 i les que commuten amb $\boldsymbol{B}$ són un subespai de dimensió 3 format per les matrius $\begin{pmatrix} x & y & z \\ 0 & x & y \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}$. En general les matrius que commuten amb una matriu donada són un subespai vectorial de l'espai de les matrius.

2.5. Determineu totes les matrius $\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tals que:

1. $\boldsymbol{A}^2 = \mathbf{0}$;
2. $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}$;
3. $\boldsymbol{A}^2 = \mathbf{1}_2$.

Solució: Sigui $\boldsymbol{A} = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$. Aleshores:

$$\boldsymbol{A}^2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & d^2+bc \end{pmatrix}$$

i s'han de resoldre les equacions:

1. $a^2+bc=b(a+d)=c(a+d)=d^2+bc=0$, que tenen solucions:
$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\quad\text{o}\quad\begin{pmatrix}0&b\\0&0\end{pmatrix}\quad\text{o}\quad\begin{pmatrix}a&-a^2/c\\c&-a\end{pmatrix}\quad\text{amb}\quad c\neq 0.$$

2. $a^2+bc=a; b(a+d)=b; c(a+d)=c; d^2+bc=d$, que tenen solucions:
$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{1-4bc})&b\\c&\frac{1}{2}(1\mp\sqrt{1-4bc})\end{pmatrix}\quad\text{amb}\quad 4bc\leqslant 1.$$

3. $a^2+bc=d^2+bc=1; b(a+d)=c(a+d)=0$, que tenen solucions:
$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\pm1&0\\0&\pm1\end{pmatrix}\quad\text{o}\quad\begin{pmatrix}a&(1-a^2)/c\\c&-a\end{pmatrix}\quad\text{amb}\quad c\neq 0.$$

2.6. Sigui $\boldsymbol{A}=\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)\in\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. Demostreu que $\boldsymbol{A}$ és invertible si, i només si, $ad-bc\neq 0$ i, en aquest cas, calculeu la seva inversa.

Solució: Es considera la matriu $\boldsymbol{A}^*=\left(\begin{smallmatrix}d&-b\\-c&a\end{smallmatrix}\right)$. El producte $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}$ és la matriu $(ad-bc)\mathbf{1}_2$. Si $ad-bc\neq 0$ aleshores $\boldsymbol{A}$ és invertible ja que la matriu $(ad-bc)^{-1}\boldsymbol{A}^*$ és inversa seva. Recíprocament, si la matriu $\boldsymbol{A}$ és invertible, multiplicant per $\boldsymbol{A}^{-1}$ es dedueix que $\boldsymbol{A}^*=(ad-bc)\boldsymbol{A}^{-1}$; si fos $ad-bc=0$ aleshores seria $\boldsymbol{A}^*=\mathbf{0}_2\Rightarrow\boldsymbol{A}=\mathbf{0}_2$, que contradiu el fet que $\boldsymbol{A}$ sigui invertible.

2.7. Sigui $\boldsymbol{A}=\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)\in\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. Comproveu que $\boldsymbol{A}^2-(a+d)\boldsymbol{A}+(ad-bc)\mathbf{1}_2=\mathbf{0}_2$ i deduïu d'aquesta identitat que $\boldsymbol{A}$ és invertible si, i només si, $ad-bc\neq 0$, i que, en aquest cas, la seva inversa és $\boldsymbol{A}^{-1}=(ad-bc)^{-1}((a+d)\mathbf{1}_2-\boldsymbol{A})$.

Solució: La comprovació de la identitat és un càlcul. Si $ad-bc\neq 0$ es té:
$$\boldsymbol{A}^2-(a+d)\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+(a+d)\mathbf{1}_2)=-(ad-bc)\mathbf{1}_2\quad\Rightarrow\quad\boldsymbol{A}^{-1}=(bc-ad)^{-1}(\boldsymbol{A}+(a+d)\mathbf{1}_2).$$

Si la matriu $\boldsymbol{A}$ és invertible i es tingués $ad-bc=0$ es tindria:
$$\boldsymbol{A}^2-(a+d)\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-(a+d)\mathbf{1}_2)=\mathbf{0}_2\quad\Rightarrow\quad\boldsymbol{A}-(a+d)\mathbf{1}_2=\boldsymbol{A}^{-1}\mathbf{0}_2=\mathbf{0}_2\quad\Rightarrow\quad\boldsymbol{A}=\mathbf{0}_2,$$
ja que $\boldsymbol{A}-(a+d)\mathbf{1}_2=-\boldsymbol{A}^*$, que té els mateixos coeficients que $\boldsymbol{A}$ potser canviats de signe. Això és una contradicció ja que la matriu zero no és invertible.

2.8. Sigui $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$. Es defineix:
$$d=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Demostreu que $\boldsymbol{A}$ és invertible si, i només si, $d\neq 0$ i, en aquest cas, calculeu la seva inversa.
Indicació: Considereu la matriu:
$$\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix}a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32}&-a_{21}a_{33}+a_{23}a_{31}&a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31}\\-a_{12}a_{33}+a_{13}a_{32}&a_{11}a_{33}-a_{13}a_{31}&-a_{11}a_{32}+a_{12}a_{31}\\a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22}&-a_{11}a_{23}+a_{13}a_{21}&a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\end{pmatrix}.$$

Solució: Exactament igual que en el problema anterior: el producte $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}$ és la matriu $d\mathbf{1}_3$. Si $d\neq 0$ aleshores $\boldsymbol{A}$ és invertible ja que la matriu $d^{-1}\boldsymbol{A}^*$ és inversa seva. Per veure el recíproc es pot veure que l'escalar $d=d(\boldsymbol{A})$ associat a una matriu és multiplicatiu en el sentit que $d(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})=d(\boldsymbol{A})d(\boldsymbol{B})$ i que $d(\mathbf{1}_3)=1$, de manera que $d(\boldsymbol{A})d(\boldsymbol{A}^{-1})=1$ i per tant no pot ser que $d=d(\boldsymbol{A})$ sigui zero.

2.9. Calculeu, per a cada enter $n \in \mathbb{Z}$ per al qual tingui sentit, la potència n-èsima de les matrius següents:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Solució:

$$\boldsymbol{A}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n & 1 & 0 \\ \frac{1}{2}n(n+1) & n & 1 \end{pmatrix} \qquad \forall n \in \mathbb{Z},$$

$$\boldsymbol{B}^0 = \mathbf{1}_3, \quad \boldsymbol{B}^n = 3^{n-1}\boldsymbol{B} \ \forall n \geqslant 1, \quad \nexists \boldsymbol{B}^n \mathrm{si} n < 0,$$

$$\boldsymbol{C}^n = \mathbf{1}_2, \boldsymbol{C}, -\mathbf{1}_2, -\boldsymbol{C}, \quad \text{segons sigui} \quad n \pmod 4$$

$$\boldsymbol{D}^0 = \mathbf{1}_3, \boldsymbol{D}^1 = \boldsymbol{D}, \boldsymbol{D}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & bc \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.10. Calculeu, per a cada enter $n \in \mathbb{Z}$ per al qual tingui sentit, la potència n-èsima de les matrius següents:

$$\boldsymbol{J}_2 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{J}_3 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{J}_4 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{J}_d = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_d(\mathbb{K}), \qquad \text{amb} \quad a_{ij} = \begin{cases} \lambda, & \text{si} \quad j = i, \\ 1, & \text{si} \quad j = i+1, \\ 0, & \text{altrament.} \end{cases}$$

Solució:

$$\boldsymbol{A}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n & 1 & 0 \\ \frac{1}{2}n(n+1) & n & 1 \end{pmatrix} \qquad \forall n \in \mathbb{Z},$$

$$\boldsymbol{B}^0 = \mathbf{1}_3, \quad \boldsymbol{B}^n = 3^{n-1}\boldsymbol{B} \ \forall n \geqslant 1, \quad \nexists \boldsymbol{B}^n \mathrm{si} n < 0,$$

$$\boldsymbol{C}^n = \mathbf{1}_2, \boldsymbol{C}, -\mathbf{1}_2, -\boldsymbol{C}, \quad \text{segons sigui} \quad n \pmod 4$$

$$\boldsymbol{D}^0 = \mathbf{1}_3, \boldsymbol{D}^1 = \boldsymbol{D}, \boldsymbol{D}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & bc \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.11. Sigui $\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ una matriu no nul·la. Sigui $U = \langle \mathbf{1}_2, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}^2, \boldsymbol{A}^3, \dots \rangle \subseteq \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ el subespai generat per les potències de $\boldsymbol{A}$ i sigui $V = \{\boldsymbol{B} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) : \boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}\}$ el subespai de les matrius que commuten amb $\boldsymbol{A}$. Demostreu que:

1. $\dim U = 1$ o 2, i calculeu aquesta dimensió en funció de la matriu $\boldsymbol{A}$.
2. $\dim V = 2$ o 4, i calculeu aquesta dimensió en funció de la matriu $\boldsymbol{A}$.
3. Si $\boldsymbol{A} \neq \lambda \mathbf{1}_2$ per a un escalar λ, aleshores $U = V$.

2.12. Una matriu quadrada $\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ es diu *triangular superior* si $a_{ij} = 0$ sempre que $i > j$. Comproveu que les matrius triangulars superiors són un subespai vectorial de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ que és tancat pel producte de matrius.

Caracteritzeu les matrius triangulars superiors invertibles i calculeu la seva matriu inversa.

2.13. Per a cada enter $r \geqslant 0$ es denota $T_r(\mathbb{K})$ el subconjunt de les matrius $\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tals que $a_{ij} = 0$ sempre que $i + r > j$. Comproveu que si $\boldsymbol{A} \in T_r(\mathbb{K})$ i $\boldsymbol{B} \in T_s(\mathbb{K})$ aleshores $\boldsymbol{AB} \in T_{r+s}(\mathbb{K})$.

SOLUCIÓ: Siguin $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ i $\boldsymbol{B} = (b_{ij})$ matrius de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ amb $a_{ij} = 0$ si $i + r > j$ i amb $b_{ij} = 0$ si $i + s > j$. Sigui $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB} = (c_{ij})$, amb $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$. Siguin i, j índexs amb $i + (r + s) > j$. Aleshores per a cada $k = 1, \dots, n$, si $i + r > k$ és $a_{ik} = 0$ i si $i + r \leqslant k$ aleshores $k + s \geqslant i + r + s > j$ i per tant $b_{kj} = 0$. Així, cadascun dels sumands és zero i per tant $c_{ij} = 0$, de manera que efectivament $\boldsymbol{C} \in T_{r+s}(\mathbb{K})$.

El conjunt de les matrius $T_r(\mathbb{K})$ és el conjunt de les matrius triangulars superiors quan $r = 0$ i es redueix a la matriu zero per a valors $r \geqslant n$.

2.14. Demostreu que les matrius $\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}_n(K)$ que commuten amb totes les demés matrius de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ són les de la forma $\lambda \boldsymbol{I}_n$ amb $\lambda \in K$.
INDICACIÓ: estudieu les condicions que cal imposar a la matriu $\boldsymbol{A}$ per assegurar que commuta amb la matriu $\boldsymbol{E}_{ij}$ de la base canònica.

2.15. Doneu condicions necessàries i suficients per tal que una matriu diagonal sigui invertible, i si ho és calculeu la seva inversa. Feu el mateix amb les matrius triangulars superiors (matrius (a_{ij}) amb $a_{ij} = 0$ sempre que $i > j$).

2.16. Siguin $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ matrius simètriques (una matriu quadrada és simètrica si és igual a la seva transposada).

1. Demostreu que el producte $\boldsymbol{AB}$ és una matriu simètrica si, i només si, $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{B}$ commuten.
2. Comproveu que si $\boldsymbol{A}$ és invertible aleshores $\boldsymbol{A}^{-1}$ és simètrica.
3. Comproveu que, per tota matriu $\boldsymbol{C} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la matriu $\boldsymbol{C}^t \boldsymbol{AC}$ és simètrica.
4. Digueu quines de les matrius següents són simètriques:

$$\boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{B}^2, \quad (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}), \quad \boldsymbol{ABA}, \quad \boldsymbol{ABAB}.$$

2.17. *Matrius per blocs.* De vegades convé construir una matriu a partir de matrius més petites (blocs) de la manera següent: siguin $\boldsymbol{A}_{ij} \in \mathcal{M}_{m_i \times n_j}(\mathbb{K})$ matrius de mides $m_i \times n_j$ per a $1 \leqslant i \leqslant r$ i $1 \leqslant j \leqslant s$. Aleshores la matriu

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1s} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} & \cdots & \boldsymbol{A}_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{r1} & \boldsymbol{A}_{r2} & \cdots & \boldsymbol{A}_{rs} \end{pmatrix}$$

és la matriu que mida $m \times n$ amb $m = \sum_{i=1}^{r} m_i$ i $n = \sum_{j=1}^{s} n_j$ que s'obté en posar les matrius $\boldsymbol{A}_{ij}$ en una disposició rectangular.

- Sigui $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{B}_{ij}) \in \mathcal{M}_{m \times n}$ una matriu donada per blocs de les mateixes mides: $\boldsymbol{B}_{ij} \in \mathcal{M}_{m_i \times n_j}$. Comproveu que la matriu suma $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$ és una matriu per blocs $\boldsymbol{C} = (\boldsymbol{C}_{ij})$ que s'obtenen sumant els blocs corresponents: $\boldsymbol{C}_{ij} = \boldsymbol{A}_{ij} + \boldsymbol{B}_{ij}$.
- Sigui $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{B}_{jk}) \in \mathcal{M}_{n \times p}$ una matriu donada per blocs de mides $\boldsymbol{B}_{jk} \in \mathcal{M}_{n_j \times p_k}$ per a $1 \leqslant j \leqslant s$ i $1 \leqslant k \leqslant t$. Comproveu que la matriu producte $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB}$ és la matriu donada per blocs $\boldsymbol{C} = (\boldsymbol{C}_{ik})$ amb

$$\boldsymbol{C}_{ik} = \sum_{j=1}^{s} \boldsymbol{A}_{ij} \boldsymbol{B}_{jk}.$$

Solució: Es farà servir la notació següent per indicar les entrades d'una matriu per blocs: es denotarà $a_{(i,u),(j,v)}$ l'entrada de $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{A}_{ij})$ que està al bloc (i, j) en la fila u-èsima i columna j-èsima. La seva posició a la matriu $\boldsymbol{A}$ és la fila $(m_1 + \cdots + m_{i-1} + u)$-èsima i columna $(n_1 + \cdots + n_{j-1} + v)$-èsima.

2.18. Siguin $\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}_{4\times 2}(\mathbb{K})$ i $\boldsymbol{B} \in \mathcal{M}_{2\times 4}(\mathbb{K})$ matrius tals que:

$$\boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Trobeu la matriu $\boldsymbol{BA}$.

Solució: La matriu $\boldsymbol{AB}$ és la matriu per caixes $\begin{pmatrix} \mathbf{1}_2 & -\mathbf{1}_2 \\ -\mathbf{1}_2 & \mathbf{1}_2 \end{pmatrix}$. Es consideren les matrius $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{B}$ formades per caixes de mida 2: $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 \\ \boldsymbol{A}_2 \end{pmatrix}$ i $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{B}_2 \end{pmatrix}$. Aleshores el producte de l'enunciat, escrit en termes de caixes, diu que:

$$\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_1 = \mathbf{1}_2, \quad \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_2 = -\mathbf{1}_2, \quad \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B}_1 = -\mathbf{1}_2, \quad \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B}_2 = \mathbf{1}_2.$$

D'aquestes identitats es dedueix que $\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{A}_1 = \boldsymbol{B}_2\boldsymbol{A}_2 = \mathbf{1}_2$ i que $\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{A}_2 = \boldsymbol{B}_2\boldsymbol{A}_1 = -\mathbf{1}_2$. Aleshores es té que $\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{B}_1\boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{B}_2\boldsymbol{A}_2 = 2\mathbf{1}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

2.2 Equivalència de matrius i rang

Donada una matriu $\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, a la secció 1.4 s'han definit les transformacions elementals de files i columnes i el conceptes de forma esglaonada reduïda per files i per columnes, i s'ha demostrat que tota matriu es pot convertir en una matriu que està en forma esglaonada (resp. esglaonada reduïda) per files o per columnes a base d'aplicar-li transformacions elementals de files o de columnes.

Definició 2.2.1 (Matrius elementals) *S'anomenen* matrius elementals *les matrius quadrades de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ d'un dels tres tipus següents:*

- Tipus I: $\mathscr{E}_{r,s}$ *és la matriu identitat $\mathbf{1}_n$ amb les files r i s intercanviades.*
- Tipus II: $\mathscr{E}_r(\lambda)$ *és la matriu identitat $\mathbf{1}_n$ excepte que $a_{rr} = \lambda$ on λ és un escalar $\neq 0$.*
- Tipus III: $\mathscr{E}_{rs}(\lambda)$ *és la matriu identitat $\mathbf{1}_n$ excepte que $a_{rs} = \lambda$ on λ és un escalar i $r \neq s$.*

Les matrius elementals es poden escriure en termes de la matriu identitat i de les matrius de la base canònica $\boldsymbol{E}_{ij}$ de la manera següent:

$$\mathscr{E}_{rs} = \mathbf{1}_n - \boldsymbol{E}_{rr} - \boldsymbol{E}_{ss} + \boldsymbol{E}_{rs} + \boldsymbol{E}_{sr}, \quad \mathscr{E}_r(\lambda) = \mathbf{1}_n + (\lambda - 1)\boldsymbol{E}_{rr}, \quad \mathscr{E}_{rs}(\lambda) = \mathbf{1}_n + \lambda\boldsymbol{E}_{rs}.$$

Lema 2.2.2 *El producte $\mathscr{E}\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ d'una matriu elemental $\mathscr{E} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ per una matriu $\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ produeix en $\boldsymbol{A}$ l'efecte d'aplicar una transformació elemental de files, de la manera següent:*

- *multiplicar per $\mathscr{E} = \mathscr{E}_{r,s}$ intercanvia les files r-èsima i s-èsima de $\boldsymbol{A}$;*

- *multiplicar per* $\mathscr{E} = \mathscr{E}_r(\lambda)$ *multiplica la fila* r*-èsima de* $\boldsymbol{A}$ *per l'escalar no nul* λ,
- *multiplicar per* $\mathscr{E} = \mathscr{E}_{r,s}(\lambda)$ *suma a la fila* r*-èsima de* $\boldsymbol{A}$ *la seva fila* s*-èsima multiplicada per l'escalar* λ.

PROVA: És immediat a partir de l'expressió de les matrius elementals en termes de la matriu identitat i de les matrius de la base canònica, tenint en compte com les files de la matriu producte són combinacions lineals de les files de la matriu de la dreta amb coeficients els escalars de les files de la matriu de l'esquerra. □

En fer el producte $\boldsymbol{A}\mathscr{E}$ d'una matriu $\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ per una matriu elemental $\mathscr{E} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ per la dreta es produeix l'efecte anàleg en les columnes de $\boldsymbol{A}$.

Lema 2.2.3 *Les matrius elementals són matrius invertibles, amb inverses:*

$$\mathscr{E}_{rs}^{-1} = \mathscr{E}_{rs}, \quad \mathscr{E}_r(\lambda)^{-1} = \mathscr{E}_r(\lambda^{-1}), \quad \mathscr{E}_{rs}(\lambda)^{-1} = \mathscr{E}_{rs}(-\lambda).$$

Proposició 2.2.4 *Per a tota matriu* $\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ *existeixen:*

- *una matriu* $\boldsymbol{P} \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{K})$ *tal que* $\boldsymbol{PA}$ *està en forma esglaonada reduïda per files,*
- *una matriu* $\boldsymbol{Q} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ *tal que* $\boldsymbol{AQ}$ *està en forma esglaonada reduïda per columnes.*

PROVA: Pel passar de la matriu donada a una en forma esglaonada reduïda s'aplica l'algorisme d'eliminació gaussiana descrit a la prova de la proposició **??**.

Com que cada transformació elemental de files equival a multiplicar a l'esquerra per una matriu elemental, es tindrà $\mathscr{E}_k\mathscr{E}_{k-1}\cdots\mathscr{E}_1\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}'$, per a certes matrius elementals $\mathscr{E}_1, \dots, \mathscr{E}_k$. Per tant, $\boldsymbol{PA} = \boldsymbol{A}'$, on $\boldsymbol{P}$ és el producte de les matrius elementals anteriors. Com que cada matriu elemental és invertible el producte també ho és.

Lema 2.2.5 *Tota matriu invertible* $\boldsymbol{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ *és producte de matrius elementals.*

PROVA: Sigui $\boldsymbol{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ una matriu que és producte $\boldsymbol{P} = \mathscr{E}_k\mathscr{E}_{k-1}\cdots\mathscr{E}_1$ de matrius elementals tal que $\boldsymbol{PA}$ està en forma esglaonada reduïda per files. Com que aquesta matriu és invertible no pot tenir cap fila de zeros, i per tant ha de ser igual a la matriu identitat. Per tant $\boldsymbol{A} = \mathscr{E}_1^{-1}\cdots\mathscr{E}_{k-1}^{-1}\mathscr{E}_k^{-1}$ és producte de matrius elementals. □

Proposició 2.2.6 (Matrius equivalents per files) *Siguin* $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. *Les condicions següents són equivalents:*

1. *Les files de* $\boldsymbol{A}$ *i de* $\boldsymbol{B}$ *generen el mateix subespai de* $\mathbb{K}^n$,
2. *Existeix una matriu* $\boldsymbol{P} \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{K})$ *tal que* $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{PA}$,
3. *Es pot passar de* $\boldsymbol{A}$ *a* $\boldsymbol{B}$ *aplicant transformacions elementals de files.*

Quan es compleixen aquestes condicions es diu que les matrius $\boldsymbol{A}$ *i* $\boldsymbol{B}$ *són equivalents per files.*

PROVA: Suposi's que es compleix la primera condició. Siguin $\boldsymbol{P}_1$ i $\boldsymbol{P}_2$ matrius invertibles tals que $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{B}$ estan en forma esglaonada reduïda. Com que les files d'aquestes dues matrius són famílies de vectors en forma esglaonada reduïda que generen el mateix subespai de $\mathbb{K}^n$ han de ser iguals. Aleshores la matriu $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{P}_1$ compleix la segona condició.

Suposi's que es compleix la segona condició. Escrivint la matriu $\boldsymbol{P}$ com a producte de matrius elementals es dedueix una seqüència de transformacions elementals que passa de la matriu $\boldsymbol{A}$ a la matriu $\boldsymbol{B}$.

Que la tercera condició implica la primera és degut al fet que les transformacions elementals de vectors deixen igual el subespai que generen. $\square$

De manera anàloga es defineix el concepte de matrius equivalents per columnes a partir de tres condicions equivalents: que les seves columnes generin el mateix subespai de $\mathbb{K}^m$, que existeixi una matriu invertible $\boldsymbol{Q} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ que en multiplicar per la dreta passi de l'una a l'altra, o que es pugui passar de l'una a l'altra aplicant transformacions elementals de columnes.

Definició 2.2.7 (Rang per files i columnes) *El* rang per files *d'una matriu $\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ és la dimensió del subespai de $\mathbb{K}^n$ generat per les files. Anàlogament, el* rang per columnes *és la dimensió del subespai de $\mathbb{K}^m$ generat per les columnes.*

Proposició 2.2.8 *El rangs per files i per columnes d'una matriu són iguals.*

Prova: Sigui $\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ amb rang per files r i rang per columnes s. Sigui $\boldsymbol{A}_f \in \mathcal{M}_{r\times n}(\mathbb{K})$ una matriu que té per files una base de les files de $\boldsymbol{A}$. Cada fila de $\boldsymbol{A}$ és una combinació lineal de les files de $\boldsymbol{A}_f$. Sigui $\boldsymbol{B}_f \in \mathcal{M}_{m\times r}(\mathbb{K})$ la matriu que té per files els coeficients d'aquestes combinacions lineals. Aleshores $\boldsymbol{B}_f\boldsymbol{A}_f = \boldsymbol{A}$. Per tant, les columnes de $\boldsymbol{A}$ són combinacions lineals de les r columnes de $\boldsymbol{B}_f$ i es dedueix que $s \leqslant r$.

Per veure el recíproc, sigui $\boldsymbol{A}_c \in \mathcal{M}_{m\times s}(\mathbb{K})$ una matriu que té per columnes una base de les columnes de $\boldsymbol{A}$. Cadascuna de les n columnes de $\boldsymbol{A}$ és una combinació lineal de les s columnes de $\boldsymbol{A}_c$. Sigui $\boldsymbol{B}_c \in \mathcal{M}_{s\times n}(\mathbb{K})$ la matriu que té per columnes els coeficients d'aquestes combinacions lineals. Aleshores $\boldsymbol{A}_c\boldsymbol{B}_c = \boldsymbol{A}$. Per tant, les files de $\boldsymbol{A}$ són combinacions lineals de les s files de $\boldsymbol{B}_c$ i es dedueix que $r \leqslant s$. $\square$

Aquesta proposició permet fer la següent:

Definició 2.2.9 (Rang) *El* rang *d'una matriu $\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ és la dimensió del subespai generat per les seves files o les seves columnes.*

Càlcul del rang. Com que el rang d'una família de vectors es manté en fer transformacions elementals, i el rang d'una matriu esglaonada per files (resp. columnes) és el nombre de files (resp. columnes) diferents de zero, la manera més simple de calcular el rang d'una matriu és passant a una forma esglaonada per files o per columnes fent transformacions elementals. Com que el rang no canvia en fer transformacions de totes dues classes, es poden fer transformacions tant de files com de columnes, si això simplifica els càlculs.

Proposició 2.2.10 *Sigui $\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les condicions següents són equivalents:*

1. *el rang per columnes de $\boldsymbol{A}$ és igual a n,*
2. *existeix una matriu $\boldsymbol{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tal que $\boldsymbol{AB} = \mathbf{1}_n$,*
3. *el rang per files de $\boldsymbol{A}$ és igual a n,*
4. *existeix una matriu $\boldsymbol{C} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tal que $\boldsymbol{CA} = \mathbf{1}_n$,*

5. *el rang de $\boldsymbol{A}$ és igual a n,*
6. *la matriu $\boldsymbol{A}$ és invertible.*

En aquest cas, les matrius $\boldsymbol{B}$ i $\boldsymbol{C}$ són iguals i són la matriu inversa de $\boldsymbol{A}$.

PROVA: Es comença veient $1 \Leftrightarrow 2$. Suposi's que el rang per columnes de $\boldsymbol{A}$ és n. Això vol dir que les columnes de $\boldsymbol{A}$ són una base de $\mathbb{K}^n$. Per tant els vectors de qualsevol altra base, en particular la canònica, són combinacions lineals de les columnes de $\boldsymbol{A}$. Posant a les columnes d'una matriu $\boldsymbol{B}$ els coeficients corresponents es té $\boldsymbol{AB} = \mathbf{1}_n$. Recíprocament si existeix una matriu com aquesta les columnes de $\boldsymbol{A}$ generen, i per tant són una base de $\mathbb{K}^n$. Per tant el rang per columnes és n. Anàlogament es veu que $3 \Leftrightarrow 4$. L'equivalència $1 \Leftrightarrow 3$ és la proposició anterior. L'equivalència de 1 i 3 amb 5 és la definició de rang. Suposi's que es compleixen les condicions 2 i 4. Aleshores ha de ser $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{C} \cdot \mathbf{1}_n = \boldsymbol{C}(\boldsymbol{AB}) = (\boldsymbol{CA})\boldsymbol{B} = \mathbf{1}_n \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}$ i aquesta matriu, per definició, és la inversa de la matriu $\boldsymbol{A}$. Recíprocament, si $\boldsymbol{A}$ és invertible la seva inversa fa el paper de les matrius $\boldsymbol{B}$ i $\boldsymbol{C}$ de 2 i 4. □

Definició 2.2.11 (Forma canònica reduïda) *Una matriu es diu que està en* forma canònica reduïda *quan està en forma esglaonada reduïda tant per files com per columnes. És, per tant, una matriu per blocs de la forma següent:*

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1}_r & \mathbf{0}_{r\times v} \\ \mathbf{0}_{u\times r} & \mathbf{0}_{u\times v} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}), \qquad \textit{amb} \quad r+u=m \quad \textit{i} \quad r+v=n.$$

Proposició 2.2.12 *Per a tota matriu $\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ existeixen matrius $\boldsymbol{P} \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{K})$ i $\boldsymbol{Q} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tals que $\boldsymbol{PAQ}$ està en forma canònica reduïda.*

PROVA: Tota matriu es pot convertir en una matriu que està en forma canònica reduïda a base d'aplicar-li transformacions elementals tant de files com de columnes: primer es passa a forma esglaonada reduïda per files i un cop en aquesta forma es pot passar a forma esglaonada reduïda per columnes sense que les transformacions aplicades espatllin la propietat per files. Com que les transformacions elementals de files i columnes conserven el rang, la mida r de la matriu identitat en la forma esglaonada reduïda és el rang de la matriu $\boldsymbol{A}$. □

Proposició 2.2.13 (Matrius equivalents) *Siguin $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Les condicions següents són equivalents:*

1. *$\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{B}$ tenen el mateix rang,*
2. *Existeixen matrius $\boldsymbol{P} \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{K})$ i $\boldsymbol{Q} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tals que $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{PAQ}$,*
3. *Es pot passar de $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$ fent transformacions elementals tant de files com de columnes.*

En aquest cas es diu que $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{B}$ són equivalents.

PROVA: Suposi's que es compleix la primera condició. Reduint les dues matrius es troben matrius invertibles $\boldsymbol{P}_i$ i $\boldsymbol{Q}_i$ tals que les matrius $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{AQ}_1$ i $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{BQ}_2$ estan en forma canònica reduïda. Aquestes formes canòniques són iguals ja que els rangs de les matrius ho són. Agafant $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{P}_1$ i $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2^{-1}$ es tenen matrius que compleixen la segona condició.

Suposant que es compleixi la segona condició, escrivint les matrius invertibles com a producte de matrius elementals es dedueixen seqüències de transformacions elementals de files i columnes que passen d'una matriu a l'altra.

Com que les transformacions elementals de files i columnes no canvien el rang corresponent i per tant no canvien el rang (ja que el rang per files i per columnes és igual), totes dues matrius han de tenir el mateix rang. □

Problemes

2.19. Siguin $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ matrius equivalents per files. Digueu com es pot calcular una matriu $\boldsymbol{P} \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{K})$ tal que $\boldsymbol{PA} = \boldsymbol{B}$ imitant el mètode de càlcul de la matriu inversa per reducció gaussiana.

Solució: Es considera la matriu $(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{1}_m)$. S'apliquen a aquesta matriu transformacions elementals de files que transformen $\boldsymbol{A}$ en $\boldsymbol{B}$. El resultat serà una matriu $(\boldsymbol{B}|\boldsymbol{P})$ amb $\boldsymbol{P}$ invertible tal que $\boldsymbol{PA} = \boldsymbol{B}$. En efecte, cada transformació elemental equival a multiplicar per l'esquerra per una matriu elemental i l'efecte de multiplicar per aquesta matriu en la part dreta de la matriu ampliada fa que es vagin acumulant els productes de matrius elementals.

2.20. Trobeu la forma esglaonada reduïda per files de la matriu:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 5 & -4 & 2 & -3 \\ 2 & -4 & 6 & 5 & 2 & -6 & -1 \\ 2 & -5 & 7 & 7 & 3 & -7 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & -3 & 5 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

2.21. Trobeu les formes esglaonades reduïdes per files i per columnes de la matriu:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

i doneu matrius quadrades invertibles $\boldsymbol{P}$ i $\boldsymbol{Q}$ tals que $\boldsymbol{PA}$ i $\boldsymbol{AQ}$ són aquestes formes esglaonades reduïdes.

2.22. Definiu amb precisió la condició de que la matriu $\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ estigui en forma esglaonada reduïda per files i descriviu un algorisme que passi d'una matriu $\boldsymbol{A}$ a una matriu equivalent $\boldsymbol{A}'$ en forma esglaonada reduïda per files, i que doni també una matriu invertible $\boldsymbol{P}$ tal que $\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{PA}$.

Escriviu un programa en el vostre llenguatge de programació favorit que dugui a la pràctica aquest algorisme.

2.23. *Matrius nilpotents.* Una matriu quadrada $\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ es diu *nilpotent* si existeix un enter positiu $k \geqslant 1$ tal que la seva potència k-èsima és la matriu zero: $\boldsymbol{A}^k = \boldsymbol{0}$.

1. Demostreu que les matrius *triangulars superiors estrictes* (amb $a_{ij} = 0$ si $i \geqslant j$) són nilpotents.
2. Demostreu que una matriu nilpotent no és mai invertible.
3. Demostreu que tota matriu nilpotent $\boldsymbol{A}$ té una conjugada (o sigui una matriu $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ amb $\boldsymbol{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ invertible) que té l'última fila igual a zero.
4. Demostreu que tota matriu nilpotent té una conjugada que és triangular superior estricta.
5. Demostreu que tota matriu nilpotent $\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ té potència n-èsima $\boldsymbol{A}^n = \boldsymbol{0}$. (o sigui una matriu $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ amb $\boldsymbol{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ invertible) que té l'última fila igual a zero.

6. Doneu per a cada enter k de l'interval $1 \leqslant k \leqslant n$ un exemple d'una matriu $\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ amb $\boldsymbol{A}^k = \mathbf{0}$ però $\boldsymbol{A}^{k-1} \neq \mathbf{0}$.

2.24. Estudieu si les matrius següents són equivalents:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Solució: No ho són: la primera té rang 3 i la segona té rang 2.

2.25. Sigui $\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ una matriu quadrada. Es consideren sistemes $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{b}$ amb matriu $\boldsymbol{A}$. Demostreu que les condicions següents són equivalents:

1. existeix un vector de constants $\boldsymbol{b}$ tal que el sistema $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{b}$ és compatible determinat,
2. per a tot vector de constants $\boldsymbol{b}$ el sistema $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{b}$ és compatible determinat,
3. la matriu $\boldsymbol{A}$ és invertible.

2.26. Sigui $\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ amb coeficients $a_{ij} = i + j$. Quin és el rang de $\boldsymbol{A}$?

Solució: La matriu és:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & \cdots & n+1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & n+2 \\ 4 & 5 & 6 & \cdots & n+3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n+1 & n+2 & n+3 & \cdots & 2n \end{pmatrix}.$$

Restant a cada fila la fila anterior (començant pel final) queda la matriu que té a la primera fila el vector $(2, 3, 4, \dots, n+1)$ i que té a totes les altres files el vector $(1, 1, 1, \dots, 1)$, que té rang 2.

2.27. Donades matrius $\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ i $\boldsymbol{B} \in \mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{K})$ doneu condicions necessàries i suficients per tal que l'equació $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$ tingui solució $\boldsymbol{X} \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$.

2.28. Sigui $\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Comproveu que les matrius $\boldsymbol{X} \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$ tals que $\boldsymbol{AX} = \mathbf{0}_{m\times p}$ són un subespai vectorial de $\mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$ i calculeu la seva dimensió.

2.29. Sigui $\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ una matriu de rang r. Justifiqueu que el subconjunt

$$V = \{\boldsymbol{b} \in \mathbb{K}^m : \exists\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^n \text{ tal que } \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}\}$$

és un subespai vectorial de $\mathbb{K}^m$ i digueu quina és la seva dimensió.

Solució: L'equació $Ax = b$ es pot interpretar com una equació vectorial $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b$ a l'espai $\mathbb{R}^m$, on els a_i són els vectors-columna de la matriu A. Els vectors $b \in \mathbb{R}^m$ per als quals l'equació té solució són els que són combinació lineal dels vectors a_i: formen un subespai, el subespai $[a_1, \dots, a_n]$ generat pels a_i; la seva dimensió és el rang (per columnes) de la matriu A.

2.30. Recordeu que una *distància* a un conjunt X és una aplicació $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ que satisfà les tres propietats següents: *positivitat*: $d(x, y) \geqslant 0$ i $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$, *simetria*: $d(y, x) = d(x, y)$, i *desigualtat triangular*: $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$.

Demostreu que l'aplicació $d(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) = \operatorname{rang}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B})$ és una distància al conjunt $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$.

2.31. Sigui V un $\mathbb{K}$-espai vectorial i sigui $\{\boldsymbol{v}_i\}_{1\leqslant i\leqslant n}$ una família de vectors. Demostreu que la dependència o independència lineal d'aquests vectors és equivalent a la de cadascuna de les dues famílies $\{\boldsymbol{w}_i\}_{1\leqslant i\leqslant n}$ següents:

1. Donats dos índexs diferents $r \neq s$, siguin

$$\boldsymbol{w}_i = \begin{cases} \boldsymbol{v}_i, & \text{si} \quad i \neq r, \\ \boldsymbol{v}_r + \lambda \boldsymbol{v}_s, & \text{si} \quad i = r, \quad \text{per a un} \quad \lambda \in K. \end{cases}$$

2. Per a cada $i = 1, \ldots, n$ sigui $\boldsymbol{w}_i = \lambda_i \boldsymbol{v}_i$ amb coeficient $\lambda_i \in \mathbb{K}, \lambda_i \neq 0$.

Solució: La família de vectors V es pot obtenir a partir de la família W amb el mateix procediment: en el primer cas $v_i = w_i$ si $i \neq r$ i $v_r = w_r + \mu w_s$ amb $\mu = -\lambda \in K$, i, en el segon cas, $v_i = \mu_i w_i$ amb coeficients $\mu_i = \lambda_i^{-1} \in K$ no nuls. Per tant, n'hi ha prou a comprovar que si una família és independent l'altra també ho és.

Suposi's que V és independent. Sigui $\sum x_i w_i = 0$ amb $x_i \in K$ una combinació lineal que dóna zero. Per a la família (a), escrivint-ho com a combinació dels v_i, es té:

$$x_1 v_1 + \cdots + x_r(v_r + \lambda v_s) + \cdots + x_s v_s + \cdots + x_n v_n = x_1 v_1 + \cdots + x_r v_r + \cdots + (\lambda x_r + x_s) v_s + \cdots + x_n v_n = 0,$$

i, per la independència dels v_i, es dedueix que $x_i = 0$ si $i \neq s$ i que $\lambda x_r + x_s = 0$. D'aquesta última igualtat, i com que $x_r = 0$ ja que $r \neq s$, ha de ser també $x_s = 0$. Per a la família (b) es té

$$\sum x_i \lambda_i v_i = 0 \quad \Rightarrow \quad x_i \lambda_i = 0 \quad \Rightarrow \quad x_i = 0 \quad \forall i.$$

2.32. Sigui V un $\mathbb{K}$-espai vectorial de dimensió n amb base $\{\boldsymbol{e}_i\}_{1 \leqslant i \leqslant n}$. Sigui $\left\{\boldsymbol{v}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} \boldsymbol{e}_j : 1 \leqslant i \leqslant m\right\}$ una família de m vectors de l'espai expressats com a combinació lineal d'elements de la base $\{\boldsymbol{e}_i\}$. Demostreu que la dependència o independència lineal de la família $\{\boldsymbol{v}_i\}$ és equivalent a la de cadascuna de les famílies de m vectors $\{\boldsymbol{w}_i : 1 \leqslant i \leqslant m\}$ obtingudes a partir de la família $\{\boldsymbol{v}_i\}$ pels procediments següents:

1. Intercanviant les coordenades corresponents a dos vectors de la base: es fixen dos índexs r, s entre 1 i n i es defineix $\boldsymbol{w}_i = a_{ir} \boldsymbol{e}_s + a_{is} \boldsymbol{e}_r + \sum_{j \neq r,s} a_{ij} \boldsymbol{e}_j$.
2. Sumant a la coordenada respecte d'un vector de la base un múltiple de la coordenada respecte d'un altre vector (diferent): es fixen dos índexs diferents $r \neq s$ entre 1 i n, i un escalar λ, i es defineix $\boldsymbol{w}_i = (a_{ir} + \lambda a_{is}) \boldsymbol{e}_r + \sum_{j \neq r} a_{ij} \boldsymbol{e}_j$,
3. Multiplicant les coordenades respecte de cada vector de la base per un escalar no nul: es consideren escalars $\lambda_j \in \mathbb{K}$ amb $\lambda_j \neq 0$ i es defineix $\boldsymbol{w}_i = \sum_{j=1}^n \lambda_j a_{ij} \boldsymbol{e}_j$.

Solució: Igual com en el problema anterior, és clar que la família inicial V es pot obtenir a partir de les famílies W fent transformacions del mateix tipus. Per tant, n'hi ha prou a comprovar que si la família V és independent aleshores les famílies W també ho són. Suposi's, doncs, que V és independent, i sigui $\sum_{i=1}^m x_i w_i = 0$ una combinació lineal dels vectors de W que dóna el vector zero. Aleshores, en el cas (a) es té:

$$\sum_{i=1}^m x_i w_i = \left(\sum_{i=1}^m x_i a_{ir}\right) e_s + \left(\sum_{i=1}^m x_i a_{is}\right) e_r + \sum_{j \neq r,s} \left(\sum_{i=1}^m x_i a_{ij}\right) e_j = 0$$

d'on es dedueix, per ser $\{e_j\}$ una base, que tots els coeficients d'aquesta combinació lineal són zero i, per tant, que

$$\sum_{j=1}^n 0 \cdot e_j = \left(\sum_{i=1}^m x_i a_{ir}\right) e_r + \left(\sum_{i=1}^m x_i a_{is}\right) e_s + \sum_{j \neq r,s} \left(\sum_{i=1}^m x_i a_{ij}\right) e_j = \sum_{i=1}^m x_i v_i = 0,$$

i, per ser els v_i independents, tots els coeficients x_i han de ser zero.

En el cas (b) es té:

$$\sum_{i=1}^{m} x_i w_i = \left(\sum_{i=1}^{m} x_i a_{ir} + \lambda x_i a_{is}\right) e_r + \sum_{j\neq r}\left(\sum_{i=1}^{m} x_i a_{ij}\right) e_j = 0,$$

Per ser els e_j una base tots els coeficients de la combinació lineal han de ser zero. Restant el coeficient de e_s multiplicat per λ del coeficient de e_r es dedueix que també $\sum_{i=1}^{m} x_i a_{ir}$ val zero. Per tant, es té

$$\sum_{j=1}^{n} 0\cdot e_j = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} x_i a_{ij}\right) e_j = \sum_{i=1}^{m} x_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} e_j\right) = \sum_{i=1}^{m} x_i v_i = 0,$$

i per la independència lineal dels $\{v_i\}$ tots els coeficients x_i han de valdre zero.

Finalment, en el cas (c) es té:

$$\sum_{i=1}^{m} x_i w_i = \sum_{i=1}^{m} x_i \sum_{j=1}^{n} \lambda_j a_{ij} e_j = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \left(\sum_{i=1}^{m} x_i a_{ij}\right) e_j = 0.$$

Per ser e_j base els coeficients han de ser zero i, com que els λ_j són no nuls, cada sumatori $\sum x_i a_{ij}$ ha de ser zero. Aleshores:

$$\sum_{j=1}^{n} 0\cdot e_j = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} x_i a_{ij}\right) e_j = \sum_{i=1}^{m} x_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} e_j\right) = \sum_{i=1}^{m} x_i v_i = 0,$$

i per tant tots els coeficients x_i són zero.

2.33. Demostreu, fent servir els dos problemes anteriors, que rang per files i el rang per columnes d'una matriu coincideixen.

Solució: Aplicant els problemes anteriors a una matriu que tingui a les files els coeficients d'una família de vectors en una base determinada, es dedueix que les transformacions elementals tant de files com de columnes mantenen el rang d'aquesta família de vectors. Aplicant-ho a una matriu que tingui els coeficients a les columnes es veu que val el mateix.

Per tant les transformacions elementals, tant de files com de columnes, conserven tant el rang per files com el rang per columnes de la matriu.

Donada una matriu, fent transformacions elementals de files i columnes es pot posar en forma esglaonada reduïda tant per files com per columnes. En aquest cas la matriu té una identitat I_r a dalt a l'esquerra i la resta són zeros. El nombre r és clarament el nombre màxim de files i de columnes independents, o sigui, tant el rang per files com el rang per columnes són iguals a r, i per tant són iguals.

2.3 Determinant

El determinant d'una matriu quadrada $\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ es defineix com l'escalar obtingut sumant tots els productes de n entrades de la matriu que contenen un element de cada fila i un de cada columna, agafats de totes les maneres possibles, i afectats cadascun d'un signe ± 1 que depèn de la permutació corresponent, tal i com es defineix a continuació.

Definició 2.3.1 (Fórmula de Leibniz) *El* determinant *de* $\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *és l'element de* $\mathbb{K}$ *definit per la fórmula següent:*

$$\det \boldsymbol{A} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn} \sigma \ a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} \cdots a_{n,\sigma(n)} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn} \sigma \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}.$$

Proposició 2.3.2 (Determinant de la matriu transposada) *En transposar una matriu el determinant no canvia:* $\det \boldsymbol{A}^t = \det \boldsymbol{A}$.

PROVA: Ordenant els termes de cada producte segons la columna, usant que el signe d'una permutació és el mateix que el de la inversa, i tenint en compte que quan σ recorre el grup simètric σ^{-1} també el recorre, es veu que el determinant també és igual a:

$$\det \boldsymbol{A} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn} \sigma \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn} \sigma \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma^{-1}(i),i} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn} \sigma \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i} = \det(\boldsymbol{A}^t).$$

En la resta d'aquesta secció es farà servir la notació $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ per indicar els n vectors fila de la matriu $\boldsymbol{A}$. La notació $\det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ indica el determinant de la matriu $\boldsymbol{A}$ pensat com una aplicació $\mathbb{K}^n \times \overset{n)}{\ldots} \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ que a cada n-tupla $(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ de vectors $\boldsymbol{a}_i \in \mathbb{K}^n$ li fa correspondre el determinant de la matriu que té aquests vectors com a files. La proposició anterior assegura que tot el que val per al determinant d'una matriu com una funció de les seves files és també cert en termes de les columnes.

Proposició 2.3.3 (Forma multilineal alternada) *En relació a les files de la matriu, el determinant té les propietats següents:*

1. *En multiplicar una fila per un escalar* $\lambda \in \mathbb{K}$ *el determinant queda multiplicat per* λ*:*

$$\det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \lambda \boldsymbol{a}_i, \ldots, \boldsymbol{a}_n) = \lambda \det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_i, \ldots, \boldsymbol{a}_n).$$

2. *Si una fila és una suma de dos vectors de* $\mathbb{K}^n$*, el determinant és la suma de dos determinants: els de les dues matrius que tenen les demés files iguals i que en aquesta fila hi tenen cadascun dels dos vectors:*

$$\det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_i + \boldsymbol{b}_i, \ldots, \boldsymbol{a}_n) = \det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_i, \ldots, \boldsymbol{a}_n) + \det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_i, \ldots, \boldsymbol{a}_n).$$

3. *Si la matriu té dues files iguals el determinant val zero:*

$$\det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_i, \ldots, \boldsymbol{a}_j, \ldots, \boldsymbol{a}_n) = 0 \quad \textit{si} \quad \boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{a}_j.$$

PROVA: Les dues primeres propietats són clares: en la primera cada sumand conté el factor $\lambda a_{i,\sigma(i)}$ i en la segona cada sumand conté el factor $(a_{i,\sigma(i)} + b_{i,\sigma(i)})$.

Per comprovar la tercera, sigui $\mathfrak{A}_n$ el grup alternat, format per les permutacions parells de $\mathfrak{S}_n$. Sigui $\epsilon = (i, j)$ la transposició dels nombres i i j. Aleshores tota permutació senar τ és de la forma $\tau = \sigma\epsilon$ per a alguna permutació parell σ i es té una partició de $\mathfrak{S}_n$ en permutacions parells i senars:

$$\mathfrak{S}_n = \{\sigma : \operatorname{sgn} \sigma = 1\} \sqcup \{\sigma : \operatorname{sgn} \sigma = -1\} = \{\sigma : \sigma \in \mathfrak{A}_n\} \sqcup \{\tau = \sigma\epsilon : \sigma \in \mathfrak{A}_n\},$$

i separant els sumands del determinant $\det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_i, \ldots, \boldsymbol{a}_j, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ és es:

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{A}_n} \operatorname{sgn} \sigma \; a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{i,\sigma(i)} \cdots a_{j,\sigma(j)} \cdots a_{\sigma(n),n} + \sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{A}_n \\ \tau = \sigma\epsilon}} \operatorname{sgn} \tau \; a_{1,\tau(1)} \cdots a_{i,\tau(i)} \cdots a_{j,\tau(j)} \cdots a_{n,\tau(n)}.$$

Tenint en compte que:

$$\tau(i) = \sigma\epsilon(i) = \sigma(j); \quad \tau(j) = \sigma\epsilon(j) = \sigma(i); \quad \text{i} \quad \tau(k) = \sigma\epsilon(k) = \sigma(k) \quad \text{si} \quad k \neq i, j$$

i els signes de les permutacions parells i senars, el determinant és:

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{A}_n} a_{1,\sigma(1)} \ldots a_{i,\sigma(i)} \ldots a_{j,\sigma(j)} \ldots a_{n,\sigma(n)} + \sum_{\sigma \in \mathfrak{A}_n} - a_{1,\sigma(1)} \ldots a_{i,\sigma(j)} \ldots a_{j,\sigma(i)} \ldots a_{n,\sigma(n)}.$$

Aleshores, com que $a_{i,k} = a_{j,k}$ per a tot k, resulta que $a_{i,\sigma(i)} = a_{j,\sigma(i)}$ i que $a_{j,\sigma(j)} = a_{i,\sigma(j)}$. Per tant, cada sumand del primer sumatori s'anul·la amb el del segon i el resultat és zero. □

Corol·lari 2.3.4 *El determinant d'una matriu té les propietats següents:*

1. *si una fila és zero, el determinant val zero;*
2. *si una fila és múltiple d'una altra, el determinant val zero;*
3. *si a una fila se li suma un múltiple d'una altra, el determinant no canvia;*
4. *en intercanviar dues files, el determinant canvia de signe;*
5. *en permutar les files, el determinant queda multiplicat pel signe de la permutació.*

PROVA:

1. Com que $\mathbf{0} = 0 \cdot \mathbf{0}$ es té $\det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \mathbf{0}, \ldots, \boldsymbol{a}_n) = 0 \det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n) = 0$.
2. $\det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_i, \ldots, \lambda\boldsymbol{a}_i, \ldots, \boldsymbol{a}_n) = \lambda \det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_i, \ldots, \boldsymbol{a}_i, \ldots, \boldsymbol{a}_n) = 0$.
3. $\det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_i, \ldots, \boldsymbol{a}_j + \lambda\boldsymbol{a}_i, \ldots, \boldsymbol{a}_n) = \det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n) + \det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_i, \ldots, \lambda\boldsymbol{a}_i, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$.
4. Com que $\det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_i + \boldsymbol{a}_j, \ldots, \boldsymbol{a}_i + \boldsymbol{a}_j, \ldots, \boldsymbol{a}_n) = 0$ es dedueix que:
$$\det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_i, \ldots, \boldsymbol{a}_j, \ldots, \boldsymbol{a}_n) + \det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_j, \ldots, \boldsymbol{a}_i, \ldots, \boldsymbol{a}_n) = 0.$$
5. Conseqüència de l'apartat anterior i del fet que tota permutació és producte de transposicions. □

Proposició 2.3.5 (Determinant d'un producte de matrius) *El determinant és multiplicatiu respecte del producte de matrius:*

$$\det(\boldsymbol{AB}) = \det \boldsymbol{A} \det \boldsymbol{B}.$$

PROVA: Sigui $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB}$. Les files de $\boldsymbol{C}$, en termes de les files de $\boldsymbol{B}$, són:

$$(\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_n) = (\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{B}, \ldots, \boldsymbol{a}_n\boldsymbol{B}) = \left(\sum_{k_1=1}^{n} a_{1,k_1}\boldsymbol{b}_{k_1}, \ldots, \sum_{k_n=1}^{n} a_{n,k_n}\boldsymbol{b}_{k_n} \right).$$

Aplicant les propietats del determinant respecte la suma de files i el producte d'una fila per un escalar queda:

$$\det \boldsymbol{C} = \sum_{k_1=1}^{n} \cdots \sum_{k_n=1}^{n} a_{1,k_1} \cdots a_{n,k_n} \det(\boldsymbol{b}_{k_1}, \ldots, \boldsymbol{b}_{k_n}).$$

Com que quan hi ha dues files iguals el determinant val zero, de tots els sumands només sobreviuen aquells per als quals els índexs $k_1, \ldots, k_n$ siguin tots diferents, és a dir, quan aquests nombres siguin una permutació del conjunt $\{1, \ldots, n\}$. Per tant,

$$\det \boldsymbol{C} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{n,\sigma(n)} \det(\boldsymbol{b}_{\sigma(1)}, \ldots, \boldsymbol{b}_{\sigma(n)}).$$

Com que en permutar les files d'una matriu el determinant queda afectat del signe de la permutació, tots els determinants de la dreta són els de la matriu $\boldsymbol{B}$ excepte potser pel signe i queda:

$$\det \boldsymbol{C} = \textstyle\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \;\; a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{n,\sigma(n)} \det(\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n) = \det \boldsymbol{A} \det \boldsymbol{B}. \qquad \square$$

Corol·lari 2.3.6 (Determinant de la matriu inversa) *Una matriu invertible* $\boldsymbol{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ *té determinant* $\det \boldsymbol{A} \neq 0$*, i el determinant de la inversa és* $\det(\boldsymbol{A}^{-1}) = (\det \boldsymbol{A})^{-1}$.

Definició 2.3.7 (Adjunt i matriu adjunta) *S'anomena* adjunt (i, j)*-èsim de la matriu* $\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *el determinant, afectat del signe* $(-1)^{i+j}$*, de la matriu quadrada de mida* $n-1$ *que s'obté en suprimir la fila* i*-èsima i la columna* j*-èsima de la matriu* $\boldsymbol{A}$*. Es denota* a^*_{ij}*. La matriu* $\boldsymbol{A}^* = (a^*_{ij})$ *formada per tots els adjunts de* $\boldsymbol{A}$ *s'anomena* matriu adjunta *de la matriu* $\boldsymbol{A}$*.*

Teorema 2.3.8 (Regla de Laplace) *Es té:*

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} a^*_{jk} = \begin{cases} \det \boldsymbol{A}, & si \quad i = j; \\ 0, & si \quad i \neq j. \end{cases}$$

Prova: Es demostra la fórmula primerament per al cas $i = j$. El grup $\mathfrak{S}_{n-1}$ s'identifica amb el subgrup de $\mathfrak{S}_n$ format per les permutacions que deixen fix n. Per a cada $t = 1, \ldots, n$ sigui $\sigma_t \in \mathfrak{S}_n$ el cicle $(t, t+1, \ldots, n)$. Es denotarà $\boldsymbol{A}^{(r,s)} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ la submatriu de $\boldsymbol{A}$ que resulta en treure la fila r-èsima i la columna s-èsima. Les seves entrades són:

$$\boldsymbol{A}^{(r,s)} = (a^{(r,s)}_{i,j}), \quad \text{amb} \quad a^{(r,s)}_{i,j} = a_{\sigma_r(i), \sigma_s(j)} \quad \text{per a} \quad 1 \leqslant i, j \leqslant n-1.$$

Per a cada $\tau \in \mathfrak{S}_{n-1}$ la permutació $\sigma = \sigma_k \tau \sigma_i^{-1}$ envia i a k, i recíprocament tota permutació $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ tal que $\sigma(i) = k$ és de la forma $\sigma_k \tau \sigma_i^{-1}$, amb $\tau = \sigma_k^{-1} \sigma \sigma_i \in \mathfrak{S}_{n-1}$. Com que $\operatorname{sgn} \sigma_t = (-1)^{n-t}$, es té: $\operatorname{sgn}(\sigma_k \tau \sigma_i^{-1}) = (-1)^{2n-k-i} \operatorname{sgn} \tau = (-1)^{k+i} \operatorname{sgn} \tau$.

En fixar un índex i, separant els sumands del sumatori del determinant segons els diferents valors de $\sigma(i)$ s'obté:

$$\begin{aligned}
\det \boldsymbol{A} &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn} \sigma \; a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{n,\sigma(n)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} \sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}_n \\ \sigma(i)=k}} \operatorname{sgn} \sigma \; a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{i-1,\sigma(i-1)} \; a_{i+1,\sigma(i+1)} \cdots a_{n,\sigma(n)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_{n-1}} \operatorname{sgn}(\sigma_k \tau \sigma_i^{-1}) \; a_{1,\sigma_k\tau\sigma_i^{-1}(1)} \cdots a_{i-1,\sigma_k\tau\sigma_i^{-1}(i-1)} \; a_{i+1,\sigma_k\tau\sigma_i^{-1}(i+1)} \cdots a_{n,\sigma_k\tau\sigma_i^{-1}(n)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_{n-1}} \operatorname{sgn}(\sigma_k \tau \sigma_i^{-1}) \; a_{\sigma_i(1),\sigma_k\tau(1)} \cdots a_{\sigma_i(i-1),\sigma_k\tau(i-1)} \; a_{\sigma_i(i),\sigma_k\tau(i)} \cdots a_{\sigma_i(n-1),\sigma_k\tau(n-1)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} \, (-1)^{i+k} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_{n-1}} \operatorname{sgn} \tau \; a^{(i,k)}_{1,\tau(1)} \cdots a^{(i,k)}_{i-1,\tau(i-1)} a^{(i,k)}_{i,\tau(i)} \cdots a^{(i,k)}_{n-1,\tau(n-1)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} \, (-1)^{i+k} \det(\boldsymbol{A}^{(i,k)}) = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} a^*_{i,k}.
\end{aligned}$$

El cas $i \neq j$ es dedueix de l'anterior fent el següent: es considera la matriu $\boldsymbol{B}$ obtinguda a partir de la matriu $\boldsymbol{A}$ canviant la fila j-èsima per una còpia de la fila i-èsima, que és una matriu de determinant zero. Aleshores, aplicant el que ja s'ha vist a la matriu $\boldsymbol{B}$, desenvolupant per la fila j-èsima, es té:

$$0 = \det \boldsymbol{B} = \sum_{k=1}^{n} b_{jk} b^*_{jk} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} a^*_{jk}.$$

La igualtat $b_{jk} = a_{ik}$ és té perquè la fila j-èsima de $\boldsymbol{B}$ conté la fila i-èsima de $\boldsymbol{A}$ i la igualtat $b^*_{jk} = a^*_{jk}$ es compleix perquè aquests adjunts no depenen del què hi hagi a la fila j-èsima. □

Corol·lari 2.3.9 (Fórmula per a la matriu inversa) *Una matriu $\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ és invertible si, i només si,* $\det \boldsymbol{A} \neq 0$. *En aquest cas, la seva matriu inversa és:*

$$\boldsymbol{A}^{-1} = (\det \boldsymbol{A})^{-1} (\boldsymbol{A}^*)^t.$$

Prova: Ja s'ha vist abans que si $\boldsymbol{A}$ és invertible el seu determinant és no nul. Recíprocament, si el determinant de $\boldsymbol{A}$ és diferent de zero, sigui $\boldsymbol{B}$ la matriu $(\det \boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{A}^*)^t$. Aleshores el coeficient de la posició (i,j) de les matrius $\boldsymbol{AB}$ i $\boldsymbol{BA}$ és, respectivament,

$$(\det \boldsymbol{A})^{-1} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} a^*_{jk} \qquad \text{i} \qquad (\det \boldsymbol{A})^{-1} \sum_{k=1}^{n} a^*_{ki} a_{kj}.$$

Tenint en compte el teorema anterior, aquests dos productes resulten són la matriu identitat. □

Teorema 2.3.10 (Regla de Cramer) *Tot sistema lineal $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{b}$ de n equacions en n incògnites amb matriu del sistema $\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ invertible és compatible determinat. Les components x_i de la seva solució $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ venen donades per la fórmula:*

$$x_i = \frac{\det \boldsymbol{A}_i}{\det \boldsymbol{A}},$$

on $\boldsymbol{A}_i$ denota la matriu $\boldsymbol{A}$ amb la columna i-èsima canviada pel vector $\boldsymbol{b}$.

PROVA: El fet que el sistema sigui compatible determinat és degut al fet que $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{b} \Leftrightarrow \boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$, de manera que té solució única, que és el producte $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$.

La fórmula per a les components de la solució s'obté de la manera següent: si $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n)$ és Siguin $\boldsymbol{a}^1, \dots, \boldsymbol{a}^n$ les columnes de la matriu $\boldsymbol{A}$. Aquests vectors són una base de $\mathbb{K}^n$ i per tant tot vector $\boldsymbol{b}$ s'escriu de manera única com a combinació lineal d'elles. Els coeficients $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ de les expressions $x_1\boldsymbol{a}^1 + \dots + x_n\boldsymbol{a}^n = \boldsymbol{b}$ són les solucions del sistema lineal. Per tant el sistema té solució única per a tot vector de termes independents $\boldsymbol{b}$. Per a calcular la solució es substitueix la columna i-èsima de $\boldsymbol{A}$ pel vector $\boldsymbol{b}$, escrit segons l'expressió anterior, i es té:

$$\begin{aligned}\det(\boldsymbol{A}_i) &= \det(\boldsymbol{a}^1, \dots, \boldsymbol{a}^{i-1}, \sum x_j\boldsymbol{a}^j, \boldsymbol{a}^{i+1}, \dots, \boldsymbol{a}^n) \\ &= \sum x_j \det(\boldsymbol{a}^1, \dots, \boldsymbol{a}^{i-1}, \boldsymbol{a}^j, \boldsymbol{a}^{i+1}, \dots, \boldsymbol{a}^n) = x_i \det(\boldsymbol{A}).\end{aligned}$$

Per tant, si $\det(\boldsymbol{A}) \neq 0$ aquestes identitats asseguren que els escalars x_i donats a la fórmula de l'enunciat són les components d'una solució del sistema lineal, que és la única. $\square$

Determinant de matrius amb entrades a un anell. Per a matrius $\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}_n(\mathscr{A})$ amb entrades a un anell commutatiu unitari $\mathscr{A}$ qualsevol el determinant es defineix de la mateixa manera i tot el que s'ha dit en aquesta secció també val excepte el corol·lari 2.3.9. En el cas d'un anell la condició que garanteix la invertibilitat d'una matriu és que el seu determinant sigui un element invertible de l'anell de coeficients. Si és així aleshores la matriu inversa es pot calcular exactament igual: és la transposada de l'adjunta multiplicada per l'invers del determinant.

Problemes

2.34. Calculeu els determinants següents:

$$d_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}, \quad d_2 = \begin{vmatrix} -2 & 7 & 4 \\ 0 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix}, \quad d_3 = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix},$$

$$d_4 = \begin{vmatrix} -1+i & 1-i & 2+i \\ 1-i & -1+2i & 1 \\ -2i & i & 1 \end{vmatrix}, \quad d_5 = \begin{vmatrix} -1 & 4 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix},$$

$$d_6 = \begin{vmatrix} 21 & -86 & 32 & 16 & -8 \\ 11 & -43 & 16 & 8 & -4 \\ -53 & 217 & -81 & -40 & 20 \\ 50 & -186 & 68 & 35 & -18 \\ -14 & 52 & -19 & -10 & 5 \end{vmatrix}, \quad d_7 = \begin{vmatrix} 1+i & 1 & 2 & 0 \\ 2+i & 3 & 4 & 3 \\ 4+i & 2 & 3 & 2 \\ 1-i & 2 & 4 & 6 \end{vmatrix}.$$

SOLUCIÓ: Els tres primers són fàcils de calcular directament amb la fórmula de Leibniz: $d_1 = 0 + 6 - 2 - 0 - 2 + 4 = 6$, $d_2 = -6 + 21 + 0 + 36 - 0 - 2 = 49$ i $d_3 = -1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 4$.

Sumant a la primera columna la segona i després sumant a la tercera fila la segona, queda:

$$d_4 = \begin{vmatrix} 0 & 1-i & 2+i \\ i & -1+2i & 1 \\ -i & i & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1-i & 2+i \\ i & -1+2i & 1 \\ 0 & -1+3i & 2 \end{vmatrix} = -i \begin{vmatrix} 1-i & 2+i \\ -1+3i & 2 \end{vmatrix}.$$

Per tant, $d_4 = -i(2(1-i)-(2+i)(-1+3i)) = -i(2-2i+2+3-6i+i) = -i(7-7i) = -7-7i = -7(1+i)$.

Restant un múltiple de la darrera columna de les altres i després restant el doble de la segona fila a la tercera, queda:

$$d_5 = \begin{vmatrix} -1 & 4 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -7 & 1 & -1 & 3 \\ -5 & -4 & -3 & 4 \\ -9 & -3 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -7 & 1 & -1 \\ -5 & -4 & -3 \\ -9 & -3 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -7 & 1 & -1 \\ -5 & -4 & -3 \\ 1 & 5 & 0 \end{vmatrix}.$$

Per tant, $d_5 = 0 + 25 - 3 - 4 - 105 - 0 = -87$.

Restant a la primera fila el doble de la segona i després sumant a la penúltima columna el doble de la última, queda:

$$d_6 = \begin{vmatrix} 21 & -86 & 32 & 16 & -8 \\ 11 & -43 & 16 & 8 & -4 \\ -53 & 217 & -81 & -40 & 20 \\ 50 & -186 & 68 & 35 & -18 \\ -14 & 52 & -19 & -10 & 5 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -43 & 16 & 8 & -4 \\ 217 & -81 & -40 & 20 \\ -186 & 68 & 35 & -18 \\ 52 & -19 & -10 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -43 & 16 & -4 \\ 217 & -81 & 20 \\ 52 & -19 & 5 \end{vmatrix}.$$

Ara, restant a la primera fila onze vegades la última i sumant a la segona quatre vegades la última, després en el resultat sumant a la segona fila la tercera, queda:

$$d_6 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -4 \\ -3 & -1 & 20 \\ -3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -4 \\ -6 & 0 & 25 \\ -3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -6 & 25 \end{vmatrix} = -(25-24) = -1.$$

Separant la primera columna en dues i traient factor comú de i, queda:

$$d_7 = \begin{vmatrix} 1+i & 1 & 2 & 0 \\ 2+i & 3 & 4 & 3 \\ 4+i & 2 & 3 & 2 \\ 1-i & 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} + i \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 & 6 \end{vmatrix}.$$

S'han de calcular els determinants de les matrius de mida 4. Restant un múltiple de la primera columna de les altres, i després restant de la tercera un múltiple de la primera i de la segona columna un la primera, queda:

$$d_7 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & -5 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \end{vmatrix} + i \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & 8 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 3i \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -31 - 3i.$$

2.35. Calculeu els determinants següents:

$$(a) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \qquad (b) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

Solució: A la primera matriu es resta de cada fila l'anterior, començant pel final, i queda una matriu en que totes les files excepte la primera són iguals. Per tant té determinant zero. A la segona matriu es suma la primera fila a cadascuna de les demés i queda una matriu triangular superior de determinant $n!$.

2.36. Resoleu les equacions:

$$(a)\ \begin{vmatrix} 3 & x & 0 \\ 1 & -1 & x \\ 2 & 0 & x \end{vmatrix} = 4, \qquad (b)\ \begin{vmatrix} 1+x & x & x & x \\ x & 1+x & x & x \\ x & x & 1+x & x \\ x & x & x & 1+x \end{vmatrix} = 0.$$

Solució: (a) $-3x + 2x^2 - x^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 = (x+1)(x-4) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ o $x = 4$.
A la matriu (b) es resta de cada fila l'anterior, començant pel final; després es suma a cada fila la següent, començant pel final, i queda:

$$\begin{vmatrix} 1+x & x & x & x \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+4x & 3x & 2x & x \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 4x.$$

Per tant l'únic valor de x que dóna determinant zero és $x = 1/4$. En general, la matriu quadrada de mida n que té a la diagonal $1 + x$ i fora de la diagonal x té determinant $1 + nx$, que és zero només per al valor $x = 1/n$.

2.37. Calculeu el determinant següent. Indicació: es pot obtenir una matriu diagonal fent transformacions elementals primer de files i després de columnes.

$$\begin{vmatrix} x & a & a & \dots & a \\ a & x & a & \dots & a \\ a & a & x & \dots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \dots & x \end{vmatrix}$$

Solució: Primer es resta a cada fila la fila anterior, començant pel final, quedant la matriu:

$$\begin{pmatrix} x & a & a & \dots & a & a & a \\ (a-x) & (x-a) & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (a-x) & (x-a) & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & (x-a) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & (a-x) & (x-a) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & (a-x) & (x-a) \end{pmatrix},$$

i ara se suma a cada columna la columna següent, començant també pel final, quedant la matriu:

$$\begin{pmatrix} x+(n-1)a & (n-1)a & (n-2)a & \dots & 3a & 2a & a \\ 0 & (x-a) & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (x-a) & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & (x-a) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & (x-a) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & (x-a) \end{pmatrix}$$

que és triangular superior i té determinant $\big(x + (n-1)a\big)(x-a)^{n-1}$.

2.38. Trobeu el determinant de la matriu $\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ amb coeficients $a_{ij} = |i-j|$.

Solució: Primer es resta de cada fila la següent, començant pel començament, obtenint-se que:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & \dots & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & \dots & n-3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & \dots & n-4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n-1 & n-2 & n-3 & n-4 & \dots & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & 1 \\ n-1 & n-2 & n-3 & n-4 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Ara se suma a cada columna l'última i, desenvolupant per la primera columna, el determinant resulta ser igual a:

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 & \dots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & \dots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & \dots & 2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ n-1 & n-2 & n-3 & n-4 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}(n-1)2^{n-2}.$$

2.39. Trobeu el determinant de la matriu $\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ amb coeficients

$$a_{ij} = \begin{cases} (-1)^{|i-j|}, & \text{si} \quad i \neq j, \\ 2, & \text{si} \quad i = j. \end{cases}$$

Solució: Sumant a cada fila l'anterior, començant pel final, i dient $\pm 1 = (-1)^{n-1}$, es té:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 & \dots & \mp 1 & \pm 1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & \dots & \pm 1 & \mp 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & \dots & \mp 1 & \pm 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \mp 1 & \pm 1 & \mp 1 & \pm 1 & \dots & 2 & -1 \\ \pm 1 & \mp 1 & \pm 1 & \mp 1 & \dots & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 & \dots & \mp 1 & \pm 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

i ara, restant a cada columna la següent, començant pel final, això és igual a:

$$\begin{vmatrix} n+1 & -(n-1) & n-2 & -(n-3) & \dots & \mp 2 & \pm 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 1 \end{vmatrix} = n+1.$$

2.40. Sigui $\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matriu quadrada simètrica no nul·la de traça zero. Demostreu que si $n = 2$ aleshores $\boldsymbol{A}$ és invertible. És cert si $n \geqslant 3$? És cert a $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?

Solució: Una matriu quadrada simètrica de traça zero de mida 2 és de la forma $\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ i té determinant $-a^2 - b^2 = -(a^2 + b^2)$, que és un nombre diferent de zero si a i b són reals no tots dos nuls (o sigui, la matriu és no nul·la). Per a valors més grans de n no es compleix; per exemple, afegint files i columnes de zeros a la matriu quadrada considerada es tenen matrius quadrades simètriques no nul·les de traça zero amb determinant zero.

En els complexos no és cert, ja que $a^2 + b^2$ pot ser zero tot i que $ab \neq 0$. Per exemple, la matriu simètrica no nul·la de traça zero $\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$ té determinant zero.

2.41. Calculeu el determinant d'una matriu elemental $\mathscr{E}$. Demostreu directament, sense fer servir la proposició 2.3.5, que per a tota matriu $\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ i tota matriu elemental $\mathscr{E}$ es compleix:

$$\det(\mathscr{E}\boldsymbol{A}) = \det(\mathscr{E})\det(\boldsymbol{A}).$$

Demostreu d'una altra manera la proposició 2.3.5 a partir de la identitat anterior.

2.42. Demostreu que tota matriu quadrada antisimètrica (o sigui, tal que $\boldsymbol{A}^t = -\boldsymbol{A}$) de mida n senar té determinant zero.

Solució: Es té $\det(A) = \det(A^t) = \det(-A) = (-1)^n \det(A) = -\det(A)$, i, per tant, $\det(A) = 0$.

2.43. Siguin $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tals que $\boldsymbol{AB} + \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{0}_n$. Demostreu que $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$.

Solució: En multiplicar les matrius $A+I_n$ i $B+I_n$ es té $(A+I_n)(B+I_n) = AB+A+B+I_n = I_n$. Per tant aquestes matrius són invertibles, cadascuna és la inversa de l'altra, i el seu producte en l'ordre invers també és la identitat. Aleshores:

$$I_n = (B + I_n)(A + I_n) = BA + A + B + I_n \quad \Rightarrow \quad BA + A + B = 0 = AB + A + B.$$

Restant les matrius A i B s'obté que les matrius commuten.

2.44. Sigui $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Expresseu $\boldsymbol{A}^{-1}$ com a producte de matrius elementals.

2.45. Sigui $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ la matriu amb files $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ i $\boldsymbol{a}_3$. Sigui $\boldsymbol{B}$ la matriu $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3)$, donada també per files. Determineu la matriu $\boldsymbol{P}$ tal que $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{PA}$ i expresseu el determinant de $\boldsymbol{B}$ en funció del determinant de $\boldsymbol{A}$.

2.46. Comproveu la identitat següent, coneguda amb el nom de *determinant de Vandermonde*:

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i>j}(a_i - a_j)$$

Solució: Es farà per recurrència: suposi's que ja s'ha comprovat per matrius més petites (per a matrius de mida 1, 2 i 3 es calcula fàcilment).

A cada columna se li resta l'anterior multiplicada per a_1, començant pel final, i el determinant que es demana calcular queda:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a_2 - a_1 & a_2(a_2 - a_1) & a_2^2(a_2 - a_1) & \cdots & a_2^{n-2}(a_2 - a_1) \\ 1 & a_3 - a_1 & a_3(a_3 - a_1) & a_3^2(a_3 - a_1) & \cdots & a_3^{n-2}(a_3 - a_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n - a_1 & a_n(a_n - a_1) & a_n^2(a_n - a_1) & \cdots & a_n^{n-2}(a_n - a_1) \end{vmatrix}.$$

Aquest determinant és el de la submatriu que resulta en treure la primera fila i columna, i el d'aquesta matriu, traient factor comú a cada fila de $(a_i - a_1)$, és igual a:

$$(a_2-a_1)(a_3-a_1)\cdots(a_n-a_1)\begin{vmatrix} 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-2} \\ 1 & a_3 & a_3^2 & \cdots & a_3^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

El resultat es dedueix per recurrència.

2.47. Demostreu que si $t_1, ..., t_n$ són elements d'un cos $\mathbb{K}$ no nuls i tots diferents aleshores, per a tot enter $m \in \mathbb{Z}$, el conjunt de vectors $\{(t_1^k, \ldots, t_n^k) : m \leqslant k \leqslant m+n-1\}$ és una base de $\mathbb{K}^n$.

Solució: Per calcular el determinant de la matriu que té per columnes les coordenades dels vectors es comença traient factor comú de cada fila del nombre t_i^m. El que queda és el determinant de Vandermonde dels nombres $t_1, \ldots, t-n$. Per tant, aquest determinant és igual a $\prod t_i^m \prod_{i>j}(t_i - t_j)$, i gràcies a les condicions imposades als nombres t_i és diferent de zero.

2.48. *Determinant d'una matriu triangular per blocs.* Sigui $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{A}_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ una matriu quadrada organitzada per blocs que tenen la mateixa "estructura" en la subdivisió de les files i de les columnes: $\boldsymbol{A}_{ij} \in \mathcal{M}_{n_i \times n_j}(\mathbb{K})$ per a $1 \leqslant i, j \leqslant r$. Suposi's que els blocs per sota la diagonal són tots zero: $\boldsymbol{A}_{ij} = \boldsymbol{0}_{n_i \times n_j}$ sempre que $i > j$. O sigui, es té:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1r} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_{22} & \cdots & \boldsymbol{A}_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{A}_{rr} \end{pmatrix},$$

amb les $\boldsymbol{A}_{ii}$ totes matrius quadrades. Demostreu que:

$$\det(\boldsymbol{A}) = \prod_{i=1}^{r} \det(\boldsymbol{A}_i).$$

2.49. *Demostració de la regla de Laplace.* Sigui $\boldsymbol{A} = (a_{ij}) = (\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Sigui $\boldsymbol{e}_i$ la base canònica de $\mathbb{K}^n$. Demostreu primerament que $\det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{n-1}, \boldsymbol{e}_n) = a_{n,n}^*$ i després que, en general, també es té $\det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{r-1}, \boldsymbol{e}_s, \boldsymbol{a}_{r+1}, \ldots, \boldsymbol{a}_n) = a_{r,s}^*$ per a tot $1 \leqslant r, s \leqslant n$.

A partir d'això, aplicant la multilinealitat del determinant, doneu una altra demostració de la regla de Laplace.

2.50. *Generalització de la regla de Laplace.* Sigui k un enter amb $1 \leqslant k \leqslant n$. Sigui $\mathscr{X}_k$ el conjunt dels subconjunts de $\{1, 2, \ldots, n\}$ que contenen k elements. Per a cada $I \in \mathscr{X}_k$, I^c denotarà el seu complementari. Es defineix σ_I com la permutació de $\mathfrak{S}_n$ que envia els enters $1, 2, \ldots, k$ als elements de I agafats en ordre creixent, i els enters $k+1, \ldots, n$ als elements de I^c també agafats en ordre creixent. Donats $I, J \in \mathscr{S}_k$ es denotarà $\boldsymbol{A}^{(I,J)} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{K})$ la submatriu formada per les entrades que estan a les files i columnes indicades dels conjunts I i J, respectivament. Les entrades d'aquesta matriu són:

$$\boldsymbol{A}_{i,j}^{(I,J)} = a_{\sigma_I(i), \sigma_J(j)}, \qquad 1 \leqslant i, j \leqslant k.$$

Demostreu que, per a cada subconjunt $I \in \mathscr{X}_k$, es té la fórmula:

$$\det(\boldsymbol{A}) = \sum_{J \in \mathscr{X}_k} \operatorname{sgn}(\sigma_I) \operatorname{sgn}(\sigma_J) \det\left(\boldsymbol{A}^{(I,J)}\right) \det\left(\boldsymbol{A}^{(I^c, J^c)}\right).$$

SOLUCIÓ: S'identificarà $\mathfrak{S}_k$ amb el subgrup de $\mathfrak{S}_n$ que permuta els nombres $1, \ldots, k$ i deixa fixos $k+1, \ldots, n$, i s'identificarà $\mathfrak{S}_{n-k}$ amb el subconjunt de $\mathfrak{S}_n$ que deixa fixos $1, \ldots, k$ i permuta $k+1, \ldots, n$.

Sigui $J \in \mathscr{X}_k$. Per a tota permutació $\tau \in \mathfrak{S}_n$ tal que $\{\tau(1), \ldots, \tau(k)\} = J$ (i, per tant, $J^c = \{\tau(k+1), \ldots, \tau(n)\}$) existeixen permutacions $\mu \in \mathfrak{S}_k$ i $\nu \in \mathfrak{S}_{n-k}$ tals que $\tau\mu\nu = \sigma_J$: la permutació μ ordena les primeres k imatges de manera que $\tau\mu(1) < \tau\mu(2) < \cdots < \tau\mu(k)$ i la permutació ν ordena les demés de manera que $\tau\nu(k+1) < \cdots < \tau\nu(n)$. Recíprocament, per a tot parell de permutacions $\mu \in \mathfrak{S}_k$ i $\nu \in \mathfrak{S}_{n-k}$ (noti's que aquestes dues permutacions commuten) la permutació $\tau = \sigma_J\mu\nu \in S_n$ envia els k primers nombres $1, \ldots, k$ al conjunt J.

Ordenant cada producte segons els valors de $\sigma_I(i)$ es té:

$$\det(\boldsymbol{A}) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn}\sigma\ a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{n,\sigma(n)} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn}\sigma\ a_{\sigma_I(1),\sigma\sigma_I(1)} \cdots a_{\sigma_I(n),\sigma\sigma_I(n)}.$$

Se separa el sumatori segons quin sigui el conjunt J dels valors de $\tau = \sigma\sigma_I$ en els primers k enters:

$$\det(\boldsymbol{A}) = \sum_{J \in \mathscr{X}_k} \sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}_n \\ \sigma\sigma_I(\{1,\ldots,k\} = J}} \operatorname{sgn}\sigma\ a_{\sigma_I(1),\sigma\sigma_I(1)} \cdots a_{\sigma_I(n),\sigma\sigma_I(n)}.$$

Tal i com s'ha vist abans, les permutacions del sumatori intern són les permutacions σ tals que $\sigma\sigma_I = \sigma_J\mu\nu$ quan μ i ν recorren les permutacions de $\mathfrak{S}_k$ i $\mathfrak{S}_{n-k}$, respectivament. Aleshores, tenint en compte que $\operatorname{sgn}(\sigma) = \operatorname{sgn}(\sigma_J)\operatorname{sgn}(\mu)\operatorname{sgn}(\nu)\operatorname{sgn}(\sigma_I)$, i que $\sigma_J\mu\nu(i) = \sigma_J\mu(i)$ o bé $\sigma_J\nu(i)$ segons si $i \leqslant k$ o bé $i > k$, el determinant de la matriu ve donat per:

$$\begin{aligned} \det \boldsymbol{A} = &\sum_{J \in \mathscr{X}_k} \operatorname{sgn}(\sigma_I)\operatorname{sgn}(\sigma_J) \\ &\sum_{\mu \in \mathfrak{S}_k} \sum_{\nu \in \mathfrak{S}_{n-k}} \operatorname{sgn}(\mu)\operatorname{sgn}(\nu)\ a_{\sigma_I(1),\sigma_J\mu(1)} \cdots a_{\sigma_I(k),\sigma_J\mu(k)} a_{\sigma_I(k+1),\sigma_J\nu(k+1)} \cdots a_{\sigma_I(n),\sigma_J\nu(n)}, \end{aligned}$$

i separant el doble sumatori com el producte

$$\left(\sum_{\mu \in \mathfrak{S}_k} \operatorname{sgn}\mu\ a_{\sigma_I(1),\sigma_J\mu(1)} \cdots a_{\sigma_I(k),\sigma_J\mu(k)}\right)\left(\sum_{\nu \in \mathfrak{S}_{n-k}} \operatorname{sgn}(\nu)\ a_{\sigma_I(k+1),\sigma_J\nu(k+1)} \cdots a_{\sigma_I(n),\sigma_J\nu(n)}\right),$$

que és el producte dels determinants de les matrius $\boldsymbol{A}^{(I,J)}$ i $\boldsymbol{A}^{(I^c,J^c)}$ s'obté la fórmula de l'enunciat.

2.51. *Rang de potències de matrius.* Sigui $\boldsymbol{N}$ una matriu quadrada estrictament triangular superior per caixes de la forma

$$\boldsymbol{N} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{N}_{1,2} & \boldsymbol{N}_{1,3} & \cdots & \boldsymbol{N}_{1,k-1} & \boldsymbol{N}_{1,k} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{N}_{2,3} & \cdots & \boldsymbol{N}_{2,k-1} & \boldsymbol{N}_{2,k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \boldsymbol{N}_{k-1,k} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

amb $\boldsymbol{N}_{i,j} \in \mathcal{M}_{n_i \times n_j}(\mathbb{K})$ tals que la primera matriu no nul.la de cada fila $\boldsymbol{N}_{i,i+1}$ té rang n_i (en particular això implica que $n_1 \leqslant n_2 \leqslant \cdots \leqslant n_k$). Calculeu el rang de totes les potències de $\boldsymbol{N}$.

Demostreu que tota matriu nilpotent té alguna conjugada d'aquesta forma.

Demostreu que tota matriu quadrada $\boldsymbol{A}$ té alguna conjugada de la forma:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{R} & \boldsymbol{S} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{N} \end{pmatrix},$$

amb $\boldsymbol{R}$ una matriu invertible i $\boldsymbol{N}$ una matriu estrictament triangular superior per caixes de la forma anterior. Calculeu el rang de totes les potències de $\boldsymbol{A}$.

Capítol 3

Aplicacions lineals

Els objectes d'interès de les matemàtiques sovint són conjunts on hi ha definida una estructura addicional. Per exemple: conjunts ordenats, reticles, grups, anells, cossos, espais vectorials, espais mètrics, espais topològics, espais euclidians, espais de Hilbert, etc. Les aplicacions que respecten aquestes estructures reben el nom genèric de *homomorfismes* o *morfismes*.

L'objectiu d'aquest capítol és estudiar les aplicacions que respecten l'estructura d'espai vectorial: els morfismes d'espais vectorials. Aquestes aplicacions s'anomenen també *aplicacions lineals* o *transformacions lineals*.

3.1 Aplicacions lineals

Definició 3.1.1 (Aplicació lineal) *Siguin U i V espais vectorials sobre un mateix cos $\mathbb{K}$. Una* aplicació lineal *entre U i V és una aplicació $f\colon U \to V$ tal que:*

$$f(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{u}) + f(\boldsymbol{v}) \quad i \quad f(x\boldsymbol{v}) = xf(\boldsymbol{v}), \qquad \forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in U, x \in \mathbb{K}.$$

Dit d'una altra manera, una aplicació lineal és una aplicació que envia cada combinació lineal de vectors de U a la combinació lineal de les imatges d'aquests vectors amb els mateixos coeficients: $f\big(\sum x_i \boldsymbol{v}_i\big) = \sum x_i f(\boldsymbol{v}_i)$.

Es fan servir els termes *monomorfisme*, *epimorfisme* i *isomorfisme* per anomenar una aplicació lineal que sigui injectiva, exhaustiva o bijectiva, respectivament.

Una aplicació lineal d'un espai vectorial en ell mateix $f\colon V \to V$ s'anomena *endomorfisme* de l'espai, i, si és bijectiva, s'anomena *automorfisme*.

Es diu que el subespai $W \subseteq V$ és un *subespai invariant* d'un endomorfisme f de l'espai V si $f(W) \subseteq W$. En aquest cas la *restricció* $f|_W$ de l'aplicació f al subconjunt W és un endomorfisme d'aquest subespai.

Proposició 3.1.2 (Imatges i antiimatges de subespais) *Sigui $f\colon V \to V'$ una aplicació lineal. Siguin $W \subseteq V$ i $W' \subseteq V'$ subespais. La imatge $f(W) = \{f(\boldsymbol{w}) : \boldsymbol{w} \in W\}$ de W i l'antiimatge $f^{-1}(W') = \{\boldsymbol{v} \in V : f(\boldsymbol{v}) \in W'\}$ són subespais de V' i de V, respectivament.*

Prova: En efecte, $f(\boldsymbol{w}_1), f(\boldsymbol{w}_2) \in f(W) \Rightarrow f(\boldsymbol{w}_1) + f(\boldsymbol{w}_2) = f(\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2) \in f(W)$ ja que $\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2 \in W$, i, per a tot $x \in \mathbb{K}$, $f(\boldsymbol{w}) \in f(W) \Rightarrow xf(W) = f(x\boldsymbol{w}) \in f(W)$, ja que $x\boldsymbol{w} \in W$. A més, $\mathbf{0} = f(\mathbf{0}) \in f(W)$.

Pel que fa a l'antiimatge, es té: $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in f^{-1}(W) \Leftrightarrow f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2) \in W \Rightarrow f(\boldsymbol{v}_1) + f(\boldsymbol{v}_2) = f(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) \in W \Leftrightarrow \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 \in f^{-1}(W)$, i, per a tot $x \in \mathbb{K}$, $\boldsymbol{v} \in f^{-1}(W) \Leftrightarrow f(\boldsymbol{v}) \in W \Rightarrow xf(\boldsymbol{v}) = f(x\boldsymbol{v}) \in W \Leftrightarrow x\boldsymbol{v} \in f^{-1}(W)$. A més $f(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0} \in W \Rightarrow \boldsymbol{0} \in f^{-1}(W)$. □

Hi ha dos casos especialment importants d'imatge i antiimatge d'un subespai per una aplicació lineal, que reben el un nom de nucli i imatge:

Definició 3.1.3 (Nucli i imatge) *Sigui $f\colon U \to V$ una aplicació lineal. El seu* nucli*, que es denota* $\operatorname{Ker} f$*, és el subespai de U format pels vectors amb imatge zero:*

$$\operatorname{Ker} f = \{\boldsymbol{u} \in U : f(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0}\} = f^{-1}(\{\boldsymbol{0}\}).$$

La seva imatge*, que es denota* $\operatorname{Im} f$*, és el subespai de V format pels vectors que són imatge d'algun vector de U:*

$$\operatorname{Im} f = \{f(\boldsymbol{u}) : \boldsymbol{u} \in U\} = \{\boldsymbol{v} \in V : \exists \boldsymbol{u} \in U, f(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{v}\} = f(U).$$

Proposició 3.1.4 *Sigui $f\colon U \to V$ una aplicació lineal. Aleshores:*

- *f és injectiva si, i només si,* $\operatorname{Ker} f = \{\boldsymbol{0}\}$*, i*
- *f és exhaustiva si, i només si,* $\operatorname{Im} f = V$.

PROVA: Si f és injectiva i $\boldsymbol{v} \in \operatorname{Ker} f$ aleshores $f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0} = f(\boldsymbol{0}) \Rightarrow \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$. Recíprocament, si $\operatorname{Ker} f = \{\boldsymbol{0}\}$ aleshores $f(\boldsymbol{u}) = f(\boldsymbol{v}) \Rightarrow f(\boldsymbol{u}) - f(\boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0} \Rightarrow \boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0} \Rightarrow \boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}$. La condició sobre l'exhaustivitat és la definició. □

Proposició 3.1.5 (Dimensions del nucli i la imatge) *Per a tota aplicació lineal $f\colon U \to V$ es té:*

$$\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim U.$$

PROVA: Sigui $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_k$ una base del nucli. Siguin $\boldsymbol{u}_{k+1}, \dots, \boldsymbol{u}_n$ una ampliació a una base de l'espai U. Es vol veure que $f(\boldsymbol{u}_{k+1}), \dots, f(\boldsymbol{u}_n)$ és una base de la imatge.

Sigui $\boldsymbol{v} \in \operatorname{Im} f$. Aleshores $\boldsymbol{v} = f(\boldsymbol{u})$ amb $\boldsymbol{u} \in U$. Sigui $\boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{u}_i$. Aleshores

$$\boldsymbol{v} = f(\boldsymbol{u}) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(\boldsymbol{u}_i) = \sum_{i=k+1}^{n} x_i f(\boldsymbol{u}_i),$$

ja que $f(\boldsymbol{u}_i) = \boldsymbol{0}$ per a $1 \leqslant i \leqslant k$. Per tant $f(\boldsymbol{u}_{k+1}), \dots, f(\boldsymbol{u}_n)$ són generadors de $\operatorname{Im} f$.

Sigui $\sum_{i=k+1}^{n} x_i f(\boldsymbol{u}_i) = \boldsymbol{0} \Rightarrow f(\sum_{i=k+1}^{n} x_i \boldsymbol{u}_i) = \boldsymbol{0}$. Aleshores $\sum_{i=k+1}^{n} x_i \boldsymbol{u}_i \in \operatorname{Ker} f$ i per tant és combinació lineal dels vectors de la base:

$$\sum_{i=k+1}^{n} x_i \boldsymbol{u}_i = \sum_{i=1}^{k} x_i \boldsymbol{u}_i \Rightarrow (-x_1)\boldsymbol{u}_1 + \cdots + (-x_k)\boldsymbol{u}_k + x_{k+1}\boldsymbol{u}_{k+1} + \cdots + x_n \boldsymbol{u}_n = \boldsymbol{0}.$$

Com que $\{\boldsymbol{u}_i\}_{1 \leqslant i \leqslant n}$ és una base de U es dedueix que tots els coeficients x_i són zero, i, en particular, ho són els $x_{k+1}, \dots, x_n$. □

Operacions amb aplicacions lineals. Les aplicacions lineals es poden sumar, multiplicar per un escalar, o compondre entre elles, sempre que els espais siguin adequats, obtenint-se com a resultat una altra aplicació lineal, de la manera següent:

- *Suma:* siguin $f, g\colon U \to V$ aplicacions lineals entre dos espais vectorials. La seva suma $f + g\colon U \to V$ és l'aplicació lineal $(f + g)(\boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{v}) + g(\boldsymbol{v})$.
- *Producte per escalars:* donades una aplicació lineal $f\colon U \to V$ i un escalar $x \in \mathbb{K}$, el producte $(xf)\colon U \to V$ és l'aplicació lineal $(xf)(\boldsymbol{v}) = x(f(\boldsymbol{v}))$.
- *Composició:* si $f\colon U \to V$ i $g\colon V \to W$ són aplicacions lineals tals que l'espai de destí de la primera coincideix amb l'espai d'origen de la segona, aleshores la composició de totes dues $g \circ f\colon U \to W$ és l'aplicació lineal $(g \circ f)(\boldsymbol{u}) = g(f(\boldsymbol{u}))$.

Es denota $\mathrm{Hom}(U, V)$, o també $\mathscr{L}(U, V)$, el conjunt de totes les aplicacions lineals entre dos espais vectorials U i V. Amb la suma i el producte per escalars que s'acaben de definir aquest conjunt és un $\mathbb{K}$-espai vectorial.

Es denota $\mathrm{End}(V) = \mathrm{Hom}(V, V)$ el conjunt dels endomorfismes d'un espai vectorial V. Com en el cas d'espais diferents, amb la suma i el producte per escalars és un espai vectorial, però; a més, amb la suma i la composició és un anell amb unitat: l'element neutre de la composició és l'aplicació identitat. És un anell no commutatiu que conté elements diferents de zero que no són invertibles (excepte si $\dim V = 1$). Els endomorfismes invertibles són els automorfismes. Es denota $\mathrm{Aut}(V) \subset \mathrm{End}(V)$ el subconjunt dels automorfismes. Amb la composició d'aplicacions $\mathrm{Aut}(V)$ és un grup no commutatiu.

Problemes

3.1. Digueu si són o no aplicacions lineals les aplicacions següents:

1. $f\colon \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}$ definida per $f(x, y) = x + y$,
2. $f\colon \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}$ definida per $f(x, y) = xy$,
3. $f\colon \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^3$ definida per $f(x, y) = (x + 2y, x - 2y, 3y)$,
4. $f\colon \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2$ definida per $f(x, y) = (x + y + a, x - y - a)$, on $a \in \mathbb{K}$,
5. $f\colon \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^2$ definida per $f(x, y, z) = (x + y + az, x - y - az)$, on $a \in \mathbb{K}$,
6. $f\colon \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}$ definida per $f(x, y) = x^2 + y^2$,
7. $f\colon \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2$ definida per $f(x, y) = (a^2x + b^2y, a^3x + b^3y)$, on $a, b \in \mathbb{K}$,
8. $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ definida per $f(x, y) = (x + y, |x|, |y|, y)$,
9. $f\colon \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X]$ definida per $f\big(P(X)\big) = P(X) + Q(X)$, on $Q(X) \in \mathbb{K}[X]$,
10. $f\colon \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X]$ definida per $f\big(P(X)\big) = (X^2 + 1)P(X) + P'(X) - P''(1)$,
11. $f\colon \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}^n$ definida per $f\big(P(X)\big) = \big(P(a_1), P(a_2), ..., P(a_n)\big)$, on $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$,
12. $f\colon \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ definida per $f(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{M}\boldsymbol{A}$, on $\boldsymbol{M} \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$,
13. $f\colon \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ definida per $f(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^t$,
14. $f\colon \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ definida per $f(\boldsymbol{A}) = \mathrm{Tr}(\boldsymbol{A})$,
15. $f\colon \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}^3$ definida per $f(\boldsymbol{A}) = \big(\,\mathrm{Tr}(\boldsymbol{A}), \det(\boldsymbol{A}), \mathrm{rang}(\boldsymbol{A})\big)$.

3.2. Calculeu el nucli i de la imatge de les aplicacions lineals següents, i digueu si són injectives, exhaustives o bijectives.

1. $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida per $f(x,y) = (x+2y, 4x+6y)$,
2. $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida per $f(x,y) = (x-y, 3x+2y, 5x+5y)$,
3. $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida per $f(x,y,z) = (x+2y+3z, -x+3y+2z)$,
4. $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definida per $f(x,y,z,t) = (x-y+z, x+t, y-z+t, x+t)$,
5. $f\colon \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ definida per $f\big(P(X)\big) = P'(X) + P(0) + X^2P''(\pi)$,
6. $f\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definida per $f(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A}^t + \mathrm{Tr}(\boldsymbol{A})\mathbf{1}_2$,
7. $f\colon \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definida per:

$$f(\boldsymbol{A}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \boldsymbol{A} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

SOLUCIÓ:

1. $\operatorname{Ker} f = \{\mathbf{0}\}$, $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2$, bijectiva.
2. $\operatorname{Ker} f = \{\mathbf{0}\}$, $\operatorname{Im} f = \langle (1,3,5), (-1,2,5) \rangle = \langle (1,0,-1), (0,1,2) \rangle$, injectiva.
3. $\operatorname{Ker} f = \langle (1,1,-1) \rangle$, $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2$, exhaustiva.
4. $\operatorname{Ker} f = \langle (1,1,0,-1), (0,1,1,0) \rangle$, $\operatorname{Im} f = \langle (1,0,-1,0), (0,1,1,1) \rangle$, res.
5. $\operatorname{Ker} f = \langle X-1 \rangle$, $\operatorname{Im} f = \langle 1, X+X^2 \rangle$, res.
6. $\operatorname{Ker} f = \{\mathbf{0}\}$, $\operatorname{Im} f = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, bijectiva.
7. $\operatorname{Ker} f = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle$, $\operatorname{Im} f = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, exhaustiva.

3.3. Sigui $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'aplicació lineal $f(x,y,z) = (2x-y-z, x-z, 2y+3z, -x+y-z)$.

1. Calculeu $\operatorname{Ker} f$ i $\operatorname{Im} f$,
2. Calculeu $f^{-1}(\boldsymbol{u})$ i $f^{-1}(\boldsymbol{v})$ per als vectors $\boldsymbol{u} = (0,1,-1,0)$ i $\boldsymbol{v} = (2,1,5,-2)$,
3. Calculeu $f(U)$ i $f(V)$ per als subespais $U = \langle (1,0,-1), (0,1,-1) \rangle$ i $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x-z = y-z = 0\}$,
4. Calculeu $f^{-1}(U)$ i $f^{-1}(V)$ per als subespais $U = \langle (1,1,1,1), (1,-1,1,-1) \rangle$ i $V = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x+2y+3x+4t = t = 0\}$.

SOLUCIÓ:

1. $\operatorname{Ker} f = \{\mathbf{0}\}$ i
$\operatorname{Im} f = \langle (2,1,0,-1), (-1,0,2,1), (-1,-1,3,-1) \rangle = \langle (1,0,0,-\frac{7}{5}), (0,1,0,\frac{9}{5}), (0,0,1,-\frac{1}{5}) \rangle$.
2. $f^{-1}(\boldsymbol{u}) = \varnothing$ i $f^{-1}(\boldsymbol{v}) = \{(2,1,1)\}$.
3. $f(U) = \langle (3,2,-3,0), (0,1,-1,2) \rangle = \langle (1,0,-\frac{1}{3},-\frac{4}{3}), (0,1,-1,2) \rangle$.
Com que $V = \langle (1,1,1) \rangle$ és $f(V) = \langle (0,0,5,-1) \rangle$.
4. Com que $U = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x-z = y-t = 0\}$ és $f^{-1}(U) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x-3y-4z = 2x-y = 0\} = \langle (1,2,-1) \rangle$.
$f^{-1}(V) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 9y+2 = -x+y-z = 0\} = \langle (11,2,-9) \rangle$.

3.4. Sigui $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'aplicació lineal $f(x,y,z) = (2x-3y+z, -x+2y-2z, x-3y+5z)$.

1. Calculeu $\operatorname{Ker} f$ i $\operatorname{Im} f$,
2. Calculeu $f^{-1}(\boldsymbol{u})$ i $f^{-1}(\boldsymbol{v})$ per als dos vectors $\boldsymbol{u} = (-1,1,-2)$ i $\boldsymbol{v} = (1,1,1)$,
3. Calculeu $f(U)$ i $f(V)$ per als dos subespais $U = \langle (1,0,-1), (3,3,2) \rangle$ i $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x-y-z = 0\}$,
4. Calculeu $f^{-1}(U)$ i $f^{-1}(V)$ per als dos subespais $U = \langle (-1,1,-2), (-1,0,1) \rangle$ i $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z = x+2y+3z = 0\}$.

SOLUCIÓ:

1. $\operatorname{Ker} f = \langle(4,3,1)\rangle$ i $\operatorname{Im} f = \langle(2,-1,1),(-3,2,-3),(1,-2,5)\rangle = \langle(1,0,-1),(0,1,-3)\rangle$.
2. $f^{-1}(\boldsymbol{u}) = \{(1+4\lambda, 1+3\lambda, \lambda) : \lambda \in \mathbb{R}\}$ i $f^{-1}(\boldsymbol{v}) = \varnothing$.
3. $f(U) = \langle(1,1,-4),(-1,-1,4)\rangle = \langle(1,1,-4)\rangle$.
   Com que $V = \langle(1,1,0),(1,0,1)\rangle$ és $f(V) = \langle(-1,1,-2),(3,-3,6)\rangle = \langle(1,-1,2)\rangle$.
4. Com que $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+3y+z=0\}$ és $f^{-1}(U) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0=0\} = \mathbb{R}^3$.
   $f^{-1}(V) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x-4y+4z = 3x-8y+12z = 0\} = \langle(4,3,1)\rangle$.

3.5. Considereu l'aplicació lineal $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida per $f(3,5) = (1,1,2)$ i $f(3,7) = (1,1,\alpha)$. Doneu, segons el valor del paràmetre α, una base de $\operatorname{Ker} f$ i unes equacions que defineixin $\operatorname{Im} f$.

Solució: Si $\alpha \neq 2$, $\operatorname{Im} f = \langle(1,1,2),(1,1,\alpha)\rangle = \langle(1,1,0),(0,0,1)\rangle = \{X-Y=0\}$ i $\operatorname{Ker} f = \{0\}$. Si $\alpha = 2$, $\operatorname{Im} f = \langle(1,1,2)\rangle = \{X-Y = 2X-Z = 0\}$ i $\operatorname{Ker} f = \langle(0,2)\rangle$.

3.6. Sigui $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'aplicació lineal definida per $f(x,y) = (x+\alpha^2 y, x+y, x+\alpha y)$. Trobeu els valors del paràmetre α per als quals sigui $\operatorname{Ker} f = \langle(1,-1)\rangle$ i els valors per als quals sigui $\operatorname{Im} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x-y=0\}$.

Solució: $\operatorname{Ker} f = \{x+\alpha^2 y = x+y = x+\alpha y = 0\} = \{x+y = (1-\alpha)y = (1-\alpha^2)y = 0\}$ és l'espai indicat si, i només si, $\alpha = 1$.
$\operatorname{Im} f = \langle(1,1,1),(\alpha^2,1,\alpha)\rangle$ és l'espai d'equació $x-y=0$ si, i només si, $\alpha^2 = 1$ i $\alpha \neq 1$; o sigui, $\alpha = -1$.

3.7. Es considera l'endomorfisme de $\mathbb{R}^3$ definit per $f_\alpha(x,y,z) = (x+y, x+\alpha^2 y, x+y+(\alpha-1)z)$ en funció d'un paràmetre $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Trobeu la dimensió i una base del nucli i la imatge de f_α.
2. Sigui $\boldsymbol{v} = (1,1,2)$. Determineu els valors de α per als quals $f_\alpha^{-1}(\boldsymbol{v})$ és no buit i els valors per als quals el subespai $f_\alpha^{-1}(\langle\boldsymbol{v}\rangle)$ és diferent de zero.
3. Sigui $V \subset \mathbb{R}^2$ de dimensió 2. Determineu la dimensió de $f_\alpha(V)$ en funció de α.

Solució: La matriu de l'aplicació lineal té determinant $(\alpha-1)^2(\alpha+1)$ de manera que és bijectiva excepte per als dos valors $\alpha = \pm 1$. Per a $\alpha = 1$ el rang de la matriu és 1 i per a $\alpha = -1$ és 2.

1. Si $\alpha \neq \pm 1$ es té $\ker f_\alpha = \{0\}$ i $\operatorname{Im} f_\alpha = \mathbb{R}^3$. Si $\alpha = 1$ aleshores $\ker f_\alpha = \{x+y=0\} = \langle(1,-1,0),(0,0,1)\rangle$ i $\operatorname{Im} f_\alpha = \langle(1,1,1)\rangle$. Si $\alpha = -1$ aleshores $\ker f_\alpha = \{x+y = x+y-2z = 0\} = \langle(1,-1,0)\rangle$ i $\operatorname{Im} f_\alpha = \langle(1,1,1),(0,0,1)\rangle$.
2. Primer ens demanen determinar si $\boldsymbol{v} \in \operatorname{Im} f_\alpha$ o no. Naturalment, si $\alpha \neq \pm 1$ aleshores $f_\alpha^{-1}(\{\boldsymbol{v}\}) = \{f_\alpha^{-1}(\boldsymbol{v})\} \neq \varnothing$; de fet, $f_\alpha^{-1}(1,1,2) = (1,0,\frac{1}{\alpha-1})$. Si $\alpha = 1$ òbviament $\boldsymbol{v} \notin \langle(1,1,1)\rangle$ i en canvi si $\alpha = -1$ es té $\boldsymbol{v} = (1,1,1)+(0,0,1) = f_\alpha((1,0,-\frac{1}{2}) + t(1,-1,0))$.
   En segon lloc ens pregunten sobre l'antiimatge del subespai generat per $\boldsymbol{v}$, que és sempre no buida ja que conté el zero, però pot ser l'espai zero. Si $\alpha = \pm 1$ l'antiimatge té dimensió 1 i és l'espai $\langle f_\alpha^{-1}(\boldsymbol{v})\rangle = \langle(1,0,\frac{1}{\alpha-1})\rangle$.
3. Es tracta de considerar l'aplicació $f_\alpha|_V\colon V \to \mathbb{R}^3$ obtinguda restringint f_α a aquest subespai V. Es té: $\dim\ker(f_\alpha|_V) + \dim f_\alpha(V) = \dim V = 2$. A més, $\ker(f_\alpha|_V) = (\ker f_\alpha) \cap V$. Si $\alpha \neq \pm 1$ aleshores f_α és bijectiva i la dimensió de la imatge és 2. Si $\alpha = 1$ aleshores es poden donar dos casos: dimensió zero o 1, segons que $V = \ker f_\alpha$ o que $V \neq \ker f_\alpha$. En aquest segon cas ha de ser per força $\dim(V \cap \ker f_\alpha) = 1$ per Grassman. Finalment, si $\alpha = -1$ aleshores la imatge pot tenir dimensió 1 o 2 segons que V contingui o no $\ker f_\alpha$, o sigui, el vector $(1,-1,0)$.

3.8. Trobeu, si es possible, una aplicació lineal $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$\operatorname{Ker} f = \langle(0,1,-1,1),(0,1,0,1)\rangle \quad \text{i} \quad \operatorname{Im} f = \langle(1,0,1),(2,1,0)\rangle.$$

Solució: Sí que és possible, ja que les dimensions quadren. N'hi ha prou a definir una aplicació sobre envïi els dos vectors donats al zero i uns altres dos vectors que completin aquests dos a una base als vectors imatge donats. Per exemple, $f(x,y,z,t) = (x+2y-2t, y-t, x)$.

3.9. A l'espai $\mathbb{R}^4$ es considera el subespai $V = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x+y-z = x-t = 0\}$ i l'endomorfisme definit per $f(x,y,z,t) = (x-z, y+z-t, x+y-t, x-y-2z+t)$. Calculeu els subespais V, $f(V)$, $f^{-1}(V)$, $f(f^{-1}(V))$ i $f^{-1}(f(V))$ i comproveu que $f(f^{-1}(V)) \subsetneq V \subsetneq f^{-1}(f(V))$.

Solució: $V = \langle(1,0,1,1),(0,1,1,0)\rangle$; $f(V) = \langle(0,0,0,0),(-1,2,1,-3)\rangle$;
$f^{-1}(V) = \langle(1,0,0,0),(1,-1,1,0),(0,1,0,1)\rangle$;
$f(f^{-1}(V)) = \langle(1,0,1,1)\rangle$;
$f^{-1}(f(V)) = f^{-1}((-1,2,1,-3)) = \langle(0,1,1,0),(1,-1,1,0),(0,1,0,1)\rangle$.

3.10. Sigui f l'endomorfisme de $\mathbb{R}^4$ que sobre la base canònica pren els valors $f(\boldsymbol{e}_1) = (1,0,1,1), f(\boldsymbol{e}_2) = (0,1,1,0), f(\boldsymbol{e}_3) = (-1,1,0,1)$ i $f(\boldsymbol{e}_4) = (0,-1,0,1)$.

1. Demostreu que si U, V són subespais complementaris de $\mathbb{R}^4$ aleshores els subespais $f(U)$ i $f(V)$ també ho són.
2. Siguin $U = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : 2x+y = z+t = 0\}$, $V_1 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : y = z = x+t\}$ i $V_2 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : y = z = x-t\}$. Comproveu que per a cada $i = 1,2$ és $U \oplus V_i = \mathbb{R}^4$ i que $f(U) = U$. Quant val $f(V_i)$?

Solució: La condició necessària i suficient per a una aplicació lineal f que garanteix que ex compleixi el primer apartat és que sigui bijectiva. La segona: $U = \langle(1,-2,0,0),(0,0,1,-1)\rangle$ i $V_1 = \langle(1,1,1,0),(0,1,1,1)\rangle$ i $V_2 = \langle(1,1,1,0),(0,-1,-1,1)\rangle$. Es té $f(1,-2,0,0) = (1,-2,-1,1)$ i $f(0,0,1,-1) = (-1,2,0,0)$ i per tant $f(U) = U$. Es té $f(1,1,1,0) = (0,2,2,2) \in V_1 \cap V_2$ i $f(0,1,1,1) = (-1,1,1,2) \in V_2$ i $f(0,-1,-1,1) = (1,-3,-1,0)$.

3.11. Sigui $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ definit, en termes d'un paràmetre $\alpha \in \mathbb{R}$, per

$$f(x,y,z) = (2x+\alpha y+z, x+(\alpha+1)y+z, \alpha x+y+2z).$$

Determineu els valors de α per als quals els subespais següents són invariants per f:

1. $\langle(1,-1,0)\rangle$,
2. $\langle(1,-2,1),(2,-1,-1)\rangle$,
3. $\langle(1,1,1)\rangle$.

Solució:

1. $f(1,-1,0) = (2-\alpha, -\alpha, \alpha-1) = (\lambda, -\lambda, 0)$ si, i només si, $\alpha = 1$ i, en tal cas, ha de ser $\lambda = 1$.
2. $f(1,-2,1) = (3-2\alpha, -2\alpha, \alpha)$ i $f(2,-1,-1) = (3-\alpha, -\alpha, 2\alpha-3)$. S'ha de veure si aquests vectors són o no combinació lineal de $(1,-2,1)$ i $(2,-1,-1)$. Per això es calcula la forma esglaonada següent:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 3-2\alpha & 3-\alpha \\ -2 & -1 & -2\alpha & -\alpha \\ 1 & -1 & \alpha & 2\alpha-3 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 3-2\alpha & 3-\alpha \\ 0 & 3 & -6(\alpha-1) & -3(\alpha-2) \\ 0 & 0 & -3(\alpha-1) & 0 \end{array}\right)$$

   i es veu que el segon vector sempre és combinació lineal dels altres dos, sigui quin sigui el valor de α (en efecte, és igual a $2\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2 + \alpha(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2)$), però en canvi el primer vector només n'és combinació lineal quan $\alpha = 1$.
3. $f(1,1,1) = (3+\alpha, 3+\alpha, 3+\alpha) = \lambda(1,1,1)$ per a tot α, amb $\lambda = 3+\alpha$.

3.12. Sigui $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}_2[X])$ l'endomorfisme determinat per:

$$f(1) = 2-X^2, \quad f(X^2) = -1+2X^2, \quad f(1+X) = 2+2X-X^2.$$

1. Comproveu que $U = \langle X^2-1\rangle$ és un subespai invariant per f.
2. Sabent que existeix un subespai V complementari de U que és invariant per f i conté el vector $(X+1)^2$, trobeu aquest subespai V.

SOLUCIÓ:

1. Es té $f(X^2-1) = f(X^2) - f(1) = -1+2X^2-2+X^2 = -3+3X^2 = 3(X^2-1) \in \langle X^2-1\rangle$.
2. Si V és invariant i $X^2+2X+1 \in V$ aleshores $f(X^2+2X+1) = f(X^2)+2f(X+1)-f(1) = -1+2X^2+4+4X-2X^2-2+X^2 = 1+4X+X^2$. Si V ha de ser complementari de U té dimensió 2 i per tant necessàriament ha de ser $V = \langle 1+2X+X^2, 1+4X+X^2\rangle$. Aquest espai també admet com a base els vectors X i X^2+1 i és clarament invariant per f ja que $f(X) = 2X$ i $f(X^2+1) = X^2+1$.

3.13. Demostreu que per a tot endomorfisme $f\colon V \to V$ els subespais $\operatorname{Ker} f$ i $\operatorname{Im} f$ són subespais de V invariants per f. Doneu tres endomorfismes f_i de $\mathbb{R}^4$ tals que $\dim \operatorname{Ker} f_i = \dim \operatorname{Im} f_i = 2$ per a $i = 1, 2, 3$ i tals que:

1. $\operatorname{Ker} f_1 \oplus \operatorname{Im} f_1 = \mathbb{R}^4$,
2. $\operatorname{Ker} f_2 = \operatorname{Im} f_2$,
3. $\operatorname{Ker} f_3 \cap \operatorname{Im} f_3$ té dimensió 1.

SOLUCIÓ: Si $\boldsymbol{v} \in \operatorname{Ker} f$ aleshores $f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0} \in \operatorname{Ker} f$, i per tant $\operatorname{Ker} f$ és invariant. Si $\boldsymbol{v} \in \operatorname{Im} f$ aleshores $f(\boldsymbol{v})$ és la imatge de $\boldsymbol{v} \in V$ i per tant $f(\boldsymbol{v}) \in \operatorname{Im} f$. Per fer els exemples es pot imposar per exemple que $\operatorname{Ker} f_i = \langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\rangle$ per a tot $i = 1, 2, 3$ i que $\operatorname{Im} f_1 = \langle \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4\rangle$, $\operatorname{Im} f_2 = \langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\rangle$ i $\operatorname{Im} f_3 = \langle \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\rangle$. Això s'aconsegueix, per exemple, amb les aplicacions lineals $f_1(x, y, z, t) = (0, 0, z, t)$, $f_2(x, y, z, t) = (z, t, 0, 0)$ i $f_3(x, y, z, t) = (0, z, t, 0)$.

3.14. Siguin $f_1(x, y, z) = (x+y+2z, 2x+y+z, x+2y+z)$ i $f_2(x, y, z) = (2y+z, x+3y+z, x+y)$ endomorfismes de $\mathbb{R}^3$.

1. Doneu bases del nucli i la imatge dels endomorfismes f_1, f_2, f_1+f_2 i f_1-f_2.
2. Existeix algun vector $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$ diferent de zero tal que $f_1(\boldsymbol{v}) = f_2(\boldsymbol{v})$? i que $f_1(\boldsymbol{v}) = -f_2(\boldsymbol{v})$? Si n'existeixen trobeu-los tots.
3. Trobeu tots els vectors $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$ tals que $f_1(\boldsymbol{v}) = (-1, -2, 1) + f_2(\boldsymbol{v})$.

SOLUCIÓ:

1. $\ker f_1 = \{0\}$; $\operatorname{Im} f_1 = \mathbb{R}^3$; $\ker f_2 = \langle (1, -1, 2)\rangle$; $\operatorname{Im} f_2 = \langle (2, 1, 1), (0, 3, 1)\rangle$; $(f_1+f_2)(x, y, z) = (x+3y+3z, 3x+4y+2z, 2x+3y+z)$; $\ker(f_1+f_2) = \{0\}$; $\operatorname{Im}(f_1+f_2) = \mathbb{R}^3$; $(f_1-f_2)(x, y, z) = (x-y+z, x-2y, y+z)$; $\ker(f_1-f_2) = \langle (2, 1, -1)\rangle$; $\operatorname{Im}(f_1-f_2) = \langle (1, 1, 0), (1, 0, 1)\rangle$.
2. L'únic vector on totes dues aplicacions tenen valors oposats és el zero; en canvi, en els vectors $(2t, t, -t)$ les aplicacions prenen el mateix valor.
3. Ha de ser $(f_1-f_2)(\boldsymbol{v}) = (-1, -2, 1) = -2(1, 1, 0) + 1(1, 0, 1)$. Sí que n'existeixen i són $(-2, 0, 1) + t(2, 1, -1)$.

3.15. Sigui $\{\boldsymbol{u}_i\}_{1 \leqslant i \leqslant 3}$ una base d'un $\mathbb{K}$-espai vectorial de dimensió 3. Es considera l'endomorfisme definit per $f(x\boldsymbol{u}_1 + y\boldsymbol{u}_2 + z\boldsymbol{u}_3) = (x+y+z)\boldsymbol{u}_1 + (-2x-y-2z)\boldsymbol{u}_2 + z\boldsymbol{u}_3$.

1. Demostreu que f i f^2 són isomorfismes i calculeu f^{-1}.
2. Demostreu que $f + \mathrm{Id}$ és un isomorfisme però que $f^2 + \mathrm{Id}$ no ho és.
3. Comproveu que $(f + \mathrm{Id}) \circ (f^2 + \mathrm{Id}) = 2(f^2 + \mathrm{Id})$ i que $f^2 + \mathrm{Id} = f + f^{-1}$.

3.16. Sigui $\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$ una base d'un espai vectorial U. Demostreu que per a cada família $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ de vectors d'un espai vectorial V existeix una única aplicació lineal $f\colon U \to V$ tal que $f(\boldsymbol{u}_i) = \boldsymbol{v}_i$ per a tot $i = 1, \ldots, n$.

Discutiu l'afirmació anterior si $\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$ només són independents o només són generadors.

3.17. Calculeu la dimensió de l'espai $\mathrm{Hom}(U, V)$ en funció de $\dim U$ i $\dim V$.

3.18. Digueu si existeixen, i si és així calculeu-les totes, aplicacions lineals $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tals que:

1. $f(1,1,1) = (1,1,0), f(1,1,0) = (1,0,0), f(1,0,0) = (0,0,0)$,
2. $f(1,-1,1) = (2,-1,2), f(2,-1,2) = (3,-1,3), f(3,-1,3) = (4,-1,4)$,
3. $f(1,-1,1) = (2,-1,2), f(2,-1,2) = (4,-1,4), f(3,-1,3) = (6,-1,6)$,
4. $f(\alpha,1,1) = (1,\alpha,1), f(1,\alpha,1) = (1,1,\alpha), f(1,1,\alpha) = (\alpha,1,1)$.

3.19. Siguin $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n$ i $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$ famílies de vectors dels espais U i V.

1. Doneu condicions necessàries i suficients per tal que existeixi alguna aplicació lineal $f\colon U \to V$ tal que $f(\boldsymbol{u}_i) = \boldsymbol{v}_i$ per a tot $i = 1, \dots, n$.
2. Demostreu que si existeix una aplicació lineal f com a l'apartat anterior aleshores les demés poden obtenir-se sumant a f totes les aplicacions lineals d'un cert subespai vectorial H de $\mathrm{Hom}(U, V)$. Quin?
3. Digueu com es poden calcular fàcilment totes les aplicacions lineals dels apartats anteriors.

3.20. Sigui $f\colon U \to V$ una aplicació lineal. Siguin $W_1 \subseteq U$ i $W_2 \subseteq V$. Demostreu que

$$\dim f(W_1) = \dim W_1 - \dim(W_1 \cap \mathrm{Ker}\, f) \quad \text{i} \quad \dim f^{-1}(W_2) = \dim(W_2 \cap \mathrm{Im}\, f) + \dim \mathrm{Ker}\, f.$$

3.21. Sigui $V = W_1 \oplus W_2$. Demostreu que existeix un únic endomorfisme $f \in \mathrm{End}(V)$ tal que $f^2 = f$, $\mathrm{Ker}\, f = W_1$ i $\mathrm{Im}\, f = W_2$.

SOLUCIÓ: Existència: per a cada vector $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2$ amb $\boldsymbol{w}_i \in W_i$ es defineix $f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{w}_2$. Aquesta aplicació està ben definida, ja que la descomposició $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2$ és única i per tant $\boldsymbol{v}$ determina el vector $\boldsymbol{w}_2$. És clarament lineal, i satisfà $f^2 = f$.

Unicitat: sigui f una aplicació que satisfà aquestes condicions. Sigui $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2$ un vector de V. Aleshores $f(\boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{w}_1) + f(\boldsymbol{w}_2) = f(\boldsymbol{w}_2)$ per ser $\mathrm{Ker}\, f = W_1$. D'altra banda, com que $W_2 = \mathrm{Im}\, f$ ha de ser $\boldsymbol{w}_2 = f(\boldsymbol{u})$ per a algun vector $\boldsymbol{u} \in V$, i es dedueix que $f(\boldsymbol{w}_2) = f^2(\boldsymbol{u}) = f(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{w}_2$. Per tant $f(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{w}_2$ i la funció f és la que ja sabíem.

3.22. Siguin $f, g\colon \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ les aplicacions $f\big(P(x)\big) = P'(x)$ i $g\big(P(x)\big) = \int_0^x P(t)\, dt$.

Demostreu que f i g són endomorfismes de $\mathbb{R}[x]$ i estudieu la injectivitat i l'exhaustivitat dels endomorfismes f, g, $f \circ g$ i $g \circ f$.

Comproveu que les aplicacions $f\big(P(x)\big) = \frac{P(x)-P(0)}{x}$ i $g\big(P(X)\big) = xP(x)$ tenen aquesta mateixa propietat.

3.23. Sigui $f \in \mathrm{End}(V)$ un endomorfisme d'un espai vectorial. Demostreu que si V és de dimensió finita aleshores les condicions següents són equivalents:

1. Existeix un endomorfisme $g \in \mathrm{End}(V)$ tal que $f \circ g = \mathrm{Id}$,
2. Existeix un endomorfisme $h \in \mathrm{End}(V)$ tal que $h \circ f = \mathrm{Id}$,
3. f és bijectiu (o sigui, un isomorfisme).

i que en cas que es compleixin aleshores $g = h = f^{-1}$.

Doneu un exemple d'un espai de dimensió infinita en que l'enunciat no es compleix.

3.24. Demostreu que dos endomorfismes $f, g \in \mathrm{End}(V)$ d'un espai vectorial de dimensió finita són automorfismes si, i només si, ho és la composició $f \circ g$. És cert l'enunciat anàleg canviant composició per suma? És cert l'enunciat anàleg si es suprimeix la condició de dimensió finita?

Demostreu que un endomorfisme f d'un espai vectorial de dimensió finita és un automorfisme si, i només si, ho és una potència seva f^k per a algun exponent $k \geqslant 1$.

3.25. Donat un endomorfisme f d'un espai vectorial V de dimensió n, demostreu que:

1. Si n és senar aleshores $\operatorname{Ker} f \neq \operatorname{Im} f$.
2. Si $n = 2$, aleshores o bé $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f$ o bé $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{\mathbf{0}\}$.
3. Si $n = 3$, aleshores o bé $\operatorname{Ker} f \subseteq \operatorname{Im} f$ o bé $\operatorname{Im} f \subseteq \operatorname{Ker} f$ o bé $\operatorname{Ker} f$ i $\operatorname{Im} f$ són complementaris.
4. Per a tot n es compleix: $V = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f \Leftrightarrow V = \operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f \Leftrightarrow \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{\mathbf{0}\}$.

Solució:

1. Si $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f$ té dimensió d aleshores $\dim V = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f \Rightarrow 2d = n$, el qual és impossible si n és senar i no es compleix si el rang, que és la dimensió de $\operatorname{Im} f$, és diferent de $n/2$.
2. Sigui $n = 2$. Aleshores si $\operatorname{Ker} f \neq \operatorname{Im} f$ mirant les seves dimensions es veu que només pot passar que l'un sigui trivial i l'altre total, i per tant tenen intersecció trivial, o bé que siguin espais diferents de dimensió 1, i en aquest cas la intersecció també és trivial.
3. Sigui $n = 3$. Suposi's que no es compleix cap de les dues inclusions. Aleshores tenint en compte les dimensions només pot passar que un és de dimensió 2 i l'altre de dimensió 1, la seva suma serà el total, i per tant la intersecció ha de ser trivial.
4. Les dimensions compleixen que $\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = n$. Aleshores, com que $\dim(E + F) + \dim(E \cap F) = \dim E + \dim F$ es dedueix que $\dim(E + F) + \dim(E \cap F) = n$. Que la suma sigui directa equival al fet que la primera dimensió sigui n i, també, a que la segona sigui zero, que són condicions equivalents entre sí.

3.26. Siguin $f_1, f_2 \colon U \to V$ dues aplicacions lineals. Doneu condicions necessàries i suficients per tal que existeixin automorfismes $g \in \operatorname{Aut}(U)$ i $h \in \operatorname{Aut}(V)$ tals que $h \circ f_2 = f_1 \circ g$.

3.27. Sigui V un espai vectorial de dimensió finita n i $f \colon V \to V$ una aplicació lineal. Demostreu que $V = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f \Leftrightarrow \operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$.

Solució: En general, per a tot endomorfisme f es té que $\operatorname{Im} f^2 \subseteq \operatorname{Im} f$ ja que tot vector $w \in \operatorname{Im} f^2$ és de la forma $f(f(v))$ per a un vector $v \in E$ i, per tant, de la forma $f(u)$ per a un vector $u = f(v) \in E$.

Suposi's que $E = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f$. Donat un vector $w = f(u) \in \operatorname{Im} f$, sigui $u = f(v) + k$ segons la descomposició anterior. Aleshores $w = f(u) = f^2(v) + f(k) = f^2(v)$ i per tant $w \in \operatorname{Im} f^2$. Recíprocament, si es compleix la igualtat aleshores l'aplicació lineal $f \colon \operatorname{Im} f \to \operatorname{Im} f$ és un isomorfisme ja que és exhaustiva (la seva imatge és $f(\operatorname{Im} f) = \operatorname{Im} f^2 = \operatorname{Im} f$); en particular és injectiva i aleshores si $w \in \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f$ es té que $w = f(v)$ i $f(w) = 0$, i per la injectivitat de f a $\operatorname{Im} f$ ha de ser $w = 0$, de manera que $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \{0\} \Rightarrow E = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f$.

3.2 Matriu d'una aplicació lineal

Sigui $f \colon U \to V$ una aplicació lineal entre dos $\mathbb{K}$-espais vectorials de dimensió finita. Siguin $\mathscr{B}_u = \{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$ i $\mathscr{B}_v = \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m\}$ bases dels espais U i V, respectivament.

Definició 3.2.1 (Matriu d'una aplicació lineal) *La* matriu de f en les bases $\mathscr{B}_u$ i $\mathscr{B}_v$ *és la matriu* $(a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ *amb entrades determinades per les identitats:*

$$f(\boldsymbol{u}_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\boldsymbol{v}_i, \qquad j = 1, \ldots, n.$$

O sigui, és la matriu que té per columnes les coordenades dels vectors $f(\boldsymbol{u}_j)$, imatge dels vectors de la base $\mathscr{B}_u$ de l'espai de sortida U, en la base $\mathscr{B}_v$ de l'espai d'arribada V.

Aquesta matriu es denota $\mathrm{Mat}(f;\mathscr{B}_u,\mathscr{B}_v)$ o amb altres notacions semblants, com per exemple $\mathrm{M}_{\mathscr{B}_u,\mathscr{B}_v}(f)$, o alguna cosa per l'estil, on s'especifiquin l'aplicació lineal i les bases que es consideren. És clar que aquesta matriu (un cop les bases estan fixades) determina completament l'aplicació lineal f, ja que dóna la imatge dels vectors d'una base de U i, per linealitat, a partir d'aquestes s'obté la imatge de tots els vectors.

La matriu d'una aplicació lineal permet calcular amb les coordenades dels vectors en les bases triades: si $\boldsymbol{u} = x_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{u}_n$ i $\boldsymbol{v} = f(\boldsymbol{u}) = y_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + y_m\boldsymbol{v}_m$, aleshores es té:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}.$$

O sigui, $\boldsymbol{Au} = \boldsymbol{v}$, on $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ és la matriu de l'aplicació lineal f en les bases considerades: $\boldsymbol{A} = \mathrm{Mat}(f;\mathscr{B}_u,\mathscr{B}_v)$, i $\boldsymbol{u}$ i $\boldsymbol{v}$ representen en aquesta expressió les matrius columna de les coordenades d'aquests dos vectors en les bases considerades. En efecte,

$$f(\boldsymbol{u}) = f\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\boldsymbol{u}_j\right) = \sum_{j=1}^{n} x_j f(\boldsymbol{u}_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\boldsymbol{v}_i = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right)\boldsymbol{v}_i,$$

i per tant $y_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j$ per a tot $i = 1,\dots,m$.

Proposició 3.2.2 *La relació entre les operacions amb aplicacions lineals i les operacions que corresponen a les matrius d'aquestes aplicacions és la següent:*

- $\mathrm{Mat}(f+g;\mathscr{B}_u,\mathscr{B}_v) = \mathrm{Mat}(f;\mathscr{B}_u,\mathscr{B}_v) + \mathrm{Mat}(g;\mathscr{B}_u,\mathscr{B}_v)$,
- $\mathrm{Mat}(xf;\mathscr{B}_u,\mathscr{B}_v) = x\,\mathrm{Mat}(f;\mathscr{B}_u,\mathscr{B}_v)$, *amb* $x \in \mathbb{K}$,
- $\mathrm{Mat}(h\circ f;\mathscr{B}_u,\mathscr{B}_w) = \mathrm{Mat}(h;\mathscr{B}_v,\mathscr{B}_w)\cdot\mathrm{Mat}(f;\mathscr{B}_u,\mathscr{B}_v)$,

on $f,g \in \mathrm{Hom}(U,V)$, $h \in \mathrm{Hom}(V,W)$, *i* $\mathscr{B}_u,\mathscr{B}_v,\mathscr{B}_w$ *són bases de* U,V *i* W*, respectivament.*

PROVA: Les dues primeres són immediates. Siguin $f(\boldsymbol{u}_j) = \sum_{k=1}^{m} b_{kj}\boldsymbol{v}_k$, $h(\boldsymbol{v}_k) = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}\boldsymbol{w}_i$, i $(h\circ f)(\boldsymbol{u}_j) = \sum_{i=1}^{n} c_{ij}\boldsymbol{w}_i$, de manera que $\mathrm{Mat}(f;\mathscr{B}_u,\mathscr{B}_v) = (b_{kj})$, $\mathrm{Mat}(h;\mathscr{B}_v,\mathscr{B}_w) = (a_{ik})$ i $\mathrm{Mat}(h\circ f;\mathscr{B}_u,\mathscr{B}_w) = (c_{ij})$. Aleshores es té:

$$\begin{aligned}(h\circ f)(\boldsymbol{u}_j) = h\big(f(\boldsymbol{u}_j)\big) &= \left(\sum_{k=1}^{m} b_{kj}\boldsymbol{v}_k\right) = \sum_{k=1}^{m} b_{kj}h(\boldsymbol{v}_k) \\ &= \sum_{k=1}^{m} b_{kj}\sum_{i=1}^{n} a_{ik}\boldsymbol{w}_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj}\right)\boldsymbol{w}_i = \sum_{i=1}^{n} c_{ij}\boldsymbol{w}_i,\end{aligned}$$

d'on es dedueix que la matriu $\mathrm{Mat}(h\circ f;\mathscr{B}_u,\mathscr{B}_w)$ és el producte de les altres dues. □

Proposició 3.2.3 *Si* $\mathscr{B}_u,\mathscr{B}'_u$ *són dues bases de l'espai* U *i* $\mathscr{B}_v,\mathscr{B}'_v$ *són dues bases de l'espai* V *aleshores la relació entre les matrius d'una aplicació lineal* $f\colon U \to V$ *en diferents bases és:*

$$\mathrm{Mat}(f;\mathscr{B}'_u,\mathscr{B}'_v) = \mathrm{Mat}(\mathscr{B}_v \to \mathscr{B}'_v)\cdot\mathrm{Mat}(f;\mathscr{B}_u,\mathscr{B}_v)\cdot\mathrm{Mat}(\mathscr{B}'_u \to \mathscr{B}_u),$$

on apareixien les matrius del canvi de base en els espais U *i* V *entre les dues bases considerades en cada espai.*

PROVA: N'hi ha prou a observar que una matriu de canvi de base es pot interpretar com la matriu de l'aplicació identitat en les dues bases considerades: si $\mathscr{B}$ i $\mathscr{B}'$ són bases d'un mateix espai, aleshores $\mathrm{Mat}(\mathscr{B} \to \mathscr{B}') = \mathrm{Mat}(\mathrm{Id}; \mathscr{B}, \mathscr{B}')$. Per tant, l'enunciat és conseqüència immediata de la relació entre la composició d'aplicacions lineals i el producte de matrius demostrada a la proposició anterior. $\square$

Així, a partir de la matriu d'una aplicació lineal en unes bases es pot obtenir la matriu de la mateixa aplicació lineal en unes altres bases multiplicant a dreta i esquerra per les matrius de canvi de base corresponents.

Proposició 3.2.4 *Dues matrius de $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ són equivalents si, i només si, existeix una aplicació lineal $f\colon U \to V$ entre $\mathbb{K}$-espais vectorials de dimensions $n = \dim U$ i $m = \dim V$ tal que les dues matrius siguin la matriu de la mateixa aplicació lineal f en algunes bases dels espais.*

Corol·lari 3.2.5 *Per a tota aplicació lineal $f\colon U \to V$ existeixen bases $\mathscr{B}_u$ i $\mathscr{B}_v$ dels dos espais tals que la matriu $\mathrm{Mat}(f; \mathscr{B}_u, \mathscr{B}_v)$ està en forma canònica reduïda; o sigui, és de la forma:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_r & \mathbf{0}_{r\times(n-r)} \\ \mathbf{0}_{(m-r)\times r} & \mathbf{0}_{(m-r)\times(n-r)} \end{pmatrix},$$

on $n = \dim U$, $m = \dim V$, $r = \dim \mathrm{Im}\, f$ i $n - r = \dim \ker f$.

Matriu d'un endomorfisme. Si $f \in \mathrm{End}(V)$ és un endomorfisme aleshores la matriu de f es calcula fent servir una única base $\mathscr{B}$ de l'espai V per escriure tant les coordenades d'un vector $\boldsymbol{v}$ com les de la seva imatge $f(\boldsymbol{v})$, i es denota simplement $\mathrm{Mat}(f; \mathscr{B})$.

Si $\mathscr{B}'$ és una altra base de V, sigui $\boldsymbol{P} = \mathrm{Mat}(\mathscr{B}' \to \mathscr{B})$ la matriu del canvi de base. Aleshores:

$$\mathrm{Mat}(f; \mathscr{B}') = \boldsymbol{P}^{-1} \cdot \mathrm{Mat}(f; \mathscr{B}) \cdot \boldsymbol{P}.$$

Definició 3.2.6 (Matrius semblants) *Dues matrius quadrades $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ es diuen* semblants *(o* conjugades*) si són la matriu d'un mateix endomorfisme en certes bases. És a dir, si existeix una matriu invertible $\boldsymbol{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tal que $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$.*

Problemes

3.28. Sigui f l'endomorfisme de $\mathbb{R}^2$ definit per $f(x,y) = (-2x-y, 4x+2y)$. Calculeu la matriu associada a f en la base $\mathscr{B} = \{(1,-1), (-2,3)\}$.

SOLUCIÓ: $f(1,-1) = (-1,2) = (1,-1) + (-2,3)$ i $f(-2,3) = (1,-2) = -(1,-1) - (-2,3)$. Per tant la matriu és $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

3.29. Es considera l'aplicació lineal $f\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ definida per

$$f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -a & a-c \\ b-2d & 0 & a-2c \\ c & 2c & 3c \end{pmatrix}.$$

1. Calculeu la seva matriu en les bases canòniques dels espais.
2. Calculeu $\operatorname{Ker} f$ i $\operatorname{Im} f$.
3. Doneu subespais complementaris dels dos espais de l'apartat anterior.

3.30. Es considera l'aplicació lineal $f\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ definida per

$$f\left(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\right) = (a-b+c-d, a+d, 0).$$

1. Calculeu la matriu en les bases canòniques dels espais.
2. Calculeu $\operatorname{Ker} f$ i $\operatorname{Im} f$.
3. Calculeu la matriu de f en la base $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ de l'espai $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ i la base $(1,1,1), (0,1,1), (0,0,1)$ de l'espai $\mathbb{R}^3$.

Solució: La matriu en les bases canòniques és

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es té $\operatorname{Im} f = \langle (1,0,0), (0,1,0) \rangle$ i $\operatorname{Ker} f = \left\langle \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{smallmatrix}\right) \right\rangle$. La matriu en les noves bases és:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

3.31. Per a cada parell d'aplicacions f i g definides a continuació calculeu la composició $g \circ f$ i, quan sigui possible, la composició $f \circ g$. Estudieu la injectivitat i l'exhaustivitat de f, g i $g \circ f$ en tots els casos i la de $f \circ g$ quan estigui definida.

1. $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida per $f(x,y,z) = (x+y, z, x+y)$, i
   $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida per $g(x,y,z) = (x+z, y+z)$.
2. $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida per $f(x,y,z) = (x+2y, y+z)$, i
   $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida per $g(x,y) = (x, 2x+y, y)$.
3. $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ definida per $f(x,y) = (x, y, -x+y, x-y)$, i
   $g\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definida per $g(x,y,z,t) = (z-t, x-y+t, x-y+z)$.
4. $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida per $f(x,y) = (x+y, x+y)$, i
   $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida per $g(x,y) = (x-y, x+\alpha y)$ amb paràmetre $\alpha \in \mathbb{R}$.

Solució:

1.
2. $(g \circ f)(x,y,z) = (x+2y, 2x+5y+z, y+z)$ i $(f \circ g)(x,y) = (5x+2y, 2x+2y)$. $\ker f = \langle (2,-1,1) \rangle$, $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2$; $\ker g = \{0\}$, $\operatorname{Im} g = \langle (1,2,0), (0,1,1) \rangle$; $\ker(g \circ f) = \langle (2,-1,1) \rangle$, $\operatorname{Im}(g \circ f) = \langle (1,2,0), (0,1,1) \rangle$; $\ker(f \circ g) = \{0\}$, $\operatorname{Im}(f \circ g) = \mathbb{R}^2$.

3.32. Sigui f l'endomorfisme de $\mathbb{R}^3$ definit per $f(x,y,z) = (2x-y, x, 2x-2y-z)$.

1. Comproveu que els subespais $U = \langle (1,0,1),(2,1,1)\rangle$ i $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = y\}$ són subespais invariants per f.
2. Trobeu les matrius de les restriccions $f|_U$ i $f|_V$ en alguna base d'aquests subespais.
3. Calculeu $U \cap V$, comproveu que també és un subespai invariant, i calculeu la matriu de la restricció $f|_{U\cap V}$ en alguna base.
4. Calculeu la matriu de f en bases de $\mathbb{R}^3$ obtingudes afegint un vector apropiat a una base de U i afegint un vector apropiat a una base de V.

SOLUCIÓ: S'ha de comprovar que $f(U) \subseteq U$. Es té $f(1,0,1) = (2,1,1) \in U$ i $f(2,1,1) = (3,2,1) = (-1)(1,0,1) + 2(2,1,1) \in U$, i per tant tota combinació lineal d'aquests vectors també pertany a U. En la base de U formada per aquests dos vectors es té:

$$\operatorname{Mat}(f|_U, \{(1,0,1),(2,1,1)\}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

S'ha de comprovar que $f(V) \subseteq V$. Això es pot fer veient que si $x = y$ aleshores $2x - y = x$. Per donar la matriu s'ha de calcular una base del subespai. Per exemple, $(1,1,0)$ i $(0,0,1)$. Es té $f(1,1,0) = (1,1,0)$ i $f(0,0,1) = (0,0,-1)$, de manera que:

$$\operatorname{Mat}(f|_V, \{(1,1,0),(0,0,1)\}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Una equació de U és $x-y-z = 0$ i per tant $U \cap V$ ve donat per les equacions $x-y-z = x-y = 0$, que tenen com a solució els múltiples del vector $(1,1,0)$. Per tant efectivament $U \cap V = \langle (1,1,0)\rangle$ és un subespai invariant i f és la identitat en aquest subespai.

3.33. Trobeu $f\big((3,-3,4)\big)$, on f és l'endomorfisme de $\mathbb{R}^3$ tal que la seva matriu associada en la base $\boldsymbol{v}_1 = (1,0,0)$, $\boldsymbol{v}_2 = (2,3,0)$, $\boldsymbol{v}_3 = (3,0,2)$ és:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Quines són les antiimatges de $(5,3,2)$ per f?

3.34. Sigui $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'aplicació lineal que en les bases canòniques té per matriu

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Digueu si existeixen, i en aquest cas trobeu-les, bases de $\mathbb{R}^3$ i de $\mathbb{R}^4$ en les quals la matriu de l'aplicació lineal f sigui:

$$\text{(a)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{(b)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{(c)} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

SOLUCIÓ: La condició és que les matrius tinguin el mateix rang. La primera no té el mateix rang. La segona i la tercera sí. Siguin u_1, u_2, u_3 i v_1, v_2, v_3, v_4 les bases en les quals la matriu és (b). Sigui $u_1 = (x,y,z)$. Es té $f(u_1) = (x-y+2z, z, -x+y, x-y-z) = v_1 + v_2$...

3.35. Sigui $\mathscr{B} = \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ una base d'un $\mathbb{K}$-espai vectorial V. Donats n escalars no nuls $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ es considera la base $\mathscr{B}' = \{\lambda_1\boldsymbol{v}_1, \ldots, \lambda_n\boldsymbol{v}_n\}$. Determineu la relació entre les matrius d'un endomorfisme $f \in \mathrm{End}(V)$ en les dues bases $\mathscr{B}$ i $\mathscr{B}'$. Quan són iguals aquestes dues matrius?

3.36. Sigui $\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ una matriu quadrada. Caracteritzeu els enters $r, s, t \geqslant 0$ per als quals existeix una matriu $\boldsymbol{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tal que la matriu $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ té:

1. Les primeres r files igual a zero,
2. Les primeres s columnes igual a zero,
3. Les primeres t files i columnes igual a zero.

3.37. Un endomorfisme $f \in \mathrm{End}(V)$ es diu *nilpotent* si existeix un enter positiu $k \geqslant 1$ tal que f^k és l'endomorfisme zero. Demostreu que f és nilpotent si, i només si, existeix una base en la qual la seva matriu és triangular superior estricta ($a_{ij} = 0$ per a tot $i \geqslant j$).

Deduïu que tot endomorfisme nilpotent f (resp. matriu nilpotent $\boldsymbol{A}$) compleix $f^n = 0$ (resp. $\boldsymbol{A}^n = \boldsymbol{0}$) on n és la dimensió de l'espai (resp. la mida de la matriu).

3.3 Espai quocient

Sigui V un $\mathbb{K}$-espai vectorial i sigui $W \subseteq V$ un subespai. Es defineix la relació següent entre els vectors de V:

$$\boldsymbol{u} \mathfrak{S} \boldsymbol{v} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} \in W,$$

que és una relació d'equivalència. Es denota V/W el conjunt quocient, el que sol denotar-se $V/\mathfrak{S}$ quan es tracta de quocients per relacions d'equivalència en conjunts en general. Els elements de V/W són les classes d'equivalència dels vectors de V:

$$[\boldsymbol{v}] = \{\boldsymbol{u} \in V : \boldsymbol{u}\mathfrak{S}\boldsymbol{v}\} = \{\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} : \boldsymbol{w} \in W\} = \boldsymbol{v} + W.$$

O sigui, la classe d'equivalència d'un vector $\boldsymbol{v}$ és el conjunt format pels vectors que s'obtenen sumant el vector $\boldsymbol{v}$ a tots els vectors del subespai. Per exemple, si $W = \langle \boldsymbol{w} \rangle$ és la recta generada pel vector $\boldsymbol{w}$ aleshores els elements de V/W són les rectes de V paral·leles a la recta W (i el mateix si es tracta de subespais de dimensió més gran).

Com en tota relació d'equivalència hi ha una aplicació canònica $\pi \colon V \twoheadrightarrow V/W$ que envia cada vector a la seva classe: $\pi(\boldsymbol{v}) = [\boldsymbol{v}]$.

En el conjunt quocient V/W es defineixen una suma de classes i un producte de classes per escalars a partir de la suma i el producte per escalars de vectors representants de les classes:

$$[\boldsymbol{u}] + [\boldsymbol{v}] := [\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}], \qquad \lambda[\boldsymbol{v}] := [\lambda\boldsymbol{v}].$$

Proposició 3.3.1 (Espai quocient)

1. *La suma i el producte per escalars de classes a partir de representants estan ben definides i donen al conjunt quocient estructura de $\mathbb{K}$-espai vectorial.*
2. *L'aplicació canònica $\pi \colon V \to V/W$ és un epimorfisme amb nucli $\mathrm{Ker}\,\pi = W$.*
3. $\dim(V/W) = \dim V - \dim W$.

PROVA: 1. Si $[\boldsymbol{u}_1] = [\boldsymbol{u}_2]$ i $[\boldsymbol{v}_1] = [\boldsymbol{v}_2]$ aleshores $\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2 \in W$. Per tant, la suma $\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2 = (\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{v}_1) - (\boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{v}_2) \in W$, i es dedueix que $[\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{v}_1] = [\boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{v}_2]$. Pel que fa al producte per un escalar x, es té $x(\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2) = x\boldsymbol{u}_1 - x\boldsymbol{u}_2 \in W \Rightarrow [x\boldsymbol{u}_1] = [x\boldsymbol{u}_2]$. Això assegura que les operacions estan ben definides al conjunt quocient. La comprovació de les propietats d'espai vectorial és immediata a partir del fet que aquestes propietats es compleixen a l'espai V. L'element neutre del quocient és la classe $[\mathbf{0}] = W$, que té com a representants tots els vectors del subespai W.

2. És lineal ja que $\pi(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = [\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}] = [\boldsymbol{u}] + [\boldsymbol{v}] = \pi(\boldsymbol{u}) + \pi(\boldsymbol{v})$ i $\pi(x\boldsymbol{u}) = [x\boldsymbol{u}] = x[\boldsymbol{u}] = x\pi(\boldsymbol{u})$. És exhaustiva ja que tota classe del quocient és imatge d'un vector representant. $\boldsymbol{v} \in \operatorname{Ker} \pi \Leftrightarrow \pi(\boldsymbol{v}) = [\boldsymbol{v}] = [\mathbf{0}] \Leftrightarrow \boldsymbol{v} \in W$.

3. Sigui $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k$ una base de W i sigui $\boldsymbol{v}_{k+1}, \dots, \boldsymbol{v}_n$ una ampliació a una base de V. Es vol veure que $[\boldsymbol{v}_{k+1}], \dots, [\boldsymbol{v}_n]$ és una base de V/W. Donat un element $[\boldsymbol{v}] \in V/W$ sigui $\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^n x_i \boldsymbol{v}_i$. Aleshores $[\boldsymbol{v}] = [\sum_{i=1}^n x_i \boldsymbol{v}_i] = \sum_{i=1}^n x_i [\boldsymbol{v}_i] = \sum_{i=k+1}^n x_i [\boldsymbol{v}_i]$ ja que $[\boldsymbol{v}_1], \dots, [\boldsymbol{v}_k]$ són tots zero, per ser $\boldsymbol{v}_i \in W$ quan $1 \leqslant i \leqslant k$. Per tant són generadors. Sigui $\sum_{i=k+1}^n x_i [\boldsymbol{v}_i] = [\mathbf{0}]$. Aleshores $\sum_{i=k+1}^n x_i \boldsymbol{v}_i \in W$ i per tant es pot posar com $\sum_{i=k+1}^n x_i \boldsymbol{v}_i = \sum_{i=1}^k x_i \boldsymbol{v}_i$ per a escalars $x_1, \dots, x_k$. Aleshores $(-x_1)\boldsymbol{v}_1 + \cdots + (-x_k)\boldsymbol{v}_k + x_{k+1}\boldsymbol{v}_{k+1} + \cdots + x_n \boldsymbol{v}_n = \mathbf{0}$ i per ser els $\boldsymbol{v}_i$ una base de V es dedueix que tots els coeficients x_i són zero. □

Proposició 3.3.2 (Teorema d'isomorfisme) *Per a tota aplicació lineal $f\colon U \to V$ es considera l'espai quocient $U/\operatorname{Ker} f$. Aleshores l'aplicació $U/\operatorname{Ker} f \to \operatorname{Im} f \subseteq V$ que envia cada classe $[\boldsymbol{u}]$ al vector $f(\boldsymbol{u})$ està ben definida i és un isomorfisme d'espais vectorials.*

PROVA: Sigui f_* l'aplicació definida a l'enunciat. Si $[\boldsymbol{u}] = [\boldsymbol{v}]$ aleshores $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} \in \operatorname{Ker} f$. Per tant $f(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}) = \mathbf{0} \Rightarrow f_*([\boldsymbol{u}]) = f(\boldsymbol{u}) = f(\boldsymbol{v}) = f_*([\boldsymbol{v}])$. Això assegura que l'aplicació està ben definida.

Per veure que és lineal: $f_*([\boldsymbol{u}]+[\boldsymbol{v}]) = f_*([\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}]) = f(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{u})+f(\boldsymbol{v}) = f_*([\boldsymbol{u}])+f_*([\boldsymbol{v}])$, i $f_*(x[\boldsymbol{u}]) = f_*([x\boldsymbol{u}]) = f(x\boldsymbol{u}) = xf(\boldsymbol{u}) = xf_*([\boldsymbol{u}])$.

És exhaustiva perquè donat un element $\boldsymbol{w} \in \operatorname{Im} f$ ha de ser $\boldsymbol{w} = f(\boldsymbol{v})$ per a algun $\boldsymbol{v} \in V$ i aleshores $\boldsymbol{w} = f_*([\boldsymbol{v}]) \in \operatorname{Im} f_*$. I també injectiva ja que si $f_*([\boldsymbol{u}]) = f(\boldsymbol{u}) = \mathbf{0}$ aleshores $\boldsymbol{u} \in \operatorname{Ker} f$ i per tant $[\boldsymbol{u}] = [\mathbf{0}]$ a $V/\operatorname{Ker} f$. □

Proposició 3.3.3 (Endomorfisme induït a l'espai quocient) *Sigui $f \in \operatorname{End}(V)$ un endomorfisme i sigui $W \subseteq V$ un subespai invariant. L'aplicació $f|_{V/W}\colon V/W \to V/W$ definida per $f|_{V/W}([\boldsymbol{v}]) = [f(\boldsymbol{v})]$ està ben definida i és un endomorfisme de l'espai quocient V/W.*

PROVA: Si $[\boldsymbol{u}] = [\boldsymbol{v}]$ aleshores $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} \in W$. Per ser aquest espai invariant es té $f(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{u}) - f(\boldsymbol{v}) \in W \Rightarrow f|_{V/W}([\boldsymbol{u}]) = [f(\boldsymbol{u})] = [f(\boldsymbol{v})] = f|_{V/W}([\boldsymbol{v}])$. Això comprova la bona definició. Falta veure que és lineal: $f|_{V/W}([\boldsymbol{u}] + [\boldsymbol{v}]) = f|_{V/W}([\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}]) = [f(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v})] = [f(\boldsymbol{u}) + f(\boldsymbol{v})] = [f(\boldsymbol{u})] + [f(\boldsymbol{v})] = f|_{V/W}([\boldsymbol{u}]) + f|_{V/W}([\boldsymbol{v}])$ i $f|_{V/W}(x[\boldsymbol{u}]) = f|_{V/W}([x\boldsymbol{u}]) = [f(x\boldsymbol{u})] = [xf(\boldsymbol{u})] = x[f(\boldsymbol{u})] = xf|_{V/W}([\boldsymbol{u}])$. □

Problemes

3.38. Es consideren els subespais següents de $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{aligned}
V_1 &= \langle (1,0,-1,0),(0,1,0,-1),(0,0,1,-1)\rangle,\\
V_2 &= \{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 : x+y+z+t = x+y-z+t = 0\},\\
V_3 &= \langle (2,-1,-2,1)\rangle,\\
V_4 &= \langle (2,-1,0,-1)\rangle,\\
V_5 &= \{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 : 2x+y+4z = 2x+3y+4t = 0\},\\
V_6 &= \langle (-5,2,0,3),(1,-2,0,1)\rangle
\end{aligned}$$

Determineu les inclusions $V_i \subseteq V_j$ i, per a cadascuna, doneu una base de l'espai quocient V_j/V_i.

Solució: Es té $V_1 = \{x+y+z+t=0\}$, $V_2 = \langle (1,0,0,-1),(1,-1,0,0)\rangle$. $V_2 \subset V_1$ i una base de V_1/V_2 és $[\boldsymbol{v}]$ per a qualsevol dels tres vectors generadors de V_1 donats.

És clar que les rectes V_3 i V_4 són subespais de V_1. El quocient V_1/V_3 només el genera la classe d'un vector que no sigui combinació lineal dels dos primers vectors de la base donada; per exemple $[(0,0,1,-1)]$. En canvi V_1/V_4 el generen les classes de qualsevol dels tres vectors de la base.

Es té la inclusió $V_4 \subseteq V_2$ i el quocient està generat per la classe de qualsevol vector de V_2 que no sigui múltiple de $(2,-1,0,-1)$.

Es té $V_5 = \langle (1,2,-1,-2),(2,0,-1,-1)\rangle \subset V_1$ i el quocient està generat per la classe de qualsevol dels tres vectors de la base de V_1. Cap de les dues rectes V_3, V_4 està continguda a V_5.

Es té $V_6 = V_2$ i per tant els quocients V_6/V_2 i V_2/V_6 són l'espai trivial. Les relacions amb els altres subespais de V_6 es dedueixen de les de V_2.

3.39. *Segon teorema d'isomorfisme.* Siguin $V, W \subseteq U$ subespais vectorials. Considereu l'aplicació lineal $V \hookrightarrow V+W \twoheadrightarrow (V+W)/W$ composició de la inclusió amb l'aplicació canònica en l'espai quocient, que envia cada vector $\boldsymbol{v}\in V$ a la classe $[\boldsymbol{v}] = \boldsymbol{v}+W \subseteq V+W$. Comproveu que és un epimorfisme, calculeu el seu nucli, i deduïu un isomorfisme de l'espai $(V+W)/W$ amb un espai quocient de l'espai V.

3.40. *Tercer teorema d'isomorfisme.* Siguin $W\subseteq V\subseteq U$ inclusions d'espais vectorials. Demostreu que l'aplicació $U/W \to U/V$ que envia la classe $[\boldsymbol{u}]_W = \boldsymbol{u}+W$ a la classe $[\boldsymbol{u}]_V = \boldsymbol{u}+V$ està ben definida i és un epimorfisme. Calculeu el seu nucli i deduïu un isomorfisme entre U/V i un espai quocient de l'espai U/W.

3.41. Sigui f un endomorfisme d'un espai vectorial V i sigui $W\subseteq U$ un subespai invariant per f.

Quina relació hi ha entre les matrius de $f\in\operatorname{End}(V)$, de la seva restricció $f|_W \in \operatorname{End}(W)$ al subespai invariant W i de l'endomorfisme $f|_{V/W}\in\operatorname{End}(V/W)$ induït a l'espai quocient si es prenen bases com les del problema anterior?

3.4 Espai dual

Un cos $\mathbb{K}$ es pot considerar com a espai vectorial sobre ell mateix, de dimensió 1. Tot element no nul és una base. En particular, agafant com a base la unitat $1\in\mathbb{K}$ la coordenada de cada element de $\mathbb{K}$ en aquesta base és el mateix element.

Definició 3.4.1 (Forma lineal) *Sigui V un $\mathbb{K}$-espai vectorial. Una* forma lineal *a V és una aplicació lineal $\phi\colon V\to\mathbb{K}$.*

El mateix nom *forma lineal* es fa servir també per anomenar els polinomis homogenis de grau 1 en varies variables: polinomis $F = a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_nX_n$ amb coeficients $a_i \in \mathbb{K}$. La relació entre aquests dos tipus d'objectes, que justifica el fet que es diguin igual, es produeix (en espais de dimensió finita) en fixar una base de l'espai. Sigui $\mathscr{B} = \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ una base de V. Aleshores, en avaluar un polinomi $F = \sum a_iX_i$ en les coordenades d'un vector de V s'obté una aplicació lineal $\phi_F\colon V \to \mathbb{K}$, amb:

$$\phi_F(\boldsymbol{v}) = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n, \qquad \text{si} \quad \boldsymbol{v} = x_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{v}_n,$$

i tota aplicació lineal $V \to \mathbb{K}$ s'obté d'aquesta manera a partir d'una forma. En efecte, l'aplicació lineal $\phi\colon V \to \mathbb{K}$ prové de la forma lineal $F_\phi = \sum_{i=1}^n \phi(\boldsymbol{v}_i)X_i$ que té per coeficients els valors de l'aplicació en els vectors de la base. Es té així una bijecció (que de fet és un isomorfisme d'espais vectorials) entre l'espai $\operatorname{Hom}(V, \mathbb{K})$ i l'espai de les formes lineals en n variables sobre $\mathbb{K}$.

Definició 3.4.2 (Espai dual) *Sigui V un $\mathbb{K}$-espai vectorial. L'*espai dual *de V és el $\mathbb{K}$-espai vectorial de les formes lineals* $\operatorname{Hom}(V, \mathbb{K})$. *Es denota V^*.*

Proposició 3.4.3 (Base dual) *Sigui $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ una base d'un espai vectorial de dimensió finita V. Aleshores les aplicacions lineals $\boldsymbol{v}_i^*\colon V \to \mathbb{K}$ definides posant $\boldsymbol{v}_i^*\big(\sum x_i\boldsymbol{v}_i\big) = x_i$ són una base de l'espai dual V^*, que s'anomena* base dual *de la base de partida.*

PROVA: Les aplicacions $\boldsymbol{v}_i^*$, tal com han estat definides, són efectivament elements de V^*: estan ben definides gràcies a que $\boldsymbol{v}_i$ són una base, i són lineals. Donada una forma lineal $\phi \in V^*$, per a cada vector $\boldsymbol{v} = \sum x_i\boldsymbol{v}_i \in V$ és:

$$\phi(\boldsymbol{v}) = \sum_{i=1}^n x_i\phi(\boldsymbol{v}_i) = \sum_{i=1}^n \phi(\boldsymbol{v}_i)\boldsymbol{v}_i^*(\boldsymbol{v}) \quad \Rightarrow \quad \phi = \sum_{i=1}^n \phi(\boldsymbol{v}_i)\boldsymbol{v}_i^*,$$

i per tant ϕ és combinació lineal de les formes lineals $\boldsymbol{v}_i^*$, amb coeficients els escalars $\phi(\boldsymbol{v}_i)$. Si $\sum_{i=1}^n x_i\boldsymbol{v}_i^*$ és la forma lineal zero, aleshores val zero en tot vector de l'espai. En particular, per a cada vector $\boldsymbol{v}_j$ es té $\sum_{i=1}^n x_i\boldsymbol{v}_i^*(\boldsymbol{v}_j) = 0$. Com que aquest sumatori dóna x_j, es dedueix que tots els coeficients de la combinació lineal considerada són zero. $\square$

Corol·lari 3.4.4 (Dimensió de l'espai dual) *Si V és de dimensió finita,* $\dim V^* = \dim V$.

En dimensió infinita s'ha d'anar amb compte. Tot i que el dual V^* d'un espai de dimensió infinita V té també dimensió infinita, la seva dimensió és estrictament més gran (en el sentit de cardinals infinits) que la dimensió de l'espai V.

Càlcul de la base dual. Per exemple, a l'espai $\mathbb{R}^3$ es considera la base $\boldsymbol{v}_1 = (0, 0, 1), \boldsymbol{v}_2 = (0, 1, 1), \boldsymbol{v}_3 = (1, 1, 1)$. Per calcular les formes lineals que són la base dual d'aquesta s'ha d'escriure cada vector $\boldsymbol{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ com a combinació lineal d'aquests tres. Amb un càlcul senzill es troba que $\boldsymbol{x} = (z - y)\boldsymbol{v}_1 + (y - x)\boldsymbol{v}_2 + x\boldsymbol{v}_3$, i per tant la base dual és:

$$\boldsymbol{v}_1^*(x, y, z) = z - y, \qquad \boldsymbol{v}_2^*(x, y, z) = y - x, \qquad \boldsymbol{v}_3^*(x, y, z) = x.$$

Si en la base anterior es canvia el vector $\boldsymbol{v}_3$ pel vector $\boldsymbol{u}_3 = (1, -1, 1)$ la dual de la nova base s'obté a partir de l'expressió $\boldsymbol{x} = (z - y - 2x)\boldsymbol{v}_1 + (x + y)\boldsymbol{v}_2 + x\boldsymbol{u}_3$, i és:

$$\boldsymbol{v}_1^*(x, y, z) = z - y - 2x, \qquad \boldsymbol{v}_2^*(x, y, z) = x + y, \qquad \boldsymbol{u}_3^*(x, y, z) = x.$$

En general, donada una base $\mathscr{B}_v = \{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$ de l'espai $\mathbb{R}^n$ sigui $\mathrm{Mat}(\mathscr{B}_v \to \mathscr{B}_e)$ la matriu del canvi a la base canònica, que té les components d'aquests vectors com a columnes. Per a cada vector $\boldsymbol{v} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, sigui $\boldsymbol{v} = y_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + y_n\boldsymbol{v}_n$, amb y_i les coordenades de $\boldsymbol{v}$ en la base $\mathscr{B}_v$. La relació entre les x_i i les y_i és:

$$\mathrm{Mat}(\mathscr{B}_v \to \mathscr{B}_e)\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}(\mathscr{B}_v \to \mathscr{B}_e)^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

i, per tant, la base dual de la base $\mathscr{B}_v$ està formada per les formes lineals següents:

$$\boldsymbol{v}_i^*(x_1, \dots, x_n) = y_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n$$

on els coeficients a_{ij} són les entrades de la fila i-èsima de la matriu

$$(a_{ij}) = \boldsymbol{A} = \mathrm{Mat}(\mathscr{B}_v \to \mathscr{B}_e)^{-1} = \mathrm{Mat}(\mathscr{B}_e \to \mathscr{B}_v).$$

Definició 3.4.5 (Aplicació lineal dual) *Sigui $f\colon U \to V$ una aplicació lineal. L'*aplicació dual *de f és l'aplicació $f^*\colon V^* \to U^*$ definida posant $f^*(\phi) = \phi \circ f$, per a cada forma lineal $\phi\colon V \to \mathbb{K}$. És també una aplicació lineal.*

Proposició 3.4.6 (Matriu de l'aplicació dual) *Siguin $\mathscr{B}_u$ i $\mathscr{B}_v$ bases dels espais vectorials de dimensió finita U i V i siguin $\mathscr{B}_u^*$ i $\mathscr{B}_v^*$ les bases duals corresponents. Aleshores, per a cada aplicació lineal $f\colon U \to V$, amb dual $f^*\colon V^* \to U^*$, es té:*

$$\mathrm{Mat}(f^*; \mathscr{B}_v^*, \mathscr{B}_u^*) = \mathrm{Mat}(f; \mathscr{B}_u, \mathscr{B}_v)^t$$

PROVA: Siguin $f(\boldsymbol{u}_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij}\boldsymbol{v}_i$ i $f^*(\boldsymbol{v}_j^*) = \sum_{i=1}^n b_{ij}\boldsymbol{u}_i^*$, amb

$$(a_{ij}) = \mathrm{Mat}(f; \mathscr{B}_u, \mathscr{B}_v) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}), \qquad (b_{ij}) = \mathrm{Mat}(f^*; \mathscr{B}_v^*, \mathscr{B}_u^*) \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K}).$$

Per a cada vector $\boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^n x_i\boldsymbol{u}_i \in U$, es té:

$$\begin{aligned} f^*(\boldsymbol{v}_j^*)(\boldsymbol{u}) = (\boldsymbol{v}_j^* \circ f)(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{v}_j^*\left(f\left(\sum_{k=1}^n x_i\boldsymbol{u}_i\right)\right) = \boldsymbol{v}_j^*\left(\sum_{i=1}^n x_i f(\boldsymbol{u}_i)\right) \\ = \boldsymbol{v}_j^*\left(\sum_{i=1}^n x_i \sum_{k=1}^m a_{ki}\boldsymbol{v}_k\right) = \sum_{i=1}^n x_i \sum_{k=1}^m a_{ki}\boldsymbol{v}_j^*(\boldsymbol{v}_k) = \sum_{i=1}^n x_i a_{ji} = \sum_{i=1}^n a_{ji}\boldsymbol{u}_i^*(\boldsymbol{u}). \end{aligned}$$

Per tant, $f^*(\boldsymbol{v}_j^*) = \sum_{i=1}^n a_{ji}\boldsymbol{u}_i^* = \sum_{i=1}^n b_{ij}\boldsymbol{u}_i^*$, i es dedueix que $b_{ij} = a_{ji}$ per a tot i, j. $\square$

Com que la matriu d'un canvi de base en un espai V és la matriu de l'aplicació lineal identitat $\mathrm{Id}\colon V \to V$ en les bases considerades, i tenint en compte que la dual de la identitat és l'aplicació identitat entre els duals, o sigui, $\mathrm{Id}_V^* = \mathrm{Id}_{V^*}$, es dedueix el:

Corol·lari 3.4.7 (Canvi de bases duals) *Siguin $\mathscr{B}_u$ i $\mathscr{B}_v$ dues bases d'un espai vectorial de dimensió finita V. Aleshores la matriu que dóna els canvi de les bases duals respectives és:*

$$\mathrm{Mat}(\mathscr{B}_u^* \to \mathscr{B}_v^*) = \left(\mathrm{Mat}(\mathscr{B}_u \to \mathscr{B}_v)^{-1}\right)^t.$$

Corol·lari 3.4.8 *Tota base del dual V^* d'un espai de dimensió finita V és la base dual d'alguna base de V.*

PROVA: Sigui $\mathscr{B}_\phi = \{\phi_1, \dots, \phi_n\}$ una base de V^*. S'agafa una base qualsevol $\mathscr{B}_u = \{\boldsymbol{u}_i\}$ de V. Sigui $\mathscr{B}_u^* = \{\boldsymbol{v}_i^*\}$ la seva base dual. Sigui $\boldsymbol{A} = \operatorname{Mat}(\mathscr{B}_\phi \to \mathscr{B}_u^*)$ la matriu del canvi de base. Sigui $\mathscr{B}_v = \{\boldsymbol{v}_i\}$ la base de V tal que $\operatorname{Mat}(\mathscr{B}_v \to \mathscr{B}_u) = (\boldsymbol{A}^{-1})^t$. Aleshores la base dual $\mathscr{B}_v^* = \{\boldsymbol{v}_i^*\}$ compleix $\operatorname{Mat}(\mathscr{B}_v^* \to \mathscr{B}_u^*) = \boldsymbol{A}$, i per tant $\phi_i = \boldsymbol{v}_i^*$ per a tot $i = 1, \dots, n$. $\square$

Problemes

3.42. Sigui $\mathscr{B}$ la base de $\mathbb{R}^3$ formada pels vectors $\boldsymbol{v}_1 = (1,0,0), \boldsymbol{v}_2 = (0,1,0)$ i $\boldsymbol{v}_3 = (a,b,1)$. Calculeu la base dual $\mathscr{B}^* = \{\boldsymbol{v}_1^*, \boldsymbol{v}_2^*, \boldsymbol{v}_3^*\}$ i trobeu la forma lineal $\phi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ que en aquesta base té coordenades $(1,1,1)$.

SOLUCIÓ: Expressant un vector $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ en termes de la base $\boldsymbol{v}_i$ es té $(x,y,z) = (x - az)\boldsymbol{v}_1 + (y - bz)\boldsymbol{v}_2 + z\boldsymbol{v}_3$, i aplicant la definició de base dual, $\boldsymbol{v}_1^*(x,y,z) = x - az, \boldsymbol{v}_2^*(x,y,z) = y - bz, \boldsymbol{v}_3^*(\boldsymbol{x},y,z) = z$. Per tant, $\phi = \boldsymbol{v}_1^* + \boldsymbol{v}_2^* + \boldsymbol{v}_3^*$ i $\phi(x,y,z) = x + y + (1-a-b)z$.

3.43. Es consideren els vectors $\boldsymbol{v}_1 = (5,-1,2), \boldsymbol{v}_2 = (4,1,1)$ i $\boldsymbol{v}_3 = (-3,0,1)$ de $\mathbb{R}^3$ i la forma $\phi(x,y,z) = 2x + 3y - z$. Comproveu que els $\boldsymbol{v}_i$ són una base de $\mathbb{R}^3$ i calculeu les coordenades de ϕ en la seva base dual.

3.44. Es consideren les formes lineals $\phi_1(x,y,z) = 2x + y + z, \phi_2(x,y,z) = x + 3y - z$ i $\phi_3(x,y,z) = x - 7y + \alpha z$. Determineu els valors del paràmetre α per als quals aquestes tres formes són linealment dependents i en aquest cas doneu una relació de dependència lineal. Quan les formes siguin independents doneu les coordenades d'un vector $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ en la base de l'espai que tingui les formes ϕ_i com a base dual.

3.45. Sigui V un $\mathbb{K}$-espai vectorial amb base $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ i sigui $\{\boldsymbol{v}_1^*, \boldsymbol{v}_2^*, \boldsymbol{v}_3^*\}$ la base dual corresponent. Comproveu que les formes $\phi_1 = \boldsymbol{v}_1^* - \boldsymbol{v}_2^*, \phi_2 = \boldsymbol{v}_1^* - \boldsymbol{v}_3^*, \phi_3 = \boldsymbol{v}_2^* + \boldsymbol{v}_3^*$ són una base de V^* i trobeu la base de V de la qual són base dual.

SOLUCIÓ: Sigui $\boldsymbol{u}_i$ una altra base de V tal que $\phi_i = \boldsymbol{u}_i^*$. Aleshores

$$\operatorname{Mat}(\boldsymbol{B}_u \to \boldsymbol{B}_v) = (\operatorname{Mat}(\boldsymbol{B}_u^* \to \boldsymbol{B}_v^*)^{-1})^t = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\right)^t = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

i per tant $\boldsymbol{u}_1 = \frac{1}{2}(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3), \boldsymbol{u}_2 = \frac{1}{2}(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_3), \boldsymbol{u}_3 = \frac{1}{2}(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3)$.

3.46. Sigui V^{**} el dual de l'espai dual de V (de vegades se li diu l'espai *bidual*). Demostreu que l'aplicació $V \to V^{**}$ que envia cada vector $\boldsymbol{v}$ a la forma lineal $\Phi_{\boldsymbol{v}}\colon V^* \to \mathbb{K}$ definida per $\Phi_{\boldsymbol{v}}(\phi) = \phi(\boldsymbol{v})$ és un monomorfisme d'espais vectorials que, si V és de dimensió finita, és un isomorfisme.

3.47. Sigui $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ l'aplicació lineal definida per $f(x,y) = (3x - y, 5x - 2y, -4x + 2y, -7x + 3y)$. Siguin $\mathscr{B}_u = \{(1,2),(1,1)\}$ i $\mathscr{B}_v = \{(1,1,-1,-1),(1,1,-1,-2),(0,-1,1,1),(-1,1,0,0)\}$ bases de tots dos espais. Calculeu les bases duals corresponents i calculeu directament les matrius $\operatorname{Mat}(f; \mathscr{B}_u, \mathscr{B}_v)$ i $\operatorname{Mat}(f^*; \mathscr{B}_v^*, \mathscr{B}_u^*)$ sense fer servir la proposició 3.4.6.

3.48. Sigui $f \in \operatorname{End}(\mathbb{R}^3)$ definit per $f(x,y,z) = (x + y + 2z, x - z, y + 3z)$.

1. Doneu bases del nucli i la imatge de f i del seu dual f^*.
2. Comproveu que $\operatorname{Im} f = \bigcap_{\phi \in \operatorname{Ker} f^*} \operatorname{Ker} \phi$.
3. Comproveu que $\operatorname{Ker} f = \bigcap_{\psi \in \operatorname{Im} f^*} \operatorname{Ker} \psi$.

3.49. Siguin $\boldsymbol{w} \in V$ i $\phi \in V^*$ un vector i una forma d'un espai vectorial i el seu dual. Demostreu que l'aplicació $f\colon V \to V$ definida per $f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v} + \phi(\boldsymbol{v})\boldsymbol{w}$ és un endomorfisme, i calculeu el seu dual f^*.

3.50. Per a cada $\alpha \in \mathbb{R}$ es denota $\phi_\alpha\colon \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}$ l'aplicació que a cada polinomi $P(X)$ li fa correspondre el seu valor $P(\alpha)$. Siguin $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ una família de $n+1$ nombres reals diferents.

1. Demostreu que les $n+1$ formes lineals $\phi_{\alpha_0}, \ldots, \phi_{\alpha_n}$ són una base de l'espai dual $\mathbb{R}_n[X]^*$. Sigui $\mathscr{B} = \{P_0(X), \ldots, P_n(X)\}$ la base de $\mathbb{R}_n[X]$ que la té per dual.
2. Trobeu les coordenades d'un polinomi $P(X) \in \mathbb{R}_n[X]$ en la base $\mathscr{B}$.
3. Demostreu que, donats $n+1$ nombres reals qualsevol $\beta_0, \ldots, \beta_n$, el polinomi
$$P(X) = \sum_{i=0}^{n} \beta_i P_i(X)$$
és l'únic polinomi de $\mathbb{R}_n[X]$ tal que $P(\alpha_i) = \beta_i$ per a tot $i = 0, \ldots, n$.
4. Trobeu la base $\{P_i(X)\}$ de $\mathbb{R}_3[X]$ que té com a dual la base $\{\phi_0, \phi_1, \phi_2, \phi_3\}$.
5. Siguin $a < b$ dos nombres reals. Demostreu que existeix una única $(n+1)$-tupla de nombres reals $(x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tal que
$$\int_a^b P(t)\,dt = \sum_{i=0}^{n} x_i P(\alpha_i)$$
per a tot polinomi $P(X) \in \mathbb{R}_n[X]$.
6. Calculeu els coeficients $x_i \in \mathbb{R}^4$ que corresponen a la forma lineal $\int_0^1 P(t)\,dt$ de $\mathbb{R}_3[X]$ i als nombres $\alpha_i = 0, 1, 2, 3$.

Solució:

1. Sigui $\phi = \sum_{i=0}^{n} x_i \phi_{\alpha_i} \in \mathbb{K}_n[X]$ una combinació lineal que dóna la forma lineal zero. Aquesta forma lineal val zero en cada polinomi. Aplicant-la als polinomis de la base canònica es té:
$$\phi(1) = \sum_{i=0}^{n} x_i = 0, \phi(X) = \sum_{i=0}^{n} x_i\alpha_i = 0, \phi(X^2) = \sum_{i=0}^{n} x_i\alpha_i^2 = 0, \ldots \phi(X^n) = \sum_{i=0}^{n} x_i\alpha_i^n = 0,$$
que equival a la igualtat matricial
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \\ \alpha_0^2 & \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \cdots & \alpha_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_0^n & \alpha_1^n & \alpha_2^n & \cdots & \alpha_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$
La matriu és una matriu de Vandermonde i és invertible. Per tant, tots els coeficients de la combinació lineal han de ser zero.
2. Els polinomis $P_i(X)$ queden determinats per la condició $P_i(\alpha_j) = \delta_{ij}$. Per tant, si $P(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P_i(X)$, avaluant en α_j es troba $x_j = P(\alpha_j)$ per a tot $j = 0, \ldots, n$.
3. El polinomi compleix la igualtat, i és únic ja que els polinomis $P_i(X)$ són base de $\mathbb{K}_n[X]$.

4. La base dual de la base canònica $\boldsymbol{v}_i = X^i$ per a $i = 0, 1, 2, 3$ és la base

$$\boldsymbol{v}_i^*(a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3) = a_i.$$

Aleshores $\phi_0 = \boldsymbol{v}_0^*$, $\phi_1 = \boldsymbol{v}_0^* + \boldsymbol{v}_1^* + \boldsymbol{v}_2^* + \boldsymbol{v}_3^*$, $\phi_2 = \boldsymbol{v}_0^* + 2\boldsymbol{v}_1^* + 4\boldsymbol{v}_2^* + 8\boldsymbol{v}_3^*$ i $\phi_3 = \boldsymbol{v}_0^* + 3\boldsymbol{v}_1^* + 9\boldsymbol{v}_2^* + 27\boldsymbol{v}_3^*$, i, com que la matriu del canvi de bases duals és la inversa de la transposada,

$$\mathrm{Mat}(\phi_i \to \boldsymbol{v}_i^*) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 9 \\ 0 & 1 & 8 & 27 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Mat}(P_i \to \boldsymbol{v}_i) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{11}{6} & 3 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{3} \\ 1 & -\frac{5}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

Es dedueix que

$$P_0(X) = \frac{1}{6}(6 - 11X + 6X^2 - X^3), \qquad P_2(X) = \frac{1}{2}(-3X + 4X^2 - X^3),$$
$$P_1(X) = \frac{1}{2}(6X - 5X^2 + X^3), \qquad P_3(X) = \frac{1}{6}(2X - 3X^2 + X^3).$$

5. L'aplicació $P(X) \mapsto \int_a^b P(t)\,dt$ és una aplicació lineal $\phi\colon \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}$; és a dir, un element de $\mathbb{R}_n[X]^*$. Com que ϕ_{α_i} en són una base, existeixen nombres reals x_i únics tals que $\phi = \sum_{i=1}^n x_i\phi_{\alpha_i}$. Avaluant aquesta forma en un polinomi $P(X)$ i tenint en compte que $\phi_{\alpha_i}(P(X)) = P(\alpha_i)$ es té la fórmula de l'enunciat.
6. Si $P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3$ es té que

$$\int_0^1 P(t)\,dt = a_0X + \frac{a_1}{2}X^2 + \frac{a_2}{3}X^3 + \frac{a_3}{4}X^4\Big]_0^1 = a_0 + \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{3}a_2 + \frac{1}{4}a_3.$$

Per tant, $\phi = \boldsymbol{v}_0^* + \frac{1}{2}\boldsymbol{v}_1^* + \frac{1}{3}\boldsymbol{v}_2^* + \frac{1}{4}\boldsymbol{v}_3^*$. Per escriure aquesta forma lineal en la base ϕ_i es té:

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{11}{6} & 1 & -\frac{1}{6} \\ 0 & 3 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} \\ \frac{19}{24} \\ \frac{-5}{24} \\ \frac{1}{24} \end{pmatrix}.$$

Es dedueix que, per a tot polinomi $P(X) \in \mathbb{R}_3[X]$,

$$\int_0^1 P(t)\,dt = \frac{3}{8}P(0) + \frac{19}{24}P(1) + \frac{-5}{24}P(2) + \frac{1}{24}P(3).$$

Capítol 4

Endomorfismes

Donada una aplicació lineal $f\colon U \to V$ entre dos espais vectorials, es poden triar bases de tots dos espais de tal manera que la matriu en aquestes bases sigui molt senzilla. Per exemple, una matriu de la forma $\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{smallmatrix}\right)$. Al revés, donada una matriu qualsevol de mida $\dim V \times \dim U$, és molt fàcil decidir si existeixen bases en les quals la matriu de f sigui la matriu donada: la condició necessària i suficient és que el rang de la matriu sigui igual a la dimensió de $\operatorname{Im} f$.

En canvi, per a endomorfismes d'un mateix espai $f\colon V \to V$, on la matriu depèn d'una única base, els problemes anàlegs als anteriors són molt més difícils. L'objectiu d'aquest capítol és, d'una banda, estudiar l'existència de bases en les quals la matriu d'un endomorfisme sigui especialment senzilla, i la manera de trobar-les; i d'una altra, caracteritzar les matrius que corresponen a un endomorfisme donat en alguna base.

4.1 Vectors propis i valors propis

Definició 4.1.1 (Vectors i valors propis) *Sigui $f\colon V \to V$ un endomorfisme d'un $\mathbb{K}$-espai vectorial V.*

- *Un vector $\boldsymbol{v} \in V$ és un* vector propi *de l'endomorfisme f si $\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$ i existeix un escalar $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $f(\boldsymbol{v}) = \lambda \boldsymbol{v}$.*
- *Un escalar $\lambda \in \mathbb{K}$ és un* valor propi *de l'endomorfisme f si existeix un vector $\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$ amb $f(\boldsymbol{v}) = \lambda \boldsymbol{v}$.*

A cada vector propi $\boldsymbol{v}$ li correspon un únic valor propi λ: l'escalar tal que $f(\boldsymbol{v}) = \lambda \boldsymbol{v}$. En canvi, per a cada escalar que sigui valor propi hi ha molts vectors propis que el tenen com a valor propi. De fet, aquests vectors, junt amb el vector zero, formen un subespai vectorial:

Definició 4.1.2 (Subespai propi) *Donats un endomorfisme $f \in \operatorname{End}(V)$ i un escalar $\lambda \in \mathbb{K}$ es considera l'endomorfisme $f_\lambda := f - \lambda \operatorname{Id} \in \operatorname{End}(V)$. El seu nucli:*

$$V_\lambda = \operatorname{Ker}(f_\lambda) = \{\boldsymbol{v} \in V : f(\boldsymbol{v}) = \lambda \boldsymbol{v}\}$$

és un subespai vectorial de V format pel vector zero i per tots els vectors propis de f de valor propi λ, en cas que n'hi hagi algun. S'anomena subespai propi *de valor propi λ.*

El subespai V_λ és un subespai invariant per f: per a tot vector $\boldsymbol{v} \in V_\lambda$ la seva imatge $f(\boldsymbol{v}) = \lambda\boldsymbol{v}$ també pertany a V_λ.

Per definició, l'escalar λ és un valor propi de f si, i només si, el subespai propi $\operatorname{Ker}(f_\lambda)$ és no trivial (diferent de l'espai $\{\mathbf{0}\}$). El vector $\boldsymbol{v}$ és un vector propi de f si, i només si, el subespai $\langle\boldsymbol{v}\rangle$ que genera aquest vector és un subespai invariant per f: en efecte, aquest subespai és invariant si $f(\boldsymbol{v}) \in \langle\boldsymbol{v}\rangle$, que equival a dir que la imatge del vector $\boldsymbol{v}$ sigui múltiple de $\boldsymbol{v}$.

Sigui $\boldsymbol{A} = (a_{ij}) = \operatorname{Mat}(f;\mathscr{B}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matriu de f en alguna base $\mathscr{B}$ de V. La matriu de l'endomorfisme $f - \lambda\operatorname{Id}$ en aquesta base és la matriu

$$\operatorname{Mat}(f-\lambda\operatorname{Id};\mathscr{B}) = \boldsymbol{A} - \lambda\mathbf{1}_n = \begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix}$$

obtinguda restant l'escalar λ a totes les entrades de la diagonal de $\boldsymbol{A}$. Per tant, per a calcular el subespai propi V_λ s'ha de resoldre el sistema lineal homogeni de matriu $\boldsymbol{A} - \lambda\mathbf{1}_n$.

Proposició 4.1.3 *Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ són valors propis diferents d'un endomorfisme els subespais propis corresponents estan en suma directa:*

$$V_{\lambda_1} + V_{\lambda_2} + \cdots + V_{\lambda_r} = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_r}.$$

PROVA: Per inducció sobre el nombre r de subespais que se sumen. Per a un únic subespai no hi ha res a demostrar. Sigui $r \geqslant 2$, i suposi's demostrat per a la suma de $r-1$ subespais. Siguin $\boldsymbol{v}_i \in V_{\lambda_i}$ vectors de cadascun dels subespais propis tals que $\sum_{i=1}^r \boldsymbol{v}_i = \mathbf{0}$. Aleshores també $f(\sum_{i=1}^r \boldsymbol{v}_i) = \sum_{i=1}^r f(\boldsymbol{v}_i) = \sum_{i=1}^r \lambda_i\boldsymbol{v}_i = \mathbf{0}$, i es dedueix que:

$$\mathbf{0} = \mathbf{0} - \lambda_r\mathbf{0} = \sum_{i=1}^r \lambda_i\boldsymbol{v}_i - \lambda_r\sum_{i=1}^r \boldsymbol{v}_i = \sum_{i=1}^{r-1}(\lambda_i - \lambda_r)\boldsymbol{v}_i.$$

Com que cada $(\lambda_i - \lambda_r)\boldsymbol{v}_i$ pertany al subespai propi V_{λ_i} i la suma dels primers $r-1$ subespais es directa, es dedueix que $(\lambda_i - \lambda_r)\boldsymbol{v}_i = \mathbf{0} \Rightarrow \boldsymbol{v}_i = \mathbf{0}$ per a cada índex $i = 1, \ldots, r-1$, ja que $\lambda_i - \lambda_r \neq 0$ per a aquests índexs. Com que la suma de tots els vectors $\boldsymbol{v}_i$ és zero i els $r-1$ primers són tots zero, l'últim també ha de ser $\boldsymbol{v}_r = 0$. □

Corol·lari 4.1.4 *Siguin $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ valors propis diferents de l'endomorfisme $f \in \operatorname{End}(V)$ i, per a cada λ_i, sigui $\mathscr{B}_i = \{\boldsymbol{v}_{i,1}, \ldots, \boldsymbol{v}_{i,t_i}\}$ una base del subespai propi V_{λ_i}. Aleshores, la reunió de totes aquestes bases $\cup_{i=1}^r \mathscr{B}_i$ és una família de vectors linealment independent de l'espai V.*

PROVA: Sigui $\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{t_i} x_{ij}\boldsymbol{v}_{ij} = \mathbf{0}$. Es consideren els vectors $\boldsymbol{v}_i = \sum_{j=1}^{t_i} x_{ij}\boldsymbol{v}_{ij} \in V_{\lambda_i}$. La seva suma $\sum_{i=1}^r \boldsymbol{v}_i$ és zero. Aplicant la proposició anterior, cadascun d'ells ha de ser zero. Per a cada $i = 1, \ldots, r$, com que els $\boldsymbol{v}_{ij}$ són una base de V_{λ_i} es dedueix que tots els coeficients x_{ij} han de ser zero. □

Problemes

4.1. Com es veu en la matriu d'un endomorfisme $\boldsymbol{A} = (a_{ij}) = \mathrm{Mat}(f, \mathscr{B})$ quins vectors de la base $\mathscr{B}$ són vectors propis? Com és la matriu d'un endomorfisme en una base formada per vectors propis?

4.2. Trobeu la matriu en la base canònica d'un endomorfisme $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ tal que:

1. $f(\boldsymbol{e}_1) + f(\boldsymbol{e}_3) = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_3$,
2. $f(\boldsymbol{e}_1) + f(\boldsymbol{e}_2) = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2$, i
3. els vectors del subespai $U \cap V$ intersecció de $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z + y - 2x = 0\}$ i $V = \langle (2, 0, 3), (1, 0, 1) \rangle$ són vectors propis de valor propi -1.

Solució: Les dues primeres condicions diuen que els vectors $(1, 0, 1)$ i $(1, 1, 0)$ són vectors propis de valor propi 1. L'espai V és el de les solucions del sistema $y = 0$. Per tant $U \cap V$ és l'espai de les solucions de $2x - y - z = y = 0$, que està generat pel vector $(1, 0, 2)$. Així, la matriu $\boldsymbol{A} = \mathrm{Mat}(f; \mathscr{B}_e)$ d'aquest endomorfisme en la base canònica ha de complir:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \boldsymbol{A} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

4.2 Polinomi característic

Definició 4.2.1 (Polinomi característic) *El* polinomi característic d'una matriu *quadrada* $\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *és el polinomi:*

$$\mathrm{Char}(\boldsymbol{A}; X) := \det(\boldsymbol{A} - X\boldsymbol{1}_n) = \begin{vmatrix} a_{11} - X & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - X & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - X \end{vmatrix}$$

El polinomi característic d'un endomorfisme $f \in \mathrm{End}(V)$ *d'un espai de dimensió finita V es defineix com el de la matriu de l'endomorfisme en una base $\mathscr{B}$ qualsevol:*

$$\mathrm{Char}(f; X) := \mathrm{Char}(\boldsymbol{A}; X), \qquad \textit{amb} \quad \boldsymbol{A} = \mathrm{Mat}(f; \mathscr{B}) \quad \textit{i} \quad \mathscr{B} \quad \textit{base de } V \textit{ qualsevol.}$$

Proposició 4.2.2 (Propietats del polinomi característic) *Sigui $f \in \mathrm{End}(V)$ un endomorfisme i sigui $\boldsymbol{A} = \mathrm{Mat}(f; \mathscr{B}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la seva matriu en una base. Aleshores:*

1. *El polinomi característic de f està ben definit: no depèn de la base escollida per calcular-lo;*
2. $\mathrm{Char}(\boldsymbol{A}; X)$ *té grau n i el coeficient de X^n és $(-1)^n$;*
3. *el coeficient de X^{n-1} de* $\mathrm{Char}(\boldsymbol{A}; X)$ *és* $(-1)^{n-1} \mathrm{Tr}(\boldsymbol{A})$*;*
4. *el terme independent de* $\mathrm{Char}(\boldsymbol{A}; X)$ *és el determinant* $\det(\boldsymbol{A})$.

Prova: 1. La matriu de f en una altra base és de la forma $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$, on $\boldsymbol{P}$ és la matriu del canvi de base corresponent. Aleshores $\det(\boldsymbol{B} - X\boldsymbol{1}_n) = \det(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} - \boldsymbol{P}^{-1}X\boldsymbol{1}_n\boldsymbol{P}) = \det(\boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{A} - X\boldsymbol{1}_n)\boldsymbol{P}) = \det(\boldsymbol{P})^{-1}\det(\boldsymbol{A} - X\boldsymbol{1}_n)\det(\boldsymbol{P}) = \det(\boldsymbol{A} - X\boldsymbol{1}_n)$.
2. i 3. El determinant de la matriu $\boldsymbol{B} := \boldsymbol{A} - X\boldsymbol{1}_n$ és el sumatori $\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} (\mathrm{sgn}\,\sigma) b_{1,\sigma(1)} \cdots b_{n,\sigma(n)}$. Cada entrada b_{ij} de la matriu $\boldsymbol{B}$ és un polinomi en X de grau $\leqslant 1$: les entrades de la diagonal

$a_{ii} - X$ tenen grau 1 i les demés entrades són polinomis constants. Per tant, cada terme del sumatori és un polinomi de grau $\leqslant n$ i en conseqüència el polinomi característic també és un polinomi de grau $\leqslant n$. Tots els sumands llevat del producte dels elements de la diagonal $(a_{11} - X)\cdots(a_{nn} - X)$, corresponent a la permutació identitat, tenen almenys dos factors b_{ij} que són constants, i per tant són polinomis de grau $\leqslant n-2$. Per tant, les potències de X d'exponent $n-1$ i n només surten en el sumand corresponent a la permutació $\sigma = \mathrm{Id}$. Com que $\prod_{i=1}^n (a_{ii} - X_i) = (-1)^n X^n + (\sum_{i=1}^n a_{ii})(-1)^{n-1}X^{n-1} +$ termes de grau inferior, el coeficients de X^n i de X^{n-1} són els de l'enunciat.
4. El terme independent d'un polinomi s'obté substituint la variable per zero. En aquest cas, $\mathrm{Char}(\boldsymbol{A}; 0) = \det(\boldsymbol{A} - 0\mathbf{1}_n) = \det(\boldsymbol{A})$. □

De vegades el polinomi característic de la matriu $\boldsymbol{A}$ es defineix com $\det(X\mathbf{1}_n - \boldsymbol{A})$. Aquest polinomi difereix del que s'ha definit aquí en el producte per l'escalar $(-1)^n$. Per tant en dimensió parell totes dues definicions donen el mateix, i en dimensió senar l'única diferència és un canvi de signe. Les arrels del polinomi característic i les multiplicitats de cadascuna són les mateixes amb una definició o amb l'altra. El polinomi $\det(X\mathbf{1}_n - \boldsymbol{A})$ és sempre mònic, el coeficient de X^{n-1} és $-\mathrm{Tr}(\boldsymbol{A})$ i el terme independent és $(-1)^n \det(\boldsymbol{A})$.

Teorema 4.2.3 *Un escalar $\lambda \in \mathbb{K}$ és un valor propi d'un endomorfisme $f \in \mathrm{End}(V)$ si, i només si, és una arrel del seu polinomi característic.*

PROVA: El fet que λ sigui un valor propi equival a que l'aplicació lineal f_λ tingui nucli no trivial, i això equival a que $\det(f_\lambda) = 0$, però $\det(f_\lambda) = \mathrm{Char}(f; \lambda)$. □

Definició 4.2.4 (Multiplicitats dels valors propis) *Sigui $\lambda \in \mathbb{K}$ un valor propi de l'endomorfisme $f \in \mathrm{End}(V)$. Es defineixen:*

- *La* multiplicitat algebraica *de λ és la seva multiplicitat com a arrel del polinomi característic de f: la màxima potència m tal que $(X - \lambda)^m$ divideix* $\mathrm{Char}(f; X)$.
- *La* multiplicitat geomètrica *de λ és la dimensió del subespai propi $V_\lambda = \mathrm{Ker}(f - \lambda\,\mathrm{Id})$.*

Proposició 4.2.5 *Les multiplicitats algebraica $m_a(\lambda)$ i geomètrica $m_g(\lambda)$ d'un valor propi λ satisfan les desigualtats: $1 \leqslant m_g(\lambda) \leqslant m_a(\lambda)$.*

PROVA: Sigui $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ una base de $\mathrm{Ker}(f_\lambda)$, amb $k = m_g(\lambda)$ per definició. Siguin $\boldsymbol{v}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ una extensió a una base de tot l'espai V. Aleshores la matriu de f en aquesta base és:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 & a_{2,k+1} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & a_{k,k+1} & \cdots & a_{k,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{k+1,k+1} & \cdots & a_{k+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n,k+1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\mathbf{1}_k & \boldsymbol{A}_1 \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{A}_2 \end{pmatrix}.$$

Desenvolupant per les primeres columnes per calcular el determinant s'obté $\mathrm{Char}(f; X) = \det(\boldsymbol{A} - X\mathbf{1}_n) = (\lambda - X)^k \det(\boldsymbol{A}_2 - X\mathbf{1}_{n-k})$, on $\boldsymbol{A}_2$ és la submatriu quadrada formada per les últimes $n-k$ files i columnes de $\boldsymbol{A}$. Per tant λ és una arrel del polinomi característic de f de multiplicitat més gran o igual que k. □

Problemes

4.3. Trobeu els valors propis racionals, reals i complexos de les matrius següents:

$$(a)\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (b)\ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (c)\ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$(d)\ \begin{pmatrix} 3 & -13 & 10 \\ 1 & -3 & 10 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad (e)\ \begin{pmatrix} 1 & -15 & -17 \\ 1 & -7 & -6 \\ -1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \qquad (f)\ \begin{pmatrix} 1 & -7 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ -4 & 28 & -4 \end{pmatrix}$$

$$(g)\ \begin{pmatrix} 3 & 19 & -4 & 28 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ -1 & -4 & 1 & -7 \end{pmatrix} \qquad (h)\ \begin{pmatrix} 6 & 2 & -3 & -21 \\ 3 & 0 & -2 & -9 \\ 0 & -7 & 0 & 11 \\ 2 & 0 & -1 & -6 \end{pmatrix} \qquad (i)\ \begin{pmatrix} 6 & 0 & 1 & -2 \\ 7 & 0 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 0 & -1 \\ 21 & 0 & 4 & -7 \end{pmatrix}$$

SOLUCIÓ: (a) ± 1, (b) $\pm i$, (c) $\cos\theta \pm i\sin\theta$, (d) $\{-2, 1, 4\}$, (e) $\{-2, \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{-3})\}$, (f) $\{0, -3\}$, el primer de multiplicitat 2, (g) $\{-2, \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{5})\}$, el primer de multiplicitat 2, (h) $\frac{1}{2}(\pm 1 \pm \sqrt{5})$, (i) $\{e^{2\pi i k/5} : i = 1, 2, 3, 4\}$.

4.4. Siguin $\mathscr{B}$ i $\mathscr{B}'$ dues bases d'un espai vectorial real V de dimensió dos i sigui $\boldsymbol{A} = \mathrm{Mat}(\mathscr{B} \to \mathscr{B}')$ la matriu del canvi de base. Demostreu que existeix un vector no nul $\boldsymbol{v} \in V$ amb coordenades (a, b) en la base $\mathscr{B}$ i coordenades $(\lambda a, \lambda b)$ en la base $\mathscr{B}'$ per a algun nombre real λ si, i només si, $\mathrm{Tr}(\boldsymbol{A})^2 \geqslant 4\det(\boldsymbol{A})$.

SOLUCIÓ: L'existència del vector equival a demanar que λ sigui un valor propi de la matriu A. Per tant, es tracta de saber si la matriu té algun valor propi real, o sigui, si el seu polinomi característic té alguna arrel real. Com que és de grau 2 el fet que tingui arrels reals equival a que el seu discriminant sigui no negatiu. El polinomi característic d'una matriu $A \in \mathcal{M}_2(K)$ és $X^2 - \mathrm{Tr}(A)X + \det(A)$, i té discriminant $\mathrm{Tr}(A)^2 - 4\det(A)$.

4.5. Sigui f l'endomorfisme de $\mathbb{R}^3$ definit per $f(x, y, z) = (x + y, x + ay - z, -x + y - bz)$.

1. Determineu els valors de a i b per als quals el vector $(1, 1, 0)$ és un vector propi de f i el subespai $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y + z = 0\}$ és un subespai invariant per f.
2. Determineu els valors de a i b per als quals 1 és un valor propi de f. Per a quins valors 1 és valor propi de f amb multiplicitat algebraica 2?

SOLUCIÓ: (a) Cal que $f(1, 1, 0) = (2, 1 + a, 0)$ sigui un múltiple de $(1, 1, 0)$, el qual equival a dir que és el doble, i per tant que $a = 1$, i a més que la imatge d'un vector del subespai sigui també del subespai, o sigui que $x + ay - z - x + y - bz = 0$ sempre que $y + z = 0$, que és dir que $(a + 1)y - (b + 1)z = ((a + 1) + (b + 1))y = 0$ per a tot y, i per tant que $a + b + 2 = 0$; com que havia de ser $a = 1$ això equival a que $b = -3$.

(b) Ha de ser $(x + y, x + ay - z, -x + y - bz) = (x, y, z)$ per a algun vector no nul, el qual equival a que sigui $y = 0, x = z, (1 + b) = -1$, i per tant que sigui $b = -2$. La multiplicitat geomètrica és sempre 1. En canvi, l'algebraica és la següent: si $b \neq -2$ aleshores no hi ha cap vep de vap 1 i per tant la multiplicitat algebraica és zero, i si $b = -2$ aleshores el polinomi característic és $-(X - 1)(X - 2)(X - a)$ i per tant la multiplicitat algebraica és 1 si $a \neq 1$ i és 2 si $a = 1$.

4.6. Sigui $f \in \mathrm{End}(V)$ i sigui $U \subseteq V$ un subespai propi. Sigui $f|_U \in \mathrm{End}(U)$ la restricció de l'endomorfisme al subespai U. Demostreu que el polinomi característic $\mathrm{Char}(f|_U; X)$ divideix el polinomi característic $\mathrm{Char}(f; X)$.

4.7. Sigui $f \in \mathrm{End}(V)$ i sigui $U \subseteq V$ un subespai propi. Sigui $W = V/U$ l'espai vectorial quocient corresponent. Comproveu que l'aplicació $f|_W : W \to W$ definida per $f|_W([\boldsymbol{v}]) = [f(\boldsymbol{v})]$ està ben definida i és un endomorfisme de W, i demostreu que

$$\mathrm{Char}(f;X) = \mathrm{Char}(f|_U;X)\,\mathrm{Char}(f|_W;X).$$

4.8. Sigui $f \in \mathrm{End}(V)$. Demostreu que existeix una base de V en la qual la matriu de f és triangular si, i només si, $\mathrm{Char}(f;X)$ descompon completament en producte de polinomis de grau 1.

4.9. Sigui f un endomorfisme d'un $\mathbb{R}$-espai vectorial E de dimensió finita. Demostreu que l'endomorfisme f té com a mínim un valor propi si, i només si, existeix com a mínim un subespai invariant per f de dimensió senar.

Solució: La solució d'aquest problema fa servir la propietat que tot polinomi de $\mathbb{R}[X]$ de grau senar té al menys una arrel. Si f té algun valor propi aleshores té algun vector propi i, per tant, té rectes invariants, que són subespais de dimensió 1 (senar). Sigui V un subespai de dimensió senar invariant per f. En una base obtinguda ampliant una base de V a una base de tot E la matriu de f és una matriu per caixes de la forma $M(f) = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$, on A és la matriu de $f|_V$ en la base de V de partida. Per tant el polinomi característic de f és el producte dels polinomis característics de les matrius A i D. El polinomi característic de A té grau senar i, per tant, té alguna arrel real, que és un valor propi de l'endomorfisme f.

4.10. Calculeu el polinomi característic de la matriu següent:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

4.11. Sigui $\mathscr{R}$ un anell no necessàriament commutatiu (amb unitat). Les matrius amb entrades a l'anell $\mathscr{R}$ i les operacions amb aquestes matrius es defineixen com en el cas d'un cos, i tot funciona exactament igual. La definició de determinant també val per a matrius quadrades de $\mathcal{M}_n(\mathscr{R})$.

Comproveu que en aquest cas la fórmula de Laplace no val en general per a matrius de $\mathcal{M}_n(\mathscr{R})$. Sigui $\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Justifiqueu perquè per a calcular el determinant següent:

$$\begin{vmatrix} a_{11}\mathbf{1}_n - \boldsymbol{A} & a_{12}\mathbf{1}_n & \cdots & a_{1n}\mathbf{1}_n \\ a_{21}\mathbf{1}_n & a_{22}\mathbf{1}_n - \boldsymbol{A} & \cdots & a_{2n}\mathbf{1}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}\mathbf{1}_n & a_{n2}\mathbf{1}_n & \cdots & a_{nn}\mathbf{1}_n - \boldsymbol{A} \end{vmatrix}$$

a l'anell de matrius $\mathcal{M}_n(\mathscr{R})$ amb entrades a l'anell no commutatiu $\mathscr{R} = M_n(\mathbb{K})$ sí que es pot fer servir la fórmula de Laplace. Quant dóna aquest determinant?

4.3 Endomorfismes diagonalitzables

Definició 4.3.1 (Endomorfismes i matrius diagonalitzables) *Un endomorfisme es diu diagonalitzable si existeix una base de l'espai formada per vectors propis.*

Una matriu quadrada $\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ es diu diagonalitzable si existeix una matriu invertible $\boldsymbol{P} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tal que $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ sigui una matriu diagonal.

És a dir, un endomorfisme és diagonalitzable si, i només si, existeix una base en la qual la seva matriu és diagonal.

Definició 4.3.2 *Es diu que un polinomi* $P(X) \in \mathbb{K}[X]$ descompon completament *si té tantes arrels com el seu grau comptant multiplicitats. O sigui, si*

$$P(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n = a_n (X - \alpha_1)^{m_1} (X - \alpha_2)^{m_2} \cdots (X - \alpha_t)^{m_t}$$

amb $\alpha_i \in \mathbb{K}$ *arrels de multiplicitats* m_i.

Els cossos en els quals tot polinomi no constant té una arrel s'anomenen *algebraicament tancats*. És molt fàcil veure que aquesta condició és equivalent al fet que tot polinomi a coeficients en aquest cos descompongui completament. El *Teorema Fonamental de l'Àlgebra* assegura que el cos $\mathbb{C}$ dels nombres complexos és un cos algebraicament tancat.

Teorema 4.3.3 *Un endomorfisme* f *és diagonalitzable si, i només si, es compleixen les dues condicions següents:*

1. *El seu polinomi característic descompon completament en producte de factors de grau* 1*:*

$$\mathrm{Char}(f; X) = (-1)^n (X - \lambda_1)^{m_1} (X - \lambda_2)^{m_2} \cdots (X - \lambda_r)^{m_r}.$$

2. *Per a cada valor propi* λ_i *les multiplicitats algebraica i geomètrica coincideixen:*

$$\dim(V_{\lambda_i}) = m_i \qquad \forall\ i = 1, 2, \ldots, r.$$

Prova: Suposi's que l'endomorfisme és diagonalitzable. Es considera una base de vectors propis, amb els vectors agrupats segons el seu valor propi:

$$\boldsymbol{v}_{1,1}, \ldots, \boldsymbol{v}_{1,m_1}, \boldsymbol{v}_{2,1}, \ldots, \boldsymbol{v}_{2,m_2}, \ldots, \boldsymbol{v}_{r,1}, \ldots, \boldsymbol{v}_{r,m_r}, \qquad f(\boldsymbol{v}_{i,j}) = \lambda_i \boldsymbol{v}_{i,j},$$

amb $m_1 + \cdots + m_r = n$ per ser base. En aquesta base la matriu de l'endomorfisme és diagonal i té a la diagonal cadascun dels valors propis λ_i repetit m_i vegades. Per tant el seu polinomi característic és el polinomi de l'apartat 1 de l'enunciat. Per a cada índex k el subespai propi V_{λ_k} és el subespai $\langle \boldsymbol{v}_{k,1}, \ldots, \boldsymbol{v}_{k,m_k} \rangle$ i per tant la seva dimensió és m_k; en efecte, els vectors $\boldsymbol{v}_{kj}$ pertanyen a aquest espai i si $\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{m_i} x_{ij} \boldsymbol{v}_{ij}$ és de V_{λ_i} aleshores es té

$$f(\boldsymbol{v}) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{m_i} x_{ij} f(\boldsymbol{v}_{ij}) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{m_i} x_{ij} \lambda_i \boldsymbol{v}_{ij} = \lambda_k \boldsymbol{v} = \lambda_k \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{m_i} x_{ij} \boldsymbol{v}_{ij}$$

i per unicitat de l'expressió d'un vector en una base es dedueix que $\lambda_k x_{ij} = \lambda_i x_{ij}$ i per tant ha de ser $x_{ij} = 0$ per a tot $i \neq k$, i $\boldsymbol{v}$ només pot tenir components no nul·les en els vectors $\boldsymbol{v}_{kj}$.

Recíprocament, si es compleixen les dues condicions la reunió de bases dels subespais propis conté n vectors independents i, per tant, és una base de vectors propis de l'espai. $\square$

Corol·lari 4.3.4 *Tot endomorfisme* $f \in \mathrm{End}(V)$ *d'un espai de dimensió* n *tal que el seu polinomi característic* $\mathrm{Char}(f; X)$ *tingui* n *arrels diferents segur que diagonalitza.*

Problemes

4.12. Trobeu els valors i vectors propis de les matrius següents i digueu si són diagonalitzables:

$$(a)\ \begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix} \qquad (b)\ \begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix} \qquad (c)\ \begin{pmatrix}-3 & -1\\ 4 & 1\end{pmatrix}$$

$$(d)\ \begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ -3 & -1 & 3\\ 3 & 3 & -1\end{pmatrix} \qquad (e)\ \begin{pmatrix}-2 & 0 & 1\\ 4 & 2 & -1\\ 1 & 0 & -2\end{pmatrix} \qquad (f)\ \begin{pmatrix}-2 & 20 & 4\\ 0 & -3 & 0\\ -1 & 7 & 2\end{pmatrix}$$

$$(g)\ \begin{pmatrix}0 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 1\\ 0 & -2 & 0\end{pmatrix} \qquad (h)\ \begin{pmatrix}4 & 3 & 1\\ -3 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \qquad (i)\ \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 0\\ -1 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

SOLUCIÓ:

(a) $\mathrm{Char}(\boldsymbol{A}; X) = X^2 - 2X + 2 = (X - (1+i))(X - (1-i))$; $V_{1+i} = \langle(i,1)\rangle$, $V_{1-i} = \langle(-i,1)\rangle$. Diagonalitza sobre $\mathbb{C}$.
(b) $\mathrm{Char}(\boldsymbol{A}; X) = (X-2)(X-1)$; $V_2 = \langle(-1,1)\rangle$, $V_1 = \langle(1,0)\rangle$. Diagonalitza.
(c) $\mathrm{Char}(\boldsymbol{A}; X) = (X+1)^2$; $V_1 = \langle(-1,2)\rangle$. No diagonalitza.
(d) $\mathrm{Char}(\boldsymbol{A}; X) = -(X+4)(X-2)^2$; $V_{-4} = \langle(0,-1,1)\rangle$, $V_2 = \langle(1,0,1),(-1,1,0)\rangle$. Diagonalitza.
(e) $\mathrm{Char}(\boldsymbol{A}; X) = -(X+3)(X-2)(X+1)$; $V_{-3} = \langle(-1,1,1)\rangle$, $V_2 = \langle(0,1,0)\rangle$, $V_{-1} = \langle(1,-1,1)\rangle$. Diagonalitza.
(f) $\mathrm{Char}(\boldsymbol{A}; X) = -(X-3)X^2$; $V_3 = \langle(8,-1,3)\rangle$, $V_0 = \langle(2,0,1)\rangle$. No diagonalitza.
(g) $\mathrm{Char}(\boldsymbol{A}; X) = -(X^2+4)X = -(X-2i)(X+2i)X$; $V_{2i} = \langle(-1,-i,1)\rangle$, $V_{-2i} = \langle(-1,i,1)\rangle$, $V_0 = \langle(1,0,1)\rangle$. Diagonalitza sobre $\mathbb{C}$.
(h) $\mathrm{Char}(\boldsymbol{A}; X) = -(X-1)^3$; $V_1 = \langle(-1,1,0)\rangle$. No diagonalitza.
(i) $\mathrm{Char}(\boldsymbol{A}; X) = -(X+1)(X-1)^2$; $V_{-1} = \langle(0,0,1)\rangle$. $V_1 = \langle(1,1,0)\rangle$. No diagonalitza.

4.13. Sabent que $(1,2)$ i $(1,3)$ són vectors propis d'una matriu $\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de valors propis -1 i 3, respectivament, calculeu $\boldsymbol{A}^n$ per a $n \geqslant 1$.

SOLUCIÓ:

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{A}^n = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(-1)^n & 0\\ 0 & 3^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}^{-1}$$

$$\boldsymbol{A}^n = \begin{pmatrix}(-1)^n & 3^n\\ 2(-1)^n & 3^{n+1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -1\\ -2 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3(-1)^n - 2\cdot 3^n & 3^n - (-1)^n\\ 6((-1)^n - 3^n) & 3^{n+1} - 2(-1)^n\end{pmatrix}.$$

4.14. Determineu els valors dels paràmetres reals per als quals les matrius següents són diagonalitzables i, en aquest cas, doneu la seva forma diagonal:

$$(a)\ \begin{pmatrix}a & b\\ -b & a\end{pmatrix} \qquad (b)\ \begin{pmatrix}5 & 0 & 0\\ 0 & -1 & b\\ 3 & 0 & a\end{pmatrix} \qquad (c)\ \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ a & 1 & 0\\ b & c & 2\end{pmatrix} \qquad (d)\ \begin{pmatrix}3 & 0 & -1\\ 1 & 4 & a\\ 1 & 0 & 5\end{pmatrix}$$

SOLUCIÓ:

(a) $\mathrm{Char}(\boldsymbol{A}; X) = (X-a)^2 + b^2 = X^2 - 2aX + (a^2+b^2) = (X - (a+ib))(X - (a-ib))$, de discriminant $4a^2 - 4(a^2+b^2) = -4b^2$. Sobre $\mathbb{R}$ només diagonalitza si $b = 0$, i en aquest cas és ja diagonal. Sobre $\mathbb{C}$ diagonalitza sempre: si $b = 0$ ja és diagonal i si no té dos valors propis diferents de multiplicitat 1.

(b) $\operatorname{Char}(\boldsymbol{A}; X) = -(X+1)(X-5)(X-a)$. Si $a \neq -1, 5$ diagonalitza ja que té tres valors propis diferents de multiplicitat 1. Quan $a = -1$ té el valor propi -1 amb multiplicitat 2; si $b \neq 0$ no diagonalitza ja que $V_{-1} = \langle(0,1,0)\rangle$ i en canvi si $b = 0$ sí que diagonalitza ja que $V_{-1} = \langle(0,1,0),(0,1,1)\rangle$. Quan $a = 5$ té el valor propi 5 amb multiplicitat 2 i no diagonalitza mai ja que $V_5 = \langle(0,b,6)\rangle$.

(b) $\operatorname{Char}(\boldsymbol{A}; X) = -(X-1)^2(X-2)$. Si $a \neq 0$ no diagonalitza ja que $V_1 = \langle(0,-2,c)\rangle$, i si $a = 0$ sí que ho fa, ja que $V_1 = \langle(0,-1,c),(-1,0,b)\rangle$.

(c) $\operatorname{Char}(\boldsymbol{A}; X) = -(X-4)^3$ i òbviament no diagonalitza, ja que si ho fes hauria de ser directament diagonal.

4.15. Demostreu que els endomorfismes $f, g\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definits per

$$f(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A}^t \qquad \text{i} \qquad g(\boldsymbol{A}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{A}$$

són tots dos diagonalitzables i trobeu una base de vectors propis per a cadascun.

Solució: És clar que de les quatre matrius independents:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

les tres primeres són iguals a la seva transposada i a la quarta la transposició canvia el signe. Per tant, una base de vectors propis de l'endomorfisme transposició.

Pel que fa a l'endomorfisme g, l'efecte que té sobre una matriu és el d'intercanviar les dues files. Així, resulta que les matrius independents:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

deixa iguals les dues primeres i canvia el signe de dues últimes. Per tant, són una base de vectors propis.

4.16. Es considera l'aplicació $f \in \operatorname{End}(\mathbb{R}_2[x])$ definida per:

$$f(1) = 2 - x^2, \quad f(x^2) = 2x^2 - 1, \quad f(1+x) = 2 + 2x - x^2.$$

1. Trobeu la matriu $\boldsymbol{A}$ de f en la base canònica $\{1, x, x^2\}$ de l'espai $\mathbb{R}_2[x]$.
2. Doneu una base de $\mathbb{R}_2[x]$ en la qual la matriu $\boldsymbol{D}$ de f sigui diagonal.
3. Trobeu una matriu $\boldsymbol{P} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ invertible tal que $\boldsymbol{PD} = \boldsymbol{AP}$.

Solució:

$$\boldsymbol{A} = \operatorname{Mat}(f; \mathscr{B}_e) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \operatorname{Char}(\boldsymbol{A}; X) = -(X-1)(X-2)(X-3).$$

Es té $f(1+x^2) = 1 + x^2$, $f(x) = 2x$ i $f(1-x^2) = 3 - 3x^2$, de manera que aquests tres vectors són una base de vectors propis. Una matriu que compleix la condició és la matriu

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

4.17. Sigui f un endomorfisme d'un $\mathbb{K}$-espai vectorial E de dimensió 4. Suposi's que existeix $\boldsymbol{v} \in E$ tal que els vectors $\boldsymbol{v}, f(\boldsymbol{v}), f^2(\boldsymbol{v}), f^3(\boldsymbol{v})$ són linealment independents, i que $f^4(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}$. Demostreu que si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ aleshores l'endomorfisme f és diagonalitzable, però que si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ aleshores f no és diagonalitzable.

Solució: En la base formada pels quatre vectors independents donats la matriu de f és:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Té polinomi característic $X^4 - 1 = (X-1)(X+1)(X^2+1)$, que no té totes les arrels reals però té quatre arrels complexes diferents.

4.18. Determineu els endomorfismes f de $\mathbb{R}^3$ que verifiquin les condicions que s'especifiquen i, en cada cas, calculeu el seu polinomi característic.

1. Que tingui els vectors propis $(1,0,0)$, $(1,1,0)$ i $(1,0,1)$ amb valors propis 2, 1 i -1, respectivament.
2. Amb nucli $\operatorname{Ker} f = \langle (0,0,1) \rangle$ i tal que $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y=z\}$ sigui el subespai generat pels vectors propis de valor propi 2.
3. Amb un únic valor propi real, nucli $\operatorname{Ker} f = \langle (0,0,1) \rangle$, i tal que $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y = z\}$ sigui un subespai vectorial invariant.
4. No diagonalitzable tal que $(1,0,0)$ i $(0,-1,1)$ siguin vectors propis de valor propi -1.

Solució:

1. Té matriu A en la base canònica determinada per
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \boldsymbol{A} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
Per tant és l'endomorfisme definit per $f(x,y,z) = (2x - y - 3z, y, -z)$.
2. Té matriu A en la base canònica determinada per
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \boldsymbol{A} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$
Per tant és l'endomorfisme definit per $f(x,y,z) = (2x, 2y, 2x+2y)$.
3. Si només té un valor propi real i té nucli de dimensió 1 aleshores el subespai invariant no pot tenir vectors propis. El polinomi característic ha de ser $-X(X^2 - \tau X + \delta)$ amb $\tau^2 - 4\delta < 0$, i on τ i δ són la traça i el determinant del polinomi característic de l'endomorfisme $f|_W$. Si $f|_W$ té matriu $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ en la base $(1,0,1)$ i $(0,1,1)$, s'ha de complir la condició $4bc < (a-d)^2$. Aleshores la matriu de f en la base canònica és
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \boldsymbol{A} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ a+c & b+d & 0 \end{pmatrix}.$$
Per tant és l'endomorfisme definit per $f(x,y,z) = (ax + by, cx + dy, (a+c)x + (b+d)y)$.

4. Si hi ha dos vectors propis independents de valor propi -1 l'única possibilitat per no ser diagonalitzable és que -1 tingui multiplicitat algebraica 3 i multiplicitat geomètrica 2. El polinomi característic és $-(X+1)^3$. Sigui per exemple $v_3 = (0,0,1)$ és un vector que completi els dos vectors $v_1 = (1,0,0)$ i $v_2 = (0,-1,1)$ a una base. Aleshores en aquesta base $\{v_i\}$ la matriu ha de ser
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & a \\ 0 & -1 & b \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
Per tant la matriu en la base canònica $\boldsymbol{A}$ queda determinada per
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \boldsymbol{A} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & a \\ 0 & -1 & b \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & a & a \\ 0 & -1-b & -b \\ 0 & b & -1+b \end{pmatrix}.$$
Així, l'endomorfisme és $f(x,y,z) = (-x+ay+az, -(1+b)y - bz, by + (b-1)z)$.

4.19. Sigui $\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de traça $t = \operatorname{Tr}(\boldsymbol{A})$. Demostreu que si t és un valor propi de $\boldsymbol{A}$ aleshores $\boldsymbol{A}^m = t^{m-1}\boldsymbol{A}$ per a tot natural $m \geqslant 1$.

Solució: El polinomi característic d'una matriu $\boldsymbol{A}$ de mida 2 és $X^2 - \operatorname{Tr}(\boldsymbol{A})X + \det(\boldsymbol{A})$. Si té una arrel real aleshores totes dues ho són i el polinomi descompon com $(X-t)(X-u)$. Com que $t = \operatorname{Tr}(\boldsymbol{A})$ i $t + u = \operatorname{Tr}(\boldsymbol{A})$ ha de ser $u = 0$.

Si $t = u = 0$ el polinomi característic és X^2 i estenent un vector propi de valor propi zero a una base, en fer el canvi de base es té $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Per a $m \geqslant 2$ es té $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{P} = \boldsymbol{0}$ i per tant $\boldsymbol{A}^m = \boldsymbol{0} = t^{m-1}\boldsymbol{A}$. Per a $m = 1$ la identitat diu $\boldsymbol{A}^m = t^0\boldsymbol{A}$.

Si $t \neq 0$ aleshores la matriu diagonalitza i en una base de vectors propis es té $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \left(\begin{smallmatrix} t & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Per tant $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{P} = \left(\begin{smallmatrix} t^m & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) = t^{m-1}\left(\begin{smallmatrix} t & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, d'on es dedueix que $\boldsymbol{A}^m = t^{m-1}\boldsymbol{A}$.

4.20. Siguin $f, g \in \operatorname{End}(E)$ són endomorfismes d'un espai de dimensió finita. Demostreu que si $\boldsymbol{v}$ és un vector propi de $g \circ f$ de valor propi $\lambda \neq 0$ aleshores $f(\boldsymbol{v})$ és un vector propi de $f \circ g$ de valor propi λ. Què passa si $\lambda = 0$? Demostreu que si $g \circ f$ és invertible i diagonalitzable aleshores $f \circ g$ també és diagonalitzable.

Solució: Si $(g \circ f)(\boldsymbol{v}) = \lambda\boldsymbol{v}$ aleshores $(f \circ g)(f(\boldsymbol{v})) = f((g \circ f)(\boldsymbol{v})) = f(\lambda\boldsymbol{v}) = \lambda f(\boldsymbol{v})$. Com que $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ per ser vector propi, $\lambda\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ i per tant la identitat $g(f(\boldsymbol{v})) = \lambda\boldsymbol{v}$ garanteix que $f(\boldsymbol{v}) \neq \boldsymbol{0}$, i per tant $f(\boldsymbol{v})$ és un vector propi de valor propi λ.

Si $\lambda = 0$ poden passar dues coses: si $f(\boldsymbol{v}) \neq \boldsymbol{0}$, aquest vector és vector propi de $f \circ g$ de valor propi λ; en canvi, si $f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}$ aleshores ja no és vector propi.

Si $g \circ f$ és invertible aleshores tots els seus valors propis són diferents de zero (un endomorfisme té el zero com a valor propi si, i només si, té nucli diferent de $\{\boldsymbol{0}\}$, que equival a dir que no és invertible). Per ser dimensió finita (endomorfisme bijectiu equival a injectiu o exhaustiu) tots dos endomorfismes f i g són bijectius. Per tant si $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ és una base de vectors propis de $g \circ f$ aleshores $f(\boldsymbol{v}_1), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)$ és una base de vectors propis de $f \circ g$.

4.21. Es consideren les matrius
$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Comproveu que les matrius $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{B}$ no són $\mathbb{R}$-diagonalitzables però que la matriu $\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$ sí que ho és.
2. Trobeu una matriu diagonal $\boldsymbol{D} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ i dues matrius invertibles $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de manera que $\boldsymbol{B}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{D}\boldsymbol{P}^{-1}$ i $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{D}\boldsymbol{Q}^{-1}$.

INDICACIÓ: Pot ser útil el problema anterior.

SOLUCIÓ: Es té $\mathrm{Char}(\boldsymbol{A}; X) = -(X+1)(X-1)^2$, amb $\dim V_1 = 1$, i $\mathrm{Char}(\boldsymbol{B}; X) = -(X-2)(x^2+1)$, que no descompon a $\mathbb{R}$.

Com que $\mathrm{Char}(\boldsymbol{AB}; X) - (X-2)(X-1)(X+1)$ aquesta matriu diagonalitza. Una base de vectors propis, en ordre, és la formada pels vectors $(1,1,1), (1,0,1), (7,4,1)$. Tal i com es dedueix del problema anterior, la matriu $\boldsymbol{BA}$ ha de tenir el mateix polinomi característic i una base de vectors propis pot obtenir-se aplicant B als vectors anteriors, el qual dóna els tres vectors $(2,2,2), (2,-1,2), (0,1,2)$.

El que diu el problema anterior és conseqüència del següent: si la matriu $\boldsymbol{BA}$ és diagonalitzable sigui $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{BAP} = \boldsymbol{D}$; si a més $\boldsymbol{A}$ és invertible (això és la condició que els valors propis siguin no nuls) aleshores $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{ABAP} = (\boldsymbol{AP})^{-1}\boldsymbol{AB}(\boldsymbol{AP}) = \boldsymbol{D}$, i, per tant, $\boldsymbol{AB}$ també és diagonalitzable i és conjugada de la mateixa matriu diagonal.

4.22. Sigui $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$ i sigui $(b_1, \dots, b_n, \lambda) \in \mathbb{R}^{n+1}$ un vector fixat. Es defineix $g \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^{n+1})$ per:

$$g(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = (y_1, \dots, y_n, 0) + x_{n+1}(b_1, \dots, b_n, \lambda),$$

on $(y_1, \dots, y_n) = f(x_1, \dots, x_n)$.

1. Relacioneu les matrius de totes dues aplicacions lineals en les bases canòniques.
2. Demostreu que si $(c_1, \dots, c_n)$ és un vector propi de f aleshores $(c_1, \dots, c_n, 0)$ és un vector propi de g, i que si $(b_1, \dots, b_n) = (f - \lambda\,\mathrm{Id})(d_1, \dots, d_n)$ aleshores $(d_1, \dots, d_n, -1)$ és un vector propi de g.
3. Suposi's que f és diagonalitzable. Demostreu que g és diagonalitzable si, i només si,

$$(b_1, \dots, b_n) \in \mathrm{Im}(f - \lambda\,\mathrm{Id}).$$

SOLUCIÓ: (1) La relació és

$$\mathrm{Mat}(g; \mathscr{B}_e) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & b_n \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \text{on} \quad (a_{ij}) = \mathrm{Mat}(f; \mathscr{B}_e).$$

(2) Si $f(c_1, \dots, c_n) = \mu(c_1, \dots, c_n)$, aleshores

$$g(c_1, \dots, c_n, 0) = (\mu c_1, \dots, \mu c_n, 0) + 0(b_1, \dots, b_n, \lambda) = \mu(c_1, \dots, c_n, 0).$$

Si $(b_1, \dots, b_n) = f(d_1, \dots, d_n) - \lambda(d_1, \dots, d_n)$ aleshores

$$g(d_1, \dots, d_n, -1) = (b_1 + \lambda d_1, \dots, b_n + \lambda d_n, 0) + (-1)(b_1, \dots, b_n, \lambda) = \lambda(d_1, \dots, d_n, -1)$$

i el vector $(d_1, \dots, d_n, -1)$ és un vector propi de valor propi λ.

(3) Suposi's que f és diagonalitzable. Sigui $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$ una base de vectors propis. Afegint-los un zero al final es té una família independent de n vectors propis de g. Si $(b_1, \dots, b_n) \in \mathrm{Im}(f - \lambda\,\mathrm{Id})$ i $(f - \lambda\,\mathrm{Id}(d_1, \dots, d_n) = (b_1, \dots, b_n)$ aleshores $(d_1, \dots, d_n, -1)$ és un vector propi de g independent dels anteriors, ja que té la última coordenada diferent de zero, i per tant entre tots $n+1$ són base de vectors propis de g. Recíprocament, si g diagonalitza aleshores ha de tenir algun vector propi amb la última coordenada no nul·la. Normalitzant-lo es pot suposar que aquesta coordenada és -1. Un vector de la forma $(d_1, \dots, d_n, -1)$ és un vector propi de g si, i només si, el seu valor propi és λ i això passa si, i només si, $(f - \lambda\,\mathrm{Id})(d_1, \dots, d_n) = (b_1, \dots, b_n)$, de manera que l'existència d'aquest vector propi implica que $(b_1, \dots, b_n) \in \mathrm{Im}(f - \lambda\,\mathrm{Id})$.

4.23. Sigui $f \in \operatorname{End}(\mathbb{R}^3)$ definit per $f(x,y,z) = (-x+y-z, x-y+z, -x+y-z)$, i sigui $g \in \operatorname{End}(\mathbb{R}^4)$ definit per $g(x,y,z,t) = (x-y-z+t, x-y+z+2t, -x+y-z+t, 3t)$.

1. Doneu bases dels subespais nucli i imatge de l'endomorfisme $f + 3\,\mathrm{Id}$. Calculeu, en cas que existeixin, les antiimatges de $(1,2,1)$ per aquest endomorfisme.
2. Justifiqueu que f i g són diagonalitzables i, en cada cas, doneu una base de vectors propis.

Indicació: Pot ser útil el problema anterior.

Solució: $(f+3\,\mathrm{Id})(x,y,z) = (2x+y-z, x+2y+z, -x+y+2z)$. La imatge està generada pels vectors $(2,1,-1), (1,2,1), (-1,1,2)$, que generen l'espai de dimensió 2 amb base $(1,1,0)$ i $(0,1,1)$. El nucli té per tant dimensió 1 i està generat pel vector $(-1,1,-1)$. Les antiimatges del vector $(1,2,1)$ són els vectors $(0,1,0) + t(-1,1,-1) = (-t, t+1, -t)$ per $t \in \mathbb{R}$.

4.24. Calculeu $\boldsymbol{A}^n$, on $\boldsymbol{A}$ és la matriu:

$$(a)\ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad (b)\ \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} \qquad (c)\ \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Solució:

1. Diagonalitzant s'obté $\boldsymbol{A} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)^{-1}$. Per tant,
$$\boldsymbol{A}^n = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} (3^n+1)/2 & (3^n-1)/2 \\ (3^n-1)/2 & (3^n+1)/2 \end{pmatrix}.$$
La fórmula es pot comprovar ara per inducció.
2. Diagonalitzant s'obté $\boldsymbol{A} = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{smallmatrix}\right)^{-1}$, d'on es dedueix immediatament que $\boldsymbol{A}^n = \boldsymbol{A}$ per a tot $n \geqslant 1$.
3. Diagonalitzant s'obté $\boldsymbol{A} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & i & -i \\ 1 & 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & i & -i \\ 1 & 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)^{-1}$. Com que les potències de la matriu diagonal tenen període 4, les diferents matrius potència de $\boldsymbol{A}$ són: $\boldsymbol{A}^n = \boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}^2, \boldsymbol{A}^3, \boldsymbol{1}_3$ segons que l'exponent sigui congruent amb $1, 2, 3$ o zero mòdul 4.

4.25. Trobeu una matriu $\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tal que $\boldsymbol{A}^5 = \begin{pmatrix} 65 & 33 \\ -66 & -34 \end{pmatrix}$.

Solució: Diagonalitzant la matriu donada es té
$$\begin{pmatrix} 65 & 33 \\ -66 & -34 \end{pmatrix} = \boldsymbol{P}^{-1}\begin{pmatrix} 32 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\boldsymbol{P}, \quad \text{amb} \quad \boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$
Per tant,
$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}$$
compleix la condició.

4.26. Sigui f l'endomorfisme de $\mathbb{R}^3$ que té per matriu en la base canònica
$$\operatorname{Mat}(f; \{\boldsymbol{e}_i\}) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$
Estudieu si f és diagonalitzable. Es consideren els subespais U i V de $\mathbb{R}^3$ definits, respectivament, per les equacions $x-y+z=0$ i $x-y+2z=0$. Demostreu que tant U com V són invariants per f i estudieu si les restriccions $f|_U$ i $f|_V$ són diagonalitzables, donant, si és el cas, la forma diagonal de la restricció corresponent.

SOLUCIÓ: f no diagonalitza. L'1 és valor propi de multiplicitat algebraica 2 i geomètrica 1; els vectors propis d'aquest valor propi tenen per base $(1, 1, 0)$. L'altre valor propi és el zero, amb vector propi $(-1, 1, 1)$, que genera el nucli de f.

Els vectors de F són els de la forma $(x, x + z, z)$. La seva imatge és $f(x, x + z, z) = (x - z, x, z)$ i aquests vectors pertanyen a F ja que la segona coordenada és la suma de la primera i la tercera. Una base de F consisteix en els vectors $v_1 = (1, 1, 0), v_2 = (0, 1, 1)$. Es té $f(v_1) = (1, 1, 0) = v_1$ i $f(v_2) = (-1, 0, 1) = -v_1 + v_2$. Per tant,

$$M(f|_F; \{v_i\}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

que no és diagonalitzable.

Els vectors de G són els de la forma $(x, x+2z, z)$. La seva imatge és $f(x, x+2z, z) = (x+z, x+z, 0)$ i pertany a G ja que la component del mig és la de l'esquerra més el doble de la de la dreta. Una base de G consisteix en els vectors $v_1 = (1, 1, 0)$ i $v_2 = (0, 2, 1)$. Es té $f(v_1) = v_1$ i $f(v_2) = (1, 1, 0) = v_1$. Per tant,

$$M(f|_G; \{v_i\}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

que és diagonalitzable; una base de vectors propis és v_1, de valor propi 1, i $v_1 - v_2$, de valor propi zero.

4.27. Sigui V un $\mathbb{K}$-espai vectorial de dimensió finita i $f \in \operatorname{End}(V)$. Per a cada polinomi $P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n \in \mathbb{K}[X]$ es defineix l'endomorfisme

$$P(f) = a_0 \operatorname{Id} + a_1f + a_2f^2 + \cdots + a_nf^n \in \operatorname{End}(E).$$

1. Trobeu la relació que hi ha entre els valors propis de f i de $P(f)$.
2. Si f és invertible, trobeu la relació que hi ha entre els valors propis de f i de f^{-1}.
3. Demostreu que si f diagonalitza, aleshores $P(f)$ i f^{-1} (si f és invertible) també diagonalitzen i trobeu la relació entre les formes diagonals respectives.

SOLUCIÓ: (a) Si $\boldsymbol{v}$ és un vector propi de f de valor propi λ aleshores, per a cada exponent n, es té $f^n(\boldsymbol{v}) = \lambda^n\boldsymbol{v}$, i, més en general,

$$\begin{aligned} P(f)(\boldsymbol{v}) &= a_0\boldsymbol{v} + a_1f(\boldsymbol{v}) + a_2f^2(\boldsymbol{v}) + \cdots + a_nf^n(\boldsymbol{v}) = a_0\boldsymbol{v} + a_1\lambda\boldsymbol{v} + a_2\lambda^2\boldsymbol{v} + \cdots + a_n\lambda^n\boldsymbol{v} \\ &= (a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \cdots + a_n\lambda^n)\boldsymbol{v} = f(\lambda)\boldsymbol{v}. \end{aligned}$$

Per tant, el vector $\boldsymbol{v}$ és un vector propi de $P(f)$ amb valor propi $f(\lambda)$.

(b) Si f és invertible els seus valors propis han de ser no nuls. Per a cada vector propi $\boldsymbol{v}$ amb valor propi λ es té $f(\boldsymbol{v}) = \lambda\boldsymbol{v}$ i, per tant, $f^{-1}(\lambda\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v} \Rightarrow f^{-1}(\boldsymbol{v}) = \lambda^{-1}\boldsymbol{v}$, i per tant $\boldsymbol{v}$ és vector propi de f^{-1} amb valor propi λ^{-1}.

(c) Es dedueix de l'apartat anterior que, si f diagonalitza, una base de vectors propis de f és també una base de vectors propis de tot endomorfisme $P(f)$, i que si f és invertible també és una base de vectors propis per a l'endomorfisme f^{-1}. Les matrius diagonals corresponents són les que s'obtenen aplicant el polinomi als valors propis o invertint els valors propis en el cas de f^{-1}.

4.28. Es consideren n successions $\{x_k^{(1)}\}_{k\geqslant 0}, \ldots, \{x_k^{(n)}\}_{k\geqslant 0}$ d'elements d'un cos $\mathbb{K}$ definides de manera recurrent per una expressió lineal, de la manera següent: els termes $(k+1)$-èsims de cada successió són combinacions lineals dels termes k-èsims de totes les n successions. És a dir, existeix una matriu $\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}_n(K)$ tal que si $\boldsymbol{x}_k = (x_k^{(1)}, x_k^{(2)}, \ldots, x_k^{(n)}) \in \mathbb{K}^n$ denota el vector de $\mathbb{K}^n$ que té per components els termes k-èsims de les n successions, aleshores $\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_k$ per a cada $k \geqslant 0$.

Determineu totes les successions de nombres reals $\{a_k\}_{k\geqslant 0}$ i $\{b_k\}_{k\geqslant 0}$ verificant:

$$a_{k+1} = 2b_k \qquad \text{i} \qquad b_{n+1} = -3a_n + 5b_n.$$

4.29. Una successió definida per una recurrència lineal de grau n és una successió $\{x_k\}_{k\geqslant 0}$ d'elements d'un cos K tal que cada terme (a partir del terme n-èsim) s'obté com una combinació lineal dels n termes anteriors:

$$x_{k+n} = a_0 x_k + a_1 x_{k+1} + \cdots + a_{n-1} x_{k+n-1}, \quad \forall\, k \geqslant 0, \quad \text{per a uns} \quad a_i \in \mathbb{K}.$$

Digueu com es pot trobar una fórmula que per al terme general d'una successió recurrent fent servir la diagonalització de matrius i quin paper hi juga en el càlcul d'aquest terme general el polinomi $a_0 + a_1 X + \cdots + a_{n-1}X^{n-1} + X^n \in \mathbb{K}[X]$.

Calculeu el terme general de la successió de Fibonacci $\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots\}$, definida per la fórmula recurrent:

$$F_0 = 1, \quad F_1 = 1, \qquad F_{k+2} = F_k + F_{k+1}, \quad \forall k \geqslant 0.$$

4.30. Sigui

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ a^{-1} & 0 & a \\ a^{-2} & a^{-1} & 0 \end{pmatrix}, \qquad a \in \mathbb{R},\ a \neq 0.$$

1. Demostreu que $\boldsymbol{A}$ és invertible i trobeu $\boldsymbol{A}^{-1}$ usant el Teorema de Cayley-Hamilton.
2. Estudieu la diagonalització de $\boldsymbol{A}$, i en els casos en que això sigui possible, trobeu una matriu $\boldsymbol{P}$ tal que $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ sigui diagonal.
3. Calculeu $\boldsymbol{A}^n$ per a cada $n \in \mathbb{Z}$.

Solució: 1. El polinomi característic de $\boldsymbol{A}$ és $P(X) = -X^3 + 3X + 2$. Per Cayley-Hamilton es té que $P(\boldsymbol{A}) = -\boldsymbol{A}^3 + 3\boldsymbol{A} + 2\mathbf{1}_3 = \mathbf{0}_3$ i, per tant, es dedueix que $\boldsymbol{A}(-\boldsymbol{A}^2 + 3\mathbf{1}_3) + 2\mathbf{1}_3 = \mathbf{0}_3$, d'on es dedueix que:

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{A}^2 - 3\mathbf{1}_3) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & a & a^2 \\ a^{-1} & -1 & a \\ a^{-2} & a^{-1} & -1 \end{pmatrix}.$$

La matriu $\boldsymbol{A}$ sempre diagonalitza. Una base de vectors propis està formada pels vectors $(a^2, a, 1)$, de valor propi 2, i $(-a^2, 0, 1)$ i $(-a, 1, 0)$, de valor propi -1. La matriu $\boldsymbol{P}$ s'obté posant-los en columna. Les potències $\boldsymbol{A}^n$ es calculen com:

$$\boldsymbol{A}^n = \begin{pmatrix} a^2 & -a^2 & -a \\ a & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^2 & -a^2 & -a \\ a & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

que dóna:

$$\boldsymbol{A}^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2(-1)^n + 2^n & a(2^n - (-1)^n) & a^2((-1)^n - 2^n) \\ a^{-1}(2^n - (-1)^n) & 2(-1)^n + 2^n & a(2^n - (-1)^n) \\ a^{-2}((-1)^n - 2^n) & a^{-1}(2^n - (-1)^n) & 2(-1)^n + 2^n \end{pmatrix}.$$

4.31. Trobeu tots els endomorfismes $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ que compleixen totes les condicions següents:

1. $\langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2 \rangle$ i $\langle \boldsymbol{e}_3 \rangle$ són subespais invariants per f,
2. $\mathrm{Ker}(f) = \langle (1, 2, 0) \rangle$,
3. la matriu de f en la base ordinària és simètrica,
4. $\mathrm{Tr}(f) = 6$, i
5. 1 és un valor propi de f.

Solució: La segona condició assegura que 0 és valor propi de multiplicitat geomètrica 1. Com que la traça és la suma dels valors propis ha de ser $1 + 0 + \lambda = 6$. Per tant 5 és un altre valor propi. Com que f té tres valors propis diferents, diagonalitza. La primera condició diu que $\boldsymbol{e}_3$ és un vector propi; el seu valor propi λ no pot ser zero, i per tant ha ser 1 o 5.

Sigui $f(\boldsymbol{e}_2) = a\boldsymbol{e}_1 + b\boldsymbol{e}_2$. Aleshores, $f(\boldsymbol{e}_1) = -2f(\boldsymbol{e}_2) = -2a\boldsymbol{e}_1 - 2b\boldsymbol{e}_2$. La matriu de f en la base canònica és de la forma:

$$\begin{pmatrix} -2a & a & 0 \\ -2b & b & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

La condició de ser simètrica obliga a que $a = -2b$ i la matriu queda:

$$\begin{pmatrix} 4b & -2b & 0 \\ -2b & b & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Si $\lambda = 1$ aleshores $5b = 5$ i per tant $b = 1$: l'endomorfisme és $f(x, y, z) = (4x - 2y, -2x + y, z)$ i compleix totes les condicions. Si $\lambda = 5$ aleshores $5b = 1$ i per tant $b = 1/5$: l'endomorfisme és $f(x, y, z) = \left(\frac{4x-2y}{5}, \frac{-2x+y}{5}, 5z\right)$ i també compleix les condicions.

4.32. Una matriu $\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ es diu *nilpotent* si existeix un enter $k \geqslant 1$ tal que $\boldsymbol{A}^k = \boldsymbol{0}$. Sigui $\boldsymbol{A}$ una matriu nilpotent.

1. Demostreu que $\boldsymbol{A}$ és conjugada d'alguna matriu triangular superior estricta: una matriu (u_{ij}) amb entrades $u_{ij} = 0$ si $i \geqslant j$.
2. Demostreu que $\boldsymbol{A}^n = \boldsymbol{0}$.
3. Trobeu el polinomi característic de la matriu $\boldsymbol{A}$ i, fent servir aquest, trobeu el de la matriu $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{1}_n$.
4. Calculeu $\det(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{1}_n)$.
5. Demostreu que $\det(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = \det(\boldsymbol{B})$ per a tota matriu $\boldsymbol{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ que commuti amb $\boldsymbol{A}$.

SOLUCIÓ:

1. És clar que la condició de ser nilpotent depèn de la classe de conjugació i que les matrius nilpotents tenen determinant $\det \boldsymbol{A} = 0$ ja que si no fos així totes les seves potències serien invertibles. Es demostra per inducció sobre la mida n de la matriu. La condició $\det \boldsymbol{A} = 0$ assegura que existeix algun vector no nul $\boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^n$ tal que $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. Completant-lo a una base de $\mathbb{K}^n$ s'obté una matriu $\boldsymbol{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tal que $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ és una matriu nilpotent amb la primera columna igual a zero. Aleshores

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & b_{1n} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}' \end{pmatrix} \qquad \text{i} \quad \boldsymbol{B}^k = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{b}\boldsymbol{B}'^{k-1} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}'^{k} \end{pmatrix}.$$

Per tant $\boldsymbol{B}' \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ és una matriu que també és nilpotent. Per hipòtesi d'inducció té una conjugada $\boldsymbol{P}'^{-1}\boldsymbol{B}'\boldsymbol{P}'$ que és triangular superior estricta. Aleshores en conjugar $\boldsymbol{B}$ per la matriu

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{P}' \end{pmatrix}$$

s'obté una matriu

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{P}'^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{P}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{P}'^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}' \end{pmatrix}$$

que és triangular superior estricta.

2. Una matriu triangular superior estricta de mida n dóna zero en multiplicar-la n vegades.
3. Calculat a partir de la matriu triangular superior estricta conjugada el polinomi característic és $\mathrm{Char}(\boldsymbol{A}; X) = (-X)^n$. Aleshores

$$\mathrm{Char}(\boldsymbol{A}+\mathbf{1}_n; X) = \det(\boldsymbol{A}+\mathbf{1}_n - X\mathbf{1}_n) = \det(\boldsymbol{A}-(X-1)\mathbf{1}_n) = \mathrm{Char}(\boldsymbol{A}; X-1) = (1-X)^n.$$

4. El determinant s'obté en avaluar el polinomi característic en $X = 0$, i per tant és igual a 1.
5. Suposi's primer que $\boldsymbol{B}$ és invertible. Aleshores, la matriu $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}$ és nilpotent, ja que $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{B}^{-1}$ també commuten, i per tant $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1})^k = \mathbf{0}$. De l'apartat anterior es dedueix que $\det(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1} + \mathbf{1}_n) = 1$. Aleshores $\det(\boldsymbol{B}) = \det(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1} + \mathbf{1}_n)\det(\boldsymbol{B}) = \det(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})$.
Si la matriu $\boldsymbol{B}$ no és invertible té determinant zero. Aleshores si $\boldsymbol{A}^k = \mathbf{0}$ es té:

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \boldsymbol{A}^{k-i}\boldsymbol{B}^i = \boldsymbol{B}(\sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{A}^{k-i}\boldsymbol{B}^{i-1}),$$

i prenent determinants es dedueix que $\det(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^k = \det((\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^k) = \det(\boldsymbol{B})\det(\sum\cdots) = 0\det(\sum\cdots) = 0 \Rightarrow \det(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = 0$.

4.33. Sigui $\mathbb{K}$ el cos dels nombres reals o complexos. Recordi's que l'exponencial d'un nombre real o complex x ve donada per la sèrie de potències $\exp(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$. Es defineix l'exponencial d'una matriu quadrada $\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ com la matriu que resulta en sumar la sèrie:

$$\exp(\boldsymbol{A}) = \mathbf{1}_n + \boldsymbol{A} + \frac{1}{2}\boldsymbol{A}^2 + \frac{1}{6}\boldsymbol{A}^3 + \cdots + \frac{1}{n!}\boldsymbol{A}^n + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\boldsymbol{A}^k.$$

Digueu com es pot calcular l'exponencial d'una matriu diagonalitzable i calculeu l'exponencial de les matrius següents:

$$(a)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (b)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \log 2 & 0 \\ 1 & -2\log 2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (c)\ \begin{pmatrix} 3 & 9+\pi^2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

4.34. Estudieu la convergència de la sèrie $\sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{A}^k$ per a una matriu diagonalitzable $\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ i en cas que sigui convergent digueu quina és la suma de la sèrie.

4.4 Forma de Jordan

Hi ha dues obstruccions que impedeixen diagonalitzar a un endomorfisme:

- Primera. Que no hi hagi suficients valors propis: el polinomi característic de l'endomorfisme no descompon completament.
- Segona. Que per a algun valor propi no hi hagi suficients vectors propis: la seva multiplicitat geomètrica és estrictament més petita que la multiplicitat algebraica.

En aquesta secció es veurà que quan no hi ha obstrucció del primer tipus, és a dir, quan el polinomi característic descompon completament, sempre existeixen bases en que la matriu té una forma relativament senzilla, anomenada *forma de Jordan*.

Definició 4.4.1 (Blocs i matrius de Jordan) *Un* bloc de Jordan *és una matriu de la forma*

$$\boldsymbol{J}_{\lambda,\ell} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_\ell(\mathbb{K}), \qquad \lambda \in \mathbb{K}.$$

Una matriu de Jordan *és una matriu amb blocs de Jordan a la diagonal i zeros a la resta:*

$$\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{J}_{\lambda_1,\ell_1} & \boldsymbol{0}_{\ell_1\times\ell_2} & \cdots & \boldsymbol{0}_{\ell_1\times\ell_k} \\ \boldsymbol{0}_{\ell_2\times\ell_1} & \boldsymbol{J}_{\lambda_2,\ell_2} & \cdots & \boldsymbol{0}_{\ell_2\times\ell_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{0}_{\ell_k\times\ell_1} & \boldsymbol{0}_{\ell_k\times\ell_2} & \cdots & \boldsymbol{J}_{\lambda_k,\ell_k} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad n = \ell_1 + \cdots + \ell_k.$$

Els escalars λ dels diferents blocs de Jordan no tenen perquè ser diferents: un mateix λ pot aparèixer en diferents blocs, de mides iguals o diferents.

S'anomena forma de Jordan *d'una matriu $\boldsymbol{A}$ una matriu de Jordan $\boldsymbol{J}$ que sigui conjugada de $\boldsymbol{A}$: existeix una matriu invertible $\boldsymbol{P}$ amb $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{J}$.*

Sigui $f \in \mathrm{End}(V)$. Per a cada enter $k \geqslant 0$ es denotarà $f^k \in \mathrm{End}(V)$ l'endomorfisme $f \circ \cdots \circ f$ obtingut composant f amb ell mateix k vegades, amb el conveni que $f^0 = \mathrm{Id}$. Per a cada $\lambda \in \mathbb{K}$ es denotarà f_λ l'endomorfisme $f - \lambda\,\mathrm{Id} \in \mathrm{End}(V)$.

Definició 4.4.2 (Vectors propis generalitzats) *Sigui $f \in \mathrm{End}(V)$. Un* vector propi generalitzat *de valor propi λ és un vector no nul $\boldsymbol{v} \in V$ tal que $f_\lambda^k(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}$ per a algun $k \geqslant 1$.*

Un cicle de vectors propis generalitzats *de valor propi λ o* cicle de Jordan *és una successió de vectors no nuls $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_\ell$ tals que $f_\lambda(\boldsymbol{v}_\ell) = \boldsymbol{v}_{\ell-1}, \ldots, f_\lambda(\boldsymbol{v}_2) = \boldsymbol{v}_1$ i $f_\lambda(\boldsymbol{v}_1) = \boldsymbol{0}$. El vector $\boldsymbol{v}_\ell$ s'anomena* generador *del cicle. La* longitud *del cicle és el nombre ℓ de vectors que el formen.*

Així, en un cicle de Jordan $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_\ell$ de valor propi λ cada vector $\boldsymbol{v}_k$ és un element de $\mathrm{Ker}(f_\lambda^k) \setminus \mathrm{Ker}(f_\lambda^{k-1})$. En particular, el primer vector del cicle $\boldsymbol{v}_1$ és un vector propi ordinari de valor propi λ.

Lema 4.4.3 *Si $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_\ell$ és un cicle de Jordan de valor propi λ, els vectors $\boldsymbol{v}_i$ són linealment independents i generen un subespai invariant per f. La matriu de la restricció de f a aquest subespai, en la base $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_\ell\}$, és un bloc de Jordan $\boldsymbol{J}_{\lambda,\ell}$.*

PROVA: Per inducció sobre la longitud del cicle. Si $\ell = 1$ és immediat: el vector no nul $\boldsymbol{v}_1$ forma ell sol una família independent. Suposi's demostrat per a $\ell-1$ vectors. Sigui $x_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + x_\ell\boldsymbol{v}_\ell = \boldsymbol{0}$. Aleshores $f_\lambda(x_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + x_\ell\boldsymbol{v}_\ell) = x_2\boldsymbol{v}_1 + \cdots + x_\ell\boldsymbol{v}_{\ell-1} = \boldsymbol{0}$. Per inducció, com que els vectors $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{\ell-1}$ són independents els coeficients $x_2, \ldots, x_\ell$ d'aquesta combinació lineal són zero i, per tant, també ho ha de ser el coeficient x_1.

Tenint en compte que $f_\lambda = f - \lambda\,\mathrm{Id}$ i el fet que $f_\lambda(\boldsymbol{v}_j) = \boldsymbol{v}_{j-1}$ es té:

$$f(\boldsymbol{v}_1) = \boldsymbol{v}_1, \quad f(\boldsymbol{v}_2) = \boldsymbol{v}_1 + \lambda\boldsymbol{v}_2, \quad f(\boldsymbol{v}_3) = \boldsymbol{v}_2 + \lambda\boldsymbol{v}_3, \quad \cdots \quad f(\boldsymbol{v}_\ell) = \boldsymbol{v}_{\ell-1} + \lambda\boldsymbol{v}_\ell$$

i per tant el subespai generat pels vectors del cicle és invariant per f i la matriu en la base formada per aquests vectors és un bloc de Jordan. $\square$

Definició 4.4.4 (Base de Jordan) *Una* base de Jordan *és una base formada per una reunió de cicles de Jordan. La* forma de Jordan *d'un endomorfisme és la seva matriu en una base de Jordan.*

La matriu d'un endomorfisme en una base donada és una matriu de Jordan si, i només si, la base és una base de Jordan. Decidir si una matriu donada admet forma de Jordan o no, i trobar matrius $\boldsymbol{P}$ i $\boldsymbol{J}$ en cas afirmatiu, equival a decidir si l'endomorfisme f que té aquesta matriu en alguna base admet bases de Jordan o no, i, en cas afirmatiu, trobar-ne una.

Lema 4.4.5 *El polinomi característic d'un endomorfisme descompon completament si, i només si, existeix una base en que la seva matriu és triangular.*

PROVA: Si un endomorfisme ve donat en alguna base per una matriu triangular aleshores el seu polinomi característic té per arrels les entrades de la diagonal d'aquesta matriu, i descompon completament. El recíproc es veurà per inducció. Si $\dim V = 1$ és obvi. Suposant-ho cert per a $\dim V - 1$, sigui λ un dels valors propis de f i sigui $\boldsymbol{v}_1$ un vector propi. El subespai $\langle \boldsymbol{v}_1 \rangle$ és invariant i per tant f indueix un endomorfisme f_* de l'espai quocient $V/\langle \boldsymbol{v}_1 \rangle$, definit per $f_*([\boldsymbol{v}]) = [f(\boldsymbol{v})]$. Es té $\mathrm{Char}(f;X) = (\lambda - X)\,\mathrm{Char}(f_*;X)$ de manera que el polinomi característic de f_* també descompon completament i té els mateixos valors propis i multiplicitats que el de f excepte λ, que el té amb multiplicitat una unitat inferior. Per hipòtesi d'inducció $V/\langle \boldsymbol{v}_1 \rangle$ té una base $[\boldsymbol{v}_2], \dots, [\boldsymbol{v}_n]$ en que la matriu de f_* és triangular inferior. Aleshores $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n$ és una base de V en que la matriu de f és triangular inferior i a la diagonal hi té λ seguit dels termes de la diagonal de la matriu de f_*.

Noti's que de fet la matriu triangular es pot trobar amb els valors propis de la diagonal en l'ordre que es vulgui. $\square$

Lema 4.4.6 *Sigui $f \in \mathrm{End}(V)$. Siguin $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ escalars diferents i $k \geqslant 0$ un enter. El subespai $\mathrm{Ker}(f_\lambda^k)$ és invariant per f_μ i la restricció de f_μ a aquest subespai és bijectiva.*

PROVA: En efecte, es té

$$f_\lambda \circ f_\mu = (f - \lambda\,\mathrm{Id}) \circ (f - \mu\,\mathrm{Id}) = f^2 - \lambda f - \mu f + (\lambda\mu)\,\mathrm{Id} = (f - \mu\,\mathrm{Id}) \circ (f - \lambda\,\mathrm{Id}) = f_\mu \circ f_\lambda$$

i per tant els dos endomorfismes commuten. Aplicant-ho les vegades que convingui es veu que les seves potències també commuten. Per tant, si $\boldsymbol{v} \in \mathrm{Ker}(f_\lambda^k)$ aleshores $f_\lambda^k(f_\mu(\boldsymbol{v})) = f_\mu(f_\lambda^k(\boldsymbol{v})) = f_\mu(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$ de manera que $f_\mu(\boldsymbol{v}) \in \mathrm{Ker}(f_\lambda^k)$ i el subespai és invariant.

Sigui $\boldsymbol{v} \in \mathrm{Ker}(f_\lambda^m)$ i suposi's que $f_\mu(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}$. Això vol dir que $f(\boldsymbol{v}) = \mu\boldsymbol{v}$. Per tant, $f_\lambda(\boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{v}) - \lambda\boldsymbol{v} = \mu\boldsymbol{v} - \lambda\boldsymbol{v} = (\mu - \lambda)\boldsymbol{v}$ i $f_\lambda^k(\boldsymbol{v}) = (\mu - \lambda)^k\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0} \Rightarrow \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$. Això implica que f és injectiva i per tant bijectiva en el subespai $\mathrm{Ker}(f_\lambda^k)$. $\square$

Teorema 4.4.7 (Primer teorema de descomposició) *Sigui $f \in \mathrm{End}(V)$ tal que*

$$\mathrm{Char}(f;X) = (-1)^n (X - \lambda_1)^{m_1} (X - \lambda_2)^{m_2} \cdots (X - \lambda_k)^{m_k}.$$

Aleshores $\dim \mathrm{Ker}(f_i^{m_i}) = m_i$ *per a tot* $i = 1, \dots, k$, *i*

$$V = \mathrm{Ker}(f_{\lambda_1}^{m_1}) \oplus \mathrm{Ker}(f_{\lambda_2}^{m_2}) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Ker}(f_{\lambda_k}^{m_k}).$$

PROVA: Sigui λ_i un dels valors propis. Existeix una base en que la matriu de f és triangular i els m_i primers termes de la diagonal són λ_i. En aquesta base la matriu de f_{λ_i} té dues caixes quadrades a la diagonal. La primera és triangular superior estricta de mida m_i i la seva potència m_i-èsima és zero. La segona és triangular amb escalars $\lambda_j - \lambda_i \neq 0$ a la diagonal, i per tant la seva potència m_i-èsima té determinant no nul. Per tant el rang de $f_{\lambda_i}^{m_i}$ és $n - m_i$ i $\dim \operatorname{Ker}(f_{\lambda_i}^{m_i}) = m_i$.

Per veure que la suma és directa s'aplica inducció sobre el nombre k de sumands. Si $k = 1$ no hi ha res a dir. Suposi's cert per a $k-1$ sumands. Siguin $\boldsymbol{v}_i \in \operatorname{Ker}(f_{\lambda_i}^{m_i})$ vectors tals que $\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 + \cdots + \boldsymbol{v}_k = \mathbf{0}$. Aplicant $f_{\lambda_1}^{m_1}$ es dedueix que $f_{\lambda_1}^{m_1}(\boldsymbol{v}_2) + \cdots + f_{\lambda_1}^{m_1}(\boldsymbol{v}_k) = \mathbf{0}$. Com que els $f_{\lambda_1}^{m_1}(\boldsymbol{v}_i) \in \operatorname{Ker}(f_i^{m_i})$ aplicant la hipòtesi d'inducció cadascun d'aquests vectors ha de ser zero, i com que $f_{\lambda_1}^{m_1}$ és un automorfisme dels espais amb $i \neq 1$ els vectors $\boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ són tots zero. Per dimensions, la suma directa $\oplus_{i=1}^{k} \operatorname{Ker}(f_i^{m_i})$ ha de ser igual a tot l'espai V. $\square$

A continuació es veurà com trobar bases de Jordan dels subespais $\operatorname{Ker}(f_{\lambda_i}^{m_i})$. Per fer-ho s'ha de treballar amb diferents cicles de Jordan del mateix valor propi. És convenient organitzar aquests cicles en una taula de la manera següent: s'ordenen els cicles en ordre decreixent de longituds i els seus vectors es posen en columnes en una taula:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|ccc|c|c|c|}
\hline
\boldsymbol{v}_{1,\ell_1} & \boldsymbol{v}_{2,\ell_2} & & & & & & & & & \\
\boldsymbol{v}_{1,\ell_1-1} & \boldsymbol{v}_{2,\ell_2-1} & \boldsymbol{v}_{3,\ell_3} & & & & & & & & \\
\vdots & & & \vdots & & & & & & & \\
\boldsymbol{v}_{1,3} & \boldsymbol{v}_{2,3} & \boldsymbol{v}_{3,3} & \boldsymbol{v}_{4,3} & & \cdots & & & & & \\
\boldsymbol{v}_{1,2} & \boldsymbol{v}_{2,2} & \boldsymbol{v}_{3,2} & \boldsymbol{v}_{4,2} & & \cdots & & & \boldsymbol{v}_{r-2,2} & & \\
\boldsymbol{v}_{1,1} & \boldsymbol{v}_{2,1} & \boldsymbol{v}_{3,1} & \boldsymbol{v}_{4,1} & & \cdots & & & \boldsymbol{v}_{r-2,1} & \boldsymbol{v}_{r-1,1} & \boldsymbol{v}_{r,1} \\
\hline
\end{array} \tag{4.1}$$

Lema 4.4.8 *Sigui $g \in \operatorname{End}(V)$. Aleshores, per a cada enter $k \geqslant 1$,*

1. $\operatorname{Ker}(g^k) \subseteq \operatorname{Ker}(g^{k+1})$,
2. $\operatorname{Ker}(g^k) = \operatorname{Ker}(g^{k+1}) \;\Rightarrow\; \operatorname{Ker}(g^{k+1}) = \operatorname{Ker}(g^{k+2})$,
3. *l'aplicació ϕ: $\operatorname{Ker}(g^{k+1})/\operatorname{Ker}(g^k) \to \operatorname{Ker}(g^k)/\operatorname{Ker}(g^{k-1})$ definida com $\phi([\boldsymbol{v}]) = [g(\boldsymbol{v})]$ està ben definida i és un monomorfisme.*

PROVA: Si $\boldsymbol{v} \in \operatorname{Ker}(g^k)$ aleshores $g^k(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}$ i per tant també $g^{k+1}(\boldsymbol{v}) = g(g^k(\boldsymbol{v})) = g(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Suposi's que $\operatorname{Ker}(g^k) = \operatorname{Ker}(g^{k+1})$. Sigui $\boldsymbol{v} \in \operatorname{Ker}(g^{k+2})$. Aleshores $g^{k+2}(\boldsymbol{v}) = g^{k+1}(g(\boldsymbol{v})) = \mathbf{0}$. Per tant $g(\boldsymbol{v}) \in \operatorname{Ker}(g^{k+1}) = \operatorname{Ker}(g^k)$ i ha de ser $g^k(g(\boldsymbol{v})) = \mathbf{0} = g^{k+1}(\boldsymbol{v})$, de on resulta que $\boldsymbol{v} \in \operatorname{Ker}(g^{k+1})$. Finalment, pel que fa a l'aplicació, primerament s'observa que si $\boldsymbol{v} \in \operatorname{Ker}(g^{k+1})$ aleshores $g(\boldsymbol{v}) \in \operatorname{Ker}(g^k)$ ja que $g^k(g(\boldsymbol{v})) = g^{k+1}(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}$, i que si $[\boldsymbol{u}] = [\boldsymbol{v}]$ aleshores $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} \in \operatorname{Ker}(g^k)$, per tant $g(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}) = g(\boldsymbol{u}) - g(\boldsymbol{v}) \in \operatorname{Ker}(g^{k-1})$ i es dedueix que $[g(\boldsymbol{u})] = [g(\boldsymbol{v})]$. Això assegura que ϕ està ben definida. Que és lineal és immediat. Per veure que és injectiva, si $\phi([\boldsymbol{v}]) = [g(\boldsymbol{v})] = [\mathbf{0}]$ vol dir que $g(\boldsymbol{v}) \in \operatorname{Ker}(g^{k-1})$; aleshores $g^k(\boldsymbol{v}) = g^{k-1}(g(\boldsymbol{v})) = \mathbf{0}$ de manera que $\boldsymbol{v} \in \operatorname{Ker}(g^k)$ i per tant $[\boldsymbol{v}] = [\mathbf{0}]$. $\square$

Lema 4.4.9 *Sigui λ un vector propi de $f \in \operatorname{End}(V)$. Siguin*

$$\boldsymbol{v}_{1,1}, \ldots, \boldsymbol{v}_{1,\ell_1}, \quad \boldsymbol{v}_{2,1}, \ldots, \boldsymbol{v}_{2,\ell_2}, \qquad \ldots \qquad \boldsymbol{v}_{r,1}, \ldots, \boldsymbol{v}_{r,\ell_r}$$

cicles de Jordan de valor propi λ de longituds decreixents: $\ell_1 \geqslant \ell_2 \geqslant \cdots \geqslant \ell_r$. Si per a cada $j = 1, \ldots, \ell_1$ les classes $[\boldsymbol{v}_{i,j}]$ són són linealment independents al quocient $\mathrm{Ker}(f_\lambda^j)/\mathrm{Ker}(f_\lambda^{j-1})$, aleshores tots els vectors $\boldsymbol{v}_{i,j}$ són linealment independents a V.

Prova: L'enunciat diu que els cicles de valors propis formen una taula del tipus (4.1) en que els diferents "pisos" són famílies de vectors de $\mathrm{Ker}(f_\lambda^j)$ tals que les seves classes són independents mòdul el subespai $\mathrm{Ker}(f_\lambda^{j-1})$. Per inducció sobre ℓ_1. Si $\ell_1 = 1$ aleshores la taula té una única fila. La hipòtesi assegura que les classes dels vectors $\boldsymbol{v}_{1,1}, \ldots, \boldsymbol{v}_{r,1}$ són independents al quocient $\mathrm{Ker}(f_\lambda)/\mathrm{Ker}(\mathrm{Id})$; com que $\mathrm{Ker}(\mathrm{Id}) = \{\mathbf{0}\}$ això és com dir que els vectors són independents a V. Suposi's demostrat per a un determinat valor de ℓ_1. Es considera una família de k' cicles de longituds ℓ_i' amb $\ell_1' = \ell_1 + 1$. S'agafa una combinació lineal:

$$\sum_{i=1}^{k'} \sum_{j=1}^{\ell_i'} x_{i,j} \boldsymbol{v}_{i,j} = \mathbf{0} \tag{4.2}$$

i s'ha de demostrar que tots els coeficients són zero. Aplicant l'endomorfisme f_λ es dedueix la igualtat:

$$\sum_{i=1}^{k'} \sum_{j=1}^{\ell_i'} x_{i,j} f_\lambda(\boldsymbol{v}_{i,j}) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{\ell_i'-1} x_{i,j+1} \boldsymbol{v}_{i,j} = \mathbf{0}.$$

Això és una combinació lineal dels vectors de la família de $k \leqslant k'$ cicles que s'obtenen eliminant l'últim vector de tots els cicles de la família de partida. En termes de la taula (4.1) correspon a eliminar el vector del capdamunt de cada columna. Aquesta nova família té el primer cicle de longitud $\ell_1 = \ell_1' - 1$. Aquesta família segueix complint la condició sobre independència lineal als quocients $\mathrm{Ker}(f_\lambda^j)/\mathrm{Ker}(f_\lambda^{j-1})$ ja que els vectors que té en cada pis són alguns dels que hi havia abans, i una subfamília d'una independent segueix sent independent.

Per hipòtesi d'inducció tots els coeficients d'aquesta combinació lineal són zero. Per tant tots els coeficients $x_{i,j}$ de la combinació lineal inicial (4.2) amb $j > 1$ són zero. Aquesta combinació dóna aleshores la identitat:

$$\sum_{i=1}^{k'} x_{i,1} \boldsymbol{v}_{i,1} = \mathbf{0}.$$

Com que les classes dels vectors $\boldsymbol{v}_{i,1}$ són linealment independents a $\mathrm{Ker}(f_\lambda)/\mathrm{Ker}(\mathrm{Id})$ es dedueix que els coeficients $x_{i,1}$ d'aquesta combinació lineal són també zero i per tant tots els coeficients de (4.2) són zero. □

Teorema 4.4.10 (Segon teorema de descomposició) *Sigui $f \in \mathrm{End}(V)$ un endomorfisme tal que el seu polinomi característic descompon completament. Per a cada valor propi λ de multiplicitat m el subespai $\mathrm{Ker}(f_\lambda^m)$ té una base de Jordan.*

Prova: Es té una cadena de subespais $\mathrm{Ker}(f_\lambda) \subseteq \mathrm{Ker}(f_\lambda^2) \subseteq \cdots$ que en algun moment estabilitza. De fet, gràcies al teorema 4.4.7 se sap que estabilitza amb exponent $\leqslant m$. Sigui $\ell \leqslant m$ el més petit enter tal que $\mathrm{Ker}(f_\lambda^\ell) = \mathrm{Ker}(f_\lambda^{\ell+1})$. Es construeix una taula com (4.1) omplint-la per pisos i començant des de dalt. Al pis ℓ-èsim s'hi posen vectors que la seva classe sigui una base de $\mathrm{Ker}(f_\lambda^\ell)/\mathrm{Ker}(f_\lambda^{\ell-1})$. Es calculen les seves imatges per f_λ i es posen al pis de sota. Gràcies al tercer punt del lema 4.4.8 les classes d'aquestes imatges també són independents al quocient $\operatorname{Ker}(f_\lambda^{\ell-1})/\operatorname{Ker}(f_\lambda^{\ell-2})$. Es completen aquestes classes a una base de $\operatorname{Ker}(f_\lambda^{\ell-1})/\operatorname{Ker}(f_\lambda^{\ell-2})$ afegint classes de vectors de $\operatorname{Ker}(f_\lambda^{\ell-1})$; amb això es completa el pis $\ell-1$. Es repeteix el procés fins a arribar a la base: un cop es tenen els vectors $\boldsymbol{v}_{i,j}$ del pis j tals que les seves classes són una base al quocient $\operatorname{Ker}(f_\lambda^{j})/\operatorname{Ker}(f_\lambda^{j-1})$, es calculen les seves imatges $f_\lambda(\boldsymbol{v}_{i,j})=\boldsymbol{v}_{i,j-1}$ i es posen al pis de sota. Les classes d'aquests vectors, gràcies al tercer punt del lema 4.4.8, són independents al quocient $\operatorname{Ker}(f_\lambda^{j-1})/\operatorname{Ker}(f_\lambda^{j-2})$, i es completa el pis $(j-1)$-èsim afegint vectors de $\operatorname{Ker}(f_\lambda^{j-1})$ de manera que les classes de tots siguin una base del quocient $\operatorname{Ker}(f_\lambda^{j-1})/\operatorname{Ker}(f_\lambda^{j-2})$.

El lema anterior assegura que, un cop completada la taula d'aquesta manera, els vectors que en formen part seran independents i, per dimensió, seran una base de $\operatorname{Ker}(f_\lambda^m)$, que està formada per la reunió de cicles de Jordan. □

Així, en una taula com (4.1) construïda segons s'explica en la prova d'aquest teorema, els vectors que hi apareixen són una base de $\operatorname{Ker}(f_\lambda^m)$ i es compleixen les propietats següents:

- l'altura és la longitud dels cicles més llargs,
- l'amplada és la dimensió del subespai $\operatorname{Ker}(f_\lambda)$ dels vectors propis ordinaris,
- la dimensió de $\operatorname{Ker}(f_\lambda^k)$ és el nombre de vectors que hi ha fins al pis k inclòs,
- el nombre de columnes d'altura $\geqslant \ell$ és a la dimensió de $\operatorname{Ker}(f_\lambda^\ell)/\operatorname{Ker}(f_\lambda^{\ell-1})$,
- el nombre de columnes d'altura exactament igual a ℓ és

$$2\dim\operatorname{Ker}(f_\lambda^\ell)-\dim\operatorname{Ker}(f_\lambda^{\ell-1})-\dim\operatorname{Ker}(f_\lambda^{\ell+1}).$$

Corol·lari 4.4.11 (Forma de Jordan) *Un endomorfisme admet una base de Jordan si, i només si, el seu polinomi característic descompon completament.*

Teorema 4.4.12 (Classificació d'endomorfismes) *Siguin $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{B}$ dues matrius amb el mateix polinomi característic, que descompon completament. Aleshores $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{B}$ són conjugades si, i només si, tenen la mateixa forma de Jordan.*

PROVA: S'identifiquen les matrius amb els endomorfismes corresponents en una base fixada. Si dues matrius $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ tenen la mateixa forma de Jordan aleshores existeixen matrius $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$ amb $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{J}$. Per tant $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q}^{-1})^{-1}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q}^{-1})$, i totes dues matrius són conjugades.

Si les dues matrius són conjugades, sigui $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$. Aleshores tenen el mateix polinomi característic, que per hipòtesi descompon completament. Per a cada valor propi λ el nombre i mida dels cicles de Jordan de valor propi λ només depèn dels rangs de les matrius $(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{1}_n)^k$ i $(\boldsymbol{B}-\lambda\boldsymbol{1}_n)^k$ per a tot $k\geqslant 0$. Com que $(\boldsymbol{B}-\lambda\boldsymbol{1}_n)^k=(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}-\lambda\boldsymbol{1}_n)^k=\boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{1}_n)^k\boldsymbol{P}$ els rangs d'aquestes matrius són els mateixos. □

Exemples de multiplicitat baixa. A continuació es discuteix com poden ser les caixes de Jordan que corresponen a un valor propi λ segons la seva multiplicitat m per als valors $m=1,2,3,4$. En tots els casos es diu com trobar una base de Jordan del subespai $\operatorname{Ker}(f_\lambda^m)$, de dimensió m, formada per una reunió de cicles de Jordan, i com és la matriu de la restricció de f a aquest subespai, que està formada per caixes de Jordan de valor propi λ.

- $m = 1$. $\dim \mathrm{Ker}(f_\lambda) = 1$. Un vector que generi aquest espai és una base de Jordan amb un sol cicle de longitud 1. La matriu és $(\lambda) \in \mathcal{M}_1(\mathbb{K})$.

- $m = 2$. Hi ha dues possibilitats, corresponents a:

$$\begin{array}{|c|c|}\hline \boldsymbol{v}_{1,1} & \boldsymbol{v}_{2,1} \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{|c|}\hline \boldsymbol{v}_{1,2} \\ \hline \boldsymbol{v}_{1,1} \\ \hline \end{array}$$

El primer cas correspon a $\dim \mathrm{Ker}(f_\lambda) = 2$ i els dos vectors són una base d'aquest espai. El segon correspon a $\dim \mathrm{Ker}(f_\lambda) = 1$; el vector $\boldsymbol{v}_{1,2} \in \mathrm{Ker}(f_\lambda^2) \setminus \mathrm{Ker}(f_\lambda)$ és un generador del cicle i $\boldsymbol{v}_{1,1} = f_\lambda(\boldsymbol{v}_{1,2})$. La matriu corresponent és, respectivament,

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

- $m = 3$. Tres possibilitats:

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline \boldsymbol{v}_{1,1} & \boldsymbol{v}_{2,1} & \boldsymbol{v}_{3,1} \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{|c|c|}\cline{1-1} \boldsymbol{v}_{1,2} & \multicolumn{1}{c}{} \\ \hline \boldsymbol{v}_{1,1} & \boldsymbol{v}_{2,1} \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{|c|}\hline \boldsymbol{v}_{1,3} \\ \hline \boldsymbol{v}_{1,2} \\ \hline \boldsymbol{v}_{1,1} \\ \hline \end{array}$$

Si $\dim \mathrm{Ker}(f_\lambda) = 3$ una base $\boldsymbol{v}_{1,1}, \boldsymbol{v}_{2,1}, \boldsymbol{v}_{3,1}$ d'aquest espai està formada per vectors propis i la matriu en aquesta base és

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Si $\dim \mathrm{Ker}(f_\lambda) = 2$ aleshores necessàriament ha de ser $\dim \mathrm{Ker}(f_\lambda^2) = 3$. Agafant un vector $\boldsymbol{v}_{1,2} \in \mathrm{Ker}(f_\lambda^2) \setminus \mathrm{Ker}(f_\lambda)$ es té un cicle de Jordan de longitud 2 format per $\boldsymbol{v}_{1,1} = f(\boldsymbol{v}_{1,2})$ i $\boldsymbol{v}_{1,2}$. Es completa $\langle \boldsymbol{v}_{1,1} \rangle$ a una base de $\mathrm{Ker}(f_\lambda)$ afegint-li un vector $\boldsymbol{v}_{2,1}$. Aleshores $\boldsymbol{v}_{2,1}, \boldsymbol{v}_{1,1}, \boldsymbol{v}_{1,2}$ són una base de Jordan en la qual la matriu és

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Si $\dim \mathrm{Ker}(f_\lambda) = 1$ aleshores necessàriament ha de ser $\dim \mathrm{Ker}(f_\lambda^2) = 2$ i $\dim \mathrm{Ker}(f_\lambda^3) = 3$. Agafant un vector $\boldsymbol{v} \in \mathrm{Ker}(f_\lambda^3) \setminus \mathrm{Ker}(f_\lambda^2)$ es té un cicle de Jordan de longitud 3 format pels vectors $f^2(\boldsymbol{v}), f(\boldsymbol{v})$ i $\boldsymbol{v}$ en el qual la matriu és

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

- $m = 4$. Cinc possibilitats:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline \boldsymbol{v}_{1,1} & \boldsymbol{v}_{2,1} & \boldsymbol{v}_{3,1} & \boldsymbol{v}_{4,1} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|}\cline{1-1} \boldsymbol{v}_{1,1} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} \\ \hline \boldsymbol{v}_{1,1} & \boldsymbol{v}_{2,1} & \boldsymbol{v}_{3,1} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|}\hline \boldsymbol{v}_{1,2} & \boldsymbol{v}_{2,2} \\ \hline \boldsymbol{v}_{1,1} & \boldsymbol{v}_{2,1} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|}\cline{1-1} \boldsymbol{v}_{1,3} & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1} \boldsymbol{v}_{1,2} & \multicolumn{1}{c}{} \\ \hline \boldsymbol{v}_{1,1} & \boldsymbol{v}_{2,1} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|}\hline \boldsymbol{v}_{1,4} \\ \hline \boldsymbol{v}_{1,3} \\ \hline \boldsymbol{v}_{1,2} \\ \hline \boldsymbol{v}_{1,1} \\ \hline \end{array}$$

que donen lloc, respectivament, a les matrius

$$\begin{pmatrix}\lambda&0&0&0\\0&\lambda&0&0\\0&0&\lambda&0\\0&0&0&\lambda\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\lambda&0&0&0\\0&\lambda&0&0\\0&0&\lambda&1\\0&0&0&\lambda\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\lambda&1&0&0\\0&\lambda&0&0\\0&0&\lambda&1\\0&0&0&\lambda\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\lambda&0&0&0\\0&\lambda&1&0\\0&0&\lambda&1\\0&0&0&\lambda\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\lambda&1&0&0\\0&\lambda&1&0\\0&0&\lambda&1\\0&0&0&\lambda\end{pmatrix}.$$

El primer cas correspon a $\dim \operatorname{Ker}(f_\lambda) = 4$, i els quatre vectors són una base d'aquest espai.

El segon es dóna quan $\dim \operatorname{Ker}(f_\lambda) = 3$; el vector $\boldsymbol{v}_{1,2}$ es troba agafant un vector de $\operatorname{Ker}(f_\lambda^2) \smallsetminus \operatorname{Ker}(f_\lambda)$, $\boldsymbol{v}_{1,1} = f_\lambda(\boldsymbol{v}_{1,2})$ i els altres dos vectors $\boldsymbol{v}_{2,1}$ i $\boldsymbol{v}_{3,1}$ s'obtenen estenent a una base de $\operatorname{Ker}(f_\lambda)$.

El tercer correspon a $\dim \operatorname{Ker}(f_\lambda) = 2$ i $\dim \operatorname{Ker}(f_\lambda^2) = 4$; els dos vectors $\boldsymbol{v}_{1,2}$ i $\boldsymbol{v}_{2,2}$ són vectors tals que les seves classes generin l'espai quocient $\operatorname{Ker}(f_\lambda^2)/\operatorname{Ker}(f_\lambda)$: poden obtenir-se completant una base del subespai a una base de tot l'espai, i els vectors $\boldsymbol{v}_{1,1}$ i $\boldsymbol{v}_{2,1}$ són les imatges respectives per f_λ.

El quart cas és quan $\dim \operatorname{Ker}(f_\lambda) = 2$ i $\dim \operatorname{Ker}(f_\lambda^3) = 3$; el vector $\boldsymbol{v}_{1,3}$ és un vector qualsevol de $\in \operatorname{Ker}(f^3) \smallsetminus \operatorname{Ker}(f^2)$ i els de sota seu a la columna són les imatges per f_λ. El vector $\boldsymbol{v}_{2,1}$ s'obté completant $\boldsymbol{v}_{1,1}$ a una base de $\operatorname{Ker}(f_\lambda)$.

Finalment, l'últim cas, en que hi ha només un únic cicle de Jordan, correspon a $\dim \operatorname{Ker}(f_\lambda) = 1$. Es calcula un vector $\boldsymbol{v}_{1,4} \in \operatorname{Ker}(f^4) \smallsetminus \operatorname{Ker}(f^3)$ i els demés s'obtenen aplicant f_λ.

Un exemple de multiplicitat gran. A continuació es fa un exemple d'un bloc de Jordan complicat, en que els càlculs s'han de fer amb l'ajut d'un software apropiat. Es considera l'endomorfisme $f \in \operatorname{End}(\mathbb{R}^{12})$ que en la base canònica té matriu:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix}
-25 & -8 & 51 & -66 & -24 & -1 & -1 & -71 & 0 & -14 & 0 & -6\\
-6 & -4 & 1 & -27 & 0 & 0 & 0 & -6 & 3 & -6 & 6 & 0\\
60 & 21 & -94 & 181 & 60 & -9 & -9 & 189 & 0 & 60 & 0 & 0\\
9 & 3 & -18 & 26 & 9 & 0 & 0 & 27 & 0 & 6 & 0 & 0\\
120 & 42 & -189 & 356 & 119 & -17 & -17 & 377 & 0 & 118 & 0 & 6\\
180 & 63 & -273 & 555 & 180 & -30 & -29 & 568 & 0 & 184 & 0 & -12\\
0 & 0 & -6 & -12 & 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & -4 & 0 & 12\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
3 & 1 & -9 & 21 & 3 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & -4 & -12\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0\\
9 & 3 & -18 & 24 & 9 & 0 & 0 & 27 & 0 & 6 & 0 & 2
\end{pmatrix}$$

El polinomi característic és:

$$\operatorname{Char}(\boldsymbol{A}; X) = (X+1)^{10}(X-1)(X-2).$$

Es calculen els subespais propis de valors propis 1 i 2, obtenint-se:

$$V_1 = \langle (0,0,0,0,0,0,0,0,-2,0,1,0) \rangle, \quad V_2 = \langle (-2,0,0,0,2,-4,4,0,-4,0,0,1) \rangle.$$

Per a k suficientment gran serà $\dim \operatorname{Ker}(f_{-1}^k) = 10$. Es calcula:

$$\begin{aligned}
d_1 &= \dim \operatorname{Ker}(f_{-1}) = 5, & d_2 &= \dim \operatorname{Ker}(f_{-1}^2) = 8,\\
d_3 &= \dim \operatorname{Ker}(f_{-1}^3) = 9, & d_4 &= \dim \operatorname{Ker}(f_{-1}^4) = 10.
\end{aligned}$$

Amb aquestes dades ja es pot saber l'estructura en cicles de Jordan de valor propi -1. La taula que contindrà els cicles de Jordan té quatre files de longituds $d_1 = 5$, $d_2 - d_1 = 3$, $d_3 - d_2 = 1$ i $d_4 - d_3 = 1$, respectivament, i té la forma següent:

$\boldsymbol{v}_{1,4}$				
$\boldsymbol{v}_{1,3}$				
$\boldsymbol{v}_{1,2}$	$\boldsymbol{v}_{2,2}$	$\boldsymbol{v}_{3,2}$		
$\boldsymbol{v}_{1,1}$	$\boldsymbol{v}_{2,1}$	$\boldsymbol{v}_{3,1}$	$\boldsymbol{v}_{4,1}$	$\boldsymbol{v}_{5,1}$

Es calculen bases dels espais $\operatorname{Ker}(f_{-1}^k)$. Es donen a continuació en les files de les matrius següents, que estan totes en forma esglaonada per simplificar els càlculs posteriors:

$$\text{base de } \operatorname{Ker}(f_{-1}): \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & -1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -8/3 & 0 & -1 & 0 & 8 & -1/2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{base de } \operatorname{Ker}(f_{-1}^2): \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/3 & 0 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2/3 & 11/3 & 0 & -4/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -8/9 & 8/3 & 0 & 16/9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1/3 & -2 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{base de } \operatorname{Ker}(f_{-1}^3): \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/3 & 0 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2/3 & 0 & 0 & -4/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -8/9 & 0 & 0 & 16/9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1/3 & 0 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{base de } \operatorname{Ker}(f_{-1}^4): \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Es comença agafant un vector que tingui classe no nul·la a l'espai quocient $\operatorname{Ker}(f_{-1}^4)/\operatorname{Ker}(f_{-1}^3)$, que serà el vector $\boldsymbol{v}_{1,4}$ de la taula. Per exemple, el primer vector de la base de $\operatorname{Ker}(f_{-1}^4)$ és $\boldsymbol{e}_1$, el primer vector de la base canònica de $\mathbb{R}^{12}$, i es veu clarament que aquest vector no pertany al subespai $\operatorname{Ker}(f_{-1}^3)$ gràcies a tenir una base esglaonada d'aquest subespai. A partir de $\boldsymbol{v}_{1,4} = \boldsymbol{e}_1$ es calcula el cicle de Jordan de longitud 4 de la primera columna, que és

$\{\boldsymbol{v}_{1,1}, \boldsymbol{v}_{1,2}, \boldsymbol{v}_{1,3}, \boldsymbol{v}_{1,4}\} = \{f_{-1}^3(\boldsymbol{v}_{1,4}), f_{-1}^2(\boldsymbol{v}_{1,4}), f_{-1}(\boldsymbol{v}_{1,4}), \boldsymbol{v}_{1,4})\}$. Les coordenades dels quatre vectors són les files de la matriu següent:

$$\begin{pmatrix} 24 & 9 & -63 & -9 & -126 & -189 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & -9 \\ -24 & -12 & 63 & 9 & 126 & 189 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 9 \\ -24 & -6 & 60 & 9 & 120 & 180 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 9 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ara es passa als cicles de longitud 2. El quocient $\operatorname{Ker}(f_{-1}^2)/\operatorname{Ker}(f_{-1})$ té de dimensió 3. El cicle de longitud 4 calculat conté un vector no nul d'aquest espai: la classe $[\boldsymbol{v}_{1,2}]$. Si es recorre la base de $\operatorname{Ker}(f_{-1}^2)$ buscant vectors que, junt amb aquest, siguin una base del quocient, es troba el següent: el primer vector ja va bé, ja que la seva classe és independent de la classe $[\boldsymbol{v}_{1,2}]$, i per tant es pot agafar $\boldsymbol{v}_{2,2} = (1,0,0,0,0,0,0,-\frac{1}{3},0,0,\frac{2}{3},0)$; el segon vector, que és $\boldsymbol{e}_2$, no afegeix res de nou ja que és una combinació lineal de $\boldsymbol{v}_{1,2}$ i de vectors del subespai $\operatorname{Ker}(f_{-1})$; en canvi la classe del tercer sí que dóna, en afegir-lo, una família de tres vectors independents en l'espai quocient. Per tant es pot agafar $\boldsymbol{v}_{3,2} = (0,0,1,0,0,0,0,\frac{2}{3},\frac{11}{3},0,\frac{-4}{3},0)$. Es tenen així dos cicles de Jordan més: $\{\boldsymbol{v}_{2,1}, \boldsymbol{v}_{2,2}\}$ i $\{\boldsymbol{v}_{3,1}, \boldsymbol{v}_{3,2}\}$, amb:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_{2,1} &= f_{-1}(\boldsymbol{v}_{2,2}) = (-1/3,0,-3,0,-17/3,-28/3,1/3,0,1/3,0,0,0) \\ \boldsymbol{v}_{3,1} &= f_{-1}(\boldsymbol{v}_{3,2}) = (11/3,0,33,0,187/3,317/3,-20/3,0,-11/3,0,0,0) \end{aligned}$$

Per acabar, falta completar l'espai $\operatorname{Ker}(f_{-1}) = \operatorname{Ker}(f_{-1}^1)/\operatorname{Ker}(f_{-1}^0)$, que és el dels vectors propis ordinaris de valor propi -1. Té dimensió 5 i els cicles ja obtinguts contenen els tres vectors independents $\boldsymbol{v}_{1,1}$, $\boldsymbol{v}_{2,1}$ i $\boldsymbol{v}_{3,1}$. Recorrent la base d'aquest espai que s'ha calculat al començament es veu que en afegir els dos primers vectors a amb aquests tres es té una base, i per tant es poden afegir els dos cicles de Jordan de longitud 1 formats pels vectors:

$$\boldsymbol{v}_{4,1} = (1,0,0,0,-1,0,0,0,2,0,0,0) \quad \text{i} \quad \boldsymbol{v}_{5,1} = (0,1,0,0,0,0,-1,0,0,-1/2,0,0).$$

Per tant, una base de vectors propis generalitzats de valor propi -1 és la següent:

$$\mathscr{B} = \{\boldsymbol{v}_{1,4}, \boldsymbol{v}_{1,3}, \boldsymbol{v}_{1,2}, \boldsymbol{v}_{1,1}, \boldsymbol{v}_{2,2}, \boldsymbol{v}_{2,1}, \boldsymbol{v}_{3,2}, \boldsymbol{v}_{3,1}, \boldsymbol{v}_{4,1}, \boldsymbol{v}_{5,1}\}.$$

Consisteix en 10 vectors independents que formen 5 cicles de longituds $4,2,2,1,1$, respectivament. En afegir a aquesta base els vectors propis de valors propis 1 i 2 s'obté una base de Jordan. La matriu del canvi d'aquesta base a la canònica és la que té per columnes les coordenades d'aquests 12 vectors:

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 24 & -24 & -24 & 1 & -1/3 & 1 & 11/3 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 9 & -12 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -63 & 63 & 60 & 0 & -3 & 0 & 33 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -9 & 9 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -126 & 126 & 120 & 0 & -17/3 & 0 & 187/3 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ -189 & 189 & 180 & 0 & -28/3 & 0 & 317/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & -20/3 & 0 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/3 & 0 & 2/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 3 & 0 & 1/3 & 0 & -11/3 & 11/3 & 2 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2/3 & 0 & -4/3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -9 & 9 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La forma de Jordan de la matriu $\boldsymbol{A}$ és:

$$\boldsymbol{J}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} -1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&-1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&-1&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&-1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&-1&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&-1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&-1&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&-1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&-1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&-1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&2 \end{pmatrix}.$$

Problemes

4.35. Calculeu bases de Jordan dels endomorfismes definits per les matrius següents:

$$(a)\begin{pmatrix}0&1&0\\-4&4&0\\-2&1&2\end{pmatrix}\quad (b)\begin{pmatrix}3&-1&-1\\-6&1&2\\2&1&0\end{pmatrix}\quad (c)\begin{pmatrix}9&15&5\\-1&1&-1\\-2&-6&2\end{pmatrix}\quad (d)\begin{pmatrix}3&1&0\\-4&-1&0\\4&-8&-2\end{pmatrix}$$

$$(e)\begin{pmatrix}1&2&-2\\-1&3&0\\0&2&1\end{pmatrix}\quad (f)\begin{pmatrix}-4&1&1\\-4&1&1\\-12&3&3\end{pmatrix}\quad (g)\begin{pmatrix}3&-3&26\\-1&3&-15\\0&1&-3\end{pmatrix}\quad (h)\begin{pmatrix}4&-6&3\\1&-1&1\\1&-3&2\end{pmatrix}$$

4.36. Calculeu bases de Jordan dels endomorfismes definits per les matrius següents:

$$(a)\begin{pmatrix}4&1&3&0\\-1&6&4&0\\0&0&5&0\\2&6&7&1\end{pmatrix}\quad (b)\begin{pmatrix}-4&-\frac{7}{2}&0&12\\0&\frac{1}{2}&0&0\\0&0&\frac{1}{2}&0\\-\frac{3}{2}&-\frac{3}{2}&0&\frac{9}{2}\end{pmatrix}\quad (c)\begin{pmatrix}-2&1&-5&0\\-4&4&-20&5\\1&0&0&1\\-2&-1&1&-4\end{pmatrix}$$

$$(d)\begin{pmatrix}-1&-1&-10&-20\\2&1&-26&-40\\0&0&-17&-29\\0&0&10&17\end{pmatrix}\quad (e)\begin{pmatrix}0&9&3&4\\0&4&1&2\\0&2&0&1\\0&-8&-2&-4\end{pmatrix}\quad (f)\begin{pmatrix}-1&1&0&0&-1\\0&-1&0&0&0\\-3&-6&-2&1&6\\-3&-3&-1&0&4\\0&0&0&0&-1\end{pmatrix}$$

4.37. Es considera l'endomorfisme de $\mathbb{R}^4$ definit per

$$f(x,y,z,t)=(2x,4y-14z+5t,y-4z+2t,y-6z+4t)$$

Trobeu els seus vectors propis i els vectors propis generalitzats, doneu una base de vectors propis generalitzats i la matriu de f en aquesta base.

4.38. Trobeu totes les matrius $\boldsymbol{A}$ tals que

$$\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}16&1&0\\0&16&0\\13&-25&3\end{pmatrix}.$$

4.39. Trobeu la forma de Jordan d'un endomorfisme $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ que compleixi les quatre condicions següents:

1. $f(\boldsymbol{e}_1) + f(\boldsymbol{e}_2) + f(\boldsymbol{e}_3) = (1,1,1)$,
2. $f(\boldsymbol{e}_1) - f(\boldsymbol{e}_2) = f(1,1,-2)$,
3. $f^2 = f$, i
4. el subespai $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y + 2z = 0\} \cap \langle (1,1,0), (1,0,1) \rangle$ és invariant per f.

4.40. Doneu la matriu de l'endomorfisme $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ que compleix les cinc condicions següents:

1. $\langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2 \rangle$ i $\langle \boldsymbol{e}_3 \rangle$ són subespais invariants per f,
2. $\mathrm{Ker}(f) = \langle (1,2,0) \rangle$,
3. la matriu de f en la base ordinària és simètrica,
4. $\mathrm{Tr}(f) = 6$, i
5. 1 és un valor propi de f.

4.41. Per a cada permutació $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ es considera l'endomorfisme de $\boldsymbol{C}^n$ que permuta les components segons la permutació donada; o sigui:

$$f_\sigma(z_1, z_2, \ldots, z_n) = (z_{\sigma(1)}, z_{\sigma(2)}, \ldots, z_{\sigma(n)}.$$

Doneu una base de Jordan per a aquest endomorfisme.

4.42. Es consideren les tres matrius de $\mathbb{R}^3$ següents:

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Digueu quins parells de matrius $\boldsymbol{A}_i, \boldsymbol{A}_j$ són semblants i, si ho són, trobeu una matriu $\boldsymbol{P} \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ tal que $\boldsymbol{A}_j = \boldsymbol{P}^{-1} \boldsymbol{A}_i \boldsymbol{P}$.

4.43. Calculeu $\boldsymbol{J}^{100}$, on $\boldsymbol{J} \in \mathcal{M}_6(\mathbb{K})$ és la matriu diagonal per blocs que té a la diagonal els tres blocs:

$$\boldsymbol{J}_1 = (\lambda), \quad \boldsymbol{J}_2 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{J}_3 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

amb $\lambda \in \mathbb{K}$ un escalar.

4.44. Doneu una expressió per a la potència $\boldsymbol{J}^n_{\lambda,\ell}$ per a tot enter $n \in \mathbb{Z}$ per al qual existeixi.

4.45. La evolució temporal d'una població d'arbres ve descrita pel model matemàtic següent:

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & a/5 \\ 1 & 9/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix},$$

amb $a \in \mathbb{R}$ un paràmetre i on x_n i y_n representen les densitats de les classes d'arbres en formació i les classes d'arbres formats, respectivament.

1. Per a quins valors de a es té que $\lambda = 1$ és valor propi de la matriu?
2. Per a $a = 1$ trobeu la forma de Jordan i una base de Jordan de la matriu i estudieu el comportament a llarg termini de la població d'arbres.
3. Per a $a = -4/5$ trobeu la forma de Jordan i una base de Jordan de la matriu.
4. Estudieu el comportament a llarg termini de la població per a $a \geqslant -4/5$.

4.46. S'estableix un tractament contra una plaga d'insectes de manera que en cada aplicació d'insecticida la població d'insectes canvia segons la relació:

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix},$$

on x_n, y_n i z_n representen les quantitats d'ous, erugues i adults, respectivament.

1. Trobeu la forma de Jordan i una base de Jordan de la matriu.
2. Calculeu el nombre mínim d'aplicacions de l'insecticida per acabar amb la plaga independentment de la població inicial.
3. Quin és el nombre mínim d'aplicacions per acabar amb la plaga formada si hi ha 9576 ous, 3457 erugues i 9576 adults?

Capítol 5

Espai euclidià

En estudiar la geometria del pla $\mathbb{R}^2$ i de l'espai $\mathbb{R}^3$ es consideren distàncies entre punts, rectes o plans, l'angle que formen dos vectors o dues rectes, la noció de perpendicularitat, etc.

L'objectiu d'aquest capítol és generalitzar tot això a un $\mathbb{R}$-espai vectorial qualsevol afegint-li una nova estructura que permeti definir en aquest espai conceptes geomètrics anàlegs als esmentats. L'estructura en qüestió s'anomena *producte escalar.* Els $\mathbb{R}$-espais vectorials on hi ha donat un producte escalar s'anomenen *espais euclidians.*

5.1 Espai euclidià

Definició 5.1.1 (Forma bilineal) *Sigui V un $\mathbb{K}$-espai vectorial. Una* forma bilineal *a V és una aplicació $\phi\colon V \times V \to \mathbb{K}$ que és lineal en cada variable. O sigui, tal que:*

- $\phi(\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}) = \phi(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{v}) + \phi(\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v})$,
- $\phi(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) = \phi(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_1) + \phi(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_2)$,
- $\phi(x\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \phi(\boldsymbol{u}, x\boldsymbol{v}) = x\phi(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$.

Una forma bilineal es diu simètrica *si compleix:*

- $\phi(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}) = \phi(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$.

Definició 5.1.2 (Producte escalar) *Un* producte escalar *a un espai vectorial V sobre el cos $\mathbb{R}$ dels nombres reals és una forma bilineal simètrica $\phi\colon V \times V \to \mathbb{R}$ que compleixi la condició:*

$$\phi(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) > 0 \qquad \textit{pera a tot vector} \quad \boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}.$$

Una forma bilineal que compleixi aquesta condició es diu que és definida positiva*.*

La notació habitual per a un producte escalar és posar $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle$ en comptes de $\phi(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$. Es farà servir la notació $\langle \cdot, \cdot \rangle$ per indicar un producte escalar en un espai vectorial.

De vegades el producte escalar de dos vectors es denota com $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$. En usar aquesta notació la bilinealitat del producte escalar correspon a la propietat distributiva: $(\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2) \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}_2 \cdot \boldsymbol{v}$ i $\boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}_2$ i al fet que el producte d'un vector per un escalar commuta amb el producte de vectors: $(x\boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} \cdot (x\boldsymbol{v}) = x(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v})$, i la simetria del producte escalar correspon a la propietat commutativa del producte de vectors: $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$.

Exemples 5.1.3 *Els exemples més importants de productes escalars són:*

- *A l'espai vectorial* $\mathbb{R}^n$ *es defineix el producte escalar:*

$$\langle (x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n) \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n.$$

- *A l'espai* $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$ *de les funcions reals contínues a l'interval* $[a,b]$ *es defineix el producte escalar:*

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) g(x)\, dx.$$

Aquest mateix producte escalar es pot considerar en subespais d'aquest espai de funcions contínues; per exemple al subespai format per les funcions polinòmiques o a l'espai de les funcions $[a,b] \to \mathbb{R}$ *definides per polinomis de grau* $\leqslant n$.

Definició 5.1.4 (Espai euclidià) *S'anomena* espai euclidià *un* $\mathbb{R}$*-espai vectorial* V *on hi ha donat un producte escalar* $\langle \cdot, \cdot \rangle$. *Si cal especificar tant l'espai com el producte s'escriu el parell* $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ *per referir-se a un espai euclidià.*

Quan es parla de l'espai euclidià $\mathbb{R}^n$ o d'espais euclidians de funcions $[a,b] \to \mathbb{R}$ se sobreentén, si no s'especifica res més, que el producte escalar és el definit en els exemples anteriors 5.1.3.

Sigui $W \subseteq V$ un subespai. Si $\phi\colon V \times V \to \mathbb{K}$ és una forma bilineal aleshores la seva restricció com a aplicació $W \times W \to \mathbb{K}$ també és una forma bilineal; si la forma és simètrica o definida positiva a l'espai aleshores també té aquesta propietat al subespai. Per tant, tot subespai vectorial d'un espai euclidià té també estructura d'espai euclidià amb el producte escalar que hereta per restricció del producte escalar de tot l'espai.

Definició 5.1.5 (Norma) *Sigui* $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ *un espai euclidià. Es defineix la norma d'un vector* $\boldsymbol{v} \in V$ *com el nombre real* $\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle}$. *Els vectors de norma* 1 *es diuen* unitaris.

Teorema 5.1.6 (Desigualtat de Cauchy-Schwarz) *Per a tot parell de vectors d'un espai euclidià es compleix la desigualtat següent:*

$$|\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle| \leqslant \|\boldsymbol{u}\|\, \|\boldsymbol{v}\|.$$

La igualtat es compleix si, i només si, els vectors $\boldsymbol{u}$ *i* $\boldsymbol{v}$ *són linealment dependents.*

Prova: Si $\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$ aleshores es compleix la igualtat ja que tots dos costats són zero. Si $v \neq 0$ es considera el vector $\boldsymbol{w} = \frac{\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle}{\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle} \boldsymbol{v}$. Aleshores

$$\langle \boldsymbol{u} - \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v} \rangle = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle - \frac{\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle}{\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle} \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \langle \boldsymbol{u} - \boldsymbol{w}, \boldsymbol{w} \rangle = 0$$

i es té:

$$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle = \langle \boldsymbol{w} + (\boldsymbol{u} - \boldsymbol{w}), \boldsymbol{w} + (\boldsymbol{u} - \boldsymbol{w}) \rangle = \langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{w} \rangle + \langle \boldsymbol{u} - \boldsymbol{w}, \boldsymbol{u} - \boldsymbol{w} \rangle \geqslant \langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{w} \rangle = \frac{\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle^2}{\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle^2} \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle.$$

Multiplicant tots dos costats per $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle$ i extraient l'arrel quadrada s'obté el resultat.

Suposi's que els vectors són linealment dependents. Aleshores un dels dos és múltiple de l'altre i es compleix òbviament la igualtat. Recíprocament, suposi's que es compleix la igualtat. Si $\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$ els vectors són dependents i si $\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$ el fet que la desigualtat anterior sigui una igualtat implica que $\langle \boldsymbol{u} - \boldsymbol{w}, \boldsymbol{u} - \boldsymbol{w} \rangle = 0$. Per tant, $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{w} = \mathbf{0} \Rightarrow \boldsymbol{u} = \boldsymbol{w}$. Com que $\boldsymbol{w}$ és múltiple de els dos vectors també són dependents. $\square$

Proposició 5.1.7 (Propietats de la norma) *Sigui* $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *un espai vectorial euclidià. L'aplicació* $\boldsymbol{v} \mapsto \|\boldsymbol{v}\|\colon V \to \mathbb{R}$ *satisfà les propietats següents:*

1. $\|\boldsymbol{v}\| \geqslant 0, \quad \|\boldsymbol{v}\| = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$,
2. $\|x\boldsymbol{v}\| = |x|\,\|\boldsymbol{v}\|$, *on* $|x|$ *denota el valor absolut de l'escalar* $x \in \mathbb{R}$,
3. $\|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\| \leqslant \|\boldsymbol{u}\| + \|\boldsymbol{v}\|$ *(desigualtat triangular).*

PROVA: 1. $\|\boldsymbol{v}\| = 0 \Leftrightarrow \|\boldsymbol{v}\|^2 = 0 \Leftrightarrow \langle\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}\rangle = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$.

2. $\|x\boldsymbol{v}\|^2 = \langle x\boldsymbol{v}, x\boldsymbol{v}\rangle = x^2\langle\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}\rangle$ i traient arrels quadrades s'obté la identitat de l'enunciat.

3. Aplicant Cauchy-Schwarz es té: $\|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\|^2 = \langle\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v},\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\rangle = \langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}\rangle + 2\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle + \langle\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}\rangle \leqslant \|\boldsymbol{u}\|^2 + 2|\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle| + \|\boldsymbol{v}\|^2 \leqslant \|\boldsymbol{u}\|^2 + 2\|\boldsymbol{u}\|\,\|\boldsymbol{v}\| + \|\boldsymbol{v}\|^2 = (\|\boldsymbol{u}\| + \|\boldsymbol{v}\|)^2$. Traient arrels quadrades s'obté la desigualtat. □

Definició 5.1.8 (Distància euclidiana) *La* distància (euclidiana) *entre dos vectors d'un espai vectorial euclidià es defineix com la norma de la seva diferència:* $d(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = \|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\|$.

Gràcies a les propietats de la norma vistes a la proposició 5.1.7 es té:

Proposició 5.1.9 (Propietats de la distancia euclidiana) *Sigui* $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *un espai euclidià. L'aplicació* $d\colon V\times V \to \mathbb{R}$ *definida com* $d(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = \|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\|$ *compleix les propietats següents:*

1. $d(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) \geqslant 0, \quad d(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}$,
2. $d(\boldsymbol{v},\boldsymbol{u}) = d(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$, *i*
3. $d(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}) \leqslant d(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) + d(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})$ *per a tot* $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w} \in V$ *(desigualtat triangular).*

Definició 5.1.10 (Angle) *L'angle que formen dos vectors no nuls d'un espai euclidià* V *es defineix com l'angle* $\theta \in [0,\pi]$ *tal que:*

$$\cos\theta = \frac{\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle}{\|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|}.$$

Problemes

5.1. Siguin U, V dos $\mathbb{R}$-espais vectorials i $f\colon U \to V$ una aplicació lineal. Donat un producte escalar $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon V\times V \to \mathbb{R}$ a V es defineix $\langle\cdot,\cdot\rangle_f\colon U\times U \to \mathbb{R}$ com $\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle_f = \langle f(\boldsymbol{u}), f(\boldsymbol{v})\rangle$ per a tot $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v} \in U$. Demostreu que $\langle\cdot,\cdot\rangle_f$ és un producte escalar a U si, i només si, f és injectiva.

SOLUCIÓ: La bilinealitat de $\langle\cdot,\cdot\rangle$ assegura la de $\langle\cdot,\cdot\rangle_f$. Usant que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ és definida positiva es veu que per ser $\langle\cdot,\cdot\rangle_f$ definida positiva és condició necessària i suficient que f sigui injectiva: si $\boldsymbol{v} \neq 0$ aleshores $\langle\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}\rangle_f = \langle f(\boldsymbol{v}), f(\boldsymbol{v})\rangle$ ha de ser > 0 i això requereix que sigui $f(\boldsymbol{v}) \neq 0$.

5.2. Demostreu que l'aplicació $\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ definida per:

$$\phi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_iy_j, \qquad \text{amb} \quad \boldsymbol{x} = (x_1,\ldots,x_n),\ \boldsymbol{y} = (y_1,\ldots,y_n), \quad a_{ij} \in \mathbb{K},$$

és una forma bilineal, i que tota forma bilineal a l'espai $\mathbb{K}^n$ ve donada per una expressió com aquesta. Quina condició sobre els coeficients a_{ij} equival a que la forma sigui simètrica?

5.3. Digueu si les expressions següents defineixen un producte escalar a $\mathbb{R}^2$ o no:

1. $\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 4x_2y_2$,
2. $\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = x_1y_1 - x_2y_2$.

Solució: Totes dues són formes bilineals simètriques; la primera és definida positiva ja que

$$\langle (x, y), (x, y) \rangle = 2x^2 + 4y^2 + 2xy = x^2 + 3y^2 + (x + y)^2 > 0 \quad \text{si} \quad (x, y) \neq (0, 0).$$

La segona no és definida positiva ja que per exemple $\langle (0, 1), (0, 1) \rangle = -1$.

5.4. Demostreu que les aplicacions següents són productes escalars sobre els espais corresponents:

1. $\langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \rangle = \operatorname{Tr}(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}^t)$ a l'espai $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,
2. $\langle p(x), q(x) \rangle = \int_{-1}^{1} w(x)p(x)q(x)\, dx$ a l'espai $\mathbb{R}_2[x]$ dels polinomis de grau $\leqslant 2$, on w és una funció contínua a valors reals positius a l'interval $[-1, 1]$: $w(x) > 0\ \forall x \in [-1, 1]$.
3. $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\, dx$ a l'espai $\mathscr{C}([0, 1], \mathbb{R})$ de les funcions contínues a l'interval $[0, 1]$.

i escriviu la desigualtat de Cauchy-Schwarz en cada cas.

Solució: (a) és bilineal per la distributivitat del producte de matrius i la linealitat de la transposició, és simètrica per la propietat que la transposició és una anti-involució. Si $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ i $\boldsymbol{B} = (b_{ij})$ sigui $\boldsymbol{AB}^t = (c_{ij})$. Les seves entrades són $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{jk}$. Per tant, $\operatorname{Tr}(\boldsymbol{AB}^t) = \sum_{i=1}^{n} c_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ij}$. Aleshores $\operatorname{Tr}(\boldsymbol{AA}^t) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 > 0$ sempre que $\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{0}$ i per tant aquesta forma bilineal és definida positiva. La desigualtat de Cauchy-Schwarz diu que $|\operatorname{Tr}(AB^t)| \leqslant \sqrt{\operatorname{Tr}(AA^t)}\sqrt{\operatorname{Tr} BB^t}$.

(b) i (c) són bilineals simètriques per la distributivitat del producte de funcions i de la integració, i per la commutativitat del producte de funcions. El fet de ser definides positives és gràcies a que la integral d'una funció contínua positiva no idènticament nul·la és un real estrictament positiu. La desigualtat de Cauchy-Schwarz assegura que:

$$\left| \int_{-1}^{1} w(x)p(x)q(x)\, dx \right| \leqslant \sqrt{\int_{-1}^{1} \boldsymbol{w}(x)p(x)^2\, dx}\sqrt{\int_{-1}^{1} \boldsymbol{w}(x)q(x)^2\, dx}$$

en el primer cas i que:

$$\left| \int_{0}^{1} f(x)g(x)\, dx \right| \leqslant \sqrt{\int_{0}^{1} f(x)^2\, dx}\sqrt{\int_{0}^{1} g(x)^2\, dx}$$

en l'altre.

5.5. Comproveu que la norma $\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle}$ dels vectors d'un espai euclidià compleix les identitats següents, i interpreteu-les geomètricament:

1. $\|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\| \leqslant \|\boldsymbol{u}\| + \|\boldsymbol{v}\|$ (desigualtat triangular),
2. $\|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\|^2 + \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}\|^2 = 2\|\boldsymbol{u}\|^2 + 2\|\boldsymbol{v}\|^2$ (identitat del paral·lelogram),
3. $\|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\|^2 = \|\boldsymbol{u}\|^2 + \|\boldsymbol{v}\|^2$ si, i només si, $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = 0$ (teorema de Pitàgores),
4. $\|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\|\, \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}\| \leqslant \|\boldsymbol{u}\|^2 + \|\boldsymbol{v}\|^2$, amb igualtat si, i només si, $\boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{v}$.

Solució: La desigualtat triangular (a) és conseqüència de la desigualtat de Cauchy-Schwarz. La resta de desigualtats són un simple càlcul:

$$\begin{aligned} \|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 &= \langle u + v, u + v \rangle + \langle u - v, u - v \rangle \\ &= \langle u, u \rangle + \langle v, v \rangle + 2\langle u, v \rangle + \langle u, u \rangle + \langle v, v \rangle - 2\langle u, v \rangle \\ &= 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|u+v\|^2\|u-v\|^2 &= \langle u+v,u+v\rangle\langle u-v,u-v\rangle \\ &= \big(\langle u,u\rangle+\langle v,v\rangle+2\langle u,v\rangle\big)\big(\langle u,u\rangle+\langle v,v\rangle-2\langle u,v\rangle\big) \\ &= \big(\langle u,u\rangle+\langle v,v\rangle\big)^2-4\langle u,v\rangle^2 \leqslant \big(\|u\|^2+\|v\|^2\big)^2,\end{aligned}$$

amb igualtat si, i només si, $\langle u,v\rangle = 0$.

5.6. Determineu en quines condicions la desigualtat triangular és una igualtat.

SOLUCIÓ: Elevant al quadrat, la condició $\|u+v\| = \|u\|+\|v\|$ equival a que es compleixi $\langle u,v\rangle = \|u\|\|v\|$, i això és dir que, d'una banda, el producte escalar $\langle u,v\rangle$ és no negatiu, i de l'altra que la desigualtat de Cauchy-Schwarz sigui una igualtat. Per tant és condició necessària que els dos vectors siguin linealment dependents i que si $v=\lambda u$ aleshores $\langle u,\lambda u\rangle = \lambda\langle u,u\rangle \geqslant 0 \Rightarrow \lambda > 0$. Per tant, la condició és que cadascun dels vectors sigui múltiple positiu ($\geqslant 0$) de l'altre.

5.7. Es considera el producte escalar a l'espai $\mathbb{R}_2[X]$ definit per $\langle p,q\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\,dx$. Determineu l'angle que formen els polinomis $p(X) = 1+X+X^2$ i $q(X) = 1+X$.

SOLUCIÓ: Com que $(1+X+X^2)^2 = 1+2X+3X^2+2X^3+X^4$ es té

$$\langle p,p\rangle = \int_{-1}^{1}(1+2x+3x^2+2x^3+x^4)\,dx = x+x^2+x^3+\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{5}x^5\Big]_{-1}^{1} = 2+2+\frac{2}{5} = \frac{22}{5}$$

i per altra banda

$$\langle q,q\rangle = \int_{-1}^{1}(1+2x+x^2)\,dx = x+x^2+\frac{1}{3}x^3\Big]_{-1}^{1} = 2+\frac{2}{3} = \frac{8}{3}$$

i

$$\langle p,q\rangle = \int_{-1}^{1}(1+2x+2x^2+x^3)\,dx = x+x^2+\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{4}x^4\Big]_{-1}^{1} = 2+\frac{4}{3} = \frac{10}{3}$$

per tant

$$\cos\alpha = \frac{\langle p,q\rangle}{\|p\|\,\|q\|} = \frac{10/3}{\sqrt{(22/5)(8/3)}} = \frac{5\sqrt{15}}{6\sqrt{11}} = 0.973124...$$

5.8. *Fórmules de polarització.* Comproveu que en tot espai euclidià es compleixen les identitats següents, que permeten expressar qualsevol producte escalar en termes de normes de vectors:

$$\langle \boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle = \frac{1}{2}\left(\|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\|^2-\|\boldsymbol{u}\|^2-\|\boldsymbol{v}\|^2\right) = \frac{1}{4}\left(\|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\|^2-\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\|^2\right).$$

5.9. *Isometries d'un espai euclidià.* Sigui V un espai euclidià. Una *isometria* de V és una aplicació $f\colon V\to V$ que conserva les distàncies entre vectors: $\|f(\boldsymbol{u})-f(\boldsymbol{v})\| = \|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\|$ per a tot $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in V$.

1. Comproveu que les *translacions* $T_{\boldsymbol{w}}\colon V\to V$, definides per $T_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u}+\boldsymbol{w}$, són isometries.
2. Demostreu que tota isometria f tal que $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ conserva els productes escalars: per a tot $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in V$ es compleix $\langle f(\boldsymbol{u}),f(\boldsymbol{v})\rangle = \langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle$.
3. Demostreu que tota aplicació que conserva els productes escalars és una aplicació lineal.
4. Demostreu que tota isometria de V és la composició d'una isometria lineal i una translació.

SOLUCIÓ:

1. $\|T_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{u})-T_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{v})\| = \|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{w}-\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}\| = \|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\|$.

2. La condició $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ i la conservació de distàncies impliquen la conservació de normes ja que $\|f(\boldsymbol{u})\| = \|f(\boldsymbol{u}) - f(\mathbf{0})\| = \|\boldsymbol{u} - \mathbf{0}\| = \|\boldsymbol{u}\|$. Observi's també que $\| - \boldsymbol{v}\| = \|\boldsymbol{v}\|$ per a tot vector $\boldsymbol{v}$. Fent servir la primera de les fórmules de polarització es té:

$$\begin{aligned}\langle f(\boldsymbol{u}), f(\boldsymbol{v})\rangle &= -\langle f(\boldsymbol{u}), -f(\boldsymbol{v})\rangle = -\frac{1}{2}\big(\|f(\boldsymbol{u}) - f(\boldsymbol{v})\|^2 - \|f(\boldsymbol{u})\|^2 - \| - f(\boldsymbol{v})\|^2\big)\\ &= -\frac{1}{2}\big(\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}\|^2 - \|\boldsymbol{u}\|^2 - \| - \boldsymbol{v}\|^2\big) = -\langle \boldsymbol{u}, -\boldsymbol{v}\rangle = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle\end{aligned}$$

3. Donats vectors $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ i un escalar λ es consideren els vectors $f(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) - f(\boldsymbol{u}) - f(\boldsymbol{v})$ i $f(\lambda\boldsymbol{u}) - \lambda f(\boldsymbol{u})$. Multiplicant cadascun d'aquests vectors per ell mateix i fent servir que el producte escalar és invariant per f s'obté immediatament que tots dos vectors són zero. Per tant f és lineal.
4. Clarament la composició d'isometries és una isometria. Donada una isometria qualsevol f sigui $f(\mathbf{0}) = \boldsymbol{v}$. En compondre f amb la translació de vector $-\boldsymbol{v}$ s'obté una isometria $g = T_{-\boldsymbol{v}} \circ f$ amb $g(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, que tal com s'ha vist és una isometria lineal. Per tant, $f = T_{\boldsymbol{v}} \circ f$ és una composició com la que diu l'enunciat.

5.2 Matriu d'una forma bilineal

Tots els espais que es consideren en aquesta secció són de dimensió finita, com sempre que es fan servir matrius per representar objectes de l'àlgebra lineal.

Definició 5.2.1 (Matriu d'una forma bilineal) *Sigui V un $\mathbb{K}$-espai vectorial i sigui $\mathscr{B} = \{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$ una base. La* matriu d'una forma bilineal $\phi\colon V \times V \to \mathbb{K}$ *en aquesta base es defineix com:*

$$\operatorname{Mat}(\phi; \mathscr{B}) := \big(\phi(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j)\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} = \begin{pmatrix} \phi(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_1) & \phi(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) & \cdots & \phi(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_n) \\ \phi(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_1) & \phi(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_2) & \cdots & \phi(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \phi(\boldsymbol{v}_n, \boldsymbol{v}_1) & \phi(\boldsymbol{v}_n, \boldsymbol{v}_2) & \cdots & \phi(\boldsymbol{v}_n, \boldsymbol{v}_n) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

El fet que la forma bilineal sigui simètrica equival a que la seva matriu en qualsevol base sigui una matriu simètrica; és a dir, que coincideixi amb la seva transposada. Com sempre, la notació per indicar aquesta matriu pot ser molt variada: $\mathrm{M}(\phi; \mathscr{B})$, $\mathrm{M}_{\mathscr{B}}(\phi)$, etc.

De la mateixa manera que la matriu d'una aplicació lineal permet calcular l'aplicació a partir de les coordenades dels vectors, la matriu d'una forma bilineal permet calcular el valor que pren la forma en dos vectors en funció de les seves coordenades. Si $\boldsymbol{u} = \sum x_i \boldsymbol{v}_i$ i $\boldsymbol{v} = \sum y_i \boldsymbol{v}_i$ són vectors de V expressats en la base $\mathscr{B}$, el seu producte escalar és:

$$\phi(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \qquad a_{ij} = \phi(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j).$$

Dient $\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ a la matriu $\operatorname{Mat}(\phi; \mathscr{B})$, aquesta identitat matricial s'escriu:

$$\phi(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{u}^t \boldsymbol{A} \boldsymbol{v}.$$

Aquí, com sempre en aquest tipus d'identitats que barregen matrius i vectors, els vectors $\boldsymbol{u}$ i $\boldsymbol{v}$ que hi apareixen s'han d'interpretar com les matrius columna de les seves coordenades en la base $\mathscr{B}$.

Proposició 5.2.2 (Canvi de base) *La relació entre les matrius d'una forma bilineal en dues bases $\mathscr{B}_u$ i $\mathscr{B}_v$ de l'espai és la següent:*

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}^t\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}, \qquad \textit{amb} \quad \boldsymbol{A} = \mathrm{Mat}(\phi;\mathscr{B}_v), \quad \boldsymbol{B} = \mathrm{Mat}(\phi;\mathscr{B}_u) \quad \textit{i} \quad \boldsymbol{P} = \mathrm{Mat}(\mathscr{B}_u \to \mathscr{B}_v).$$

PROVA: És un simple càlcul a partir de les definicions. Siguin $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$, $\boldsymbol{B} = (b_{ij})$ i $\boldsymbol{P} = (p_{ij})$. Per tant, $\boldsymbol{P}^t = (p_{ji})$. Siguin $\boldsymbol{AP} = (\alpha_{ij})$ i $\boldsymbol{P}^t\boldsymbol{AP} = (\beta_{ij})$. Per definició, $a_{ij} = \phi(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j)$, $b_{ij} = \phi(\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_j)$ i $\boldsymbol{u}_j = \sum_{i=1}^n p_{ij}\boldsymbol{v}_i$. Aleshores:

$$b_{rs} = \phi(\boldsymbol{u}_r, \boldsymbol{u}_s) = \phi\left(\sum_{i=1}^n p_{ir}\boldsymbol{v}_i, \sum_{j=1}^n p_{js}\boldsymbol{v}_j\right) = \sum_{i=1}^n p_{ir}\sum_{j=1}^n p_{js}\phi(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j) = \sum_{i=1}^n p_{ir}\sum_{j=1}^n a_{ij}p_{js}$$

i això és igual a $\sum_{i=1}^n p_{ir}\alpha_{is} = \beta_{rs}$. □

Definició 5.2.3 (Congruència de matrius) *Dues matrius quadrades $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ es diu que són* congruents *si existeix una matriu invertible $\boldsymbol{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tal que $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}^t\boldsymbol{AP}$.*

La relació de congruència de matrius és òbviament una relació d'equivalència.

Proposició 5.2.4 (Criteri de Sylvester) *Sigui $\boldsymbol{A} = \mathrm{Mat}(\phi;\mathscr{B}_u) \in M_n(\mathbb{R})$ la matriu d'una forma bilineal simètrica en un $\mathbb{R}$-espai vectorial de dimensió finita n. La forma ϕ és un producte escalar (o sigui, és definida positiva) si, i només si, els seus* menors principals *són tots estrictament positius:*

$$\det\big((a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant k}\big) > 0 \qquad \textit{per a tot} \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

PROVA: Donada una matriu $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, per a cada $k = 1, \ldots, n$ es denotarà $\boldsymbol{A}_k$ la submatriu $(a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant k} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{K})$, de manera que els menors principals de $\boldsymbol{A}$ són els determinants d'aquestes matrius.

Si $a_{11} \neq 0$ es por construir una nova base $\mathscr{B}_v$ de l'espai de la manera següent:

$$\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{u}_1, \quad \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{u}_2 - \frac{a_{12}}{a_{11}}\boldsymbol{u}_1, \quad \ldots, \quad \boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{u}_n - \frac{a_{1n}}{a_{11}}\boldsymbol{u}_1. \tag{5.1}$$

És una base ja que s'obté a partir de l'anterior fent transformacions elementals de vectors. La matriu del canvi de base és:

$$\boldsymbol{P} = \mathrm{Mat}(\mathscr{B}_v \to \mathscr{B}_u) = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & -\frac{a_{13}}{a_{11}} & \cdots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Per demostrar que tot producte escalar compleix la condició del criteri n'hi ha prou a veure que el determinant de la matriu d'un producte escalar és sempre estrictament positiu, ja que els menors principals $\det(\boldsymbol{A}_k)$ són els determinants de les matrius del producte escalar ϕ restringit als subespais $\langle \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k \rangle$. Aquesta positivitat es demostra per inducció sobre la dimensió n. Si $n = 1$ aleshores $a_{11} = \phi(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_1) > 0 \Rightarrow \det(\boldsymbol{A}) = a_{11} > 0$. Suposi's demostrat per a $n-1$ i sigui $\boldsymbol{A} = \mathrm{Mat}(\phi; \mathscr{B}_u)$ la matriu d'un producte escalar a un espai de dimensió n en una base $\mathscr{B}_u$. Aleshores $a_{11} = \phi(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_1) > 0$ i es pot definir la base $\mathscr{B}_v$ com a (5.1). Sigui $\boldsymbol{B} = \mathrm{Mat}(\phi; \mathscr{B}_v) = \boldsymbol{P}^t \boldsymbol{A} \boldsymbol{P}$. Per a cada índex $j > 1$ es té:

$$\phi(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_j) = \phi\left(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_j - \frac{a_{1j}}{a_{11}} \boldsymbol{u}_1\right) = a_{1j} - \frac{a_{1j}}{a_{11}} a_{11} = 0.$$

Per tant la matriu $\boldsymbol{B}$ és de la forma:

$$\boldsymbol{B} = \big(\phi(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j)\big) = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ 0 & b_{23} & b_{33} & \cdots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & b_{2n} & b_{3n} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}' \end{pmatrix} \tag{5.2}$$

amb $\boldsymbol{B}' \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ la matriu del producte escalar ϕ restringit al subespai $\langle \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n \rangle$. Per hipòtesi d'inducció $\det(\boldsymbol{B}') > 0$ i per tant es té $\det(\boldsymbol{B}) = a_{11} \det(\boldsymbol{B}') > 0$. Com que $\det(\boldsymbol{P}) = 1$ es dedueix que $\det(\boldsymbol{A}) = \det(\boldsymbol{B}) > 0$.

El recíproc es demostra també per inducció sobre la dimensió n de l'espai. Suposi's que la matriu $\boldsymbol{A}$ compleix la condició del criteri; o sigui, que tots els seus menors principals són estrictament positius. En particular ha de ser $a_{11} > 0$ ja que aquesta entrada de la matriu $\boldsymbol{A}$ és el primer menor principal. Per tant es pot definir la base $\mathscr{B}_v$ com a (5.1) i la matriu $\boldsymbol{B} = \mathrm{Mat}(\phi; \mathscr{B}_v)$ té la forma (5.2). La matriu $\boldsymbol{B}$ també compleix la condició de Sylvester ja que $\boldsymbol{B}_k = \boldsymbol{P}_k^t \boldsymbol{A}_k \boldsymbol{P}_k$ per a tot $k = 1, \ldots, n$ i com que $\det \boldsymbol{P}_k = 1$ per a tot $k = 1, \ldots, n$ els menors principals de $\boldsymbol{A}$ i de $\boldsymbol{B}$ coincideixen. La matriu $\boldsymbol{B}'$ és la de la restricció de la forma bilineal ϕ al subespai $W = \langle \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n \rangle$. Aquesta matriu també compleix la condició de Sylvester ja que es té $a_{11} \det(\boldsymbol{B}'_k) = \det(\boldsymbol{B}_{k+1}) > 0 \Rightarrow \det(\boldsymbol{B}'_k) > 0$ per a tot $k = 1, \ldots, n-1$. Per hipòtesi d'inducció la restricció de ϕ al subespai W de dimensió $n-1$ és un producte escalar. Com que $V = \langle \boldsymbol{v}_1 \rangle \oplus W$ tot vector $\boldsymbol{v} \in V$ és de la forma $\boldsymbol{v} = x\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{w}$ amb $x \in \mathbb{R}$ i $\boldsymbol{w} \in W$, i només pot ser el vector zero si $x = 0$ i $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{0}$. Aleshores, com que clarament $\phi(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{w}) = 0$, es té:

$$\phi(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = \phi(x\boldsymbol{v}_1, x\boldsymbol{v}_1) + \phi(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}) = x^2 a_{11} + \phi(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}) > 0$$

si $x \neq 0$ o bé si $\boldsymbol{w} \neq \boldsymbol{0}$; o sigui, sempre que $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$. □

Problemes

5.10. Es considera la forma bilineal $\phi\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida per:

$$\phi\big((x_1, x_2), (y_1, y_2)\big) = x_1 y_1 + x_2 y_2 - x_1 y_2 + 2 x_2 y_1.$$

1. Trobeu la seva matriu en la base canònica $\mathscr{B}_e = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$.
2. Trobeu la seva matriu en la base $\mathscr{B}_u = \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\}$, amb $\boldsymbol{u}_1 = (1, 1)$ i $\boldsymbol{u}_2 = (1, 2)$.

3. Existeix alguna base $\mathbb{R}^2$ en la qual la matriu de ϕ sigui simètrica?

SOLUCIÓ:

1. $\operatorname{Mat}(\phi; \mathscr{B}_e) = \big(\phi(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j)\big) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
2. $\operatorname{Mat}(\phi; \mathscr{B}_u) = \big(\phi(\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_j)\big) = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} = \boldsymbol{P}^t \operatorname{Mat}(\phi; \mathscr{B}_e)\boldsymbol{P}$,

   amb $\quad \boldsymbol{P} = \operatorname{Mat}(\boldsymbol{B}_u \to \boldsymbol{B}_e) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
3. La forma no és simètrica i, per tant, no pot tenir matriu simètrica en cap base.

5.11. Trobeu els valors del paràmetres $a, b \in \mathbb{R}$ per als quals les matrius següents defineixen un producte escalar:

$$(a) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & a & b \end{pmatrix} \qquad (b) \begin{pmatrix} 1 & a \\ a^2 & 2 \end{pmatrix}.$$

SOLUCIÓ: (a) Per ser simètrica ha de ser $a = 0$, i per ser definida positiva ha de ser $3b - b - 3 \geqslant 0 \Leftrightarrow b \geqslant 3/2$.

(b) Per ser simètrica ha de ser $a = a^2 \Leftrightarrow a \in \{0, 1\}$ i, per ser definida positiva ha de ser $2 - a^2 > 0$, que es compleix per tots dos valors $a = 0$ i $a = 1$.

5.12. *Reducció gaussiana de formes quadràtiques.* Sigui $\phi \colon V \times V \to \mathbb{K}$ una forma bilineal simètrica i sigui $\boldsymbol{A}$ la seva matriu en alguna base.

1. Calculeu $\mathscr{E}^t \boldsymbol{A} \mathscr{E}$, on $\mathscr{E}$ és una matriu elemental.
2. Determineu els canvis que es produeixen en la matriu de ϕ quan s'aplica una transformació elemental a la base.
3. Demostreu que existeix una base de V en la qual la matriu de ϕ és una matriu diagonal.

5.3 Ortogonalitat

Sigui $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espai vectorial euclidià.

Definició 5.3.1 (Ortogonalitat) *Dos vectors $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ es diuen* ortogonals *(o* perpendiculars*) si $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = 0$. Aquesta condició es denota $\boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{v}$.*

Dos subconjunts $S, T \subseteq V$ es diuen ortogonals*, i es denota $S \perp T$, si cada vector de l'un és ortogonal amb cada vector de l'altre: $\boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{v}$ $\forall \boldsymbol{u} \in S, \boldsymbol{v} \in T$.*

Una base $\mathscr{B} = \{\boldsymbol{v}_i\}$ de l'espai V es diu ortogonal *si cada vector de la base és ortogonal a tots els demés: $\boldsymbol{v}_i \perp \boldsymbol{v}_j$ sempre que $i \neq j$. La base $\{\boldsymbol{w}_i\}$ es diu* ortonormal *si és ortogonal i tots els seus vectors són unitaris: $\|\boldsymbol{w}_i\| = 1$.*

En una base ortonormal $\{\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_n\}$ les coordenades d'un vector són:

$$x_i = \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_i \rangle, \qquad \text{si} \quad \boldsymbol{v} = \sum x_i \boldsymbol{w}_i,$$

i el producte escalar de dos vectors o la norma d'un vector es calculen amb les fórmules habituals de l'espai euclidià $\mathbb{R}^n$:

$$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \sum x_i y_i \quad \text{i} \quad \|\boldsymbol{u}\| = \sqrt{\sum x_i^2}, \qquad \text{si} \quad \boldsymbol{u} = \sum x_i \boldsymbol{w}_i, \quad \boldsymbol{v} = \sum y_i \boldsymbol{w}_i.$$

Proposició 5.3.2 (Ortonormalització de Gram-Schmidt) *Sigui* $\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$ *una base de l'espai vectorial euclidià* $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. *Els vectors definits recursivament de la manera següent:*

$$\boldsymbol{w}_k = \frac{\boldsymbol{v}_k}{\|\boldsymbol{v}_k\|}, \quad \textit{amb} \quad \boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{u}_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle \boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{w}_i\rangle\, \boldsymbol{w}_i,$$

per a $k = 1, \ldots, n$, *són una base ortonormal de l'espai.*

Prova: Els vectors $\boldsymbol{w}_k$ són una base, ja que s'obtenen a partir dels vectors de la base $\boldsymbol{u}_k$ fent transformacions elementals, i tenen norma 1 per construcció. Només cal veure que són ortogonals. Per això es veurà que cadascun és ortogonal a tots els anteriors. Suposi's que ja s'ha comprovat fins al vector $\boldsymbol{w}_{k-1}$. Per a tot índex $j < k$ es té:

$$\begin{aligned}\langle \boldsymbol{w}_k, \boldsymbol{w}_j\rangle = \frac{1}{\|\boldsymbol{v}_k\|}\langle \boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{w}_j\rangle &= \frac{1}{\|\boldsymbol{v}_k\|}\left\langle \boldsymbol{u}_k - \sum_{i=1}^{k-1}\langle \boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{w}_i\rangle\, \boldsymbol{w}_i, \boldsymbol{w}_j \right\rangle \\ &= \frac{1}{\|\boldsymbol{v}_k\|}\left(\langle \boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{w}_j\rangle - \sum_{i=1}^{k-1}\langle \boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{w}_i\rangle\langle \boldsymbol{w}_i, \boldsymbol{w}_j\rangle \right).\end{aligned}$$

Per hipòtesi d'inducció cada factor $\langle \boldsymbol{w}_i, \boldsymbol{w}_j\rangle$ del sumatori és igual a $\delta_{i,j}$. Per tant el valor del sumatori és $\langle \boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{w}_j\rangle$ i es dedueix que $\langle \boldsymbol{w}_k, \boldsymbol{w}_j\rangle = 0$. □

En alguns llocs el mètode de Gram-Schmidt es presenta en dues fases: primer es troba una base ortogonal a calculant:

$$\boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{u}_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\langle \boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{v}_i\rangle}{\langle \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_i\rangle}\, \boldsymbol{v}_i, \qquad k = 1, \ldots, n$$

i després es normalitzen aquests vectors calculant $\boldsymbol{w}_k = \boldsymbol{v}_k / \|\boldsymbol{v}_k\|$ per a cada k. És clar que totes dues maneres donen el mateix.

Corol·lari 5.3.3 (Existència de base ortonormal) *Tot espai euclidià de dimensió finita té alguna base ortonormal. Tota base ortonormal d'un subespai d'un espai euclidià pot ampliar-se a una base ortonormal de tot l'espai.*

Prova: En efecte, a partir d'una base qualsevol es pot obtenir una base ortonormal aplicant l'algorisme de Gram-Schmidt. Per veure la segona afirmació, si $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_r$ és una base ortonormal del subespai W es completa a una base de tot l'espai afegint vectors $\boldsymbol{u}_{r+1}, \ldots, \boldsymbol{u}_n$. Aleshores en aplicar ortogonalització de Gram-Schmidt a la base $\{\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_r, \boldsymbol{v}_{r+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ els primers r vectors es queden igual i els demés es converteixen en nous vectors $\boldsymbol{w}_{r+1}, \ldots, \boldsymbol{w}_n$ tals que la base $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_n$, que estén la base inicial del subespai, és una base ortonormal. □

Definició 5.3.4 (Matriu ortogonal) *Una matriu* $\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *es diu* ortogonal *si* $\boldsymbol{A}^t\boldsymbol{A} = \boldsymbol{1}_n$.

Noti's que la condició $\boldsymbol{A}^t\boldsymbol{A} = \boldsymbol{1}_n$ equival a $\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^t$ i també a $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}^t = \boldsymbol{1}_n$. Les matrius ortogonals són invertibles i formen un subgrup de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, que s'anomena *grup ortogonal* i es denota $\mathrm{O}_n(\mathbb{K})$.

Per a una matriu $\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la condició de ser ortogonal equival a dir que les seves columnes formen una base ortonormal de l'espai euclidià $\mathbb{R}^n$. Això és un cas particular de la següent:

Proposició 5.3.5 *Sigui $\mathscr{B}_w = \{\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_n\}$ una base ortonormal de l'espai euclidià V. Aleshores una altra base $\mathscr{B}_u = \{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$ és també ortonormal si, i només si, les matrius dels canvis de base són matrius ortogonals.*

PROVA: La condició que $\mathscr{B}_w$ sigui ortonormal equival a dir que la matriu $\mathrm{Mat}(\langle\cdot,\cdot\rangle; \mathscr{B}_w)$ del producte escalar $\langle\cdot,\cdot\rangle$ en aquesta base sigui la identitat. En fer el canvi de base es té $\mathrm{Mat}(\langle\cdot,\cdot\rangle; \mathscr{B}_u) = \boldsymbol{P}^t \boldsymbol{1}_n \boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}^t \boldsymbol{P}$ amb $\boldsymbol{P} = \mathrm{Mat}(\mathscr{B}_u \to \mathscr{B}_w)$. La base $\mathscr{B}_u$ és ortonormal quan aquesta matriu és la identitat; és a dir, quan les matrius del canvi de base $\boldsymbol{P}$ i $\boldsymbol{P}^{-1}$ són ortonormals. $\square$

Problemes

5.13. Siguin $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ dos vectors d'un espai vectorial euclidià. Comproveu que els vectors $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$ i $\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}$ són ortogonals si, i només si, els vectors $\boldsymbol{u}$ i $\boldsymbol{v}$ tenen la mateixa norma.

SOLUCIÓ: $\langle \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\rangle = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}\rangle - \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle = \|\boldsymbol{u}\|^2 - \|\boldsymbol{v}\|^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \|\boldsymbol{u}\| = \|\boldsymbol{v}\|$.

5.14. Es considera el producte escalar a l'espai de funcions contínues en l'interval $[-t, t]$ definit per $\langle f, g\rangle = \int_{-t}^{t} f(x)g(x)\,dx$. Demostreu que les funcions $\sin(ax)$ i $\cos(bx)$ són ortogonals per a tots els nombres reals $a, b \in \mathbb{R}$.

SOLUCIÓ: Fent el canvi de variables $y = -x$, amb $dy = -dx$, i que canvia els extrems de l'interval d'integració, es té:

$$\begin{aligned}\langle \sin(ax), \cos(bx)\rangle &= \int_{-t}^{t} \sin(ax)\cos(bx)\,dx = \int_{t}^{-t} \sin(-ay)\cos(-by)\,(-dy)\\ &= -\int_{-t}^{t} \sin(ay)\cos(by)\,dy = -\langle \sin(ax), \cos(bx)\rangle\end{aligned}$$

on en la darrera igualtat hi ha hagut tres canvis de signe: la inversió dels extrems d'integració, el signe de la diferencial, i un signe que prové del sinus, que és senar (el cosinus es parell i el signe desapareix). Per tant aquest nombre real, que coincideix amb el seu oposat, ha de ser el zero.

5.15. Apliqueu el procés d'ortogonalització de Gram-Schmidt a les bases següents:

1. Base $\{(1,1,-1), (1,-1,1), (-1,1,1)\}$ a $\mathbb{R}^3$ amb el producte estàndard i amb el producte escalar que en la base canònica té matriu:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

2. Base $\{(1,1,1,0), (1,1,0,1), (1,0,1,1), (0,1,1,1)\}$ a $\mathbb{R}^4$ amb el producte estàndard i amb el producte escalar definit per:

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3 + x_3y_4 + x_4y_3 + 2x_4y_4.$$

3. Bases $\{1, X, X^2\}$ i $\{X^2, X, 1\}$ a l'espai $\mathbb{R}_2[X]$ amb el producte escalar:

$$\langle p(X), q(X)\rangle = \int_0^t p(x)q(x)\,dx \qquad \text{amb } t \text{ un real} > 0,$$

SOLUCIÓ:Es calcula i s'obtenen les bases següents:

1. $\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1),\ \frac{1}{\sqrt{6}}(2,-1,1),\ \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)\right\}$ i $\left\{\frac{1}{2}(1,1,-1),\ \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,0),\ \frac{1}{2}(1,3,1)\right\}$.
2. $\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1,0),\ \frac{1}{\sqrt{15}}(1,1,-2,3),\ \frac{1}{\sqrt{35}}(1,-4,3,3),\ \frac{1}{\sqrt{7}}(-1,2,2,2)\right\}$, i $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,1,0),\ (0,0,-1,1),\ \frac{1}{\sqrt{3}}(0,-1,1,0),\ \frac{1}{\sqrt{6}}(-3,-1,1,0)\right\}$.
3. $\left\{\frac{1}{\sqrt{t}}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{t}}\left(\frac{2}{t}X-1\right), \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{t}}\left(\frac{6}{t^2}X^2-\frac{6}{t}X+1\right)\right\}$, i $\left\{\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{t}}\left(\frac{1}{t^2}X^2\right), \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{t}}\left(\frac{-5}{t^2}X^2+\frac{4}{t}X\right), \frac{1}{\sqrt{t}}\left(\frac{10}{t^2}X^2-\frac{12}{t}X+3\right)\right\}$.

5.16. Escriviu la matriu del canvi de base $\mathrm{Mat}(\mathscr{B}_u \to \mathscr{B}_w)$ d'una base $\mathscr{B}_u$ qualsevol d'un espai euclidià a la base ortonormal $\mathscr{B}_w$ obtinguda a partir d'ella amb l'algorisme de Gram-Schmidt.

SOLUCIÓ: Si $\mathscr{B}_w$ és una base ortonormal tot vector s'escriu de la forma $\boldsymbol{v} = \sum\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_i\rangle \boldsymbol{w}_i$. En aquest cas cada vector j-èsim de base $\boldsymbol{u}_i$ és combinació lineal dels j primers vectors de la base ortonormal $\boldsymbol{w}_i$ i per tant la matriu té forma triangular superior:

$$\mathrm{Mat}(\mathscr{B}_u \to \mathscr{B}_w) = \begin{pmatrix} \langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{w}_1\rangle & \langle \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{w}_1\rangle & \langle \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{w}_1\rangle & \cdots & \langle \boldsymbol{u}_n, \boldsymbol{w}_1\rangle \\ 0 & \langle \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{w}_2\rangle & \langle \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{w}_2\rangle & \cdots & \langle \boldsymbol{u}_n, \boldsymbol{w}_2\rangle \\ 0 & 0 & \langle \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{w}_3\rangle & \cdots & \langle \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{w}_n\rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \langle \boldsymbol{u}_n, \boldsymbol{w}_n\rangle \end{pmatrix}$$

5.17. A l'espai euclidià $\mathbb{R}^4$ amb el producte escalar habitual,

1. trobeu una base del subespai ortogonal a $F = \langle(1,0,2,1),(0,1,-2,1)]$, i
2. trobeu equacions del subespai ortogonal a $H = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : 2x+y+3z-t = 3x+2y-2t = 0\}$.

SOLUCIÓ: El subespai ortogonal a F és el definit per les equacions $x+2z+t = y-2z+t = 0$, que és $F^\perp = \langle(-2,2,1,0),(-1,-1,0,1)\rangle$. El subespai ortogonal a H té com a base els coeficients de les equacions i per tant és $H^\perp = \langle(2,1,3,-1),(3,2,0,-2)\rangle$; es troben equacions pel procediment habitual obtenint-se $H^\perp = \{6x-9y-z = y+t = 0\}$

5.18. A l'espai euclidià $\mathbb{R}^3$ es consideren els subespais $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+ay+z = 0\}$ i $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x-y = y-bz = 0\}$, on $a,b \in \mathbb{R}$. Per a quins valors dels paràmetres a i b els subespais F i G són complementaris? per a quins valors són ortogonals?

SOLUCIÓ: L'espai F té dimensió 2 i l'espai G té dimensió 1. La intersecció dels dos espais és el subespai definit per les equacions $x-y = y-bz = x+ay+z = 0$, que té solució trivial si, i només si, el determinant de la matriu corresponent a aquest sistema és zero. Aquest determinant val $1+b+ab$, i per tant la suma és directa si, i només si, això és diferent de zero. Per a cada valor de $b \neq 0$ existeix un únic valor prohibit de a, que és $a = -\frac{1}{b}-1$; si es compleix aquesta igualtat aleshores la intersecció dels dos subespais és G i la seva suma és F. Els dos subespais són $F = \langle(-a,1,0),(-1,0,1)\rangle$ i $G = \langle(b,b,1)\rangle$ i per tal que siguin ortogonals cal que $\langle(-a,1,0),(b,b,1)\rangle = \langle(-1,0,1),(b,b,1)\rangle = 0$; o sigui, que $-ab+b = -b+1 = 0$. L'única solució és $a = b = 1$. Naturalment, en aquest cas els subespais estan en suma directa, com tot parell de subespais ortogonals.

5.19. *Grup ortogonal.* Sigui $\phi\colon V \times V \to \mathbb{K}$ una forma bilineal simètrica. Demostreu que els automorfismes $f \in \mathrm{Aut}(V)$ tals que $\phi(f(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{v}) = \phi(\boldsymbol{u}, f(\boldsymbol{v}))$ per a tot $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ formen un subgrup del grup d'automorfismes.

Sigui $\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ una matriu simètrica. Demostreu que les matrius invertibles $\boldsymbol{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tals que $\boldsymbol{P}^t\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{A}$ formen un subgrup del grup lineal.

5.4 Projecció ortogonal

Definició 5.4.1 (Subespai ortogonal) *Sigui $W \subseteq V$ un subespai vectorial (o, més en general, un subconjunt qualsevol) d'un espai euclidià. Aleshores el conjunt:*

$$W^{\perp} = \{\boldsymbol{v} \in V : \boldsymbol{v} \perp \boldsymbol{w}, \ \forall \boldsymbol{w} \in W\}$$

format pels vectors de l'espai que són ortogonals a tots els de W és un subespai que s'anomena ortogonal *del subespai (o conjunt) W.*

Observi's que si $W = \langle \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_r \rangle$ aleshores

$$\boldsymbol{v} \in W^{\perp} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{v} \perp \boldsymbol{w}_i \quad \forall\, i = 1, \ldots, r.$$

En particular, si $W \subseteq \mathbb{R}^n$ és el subespai generat per una família de vectors:

$$W = \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_m \rangle, \quad \boldsymbol{x}_i = (x_{i1}, x_{i2}, \cdots, x_{in})$$

aleshores el subespai ortogonal $W^{\perp}$ és el subespai de les solucions del sistema d'equacions lineals homogeni $\{\sum_{j=1}^{n} x_{ij} X_j = 0 : i = 1, \ldots, m\}$; o sigui, el sistema amb matriu

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{pmatrix}.$$

Definició 5.4.2 (Suma ortogonal) *La suma $W = W_1 + W_2$ de dos subespais $W_1, W_2 \subseteq V$ que siguin ortogonals s'anomena* suma ortogonal*, i de vegades es denota $W_1 \perp W_2$. El cas de més de dos espais que siguin ortogonals cadascun amb els altres es fa de manera anàloga. Una suma ortogonal és sempre una suma directa.*

En efecte, si $W = W_1 \perp \cdots \perp W_n$ és la suma ortogonal de n subespais, sigui $\boldsymbol{w}_1 + \cdots + \boldsymbol{w}_n = \boldsymbol{0}$ una suma de vectors dels subespais igual a zero. Aleshores per a cada índex j es té $0 = \langle \boldsymbol{w}_j, \boldsymbol{0} \rangle = \langle \boldsymbol{w}_j, \sum \boldsymbol{w}_i \rangle = \langle \boldsymbol{w}_j, \boldsymbol{w}_j \rangle \Rightarrow \boldsymbol{w}_j = \boldsymbol{0}$ i efectivament la suma és directa.

La notació pot semblar confusa confusa ja que escriure $W_1 \perp W_2$ pot voler dir que aquests dos subespais són ortogonals entre ells o bé indicar la seva suma ortogonal; en general el context evita que es produeixi cap malentès.

Teorema 5.4.3 (Teorema de la projecció ortogonal) *Per a tot subespai $W \subseteq V$ d'un espai euclidià de dimensió finita, l'espai V és la suma ortogonal*

$$V = W \perp W^{\perp}.$$

PROVA: La condició de definida positiva del producte escalar garanteix que la intersecció $W \cap W^{\perp}$ és trivial, i per tant la suma és una suma directa. Per tant, només cal veure que tot vector de $\boldsymbol{v}$ és suma d'un de W i un de l'ortogonal $W^{\perp}$. Sigui $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_r$ una base ortogonal de W i sigui $\boldsymbol{w}_{r+1}, \ldots, \boldsymbol{w}_n$ una ampliació a una base ortogonal de tot V. Aleshores tot vector $\boldsymbol{v} \in V$ s'escriu com $\sum x_i \boldsymbol{w}_i$, on de fet els coeficients són $x_i = \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_i \rangle$, i per tant $\boldsymbol{v}$ és suma de $\sum_{i=1}^{r} x_i \boldsymbol{w}_i \in W$ i $\sum_{i=r+1}^{n} x_i \boldsymbol{w}_i \in W^{\perp}$. $\square$

Corol·lari 5.4.4 *Si $W \subseteq \mathbb{R}^n$ és el subespai de les solucions d'un sistema homogeni de m equacions lineals:*

$$W = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j = 0, \ \forall\ i = 1, \dots m \right\},$$

aleshores el seu ortogonal $W^\perp$ és el subespai generat pels m vectors

$$\boldsymbol{v}_1 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}), \dots, \boldsymbol{v}_m = (a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn}).$$

PROVA: Cada $\boldsymbol{v}_i$ és ortogonal a tot vector de W, i per tant es té la inclusió $\langle \boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_m \rangle \subseteq W^\perp$. Sigui r el rang del sistema, que és la dimensió del subespai generat pels vectors $\boldsymbol{v}_i$. Aleshores $\dim W = n - r$ i pel teorema de la projecció ortogonal es dedueix que $\dim W^\perp = r$. Per tant tots dos subespais tenen la mateixa dimensió i la inclusió és una igualtat. □

Corol·lari 5.4.5 *Per a tot subespai $W \subseteq V$ d'un espai euclidià de dimensió finita, $(W^\perp)^\perp = W$.*

PROVA: Sigui $\boldsymbol{w} \in W$. Per a tot vector $\boldsymbol{w}' \in W^\perp$ es té $\boldsymbol{w} \perp \boldsymbol{w}'$. Per tant, $\boldsymbol{w} \in (W^\perp)^\perp$ i es dedueix que $W \subseteq (W^\perp)^\perp$. Per altra banda, $V = W \oplus W^\perp$ i $V = W^\perp \oplus (W^\perp)^\perp$ impliquen que $\dim W = n - \dim W^\perp = \dim (W^\perp)^\perp$, i per tant tots dos subespais W i $(W^\perp)^\perp$ són iguals. □

Definició 5.4.6 (Projecció ortogonal sobre un subespai) *Sigui $W \subseteq V$ un subespai vectorial d'un espai euclidià. La* projecció ortogonal de l'espai V sobre el subespai W *és l'aplicació lineal $\pi_W \colon V \to W$ definida posant:*

$$\pi_W(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{w}_1 \quad \textit{si} \quad \boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2 \quad \textit{amb} \quad \boldsymbol{w}_1 \in W \ \textit{i} \ \boldsymbol{w}_2 \in W^\perp.$$

Proposició 5.4.7 (Caracterització de la projecció ortogonal) *La projecció ortogonal en un subespai d'un vector $\boldsymbol{v} \in V$ és el vector del subespai que està més a prop de $\boldsymbol{v}$:*

$$d(\boldsymbol{v}, \pi_W(\boldsymbol{v})) = \min\{d(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) : \boldsymbol{w} \in W\}.$$

PROVA: Com que $V = W \perp W^\perp$ el vector $\boldsymbol{v} \in V$ es pot escriure, de manera única, com $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2$ amb $\boldsymbol{w}_1 \in W$ i $\boldsymbol{w}_2 \in W^\perp$ les projeccions del vector $\boldsymbol{v}$ en el subespai W i en el seu ortogonal $W^\perp$. Per a tot vector $\boldsymbol{w} \in W$ es té:

$$d(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})^2 = \langle \boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v} - \boldsymbol{w} \rangle = \langle \boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2 - \boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2 - \boldsymbol{w} \rangle = \langle \boldsymbol{w}_1 - \boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}_1 - \boldsymbol{w} \rangle + \langle \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_2 \rangle.$$

El valor mínim d'aquesta expressió es dóna quan el primer sumand val zero, que correspon a $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}_1$, i en aquest cas es té $d(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_1) = \sqrt{\langle \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_2 \rangle} = \|\pi_{W^\perp}(\boldsymbol{v})\|$. □

La distància $d(\boldsymbol{v}, W)$ d'un vector $\boldsymbol{v} \in V$ a un subespai $W \subseteq V$ es defineix com la distància mínima $\min\{d(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) : \boldsymbol{w} \in W\}$ i la proposició assegura que:

$$d(\boldsymbol{v}, W) = \|\pi_{W^\perp}(\boldsymbol{v})\| = \|\boldsymbol{v} - \pi_W(\boldsymbol{v})\|.$$

Proposició 5.4.8 (Càlcul de la projecció ortogonal) *Sigui $\boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_r$ una base del subespai $W \subseteq V$. Aleshores, per a tot vector $\boldsymbol{v} \in V$, les coordenades de la projecció ortogonal $\pi_W(\boldsymbol{v}) = x_1\boldsymbol{w}_1 + \cdots + x_r\boldsymbol{w}_r$ són la solució del sistema lineal $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ amb*

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \langle \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_1 \rangle & \langle \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2 \rangle & \cdots & \langle \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_r \rangle \\ \langle \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_1 \rangle & \langle \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_2 \rangle & \cdots & \langle \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_r \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle \boldsymbol{w}_r, \boldsymbol{w}_1 \rangle & \langle \boldsymbol{w}_r, \boldsymbol{w}_2 \rangle & \cdots & \langle \boldsymbol{w}_r, \boldsymbol{w}_r \rangle \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} \langle \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{v} \rangle \\ \langle \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{v} \rangle \\ \vdots \\ \langle \boldsymbol{w}_r, \boldsymbol{v} \rangle \end{pmatrix}.$$

PROVA: Sigui $\boldsymbol{w}_{r+1}, \ldots, \boldsymbol{w}_n$ una base del subespai ortogonal $W^\perp$. Aleshores el teorema de la projecció ortogonal $V = W \perp W^\perp$ assegura que $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_n$ és una base de tot l'espai. Sigui $\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^n x_i \boldsymbol{w}_i$ i siguin $\boldsymbol{v}_1 = \sum_{i=1}^r x_i \boldsymbol{w}_i \in W$ i $\boldsymbol{v}_2 = \sum_{i=r+1}^n x \boldsymbol{w}_i \in W^\perp$. Es té que $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$ i la projecció ortogonal de $\boldsymbol{v}$ en W és el vector $\boldsymbol{v}_1$. Per a cada índex $j = 1, \ldots, r$ es té

$$\langle \boldsymbol{w}_j, \boldsymbol{v} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \langle \boldsymbol{w}_j, \boldsymbol{w}_i \rangle = \sum_{i=1}^r \langle \boldsymbol{w}_j, \boldsymbol{w}_i \rangle x_i.$$

on alguns termes del sumatori que han desaparegut ja que corresponen a productes de vectors ortogonals. L'expressió donada correspon a la forma matricial d'aquest sistema de r equacions amb r incògnites i com que el determinant de la matriu és no nul és un sistema amb solució única que proporciona les coordenades de $\boldsymbol{v}_1$ en la base de W. $\square$

En particular, si $W = \langle \boldsymbol{w} \rangle$ és la recta generada pel vector $\boldsymbol{w}$, la projecció ortogonal d'un vector $\boldsymbol{v}$ sobre aquesta recta és:

$$\pi_W(\boldsymbol{v}) = \frac{\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle}{\langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{w} \rangle} \boldsymbol{w}.$$

En el cas que la base $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_r$ sigui una base ortonormal del subespai W, es té:

$$\pi_W(\boldsymbol{v}) = \sum_{i=1}^r \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_i \rangle \boldsymbol{w}_i.$$

Mètode dels mínims quadrats. Siguin $\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ una matriu i $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ un vector columna. El sistema lineal $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ pot no tenir solució. Això és el que passa en general en els anomenats *sistemes sobredeterminats*, que són sistemes amb més equacions que incògnites.

En aquesta situació en que no hi ha "solucions exactes" pot ser d'utilitat trobar "solucions aproximades": vectors $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ tals que $\boldsymbol{Ax}$ aproximi $\boldsymbol{b}$ el millor possible. Aquesta condició de ser una bona aproximació es pot definir amb precisió demanant que la distància euclidiana entre el vector $\boldsymbol{Ax}$ i el vector $\boldsymbol{b}$ a l'espai $\mathbb{R}^m$ sigui el més petita possible.

Proposició 5.4.9 *Els vectors $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ que minimitzen el valor de la norma $\|\boldsymbol{Ax} - \boldsymbol{b}\|$ són les solucions del sistema lineal $\boldsymbol{A}^t\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{A}^t\boldsymbol{b}$.*

PROVA: El vector $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{Ax} \in \mathbb{R}^m$ que minimitza la norma $\|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{b}\|$ és la projecció ortogonal del vector $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ en el subespai $W \subseteq \mathbb{R}^m$ format pels vectors $\boldsymbol{Ax}$. Aquest subespai està generat pels vectors columna de la matriu $\boldsymbol{A}$. La proposició 5.4.8 també val si els vectors $\boldsymbol{w}_i$ són una família de generadors del subespai W i no necessàriament base. Les columnes $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_n$ de la matriu $\boldsymbol{A}$ són generadors del subespai W. Aleshores la matriu $(\langle \boldsymbol{w}_i, \boldsymbol{w}_j \rangle)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ és la matriu $\boldsymbol{A}^t\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ i el vector $(\langle \boldsymbol{w}_i, \boldsymbol{v} \rangle) \in \mathbb{R}^n$ és el vector $\boldsymbol{A}^t\boldsymbol{b}$, per tant l'enunciat és la traducció directa de la proposició 5.4.8. $\square$

Problemes

5.20. Comproveu que si en un espai euclidià V es considera la recta $R = \langle \boldsymbol{w} \rangle$ generada pel vector $\boldsymbol{w}$ aleshores per a tot vector $\boldsymbol{v} \in V$ es té:

$$\boldsymbol{v} - \frac{\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle}{\langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{w} \rangle} \boldsymbol{w} \in R^{\perp}.$$

SOLUCIÓ: Els vectors de $R^{\perp}$ són els ortogonals al vector $\boldsymbol{w}$. Es té:

$$\left\langle \boldsymbol{v} - \frac{\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle}{\langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{w} \rangle} \boldsymbol{w}, \boldsymbol{w} \right\rangle = \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle - \frac{\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle}{\langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{w} \rangle} \langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{w} \rangle = 0.$$

5.21. Calculeu la distància de $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ a la recta $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}$.

SOLUCIÓ: La recta està generada pel vector $(1, 1)$. El seu subespai ortogonal és la recta generada pel vector $\boldsymbol{w} = (1, -1)$. La distància és per tant la norma de la projecció de (a, b) en aquesta recta, que és:

$$\|\pi_{\langle \boldsymbol{w} \rangle}((a, b))\| = \left| \frac{\langle (a, b), (1, -1) \rangle}{\langle (1, -1), (1, -1) \rangle} (1, -1) \right| = \left\| \frac{a - b}{2} (1, -1) \right\| = \frac{|a - b|}{\sqrt{2}}.$$

5.22. Trobeu el punt del pla $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$ més pròxim al punt $(1, 2, 3)$.

SOLUCIÓ: Aquest punt és la projecció ortogonal del punt $(1, 2, 3)$ en el pla W. La recta ortogonal al pla és $W^{\perp} \langle (1, 1, 1) \rangle$. Es té:

$$\pi_{W^{\perp}}((1, 2, 3)) = \frac{\langle (1, 1, 1), (1, 2, 3) \rangle}{\langle (1, 1, 1), (1, 1, 1) \rangle} (1, 1, 1) = (2, 2, 2),$$

i es troba la projecció ortogonal en el pla com la diferència:

$$\pi_W((1, 2, 3)) = (1, 2, 3) - \pi_{W^{\perp}}((1, 2, 3)) = (-1, 0, 1).$$

També es pot calcular directament considerant la base del pla $\{(1, 0, -1), (0, 1, -1)\}$ i resolent el sistema lineal:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad (x, y) = (-1, 0)$$

d'on es dedueix la solució $(-1)(1, 0, -1) + 0(0, 1, -1) = (-1, 0, 1)$.

5.23. Considereu el pla $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x + y\}$ i trobeu, per a cada $\boldsymbol{v} = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, el vector del pla que està més a prop de $\boldsymbol{v}$ i digueu quina és la distància $d(\boldsymbol{v}, W)$.

SOLUCIÓ: El pla és l'ortogonal de la seva recta ortogonal $W^{\perp} = \langle \boldsymbol{w} \rangle$ amb vector $\boldsymbol{w} = (1, 1, -1)$. El vector de W més pròxim a $\boldsymbol{v}$ és

$$\begin{aligned} \pi_W(\boldsymbol{v}) &= \boldsymbol{v} - \pi_{W^{\perp}}(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v} - \frac{\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle}{\langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{w} \rangle} \boldsymbol{w} = (a, b, c) - \frac{a + b - c}{3} (1, 1, -1) \\ &= \frac{1}{3}(2a - b - c, -a + 2b + c, a + b + 2c). \end{aligned}$$

La distància és:

$$d(\boldsymbol{v}, W) = \|\boldsymbol{v} - \pi_W(\boldsymbol{v})\| = \|\pi_{W^{\perp}}(\boldsymbol{v})\| = \frac{|a + b - c|}{\sqrt{3}}.$$

5.24. A $\mathbb{R}_n[X]$ es considera el producte escalar amb el qual la base $\{1, X, \ldots, X^n\}$ és una base ortonormal. Sigui $W = \{P(X) \in \mathbb{R}_n[X] : P(1) = 0\}$.

1. Doneu una base del complementari ortogonal de W.

2. Demostreu que la distància d'un polinomi $P(X) \in \mathbb{R}_n[X]$ al subespai W és $|P(1)|/\sqrt{n+1}$.

SOLUCIÓ: El producte escalar en aquest espai és el que dóna:

$$\left\langle \sum_{i=0}^{n} a_i X^i, \sum_{j=0}^{n} b_j X^j \right\rangle = \sum_{i=0}^{n} a_i b_i.$$

El subespai W està format pels polinomis $P(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$ tals que $a_0 + a_1 + \cdots + a_n = 0$. Té dimensió n i admet com a base els polinomis $X - 1, X^2 - 1, \ldots, X^n - 1$. El seu complementari ortogonal $W^\perp$ és òbviament el subespai generat pel polinomi $Q(X) = 1 + X + X^2 + \cdots + X^n$. Aleshores $\langle P(X), Q(X) \rangle = a_0 + a_1 + \cdots + a_n = P(1)$ i, per tant,

$$\pi_W(P(X)) = P(X) - \pi_{W^\perp}(P(X)) = P(X) - \frac{\langle Q(X), P(X) \rangle}{\langle Q(X), Q(X) \rangle} Q(X) = P(X) - \frac{P(1)}{n+1} Q(X).$$

La distància de $P(X)$ a aquesta projecció és la norma de $\pi_{W^\perp}(P(X))$, que és:

$$\frac{|P(1)|}{n+1} \|Q(X)\| = \frac{|P(1)|}{\sqrt{n+1}}.$$

Una altra manera de calcular la projecció és considerar la base de vectors $W_i(X) = X^i - 1$. Es té $\langle W_i(X), W_j(X) \rangle = 1$ si $i \neq j$ i $\langle W_i(X), W_i(X) \rangle = 2$. També $\langle W_i(X), P(X) \rangle = a_i - a_0$. La projecció ortogonal ve donada, doncs, com:

$$\pi_W(P(X)) = \sum_{i=1}^{n} x_i W_i(X) = \left(-\sum_{i=1}^{n} x_i \right) + \sum_{i=1}^{n} x_i X^i,$$

amb coeficients les solucions del sistema lineal:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - a_0 \\ a_2 - a_0 \\ \vdots \\ a_n - a_0 \end{pmatrix}.$$

Es veu sense dificultat que la inversa de la matriu del sistema és la matriu amb entrada (i,j) igual a $-1/(n+1)$ si $i \neq j$ i $n/(n+1)$ si $i = j$. Per tant,

$$x_i = \frac{n}{n+1}(a_i - a_0) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{-1}{n+1}(a_j - a_0),$$

i es dedueix que $\pi_W(P(X)) = \sum_{i=0}^{n} p_i X^i$ amb:

$$p_0 = -\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{n}{n+1} \sum_{i=1}^{n} (a_0 - a_i) - \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} (a_j - a_0) = \frac{n}{n+1} a_0 + \frac{1}{n+1} a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i.....$$

5.25. Trobeu una base ortonormal del subespai $F \subseteq E$, amb:

1. $E = \mathbb{R}^4$ amb el producte escalar ordinari i F definit per l'equació $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$.
2. $F = E = \mathbb{R}^3$ amb el producte escalar definit per la matriu:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

3. $E = \mathscr{C}([0,1], \mathbb{R})$ amb el producte escalar $\langle f, g\rangle = \int_0^1 fg$ i $F = \langle 1, x, x^2\rangle$.

SOLUCIÓ:

1. Una base de l'espai és $(1,0,0,-1), (0,1,0,-1), (0,0,1,-1)$. Aplicant Gram-Schmidt es troba la base ortonormal $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,0,-1)$, $\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,2,0,-1)$, $\frac{1}{2\sqrt{3}}(-1,-1,3,-1)$.
2. Aplicant Gram-Schmidt a la base canònica s'obté la base $(1,0,0)$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0)$, $\frac{1}{2}(-1,0,1)$.
3. Aplicant Gram-Schmidt a la base $1, x, x^2$ resulta la base $1, \sqrt{3}(-1+2x), \sqrt{5}(1-6x+6x^2)$. Si es fa sobre la mateixa base però en l'ordre invers dóna una altra base ortonormal, que és: $\sqrt{5}x^2, 4\sqrt{3}(x - \frac{5}{4}x^2), 3 - 12x + 10x^2$.

5.26. *Sèries de Fourier.* Es considera l'espai euclidià $V = \mathscr{C}([-\pi,\pi], \mathbb{R})$ de les funcions contínues a l'interval $[-\pi, \pi]$ amb el producte escalar usual. Es consideren les funcions:

$$\cos(nx) \ \text{ per a } \ n \geqslant 0 \qquad \text{i} \qquad \sin(nx) \ \text{ per a } \ n \geqslant 1. \tag{5.3}$$

Per a cada $N \geqslant 0$ es defineix el subespai:

$$\mathrm{Trig}_N = \left\langle \cos(nx) \right\rangle_{0 \leqslant n \leqslant N} + \left\langle \sin(nx) \right\rangle_{1 \leqslant n \leqslant N}.$$

1. Demostreu que les funcions (5.3) són ortogonals entre elles.
2. Calculeu la norma de les funcions (5.3).
3. Comproveu que les funcions (5.3) segueixen sent ortogonals i tenen la mateixa norma en l'espai $\mathscr{C}([t, t+2\pi], \mathbb{R})$ de les funcions contínues en qualsevol interval de longitud 2π.
4. Escriviu les coordenades de la projecció ortogonal d'una funció $f(x) \in V$ en el subespai Trig_N.
5. Calculeu aquestes coordenades per a les funcions $f(x) = x$, $f(x) = x^2$ i $f(x) = x^3$.

SOLUCIÓ: 1. A partir de les fórmules d'adició trigonomètriques

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta \quad i \quad \cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

es dedueixen les identitats següents

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)),$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)), \quad \sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)).$$

Tenint en compte que les funcions trigonomètriques són periòdiques de període 2π, si $m \neq n$,

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\cos(mx)\,dx &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sin((n+m)x) + \sin((n-m)x)\,dx \\
&= -\frac{\cos((n+m)x)}{2(n+m)} - \frac{\cos((n-m)x)}{2(n-m)}\Bigg]_{-\pi}^{\pi} = 0, \\
\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(mx)\,dx &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos((n+m)x) + \cos((n-m)x)\,dx \\
&= \frac{\sin((n+m)x)}{2(n+m)} + \frac{\sin((n-m)x)}{2(n-m)}\Bigg]_{-\pi}^{\pi} = 0, \\
\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\sin(mx)\,dx &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos((n-m)x) - \cos((n+m)x)\,dx \\
&= \frac{\sin((n-m)x)}{2(n-m)} - \frac{\sin((n+m)x)}{2(n+m)}\Bigg]_{-\pi}^{\pi} = 0.
\end{aligned}$$

A més, per a tot $n \geqslant 1$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\cos(nx)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(2nx)\,dx = -\frac{\cos(2nx)}{4n}\Big]_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

2. La funció $\cos(0x) = 1$ té norma 2π. Per a $n \geqslant 1$ es té

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(2nx) + 1\,dx = \frac{\sin(2nx)}{4n} + \frac{x}{2}\Big]_{-\pi}^{\pi} = \pi,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(nx)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} 1 - \cos(2nx)\,dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2nx)}{4n}\Big]_{-\pi}^{\pi} = \pi.$$

3. Es veu veient que les integrals anteriors calculades a l'interval $[t, t+2\pi]$ donen totes el mateix resultat ja que al final es tracta de restar el valor de funcions trigonomètriques del tipus $\sin(kx)$ o $\cos(kx)$ amb k un enter no nul, en els dos punts $x = t$ i $x = t + 2\pi$, en els quals prenen el mateix valor per periodicitat.

4. Donat que les funcions són ortogonals i tenint en compte les seves normes, la projecció ortogonal d'una funció $f(x)$ en el subespai Trig_N és la funció:

$$\pi_{\mathrm{Trig}_N}(f) = a_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

amb coeficients:

$$a_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx, \quad a_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx, \quad b_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx.$$

5.27. *Polinomis de Txebixev.* A l'espai vectorial dels polinomis a coeficients reals es considera el producte escalar:

$$\langle p, q\rangle_w = \int_{-1}^{1} w(x)p(x)q(x)\,dx,$$

on $w\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ és una funció contínua positiva, anomenada *funció pes*. Els polinomis de Txebixev són una família de polinomis en l'interval $[-1,1]$ que són ortogonals per al producte escalar corresponent a la funció pes $w(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$, i que es defineixen de manera recurrent posant:

$$T_0(X) = 1, \quad T_1(X) = X, \qquad T_{n+1}(X) = 2XT_n(X) - T_{n-1}(X), \quad n \geqslant 1.$$

Calculeu els polinomis de Txebixev T_n fins a $n = 5$ i demostreu que la família $\{T_n\}_{n\geqslant 0}$ és una base ortogonal de l'espai $\mathbb{R}[X]$.

INDICACIÓ: Demostreu que posant $x = \cos\alpha$ es té $T_n(x) = \cos(n\alpha)$.

SOLUCIÓ: Els primers polinomis de Txebixev, calculats amb la fórmula de recurrència, són:

$$\begin{aligned}
T_0(X) &= 1\\
T_1(X) &= X\\
T_2(X) &= 2X^2 - 1\\
T_3(X) &= 4X^3 - 3X\\
T_4(X) &= 8X^4 - 8X^2 - 1\\
T_5(X) &= 16X^5 - 20X - 5
\end{aligned}$$

En fer el canvi indicat es té: $T_0(x) = 1 = \cos 0 = \cos 0\alpha, T_1(x) = x = \cos\alpha$ i, suposant que la identitat $T_k(x) = \cos(k\alpha)$ es compleix per a tot $k \leqslant n$, es té:

$$\begin{aligned} T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) &= 2\cos\alpha\cos(n\alpha) - \cos((n-1)\alpha) \\ &= 2\cos(n\alpha)\cos\alpha - \big(\cos(n\alpha)\cos(-\alpha) - \sin(n\alpha)\sin(-\alpha)\big) \\ &= \cos(n\alpha)\cos\alpha - \sin(n\alpha)\sin\alpha = \cos((n+1)\alpha). \end{aligned}$$

Com que cada polinomi $T_n(X)$ té grau n és clar que formen una base de l'espai vectorial $\mathbb{R}[X]$. Per veure la seva ortogonalitat es calculen els productes escalars fent el canvi de variable $x = \cos\alpha$, $dx = -\sin\alpha\, d\alpha$ i quan $\alpha \in [0, \pi]$ es té $\sqrt{1-x^2} = \sin\alpha$, i quan $n \neq m$ es té:

$$\begin{aligned} \langle T_n, T_m\rangle_w &= \int_{-1}^{1} w(x)P_n(x)P_m(x)\,dx = -\int_{\pi}^{0}\cos(n\alpha)\cos(m\alpha)\,d\alpha \\ &= \int_0^{\pi}\frac{1}{2}\big(\cos((n+m)\alpha) + \cos((n-m)\alpha)\big)\,d\alpha = \frac{\sin((n+m)\alpha)}{2(n+m)} + \frac{\sin((n-m)\alpha)}{2(n-m)}\Big]_0^{\pi} = 0 \end{aligned}$$

ja que la funció sinus val zero en tots els múltiples enters de π.

Tot i que no ho demanen és fàcil calcular la norma dels polinomis de Txebixev:

$$\|T_0\|_w = \int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{\pi} d\alpha = \pi,$$

i, per a tot $n > 0$, es té:

$$\|T_n\|_w = \int_{-1}^{1}\frac{T_n(x)^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{\pi}\cos^2(n\alpha)\,d\alpha = \int_0^{\pi}\frac{1}{2}(\cos(2n\alpha)+1)\,d\alpha = \frac{\sin(2n\alpha)}{4n} + \frac{x}{2}\Big]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}.$$

Per tant la base formada pels polinomis $\pi^{-1/2}T_0(X)$ i $(\pi/2)^{-1/2}T_n(X)$ per a $n > 0$ és una base ortonormal de l'espai de polinomis $\mathbb{R}[X]$ respecte del producte escalar $\langle\cdot,\cdot\rangle_w$.

5.28. *Càlcul de la projecció ortogonal.* Comproveu que la proposició 5.4.8, interpretada convenientment, també dóna la projecció ortogonal d'un vector en un subespai en termes d'una família generadora del subespai, que no necessàriament sigui una base.

SOLUCIÓ: Si els vectors $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_r$ són simplement generadors del subespai $W \subseteq V$ aleshores els coeficients $x_1, \ldots, x_r$ de totes les expressions de la projecció ortogonal $\pi_W(\boldsymbol{v}) = \sum x_i\boldsymbol{w}_i$ d'un vector $\boldsymbol{v} \in V$ en el subespai W són les solucions del sistema lineal $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ amb

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \langle\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_1\rangle & \langle\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2\rangle & \cdots & \langle\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_r\rangle \\ \langle\boldsymbol{w}_2,\boldsymbol{w}_1\rangle & \langle\boldsymbol{w}_2,\boldsymbol{w}_2\rangle & \cdots & \langle\boldsymbol{w}_2,\boldsymbol{w}_r\rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle\boldsymbol{w}_r,\boldsymbol{w}_1\rangle & \langle\boldsymbol{w}_r,\boldsymbol{w}_2\rangle & \cdots & \langle\boldsymbol{w}_r,\boldsymbol{w}_r\rangle \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix}, \qquad \text{i} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} \langle\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{v}\rangle \\ \langle\boldsymbol{w}_2,\boldsymbol{v}\rangle \\ \vdots \\ \langle\boldsymbol{w}_r,\boldsymbol{v}\rangle \end{pmatrix}.$$

La demostració és la mateixa que la de la proposició: només cal prendre vectors $\boldsymbol{w}_{r+1}, \ldots, \boldsymbol{w}_n$ que siguin una base (o, més en general, n'hi ha prou que siguin generadors) del subespai ortogonal $W^{\perp}$. Aleshores la família $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_n$ tota sencera genera V. Pel teorema de la projecció ortogonal es té $\boldsymbol{v} = \pi_W(\boldsymbol{v}) + \pi_{W^\perp}(\boldsymbol{v})$ de manera única. Per tant, qualsevol expressió $\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^n x_i\boldsymbol{w}_i$ ha de tenir components $\pi_W(\boldsymbol{v}) = \sum_{i=1}^r x_i\boldsymbol{w}_i \in W$ i $\pi_{W^\perp}(\boldsymbol{v}) = \sum_{i=r+1}^n x_i\boldsymbol{w}_i \in W^\perp$. Per a cada índex $j = 1, \ldots, r$ es té:

$$\langle\boldsymbol{w}_j,\boldsymbol{v}\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i\langle\boldsymbol{w}_j,\boldsymbol{w}_i\rangle = \sum_{i=1}^{r}\langle\boldsymbol{w}_j,\boldsymbol{w}_i\rangle x_i.$$

de manera que els coeficients x_i són solucions del sistema. Per altra banda, donada una solució $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant r}$ del sistema el vector $\sum x_i\boldsymbol{w}_i$ corresponent és un vector de W tal que $\boldsymbol{v} - \sum x_i\boldsymbol{w}_i \in W^\perp$, ja que cada equació assegura que aquest vector és ortogonal a un dels generadors $\boldsymbol{w}_j$. Per tant, necessàriament ha de ser $\sum_{i=1}^r x_i\boldsymbol{w}_i = \pi_W(\boldsymbol{v})$.

5.29. Resoleu els sistemes sobredeterminats següents tot comprovant primerament que les matrius tenen el rang adequat. Calculeu també els residus de les solucions obtingudes, i deduïu d'aquest càlcul si algun dels sistemes plantejats és compatible.

$$\text{(a)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$\text{(b)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{(c)} \quad \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -1 \\ 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Solució: El l'exemple (a) es té

$$\boldsymbol{A}^t\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{A}^t\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{x} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{Ax} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}, \ \|\boldsymbol{Ax} - \boldsymbol{b}\| = 4\sqrt{2/7}.$$

L'exemple (b) dóna

$$\boldsymbol{A}^t\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ -1 & 12 & -1 \\ -2 & -1 & 7 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{A}^t\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{x} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{Ax} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}, \ \|\boldsymbol{Ax} - \boldsymbol{b}\| = 2/\sqrt{7}.$$

L'exemple (c) és

$$\boldsymbol{A}^t\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 30 & 20 \\ 20 & 46 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{A}^t\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 40 \\ -6 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{Ax} = \begin{pmatrix} 26 \\ 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \|\boldsymbol{Ax} - \boldsymbol{b}\| = 0.$$

5.30. Donades funcions $f_1, f_2, \ldots, f_n$ es vol trobar la combinació lineal $f = a_1 f_1 + \cdots + a_n f_n$ que millor aproximi una colla de punts $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_m, y_m)$. Digueu quin és el sistema lineal sobredeterminat que dóna la solució.

Solució: Els coeficients $a_1, a_2, \ldots, a_n$ són la solució del sistema lineal de m equacions i n incògnites $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ amb

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} f_1(x_1) & f_2(x_1) & \cdots & f_n(x_1) \\ f_1(x_2) & f_2(x_2) & \cdots & f_n(x_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1(x_m) & f_2(x_m) & \cdots & f_n(x_m) \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}.$$

5.31. Trobeu la recta de regressió que defineixen els punts següents:

$$(1, -1), \ (3, 0), \ (5, 0), \ (7, 1), \ (9, 2), \ (12, 4).$$

Solució: La recta $a + bx$ és una combinació lineal de les funcions 1 i x. Per trobar els coeficients es resol el sistema sobredeterminat

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 5 \\ 1 & 7 \\ 1 & 9 \\ 1 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

La seva solució és $(a,b) = \left(\frac{-162}{97}, \frac{42}{97}\right)$. Per tant la recta és $y = (-162+42x)/97$.

5.32. Trobeu la paràbola del tipus $y = a+bx+cx^2$ que aproximi els quatre punts $(0,1),(1,3),(2,4),(3,5) \in \mathbb{R}^2$ amb un error mínim.

SOLUCIÓ: La paràbola que minimitza l'error s'obté com a solució del sistema sobredeterminat:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

La solució és $(a,b,c) = \left(\frac{21}{20}, \frac{41}{20}, \frac{-1}{4}\right)$. Per tant la paràbola és $y = (21+41x-5x^2)/20$.

5.5 Endomorfismes simètrics

Definició 5.5.1 (Endomorfisme simètric) *Un endomorfisme $f \in \mathrm{End}(V)$ d'un espai vectorial euclidià $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ es diu* simètric *(o autoadjunt) si per a tot parell de vectors $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ es compleix: $\langle f(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{v}\rangle = \langle \boldsymbol{u}, f(\boldsymbol{v})\rangle$.*

Proposició 5.5.2 *Un endomorfisme d'un espai euclidià és simètric si, i només si, la seva matriu en una base ortonormal de l'espai és una matriu simètrica.*

PROVA: La matriu $\mathrm{Mat}(\langle\cdot,\cdot\rangle; \mathscr{B})$ del producte escalar en una base ortonormal $\mathscr{B} = \{\boldsymbol{w}_i\}$ és la identitat. Sigui $\boldsymbol{A} = (a_{ij}) = \mathrm{Mat}(f; \mathscr{B})$, de manera que $f(\boldsymbol{w}_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij}\boldsymbol{w}_i$. Per linealitat, la identitat $\langle f(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{v}\rangle = \langle \boldsymbol{u}, f(\boldsymbol{v})\rangle$ es compleix per a tot parell de vectors $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ si, i només si, es compleix per a tot parell de vectors d'una base. Es té:

$$\langle f(\boldsymbol{w}_r), \boldsymbol{w}_s\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n a_{ir}\boldsymbol{w}_i, \boldsymbol{w}_s \right\rangle = \sum_{i=1}^n a_{ir}\langle \boldsymbol{w}_i, \boldsymbol{w}_s\rangle = a_{sr},$$
$$\langle \boldsymbol{w}_r, f(\boldsymbol{w}_s)\rangle = \left\langle \boldsymbol{w}_r, \sum_{i=1}^n a_{is}\boldsymbol{w}_i \right\rangle = \sum_{i=1}^n a_{is}\langle \boldsymbol{w}_r, \boldsymbol{w}_i\rangle = a_{rs},$$

i per tant la igualtat $\langle f(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{v}\rangle = \langle \boldsymbol{u}, f(\boldsymbol{v})\rangle$ per a tot parell de vectors $\boldsymbol{u}$ i $\boldsymbol{v}$ de l'espai V equival al fet que la matriu $\boldsymbol{A}$ sigui simètrica. □

Proposició 5.5.3 *Tota matriu simètrica $\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ té tots els vectors propis reals. O sigui, el polinomi característic $\mathrm{Char}(\boldsymbol{A}; X) \in \mathbb{R}[X]$ té tantes arrels reals com el seu grau, comptant multiplicitats.*

PROVA: La matriu es pot pensar també com una matriu amb entrades complexes $\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. El teorema fonamental de l'àlgebra assegura que el polinomi característic té alguna arrel complexa, i per tant existeix algun valor propi complex λ. Sigui $\boldsymbol{z} = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ un vector propi de valor propi λ; o sigui, tal que $\boldsymbol{A}\boldsymbol{z} = \lambda\boldsymbol{z}$. Com que les entrades de la matriu $\boldsymbol{A}$ són nombres reals, prenent conjugats a tot arreu es veu que $\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{z}} = \overline{\lambda}\overline{\boldsymbol{z}}$, amb $\overline{\boldsymbol{z}} = (\overline{z}_1, \ldots, \overline{z}_n)$ el vector que té les components conjugades de les de $\boldsymbol{z}$. El nombre:

$$\sum_{i=1}^n |z_i|^2 = \sum_{i=1}^n z_i\overline{z}_i = \boldsymbol{z}^t\overline{\boldsymbol{z}} = \overline{\boldsymbol{z}}^t\boldsymbol{z} = \sum_{i=1}^n \overline{z}_i z_i$$

és un real positiu. Fent servir que $\boldsymbol{A}$ és simètrica, es té la igualtat de nombres complexos:

$$\lambda\sum_{i=1}^{n}|z_i|^2 = \lambda\overline{\boldsymbol{z}}^t\boldsymbol{z} = \overline{\boldsymbol{z}}^t\lambda\boldsymbol{z} = \overline{\boldsymbol{z}}^t\boldsymbol{A}\boldsymbol{z} = (\overline{\boldsymbol{z}}^t\boldsymbol{A}\boldsymbol{z})^t = \boldsymbol{z}^t\boldsymbol{A}^t\overline{\boldsymbol{z}} = \boldsymbol{z}^t\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{z}} = \boldsymbol{z}^t\overline{\lambda}\overline{\boldsymbol{z}} = \overline{\lambda}\boldsymbol{z}^t\overline{\boldsymbol{z}} = \overline{\lambda}\sum_{i=1}^{n}|z_i|^2.$$

Es dedueix que $\lambda = \overline{\lambda}$ i per tant el valor propi λ és un nombre real. □

Teorema 5.5.4 (Teorema espectral) *Tot endomorfisme simètric d'un espai vectorial euclidià diagonalitza i admet una base de vectors propis que, a més, és una base ortonormal.*

PROVA: Per inducció sobre la dimensió n de l'espai. Si $n = 1$ és evident: tot vector no nul és un vector propi que, en normalitzar-lo, dóna una base ortonormal. Suposi's demostrat per a dimensió $n-1$ i sigui $f \in \mathrm{End}(V)$ un endomorfisme simètric d'un espai euclidià de dimensió n. La proposició anterior assegura que l'endomorfisme té valors propis reals. Sigui $\lambda \in \mathbb{R}$ un valor propi i sigui $\boldsymbol{v} \in V$ un vector propi de valor propi λ. Es pot suposar, dividint-lo per la norma, ja que això no afecta el fet que sigui vector propi, que $\boldsymbol{v}$ és un vector unitari. El teorema de la projecció ortogonal assegura que $\langle\boldsymbol{v}\rangle \oplus \langle\boldsymbol{v}\rangle^{\perp} = V$. El subespai $\langle\boldsymbol{v}\rangle^{\perp}$ és invariant per l'endomorfisme f. En efecte, com que f és simètric,

$$\boldsymbol{u} \in \langle\boldsymbol{v}\rangle^{\perp} \Leftrightarrow \langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle = 0 \Rightarrow \langle f(\boldsymbol{u}),\boldsymbol{v}\rangle = \langle\boldsymbol{u}, f(\boldsymbol{v})\rangle = \langle\boldsymbol{u},\lambda\boldsymbol{v}\rangle = \lambda\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle = 0 \Rightarrow f(\boldsymbol{u}) \in \langle\boldsymbol{v}\rangle^{\perp}.$$

Per hipòtesi d'inducció la restricció de l'endomorfisme f al subespai $\langle\boldsymbol{v}\rangle^{\perp}$ de dimensió $n-1$, que també és un endomorfisme simètric, té una base ortonormal de vectors propis. En afegir el vector $\boldsymbol{v}$ a aquesta base es té una base ortonormal de vectors propis de tot l'espai. □

Corol·lari 5.5.5 (Versió matricial) *Per a tota matriu simètrica* $\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *existeix una matriu ortogonal* $\boldsymbol{P} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ *tal que la matriu* $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ *és diagonal.*

Problemes

5.33. Trobeu l'endomorfisme simètric $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ que compleix les tres condicions següents:

1. $f(1,1,1) = (2,2,2)$,
2. $\mathrm{Tr}(f) = 5$,
3. $(1,-1,0) \in \ker f$.

SOLUCIÓ: Tot endomorfisme simètric té tots els valors propis reals i diagonalitza en una base ortonormal. Aquesta propietat té com a conseqüència que vectors propis de valor propi diferent són ortogonals. Això també es pot demostrar directament: si $\boldsymbol{u}$ i $\boldsymbol{v}$ són veps de vaps $\lambda \neq \mu$ respectivament, aleshores $\lambda\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle = \langle\lambda\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle = \langle f(\boldsymbol{u}),\boldsymbol{v}\rangle = \langle\boldsymbol{u},f(\boldsymbol{v})\rangle = \langle\boldsymbol{u},\mu\boldsymbol{v}\rangle = \mu\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle \Rightarrow (\lambda-\mu)\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle = 0 \Rightarrow \langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle = 0$.

La primera i tercera condició asseguren que els vectors $\boldsymbol{v}_1 = (1,1,1)$ i $\boldsymbol{v}_2 = (1,-1,0)$ són vectors propis de valors propi 2 i 0, respectivament. Com que la traça és 5 el nombre 3 també és un valor propi. Tot vector propi de valor propi 3 ha de ser ortogonal als dos anteriors i per tant ha de ser un múltiple de $\boldsymbol{v}_3 = (1,1,-2)$, ja que $\langle\boldsymbol{v}_3\rangle = \langle\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2\rangle^{\perp}$. Aleshores la base $\{\boldsymbol{v}_i\}_{1\leqslant i\leqslant 3}$ és una base ortogonal de vectors propis de f (si es vol una base ortonormal només cal dividir cada vector per la seva norma). Agafant $\boldsymbol{P}$ com la matriu que té per columnes aquests tres vectors es calcula la matriu $\boldsymbol{A}$ de f en la base canònica com:

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1} \quad \text{amb} \quad \boldsymbol{P} = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 0 & -2\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{A} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}7 & 7 & -1\\ 7 & 7 & -1\\ -2 & -2 & 16\end{pmatrix}.$$

Per tant $f(x,y,z) = \left(\frac{1}{6}(7x+7y-2z), \frac{1}{6}(7x+7y-2z), \frac{1}{3}(-x-y+8z)\right)$. Si en comptes d'aquesta matriu s'agafa la matriu ortogonal P que té per columnes els vectors $\boldsymbol{v}_1/\sqrt{3}, \boldsymbol{v}_2/\sqrt{2}, \boldsymbol{v}_3/\sqrt{6}$ s'obté el mateix resultat:

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^t = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}7 & 7 & -1\\ 7 & 7 & -1\\ -2 & -2 & 16\end{pmatrix},$$

ja que ara es té $\boldsymbol{P}^{-1} = \boldsymbol{P}^t$.

5.34. L'endomorfisme $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ determinat per les imatges $f(1,1,1) = (6,4,4)$, $f(2,1,0) = (4,5,7)$ i $f(1,2,0) = (5,4,5)$, és simètric?

Solució: Es pot veure si és simètric comprovant si $\langle f(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{v}\rangle = \langle \boldsymbol{u}, f(\boldsymbol{v})\rangle$ per a tot parell de vectors, i això equival a que es compleixi per a dos vectors d'una base. Prenent com a base els vectors $\boldsymbol{w}_1 = (1,1,1), \boldsymbol{w}_2 = (2,1,0)$ i $\boldsymbol{w}_3(1,2,0)$ s'han de comprovar totes les nou igualtats corresponents a parells d'aquests vectors: quan s'agafa el mateix vector a cada costat la igualtat és evident. Per simetria, de les sis igualtats restants només se'n han de comprovar tres. Una de les tres és $\langle f(\boldsymbol{w}_1), \boldsymbol{w}_2\rangle = \langle \boldsymbol{w}_1, f(\boldsymbol{w}_2)\rangle$, que es compleix ja que:

$$\langle f(1,1,1),(2,1,0)\rangle = \langle (6,4,4),(2,1,0)\rangle = 16 = \langle (1,1,1),(4,5,7)\rangle = \langle (1,1,1), f(2,1,0)\rangle,$$

i les altres dues es comproven igualment.

Una altra manera: la condició de ser simètric és que la matriu en una base ortonormal sigui simètrica. Com que la base canònica és ortonormal es calcula la matriu $\boldsymbol{A}$ de f en la canònica. Es té:

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6 & 4 & 5\\ 4 & 5 & 4\\ 4 & 7 & 5\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 1\\ 3 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Per tant sí que és simètric. Noti's que la matriu de f en altres bases no té perquè ser simètrica. Per exemple, en la base $\mathscr{B} = \{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3\}$ la matriu de f és:

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix}12 & 21 & 15\\ 4 & -4 & 1\\ -2 & -1 & -2\end{pmatrix},$$

que no és simètrica.

5.35. Trobeu una matriu ortogonal $\boldsymbol{P}_i$ tal que $\boldsymbol{P}_i^{-1}\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{P}_i$ sigui diagonal per a les matrius:

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix}2 & -2\\ -2 & 5\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}.$$

Solució: El teorema espectral dels endomorfismes simètrics ens assegura que les matrius $\boldsymbol{A}_i$ diagonalitzen i que existeixen matrius ortogonals $\boldsymbol{P}_i$ que compleixen la condició de l'enunciat. Per tant l'únic que cal fer és diagonalitzar les matrius assegurant-se que la base de veps és una base ortonormal.

Es té $\mathrm{Char}(\boldsymbol{A}_1; X) = (X-6)(X-1)$. Es calculen veps de vaps 6 i 1 i es troben els vectors $(-1,2)$ i $(2,1)$. Aquests vectors són necessàriament ortogonals. Per tenir una base ortonormal de veps només cal normalitzar-los dividint per la seva norma, que és $\sqrt{5}$. Per tant, es té:

$$\boldsymbol{P}_1 = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{P}_1^t \boldsymbol{A}_1 \boldsymbol{P}_1 = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Igual que l'anterior: $\mathrm{Char}(\boldsymbol{A}_2; X) = X(X-2)$, els vectors $(1,1)$ i $(-1,1)$ són vectors propis de valors propis 2 i 0, respectivament (necessàriament ortogonals), i dividint-los per la seva norma s'obté una base ortonormal:

$$\boldsymbol{P}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{P}_2^t \boldsymbol{A}_2 \boldsymbol{P}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El polinomi característic és $\mathrm{Char}(\boldsymbol{A}_3; X) = -(X-4)(X-1)^2$. Els subespais propis són $V_4 = \langle (1,1,1) \rangle$ i $V_1 = \langle (1,-1,0), (0,1,-1) \rangle$, que són ortogonals tal i com la teoria assegura que han de ser. Per trobar una base de veps ortonormal s'ha de trobar una base ortogonal de V_1. Per exemple, la base $(1,-1,0)$ i $(1,1,-2)$ ho és (es pot trobar amb Gram-Schmidt, tot i que és fàcil de veure-la a simple vista). Normalitzant els tres vectors es té una base ortonormal de vectors propis i s'obté:

$$\boldsymbol{P}_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{P}_3^t \boldsymbol{A}_3 \boldsymbol{P}_3 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5.36. Sigui $f \in \mathrm{End}(E)$ un endomorfisme simètric d'un espai vectorial real. Demostreu que

$$\ker f = \ker f^m \qquad \text{per a tot enter} \quad m \geqslant 1.$$

Solució: En general, per a tot endomorfisme f (no necessàriament simètric) es tenen les inclusions:

$$\ker f \subseteq \ker f^2 \subseteq \cdots \subseteq \ker f^m \subseteq \ker f^{m+1} \subseteq \cdots$$

Sigui $\boldsymbol{v} \in \ker f^2$. Aleshores $\langle f(\boldsymbol{v}), f(\boldsymbol{v}) \rangle = \langle \boldsymbol{v}, f^2(\boldsymbol{v}) \rangle = \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{0} \rangle = 0$, i per ser el producte escalar definit positiu ha de ser $f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}$. Per tant $\ker f^2 = \ker f$. En general, per a tot $n \geqslant 1$, si $\boldsymbol{v} \in \ker f^{n+1}$ aleshores

$$\begin{aligned} \langle f^n(\boldsymbol{v}), f^n(\boldsymbol{v}) \rangle = \langle f(f^{n-1}(\boldsymbol{v})), f^n(\boldsymbol{v}) \rangle &= \langle f^{n-1}(\boldsymbol{v}), f(f^n(\boldsymbol{v})) \rangle \\ &= \langle f^{n-1}(\boldsymbol{v}), f^{n+1}(\boldsymbol{v}) \rangle = \langle f^{n-1}(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{0} \rangle = \boldsymbol{0}, \end{aligned}$$

i es dedueix que $f^n(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}$, de manera que també es té $\ker f^{n+1} = \ker f^n$.