

1.

- (i) Sigui  $F$  un gir de  $\mathbb{E}_{\mathbb{R}}^2$  al voltant d'un punt  $p$ . Si  $F(q_1) = q_2$ , demostreu que  $p$  pertany a la recta perpendicular a  $u = q_2 - q_1$  i que conté al punt  $(q_1 + q_2)/2$ . Com a aplicació, trobeu el gir de  $\mathbb{E}_{\mathbb{R}}^2$  que verifica  $F(1, 1) = (-1, 3)$  i que  $F(2, 0) = (0, 4)$  (equacions, centre i angle de gir).
- (ii) Sigui  $F$  una rotació al voltant d'una recta  $r$  de  $\mathbb{E}_{\mathbb{R}}^3$ . Si  $F(p) = q$ , demostreu que l'eix  $r$  pertany al pla  $\pi$  perpendicular al vector  $u = q - p$  i que conté al punt  $(p + q)/2$ . Com a aplicació, si  $F$  és una rotació de  $\mathbb{E}_{\mathbb{R}}^3$  tal que  $F(1, 1, 1) = (1, 1, 0)$  i que  $F(0, 1, 0) = (1, 0, 1)$ , trobeu l'eix, l'angle de gir i les equacions de  $F$ .

**Resolució**

- (i) Podem resoldre la primera part d'aquest apartat passant per la definició de mediatriu. La mediatriu (a  $\mathbb{E}_{\mathbb{R}}^2$ ) de dos punts és el lloc geomètric de tots els punts que equidisten dels dos donats. Aleshores, primer notem que tant  $p$  com el punt mig  $M := (q_1 + q_2)/2$  pertanyen a la mediatriu. Això es justifica pel punt  $p$  de la següent manera: com que  $F$  és un moviment, la distància entre dos punts i les seves imatges es conserva. Per tant, tenim que  $\|q_1 - p\| = \|F(q_1) - F(p)\| = \|q_2 - p\|$  ( $p$  és punt fix per definició). Com a conseqüència d'aquest fet,  $p$  pertany a la mediatriu. Pel punt  $M$  no cal justificar que hi pertany, ja que per definició de punt mig ja equidista de  $q_1$  i  $q_2$ . Ara volem veure que la mediatriu és perpendicular a la recta  $\langle q_1, q_2 \rangle$ . Per tant, sigui  $x$  un punt de la mediatriu. Aleshores, tenim la següent cadena d'equivalències (abús de notació: s'ometran les fletxes indicadores de vector, és a dir, que  $\vec{AB} \equiv AB$ ):

$$\begin{aligned} \|q_1 x\| = \|q_2 x\| &\iff \langle q_1 x, q_1 x \rangle = \langle q_2 x, q_2 x \rangle \iff \langle q_1 M + Mx, q_1 M + Mx \rangle = \\ &\langle q_2 M + Mx, q_2 M + Mx \rangle \iff \langle q_1 M, q_1 M \rangle + \langle Mx, q_1 M \rangle + \langle q_1 M, Mx \rangle + \langle Mx, Mx \rangle = \\ &\langle q_2 M, q_2 M \rangle + \langle Mx, q_2 M \rangle + \langle q_2 M, Mx \rangle + \langle Mx, Mx \rangle \iff \langle q_1 M, Mx \rangle = \langle q_2 M, Mx \rangle \iff \\ &\langle q_1 M - q_2 M, Mx \rangle = 0 \iff \langle q_1 M + Mq_2, Mx \rangle = 0 \iff \langle q_1 q_2, Mx \rangle = 0. \square \quad (1) \end{aligned}$$

Per tant, la mediatriu és perpendicular a la recta  $\langle q_1, q_2 \rangle$ .

Pel cas particular donat, per trobar les equacions, angle i centre de gir, comencem plantejant com ha de ser la matriu d'aquest gir: com que estem a  $\mathbb{E}_{\mathbb{R}}^2$ , la matriu de la part lineal de  $F$  ha de ser (en alguna base) de la forma

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

Per tant, plantegem les següents equacions:

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Si restem la primera a la segona, queda la següent equació,

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

que té per solució  $\cos \alpha = 0, \sin \alpha = 1$ ; d'aquí tenim l'angle de gir,  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ . Per trobar el terme independent de les equacions de  $F$ , agafem qualsevol de les dues equacions anteriors; per exemple, (2):

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Finalment, busquem el centre de gir, un punt fix:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Per tant, ja tenim totes les dades del moviment; es tracta d'un gir d'angle  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  i de centre  $p_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Les seves equacions són:

$$F \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

- (ii) Per la primera part d'aquest apartat, fem un raonament semblant a l'anterior: com que les distàncies  $d(p, r)$  i  $d(F(q), F(r)) = d(p, r)$  es mantenen iguals a través de la rotació (perquè és un moviment), l'eix  $r$  pertany al pla mediatriu de  $p$  i  $q$ . Utilitzant la demostració (1) amb  $x$  un punt del pla mediatriu, podem veure altre cop que aquest és efectivament perpendicular a la recta  $\langle p, q \rangle$  i per la definició de mediatriu, conté el punt mig del segment  $\bar{p}q$ .

Per trobar les equacions de la  $F$  en particular que ens demanen a la segona part, farem el següent: construïrem els plans perpendiculars a cada segment entre els punts donats i les respectives imatges, en farem la intersecció, i trobarem l'eix al voltant del qual es rota. L'angle de gir el calcularem directament un cop tinguem l'eix. I les equacions de  $F$  les escriurem en una referència ortonormal  $\mathcal{R} = \{p_0; v_1, v_2, v_3\}$  adequada, en la qual tindran la forma

$$F \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aleshores, siguin  $p_1 = (1, 1, 1), F(p_1) = q_1 = (1, 1, 0)$  i  $p_2 = (0, 1, 0), F(p_2) = q_2 = (1, 0, 1)$ ; el vector  $u_1 = p_1 \bar{q}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ , i el vector  $u_2 = p_2 \bar{q}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ; i els punts mitjos de cada segment,

$M_1 = \frac{1}{2}(p_1 + q_1) = \left(1, 1, \frac{1}{2}\right), M_2 = \frac{1}{2}(p_2 + q_2) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ . Amb aquesta informació, construïm els plans perpendiculars a cada segment que passen pels respectius punts mitjos, dels que forma part l'eix (com hem demostrat) i per tant, en fer-ne la intersecció tenim l'eix de rotació.  $\pi_i$  és el pla perpendicular al segment  $p_i \bar{q}_i$  que passa pel seu punt mig  $M_i$  ( $i = 1, 2$ ). Per tant, surten

$$\begin{cases} \pi_1 : & z = \frac{1}{2}; \\ \pi_2 : & -x + y - z = \frac{1}{2}, \end{cases}$$

i la intersecció dóna l'eix de rotació,  $r = \left(0, 1, \frac{1}{2}\right) + \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$ . Ara calculem el pla perpendicular a l'eix de rotació en el que es trobin, per exemple,  $p_1$  i  $q_1$ . En general, el pla perpendicular a

l'eix tindrà equació (dependent del punt de l'eix pel que passi)

$$\pi_d: \quad x + y = d. \quad (4)$$

El pla que busquem passa per  $p_1$  i  $q_1$ ; cal observar que amb que passi per un dels dos ja fem. Per tant, substituïm els valors de les coordenades de  $p_1$  a (4), l'equació de  $\pi_d$  i trobem el pla perpendicular a  $r$  al qual pertanyen  $p_1$  i  $q_1$ ; l'anomenarem  $\pi_\perp$ . Per tant, ens queda

$$\pi_\perp: \quad x + y = 2. \quad (5)$$

Calculem la intersecció amb l'eix de rotació; surt el punt  $o_1 = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$ . Ara, mirem l'angle  $\alpha$  que hi ha entre els vectors  $v_p = o_1\vec{p}_1$  i  $v_q = o_1\vec{q}_1$ :

$$\cos \alpha = \frac{\langle v_p, v_q \rangle}{||v_p|| ||v_q||} = \frac{1}{4}.$$

Si orientem l'eix pel vector  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ , l'angle de gir queda a l'interval  $(0, \pi]$ . Per tant, queda  $\alpha \approx 1.31812$  rad, i les equacions de  $F$  queden, en la referència especial  $\bar{\mathcal{R}}$ ,

$$F \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{15}}{4} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{15}}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**2.** A l'espai euclidià  $\mathbb{E}_{\mathbb{R}}^3$  amb la referència canònica, considerem els moviments  $f, g, h$  següents:  $f$  i  $g$  són les simetries especulars respecte els plans  $\pi: x - y = 0$  i  $\pi': x + y + z = 0$  respectivament, i  $h$  té expressió

$$h(x, y, z) = \frac{1}{3}(x - 2y - 2z + 6, -2x - 2y + z + 6, -2x + y - 2z + 6).$$

- (i) Classifiqueu el moviment  $F = h \circ f$ , tot donant els seus elements característics.
- (ii) Classifiqueu i doneu els elements característics de  $G = g \circ F$ . (Indicació: no cal trobar l'expressió explícita de  $G$ ).
- (iii) Calculeu  $F^{15}(0, 0, 0)$  i  $G^{18}(0, 0, 1)$ .

### Resolució

Informació extreta de l'enunciat: les matrius d' $f$  i  $g$  en referència canònica són

$$M(f; \mathcal{R}_{\text{ord}}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad M(g; \mathcal{R}_{\text{ord}}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (i) Primer cal posar  $h$  en forma matricial, que queda

$$h(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & -2/3 \\ -2/3 & -2/3 & 1/3 \\ -2/3 & 1/3 & -2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

D'aquí podem extreure tant si  $h$  és directe com si té punts fixos; veiem que és un moviment directe, i que té una recta de punts fixos,  $r = (9, 0, 0) + [(-2, 1, 1)]$ . A més, pel teorema de classificació podem igualar les traces de la matriu d' $h$  en dues bases diferents, el que ens diu que  $h$  és una rotació de  $\pi$  rad al voltant de  $r$ . Sabem que  $f$  és un moviment invers, i per tant  $F$  és un moviment invers. Per saber si  $F$  té punts fixos, agafem un subespai director de  $\pi$  i veiem si el vector director de  $r$  hi pertany. Per exemple, un subespai director de  $\pi$  és  $[(1, 1, 0), (0, 0, 1)]$ . Com que el vector director de  $r$  no hi pertany,  $r \cap \pi$  és un sol punt, i pel teorema de classificació, determinem que  $F$  es tracta d'un moviment invers amb un sol punt fix, que calculem tot seguit (calculant la intersecció entre  $r$  i  $\pi$ ); surt  $p_0 = (3, 3, 3)$ .

- (ii) Sabem que  $G$  és un moviment directe, ja que  $\det \tilde{G} = \det \tilde{g} \det \tilde{F}$ , i per tant  $\det \tilde{G} = 1$ , i que no té punts fixos: en particular, l'únic punt fix de  $F$  no pertany al pla de punts fixos de  $g$ . Per tant,  $G$  és un moviment helicoidal. Per calcular el vector de translació característic de  $G$ , agafarem el punt fix de  $F$  i li aplicarem  $G$ .  $G(3, 3, 3) = (-3, -3, -3)$ , i per tant el vector de translació ha de ser  $v = (-6, -6, -6)$ . L'angle de gir el trobarem calculant la matriu de la part lineal de  $G$  i aleshores, igualant la traça amb la forma del teorema de classificació; sortirà  $\alpha = \frac{\pi}{3}$ .