Àlex Batlle Casellas

3.19. Sigui f un endomorfisme d'un espai vectorial E.

(a) **Proveu que** $\operatorname{Im} f^{n+1} \subset \operatorname{Im} f^n$ **i** $\operatorname{Nuc} f^n \subset \operatorname{Nuc} f^{n+1}$ **per a tot nombre natural** n**.**
Com que $f \in \operatorname{End} f$, E és f-invariant, és a dir, que $f(E) \subseteq E$. També tenim que, per ser endomorfisme, $f(f(E)) \subseteq f(E)$, o el que és el mateix, que $\operatorname{Im} f^2 \subseteq \operatorname{Im} f$. Fem un procés inductiu sobre n per veure que

$$\operatorname{Im} f^{n+1} \subset \operatorname{Im} f^n \tag{1}$$

és compleix:

1. Cas base: $n = 0$
En aquest cas, veiem que $\operatorname{Im} f^{0+1} \subseteq \operatorname{Im} f^0 = E$ Com ja hem vist, $f(E) \subseteq E$, i per tant és cert per $n = 0$.
2. Hipòtesi d'inducció:
$$\forall n \leq n_0 \in \mathbb{N} \ \operatorname{Im} f^{n+1} \subseteq \operatorname{Im} f^n. \tag{2}$$
3. Pas inductiu: volem veure que (2) és compleix per tota $n > n_0$. Per veure-ho, construïm l'aplicació lineal f^{n+1}:
$$\begin{aligned} f^{n+1}: \ \operatorname{Im} f^n &\longrightarrow E \\ v &\longmapsto f^{n+1}(v) := f(v) \end{aligned}.$$
Com que f és un endomorfisme, necessàriament $f(V) \subseteq V \ \forall V \subseteq E$ i $f^{n+1}(V) \subseteq \operatorname{Im} f^n \ \forall n > n_0, V \subseteq \operatorname{Im} f^n$. Per tant, $f^{n+1}(\operatorname{Im} f^n) \subseteq \operatorname{Im} f^n \ \forall n \in \mathbb{N}.\square$

Pel cas del nucli, volem veure que:

$$\operatorname{Nuc} f^n \subseteq \operatorname{Nuc} f^{n+1} \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Per tant, sigui $v \in \operatorname{Nuc} f^n$. Aleshores $f(f^n(v)) = f(0) = 0$ i per tant, $v \in \operatorname{Nuc} f^{n+1}.\square$

(b) **Demostreu que, si** E **té dimensió finita, existeix un natural** m **tal que** $\operatorname{Im} f^n = \operatorname{Im} f^m$ **i** $\operatorname{Nuc} f^n = \operatorname{Nuc} f^m$ **per a tot** $n \geq m$**.**
Distingim dos casos: f és invertible i f no és invertible.
En el primer cas, el rang de f necessàriament és el rang màxim de la matriu, i per tant, $\operatorname{Im} f^n = \operatorname{Im} f^m \forall m, n$ i el nucli és l'espai del zero independentment de les m, n, $\operatorname{Nuc} f^n = \operatorname{Nuc} f^m \forall m, n$.
En el segon cas, com que la dimensió de la imatge no pot reduïr-se arbitràriament (està fitada inferiorment per 0 perquè f itera sobre un espai de dimensió finita), existeix una n_0 natural a partir de la qual $\operatorname{rg} f^{n_0+1} = \operatorname{rg} f^{n_0} = 0$. En particular, un cop s'arriba a $\operatorname{Im} f^{n_0} = \{0_E\}$, $f(\operatorname{Im} f^{n_0+k})$ és l'espai del zero per tota k natural. Pel nucli existeix un raonament semblant: tenint en compte que $\{\dim \operatorname{Nuc} f^n\}_n$ no creix arbitràriament (està fitada superiorment perquè f itera sobre un espai de dimensió finita), existeix una n_0 a partir de la qual $\dim \operatorname{Nuc} f^{n_0} = \dim \operatorname{Nuc} f^{n_0+1}$. Ho podem veure per inducció:

- Hipòtesi d'Inducció: $\operatorname{Nuc} f^n = \operatorname{Nuc} f^{n+1}$
- Sigui $v \in \operatorname{Nuc} f^{n+2}$. Aleshores

  $$f^{n+2}(v) = f^{n+1}(f(v)) = 0 \implies f(v) \in \operatorname{Nuc} f^{n+1} = \operatorname{Nuc} f^n.$$

  Aleshores,
  $$f^n(f(v)) = f^{n+1}(v) = 0 \implies v \in \operatorname{Nuc} f^{n+1},$$

  i per tant, $\operatorname{Nuc} f^{n+2} \subseteq \operatorname{Nuc} f^{n+1}$. L'altra inclusió és senzilla de demostrar també: sigui $v \in \operatorname{Nuc} f^{n+1}$, aleshores

  $$0 = f^{n+1}(v) = f^n(f(v)) \implies f(v) \in \operatorname{Nuc} f^n = \operatorname{Nuc} f^{n+1}.$$

  Seguint amb aquest raonament, apliquem f^{n+1} a $f(v)$:

  $$0 = f^{n+1}(f(v)) = f^{n+2}(v) \implies v \in \operatorname{Nuc} f^{n+2},$$

  i per tant, $\operatorname{Nuc} f^{n+1} \subseteq \operatorname{Nuc} f^{n+2}$ i tenim la igualtat.$\square$

(c) **Proveu, donant un contraexemple a l'espai de polinomis $\mathbb{R}[x]$, que l'apartat (b) no és cert si E no té dimensió finita.**
Com a exemple, podem posar l'endomorfisme f de $\mathbb{R}[x]$ en $\mathbb{R}[x]$ tal que assigna a cada $p(x)$ el seu valor en $x = 0$, $p(0)$. En elevar a una potència m natural, passarà el següent:

$$\begin{aligned} f^m :\ & \mathbb{R}[x] \longrightarrow \mathbb{R}[x] \\ & p(x) \longmapsto p^m(0) := p(p(\cdots p(0))\cdots). \end{aligned}$$

Els valors del polinomi $p(x)$ en el zero no sempre són zero (de fet només són zero en el polinomi $p(x) = 0$ i en els polinomis sense terme independent). De fet és possible que iterant sobre el polinomi es trobi una arrel. Un exemple és el cas de $p(x) = x^2 - 1$; el seu $p(0)$ val -1, i el seu $p(p(0))$ val 0. El nucli, doncs, canvia sempre per tota n natural ja que agafant altre cop el mateix exemple, per n parella $p(x) = x^2 - 1$ formarà part del nucli i per n senar, no.