FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA

ApuntsFME

BARCELONA, MARZO 2019

Autor: Ernesto Lanchares.

La elaboración de este documento no habría sido posible sin los apuntes de Iñaki Garrido.

Última modificación: 27 de marzo de 2019.

Contenidos

Tema 1

Números complejos

1.1. Introducción a los números complejos

Los numeros complejos son los números de la forma

$$z = x + iy$$

(con $x, y \in \mathbb{R}$) donde se tiene que $i^2 = -1$ y por lo tanto $i \notin \mathbb{R}$, además se tiene que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ ya que

$$x = x + 0i \in \mathbb{C}.$$

Estos números forman un cuerpo y por lo tanto, podemos definir la operación división. Si $x_2 \neq 0$ o $y_2 \neq 0$

$$\frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Además, $\mathbb{C}$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión 2, con base $\{1, i\}$. Así, podemos definir las componentes de un número imaginario

$$z = \underbrace{x}_{\text{parte real}} + i \overbrace{y}^{\text{parte imaginaria}}.$$

Basandonos en esta definición, podemos definir

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\colon \mathbb{C} &\to \mathbb{R} & \qquad \operatorname{Im}\colon \mathbb{C} &\to \mathbb{R} \\ z = x + iy &\mapsto x, & z = x + iy &\mapsto y. \end{aligned}$$

Como todo cuerpo, el grupo multiplicativo de los complejos es $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Quiere decir que $\mathbb{C}^*$ con el producto es un grupo.

Existe una biyección

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &\leftrightarrow \mathbb{R}^2 \\ z = x + iy &\leftrightarrow (x, y). \end{aligned}$$

A veces nos interesará ver las funciones de una variable compleja como funciones de dos variables reales y viceversa.

Una operación que nos resultará muy útil es la conjugación

$$\begin{aligned} \overline{\cdot}\colon \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ z = x + iy &\mapsto \overline{z} = x - iy. \end{aligned}$$

Una de las propiedades que cumple esta operación es que se trata de un automorfismo de grupos, es decir que

$$\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w} \quad \overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}.$$

Además, también es una involución, es decir, $\bar{\cdot}^2 = \mathrm{Id}$ o dicho de otro modo, $\overline{\overline{z}} = z \; \forall z \in \mathbb{C}$.

Se tiene pues la siguiente igualdad, si $z = x + iy$:

$$x = \frac{1}{2}\left(z + \overline{z}\right) \quad y = \frac{1}{2i}\left(z - \overline{z}\right).$$

Proposición 1.1.1. Sea $P(t) \in \mathbb{R}[x]$ un polinomio con coeficientes reales y $z \in \mathbb{C}$, entonces

$$P\left(z\right) = 0 \iff P\left(\overline{z}\right) = 0.$$

Demostración. Haremos tan solo la demostración hacia la derecha y la implicación hacia la izquierda quedará automaticamente demostrada.

Se tiene

$$\begin{aligned} P\left(\overline{z}\right) &= a_0 + a_1\overline{z} + \cdots + a_n\overline{z}^n = \\ &= \overline{a_0} + \overline{a_1} \cdot \overline{z} + \cdots + \overline{a_n} \cdot \overline{z}^n = \\ &= \overline{a_0} + \overline{a_1 z} + \cdots + \overline{a_n z^n} = \\ &= \overline{a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n} = \\ &= \overline{P(z)} = \overline{0} = 0. \end{aligned}$$

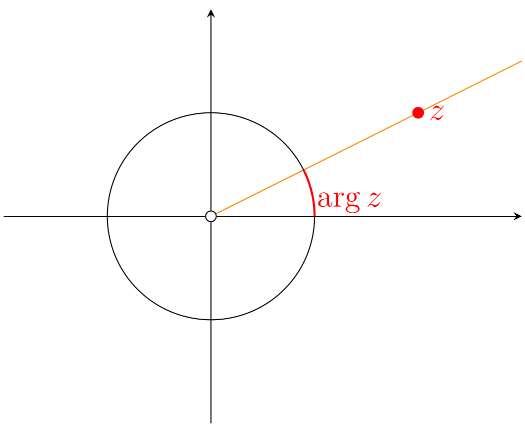
$\square$

Nos será útil también dotar al espacio de una norma (a la que también nos referiremos como valor absoluto o módulo) que definiremos como

$$|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Ese valor corresponde con la distancia euclidiana entre 0 y z.

Otra de las funciones características de los números complejos es el argumento, el argumento es un ángulo α que representa la longitud del arco (de la circunferencia unitaria) comprendido entre el semieje real positivo y la semirecta que parte de 0 y pasa por z.



Lamentablemente, no existe una función continua que cumpla estas características, de tal forma que definiremos

$$\arg z = \arg\left(x + iy\right) = \left\{\alpha + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$$

donde α cumple que $(x, y) = (r\cos\alpha, r\sin\alpha)$ y $r = |z|$.

Definición 1.1.2. Llamaremos determinación del argumento en un conjunto de valores $S \subseteq \mathbb{C}^*$ a una aplicación $\operatorname{Arg}\colon S \to \mathbb{R}$ tal que

$$\operatorname{Arg}(z) \in \arg(z).$$

Observación 1.1.3. Existe lo que conocemos como determinación principal que es la determinación que toma valores en $(-\pi, \pi]$ o la determinación alternativa, que toma valores en $[0, 2\pi)$.

Observación 1.1.4. Existe un problema con las determinaciones y es que no es continua (y por lo tanto tampoco derivable) ni existe ninguna determinación en todo $\mathbb{C}^*$ que lo sea. Pero si que hay determinaciones en otros conjuntos, por ejemplo en $\operatorname{Re}(z) > 0$.

Proposición 1.1.5. Se tiene que $|zw| = |z||w|$ y que $\arg(zw) = \arg(z) + \arg(w)$.

Demostración.

$$|zw| = \sqrt{zw\overline{z}\cdot\overline{w}} = \sqrt{z\overline{z}\cdot w\overline{w}} = \sqrt{z\overline{z}}\sqrt{w\overline{w}} = |z||w|.$$

Por otro lado, tomamos $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ y $w = s(\cos\beta + i\sin\beta)$, entonces

$$zw = rs\left(\underbrace{(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)}_{\cos(\alpha+\beta)} + i\underbrace{(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)}_{\sin(\alpha+\beta}\right)$$

y por lo tanto, $\arg(zw) = \arg(z) + \arg(w)$. □

Corolario 1.1.6. Como consecuencia $\arg\left(z^{-1}\right) = -\arg(z)$, $\arg\left(z/w\right) = \arg(z) - \arg(w)$ y $\arg(z^n) = n\arg(z)$.

Proposición 1.1.7. Si $z \neq 0$ y $n \geq 1$, z tiene exactamente n raíces n-ésimas diferentes. Además, se tiene que si $z - r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ entonces

$$\sqrt[n]{z} = \left\{\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha + 2\pi t}{n} + i\sin\frac{\alpha + 2\pi t}{n}\right) \mid 0 \leq t < n\right\}.$$

Demostración. Se tiene que, si $w = s(\cos\beta + i\sin\beta)$

$$w = \sqrt[n]{z} \iff w^n = s^n(\cos n\beta + i\sin n\beta) = z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha).$$

De donde se obtiene que

$$\begin{cases} r = s^n \iff s = \sqrt[n]{r} \\ n\beta = \alpha + 2\pi k \qquad k \in \mathbb{Z} \iff \beta = \frac{\alpha + 2\pi k}{n}. \end{cases}$$

□

Observación 1.1.8. Las raices n-ésimas de un número complejo forman un polígono regular centrado en el origen. La raiz se trata de una función multivaluada.

1.2. Coordenadas cartesianas y polares

Las coordenadas cartesianas nos sirven para representar los números complejos de la forma (x, y) con $x, y \in \mathbb{R}$ y nos resultan muy útiles a la hora de sumar números complejos.

Por otro lado existen las coordenadas polares, que nos permiten representar $\mathbb{C}^*$ de la forma (r, α) con $r \in \mathbb{R}^+$ y $\alpha \in (-\pi, \pi]$. Está forma nos resulta muy icaz a la hora de multiplicar y dividir números complejos.

Para pasar de coordenadas polares a cartesianas se tiene la fórmula

$$x = r\cos\alpha \quad y = r\sin\alpha.$$

Sin embargo, pasar de la forma cartesiana a la polar no es tan trivial, ya que no existen fórmulas cerradas. Pero se tiene que

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \arg(z) \overset{*}{=} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \overset{*}{=} \arcsin\left(\frac{y}{r}\right) \overset{*}{=} \arccos\left(\frac{x}{r}\right).$$

Usamos $\overset{*}{=}$ ya que no se da la igualdad entre ninguna de las fórmulas ni con el argumento, la fórmula a usar dependerá del cuadrante.

Para notar los números complejos usaremos pues distintas notaciones

forma cartesiana	$z = x + iy$
forma polar	$z = r < \alpha,\ r_\alpha$
forma exponencial	$z = re^{i\alpha}$

Es fácil comprobar que la notacion exponencial se comporta bien con respecto a las operaciones, aquí tan solo comprobamos la multiplicación (el uso de está notación y su corrección se harán evidentes cuando definamos la exponencial compleja).

$$\left.\begin{aligned} z &= re^{i\alpha} \\ w &= se^{i\beta} \end{aligned}\right\} zw = (rs)e^{i(\alpha+\beta)}.$$

1.3. Métrica y topología

Proposición 1.3.1. Se tiene que

i) $|z| \geq 0$ y $|z| = 0 \iff z = 0$,

ii) $|zw| = |z||w|$,

iii) $|z + w| \leq |z| + |w|$.

Demostración. Las dos primeras afirmaciones ya las hemos visto y no deberían representar ningún reto, demostraremos la tercera afirmación:

$$\begin{aligned} |z+w|^2 &= (z+w)\left(\overline{z} + \overline{w}\right) = z\overline{z} + w\overline{w} + z\overline{w} + \underbrace{\overline{z}w}_{\overline{z\overline{w}}} = \\ &= |z|^2 + |w|^2 + 2\operatorname{Re}(z\overline{w}) \leq |z|^2 + |w|^2 + 2|\operatorname{Re}(z\overline{w})| \leq \\ &\leq |z|^2 + |w|^2 + 2|z||w| = (|z| + |w|)^2. \end{aligned}$$

Por último se tiene que

$$|z + w| \leq |z| + |w|.$$

$\square$

Definición 1.3.2. Definiremos la distancia entre los números complejos z y w como

$$\mathrm{d}(z,w) = |z-w|\,.$$

Observación 1.3.3. La distancia tal y como la hemos definido cumple estás tres propiedades

i) $\mathrm{d}(z,w) \geq 0$, $\mathrm{d}(z,w) = 0 \iff z = w$,

ii) $\mathrm{d}(z,w) = \mathrm{d}(w,z)$,

iii) $\mathrm{d}(z,w) \leq \mathrm{d}(z,p) + \mathrm{d}(p,w)$.

Por lo tanto, $(\mathbb{C}, \mathrm{d})$ se trata de un espacio métrico y por lo tanto de un espacio topológico.

Teorema 1.3.4. El espacio $(\mathbb{C}, \mathrm{d})$ es un espacio completo, es decir, que dada una sucesión $(z_n) = (x_n) + i\,(y_n)$, entonces

$$(z_n) \text{ es convergente} \iff (z_n) \text{ es de Cauchy.}$$

Definición 1.3.5. Definimos una serie $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ como una pareja de succesiones (s_n) y (z_n) relacionadas por

$$s_n = \sum_{j=0}^{n} z_j.$$

Llamaremos a s_n suma parcial n-ésima y a z_n término n-ésimo de la serie.

Definición 1.3.6. Sea $\sum z_n$, diremos que es convergente si la sucesión de sumas parciales (s_n) es convergente, asimismo diremos que la serie es absolutamente convergente si la serie $\sum |z_n|$ es convergente.

Por otro lado, diremos que una serie es divergente si no es convergente.

Observación 1.3.7. Existen criterios para saber si una serie es convergente como

- Acotación de las sumas parciales.
- Comparación.
- Criterio del cociente.
- Criterio de la raíz.

Definición 1.3.8. Dadas dos series $\sum z_n$ y $\sum w_n$, definimos el producto de Cauchy como la serie $\sum p_n$ con

$$p_n = \sum_{k=0}^{n} z_k w_{n-k} = \sum_{r+s=n} z_r w_s.$$

Observación 1.3.9. Notaremos el producto de Cauchy como $\left(\sum p_n\right) = \left(\sum z_n\right)\left(\sum w_n\right)$. Notemos también que este producto es conmutativo.

Proposición 1.3.10. Sean $\sum z_n$ y $\sum w_n$ dos series absolutamente convergentes, entonces su producto de Cauchy $\left(\sum p_n\right) = \left(\sum z_n\right)(w_n)$ también es convergente. Y la suma del producto de Cauchy es igual al producto de las sumas.

Demostración. Primero veremos que es convergente. Por ser $\sum |z_k|$ convergente, existe M_z una cota superior, analogamente, existe M_w cota de $\sum |w_n|$, entonces se tiene que

$$\sum_{k=0}^{n} |p_k| = \sum_{k=0}^{n} \left| \sum_{r+s=k} z_r w_s \right| \leq \sum_{k=0}^{n} \sum_{r+s=k} |z_r||w_s| \leq$$
$$\leq \sum_{0\leq r,s\leq n} |z_r||w_s| = \left(\sum_{r=0}^{n} |z_r| \right) \left(\sum_{s=0}^{n} |w_s| \right) \leq M_z M_w.$$

Y por lo tanto, $\sum |p_k|$ es acotada y por lo tanto convergente, así concluimos que $\sum p_k$ es convergente.

Por otro lado, sea $s_n = \sum_{k=0}^{n} z_k$, $t_n = \sum_{k=0}^{n} w_k$, $u_n = \sum_{k=0}^{n} p_k$ y por último $v_n = \sum_{k=0}^{n} q_k$ donde $q_m = \sum_{r+s=m} |z_r||w_s|$ entonce

$$\begin{aligned} |s_n t_n - u_n| &= \left| \left(\sum_{r=0}^{n} z_r \right) \left(\sum_{s=0}^{n} w_s \right) - \sum_{t=0}^{n} p_t \right| = \\ &= \left| \sum_{0\leq r,s\leq n} z_r w_s - \sum_{0\leq r+s\leq n} z_r w_s \right| \leq \\ &\leq \left| \sum_{r+s=n+1}^{2n} z_r w_s \right| \leq \sum_{r+s=n+1}^{2n} |z_r||w_s| = \\ &= v_{2n} - v_n. \end{aligned}$$

Como v_n es convergente, es de Cauchy y por lo tanto $|s_n t_n - u_n| \leq v_{2n} - v_n < \varepsilon$ para algún n suficientemente grande. Concluimos así que el producto de las series parciales tiende a la serie producto. $\square$

Ejercicio 1.3.11. Ver que el resultado es cierto si y solo si al menos una de las dos series es convergente.

1.4. Infinito complejo

Definición 1.4.1. Definiremos $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ donde ∞ quiere decir $|z| = \infty$.

Observación 1.4.2. Este nuevo espacio $\overline{\mathbb{C}}$ es un espacio compacto.

Al ser $\overline{\mathbb{C}}$ un espacio compacto, toda sucesión es convergente y tiene límite, se tiene que $\lim_{n\to\infty} z_n = \infty \iff \forall M > 0 \exists N$ tal que $\forall n \geq N |z_n| > M$. Además, al ser ∞ un elemento más de nuestro espacio, podemos operar tranquilamente con él, obteniendo las siguientes igualdades:

$$\frac{1}{\infty} = 0, \quad \frac{1}{0} = \infty, \quad \infty + z = \infty (\text{si } z \neq \infty), \quad \infty z = \infty (\text{si } z \neq 0).$$

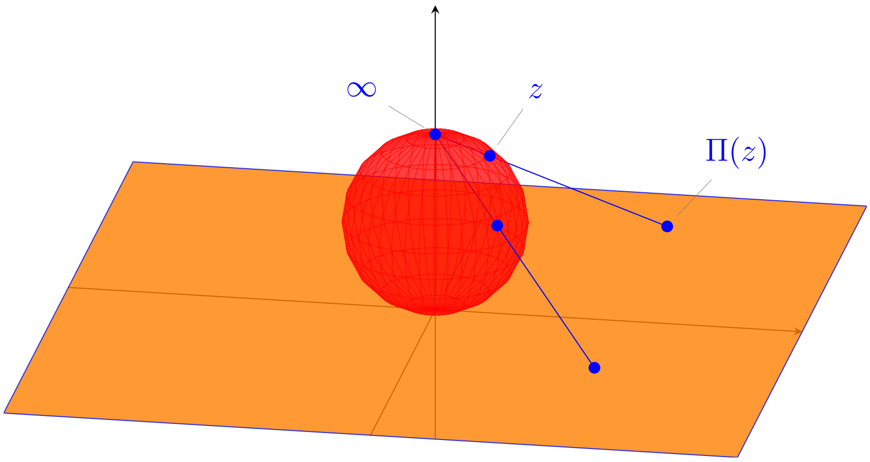
Sin embargo, al añadir el ∞ también nos encontramos con las siguientes indeterminaciones:

$$\infty + \infty, \quad 0\infty, \quad \frac{0}{0}, \quad , \frac{\infty}{\infty}.$$

Observamos también que la recta proyectiva compleja $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}\cup\{\infty\} = \overline{\mathbb{C}}$. Tambien se tiene que $\mathbb{S}^2 \cong \overline{\mathbb{C}}$ a través de la proyección estereológica. Recordamos que

$$\mathbb{S}^2 = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\right\}$$

y la identificación es la correspondiente a trazar rectas desde el punto del infito e identificar los puntos de corte de la esfera y el plano



Numéricamente, se tiene

$$\begin{aligned}\Pi\colon \mathbb{S}^2 &\to \overline{\mathbb{C}}\\ (x_1, x_2, x_3) &\mapsto \begin{cases} \frac{x_1}{1-x_3} + i\frac{x_2}{1-x_3} & \text{si } x_3 \neq 1,\\ \infty & \text{si } x_3 = 1.\end{cases}\end{aligned}$$

Y la identificación inversa

$$\begin{aligned}\Pi^{-1}\colon \overline{\mathbb{C}} &\to \mathbb{S}^2\\ z &\mapsto \begin{cases} \left(\frac{2\operatorname{Re}(z)}{|z|^2+1}, \frac{2\operatorname{Im}(z)}{|z|^2+1}, \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}\right) & \text{si } z \in \mathbb{C},\\ (0,0,1) & \text{si } z = \infty.\end{cases}\end{aligned}$$

Ejercicio 1.4.3. Ver que Π y Π^{-1} corresponden a la definición geométrica dada. Además ver que están bien definidas y son inversas mutuas.

Observación 1.4.4. Π^{-1} induce una topología de antiimagen en $\overline{\mathbb{C}}$ de forma que U es un abierto de $\overline{\mathbb{C}} \iff \Pi^{-1}(U)$ es abierto de $\mathbb{S}^2$ con la topología estándar en $\mathbb{S}^2$.

Tema 2

Funciones de variable compleja

2.1. Funciones componentes, límites y continuidad

Definición 2.1.1. Llamamos función de variale compleja a una función f definida sobre un conjunto $U \subseteq \mathbb{C}$ abierto, es decir

$$\begin{aligned} f\colon U \subseteq \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto f(z) = w. \end{aligned}$$

Observación 2.1.2. Se tiene que $f(z) = u(z) + iv(z)$, donde $u, v\colon U \to \mathbb{R}$ son funciones de variable compleja y valores reales. Notamos así

$$u = \operatorname{Re}(f), \quad v = \operatorname{Im}(f).$$

Definición 2.1.3. Definimos el límite de las funciones de variable compleja de forma análoga a la del resto de funciones, diremos que

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0 \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ t. q. } |z - z_0| \leq \delta \implies |f(z) - w_0| < \varepsilon.$$

Observación 2.1.4. Aunque tan solo definimos el límite, el resto de definiciones son análogas a las definiciones del análisis real.

2.2. Polinomios y funciones racionales

Ejemplo 2.2.1. El ejemplo más simple de funciones de variable compleja son los polinomios

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \in \mathbb{C}[x].$$

Estas funciones están bien definidas y son continuas $\forall z \in \mathbb{C}$.

Otro ejemplo muy común son las funciones racionales, definidas como $R(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \in \mathbb{C}(x)$ donde $p(x), q(x) \in \mathbb{C}[x]$. Estas funciones están bien definidas y son continuas $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{\text{raices de } q(z)\}$.

Definición 2.2.2. Las transformaciones de Möbius son funciones racionales de la forma

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

con $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ y $ad - bc \neq 0$.

Observación 2.2.3. Podemos ampliar la definición a $\overline{\mathbb{C}}$ poniendo $f(\infty) = \frac{a}{c}$ y $f\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty$.

Observación 2.2.4. Podemos hacer una identificación entre las transformaciones de Möbius y $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ obtenida naturalmente de la identificación

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}).$$

De esta identificación obtenemos las siguientes propiedades:

- Cualquier transformación de Móbius es composición de

$$\begin{aligned} z &\mapsto z+b && \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ z &\mapsto az (a \neq 0) && \leftrightarrow \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ z &\mapsto \frac{1}{z} && \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

- Dados $z_1, z_2, z_3, w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{C}$ existe una única f transformación de Möbius tal que $f(z_i) = w_i$ $(i = 1, 2, 3)$.

- Una transformación de Möbius envía rectas a rectas y circunferencias a circunferencias.

- Con la topología de $\overline{\mathbb{C}}$ inducida por $\mathbb{S}^2$ las transformaciones de Möbius son funciones continuas.

Proposición 2.2.5. Sea $K \subseteq \mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$ un conjunto compacto y sea $f\colon K \to \mathbb{R}$ continua. Entonces f toma un valor máximo y un valor mínimo en K.

Proposición 2.2.6. Sea $f(x) \in \mathbb{C}(x)$ una función, $f(x)$ tiene alguna raíz compleja $\iff$ $cf(ax+b)$ tiene alguna raíz. Con $a, c \in \mathbb{C}^*$ y $b \in \mathbb{C}$.

Demostración. Si $\alpha \in \mathbb{C}$ es raíz de f, entonces se tiene que $f(\alpha) = 0$ y que tomando $\beta = \frac{\alpha - b}{a}$ se tiene

$$cf(a\beta + b) = cf(\alpha) = 0.$$

Por otro lado, si α es raíz de $cf(ax+b)$ entonces $\beta = a\alpha + b$ cumple que

$$f(\beta) = f(a\alpha + b) = \frac{0}{c} = 0.$$

□

Proposición 2.2.7. Sea $f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$, $n \geq 1$, $a_n \neq 0$ un polinomio no constante, entonces la función $|f(z)|$ tiene un valor mínimo en $\mathbb{C}$.

Demostración. Se tiene que

$$\lim_{z\to\infty} |f(z)| = \lim_{z\to\infty} |z^n| \left| \frac{f(z)}{z^n} \right| = \lim_{z\to\infty} |z^n||a_n| = \infty.$$

Por lo tanto $\exists r > 0$ tal que $|z| > r \implies |f(z)| > |a_0|$. Consideramos ahora $K = \overline{D}(0; r)$ el disco cerrado de centro 0 y radio r. Sea $m = \min\left\{|f(z)| \mid z \in K\right\}$ que existe por ser K compacto. Entonces $m \leq |f(0)| = |a_0|$ y por lo tanto, $m = \min\{f(z) \mid z \in \mathbb{C}\}$. □

Teorema 2.2.8. *Teorema fundamental del álgebra.*
Todo polinomio no constante, f, con coeficientes complejos tiene alguna raíz compleja.

Demostración. Sabemos por la proposición anterior que $|f(x)|$ tiene un valor mínimo m. Sea $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $|f(z_0)| = m$, consideramos ahora la función $f(x+z_0) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n$, podemos suponer que el valor mínimo se toma en el punto 0 y que por tanto este valor es $|b_0|$. Si $b_0 = 0$ hemos acabado ya que $m = 0$ y f tiene una raíz en z_0. Supondremos que $b_0 \neq 0$ y llegaremos a contradicción.

Consideraremos la función $\frac{1}{b_0} f(x+z_0)$ (que está bien definida porque $b_0 \neq 0$) que toma el valor mínimo en 0 y vale 1. Podemos por tanto reescribir el polinomio como $\frac{1}{b_0} f(x+z_0) = 1 + c_h x^h + \cdots + c_n x^n$ donde h es el primer índice con $c_h \neq 0$ $(1 \leq h \leq n)$. Consideramos por último el polinomio

$$\frac{1}{b_0} f\left(\frac{1}{\sqrt[h]{-c_h}} x + \frac{z_0}{\sqrt[h]{-c_h}}\right) = 1 - x^h + \underbrace{d_{h+1} x^{h+1} + \cdots + d_n x^n}_{x^h g(x)}.$$

Siendo $g(x) \in \mathbb{C}[x]$ un polinomio que cumple que $\lim_{z \to 0} g(z) = 0$. Sea $t \in (0,1)$ tal que $|g(t)| < 1$. Entonces

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{b_0} f\left(\frac{1}{\sqrt[h]{-c_h}} t + \frac{z_p}{\sqrt[h]{-c_h}}\right)\right| &= \left|1 - t^h + t^h g(t)\right| \leq \\ &\leq \left|1 - t^h\right| + t^h |g(t)| = \\ &= 1 - t^h + t^h |g(t)| < \\ &< 1 - t^h + t^h. \end{aligned}$$

Lo cual supone una contradicción con el hecho de que el valor mínimo era 1. □

2.3. Sucesiones y series de funciones

Definición 2.3.1. Definimos una sucesión de funciones como una familia ordenada de funciones $f_i \colon U \to \mathbb{C}$ $(i \geq 0)$ con $U \subseteq \mathbb{C}$ abierto. La notaremos como $(f_n)_{n \geq 0}$.

Definición 2.3.2. Dada una sucesión de funciones $(f_n)_{n \geq 0}$ diremos que tiende puntualmente hacia f y lo notaremos como $(f_n)_{n \geq 0} \to f$ si $(f_n(z))_{n \geq 0} \to f(z)$, $\forall z \in U$.

Definición 2.3.3. Dada una sucesión de funciones $(f_n)_{n \geq 0}$ diremos que tiende uniformemente hacia f si $\forall \varepsilon > 0 \, \exists N$ tal que $n \geq N \implies |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$, $\forall z \in U$.

Definición 2.3.4. Dada una sucesión de funciones $(f_n)_{n \geq 0}$ diremos que tiende uniformemente sobre compactos hacia f si $\forall K \subseteq U$ compacto, $(f_n)_{n \geq 0}$ converge uniformemente hacia f sobre K.

Ejemplo 2.3.5. $f_n = x^n$ no converge uniformemente en $[0,1]$, pero converge uniformemente sobre compactos en $(0,1)$.

Teorema 2.3.6. Sea $U \subseteq \mathbb{C}$ abierto y (f_n) una sucesión que converge uniformemente sobre compactos hacia f. Entonces f_n continua $\forall n \implies f$ continua.

Definición 2.3.7. Definimos una serie de funciones como un par de sucesiones de funciones (f_n) y (s_n) relacionadas de la forma

$$s_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f_n(x).$$

Denotaremos las series como $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ o simplemente $\sum f_n$. Llamaremos suma parcial n-ésima de la serie a s_n y término n-ésimo de la serie a f_n.

Definición 2.3.8. Diremos que una serie $\sum f_n$ es convergente si la sucesión de sumas parciales (s_n) es convergente y diremos que una serie es absolutamente convergente si la serie $\sum |f_n|$ es convergente. Además, cuando la serie sea convergente llamaremos suma de la serie a la función límite de (s_n).

Observación 2.3.9. La convergencia (absoluta o no) de una serie puede ser tanto puntual como uniforme como uniforme sobre compactos.

Proposición 2.3.10. Si una serie es absolutamente convergente puntualmente, entonces es convergente puntualmente. Análogamente si una serie es absolutamente convergente uniformemente entonces es convergente uniformemente.

Proposición 2.3.11. *Criterio M de Weierstrass.* Dadas $f_n \colon U \to \mathbb{C}$ $(n \geq 0)$. Si $|f_n(z)| \leq M_n \, \forall z \in U$ y $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ es convergente, entonces $\sum f_n$ es absolutamente y uniformemente convergente en U.

Definición 2.3.12. Una serie de potencias es una serie de funciones $\sum f_n$ donde $f_n = a_n \left(z - z_0\right)^n$. Llamaremos a $z_0 \in \mathbb{C}$ el centro de la serie y llamaremos coeficiente n-ésimo a a_n.

Observación 2.3.13. Realizando el cambio $w = z - z_0$ envíamos el centro a 0 y simplificamos el estudio de series de potencias.

Definición 2.3.14. Dada una serie de potencias $\sum a_n \left(z - z_0\right)^n$, definimos su radio de convergencia como

$$R = \left(\limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \right)^{-1} \in [0, \infty].$$

Observación 2.3.15. Recordemos que

$$\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \inf \left\{ \sup \left\{ \sqrt[n]{|a_n|} \right\} \right\} = \sup \left\{ \text{límites de las sucesiones parciales} \right\}.$$

Teorema 2.3.16. *Teorema de Cauchy-Hadamard.*
Sea $\sum a_n \left(z - z_0\right)^n$ una serie de potencias. Entonces la serie es absolutamente convergente si $|z - z_0| < R$ y divergente si $|z - z_0| > R$ donde R es el radio de convergencia. Por lo tanto, la serie de funciones define una función en $\mathrm{D}\left(z_0; R\right)$.

Demostración. Para la demostración emplearemos el criterio de la raíz:

$$\begin{aligned} \limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{\left|a_n \left(z - z_0\right)^n\right|} &= \limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} |z - z_0| = \\ &= |z - z_0| \limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \\ &= |z - z_0| \, R^{-1}. \end{aligned}$$

Por lo tanto el resultado queda demostrado. □

Proposición 2.3.17. Toda serie de funciones $\sum a_n (z - z_0)^n$ es absoluta y uniformente convergente sobre compactos $K \subseteq \mathrm{D}(z_0; R)$.

Demostración. Sea $r = \max \{|z - z_0| \mid z \in K\}$ que existe por ser K compacto, además este valor se alcanza para algún $z_1 \in K \subseteq U$. Sea $M_n = |a_n| r^n$, que satisface que

$$|f_n(z)| = \left| a_n (z - z_0)^n \right| \leq |a_n| r^n = M_n \, \forall z \in K.$$

Se tiene ahora que $\sum M_n$ es convergente ya que $r < R$ y por el Criterio M de Weierstrass, $\sum a_n (z - z_0)^n$ es absoluta y uniformemente convergente en K. $\square$

Corolario 2.3.18. $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ es continua en $\mathrm{D}(z_0; R)$.

Ejemplo 2.3.19. La serie de potencias más básica que podemos tomar como ejemplo es la serie $\sum z^n$, donde $a_n = 1 \, \forall n$ y $z_0 = 0$, observamos que $R = \left(\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|1|} \right)^{-1} = 1$ y por lo tanto define una función en $\mathrm{D}(0; 1)$. También es interesante notar que la función no está definida en la frontera (ya que los términos de la serie no tienden a 0).

Observamos por otro lado que

$$\sum_{n=0}^{N} z^n = \frac{1 - z^{N+1}}{1 - z} \xrightarrow{|z|<1} \frac{1}{1 - z}.$$

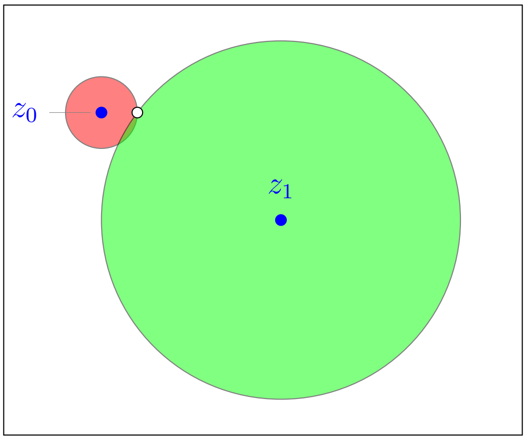
Y que por lo tanto la función suma es $f(z) = \frac{1}{1-z}$ que está definida en $\mathbb{C} \setminus \{1\}$. Es interesante observar cuál es la expansión en series de potencias de esta función en otros puntos. Para ello tomaremos $z_0 \neq 1$ y se tiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - z} &= \frac{1}{1 - z_0 - (z - z_0)} = \\ &= \frac{1}{1 - z_0} \left(\frac{1}{1 - \left(\frac{z - z_0}{1 - z_0} \right)} \right) = \\ &= \frac{1}{1 - z_0} \sum_{n \geq 0} \left(\frac{z - z_0}{1 - z_0} \right)^n = \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(1 - z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n . \end{aligned}$$

Si calculamos ahora el radio de convergencia, obtenemos

$$R = \left(\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{|1 - z_0|^{n+1}}} \right)^{-1} = \left(\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{|1 - z_0|}} \frac{1}{|1 - z_0|} \right)^{-1} = |1 - z_0| .$$

Es interesante notar que el radio de convergencia de la serie es tan grande como la distancia desde el centro a la única discontinuidad (que es el 1).



Ejemplo 2.3.20. Partiremos ahora de la función

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{1-(-z^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-z^2\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

donde $a_n = (-1)^{n/2}$ si n es par y $a_n = 0$ si n es impar. Vemos ahora que

$$R = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1.$$

Definición 2.3.21. Definimos la exponencial compleja e^z como la función suma de la serie de potencias $\sum \frac{z^n}{n!}$.

Observación 2.3.22. La exponencial compleja está bien definida en todo $\mathbb{C}$:

$$R = \left(\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{1}{n!}\right|}\right)^{-1} = 0^{-1} = \infty.$$

Proposición 2.3.23. *Fórmula de Euler.* Dado $t \in \mathbb{R}$, se tiene que $e^{it} = \cos t + i \sin t$.

Demostración.

$$\begin{aligned} e^{it} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} t^{2k} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} t^{2k+1} = \\ &= \cos t + i \sin t. \end{aligned}$$

□

Proposición 2.3.24. Se tiene que $\forall z, w \in \mathbb{C}$, $e^{z+w} = e^z + e^w$.

Demostración.

$$\begin{aligned} e^z e^w &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \frac{w^{n-k}}{(n-k)!}\right) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n! z^k w^{n-k}}{k!(n-k)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+w)^n}{n!} = e^{z+w}. \end{aligned}$$

□

Corolario 2.3.25. Tenemos que $e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$ y que $e^z = u(z)+iv(z)$ donde $u(z) = e^x \cos y$ y $v(z) = e^x \sin y$.

Proposición 2.3.26.

i) e^z es una función periódica de periodo $2\pi i$.

ii) $e^z = 1 \iff z \in 2\pi i\mathbb{Z}$.

iii) $e^z = e^w \iff z \in w + 2\pi i\mathbb{Z}$.

iv) $\Im(e^z) = \mathbb{C}^*$ (toma todos los valores complejos excepto el 0).

v) Rectas horizontales en el plano complejo pasan a semirectas que pasan por el origen al aplicar e^z. Las rectas verticales pasan a ser circunferencias y un rectángulo en $\mathbb{C}$ pasa a ser un sector de corona circular.

Definición 2.3.27. Igual que hemos definido la exponencial compleja como una serie de potencias, podemos definir las funciones trigonometricas de la siguiente forma:

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}, \quad \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}.$$

Observación 2.3.28. Una definición equivalente que no requiere del uso de series de potencias es la siguiente: $\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$ y $\sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2}$.

Observación 2.3.29. El seno y el coseno tienen un periodo de 2π.

Definición 2.3.30. La función $e^z\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ es exhaustiva pero no inyectiva , de modo que definimos su inversa (el logarimo) como

$$\log z = w = x + iy \iff z = e^w = e^x e^{iy} \iff \begin{cases} e^x = |z| \\ y = \arg z \end{cases} \iff w = \log|z| + i \arg z.$$

Por lo tanto se trata de una función multivaluada (ya que depende de arg que también lo es).

Definición 2.3.31. Una determinación del logaritmo $\mathrm{Log}\colon U \subseteq \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ es una función tal que $\mathrm{Log}(z) \in \log(z)$, $\forall z \in U$.

Observación 2.3.32. Hacer una determinación del logaritmo es equivalente a hacer una determinación del argumento, ya que $\mathrm{Log}(z) = \log|z| + i\,\mathrm{Arg}(z)$. Además, $\mathrm{Log}(z)$ es continua $\iff$ $\mathrm{Arg}(z)$ es continua.

Definición 2.3.33. La determinación principal del logaritmo es aquella que cumple que $\mathrm{Im}\,(\mathrm{Log}(z)) \in (-\pi, \pi]$.

Observación 2.3.34. En la determinación principal, $\mathrm{Log}(z)$ es continua en $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.

Definición 2.3.35. Sea $a \in \mathbb{C}$ definimos la función potencia $z^a = e^{a \log(z)}$.

Observación 2.3.36.

- Si $a \in \mathbb{Z}$, z^a es univaluada.
- Si $a = \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$ con $\mathrm{mcd}(r, s) = 1$ entonces z^a toma s valores distintos.
- En cualquier otro caso, z^a toma infinitos (numerable) valores distintos.

Observación 2.3.37. Se puede definir una determinación del logaritmo de tal forma que z^a sea siempre univaluada.

2.4. Funciones analíticas

Definición 2.4.1. Sea $U \subseteq \mathbb{C}$ un abierto y sea $f\colon U \to \mathbb{C}$. Decimos que f es analítica en U si $\forall z_0 \in U$ existe una serie de potencias $\sum a_n (z-z_0)^n$ tal que $f(z) = \sum a_n (z-z_0)^n$ $\forall z \in \mathrm{D}(z_0; R)$ con $R > 0$. Dicho de otra forma, diremos que una función es analítica si localmente es una serie de potencias.

Ejemplo 2.4.2. La función $f(z) = \frac{1}{1-z}$ es analítica en $U = \mathbb{C} \setminus \{1\}$.

Proposición 2.4.3.

i) La condición de ser analítica se conserva por sumas restas multiplicaciones y divisiones (siempre que no sea por cero).

ii) Por tanto los polinomios y funciones racionales son analíticas.

iii) La composición de funciones analíticas es analítica allí donde esté definida.

iv) La inversa de una función analítica es analítica allí donde esté definida.

v) La serie de potencias $\sum a_n (z-z_0)^n$ es analítica en el disco $\mathrm{D}(z_0; R)$.

Teorema 2.4.4. *Prolongación analítica.*
Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto conexo y sea $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ analítica. Si f se anula en un conjunto de puntos que tiene un punto de acumulación en Ω, entonces $f = 0$ $\forall z \in \Omega$.

Demostración. Sea $z_0 \in \Omega$ un punto de acumulación de ceros de f, es decir, que $\exists (w_n)_{n\geq 0}$ tal que $w_n \to z_0$, $f(w_n) = 0$ $\forall n$ y $w_n \neq z_0$.

Queremos ver que $f = 0$ en algún disco abierto que contenga z_0. Sea f una serie de poténcias $f(z) = \sum a_n (z-z_0)^n$ si $z \in \mathrm{D}(z_0; R)$ $R > 0$, queremos ver que $a_n = 0$ $\forall n$ y que por lo tanto, $f(z) = 0$ $\forall z \in \mathrm{D}(z_0; R)$. Sino fuese así, tomamos $m = \min\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \neq 0\}$ entonces

$$f(z) = a_m (z-z_0)^m + a_{m+1}(z-z_0)^{m+1} + \cdots = (z-z_0)^m \underbrace{(a_m + a_{m+1}(z-z_0) + \cdots)}_{g(z)}$$

sabemos que $g(z)$ es continua porque viene dada por una serie de potencias y por lo tanto

$$0 \neq a_m = g(z_0) = \lim_{z\to z_0} g(z) = \lim_{n\to\infty} g(w_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(w_n)}{(w_n - z_0)^m} = 0.$$

Lo cual supone una contradicción.

Sea $U \subseteq \Omega$ el interior del conjunto de ceros de f. Sabemos que $U \neq \varnothing$ ya que acabamos de demostrar que $z_0 \in U$, U es abierto, veremos ahora que U también es cerrado.

Sea $z_1 \in \overline{U}$. Veamos que $z_1 \in U$. $z_1 \in \overline{U} \implies \forall n \geq 1$, $\mathrm{D}\left(z_1; \frac{1}{n}\right) \cap U \neq \varnothing$. Sea $w_n \in \mathrm{D}\left(z_1; \frac{1}{n}\right) \cap U$ tales que $w_n \neq z_1$. Entonces $(w_n) \to z_1$, $f(w_n) = 0$ $(w_n \in U)$ y $w_n \neq z_1$, concluimos pues que z_1 es punto de acumulación de ceros de f. Por el mismo argumento que antes, $z_1 \in U$ y U es cerrado.

Como Ω es conexo y $\varnothing \neq U$ es abierto y cerrado, $\Omega = U$. □

Observación 2.4.5. Una visión alternativa del teorema nos da proporciona el siguiente resultado:

Sean $f, g\colon \Omega \to \mathbb{C}$ analíticas tales que coinciden en un conjunto de puntos que tiene un punto de acumulación, entonces coinciden en todo Ω.

Corolario 2.4.6. Sea Ω un abierto conexo, $U \subseteq \Omega$ abierto y $f\colon U \to \mathbb{C}$ analítica. Existe como máximo una función $\tilde{f}\colon \Omega \to \mathbb{C}$ analítica tal que $\tilde{f}|_U = f$.

Definición 2.4.7. Sea Ω un abierto conexo, $U \subseteq \Omega$ abierto y $f\colon U \to \mathbb{C}$ analítica. Si existe una función $\tilde{f}\colon \Omega \to \mathbb{C}$ analítica tal que $\tilde{f}|_U = f$, la denominamos prolongación analítica de f.

Ejemplo 2.4.8.

- La función $f(z) = \sum \frac{z^n}{n!}$ en el disco $U = \mathrm{D}\,(0; 23)$ es analítica y por lo tanto existe una única función $g(z)$ en $\Omega = \mathbb{C}$ tal que $g(z)|_U = f(z)$.

- Consideramos la función $f(z) = \sum z^n$ definida en $U = \mathrm{D}\,(0; 1)$ consideramos $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{1\}$ y $g(z) = \frac{1}{1-z}$: $g(z)$ es la prolongación analítica de $f(z)$ en Ω.

- $\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1}\,\mathrm{d}t$ es convergente $\iff$ $\mathrm{Re}(z) > 0$. Sin embargo, se puede extender analíticamente a $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$.

- $\zeta(z) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^z}$ es convergente $\iff$ $\mathrm{Re}(z) > 1$. Sin embargo se puede extender analíticamente a $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{1\}$.

Tema 3

Derivación. Funciones holomorfas

3.1. Funciones holomorfas

Definición 3.1.1. Sea $U \subseteq \mathbb{C}$ un abierto y sea $f\colon U \to \mathbb{C}$ una función. Decimos que f es derivable en $z_0 \in U$ si existe el límite

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

Si existe el límite lo notaremos como $f'(z_0)$ y lo denominaremos derivada de f en z_0.

Proposición 3.1.2. Sea $f\colon U \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función derivable en $z_0 \in U$, entonces f es continua en z_0.

Proposición 3.1.3. Sean $f, g\colon U \to \mathbb{C}$ dos funciones derivables en el punto $z \in U$ entonces

i) $(f+g)'(z) = f'(z) + g'(z)$ y $(f-g)'(z) = f'(z) - g'(z)$

ii) $(fg)'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$

iii) $\left(\frac{f}{g}\right)'(z) = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g(z)^2}$ si $g(z) \neq 0$

iv) Si g es derivable en $f(z)$ entonces $(g \circ f)'(z) = g'(f(z))\, f'(z)$

Definición 3.1.4. Sea $U \subseteq \mathbb{C}$ un abierto, decimos que una función $f\colon U \to \mathbb{C}$ es holomorfa sobre U si para todo $z \in U$, f es derivable en z. En este caso, la función

$$\begin{aligned} f'\colon U &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto f'(z) \end{aligned}$$

se llama función derivada.

Definición 3.1.5. Si $F\colon U \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es una función holomorfa con derivada f, decimos que F es una primitiva (o antiderivada) de f.

Ejemplo 3.1.6.

- Las constantes son holomorfas en $\mathbb{C}$ con derivada 0.
- La función identidad es holomorfa en $\mathbb{C}$ con derivada 1.

- Los polinomios $\sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ son holomorfos en todo $\mathbb{C}$ con derivada $\sum_{k=1}^{n} k a_k z^{k-1}$.
- Las funciones racionales $f(z) = \frac{r(z)}{s(z)}$ son holomorfas en $\mathbb{C} \setminus \{\text{ceros de } s(z)\}$.
- La función $f(z) = \overline{z}$ no es derivable en ningún punto de $\mathbb{C}$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\overline{z}+\overline{h}-\overline{z}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\overline{h}}{h}$$

que evidentemente no está definido y concluimos que $\overline{z}$ no es holomorfa en ningún abierto de $\mathbb{C}$.

- La función $f(z) = |z|^2 = z\overline{z}$ solo es derivable en $z = 0$:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h\overline{h}-0}{h} = 0$$

sin embargo

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(z+h)\left(\overline{z}+\overline{h}\right)-z\overline{z}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h\overline{h}+2\operatorname{Re}\left(z\overline{h}\right)}{h}$$

Reescribiremos el límite de la siguiente forma, $z = a+ib$ y $h = x+iy$.

$$\lim_{h\to 0} \frac{h\overline{h}+2\operatorname{Re}\left(z\overline{h}\right)}{h} = 2\lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{Re}\left(z\overline{h}\right)}{h} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2ax+2by}{x+iy}$$

Si nos aproximamos por el eje real $y = 0$, obtenemos como resultado del límite $2a$ y si nos aproximamos por el eje imaginario $x = 0$, obtenemos $\frac{2b}{i}$. Por lo tanto, el límite solo está definido si $a = b = 0$.

Proposición 3.1.7. Si $f(z) = \sum a_n (z-z_0)^n$ para algún $z \in \mathrm{D}(z_0; R)$ para algún $R > 0$. Entonces f es derivable en $\mathrm{D}(z_0; R)$ y su derivada viene dada por la serie de potencias $f'(z) = \sum_{n\geq 1} n a_n (z-z_0)^{n-1}$

Demostración. Supondremos $z_0 = 0$. Queremos demostrar que $f'(z_1) = \sum_{n\geq 1} n a_n z^{n-1}$. Sea $S_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_n z^n$, $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_n z^n = f(z) - S_n(z)$. Los polinomios son derivables, por lo tanto $S_n'(z) = \sum_{k=1}^{n} k a_k z^{k-1}$. Definiremos por último $g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k z^{k-1}$ y queremos ver que $f'(z) = g(z)$, se tiene que

$$\lim_{z\to z_1} \left(\frac{f(z)-f(z_1)}{z-z_1} - g(z_1) \right) = 0 \iff$$

$$\iff \left[\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ t. q. } |z-z_1| < \delta \implies \left| \frac{f(z)-f(z_1)}{z-z_1} - g(z_1) \right| < \varepsilon \right]$$

Por otro lado

$$\left| \frac{f(z)-f(z_1)}{z-z_1} - g(z_1) \right| =$$

$$= \left| \frac{S_n(z)-S_n(z_1)}{z-z_1} - S_n'(z_1) + S_n'(z_1) - g(z_1) + \frac{R_n(z)-R_n(z_1)}{z-z_1} \right| \leq \tag{3.1}$$

$$\leq \left| \frac{S_n(z)-S_n(z_1)}{z-z_1} - S_n'(z_1) \right| + \left| S_n'(z_1) - g(z_1) \right| + \left| \frac{R_n(z)-R_n(z_1)}{z-z_1} \right|$$

Ahora, acotaremos cada uno de los términos por $\frac{\varepsilon}{3}$

Tenemos

$$\left|\frac{a_k z^k - a_k z_1^k}{z - z_1}\right| = |a_k| \left|z^{k-1} + z^{k-2} z_1 + \cdots + z z_1^{k-2} + z_1^{k-1}\right| \leq$$
$$\leq |a_k| \left(|z|^{k-1} + |z|^{k-2} |z_1| + \cdots |z_1|^{k-1}\right) \leq k |a_k| \, r^{k-1}$$

Ya que $z_1 \in \mathrm{D}\,(0; R) \implies \exists r \in \mathbb{R}^*$ tal que $|z_1| < r < R$ y $z \in \mathrm{D}\,(0; r)$. Por lo tanto

$$\left|\frac{R_n(z) - R_n\,(z_1)}{z - z_1}\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{a_k z^k - a_k z_1^k}{z - z_1}\right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} k |a_k| \, r^{k-1}$$

Como $\sum_{k=1}^{\infty} k |a_k| \, r^{k-1}$ es convergente, $\exists N_1$ tal que $\forall n \geq N_1 \left|\frac{R_n(z) - R_n(z_1)}{z - z_1}\right| < \frac{\varepsilon}{3}$.

También se tiene que $|S_n'\,(z_1) - g\,(z_1)| < \frac{\varepsilon}{3}$ si $n \geq N_2$ porque $S_n'\,(z_1) \to g\,(z_1)$.

Por último sabemos que (fijado n) $\exists \delta_n$ tal que $\left|\frac{S_n(z) - S_n(z_1)}{z - z_1} - S_n'\,(z_1)\right| < \frac{\varepsilon}{3}$ si $|z - z_1| < \delta_n$ ya que $S_n(z)$ es derivable en z_1.

Por tanto, tomamos $n \geq \max\{N_1, N_2\}$ y tomamos $\delta \leq r - |z_1|$, se tiene que

$$0 < |z - z_1| < \delta \implies |z| \leq |z| \leq |z - z_1| + |z_1| < \delta + |z_1| \leq r$$

Y concluimos por tanto que 3.1 $\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3}$ si $|z - z_1| < \delta$. □

Observación 3.1.8. Las series $\sum a_n\,(z - z_0)^n$ y $\sum n a_n\,(z - z_0)^{n-1}$ tienen el mismo radio de convergencia.

Corolario 3.1.9. Toda función analítica es derivable y su derivada también es analítica. Por lo tanto, es infinitamente derivable.

Ejemplo 3.1.10.

- e^z es derivable y $(e^z)' = e^z$.
- $\cos z$ es derivable y $(\cos z)' = -\sin z$.
- $\sin z$ es derivable y $(\sin z)' = \cos z$

3.2. Ecuaciones de Cauchy-Riemman

Observación 3.2.1. Sea $f\colon U \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, podemos considerar $f = u + iv$ y por otro lado podemos considerar f como una función $\mathbb{R}^2$ obteniendo las siguiente identidades

$$\frac{\partial f}{\partial x}\,(z_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f\,(z_0 + t) - f\,(z_0)}{t} = \frac{\partial u}{\partial x}\,(z_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}\,(z_0)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}\,(z_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f\,(z_0 + it) - f\,(z_0)}{t} = \frac{\partial u}{\partial y}\,(z_0) + i \frac{\partial v}{\partial y}\,(z_0)$$

Y por último tenemos

$$(\mathrm{J} f)\,(z_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}\,(z_0) & \frac{\partial u}{\partial y}\,(z_0) \\ \frac{\partial v}{\partial x}\,(z_0) & \frac{\partial v}{\partial y}\,(z_0) \end{pmatrix}$$

Además, notamos que existe una similitud entre la definición de diferencial en $\mathbb{R}^2$, $\mathrm{D}f(z_0)$ tal que

$$\lim_{h\to(0,0)} \frac{\|f(z_0+h)-f(z_0)-(\mathrm{D}f)(z_0)\,h\|}{\|h\|}=0$$

y la definición de derivada compleja, $f'(z_0)$ tal que

$$\lim_{h\to 0} \frac{|f(z_0+h)-f(z_0)-f'(z_0)\,h|}{|h|}=0$$

Ya que $\lim g(z)=0 \iff \lim|g(z)|=0$.

Observación 3.2.2. Sea $L\colon \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ una aplicación $\mathbb{R}$-lineal con matriz $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d\end{bmatrix}$ con $a,b,c,d\in\mathbb{R}$. Entonces L es $\mathbb{C}$-lineal si y solo si $L(z)=wz$, es decir, si y solo si $d=a$ y $c=-b$ $(w=a+bi)$

Teorema 3.2.3. Sea $U\subseteq\mathbb{C}$ un abierto y $f\colon U\to\mathbb{C}$ una función. Entonces f es derivable en $z_0\in U \iff f$ es diferenciable en z_0 como función $U\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ y su diferencial es $\mathbb{C}$-lineal.

En ese caso, la derivada de f es

$$f'(z_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(z_0)=\frac{\partial u}{\partial x}(z_0)+i\frac{\partial v}{\partial x}(z_0)=-i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)=\frac{\partial v}{\partial y}(z_0)-i\frac{\partial u}{\partial y}(z_0)$$

Demostración. Primero demostraremos la implicación hacia la derecha. Sea $(\mathrm{D}f)(z_0)(h)=f'(z_0)\,h$ que es una aplicación $\mathbb{C}$-lineal y cumple que

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|f(z_0+h)-f(z_0)-f'(z_0)\,h\|}{\|h\|}=0$$

Veamos ahora la implicación inversa. Sabemos que $(\mathrm{D}f)(z_0)(h)=wh$ para algún $w\in\mathbb{C}$ definimos ahora $f'(z_0)=w$ y se tiene que

$$\lim_{h\to 0} \frac{|f(z_0+h)-f(z_0)-f'(z_0)\,h|}{|h|}=0$$

La última igualdad sigue inmediatamente de la última observación y del hecho de que la matriz de $(\mathrm{D}f)(z_0)$ es $(\mathrm{J}f)(z_0)$. □

Definición 3.2.4. La ecuaciones de Cauchy-Riemman relacionan las derivadas parciales de dos funciones $u,v\colon\mathbb{R}^2\to V$ en el punto $z_0\in\mathbb{R}^2$ de la siguiente forma

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(z_0)=\frac{\partial v}{\partial y}(z_0) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(z_0)=-\frac{\partial v}{\partial x}(z_0)\end{cases}$$

Corolario 3.2.5. f es diferenciable en $z_0 \iff f$ es derivable en z_0 y satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemman

Ejemplo 3.2.6.

- $e^z=e^x\cos y+ie^x\sin y$ y se tiene

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}=e^x\cos y=\frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y}=-e^x\sin y=-\frac{\partial v}{\partial x}\end{cases}$$

- $z^2 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$ y

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 2x = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = 2y = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

- $f(z) = 2|z|^2 - \overline{z}^2 = 2\left(x^2 + y^2\right) - \left(x^2 - y^2 - 2ixy\right) = x^2 + 3x^2 + 2xyi$ y

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 2x = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial y} = 6y = -2y = -\frac{\partial v}{\partial x} \iff y = 0 \end{cases}$$

Tema 4

Integración. Teorema de Cauchy

4.1. Curvas y contornos

Definición 4.1.1. Una curva en $U \subseteq \mathbb{C}$ abierto es una aplicación continua $\gamma\colon [a,b] \subseteq \mathbb{R} \to U$. Llamaremos extremos de la curva a $\gamma(a)$ y a $\gamma(b)$. Diremos que la curva es cerrada si $\gamma(a) = \gamma(b)$. Notaremos a la imagen de la curva como $\gamma^* = \gamma\left([a,b]\right)$.

Definición 4.1.2. Sea $\gamma\colon [a,b] \subseteq \mathbb{R} \to U \subseteq \mathbb{C}$ una curva. Diremos que γ es simple si $\gamma|_{(a,b)}$ es inyectiva.

Definición 4.1.3. Una reparametrización es una aplicación biyectiva y continua $\rho\colon [a,b] \to [c,d]$. Si tenemos una curva $\gamma\colon [c,d] \to U \subseteq \mathbb{C}$ llamaremos a $\gamma \circ \rho$ curva reparametrizada.

Diremos que una reparametrización es positiva si es creciente y negativa si es decreciente.

Observación 4.1.4. Una aplicación $\rho\colon [a,b] \to [c,d]$ es una reparametrización si y solo si es un homeomorfismo (aplicación biyectiva continua con inversa continua).

Ejemplo 4.1.5.

- $\rho(t) = c + (t-a)\frac{d-c}{b-a}\colon [a,b] \to [c,d]$ es una reparametrización positiva.
- $\rho(t) = a + b - t\colon [a,b] \to [b,a]$ es una reparametrización negativa.

Definición 4.1.6. Dadas $\gamma_1\colon [a,b] \to U \subseteq \mathbb{C}$ y $\gamma_2\colon [c,d] \to U \subseteq \mathbb{C}$ curvas, diremos que γ_1 es equivalente a γ_2 y lo notaremos como $\gamma_1 \equiv \gamma_2$ si existe una reparametrización $\rho\colon [c,d] \to [a,b]$ positiva tal que $\gamma_2 = \gamma_1 \circ \rho$.

Observación 4.1.7. Alternativamente, $\gamma_2 \equiv \gamma_1$ si existe una reparametrización ρ negativa tal que $-\gamma_2 = \gamma_1 \circ \rho$.

Definición 4.1.8. Dadas dos curvas $\gamma_1\colon [a,b] \to U$ y $\gamma_2\colon [c,d] \to U$ tales que $\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$ definimos su concatenación como la curva

$$\begin{aligned} \gamma\colon [a, b+d-c] &\to U \\ t &\mapsto \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{si } t \in [a,b] \\ \gamma_2(t+c-b) & \text{si } t \in [b, b+d-c] \end{cases} \end{aligned}$$

Para referirnos a esta operación utilizaremos la notación $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$.

Lema 4.1.9. Sean $\gamma_1 \colon [a,b] \to U$ y $\gamma_2 \colon [c,d] \to U$ dos curvas tales que $\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$. Sean también $\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2$ curvas tales que $\gamma_1 \equiv \tilde{\gamma}_1$ y $\gamma_2 \equiv \tilde{\gamma}_2$, entonces $\tilde{\gamma}_1 + \tilde{\gamma}_2$ está bien definida y $\tilde{\gamma}_1 + \tilde{\gamma}_2 \equiv \gamma_1 + \gamma_2$.

Definición 4.1.10. Sea $\gamma \colon [a,c] \to U \subseteq \mathbb{C}$ una curva y sea $b \in (a,c)$. Una descomposición de γ son dos curvas $\gamma_1 = \gamma|_{[a,b]}$ y $\gamma_2 = \gamma|_{[b,c]}$. Además se tiene que $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$.

Definición 4.1.11. Dada una curva $\gamma \colon [a,b] \to U \subseteq \mathbb{C}$, definimos su longitud como

$$l(\gamma) = \sup_{(t_i)_{0\leq i\leq n}} \left\{ \sum_{k=0}^{n} \left|\gamma\left(t_i\right) - \gamma\left(t_{i-1}\right)\right| \middle| a = t_0 \leq t_1 \cdots \leq t_n = n \right\} \in [0, +\infty].$$

Es decir, el supremo para toda partición del intervalo de la longitud de la poligonal formada por la partición.

Definición 4.1.12. Diremos que una curva γ es rectificable si $l(\gamma) < +\infty$.

Lema 4.1.13. Sean γ_1 y γ_2 dos curvas, se tiene que

$$\begin{gathered} l\left(\gamma_1 + \gamma_2\right) = l\left(\gamma_1\right) + l\left(\gamma_2\right), \\ \gamma_1 \equiv \gamma_2 \implies l\left(\gamma_1\right) = l\left(\gamma_2\right). \end{gathered}$$

Definición 4.1.14. Sean $\gamma_0, \gamma_1 \colon [a,b] \to U \subseteq \mathbb{C}$ dos curvas tales que $\gamma_0(a) = \gamma_1(a)$ y $\gamma_0(b) = \gamma_1(b)$. Decimos que γ_0 y γ_1 son homótopas sobre U si existe una homotopía entre ellas, es decir, si existe $\phi \colon [a,b] \times [0,1] \to U$ continua que cumpla que $\phi(t,0) = \gamma_0(t)$, $\phi(t,1) = \gamma_1(t)$, $\phi(a,s) = \gamma_0(a) = \gamma_1(a)$ y $\phi(b,s) = \gamma_0(b) = \gamma_1(b)$.

Ejemplo 4.1.15. $\gamma_0 = e^{it}$, $t \in [0,\pi]$ y $\gamma_1 = e^{-it}$, $t \in [0,\pi]$ son homótopas en $\mathbb{C}$, pero no son homótopas en $\mathbb{C}^*$.

Definición 4.1.16. Sea $\gamma \colon [a,b] \to U$ una curva cerrada, diremos que γ es contráctil en U si γ es homotopa a la constante

$$\begin{aligned} c \colon [a,b] &\to U \\ t &\mapsto \gamma(a) = \gamma(b). \end{aligned}$$

Definición 4.1.17. Sea $U \subseteq \mathbb{C}$, diremos que U es simplemente conexo si es arcoconexo y toda curva cerrada es contráctil en U.

Observación 4.1.18. Las siguientes definiciones son equivalentes a la anterior:

- $U \subseteq \mathbb{C}$ es simplemente conexo si es arcoconexo y dadas dos curvas cualesquiera con los mismos extremos, estas dos curvas son homótopas en U.

- $U \subseteq \mathbb{C}$ es simplemente conexo si es conexo y no tiene agujeros.

Proposición 4.1.19. Cualquier conjunto convexo es simplemente conexo. (Recordemos que un conjunto en convexo si dados dos puntos cualesquiera del mismo, el segmento que los une está contenindo del conjunto).

Demostración. Sea U un conjunto convexo, dadas $\gamma_1, \gamma_2 \colon [a,b] \to U$ dos curvas, definimos la homotopía

$$\begin{aligned}\phi\colon [a,b]\times[0,1] &\to U\\ (t,s) &\mapsto (1-s)\gamma_1(t) + s\gamma_2(t).\end{aligned}$$

Es fácil comprobar todas las propiedades y está bien definida ya que $\gamma_1(t), \gamma_2(t) \in U \implies (1-s)\gamma_1(t) + s\gamma_2(t) \in U$ para cualquier $s \in [0,1]$. □

Definición 4.1.20. Sea $\gamma\colon [a,b] \to U$ una curva, diremos que γ es lisa si es de clase $\mathscr{C}^1$ como función $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$.

Definición 4.1.21. Una curva regular es una curva lisa $\gamma\colon [a,b] \to U$ tal que $\gamma'(t) \neq 0$, $\forall t \in [a,b]$.

Definición 4.1.22. Un contorno es una curva lisa a trozos, es decir, es una concatenación finita de curvas lisas.

Observación 4.1.23. Equivalentemente podemos decir que un contorno es una curva de clase $\mathscr{C}^1$ salvo en un número finito de puntos.

Proposición 4.1.24. Toda curva lisa $\gamma\colon [a,b] \to U$ es rectificable y $l(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t$.

Demostración. La demostración es similar a la realizada en cálculo integral y por lo tanto restará como ejercicio. □

Proposición 4.1.25. Toda curva $\gamma\colon [a,b] \to U \subseteq \mathbb{C}$ abierto es homótopa a un contorno en el abierto U. De hecho, es homótopa a una poligonal.

Demostración. Sabemos que γ^* es compacto porque $[a,b]$ es compacto y γ es continua. Definimos

$$r = \mathrm{d}\left(\gamma^*, \mathbb{C}\setminus U\right) = \inf_{\substack{p\in\gamma^*,\\ q\in\mathbb{C}\setminus U}} \mathrm{d}(p,q) > 0.$$

Como γ es continua, es uniformemente continua en el compacto $[a,b]$ y por lo tanto, dado $\varepsilon = r > 0$ $\exists\delta$ tal que $|t-t'| < \delta \implies |\gamma(t) - \gamma(t')| < r$. Sean ahora $a = t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n = b$ tales que $t_i - t_{i-1} < \delta$ $i = 1 : n$, entonces $\forall t \in [t_{i-1}, t_i]$, $|t - t_i| < \delta \implies |\gamma(t) - \gamma(t_i)| < r \iff \gamma(t) \in \mathrm{D}(\gamma(t_i); r)$.

Definimos $\gamma_i = \gamma|_{[t_{i-1},t_i]}$ y $\gamma_{a\to b}(t) = (1-t)a + tb$, ahora tenemos que $\gamma_i^*, \gamma^*_{\gamma(t_{i-1})\to\gamma(t_i)} \subseteq \mathrm{D}(\gamma(t_i); r)$ que es convexo y por lo tanto $\gamma_i \equiv \gamma_{\gamma(t_{i-1})\to\gamma(t_i)}$.

Concluimos al fin que

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_n \equiv \gamma_{\gamma(t_0)\to\gamma(t_1)} + \cdots + \gamma_{\gamma(t_{n-1})\to\gamma(t_n)}$$

y γ es equivalente a un contorno poligonal. □

Ejercicio 4.1.26. Demostrar que si $I = \left\{ t \in [a,b] \,\middle|\, \gamma|_{[a,t]} \text{ es homótopa a un contorno} \right\}$

i) $\sup I > a$.

ii) $\sup I \notin (a,b)$.

iii) Como resultado de los dos apartados anteriores $\sup I = b$.

iv) $b \in I$.

Debemos notar que esto supone una demostración alternativa de la proposición anterior.

4.2. Integración sobre curvas

Definición 4.2.1. Sea $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ una curva, $f\colon \gamma^* \subseteq U \to \mathbb{C}$ una función cualquiera. Sea $(t_i)_{0\leq i\leq n}$ una partición de $[a,b]$, es decir, $a = t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n = b$. Sea por último $(t_i^*)_{1\leq i\leq n}$ una colección de puntos tal que $t_i^* \in [t_{i-1}, t_i]$. Definimos la suma de Riemman asociada a todos estos parámetros como

$$S\left(t_i, t_i^*\right) = \sum_{i=1}^{n} f\left(\gamma\left(t_i^*\right)\right)\left(\gamma\left(t_i\right) - \gamma\left(t_{i-1}\right)\right).$$

Definición 4.2.2. Sea γ una curva y $f\colon \gamma^* \to \mathbb{C}$ una función. Decimos que f es integrable sobre la curva γ y que su integral es el número complejo $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$ si existe

$$\lim_{\mathrm{d}(t_i)\to 0} S\left(t_i, t_i^*\right) = \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$$

es decir, si $\forall\varepsilon > 0$, $\exists\delta$ tal que $\mathrm{d}\left(t_i\right) < \delta$ y $\forall\left(t_i^*\right)$ con $t_i^* \in [t_{i-1}, t_i] \implies \left|S\left(t_i, t_i^*\right) - \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\right| < \varepsilon$; donde $\mathrm{d}\left(t_i\right)$ es el diámetro de la partición, es decir, $\mathrm{d}\left(t_i\right) = \max\limits_{i=1,\ldots,n}\left\{t_i - t_{i-1}\right\}$.

Observación 4.2.3. Si $\gamma\colon [a,b] \to [a,b] \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ y $f\colon \gamma^* \to \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ recuperamos la integral de Riemman sobre los reales. Aunque la definión no es la de sumas superiores e inferiores, las definiciones son equivalentes (ejercicio).

Lema 4.2.4. Sea γ un curva, $f\colon \gamma^* \to \mathbb{C}$ es integrable sobre γ si y solo si las sumas de Riemman satisfacen la condición de Cauchy

$$\forall\varepsilon > 0\,\exists\delta > 0 \text{ t. q. } \mathrm{d}\left(s_i\right), \mathrm{d}\left(t_i\right) < \delta \implies \left|S\left(s_i, s_i^*\right) - S\left(t_i, t_i^*\right)\right| < \varepsilon \quad \forall\left(s_i^*\right)\forall\left(t_i^*\right),$$

y además, si consideramos $\left(t_{n,i}\right)$ cualquier succesión de particiones con diametros tales que $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{d}\left(t_{n,i}\right) = 0$, tenemos que el valor de la integral es

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \lim_{n\to\infty} S\left(t_{n,i}, t_n^*\right).$$

Demostración. Primero demostraremos la implicación hacia la derecha. Dado $\varepsilon > 0$ la definición de función integrable sobre una curva nos dice que $\exists\delta$ tal que $\mathrm{d}\left(t_i\right) < \delta \implies \left|S\left(t_i, t_i^*\right) - \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\right| < \frac{\varepsilon}{2}$. Entonces, si $\mathrm{d}\left(t_i\right) < \delta$ y $\mathrm{d}(s_i) < \delta$, tenemos que

$$\left|S\left(t_i, t_i^*\right) - S\left(s_i, s_i^*\right)\right| \leq \left|S\left(t_i, t_i^*\right) - \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\right| + \left|\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z - S\left(s_i, s_i^*\right)\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Pasemos ahora a la implicación contraria. Suponiendo que las sumas de Riemman son de Cauchy, tomamos $(t_{n,i})$ tal que $\mathrm{d}(t_{n,i}) \to 0$. Entonces $\forall\varepsilon > 0$ $\exists\delta > 0$ tal que $\left|S\left(t_i, t_i^*\right) - S\left(s_i, s_i^*\right)\right| < \varepsilon$ si $\mathrm{d}(s_i), \mathrm{d}(t_i) < \delta$. Ahora, dado $\delta > 0$, $\exists N$ tal que $\forall n \geq N$ $\mathrm{d}(t_{n,i}) < \delta$, ya que $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{d}(t_{n,i}) = 0$.

Con lo cual, $\forall n, m \geq N$ tenemos que $\left|S\left(t_{n,i}, t_{n,i}^*\right) - S\left(s_{n,i}, s_{n,i}^*\right)\right| < \varepsilon$ si $\mathrm{d}(t_{n,i}), \mathrm{d}(t_{m,i}) < \delta$, lo que nos dice que $\left(S\left(t_{n,i}, t_{n,i}^*\right)\right)_{n\geq 1}$ es una succesión de números complejos de Cauchy y, por lo tanto, es convergente. Definimos así $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \lim\limits_{n\to\infty} S\left(t_{n,i}, t_{n,i}^*\right)$.

Dado $\varepsilon > 0$ $\exists\delta > 0$ tal que $\mathrm{d}(s_i), \mathrm{d}(t_i) < \delta \implies |S(t_i, t_i^*) - S(s_i, s_i^*)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Entonces $\exists N_1$ tal que $\forall n \geq N_1 \quad \mathrm{d}(t_{n,i}) < \delta$ y $\exists N_2$ tal que $\forall n \geq N_2 \quad \left|S\left(t_{n,i}, t_{n,i}^*\right) - \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\right| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Finalmente, tomando $n \geq \max\{N_1, N_2\}$, tenemos que para toda partición $S(t_i, t_i^*)$ con $\mathrm{d}(t_i) < \delta$,

$$\left|S(t_i, t_i^*) - \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leq \left|S(t_i, t_i^*) - S\left(t_{n,i}, t_{n,i}^*\right)\right| + \left|S\left(t_{n,i}, t_{n,i}^*\right) - \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

$\square$

Teorema 4.2.5. Sea γ una curva rectificable y sea f una función continua sobre γ^*, entonces f es integrable sobre γ.

Demostración. La condición de integrabilidad de Cauchy es suficiente para dos particiones una más fina que la otra. Veamos que pasa si dos particiones no son comparables.

Sean $(s_i), (t_i)$ dos particiones no necesariamente una más fina que la otra. Definimos $(u_k) = (s_i) \cup (t_i)$ que es más fina que (s_i). Además si $\mathrm{d}(s_i), \mathrm{d}(t_i) < \delta$ entonces $\mathrm{d}(u_k) < \delta$ y

$$|S(s_i, s_i^*) - S(t_i, t_i^*)| \leq |S(s_i, s_i^*) - S(u_k, u_k^*)| + |S(u_k, u_k^*) - S(t_i, t_i^*)| < \varepsilon.$$

Dado $\varepsilon > 0$, consideramos la función $f \circ \gamma\colon [a, b] \to \mathbb{C}$ que es continua sobre un compacto y por tanto uniformemente continua. Entonces $\exists\delta > 0$ tal que si $|t - t'| < \delta$ entonces $|f \circ \gamma(t) - f \circ \gamma(t')| < \frac{\varepsilon}{l(\gamma)}$.

Sea $(t_i)_{0 \leq i \leq n}$ una partición con $\mathrm{d}(t_i) < \delta$ y sea $(t_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq n_i}$ un refinamiento de $(t_i)_{0 \leq i \leq n}$ tal que $t_{i-1} = t_{i,0} \leq t_{i,1} \leq \cdots \leq t_{i,n_i} = t_i$. Entonces

$$\begin{aligned}
\left|S(t_i, t_i^*) - S\left(t_{i,j}, t_{i,j}^*\right)\right| = {} & \left|\sum_{i=1}^{n} f(\gamma(t_i^*))(\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1}))\right. \\
& \left. - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n_i} f\left(\gamma(t_{i,j}^*)\right)\left(\gamma(t_{i,j}) - \gamma(t_{i,j-1})\right)\right| = \\
= {} & \left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n_i} f(\gamma(t_i^*))(\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1}))\right. \\
& \left. - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n_i} f\left(\gamma(t_{i,j}^*)\right)\left(\gamma(t_{i,j}) - \gamma(t_{i,j-1})\right)\right| = \\
= {} & \left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n_i}\left(f(\gamma(t_i^*)) - f\left(\gamma(t_{i,j}^*)\right)\right)\left(\gamma(t_{i,j}) - \gamma(t_{i,j-1})\right)\right| \leq \\
\leq {} & \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n_i}\left|f(\gamma(t_i^*)) - f\left(\gamma(t_{i,j}^*)\right)\right|\left|\gamma(t_{i,j}) - \gamma(t_{i,j-1})\right| < \\
< {} & \frac{\varepsilon}{l(\gamma)}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n_i}\left|\gamma(t_{i,j}) - \gamma(t_{i,j-1})\right| \leq \frac{\varepsilon}{l(\gamma)} l(\gamma) = \varepsilon
\end{aligned}$$

$\square$

Lema 4.2.6. Si f es integrable sobre una curva γ, entonces f está acotada sobre γ^*.

Demostración. No haremos una demostración completa de este lema, pero que si que daremos algunas indicaciones. Procederemos por contrarecíproco: tomamos una partición $(t_i)_{0\leq i\leq n}$ con $\mathrm{d}(t_i) < \delta$ entonces existe un intervalo $[t_{k-1}, t_k]$ donde la función no está acotada. Entonces podemos construir una partición $(\tilde{t}_j)$ más fina que (t_i) tal que tiene un refinamiento del intervalo $[t_{k-1}, t_k]$ de manera que los valores de la suma de Riemman de (t_i) y $(\tilde{t}_j)$ difiere tanto como queramos. (Es suficiente tomar un punto más). $\square$

Proposición 4.2.7. Sea f integrable sobre una curva rectificable γ. Sea M una cota de f en γ^*. Entones $\left|\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leq Ml(\gamma)$

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$ sea δ la de la definición de la integral. Sea (t_i) una partición con $\mathrm{d}(t_i) < \delta$. Entonces

$$\left|\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leq \left|\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z - S\left(t_i, t_i^*\right)\right| + \left|\sum_{i=1}^{n} f\left(\gamma(t_i^*\right)\left(\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\right)\right| <$$
$$< \varepsilon + \sum_{i=1}^{n}\left|f\left(\gamma(t_i^*)\right)\right|\left|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\right| \leq \varepsilon + Ml(\gamma)$$

Por lo tanto, $\left|\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leq Ml(\gamma)$. $\square$

Proposición 4.2.8. *Propiedades respecto de la reparametrización y concatenación.* Sean $\gamma, \gamma_1, \gamma_2$ curvas tales que $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$, sea ρ una reparametrización positiva y μ una reparametrización negativa, entonces:

i) $\int_{\gamma\circ\rho} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$.

ii) $\int_{\gamma\circ\mu} f(z)\,\mathrm{d}z = -\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$.

iii) $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z$.

Proposición 4.2.9. *La integral es lineal respecto de las funciones.* Sea γ una curva, sean f_1, f_2 funciones integrables sobre γ y sean $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$, entonces

$$\int_\gamma \left(w_1 f_1(z) + w_2 f_2(z)\right)\mathrm{d}z = w_1\int_\gamma f_1(z)\,\mathrm{d}z + w_2\int_\gamma f_2(z)\,\mathrm{d}z$$

Demostración. Para cualquier suma de Riemman se tiene que

$$S(t_i, t_i^*; w_1 f_1 + w_2 f_2) = w_1 S(t_i, t_i^*; f_1) + w_2 S(t_i, t_i^*; f_2)$$

Y por lo tanto, el resultado es inmediato para la integral. $\square$

4.3. Integración sobre contornos

Observación 4.3.1. Un caso particular de la linealidad de la integral es considerar una función $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{C}$, $\varphi = u(t) + iv(t)$ y la curva $\gamma = \mathrm{Id}$.

$$\int_\gamma \varphi(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b u(t)\,\mathrm{d}t + i\int_a^b v(t)\,\mathrm{d}t$$

De hecho en algunos libros se utiliza el resultado anterior para definir la integral

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b \underbrace{f\left(\gamma(t)\right)\gamma'(t)}_{\varphi(t)}\,\mathrm{d}t$$

Teorema 4.3.2. Sea γ una curva rectificable, sea (f_n) una familia de funciones integrables sobre γ tales que $(f_n) \to f$ uniformemente. Entonces f es integrable sobre γ y $\int_\gamma f = \lim\limits_{n\to\infty} \int_\gamma f$.

Demostración. Primero veamos que $\int_\gamma f_n$ es una succesión de Cauchy: Como $(f_n) \to f$ uniformemente en γ^*, (f_n) es uniformemente de Cauchy en γ^* y por lo tatno $\forall\varepsilon > 0$ $\exists N$ tal que $n, m \geq N \implies |f_n(z) - f_m(z)| < \frac{\varepsilon}{l(\gamma)}$ $\forall z \in \gamma^*$. Entonces $\forall\varepsilon > 0 \exists N$ tal que $n, n \geq N \implies$

$$\left|\int_\gamma f_n - \int_\gamma f_m\right| = \left|\int_\gamma (f_n - f_m)\right| \leq \int_\gamma |f_n - f_m| \leq \int_\gamma \frac{\varepsilon}{l(\gamma)} = \varepsilon$$

Y por lo tanto $\int_\gamma f_n$ es de Cauchy y por lo tanto convergente.

Definimos $\int_\gamma f = \lim\limits_{n\to\infty} \int_\gamma f_n$ y vemos que satisface la definición de integral. Para una partición (t_i) y un $\varepsilon > 0$

$$\left|S(t_i, t_i^*) - \int_\gamma f\right| \leq \underbrace{|S(t_i, t_i^*; f) - S(t_i, t_i^*, f_n)|}_{(1)} + \underbrace{\left|S(t_i, t_i^*; fn) - \int_\gamma fn\right|}_{(2)} + \underbrace{\left|\int_\gamma fn - \int_\gamma f\right|}_{(3)}$$

Ahora acotaremos cada uno de los sumandos de la derecha:

Comenzaremos acotando (3). Sabemos que existe N_1 tal que si $n \geq N_1$ entonce (3) $< \frac{\varepsilon}{3}$ ya que $\int_\gamma f = \lim_{n\to\infty} \int_\gamma f_n$.

Podemos acotar (1) de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
|S(t_i, t_i^*; f) - S(t_i, t_i^*; f_n)| &= \left|\sum_{i=1}^{m} \Big(f\left(\gamma(t_i^*)\right) - fn\left(\gamma(t_i^*)\right)\Big)\left(\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\right)\right| \leq \\
&\leq \sum_{i=1}^{m} \Big|f\left(\gamma(t_i^*)\right) - f_n\left(\gamma(t_i^*)\right)\Big| |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| \overset{*}{\leq} \\
&\overset{*}{\leq} \frac{\varepsilon}{3l(\gamma)} \sum_{i=1}^{m} |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| \leq \frac{\varepsilon}{3l(\gamma)} l(\gamma) = \varepsilon
\end{aligned}$$

$(*)$ Por la convergencia uniforme de $(f_n) \to f$, $\exists N_2$ tal que $\forall n \geq N_2$ se verifica que $\Big|f\left(\gamma(t_i^*)\right) - f_n\left(\gamma(t_i^*)\right)\Big| \leq \frac{\varepsilon}{3l(\gamma)}$.

Por último, si tomamos $n \geq \max\{N_1, N_2\}$ fija, como f_n es integrable, $\exists\delta$ tal que $\mathrm{d}(t_i) < \delta$ implica que (2) $< \frac{\varepsilon}{3}$ y hemos acabado. $\square$

Teorema 4.3.3. Sea γ una curva lisa y sea f integrable sobre f, entonces

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b f\left(\gamma(z)\right)\gamma'(z)\,\mathrm{d}z$$

Demostración. Comenzamos por reescribir $\gamma = x + iy$ con $x, y \in \mathscr{C}^1$. Tomamos ahora una partición cualquiera (t_i) y por el teorema del valor medio se tiene que $x(t_i) - x(t_{i-1}) = x'(\xi_i)(t_i - t_{i-1})$. Análogamente $y(t_i) - y(t_{i-1}) = y'(\varsigma_i)(t_i - t_{i-1})$, con lo que concluimos que

$$\gamma(t_i) = -\gamma(t_{i-1}) = \Big(x'(\xi_i) + iy'(\varsigma_i)\Big)(t_i - t_{i-1}).$$

Dado $\varepsilon > 0$, tomamos $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2M(b-a)}$ donde M es una cota de $|f|$ en γ^*. Como x', y' son continuas sobre un compacto, son uniformemente continuas, y por lo tanto

$$\begin{cases} \exists \delta_x \text{ t. q. } |t-t'| < \delta_x & \Longrightarrow |x'(t) - x'(t')| < \varepsilon' \\ \exists \delta_y \text{ t. q. } |t-t'| < \delta_y & \Longrightarrow |y'(t) - y'(t')| < \varepsilon' \end{cases}$$

Sea $\delta = \text{mín}\left\{\delta_x, \delta_y\right\}$, entonces dada una partición (t_i) tal que $\mathrm{d}(t_i) < \delta$ definimos $S(t_i, t_i^*) = \sum_{i=1}^n f\left(\gamma(t_i^*)\right)\left(\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\right)$ y $S'(t_i, t_i^*) = \sum_{i=1}^n f\left(\gamma(t_i^*)\right)\gamma'(t_i^*)(t_i - t_{i-1})$. Se tiene entonces que

$$\begin{aligned}
\left|S(t_i, t_i^*) - S'(t_i, t_i^*)\right| &= \left|\sum_{i=1}^n f\left(\gamma(t_i^*)\right)\left[\left(x'(\xi_i) + iy'(\varsigma_i)\right) - \left(x'(t_i^*) + iy'(t_i^*)\right)\right](t_i - t_{i-1})\right| \leq \\
&\leq \sum_{i=1}^n \left|f\left(\gamma(t_i^*)\right)\right| \left[\left|x'(\xi_i) - x'(t_i^*)\right| + \left|y'(\varsigma_i) - y'(t_i^*)\right|\right] |t_i - t_{i-1}| \leq \\
&\leq \sum_{i=1}^n M 2 \frac{\varepsilon}{2M(b-a)} |t_i - t_{i-1}| = \frac{\varepsilon}{(b-a)}(b-a) = \varepsilon
\end{aligned}$$

□

Ejemplo 4.3.4.

- Si tenemos la curva $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$ con $t \in [0, 2\pi]$ entonces

$$\int_\gamma \frac{1}{z - z_0} \, \mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \frac{1}{z_0 + re^{it} - z_0} ire^{it} \, \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} i \, \mathrm{d}t = 2\pi i$$

- Si tenemos $\gamma(t) = re^{it}$ con $t \in [0, 2\pi]$ y $f(z) = z^n$, entonces

$$\begin{aligned}
\int_\gamma z^n \, \mathrm{d}z &= \int_0^{2\pi} r^n e^{int} ire^{it} \, \mathrm{d}t = ir^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t} \, \mathrm{d}t = \\
&= ir^{n+1} \left[\frac{e^{i(n+1)t}}{i(n+1)}\right]_0^{2\pi} = \frac{r^{n+1}}{n+1}(1-1) = 0
\end{aligned}$$

4.4. Teorema fundamental del cálculo

Teorema 4.4.1. *Primer teorema fundamental del cálculo.*
Si f es continua en un abierto $U \subseteq \mathbb{C}$ y para todo contorno cerrado γ en U se tiene que $\int_\gamma f(z) \, \mathrm{d}z = 0$, entonces f tiene una primitiva en U.

Demostración. Nos podemos reducir al caso en el que U es conexo aplicando lo mismo en cada componente. Fijamos un punto $w_0 \in U$. Para cada $w \in U$ sea γ_w un contorno con origen w_0 y final w, y definimos $F(w) = \int_{\gamma_w} f(z) \, \mathrm{d}z$. Vemos que está bien definida ya que los contornos γ_w existen por ser U conexo y abierto, la integral existe por ser f continua en U y la integral no depende del contorno tomado, ya que esta condición es equivalente a que la integral valga cero sobre todo contorno cerrado.

Fijamos ahora $z_0 \in U$. Queremos ver que $F'(z_0) = f(z_0)$. Sea $\mathrm{D}(z_0; r) \subseteq U$ y tomando $|h| < r$, entonces $\gamma_{z_0} + \gamma_{z_0 \to z_0 + h} + (-\gamma_{z_0+h})$ es un contorno cerrado y por lo tanto

$$\int_{\gamma_{z_0}} f + \int_{\gamma_{z_0 \to z_0+h}} f - \int_{\gamma_{z_0+h}} f = 0 \implies F(z_0 + h) - F(z_0) = \int_{\gamma_{z_0 \to z_0+h}} f.$$

Ahora reescribimos $f(z) = f(z_0) + \psi(z)$ y tenemos que $\lim_{z\to z_0} \psi(z) = \lim_{z\to z_0} f(z) - f(z_0) = 0$. Substituyendo obtenemos $F(z_0+h) - F(z_0) = \int_{\gamma_{z_0\to z_0+h}} (f(z_0) + \psi(z))\,\mathrm{d}z$ de donde sigue que $F(z_0+h) - F(z_0) - hf(z_0) = \int_{\gamma_{z_0\to z_0+h}} \psi$. Por último, concluimos que

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(z_0+h)-F(z_0)}{h} - f(z_0)\right| = \left|\frac{F(z_0+h)-F(z_0)-hf(z_0)}{h}\right| &= \\ = \frac{1}{|h|}\left|\int_{\gamma_{z_0\to z_0+h}} \psi(z)\,\mathrm{d}z\right| &\overset{*}{\leq} \\ \leq \frac{1}{|h|}\varepsilon l\left(\gamma_{z_0\to z_0+h}\right) = \frac{1}{|h|}\varepsilon|h| = \varepsilon,&\end{aligned}$$

que es cierto ya que por la convergencia de ψ hacia 0, ψ tiene una cota superior ε para $|h|$ pequeño. Y concluimos que $F'(z_0) = f(z_0)$. □

Teorema 4.4.2. *Segundo teorema fundamental del cálculo.*
Sea U un abierto y sea $f\colon U \to \mathbb{C}$ una función continua. Si f tiene una privitiva F en U, entonces para todo contorno $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ se tiene que $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$.

Demostración. Supondremos que γ es de clase $\mathscr{C}^1$ ya que en caso contrario podemos "dividir" γ en componentes lisas y luego concatenar ya que $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ implica que

$$\int_\gamma f = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f = F(\gamma_1(b_1)) - F(\gamma_1(a_1)) + F(\gamma_2(b_2)) - F(\gamma_2(a_2)) = F(\gamma(a)) - F(\gamma(b)).$$

Ahora, notaremos $f(z) = u(z) + iv(z)$, $F(z) = U(z) + iV(z)$ y $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$. Tenemos ahora que

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}(U\circ\gamma) &= \frac{\partial U}{\partial x}(x(t),y(t))\,x'(t) + \frac{\partial U}{\partial y}(x(t),y(t))\,y'(t)\\ &= u(x(t),y(t))\,x'(t) - v(x(t),y(t))\,y'(t)\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}(V\circ\gamma) &= \frac{\partial V}{\partial x}(x(t),y(t))\,x'(t) + \frac{\partial V}{\partial y}(x(t),y(t))\,y'(t)\\ &= v(x(t),y(t))\,x'(t) + u(x(t),y(t))\,y'(t).\end{aligned}$$

Y por otro lado

$$\begin{aligned}f(\gamma(t))\,\gamma'(t) = \Big(u(x(t),y(t)) + iv(x(t),y(t))\Big)\Big(x'(t) + iy'(t)\Big) =\\ = \Big[u(x(t),y(t))\,x'(t) - v(x(t),y(t))\,y'(t)\Big] + i\Big[v(x(t),y(t))\,x'(t) + u(x(t),y(t))\,y'(t)\Big].\end{aligned}$$

Por último concluimos que

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z &= \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,\mathrm{d}t =\\ &= \int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}(U\circ\gamma)(t)\,\mathrm{d}t + i\int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}(V\circ\gamma)(t)\,\mathrm{d}t \overset{\text{TFC 1-var}}{=}\\ &\overset{\text{TFC 1-var}}{=} \Big[U(\gamma(b)) - U(\gamma(a))\Big] + i\Big[V(\gamma(b)) - V(\gamma(a))\Big] =\\ &= F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).\end{aligned}$$

□

Observación 4.4.3. El resultado también es cierto con curvas genéricas (no necesariamente contornos). El la demostración se utilizan las sumas de Riemman, demostración que resta como ejercicio.

Observación 4.4.4. En el primer teorema fundamental del cálculo (4.4.1), si U es un disco, la condición $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$ para todo γ contorno cerrado, se puede substituir por $\int_T f(z)\,\mathrm{d}z$ para todo T triángulo.

Corolario 4.4.5. Si f tiene una primitiva en U, entonces $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$ para todo γ contorno cerrado.

Corolario 4.4.6. Si f es una función holomorfa en $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto conexo y $f'(z) = 0$, $\forall z \in \Omega$, entonces f es una función constante.

Demostración. Sea $w_0 \in \Omega$ y para cada $w \in \Omega$ sea γ_w un contorno que une w_0 con w (que existe por ser Ω conexo). Entonces

$$0 = \int_\gamma 0\,\mathrm{d}z = \int_\gamma f'(z)\,\mathrm{d}z = f(w) - f(w_0) \implies f(w) = f(w_0)\,\forall w$$

□

Corolario 4.4.7. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto conexo y sean $f, g\colon \Omega \to \mathbb{C}$ dos funciones derivables tales que $f' = g'$, entonces $\exists c \in \mathbb{C}$ tal que $f = g + c$.

4.5. Teorema de Cauchy

Definición 4.5.1. Sea $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ tres puntos cualesquiera, definimos el triángulo entre los puntos z_1, z_2 y z_3 como $T = \gamma_{z_1\to z_2\to z_3\to z_1}$, definimos el interior del triángulo como $Z = \left\{z = t_1z_1 + t_2z_2 + t_3z_3 \mid t_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}, \sum t_i = 1\right\}$. Definimos el diámetro del triángulo como $\mathrm{d}(T) = \max\{|z - z'| \mid z, z' \in Z\} = \max\{|z_1 - z_2|, |z_1 - z_3|, |z_2 - z_3|\}$. Por último definimos el perímetro del triángulo como $\mathrm{p}(t) = |z_1 - z_2| + |z_2 - z_3| + |z_3 - z_1|$.

Cometiendo un abuso de notación llamaremos indistintamente triángulo tanto a T como a Z y notaremos $T = \partial Z$.

Teorema 4.5.2. *Teorema de Goursat.*
Sea f holomorfa en U y $Z \subseteq U$ el interior de un triángulo T. Entonces $\int_T f(z)\,\mathrm{d}z = 0$, para cualquiera de las dos orientaciones posibles de T.

Demostración. Sean

$$T^{(1)} = \gamma_{z_1 \to \frac{z_1+z_2}{2} \to \frac{z_3+z_1}{2} \to z_1}$$
$$T^{(2)} = \gamma_{z_2 \to \frac{z_2+z_3}{2} \to \frac{z_1+z_2}{2} \to z_2}$$
$$T^{(3)} = \gamma_{z_3 \to \frac{z_3+z_1}{2} \to \frac{z_2+z_3}{2}\ to z_3}$$
$$T^{(4)} = \gamma_{\frac{z_1+z_2}{2} \to \frac{z_3+z_2}{2} \to \frac{z_3+z_1}{2} \to \frac{z_1+z_2}{2}}$$

Además se tiene que $\mathrm{d}\left(T^{(i)}\right) = \frac{1}{2}\mathrm{d}(T)$ y $\mathrm{p}\left(T^{(i)}\right) = \frac{1}{2}\mathrm{p}(T)$ para $i = 1, 2, 3, 4$.

Sea T_1 el triángulo $T^{(i)}$ con $\left|\int_{T^{(i)}} f(z)\,\mathrm{d}z\right|$ máximo, entonces $\left|\int_T f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leq 4\left|\int_{T_1} f(z)\,\mathrm{d}z\right|$

Repitiendo este mismo proceso, obtenemos triángulos $T_2, T_3, \ldots$ de manera que $\mathrm{p}(T_n) = \frac{1}{2^n}\mathrm{p}(T)$, $\mathrm{d}(T_n) = \frac{1}{2^n}\mathrm{d}(T)$ y $\left|\int_T f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leq 4^n\left|\int_{T_n} f(z)\,\mathrm{d}z\right|$. Tomamos $\{Z_n\}_{n\geq 1}$ los triángulos sólidos correspondientes. Entonces $Z_1 \supseteq Z_2 \supseteq Z_3 \supseteq \cdots$ es una sucesión decreciente de compactos encajados y por lo tanto $\cap_{n\geq 0} Z_n \neq \varnothing$, de facto, es un punto z_0, ya que si $z_0, z_0' \in \cap_{n\geq 0} Z_n$, entonces $|z_0 - z_0'| \leq \mathrm{d}(T_n) = \frac{1}{2^n}\mathrm{d}(T)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ y eso es imposible. Por lo tanto definimos $z_0 = \cap_{n\geq 0} Z_n$.

Definimos $\psi(z) = \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - f'(z_0)$ continua con $\lim_{z\to z_0} \psi(z) = 0$ donde estamos usando que f es holomorfa. Definimos $\varepsilon_n = \max\left\{|\psi(z)| \mid z \in T_n^*\right\}$. Veamos que $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que si $|z - z_0| < \delta \implies |\psi(z)| < \varepsilon$. Sea N tal que $\mathrm{d}(T_N) = \frac{1}{2^N}\mathrm{d}(T) < \delta$, entonces $\forall n \geq N$

$$\frac{1}{2^n}\mathrm{d}(T) \leq \frac{1}{2^N}\mathrm{d}(T) < \delta \implies |z - z_0| \leq \frac{1}{2^n}\mathrm{d}(T) < \delta \;\forall z \in T_n^* \implies$$
$$\implies |\psi(z)| < \varepsilon \;\forall z \in T_n^* \implies \varepsilon_n < \varepsilon \implies \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0.$$

Por último

$$\begin{aligned}
\left|\int_{T_n} f(z)\,\mathrm{d}z\right| &= \left|\int_{T_n} \Big[f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0) + \psi(z)(z-z_0)\Big]\,\mathrm{d}z\right| = \\
&= \left|\int_{T_n} \Big[f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0)\Big]\,\mathrm{d}z + \int_{T_n} \psi(z)(z-z_0)\,\mathrm{d}z\right| \overset{*}{=} \\
&\overset{*}{=} \left|\int_{T_n} \psi(z)(z-z_0)\,\mathrm{d}z\right| \leq \\
&\leq \int_{T_n} |\psi(z)||z-z_0|\,\mathrm{d}z \leq \int_{T_n} \varepsilon_n \mathrm{d}(T_n)\,\mathrm{d}z = \\
&= \varepsilon_n \mathrm{d}(T_n)\mathrm{p}(T_n) = \varepsilon_n \frac{1}{2^n}\frac{1}{2^n}\mathrm{d}(T)\mathrm{p}(T) = \\
&= \varepsilon_n \frac{1}{4^n}\mathrm{d}(T)\mathrm{p}(T)
\end{aligned}$$

$(*)$ es cierto ya que $f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)$ es un polinomio de grado 1 y tiene primitiva en $\mathbb{C}$, por lo tanto, como el contorno es cerrado, la integral vale 0.

Y concluimos que $\left|\int_T f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leq 4^n \varepsilon_n \frac{1}{4^n}\mathrm{p}(T)\mathrm{d}(T) = \varepsilon_n \mathrm{p}(T)\mathrm{d}(T)$, como $\varepsilon_n \to 0$ $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n \geq N$ tal que $\varepsilon_n < \frac{\varepsilon}{\mathrm{d}(T)\mathrm{p}(T)}$ y $\left|\int_T f(z)\,\mathrm{d}z\right| < \varepsilon \implies \left|\int_T f(z)\,\mathrm{d}z\right| = 0 \implies \int_T f(z)\,\mathrm{d}z = 0$. □

Observación 4.5.3. El teorema de Gousat implica que si U es un disco, entonces f holomorfa tiene una primitiva en U (por el Primer Teorema Fundamental del Cálculo).

Teorema 4.5.4. *Teorema de Cauchy en el disco.*
Si f es holomorfa en un disco D, entonces $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$ para cualquier γ contorno cerrado.

Demostración. Para todo triángulo T se tiene que $Z \subseteq D$ ya que D es convexo, por lo tanto $\int_T f(z)\,\mathrm{d}z = 0$ por el teorema de Gousat. Aplicando ahora Primer Teorema Fundamental del Cálculo sabemos que f tiene una primitiva y concluimos, por el Segundo Teorema Fundamental del Cálculo, que $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = 0$ □

Lema 4.5.5. Sea $f\colon U \to \mathbb{C}$ una función holomorfa en un abierto U y sean $\gamma_1, \gamma_2\colon [a,b] \to U$ contornos homótopos sobre U. Entonces $\int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z$.

Demostración. Sea $\phi\colon [0,1]\times[a,b]\to U$ una homotopía entre γ_1 y γ_2. Llamamos $R = [0,1]\times[a,b]$, como R es compacto, $\phi(R)$ es un compacto por ser ϕ continua. Por tanto $\mathrm{d}\left(\phi(R), \mathbb{C}\setminus U\right) = r > 0$ por ser $\phi(R)$ compacto y $\mathbb{C}\setminus U$ cerrado conjuntos disjuntos.

Por continuidad uniforme dado $\varepsilon = r > 0$, $\exists\delta$ tal que $(s,t),(s',t')\in R$ con $\|(s,t),(s',t')\| < \delta \implies |\phi(z,t)-\phi(s',t')| < r$. Sean $0 = s_0 \leq s_1 \leq \cdots \leq s_n = 1$ y $a = t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_m = b$ particiones tales que $\mathrm{d}(s_i), \mathrm{d}(t_j) < \frac{\delta}{2}$. Definimos $R_{i,j} = [s_{i-1}, s_i]\times[t_{j-1},t_j]$ se tiene que $\phi(R_{i,j}) \subset \mathrm{D}\left(\phi(r_i,s_j);r\right) \subset U$ ya que si $(s,t)\in R_{i,j}\left\|(s,t),(s_i,t_j)\right\| \leq |s-s_i| + \left|t-t_j\right| < \frac{\delta}{2}+\frac{\delta}{2} = \delta \implies \left|\phi(s,t)-\phi(s_i,t_j)\right| < r$.

Definimos $\phi_{i,j} = \phi(s_i,t_j)$, $\int_{z_1}^{z_2} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_{z_1\to z_2}} f(z)\,\mathrm{d}z$ y $\pi_{ij} = \gamma_{\phi_{i-1,j1}\to\phi_{i-1,j}\to\phi_{i,j}\to\phi_{i,j-1}\to\phi_{i1,j-1}}$ que es un contorno poligonal cerrado. Se tiene que $\pi_{ij}^* \subset \mathrm{D}(\phi_{i,j};r)$ porque $D(\phi_{i,j};r)$ es convexo y $\phi_{i-1,j-1}, \phi_{i-1,j}, \phi_{i,j_1}, \phi_{i,j} \in \mathrm{D}(\phi_{i,j};r)$ y por tanto también están incluidos los segmentos entre ellos.

El teorema de Cauchy sobre el disco aplicado a π_{ij} nos dice que $\int_{\pi_{ij}} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$ y

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\int_{\pi_{ij}} f(z)\,\mathrm{d}z = 0 \implies$$
$$0 = \sum_{j=1}^{m}\int_{\phi_{0,j-1}}^{\phi_{0,j}} f(z)\,\mathrm{d}z + \sum_{i=1}^{n}\int_{\phi_{i-1,m}}^{\phi_{i,m}} f(z)\,\mathrm{d}z + \sum_{j=1}^{m}\int_{\phi_{n,j}}^{\phi_{n,j-1}} f(z)\,\mathrm{d}z + \sum_{i=1}^{n}\int_{\phi_{i,0}}^{\phi_{i-1,0}} f(z)\,\mathrm{d}z$$
$$\implies \sum_{j=1}^{m}\left(\int_{\phi_{0,j-1}}^{\phi_{0,j}} f(z)\,\mathrm{d}z\right) = \sum_{j=1}^{m}\left(\int_{\phi_{n,j-1}}^{\phi_{n,j}} f(z)\,\mathrm{d}z\right)$$

Como $\phi(R_{0,j}) \subset \mathrm{D}(\phi_{0,j};r)$ y $\phi(R_{n,j};r) \subset \mathrm{D}(\phi_{n,j};r)$ podemos aplicar el teorema de cauchy sobre el disco para concluir que

$$\int_{\gamma_0} f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{j=1}^{m}\int_{\phi_{0,j-1}}^{\phi_{0,j}} f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{j=1}^{m}\int_{\phi_{n,j-1}}^{\phi_{n,j}} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z$$

□

Teorema 4.5.6. *Teorema de Cauchy.*
Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto simplemente conexo y sea $f\colon \Omega\to\mathbb{C}$ una función holomorfa. Entonces $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$ para todo γ contorno cerrado en Ω.

Demostración. Inmediato a partir del lema y la caracterización

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0 \ \forall\gamma \text{ contorno cerrado} \iff$$
$$\iff \int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z \ \forall\gamma_1,\gamma_2 \text{ contornos con los mismos extremos}$$

□

Índice alfabético