3.39. **Demostra que si τ_1 i τ_2 són dues transposicions diferents, aleshores $\tau_1\tau_2$ és d'ordre 2 o 3.**

Si són dues transposicions diferents, això vol dir que $\tau_1 = (i, j) \neq \tau_2 = (k, l)$. Aleshores,

$$\tau_1 \cap \tau_2 = \begin{cases} \emptyset, & \text{si } \tau_1 \text{ i } \tau_2 \text{ no comparteixen cap element igual,} \\ \{j\}, & \text{ja que sense pèrdua de generalitat podem suposar que si} \\ & \tau_1 \text{ i } \tau_2 \text{ comparteixen un element aquest pot ser } j. \end{cases}$$

Si no comparteixen cap element, la composició de τ_1 i τ_2 és la següent:

$$\tau_1\tau_2 = (i, j)(k, l) = \begin{pmatrix} i & j & k & l \\ j & i & l & k \end{pmatrix},$$

que per definició té ordre igual al mínim comú múltiple dels ordres de ls transposicions composades (que són cicles disjunts). En aquest cas,

$$\operatorname{ord}(\tau_1\tau_2) = \operatorname{mcm}(\operatorname{ord}\tau_1, \operatorname{ord}\tau_2) = \operatorname{mcm}(2, 2) = 2.$$

En el cas que tinguin un element comú, suposem (sense pèrdua de generalitat) $j = k$ i en composar:

$$\tau_1\tau_2 = (i, j)(j, l) = \begin{pmatrix} i & j & l \\ j & l & i \end{pmatrix}$$

veiem que $\operatorname{ord}(\tau_1\tau_2) = 3$.

$\square$