

## Batlle Casellas, àlex

Considerem la variable aleatòria biparamètrica  $X$  amb funció de densitat:

$$f(x; \lambda, \eta) = \frac{\eta^\lambda}{\Gamma(\lambda)} x^{-\lambda-1} e^{-\frac{\eta}{x}}$$

per  $x > 0, \lambda > 0$  i  $\eta > 0$

Comproveu que és una família exponencial amb els estadístics  $T(x) = (\log(x), 1/x)$ , trobeu-ne el paràmetre canònic  $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ , i la constant  $C(\theta)$ . En algun apartat caldrà fer servir la funció digamma  $\psi(x)$  que correspon a la derivada del logaritme de la funció Gamma.

A) En el cas que sabéssim que  $E[T(X)] = (1,66, 0,23)$ , contesteu les preguntes següents:

1) Quin seria el valor de $\lambda$ ?
2) Quin seria el valor de $\eta$ ?
3) Quin seria el valor de $V(\log(X))$ ?
4) Quin seria el valor de $V(1/X)$ ?
5) Quin seria el valor de $Cov(\log(X), 1/X)$ ?

B) En la situació habitual en la que no coneixem el valor dels paràmetres, però tenim una mostra: Si la grandària és 343, la mitjana dels logaritmes de les  $X$  ha donat 1,66119 i la de les inverses  $1/x$  ha donat 0,22554, estimeu per màxima versemblança els paràmetres de la distribució  $\lambda$  i  $\eta$ . Calculeu la matriu d'Informació en els paràmetres canònics, avalueu la matriu en el màxim versemblant, i contesteu:

Nota: Feu servir la Suficiència, no obstant, les dades són a Dades entregable 3 d'Atenea amb el vostre nom.

6) L'estimador m.v. de $\lambda$ ha donat:
7) L'estimador m.v. de $\eta$ ha donat:
8) El terme [1,1] de la matriu d'informació obtinguda és:
9) El terme [2,2] de la matriu d'informació obtinguda és:
10) El terme [1,2] de la matriu d'informació obtinguda és:

C) En la mateixa situació de l'apartat B), calculeu la fita de Cramer-Rao de l'estimador màxim versemblant de  $T(X) = (E[\log(X)], E[1/X])$ . Utilitzant el teorema central del límit, calculeu l'interval de confiança asimptòtic (95% dues cues) del paràmetre  $\lambda$ , i també el de  $\eta$ . Contesteu:

11) La fita de Cramer-Rao de l'estimador m.v. de $E[\log(X)]$ és:
12) La fita de Cramer-Rao de l'estimador m.v. de $E[1/X]$ és:
13) L'interval de confiança de $\lambda$ és:
14) L'interval de confiança de $\eta$ és:

Al qüestionari d'Atenea escriviu les respostes numèriques amb 5 (o més) xifres significants.