CÀLCUL INTEGRAL

Grau en Matemàtiques

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Facultat de Matemàtiques i Estadística

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Departament de Matemàtiques

Portada: *Bóveda de Viviani*, Jesús Iranzo Sanz, 2006.

A23, Km. 80, Salida Sarrión Norte.

Imagen por Diego Arribas

APUNTES

1a SÈRIES NUMÈRIQUES

1.1. Preliminares

En todo el curso, utilizaremos las notaciones $\mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ para referirnos respectivamente a los conjuntos de números naturales, racionales, reales y complejos. Siempre supondremos que el conjunto $\mathbb{N}$ contiene al 0. Denotaremos por $\mathbb{N}^*, \mathbb{Q}^*, \mathbb{R}^*$ a los mismos conjuntos de números anteriores pero excluyendo el 0.

En estas notas emplearemos frecuentemente la notación sii que significa si y sólo si. Asimismo, el final de una demostración será indicado con el símbolo $\square$.

Si $a, b \in \mathbb{R}$, sabemos que

$$\boxed{\max\{a,b\} = \tfrac{1}{2}(a+b+|a-b|) \text{ mientras que } \min\{a,b\} = \tfrac{1}{2}(a+b-|a-b|).}$$

Las anteriores identidades implican que $|a-b| = \max\{a,b\} - \min\{a,b\}$ y también la identidad obvia $a+b = \max\{a,b\} + \min\{a,b\}$.

Si $a \in \mathbb{R}$, definimos su parte positiva como $a_+ = \max\{a,0\}$ y su parte negativa como $a_- = -\min\{a,0\} = \max\{-a,0\}$. Es claro que $a = a_+ - a_-$ y que $|a| = a_+ + a_-$

Las definiciones anteriores pueden generalizarse a funciones reales $f, g\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$, donde A es cualquier conjunto no vacío. Por ejemplo, $\max\{f,g\} = \frac{1}{2}(f+g+|f-g|)$.

Recordemos que una sucesión de números reales, es una aplicación $a\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, donde para cada $n \in \mathbb{N}$, $a(n)$ suele denotarse como a_n. En correspondencia con la anterior notación representaremos a la sucesión anterior como (a_n).

Si $\phi\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ es **estrictamente creciente**, la sucesión $b = a \circ \phi$ se denomina subsucesión de a. Habitualmente se representa $\phi(j) = n_j$ y por tanto $b_j = a_{\phi(j)} = a_{n_j}$.

Diremos que la sucesión (a_n) es acotada si existe $M > 0$ tal que $|a_n| \le M$, para cada $n \in \mathbb{N}$, o de manera equivalente $a_n \in [-M, M]$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Diremos que la sucesión (a_n) es convergente si existe $\ell \in \mathbb{R}$ satisfaciendo la siguiente propiedad: Para cada $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - \ell| \le \varepsilon$ si $n \ge n_0$. Es fácil demostrar que en las circunstancias anteriores ℓ está unívocamente determinado y se denomina el límite de la sucesión (a_n). Escribiremos $\ell = \lim_{n\to\infty} a_n$ y diremos que (a_n) converge a ℓ.

Diremos que $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ si para cada $M > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n \geq M$ si $n \geq n_0$ y diremos que $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ si $\lim_{n\to\infty} -a_n = +\infty$. A este tipo de sucesiones se las suele denominar divergentes.

Diremos que la sucesión (a_n) es de Cauchy si para cada $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - a_m| \leq \varepsilon$ si $n, m \geq n_0$.

Si una sucesión (a_n) no es ni divergente ni convergente, suele denominarse oscilante, aunque durante el curso nos referiremos a ella como no convergente.

Nota 1: Observar que el carácter divergente, de Cauchy, convergente o no de una sucesión (a_n) no se modifica si alteramos arbitrariamente una cantidad finita de elementos. Por tanto, en el estudio de la convergencia no tiene ninguna importancia si la sucesión comienza con $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$ o cualquier otra opción. La misma conclusión es válida para cualquier subsucesión.

A continuación enunciaremos las propiedades fundamentales de los conceptos que acabamos de introducir:

- Si (a_n) es convergente, cualquier subsucesión suya es convergente al mismo límite. La misma propiedad es válida para sucesiones divergentes.
- Si (a_n) es monótona, entonces existe $\lim_{n\to\infty} a_n \in [-\infty, +\infty]$. De hecho, $\lim_{n\to\infty} a_n = \inf_{n\in\mathbb{N}}\{a_n\}$ si (a_n) es decreciente, mientras que $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}}\{a_n\}$ si (a_n) es creciente.
- Si (a_n) es no acotada, entonces tiene una subsucesión divergente.
- Si (a_n) es acotada, entonces tiene una subsucesión convergente (propiedad de Bolzano-Weierstrass).
- Para cualquier sucesión (a_n) son equivalentes ser convergente y ser de Cauchy (propiedad de completitud de $\mathbb{R}$).

• Cuestion 1: Sea (a_n) una sucesión acotada tal que cada subsucesión convergente tiene el mismo límite. Demostrar que (a_n) es convergente.

Continuaremos este breve recorrido por las propiedades fundamentales de las sucesiones de números reales con las propiedades de dos tipos específicos de tales sucesiones, así como de la relación entre ellas.

Denominaremos infinitésimo a toda sucesión convergente a 0; es decir a (a_n) tal que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Es claro que (a_n) es un infinitésimo si y sólo si $(|a_n|)$ es un infinitésimo.

Si (a_n) y (b_n) son infinitésimos, diremos que son equivalentes y lo representaremos como $a_n \sim b_n$, si $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$.

Nota 2: Cuando escribamos una expresión como la anterior, asumiremos que tiene sentido; es decir, que $b_n \neq 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Si (a_n) es un infinitésimo; entonces $\log(1+a_n), \sin(a_n), 1-\cos(a_n), e^{a_n}-1, \tan(a_n)$ y $|a_n|^\alpha$ con $\alpha > 0$, son infinitésimos y además

$$\log(1+a_n) \sim a_n, \quad \sin(a_n) \sim a_n, \quad 1-\cos(a_n) \sim \frac{a_n^2}{2}, \quad e^{a_n}-1 \sim a_n, \quad \tan(a_n) \sim a_n$$

Denominaremos infinito a toda sucesión divergente de términos positivos. Por tanto, (a_n) es un infinito si y sólo si $a_n > 0$, para cada $n \in \mathbb{N}$ y además $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$. Es claro que si (a_n) es una sucesión de términos positivos, entonces es un infinito si y sólo si $\left(\frac{1}{a_n}\right)$ es un infinitésimo.

Si (a_n) y (b_n) son infinitos, diremos que (a_n) es de menor orden que (b_n), o que (b_n) es de mayor orden que (a_n), y lo representaremos como $a_n \prec b_n$, si $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ es un infinitésimo; es decir, si $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 0$.

La siguiente escala de infinitos será útil a lo largo del curso:

Si $0 < c < 1 < a$ y $b > 1$, entonces

$$\log\big(\log(n)\big) \prec \log(n) \prec n^c \prec n \prec n^a \prec n^{\log(n)} \prec b^n \prec n! \prec n^n \prec b^{n^a} \prec b^{b^{n^a}}$$

1.2. Definiciones generales

Comenzaremos recordando algunas nociones fundamentales acerca de series numéricas de números reales.

Si (a_n) es una sucesión de números reales, llamaremos **serie de término general** (a_n) a la sucesión $S_n = a_0 + \cdots + a_n = \sum\limits_{j=0}^{n} a_j$, que se denomina habitualmente **sucesión de sumas parciales**.

Diremos que la **serie es divergente, convergente, o no convergente (oscilante)** si lo es la sucesión de sumas parciales. En el caso que sea convergente, se denota $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ y este valor se denomina **suma de la serie**.

Nota 1: La noción de serie convergente se refiere por tanto al caso en el que existe y es finito el límite de la sucesión de sumas parciales; es decir, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n \in \mathbb{R}$.

Observar que el carácter de una serie de término general (a_n); es decir si es convergente o no, no se modifica si alteramos arbitrariamente una cantidad finita de elementos de su término general. Por tanto, en el estudio de la convergencia de una serie no tiene ninguna importancia si la serie comienza con $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$ o cualquier otra opción. Naturalmente, esta alteración sí debe tenerse en cuenta si lo que se pretende es calcular la suma de la serie.

En lo sucesivo, denotaremos por $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ a la serie de término general (a_n), sin que ello haga ninguna suposición *a priori* sobre su convergencia. El Criterio de Cauchy establece que la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ es convergente sii para cada $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_{n+1} + \cdots + a_{n+m}| \le \varepsilon$ para cada $n \ge n_0$ y $m \ge 1$. En particular, resulta que se tiene la siguiente condición necesaria de convergencia,

$$\text{si } \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ converge, entonces } \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

es decir el término general de una serie convergente es un infinitésimo. Esta condición necesaria de convergencia no es, en general, suficiente: La serie armónica $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ no es convergente ya que para cada $n \in \mathbb{N}^*$ se satisface que

$$S_{2n} - S_n = \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{n+1} > \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Por otra parte, de las propiedades de las sucesiones convergentes deducimos que

El conjunto de series convergentes es un espacio vectorial real y además, si $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ y $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ son series convergentes, entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=0}^{\infty} b_n, \quad \text{para cada } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

El problema fundamental en el ámbito de las series numéricas es establecer su convergencia y, cuando sea posible, hallar su suma. A continuación introduciremos algunas series básicas para las que es posible establecer su convergencia y determinar su suma, de manera directa.

▶ SERIES TELESCÓPICAS: Si $a_n = b_n - b_{n+1}$, para cada $n \in \mathbb{N}$, donde (b_n) es una sucesión de números reales, la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ se denomina telescópica. En esta situación, $S_n = b_0 - b_{n+1}$ y por tanto, la serie telescópica $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty}(b_n - b_{n+1})$ es convergente sii (b_n) es convergente y en ese caso $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = b_0 - \lim_{n\to\infty} b_n$.

Si existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tal que $a_n = b_n - b_{n+1}$, para cada $n \ge n_0$, la serie $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ se denomina también telescópica. En esta situación, $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n = b_{n_0} - \lim_{n\to\infty} b_n$ y si $a_0, \dots, a_{n_0-1}$ están definidos, entonces $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{n_0-1} a_n + b_{n_0} - \lim_{n\to\infty} b_n$.

Ejemplo: Hallar la suma $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

Como $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, si definimos $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$ y $b_n = \frac{1}{n}$, para $n \ge 1$, entonces $a_n = b_n - b_{n+1}$, de manera que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ es telescópica. Como $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, obtenemos finalmente que

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = b_1 = 1.}$$

▶ SERIES ARITMÉTICO-GEOMÉTRICAS: Si $a_n = (dn+s)r^n$, para cada $n \in \mathbb{N}$, donde $d, r, s \in \mathbb{R}$ con $|d| + |s| > 0$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} (dn+s)r^n$ se denomina aritmético-geométrica de diferencia d y razón r. Si en particular $d = 0$, la serie se denomina geométrica de razón r. Observar que como $\lim_{n\to\infty} |dn+s||r|^n = 0$ sii $|r| < 1$, una serie aritmético-geométrica de razón r con $|r| \ge 1$ no es convergente.

Por otra parte, si $r \ne 1$, entonces $S_n = \frac{s}{1-r} - \frac{(dn+s)r^{n+1}}{1-r} + \frac{dr(1-r^n)}{(1-r)^2}$ y por tanto,

la serie aritmético-geométrica $\sum_{n=0}^{\infty}(dn+s)r^n$ es convergente sii $|r| < 1$ y en ese caso $\sum_{n=0}^{\infty}(dn+s)r^n = \frac{s}{1-r} + \frac{dr}{(1-r)^2} = \frac{s + r(d-s)}{(1-r)^2}$.

Ejemplo: Calcular la suma de les series $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3k+1}{2^k}$ y $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{e^k}$.

Si en el primer caso,

tomamos $b_k = 3k+1$ y $c_k = \dfrac{1}{2^k}$, entonces $a_k = b_k c_k$ donde (b_k) es una progresión aritmética y (c_k) es una progresión geométrica con $d = 3$, $s = 1$, $r = \dfrac{1}{2}$. Aplicando la fórmula anterior, obtenemos que

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3k+1}{2^k} = \frac{1+\frac{1}{2}(3-1)}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} = 8.}$$

Si en el segundo caso tomamos $\hat{b}_k = k$ y $\hat{c}_k = \dfrac{1}{e^k}$, entonces $a_k = b_k c_k$ donde (b_k) es una progresión aritmética y (c_k) es una progresión geométrica con $d = 1$, $s = 0$, $r = \dfrac{1}{e}$. Aplicando la fórmula anterior, obtenemos que

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{e^k} = \frac{0+\frac{1}{e}(1-0)}{\left(1-\frac{1}{e}\right)^2} = \frac{e}{(e-1)^2}.}$$

En general, calcular la suma de una serie convergente es un problema difícil. Algo más sencillo es el problema de determinar la convergencia, ya que entonces podemos utilizar un buen número de resultados que establecen este carácter. Uno de los más útiles es el denominado

Criterio de Dirichlet: Sean $(a_n), (b_n)$ dos sucesiones de números reales y supongamos que se satisfacen las hipótesis siguientes:

(i) La sucesión $s_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$ de sumas parciales de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es acotada.

(ii) La sucesión (a_n) es monótona y tal que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ es convergente.

Demostración: Como (a_n) es monótona, o es creciente o es decreciente. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que (a_n) es decreciente, ya que si el resultado es cierto para este tipo de funciones también lo es para funciones crecientes: Si (a_n) es creciente y $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, para consideramos $\hat{a}_n = -a_n$, $n \in \mathbb{N}$, que satisface que $(\hat{a}_n)$ es decreciente y $\lim_{n\to\infty} \hat{a}_n = 0$. Como $\sum_{n=1}^{\infty} \hat{a}_n b_n = -\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$, la convergencia de la primera serie implica la de la segunda.

La hipótesis de decrecimiento para la sucesión (a_n) implica que $\inf_{n\in\mathbb{N}}\{a_n\} = \lim_{n\to+\infty} a_n$, de manera que la hipótesis $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ implica a su vez que $a_n \geq 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Observar que podríamos suponer que $a_n > 0$ para cada $n \geq 1$, pues si $a_m = 0$ para algún m, entonces como $0 = a_m \geq a_n \geq 0$ para todo $n \geq m$, obtenemos que $a_n = 0$ para cada $n \geq 0$ y el resultado es trivial.

Para concluir la veracidad del criterio de Dirichlet es suficiente demostrar que la sucesión $\sum_{k=1}^{n} a_k b_k$ de sumas parciales de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ es una sucesión de Cauchy (lo que es equivalente a aplicar el criterio de Cauchy para establecer la convergencia). Para ello, definimos $s_0 = 0$ y de la identidad $b_k = s_k - s_{k-1}$, para cada $k \geq 1$, obtenemos que

$$\boxed{\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} a_k b_k &= \sum_{k=1}^{n} a_k\big(s_k - s_{k-1}\big) = \sum_{k=1}^{n} a_k s_k - \sum_{k=1}^{n} a_k s_{k-1} = \sum_{k=1}^{n} a_k s_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} s_k \\ &= a_n s_n + \sum_{k=1}^{n-1} a_k s_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_{k+1} s_k - a_1 s_0 = a_n s_n + \sum_{k=1}^{n-1} \big(a_k - a_{k+1}\big) s_k.\end{aligned}}$$

Esta igualdad se conoce con el nombre de **Fórmula de sumación por partes o Fórmula de Abel**.

Como (s_n) está acotada, podemos considerar $K > 0$ tal que $|s_n| \leq K$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Si $n, m \in \mathbb{N}$ con $m \leq n$, aplicando la Fórmula de Abel, obtenemos que

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k - \sum_{k=1}^{m} a_k b_k = a_n s_n - a_m s_m + \sum_{k=m}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) s_k.$$

Tomando módulos y aplicando la desigualdad triangular, resulta que

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k - \sum_{k=1}^{m} a_k b_k\right| &\leq |a_n s_n| + |a_m s_m| + \sum_{k=m}^{n-1} |a_k - a_{k+1}|\,|s_k| \\ &\leq K a_n + K a_m + K \sum_{k=m}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) \\ &= K a_n + K a_m + K(a_m - a_n) = 2K a_m\end{aligned}$$

donde hemos tenido en cuenta que $|a_k - a_{k+1}| = a_k - a_{k+1}$, pues (a_k) es decreciente y que $|a_k| = a_k$ pues $a_k \geq 0$.

Como $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \geq 1$ tal que $0 \leq a_n \leq \dfrac{\varepsilon}{2K}$ para cada $n \geq n_0$. Entonces,

$$\boxed{\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k - \sum_{k=1}^{m} a_k b_k\right| \leq 2K a_{\min\{n,m\}} \leq 2K a_{n_0} \leq \varepsilon, \text{ para cada } n, m \geq n_0.}$$

En definitiva, la sucesión de sumas parciales de la serie $\sum a_k b_k$ es de Cauchy y por tanto convergente. □

Un caso particularmente simple de aplicación del criterio de Dirichlet, lo constituye el siguiente:

Critero de Leibniz: Si (a_n) es una sucesión decreciente y tal que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, entonces la **serie alternada** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ es convergente.

Si definimos $b_n = (-1)^n$, para cada $n \in \mathbb{N}^*$, resulta que $s_n = -1$ si n es impar y $s_n = 0$ si n es par. Por tanto, (s_n) está acotada y el resultado es una consecuencia del Criterio de Dirichlet.

Observar que las hipótesis del criterio de Leibniz, implican que $a_n \geq 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Ejemplo: Demostrar que la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n}$ es convergente.

Si definimos $a_n = \dfrac{1}{n}$, entonces (a_n) es decreciente y $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, de manera que el resultado es una consecuencia de la aplicación del Criterio de Leibniz, (en la subsección 1.3.4 calcularemos la suma de la serie).

Describiremos a continuación, uno de los resultados más útiles para establecer la convergencia de algunas series. Diremos que la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ es absolutamente convergente si la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|$ es convergente. La importancia de este concepto para establecer la convergencia de una serie está dada por el siguiente resultado:

si $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ es absolutamente convergente entonces es convergente y $\left|\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\right| \leq \sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|$.

La afirmación anterior es consecuencia de la aplicación del Criterio de Cauchy a la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|$, teniendo en cuenta que la desigualdad triangular implica que

$$|a_{n+1} + \cdots + a_{n+m}| \leq |a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+m}|$$

para cada $n, m \geq 1$.

1.3. Series de términos positivos

El último resultado de la sección anterior establece una condición suficiente de convergencia de la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$, que en ningún modo es necesaria; es decir, una serie convergente no tiene porqué ser absolutamente convergente. Basta para ello considerar el ejemplo de la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$.

Por otra parte, ese mismo resultado justifica el interés que tienen las series cuyo término general es no negativo; es decir las series $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$, tales que $a_n \geq 0$ para cada $n \in \mathbb{N}^*$ (de hecho, de acuerdo con los comentarios realizados al comienzo de la sección, es suficiente que $a_n \geq 0$ para $n \geq n_0$). En lo sucesivo nos referiremos a este tipo de series como series de términos positivos; es decir la palabra positivo será sinónimo de no negativo.

Observar que la sucesión (S_n) de sumas parciales de la serie de términos positivos $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ es creciente, de manera que existe $\lim\limits_{n\to\infty} S_n \in [0,+\infty]$ y por tanto, o bien $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \in [0,+\infty)$, es decir la serie converge, en cuyo caso escribiremos $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty$ o bien $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty$, en cuyo caso diremos que la serie diverge. Claramente, para que una serie de términos positivos sea convergente es necesario y suficiente que su sucesión de sumas parciales esté acotada.

El que una serie sea de términos positivos, permite que su carácter convergente o no, pueda ser determinado agrupando, condensando, sus términos. Concretamente, se satisface el denominado

Criterio de Condensación: Si (a_n) es una sucesión <u>decreciente</u> y tal que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, entonces la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ y su **serie condensada** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ tienen el mismo carácter, de hecho

$$\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$$

Observar que las hipótesis sobre la sucesión (a_n) implican que es de términos positivos. Por tanto, si para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos $b_n = 2^n a_{2^n}$, entonces las series $\sum a_n$ y $\sum b_n$ son de términos positivos. Consideremos también $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ y $s_m = \sum\limits_{k=0}^{m} 2^k a_{2^k}$, las sumas parciales de las series $\sum a_n$ y $\sum b_n$

Si $n < 2^m$, entonces teniendo en cuenta que la sucesión (a_n) es decreciente,

$$S_n \leq S_{2^m-1} = \underbrace{a_1}_{b_0} + \underbrace{a_2 + a_3}_{\leq 2a_2 = b_1} + \underbrace{a_4 + a_5 + a_6 + a_7}_{\leq 4a_4 = b_2} + a_8 + \cdots + \underbrace{a_{2^{m-1}} + \cdots + a_{2^m-1}}_{\leq 2^{m-1}a_{2^{m-1}} = b_{m-1}} \leq s_{m-1}$$

Si $n \geq 2^m$, entonces, teniendo en cuenta que la sucesión (a_n) es decreciente,

$$S_n \geq S_{2^m} = \underbrace{a_1}_{\geq \frac{b_0}{2}} + \underbrace{a_2}_{\frac{b_1}{2}} + \underbrace{a_3 + a_4}_{\geq 2a_4 = \frac{b_2}{2}} + \underbrace{a_5 + a_6 + a_7 + a_8}_{\geq 4a_8 = \frac{b_3}{2}} + \cdots + \underbrace{a_{2^{m-1}+1} + \cdots + a_{2^m}}_{\geq 2^{m-1}a_{2^m} = \frac{b_m}{2}} \geq \frac{1}{2} s_m$$

Las anteriores identidades muestran que (S_n) está acotada sii (s_m) está acotada, de manera que las series $\sum a_n$ y $\sum b_n$ tienen el mismo carácter. Además de las identidades $\sum a_n = \lim S_n$ y $\sum b_n = \lim s_m$, obtenemos que $\frac{1}{2}\sum b_n \le \sum a_n \le \sum b_n$.

1.3.1. Series de Riemann

El criterio de condensación puede utilizarse para determinar la convergencia o divergencia de las denominadas series armónicas o de Riemann: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Observar que para cada $m \in \mathbb{N}$ se tiene que $b_m = 2^m a_{2^m} = \dfrac{2^m}{2^{\alpha m}} = \dfrac{1}{2^{(\alpha-1)m}} = r^m$, donde $r = \dfrac{1}{2^{\alpha-1}}$. Como $2^{\alpha-1} > 1$ sii $\alpha > 1$, resulta que $r < 1$ sii $\alpha > 1$ Por tanto, si $\alpha \in \mathbb{R}$ y $r = 2^{\alpha-1}$, la condensada de la serie de Riemann $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ es la serie geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$, de manera que

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = +\infty \text{ sii } \alpha \le 1, \text{ mientras que } \frac{2^{\alpha-2}}{2^{\alpha-1}-1} \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \le \frac{2^{\alpha-1}}{2^{\alpha-1}-1}, \text{ si } \alpha > 1.}$$

Si consideramos $\zeta\colon (1,+\infty) \longrightarrow [0,+\infty]$, la función definida como $\zeta(\alpha) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, entonces $\dfrac{2^{\alpha-2}}{2^{\alpha-1}-1} \le \zeta(\alpha) \le \dfrac{2^{\alpha-1}}{2^{\alpha-1}-1}$. Como $\zeta(\alpha) > 1 + \dfrac{1}{2^\alpha} > 1$, la anterior cota inferior sólo es significativa si $\alpha < 2$ ya que $\dfrac{2^{\alpha-2}}{2^{\alpha-1}-1} \le 1$ cuando $\alpha \ge 2$. En definitiva,

$$\boxed{\frac{2^{\alpha-2}}{2^{\alpha-1}-1} \le \zeta(\alpha) \le \frac{2^{\alpha-1}}{2^{\alpha-1}-1} \text{ si } 1 < \alpha < 2 \ \text{ y } \ 1 + \frac{1}{2^\alpha} < \zeta(\alpha) \le \frac{2^{\alpha-1}}{2^{\alpha-1}-1}, \text{ si } 2 \le \alpha}$$

y en particular, $\displaystyle\lim_{\alpha\to+\infty} \zeta(\alpha) = 1$.

La función ζ se denomina Función zeta y fue definida por L. Euler, y extendida a valores complejos por B. Riemann. Sobre el valor de la función zeta sobre los números enteros, Euler mismo demostró que

$$\boxed{\zeta(2n) = (-1)^{n+1}\frac{(2\pi)^{2n}}{2\,(2n)!} B_{2n}, \text{ para cada } n \in \mathbb{N}^*,}$$

donde $\{B_k\}_{n=0}^{\infty}$ son los denominados números de Bernouille que están definidos como $B_n = f^{n)}(0)$, para cada $n \in \mathbb{N}$, donde $f(x) = \dfrac{x}{e^x - 1} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, (observar que, aplicando la Regla de L'Hôpital, $B_0 = f(0) = 1$).

De la identidad $x = f(x)(e^x - 1)$ se deduce que $B_n = -n!\sum_{k=0}^{n-1} \frac{B_k}{k!(n+1-k)!}$ para cada $n \in \mathbb{N}^*$, de manera que cada número de Bernouille puede obtenerse de los anteriores. Tenemos así que $B_1 = -\frac{1}{2}$, $B_2 = \frac{1}{6}$, $B_3 = 0$, $B_4 = -\frac{1}{30}$, $B_5 = 0$, $B_6 = \frac{1}{42}$ y $B_8 = -\frac{1}{30}$. Puede demostrarse que también que $B_{2n+1} = 0$ para cada $n \in \mathbb{N}^*$.

En contraste con los resultados anteriores, se sabe muy poco sobre los valores $\zeta(2n+1)$, $n \in \mathbb{N}^*$; excepto que $\zeta(3)$ es irracional y su valor, conocido como constante de Apéry, es aproximadamente $1{,}20205$ (ver la sección 6.8.4 del libro J.L. Varona, *Recorridos por la Teoría de Números*, Ed. Electolibris, 2014 y también el capítulo del libro A. Córdoba, *La saga de los números*, Ed. , 2006)

La aplicación de la Fórmula de Euler establece, por ejemplo, que

$$\boxed{\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}, \quad \zeta(4) = \frac{\pi^2}{90}, \quad \zeta(6) = \frac{\pi^6}{945} \quad \text{y} \quad \zeta(8) = \frac{\pi^8}{9450},}$$

mientras que las cotas que hemos obtenido para estos valores aplicado el criterio de condensación son

$$\boxed{\frac{5}{4} < \zeta(2) \le 2, \quad \frac{17}{16} < \zeta(4) \le \frac{8}{7}, \quad \frac{65}{64} < \zeta(6) \le \frac{32}{31} \quad \text{y} \quad \frac{257}{256} < \zeta(8) \le \frac{128}{127}.}$$

Por otra parte, para los primeros naturales impares también hemos obtenido que

$$\boxed{\frac{9}{8} < \zeta(3) \le \frac{4}{3}, \quad \frac{33}{32} < \zeta(5) \le \frac{16}{15}, \quad \frac{129}{128} < \zeta(7) \le \frac{64}{63} \quad \text{y} \quad \frac{513}{512} < \zeta(9) \le \frac{256}{255}}$$

.

1.3.2. Criterios de comparación, cociente y raíz

El comportamiento de las series de términos no negativos nos permite emplear un criterio básico de convergencia o divergencia, cuya demostración es inmediata:

Criterio de Comparación: Dadas (a_n) y (b_n) dos sucesiones de términos positivos y tales que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n \le b_n$ cuando $n \ge n_0$, se satisface que

- Si $\sum_{n=0}^{\infty} b_n < +\infty$, entonces $\sum_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty$.
- Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty$, entonces $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = +\infty$.

Como ejemplo de aplicación del criterio de comparación, demostraremos directamente la divergencia de las series armónicas de exponente menor o igual a 1: Si $\boxed{\alpha \le 1,}$ como $n^\alpha \le n$, para cada $n \in \mathbb{N}^*$, resulta que $\dfrac{1}{n} \le \dfrac{1}{n^\alpha}$. La divergencia de la serie armónica junto con el criterio de comparación determinan la divergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$.

En ocasiones, el criterio de comparación puede emplearse analizando el límite del cociente de ambas sucesiones. Concretamente tenemos que

Criterio de Comparación (II): Dadas (a_n) y (b_n) dos sucesiones de términos positivos, tales que $b_n > 0$ si $n \ge n_0$ y existe $\ell = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \in [0, +\infty]$, se tiene que

- Cuando $0 < \ell < +\infty$, entonces $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ y $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ tienen el mismo carácter; es decir son ambas convergentes o ambas divergentes. En particular, esto ocurre si (a_n) y (b_n) son infinitésimos equivalentes.
- Cuando $\ell = 0$, entonces si $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n < +\infty$ también $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty$, mientras que si $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty$, también $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n = +\infty$.
- Cuando $\ell = +\infty$, entonces si $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty$ también $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n < +\infty$, mientras que si $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n = +\infty$, también $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty$.

El criterio de comparación mediante el cálculo del $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ cuando b_n es una serie de Riemann suele denominarse Criterio de Pringsheim.

Aunque el criterio de comparación es útil para establecer la convergencia o divergencia de muchas series de términos no negativos, precisa del conocimiento *a priori* de una serie converge o divergente con la que comparar. En ocasiones, podemos evitar esta comparación analizando el comportamiento del término general de la serie. Concretamente, Consideremos (a_n) una sucesión de términos no negativos.

- Criterio del cociente (D'Alambert): Si $a_n > 0$ cuando $n \geq n_0$ y consideramos $\alpha = \liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \in [0, +\infty]$ y $\beta = \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \in [0, +\infty]$

  (i) Si $\beta < 1$, entonces $\sum_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty$.

  (ii) Si $\alpha > 1$, entonces $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty$.

- Criterio de la raíz: Si $\gamma = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \in [0, +\infty]$:

  (i) Si $\gamma < 1$, entonces $\sum_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty$.

  (ii) Si $\gamma > 1$, entonces $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty$.

La diferencia entre los dos criterios anteriores es sutil: si existe $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$, entonces existe $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ y $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$, pero el recíproco no es cierto en general (ver el Teorema 3.37 del libro W. Rudin, *Principios de Análisis Matemático*, Ed. McGraw-Hill, 1980). De hecho, se satisface que

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

En la práctica usaremos las siguientes versiones de los criterios anteriores:

Consideremos (a_n) una sucesión de términos no negativos.

- Criterio del cociente (D'Alambert): Si $a_n > 0$ cuando $n \geq n_0$ y existe $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$, entonces $\sum_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty$ si $\ell < 1$, mientras que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty$ si $\ell > 1$.

- Criterio de la raíz: Si existe $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell$, entonces $\sum_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty$ si $\ell < 1$, mientras que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty$ si $\ell > 1$.

La demostración de los criterios del cociente y de la raíz se basa en la comparación de la serie dada con una geométrica. Por otra parte, si $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ o $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$, nada se puede decir sobre la convergencia o divergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Por ejemplo, si $a_n = \frac{1}{n}$ y $\hat{a}_n = \frac{1}{n^2}$, entonces $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\hat{a}_{n+1}}{\hat{a}_n} = 1$, pero $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty$ mientras que $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \hat{a}_n < +\infty$. Los mismos ejemplos pueden ser empleados en el caso del criterio de la raíz.

En ocasiones, cuando el criterio del cociente no es concluyente; es decir, cuando se tiene que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, podemos determinar el carácter de la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ con la siguiente modificación:

> Criterio de Raabe: Sea (a_n) una sucesión de términos estrictamente positivos y tal que existe $\lim\limits_{n\to\infty} n\Big(1 - \dfrac{a_{n+1}}{a_n}\Big) = \ell$. Entonces $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty$ si $\ell > 1$, mientras que $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty$ si $\ell < 1$.

Si $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} n\Big(1 - \dfrac{a_{n+1}}{a_n}\Big) = \ell < 1,}$ existe n_0 tal que $n\Big(1 - \dfrac{a_{n+1}}{a_n}\Big) < 1$, para cada $n \ge n_0$. Entonces, para cada $n \ge n_0$ se satisface que $n\big(a_n - a_{n+1}\big) \le a_n$; es decir, $(n-1)a_n \le n a_{n+1}$ Por tanto, para cada $m \ge 0$ tenemos que

$$(n_0-1)a_{n_0} \le n_0 a_{n_0+1} \le \cdots \le (n_0+m)a_{n_0+m+1} \Longrightarrow \frac{(n_0-1)a_{n_0}}{n_0+m} \le a_{n_0+m+1};$$

es decir, si $\alpha = (n_0-1)a_{n_0}$, entonces $\alpha > 0$ y la serie $\sum\limits_{k=n_0+1}^{\infty} a_k$ está minorada por $\alpha \sum\limits_{k=n_0+1} \dfrac{1}{k-1}$ que es divergente. Aplicando el criterio de comparación, resulta que $\sum\limits_{k=n_0+1}^{\infty} a_k$ diverge y por tanto, también diverge $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$.

Si $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} n\Big(1 - \dfrac{a_{n+1}}{a_n}\Big) = \ell > 1}$ y consideramos $0 < \alpha < \ell - 1$, entonces $1 < 1 + \alpha < \ell$ y existe $n_0 > 1$ tal que $n\Big(1 - \dfrac{a_{n+1}}{a_n}\Big) > 1 + \alpha$, para cada $n \ge n_0$. Entonces, para cada $n \ge n_0$

$$n\big(a_n - a_{n+1}\big) \ge (1+\alpha)a_n \Longrightarrow \alpha a_n \le (n-1)a_n - n a_{n+1}.$$

El término de la derecha es telescópico, por lo que sumando obtenemos que

$$\boxed{\begin{aligned}\alpha \sum_{n=n_0}^{n_0+m} a_n \le \sum_{n=n_0}^{n_0+m} \big[(n-1)a_n - n a_{n+1}\big] &= \sum_{n=n_0-1}^{n_0+m-1} n a_{n+1} - \sum_{k=n_0}^{n_0+m} n a_{n+1} \\ &= (n_0-1)a_{n_0} - (n_0+m)a_{n_0+m+1} < (n_0-1)a_{n_0}\end{aligned}}$$

y por tanto $\sum\limits_{k=1}^{n_0+m} a_k \le \sum\limits_{n=1}^{n_0-1} a_k + \dfrac{(n_0-1)}{\alpha} a_{n_0}$. En definitiva, la sucesión de sumas parciales de la serie $\sum a_k$ está acotada y la serie es, por tanto, convergente.

Nota: Como comentábamos antes, el criterio de Raabe, puede utilizarse cuando el criterio del cociente no es concluyente; es decir, cuando $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$. En este caso, el límite $\lim\limits_{n\to\infty} n\Big(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\Big)$ es una indeterminación, que cuando se dilucida determina la convergencia o divergencia de la serie, excepto cuando es igual a 1.

Ejemplo: Estudiar la convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}$, $a > -1$.

Si definimos $a_n = \dfrac{n!}{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}$, para cada $n \geq 0$, entonces $a_n > 0$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}{n!(a+1)(a+2)\cdots(a+n+1)} = \frac{n+1}{a+n+1}$$

lo que implica que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, de manera que el criterio del cociente no es concluyente. Sin embargo, como

$$\lim_{n\to\infty} n\Big(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\Big) = \lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{n+1}{a+n+1}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{an}{a+n+1} = a,$$

aplicando el criterio de Raabe, la serie converge si $a > 1$ y diverge si $a < 1$. Por otra parte, si $a = 1$ el criterio de Raabe no es concluyente, pero en este caso, $a_n = \dfrac{n!}{(n+1)!} = \dfrac{1}{n+1}$ y por tanto, la serie es divergente. En resumen,

si $a > -1$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}$ converge si $a > 1$ y diverge si $-1 < a \leq 1$.

1.3.3. Criterio de la integral

Otro útil criterio de convergencia de series positivas se basa en la integración de Riemann:

Supongamos que $m \in \mathbb{N}^*$ y que $f\colon [m, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, es una función decreciente, no negativa y tal que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Nuestro propósito es estudiar el carácter de la serie $\displaystyle\sum_{n=m}^{\infty} f(n)$.

Como $f \geq 0$, la serie $\displaystyle\sum_{n=m}^{\infty} f(n)$ es de términos positivos. Además, como f es decreciente en $[m, +\infty)$, existe $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, lo que implica que $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Por tanto, la hipótesis $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ es necesaria para asegurar la convergencia de la serie. Cuando dicha hipótesis no se satisfaga la serie será divergente.

Podemos suponer que $f(x) > 0$ para cada $x \ge m$, ya que si $f(x_0) = 0$ para algún $x_0 \ge m$, entonces $0 = f(x_0) \ge f(x) \ge 0$ para cada $x \ge x_0$, lo que implicaría que f sería nula en $[x_0, +\infty)$ y por tanto, $\sum\limits_{n=m}^{\infty} f(n) = \sum\limits_{n=m}^{\lfloor x_0 \rfloor} f(k)$, donde $\lfloor x_0 \rfloor$ es la parte entera de x_0.

Por otra parte, la hipótesis de monotonía implica que f es acotada e integrable Riemann en cada intervalo cerrado $[m, x]$ con $x > m$. Por tanto, si definimos $H\colon [m, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ como $H(x) = \displaystyle\int_m^x f(s)ds$, el Teorema Fundamental del Cálculo asegura que H es continua. Además, como $f \ge 0$ resulta que H es creciente lo que implica que existe $\lim\limits_{x\to+\infty} H(x) \in [0, +\infty]$.

Si para cada $n \in \mathbb{N}^*$ s_n y S_n son las sumas inferiores y superiores de Riemann de f correspondientes a la partición $m < m+1 < \cdots < m+n$ del intervalo $[m, m+n]$, la hipótesis de decrecimiento de f implica que

$$\sum_{j=m+1}^{m+n} f(j) = \sum_{j=1}^{n} f(m+j) = s_n \le \int_m^n f \le S_n = \sum_{j=0}^{n-1} f(m+j) = \sum_{j=m}^{m+n-1} f(j)$$

Las anteriores desigualdades, configuran el siguiente criterio:

Criterio de la integral: Si $m \in \mathbb{N}^*$ y $f\colon [m, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ es decreciente, no negativa y tal que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, la serie $\sum\limits_{n=m}^{\infty} f(n)$ converge si $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_m^n f < +\infty$ y diverge si $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_m^n f = +\infty$. Además,

$$\lim_{n\to\infty} \int_m^n f \le \sum_{n=m}^{\infty} f(n) \le f(m) + \lim_{n\to\infty} \int_m^n f.$$

Observar que el resultado anterior concluye que $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_m^n f$ es una aproximación por defecto del valor de la serie $\sum\limits_{n=m}^{\infty} f(n)$ y que $f(m)$ es una cota del error:

$$\boxed{0 \le \sum_{n=m}^{\infty} f(n) - \lim_{n\to\infty} \int_m^n f \le f(m).}$$

Esta observación sugiere utilizar el criterio de la integral para aproximar el valor de las serie tanto como deseemos. Para cada $k \in \mathbb{N}$ tal que $k > m$, entonces f satisface que es decreciente y no negativa en $[k, +\infty)$, por lo que

$$\boxed{0 \le \sum_{n=k}^{\infty} f(n) - \lim_{n\to\infty} \int_k^n f \le f(k) \Longrightarrow 0 \le \sum_{n=m}^{\infty} f(n) - \sum_{n=m}^{k-1} f(n) - \lim_{n\to\infty} \int_k^n f \le f(k)}$$

Por tanto, para cada $k > m$,

$$\sum_{n=m}^{k-1} f(n) + \lim_{n\to\infty} \int_k^n f \ \underline{\text{aproxima por defecto}} \ \sum_{n=m}^{\infty} f(n) \ \text{con un error inferior a } f(k)$$

Como f es decreciente el error es tanto menor cuanto mayor sea k y como $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = 0$, el error tiene a 0 con k.

Así pues, el criterio de la integral no sólo determina el carácter de la serie $\sum\limits_{n=m}^{\infty} f(n)$ sino que proporciona además un método de aproximación de su suma. Por otra parte, si f es, además de decreciente, continua y F es una primitiva de f en $[m, +\infty)$, entonces F es creciente, ya que $F' = f \ge 0$, $\displaystyle\int_m^n f = F(n) - F(m)$, y por tanto,

$$\lim_{n\to\infty} \int_m^n f = \lim_{n\to\infty} F(n) - F(m) = \sup_{x\in[m,+\infty)} \{F(x)\} - F(m).$$

En definitiva,

> Sean $m \in \mathbb{N}^*$, $f\colon [m, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, decreciente, <u>continua</u>, no negativa, tal que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ y F una primitiva de f en $[m, +\infty)$. Entonces la serie $\sum\limits_{n=m}^{\infty} f(n)$ converge si $\lim\limits_{n\to\infty} F(n) < +\infty$ y diverge si $\lim\limits_{n\to\infty} F(n) = +\infty$. Además, para cada $k \ge m$ se tiene que
>
> $$\lim_{n\to\infty} F(n) - F(k) + \sum_{n=m}^{k-1} f(n) \le \sum_{n=m}^{\infty} f(n) \le \lim_{n\to\infty} F(n) - F(k) + \sum_{n=m}^{k} f(n)$$
>
> y por tanto, $\lim\limits_{n\to\infty} F(n) - F(k) + \sum\limits_{n=m}^{k-1} f(n)$ <u>aproxima por defecto</u> $\sum\limits_{n=m}^{\infty} f(n)$ con un error inferior a $f(k)$

donde, se considera $\sum\limits_{n=m}^{k-1} f(n) = 0$ si $k = m$.

A modo de ejemplo, utilizaremos este criterio para establecer la convergencia o divergencia de las series de Riemann, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$, donde $\alpha>0$. En este caso, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}=\sum_{n=1}^{\infty}f(n)$, donde $f\colon[1,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ está definida como $f(x)=x^{-\alpha}$, que claramente es decreciente, continua, no negativa y satisface que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$. Teniendo en cuenta que $F(x)=\dfrac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}$ es una primitiva de $x^{-\alpha}$ cuando $\alpha\neq1$, mientras que $F(x)=\log(x)$ es una primitiva de x^{-1}, resulta que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}F(x)<+\infty$ sii $\alpha>1$. Concretamente, si $\alpha>1$, entonces $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}F(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}=0$ y por tanto, $\displaystyle\frac{1}{\alpha-1}\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}\le1-\frac{1}{1-\alpha}=\frac{\alpha}{\alpha-1}$. En general, estas cotas, correspondientes al caso $k=1$, son menos finas que las obtenidas por el criterio de condensación. Más generalmente,

si $\alpha>1$, para cada $k\ge1$ se tiene que

$$\frac{k}{\alpha-1}\frac{1}{k^\alpha}+\sum_{n=1}^{k-1}\frac{1}{n^\alpha}\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}\le\frac{k}{\alpha-1}\frac{1}{k^\alpha}+\sum_{n=m}^{k}\frac{1}{n^\alpha}$$

Como $\displaystyle\frac{k}{\alpha-1}\frac{1}{k^\alpha}+\sum_{n=1}^{k-1}\frac{1}{n^\alpha}=\left(\frac{k+1-\alpha}{\alpha-1}\right)\frac{1}{k^\alpha}+\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n^\alpha}$,

si $\alpha>1$, entonces $\dfrac{1}{\alpha-1}\le\zeta(\alpha)\le\dfrac{\alpha}{\alpha-1}$. Más generalmente, para cada $k\ge1$,

$$0\le\zeta(\alpha)-\left(\frac{k+1-\alpha}{\alpha-1}\right)\frac{1}{k^\alpha}-\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n^\alpha}\le\frac{1}{k^\alpha}$$

1.3.4. La Constante de Euler-Mascheroni

Las técnicas desarrolladas en la demostración del criterio de la integral pueden ser utilizadas también para estimar el crecimiento de series divergentes. Ilustraremos esta situación con el análisis de la serie armónica. Concretaremente, mostraremos que las sumas parciales de la serie armónica es un infinito equivalente al logaritmo neperiano, que aquí denotaremos por log.

Consideremos $H_n=1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}$ la suma parcial n-èsima de la serie armónica.

Definamos ahora la función $f\colon[1,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ dada por $f(x)=\dfrac{1}{x}$. Claramente, f es continua y decreciente, así que si para cada $n\ge1$ consideramos s_n y S_n las sumas de Riemann inferior y superior de f correspondientes a la partición $\mathcal{P}=\{1,2,\dots,n\}$ del intervalo

$[1, n]$, entonces

$$H_n - 1 = \sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j} = s_n \le \int_1^n f(x)dx = \log(n) \le S_n = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j} = H_{n-1} = H_n - \frac{1}{n},$$

Aplicando ambas identidades, obtenemos que $\frac{1}{n} + \log(n) \le H_n \le 1 + \log(n)$ y por tanto, $1 + \frac{1}{n\log(n)} \le \frac{H_n}{\log(n)} \le 1 + \frac{1}{\log(n)}$, de donde, aplicando el criterio del Sandwich para sucesiones, resulta que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{H_n}{\log(n)} = 1$; es decir, $H_n \sim \log(n)$.

Por ejemplo, teniendo en cuenta que $\log(10) \sim 2{,}3025851$ si tomamos $n = 10^6$, las desigualdades anteriores muestran que $13{,}8 < H_n < 15$. Así pues, la suma del primer millón de términos de la serie armónica es inferior a 15.

Estas acotaciones, que por otra parte son ampliamente conocidas, ver El Libro, pueden mejorarse teniendo en cuenta que la convexidad de f implica que su gráfica en el intervalo $[j, j+1]$ queda por debajo del segmento que une los puntos $\big(j, f(j)\big)$ y $\big(j+1, f(j+1)\big)$. Asimismo, como f es decreciente y convexa la gráfica de la tangente a f en $j+1$ queda por debajo de la de f. En definitiva, si para cada $j = 1, \ldots, n-1$, consideramos $h_j, g_j \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas como $h_j(x) = \frac{2j+2-x}{(j+1)^2}$ y $g_j(x) = \frac{2j+1-x}{j(j+1)}$, entonces $h_j(x) \le f(x) \le g_j(x)$, para cada $x \in [j, j+1]$, desigualdades que pueden comprobarse directamente. Resulta entonces que

$$\boxed{\frac{1}{j+1} + \frac{1}{2(j+1)^2} = \int_j^{j+1} h_j(x) \le \underbrace{\int_j^{j+1} f(x)}_{\log(j+1)-\log(j)} \le \int_j^{j+1} g_j(x) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{j} + \frac{1}{j+1}\right]}$$

Por supuesto, estas desigualdades son más finas que las correspondientes a los sumandos de las sumas inferior y superior de f para el intervalo $[j, j+1]$. En ambos casos, hemos sustituido el área de un rectángulo por la de un trapecio. Sumando todos los términos anteriores, para cada $n \in \mathbb{N}^*$ se tiene que

$$\boxed{H_n - \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^2} \le \log(n) \le H_n - \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}}$$

y por tanto,

$$\boxed{\frac{1}{2} + \frac{1}{2n} + \log(n) \le H_n \le \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^2} + \log(n)}$$

Observar que si $n > 1$, $\frac{1}{2}+\frac{1}{2n} > \frac{1}{n}$ y $\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j^2} < 1$, lo que ratifica que estas acotaciones son más finas que las obtenidas al comienzo de la sección.

Las anteriores desigualdades muestran no sólo que $H_n \sim \log(n)$ sino que establecen cotas de la diferencia $H_n - \log(n)$. Si definimos $C_n = H_n - \log(n)$, las primeras desigualdades muestran que para cada $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n} < C_n < 1$, y las más precisas que

$$\boxed{\frac{1}{2} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \le H_n - \log(n) \le \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j^2} \le 1}$$

De hecho, (C_n) es decreciente. Para demostralo, consideraremos primero la función $g\colon (-1,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como $g(x) = x - \log(1+x)$. Como $g'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$, g tiene un mínimo absoluto en $x = 0$ y como $g(0) = 0$, esto implica que $\log(1+x) \le x$ para cada $x > -1$. En particular, $-\frac{1}{n} > \log\left(1-\frac{1}{n}\right)$, para cada $n \ge 1$. Utilizando esta desigualdad, tenemos que, para cada $n \ge 1$,

$$C_n - C_{n+1} = H_n - \log(n) - H_{n+1} + \log(n+1) = -\frac{1}{n+1} - \log\left(1-\frac{1}{n+1}\right) > 0,$$

lo que implica que (C_n) es decreciente y por tanto, convergente. Teniendo en cuenta que $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, hemos demostrado

existe el límite $\gamma = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\log(n)\right)$ y además se tiene que

$$\frac{1}{2} \le \gamma \le \frac{3}{2} - \frac{\pi^2}{12} < \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

El valor $\gamma = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\log(n)\right)$ se denomina **constante de Euler-Mascheroni**. Su valor aproximado es $\gamma \simeq 0{,}5772156649\ldots$ y se desconoce si es un número racional o irracional.

Una sorprendente consecuencia de la convergencia de (C_n) es la determinación del valor de la serie alternada $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$: Para cada $n \ge 1$, tenemos que

$$\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^k}{k} = \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2j} - \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2j-1} = \frac{1}{2}H_n - H_{2n} + \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2j} = H_n - H_{2n},$$

lo que implica que

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k} = H_n - H_{2n} = H_n - \log(n) + \log(n) - \big(H_{2n} - \log(2n) + \log(2n)\big)$$
$$= C_n - C_{2n} + \log(n) - \log(2n) = C_n - C_{2n} - \log(2).$$

Como sabemos que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ es convergente, resulta que

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k} = \lim_{n\to\infty} \big(C_n - C_{2n} - \log(2)\big) = -\log(2)}$$

1.4. Problemas resueltos

Problema 1. Estudieu la convergència de les sèries numèriques següents:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n}}{n}$, (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{3n+1}}{n^2+\sqrt{n}}$, (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$, $\alpha \in \mathbb{R}$

Solución: Excepto si $\alpha < 0$ en (c), todas las series del enunciado son de términos positivos, de manera que podemos aplicar cualquiera de los criterios establecidos para ellas, especialmente el criterio de comparación (directamente o en su segunda versión por paso al límite).

(a) Si $a_n = \dfrac{e^{-n}}{n}$ y consideramos $b_n = \dfrac{1}{n^2}$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es una serie de Riemann de exponente 2 y por tanto convergente. Como $e^n > n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, resulta que $e^{-n} < \dfrac{1}{n}$ y por tanto, $a_n \le b_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$, de manera que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n}}{n}$ es convergente.

También, podemos observar que $\dfrac{e^{-n}}{n} \le e^{-n} = \left(\dfrac{1}{e}\right)^n$, de manera que la serie $\sum a_n$ está mayorada por una geométrica de razón $e^{-1} < 1$, lo que implica que es convergente y además $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \le \dfrac{1}{e-1}$.

También podemos aplicar el criterio de comparación en su segunda versión. Como $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} ne^{-n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{e^n} = 0$ (ver la escala de infinitos) y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es convergente, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es también convergente.

(b) Si $a_n = \dfrac{2^{3n+1}}{n^2+\sqrt{n}} = \dfrac{2\cdot 8^n}{n^2+\sqrt{n}}$, por la escala de infinitos resulta que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n =$

$+\infty$, de manera que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{3n+1}}{n^2+\sqrt{n}} = +\infty$ ya que no satisface la condición necesaria de convergencia.

(c) Definamos $a_n = \sin\left(\dfrac{1}{n^\alpha}\right)$. Si $\boxed{\alpha \leq 0,}$ entonces $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, de manera que que no satisface la condición necesaria de convergencia y por tanto $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ no converge. Observar que si $\alpha = 0$, entonces la serie es de términos positivos y divergente.

Si $\boxed{\alpha > 0,}$ entonces $a_n \geq 0$ y si consideramos $b_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$, resulta que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ es la serie armónica de exponente α y por tanto divergente si $0 < \alpha \leq 1$ y convergente si $\alpha > 1$.

Por otra parte, (a_n) y (b_n) son infinitésimos equivalentes; es decir, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 1$ y por tanto las series $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ tienen el mismo carácter, lo que implica que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ es convergente si $\alpha > 1$ y divergente si $0 < \alpha \leq 1$. En resumen,

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) \text{ no converge si } \alpha < 0, \text{ diverge si } 0 \leq \alpha \leq 1 \text{ y converge si } \alpha > 1}$$

Problema 2. Estudieu la convergència de les sèries numèriques següents:

$$\text{(a)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\big(\log(n)\big)^n}, \qquad \text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{3}{4}\right)^n,$$

Solución: Ambas series son de términos positivos, de manera que podemos aplicar cualquiera de los criterios establecidos para ellas, especialmente los criterios de la raíz y del cociente.

(a) Si $a_n = \dfrac{1}{\big(\log(n)\big)^n}$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\log(n)} = 0$. Aplicando el criterio de la raíz, obtenemos que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\big(\log(n)\big)^n}$ es convergente.

(b) Si $a_n = n\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3}{4}\sqrt[n]{n} = \dfrac{3}{4}$, donde hemos tenido en cuenta que $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. Aplicando el criterio de la raíz, obtenemos que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{3}{4}\right)^n$ es convergente.

También podemos aplicar el criterio del cociente (recordar que cuando existe el límite del cociente ambos criterios son equivalentes), ya que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)3^{n+1}4^n}{n3^n4^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3(n+1)}{4n} = \frac{3}{4}.$$

Finalmente, teniendo en cuenta que la serie es de tipo aritmético-geométrica, podemos obtener una conclusión más precisa: Como la razón es $r = \dfrac{3}{4} < 1$, la serie es convergente y además

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{3}{4}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} nr^n = \sum_{n=0}^{\infty} nr^n = \frac{r}{(1-r)^2} = \frac{\frac{3}{4}}{\left(1-\frac{3}{4}\right)^2} = 12}$$

Problema 3. Estudieu el caràcter de les sèries següents:

$$\text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\log(n)}{n}, \qquad \text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\log(n)}{n^2}$$

Solución: Todas las series del enunciado son alternadas, de manera que para estudiar su convergencia podemos intentar utilizar preferentemente el criterio de Leibniz.

(a) Si $a_n = \dfrac{\log(n)}{n}$, aplicando la escala de infinitos, obtenemos que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Por tanto, para aplicar el criterio de Leibniz, es suficiente comprobar que (a_n) es decreciente. Para ello, consideraremos la función $f(x) = \dfrac{\log(x)}{x}$. Como $f'(x) = \dfrac{1-\log(x)}{x^2}$, resulta que $f'(x) < 0$ si $x > e$, de manera que f es decreciente en $(e, +\infty)$, lo que implica que (a_n) es decreciente para $n \geq 3$. En definitiva, el criterio de Leibniz implica que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\log(n)}{n}$ es convergente.

Observar que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\log(n)}{n}$ no es absolutamente convergente puesto que como $\log(n) > 1$, $n \geq 3$, tenemos que $\dfrac{1}{n} < \dfrac{\log(n)}{n}$ y aplicando el criterio de comparación obtenemos que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(n)}{n}$ es divergente.

(b) Si $a_n = \dfrac{\log(n)}{n^2}$, aplicando la escala de infinitos, obtenemos que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Por tanto, para aplicar el criterio de Leibniz, es suficiente comprobar que (a_n) es decreciente. Para ello, consideraremos la función $f(x) = \dfrac{\log(x)}{x^2}$. Como $f'(x) = \dfrac{x\big(1-2\log(x)\big)}{x^4}$, resulta que $f'(x) < 0$ si $x > \sqrt{e}$, de manera que f es decreciente en $(\sqrt{e}, +\infty)$, lo que implica que (a_n) es decreciente para $n \geq 3$.

También podemos demostrar la convergencia de la serie probando que, en este caso, es absolutamente convergente. Para ello basta observar que como $\log(n) < \sqrt{n}$, para cada $n \in \mathbb{N}^*$, resulta que $a_n \leq \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ y como la serie de Riemann de exponente $\frac{3}{2}$ es convergente, aplicando el criterio de comparación obtenemos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(n)}{n^2}$ es convergente y por tanto que serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\log(n)}{n^2}$ es absolutamente convergente.

Problema 4. Estudieu la convergència de les sèries següents en funció del valor $x \in \mathbb{R}$.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$, (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$, (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^n$, (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$.

Solución: (a) Si $a_n = \frac{x^n}{n^2}$, entonces cuando $|x| > 1$, la escala de infinitos implica que $\lim_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$, de manera que no se satisface la condición necesaria de convergencia de la serie. Por otra parte, si $|x| \leq 1$, entonces $|x|^n \leq 1$ y por tanto, $|a_n| \leq \frac{1}{n^2}$. Como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ es una serie de Riemann convergente, el criterio de comparación implica que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ es absolutamente convergente y, por tanto, convergente. En resumen,

(i) Si $|x| > 1$ la serie no converge. Si además $x > 1$, la serie diverge.

(ii) Si $|x| \leq 1$ la serie converge absolutamente.

(b) Si $a_n = \frac{x^n}{n}$, entonces cuando $|x| > 1$, la escala de infinitos implica que $\lim_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$, de manera que no se satisface la condición necesaria de convergencia de la serie. Por otra parte, si $x = 1$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es la serie armónica y por tanto divergente, mientras que si si $x = -1$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)}{n}$ que es convergente (pero no absolutamente convergente), por aplicación del criterio de Leibniz. Finalmente si $|x| < 1$, entonces $|a_n| \leq |x|^n$ y como $\sum_{n=1}^{\infty} |x|^n$ es una serie geométrica de razón menor que 1 y por tanto, convergente, el criterio de comparación implica que si $|x| < 1$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ es absolutamente convergente y, por tanto, convergente. En resumen,

(i) Si $|x| > 1$ la serie no converge. Si además, $x > 1$, la serie diverge.

(ii) Si $x = 1$ la serie diverge.

(iii) Si $x = -1$ la serie converge, pero no es absolutamente convergente.

(iv) Si $|x| < 1$ la serie converge absolutamente.

(c) Se trata de una serie geométrica de razón x. Por tanto, sabemos que

(i) Si $|x| \geq 1$ la serie no converge. Si además $x \geq 1$, la serie diverge.

(ii) Si $|x| < 1$ la serie converge absolutamente a $\frac{x}{1-x}$.

(d) Si $a_n = nx^n$, entonces cuando $|x| \geq 1$, tenemos que $\lim_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$, de manera que no se satisface la condición necesaria de convergencia de la serie. Por otra parte, si $|x| < 1$, entonces $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)|x|^{n+1}}{n|x|^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|(n+1)}{n} = |x|$, de manera que aplicando el criterio del cociente, si $|x| < 1$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ es absolutamente convergente y, por tanto, convergente.

Por otra parte, la serie es aritmético-geométrica, así que cuando $|x| < 1$ es absolutamente convergente y además su suma es $\frac{x}{(1-x)^2}$ En resumen,

(i) Si $|x| \geq 1$ la serie no converge. Si además, $x > 1$, la serie diverge.

(ii) Si $|x| < 1$ la serie converge absolutamente y su suma es $\frac{x}{(1-x)^2}$.

Problema 5. Estudieu la convergència de la sèrie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos^2(k)}{\sqrt{k}}$.

(Per a cada enter j, l'interval $\left[j\pi - \frac{1}{2}, j\pi + \frac{1}{2}\right]$ conté exactament un enter k_j.)

Solución: Mostraremos primero un útil resultado sobre series de términos no negativos. Dada (a_n) una sucesión de términos no negativos, consideremos (a_{n_k}) una subsucesión, las series de términos no negativos $\sum\limits_n a_n$ y $\sum\limits_k a_{n_k}$ y (S_n) y (s_k) las correspondientes sucesiones de sumas parciales. Entonces, como $k \le n_k$, para cada $k \in \mathbb{N}$, se satisface que

$$s_k = a_{n_1} + \cdots + a_{n_k} \le a_1 + \cdots + a_{n_1} + \cdots + a_{n_k} = S_{n_k}$$

de manera que $\sum\limits_k a_{n_k} = \lim\limits_{k\to\infty} s_k \le \lim\limits_{k\to\infty} S_{n_k} = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \sum\limits_n a_n$, donde hemos tenido en cuenta que la sucesión de sumas parciales de una serie de términos positivos es siempre convergente y que S_{n_k} es una subsucesión de S_n y tiene por tanto el mismo límite. En definitiva,

si $\sum\limits_n a_n$ es una serie de términos no negativos, para cada subsucesión (a_{n_k}) de su término general se satisface que $\sum\limits_k a_{n_k} \le \sum\limits_n a_n$. En particular, si $\sum a_n < +\infty$, entonces para cada subsucesión $\sum\limits_k a_{n_k} < +\infty$, mientras que si para alguna subsucesión se tiene que $\sum\limits_k a_{n_k} = +\infty$, entonces $\sum\limits_n a_n = +\infty$

La serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\cos^2(k)}{\sqrt{k}}$ es de términos positivos. Por tanto, si consideramos k_j, $j \ge 1$, el único entero en el intervalo $\left[j\pi - \frac{1}{2}, j\pi + \frac{1}{2}\right]$, aplicando el resultado anterior tenemos que $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \dfrac{\cos^2(k_j)}{\sqrt{k_j}} \le \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\cos^2(k)}{\sqrt{k}}$.

Por otra parte, $\theta \in \left[j\pi - \frac{1}{2}, j\pi + \frac{1}{2}\right]$ sii $\theta - j\pi \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ y como

$$\cos\big(\theta - j\pi\big) = \cos(\theta)\cos(j\pi) + \operatorname{sen}(\theta)\operatorname{sen}(j\pi) = \cos(\theta)\cos(j\pi) = (-1)^j\cos(\theta)$$

resulta que $\cos^2(\theta) = \cos^2(\theta - j\pi)$.

La función $\cos^2(x)$ es simétrica y positiva en $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ y decreciente en $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, de manera que $\cos^2(x) > \cos^2\left(\frac{1}{2}\right)$, para cada $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, lo que implica que $\cos^2(k_j) > \cos^2\left(\frac{1}{2}\right)$, para cada $j \ge 1$.

Además, como $k_j < j\pi + \frac{1}{2}$, resulta que $\dfrac{1}{\sqrt{j\pi + \frac{1}{2}}} < \dfrac{1}{\sqrt{k_j}}$, para cada $j \ge 1$ y por tanto,

$$\frac{\cos^2\left(\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{j\pi + \frac{1}{2}}} < \frac{\cos^2(k_j)}{\sqrt{k_j}}, \quad \text{para cada } j \ge 1$$

Si definimos $a_j = \dfrac{\cos^2(k_j)}{\sqrt{k_j}}$, $b_j = \dfrac{\cos^2\left(\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{j\pi + \frac{1}{2}}}$ y $c_j = \dfrac{1}{\sqrt{j}} = \dfrac{1}{j^{\frac{1}{2}}}$, para cada $j \ge 1$, resulta que $b_j < a_j$, para cada $j \geq 1$ y por otra parte,

$$\lim_{j\to\infty} \frac{b_j}{c_j} = \lim_{j\to\infty} \frac{\cos^2\left(\frac{1}{2}\right)\sqrt{j}}{\sqrt{j\pi + \frac{1}{2}}} = \cos^2\left(\frac{1}{2}\right).$$

En consecuencia, aplicando el criterio de comparación, $\sum b_j$ y $\sum c_j$ tienen el mismo carácter y como $\sum c_j$ es una serie de Riemann con exponente menor que 1, es divergente, lo que implica que $\sum b_j = +\infty$. Aplicando nuevamente el criterio de comparación, obtenemos que $\sum a_j = +\infty$, de manera que $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\cos^2(k_j)}{\sqrt{k_j}} = +\infty$ y, en definitiva,

$$\boxed{\text{la serie } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos^2(k)}{\sqrt{k}} \text{ es divergente}}$$

Nota: No todo natural se encuentra en un intervalo de la forma $\left[j\pi - \frac{1}{2}, j\pi + \frac{1}{2}\right]$. Esto ocurre por ejemplo con $n = 1, 2, 4, 5, 7, 8, \ldots$

Problema 6. Apliqueu el criteri de Dirichlet per estudiar la convergència de la sèrie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{\sqrt{n}}$ segons el valor del paràmetre real x.

(Podeu usar la fórmula $\cos(x) + \cos(2x) + \cdots + \cos(nx) = \dfrac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)} - \dfrac{1}{2}$, vàlida quan x no és un múltiple enter de 2π.)

Solución: Si consideramos $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ y $b_n = \cos(nx)$, entonces $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$. Claramente, (a_n) es decreciente y un infinitésimo.

Si $x = 2m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$, entonces $b_n = \cos(2\pi nm) = 1$ y por tanto,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} = +\infty,$$

ya que se trata de una serie de Riemann de exponente menor que 1.

Si x no es un múltiplo entero de 2π, entonces $\sin\left(\frac{x}{2}\right) \neq 0$ y $s_n = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} b_n = \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)} - \frac{1}{2}$, lo que implica que

$$|s_n| \leq \frac{\left|\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)\right|}{2\left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right|} + \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2\left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right|} + \frac{1}{2} = \frac{1 + \left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right|}{2\left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right|} \leq \frac{1}{\left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right|},$$

y por tanto, s_n es una sucesión acotada. Aplicando el criterio de Dirichlet, resulta que $\sum a_n b_n$ es convergente. En definitiva,

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{\sqrt{n}} \text{ converge si } x \text{ no es múltiplo entero de } 2\pi \text{ y diverge si } x = 2m\pi,\ m \in \mathbb{Z}}$$

Nota 1: Aplicando el resultado para $x = 1$, obtenemos que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n)}{\sqrt{n}}$ converge. Podemos comparar este resultado con el del Problema 5: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2(n)}{\sqrt{n}} = +\infty$. En particular, este ejemplo muestra que en el criterio de Dirichlet no puede concluirse la convergencia absoluta de la serie:

Como $|\cos(n)| \leq 1$, resulta que $\cos^2(n) \leq |\cos(n)| \leq 1$ y por tanto $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos(n)|}{\sqrt{n}} = +\infty$.

Nota 2: Si x no es un múltiplo entero de 2π, la fórmula

$$\cos(x) + \cos(2x) + \cdots + \cos(nx) = \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})x\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)} - \frac{1}{2},$$

es equivalente a la identidad

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(kx) = 1 + \cos(x) + \cdots + \cos(nx) = \frac{1}{2} + \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})x\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

que demostraremos con recursos básicos de números complejos y sumas geométricas:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \cos(kx) &= \Re\left[\sum_{k=0}^{n} e^{ikx}\right] = \Re\left[\sum_{k=0}^{n} \left(e^{ix}\right)^k\right] = \Re\left[\frac{1 - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}}\right] \\
&= \frac{1}{|1 - e^{ix}|^2} \Re\left[\left(1 - e^{i(n+1)x}\right)\left(1 - e^{-ix}\right)\right] = \frac{\Re\left(1 - e^{-ix} - e^{i(n+1)x} + e^{inx}\right)}{(1 - \cos(x))^2 + \operatorname{sen}^2(x)} \\
&= \frac{1 - \cos(x) + \cos(nx) - \cos\left((n+1)x\right)}{2\left(1 - \cos(x)\right)} = \frac{1}{2} + \frac{\cos(nx) - \cos\left((n+1)x\right)}{4\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la identidad trigonométrica $\cos(a) - \cos(b) = 2\operatorname{sen}\left(\frac{a+b}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{b-a}{2}\right)$ resulta que

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(kx) = \frac{1}{2} + \frac{\cos(nx) - \cos\left((n+1)x\right)}{4\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{2} + \frac{\operatorname{sen}\left((n+\frac{1}{2})x\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)},$$

de donde se concluye la identidad.

1.5. Problemas propuestos

Problema 1. Sumeu les sèries telescòpiques

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$, (b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2k+3}{(k+1)(k+2)}$.

Problema 2. Comproveu que les sèries següents tenen **caràcter telescòpic** i calculeu-ne la suma.

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(4k-1)(4k+3)}$ (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+12}{k^3+5k^2+6k}$

Problema 3. S'anomena **sèrie telescòpica generalitzada** una sèrie de la forma $\sum a_n$ on $a_n = b_n - b_{n+m}$, essent (b_n) una successió i m un enter positiu.

(a) Proveu que si la successió (b_n) és convergent, llavors la sèrie telescòpica $\sum a_n$ és convergent. Quant val la seva suma?

(b) Donar un exemple on la sèrie telescòpica $\sum a_n$ és convergent però la successió $\big(b_n\big)$ no convergeix.

(c) Calculeu la suma $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+m)}$ y expliciteu aquests valors per $m = 1, 2, 3$.

Problema 4. Sigui (a_n) la **successió de Fibonacci**, definida per $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ y por $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, $n \geq 2$. Sabem que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Sigui $b_k = a_{2k+1}$. Estudieu la convergència de la sèrie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{b_k}$. (El valor $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ se denomina **razón aúrea**)

Problema 5. Estudieu la convergència de les sèries numèriques següents:

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$, (c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+2^n}$, (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \log\Big(1+\frac{2}{n}\Big)$,

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$, (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\sqrt{n}}$, (f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{1+\sqrt{n}}\Big(1-\cos\Big(\frac{\pi}{n}\Big)\Big)$.

Problema 6. Estudieu la convergència de les sèries numèriques següents:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \big(\arctan(n)\big)^n$, (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$, (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$.

Problema 7. Estudieu el caràcter de les sèries següents:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^3}{\big(\log(2)\big)^n}$, (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{1+\frac{1}{n}}}$.

Problema 8. Sigui (a_n) una successió de termes positius.

(i) Proveu que la sèrie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{1+n^2 a_n}$ és convergent.

(ii) Proveu que, si $\sum a_n$ és convergent, aleshores $\sum a_n^2$ és convergent. És això cert si la successió no és de termes positius?

Problema 9. Determineu el caràcter de la sèrie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{\alpha^n + \alpha^{-n}}$ en funció del paràmetre real $\alpha \neq 0$

Problema 10. Determineu el caràcter de la sèrie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \operatorname{sen}^{2n}(\alpha)}{n^\beta}$ segons el valor dels paràmetres $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Problema 11. Estudieu el caràcter de les sèries següents en funció del valor del paràmetre real α:

$$\text{(a)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{k^\alpha}, \qquad \text{(b)} \sum_{k=2}^{\infty} \left(\log\left(\frac{k+1}{k-1}\right)\right)^\alpha.$$

Problema 12. Determineu el caràcter de la sèrie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \operatorname{sen}^{2n}(\alpha)}{n^\beta}$$

segons el valor dels paràmetres $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Problema 13. Considereu les sèries de termes positius $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$, i la sèrie **diferència** $a_1 - b_1 + \cdots + a_n - b_n + \cdots$ Indiqueu si és certa alguna de les afirmacions següents:

(a) Si la sèrie diferència es convergent, aleshores ho són $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$.

(b) Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ són convergents, aleshores la sèrie diferència es absolutament convergent.

(c) Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ són divergents, aleshores la sèrie diferència també ho és.

Problema 14. Apliqueu el criteri de condensació per estudiar la convergència de las sèries:

$$\text{(a)} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\log(k)}, \qquad \text{(b)} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\log(k)\log\big(\log(k)\big)}.$$

Problema 15. Si $a, b > 0$, estudiar la convergència de la sèrie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}{b(b+1)(b+2)\cdots(b+n)}.$$

Problema 16. Para cada $a \geq 0$, estudieu la convèrgencia de la sèrie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{(n+1)!} \prod_{k=0}^{n} (3k+1).$$

Problema 17. Si $a > 0$, determineu el caràcter de la sèrie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \prod_{k=2}^{n} \big(a - \sqrt[k]{a}\big)$

Problema 18. Estudieu la convergència de la sèrie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\, e^{\alpha n}}{(n+1)\cdots 2n}$$

en funció del paràmetre $\alpha \in \mathbb{R}$.

Problema 19. (El criteri logarítmic). Sigui (a_n) una successió de termes estrictament positius. Suposem que existeix $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\log\left(\frac{1}{a_n}\right)}{\log(n)} = L \in [0, +\infty]$. Proveu que si $L > 1$ aleshores $\sum a_n$ és convergent, i si $L < 1$ aleshores $\sum a_n$ és divergent.

Problema 20. (La sèrie de Bertrand). Se anomena **sèrie de Bertrand** la sèrie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}\big(\log(n)\big)^{\beta}}, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Proveu que la sèrie és convergent si $\alpha > 1$ o $\alpha = 1$ i $\beta > 1$, i és divergent en cas contrari.

Problema 21. Apliqueu el criteri de la integral a les sèries següents:

$$\text{(a)} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\log(k)}{k}, \qquad \text{(b)} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\log(k)}{k^2}.$$

(El carácter de estas series ya ha sido estudiado en el Problema 3 de la sección de problemas resueltos).

Problema 22. Estudieu la convèrgencia de la sèrie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arc\,tang}(n)}{\pi^2(1+n^2)^{\alpha}}$ en funció del paràmetre real α. Proveu que $\frac{3}{32} \le \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arc\,tang}(n)}{\pi^2(1+n^2)} \le \frac{3}{32} + \frac{1}{8\pi}$.

Problema 23. Siguin (a_n) i (b_n) dues successions de termes estrictament positius. Se suposa que, a partir d'un n_0, es compleix que $\frac{b_{n+1}}{b_n} \le \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Proveu que, si $\sum a_n$ és convergent, aleshores $\sum b_n$ també és convergent.

(Proveu per inducció que $\frac{b_{n_0+1} + \cdots + b_N}{b_{n_0}} \le \frac{a_{n_0+1} + \cdots + a_N}{a_{n_0}}$ per a tota $N > n_0$.)

Problema 24. Estudieu la convergència de les sèries numèriques següents:

$$\text{(a)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-\sqrt{n}}, \qquad \text{(c)} \sum_{n=0}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi}{3} n\right), \qquad \text{(e)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{1+n} \sin\left(\frac{n}{1+n^2}\right),$$

$$\text{(b)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log(n)}{n}, \qquad \text{(d)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{arc\,tan}(n)}{n^3+1}, \qquad \text{(f)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\big(\log(n)\big)^{\log(n)}}.$$

Problema 25. Estudieu el caràcter de les sèries següents en funció del valor del paràmetre real α:

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k\alpha)}{k^2}$,

(b) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} k^{\alpha}\Big(\frac{1}{\sqrt{k-1}} - \frac{1}{\sqrt{k}}\Big)$,

(c) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\big(\log(k)\big)^{\alpha\log(k)}}$,

(d) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \Big(1+\frac{\alpha}{k}\Big)^{-k\log(k)}$.

Problema 26. Estudieu el caràcter de la sèrie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1^{\alpha}+2^{\alpha}+\cdots+k^{\alpha}}$ en funció del valor del paràmetre enter α.