Àlgebra Multilineal i Geometria FME, UPC

Entregable 3 Descomposició de $\mathscr{T}^3(E)$

Sigui E un espai vectorial sobre un cos $\mathbf{k}$, de dimensió finita n. Sabem que per als 2-tensors contravariants se satisfà $\mathscr{T}^2(E) = \mathcal{S}^2(E) \oplus \mathcal{A}^2(E)$. L'objectiu és donar una descomposició similar per als 3-tensors $\mathscr{T}^3(E) = E \otimes E \otimes E$.

Denotem per $\mathcal{S}^{1,2}(E) \otimes E$ la imatge de l'aplicació lineal $\rho_{1,2} : \mathscr{T}^3(E) \longrightarrow \mathscr{T}^3(E)$ que sobre els tensors descomponibles està definida per

$$\rho_{1,2}(\boldsymbol{v}_1 \otimes \boldsymbol{v}_2 \otimes \boldsymbol{v}_3) = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{v}_1 \otimes \boldsymbol{v}_2 \otimes \boldsymbol{v}_3 + \boldsymbol{v}_2 \otimes \boldsymbol{v}_1 \otimes \boldsymbol{v}_3\right).$$

És a dir, simetritza les dues primeres posicions. Anàlogament es poden definir les aplicacions $\rho_{1,3}, \rho_{2,3}$, que simetritzen les posicions 1,3 i 2,3, respectivament.

Denotem per $\mathcal{S}_{1,3}(E) \otimes E$ la imatge de l'aplicació lineal $\rho^{1,3} : \mathscr{T}^3(E) \longrightarrow \mathscr{T}^3(E)$ que sobre els tensors indescomponibles està definida per

$$\rho^{1,3}(\boldsymbol{v}_1 \otimes \boldsymbol{v}_2 \otimes \boldsymbol{v}_3) = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{v}_1 \otimes \boldsymbol{v}_2 \otimes \boldsymbol{v}_3 - \boldsymbol{v}_3 \otimes \boldsymbol{v}_2 \otimes \boldsymbol{v}_1\right).$$

És a dir, antisimetritza les posicions 1 i 3. Anàlogament es poden definir les aplicacions $\rho^{1,2}, \rho^{2,3}$, que antisimetritzen les posicions 1,2 i 2,3, respectivament.

1. Proveu que $\rho_{1,2}$ és un projector i calculeu la dimensió de $\mathcal{S}^{1,2}(E) \otimes E$. Trobeu la dimensió de $\mathcal{S}^{1,2}(E) \otimes E \cap \mathcal{S}^3(E)$ i de $\mathcal{S}^{1,2}(E) \otimes E \cap \mathcal{A}^3(E)$.

2. Proveu que $\rho^{1,3}$ és un projector i calculeu la dimensió de $\mathcal{S}_{1,3}(E) \otimes E$. Trobeu la dimensió de $\mathcal{S}_{1,3}(E) \otimes E \cap \mathcal{S}^3(E)$ i de $\mathcal{S}_{1,3}(E) \otimes E \cap \mathcal{A}^3(E)$.

3. Definim $\mathcal{S}_3^{1,2}$ com la imatge de la composició

$$\mathscr{T}^3(E) \xrightarrow{\rho_{1,3}} \mathscr{T}^3(E) \xrightarrow{\rho^{1,2}} \mathscr{T}^3(E).$$

Proveu que

(a) $\mathcal{S}_3^{1,2}(E) \cap \mathcal{S}^3(E) = 0$, $\mathcal{S}_3^{1,2}(E) \cap \mathcal{A}^3(E) = 0$.
(b) $\mathcal{S}_3^{1,2}(E) \cap \mathcal{S}_2^{1,3}(E) = 0$.

4. Deduïu que es té una descomposició de $\mathscr{T}^3(E)$ en suma directa

$$\mathscr{T}^3(E) = \mathcal{S}^3(E) \oplus \mathcal{S}_3^{1,2}(E) \oplus \mathcal{S}_2^{1,3}(E) \oplus \mathcal{A}^3(E).$$

5. La descomposició anterior no és canònica, podríem utilitzar en el seu lloc els subespais $\mathcal{S}_2^{3,1}$ i $\mathcal{S}_1^{3,2}$, per exemple. Proveu que

$$\mathcal{S}_1^{3,2} \subset \mathcal{S}_2^{1,3} \oplus \mathcal{S}_3^{1,2}.$$

Per saber-ne més: La descomposició de l'apartat 5 es generalitza per a p-tensors $\mathscr{T}^p(E)$. Per fer-ho cal analitzar les accions *irreductibles* del grup simètric $\mathfrak{S}_p$ sobre $\mathscr{T}^p(E)$, que estan codificades pels *tableaux de Young*. En el nostre cas, la descomposició 5 respon als tableaux de Young següents

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1} \end{array} \qquad \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1} \end{array} \qquad \begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array}$$

Si esteu interessats en aquests aspectes combinatoris, podeu consultar:

B.E. Sagan, *The Symmetric Group, Representations, Combinatorial Algorithms, and Symmetric Functions.* Springer Verlag. New York, 2001.