Tema 1: Topologia de $\mathbb{R}^n$

1. Espais mètrics

   1.1. **Definició** Donat un conjunt M, una **distància** és una aplicació $d : M \times M \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que:
   (i) $d(x,y) \geq 0 \quad \forall x,y \in M$.
   (ii) $d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$.
   (iii) $d(x,y) = d(y,x) \quad \forall x,y \in M \quad$ (simetria).
   (iv) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) \quad$ (desigualtat triangular).

   1.2. **Definició** Un conjunt M amb una distància d és un **espai mètric**.

2. Espais normats

   2.1. **Definició** Donat un espai vectorial real E, una **norma** és una aplicació $\|\cdot\| : E \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que:
   (i) $\|v\| \geq 0 \quad \forall v \in E$
   (ii) Si $\|v\| = 0$, aleshores $v = 0$
   (iii) $\|\lambda v\| = |\lambda|\|v\| \quad \forall v \in E, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$
   (iv) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\| \quad \forall v, w \in E \quad$ (desigualtat triangular)

   2.2. **Definició** Un espai vectorial E amb una norma $\|\cdot\|$ és un **espai normat**.

   2.3. **Proposició**
   (a) Tot espai normat és espai mètric amb la distància associada a la norma: $d(x,y) = \|x-y\|$.
   (b) El recíproc és fals.

3. Espais euclidians

   3.1. **Definició** Donat un espai vectorial real E, un **producte escalar** és una aplicació $<,>: E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$:
   (i) Bilineal.
   (ii) Simètrica.
   (iii) Definida positiva: $< x,x > \geq 0, \ \forall x \in E$.
   (iv) No degenerada: $< x,x >= 0 \Longleftrightarrow x = 0$.

   3.2. **Definició** $(E, <,>)$ és un **espai euclidià**.

   3.3. **Proposició**
   (a) Tot espai euclidià és espai normat amb la norma associada al producte escalar:
   $$\|v\| = +\sqrt{< v,v >}.$$
   (b) El recíproc és fals.

   3.4. **Desigualtat de Cauchy-Schwarz:** en un espai euclidià E,
   $$| < x,y > | \leq \|x\|\|y\|, \quad \forall x,y \in E.$$

   3.5. **Identitat del paral·lelogram:** en un espai euclidià E,
   $$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2, \quad \forall x,y \in E$$

   3.6. **Identitat de polarització:** en un espai euclidià E,
   $$4 < x,y >= \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2, \quad \forall x,y \in E.$$

   3.7. **Lema** $\mathbb{R}^n$ és un espai euclidià amb el producte escalar: $< x,y >= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$. També és espai normat i espai mètric amb la norma (que denotarem per $\|.\|_2$) i la distància (d_2) associades a aquest producte escalar.

4. Successions

   4.1. **Definició** Donat un espai mètric (M, d), una **successió** és una aplicació

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &\to M \\ n &\mapsto x_n \end{aligned}$$

   4.2. **Definició** Direm que (x_n) és **convergent** cap a x (o que té límit x) si $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$. És a dir, si $\forall \varepsilon > 0,\ \ \exists N_\varepsilon$ tal que $d(x_n, x) < \varepsilon$ per a tot $n \geq N_\varepsilon$ o, equivalentment, $x_n \in \mathcal{B}(x, \varepsilon)\ \ \forall n \geq N_\varepsilon$.

   4.3. **Proposició** Si (x_n) té límit, és únic.

5. Conceptes topològics

   5.1. **Definició** Sigui M un espai mètric, definim la **bola de centre** p **i radi** r **com**:

$$\mathcal{B}(p, r) = \{x \in M \ \mid\ d(p, x) < r\}$$

   5.2. **Definició** Direm que A és **obert** si $\forall p \in A,\ \ \exists r > 0$ tal que $\mathcal{B}(p, r) \subset A$.

   5.3. **Propietat**

      (i) La unió d'una colecció arbitrària de conjunts oberts és un conjunt obert.

      (ii) La intersecció d'una colecció finita de conjunts oberts és un conjunt obert.

   5.4. **Definició** Direm que F és **tancat** si $F^c := M \setminus F$ és obert.

   5.5. **Propietat**

      (i) La intersecció d'una colecció arbitrària de conjunts tancats és un conjunt tancat.

      (ii) La unió d'una colecció finita de conjunts tancats és un conjunt tancat.

   5.6. **Definició** Direm que p és **interior** a A si $\exists r > 0$ tal que $\mathcal{B}(p, r) \subset A$.

   5.7. **Notació:** Al conjunt dels punts interiors l'anomenarem $\mathring{A}$.

   5.8. **Corol·lari** A obert $\iff A = \mathring{A}$.

   5.9. **Definició** Direm que p és de **l'adherència** de A si $\forall r > 0,\ \ \mathcal{B}(p, r) \cap A \neq \emptyset$.

   5.10. **Notació:** Al conjunt de punts adherents de A l'anomenarem $\bar{A}$.

   5.11. **Definició** Direm que p és **punt d'acumulació** de A si $\forall r > 0,\ \ (\mathcal{B}(p, r) \setminus \{p\}) \cap A \neq \emptyset$.

   5.12. **Definició** Direm que p és de la **frontera** de A si $\forall r > 0\ \ \mathcal{B}(p, r) \cap A \neq \emptyset$ i $\mathcal{B}(p, r) \cap A^c \neq \emptyset$.

   5.13. **Definició** p és **exterior** a A si $\exists r > 0$ tal que $\mathcal{B}(p, r) \subset A^c$.

   5.14. **Proposició** A tancat $\iff \mathrm{Fr(A)} \subset A$.

   5.15. **Propietat** A tancat $\iff A = \bar{A}$.

   5.16. **Propietat** $x \in \bar{A} \Rightarrow \exists (x_n) \subset A$ tal que $x_n \longrightarrow x$.

   5.17. **Proposició** $\mathring{A}$ és l'obert més gran dins A. Anàlogament, $\bar{A}$ és el tancat més petit que conté A.

   5.18. **Definició** Donat un conjunt A i un punt p, es defineix la distància entre el punt i el conjunt com $d(p, A) = \inf\{d(p, y),\ y \in A\}$.

   5.19. **Propietat** A tancat $\iff A = \{x \in M | d(x, A) = 0\}$.

6. Compacitat

   6.1. **Definició** Donat un espai mètric (M, d), un subconjunt $A \subset M$ es diu **fitat** si $\exists p \in M$ i $r > 0$ tal que $A \subset \mathcal{B}(p, r)$.

   6.2. **Definició** Sigui (M, d) un espai mètric. Direm que un conjunt $A \subset M$ té la propietat de **Bolzano-Weierstrass** (o que és **compacte per successions**) si de tota successió $(x_n) \subset M$ se'n pot extreure una parcial $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ convergent en A.

   6.3. **Definició** Sigui (M, d) un espai mètric. Direm que un conjunt $A \subset M$ té la propietat de **Heine-Borel** (o que és **compacte per recobriments**) quan per tot recobriment obert $A \subseteq \bigcup_{i\in I} G_i$ se'n pot extreure un subrecobriment finit $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} G_i$, on G_i són oberts.

6.4. **Teorema** Sigui (M, d) un espai mètric i $A \subset M$, aleshores A té la propietat de Bolzano-Weierstrass $\Leftrightarrow$ A té la propietat de Heine-Borel.

6.5. **Definició** Sigui (M, d) un espai mètric. Direm que M és **compacte** si satisfà la propietat de Bolzano-Weierstrass o la de Heine-Borel.

6.6. **Teorema** Si (M, d) és un espai mètric i $K \subset M$ és compacte aleshores K és tancat i fitat.

6.7. **Teorema** A $(\mathbb{R}^n, d_2)$ tot conjunt tancat i fitat és compacte.

7. Completesa

7.1. **Definició** Direm que (x_n) en un espai mètric (M, d) és una successió de **Cauchy** si $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_l, x_m) < \varepsilon \ \ \forall m, l \geq N_\varepsilon$.

7.2. **Proposició** Si (x_n) és convergent aleshores (x_n) és de Cauchy.

7.3. **Definició** Un espai mètric és **complet** si tota successió de Cauchy és convergent.

7.4. **Proposició** $(\mathbb{R}^n, d_2)$ és complet.

7.5. **Propietat**

7.5.1. Si (a_n) és de Cauchy aleshores (a_n) és fitada.

7.5.2. Si (a_n) és de Cauchy i $\exists (a_{n_k})$ convergent vers a aleshores $a_n \longrightarrow a$.

7.6. **Proposició** Donat (M, d) un espai mètric complet i $A \subset M$ aleshores A complet $\Leftrightarrow$ A tancat.

7.7. **Definició** Un espai normat i complet s'anomena **espai de Banach**.

8. Conjunts connexos

8.1. **Definició** Sigui (M, d) un espai mètric. Direm que $A \subset M$ és **connex** si $\nexists\, U, V$ oberts no buits tals que:

$$\left\{ \begin{array}{c} A \subseteq U \cup V \\ A \cap U \cap V = \emptyset \\ A \cap U \neq \emptyset \\ A \cap V \neq \emptyset \end{array} \right.$$

8.2. **Propietat** M connex $\Longleftrightarrow$ $\emptyset$ i M són els únics oberts i tancats al mateix temps.

8.3. **Definició** $A \subset M$ és **arc-connex** $\Longleftrightarrow$ $\forall a, b \in A \ \ \exists \gamma : [0,1] \longrightarrow A$ contínua tal que $\gamma(0) = a$ i $\gamma(1) = b$.

8.4. **Teorema** Sigui $G \subset \mathbb{R}^n$.

8.4.1. Si G és arc-connex, aleshores G és connex.

8.4.2. El reciproc és fals en general.

8.4.3. Si G és connex i obert, aleshores és arc-connex.