

Sigui  $E$  un espai vectorial sobre un cos  $\mathbf{k}$ , de dimensió finita  $n$ . Sabem que per als 2-tensors contravariants se satisfà  $\mathcal{T}^2(E) = \mathcal{S}^2(E) \oplus \mathcal{A}^2(E)$ . L'objectiu és donar una descomposició similar per als 3-tensors  $\mathcal{T}^3(E) = E \otimes E \otimes E$ .

Denotem per  $\mathcal{S}^{1,2}(E) \otimes E$  la imatge de l'aplicació lineal  $\rho_{1,2} : \mathcal{T}^3(E) \longrightarrow \mathcal{T}^3(E)$  que sobre els tensors descomponibles està definida per

$$\rho_{1,2}(\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{v}_3) = \frac{1}{2}(\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_3).$$

És a dir, simetritza les dues primeres posicions. Anàlogament es poden definir les aplicacions  $\rho_{1,3}, \rho_{2,3}$ , que simetritzen les posicions 1,3 i 2,3, respectivament.

Denotem per  $\mathcal{S}_{1,3}(E) \otimes E$  la imatge de l'aplicació lineal  $\rho^{1,3} : \mathcal{T}^3(E) \longrightarrow \mathcal{T}^3(E)$  que sobre els tensors indescomponibles està definida per

$$\rho^{1,3}(\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{v}_3) = \frac{1}{2}(\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_3 \otimes \mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{v}_1).$$

És a dir, antisimetritza les posicions 1 i 3. Anàlogament es poden definir les aplicacions  $\rho^{1,2}, \rho^{2,3}$ , que antisimetritzen les posicions 1,2 i 2,3, respectivament.

**1.** Proveu que  $\rho_{1,2}$  és un projector i calculeu la dimensió de  $\mathcal{S}^{1,2}(E) \otimes E$ . Trobeu la dimensió de  $\mathcal{S}^{1,2}(E) \otimes E \cap \mathcal{S}^3(E)$  i de  $\mathcal{S}^{1,2}(E) \otimes E \cap \mathcal{A}^3(E)$ .

**2.** Proveu que  $\rho_{1,3}$  és un projector i calculeu la dimensió de  $\mathcal{A}^{1,3}(E) \otimes E$ . Trobeu la dimensió de  $\mathcal{S}_{1,3}(E) \otimes E \cap \mathcal{S}^3(E)$  i de  $\mathcal{S}_{1,3}(E) \otimes E \cap \mathcal{A}^3(E)$ .

**4.** Definim  $\mathcal{S}_3^{1,2}$  com la imatge de la composició

$$\mathcal{T}^3(E) \xrightarrow{\rho_{1,2}} \mathcal{S}_{1,3}(E) \xrightarrow{\rho^{1,3}} \mathcal{T}^3(E).$$

Calculeu les dimensions  $\mathcal{S}_{1,3}(E)$ ,  $\mathcal{S}_3^{1,2}(E) \cap \mathcal{S}^3(E)$  i  $\mathcal{S}_{1,2}(E) \cap \mathcal{A}^3(E)$ .

**4.** Proveu que

- (a)  $\mathcal{S}_3^{1,2}(E) \cap \mathcal{S}^3(E) = 0$ ,  $\mathcal{S}_3^{1,2}(E) \cap \mathcal{A}^3(E) = 0$ .
- (b)  $\mathcal{S}_3^{1,2}(E) \cap \mathcal{S}_2^{1,3}(E) = 0$ .

**5.** Deduïu que es té una descomposició de  $\mathcal{T}^3(E)$  en suma directa

$$\mathcal{T}^3(E) = \mathcal{S}^3(E) \oplus \mathcal{S}_3^{1,2}(E) \oplus \mathcal{S}_2^{1,3}(E) \oplus \mathcal{A}^3(E).$$

**6.** La descomposició anterior no és canònica, podríem utilitzar en el seu lloc els subespais  $\mathcal{S}_2^{3,1}$  i  $\mathcal{S}_1^{3,2}$ , per exemple. Proveu que

$$\mathcal{S}_2^{3,1} \subset \mathcal{S}_2^{3,1} \oplus \mathcal{S}_2^{3,1}.$$

**Per saber-ne més:** La descomposició de l'apartat 5 es generalitza per a  $p$ -tensors  $\mathcal{T}^p(E)$ . Per fer-ho cal analitzar les accions *irreductibles* del grup simètric  $\mathfrak{S}_p$  sobre  $\mathcal{T}^p(E)$ , que estan codificades pels *tableaux de Young*. En el nostre cas, la descomposició 5 respon als tableaux de Young següents

1	2	3				
			1	2		
			3			

			1	3		
			2			

					1	
					2	
					3	

Si esteu interessats en aquests aspectes combinatoris, podeu consultar:

B.E. Sagan, *The Symmetric Group, Representations, Combinatorial Algorithms, and Symmetric Functions*. Springer Verlag. New York, 2001.