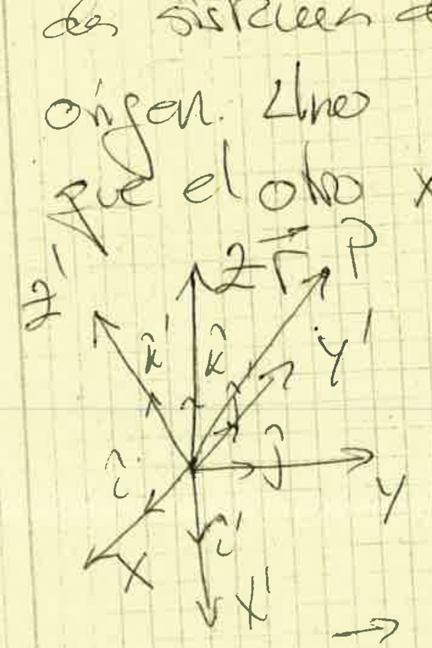
Sistemas de referencia en rotación

No siempre podemos elegir un sist. de referencia inercial. En algunos casos debemos plantear las ecuaciones en un sistema de referencia no inercial (p.e. ligado a la Tierra). En este caso aparecen fuerzas ligadas a la inercia, fuerzas ficticias o inerciales, que vienen dadas por $-m\vec{a}_0$, donde a_0 es la aceleración del sist. de rf. no inercial con respecto al inercial

Movimiento relativo rotacional

Supongamos, por simplicidad, que tenemos dos sistemas de referencia con el mismo origen. Uno XYZ, está fijo, mientras que el otro $X'Y'Z'$ está en rotación, con respecto a un eje dado por $\vec{\omega}$. La posición de un pto P viene dada por:



$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \quad \text{en } S$$

$$\vec{r} \equiv \vec{r}\,' = x'\hat{i}' + y'\hat{j}' + z'\hat{k}' \quad \text{en } S'$$

La velocidad del pto P es, para S:

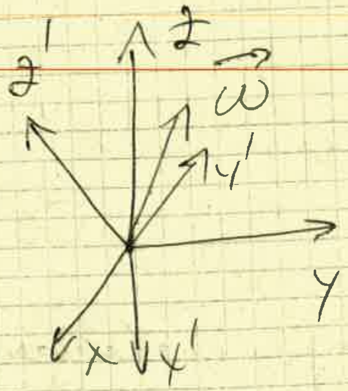
$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k}$$

Para S' será:

$$\vec{V}' = \frac{d\vec{r}'}{dt} = \frac{dx'}{dt}\hat{i}' + \frac{dy'}{dt}\hat{j}' + \frac{dz'}{dt}\hat{k}' = V_x'\hat{i}' + V_y'\hat{j}' + V_z'\hat{k}'$$

Sin embargo, visto desde S, los vectores unitarios $\hat{i}', \hat{j}', \hat{k}'$ están rotando, por tanto dependen también del tiempo. Esto es, para S:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = V_x'\hat{i}' + V_y'\hat{j}' + V_z'\hat{k}' + x'\frac{d\hat{i}'}{dt} + y'\frac{d\hat{j}'}{dt} + z'\frac{d\hat{k}'}{dt}$$



Si definimos un eje de rotación y un vector de rotación $\vec{\omega}$, entonces podemos utilizar la expresión $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ para calcular la velocidad a la que cambia cada vector unitario:

$$\frac{d\hat{i}'}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{i}', \quad \frac{d\hat{j}'}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{j}', \quad \frac{d\hat{k}'}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{k}'$$

Por tanto, el último término es:

$$x'\frac{d\hat{i}'}{dt} + y'\frac{d\hat{j}'}{dt} + z'\frac{d\hat{k}'}{dt} = x'(\vec{\omega} \times \hat{i}') +$$

$$+ y'(\vec{\omega} \times \hat{j}') + z'(\vec{\omega} \times \hat{k}') =$$

$$= \vec{\omega} \times (x'\hat{i}' + y'\hat{j}' + z'\hat{k}') = \vec{\omega} \times \vec{r}'$$

Por tanto:

$$\vec{V} = \vec{V}' + \vec{\omega} \times \vec{r}'$$

En el caso más general en que los dos referenciales no comparten origen, sino que se desplazan uno con respecto al otro con velocidad $\vec{V}_0$, tenemos:

$$\vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{V}' + \vec{\omega} \times \vec{r}'$$

con:

$\vec{V} \rightarrow$ velocidad de la partícula en el referencial fijo

$\vec{V}' \rightarrow$ ~~referen~~ velocidad de la partícula en el referencial móvil

$\vec{V}_0 \rightarrow$ velocidad del referencial móvil con respecto al fijo

$\vec{\omega} \rightarrow$ velocidad angular de rotación del referencial móvil con respecto al fijo

Aceleración

Para calcularlo, lo más fácil es darse cuenta primero que, la derivada temporal en la referencial (fijo) móvil están relacionadas por:

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_F = \left.\frac{d}{dt}\right|_M + \vec{\omega}\times$$

Por tanto, con respecto al referencial fijo, la aceleración será:

$$\left.\frac{d\vec{V}}{dt}\right|_F = \left.\frac{d\vec{V}_0}{dt}\right|_F + \left.\frac{d\vec{V}'}{dt}\right|_F + \left.\frac{d(\vec{\omega}\times\vec{r}')}{dt}\right|_F$$

Por tanto:

$$\vec{a} = \vec{a}_0 + \left.\frac{d\vec{V}'}{dt}\right|_M + \vec{\omega}\times\vec{V}' + \left.\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right|_M \times\vec{r}' +$$

$$+ \omega\times\left.\frac{d\vec{r}'}{dt}\right|_M + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}')$$

Entonces:

$$\vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{a}' + \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}' + 2\vec{\omega}\times\vec{V}' + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}')$$

con:

$\vec{a}$ → aceleración en el referencial fijo

$\vec{a}_t = \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}'$ → aceleración tangencial

$\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}')$ → aceleración centrípeta

Fuerzas ficticias (o inerciales)

La segunda L de Newton es válida en sist. de referencia inerciales. Podemos poner: $\vec{F} = m\vec{a}$

Si lo queremos por escrito en un sist. de referencia no inercial, debemos poner:

$$\vec{F} = m\vec{a}' + m\vec{a}_0 + m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' + m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + 2m\vec{\omega} \times \vec{v}'$$

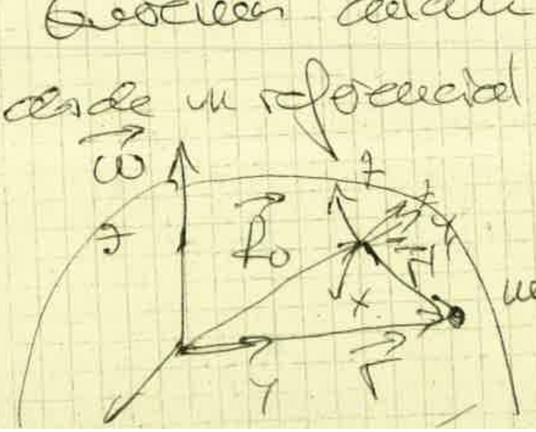
O bien: $\vec{F}_{ef} = m\vec{a}'$

con

$$\vec{F}_{ef} = \vec{F} \underbrace{- m\vec{a}_0 - m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}'}_{\text{fuerzas ficticias}}$$

- Movimiento relativo a la Tierra

Queremos calcular el movimiento visto desde un referencial que gira con la Tierra



$\dot{\vec{\omega}} = 0$, por tanto, en el referencial móvil:

$$m\vec{a}' = \vec{F}_g - m\vec{a}_0 - m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}\,') - 2m\vec{\omega}\times\vec{v}\,'$$

$\vec{a}_0$ es la aceleración del sist. de ref. S' con respecto a S. Podemos poner:

$$\vec{a}_0 = \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{R}_0)$$

Entonces:

$$\vec{a}\,' = \vec{F}_g/m - \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{R}_0) - \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}\,') - 2\vec{\omega}\times\vec{v}\,'$$

Definimos: $\vec{g} = \vec{F}_g/m$ y

$\vec{g}_{ef} = \vec{g} - \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{R}_0)$ como la gravedad efectiva en cada punto de la Tierra.

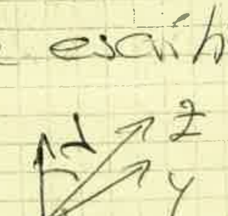
Con esto:

$$\vec{a}\,' = \vec{g}_{ef} - \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}\,') - 2\vec{\omega}\times\vec{v}\,'$$

En general el término centrífugo es menor que el de Coriolis y podemos poner:

$$\vec{a}\,' \simeq \vec{g}_{ef} - 2\vec{\omega}\times\vec{v}\,'$$

Para escribirla en componentes,



$$\vec{\omega} = \omega\cos\lambda\,\hat{k}' - \omega\sin\lambda\,\hat{i}' = \begin{pmatrix}-\omega\sin\lambda\\ 0\\ \omega\cos\lambda\end{pmatrix}$$

$\lambda \to$ latitud

Aceleración:

$$\vec{R}_0 = R_T\left(\cos\lambda\,\hat{k} + \sin\lambda\cos\phi\,\hat{i} + \sin\lambda\sin\phi\,\hat{j}\right)$$

La fuerza centrífuga es:

$$\vec{\omega}\times\vec{R}_0 = R_T\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 0 & 0 & \omega\\ \sin\lambda\cos\phi & \sin\lambda\sin\phi & \cos\lambda\end{vmatrix} =$$

$$= R_T\,\omega\left(\sin\lambda\cos\phi\,\hat{j} - \sin\lambda\sin\phi\,\hat{i}\right) =$$

$$= R_T\,\omega\sin\lambda\left(\cos\phi\,\hat{j} - \sin\phi\,\hat{i}\right)$$

$$\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{R}_0) = \begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 0 & 0 & \omega\\ -\sin\phi & \cos\phi & 0\end{vmatrix} R_T\,\omega\sin\lambda$$

$$= R_T\,\omega^2\sin\lambda\left(-\cancel{\omega}\sin\phi\,\hat{j} - \cancel{\omega}\cos\phi\,\hat{i}\right)$$

Lo podemos calcular también en el referencial local, poniendo:

$$\vec{\omega} = -\omega\sin\lambda\,\hat{i}' + \omega\cos\lambda\,\hat{k}'$$

$$\vec{R}_0 = R_T\,\hat{k}'$$

Alora tenemos:

$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{R_0})$

$$\vec{\omega} \times \vec{R_0} = \omega \begin{vmatrix} \hat{i}' & \hat{j}' & \hat{k}' \\ -\sin\lambda & 0 & \cos\lambda \\ 0 & 0 & R_0 \end{vmatrix} =$$

$$= R_0 \omega \sin\lambda \, \hat{j}'$$

$$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{R_0}) = R_0 \omega^2 \begin{vmatrix} \hat{i}' & \hat{j}' & \hat{k}' \\ -\sin\lambda & 0 & \cos\lambda \\ 0 & \sin\lambda & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -R_0 \omega^2 \sin^2\lambda \, \hat{k}' - R_0 \omega^2 \sin\lambda \cos\lambda \, \hat{i}'$$