Indicacions

Alguns resultats de teoria molt útils:

Sigui una variable aleatòria de la família exponencial. Existeix una parametrització en terme dels paràmetres canònics $\Theta = (\theta_1, \ldots \theta_k)$:

$$f(x;\Theta) = \frac{h(x)e^{\sum \theta_i T_i(x)}}{C(\Theta)}$$

on $C(\Theta) = \int h(x)e^{\sum \theta_i T_i(x)}dx$

Amb aquesta parametrització, s'obté el següent resultat:

$$\frac{\partial}{\partial\theta_i}\log\big(C(\Theta)\big) = \frac{\int T_i(x)h(x)e^{\sum \theta_i T_i(x)}dx}{C(\Theta)} = E\big(T_i(x)\big) = \mu_{T_i(x)}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta_i^2}\log\big(C(\Theta)\big) = \frac{\int T_i(x)^2 h(x)e^{\sum \theta_i T_i(x)}dx}{C(\Theta)} - \frac{\left(\int T_i(x)h(x)e^{\sum \theta_i T_i(x)}dx\right)^2}{C(\Theta)^2} = E(T_i(x)^2) - E\big(T_i(x)\big)^2 = V\big(T_i(x)\big)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta_i\partial\theta_j}\log\,(C(\Theta)) = \frac{\int T_i(x)T_j(x)h(x)e^{\sum \theta_i T_i(x)}dx}{C(\Theta)} - \frac{\int T_i(x)h(x)e^{\sum \theta_i T_i(x)}dx \int T_j(x)h(x)e^{\sum \theta_i T_i(x)}dx)}{C(\Theta)^2}$$
$$= E\left(T_i(x)T_j(x)\right) - E\big(T_i(x)\big)E\left(T_j(x)\right) = Cov\left(T_i(x), T_j(x)\right)$$

El logaritme de la funció de densitat en la parametrització canònica és:

$$\log(f(x;\Theta)) = \sum \theta_i T_i(x) + log\big(h(x)\big) - \log\,(C(\Theta))$$

Si considerem la parametrització en terme dels valors esperats dels estadístics suficients $\mu = (\mu_{T_1(x)}, \ldots, \mu_{T_k(x)})$ els estimadors de màxima versemblança són les mitjanes mostrals dels estadístics:

$$\widehat{\mu_\iota} = \widehat{\mu_{T_\iota(x)}} = \overline{T_\iota(x)}$$

Ja que les equacions de l'Score són:

$$\frac{\partial}{\partial\theta_i}\log(L(\Theta;\mathrm{x})) = \sum_{j=1}^{n} T_i\big(x_j\big) - n\frac{\partial}{\partial\theta_i}\log\big(C(\Theta)\big) = 0$$

I per tant,

$$Cov(\widehat{\mu_\iota}, \widehat{\mu_J}) = \frac{1}{n} Cov\left(T_i(x), T_j(x)\right)$$

Respecte al càlcul de la matriu d'informació de Fisher en funció dels paràmetres canònics:

$$I_X(\Theta) = E\left[\left(\frac{\partial}{\partial\Theta}\log(f(x;\Theta)\right)^2\right]$$

El terme ij de la matriu serà:

$$[I_X(\Theta)]_{ij} = E\left[\left(\frac{\partial}{\partial\theta_i}\log(f(x;\Theta)\right)\left(\frac{\partial}{\partial\theta_j}\log(f(x;\Theta)\right)\right] = E\left[\left(T_i(x) - \frac{\partial}{\partial\theta_i}\log\big(C(\Theta)\big)\right)\left(T_j(x) - \frac{\partial}{\partial\theta_j}\log\big(C(\Theta)\big)\right)\right]$$
$$= E\left[\left(T_i(x) - \mu_{T_i(x)}\right)\left(T_j(x) - \mu_{T_j(x)}\right)\right] = Cov\left(T_i(x), T_j(x)\right)$$

I la informació continguda en la mostra és com sempre: $I_{\underline{X}}(\Theta) = nI_X(\Theta)$

Sigui la funció de canvi de parametrització dels paràmetres canònics als paràmetres dels valors esperats dels estadístics suficients $g: \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^k$, $\mu = g(\Theta)$, on

$$\mu_{T_i(x)} = g_i(\theta_1, \dots \theta_k)$$

Els elements de la matriu de les derivades parcials seria:

$$[D_\Theta g(\Theta)]_{ij} = \frac{\partial}{\partial\theta_j} g_i(\theta_1, \dots \theta_k)$$

La generalització de la Cota de Crámer-Rao dels estimadors al cas multivariant serà:

$$CR(\hat{\theta}_1, \dots \hat{\theta}_k) = I_{\underline{X}}(\Theta)^{-1} = \left(nI_X(\Theta)\right)^{-1}$$

$$CR(\widehat{\mu_1}, \dots, \widehat{\mu_k}) = D_\Theta g(\Theta) \circ I_{\underline{X}}(\Theta)^{-1} \circ D_\Theta g(\Theta) = D_\Theta g(\Theta) \circ \left(nI_X(\Theta)\right)^{-1} \circ D_\Theta g(\Theta)$$

En el cas escalar, es reprodueix el resultat ja conegut: $CR(\hat{\mu}) = \frac{g\prime(\theta)^2}{nI_X(\Theta)}$

En aquest cas, el resultat important quan fem servir la parametrització canònica dona peu a que la matriu $D_\Theta g(\Theta)$ tingui una expressió que permeti simplificar el càlcul de la Cota de Crámer-Rao, donant una expressió molt senzilla per a la matriu CR.

Per a cada paràmetre, la seva cota de Crámer-Rao serà l'element corresponent de la diagonal de la matriu obtinguda.