En aquest capítol desenvoluparem les primeres tècniques d'anàlisi harmònica del grau tot desenvolupant la teoria de les sèries de Fourier per a funcions suaus (ja veurem què volem dir per suau més endavant). Però, abans d'això, dedicarem una estona a "motivar" una nova norma sobre $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$, que com veurem no tindrà res a veure amb la norma del suprem que hem estat treballant fins ara (farem precís més endavant en aquesta lliçó que volem dir per "res a veure").

Per a motivar el que farem, tot el que direm ara és en relació a $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$, tot i que ho podriem fer de fet en les funcions integrables Riemann. Sobre aquest espai de funcions (ja sabem que és un àlgebra) tenim una operació extra que és la integració de Riemann (sempre està definida). I això motiva la definició del següent operador:

$$\begin{array}{rccc} (\cdot,\cdot): & \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (f,g) & \longmapsto & \int_a^b f(x)g(x)\,dx \end{array}$$

Usarem indistintament $(\cdot,\cdot)$ o $\langle\cdot,\cdot\rangle$ per denotar aquest operador. La primera observació fonamental és que aquest operador sempre està definit, és bilineal, simètric i $(f,f)\geq 0$ amb $(f,f)=0$ si i només si $f=0$ en l'interval $[a,b]$. Així doncs, ens defineix un producte escalar en $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$, i per tant defineix una norma (que denotarem per $\|\cdot\|_2$) i una distància (que denotarem per $d_2(\cdot,\cdot)$) definides segons

$$\|f\|_2=(f,f)^{1/2},\ d_2(f,g)=\|f-g\|_2.$$

Reiterem que aquestes definicions es poden aplicar quan l'espai de funcions que prenem són les integrables Riemann, però pel fil argumental que estem desenvolupant és important tenir en ment que estem interessats en les contínues. Per tant, la pregunta natural que ens podem formular ara és: com es relaciona aquesta norma amb la norma del suprem, de la que ja tenim molt de coneixement en les funcions contínues? Veurem que tot el que voldriem que funcionés en el nostre context no funcionarà. Per a no confondre normes, escriurem la norma del suprem d'aquí en endavant per $\|\cdot\|_{\sup}$.

Remarca 1. La primera observació important és que la norma del suprem i aquesta nova norma no són equivalents. Aquesta és una observació important perquè en espais vectorials de dimensió finita totes les normes són equivalents (ja que, essencialment només ens cal donar les relacions de fitació entre els elements de la base, que és un conjunt finit), mentre que en espais vectorials de dimensió no finita (com és el cas) això no serà així.

Veguem-ho amb un exemple. Si les dues normes són equivalents, aleshores existeix una constant universal C per la que es compliria que per tota funció $f\in\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$, $\|f\|_{\sup}\leq C\|f\|_2$ (la fita inferior també s'ha de complir, però ja veurem que aquesta condició ja no es compleix i per tant no cal fer res més).

Per a veure-ho, el que farem serà trobar una successió de funcions que tindran una norma del suprem arbitrariament gran, mentre que tindran una norma 2 constant. Això ho podem fer de la següent forma: construim una successió de funcions $f_n(x)$, contínues en $[a,b]$, tals que sempre $\int_a^b f_n(x)^2\,dx=1$, però que a mesura que avança la n, es concentrin cada cop més en el punt mig de l'interval. Això és pot fer amb una funció triangle, per exemple.

Aleshores és clar que podem fer $\|f_n\|_{\sup}$ tan gran com vulguem, mentre que $\|f_n\|_2=1$ sempre. Així doncs, no pot existir tal C, ja que per aquesta família ja no és compleix.

En certa manera, la norma 2 (li direm així per abreujar) és més grollera que la norma del suprem, ja que quan integrem estem perdent molta informació de la nostra funció. De fet, en la següent remarca veurem que si bé hem vist al Capítol 1 (i al 2) que $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ junt amb la norma del suprem és un espai complet, això no és cert si canviem la norma per la norma 2.

Remarca 2. $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ junt amb la norma $\|\cdot\|_2$ no és complet. Ho veurem de nou amb un contraexemple: prendrem una successió de Cauchy (respecte a la norma 2) que convergirà cap a una funció no contínua.

Prenem la família habitual: $[a,b]=[0,1]$ i $f_n(x)=x^n$ (recordeu el que ja sabem: aquesta família convergeix cap a una funció NO contínua, i per tant la convergència NO pot ser uniforme...cosa que ens diu que la successió $\{f_n\}_{n\geq 1}$ no és de Cauchy quan mesurem respecte a la norma del suprem).

Si ara fem el càlcul, el que tenim és (fem el càlcul de la norma 2 al quadrat, per a no mirar les arrels quadrades):

$$\|f_n - f_m\|_2^2 = (x^n - x^m, x^n - x^m) = \int_0^1 (x^n - x^m)^2\, dx = \cdots = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2m+1} - \frac{2}{n+m+1}$$

i això pot escriure's com

$$2\frac{(n-m)^2}{(2n+1)(2m+1)(n+m+1)}.$$

Evidentment, els tres termes que ens surten els podem fer arbitrariament petits, i per tant, per tot $\varepsilon > 0$ podem trobar un n_0 tal que si $n, m \geq n_0$ tindrem que $\|f_n - f_m\|_2^2 < \varepsilon^2$.

Així doncs, de cara a càlcul de límits de successions, la norma 2 no funciona prou bé si ens restringuim a les funcions contínues (sortim fora del conjunt) De fet, el que veurem en el Capítol 4 (entre altres coses) és la resposta a la següent pregunta:

En quin espai de funcions $\mathcal{X}$, $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}) \subset \mathcal{X}$ podrem assegurar que $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_2)$ serà un espai complet?

Avancem que aquest espai de funcions NO serà l'espai de funcions contínues a troços, ni tampoc les funcions integrables Riemann. Una de les feines que haurem de fer per a respondre aquesta pregunta serà la d'extendre la noció d'integral (de Riemann) a funcions més complicades (no integrables Riemann). De fet, això serà la tasca principal del tema 4 d'aquest curs: *construir un espai de funcions que funcioni bé (en quant a completessa) amb la norma 2 per tal de poder fer anàlisi en contextos més generals que el de les funcions contínues* (serà especialment important això quan estudiem anàlisi funcional i/o EDPs).

Tornem però a la comparació que estem fent entre les dues normes, la del suprem i la norma 2. Ja hem vist que no són normes equivalents. Veguem ara que, de fet, la norma del suprem no prové d'un producte escalar.

Remarca 3. La norma del suprem no prové d'una norma. Per a fer-ho, només cal veure que la norma del suprem no compleix la llei del paralelogram, que ens diu que per tota parella de funcions f, g es compleix que

$$\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 = 2\|f\|^2 + 2\|g\|^2$$

(recordeu que tota norma procedent d'un producte escalar l'ha de complir). Basta, doncs, trobar dues funcions que no ho compleixin. Prenem, com és habitual, funcions de la forma x^n i x^m, amb $n \leq m$, en l'interval $[0,1]$. Aleshores és clar que $\|f+g\|_{\text{sup}} = 2$ (s'assoleix el suprem en $x = 1$), i que $\|f\|_{\text{sup}} = \|g\|_{\text{sup}} = 1$ (el mateix, el suprem s'assoleix en en $x = 1$). Ara bé, quan calculem la norma de la diferència, tenim que

$$\|f+g\|_{\text{sup}}^2 - 2\left(\|f\|_{\text{sup}}^2 + \|g\|_{\text{sup}}^2\right) = 4 - 2 - 2 = 0,$$

però $\|f-g\|_{\text{sup}}^2 \neq 0$ perquè de fet $x^n - x^m$ té un màxim diferent de 0 en l'interval $[0,1]$.

Després de totes aquestes coses negatives, veurem almenhys una cosa positiva: la convergència uniforme implica la convergència si mesurem en termes de la norma 2. Anem a ficar un nom a tot això:

Definició 1 (Convergència quadràtica)**.** Sigui $\{f_n\}_{n\geq 1}$ una successió de funcions en $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$. Direm que aquesta successió convergeix en mitjana d'ordre 2 (o mitjana quadràtica) cap a f si per tot $\varepsilon > 0$ existeix un n_0 tal que si $n \geq n_0$, $\|f_n - f\|_2 < \varepsilon$.

Fixeu-vos que NO tenim condició de Cauchy com tenim amb la norma del suprem. Com hem comentat això ho resoldrem a final de curs. Ara, però, anem a demostrar la implicació important de totes aquestes definicions. Aquí ens oblidarem per un moment de la condició de continuïtat per tal de poder enunciar el lema amb tota generalitat.

Lema 1. *Sigui $\{f_n\}_{n\geq 1}$ una successió de funcions integrables Riemann en $[a,b]$, que convergeixen uniformement cap a f. Aleshores convergeixen en mitjana quadratica cap a f.*

Demostració. Vam veure al Capítol 1 que el límit uniforme de funcions integrables Riemann és també integrable Riemann. Per tant, f és integrable Riemann. Així doncs, expressions de la forma

$$\int_a^b (f_n(x) - f(x))^2 \, dx$$

tenen sentit perquè l'integrand és integrable Riemann. Ara només cal ficar el valor absolut i anar amb cura: donat $\varepsilon > 0$, sigui n_0 tal que si $n \geq n_0$, es compleix que $\sup_{x \in [a,b]}\{|f_n(x) - f(x)|\} < \varepsilon/(b-a)^{1/2}$. Aleshores, per $n \geq n_0$:

$$\|f_n - f\|_2 = \left(\int_a^b (f_n(x) - f(x))^2 \, dx \right)^{1/2} = \left(\int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2 \, dx \right)^{1/2} < \left(\int_a^b \frac{\varepsilon^2}{(b-a)} \, dx \right)^{1/2} = \varepsilon.$$

□

Per tant, la convergència uniforme és un mode de convergència més dur que la convergència en mitjana quadràtica.

Per acabar, i per enllaçar amb el que veurem a la propera lliçó, deixem la següent definició. A hores d'ara no la podem aplicar en el nostra context perquè no tenim l'espai $\mathcal{X}$ que faci $(\mathcal{X}, \|\cdot\|\_2)$ complet.

Definició 2 (Espai de Hilbert)**.** Sigui X un espai vectorial on hi podem definir un producte escalar $(\cdot,\cdot)_X$. Direm que X, junt amb aquest producte escalar és un espai de Hilbert i X junt amb la norma induïda per aquest producte escalar és un espai de Banach (i.e., un espai complet).

El primer exemple que ens ve al cap és $X = \mathbb{R}^n$ i prendre el producte escalar euclidià. La gran avantatge dels espais de Hilbert davant dels espais de Banach és que podem intentar imitar l'estructura geomètrica que ens dóna el producte escalar, com per exemple tenir un teorema de Pitàgores. Recordeu també que ara mateix no tenim exemples d'espais de Hilbert en espais de funcions, ja que l'espai de Banach que coneixem usa una norma que no prové del producte escalar.

En la propera lliçó donarem anàlegs del que pasa en $\mathbb{R}^n$ en espais de funcions on hi tenim on producte escalar, i en particular veurem el teorema de Pitàgores en un context més general: això ens donarà la desigualtat de Bessel i el primer resultat important d'aquest capítol: la igualtat de Parseval.