

FACULTAT DE MATEMÀTIQUES I ESTADÍSTICA

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA - BARCELONATECH

# Apunts d'Àlgebra Lineal (Primer curs del Grau de Matemàtiques)

*Alex Batlle Casellas*

October 7, 2018

# Índex

<b>1</b>	<b>Matrius, determinants i sistemes lineals.</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Espais vectorials.</b>	<b>2</b>
2.1	Operacions a $\mathbb{R}^n$ . . . . .	2
2.2	Espai vectorial sobre un cos $\mathbb{K}$ . . . . .	2

# 1 Matrius, determinants i sistemes lineals.

## 2 Espais vectorials.

Considerem el conjunt d' $n$ -tuples de nombres reals:

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) | x_i \in \mathbb{R}\}.$$

### 2.1 Operacions a $\mathbb{R}^n$ .

1. **Suma:** Sigui  $u = (x_1, x_2, \dots, x_n), v = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ . Aleshores:

$$u + v = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \in \mathbb{R}^n.$$

2. **Multiplicació per un escalar:** Sigui  $u = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R}$ . Aleshores:

$$cu = (cx_1, cx_2, \dots, cx_n) \in \mathbb{R}^n.$$

PROPIETATS:

- $u + v = v + u$ . (commutativitat)
- $(u + v) + w = u + (v + w)$ . (associativitat)
- $\exists \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n : u + \mathbf{0} = u$ . (vector zero; notació alternativa,  $\vec{0}$ )
- $\forall u \in \mathbb{R}^n \exists -u \in \mathbb{R}^n : u + (-u) = \mathbf{0}$ .
- $c(u + v) = cu + cv$ . (distributivitat)
- $(c + d)u = cu + du$ . (distributivitat)
- $c(du) = (cd)u$ .
- $1u = u$ .

### 2.2 Espai vectorial sobre un cos $\mathbb{K}$ .

Sigui  $\mathbb{K}$  un cos commutatiu (per exemple  $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ). Un espai vectorial sobre  $\mathbb{K}$  ( $\mathbb{K}$ -e.v.) és un conjunt de vectors  $E$  amb dues operacions  $+$  i  $\cdot$ .

- $+$ : Donats  $u, v \in E$  dona un element  $u + v$  també d' $E$ .  
És una operació commutativa, associativa, té element neutre ( $\mathbf{0}$  o  $\vec{0}$ ) i tot  $u \in E$  té invers respecte  $+$  ( $-u$ ).
- $\cdot$ : Donats  $u \in E$  i  $c \in \mathbb{K}$  dona un element  $cu$  d' $E$ .

La suma i el producte compleixen

$$c(u + v) = cu + cv \quad (c + d)u = cu + du \quad c(du) = (cd)u \quad 1u = u \quad \forall u, v \in E, c, d \in \mathbb{K}.$$

### Exemples d'espais vectorials:

- $\mathbb{K}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) | x_i \in \mathbb{K}\}$  és un  $\mathbb{K}$ -e.v. amb la suma i el producte naturals heretats de  $\mathbb{K}$ .
- $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$  és un  $\mathbb{K}$ -e.v. format per matrius de dimensions  $m \times n$  amb entrades a  $\mathbb{K}$  i les operacions naturals de la suma de matrius i el producte per un escalar.
- El conjunt de polinomis de grau  $\leq d$ ,  $\mathbb{R}_d[x] = \{p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n | a_i \in \mathbb{R}\}$  és un espai vectorial amb la suma de polinomis i el producte per un escalar.
- $\mathbb{R}[x] = \{\text{polinomis en una variable } x \text{ i coeficients en els reals}\}$  és un  $\mathbb{R}$ -e.v.
- El conjunt  $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  de funcions  $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  és un  $\mathbb{R}$ -e.v.

### PROPIETATS:

1.  $0u = \mathbf{0} = c\mathbf{0}$ .
2.  $(-1)u = -u$ .
3.  $(-c)u = c(-u) = -(cu) = -cu$ .
4.  $cu = \mathbf{0} \iff c = 0 \vee u = \mathbf{0}$ .

### Demostracions:

1. Sigui  $v = 0u = (0 + 0)u = 0u + 0u = v + v$ . Aleshores  $v = v + v \iff v + (-v) = v + v + (-v) \iff v = \mathbf{0} \square$
2. Sigui  $v = (-1)u$ . Aleshores si  $u + v = \mathbf{0}$ ,  $v = -u$ .

$$u + v = u + (-1)u = (u_1, \dots, u_n) + (-u_1, \dots, -u_n) = (u_1 - u_1, \dots, u_n - u_n) = (0, \dots, 0) = \mathbf{0} \square$$

3. **PENDENT D'ACABAR.**