Facultat de Matemàtiques i Estadística

Universitat Politècnica de Catalunya - BarcelonaTech

Exercicis resolts de Fonaments de les Matemàtiques (Primer curs del Grau de Matemàtiques)

Àlex Batlle Casellas

November 15, 2018

Índex

1 Formalisme matemàtic: enunciats i demostracions.

2 Conjunts i aplicacions.

21. **Siguin $A_1, A_2, B_1, B_2 \neq \emptyset$. Demostreu:**

21.3. $(A_1 \cup A_2) \times (B_1 \cup B_2) = (A_1 \times B_1) \cup (A_1 \times B_2) \cup (A_2 \times B_1) \cup (A_2 \times B_2)$**.**

Sigui $y \in (A_1 \cup A_2) \times (B_1 \cup B_2)$. Aleshores, $\exists y_1 \in A_1 \cup A_2,\ y_2 \in B_1 \cup B_2 :\ y = (y_1, y_2)$.

$$\iff (y_1 \in A_1 \vee y_1 \in A_2) \wedge (y_2 \in B_1 \vee y_2 \in B_2) \iff (y_1 \in A_1 \wedge y_2 \in B_1)$$
$$\vee (y_1 \in A_2 \wedge y_2 \in B_1) \wedge (y_1 \in A_1 \wedge y_2 \in B_2) \vee (y_1 \in A_2 \wedge y_2 \in B_2)$$
$$\iff y \in (A_1 \times B_1) \cup (A_2 \times B_2) \cup (A_1 \times B_2) \cup (A_2 \times B_1). \square$$

30. **Considerem una aplicació $f:\ A \mapsto B$ i subconjunts $A', A'' \subseteq A$ i $B', B'' \subseteq B$.**

30.1. **Demostreu que si $A' \subseteq A''$, aleshores $f(A') \subseteq f(A'')$.**

$$\text{Sigui } A' \subseteq A''. \text{ Aleshores } f(A') = \{y \in B : (\exists x \in A' :\ f(x) = y)\}$$
$$\subseteq \{y \in B : (\exists x \in A'' : f(x) = y)\} = f(A'') \implies f(A') \subseteq f(A''). \square$$

30.3. **Demostreu que si $B' \subseteq B''$, aleshores $f^{-1}(B') \subseteq f^{-1}(B'')$.**

$$\text{Sigui } B' \subseteq B''. \text{ Aleshores, } f^{-1}(B') = \{x \in A : (\exists y \in B' : f^{-1}(\{y\}) = \{x\})\} \subseteq$$
$$\{x \in A : (\exists y \in B'' : f^{-1}(\{y\}) = \{x\})\} = f^{-1}(B'') \implies f^{-1}(B') \subseteq f^{-1}(B''). \square$$

30.2. **Demostreu que $f(A') \subseteq f(A'')$ implica que $A' \subseteq A''$, per a tot $A', A'' \subseteq A$, si, i només si, f és injectiva.**
Si fem el conjunt antiimatge dels dos costats de la hipòtesi ($f(A') \subseteq f(A'')$):

$$f^{-1}(f(A')) \subseteq f^{-1}(f(A'')) \implies (f^{-1} \circ f)(A') \subseteq (f^{-1} \circ f)(A'') \implies$$
$$Id_A(A') \subseteq Id_A(A'') \implies A' \subseteq A''.$$

Això només passarà quan f és injectiva, doncs en tal cas A' i A'' no podrien ser disjunts.$\square$
Si f no fos injectiva, en canvi, A' i A'' podrien ser disjunts però donar el mateix conjunt imatge sense inconvenient.

30.4. **Demostreu que $f^{-1}(B') \subseteq f^{-1}(B'')$ implica que $B' \subseteq B''$, per a tot $B', B'' \subseteq B$, si, i només si, f és exhaustiva.**

31. **Considerem una aplicació $f:\ A \mapsto B$. Demostreu:**

31.1. **Si $A' \subseteq A$, aleshores $A' \subseteq f^{-1}(f(A'))$.**

$$f(A') = \{y \in B : (\exists x \in A' : f(x) = y)\}.$$
$$f^{-1}(f(A')) = \{x \in A : f(x) \in f(A')\}.$$

Tenint en compte que podrien existir elements d'A que corresponguessin amb l'aplicació a elements d'$f(A')$, el conjunt antiimatge $f^{-1}(f(A'))$ és un superconjunt d'A'.

$$\implies A' \subseteq f^{-1}(f(A')). \square$$

31.2. f **és injectiva si i només si** $A' = f^{-1}(f(A'))\ \forall A' \subseteq A$.
Agafant la igualtat que volem demostrar, si apliquem f als dos costats, ens ha de quedar una identitat per poder afirmar que f és injectiva. Com podem efectivament comprovar,

$$f(A') = f(f^{-1}(f(A'))) = Id_B(f(A')) = f(A')$$

i $A' = A'$, per tant, queda demostrat l'enunciat.□

3 Relacions, operacions i estructures.

28. Considerem a $\mathbb{Z}$ les operacions

$$a \oplus b = a + b - 6;$$

$$a \odot b = ab + \alpha(a + b) + 42,$$

on $\alpha \in \mathbb{Z}$.

1) **Comproveu que $(\mathbb{Z}, \oplus)$ és un grup commutatiu.**
Per ser un grup commutatiu, l'operació $\oplus$ ha de complir les propietats associativa i commutativa i ha de tenir element neutre i invers per tots els elements de $\mathbb{Z}$. Comprovem-ho:

- Associativa: comprovem que $\forall a, b \in \mathbb{Z},\ a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c = a \oplus b \oplus c$.

$$a \oplus (b \oplus c) = a + (b \oplus c) - 6 = a + (b + c - 6) - 6 =$$

$$(a + b - 6) + c - 6 = (a \oplus b) + c - 6 = (a \oplus b) \oplus c.\square$$

- Commutativa: comprovem que $\forall a, b \in \mathbb{Z},\ a \oplus b = b \oplus a$.

$$a \oplus b = a + b - 6 = b + a - 6 = b \oplus a.\square$$

- Existència del neutre: suposem que $\exists e \in \mathbb{Z} :\ a \oplus e = a$ i el trobem.

$$a \oplus e = a \iff a + e - 6 = a \iff e - 6 = 0 \iff e = 6.$$

En ser $\oplus$ commutativa, ens podem estalviar comprovar per l'altre costat.

- Existència de l'invers: suposem que $\exists a' \in \mathbb{Z} :\ a \oplus a' = e$ i el trobem.

$$a \oplus a' = e \iff a + a' - 6 = 6 \iff a' = 12 - a.$$

2) **Demostreu que l'operació $\odot$ és associativa si, i només si, $\alpha = -6$ o $\alpha = 7$.**
L'operació $\odot$ serà associativa quan $a \odot (b \odot c) = (a \odot b) \odot c = a \odot b \odot c$. Veiem què passa quan igualem les expressions per cada un dels costats de la tesi:

- $a \odot (b \odot c) = a(b \odot c) + \alpha(a + b \odot c) + 42 = a(bc + \alpha(b + c) + 42) + \alpha(a + bc + \alpha(b + c) + 42) + 42$
- $(a \odot b) \odot c = (a \odot b)c + \alpha(a \odot b + c) + 42 = (ab + \alpha(a + b) + 42)c + \alpha(ab + \alpha(a + b) + 42 + c) + 42$

En igualar,

$$a(bc + \alpha(b + c) + 42) + \alpha(a + bc + \alpha(b + c) + 42) + 42$$

$$= (ab + \alpha(a + b) + 42)c + \alpha(ab + \alpha(a + b) + 42 + c) + 42.$$

Treiem els 42 d'ambdós costats i desenvolupem els productes amb la distributivitat del producte sobre la suma usual:

$$abc + a\alpha b + a\alpha c + 42a + a\alpha + bc\alpha + \alpha^2 b + \alpha^2 c + 42\alpha =$$

$$abc + c\alpha a + c\alpha b + 42c + ab\alpha + \alpha^2 a + \alpha^2 b + 42\alpha + c\alpha.$$

Cancel·lant els termes iguals,

$$42a + a\alpha + c\alpha^2 = 42c + a\alpha^2 + c\alpha,$$

i ara reescrivint com una equació de segon grau en α queda:

$$(c-a)\alpha^2 + (a-c)\alpha + 42(a-c) = 0.$$

Aquesta equació la dividim entre $(c-a)$, que és diferent de zero ja que si $a = c$, $(a \odot b) \odot a = a \odot (b \odot a)$ si $\odot$ és commutativa. Ho podem veure ràpid:

$$a \odot b = ab + \alpha(a+b) + 42 = ba + \alpha(b+a) + 42 = b \odot a.$$

Per tant, com que $a \neq c$, dividim;

$$\alpha^2 - \alpha - 42 = 0,$$

i calculem les solucions amb la fórmula pel càlcul de les arrels dels polinomis de segon grau:

$$\alpha = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4(-42)}}{2}$$
$$\alpha_1 = -6 \qquad \alpha_2 = 7.$$

Per tant, seguint el curs de les implicacions i tal com volíem demostrar, $\odot$ només és associativa quan $\alpha = -6$ o $\alpha = 7$.$\square$

3) **Demostreu que l'operació $\odot$ té element neutre si, i només si, $\alpha = -6$ o $\alpha = 7$.**
Si existeix un element neutre, $\exists e \in \mathbb{Z} : a \odot e = a$. Per tant, ho escrivim:

$$a \odot e = ae + \alpha(a+e) + 42 = a.$$

Si el trobem, haurem demostrat que existeix. Per fer-ho, intentem resoldre l'equació:

$$a(e+\alpha) + e\alpha + 42 = a.$$

Com que estem utilitzant la suma i el producte usuals, la única solució possible es troba solucionant el sistema:

$$e + \alpha = 1$$
$$e\alpha + 42 = 0$$

D'aquí tenim $e = 1-\alpha$ i $(1-\alpha)\alpha + 42 = 0$. Aquesta equació ja la tenim solucionada (apartat 2) i per tant, veiem que e existeix només quan $\alpha = -6$ o $\alpha = 7$.$\square$

4) **Per a quins valors de α és $(\mathbb{Z}, \oplus, \odot)$ un anell?**
Per a que $(\mathbb{Z}, \oplus, \odot)$ sigui un anell necessitem que $(\mathbb{Z}, \oplus$ sigui grup abelià i que $\odot$ sigui associativa, tingui element neutre i sigui distributiva respecte $\oplus$. Com ja hem vist, $\oplus$ només és associativa i té neutre quan $\alpha = -6$ o $\alpha = 7$. Per ser distributiva, volem que $a \odot (b \oplus c) = (a \odot b) \oplus (a \odot c)$. Ho desenvolupem per ambdós costats:

(1) $a \odot (b \oplus c) = a(b \oplus c) + \alpha(a + b \oplus c) + 42 = ab + ac - 6a + \alpha(a + b + c - 6) + 42,$
(2) $(a \odot b) \oplus (a \odot c) = (ab + \alpha(a+b) + 42) \oplus (ac + \alpha(a+c) + 42) =$
$ab + ac + \alpha(a+b) + \alpha(a+c) + 42 + 42 - 6.$

Ara igualem ambdós resultats i veiem què li ha de passar a α:

$$ab + ac - 6a + \alpha(a + b + c - 6) + 42 = ab + ac + \alpha(a + b) + \alpha(a + c) + 42 + 42 - 6$$

$$-6a + a\alpha - 6\alpha = 2a\alpha + 36,$$

$$-a\alpha - 6\alpha = 6a + 36,$$

$$-\alpha(a + 6) = 6(a + 6) \implies \alpha = -6.$$

Per tant, $(\mathbb{Z}, \oplus, \odot)$ és un anell per $\alpha = -6$.

4 Conjunts de nombres. Numerabilitat.

5 El cos dels nombres complexos.

6 Aritmètica

7 Polinomis.