TEORIA DE LA PROBABILITAT

GM, FME, curs 2021–22

Tema 1: Espais de probabilitat

1. Siguin $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ dues σ–àlgebres sobre Ω.
   (a) Proveu que són tancades per interseccions numerables.
   (b) Proveu que $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ és una σ–àlgebra.
   (c) Vegeu que $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ no té perquè ser una σ–àlgebra.

2. Sigui $\mathcal{A} = \{X \subseteq \mathbb{R} : X \text{ ó } \mathbb{R} \setminus X \text{ és finit}\}$.
   (a) La família $\mathcal{A}$ és una σ-àlgebra? En cas contrari, esbrineu si és una àlgebra.
   (b) Varia la resposta al primer apartat si canviem "finit" per "numerable"?

3. Sigui $\mathcal{A}$ una σ–àlgebra i $B \in \mathcal{A}$. La família $\mathcal{B} = \{A \cap B : \ A \in \mathcal{A}\}$, és una σ–àlgebra?

4. Si $p(A) = 1/2$ i $p(B) = 2/3$, doneu fites superiors i inferiors justes de $p(A \cap B)$ i de $p(A \cap \bar{B})$.

   Solució: $1/6 \le p(A \cap B) \le 1/2$; $0 \le p(A \cap \bar{B}) \le 1/3$.

5. En un curs hi ha quatre assignatures. El 70% dels estudiants aproven l'assignatura A, el 75% aproven l'assignatura B, el 80% aproven l'assignatura C i el 85% aproven l'assignatura D. Quin és el mínim percentatge d'estudiants que aproven les quatre assignatures?

   Solució: 0.1.

6. *(Problema del Chevalier de Méré, formulat a Blaise Pascal).* Aquest és un dels problemes que inicià la teoria de la probabilitat. Empíricament, el Chevalier de Méré havia observat que és més probable obtenir "almenys un 6"en 4 tirades d'un dau que obtenir "almenys un doble 6"en 24 tirades de dos daus (consecutius). Comproveu que és efectivament així.

7. *(Una pregunta a De Moivre.)* Es tiren tres daus n vegades. Calculeu la probabilitat $f(n)$ de que en alguna tirada hagin sortit tres sisos. Quin és el valor menor de n pel qual és més probable que hagin sortit tres sisos alguna de les n tirades que el contrari?

   Solució: 150

8. Es reparteixen les 52 cartes d'una baralla entre quatre jugadors. Quina és la probabilitat que cada jugador tingui un as?

   Solució: $24 \cdot 13^4/(52)_4 \approx 0.1055$.

9. Proveu que no és possible donar valors a les cares de dos daus de forma que la suma de les seves cares superiors pugui prendre qualsevol valor de 2 a 12 amb igual probabilitat.

10. Proveu que si es llença dues vegades una moneda que té probabilitat de cara p fins que surten dos resultats diferents, els dos possibles resultats ($(\circ, +)$ i $(+, \circ)$) són equiprobables.

11. En un grup de n persones una d'elles s'assabenta d'una xafarderia. Tria una persona a l'atzar i la hi conta, aquesta en tria una a l'atzar diferent de qui li ha contat per explicar-la-hi, i així successivament: l'r–èsima persona en tria una a l'atzar diferent de qui li acaba de contar i la hi explica.

    (a) Quina és la probabilitat que en r rondes la xafarderia no hagi tornat a la persona que l'ha originada?

    (b) Quina és la probabilitat que en r rondes la xafarderia hagi passat per $r+1$ persones diferents?

    Solució: $p_r = (1 - \frac{1}{n-2})^{r-2}$; $q_r = \frac{(n-3)!}{(n-2)^{r-2}(n-r-1)!}$, $r \geq 3$.

12. *(Problema dels aniversaris.)* Quina és la probabilitat $f(n)$ que en un grup de n persones n'hi hagi almenys dues que tinguin l'aniversari el mateix dia de l'any? (Suposem anys de 365 dies i que la probabilitat que un individu tingui l'aniversari en un dia concret és 1/365.) Clarament $f(n) = 1$ per a $n \geq 366$. Quin és el valor més petit de n pel qual $f(n) > 1/2$?

    Solució: 23

13. *(Mixtures d'espais de probabilitat)* Sigui $\{(\Omega_i, \mathcal{A}_i, p_i)\}_{i \in I}$ una col·lecció numerable d'espais de probablitat, amb espais mostrals Ω_i dos a dos disjunts.

    (a) Definim $\Omega = \bigcup_{i \in I} \Omega_i$ i $\mathcal{A} = \{A \subseteq \Omega : A \cap \Omega_i \in \mathcal{A}_i \text{ per a tot } i \in I\}$. Proveu que $(\Omega, \mathcal{A})$ és un experiment.

    (b) Sigui ara $(\Omega_0, \mathcal{A}_0, p_0)$ un altre espai de probablitat, amb $\Omega_0 = I$ i $\{i\} \in \mathcal{A}_0$ per a tot $i \in I$. Proveu que l'aplicació $p : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ següent és una funció de probabilitat en $(\Omega, \mathcal{A})$.

    $$p(A) = \sum_{i \in I} p_0(\{i\}) p_i(A \cap \Omega_i)$$

14. Siguin $A_1, \ldots, A_n$ successos amb $p(A_1 \cap \cdots \cap A_n) > 0$. Proveu que

$$p(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = p(A_1)p(A_2|A_1)p(A_3|A_1 \cap A_2) \cdots p(A_n|A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}).$$

15. En una urna hi ha n boles blanques i n de negres. S'extreuen d'una en una. Si surt blanca es torna a l'urna i si surt negra es treu. Quina és la probabilitat que les n primeres extraccions siguin totes del mateix color?

Solució: $\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{\binom{2n}{n}}$.

16. Dos successos A, B amb $p(A), p(B) > 0$ estan *positivament correlats* si $p(A|B) \geq p(A)$. Proveu que aleshores $p(B|A) \geq p(B)$ (i per tant la relació és simètrica). Com són $\bar{A}, \bar{B}$? i A i $\bar{B}$? Suposem A, B positivament correlats i B, C positivament correlats. Es pot dir que A, C són positivament correlats? o negativament correlats?

17. Una capsa conté n cartes numerades de 1 a n i es treuen d'una en una a l'atzar. Si la carta k–èssima és la més gran de les k primeres extretes, quina és la probabilitat que sigui la més gran de totes?

Solució: k/n.

18. *(Problema dels tres presoners.)* Tres presoners són informats que un, que ha estat triat a l'atzar, serà alliberat i els altres dos executats. Un d'ells, A, demana al carceller quin dels altres dos, B o C, serà executat. El carceller respon la pregunta triant un dels dos a l'atzar si ho han de ser tots dos, o dient la veritat si només és un. Afecta aquesta informació la probabilitat que A sigui l'alliberat?

19. *(Regla de successió de Laplace.)* Tenim $N + 1$ urnes numerades de 0 a N, cadascuna amb N boles. L'urna i té i boles blanques i $N - i$ de negres. Escollim una urna a l'atzar i fem n extraccions amb reposició. Si totes les boles extretes resulten ser blanques, doneu una aproximació asimptòtica per a N gran de la probabilitat p_{n+1} que l'extracció $n + 1$ torni a sortir blanca?

Solució: Fent servir $\sum_{i=1}^{N} i^n \sim \int_0^N x^n dx$, s'obté $p_{n+1} \sim (n+1)/(n+2)$.

20. Un malalt té hepatitis, que pot ser de tipus A, B o C amb probabilitats $0.5, 0.2, 0.3$ respectivament. Es disposa de tres proves U, V, W que identifiquen correctament el tipus amb les probabilitats de la taula següent:

	U	V	W
A	0.5	0.6	0.95
B	0.2	0.3	0.05
C	0.9	0.4	0.4

Si només es pot fer una prova, quina seria la millor elecció per maximitzar la probabilitat de diagnòstic correcte? Si es tria una prova a l'atzar, quina és la probabilitat que el diagnòstic sigui correcte? Si es poguessin fer totes tres, i s'adopta el resultat de la majoria, quina seria la probabilitat de diagnòstic correcte?

Solució: W; ≈ 0.548; ≈ 0.573

21. Tirem un dau n vegades i diem $A_{i,j}$ al succés 'les tirades i i j han donat el mateix resultat'.

    (a) Són independents $A_{i,j}$ i $A_{i',j'}$? Són independents els successos $A_{i,j}$, $1 \leq i < j \leq n$?

    (b) Per a cada $k \geq 4$, generalitzeu l'apartat anterior trobant un conjunt de k successos que no siguin independents, però tal que tots els subconjunts de mida $k-1$ sí que ho siguin.

22. Sigui A un succés independent amb B_1 i B_2. És cert que A és independent amb $B_1 \cap B_2$? Provar-ho o donar un contraexemple.

23. Sigui $\Omega = \{1, \ldots, p\}$, p primer, i definim la probabilitat a 2^Ω com $p(A) = |A|/p$. Hi ha cap parell de conjunts independents?

24. *(Teorema del mico escriptor.)* Proveu que qualsevol seqüència de k cares i creus apareix infinites vegades amb probabilitat 1 si es tira una moneda indefinidament.

25. És possible definir una funció de probabilitat p sobre l'espai $(\mathbb{N}_{\geq 1}, \mathcal{P}(\mathbb{N}_{\geq 1}))$ de tal forma que el succés $A_r = \{n \in \mathbb{N}_{\geq 1} : r \mid n\}$ satisfà que $p(A_r) = \frac{1}{r}$? (*Indicació*: estudieu si per nombres primers diferents $p_1, p_2, \ldots, p_m$, els successos $A_{p_1}, A_{p_2}, \ldots, A_{p_m}$ són independents. També pot ser útil recordar que la suma $\Sigma_{p \text{ primer}} \frac{1}{p}$ és divergent).

26. Sigui $\{A_n\}_{n \geq 1}$ una seqüència de successos en un espai de probabilitat tal que $\lim p(A_n) = 0$. A més a més, $\sum_{n \geq 1} p(A_n \cap \overline{A_{n+1}})$ és convergent. Demostreu que $p(\limsup A_n) = 0$ (*Indicació*: definiu $B_n = A_n \cap \overline{A_{n+1}}$ i justifiqueu que $\limsup A_n = \limsup B_n \cup \liminf A_n$).

27. *(Model de Crámer dels primers)* Construïm un subconjunt aleatori $R \subseteq \mathbb{N}$ de la manera següent: per a cada $n \geq 3$, afegim n a R amb probabilitat $1/\log(n)$, independentment per a cada n. Demostreu que amb probabilitat 1, el conjunt R conté infinits parells de la forma $(r, r+2)$.