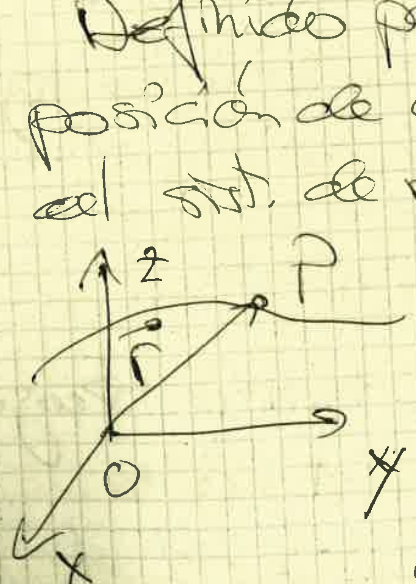
Cinemática de la partícula

Estudia el movimiento, sin ocuparse de las causas que lo producen. En mecánica clásica el tiempo y el espacio son absolutos.

- Sistema de referencia
  Se componen de:
  - un origen O → pto en el espacio
  - una base vectorial

El movimiento depende del sist. de referencia.

- Movimiento de la partícula:
  Definido por un vector que marca la posición de la partícula respecto al origen del sist. de referencia



$\vec{r} = \vec{OP}$

- ~~Trayectoria de~~

El movimiento vendrá dado por el cambio de $\vec{r}$ respecto al tiempo:

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$$

↳ fórmula paramétrica

Para ponerlo de forma explícita,

$x = f(t), \; y = g(t), \; z = h(t)$

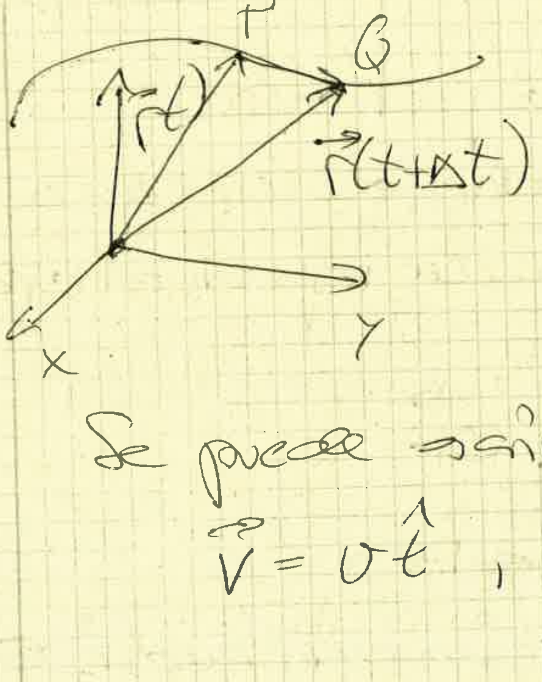
sustituyendo la primera:

$$t = f^{-1}(x) \Rightarrow y = g'(x), \; z = h'(x)$$

- Velocidad

Definimos la velocidad como la derivada de la posición respecto al tiempo

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$$



La velocidad es tangente a la trayectoria

Se puede escribir como:

$\vec{v} = v\hat{t}$, $\hat{t} \rightarrow$ vector unitario tangente a la trayectoria

- Aceleración

La definimos como la derivada de la velocidad con respecto al tiempo

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}$$

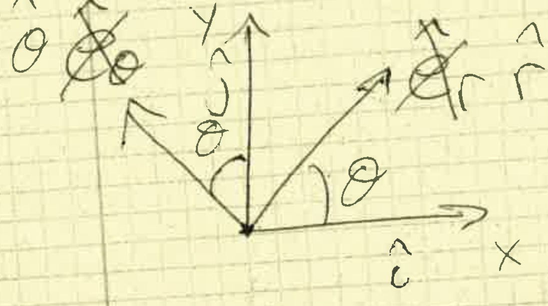
En coordenadas cartesianas:

$$\vec{a} = \frac{dv_x}{dt}\hat{i} + \frac{dv_y}{dt}\hat{j} + \frac{dv_z}{dt}\hat{k} =$$

$$= \frac{d^2x}{dt^2}\hat{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\hat{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\hat{k}$$

Velocidad y aceleración en coordenadas polares

La transformación →:



$$\begin{cases} \hat{r} = \hat{i}\cos\theta + \hat{j}\sin\theta \\ \hat{\theta} = -\hat{i}\sin\theta + \hat{j}\cos\theta \end{cases}$$

O la inversa

$$\begin{cases} \hat{i} = \hat{r}\cos\theta - \hat{j}\sin\theta \\ \hat{j} = \hat{r}\sin\theta + \hat{j}\cos\theta \end{cases}$$

Pero $\hat{r} = \hat{r}(\theta)$, $\hat{\theta} = \hat{\theta}(\theta)$

$$\frac{d\hat{r}}{d\theta} = -\hat{i}\sin\theta + \hat{j}\cos\theta = \hat{\theta}$$

$$\frac{d\hat{\theta}}{d\theta} = -\hat{i}\cos\theta - \hat{j}\sin\theta = -\hat{r}$$

La posición es $\vec{r} = r\hat{r}$

La velocidad:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\hat{r} + r\frac{d\hat{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\hat{r} +$$

$$+ r\frac{d\hat{r}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} = (\dot{r}, r\dot{\theta}$$

$v_r = \dot{r}$ → componente radial
$v_\theta = r\dot{\theta}$ → componente transversal

La aceleración es:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{r}\hat{r} + \dot{r}\frac{d\hat{r}}{dt} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta} + r\ddot{\theta}\hat{\theta} + r\dot{\theta}\frac{d\hat{\theta}}{dt} =$$

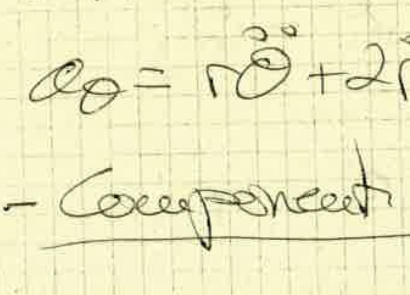
$$\frac{d\hat{\theta}}{dt} = \frac{d\hat{\theta}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = -\dot{\theta}\hat{r}$$

$$= \ddot{r}\hat{r} + 2\dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta} + r\ddot{\theta}\hat{\theta} - r\dot{\theta}^2\hat{r} =$$

$$= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta}$$

$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$ → aceleración radial
$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$ → aceleración transversal.

- Componentes intrínsecas de la aceleración



La velocidad de una partícula se puede expresar como:

$$\bar{v} = v\hat{t}$$

$\hat{t}$ → dirección tangencial a la trayectoria

La aceleración será:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\hat{t}) = \frac{dv}{dt}\hat{t} + v\frac{d\hat{t}}{dt}$$

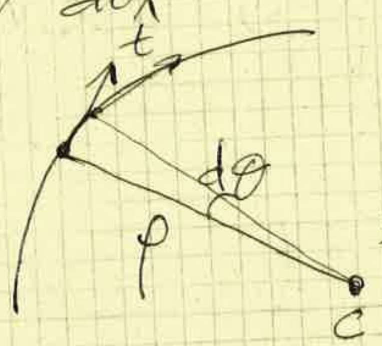
si la trayectoria no es rectilínea → $\frac{d\hat{t}}{dt} \neq 0$

$\hat{t}$ es unitario ⇒ $\hat{t}\cdot\hat{t} = 1$, por tanto:

$$2\hat{t}\cdot\frac{d\hat{t}}{dt} = 0 \Rightarrow \hat{t} \perp \frac{d\hat{t}}{dt}$$

$\hat{t}$ y $\frac{d\hat{t}}{dt}$ definen el plano osculador

$\frac{d\hat{t}}{dt}$ → es la normal a la curva



$ds = \rho\, d\theta$ → medido en el arco

$\hat{t}(t)$, $d\theta$, $d\hat{t}$, $\hat{t}(t+dt)$

$\hat{t}$, $d\hat{t}$, $\hat{t}+d\hat{t}$, $d\theta$

Pero $|d\hat{t}| = d\theta$

$d\hat{t} = \hat{t}(t+dt) - \hat{t}(t)$

Por tanto: $|d\hat{t}| = \frac{ds}{\rho} \to \left|\frac{d\hat{t}}{dt}\right| = \frac{1}{\rho}\frac{ds}{dt} = \frac{v}{\rho}$

ρ → radio de curvatura

$$\left|\frac{d\hat{t}}{dt}\right| = \underbrace{\left|\frac{d\hat{t}}{ds}\right|}_{1/\rho}\underbrace{\left|\frac{ds}{dt}\right|}_{v}$$

$\frac{d\hat{t}}{dt} = \frac{v}{\rho}\hat{n}$, $\hat{n}$ → normal a la curva

Por tanto:

$$\vec{a} = \underbrace{\frac{dv}{dt}}_{\text{aceleración tangencial}}\hat{t} + \underbrace{\frac{v^2}{\rho}}_{\text{aceleración normal}}\hat{n}$$

$$\left\{\begin{array}{l} a_t = \frac{dv}{dt} \\ a_n = \frac{v^2}{\rho} \end{array}\right.$$

Triedro móvil:

dados $\hat{t}$ y $\hat{n}$ se puede definir la binormal $\hat{b} = \hat{t} \times \hat{n}$

$\Rightarrow (\hat{t}, \hat{n}, \hat{b}) \Rightarrow$ triedro de Frenet

Podemos calcular el radio de curvatura:

Tenemos que:

$$\vec{v} \cdot \vec{a} = \vec{v} \cdot (\vec{a}_t + \vec{a}_n) = v a_t$$

$$\vec{v} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \hat{t} & \hat{n} & \hat{b} \\ v & 0 & 0 \\ \dot{v} & v^2/\rho & 0 \end{vmatrix} = \frac{v^3}{\rho} \hat{b} = v a_n \hat{b}$$

Por tanto:

$$a_t = \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{v} \quad , \quad a_n = \frac{|\vec{v} \times \vec{a}|}{v}$$

$$k = \frac{1}{\rho} = \frac{a_n}{v^2} = \frac{|\vec{v} \times \vec{a}|}{v^3}$$

Tipos de movimiento

i) Movimiento uniforme: $\vec{v}_0$ constante

Integrando:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \Rightarrow \vec{r}(t) = \int \vec{v}\,dt = \vec{v}_0 t + \vec{r}_0$$

↳ es de una recta.

ii) Movimiento uniformemente acelerado

$$\vec{a} = \vec{a}_0$$

entonces:

$$\vec{v} = \int \vec{a}_0\,dt = \vec{a}_0 t + \vec{v}_0$$

Volviendo a integrar:

$$\vec{r} = \int \vec{v}\,dt = \int (\vec{a}_0 t + \vec{v}_0)\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\vec{a}_0 t^2 + \vec{v}_0 t + \vec{r}_0$$

La velocidad $\vec{v}$ está en el plano definido por $\vec{a}_0$ y $\vec{v}_0$. También $\vec{r} - \vec{r}_0$.

⇒ la trayectoria transcurre en un plano

Casos:

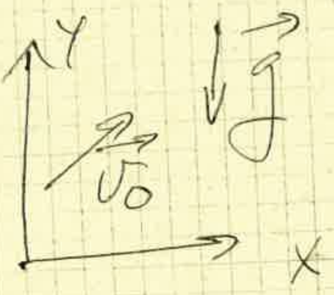
i) $\vec{v}_0 = 0 \Rightarrow \vec{r} - \vec{r}_0 = \frac{1}{2}\vec{a}_0 t^2 \rightarrow$ trayectoria rectilínea

ii) $\vec{v}_0 \parallel \vec{a}_0 \Rightarrow$ trayectoria también rectilíneo, uniformemente acelerado o decelerado.

β) Caso general $\vec{a}_0 \nparallel \vec{v}_0$, la ec.

$\vec{r} - \vec{r}_0 = \frac{1}{2}\vec{a}_0 t^2 + \vec{v}_0 t$ representa una parábola en el plano definido por $\vec{a}_0$ y $\vec{v}_0$

iii) Movimiento de un proyectil



Pongamos $\vec{r}_0 = 0$

$$\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} v_0 \cos\theta_0 \\ v_0 \sin\theta_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} = \vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \\ 0 \end{pmatrix}$$

La velocidad será:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}\,t = \begin{pmatrix} v_0 \cos\theta_0 \\ v_0 \sin\theta_0 - g t \\ 0 \end{pmatrix}$$

La posición:

$$\vec{r} = \frac{1}{2}\vec{a}_0 t^2 + \vec{v}_0 t = \begin{pmatrix} v_0 t \cos\theta_0 \\ v_0 t \sin\theta_0 - \frac{1}{2} g t^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

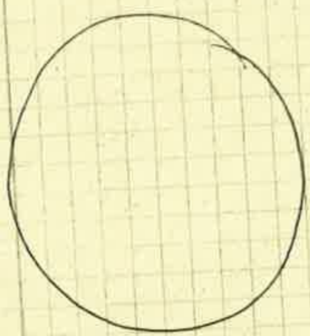
Eliminando el tiempo podemos hallar la ecuación de la trayectoria:

$$t = \frac{x}{v_0 \cos\theta_0}$$

$$\Rightarrow y = x\tan\theta_0 - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta_0}x^2$$

↳ movimiento parabólico

iv) Movimiento circular



La velocidad → tangente al círculo

En componentes radial y transversal

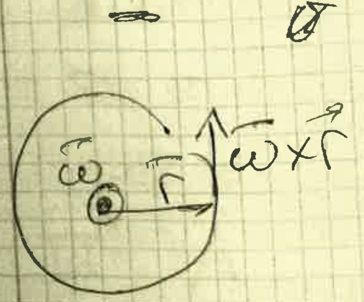
$$v_r = \dot{r} = 0, \quad v_\theta = r\frac{d\theta}{dt} \equiv r\dot{\theta}$$

Se define $\omega = \dot{\theta}$ → velocidad angular $(r=R)$

Por tanto: $v_\theta = R\omega$

Si representamos $\vec{\omega}$ como un vector

$$\Rightarrow \vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{r}$$



Si $\omega = cte \Rightarrow \theta = \theta_0 + \omega(t-t_0)$

La aceleración → (con $\dot{r} = \ddot{r} = 0$)

$$\vec{a} = -r\dot{\theta}^2\hat{r} + r\ddot{\theta}\hat{\theta} = a_n\hat{r} + a_t\hat{\theta}$$

Por tanto:

$$a_n = -R\omega^2 , \quad a_t = R\dot{\omega}$$

Si $\omega = cte \rightarrow a_t = 0$;) en este caso:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \omega \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \omega \times \vec{v}$$

o bien:

$$\vec{a} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$