Entregable 3: El teorema $\pi - \lambda$ de Dynkin.

Anàlisi Real. Grau en Matemàtiques, UPC, primavera 2021.

Àlex Batlle Casellas

En aquest entregable demostrarem un teorema important de la branca de teoria de la mesura i en veurem alguna aplicació. Començarem amb les definicions bàsiques.

Sigui X un conjunt. Siguin P, L famílies de subconjunts de X.
Definició. (π-sistema) *Direm que la família de conjunts P és un π-sistema si per tota parella de conjunts $A, B \in P$ se satisfà que $A \cap B \in P$.*
Definició. (λ-sistema) *Direm que la família de conjunts L és un λ-sistema si compleix les tres propietats següents:*

(λ1) $\varnothing \in L$

(λ2) *Si $A \in L$ aleshores $\overline{A} \in L$.*

(λ3) *L és tancat per unions numerables i **disjuntes**: si $\{A_i\}_{i\geq 1} \subseteq L$, i $A_i \cap A_j = \varnothing$ si $i \neq j$, aleshores $\bigsqcup_{i\geq 1} A_i \in L$.*

El primer objectiu d'aquest entregable és demostrar el següent teorema, conegut com teorema $\pi - \lambda$ de Dynkin:

Teorema. ($\pi - \lambda$ de Dynkin) *Sigui P un π-sistema. Sigui L un λ-sistema tal que $P \subseteq L$. Aleshores $\sigma(P) \subset L$.*

El que ens diu el teorema és que la σ-àlgebra generada per un π-sistema contingut dins d'un λ-sistema no és més gran que el λ-sistema "ambient".

(a) Demostreu que en un λ-sistema L, si $A, B \in L, B \subseteq A$, aleshores la seva diferència $A - B = \{x \in A : x \notin B\} \in L$.

Com que $B \subseteq A$, aleshores $B \cap \overline{A} = \varnothing$. Per tant, com que L és un λ-sistema, si apliquem la propietat (λ3), aleshores $\overline{A} \sqcup B \in L$. A més, per la propietat (λ2), el complementari d'aquest conjunt també forma part d'L, amb el que $\overline{\overline{A} \cup B} = A \cap \overline{B} = A - B \in L$, on hem fet servir les lleis de De Morgan.

(b) Demostreu que si $\mathcal{A}$ és, alhora, un π-sistema i un λ-sistema, aleshores és una σ-àlgebra.

Primer, observem que $\mathcal{A}$ ja compleix totes les característiques per ser σ-àlgebra, excepte per la unió numerable de conjunts, que (de moment) requereix que els conjunts siguin disjunts dos a dos:

(σ1) $\varnothing \in \mathcal{A}$: el buit forma part d'$\mathcal{A}$ per la propietat (λ1).

(σ2) $A \in \mathcal{A} \implies \overline{A} \in \mathcal{A}$: $\mathcal{A}$ és tancada per complementaris per la propietat (λ2).

(σ3) $\{A_i\}_{i\geq 1} \subseteq \mathcal{A} \implies \bigcup_{i\geq 1} A_i \in \mathcal{A}$: vegem aquesta propietat.

Per (λ3), sabem que la unió disjunta sí que funciona. Per tant, anem a veure que podem convertir qualsevol unió de conjunts en una unió disjunta. Intuïtivament, podem descriure el procés que durem a terme com, a cada pas, afegir al total el conjunt i-èssim A_i, del que prèviament haurem tret tot el que ja hem agafat amb anterioritat amb els $i-1$ conjunts anteriors. Anem a veure-ho formalment: definim els conjunts B_i recursivament amb $B_1 = A_1$, i, per $i \geq 2$,

$$B_i = A_i - \bigcup_{j=1}^{i-1} B_j = A \cap \bigcap_{j=1}^{i-1} \overline{B_j} \in \mathcal{A}.$$

Aquests conjunts estan sempre dins d'$\mathcal{A}$ perquè $\mathcal{A}$ és un π-sistema, i les interseccions que hem definit aquí són finites. Vegem que els B_i són disjunts: suposem que $i \neq j$, i sense pèrdua de generalitat, podem suposar que $j < i$. Aleshores,

$$B_j \cap B_i = B_j \cap \left(A_i \cap \bigcap_{k=1}^{i-1} \overline{B_k} \right) = B_j \cap A_i \cap \bigcap_{k=1}^{i-1} \overline{B_k},$$

i com que $j < i$, és a dir, $1 \leq j \leq i-1$, la intersecció de complementaris eventualment contindrà $\overline{B_j}$, i per tant, la intersecció acabarà sent buida. Ara volem veure que la reunió disjunta dels $\{B_i\}_{i\geq 1}$ és exactament $\bigcup_{i\geq 1} A_i$. Ho veurem per inducció:
$\boxed{n=1}$ Aquest cas és trivial, doncs $B_1 = A_1$.

$\boxed{(n>1)\ n-1 \implies n}$ Per veure aquest cas, definim

$$\mathcal{U}_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i, \quad \mathcal{V}_n = \bigsqcup_{j=1}^{n} B_j.$$

Llavors, per hipòtesi d'inducció, se satisfà que $\mathcal{U}_{n-1} = \mathcal{V}_{n-1}$. Per tant, escrivim $\mathcal{V}_n$:

$$\mathcal{V}_n = \bigsqcup_{j=1}^{n} B_j = \left(\bigsqcup_{j=1}^{n-1} B_j \right) \sqcup B_n = \mathcal{V}_{n-1} \sqcup B_n = \mathcal{U}_{n-1} \sqcup B_n =$$

$$\mathcal{U}_{n-1} \sqcup \left(A_n \cap \overline{\bigsqcup_{k=1}^{n-1} B_k} \right) = \mathcal{U}_{n-1} \sqcup \left(A_n \cap \overline{\mathcal{V}_{n-1}} \right) = \left(\mathcal{U}_{n-1} \cup A_n \right) \cap \left(\mathcal{U}_{n-1} \cup \overline{\mathcal{U}_{n-1}} \right) =$$

$$\mathcal{U}_n \cap X = \mathcal{U}_n.$$

Com que les successions de conjunts $\{\mathcal{U}_n\}_{n\geq 1}$ i $\{\mathcal{V}_n\}_{n\geq 1}$ són iguals, els seus límits també, i per tant concloem que

$$\bigcup_{n\geq 1} A_n = \bigsqcup_{n\geq 1} B_n.$$

La segona és una unió numerable de conjunts disjunts, tals que tots són elements d'$\mathcal{A}$ (per ser π-sistema, com hem justificat abans), i per tant, pertany a $\mathcal{A}$, per la propietat $(\lambda 3)$ de λ-sistema d'$\mathcal{A}$. Per tant, en definitiva $\mathcal{A}$ és una σ-àlgebra.

(c) Siguin L_1 i L_2 dos λ-sistemes. Demostreu que $L_1 \cap L_2$ també ho és. Generalitzeu-ho per una intersecció arbitrària de λ-sistemes.

Abans que res, quan tinguem una família de conjunts $\{A_i\}_{i\in I}$, definirem $\Delta_{i,j}$ com

$$\Delta_{i,j} = \begin{cases} A_i, & i = j, \\ \varnothing, & i \neq j. \end{cases}$$

Ara anem a demostrar el resultat que ens demana l'enunciat. Ho fem directament per interseccions arbitràries (és el mateix procés que per intersecció simple): siguin $\{L_i\}_{i\in I}$ una col·lecció arbitràriament gran de λ-sistemes. Aleshores, la seva intersecció $\bigcap_{i\in I} L_i$ satisfà les següents propietats:

(Λ1) $\varnothing \in \bigcap_{i\in I} L_i$: això és trivialment cert perquè $\varnothing \in L_i$ per a tota $i \in I$, ja que cadascun d'aquests és un λ-sistema i per tant satisfà $(\lambda 1)$.

(Λ2) $A \in \bigcap_{i\in I} L_i \implies \overline{A} \in \bigcap_{i\in I} L_i$: si A pertany a la intersecció de tots, en particular pertany a cadascun dels L_i, amb el que en virtut de $(\lambda 2)$ el seu complementari també hi pertany, $\overline{A} \in L_i$, per tota $i \in I$. Per tant, també tenim que $\overline{A} \in \bigcap_{i\in I} L_i$.

(Λ3) $\{A_j\}_{j\geq 1} \subseteq \bigcap_{i\in I} L_i$ tals que $A_j \cap A_k = \Delta_{j,k}$, aleshores $\bigsqcup_{j\geq 1} A_j \in \bigcap_{i\in I} L_i$: torna a ser semblant a les anteriors propietats. El fet que $\{A_j\}_{j\geq 1} \subseteq \bigcap_{i\in I} L_i$ disjunts implica que $\{A_j\}_{j\geq 1} \subseteq L_i$ per tota $i \in I$, amb el que en virtut de (λ3) de cada λ-sistema, la reunió numerable i disjunta dels A_j pertany a L_i per tota $i \in I$. Amb això podem concloure que aquesta unió numerable i disjunta pertany a la intersecció de tots els λ-sistemes.

En definitiva, hem demostrat que la intersecció arbitrària de λ-sistemes és també un λ-sistema.

Abans de passar a la demostració pròpiament del teorema $\pi - \lambda$ ens cal un pas més. Donada una família de conjunts P definits sobre X, definim $l(P)$ com la intersecció de tots els λ-sistemes que contenen P.
Ara anem al pas més complicat de tot plegat. Demostrarem el següent lema:
Lema. *Sigui P un π-sistema definit sobre X. Aleshores $l(P)$ és una σ-àlgebra.*
Per demostrar-lo, veurem els següents punts:

(d) Donat $A \in l(P)$, el conjunt $\{B \subset X : A \cap B \in l(P)\}$ és un λ-sistema.

Primer de tot, denotarem el conjunt de l'enunciat per L_A. L_A satisfà efectivament les propietats per ser un λ-sistema:

(λ1) $\varnothing \in L_A$: com que $A \cap \varnothing = \varnothing$ sempre, i sabem que com que $l(P)$ és un λ-sistema (ho hem vist a l'apartat anterior), $A \cap \varnothing = \varnothing \in l(P)$ i per tant $\varnothing \in L_A$.

(λ2) Si $E \in L_A$, aleshores $\overline{E} \in L_A$: voldríem veure que $\overline{E} \cap A \in l(P)$. Tenim que $l(P) \ni A = (E \cap A) \sqcup \left(\overline{E} \cap A\right)$, i que $l(P) \ni E \cap A \subseteq A$. Per l'apartat (a), podem restar el conjunt petit del gran i seguirem estant dins d'$l(P)$. Per tant,

$$l(P) \ni A \setminus (E \cap A) = A \cap \overline{(E \cap A)} = A \cap \left(\overline{E} \cup \overline{A}\right) = \left(A \cap \overline{E}\right) \cup \left(A \cap \overline{A}\right) = A \cap \overline{E},$$

el que implica que $\overline{E} \in L_A$.

(λ3) Siguin $\{E_i\}_{i\geq 1} \subseteq L_A$ tals que $E_i \cap E_j = \Delta_{i,j}$. Aleshores, vegem que $\bigsqcup_{i\geq 1} E_i \in L_A$. El fet que $E_i \in L_A$ implica que $E_i \cap A \in l(P)$, amb el qual la intersecció

$$\left(\bigsqcup_{i\geq 1} E_i\right) \cap A = \bigsqcup_{i\geq 1} (E_i \cap A) \in l(P),$$

per ser unió numerable i disjunta d'elements d'$l(P)$. Per tant, $\bigsqcup_{i\geq 1} E_i \in L_A$.

(e) Suposem que $A \in P$ i $B \in l(P)$. Demostreu que $A \cap B \in l(P)$.

L_A és un λ-sistema que conté a P, i per tant, ha de contenir a $l(P)$. Vegem que efectivament $P \subseteq L_A$: $\forall E \in P$ tenim que $A \cap E \in P \subseteq l(P)$ (per ser P un π-sistema), i per tant, $E \in L_A$. Per tant, tenim $P \subseteq l(P) \subseteq L_A$, ja que $l(P)$ és el λ-sistema més petit que conté a P. Ara, com que $B \in l(P) \subseteq L_A$, ha de ser $B \cap A \in l(P)$ per la definició de L_A.

(f) Si $A, B \in l(P)$, aleshores $A \cap B \in l(P)$. Conclogueu el lema.

El fet que $A, B \in l(P)$ implica que també estan dins de tots els λ-sistemes que contenen $l(P)$, per exemple L_A o L_B. Aleshores, és directe que $A \cap B \in l(P)$, per la definició d'$L_A := \{E \subseteq X : E \cap A \in l(P)\}$ i pel fet que $B \in l(P) \subseteq L_A$, o per la definició d'$L_B := \{E \subseteq X : E \cap B \in l(P)\}$ i el fet que $A \in l(P) \subseteq L_B$. Com a conclusió final, això que hem vist és equivalent a dir que $l(P)$ és, a part d'un λ-sistema, un π-sistema, i per tant una σ-àlgebra, per l'apartat (b).

Amb això ja tenim tots els ingredients, per tant:

(g) Demostreu el teorema $\pi - \lambda$ de Dynkin.

Primer de tot, notem que com que $P \subseteq L$ i L és un λ-sistema, el λ-sistema més petit que conté a P, $l(P)$, també cau dins d'L, formant la cadena d'inclusions $P \subseteq l(P) \subseteq L$. Així doncs, veurem que tenim la igualtat $\boxed{\sigma(P) = l(P)}$ i d'aquí, se'n derivarà directament que $\sigma(P) = l(P) \subseteq L$:

- $\boxed{\supseteq}$ Aquesta inclusió és molt clara. Es deriva del fet que una σ-àlgebra és trivialment un λ-sistema (les unions numerables en particular inclouen les unions numerables i disjuntes), i per tant, tenim sempre que $l(P) \subseteq \sigma(P)$, per ser $l(P)$ el λ-sistema més petit que conté a P.

- $\boxed{\subseteq}$ Aquesta inclusió s'ha de treballar una mica més, però no dóna gaire feina tampoc. Primer de tot, voldríem poder dir que
$$\text{“}\sigma(P) = \bigcap_{\Sigma\ \sigma\text{-àlgebra que conté } P} \Sigma\text{”},$$
però per a que passi això, primer hauríem de veure que la intersecció arbitrària de σ-àlgebres és també una σ-àlgebra. De fet, això és cert: la intersecció arbitrària de σ-àlgebres és molt semblant a la intersecció arbitrària de λ-sistemes, i de fet, la demostració és exactament equivalent a la que hem fet a l'apartat (b), on enlloc de fer servir la propietat (λ3) dels λ-sistemes, fem servir la propietat (σ3) de les σ-àlgebres, que és igual que (λ3) però treient-ne el requeriment de ser unió disjunta. Per tant, fem servir aquesta definició de dalt.
Llavors, com hem vist al lema anterior, $l(P)$ és una σ-àlgebra, de manera que està inclosa entre totes les que intersequem, i per tant, el resultat final d'aquesta intersecció gran contindrà alguns elements (potser no tots) d'$l(P)$. Per tant, tindrem que $\sigma(P) = \bigcap \Sigma \subseteq l(P)$, amb el que haurem acabat la prova.

Amb això tenim, per tant, que $l(P) = \sigma(P)$, i per tant, que $\sigma(P) = l(P) \subseteq L$, finalitzant la prova del teorema.

Vegem per acabar la següent aplicació, que és rellevant en el context de la mesura de Lebesgue:

(h) Considerem un espai mesurable $(X, \mathcal{A})$. Sigui P un π-sistema. Demostreu que si tenim dues mesures μ_1 i μ_2 que coincideixen en P i amb $\mu_1(X) = \mu_2(X) < +\infty$, aleshores també coincideixen en $\sigma(P)$.

Vegem que el conjunt
$$L = \{E \in \mathcal{A} : \mu_1(E) = \mu_2(E)\}$$
és un λ-sistema. Si veiem això, ja ho tindrem tot, pel següent motiu: $P \subseteq L$ ja que per hipòtesi, μ_1 i μ_2 coincideixen sobre P, i pel teorema $\pi - \lambda$ de Dynkin, $\sigma(P) \subseteq L$, és a dir, que μ_1 i μ_2 també coincidiran en $\sigma(P)$.
Vegem que L compleix les condicions d'un λ-sistema:

(λ1) $\varnothing \in L$: trivialment cert, ja que per ser μ_1 i μ_2 mesures, la mesura del buit ha de ser nul·la.

(λ2) $A \in L \implies \overline{A} \in L$: aquest és el pas més delicat de l'apartat: si $A \in L$, aleshores tenim el següent:
$$\mu_1(\overline{A}) = \mu_1(X - A) = \mu_1(X) - \mu_1(A),$$
i això ho podem dir perquè $A \subseteq X$ i per tant, $\mu_1(A) \leq \mu_1(X) < +\infty$ (això últim per hipòtesi). Ara, sabem que $X \in L$ per hipòtesi també, i com que $A \in L$, tenim que
$$\mu_1(\overline{A}) = \mu_1(X) - \mu_1(A) = \mu_2(X) - \mu_2(A) = \mu_2(X - A) = \mu_2(\overline{A}),$$
altre cop perquè les mesures respectives d'A i d'X són finites per hipòtesi.

($\lambda 3$) $\{A_i\}_{i\geq 1} \subseteq L : A_i \cap A_j = \Delta_{i,j} \implies \bigsqcup_{i\geq 1} A_i \in L$: això és bastant senzill, de fet. La mesura μ_1 de la unió disjunta és la suma (infinita) de mesures per μ_1, cadascuna d'aquestes és mesura d'un element d'L i per tant coincideix amb la mesura per μ_2, per tant la suma de mesures per μ_1 coincideix terme a terme amb la suma de mesures per μ_2, i per tant, els valors finals de les sumes són els mateixos (inclús si són no finits). Tot això és (per si no s'ha entès el text):

$$\mu_1\left(\bigsqcup_{i\geq 1} A_i\right) = \sum_{i\geq 1} \mu_1(A_i) = \sum_{i\geq 1} \mu_2(A_i) = \mu_2\left(\bigsqcup_{i\geq 1} A_i\right).$$

Per tant, la unió disjunta dels A_i compleix la condició de pertinença a L.

Amb això, doncs, hem vist que L és un λ-sistema, i per tant, que $\mu_1|_{\sigma(P)} = \mu_2|_{\sigma(P)}$ per la deducció que hem fet amb anterioritat.

(i) Què ens diu l'anterior en el cas de la mesura de Lebesgue?

L'apartat anterior ens diu que si tenim un cert espai mesurable $(X, \mathcal{A})$, tal que el π-sistema P format per qualsevol sistema de generadors de la σ-àlgebra de Borel (incloent-hi el buit) està contingut en $\mathcal{A}$, i tenim una mesura μ sobre aquest espai tal que $\mu(E) = \lambda(E)$ per tot element $E \in P$, aleshores $\mu_{|\mathcal{B}} = \lambda_{|\mathcal{B}}$, on λ és la mesura de Lebesgue, sempre que $\lambda(X) = \mu(X) < +\infty$.
Nosaltres ara ho provarem també quan $(X, \mathcal{A}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B})$, els reals amb la σ-àlgebra de Borel. En aquest cas, la mesura de $X = \mathbb{R}$ no és finita, però tot i això la proposició segueix sent certa. Vegem-ho:

- Primer de tot, aquí hem afirmat que qualsevol sistema de generadors de $\mathcal{B}$, la σ-àlgebra de Borel, és un π-sistema. Vegem-ho: sabem pel problema 2 del tema de Teoria de la Mesura que els oberts (a, b), els tancats $[a, b]$, els semioberts $[a, b)$ i les semirrectes $(a, +\infty)$ generen tots la mateixa σ-àlgebra $\mathcal{B}$ (la de Borel). De fet, també la generen els respectius complementaris, però no hi entrem. Cadascuna d'aquestes famílies de conjunts és efectivament un π-sistema, incloent-hi el buit si és necessari:

  i) $[a, b] \cap [c, d] = [\max(a, c), \min(b, d)]$, en cas que $c \leq b$ i $d \geq a$, i en cas contrari, és una intersecció buida.
  ii) $(a, b) \cap (c, d) = (\max(a, c), \min(b, d))$, en cas que $c < b$ i $d > a$, i en cas contrari, és una intersecció buida.
  iii) $[a, b) \cap [c, d) = [\max(a, c), \min(b, d))$, en cas que $c < b$ i $d > a$, i en cas contrari, és una intersecció buida.
  iv) $(a, +\infty) \cap (b, +\infty) = (\max(a, b), +\infty)$ sempre, i no cal incloure el buit.

- Per conjunts Borelians de mesura finita, el que hem afirmat és bastant evident, ja que podem restringir els espais ambient X a un interval centrat en 0 prou gran però tantmateix de mesura finita (pensem per exemple en una fita qualsevol $0 \leq M < +\infty$ del valor absolut dels elements de $\mathcal{B}$, i fem la bola centrada a l'origen de radi M, de mesura $2M$), on per tant aplica l'apartat anterior perfectament. Ara, si $B \in \mathcal{B}$ és un Borelià de mesura no finita, podem escriure

$$B = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} (B \cap (n, n+1]),$$

  on hem agafat els intervals **semioberts** perquè si només agaféssim els oberts, ens podríem deixar punts de B fora de la unió. En qualsevol cas això no seria un problema gaire greu, atès que els punts són Borelians de mesura finita i per tant en ells coincideix $\mu(\{a\}) = \lambda(\{a\}) = 0$ per tota $a \in \mathbb{R}$. Tornant a la unió, ens fixem en que és disjunta: cada trosset de mesura finita de B

interseca només amb un interval de la forma $(n, n+1]$, amb el qual cadascun dels elements de la unió és disjunt amb la resta. Per tant, si fem servir la σ-additivitat de les mesures,

$$\mu(B) = \mu\left(\bigsqcup_{n\in\mathbb{Z}} (B \cap (n, n+1])\right) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mu\,(B \cap (n, n+1]) =$$

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \lambda\,(B \cap (n, n+1]) = \lambda\left(\bigsqcup_{n\in\mathbb{Z}} (B \cap (n, n+1])\right) = \lambda(B),$$

és a dir, que λ i μ també coincideixen sobre els Borelians de mesura infinita, i per tant, coincideixen sobre la σ-àlgebra generada per qualsevol dels π-sistemes que hem enumerat abans, que no és una altra que $\mathcal{B}$, la σ-àlgebra de Borel.