EXAMEN 1

# SOLUCIONES

# 25 de octubre de 2018

**Càlcul Integral, Curs 2017-18, FME**

---

**Problema 1.** [3.75 punts]
(a) Para cada $a \geq 0$, estudieu la convèrgencia de la sèrie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{(n+1)!} \prod_{k=0}^{n} (3k+1).$$

(b)

(i) Sigui $c > 0$. Proveu que la integral impròpia $\int_1^{+\infty} t^c \cos(t) dt$ no és convergent. (Compareu els valors de la integral en els intervals $[d_k, d_{k+1}]$ amb $d_k = \frac{\pi}{2} + k\pi$.)

(ii) Discutiu, segons els valors del paràmetres reals $a > 0$, $b > 0$, la convèrgencia de la integral impròpia

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(x^a)}{x^b}\, dx$$

---

Solución: (a) Si para cada $n \in \mathbb{N}^*$ definimos $a_n = \dfrac{a^n}{(n+1)!} \prod_{k=0}^{n} (3k+1)$, entonces $a_n \geq 0$ y además,

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a^{n+1}(n+1)!}{a^n(n+2)!} \frac{\prod_{k=0}^{n+1}(3k+1)}{\prod_{k=0}^{n}(3k+1)} = a \lim_{n\to\infty} \frac{3n+4}{(n+2)} = 3a}$$

y por tanto, aplicando el Criterio del cociente, la serie converge si $0 \leq a < \dfrac{1}{3}$ y diverge si $a > \dfrac{1}{3}$.
Cuando $a = \dfrac{1}{3}$, entonces

$$\boxed{a_n = \frac{\prod_{k=0}^{n}(3k+1)}{3^n(n+1)!} = \frac{\prod_{k=1}^{n}(3k+1)}{3^n(n+1)!} \geq \frac{\prod_{k=1}^{n}(3k)}{3^n(n+1)!} = \frac{3^n n!}{3^n(n+1)!} = \frac{1}{n+1}}$$

de manera que la serie está minorada por la armónica y es por tanto divergente. En resumen,

$$\boxed{\text{la serie } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{(n+1)!}\prod_{k=0}^{n}(3k+1) \text{ converge sii } 0 \leq a < \frac{1}{3}}$$

Nota: Para dilucidar el caso $a = \dfrac{1}{3}$, también podemos utilizar el Criterio de Raabe:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} n\left[1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right] = \lim_{n\to\infty} n\left[1 - \frac{3n+4}{3(n+2)}\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{3(n+2)} = \frac{2}{3} < 1}$$

de manera que si $a = \dfrac{1}{3}$ la serie es divergente.

(b) (i) Si $d_k = \dfrac{\pi}{2}(2k+1),\ k \in \mathbb{N}$, entonces sabemos que si $x \geq 1,\ \cos(x) = 0$ si y sólo si $x = d_k$, lo que en particular implica que $\cos(x)$ tiene signo constante en $(d_k, d_{k+1})$. Más concretamente, $\cos(x) < 0$ si $x \in (d_k, d_{k+1})$ cuando $k$ es par, mientras que $\cos(x) > 0$ si $x \in (d_k, d_{k+1})$ cuando $k$ es impar: Como

$$\boxed{d_k = \frac{\pi}{2} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi = d_{k+1} \Longleftrightarrow \frac{\pi}{2} < x - k\pi < \frac{3\pi}{2}}$$

de manera que $0 > \cos(x - k\pi) = \cos(x)\cos(k\pi) = (-1)^k\cos(x)$. Por tanto,

$$\boxed{\text{si } k \text{ es impar, entonces } d_k^c\cos(x) \leq t^c\cos(x) \leq d_{k+1}^c\cos(x), \text{ para cada } x \in (d_k, d_{k+1})}$$

lo que en particular implica que

$$\begin{aligned}\left|\int_{d_k}^{d_{k+1}} t^c\cos(t)dt\right| &= \int_{d_k}^{d_{k+1}} t^c\cos(t)dt \geq d_k^c \int_{d_k}^{d_{k+1}} \cos(t)dt = d_k^c\Big[\operatorname{sen}(x)\Big]_{d_k}^{d_{k+1}} \\ &= d_k^c\Big[\operatorname{sen}(d_{k+1}) - \operatorname{sen}(d_k)\Big] = d_k^c\Big[(-1)^{k+1} - (-1)^k\Big] = 2d_k^c \geq 2\end{aligned}$$

Por tanto, no se satisface la Condición de Cauchy, de manera que

$$\boxed{\text{la integral impropia } \int_1^{+\infty} t^c\cos(t)dt \text{ no converge}}$$

Nota: Recordar que la Condición de Cauchy establece que *si $f\colon [a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ es localmente integrable en $[a,b)$, la integral impropia $\int_a^b f(t)dt$ es convergente si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$ existe $c \in (a,b)$ tal que si $c_1, c_2 \in (c,b)$, entonces $\left|\int_{c_1}^{c_2} f(t)dt\right| \le \varepsilon$*

(ii) La integral es de segunda especie en $(0,1)$ y de primera especie en $(1,+\infty)$. Analizaremos la convergencia de la integral $\int_0^1 \frac{\cos(x^a)}{x^b}dx$ y la de la integral $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(x^a)}{x^b}dx$. La integral $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(x^a)}{x^b}dx$ es convergente cuando ambas integrales sean convergentes y no convergente en otro caso.

(a) Para analizar la convergencia de $\int_0^1 \frac{\cos(x^a)}{x^b}dx$, si definimos $f,g\colon (0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ como $f(x) = \frac{\cos(x^a)}{x^b}$ y $g(x) = \frac{1}{x^b}$, resulta que

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0^+} \cos(x^a) = \cos(0) = 1,}$$

lo que significa que $\int_0^1 f(x)dx$ e $\int_0^1 g(x)dx$ tienen el mismo carácter. Como $\int_0^1 \frac{1}{x^b}dx$ es convergente si y sólo si $0 < b < 1$, resulta que

$$\boxed{\begin{array}{l}\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos(x^a)}{x^b}dx \text{ es convergente si y sólo si } 0 < b < 1. \text{ Además, como } 0 < \cos(x^a) \le 1 \\ \displaystyle\text{cuando } 0 < x < 1, \text{ resulta que } \frac{\cos(x^a)}{x^b} \le \frac{1}{x^b} \text{ y por tanto, } \int_0^1 \frac{\cos(x^a)}{x^b}dx \le \frac{1}{1-b}\end{array}}$$

(b) Para analizar la convergencia de $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(x^a)}{x^b}dx$, si $\ell > 1$, entonces haciendo el cambio de variable $t = x^a$ en el intervalo $[0,\ell]$ e integrando por partes obtenemos que

$$\int_1^\ell \frac{\cos(x^a)}{x^b}dx = \left[\begin{array}{c} t = x^a \Rightarrow x = t^{\frac{1}{a}} \\ dt = ax^{a-1}dx \Rightarrow dx = \dfrac{dt}{at^{\frac{a-1}{a}}} \end{array}\right] = \frac{1}{a}\int_1^{\ell^a} \frac{\cos(t)}{t^{\frac{a+b-1}{a}}}dt$$

de manera que existe $\displaystyle\lim_{\ell\to+\infty}\int_1^{\ell}\frac{\cos(x^a)}{x^b}\,dx$ si y sólo si existe $\displaystyle\lim_{\ell\to+\infty}\int_1^{\ell^a}\frac{\cos(t)}{t^{\frac{a+b-1}{a}}}\,dt$; es decir, definiendo $\alpha=\dfrac{a+b-1}{a}$

$$\boxed{\int_1^{+\infty}\frac{\cos(x^a)}{x^b}\,dx \text{ converge si y sólo } \int_1^{+\infty}\frac{\cos(t)}{t^\alpha}\,dt \text{ converge}}$$

Analizaremos la convergencia de $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\cos(t)}{t^\alpha}\,dt$ en función del valor de $\alpha$.

Si $\alpha<0$, definiendo $c=-\alpha$, resulta que $c>0$ y $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\cos(t)}{t^\alpha}\,dt=\int_1^{+\infty}t^c\cos(t)\,dt$, que por el apartado (i) sabemos que no es convergente.

Si $\alpha=0$, entonces $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\cos(t)}{t^\alpha}\,dt=\int_1^{+\infty}\cos(t)\,dt$. Como, para cada $r>1$ tenemos que $\displaystyle\int_1^{r}\cos(t)\,dt=\big[\operatorname{sen}(t)\big]_1^r=\operatorname{sen}(r)-\operatorname{sen}(1)$ y no exite el $\displaystyle\lim_{r\to+\infty}\operatorname{sen}(r)$, resulta que la integral no converge.

Si $\alpha>0$, y definimos $f,g\colon[1,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ como $f(t)=\cos(t)$ y $g(t)=\dfrac{1}{t^\alpha}$, resulta que $g\in\mathcal{C}^1\big([1,+\infty)\big)$, es decreciente, $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}g(t)=0$ y además, para cada $r>1$ se tiene que

$$\int_1^r f(t)dt=\big[\operatorname{sen}(t)\big]_1^r=\operatorname{sen}(r)-\operatorname{sen}(1)\Longrightarrow\left|\int_1^r f(t)dt\right|\le 2$$

Aplicando el Criterio de Dirichlet, obtenemos finalmente que la integral es convergente. En definitiva,

$$\boxed{\int_0^{+\infty}\frac{\cos(x^a)}{x^b}\,dx \text{ converge si y sólo } 0<b<1 \text{ y } a>1-b}$$

Nota 1: Que la integral impropia $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\cos(t)}{t^\alpha}\,dt$ es convergente cuando $\alpha>0$ había sido resuelto en las clases de problemas.

Nota 2: La convergencia de la integral $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\cos(x^a)}{x^b}\,dx$ cuando $a+b-1>0$, también puede obtenerse directamente aplicando el Criterio de Dirichlet a las funciones $f,g\colon[1,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$

definidas como $f(x) = ax^{a-1}\cos(x^a)$ y $g(x) = \dfrac{a}{x^{\frac{a+b-1}{a}}}$: Resulta que $g \in \mathcal{C}^1\big([1,+\infty)\big)$, es decreciente, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$ y además, para cada $r > 1$ se tiene que

$$\int_1^r f(x)dx = \int_1^r ax^{a-1}\cos(x^a)dx = \Big[\operatorname{sen}(x^a)\Big]_1^r = \operatorname{sen}(r^a) - \operatorname{sen}(1) \Longrightarrow \left|\int_1^b f(x)dx\right| \le 2$$

Nota 3: Como $\left|\dfrac{\cos(t)}{t^{\frac{a+b-1}{a}}}\right| \le \dfrac{1}{t^{\frac{a+b-1}{a}}}$, resulta que si $\dfrac{a+b-1}{a} > 1$: es decir si $b > 1$, la integral $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^{\frac{a+b-1}{a}}}\,dt$ converge absolutamente y además, $\displaystyle\left|\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^{\frac{a+b-1}{a}}}\,dt\right| \le \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{\frac{a+b-1}{a}}}\,dt \le \frac{a}{b-1}$

Sin embargo, la convergencia absoluta en $[1,+\infty)$ es incompatible con la convergencia en $[0,1]$, pues en el primer caso se requiere que $b > 1$, mientras que en el segundo que $b < 1$.

**Problema 2.** [3.75 punts]
(a) Donat $a > 1$, considereu la regió plana

$$E = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x \le a,\ \sqrt[5]{x} \le y \le \sqrt{x}\Big\} \\ \cup \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le a^{\frac{5}{2}},\ \sqrt[5]{x} \le y \le \sqrt{a}\Big\}$$

Calculeu la integral $\displaystyle\int_E e^{xy^{-2}}dxdy$.

(b) Siguin $0 < a < b$, i considereu la regió

$$R = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \ge 0,\ x^2 + y^2 \le z^2,\ a^2 \le x^2 + y^2 + z^2 \le b^2\Big\}.$$

Calculeu $\displaystyle\int_R z\log\big(x^2+y^2+z^2\big)dxdydz$.

Solución: (a) Como la función $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(x,y) = e^{\frac{x}{y^2}}$ es continua, resulta que

$$\int_E e^{xy^{-2}}dxdy = \int_1^a dx \int_{\sqrt[5]{x}}^{\sqrt{x}} e^{\frac{x}{y^2}}dy + \int_a^{a^{\frac{5}{2}}} \int_{\sqrt[5]{x}}^{\sqrt{a}} e^{\frac{x}{y^2}}dy.$$

Como una primitiva de $e^{xy^{-2}}$ respecto de $y$, no es expresable en términos de funciones elementales, no podemos hacer el cálculo tal y como está propuesto. Sin embargo, el conjunto elemental $E$ también puede expresarse como

$$E = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le y \le \sqrt{a},\ y^2 \le x \le y^5\Big\}$$

ver la Figura 1,

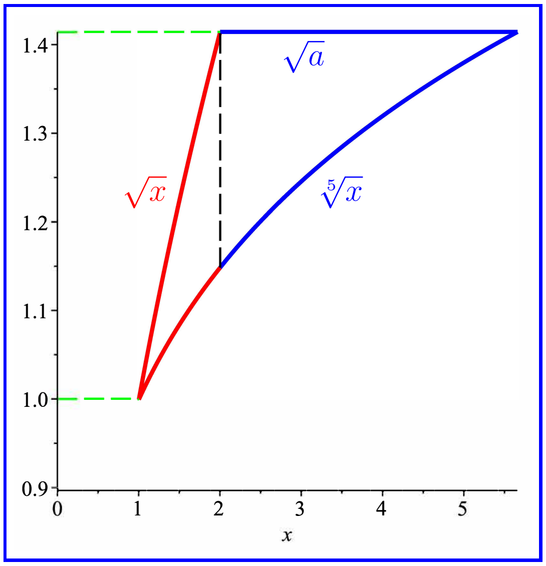


Figura 1: Región de integración $E$ (aquí $a = 2$)

de manera que

$$\begin{aligned}\int_E e^{xy^{-2}} dx dy &= \int_1^{\sqrt{a}} dy \int_{y^2}^{y^5} e^{\frac{x}{y^2}} dx = \int_1^{\sqrt{a}} \Big[y^2 e^{\frac{x}{y^2}}\Big]_{y^2}^{y^5} dy \\ &= \int_1^{\sqrt{a}} \Big[y^2 e^{y^3} - y^2 e\Big] dy = \frac{1}{3}\Big[e^{y^3} - e y^3\Big]_1^{\sqrt{a}} = \frac{1}{3}\Big[e^{a\sqrt{a}} - e a\sqrt{a}\Big]\end{aligned}$$

(b) Si consideramos $T\colon (0,+\infty)\times(0,\pi)\times(0,2\pi) \longrightarrow \mathbb{R}$ el cambio a coordenadas esféricas dado por $T(r,\varphi,\theta) = \big(r\cos(\theta)\operatorname{sen}(\varphi), r\operatorname{sen}(\theta)\operatorname{sen}(\varphi), r\cos(\varphi)\big)$, entonces, el jacobiano es $\det \mathsf{J}_T = r^2 \operatorname{sen}(\varphi) > 0$. Por otra parte,

$$T^{-1}(R) = \Big\{(r,\varphi,\theta) : \cos(\varphi) \ge 0,\ 0 \le \theta \le 2\pi,\ \operatorname{sen}^2(\varphi) \le \cos^2(\varphi),\ a \le r \le b\Big\}.$$

Como $\operatorname{sen}(\varphi) \ge 0$, ya que $0 < \varphi < \pi$, cuando $\cos(\varphi) \ge 0$, la desigualdad $\operatorname{sen}^2(\varphi) \le \cos^2(\varphi)$ es equivalente a que $\operatorname{sen}(\varphi) \le \cos(\varphi)$.

Además, $\cos(\varphi) \ge 0$ si y sólo si $\varphi \in \big(0, \frac{\pi}{2}\big]$ y en este intervalo, $\operatorname{sen}(\varphi) \le \cos(\varphi)$ si y sólo si $0 < \varphi < \frac{\pi}{4}$. En definitiva,

$$\boxed{T^{-1}(R) = \Big\{(r,\varphi,\theta) : a \le r \le b,\ 0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le \varphi \le \tfrac{\pi}{4}\Big\} = [a,b] \times \big[0,\tfrac{\pi}{4}\big] \times [0,2\pi],}$$

de manera que aplicando el teorema de cambio de variables,

$$\begin{aligned}
\int_R z\log\big(x^2+y^2+z^2\big)dxdydz &= \int_{T^{-1}(R)} r^3\,\mathrm{sen}(\varphi)\cos(\varphi)\log(r^2)\,drd\varphi d\theta \\
&= \left(\int_a^b r^3\log(r)\,dr\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\,\mathrm{sen}(\varphi)\cos(\varphi)d\varphi\right)\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right) \\
&= 2\pi\Big[\mathrm{sen}^2(\varphi)\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} \int_a^b r^3\log(r)\,dr = \pi\int_a^b r^3\log(r)\,dr
\end{aligned}$$

Finalmente, como para cada $c>0$, $\dfrac{x^{c+1}}{(c+1)^2}\Big[(c+1)\log(x)-1\Big]$ es una primitiva de $x^c\log(x)$, obtenemos que

$$\boxed{\int_R z\log\big(1+\sqrt{x^2+y^2+z^2}\big)dxdydz = \frac{\pi}{16}\Big[4b^4\log(b) - 4a^4\log(a) + a^4 - b^4\Big]}$$

**Problema 3.** [2.5 punts]

(i) Sigui $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció, $\Gamma = \big\{\big(x,f(x)\big) : x \in [a,b]\big\} \subset \mathbb{R}^2$ el seu graf. Proveu que si $f$ ès integrable Riemann aleshores $\Gamma$ té mesura nul·la. (Utilitzeu una partició de $[a,b]$ apropiada.)

(ii) Proveu que el recíproc és fals.

(iii) Sigui $h\colon [a,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció localment integrable Riemann. Proveu que el seu graf també té mesura nul·la.

Solución: (i) La condición de integrabilidad de Riemann establece que *$f$ es integrable Riemann si y sólo si para cada $\varepsilon>0$ existe una partición del intervalo $[a,b]$,*

$$\mathcal{P}_\varepsilon = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\}$$

*tal que* $U(\mathcal{P},f)-L(\mathcal{P},f)\le\varepsilon$, *donde*

$$U(\mathcal{P}_\varepsilon,f)=\sum_{j=1}^{n}M_j(x_j-x_{j-1}),\quad M_j=\sup_{x\in[x_{j-1},x_j]}\{f(x)\},$$
$$L(\mathcal{P}_\varepsilon,f)=\sum_{j=1}^{n}m_j(x_j-x_{j-1}),\quad m_j=\inf_{x\in[x_{j-1},x_j]}\{f(x)\},$$

$\boxed{\text{Dado } \varepsilon>0}$ y fijada una partición $P_\varepsilon$ satisfaciendo $U(\mathcal{P}_\varepsilon,f)-L(\mathcal{P}_\varepsilon,f)\le\varepsilon$, consideremos $R_1,\dots,R_n\subset\mathbb{R}^2$ los rectángulos definidos como

$$\boxed{R_j=[x_j,x_{j-1}]\times[m_j,M_j],\quad j=1,\dots,n}$$

Claramente, $\mathrm{vol}(R_j)=(M_j-m_j)(x_j-x_{j-1})$ y $m_j\le f(x)\le M_j$ para cada $x\in[x_j,x_{j-1}]$, $j=1,\dots,n$, lo que implica que

$$\boxed{\Gamma\subset\bigcup_{j=1}^{n}R_j \text{ y además } \sum_{j=1}^{n}\mathrm{vol}(R_j)=U(\mathcal{P}_\varepsilon,f)-L(\mathcal{P}_\varepsilon,f)\le\varepsilon}$$

de manera que $\Gamma$ tiene **contenido** nulo y por tanto medida nula.

(ii) Consideremos $f=\chi_{\mathbb{Q}\cap[a,b]}$ la función de Dirichlet; es decir, la definida como $f(x)=1$ si $x\in\mathbb{Q}\cap[a,b]$ y $f(x)=0$ si $x\in\mathbb{I}\cap[a,b]$. Como $f$ es discontinua en cada punto de $[a,b]$, $f$ no es integrable Riemann en $[a,b]$. Sin embargo, la gráfica de $f$, $\Gamma$ satisface que

$$\Gamma\subset\big([a,b]\times\{0\}\big)\cup\big([a,b]\times\{1\}\big)$$

y como tanto $[a,b]\times\{0\}$ como $[a,b]\times\{1\}$ tienen contenido nulo, resulta que $\Gamma$ tiene contenido nulo y por tanto medida nula.

(iii) Sabemos que $h\colon[a,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ *es* localmente integrable *si y sólo si es integrable Riemann en cada subintervalo cerrado* $[a,b]$, *donde* $b\in\mathbb{R}$ *y* $a<b$. Si $n\in\mathbb{N}$ es tal que $a<n$ y consideramos el intervalo $[a,n]$ y $\Gamma_n=\big\{\big(x,h(x)\big):x\in[a,n]\big\}\subset\mathbb{R}^2$, entonces

$$\boxed{\Gamma=\Big\{\big(x,h(x)\big):x\in[a,+\infty)\Big\}=\bigcup_{n>a}^{\infty}\Gamma_n}$$

Por el apartado (i) $\Gamma_n$ tiene medida nula y *la unión numerable de conjuntos de medida nula, también es de medida nula*, resulta finalmente que

$$\boxed{\Gamma\text{, la gráfica de } h\text{, tiene medida nula}}$$