Prof. Asunción Moreno

Realice cada ejercicio en una hoja distinta. No se permiten apuntes, libros, calculadoras, etc.

Ejercicio 1

Se desea transmitir dos señales, x(t) e y(t) de ancho de banda B=5 kHz (X(f)=0, |f|>B, Y(f)=0, |f|>B). Para ello se *multiplexan* a las frecuencias portadoras f_1 y f_2 respectivamente ($f_2 > f_1$), según el esquema de la siguiente figura:

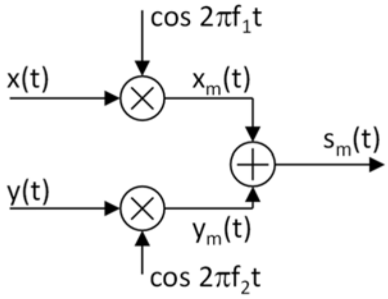

Figura 1)

a) Halle Sm(f) y dibuje |Sm(f)| con las siguientes restricciones:

i. $X_m(f)$ e $Y_m(f)$ no pueden solaparse. Esto es: $f_2 > f_1 + 2B$.

ii. x(t) e y(t) podrán recuperarse a partir de $x_m(t)$ e $y_m(t)$ respectivamente. Esto es : $f_1 > B$ y $f_2 > B$

Por comodidad suponga para hacer el dibujo que $X(f) = \Delta\left(\frac{f}{B}\right)$ y que $Y(f) = \Pi\left(\frac{f}{2B}\right)$

b) proponga unos valores para f_1 y f_2 si adicionalmente debe cumplirse la siguiente restricción:

iii. $S_m(f)=0$ |f|>22050 Hz.

Para recuperar x(t) a partir de $s_m(t)$ se utiliza el esquema receptor de la siguiente figura.

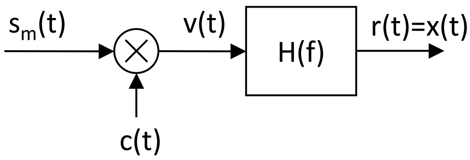

Figura 2)

c) Sabiendo que H(f) es un filtro paso bajo ideal y que el objetivo de la señal c(t) es volver a tener en el origen la componente frecuencial X(f), determine cómo tiene que ser la señal c(t) y cuál debe ser el ancho de banda del filtro H(f) para tener a la salida la señal r(t)=x(t).

d) Calcule y dibuje la Transformada de Fourier de v(t) y confirme que la respuesta del apartado anterior es correcta.

e) ¿Qué cambios deberían realizarse para recuperar r(t)=y(t) en lugar de x(t)?

Nota: cos a cos b= (1/2) (cos(a+b) + cos (a-b)); sen a cos b= (1/2) (sen(a+b) + sen (a-b))

Cuestiones generales

a) Determine si cada uno de los siguientes enunciados relacionados con los sistemas Lineales e invariantes (LI) es verdadero o falso. Justifique la respuesta.

a.1) Si h(t) es la respuesta impulsional de un sistema LI, y h(t) es periódica y diferente de cero, el sistema es inestable.

a.2) Si |h[n]|≤K para todo n, donde K es un número dado, entonces el sistema LI con respuesta impulsional h[n] es estable.

a.3) Si un sistema LI es causal, es estable.

a.4) Un sistema LI es estable si y sólo si la respuesta al escalón s(t)=u(t)*h(t) es absolutamente integrable, esto es, $\int_{-\infty}^{\infty}|s(t)|dt < \infty$

b) Considere un sistema LI con entrada x(t) y salida y(t). Demuestre que si x(t) es periódica también lo es y(t).

c) Realice la convolución y[n]=x[n]*h[n] con x[n]= n p_4[n], h[n] = cos(πn) p_4[n].

d) La figura 3 muestra la respuesta frecuencial H(F) de diversos filtros discretos. Seleccione el/los filtros que corresponden a un filtro paso alto real (h[n] real).

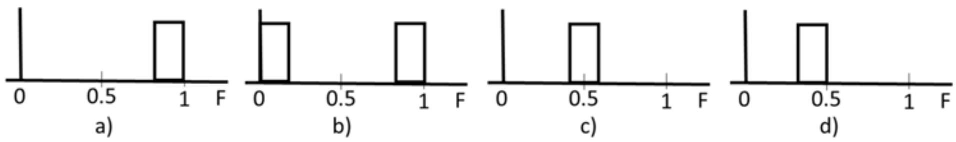

Figura 3

e) Sea una secuencia x[n] de L=8 muestras x[n] = [1, -1, 2, -2, 3, -3, 2, -2] con transformada de Fourier X(F).

e.1) Sea $y[n] = DFT_N^{-1}\{DFT_N\{x[n]\}$ Halle y[n] con N=5

e.2) Sea $X_N[k] = X(F)|_{F=k/N}$ $0 \leq k \leq N-1$ y $y[n] = DFT_N^{-1}\{X_N[k]\}$ Halle y[n] con N=5

f) La figura 4) muestra 6 diagramas de ceros y polos y sus 6 respuestas frecuenciales en distinto orden. Relacione razonadamente cada diagrama de ceros y polos con su respuesta frecuencial.

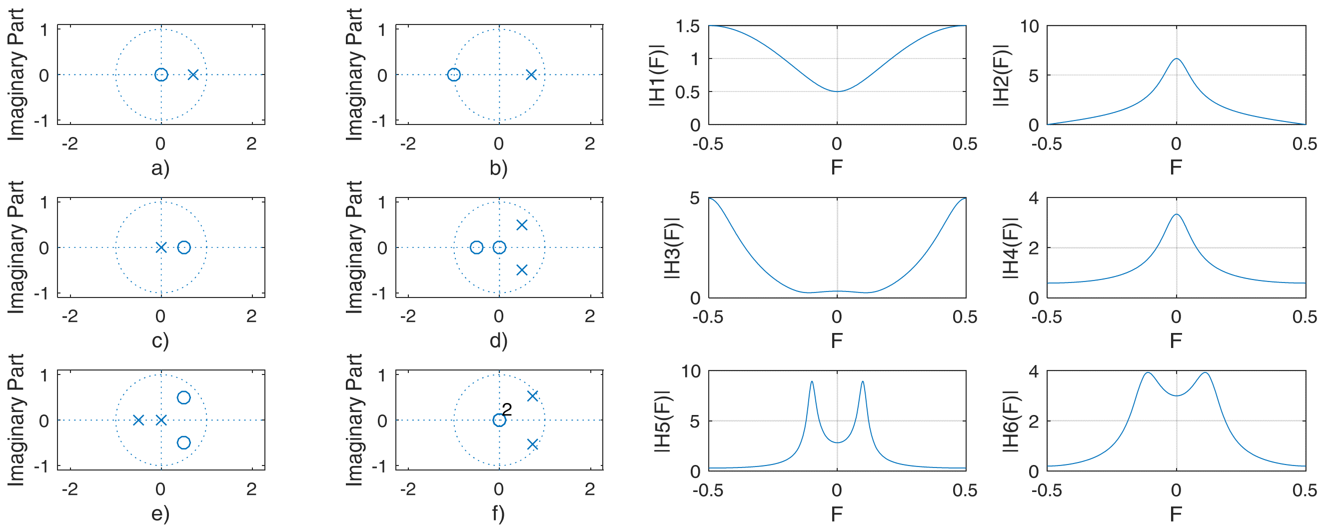

Figura 4)

Ejercicio 2

Sea la señal x(t)=A cos(2 π f_0 t) que se aplica a un conversor A/D sin filtro antialiasing que trabaja con una frecuencia de muestreo fm.

a) Si fm=f_0/2 ¿habrá aliasing? ¿Y si fm=3f_0?

b) Expresión de la secuencia x[n] a la salida del conversor A/D para las dos fm mencionadas en el apartado anterior.

Suponga A=2, f0=40Hz, fm= 100Hz

c) Halle la transformada de Fourier de x[n].

d) Halle y dibuje el módulo de X_N[k]=DFT$_N$ {x[n]} 0<=k<=N-1 con N= 1000 puntos. Indique los valores y posiciones en los que se encuentran los máximos absolutos.

Suponga que tiene una señal temporal x(t) de duración T=1s que contiene sinusoides, pero no sabe cuántas, ni sus amplitudes ni sus frecuencias. Su labor consiste en encontrarlas. Para ello muestrea la señal con distintas frecuencias de muestreo fm1=10Hz, fm2=50Hz, fm3=100Hz, fm4=200Hz, calcula las DFTs de N=1000 puntos y dibuja su módulo. El resultado se muestra en la figura. Al pie de cada gráfica se indica con qué frecuencia de muestreo se ha obtenido.

e) ¿Por qué son tan diferentes las gráficas si se han obtenido a partir de la misma señal temporal x(t)?

Determine justificadamente:

f) El número de sinusoides que hay en x(t).

g) Frecuencias de dichas sinusoides.

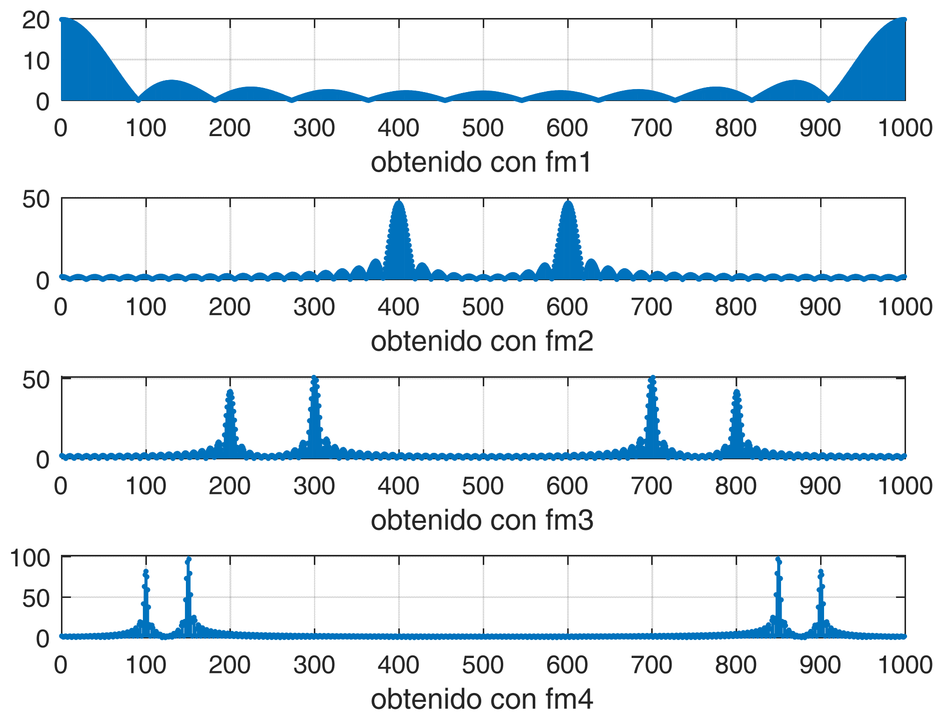

Figura 5

Solución

Ejercicio 1

a) $S_m(f) = \frac{1}{2}X(f - f_1) + \frac{1}{2}X(f + f_1) + \frac{1}{2}Y(f - f_1) + \frac{1}{2}Y(f + f_1)$

b) $5000 < f_1 < 7050\ y\ f_1 + 10000 < f_2 < 17050$

c) c(t)=cos ($2\pi f_1$t) ; Bh=B

d) $V(f) = \frac{1}{2}X(f) + \frac{1}{4}X(f - 2f_1) + \frac{1}{4}X(f + 2f_1) + \frac{1}{4}Y(f - (f_1 + f_2)) + \frac{1}{4}Y\left(f + (f_1 + f_2)\right) + \frac{1}{4}Y(f - (f_1 - f_2)) + \frac{1}{4}Y\left(f + (f_1 - f_2)\right)$

e) c(t)= (cos $2\pi f_2$ t)

Cuestiones generales

a.1 Verdadero, porque $\int_{-\infty}^{\infty}|h(t)| = \infty$ ya que la señal no se atenúa con el tiempo

a.2 Falso. Ej con h[n]=u[n] se tiene $\sum_{-\infty}^{\infty}|h[n]| = \sum_{0}^{\infty} 1 = \infty$

a.3 Falso. h[n]=u[n] es un sistema causal pero no es estable

a.4 Falso, h(t)=δ(t) es estable pero s(t)=u(t)*δ(t)=u(t) no es absolutamente integrable.

b) Una señal periódica siempre admite una representación como: $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t - nT) = f(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$

Llamando g(t)=h(t)*f(t) se tiene: $y(t) = x(t) * h(t) = h(t) * f(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(t - nT)$

Que es la expresión de una señal periódica

c) y[n]={$\underline{0}$, 1, 1, 2 ,-2, 1, -3} (el resto de valores cero)

d) El c) ya que el d) no se corresponde con un filtro real y los otros dos son paso bajo

e.1) y[n]={1, -1, 2, -2, 3}

e.2) y[n]={-2, 1, 0, -2, 3}

f) Los diagramas a) y b) tienen un polo en el eje real (z=a), por tanto sus respuestas frecuenciales tendrán un pico en F=0. Entre H2(F) y H4(F) vemos que el diagrama b) tiene un cero en z=-1 que se corresponde con F=0.5, por tanto:

El **diagrama b)** se corresponde con **H2(F)** y el **diagrama a)** se corresponde con **H4(F)**

Los diagramas d) y f) tienen dos polos cerca del círculo unidad. Los polos más próximos al círculo unidad darán valores de H(F) más altos que los que están más alejados, por tanto:

El **diagrama d)** se corresponde con con **H6(F)** y el **diagrama f)** se corresponde con **H5(F)**

El **diagrama e)** tiene dos ceros próximos al círculo unidad con fase ϕ= 2πF0 que se corresponderán en dos mínimos a las frecuencias +F0 y –F0, es decir el diagrama **H3(F)**

El **diagrama c)** tiene un cero en el eje real (z=a) por tanto su respuesta frecuencial tendrá un mínimo en F=0 y se corresponde con **H1(F)**

Ejercicio 2

a) Para que no haya aliasing fm ≥ $2f_0$ por tanto con fm=f0/2 habrá aliasing y con fm=3f0 no habrá aliasing

b) Con fm=f0/2 x[n]=A. Con fm=3f0 x[n] = A cos (2π n/3)

c) $X(F) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta(F - 0.4 - r) + \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta(F + 0.4 - r)$

d) $X_N[k] = \left(\frac{sen(\pi(F-0.4)N)}{sen(\pi(F-0.4))} e^{-j\pi(N-1)(F-0.4)} + \frac{sen(\pi(F+0.4)N)}{sen(\pi(F+0.4))} e^{-j\pi(N-1)(F+0.4)}\right)\Big|_{\mathrm{F=k/N}}$

$$= \frac{sen(\pi(k-0.4\,10^3))}{sen(\pi(k10^{-3}-0.4))} e^{-j\pi(10^3-1)(k10^{-3}-0.4)} + \frac{sen(\pi(k+0.4\,10^3))}{sen(\pi(k10^{-3}+0.4))} e^{-j\pi(10^3-1)(k10^3+0.4)}$$

Los máximos se encuentran en k=0.4N=400 y en k=0.6N=600 con valor máximo N=1000.

e) las tres primeras gráficas son muy diferentes indicando que seguro que hay aliasing porque aparecen efectos muy distintos. En la primera el aliasing hace que las posibles sinusoides aparezcan de frecuencia 0 (un simple pulso rectangular), la segunda gráfica indicaría que hay una sinusoide y la tercera que hay dos, lo queconfirma que la segunda gráfica también muestra aliasing.

Para ver si la tercera gráfica muestra aliasing, la comparamos con la de fm4 y vemos que aparecen dos sinusoides en cada una. Para descartar que haya aliasing, hay que medir si las frecuencias que se muestran en cada gráfica coinciden, en cuyo caso descartaríamos aliasing con ambas frecuencias de muestreo.

Con fm3 los picos aparecen en k1=200 y k2=300 que se corresponden con f1=k1 fm3/N= 200 100/1000= 20Hz y f2=30Hz

Con fm4 los picos aparecen en k1=100 y k2=150 que se corresponden con f1=k1 fm4/N= 100 200/1000= 20Hz y f2=30Hz

Vemos que con estas dos frecuencias de muestreo las sinusoides aparecen a las mismas frecuencias, por tanto, no hay aliasing ni con fm3 ni con fm4

e) Hay dos sinusoides

f) Frecuencias: f1=20Hz, f2=30Hz

Una vez estimadas las sinusoides vamos a comprobar nuestras suposiciones respecto a las señales con aliasing:

Con fm1 tenemos x[n] = A cos (2π20n/10)+ B cos (2π30n/10) = A + B como la duración de la señal es T=1s, con fm1 obtenemos 10 muestras, por tanto x[n]=(A + B) p_{10}[n] y su TF se corresponde con la primera gráfica.

Con fm2 tenemos x[n] = A cos (2π20n/50) + B cos (2π30n/50) = A cos (2π2n/5) + B cos(2π3n/5) = (A+B) cos (2π2n/5) como la duración de la señal es T=1s, con fm2 obtenemos 50 muestras, por tanto x[n]=(A + B) cos (2π2n/5) p_{50}[n] y su TF se corresponde con la segunda gráfica.