
Problema 1.* (Equipartició de l'energia) Sigui $u \in C^2(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ una solució del problema de la corda vibrant

$$\begin{cases} \rho u_{tt} - \tau u_{xx} = 0 & x \in \mathbb{R},\ t \geq 0 \\ u(x,0) = g(x) & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) = h(x) & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Suposem que g i h són prou regulars i tenen suport en un interval afitat $[a, b]$. L'*energia cinètica* i l'*energia interna* (o potencial) de la corda venen donades per

$$K(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \rho u_t^2(x,t)\, dx \qquad \text{i} \qquad P(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \tau u_x^2(x,t)\, dx.$$

Demostreu:

(a) $K(t) + P(t)$ és constant en t.

(b) $K(t) = P(t)$ per a $t > (b-a)/(2c)$, on $c = \sqrt{\tau/\rho}$ és la velocitat de l'ona al llarg de la corda.

Problema 2.* Considerem el problema

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & x > 0,\ t > 0 \\ u(0,t) = d(t) & t > 0 \\ u(x,0) = 0 & x > 0 \\ u_t(x,0) = 0 & x > 0, \end{cases}$$

on $d \in C^2(\mathbb{R})$ i $d(0) = d'(0) = 0$.

(a) Resoleu el problema restant $d(t)$ a la solució i fent reflexió senar.

(b) Alternativament, resoleu el problema factoritzant l'equació d'ones i usant el mètode de les característiques.

(c) Per un impuls d d'un segon donat per

$$d(t) = \begin{cases} 1 - \cos(2\pi t) & t \in (0,1) \\ 0 & t \geq 1 \end{cases}$$

i amb $c = 10\,\text{m/s}$, determineu la longitud, amplitud i posició de l'ona a temps $t = 4\,\text{s}$. És solució clàssica per aquesta d?

Problema 3. Resoleu

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 1 & x > 0,\ t > 0 \\ u(0,t) = 0 & t > 0 \\ u(x,0) = 0 & x > 0 \\ u_t(x,0) = 0 & x > 0. \end{cases}$$

És u solució clàssica?

Problema 4. Una ona plana amb suport compacte i alçada h rebota en la vora d'una piscina. Quina es l'alçada màxima que assol.leix l'ona durant la reflexió?

Problema 5.* Considerem l'equació d'ones no lineal

$$u_{tt} - u_{xx} = u^2 + f(x,t) \quad \text{a } Q_T := \mathbb{R} \times (0,T),$$

amb condicions inicials $u(x,0) = u_t(x,0) = 0$, on f és una funció contínua i fitada a $\overline{Q_T}$ amb $\|f\|_{L^\infty(Q_T)} \leq 1$. Treballant en l'espai de funcions contínues i afitades a $\overline{Q_T}$, demostreu l'existència i unicitat de solució (en sentit integral) per T prou petit. Doneu una cota inferior explícita pel temps T.