A. Aubanell, A. Benseny, A. Delshams: "Eines bàsiques de Càlcul Numèric" p.392

Problema IV.8

a) Trobeu les relacions de recurrència següents per als polinomis de Legendre, per a $t \in \mathbb{R}$ i $j \geq 1$.

(i) $P_j'(t) - t P_{j-1}'(t) = j P_{j-1}(t)$

(ii) $t P_j'(t) - P_{j-1}'(t) = j P_j(t)$

(iii) $P_{j+1}'(t) - P_{j-1}'(t) = (2j+1) P_j(t)$

(iv) $(t^2-1) P_j'(t) = j t P_j(t) - j P_{j-1}(t)$

b) Deduïu la fórmula de Gauss-Legendre de $m+1$ punts

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2} \sum_{k=0}^{m} w_k f(x_k) + E_{m+1}(f),$$

amb

$$x_k = \frac{b-a}{2} t_k + \frac{a+b}{2}, \quad w_k = \frac{2}{(1-t_k^2)\left[P_{m+1}'(t_k)\right]^2},$$

on $t_k \in (-1,1)$ $(k=0 \div m)$ són els zeros del polinomi de Legendre $P_{m+1}(t)$ i, si la funció $f \in \mathcal{C}^{(2m+2)}([a,b])$, l'error de la fórmula anterior ve donat per l'expressió

$$E_{m+1}(f) = \frac{(b-a)^{2m+3}\left[(m+1)!\right]^4}{(2m+3)\left[(2m+2)!\right]^3} f^{(2m+2)}(\xi), \; \xi \in (a,b).$$

c) Feu explícites les fórmules de Gauss-Legendre d'1, 2 i 3 punts sobre $[-1,1]$.