1. Discutiu en funció del paràmetre $a \in \mathbb{R}$ la posició relativa dels plans π_1 i π_2 de $\mathbb{A}^4_{\mathbb{R}}$ que tenen per equacions en la referència natural:

$$\pi_1 : \begin{cases} x = 1 + \lambda + \mu \\ y = -2\lambda + \mu \\ z = 2 + \mu \\ u = 2 \end{cases} \qquad (\lambda, \mu \in \mathbb{R})$$

$$\pi_2 : \begin{cases} x - 2u = 0 \\ x + 2y - az = 1 \end{cases}$$

Resolució

Comencem expressant π_1 i π_2 en coordenades cartesianes. En el cas de π_1 tenim:

$$\pi_1 : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

és a dir, que tenim π_1 expressat en forma de punt de pas més subespai vectorial en equacions paramètriques. Si ho volem en forma cartesiana, passem d'unes equacions a les altres:

$$\begin{cases} \mu = z - 2 \\ \mu = y + 2\lambda \\ \mu = x - 1 - \lambda \end{cases} \implies z - 2 = y + 2\lambda = x - 1 - \lambda; \tag{2}$$

solucionant convenientment les equacions $z - 2 = y + 2\lambda$ i $x - 1 - \lambda = z - 2$, obtenim dues equacions:

$$\begin{cases} y + 2\lambda - z + 2 = 0 \\ x - z + 1 - \lambda = 0 \end{cases} ; \tag{3}$$

i sumant dues vegades la segona equació a la primera obtenim $2x + y - 3z + 4 = 0$, que juntament amb $u = 2$ defineix el pla π_1. Aleshores, acabem d'obtenir un sistema

$$\pi_1 : \begin{cases} 2x + y - 3z = -4 \\ u = 2 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

En el cas de π_2, expressar-lo d'aquesta manera no requereix de manipulacions, doncs ja el tenim en forma de sistema lineal d'equacions:

$$\pi_2 : \begin{cases} x - 2u = 0 \\ x + 2y - az = 1 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & -a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Ara volem saber quina és la posició relativa dels dos plans. Començarem veient que no poden ser paral·lels ni estar inclosos l'un dins de l'altre.
Si $\pi_1 : \; Ap = b, \pi_2 : \; Cq = d$, definim $\pi_1 = p + \operatorname{Nuc} A$, $\pi_2 = q + \operatorname{Nuc} C$. Com que $\dim \pi_1 = \dim \pi_2$, $\pi_1 \parallel \pi_2 \iff \operatorname{Nuc} A = \operatorname{Nuc} C$. Com que coneixem els vectors que generen el nucli d'A, veiem què els passa quan els apliquem C; si $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, aleshores

$$Cv_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad Cv_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3-a \end{pmatrix},$$

que són diferents al vector zero, i per tant els nuclis són diferents. Això vol dir, per tant, que $\pi_1 \nparallel \pi_2 \wedge \pi_1 \nsubseteq \pi_2 \wedge \pi_2 \nsubseteq \pi_1$. Per tant, ara només queden dues posicions relatives per comprovar.

2. A $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ considerem el pla $\Pi: \ x + 2y + z = -6$ i les projeccions P i r sobre Π de l'origen i l'eix $x = z = 0$, respectivament, en la direcció $(0, 0, 1)$. Trobeu un sistema de referència afí on l'equació del pla Π sigui $\bar{z} = \sqrt{6}$, P pertanyi a l'eix $\bar{x} = \bar{y} = 0$ i r estigui sobre el pla $y = 0$. Quants sistemes de referència afins hi ha que compleixin aquestes condicions?