Extrapolació

En molts problemes el càlcul numèric d'un nombre v consta de 2 etapes:

$\boxed{1}$. Discretització: es calculen aproximacions numèriques de v depenent d'un pas h.

Per exemple

1. $$F(h) \equiv \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \underset{f'(a)}{\overset{}{v}} + \alpha_1 h + \alpha_2 h^2 + \dots$$

2. $$F(h) \equiv T_N(f) = \underbrace{\int_a^b f(x)\,dx}_{v} + \gamma_1 h^2 + \gamma_4 h^4 + \dots$$

on $\gamma_1 = \frac{B_2}{2!}\left[f'(b) - f'(a)\right]$, $\gamma_4 = \frac{B_4}{4!}\left[f'''(b) - f'''(a)\right]$

on $h = \frac{b-a}{N}$

$\boxed{2}$ Pas al límit: $v = \lim_{h \to 0} F(h)$

Ja s'intueix que fer aquest pas al límit presenta problemes numèrics quan $h \to 0$: augmenta el nombre d'operacions, errors de cancel·lacions, ...

L'objectiu de l'extrapolació és obtenir millors aproximacions de v sense prendre h molt petit

Mètode d'extrapolació de Richardson

Suposem que

$$F_1(h) = F(h) = v + \underset{\neq 0}{a_1} h^{p_1} + a_2 h^{p_2} + a_3 h^{p_3} + \dots, \quad p_1 < p_2 < p_3 < \dots$$

és a dir $F(h) \simeq v$ amb un error $a_1 h^{p_1} + \dots = O(h^{p_1})$

Considerem ara $q > 0$ $(q \neq 1)$ i avaluem

$$F(qh) = v + a_1 q^{p_1} h^{p_1} + a_2 q^{p_2} h^{p_2} + \dots$$

de manera que

$$q^{p_1} F(h) - F(qh) = (q^{p_1} - 1) v + \gamma_2 h^{p_2} + \dots$$

és a dir

$$\frac{q^{p_1} F(h) - F(qh)}{q^{p_1} - 1} = v + a_2^{(2)} h^{p_2} + \dots$$

observem que ara tenim una nova aproximació de v

$$\frac{q^{p_1} F(h) - F(qh)}{q^{p_1} - 1} \simeq v \quad \text{amb un error } O(h^{p_2})$$

és a dir millor que l'anterior (que era $O(h^{p_1})$)

NOTA.— Observem que la nova proximació la podem escriure com

$$F_2(h) = \frac{q^{p_1} F(h) - F(qh)}{q^{p_1} - 1} = F(h) + \underbrace{\frac{F(h) - F(qh)}{q^{p_1} - 1}} =$$

$$= v + a_2^{(2)} h^{p_2} + \dots$$

que interpretem com: $F_2(h) = F(h) + \underbrace{\text{correcció}}$

Aquest procés el podem "repetir" de la forma següent:

$$F_1(h) = F(h) = v + a_1 h^{p_1} + \dots$$

$$F(qh) = v + a_1 q^{p_1} h^{p_1} + \dots \quad > F_2(h) = v + a_2^{(2)} h^{p_2} + \dots$$

$$F(q^2 h) = v + a_1 q^{2p_1} h^{p_1} + \dots \quad > F_2(qh) = v + a_2^{(2)} q^{p_2} h^{p_2} + \dots$$

$$> F_3(h) = F_2(h) + \frac{F_2(h) - F_2(qh)}{q^{p_2} - 1} = v + a_3^{(3)} h^{p_3} + \dots$$

que és una millor proximació que l'anterior (l'error és $O(h^{p_3})$)

TAULA D'ESQUEMA DE CÀLCUL

h	F_1	$\frac{\Delta}{q^{p_1}-1}$	F_2	$\frac{\Delta}{q^{p_2}-1}$	F_3
h	$F_1(h)$	$\frac{F_1(h)-F_1(qh)}{q^{p_1}-1}$	$F_2(h) = F_1(h) + \frac{\Delta}{q^{p_1}-1}$	$\frac{F_2(h)-F_2(qh)}{q^{p_2}-1}$	etc
qh	$F_1(qh)$	$\frac{F_1(qh)-F_1(q^2h)}{q^{p_1}-1}$	$F_2(qh) = F_1(qh) + \frac{\Delta}{q^{p_1}-1}$		
q^2h	$F_1(q^2h)$	$\vdots$	$\vdots$		etc
q^3h	$F_1(q^3h)$				

F_1: dóna una aproximació amb error d'ordre $O(h^{p_1})$

F_2: dóna una aproximació amb error $O(h^{p_2})$

o més breument

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & \frac{\Delta}{q^{p_1}-1} & & \frac{\Delta}{q^{p_2}-1} & & \frac{\Delta}{q^{p_3}-1} & \\
F_1(h) & > & F_2(h) & > & F_3(h) & > & \cdots \\
F_1(qh) & > & F_2(qh) & > & F_3(qh) & & \vdots \\
F_1(q^2h) & > & F_2(q^2h) & & \vdots & & \\
F_1(q^3h) & & \vdots & & & & \\
\vdots & & & & & &
\end{array}
$$

Comentaris.-

1. El valor de la q no és molt rellevant. Normalment

prenem $q=2$.

2. No cal conèixer explícitament les $a_1, a_2, \dots, a_2^{(2)}, \dots$
Només cal conèixer les $p_1, p_2, \dots$

3. El nom d'extrapolació ve de fer prenem
$F(h_1), F(h_2), \dots, F_2(h_1), F_2(h_2), \dots, \dots$ i avaluem
"$F(0)$" a partir d'aquests valors però el 0 està fora
de $\langle h_1, h_2, \dots \rangle$

4. En el cas de la fórmula del trapezi composta (o Euler-
McLaurin) tenim

$$T_N(f) = \int_a^b f(x)\,dx + a_2 h^{\overset{=p_1}{2}} + a_4 h^{\overset{=p_2}{4}} + \dots$$

Prenem $q=2$ i fem extrapolació amb

$$\frac{\Delta}{2^2-1}, \frac{\Delta}{2^4-1}, \frac{\Delta}{2^6-1}, \dots \quad \text{és a dir}$$

$$\frac{\Delta}{3}, \frac{\Delta}{15}, \frac{\Delta}{63}, \dots$$

i s'obté l'anomenat <u>mètode de Romberg</u>.

5. Parem el procés quan s'estabilitzen els dígits en l'aproximació
de v.

Veiem ara un "truc" per estimar l'error:

terme dominant de l'error: desconegut

$$r = F(h) + \boxed{\alpha_1 h^{p_1}} + \alpha_2 h^{p_2} + \dots$$

$$r = F(qh) + \alpha_1 q^{p_1} h^{p_1} + \dots$$

Restant,

$$0 = F(h) - F(qh) + \alpha_1 h^{p_1}[1 - q^{p_1}] + O(h^{p_2})$$

i ~~per tant~~

$$\alpha_1 h^{p_1} = \frac{F(h) - F(qh)}{q^{p_1} - 1} + O(h^{p_2}) \quad (*)$$

Aproximem $\alpha_1 h^{p_1}$ per $\dfrac{F(h) - F(qh)}{q^{p_1} - 1}$ (**)

i, o sigui si h és petit, aquest terme

dóna una estimació de l'error

Una manera de convèncer-nos que és un bon estimatiu de l'error és el següent càlcul:

Del cas $\alpha_1 h^{p_1} \approx \dfrac{F(h) - F(qh)}{q^{p_1} - 1}$

i també

$$\alpha_1 (qh)^{p_1} \approx \frac{F(qh) - F(q^2 h)}{q^{p_1} - 1}$$

Llavors

$$(***) \quad \frac{F(h) - F(qh)}{F(qh) - F(q^2h)} \approx \frac{\alpha_1 h^{p_1}}{\alpha_1 q^{p_1} h^{p_1}} = \frac{1}{q^{p_1}}$$

$$\left(\text{o bé} \quad \frac{F(qh) - F(q^2h)}{F(h) - F(qh)} \approx q^{p_1} \right)$$

En efecte, ja que hem "despreciat" el terme $O(h^{p_2})$ s'ha de fer quan havíem d'obtenir (**).

Si el fer el quocient (***) no obtenim $\approx \frac{1}{q^{p_1}}$ vol dir que no podem menysprear la part en h^{p_2} és a dir

$$\frac{\dfrac{F(h) - F(qh) + C_1 h^{p_2}}{\cancel{q^{p_1}-1}}}{\dfrac{F(qh) - F(q^2 h) + C_1 q^{p_2} h^{p_2}}{\cancel{q^{p_1}-1}}}$$

és a dir que (**) no és un bon estimador de l'error.

valor exacte: 0,74682413...

Exemple

Problema 11 f) Volem $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ amb un error $\leq 10^{-4}$ amb extrapolació.

Usem la fórmula dels trapezis composta (o Euler-McLaurin) amb $q=2$.

1ª extrapolació $F_2(h) = F_1(h) + \frac{\Delta}{q^{p_1}-1}$ $\frac{\Delta}{3}$

2ª extrapolació $F_3(h) = F_2(h) + \frac{\Delta}{q^{p_2}-1}$ $\frac{\Delta}{15}$

h	N	$T_N(f)$	
$h=\frac{1}{8}$	8	$F_1(h) = 0{,}74586558 = A$	$F_2(h) = A + \frac{A-B}{3} = 0{,}74682609 = D$ (*)
$2h = \frac{1}{4}$	4	$F_1(qh) = 0{,}74298406 = B$	$F_2(qh) = B + \frac{B-C}{3} = 0{,}74685534 = E$
$2^2h = \frac{1}{2}$	2	$F_1(q^2h) = 0{,}73137024 = C$	

(*) $F_3(h) = F_2(h) + \frac{\Delta}{15} = D + \frac{D-E}{15} = 0{,}74682414$ Aquí parem.

Recordem que $T_N(f) = \int_a^b f(x)dx + \alpha_1 h^2 + \alpha_2 h^4 + \cdots$

$p_1 = 2,\ p_2 = 4 \rightarrow \begin{cases} q^{p_1}-1 = 2^2-1 = 3 \\ q^{p_2}-1 = 2^4-1 = 15 \end{cases}$

NOTA.- Si calculem $\frac{F(h)-F(qh)}{q^{p_1}-1} = 0{,}00096 = \alpha_1 h^{p_1} + O(h^{p_2})$

L'error real és $F_1(h) -$ Valor exacte $= 0{,}000959$ ✓

- Si calculem $\frac{F(h)-F(qh)}{F(qh)-F(q^2h)} = 0{,}244$ i $\frac{1}{q^{p_1}} = \frac{1}{2^2} = 0{,}25$ ✓