Els problemes amb asterisc $*$ es resoldran a classe de problemes

---

Problema 1. Considerem l'operador

$$(Av)(x) := \frac{1}{x}\int_0^x v(y)\,dy, \quad x \in (0,1],$$

actuant sobre funcions $v \in C^0([0,1])$. Demostreu que, per tota $g \in C^0([0,1])$, el problema

$$\begin{cases} u_t = Au + \sin u, \\ u(x,0) = g(x), \quad x \in [0,1], \end{cases}$$

admet una única solució $u = u(x,t)$ que és contínua a tot $[0,1]$ per a cada temps t en un cert interval. Quin és l'interval màxim de temps t en el que la solució u existeix?

Problema 2.* Considereu l'operador A definit per

$$(Av)(x) = \int_0^1 \big(v(y) - v(x)\big)\,dy, \quad x \in [0,1].$$

(a) Comproveu que $A : C^0([0,1]) \to C^0([0,1])$ és lineal i continu.

(b) Demostreu l'existència i unicitat de solució (per temps prou petits) del problema no lineal $u_t - Au = u^3$, $u(x,0) = g(x)$.

(c) Trobeu la solució de $u_t - Au = 0$, $x \in (0,1)$, $t > 0$, amb condició inicial $u(x,0) = g(x)$. Calculeu $\lim_{t\to+\infty} u(x,t)$ (fins i tot si no heu resolt la qüestió anterior d'aquest apartat c).

(d) Quan val Av en els punts on s'assoleix el màxim (i el mínim) de $v = v(x)$? En aquesta línia, comenteu breument les diferències i similituds entre l'operador A i el Laplacià.

Problema 3. Escrivim l'equació del transport lineal $u_t + cu_x = 0$ com $u' = Au$ on, per cada t, $u = u(t)$ pertany a un espai de funcions de x, $u(t)(x) = u(x,t)$, u' denota la derivada respecte al temps t, i $A = -c\partial_x$ és un operador diferencial lineal. Si bé aquest operador no és continu entre l'espai de Banach C^k i ell mateix, amb k enter, insistim a usar, almenys formalment, la fórmula per $e^{tA}g$ donada per una sèrie de potències (on $g = g(x)$ és la condició inicial). Feu-ho i sumeu la sèrie per arribar a una fórmula útil.

[Nota: el càlcul formal que heu fet requereix i només s'aplicaria a condicions inicials $g \in C^\infty$ (i encara més, necessitaríem g analítica). De totes formes, inclús així el càlcul segueix sent formal, doncs es pot demostrar que l'espai vectorial de funcions C^∞ no es pot dotar d'una norma tal que: el faci de Banach, doni la topologia habitual de convergència uniforme de la funció i de totes les seves derivades i, finalment, faci que l'operador A sigui continu.]

Problema 4.* Considerem l'equació d'evolució no lineal

$$\begin{cases} u_t = -cu_x + u(x,t) \int_0^1 |x-y|^{-1/3} u(y,t)\,dy, & x \in (0,1), t \in (0,t_m), \\ u(0,t) = 0, & t \in (0,t_m), \\ u(x,0) = g(x), & x \in (0,1), \end{cases}$$

amb $c > 0$ una constant i $g \in L^2(0,1)$ donada. Demostreu l'existència i unicitat de solució en sentit integral (en un cert espai de Banach a trobar) per temps t_m prou petit. Doneu una cota inferior explícita pel temps t_m.

Noteu i discutiu el fet següent: en aquest problema per l'equació diferencial del transport (que involucra l'operador A del problema 3) hem hagut de posar una condició de vora o de contorn a $x = 0$. En canvi, en els problemes que involucren operadors A lineals integrals continus (problemes 1, 2 i 5) ja hi ha existència i unicitat de solució sense imposar condicions de vora (i, per tant, no es poden imposar tals condicions).

Problema 5.* Considerem l'operador

$$(Bv)(x) := \int_0^x v(y)\,dy, \quad x \in [0,1],$$

actuant sobre funcions $v \in C^0([0,1])$. Considerem el problema d'evolució, per $u = u(x,t)$,

$$\begin{cases} u_t = Bu, \\ u(x,0) = g(x), \quad x \in [0,1], \end{cases}$$

per una $g \in C^0([0,1])$ donada.

(i) Usant la sèrie de potències per a l'exponencial d'un operador, trobeu una fórmula explícita per $u = u(x,t)$ (la fórmula pot involucrar una sèrie de potències que no cal sumar). Justifiqueu que es pot usar la fórmula de l'exponencial.

(ii) [Aquest apartat es pot fer independentment d'haver fet o no l'apartat anterior] Demostreu que hi ha una única solució del problema d'evolució i que aquesta és de la forma

$$u(x,t) = g(x) + \int_0^x tK(t(x-z))g(z)\,dz,$$

per una certa funció $K : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Trobeu l'EDO i les condicions inicials que satisfà aquesta funció K, justificant que determinen la funció K de manera única. Trobeu el nom i propietats de la funció K (a "WolframAlpha" per exemple).