Àlgebra lineal i numèrica

TEORIA

Oriol Navarro Travesset

1r CFis // 2on Q

INTRODUCCIÓ

El càlcul numèric és la branca de les matemàtiques que s'encarrega de dissenyar algorismes per tal que, mitjançant nombres i regles matemàtiques simples, poguem simular/resoldre processos matemàtics complexos.

EXEMPLES / APLICACIONS

- Càlculs "senzills" d'aritmètica. Treballar amb un nombre finit de dígits és font d'errors.
- Economia: simulacions / prediccions en el món bursàtil.
- Meteorologia: predicció del temps. Canvis climàtics.
- Astronomia / astrodinàmica:
- Ecologia i biologia: models de dinàmica de població, evolució de la pol·lució als oceans.
- Medicina: simulació d'òrgans del cos. Neurociència.

...

TEMARI

01 Introducció i errors (problemes)

02 Sistemes lineals

03 Càlcul de valors i vectors propis.

AVALUACIÓ

15% examen de pràctiques.

85% examen

REFERÈNCIES

→ Càlcul Numèric, C. Bonet et. al.

→ Eines bàsiques de càlcul numèric, Aubanell, Benseny, Delshams.

→ Numerical recipes in C ; Press et al.

TEMA 1: INTRODUCCIÓN I ERRORES

INTRODUCCIÓN

• Ejemplo 1: Resolver el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x+2y=3 \\ 0,499x+1,001y=1,5 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{sol. } \boxed{x=y=1.}$$

¿Qué ocurre si cambiamos 0,499 por 0,5? $\left.\begin{array}{l} x+2y=3 \\ 0,5x+1,001y=1,5 \end{array}\right\}$

Cramer:

$$\boxed{x} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1,5 & 1,001 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0,5 & 1,001 \end{vmatrix}} = \frac{3,003-3}{1,001-1} = \frac{0,003}{0,001} = \boxed{3}$$

$$\boxed{y} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0,5 & 1,5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0,5 & 1,001 \end{vmatrix}} = \frac{1,5-1,5}{0,001} = \boxed{0}$$

ERROR EN LOS DATOS INICIALES

• Ejemplo 2: Calcular las raíces de $x^2-18x+1$.

$$x_{1,2} = \frac{18 \pm \sqrt{18^2-4}}{2} = \frac{18 \pm \sqrt{320}}{2} = 9 \pm \sqrt{80}$$

Calculamos $\sqrt{80}$ con 4 cifras decimales: $\sqrt{80} = 8,9442|71...$ o sea:

$\sqrt{80} \simeq 8,9442$

ERROR EN OPERACIONES

Soluciones: $x_1 \simeq 9+8,9442 = \overbrace{17,9442}^{6 \text{ cifras significativas}}$

$x_2 \simeq 9-8,9442 = 0,0\underbrace{558}_{3 \text{ cifras significativas}}$

• Ejemplo 3: calcular $E_n = \int_0^1 x^n e^{x-1} dx \quad n \geq 1$.

$$\boxed{E_n = \int_0^1 x^n e^{x-1} dx = \left(x^n e^{x-1}\right]_0^1 - n\int_0^1 x^{n-1} e^{x-1} dx = 1-nE_{n-1}}$$

$u = x^n \qquad v = e^{x-1}$

$du = nx^{n-1}dx \qquad dv = e^{x-1}dx$

$$\boxed{E_1 = \int_0^1 x e^{x-1} dx \underset{\text{partes}}{\simeq} 0,367879} \Rightarrow$$

Recurrencia: $E_1 \simeq 0,367879$

$E_2 \simeq 1-2\cdot 0,367879 = 0,264242$

$\vdots$

$\underbrace{\int_0^1 x^9 e^{x-1} dx}_{>0} = E_9 \simeq -0,068480 \Rightarrow$ No es posible

ERROR EN EL ALGORITMO

I TIPOS DE ERRORES

a) Errores de redondeo: e_R

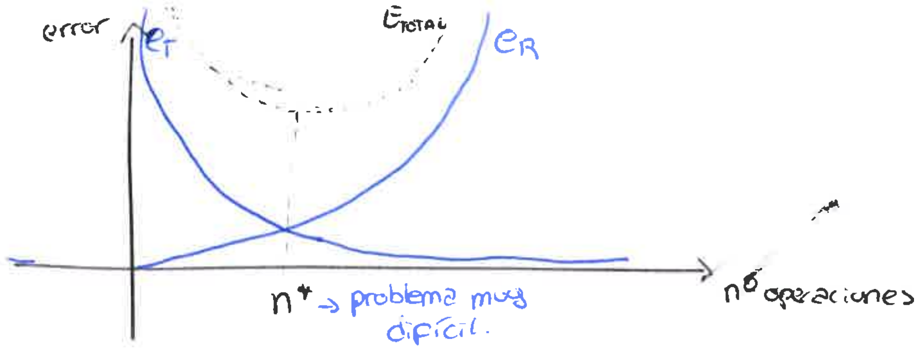
1) Errores en los datos (ejemplo 1): por culpa de la representación aritmética de cualquier real.

2) Errores en las operaciones (ejemplo 2): "

b) Errores de truncado: problemas al discretizar un determinado problema (ejemplo 3) e_T

En un problema cualquiera: $\boxed{\text{ERROR TOTAL} = e_R + e_T}$

¿Cómo se comportan, típicamente, en función del número de operaciones?



II REPRESENTACIÓN EN ARITMÉTICA FINITA

Sea $b \in \mathbb{N}$, $b \geq 2$, base. Dado $x \in \mathbb{R}$ $\exists!$ representación de x en base b.

$$x = a_k b^k + a_{k-1} b^{k-1} + \dots + a_0 b^0 + a_{-1} b^{-1} + \dots$$

Problema: si x no tiene una expresión exacta en forma de n dígitos, cometemos siempre un error.

Def: Representación en punto (o coma) flotante normalizada de un nº real x:

Fijamos n = nº de dígitos a guardar.

$$x \longrightarrow fl(x) = s\,(\underbrace{0.d_1 d_2 d_3 \cdots d_n | d_{n+1} \cdots}_{\text{Mantisa}}) \cdot b^e$$

e → exponente, b → base

signo $\begin{cases} 0 & \text{si } x \geq 0 \\ 1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$ donde: $d_1 \neq 0$, $0 \leq d_j < b$ $\forall j = 2, \dots, n$

Ej: $173{,}9435 \xrightarrow{\text{normalizar}} \underbrace{0.1739435}_{\text{Mantisa}} \cdot 10^3$ ($s = +$, base 10, exponente 3)

Def: • $fl(x)$ por truncado a n dígitos:

$$fl_T(x) = s\,(0.d_1 d_2 \cdots d_n) \cdot b^e$$

• $fl(x)$ por redondeo a n dígitos:

$$fl_R(x) = s\,(0.d_1 d_2 \cdots \tilde{d}_n) \cdot b^e \quad \text{donde } \tilde{d}_n = \begin{cases} d_n & \text{si } 0 \leq d_{n+1} < b/2 \\ d_n + 1 & \text{si } d_{n+1} \geq b/2 \end{cases}$$

Ej: $173{,}42956$, $n = 7$ dígitos
↳ $0.17342956 \cdot 10^3$ $\Rightarrow$ $fl_T(x) = 0.1734295 \cdot 10^3$
$fl_R(x) = 0.1734296 \cdot 10^3$

Standard : IEEE 754

IEEE simple $\longrightarrow$ float (C/C++)

double $\longrightarrow$ double

	n	emin	emax	bits	bytes
simple	24	-125	128	32	4
double	53	-1021	1024	64	8

$e' = e + 126$ (simple)
$e' = e + 1022$ (double) $\Rightarrow$ $e' = 0 \to$ overflow, NaN; $e' = 255 \to$ Underflow

III ERRORES EN LA REPRESENTACIÓN

Def's:

(i) Error absoluto:

x: Valor real que queremos calcular.
$\bar{x}$: Valor aproximado.

error absoluto de la aprox. $\bar{x}$ como:

$$\boxed{e_a(\bar{x}) = x - \bar{x}}$$

(ii) Error relativo:

$$\boxed{e_r(\bar{x}) = \frac{e_a(\bar{x})}{x} \simeq \frac{e_a(\bar{x})}{\bar{x}}}$$

Importante: nunca podemos conocer exactamente $e_a(\bar{x})$ y $e_r(\bar{x}) \Rightarrow$ Buscaremos cotas superiores (lo más finas posibles) de ellos: $|e_a(\bar{x})| \leq \varepsilon_a(\bar{x})$, $|e_r(\bar{x})| \leq \varepsilon_r(\bar{x})$ → cota.

Ejemplo: $|e_a(fl_T(x))| = |x - fl_T(x)| \leq b \cdot b^{-(n+1)} \cdot b^e = \varepsilon_a(fl_T(x)) = b^{-n} b^e$

nuestra representación es de n dígitos $(x = s(0.d_1 \dots d_n) \cdot b^e)$

$$|e_r(fl_T(x))| = \frac{|e_a(fl_T(x))|}{x} \leq \frac{b^{-(n)} b^e}{b^{e-1}} = b^{-n+1} = \varepsilon_r(fl_T(x))$$

$b^{e-1} \leq x < b^e$

- $|e_a(fl_R(x))| \leq \frac{1}{2} b^{-n} b^e$
- $|e_r(fl_R(x))| \leq \frac{1}{2} b^{-n+1}$

$x \sim$ aprox → nº cifras decimales correctas $= n \Rightarrow |e_a(\bar{x})| \leq \frac{1}{2} 10^{-n}$
→ nº cifras significativas correctas $= n \Rightarrow |e_r(\bar{x})| \leq \frac{1}{2} 10^{1-n}$

Sup: $x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots$ ¿cómo dar una estimación de $|e_a(x_{k+1})|$? $|e_a(x_{k+1})| \simeq |x_{k+1} - x_k|$

¿Y de $|e_r(x_{k+1})|$? $|e_r(x_{k+1})| \simeq \frac{|e_a(x_{k+1})|}{|x_{k+1}|} \simeq \frac{|x_{k+1} - x_k|}{|x_{k+1}|}$

ε-máquina: ε_{maq}: menor número ε tq $fl(\varepsilon + 1) > 1$.

Def. $|e_a(\tilde{x})| \leq \frac{1}{2} 10^{-t_a}$: diremos que $\tilde{x}$ tiene "t_a" decimales correctos.

$x = s\, m\, 10^q$, $\tilde{x} = s\, \tilde{m}\, 10^q$, $0.1 \leq m < 1$

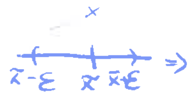
$tr = \max\{i \in \mathbb{Z} \mid |\tilde{m} - m| < \frac{1}{2} 10^{-i}\}$: diremos que $\tilde{x}$ tiene "tr" cifras significativas.

Lema:

(a) $|e_r(\tilde{x})| \leq 5 \cdot 10^{-t_r}$

(b) $|\tilde{m} - m| \leq |e_r(\tilde{x})|$

Ejemplo:

(a) $x = \underbrace{0.001234}_{\tilde{x}} \pm \frac{1}{2} 10^{-5} \Rightarrow x \in \left(0.001234 - \frac{1}{2} \cdot 10^{-5}, 0.001234 + \frac{1}{2} \cdot 10^{-5}\right)$  $\Rightarrow$

$\Rightarrow |e_a(\tilde{x})| \leq \frac{1}{2} 10^{-5} \Rightarrow \tilde{x}$ té 5 decimals correctes //

cifras significativas: $\tilde{x} = 0.001234 \Rightarrow \tilde{x} = 0.\underbrace{1234}_{} \cdot 10^{-2}$ → 3 cifras significativas correctas //

último decimal correcto

(b) $x = 50.789 \pm \frac{1}{2} 10^{-3} \Rightarrow |e_a(\tilde{x})| \leq \frac{1}{2} 10^{-3} \Rightarrow \tilde{x}$ té 3 decimals correctes. //

$\tilde{x} = 0{,}\underline{50789} \cdot 10^{2}$ → $\tilde{x}$ té 5 cifras significatives correctes. //

Otro método para calcular nº de cifras sign. correctas:

(a) $|e_r(0.1234 \cdot 10^{-2})| \leq \dfrac{\frac{1}{2} 10^{-5}}{0{,}1234 \cdot 10^{-2}} = \dfrac{5 \cdot 10^{-6}}{1{,}234 \cdot 10^{-3}} \leq 5 \cdot 10^{-t_r} = 0{,}5 \cdot 10^{1-t_r} \Rightarrow$ el máximo t_r es 3 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ 3 cifras significativas correctas //

(b) $|e_r(0.50789 \cdot 10^{2})| \leq \dfrac{\frac{1}{2} \cdot 10^{-3}}{0.50789 \cdot 10^{2}} = \dfrac{5 \cdot 10^{-4}}{5.0789 \cdot 10^{1}} \simeq 0.99\ldots 10^{-5} \leq 5 \cdot 10^{-t_r} = 0{,}5 \cdot 10^{1-t_r} \Rightarrow$ El máximo t_r es 5 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ 5 cifras significativas correctas. //

Prop.: $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$ con representación decimal en punto flotante infinita y normalizada $x = s(0.\alpha_1 \alpha_2 \ldots)_{10} 10^{q}$, $\alpha_1 \neq 0$.

El error absoluto en su representación en punto flotante en base 10 y t dígitos:

$|fl_T(x) - x| \leq 10^{q-t}$ | $|fl_R(x) - x| \leq \frac{1}{2} \cdot 10^{q-t}$ $(|e_a(fl(x))|)$

El error relativo en su representación en punto flotante en base 10 y t dígitos:

$|e_r(fl_T(x))| = \left|\dfrac{fl_T(x) - x}{x}\right| \leq 10^{1-t}$ | $|e_r(fl_R(x))| = \left|\dfrac{fl_R(x) - x}{x}\right| \leq \frac{1}{2} \cdot 10^{1-t}$

TEMA 2: SISTEMES LINEALS

---

01 Conceptes bàsics.

I. OBJECTIU: Volem resoldre el sistema lineal.

$$A\vec{x} = \vec{b} \quad \text{on } A \in M_n(\mathbb{R}),\ \vec{b} \in \mathbb{R}^n,\ \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \text{amb } \det A \neq 0.$$

(i.e. A no singular, i.e. existeix A^{-1})

Per tant, existeix una única solució $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.

II. MÈTODE BASAT EN EL CÀLCUL D'A^{-1}

- Calcular $C = A^{-1}$
- Calcular $\vec{x} = C\vec{b} = A^{-1}\vec{b}$.

Nota: Una manera eficient de calcular A^{-1} consisteix en resoldre n sistemes lineals. Sigui:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \vdots & & \vdots \\ \vec{x_1} & \cdots & \vec{x_n} \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} \vdots & & \vdots \\ \vec{e_1} & \cdots & \vec{e_n} \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix}, \quad A\vec{x_i} = \vec{e_i} \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

Per tant sembla poc eficient resoldre n S.L. per tal de resoldre 1 SL (l'original).

III. MÈTODE DE CRAMER: $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$$x_i = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i-1} & b_1 & a_{1i+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni-1} & b_n & a_{ni+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|}, \quad \forall i, \text{ on } |A| = \det A.$$

El càlcul del determinant d'una matriu amb la fórmula de Leibnitz és molt costós.

DETERMINANTS:

$$\boxed{\det A = |A| = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}} \quad \text{(F. Leibnitz)}$$

* σ: permutació $\in S_n$: conjunt de permutacions.
* $\operatorname{Sgn}(\sigma)$: signe de σ

- Nombre d'operacions:

$\begin{cases} n! \text{ sumands (permutacions)} \to n!-1 \text{ sumes} \\ \text{per a cada sumand: } n \text{ productes} \end{cases}$

Cada determinant requereix:
$n!-1$ sumes
$n!n$ productes

Mètode de Crame (n+1 determinants)
$(n+1)(n!-1)$ sumes
$(n+1)n!n$ productes
n divisions

$\Rightarrow$ TOTAL: $(n+1)n! \cancel{-n} - 1 + n^2n! + nn! + \cancel{n} =$
$= n!(n^2+2n+1) - 1 =$
$= (n+1)^2 n! - 1$ ~ N. operacions

Per exemple: $n=100$ requereix $\simeq 10^{62}$ operacions. Treballant amb un ordinador 1 GFlop (Giga: 10^9; Flop: floating point operations per second)

Trigaria: 10^{62} oper. $\cdot \frac{1\,s}{10^9 \text{ oper.}} \cdot \frac{1 \text{ any}}{365 \cdot 24 \cdot 3600\, s} = 3 \cdot 10^{45}$ anys $\Rightarrow$ No és eficient

Cal buscar una altra estratègia.

IV. SISTEMES AMB SOLUCIÓ "TRIVIAL"

a) MATRIU DIAGONAL: $D\vec{x} = \vec{b} \iff \begin{pmatrix} d_1 & & \Theta \\ & \ddots & \\ \Theta & & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

Algorisme: $x_i = \frac{b_i}{d_i} \ \forall i$, i.e. n divisions. (cal $d_i \neq 0 \ \forall i$). $\det D = \prod_{i=1}^{n} d_i$.

b) MATRIU TRIANGULAR SUPERIOR: $U\vec{x} = \vec{b} \iff \begin{pmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ \Theta & & u_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

Nº coeficients en U: $1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Algorisme de substitució enrera: $x_n = \frac{b_n}{u_{nn}}$, $x_{n-1} = \frac{b_{n-1} - u_{n-1\,n} x_n}{u_{n-1\,n-1}} \ldots$

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n} u_{ij} x_j}{u_{ii}} \quad i = n-1, \ldots, 1$$

- Cal que $u_{ii} \neq 0 \ \forall i$
- $\det U = \prod_{i=1}^{n} u_{ii}$

c) MATRIU TRIANGULAR INFERIOR: $L\vec{x} = \vec{b}$. El mateix però amb algorisme de substitució endavant ($i = 1, \ldots, n-1$).

Nombre d'operacions b/c :

· Sumes / restes: (T. Superior) $\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} 1 = \sum_{i=1}^{n-1}(n-(i+1)+1) = \sum_{i=1}^{n-1}(n-i) = 1+\dots+n-1 = \frac{1+n-1}{2}(n-1)$

$= \frac{n(n-1)}{2}$

· Productes: $\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} 1 = \frac{n(n-1)}{2}$

· Divisions : n

$\Rightarrow$ Nombre total : $2\frac{n(n-1)}{2} + n = n^2 - n + n = \boxed{n^2}$

V. SISTEMA LINEAL AMB A QUALSEVOL, det A $\neq 0$

Distingirem 2 tipus de mètodes numèrics :

- Mètodes directes: que obtenen la solució exacta en un nombre finit de passos (suposant que no es produeix cap error). El més representatiu és el mètode de Gauss.
- Mètodes iteratius: que parteixen d'una aproximació inicial de la solució i calculen una successió d'aproximacions successives millorades, el límit de la qual és la solució buscada.

Aplicarem, en general, el primer mètode o el segon segons que la matriu sigui "plena" (amb molts elements no nuls) i de dimensió $n \leq 100$ o bé si A és "escassa" (amb pocs elements no nuls) i dimensió superior.

02 MÈTODE DE GAUSS MÈTODES D'ELIMINACIÓ.

Comencem amb un exemple. Resolem

$$\left.\begin{aligned} 4x_1 - 9x_2 + 2x_3 &= 2 \\ 2x_1 - 4x_2 + 4x_3 &= 3 \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 1 \end{aligned}\right\}$$

(1) El primer pas consisteix en passar el SL a un SL triangular superior.

$$\left.\begin{pmatrix} 4 & -9 & 2 \\ 2 & -4 & 4 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} F_2' &= F_2 - \tfrac{2}{4}F_1 \\ F_3' &= F_3 + \tfrac{1}{4}F_1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{pmatrix} 4 & -9 & 2 \\ 0 & 0{,}5 & 3 \\ 0 & -0{,}25 & 2{,}5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} \quad F_3' = F_3 + \tfrac{0{,}25}{0{,}5}F_2\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & -9 & 2 \\ 0 & 0,5 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2,5 \end{pmatrix}$$

(2) El segon pas és resoldre el SL triangular:

$$\boxed{\begin{aligned} x_3 &= \frac{2,5}{4} = 0,625 \\ x_2 &= 0,25 \\ x_1 &= 0,75 \end{aligned}}$$

I. ELIMINACIÓ GAUSSIANA EN DIMENSIÓ n

Considerem el SL:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ \vdots \qquad\qquad & \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{A = A^{(0)}} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_{b = b^{(0)}}$$

(i) Pas a SL triangular superior:

Suposem $a_{11} \neq 0$. En el 1er pas volem eliminar els coeficients de x_1 de la primera columna de ~~les~~ files 2 a n-èssima.

Prenem $m_{i1} = \dfrac{a_{i1}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}}$ ("multiplicador") i fem $eq_i - m_{i1} \cdot eq_1$, $i = 2, \ldots, n$.

És a dir:

$$\left.\begin{aligned} a_{ij}^{(1)} &= a_{ij}^{(0)} - m_{i1}a_{1j}^{(0)} \\ b_i^{(1)} &= b_i^{(0)} - m_{i1}b_1^{(0)}, \quad i = 2, \ldots, n \end{aligned}\right\}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11}^{(0)} & \cdots & & a_{1n}^{(0)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} \end{pmatrix}}_{A^{(1)}} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1^{(0)} \\ b_2^{(1)} \\ \vdots \\ b_n^{(1)} \end{pmatrix}}_{b^{(1)}}$$

En el segon pas, si $a_{22}^{(1)} \neq 0$, volem "0" a la 2ª columna de la fila 3 a la n-èssima.

Prenem $m_{i2} = \dfrac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}$ $i = 3, \ldots, n$. i fem $eq_i - m_{i2}eq_2$, $i = 3, \ldots, n$.

És a dir:

$$\left.\begin{aligned} a_{ij}^{(2)} &= a_{ij}^{(1)} - m_{i2}a_{2j}^{(1)} \\ b_i^{(2)} &= b_i^{(1)} - m_{i2}b_2^{(1)} \end{aligned} \quad i = 3, \ldots, n \right\} \text{ Tenim } A^{(2)}x = b^{(2)}$$

→ En el pas K-èssim, calculem $A^{(K)}x = b^{(K)}$

$$A^{(K)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(0)} & \cdots & & & a_{1n}^{(0)} \\ & a_{22}^{(1)} & \cdots & & a_{2n}^{(1)} \\ & & \ddots & & \\ & & a_{KK}^{(K-1)} & \cdots & a_{Kn}^{(K-1)} \\ & 0 & 0 & a_{K+1K+1}^{(K)} \cdots & a_{K+1n}^{(K)} \\ & & \vdots & \vdots & \\ & & 0 & a_{nK+1}^{(K)} \cdots & a_{nn}^{(K)} \end{pmatrix}; \quad b^{(K)} = \begin{pmatrix} b_1^{(0)} \\ b_2^{(1)} \\ \vdots \\ b_K^{(K-1)} \\ b_{K+1}^{(K)} \\ \vdots \\ b_n^{(K)} \end{pmatrix}$$

En el pas $(n-1)$-éssim obtenim:

$A^{(n-1)}x = b^{(n-1)}$ on $A^{(n-1)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(0)} & \cdots & a_{1n}^{(0)} \\ & \ddots & \vdots \\ \ominus & & a_{nn}^{(n-1)} \end{pmatrix}$; $b^{(n-1)} = \begin{pmatrix} b_1^{(0)} \\ b_2^{(1)} \\ \vdots \\ b_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$

SL triangular superior.

(ii) Resolució del SL triangular superior:

$$x_n = \frac{b_n^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}} \;;\; x_{n-1} = \frac{b_{n-1}^{(n-2)} - a_{n-1n}^{(n-2)} x_n}{a_{n-1n-1}^{(n-2)}} \;; \cdots \; x_1 = \frac{b_1^{(0)} - a_{1n}^{(0)} x_n - \cdots - a_{12}^{(0)} x_2}{a_{11}^{(0)}}$$

- En forma esquemàtica, l'algorisme s'escriu:

(i) Pas a forma ~~triangular~~ triangular:

per a $k = 1, \ldots, n-1$
- per a $i = k+1, \ldots, n$
  - $m_{ik} \leftarrow \dfrac{a_{ik}}{a_{kk}}$
  - per a $j = k+1, \ldots, n$
    - $a_{ij} \leftarrow a_{ij} - m_{ik} a_{kj}$
  - end j
  - $b_i \leftarrow b_i - m_{ik} b_k$
- end i

end k

(ii) Resoldre SL triang:

$x_n \leftarrow \dfrac{b_n}{a_{nn}}$

per a $k = n-1, \ldots, 1$
- $x_k \leftarrow \dfrac{b_k - \sum_{j=k+1}^{n} a_{kj} x_j}{a_{kk}}$

end k

<u>Nota</u>: A la implementació, ~~els~~ els $a_{ij}^{(k)}$ que anem obtenint es van substituint en els a_{ij} anteriors i els b_i també. // Podem guardar els m_{ij} en lloc dels "0" corresponents.

- Nombre d'operacions

(i) Triangularització:

- Per obtenir $A^{(n-1)}$:

. multiplicacions: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=k+1}^{n} \sum_{k+1}^{n} 1 = \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=k+1}^{n} (n-k) = \sum_{k=1}^{n-1} (n-k)^2 =$

$\displaystyle\sum_{r=1}^{n} r^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad = \frac{(n-1)n(2(n-1)+1)}{6} = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$

. Sumes: $\dfrac{(n-1)n(2n-1)}{6}$

. Divisions: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=k+1}^{n} 1 = \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) = \frac{n(n-1)}{2}$

- Per obtenir $b^{(n-1)}$:
  - Multiplicacions: $\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{i=k+1}^{n} 1 = \frac{n(n-1)}{2}$
  - Sumes: $\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{i=k+1}^{n} 1 = \frac{n(n-1)}{2}$

(ii) Resolució SL triangular: n^2

Nombre total: $\boxed{\frac{4n^3+9n^2-7n}{6}} \approx \frac{2}{3}n^3$

Exemple: $n=100$, treballem amb 10^9 oper/seg. (1 Gflop). Es triga:

$$\frac{2}{3}100^3\,\text{oper}\;\frac{\text{seg}}{10^9\,\text{oper}} = 0{,}0006\text{ seg}$$ (molt menys que amb Cramer)

* ESTRATÈGIES DE PIVOT:

Hem suposat que els pivots eren no nuls. Però podria no ser així:

Per exemple: $\left.\begin{array}{l} x_1+x_2+x_3=1 \\ x_1+x_2+2x_3=2 \\ x_1+2x_2+2x_3=1\end{array}\right\}$ (i) per $k=1$ $\left.\begin{array}{l} x_1+x_2+x_3=1 \\ x_3=1 \\ x_2+x_3=0\end{array}\right\}$ Aquí $a_{22}^{(1)}=0$!!! Intercanviem les F_2 i F_3 (i ja) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1+x_2+x_3=1 \\ x_2+x_3=0 \\ x_3=1\end{array}\right\}$

Si al pas i-èssim ($A^{(i-1)}$ a $A^{(i)}$), $a_{ii}^{(i-1)}=0$, llavors existeix algun $a_{ji}^{(i-1)} \neq 0$ de la columna i-èssima (ja que $\det A \neq 0$). Llavors intercanviem les files i-èsima i j-èssima i continuem.

D'altra banda, si el pivot és no nul, però molt petit, podem tenir problemes numèrics. Veiem un exemple: considerem el SL:

$$\begin{pmatrix} 10^{-5} & 1 \\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0\end{pmatrix}$$ que té per solució exacta: $\begin{cases} x_1 = -0{,}4999975\ldots \\ x_2 = 0{,}999995\ldots\end{cases}$

i suposem que treballem amb un computador de 3 dígits, i.e., cada nombre es representa per $0,{*}{*}{*}\times 10^p$. Aplicant Gauss:

$$a_{11}^{(0)} \neq 0 \Rightarrow m_{21} = -\frac{0{,}2\cdot 10^1}{0{,}1\cdot 10^{-4}} = -0{,}2\cdot 10^6$$

Llavors:

$$a_{22}^{(1)} = 0{,}1\cdot 10^1 - (-0{,}2\cdot 10^6)(0{,}1\cdot 10^1) = 0{,}200\cancel{001}\cdot 10^6$$

$$b^{(1)} = 0-(-0{,}2\cdot 10^6)(0{,}1\cdot 10^1) = 0{,}2\cdot 10^6$$

$$\begin{pmatrix} -10^{-5} & 1 \\ 0 & 0{,}2\cdot 10^{6} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0{,}2\cdot 10^{6} \end{pmatrix}$$

Resolent: $\boxed{x_2 = 1}$

$-10^{-5}x_1 + x_2 = 1 \Rightarrow \boxed{x_1 = 0} \Rightarrow$ Aprox. dolenta

Què passa? El m_{21} és molt gran (a_{11} és molt petit) i no deixa intervenir el a_{22}. És com si resolessim $\begin{pmatrix} -10^{-5} & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ de solució $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \end{cases}$

L'estratègia serà intercanviar, al principi, les equacions [Ex 1: Resolem: obtenim $x_1 = -0{,}5$ i $x_2 = 1$]

Així doncs, seguirem en el pas k-èssim una de les 2 estratègies:

a) Pivotatge parcial: triem r com el menor enter tq $|a_{rk}^{(k-1)}| = \max |a_{ik}^{(k-1)}|$, $k \le i \le n$. i intercanviem les files k i r.

b) Pivotatge total: triem r i s com els menors enters tals que $|a_{rs}^{(k-1)}| = \max |a_{ij}^{(k-1)}|$, $k \le i,j \le n$. i intercanviem les files k i r i les columnes k i s. Si el $\max|a_{ij}^{(k-1)}|$ s'assoleix en 2 o més a_{ij}, prendrem r, s tal que facin mínim $r + \frac{s}{n+1}$ $\Rightarrow$ A la pràctica, ~~aquest~~ aquesta requereix més temps i la primera resulta prou eficient.

De fet, utilitzarem una variant de la primera anomenada pivotatge parcial esglaonat.

c) Pivotatge parcial esglaonat: Vegem, primer, un exemple. Considerem el SL:

$$\begin{pmatrix} 1 & 10000 \\ 1 & 0{,}0001 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10000 \\ 1 \end{pmatrix}$$ que té la solució $x_1 = x_2 = 0{,}9999\ldots$

i treballem amb 3 dígits.

- 1er pas: $a_{11} = 1$ com a pivot i obtenim $\begin{pmatrix} 1 & 10000 \\ 0 & -10000 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10000 \\ -10000 \end{pmatrix} \overset{3\text{ dígits}}{\Rightarrow} \begin{cases} x_2 = 1 \\ x_1 = 0 \end{cases}$ (Ex. 2) dolenta.

Però si intercanviem les files:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0{,}0001 \\ 1 & 10000 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 10000 \end{pmatrix} \overset{(\text{ex. }3)}{\Longrightarrow} \text{s'obté } \begin{cases} x_2 = 1 \\ x_1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{bona.}$$

Voldríem triar el pivot de manera que els coef. d'A fossin comparables. En el nostre exemple, dividim ~~la~~ la eq per 10000: $\begin{pmatrix} 10^{-4} & 1 \\ 1 & 10^{-4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ pivotatge parcial sí que triarà el pivot adequat.

A la pràctica, no equilibrarem la matriu (no farem l'escalat a cada equació), només modificarem el pivotatge parcial i en el pas k-èssim triem:

$$\max_{k \le i \le n} \left| \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{S_i} \right| \quad \text{on } S_i = \max |a_{ij}^{(k-1)}|$$

i l'anomenarem pivotatge parcial esglaonat.

Exemple: Prenem el SL:

$$\overbrace{\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 4 & -3 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}}^{A_0}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- $K=1$:

$S_1 = \max |a_{1j}^{(0)}| = 3$

$S_2 = \max |a_{2j}^{(0)}| = 4$

$S_3 = \max |a_{3j}^{(0)}| = 3$

$\max_{1\le i\le 3} \left|\frac{a_{i1}^{(0)}}{S_i}\right| = \max\left(\frac{2}{3}, 1\right) = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Intercanviem 1^a i 2^a files. $\Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 & -3 \\ 2 & 3 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 5 & -5/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3/2 \\ 5/2 \end{pmatrix}$$

- $K=2$: $\tilde{S}_1 = 1$, $\tilde{S}_2 = 5$ | $\max(1,1) = 1 \Rightarrow$ No hi ha intercanvis:

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3/2 \\ -5 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{Solució: } \begin{cases} x_3 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_1 = 1/2 \end{cases}}$$

PROPIETATS DEL MÈTODE DE GAUSS:

- **Lema 1:**

Cada pas de l'eliminació gaussiana es pot expressar en forma matricial per

$$A^{(K)} = G^{(K)}A^{(K-1)}, \quad b^{(K)} = G^{(K)}b^{(K-1)}, \quad K = 1, \dots, n-1.$$

on

$$G^{(K)} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \Theta \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ \Theta & & -m_{K+1,K} & 1 & \\ & & \vdots & & \ddots \\ & & -m_{n,K} & \Theta & & 1 \end{pmatrix}$$

DEM:

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & & \Theta \\ -m_{21} & \ddots & \\ \vdots & \Theta & \\ -m_{n1} & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11}^{(0)} & \cdots & a_{1n}^{(0)} \\ \vdots & & \\ a_{n1}^{(0)} & \cdots & a_{nn}^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(0)} & \cdots & a_{1n}^{(0)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} \cdots & a_{2n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(1)} \cdots & a_{nn}^{(1)} \end{pmatrix}; \quad b^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & & \Theta \\ -m_{21} & \ddots & \\ \vdots & \Theta & \\ -m_{n1} & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1^{(0)} \\ \vdots \\ b_n^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1^{(0)} \\ b_2^{(1)} \\ \vdots \\ b_n^{(1)} \end{pmatrix}$$

Al pas K-èssim:

$$A^{(K)} = G^{(K)}A^{(K-1)} = \begin{pmatrix} 1 & & & \Theta \\ & 1 & & \\ \Theta & -m_{K+1,K} & \ddots & \\ & \vdots & & \\ & -m_{n,K} & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11}^{(0)} & \cdots & & \\ 0 & a_{K-1,K-1}^{(K-2)} & & \\ & 0 & a_{KK}^{(K-1)} \cdots & a_{Kn}^{(K-1)} \\ & & \vdots & \vdots \\ & & a_{nK}^{(K-1)} \cdots & a_{nn}^{(K-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(0)} & \cdots & & \\ 0 & a_{KK}^{(K-1)} & \cdots & a_{Kn}^{(K-1)} \\ & 0 & a_{K+1,K+1}^{(K)} & \cdots \\ & \vdots & & \\ & 0 & \cdots & a_{nn}^{(K)} \end{pmatrix}$$

El mateix per $b^{(K)}$

Corol·lari:

$$\underbrace{A^{(n-1)}}_{U} = G^{(n-1)}A^{(n-2)} = G^{(n-1)}G^{(n-2)}A^{(n-3)} = \underbrace{G^{(n-1)} \cdots G^{(1)}}_{\tilde{L}}A^{(0)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{A^{(0)} = \underbrace{(\tilde{L})^{-1}}_{L}U = LU}$$

on

$$U = \begin{pmatrix} a_{11}^{(0)} & \cdots & a_{1n}^{(0)} \\ & \ddots & \vdots \\ \Theta & & a_{nn}^{(0)} \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & & \Theta \\ & \ddots & \\ m_{ij} & & 1 \end{pmatrix}$$

En efecte:

$$L = (G^{(1)})^{-1} \cdots (G^{(n-1)})^{-1} \underset{\uparrow}{=} \begin{pmatrix} 1 & & \Theta \\ & \ddots & \\ m_{ij} & & 1 \end{pmatrix}$$

$$[G^{(k)}]^{-1} = \begin{array}{c} \\ k\{ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \Theta \\ & & 1 & & \\ \Theta & & m_{k+1,k} & \ddots & \\ & & \vdots & \Theta & \\ & & m_{n,k} & & 1 \end{pmatrix}$$

$$(G^{(1)})^{-1}(G^{(2)})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & \Theta \\ m_{21} & & \\ m_{31} & \Theta & \\ \vdots & & \\ m_{n1} & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & & \Theta \\ 0 & 1 & & \\ \vdots & m_{32} & & \\ \vdots & \vdots & \Theta & \\ 0 & m_{n2} & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & \Theta \\ m_{21} & 1 & & \\ \vdots & m_{32} & & \\ \vdots & \vdots & \Theta & \\ m_{n1} & m_{n2} & & 1 \end{pmatrix}$$

Proposició:

Els passos de l'eliminació de Gauss, sense intercanvis (pivotament), mantenen el valor del determinant, i.e.: $\det A^{(k)} = \det A^{(k-1)} = \cdots = \det A^{(0)}$, $k = 1, \dots, n-1$.

DEM:

$$\boxed{\det A^{(k)}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Lema 1}}}{=} \det(G^{(k)}A^{(k-1)}) = \underbrace{\det G^{(k)}}_{1\ (\text{triangular inferior})} \cdot \det A^{(k-1)} = \underbrace{\boxed{\det A^{(k-1)}}}_{\forall k} = \cdots = \det A^{0}.$$

*També és cert per als menors principals

Notació:

$$A = \begin{array}{c} m\{ \\ n-m\{ \end{array} \left(\begin{array}{c|c} \overbrace{A_{[m]11}}^{m} & \overbrace{A_{[m]12}}^{n-m} \\ \hline A_{[m]21} & A_{[m]22} \end{array} \right) \quad \text{amb} \begin{cases} A_{[m]11} \in M_{m\times n} \\ A_{[m]12} \in M_{m\times(n-m)} \\ A_{[m]21} \in M_{(n-m)\times m} \\ A_{[m]22} \in M_{(n-m)\times(n-m)} \end{cases}$$

- **Lema 2:**

Siguin $A, L \in M_{n\times n}$ amb L triangular inferior i sigui P la matriu producte $P = L\cdot A$. Llavors:

$$P_{[m]11} = L_{[m]11} A_{[m]11}$$

DEM:

$$\begin{pmatrix} P_{[m]11} & P_{[m]12} \\ P_{[m]21} & P_{[m]22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{[m]11} & \overset{=0}{L_{[m]12}} \\ L_{[m]21} & L_{[m]22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{[m]11} & A_{[m]12} \\ A_{[m]21} & A_{[m]22} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_{[m]11} = L_{[m]11} \cdot A_{[m]11} + \cancel{L_{[m]12} A_{[m]12}} \checkmark$$

Corol·laris (3)

A l'algorisme de Gauss, $\det(A^{(k)}_{[m]11}) = \det(A^{(0)}_{[m]11})$ $\forall k = 1, \dots, n-1$, $\forall m = 1, \dots, n$.

DEM:

Pel lema 1: $A^{(k)} = G^{(k)} A^{(k-1)} = \cdots = \underbrace{G^{(k)} \cdots G^{(1)}}_{L\text{ mat. triang. inf amb 1 a la diag.}} A^{(0)}$

Pel lema 2: $A^{(k)}_{[m]11} = L_{[m]11} \cdot A^{(0)}_{[m]11} \Rightarrow \det(A^{(k)}_{[m]11}) = \underbrace{\det L_{[m]11}}_{1} \det A^{(0)}_{[m]11}$ ✓

Proposició (P):

Sigui $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ regular (i.e $\det A \neq 0$). Llavors podem aplicar Gauss sense pivotament (intercanvis) $(a_{ii}^{(i-1)} \neq 0 \ \forall i)$. $\Leftrightarrow$ $\det(A_{[m]11}) \neq 0$, $\forall m = 1, \dots, n$ (i.e. els menors principals són no nuls).

DEM:

$\Rightarrow)$ Si podem per Gauss, $A^{(n-1)}$ és triangular superior amb $a_{ii}^{(i-1)}$ $\forall i = 1, \dots, n$ a la diagonal. Per tant, $\det(A_{[m]11}) \underset{\text{corol·lari 3}}{=} \det(A^{(n-1)}_{[m]11}) = \prod_{i=1}^{m} a_{ii}^{(i-1)} \neq 0$ (per hipòtesi: $a_{ii}^{(i-1)} \neq 0 \ \forall i$)

$\Leftarrow)$ Veiem-ho per inducció sobre el pas k:

- $k=1 \Rightarrow a_{11}^{(0)} \neq 0$? $\det A_{[1]11} = a_{11}^{(0)} \neq 0 \Rightarrow \checkmark$
- Suposem-ho cert per a $k-1$, veiem el pas k:

$$A^{(k-1)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(0)} & \cdots & a_{1k-1}^{(0)} & \cdots & & \\ 0 & & \vdots & & \vdots & \\ \vdots & & a_{k-1,k-1}^{(k-2)} & & & \\ & & 0 & a_{kk}^{(k-1)} & \cdots & a_{kn}^{(k-1)} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nk}^{(k-1)} & & a_{nn}^{(k-1)} \end{pmatrix}$$

Sabem que $a_{ii}^{(i-1)} \neq 0$ $\forall i = 1, \dots, k-1$, i volem veure $a_{kk}^{(k-1)} \neq 0$.

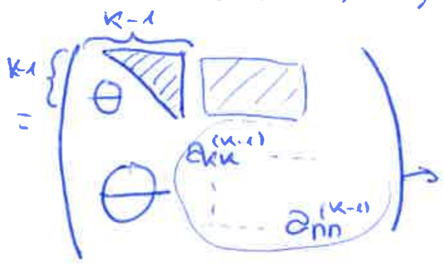
$$\underbrace{\det(A^{(k-1)}_{[k]11})}_{\underset{\text{corol·lari 3}}{=} \det(A_{[k]11}) \underset{\text{per hipòtesi}}{\neq} 0} = \underbrace{\det(A^{(k-1)}_{[k-1]11})}_{\underset{\text{per HI}}{\neq} 0} \cdot a_{kk}^{(k-1)} \Rightarrow a_{kk}^{(k-1)} \neq 0 \quad \boxtimes$$

Nota: Aquesta proposició ens mostra que el mètode de Gauss es pot aplicar (sense pivotaments) si i només si tots els menors principals d'A són no nuls. Aquesta condició és difícil de verificar a priori i de fet, és el mateix procés de Gauss que ens diu si cal fer intercanvis.
No obstant, podrem aplicar-ho a matrius simètriques definides positives i a les matrius estrictament diagonalment dominants (que apareixen a les EDP's).

* **MÈTODE DE GAUSS PER A MATRIUS SIMÈTRIQUES:**

Si A és simètrica, podem re-escriure l'algorisme de Gauss amb aproximadament la meitat de memòria i nombre d'operacions, ja que l'algorisme manté la simetria, és a dir, $A^{(k)}_{[k]22}$ és simètrica, $k = 1, \dots, n-1$.

Veiem-ho:

$A^{(k-1)} =$  $\rightarrow A_{[k-1]22}$

Per a $k = 1, \dots, n-1$
  Per a $i = k+1, \dots, n$
    $m_{ik} = \dfrac{a_{ik}}{a_{kk}}$
    Per a $j = k+1, \dots, n$
      $a_{ij} \leftarrow a_{ij} - m_{ik} a_{kj}$
    Fi j
  Fi i
Fi k

Per inducció sobre K:

* $K=1$, per a $i=2,\dots,n$, $j=2,\dots,n$,

$$a_{ji}^{(1)} = a_{ji}^{(0)} - m_{j1}\, a_{1i}^{(0)} \overset{A^{(0)}\text{ és simètrica}}{=} a_{ij}^{(0)} - \underbrace{\frac{a_{i1}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}}}_{m_{i1}}\, a_{1j}^{(0)} =$$

$$m_{j1} = \frac{a_{j1}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}}$$

$$= a_{ij}^{(0)} - m_{i1}\, a_{1j}^{(0)} = a_{ij}^{(1)} \quad \checkmark$$

* Suposem cert per a $K-1$, $A^{(K-1)}_{[K-1]22}$. Provem per K. per a $i=K+1,\dots,n$, $j=K+1,\dots,n$,

$$a_{ji}^{(K)} = a_{ji}^{(K-1)} - m_{jK}\, a_{Ki}^{(K-1)} \overset{A^{(K-1)}_{[K-1]22}\text{ és sim.}}{=} a_{ij}^{(K-1)} - \frac{a_{iK}^{(K-1)}}{a_{KK}^{(K-1)}}\, a_{Kj}^{(K-1)} = a_{ij}^{(K-1)} - m_{iK}\, a_{Kj}^{(K-1)} = a_{ij}^{(K)} \quad \checkmark$$

$$m_{jK} = \frac{a_{jK}^{(K-1)}}{a_{KK}^{(K-1)}}$$

<u>Gauss per a matrius simètriques</u>

per a $K=1,\dots,n-1$
 per a $i=K+1,\dots,n$
  $m_{iK} \leftarrow \dfrac{a_{iK}}{a_{KK}}$
  $b_i \leftarrow b_i - m_{iK} b_K$
  per a $j = \cancel{K}\ i,\dots,n$
   $a_{ij} \leftarrow a_{ij} - m_{iK} a_{Kj}$
  fi j
 fi i
fi K

H

Nota: Si A és simètrica, no podem assegurar que no cal fer intercanvi. Exemple:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

* GAUSS PER A MATRIUS SIMÈTRIQUES DEFINIDES POSITIVES:

<u>Def</u>: Una matriu A és definida positiva si i només si: $\vec{x}^T A \vec{x} > 0 \quad \forall \vec{x} \neq 0$.

Recordem el criteri de Sylvester: sigui A simètrica. A és definida positiva $\Leftrightarrow$ tots els menors principals són >0.

<u>Propietat</u>: Per la proposició (P), si A és simètrica definida positiva podem aplicar Gauss sense intercanvis. Veiem altres propietats.

<u>Lema</u>: Sigui A simètrica definida positiva:

(i) Les submatrius principals d'A són matrius simètriques definides positives.

(ii) $a_{ii} > 0 \quad \forall i = 1 \div n$

(iii) Les submatrius $\widetilde{A}^{(k)} = A^{(k)}_{[k]22}$, $k = 1, \dots, n-1$, trobades en aplicar el mètode de Gauss són simètriques definides positives.

(iv) $a_{ii}^{(i-1)} > 0 \quad i = 1 \div n$.

DEM:

(i) Directe per Sylvester → ✓.

(ii) Prenem $\vec{x} = \vec{e}^{(i)}$ de la base canònica: $\vec{e}^{(i)T} A \vec{e}^{(i)} = a_{ii}$, i per hipòtesi (A és simètrica definida positiva) $\Rightarrow \vec{x}^T A \vec{x} > 0 \Rightarrow \vec{e}^{(i)T} A \vec{e}^{(i)} = \boxed{a_{ii} > 0 \ \forall i}$

(iv) Pel corol·lari: 3 $\left[\det(A^{(k)}_{[m]11}) = \det(A_{[m]11}) \quad \begin{matrix} \forall k = 1, \dots, n-1 \\ \forall m = 1, \dots, n \end{matrix} \right]$

$$\det(A^{(k)}_{[m]11}) = \det(A_{[m]11}) \overset{\text{Per Sylvester}}{>} 0$$

$$A^{(k)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(0)} & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \cdots \\ \Theta & & a_{kk}^{(k-1)} \quad \boxed{\widetilde{A}^{(k)}} \end{pmatrix}$$

$$a_{11}^{(0)} > 0 \Rightarrow a_{22}^{(1)} > 0 \Rightarrow \cdots \Rightarrow a_{nn}^{(n-1)} > 0$$

$$\det(A^{(n-1)}_{[m]11}) = \prod_{i=1}^{m} a_{ii}^{(i-1)}$$

(iii) $\widetilde{A}^{(k)}$ són simètriques → vist / Veiem ara que són definides positives.

$$\det(A^{(k)}) = \det(A) > 0$$

$$\underbrace{\det(A^{(k)})}_{>0} = \prod_{i=1}^{k} a_{ii}^{(i-1)} \cdot \det \widetilde{A}^{(k)}_{[j]22} = \underbrace{\det(A^{(k)}_{[k]11})}_{>0} \det(\widetilde{A}^{(k)}_{[j]22}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \det(\widetilde{A}^{(k)}_{[j]22}) > 0 \quad \forall j = n-k, \dots, n, \quad \forall k = 1, \dots, n-1.$$

* MÈTODE DE GAUSS PER A MATRIUS ESTRICTAMENT DIAGONALMENT DOMINANTS PER FILES (edd).

Def: La matriu $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ és edd si $|a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|$, $\forall i = 1 \div n$.

Proposició:

Si $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ és edd, llavors és no singular.

DEM: Per reducció a l'absurd.

Suposem que A és singular: $\exists \vec{x} \neq \vec{0}$ tq $A\vec{x} = \vec{0}$ (*)

Sigui: x_k tq $|x_k| \geq |x_j|$ $j = 1, \dots, n$

Prenem la fila k-èssima:

$$\sum_{j=1, j\neq k}^{n} |a_{kj}| \underset{1}{<} |a_{kk}| \Rightarrow \sum_{j=1, j\neq k}^{n} |a_{kj}||x_j| \leq |x_k| \sum_{j=1, j\neq k}^{n} |a_{kj}| \underset{1}{<} |x_k||a_{kk}| \Rightarrow$$

$|x_j| \leq |x_k| \ \forall j$ (edd)

$$\Rightarrow \sum_{j=1, j\neq k}^{n} |a_{kj}||x_j| \overset{2}{<} |x_k||a_{kk}|$$

D'altra banda, de $(*)$, prenent la fila k-èssima:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j = 0 \Rightarrow a_{kk}x_k = -\sum_{j=1, j\neq k}^{n} a_{kj}x_j \Rightarrow |a_{kk}||x_k| = \left|-\sum_{j=1, j\neq k}^{n} a_{kj}x_j\right| \overset{\text{desigualtat triangular}}{\leq} \sum_{j=1, j\neq k}^{n} |a_{kj}||x_j| \overset{(2)}{\leq}$$

$$< |x_k||a_{kk}|$$

Per tant: $|x_k||a_{kk}| < |x_k||a_{kk}| \Rightarrow$ contradicció $\Rightarrow \boxed{A \text{ és no singular}}$ //

Proposició: Totes les submatrius principals d'una matriu edd són matrius edd i, per tant (per la proposició anterior), tots els menors principals són no nuls.

Proposició: Si A és edd, llavors podem aplicar Gauss sense intercanvis.

03 MÈTODES DE FACTORITZACIÓ ESQUEMES COMPACTES.

SL: $Ax = b$; $\det A \neq 0$

I. DESCOMPOSICIÓ L·U

Objectiu: Donat $Ax=b$, $\det A \neq 0$, volem la descomposició:

$$A = L \cdot U$$

on $L = \begin{pmatrix} 1 & & \Theta \\ & \ddots & \\ l_{ij} & & 1 \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} & & u_{ij} \\ & \ddots & \\ \Theta & & \end{pmatrix}$ (1)*

(Llavors $\underset{\neq 0}{\det A} = \underset{1}{\det L} \cdot \underset{\neq 0}{\det U} = \det U = u_{11} \cdot u_{22} \cdots u_{nn}$)

Resoldre $Ax = b$ equival a resoldre $(A = L\cdot U)$: $L \cdot \underbrace{Ux}_{y} = b \Leftrightarrow \begin{cases} Ly = b \\ Ux = y \end{cases}$ 2 SL triangulars

Nota:

1. Cadascun dels SL triangulars requereix n^2 operacions (en $Ly=b$, n operacions menys) 1's a la diagonal (ens estalviem divisions)

2. Si tenim diversos SL del tipus $Ax = b_1, \ldots, Ax = b_N$, amb la mateixa A, només cal fer una sola descomposició $A = L\cdot U$, mentre que amb Gauss repetiríem els càlculs cada vegada.

Proposició: Sigui A, $\det A \neq 0$, llavors:

(i) Si existeixen L, U com (1) tals que $A = L\cdot U$, llavors L i U són úniques.

(ii) Si tots els menors principals són no nuls (i.e. $\det(A_{[m]}) \neq 0 \ \forall m = 1, \ldots, n$), llavors existeix la descomposició $A = L\cdot U$.

DEM: (i) Suposem que $\exists L_1, L_2, U_1, U_2$ com (1) tq $A = L_1U_1 = L_2U_2 \overset{U_i, L_i \text{ no singulars} \Rightarrow \text{invertibles}}{\Leftrightarrow}$

$$\Leftrightarrow L_2^{-1}L_1U_1 = U_2 \Leftrightarrow \underbrace{L_2^{-1}L_1}_{\substack{\text{Per àlgebra lineal,} \\ \text{és una matriu triangular} \\ \text{inferior amb 1 a la diagonal}}} = \underbrace{U_2U_1^{-1}}_{\substack{\text{Per àlgebra lineal,} \\ \text{és una matriu} \\ \text{triangular superior}}} \Leftrightarrow L_2^{-1}L_1 = U_2U_1^{-1} = Id \Rightarrow$$

$\Rightarrow \boxed{L_2 = L_1 \text{ i } U_2 = U_1}$ // ⊠

(iii) Si $\det(A_{[m],1})\neq 0$ $\forall m=1\div n$ podem aplicar Gauss (proposició vista) i obtenim $A=L\cdot U$ on $L=\begin{bmatrix} 1 & & \ominus \\ & \ddots & \\ m_{ij} & & 1\end{bmatrix}$, $U=\begin{pmatrix} a_{11}^{(0)} & \cdots & a_{1n}^{(0)} \\ & \ddots & \vdots \\ \ominus & & a_{nn}^{(n-1)}\end{pmatrix}$ ✓☒

__Pregunta__: Què passa si $\det A\neq 0$ però A no admet la descomposició LU? Per exemple

$A=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\Rightarrow$ Cal intercanviar files i ja

__Pregunta__. Com podem fer la descomposició LU aplicant intercanvis?

__Def.__: Direm que una matriu $P\in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ és una matriu de permutació si les seves files o columnes són una reordenació de la identitat.

__Exemple__:

$$\underbrace{\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}}_{P}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{31}&a_{32}&a_{33}\\a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\end{pmatrix}$$; Multiplicar PA equival a fer intercanvi de files.

$$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}\overbrace{\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}}^{P}=\begin{pmatrix}a_{12}&a_{13}&a_{11}\\a_{22}&a_{23}&a_{21}\\a_{32}&a_{33}&a_{31}\end{pmatrix}$$; Multiplicar AP equival a fer intercanvi de columnes.

__Proposició__:

1. Si P és matriu de permutació, llavors $P^{-1}=P^{T}$.
2. Si A és una matriu regular ($\det A\neq 0$), llavors existeixen: P matriu de permutació, L, U com a ① tq:

$$PA=L\cdot U$$

DEM: Golub-VanLoan, "Matrix computations" || Roser t'estimo ♥

Per tant, resoldre $\boxed{Ax=b}\Leftrightarrow PAx=Pb=\hat{b}\Leftrightarrow LUx=\hat{b}\Leftrightarrow\boxed{\begin{cases}Ly=\hat{b}\\Ux=y\end{cases}}$

__Aplicacions__:

1. $\det A=(-1)^s\det U$, on s és el nombre d'intercanvis realitzats $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\det A=(-1)^s u_{11}\cdots u_{nn}}$$

2. Càlcul d'A^{-1}: Volem $A^{-1}=\underbrace{\mathrm{col}}_{\text{columnes}}(\overline{X}_1,\dots,\overline{X}_n)$ i sabem $AA^{-1}=Id\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow A\overline{X}_j=e_j$ $j=1,\dots,n$ És a dir, farem una sola factorització $PA=LU$; llavors $A\overline{X}_j=e_j\Leftrightarrow PA\overline{X}_j=LU\overline{X}_j\Leftrightarrow L\cancel{P}U\overline{X}_j=Pe_j\Leftrightarrow\begin{cases}Ly_j=Pe_j\\U\overline{X}_j=y_j\end{cases}$ $j=1\div n$.

\+ CÀLCUL DE P:

Per a cada pas de Gauss prenem una matriu P.

Exemple: Partim de $p = (1\ 2\ 3)$ vector

$Ax = b$; $P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ és a dir intercanviem 1ª i 2ª files. Prendriem $P_1 A \Rightarrow p = (2\ 1\ 3)$

Ara prenem $P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ és a dir intercanviem 2ª i 3ª files. Prendriem $\underbrace{P_2 P_1}_{P} A$ on

$$P = P_2 P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow p = (2\ 3\ 1)$$

Treballarem amb 1 únic vector (en lloc de $P_{n-1}, \dots, P_1$)

$$P^{-1} = P^T = \begin{array}{c} \begin{matrix} e_2 & e_3 & e_1 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}; \quad P = \begin{array}{c} e_2 \\ e_3 \\ e_1 \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Observem: $\hat{b} = Pb = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{No no farem servir}} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_2 \\ b_3 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{p(1)} \\ b_{p(2)} \\ b_{p(3)} \end{pmatrix}$

($\hat{b} = Pb$)

Exemple: Problema 4 llista problemes.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & 6 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, calcular P, L, U, amb Gauss amb pivotatge parcial esglaonat.

$p = (1\ 2\ 3\ 4)$ $\quad \max\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{6}, \frac{4}{4}\right) = \frac{4}{4} \Rightarrow$ intercanviem 1ª i 4ª files $p = (4\ 2\ 3\ 1)$

$$A \to \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Gauss}} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 1 \\ 1/4 & 3/2 & 3/4 & 7/4 \\ 3/4 & 1/2 & -3/4 & 21/4 \\ 1/4 & 3/2 & 7/4 & 15/4 \end{pmatrix}$$

m_{ij}

$\max\left(\frac{3/2}{7/4}, \frac{1/2}{21/4}, \frac{3/2}{15/4}\right) = \max\left(\frac{6}{7}, \frac{2}{21}, \frac{2}{5}\right) = \frac{6}{7}$ No fem intercanvis $\Rightarrow p = (4\ 2\ 3\ 1)$

$$\xrightarrow{\text{Gauss}} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 1 \\ 1/4 & 3/2 & 3/4 & 7/4 \\ 3/4 & 1/3 & -1 & 14/3 \\ 1/4 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$\max\left(\frac{1}{14/3}, \frac{1}{2}\right) = \max\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{14}\right) = \frac{1}{2}$ Intercanviem 3ª i 4ª files $p = (4\ 2\ 1\ 3)$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 1 \\ 1/4 & 3/2 & 3/4 & 7/4 \\ 1/4 & 1 & 1 & 2 \\ 3/4 & 1/3 & -1 & 14/3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Gauss}} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 1 \\ 1/4 & 3/2 & 3/4 & 7/4 \\ 1/4 & 1 & 1 & 2 \\ 3/4 & 1/3 & -1 & 20/3 \end{pmatrix}$$

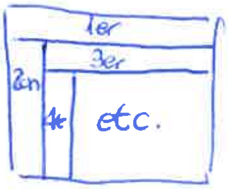
$$\boxed{P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1 & 1 & 0 \\ 3/4 & 1/3 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3/2 & 3/4 & 7/4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 20/3 \end{pmatrix}}$$

b) Comprovar $PA = LU$.

II. ESQUEMES COMPACTES (Sense intercanvis)

Objectiu: $A = L \cdot U$ on $L = \begin{pmatrix} m_{11} & & \Theta \\ \vdots & \ddots & \\ m_{1n} & \cdots & m_{nn} \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ \Theta & & u_{nn} \end{pmatrix}$

· Si $m_{KK} = 1 \ \forall K = 1, \dots, n$; llavors apliquem l'esquema següent:



És a dir: de la 1ª fila d'A $\xrightarrow{\text{obtenim}}$ 1ª fila d'U (resolent)
de la 1ª columna d'A $\longrightarrow$ 1ª columna de L
de la 2ª fila d'A $\longrightarrow$ 2ª fila d'U
de la 2ª columna d'A $\rightarrow$ 2ª columna de L.

És a dir: · $(a_{11} \cdots a_{1n}) = (u_{11} \cdots u_{1n}) \rightarrow u_{1j} = a_{1j} \quad j = 1 \div n$.

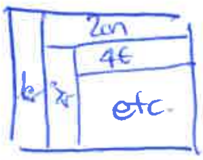
· $m_{i1} u_{11} = a_{i1} \quad \forall i = 2 \div n \Rightarrow m_{i1} = \dfrac{a_{i1}}{u_{11}}$

etc.

s'obté: $\begin{cases} u_{kj} = a_{kj} - \displaystyle\sum_{p=1}^{k-1} m_{kp} u_{pj} & j = k, \dots, n. \\ m_{ik} = \dfrac{a_{ik} - \sum_{p=1}^{k-1} m_{ip} u_{pk}}{u_{kk}} & i = k+1, \dots, n \end{cases}$

Anomenat mètode de Doolittle.

· Si imposem $u_{KK} = 1 \ \forall K = 1 \div n$; procediríem:



$\begin{cases} m_{ik} = a_{ik} - \displaystyle\sum_{p=1}^{k-1} m_{ip} u_{pk} & i = k, \dots, n \\ u_{kj} = \dfrac{a_{kj} - \sum_{p=1}^{k-1} m_{kp} u_{pj}}{m_{kk}} & j = k+1, \dots, n \end{cases}$

Mètode de Crout.

Nota:

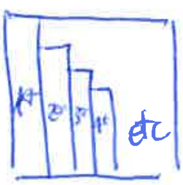
1. Podríem obtenir els altres mètodes imposant altres valors de les m's o u's.
2. Es pot provar que el nombre d'operacions és també aproximadament $\frac{2}{3} n^3$.

Factorització si A és simètrica

Fem la descomposició (si existeix)

$A = L D L^T$ on $L = \begin{pmatrix} 1 & & \Theta \\ & \ddots & \\ l_{ij} & & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} d_{11} & & \Theta \\ & \ddots & \\ \Theta & & d_{nn} \end{pmatrix}$

L'algorisme:



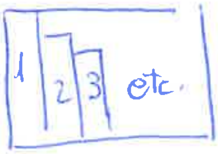
$\begin{cases} k = 1, \dots, n \\ d_{kk} = a_{kk} - \displaystyle\sum_{r=1}^{k-1} l_{kr}^2 d_{rr} \\ l_{ik} = \dfrac{1}{d_{kk}} \left[a_{ik} - \displaystyle\sum_{r=1}^{k-1} l_{ir} d_{rr} l_{kr} \right] & i = k+1, \dots, n \end{cases}$

Llavors $Ax = b \Leftrightarrow L\underbrace{DL^T x}_{y} = b \Leftrightarrow \begin{cases} Ly = b \\ L^T x = D^{-1} y \end{cases}$

Factorització si: A és simètrica definida positiva. Mètode de Cholesky

Prenem $\mathcal{L} = LD^{1/2}$ i es té $A = \mathcal{L}\mathcal{L}^T$ on $\mathcal{L} = \begin{pmatrix} l_{11} & & \Theta \\ \vdots & \ddots & \\ l_{1n} & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix}$

i procedim:



$$l_{11}^2 = a_{11} \longrightarrow l_{11} = a_{11}^{1/2}$$

$$l_{i1} = \frac{a_{i1}}{l_{11}} \quad i = 2, \dots, n$$

2ª col. $\underbrace{l_{21}}\, l_{12} + l_{22}^2 = a_{22} \longrightarrow l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{21}^2}$ ($l_{12} = l_{21}$)

$$l_{i1} l_{12} + l_{i2} l_{22} = a_{i2} \longrightarrow l_{i2} = \frac{a_{i2} - l_{i1} l_{21}}{l_{22}}$$

$i = 3 \div n$

Columna j-èssima

$$\left.\begin{aligned} a_{jj} &= \sum_{k=1}^{j} l_{jk}^2 \\ a_{ij} &= \sum_{k=1}^{j} l_{ik} \underbrace{l_{kj}}_{l_{jk}} \end{aligned}\right\} i = j+1, \dots, n$$

L'algorisme és:

per a $j = 1, \dots, n$

$$l_{jj} = \sqrt{a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{jk}^2}$$

per a $i = j+1, \dots, n$

$$l_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} l_{jk}}{l_{jj}}$$

end i

end j

Nota 1. Es pot provar que les quantitats que apareixen dins l'arrel són > 0 (Ref. Stoer: "Numerical analysis")

2. Llavors $Ax = b \Leftrightarrow \mathcal{L}\mathcal{L}^T x = b \Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{L} y = b \\ \mathcal{L}^T x = y \end{cases}$

3. El nombre d'operacions és (per obtenir $\mathcal{L}$)

$$\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{5n}{6} + \underset{\text{arrels}}{n} \quad \text{(aprox. la meitat)}$$

Exemple:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 13 & 11 & 11 \\ 11 & 13 & 11 \\ 11 & 11 & 13 \end{pmatrix}}_{A = A^T \text{ definida positiva}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 9 \\ 13 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = \begin{pmatrix} 3,6055 & 0 & 0 \\ 3,0508 & 1,9216 & 0 \\ 3,0508 & 0,8808 & 1,7078 \end{pmatrix} \text{ llavors } \begin{aligned} y_1 &= 3,6056\dots \\ y_2 &= -1,0408\dots \\ y_3 &= 1,7079\dots \end{aligned} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} x_1 &= 0,9999 \\ x_2 &= -1,000 \\ x_3 &= 1,0000 \end{aligned}\right\} \text{ Sol. exacta: } \begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_2 &= -1 \\ x_3 &= 1 \end{aligned}$$

04 Sistemes mal condicionats. Anàlisi de l'error

La idea és "estudiar" la solució obtinguda sense conèixer l'exacta. Diguem, en primer lloc, que hi ha sistemes lineals, "mal condicionats" on "no podem esperar" tenir una bona solució.

Def.: Direm que un sistema lineal està mal condicionat si petits canvis en els coeficients produeixen grans canvis a la solució.

Exemple:

Considerem el SL:

$$\begin{cases} 0{,}832\,x_1 + 0{,}448\,x_2 = 1 \\ 0{,}784\,x_1 + 0{,}421\,x_2 = 0 \end{cases}$$

Apliquem pivotatge parcial (el sistema està ben escalat); treballem amb 3 dígits.

$$m_{21} = \frac{0{,}784}{0{,}832} = 0{,}942 \qquad b_2^{(1)} = 0 - 0{,}942 \cdot 1 = -0{,}942$$

$$a_{22}^{(1)} = 0{,}421 - 0{,}942 \cdot 0{,}448 = -0{,}001$$

El SL triangular és:

$$\left.\begin{aligned} 0{,}832\,x_1 + 0{,}448\,x_2 &= 1 \\ -0{,}001\,x_2 &= -0{,}942 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} x_1 &= -506 \\ x_2 &= 942 \end{aligned}$$

La solució exacta és $\begin{cases} x_1 = -439 \\ x_2 = 817 \end{cases}$ $\neq$ $\Rightarrow$ El SL és mal condicionat.

Si prenem el SL:

$$\begin{cases} 0{,}832\,x_1 + 0{,}448\,x_2 = 1 \\ 0{,}784\,x_1 + (0{,}421+\varepsilon)\,x_2 = 0 \end{cases}$$

Si ε creix de 0 a 0,0012, la segona recta gira i esdevé paral·lela a la primera.

Pregunta: Com donar una "mesura" que ens indiqui el mal condicionament del sistema?

La petitesa del determinant sembla ser un bon indicador. A l'exemple:

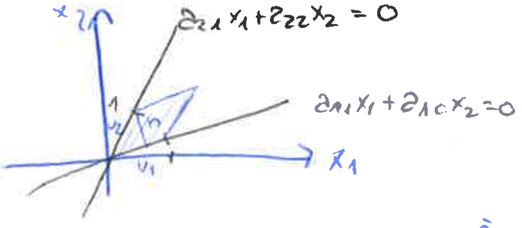
$\det A = 0{,}00096$ molt proper a $0 \Rightarrow$ mal condicionat!

Nota: Fins i tot això pot ser enganyós. Per exemple, prenem el SL:

$$\begin{cases} 10^{-10}\,x_1 = 0 \\ 10^{-10}\,x_2 = 0 \end{cases}$$ rectes perpendiculars (òptimament condicionat) amb $\det A = 10^{-20}$

- El que farem com a "millor" indicador és prendre el determinant de la matriu "convenientment" escalada.

En efecte, una bona mesura del "quasi-paral·lelisme" de les dues rectes és l'angle que formen o equivalentment l'àrea del paral·lelogram.



$$\text{Àrea} = \begin{vmatrix} \frac{a_{11}}{\alpha_1} & \frac{a_{12}}{\alpha_1} \\ \frac{a_{21}}{\alpha_2} & \frac{a_{22}}{\alpha_2} \end{vmatrix} \quad \text{on} \begin{cases} \alpha_1 = \sqrt{a_{11}^2+a_{12}^2} \\ \alpha_2 = \sqrt{a_{21}^2+a_{22}^2} \end{cases}$$

Àrea $= |\vec{u}_1 \times \vec{u}_2|$

Aquesta àrea varia de 0 (rectes paral·leles) a 1 (rectes perpendiculars).

En $\mathbb{R}^3$:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{array}\right\} \text{Volum del paral·lelepípede:} \quad V = \begin{vmatrix} \frac{a_{11}}{\alpha_1} & \frac{a_{12}}{\alpha_1} & \frac{a_{13}}{\alpha_1} \\ \frac{a_{21}}{\alpha_2} & \frac{a_{22}}{\alpha_2} & \frac{a_{23}}{\alpha_3} \\ \frac{a_{31}}{\alpha_3} & \frac{a_{32}}{\alpha_3} & \frac{a_{33}}{\alpha_3} \end{vmatrix}$$

Norma del vector.

En $\mathbb{R}^n$: SL de n eqs.

$$V = \begin{vmatrix} \frac{a_{11}}{\alpha_1} & \cdots & \frac{a_{1n}}{\alpha_1} \\ \vdots & & \\ \frac{a_{n1}}{\alpha_n} & \cdots & \frac{a_{nn}}{\alpha_n} \end{vmatrix} \quad \text{on} \quad \alpha_i = \sqrt{a_{i1}^2 + \cdots + a_{in}^2}$$

V és el "volum" d'un "paral·lelepípede" de costat 1, n-dimensional, determinat per les equacions del SL. V varia de 0 (si dos o més costats són coincidents) a 1 (els costats són perpendiculars entre sí).

| Si V és proper a 0, SL mal condicionat.
| Si V és proper a 1, SL ben condicionat.

($\alpha \propto$ Àrea)

- Veiem ara una altra manifestació de mal condicionament:

Sigui $\tilde{x}$ la solució aproximada de $Ax=b$. Definim el vector residual $r = b - A\tilde{x}$

observem que $r = b - A\tilde{x} = Ax - A\tilde{x} = A(x-\tilde{x})$ Atenció! Si $\tilde{x} \simeq x$ llavors r es petit.

Però si r és petit i el sistema està mal condicionat, podem tenir $\tilde{x}$ molt dolenta. //

Exemple: $Ax=b$

$$A = \begin{pmatrix} 1{,}2969 & 0{,}8648 \\ 0{,}2161 & 0{,}1441 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0{,}8642 \\ 0{,}1440 \end{pmatrix} \quad \text{Prenem } \tilde{x} = \begin{pmatrix} 0{,}9911 \\ -0{,}4870 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Llavors $r = A\tilde{x} - b = \begin{pmatrix} -10^{-8} \\ 10^{-8} \end{pmatrix}$

Però la solució és $x = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$!!! A és propera a singular.

$$A^{-1} = 10^8 \begin{pmatrix} 0,1441 & -0,8648 \\ -0,2161 & 1,2969 \end{pmatrix}$$

NORMES VECTORIALS i NORMES MATRICIALS

Def: Una norma a E (espai vectorial real) és una aplicació:

$$\| \ \| : E \longrightarrow \mathbb{R}^+$$
$$x \longmapsto \|x\|$$

que satisfà:

1. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad \forall x \in E$
2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\| \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in E$
3. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall (x,y) \in E$

Def: Si $E = \mathbb{R}^n$, en direm norma vectorial i les més usuals són:

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|, \quad \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2} = \sqrt{x^T x} \text{ (norma euclidiana)}, \quad \|x\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |x_i|$$

o la norma de Hölder: $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p}, \ p \geq 1.$

Def: Una norma matricial és una norma a $E = M_{n\times n}(\mathbb{R})$, que sigui multiplicativa, i.e. que compleixi:

$$\|A \cdot B\| \leq \|A\| \|B\| \quad \forall A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R}).$$

Def: Una norma matricial $\| \ \|$ és consistent amb una norma vectorial (que denotem igual $\| \ \|$) si: $\|Ax\| \leq \|A\| \|x\| \quad \forall A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) \ \forall x \in \mathbb{R}^n$.

- Treballarem amb normes matricials consistents.
- Donada una norma vectorial $\| \ \|$, sempre es pot definir una norma matricial consistent amb ella a partir de:

$$\|A\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

i s'anomena norma matricial subordinada (induïda) a la norma vectorial.

Nota: Amb aquesta definició es compleix $\|Ax\| \leq \|A\| \|x\|$:

En efecte, $\forall x \neq 0$:

$$\frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \left\| A \frac{x}{\|x\|} \right\| \leq \max_{\|y\|=1} \|Ay\| = \|A\| \Rightarrow \|Ax\| \leq \|A\| \|x\| \ \checkmark$$

Exemples: $\|A\|_1 = \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$ (Columnes), $\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$ (files)

$\|A_2\| = \sqrt{\underset{\text{rad espectral}}{\rho}(A^TA)} = \sqrt{\max_{1\le i\le n} |\rho_i|}$, on $\rho_1, \dots, \rho_n$ són els VAP d'A^TA.

PROPAGACIÓ DELS ERRORS EN LES DADES

Suposem que volem resoldre $Ax=b$, $\det A \neq 0$, $b\neq 0$, però tenim $A+\delta A$, $b+\delta b$. Llavors no tindrem x, sinó $x+\delta x$ t.q.:

$$(A+\delta A)(x+\delta x) = b+\delta b$$

Volem una estimació de δx:

$$\cancel{Ax} + A\delta x + \delta A(x+\delta x) = \cancel{b} + \delta b \Rightarrow \delta x = A^{-1}(\delta b - \delta A(x+\delta x)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|\delta x\| = \|A^{-1}(\delta b - \delta A(x+\delta x))\| \underset{\substack{\text{Norma multiplicativa}\\ \text{i consistent}}}{\le} \|A^{-1}\|\,\|\delta b\| + \|A^{-1}\|\cdot\|\delta A\|\cdot\|x+\delta x\| \quad (1)$$

D'altra banda, de $b=Ax \Rightarrow \|b\| = \|Ax\| \le \|A\|\cdot\|x\| \Rightarrow \frac{1}{\|x\|} \le \frac{\|A\|}{\|b\|}$ (2)

$$\left.\begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \overset{(1)}{\le} \frac{\|A^{-1}\|\,\|\delta b\|}{\|x\|} + \frac{\|A^{-1}\|\cdot\|\delta A\|\cdot\|x+\delta x\|}{\|x\|} \overset{(2)}{\le}$$

$$\le \frac{\|A\|\|A^{-1}\|\,\|\delta b\|}{\|b\|} + \frac{\|A\|\|A^{-1}\|\,\|\delta A\|\cdot\|x+\delta x\|}{\|A\|\,\|x\|}$$

Definim $\mu(A) = \|A\|\|A^{-1}\| = \text{cond}(A)$ el nombre de condició de la matriu A.

$$\boxed{\left\|\frac{\delta x}{\|x\|}\right\| \le \mu(A)\left[\frac{\|\delta b\|}{\|b\|} + \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}\cdot\underbrace{\frac{\|x+\delta x\|}{\|x\|}}_{\simeq 1}\right]}$$

Interpretació: Si prenem $\|x+\delta x\| \simeq \|x\|$, llavors $\mu(A)$ representa el factor màxim d'amplificació dels errors relatius d'A i de b. O dit d'altra manera, $\mu(A)$ és un indicador de que el sistema està ben o mal condicionat.

Exemple: En el SL d'abans $A = \begin{pmatrix} 1,2969 & 0,8648 \\ 0,2161 & 0,1441 \end{pmatrix}$ $b = \begin{pmatrix} 0,8642 \\ 0,1440 \end{pmatrix}$

Tenim A, A^{-1} $\mu(A) = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty \simeq 3,3\cdot 10^8$ molt gran!! $\Rightarrow$ SL malcondicionat

Propietats:

Proposició: $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$

(i) $\mu(I) = 1$

(ii) $\mu(A) \geq 1$

DEM:

(i) $\mu(I) \underset{\text{def}}{=} \|I\|\|I^{-1}\| = \|I\|^2 = 1$ ⊠

$$\|I\| = \max_{\|x\|=1} \|Ix\| = \max_{\|x\|=1} \|x\| = 1$$

(ii)

$$1 = \|I\| = \|AA^{-1}\| \leq \|A\|\|A^{-1}\| = \mu(A)$$ ⊠

Proposició: $\forall A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, $u \in \mathbb{R}^n$.

1. $\rho(A) \leq \|A\|$ (on $\rho(A) = \max_{\lambda_i \text{ VAP d'A}} |\lambda_i|$)

2. $\|(I-A)u\| \geq (1-\|A\|)\|u\|$.

DEM:

1. Sigui λ VAP d'A de VEP $\vec{x} \neq \vec{0}$: $A\vec{x} = \lambda\vec{x} \Rightarrow \underbrace{\|\lambda\vec{x}\|}_{=|\lambda|\|\vec{x}\|} = \|A\vec{x}\| \leq \|A\|\|\vec{x}\| \Rightarrow$

$\Rightarrow |\lambda| \leq \|A\| \quad \forall \lambda$ VAP d'A $\Rightarrow \max_{\lambda_i \text{ VAP d'A}} |\lambda_i| \leq A \Rightarrow \rho(A) \leq \|A\|$ ⊠

2. $(I-A)\vec{u} = \vec{u} - A\vec{u}$

$\hookrightarrow \|(I-A)\vec{u}\| = \|\vec{u} - A\vec{u}\| \underset{\|x-y\| \geq \|x\|-\|y\|}{\geq} \|\vec{u}\| - \|A\vec{u}\| \underset{\|A\vec{u}\| \leq \|A\|\|\vec{u}\|}{\geq} \|u\| - \|A\|\|\vec{u}\| = \|u\|(1-\|A\|)$ ✓ ⊠

5) MÈTODES D'ORTOGONALITZACIÓ. SISTEMES LINEALS SOBREDETERMINATS

Objectiu:

(i) Treballar amb matrius ortogonals.

(ii) Resoldre SL determinats i sobredeterminats.

(iii) Factorització QR, on Q matriu ortogonal i R matriu triangular.

(iv) Aproximació.

Def. $Q \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ es diu ortogonal si $Q^TQ = Id$, és a dir, $Q^{-1} = Q^T$.

Veiem algunes propietats.

Proposició: Sigui Q ortogonal.

(a) Q és regular.

(b) $Q^T = Q^{-1}$ és ortogonal.

(c) P, Q són ortogonals, llavors $P \circ Q$ és ortogonal.

(d) $\|Q\vec{x}\|_2 = \|\vec{x}\|_2 \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$.

(e) $\|QA\|_2 = \|A\|_2 \quad \forall A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$

DEM:

(a) De la def: $Q^TQ = I \Rightarrow \det(Q^TQ) = \det I = 1 \Rightarrow \det Q \neq 0 \Rightarrow Q$ regular $\boxtimes$

(b) $(Q^T)^T Q^T = Q Q^{-1} = I$ ✓ $\boxtimes$

(c) $(PQ)^T (PQ) = Q^T P^T P Q = Q^{T} \cdot I Q = I$ ✓ $\boxtimes$

(d) $\|Qx\|_2^2 = (Qx, Qx) = (Qx)^T Qx = x^T \overbrace{Q^TQ}^{I} x = x^Tx = \langle x,x\rangle = \|x\|_2^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \|Qx\|_2 = \|x\|_2$ ✓ $\boxtimes$

(e) $\|QA\|_2 = \max\limits_{\|x\|_2=1} \|QAx\|_2$

· Sigui x tq $\|x\|_2 = 1$, $\|QA\|_2 = \|QAx\|_2$ llavors $\|QA\|_2 = \|QAx\| \overset{d)}{=} \|Ax\|_2 \leq \|A\|_2 \|x\|_2 \underset{\|x\|=1}{\Rightarrow}$ $\|QA\|_2 \leq \|A\|_2$.

Falta $\|A\|_2 = \|Ay\|_2$

· D'altra banda, sigui y tal que $\|y\|_2 = 1 \Rightarrow \|A\|_2 = \|Ay\|_2 \Rightarrow \|Ay\|_2 = \|QAy\|_2 \leq$ $\leq \|QA\|_2 \|y\|_2 \Rightarrow \|A\|_2 \leq \|QA\|_2$

Com $\|QA\|_2 \leq \|A\|_2$ i $\|A\|_2 \leq \|QA\|_2 \Rightarrow \|A\|_2 = \|QA\|_2$ $\boxtimes$

Els mètodes d'ortogonalització estan basats en la descomposició $A = QR$, Q ortogonal, R triangular.

Aplicació:

- SL determinats
- SL sobredeterminats.

(i) SL determinats (compatible)

$Ax = b$, $\det A \neq 0$, farem 2 passos ($\exists!$ solució X):

1) Factorització $A = QR$.
2) Resoldre $Ax = b \Leftrightarrow QRx = b \Leftrightarrow Rx = Q^Tb$ (un únic SL triangular)
   ↳ Més car computacionalment que Gauss degut a $A = QR$.

(ii) SL sobredeterminats

Donada una matriu $A \in M_{m \times n}$, $m \geq n$; un vector $\vec{b}$, $m \times 1$, volem trobar $\vec{x}$ tq

$A\vec{x} = \vec{b}$ impossible, en general.

Volem trobar "la millor $\vec{x}$ possible". El mètode de mínims quadrats calcula $\vec{x}$ tq:

$\|\vec{r}\|_2^2 = \|\vec{b} - A\vec{x}\|_2^2$ sigui mínima.

La $\vec{x}$ ve caracteritzada pel següent.

Teorema:

Sigui $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $\vec{b}$, $m\times 1$. Llavors, si $\vec{x}$ satisfà:

$$A^T(b-Ax)=0 \text{ , és a dir, } A^TAx=A^Tb.$$

es té que $\forall y$ vector, se satisfà:

$$\|b-Ax\|_2 \le \|b-Ay\|_2$$

és a dir, $\vec{x}$ és "solució mínim quadràtica".

DEM: Escrivim $r_x = b-Ax$, $r_y = b-Ay$. Llavors:

$$r_y = b-Ay = (b-Ax)+(Ax-Ay) = r_x + A(x-y)$$

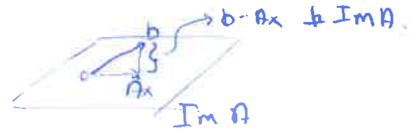
$$\|r_y\|_2^2 = \underset{\langle r_y, r_y\rangle}{r_y^T r_y} = (r_x + A(x-y))^T(r_x + A(x-y)) = r_x^Tr_x + \cancel{r_x^TA(x-y)} + \cancel{(x-y)^TA^Tr_x} + (x-y)^TA^TA(x-y)$$

Per hipòtesi: $A^T(b-A\cancel{x})=0 \Rightarrow A^Tr_x = 0 \Rightarrow r_x^TA = 0$

$$\|r_y\|_2^2 = \|r_x\|_2^2 + \underbrace{\|A(x-y)\|_2^2}_{\geq 0} \Rightarrow \|r_x\|_2^2 \le \|r_y\|_2^2 \Rightarrow \|b-Ax\|_2 \le \|b-Ay\|_2 \quad \forall y \text{ vector} \ \boxtimes$$

Interpretació: De $A^T(b-Ax)=0 \Rightarrow z^TA^T(b-Ax)=0 \ \forall z \Rightarrow (Az)^T(b-Ax)=0 \ \forall z$.

És a dir, el vector residual $b-Ax$, amb x solució mínim quadràtica, és ortogonal a tots els vectors del subespai $\text{Im}A = \{Az, \forall z\}$.



Fem la projecció ortogonal de b sobre $\text{Im}A$ i obtenim Ax.

Així doncs, per trobar la $\vec{x}$ solució mínim quadràtica del SL sobredeterminat $Ax=b$, cal resoldre $\boxed{\underset{n\times n}{A^TA}\cancel{x} = A^Tb}$ sistema d'equacions normals.

Nota: Quan A^TA és no singular, podem resoldre el SL d'equacions normals $(n\times n)$ o bé per Cholesky o bé per Gauss amb una matriu simètrica.

Teorema:

La matriu A^TA és no singular $\Leftrightarrow$ rang $A = n$, és a dir, les columnes d'A són l.i.

DEM: $\Leftarrow$) Si rang $A=n \Rightarrow \forall x\neq 0$, $Ax\neq 0 \Rightarrow x^TA^TAx = x^T(A^TA)x = (Ax)^TAx = \|Ax\|_2^2 \Rightarrow$

$\underset{Ax\neq 0}{\Rightarrow} \|Ax\|>0 \overset{\text{és a dir}}{\Rightarrow} A^TA$ és simètrica i def. positiva $\underset{\text{vist usant Criteri de Sylvester}}{\Rightarrow}$ $\det(A^TA)\neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{A^TA \text{ és no singular}}$ $\boxtimes$

$\Rightarrow$) Suposem que les columnes d'A són LD's. Llavors $\exists \vec{x_0} \neq 0$ t.q. $A\vec{x_0} = 0 \Rightarrow A^TA\vec{x_0} = 0$,
$\Rightarrow A^TA$ és singular!! $\Rightarrow$ A^TA regular $\Rightarrow$ rang $A = n$ $\boxtimes$.

Corol·lari: Donat $Ax=b$ sistema lineal sobredeterminat. Si rang $A=n$, llavors $A^TAx = A^Tb$ té una única solució que és la solució mínim-quadràtica.

Exemple: 19 $M(NO) = 30{,}006$, $M(N_2O) = 44{,}013$, $M(NO_2) = 46{,}006$, $M(N_2O_3) = 76{,}012$, $M(N_2O_5) = 108{,}010$; $M(N_2O_4) = 92{,}011$.

Volem trobar $\underbrace{A(N)}_{x}$ i $\underbrace{A(O)}_{y}$

$$\left.\begin{array}{l} x+y = 30.006 \\ 2x+y = 44.013 \\ x+2y = 46.006 \\ 2x+3y = 76.012 \\ 2x+5y = 108.010 \\ 2x+4y = 92{,}011 \end{array}\right\} \quad Ax=b \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 2 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} 30{,}006 \\ 44{,}013 \\ 46{,}006 \\ 76{,}012 \\ 108{,}010 \\ 92{,}011 \end{pmatrix}, \; x = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Resolem el SL d'eqs normals:

$$A^TA\vec{x} = A^Tb \Rightarrow A^TA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 2 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 29 \\ 29 & 56 \end{pmatrix}$$

$$A^Tb = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 30{,}006 \\ 44{,}013 \\ 46{,}006 \\ 76{,}012 \\ 108{,}010 \\ 92{,}011 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 716{,}104 \\ 1302{,}161 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = 14{,}0669 \\ y = 15{,}99929 \end{cases}}$$

APROXIMACIÓ DISCRETA PEL MÈTODE DELS MÍNIMS QUADRATS

Preliminars: Treballarem amb funcions, i més concretament amb funcions definides a una xarxa de valors de x $(x_0, \dots, x_m)$.

Def.: Donat un conjunt de funcions $\varphi_0(x), \dots, \varphi_n(x)$, $\forall x \in I$, i $x_k \in I$ $\forall k = 0 \div m$ direm que el conjunt de funcions $\{\varphi_i(x)\}_{i=0\div n}$ és linealment independent (LI) si:

$$\sum_{j=0}^{n} a_j \varphi_j(x) = 0, \; \forall x \in I \iff a_j = 0 \; \forall j = 0 \div n$$

Lema: $\{\varphi_j(x)\}_{j=0\div n}$ és L.I $\iff$ el conjunt de vectors $\{\varphi_j(x_k), k=0\div m\}_{j=0\div n}$ és LI.

$$\left(\left\{\underbrace{\begin{pmatrix} \varphi_0(x_0) \\ \vdots \\ \varphi_0(x_m) \end{pmatrix}}_{\vec{v_0}}, \dots, \underbrace{\begin{pmatrix} \varphi_n(x_0) \\ \vdots \\ \varphi_n(x_m) \end{pmatrix}}_{\vec{v_n}}\right\} \text{ són LI.}\right)$$

DEM: Prenem $a_0\vec{v_0} + \dots + a_n\vec{v_n} = 0$, cal veure $a_j = 0$ $\forall j = 0 \div n$.

$\Rightarrow$)

$$\sum_{j=0}^{n} a_j \vec{v_j} = 0 \Rightarrow \sum_{j=0}^{n} a_j \varphi_j(x_k) = 0 \quad \forall k = 0 \div m \underset{\substack{\text{per def.} \\ \{\varphi_j(x)\}_{j=0\div n} \, LI}}{\overset{\text{prenent } x=x_k}{\Longrightarrow}} a_j = 0 \quad \forall j = 0 \div n \quad \checkmark \boxtimes$$

$\Longleftarrow$)

Prenent: $\sum_{j=0}^{n} a_j \varphi_j(x) = 0$, cal veure que $a_j = 0 \ \forall j = 0 \div n$.

Avaluant $\varphi(x)$ en $x = x_k$, $\forall k = 0 \div m$

$$a_0 \underbrace{\begin{pmatrix} \varphi_0(x_0) \\ \vdots \\ \varphi_0(x_m) \end{pmatrix}}_{\vec{v_0}} + \dots + a_n \underbrace{\begin{pmatrix} \varphi_n(x_0) \\ \vdots \\ \varphi_n(x_m) \end{pmatrix}}_{\vec{v_n}} = \vec{0} \underset{\vec{v_0}, \dots, \vec{v_n} \text{ són LI.}}{\Rightarrow} a_j = 0 \quad \forall j = 0 \div n \quad \boxtimes$$

Def.: Definim el producte escalar de $f, g : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(f, g) = \sum_{i=0}^{m} f(x_i) g(x_i)$$

Es compleix, $\forall f, g, h : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$:

1) $(f, g) = (g, f)$
2) $(c_1 f + c_2 g, h) = c_1 (f, h) + c_2 (g, h)$
3) $(f, f) \geq 0$

[Atenció: $(f, f) = 0 \not\Rightarrow f = 0$]

I ara definim: $\|f\|_2 = \sqrt{(f,f)} = \sqrt{\sum_{i=0}^{m} (f(x_i))^2}$. Es compleix $\forall f, g : I \to \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$:

1) $\|f\|_2 \geq 0$.
2) $\|\alpha f\|_2 = |\alpha| \, \|f\|_2$
3) $\|f + g\|_2 \leq \|f\| + \|g\|$

[Atenció: $\|f\|_2 = 0 \not\Rightarrow f = 0$. Direm que $\| \ \|_2$ és una "seminorma"]

Lema: si $\{\varphi_j(x)\}_{j=0\div n}$ són LI, llavors $\|\sum_{j=0}^{n} a_j \varphi_j\|_2 = 0 \Rightarrow a_j = 0 \quad \forall j = 0 \div n$.

DEM:

$$0 = \left\|\sum_{j=0}^{n} a_j \varphi_j\right\|_2^2 = \sum_{i=0}^{m} \left(\sum_{j=0}^{n} a_j \varphi_j(x_i)\right)^2 = \left(\sum_{j=0}^{n} a_j \varphi_j(x_0)\right)^2 + \dots + \left(\sum_{j=0}^{n} a_j \varphi_j(x_m)\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{j=0}^{n} a_j \varphi_j(x_k) = 0 \quad \forall k = 0 \div m \underset{\substack{\{\varphi_j(x)\}_{j=0\div n} \\ LI}}{\Longrightarrow} a_j = 0 \quad \forall j = 0 \div n \quad \boxtimes$$

Teorema de Pitàgores (per a funcions), $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$

Si $(f, g) = 0$, llavors $\|f + g\|_2^2 = \|f\|_2^2 + \|g\|_2^2$

DEM: $\|f + g\|_2^2 = (f + g, f + g) = (f, f + g) + (g, f + g) = (f, f) + \cancel{(f, g)} + \cancel{(g, f)} + (g, g) =$

$= \|f\|_2^2 + \|g\|_2^2 \quad \boxtimes$

Objectiu: suposem que coneixem una funció $f(x)$ només en una taula de dades (x_k, y_k), $k=0 \div m$, $x_k \in I \subset \mathbb{R}$, $\forall k = 0 \div m$, i suposem donades $\varphi_0(x), \dots, \varphi_n(x)$ funcions LI definides en I.
Volem aproximar $f(x)$, $x \in I$, per $g(x) = a_0 \varphi_0(x) + \dots + a_n \varphi_n(x)$ de manera que l'error $e(x) = f(x) - g(x)$ sigui mínima.

Pregunta: Com prenem la magnitud de l'error? Amb el mètode de mínims quadrats volem minimitzar $\| \ \|_2$, és a dir:

$$\|f-g\|_2 \underset{\text{notació}}{=} \|f(x) - g(x)\|_2 = \left(\sum_{k=0}^{m} [f(x_k) - g(x_k)]^2 \right)^{1/2} =$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{m} [f(x_k) - (a_0 \varphi_0(x_k) + \dots + a_n \varphi_n(x_k))]^2 \right)^{1/2}.$$

Concretament, volem $a_0^*, \dots, a_n^*$ tals que si $f^*(x) = a_0^* \varphi_0(x) + \dots + a_n^* \varphi_n(x)$, llavors:

$$\|f - f^*\|_2 = \min_{g \in F_n} \|f - g\|_2 = \min_{a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}} \|f - g\| \quad \text{on } F_n = \left\{ \begin{array}{l} a_0 \varphi_0(x) + \dots + a_n \varphi_n(x) = g(x), \\ a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$$

<u>Cas particular i interpretació geomètrica</u>

Considerem F_n el subespai vectorial generat per 2 vectors $V^{(0)}, V^{(1)}$ LI de $\mathbb{R}^3$.

$$F_n = \{ a_0 V^{(0)} + a_n V^{(n)},\ a_0, a_1 \in \mathbb{R} \} = \langle V^{(0)}, V^{(1)} \rangle$$

Donat un vector $y \in \mathbb{R}^3$, el problema de mínims quadrats es redueix a trobar $V^* = a_0^* V^{(0)} + a_1^* V^{(1)}$ t.q.

$$\|y - V^*\|_2 = \min_{V \in F_n} \|y - V\|_2 = \min_{a_0, a_1 \in \mathbb{R}} \|y - (a_0 V^{(0)} + a_1 V^{(1)})\|_2$$

Sabem d'àlgebra lineal que:

$\exists!\ V^*$ que és la projecció ortogonal de y sobre F_n i ve caracteritzat per:

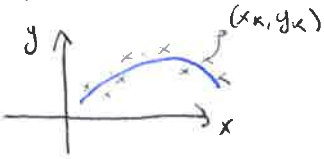
$$(y - V^*, V) = 0 \quad \forall V \in F_n \iff (y - V^*, \underset{\{V^{(0)}, V^{(1)}\} \text{ base de } F_n.}{V^{(i)}}) = 0 \quad (i = 0, 1)$$

Tornant al nostre context de funcions també és cert:

$\exists!\ f^*(x) = a_0^* \varphi_0(x) + \dots + a_n^* \varphi_n(x)$ funció definida en I, t.q. $\|f - f^*\|_2 = \min_{g \in F_n} \|f - g\|_2$

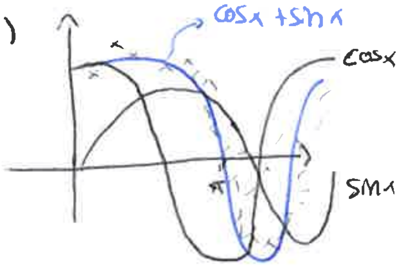
i f^* ve caracteritzada per $\boxed{(f - f^*, \varphi_i) = 0 \quad \forall i = 0 \div n}$

Exemples:

1) 

Aprox. per una paràbola: $y = f(x) = a_0 \underbrace{1}_{\varphi_0(x)} + a_1 \cdot \underbrace{x}_{\varphi_1(x)} + a_2 \cdot \underbrace{x^2}_{\varphi_2(x)}$

a_0^*, a_1^*, a_2^*?

2) 

$$f(x) = a_0 \overbrace{\cos x}^{\varphi_0(x)} + a_1 \overbrace{\sin x}^{\varphi_1(x)}$$

a_0^*, a_1^*?

__Teorema__

Siguin $\varphi_0(x), \dots, \varphi_n(x)$ LI, $x \in I$. Considerem el problema d'aproximació per mínims quadrats

$$\|f - f^*\|_2 = \min_{g \in F_n} \|f - g\|_2$$

és a dir, volem $f^* = \sum_{j=0}^{n} a_j^* \varphi_j(x)$ (és a dir, volem $a_0^*, \dots, a_n^*$) tq

$$\|f - f^*\|_2^2 \leq \|f - g\|_2^2 \quad \forall g \in F_n.$$

Llavors:

1) Si els a_j^* satisfan $(f - f^*, \varphi_i) = 0 \ \forall i = 0 \div n$, llavors f^* és la solució del problema d'aproximació per mínims quadrats.

2) $(f - f^*, \varphi_i) = 0 \ \forall i = 0 \div n \iff$ Resoldre el SL d'eqs normals.

$$\sum_{j=0}^{n} (\varphi_i, \varphi_j)\, a_j^* = (\varphi_i, f), \quad i = 0 \div n.$$

3) Existeix una única solució f^*.

[És a dir, si les φ_j's són LI $\Rightarrow$ el problema d'aproximació per mínims quadrats té una única solució]

DEM:

1) Siguin $a_0, \dots, a_n$ tq $a_j \neq a_j^*$ (per algun j, és a dir $f^* \neq g$)

Llavors

$$\overbrace{\sum_{j=0}^{n} a_j \varphi_j}^{g} - f = \sum_{j=0}^{n} (a_j - a_j^*) \varphi_j + (f^* - f)$$

Si $(f^* - f, \varphi_i) = 0 \ \forall i = 0 \div n \Rightarrow f^* - f$ és ortogonal a qualsevol combinació lineal.

$$\left(f^* - f, \sum_{j=0}^{n} (a_j - a_j^*) \varphi_j\right) = \sum_{j=0}^{n} (a_j - a_j^*) (f^* - f, \varphi_j) = 0$$

Pel T. de Pitàgores:

$$\|F + G\|_2^2 = \|F\|_2^2 + \|G\|_2^2 \Rightarrow \Big\| \overbrace{\sum_{j=0}^{n} a_j \varphi_j}^{g \in F_n} - f \Big\|_2^2 = \Big\| \sum_{j=0}^{n} (a_j - a_j^*) \varphi_j \Big\|_2^2 + \|f^* - f\|_2^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|f^* - f\|_2^2 \leq \|g - f\|_2^2 \Rightarrow \|f^* - f\| \leq \|f - g\| \quad \forall g \in F_n \ \boxtimes$$

2) $\boxed{(f^* - f, \varphi_i) = 0 \ \forall i = 0 \div n} \iff (f^*, \varphi_i) = \underbrace{(f, \varphi_i)}_{(\varphi_i, f)} \ \forall i \iff$

$$\iff \left(\sum_{j=0}^{n} a_j^* \varphi_j, \varphi_i\right) = (\varphi_i, f) \ \forall i \iff \sum_{j=0}^{n} a_j^* (\varphi_j, \varphi_i) = (\varphi_i, f) \ \forall i \iff$$

$$\iff \boxed{\sum_{j=0}^{n} (\varphi_i, \varphi_j) a_j^* = (\varphi_i, f) \ \forall i} \quad \boxtimes$$

és a dir

$$\begin{aligned}
(\varphi_0, \varphi_0) a_0^* + (\varphi_0, \varphi_1) a_1^* + \cdots + (\varphi_0, \varphi_n) a_n^* &= (\varphi_0, f) = \sum (\varphi_0(x_k)) f(x_k) \\
(\varphi_1, \varphi_0) a_0^* + (\varphi_1, \varphi_1) a_1^* + \cdots + (\varphi_1, \varphi_n) a_n^* &= (\varphi_1, f) \\
\vdots \qquad\qquad & \quad \vdots \\
(\varphi_n, \varphi_0) a_0^* + (\varphi_n, \varphi_1) a_1^* + \cdots + (\varphi_n, \varphi_0) a_n^* &= (\varphi_n, f)
\end{aligned}$$

3) Veiem que $a_0^*, \dots, a_n^*$ és única. En efecte, suposem el SL homogeni:

$$\sum_{j=0}^{n} (\varphi_i, \varphi_j) a_j = 0 \qquad i = 0 \div n$$

tingués una solució $(a_0, \dots, a_n)$ no trivial (és a dir algun $a_j \neq 0$). Llavors

$$\left\| \sum_{j=0}^{n} a_j \varphi_j \right\|_2^2 = \left(\sum_{j=0}^{n} a_j \varphi_j, \sum_{k=0}^{n} a_k \varphi_k \right) = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\sum_{j=0}^{n} (\varphi_j, \varphi_k) a_j}_{0} a_k = 0 \implies$$

$\underset{\text{lema vist } (\varphi_j\text{'s l.i.'s})}{\implies} a_j = 0 \ \forall j \Rightarrow$ contradicció. $\Rightarrow \sum_{j=0}^{n} (\varphi_i, \varphi_j) a_j = 0 \ \forall i$ només té solució trivial $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sum_{j=0}^{n} (\varphi_i, \varphi_j) a_j^* = (\varphi_i, f) \ \forall i$ és SCD $\Rightarrow$ té una única sol $\boxtimes$

<u>Conclusió</u>: Calculem les a_j^* $j = 0 \div n$ resolent $\left[\sum_{j=0}^{n} (\varphi_i, \varphi_j) a_j^* = (\varphi_i, f)\right]$ eq normals que també escriurem $[A a^* = b]$ on $A = ((\varphi_i, \varphi_j))_{i,j = 0 \div n}$, $a^* = (a_j^*)_{j = 0 \div n}$, i $b = ((\varphi_i, f))_{i = 0 \div n}$.

<u>Comentaris</u>

1) A és simètrica i definida positiva.

DEM: simètrica ✓ (producte escalar simètric)

$$\sum_{j=0}^{n} a_j \sum_{k=0}^{n} \varphi_0(x_k) \varphi_j(x_k) = \sum_{k=0}^{n} \varphi_0(x_k) \sum_{j=0}^{n} \varphi_j(x_k) a_j$$

$$\forall a \neq 0, \quad a^t A a = (a_0, \dots, a_n) \begin{pmatrix} (\varphi_0, \varphi_0) & \cdots & (\varphi_0, \varphi_n) \\ \vdots & & \vdots \\ (\varphi_n, \varphi_0) & \cdots & (\varphi_n, \varphi_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \left\| \sum_{j=0}^{n} a_j \varphi_j(x) \right\|_2^2 \geq 0$$

Cal veure que $a^T A a > 0$.

Si $\|\sum_{j=0}^{n} a_j \varphi_j(x)\|_2^2 = 0 \Rightarrow a_j = 0 \ \forall j \Rightarrow a = 0 \Rightarrow$ contradicció.

vist lema

$\{\varphi_j\}_{j=0 \div n}$ LI

Per tant: $a^T A a > 0 \quad \forall a \neq 0 \Rightarrow A$ és simètrica definida positiva. $\boxtimes$

2) Podem resoldre $Aa^* = b$ amb Cholesky. $A = LL^T$ i resolem:

$$LL^T a^* = b \Leftrightarrow \begin{cases} Ly = b \\ L^T a^* = y \end{cases} \quad \text{dos SL triangulars.}$$

Comentari:

Reescrivint el SL d'equacions lineals: $A = M^T M$, $b = M^T y$:

$Aa^* = b$ on $M = (m_{kj}) \in M_{(m+1)\times(n+1)}$, $m_{kj} = \varphi_j(x_k)$ $k = 0 \div m$, $j = 0 \div n$.

$y = (y_k) \in \mathbb{R}^{m+1}$, $y_k = f(x_k)$, $k = 0 \div m$.

En efecte:

$$M^T M = \begin{pmatrix} \varphi_0(x_0) & \cdots & \varphi_0(x_m) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_n(x_0) & \cdots & \varphi_n(x_m) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_0(x_0) & \cdots & \varphi_n(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_0(x_m) & \cdots & \varphi_n(x_m) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \langle \varphi_0, \varphi_0 \rangle & \cdots & \langle \varphi_0, \varphi_n \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle \varphi_0, \varphi_n \rangle & \cdots & \langle \varphi_n, \varphi_n \rangle \end{pmatrix} = A$$

$$M^T y = \begin{pmatrix} \varphi_0(x_0) & \cdots & \varphi_0(x_m) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_n(x_0) & \cdots & \varphi_n(x_m) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \varphi_0, f \rangle \\ \vdots \\ \langle \varphi_n, f \rangle \end{pmatrix}$$

Interpretació: Hem trobat $a_0^*, \dots, a_n^*$ t.q. $\|f - f^*\|_2^2 = \min_{g \in F_n} \|f - g\|_2^2$, és a dir,

$$\sum_{k=0}^{m} \Big(f(x_k) - \sum_{j=0}^{n} a_j^* \varphi_j(x_k) \Big)^2 = \min_{a_j \in \mathbb{R}} \left\{ \sum_{k=0}^{m} \Big(f(x_k) - \sum_{j=0}^{n} a_j \varphi_j(x_k) \Big)^2 \right\}$$

Per tant, a^* és la solució del problema $\|y - Ma^*\|_2^2 = \min_{a} \|y - Ma\|_2^2$ que equival a resoldre $M^T M a^* = M^T y$.

Cas particular

Si tenim SL sobredeterminat $Ma = y$ on $M \in M_{m_0 \times n_0}(\mathbb{R})$ $m_0 \geq n_0$, $a \in \mathbb{R}^{n_0}$,

Volem a^* t.q. $\|y - Ma^*\|_2^2 = \min_{a \in \mathbb{R}^{n_0}} \|y - Ma\|_2^2$. Resolem $M^T M a^* = M^T y$.

Exemple: RECTA DE REGRESSIÓ

Suposem que tenim un "núvol de punts" (x_k, y_k) $k = 0, \dots, m$; "deduïm" de la representació gràfica que podem aproximar la taula per la recta $y = a_0 + a_1 x = a_0 \cdot \underbrace{1}_{P_0(x)} + a_1 \cdot \underbrace{x}_{P_1(x)}$

Farem l'aproximació per mínims quadrats:

$$Aa^* = b \Leftrightarrow M^T M a^* = M^T y$$

- O bé volem resoldre el sistema SL sobredeterminat.

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 = y_0 \\ \vdots \\ a_0 + a_1 x_m = y_m \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & x_0 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

Volem a^* sol. d'equacions normals $M^T M a^* = M^T y$.

- O bé volem $f^*(x) = a_0^* + a_1^* x$ t.q. $\|f - f^*\|_2^2 = \min_{g \in F_n} \|f - g\|_2^2 =$

$= \min_{a_0, a_1 \in \mathbb{R}} \sum_{k=0}^{n} (y_k - (a_0 + a_1 x_k))^2$. Càlcul d'$a_0^*, a_1^*$:

DADES CONCRETES:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
y	0	0,60	1,77	1,97	3,31	3,52	4,59	5,31	5,79	7,06	7,17

$\langle 1, 1 \rangle = \sum_{k=1}^{11} 1 \cdot 1 = 11$

$\langle 1, x \rangle = \sum_{k=1}^{11} 1 \cdot x_k = 66 = \langle x, 1 \rangle$

$\langle x, x \rangle = \sum_{k=1}^{11} x_k^2 = 506$

$\langle 1, f \rangle = \sum_{k=1}^{11} f(x_k) = 41,04$

$\langle x, f \rangle = \sum_{k=1}^{11} x_k f(x_k) = 328,05$

$$\begin{cases} 11 a_0^* + 66 a_1^* = 41,04 \\ 66 a_0^* + 506 a_1^* = 328,05 \end{cases}$$

$a_0^* = -0,7314$

$a_1^* = 0,7473$

$$\boxed{y = -0,7314 + 0,7437 x}$$

Comentari sobre la resolució d'equacions normals

$$Aa^* = b \Leftrightarrow M^T M a^* = M^T y$$

Per tant cal:

- Producte $M^T M = A$.
- Càlcul $M^T y = b$
- Resolució per Cholesky: $A = \mathcal{L} \mathcal{L}^T$

$$A \cdot a^* = b = \mathcal{L} \underbrace{\mathcal{L}^T \cdot a^*}_{u} = b \Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{L} u = b \\ \mathcal{L}^T a^* = u \end{cases}$$

Una altra estratègia és per la descomposició QR.

$M = QR$, és a dir: $\underset{m_0 \times n_0}{M} = \underset{m_0 \times n_0}{Q} \; \underset{n_0 \times n_0}{R}$ amb $\begin{cases} Q^TQ = I \ (Q \text{ ortogonal}) \\ R \text{ triangular superior no singular.} \end{cases}$

Llavors: $M^TM a^* = M^Ty \iff R^T \underbrace{Q^TQ}_{Id} R \cdot a^* = R^TQ^Ty \overset{R \text{ no singular}}{\iff}$

$\iff \boxed{R a^* = Q^Ty}$ SL triangular superior (no cal escriure explícitament les equacions normals)

Càlcul de QR. Mètode d'ortogonalització modificat de Gram-Schmidt

Sigui $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $m \geq n$, de rang màxim n, volem calcular la descomposició $A = QR$ amb $Q \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ ortogonal ($Q^TQ = I$) i $R \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ triangular superior no singular.

$$\underset{m\times n}{A} = \underset{m\times n}{Q} \; \underset{n\times n}{R}$$

Pas 0: Definim $A_1 = A = (a_1^{(1)} \cdots a_n^{(1)})$ on $a_j^{(1)}$ és la columna j-èssima d'A_1.

Pas 1: Normalitzem la columna $a_1^{(1)}$:

$$r_{11} = \|a_1^{(1)}\|_2 \ , \quad q_1 = \frac{a_1^{(1)}}{r_{11}} \quad \text{(primera columna de } Q\text{)}.$$

Ara ortogonalitzem respecte d'aquesta totes les columnes posteriors:

$$r_{1s} = q_1^T \cdot a_s^{(1)} \ , \quad a_s^{(2)} = a_s^{(1)} - r_{1s} q_1, \quad s = 2, \dots, n.$$

obtenim la matriu: $A_2 = (q_1 \ a_2^{(2)} \ a_3^{(2)} \cdots a_n^{(2)})$

Es compleix:

$$q_1^T \cdot a_s^{(2)} = q_1^T a_s^{(1)} - r_{1s} \underbrace{q_1^T \cdot q_1}_{1} = q_1^T a_s^{(1)} - q_1^T a_s^{(1)} = 0$$

i es manté el rang.

En forma matricial, hem fet: D

$$\begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ \vdots & & \\ a_{m1}^{(1)} & \cdots & a_{mn}^{(1)} \end{pmatrix} \overbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{r_{11}} & & \\ & 1 & \\ & & \ddots \\ & & & 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} q_{11} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ \vdots & & & \vdots \\ q_{m1} & a_{m2}^{(1)} & \cdots & a_{mn}^{(1)} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} q_{11} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ q_{m1} & a_{m2}^{(1)} & \cdots & a_{mn}^{(1)} \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -r_{12} & -r_{13} & \cdots & -r_{1n} \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}}_{\hat{R}^{(1)}} = \begin{pmatrix} q_{11} & a_{12}^{(2)} & \cdots & a_{1n}^{(2)} \\ \vdots & & & \vdots \\ q_{m1} & a_{m2}^{(2)} & \cdots & a_{mn}^{(2)} \end{pmatrix}$$

és a dir,

$$A_1 D \hat{R}^{(1)} = A_2 \iff A_1 = A_2 \hat{R}^{(1)-1} D^{-1} = A_2 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ & \ddots & & \vdots \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{11} & & \\ & 1 & \\ & & \ddots \\ & & & 1 \end{pmatrix}}_{R^{(1)}}$$

Pas 2: Normalitzem la segona columna d'A_2 i ortogonalitzem respecte d'ella, les següents columnes:

$$r_{22} = \| a_2^{(2)} \|_2, \quad q_2 = \frac{a_2^{(2)}}{r_{22}}$$

$$r_{2s} = q_2^T a_s^{(2)}, \quad a_s^{(3)} = a_s^{(2)} - r_{2s} q_2, \quad s = 3, \ldots, n.$$

Així construïm

$$A_3 = (q_1 \; q_2 \; a_3^{(3)} \; \cdots \; a_n^{(3)})$$

Observem que:

$q_1^T q_2 = 0$ (ja que $q_1^T a_2^{(2)} = 0$)

$$q_1^T a_s^{(3)} = \underbrace{q_1^T a_s^{(2)}}_{\overset{\|}{0}} - r_{2s} \underbrace{q_1^T q_2}_{\overset{\|}{0} \text{ pes 1+ normalització}}$$

$$q_2^T a_s^{(3)} = q_2^T a_s^{(2)} - r_{2s} \overbrace{q_2^T q_2}^{1} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{def} \\ r_{2s}}}{=} q_2^T a_2^{(2)} - q_2^T a_s^2 = 0$$

En forma matricial:

$$A_2 = A_3 \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & r_{23} & \cdots & r_{2n} \\ \vdots & & 1 & & \\ 0 & & & \ddots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & r_{22} & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} = A_3 R^{(2)} \Rightarrow A_1 = A_2 R^{(1)} = A_3 R^{(2)} R^{(1)}$$

Pas K: suposem que tenim $A_K = (q_1 q_2 \cdots q_{K-1} \; a_K^{(K)} \cdots a_n^{(K)})$ que per construcció satisfà:

$$(Q) \; q_j^T q_\ell = \delta_{j\ell} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = \ell \\ 0 & \text{si } j \neq \ell \end{cases}, \quad q_j^T a_s^{(K)} = 0, \; j, \ell = 1 \div K-1, \; s = K \div n.$$

Ara volem A_{K+1}, és a dir, normalitzem la columna K-èssima i ortogonalitzem, respecte d'ella, les columnes $a_{K+1}^{(K)}, \ldots, a_n^{(K)}$, és a dir:

$$r_{KK} = \| a_K^{(K)} \|_2, \quad q_K = \frac{a_K^{(K)}}{r_{KK}}, \quad r_{Ks} = q_K^T a_s^{(K)}, \quad a_s^{(K+1)} = a_s^{(K)} - r_{Ks} q_K \quad s = K+1, \ldots, n$$

Així obtenim: $A_{K+1} = (q_1\ q_2 \dots q_K\ a_{K+1}^{(K+1)} \dots a_n^{(K+1)})$

i complim les relacions (Q) amb K+1 en lloc de K:

$$q_j^T q_l = \delta_{jl},\quad q_j^T a_s^{(K+1)} = 0,\quad j,l = 1 \div K,\ s = K+1 \div n.$$

En efecte:

- Si $j<K$: $q_j^T a_s^{(K+1)} = \underbrace{q_j^T a_s^{(K)}}_{0} - r_{Ks} \underbrace{q_j^T q_K}_{0} = 0$ | si $j=K$: $q_K^T a_s^{(K+1)} = q_K^T a_s^{(K)} - r_{Ks} \underbrace{q_K^T q_K}_{1} \overset{\text{def } r_{Ks}}{=} q_K^T a_s^{(K)} - q_K^T a_s^{(K)} = 0$

En forma matricial:

$$A_K = A_{K+1} R^{(K)} \Rightarrow A_1 = A_K R^{(K-1)} \dots R^{(1)} = A_{K+1} R^{(K)} \dots R^{(1)}$$

- Després de n passos, obtenim: $A_{n+1} = (q_1 \dots q_n) \overset{\text{def}}{=} Q$

Complert $A_1 = \underbrace{A_{n+1}}_{Q} \underbrace{R^{(n)} \dots R^{(1)}}_{R\ (\text{def})}$ | Hem obtingut $A = QR$ amb $\begin{cases} Q^TQ = I \\ R \text{ triangular sup no singular} \end{cases}$

Nota: A cada pas anem trobant els r_{Ks} corresponents: $R = (r_{Ks})$ (No cal calcular $R^{(n)} \dots R^{(1)}$).

Exemple:

$$A = A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = (a_1^{(1)}\ a_2^{(1)}),$$ volem Q, R tq $A = QR$.

Pas 1: tenim A_1, volem A_2:

$$r_{11} = \sqrt{4+1+4} = 3 \qquad q_1 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}$$

$$r_{12} = q_1^T a_2^{(1)} = \left(\tfrac{2}{3}\ \ \tfrac{1}{3}\ \ -\tfrac{2}{3}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = -2$$

$$a_2^{(2)} = a_2^{(1)} - r_{12} q_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} - (-2) \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ -2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/3 \\ 2/3 \\ 8/3 \end{pmatrix} \Rightarrow A_2 = (q_1, a_2^{(2)}) = \begin{pmatrix} 2/3 & 7/3 \\ 1/3 & 2/3 \\ -2/3 & 8/3 \end{pmatrix}$$

Pas 2: $r_{22} = \|a_2^{(2)}\|_2 = \sqrt{(\frac{7}{3})^2 + (\frac{2}{3})^2 + (\frac{8}{3})^2} = \sqrt{13}$, $q_2 = \begin{pmatrix} \frac{7}{3\sqrt{13}} \\ \frac{2}{3\sqrt{13}} \\ \frac{8}{3\sqrt{13}} \end{pmatrix}$

Així: $$Q = (q_1\ q_2) = \begin{pmatrix} 2/3 & 7\sqrt{13}/39 \\ 1/3 & 2\sqrt{13}/39 \\ -2/3 & 8\sqrt{13}/39 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} \\ 0 & r_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & \sqrt{13} \end{pmatrix}$$

Descomposició en valors singulars (SVD)

La descomposició en valors singulars és un mètode d'ortogonalització que s'utilitza a diferents aplicacions pràctiques (càlcul del rang d'una matriu, compressió d'imatges, meteorologia, estadística, tractament de senyals...).

Teorema:

Si $M = M^T$ és una matriu real simètrica, $n \times n$, llavors:

(a) Tots els VAP's són reals.

(b) VEP's corresponent a VAP's diferents són ortogonals.

(c) Existeix una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ amb n VEP's de M.

Exemple:

$$M = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ -4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} = M^T \qquad \text{VAPs i VEPs:}$$

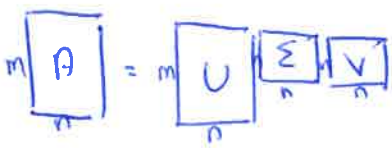
$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 = 9 \quad & \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \lambda_2 = 3 \quad & \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \lambda_3 = -3 \quad & \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \text{ortogonals} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \vec{w}_1 &= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \\ \vec{w}_2 &= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \\ \vec{w}_3 &= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{ortonormals.}$$

Teorema (SVD):

(i) Descomposició reduïda:

Sigui $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, amb $m \geq n$. Aleshores existeix una descomposició de la matriu A de la forma:

$$A = U \Sigma V^T$$



Satisfent:

- $U \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ és una matriu ortogonal ($U^T U = Id$). Els vectors columna que formen U, $U = [\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n]$ reben el nom de vectors singulars per l'esquerra.
- $V \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ és una matriu ortogonal ($V^T V = Id$). Els vectors columna que formen V, $V = [\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n]$ s'anomenen vectors singulars per la dreta.
- $\Sigma \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ amb $\sigma_1 \geq \ldots \geq \sigma_n \geq 0$ anomenats valors singulars de la matriu A. σ_1 és el valor singular principal.

(ii) Descomposició completa (més endavant).

(iii) $r = \text{rang} A$ on $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$

DEM (i):

Sigui $S = A^T A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, S és simètrica $(S^T = S)$

Pel teorema espectral real, existeix una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$, que consisteix en els VEP's de S i a més tots els VAP's són reals, és a dir $\exists \vec{v_1}, \dots, \vec{v_n} \in \mathbb{R}^n$ tq $S\vec{v_i} = \lambda_i \vec{v_i}$, $i = 1, \dots, n$.

$\lambda_i \in \mathbb{R}$; $\forall i$, $\langle \vec{v_i}, \vec{v_j} \rangle = \delta_{ij}$ $\forall i,j = 1 \div n$.

· Es compleix $\lambda_i \geq 0$ $\forall i = 1 \div n$. DEM:

$$\left.\begin{aligned} \vec{v_i}^T S \vec{v_i} &= \langle \vec{v_i}, S\vec{v_i} \rangle = \langle \vec{v_i}, \lambda_i \vec{v_i} \rangle = \lambda_i \overbrace{\langle \vec{v_i}, \vec{v_i} \rangle}^{1} = \lambda_i \\ \vec{v_i}^T A^T A \vec{v_i} &= \langle A\vec{v_i}, A\vec{v_i} \rangle = \|A\vec{v_i}\|_2^2 \geq 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lambda_i \geq 0 \ \forall i$$

- Ara ordenem els λ_i: $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$ i sigui $1 \leq r \leq n$ tq $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r > \lambda_{r+1} = \dots$ $\dots = \lambda_n = 0$.

- Definim $\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1}, \dots, \sigma_r = \sqrt{\lambda_r}$, de manera que $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$.

- Introduïm els vectors:

$$\vec{u_1} = \frac{1}{\sigma_1} A\vec{v_1}, \dots, \vec{u_r} = \frac{1}{\sigma_r} A\vec{v_r} \qquad \vec{u_i} \in \mathbb{R}^m, i = 1 \div r.$$

Veiem ara que els u_i's són ortogonals 2 a 2 i unitaris, $j = 1 \div r$.

$$\langle \vec{u_i}, \vec{u_j} \rangle = \frac{1}{\sigma_i \sigma_j} \underbrace{\langle A\vec{v_i}, A\vec{v_j} \rangle}_{\vec{v_i}^T A^T A v_j} = \frac{1}{\sigma_i \sigma_j} \langle \vec{v_i}, \underbrace{A^T A}_{S} \vec{v_j} \rangle = \frac{\lambda_j}{\sigma_i \sigma_j} \langle \vec{v_i}, \vec{v_j} \rangle \overset{\lambda_j = \sigma_j^2}{=}$$

$$= \frac{\sigma_j}{\sigma_i} \langle \vec{v_i}, \vec{v_j} \rangle = \delta_{ij} \quad \boxtimes$$

$i = j \Rightarrow \frac{\sigma_i}{\sigma_i} \cdot 1 = 1$

$i \neq j \Rightarrow \frac{\sigma_j}{\sigma_i} \cdot 0 = 0$

A continuació completem els r vectors $\vec{u_1}, \dots, \vec{u_r}$ amb $n-r$ vectors $\vec{u_{r+1}}, \dots, \vec{u_n} \in \mathbb{R}^m$.

Si $F = [u_1, \dots, u_r]$, $\mathbb{R} = F \oplus F^\perp$, prenem $n-r$ vectors de $F^\perp$, unitaris i ortogonals entre ells, de manera que $\{\vec{u_1}, \dots, \vec{u_n}\}$ són ortogonals 2 a 2 i unitaris.

Ara per a $\{\vec{v_1},\dots,\vec{v_n}\}$ i $\{\vec{u_1},\dots,\vec{u_n}\}$ es complex:

$$(*)\quad \begin{cases} A\vec{v_j} = \sigma_j \vec{u_j} & j=1,\dots,r \quad \text{(per def. dels } \vec{u_i}\text{)} \\ A\vec{v_j} = 0 & j = r+1,\dots,n \end{cases}$$

$\left(\text{Si } \vec{v_j} \text{ és VEP de } S = A^T A \text{ de VAP } 0,\ \|A\vec{v_j}\|_2^2 = \langle A\vec{v_j}, A\vec{v_j}\rangle = \vec{v_j}^T \underbrace{A^T A}_{S} \vec{v_j} \overset{S\vec{v_j}=0}{=} 0 \Rightarrow A\vec{v_j} = 0 \quad j = r+1 \div n \right)$

• Ara escrivim $V = [\vec{v_1},\dots,\vec{v_n}] \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ ortogonal, $U = [\vec{u_1},\dots,\vec{u_n}] \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$

$\Sigma = \text{diag}(\sigma_1,\dots,\sigma_r,0,\dots,0] \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Llavors $(*)$ s'escriu:

$$A\cdot V = U\Sigma \quad \Big|\quad (A)\cdot\begin{pmatrix} V_1^1 & \cdots & V_1^n \\ \vdots & & \vdots \\ V_n^1 & \cdots & V_n^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1^1 & \cdots & U_1^n \\ \vdots & & \vdots \\ U_m^1 & \cdots & U_m^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sigma_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \sigma_r & & \\ & & & 0 & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Per tant $A\underbrace{VV^{-1}}_{Id} = U\Sigma \underset{\text{ortogonal}}{V^{-1}} \Rightarrow \boxed{A = U\Sigma V^T}$ $\boxtimes$

↑ Sumatori! No confondre amb la matriu Σ.

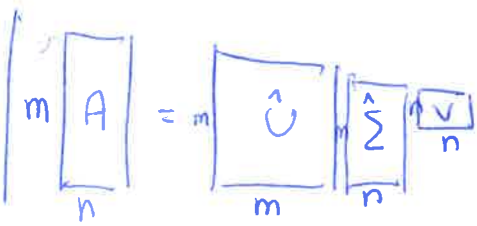
(ii) Descomposició completa:

Sigui $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ amb $m \geq n$. Aleshores existeix la descomposició de la matriu A de la forma:

$$A = \hat{U}\hat{\Sigma}V^T$$

Satisfent:

- $\hat{U} \in M_{m\times m}(\mathbb{R})$ ortogonal.
- $V \in M_{n\times n}$ (la mateixa que en (i) (reduïda))
- $\hat{\Sigma} \in M_{m\times m}(\mathbb{R})$ amb $\hat{\Sigma} = \left.\begin{pmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \sigma_n & & \\ & & 0 & \\ 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 \end{pmatrix}\right\}n$



DEM: la mateixa.

21/04/17

(iii) DEM: $A = \hat{U}\hat{\Sigma}V^T$. Com que $\hat{U}, V$ són matrius no singulars $\Rightarrow \text{rang} A = \text{rang}\hat{\Sigma} = r$.

NOTA: Si $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $m<n$, prenem $A^T \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$, $n>m$, apliquem la SVD:

$$B = A^T = \tilde{U}\tilde{\Sigma}\tilde{V}^T \Rightarrow A = \underset{U}{\tilde{V}}\ \underset{\Sigma}{\tilde{\Sigma}^T}\ \underset{V^T}{\tilde{U}^T}$$

$U\Sigma V^T = A$

Exemples:

[1] $A=\begin{pmatrix}3&-8\\4&6\end{pmatrix}$, $S=A^TA=\begin{pmatrix}25&0\\0&100\end{pmatrix}$ VAPs: 25, 100.

$\lambda_1=100$, $\lambda_2=25$, $\vec{v_1}=(0\ 1)$, $\vec{v_2}=(1\ 0)$ $V=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$, $\sigma_1=\sqrt{100}=10$, $\sigma_2=\sqrt{25}=5$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \Sigma=\begin{pmatrix}10&0\\0&5\end{pmatrix}$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u_1}=\frac{1}{\sigma_1}\cdot A\vec{v_1}=\frac{1}{10}\cdot\begin{pmatrix}3&-8\\4&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4/5\\+3/5\end{pmatrix}\\ \vec{u_2}=\frac{1}{\sigma_2}A\vec{v_2}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3&-8\\4&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3/5\\4/5\end{pmatrix}\end{array}\right\}\Rightarrow U=\begin{pmatrix}-4/5&3/5\\3/5&4/5\end{pmatrix}$$

Es compleix $\boxed{A=U\Sigma V^T}$

[2] $A=\begin{pmatrix}4&3\\8&6\end{pmatrix}\Rightarrow U=\begin{pmatrix}\frac{5}{\sqrt{125}}&\frac{10}{\sqrt{125}}\\\frac{10}{\sqrt{125}}&\frac{-5}{\sqrt{125}}\end{pmatrix}$, $\Sigma=\begin{pmatrix}\sqrt{125}&0\\0&0\end{pmatrix}$, $V=\begin{pmatrix}4/5&3/5\\3/5&-4/5\end{pmatrix}$

[3] $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&2\\2&1\end{pmatrix}\Rightarrow V=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}&1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}&-1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$, $\Sigma=\begin{pmatrix}\sqrt{17}&0\\0&1\end{pmatrix}$, $U=\begin{pmatrix}\frac{3}{\sqrt{34}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{4}{\sqrt{34}}&0\\\frac{3}{\sqrt{34}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$

Propietats de la SVD: $A\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $m\geq n$. Llavors:

1. Els valors singulars són únics.
2. Si $A\in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, $|\det A|=\prod_{i=1}^{n}\sigma_i$
3. Els VAP de la matriu $A^TA\in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ són σ_i^2, $i=1\div n$, i $\{\vec{v_1},\dots,\vec{v_n}\}$ són VEP corresponents.
4. Els VAP de la matriu $AA^T\in M_{m\times m}(\mathbb{R})$ són σ_i^2; $i=1\div n$ i $m-n$ zeros. Els vectors $\{\vec{u_1},\dots,\vec{u_n}\}$ són VEP ortonormals corresponents als σ_i^2.
5. Si rang $A=n$, llavors $\min_x\|Ax-b\|=\|Ax^*-b\|$ amb $x^*=V\Sigma^{-1}U^Tb$

Per tant, la SVD proporciona la solució del sistema lineal sobredeterminat (amb el mètode de mínims quadrats).

6. Es compleix $\|A\|_2=\sigma_1$. Si $A\in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ és nosingular, llavors $\|A^{-1}\|_2=\frac{1}{\sigma_n}$

Llavors, el nombre de condició és $\mu_2(A)=\|A\|_2\|A^{-1}\|_2=\frac{\sigma_1}{\sigma_n}$

DEM:

1) $\sigma_i=\sqrt{\lambda_i}$ on λ_i VAP de $S=A^TA$, per tant únics.

2) $|\det A|=|\det(U\Sigma V^T)|=\underbrace{|\det U|}_{1}|\det\Sigma|\underbrace{|\det V^T|}_{1}=\prod^{n}\sigma_i$ (???)

3) Directa de la demostració.

4) ~~Els VAP de la matriu~~ Veure examen juny 15/16.

5) Donat $Ax=b$, $\operatorname{rang} A = n$. Sabem que x^* és la solució del SL d'eqs normals

$$A^TAx^* = A^Tb \Leftrightarrow V\underbrace{\Sigma^T}_{\Sigma \text{ diagonal}}\underbrace{U^T U}_{Id}\Sigma V^T x^* = V\underbrace{\Sigma^T}_{\Sigma}U^Tb \Leftrightarrow V\Sigma^2V^Tx^* = V\Sigma U^Tb \Leftrightarrow$$

$V \text{ ort} \Rightarrow V \text{ inv}.$

$$\Leftrightarrow \Sigma^2V^Tx^* = \Sigma U^Tb \underset{\substack{\operatorname{rang}A=n \\ \text{cap VS és nul} \Rightarrow \Sigma \text{ inv}}}{\Leftrightarrow} \Sigma V^Tx^* = U^Tb \Leftrightarrow V^Tx^* = \Sigma^{-1}U^Tb \Leftrightarrow$$

$$\underset{V^T=V^{-1}}{\Leftrightarrow} \boxed{x^* = V\Sigma^{-1}U^Tb} \quad \boxtimes$$

6) $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^TA)} = \sqrt{\underset{\text{VAP màxim}}{\lambda_1}} = \sigma_1 \quad \boxtimes$ Si $A = U\Sigma V^T$. A no singular $\Rightarrow$ ($\operatorname{rang}A=n$)

$\Rightarrow U\Sigma V^T$ no singulars $\Rightarrow \boxed{A^{-1} = (U\Sigma V^T)^{-1} = (V^{-1})^{-1}\Sigma^{-1}U^{-1} = V\Sigma^{-1}U^T} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Els valors singulars d'A^{-1} són $\underbrace{\frac{1}{\sigma_n}}_{\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}}, \dots, \frac{1}{\sigma_1} \Rightarrow \boxed{\|A^{-1}\|_2 = \sqrt{\rho((A^{-1})^TA^{-1})} = \sqrt{\underset{\text{VAP màxim}}{\frac{1}{\lambda_n}}} = \frac{1}{\sigma_n}} \quad \boxtimes$

__Comentari__: Per resoldre $Ax=b$ (SL sobredeterminat $m>n$) procedim ($A^TAx=A^Tb$):

(i) Amb QR: 1) Factorització $A=QR$; 2) $\begin{cases}\text{Calcular } y = Q^Tb \\ \text{Resolem } Rx=y\end{cases}$ $\Rightarrow$ Cost total: $O(2mn^2 - \frac{2n^3}{3})$

(ii) Amb SVD: 1) Factorització $A = U\Sigma V^T$; 2) Calcular $x^* = V\Sigma^{-1}U^Tb$ $\Rightarrow$ Cost total: $O(2mn^2 + 11n^3)$

"SVD és més car que QR, però és més estable."

06 MÈTODES ITERATIUS PER RESOLDRE SISTEMES LINEALS

__Objectiu__: Per tal de resoldre $Ax=b$ ($\det A \neq 0$) amb un mètode iteratiu, volem una successió de vectors $\{x^{(k)}\}_{k\geq 0}$ que convergeixi a la solució x, és a dir:

$\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x$, $x^{(0)}$ aproximació inicial.

__Idea__: Volem trobar una matriu B i un vector c tq $Ax=b$ sigui equivalent a $x = Bx + c$, de manera que $\begin{cases} x^{(0)} \\ x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c \end{cases}$ amb $x^k \xrightarrow[k\to\infty]{} x$

__Com ho fem?__ Una manera general d'establir un mètode iteratiu és descomposant la matriu A:

$A = P - (P - A)$

on P és una matriu no singular anomenada precondicionador d'A. Llavors

$$Ax=b \iff Px-(P-A)x=b \iff Px=(P-A)x+b \iff$$

$$\iff \quad x=\underbrace{P^{-1}(P-A)}_{B}x+\underbrace{P^{-1}b}_{C}$$, és a dir: $x=Bx+C$ on $\begin{cases} B=P^{-1}(P-A)=I-P^{-1}A \\ C=P^{-1}b. \end{cases}$

$Px^{k+1}=Px^{k}-Ax^{k}+b$ (R)

i procedirem seguint l'esquema iteratiu $\begin{cases} x^{0} \\ x^{(k+1)}=Bx^{(k)}+c \end{cases}$ (*)

Si $x^{(k)} \xrightarrow[k\to\infty]{} x$ llavors x és la solució buscada.

Prenem P "fàcil", típicament o diagonal o triangular.

<u>Pregunta</u>: Sota quines condicions el mètode iteratiu (*) és convergent?

<u>Def</u>: Direm que el mètode iteratiu (*) és convergent (donades B, c) si per a qualsevol aproximació inicial $x^{(0)}$ la successió $x^{(k)}$ és convergent.

<u>Proposició</u>: El mètode iteratiu $x^{(k+1)}=Bx^{(k)}+C$, $k>0$, és convergent $\iff \rho(B)<1$

($\underbrace{\rho(B)}_{\text{radi espectral}}=\max_i|\lambda_i|$, λ_i VAP de B).

DEM: Sigui x t.q. $x=Bx+C$, $\forall x^{(0)}$ inicial, $x^{(k)}$ i sigui $e_k=x^{(k)}-x$. És complex

$$\begin{aligned} x^{(k)} &= Bx^{(k-1)}+C \\ x &= Bx+C \\ \hline \end{aligned}$$

$$e_k = x^{(k)}-x=B(x^{(k-1)}-x)=Be_{k-1}=B^2e_{k-2}=\dots=B^ke_0,\ \forall k\geq 0\ (1)$$

$\Rightarrow$) Suposem el mètode iteratiu convergent: $\forall x^{(0)}$, $e_0=x^{(0)}-x$ i $\lim_{k\to\infty} e_k=0$

Triem e_0 un VEP de B de VAP λ, és a dir: $Be_0=\lambda e_0 \Rightarrow B^ke_0=\lambda^ke_0 \overset{(1)}{\Rightarrow}$

$$\overset{(1)}{\Rightarrow} \lambda^ke_0=e_k \Rightarrow \underbrace{\lim_{k\to\infty} e_k}_{0}=\lim \lambda^k e_0 \Rightarrow |\lambda|<1 \underset{\forall\lambda}{\Rightarrow} \rho(B)<1 \quad \boxtimes$$

$\Leftarrow$) Suposem $\rho(B)<1$. Volem veure $e_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$

Sigui J la matriu de Jordan associada a B, és a dir existeix C no singular t.q. $B=C^{-1}JC$ on

$$J=\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ 1 & \ddots & \\ & 1 & \lambda_1 \end{pmatrix} & & & \\ & \begin{pmatrix} \lambda_2 & & \\ 1 & \ddots & \\ & 1 & \lambda_2 \end{pmatrix} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \begin{pmatrix} \lambda_r & & \\ 1 & \ddots & \\ & 1 & \lambda_r \end{pmatrix} \end{bmatrix}$$

Llavors $B^K = C^{-1}JCC^{-1}JC \cdots = C^{-1}J^KC$

Lema d'Àlgebra lineal: Si $\rho(B) < 1 \Rightarrow J^K \xrightarrow[K\to\infty]{} 0 \Rightarrow B^K \xrightarrow[K\to\infty]{} 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall x^0,\ B^K e_0 \xrightarrow[K\to\infty]{} 0 \overset{(1)}{\Longrightarrow} e_K \xrightarrow[K\to\infty]{} 0 \Rightarrow \underline{x^{(K)} \xrightarrow[K\to\infty]{} x}$ $\boxtimes$

Comentaris

1) Observem que com menor sigui $\rho(B)$, llavors més ràpida serà la convergència $e_K \xrightarrow[K\to\infty]{} 0 \iff x^{(K)} \xrightarrow[K\to\infty]{} x$. Definim la velocitat de convergència com $-\log(\rho(B))$.

2) Si en alguna norma es compleix $\|B\| < 1$ (per exemple, $\|\ \|_1, \|\ \|_\infty$), llavors $\rho(B) \le \|B\| < 1 \Rightarrow \rho(B) < 1$ i el mètode és convergent. Observem que $\|B\| < 1$ dóna una condició suficient de convergència.

FITES DE L'ERROR: A partir de $\|B\|$, a cada iteració tenim una fita de l'error.

LEMA: Si $\|B\| < 1$, llavors:

(a) $\|x - x^{(K)}\| \le \dfrac{\|B\|}{1-\|B\|} \|x^{(K)} - x^{(K-1)}\|$

(b) $\|x - x^{(K)}\| \le \|B\|^K \|x - x^{(0)}\|$

Comentaris

1) Típicament es pren $\|x^{(K)} - x^{(K-1)}\| < \varepsilon$ com a criteri per aturar el procés iteratiu. Però ATENCIÓ! que no vol dir que tinguem una fita acurada de l'error. Falta el factor $\dfrac{\|B\|}{1-\|B\|}$

2) Recuperem el d'abans: $\|B\| < 1 \Rightarrow \|B\|^K \to 0 \Rightarrow \|x - x^{(K)}\| = \|e_K\| \to 0$

DEM:

a) $\|x - x^{(K)}\| \underset{(1)}{=} \|B(x - x^{(K-1)})\| \le \|B\| \|x - x^{(K-1)}\| \underset{(*)}{\le} \|B\| \dfrac{1}{1-\|B\|} \|x^{(K)} - x^{(K-1)}\|$

Veiem $(*)$:

$x - x^{(K-1)} = x - x^{(K)} + x^{(K)} - x^{(K-1)} = B(x - x^{(K-1)}) + x^{(K)} - x^{(K-1)} \iff$

$\iff (I - B)(x - x^{(K-1)}) = x^{(K)} - x^{(K-1)} \Rightarrow \underbrace{\|(I-B)(x - x^{(K-1)})\|} = \|x^{(K)} - x^{(K-1)}\|$

Lema provat $\|(I-B)u\| \ge (1-\|B\|)\|u\|$

$\Downarrow$

$\geq (1-\|B\|)\|x - x^{(K-1)}\|$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \|x - x^{(K-1)}\| \le \dfrac{\|x^{(K)} - x^{(K-1)}\|}{1-\|B\|}$ $\boxtimes$

b) $x - x^{(k)} \overset{(1)}{=} B^k (x - x^{(0)}) \Rightarrow \|x - x^{(k)}\| = \|B^k (x - x^{(0)})\| \le \|B\|^k \|x - x_0\|$ ☒

EL MÈTODE DE JACOBI

Si $a_{ii} \neq 0 \ \forall i$, prenem $P = \mathrm{diag}(a_{11}, \dots, a_{nn})$ i definim el mètode de Jacobi:

(MJ) $\boxed{x^{(k+1)} = B_J x^{(k)} + C_J}$

On:

$$B_J = I - P^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \cdots & \frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ \frac{a_{n1}}{a_{nn}} & \cdots & \frac{a_{nn-1}}{a_{nn}} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & \cdots & \cdots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ \vdots & & \ddots & & \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & \cdots & & -\frac{a_{nn-1}}{a_{nn}} & 0 \end{pmatrix}$$

$$C_J = P^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ \vdots \\ \frac{b_n}{a_{nn}} \end{pmatrix}$$

Si ho escrivim en components,

Mètode de Jacobi en components $(MJ)_c$:

$$\left[x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j \neq i} a_{ij} x_j^{(k)} \right] \quad i = 1 \div n \qquad \forall k \ge 0, \ x^{(0)} \text{ vector inicial.} \right]$$

__Nota__:

1) Una manera "natural" d'introduir MJ seria: de $Ax = b$ n'aïllem x_i de l'equació i-èssima $\Rightarrow$

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_i} \left[b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right] \quad i = 1 \div n.$$

2) Si la matriu A és estrictament diagonalment dominant per files (és a dir, $\sum_{j \neq i} |a_{ij}| < |a_{ii}| \ \forall i = 1 \div n$), llavors el MJ és convergent. En efecte, veiem que la norma $\|B_J\|_\infty < 1$:

$$\left(\|B_J\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right|}_{B_{J_{ij}}} = \max_{1 \le i \le n} \sum_{j \neq i} \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right| = \max_{1 \le i \le n} \frac{1}{|a_{ii}|} \underbrace{\sum_{j \neq i} |a_{ij}|}_{< |a_{ii}| \text{ per hipòtesi (edd)}} < 1 \right)$$ ☒

$B_{J_{ii}} = 0 \ \forall i = 1 \div n$

Obs: El mètode de Jacobi és fàcil d'implementar, però la convergència de B_J i del mètode podria ser molt lenta.

EL MÈTODE DE GAUSS-SEIDEL

Suposem $a_{ii} \neq 0 \ \forall i$. Una manera de millorar el mètode de Jacobi és utilitzar a cada iteració una "millor aproximació" dels x_i, acabats de calcular. És a dir:

$$(MGS)_c \left[x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right] \quad i = 1, \dots, n, \ k \ge 0 \right]$$

Concretament, en MJ, els $x_i^{(k+1)}$ es calculen a partir de $x_1^{(k)}, \dots, x_{i-1}^{(k)}, x_{i+1}^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}$

En canvi, en MGS $\rightarrow$ es calculen a partir de $x_1^{(k+1)}, \dots, x_{i-1}^{(k+1)}, x_{i+1}^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}$

Pregunta: Com podem escriure (MGS) com $(*) \to x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c$?
Qui seria P? Si $A = L + D + U =$ ◺ + ⧅ + ◹, prenem $P = D + L$.
Llavors, de $(R) \longrightarrow (P(x^{(k+1)} - x^{(k)}) = b - Ax^{(k)})$ obtenim que:

$$\underset{D+L}{\underset{\parallel}{P}}(x^{(k+1)} - x^{(k)}) = b - \underset{L+D+U}{\underset{\parallel}{A}}x^{(k)} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} Dx^{(k+1)} - Dx^{(k)} + Lx^{(k+1)} - Lx^{(k)} = \\ \quad = b - Lx^{(k)} - Dx^{(k)} - Ux^{(k)} \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow Dx^{(k+1)} = b - Lx^{(k+1)} - Ux^{(k)} \Leftrightarrow \underline{x^{(k+1)} = D^{-1}[b - Lx^{(k+1)} - Ux^{(k)}]}$$

Que en components és $(MGS)_c$
o també ho escriurem com:

$$\left[x^{(k+1)} = B_{GS}\, x^{(k)} + C_{GS} \right] \text{ on } \left\{ \begin{array}{l} B_{GS} = -(D+L)^{-1}U \\ C_{GS} = (D+L)^{-1}b \end{array} \right. *$$

$*$ $B_{GS} = I - P^{-1}A = I - (D+L)^{-1}A = I - (D+L)^{-1}(L+D+U) = I - I -$
$- (D+L)^{-1}U = -(D+L)^{-1}U.$

$*$ $C_{GS} = P^{-1}b = (D+L)^{-1}b.$

Nota: No cal calcula $(D+L)^{-1}$, ho tenim en components.

Comentari:

1) Existeixen matrius A que garanteixen la convergència del (MGS):
   (i) Si A és edd per files.
   (ii) Si A és simètrica i definida positiva.
   DEM: veure Stoer o bé Golub, Van Loan.

2) No hi ha resultats generals que demostrin que (MGS) convergeix més ràpidament que (MJ).

Exemple
$\boxed{1}$

$$\begin{pmatrix} 10 & 1 & 1 \\ 1 & 10 & 1 \\ 1 & 1 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 12 \end{pmatrix}$$ de solució exacta $x_1 = x_2 = x_3 = 1$

Tant Jacobi com G-S són convergents (A és estrictament diagonalment dominant)
Partim de $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
JACOBI:

$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	k
0	0	0	0
1,2	1,2	1,2	1
0,96	0,96	0,96	2
1,00032	1,00032	1,00032	3
0,999936	0,999936	0,999936	4

Continuem fins $K=6$: avaluem l'error:

$\|x - x^{(6)}\|$? $\|B_J\|_\infty$?

$$B_J = \begin{pmatrix} 0 & -1/10 & -1/10 \\ -1/10 & 0 & -1/10 \\ -1/10 & -1/10 & 0 \end{pmatrix}$$

$\|B_J\|_\infty = \frac{1}{5}$ Fita de la norma de l'error $\rightarrow \|x - x^{(6)}\| \leq \frac{1/5}{1-1/5} \cdot 0,000384 = 0,000096$

$\boxed{2}$ $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 5 & 2 & 5 \\ 5 & 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 12 \end{pmatrix}$ Convergeix el MJ?

$$B_J = \begin{pmatrix} 0 & -5/2 & -1/2 \\ -5/2 & 0 & -5/2 \\ -5/2 & -5/2 & 0 \end{pmatrix} \qquad p(\lambda) = \det(B_J - \lambda I) = -\lambda^3 + \frac{55}{4}\lambda - \frac{75}{4}$$

Observem que $\left.\begin{matrix} p(1) < 0 \\ p(2) > 0 \end{matrix}\right\}$ Per Bolzano, $\exists$ VAP de B_J λ tq $|\lambda| > 1 \Rightarrow$ MJ divergeix.

$\boxed{3}$ Què passa si en J, o GS, prenem com a $x^{(0)} = x$? $x^{(1)} = x$.

$\boxed{4}$ Donat $Ax = b$, $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$, (MGS) és convergent?

obs: la matriu és $\left\{\begin{matrix} \text{edd} \\ \text{simètrica dep positiva} \end{matrix}\right. \Rightarrow$ MGS convergeix.

MÈTODE DE SOBRERELAXACIÓ

És una generalització dels anteriors. Si sumem i restem $x_i^{(k)}$ en el mètode de Gauss-S, obtenim:

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \underbrace{\frac{-\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} + b_i}{a_{ii}}}$$

Això es pot interpretar com: cada iteració $x_i^{(k+1)}$ s'obté a partir de l'anterior $x_i^{(k)}$ amb una correcció $\underbrace{\quad}$

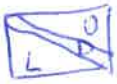
El mètode de sobrerelaxació consisteix en multiplicar la correcció per un paràmetre ω, anomenat paràmetre de relaxació, de manera que s'acceleri la convergència, és a dir,

$$(SR)_{\omega,c} \left[x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \omega \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}}{a_{ii}} \right] \quad i = 1, \dots, n, \; k \geq 0$$

De fet, el mètode iteratiu que s'obté es pot escriure

$$(SR)_\omega \left[X^{(k+1)} = B_\omega X^{(k)} + C_\omega \right]$$

$A = L + D + U$



on prenem $P = \frac{1}{\omega} D + L = \frac{1}{\omega}(D + \omega L)$

Llavors $\boxed{B_\omega = P^{-1}(P - A) = \omega(D+\omega L)^{-1}\left(\frac{1}{\omega}D + \cancel{L} - D - \cancel{L} - U\right) =}$

$$\boxed{= (D + \omega L)^{-1}\left((1-\omega)D - \omega U\right)}$$

$$\boxed{C_\omega = P^{-1} b = \omega (D + \omega L)^{-1} b}$$

Veiem que $(SR)_\omega$ és $(SR)_{\omega,c}$.

De $(*)$ $\quad P(x^{(k+1)} - x^{(k)}) = b - A x^{(k)}$

$$\left(\frac{1}{\omega} D + L\right)\left(x^{(k+1)} - x^{(k)}\right) = b - Lx^{(k)} - Dx^{(k)} - Ux^{(k)}$$

$$\overset{\shortparallel}{\frac{1}{\omega} D x^{(k+1)} - \frac{1}{\omega} D x^{(k)} + L x^{(k+1)} - L x^{(k)}}$$

$$D x^{(k+1)} = D x^{(k)} + \omega \left[b - L x^{(k+1)} - (D+U) x^{(k)} \right]$$

$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \omega D^{-1}\left[b - L x^{(k+1)} - (D+U) x^{(k)} \right]$ i prenent components

es té $(SR)_{\omega,c}$.

Nota:

1) Si $\omega = 1$ recuperem G-S.

2) Veiem ara que només té interès prendre $0 < \omega < 2$.

Proposició $\quad \rho(B_\omega) \geq |\omega - 1|$

Està clar que volem $\rho(B_\omega) < 1 \Rightarrow |\omega - 1| < 1 \Leftrightarrow -1 < \omega - 1 < 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0 < \omega < 2 \Leftrightarrow \omega \in (0, 2)$.

DEM:

$$\underset{\substack{\shortparallel \\ \lambda_1 \cdots \lambda_n \\ \text{VAP's de } B_\omega}}{\det B_\omega} = \underbrace{\det(D + \omega L)^{-1}}_{\text{triang} \quad \frac{1}{a_{11} \cdots a_{nn}}} \cdot \underbrace{\det((1-\omega)D - \omega U)}_{a_{11} \cdots a_{nn} (1-\omega)^n} = (1-\omega)^n$$

$\lambda_1 \cdots \lambda_n = (1-\omega)^n \Rightarrow \underbrace{\max_{1\le i\le n} |\lambda_i|}_{\rho(B_\omega)} \geq |1-\omega| \Rightarrow$ (si $\max|\lambda_i| < |1-\omega| \Rightarrow \forall \lambda$ VAP $|\lambda_k| < |1-\omega| \Rightarrow |\lambda_1| \cdots |\lambda_n| < |1-\omega|^n \Rightarrow$ contr.)

$\Rightarrow \boxed{\rho(B_\omega) \geq |1-\omega|}$ ☒

Comentari: En general és difícil conèixer el ω òptim. Veiem un tipus concret de matrius.

Teorema:

Sigui A simètrica, definida positiva i tridiagonal per blocs on D_i, $i=1\div n$ són submatrius diagonals, $L_{i+1} = U_i^T$.

$$\begin{pmatrix} D_1 & U_1 & & & \\ L_2 & D_2 & U_2 & & 0 \\ & & \ddots & & \\ & 0 & & & U_{n-1} \\ & & & L_n & D_n \end{pmatrix}$$

Llavors $\rho(B_{GS}) = \overbrace{(\rho(B_J))^2 < 1}^{?}$ i el paràmetre de relaxació $\bar{\omega}$ òptim és:

$$\boxed{\bar{\omega} = \frac{2}{1 + (1-\rho(B_J))^{1/2}}}$$

i el valor òptim de $\rho(B_{\bar{\omega}})$ és $\boxed{\rho(B_{\bar{\omega}}) = \bar{\omega} - 1}$.

(**Ref**: Golub-Van Loan, "Matrix Computations")

Exemple: Prenem el SL

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$D_1 = D_2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$

$U_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Solució exacta: $x_1 = -\frac{41}{209}$, $x_2 = \frac{53}{209}$, $x_3 = \frac{167}{209}$, $x_4 = \frac{206}{209}$.

$\rho(B_J) = \frac{\sqrt{5}+1}{8}$, $\rho(G_S) = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{8}\right)^2$, $\bar{\omega} = 1{,}04464$, $\rho(B_{\bar{\omega}}) = 0{,}04464$.

Llavors la velocitat de convergència és:

$V_J = -\log(\rho(B_J)) = 0{,}9$.

$V_{GS} = -\log(\rho(B_{GS})) = 1{,}8$

$V_{\bar{\omega}} = -\log(\rho(B_{\bar{\omega}})) = 3{,}1$

Que guapa que ets ♡♡♡♡ — Per cert, les teves notes ... perfectament

TEMA 3: CÀLCUL DE VALORS i VECTORS PROPIS

01 INTRODUCCIÓ

Donada A $n\times n$ real, volem λ, v t.q. $\underline{Av = \lambda v}$

1) Observem que calcular els VAPs d'A equival a trobar les arrels dels polinomis característics $P_A(\lambda) = \det(A-\lambda I) = 0$. Si n gran, no és una bona estratègia.

2) Si tenim un VEP v, llavors es pot obtenir el VAP associat λ a partir de l'anomenat <u>quocient de de Rayleigh</u> que definim, donat qualsevol vector, com: $\dfrac{v^T A v}{v^T v}$. En efecte, si $Av = \lambda v \Rightarrow v^T A v = v^T \lambda v \Rightarrow \boxed{\lambda = \dfrac{v^T A v}{v^T v}}$

El contingut, a grans trets, és:

- Localització de VAPs.
- Càlcul del radi espectral d'A. $\max\limits_{1\le i\le n} |\lambda_i|$ (mètode de la potència).
- Mètodes basats en transformacions de semblança; és a dir, transformen A a una altra matriu més senzilla (preservant els VAPs) de manera que sigui més fàcil calcular els VAPs.

Comencem amb un teorema senzill de localització de VAPs.

<u>Teorema</u> (Gerschgorin)

Siguin $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ els VAPs d'una matriu A. Llavors:

$$\forall k = 1, \dots, n \qquad \lambda_k \in \bigcup_{i=1}^{n} C_i \qquad \text{on} \quad C_i = \{ z\in\mathbb{C} \; | z - a_{ii}| \le r_i, \; r_i = \sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{n} |a_{ij}| \}$$

$(z = x+iy \in \mathbb{C})$.

DEM: Sigui λ VAP d'A de VEP $\vec{x} \ne 0$, és a dir $A\vec{x} = \lambda\vec{x} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n\end{pmatrix}$

$$(\lambda - a_{ii}) x_i = \sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{n} a_{ij} x_j \;, \quad i = 1, \dots, n.$$

Triem k t.q. $\|x\|_\infty = |x_k|$. Llavors: $|\lambda - a_{kk}| \le \sum\limits_{\substack{j=1\\ j\ne k}}^{n} |a_{kj}| \underbrace{\dfrac{|x_j|}{|x_k|}}_{\le 1} \le \sum\limits_{\substack{j=1\\ j\ne k}}^{n} |a_{kj}| \overset{\text{DEF}}{=} r_k$

(és a dir $\lambda \in \{ |z - a_{kk}| \le r_k \}$)

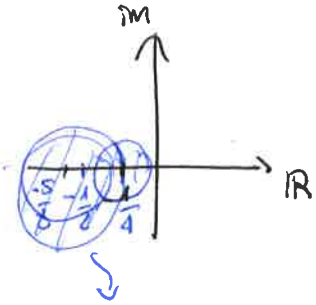
Com no coneixem k, prenem $\bigcup\limits_{i=1}^{n} C_i$ $\boxtimes$

<u>Exemple</u>: $\boxed{1}$ Provar que els VAPs d'A tenen part real negativa

$$A = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} -8 & -2 & 4 \\ -1 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -10 \end{pmatrix}$$

T. Gerschgorin:

$$\begin{cases} |z - a_{11}| \le r_1 \iff \left|z + \frac{1}{2}\right| \le \frac{3}{8} \\ |z - a_{22}| \le r_2 \iff \left|z + \frac{1}{4}\right| \le \frac{3}{16} \\ |z - a_{33}| \le r_3 \iff \left|z + \frac{5}{8}\right| \le \frac{1}{4} \end{cases}$$



$Re(\lambda_k) \le 0 \quad \forall k, \ \lambda_k$ VAP.

02 EL MÈTODE DE LA POTÈNCIA.

<u>Objectiu</u>: Calcular el VAP dominant (és a dir, de mòdul màxim) o radi espectral.

Suposem que els n VAPs d'A satisfan:

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \ge |\lambda_3| \ge \dots \ge |\lambda_n| \Rightarrow \lambda_1 \ne 0 \in \mathbb{R}$$ (sino tindria el mateix mòdul que el seu conjugat (sol. d'un polinomi))

i prenem n VEP L.I: $x_1, \dots, x_n$. Llavors $\forall z_0$ inicial, $z_0 = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n$,

suposem $\alpha_1 \ne 0$.

Suposem que A diag.

Construim ara la successió: $z_{k+1} = A z_k = A^{k+1} z_0 \quad k \ge 0$.

Llavors $z_1 = A z_0 = A(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n) = \alpha_1 \lambda_1 x_1 + \dots + \alpha_n \lambda_n x_n =$

$$= \lambda_1 \left[\alpha_1 x_1 + \alpha_2 \frac{\lambda_2}{\lambda_1} x_2 + \dots + \alpha_n \frac{\lambda_n}{\lambda_1} x_n\right]$$

$$z_2 = A z_1 = \lambda_1^2 \left[\alpha_1 x_1 + \alpha_2 \frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2} x_2 + \dots + \alpha_n \frac{\lambda_n^2}{\lambda_1^2} x_n\right]$$

$$A\left\{\lambda_1\left[\alpha_1 x_1 + \alpha_2 \frac{\lambda_2}{\lambda_1} x_2 + \dots + \alpha_n \frac{\lambda_n}{\lambda_1} x_n\right]\right\} = \lambda_1\left[\alpha_1 \lambda_1 x_1 + \alpha_2 \frac{\lambda_2^2}{\lambda_1} + \dots + \alpha_n \frac{\lambda_n^2}{\lambda_1} x_n\right]$$

$$z_k = \lambda_1^k \left[\alpha_1 x_1 + \sum_{j=2}^{n} \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right)^k \alpha_j x_j\right]$$

Com que $\left|\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right| < 1, \ j \ge 2$ es té:

$$\boxed{\lim_{k\to\infty} \frac{(z_{k+1})_i}{(z_k)_i}} = \lim_{k\to\infty} \frac{\lambda_1^{k+1}}{\lambda_1^k} \frac{\left(\alpha_1 x_1 + \sum_{j=2}^{n} \overbrace{\left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right)^{k+1}}^{\to 0} \alpha_j x_j\right)_i}{\left(\alpha_1 x_1 + \sum_{j=2}^{n} \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right)^{k} \alpha_j x_j\right)_i} = \boxed{\lambda_1}$$

Ja tenim el VAP dominant λ_1. [Com a VEP: $\lim_{k\to\infty} \frac{z_k}{\lambda_1^k} (= \alpha_1 x_1)$, o bé $\lim_{k\to\infty} \frac{z_k}{\|z_k\|}$]

Comentaris:

1) Velocitat de convergència: $\frac{(z_{k+1})_i}{(z_k)_i} = \lambda_1 \frac{(\alpha_1 x_1)_i + \left(\sum_{j=2}^n \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right)^{k+1} \alpha_j x_j\right)_i}{(\alpha_1 x_1)_i + \left(\sum_{j=2}^n \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right)^k \alpha_j x_j\right)_i} =$

dividint $(\alpha_1 x_1)_i$

$$= \lambda_1 \frac{1 + \sum_{j=2}^n a_j \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right)^{k+1}}{1 + \sum_{j=2}^n a_j \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right)^k} = \left\{ \begin{array}{l} \text{termes dominants} \\ \dfrac{1 + a_2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{k+1} + \cdots}{1 + a_2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k + \cdots} \end{array} \right\} =$$

$$\begin{array}{r} 1 + a_2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{k+1} + \cdots \\ -1 - a_2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k + \cdots \\ \hline - a_2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k + \cdots \end{array}$$

$$= \lambda_1 \left(1 + O\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k\right) = \lambda_1 \left(1 - a_2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k + \cdots\right)$$

Per tant, la velocitat de convergència de $\frac{(z_{k+1})_i}{(z_k)_i}$ depèn del quocient $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ i serà més ràpida com més petit sigui $\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|$.

2) Podria passar que $z_k = A^k z_0$ creixés molt ràpidament: Farem: $z_0 = \tilde{z}_0$

$y_0 = \frac{\tilde{z}_0}{\|\tilde{z}_0\|} = \frac{z_0}{\|z_0\|}$, $\tilde{z}_1 = Ay_0 = A\left(\frac{z_0}{\|z_0\|}\right) = \frac{z_1}{\|z_0\|}$

$y_1 = \frac{\tilde{z}_1}{\|\tilde{z}_1\|} = \frac{z_1/\|z_0\|}{\|z_1/\|z_0\|\|} = \frac{z_1}{\|z_1\|}$, $\tilde{z}_2 = Ay_1 = A\frac{z_1}{\|z_1\|} = \frac{z_2}{\|z_1\|}$

$y_2 = \frac{\tilde{z}_2}{\|\tilde{z}_2\|} = \frac{z_2}{\|z_2\|}$, $\tilde{z}_3 = Ay_2 = \frac{z_3}{\|z_2\|}$.

Prendrem les successions $y_k = \frac{\tilde{z}_k}{\|\tilde{z}_k\|}$, $\tilde{z}_{k+1} = Ay_k$.

Observem que: $y_k = \frac{\tilde{z}_k}{\|\tilde{z}_k\|} = \frac{z_k}{\|z_k\|}$; $\|y_k\| = 1$, $\|\tilde{z}_{k+1}\| = \|Ay_k\| \leq \|A\| \overbrace{\|y_k\|}^{1} = \|A\|$

3) $\lim_{k\to\infty} \frac{(\tilde{z}_{k+1})_i}{(y_k)_i} = \lim_{k\to\infty} \frac{(z_{k+1})_i / \|z_k\|}{(z_k)_i / \|z_k\|} = \lambda_1$. VEP: $\lim_{k\to\infty} y_k$.

CAS PARTICULAR: matrius simètriques $A \in M_n(\mathbb{R})$ $A^t = A$ amb tots els VAP's diferents $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists$ bon de VEP's:

$(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ VAP's $\longrightarrow (x_1, \ldots, x_n)$ VEP's t.q. $x_i^t x_j = \delta_{ij}$.

Definim $\underbrace{\sigma_{k+1}}_{\text{Quocient de Rayleigh}} = \frac{z_k^T A z_k}{z_k^T z_k} = \frac{z_k^T \cdot z_{k+1}}{z_k^T z_k}$ $\|$ $z_k = \lambda_1^k \left(\alpha_1 x_1 + \sum_{j=2}^n \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right)^k \alpha_j x_j\right)$

Aleshores:

$$r_{k+1} = \frac{\lambda_1^{2k+1}\left(\alpha_1 x_1^T + \sum_{j=2}^{n}\left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right)^k \alpha_j x_j^T\right)\left(\alpha_1 x_1 + \sum_{j=2}^{n}\left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right)^{k+1}\alpha_j x_j\right)}{\lambda_1^{2k}\left(\alpha_1 x_1^T + \sum_{j=2}^{n}\left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right)^k \alpha_j x_j^T\right)\left(\alpha_1 x_1 + \sum_{j=2}^{n}\left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right)^{k+1}\alpha_j x_j\right)}$$

pq $\{x_1, \dots, x_n\}$ és bon $\Rightarrow$ $\lambda_1 \dfrac{\alpha_1^2 + \sum_{j=2}^{n}\left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right)^{2k+1}\alpha_j^2}{\alpha_1^2 + \sum_{j=2}^{n}\left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right)^{2k}\alpha_j^2} \to \lambda_1$

$$\lim_{k\to\infty} r_{k+1} = \lambda_1 ; \quad x_1 = \lim_{k\to\infty} \frac{z_k}{\|z_k\|} = \lim_{k\to\infty}\frac{z_k}{\lambda_1^k}$$

Obs:

(1) $r_{k+1} = \lambda_1 + O\left(\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|\right)^{2k}$

(2) A la pràctica $\eta_k = \dfrac{\tilde{z}_k}{\|\tilde{z}_k\|}$, $\tilde{z}_{k+1} = A\eta_k$

(3)

$$r_{k+1} = \underbrace{\frac{z_k^T}{\|z_k\|}}_{\eta_k^T} \cdot A \cdot \underbrace{\frac{z_k}{\|z_k\|}}_{\eta_k} = \eta_k^T \cdot \tilde{z}_{k+1}$$

Ara directament: $\lambda_1 = \lim_{k\to+\infty} r_{k+1} = \lim_{k\to+\infty} \eta_k^T \cdot \tilde{z}_{k+1}$

(VEP) $x_1 = \lim_{k\to\infty} \eta_k = \lim_{k\to\infty} \dfrac{\tilde{z}_k}{\|\tilde{z}_k\|} = \lim_{k\to\infty}\dfrac{z_k}{\|z_k\|}$

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix} \qquad z_0 = \tilde{z}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

k	$\frac{(z_{k+1})_1}{(z_k)_1}$	r_k
1	32,0000	29,7500
2	30,06250	30,28726
3	30,25988	30,28866
4	30,28572	30,28868

($\lambda_1 = 30,2886853458021$)

MÈTODE DE LA POTÈNCIA INVERSA

λ (suposem $\lambda \neq 0$) és VAP d'$A \in M_n(\mathbb{R})$ (suposem $\det A \neq 0$) de VEP $v \Leftrightarrow$

λ^{-1} és un VAP de A^{-1} de VEP v:

$$Av = \lambda v \underset{\det A\neq 0}{\Leftrightarrow} A^{-1}v = \frac{1}{\lambda}v$$

DEM: $Av = \lambda v \overset{\det A\neq 0}{\Leftrightarrow} \underbrace{A^{-1}A}_{Id}v = \lambda A^{-1} v \overset{\lambda\neq 0}{\Leftrightarrow} \lambda^{-1}v = A^{-1}v$

Per tant, aplicant el mètode de la potència a A^{-1} sobre el VAP de mòdul mínim d'A.

(S. $|\lambda_n| < |\lambda_{n-1}| \leq \dots$)

MÈTODE DE LA POTÈNCIA DESPLAÇADA

Es basa en:

λ VAP de A de VEP v $\Rightarrow$ $\lambda - q$ es VAP de $A - qI$ de VEP v

DEM: λ VAP d'A de VEP $v \Leftrightarrow Av = \lambda v \Leftrightarrow Av - qv = \lambda v - qv =$

$\Leftrightarrow (A - qI)v = (\lambda - q)v$

Utilitat Recordem que si els VAP's d'A són $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots$

La velocitat de convergència del mètode ($x_{k+1} = Ax_k = A^k x_0$) de la potència estàndard es $\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^k$.

Mètode de la potència desplaçada busca "q astutos" tq incrementi la velocitat de convergència al VAP dominant.

$\boxed{A}$ $\xrightarrow{\text{no sempre cert}}$ $\boxed{A - qI}$

$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \dots$

$\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|$ $\qquad \left|\frac{\lambda_2 - q}{\lambda_1 - q}\right|$

Ideal: trobar q tq $\left|\frac{\lambda_2 - q}{\lambda_1 - q}\right| < \left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|$

Exemple: A: 14, 13, 12, 11 VAPS $\rightarrow \frac{13}{14}$ Mètode estàndard (velocitat).

$q = 12$

$A - 12I$: 2, 1, 0, -1 $\rightarrow \frac{1}{2} < \frac{13}{14}$

MÈTODE DE LA POTÈNCIA INVERSA DESPLAÇADA

Es basa en:

λ VAP de A de VEP v $\Leftrightarrow (\lambda - q)^{-1}$ VAP de $(A - qI)^{-1}$ de VEP v.

Aplicació: Suposem que A té un VAP $\simeq q$. Mètode emprat per refinar q.

Suposem μ VAP de $(A - qI)^{-1}$ de VEP $v \Leftrightarrow (A - qI)^{-1} v = \mu v \Leftrightarrow v = \mu (A - qI) v \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{1}{\mu} v = Av - qv \Leftrightarrow Av = \frac{1}{\mu} v + qv = \left(\frac{1}{\mu} + q\right) v \Leftrightarrow \lambda = q + \frac{1}{\mu}$ és VAP de VEP v de A.

μ és VAP de $(A - qI)^{-1} \Leftrightarrow \frac{1}{\mu}$ és VAP de $A - qI \Leftrightarrow \frac{1}{\mu} + q$ és VAP de A.

Sup q apliquem el mètode de la potència a $(A - qI)^{-1}$ i que μ és el VAP dominant $\Rightarrow$ μ es en mòdul el més gran dels VAP's de $(A - qI)^{-1} \Leftrightarrow \frac{1}{\mu}$ és el VAP de mòdul menor de $(A - qI) \Leftrightarrow \frac{1}{\mu} + q = \min_{\lambda \text{ VAP de } A} |\lambda - q| \Leftrightarrow \frac{1}{\mu} + q$ es el VAP de A més proper a q.

03 MÈTODES DE SIMILITUD

Idea: Si M i M_1 satisfan que $\exists S$ regular tal que $SMS^{-1} = M_1 \Rightarrow M$ i M_1 són similars.

En particular: Spec(M) = Spec(M_1).

Objectiu: Donada A matriu inicial busquem $S_1, S_2, \dots$ matrius regulars de forma que portin A a una forma el més fàcil possible.

MÈTODE DE JACOBI

Busca canvis ortogonals (Q tq $Q^TQ = I$) de forma que porti la matriu a "diagonal".

Algoritme: $A_0 = A$

$A_1 = Q_1^T A_0 Q_1$ amb Q ortogonal.

$\{A_K\}$ $A_K = Q_K^T A_{k-1} Q_K$

$\downarrow$

D

- Jacobi es fa servir per calcular VAP's reals. Molt útil si $A = A^T$ es simètrica (doncs sabem que sempre diagonalitza en $\mathbb{R}$).
- Veiem:
  1 + A_K simètriques (si A és simètrica)
  2 + Sabem que λ VAP d'$A \Leftrightarrow \lambda$ VAP d'A_K.
  3 + Com construim les nostres Q's?

1) A_K def. $A_K = Q_K^T A_{K-1} Q_K$ son sempre simètriques

DEM:

Inducció:

$$A_1 = Q_1^T A_0 Q_1 \quad \boxed{A_1^T} = (Q_1^T A_0 Q_1)^T = Q_1^T \overbrace{A_0^T}^{A_0} (Q_1^T)^T = Q_1^T A_0 Q_1 = \boxed{A_1}$$

Sup cert per K: $A_0, \dots, A_K$ simètriques. Veiem que A_{K+1} també ho és:

$$A_{K+1} = Q_{K+1}^T A_K Q_{K+1} \Rightarrow \boxed{A_{K+1}^T} = (Q_{K+1}^T A_K Q_{K+1})^T = Q_{K+1}^T A_K^T (Q_{K+1}^T)^T = Q_{K+1}^T A_K Q_{K+1} = \boxed{A_{K+1}}$$

$\boxtimes$

2) Suposem que $A_K = Q_K^T \cdots Q_3^T Q_2^T Q_1^T A_0 Q_1 Q_2 Q_3 \cdots Q_K$.

(i) λ VAP de $A_K \Leftrightarrow \lambda$ VAP de A.

DEM.

Veiem que si $\tilde{Q} = Q_1 \cdots Q_K$ llavors $Q_K^T \cdots Q_1^T = (Q_1 \cdots Q_K)^T = \tilde{Q}^T$ satisfà que $\tilde{Q}^T = \tilde{Q}^{-1}$

$$Q_K^T Q_{K-1}^T \cdots (Q_1^T)(Q_1 Q_2 \cdots Q_K) = Q_K^T \cdots Q_2^T Q_2 \cdots Q_K = I$$

Osigui $\tilde{Q}$ és ortogonal $\Rightarrow A_K = \tilde{Q}^T A \tilde{Q}$ (canvi de base).

(ii) Sea v un VEP de A de VAP $\lambda \Rightarrow \tilde{Q}v$ VEP de VAP λ de A_K.

$A = \tilde{Q}^T A_K \tilde{Q}$, v es VEP de A de VAP $\lambda \Rightarrow Av = \lambda v \Rightarrow \tilde{Q}^T A_K \tilde{Q} v = \lambda v \Rightarrow$

$\Rightarrow A_K \underline{\tilde{Q} v} = \tilde{Q} \lambda v = \lambda \underline{\tilde{Q} v}$.

3) $A_{K-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ Buscamos el elemento a_{pq} de A_{K-1} tq tiene módulo màximo. Ej: $A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 5 \\ 7 & 2 & -2 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

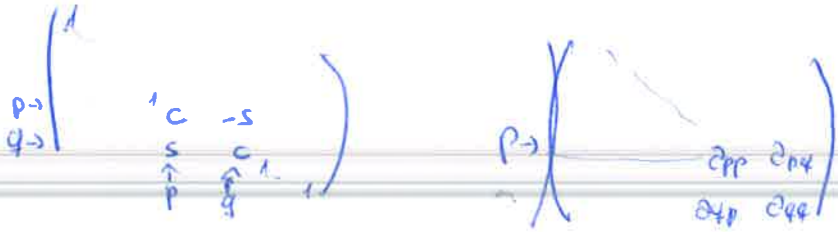
• Las Q's de Jacobi son rotaciones de ángulo φ. Veamos que $R(\varphi) = \begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}$

Afirm: $R(\varphi)$ es ortogonal

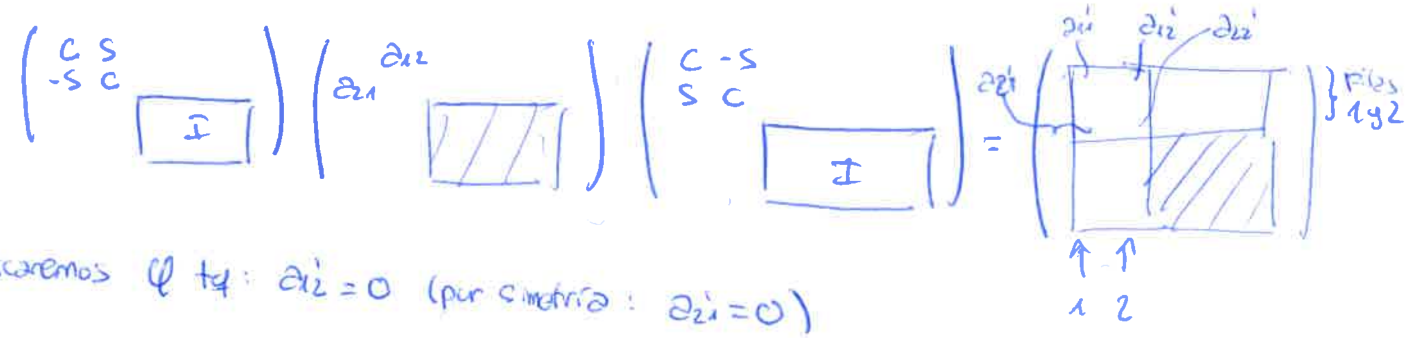
$$R(\varphi)^{-1} = R(-\varphi) = \begin{pmatrix}\cos(-\varphi) & -\sin(-\varphi) \\ \sin(-\varphi) & \cos(-\varphi)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix} = R(\varphi)^T$$

Algoritmo: Sea a_{pq} el elemento de módulo máximo de A_k en ese paso.

$\Rightarrow Q_k = R_{pq} =$



Sup $p=1$, $q=2$



Buscaremos φ tq: $a_{12}' = 0$ (por simetría: $a_{21}' = 0$)

$$0 = a_{pq}' = (a_{qq} - a_{pp})sc + a_{pq}(c^2 - s^2)$$

$\downarrow 1/c^2$

$t = \tan\varphi$.

$$(a_{qq} - a_{pp})\frac{s}{c} + a_{pq}\left(1 - \left(\frac{s}{c}\right)^2\right) \Rightarrow \boxed{(a_{qq} - a_{pp})t + a_{pq}(1 - t^2) = 0}$$

$$\frac{a_{pp} - a_{qq}}{a_{pq}} = 2\eta \qquad t = \eta \pm \sqrt{\eta^2 + 1}$$

Si $\eta \geq 0$, prenem $t = -\eta - \sqrt{\ }$ $\Rightarrow$ $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} > 0$, $\sin\varphi = \cos\varphi \cdot t < 0$

Si $\eta < 0$, prenem $t = \eta + \sqrt{\ }$ $\Rightarrow$ $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} > 0$, $\sin\varphi = \cos\varphi \cdot t > 0$

Exemple:

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

Després de 17 passos:

$$A_{17} = \begin{pmatrix} 3{,}85805745 & & & \\ & 0{,}01015005 & & \\ & & 30{,}28868533 & \\ & & & 0.8431575 \end{pmatrix}$$

els elements fora de la diagonal són $O(10^{-18})$. La "matriu" dels VEPs: $Q_1 \cdots Q_{17}$.

VAPs / VEPs

04 MÈTODES DE REDUCCIÓ

L'objectiu és reduir la matriu A a una tipus Hessenberg superior, és a dir:

$$H = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & \cdots & \cdots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & \cdots & \cdots & h_{2n} \\ 0 & h_{32} & h_{33} & \cdots & h_{3n} \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots 0 & h_{n,n-1} & h_{nn} \end{pmatrix}$$

mitjançant transformacions de semblança (i es mantindran els VAPs). En particular si A és simètrica, H serà tridiagonal simètrica.

Com procedim? Obé:

1) Passem d'A a H i calculem els VAPs d'H (via polinomi característic -amb una recurrència-), i els VEPs d'H ($\rightarrow$ calculem els VEPs d'A).

Obé:

2) Passem d'A a H, calculem el mètode QR a H i calculem VAPs i VEPs d'H $\rightarrow$ calculem VEPs d'A.

MÈTODE DE WYMAN

Sigui $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ i prenem N ~~...~~ (finit) de transformacions de semblança a partir de girs. Farem $N = (n-2) + (n-3) + \cdots + 1 = \frac{1+n-2}{2}(n-2) = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$

És a dir $H = Q_N^T Q_{N-1}^T \cdots Q_1^T A Q_1 \cdots Q_{N-1} Q_N$ de la forma següent:

Fem ~~el~~ girs al pla (p,q) tq $a'_{q,p-1} = 0$, $p = 2, \ldots, n-1$, $q = p+1, \ldots, n$

(on denotem $A' = R_\varphi^T A R_\varphi$, a cada pas). És a dir:

Pla (p,q)	
2,3	tq $a'_{31} = 0$
2,4	tq $a'_{41} = 0$
$\vdots$	$\vdots$

Pla (p,q)	
3,4	tq $a'_{42} = 0$
$\vdots$	$\vdots$

Com obtenir φ a cada gir? Tenim

$$\begin{cases} a'_{pi} = a_{pi}C + a_{qi}S \\ a'_{qi} = a_{qi}C - a_{pi}S \\ a'_{ip} \\ a'_{iq} = \\ a'_{pp} = \cdots,\ a'_{qq} = \cdots,\ a'_{qp} = \cdots \end{cases}$$

(Atenea)

Volem φ tq $a'_{qp-1} = a_{qp-1}c - a_{pp-1}s = 0$

És a dir, prenem:

$$\sin\varphi = \frac{a_{qp-1}}{\sqrt{a_{qp-1}^2 + a_{pq-1}^2}}, \quad \cos\varphi = \frac{a_{pq-1}}{\sqrt{a_{qp-1}^2 + a_{pq-1}^2}}$$

<u>Obs</u>: Els elements que jacen 0 es mantenen al fer els girs successius.

<u>Comentaris</u>: 1) Si λ és VAP d'H (d'A) amb VEP v_H, llavors Qv_H és VEP d'A:

$$Hv_H = \lambda v_H \iff Q^TAQv_H = \lambda v_H \iff A\underbrace{Qv_H}_{v_A} = \lambda \underbrace{Qv_H}_{v_A}$$

2) Si A és simètrica, s'anomena mètode de <u>Givens</u> i la matriu H que s'obté és tridiagonal simètrica.

<u>Exemple</u>:

$\boxed{1}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $H = Q^TAQ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt5} & \frac{2}{\sqrt5} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt5} & -\frac{1}{\sqrt5} \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt5} & -\frac{2}{\sqrt5} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt5} & -\frac{1}{\sqrt5} \end{bmatrix}$

gir al plà (2,3) tq $a'_{31} = 0$

$$\sin\varphi = \frac{a_{31}}{\sqrt{a_{31}^2 + a_{21}^2}} = \frac{2}{\sqrt5} \qquad \cos\varphi = \frac{a_{21}}{\sqrt{a_{31}^2 + a_{21}^2}} = -\frac{1}{\sqrt5}$$

$$H = \begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{\sqrt5} & -\frac{7}{\sqrt5} \\ \frac{5}{\sqrt5} & 0 & -\frac{5}{\sqrt5} \\ 0 & -\frac{5}{\sqrt5} & \frac{5}{\sqrt5} \end{pmatrix}$$

$\boxed{2}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = A^T \qquad H = A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 2{,}333 & 0{,}471 & 0 \\ 0 & 0{,}471 & 1{,}16 & 1{,}5 \\ 0 & 0 & 1{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}$

CÀLCUL DEL POLINOMI CARACTERÍSTIC D'H

<u>Lema</u>: Definim $q_0(\lambda) = 1$, $q_1(\lambda) = \dfrac{-(h_{11} - \lambda)}{h_{21}}$

$$q_j(\lambda) = \frac{-[h_{1j}q_0 + \dots + h_{j-1,j}\,q_{j-2}(\lambda) + (h_{jj} - \lambda)\,q_{j-1}(\lambda)]}{h_{j+1,j}}, \quad j = 2 \div n.$$

amb $h_{n+1,n} = 1$.

Llavors $\det(\mathcal{H}-\lambda I) = (-1)^n h_{21} h_{32} \cdots h_{n,n-1}\, q_n(\lambda)$

<u>Nota</u>: Aplicant mètode numèric per calcular arrels de polinomis (3r) calcularíem els VAPs.

MÈTODE QR

Consisteix en construir una successió $A = A_0, A_1, A_2, \ldots$ tq

$[A_s = Q_s R_s, \quad R_s Q_s = A_{s+1}, \quad s = 0, 1, 2, \ldots]$

(on Q_s és ortogonal, $Q^T Q = I$, i R_s és triangular superior).

$A = A_0 = Q_0 R_0$

$A_1 = R_0 Q_0 = Q_0^T A_0 Q_0 = Q_1 R_1$

$A_2 = R_1 Q_1 = Q_1^T A_1 Q_1 = Q_1^T Q_0^T A_0 Q_0 Q_1$

etc

⋮

$A_{s+1} = Q_s^T A_s Q_s = Q_s^T \cdots Q_0^T A_0 Q_0 \cdots Q_s$ (A_0 i A_{s+1} mantenen els VAPs)

Es pot provar (sota certes hipòtesis) que $A_s \xrightarrow[s\to\infty]{} T = Q^T A Q$ (triangular superior).

EXERCICIS TEORIA

02 SISTEMES LINEALS

1

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -10^{-5} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$a_{11}^{(0)} \neq 0 \Rightarrow m_{21} = -\dfrac{0,1\cdot 10^{-4}}{0,2\cdot 10^{1}} = -0,5\cdot 10^{-5}$

$a_{22}^{(1)} = 0,1\cdot 10^{1} - (-0,5\cdot 10^{-5})(0,1\cdot 10^{1}) =$
$= 0,1000\cancel{06}\cdot 10^{1}$

$b_2^{(1)} = 0,1\cdot 10^{1} - (-0,5\cdot 10^{-5})(0) = 0,1\cdot 10^{1}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{x_2 = 1}$$

$2x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow \boxed{x_1 = -0,5}$

2

$$\begin{pmatrix} 1 & 10000 \\ 0 & -10000 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10000 \\ -10000 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{x_2 = 1}$$

$x_1 + 10000x_2 = 10000 \Rightarrow \boxed{x_1 = 0}$

3

$$\begin{pmatrix} 1 & 0,0001 \\ 1 & 10000 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 10000 \end{pmatrix}$$

$a_{11}^{(0)} \neq 0 \Rightarrow m_{21} = \dfrac{0,1\cdot 10^{1}}{0,1\cdot 10^{1}} = 0,1\cdot 10^{1}$

$a_{22}^{(1)} = 0,1\cdot 10^{5} - 0,1\cdot 10^{1}\cdot 0,1\cdot 10^{-3} \simeq 0,1\cdot 10^{5}$

$b_2^{(1)} = 0,1\cdot 10^{5} - 0,1\cdot 10^{1}\cdot 0,1\cdot 10^{1} \simeq 0,1\cdot 10^{5}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0,0001 \\ 0 & 10000 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 10000 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{x_2 = 1}$$

$x_1 + 0,0001x_2 = 1 \Rightarrow \boxed{x_1 \simeq 1}$

Àlgebra lineal i numèrica

PROBLEMES

Oriol Navarro Travesset

1r CFIS 1/2on Q.

T1: Introducción y errores

1.1. Representación

① $\frac{1}{10} \xrightarrow{\text{base } 10}$ $\boxed{fl(\frac{1}{10}) = +0.1 \cdot 10^0}$

$\xrightarrow{\text{base } 2}$ $\boxed{fl(\frac{1}{10}) = +0{,}1100110011\ldots 2^{-3}}$

1/10 és periòdic en base 2 i és exacte en base 10.

② (a) (i) $6 = 2^2 + 2^1 + 0 \cdot 2^0 \Rightarrow$ $\boxed{6 \equiv 110_2}$

(ii) $5 = 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 2^0 \Rightarrow \boxed{5 = 101_2}$

(iii) $26 = 2^4 + 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 2^1 + 0 \cdot 2^0 \Rightarrow \boxed{26 = 11010_2}$

(iv) $\boxed{2{,}1 = 10{,}0001100110011\ldots_2}$

(b) $1001{,}1101_2 \Rightarrow 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} + 0 \cdot 2^{-3} + 1 \cdot 2^{-4}$

$2^{-1} = 0{,}5$, $2^{-2} = 0{,}25$, $2^{-3} = 0{,}125$ $\quad 2^{-4} = 0{,}0625$

$\boxed{1001{,}1101_2 = 9{,}8125_{10}}$

③ s_1, m, s_2, exp → en binario

s_1	*												s_2	exp			
0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0

*: No se puede "ahorrar" un dígito dando por supuesto que $d_1 = 1$ siempre (en base 2).

④ Mínim:

Màxim: $\underbrace{11\cdots11_2}_{n-2} = (2^{n-2} + \cdots + 2^1 + 2^0)_{10} \Rightarrow$

$1, 2, 2^2, \ldots, 2^{n-2}$ prog. geomètrica.

$r = 2$, $a_1 = 1$ $\quad S_n = a_1 \frac{1 - r^n}{1 - r} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Màxim: $\boxed{M = 1 \cdot \frac{1 - 2^{n-2}}{1 - 2} = 2^{n-2} - 1}$

③* a) ¿Cuál es el mayor número que podemos almacenar con esta arquitectura?

e: $\boxed{1|1|1|1} \to 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0 = 15$

m: $\underbrace{\boxed{1|1|\cdots|1}}_{12} \to 2^{-1} + 2^{-2} + \cdots + 2^{-12} \Rightarrow -S = 2^{-1} + 2^{-2} + \cdots + 2^{-12}$

$+ 2S = 2^0 + 2^{-1} + \cdots + 2^{-11}$

$-S + 2S = 2^0 - 2^{-12} \Rightarrow S = 1 - 2^{-12} \simeq 0{,}999755\ldots$

$\boxed{X_{max} = 0{,}999755 \cdot 2^{15}}$

(b) ¿Y el menor? $X_{min} = 2^{-1} \Rightarrow \boxed{X_{min} = 0{,}5 \cdot 2^{-15}}$

m: $\boxed{1|0|\cdots|0}$

e^-: $\boxed{1|1|1|1}$

Nota: ε-máquina: ε>0 más pequeño tq $fl(1+\varepsilon) > 1$

** Calcular ε-máquina de vuestro ordenador (float i double).

1.2 Errors

(3) $\sum_{i=1}^{n} x_i$ valor exacte, S_n valor amb errors.

Veure apunts pràctiques: $\left| S_n - \sum_{i=1}^{n} x_i \right| \leq \left(n|x_1| + n|x_2| + (n-1)|x_3| + \cdots + 3|x_{n-1}| + 2|x_n| \right) \varepsilon$

(4) $\sum_{i=1}^{15} \frac{1}{i^2} \Rightarrow \left| S_{15} - \left(1 + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{255}\right) \right| \leq \left(15 \cdot 1 + 15 \cdot \frac{1}{4} + \cdots + 3 \cdot \frac{1}{14^2} + 2 \cdot \frac{1}{15^2} \right) \varepsilon =$

3 dígits amb tall $(t=3) \Rightarrow \left| \frac{F_T(x) - x}{x} \right| \leq 10^{1-t} = 10^{-2} = \varepsilon$

$= 0.225 \Rightarrow S_{15} = 0.153 \cdot 10^{1}$

$\left| \tilde{S}_{15} - \left(\frac{1}{255} + \cdots + \frac{1}{4} + 1 \right) \right| \leq \left(15 \cdot \frac{1}{15^2} + 15 \cdot \frac{1}{14^2} + 14 \cdot \frac{1}{13^2} + \cdots + 3 \frac{1}{2^2} + 2 \cdot 1 \right) \varepsilon = 0.049 \Rightarrow$

$\Rightarrow \tilde{S}_{15} = 0.157 \cdot 10^{1} \Rightarrow$ Més exacte //.

(5) f derivable.

$e_a(f(\tilde{x}), f(x)) = f(\tilde{x}) - f(x) \overset{\text{Teorema del valor Mig}}{=} f'(\xi)(\tilde{x} - x) \underset{|\tilde{x}-x| \ll 1}{\simeq} f'(x)\, e_a(\tilde{x}, x)$

$\boxed{e_r(f(\tilde{x}), f(x)) = } \frac{e_a(f(\tilde{x}), f(x))}{f(x)} \underset{x \neq 0}{\simeq} \frac{x f'(x)}{f(x)} \frac{e_a(\tilde{x}, x)}{x} = \boxed{\frac{x f'(x)}{f(x)} e_r(\tilde{x}, x)}$

Agafant $f : [0, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty)$

$x \longmapsto \sqrt{x}$

$\boxed{e_r(\sqrt{\tilde{x}}, \sqrt{x}) \simeq} \frac{x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} e_r(\tilde{x}, x) = \frac{x}{2(\sqrt{x})^2} e_r(\tilde{x}, x) = \boxed{\frac{1}{2} e_r(\tilde{x}, x)}$

$g(x) = \frac{1}{1 - x^2}, \quad x \simeq 1$

$e_r(g(\tilde{x}), g(x)) \simeq \frac{x g'(x)}{g(x)} e_r(\tilde{x}, x) = \frac{x \cdot (-1) \cdot (1-x^2)^{-2} \cdot (-2x)}{1/(1-x^2)} e_r(\tilde{x}, x) =$

$= \frac{2x^2}{1-x^2} e_r(\tilde{x}, x) \Rightarrow$ L'error relatiu s'amplifica per x molt propers a 1 //

(6) $\left. \begin{array}{l} 3x + ay = 10 \\ 5x + by = 20 \end{array} \right\}$ on $a = 2.100 \pm 5 \cdot 10^{-4}$, $b = 3.300 \pm 5 \cdot 10^{-4}$

$x = \frac{\begin{vmatrix} 10 & a \\ 20 & b \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & a \\ 5 & b \end{vmatrix}} = \frac{10b - 20a}{3b - 5a} = 10 \frac{b - 2a}{3b - 5a}$

$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 10 \\ 5 & 20 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & a \\ 5 & b \end{vmatrix}} = \frac{10}{3b - 5a}$

$x + y = 10 \left(\frac{b - 2a + 1}{3b - 5a} \right)$

$$e_a(f(\tilde{x}_1,\dots,\tilde{x}_n), f(x_1,\dots,x_n)) = f(\tilde{x}_1,\dots,\tilde{x}_n) - f(x_1,\dots,x_n) =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi_1,\dots,\xi_n)(\tilde{x}_1 - x_1) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\xi_1,\dots,\xi_n)(\tilde{x}_2 - x_2) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\xi_1,\dots,\xi_n)(\tilde{x}_n - x_n) \simeq$$

Teorema del Valor Mig

$$\simeq \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,\dots,x_n)\, e_a(\tilde{x}_1, x_1) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1,\dots,x_n)\, e_a(\tilde{x}_n, x_n) =$$

si $x_i \tilde{x}_i$ son molt propers

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1,\dots,x_n)\, e_a(\tilde{x}_i, x_i)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{|e_a(f(\tilde{x}), f(x))| \le \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right| \underbrace{|e_a(\tilde{x}_i, x_i)|}_{\le \varepsilon_a(\tilde{x}_i, x_i)} \le \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right| \varepsilon_a(\tilde{x}_i, x_i)}$$

$\tilde{a} = 2.1$, $\varepsilon_a(\tilde{a}) = 0.5 \cdot 10^{-3} := \varepsilon$

$\tilde{b} = 3.3$, $\varepsilon_a(\tilde{b}) = 0.5 \cdot 10^{-3} = \varepsilon$

$$x+y = 10\, \frac{b-2a+1}{3b-5a} = 10 \cdot \frac{N}{D}$$

$N = \tilde{b} - 2\tilde{a} + 1 = 0.1$. $\quad \varepsilon_a(N) = 1 \cdot \varepsilon_a(\tilde{b}) + 2\varepsilon_a(\tilde{a}) = 3\varepsilon$

$D = 3\tilde{b} - 5\tilde{a} = -0.6 \quad \varepsilon_a(D) = 3 \cdot \varepsilon_a(\tilde{b}) + 5\varepsilon_a(\tilde{a}) = 8\varepsilon$

$$\widetilde{x+y} = -\frac{0.1}{0.6} \cdot 10 = -\frac{5}{3} \qquad \varepsilon_a(\underbrace{x+y}_{10\frac{N}{D}}) = 10 \cdot \frac{|D|\varepsilon_a(N) + |N|\varepsilon_a(D)}{D^2} = \frac{650}{9}\varepsilon \simeq 0.4 \cdot 10^{-1}$$

$$\boxed{x+y = -5/3 \pm 4 \cdot 10^{-2}}$$

$$10 \cdot \frac{N}{D} = 10 \cdot \frac{1}{|D|} \cdot \varepsilon_a(N) + |N| \cdot \frac{1}{D^2} |\varepsilon_a(D)|$$

---

(7)

a) $\sqrt[k]{2{,}15283} - \sqrt[k]{2{,}15263} = r$

↓

Evitar restas de valores parecidas

	$k=2$	$k=3$	$k=4$
$\sqrt[k]{2{,}15283}$	1,46725	1,29123	1,21130
$\sqrt[k]{2{,}15263}$	1,46718	1,29119	1,21127
r	$7 \cdot 10^{-5}$	$4 \cdot 10^{-5}$	$3 \cdot 10^{-5}$

Horror: Hemos perdido dígitos significativos

b) $e_r(x_1 - x_2) \simeq \dfrac{e_a(x_1) + e_a(x_2)}{x_1 - x_2}$

Idea: $(x^k - b^k) : (x - b) \Rightarrow$

	(k)	$(k-1)$		(1)	(0)
	1	0	---	0	$-b^k$
b		b		b^{k-1}	b^k
	1	b	---	b^{k-1}	0

$$\Rightarrow (x^k - b^k) = (x^{k-1} + b x^{k-2} + \dots + b^{k-1})(x - b)$$

$x = a$: $\quad a^k - b^k = (a^{k-1} + b a^{k-2} + b^2 a^{k-3} + \dots + b^{k-1})(a - b)$

$$a - b = \frac{a^k - b^k}{a^{k-1} + b a^{k-2} + \dots + b^{k-1}}$$

Tomamos $a = \sqrt[k]{A}$ $\quad A = 2{,}15283$

$b = \sqrt[k]{B}$ $\quad B = 2{,}15263$

$$\sqrt[k]{A} - \sqrt[k]{B} = \frac{A-B}{\underbrace{a^{k-1}+a^{k-2}b+\cdots+b^{k-1}}_{\text{suma}}}$$

$K=2$:

$$\sqrt{A} - \sqrt{B} = \frac{A-B}{\sqrt{A}+\sqrt{B}} \doteq 6{,}81563 \cdot 10^{-5}$$

$K=3$:

$$\sqrt[3]{A} - \sqrt[3]{B} = \frac{A-B}{(\sqrt[3]{A})^2 + \sqrt[3]{AB} + (\sqrt[3]{B})^2} = 3{,}99866 \cdot 10^{-5}$$

$K=4$

$$\sqrt[4]{A} - \sqrt[4]{B} = \frac{A-B}{(\sqrt[4]{A})^3 + \sqrt[4]{A}\sqrt[4]{B} + \sqrt[4]{A}\sqrt{B} + (\sqrt[4]{B})^3} = 2{,}81340 \cdot 10^{-5}$$

c) Comparativa:

5 cifras decimales en operaciones $\rightarrow \varepsilon_a \simeq \frac{1}{2} \cdot 10^{-5}$

$$\varepsilon_a(\sqrt[k]{A} - \sqrt[k]{B}) \cong \varepsilon_a(\sqrt[k]{A}) + \varepsilon_a(\sqrt[k]{B}) = 10^{-5} \Rightarrow \sqrt{A} - \sqrt{B} = 7 \cdot 10^{-5} \pm \delta \quad \delta = 10^{-5}$$

¿Cuál es una estimación del ε_a al calcular $\sqrt[k]{A} - \sqrt[k]{B}$ usando las fórmulas de b?

$K=2$: $\sqrt{A} - \sqrt{B} = \frac{A-B}{\sqrt{A}+\sqrt{B}} = f(\sqrt{A}, \sqrt{B}) = \frac{D \rightarrow A-B}{\sqrt{A}+\sqrt{B}}$

Error en los datos (fórmula):

- $\bar{x}, \bar{y}$ tienen error
- Calculamos f de manera correcta.

$$\Rightarrow \boxed{\varepsilon_a(f(\bar{x},\bar{y})) \simeq \left|\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x},\bar{y})\right| \varepsilon_a(\bar{x}) + \left|\frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x},\bar{y})\right| \varepsilon_a(\bar{y})}$$

Si además, calcular f supone un error relativo δ $\quad + |f(\bar{x},\bar{y})|\,\delta$

$$\varepsilon_a(\sqrt{A} - \sqrt{B}) = \underbrace{\left| -\frac{D}{(\sqrt{A}+\sqrt{B})^2} \right|}_{\simeq 0{,}2 \cdot 10^{-9} < \frac{1}{2} 10^{-9}} \underbrace{\varepsilon_a(\sqrt{A})}_{\frac{1}{2} 10^{-5}} + \left| -\frac{D}{(\sqrt{A}+\sqrt{B})^2} \right| \underbrace{\varepsilon_a(\sqrt{B})}_{\frac{1}{2} 10^{-5}}$$

↳ Aproximación por el 2º método de unas "8-9" cifras decimales correctas.

9

a) $f_n(x) = n!\left(e^x - \left(1 + x + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right)\right)$

$$\boxed{f_{n+1}(x) = (n+1)!\left(e^x - \left(1 + x + \cdots + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right)\right)} = (n+1)\,n!\left(e^x - \left(1+x+\cdots+\frac{x^n}{n!}\right)\right) - (n+1)!\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = \boxed{(n+1) f_n(x) - x^{n+1}}$$

Notación: $f_n = f_n(1) \Rightarrow$ $\boxed{f_{n+1} = (n+1) f_n - 1}$ ← Algoritmo inestable: errores crecen con n.

¿Pq? $\varepsilon_a(f_{n+1}) \underset{(*)}{=} (n+1)\,\varepsilon_a(f_n) = (n+1)n\,\varepsilon_a(f_{n-1}) = \dots = \underline{(n+1)!\,\varepsilon_a(f_0)}$

(*) $\varepsilon_a(h(x)) = |h'(\bar{x})|\,\varepsilon_a(\bar{x})$, $f_{n+1} = h(f_n)$, $h(x) = (n+1)x - 1$

b) 5 dígitos significativos → $\varepsilon_r(f_0) \leq \frac{1}{2} 10^{1-5}$

$$\Downarrow$$

$$\varepsilon_a(f_0) = |f_0|\,\varepsilon_r(f_0) \leq \underbrace{|f_0|}_{\sim 1} \frac{1}{2} \cdot 10^{-4}$$

$n = 10$:

$$\varepsilon_a(f_{10}) \simeq 10!\,\frac{1}{2} 10^{-4} \simeq \underline{308}$$

¿Cómo mejorarlo? (capítulo 1)

$$f_{n+1} = (n+1) f_n - 1 \rightsquigarrow \frac{f_{n+1} + 1}{n+1} = f_n \Rightarrow f_n = \frac{1}{n+1} f_{n+1} + \frac{1}{f_{n+1}} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \boxed{\varepsilon_a(f_n) = \frac{1}{n+1}\,\varepsilon_a(f_{n+1})}$$ Reduce errores.

¿Dónde empezar?

$$f_n(x) = n!\,\Big(e^x - \underbrace{\Big(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}\Big)}_{\text{desarrollo de Taylor de grado } n \text{ de } x \text{ en } x_0 = 0}\Big) \overset{\text{Taylor}}{=} n!\,\frac{\xi^{n+1}}{(n+1)!}(x-0)^{n+1},\ \xi \in \langle 0, x\rangle$$

mínimo intervalo que contiene x y 0: $\langle 0,x\rangle$ → $(0,x)$ o $(x,0)$

Si $x \leq 1$

$$f_n(1) = f_n = \frac{\xi^{n+1}}{n+1} < \frac{1}{n+1} \qquad f_{20} < \frac{1}{21} \to \text{Método} \simeq \text{estable.}$$

Capítulo 2: ¿se puede mejorar el c1?

Def: $g_n(x) = \dfrac{f_n(x)}{n!} \to \left(g_{10}(1) = \dfrac{f_{10}(1)}{10!} \Rightarrow f_{10}(1) = 10!\,g_{10}(1)\right)$

¿Qué recurrencia satisfacen las $g_n(x)$?

$$\frac{f_{n+1}(x)}{(n+1)!} = \frac{(n+1) f_n(x) - x^{n+1}}{(n+1)!} \Rightarrow g_{n+1}(x) = \frac{f_n(x)}{n!} - \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{g_{n+1}(x) = g_n(x) - \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}$$

$$g_{n+1}(1) = g_n(1) - \frac{1}{(n+1)!} \Rightarrow g_{n+1} = g_n - \frac{1}{(n+1)!} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{g_n = g_{n+1} + \frac{1}{(n+1)!}}$$

$f_n < \frac{1}{n+1}$

$\varepsilon_n = \frac{f_n}{n!} < \frac{1}{(n+1)!} \Rightarrow \varepsilon_{20} < \frac{1}{(21)!} \Rightarrow$ Podemos tomar ε_{20} como 0.

$\boxed{\text{PFP}}$ Calcular e^{x^2} donde:

<u>error relativo</u>

- error en la representación de x: δ_r
- error en el producto: δ_*
- error en la exponencial: δ_{exp}.

Valor real

$x_0 = x$

$x_1 = x_0^2$

$x_2 = \exp(x_1)$

Valor aprox

$\overline{x_0} = x(1+\delta_r)$

$\overline{x_1} = \overline{x_0} * \overline{x_0}\,(1+\delta_*) = x_0(1+\delta_r)x_0(1+\delta_r)(1+\delta_*) =$

$= x_0^2\underbrace{(1+\delta_r)^2}_{1+2\delta_r}(1+\delta_*) \simeq x_0^2(1+2\delta_r+\delta_*)$

despreciamos $O(\delta^2)$

$\overline{x_2} = e^{\overline{x_1}}(1+\delta_{exp}) = e^{x_0^2(1+2\delta_r+\delta_*)}(1+\delta_{exp}) = e^{x_0^2}\cdot \underbrace{e^{2\delta_r x_0^2+\delta_* x_0^2}}_{1+x+\dots}(1+\delta_{exp}) =$

$\simeq e^{x_0^2}(1+2\delta_r x_0^2+\delta_* x_0^2)(1+\delta_{exp}) \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\overline{x_2} \simeq e^{x^2}(1+(2\delta_r+\delta_*)x^2+\delta_{exp})} \Rightarrow \varepsilon_r = (2\delta_r+\delta_*)x^2+\delta_{exp}$

Cota superior del ε_a:

$\varepsilon_a(\overline{x_2}) = e^{\overline{x_1}}\varepsilon_a(\overline{x_1}) + e^{\overline{x_1}}\delta_{exp}$

$\varepsilon_a(\overline{x_0}) = |x|\,\delta_r$

$\varepsilon_a(\overline{x_1}) = \underbrace{2|x_0|\,\varepsilon_a(x_0)}_{\text{error en los datos}} + \underbrace{x_0^2\delta_*}_{\text{error en la operación}} \leq 2x_0^2\delta_r + x_0^2\delta_* = x_0^2(2\delta_r+\delta_*)$

$x_1 = x_0^2$

$\varepsilon_a(\overline{x_2}) = \exp(x_1)\,\varepsilon_a(x_1) + \exp(x_1)\,\delta_{exp} \leq e^{x^2}(x^2(2\delta_r+\delta_*)+\delta_{exp}) \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\varepsilon_r(\overline{x_2}) = x^2(2\delta_r+\delta_*)+\delta_{exp}}$ ✓

13 $V(\pi, R) = \frac{4}{3}\pi R^3$ (error en los datos)

V error relativo $\leq 0{,}01\,\% = 10^{-4} \longrightarrow$ [dígitos significativos : 5 truncado

¿Cifras decimales en π y R para conseguirlo? (dígitos significativos).

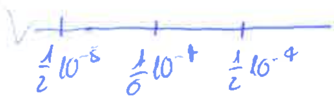
$$\frac{\varepsilon_a(V(\bar{\pi},\bar{R}))}{\frac{4}{3}\bar{\pi}\bar{R}^3} \simeq \frac{\left|\frac{\partial V}{\partial \pi}(\bar{\pi},\bar{R})\right| |\varepsilon_a(\bar{\pi})| + \left|\frac{\partial V}{\partial R}(\bar{\pi},\bar{R})\right| |\varepsilon_a(\bar{R})|}{\frac{4}{3}\bar{\pi}\bar{R}^3}$$

$$\varepsilon_r(V(\bar{\pi},\bar{R})) \simeq \frac{\frac{4}{3}\bar{R}^3|\varepsilon_a(\bar{\pi})| + 4\bar{\pi}\bar{R}^2|\varepsilon_a(\bar{R})|}{\frac{4}{3}\bar{\pi}\bar{R}^3} = \underbrace{\underbrace{\varepsilon_r(\bar{\pi})}_{\frac{1}{2}10^{-4}}}_{\substack{5\text{ cifras sign.}\\ \text{(redondeo)}}} + \underbrace{\underbrace{3\varepsilon_r(\bar{R})}_{\frac{1}{2}10^{-4}}}_{\substack{6\text{ cifras sign.}\\ \text{(truncado).}}} \leq 10^{-4}$$

Típicamente, repartimos este error en partes iguales:

$\varepsilon_r(\bar{\pi}) \leq \frac{1}{2}10^{-4} \Rightarrow$ 5 dígitos significativos

$3\varepsilon_r(\bar{R}) \leq \frac{1}{2}10^{-4} \Rightarrow \varepsilon_r(\bar{R}) \leq \frac{1}{6}10^{-4} \Rightarrow$ 6 dígitos significativos



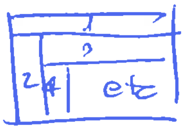
T2: Sistemes Lineals: mètodes directes

5

a)
$$\begin{pmatrix} a_1 & c_1 & & & \\ b_2 & a_2 & c_2 & & \Theta \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \Theta & & b_{n-1} & a_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & b_n & a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ \beta_2 & 1 & & \Theta & \\ & \ddots & \ddots & & \\ \Theta & & \beta_{n-1} & 1 & \\ & & & \beta_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 & c_1 & & & \\ & \alpha_2 & c_2 & & \Theta \\ & & \ddots & \ddots & \\ \Theta & & & \alpha_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

$\alpha_1 = a_1$ $\quad \beta_k = \dfrac{b_k}{\alpha_{k-1}}, \quad \alpha_k = a_k - \beta_k c_{k-1}, \quad k = 2 \div n$

Procedim:



$\boxed{\alpha_1 = a_1}$ $\quad \cancel{c_1 = c_1}$ $\qquad b_2 = \alpha_1 \beta_2 \Rightarrow \underline{\beta_2 = \dfrac{b_2}{\alpha_1}}$

$a_2 = c_1\beta_2 + \alpha_2 \Rightarrow \underline{\alpha_2 = a_2 - \beta_2 c_1}$, etc... ✓

b) Nombre d'operacions:

Divisions: $n-1$

Sumes o restes: $n-1$

Productes: $n-1$

$\left.\right\} \boxed{n_{op} = 3(n-1)}$

b) $y_1 = b_1$, $y_i = b_i - \beta_i y_{i-1}$ $\quad i = 2 \div n$

$Ax=b$ $\quad x_n = \dfrac{y_n}{\alpha_n}, \quad x_i = \dfrac{y_i - c_i x_{i+1}}{\alpha_i}, \quad i = n-1 \div 1$

Resoldre $Ax = b \Leftrightarrow \underbrace{LUx}_{y} = b \Leftrightarrow \begin{cases} Ly = b & (1) \\ Ux = y & (2) \end{cases}$

(1)
$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ \beta_2 & 1 & & \\ & \beta_3 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & \beta_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$y_1 = b_1$

$\beta_2 y_1 + y_2 = b_2 \Rightarrow y_2 = b_2 - \beta_2 y_1$

$\beta_3 y_2 + y_3 = b_3 \Rightarrow y_3 = b_3 - \beta_3 y_2$

etc.

$\Downarrow$

$\boxed{y_1 = b_1, \quad y_i = b_i - \beta_i y_{i-1}}$ ✓

(2)
$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & c_1 & & \\ & \alpha_2 & c_2 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & \alpha_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & \alpha_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$x_n = y_n / \alpha_n$

$\alpha_{n-1} x_{n-1} + c_{n-1} x_n = y_{n-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow x_{n-1} = \dfrac{y_{n-1} - c_{n-1} x_n}{\alpha_{n-1}}$

$\vdots$

$\boxed{x_n = \dfrac{y_n}{\alpha_n}}$ $\boxed{x_i = \dfrac{y_i - c_i x_{i+1}}{\alpha_i}}$ $\Leftarrow$ $\alpha_1 x_1 + c_1 x_2 = y_1 \Rightarrow x_1 = \dfrac{y_1 - c_1 x_2}{\alpha_1}$

nº op:

(1) ~~divisions~~ productes: $n-1$
restes: $n-1$

(2) divisions: n
productes: $n-1$
sumes/restes: $n-1$

$\Big\}$ Total: $4(n-1)+n = \boxed{5n-4}$

---

(6)

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Simètrica def. positiva.

a) Choleski $A = LL^T \xrightarrow{\text{fer}}$

$$L = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & & & & \\ \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5} & & \Theta & \\ \frac{\sqrt{5}}{5} & -\frac{\sqrt{5}}{10} & \frac{\sqrt{3}}{2} & & \\ \frac{\sqrt{5}}{5} & & \ddots & & \\ \frac{\sqrt{5}}{5} & & \cdots & \cdots & \end{pmatrix}$$

obs: L triangular inferior "plena".

b)

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & c_2 & \cdots & \cdots & c_n \\ c_2 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_n & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

simètrica def pos.

$a_j > 0,\ j = 1 \div n \Rightarrow PAP^T$ admet $PAP^T = LL^T$

P? tq

$$PAP^T = \begin{pmatrix} a_n & 0 & \cdots & 0 & c_n \\ 0 & a_{n-1} & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \\ 0 & & & a_2 & c_2 \\ c_n & c_{n-1} & \cdots & c_2 & a_1 \end{pmatrix}$$

Prenem

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & \cdots & & 0 \end{pmatrix}$$

: fem

$$PA = \begin{pmatrix} c_n & \cdots & a_n \\ \vdots & & \vdots \\ c_2 & & 0 \\ a_1 & c_2 \cdots & c_n \end{pmatrix}$$

Fem ara $\underset{\substack{\| \text{obs} \\ P^T}}{PAP} = \checkmark$

PAP^T també és sim def pos.

$$PAP^T = LL^T = \begin{pmatrix} l_{11} & & & \Theta \\ & l_{22} & & \\ & \Theta & \ddots & \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots\ \alpha_{n-1} & l_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{11} & & \Theta & \alpha_1 \\ & l_{22} & & \alpha_2 \\ & & \ddots & \vdots \\ & \Theta & & \alpha_{n-1} \\ & & & l_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} l_{11}^2 & 0 & \cdots & 0 & l_{11}\alpha_1 \\ 0 & l_{22}^2 & \cdots & 0 & l_{22}\alpha_2 \\ & & & & \\ \alpha_1 l_{11} & \alpha_2 l_{22} & \cdots & \alpha_{n-1} l_{n-1\,n-1} & \alpha_1^2+\alpha_2^2+\cdots+\alpha_n^2+l_{nn}^2 \end{pmatrix}$$

Identificant coeficients:

$$\begin{cases} a_n = l_{11}^2, \ \dots, \ c_n = \alpha_1 l_{11} \\ a_{n-1} = l_{22}^2, \ c_{n-1} = l_{22}\alpha_2 \\ \cdots \\ a_1 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots + \alpha_n^2 + l_{nn}^2 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\left.\begin{aligned} l_{ii} &= \sqrt{a_{n-i+1}} \\ \alpha_i &= \frac{c_{n-i+1}}{l_{ii}} \end{aligned}\right\} i = 1 \div n-1 \\ &l_{nn} = \sqrt{a_1 - \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i^2} \end{aligned}}$$

nº op =

$$\left.\begin{aligned} &\text{arrels: } n \\ &\text{divisions: } n-1 \\ &\text{sumes/restes: } n-1 \\ &\text{productes: } n-1 \end{aligned}\right\} \text{total: } 4n-3$$

c) $Ax = b \iff PAx = Pb \iff \underbrace{PAP^T}_{LL^T} Px = Pb \iff L\underbrace{L^T \underbrace{Px}_{u}}_{y} = \underbrace{Pb}_{a}$

$P^T = P^{-1} \Rightarrow P^TP = Id$

Ho resolem amb els següents passos:

1. Definim $Pb := a$, $Px := u$, $L^Tu := y$.
2. Resoldre $Ly = a$ (SL triangular inferior) $\to y$
3. Resoldre $L^Tu = y$ (SL triangular superior) $\to u$
4. Resoldre $Px = u$ $\longrightarrow$ $\boxed{x = \underbrace{P^T}_{P^{-1}} u = \boxed{Pu}}$

En aquest cas $P^T = P$

2) $$\begin{pmatrix} l_{11} & & & \Theta & \\ 0 & l_{22} & & & \\ \vdots & 0 & & l_{n-1,n-1} & \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \cdots & \alpha_{n-1} & l_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$y_1 = \frac{a_1}{l_{11}}$, $y_2 = \frac{a_2}{l_{22}}$, $\ldots$, $y_{n-1} = \frac{a_{n-1}}{l_{n-1,n-1}}$

$y_n = \frac{1}{l_{nn}} \left[a_n - \alpha_1 y_1 - \cdots - \alpha_{n-1} y_{n-1} \right]$

En general: $$\boxed{\begin{aligned} y_i &= \frac{a_i}{l_{ii}} \quad i = 1 \div n-1 \\ y_n &= \frac{1}{l_{nn}} \left[a_n - \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i y_i \right] \end{aligned}}$$

nº op:

$$\left.\begin{aligned} &\text{divisions: } n \\ &\text{productes: } n-1 \\ &\text{sumes/restes: } n-1 \end{aligned}\right\} \text{total: } \boxed{3n-2}$$

3) Resolem:

$$\begin{pmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 & \alpha_1 \\ 0 & l_{22} & & 0 & \alpha_2 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & & & l_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

s'obté: $$\boxed{\begin{cases} u_n = \frac{y_n}{l_{nn}} \\ u_i = \frac{1}{l_{ii}} [y_i - \alpha_i u_n], \quad i = 1 \div n-1 \end{cases}}$$

nº op:

$$\left.\begin{aligned} &\text{divisions: } n \\ &\text{productes: } n-1 \\ &\text{sumes/restes: } n-1 \end{aligned}\right\} \text{total: } 3n-2$$

4) $x = Pu = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \\ \vdots \\ u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

\# operacions (total) $\left\{\begin{aligned} &\text{descomposició: } 4n-3 \\ &\text{resolució: } 2(3n-2) \end{aligned}\right\} 10n-7 \sim O(n)$

d) $\left(\text{Sol}: A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \det A = \det(L)^2 \right)$

---

(7)

a) A simètrica definida positiva: $\vec{x}^T A \vec{x} > 0 \quad \forall \vec{x} \neq 0$

(i) en particular, si sigui $\vec{e}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i \Rightarrow \underbrace{\vec{e}_i^{\,T} A \vec{e}_i}_{a_{ii}} > 0 \Rightarrow \boxed{a_{ii} > 0 \ \forall i = 1 \div n}$

(ii)

$\max_{i,j} |a_{ij}| = \max_i a_{ii}$

Indicació: intercanviem les files 1 i la i-èssima i les columnes 1 i la i-èssima.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & 1 & & & & & 0 \\ 1 & & & 0 & & & \\ 0 & \cdots & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & & & & 0 \\ 1 & & & 0 & & & 0 \\ 0 & & & & & & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{ii} & a_{i2} & \cdots & a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ a_{2i} & a_{22} & & a_{21} & & a_{2n} \\ a_{1i} & & & \vdots & & \vdots \\ a_{ni} & a_{n2} & \cdots & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \tilde{A} \text{ és simètrica i definida positiva.}$$

2) intercanviem les files 2 i j-èssima i les columnes 2 i j-èssima ($j \neq i$).

Fem ara $\tilde{P} \tilde{A} \tilde{P}^T = \tilde{\tilde{A}} = \begin{pmatrix} a_{ii} & a_{ij} & \cdots \\ a_{ji} & a_{jj} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$ és simètrica i definida positiva.
$\overset{\shortparallel}{P}$

En particular es compleix: $\begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ij} & a_{jj} \end{vmatrix} = a_{ii}a_{jj} - a_{ij}^2 > 0 \Rightarrow \left. \begin{matrix} |a_{ij}| < a_{ii} \\ |a_{ij}| < a_{jj} \end{matrix} \right\} \forall_{\substack{i,j \\ i\neq j}} \Rightarrow$

$\max_{i,j} |a_{ij}| = \max_i a_{ii}$ (el màxim s'assoleix a la diagonal).

(iii)

(iv) $a_{ii}^{(k-1)} \geq a_{ii}^{(k)}$, $k = 1 \div n-1$, $i = k+1 \div n$.

(sabem $a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - \dfrac{m_{ik} a_{kj}}{\dfrac{a_{ik}}{a_{kk}}}$)

$$\boxed{a_{ii}^{(k)} = a_{ii}^{(k-1)} - \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} a_{ki}^{(k-1)} = a_{ii}^{(k-1)} - \underbrace{\frac{\overbrace{(a_{ik}^{(k-1)})^2}^{\geq 0}}{\underbrace{a_{kk}^{(k-1)}}_{>0}}}_{\geq 0} \leq a_{ii}^{(k-1)}}$$

Def.: Sea $\|\cdot\|$ norma vectorial. Se define la norma matricial subordinada a la norma vectorial $\|\cdot\|$ como:

$$\|A\| = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

Afirmación: Si $\|\cdot\|$ es la norma matricial subordinada a la norma vectorial $\|\cdot\|_v \Rightarrow$ $\Rightarrow \|\cdot\|$ es consistente con $\|\cdot\|_v$. ($\|Ax\|_v \leq \|A\| \|x\|_v$)

Comentario. Hay libros donde denominan lub(A) a la norma matricial subordinada:

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{least upper bound norm.}}}{\text{lub}}(A) = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

De todas las normas matriciales $\|\cdot\|_*$ consistente con la norma vectorial $\|\cdot\|_v$, lub(A) es la menor: $\text{lub}(A) \leq \|A\|_*$.

Def.: $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Se define radio espectral de A:

$$\rho(A) = \max_{\lambda \in \text{spec} A} |\lambda|$$

$$\text{spec}\, A = \{\lambda \mid \lambda \text{ vap de } A\}$$

Prop.: (i) $\forall$ norma mult ($\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$)
$\rho(A) \leq \|A\|$

(ii) $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ norma multiplicativa tq $\rho(A) \geq \|A\| - \varepsilon$.

---

(14)

(2.1). Reducción al absurdo. Supongamos que $\exists \|\cdot\|_*$ vectorial tq $\|\cdot\|_E$ es su subordinada $\Rightarrow$ $\|A\|_E = \max_{x \neq 0} \dfrac{\|Ax\|_*}{\|x\|_*}$ $\forall A$ matriz.

Tomamos $A = Id$:

$$\left.\begin{array}{l} \|I\|_E = \sqrt{n} \\ \max_{x\neq 0} \dfrac{\|Ix\|_*}{\|x\|_*} = \max_{x \neq 0} \dfrac{\|x\|_*}{\|x\|_*} = 1 \end{array}\right\} \neq \Rightarrow$$

$\|\cdot\|_E$ no está subordinada a ninguna $\|\cdot\|_*$ vectorial.

Notación

$\boxed{\mathbb{R}}$

A simétrica $\Leftrightarrow$ $A = A^T$

A ortogonal $\Leftrightarrow$ $A^{-1} = A^T$

$\boxed{\mathbb{C}}$

A hermítica $\Leftrightarrow$ $A = A^*$ trasponer + conjugar.

A unitaria $\Leftrightarrow$ $A^{-1} = A^*$

(13)

$\boxed{1}$ Veamos que $\|A\|_1 = \max_j \sum_i |a_{ij}|$ es la norma subordinada a $\|\cdot\|_1$ vectorial:

$$\|A\|_1 = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1}$$

1) Demostrar que $\forall x \neq 0 \quad \frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1} \leq \|A\|_1 \quad \left[\Rightarrow \max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1} \leq \|A\|_1\right]$

2) Demostrar que $\exists x_*$ tq $\frac{\|Ax_*\|_1}{\|x_*\|_1} = \|A\|_1 \rightarrow$ quedará demostrado que $\|A\|_1 = \max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1}$

$\boxed{1}$

$$\left.\begin{array}{l} x = (x_1, \dots, x_n) \\ A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow Ax = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n \end{pmatrix}$$

$$\|Ax\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n| \leq \sum_{i=1}^{n} (|a_{i1}||x_1| + \cdots + |a_{in}||x_n|) \overset{(=)}{\leq}$$

$$\leq \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{i1}|\right)|x_1| + \cdots + \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{in}|\right)|x_n| \leq \max_j \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|\right)(|x_1| + \cdots + |x_n|) =$$

$$= \|A\|_1 \|x\|_1 \rightsquigarrow \forall x \neq 0 \quad \frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1} \leq \|A\|_1 \Rightarrow \max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1} \leq \|A\|_1 \checkmark$$

$\boxed{2}$ Probar con $x_* = e_m = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow (m)$

Donde m es tq $\sum_{i=1}^{n} |a_{im}| = \|A\|_1$

$$Ax_* = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} \|Ax_*\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |a_{im}| \\ \|x_*\|_1 = 1 \end{array}\right\} \quad \frac{\|Ax_*\|_1}{\|x_*\|_1} = \|A\|_1 \checkmark$$

$$\|A\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |a_{im}|$$

$\boxed{2}$ Demostrar que $\|A\|_\infty$ es la norma subordinada a la norma $\|\cdot\|_\infty$ vectorial

1) Demostrar $\forall x \neq 0$ $\frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq \|A\|_\infty \Rightarrow \max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq \|A\|_\infty$

2) Demostrar que $\exists x_*$ tq $\frac{\|Ax_*\|_\infty}{\|x_*\|_\infty} = \|A\|_\infty$.

$\Rightarrow \boxed{\max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \|A\|_\infty}$

$\boxed{1}$ $x = (x_1, \dots, x_n)$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad Ax = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_j a_{1j}x_j \\ \vdots \\ \sum_j a_{nj}x_j \end{pmatrix}$$

$|x_i| \leq \|x\|_\infty \ \forall i$

$$\|Ax\|_\infty = \max_i \left(\left| \sum_j a_{ij} x_j \right| \right) \leq \max \{ |a_{11}||x_1| + \cdots + |a_{1n}||x_n|, \dots, |a_{n1}||x_1| + \cdots + |a_{nn}||x_n| \} \leq$$

$$\leq \|x\|_\infty \max \{ |a_{11}| + \cdots + |a_{1n}|, |a_{21}| + \cdots + |a_{2n}|, |a_{n1}| + \cdots + |a_{nn}| \} \leq$$

$$\leq \|x\|_\infty \underbrace{\max_i \left\{ \sum_j |a_{ij}| \right\}}_{\|A\|_\infty \text{ por hipótesis}} \Rightarrow \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq \|A\|_\infty \quad \boxtimes$$

$\forall x \neq 0$.

$\boxed{2}$ Supongamos que $\|A\|_\infty$ tiene su máximo en la fila m:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \end{pmatrix}$$

o sea: $\|A\|_\infty = |a_{m1}| + \cdots + |a_{mn}|$

sea $sgn(a_{mi}) = \begin{cases} 1 & \text{si } a_{mi} > 0 \\ 0 & \text{si } a_{mi} = 0 \\ -1 & \text{si } a_{mi} < 0 \end{cases}$

Definimos: $x_* = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ tq $x_j = sgn(a_{mj})$

$\Downarrow$

$\|x_*\|_\infty = 1$

(si $A = 0$ coger cualquier vector x_*)

Basta probar que $\|Ax\|_\infty = \|A\|_\infty$

$Ax_* = \begin{pmatrix} \cdots \end{pmatrix} \to sgn(a_{m1})a_{m1} + \cdots + sgn(a_{mn})a_{mn} = |a_{m1}| + \cdots + |a_{mn}| \Rightarrow$ mayor componente del vector $Ax_* \Rightarrow$

$$\Rightarrow \|Ax_*\|_\infty = \sum_{j=1}^{n} |a_{mj}| = \|A\|_\infty \Rightarrow \checkmark \boxtimes$$

---

(14)

b) La norma subordinada a la norma sub-2 (vectorial) es:

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^TA)}$$

Demostrar que $\max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = \|A\|_2$

Recordar:
1) A^TA es simétrica $((A^TA)^T = A^T(A^T)^T = A^TA)$
2) A^TA es simétrica $\Rightarrow \exists Q$ ortogonal $(Q^T = Q^{-1})$ tq $Q^T(A^TA)Q$ es diagonal.
3) $\rho(A^TA) = \rho(Q^TA^TAQ)$

4) A^TA tiene todos sus vap's $\lambda \geq 0$ ($\Leftrightarrow$ A^TA es semidefinida positiva.)
es equivalente

DEM:

λ VAP de $A^TA \Rightarrow \exists x \neq 0$ tq $(A^TA)x = \lambda x \Rightarrow x^T(A^TA)x = x^T(\lambda x) = \lambda(x^Tx) = \lambda\langle x,x\rangle \Rightarrow$

$\Rightarrow (Ax)^T(Ax) = \lambda \|x\|^2 \Rightarrow \langle Ax, Ax\rangle = \lambda\|x\|^2 \Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{\|Ax\|^2}{\|x\|^2} \geq 0}$

Important.

sea $\lambda^* = \rho(A^TA) = \max\limits_{\lambda \text{ VAP}} \lambda$

Pasos:

1) Si $x \neq 0$: $\frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} \leq \|A\|_2 \Leftrightarrow$ en vez de ello $\frac{\|Ax\|_2^2}{\|x\|_2^2} \leq \|A\|_2^2 = \rho(A^TA) \overset{?}{=} \lambda^* \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \underbrace{\frac{\|Ax\|_2^2}{\|x\|_2^2}}_{\frac{\langle Ax, Ax\rangle}{\langle x,x\rangle}} - \lambda^* \leq 0 \quad \forall x \neq 0 \Leftrightarrow \frac{(Ax)^T(Ax)}{x^Tx} - \lambda^* \leq 0$

Ver última eq.: $\frac{x^TA^TAx}{x^Tx} - \lambda^* \overset{?}{\leq} 0 \Leftrightarrow \frac{x^TA^TAx - \lambda^* x^Tx}{x^Tx} \leq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^TA^TAx - \lambda^* x^Tx \leq 0 \Leftrightarrow x^T(A^TA - \lambda^* Id)x \leq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow A^TA - \lambda^* Id$ es semidefinida negativa $\Leftrightarrow$ todos los vap's de $A^TA - \lambda^* I$ son ≤ 0.

Ver última implicación:

A^TA simétrica $\Rightarrow \exists Q$ ortogonal tq $\underbrace{Q^T(A^TA)Q}_{D}$ es diagonal $\Rightarrow D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda^* & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow Q^T(A^TA - \lambda^* I)Q = Q^TA^TAQ - \lambda^* \underbrace{Q^TQ}_{\substack{Id \\ (Q \text{ ortogonal})}} = D - \lambda^* Id$

$\lambda_j \geq 0$ y $\lambda^* = \max\limits_j \lambda_j$

O sea: $Q^T(A^TA - \lambda^* I)Q$ es también diagonal $\tilde{D} = D - \lambda^* Id = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \lambda^* & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda^* & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda^* \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} \lambda_1 - \lambda^* & & \\ & \ddots & 0 \\ & & \lambda_n^* - \lambda^* \end{pmatrix}$ $\leadsto$ Todos los VAP's son ≤ 0 $\xrightarrow{\text{cadena de imp.}}$ $\boxed{\forall x \neq 0 \quad \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} \leq \|A\|_2}$ $\boxtimes$

(ya que $\lambda^* \geq \lambda_j \ \forall j \Rightarrow \underbrace{\lambda_j - \lambda^*}_{} \leq 0 \ \forall j$)

$\to$ VAP de $\tilde{D} \Rightarrow$ VAP de $A^TA - \lambda^* Id \leq 0 \ \forall$ VAP

2) $\exists x_* $ tq $\frac{\|Ax_*\|_2}{\|x_*\|_2} = \|A\|_2$ (sea ~~x_*~~ VEP de VAP λ°, $\lambda^\circ = \rho(A^TA)$)

Sea u VEP de VAP $\lambda^\circ = \rho(A^TA)$

$\Downarrow$

$A^TAu = \lambda^\circ u$

$u^TA^TAu = \lambda^\circ u^Tu \Rightarrow \|Au\|_2^2 = \lambda^\circ \|u\|_2^2 \Rightarrow \frac{\|Au\|_2^2}{\|u\|_2^2} = \lambda^\circ = \rho(A^TA) = \|A\|_2^2$

✓$\boxtimes$

Por lo tanto $\boxed{\max\limits_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = \|A\|_2}$

c) Veamos $\|A\|_2 = \max_{x,y\neq 0} \dfrac{|y^T A x|}{\|x\|_2 \|y\|_2}$

DEM:

$|\langle y, Ax\rangle|$

Cauchy

1) $\max_{x,y\neq 0} \dfrac{|y^TAx|}{\|x\|_2\|y\|_2} \leq \max_{x,y\neq 0} \dfrac{\cancel{\|y\|_2}\|Ax\|_2}{\|x\|_2 \cancel{\|y\|_2}} = \max_{x\neq 0} \dfrac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = \|A\|_2$ ✓

$|\langle u,v\rangle| \leq \|u\|\|v\|$

2) $\max_{x,y\neq 0} \dfrac{|y^TAx|}{\|x\|_2\|y\|_2} \geq \max_{x\neq 0} \dfrac{|(Ax)^TAx|}{\|x\|_2 \|Ax\|_2} = \max_{x\neq 0} \dfrac{\|Ax\|_2^{\cancel{2}}}{\|x\|_2 \cancel{\|Ax\|_2}} = \|A\|_2$ ✓ $\Rightarrow$

Cogiendo $y = Ax$

$\Rightarrow \boxed{\max_{x,y\neq 0} \dfrac{|y^TAx|}{\|x\|_2\|y\|_2} = \|A\|_2}$ ☒

$\langle Ay, x\rangle = \langle x, Ay\rangle$

d) $\|A^T\|_2 = \|A\|_2$ DEM: $\|A^T\|_2 = \max_{x,y\neq 0} \dfrac{|y^TA^Tx|}{\|x\|_2\|y\|_2} = \max_{x,y\neq 0} \dfrac{|x^T A y|}{\|x\|_2 \|y\|_2} =$

$\cancel{\max_{x,y\neq 0} \dfrac{|(A^Tx)^Ty|}{\|x\|_2\|y\|_2}} \underset{\substack{\text{int.}\\ x\leftrightarrow y}}{=} \max_{x,y\neq 0} \dfrac{|y^TAx|}{\|x\|_2\|y\|_2} = \|A\|_2 \Rightarrow \boxed{\|A^T\|_2 = \|A\|_2}$ ✓

e) $\|A^TA\|_2 = \|A\|_2^2$ DEM: 1) $\|A^TA\|_2 = \max_{x,y\neq 0} \dfrac{|y^T(A^TA)x|}{\|x\|_2\|y\|_2} = \max_{x,y\neq 0} \dfrac{|(Ay)^TAx|}{\|x\|_2\|y\|_2} \geq$

$\underset{x=y}{\geq} \max_{x\neq 0} \dfrac{|(Ax)^TAx|}{\|x\|_2\|x\|_2} = \max_{x\neq 0} \dfrac{\|Ax\|_2^2}{\|x\|_2^2} = \|A\|_2^2 \Rightarrow \|A^TA\|_2 \geq \|A\|_2^2$

2) $\|A^TA\|_2 \underset{\substack{\text{norma}\\ \text{multiplicativa}}}{\leq} \|A^T\|_2\|A\|_2 \overset{(d)}{=} \|A\|_2^2 \Rightarrow \|A^TA\|_2 \leq \|A\|_2^2$

$\Rightarrow \boxed{\|A^TA\|_2 = \|A\|_2^2}$ ✓

f) Sea U ortogonal $(U^TU = I) \Leftrightarrow U^{-1} = U^T$:

$\|U^TAU\|_2 = \|AU\|_2 = \|UA\|_2$

DEM:

$\|U^TAU\|_2^2 = \rho((U^TAU)^T(U^TAU)) = \rho(U^TA^T\underbrace{UU^T}_{Id}AU) =$

$= \rho(\underset{U^{-1}}{U^T}A^TAU) = \rho(A^TA) = \|A\|_2^2 \Rightarrow \boxed{\|U^TAU\|_2 = \|A\|_2}$

↳ cambio de variable, mismos VAPs

$\|UA\|_2^2 = \rho((UA)^TUA) = \rho(A^T\cancel{U^TU}A) = \rho(A^TA) = \|A\|_2^2 \Rightarrow \boxed{\|UA\|_2 = \|A\|_2}$

$\|AU\|_2^2 = \rho((AU)^TAU) = \rho(U^TA^TAU) \overset{\text{cdv}}{=} \rho(A^TA) = \|A\|_2^2 \Rightarrow \boxed{\|AU\|_2 = \|A\|_2}$ ☒

8) $\|A\|_2 \le \|A\|_E \le \sqrt{n}\,\|A\|_2$ Indicación: Demostrar que $\|A\|_E = \sqrt{tr(A^TA)}$ * (a.2)

* $A^TA = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_i |a_{i1}|^2 & & & \\ & \sum_i |a_{i2}|^2 & ? & \\ & & \ddots & \\ & & & \sum_i |a_{in}|^2 \end{pmatrix}$

$a_{11}^2 + \cdots + a_{n1}^2$

$tr(A^TA) = \sum_{i,j} |a_{ij}|^2 \overset{DEF}{=} \|A\|_E^2 \Rightarrow \boxed{\|A\|_E = \sqrt{tr(A^TA)}}$

$\sum_i |a_{i1}|^2 + \sum_i |a_{i2}|^2 + \cdots + \sum_i |a_{in}|^2$

1) $\|A\|_2 \le \|A\|_E$:

$\|A\|_2^2 = \rho(A^TA) \le tr(A^TA) = \|A\|_E^2 \Rightarrow \boxed{\|A\|_2 \le \|A\|_E}$

$\lambda_{max} \le tr(A^TA) = \sum_{\lambda\, VAP} \lambda_i$ (con $\lambda_i \ge 0\ \forall i$ pq A^TA es semidef pos).

2) $\|A\|_E \le \|A\|_2 \sqrt{n}$:

$\|A\|_E^2 = tr(A^TA) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n \le n\cdot\lambda_{max} = n\,\rho(A^TA) = n\,\|A\|_2^2 \Rightarrow$ ($\lambda_i = \lambda_{max}$)

$\Rightarrow \boxed{\|A\|_E \le \sqrt{n}\,\|A\|_2}$

---

(15)

a) $(A+\delta A)(x+\delta x) = b + \delta b$.

Si $\|A^{-1}\|\,\|\delta A\| < 1 \Rightarrow \dfrac{\|\delta x\|}{\|x\|} \le \dfrac{\mu(A)}{1-\mu(A)\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}}\left(\dfrac{\|\delta b\|}{\|b\|} + \dfrac{\|\delta A\|}{\|A\|}\right)$.

Nota: La norma matricial debe ser consistente con la vectorial. Idea: $(A+\delta A)(x+\delta x) = (b+\delta_b)$.

Sabiendo que $Ax=b$

$\cancel{Ax} + A\delta_x + \delta A(x+\delta x) = \cancel{b} + \delta_b$

$A\delta_x = \delta_b - \delta A(x+\delta x) \underset{\text{Sup. A inv.}}{\Rightarrow} \delta_x = A^{-1}\delta b - A^{-1}\delta A(x+\delta x) \Rightarrow$

$\Rightarrow \|\delta x\| = \|A^{-1}\delta b - A^{-1}\delta A(x+\delta x)\| \overset{cons.}{\le} \|A^{-1}\|\,\|\delta b\| + \|A^{-1}\|\,\|\delta A\|\,\|x+\delta x\| \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{\|\delta x\|}{\|x\|} \le \dfrac{\|A^{-1}\|\,\|\delta_b\|}{\|x\|} + \|A^{-1}\|\,\|\delta_A\|\dfrac{\|x+\delta x\|}{\|x\|} \Rightarrow$

$Ax = b \Rightarrow \|Ax\| = \|b\| \le \|A\|\|x\| \Rightarrow \dfrac{1}{\|x\|} \le \dfrac{\|A\|}{\|b\|}$

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A\|}{\|b\|} \cdot \|A^{-1}\| \, \|\delta b\| + \|A^{-1}\| \, \|\delta A\| \cdot \Big(\underbrace{\frac{\|x\| + \|\delta x\|}{\|x\|}}_{1 + \frac{\|\delta x\|}{\|x\|}} \Big) \cdot \frac{\|A\|}{\|A\|}$$

Definimos nº de condición de A : $\mu(A) = \|A^{-1}\| \, \|A\|$.

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \mu(A) \left(\frac{\|\delta b\|}{\|b\|} + \frac{\|\delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\delta A\|}{\|A\|} \frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \right) \Rightarrow$$

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \underbrace{\left(1 - \mu(A) \frac{\|\delta A\|}{\|A\|} \right)}_{>0} \leq \mu(A) \left(\frac{\|\delta b\|}{\|b\|} + \frac{\|\delta A\|}{\|A\|} \right)$$

Pasar dch. $\Rightarrow$

Como por hip. $\|A^{-1}\| \, \|\delta A\| < 1 \Rightarrow \dfrac{\|A\| \, \|A^{-1}\| \, \|\delta A\|}{\|A\|} < 1 \Rightarrow \mu(A) \dfrac{\|\delta A\|}{\|A\|} < 1$

$$\boxed{\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\mu(A)}{1 - \mu(A) \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}} \left(\frac{\|\delta b\|}{\|b\|} + \frac{\|\delta A\|}{\|A\|} \right)}$$

Forma reducida

$$\simeq \mu(A) \left(\frac{\|\delta b\|}{\|b\|} + \frac{\|\delta A\|}{\|A\|} \right)$$

b)

$$A = \delta \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 & 0 \\ -\varepsilon & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \|A\|_\infty = \delta \max\{\varepsilon + 1, \varepsilon + 1, 1\} = \delta(\varepsilon + 1)$$

Buscar δ, ε tq $\|A\|_\infty < 10^{-6}$: $\mu_A(A) > 10^{-6}$

$$\mu_\infty(A) = \|A\|_\infty \, \|A^{-1}\|_\infty = \delta(\varepsilon + 1) \cdot \frac{1}{\varepsilon\delta} = 1 + \frac{1}{\varepsilon}.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{2\varepsilon\delta} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ \varepsilon & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 2\varepsilon \end{pmatrix}$$

$$\|A^{-1}\|_\infty = \frac{1}{2\varepsilon\delta} \cdot \max\{2, 2\varepsilon, 2\varepsilon\} = \frac{1}{\varepsilon\delta}$$

$0 < \varepsilon << 1$

P.ej. tomamos $\delta = \varepsilon = 10^{-7}$.

$$\|A\|_\infty = 10^{-7}(1 + 10^{-7}) = 10^{-7} < 10^{-6}$$

$$\mu_\infty(A) = 1 + \frac{1}{10^{-7}} = 10^{7} > 10^{6}$$

(c)
(d)

(i) $A x^{(1)} = b^{(1)}$ $\quad b^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow x^{(1)} = \frac{1}{\delta}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(ii) $A x^{(2)} = b^{(2)}$ $\quad b^{(2)} = \begin{pmatrix} 0{,}9 \\ 1{,}1 \\ 1 \end{pmatrix} \to x^{(2)}$ cercana a x?

$$A(x^{(1)} + \delta_x) = b^{(1)} + \delta_b \qquad \delta_b = \begin{pmatrix} -0{,}1 \\ 0{,}1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\cancel{Ax^{(1)}} + A\delta_x = \cancel{b^{(1)}} + \delta_b$$

$$\delta_x = A^{-1}\delta_b = \frac{1}{10\varepsilon\delta}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$\|x^{(2)} - x^{(1)}\|_\infty = \|\delta_x\| = \frac{1}{10\varepsilon\delta} = 10^{13} \; !!$$

si $\varepsilon = \delta = 10^{-7}$

Estimación $\dfrac{\|\delta_x\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \dfrac{10^{13}}{10^7} = \underline{10^6}$

---

(16) (a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix}$ $\quad b = \begin{pmatrix} 1.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \end{pmatrix} \to$ (a)

$$Ax = b \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 9 \\ -36 \\ 60 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}5 & 0{,}33 \\ 0{,}5 & 0{,}33 & 0{,}25 \\ 0{,}33 & 0{,}25 & 0{,}2 \end{pmatrix} \qquad \tilde{A}\tilde{x} = b \Rightarrow \tilde{x} = \begin{pmatrix} 55{,}5292 \\ -277{,}60549 \\ 255{,}39340 \end{pmatrix}$$

$$\kappa_\infty(A) = 748.$$

MÉTODES ITERATIUS

$\boxed{4}$ $A \in M_{n,n}$ $\rho(A) = \max_{\lambda \in \operatorname{Spec} A} |\lambda|$ radio espectral.

(i) $\rho(A) < 1 \iff \lim_{j \to +\infty} A^j = 0$.

· Caso fácil: A diagonaliza $\Rightarrow \exists S$ regular tq $A = SDS^{-1}$ con

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \lambda_j = \text{Vap's de } A. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^j = (SDS^{-1})^j = SD^jS^{-1} \qquad D^j = \begin{pmatrix} \lambda_1^j & & & \\ & \lambda_2^j & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^j \end{pmatrix}$$

Por lo tanto:

$\overset{\Rightarrow)}{}$ · Si $\rho(A) < 1 \Rightarrow |\lambda_j| < 1 \quad j = 1 \div n \Rightarrow \underset{|\lambda_j|^m}{\overset{}{|\lambda_j^m|}} \xrightarrow[m \to \infty]{} 0 \Rightarrow D^m \xrightarrow[m \to \infty]{} 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \overset{SD^mS^{-1}}{A^m} \xrightarrow[m \to \infty]{} 0$$

$\Leftarrow)$ · Sup $D^j \longrightarrow 0$ si $j \longrightarrow +\infty$.

Afirmación: todos los vap(s) de D cumplen que $|\lambda| < 1 (\iff \rho(A) < 1)$

Reducción al absurdo: Suponsamos que $\rho(D) = \rho(A) \geq 1 \Rightarrow \exists \tilde{\lambda}$ tq $|\tilde{\lambda}| \geq 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow D^j = \begin{pmatrix} \tilde{\lambda}^j \not\to 0 & & & \\ & \lambda_2^j & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_{n-1}^j \end{pmatrix} \xrightarrow[j \to \infty]{} 0 !! \text{ contradicción}$$

· Caso no tan fácil: A no diagonaliza. Consideramos su forma de Jordan:

$\exists S$ regular tq $A = SJS^{-1}$

$$J = \begin{pmatrix} \boxed{J_1} & & & \\ & \boxed{J_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{J_k} \end{pmatrix} \Rightarrow J^j = \begin{pmatrix} \boxed{J_1^j} & & & \\ & \boxed{J_2^j} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{J_k^j} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Por lo tanto, para calcular J^j basta calcular J_ℓ^j para cada J_ℓ bloque de Jordan.

$\Rightarrow)$ Suponsamos que $\rho(A) < 1 \Rightarrow \forall \lambda \in \operatorname{Spec} A$ $|\lambda| < 1$. Veamos que el bloque de Jordan asociado a λ, J_λ cumple: $J_\lambda^j \longrightarrow 0$ si $j \to \infty$.

$$J_\lambda = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}}_{p} = \lambda I + E_p$$

$\hookrightarrow E_p = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$ es nilpotente: $E_p^p = 0$. id.

$$J_\lambda^k = \underset{IE_p = E_pI}{(\lambda I + E_p)^k} = \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} (\lambda I)^{k-\ell} E_p^\ell \underset{\text{si } \ell \geq p}{=} \sum_{\ell=0}^{p-1} \underbrace{\binom{k}{\ell}}_{\to \infty} \underbrace{\lambda^{k-\ell}}_{\to 0} I \, E_p^\ell \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$$

(ii) Sea $S_m = \sum_{j=0}^{m} A^j$ Dem que: $\cdot \exists \lim_m S_m \Leftrightarrow \rho(A) < 1$

$\cdot \lim_m S_m = (I - A)^{-1}$

$$(I-A) S_m = (I + A + \cdots + A^m) - (A + A^2 + \cdots + A^{m+1}) = I - A^{m+1}$$

$\Downarrow$ $\boxed{*}$ $(I-A)$ invertible?

$$S_m = (I-A)^{-1} (I - A^{m+1})$$

$\downarrow n \to \infty$

$$\underset{\sum_{j\geq 0} A^j}{\lim S_m} = (I-A)^{-1} \big(I - \underbrace{\lim_{m\to\infty} A^{m+1}}_{\#}\big)$$

$\boxed{*}$ $I-A$ es invertible si $\rho(A) < 1$. DEM: (Red. al absurdo). Suponemos $I-A$ no invertible $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $\det \underset{\substack{(I-A) \\ \hookrightarrow \prod \text{VAP's}}}{\cancel{\text{matriz}}} = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$ es vap de $I-A$ $\Leftrightarrow \exists v \neq 0$ tq $(I-A)v = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $Iv - Av = 0 \Leftrightarrow Av = v \Leftrightarrow \lambda = 1$ vap de A CONTRADICCIÓN (pues $\rho(A) < 1$) ✓

(#) $\lim_{m\to\infty} A^{m+1} \underset{\rho(A)<1}{=} 0 \Rightarrow$ $\boxed{\lim_{m\to\infty} S_m = (I-A)^{-1} \cdot (I - 0) = (I-A)^{-1}}$

Es decir, si $\rho(A) < 1$: $\boxed{\sum_{j=0}^{\infty} A^j = (I-A)^{-1}}$

(iii) Si $\|A\| < 1 \Rightarrow I - A$ es invertible y $(I-A)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} A^j$ y $\|(I-A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}$

Nota: el cálculo de $\rho(A)$ es costoso. Sin embargo, sabemos que $\forall$ norma matricial con una norma vectorial $[\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_\infty]$ se tiene que $\boxed{\rho(A) \leq \|A\|}$ $\Rightarrow$

Si comprobamos que $\|A\|_1 < 1$ o $\|A\|_\infty < 1 \Rightarrow \rho(A) < 1 \Rightarrow I-A$ es invertible y

$(I-A)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} A^j$ ✓

Usando que $\left.\begin{array}{l}\rho(A) \leq \|A\| \\ \|A\| < 1 \text{ por hip.}\end{array}\right\} \Rightarrow \rho(A) < 1 \rightarrow \sum_{j\geq 0} A^j = (I-A)^{-1}$

Sea $C = (I-A)^{-1} \Rightarrow \underset{\substack{\| \\ I}}{C(I-A)} = C - CA \Rightarrow \underset{\substack{\| \\ 1}}{\|I\|} = \|C - CA\| \geq \|C\| - \|CA\| \geq$

$\|CA\| \leq \|C\|\|A\|$

$\geq \|C\| - \|C\|\|A\| = \|C\|(1 - \|A\|) \underset{\|A\|<1}{\Rightarrow}$ $\boxed{\|(I-A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}}$

$\boxed{5}$ $Ax=b$ $A = \begin{pmatrix} -10 & 2 \\ \beta & 5 \end{pmatrix}$ Pb: Para que β's los métodos de Jacobi y/o Gauss Seidel sea convergente

Idea: Jacobi: $x^{(k+1)} = B_J x^{(k)} + C_J$ converge $\iff \rho(B_J) < 1$

GS: $x^{(k+1)} = B_{GS} x^{(k)} + C_{GS}$ converge $\iff \rho(B_{GS}) < 1$

Versión fácil, menos precisa: si A matriz edd por filas/columnas, entonces Jacobi y GS convergen.

- Por filas: $|\beta| < 5 \Rightarrow$ J y GS convergen.
- Por columnas: $|\beta| < 10 \Rightarrow$ J y GS convergen. $\leftarrow$

Primera Pràctica: Errors

Exercici 1 (Epsilon de màquina). A computació s'introdueix el concepte "èpsilon de màquina" com el nombre positiu ϵ més petit que sumat a 1 dóna diferent de 1; és a dir:

$$\epsilon := \min\{\varepsilon > 0 : \mathrm{fl}(1+\varepsilon) \neq 1\}.$$

Escriviu un programa en `C/C++` que calculi l'èpsilon de màquina pels tipus `float` i `double`.

Exercici 2 (Suma de la sèrie harmònica). Se sap que la sèrie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ és divergent. No obstant això si la intentem "sumar" en un ordinador usant precisió simple (per qüestions de temps) dóna un valor concret. Trobeu aquest valor i expliqueu aquest fenòmen.

Exercici 3 (Suma de la sèrie harmònica generalitzada). Useu aritmètica de 3 dígits amb tall per tal de calcular la suma $\sum_{i=1}^{15} \frac{1}{i^2}$ primer en l'ordre "natural" (decreixent), i.e., $\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{255}$ i després en l'ordre "invers" (creixent), i.e., $\frac{1}{225} + \frac{1}{196} + \cdots + \frac{1}{1}$. Decidiu quin és el mètode més exacte de tots dos.

Exercici 4. Considereu la integral definida

$$E_n = \int_0^1 x^n e^{x-1}\, dx. \tag{1}$$

(4.1) Demostreu que $E_n = 1 - nE_{n-1}$.

(4.2) Partint d'E_0, obteniu de manera recurrent un valor aproximat d'E_{12}, treballant amb precisió simple.

(4.3) Observeu que el valor de E_{12} és negatiu. És possible? Doneu una explicació del fet.

(4.4) Corregiu el defecte anterior emprant que $E_{20} \simeq 0$ i calculeu a partir d'aquí un nou valor aproximat d'E_{12}. Denoteu els valors obtinguts d'aquesta forma per $\widetilde{E}_n$.

(4.5) Escriviu en un fitxer anomenat `iterint.dat` una taula amb 4 columnes amb les següents entrades: n, E_n, $\widetilde{E}_n$, e_n. Aquesta darrera variable, e_n, l'heu d'obtenir aproximant e^x pel seu desenvolupament de Taylor fins grau $N = 10$ i integrant el corresponent polinomi.

Exercici 5. Feu un programa en `C/C++` que avaluï el polinomi de McLaurin $p_N(x)$ de grau N de la funció $f(x) = \mathrm{e}^x$ en un punt donat x. Empreu la *regla de Horner*.

Exercici 6 (Suma d'una sèrie alternada). Volem comparar les aproximacions de e^{-2} amb tres mètodes diferents:

(6.1) Fent servir la funció `exp(x)` proporcionada a la llibreria `math.h` de `C/C++`.

(6.2) Aproximant e^{-2} per $p_{10}(-2)$, programat anteriorment.

(6.3) Usant $q_{10}(-2) := 1/p_{10}(2)$.

Escriviu un programa en `C/C++` que calculi i tregui per pantalla (o bé escrigui a un fitxer) el valor de les tres aproximacions: `exp(-2)`, $p_{10}(-2)$, $q_{10}(-2)$ i de les estimacions dels corresponents errors absoluts i relatius, donades respectivament per

$$e_a\left(\bar{p}(-2), \texttt{exp(-2)}\right) \approx \bar{p}(-2) - \texttt{exp(-2)}, \qquad e_r\left(\bar{p}(-2), \texttt{exp(-2)}\right) \approx \frac{e_a\left(\bar{p}(-2), \texttt{exp(-2)}\right)}{\texttt{exp(-2)}},$$

on $\bar{p} = p_{10},\ q_{10}$. Amb aquest resultats completeu la Taula 1. Feu-lo tant per precisió simple (`float`) com per doble (`double`).

double float | double

exp(-2)	0.13533528323661270232	e_a	e_r
$p_{10}(-2)$	0.1353791952 | 0.1353791887	$4,3912 \cdot 10^{-5}$ | $4,3905 \cdot 10^{-5}$	$3,2447 \cdot 10^{-4}$ | $3,2442 \cdot 10^{-4}$
$q_{10}(-2)$	0.1353364140 | 0.1353364076	$1,1247 \cdot 10^{-6}$ | $1,1244 \cdot 10^{-6}$	$8.3103 \cdot 10^{-6}$ | $8,3083 \cdot 10^{-6}$

Taula 1: Comparació en el càlcul d'aproximacions de e^{-2}.

(6.4) Feu el mateix amb e^{-7}. Comenteu els resultats en ambdós casos.

Exercici 7 (Wilkinson 1963). El polinomi

$$p(x) = (x-1)(x-2)\cdots(x-19)(x-20) = x^{20} + a_1 x^{19} + a_2 x^{18} + a_3 x^{17} + \cdots + a_{20},$$

essent, com es pot comprovar,

$$a_1 = -210, \quad a_2 = 20\,615, \quad a_3 = -1\,256\,850, \quad a_4 = 53\,327\,946, \quad a_5 = -1\,672\,280\,820, \ldots \quad a_{20} = 20!$$

té per arrels $1, 2, \ldots, 20$. Es tracta d'estudiar —amb l'ajut, per exemple, de `Matlab/Octave`—com varien aquestes arrels quan es modifiquen lleugerament els coeficients de $p(x)$. Per fixar idees, agafeu el coeficient de grau 19, $a_1 = -210$, afegiu-li 2^{-23} i busqueu a continuació les arrels del polinomi modificat, $\tilde{p}(x)$. Què s'observa? Discutiu com podem posar de manifest aquest mal condicionament.

Hint: considereu $\tilde{p}$ com una funció de x i del coeficient a_1 (amb la resta dels coeficients, $a_2, \ldots, a_{20}$ constants). Llavors les arrels de $\tilde{p}$ són funcions (implícites) de a_1 definides per l'equació $\tilde{p}(x, a_1) = 0$.

Referències

H. Wilkinson. *Rounding Errors in Algebraic Processes*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1963.

PRÀCTICAS

MATLAB / OCTAVE: (només double)

```
> format long
         short
> eps = 1; ;no ensenyar
> while (1. + eps > 1.)
     eps = 0,5 x eps;
  endwhile;
> eps
```

$\boxed{eps = 1,1102 \cdot 10^{-16}}$

① HORNER

$p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$

$\alpha \in \mathbb{R} \to p(\alpha)?$

$p(\alpha)$ es el resto de la división euclídea de $p(x)$ entre $x - \alpha$.

$p(x) = (x-\alpha)\, q(x) + r$

$p(\alpha) = 0 + r \Rightarrow r = p(\alpha)$

Hacer Ruffini:

PRÀCTICA 1

① $\varepsilon_{float} = 5{,}96 \cdot 10^{-8}$ // $\varepsilon_{double} = 1{,}11 \cdot 10^{-16}$ || ($\varepsilon_{fl} = 5{,}42 \cdot 10^{-20}$) // $\varepsilon_{double} = 8{,}33 \cdot 10^{-17}$

② En "álgebra": $x + y = y + x$

② "Numérico": $fl(x) + fl(y) \neq fl(y) + fl(x)$

Explicación: real: $x_1 + x_2 + x_3$ — aprox

cota del error rel. de almacenamiento

$fl(\bar{x}_1) = x_1(1+\delta)$

$fl(\bar{x}_2) = x_2(1+\delta)$

$x_1 + x_2$

$\bar{x}_1 + \bar{x}_2 = x_1(1+\delta) + x_2(1+\delta) = (x_1+x_2)(1+\delta) \Rightarrow$

$\Rightarrow fl(\bar{x}_1 + \bar{x}_2) + fl(\bar{x}_3) = \big((x_1+x_2)(1+\delta)(1+\delta)\big) + x_3(1+\delta) =$

$= (x_1+x_2)(1+2\delta+\overset{\approx 0}{\delta^2}) + x_3(1+\delta) =$

$= (x_1+x_2+x_3) + (x_1+x_2)2\delta + x_3\delta =$

$= (x_1+x_2+x_3)\left(1 + \underbrace{\frac{2x_1+2x_2+x_3}{x_1+x_2+x_3}}_{\text{cota del error relativo}}\delta\right)$

$(\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \dots + \bar{x}_n) = (x_1 + \dots + x_n)\left(1 + \frac{(n-1)x_1 + (n-1)x_2 + (n-2)x_3 + \dots + 1x_n}{x_1 + \dots + x_n}\delta\right)$

$x_1 \to$ el más pequeño
$x_n \to$ el más grande
$\Rightarrow$ Minimizar error.

③ $E_n = \int_0^1 x^n e^{x-1}\,dx$, $E_n = 1 - nE_{n-1} \to \overline{E_{n-1}} = E_{n-1} + e_a \Rightarrow e_a(E_n) \sim n e_a(E_{n-1})$

Pensar al revés: $E_{n-1} = \frac{1-E_n}{n} \Rightarrow \boxed{E_{n-1} = -\frac{1}{n}E_n + \frac{1}{n}}$

② < 18 (16.67)

③ decreixent: 1,57 $\Rightarrow$ Més exacte.

decreixent: 1,53

(4)

(4.1) $\boxed{E_n} = \int_0^1 x^n e^{x-1}\,dx = [x^n e^{x-1}]_0^1 - \int_0^1 n x^{n-1} e^{x-1}\,dx =$

$u = x^n \qquad v = e^{x-1}$

$du = n x^{n-1}dx \qquad dv = e^{x-1}dx$

$= 1^n e^{1-0} - 0^n e^{0-1} - n\int x^{n-1}e^{x-1}dx = \boxed{1 - nE_{n-1}}$

(4.2)

$E_0 = \int_0^1 x^0 e^{x-1}dx = [e^{x-1}]_0^1 = e^0 - e^{-1} = 1 - e^{-1}$

$\boxed{E_{12} = -4{,}31}$

(4.3) Errors en l'algoritme, que expandeixen l'error.

$$E_{n-1} = \frac{1-E_n}{n} \Rightarrow E_n = \frac{1-E_{n+1}}{n+1}$$

(4.4)

$E_0 = 0.63212$	$E_5 = 0.14553$	$E_{10} = 0{,}08388$	$E_{15} = 0{,}05902$
$E_1 = 0.36788$	$E_6 = 0.12680$	$E_{11} = 0{,}07735$	$E_{16} = 0{,}05572$
$E_2 = 0.26424$	$E_7 = 0.11238$	$\boxed{E_{12} = 0{,}07177}$	$E_{17} = 0{,}05278$
$E_3 = 0.20728$	$E_8 = 0.10093$	$E_{13} = 0{,}06695$	$E_{18} = 0{,}05000$
$E_4 = 0.17089$	$E_9 = 0{,}09161$	$E_{14} = 0{,}06273$	$E_{19} = 0{,}05000$

---

(7) WILKINSON:

$p(x) = (x-1)(x-2)\cdots(x-20) = x^{20} - 210x^{19} + \cdots + \square$

$+2^{-23} \sim 10^{-6} \Rightarrow$ ceros complejos

Veure programa que penia

· Ceros de $p(x)$: $1, \dots, 20$.

MAPLE: bucle: for i from 1 to 20 do
end do;

asignación: p:= 1 | solve(p) ⇒ p=0 |, Sort ordenar − → +

octave: conv( ) multiplicar. Per pasar 0 ⇒ zeros(f, c).

```
>gcc -Wall perico.c -o pp ;
```
manolito.c

```
>./pp
```

FILE * file;

file = fopen("prova.dat", w);

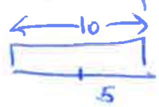
$E_n \rightarrow$ E[n]

EE[n]

ET[n]

for(i = 1; i <= 20; i++)
fprintf(file, "\n %lf %lf ", x, y);

%10.5lf



(4.5)

$$e^{x-1} = e^{-1} + e^{-1}x + \frac{e^{-1}}{2}x^2 + \cdots + \frac{e^{-1}}{n!}x^n + \cdots$$

$$x^n e^{x-1} = e^{-1}x^n + e^{-1}x^{n+1} + \frac{e^{-1}}{2}x^{n+2} + \cdots + \frac{e^{-1}}{m!}x^{n+m} + \cdots$$

$$\int_0^1 x^n e^{x-1} = \left[\frac{e^{-1}x^{n+1}}{n+1} + \frac{e^{-1}x^{n+2}}{n+2} + \frac{e^{-1}x^{n+3}}{2(n+3)} + \cdots + \frac{e^{-1}x^{n+m+1}}{m!(n+m+1)} + \cdots\right]_0^1 =$$

$$= \frac{e^{-1}}{n+1} + \frac{e^{-1}}{n+2} + \frac{e^{-1}}{2(n+3)} + \cdots + \frac{e^{-1}}{m!(n+m+1)} + \cdots =$$

$$= e^{-1}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{2(n+3)} + \frac{1}{m!(n+m+1)}\right)$$

Pràctica 2: output ⇒ { (a) Aprox: $\tilde{x}$; (b) Estimación del error. $\|A\tilde{x}-b\|$ }

vector residuo

```
double suma(double, double);
int main() {

}
```

main.cc

```
double suma(double x, double y){
return x+y;
}
```

suma.cc

> gcc -Wall main.cc suma.cc -o maolds -lm

lib matemàtica

> ./maolds

Makefile (para muchos ficheros).

```
comp: gcc
prg: main.cc suma.cc
```

⇒ > make

> make -f Makefile-1

misprogramas.h ⇒

```
#include "mis...h"
```

pointers

(6.4)

$\exp(-7) = 9{,}1188196555451624 \cdot 10^{-4}$

			e_a		e_r	
$P_{10}(-7)$:	30.93177032	30.93176505	30.931	30.931	33920	33920
$q_{10}(-7)$:	$1{,}0115397716 \cdot 10^{-3}$	$1{,}0115396656 \cdot 10^{-3}$	$9.9658 \cdot 10^{-5}$	$9.9658 \cdot 10^{-5}$	0.10929	0.10929

No importa tant treballar en float double. Polinomi de taylor no es estable amb 7 en els primers termes.

PRÀCTICA 2

Lista (examen práctico)

1)

Práctica 3

1) $x = (x_0, x_1, \dots, x_N)$; $y = (y_0, y_1, \dots, y_n)$

$P_M(x_k) = y_k \ \forall k$ $\quad a = (a_0, a_1, \dots, a_M)^T$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_0^M & x_0^{M-1} & \dots & x_0 & 1 \\ \vdots & & & & \\ x_N^M & x_N^{M-1} & \dots & x_N & 1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}$$

$A = QR$

$M+1$ $\quad M+1$

$Aa = y$

QR

$A = QR$ $\quad \boxed{A^TA\, a = A^Ty}$

$(R^T)^{-1} R^T \underbrace{Q^TQ}_{Id} R a = (R^T)^{-1} R^T Q^T y$

$Ra = Q^T y$

$Aa = y \quad QRa = y$

$\Rightarrow Ra = Q^Ty.$ $\quad R^TRa = R^TQ^Ty$

$a = inv(R)Q^Ty$

$Aa = y$

$QRa = y$

$RA = yQ^T$

$a =$

$Aa = y$

$QRa = y$

$Q^T QRa = Q^T y$

$QQ^T \neq Id$

$QRa = Q^Ty$

$QQ^T = (QQ^T)^T$

$QQ^T \quad Q^TQ$