Facultat de Matemàtiques i Estadística

Universitat Politècnica de Catalunya - BarcelonaTech

Geometría Afín y Euclídea (Q2)

Àlex Batlle Casellas

March 12, 2019

Índex

1 Espacio Afín.

1.1 Definiciones.

<u>**Definición**</u>:
Sea E un $\mathbb{K}$-e.v. Un **espacio afín** asociado a E es una triple $\mathbb{A} = (A, E, \delta)$ donde A es un conjunto y δ es una aplicación

$$\begin{aligned} \delta\colon A \times A &\to E \\ (p,q) &\mapsto \delta(p,q). \end{aligned}$$

que cumple con las siguientes propiedades:

1. $\forall p_1, p_2, p_3 \in A,\ \delta(p_1,p_2) + \delta(p_2,p_3) = \delta(p_1,p_3)$.
2. $\forall p \in A$, la siguiente aplicación es biyectiva:

$$\begin{aligned} \delta_p\colon A &\to E \\ q &\mapsto \delta_p(q) := \delta(p,q). \end{aligned}$$

A los elementos de A les llamaremos **puntos**. Usaremos la siguiente notación:

1. $\dim A := \dim E$.
2. Si $\vec{u} = \delta(p,q)$, p es el **origen** de $\vec{u}$ y q es su **extremo**.
3. $\delta(p,q) := \vec{pq} = q - p$.
4. Usando la anterior notación, la propiedad (1): $(p_2 - p_1) + (p_3 - p_2) = (p_3 - p_1)$.
5. Si $\vec{u} = \vec{pq} = q - p \implies q = p + \vec{u}$.

<u>Ejemplos</u>:

1. $\mathbb{A} = ((0,\infty), \mathbb{R}, \delta)$:

$$\begin{aligned} \delta\colon A \times A &\to E \\ (p,q) &\mapsto \delta(p,q) := \ln q - \ln p. \end{aligned}$$

   Comprobemos las propiedades:

   - Propiedad 1: $\delta(p_1,p_2) + \delta(p_2,p_3) = (\ln p_2 - \ln p_1) + (\ln p_2 - \ln p_3) = \ln p_3 - \ln p_1 = \delta(p_1,p_3)$.
   - Propiedad 2: Si fijamos p,

$$\begin{aligned} \delta_p\colon A &\to E \\ q &\mapsto \delta_p(q) := \ln q - \ln p \end{aligned}$$

     es biyectiva.$\square$

2. $\mathbb{A} = (\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2, \delta)$, y δ es la aplicación tal que si $p = (x_1, y_1), q = (x_2, y_2)$, entonces

$$\begin{aligned} \delta \colon A \times A &\to E \\ (p,q) &\mapsto \delta(p,q) := (x_2 - x_1, y_2 - y_1). \end{aligned}$$

Definición:
$\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ es el espacio afín definido como $\mathbb{A} = (\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^n, \delta)$, y δ es la aplicación de **resta de coordenadas**.
Propiedades:
Sea $\mathbb{A}$ un espacio afín:

1. $\delta(p, q) = \vec{0} \iff q = p$.
2. $\delta(p, q) = -\delta(q, p)$.
3. $\delta(p_1, p_2) = \delta(p_3, p_4) \iff \delta(p_1, p_3) = \delta(p_2, p_4)$. (regla del paralelogramo)

Demostración:

1. (a) $\Leftarrow$) Cojamos $\vec{u} \in E$. Recordemos que δ_p es biyectiva para todo $p \in A$ fijado. Entonces, $\exists q \in A$ tal que $\vec{u} = \delta(p, q)$. Entonces, $\delta(p, p) + \vec{u} = \delta(p, p) + \delta(p, q) = \delta(p, q) = \vec{u} \implies \delta(p, p) = \vec{0}$.
   (b) $\Rightarrow$) Por hipótesis, $\delta(p, q) = \vec{0}$, y como ya hemos visto, $\delta(p, p) = \vec{0}$. Como δ_p es biyectiva, $p = q$.$\square$
2. $\delta(p, q) + \delta(q, p) = \delta(p, p) = \vec{0} \implies \delta(p, q) = -\delta(q, p)$.$\square$
3. Por simetría, solo hace falta demostrar una dirección. Por tanto, demostremos $\Rightarrow$, con hipótesis $\delta(p_1, p_2) = \delta(p_3, p_4)$:

$$\delta(p_1, p_3) = \delta(p_1, p_2) + \delta(p_2, p_3) = \delta(p_3, p_4) + \delta(p_2, p_3) = \delta(p_2, p_4).\square$$

1.2 Combinaciones afines de puntos.

Observación: Hasta ahora, las "operaciones" definidas son:

1. Combinaciones lineales de vectores en E.
2. $p, q \in A \implies \delta(p, q) = q - p \in E$.
3. $p \in A, \vec{u} \in E \implies p + \vec{u} \in A$.

En general, hacer "combinaciones lineales" de una colección de puntos $p_1, \ldots, p_r \in A$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{K}$,

$$\alpha_1 p_1 + \ldots + \alpha_r p_r = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i p_i$$

no tiene sentido, pero hay **dos casos** en los que sí lo tiene:

1. $\sum \alpha_i = 1$.
   Definición:
   Sean $p_1, \dots, p_r \in A$, $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{K}$ tales que $\sum_{i=1}^r \alpha_i = 1$. Entonces, por definición,

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i p_i := \bar{p} + \sum_{i=1}^{r} \alpha_i (p_i - \bar{p}) \in A, \text{ cogiendo } \bar{p} \in A \text{ como punto auxiliar.}$$

   Proposición:
   El proceso anterior no depende del punto auxiliar $\bar{p}$ que escojamos.
   Demostración:
   Sean $\bar{p}, \bar{\bar{p}} \in A$ puntos cualesquiera de A. Entonces,

$$\begin{aligned} \bar{p} + \sum \alpha_i (p_i - \bar{p}) &= \bar{\bar{p}} + \sum \alpha_i (p_i - \bar{\bar{p}}) \\ &\iff (\bar{p} - \bar{\bar{p}}) + \sum \alpha_i (p_i - \bar{p}) \\ &= (\bar{\bar{p}} - \bar{\bar{p}}) + \sum \alpha_i (p_i - \bar{\bar{p}}) \\ &\iff (\bar{p} - \bar{\bar{p}}) + \sum \alpha_i [(p_i - \bar{p}) - (p_i - \bar{\bar{p}})] \\ &= \vec{0} \\ &\iff (\bar{p} - \bar{\bar{p}}) + \sum \alpha_i [(p_i - \bar{p}) + (\bar{\bar{p}} - p_i)] \\ &= \vec{0} \\ &\iff (\bar{p} - \bar{\bar{p}}) + \sum \alpha_i [(\bar{\bar{p}} - \bar{p})] \\ &= \vec{0} \\ &\iff (\bar{p} - \bar{\bar{p}}) + (\bar{\bar{p}} - \bar{p}) \\ &= \vec{0} \\ &\iff \delta(\bar{p}, \bar{p}) \\ &= \vec{0}. \square \end{aligned} \tag{1}$$

   Definición:
   Dada una colección de puntos $p_1, \dots, p_m \in A$, el **baricentro** de todos ellos es el punto b resultante de la combinación afín siguiente:

$$b = \frac{1}{m} p_1 + \frac{1}{m} p_2 + \ldots + \frac{1}{m} p_m = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{m} p_i \in A.$$

2. $\sum \alpha_i = 0$.
   Definición:
   Sean $p_1, \dots, p_r \in A$, $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{K}$ tales que $\sum_{i=1}^r \alpha_i = 0$. Entonces, por definición,

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i p_i := \sum_{i=1}^{r} \alpha_i (p_i - \bar{p}) \in E, \text{ cogiendo } \bar{p} \in A \text{ como punto auxiliar.}$$

   Proposición:
   El proceso anterior no depende del punto auxiliar $\bar{p}$ que escojamos.

Demostración:
Sean $\bar{p}, \bar{\bar{p}} \in A$ puntos cualesquiera de A. Entonces,

$$\sum \alpha_i(p_i - \bar{p}) \underset{\Longleftrightarrow}{=} \sum \alpha_i(p_i - \bar{\bar{p}}) \tag{2}$$

Observación: Combinaciones de puntos.

1. $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$. En esta situación, sean $p_1 = (a_1, \ldots, a_n)$, $p_2 = (b_1, \ldots, b_n)$. Entonces, $\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 = (\alpha_1 a_1 + \alpha_2 b_1, \ldots, \alpha_1 a_n + \alpha_2 b_n)$ (si $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$ o $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$).
2. Ejemplo: $p_1 - \frac{3}{2}p_2 + \frac{1}{2}p_3 = (p_1 - p_2) + \frac{1}{2}(p_3 - p_2)$.

1.3 Coordenadas.

Definición:
Sea $\mathbb{A}$ un espacio afín de $\dim A = n < \infty$ asociado a un $\mathbb{K}$-e.v. E.

1. Llamaremos **sistema de referencia en** $\mathbb{A}$ a
$$\mathcal{R} = \{p;\ v_1, \ldots, v_n\},\ \text{donde } p \in A,\ \mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\} \text{ base de E.}$$
2. Dado $q \in A$, llamaremos **coordenadas de** q **en** $\mathcal{R}$ a $q_{\mathcal{R}} = (\vec{pq})_{\mathcal{B}}$.

Observación:

1. Como δ_p es biyectiva y
$$\begin{aligned} E &\to \mathbb{K}^n \\ v &\mapsto v_B \end{aligned}$$
también lo es, la asignación de coordenadas a un punto es biyectiva.
2. $q_R = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \iff q - p = \sum_{i=1}^n x_i v_i$.

Ejemplos:

1. $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$.
$\mathcal{R} = \{p = (1,3);\ v_1 = (1,1), v_2 = (2,1)\}$, $q = (4,5)$. Entonces, $q - p = (4,5) - (1,3) = (3,2) = v_1 + v_2 \implies q_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
2. $\mathcal{R} = \{(0,0);\ e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)\}$. $q = (4,5) \implies q_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$.

__**Definición**__:
En $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ llamaremos **referencia ordinaria** a

$$\mathcal{R}_{\text{ord}} := \{0;\ \mathcal{B}_{\text{canónica}}\}.$$

__**Observación**__: $q = (q_1, \ldots, q_n) \in \mathbb{K}^n,\ q_{\text{ord}} = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}.$

__**Proposición**__:
Sea $\mathbb{A}$ un espacio afín de dimensión finita, y sea la referencia $\mathcal{R} = \{p;\ B\}$, con B una base de E. Entonces,

1. $p_1, \ldots, p_r \in A,\ \alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{K} : \sum \alpha_i = 1$. Entonces, $(\alpha_1 p_1 + \ldots + \alpha_r p_r)_{\mathcal{R}} = \alpha_1 (p_1)_{\mathcal{R}} + \ldots + \alpha_r (p_r)_{\mathcal{R}}$.

2. $p_1, \ldots, p_r \in A,\ \alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{K} : \sum \alpha_i = 0$. Entonces, $(\alpha_1 p_1 + \ldots + \alpha_r p_r)_B = \alpha_1 (p_1)_{\mathcal{R}} + \ldots + \alpha_r (p_r)_{\mathcal{R}}$.

3. Caso particular. $(p_2 - p_1)_B = (p_2)_{\mathcal{R}} - (p_1)_{\mathcal{R}}$.

__**Demostración**__:

__**Proposición**__:
Cambio de sistema de referencia. Sea $\mathbb{A}$ un espacio afín de dimensión finita n. Sean $\mathcal{R}_1 = \{p_1;\ v_1, \ldots, v_n\}, \mathcal{R}_2 = \{p_2;\ w_1, \ldots, w_n\}$ dos sistemas de referencia. Sean $(p_2)_{\mathcal{R}_1} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, y $S = M_{B_2 \to B_1} = \begin{pmatrix} | & & | \\ (w_1)_{B_1} & \cdots & (w_n)_{B_1} \\ | & & | \end{pmatrix}$. Sea $q \in A$ tal que $q_{\mathcal{R}_1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, q_{\mathcal{R}_2} = \begin{pmatrix} \bar{x_1} \\ \vdots \\ \bar{x_n} \end{pmatrix}$. Entonces,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} \bar{x_1} \\ \vdots \\ \bar{x_n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad q_{\mathcal{R}_1} = S q_{\mathcal{R}_2} + (p_2)_{\mathcal{R}_2}.$$

__**Demostración**__:
$q_{\mathcal{R}_1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. $q - p_1 = (q - p_2) + (p_2 - p_1)$. Entonces,

$$(q - p_1)_{B_1} = (q - p_2)_{B_1} + (p_2 - p_1)_{B_1} \implies \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = q_{\mathcal{R}_1} = S(q - p_2)_{B_2} + (p_2)_{\mathcal{R}_1} = S \begin{pmatrix} \bar{x_1} \\ \vdots \\ \bar{x_n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}. \square$$

Observación: **Fórmula matricial de cambio de referencia.**

$$\begin{pmatrix} q_{\mathcal{R}_1} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} S & (p_2)_{\mathcal{R}_1} \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right) \begin{pmatrix} \bar{x_1} \\ \vdots \\ \bar{x_n} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{S} = \left(\begin{array}{c|c} S & (p_2)_{\mathcal{R}_1} \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right) \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K}).$$

También definiremos $\tilde{S} := M_{\mathcal{R}_2 \to \mathcal{R}_1}$. Esta matriz cumple $\det \tilde{S} = \det S$.
Definición:
Coordenadas ampliadas. $\mathcal{R} = \{p; B\}, q \in A, v \in B$,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = q_{\mathcal{R}} \longmapsto q_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha 1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = v_B \longmapsto v_B = \begin{pmatrix} \alpha 1 \\ \vdots \\ \alpha_n \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Llamaremos a los elementos de la derecha las **coordenadas ampliadas** de un punto y un vector.
Observación:

1. $\mathcal{R}_1 \overset{\tilde{S}}{\leftarrow} \mathcal{R}_2 \overset{\tilde{T}}{\leftarrow} \mathcal{R}_3$, entonces $M_{\mathcal{R}_3 \to \mathcal{R}_1} = \tilde{S}\tilde{T}$.

2. Otras ventajas de las coordenadas ampliadas: ecuaciones de variedades lineales, afinidades, cuádricas.

3. Las coordenadas ampliadas son coherentes con las combinaciones afines de puntos. Si $p_1, \ldots, p_m \in A, \alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{K}$, entonces

$$(\alpha_1 p_1 + \ldots + \alpha_m p_m)_{\mathcal{R}} = \alpha_1 (p_1)_{\mathcal{R}} + \ldots + \alpha_m (p_m)_{\mathcal{R}} = \alpha_1 \begin{pmatrix} | \\ | \\ 1 \end{pmatrix} + \ldots + \alpha_m \begin{pmatrix} | \\ | \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | \\ | \\ \sum \alpha_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | \\ | \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1.4 Variedades lineales.

Definición:
Sea $\mathbb{A}$ un espacio afín asociado a un $\mathbb{K}$-e.v. E. Entonces, una **variedad lineal** de $\mathbb{A}$ es un subconjunto:

$$V := p + F = \{p + \vec{u} | \vec{u} \in F\},\ p \in A,\ F \subseteq E \text{ subespacio vectorial.}$$

Definimos $\dim V := \dim F$.

Ejemplos:

1. Variedades lineales de dimensión 0: **puntos**, $\{p\}$.
2. Variedades lineales de dimensión 1: **rectas**, $\{p\} + [\vec{u}]$.
3. Variedades lineales de dimensión 2: **planos**, $\{p\} + [\vec{u}, \vec{v}]$.
4. Variedades lineales de dimensión $n-1$: **hiperplanos**.
5. $A = p + E$.

Definición:
Sea $\mathbb{A}$ un espacio afín. Sean V y W variedades lineales, $V = p + F, W = q + G$. Entonces, definimos las siguientes **posiciones relativas** de dos variedades lineales:

1. V y W son **paralelas** $\iff F \subseteq G$ o $G \subseteq F$.
2. $V \subseteq W$: V está **incluída** en W.
3. $V \cap W \neq \emptyset \implies V$ y W se **cortan**.
4. V y W se **cruzan** $\iff V \nparallel W \wedge V \cap W = \emptyset$.

Proposición:
Sean $V = p + F, W = q + G$ variedades lineales. Entonces,

1. $V \subseteq W \iff F \subseteq G \wedge p - q \in G$. En particular, $V = W \iff F = G \wedge p - q \in F$.
2. $V \subseteq W \implies \dim V \leq \dim W$.
3. $V \subseteq W \wedge \dim V = \dim W \implies V = W$.

Demostración:

1. $\Rightarrow$) Si $V \subseteq W$, $p + F \subseteq q + G$. Veamos que $p - q \in G$:

   $$p \in V \subseteq W = q + G \implies \exists \vec{v} \in G : p = q + \vec{v} \implies p - q = \vec{v} \in G.$$

   Veamos ahora que $F \subseteq G$: sea $\vec{u} \in F \implies (p + \vec{u}) \in V \subseteq W \implies \exists \vec{w} \in G : (p + \vec{u}) = (q + \vec{w}) \implies \vec{u} = (q - p) + \vec{w} = -(p - q)(\in G) + \vec{w}(\in G) \implies \vec{u} \in G \implies F \subseteq G$.

   $\Leftarrow$) Sea $\bar{p} \in V = p + F \implies (\vec{u} \in F)\bar{p} = p + \vec{u} = q + (p - q)(\in G) + \vec{u}(\in F \subseteq G) \in q + G = W.\square$
2. $V \subseteq W \implies F \subseteq G \implies \dim F \leq \dim G \implies \dim V \leq \dim W.\square$
3. $V \subseteq W \wedge \dim V = \dim W \implies F \subseteq G \wedge \dim F = \dim G \implies F = G$. Como $V \subseteq W \implies p - q \in F \implies V = W.\square$.

Proposición:
Sean $V = p + F, W = q + G$ variedades lineales. Entonces, $V \cap W \neq \emptyset \iff p - q \in F + G$.
Demostración:

$\Rightarrow$) Sea $a \in V \cap W \implies \begin{cases} a \in V \implies V = a + F \implies a = p + \vec{u}(\in F) \\ a \in W \implies W = a + G \implies a = q + \vec{v}(\in G) \end{cases}$. Entonces, $p - q = a - \vec{u} - (a - \vec{v}) = \vec{v} - \vec{u} \in F + G.\square$

$\Leftarrow$) Si $p - q = \vec{w_1}(\in F) + \vec{w_2}(\in G) \implies (V = p + F \ni)p - \vec{w_1} = q + \vec{w_2}(\in q + G = W) \implies \exists p \in A : p \in W \wedge p \in V \implies V \cap W \neq \emptyset.\square$

1.4.1 Variedades lineales y combinaciones de puntos.

Proposición:
Sea $V = p + F$ una variedad lineal de $\mathbb{A}$. Sean $p_1, \dots, p_m \in V$. Entonces $\forall \alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{K} : \sum \alpha_i = 1,\ \alpha_1 p_1 + \dots + \alpha_m p_m \in V$.
Demostración:
$\forall i\ p_i \in V = p + F \implies \forall i \exists \vec{u_i} \in F : p_i = p + \vec{u_i}$. Entonces, $\alpha_1 p_1 + \dots + \alpha_m p_m = p + \sum \alpha_i (p_i - p) = p + \sum \alpha_i \vec{u_i}(\in F) \in V.\square$
Definición:
Sea $\mathbb{A}$ un espacio afín. Sea $S \subseteq A$ un subconjunto de puntos no vacío. Entonces, **la variedad lineal más pequeña que contiene a** S se denota $\langle S \rangle$.
Proposición:
Sea $S = \{p_1, \dots, p_m\}$. Entonces,

$$\langle S \rangle = \{\text{combinaciones lineales de } S\} = p_1 + [p_2 - p_1, \dots, p_m - p_1]$$

Demostración:
$W = \{\text{c.l. de } \{p_1, \dots, p_m\}\} = \{\sum \alpha_i p_i | \sum \alpha_i = 1\} = \{p_1 + \alpha_2(p_2 - p_1) + \dots + \alpha_m(p_m - p_1) | \sum \alpha_i = 1\} = p_1 + [p_2 - p_1, p_3 - p_1, \dots, p_m - p_1]$. Por tanto, W es una variedad lineal. Por construcción, $S = \{p_1, \dots, p_m\} \subseteq W$. Sea V una variedad lineal tal que $S \subseteq V$. Por la proposición anterior, $W = \{\text{c.l. de S}\} \subseteq V \implies W \subseteq V \implies W = \langle S \rangle .\square$
Definición:
$\{p_1, \dots, p_m\}, m \geq 2$ son **linealmente independientes** $\iff \{p_2 - p_1, \dots, p_m - p_1\}$ son vectores l.i. Si $m < 2$, el conjunto siempre es l.i.
Observación: $\{p_1, \dots, p_m\}$ l.i. $\iff$ (Fijado i_0)$\{p_1 - p_{i_0}, \dots, p_{i_0 - 1} - p_{i_0}, p_{i_0 + 1} - p_{i_0}, \dots, p_m - p_{i_0}\}$ es un conjunto de vectores l.i.
Corolario:
Si $p_1, \dots, p_m$ son l.i., $\dim < p_1, \dots, p_m >= m - 1$.
Ejemplos:
$\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$:

1. $\langle p_1 \rangle = \{p_1\}$, variedad lineal de dimensión 0.
2. 2 puntos p_1, p_2 son l.i. $\iff p_1 \neq p_2$. $\langle p_1, p_2 \rangle$, variedad lineal de dimensión 1.
3. 3 puntos p_1, p_2, p_3 l.i. $\implies \langle p_1, p_2, p_3 \rangle$ plano, variedad lineal de dimensión 2.

1.4.2 Ecuaciones de variedades lineales.

Sea $\mathbb{A}$ un espacio afín de $\dim \mathbb{A} = n$. Sea $\mathcal{R} = \{p; B = \{u_1, \ldots, u_n\}\}$ un sistema de referencia en $\mathbb{A}$. Sea $V = q + F = q + [v_1, \ldots, v_r]$, $\dim V = r$, $\{v_1, \ldots, v_r\}$ base de F.

(A) Ecuaciones paramétricas de V. $\bar{q} \in V \iff \bar{q} = q + \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_r v_r, \alpha_i \in \mathbb{K} \iff$

$$\bar{q_{\mathcal{R}}} = q_{\mathcal{R}} + \alpha_1 (v_1)_B + \ldots + \alpha_r (v_r)_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \text{(ecuaciones paramétricas de } V\text{)} \tag{3}$$

<u>Ejemplos:</u>

$\mathbb{A}^3_{\mathbb{K}}:\ V = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$. $\mathcal{R} = \mathcal{R}_{\text{ord}}$. Entonces, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Haciendo el proceso anterior,

$$\bar{q}_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in V \iff \exists \alpha_1, \alpha_2 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \iff$$

$$\begin{pmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 - 2 \\ x_3 - 3 \end{pmatrix} \text{ es c.l. de } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \operatorname{rg} \begin{pmatrix} x_1 - 1 & 1 & 1 \\ x_2 - 2 & 1 & 2 \\ x_3 - 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 2 \iff$$

$$\begin{vmatrix} x_1 - 1 & 1 & 1 \\ x_2 - 2 & 1 & 2 \\ x_3 - 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \iff Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 + D = 0.$$

(B) Ecuaciones cartesianas/implícitas de V. $V = q + [v_1, \ldots, v_r]$. $\bar{q} \in A, \bar{q} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in V \iff \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = q_{\mathcal{R}} + \alpha_1 (v_1)_B + \ldots + \alpha_r (v_r)_B$ para algunas $\alpha_i \in \mathbb{K} \iff \begin{pmatrix} x_1 - a_1 \\ \vdots \\ x_n - a_n \end{pmatrix} \in [(v_1)_B, \ldots, (v_r)_B] \iff \operatorname{rg} \begin{pmatrix} x_1 - a_1 & | & | & | \\ \vdots & (v_1)_B & \cdots & (v_r)_B \\ x_n - a_n & | & | & | \end{pmatrix} = r \iff$ Sus menores de orden $r+1$ son cero :

$$\begin{cases} \ldots\ldots\ldots = 0 \\ \ldots\ldots\ldots = 0 \\ \vdots \\ \ldots\ldots\ldots = 0 \end{cases} \quad \text{sistema lineal.}$$

Observación: **Método de "orlar" un menor.** $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}), \Delta_r = \det \begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \end{pmatrix} \neq 0$. $\operatorname{rg} A = r \iff$ todos los menores que contienen a Δ_r de orden $r+1$ son cero. $V = p + F = p + [v_1, \ldots, v_r]$, $r = \dim F = \dim V$. $q \in V \iff q_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$; $p_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$. $\operatorname{rg} \begin{pmatrix} x_1 - a_1 & | & | & | \\ \vdots & (v_1)_B & \cdots & (v_r)_B \\ x_n - a_n & | & | & | \end{pmatrix} = r$.

$\Longrightarrow$ Los menores $(r+1) \times (r+1)$ que contienen a uno de orden r no nulo fijado deben ser cero $\Longrightarrow$ En total, $n - r$ ecuaciones.

Proposición:

Sea $\mathbb{A}$ un espacio afín de dimensión n. Sea $\mathcal{R}$ un sistema de referencia. Sea $V \subseteq A$. Entonces, V es una variedad lineal de dimensión $r \iff$ Los puntos $q \in V$ (sus coordenadas $q_{\mathcal{R}}$) verifican un sistema de ecuaciones lineales compatible, $A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_r \end{pmatrix}$, con $\operatorname{rg} A = n - r$.

Demostración:

$\Leftarrow$) $A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix}$ s.l. compatible, $k = \operatorname{rg} A \Longrightarrow$ sus soluciones se escriben $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \operatorname{Nuc} A = p + F$ variedad lineal. $\dim(p+F) = \dim F = \dim \operatorname{Nuc} A = n - \operatorname{rg} A = n - k$.

$\Rightarrow$) Visto. $V = p + F, \dim F = r \Longrightarrow$ {SEL compatible} $\to n - r$ ecuaciones.$\square$

Definición:

$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \to$ ecuaciones implícitas (o cartesianas) de V.

Ejemplos:

1. $\mathbb{A}^3_{\mathbb{K}}, \mathcal{R}_{\text{ord}}$.

$$V = \begin{pmatrix}1\\2\\1\\3\end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\1\\1\end{pmatrix}\right] \text{ (plano). } \operatorname{rg}\begin{pmatrix}x_1-1 & 1 & 1\\ x_2-2 & 2 & 2\\ x_3-1 & 3 & 1\\ x_4-3 & 4 & 1\end{pmatrix} = 2 \iff \begin{cases}\begin{vmatrix}x_1-1 & 1 & 1\\ x_3-1 & 3 & 1\\ x_4-3 & 4 & 1\end{vmatrix} = 0.\\ \begin{vmatrix}x_2-2 & 2 & 2\\ x_3-1 & 3 & 1\\ x_4-3 & 4 & 1\end{vmatrix} = 0.\end{cases}$$

2. $\mathbb{A}^2_{\mathbb{K}}$.

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=5.\\ 2x_1+3x_2-x_3+x_4=1.\end{cases} \text{. Esto se puede escribir: } \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}.$$

Observación:

1.
2.
3.
4.
5.

1.4.3 Suma, intersección y fórmula de Grassmann.

2 Afinidades.

2.1 Definición y propiedades.

Definición:
Sean $\mathbb{A}, \mathbb{A}'$ espacios afines con espacios vectoriales asociados E, E' (sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$). Sea $f: \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ una función. Entonces, f es una **afinidad** $\iff \exists p \in \mathbb{A}: \tilde{f}_p(\vec{u}) := f(p+\vec{u}) - f(p)$ $(\vec{u} \in E)$ es una aplicación lineal de E en E'.
Observación:

1. $A \xrightarrow{f} A'$. Entonces, $E \xrightarrow{\delta_p^{-1}} A \xrightarrow{f} A' \xrightarrow{\delta'_{f(p)}} E'$, y en total, $E \xrightarrow{\tilde{f}_p} E'$.
2. Si $\tilde{f}_p$ es lineal $\implies \forall q \in \mathbb{A}$ $\tilde{f}_q = \tilde{f}_p$. Veámoslo: sea $\vec{u} \in E$,
$\tilde{f}_q(u) = f(q+u) - f(q) = f(p+(q-p+u)) - f(p+(q-p)) = (f(p+(q-p+u)) - f(p)) - (f(p+(q-p)) - f(p)) = \tilde{f}_p((q-p)+u) - \tilde{f}_p(q-p) = \tilde{f}_p(u) + \tilde{f}_p(q-p) - \tilde{f}_p(q-p) = \tilde{f}_p(u).\square$
3. Entonces,
$f(p+u) - f(p) = \tilde{f}(u)(\text{def}) \leftrightarrow f(p+u) = f(p) + \tilde{f}(u) \leftrightarrow f(q) = f(p) + \tilde{f}(q-p)$.

Proposición:

1. f, g afinidades $\implies$ $g \circ f$ es una afinidad y $g \tilde{\circ} f = \tilde{g} \circ \tilde{f}$.
2. Sea $f: \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ una afinidad. Entonces,
   - f inyectiva $\iff$ $\tilde{f}$ inyectiva (y entonces $\dim \mathbb{A} \leq \dim \mathbb{A}'$).
   - f exhaustiva $\iff$ $\tilde{f}$ exhaustiva (y entonces $\dim \mathbb{A} \geq \dim \mathbb{A}'$).
   - f biyectiva $\iff$ $\tilde{f}$ biyectiva (y entonces $\dim \mathbb{A} = \dim \mathbb{A}'$).
3. Si $\dim \mathbb{A} = \dim \mathbb{A}' < \infty \implies$ (f inyectiva $\iff$ f exhaustiva $\iff$ f biyectiva).
4. Si f biyectiva $\implies$ f^{-1} es una afinidad y $f \tilde{^{-1}} = \tilde{f}^{-1}$.

Demostración:

1.
2.
3.
4.

Proposición:

1. Sean $f, g: \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ afinidades. Entonces,
$$f = g \iff \exists p \in \mathbb{A}: f(p) = g(p) \text{ y } \tilde{f} = \tilde{g}.$$

2. Sean $p \in \mathbb{A}, q \in \mathbb{A}$ y $\varphi : \ E \to E'$ una aplicación lineal. Entonces, existe una única afinidad tal que $f(p) = q, \tilde{f} = \varphi$.

3. Sea $\mathbb{A}$ tal que $\dim \mathbb{A} = n$. Si $p_0, p_1, \ldots, p_n$ son puntos independientes de $\mathbb{A}$, entonces dados $q_0, q_1, \ldots, q_n$ puntos cualesquiera de $\mathbb{A}'$ existe una única afinidad $f : \ \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ tal que $f(p_i) = q_i$.

Demostración:

Definición:
Sean $\mathbb{A}, \mathbb{A}'$ espacios afines. Entonces,

$$\mathbb{A} \cong \mathbb{A}' \iff \exists f : \ \mathbb{A} \to \mathbb{A}' \text{ afinidad biyectiva.}$$

Corolario:
Sean $\mathbb{A}, \mathbb{A}'$ espacios afines de dimensión finita. Entonces,

$$\mathbb{A} \cong \mathbb{A}' \iff \dim \mathbb{A} = \dim \mathbb{A}'.$$

En particular, si $n = \dim \mathbb{A}$, $\mathbb{A} \cong \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$.