Departament de Matemàtica Aplicada IV

Problemes escollits d'Anàlisi Real amb solució
FME Curs 2002

Santi Boza i Jaume Franch

1. Siguin

$$a_n(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!},$$
$$f_n(x,y) = a_n(y)\ x^n,$$

i

$$S(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x,y).$$

(a) Calculeu el radi de convergència de $S(x,y)$ entesa com a sèrie de potències en x. És aquest radi dependent del valor de y?

Solució: Per calcular el radi de convergència $\rho(y)$, calculem per tot $y \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho(y)} &= \lim_{n\longrightarrow\infty} \left|\frac{a_{n+1}(y)}{a_n(y)}\right| = \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n+1} \frac{y^k}{k!}}{\sum_{k=0}^{n} \frac{y^k}{k!}} = 1 + \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{\frac{y^{k+1}}{(k+1)!}}{\sum_{k=0}^{n} \frac{y^k}{k!}} \\ &= 1 + \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{y^{k+1}}{(k+1)!e^y} = 1, \end{aligned}$$

tenint en compte que la successió $\sum_{k=0}^{n} \frac{y^k}{k!}$ és convergent per tot $y \in \mathbb{R}$ cap a e^y i que, per tant, el terme general de la sèrie convergeix cap a zero.

D'aquí es dedueix que, independentment de $y \in \mathbb{R}$, el radi de convergència és 1.

(b) Determineu la regió $D \subset \mathbb{R}^2$ on $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x,y)$ és absolutament convergent.

Solució: De l'apartat anterior es dedueix si $|x| > 1$ la sèrie no és convergent. Si $|x| < 1$, observem que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left|\sum_{k=0}^{n} \frac{y^k}{k!}\right| |x|^n \le \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{|y|^k}{k!}|x|^n \le e^{|y|} \sum_{n=0}^{\infty} |x|^n = \frac{e^{|y|}}{1-|x|}.$$

Per tant, la regió D de convergència absoluta de la sèrie conté la banda de $\mathbb{R}^2$ $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |x| < 1,\ y \in \mathbb{R}\}$.

Per veure que D coincideix amb aquesta banda, observem que si $x = + - 1$ la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} \left|\sum_{k=0}^{n} \frac{y^k}{k!}\right|$ no és convergent donat que el seu terme general $\left|\sum_{k=0}^{n} \frac{y^k}{k!}\right|$ no és convergent cap a zero.

Per tant, hem provat que $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |x| < 1,\ y \in \mathbb{R}\}$.

(c) Canvieu l'ordre de sumació, indicant on és possible fer-ho, i calculeu $S(x,y)$

Solució: Per calcular $S(x,y)$, observem que si $(x,y) \in D$ donat que la sèrie es absolutamet convergent, podem commutar l'ordre de sumació i obtenim

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \left|\sum_{k=0}^{n} \frac{y^k}{k!} x^n\right| &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!} \sum_{n=k}^{\infty} x^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!} \frac{x^k}{1-x} \\ &= \frac{1}{1-x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k y^k}{k!} = \frac{e^{xy}}{1-x}. \end{aligned}$$

2. (a) Dieu si les successions donades per

$$f_n(x) = x^n(1-x),$$
$$g_n(x) = x^n(1-x^n),$$

convergeixen uniformement en $x \in [0,1]$.
En primer lloc, observem que, per tot $x \in [0,1]$, el límit puntual de ambdues succesions és 0 donat que si $0 \leq x < 1$, $\lim_{n\longrightarrow\infty} x^n = 0$ i $f_n(1) = g_n(1) = 0$.
Per discutir la convergència uniforme de $f_n(x)$ cap a 0, observem que per cada n, la funció $f_n(x)$ té un màxim local a $x_n = n/(n+1)$, llavors

$$\begin{aligned}\lim_n \sup_{x\in[0,1]} f_n(x) &= \lim_n f_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = \lim_n \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \left(1-\frac{n}{n+1}\right) \\ &= \lim_n \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n \left(\frac{1}{n+1}\right) = 0\cdot\end{aligned}$$

Per tant, la convergència de f_n cap a $f(x) \equiv 0$ és uniforme.
En el cas de la successió $g_n(x)$, es verifica que per cada $n \in \mathbb{N}$ g_n té un màxim al punt $x_n = (1/2)^{\frac{1}{n}}$ i per tant,

$$\lim_n \sup_{x\in[0,1]} g_n(x) = \lim_n g_n\left(\sqrt[n]{\frac{1}{2}}\right) = \lim_n \frac{1}{4} = \frac{1}{4},$$

la qual cosa contradiu la convergència uniforme.

(b) Demostreu que la successió amb terme general

$$f_n(x) = ne^{\frac{x}{n}}, \quad x \in [-1,2],$$

és equicontínua però no té cap parcial uniformement convergent. Contradiu això algun resultat teòric?
L'equicontinuïtat de la successió $f_n(x)$ és conseqüència del teorema del valor mitjà, donat que per $x, y \in [-1,2]$ i per tot $n \geq 1$,

$$|f_n(x) - f_n(y)| \leq \sup_{\xi\in[-1,2]} e^{\frac{\xi}{n}}|x-y| \leq e^2|x-y|.$$

Aquesta desigualtat prova el fet de que les funcions f_n verifiquen una condició Lipschitz de manera uniforme en $n \in \mathbb{N}$ i per tant són equicontínues.
Donat que el límit puntual de cada f_n és ∞, no pot existir cap subsuccessió uniformement convergent. De la mateixa manera, donat que la successió no és puntualment fitada per cap $x \in [-1,2]$ aquest fet no contradiu el Teorema d'Ascoli-Arzelà malgrat l'equicontinuïtat de $f_n(x)$.

3. Sigui la sèrie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(x^2+x+1)^n}.$$

(a) Estudieu-ne la convergència puntual i uniforme.

(b) Sumeu-la.

Utilitzant el criteri del quocient, calculem

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\left|\frac{\frac{n+1}{(x^2+x+1)^{n+1}}}{\frac{n}{(x^2+x+1)^n}}\right| = \lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{n+1}{n}\frac{1}{x^2+x+1} = \frac{1}{x^2+x+1}.$$

Per tant, podem assegurar la convergència si

$$\frac{1}{x^2+x+1} < 1 \Leftrightarrow x < -1 \text{ ó } x > 0$$

Si $1/x^2+x+1 = 1$, és a dir, $x = -1$ ó $x = 0$ comprovem que obtenim sèries divergents ja que el seu terme general no és convergent cap a zero.

Es a dir, hem provat la convergència puntual si i només si $x \in \mathcal{R} = (-\infty,-1) \cup (0,\infty)$. La convergència uniforme es donarà segons el criteri de Weierstrass a tot compacte contingut dins $\mathcal{R}$.

Per calcular la suma de la sèrie, observem que, per derivació de la sèrie potències $\sum_{n=1}^{\infty} z^n = z/(1-z)$, $|z| < 1$, pot deduir-se

$$\sum_{n=1}^{\infty} nz^n = \frac{z}{(1-z)^2},\ |z| < 1.$$

Emprant la fòrmula anterior per $z = (x^2+x+1)^{-1}$, deduïm que si $1/(x^2+x+1) < 1$, és a dir, si $x \in \mathcal{R}$,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(x^2+x+1)^n} = \frac{x^2+x+1}{(x^2+x)^2}.$$

4. (a) Demostreu que per tot $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^{\pi} x\sin^n x\ dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\sin^n x\ dx$$

   Indicació: Demostreu que la integral de la diferència és 0.

   (b) Demostreu $\displaystyle\int_0^{\pi} x\ P(\sin x)\ dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} P(\sin x)\ dx$, per tot polinomi P.

   (c) S'extén l'apartat (b) al cas P funció continua arbitrària a $[-1,1]$?

   (d) Calculeu $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\ dx$

Solució: a)Es tracta doncs de veure que per tot $n \in \mathbb{N}$

$$\int_0^{\pi}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\sin^n x\ dx = 0\cdot$$

Efectivament, efectuant el canvi de variable $u = x - \frac{\pi}{2}$ en la integral anterior s'obté

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} u\sin^n(u+\pi/2)\ du = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} u\cos^n u\ du = 0\cdot$$

La darrera igualtat es deguda a que es tracta de l'integral definida de una funció senar com és $x\cos^n x$, per tot $n \in \mathbb{N}$ en un interval simètric com és $(-\pi/2,\pi/2)$.

b) Es conseqüència de l'apartat a) i de la linealitat de la integral.

c) Es tracta de veure que per $g \in C[-1,1]$,

$$\int_0^\pi \left(x - \frac{\pi}{2}\right) g(\sin x)\ dx = 0\cdot$$

Degut al teorema d'Stone-Weierstrass, per tot $\epsilon > 0$, existeix $P \in \mathbb{R}[x]$ tal que $\sup_{x\in[-1,1]} |g(x) - P(x)| \leq \epsilon$. Tenint en compte que $g(\sin x) \in C[0,\pi]$, s'obte que

$$\sup_{x\in[0,\pi]} |g(\sin x) - P(\sin x)| \leq \epsilon.$$

Degut a l'apartat b), tenim

$$\int_0^\pi \left(x - \frac{\pi}{2}\right) g(\sin x)\ dx = \int_0^\pi \left(x - \frac{\pi}{2}\right) (g(\sin x) - P(\sin x))\ dx\cdot$$

De la qual cosa deduïm

$$\left|\int_0^\pi \left(x - \frac{\pi}{2}\right) g(\sin x)\ dx\right| \leq \sup_{x\in[0,\pi]} |g(\sin x) - P(\sin x)| \int_0^\pi \left|x - \frac{\pi}{2}\right|\ dx \leq \epsilon\frac{\pi^2}{2}\cdot$$

Com que ϵ és arbitrari, s'obté el resultat desitjat.

d)Observem que $\displaystyle\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\ dx = \int_0^\pi \frac{x\sin x}{2-\sin^2 x}\ dx$. Donat que la funció $g(x) = \frac{x}{2-x^2}$ és continua a $[-1,1]$, podem aplicar l'apartat anterior i substituir la integral demanada per

$$\frac{\pi}{2}\int_0^\pi \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\ dx = \frac{\pi}{2}\left[-\arctan(\cos x)\right]_0^\pi = \frac{\pi^2}{4}\cdot$$

5. Demostreu que

$$\log(x+\sqrt{x^2+1}) = \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{4^k}\frac{(2k)!}{(k!)^2}\frac{x^{2k+1}}{2k+1},$$

amb radi de convergència $R = 1$. Convergeix la sèrie a $x = \pm 1$?

Per comprovar quina és la suma de la sèrie, observem que, si $f(x) = \log(x+\sqrt{x^2+1})$, $f'(x) = (x^2+1)^{-1/2}$ que admet per sèrie de potències

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \sum_{k=0}^\infty \binom{-\frac{1}{2}}{k} x^{2k}; \quad |x| < 1.$$

On $\displaystyle\binom{-\frac{1}{2}}{k} = \frac{\frac{-1}{2}\cdot(-\frac{1}{2}-1)\cdots(-\frac{1}{2}-(k-1))}{k!} = (-1)^k\frac{(2k)!}{(k!)^2 4^k}$

Per tant, si $|x| < 1$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^x \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\ dt = \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{4^k}\frac{(2k)!}{(k!)^2}\int_0^x t^{2k}\ dt \\ &= \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{4^k}\frac{(2k)!}{(k!)^2}\frac{x^{2k+1}}{2k+1}. \end{aligned}$$

Donat que $\log(x+\sqrt{x^2+1})|_{x=0} = 0$, i 0 és també el valor de la sèrie de potències a $x = 0$, hem provat la igualtat.

El radi de convergència es $R = 1$, donat que aquest és també el radi de convergència de la funció que defineix la sèrie de potències de la derivada.

Per veure la convergència de la sèrie als extrems $x = \pm 1$, observem que en els dos casos es tracta d'una sèrie alternada i, a més,

$$f(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4^k} \frac{(2k)!}{(k!)^2} \frac{1}{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4^k} \frac{(2k)!}{(k!)^2} \frac{(-1)^{2k+1}}{2k+1}.$$

Mirem, doncs, si podem aplicar el criteri de Leibnitz a la sèrie alternada de terme general $a_n = \dfrac{(2n)!}{4^n (n!)^2 (2n+1)}$, $n \geq 0$

- El terme general a_n és decreixent, com es pot comprovar fàcilment.
- Per veure que $(a_n)_n$ és convergent cap a zero, utilitzem la fòrmula d'Stirling ($n! \approx n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$) i veiem que

$$a_n = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2 (2n+1)} \approx \frac{e^{-2n} (2n)^{2n} \sqrt{4\pi n}}{4^n (e^{-n})^2 (n^n)^2 (\sqrt{2\pi n})^2 (2n+1)} = \frac{\sqrt{4\pi n}}{(2\pi n)(2n+1)} \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0.$$

Per tant, el criteri de Leibnitz ens assegura la convergència de la sèrie

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n,$$

tal i com volíem veure.

6. (a) Demostreu que

$$\sum_{n=1}^{N} x^n \sin nx = \frac{x \sin x - x^{N+1} \sin(N+1)x + x^{N+2} \sin Nx}{1 + x^2 - 2x \cos x}.$$

Ho provarem per inducció sobre N. Si $N = 1$, cal comprovar que

$$x \sin x = \frac{x \sin x - x^2 \sin 2x + x^3 \sin x}{1 + x^2 - 2x \cos x}.$$

La qual cosa es conseqüència de que $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$.
Suposem per hipòtesi d'inducció que

$$\sum_{n=1}^{N} x^n \sin nx = \frac{x \sin x - x^{N+1} \sin(N+1)x + x^{N+2} \sin Nx}{1 + x^2 - 2x \cos x}. \tag{1}$$

Tenim segons (1) que,

$$\sum_{n=1}^{N+1} x^n \sin nx = \sum_{n=1}^{N} x^n \sin nx + x^{N+1} \sin(N+1)x =$$
$$\frac{x \sin x + x^{N+2} \sin Nx + x^{N+3} \sin(N+1)x - 2x^{N+2} \cos x \sin(N+1)x}{1 + x^2 - 2x \cos x} =$$
$$\frac{x \sin x - x^{N+2} \sin(N+2)x + x^{N+3} \sin(N+1)x}{1 + x^2 - 2x \cos x}.$$

A on la darrera igualtat s'ha emprat la fòrmula $2 \cos x \sin(N+1)x = \sin(N+2)x + \sin Nx$.

(b) Demostreu que $\sum_{n=1}^{\infty} x^n \frac{\sin nx}{n}$ convergeix uniformement a $[-1,1]$.

Segons el criteri de Dirichlet només cal comprovar que la successió (1) donada per les sumes parcials $\sum_{n=1}^{N} x^n \sin nx$ és uniformement fitada i notar que la successió $1/n$ convergeix monòtonament cap a zero.

Efectivament, donat que la funció $1+x^2-2x\cos x$ és estrictament positiva a $[-1,1]$, existeix $M>0$ tal que

$$1+x^2-2x\cos x = (1-x\cos x)^2 + (x\sin x)^2 \geq M > 0$$

i, per tant, si $|x| \leq 1$,

$$\left|\sum_{n=1}^{N} x^n \sin nx\right| \leq \frac{|x||\sin x| + |x|^{N+1}|\sin(N+1)x| + |x|^{N+2}|\sin Nx|}{|1+x^2-2x\cos x|} \leq \frac{3}{M}.$$

7. Sigui S un espai de Banach i sigui $\{f_n\}$ una successió de funcions de S en S que són α_n-contractives, $\alpha_n \in [0,1)$. Suposem que $\lim \alpha_n < 1$ i que $f_n \to f$ puntualment a tot S.

   (a) Demostreu que f té un únic punt fix a tot S.

   (b) Què passa si no existeix $\lim \alpha_n$?

Solució: Tenim

$$||f_n(x) - f_n(y)|| \leq \alpha_n ||x-y||$$

per a tot $x, y \in S$, amb $\alpha_n \in [0,1)$. Com que la norma és una aplicació contínua, fent $n \to \infty$ queda, emprant la convergència puntual de f_n i la convergència de α_n,

$$||f(x) - f(y)|| \leq \alpha ||x-y||,$$

amb $\alpha < 1$ per hipòtesi. Com que les f_n són de S a S i S és complet, també es té que f és de S a S, i aplicant el teorema de l'aplicació contractiva es dedueix el resultat dessitjat.

Si $\lim \alpha_n$ no existeix, es té, donat que $\alpha_n \in [0,1)$, que hi haurà d'haver al menys dos punts d'acumulació dels α_n en $[0,1]$ i un d'ells, diguem-li $\alpha_<$, haurà de ser estrictament menor que 1. Sigui g_n la parcial de f_n les α_n de la qual convergeixen a $\alpha_<$. Com que $g_n \to f$ puntualment, es pot repetir el raonament anterior emprant aquesta parcial i el resultat se segueix igualment.

Un exemple (prou trivial) on passa això és agafar $S = \mathbb{R}$ i considerar les successions

$$g_n(x) = 1 + \frac{1}{n+1}x, \quad h_n(x) = 1 + \frac{1}{n+1}\sin nx.$$

Tenim $g_n(x) \to 1$, $h_n(x) \to 1$ i

$$\begin{aligned} |g_n(x) - g_n(y)| &= \frac{1}{n+1}|x-y| \\ |h_n(x) - h_n(y)| &= \frac{n}{n+1}|\cos n\xi||x-y| \leq \frac{n}{n+1}|x-y| \end{aligned}$$

amb $1/(n+1) \to 0$ i $n/(n+1) \to 1$. N'hi ha prou en considerar llavors f_n formada per les g_n si n és senar i per les h_n altrament. La funció límit puntual, $f(x) = 1$, té un únic punt fix "ultra-atractor", $x^* = 1$.

8. Sigui $n \in \mathbb{N}$ i considerem $L_n : C([0,1], \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida per:

$$L_n(f) = \frac{\int_0^1 x^n f(x)\ dx}{\int_0^1 x^n\ dx}.$$

(a) Considereu a $C([0,1], \mathbb{R})$ la norma de la convergència uniforme. Proveu que per cada $n \in \mathbb{N}$, L_n és lineal, continua i creixent (i.e. $L_n(f) \le L_n(g)$, si $f(x) \le g(x)$ per tot $x \in [0,1]$).

Solució: L_n és lineal: en efecte siguin λ_1, λ_2 reals qualssevols, f i g funcions de l'espai $C([0,1])$,

$$\begin{aligned} L_n(\lambda_1 f + \lambda_2 g) &= \frac{\int_0^1 x^n(\lambda_1 f(x) + \lambda_2 g(x))\ dx}{\int_0^1 x^n\ dx}. \\ &= \lambda_1 \frac{\int_0^1 x^n f(x)\ dx}{\int_0^1 x^n\ dx} + \lambda_2 \frac{\int_0^1 x^n g(x)\ dx}{\int_0^1 x^n\ dx} = \lambda_1 L_n(f) + \lambda_2 L_n(g). \end{aligned}$$

Continuïtat: Suposem que f i $g \in C([0,1])$ verifiquen que, per cert $\epsilon > 0$, $\sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)| \le \epsilon$, aleshores

$$\begin{aligned} |L_n(f-g)| &= \frac{\left|\int_0^1 x^n(f(x) - g(x))\ dx\right|}{\int_0^1 x^n\ dx} \le \frac{\int_0^1 x^n |f(x) - g(x)|\ dx}{\int_0^1 x^n\ dx} \\ &\le \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)| \frac{\int_0^1 x^n\ dx}{\int_0^1 x^n\ dx} \le \epsilon. \end{aligned} \tag{2}$$

L_n és creixent com a conseqüència de la monotonia de la integral i del fet que $x^n \ge 0$ si $x \in [0,1]$.

(b) Demostreu que per tota $f \in C[0,1]$,

$$\lim_{n\to\infty} L_n(f) = f(1).$$

Indicació: Proveu l'apartat (b) per monomis en primer lloc.

Solució: Sigui $k \ge 0$ un enter i considerem per a $x \in [0,1]$, $f(x) = x^k$ aleshores

$$L_n(x^k) = \frac{\int_0^1 x^{n+k}\ dx}{\int_0^1 x^n\ dx} = \frac{n+1}{n+k+1} \overset{n\to\infty}{\to} 1 = f(1)$$

Sigui ara per m enter positiu $P_m(x) = \sum_{k=0}^m a_k x^k$ es verifica degut a la linealitat de l'operador L_n,

$$L_n(P_m) = \sum_{k=0}^m a_k L_n(x^k) = \sum_{k=0}^m a_k \frac{n+1}{n+k+1} \overset{n\to\infty}{\to} \sum_{k=0}^m a_k = P_m(1)$$

Tenim doncs que donat $\epsilon > 0$ existeix N tal que per tot $n \ge N$,

$$|L_n(P_m) - P_m(1)| \le \frac{\epsilon}{3}$$

D'altra banda com a conseqüència del Teorema d'Stone-Weirstrass, donada $f \in C([0,1])$ i $\epsilon > 0$, podem assegurar l'existència d'un polinomi P_m tal que

$$\|f - P_m\| = \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - P_m(x)| \le \frac{\epsilon}{3}$$

Per tant, dels dos fets anteriors, la desigualtat triangular i (2) (continuïtat de L_n), obtenim que per tot $n \geq N$

$$\begin{aligned} |L_n(f) - f(1)| &= |L_n(f - P_m) + L_n(P_m) - P_m(1) + P_m(1) - f(1)| \\ &\leq |L_n(f - P_m)| + |L_n(P_m) - P_m(1)| + |P_m(1) - f(1)| \\ &\leq \|f - P_m\| + |L_n(P_m) - P_m(1)| + \|f - P_m\| \leq 3\frac{\epsilon}{3} = \epsilon \end{aligned}$$

9. Per cada $f \in C[a,b]$, es considera l'operador $J(f) := \int_a^x f(t)\ dt$.

   (a) Demostreu que si $\{f_n\}_n$ és una successió de funcions de $C[a,b]$ uniformement fitades per 1, $\{J(f_n)\}_n$ té una parcial uniformement convergent dins $C[a,b]$. **Solució:** Degut al Teorema d'Ascoli-Arzelà, només cal comprovar que la successió $\{Jf_n\}_n$ és una familia puntualment fitada i equicontinua de funcions.
   En efecte, la successió és puntualment fitada ja que per cada $x \in [a,b]$

   $$|J(f_n)(x)| \leq \int_a^x |f_n(t)|\ dt \leq x - a.$$

   L'equicontinuïtat és conseqüencia de que, si $x \leq y \in [a,b]$ són tals que $|x - y| \leq \delta$

   $$|J(f_n)(x) - J(f_n)(y)| \leq \int_x^y |f_n(t)\ dt \leq y - x\delta, \quad \text{per cada } n \geq 1$$

   Per tant, donat $\epsilon > 0$, obtenim, prenent $\delta = \epsilon$, una condició de continuïtat uniforme a l'interval $[a,b]$ per a cada funció $J(f_n)$ de la successió, independentment de n.

   (b) Demostreu que per tota $g \in C[a,b]$, l'equació integral

   $$\frac{1}{\lambda}\left(J(f)(x) - g(x)\right) = f(x),$$

   té solució única a $C[a,b]$, si $|\lambda| > (b-a)$.
   Solució:
   Fixada $g \in C[a,b]$ i $\lambda \in \mathbb{R}$, considerem l'operador

   $$\begin{array}{rccc} \Phi_g: & C[a,b] & \longmapsto & C[a,b] \\ & f & \longmapsto & \dfrac{1}{\lambda}(J(f) - g) \end{array}$$

   Es tracta de comprovar en quines condicions Φ_g és k-contractiu amb $k < 1$ per poder assegurar l'existència d'un únic punt fix i, en conseqüència, d'una única solució per l'equació integral de l'enunciat.
   Per això, calculem

   $$\begin{aligned} |\Phi_g(f_1)(x) - \Phi_g(f_2)(x)| &= \frac{1}{|\lambda|}|J(f_1)(x) - g(x) - J(f_2)(x) + g(x)| \\ &= \frac{1}{|\lambda|}|J(f_1 - f_2)(x)| \leq \frac{1}{|\lambda|}\int_a^x |f_1(t) - f_2(t)|\ dt \\ &\leq \frac{1}{|\lambda|}|x - a| \sup_{t\in[a,b]} |f_1(t) - f_2(t)| \leq \frac{b-a}{|\lambda|} \sup_{t\in[a,b]} |f_1(t) - f_2(t)| \end{aligned}$$

   Per tant, si $k = \frac{b-a}{|\lambda|}$, Φ_g és k-contractiu amb $k < 1$ si $|\lambda| > (b-a)$.

(c) Si I denota l'operador identitat sobre $C[a,b]$, deduïu que per $|\lambda| > (b-a)$, $J - \lambda I$ és bijectiu sobre $C[a,b]$.
Solució: Per l'apartat anterior, donada $g \in C([a,b])$ i $b - a > |\lambda|$, existeix una única $f \in C([a,b])$ tal que

$$\frac{1}{\lambda}\left(J(f)(x) - g(x)\right) = f(x)$$

O, equivalentment, $J(f)(x) - \lambda f(x) = (J - \lambda I)(f)(x) = g(x)$ té solució única $f \in C[a,b]$, donada $g \in C[a,b]$, és a dir, l'operador $J - \lambda I$ és bijectiu.

10. L'objectiu del problema és el càlcul de la sèrie definida per

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{\Gamma(n+\alpha)}{n! \quad \Gamma(\alpha)} x^n \qquad \alpha > 0$$

(a) trobeu els intervals de convergència puntual i uniforme.
Indicació: Per a estudiar la convergència puntual a ± 1, separeu els casos $\alpha \geq 1$ i $\alpha < 1$. Podeu usar on calgui la fórmula d'Stirling:

$$\lim_{x \mapsto \infty} \frac{\Gamma(x+1)}{x^x e^{-x}\sqrt{2\pi x}} = 1$$

Solució: Calculem en primer lloc el radi de convergència ρ de la sèrie de potències amb terme general $a_n = \frac{\Gamma(n+\alpha)}{n! \quad \Gamma(\alpha)}$. Utilitzant l'equació funcional $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \; x \geq 0$ i la fórmula d'Stirling, deduïm que

$$\frac{1}{\rho} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+\alpha}{n+1} = 1.$$

Una vegada hem deduït que el radi de convergència és 1, estudiem la convergència puntual als extrems $x = \pm 1$.
Per això, observem que $\lim_n a_n = 0$ si i només si $\alpha < 1$. Efectivament, de nou utilitzant la fórmula de Stirling,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\Gamma(n+\alpha)}{n! \quad \Gamma(\alpha)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+\alpha-1)^{1-\alpha}} = \begin{cases} \infty & \text{si } \alpha > 1 \\ 1 & \text{si } \alpha = 1 \\ 0 & \text{si } \alpha < 1 \end{cases};$$

Per tant, si $\alpha \geq 1$ no hi ha convergència puntual a $x = \pm 1$ donat que el terme general no convergeix cap a zero. Si $\alpha < 1$, degut al criteri de Leibnitz hi ha convergència puntual a $x = -1$ donat que es tracta d'una sèrie alternada amb terme general decreixent i convergent cap a zero. En canvi si $x = 1$ el terme general de la sèrie verifica, $a_n = O(\frac{1}{n^{1-\alpha}})$ i, per tant, aquesta divergeix.
En conseqüència podem concloure que si $\alpha < 1$, hi ha convergència uniforme dins qualsevol compacte de $[-1,1)$ i si $\alpha > 1$ la convergència és uniforme dins qualsevol compacte de $(-1,1)$.

(b) Demostreu, justificant tots els passos, la igualtat

$$(1-x)f'(x) = \alpha f(x)$$

Solució:

Dins el domini de convergència podem derivar terme a terme la sèrie de potències i obtenir

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{n\geq 0} \frac{\Gamma(n+\alpha)}{n!\ \ \Gamma(\alpha)} n x^{n-1} = \sum_{n\geq 1} \frac{\Gamma(n+\alpha)}{(n-1)!\ \ \Gamma(\alpha)} x^{n-1} \\ &= \sum_{n\geq 0} \frac{\Gamma(n+1+\alpha)}{n!\ \ \Gamma(\alpha)} x^{n} = \sum_{n\geq 0} \frac{\Gamma(n+\alpha)}{n!\ \ \Gamma(\alpha)} (n+\alpha) x^{n} \\ &= \sum_{n\geq 0} \frac{\Gamma(n+\alpha)}{n!\ \ \Gamma(\alpha)} n x^{n} + \alpha \sum_{n\geq 0} \frac{\Gamma(n+\alpha)}{n!\ \ \Gamma(\alpha)} x^{n} = x\ f'(x) + \alpha f(x). \end{aligned}$$

(c) Reescriviu el resultat anterior com

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\alpha}{1-x}$$

i integreu per a trobar la funció $f(x)$.

Solució: Integrem a ambdós costats de la igualtat de l'enunciat i obtenim per certa constant k

$$\log f(x) = -\alpha \log(1-x) + k$$

, és a dir,

$$f(x) = C(1-x)^{-\alpha}$$

Com que $f(0) = 1$ com pot deduir-se de l'expressió de f en sèrie de potències deduïm que $C = 1$ i, per tant, per tot x del domini de convergència,

$$f(x) = \frac{1}{(1-x)^{\alpha}}$$

11. (a) Siguin $n \in \mathbb{N}$ i $M > 0$ fixats. Demostreu que la família de funcions $\{f_{a_i}\}$ donada per

$$f_{\{a_i\}}(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j\ x^j$$

amb $|a_i| \leq M,\ \forall i = 1, \cdots, n,\ x \in [a,b]$, és equicontínua.

Solució:

En efecte, fixat $\epsilon > 0$ podem trobar $\delta > 0$ tal que per tot $x, y \in [a,b]$ amb $|x-y| < \delta$, $|x^i - y^i| < \frac{\epsilon}{Mn}$ qualsevol que sigui $i \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq n$. D'aquesta forma

$$|f_{\{a_i\}}(x) - f_{\{a_i\}}(y)| \leq \sum_{j=0}^{n} |a_j|\ |x^j - y^j| \leq M \sum_{j=1}^{n} |x^j - y^j| \leq Mn \frac{\epsilon}{Mn} = \epsilon.$$

La qual cosa prova l'equicontinuïtat de la família $\{f_{a_i}\}$.

(b) Demostreu que la successió donada per

$$f_n(x) = \int_0^1 \frac{x - (s-1)^n}{s+1}\ ds$$

té una parcial uniformement convergent a $[a,b]$.

Solució:

Segons el teorema d'Ascoli-Arzelà, per provar l'existència d'una parcial uniformement convergent dins l'interval $[a,b]$ cal comprovar l'acotació puntual de la successió $\{f_n(x)\}_n$ i l'equicontinuïtat de la família $\{f_n\}_n$.

L'acotació puntual per tot $x \in [a, b]$ és conseqüència de l'estimació

$$|f_n(x)| = \int_0^1 \frac{|x - (s-1)^n|}{s+1}\, ds \leq |x| \int_0^1 \frac{1|}{s+1}\, ds + \int_0^1 \frac{|s-1|^n}{s+1}\, ds \leq (|x|+1)\log 2.$$

Per comprovar l'equicontinuïtat de la família $\{f_n(x)\}_n$ veiem que si $x, y \in [a, b]$,

$$|f_n(x) - f_n(y)| = \left| \int_0^1 \frac{x-y}{s+1}\, ds \right| \leq |x-y| \int_0^1 \frac{ds}{s+1} = \log 2 |x-y|.$$

Per tant, donat $\epsilon > 0$ n'hi ha prou en prendre $\delta = \frac{\epsilon}{\log 2}$, per tal d'obtenir per $|x - y| \leq \delta$ i tot $n \in \mathbb{N}$

$$|f_n(x) - f_n(y)| \leq \epsilon.$$

12. Sigui $C_0([1, +\infty))$ l'àlgebra de les funcions contínues $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ tals que $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ existeix i és finit.

   (a) Proveu que si $f \in C_0([1, +\infty))$ llavors f és fitada.

   Solució:

   Sigui $f \in C_0([1, +\infty))$, donat que existeix $\lim_{x\to\infty} f(x) = M$, donat $\epsilon > 0$, existeix M_0 tal que si $x \geq M_0$, $|f(x) - M| \leq \epsilon$. Per tant, si $x \geq M_0$

$$|f(x)| \leq M + |f(x) - M| \leq M + \epsilon.$$

   D'altra banda, si $x \in [1, M_0]$, donat que f és continua, per tot $x \in [1, M_0]$, $|f(x)| \leq M_1$, per cert $M_1 > 0$. Aleshores, prenent $K = \max(M + \epsilon, M_1)$ obtenim que per tot $x \in [1, \infty)$,

$$|f(x)| \leq K,$$

   la qual cosa prova que f és fitada.

   (b) Demostreu que si $f \in C_0([1, +\infty))$, donat $\epsilon > 0$ existeix $p \in \mathbb{R}[x]$ tal que

$$\sup_{x\in[1,+\infty)} \left| f(x) - p\left(\frac{1}{x}\right) \right| < \epsilon$$

   Solució:

   Donada $f \in C_0([1, +\infty))$, definim $g \in C[0, 1]$ com

$$g(x) = \begin{cases} f(1/x) & \text{si } x \in (0, 1], \\ \lim_{x\to+\infty} f(x) & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

   Aleshores, degut al Teorema d'Stone-Weierstrass, donat $\epsilon > 0$, existeix un polinomi $p(x)$ de forma que

$$\sup_{x\in[0,1]} |g(x) - p(x)| < \epsilon.$$

   Per tant, de la definició de g, és obvi que

$$\sup_{x\in[1,+\infty)} \left| f(x) - p\left(\frac{1}{x}\right) \right| = \sup_{x\in[0,1]} |g(x) - p(x)| < \epsilon.$$

13. Siguin $0 \leq K < +\infty$, $a, b \in \mathbb{R}$.

(a) Demostreu que la família

$$F = \left\{ f \in C^1([a,b]) | \int_a^b |f'(x)|^2 \, dx \leq K \right\}$$

és equicontínua.

Solució: Considerem $f \in F$, aleshores, donat $x, y \in [a,b]$ i tenint en compte la desigualtat de Cauchy-Schwartz podem escriure

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= \left| \int_y^x f'(t) \, dt \right| \leq \int_y^x |f'(t)| \, dt \\ &\leq \left(\int_y^x |f'(t)|^2 \, dt \right)^{1/2} |x-y|^{1/2} \leq \left(\int_a^b |f'(t)|^2 \, dt \right)^{1/2} |x-y|^{1/2} \\ &\leq K|x-y|^{1/2}. \end{aligned}$$

Aleshores, per tota $f \in F$, donat $\epsilon > 0$ podem prendre $\delta = (\epsilon/K)^2$, de forma que si $|x - y| < \delta$

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x-y|^{1/2} \leq K\delta^{1/2} = \epsilon.$$

la qual cosa prova l'equicontinuïtat de la família F.

(b) Trobeu un exemple de família no equicontínua del tipus

$$F = \left\{ f \in C^1([a,b]) | \int_a^b |f(x)|^2 \, dx \leq K \right\}$$

Solució: Per trobar un contraexemple de família de funcions contínues amb les condicions anteriors i no equicontínua només cal prendre una successió de funcions fitada uniformement i no equicontínua, com és $\{f_n(x)\}_n = \{\sin nx\}_{n \in \mathbb{N}}$ a $[0, \pi]$.
Clarament, per tot $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n \in F = \left\{ f \in C^1([0,\pi]) | \int_0^\pi |f(x)|^2 \, dx \leq \pi \right\}$$

Per veure la no equicontinuïtat de la successió $\{f_n\}_n$ cal observar que donat $\delta > 0$, podem trobar $n > 1/\delta$ tal que $|\cos n\xi| \geq 1/2$ on $\xi \in [x,y]$. Aleshores utilitzant el teorema del valor mitjà tenim que si $|x - y| = \delta/2$

$$|\sin nx - \sin ny| = n|\cos n\xi||x-y| = n|\cos n\xi|\frac{\delta}{2} > \frac{1}{\delta}\frac{1}{2}\frac{\delta}{2} = \frac{1}{4}.$$

La qual cosa entraria en contradicció amb l'equicontinuïtat.

14. (a) Demostreu que per a tot $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{ne^n}{e^n - 1} \int_0^1 e^{-nx} \, x^m \, dx = 0.$$

Solució: Procedim per inducció sobre m. Si $m = 1$, integrant per parts obtenim

$$\int_0^1 e^{-nx} \, x \, dx = \frac{1 - e^{-n}(n+1)}{n^2}.$$

Per tant,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{ne^n}{e^n-1}\int_0^1 e^{-nx}\ x\ dx = \lim_{n\to\infty} \frac{ne^n}{e^n-1}\frac{1-e^{-n}(n+1)}{n^2} = 0.$$

Per poder deduir la propietat que es vol demostrar pel natural m a partir de la corresponent per $m-1$, observem que si notem per

$$I_m = \int_0^1 e^{-nx}\ x^m\ dx,$$

de nou, aplicant integració per parts obtenim que per $m \geq 2$

$$I_m = \frac{m}{n} I_{m-1} - \frac{e^{-n}}{n}.$$

Per tant, aplicant l'hipòtesi d'inducció

$$\lim_{n\to\infty} \frac{ne^n}{e^n-1} I_m = \lim_{n\to\infty} \frac{ne^n}{e^n-1}\frac{m}{n} I_{m-1} - \frac{1}{e^n-1} = m \lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{e^n-1} I_{m-1} = 0.$$

(b) Demostreu que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{ne^n}{e^n-1}\int_0^1 e^{-nx}\ p(x)\ dx = p(0)$$

per a tot polinomi $p \in \mathbb{R}[x]$.

Solució: Sigui $p(x) = \sum_{m=0}^{k} a_m x^m$, per veure que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{ne^n}{e^n-1}\int_0^1 e^{-nx}\ p(x)\ dx = p(0) = a_0,$$

només cal observar que tenint en compte la linealitat en la integració i en el pas al límit, per l'apartat anterior tot es redueix a observar que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{ne^n}{e^n-1}\int_0^1 e^{-nx}\ dx = 1.$$

(c) Si $f \in C([0,1])$, calculeu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{ne^n}{e^n-1}\int_0^1 e^{-nx}\ f(x)\ dx.$$

Solució: Si $f \in C([0,1])$, el teorema d'Stone-Weierstrass ens assegura l'aproximació de f per una successió de polinomis. És a dir, donat $\epsilon > 0$, podem trobar $p \in \mathbb{R}[x]$ tal que

$$\sup_{x\in[0,1]} |f(x) - p(x)| < \epsilon.$$

Aquest fet, ens permet conjecturar que per tota $f \in C[0,1]$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{ne^n}{e^n-1}\int_0^1 e^{-nx}\ f(x)\ dx = f(0). \tag{3}$$

Per alleugerir la notació, escrivim per tota funció g definida sobre $[0,1]$

$$J_n[g] = \frac{ne^n}{e^n-1}\int_0^1 e^{-nx}\ g(x)\ dx.$$

Veiem doncs (3). Com que $J_n[1] = 1$, i J_n és lineal podem escriure

$$\begin{aligned} |J_n[f] - f(0)| &= |J_n[f - f(0)]| = |J_n[f - p + p - p(0) + p(0) - f(0)]| \\ &\leq J_n[|f - p|] + |J_n[p(x) - p(0)]| + J_n[|p(0) - f(0)|] \\ &= (I) + (II) + (III). \end{aligned}$$

Per fitar (I), utilitzem el teorema d'Stone-Weierstrass prenent p tal que

$$\sup_{x\in[0,1]} |f(x) - p(x)| < \epsilon/3.$$

Llavors

$$(I) = J_n[|f - p|] \leq \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - p(x)| J_n[1] < \epsilon/3.$$

Per l'apartat anterior tenim que existeix n_0 tal que si $n \geq n_0$

$$(II) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{ne^n}{e^n - 1} \int_0^1 e^{-nx} \; |p(x) - p(0)| \; dx \leq \epsilon/3.$$

I, per últim,

$$(III) = |f(0) - p(0)| J_n[1] = |f(0) - p(0)| \leq \epsilon/3.$$

Aquestes tres fites permeten assegurar que per cada $\epsilon > 0$, existeix n_0 tal que si $n \geq n_0$

$$|J_n[f] - f(0)| \leq \epsilon,$$

la qual cosa implica (3).

15. Calculeu, justificant tots els passos,

$$\int_0^1 \frac{\log x}{1-x} \mathrm{d}x$$

Solució: Desenvolupant $\frac{1}{1-x}$ en sèrie de potències es té:

$$\int_0^1 \frac{\log x}{1-x} \mathrm{d}x = \int_0^1 \sum_{n\geq 0} x^n \log x \mathrm{d}x = -\int_0^1 \sum_{n\geq 0} x^n(-\log x)\mathrm{d}x$$

Obtenim la integral d'una sèrie de funcions positives i mesurables. Per tant, pel teorema de la convergència monòtona, podem intercanviar la integral amb la sèrie:

$$-\sum_{n\geq 0} \int_0^1 -x^n \log x \mathrm{d}x$$

Integrant per parts dóna:

$$-\sum_{n\geq 0} \left. \frac{-x^{n+1} \log x}{n+1} \right|_0^1 + \int_0^1 \frac{x^n}{n+1} \mathrm{d}x = -\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(n+1)^2}$$

I aquesta sèrie val

$$-\frac{\pi^2}{6}$$

segons un problema de sèries de Fourier que veurem en el següent tema (on s'aplica Parseval al desenvolupament de Fourier de $f(x) = x$).

16. Sigui $(X, \mathcal{X}, \mu)$ un espai de mesura i sigui (E_n) una successió de conjunts amb $E_n \in \mathcal{X}$. Definim
$$G = \{x \text{ que pertanyen com a mínim a } m \text{ conjunts } E_n\}\,.$$
Veieu que $G \in \mathcal{X}$ i
$$m\mu(G) \leq \sum_{n\geq 1} \mu(E_n).$$

Solució: G és mesurable ja que es pot escriure com
$$G = \{x | \sum_{n\geq 1} 1_{E_n}(x) \geq m\}$$
i la funció $\sum_{n\geq 1} 1_{E_n}(x)$ és mesurable per ser suma de funcions indicadores.

D'altra banda, per a tot $x \in G$, $\sum_{n\geq 1} 1_{E_n}(x) \geq m$. Així,
$$\mu(G) = \int_G 1 d\mu \leq \int_G \frac{\sum_{n\geq 1} 1_{E_n}}{m} d\mu \leq \frac{1}{m} \int_X \sum_{n\geq 1} 1_{E_n} d\mu$$
Aplicant ara el teorema de la convergència monòtona,
$$\mu(G) \leq \sum_{n\geq 1} \frac{1}{m} \int_X 1_{E_n} d\mu = \frac{1}{m} \sum_{n\geq 1} \mu(E_n)$$
com es pretenia demostrar.

17. Es defineixen els nombres
$$a_0 = 0, \quad a_n = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$$
i els intervals $F_n = (a_{n-1}, a_n]$ per a $n \geq 1$. Sigui f la funció que val n a F_n. Calculeu
$$\int_0^1 f(x)\, \mathrm{d}x$$

Solució: La funció f es pot escriure
$$f(x) = \sum_{n\geq 1} n 1_{F_n}(x)$$
D'aquesta manera,
$$\int_0^1 f(x) \mathrm{d}x = \int_0^1 \sum_{n\geq 1} n 1_{F_n}(x) \mathrm{d}x$$
que és la integral d'una sèrie de funcions positives i mesurables. Per tant, estem en condiciones d'aplicar el teorema de la convergència monòtona, la qual cosa ens permetrà intercanviar la integral amb la sèrie:
$$\sum_{n\geq 1} n \int_0^1 1_{F_n}(x) \mathrm{d}x = \sum_{n\geq 1} n \int_{F_n} \mathrm{d}x = \sum_{n\geq 1} n\mu(F_n)$$

D'altra banda, la mesura dels F_n no és res més que la longitud de l'interval,

$$\mu(F_n) = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

Finalment, recordem del primer tema que

$$\sum_{n\geq 1} nx^{n-1} = \left(\sum_{n\geq 1} x^n\right)' = \left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Ajuntant tots aquests resultats tenim

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \sum_{n\geq 1} n\mu(F_n) = \frac{1}{3}\sum_{n\geq 1} n\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{3}\frac{1}{\left(1-\frac{2}{3}\right)^2} = 3$$

18. Donada $f \in L^1(R)$, demostreu que per a tot $\varepsilon > 0$ existeix $\delta > 0$ tal que si $\mu(E) < \delta$, aleshores

$$\int_E f d\mu < \varepsilon$$

Solució: Considerem els conjunts

$$A_n = \{x \in \mathbb{R} \mid\mid f(x) \mid\leq n\}$$

És clar que $\mathbb{R} = \cup_{n\geq 1} A_n$ i que $\lim_{n\mapsto\infty} \mid f(x) \mid 1_{A_n}(x) =\mid f(x) \mid$. A més a més, aquesta darrera successió és una successió de funcions positives i mesurables. Per tant, aplicant el teorema de la convergència monòtona:

$$\int_{\mathbb{R}} \mid f(x) \mid \mathrm{d}\mu = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\mapsto\infty} \mid f(x) \mid 1_{A_n}(x)\mathrm{d}\mu = \lim_{n\mapsto\infty} \int_{\mathbb{R}} \mid f(x) \mid 1_{A_n}(x)\mathrm{d}\mu = \lim_{n\mapsto\infty} \int_{A_n} \mid f(x) \mid \mathrm{d}\mu$$

Per tant, existeix N tal que si $n \geq N$,

$$\int_{\mathbb{R}-A_n} \mid f(x) \mid \mathrm{d}\mu < \varepsilon/2$$

Aleshores,

$$\int_E \mid f(x) \mid \mathrm{d}\mu = \int_{E\cap A_n} \mid f(x) \mid \mathrm{d}\mu + \int_{E-A_n} \mid f(x) \mid \mathrm{d}\mu \leq \int_{E\cap A_n} n\mathrm{d}\mu + \int_{\mathbb{R}-A_n} \mid f(x) \mid \mathrm{d}\mu \leq n\mu(E) + \varepsilon/2$$

I tot això és menor que ε si es pren $\delta = \varepsilon/2n$.

19. Considereu una funció mesurable

$$f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$$

Es defineix el conjunt $E = \{x \in [0,1] \mid f(x) \in \mathbb{Z}\}$.

(a) Demostreu que E és mesurable.

(b) Demostreu que també és mesurable la funció

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R} & \longmapsto & [0,1] \\ & x & \longmapsto & \mid \cos(\pi f(x)) \mid^m \end{array}$$

per a tot m natural.

(c) Calculeu

$$\lim_{m\mapsto\infty}\int_0^1 |\cos(\pi f(x))|^m\, dx$$

Solució: a)

$$E=\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}\left(\{f^{-1}[n,\infty)\}\cap\{f^{-1}(-\infty,n]\}\right)$$

és mesurable per ser reunió numerable de mesurables.

b) $g(x)$ és mesurable per ser composició de mesurable i contínua.

c) $g(x)\leq 1\in L(0,1)$. Per tant, es pot aplicar el teorema de convergència dominada i s'obté

$$L=\lim_{m\mapsto\infty}\int_0^1 |\cos(\pi f(x))|^m\, dx=\int_0^1\lim_{m\mapsto\infty}|\cos(\pi f(x))|^m\, dx$$

Observeu que $g(x)<1$ a $[0,1]\cap E^c$, i $g(x)=1$ a E. Per tant,

$$L=\int_E dx=\mu(E)$$

20. L'objectiu d'aquest problema és demostrar que no existeix element neutre per al producte de convolució de les funcions integrables Lebesgue. El procediment serà suposar que existeix un element neutre $\delta(x)$ i arribar a contradicció. Sigui doncs $\delta(x)$ tal que

$$\delta*f=f*\delta=f\quad\forall f\in L_1$$

(a) Veieu que

$$\int_E\delta(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}1 & \text{si}\quad 0\in E\\ 0 & \text{si}\quad 0\notin E\end{cases}$$

per a tot E de mesura finita.

(b) Considereu $E'=\{x\in R\mid\delta(x)>0\}$. Demostreu que

$$\int_{E'}\delta(x)\mathrm{d}x=0$$

Indicació: Escriviu $E'=\lim_{n\to\infty}E_n$, on $E_n=\{x\in R\mid 0<\|x\|\leq n,\ \delta(x)>0\}$.

(c) Anàlogament, veieu que si $F'=\{x\in R\mid\delta(x)<0\}$, aleshores

$$\int_{F'}\delta(x)\mathrm{d}x=0$$

(d) D'aquí es pot concloure que $\delta(x)=0$ gairebé arreu. Arribeu a contradicció usant aquest fet.

Solució: a)

$$\int_E\delta(x)\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}}\delta(x)1_E(x)\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}}\delta(x)1_{-E}(-x)\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}}\delta(x)1_{-E}(0-x)\mathrm{d}x$$

Per definició de convolució, aquest darrer terme és igual a

$$(\delta*1_{-E})(0)=1_{-E}(0)=1_E(0)$$

on s'ha emprat la hipòtesi que $\delta*f=f$.

b) Podem escriure, com diu la indicació

$$E' = \cup_{n\geq 1} E_n = \cup_{n\geq 1}\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < \| x \| \leq n,\ \delta(x) > 0\}$$

Aleshores,

$$\int_{E'} \delta(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \delta(x) 1_{E'}(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \delta(x) \lim_{n\mapsto\infty} 1_{E_n}(x)\mathrm{d}x$$

Arribats a aquest punt, observem que

$$\delta(x)1_{E_n}(x) \leq \delta(x) \in L^1$$

Per tant estem en condicions d'aplicar el teorema de la convergència dominada:

$$\int_{\mathbb{R}} \delta(x) \lim_{n\mapsto\infty} 1_{E_n}(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\mapsto\infty} \int_{\mathbb{R}} \delta(x)1_{E_n}(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\mapsto\infty} \int_{E_n} \delta(x)\mathrm{d}x = 0$$

per aplicació del primer apartat.

c) Aquest apartat es deixa com a exercici al lector.

d) La recta real la podem descomposar en la unió disjunta $\mathbb{R} = E' \cup F' \cup \{x \in \mathbb{R} \mid \delta(x) = 0\}$. Aleshores,

$$\int_{\mathbb{R}} \delta(x)\mathrm{d}x = \int_{E'} \delta(x)\mathrm{d}x + \int_{F'} \delta(x)\mathrm{d}x + \int_{\delta=0} \delta(x)\mathrm{d}x = 0$$

ja que les dues primeres integrals són zero com s'ha demostrat en els dos apartats anteriors i la tercera integral és trivialment zero. D'aquesta manera, $\delta(x)$ és zero gairebé arreu. Per tant, si $\delta(x)$ és l'element neutre del producte de convolució,

$$f(x) = (\delta * f)(x) = \int_{\mathbb{R}} \delta(t) f(x-t) = 0$$

la qual cosa és una contradicció. Aquesta contradicció prové de suposar que existeix una funció $\delta(x)$ integrable que és l'element neutre del producte de convolució. En conseqüència, no existeix una funció satisfent aquestes hipòtesi.

21. (a) Demostreu que la funció

$$g(x) = \frac{\log(1+x^a)}{x}$$

és una funció fitada per a $x \in (0,\infty)$ i $a \geq 1$.

(b) Sigui (X,μ) un espai de mesura i f una funció mesurable i positiva definida sobre X tal que $\int_X f\ \mathrm{d}\mu = \|f\|_1 < \infty$. Provi's que

$$\lim_{n\to\infty} \int_X n \log\left[1 + \left(\frac{f(x)}{n}\right)^\alpha\right]\ \mathrm{d}\mu(x) = \begin{cases} \|f\|_1 & \text{si } \alpha = 1\ ; \\ 0 & \text{si } \alpha > 1 \end{cases}$$

Solució: a) Aplicant la regla de l'Hôppital,

$$\lim_{n\to 0} \frac{\log(1+x^a)}{x} = \lim_{n\to 0} \frac{ax^{a-1}}{1+x^a} < \infty$$

i existeix (és 0 o 1 depenent de a). De manera similar,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(1+x^a)}{x} = \lim_{n\to\infty} \frac{ax^{a-1}}{1+x^a} = 0$$

Sabem, per un problema del tema 2, que les funcions contínues amb límit finit a l'infinit són un subconjunt de les funcions fitades. Per tant, $g(x)$ és fitada.

b) Sigui $g(x) \leq K$ la fita de la funció $g(x)$. Això és equivalent a dir

$$\log(1+x^a) \leq Kx$$

Així,

$$n \log \left[1 + \left(\frac{f(x)}{n}\right)^\alpha\right] \leq nK\frac{f(x)}{n} = Kf(x) \in L(X)$$

Per tant, podem aplicar el teorema de convergència dominada:

$$\lim_{n\to\infty} \int_X n \log \left[1 + \left(\frac{f(x)}{n}\right)^\alpha\right] \, \mathrm{d}\mu(x) = \int_X \lim_{n\to\infty} n \log \left[1 + \left(\frac{f(x)}{n}\right)^\alpha\right] \, \mathrm{d}\mu(x)$$

Aplicant l'Hôppital (respecte la variable n) un altre cop s'obté

$$\int_X \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{-\alpha f(x)^\alpha n^{-\alpha-1}}{(n^\alpha + f(x)^\alpha)n^{-\alpha}}}{\frac{-1}{n^2}} \mathrm{d}\mu(x) =$$

$$= \int_X \lim_{n\to\infty} \frac{f(x)^\alpha n^2}{n^{\alpha+1} + nf(x)^\alpha} \mathrm{d}\mu(x) = \begin{cases} \|f\|_1 & \text{si } \alpha = 1 \\ 0 & \text{si } \alpha > 1 \end{cases}$$

22. Sabent que per a tot $r \in \mathbb{R}$

$$\int_0^\infty e^{-ax} \cos rx \, \mathrm{d}x = \frac{a}{a^2 + r^2}, \quad a > 0,$$

calculeu

$$I = \int_0^\infty \frac{e^{-bx} - e^{-cx}}{x} \cos rx \, \mathrm{d}x \quad b, c > 0.$$

Solució: Es tracta de demostrar que podem derivar sota el signe integral puix que

$$\frac{d}{db}\left(\frac{e^{-bx} - e^{-cx}}{x} \cos rx\right) = -e^{-bx} \cos rx$$

És clar que per $b = c$ la funció és integrable (és la funció zero). I la derivada està fitada per e^{-bx}, que és integrable si $b > 0$. Per tant podem derivar sota el signe integral:

$$\frac{dI}{db} = -\int_0^\infty e^{-bx} \cos rx \, \mathrm{d}x = -\frac{b}{b^2 + r^2}$$

la qual cosa implica

$$I = -\frac{1}{2}\log(b^2 + r^2) + K$$

Cal determinar la constant K. Com sabem que $I = 0$ quan $b = c$,

$$K = \frac{1}{2}\log(c^2 + r^2)$$

En definitiva,

$$I = \frac{1}{2}\log\frac{c^2 + r^2}{b^2 + r^2}$$

23. Sigui

$$f(\alpha, x) = \frac{\arctan(\alpha x)}{x(1+x^2)},$$

on $-\pi/2 < \arctan x < \pi/2$, i

$$F(\alpha) = \int_0^{+\infty} f(\alpha, x)\ dx.$$

(a) Demostreu que f i $\dfrac{\partial f}{\partial \alpha}$ són de $L_1((0, \infty))$ per a tot $\alpha \geq 0$.

(b) Calculeu $F(\alpha)$ per a $\alpha \geq 0$.

Solució: a) Comencem amb $f(\alpha, x)$.

$$\int_0^{+\infty} f(\alpha, x)\ dx = \int_0^1 f(\alpha, x)\ dx + \int_1^{+\infty} f(\alpha, x)\ dx$$

La primera integral existeix per ser la integral d'una funció contínua en un interval fitat. A l'interval $[1, \infty)$,

$$f(\alpha, x) \leq \frac{\pi}{2(1+x^2)} \in L^1(1, \infty)$$

Per tant, $f(\alpha, x) \in L^1(0, \infty)$.

Estudiem ara la funció $\dfrac{\partial f}{\partial \alpha}$.

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = \frac{1}{1+x^2}\frac{1}{1+(\alpha x)^2} \leq \frac{1}{1+x^2} \in L^1(0, \infty)$$

Per tant, no només la funció és integrable, sinó que a més a més estem en condicions d'aplicar el teorema de derivació sota el signe integral, la qual cosa farem a l'apartat següent.

b) Derivant sota el signe integral tenim

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha} = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\frac{1}{1+(\alpha x)^2} dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1-\alpha^2}\left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{\alpha^2}{1+(\alpha x)^2}\right) dx$$

Calculant les integrals tenim

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{1-\alpha^2} - \frac{\alpha}{1-\alpha^2}\right) = \frac{\pi}{2}\frac{1}{1+\alpha}$$

Integrant ara respecte la variable α tenim

$$F(\alpha) = \frac{\pi}{2}\log(1+\alpha) + C$$

I la constant C la determinem a partir del fet que $C = F(0) = 0$. En definitiva,

$$F(\alpha) = \frac{\pi}{2}\log(1+\alpha)$$

24. Sigui $p > a, b > 0$. Calculeu

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{x} e^{-px}\ dx.$$

Solució: Definim

$$F(a, b, p) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{x} e^{-px}\ dx$$

Pretenem derivar sota el signe integral respecte el paràmetre p ja que la derivada en qüestió és fàcil de calcular. Considerem la funció de dins de la integral:

$$f(a,b,p,x) = \frac{e^{ax} - e^{bx}}{x} e^{-px}$$

Cal veure que aquesta funció és integrable per cert p_0 i que la seva derivada està dominada per una funció integrable.

La funció $f(a,b,p,x)$ és integrable a l'interval $[0,1]$ car és una funció contínua en un interval fitat. A l'interval $(1,\infty)$,

$$| f(a,b,p,x) | \leq | (e^{ax} - e^{bx})e^{-px} |$$

que és una funció integrable. Per tant, $f(a,b,p,x)$ és integrable a l'interval $[0,1]$.

D'altra banda,

$$| \frac{\partial f}{\partial p} | = | (e^{bx} - e^{ax})e^{-px} | \leq 2e^{-(p-m)x} |$$

on m és el màxim entre a i b. Podem escriure

$$2e^{-(p-m)x} \leq 2e^{-(p-m)x/2}e^{-(p-m)x/2} \leq M2e^{-(p-m)x/2} \in L(0,\infty)$$

on $M = max\{e^{-(p-m)x/2}\}$. Aquesta funció és fitada perquè té límit finit a l'infinit (veure tema 2). Així doncs, estem en condicions d'aplicar el teorema de derivació sota el signe integral:

$$\frac{\partial}{\partial p}\int_0^{+\infty} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{x} e^{-px} \, \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} (e^{bx} - e^{ax})e^{-px} = \frac{1}{p-b} - \frac{1}{p-a}$$

Per tant, integrant respecte la variable p,

$$F(a,b,p) = \log\frac{p-b}{p-a} + c$$

I determinem que la constant $c = 0$ fent el cas

$$c = F(a,a,p) = 0$$

En definitiva

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{x} e^{-px} \, \mathrm{d}x = \log\frac{p-b}{p-a}$$

25. Donada $f \in L^p(E) \cap L^q(E)$, demostreu que $f \in L^r(E)$, sempre que $1 \leq p \leq r \leq q < \infty$. Indicació: Essent $p \leq r \leq q$, es té $r = ap + (1-a)q$, amb $a \in [0,1]$.

Solució: Per veure que $f \in L^r(E)$, cal demostrar que

$$\int_E |f|^r < \infty$$

$$\int_E |f|^r = \int_E |f|^{ap}|f|^{(1-a)q}$$

I ara s'aplica Hölder amb els nombres conjugats $1/a$ i $1/(1-a)$ per tal d'eliminar a i $1-a$ dels exponents de la funció. Caldrà comprovar prèviament que $|f|^{ap}$ i $|f|^{(1-a)q}$ pertanyen a $L^{\frac{1}{a}}(E)$ i $L^{\frac{1}{1-a}}(E)$ respectivament. Efectivament,

$$\int_E |f|^{(ap)\frac{1}{a}} = \int_E |f|^p < \infty$$

per hipòtesi. Anàlogament,

$$\int_E |f|^{((1-a)q)\frac{1}{1-a}} = \int_E |f|^q < \infty$$

Un cop comprovat això, apliquem Hölder:

$$\int_E |f|^{ap}|f|^{(1-a)q} \leq \left(\int_E |f|^{ap\frac{1}{a}}\right)^a \left(\int_E |f|^{(1-a)q\frac{1}{1-a}}\right)^{1-a} = \|f\|_p^{ap}\|f\|_q^{(1-a)q} < \infty$$

El que implica que $f \in L^r(E)$.

26. (a) Demostreu que si $p < 1/2$, $\frac{1}{(x(1-x))^p} \in L^1(0,1)$. Indicació: Cauchy-Schwartz.

    (b) Si $1 \leq p_i < \infty$ $(i = 1,2,3)$ son tals que $\sum_{i=1}^{3} p_i^{-1} = 1$, proveu que per f_1, f_2, f_3 funcions mesurables,

    $$\int_{\mathbb{R}} |f_1(x)f_2(x)f_3(x)|\ dx \leq \|f_1\|_{p_1}\|f_2\|_{p_2}\|f_3\|_{p_3}$$

    (c) Si $p < 1/3$, demostreu que $\frac{1}{(x|1-x|(2-x))^p} \in L^1(0,2)$.

    Solució: a) La desigualtat de Cauchy-Schwarz implica que

    $$\int_0^1 \frac{1}{x^p(1-x)^p}\ dx \leq \left(\int_0^1 \frac{1}{x^{2p}}\ dx\right)^{1/2} \left(\int_0^1 \frac{1}{(1-x)^{2p}}\ dx\right)^{1/2}.$$

    Les dues integrals anteriors són iguals degut al canvi de variable $1 - x = y$, i observem que $x^{-2p} \in L^1(0,1) \Leftrightarrow 2p < 1 \Leftrightarrow p < 1/2$.

    b) La hipòtesi de l'enunciat implica que els exponents p_1 i $\dfrac{p_2p_3}{p_2+p_3}$ són conjugats, per tant, la desigualtat de Hölder implica

    $$\int_{\mathbb{R}} |f_1(x)f_2(x)f_3(x)|\ dx \leq \|f_1\|_{p_1}\|f_2f_3\|_{\frac{p_2p_3}{p_2+p_3}}$$

    De nou aplicant Hölder amb exponents conjugats $\frac{p_2+p_3}{p_2}$ i $\frac{p_2+p_3}{p_3}$ obtenim

    $$\|f_2f_3\|_{\frac{p_2p_3}{p_2+p_3}} \leq \|f_2\|_{p_2}\|f_3\|_{p_3}$$

    c) Es tracta d'aplicar l'apartat b) al cas $p_1 = p_2 = p_3 = 3$ i tenir en compte que $x^{-3p} \in L^1(0,2) \Leftrightarrow 3p < 1 \Leftrightarrow p < 1/3$.

27. Donada $f \in L_2(E)$ i $F_n \subset E$ tals que $\lim_{n\to\infty} \mu(F_n) = 0$, proveu que

    $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\mu(F_n)}} \int_{F_n} |f|\mathrm{d}\mu = 0.$$

    Solució: Aplicant la desigualtat de Cauchy-Schwarz

    $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\mu(F_n)}} \int_{F_n} |f|\mathrm{d}\mu \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\mu(F_n)}} \left(\int_{F_n} |f|^2\mathrm{d}\mu\right)^{1/2} \left(\int_{F_n} \mathrm{d}\mu\right)^{1/2} = \left(\int_{F_n} |f|^2\mathrm{d}\mu\right)^{1/2}$$

    Observem que $|f|^2 \in L^1(E)$ i que com $\lim_{n\to\infty} \mu(F_n) = 0$,

    $$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que } \mu(F_n) < \delta$$

Aleshores, aplicat el problema 4 d'aquest mateix tema tenim

$$\int_{F_n} |f|^2 \mathrm{d}\mu < \varepsilon$$

Fent tendir ε cap a zero, aconseguim el resultat demanat.

28. (a) Trobeu la sèrie de Fourier de la funció $f(x) = x$ definida a l'interval $[-\pi, \pi]$ i extesa per periodicitat.

(b) Calculeu la suma

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$$

(c) Calculeu la suma

$$\sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

Solució:

a) Com que la funció és senar, els coeficients de Fourier del cosinus (a_n) són nuls. Calculem els coeficients del sinus:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin(nx)\mathrm{d}x = (-1)^{n+1}\frac{2}{n}$$

Per tant,

$$SFT(f(x) = x) = \sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\frac{2}{n}\sin(nx)$$

b) Notem que la relació que hi ha entre els coeficients trobats a l'apartat anterior i la suma que se'ns demana és de tipus quadràtic. En conseqüència, sembla raonable aplicar la igualtat de Parseval:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\mathrm{d}x = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n\geq 1} a_n^2 + b_n^2$$

En el nostre cas

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\mathrm{d}x = \sum_{n\geq 1}\frac{4}{n^2}$$

Fent càlculs

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2} = \frac{1}{4}\frac{2}{3}\pi^2 = \frac{\pi^2}{6}$$

c) Observem que ara la relació que hi ha entre la sèrie demanada i els coeficients de Fourier obtinguts és del mateix ordre. Per tant tractarem d'usar el teorema de Dirichlet. Si substituïm la sèrie obinguda en el punt de continuitat $x = \pi/2$:

$$\frac{\pi}{2} = 2\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(\frac{\pi}{2}) = 2\sum_{k\geq 0}\frac{(-1)^k}{2k+1}$$

En conseqüència, la sèrie demanada és

$$\sum_{k\geq 0}\frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$$

29. Considereu l'extensió periòdica de $f(x) = |x|$ definida a $[-\pi, \pi]$.

   (a) Trobeu la sèrie de Fourier associada a f, $SFT(f)$. Discutiu la convergència uniforme i en mitjana quadràtica de l'esmentada sèrie vers f.

   (b) Calculeu la suma de la sèrie
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

   (c) Justifiqueu que és possible derivar la sèrie $SFT(f)$ terme a terme per obtenir la sèrie de Fourier de f' i calculeu-la.

   (d) Deduïu de l'apartat anterior que
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)} = \frac{\pi}{4}.$$

Solució:

a) Donat que f és parella, els seus coeficients de Fourier en sinus s'anul.len, $b_n = 0$. En quant als coeficients de Fourier en cosinus, apliquem integració per parts i observem que si $n \geq 1$,

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \ \cos nx \ dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \ \cos nx \ dx = \frac{2}{\pi n^2}[(-1)^n - 1].$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \ dx = \pi.$$

Per tant,
$$SFT(f)(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}.$$

Donat que l'extensió periòdica de f és continua i f és de $L^2(-\pi, \pi)$ hi ha convergència uniforme i en mitjana quadràtica, respectivament, de la sèrie de Fourier cap a f.

b) Aplicant la convergència puntual de la sèrie en el punt $x = 0$, obtenim,

$$0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}.$$

Del que deduïm
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

c) Donat que l'extensió periòdica de f és continua i f' existeix i és continua tots els punts de $(-\pi, \pi)$ excepte a $x = 0$, és possible derivar la sèrie de Fourier de f per tal d'obtenir la sèrie de Fourier de la derivada, obtenint que

$$SFT(f')(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)x}{(2k+1)}.$$

d) El resultat s'obte aplicant, a partir de la sèrie anterior, el teorema de Dirichlet al punt de continuïtat de f', $x = \pi/2$.

30. Sigui a tal que $0 < a < \pi$. Demostreu les següents identitats:

$$\frac{\pi - a}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin na}{n}, \qquad \frac{\pi - 2a}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2na}{n},$$

$$\frac{a}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin na}{n}, \qquad \frac{a(\pi - a)}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 na}{n^2}.$$

Indicació: considereu la funció

$$f(x) = \begin{cases} 1 & |x| < a \\ 0 & \pi \geq |x| > a \end{cases}$$

Solució:

Un ràpit càlcul ens diu que la sèrie de Fourier de la funció indicada és

$$SFT(f(x)) = \frac{a}{\pi} + \sum_{n \geq 1} \frac{2\sin(na)}{n\pi} \cos(nx)$$

Aleshores, aplicant Dirichlet en els punts $x = 0$, $x = a$ i $x = \pi$ s'obté, respectivament:

Per $x = 0$,

$$\frac{a}{\pi} + \sum_{n \geq 1} \frac{2\sin(na)}{n\pi} = 1$$

d'on treiem

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(na)}{n} = \left(1 - \frac{a}{\pi}\right) \frac{\pi}{2} = \frac{\pi - a}{2}$$

Per $x = a$,

$$\frac{a}{\pi} + \sum_{n \geq 1} \frac{\sin(2na)}{n\pi} = \frac{a}{\pi} + \sum_{n \geq 1} \frac{2\sin(na)}{n\pi} \cos(na) = \frac{1}{2}$$

d'on surt

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(2na)}{n} = \left(\frac{1}{2} - \frac{a}{\pi}\right) \pi = \frac{\pi - 2a}{2}$$

Per $x = \pi$,

$$\frac{a}{\pi} + \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n 2\sin(na)}{n\pi} = 0$$

d'on extraiem la tercera igualtat

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1} \sin(na)}{n} = \frac{a}{2}$$

Finalment, aplicant la igualtat de Parseval sobre els coeficients de Fourier obtinguts i la funció $f(x)$:

$$2\frac{a^2}{\pi^2} + \sum_{n\geq 1} \frac{4\sin^2(na)}{n^2\pi^2} = \frac{2a}{\pi}$$

la qual cosa ens porta a

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\sin^2(na)}{n^2} = \left(\frac{2a}{\pi} - 2\frac{a^2}{\pi^2}\right)\frac{\pi^2}{4} = \frac{a\pi - a^2}{2}$$

31. Considereu f la funció 2π-periòdica que per $x \in (-\pi, \pi)$ val $f(x) = e^x$

   (a) Trobeu la sèrie de Fourier associada a f. Hi ha convergència de la sèrie de Fourier vers f en $L^2(-\pi, \pi)$?. Discutiu la convergència puntual.

   (b) Deduïu que
   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1} = \frac{\pi}{e^\pi - e^{-\pi}} - \frac{1}{2}$$

   (c) Apliqueu la identitat de Parseval per a calcular
   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$$

Solució: a)Calculem els coeficients de Fourier complexos c_n per tot $n \in \mathbb{Z}$

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x e^{-inx}\,dx = \frac{e^\pi - e^{-\pi}}{2\pi}\frac{(-1)^n}{(1-in)}$$

De la qual cosa obtenim que la sèrie de Fourier en forma exponencial és

$$SFE(f)(x) = \frac{e^\pi - e^{-\pi}}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{(-1)^n}{(1-in)} e^{inx}$$

La convergència de la sèrie cap a la funció és en mitjana quadràtica donat que $f \in L_2(-\pi, \pi)$. D'altra banda el teorema de Dirichlet assegura la convergència puntual de la sèrie cap a $f(x)$ en tot punt de continuïtat és a dir per $x \in (-\pi, \pi)$, i la convergència cap a $\frac{e^\pi + e^{-\pi}}{2}$ en els punts $x = \pi$ i $x = -\pi$ on hi ha discontinuïtats de salt.

b) S'obté aplicant el teorema de Dirichlet a la sèrie de Fourier en el punt $x = 0$.

c) La identitat de Parseval assegura:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2.$$

Per tant, tenint en compte que per tot $n \in \mathbb{Z}$

$$|c_n|^2 = \frac{(e^\pi - e^{-\pi})^2}{4\pi^2(1+n^2)}, \quad \text{i que} \quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{2x}\,dx = \frac{e^{2\pi} - e^{-2\pi}}{4\pi}.$$

S'obté que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} = \frac{\pi}{2}\frac{e^\pi + e^{-\pi}}{e^\pi - e^{-\pi}} - \frac{1}{2}.$$

32. Sigui $f(x) = \sin \mu x$, $x \in [-\pi, \pi]$, estesa periòdicament amb periode 2π.

    (a) Calculeu la sèrie de Fourier trigonomètrica de $f(x)$ si $\mu \notin \mathbb{Z}$. Què passa si $\mu \in \mathbb{Z}$?

    (b) Demostreu que $\forall x \in \mathbb{R}$ es té, si $\mu \notin \mathbb{Z}$,

$$\left|\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{n}{\mu^2 - n^2} \sin nx\right| \leq \frac{\pi}{2} \left|\operatorname{cosec} \mu\pi\right|.$$

    (c) Demostreu que, si $\mu \notin \mathbb{Z}$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{2n+1}{(2n+1)^2 - \mu^2} = \frac{\pi}{4} \sec \mu \frac{\pi}{2}.$$

Solució: Si $\mu \in \mathbb{Z}$ la sèrie de Fourier trigonomètrica té un únic terme:

$$SFT(f)(x) = \text{signe}(\mu) \sin |\mu| x.$$

Suposem $\mu \notin \mathbb{Z}$. Per la simetria de la funció periòdica que s'obté en aquest cas, tots els coeficients en cosinus són nuls, $a_n = 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Un càlcul trivial proporciona

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin \mu x \sin nx \; \mathrm{d}x = \frac{2 \sin \mu\pi}{\pi} (-1)^n \frac{n}{\mu^2 - n^2},$$

de manera que, en aquest cas,

$$SFT(f)(x) = \frac{2 \sin \mu\pi}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{n}{\mu^2 - n^2} \sin nx.$$

La desigualtat que es demanà s'obté del fet que la sèrie convergeix a $\sin \mu x$ en tots els punts, excepte en els punts de discontinuïtat, $x = (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, on convergeix a zero. En qualsevol cas, el valor absolut de la sèrie convergeix a valors més petits o iguals que 1.

La identitat s'obté emprant la convergència puntual en $x = \pi/2$.

33. Donada $f \in \mathcal{C}^{k+1}$ i 2π periòdica, i a_n, b_n els coeficients de la seva sèrie de Fourier trigonomètrica, quan valen els següents límits?

$$\lim_{n\to\infty} a_n n^k, \qquad \lim_{n\to\infty} b_n n^k$$

Solució: Si la sèrie de Fourier de la funció $f(x)$ és

$$SFT(f)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

atès que la funció és derivable amb continuitat $k+1$ vegades, la podem derivar terme a terme, tot obtenint una nova sèrie on els coeficients de Fourier seran

$$a_n n^k \quad b_n n^k$$

llevat de signe. Aquests, pel teorema de derivació de les sèries de Fourier, són els coeficients de Fourier de la funció $f^{(k)}(x)$. $f^{(k)}(x)$ és contínua i, per tant, integrable. Així, podem aplicar el lema de Riemann-Lebesgue, que assegura que els coeficients de Fourier d'una funció integrable tendeixen cap a zero quan n tendeix a infinit. En resum:

$$\lim_{n\to\infty} a_n n^k = 0, \quad \lim_{n\to\infty} b_n n^k = 0$$

34. Sigui

$$f(x) = \frac{\pi}{4}\left(\frac{\pi}{2} - |x|\right), \; x \in (-\pi, \pi),$$

estesa 2π-periòdicament.

(a) Calculeu la seva sèrie de Fourier trigonomètrica, $SFT(f)$.

(b) Discutiu la convergència en mitjana quadràtica, puntual, uniforme i absoluta de $SFT(f)$, i la seva derivació terme a terme.

(c) Emprant $SFT(f)$ i/o la seva derivada, avalueu

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k-1}.$$

Solució:

a) Estem davant d'una funció parella. Així doncs, el coeficients de Fourier del sinus (b_n) són nuls. Calculem els coeficients del cosinus. Per a $n \geq 1$,

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \left(\frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi}{4}x\right)\cos(nx)\mathrm{d}x = \frac{1}{2n^2}(1-(-1)^n)$$

O, en altres paraules,

$$a_{2k} = 0 \quad a_{2k-1} = \frac{1}{(2k-1)^2} \quad k \geq 1$$

I també és un càlcul immediat veure que $a_0 = 0$. Escrivim la sèrie de Fourier:

$$SFT(f(x)) = \sum_{k\geq 1} \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}$$

b) Le sèrie convergeix en L^2 vers la funció per tal com la funció és de quadrat integrable.

Com $f(\pi) = f(-\pi)$, la funció és contínua a tota la recta real. Per tant, pel teorema de Dirichlet, la sèrie de Fourier convergeix puntualment vers $f(x)$.

La sèrie és uniformement convergent perquè podem aplicar el criteri M de Weierstrass (veure el primer tema):

$$\left|\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}\right| \leq \frac{1}{(2k-1)^2}$$

i

$$\sum_{k\geq 1} \frac{1}{(2k-1)^2} < \infty$$

Finalment, la derivada de $f(x)$ és contínua a trossos. Així que podem aplicar el teorema de derivació de les sèries de Fourier i assegurar que

$$SFT(f'(x)) = (SFT(f(x))'$$

c) La primera sèrie la sumem usant la sèrie de Fourier de la funció $f(x)$ i avaluant-la en el punt $x = 0$. Pel teorema de Dirichlet tenim

$$\frac{\pi^2}{8} = f(0) = SFT(f)(0) = \sum_{k\geq 1} \frac{1}{(2k-1)^2}$$

Per tant,

$$\sum_{k\geq 2} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8} - 1$$

La segona sèrie, com té termes quàrtics, l'obtindrem per Parseval:

$$\sum_{k\geq 1} \frac{1}{(2k-1)^4} = \sum_{k\geq 1} a_k^2 = \frac{1}{\pi} \int f^2(x) \mathrm{d}x = \frac{\pi^4}{96}$$

I la tercera l'aconseguirem sumar gràcies al teorema de derivació de les sèries de Fourier:

$$-\sum_{k\geq 1} \frac{\sin(2k-1)x}{(2k-1)} = (SFT(f(x))' = SFT(f'(x))$$

I aplicant Dirichlet en el punt $x = \pi/2$ obtenim:

$$\sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^k}{(2k-1)} = \frac{f'(\frac{\pi}{2}^+) + f'(\frac{\pi}{2}^-)}{2} = -\frac{\pi}{4}$$

35. Considereu la funció 2π-periòdica

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si} \quad x \in [0,\pi] \\ -2(x-2\pi) & \text{si} \quad x \in [\pi, 2\pi] \end{cases}$$

(a) Calculeu la seva sèrie de Fourier trigonomètrica.

(b) Calculeu

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}.$$

(c) Demostreu que

$$\frac{8}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} \sin(2n+1)t = \begin{cases} -t^2 + \pi t & \text{si } t \in [0,\pi], \\ t^2 - 3\pi t + 2\pi^2 & \text{si } t \in [\pi, 2\pi]. \end{cases}$$

(d) Calculeu

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}.$$

Solució:

a) La funció és parella (si considerem l'interval $[-\pi, \pi]$. Això implica que els coeficients de Fourier del sinus (b_n) són nuls. Pel que fa als coeficients en cosinus,

$$a_{2k} = 0 \quad a_{2k-1} = \frac{-8}{\pi(2k-1)^2} \quad \forall k \geq 1 \quad \text{i} \quad a_0 = 2\pi$$

Per tant, la sèrie de Fourier de $f(x)$ és:

$$SFT(f(x)) = \pi - \sum_{k\geq 1} \frac{8}{\pi(2k-1)^2}\cos(2k-1)x$$

b) La primera sèrie la calcularem mitjançant Dirichlet, mentre que pel càlcul de la segona emprarem Parseval. Anem per la primera. Considerem el punt $x = \pi$ ja que ens cal un punt on el cosinus sempre valgui el mateix. Com la funció és contínua arreu, per Dirichlet tenim

$$f(x) = SFT(f(x)) \quad \forall x$$

En concret, en el punt $x = \pi$,

$$2\pi = \pi - 8\sum_{k\geq 1} \frac{-1}{\pi(2k-1)^2}$$

I, per tant,

$$\sum_{k\geq 0} \frac{1}{(2k+1)^2} = \sum_{k\geq 1} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

D'altra banda, aplicant Parseval

$$2\pi^2 + \sum_{k\geq 1} \frac{64}{\pi^2(2k-1)^4} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f^2(x)\mathrm{d}x = \frac{8}{3}\pi^2$$

D'on obtenim

$$\sum_{k\geq 0} \frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$$

c) La sèrie obtinguda al primer apartat és una sèrie uniformement convergent (això es pot veure utilitzant, per exemple, el criteri M de Weierstrass). En conseqüència, la podem integrar terme a terme i això continuarà essent igual a la integral de la funció $f(x)$:

$$\int_0^t SFT(f(x))\mathrm{d}x = \int_0^t f(x)\mathrm{d}x$$

Fent càlculs tenim

$$\pi t - \frac{8}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^3}\sin(2n+1)t = \begin{cases} t^2 & \text{si } t \in [0,\pi], \\ -t^2 + 4\pi t - 2\pi^2 & \text{si } t \in [\pi, 2\pi] \end{cases}$$

d'on es dedueix el resultat directament.

d) Avaluant el resultat de l'apartat anterior en el punt $t = \pi/2$,

$$\frac{8}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = \frac{\pi^2}{4}$$

d'on treiem

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$$