Grau de Matemàtiques, FME

Programació Matemàtica

Tema 1 : Programació Lineal

Algorisme del símplex

Jordi Castro, F.-Javier Heredia, Josep Homs

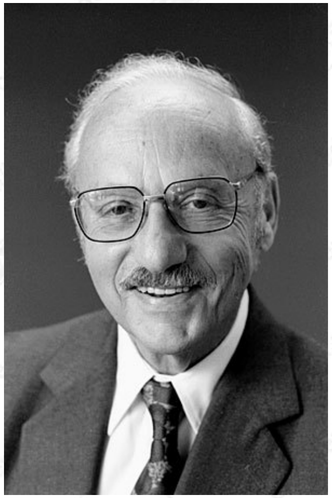
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Departament d'Estadística
i Investigació Operativa

Algorisme del símplex

1. *Introducció i propietats geomètriques.*
2. **L'algorisme del símplex primal.**
   - Orígens històrics i justificació.
   - Desenvolupament de l'Algorisme del Símplex Primal (ASP)
     - Direccions bàsiques i canvi de base.
     - Condicions d'optimalitat.
     - Identificació de problemes il·limitats.
     - Algorisme del símplex primal.
   - Convergència i degeneració.
   - Càlcul de solucions bàsiques factibles inicials: fase I del símplex.
   - Complexitat algorísmica.

Bibliografia: Cap. 2 - 5 "*Introduction to Linear Optimization*", D. Bertsimas, N. Tsitsiklis

L'algorisme del símplex : orígens



- **Leonid Kantorovich 1939, Unió Soviètica.**
- **George B. Dantzig, 1947 (data desclassificació), USAF.**

  "A certain wide class of practical problems appears to be just beyond the range of modern computing machinery. These problems occur in everyday life; they run the gamut from some very simple situations that confront an individual to those connected with the national economy as a whole. Typically, these problems involve a complex of different activities in which one wishes to know which activities to emphasize in order to carry out desired objectives under known limitations (Dantzig 1948)."

- **Primer problema no trivial de LP documentat: problema de la dieta (G. Stigler, 1945, Premi Nobel Economia 1982)**
  - $n = 77$ variables, $m = 9$ constriccions. Nou persones treballant conjuntament amb calculadores electròniques: 120 homes-mes de treball.
- **Actualment (CPLEX)**:
  - $n =$ 1.369.624, $m =$ 3.520.024, $t < 10\text{min}$ (TFM-MEIO, http://hdl.handle.net/2099.1/13914)
- ***SIAM News, Volume 33, Number 4: The Best of the 20th Century: Editors Name Top 10 Algorithms*** (http://www.siam.org/pdf/news/637.pdf)

  "In terms of widespread application, Dantzig's algorithm is one of the most successful of all time: Linear programming dominates the world of industry, where economic survival depends on the ability to optimize within budgetary and other constraints."

L'algorisme del símplex: justificació (1/2)

Recordem:

Teorema 2 (optimalitat dels pt.extrems)

Teorema 3 (equivalència pt.extrems - SBF)

$$\Downarrow$$

Corol·lari 3.1: optimalitat de les SBF

Sigui $(PL)\ min\{c'x : x \in P\}$, P *políedre. Suposem que* P *conté algun punt extrem i que existeix una solució òptima.*

Llavors ***existeix una solució òptima que és una SBF de*** $\boldsymbol{P_e}$***.***

- **Idea 1:** trobar **TOTES** les SB i quedar-nos amb la millor de entre les SBF → **INVIABLE**
  - **Per a $(PL)_e$ amb $n = 100, m = 50$…**
    - #ops/sec i7: $70Gflops = 7.0 \times 10^{10} flops$.
    - # ops: $x_B = B^{-1}b \sim o(m^2) \approx 50^2 = 2500$.
    - # SBF $\leq \binom{100}{50} = 100!/(50!)^2 \approx 10^{29}$.
    - # ops. total $\approx$ #SBF·#ops$\approx 10^{29} \cdot 2500 = 2.5 \times 10^{32}$.
    - Temps total = #ops. total / (#ops/sec i7) $= 2.5 \times 10^{32} / 7.0 \times 10^{10} = 3.5 \times 10^{21} sec$.

… temps total $\approx 10^{14} anys >$ edat univers $\approx 1.35 \times 10^{10}\ anys$.

L'algorisme del símplex: justificació (2/2)

Recordem:

Teorema 2 (optimalitat dels pt.extrems)	**Teorema 3** (equivalència pt.extrems - SBF)

$\Downarrow$

Corol·lari 3.1: optimalitat de les SBF.

Sigui $(PL)\ min\{c'x : x \in P\}$, P *políedre. Suposem que* P *conté algun punt extrem i que existeix una solució òptima.*

*Llavors **existeix una solució òptima que és una SBF de*** $\boldsymbol{P_e}$.

- **Idea 1:** trobar **TOTES** les SB i quedar-nos amb la millor de entre les SBF → **INVIABLE**
- **Idea 2:** **l'algorisme del símplex**:

  Trobem **UNA** SBF x i passem a un altre SBF y tal que $c'y < c'x$.

  Repetim fins a trobar l'òptima.

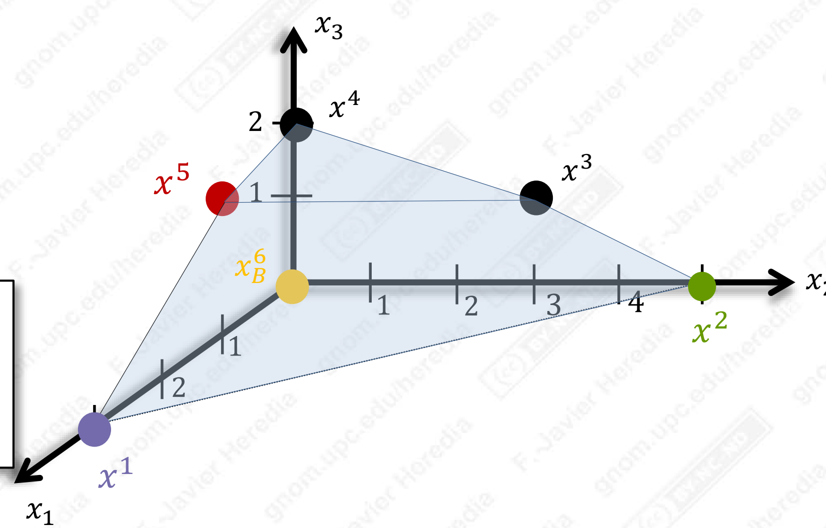
- **Qüestions a resoldre**:

1. Com trobem una SBF? → **Fase I del símplex**.
2. Com canviem d'una SBF a un altre millor? → **direccions bàsiques factibles de descens**
3. Com identifiquem la SBF òptima? → **condicions d'optimalitat**.
4. I si el problema no té solució? → **problemes il·limitats**

DBF: canvi entre SBF adjacents.

- Considerem el problema:

$$(PL)\begin{cases}\min \quad z = & 5x_1 + 3x_2 + 9x_3 \\ \text{s.a.:} & x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 & = 6 \\ & 5x_1 + 3x_2 + 6x_3 + x_5 & = 15 \\ & x \geq 0 \end{cases}$$



Def. SBF adjacents: dues SBF són adjacents si es distingueixen només per una variable bàsica.

- Sigui la SBF x^1 i les seves SBF adjacents:

$$x^1: \mathcal{B} = \{1,4\}, x_B^1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 6 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}, z^1 = c_B' x_B = 15$$

$$x^2: \mathcal{B} = \{2,4\}, x_B^2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 6 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}, z^2 = c_B' x_B = 15$$

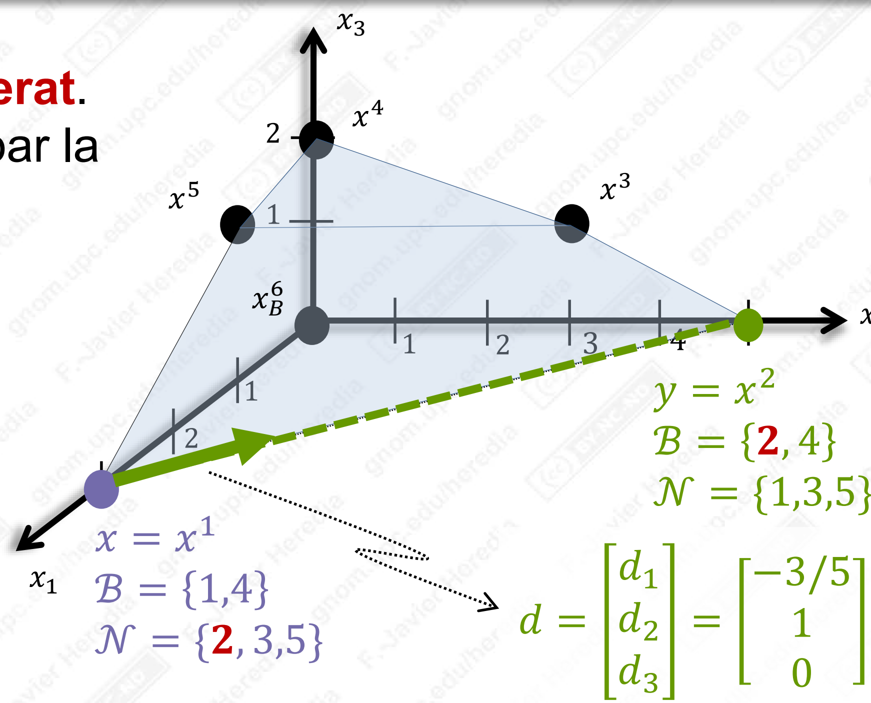
$$x^5: \mathcal{B} = \{1,3\}, x_B^5 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 6 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{5}{3} \end{bmatrix}, z^5 = c_B' x_B = 20$$

$$x^6: \mathcal{B} = \{4,5\}, x_B^6 = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 6 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 15 \end{bmatrix}, z^6 = c_B' x_B = 0$$

Es desenvoluparà el procediment per pasar de la SBF x^1 a qualsevol de les seves SBF adjacents.

Direcció factible i direcció bàsica

- Sigui P_e, **no buit, rang complet, no degenerat**. Donades les SBF adjacents x i y, volem trobar la **direcció d** $\in \mathbb{R}^n$ **i l'escalar θ^*** $\in \mathbb{R}^+$ t.q. :
  $y = x + \theta^* d$ ($x = x^1$ i $y = x^2$ a l'exemple)



Def. direcció factible: $d \in \mathbb{R}^n$ factible sobre $x \in P_e$ si $\exists \theta \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{\theta > 0}$, tal que :

$$x + \theta d \in P_e$$

Def. direcció factible: direcció bàsica (DB):

Sigui P_e no buit, rang comp. La direcció bàsica (DB) sobre la SBF $x \in P_e$ associada a

$q \in \mathcal{N}$ és la dirección $d = \begin{bmatrix} d_B \\ d_N \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ t.q $\boxed{d_{N(i)} \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 \text{ si } N(i) = q \\ 0 \text{ si } N(i) \neq q \end{cases}, i = 1, \dots, n-m}$ i

d_B és tal que $A(x + \theta d) = b, \forall \theta \in \mathbb{R}$: $\boxed{d_B = -B^{-1} A_q}$

DB: factibilitat i longitud de de pas θ^* (1/2)

- La DB $d \in \mathbb{R}^n$ és factible sobre la SBF $x \in P_e$

  si $\exists \theta \in \mathbb{R}^+$ tal que : $y = x + \theta d \in P_e$

- **Def: longitud de pas:**

  $$\boldsymbol{\theta^* \overset{\text{def}}{=} \max\{\theta > 0 \mid y = x + \theta d \in P_e\}}$$

  $$y \in P_e = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \overbrace{Ax = b}^{(1)}, \overbrace{x \geq 0}^{(2)}\} :$$

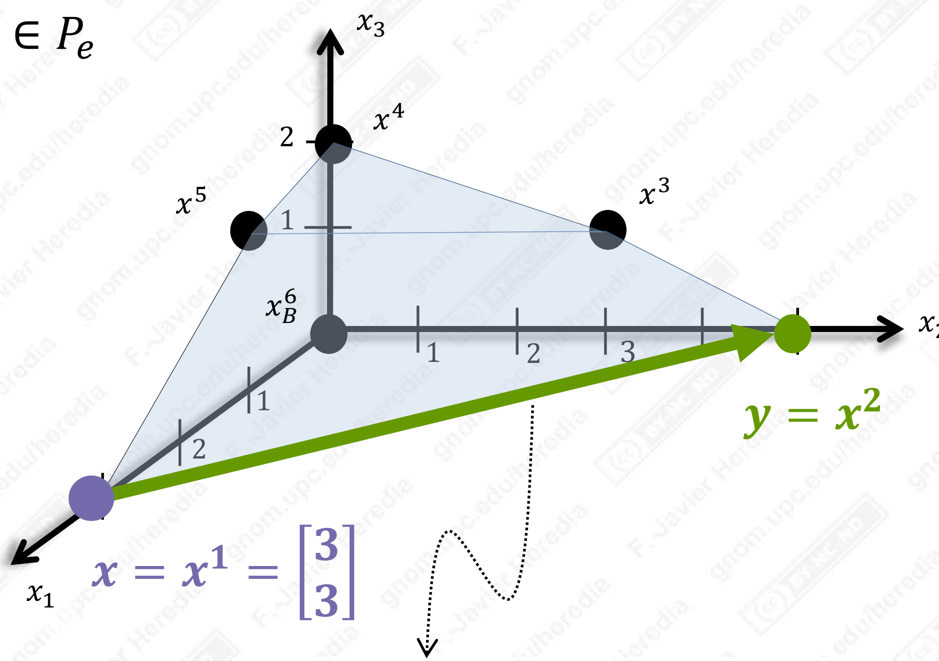
  $(1) : Ay = A(x + \theta d) = b$, **cert $\forall\theta$**

  $(2) : y = x + \theta d \geq 0$, **depén de θ**:

  - $y_{N(i)} = \begin{Bmatrix} 0 & N(i) \neq q \\ \theta & N(i) = q \end{Bmatrix} \geq 0, \forall \theta > 0.$

  - $y_B = \overbrace{x_B}^{>0} + \theta \overbrace{d_B}^{?} \geq [0]$, llavors $y_B \geq 0 \Leftrightarrow \theta \leq \theta^*$ amb :

$$\boxed{\theta^* = \max\{\theta \geq 0 \mid x + \theta d \geq 0\} = \min_{\{i=1,\dots,m \mid d_{B(i)}<0\}} \left\{-x_{B(i)}/d_{B(i)}\right\} = -x_{B(p)}/d_{B(p)}}$$



$$\theta^* d = 5 \begin{bmatrix} -3/5 \\ -2/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Direcció Bàsica: factibilitat (2/2)

Proposició 5 : factibilitat de les DB, cas P_e no degenerat.

Sigui P_e *no buit, de rang complet,* ***no degenerat*** *i sigui* d *DB sobre* x *SBF. Llavors:*

i. ***d és factible.***

ii. *Si* $\boldsymbol{d_B} \ngeq \boldsymbol{0} \Rightarrow \exists \boldsymbol{\theta}^* = \max\{\theta > 0 \mid x + \theta d \geq 0\}$.

iii. *Si* $\boldsymbol{d_B} \geq \boldsymbol{0} \Rightarrow \nexists \boldsymbol{\theta}^* = \max\{\theta > 0 \mid x + \theta d \geq 0\}$.

Demo: immediata, a partir de les definicions de d i θ^*.

Conseqüències:

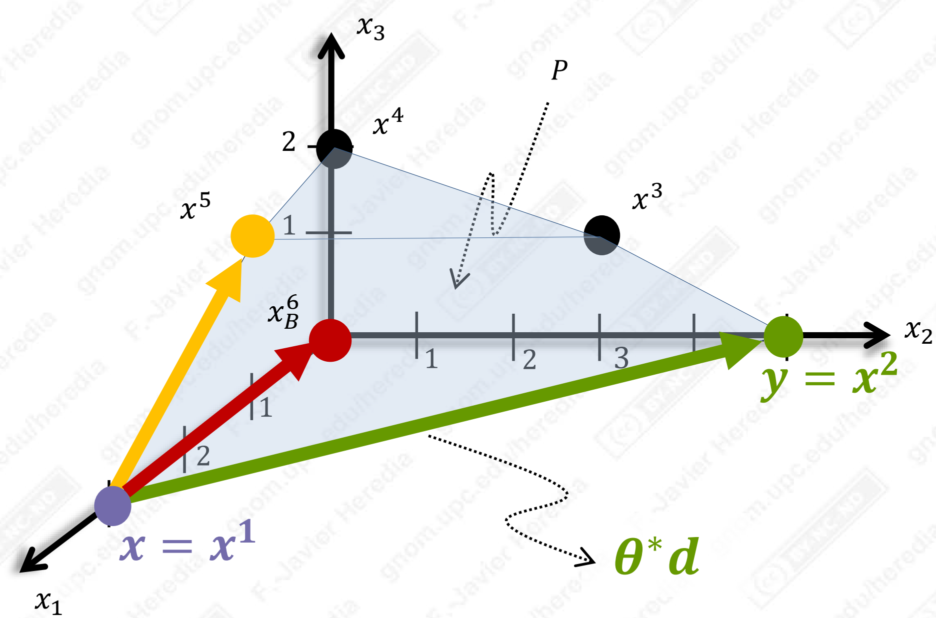
- Si P_e és no degenerat totes les DB seran factibles (**Exercicis 21, 22**).
- Si P_e és degenerat alguna DB pot ser infactible (**Exercici 23**).

DB: actualització de les variables : $y = x + \theta^* d$

- **Obtenció de la nova SBF:**

$$y = x + \theta^* d = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} + \theta^* \begin{bmatrix} d_B \\ d_N \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{array}{c} x_1 \\ x_4 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_5 \end{array} \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} -3/5 \\ -2/5 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{array}{c} y_1 \\ y_4 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_5 \end{array}$$



Observeu el canvi de base

$\mathcal{B}^1 = \{1, 4\} \rightarrow \mathcal{B}^2 = \{2, 4\}$

(SBF adjacents)

Exercici: trobeu d i θ^* sobre $x = x^1$ associat a $y = x^6$ i $y = x^5$

DB: $y = x + \theta^* d$ és SBF

Teorema 4 (Ta. 3.2 B&T): $\boldsymbol{y = x + \theta^* d}$ és solució bàsica factible.

"Sigui x SBF de P_e no buit, de rang complet, no degenerat, i sigui d DB sobre x. Llavors:

i. Si $d_B \ngeq 0$, $y = x + \theta^* d$ amb $\theta^* = \min_{\{i \mid d_{B(i)}<0\}} \left\{-\frac{x_{B(i)}}{d_{B(i)}}\right\}$ és SBF de P_e.

ii. Si $d_B \geq 0$, no existeix cap $\theta > 0$ t.q. $y = x + \theta d$ sigui SBF de P_e."

Demo: pissarra

Corol·lari 4.1: forma en producte de la inversa.

" Sigui x SBF de P_e no buit, de rang complet, no degenerat. Sigui y SBF adjacent a x associada a $q \in \mathcal{N}$ i $\theta^* = -x_{B(p)}/d_{B(p)}$ amb $d_B = -B^{-1}A_q \geq 0$ i matriu bàsica $\bar{B}$. Llavors $\bar{B}^{-1} = \mathrm{H}B^{-1}$ amb

$$\mathrm{H} = \left[e_1 \dots e_{(p-1)} \quad \overset{p}{\overbrace{\eta}} \quad e_{(p+1)} \dots e_m \right], \eta \in \mathbb{R}^n, \eta_i = \begin{cases} -d_{B(i)}/d_{B(p)} & i \neq p \\ -1/d_{B(p)} & i = p \end{cases}."$$

Condicions d'optimalitat: costos reduïts.

- Considerem els tres possibles canvis de base vistos a l'exemple

$$z^1 = 15 \begin{cases} z^2 = 15 = z^1 & \textbf{no millora} \\ z^5 = 20 > z^1 & \textbf{empitjora} \\ z^6 = \ \ 0 < z^1 & \textbf{millora} \end{cases}$$

$$r_2 = c_2 - c_B'B^{-1}A_2 = 3 - [0 \quad 1]\begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix} = 0$$

$$r_3 = c_3 - c_B'B^{-1}A_3 = 9 - [0 \quad 1]\begin{bmatrix}3\\6\end{bmatrix} = 3 > 0$$

$$r_5 = c_5 - c_B'B^{-1}A_5 = 0 - [0 \quad 1]\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = -1 < 0$$

- Donats $\mathcal{B}$ i q es pot saber si $c'y < c'x$? Expressem $c'y$ en funció de $c'x$

$$c'y = c'(x + \theta^* d) = c'x + \theta^* c'd = c'x + \theta^*[c_B' \quad c_N']\begin{bmatrix}d_B\\d_N\end{bmatrix} =$$

$$= c'x + \theta^*\left(c_B'\underbrace{d_B}_{d_B = -B^{-1}A_q} + \underbrace{c_N'd_N}_{c_q}\right) = c'x + \theta^*\underbrace{\left(c_q - c_B'B^{-1}A_q\right)}_{r_q} = c'x + \theta^* r_q$$

- $\boxed{c'y = c'x + \theta^* r_q}$ amb $\boxed{r_q \overset{\text{def}}{=} c_q - c_B'B^{-1}A_q}$ **costos reduïts de la VNB q**

Condicions d'optimalitat: DB de descens

Def. direcció de descens:

La direcció $d \in \mathbb{R}^n$ és de descens sobre $x \in \mathbb{R}^n$ per a la funció $c'x$ si

$$c'(x + \theta d) < c'x, \qquad \theta > 0$$

- Si d és DBF, la condició de descens i el signe dels costos reduïts estan directament relacionats:

Proposició 6: **propietats direccions de descens.**

i. d *és de descens sobre* $x \Leftrightarrow c'd < 0$.

ii. $x \in P_e$ *òptim* $(PL)_e \Leftrightarrow$ *sobre* x *no existeix cap direcció factible de descens.*

iii. *Si* d *és DB sobre* x *SBF associada a* $q \in \mathcal{N}$ *llavors* $r_q = c'd$.

iv. *La DB* d *assoc. a* $q \in \mathcal{N}$ *és de descens* $\Leftrightarrow r_q < 0$.

Demo: immediata.

- Obviament, x **SBF serà òptima sii no existeix cap direcció factible de descens**. Al següent teorema veurem com aquesta condició es pot establir analitzant només el signe dels costos reduïts.

- **Exercici 26**.

Condicions d'optimalitat de SBF

Teorema 5 (Ta. 3.1 B&T): condicions d'optimalitat de SBF P_e qualsevol.

"*Sigui P_e no buit de rang complet, x SBF de P_e i sigui el vector de costos reduïts associat a x, $r' = c_N' - c_B' B^{-1} A_N$. Llavors:*

a) Si $r \geq [0] \Rightarrow x$ és SBF òptima.

b) Si x és SBF òptima i no degenerada $\Rightarrow r \geq [0]$."

Demo.: pissarra

- **Comentari:** Una SBF degenerada, pot ser òptima però tenir alguna DB no factible ($\theta^* = 0$) de descens ($r_q < 0$) (Ex.: $\min\left\{-x_2 \middle| \begin{array}{c} x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_2 \geq 1 \end{array}, x \geq 0\right\}, \mathcal{B} = \{2,3\}$).

Corol·lari 5.1: condicions d'optimalitat de SBF P_e no degenerat.

"*Sigui P_e no buit en forma estàndard **no degenerat**, x SBF de P_e i sigui el vector de costos reduïts associat a x, $r' = c_N' - c_B' B^{-1} A_N$. Llavors*

$$x \text{ és SBF òptima} \Leftrightarrow r \geq [0]."$$

Identificació de problemes (PL) il·limitats

- Si $\boldsymbol{d} \geq \mathbf{0}$ DB associada a la VNB x_q llavors per a tot $\theta > 0$:

$$y = x + \theta d \geq 0 \Rightarrow \boxed{y \in P_e \;\; \forall \theta > 0}\,.$$

- **Conseqüències:**
  i. La longitud de pas θ^* no està definida:

$$\theta^* = \max\{\theta > 0 \mid x + \theta d \geq 0\} = \min_{\{i \in \emptyset\}}\left\{-x_{B(i)}/d_{B(i)}\right\} = \text{"}{+\infty}\text{"} \; (\nexists \theta^*)$$

  ii. Al llarg de la semirecta $x + \theta d, \theta > 0$ (aresta del políedre) no existeix cap SBF.

  iii. **Si $\boldsymbol{r_q < 0}$, $\boldsymbol{z = c'x}$ decreix sense límit al llarg de $\boldsymbol{d}$ ((PL) il·limitat)**:

$$z(x + \theta d) = z(\theta) = c'(x + \theta d) = \overbrace{c'x}^{cte} + \overbrace{\theta r_q}^{<0} \xrightarrow{\theta \to +\infty} -\infty$$

L'algorisme del símplex primal (ASP)

1. Inicialització: sigui $(\mathrm{PL})_e\ min\{c'x \mid x \in P_e\}$, P_e políedre estàndard de rang complet no buit no degenerat i la SBF inicial representada per $\mathcal{B}$, $\mathcal{N}$, x_B i z

2. Identificació de SBF òptima i selecció de la VNB entrant $\boldsymbol{q}$:

2.1 Es calculen els costos reduïts $r' = c'_N - c'_B B^{-1} A_N$

2.2. Si $r' \geq [0]$ llavors la SBF actual és òptima: **STOP**.

Altrament, es selecciona una VNB q amb $r_q < 0$ (VNB entrant).

3. Càlcul de la DB de descens. :

3.1. Es calcula $d_B = -B^{-1} A_q$ (DB de descens associada a x_q)

3.2. Si $d_B \geq [0] \Rightarrow$ DB de descens il·limitat: (PL) il.limitat: **STOP**

4. Càlcul de la passa màxima $\boldsymbol{\theta^*}$ i selecció de la VB sortint $\boldsymbol{B(p)}$:

4.1. Càlcul de la passa màxima al llarg de d_B : $\theta^* = \min_{\{i=1,\dots,m \mid d_{B(i)}<0\}} \left\{ -x_{B(i)} / d_{B(i)} \right\}$

4.2. VB de sortida: $B(p)$ t.q. $\theta^* = -x_{B(p)} / d_{B(p)}$

5. Actualitzacions i canvi de base :

5.1. Actualització de les VB i f.o.: $x_B := x_B + \theta^* d_B$, $x_q := \theta^*$; $z := z + \theta^* r_q$

5.2. S'actualitzen $\mathcal{B} := \mathcal{B} \backslash \{B(p)\} \cup \{q\}$, $\mathcal{N} := \mathcal{N} \backslash \{q\} \cup \{B(p)\}$

6. Anada a 2.

Exercici 27

Exemple algorisme del simplex (1/3)

- **Exercici 28** Trobeu la solució òptima del següent problema (PL) aplicant l'algorisme del símplex, prenent com a SBF. inicial l'associada al punt extrem $x' = [0,6]$.

$$(PL)\begin{cases} \text{min } z= & x_1 & +x_2 & & & \\ \text{s.a.:} & 2x_1 & +x_2 & +x_3 & & = 8 \\ & & x_2 & & +x_4 & = 6 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4 & \geq 0 \end{cases}$$

1. Inicialització : $x = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{cases} \mathcal{B} = \{3,2\}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, x_B = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}, c_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, z = c_B' x_B = 6 \\ \mathcal{N} = \{1,4\}, A_N = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, c_N = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{cases}$$

L'algorisme del simplex primal: exemple (2/3)

- **1a iteració:** $\mathcal{B} = \{3,2\}, \mathcal{N} = \{1,4\}$

2. **Identificació de SBF òptima i selecció de la VNB d'entrada $\boldsymbol{q}$** :

$$r' = c_N' - c_B' B^{-1} A_N = [1 \quad 0] - [0 \quad 1] \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [1 \quad -1] \ngeq 0 \Rightarrow \boxed{\begin{array}{c} q = 4, \\ x_4 \text{ VNB} \\ entrant \end{array}}$$

3. **DBF de descens:** $d_B = -B^{-1} A_4 = -\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \ngeq 0$

4. **Passa màxima $\boldsymbol{\theta^*}$ i VB de sortida $\boldsymbol{p}$**: $\theta^* = \min\limits_{\{i=2\}} \left\{ \dfrac{-x_{B(i)}}{d_{B(i)}} \right\} = 6 \Rightarrow \boxed{\begin{array}{c} p = 2, \\ x_{B(2)} \text{ VB sortint.} \end{array}}$

5. **Actualitzacions i canvi de base :** $q = 4 \leftrightarrow B(p) = 2$

$$x_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \end{bmatrix} := x_B + \theta^* d_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} + 6 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \end{bmatrix}, x_4 := \theta^* = 6\,; z := z + \theta^* r_q = 6 + 6 \times (-1) = 0$$

$$\mathcal{B} := \{3,4\}\,,\, B = B^{-1} := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\,,\; x_B = \begin{bmatrix} x_{B(1)} \\ x_{B(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix}\,,\, c_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{N} := \{1,2\}\,, \quad A_N := \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\,, \quad c_N := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

L'algorisme del simplex primal: exemple (3/3)

- **2a iteració:** $\mathcal{B} = \{3,4\}, \mathcal{N} = \{1,2\}$

2. Identificació de SBF òptima i selecció de la VNB d'entrada q :

$$r' = c_N' - c_B' B^{-1} A_N = [1 \quad 1] - [0 \quad 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [1 \quad 1] \geq 0 \rightarrow \text{òptim}$$

Solució òptima: $\boxed{\mathcal{B}^* = \{3,4\},\ \mathcal{N}^* = \{1,2\}, x_B^* = \ [\,8,6]', z^* = 0}$

Implementació computacional del mètode del símplex: Funció `simplexP_iter.m` (MATLAB)

```
function [vb, vn, xb, z, iout] = simplexP_iter(c, A, b, vb, vn, xb, z)
.
.
.
if( min(r) >= 0)    iout = 1; return; end    % SBF òptima.
.
.
.
if ( min(db) >=0 ) iout = 2; return; end    % Problema il·limitat.
.
.
.
if ( theta == 0)    iout = 3; return; end    % SBF degenerada.
```

Implementació computacional del mètode del símplex: Funció `simplexP.m`

```
%
% Dades del problema
%
c=[-350, -300, 0, 0, 0]' % Costos
A = [ 1,  1, 1, 0, 0;     % Matriu de coeficients
      9,  6, 0, 1, 0;
     12, 16, 0, 0, 1]
b= [ 200, 1566, 2880]'    % Vector de termes independents
%
vb=[3,4,5]                % Conjunt inicial de VB
vn=[1,2]                  % Conjunt inicial de VNB
xb = A(:,vb)^(-1)*b;      % Valor inicial de les variables bàsiques
z = c(vb)'*xb;            % Valor inicial de la funció objectiu
%
iout=0;
niter = 0
while (iout == 0)
    niter = niter + 1;
    [vb, vn, xb, z, iout] = simplexP_iter( c, A, b, vb, vn, xb, z)
end
```

```
vb = 3 4 5
vn = 1 2
xb =
  200
 1566
 2880
z = 0
```

```
Iteració: 1
vb = 3 1 5
vn = 4 2
xb =
   26
  174
  792
z = -60900
iout = 0
```

```
Iteració: 2
vb = 2 1 5
vn = 4 3
xb =
   78.0000
  122.0000
  168.0000
z = -66100
iout = 0
```

```
Iteració: 3
vb = 2 1 5
vn = 4 3
xb =
   78.0000
  122.0000
  168.0000
z = -66100
iout = 1
```

Convergència de l'ASP

Teorema 6: convergència de l'ASP, cas P_e no degenerat.

Sigui $(PL)_e \min\{c'x \mid x \in P_e\}$, P_e *no buit, rang complet,* ***no degenerat***. *Llavors:*

a) l'ASP finalitza en un nombre finit d'iteracions.

b) l'ASP finalitza en un dels següents estats:

i. o bé proporciona una solució bàsica factible òptima

ii. o bé identifica una SBF associada a una direcció d bàsica factible de descens il·limitat (problema il·limitat).

Demo : immediata a partir de l'algorisme (Ta. 3.3 B&T)

- **Com pot afectar la degeneració a la convergència de algorisme del símplex?**

Degeneració: conseqüències.

Proposició 7: conseqüències de la degeneració.

Sigui $(P)_e$ *amb poliedre* $\boldsymbol{P_e}$ *no buit, de rang complet.*

- *Si* $\boldsymbol{P_e}$ ***és no degenerat*** *llavors:*
  - i. *Tota direcció bàsica factible és direcció factible* (Prop. 5).
  - ii. x *SBF és òptima* $\Leftrightarrow r \geq [0]$ (Corol·lari 4.1).
  - iii. *L'algorisme del símplex primal convergeix en un nombre finit d'iteracions* (Teorema 6).
- *Si* $\boldsymbol{P_e}$ **és degenerat** llavors:
  - iv. *La DB pot ser infactible*: si $x_{B(i)} = 0$ i $d_{B(i)} < 0$ llavors $\nexists \theta^*$ ("$\theta^*=0$")$\Rightarrow$ la DBF és infactible ∴ l'ASP no canvia de punt extrem.
  - v. *Si* x *SBF és òptima i degenerada* $\nRightarrow r \geq 0$: poden existir DB infactibles ("$\theta^* = 0$") de descens ($r_q < 0$) ∴ l'ASP pot no identificar x^*.
  - vi. *L'ASP pot no finalitzar en un nombre finit d'iteracions (**CICLAT**).*

Anàlisi factibilitat d DBF $(PL)_e$ general

Sigui $(PL)_e$, $\mathcal{B}$ SBF amb **d DB**

- $\mathcal{B}$ no degenerada $\Rightarrow$ **d factible.**
- $\mathcal{B}$ degenerada
  - $d \geq 0$ $\Rightarrow$ **d factible.**
  - $d \ngeq 0$
    - $\theta^* > 0$ $\Rightarrow$ **d factible.**
    - $\theta^* = 0$ $\Rightarrow$ **d infactible**.

Degeneració: ciclat de l'ASP.

- **Exemple de ciclat de l'algorisme del simplex amb degeneració:**

$$
(PL)_e \begin{cases}
\min\limits_{x\in\mathbb{R}^7} & \left[-\frac{3}{4}, 20, -\frac{1}{2}, 6, 0, 0, 0\right] x \\
s.a.: & \\
& \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -8 & -1 & 9 & 1 & & \\ \frac{1}{2} & -12 & -\frac{1}{2} & 3 & & 1 & \\ & & 1 & & & & 1 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
& x \geq 0
\end{cases}
$$

- **Aplicació de l'ASP amb selecció del cost reduït més negatiu:**

It.	$\mathcal{B}$	x'_B	$\mathcal{N}$	r'_N	q	d'_B	$B(p)$
1	5 6 7	0 0 1	1 2 3 4	-0.75 20.0 -0.50 6.0	1	-0.25 -0.5000 0.0	5
2	1 6 7	0 0 1	5 2 3 4	3.00 -4.0 -3.50 33.0	2	32.00 -4.0000 0.0	6
3	1 2 7	0 0 1	5 6 3 4	1.00 1.0 -2.00 18.0	3	-8.00 -0.3750 -1.0	1
4	3 2 7	0 0 1	5 6 1 4	-2.00 3.0 0.25 -3.0	4	10.50 -0.1875 -10.5	2
5	3 4 7	0 0 1	5 6 1 2	-1.00 1.0 -0.50 16.0	5	-2.00 -0.3333 2.0	3
6	5 4 7	0 0 1	3 6 1 2	0.50 -2.0 -1.75 44.0	6	3.00 -0.3333 0.0	4
7	5 6 7	0 0 1	3 4 1 2	-0.50 6.0 -0.75 20.0	1	-0.25 -0.5000 0.0	5

- A partir de la iteració 7 es repeteixen les iteracions: **CICLAT!!**

Degeneració: regla de Bland.

Def. Regla de Bland (selecció del pivot de subíndex menor):

1. *Seleccionar com a VNB d'entrada la corresponent a l'índex menor de les que tinguin cost reduït negatiu.*
2. *Si en la selecció de la variable de sortida de la base es produeix un empat, seleccionar la VB amb índex menor.*

- **Exemple:** aplicant la regla de Bland a l'exemple anterior obtindríem:

It.	$\mathcal{B}$	x'_B	$\mathcal{N}$	r'_N	q	d'_B	$B(p)$
5 7 8	3 4 7 3 4 1 3 5 1	0.0 0.0 1.0 1.0 0.1 0.4 1.0 0.75 1.0	5 6 1 2 5 6 7 2 4 6 7 2	-1.0 1.0 -0.50 16.0 -1.4 2.2 0.20 4.8 10.5 1.5 1.25 2.0	1 5	2.5 0.25 -2.5 0.0 -0.13 0.8	7 4

Teorema 7: convergència de l'ASP, cas P_e degenerat.

Si l'ASP s'aplica amb la regla de Bland mai es produeix ciclat i finalitza en un nombre finit d'iteracions.

Demo: complexa i força tècnica. L'ometrem.

Corol·lari 7.1 :

Tot $(PL)_e$ *amb* P_e *degenerat i solució òptima té alguna SBF amb* $r_N \geq 0$.

Def. Problema de Fase I :

Sigui el problema de PL en forma estàndard $(PL)_e \; \min\{c'x | Ax = b, x \geq 0\}$ *amb* $b \geq [0]$. *El problema de Fase I associat a* $(PL)_e$ *és el problema de PL:*

$$
(PL)_I \begin{cases} \min z_I = & \displaystyle\sum_{i=n+1}^{n+m} x_i & \\ \text{s.a:} & Ax + I \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ \vdots \\ x_{n+m} \end{bmatrix} & = b \\ & x_1, \dots, x_{n+m} & \geq 0 \end{cases}
$$

- **Exemple:**

$$
(PL)_e \begin{cases} \min z = & -x_1 & \\ \text{s.a.:} & x_1 + x_2 + x_3 & = 4 \\ & 2x_1 - x_2 & = 2 \\ & x_1, x_2, x_3 & \geq 0 \end{cases}, \quad
(PL)_I \begin{cases} \min z_I = & x_4 + x_5 & \\ \text{s.a.:} & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = 4 \\ & 2x_1 - x_2 \qquad\qquad + x_5 & = 2 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 & \geq 0 \end{cases}
$$

Càlcul d'una SBF inicial: Fase I del símplex (2/6)

Def. Fase I del símplex: *resolució del problema $(PL)_I$ amb l'algorisme del símplex a partir de la SB inicial $\mathcal{B}_I := \{n+1, \dots, n+m\}$.*

Proposició 8 : *La SB inicial de la fase I del símplex és una SBF de $(PL)_I$.*

- La Prop. 8 implica que sempre podrem aplicar l'ASP al problema $(PL)_I$. *Llavors:*

Proposició 9:

En finalitzar la fase I del símplex:

i. *Si $z_I^* > 0$ llavors $(PL)_e$ és infactible.*

ii. *Si $z_I^* = 0$ llavors $(PL)_e$ és factible. A més:*

   a. *Si $\mathcal{B}_I^* \subset \{1,2, \dots, n\}$ llavors $\mathcal{B}_I^*$ és una SBF de $(PL)_e$.*

   b. *Si $\mathcal{B}_I^* \not\subset \{1,2, \dots, n\}$ llavors $\mathcal{B}_I^*$ és una SBF degenerada de $(PL)_I$ a partir de la qual es pot obtener una SBF de $(P)_e$ substituint les VB x_i amb $i > n$ per VNB x_q amb $q \le n$ (Demo: exercici 46).*

Càlcul d'una SBF inicial: Fase I del símplex (3/6)

- Trobeu la solució òptima del següent problema (PL) aplicant l'algorisme del símplex primal de les dues fases amb forma en producte de la inversa:

$$(PL)\begin{cases} \min z = & -x_1 & \\ \text{s.a.:} & x_1 + x_2 & \leq 4 \\ & 2x_1 - x_2 & = 2 \\ & x_1, x_2 & \geq 0 \end{cases} \rightarrow (PL)_e \begin{cases} \min z = & -x_1 & \\ \text{s.a.:} & x_1 + x_2 + x_3 & = 4 \\ & 2x_1 - x_2 & = 2 \\ & x_1, x_2, x_3 & \geq 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow (PL)_I \begin{cases} \min z_I = & x_4 + x_5 & \\ \text{s.a.:} & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = 4 \\ & 2x_1 - x_2 + x_5 & = 2 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 & \geq 0 \end{cases}$$

- Càlculs previs Fase I:

$$\mathcal{B} = \{4,5\}, B = I, B^{-1} = I, x_B = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}, c_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, z_I = 6$$

$$\mathcal{N} = \{1,2,3\}, \qquad A_N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad c_N = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Càlcul d'una SBF inicial: Fase I del símplex (4/6)

- **1a iteració Fase I:** $\mathcal{B}=\{4,5\}, \mathcal{N}=\{1,2,3\}$

1. Identificació de SBF òptima i selecció de la VNB d'entrada q:

$$r'=c_N'-c_B'B^{-1}A_N=[0\quad 0\quad 0]-[1\quad 1]I\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 0\end{bmatrix}=[-3\quad 0\quad -1]\ngeq 0\Rightarrow q=1$$

2. Identificació de problema il·limitat : $d_B=-B^{-1}A_1=-I\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\-2\end{bmatrix}\ngeq[0]$

3. Selecció de la VB de sortida p:

$$\theta^*=\min_{i=1,2}\{-x_{B(i)}/d_{B(i)}\}=\min\left\{\frac{4}{1},\frac{2}{2}\right\}=1\Rightarrow p=2, x_{B(2)}=x_5 \text{ VB sortint}$$

4. Actualitzacions i canvi de base :

$$x_B=\begin{bmatrix}x_4\\x_5\end{bmatrix}:=x_B+\theta^*d_B=\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}+1\begin{bmatrix}-1\\-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}, x_1:=\theta^*=1\ ;\ z_I:=z_I+\theta^*r_{N_1}=6+1\times(-3)=3$$

$$B^{-1}:=\begin{bmatrix}1 & -1/2\\ 0 & 1/2\end{bmatrix},\ x_B=\begin{bmatrix}x_{B_1}\\x_{B_2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_4\\x_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}, c_B=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$

$$\mathcal{N}:=\{2,3,5\}, A_N:=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}, c_N:=[0\quad 0\quad 1]'$$

Càlcul d'una SBF inicial: Fase I del símplex (5/6)

- **2a iteració Fase I:** $\mathcal{B} = \{4,1\}, \mathcal{N} = \{2,3,5\}$

1. Identificació de SBF òptima i selecció de la VNB d'entrada q :

$$r' = c'_N - c'_B B^{-1} A_N = [0 \quad 0 \quad 1] - [1 \quad 0] \begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & -1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \ngeq 0$$

$$\Rightarrow q = 1$$

2. Identificació de problema il·limitat : $d_B = -B^{-1} A_2 = -\begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} \ngeq [0]$

3. Selecció de la VB de sortida p:

$$\theta^* = \min_{i=1}\{-x_{B(i)}/d_{B(i)}\} = \min\left\{3/\tfrac{3}{2}\right\} = 2 \Rightarrow p = 1, x_{B(1)} = x_4 \text{ VB sortint}$$

4. Actualitzacions i canvi de base :

$$x_B = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_1 \end{bmatrix} \coloneqq x_B + \theta^* d_B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} -3/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, x_2 \coloneqq \theta^* = 2 \; ; z_I \coloneqq z_I + \theta^* r_{N_1} = 0$$

$$\mathcal{B} \coloneqq \{2,1\}, B^{-1} = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}, x_B = \begin{bmatrix} x_{B_1} \\ x_{B_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, c_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$\mathcal{N} \coloneqq \{3,4,5\}, A_N \coloneqq \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, c_N \coloneqq [0 \quad 1 \quad 1]'.$$

Càlcul d'una SBF inicial: Fase I del símplex (6/6)

- **3a iteració Fase I:** $\mathcal{B} = \{2,1\}, \mathcal{N} = \{3,4,5\}$

1. Identificació de SBF òptima i selecció de la VNB d'entrada q:

$$r' = c_N' - c_B' B^{-1} A_N = [0 \quad 1 \quad 1] - [0 \quad 0] \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [0 \quad 1 \quad 1] \geq 0 \Rightarrow \textbf{ÒPTIM}$$

- **1a iteració Fase II:** $\mathcal{B} = \{2,1\}, c_B := \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathcal{N} = \{3\}, c_N := [0], N = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, z := -2$

1. Identificació de SBF òptima i selecció de la VNB d'entrada q:

$$r' = c_N' - c_B' B^{-1} A_N = [0] - [0 \quad -1] \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = [1/3] \geq 0 \Rightarrow \textbf{ÒPTIM}$$

Complexitat algorísmica del símplex (1/8)

- **Cost computacional del simplex:**

$$\text{Cost computacional} = \frac{\text{nre. operacions}}{\text{iteració}} \times \text{nre. iteracions}$$

- **Nre. operacions/iteració:** assumint que l'aplicació del ASP comença amb la primera SBF de la Fase I amb $B_I^{-1} = I$, llavors:

a. $\lambda' = c_B' B^{-1} \longrightarrow O(m^2)$ ops.

b. $r' = c_N' - \lambda' A_N \longrightarrow O(mn)$ ops.

c. $d_B = -B^{-1} A_q \longrightarrow O(m^2)$ ops.

d. Actualització de $B^{-1} \coloneqq \mathrm{H} \cdot B^{-1} \longrightarrow O(m^2)$ ops.

Llavors: $\text{nre. operacions/iteració} = \boldsymbol{O(m^2 + mn)}$: **polinòmic**

Complexitat algorísmica del símplex (2/8)

- **Nombre d'iteracions del simplex: polinòmic?**
  - Existeix un criteri de selecció de x_q tal que $\mathrm{nre.\,iteracions} \leq$ polinomi en n i m ?
  - **En la pràctica :** s'observa que $\mathrm{nre.\,iteracions} = O(m) \approx 3m$ (o $O(m \log n)$)
  - **En teoria:** es poden trobar exemples on el nombre d'iteracions és exponencial:

Problema de Klee-Minty (1972)

$$
(\mathrm{P}_{K-M}) \begin{cases} \min & -x_n \\ \text{s.t.:} & \epsilon \leq x_1 \leq 1 \\ & \epsilon x_{i-1} \leq x_i \leq 1 - \epsilon x_{i-1} \quad i = 2, \dots, n \end{cases}
$$

amb $\epsilon \in (0, \frac{1}{2})$. Es pot demostrar que (Ta. 3,5 B&T):

i. El poliedre associat a (P_{K-M}) (**cub de Klee-Minty**) té 2^n vèrtexs (punts extrems).

ii. El símplex **pot** necessitar $2^n - 1$ iteracions (***worst case analysis***)

Complexitat algorísmica del símplex (3/8)

- Problema de Klee-Minty per a $n = 3$:$(\mathrm{P}_{K-M})\begin{cases} \min & -x_3 \\ \text{s.t.:} & \epsilon \le x_1 \le 1 \\ & \epsilon x_1 \le x_2 \le 1 - \epsilon x_1 \\ & \epsilon x_2 \le x_3 \le 1 - \epsilon x_2 \end{cases}$

$$(P_{K-M})\begin{cases} \min & -x_3 \\ s.a.: & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \epsilon & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \epsilon & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \epsilon & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\epsilon \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{cases}$$

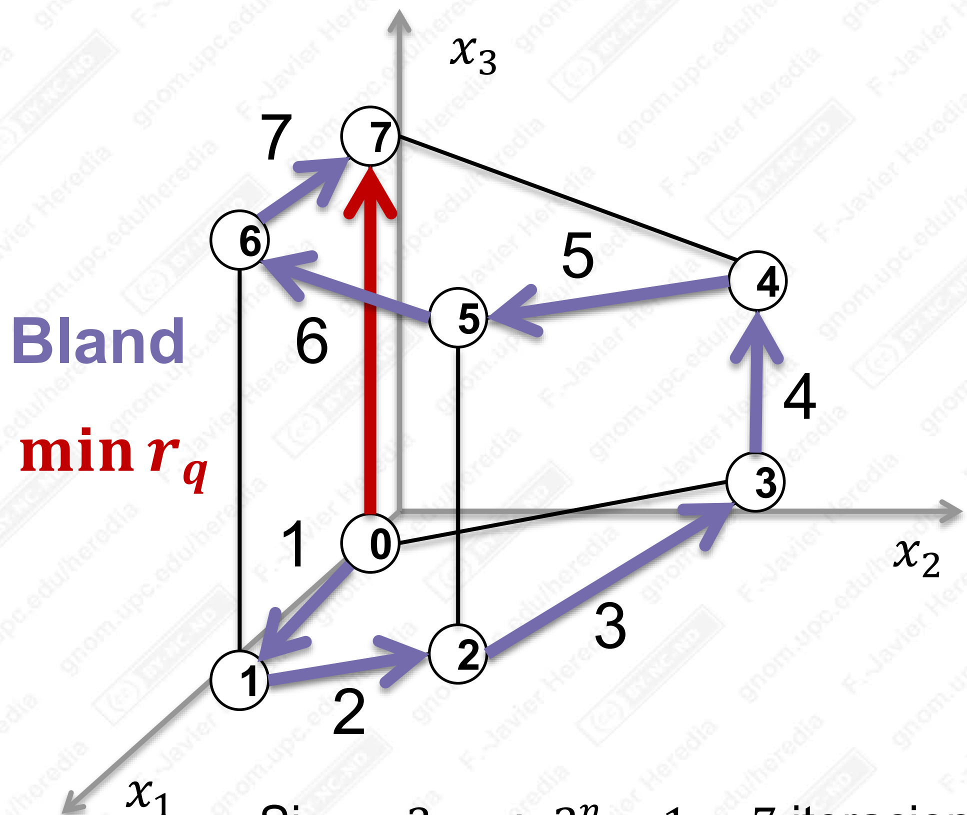
Complexitat algorísmica del símplex (4/8)

- Problema de Klee-Minty per a $n = 3$ i $\epsilon = 1/4$:(P_{K-M}) $\begin{cases} \min & -x_3 \\ \text{s.t.:} & \frac{1}{4} \le x_1 \le 1 \\ & \frac{1}{4}x_1 \le x_2 \le 1 - \frac{1}{4}x_1 \\ & \frac{1}{4}x_2 \le x_3 \le 1 - \frac{1}{4}x_2 \end{cases}$

(P_{K-M}) $n = 3$ $\epsilon = 1/4$	It.	$\mathcal{B}$	$\mathcal{N}$	x_B					
Símplex reg. Bland	0	1 2 3 4 6 8	5 7 9	0.2500	0.0625	0.0156	0.7500	0.8750	0.9688
	1	1 2 3 5 6 8	4 7 9	1.0000	0.2500	0.0625	0.7500	0.5000	0.8750
	2	1 2 3 5 7 8	4 6 9	1.0000	0.7500	0.1875	0.7500	0.5000	0.6250
	3	1 2 3 4 7 8	5 6 9	0.2500	0.9375	0.2344	0.7500	0.8750	0.5312
	4	1 2 3 4 7 9	5 6 8	0.2500	0.9375	0.7656	0.7500	0.8750	0.5312
	5	1 2 3 5 7 9	4 6 8	1.0000	0.7500	0.8125	0.7500	0.5000	0.6250
	6	1 2 3 5 6 9	4 7 8	1.0000	0.2500	0.9375	0.7500	0.5000	0.8750
	7	1 2 3 4 6 9	5 7 8	0.2500	0.0625	0.9844	0.7500	0.8750	0.9688
Símplex $r_q = \min r$	0	1 2 3 4 6 8	5 7 9	0.2500	0.0625	0.0156	0.7500	0.8750	0.9688
	1	1 2 3 4 6 9	5 7 8	0.2500	0.0625	0.9844	0.7500	0.8750	0.9688

Complexitat algorísmica del símplex (5/8)

- Problema de Klee-Minty per a $n = 3$ i $\epsilon = 1/4$:(P_{K-M}) $\begin{cases} \min & -x_3 \\ \text{s.t.:} & \frac{1}{4} \leq x_1 \leq 1 \\ & \frac{1}{4}x_1 \leq x_2 \leq 1 - \frac{1}{4}x_1 \\ & \frac{1}{4}x_2 \leq x_3 \leq 1 - \frac{1}{4}x_2 \end{cases}$



vèrtexs	x_1	x_2	x_3
0	1/4	1/16	1/64
1	1	1/4	1/16
2	1	3/4	3/16
3	1/4	15/16	15/64
4	1/4	15/16	49/64
5	1	3/4	13/16
6	1	1/4	15/16
7	1/4	1/16	63/64

Si $n = 3$: $2^n - 1 = 7$ iteracions (símplex amb regla de Bland)
Si $n = 300$: $2^{300} - 1 \approx 10^{90}$ iteracions ≥ nre. àtoms a l'univers

Complexitat algorísmica del símplex (6/8)

- El problema de Klee-Minty mostra el nre. d'iter. de l'ASP serà polinòmic o no depenent del **criteris de pivotació (i.e: criteris de selecció de q i p)**.
- Es coneixen exemples similars al problema de Klee-Minty que necessiten un nombre exponencial d'iteracions per a la major part de criteris de pivotació.
- La qüestió doncs és: **pot existir algun criteri de pivotació que asseguri un nre. màxim d'iteracions polinòmic per a tot problema (PL)?** La resposta a aquesta pregunta depèn de l'estudi del **diàmetre de políedres $D(P)$**.

Def.: $d(x,y)$, distància entre dos punts extrems x i y d'un políedre P:

Mínim nombre de punts extrems adjacents ("salts") entre x i y més u.

- Suposem ara un problema (PL) amb regió factible P, solució única x^* i que apliquem l'ASP a partir de la SBF x^0. Llavors, podem assegurar que **l'ASP farà, com a mínim, $d(x^0,x^*)$ iteracions**, independentment del criteri de pivotació triat.

Def.: $D(P)$, diàmetre d'un políedre P:

Màxima distància $d(x,y)$ per a tot parell de punts extrems x,y de P.

- Per a tot políedre P, triant el vector de costos apropiat c, sempre existirà un problema $(PL)\ \min_{x\in\mathbb{R}^n}\{c'x \mid x \in P\}$ tal que $d(x^0,x^*) = D(P)$ i, llavors: $\boxed{\textbf{nre iter. ASP} \overset{\text{def}}{=} k_{ASP} \geq D(P)}$

Complexitat algorísmica del símplex (7/8)

Def.: $\boldsymbol{\Delta(n,l)}$, màxim diàmetre poliedres $\boldsymbol{P_{n,l}}$:

Considerem tots els políedres de mida n, l, $P_{n,l} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_j' x \geq 0\,, j = 1, \dots, l\}$. *Llavors:*

$$\boldsymbol{\Delta(n,l) = \max_{\forall P_{n,l}} \{D(P_{n,l})\}}$$

- $\boldsymbol{\Delta(n,l)}$ és una fita inferior del nre. d'iteración del l'ASP, k_{ASP}:

$$k_{ASP} \geq \Delta(n,l) \rightarrow \begin{cases} \Delta(n,l) \text{ no polinòmic} & \Rightarrow \text{ASP no polinòmic} \\ \boldsymbol{\Delta(n,l)} \textbf{ polinòmic} & \nRightarrow \text{ASP polinòmic} \end{cases}$$

- **Conjectura de Hirsch (1956) :** $\Delta(n,l) \leq l - n$..... **FALSA!!!**:
  - **Klee & Walkup (1967)**, contraexemple amb $P_{4,8}$ no afitat:

$$D(P_{4,8}) = 5 > l - n = 4$$

  - **Santos (2010)**, contraexemple amb $P_{43,86}$ fitat (publicat a la premsa!!!):

$$D(P_{43,86}) \geq 44 > l - n = 43$$

- **Kalai & Kleitman (1992):** $\Delta(n,l) \leq (2n)^{\log_2 l}$**:**
  - El diàmetre màxim no és exponencial, però podria no ser polinòmic.
- Situació actual...... **cap conclusió sobre si l'ASP és polinòmic**!!!

Complexitat algorísmica del símplex (8/8)

- **Recapitulant: el nre. d'iteracions del simplex és polinòmic en n i m?** No se sap. Qüestió fonamental de la matemàtica moderna. Estat actual:
  1. **En teoria:** podem prendre la fita de Kalai-Kleitman $\Delta(n,l) \leq (2n)^{\log_2 l}$ com a estimació de k_{ASP}:
  $$k_{ASP} \approx (2n)^{\log_2 l}$$
  2. **En la pràctica:** s'observa $\mathrm{k}_{ASP} \approx O(m) \approx 3m$
- **Temps d'execució:** problema de (PL) amb $n = 100, m = 50 \rightarrow l = n + 2m = 200$
  - **Summit (IBM)** (http://www.top500.org/): $\sim 200 \times 10^{15}$ ops./seg. (200 petaflops).
  - **Temps execució teòric:**
  $$50^2 \frac{oper.}{iter} \times \overbrace{(2 \cdot 100)^{\log_2 200}}^{k_{ASP} \approx 3.8 \times 10^{17}} iter \times \frac{1}{200 \times 10^{15}} \frac{seg.}{oper.} \approx \mathbf{4849s \approx 1h20m}$$
  - **Temps execució observat:** $50^2 \frac{oper.}{iter} \times \overbrace{150 iter}^{k_{ASP}} \times \frac{1}{200 \times 10^{15}} \frac{seg.}{oper.} \approx \mathbf{10^{-12} s}$