1 . Siguin U, V, W tres varietats lineals projectives d'un espai projectiu $\mathbb{P}$, amb $U \subseteq V$. Proveu que $V \cap (U \vee W) = U \vee (V \cap W)$.

2 . Donades 4 varietats lineals projectives L_1, L_2, L_3, L_4 de la mateixa dimensió, dues a dues disjuntes, en un espai projectiu $\mathbb{P}$, demostreu que

$$\dim(L_1 \vee L_2) \cap (L_3 \vee L_4) = \dim(L_1 \vee L_3) \cap (L_2 \vee L_4) = \dim(L_1 \vee L_4) \cap (L_2 \vee L_3).$$

3 . Siguin l_1, l_2, l_3, l_4 rectes de $\mathbb{P}^6$. Demostreu que existeix un pla π en $\mathbb{P}^6$ que les talla a totes.

4 . Siguin l_1, l_2, l_3 tres rectes disjuntes dues a dues d'un espai projectiu tals que $l_1 \cap (l_2 \vee l_3) = \{p_1\}$.

(a) Demostreu que $l_2 \cap (l_3 \vee l_1) = \{p_2\}$ i $l_3 \cap (l_1 \vee l_2) = \{p_3\}$.

(b) Demostreu que els punts p_1, p_2 i p_3 estan alineats.

5 . A $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ es consideren les referències projectives:

$$\mathcal{R}_1 = \{(-1,1,0),(1,0,1),(1,2,0);(1,3,1)\}\ ,\ \mathcal{R}_2 = \{(1,-1,0),(1,0,-2),(-4,1,0);(-3,1,1)\}.$$

(a) Trobeu les coordenades de $(1,1,1)$ en tots dos sistemes.

(b) Trobeu els punts que tenen les mateixes coordenades en tots dos sistemes.

6 . A $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ es considera el triangle determinat per les rectes $r_0 : x_1 - x_2 = 0$, $r_1 : x_0 - x_1 + x_2 = 0$ i $r_2 : 2x_0 - x_1 = 0$. Sigui p_i el vèrtex oposat a r_i. Sigui $U = (1,1,-2)$.

(a) Comproveu que $\mathcal{R} := \{p_0, p_1, p_2; U\}$ és una referència projectiva de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$.

(b) Trobeu una base de $\mathbb{R}^3$ adaptada a $\mathcal{R}$.

(c) Trobeu les coordenades del punt $(1,-3,-3)$ i l'equació de la recta $x_0 - 3x_1 - 3x_2 = 0$ en $\mathcal{R}$.

7 . A $\mathbb{P}^4_{\mathbb{R}}$ es consideren les varietats lineals projectives següents:

$$M_1 = (1,0,-1,0,1) \vee (0,1,0,1,-1) \vee (2,2,-2,1,2) \text{ i } M_2 : \begin{cases} x_0 - x_1 + x_4 = 0 \\ 2x_0 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}.$$

(a) Trobeu les equacions de M_1 i doneu la seva dimensió.

(b) Trobeu dues varietats lineals V_1 i V_2 tals que $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ i $M_2 = V_1 \vee V_2$.

(c) Determineu $M_1 \cap M_2$ i $M_1 \vee M_2$.

8 . En l'espai projectiu $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$:

(a) Trobeu l'equació de la recta r_1 que passa pels punts $(1,0,0,0)$ i $(0,1,1,0)$.

(b) Considereu la recta $r_2 : \begin{cases} x+y+z-t=0 \\ x-y=0 \end{cases}$ i trobeu l'equació de la recta r_3 que passa per $(2,1,1,1)$ i talla r_1 i r_2.

(c) Trobeu l'equació del pla determinat per r_1 i r_3.

9 . *Complexificació d'un espai projectiu real.* Considerem $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ l'espai projectiu real n-dimensional immers a $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ via la inclusió natural $\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{C}$. Donada L una varietat lineal projectiva de $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$, denotarem $L_{\mathbb{R}} := L \cap \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$.

(a) Demostreu que $L_{\mathbb{R}}$ és una varietat lineal projectiva de $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$.

(b) Demostreu que $\dim L_{\mathbb{R}} \leq \dim L$

(c) Es diu que L és *real* si es pot expressar mitjançant un sistema homogeni d'equacions lineals amb coeficients reals. Demostreu que L és real si i només si $\dim L_{\mathbb{R}} = \dim L$

(d) Demostreu que L és real si i només si

$$(x_0, \ldots, x_n) \in L \Longleftrightarrow (\overline{x}_0, \ldots, \overline{x}_n) \in L$$

(e) Si $n=2$, tot punt imaginari (no real) pertany a una única recta real i cada recta imaginària (no real) hi ha un únic punt real que és intersecció de la recta conjugada amb ella mateixa.

10 . (Teorema de Fano) Proveu que els tres punts diagonals d'un quadrangle complet estan alineats si, i només si, la característica del cos base és 2. Dualitzeu el resultat.

11 . Demostreu l'anàleg al Teorema de Desargues a $\mathbb{P}^3$, amb dos triangles no coplanaris.

12 . Sigui $\mathbb{P}$ un espai projectiu de dimensió 3 i $\mathcal{R}$ una referència de $\mathbb{P}$. Considerem les varietats lineals projectives següents: $L_1 :\ x_1+x_2-x_3=0$ i $L_2 :\ 2x_0+x_1+x_3=0\ ,\ x_0+2x_1+x_2=0$. Trobeu equacions per a les varietats L_1^*, L_2^*, $(L_1 \cap L_2)^*$, $(L_1 \vee L_2)^*$.

13 . Doneu l'enunciat dual dels Teoremes de Desargues i de Pappus.

14 . Donats tres plans L_1, L_2, L_3 de $\mathbb{P}^4$ que es tallen dos a dos en tres punts no alineats, proveu que existeix un únic pla L que talla L_1, L_2, L_3 en rectes. Enuncieu el dual.

15 . Siguin L i L' dues rectes diferents de $\mathbb{P}^2$ que es tallen en un punt A. Siguin B, C, D tres punts de L i B', C', D' tres punts de L', diferents entre ells i diferents de A.

(a) Proveu que les rectes BB', CC', DD' són concurrents si i només si $(A,B,C,D) = (A,B',C',D')$.

(b) Enunceu el dual de (a).

16 . Trobeu el parell de punts de $\mathbb{P}^1$ que està separat harmònicament del parell de punts $\{(1,0),(0,1)\}$ i, a la vegada, separat harmònicament del parell de punts $\{(1,1),(4,1)\}$.

17 . Siguin H_1, H_2, H_3, H_4 quatre hiperplans diferents d'un espai projectiu $\mathbb{P}^n$, concurrents en una varietat lineal projectiva L de dimensió $n-2$. Es defineix la raó doble d'aquests quatre hiperplans com $(H_1, H_2, H_3, H_4) = (H_1^*, H_2^*, H_3^*, H_4^*)$, és a dir, com la raó doble dels quatre punts $H_1^*, H_2^*, H_3^*, H_4^*$ de la recta L^* de l'espai dual $(\mathbb{P}^n)^*$. Calculeu:

(a) La raó doble dels punts de $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$: $(1,1,-1,1)$, $(0,1,1,-1)$, $(2,1,-3,3)$, $(4,3,-5,-5)$.

(b) La raó doble de les rectes de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ que pertanyen al feix de rectes pel punt $(0,0,1)$ i que passen respectivament per $(1,-1,1)$, $(-1,2,2)$, $(2,2,3)$ i $(4,2,-1)$.

(c) La raó doble dels plans de $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$: $x+2y+t=0$, $x-y-z+t=0$, $x+5y+z+t=0$, $3x-2z+3t=0$.

18. Demostreu que la raó doble dels quatre punts en què una recta talla a les cares d'un tetràedre és igual a la raó doble dels plans determinats per la recta i els vèrtexs del tetraedre.

19. (a) Siguin A, B, C i D quatre punts d'una recta projectiva $\mathbb{P}^1 = (\mathbb{P}^1, E, \pi)$. Suposem que A, B i C són diferents entre sí. Proveu que $(A,B,C,D) \neq \infty$ si i només si existeixen dos vectors linealment independents $u, v \in E$ i existeix $\rho \in k$ tals que $A = [u]$, $B = [v]$, $C = [u+v]$ i $D = [\rho u + v]$. En aquest cas $(A,B,C,D) = \rho \neq \infty$.

(b) Useu l'apartat anterior per a calcular la raó doble dels punts de $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$ següents: $(1,1,-1,1)$, $(0,1,1,-1)$, $(2,1,-3,3)$, $(4,3,-5,-5)$.

20. Siguin A, B, C i D quatre punts d'una recta projectiva $\mathbb{P}^1$, almenys tres d'ells diferents entre sí. Proveu que

(1) $A = C$ o $B = D$ si i només si $(A,B,C,D) = 0$;

(2) $B = C$ o $A = D$ si i només si $(A,B,C,D) = \infty$;

(3) $A = B$ o $C = D$ si i només si $(A,B,C,D) = 1$.

21. Siguin A, B, C i D quatre punts d'una recta projectiva $\mathbb{P}^1$, tots ells diferents entre sí. Sigui $\rho = (A,B,C,D)$.

(a) Proveu que $\rho = (A,B,C,D) = (B,A,D,C) = (C,D,A,B) = (D,C,B,A)$.

(b) Proveu que $(B,A,C,D) = 1/\rho$, $(A,C,B,D) = 1-\rho$, $(B,C,A,D) = (\rho-1)/\rho$, $(C,A,B,D) = 1/(1-\rho)$ i que $(C,B,A,D) = \rho/(\rho-1)$.

(c) Deduïu les raons dobles de les restants permutacions.

22. Teorema de Pappus, versió ampliada: Siguin r i r' dues rectes diferents d'un pla projectiu. Siguin A, B, C i A', B', C' tres punts diferents de r i r', respectivament. El teorema de Pappus ens diu que els punts $M = AB' \cap A'B$, $N = AC' \cap A'C$ i $P = BC' \cap B'C$ estan alineats. Demostreu que la recta que passa per M, N i P passa pel punt d'intersecció de les dues rectes originals si i només si les rectes AA', BB' i CC' són concurrents.

23. Prenem en un pla projectiu un punt P i dues rectes r i s que es tallen en un punt Q. Determineu un punt de la recta $P \vee Q$ amb només un regle i sense usar el punt Q.

24. Siguin $O_1O_2O_3$ un triangle i A_1, A_2, A_3 tres punts, cadascún d'ells sobre un costat diferent del triangle.

(a) Demostreu el teorema de Ceva: les rectes O_1A_1, O_2A_2, O_3A_3 són concurrents si i només si

$$(O_2, O_3, I_1, A_1)(O_3, O_1, I_2, A_2)(O_1, O_2, I_3, A_3) = 1,$$

essent I_1, I_2, I_3 les projeccions del punt unitat sobre els costats de la referència.

(b) Demostreu el teorema de Menelao: els punts A_1, A_2, A_3 estan alineats si i només si

$$(O_2, O_3, I_1, A_1)(O_3, O_1, I_2, A_2)(O_1, O_2, I_3, A_3) = -1,$$

essent I_1, I_2, I_3 les projeccions del punt unitat sobre els costats de la referència.

(c) (Gener'16) Aplicació: sigui A, B, C un triangle de $\mathbb{P}^2$ i sobre cada costat considerem punts separats harmònicament dels vèrtexs:

$$\begin{array}{ll} C', C'' \in A \vee B, & (A, B, C', C'') = -1, \\ B', B'' \in C \vee A, & (C, A, B', B'') = -1, \\ A', A'' \in B \vee C, & (B, C, A', A'') = -1. \end{array}$$

Proveu que els punts A'', B'', C'' estan alineats si, i només si, les rectes $A \vee A', B \vee B', C \vee C'$ són concurrents.

25. Sigui ABC un triangle de $\mathbb{P}^2$ i P un punt que no pertany al triangle. Es consideren les projeccions de P des de cada vèrtex sobre el costat oposat i, per cada projecció, el quart harmònic respecte dels vèrtexs d'aquell costat. Demostreu que els tres punts obtinguts estan alineats (la recta resultant s'anomena *polar harmònica* de P).

26. Teorema de Thales: en el pla afí $\mathbb{A}^2$ es consideren tres rectes paral·leles L_1, L_2, L_3 i L, L' dues altres rectes no paral·leles a les L_i. Denotem $A_i = L_i \cap L$ i $A'_i = L_i \cap L'$. Proveu que $A_1A_3/A_1A_2 = A'_1A'_3/A'_1A'_2$.

27. Siguin $\mathbb{A} = (\mathbb{A}, E, +)$ un espai afí i $A_0, \ldots, A_d$ punts de $\mathbb{A}$. Sigui $L = A_0 \vee \ldots \vee A_d$ la varietat lineal afí generada pels punts $A_0, \ldots, A_d$. Proveu que la clausura projectiva de L és $\overline{L} = \overline{A}_0 \vee \ldots \vee \overline{A}_d$.

28. En $\mathbb{A}^4_{\mathbb{R}}$ considerem les rectes $L_1 = (2, 0, 0, 1) + \langle(1, 1, -2, 0)\rangle$ i $L_2 = (2, 0, 0, 1) + \langle(1, 0, 0, 1)\rangle$.

(a) Doneu equacions de les clausures projectives $\overline{L}_1$ i $\overline{L}_2$.

(b) Doneu les equacions del pla afí L de $\mathbb{A}^4_{\mathbb{R}}$ tal que la seva clausura projectiva $\overline{L}$ conté els punts $(1, 1, 0, -1, 0)$, $(0, 1, 0, 0, -1)$, $(0, 0, 1, -2, 1)$.

(c) Calculeu $\overline{L}_1 \cap \overline{L}$ i $L_1 \cap L$.

(d) Calculeu $\overline{L}_2 \cap \overline{L}$ i $L_2 \cap L$.

29. En $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ considerem la referència afí $\mathcal{R} = \{(1, 0, 1); (1, 0, 1), (1, -1, 0), (0, 1, 2)\}$.

(a) Determineu la referència projectiva $\overline{\mathcal{R}}$ de $\overline{\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}}$ associada a $\mathcal{R}$.

(b) Doneu equacions, en referència $\overline{\mathcal{R}}$, per a la clausura projectiva de la recta afí que passa pels punts $(0, 1, 1)$ i $(0, 1, 2)$.

30. En $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$ considerem el pla $H : x_0 - x_2 + 2x_3 = 0$ i denotem per F el subespai vectorial de $\mathbb{R}^4$ tal que $H = [F]$. Sigui $\mathbb{A} = \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}} \setminus H$.

(a) Proveu que, per a cada punt $p \in \mathbb{A}$, existeix un únic vector $v_p \in F$ tal que $p = [(1, 0, -1, 2) + v_p]$.

(b) Comproveu que, si $\varphi : \mathbb{A} \times \mathbb{A} \to F$ és l'aplicació $\varphi(p, q) = v_q - v_p$, aleshores $(\mathbb{A}, F, \varphi)$ és un espai afí.

(c) Considerem la referència $\mathcal{R} = \{(1, 1, 0, 0); (0, 0, 2, 1), (0, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0)\}$ de $\mathbb{A}$. Doneu equacions per al pla $\{x_0 + x_1 = 0\} \cap \mathbb{A}$ en referència $\mathcal{R}$.

31. Siguin P, Q dos punts d'una recta afí real. Proveu que A és un punt entre P i Q si i només si $(P, Q, A) < 0$. Siguin P_1, P_2 i Q_1, Q_2 quatre punts d'una recta projectiva. Es diu que P_1, P_2 *separen* Q_1, Q_2 si $(P_1, P_2, Q_1, Q_2) < 0$. Proveu que A és entre P i Q si i només si P, Q separen A, ∞.

32. Siguin A, B, C els tres vèrtexs d'un triangle en un pla afí. Proveu que les rectes paral·leles a AB i AC per C i B, respectivament, intersequen a la recta paral·lela BC per A en dos punts el punt mig dels quals és A.