Problemes de Variable Complexa FME, curs 2019-20

Tema 4: Teoria Global de Cauchy

1. Sigui $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ holomorfa. Si γ és una corba simple amb $n(\gamma; 0) = 1$ i f és fitada en la component connexa no acotada determinada per γ, aleshores $\forall z \in \mathbb{C}$ tal que $n(\gamma; z) = 0$:

$$f(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{z f(w)}{w(w-z)} dw.$$

2. Trobeu les multiplicitats dels zeros de

(i) $f(z) = e^z - 1$, en $z_0 = 2\pi k i$, $k \in \mathbb{Z}$.

(ii) $f(z) = \sin z - \tan z$, en $z_0 = 0$.

(iii) $f(z) = \cos z - 1 + \frac{1}{2}\sin^2 z$, en $z_0 = 0$.

3. Trobeu els zeros i les seves multiplicitats de

(i) $f(z) = (1 + z^2)^4$.

(ii) $f(z) = \sin^2 z$.

(iii) $f(z) = 1 + e^z$.

(iv) $f(z) = z^3 \cos z$.

4. Classifiqueu la singularitat de les funcions següents en $z = 0$. Si és evitable, digueu quin valor l'evita. Si és un pol, trobeu la part principal de la funció en $z = 0$.

(i) $f(z) = \dfrac{1}{\tan z} - \dfrac{1}{\sin z}$.

(ii) $f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$.

(iii) $f(z) = \dfrac{\sin z}{z^4}$.

(iv) $f(z) = \dfrac{\cos z}{z}$.

(v) $f(z) = \dfrac{\cos z - 1}{z}$.

(vi) $f(z) = \dfrac{\cos z - 1}{z^2}$.

(vii) $f(z) = z \cos(1/z)$.

(viii) $f(z) = \mathrm{e}^{1/z}$.

(ix) $f(z) = \dfrac{1}{1 - \mathrm{e}^z}$.

5. Trobeu les singularitats de les funcions següents i classifiqueu-les: digueu si són evitables, pols (i de quin ordre) o essencials.

(i) $f(z) = \dfrac{(\cos z - 1)^3 \sin(z^2) \sin(\pi z)}{(e^z - 1)(z^2 + 1)}$.

(ii) $f(z) = \dfrac{z(z-1)^3}{\sin^2(\pi z)}$.

6. Demostreu que si $f(z)$ és una funció entera i injectiva, aleshores $f(z) = az + b$ per certs $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$. (Indicació: Useu els teoremes de Liouville, Casorati-Weierstrass i de l'aplicació oberta per veure que $z = 0$ ha de ser un pol de $g(z) = f(1/z)$.)

7. Proveu que una singularitat aïllada és evitable sí i només sí Re $(f(z))$ o Im $(f(z))$ és acotada superiorment o inferiorment. (Indicació: Si Re $(f(z))$ acotada superiorment considereu $h(z) = \mathrm{e}^{f(z)}$. Penseu quines altres funcions heu de considerar en cada cas.)

8. Calculeu la sèrie de Laurent de $f(z) = \dfrac{1}{z(z-1)(z-2)}$ en les corones:

(i) $0 < |z| < 1$.

(ii) $1 < |z| < 2$.

(iii) $2 < |z| < \infty$.

9. Calculeu la sèrie de Laurent de $f(z) = \dfrac{z^2 - 1}{(z+2)(z+3)}$ en les corones:

(i) $|z| < 2$.

(ii) $2 < |z| < 3$.

(iii) $|z| > 3$.

10. Trobeu la sèrie de Laurent de les següents funcions en el disc puntejat $D_{z_0}(R) \setminus \{z_0\}$ i digueu fins a quin radi R convergeixen.

(i) $f(z) = \dfrac{8 - 2z}{4z - z^3}$ en $z_0 = 0$.

(ii) $f(z) = \dfrac{\cos z}{(z - \pi)^3}$ en $z_0 = \pi$.

(iii) $f(z) = z \cos(1/z)$ en $z = 0$.

11.[**Regla de l'Hôpital per a funcions holomorfes o meromorfes.**] Siguin $f(z)$ i $g(z)$ dues funcions meromorfes en un obert $\Omega \subset \mathbb{C}$.

(i) Proveu que si f i g són holomorfes en $z = z_0 \in \Omega$ i $f(z_0) = g(z_0) = 0$, aleshores $\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \to z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)}$.

(ii) Proveu que si f i g tenen un pol a $z = z_0 \in \Omega$, aleshores $\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \to z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)}$.

12. Si $f(z)$ té un pol simple en $z = a$ i $g(z)$ és holomorfa en $z = 0$ demostreu que

$$\mathrm{Res}\,(f \cdot g, a) = g(a)\mathrm{Res}\,(f, a).$$

13. Trobeu els pols, el seu ordre i residu de les funcions següents:

(i) $\dfrac{1}{z^2 + 5z + 6}$.

(ii) $\dfrac{1}{(z^2 - 1)^2}$.

(iii) $\dfrac{1}{\sin^2 z}$.

(iv) $\dfrac{1}{z^m(1 - z)^n}$, $n, m \in \mathbb{N}$.

(v) $z \cot z$

(vi) $\dfrac{\sin z}{z^5}$.

(vii) $\dfrac{1}{1 - e^z}$.

14. Trobeu les singularitats aïllades i els residus en els seus pols de les funcions següents:

(i) $\dfrac{\sqrt{z}}{z^3 - 4z^2 + 4z}$. (Utilitzeu la determinació principal de l'arrel.)

(ii) $\dfrac{\mathrm{e}^{2z}}{z^2 - z + 1}$.

(iii) $\dfrac{\cos(1/z)}{\sin z}$.

(iv) $\dfrac{1}{(\log(z/\mathrm{e}) - 1)^2}$. (Utilitzeu la determinació principal del logaritme.)

15. Trobeu $\mathrm{Res}\,(f, z_0)$ per a:

(i) $f(z) = \dfrac{z - 1}{z}\mathrm{e}^{1/z}$, en $z_0 = 0$.

(ii) $f(z) = \dfrac{1}{\sin(z(\mathrm{e}^z - 1))}$, en $z_0 = 0$.

(iii) $f(z) = \dfrac{1}{\sinh(2 \log z)}$, en $z_0 = \mathrm{i}$. (Utilitzeu la determinació principal del logaritme.)

(iv) $f(z) = \dfrac{\sin z}{(z + \mathrm{i})^5}$, en $z_0 = -\mathrm{i}$.

(v) $f(z) = \dfrac{\mathrm{e}^z}{z^4}$, en $z_0 = 0$.

(vi) $f(z) = \mathrm{e}^{z+1/z}$.

17. Calculeu, prenent els cercles amb orientació positiva:

(i) $\displaystyle\int z^3 \cos\left(\frac{1}{z}\right)\, dz$ sobre $|z+1+\mathrm{i}| = 4$.

(ii) $\displaystyle\int \frac{\sin z - \sinh z}{z^8}\, dz$ sobre $|z| = 1$.

(iii) $\displaystyle\int \frac{dz}{\log z - 1}\, dz$ sobre $|z - \mathrm{e}| = 1$. (Utilitzeu la determinació principal del logaritme.)

18. Calculeu el residu de $f(z) = \dfrac{e^{-\mathrm{i}z}}{1+z^2}$ en $z = \mathrm{i}$. Calculeu $\int_\gamma f$ on γ és el camí format pel quadrat de vèrtexs $0, 1+\mathrm{i}, 2\mathrm{i}, -1+\mathrm{i}$ amb orientació positiva.

19. Calculeu $\displaystyle\int_{\partial D_1(0)^+} \left(z + \frac{1}{z}\right)^{2n} \frac{dz}{z}$ usant el binomi de Newton. Deduïu-ne la fórmula de Wallis: $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (2\cos\theta)^{2n}\, d\theta = \frac{(2n)!}{n!n!}$.

20. Calculeu les integrals racionals següents integrant sobre el camí tancat γ_R definit pel segment $[-R, R]$ i el semi-cercle de centre l'origen i radi R en el semi-pla superior.

(i) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4} dx$. (Solució: $\pi/\sqrt{2}$.)

(ii) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^6} dx$. (Solució: $\pi/3$.)

(iii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 - x + 2}{x^4 + 10x^2 + 9} dx$. (Solució: $5\pi/12$.)

(iv) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}}$ ($n \in \mathbb{N}$). (Solució: $\pi(2n-1)!!/(2n)!!$.)

(v) $\displaystyle\frac{dx}{ax^6 + b}$ ($a, b > 0$). (Solució: $\frac{\pi}{3a}(a/b)^{5/6}$.)

21. Proveu que $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{t^{a-1}}{1+t} dt = \frac{\pi}{\sin(\pi a)}$ si $a \in (0,1)$. Useu-ho per calcular les següents integrals sense fer servir variable complexa. [Indicació: Integreu sobre el camí tancat $\gamma_{\varepsilon,\alpha,R}$ ($R \gg 1$ i $0 < \varepsilon, \alpha \ll 1$) definit per la unió de dos segments, de ε a R i de $\varepsilon\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}$ a $R\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}$, amb dos arcs de circumferència, de radis R i ε, donats per $R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ i $\varepsilon\mathrm{e}^{i\theta}$, per $\theta \in [0, 2\pi - \alpha]$.]

(i) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx$. (Solució: $\pi/\sqrt{2}$.)

(ii) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^q}{\alpha + \beta x^p} dx$, per $\alpha, \beta > 0$ i $p > q+1 > 0$. (Solució: $(\frac{\alpha}{\beta})^a \frac{\pi}{\alpha p \sin(\pi a)}$, on $a = (q+1)/p$.)

(iii) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\log(1+x^2)}{x^{1+\alpha}}$, per $0 < \alpha < 2$. (Indicació: Integreu per parts. Solució: $\pi/\sin(a\pi/2)$.)

22. Calculeu les integrals següents a partir d'integrals de funcions T-periòdiques en un interval de longitud T, tot fent el canvi $z = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} u/T}$.

(i) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(a+\cos x)^2}$ $(a > 1)$. (Solució: $2\pi a/(a^2-1)^{3/2}$.)

(ii) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{a+\sin^2 x}$ $(a > 0)$. (Solució: $\pi/(2\sqrt{a^2+a}$.)

(iii) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2(3x)dx}{5-4\cos(2x)}$. (Observeu que la funció integrada és π-períodica. Solució: $3\pi/8$.)

23. Calculeu les integrals següents integrant sobre el camí tancat $\gamma_{\varepsilon,R}$ $(0 < \varepsilon \ll 1$ i $R \gg 1)$ definit per la unió dels dos segments $[\varepsilon, R]$ i $[-R, -\varepsilon]$ amb les mitjes circumferències de centre l'origen i radis ε i R contingudes en el semi-plà superior.

(i) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\log x}{x^2+a^2} dx$ $(a > 0)$. (Solució $(\pi/2a)\log(a)$.)

(ii) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\log^2 x}{x^2+1} dx$. (Solució $\pi^3/8$.)

(iii) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\log x}{(x^2+1)^2} dx$. (Solució $-\pi/4$.)

24. Calculeu les integrals següents integrant la funció $f(z)$ sobre el camí γ_R definit pel segment $[-R, R]$ i la semi-circumferència de centre l'origen i radi R en el semi-plà superior.

(i) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+a^2}\, dx$ $(a > 0)$ fent $f(z) = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x^2+a^2}$. (Solució: $\pi \mathrm{e}^{-a}/(2a)$.)

(ii) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2+a^2}\, dx$ $(a > 0)$ fent $f(z) = \dfrac{z\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z^2+a^2}$. (Solució: $\pi \mathrm{e}^{-a}/2$.)

(iii) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x(x^2+a^2)}\, dx$ $(a > 0)$ fent $f(z) = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}-1}{z(z^2+a^2)}$. (Solució: $\pi(1-\mathrm{e}^{-a})/(2a^2)$.)

(iv) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2-a^2}{x^2+a^2}\frac{\sin x}{x}\, dx$ combinant els dos apartats anteriors. (Solució: $-\pi/2 + \pi\mathrm{e}^{-a}$.)

25. Integreu $f(z) = \mathrm{e}^{-z^2}$ sobre la vora del rectangle de vèrtexs $R, R+\mathrm{i}/2, -R+\mathrm{i}/2$ i $-R$ i useu el resultat per calcular $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\cos x\, dx$. (Solució: $\sqrt{\pi}/\sqrt[4]{\mathrm{e}}$.)

26. Sigui $g(x)$ una funció holomorfa en $\mathbb{C}\setminus F$, on $F = \{z_1, \ldots, z_m\} \subset \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$ és un conjunt finit de pols, i tal que $\lim_{|z|\to+\infty} |zg(z)| = 0$. Integreu $f(z) = g(z)\cot(\pi z)$ i $f(z) = g(z)\mathrm{cosec}(\pi z)$ en el camí tancat γ_N definit pel quadrat de vèrtexs $(N+\frac{1}{2})(\pm 1 \pm \mathrm{i})$, $N \in \mathbb{N}$. Proveu que:

$$\begin{aligned}
\sum_{n\in\mathbb{Z}} g(n) &= -\pi \sum_{j=1}^{m} \mathrm{Res}(g(z)\cot(\pi z); z_j),\\
\sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n g(n) &= -\pi \sum_{j=1}^{m} \mathrm{Res}(g(z)\mathrm{cosec}(\pi z); z_j).
\end{aligned}$$

27. Utilitzeu el problema anterior per provar les identitats següents:

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

(iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{\pi^2}{24}$.

(iv) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$.

(v) $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n+a)^2} = \frac{\pi^2}{(\sin \pi a)^2}$ $(a \notin \mathbb{Z})$.

(vi) $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2 - a^2} = -\frac{\pi}{a} \cot(\pi a)$ $(a \notin \mathbb{Z})$.

28. Calculeu $\displaystyle\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz$ per a la funció $f(z)$ donada en cada cas i en el camí tancat C que s'indica (sempre orientat positivament):

(i) $f(z) = z^6 - 2\mathrm{i}z^4 + (5-\mathrm{i})z^2 + 10$, sent C tal que tots els zeros de f hi són a l'interior.

(ii) $f(z) = z^2 + z$, sent $C = \partial D_2(0)$.

(iii) $f(z) = \sin z$, sent C el rectangle de vèrtexs $10 + \mathrm{i}, -4 + \mathrm{i}, -4 - \mathrm{i}$ i $10 - \mathrm{i}$.

29. Sigui $f(z)$ una funció holomorfa en el disc unitat $D_1(0)$ i contínua en $\bar{D}_1(0)$ que compleix que $|z| = 1 \implies |f(z)| < 1$. Proveu que l'equació $f(z) = z$ té una única solució en $D_1(0)$.

30. Si $a > \mathrm{e}$ proveu que l'equació $az^n = \mathrm{e}^z$ té n solucions en el disc unitat $D_1(0)$.

31. Sigui $p(z) = 4z^4 + 2(\mathrm{i}-1)z + 1$.

(i) Vegeu que els quatre zeros de $p(z)$ estan dins el disc unitat $D_1(0)$.

(ii) Vegeu que tres dels zeros del $p(z)$ estan en l'anell circular $A = \{\frac{1}{2} < |z| < 1\}$.

32. Proveu que totes les arrels de $z^7 - 5z^3 + 12$ estan en l'anell circular $A = \{1 < |z| < 2\}$.

33. Demostreu que la funció $2 + z^2 - e^{\mathrm{i}z}$ només té un zero en el semiplà superior.

34. Sigui $\lambda > 1$ real. Demostreu que l'equació $z + e^{-z} = \lambda$ té una única solució amb part real estrictament positiva, i que aquesta solució és de fet real.

35. $\forall R > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $P_n(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots + \frac{z^n}{n!}$ té les arrels en el complementari de $D_R(0)$, $\forall n \geq n_0$.