Equacions en derivades parcials

FME-UPC

2020-21

1. Equacions de primer ordre

• L'eq. lineal del transport

(1)

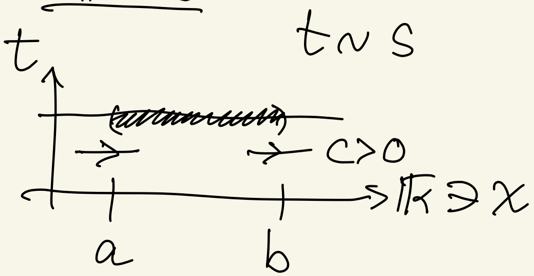
Model matemàtic

$u = u(x,t)$, $x \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$

$\hookrightarrow$ posició en un tub infinit i molt estret $\rightsquigarrow \mathbb{R}$

u = densitat o concentració d'una substància, al punt x a temps t, que evoluciona per pur trasport: hi ha una corrent a velocitat constant $c \in \mathbb{R}$ en el tub

Unitats: $x \sim m$ $\quad u \sim g/m$
$t \sim s$ $\quad c \sim m/s$



Quantitat o massa de substància a (a,b) a temps t $= \displaystyle\int_a^b u(x,t)\,dx$

La seva variació temporal és

$$\frac{d}{dt}\int_a^b u(x,t)\,dx = -c\,u(b,t) + c\,u(a,t)$$

1 2

$$\underbrace{\frac{g}{\cancel{m}}\cdot\cancel{m}}_{g/s} = \underbrace{\cancel{m}/s\cdot g/\cancel{m}}_{g/s}$$

:) Conservació de massa (escrita integralment)

$\Downarrow$

EDP:

$$\int_a^b u_t(x,t)\,dx = \frac{d}{dt}\int_a^b u(x,t)\,dx$$

$$= -c\,u(b,t) + c\,u(a,t)$$

$$= -\int_a^b c\,u_x(x,t)\,dx.$$

$$\int_a^b (u_t + c u_x)(x,t)\,dx = 0 \qquad \forall t \quad \forall a<b$$

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b (u_t + c u_x)(x,t)\,dx = 0$$

$$\parallel$$

$$\fint_a^b (u_t + c u_x)(x,t)\,dx$$

$$\boxed{\fint_E f\,d\mu := \frac{1}{\mu(E)}\int_E f\,d\mu}$$

↗ mitjana de $u(\cdot,t)$ a (a,b)
"promig" ; "average"

$$0 = \frac{1}{b-a}\int_a^b (u_t + cu_x)(x,t)\,dx \xrightarrow[\substack{b \downarrow a \\ a \text{ fixada}}]{}$$

$$\xrightarrow[b\downarrow a]{} (u_t + cu_x)(a,t)$$

i.e., $\frac{1}{h}\int_a^{a+h} (u_t + cu_x)(x,t)\,dx \xrightarrow[h\downarrow 0]{}$

($b = a+h$, $h>0$ petita) $\rightarrow (u_t+cu_x)(a,t)$

Tma fonamental del càlcul

(derivada de la funció primitiva és la funció original)

$$(u_t + cu_x)(a,t) = 0 \quad \forall a \; \forall t$$

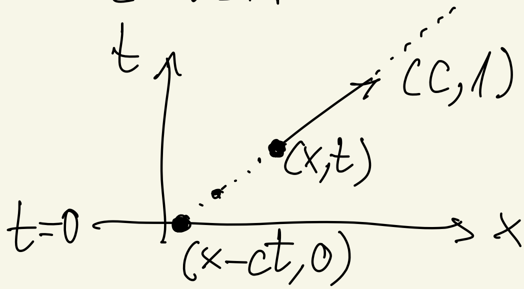
$\underline{u_t + cu_x = 0}$: eq. del transport lineal a velocitat ctt.

Resolem-la. El problema a resoldre és el problema de valors inicials o de Cauchy:

$u = u(x,t)$, $x \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} u_t + c u_x = 0, & x \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = g(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

on $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és una funció donada (densitat inicial *t=0* de la substància)



La derivada direccional de u en la direcció $(c,1)$ al pla (x,t) val

$$\nabla u \cdot (c,1) = (u_x, u_t) \cdot (c,1) = c u_x + u_t = 0$$

en tots els punts (x,t) $\qquad (c u_x + u_t)(x,t)$

Sobre la recta que passa per (x,t) amb direcció $(c,1)$, la funció u és constant $\Rightarrow$

$$\underline{u(x,t)} = u(x-ct,0) = \underline{g(x-ct)}$$

Classe 4. 11/2/21

Proposició Donada $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe $C^1(\mathbb{R})$, existeix una única solució $u\in C^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ del pb de Cauchy (5)

$$\begin{cases} u_t + c u_x = 0, & x\in\mathbb{R}, t\in\mathbb{R} \\ u(\cdot,0) = g & a\ \mathbb{R}. \end{cases}$$

A més, ve donada per

$$u(x,t) = g(x-ct)$$

Demostració: • **Existència**: Només haig de comprobar que $u(x,t) := g(x-ct)$ resol el pb de Cauchy; $u(x,0) = g(x-c\cdot 0) = g(x)$ ✓

$$u_t = g'(x-ct)\cdot(-c), \quad u_x = g'(x-ct)$$

$$u_t + c u_x = 0 \quad ✓$$

• **Unicitat**: És el que hem argumentat abans.

$$(x,t) + s\,(c,1) = (x+sc, t+s), \quad s\in\mathbb{R}$$

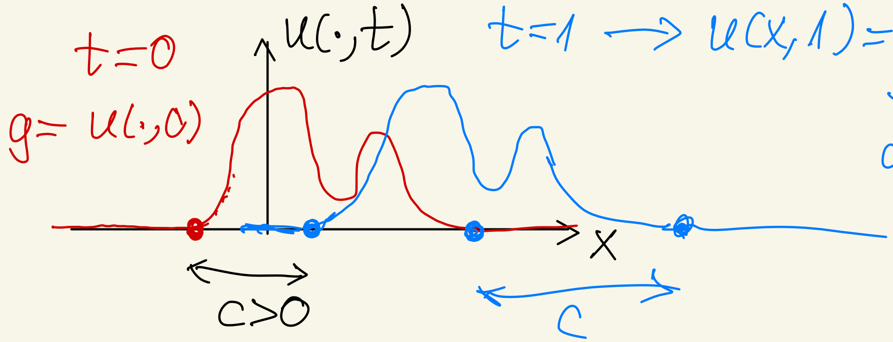
Considero $\varphi(s) := u(x+sc, t+s)$

[(x,t) donat] $\quad \varphi'(s) \overset{EDP}{=} \dots = 0 \quad \forall s\in\mathbb{R}$

$$\Rightarrow \varphi = ct \Rightarrow \underset{u(x,t)}{\underset{\shortparallel}{\varphi(0)}} = \underset{u(x-ct,0)}{\underset{\shortparallel}{\varphi(-t)}}$$

$$u(x-ct,0) \overset{\text{Cond. inicial}}{=} g(x-ct) \quad \blacksquare$$

6



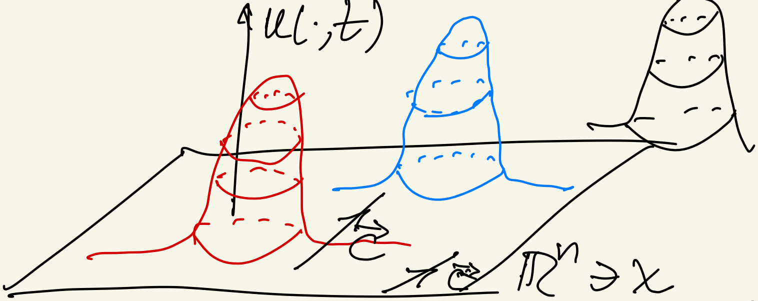
A aquestes solucions, les que són de la forma $u(x,t)=g(x-ct)$, se'ls anomena <u>ones viatgeres</u> ("travelling waves")

<u>Nota</u>: Si ara $x\in\mathbb{R}^n$ i tinc $\vec{c}\in\mathbb{R}^n$ i la substància a velocitat ct $\vec{c}\in\mathbb{R}^n$ a l'espai, puc considerar el mateix pb i obtinc el pb de Cauchy:

$$\begin{cases} u_t+\vec{c}\cdot\nabla u=0, & x\in\mathbb{R}^n, t\in\mathbb{R} \quad (\nabla=\nabla_x) \\ u(x,0)=g(x), & x\in\mathbb{R}^n \end{cases}$$

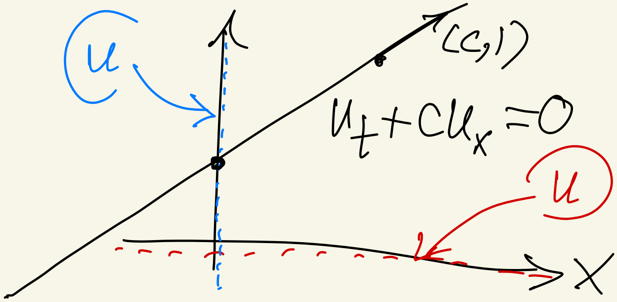
La mateixa proposició és certa i, en particular,

$$u(x,t)=g(\underset{\mathbb{R}^n}{x}-\underset{\mathbb{R}^n}{\vec{c}}\,\underset{\mathbb{R}}{t}).$$



"La densitat no canvia de forma, simplement es traslada en l'espai".

Nota: Com veureu a pbs, a vegades la condició inicial és diferent de l'anterior a $t=0$. Per exemple:



en blau un pb de valors inicials diferent seria

$$\begin{cases} u_t + cu_x = 0, & x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R} \\ u(0,t) = h(t), & t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

donada

S'ha d'analitzar de nou i podria no tenir $\exists!$

En aquest cas també hi ha $\exists!$

Classe 5. 12/2/21

- Les rectes paral·leles al vector $(c,1)$, on la solució és constant, s'anomenen <u>rectes característiques</u>.
- Si alguna recta característica interseca la corba on prescrivim la condició inicial en més d'un punt, podria no haver existència de solució.

Transport amb velocitat variable $c(x,t) \in \mathbb{R}$.

$$c = ct \longrightarrow u_t + c u_x = 0$$

Temptació: $u_t + c(x,t)\, u_x = 0$

$$\text{“}\ \frac{u_t}{u_x} = \frac{\cancel{\partial u}/\partial t}{\cancel{\partial u}/\partial x} \overset{\text{“ ”}}{=} \frac{\partial x}{\partial t} \text{“=”} c(x,t)\ \text{”}$$

¡ :(

incorrecte. De fet, l'equació no és aquesta.

Model:

$$\frac{d}{dt}\int_a^b u(x,t)\,dx = -c(b,t)\,u(b,t) + c(a,t)\,u(a,b)$$

$$= -\int_a^b \big(c(x,t)\,u(x,t)\big)_x\,dx$$

$$\| $$

$$\int_a^b u_t(x,t)\,dx \longrightarrow \int_a^b \{\ \}\,dx = 0, \text{ ara } \frac{1}{b-a}$$

i faig $b \to a$

$$u_t + (c(x,t)\,u)_x = 0$$

Escrita alternativament:

$$u_t + c\,u_x + c_x\,u = 0$$

$u_t + c(x,t)u_x + c_x(x,t)u = 0$

terme d'ordre 1

terme d'ordre 0

Pb de Cauchy:

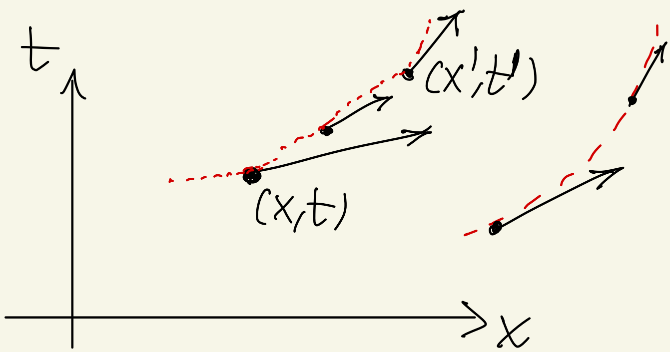
$$\begin{cases} u_t + (c(x,t)u)_x = 0 & x\in\mathbb{R},\ t\in\mathbb{R} \\ u(\cdot,0) = g & \text{a tot } \mathbb{R} \end{cases}$$

Resolució: Mètode de les característiques.

Considerar derivades direccionals:

$$\underbrace{u_t + c\,u_x}_{} + c_x u = 0$$

$\longrightarrow$ Direcció $(c(x,t),1)$: camp vectorial



He de resoldre l'EDO associada a aquest camp vectorial:

$(x(s), t(s))$ corbes característiques resolen: 10

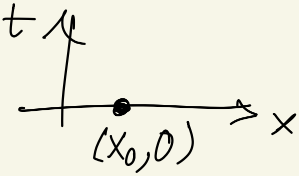
$$\begin{cases} \frac{dx}{ds} = x' = c(x,t) \\ \frac{dt}{ds} = t' = 1 \end{cases}$$

$\uparrow$

condicions inicials

$$\begin{cases} x(0) = x_0 \\ t(0) = 0 \end{cases}$$

EDOs no lineal però autònom $\longrightarrow$ les corbes característiques <u>no es tallen</u> al pla (x,t)

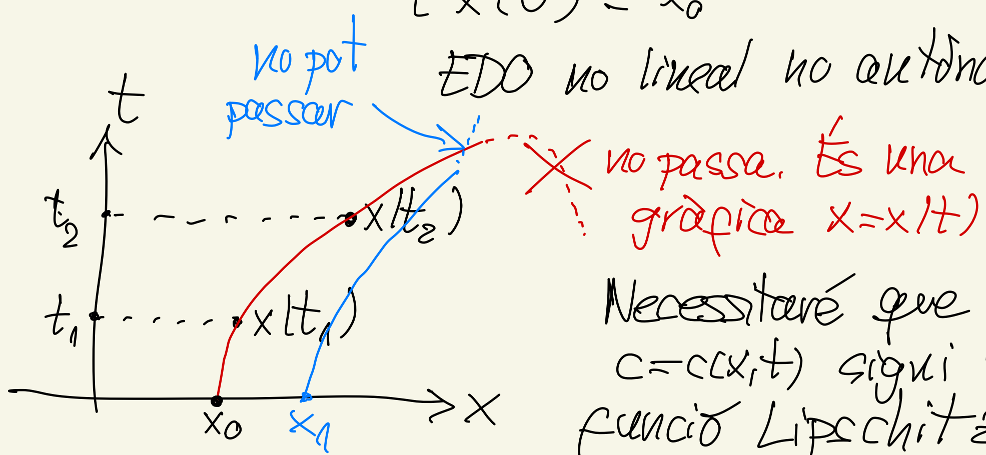


2^a eq: $t = t(s) = s \longrightarrow$ Poso 1^a eq.

$x(s) = x(t) \rightsquigarrow$ $\underline{x' = c(x,t)}$

$$\begin{cases} x'(t) = c(x(t), t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

EDO no lineal no autònoma



Necessitaré que $c = c(x,t)$ sigui una funció Lipschitz de (x,t).

Restringeixo la funció u als seus valors sobre la característica que passa $(x_0,0) \rightarrow$ obtinc una funció d'una variable real:

$$\varphi(s) = \varphi(t) := u(x(t),t)$$

$$\frac{d}{dt}\varphi(t) = \varphi'(t) = u_x(x(t),t)\cdot \underbrace{x'(t)}_{\substack{\| \\ c(x(t),t)}} + u_t(x(t),t)\cdot 1$$

EDO

$$= u_t + c(x,t)\,u_x$$

$$= -c_x(x,t)\,u$$

EDP

$$= -\underbrace{c_x(x(t),t)}_{\substack{\| \\ \alpha(t)}}\,\underbrace{u(x(t),t)}_{\substack{\| \\ \varphi(t)}} =: -\alpha(t)\varphi(t)$$

Nova EDO: lineal (1^{er} ordre, no autònoma)

$\exists\, \forall$ temps

$$\begin{cases} \varphi' = -\alpha(t)\varphi \\ \varphi(0) = u(x_0,0) = g(x_0) \end{cases}$$

x_0 està fixat, arbitrari

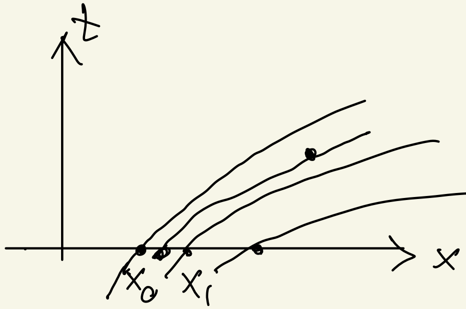
$$(\log\varphi)' = \frac{\varphi'}{\varphi} = -\alpha(t) \quad \& \int$$

$$\varphi(t) = a\, e^{-\int_0^t \alpha(s)ds}$$

$\hookrightarrow$ la trobaré per satisfer c.i. $a = \varphi(0) = g(x_0)$.

Classe 6. 15/2/21

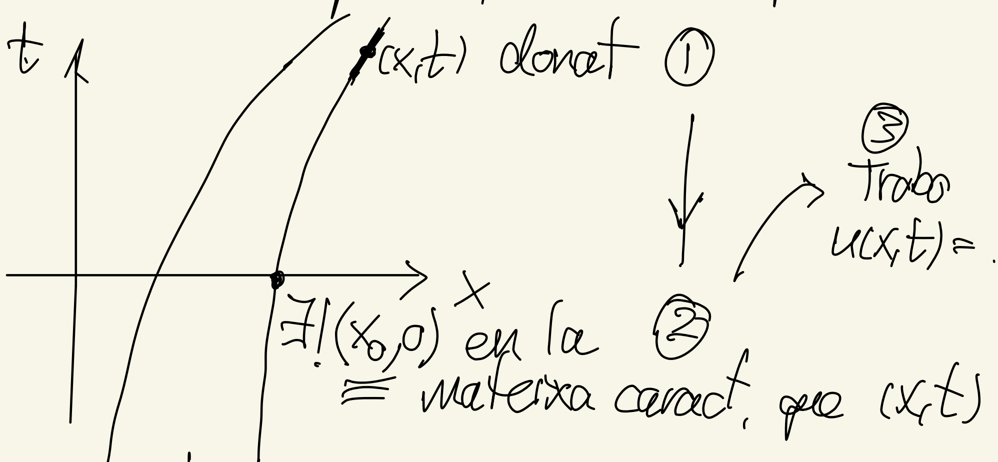
He trobat la solució sobre tota la corba característica que passa per $(x_0,0)$.



Queda determinar quin obert del pla omplen les característiques que emanen de punts de l'eix de les x.

En aquest obert puc garantir $\exists!$ de l'EDP satisfent la condició inicial. Prenc $c \in C^1(\mathbb{R}^2)$.

1er cas :) : Suposem que c és globalment Lipschitz. $\Rightarrow \exists!$ de solució per l'EDO de les característiques per tot temps t.

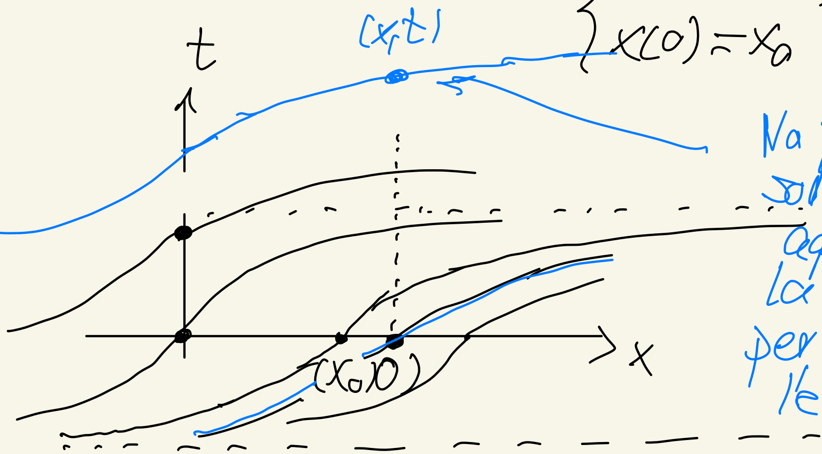


$\exists!$ u del Pb. de Cauchy a tot $\mathbb{R}^2$.

2nd cas ¡¡ :) $c=c(x,t)$ només és localment Lipschitz i, en conseqüència, pot passar que les caract. que surten de l'eix de les x no omplin tot $\mathbb{R}^2$ però només una certa regió oberta. En aquest obert tindré $\exists!$ de la EDP i la condició inicial.

Exemple-exercici : $c=c(x,t)=c(x)$

$\hookrightarrow \begin{cases} x'=c(x) \\ x(0)=x_0 \end{cases}$ Autònoma



No puc calcular la solució de l'EDP en aquest punt donés la caract. que passa per (x,t) no talla l'eix de les x.

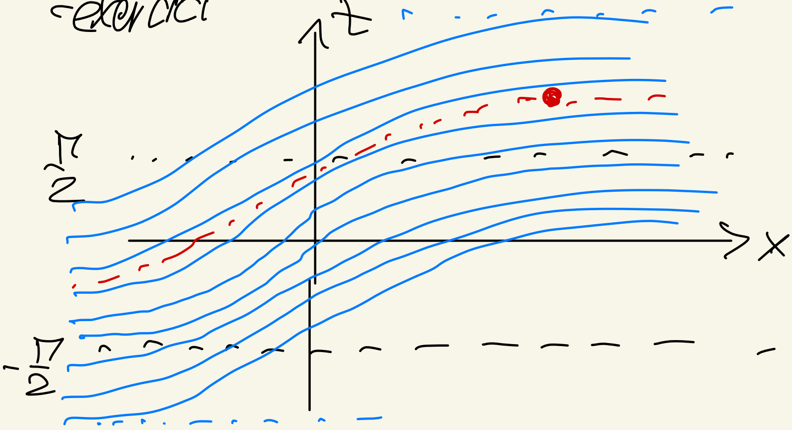
Exemple-exercici : $c(x)=x^2+1$. Resoleu tot explícitament

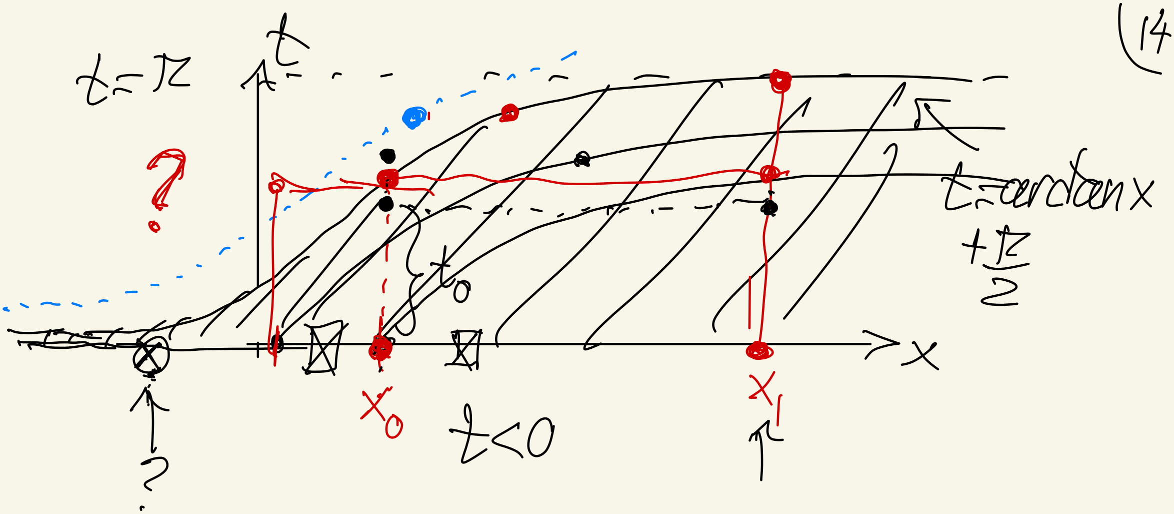
$\downarrow$

$t=b+\arctan x$

$\equiv$

$b=$ ctt. arbitrària





Per temps $t>0$, $\exists!\, u$ del pb de Cauchy a l'obert $\{(x,t)\in\mathbb{R}^2 : 0\le t<\frac{\pi}{2}+\arctan x\}$

<u>Exercici</u>: $A\subset\mathbb{R}^n$ i $c: A\subset\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1.
$\quad$ L obert convex

c és Lipschitz (a A) $\Leftrightarrow$ $|\nabla c|$ és una funció acotada a A.

- Si A no és convex, només una implicació de les dues és certa. Quina? Doneu algun exemple.

Terminologia :

- c és (globalment) Lipschitz és diu quan $A=\mathbb{R}^n$, $c:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, i c és Lipschitz

(Def: $\exists C \geq 0$ tq $|c(x)-c(y)| \leq C|x-y|$. $\forall x,y \in \mathbb{R}^n$)

$c:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$

- c és localment Lipschitz $\overset{\text{Def}}{\iff}$ $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$ $\exists r_0>0$ i $c_{|B_{r_0}(x_0)}$ és Lipschitz.

Exemple: $c:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$c(x)=x^2+1$

$c'=2x$

$|c'|=2|x|$ — no està acotada a tot $\mathbb{R}$ → c no és (globalment) Lipschitz

→ està acotada en intervals acotats

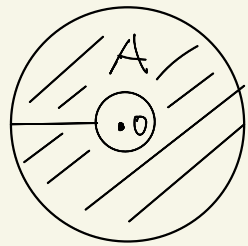
→ c és localment Lipschitz.

Un altre exemple: $c(x)=\dfrac{x^3}{x^2+1}$ — glob. Lipsch.

$(c'\in L^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow \exists!$ EDP a tot $\mathbb{R}^2$

Classe 7. 17/2/21

- El contraexemple a "$|\nabla u| \in L^{\infty}(A) \Rightarrow$ u Lipsichitz a A".



$(x,y) = re^{i\theta}$

$$u(x,y) = \arctan \frac{y}{x} = \theta$$

$$|\nabla u(x,y)| = \frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

<u>Exercici</u>: Demostreu aquesta igualtat sense "calcular" cap derivada, de dues maneres diferents.

- Hem explicat el que és "<u>transport</u>" discretitzant la condició inicial i entenent l'evolució en el temps com un sistema mecànic de boles de diferents tamanys que es moven però no es toquen ni canvien de tamany.

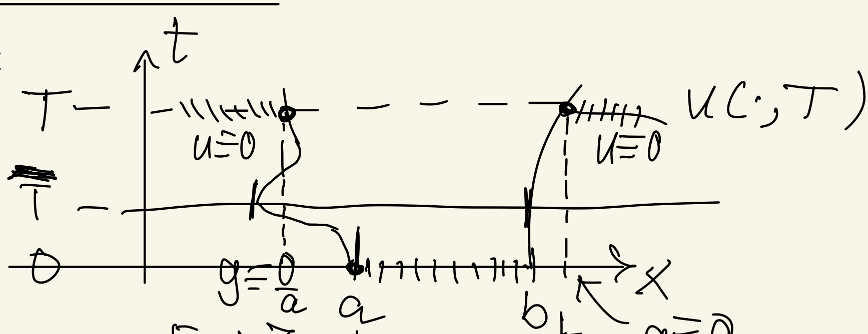
Proposició (Conservació de massa) Suposem que $c(x,t)$ és globalment Lipschitz. Donada $g \in C^1(\mathbb{R})$ (la condició inicial) amb suport compacte, sigui $u \in C^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ la (única) sol. del pb de Cauchy $u_t + (c(x,t)\cdot u)_x = 0$.

Llavors, per tot temps $t \in \mathbb{R}$, la funció $u(\cdot,t)$ també té suport compacte i

$$\int_{\mathbb{R}} u(x,t)\,dx = \int_{\mathbb{R}} u(x,0)\,dx.$$

Classe 8. 19/2/21

Demo:



$\operatorname{supp} g \subset [a,b]$

Donat un temps $T \in \mathbb{R}$, considero les corresp. caract. $\rightsquigarrow$ defineixo $\bar{a}$ i $\bar{b}$. Afirmació:

Llavors el $\operatorname{supp} u(\cdot,T) \subset [\bar{a}, 5]$.

Sigui $(\exists)$ $R>0$ tq

$$\operatorname{supp} u(\cdot,t) \subset [-R,R] \quad \forall t \in [0,T).$$

Finalment, la massa es conserva. Hi ha dues demostracions: $t \in [0,T] \longrightarrow$

1ª) (la "dolenta") Calcularé $\int_{\mathbb{R}} u(x,T)\, dx =$

$= \int_{-R}^{R} u(x,T)\,dx$ amb la fórmula del canvi de variables. $\underline{\text{Jacobià} = \boxed{\ldots}}$ $\longleftarrow$ a demostrar usant les dues EDOs.

[1ª variació de l'EDO / Form. de Liouville $\rightarrow$] $\underline{\text{Exercici}}$ $\longrightarrow$

2ª) (la "bona": perquè és més fàcil, però sobretot perquè usa un mètode que serveix per altres EDPs on no hi haurà característiques)

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}} u(x,t)\,dx = \ldots\ldots$$

EDP

$$\frac{d}{dt}\int_{-R}^{R} u(x,t)\,dx = \int_{-R}^{R} u_t(x,t)\,dx \overset{\text{EDP}}{=}$$

$$= -\int_{-R}^{R} \big(c(x,t)\,u(x,t)\big)_x\, dx$$

$$= -\left[c(\cdot,t)\, u(\cdot,t) \right]_{x=-R}^{R} = 0 - 0 = 0$$ (19

$u(\pm R, t) = 0$

$\square$

El mateix mètode de les caract. (no hi ha cap novetat!!) resol la EDP lineal de 1er ordre més general possible:

$$\underbrace{a(x,t) u_t + \boxed{b(x,t) u_x}}_{\text{Termes de transport}} + c(x,t) u = f(x,t)$$

$1 = a(x,t)$

Termes de transport

Terme de convecció

terme font (source term)

Té unitats $\frac{g}{m \cdot s}$; terme de la dreta

terme d'ordre zero. El penso com una font però que depèn de la concentració en el punt

$f > 0$ source
$f < 0$ sink

$c>0$: <u>terme d'absorció</u>

$$u_t = \ldots = c(x,t)\,u$$

<0 $(u\downarrow)$ $\longrightarrow$ $c>0$, $u>0$

absorció proporcional a la quantitat d'aigua que hi ha.

$c<0$: <u>terme de reacció</u> (crealimentació)

<u>classe 9</u> . <u>22/2/21</u>

EDPs de 1er ordre no lineals (exemple) al pla: mètode de les característiques (modificat) (el mateix mètode serveix a $\mathbb{R}^n$).

→ La forma general de l'EDP 1er ordre al pla <u>quasi-lineal</u>:

$$a(x,t,u)\,u_t + b(x,t,u)\,u_x = f(x,t,u)$$

Exemple d'una no quasi-lineal:

$$u_t = \frac{u_x}{\sqrt{1+u_x^2}}$$

Pot haver-hi intersecció de característiques: shock, XOCS

L'exemple important d'EDP 1er ordre quasi-lineal és l'eq. de Burgers: o equació del trànsit

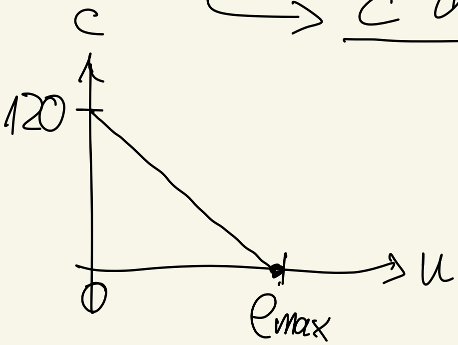
u = concentració de cotxes en una autopista d'un carril

$$u_t + \big(\underbrace{c(x,t,u)}_{\text{velocitat}}\,u\big)_x = 0 \qquad \cancel{u_t + c(x,t)u_x = 0}$$

velocitat $\begin{cases} v_{max} = 120 \\ \text{més petita quanta més densitat de cotxes hi hagi} \end{cases}$

hi aniré quan "estic sol"

$\hookrightarrow$ c depèn de u



$$c = c(u) = \frac{120}{\rho_{max}}\,(\rho_{max} - u)$$

$$\begin{cases} u_t + \left(\frac{120}{\rho_{max}} (\rho_{max} - u) \cdot u \right)_x = 0 \\ v_t + \left(\frac{1}{2} v^2\right)_x = 0 \quad ; \quad \boxed{v_t + v v_x = 0} \\ u_t + \frac{120}{\rho_{max}} \underbrace{(\rho_{max} - 2u)}_{v} u_x = 0 \end{cases}$$

Avions supersonics (shock wave)

- Equació lineal de transport no homogènia (amb termes font)

$$\begin{cases} u_t + c\, u_x = f(x,t) & x \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R} \\ u(\cdot, 0) = g & a\ \mathbb{R} \end{cases}$$

$c \in \mathbb{R}$ ct.

Classe 10. 24/2/21

Més generalment

$$\begin{cases} u_t + \vec{c} \cdot \nabla u = f(x,t) & ,\ x \in \mathbb{R}^n,\ t \in \mathbb{R} \\ u(\cdot, 0) = g & a\ \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (PNH)$$

$$\boxed{u(x,t)} = \underline{g(x-\vec{c}t)} + \int_0^t \underline{f(x-\vec{c}(t-s),s)\,ds} \quad (*).$$

Exercici: Trobeu-la usant el mètode de les caract.

Proposició. Donades $g\in C^1(\mathbb{R}^n)$ i $f\in C^1(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R})$, existeix una única solució $u\in C^1(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R})$ del (PNH). A més, ve donada per la fórmula de Duhamel $(*)$.

Demo: Unicitat: u & $\tilde{u}$ $\overset{\text{lineal}}{\rightsquigarrow}$ $V := u-\tilde{u}$ resol el pb homogeni ($f\equiv 0$ i $g\equiv 0$) $\underset{\text{mèt. caract.}}{\overset{\text{Prop}}{\rightsquigarrow}}$ $v\equiv 0$.

Existència: Exhibeixo una, la $(*)$.

Exercici: comprovar l'EDP a partir de $(*)$.

$u_x = \dots$

$u_t = \dots$ demostreu la fórmula de derivació

$$\frac{d}{dt}\left[\dots \int_0^{t+h} \dots t+h \dots ds\right] \text{ usant } \frac{d}{dt} = \text{lim quoc. incr.}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\int_0^{t+h}\dots t+h \dots - \int_0^t \dots t \dots \pm \int_0^t \dots t+h \dots\right)$$

Escrivim la fórmula de manera més curta amb un objecte que és útil: és el fluxe en

EDOs i semigrup en EDPs.

$\hookrightarrow$ La EDP homogènia i considero el pb. Cauchy

Per $u_t + c u_x = 0$, $c \in \mathbb{R}$, $u(\cdot,0) = g$ a $\mathbb{R}$, el semigrup a temps t (fixat) és: $\leftarrow$ condició inicial

$$T_t : C^1(\mathbb{R}) \longrightarrow \boxed{C^1(\mathbb{R})}$$

$$u(\cdot,0) = g \longmapsto u(\cdot,t)$$

E = espai vectorial

T_t endomorfisme = apl. lineal de $E \to E$

$$\underbrace{g + \tilde{g}}\xrightarrow[\text{sol}]{} u + \tilde{u}$$

$$T_t(g+\tilde{g}) = T_t g + T_t \tilde{g}$$

$T_t(g) = T_t g$

$A(X) = AX$

En aquest cas,

$$\left| \; \underline{(T_t g)(x)} = u(x,t) = \underline{g(x-ct)} \right.$$

Satisfà la propietat algebraica dels grups:

Prop. $\forall t,s \in \mathbb{R} \Rightarrow T_s T_t = T_{t+s} \; (= T_{s+t})$

$$T_s T_t = T_s \circ T_t$$

Demo: Dues:

(1) La "dolenta" s'aprofita de tenir la solució de manera explícita:

$$(T_t g)(x) = g(x-ct)$$

$$((T_s T_t) g)(x) = (T_s T_t g)(x) = \left(T_s\left(\underline{T_t g}\right)\right)(x)$$

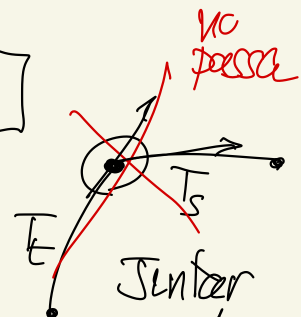
$$= (T_t g)(x-cs) = g((x-cs)-ct)$$

$$= g(x-c(t+s)) = (T_{t+s} g)(x) \qquad \square$$

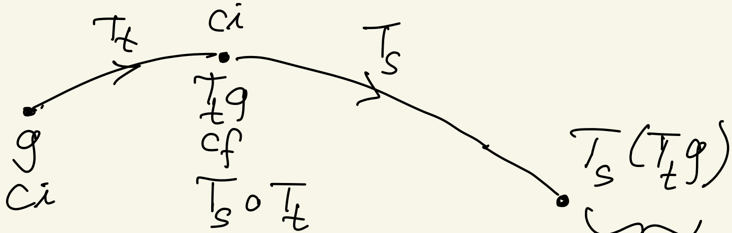
(2) La demo bona. Usa només la unicitat i l'existència, així com que l'eq. és autònoma.

[$\longrightarrow$ Per tant el mateix argument serveix per l'EDP:

$$u_t + (c(x)\cdot u)_x = 0 \;]$$



Juntar $\in C^1$ en el temps



$T_s(T_t g)$ és una funció de classe C^1 en t gràcies a l'eq. i resol per tant l'eq. a temps $t+s$ $\longrightarrow$ $u_t = \ldots\ldots$

$\downarrow$ UNICITAT

$T_{t+s}\, g \qquad \square$

- Per algunes EDPs, (exemple, eq difusió) només es poden resoldre per temps positius $t \geq 0$: $T_s T_t = T_{t+s}$ $\forall t \geq 0$ $\forall s \geq 0$

  $\hookrightarrow$ <u>semi</u>-grup

- <u>Nota</u> : $C^1(\mathbb{R}^n) \circlearrowleft T_t$

  - És un espai vectorial
  - no és un espai de Banach amb les normes habituals

$\hookrightarrow$ $C^1_b(\mathbb{R}^n)$ (b: bounded)

$\llcorner$ espai de Banach de les funcions de classe C^1 a tot $\mathbb{R}^n$ acotades i amb totes les derivades parcials (d'ordre 1) acotades amb la norma

$$\|g\|_{C^1_b(\mathbb{R}^n)} := \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \{ |g(x)| + |\nabla g(x)| \}.$$

$C^1(K) = \cancel{C^1_b(K)}$

K és un compacte de $\mathbb{R}^n$

classe 11. 26/2/21

<u>Nota</u> : La prop. del semi-grup també és certa per tota eq. d'evolució autònoma, inclús

no-lineal, sempre que tingui una tma d'exist. i unicitat.

Exemple (de EDOs): $\quad \underbrace{u_t = u^2 =: F(u)}$

$\left(u_t = u_x =: F(u) \right)$
$u = u(x,t) = (u(x))(t)$

- $u = u(t)$

$$\begin{cases} u_t = u^2 \\ u(0) = g \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\left(\frac{-1}{u}\right)_t = \frac{u_t}{u^2} = 1 \; ; \quad \frac{-1}{u} = t + c \; ; \quad u = \frac{-1}{t+c}$$

$$\boxed{u = \frac{g}{1-gt}} = \frac{1}{\frac{1}{g} - t}$$

$$\boxed{T_t g = \frac{g}{1-gt}}$$: semigrup $\underbrace{\text{no és lineal}}$

i.e., T_t no és lineal

$$T_t(g + \tilde{g}) \neq T_t g + T_t \tilde{g}$$

$$T_s \circ T_t = T_{t+s}$$

Comprobar-ho:

$$T_s(\underbrace{T_t g}) = \frac{T_t g}{1 - (T_t g) \cdot s}$$

$$= \frac{\frac{g}{1-gt}}{1 - \frac{g}{1-gt} \cdot s} = \frac{g}{1-gt-gs} = \frac{g}{1-g(t+s)}$$

$$= T_{t+s}\, g \qquad \square$$

Darrera tota EDO o EDP autònoma hi ha una estructura algebraica: un (semi)grup

Eg transport: $T_t : C_b^1(\mathbb{R}^n) \longrightarrow C_b^1(\mathbb{R}^n)$

Espai de Banach

Analogia en EDOs de la fòrmula de Duhamel: fòrmula de variació de les constants. En efecte:

AUTÒNOMA

Notació d'EDOs: $x' = Ax$, $x_t = Ax$ $\Big\}$ $x = x(t) \in \mathbb{R}^m$, A matriu $m \times m$

$x' = Ax + f(t)$; $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$

$u' = Au$, $u_t = Au$ homogènia

Solució: $u(t) = e^{At} g \in \mathbb{R}^m$, $= T_t g$

$u_t = Au + f(t)$ edo lineal no-homogènia

NO AUTÒNOMA !!!

$\not\equiv$

$\Updownarrow$

[$u_t = Au + f(u)$: edo no-lineal]

$e^{As} e^{At} = e^{A(t+s)}$

No-homog: mètode de variació de les ctts:

Pretén que la ctt depèn del temps: (són la g)

$u(t) = e^{At} \underline{\underline{g(t)}}$ vull que resolgui la no-homogènia

?

"Ansatz" ("candidat")

Imposes l'equació

$$u_t = \cancel{Ae^{At} g(t)} + e^{At} g'(t) =$$

$$= Au + f(t) = \cancel{Ae^{At} g(t)} + f(t)$$

$$e^{At} g'(t) = f(t) \quad ; \quad g'(t) = e^{-At} f(t)$$

$$g(t) = g + \int_0^t e^{-As} f(s)\, ds$$

Ansatz és bo

$$u(t) = e^{At} g + e^{At} \int_0^t e^{-As} f(s)\, ds$$

$$= e^{At} g + \int_0^t e^{A(t-s)} f(s)\, ds$$

$$= T_t g + \int_0^t T_{t-s}(f(s))\, ds$$

$f(s) \in \mathbb{R}^m$

(fórmula de Duhamel)

Torno a EDP transport:

$$u(x,t) = g(x-ct) + \int_0^t f(x-c(t-s), s)\, ds$$

$$= (T_t g)(x) + \int_0^t (T_{t-s} f(\cdot, s))(x)\, ds$$

$$= \left(T_t g + \int_0^t T_{t-s} f(\cdot,s)\, ds \right)(x)$$

$f(\cdot,s) \in C_b^1(\mathbb{R}^n)$

Exercici:

$$\begin{cases} u_t = -(c(x)u)_x + f(x,t) \\ u(\cdot,0) = g \in C_b^1(\mathbb{R}) = E \end{cases}$$

eq. d'evolució autònoma homogènia

trobar explícitament el semi-grup

$T_t g = \ldots$

Fòrmula de Duhamel és correcte

$\hookrightarrow u(x,t) = \ldots$

$$u_t = Au + f(t)$$

$u = u(t)$; $u : \mathbb{R} \longrightarrow E = C_b^1(\mathbb{R}^n)$

$\hookrightarrow$ EDO amb valors a espais de Banach (de funcions)

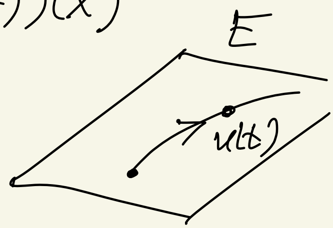
EPPs d'evolució són?

Classe 12. 1/3/21

El punt clau és entendre les funcions $u = u(x,t)$, $x \in \mathbb{R}^n$, com funcions només del temps t però a valors en un espai de Banach E fet per funcions només de x:

$$\begin{array}{rcl} u : \mathbb{R} & \longrightarrow & E \quad \text{espai de Banach} \\ \Psi & & \Psi \\ t & \longmapsto & u(t) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \\ & & \qquad\quad x \longmapsto (u(t))(x) \end{array}$$

$$\underline{(u(t))(x) := u(x,t)}$$



Transport: $E = C_b^1(\mathbb{R}^n)$

$\hookrightarrow$ miro la EDP com una EDO per trajectòries $\{u(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ a E

$$u_t = -c u_x \quad : \text{lineal}$$

$$u' = \frac{du}{dt} = u_t = Au$$

A és una aplicació definida en funcions de l'espai E

(pensar $v = u(t)$)

En aquest cas: $v \in E \longrightarrow v = v(x)$

$Av = -cv_x \quad (n=1) \quad (-\vec{c}\cdot\nabla v)$

L lineal

<u>Dificultats</u>

$1^a)$ $E = C^1_b(\mathbb{R})$ i $A = -c\partial_x$

$\Downarrow$ v: Llavors $-cv_x$ no és una funció de classe C^1. Només és C^0.

El camp lineal de l'EDO, A, no és un endomorfisme, i.e., no envia l'espai E en si mateix.

$2^a)$ Caràcter Lipschitz $\overset{A \text{ lineal}}{\iff}$ continua

$A: E \to F(=E) \iff$ globalment Lipschitz $\iff$

$$\underbrace{\|Av\|_E}_{??} \le \underset{\exists}{C} \, \|v\|_E \quad \forall v \in E$$

Suposem que

$$v \in C_b^\infty(\mathbb{R}) \Rightarrow Av = -cv_x \in C_b^\infty(\mathbb{R})$$

L no és espai de Banach

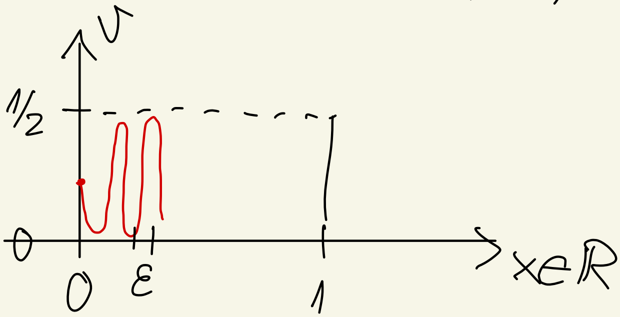
$$\| -c v_x \|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq C_1 \|v\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \ ?$$

$$\| v_x \|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq C \|v\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \ ?$$

$$\| v_x \|_{L^\infty([0,1])} \leq C \underbrace{\|v\|_{L^\infty([0,1])}}_{= 1/2}$$

$\exists$?

Resposta: no $\exists$ tal ctt



ex: $v(x) = \sin\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ $\quad \varepsilon \to 0$ cla

$\|v\|_\infty = 1 \quad \forall \varepsilon$

$v_x = \frac{1}{\varepsilon}\cos\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$, $\|v_x\|_\infty = \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \nexists C$

Conclusió: Les aplicacions lineals "derivació" no són continus, no són Lipschitz

En canvi: Les aplicacions de tipus "integració" sí que són endomorfismes continus (Lipschitz) :)

Exemple : $E = C([0,1])$

$$A : E \longrightarrow E$$
$$v \longmapsto (Av)(x) := \int_0^x v(y)\,dy$$

A no és contínua:

$$|(Av)(x)| = \left| \int_0^x v(y)\,dy \right|$$
$$\leq \left| \int_0^x \|v\|_\infty \, dy \right| = \|v\|_\infty |x|$$
$$\leq \|v\|_\infty$$

$$\|Av\|_\infty \leq 1 \cdot \|v\|_\infty$$
$$\forall v \in E = C([0,1])$$

$\|A\| \leq 1$ (exercici $\|A\| = 1$)

Terminologia : Un "operador" (lineal o no-lineal) és una aplicació (lineal o no-lineal) entre espais de Banach de funcions.

EDOs en e. Banach

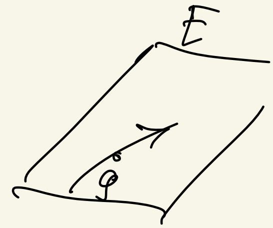
$$u : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow E$$
$$t \longmapsto u(t)$$

Def : $u'(t) = u_t(t) = \lim_{h \to 0} \frac{u(t+h) - u(t)}{h}$ $\left(\frac{E}{\mathbb{R}}\right)$

$$G : \mathbb{R}\times E \longrightarrow E \qquad \text{és el camp}$$
$$(t,v) \longmapsto G(t,v) \qquad \text{(no autònom)}$$

EDO: $\begin{cases} u_t = G(t,u) \\ u(t_0) = g \in E \end{cases}$

$$u'(t) = G(t,u(t))$$



__Tma__ El tma d'exist. i unicitat fet a EDOs és cert (i la demo és la mateixa) per EDOs en espais de Banach. Es basa amb el mètode de Picard (G Lipschitz)

$$\text{EDO} \iff u(t) = \underbrace{g + \int_{t_0}^{t} G(s,u(s))\,ds}_{= H(u)(t)}$$

$$u = H(u)$$

punt fix contraccions

$$\left| (H(u) - H(v))(t) \right| = \left| \int_{t_0}^{t} \{ G(s,u(s)) - G(s,v(s)) \}\, ds \right|$$

$\leq$. si G és Lips. . $\leq (1-\varepsilon)\|u-v\|$

Classe 13. 3/3/21

- Exemple: $u = u(x,t)$

ex1: $u_t = \int_0^x u(y,t)\,dy$ (lineal)

ex2: $u_t = \left(\int_0^x u(y,t)\,dy\right)^2$ (no-lineal)

$x \in [0,1],\ t \in \mathbb{R}$

$\oplus$ c. inicial: $u(x,0) = g(x),\ x \in [0,1]$

Picard $\longrightarrow$ $\exists!$ de solució per temps $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

$$t \longmapsto u(t) \in E = C([0,1])$$

& $\|\cdot\|_\infty$

ex1 i ex2: eq. integro-diferencials.

Notació: Confusió: $u=u(x,t)$

$$u_t = G(t,u) \qquad (a)$$

$$\hookrightarrow G : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$u_t(x,t) = G(t, \underline{u(x,t)})$$

és diferent que la que hem considerat:

$$G : \mathbb{R}\times E \longrightarrow E \qquad (b)$$

$$u_t = G[t,u] \qquad (u = u(t) \in E)$$

En els ex1 i ex2 estem en el cas (b) però no a (a)

Per que $G = \ldots \int_0^x u(y,t)\,dy \ldots$

no depèn només de $u(x,t)$

Un altre cas: (38)

1ª) $u_t = -cu_x + G(t,u)$ $\left(G: \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}\right)$

2ª) $u_t = -cu_x + G[t,u]$

1ª) es resol amb el mètode de les característiques.

Un exemple de 2ª):

ex3: $u_t = -cu_x + \left(\frac{1}{x}\int_0^x u(y,t)\,dy\right)^2$, $x \in \mathbb{R}$

el mètode de les caract. no funciona.

el mètode de Picard tampoc funcionarà.

Gràcies a que el semigrup és un endomorfisme continu (o Lipschitz) (bones notícies ☺) i a la fórmula de Duhamel puc "resoldre" ($\exists !$) aquesta equació no-lineal: (39

$$u_t = -cu_x + f[t,u] \rightsquigarrow$$

Escric l'eq. d'evolució (eq no-hom. Duhamel) com una eq. de punt fix:

$$\underline{u(\cdot,t) = T_t g} + \underline{\int_0^t T_{t-s}\left(f[s,u(s)]\right) ds}$$

$$\underline{u(x,t) = g(x-ct)}$$

ex3

$$+ \underline{\int_0^t \left(\frac{1}{x-c(t-s)} \int_0^{x-c(t-s)} u(y,s)\, dy \right)^2 ds}$$

T_t està ben definit

$\underline{E = C_b^1(\mathbb{R})}$

$x \in \mathbb{R}, t \in I \subset \mathbb{R}$.

El membre de la dreta és una contracció (si t és prou petit)

↳ dona més feina que si treballo a $\tilde{E} = C_b^0(\mathbb{R}) = C_b(\mathbb{R})$ però la recompensa és que trobo una sol. clàssica
↳ $u \in C^1$

$$(T_t g)(x) = g(x-ct)$$

$$T_t : C_b^0(\mathbb{R}) \longrightarrow C_b^0(\mathbb{R})$$
$$g \longmapsto g(\cdot - ct)$$

↳ obtenim només una solució en un cert sentit integral o generalitzat.

Classe 14. 5/3/21

En EDOs el punt fix es troba en l'espai de Banach $F = C([-\varepsilon,\varepsilon];\mathbb{R}^6)$ (de dim infinita)

ψ
t

↑ eq. Newton

En l'EDP exemple 3:

t
↑

$E = C_b^1(\mathbb{R}) \rightsquigarrow F = C([-\varepsilon,\varepsilon];E)$

Exercici: $E = C_b^1(\mathbb{R}) \ni v \quad (v = v(x))$

$$(Bv)(x) := \frac{1}{x}\int_0^x v(y)\,dy \quad \text{(lineal)}$$

Demostreu que $B : E \to E$ és continu.

Després hauré de comprobar que l'aplicació

$$u = \{u(t)\}_t \longmapsto T_t g + \int_0^t T_{t-s}(f[u(s)])\,ds$$

$$\underset{F\, =\, C([-\varepsilon,\varepsilon]; E)}{\cap}$$

$$B_R(0) \subset F \longrightarrow B_R(0) \subset F$$

és contracció

ó bé $B_R(g)$

escollir la R, i el ε prou petit.

EXERCICI:

Com resolem el pb de Cauchy per

exemple 4: $u_t = -c u_x + \left(\int_0^x u(y,t)\,dy\right)^2$

amb $x \in [0,1]$, $t \in [-\varepsilon, \varepsilon] \subset \mathbb{R}$?

Trobeu el punt fix.

Fòrmula de l'exponencial per eqns lineals homogènies també val per EDOs en espais de Banach

$$\begin{cases} u_t = Au & \text{on } A: E \to E \text{ lineal } \underline{\text{contínua}} \\ u(0) = g \in E \end{cases}$$

$$\exists! \quad u(t) = e^{tA} g \in E$$

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k g \qquad (A^k = \underbrace{A \circ \dots \circ A}_{k})$$

a vegades, si soc capaç de sumar la sèrie, la fórmula dona la solució explícitament (pb 5 de la llista 2).

Pb 3 llista 2 : $u_t = -cu_x := Au$

$$A = -c\,\partial_x \quad \leadsto \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} (-c\,\partial_x)^k \; \dots\dots$$

formal

C^∞ $\|\cdot ?\|$