RESUM D'EQUACIONS EN DERIVADES PARCIALS

ApuntsFME

DAVID BATET
BARCELONA, JUNY 2020

Última modificació: 21 de juny de 2020.

L'equació del transport lineal

Obs. Podem pensar que $u = u(x,t) \in \mathbb{R}$ és la quantitat d'aigua per unitat de longitud que passa per cada punt $x \in \mathbb{R}$ d'un tub en un instant de temps t, on l'aigua es mou a una velocitat c.

Obs. Amb la consideració anterior arribem a

$$\frac{d}{dt}\int_a^b u(x,t)dx = cu(a,t) - cu(b,t), \quad \forall (a,b) \subseteq \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}$$

Def. Anomenem equació del transport lineal a $u_t + cu_x = 0$.

Def. Considerem una equació del transport entesa en un sentit més general, és a dir, $a(x,t)u_x + b(x,t)u_t + d(x,t)u = f(x,t)$. El mètode de les característiques consisteix a restringir u sobre una família de corbes $\gamma(\lambda)$ tals que la funció $w(\lambda) = u(\gamma(\lambda))$ satisfà $w'(\lambda) = a(\gamma(\lambda))u_x(\gamma(\lambda)) + b(\gamma(\lambda))u_t(\gamma(\lambda))$ i reconstruir u a partir de les restriccions a cadascuna de les corbes. Les corbes $\gamma(\lambda)$ reben el nom de corbes característiques.

Obs. Per trobar $\gamma(\lambda) = (x(\lambda), t(\lambda))$ ens caldrà resoldre l'EDO

$$\begin{cases} x'(\lambda) = a(x(\lambda), t(\lambda)), & t'(\lambda) = b(x(\lambda), t(\lambda)) \\ x(0) = x_0, & t(0) = t_0 \end{cases}$$

Després resoldrem $w' = f(\gamma(\lambda)) - d(\gamma(\lambda))w$ amb condicions inicials adients per trobar u a cadascuna de les restriccions.

Obs. Per exemple, donat

$$(PC)\begin{cases} u_t + cu_x = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) = g(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

podem considerar $\{\gamma(\lambda) = (x_0 + c\lambda, \lambda), \lambda \geq 0 \mid x_0 \in \mathbb{R}\}$.

Def. Diem que u és una solució clàssica de (PC) si satisfà (PC) puntualment i $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times (0,+\infty)) \cap \mathcal{C}^0(\mathbb{R} \times [0,+\infty))$. Habitualment direm només que u és una solució de (PC).

Prop. Donada $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, existeix una única solució de (PC) i ve donada per $u(x,t) = g(x - ct)$. De fet, resol l'EDP $\forall t \in \mathbb{R}$.

Obs. Aquesta proposició es pot generalitzar a $x \in \mathbb{R}^n$ prenent l'equació $u_t + \vec{c} \cdot \vec{\nabla} u = 0$ i la condició inicial $u(x,0) = g(x)$.

Obs. Si la velocitat de l'aigua $c = c(x,t)$ varia obtenim

$$\frac{d}{dt}\int_a^b u(x,t)dx = c(a,t)u(a,t) - c(b,t)u(b,t)$$

i amb això

$$(PC-CV) = \begin{cases} u_t + (cu)_x = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) = g(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Obs. Si c és globalment Lipschitz, aleshores $(PC-CV)$ té una única solució a tot el pla (x,t).

Prop. Sigui $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ solució de $(PC-CV)$ on $g \geq 0$ té suport compacte. Aleshores $\int_{\mathbb{R}} u(x,t)dx$ és constant en $t \in \mathbb{R}$.

Obs. La proposició anterior ens diu que la massa es conserva.

Def. Definim $||w||_{\mathcal{C}_b^1(\mathbb{R})} := \sup_{x\in\mathbb{R}} |w(x)| + \sup_{x\in\mathbb{R}} |w'(x)|$.

Def. Donat un problema amb solució única u, anomenem semigrup a temps t i denotem per T_t l'aplicació que envia la condició inicial g a $u(\cdot,t)$.

Prop. Donat (PC) amb $g \in \mathcal{C}_b^1(\mathbb{R})$, $T_t : \mathcal{C}_b^1(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}_b^1(\mathbb{R})$ satisfà $T_t \circ T_s = T_{t+s}$, per a tot $t, s \geq 0$.

Obs. El resultat també serveix per EDOs en espais de Banach.

Def. Diem que una funció és localment integrable si ho és en tot compacte.

Def. Diem que u és una solució generalitzada del (PC) si $\forall t > 0$ i gairebé per a tot $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$ tenim que $u(\cdot,t)$ és localment integrable en x, $\int_a^b u(x,t)dx$ és derivable quasi per a tot t i

$$\frac{d}{dt}\int_a^b u(x,t)dx = cu(a,t) - cu(b,t)$$

Def. Anomenem equació de transport no homogènia a

$$(PCNH)\begin{cases} u_t + \vec{c} \cdot \vec{\nabla} u = f(x,t), & x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = g(x), & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Def. Anomenem fórmula de Duhamel a

$$u(x,t) = (T_t g)(x) + \int_0^t (T_{t-s} f(\cdot,s))(x)ds$$

Prop. Si $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$ i $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$, $\exists! u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ solució del $(PCNH)$, donada per la fórmula de Duhamel. Si a més g i f són fitades, aleshores $||u(\cdot,T)||_\infty \leq ||g||_\infty + |T|||f||_\infty$, $\forall T \in \mathbb{R}$.

Def. Un problema d'EDPs de valors inicials és *well-posed* si

1. Existeixen solucions.

2. Les solucions són úniques.

3. Existeixen certes fites d'estabilitat.

EDOs en espais de Banach

Def. Un espai de Banach és un espai normat i complet.

Def. Un espai de Hilbert és un espai euclidià $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ tal que $(E, ||\cdot||)$ és complet, on $||\cdot||$ és la norma induïda.

Obs. $\mathscr{L}^p(\Omega)$ amb $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ obert i $1 \leq p \leq +\infty$ és un espai de Banach amb $||\cdot||_p$. L'únic amb producte escalar és $\mathscr{L}^2(\Omega)$.

Obs. Sigui E espai vectorial. Totes les normes són equivalents $\iff \dim E < +\infty$.

Prop. Sigui $A : E \to F$ una aplicació lineal entre espais de Banach. A és contínua $\iff \exists C \geq 0$ tal que $||Au||_F \leq C||u||_E$ per a tot $u \in E$.

Cor. A lineal contínua $\implies$ A globalment Lipschitz.

Def. Donat $(E, ||\cdot||)$ espai de Banach i $A : E \to E$ aplicació lineal, definim el següent problema per $u = u(t) \in E$

$$(EDO)\begin{cases} u_t = Au, & t \in I \\ u(0) = g \in E \end{cases}$$

Prop. Si l'aplicació lineal A és contínua, $\exists! u = u(t) \in E$ que és solució de (EDO), donada per $u(t) = e^{tA}g$.

Def. Donat $(E, ||\cdot||)$ espai de Banach i $H : E \to E$ aplicació qualsevol, definim el següent problema per $u = u(t) \in E$

$$(EDONL)\begin{cases} u_t = H(u), & t \in J \\ u(0) = g \in E \end{cases}$$

Th. (de Picard). Sigui H localment Lipschitz. Existeix un petit interval $0 \in I \subseteq \mathbb{R}$ on $(EDONL)$ admet una única solució.

Obs. Si $E = \mathcal{C}_b^0([0,1])$ o $E = \mathscr{L}^2(0,1)$, l'operador $P : E \to E$ definit $w \mapsto (Pw)(x) = \int_0^x w(y)dy$, $\forall x \in [0,1]$, és lineal i continu.

Obs. En $\mathcal{C}_b^0(\overline{I})$ i $\mathscr{L}^p(I)$ l'aplicació $w \mapsto w'$ no és endomorfisme. A més, si fos un endomorfisme no seria contínua.

Obs. Considerem ara el problema general

$$(\overline{EDO})\begin{cases} u_t = Au + N(u), & t \in J \\ u(0) = g \in E \end{cases}$$

on A és aplicació lineal i N és no lineal. Per resoldre $(\overline{EDO})$:

1. Si A és contínua...

(a) i $N \equiv 0$: tenim una única solució $u(t) = e^{tA}g$.

(b) i N és constant: tenim una solució única fent variació de les constants, que ens dona la fórmula de Duhamel.

(c) i $N \not\equiv 0$ és localment Lipschitz: com que A és globalment Lipschitz podem aplicar el teorema de Picard.

2. Si A no és contínua...

(a) i $N \equiv 0$: no tenim un teorema d'existència i unicitat general, ens el podem intentar fabricar inspirant-nos en Picard.

(b) i N és constant: si aconseguim un teorema d'existència i unicitat per $N \equiv 0$, podem obtenir la solució amb la fórmula de Duhamel.
(c) i $N \not\equiv 0$ localment Lipschitz: si aconseguim un teorema d'existència i unicitat per $N \equiv 0$, podem muntar un problema de punt fix pensant $N(u)$ com a font i utilitzant la fórmula de Duhamel. Ens convindrà que el semigrup T_t sigui continu.
Obs. En general, quan ens trobem en el cas **2c** farem
i. Escollir l'espai de Banach E (que contigui la condició inicial).
ii. Estudiar el semigrup lineal T_t associat a $u_t = Au$, que voldrem que sigui continu.
iii. Equació del punt fix $\phi : \overline{B}_R(h) \subseteq F \to \overline{B}_R(h) \subseteq F$, on $F = \mathcal{C}(I, E)$. Generalment prendrem $h = 0$ o $h = g$.
iv. Escollir $R > 0$ que faci que $\phi(u) \in \overline{B}_R(h)$, $\forall u \in \overline{B}_R(h)$.
v. Escollir $I \subseteq \mathbb{R}$ que garanteixi que ϕ és una contracció.
Obs. Si N és globalment Lipschitz es pot utilitzar $\phi : F \to F$.

Equació d'ones

Equació d'ones en una dimensió

Obs. Podem pensar que $u = u(x,t) \in \mathbb{R}$ és l'alçada en el punt $x \in \mathbb{R}$ i l'instant $t \in \mathbb{R}$ d'una corda flexible i elàstica de densitat ρ_0 i tensió τ_0 que fa petites vibracions. Amb això obtenim

$$\int_a^b \rho_0(x) u_{tt}(x,t)dx = \int_a^b \tau_0 u_{xx}(x,t)dx + \int_a^b \tilde{f}(x,t)dx$$

on $\tilde{f}$ són les forces externes. Si suposem que ρ_0 és constant i definim $c = \frac{\tau_0}{\rho_0}$, arribem a l'equació d'ones.
Def. Anomenem equació d'ones a $u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(x,t)$.

Corda infinita

Def. Definim el problema

$$(PC)\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, & x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = g(x), & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) = h(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

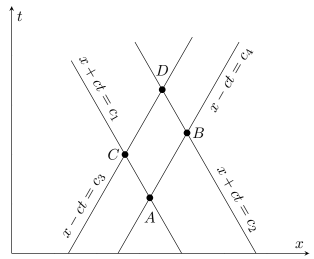
Obs. No podem resoldre aquest problema utilitzant un espai de Banach adequat, ens cal ser creatius.
Def. Anomenem fórmula de d'Alembert a l'expressió

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(g(x-ct) + g(x+ct)) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} h(y)dy$$

Prop. Donades $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ i $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, $\exists! u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ solució del (PC), que ve donada per la fórmula de d'Alembert. Si a més g i h són fitades, $||u(\cdot,T)||_\infty \le ||g||_\infty + |T|||h||_\infty$, $\forall T \in \mathbb{R}$. Si també ho és g', $||u_t(\cdot,T)||_\infty \le c||g'||_\infty + ||h||_\infty$, $\forall T \in \mathbb{R}$.
Obs. El semigrup solució és un endomorfisme continu

$$\begin{aligned} T_t \colon \mathcal{C}_b^2(\mathbb{R}) \times \mathcal{C}_b^1(\mathbb{R}) &\to \mathcal{C}_b^2(\mathbb{R}) \times \mathcal{C}_b^1(\mathbb{R}) \\ (g,h) &\mapsto (u(\cdot,t), u_t(\cdot,t)) \end{aligned}$$

Obs. Totes les solucions $\mathcal{C}^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ de $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$ són de la forma $u(x,t) = F(x-ct) + G(x+ct)$. A més, amb $F, G \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ qualssevulla, $u(x,t) = F(x-ct) + G(x+ct)$ és solució.
Obs. Del que acabem de veure podem interpretar que u es pot expressar com la superposició de dues ones viatgeres F i G que es desplacen a una velocitat c en direccions oposades.
Obs. Per a tota $u(x,t) = F(x-ct) + G(x+ct)$ solució de $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$ tenim $u(A) + u(D) = u(B) + u(C)$.



Def. Anomenem domini de dependència de (x,t) del punt x respecte el temps t a l'interval $[x-ct, x+ct]$.
Def. Anomenem rang d'influència a temps t del punt x_0 al sector $x_0 - ct \le x \le x_0 + ct$.
Def. Definim el problema

$$(PCNH)\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(x,t), & x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = g(x), & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) = h(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Def. Anomenem fórmula de d'Alembert-Duhamel a

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(g(x-ct) + g(x+ct)) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} h(y)dy + \frac{1}{2c}\iint_{T(x,t)} f$$

on $T(x,t) = \big\{(y,s) \mid 0 < s < t, x - c(t-s) < y < x + c(t-s)\big\}$.
Prop. Si $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$, $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ i $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$, aleshores $\exists! u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ solució del $(PCNH)$, donada per la fórmula de d'Alembert-Duhamel.
Obs. Sigui w una solució particular de $u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(x,t)$, és a dir, que no necessàriament satisfà les condicions inicials de $(PCNH)$. Aleshores la solució de $(PCNH)$ es pot expressar com $u = v + w$, on v és la solució de

$$\begin{cases} v_{tt} - c^2 v_{xx} = 0, & x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R} \\ v(x,0) = g(x) - w(x,0), & x \in \mathbb{R} \\ v_t(x,0) = h(x) - w_t(x,0), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Corda semi-infinita

Def. Anomenem condicions de Dirichlet a les condicions que fixen la posició de la corda $u(0,t) = d(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.
Def. Anomenem condicions de Neumann a les condicions que fixen l'angle de la vora de la corda $u_x(0,t) = n(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.
Def. Direm que les condicions de Dirichlet són homogènies si $d \equiv 0$ i anàlogament, direm que les condicions de Neumann són homogènies si $n \equiv 0$.
Obs. Sigui u solució *única* d'un $(PCNH)$. Si g, h i $f(\cdot,t)$ són funcions parelles, senars o L-periòdiques en $x \in \mathbb{R}$, aleshores $u(\cdot,t)$ també serà parella, senar o L-periòdica, respectivament.
Def. Definim el problema de Dirichlet homogeni en la corda semi-infinita com

$$(DSI)\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(x,t), & x \ge 0, t \in \mathbb{R} \\ u(0,t) = 0, & t \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = g(x), & x \ge 0 \\ u_t(x,0) = h(x), & x \ge 0 \end{cases}$$

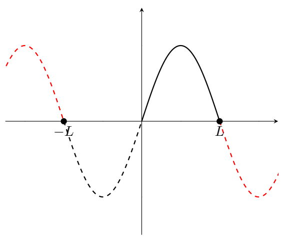
Obs. Considerem les reflexions senars de g, h i $f(\cdot,t)$, que denotarem g_s, h_s i $f_s(\cdot,t)$, respectivament.
Prop. Si $g \in \mathcal{C}^2([0,\infty))$, $h \in \mathcal{C}^1([0,\infty))$ i $f \in \mathcal{C}^1([0,\infty) \times \mathbb{R})$, i definim $\overline{u}$ prenent les extensions senars de g, h i $f(\cdot,t)$ a la fórmula de d'Alembert-Duhamel i $u = \overline{u}_{|[0,\infty)\times\mathbb{R}}$, aleshores
1. $g(0) = g''(0) = h(0) = f(0,\cdot) = 0$ són condicions suficients perquè $\overline{u} \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ i u sigui solució de (DSI) i única.
2. $g(0) = h(0) = 0$ i $f(0,0) + c^2 g''(0) = 0$ són condicions necessàries perquè u sigui solució de (DSI). Les condicions s'anomenen condicions de compatibilitat.
Obs. Al segon punt en realitat l'única hipòtesi sobre les funcions que ens cal és que g sigui dues vegades derivable en 0.

Corda finita

Def. Definim el problema de Dirichlet homogeni en la corda finita com

$$(DF)\begin{cases} u_{tt}-c^2u_{xx}=f(x,t), & x\in[0,L], t\in\mathbb{R}\\ u(0,t)=u(L,t)=0, & t\in\mathbb{R}\\ u(x,0)=g(x), & x\in[0,L]\\ u_t(x,0)=h(x), & x\in[0,L]\end{cases}$$

Obs. Considerem les extensions de g, h i $f(\cdot,t)$ obtingudes fent en primer lloc l'extensió senar a $[-L,L]$ i a posteriori l'extensió $2L$-periòdica a $\mathbb{R}$, que denotem per g_{ext}, h_{ext} i $f_{ext}(\cdot,t)$.



Prop. Si $g\in\mathcal{C}^2([0,L])$, $h\in\mathcal{C}^1([0,L])$ i $f\in\mathcal{C}^1([0,L]\times\mathbb{R})$, i definim $\tilde{u}$ prenent les extensions esmentades de g, h i $f(\cdot,t)$ a la fórmula de d'Alembert-Duhamel i $u=\tilde{u}_{|[0,L]\times\mathbb{R}}$, aleshores

1. $g(0)=g''(0)=h(0)=f(0,\cdot)=0$ i per altra banda a més $g(L)=g''(L)=h(L)=f(L,\cdot)=0$ són condicions suficients perquè $\tilde{u}\in\mathcal{C}^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ i u sigui solució de (DF) i única.

2. $g(0)=h(0)=0$ i $f(0,0)+c^2g''(0)=0$ i per altra banda a més $g(L)=h(L)=0$ i $f(L,0)+c^2g''(L)=0$ són condicions necessàries perquè u sigui solució de (DF). Les condicions s'anomenen condicions de compatibilitat.

Obs. Al segon punt en realitat l'única hipòtesi per les funcions que ens cal és que g sigui dues vegades derivable en 0 i L.

Prop. Si $f\equiv 0$, $h\in\mathcal{C}^0([0,L])$ i u ve donada per la fórmula de d'Alembert-Duhamel amb les corresponents extensions g_{ext} i h_{ext}, aleshores u és $\frac{2L}{c}$-periòdica en $t\in\mathbb{R}$.

Def. Definim el problema

$$(DFNH)\begin{cases} u_{tt}-c^2u_{xx}=f(x,t), & x\in[0,L], t\in\mathbb{R}\\ u(0,t)=d_0(t), & t\in\mathbb{R}\\ u(L,t)=d_L(t), & t\in\mathbb{R}\\ u(x,0)=g(x), & x\in[0,L]\\ u_t(x,0)=h(x), & x\in[0,L]\end{cases}$$

Obs. Una forma de resoldre $(DFNH)$ és definir una w que faci que $v=u-w$ satisfaci les condicions de vora homogènies, és a dir, $v(0,t)=v(L,t)=0$, $\forall t\in\mathbb{R}$. Per exemple, podem prendre $w(x,t)=d_0(t)+(d_L(t)-d_0(t))\frac{x}{L}$, les rectes que uneixen $d_0(t)$ i $d_L(t)$, $\forall t\in\mathbb{R}$.

Def. Definim el problema de Neumann en la corda finita amb condicions de vora no homogènies com

$$(NFNH)\begin{cases} u_{tt}-c^2u_{xx}=f(x,t), & x\in[0,L], t\in\mathbb{R}\\ u_x(0,t)=n_0(t), & t\in\mathbb{R}\\ u_x(L,t)=n_L(t), & t\in\mathbb{R}\\ u(x,0)=g(x), & x\in[0,L]\\ u_t(x,0)=h(x), & x\in[0,L]\end{cases}$$

i denotem per (NF) el cas amb condicions de vora homogènies.

Obs. Anàlogament, una forma de resoldre $(NFNH)$ és definir una w que faci que $v=u-w$ satisfaci les condicions de vora homogènies, en aquest cas, $v_x(0,t)=v_x(L,t)=0$, $\forall t\in\mathbb{R}$. Per exemple prenem $w(x,t)=n_0(t)x+\frac{n_L(t)-n_0(t)}{L}\frac{x^2}{2}$, de manera que $w_x(x,t)$ són les rectes que uneixen $n_0(t)$ i $n_L(t)$, $\forall t\in\mathbb{R}$.

Obs. Es poden demostrar resultats anàlegs als dels problemes de Dirichlet (DSI) i (DF) per als problemes de Neumann (NSI) i (NF) tot considerant les reflexions en aquest cas parelles de g, h i $f(\cdot,t)$.

Prop. Per l'equació d'ones homogènia en la corda finita amb condicions de Dirichlet o de Neumann nul·les, l'energia total

$$E(t)=\int_0^L\left(\frac{1}{2}u_t^2(x,t)+\frac{1}{2}c^2u_x^2(x,t)\right)dx$$

és constant en el temps, independentment de les condicions inicials, si $u\in\mathcal{C}^2([0,L]\times\mathbb{R})$.

Cor. Si sabem que $\exists u\in\mathcal{C}^2([0,L]\times\mathbb{R})$ solució de l'equació d'ones en la corda finita (potser no homogènia) amb condicions de Dirichlet o de Neumann qualssevol, aleshores és única.

Equació d'ones en dimensions superiors

Def. Un conjunt $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ és un domini si és un obert connex.

Def. Diem que un domini $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ és Lipschitz si $\partial\Omega$ és localment la gràfica d'una funció Lipschitz.

Th. (de Rademacher). Tota funció Lipschitz $f:U\to\mathbb{R}^m$ amb $U\subseteq\mathbb{R}^n$ obert és diferenciable gairebé arreu.

Th. (de la divergència). Sigui $T\in\mathcal{C}^1(\overline{\Omega},\mathbb{R}^n)$ un camp vectorial amb $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ domini Lipschitz fitat. Aleshores

$$\int_\Omega \operatorname{div}T=\int_{\partial\Omega}(T\cdot\vec{\nu})$$

on $\vec{\nu}$ és la normal exterior a Ω, que està definida sobre $\partial\Omega$.

Cor. (integració per parts a $\mathbb{R}^n$). Siguin $u,v:\overline{\Omega}\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ funcions $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ amb Ω domini Lipschitz fitat. Aleshores

$$\int_\Omega u\frac{\partial v}{\partial x_i}=\int_{\partial\Omega}(uv)\nu^i-\int_\Omega\frac{\partial u}{\partial x_i}v$$

on $\vec{\nu}=(\nu^1,\dots,\nu^n)$ és la normal exterior a Ω.

Def. Considerem el problema d'ones en n dimensions

$$\begin{cases} u_{tt}-c^2\Delta u=f(x,t), & x\in\Omega\subseteq\mathbb{R}^n, t\in I\\ u(x,0)=g(x), & x\in\Omega\\ u_t(x,0)=h(x), & x\in\Omega\end{cases}$$

les condicions de vora poden ser

1. de Dirichlet: $u=0$, $\forall x\in\partial\Omega$ i $\forall t\in I$.

2. de Neumann: $\frac{\partial u}{\partial\vec{\nu}}:=\vec{\nabla}u\cdot\vec{\nu}=0$, $\forall x\in\partial\Omega$ i $\forall t\in I$.

Prop. Si $u\in\mathcal{C}^2(\overline{\Omega}\times I)$ és una solució de l'equació d'ones n dimensions homogènia amb condicions de vora de Dirichlet o de Neumann homogènies, aleshores l'energia

$$E(t)=\int_\Omega\left(\frac{1}{2}u_t^2+\frac{1}{2}c^2||\vec{\nabla}u||^2\right)$$

és constant en el temps.

Cor. Si existeix una solució $u\in\mathcal{C}^2(\overline{\Omega}\times I)$ de l'equació d'ones en n dimensions (potser no homogènia) amb condicions de vora de Dirichlet o de Neumann qualssevol, aleshores és única.

Equació de la calor

Equació de la calor en una dimensió

Obs. Podem pensar que $u=u(x,t)\in\mathbb{R}$ és la temperatura d'una vareta al punt $x\in[0,L]$ i instant $t>0$.

Obs. Amb la consideració anterior arribem a

$$\frac{d}{dt}\int_a^b u(x,t)dx=D(u_x(b,t)-u_x(a,t)),\quad\forall(a,b)\subseteq\mathbb{R},\forall t\in\mathbb{R}$$

Def. Anomenem equació de la calor homogènia o equació de difusió homogènia a $u_t-Du_{xx}=0$, $x\in(0,L)$, $t>0$. La constant $D>0$ rep el nom de coeficient de difusió.

Obs. Reescalant les variables podem suposar $D=1$.

Obs. $u(x,t)=e^{-k^2t}\sin(kx)$ és una solució de $u_t-u_{xx}=0$.

Obs. Considerem l'operador $A = \partial_{xx}$.
1. $\sin(kx)$ és una funció pròpia de valor propi $-k^2$ de A.
2. A és simètric per totes les funcions $v \in \mathscr{L}^2(0,L)$ tals que $v(0) = v(L) = 0$ i també per les que $v_x(0) = v_x(L) = 0$.
Prop. Donat $(E, \langle \cdot,\cdot \rangle)$ espai euclidià de dimensió finita, tot endomorfisme simètric $f : E \to E$ diagonalitza en una base ortonormal.

L'equació de la calor homogènia

Def. El mètode de separació de variables consisteix a buscar una solució de l'equació de la forma $u(x,t) = X(x)T(t)$.
Prop. Donat $L > 0$, són una base ortonormal de $\mathscr{L}^2(0,L)$

1. $\left\{ \frac{1}{\sqrt{L}}, \sqrt{\frac{2}{L}} \cos\left(\frac{2\pi k}{L}x\right), \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{2\pi k}{L}x\right) \;\middle|\; k \geq 1 \right\}$

2. $\left\{ \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{\pi k}{L}x\right) \;\middle|\; k \geq 1 \right\}$.

3. $\left\{ \frac{1}{\sqrt{L}}, \sqrt{\frac{2}{L}} \cos\left(\frac{\pi k}{L}x\right) \;\middle|\; k \geq 1 \right\}$.

Def. Són possibles condicions de vora les condicions
1. de Dirichlet homogènies: $u(0,t) = u(L,t) = 0$, $\forall t > 0$.
2. de Neumann homogènies: $u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0$, $\forall t > 0$.
3. periòdiques: $u(0,t) = u(L,t)$ i $u_x(0,t) = u_x(L,t)$, $\forall t > 0$.
4. mixtes homogènies: $u(0,t) = 0$ i $u_x(0,t) = 0$, $\forall t > 0$.
5. de Robin (o de radiació): donats $\alpha, \beta > 0$,

$$\begin{cases} u_x(0,t) + \alpha u(0,t) = 0 \\ u_x(L,t) + \beta u(L,t) = 0 \end{cases} \quad \forall t > 0$$

Obs. En l'equació de la calor homogènia amb condicions de vora periòdiques o de Neumann homogènies, l'energia calòrica total $\int_0^L u(x,t)dx$ es conserva.
Th. Siguin $g \in \mathscr{L}^2(0,\pi)$ i (b_k) els seus coeficients de Fourier en base de sinus. Aleshores
1. La funció $u(x,t) = \sum_{k\geq 1} b_k e^{-k^2 t} \sin(kx)$ és l'única funció $u \in \mathcal{C}^2([0,\pi] \times (0,\infty))$ que satisfà

$$(CHD) \begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & x \in (0,\pi),\ t > 0 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & t > 0 \\ u(\cdot,t) \xrightarrow[t \to 0^+]{\mathscr{L}^2} g \end{cases}$$

De fet, $u \in \mathcal{C}^\infty([0,\pi] \times (0,\infty))$.

2. Si a més $g \in \mathcal{C}^1([0,\pi])$ i $g(0) = g(\pi) = 0$, aleshores tenim $u \in \mathcal{C}^0([0,\pi] \times [0,\infty))$ i $u(x,0) = g(x)$, $\forall x \in [0,\pi]$.
3. Podem fitar la seva norma per $||u(\cdot,t)||_2 \leq e^{-t}||g||_2$, $\forall t > 0$.
Obs. Si per la vareta en $[0,L]$ tenim un coeficient de difusió $D > 0$, la solució de (CHD) ve donada per

$$u(x,t) = \sum_{k\geq 1} b_k e^{-k^2\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 Dt} \sin\left(\frac{\pi k}{L}x\right)$$

on b_k són els coeficients de Fourier de g.
Obs. El mètode de separació de variables també ens pot ser útil per solucionar l'equació d'ones homogènia $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$.

La vareta no homogènia

Obs. Si considerem la conductivitat tèrmica de la vareta $p = p(x)$ i $r = r(x)$ la seva densitat de massa, aleshores obtenim l'equació

$$r(x)u_t - (p(x)u_x)_x = 0$$

Def. Definim el producte escalar

$$\langle v, w \rangle_r = \int_0^L v(x)w(x)r(x)dx$$

Obs. L'operador $A = \frac{1}{r(x)}\partial_x(p(x)\partial_x)$ és simètric respecte el producte escalar $\langle \cdot,\cdot \rangle_r$ si suposem condicions de Dirichlet o de Neumann homogènies, però no ho és respecte a $\langle \cdot,\cdot \rangle_2$.
Obs. $\mathscr{L}^2(0,L)$ amb $\langle \cdot,\cdot \rangle_r$ és un espai de Hilbert amb la mateixa topologia que amb el producte escalar $\langle \cdot,\cdot \rangle_2$.
Th. Existeix una base de $\mathscr{L}^2(0,L)$ ortonormal respecte el producte escalar $\langle \cdot,\cdot \rangle_r$ formada per funcions pròpies de A. De fet $\exists \varphi_1, \varphi_2, \ldots \in \mathscr{L}^2(0,L)$ ortonormals i $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots$ tals que $\forall k \geq 1$.

$$\begin{cases} A\varphi_k = -\lambda_k \varphi_k \\ \varphi_k(0) = \varphi_k(L) = 0 \end{cases}$$

Cor. Si $g(x) = \sum_{k\geq 1} b_k \varphi_k(x)$, la solució de l'equació d'ones homogènia amb condicions de Dirichlet homogènies és

$$u(x,t) = \sum_{k\geq 1} b_k e^{-\lambda_k t} \varphi_k(x)$$

L'equació de la calor no homogènia

Def. Considerem ara el problema

$$(CD) \begin{cases} u_t - u_{xx} = f(x,t), & x \in (0,\pi),\ t > 0 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & t > 0 \\ u(x,0) = g(x), & x \in (0,\pi) \end{cases}$$

amb semigrup lineal i continu

$$T_t : \mathscr{L}^2(0,\pi) \to \mathscr{L}^2(0,\pi)$$
$$g \mapsto (T_t g)(x) = \sum_{k\geq 1} b_k e^{-k^2 t} \sin(kx)$$

Obs. T_t és una contracció:

$$||T_t g||_2 \leq e^{-t}||g||_2, \quad \forall t > 0,\ \forall g \in \mathscr{L}^2(0,\pi)$$

Obs. Per trobar la solució del problema (CD) podem
1. utilitzar la fórmula de Duhamel

$$u(x,t) = T_t g(x) + \int_0^t T_{t-s} f(\cdot,s)(x) ds$$

2. buscar una solució de la forma $u(x,t) = \sum_{k\geq 1} c_k(t) \sin(kx)$, de manera que si $f(x,t) = \sum_{k\geq 1} d_k(t) \sin(kx)$, aleshores ens caldrà resoldre

$$\begin{cases} c_k'(t) + k^2 c_k(t) = d_k(t) \\ c_k(0) = b_k \end{cases}$$

Obs. Si tenim condicions de vora no homogènies, aleshores podem resoldre el problema restant a u una funció $w(x,t)$ que satisfaci les condicions de vora.
Obs. En el cas en què $f = f(x)$, si u és solució de (CD), $v(x) = \lim_{t\to\infty} u(x,t)$ satisfà l'equació

$$\begin{cases} v_{xx} + f(x) = 0, & x \in (0,\pi) \\ v(0) = v(\pi) = 0 \end{cases}$$

que anomenem problema estacionari.

Unicitat de la solució de l'equació de la calor a $\mathbb{R}^n$

Prop. (identitat de Green) Si $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ és un domini fitat i Lipschitz, i $u, v : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ funcions de classe $\mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$, aleshores

$$\int_\Omega (\Delta u)v = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}} v - \int_\Omega (\vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v)$$

on hem definit $\frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}} := \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nu}$.

Prop. Sigui $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un domini Lipschitz fitat. Si l'equació de difusió (potser no homogènia) amb condicions de Dirichlet o de Neumann qualssevol a Ω

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f(x,t), & x \in \Omega,\ t > 0 \\ u(x,t) = h(x) \quad (\text{o } \frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}}(x,t) = h(x)), & x \in \partial\Omega,\ t > 0 \\ u(x,0) = g(x), & x \in \Omega \end{cases}$$

té una solució $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega} \times [0,\infty))$, aleshores és única.

El laplacià. Funcions harmòniques

Def. L'equació de Poisson és $-\Delta v = f(x)$, $x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Si $f \equiv 0$, aleshores s'anomena equació de Laplace.

Def. Sigui $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ obert, $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$. Diem que u és

1. harmònica a Ω si $-\Delta u = 0$.

2. subharmònica a Ω si $-\Delta u \leq 0$.

3. superharmònica a Ω si $-\Delta u \geq 0$.

Def. Un conjunt $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ és convex si $\lambda x + (1-\lambda)y \in \Omega$, $\forall x, y \in \Omega$ i $\forall \lambda \in [0,1]$.

Def. Donada una funció $f : \Omega \to \mathbb{R}$ amb $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ convex, diem que f és convexa si $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$, $\forall x, y \in \Omega$ i $\forall \lambda \in [0,1]$.

Obs. Si $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ i $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ és convex, són equivalents

1. u és convexa.

2. A cada punt de la gràfica de u, l'hiperplà tangent pel punt queda per sota de la gràfica.

3. u restringida a qualsevol segment és una funció convexa d'una variable.

4. $u(\frac{x+y}{2}) \leq \frac{1}{2}(u(x) + u(y))$, $\forall x, y \in \Omega$.

5. $\nabla^2 u(x) \succeq 0$, $\forall x \in \Omega$.

Obs. Sigui $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ convex. Si $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ és convexa, aleshores $\Delta u = \operatorname{tr} \nabla^2 u \geq 0$, és a dir, u és subharmònica.

Prop. Si $\varphi = u + iv : U \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ és una funció holomorfa, aleshores satisfà $u_x = v_y$ i $u_y = -v_x$, que anomenem equacions de Cauchy-Riemann.

Prop. Per a tota $\varphi = u + iv : U \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ funció holomorfa, u i v són funcions $\mathcal{C}^\infty$ i harmòniques.

Def. Diem que $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ és simplement connex si és arc-connex i tota corba tancada és contràctil.

Prop. Si $u : \Omega \to \mathbb{R}$ és una funció harmònica en $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ obert simplement connex, aleshores $\exists v : \Omega \to \mathbb{R}$ també harmònica, que anomenem harmònica conjugada, i $\varphi = u + iv$ és holomorfa.

Obs. z^k és holomorfa i per tant $r^k \cos(k\theta)$ i $r^k \sin(k\theta)$ són harmòniques, perquè $z^k = r^k e^{ik\theta} = (r^k \cos(k\theta)) + i(r^k \sin(k\theta))$.

Prop. En coordenades polars $(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ l'expressió del laplacià esdevé

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{u_r}{r} + \frac{u_{\theta\theta}}{r^2} = \frac{1}{r}(r u_r)_r + \frac{u_{\theta\theta}}{r^2}$$

Obs. Si $\varphi = u + iv$ és holomorfa en el disc $D_1(0)$, aleshores es pot escriure en la forma $\varphi(z) = \sum_{k\geq 0} a_k r^k (\cos(k\theta) + i \sin(k\theta))$, on $a_k = b_k + i c_k \in \mathbb{C}$. Així, u es pot expressar com a sèrie de Fourier

$$u(z) = \sum_{k \geq 0} (b_k r^k \cos(k\theta) - c_k r^k \sin(k\theta))$$

Obs. Són funcions harmòniques

1. $e^x \cos(y)$ i $e^x \sin(y)$.

2. $\log \sqrt{x^2 + y^2}$ i $\arctan(\frac{y}{x})$, en tot domini simplement connex que no contingui el 0.

Existència i unicitat de solucions de l'equació de Poisson

Prop. Siguin $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ amb $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ obert Lipschitz fitat. Considerem els problemes

$$(PD) \begin{cases} -\Delta u = f, & \text{a } \Omega \\ u = g, & \text{a } \partial\Omega \end{cases}, \quad (PN) \begin{cases} -\Delta u = f, & \text{a } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}} = g, & \text{a } \partial\Omega \end{cases}$$

1. Si $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ és una solució de (PD), aleshores és l'única.

2. Si $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ és una solució de (PN), aleshores és l'única llevat de constant en cada component connex de Ω.

Prop. Donat $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ obert, tota funció harmònica $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ és $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ i analítica.

Def. Considerem l'EDP $A u_{xx} + 2B u_{xy} + C u_{yy} = 0$ i la matriu $M = \left(\begin{smallmatrix} A & B \\ B & C \end{smallmatrix}\right)$. Siguin λ_1 i λ_2 els vaps de la matriu.

1. Si $\lambda_1 \lambda_2 > 0$, diem que l'equació és el·líptica.

2. Si $\lambda_1 \lambda_2 < 0$, diem que l'equació és hiperbòlica.

Def. Diem que una EDP és parabòlica si és de la forma $u_t - u_{xx} = 0$ llevat de reescalat de variables.

Prop. Sigui $B_R = B_R(0) \subseteq \mathbb{R}^2$ amb $R > 0$. Donada una funció $g : \partial B_R \to \mathbb{R}$ contínua, el problema

$$(LD) \begin{cases} -\Delta u = 0, & \text{a } B_R \\ u = g, & \text{a } \partial B_R \end{cases}$$

admet una solució $u \in \mathcal{C}^2(B_R) \cap \mathcal{C}^0(\overline{B}_R)$ i ve donada per

$$u(x) = \int_{\partial B_R} P_R(x,y) g(y) dy = \frac{R^2 - ||x||^2}{2\pi R} \int_{\partial B_R} \frac{g(y)}{||x-y||^2} dy$$

Def. Anomenem nucli de Poisson pel disc $B_R \subseteq \mathbb{R}^2$ a la funció

$$P_R(x,y) = \frac{R^2 - ||x||^2}{2\pi R} \frac{1}{||x-y||^2}$$

Cor. Si la solució $u(x) = \int_{\partial B_R} P_R(x,y) g(y) dy$ de (LD) és de classe $\mathcal{C}^2$ fins a la vora, és a dir $u \in \mathcal{C}^2(\overline{B}_R)$, aleshores és l'única i és $\mathcal{C}^\infty$ en $x \in B_R$.

Obs. L'existència i unicitat de solucions de (LD) es pot traslladar a tot $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ obert simplement connex, ja que

1. $\forall \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ obert simplement connex no buit, $\exists \varphi : \Omega \to D_1(0)$ biholomorfa (teorema de l'aplicació conforme de Riemann).

2. Si $u : \Omega \to \mathbb{R}$ és harmònica, aleshores $u \circ \varphi^{-1}$ també.

Probabilitats i el laplacià

La probabilitat d'escapar de $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ a la primera

Obs. Suposem que tenim una regió fitada $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ i la partició de la vora $\partial\Omega = \Gamma_O \sqcup \Gamma_T$ en la part "oberta" i la part "tancada". Considerem ara una partícula en $x = (x_1, x_2) \in \Omega$ que camina aleatòriament dins de Ω, de manera que

1. no privilegia cap direcció i

2. no té memòria.

Aquest és un procés de difusió o moviment Brownià.

Obs. Volem calcular la funció que dona la probabilitat que el primer cop que toqui la vora $\partial\Omega$ ho faci en la part oberta Γ_O, en funció del punt de partida $x \in \Omega$. Denotem aquesta funció per $u(x)$, $x \in \Omega$.

Obs. u satisfà $-\Delta u = 0$, és a dir, és una funció harmònica.

La probabilitat d'estar en $x \in \mathbb{R}$ en un instant $t > 0$

Obs. Suposem que tenim una partícula en $x = 0$ a temps $t = 0$. A mesura que passa el temps, la partícula es va movent aleatòriament en $\mathbb{R}$.

Obs. Volem calcular la funció que dona la probabilitat que en $t > 0$ es trobi en un cert punt $x \in \mathbb{R}$. Denotem aquesta funció per $u(x,t)$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$.

Def. Cometent un clar abús de notació, podem definir la delta de Dirac $\delta(x)$, com una funció que $\forall f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfà

$$\int_{\mathbb{R}} \delta(x) dx = 1, \quad \int_{\mathbb{R}} f(x) \delta(x) dx = f(0)$$

Obs. u satisfà

$$\begin{cases} u_t - Du_{xx} = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) = \delta(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

on $D > 0$.

Prop. Si busquem una solució del problema de la forma $u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{t}}\phi(\frac{x}{\sqrt{t}})$ amb $D = 1$, obtenim la solució

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{x^2}{4t}},\ x \in \mathbb{R}, t > 0$$

Obs. Si considerem una funció $g(x)$ en lloc de $\delta(x)$ com a condició inicial, aleshores obtenim una solució

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}} g(y)\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}dy = g * \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}\right)$$

on $*$ denota la convolució.

Lema. $\partial_{x_i} r = \partial_r x_i = \frac{x_i}{r}$.

Prop. Si $u(x)$, $x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, és radialment simètrica, és a dir, només depèn del radi, aleshores l'expressió del laplacià en coordenades polars esdevé

$$\Delta u = r^{1-n}(r^{n-1}u_r)_r = u_{rr} + \frac{n-1}{r}u_r$$

Obs. Pel mateix problema en $\mathbb{R}^n$ es pot assajar una solució de la forma $\Gamma(x,t) = \frac{1}{(Dt)^{n/2}}\phi\left(\frac{||x||}{(Dt)^{1/2}}\right)$.

1. Si $u(x,0) = \delta(x)$, aleshores s'obté $\Gamma(x,t) = \frac{1}{(4\pi Dt)^{n/2}}e^{-\frac{||x||^2}{4Dt}}$.

2. Si $u(\cdot,0) = g$, aleshores s'obté $u(\cdot,t) = \Gamma(\cdot,t) * g$.

Propietat de la mitjana. Principi del màxim i el mínim

Obs. La notació $\fint$ vol dir integrar i dividir per la mesura del conjunt en el qual s'integra.

Th. (de Fubini esfèric) Donats $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ obert i $u \in \mathscr{L}^1(\Omega)$,

$$\int_\Omega u = \int_0^{+\infty}\left(\int_{\partial B_r \cap \Omega} u d\sigma\right)dr$$

on $B_r = B_r(x_0)$ per a un $x_0 \in \mathbb{R}^n$ donat.

Prop. (propietat de la mitjana) Sigui $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un obert i $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ una funció harmònica en Ω. Aleshores $\forall x_0 \in \Omega$ i $\forall \overline{B}_r(x_0) \subseteq \Omega$,

$$u(x_0) = \fint_{\partial B_r(x_0)} u(y)dy = \fint_{B_r(x_0)} u(y)dy$$

Obs. El recíproc també és cert, és a dir, si $u \in \mathcal{C}^0(\Omega)$ satisfà la propietat de la mitjana aleshores $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ i $-\Delta u = 0$.

Lema. Si $u \in \mathcal{C}^2$, aleshores $\operatorname{tr}\nabla^2 u = \Delta u$.

Principi del màxim i el mínim per l'equació de Poisson

Prop. (principi del màxim i el mínim *per l'equació de Poisson*). Sigui $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un obert fitat i sigui $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$.

1. Si u és subharmònica ($-\Delta u \le 0$) a Ω, aleshores u assoleix el seu màxim a $\overline{\Omega}$ en almenys un punt de $\partial\Omega$.

2. Si u és superharmònica ($-\Delta u \ge 0$) a Ω, aleshores u assoleix el seu mínim a $\overline{\Omega}$ en almenys un punt de $\partial\Omega$.

3. Si u és harmònica ($-\Delta u = 0$) a Ω, aleshores u satisfà les dues propietats anteriors.

Obs. No podem prescindir de la hipòtesi de Ω fitat.

Cor. Sigui $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un obert fitat. Si el problema

$$(PD)\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{a } \Omega \\ u = g, & \text{a } \partial\Omega \end{cases}$$

té una solució $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$, aleshores és l'única.

Principi del màxim i el mínim per l'equació de difusió

Def. Sigui $Q_T = \Omega \times (0,T)$, on $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ és un obert fitat i $T > 0$. Anomenem frontera parabòlica de Q_T a

$$\partial_P Q_T = (\Omega \times \{0\}) \cup (\partial\Omega \times [0,T])$$

Def. Sigui $u \in \mathcal{C}^2(Q_T)$. Diem que u és

1. calòrica a Q_T si $u_t - \Delta u = 0$.

2. subcalòrica a Q_T si $u_t - \Delta u \le 0$.

3. supercalòrica a Q_T si $u_t - \Delta u \ge 0$.

Prop. (principi del màxim i el mínim *per l'equació de difusió*). Sigui $u \in \mathcal{C}^2(Q_T) \cap \mathcal{C}^0(\overline{Q_T})$.

1. Si u és subcalòrica ($u_t - \Delta u \le 0$) a Q_T, aleshores u assoleix el seu màxim a $\overline{Q_T}$ en almenys un punt de $\partial_P Q_T$.

2. Si u és supercalòrica ($u_t - \Delta u \ge 0$) a Q_T, aleshores u assoleix el seu mínim a $\overline{Q_T}$ en almenys un punt de $\partial_P Q_T$.

3. Si u és calòrica ($u_t - \Delta u = 0$) a Q_T, aleshores u satisfà les dues propietats anteriors.

Cor. Considerem l'equació de la calor amb condicions de Dirichlet

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f(x,t), & (x,t) \in Q_T \\ u(x,t) = d(x,t), & (x,t) \in \partial\Omega \times [0,T] \\ u(x,0) = g(x), & (x,t) \in \Omega \times \{0\} \end{cases}$$

1. Si $f \le 0$, aleshores el màxim de u serà el màxim entre els màxims de g i d.

2. Si $f \ge 0$, aleshores el mínim de u serà el mínim entre els mínims de g i d.

Obs. Una versió més general del principi del màxim i el mínim s'obté considerant $Lu(x) := \operatorname{tr}(A(x)\nabla^2 u(x)) + b(x) \cdot \vec{\nabla} u(x)$ amb $A(x)$ matriu simètrica definida positiva $\forall x \in \Omega$.

Principi de comparació

Def. Considerem novament el problema

$$(PD)\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{a } \Omega \\ u = g, & \text{a } \partial\Omega \end{cases}$$

on $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ és un obert fitat. Diem que $v, w \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ són subsolució i supersolució del problema, respectivament, si

$$\begin{cases} -\Delta v \le f, & \text{a } \Omega \\ v \le g, & \text{a } \partial\Omega \end{cases}, \qquad \begin{cases} -\Delta w \ge f, & \text{a } \Omega \\ w \ge g, & \text{a } \partial\Omega \end{cases}$$

Prop. (principi de comparació *per l'equació de Poisson*). Si v i w són subsolució i supersolució de (PD), respectivament, aleshores $v \le w$ a $\overline{\Omega}$. Per altra banda, si a més u és solució, aleshores $v \le u \le w$ a $\overline{\Omega}$.

Cor. Sigui $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un obert fitat. Considerem el problema

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0, & \text{a } \Omega \times (0,+\infty) \\ u = 0, & \text{a } \partial\Omega \times (0,+\infty) \\ u(\cdot,0) = g, & \text{a } \overline{\Omega} \end{cases}$$

Si $g \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$, aleshores $\exists C > 0$ tal que

$$u(x,t) \le \frac{C}{t^{n/2}}||g||_\infty$$

Resultats de problemes i altres resultats

Equació del transport lineal

Def. Més en general, diem que u és una solució generalitzada de $u_t + (cu)_x = f(x,t)$ si l'equació

$$\frac{d}{dt}\int_a^b u(x,t)dx = c(a,t)u(a,t) - c(b,t)u(b,t) + \int_a^b f(x,t)dx$$

té sentit i u la satisfà $\forall(a,b)$ i $\forall t > 0$.

Obs. Donada una g coneguda considerem l'EDP següent, on $\partial\Omega$ està parametritzada per $\gamma(s) = (\alpha(s), \beta(s))$.

$$\begin{cases} a(x,y,u)u_x + b(x,y,u)u_y = c(x,y,u), & (x,y) \in \Omega \\ u(x,y) = g(x,y), & (x,y) \in \partial\Omega \end{cases}$$

Per resoldre aquesta EDP considerem

$$X(x,y,z) = (a(x,y,z), b(x,y,z), c(x,y,z))$$

i $\forall \gamma(s) \in \partial\Omega$ l'EDO

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\psi_s = X(\psi_s) \\ \psi_s(0) = \big(\alpha(s), \beta(s), g(\alpha(s), \beta(s))\big) \end{cases}$$

D'aquesta manera, si notem $\psi(s,t) = \psi_s(t) = (\psi^1, \psi^2, \psi^3)(s,t)$ i $\psi^{1,2}$ és invertible, $u(x,y) = \psi^3((\psi^{1,2})^{-1}(x,y))$ és una solució de l'EDP.

Prop. Considerem $I = [a,b]$ i els espais $\mathscr{L}^1(I)$, $\mathscr{L}^2(I)$, $\mathcal{C}^0(I)$ i $\mathcal{C}^1(I)$ amb les normes habituals. Tenim $\mathcal{C}^1 \subseteq \mathcal{C}^0 \subseteq \mathscr{L}^2 \subseteq \mathscr{L}^1$ i

1. $||\cdot||_{\mathscr{L}^1} \leq \sqrt{b-a}||\cdot||_{\mathscr{L}^2}$

2. $||\cdot||_{\mathscr{L}^2} \leq \sqrt{b-a}||\cdot||_{\mathcal{C}^0}$

3. $||\cdot||_{\mathcal{C}^0} \leq ||\cdot||_{\mathcal{C}^1}$

Obs. Considerem el cas particular de l'equació de Burgers $u_t + uu_x = 0$ amb condició inicial $u(x,0) = g(x)$, $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

1. Si g' està fitada $\exists u$ solució en un interval petit $[0, t_0]$.

2. Si g és creixent $\exists u$ solució $\forall t \geq 0$.

Equació d'ones en una dimensió

Prop. Sigui $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R} \times [0,\infty))$ una solució del problema

$$\begin{cases} \rho u_{tt} - \tau u_{xx} = 0, & x \in \mathbb{R}, t \geq 0 \\ u(x,0) = g(x), & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) = h(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

on g i h són prou regulars i tenen suport compacte en un interval $[a,b]$. Si definim

$$K(t) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \rho u_t^2(x,t)dx, \quad P(t) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \tau u_x^2(x,t)dx$$

1. $K(t) + P(t)$ és constant en $t \geq 0$.

2. $K(t) = P(t)$ quan $t > \frac{b-a}{2c}$, amb $c = \sqrt{\frac{\tau}{\rho}}$.

Obs. $u = u(x,t)$ és solució de $u_{tt} - u_{xx} = 0$ si, i només si, $w(x,t) = u(\frac{x}{c}, t)$ és solució de $w_{tt} - c^2 w_{xx} = 0$.

Def. Donat el problema

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(x,t), & x \in \mathbb{R}, t \geq 0 \\ u(x,0) = g(x), & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) = h(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

diem que u n'és una <u>solució en el sentit integral</u> si és de la forma

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(g(x-ct) + g(x+ct)) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} h(y)dy + \frac{1}{2c}\iint_{T(x,t)} f$$

Obs. Aquesta expressió per u ens pot ajudar si volem plantejar un problema de punt fix per demostrar l'existència i unicitat de u amb certes condicions.

Equació de la calor en una dimensió

Prop. (desigualtat de Wirtinger). Sigui $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funció $\mathcal{C}^1$

1. Si v és 2π-periòdica, aleshores

$$\int_0^{2\pi} (v(x) - c_v)^2 dx \leq \int_0^{2\pi} (v'(x))^2 dx$$

on $c_v = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(x)dx$ i s'assoleix la igualtat si, i només si, $v(x) = c_v + a_1\cos(x) + b_1\sin(x)$, on

$$a_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} v(x)\cos(x)dx \quad b_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} v(x)\sin(x)dx$$

2. si v és $(b-a)$-periòdica, aleshores

$$\int_a^b (v(x) - c_v)^2 dx \leq \left(\frac{b-a}{2\pi}\right)^2 \int_a^b (v'(x))^2 dx$$

on $c_v = \frac{1}{b-a}\int_a^b v(x)dx$.

Prop. (desigualtat isoperimètrica) Sigui $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un domini regular i fitat. Aleshores $4\pi|\Omega| \leq |\partial\Omega|^2$ i la igualtat s'assoleix $\iff$ Ω és un cercle.

Obs. Si $\partial\Omega$ té longitud L i està parametritzada per l'arc amb $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, aleshores $|\partial\Omega| = \int_0^L (x^2(t) + y^2(t))dt$.

Th. Sigui $g \in \mathscr{L}^2(0,\pi)$ i (a_k) els seus coeficients de Fourier en base de cosinus. Aleshores

1. La funció $u(x,t) = \sum_{k\geq 1} a_k e^{-k^2 t}\cos(kx)$ és l'única funció $\mathcal{C}^2([0,\pi] \times (0,\infty))$ que satisfà

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & x \in (0,\pi),\ t > 0 \\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t), & t > 0 \\ u(\cdot,t) \xrightarrow[t\to 0^+]{\mathscr{L}^2} g \end{cases}$$

De fet, $u \in \mathcal{C}^\infty([0,\pi] \times (0,\infty))$.

2. Si $g \in \mathcal{C}^1([0,\pi])$, aleshores $u \in \mathcal{C}^0([0,\pi] \times [0,\infty))$.

3. $u(\cdot,t) \xrightarrow[t\to\infty]{\text{unif.}} m = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi g(y)dy$.

4. Si $g \in \mathcal{C}^2([0,\pi])$ i a més també $g'(0) = g'(\pi) = 0$, aleshores $u_x(\cdot,t) \xrightarrow[t\to 0^+]{\text{unif.}} g'$.

El laplacià. Funcions harmòniques

Prop. (invariància del laplacià per rotacions). Sigui $\Omega_1 \subseteq \mathbb{R}^n$ obert i $u \in \mathcal{C}^2(\Omega_1)$. Donada O matriu ortogonal, definim $v(y) = u(Oy)$ per a tot $y \in \Omega_2 = \{y \in \mathbb{R}^n \mid Oy \in \Omega_1\}$. Aleshores se satisfà $\Delta v(y) = \Delta u(Oy)$ per a tot $y \in \Omega_2$.

Cor. Sigui $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un obert fitat i $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ una solució del problema

$$(PD)\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{a } \Omega \\ u = g, & \text{a } \partial\Omega \end{cases}$$

que serà, per tant, única.

1. Si Ω, f i g són invariants per una matriu ortogonal O, aleshores $u(x) = u(Ox)$, $\forall x \in \Omega$.

2. Si Ω, f i g són invariants per qualsevol matriu ortogonal, aleshores u és radialment simètrica, és a dir, només depèn de $||x||$ i es pot expressar com $u(x) = U(||x||) = U(r)$, $\forall x \in \Omega$.

Prop. Si u és harmònica en $V \subseteq \mathbb{R}^2$ i $\varphi : U \subseteq \mathbb{C} \to V$ és holomorfa en U, aleshores $u \circ \varphi$ és harmònica en U.

Def. Donat $h > 0$, considerem el conjunt de punts

$$\mathcal{P} = \{(x_i, y_j) = (ih, jh) \mid i = 1, \ldots, n_x,\ j = 1, \ldots, n_y\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

1. Diem que $u : \mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^2 \to [0,255] \subseteq \mathbb{R}$ és una <u>imatge discreta</u>.

2. Diem que $(x_i, y_j) \in \mathcal{P}$ és un <u>punt interior</u> de $\mathcal{P}$ si $i \neq 1, n_x$ i $j \neq 1, n_y$. Altrament, diem que és un <u>punt de la vora</u> de $\mathcal{P}$.

3. u imatge discreta és una <u>imatge ideal</u> si $\forall (x_i, y_j) \in \operatorname{Int}\mathcal{P}$, $u(x_i,y_j) = \frac{1}{4}(u(x_{i+1},y_j) + u(x_{i-1},y_j) + u(x_i,y_{j+1}) + u(x_i,y_{j-1}))$.

4. Donada una imatge discreta u, anomenem <u>laplacià discret</u> de u en el punt interior $(x_i, y_j) \in \mathcal{P}$ a

$$\Delta_h u(x_i,y_j) = \frac{1}{h^2}\Big[\Big(u(x_{i+1},y_j) + u(x_{i-1},y_j) - 2u(x_i,y_j)\Big) + \Big(u(x_i,y_{j+1}) + u(x_i,y_{j-1}) - 2u(x_i,y_j)\Big)\Big]$$

Obs. Una imatge discreta u és ideal $\iff$ $\Delta_h u(x_i,y_j) = 0$, $\forall (x_i,y_j) \in \mathcal{P}$ punt interior.

Prop. (principi fort del màxim i el mínim discret). Si v és una imatge ideal, aleshores
1. o bé el màxim i el mínim només s'assoleixen a la vora
2. o bé v és constant.
Th. Siguin $D > 0$ i $g \in \mathcal{C}_b^0(\mathbb{R}^n)$. Aleshores existeix una única solució fitada $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n \times (0,\infty)) \cap \mathcal{C}_b^0(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$ de l'equació de difusió

$$(\overline{CD}) \begin{cases} u_t - D\Delta u = 0, & \text{a } \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u(\cdot,0) = g, & \text{a } \mathbb{R}^n \end{cases}$$

A més, la solució ve donada per la convolució de la condició inicial amb el nucli de la calor

$$\Gamma_D(x,t) = \frac{1}{(4\pi Dt)^{n/2}} e^{-\frac{||x||^2}{4Dt}},$$

és a dir, $u(x,t) = \int_{\mathbb{R}} \Gamma_D(x-y,t) g(y) dy$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$ i $\forall t > 0$.
Cor. Si u és la solució de $(\overline{CD})$ amb $g \geq 0$, aleshores $u \geq 0$. Si a més $g > 0$ en un obert de $\mathbb{R}^n$, aleshores $u > 0$.
Prop. (principi de comparació *per l'equació de difusió en* $\Omega = \mathbb{R}^n$). Si v i w són dues funcions fitades que satisfan $v_t - D\Delta v \leq w_t - D\Delta w$ en $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ i $v(\cdot,0) \leq w(\cdot,0)$ en $\mathbb{R}^n$, aleshores $v \leq w$ en $\mathbb{R}^n \times [0,\infty)$. Si $v_t - D\Delta v < w_t - D\Delta w$ en $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ també, aleshores $v < w$ en $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$.

Convergència uniforme

Obs. En aquest apartat suposem $f_n, f : E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
Prop. Si (f_n) és una successió de funcions contínues i $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{unif.}} f$, aleshores f és contínua.
Prop. $E = [a,b]$. Si (f_n) és una successió de funcions integrables Riemann i $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{unif.}} f$, aleshores f és integrable Riemann i $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f$.
Cor. $E = [a,b]$. Si (f_n) és una successió de funcions integrables Riemann i $\sum_{n\geq 0} f_n$ és unif. conv., aleshores

$$\int_a^b \left(\sum_{n\geq 0} f_n\right) = \sum_{n\geq 0} \left(\int_a^b f_n\right)$$

Prop. $E = [a,b]$. Si (f_n) és una successió de funcions derivables amb $f_n' \xrightarrow[n\to\infty]{\text{unif.}} g$ i, a més, $\exists x_0 \in [a,b]$ tal que $(f_n(x_0))$ convergeix, aleshores $\exists f$ derivable tal que $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{unif.}} f$ i $f' = g$.
Th. (criteri M de Weierstrass) Sigui (f_n) una successió de funcions. Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists M_n > 0$ tal que $||f_n||_\infty \leq M_n$ i a més $\sum_{n\geq 0} M_n < \infty$, aleshores $\sum_{n\geq 0} f_n$ és unif. conv.
Prop. Siguin f_n contínues i $\sum_{n\geq 0} f_n$ unif. conv. Aleshores

$$\lim_{x\to x_0} \sum_{n\geq 0} f_n(x) = \sum_{n\geq 0} f_n(x_0)$$

Integral de Lebesgue

Teoria general

Obs. En aquest apartat prenem $(X, \mathcal{X}, \mu)$ espai de mesura i $\mathcal{M} = \{f : X \to \mathbb{R}^* \mid f\ \mathcal{X}\text{-mesurable}\}$, on $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, i també $\mathcal{L} = \{f \in \mathcal{M} \mid f \text{ integrable}\}$.
Prop. Sigui $(g_n) \subseteq \mathcal{M}$ successió amb $g_n \geq 0$. Aleshores

$$\int_X \Big(\sum_{n\geq 0} g_n\Big) d\mu = \sum_{n\geq 0} \Big(\int_X g_n d\mu\Big)$$

Th. (de la convergència dominada). Sigui $(f_n) \subseteq \mathcal{M}$ successió amb $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{punt.}} f$ μ-ga i tal que $\exists g \in \mathcal{L}$ amb $|f_n(x)| \leq g(x)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Aleshores $f \in \mathcal{L}$ i

$$\int_X f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu.$$

Cor. Sigui $(f_n) \subseteq \mathcal{M}$ amb $\sum_{n\geq 0} f_n$ convergent μ-ga. Si es dona qualsevol de les dues propietats
1. $\sum_{n\geq 0} \Big(\int_X |f_n| d\mu\Big) < \infty$, o bé
2. $\exists (g_n) \subseteq \mathcal{M}$ amb $\sum_{n\geq 0} g_n$ convergent μ-ga, $|f_n(x)| \leq g_n(x)$ i $\sum_{n\geq 0} \Big(\int_X g_n d\mu\Big) < \infty$,

aleshores

$$\int_X \Big(\sum_{n\geq 0} f_n\Big) d\mu = \sum_{n\geq 0} \Big(\int_X f_n d\mu\Big)$$

Th. Sigui f integrable Riemann en $[a,b]$. Aleshores tenim $f 1_{[a,b]} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \lambda)$ i $\int_a^b f(x) dx = \int_{\mathbb{R}} f 1_{[a,b]} d\lambda$.
Th. Sigui una funció

$$\begin{aligned} f \colon X \times [a,b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,t) &\longmapsto f(x,t) \end{aligned}$$

tal que f és $\mathcal{X}$-mesurable $\forall t \in [a,b]$ i $F(t) = \int_X f(x,t) d\mu(x)$. Suposem que f és integrable fixat un $t_0 \in [a,b]$ i derivable respecte t. Si $\exists g \in \mathcal{L}$ tal que $\forall t \in [a,b]$ es té $|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)| \leq |g(x)|$ μ-ga, aleshores F és derivable i $F'(t) = \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(x,t) d\mu(x)$.

Espais $\mathscr{L}^p$

Def. Anomenem espai de Lebesgue $\mathscr{L}^p$ al conjunt següent: $\mathscr{L}^p(X, \mathcal{X}, \mu) = \Big\{[f] \;\Big|\; f\ \mathcal{X}\text{-mesurable i } \int_X |f|^p d\mu < \infty\Big\}$, on $1 \leq p < \infty$ i $[f]$ denota la classe d'equivalència de funcions per la relació $f \sim_\mu g \iff f = g$ μ-ga.
Obs. Es fa un abús de notació i s'identifica $[f]$ amb f.
Def. Donada $f \in \mathscr{L}^p$ es defineix la norma $||f||_p$ com

$$||f||_p = \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{1/p}$$

Prop. (desigualtat de Hölder). Siguin $f \in \mathscr{L}^p$ i $g \in \mathscr{L}^q$, on $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Aleshores tenim $||fg||_1 \leq ||f||_p ||g||_q$. A més, s'assoleix la igualtat $\iff \exists \lambda \in \mathbb{R}$ tal que $|f|^p = \lambda |g|^p$ μ-ga.
Cor. Siguin $f, g \in \mathscr{L}^2$. Aleshores $||fg||_1 \leq ||f||_2 ||g||_2$. A més s'assoleix la igualtat $\iff \exists \lambda \in \mathbb{R}$ tal que $f^2 = \lambda g^2$.
Prop. (desigualtat de Cauchy-Schwarz) Siguin $f, g \in \mathscr{L}^2$. Aleshores

$$\left|\int_X (fg) d\mu\right| \leq ||f||_2 ||g||_2$$

A més, s'assoleix la igualtat $\iff \exists \lambda \in \mathbb{R}$ tal que $f = \lambda g$.
Obs. Donat $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ obert notem $\mathscr{L}^p(\Omega) \equiv \mathscr{L}^p(\Omega, \mathcal{B}_{|\Omega}, \lambda_{|\Omega})$.
Cor. Donat $f \in \mathscr{L}^p(a,b)$ i $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$,
1. $\int_a^b |f| d\lambda \leq (b-a)^{1/q} (\int_a^b |f|^p d\lambda)^{1/p}$.
2. Si $p = 2$, aleshores $(\int_a^b |f| d\lambda)^2 \leq (b-a) \int_a^b f^2 d\lambda$.
Th. $(\mathscr{L}^p, ||\cdot||_p)$ és un espai de Banach.
Def. Anomenem espai de Lebesgue $\mathscr{L}^\infty$ al conjunt següent: $\mathscr{L}^\infty(X, \mathcal{X}, \mu) = \Big\{[f] \;\Big|\; f\ \mathcal{X}\text{-mesurable i fitada } \mu\text{-ga}\Big\}$, on $[f]$ denota la classe d'equivalència de funcions per la relació $f \sim_\mu g \iff f = g$ μ-ga.
Def. Donada $f \in \mathscr{L}^\infty$ es defineix la norma $||f||_\infty$ com

$$||f||_\infty = \inf \left\{ \sup_{x \in X \setminus N} |f(x)| \;\middle|\; \mu(N) = 0 \right\}$$

Th. $(\mathscr{L}^\infty, ||\cdot||_\infty)$ és un espai de Banach.

Sèries de Fourier

Teoria general

Obs. En aquest apartat prendrem $I = (a,b)$ per simplicitat.
Obs. $(\mathscr{L}^2(I), \langle\cdot,\cdot\rangle_2)$ és un espai de Hilbert, on el producte escalar està definit per

$$\langle f, g\rangle_2 = \int_a^b (fg) d\lambda$$

Def. Donat un espai euclidià diem que $S = \{\varphi_k\}_k$ és un
1. sistema ortogonal si $\langle \varphi_i, \varphi_j\rangle_2 = 0$, $\forall i \neq j$.
2. sistema ortonormal si $\langle \varphi_i, \varphi_j\rangle_2 = \delta_{ij}$, $\forall i, j$.

Def. Donada $f \in \mathscr{L}^2(I)$ i $S=\{\varphi_k\}_k$ sistema ortonormal a $\mathscr{L}^2(I)$ definim la sèrie de Fourier de f respecte S com

$$(\mathrm{SF}S)(f)=\sum_{k\geq 0}\langle f,\varphi_k\rangle_2\varphi_k$$

Prop. Siguin $f,g\in\mathscr{L}^2(I)$, $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ i $S=\{\varphi_k\}_k$ un sistema ortonormal a $\mathscr{L}^2(I)$. Aleshores

$$(\mathrm{SF}S)(\lambda f+\mu g)=\lambda(\mathrm{SF}S)(f)+\mu(\mathrm{SF}S)(g)$$

Prop. Sigui S un sistema ortonormal a $\mathscr{L}^2(I)$ i $f\in\mathscr{L}^2(I)$ amb $(\mathrm{SF}S)(f)=\sum_{k\geq 0}c_k\varphi_k$. Aleshores $\sum_{k\geq 0}c_k^2<\infty$ i
1. (desigualtat de Bessel). $\sum_{k\geq 0}c_k^2\leq ||f||_2^2$.
2. (id. de Parseval). $\sum_{k\geq 0}c_k^2=||f||_2^2 \iff (\mathrm{SF}S)_n(f)\xrightarrow[n\to\infty]{\mathscr{L}^2} f$
Cor. Si S és un sistema ortonormal a $\mathscr{L}^2(I)$, $f\in\mathscr{L}^2(I)$ i $c_k=\langle f,\varphi_k\rangle_2$, aleshores $\lim_{k\to\infty}c_k=0$.
Def. Un sistema ortonormal S a $\mathscr{L}^2(I)$ és complet si tenim que $\forall f\in\mathscr{L}^2(I)$, $\langle f,\varphi_k\rangle_2=0$, $\forall k\geq 0$, $\implies f=0$.
Th. Donat S sistema ortonormal a $\mathscr{L}^2(I)$ són equivalents.
1. S és complet.
2. $(\mathrm{SF}S)_n(f)\xrightarrow[n\to\infty]{\mathscr{L}^2} f$, $\forall f\in\mathscr{L}^2(I)$.
3. La identitat de Parseval és certa $\forall f\in\mathscr{L}^2(I)$.
Def. Diem que $S=\{\varphi_k\}_k$ és una base ortonormal de $\mathscr{L}^2(I)$ si és un sistema ortonormal complet.

Sèries habituals

Prop. Són exemples de bases ortonormals
1. A $\mathscr{L}^2(0,L)$ o a $\mathscr{L}^2\left(-\frac{L}{2},\frac{L}{2}\right)$ el sistema trigonomètric

$$\mathcal{T}=\left\{\frac{1}{\sqrt{L}},\sqrt{\frac{2}{L}}\cos\left(\frac{2\pi k}{L}x\right),\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{2\pi k}{L}x\right)\;\middle|\;k\geq 1\right\}$$

2. A $\mathscr{L}^2(0,L)$ el sistema de sinus i el sistema de cosinus

$$\mathcal{S}=\left\{\sqrt{\tfrac{2}{L}}\sin\left(\tfrac{\pi k}{L}x\right)\;\middle|\;k\geq 1\right\},\ \mathcal{C}=\left\{\tfrac{1}{\sqrt{L}},\sqrt{\tfrac{2}{L}}\cos\left(\tfrac{\pi k}{L}x\right)\;\middle|\;k\geq 1\right\}$$

Cor. Són exemples de bases ortonormals
1. A $\mathscr{L}^2(0,2\pi)$ o a $\mathscr{L}^2(-\pi,\pi)$ el sistema trigonomètric

$$\mathcal{T}^*=\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(kx),\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(kx)\;\middle|\;k\geq 1\right\}$$

2. A $\mathscr{L}^2(0,\pi)$ el sistema de sinus i el sistema de cosinus

$$\mathcal{S}^*=\left\{\sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\sin(kx)\;\middle|\;k\geq 1\right\},\ \mathcal{C}^*=\left\{\tfrac{1}{\sqrt{\pi}},\sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\cos(kx)\;\middle|\;k\geq 1\right\}$$

Obs. Les sèries de Fourier en els sistemes trigonomètrics, de sinus i de cosinus són

$$(\mathrm{SF}\mathcal{T})(f)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k\geq 1}a_k\cos\left(\frac{2\pi k}{L}x\right)+b_k\sin\left(\frac{2\pi k}{L}x\right)$$

$$(\mathrm{SF}\mathcal{S})(f)=\sum_{k\geq 1}\overline{b_k}\sin\left(\frac{\pi k}{L}x\right),\ (\mathrm{SF}\mathcal{C})(f)=\frac{\overline{a_0}}{2}+\sum_{k\geq 1}\overline{a_k}\cos\left(\frac{\pi k}{L}x\right)$$

amb els coeficients

$$a_k=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{2\pi k}{L}x\right)dx,\ b_k=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{2\pi k}{L}x\right)dx$$

$$\overline{a_k}=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{\pi k}{L}x\right)dx,\ \overline{b_k}=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{\pi k}{L}x\right)dx$$

i en particular

$$(\mathrm{SF}\mathcal{T}^*)(f)=\frac{a_0^*}{2}+\sum_{k\geq 1}a_k^*\cos(kx)+b_k^*\sin(kx)$$

$$(\mathrm{SF}\mathcal{S}^*)(f)=\sum_{k\geq 1}\overline{b_k^*}\sin(kx),\ (\mathrm{SF}\mathcal{C}^*)(f)=\frac{\overline{a_0^*}}{2}+\sum_{k\geq 1}\overline{a_k^*}\cos(kx)$$

amb els coeficients

$$a_k^*=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos(kx)dx,\ b_k^*=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin(kx)dx$$

$$\overline{a_k^*}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos(kx)dx,\ \overline{b_k^*}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin(kx)dx$$

Obs. Si $f\in\mathscr{L}^2(0,L)$ o $f\in\mathscr{L}^2\left(-\frac{L}{2},\frac{L}{2}\right)$, aleshores

$$||f||_2^2=\frac{L}{4}a_0^2+\frac{L}{2}\sum_{k\geq 1}(a_k^2+b_k^2)$$

Th. (de Dirichlet) Sigui f L-periòdica contínua a trossos amb derivada contínua a trossos. Aleshores

$$(\mathrm{SF}\mathcal{T})_n(f)(x)\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{f(x^-)+f(x^+)}{2},\quad x\in\mathbb{R}$$

on $f(x^\pm)=\lim_{h\to 0^\pm}f(x+h)$.
Prop. Sigui f L-periòdica contínua amb derivada contínua a trossos. Aleshores $a_k'=\frac{2\pi}{L}kb_k$, $b_k'=-\frac{2\pi}{L}ka_k$, on a_k' i b_k' denoten els coeficients de Fourier de f'.

Cor. Si f L-periòdica contínua amb derivada contínua a trossos. Aleshores

$$||f'||_2^2=\frac{L}{2}\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2\sum_{k\geq 1}k^2(a_k^2+b_k^2)$$

Th. Sigui f L-periòdica contínua amb derivada contínua a trossos. Aleshores $(\mathrm{SF}\mathcal{T})_n(f)\xrightarrow[n\to\infty]{\text{unif.}} f$.

Resultats d'anàlisi complexa

Def. Donat $U\subseteq\mathbb{C}$ obert, diem que $\varphi:U\to\mathbb{C}$ és derivable en $z_0\in U$ si existeix el límit $f'(z_0):=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$.
Def. Donat $U\subseteq\mathbb{C}$ obert, diem que $\varphi:U\to\mathbb{C}$ és holomorfa si és derivable en tot $z_0\in U$.
Prop. Donat $U\subseteq\mathbb{C}$ obert, si $\varphi=u+iv:U\to\mathbb{C}$ és una funció holomorfa, aleshores satisfà $u_x=v_y$ i $u_y=-v_x$, que anomenem equacions de Cauchy-Riemann.
Def. Donat $z\in\mathbb{C}^*$, anomenem argument de z i denotem $\arg(z)$ als $\theta\in\mathbb{R}$ tals que $z=|z|e^{i\theta}$, és a dir,

$$\arg(z)=\left\{\alpha+2\pi k\mid k\in\mathbb{Z}\right\}$$

on $\alpha\in(-\pi,\pi]$ és l'únic valor de l'interval tal que $z=|z|e^{i\alpha}$.
Def. Donat $z\in\mathbb{C}^*$, anomenem logaritme complex de z i denotem $\log(z)$ als $w\in\mathbb{C}$ tals que $e^w=z$, és a dir,

$$\log(z)=\log|z|+i\arg(z)=\left\{\log|z|+i(\alpha+2\pi k)\mid k\in\mathbb{Z}\right\}$$

Def. Donat $\Omega\subseteq\mathbb{C}^*$, una determinació del logaritme complex és $\mathrm{Log}:\Omega\to\mathbb{C}$ tal que $\mathrm{Log}(z)\in\log(z)$, $\forall z\in\Omega$.
Def. Donat $\Omega\subseteq\mathbb{C}^*$, una determinació de l'argument és $\mathrm{Arg}:\Omega\to\mathbb{C}$ tal que $\mathrm{Arg}(z)\in\arg(z)$, $\forall z\in\Omega$.
Obs. Escollir una determinació del logaritme complex és equivalent a escollir una determinació de l'argument.
Prop. Si $\Omega\subseteq\mathbb{C}^*$ és un obert simplement connex, aleshores existeixen determinacions del logaritme complex holomorfes a Ω amb derivada $\frac{1}{z}$.
Th. Donada $\varphi:U\to\mathbb{C}$ amb $U\subseteq\mathbb{C}$ obert, són equivalents
1. φ és holomorfa.
2. φ és infinitament derivable en tots els punts de U.
3. φ és analítica, és a dir, $\forall z_0\in U$ existeix un entorn de z_0 on φ es pot expressar com una sèrie de potències centrada en z_0.
Def. Siguin $U,V\subseteq\mathbb{C}$ oberts i $\varphi:U\to V$. Diem que φ és biholomorfa si és bijectiva i tant φ com φ^{-1} són holomorfes.

Th. (de l'aplicació conforme de Riemann) $\forall \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ obert simplement connex no buit, $\exists \varphi : \Omega \to D_1(0)$ biholomorfa.

Convergència de sèries

Prop. (criteri del quocient de d'Alembert) Sigui $\sum_{n\geq 0} a_n$ una sèrie per la qual $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que tenim $a_n \neq 0$, $\forall n \geq n_0$. Sigui

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$$

1. Si $L < 1$ la sèrie convergeix.
2. Si $L > 1$ la sèrie divergeix.

Prop. (criteri de l'arrel de Cauchy) Sigui $\sum_{n\geq 0} a_n$ una sèrie. Definim

$$L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

1. Si $L < 1$ la sèrie convergeix.
2. Si $L > 1$ la sèrie divergeix.

Prop. Siguin $\sum_{n\geq 0} a_n$ i $\sum_{n\geq 0} b_n$ dues sèries per les quals $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n, b_n > 0$, $\forall n \geq n_0$. Definim

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$$

1. Si $L < \infty$ i $\sum_{n\geq 0} b_n$ convergeix, aleshores $\sum_{n\geq 0} a_n$ també.
2. Si $L > 0$ i $\sum_{n\geq 0} a_n$ convergeix, aleshores $\sum_{n\geq 0} b_n$ també.
3. Si $0 < L < \infty$, aleshores $\sum_{n\geq 0} a_n$ convergeix $\iff$ $\sum_{n\geq 0} b_n$ convergeix.

Resultats de càlcul diferencial

Th. (del valor mig). Sigui $f : U \to \mathbb{R}^m$ una funció de classe $\mathcal{C}^1$ amb $U \subseteq \mathbb{R}^n$ obert. Per a tot $x, y \in U$, $\exists z \in \overline{xy}$ tal que $||f(x) - f(y)|| \leq ||Df(z)(x-y)||$.

Prop. (condició suficient per Lipschitz). Sigui $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ de classe $\mathcal{C}^1$ amb $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ obert convex. Si Df està fitada, aleshores f és Lipschitz (globalment).

Prop. Si $f : U \to \mathbb{R}^m$ és localment Lipschitz amb $U \subseteq \mathbb{R}^n$ obert, aleshores $\forall K \subseteq U$ compacte, la restricció $f|_K$ és globalment Lipschitz.

Prop. (condicions necessàries de mínim). Sigui $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un obert i $f : U \to \mathbb{R}$ una funció de classe $\mathcal{C}^2$. Si f assoleix un mínim local en $x_0 \in U$, aleshores $\vec{\nabla} f(x_0) = 0$ i $\nabla^2 f(x_0) \succeq 0$.

Prop. (condicions suficients de mínim). Sigui $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un obert i $f : U \to \mathbb{R}$ una funció de classe $\mathcal{C}^2$. Si $\vec{\nabla} f(x_0) = 0$ i $\nabla^2 f(x_0) \succ 0$ en $x_0 \in U$, aleshores f assoleix un mínim en x_0.

Th. (funció inv.). Sigui $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ funció $\mathcal{C}^k$ $(k \geq 1)$. Aleshores $\det Df(x_0) \neq 0$ en $x_0 \in U \iff f$ restringida a un determinat entorn de $x_0 \in U$ és un difeomorfisme $\mathcal{C}^k$.

Th. (funció imp.). Sigui $F : W \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ una funció $\mathcal{C}^k$ $(k \geq 1)$ i $(x_0, y_0) \in W$ un punt tal que $F(x_0, y_0) = 0$ i $\det D_2 F(x_0, y_0) \neq 0$. Aleshores $\exists f : V_{x_0} \to V_{y_0}$ funció $\mathcal{C}^k$ tal que $f(x_0) = y_0$ i $F(x, f(x)) = 0$, $\forall x \in V_{x_0}$.

Resultats d'EDOs

Prop. Considerem l'EDO amb coeficients constants $y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$, que té polinomi característic $p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$. Si tenim $p(\lambda) = (\lambda - \alpha_1)^{m_1} \ldots (\lambda - \alpha_k)^{m_k}$, $\alpha_i \neq \alpha_j$, $i \neq j$, aleshores $\left\{e^{\alpha_1 x}, \ldots, x^{m_1 - 1} e^{\alpha_1 x}, \ldots, e^{\alpha_k x}, \ldots, x^{m_k - 1} e^{\alpha_k x}\right\}$ és una base de l'espai de solucions de l'EDO.

Prop. Suposem ara que té terme independent $f(x) = x^j e^{\alpha x}$, on α és arrel de multiplicitat $k \geq 0$ de p. Podem trobar una solució de la forma $y_p(x) = x^k(a_0 + a_1 x + \cdots + a_j x^j)e^{\alpha x}$.

Prop. (equació d'Euler) $ax^2 \frac{d^2 y}{dx} + bx\frac{dy}{dx} + cy = 0$ es converteix en l'EDO amb coeficients constants $a\frac{d^2 z}{dt} + (b-a)\frac{dz}{dt} + cz = 0$ en fer el canvi $z(t) = y(e^t)$. Així, té sentit buscar solucions de la forma $y(x) = x^\alpha$.

Miscel·lània

Prop. (fórmula de Leibniz). Sigui $f : I \times J \to \mathbb{R}$ definida per $(x,t) \mapsto f(x,t)$ una funció contínua tal que $\exists \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ també contínua. Siguin $a, b : I \to J$ funcions $\mathcal{C}^1$. Aleshores

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)dt\right) = f(x, b(x))b'(x) - f(x, a(x))a'(x) + \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt$$

Cor. (derivació sota el signe integral). Sigui $f : I \times J \to \mathbb{R}$ definida per $(x,t) \mapsto f(x,t)$ funció contínua tal que $\exists \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ també contínua. Aleshores donats $a, b \in J$ qualssevol,

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^b f(x,t)dt\right) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt$$

Th. (de la convergència dominada d'Arzelà) Considerem les funcions $f_n, f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrables Riemann, on (f_n) és una successió tal que $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{punt.}} f$. Si $\exists M > 0$ tal que $|f_n(x)| \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$ i $\forall x \in [a,b]$, aleshores

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

Prop. Si E és un espai de Banach i $C \subseteq E$ és un conjunt tancat de l'espai, aleshores C és un espai de Banach amb la norma heretada de E.

Prop. Si X és un espai mètric, aleshores $C \subseteq X$ és tancat $\iff \forall (v_n) \subseteq C$ successió convergent, $v = \lim_{n\to\infty} v_n \in C$.

Obs. Les dues proposicions anteriors ens permeten demostrar que $E = \left\{v \in \mathcal{C}^0([0,1]) \mid v(0) = 0\right\}$ és un espai de Banach.

Th. (del punt fix de Banach). Sigui E espai de Banach i $\phi : E \to E$ contracció. Existeix un únic $v \in E$ tal que $\phi(v) = v$.

Nom: ____________________