ALN (200151)

1. Aritmètica finita i control del errors

1. (Èpsilon de màquina). Es defineix el concepte de “èpsilon de màquina” com el nombre positiu ϵ més petit que sumat a 1 dóna diferent de 1. És a dir:

$$\epsilon := \min\{\varepsilon > 0 : \mathrm{fl}(1+\varepsilon) > 1\}.$$

calculi l'èpsilon de màquina tant en precisió simple (`float`) com en precisió doble (`double`).

2. (Exercici 1.2-4: suma de la sèrie harmònica generalitzada). Useu aritmètica de 3 dígits amb eliminació per a calcular la suma

$$S_{15} = \sum_{n=1}^{15} \frac{1}{n^2},$$

primer en ''l'ordre natural" (decreixent), i.e.,

$$S_{15} = \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{255},$$

i després en l'ordre "invers" (creixent), i.e.,

$$S_{15} = \frac{1}{255} + \frac{1}{196} + \cdots + \frac{1}{1}.$$

Decidiu quin és el mètode més exacte de tots dos. *Nota:* recordeu l'exercici 1.2-3.

3. (Potències del recíproc del nombre d'or). Sigui $\Phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ el nombre d'or (o proporció, o raó àuria) i ϕ el seu recíproc (invers multiplicatiu), això és: $\phi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Es comprova d'immediat que $-\Phi$ i ϕ són les dues arrels de l'equació de 2on. grau

$$x^2 + x - 1 = 0.$$

Basant-vos en això, justifiqueu els tres algorismes següents

A1:

$$\phi^0 = 1, \quad \phi^1 = \phi, \quad \phi^k = \phi \cdot \phi^{k-1}, \qquad \text{(per a } k = 2, 3, \dots)$$

A2:

$$\phi^0 = 1, \quad \phi^1 = \phi, \quad \phi^2 = 1 - \phi, \quad \phi^k = \phi^{k-2} \cdot (1 - \phi),$$
$$\text{(per a } k = 3, 4, \dots)$$

A3:

$$\phi^0 = 1, \quad \phi^1 = \phi, \quad \phi^2 = 1 - \phi, \quad \phi^k = \phi^{k-2} - \phi^{k-1},$$
$$\text{(per a } k = 3, 4, \dots)$$

per a calcular les potències successives de ϕ. Escriviu un programa `C/C++` que compari tots tres algorismes.

4. (Exercici 1.2-10). Usant un mètode recurrent, calculeu el valor de les integrals,

$$J_k = \int_0^1 x^k \sin(\pi x) \mathrm{d}x,$$

$(j = 2, 4, \ldots, 20)$. En concert:

4.1. Demostru que:

$$\begin{aligned} J_0 &= \frac{2}{\pi}, \\ J_1 &= \frac{1}{\pi}, \\ J_k &= \frac{1}{\pi} - \frac{k(k-1)}{\pi^2} J_{k-2}, \qquad k = 2, 3, 4, \ldots \end{aligned} \tag{1}$$

4.2. Fent servir la recurrència (1), calcueu J_k per a $k = 2, 4, 6 \ldots, 20$. És estable l'algorisme trobat? Per què?

4.3. Dissenyeu un algorisme alternatiu que eviti els problemes detectats al punt anterior. *Ajut:* considereu (1) però iterant "cap endarrere".