Grau de Matemàtiques, FME

Programació Matemàtica

Tema 1 : Programació Lineal

Algorisme del símplex

Jordi Castro, F.-Javier Heredia, Josep Homs

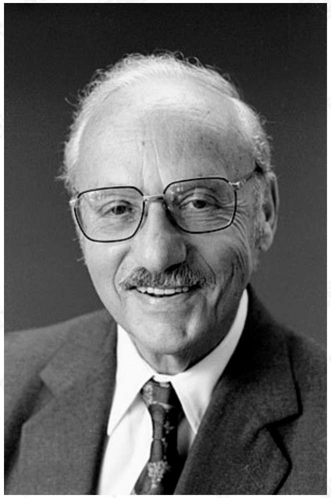
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Departament d'Estadística
i Investigació Operativa

Tema 2 : l'Algorisme del Símplex Primal

1. *Introducció i fonaments.*
2. **L'algorisme del símplex primal (ASP).**
   1. **Orígens històrics i justificació.**
   2. **Desenvolupament de l' ASP.**
      a) Direccions bàsiques i canvi de base.
      b) Condicions d'optimalitat.
      c) Identificació de problemes il·limitats.
      d) Algorisme genèric del símplex primal: ASP.
   3. **Càlcul de SBF inicials: problema de fase I del símplex.**
   4. **Convergència i degeneració: ASP1.**
   5. **Complexitat algorísmica.**

Bibliografia: Cap. 2 - 5 "*Introduction to Linear Optimization*", D. Bertsimas, N. Tsitsiklis

L'algorisme del símplex : orígens



- **L. Kantorovich (1939), T. Koopmans (1942). (Nobel Econ. 75)**
- **George B. Dantzig, 1947 (data desclassificació), USAF.**

  "A certain wide class of practical problems appears to be just beyond the range of modern computing machinery. These problems occur in everyday life; they run the gamut from some very simple situations that confront an individual to those connected with the national economy as a whole. Typically, these problems involve a complex of different activities in which one wishes to know which activities to emphasize in order to carry out desired objectives under known limitations (Dantzig 1948)."

- **Primer problema no trivial de LP documentat: problema de la dieta (G. Stigler, 1945, Premi Nobel Economia 1982)**
  - $n = 77$ variables, $m = 9$ constriccions. Nou persones treballant conjuntament amb calculadores electròniques: 120 homes-mes de treball.
- **Actualment (CPLEX)**:
  - $n =$ 1.369.624, $m =$ 3.520.024, $t < 10\text{min}$ (TFM-MEIO, http://hdl.handle.net/2099.1/13914)
- ***SIAM News, Volume 33, Number 4: The Best of the 20th Century: Editors Name Top 10 Algorithms*** (http://www.siam.org/pdf/news/637.pdf)

  "In terms of widespread application, Dantzig's algorithm is one of the most successful of all time: Linear programming dominates the world of industry, where economic survival depends on the ability to optimize within budgetary and other constraints."

L'algorisme del símplex: justificació (1/2)

Recordem:

Teorema 2 (optimalitat dels pt.extrems)	**Teorema 3** (equivalència pt.extrems - SBF)

$\Downarrow$

Corol·lari 3.1: optimalitat de les SBF

Sigui $(PL)\ min\{c'x : x \in P\}$, P *políedre. Suposem que* P *conté algun punt extrem i que existeix una solució òptima.*

*Llavors **existeix una solució òptima que és una SBF de P_e.***

- **Idea 1:** trobar **TOTES** les SB i quedar-nos amb la millor de entre les SBF → **INVIABLE**
  - **Per a $(PL)_e$ amb $n = 100, m = 50$…**
    - #ops/sec i7: $70Gflops = 7.0 \times 10^{10} flops$.
    - # ops: $x_B = B^{-1}b \sim o(m^2) \approx 50^2 = 2500$.
    - # SBF $\leq \binom{100}{50} = 100!/(50!)^2 \approx 10^{29}$.
    - # ops. total $\approx$ #SBF·#ops$\approx 10^{29} \cdot 2500 = 2.5 \times 10^{32}$.
    - Temps total = #ops. total / (#ops/sec i7) $= 2.5 \times 10^{32}/7.0 \times 10^{10} = 3.5 \times 10^{21} sec$.

… temps total $\approx 10^{14} anys >$ edat univers $\approx 1.35 \times 10^{10}$ $anys$.

F.-Javier Heredia http://gnom.upc.edu/heredia
https://meet.google.com/isq-iicx-fzp

L'algorisme del símplex: justificació (2/2)

Recordem:

Teorema 2 (optimalitat dels pt.extrems)	**Teorema 3** (equivalència pt.extrems - SBF)

$\Downarrow$

Corol·lari 3.1: optimalitat de les SBF.

Sigui $(PL)\ min\{c'x : x \in P\}$, P *políedre. Suposem que* P *conté algun punt extrem i que existeix una solució òptima.*

Llavors ***existeix una solució òptima que és una SBF de*** P_e.

- **Idea 1:** trobar **TOTES** les SB i quedar-nos amb la millor de entre les SBF → **INVIABLE**
- **Idea 2:** **l'algorisme del símplex**:

  Trobem **UNA** SBF x i passem a un altre SBF y tal que $c'y < c'x$.

  Repetim fins a trobar l'òptima.

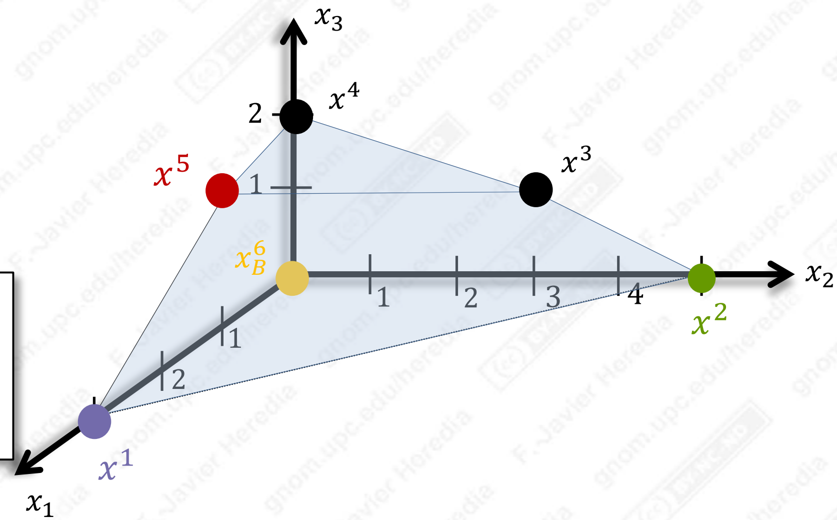
- **Qüestions a resoldre**:

1. Com trobem una SBF? → **Fase I del símplex.**
2. Com canviem d'una SBF a un altre millor? → **direccions bàsiques factibles de descens**
3. Com identifiquem la SBF òptima? → **condicions d'optimalitat**.
4. I si el problema no té solució? → **problemes il·limitats**

DBF: canvi entre SBF adjacents.

- Considerem el problema:

$$
(PL)\begin{cases}
\min \quad z = & 5x_1 + 3x_2 + 9x_3 \\
\text{s.a.:} & x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 \qquad = 6 \\
 & 5x_1 + 3x_2 + 6x_3 + x_5 \quad = 15 \\
 & x \geq 0
\end{cases}
$$



Def. SBF adjacents: dues SBF són adjacents si es distingueixen només per una variable bàsica.

- Sigui la SBF x^1 i les seves SBF adjacents:

$$\boldsymbol{x^1}: \mathcal{B} = \{1,4\}, x_B^1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 6 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}, z^1 = c_B' x_B = 15$$

$$\boldsymbol{x^2}: \mathcal{B} = \{2,4\}, x_B^2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 6 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}, z^2 = c_B' x_B = 15$$

$$\boldsymbol{x^5}: \mathcal{B} = \{1,3\}, x_B^5 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 6 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{5}{3} \end{bmatrix}, z^5 = c_B' x_B = 20$$

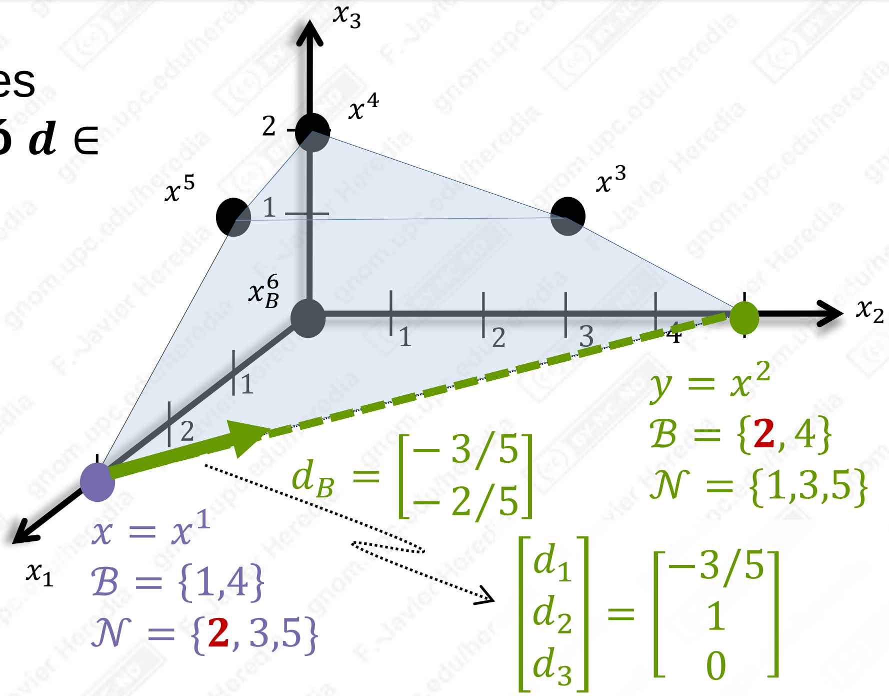
$$\boldsymbol{x^6}: \mathcal{B} = \{4,5\}, x_B^6 = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 6 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 15 \end{bmatrix}, z^6 = c_B' x_B = 0$$

Es desenvoluparà el procediment per pasar de la SBF x^1 a qualsevol de les seves SBF adjacents.

Direcció factible i direcció bàsica

- Sigui P_e, **no buit, rang complet**. Donades les SBF adjacents $\boldsymbol{x}$ i $\boldsymbol{y}$, volem trobar la **direcció $\boldsymbol{d} \in \mathbb{R}^n$** i **l'escalar $\boldsymbol{\theta}^*$** $\in \mathbb{R}^+$ t.q. :

  $y = x + \theta^* d$ ($\boldsymbol{x = x^1}$ i $\boldsymbol{y = x^2}$ a l'exemple)



Def. direcció factible: $d \in \mathbb{R}^n$ factible sobre $x \in P_e$ si $\exists \theta \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{\theta > 0}$, tal que :

$$x + \theta d \in P_e$$

Def. direcció factible: direcció bàsica (DB):

Sigui P_e no buit, rang comp. La direcció bàsica (DB) sobre la SBF $x \in P_e$ associada a

$q \in \mathcal{N}$ és la direcció $d = \begin{bmatrix} d_B \\ d_N \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ t.q $\boxed{d_{N(i)} \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 \text{ si } N(i) = q \\ 0 \text{ si } N(i) \neq q \end{cases}, i = 1, \dots, n-m}$

i d_B és tal que $A(x + \theta d) = b, \forall \theta \in \mathbb{R}$: $\boxed{d_B = -B^{-1}A_q}$

DB: factibilitat i longitud de de pas θ^* (1/2)

- La DB $d \in \mathbb{R}^n$ és factible sobre la SBF $x \in P_e$

  si $\exists\theta \in \mathbb{R}^+$ tal que $y = x + \theta d \in P_e$:

  $y \in P_e = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \overbrace{Ax = b}^{(1)}, \overbrace{x \geq 0}^{(2)}\}$:

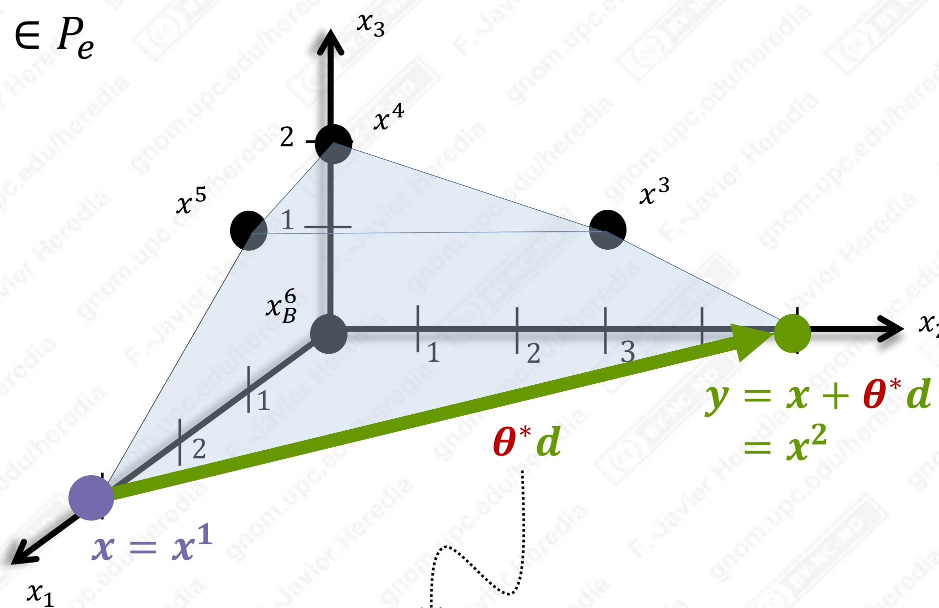
  $(1): Ay = A(x + \theta d) = b$, **cert** $\forall\theta$

  $(2): y = x + \theta d \geq 0$, **depén de θ**:

  o $y_{N(i)} = \begin{Bmatrix} 0 & N(i) \neq q \\ \theta & N(i) = q \end{Bmatrix} \geq 0, \forall\theta > 0.$

  o $y_B = \overbrace{x_B}^{>0} + \theta \overbrace{d_B}^{?} \geq [0]$, llavors

  $\boldsymbol{y_B \geq 0 \Leftrightarrow \theta \leq \theta^*}$ amb:



$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \boldsymbol{\theta^*} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbf{5} \begin{bmatrix} -3/5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Def. longitud de pas $\boldsymbol{\theta^*}$: sigui P_e, $x \in P_e$ SBF, $d \in \mathbb{R}^n$, DB sobre x, llavors:

$$\boldsymbol{\theta^* = \max\{\theta \geq 0 \mid x + \theta d \geq 0\}}$$

- Si θ^* existeix, la seva expressió és:

$$\theta^* = \min_{\{i=1,\dots,m \mid d_{B(i)}<0\}} \{-x_{B(i)}/d_{B(i)}\} = -x_{B(p)}/d_{B(p)}$$

Proposició 5 : **factibilitat de les DB, cas P_e no degenerat.**

Sigui P_e *no buit, de rang complet, no degenerat i sigui* d *DB sobre* x

SBF. Llavors:

i. ***d és factible.***

ii. *Si* $d_B \ngeq 0 \Rightarrow \exists \theta^* = \max\{\theta \geq 0 \mid x + \theta d \geq 0\} > 0$.

iii. *Si* $d_B \geq 0 \Rightarrow \nexists \theta^* = \max\{\theta > 0 \mid x + \theta d \geq 0\}$"$=+\infty$".

Demo: immediata, a partir de les definicions de d i θ^*.

Conseqüències:

- Si P_e és no degenerat totes les DB seran factibles (**Exercicis 21, 22**).
- Si P_e és degenerat alguna DB pot ser infactible (**Exercici 23**).
  (el detall de DB per a P_e degenerats s'estudiarà més endavant)

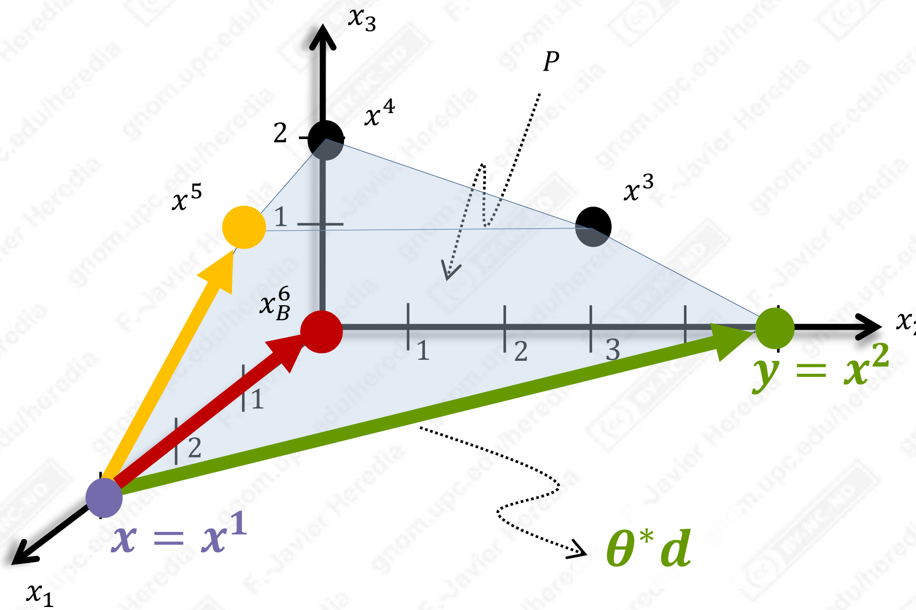
F.-Javier Heredia http://gnom.upc.edu/heredia
https://meet.google.com/isq-iicx-fzp

DB: actualització de les variables : $y = x + \theta^* d$

- **Obtenció de la nova SBF:**

$$y = x + \theta^* d = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} + \theta^* \begin{bmatrix} d_B \\ d_N \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{array}{c} x_1 \\ x_4 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_5 \end{array} \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} -3/5 \\ -2/5 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{array}{c} y_1 \\ y_4 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_5 \end{array}$$



Observeu el canvi de base

$\mathcal{B}^1 = \{1, 4\} \rightarrow \mathcal{B}^2 = \{2, 4\}$

(SBF adjacents)

Exercici: trobeu d i θ^* sobre $x = x^1$ associat a $y = x^6$ i $y = x^5$

DB: $y = x + \theta^* d$ és SBF

Teorema 4 (Ta. 3.2 B&T): $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{\theta}^* \boldsymbol{d}$ és solució bàsica factible.

"Sigui x SBF de ***P_e no buit, de rang complet*** *i sigui d DB sobre x. Llavors:*

i. *Si $\boldsymbol{d_B} \ngeq \mathbf{0}$, $y = x + \theta^* d$ amb $\theta^* = \min_{\{i \mid d_{B(i)} < 0\}} \left\{ -\frac{x_{B(i)}}{d_{B(i)}} \right\}$ és SBF de P_e.*

ii. *Si $\boldsymbol{d_B} \geq \mathbf{0}$, no existeix cap $\theta > 0$ t.q. $y = x + \theta d$ sigui SBF de P_e."*

Demo: **pissarra**.

Corol·lari 4.1: forma en producte de la inversa.

" Sigui x SBF de ***P_e no buit, de rang complet***. *Sigui y SBF adjacent a x associada a $q \in \mathcal{N}$ amb $d_B = -B^{-1} A_q \ngeq 0$ i sigui $\bar{B}$ la seva matriu bàsica. Llavors $\bar{B}^{-1} = \mathrm{H} B^{-1}$ amb $\mathrm{H} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ matriu eta definida com:*

$$\mathrm{H} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \phantom{e_1 \dots e_{(p-1)}} & & p & & \phantom{e_{(p+1)} \dots e_m} \end{array} \\ \left[e_1 \dots e_{(p-1)} \quad \overbrace{\eta} \quad e_{(p+1)} \dots e_m \right] \end{array}, \eta \in \mathbb{R}^m, \eta_i = \begin{cases} -d_{B(i)}/d_{B(p)} & i \neq p \\ -1/d_{B(p)} & i = p \end{cases}."$$

Condicions d'optimalitat: costos reduïts.

- Considerem els tres possibles canvis de base vistos a l'exemple

$$z^1 = 15 \begin{cases} z^2 = 15 = z^1 & \textbf{no millora} \\ z^5 = 20 > z^1 & \textbf{empitjora} \\ z^6 = \ \ 0 < z^1 & \textbf{millora} \end{cases}$$

$$r_2 = c_2 - c_B' B^{-1} A_2 = 3 - [0 \quad 1] \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} \mathbf{=0}$$

$$r_3 = c_3 - c_B' B^{-1} A_3 = 9 - [0 \quad 1] \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} \mathbf{=3>0}$$

$$r_5 = c_5 - c_B' B^{-1} A_5 = 0 - [0 \quad 1] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{=-1<0}$$

- Donats $\mathcal{B}$ i q es pot saber si $c'y < c'x$? Expressem $c'y$ en funció de $c'x$

$$c'y = c'(x + \theta^* d) = c'x + \theta^* c'd = c'x + \theta^* [c_B' \quad c_N'] \begin{bmatrix} d_B \\ d_N \end{bmatrix} =$$

$$= c'x + \theta^* \Big(c_B' \underbrace{d_B}_{d_B = -B^{-1}A_q} + \underbrace{c_N' d_N}_{c_q} \Big) = c'x + \theta^* \underbrace{\left(c_q - c_B' B^{-1} A_q\right)}_{r_q} = c'x + \theta^* r_q$$

- $\boxed{c'y = c'x + \theta^* r_q}$ amb $\boxed{r_q \stackrel{\text{def}}{=} c_q - c_B' B^{-1} A_q}$ **costos reduïts de la VNB q**

F.-Javier Heredia http://gnom.upc.edu/heredia
https://meet.google.com/isq-iicx-fzp

Condicions d'optimalitat: DB de descens

Def. direcció de descens:

La direcció $d \in \mathbb{R}^n$ és de descens sobre $x \in \mathbb{R}^n$ per a la funció $c'x$ si

$$c'(x+\theta d) < c'x, \qquad \theta > 0$$

- Si d és DB, la condició de descens i el signe dels costos reduïts estan directament relacionats:

Proposició 6: **propietats direccions de descens.**

i. d *és de descens sobre* $x \Leftrightarrow c'd < 0$.

ii. $x \in P_e$ *òptim* $(PL)_e \Leftrightarrow$ *sobre* x *no existeix cap direcció factible de descens.*

iii. *Si* d *és DB sobre* x *SBF associada a* $q \in \mathcal{N}$ *llavors* $r_q = c'd$.

iv. *La DB* d *assoc. a* $q \in \mathcal{N}$ *és de descens* $\Leftrightarrow r_q < 0$.

Demo: immediata.

- Obviament, x **SBF serà òptima sii no existeix cap direcció factible (no necessàriament DB) de descens**. Al següent teorema veurem com aquesta condició es pot establir analitzant només el signe dels costos reduïts.

- **Exercicis 26,27**.

Condicions d'optimalitat de SBF

Teorema 5 (Ta. 3.1 B&T): condicions d'optimalitat de SBF P_e qualsevol.

"*Sigui P_e* ***no buit de rang complet****, x SBF de P_e i sigui el vector de costos reduïts associat a x, $r' = c'_N - c'_B B^{-1} A_N$. Llavors:*

a) Si $r \geq [0] \Rightarrow x$ és SBF òptima.

b) Si x és SBF òptima i no degenerada $\Rightarrow r \geq [0]$."

Demo.: pissarra

- **Comentari:** Una SBF degenerada, **pot ser òptima** però tenir alguna DB no factible ($\theta^* = 0$) de descens ($r_q < 0$) (Ex.: $\min\left\{-x_2 \middle| \begin{array}{c} x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_2 \geq 1 \end{array}, x \geq 0\right\}, \mathcal{B} = \{2,3\}$).

Corol·lari 5.1: condicions d'optimalitat de SBF P_e no degenerat.

"*Sigui P_e* ***no buit de rang complet****,* ***no degenerat****, x SBF de P_e i sigui el vector de costos reduïts associat a x, $r' = c'_N - c'_B B^{-1} A_N$. Llavors*

x és SBF òptima $\Leftrightarrow r \geq [0]$."

Identificació de problemes (PL) il·limitats

- Si $\boldsymbol{d} \geq \boldsymbol{0}$ DB associada a la VNB x_q llavors per a tot $\theta > 0$:

$$y = x + \theta d \geq 0 \Rightarrow \boxed{y \in P_e \ \ \forall \theta > 0}\,.$$

- **Conseqüències:**

  i. La longitud de pas θ^* no està definida:

$$\theta^* = \max\{\theta > 0 \mid x + \theta d \geq 0\} = \min_{\{i \in \emptyset\}}\left\{-x_{B(i)}/d_{B(i)}\right\} = "+\infty" \ (\nexists \theta^*)$$

  ii. Al llarg de la semirecta $x + \theta d, \theta > 0$ (aresta del políedre) no existeix cap SBF.

  iii. **Si $\boldsymbol{r_q < 0}$, $\boldsymbol{z = c'x}$ decreix sense límit al llarg de $\boldsymbol{d}$ ((PL) il·limitat)**:

$$z(x + \theta d) = z(\theta) = c'(x + \theta d) = \overbrace{c'x}^{cte} + \overbrace{\theta r_q}^{<0} \xrightarrow{\theta \to +\infty} -\infty$$

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Departament d'Estadística
i Investigació Operativa

L'algorisme genèric del símplex primal (ASP)

1. Inicialització: sigui $(PL)_e \min_{x \in \mathbb{R}^n}\{c'x \mid x \in P_e\}$, P_e políedre estàndard ***no buit de rang complet*** i $\boldsymbol{x \in P_e}$ **SBF inicial** representada per $\mathcal{B}$, $\mathcal{N}$, x_B i z.

2. Identificació de SBF òptima i selecció de la VNB entrant $\boldsymbol{q}$:

2.1 Es calculen els costos reduïts $r' = c'_N - c'_B \boldsymbol{B^{-1}} A_N$

2.2. Si $r' \geq [0]$ llavors **la SBF actual és òptima: STOP**.

Altrament, **es selecciona una VNB $\boldsymbol{q}$ amb $\boldsymbol{r_q < 0}$** (VNB entrant).

3. Càlcul de la DB de descens. :

3.1. Es calcula $d_B = -\boldsymbol{B^{-1}} A_q$ (DB de descens associada a x_q)

3.2. Si $d_B \geq [0] \Rightarrow$ DB de descens il·limitat: **$\boldsymbol{(PL)_e}$ il.limitat: STOP**

4. Càlcul de la passa màxima $\boldsymbol{\theta^*}$ i selecció de la VB sortint $\boldsymbol{B(p)}$:

4.1. Càlcul de la passa màxima al llarg de d_B : $\theta^* = \min_{\{i=1,\ldots,m \mid d_{B(i)}<0\}} \{-x_{B(i)}/d_{B(i)}\}$

4.2. VB de sortida: **$\boldsymbol{B(p)}$ t.q. $\boldsymbol{\theta^* = -x_{B(p)}/d_{B(p)}}$**

5. Actualitzacions i canvi de base :

5.1. Actualització de les VB i f.o.: $x_B \coloneqq x_B + \theta^* d_B$, $x_q \coloneqq \theta^*$; $z \coloneqq z + \theta^* r_q$

5.2. S'actualitzen $\mathcal{B} \coloneqq \mathcal{B} \backslash \{B(p)\} \cup \{q\}$, $\mathcal{N} \coloneqq \mathcal{N} \backslash \{q\} \cup \{B(p)\}$

6. Anada a 2.

Exemple algorisme del simplex (1/3)

- **Exercici 29** Trobeu la solució òptima del següent problema (PL) aplicant l'algorisme del símplex, prenent com a SBF. inicial l'associada al punt extrem $x' = [0{,}6]$.

$$(PL)\begin{cases} \text{min z=} & x_1 & +x_2 & & & \\ \text{s.a.:} & 2x_1 & +x_2 & +x_3 & & = 8 \\ & & x_2 & & +x_4 & = 6 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4 & \geq 0 \end{cases}$$

1. Inicialització : $x = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{cases} \mathcal{B} = \{3,2\}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, x_B = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}, c_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, z = c_B' x_B = 6 \\ \mathcal{N} = \{1,4\}, A_N = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, c_N = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{cases}$$

L'algorisme del simplex primal: exemple (2/3)

- **1a iteració:** $\mathcal{B} = \{3,2\}, \mathcal{N} = \{1,4\}$

2. **Identificació de SBF òptima i selecció de la VNB d'entrada *q* :**

$$r' = c_N' - c_B' B^{-1} A_N = [1 \quad 0] - [0 \quad 1] \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [1 \quad -1] \ngeq 0 \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} q = 4, \\ x_4 \text{ VNB} \\ entrant \end{matrix}}$$

3. **DBF de descens:** $d_B = -B^{-1} A_4 = -\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \ngeq 0$

4. **Passa màxima $\boldsymbol{\theta^*}$ i VB de sortida *p*:** $\theta^* = \min_{\{i=2\}} \left\{ \frac{-x_{B(i)}}{d_{B(i)}} \right\} = 6 \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} p = 2, \\ x_{B(2)} \text{ VB sortint.} \end{matrix}}$

5. **Actualitzacions i canvi de base :** $q = 4 \leftrightarrow B(p) = 2$

$$x_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \end{bmatrix} := x_B + \theta^* d_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} + 6 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \end{bmatrix}, x_4 := \theta^* = 6 \,;\, z := z + \theta^* r_q = 6 + 6 \times (-1) = 0$$

$$\mathcal{B} := \{3,4\} \,,\, B = B^{-1} := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \,,\; x_B = \begin{bmatrix} x_{B(1)} \\ x_{B(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix} \;, c_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{N} := \{1,2\} \,, \qquad A_N := \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \,, \qquad c_N := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

F.-Javier Heredia http://gnom.upc.edu/heredia
https://meet.google.com/isq-iicx-fzp

L'algorisme del simplex primal: exemple (3/3)

- **2a iteració:** $\mathcal{B} = \{3,4\}, \mathcal{N} = \{1,2\}$

2. Identificació de SBF òptima i selecció de la VNB d'entrada q :

$$r' = c'_N - c'_B B^{-1} A_N = [1 \quad 1] - [0 \quad 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [1 \quad 1] \geq 0 \rightarrow \text{òptim}$$

Solució òptima: $\boxed{\mathcal{B}^* = \{3,4\},\ \mathcal{N}^* = \{1,2\}, x_B^* = [8,6]', z^* = 0}$

Implementació computacional del mètode del símplex: Funció **simplexP_iter.m (MATLAB)**

```
function [vb, vn, xb, z, iout] = simplexP_iter(c, A, b, vb, vn, xb, z)
.
.
.
if( min(r) >= 0)   iout = 1; return; end   % SBF òptima.
.
.
.
if ( min(db) >=0 ) iout = 2; return; end   % Problema il·limitat.
.
.
.
```

Implementació computacional del mètode del símplex: Funció `simplexP.m`

```
%
% Dades del problema
%
c=[-350, -300, 0, 0, 0]' % Costos
A = [ 1,  1, 1, 0, 0;     % Matriu de coeficients
      9,  6, 0, 1, 0;
     12, 16, 0, 0, 1]
b= [ 200, 1566, 2880]'    % Vector de termes independents
%
vb=[3,4,5]                % Conjunt inicial de VB
vn=[1,2]                  % Conjunt inicial de VNB
xb = A(:,vb)^(-1)*b;      % Valor inicial de les variables bàsiques
z = c(vb)'*xb;            % Valor inicial de la funció objectiu
%
iout=0;
niter = 0
while (iout == 0)
    niter = niter + 1;
    [vb, vn, xb, z, iout] = simplexP_iter( c, A, b, vb, vn, xb, z)
end
```

```
vb = 3 4 5
vn = 1 2
xb =
  200
 1566
 2880
z = 0
```

```
Iteració: 1
vb = 3 1 5
vn = 4 2
xb =
   26
  174
  792
z = -60900
iout = 0
```

```
Iteració: 2
vb = 2 1 5
vn = 4 3
xb =
    78.0000
   122.0000
   168.0000
z = -66100
iout = 0
```

```
Iteració: 3
vb = 2 1 5
vn = 4 3
xb =
    78.0000
   122.0000
   168.0000
z = -66100
iout = 1
```

Def. Problema de Fase I :

Sigui el problema $(PL)_e$, $rang(A) = m$, $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$. *Es defineix el problema de Fase I associat a* $(PL)_e$ *al problema de PL*

$$(PL)_I \begin{cases} \min z_I = & c_I' x = \sum_{i=n+1}^{n+m} x_i \\ \text{s.a:} & Ax + I \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ \vdots \\ x_{n+m} \end{bmatrix} = b \\ & x_1, \dots, x_{n+m} \geq 0 \end{cases}, \quad c_I' = [\overbrace{0, \dots, 0}^{n}, \overbrace{1, \dots, 1}^{m}].$$

- **Exemple:**

$$(PL)_e \begin{cases} \min z = & -x_1 \\ \text{s.a.:} & x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ & 2x_1 - x_2 = 2 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}, \quad (PL)_I \begin{cases} \min z_I = & x_4 + x_5 \\ \text{s.a.:} & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ & 2x_1 - x_2 + x_5 = 2 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

- En molts casos ens podem estalviar algunes variables de fase I **(Exercicis 35-40)**

Propietats problema de Fase I.

Proposició 7: Factibilitat de $(PL)_I$ i SBF trivial.

El problema $(PL)_I$ *és factible, i* $\mathcal{B}_I^0 := \{n+1, \dots, n+m\}$ *és SBF.*

Demo: immediata

Proposició 8: **Optimalitat de $(PL)_I$ i SBF òptima.**

El problema $(PL)_I$ *té solució òptima. Si* $\mathcal{B}_I^*$ *és SBF òptima de* $(PL)_I$ *llavors:*

i. *Si* $z_I^* > 0$ *llavors* $(PL)_e$ *és infactible.*

ii. *Si* $z_I^* = 0$ *llavors* $(PL)_e$ *és factible. A més:*

- *a.* *Si* $\mathcal{B}_I^* \subset \{1,2,\dots,n\}$ *llavors* $\mathcal{B}_I^*$ *és una SBF de* $(PL)_e$.
- *b.* *Si* $\mathcal{B}_I^* \not\subset \{1,2,\dots,n\}$ *llavors* $\mathcal{B}_I^*$ *és una SBF degenerada de* $(PL)_I$ *a partir de la qual es pot obtenir una SBF de* $(P)_e$ *substituint les VB* x_i *amb* $i > n$ *per VNB* x_q *amb* $q \leq n$.

Demo: *i, ii-a* immediata; *ii-b* , **Exercici 46**.

- Prop. 7-8 ⇒ l'aplicació de l'ASP a $(PL)_I$ o bé (a) proporciona una SBF de $(PL)_e$ o bé (b) certifica la seva infactibilitat (veure Corol·lari 7.2 més endavant).

Convergència ASP i degeneració

Teorema 6: convergència de l'ASP, $\boldsymbol{P_e}$ no degenerat.

Sigui $(PL)_e \min\{c'x \mid x \in P_e\}$, ***$P_e$ no buit, rang complet***, ***no degenerat***.
Llavors:

a) l'ASP finalitza en un nombre finit d'iteracions.

b) l'ASP finalitza en un dels següents estats:

i. o bé proporciona una solució bàsica factible òptima

ii. o bé identifica una SBF associada a una direcció d bàsica factible de descens il·limitat (problema il·limitat).

Demo : immediata a partir de l'algorisme (Ta. 3.3 B&T). Penseu en la demo de b-ii.

- **Com pot afectar la degeneració a la convergència de algorisme del símplex?**

F.-Javier Heredia http://gnom.upc.edu/heredia
https://meet.google.com/isq-iicx-fzp

Conseqüències degeneració.

Proposició 9: conseqüències de la degeneració.

Sigui $(PL)_e$ *amb* ***P_e no buit, de rang complet.***

- *Si* ***P_e és no degenerat*** *llavors:*
  - i. *Tota direcció bàsica és direcció factible* (Prop. 5).
  - ii. x *SBF és òptima* $\Leftrightarrow r \geq [0]$ (Corol·lari 5.1).
  - iii. *L'algorisme del símplex primal convergeix en un nombre finit d'iteracions* (Teorema 6).
- *Si* ***P_e és degenerat*** llavors:
  - iv. *La DB pot ser infactible*: si $x_{B(i)} = 0$ i $d_{B(i)} < 0$ llavors $\theta^*=0 \Rightarrow$ la DB és infactible → iteracions de l'ASP sense canviar de punt extrem.
  - v. *Si x SBF és òptima i degenerada* $\nRightarrow r \geq 0$: poden existir DB infactibles ($\theta^* = 0$) de descens ($r_q < 0$) → l'ASP identificarà x^*?
  - vi. *L'ASP pot no finalitzar en un nombre finit d'iteracions (**CICLAT**).*

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA BARCELONATECH
Departament d'Estadística i Investigació Operativa

F.-Javier Heredia http://gnom.upc.edu/heredia
https://meet.google.com/isq-iicx-fzp

Anàlisi factibilitat d DB $(PL)_e$ general

Sigui $(PL)_e$, $\mathcal{B}$ SBF amb $\boldsymbol{d}$ **DB**

- $\mathcal{B}$ no degenerada $\Rightarrow$ ***d* factible.**
- $\mathcal{B}$ degenerada
  - $d \geq 0$ $\Rightarrow$ ***d* factible.**
  - $d \ngeq 0$
    - $\theta^* > 0$ $\Rightarrow$ ***d* factible.**
    - $\theta^* = 0$ $\Rightarrow$ ***d* infactible**.

Ciclat de l'ASP amb degeneració.

- **Exemple de ciclat de l'algorisme del simplex amb degeneració:**

$$
(PL)_e \begin{cases} \min\limits_{x\in\mathbb{R}^7} & \left[-\frac{3}{4}, 20, -\frac{1}{2}, 6, 0, 0, 0\right] x \\ s.a.: & \\ & \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -8 & -1 & 9 & 1 & & \\ \frac{1}{2} & -12 & -\frac{1}{2} & 3 & & 1 & \\ & & 1 & & & & 1 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ & x \geq 0 \end{cases}
$$

- Aplicació de l'ASP amb **selecció del cost reduït més negatiu**:

It.	$\mathcal{B}$	x'_B	$\mathcal{N}$	r'	q	d'_B	$B(p)$
1	5 6 7	0 0 1	1 2 3 4	-0.75 20.0 -0.50 6.0	1	-0.25 -0.5000 0.0	5
2	1 6 7	0 0 1	5 2 3 4	3.00 -4.0 -3.50 33.0	2	32.00 -4.0000 0.0	6
3	1 2 7	0 0 1	5 6 3 4	1.00 1.0 -2.00 18.0	3	-8.00 -0.3750 -1.0	1
4	3 2 7	0 0 1	5 6 1 4	-2.00 3.0 0.25 -3.0	4	10.50 -0.1875 -10.5	2
5	3 4 7	0 0 1	5 6 1 2	-1.00 1.0 -0.50 16.0	5	-2.00 -0.3333 2.0	3
6	5 4 7	0 0 1	3 6 1 2	0.50 -2.0 -1.75 44.0	6	3.00 -0.3333 0.0	4
7	5 6 7	0 0 1	3 4 1 2	-0.50 6.0 -0.75 20.0	1	-0.25 -0.5000 0.0	5

- A partir de la iteració 7 es repeteixen les iteracions: **CICLAT!!**

Convergència ASP amb degeneració.

Def. Regla de Bland (selecció del pivot d'índex menor):

1. *Seleccionar com a VNB d'entrada la corresponent a l'índex menor de les que tinguin cost reduït negatiu:* $\boldsymbol{q} = \min\{\boldsymbol{q} \in \mathcal{N} | \boldsymbol{r_q} < \boldsymbol{0}\}$.
2. *Si en la selecció de la variable de sortida de la base es produeix un empat, seleccionar la VB amb índex menor:* $\boldsymbol{B(p)} \coloneqq \min_{l=1,\dots,m}\{\boldsymbol{B(l)} | \boldsymbol{\theta^*} = -\boldsymbol{x_{B(l)}}/\boldsymbol{d_{B(l)}}\}$.

- **Exemple:** aplicant la regla de Bland a l'exemple anterior obtindríem:

It.	$\mathcal{B}$	x'_B	$\mathcal{N}$	r'	q	d'_B	$B(p)$
5	3 4 7	0.0 0.0 1.0	5 6 1 2	-1.0 1.0 -0.50 16.0	1	2.5 0.25 -2.5	7
7	3 4 1	1.0 0.1 0.4	5 6 7 2	-1.4 2.2 0.20 4.8	5	0.0 -0.13 0.8	4
8	3 5 1	1.0 0.75 1.0	4 6 7 2	10.5 1.5 1.25 2.0			

Teorema 7: convergència de l'ASP, cas P_e degenerat.

*Si l'**ASP** amb la **regla de Bland** s'aplica a $(PL)_e$, $P_e \neq \emptyset, rang(A) = m$, finalitza en un **nombre finit d'iteracions**.*

Demo: complexa i força tècnica. L'ometrem.

Corol·lari 7.1 :

Tot $(PL)_e$ amb P_e degenerat i solució òptima té alguna SBF amb $r \geq 0$.

ASP1: ASP+ (dues fases, regla de Bland, FPI)

Sigui $(PL)_e \ \min_{x\in R^n}\{c'x \mid x \in P_e\}$, $rang(A) = m$, $b \geq 0$.

1. **Inicialització:** Fase:=1; $\tilde{A} := [A|I]$; $\tilde{c} := c_I$; $\mathcal{B} := \mathcal{B}_I^0 = \{n+1, \dots, n+m\}$; $B^{-1} = I$; $\mathcal{N} := \{1, \dots, n\}$, $x_B := b$; $z := \sum_{j=1}^m b_j$;

2. Identificació de SBF òptima i selecció de la VNB entrant q :

2.1 Es calculen els costos reduïts: $\lambda' := \tilde{c}_B' B^{-1}$; $r' = \tilde{c}_N' - \lambda' \tilde{A}_N$;

2.2 Si $r' \geq [0]$ llavors

Si Fase=2 $\Rightarrow$ **$\mathcal{B}$ SBF ÒPTIMA DE $(PL)_e$: STOP;**

Si Fase=1

Si $z > 0 \Rightarrow P_e = \emptyset, (PL)_e$ **INFACTIBLE: STOP**;

Fase:=2;

Si $\mathcal{B} \not\subset \{1, \dots, n\}$: $\mathcal{B}, B^{-1}, \mathcal{N} \xleftarrow{\text{Prop. 8-ii-b}} \mathcal{B}, B^{-1}, \mathcal{N}$;

$\tilde{c} := c$; $\tilde{A} := A$; $z := c_B' x_B$; $\mathcal{N} := \mathcal{N} \setminus \{n+1, \dots, n+m\}$;

Altrament, es selecciona $q = \min\{q \in \mathcal{N} | r_q < 0\}$ (VNB entrant);

3. Càlcul de la DB de descens. :

3.1. Es calcula $d_B = -B^{-1}\tilde{A}_q$ (DB de descens associada a x_q);

3.2. Si Fase=2: Si $d_B \geq [0] \Rightarrow$ DB de descens il·limitat: **$(PL)_e$ IL·LIMITAT: STOP;**

4. Càlcul de la passa màxima θ^* i selecció de la VB sortint $B(p)$:

4.1. Càlcul de la passa màxima al llarg de d_B : $\theta^* = \min_{\{i=1,\dots,m \mid d_{B(i)}<0\}} \{-x_{B(i)}/d_{B(i)}\}$;

4.2. VB de sortida: $B(p) := \min_{l=1,\dots,m} \{B(l) | \theta^* = -x_{B(l)}/d_{B(l)}\}$;

5. Actualitzacions i canvi de base :

5.1. Actualització de les VB i f.o.: $x_B := x_B + \theta^* d_B$, $x_q := \theta^*$; $z := z + \theta^* r_q$;

5.2. S'actualitzen $\mathcal{B} := \mathcal{B} \setminus \{B(p)\} \cup \{q\}$; $\mathcal{N} := \mathcal{N} \setminus \{q\} \cup \{B(p)\}$; $B^{-1} \xleftarrow{\text{Cor. 4.1}} HB^{-1}$;

6. Anada a 2.

Corol·lari 7.2 :

L'aplicació de l'ASP1 al problema $(PL)_e$, $rang(A) = m$, $b \geq 0$ (a) finalitza en un nombre finit d'iteracions, (b) identificant el problema com a infactible, il·limitat o proporcionant una solució òptima.

Demo:

Prop. 7-8 (Fase I), Ta. 7 (Bland), Cor. 4.1 (FPI).

Exemple ASP1 (1/4)

- Resoleu $(PL)\ \min_{x\in\mathbb{R}^2}\left\{-x_1 \middle| \begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{bmatrix} x \begin{pmatrix}\le\\ =\end{pmatrix} \begin{bmatrix}4\\ 2\end{bmatrix}, x \ge 0\right\}$ amb l'ASP1:

1. Inicialització (Fase I):

$$(PL)\begin{cases}\min z = & -x_1 & \\ \text{s.a.:} & x_1 + x_2 & \le 4 \\ & 2x_1 - x_2 & = 2 \\ & x_1, x_2 & \ge 0\end{cases} \rightarrow (PL)_e\begin{cases}\min z = & -x_1 & \\ \text{s.a.:} & x_1 + x_2 + x_3 & = 4 \\ & 2x_1 - x_2 & = 2 \\ & x_1, x_2, x_3 & \ge 0\end{cases}$$

$$\rightarrow (PL)_I\begin{cases}\min z_I = & x_4 + x_5 & \\ \text{s.a.:} & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = 4 \\ & 2x_1 - x_2 + x_5 & = 2 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 & \ge 0\end{cases}$$

$$\mathcal{B} = \{4,5\}, B = I, B^{-1} = I, x_B = \begin{bmatrix}4\\ 2\end{bmatrix}, \tilde{c}_B = \begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}, z = 6$$

$$\mathcal{N} = \{1,2,3\}, \quad \tilde{A}_N = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 0\end{bmatrix}, \quad \tilde{c}_N = \begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

Fase:=1

Exemple ASP1 (2/4)

1a iteració (Fase I): $\mathcal{B} = \{4,5\}, \mathcal{N} = \{1,2,3\}$

2. **Identificació de SBF òptima i selecció de la VNB d'entrada q**:

$$r' = \tilde{c}_N' - \tilde{c}_B' B^{-1} \tilde{A}_N = [0 \quad 0 \quad 0] - [1 \quad 1] I \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} = [-3 \quad 0 \quad -1] \ngeq 0 \xrightarrow{\text{Bland}} q = 1$$

3. **Càlcul DB descens**: $d_B = -B^{-1}\tilde{A}_1 = -I \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} \ngeq [0]$

4. **Selecció de la VB de sortida p**:

$$\theta^* = \min_{i=1,2}\left\{-x_{B(i)}/d_{B(i)}\right\} = \min\left\{\frac{4}{1}, \frac{2}{2}\right\} = 1 \xrightarrow{\text{Bland}} p = 2, x_{B(2)} = x_5 \text{ VB sortint}$$

5. **Actualitzacions i canvi de base**:

$$x_B = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} := x_B + \theta^* d_B = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \; x_1 := \theta^* = 1\,;\; z := z + \theta^* \cdot r_{N_1} = 6 + 1 \times (-3) = 3$$

$$\eta := \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{H} := \begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}, \quad B^{-1} := \begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} I := \begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix},$$

$$x_B = \begin{bmatrix} x_{B(1)} \\ x_{B(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{c}_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{N} := \{2,3,5\}\,, \tilde{A}_N := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tilde{c}_N := [0 \quad 0 \quad 1]'$$

Exemple ASP1 (3/4)

2a iteració Fase I: $\mathcal{B}=\{4,1\},\mathcal{N}=\{2,3,5\}$

2. **Identificació de SBF òptima i selecció de la VNB d'entrada q** :

$$r'=\tilde{c}_N'-\tilde{c}_B'B^{-1}A_N=[0\quad 0\quad 1]-[1\quad 0]\begin{bmatrix}1 & -1/2\\ 0 & 1/2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{3}{2} & -1 & \frac{3}{2}\end{bmatrix}\ngeq 0$$

$$\xRightarrow{\text{Bland}} q=2$$

3. **Càlcul DB descens** : $d_B=-B^{-1}\tilde{A}_2=-\begin{bmatrix}1 & -1/2\\ 0 & 1/2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3/2\\ 1/2\end{bmatrix}\ngeq[0]$

4. **Selecció de la VB de sortida p**:

$$\theta^*=\min_{i=1}\{-x_{B(i)}/d_{B(i)}\}=\min\left\{\frac{3}{3/2}\right\}=2\xRightarrow{\text{Bland}} p=1,x_{B(1)}=x_4 \text{ VB sortint}$$

5. **Actualitzacions i canvi de base** :

$$x_B=\begin{bmatrix}x_4\\ x_1\end{bmatrix}:=x_B+\theta^*d_B=\begin{bmatrix}3\\ 1\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}-3/2\\ 1/2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 2\end{bmatrix},\ x_2:=\theta^*=2\ ;\ z:=z+\theta^*\cdot r_{N_1}=0$$

$$\mathcal{B}:=\{2,1\},\eta:=\begin{bmatrix}2/3\\ 1/3\end{bmatrix},\mathrm{H}:=\begin{bmatrix}2/3 & 0\\ 1/3 & 1\end{bmatrix},B^{-1}:=\begin{bmatrix}2/3 & 0\\ 1/3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1/2\\ 0 & 1/2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2/3 & -1/3\\ 1/3 & 1/3\end{bmatrix},$$

$$x_B=\begin{bmatrix}x_{B(1)}\\ x_{B(2)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_2\\ x_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix},\tilde{c}_B=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix},\ \mathcal{N}:=\{3,4,5\},\tilde{A}_N:=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\tilde{c}_N:=[0\quad 1\quad 1]'.$$

Exemple ASP1 (4/4)

3a iteració (Fase I): $\mathcal{B} = \{2,1\}, \mathcal{N} = \{3,4,5\}$

2. **Identificació de SBF òptima i selecció de la VNB d'entrada $\boldsymbol{q}$:**

$$r' = \tilde{c}'_N - \tilde{c}'_B B^{-1}\tilde{A}_N = [0 \quad 1 \quad 1] - [0 \quad 0]\begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [0 \quad 1 \quad 1] \geq 0$$

$\boldsymbol{r \geq 0}$ **i `Fase:=1` i $\boldsymbol{z = 0} \Rightarrow$ òptim Fase I:** $\mathcal{B} = \{2,1\}$ SBF de P_e:

$\tilde{c}_B \coloneqq c_B = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathcal{N} := \{3\}, \tilde{c}_N \coloneqq c_N = [0], \tilde{A}_N \coloneqq A_N = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, z \coloneqq -2;$ `Fase:=2.`

4a iteració (Fase II): $\mathcal{B} = \{2,1\}, \mathcal{N} = \{3\}$

2. **Identificació de SBF òptima i selecció de la VNB d'entrada $\boldsymbol{q}$:**

$$r' = c'_N - c'_B B^{-1} A_N = [0] - [0 \quad -1]\begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = [1/3] \geq 0$$

$\boldsymbol{r \geq 0}$**, `Fase:=2`$\Rightarrow$ òptim Fase II: $\boldsymbol{\mathcal{B} = \{2, 1\}}$ SBF ÒPTIMA DE $\boldsymbol{(PL)_e}$: STOP.**

.

Complexitat algorísmica del símplex (1/8)

- Hem demostrat la convergència de l'ASP1. Ara volem estudiar la seva **complexitat algorísmica** (***worst case analysis***).
- **Cost computacional del símplex:**

$$\text{Cost computacional} = \frac{\text{nre. operacions}}{\text{iteració}} \times \text{nre. iteracions}$$

- **Nre. operacions/iteració ASP1:**

  a. $B^{-1} := \mathrm{H} \cdot B^{-1} \longrightarrow O(m^2)$ ops. +

  b. $\lambda' = \tilde{c}_B' B^{-1} \longrightarrow O(m^2)$ ops. +

  c. $r' = \tilde{c}_N' - \lambda' \tilde{A}_N \longrightarrow O(mn)$ ops. +

  d. $d_B = -B^{-1} \tilde{A}_q \longrightarrow O(m^2)$ ops.

$$= \boldsymbol{O(m^2 + mn)}$$

Llavors: $\text{nre. operacions}/\text{iteració} = \boldsymbol{O\left(m^2 + mn\right)}$**: polinòmic.**

Complexitat algorísmica del símplex (2/8)

- **Nombre d'iteracions del simplex: polinòmic?**
  - **Def. criteri de pivotació**: criteri de selecció de q i p a l'ASP.
  - Existeix un criteri pivotació que asseguri que $\text{nre. iteracions} \leq$ polinomi en n i m ?
  - **En la pràctica:** s'observa que $\text{nre. iteracions} = O(m) \approx 3m$ (o $O(m \log n)$)
  - **En teoria:** es poden trobar exemples on el nombre d'iteracions és exponencial:

Problema de Klee-Minty (1972)

$$(\mathrm{P}_{K-M}) \begin{cases} \min & -x_n \\ \text{s.t.:} & \epsilon \leq x_1 \leq 1 \\ & \epsilon x_{i-1} \leq x_i \leq 1 - \epsilon x_{i-1} \quad i = 2, \dots, n \end{cases}$$

amb $\epsilon \in (0, \frac{1}{2})$. Es pot demostrar que (Ta. 3,5 B&T):

i. El poliedre associat a (P_{K-M}) (**cub de Klee-Minty**) té 2^n vèrtexs (punts extrems).

ii. El símplex **pot** necessitar $2^n - 1$ iteracions (***worst case analysis***)

Complexitat algorísmica del símplex (3/8)

- Problema de Klee-Minty per a $n = 3$:$(\mathrm{P}_{K-M}) \begin{cases} \min & -x_3 \\ \text{s.t.:} & \epsilon \le x_1 \le 1 \\ & \epsilon x_1 \le x_2 \le 1 - \epsilon x_1 \\ & \epsilon x_2 \le x_3 \le 1 - \epsilon x_2 \end{cases}$

$$(P_{K-M}) \begin{cases} \min & -x_3 \\ s.a.: & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \epsilon & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \epsilon & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \epsilon & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\epsilon \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{cases}$$

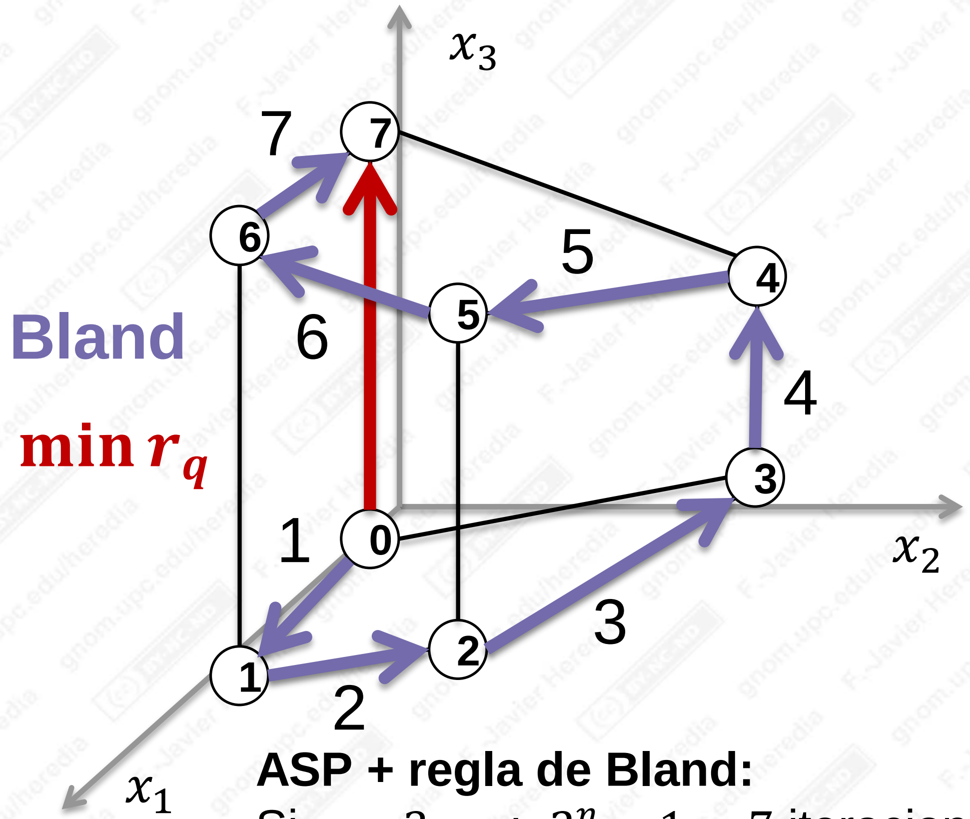
Complexitat algorísmica del símplex (4/8)

- Problema de Klee-Minty per a $n = 3$ i $\epsilon = 1/4$:$(\mathrm{P}_{K-M})\begin{cases} \min & -x_3 \\ \text{s.t.:} & \frac{1}{4} \leq x_1 \leq 1 \\ & \frac{1}{4}x_1 \leq x_2 \leq 1 - \frac{1}{4}x_1 \\ & \frac{1}{4}x_2 \leq x_3 \leq 1 - \frac{1}{4}x_2 \end{cases}$

(P_{K-M}) $n=3$ $\epsilon=1/4$	It.	$\mathcal{B}$	$\mathcal{N}$	x_B					
ASP + reg.Bland	0	1 2 3 4 6 8	5 7 9	0.2500	0.0625	0.0156	0.7500	0.8750	0.9688
	1	1 2 3 5 6 8	4 7 9	1.0000	0.2500	0.0625	0.7500	0.5000	0.8750
	2	1 2 3 5 7 8	4 6 9	1.0000	0.7500	0.1875	0.7500	0.5000	0.6250
	3	1 2 3 4 7 8	5 6 9	0.2500	0.9375	0.2344	0.7500	0.8750	0.5312
	4	1 2 3 4 7 9	5 6 8	0.2500	0.9375	0.7656	0.7500	0.8750	0.5312
	5	1 2 3 5 7 9	4 6 8	1.0000	0.7500	0.8125	0.7500	0.5000	0.6250
	6	1 2 3 5 6 9	4 7 8	1.0000	0.2500	0.9375	0.7500	0.5000	0.8750
	7	1 2 3 4 6 9	5 7 8	0.2500	0.0625	0.9844	0.7500	0.8750	0.9688
ASP + $r_q = \min r$	0	1 2 3 4 6 8	5 7 9	0.2500	0.0625	0.0156	0.7500	0.8750	0.9688
	1	1 2 3 4 6 9	5 7 8	0.2500	0.0625	0.9844	0.7500	0.8750	0.9688

Complexitat algorísmica del símplex (5/8)

- Problema de Klee-Minty per a $n = 3$ i $\epsilon = 1/4$: $(\mathrm{P}_{K-M}) \begin{cases} \min & -x_3 \\ \text{s.t.:} & \frac{1}{4} \le x_1 \le 1 \\ & \frac{1}{4}x_1 \le x_2 \le 1 - \frac{1}{4}x_1 \\ & \frac{1}{4}x_2 \le x_3 \le 1 - \frac{1}{4}x_2 \end{cases}$



vèrtexs	x_1	x_2	x_3
0	1/4	1/16	1/64
1	1	1/4	1/16
2	1	3/4	3/16
3	1/4	15/16	15/64
4	1/4	15/16	49/64
5	1	3/4	13/16
6	1	1/4	15/16
7	1/4	1/16	63/64

ASP + regla de Bland:
Si $n = 3$: $2^n - 1 = 7$ iteracions.
Si $n = 300$: $2^{300} - 1 \approx 10^{90}$ iteracions $\ge$ nre. àtoms a l'univers.

Complexitat algorísmica del símplex (6/8)

- El problema de Klee-Minty mostra que el nre. d'iter. de l'ASP serà polinòmic o no depenent del **criteri de pivotació**.
- Es coneixen exemples similars al problema de Klee-Minty que necessiten un nombre exponencial d'iteracions per a la major part de criteris de pivotació.
- La qüestió doncs és: **pot existir algun criteri de pivotació que asseguri un nre. màxim d'iteracions polinòmic per a tot problema (PL)?** La resposta a aquesta pregunta depèn de l'estudi del **diàmetre de políedres $D(P)$**.

Def.: $d(x,y)$, distància entre dos punts extrems x i y d'un políedre P:

Mínim nombre de punts extrems adjacents que separen x i y (exclosos) més u.

- Suposem ara un problema (PL) amb regió factible P, solució única x^* i que apliquem l'ASP a partir de la SBF x^0. Llavors, podem assegurar que **l'ASP farà, com a mínim, $d(x^0,x^*)$ iteracions, independentment del criteri de pivotació triat**.

Def.: $D(P)$, diàmetre d'un políedre P:

Màxima distància $d(x,y)$ per a tot parell de punts extrems x,y de P.

- Per a tot políedre P, triant el vector de costos apropiat c, sempre existirà un problema $(PL)\ \min_{x\in\mathbb{R}^n}\{c'x \mid x\in P\}$ tal que $d(x^0,x^*)=D(P)$ i, llavors: $\boxed{k_{ASP} \overset{\text{def}}{=} \text{nre iter. ASP} \geq D(P)}$

Complexitat algorísmica del símplex (7/8)

Def.: $\boldsymbol{\Delta(n,l)}$, màxim diàmetre poliedres $\boldsymbol{P_{n,l}}$:

Considerem tots els políedres de mida n, l, $P_{n,l} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_j' x \geq 0 \,, j = 1, \dots, l\}$. *Llavors:*

$$\boldsymbol{\Delta(n,l) = \max_{\forall P_{n,l}} \{D(P_{n,l})\}}$$

- $\boldsymbol{\Delta(n,l)}$ és una fita inferior del nre. d'iteración del l'ASP sobre políedres n, l, $k_{ASP}(n,l)$:

$$k_{ASP}(n,l) \geq \Delta(n,l) \rightarrow \begin{cases} \Delta(n,l) \text{ no polinòmic} & \Rightarrow \text{ASP no polinòmic} \\ \boldsymbol{\Delta(n,l)} \textbf{ polinòmic} & \nRightarrow \text{ASP polinòmic} \end{cases}$$

- **Conjectura de Hirsch (1956) :** $\Delta(n,l) \leq l - n$..... **FALSA!!!**:
  - **Klee & Walkup (1967)**, contraexemple amb $P_{4,8}$ no fitat:

$$D(P_{4,8}) = 5 > l - n = 4$$

  - **Santos (2010)**, contraexemple amb $P_{43,86}$ fitat (publicat a la premsa!!!):

$$D(P_{43,86}) \geq 44 > l - n = 43$$

- **Kalai & Kleitman (1992):** $\Delta(n,l) \leq (2n)^{\log_2 l}$**:**
  - El diàmetre màxim no és exponencial, però podria no ser polinòmic.
- Situació actual...... **cap conclusió sobre si l'ASP és polinòmic**!!!

Complexitat algorísmica del símplex (8/8)

- **Recapitulant: el nre. d'iteracions del simplex és polinòmic en n i m?** No se sap. Qüestió fonamental de la matemàtica moderna. Estat actual:
  1. **En teoria:** podem prendre la fita de Kalai-Kleitman $\Delta(n,l) \leq (2n)^{\log_2 l}$ com a estimació de $k_{ASP}(n,l)$:

$$k_{ASP}(n,l) \approx (2n)^{\log_2 l}$$

  2. **En la pràctica:** s'observa $k_{ASP}(n,l) \approx O(m) \approx 3m$
- **Temps d'execució:** problema de (PL) amb $n = 100, m = 50 \rightarrow l = n + 2m = 200$
  - **Summit (IBM) (http://www.top500.org/):** $\sim 200 \times 10^{15}$ ops./seg. (200 petaflops).
  - **Temps execució teòric:**

$$50^2 \frac{oper.}{iter} \times \overbrace{(2 \cdot 100)^{\log_2 200}}^{k_{ASP}(n,l) \approx 3.8 \times 10^{17}} iter \times \frac{1}{200 \times 10^{15}} \frac{seg.}{oper.} \approx \mathbf{4849s \approx 1h20m}$$

  - **Temps execució observat:** $50^2 \frac{oper.}{iter} \times \overbrace{150 iter}^{k_{ASP}(n,l)} \times \frac{1}{200 \times 10^{15}} \frac{seg.}{oper.} \approx \mathbf{10^{-12} s}$