Anàlisi Real – FME
Examen Parcial – 2 d'abril de 2020
Duració: 3 hores

`Problema 1 [3,5 punts]`: Consideri's la sèrie de potències

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n(2n-1)}.$$

(a) Trobeu els intervals de convergència puntual i uniforme de la sèrie que defineix f.
(b) A quins punts f és contínua?
(c) Justifiqueu que $f''(x) = \frac{2}{1-x^2}$ per a tot $x \in (-1,1)$, i que

$$f(x) = (1+x)\log(1+x) + (1-x)\log(1-x)$$

al mateix interval.
(c) Deduïu el valor numèric de $f(1)$.

Solució Problema 1:

a) Considerem el terme general de la sèrie de potències $a_n = \frac{x^{2n}}{n(2n-1)}$, $n \geq 1$. El criteri del quocient assegura la convergència de la sèrie si

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{x^{2n+2}}{(n+1)(2n+1)}}{\frac{x^{2n}}{(n)(2n-1)}} = \lim_{n\to\infty} x^2 \frac{n(2n-1)}{(n+1)(2n+1)} = x^2 < 1 \Leftrightarrow x \in (-1,1).$$

Per tant, hi ha convergència puntual a l'interval $(-1,1)$. Si $x = \pm 1$, la sèrie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2n-1)}$ és convergent per comparació amb la sèrie harmònica convergent $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. La sèrie és doncs puntualment convergent a l'interval $[-1,1]$ on també hi ha convergència uniforme, pel criteri M-de Weierstrass, doncs si $|x| \leq 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n(2n-1)} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2n-1)} < \infty.$$

b) La successió de sumes parcials de la sèrie de potències forma una successió de funcions contínues convergint uniformement a la funció límit f, per tant, f defineix una funció contínua a l'interval $[-1,1]$ degut a la convergència uniforme en aquest interval.

c) Per obtenir l'expressió de f' i f'', degut a que l'interval de convergència obert d'una sèrie de potències i de la seva derivada coincideixen, podem derivar terme a terme dues vegades dins l'interval obert del domini de convergència $(-1,1)$ i obtenir, respectivament,

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2n \frac{x^{2n-1}}{n(2n-1)} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}.$$

$$f''(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty} (2n-1) \frac{x^{2n-2}}{(2n-1)} = 2\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \frac{2}{1-x^2}.$$

On la darrera de les igualtats s'obté de l'expressió de la suma d'una sèrie geomètrica de raó x^2.

Podem obtenir el valor de $f'(x)$, integrant el valor de f'' entre 0 i x, ja que $f'(0) = 0$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2\int_0^x \frac{1}{1-t^2}\,dt = \int_0^x \frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\,dt = [-\log(1-t) + \log(1+t)]_0^x \\ &= \log(1+x) - \log(1-x). \end{aligned}$$

De nou podem obtenir el valor de $f(x)$, integrant el valor de f' entre 0 i x, ja que $f(0) = 0$. Efectivament, una integració per parts dóna com a resultat, que per tot $x \in (-1,1)$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^x \log(1+t) - \log(1-t)\,dt = [(t+1)(\log(t+1)-1) + (1-t)(\log(1-t)-1)]_0^x \\ &= (1+x)\log(1+x) + (1-x)\log(1-x). \end{aligned}$$

d) Com que la sèrie que defineix f és contínua a $[-1,1]$, segons hem vist a l'apartat *b*), podem assegurar que

$$f(1) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \log(1+x)(1+x) + \log(1-x)(1-x) = 2\log 2.$$

On a la darrera igualtat, hem utilitzat que, com a conseqüència de la regla de l'Hôpital,

$$\lim_{x\to 1^-} \log(1-x)(1-x) = 0.$$

Criteris de correcció: Apartat a) 1 punt (0.5 punts per deducció de la convergència puntual a l'interval obert i 0.5 punts per justificació de la convergència uniforme a l'interval tancat $[-1,1]$).

Apartat b) 0.5 punts.

Apartat c) 1.5 punts (1 punt pels càlculs explícits dels valors de f'', f' i f mitjançant integració reiterada i 0.5 punts per justificació d'aquests passos reiterats).

Apartat d) 0.5 punts.

`Problema 2 [3,5 punts]`: Considereu la successió de funcions $f_n : [0,2\pi] \to \mathbb{R}$ donada per

$$f_n(x) = \cos(n+x) + \log\left(1 + \frac{\sin^2(n^n x)}{\sqrt{n+2}}\right).$$

(a) Proveu que la família $\{f_n\}_{n\geq 1}$ és equicontínua.
(b) Proveu que $\{f_n\}_{n\geq 1}$ admet una parcial uniformement convergent cap a una funció contínua a $[0,2\pi]$.
(c) Quina seria la resposta als apartats (a) i (b) si es canvia l'interval $[0,2\pi]$ per tot $\mathbb{R}$?

Solució Problema 2:

(a) Per a veure que $\{f_n\}_{n\geq 1}$ és equicontínua hem de veure que per tot valor $\varepsilon > 0$ podem trobar un valor $\delta > 0$ pel qual es compleix el següent: sempre que $|x-y| < \delta$, per qualsevol de n es compleix que $|f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon$.

El primer que cal fer és doncs mirar com és $|f_n(x) - f_n(y)|$:

$$|f_n(x) - f_n(y)| = \left|\cos(n+x) - \cos(n+y) + \log\left(1 + \frac{\sin^2(n^n x)}{\sqrt{n+2}}\right) - \log\left(1 + \frac{\sin^2(n^n y)}{\sqrt{n+2}}\right)\right| = (*),$$

Per a fer el càlcul fàcil, partim $(*)$ en dos troços usant la desigualtat triangular:

$$(*) < |\cos(n+x) - \cos(n+y)| + \left|\log\left(1 + \frac{\sin^2(n^n x)}{\sqrt{n+2}}\right) - \log\left(1 + \frac{\sin^2(n^n y)}{\sqrt{n+2}}\right)\right|$$

Veurem que podem trobar relacions $\varepsilon - \delta$ de tal forma que cadascun d'aquests sumands serà inferior a $\varepsilon/2$. Anem a fitar el primer terme. Usant la fòrmula per la diferència de cosinus tenim que:

$|cos(n+x) - \cos(n+y)| = |2\sin(n+(x+y)/2)\sin((x-y)/2)| \leq 2\ |\sin((x-y)/2)|.$

Es clar ara que si $|x-y|$ és petit, aleshores el terme anterior també ho és.En concret, triant

$$\delta_1 < 2\arcsin\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$$

tenim que si $|x-y| < \delta_1$, aleshores la diferència de cosinus és menor que $\varepsilon/2$.

Anem ara a veure la fita pel terme logarítmic. Aquí hom pot estar temptat a fer el mateix, i el problema que es trobarà és que obtindrà expressions molt llargues i poc manegables.

Per a fer-ho, distinguirem dos règims: n gran, i la resta de valors. Més explícitament, es compleix que

$$1 - \frac{1}{\sqrt{n+2}} \leq \left|1 + \frac{\sin^2(n^n x)}{\sqrt{n+2}}\right| \leq 1 + \frac{1}{\sqrt{n+2}}$$

i, per tant,

$$\log\left(1 + \frac{\sin^2(n^n x)}{\sqrt{n+2}}\right) - \log\left(1 + \frac{\sin^2(n^n y)}{\sqrt{n+2}}\right) = \log\left(\frac{1 + \frac{\sin^2(n^n x)}{\sqrt{n+2}}}{1 + \frac{\sin^2(n^n y)}{\sqrt{n+2}}}\right).$$

Si observem el terme de dins del logaritme, aquest compleix que:

$$\frac{\sqrt{n+2}-1}{\sqrt{n+2}+1} = \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{n+2}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{n+2}}} \leq \frac{1 + \frac{\sin^2(n^n x)}{\sqrt{n+2}}}{1 + \frac{\sin^2(n^n y)}{\sqrt{n+2}}} \leq \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{n+2}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{n+2}}} = \frac{\sqrt{n+2}+1}{\sqrt{n+2}-1}.$$

Ja ho tenim gairebé tot. Observeu qeu si prenem $\varepsilon > 0$ aprop de 0, e^{ε} és proper (i més gran) que 1. A més a més, el terme de més a la dreta de l'expressió anterior té límit 1 quan n tendeix a infinit.

Per tant, donat $\varepsilon > 0$, existeix un valor N_0 pel qual si $n \geq N_0$ es compleix que

$$\frac{1 + \frac{\sin^2(n^n x)}{\sqrt{n+2}}}{1 + \frac{\sin^2(n^n y)}{\sqrt{n+2}}} \leq \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{n+2}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{n+2}}} = \frac{\sqrt{n+2}+1}{\sqrt{n+2}-1} < e^{\varepsilon/2}$$

de fet, per tota parella de valors $x, y \in [0, 2\pi]$. I, per tant, per tot $n \geq N_0$, la diferència de logaritmes tindrà valor, en valor absolut, menor que $\varepsilon/2$.

Ens falta mirar què passa per els valors de $n = 1, 2, \ldots, N_0 - 1$. Com cadascuna d'aquestes funcions és contínua en $[0, 2\pi]$, i aquest conjunt és compacte, cadascuna d'aquestes és uniformement contínua. Per tant, donat $\varepsilon > 0$ i $i \in \{1, \ldots, N_0 - 1\}$ existeix δ_i tal que si $|x-y| < \delta_i$ aleshores $|f_i(x) - f_i(y)| < \varepsilon/2$.

Ara ja ho tenim tot per a fitar el terme logarítmic: si prenem

$$\delta = \min_{i=1,\ldots,N_0-1}\{\delta_i\},$$

aleshores sempre que $|x-y| < \delta$ es complirà que

$$\left|\log\left(1 + \frac{\sin^2(n^n x)}{\sqrt{n+2}}\right) - \log\left(1 + \frac{\sin^2(n^n y)}{\sqrt{n+2}}\right)\right| < \varepsilon/2,$$

i amb això acabem la prova de l'equicontinuitat de la familia.

Criteri de correcció: 1,5 punts total. Donar la separació dels dos termes (cosinus i logarimte) són 0.25. Fitar adequadament el terme de cosinus (0.25).Donar les fites necessaries pel logaritme (0.5). Finalment, distingir entre n gran i n petit 0.5. Errors menors en la depèndencia $\varepsilon - \delta$ resta com a molt 0.25 punts. SP

(b) Essencialment ens demanen comprovar que es compleixen les condicions del teorema d'Ascoli-Arzelà. Ja hem vist de l'apartat anterior que la família és equicontínua, per tant només ens cal mirar si és puntualment fitada. De ser-ho, ja estarem en les condicions del teorema d'Ascoli-Arzelà, que assegura que hi haurà una parcial uniformement convergent cap a una funció contínua.

Cal veure doncs que per tota tria de $x \in [0, 2\pi]$, la successió de nombres reals $\{f_n(x)\}_{n\geq 1}$ és fitada.

Ara bé, aquí la prova és molt més sencilla: observeu que el terme en cosinus és sempre fitat per 1, mentre que el terme logaritmic està fitat per

$$\log\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n+2}}\right) < \log\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

De fet, això ens demostra que la succesió no només és puntualment fitada, sino que és uniformement fitada.

Per tant, es compleixen totes les condicions del toerema d'Ascoli-Arzelà, d'on podem concloure el que ens demanen.

Criteri de correcció: Dir que s'usa el teorema d'Ascoli-Arzelà (0.25). Fer la comprovació correcta d'uniformement fitada o puntualment fitada 0.75.

(c) Analitzem el càlcul que hem realitzat en (a) i en (b). A priori cal dir que com estem en els reals i no en un interval tancat, no estem treballant en un compacte, i per tant cal anar amb cura, ja que no podem aplicar el teorema d'Ascoli-Arzelà.

En quant a (a): observem que la funció que es considera és 2π-periòdica. Anem a veure que la condició d'equicontinuitat continua sent certa.Si considerem x, y propers, poden pasar dues coses:

- x, y són en el mateix interval de la forma $[2\pi m, 2\pi(m + 1)]$. En aquesta situació argumentem exactamente igual que en el apartat (a), tot reduïnt x, y a l'interval $[0, 2\pi]$.
- x i y estan en intervals diferents. Aleshores cal considerar la mateixa funció, però en lloc de l'interval $[0, 2\pi]$, fer-ho en $[-\pi, \pi]$. Raonant exactament com en (a) obtindriem la mateixa conclusió.

Per tant, la família també és equicontínua en tots els reals.

En quant a (b): la familia també és puntualment fitada. Ara bé, no podem aplicar Ascoli-Arzelà per no estar en un compacte.

Ara bé, observeu que si prenem la parcial uniformement convergnt donada per l'apartat (b) aquesta exteèn per periodicitat a tots els reals, i aquesta convergeix uniformement a la funció límit que venia donada per l'apartat (b). Per tant, malgrat que no poem aplicar el teorema, per la periodicitat de les funcions que estem tractant, el resultat continua sent cert.

Criteri de correcció: 1 punt. Cal dir que no podem aplicar directament Ascoli-Arzelà (0.25). Cal emfatitzar la periodictat (0.5), i acabar els arguments penjants (0.25).

`Problema 3 [3 punts]`: Sigui f contínua amb derivada contínua a tot $x \in [0, 1]$. Proveu que per a tot $\epsilon > 0$, existeix $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ tal que

$$\max_{0\leq x\leq 1} |f(x) - p(x)| + \max_{0\leq x\leq 1} |f'(x) - p'(x)| < \epsilon.$$

Solució Problema 3: Com que f' és contínua a l'interval $[0,1]$, pel teorema d'aproximació de Weierstrass sabem que existeix un polinomi $q(x) \in \mathbb{R}[x]$ que satisfà

$$\max_{0\leq x\leq 1} |f'(x) - q(x)| < \epsilon/2.$$

Sigui $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ de manera que $p'(x) = q(x)$ i satisfent $p(0) = f(0)$. Volem fitar ara la quantitat $|f(x) - p(x)|$, per a un x arbitrari.

Donem dues possibilitats per concloure.

Opció A. Per les definicions, tenim que

$$|f(x) - p(x)| = \Big| \int_0^x (f'(t) - q(t))\, dt \Big| \leq \int_0^x |f'(t) - q(t)|\, dx < \epsilon/2,$$

on a la primera igualtat hem fet servir que $f(0) - p(0) = 0$. D'aquí obtenim

$$\max_{0\leq x\leq 1} |f(x) - p(x)| + \max_{0\leq x\leq 1} |f'(x) - p'(x)| < \epsilon,$$

com es volia veure.

Opció B. Sigui $h(x) = f(x) - p(x)$. Aquesta funció és diferenciable per construcció ja que tant f com p ho són, i satisfà $h(0) = 0$. A més, tenim una fita sobre la derivada, ja que

$$|h'(x)| = |f'(x) - q(x)| < \epsilon/2.$$

Per tant, fent servir el teorema del valor mitjà per a un $x \in [0,1]$ qualsevol

$$|f(x) - p(x)| = |h(x) - h(0)| < \epsilon/2 \cdot x < \epsilon/2,$$

i la conclusió se segueix d'aquí.

Criteris de correcció detallats (sobre un màxim de 3 punts)

S'esperaria que aquest problema donés lloc a puntuacions molt polaritzades. Sense la idea d'aproximar f' i a partir d'allà obtenir una fita per a l'aproximació de la funció f, la puntuació seria probablement 0. Quan la idea fos present, però amb errors al desenvolupament (com no definir bé l'aproximació de la funció a partir de la integral de f'), la puntuació oscil·laria entre 1 i 1.5 punts. S'esperaria que gairebé tots els que fessin bé aquestes consideracions obtindrien després la màxima puntuació de 3 punts. Detallem ara la manera de corregir.

- Qualsevol comentari del tipus *s'ha d'aplicar el teorema d'aproximació de Weierstrass*, però sense especificar sobre quina funció ni de quina forma, no rep una puntuació positiva. Hi ha també diversos apropaments naturals que no són gaire rellevants per a la solució. Per exemple, considerar una aproximació de la funció f i intentar deduir a partir d'aquí una fita per a la derivada (noti's que dues funcions poden estar molt a prop en la norma del suprem i les seves derivades molt lluny). Una altra opció és considerar dues funcions g i h que aproximin f i f', respectivament; a partir d'aquí a priori no hi ha cap relació entre g i h. Les solucions on només es considerin aquesta mena d'arguments reben **0 punts**.
- Introduir la idea d'aproximar la derivada de f i fer qualsevol esment al fet que a partir d'aquí es pot fitar la norma de $f(x) - p(x)$, però sense ser gaire precís ni explicar com es duria a terme l'argument, dona una puntuació total de **0.5 punts**.
- Considerar una aproximació per a la derivada de f' i dir que la seva integral dona una aproximació per a f, però sense especificar el valor a cap punt (i deixant per tant una funció amb un grau de llibertat), dona **1 punt**.
- Considerar una aproximació per a la derivada de f' i dir que una primitiva seva per a la qual es fixa el valor per exemple en un extrem de l'interval ($p(0) = f(0)$) és una aproximació de f, però sense fer cap prova, dona **1.5 punts**.

- La puntuació restant s'obté fent l'argument que aquí hem denominat **Opció A** o **Opció B**.
  - Si es diu que la fita s'obté emprant el teorema del valor mitjà, però no es detalla el procediment o la prova està incompleta, es donen **2 punts**. El mateix si es diu *a partir d'aquí es fita en termes d'integrals* (o alguna cosa semblant).
  - Si hi ha algun error en l'ús dels valors absoluts per fitar les integrals, de manera que el raonament és correcte però hi ha incorreccions significatives, es donen **2.5 punts**. La penalització és la mateixa en el cas de solucions emprant el teorema del valor mitjà.
  - Si es tria malament el valor de l'aproximació, de manera que s'obté 2ϵ i no pas ϵ, es donen **2.75 punts**.
  - Una solució totalment correcta i sense cap error rep **3 punts**. Si la solució és correcta però el discurs és poc clar, hi ha deficiències en l'explicació o la incorrecció gramatical, ortogràfica o semàntica dificultés excessivament la comprensió del text, es podria rebaixar la nota fins a una puntuació de 2.5 punts.