

Superfícies Topològiques

Pere Pascual

20 de maig de 2019

Aquests notes corresponen a l'exposició del capítol de *Superfícies* presentada a l'assignatura de *Topologia* el curs 2018/2019. Estan basades en el llibre [NP], obviant els mètodes de la Topologia Algebraica que no hem desenvolupat en aquest curs. En aquest llibre trobareu totes les demostracions que no comentarem aquí.

1 Superfícies topològiques

En aquest apartat establim la definició de superfície topològica i presentem dues construccions que permeten generar molts exemples, les superfícies poligonals i la suma connexa de superfícies.

1.1 Definició i primers exemples

Definició 1.1. Un superfície topològica és un espai topològic S que és Hausdorff, satisfà el 2AN i té la propietat següent:

$$\forall p \in S, \quad \exists U \text{ entorn obert de } p, \text{ tal que } U \text{ és homeomorf a un disc obert de } \mathbb{R}^2.$$

És a dir, és un espai *localment homeomorf al pla*, al qual li hem imposat dues condicions tècniques: que sigui Hausdorff i l'axioma 2AN. Que sigui Hausdorff exclou l'exemple d'una recta amb un punt doble (cf. exercicis), mentre que la presència del segon axioma de numerabilitat ens permetrà enunciar el teorema de triangulació de Radó.

Exemple 1.2. (1) \mathbb{R}^2 i qualsevol obert $U \subset \mathbb{R}^2$ és una superfície.

(2) L'esfera \mathbb{S}^2 , el tor \mathbb{T}^2 , el pla projectiu \mathbb{P}^2 o l'ampolla de Klein \mathbb{K} són superfícies.

(3) Observem que un cilindre $\mathbb{S}^1 \times I$ o la cinta de Moebius \mathbb{M} no són superfícies segons la definició anterior, ja que tenen punts a la vora. Si treiem aquests punts, en resulten superfícies. Sovint és convenient no eliminar aquests punts, aleshores parlem de *superfícies amb vora*, és a dir, espais topològics Hausdorff, 2AN i que localment són homeomorfs a un obert del semiplà superior $\mathbb{H} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\}$.

En aquest capítol analitzarem les superfícies compactes i connexes. Quant a la connexió, observem que tot component connex d'una superfície és, al seu torn, una superfície, per la qual cosa una superfície topològica és una unió disjunta de superfícies connexes.

Alguns dels exemples esmentats anteriorment s'obtenen identificant arestes d'un quadrat de \mathbb{R}^2 , com ara el tor o l'ampolla de Klein. En la secció següent presentem una construcció que generalitza aquest procediment i permet obtenir molts altres exemples.

1.2 Superfícies poligonals

Sigui P un polígon regular del pla amb un nombre parell de costats $2n$. Fixem un vèrtex del polígon, que anomenem p_1 , i numerem la resta de vèrtexs de forma creixent p_1, \dots, p_{2n} , segons el sentit antihorari. Agrupem les arestes que formen la vora de P per parells.

Si l'aresta $[p_i, p_{i+1}]$ està aparellada amb l'aresta $[p_j, p_{j+1}]$, denotem per

$$\tau_{ij} : [p_i, p_{i+1}] \longrightarrow [p_j, p_{j+1}]$$

una afinitat bijectiva. Observem que només n'hi ha dues de possibles: si $\tau_{ij}(p_i) = p_j$, i necessàriament $\tau_{ij}(p_{i+1}) = p_{j+1}$, direm que τ_{ij} *conserva l'orientació*; en cas contrari, tindrem que $\tau_{ij}(p_i) = p_{j+1}$ i $\tau_{ij}(p_{i+1}) = p_j$, i direm que τ_{ij} *inverteix l'orientació*.

Sigui S l'espai quocient que s'obté en identificar les arestes dues a dues segons les afinitats escollides; és a dir, S és l'espai quocient de P per la relació d'equivalència R generada per $x \sim \tau_{ij}x$, per a tot $x \in FrP$. Denotarem per $\pi : P \longrightarrow S$ la projecció.

Proposició 1.3. *S és una superfície compacta i connexa.*

Demostració. La compacitat i la connexió es dedueixen de les mateixes propietats de P ja que π és una aplicació d'identificació. Així mateix, S satisfà el segon axioma de numerabilitat.

Ens queda per veure que S és localment homeomorf a \mathbb{R}^2 i de Hausdorff. Observem que podem distingir tres tipus de punts de S : els de $\pi(P^\circ)$, que només tenen una antiimatge per π ; els de $\pi(FrP \setminus \{p_1, \dots, p_{2n}\})$, que tenen dues antiimatges a P ; i els que corresponen als vèrtexs p_i , amb un nombre indeterminat d'antiimatges entre 1 i $2n$. En qualsevol cas, l'antiimatge d'un punt de S per π és un nombre finit de punts.

Per veure que S és localment \mathbb{R}^2 , hem de fer un estudi particular per a cadascun dels tipus de punts. Si $x = \pi(p)$ és imatge d'un punt interior de P , aleshores el resultat és immediat ja que en un entorn prou petit de p l'aplicació π és un homeomorfisme.

Si $q \in S$ és imatge d'un punt d'una aresta que no és un vèrtex, q tindrà dues antiimatges, q_1, q_2 , ambdues sobre dos costats de P identificats per π . Si prenem discs D_i , $i = 1, 2$, del

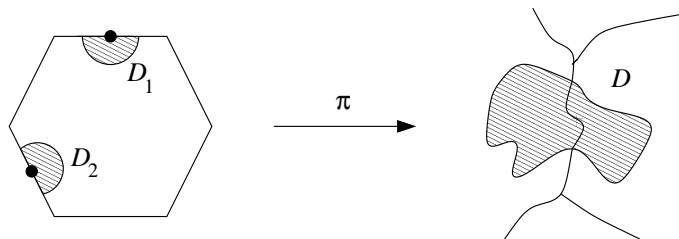


Figura 1: Disc al voltant d'un punt que prové de les arestes del polígon.

pla centrats a q_i , de radi ε prou petit per tal que no continguin cap vèrtex de P , aleshores $D = \pi[(D_1 \cap P) \cup (D_2 \cap P)]$ és homeomorf a un disc de \mathbb{R}^2 , (vegeu la figura 1).

Sigui ara S un punt de S que és imatge de r vèrtexs de P , p_{i_1}, \dots, p_{i_r} . Com en el cas anterior, prenem discs D_{i_j} de \mathbb{R}^2 centrats en els punts p_{i_j} , $1 \leq j \leq r$, de radi fixat ε , que no continguin altres vèrtexs de P que p_{i_1}, \dots, p_{i_r} , i notem de la mateixa manera les corresponents interseccions amb P , $1 \leq j \leq r$. Com que els costats de P estan identificats a parells, podem suposar ordenats els punts p_{i_j} de forma que cada D_{i_j} tingui un costat en comú amb el disc anterior i l'altre amb el posterior. És un exercici comprovar aleshores que $D = \pi(\bigcup_{1 \leq j \leq r} D_{i_j})$ és un entorn de S homeomorf a un disc del pla (vegeu la figura 2).

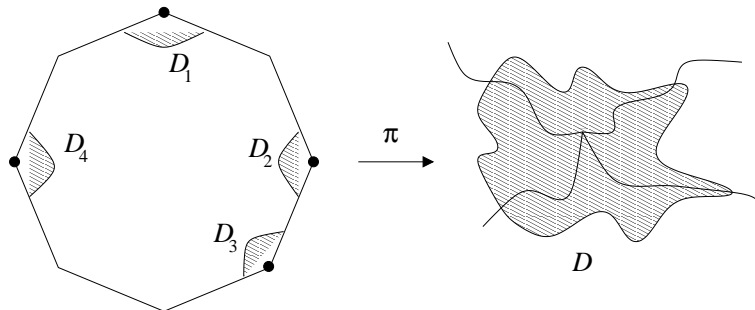


Figura 2: Disc al voltant d'un punt que prové de vèrtexs del polígon.

Observeu que aquest darrer raonament no és vàlid quan un vèrtex no s'identifica amb cap altre. En aquest cas, si D és la intersecció de P amb un disc que no conté cap altre vèrtex, les arestes de D s'identifiquen per donar l'entorn de S corresponent.

Utilitzant oberts prou petits com els descrits en la prova anterior es demostra que S és un espai de Hausdorff. \square

Paraula associada a una superfície poligonal.

Podem codificar una superfície obtinguda pel procediment anterior de la forma següent: partint del vèrtex p_1 i fent un recorregut en sentit antihorari, associem a cada aresta no aparellada a les precedents una lletra a, b, c, \dots . Si els costats $[p_i, p_{i+1}]$, $[p_j, p_{j+1}]$ estan aparellats i hem associat la lletra a al primer d'ells, assignem la lletra $a^{\pm 1}$ al costat $[p_j, p_{j+1}]$,

on l'exponent reflecteix si l'afinitat τ_{ij} conserva o inverteix l'orientació. Finalment, definim la paraula associada a la superfície poligonal $A(a, b, c, \dots)$ com la paraula obtinguda per juxtaposició de lletres seguint l'ordre antihorari.

Per exemple, a un tor li correspondria la paraula $aba^{-1}b^{-1}$ o a una ampolla de Klein li correspondria $abab^{-1}$. Associarem a l'esfera \mathbb{S}^2 la paraula aa^{-1} , i al pla projectiu real \mathbb{P}^2 la paraula aa .

En general, direm que A és una paraula de longitud n , $A(a_1, \dots, a_n)$, si conté n lletres, a_1, \dots, a_n , cadascuna de les quals hi apareix dues vegades de la forma

$$\dots a_i \dots a_i \dots \quad \text{o} \quad \dots a_i \dots a_i^{-1} \dots$$

Denotarem per S_A la superfície que li correspon segons la construcció anterior i direm que és la *superfície poligonal definida per la paraula A* .

Definició 1.4. Anomenarem *superfícies estàndard* les superfícies poligonals S_A que corresponen a les paraules

$$\begin{aligned} A_0 &:= aa^{-1}, \\ A_g &:= a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}, \\ B_g &:= a_1 a_1 \dots a_g a_g. \end{aligned}$$

Direm que g és el *gènere* de la superfície corresponent, i denotarem també per $g\mathbb{T}^2 = S_{A_g}$, $g\mathbb{P}^2 = S_{B_g}$, les superfícies corresponents.

Així, per exemple, S_{A_0} és l'esfera, S_{A_1} és el tor \mathbb{T}^2 , i S_{B_1} és el pla projectiu real \mathbb{P}^2 . Geomètricament, la construcció de les superfícies estàndard es realitza a partir del tor o del pla projectiu mitjançant la suma connexa de superfícies, construcció que presentem en la secció que segueix.

1.3 Suma connexa de superfícies

En aquesta secció presentem una construcció geomètrica, la suma connexa que permet generar una superfície nova a partir de dues superfícies conegudes.

Sigui S una superfície. Direm que $D \subseteq S$ és un *disc coordinat de S* si hi ha una parametrització local $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ tal que $D = \varphi(\mathbb{D})$, on \mathbb{D} és el disc unitat tancat de \mathbb{R}^2 .

Siguin S i T dues superfícies, i $D \subseteq S$, $D' \subseteq T$, dos discs coordinats. Considerem un homeomorfisme h entre les circumferències que envolten D i D' ,

$$h : s = \partial D \rightarrow s' = \partial D'.$$

Definició 1.5. La *suma connexa* de les superfícies S i T associada als discs D , D' i l'homeomorfisme h és l'espai topològic quocient

$$S\#_{D,D',h}S' = \frac{(S \setminus D^\circ) \sqcup (T \setminus D'^\circ)}{s \sim_h s'}.$$

És a dir, després d'extreure els interiors dels discs D i D' de S i de T , respectivament, s'identifiquen les circumferències resultants mitjançant l'homeomorfisme h (vegeu la figura 3).

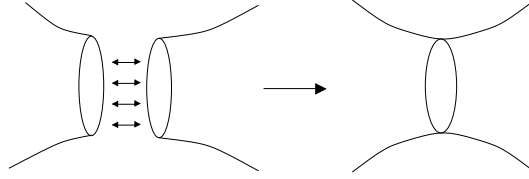


Figura 3: Suma connexa.

Si no cal especificar les dades D, D' i h , ben determinades per les dades de que es disposa, denotarem la suma connexa de S i T simplement per $S\#T$.

Proposició 1.6. La suma connexa de dues superfícies és una superfície.

Demostració. Provem que la suma connexa $S\#T$ és un espai localment euclidià. Notem $S' = S \setminus D^\circ$, $T' = T \setminus D'^\circ$, i siguin $i : S' \rightarrow S\#T$, $j : T' \rightarrow S\#T$ les aplicacions naturals. Aquestes aplicacions induïxen homeomorfismes de $S' \setminus s$ i $T' \setminus s'$ amb les seves imatges, de manera que per provar que la suma connexa és una varietat basta considerar els punts de la imatge de s i s' . Siguin $p \in S\#T$ imatge de $q \in s$ i de $q' \in s'$ i U un obert de \mathbb{R}^2 que conté el disc unitat i $\varphi : U \rightarrow S$, $\psi : U \rightarrow T$ parametritzacions tals que $D = \varphi(\mathbb{D})$ i $D' = \psi(\mathbb{D})$. Sigui $z \in \mathbb{S}^1$ tal que $\varphi(z) = q$ i $\psi(z) = q'$, i prenem ε tal que el disc de centre z i radi ε , $D_\varepsilon(z)$, estigui contingut en U .

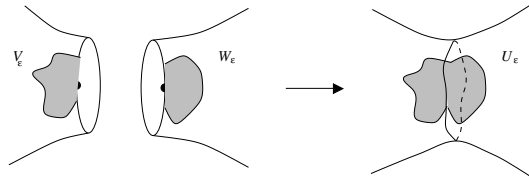


Figura 4: Entorn homeomorf a un disc.

Aleshores,

$$\begin{aligned} V_\varepsilon &= \varphi(D_\varepsilon(z)) \cap S', \\ W_\varepsilon &= \psi(D_\varepsilon(z)) \cap T' \end{aligned}$$

són entorns de q en S' i de q' en T' , i $U_\varepsilon = i(V_\varepsilon) \cup j(W_\varepsilon)$ és un entorn obert de p en $S \# T$, que és homeomorf a un disc de \mathbb{R}^2 .

La demostració que la suma connexa és de Hausdorff es fa de forma similar. La comprovació que verifica el segon axioma de numerabilitat és immediata. \square

La definició de suma connexa planteja, immediatament, una pregunta: fins a quin punt depèn la suma connexa dels discs i de l'homeomorfisme h escollits? Com a conseqüència del teorema de classificació resulta que la suma connexa entre superfícies connexes i compactes és independent de totes aquestes eleccions, tot i que no en farem la prova.

1.4 Superfícies poligonals i suma connexa

Acabem aquesta secció observant que les superfícies estàndard són sumes connexes de tors o d'espais projectius.

Proposició 1.7. *Siguin A i B dues paraules i S_A, S_B les superfícies poligonals corresponents. Aleshores, la superfície que correspon a la paraula AB obtinguda per juxtaposició de les paraules A i B és homeomorfa a la suma connexa de S_A i S_B :*

$$S_{AB} \cong S_A \# S_B.$$

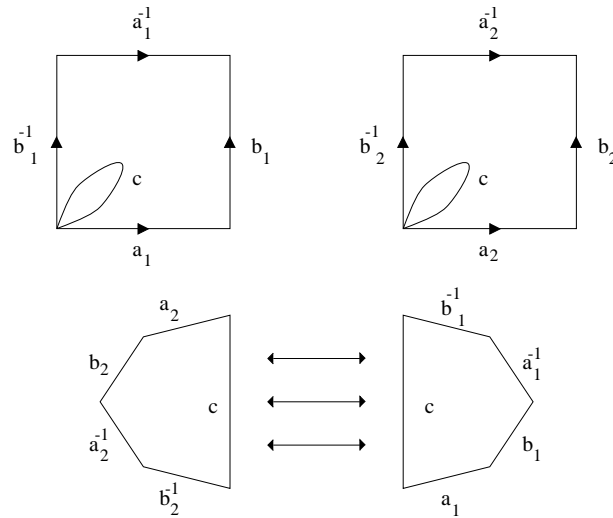


Figura 5: Obtenció de $2\mathbb{T}^2$ a partir de dos tors.

Corol·lari 1.8. *Les superfícies estàndard són*

- (1) $A_g : \mathbb{S}^2, \mathbb{T}^2 \# .g. \# \mathbb{T}^2,$
- (2) $B_g : \mathbb{P}^2 \# .g. \# \mathbb{P}^2.$

2 Triangulació de superfícies

En aquesta secció introduïm la noció de triangulació d'una superfície i enunciem el teorema de triangulabilitat de Radó. Mitjançant una triangulació establirem que tota superfície compacta i connexa és homeomorfa a una superfície poligonal; més endavant veurem la utilitat de les triangulacions en referència a l'orientabilitat de les superfícies i la característica d'Euler.

En tot el que segueix suposem que les superfícies són compactes i connexes.

Primer de tot fixem un triangle *patró*, el generat pels vèrtexs de la base canònica de \mathbb{R}^3 :

$$\Delta = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 1, x, y, z \geq 0\}.$$

Definició 2.1. Un *triangle* d'una superfície S és un parell (T, σ) on $T \subset S$ és un tancat i $\sigma : \Delta \rightarrow T$ és un homeomorfisme.

Les imatges per σ dels vèrtexs i arestes de Δ les anomenarem vèrtexs i arestes de T .

Escrivem simplement T per indicar un triangle de S , entenent que existeix i està determinat l'homeomorfisme σ .

Definició 2.2. Una *triangulació* τ d'una superfície compacta S és un conjunt finit de triangles $\tau = \{T_1, \dots, T_m\}$ que satisfà:

- (i) Cobreixen S : $S = T_1 \cup \dots \cup T_m$,
- (ii) Si $T_i \neq T_j$, aleshores la intersecció $T_i \cap T_j$ és buida, un vèrtex o una aresta.

Diem que una superfície S és *triangulable* si existeix una triangulació de S .

Exemple 2.3. Tota superfície poligonal associada a una paraula A és triangulable, com mostra la figura 6.

Específicament, considerem b el baricentre de P , introduïm els punts q_{3i} , q_{3i+1} i q_{3i+2} de l'aresta $[p_i, p_{i+1}]$ de coordenades baricèntriques 0, $1/3$ i $2/3$, i els baricentres r_j de les arestes $[b, q_j]$, $1 \leq j \leq 6n$. Els triangles $\Delta(b, r_j, r_{j+1})$, $\Delta(r_j, q_j, q_{j+1})$, i $\Delta(r_j, q_{j+1}, r_{j+1})$ donen una triangulació de P compatible amb π que indueix una triangulació de S .

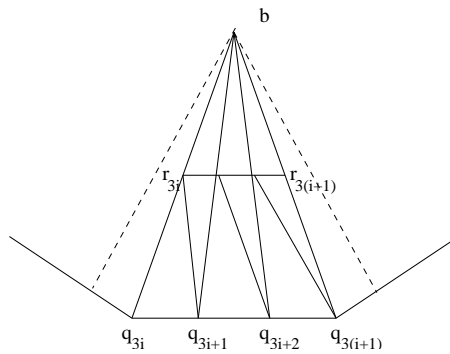


Figura 6: Triangulació de S .

Teorema de Radó 2.4. *Tota superfície S és triangulable.*

A més, tota triangulació d'una superfície satisfà:

- (1) *Tota aresta ho és exactament de dos triangles.*
- (2) *Per a cada vèrtex v el conjunt de triangles que el contenen pot ordenar-se T_1, \dots, T_n de manera que T_i té exactament una aresta en comú amb T_{i+1} , $i = 1, 2, \dots, n-1$, T_n té una aresta en comú amb T_1 , i no hi ha altres arestes comunes entre aquests triangles.*

Hem enunciat dos resultats en un. D'una banda el teorema d'existència de la triangulació, resultat provat per Tibor Radó l'any 1925, en el qual tenen un paper essencial el teorema de la corba de Jordan (i una extensió del mateix, coneguda com a teorema de Schönflies) i el segon axioma de numerabilitat assumit a la definició de superfície. I de l'altra, dues propietats que té qualsevol triangulació d'una superfície, resulta més elemental.

No demostrarem cap de les afirmacions del teorema, tot i això podem donar algunes idees bàsiques. Es poden consultar tots els detalls a [NP].

La demostració de l'existència de triangulacions per a una superfície és llarga i complicada, tot i que els mètodes que s'usen són elementals. En el cas d'una superfície compacta l'esquema seria el següent: per a cada punt $p \in S$ considerem un disc tancat $D_p \subset S$. Els interiors d'aquests discs cobreixen S , per la qual cosa en podem extreure un subrecobriment finit. Eliminem d'aquest recobriment els discs completament continguts en un altre disc del recobriment. Suposem que les vores dels discs es tallen de manera que el nombre de dominis de S en que es divideix el complement de la unió de les vores és finit. Aquests dominis seran discs oberts. Ara, prenem un punt interior de cadascun dels dominis i des d'ell tracem camins (dins del domini) fins als punts d'intersecció de les vores que l'envolten. S'obté així una triangulació de S .

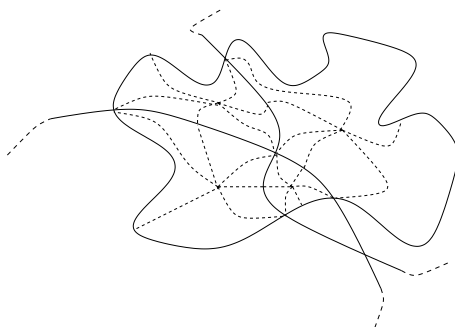
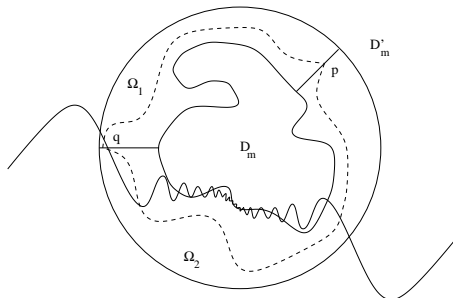


Figura 7: Triangulació de superfícies.

Hem suposat que la intersecció dels discs del recobriment determinava un nombre finit de dominis de S . Això no serà cert en general (vegeu la figura 8), i és aquí on rau part de la dificultat de la prova, ja que cal demostrar que es poden rectificar aquests discs per obtenir la finitud suposada.

Figura 8: Rectificació de D_m .

Quant a les propietats (1) i (2) que satisfan les triangulacions, se segueixen de que tot punt de S té un entorn homeomorf a un disc.

Model pla d'una superfície 2.5. Si S és una superfície topològica compacta, connexa, aleshores existeix una paraula A tal que S és homeomorfa a S_A .

La idea de la demostració és triangular la superfície, dismantellar els triangles i després unir aquests triangles en el pla per tal d'obtenir el polígon cercat que deterrminarà S_A . De fet, obtindrem un polígon triangulat d'una manera particular, que serà d'utilitat més endavant:

Lema 2.6. S és homeomorfa a una superfície S_A que prové d'un polígon P triangulat de forma que tots els vèrtexs són a la frontera de P i totes les arestes són a la frontera o cordes de P .

Demostració. Considerem els triangles d'una triangulació de S , T_1, \dots, T_n , ordenats de manera que tot triangle tingui una aresta en comú amb el següent, cosa que és possible per les propietats de les triangulacions de les superfícies; i denotem per $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ triangles disjunts del pla amb un homeomorfisme amb els triangles de S .

Construïm el polígon P inductivament: prenem $P_1 = \Delta_1$, que és un triangle. Seguidament, enganxem el triangle Δ_2 a P_1 per l'aresta que comparteixen a S . L'espai del pla resultant és homeomorf a un quadrat P_2 . Inductivament, construïm un polígon regular del pla, P , i una aplicació $\varphi : P \rightarrow X$ contínua i exhaustiva, amb $\varphi|_{P^\circ}$ injectiva. Sigui R_φ la relació d'equivalència de P segons la qual dos punts de P són equivalents si tenen la mateixa imatge per φ . L'aplicació induïda $P/R_\varphi \rightarrow S$ és bijectiva, i, per tant, com P que és compacte i S és de Hausdorff, aquesta aplicació és un homeomorfisme. \square

Observem que aquest procés aplicat a una superfície poligonal triangulada determina una presentació diferent d'aquesta superfície.

3 Classificació de superfícies compactes i connexes

Estem en disposició de demostrar la part d'existència del resultat principal del capítol.

Teorema de classificació 3.1. *Tota superfície compacta i connexa és homeomorfa a una única superfície estàndard.*

L'enunciat consta de dues parts, la primera referent a l'existència d'un homeomorfisme amb una superfície estàndard i la segona, la unicitat, que enuncia que les superfícies estàndard no són homeomorfes entre elles.

El mètode de construcció de l'homeomorfisme consisteix en fer un seguit d'homeomorfismes pel procediment de retallar i enganxar. Cadascuna d'aquestes cirurgies aplicada a una superfície fa variar la paraula original, induint una relació entre les paraules que determina superfícies homeomorfes. Formalitzem aquesta relació:

Definició 3.2. En el conjunt de paraules que defineixen superfícies designem per \sim la relació d'equivalència generada per les relacions següents:

- (i) $A \sim B$ si B s'obté a partir de A renomenant les lletres (i conservant els inversos);
- (ii) $A = aX \sim B = Xa$, és a dir, paraules cíclicament iguals són equivalents;
- (iii) $A = XaYUa^{\pm 1}V \sim B = bU(X^{-1}bY^{-1})^{\pm 1}V$, que correspon al canvi de variable $b = XaY$;
- (iv) $aa^{-1}B \sim B$;
- (v) $A \sim B \implies AC \sim BC$.

L'acció d'aquestes equivalències sobre les superfícies ve donada pel resultat següent.

Proposició 3.3. $A \sim B \implies S_A \cong S_B$.

Demostració. Donat que la relació d'homeomorfismes entre superfícies és una relació d'equivalència, és suficient provar el resultat per a cadascuna de les relacions que generen \sim .

Per a les relacions (i) i (ii) el resultat és immediat: si B s'obté renomenant les lletres de A , no s'estan canviant les identificacions dels costats del polígon que defineix S_A i S_B i, per tant, $S_A \cong S_B$. D'altra banda, les superfícies corresponents a aX i Xa només es diferencien en el vèrtex del polígon a partir del qual es comença la paraula que les defineix.

Pel canvi de variables, basta observar el procés de retallar i enganxar indicat a la figura 9

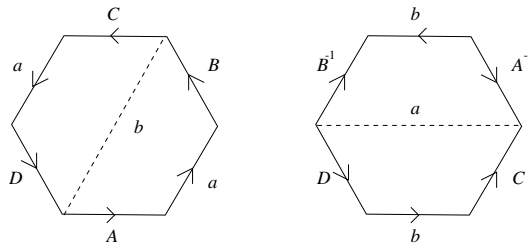


Figura 9: Canvi de variables.

La cancel·lació d'un parell aa^1 està indicada a la figura 10

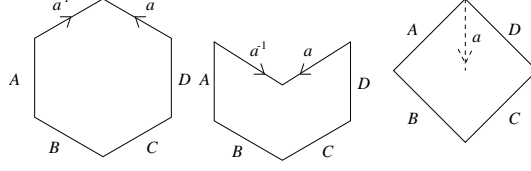


Figura 10: Cancel·lació d'un parell aa^{-1} .

Observem finalment que la relació (v) expressa la propietat

$$S_A \cong S_B \implies S_A \# S_C \cong S_B \# S_C.$$

□

Aquesta proposició transforma el problema de definir un homeomorfisme de S_A amb una superfície estàndard en un problema purament algebraic de trobar una paraula estàndard equivalent a A .

Demostració del teorema de classificació (existència).

Farem la prova per inducció sobre la longitud de la paraula, n .

Si $n = 1$ aleshores $A = aa^{-1}$ o $A = aa$, que són paraules estàndard.

Segui $n > 1$ i suposem el teorema demostrat per a paraules de longitud $< n$. Analitzarem separatament el casos en que hi ha una lletra de segona espècie del que totes les lletres són de primera espècie.

Primer cas: suposem que A conté una lletra de segona espècie, $A = aXaY$.

Normalització de projectius 3.4. $aXaY \sim bbB$

En efecte, si prenem $b = aX$ i, conseqüentment $a = bX^{-1}$, aleshores per (iii) resulta

$$A = aXaY \sim bbX^{-1}Y = bbB.$$

Així, per hipòtesi d'inducció i (v) concloem que

$$A \sim bbB \sim \begin{cases} bbB_{g-1} & \sim B_g \\ bbA_{g-1} & \end{cases}$$

En el primer cas ja hauríem acabat. Pel que fa al segon, trobem que $bbA_{g-1} \sim B_g$, aplicant reiteradament el lema següent.

Lema 3.5. $aabcb^{-1}c^{-1} \sim ddeeff$.

En efecte, usant el lema 3.4 reiteradament, es tenen les equivalències següents

$$\begin{aligned} aabcb^{-1}c^{-1} &\sim dbc^{-1}b^{-1}dc^{-1} \\ &\sim dbd^{-1}bff \\ &\sim ddeeff. \end{aligned}$$

Segon cas: suposem que totes les lletres són de 1a espècie i sigui s la distància mínima, dins de la paraula, entre una lletra i la seva inversa; raonem per inducció sobre s .

Si $s = 1$, hi haurà un parell de la forma aa^{-1} dins de la paraula i podem procedir a cancel·lar-lo per la propietat (ii) de la relació entre paraules. Així doncs, podem suposar que $s > 1$, la qual cosa vol dir que entre a i a^{-1} hi ha com a mínim una altra lletra, b , i que, per la minimalitat d' s , no s'hi troba b^{-1} .

Quan en una paraula apareixen dues lletres de primera espècie entrelaçades de la forma $aba^{-1}b^{-1}$, direm que es té una *nansa*. D'aquí el nom del resultat que segueix:

Normalització de nanses 3.6. Es té l'equivalència

$$AaBbCa^{-1}Db^{-1}E \sim ADCcdc^{-1}d^{-1}BE.$$

Demostració. Fent el canvi de variables $d = BbC$, resulta l'equivalència

$$AaBbCa^{-1}Db^{-1}E \sim Aada^{-1}DCd^{-1}BE,$$

Ara, fent el canvi de variables $c^{-1} = a^{-1}DC$ acabem la prova.

Aplicant la normalització de nanses, la paraula original és equivalent a la paraula

$$cdc^{-1}d^{-1}BEADC = cdc^{-1}d^{-1}F,$$

on F és una paraula amb $n - 2$ lletres i totes elles de 1a espècie. Per hipòtesis d'inducció, deduïm que la paraula original és equivalent a A_g per a algun g . \square

Ens queda per veure ara la part de la unicitat del teorema, és a dir, que les superfícies estàndard no són homeomorfes entre elles, per a la qual cosa utilitzarem l'orientabilitat i la característica d'Euler.

4 Orientabilitat de superfícies

En aquesta secció analitzem el concepte d'orientabilitat de superfícies.

Definició 4.1. Diem que una superfície S és *no orientable* si conté un subespai homeomorf a una cinta de Moebius. En cas contrari diem que S és *orientable*.

De la pròpia definició se segueix la invariància per homeomorfismes de l'orientabilitat:

Proposició 4.2. *Siguin $S \cong T$ dues superfícies homeomorfes. Aleshores ambdues són orientables o ambdues són no orientables.*

Exemple 4.3. El pla projectiu \mathbb{P}^2 o l'ampolla de Klein \mathbb{K} , i més generalment, les superfícies estàndard de paraula B_g , $g\mathbb{P}^2$, són no orientables.

Si bé és cert que les superfícies $g\mathbb{T}^2$ són orientables, provar-ho no resulta immediat. Indiquem a continuació una manera de raonar-ho mitjançant les triangulacions de superfícies.

Definició 4.4. Sigui S una superfície compacta i τ una triangulació de S . Orientem els triangles de τ determinant un ordre dels vèrtexs (sentit de gir al triangle). Diem que els triangles estan *orientats coherentment* si triangles adjacents en una aresta indueixen orientacions oposades d'aquesta.

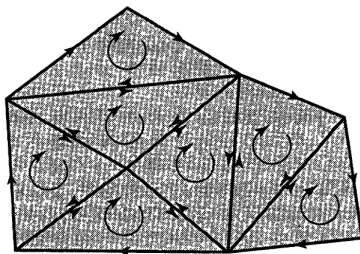


Figura 11: Triangulació coherent.

Teorema 4.5. *S és orientable si, i només si, admet una triangulació orientada coherentment.*

Demostració. No podem donar la prova completa d'aquest resultat, tot i això en podem comentar algunes idees. En primer lloc observem que si una triangulació està coherentment orientada, totes les triangulacions ho estan. En efecte, siguin τ, τ' dues triangulacions de S ; un procés delicat de subdivisió baricèntrica que no explicitem permet suposar que hi ha un homeomorfisme $h : S \rightarrow S$ tal que $h(\tau) = \tau'$, la qual cosa vol dir que tenen el mateix nombre de triangles, etc. Aleshores és clar que τ admet una orientació coherent si, i només si, l'admet τ' .

Suposem que S és no orientable i provem que no existeix cap triangulació coherentment orientada. Sigui τ una triangulació de S . Per hipòtesis, existirà una cinta de Moebius $M \subset S$ i es pot demostrar que podem ajustar la triangulació τ de manera que en resulti alhora una triangulació de la cinta de Moebius M . Però podem revertir el sentit de gir viatjant al llarg de la cinta de Moebius, per la qual cosa τ no pot ser coherentment orientada.

Suposem ara que S és orientable i provem que existeix una triangulació coherent. Suposem el contrari, aleshores donada una triangulació τ nos serà possible orientar-la coherentment. Comencem en un triangle T_1 de τ i escollim una orientació de T_1 . Estenem aquesta direcció de rotació als triangles adjacents i iterem el procés al llarg de tots els triangles de τ . Com la triangulació no admet una orientació coherent, hi ha com a mínim un triangle T_n al

qual arribem per diferents camins amb orientacions oposades. Podem per tant trobar una successió de triangles T_1, \dots, T_n tals que

- (i) cada triangle T_i té una aresta en comú amb el triangle T_{i+1} i estan coherentment orientats;
- (ii) els triangles T_n i T_1 tenen una aresta en comú i no estan coherentment orientats.

Aquesta successió de triangles defineix una cinta de Moebius dins de S , en contradicció amb el fet que S és orientable.

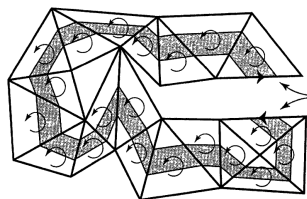


Figura 12: Una cinta de Moebius a la triangulació.

□

Corol·lari 4.6. *Una superfície poligonal S_A és orientable si, i només si, A no conté lletres de 2a espècie. En particular, les superfícies estàndard $g\mathbb{T}^2$ són orientables.*

Corol·lari 4.7. *Les superfícies estàndard $g\mathbb{T}^2$ i $g'\mathbb{P}^2$ no són homeomorfes.*

5 La característica d'Euler

Hem vist que l'orientabilitat distingeix entre les superfícies estàndard de paraules A_g i B_g . Per tal de distingir entre les A_g (i anàlogament les B_g) per a diferents valors de g , definim la característica d'Euler.

Definició 5.1. Sigui τ una triangulació d'una superfície compacta i connexa S . Es defineix la *característica d'Euler* de τ segons

$$\chi(\tau) = v - a + c,$$

on v, a, c són el nombres de vèrtexs, arestes i triangles de la triangulació.

Exemple 5.2. Si considerem la triangulació d'una superfície poligonal determinada a la figura 6, trobem

$$\begin{aligned} v &= 1 + 8n + v', \\ a &= 27n, \\ c &= 18n, \end{aligned}$$

on v' és el nombre de punts de la superfície S_A que són imatge dels vèrtexs del poligon, amb la qual cosa

$$\chi(\tau) = 1 + v' - n.$$

Teorema 5.3. *Dues triangulacions d'una mateixa superfície tenen igual característica d'Euler. En particular, la característica d'Euler és invariant per homeomorfisme: dues superfícies homeomorfes tenen la mateixa característica d'Euler.*

Demostració. Aquest resultat expressa que l'orientabilitat és una propietat topològica, cosa que és certa per a espais més generals que les superfícies, les varietats de qualsevol dimensió. Podem donar-ne una prova pel cas de superfícies aprofitant la feina feta fins ara.

En efecte, sigui τ una triangulació de S i τ_A la triangulació que en resulta del model pla segons el lema 2.3. És immediat que se satisfà

$$\chi(\tau) = \chi(\tau_A).$$

Les arestes de la triangulació τ_A són codex o a la frontera del polígon. Observem que si eliminem una corda, desapareix un triangle, per la qual cosa, compensant les cordes amb els triangles en resulta

$$\chi(\tau_A) = 1 + v' - n,$$

on n és el nombre de d'arestes i v' el nombre de vèrtexs de S determinats per la frontera del polígon de paraula A .

D'altra banda, observem que en una superfície poligonal triangulada el procés de reducció d'una paraula a una de normal no canvia la característica d'Euler i, per tant, si la característica d'Euler de la triangulació original és la mateixa que la del model estàndard associat.

En particular, dues superfícies estàndard diferents no poden ser homeomorfes. □

Per a les superfícies estàndard trobem

Corol·lari 5.4. *La característica d'Euler de les superfícies estàndard és:*

$$\begin{aligned}\chi(\mathbb{S}^2) &= 2, \\ \chi(g\mathbb{T}^2) &= 2 - 2g, \\ \chi(P^2) &= 2 - g.\end{aligned}$$

I, per tant, en deduïm la unicitat:

Corol·lari 5.5. *Siguin $g \neq g'$ dos enters positius. Aleshores la superfície $g\mathbb{T}^2$ (respectivament, $g\mathbb{P}^2$) no és homeomorfa a la superfície $g'\mathbb{T}^2$ (respectivament, $g'\mathbb{P}^2$).*

Referència

[NP] V. Navarro, P. Pascual: *Topologia Algebraica*. Edicions Univ. de Barcelona, 1999.