Departament de Matemàtiques

Problemes d'Anàlisi Real
FME Curs 2019/20

Tema 3: Sèries de Fourier

1. (Desigualtat de Cauchy-Schwarz). Siguin f i g dues funcions integrables a l'interval $[a, b]$, proveu que
$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\ dx \right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2(x)\ dx \right) \left(\int_a^b g^2(x)\ dx \right).$$
Indicació: Considereu la funció quadràtica $\Phi(t) = \int_a^b (f + tg)^2$, $t \in \mathbb{R}$. Noteu que $\Phi(t) \geq 0$, per tot $t \in \mathbb{R}$.

2. Siguin $f, f_n : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrables Riemann i suposem que la successió $\{f_n\}$ convergeix vers f en mitjana quadràtica. Prenem
$$g(x) = \int_a^x f(y)\ \mathrm{d}y \qquad g_n(x) = \int_a^x f_n(y)\ \mathrm{d}y \quad n \in \mathbb{N}.$$
Demostreu que la successió de funcions $\{g_n\}$ convergeix uniformement vers la funció g a l'interval $[a, b]$. *Indicació:* Utilitzeu la desigualtat de Cauchy-Schwartz.

3. Sigui f una funció contínua a trossos a l'interval $[-\pi, \pi]$ i considerem la funció
$$g(x) = \int_{-\pi}^x f(y)\ \mathrm{d}y \qquad x \in [-\pi, \pi]$$
Sigui també
$$SF(f)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$
demostreu que,
$$g(x) = \frac{a_0(x + \pi)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{a_n}{n} \sin nx - \frac{b_n}{n} (\cos nx - (-1)^n) \right]$$
i la convergència de la sèrie és uniforme a l'interval $[-\pi, \pi]$.

4. Aplicant la identitat de Parseval als desenvolupaments en sèrie de Fourier de les funcions $2\pi-$periòdiques definides, respectivament, com $f(x) = \pi - x$ i $g(x) = (\pi - x)^2$ sobre l'interval $[0, 2\pi]$, demostreu que
$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \qquad \frac{\pi^4}{90} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$$

5. Per a cada una de les següents funcions determineu si la corresponent sèrie de Fourier convergeix puntualment o en mitjana quadràtica a l'interval $[-\pi, \pi]$, així com el valor del límit puntual si existeix.
   (a) $f(x) = x^n; \quad n \in \mathbb{Z}.$
   (b) $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ kx, & x \geq 0; \end{cases} \qquad k \in \mathbb{R}.$
   (c) $f(x) = \tan(x).$
   (d) $f(x) = e^{-x^2}.$
   (e) $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$

6. Demostreu

$$x\cos(x) = -\tfrac{1}{2}\sin(x) + 2\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n n\sin(nx)}{n^2-1}, \qquad -\pi < x < \pi$$

7. Calculeu el desenvolupament en sèrie de Fourier a l'interval $[-\pi,\pi]$ per a cada una de les següents funcions:

   (a)
$$f(x) = \begin{cases} 10, & x > 0 \\ -11, & x < 0 \end{cases}$$

   (b) $f(x) = x^2 + x + 3$.

   (c)
$$f(x) = \begin{cases} x, & x > 0 \\ -x^2, & x < 0 \end{cases}$$

8. Proveu que les sèries trigonomètriques següents són convergents a tot $\mathbb{R}$ però no són sèries de Fourier de cap funció 2π-periòdica contínua

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{\log n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{\sqrt{n}}.$$

9. Considerant la funció

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{4}, & 0 \le x \le \pi \\ \\ -\frac{\pi}{4}, & -\pi \le x < 0 \end{cases}$$

   i el punt $x = \pi/2$, proveu la fórmula de Leibnitz

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots = \frac{\pi}{4}.$$

10. Per a cada una de les següents funcions determineu el tipus de convergència de la corresponent sèrie de Fourier, i si es pot derivar la sèrie.

$$(a) f(x) = x^2 \quad x \in [-\pi,\pi]$$

$$(b) f(x) = \begin{cases} 3, & -\pi \le x < -\frac{1}{2}, \\ \\ 0, & -\frac{1}{2} \le x < \frac{1}{2}, \\ \\ 3, & \frac{1}{2} \le x \le \pi \end{cases}$$

$$(c) f(x) = \pi - x^2 \quad x \in [-\pi,\pi]$$

11. **Lema de Wittinger.**
    Si $f(t)$ és periòdica de període 2π, C^∞ i $\int_0^{2\pi} f(t)\ \mathrm{d}t = 0$, aleshores

$$\int_0^{2\pi} (f')^2(t)\ \mathrm{d}t \ge \int_0^{2\pi} f^2(t)\ \mathrm{d}t$$

    verificant-se la igualtat si i només si $f(t) = a\cos(t) + b\sin(t)$, $a, b \in \mathbb{R}$.

12. Sigui $f(x)$ l'extensió periòdica de $x^3 - \pi^2 x$, $x \in [-\pi,\pi]$.

(a) Vegeu que f és $\mathcal{C}^0$ i $\mathcal{C}^1$ a tot $\mathbb{R}$, peró que sols és $\mathcal{C}^2$ a trossos.

(b) Calculeu la sèrie de Fourier trigonomètrica de f.

(c) Justifiqueu de dues maneres diferents que $SFT(f)$ és uniformement convergent a tot $\mathbb{R}$.

(d) Demostreu que

$$\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}, \quad \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}.$$

13. Sigui a tal que $0 < a < \pi$. Demostreu les següents identitats:

$$\frac{\pi - a}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin na}{n}, \qquad \frac{\pi - 2a}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2na}{n},$$

$$\frac{a}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin na}{n}, \qquad \frac{a(\pi - a)}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 na}{n^2}.$$

Indicació: considereu la funció

$$f(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leq a, \\ 0 & \pi \geq |x| > a. \end{cases}$$

14. Sigui $f(x) = \sin \mu x$, $x \in [-\pi, \pi]$, estesa periòdicament amb període 2π.

(a) Calculeu la sèrie de Fourier trigonomètrica de $f(x)$ si $\mu \notin \mathbb{Z}$. Què passa si $\mu \in \mathbb{Z}$?

(b) Demostreu que $\forall x \in \mathbb{R}$ es té, si $\mu \notin \mathbb{Z}$,

$$\left| \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n}{\mu^2 - n^2} \sin nx \right| \leq \frac{\pi}{2} \left| \operatorname{cosec} \mu\pi \right|.$$

(c) Demostreu que, si $\mu \notin \mathbb{Z}$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{(2n+1)^2 - \mu^2} = \frac{\pi}{4} \sec \mu \frac{\pi}{2}.$$

15. Sigui f la funció 2π-periòdica que per a $x \in (-\pi, \pi)$ val $f(x) = e^x$.

(a) Trobeu la sèrie de Fourier associada a f. Hi ha convergència de la sèrie de Fourier vers f en $L_2(-\pi, \pi)$? Discutiu la convergència puntual. Indicació: pot ser convenient treballar amb la forma complexa.

(b) Deduïu que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + 1} = \frac{\pi}{e^\pi - e^{-\pi}} - \frac{1}{2}.$$

(c) Apliqueu la identitat de Parseval per calcular

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1}.$$

16. Sigui $a \in \mathbb{R}$ i sigui f una funció 2π-periòdica tal que

$$f(x) = a - \sin \frac{x}{2}, \; x \in [0, \pi),$$

i $f(-x) = f(x)$ si $x \in (-\pi, 0]$.

(a) Calculeu el valor d'a que fa que $SFT(f)$ no tingui terme constant. A partir d'ara fixem aquest valor d'a. Dibuixeu f a $[-3\pi, 3\pi]$.

(b) Calculeu $SFT(f)$. Discutiu la seva convergència puntual i uniforme.

(c) Emprant $SFT(f)$, calculeu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$$

i

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1}.$$

17. Sigui $t \in (0,1)$ i $f(x) = \cos xt$, $x \in [-\pi, \pi)$.

(a) Calculeu els coeficients de Fourier de l'extensió 2π-periòdica de f.

(b) Demostreu que, si $x \in [-\pi, \pi]$,

$$\cos xt = \frac{\sin \pi t}{\pi t} + \frac{2t \sin \pi t}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{t^2 - n^2}.$$

(c) Deduïu que

$$\pi \cot \pi t - \frac{1}{t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2t}{t^2 - n^2}.$$

(d) Proveu que podeu integrar aquesta darrera sèrie terme a terme respecte de t sobre qualsevol interval contingut en $(0,1)$.

(e) Deduïu de l'apartat anterior que

$$\frac{\sin \pi y}{\pi y} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{y^2}{n^2}\right), \quad 0 < y < 1.$$

18. Definim de manera recurrent la successió $\{B_r(x)\}_{r \geq 0}$ sobre $[0, 2\pi)$ com $B_0(x) = 1$ i

$$B_r'(x) = B_{r-1}(x) \;\text{ i }\; \int_0^{2\pi} B_r(x)\, dx = 0, \; r \geq 1$$

(a) Calculeu $B_1(x)$ sobre $[0, 2\pi)$ i la sèrie de Fourier corresponent a la seva extensió periòdica.

(b) Proveu que, per $r \geq 2$

$$\int_0^{2\pi} B_{r-1}(x)\; \cos nx\, dx = n \int_0^{2\pi} B_r(x) \sin nx\, dx$$

$$\int_0^{2\pi} B_{r-1}(x)\; \sin nx\, dx = -n \int_0^{2\pi} B_r(x) \cos nx\, dx$$

(c) Calculeu la sèrie de Fourier de B_r per cada r, i discutiu el seu límit puntual per cada $x \in [0, 2\pi]$

(d) Proveu que

$$\lim_{r \to \infty} (-1)^{r-1} B_{2r}(x) = 2 \cos x, \quad \text{per tot } x \in [0, 2\pi]$$