Exercicis de Teoria de Programació Lineal i Entera

(v7.4 - 09/20)

F.-Javier Heredia

http://gnom.upc.edu/heredia

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Departament d'Estadística
i Investigació Operativa

Exercicis de Teoria de Programació Lineal i Entera.

F.-Javier Heredia (f.javier.heredia@upc.edu, http://gnom.upc.edu/heredia)

Group on Numerical Optimization and Modeling.

Departament d'Estadística i Investigació Operativa, UPC.

v7.4, setembre de 2020: v.7.3 corregida + exercici 46.

Certs exercicis de la col·lecció utilitzen codis i sortides del procediment `OPTMODEL` del paquet `SAS/OR` (http://support.sas.com/rnd/app/or/mp/OPTMODEL.html)

INDEX

EXERCICIS RECOMENATS GRAU D'ESTADÍSTICA

Fonaments de programació lineal		
Forma estàndard i assumpció rang complet:	EXERCICI 10	EXERCICI 12
Solucions bàsiques:	EXERCICI 13 EXERCICI 18	EXERCICI 14
Algorisme del Símplex Primal		
Direccions bàsiques factibles:	EXERCICI 21 EXERCICI 23 EXERCICI 27	EXERCICI 22 EXERCICI 25
Algorisme del símplex primal i Fase I:	EXERCICI 28 EXERCICI 40	EXERCICI 35 EXERCICI 42
Anàlisi de sensibilitat i dualitat		
Intervals d'estabilitat:	EXERCICI 48 a EXERCICI 52	
Formulació problemes duals:	EXERCICI 53	
Teoremes fort i feble de dualitat:	EXERCICI 66 a), b) EXERCICI 69 EXERCICI 73 a), b), c)	EXERCICI 68 EXERCICI 70 d) , e)
Ta. de folga complementària:	EXERCICI 57 EXERCICI 71	EXERCICI 58
Anàlisi de sensibilitat i Alg. del Símplex Dual:	EXERCICI 61 EXERCICI 65 EXERCICI 67 b) EXERCICI 52 EXERCICI 70 a), b), c). EXERCICI 73 d)-g)	EXERCICI 63 c), d) EXERCICI 66 c), d) EXERCICI 49 a) EXERCICI 69 d), e) EXERCICI 71
Programació lineal entera		
Algorisme de ramificació i poda, resolució gràfica:	EXERCICI 84 EXERCICI 88	EXERCICI 86
Algorisme de plans secants amb resolució gràfica:	EXERCICI 93 EXERCICI 101 a)	EXERCICI 94
Algorisme de ramificació i tall amb resolució gràfica:	EXERCICI 97 EXERCICI 101 a)	EXERCICI 98
Algorisme de ramificació i poda amb ASD:	EXERCICI 88	
Algorisme de plans secants amb ASD:	EXERCICI 95 EXERCICI 101 b)	EXERCICI 96
Algorisme de ramificació i tall amb ASD:	EXERCICI 103 EXERCICI 105	EXERCICI 104 EXERCICI 106

EXERCICIS RECOMENATS GRAU DE MATEMÀTIQUES

Formulació de problemes de programació lineal		
	EXERCICI 1 EXERCICI 6	EXERCICI 2
Fonaments de programació lineal		
Convexitat, forma estàndard, assumpció de rang complet i solucions bàsiques:	EXERCICI 9 EXERCICI 11 EXERCICI 13	EXERCICI 10 EXERCICI 12
Algorisme del símplex		
Direccions bàsiques factibles i propietats de les solucions bàsiques factibles:	EXERCICI 24 EXERCICI 27	EXERCICI 26
Algorisme del símplex primal:	EXERCICI 28	EXERCICI 29
Fase I del símplex:	EXERCICI 37 EXERCICI 43	EXERCICI 40 EXERCICI 44
Dualitat i anàlisi de sensibilitat		
Formulació problemes duals:	EXERCICI 48 EXERCICI 56	EXERCICI 55
Teoremes de dualitat, símplex dual i anàlisi de sensibilitat:	EXERCICI 57 EXERCICI 60 EXERCICI 71	EXERCICI 58 EXERCICI 69
Formulació de problemes de programació lineal entera		
	EXERCICI 77	EXERCICI 78
Programació lineal entera		
Algorisme de ramificació i poda, resolució gràfica:	EXERCICI 84	EXERCICI 86
Algorisme de plans secants amb resolució gràfica:	EXERCICI 93	EXERCICI 94
Algorisme de ramificació i tall amb resolució gràfica:	EXERCICI 97	EXERCICI 98
Algorisme de ramificació i poda amb símplex dual:	EXERCICI 88	
Algorisme de plans secants amb símplex dual:	EXERCICI 95	EXERCICI 96
Algorisme de ramificació i tall amb símplex dual:	EXERCICI 103	EXERCICI 105

FORMULACIÓ DE PROBLEMES DE PROGRAMACIÓ LINEAL

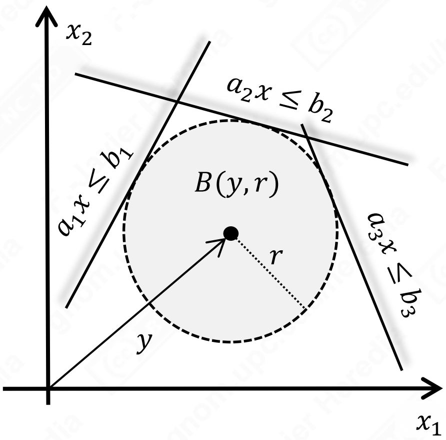
EXERCICI 1. Centre de Chebychev.

Considereu el poliedre $P = \{x \in \mathbb{R}^n | a_j x \le b_j, j = 1,2,\dots,m\}$. Una bola amb centre y i radi r es defineix com el conjunt de tots els punts dins d'una distància Euclidiana r de y:

$$B(y,r) = \{x \in \mathbb{R}^n | \|x - y\|_2 \le r\}.$$

Formuleu el problema de programació lineal que permet obtenir el centre y i radi r de la bola de radi màxim inscrita en P: $\max\{r \in \mathbb{R}^+ | B(y,r) \subset P\}$

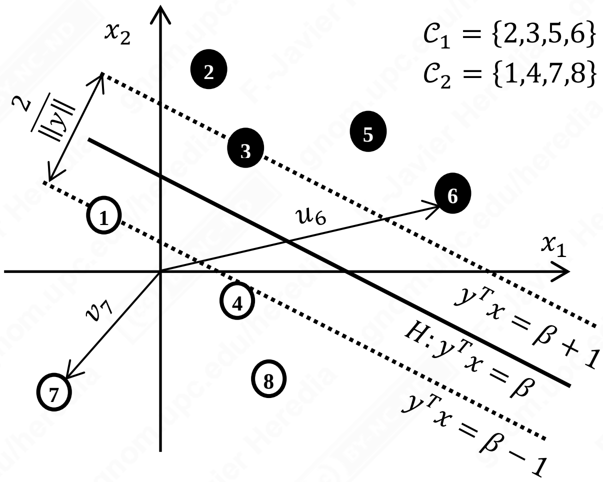
El centre y d'aquesta bola de radi màxim es coneix com a *centre de Chebychev*. (la figura adjunta mostra un cas per $n = 2$ i $m = 3$).



(SOLUCIÓ EXERCICI 1)

EXERCICI 2. Support Vector Machines.

Una de les tècniques més populars d'aprenentatge supervisat per a la classificació automàtica són les conegudes com a *Support Vector Machines* (SVM). Suposeu que representem a m individus en funció del valor de n atributs a través de vectors d'un espai de dimensió n. Els individus estan separats en dues classes C_1 i C_2. A la gràfica adjunta es representen $m = 8$ individus amb $n = 2$ atributs (x_1, x_2), separats en dos classes. Per exemple, x_1 i x_2 poden ser el nivell en sang de dos marcadors d'una certa malaltia, C_1 el conjunt de mesures en individus sans i C_2 el conjunt de mesures en individus malats. Sigui $u_j, j \in C_1$, i $v_j, j \in C_2$, els vectors d'atributs de cada individu.



Les tècniques SVM es basen en trobar un hiperplà $H: y^T x = \beta$ que separi les observacions de les dues classes C_1 i C_2 i que ens permeti classificar dins de cada classe noves observacions.

Matemàticament consisteix en la cerca d'un vector normal $y \in \mathbb{R}^n$ i l'escalar β tals que:

$$\begin{cases} u_j^T y & \ge & \beta + 1 & j \in C_1 \\ v_j^T y & \le & \beta - 1 & j \in C_2 \end{cases}$$

Formuleu el problema de programació lineal en forma estàndard que permet o bé trobar un hiperplà H que separi les observacions de les dues classes C_1 i C_2, o bé determinar que no existeix tal hiperplà separador.

(SOLUCIÓ EXERCICI 2)

EXERCICI 3. Coalco.

L'empresa minera Coalco produeix carbó a dues mines per a dos clients. La següent taula mostra, per a cada mina, les següents dades: cost per tona transportada entre cada mina i cada client; cost per tona de carbó produïda; producció màxima i contingut en cendra i sulfur per a cada tona de carbó produïda. També s'indica la demanda de cada client.

Cost de transport (€/Tm)	Client 1	Client 2	Cost de producció (€/Tm)	Capacitat (Tm)	Contingut en cendra (Tm/Tm carbó)	Contingut en sulfur (Tm/Tm carbó)
Mina 1	4	6	50	120	0.1	0.04
Mina 2	9	6	55	100	0.05	0.09
Demanda (Tm)	90	110				

Cada client pot rebre carbó d'una única mina o de totes dues, mesclant, en aquest últim cas, els dos tipus de carbó rebut. En tot cas, la composició del carbó rebut, ja sigui d'una única mina o per mescla de totes dues, no pot contenir més d'un 8% de cendres i d'un 7% de sulfur.

Formuleu, un problema de programació lineal que optimitzi la forma en que Coalco ha de satisfer la demanda dels seus clients i resoleu-lo amb OPTMODEL.

(SOLUCIÓ EXERCICI 3)

EXERCICI 4. CSL.

L'empresa de consultoria CSL ha d'encetar en els pròxims 5 mesos un conjunt de projectes que necessitaran les següents quantitats d'hora de consultor qualificats per mes:

	Gener	Febrer	Març	Abril	Maig
Demanda (h)	3000	4000	7500	10000	15000

Al començament de gener CSL té en plantilla 35 consultors qualificats que treballen 160 hores mensuals cadascú. Aquests consultors qualificats han de compaginar les tasques de consultoria amb la de formació dels nous consultors que s'hagin de contractar per tal de satisfer les hores de consultoria dels pròxims cinc mesos.

El període de formació d'un consultor recent contractat és de dos mesos, i requereix 50 hores de supervisió d'un consultor qualificat durant el primer mes de formació, i 10 hores durant el segon mes. Un consultor en formació no es pot dedicar a tasques de consultoria.

Cada consultor qualificat cobra 1800 euros/mes. El sou mensual dels consultors en formació és de 900 euros.

Degut a l'alta demanda de consultors qualificats, és habitual que aquests marxin de CSL a altres consultories. Es preveu que, al final de cada mes, un 5%, com a mínim, dels consultors qualificats, inclosos els que s'acaben de formar, deixin CSL.

Formuleu el problema de PL que permet aproximar el nombre de nous consultors a contractar durant els pròxims cinc mesos per tal de fer front a la demanda d'hores de consultoria tot minimitzant els costos de personal.

(SOLUCIÓ EXERCICI 4)

EXERCICI 5. Hospital del Mar.

l'Hospital del Mar té un problema amb el laboratori d'anàlisi de mostres. El laboratori té disponibles tres màquines que poden analitzar diferents mostres de fluids. Darrerament la demanda d'anàlisis de sang s'ha incrementat de tal forma que el director del laboratori té problemes per tenir els resultats a temps i fer front alhora a les analítiques de les restes de fluids. El laboratori treballa amb 5 tipus diferents de mostres fluids. Cada màquina pot ser usada per a analitzar qualsevol tipus de mostra, però el temps (minuts) que triga cadascuna depèn del tipus de mostra, segons s'indica a la següent taula:

	Màquina			
Temps de processat (minuts/ml)	A	B	C	Volum (ml)
Mostra 1	3	5	2	80
Mostra 2	4	3	5	75
Mostra 3	4	5	3	80
Mostra 4	5	4	3	12
Mostra 5	3	5	4	60

Cada màquina es pot usar un màxim de 8h al dia. Les mostres recollides un dia donat arriben al laboratori i esperen durant la nit a ser processades a l'endemà. Al començament de cada dia, el director del laboratori ha de determinar com repartir les mostres entre les diferents màquines. La quantitat de mostres a analitzar aquest matí s'indica a la darrera columna de la taula anterior.

a) Formuleu el problema de PL que permet trobar com distribuir de forma òptima les mostres entre les màquines i resoleu-lo amb OPTMODEL.
b) Considereu ara que es vol obtenir la distribució òptima de mostres tenint en compte les següents limitacions:
   b.1. No es vol que cap mostra ocupi més del 50% del temps total de funcionament d'una màquina.
   b.2. No es vol que cap màquina realitzi més del 40% de volum total de les proves:.

   Formuleu les constriccions lineals addicionals que permeten incloure en el model aquestes dues condicions.

(SOLUCIÓ EXERCICI 5Hospital del Mar.)

EXERCICI 6. Pelletier.

L'empresa Pelletier Corporation ha detectat que no tindrà prou espai de magatzem durant els pròxims 5 mesos. Les necessitats addicionals d'espai durant els pròxims 5 messos són:

Mes	1	2	3	4	5
Espai adicional necessàri (1000 ft^2)	25	10	20	10	5

Per tal de cobrir aquestes necessitats d'espai, l'empresa preveu haver de llogar espai addicional. Una empresa local d'emmagatzematge ha acceptat llogar a Pelletier tant espai com necessiti durant el temps que necessiti. El preu de lloguer depén del temps de lloguer, segons indica la següent taula

Durada del contracte (en mesos)	1	2	3	4	5
Cost per cada 1000 ft^2 llogat	€300	€525	€775	€850	€975

Pelletier disposa de la llibertat de decidir al començament de cada mes quin contracte vol establir. Per exemple, la companyia podria decidir al començament del mes 1 llogar 5000 ft^2 durant 4 mesos i llogar 10000 ft^2 durant 2 mesos al començament del mes 3. Formuleu el problema de PL que permet minimitzar els costos de lloguer.

(SOLUCIÓ EXERCICI 6)

EXERCICI 7. Optirisk.

La societat de capital risc OptiRisk vol gestionar de la millor forma possible el capital necessari per a posar en marxa un nou projecte empresarial que començarà d'aquí a cinc anys, i durarà tres anys. Durant el primer any, el projecte necessitarà realitzar uns pagaments de 120.000€, amb un increment anual de 20.000€ durant els dos anys següents. OptiRisk disposa de la següent cartera de productes financers:

Valor	Venciment	Rendiment	Factor de Risc
A	1 any	1.0%	1
B	2 anys	3.5%	3
C	3 anys	4.0%	6
D	4 anys	5.0%	8

D'acord amb la informació de la taula, considerarem que només es pot invertir en un valor l'any següent del venciment. Per exemple, només es pot invertir en el producte C al començament dels anys 1, 4, 7, etc. Optirisk vol determinar el capital mínim necessari a invertir al començament del primer any en els diferents productes per tal de fer front a les despeses previstes del nou projecte sense que el valor del risc promig ponderat del capital invertit a cada any superi el factor 2.5. El rescat i reinversió de capital al llarg del període de 8 anys es fa de forma que al començament del cada any:

i. Es rescata el capital de les inversions que vencen aquest any.
ii. Es reserva el diner necessari per a realitzar els pagament, si es que n'hi ha.
iii. Amb els diners sobrants, es decideix la quantitat a invertir en les inversions disponibles aquell any.

Aquesta estratègia d'inversió es pot representar a través del graf de flux de caixa representat a la Figura 1, on c repressenta el capital inicial, x_{ij}^k les quantitats invertides en cada producte I p_j els pagaments deguts.

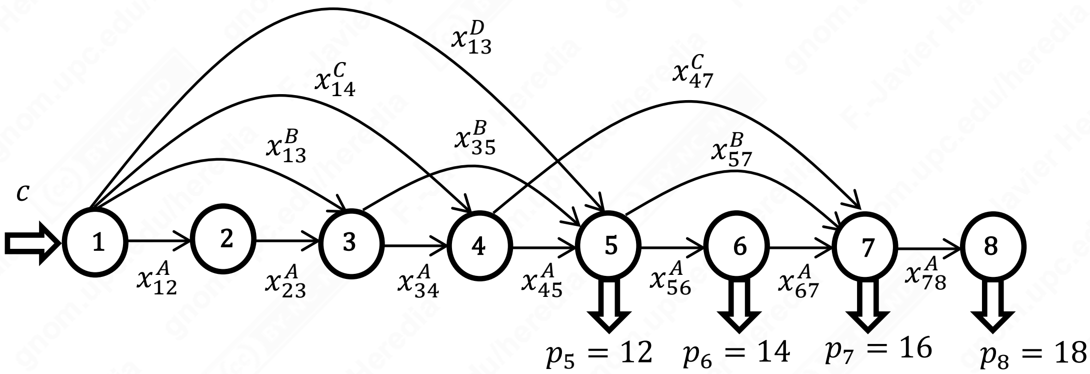


Figura 1: graf del problema de flux de caixa Optirisk.

Formuleu el problema d'Optirisk com a problema de programació lineal completament parametritzat.

(SOLUCIÓ EXERCICI 7)

FONAMENTS DE PROGRAMACIÓ LINEAL

EXERCICI 8. Test fonaments de programació lineal

TEST 1. Un politop és:

a) **V / F** El poliedre d'un problema (P) en forma estàndard.
b) **V / F** El poliedre d'un problema (P) amb solució única.
c) **V / F** Un poliedre no buit i afitat.

TEST 2. Sigui el problema de (P) $\min\{c'x | x \in P\}$, P politop. Llavors:

a) **V / F** Tots els punts extrems són òptims.
b) **V / F** Cap punt extrem és òptim.
c) **V / F** Algun punt extrem és òptim.

TEST 3. El subconjunt de $\mathbb{R}^n$ definit com a $P = \{x \in R^n | \, Ax = b, x \geq 0\}$:

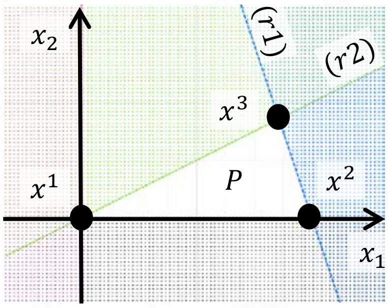
a) **V / F** Es pot assegurar que és un poliedre.
b) **V / F** Es pot assegurar que és un politop.
c) **V / F** Expressa la regió factible de qualsevol problema de programació lineal.

TEST 4. Diem que un conjunt $S \subset \mathbb{R}^n$ és convex si:

a) **V / F** $\forall x, y \in S, \forall \lambda \in \,]0,1[: \lambda x + (1-\lambda)y \in S$
b) **V / F** $\forall x, y \in S, \forall \lambda \in [0,1]: \lambda x + (1-\lambda)y \in S$
c) **V / F** $\forall x, y \in S, \forall \lambda \in [0,1]: (1-\lambda)x + \lambda y \in S$

TEST 5. Considereu el següent problema (PL) i el seu politop factible P:

$$(PL)\begin{cases} \min z = & -4x_1 & +x_2 & & \\ s.a.: & 3x_1 & +x_2 & \leq 6 & (r1) \\ & -x_1 & +2x_2 & \leq 0 & (r2) \\ & x_1, & x_2 & \geq 0 & \end{cases}$$



a) **V / F** El punt extrem x^1 està associat a la base $\mathcal{B} = \{1,3\}$.
b) **V / F** El punt extrem x^1 està associat a la base $\mathcal{B} = \{3,2\}$.
c) **V / F** El problema (P) té 3 solucions bàsiques.

TEST 6. Segons el teorema d'optimalitat dels punts extrems, si P és no fitat llavors:

a) **V / F** Pot no existir cap solució òptima de (PL).
b) **V / F** Si existeixen solucions optimes de (PL) cap d'elles serà punt extrem.
c) **V / F** Si existeixen solucions optimes de (PL) totes elles seran punts extrems.

TEST 7. El subconjunt de $\mathbb{R}^n$ definit com a $P = \{x \in R^n | \, Ax = b, x \geq 0\}$:

a) **V / F** És tancat i afitat.
b) **V / F** És un polítop

c) **V** / **F** Conté alguna solució bàsica factible.

TEST 8. Donat el problema $(PL) \min_{x\in R^n} \left\{ c'x \middle| \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, x \geq 0 \right\}$:

a) **V** / **F** Les bases de (PL) són $\mathcal{B} = \{1,2\}$, $\mathcal{B} = \{1,3\}$ i $\mathcal{B} = \{2,3\}$.
b) **V** / **F** $x_B = [x_1 \quad x_2]'$ és una solució bàsica factible.
c) **V** / **F** El políedre associat a (PL) té dos punts extrems.

TEST 9. Donat el problema $(PL) \min_{x\in R^n} \left\{ c'x \middle| \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x \leq \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ x \geq 0 \right\}$:

a) **V** / **F** El poliedre associat a (PL) té tres punts extrems.
b) **V** / **F** El poliedre associat a (PL) té tres solucions bàsiques factibles
c) **V** / **F** Totes les solucions bàsiques de (PL) són factibles.

TEST 10. El subconjunt de $\mathbb{R}^n$ definit com a $P = \{x \in R^n | Ax = b, x \geq 0\} \neq \emptyset$:

a) **V** / **F** Conté com a mínim una solució bàsica factible.
b) **V** / **F** Conté com a mínim una línia.
c) **V** / **F** És un polítop.

TEST 11. El subconjunt de $\mathbb{R}^n$ definit com a $P = \{x \in R^n | Ax = b, x \geq 0\}$:
a) **V** / **F** És tancat i afitat.
b) **V** / **F** És un polítop
c) **V** / **F** Conté alguna solució bàsica factible.

TEST 12. El vector $x = \sum_{i=1}^{k} \lambda^i x^i$, amb x i $x^1, \dots, x^k \in \mathbb{R}^n$, $\lambda^1, \dots, \lambda^k \in \mathbb{R}$, és combinació convexa de $x^1, \dots, x^k$ si:

a) **V** / **F** Si x pertany a l'embolcall convex de $x^1, \dots, x^k$.
b) **V** / **F** Si $\lambda^i \geq 0$.
c) **V** / **F** Si $\sum_{i=1}^{k} \lambda^i = 1$.

TEST 13. Els políedres no buits en forma estàndard:

a) **V** / **F** Poden no contenir cap punt extrem.
b) **V** / **F** No contenen bases degenerades.
c) **V** / **F** Sempre contenen alguna línia.

TEST 14. Tot punt extrem d'un políedre:

a) **V** / **F** Sempre té associada alguna solució bàsica factible.
b) **V** / **F** Sempre té associada una única solució bàsica factible.
c) **V** / **F** Pot tenir associada més d'una solució bàsica factible.

TEST 15. Donat el problema $(PL) \min_{x\in\mathbb{R}^2} \left\{ c'x \middle| \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x \leq \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$:

a) **V** / **F** Si $c = [1 \quad 1]'$ (PL) no té solució òptima.
b) **V** / **F** Si $c = [1 \quad 0]'$ (PL) no té solució òptima.
c) **V** / **F** Si $c = [0 \quad -1]'$ (PL) no té solució òptima.

TEST 16. L'embolcall convex del conjunt finit de vectors $x^1, x^2, \dots, x^k \in \mathbb{R}^n$, $CH(x^1, \dots, x^k)$:

a) **V** / **F** És el conjunt de combinacions lineals de $x^1, x^2, \dots, x^k$.
b) **V** / **F** És un politop.
c) **V** / **F** Si $x^1, x^2, \dots, x^k$ són els punts extrems d'un políedre P, llavors $CH(x^1, \dots, x^k) \equiv P$.

TEST 17. Donat el problema $(PL)\ \min_{x\in\mathbb{R}^2}\left\{c'x \middle| \begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix} x \geq \begin{bmatrix}1\\1/2\end{bmatrix}\right\}$:

a) V / F Si $c = [1 \quad 1]'$ (PL) té solució òptima única.

b) V / F Si $c = [1 \quad 0]'$ (PL) té solució òptima única.

c) V / F Si $c = [0 \quad 1]'$ (PL) té solució òptima única.

TEST 18. Considereu el problema $(PL)_e\ \min_{x\in\mathbb{R}^n}\{c'x \mid Ax = b, x \geq 0\}$ amb $rang(A) < m$:

a) V / F Si eliminem les constriccions associades a files de A linealment dependents, el problema $(PL)_e$ té solució.

b) V / F Si eliminem les constriccions associades a files de A linealment dependents, el políedre associat es conserva.

c) V / F Si $P_e \neq \emptyset$, el políedre Q_e resultant d'eliminar les constriccions associades a files de A linealment dependents és també no buit.

(SOLUCIÓ EXERCICI 8)

EXERCICI 9. Propietats dels conjunts convexos i políedres.

Demostreu les següents propietats dels conjunts convexos i políedres:

a) La intersecció de conjunts convexos és convexa.
b) Tot políedre és un conjunt convex.
c) La combinació convexa d'un nombre finit d'elements d'un conjunt convex pertany al conjunt convex.
d) L'embolcall convex d'un conjunt finit de vectors és un conjunt convex.

(SOLUCIÓ EXERCICI 9)

EXERCICI 10. Equivalència del problema lineal en forma estàndard.

Analitzeu l'equivalència del problema $(PL)\ \min_{x\in\mathbb{R}^n}\{x_1 + x_2 | x_1 + x_2 \leq 1, x \geq 0\}$ i la seva forma estàndard. En particular:

a) Representeu gràficament les regions factibles de (PL) i $(PL)_e$.
b) Comproveu que donada una solució factible de (PL) es pot trobar una solució factible $(PL)_e$ amb el mateix cost.
c) Comproveu que les solucions òptimes de tots dos problemes coincideixen.

(SOLUCIÓ EXERCICI 10)

EXERCICI 11. Assumpció de rang complet.

Es vol demostrar que l'assumpció de rang complet no afecta a l'estudi dels problemes de programació lineal, és a dir, que tot problema factible en forma estàndard es pot reduir a un problema factible en forma estàndard equivalent (mateixa funció objectiu i regió factible) on totes les constriccions d'igualtat son linealment independents. A tal efecte, considereu el problema factible en forma estàndard

$$(P)_e\ \min_{x\in\mathbb{R}^n}\{c'x | Ax = b, x \geq 0\}$$

amb políedre factible $P_e \neq \emptyset$ i $\text{rang}(A) = k < m$. Considerem també el problema en forma estàndard

$$(Q)_e\ \min_{x\in\mathbb{R}^n}\{c'x \middle| \tilde{A}x = \tilde{b}, x \geq 0\}$$

amb políedre factible Q_e, on $\tilde{A}x = \tilde{b}$ és el sistema resultant d'eliminar de $Ax = b$ totes les equacions que no son linealment independents. Demostreu que $Q_e = P_e$.

(SOLUCIÓ EXERCICI 11)

EXERCICI 12. Políedre estàndard de rang no complet.

Considereu el políedre en forma estàndard

$$P_e = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \middle| \begin{array}{llll} 2x_1 & +x_2 & +x_3 & = 2 \\ x_1 & +x_2 & & = 1 \\ x_1 & & +x_3 & = 1 \\ x_1, & x_2, & x_3 & \geq 0 \end{array} \right\}.$$

Comproveu gràficament que el políedre P_e es pot reduir a un políedre estàndard equivalent $Q_e \subset \mathbb{R}^3$ amb només dues constriccions d'igualtat.

(SOLUCIÓ EXERCICI 12)

EXERCICI 13. $(PL1)$: solucions bàsiques

Trobeu totes les solucions bàsiques del problema $(PL1)$ (tracteu la fita $x_2 \leq 6$ com si fos una constricció).

$$(PL1) \begin{cases} \min & z = & x_1 & +x_2 & \\ \text{s.a.:} & & 2x_1 & +x_2 & \leq 8 \\ & & & x_2 & \leq 6 \\ & & x_1, & x_2 & \geq 0 \end{cases}$$

(SOLUCIÓ EXERCICI 13)

EXERCICI 14. $(PL2)$: solucions bàsiques

Trobeu totes les solucions bàsiques del problema $(PL2)$.

$$(PL2) \begin{cases} \max & z = & x_1 & +2x_2 & \\ \text{s.a.:} & & 2x_1 & +x_2 & \leq 3 \\ & & x_1 & +x_2 & \leq 2 \\ & & x_1, & x_2 & \geq 0 \end{cases}$$

(SOLUCIÓ EXERCICI 14)

EXERCICI 15. $(PL3)$: solucions bàsiques

Trobeu tres solucions bàsiques del problema $(PL3)$, indicant en cada cas si són fàctibles o no.

$$(PL3) \begin{cases} \max & z = & -5x_1 & +3x_2 & -x_3 & \\ \text{s.a.:} & & x_1 & -x_2 & +3x_3 & \leq 6 \\ & & 5x_1 & -3x_2 & +3x_3 & = 15 \\ & & x_1 \geq 0 & x_2 \leq 0 & x_3 \geq 0 & \end{cases}$$

(SOLUCIÓ EXERCICI 15)

EXERCICI 16. **$(PL4)$: solucions bàsiques**

Trobeu totes les solucions bàsiques factibles del problema $(PL4)$.

$$(PL4)\begin{cases} \max & z = & -\frac{1}{2}x_1 & -x_2 & \\ \text{s.a.:} & & x_1 & +x_2 & \leq 2 \\ & & 2x_1 & -x_2 & \leq 10 \\ & & 2x_1 & +3x_2 & \geq -6 \\ & & x_1 \geq 0, & x_2 \leq 0 & \end{cases}$$

(SOLUCIÓ EXERCICI 16)

EXERCICI 17. **$(PL5)$: solucions bàsiques**

Trobeu totes les solucions bàsiques del problema $(PL5)$, indicant en cada cas si són fàctibles o no.

$$(PL5)\begin{cases} \min & z = & -x_1 & & \\ \text{s.a.:} & & x_1 & +x_2 & \leq 4 \\ & & 2x_1 & -x_2 & = 2 \\ & & x_1, & x_2 & \geq 0 \end{cases}$$

(SOLUCIÓ EXERCICI 17)

EXERCICI 18. **$(PL6)$: solucions bàsiques**

Trobeu totes les solucions bàsiques del problema $(PL6)$, indicant en cada cas si són fàctibles o no.

$$(PL6)\begin{cases} \max & z = & 7x_1 & +4x_2 & \\ \text{s.a.:} & & 2x_1 & +x_2 & \leq 8 \\ & & x_1 & +x_2 & \leq 6 \\ & & x_1, & x_2 & \geq 0 \end{cases}$$

(SOLUCIÓ EXERCICI 18)

EXERCICI 19. **Solucions bàsiques degenerades.**

Considereu el següent problema de programació lineal:

$$(PL)\begin{cases} \min & -x_1 & +\frac{3}{2}x_2 & \\ \text{s.a.:} & -x_1 & +x_2 & \leq 2 \\ & -x_1 & +2x_2 & \geq 2 \\ & x_1, & x_2 & \geq 0 \end{cases}$$

Trobeu totes les solucions bàsiques de (PL) indicant, per cadascuna d'elles, si és factible i/o degenerada.

(SOLUCIÓ EXERCICI 19)

ALGORISME DEL SÍMPLEX

EXERCICI 20. **Test algorisme del símplex.**

TEST 1. Si P_e no degenerat, una direcció bàsica és:

a) **V / F** Una direcció factible al llarg de la qual només canvien les VB
b) **V / F** Una direcció factible al llarg de la qual només canvien les VNB
c) **V / F** Una direcció factible que permet passar d'un punt extrem de P a un altre d'adjacent.

TEST 2. Quan apliquem l'algorisme del símplex primal el criteri de selecció de la VB de sortida

$$\theta^* = \min_{i=1,\dots,m|d_{B(i)}<0} \left\{ \frac{-x_{B(i)}}{d_{B(i)}} \right\}$$

permet assegurar que:

a) **V / F** El problema no és il·limitat.
b) **V / F** Es produeix el màxim decrement de la funció objectiu.
c) **V / F** Es conserva la factibilitat de la nova base.

TEST 3. Sigui P un poliedre no buit en forma estàndard, i sigui x SBF de P i r el vector de costos reduits. Llavors:

a) **V / F** Si x és òptima $\Rightarrow$ $r \geq [0]$.
b) **V / F** Si $r \geq [0] \Rightarrow x$ és òptima .
c) **V / F** Existirà una solució bàsica factible òptima.

TEST 4. Si en una iteració de l'algorisme de símplex primal obtenim $x_B \ngeq 0$:

a) **V / F** Hem arribat a la solució òptima.
b) **V / F** Hem de continuar iterant usant el símplex dual.
c) **V / F** Haurem de revisar els càlculs.

TEST 5. Les DB que calcula l'algorisme del símplex a cada iteració d'un problema $(PL)_e$ no degenerat:

a) **V / F** Son direccions factibles al llarg de la qual només canvien les VB
b) **V / F** Són direccions factibles de descens (de millora de la funció objectiu).
c) **V / F** Són direccions factibles que permeten passar d'un punt extrem de P a un altre d'adjacent.

TEST 6. Si a cada iteració del símplex primal d'un problema (P) qualsevol triem la VNB d'entrada x_q associada al cost reduït més negatiu llavors podem assegurar que:

a) **V / F** Obtindrem la solució del problema (P).
b) **V / F** El valor de la funció objectiu disminueix a cada iteració.
c) **V / F** La disminució de la f.o. a cada iteració és la màxima possible.

TEST 7. L'algorisme del símplex primal amb la regla de Bland aplicat a la resolució d'un problema de programació lineal (P) factible:

a) **V / F** Sempre troba una solució òptima.
b) **V / F** Sempre acaba en un nombre finit d'iteracions.
c) **V / F** Sempre troba una solució òptima en un nombre finit d'iteracions.

TEST 8. Considerem la forma estàndard del següent problema (PL) $\min_{x\in\mathbb{R}^2}\{-2x_2 \mid x_1 + x_2 \leq 1\,;x_1 \geq 0\,;\ x_2 \geq 1\,\}$ i la SBF $x = [0,1]'$ amb $\mathcal{B}^* = \{2,3\}$:

a) **V** / **F** $\mathcal{B}$ no és òptima perquè $r \ngeq 0$

b) **V** / **F** $\mathcal{B}$ és òptima però $r \ngeq 0$

c) **V** / **F** $\mathcal{B}$ no és òptima perquè el problema és il·limitat.

TEST 9. Donades y i x SBF adjacents no degenerades, la relació $c'y = c'x + \theta^* r_q$:

a) **V** / **F** Indica que $c'y < c'x$ si $\theta^* < 0$.

b) **V** / **F** Indica que $c'y < c'x$ si $r_q < 0$.

c) **V** / **F** Indica que la direcció $d = y - x$ és factible.

TEST 10. Les opcions de taxació de **`OPTLP`** que tenen en compte la direcció bàsica d de totes les variables no bàsiques, en general:

a) **V** / **F** Realitzen menys iteracions de l'algorisme del símplex.

b) **V** / **F** Fan iteracions més ràpides del símplex.

c) **V** / **F** Resolen els problemes més ràpidament.

TEST 11. Quan apliquem el símplex primal de **`SAS/OR`**, l'opció **`pricetype`**:

a) **V** / **F** Permet controlar el procediment de taxació.

b) **V** / **F** Permet controlar el procediment de selecció de la VNB d'entrada a la base.

c) **V** / **F** Permet controlar el procediment de selecció de la VB de sortida de la base.

TEST 12. Els procediments de taxació de OPTLP Devex pricing i Steepset-edge pricing (pricetype= 3 i 4):

a) **V** / **F** Tenen en compte la disminució total de la funció objectiu per unitat de desplaçament al llarg de la direcció bàsica.

b) **V** / **F** Avaluen tots els costos reduïts i trien el més negatiu.

c) **V** / **F** Provoquen, en general, un major nombre d'iteracions.

TEST 13. Donat el problema $(PL)\ \min_{x\in R^2}\left\{z = x_1 \middle| \begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}x \leq \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\ x \geq 0\right\}$ i la base $\mathcal{B} = \{1,4\}$:

a) **V** / **F** La direcció bàsica associada a la VNB $q = 2$ és $d_B = [-1 \quad -1]'$.

b) **V** / **F** La direcció bàsica associada a la VNB $q = 2$ és de descens.

c) **V** / **F** $\mathcal{B} = \{1,4\}$ és òptima.

TEST 14. Sigui P_e un políedre no buit en forma estàndard, i sigui x SBF de P_e amb costos reduïts $r' = c_N' - c_B' B^{-1} A_N$. Llavors:

a) **V** / **F** Si $r > 0 \Rightarrow x$ és òptima.

b) **V** / **F** Si x és òptima $\Rightarrow\ r \geq 0$.

c) **V** / **F** Si $r = 0 \Rightarrow x$ no és òptima.

TEST 15. Donat un problema (PL) qualsevol amb n variables i m desigualtats, sabem que el nombre d'iteracions de l'algorisme:

a) **V** / **F** Es pot expressar com una expressió polinòmica de n i m.

b) **V** / **F** No es pot expressar com una expressió polinòmica de n i m.

c) **V** / **F** En la pràctica s'observa que depèn polinòmicament de n i m.

TEST 16. La longitud de pas θ^* de l'algorisme del símplex aplicat a un problema (PL) qualsevol

a) **V** / **F** Pot ser negativa.

b) **V** / **F** Sempre serà positiva.

c) **V** / **F** Sempre serà més gran o igual que zero.

TEST 17. Considereu x SBF no degenerada i d DB de descens sobre x. Prenem $y = x + \theta d$ amb $\boldsymbol{\theta} > \boldsymbol{\theta}^*$. Llavors:

a) **V** / **F** y és una SBF adjacent a x.

b) **V** / **F** y no és una SBF adjacent a x, però és una solució factible.

c) **V** / **F** y no és factible però $c'y < c'x$.

TEST 18. Sigui P un poliedre no buit en forma estàndard no degenerat, i sigui x SBF de P i r el vector de costos reduits. Llavors:

a) **V** / **F** Si x és òptima $\Rightarrow$ $r \geq [0]$.

b) **V** / **F** Si $r \geq [0] \Rightarrow x$ és òptima.

c) **V** / **F** Existirà una solució bàsica factible òptima.

TEST 19. Donades y i x SBF adjacents no degenerades, la relació $c'y = c'x + \theta^* r_q$:

a) **V** / **F** Permet afirmar que $c'y \leq c'x$.

b) **V** / **F** Permet afirmar que $c'y \geq c'x$.

c) **V** / **F** Permet afirmar que $c'y \neq c'x$.

TEST 20. Considereu y i x SBF adjacents no degenerades i la seva relació $y = x + \theta^* d$

a) **V** / **F** d és una direcció factible.

b) **V** / **F** d és una direcció bàsica.

c) **V** / **F** d és una direcció bàsica de descens.

TEST 21. Considerem la forma estàndard del següent problema

$(PL)\ \min_{x \in R^2} \left\{ -2x_2 \mid \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x \leq \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} ; x \geq 0 \right\}$ i la SBF $x = [1 \quad 0]'$ amb $\mathcal{B} = \{1,4\}$:

a) **V** / **F** $d = [-1 \quad 0]'$ és una DB sobre $\mathcal{B}$.

b) **V** / **F** $d = [-1 \quad 0]'$ és una DB de descens sobre $\mathcal{B}$.

c) **V** / **F** $d = [0 \quad 1]'$ és una DB de descens sobre $\mathcal{B}$.

TEST 22. Considereu l'expressió de la longitud de pas màxima $\theta^* = \max\{\theta \geq 0 | x + \theta d \geq 0\}$ de l'algorisme del símplex primal

a) **V** / **F** θ^* sempre serà ≥ 0 si d és una direcció bàsica.

b) **V** / **F** θ^* només serà ≥ 0 si d és una direcció bàsica de descens.

c) **V** / **F** Si $d_B \geq 0$ llavors $\theta^* = 0$.

TEST 23. Segons el teorema que estableix les condicions d'optimalitat de les solucions bàsiques factibles:

a) **V** / **F** Si x és SBF òptima llavors $r \geq 0$.

b) **V** / **F** Si x és SBF òptima no degenerada llavors $r \geq 0$.

c) **V** / **F** Si $r \geq 0$ llavors x és SBF òptima.

TEST 24. Si en acabar la fase I del símplex observem que la base òptima $\mathcal{B}_I^*$ conté variables artificials:

a) **V** / **F** El problema (PL) és infactible.

b) **V** / **F** El problema (PL) és factible i la base $\mathcal{B}_I^*$ és una SBF primal del problema (PL).

c) **V** / **F** El problema (PL) és factible i la base $\mathcal{B}_I^*$ és una SBF degenerada de (PL_I).

TEST 25. El nombre d'iteracions de l'algorisme del símplex per a resoldre un problema de n variables i m constriccions:

a) **V / F** Sabem que es pot expressar com un polinomi de n i m.
b) **V / F** En la pràctica s'aproxima al nombre de variables del problema n.
c) **V / F** En la pràctica s'aproxima al nombre de constriccions del problema m.

TEST 26. Donat el problema $(PL)\ \min_{x\in R^2}\left\{z = x_1 \mid \begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}x \le \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\ x \ge 0\right\}$ i la base $\mathcal{B} = \{2,4\}$:

a) **V / F** La DB associada a la VNB $q = 1$ és de descens.
b) **V / F** La DB associada a la VNB $q = 4$ és de descens.
c) **V / F** $\mathcal{B} = \{2,4\}$ és òptima.

TEST 27. Sigui x SBF de $P_e \neq \emptyset$ i $d \ngeq 0$ DB sobre x. Llavors podem assegurar que:

a) **V / F** $y = x + \theta^* d$ és SBF de P_e.
b) **V / F** $y = x + \theta^* d$ és vèrtex de P_e.
c) **V / F** $y = x + \theta^* d \neq x$.

TEST 28. Si a cada iteració del símplex primal d'un problema $(PL)_e$ qualsevol triem la VNB d'entrada x_q associada al cost reduït més negatiu llavors podem assegurar que:

a) **V / F** La disminució de la f.o. a cada iteració és la màxima possible.
b) **V / F** Obtindrem, si existeix, la solució del problema $(PL)_e$.
c) **V / F** Si $(PL)_e$ és no degenerat, el valor de la funció objectiu disminueix a cada iteració.

TEST 29. A l'algorisme del símplex primal aplicat a un problema no degenerat el criteri de selecció de la VB de sortida

$$\theta^* = \min_{i=1,\dots,m \mid d_{B(i)}<0}\left\{\frac{-x_{B(i)}}{d_{B(i)}}\right\}$$

permet assegurar que:

a) **V / F** Es produeix el màxim decrement de la funció objectiu.
b) **V / F** Es conserva la factibilitat de la nova base.
c) **V / F** El valor d'alguna VB es farà zero.

(SOLUCIÓ EXERCICI 20)

EXERCICI 21. **Direccions bàsiques factibles sobre el políedre estàndard.**

Considereu el següent problema de programació lineal:

$$(PL)\begin{cases}\min & c_1x_1 & +c_2x_2 & \\ \text{s.a.:} & x_1 & +x_2 & = 3\\ & x_1 & & \le 2\\ & x_1, & x_2, & \ge 0\end{cases}$$

a) Representeu gràficament el poliedre estàndard P_e associat a (PL) i identifiqueu totes les solucions bàsiques factibles.
b) Calculeu totes les direccions bàsiques factibles existents.
c) Per a una DB concreta d sobre la SBF x, comproveu que la passa $y = x + \theta^* d$ és una SBF adjacent a x.

(SOLUCIÓ EXERCICI 21)

EXERCICI 22. Direccions bàsiques factibles sobre el políedre general no degenerat.

Considereu el políedre $P = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \middle| \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x \leq \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}, x \geq 0 \right\}$.

a) Representeu gràficament P indicant sobre la gràfica les coordenades dels punts extrems de P i les solucions bàsiques factibles (conjunt $\mathcal{B}$) que cadascun d'ells té associades.
b) Calculeu totes les direccions bàsiques factibles associades a la solució bàsica factible $\mathcal{B} = \{1,2\}$ indicant si aquestes direccions son factibles o no. Representeu-les sobre la gràfica de l'apartat a).
c) Expliqueu quines són les característiques que ha de tenir un problema de programació lineal per tal de poder assegurar que l'algorisme del símplex convergirà a una solució òptima. Podem assegurar que el problema $(PL)\ \min_{x \in \mathbb{R}^2}\{c'x | x \in P\}$ convergirà a una solució òptima?

(SOLUCIÓ EXERCICI 22)

EXERCICI 23. Direccions bàsiques factibles sobre el políedre general degenerat.

Considereu el políedre $P = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \middle| \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x \leq \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}, x \geq 0 \right\}$.

a) Representeu gràficament P indicant sobre la gràfica les coordenades dels punts extrems de P i les solucions bàsiques factibles (conjunt $\mathcal{B}$) que cadascun d'ells té associades.
b) Calculeu totes les direccions bàsiques factibles associades a la solució bàsica factible $\mathcal{B} = \{1,3\}$ indicant si aquestes direccions son factibles o no. Representeu-les sobre la gràfica de l'apartat a).
c) Expliqueu quines són les característiques que ha de tenir un problema de programació lineal per tal de poder assegurar que l'algorisme del símplex convergirà a una solució òptima. Podem assegurar que el problema $(PL)\ \min_{x \in \mathbb{R}^2}\{c'x | x \in P\}$ convergirà a una solució òptima?

(SOLUCIÓ EXERCICI 23)

EXERCICI 24. Anàlisi de les propietats de les bases.

Volem estudiar les propietats del següent problema de programació lineal

$(PL)\ \min_{x \in \mathbb{R}^3}\{c'x \mid x \in P\}$ i $P = \left\{x \in \mathbb{R}^3 \middle| \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} x \geq \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, x \geq 0 \right\}$

En base a les propietats de la SBF associada a $\mathcal{B} = \{3,4\}$, trobeu una condició suficient sobre el vector de costos c que permeti assegurar que el problema (PL) no té solució.

(SOLUCIÓ EXERCICI 24)

EXERCICI 25. Propietats de la base òptima.

La solució bàsica òptima del següent problema de programació lineal (P) és $\mathcal{B} = \{2,4\}$:

$$(PL)\begin{cases} \min & 3x_1 & +\boldsymbol{c_2}x_2 & +2x_3 & +x_4 & \\ \text{s.a.:} & 2x_1 & +x_2 & +x_3 & & = 2 \\ & & -x_2 & +x_3 & +2x_4 & = \boldsymbol{b_2} \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4 & \geq 0 \end{cases} \quad \left(\text{amb } B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}\right)$$

a) Calculeu el valor que ha de tenir terme independent b_2 per tal que la base òptima $\mathcal{B} = \{2,4\}$ sigui degenerada.
b) Calculeu el valor que ha de tenir el coeficient c_2 per tal que la base òptima $\mathcal{B} = \{2,4\}$ tingui òptims alternatius.

c) Considereu ara $b_2 = 3$ i el valor de c_2 calculat a l'apartat anterior. Trobeu les coordenades del punt extrem associat a una SBF adjacent a $\mathcal{B} = \{2,4\}$ que tingui el mateix valor de la funció objectiu que $\mathcal{B} = \{2,4\}$.

(SOLUCIÓ EXERCICI 25)

EXERCICI 26. Direccions factibles de descens i caracterització d'optims (1).

Considereu el problema de programació lineal en forma estàndard $(P)\ \min_{x \in R^n}\{c'x \mid x \in P_e\}$. Demostreu que una solució factible $x \in P_e$ amb $\mathcal{Z} = \{i \mid x_i = 0\}$ és solució òptima de (P) si i només si el problema de programació lineal $(P_d)\ \min_{d \in \mathbb{R}^n}\{c'd \mid Ad = 0, d_i \geq 0\ i \in \mathcal{Z}\}$ té cost òptim zero.

(SOLUCIÓ EXERCICI 26)

EXERCICI 27. Direccions factibles de descens i caracterització d'òptims (2)

Considereu el següent problema de programació lineal:

$$(PL)\begin{cases}\min & -x_1 & +\frac{3}{2}x_2 & \\ \text{s.a.:} & -x_1 & +x_2 & \leq 2 \\ & -x_1 & +2x_2 & \geq 2 \\ & x_{1,} & x_2 & \geq 0\end{cases}$$

Volem estudiar les direccions bàsiques factibles associades a la solució bàsica factible $B = \{2,3\}$. Responeu als següents dos apartats sense usar l'expressió $r_q = c_q - c_B' B^{-1} A_q$:

a) Trobeu totes les direccions bàsiques factibles existents sobre la SBF $\mathcal{B} = \{2,3\}$ indicant si són direccions de descens.
b) A la vista del resultat de l'apartat anterior, pot ser $\mathcal{B} = \{2,3\}$ la base òptima de (PL)? Perquè? Indiqueu, argumentant en base a les característiques de les DB trobades, quina és la solució òptima de (PL).

(SOLUCIÓ EXERCICI 27)

EXERCICI 28. Símplex en forma estàndard

Considereu el següent problema de (PL) en forma estàndard:

$$(PL)\begin{cases}\min & z = & -x_1 & -2x_2 & & & \\ \text{s. a.:} & & 2x_1 & +x_2 & +x_3 & & = 3 \\ & & x_1 & +x_2 & & +x_4 & = 2 \\ & & x_1, & x_2, & x_3, & x_4 & \geq 0\end{cases}$$

Aplicant l'algorisme del símplex, obtingueu la solució òptima d'aquest problema a partir de la solució bàsica factible inicial $\mathcal{B} = \{1,2\}$.

(SOLUCIÓ EXERCICI 28)

EXERCICI 29. (PL1): símplex

Trobeu la solució òptima del problema (PL1) aplicant l'algorisme del símplex, prenent com a SBF inicial l'associada al vèrtex $\mathrm{x} = [0, 6]'$.

$$(PL1)\begin{cases} \min & z = & x_1 & +x_2 & \\ \text{s.a.}: & & 2x_1 & +x_2 & \leq 8 \\ & & & x_2 & \leq 6 \\ & & x_1, & x_2 & \geq 0 \end{cases}$$

(SOLUCIÓ EXERCICI 29)

EXERCICI 30. **(PL2) : símplex**

Trobeu la solució òptima del problema (PL2) aplicant l'algorisme del símplex, prenent com a SBF inicial l'associada al vèrtex $x = [1,1]'$

$$(PL2)\begin{cases} \max & z = & x_1 & +2x_2 & \\ \text{s.a.}: & & 2x_1 & +x_2 & \leq 3 \\ & & x_1 & +x_2 & \leq 2 \\ & & x_1, & x_2 & \geq 0 \end{cases}$$

(SOLUCIÓ EXERCICI 30)

EXERCICI 31. **(PL3) : símplex**

Trobeu la solució òptima del problema (PL3) aplicant l'algorisme del símplex, prenent com a SBF inicial l'associada al conjunt de variables bàsiques $\mathcal{B} = \{2,3\}$.

$$(PL3)\begin{cases} \max & z = & -5x_1 & +3x_2 & -x_3 & \\ \text{s.a.}: & & x_1 & -x_2 & +3x_3 & \leq 6 \\ & & 5x_1 & -3x_2 & +3x_3 & = 15 \\ & & x_1 \geq 0 & x_2 \leq 0 & x_3 \geq 0 \end{cases}$$

(SOLUCIÓ EXERCICI 31)

EXERCICI 32. **(PL4) : símplex**

Trobeu la solució òptima del problema (PL4) aplicant l'algorisme del símplex, prenent com a SBF inicial l'associada al punt extrem $x = [4,-2]'$ de la formulació original.

$$(PL4)\begin{cases} \max & z = & -\frac{1}{2}x_1 & -x_2 & \\ \text{s.a.}: & & x_1 & +x_2 & \leq 2 \\ & & 2x_1 & -x_2 & \leq 10 \\ & & 2x_1 & +3x_2 & \geq -6 \\ & & x_1 \geq 0, & x_2 \leq 0 & \end{cases}$$

(SOLUCIÓ EXERCICI 32)

EXERCICI 33. **(PL5) : símplex**

Trobeu la solució òptima del problema (PL5) aplicant l'algorisme del símplex, prenent com a SBF inicial $\mathcal{B} = \{1,3\}$.

$$(PL5)\begin{cases}\min & z = & -x_1 & & \\ \text{s.a.:} & & x_1 & +x_2 & \leq 4 \\ & & 2x_1 & -x_2 & = 2 \\ & & x_1, & x_2 & \geq 0\end{cases}$$

(SOLUCIÓ EXERCICI 33)

EXERCICI 34. **$(PL6)$: símplex**

Trobeu la solució òptima del problema $(PL6)$ aplicant l'algorisme del símplex, prenent com a SBF inicial $\mathcal{B} = \{2,3\}$.

$$(PL6)\begin{cases}\max & z = & 7x_1 & +4x_2 & \\ \text{s.a.:} & & 2x_1 & +x_2 & \leq 8 \\ & & x_1 & +x_2 & \leq 6 \\ & & x_1, & x_2 & \geq 0\end{cases}$$

(SOLUCIÓ EXERCICI 34)

EXERCICI 35. **Símplex amb fase I (1)**

Considereu el següent problema de programació lineal (PL):

$$(PL)\begin{cases}\min & -x_1 & -3x_2 & \\ \text{s.a.:} & -\frac{1}{4}x_1 & +x_2 & \leq 2 \\ & x_1 & -x_2 & = \frac{3}{2} \\ & x_{1,} & x_2 & \geq 0\end{cases}$$

a) Sense usar la representació gràfica del poliedre associat a (PL), calculeu raonadament totes les solucions bàsiques de (PL).
b) Trobeu una solució bàsica factible inicial $\mathcal{B}^0$de (PL) aplicant la fase I del símplex.
c) Trobeu la solució òptima de (PL) a partir de la base $\mathcal{B}^0$ obtinguda a l'apartat anterior. Si no heu trobat $\mathcal{B}^0$, comenceu a iterar a partir de la solució factible $x = [3/2 \quad 0]'$.

(SOLUCIÓ EXERCICI 35)

EXERCICI 36. **Símplex amb fase I (2)**

Trobeu la solució òptima del següent problema de programació lineal (P) aplicant l'algorisme del símplex de les dues fases:

$$(PL)\begin{cases}\min & 5x_1 & +3x_2 & +x_3 & \\ \text{s.a.:} & x_1 & +x_2 & +3x_3 & \leq 6 \\ & 5x_1 & +3x_2 & +3x_3 & = 15 \\ & x_{1,} & x_2 & & \geq 0\end{cases}$$

(SOLUCIÓ EXERCICI 36)

EXERCICI 37. **Símplex amb fase I (3)**

Considereu el següent problema de programació lineal:

$$(PL)\begin{cases}\min & 5x_1 & +3x_2 & +x_3 & \\ \text{s.a.:} & x_1 & +x_2 & +3x_3 & =6\\ & 5x_1 & +3x_2 & +3x_3 & =15\\ & x_1, & x_2, & x_3, & \geq 0\end{cases}$$

a) Sense fer ús de la representació gràfica sobre $\mathbb{R}^3$ del políedre associat P, ni calcular explícitament les seves SBF, indiqueu raonadament si el políedre P és degenerat o no.
b) Trobeu la solució òptima del següent problema de programació lineal (P) aplicant l'algorisme del símplex de les dues fases.

(SOLUCIÓ EXERCICI 37)

EXERCICI 38. Símplex amb fase I (4)

Trobeu la solució òptima del següent problema de programació lineal amb l'algorisme del símplex primal de les dues fases:

$$(PL)\begin{cases}\min & 2x_1 & +x_2 & \\ \text{s.a.:} & x_1 & +x_2 & \geq 2\\ & x_1 & -x_2 & =1\\ & x_1, & x_2 & \geq 0\end{cases}$$

(SOLUCIÓ EXERCICI 38)

EXERCICI 39. Símplex amb fase I (5).

Considereu el següent problema de programació lineal:

$$(PL)\begin{cases}\min & -x_1 & +\frac{3}{2}x_2 & \\ \text{s.a.:} & -x_1 & +x_2 & \leq 2\\ & -x_1 & +2x_2 & \geq 2\\ & x_1, & x_2 & \geq 0\end{cases}$$

Trobeu la solució òptima de (P) aplicant l'algorisme del símplex de les dues fases.

(SOLUCIÓ EXERCICI 39)

EXERCICI 40. Fase I, DB de descens i problemes il·limitats.

Volem estudiar l'aplicació de l'algorisme de símplex primal a la resolució del problema de programació lineal $(PL)\ \min_{x\in\mathbb{R}^3}\{c'x \mid x\in P\}$ i $P=\left\{x\in\mathbb{R}^3 \middle| \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}x \geq \begin{bmatrix}1\\ -2\end{bmatrix}, x\geq 0\right\}$

a) Sigui $c=[1\quad 1\quad 1]'$. Comproveu que la fase I de l'algorisme del símplex primal formulada amb una variable artificial troba la solució òptima de (PL) en una única iteració.
b) Sigui $c=[1\quad 1\quad 1]'$ i la base $\mathcal{B}=\{1,5\}$. Sense calcular els costos reduïts, comproveu l'optimalitat de la base $\mathcal{B}$ a partir de l'anàlisi de les propietats de les direccions bàsiques factibles de (PL) sobre $\mathcal{B}$.
c) Trobeu una condició suficient sobre les components del vector de costos c que permeti assegurar que el problema (PL) no té solució a partir de l'anàlisi de les propietats de la SBF associada a $\mathcal{B}=\{3,4\}$.

(SOLUCIÓ EXERCICI 40)

EXERCICI 41. Joc finit de suma zero i símplex

Es vol analitzar la resolució del problema de PL associat al jugador 1 d'un joc finit de suma zero amb matriu de guanys $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ de rang complet estudiat a classe:

$$(P_1)\begin{cases} \max\limits_{y,z_1} & z_1 \\ \text{s.a.:} & A'y \geq 1_n z_1 \\ & 1'_m y = 1 \\ & y \geq 0 \end{cases}, \quad 1_n = \begin{bmatrix}1\\ \vdots \\ 1\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n,\ 1_m = \begin{bmatrix}1\\ \vdots \\ 1\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

La seva forma estàndard, fent servir la transformació $z_1 = u - v$, amb $u, v \geq 0$, és:

$$(P_1)\begin{cases} \min\limits_{y,z_1} z = & -u + v \\ \text{s.a.:} & A'y \quad -1_n u \quad +1_n v \quad -w \quad = 0 \\ & 1'_m y \quad = 1 \\ & y, \quad u, \quad v, \quad w \quad \geq 0 \end{cases}, \quad y \in \mathbb{R}^m, w \in \mathbb{R}^n, u, v \in \mathbb{R}$$

Considereu la formulació de fase I pel problema (P_1) consistent en afegir una única variable artificial, que podem anomenar s, a l'última constricció del problema.

a) Trobeu una condició necessària i suficient per als elements de la matriu de guanys A que asseguri que l'algorisme de fase I troba una solució bàsica factible de (P_1) en una única iteració a partir de la SBF del problema de fase I formada per les variables $[w \quad s]$.
b) Trobeu, usant les fórmules d'actualització de variables de l'algorisme del símplex, el valor de les variables del problema (P_1) corresponents a aquesta SBF

(SOLUCIÓ EXERCICI 41)

EXERCICI 42. Símplex de les dues fases i OPTMODEL

Considereu el següent codi **OPTMODEL** d'un problema de programació lineal (P) i la seva solució:

```
proc optmodel;
var X{1..3} >=0;

min Z =    X[1]          +   X[3];

con C1:    X[1]          + 2*X[3] <=  4;
con C2:  4*X[1] - 5*X[2]          = 10;

solve;
print X.sol X.rc;
print C1.body C1.dual C2.body C2.dual;
```

[1]	X.SOL	X.RC
1	2.50	0.00
2	0.00	1.25
3	0.00	1.00

C1.BODY	C1.DUAL	C2.BODY	C2.DUAL
2.5	0	10	0.25

a) Indiqueu, raonadament, quantes solucions bàsiques té el problema (P) i quines variables les formen. Amb l'ajut de la sortida de SAS identifiqueu quina és la SBF òptima.
b) Trobeu l'òptim de (P) amb l'algorisme del símplex de les dues fases.

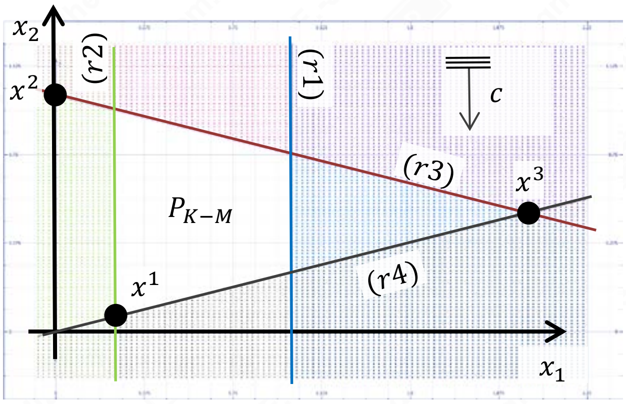
(SOLUCIÓ EXERCICI 42)

EXERCICI 43. Problema de Klee-Minty

Considereu el problema de Klee-Minty amb n= 2 i el seu políedre associat:

$$
(P_{K-M})\left\{\begin{array}{lccll}
\min & & -x_2 & & \\
\text{s.a.:} & x_1 & & \leq 1 & (r1)\\
 & x_1 & & \geq \epsilon & (r2)\\
 & \epsilon x_1 & +x_2 & \leq 1 & (r3)\\
 & -\epsilon x_1 & +x_2 & \geq 0 & (r4)\\
 & x_{1,} & x_2 & \geq 0 &
\end{array}\right.
$$

$$(0 < \epsilon < \frac{1}{2})$$



a) Demostreu que l'algorisme del símplex primal arriba a la solució òptima a partir de x^1 en una única iteració si es selecciona la variable no bàsica associada al cost reduït més negatiu, independentment del valor de ϵ.

b) Demostreu que la base x^2 és factible dual analitzant el signe dels costos reduïts sense fer ús de l'expressió $r' = c_N' - c_B' B^{-1} A_N$.

c) Formuleu el dual de la forma estàndard del problema (P_{K-M}). Amb l'ajut del corol·lari del Ta. Fort de dualitat calculeu la solució bàsica $\Lambda' = [\Lambda_B' \ \Lambda_N']$ del problema dual associada a la solució bàsica primal x^3, indicant quines de les variables del problema dual en forma estàndard són bàsiques, no bàsiques i el seu valor numèric. A la vista del resultat, analitzeu la factibilitat primal i dual de x^3 i indiqueu quin algorisme hauríem d'usar per a optimitzar (P_{K-M}) a partir de la solució bàsica x^3.

(SOLUCIÓ EXERCICI 43)

EXERCICI 44. Propietats de les SBF i fase I.

Considereu el següent problema de programació lineal: $(PL)\left\{\begin{array}{llll}
\min & c_1x_1 & +c_2x_2 & \\
\text{s.a.:} & -x_1 & +x_2 & \leq 0\\
 & x_1 & +x_2 & \geq 2\\
 & x_{1,} & x_2 & \geq 0
\end{array}\right.$

a) Trobeu totes les solucions bàsiques ($\mathcal{B}$ i x_B) indicant, per cadascuna d'elles, si és factible i/o degenerada.

b) Considereu ara que el vector de termes independents és $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Trobeu el valor de b_1 que fa que totes les solucions bàsiques factibles de problema (PL) siguin degenerades (us pot ajudar la representació gràfica del políedre).

c) Trobeu quina condició necessària i suficient que han de complir les components c_1 i c_2 per tal de poder assegurar que el problema (PL) no té solució òptima.

d) Trobeu la solució òptima quan $c = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ amb l'algorisme del símplex de les dues fases introduint una única variable artificial a la fase I.

(SOLUCIÓ EXERCICI 44)

EXERCICI 45. Propietats de les SBF i fase I amb OPTMODEL.

Considereu el següent codi OPTMODEL amb el que es defineix i resol un problema de programació lineal (P):

```
proc optmodel;
var X{1..2} >=0;

min Z = -X[1] + 2*X[2];

con r1: 2*X[1] - 2*X[2] <= 1;
con r2: 2*X[1] + 2*X[2] >= 3;

solve;
print X.sol;
print r1.body r1.dual r2.body r2.dual;
```

[1]	X.SOL
1	1.0
2	0.5

r1.BODY	r1.DUAL	r2.BODY	r2.DUAL
1	-0.75	3	0.25

a) Trobeu dues solucions bàsiques factibles primal i dues infactibles primal ($\mathcal{B}$ i x_B).
b) Comproveu com la fase I del símplex amb una única variable artificial i aplicat amb la regla de Bland troba una solució factible primal i òptima en dues iteracions.

(SOLUCIÓ EXERCICI 45)

EXERCICI 46. SBF òptima de fase I amb variables artificials degenerades.

Hem aplicat la fase I del símplex per a trobar una SBF inicial del problema $(P)_e$ de rang complet. Suposem que en acabar obtenim una base òptima del problema de fase I, $\mathcal{B}_I^*$, amb $z_I^* = 0$ però que conté alguna variable artificial de fase I.

a) Demostreu que, sempre que es produeixi aquesta situació, existirà una SBF de $(P)_e$ obtinguda per substitució a $\mathcal{B}_I^*$ de les variables artificials de fase I amb variables x de $(P)_e$.
b) Desenvolupeu un algorisme iteratiu que permeti obtenir una SBF de $(P)_e$ a partir de la base $\mathcal{B}_I^*$, justificant cadascuna de les seves passes.

(SOLUCIÓ EXERCICI 46)

ANÀLISI DE SENSIBILITAT i DUALITAT

EXERCICI 47. Test dualitat i anàlisi de sensibilitat.

TEST 1. El signe de les variables duals associades al següent problema primal

$$(P)\begin{cases} \max & -x_1 & -3x_2 & \\ \text{s.a.:} & x_1 & -x_2 & \leq 2 \\ & 2x_1 & +x_2 & = 3 \\ & -x_1 & & \geq 4 \end{cases}$$

- **a) V / F** És : $\lambda_1$lliure, $\lambda_2 \geq 0$, $\lambda_3 \leq 0$.
- **b) V / F** És : $\lambda_1 \leq 0$, λ_2 lliure, $\lambda_3 \geq 0$.
- **c) V / F** És : $\lambda_1 \geq 0$, λ_2 lliure, $\lambda_3 \leq 0$.

TEST 2. Indiqueu si les següents combinacions (P)-(D) son possibles (Si) o impossibles (No):

- **a) V / F** (P) òptim – (D) il·limitat.
- **b) V / F** (P) òptim – (D) infactible.
- **c) V / F** (D) il·limitat – (P) infactible.

TEST 3. Donat un problema (P) en forma estàndard, diem que la base $\mathcal{B}$ és factible dual si:

- **a) V / F** $r \leq 0$ i $x_B \geq 0$.
- **b) V / F** $r \geq 0$ i $x_B \geq 0$.
- **c) V / F** $r \geq 0$ i $x_B \leq 0$.

TEST 4. Que la solució bàsica òptima d'un problema de (P) sigui degenerada dual, implica que:

- **a) V / F** Alguna variable bàsica és zero.
- **b) V / F** Alguna variable dual és zero.
- **c) V / F** El cost reduït d'alguna VNB és zero.

TEST 5. Si volem trobar la solució òptima d'un problema (P) en forma estàndard a partir d'una base $\mathcal{B}$ amb $r \ngeq 0$ i $x_B \ngeq 0$ l'algorisme que hem d'aplicar és:

- **a) V / F** El símplex dual.
- **b) V / F** El símplex primal.
- **c) V / F** Qualsevol dels dos.

TEST 6. El problema primal (P) associat al següent problema dual

$$(D)\begin{cases} \max & 2\lambda_1 & +\lambda_2 & \\ \text{s.a.:} & & & \\ & \lambda_1 & +\lambda_2 & \geq 1 \\ & 2\lambda_1 & & \geq 1 \\ & \lambda_1 \geq 0, & \lambda_2 \geq 0 & \end{cases}$$

- **a) V / F** És il·limitat.
- **b) V / F** Té variables $x \leq 0$ i constriccions $Ax \geq b$.
- **c) V / F** Té variables $x \geq 0$ i constriccions $Ax \geq b$.

TEST 7. Si a la solució òptima d'un problema (P) hi ha costos reduïts nuls, llavors:

- **a) V / F** L'algorisme del símplex dual convergeix en un nombre finit d'iteracions.
- **b) V / F** Existeixen infinites solucions òptimes de (P).

c) **V** / **F** La base és degenerada dual.

TEST 8. El sufix `.dual` que mostra OPTMODEL:

a) **V** / **F** Mostra el valor de terme independent de les constriccions.
b) **V** / **F** Mostra el valor del preu ombra de les constriccions.
c) **V** / **F** És el cost reduït de les folgues de les constriccions de ≤.

TEST 9. Si el valor del terme independent b_j es manté dins del seu interval d'estabilitat llavors podem assegurar que:

a) **V** / **F** El valor òptim de les variables x^* no canvia.
b) **V** / **F** El conjunt de les variables no bàsiques $\mathcal{N}$ no canvia.
c) **V** / **F** El valor dels costos reduïts no canvia.

TEST 10. Si el valor del terme independent b_j surt fora del seu interval d'estabilitat llavors podem assegurar que:

a) **V** / **F** La nova solució òptima millorarà sempre el valor de l'actual.
b) **V** / **F** Es podrà aplicar el símplex dual per a reoptimitzar.
c) **V** / **F** Alguna variable dual canviarà.

TEST 11. El preu ombra λ_j d'un problema (P) qualsevol:

a) **V** / **F** És el canvi en la funció objectiu per increment unitat del terme b_j.
b) **V** / **F** Augmenta sempre a mida que augmenta b_j.
c) **V** / **F** Disminueix sempre a mida que augmenta b_j.

TEST 12. Considereu que hem resolt un problema (P) en forma estàndard amb $\mathcal{N} = \{1,2\}$ i $r^* = [2 \quad 3]'$:

a) **V** / **F** Si $\phi_{c1} = -2$ la base actual deixa de ser òptima.
b) **V** / **F** Si $\phi_{c1} = -2$ hi ha bases òptimes diferents de la base actual.
c) **V** / **F** La base actual deixa de ser òptima si augmento massa el valor de c_2.

TEST 13. Si en un problema (P) amb base òptima $\mathcal{B}^*$ es modifica el valor d'un dels coeficients a_{ij} de la matriu de constriccions A:

a) **V** / **F** La base $\mathcal{B}^*$ pot perdre la factibilitat dual.
b) **V** / **F** La base $\mathcal{B}^*$ pot perdre la factibilitat primal.
c) **V** / **F** Sempre podré reoptimitzar amb el símplex primal o dual.

TEST 14. El signe de les variables i constriccions duals associades al següent problema primal

$$(P)\begin{cases} \text{max} & -6x_1 & +x_2 & \\ \text{s.a.:} & x_1 & -x_2 & \leq 2 \\ & 2x_1 & +x_2 & = 3 \\ & & x_2 & \leq 0 \end{cases}$$

a) **V** / **F** són : $\lambda_1 + 2\lambda_2 = -6$ i λ_2 lliure.
b) **V** / **F** són : $-\lambda_1 + \lambda_2 \leq 1$ i $\lambda_2 \geq 0$.
c) **V** / **F** són : $-\lambda_1 + \lambda_2 \geq 1$ i $\lambda_1 \leq 0$.

TEST 15. Si volem trobar la solució òptima d'un problema (P) no degenerat en forma estàndard a partir d'una base $\mathcal{B}$ no òptima, l'algorisme que hem d'aplicar és:

a) **V** / **F** El símplex dual si $r \geq 0$.
b) **V** / **F** El símplex primal si $r \ngeq 0$.

c) **V** / **F** El símplex primal si $x_B \leq 0$.

TEST 16. Si el valor del terme independent b_j surt fora del seu interval d'estabilitat llavors podem assegurar que:

a) **V** / **F** La nova solució òptima millorarà sempre el valor de l'actual.
b) **V** / **F** Es podrà aplicar el símplex dual per a reoptimitzar.
c) **V** / **F** $\phi_z = \lambda' \phi_b$.

TEST 17. En un joc finit de suma zero, el teorema minimax:

a) **V** / **F** Indica que és possible que per algun dels dos jugadors no existeixi estratègia òptima.
b) **V** / **F** Indica que és impossible que els dos jugadors tinguin un guany net positiu.
c) **V** / **F** Assegura que el problema del jugador 1 satisfà que $z_P^* \equiv z_D^*$.

TEST 18. Si un problema (P) és infactible, el seu dual (D):

a) **V** / **F** Segur que és il·limitat.
b) **V** / **F** Segur que és infactible.
c) **V** / **F** No tindrà solució.

TEST 19. Donat el problema primal (P) si una solució bàsica $\mathcal{B}$ és solució bàsica factible dual llavors:

a) **V** / **F** $r \leq 0$.
b) **V** / **F** $\mathcal{B}$ és factible primal.
c) **V** / **F** El vector $\lambda' = c_B' B^{-1}$ dona les coordenades d'un punt extrem del poliedre dual.

TEST 20. Si introduïm la modificació $\phi_{c_i} \leftarrow c_i + \Delta c_i$ amb $\phi_{c_i} \in \Phi_{c_i} = [\phi_{c_i}^{min}, \phi_{c_i}^{max}]$:

a) **V** / **F** El valor de les variables òptimes pot canviar.
b) **V** / **F** El valor de la funció objectiu canviarà.
c) **V** / **F** El valor de les variables dual canviarà.

TEST 21. D'acord amb el Ta. feble de dualitat:

a) **V** / **F** Si (P) és infactible $\Rightarrow$ (D) és il·limitat.
b) **V** / **F** Si (P) és il.limitat $\Rightarrow$ (D) és infactible.
c) **V** / **F** Si λ^* i x^* són òptims primal i dual respectivament, llavors $\lambda^{*\prime} b = c' x^*$.

(SOLUCIÓ EXERCICI 47)

EXERCICI 48. **(PL1): intervals d'estabilitat.**

Trobeu l'interval d'estabilitat del coeficient c_1 del problema $(PL1)$, sabent que $\mathcal{B}^* = \{3,4\}$. Interpreteu geomètricament la situació que es produeix quan $\phi_{c_1} = \phi_{c_1}^{min}$. Indiqueu en quina seria la solució òptima si $\phi_{c_1} < \phi_{c_1}^{min}$

$$(PL1)\begin{cases} \min & z = & x_1 & +x_2 & \\ \text{s.a.:} & & 2x_1 & +x_2 & \leq 8 \\ & & & x_2 & \leq 6 \\ & & x_1, & x_2 & \geq 0 \end{cases}$$

(SOLUCIÓ EXERCICI 48)

EXERCICI 49. **(PL2): intervals d'estabilitat.**

Trobeu l'interval d'estabilitat del terme independent b_1 del problema $(PL2)$, sabent que $\mathcal{B}^* = \{3,2\}$. Interpreteu geomètricament la situació que es produeix quan el coeficient b_1 passa a valer $\phi_{b_1} = \phi_{b_1}^{min}$. Indiqueu quina seria la solució òptima si $\phi_{b_1} < \phi_{b_1}^{min}$.

$$(PL2)\begin{cases} \max & z = & x_1 & +2x_2 & \\ \text{s.a.:} & & 2x_1 & +x_2 & \leq 3 \\ & & x_1 & +x_2 & \leq 2 \\ & & x_1, & x_2 & \geq 0 \end{cases}$$

(SOLUCIÓ EXERCICI 49)

EXERCICI 50. **(PL3) : intervals d'estabilitat.**

Trobeu l'interval d'estabilitat del coeficient c_1 del problema $(PL3)$, sabent que $\mathcal{B}^* = \{1,3\}$.

$$(PL3)\begin{cases} \max & z = & -5x_1 & +3x_2 & -x_3 & \\ \text{s.a.:} & & x_1 & -x_2 & +3x_3 & \leq 6 \\ & & 5x_1 & -3x_2 & +3x_3 & = 15 \\ & & x_1 \geq 0 & x_2 \leq 0 & x_3 \geq 0 & \end{cases}$$

(SOLUCIÓ EXERCICI 50)

EXERCICI 51. **(PL4) : intervals d'estabilitat.**

Trobeu l'interval d'estabilitat del terme independent b_2 del problema $(PL4)$, sabent que $\mathcal{B}^* = \{1,2,3\}$. Interpreteu geomètricament la situació que es produeix quan el coeficient val $\phi_{b_2} = \phi_2^{min}$.

$$(PL4)\begin{cases} \max & z = & -\frac{1}{2}x_1 & -x_2 & \\ \text{s.a.:} & & x_1 & +x_2 & \leq 2 \\ & & 2x_1 & -x_2 & \leq 10 \\ & & 2x_1 & +3x_2 & \geq -6 \\ & & x_1 \geq 0, & x_2 \leq 0 & \end{cases}$$

(SOLUCIÓ EXERCICI 51)

EXERCICI 52. **(PL6) : intervals d'estabilitat.**

Sabent que la solució òptima del problema $(PL6)$ correspón a la base $\mathcal{B} = \{1,2\}$, calculeu l'interval d'estabilitat del coeficient c_1.

$$(PL6)\begin{cases} \max & z = & 7x_1 & +4x_2 & \\ \text{s.a.:} & & 2x_1 & +x_2 & \leq 8 \\ & & x_1 & +x_2 & \leq 6 \\ & & x_1, & x_2 & \geq 0 \end{cases}$$

(SOLUCIÓ EXERCICI 52)

EXERCICI 53. **Formulació del problema dual.**

Formuleu el problema dual dels següent problemes primals:

$$(PL)\begin{cases}\min & 2x_1 & +4x_2 & +6x_3 & \\ \text{s.a.:} & x_1 & +x_2 & +x_3 & \geq 2 \\ & x_1 & & -x_3 & \geq 1 \\ & & x_2 & +x_3 & \geq 1 \\ & & x_2, & x_3 & \geq 0\end{cases} \qquad (PL)\begin{cases}\max & 2x_1 & +x_2 & \\ \text{s.a.:} & x_1 & +x_2 & = 2 \\ & 2x_1 & -x_2 & \geq 3 \\ & x_1 & -x_2 & \leq 1 \\ & x_1 & & \geq 0\end{cases}$$

(SOLUCIÓ EXERCICI 53)

EXERCICI 54. Jocs finit de suma zero i parells primal- dual.

Demostreu que els problemes (P_1) i (P_2) dels dos jugadors d'un joc finit de suma zero formen un parell primal-dual.

(SOLUCIÓ EXERCICI 54)

EXERCICI 55. Dual de la forma estàndard.

Considereu el següent problema general de programació lineal:

$$(P)\begin{cases}\min\limits_{x} & [c_x' \quad c_y'] \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ s.a.: & [A_x^1 \quad A_y^1] \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = b^1 \\ & [A_x^2 \quad A_y^2] \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \leq b^2 \\ & [A_x^3 \quad A_y^3] \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \geq b^3 \\ & x \geq 0 \\ & y\ lliure\end{cases}$$

Demostreu que el dual (D) d'aquest problema i el dual $(D)_e$ de la seva forma estàndard $(P)_e$ són equivalents.

(SOLUCIÓ EXERCICI 55)

EXERCICI 56. Dual després d'eliminar files redundants.

Considereu el problema en forma estàndard $(P)_e$ factible i el seu dual:

$$(P)_e\begin{cases}\min\limits_{x\in\mathbb{R}^n} & \sum\limits_{i=1}^{n} c_i' x_i \\ \text{s.a.:} & a_j' x = b_j \quad j = 1, \dots, m \\ & x_i \geq 0 \quad i = 1, \dots . n\end{cases} \quad ; \quad (D)_e\begin{cases}\max\limits_{\lambda\in\mathbb{R}^m} & \sum\limits_{j=1}^{m} \lambda_j b_j \\ \text{s.a.:} & \sum\limits_{j=1}^{m} \lambda_j a_j' \leq c'\end{cases}$$

Suposem que l'última fila de A és redundant, és a dir, es pot expressar com a combinació lineal de la resta, $\exists \alpha_i : a_m = \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i a_i'$. Suposem ara que eliminem l'última constricció redundant de $(P)_e$, de forma que obtenim el problema primal amb A de rang complet

$$(\widetilde{P})_e\begin{cases}\min\limits_{x\in\mathbb{R}^n} & \sum\limits_{i=1}^{n} c_i' x_i \\ \text{s.a.:} & a_j' x = b_j \quad j = 1, \dots, m-1 \\ & x_i \geq 0 \quad i = 1, \dots . n\end{cases}$$

Demostreu que els duals de $(P)_e$ i $(\widetilde{P})_e$ són equivalents en el sentit que o bé són tots dos infactibles o bé tenen el mateix cost òptim.

(SOLUCIÓ EXERCICI 56)

EXERCICI 57. Òptim dual a través del Ta de folga complementària

Donat $(P)_e$ amb $c = [13 \quad 10 \quad 6]'$, $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \end{bmatrix}$, amb $x^* = [1 \quad 0 \quad 1]'$, comproveu que el Ta de folga complementària permet determinar la solució única del problema dual.

(SOLUCIÓ EXERCICI 57)

EXERCICI 58. Ta de folga complementària per SBF òptimes no degenerades.

Suposeu que x^* és la SBF òptima no degenerada del problema $(P)_e$ en forma estàndard. Utilitzeu el Ta de folga complementària per a deduir l'expressió $\lambda^{*\prime} = c_B' B^{-1}$ del corol·lari del Ta fort de dualitat.

(SOLUCIÓ EXERCICI 58)

EXERCICI 59. PROC OPTMODEL i símplex dual.

Considereu el següent codi OPTMODEL amb el que es defineix i resol un problema de programació lineal amb l'algorisme del símplex dual, mostrant el detall de cada iteració:

```
proc optmodel;
var X{1..2} >= 0;
min Z = 3*X[1] + 8*X[2];
con C1: 2*X[1] + 3*X[2] >= 15;
con C2: 4*X[1] -   X[2] >= 20;
solve with LP / solver = dual printfreq = 1;
print X.sol X.rc;
print C1.body C1.dual;
print C2.body C2.dual;
run;
```

El resultat que s'obté per pantalla és:

Finestra Log

```
NOTE: The DUAL SIMPLEX solver is called.
                       Objective      Entering    Leaving
      Phase Iteration  Value          Variable    Variable
        2           1     22.500000   X[1]        C1      (S)
NOTE: Optimal.
NOTE: Objective = 22.5.
```

Finestra Output

```
                                The OPTMODEL Procedure
                                   Solution Summary

                         Solver                    Dual Simplex
                         Objective Function                   Z
                         Solution Status                Optimal
                         Objective Value                   22.5
                         Iterations                           1
```

```
                              Primal Infeasibility              0
                              Dual Infeasibility                0
                              Bound Infeasibility               0

                                      [1]     X.SOL     X.RC
                                       1        7.5      0.0
                                       2        0.0      3.5

                                       C1.BODY     C1.DUAL
                                            15         1.5

                                       C2.BODY     C2.DUAL
                                            30           0
```

a) Demostreu, a partir del corol·lari iii del teorema feble de dualitat, que el valor de les variables duals que indica la taula de sortida de OPTMODEL és la solució del dual del problema plantejat.
b) Deduïu, a partir de la informació sobre les iteracions de l'algorisme del símplex dual de la finestra Log, quina és la base inicial que pren SAS, i comproveu-ne que es tracta d'una solució bàsica factible dual trivial. Realitzeu la primera iteració de l'algorisme del símplex dual a partir d'aquesta s.b. factible dual i comproveu que coincideix amb la informació de la primera iteració realitzada per OPTMODEL.

(SOLUCIÓ EXERCICI 59)

EXERCICI 60. Dualitat i jocs finits de suma zero.

Considereu el cas particular del problema (P_1) del joc de parells o senars amb dos dits vist a classe, amb matriu de guanys $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$. Recordeu que la reformulació de (P_1) com a problema de dues variables amb el canvi de variable $y_2 = 1 - y_1$ i la seva representació gràfica feta a classe és:

$$(P_1)\begin{cases} \max\limits_{y_1,z_1} & z_1 & & \\ \text{s.a.:} & & & \\ & -5y_1+3 & \geq z_1 & (r1) \\ & 7y_1-4 & \geq z_1 & (r2) \\ & y_1 & \leq 1 & (r3) \\ & y_1 & \geq 0 & \end{cases}$$

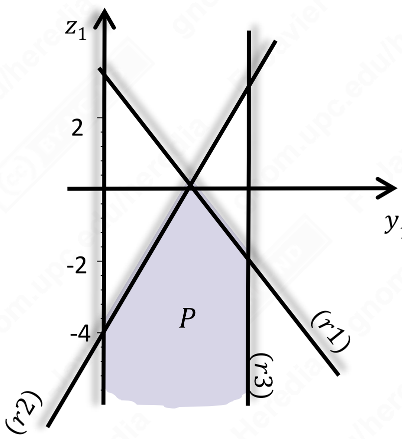


Figura 2

a) Deduïu, sense calcular els valor numèric dels costos reduïts ni de les variables bàsiques, la factibilitat primal i dual de les solucions bàsiques del problema (P_1) que s'observen a la Figura 1.
b) Formuleu el problema dual de (P_1). Transformeu-lo a un problema de dues variables i representeu sobre $\mathbb{R}^2$ el políedre dual.
c) Seleccioneu ara un s.b. factible dual i una s.b. infactible dual de (P_1). Per a cadascuna d'elles (a) trobeu els valors numèrics de les variables duals λ associades a la base primal i (b) identifiqueu, sobre la representació gràfica de l'apartat anterior, els punts associats a les dues solucions bàsiques duals calculades.

(SOLUCIÓ EXERCICI 60)

EXERCICI 61. Dualitat i anàlisi de sensibilitat amb PROC LP.

Considereu el següent problema de programació lineal $(PL7)$ i la seva resolució amb PROC LP:

$$(PL7)\begin{cases}\max & x_1 & +2x_2 & \\ \text{s.a.:} & 2x_1 & +x_2 & \leq 3 \\ & x_1 & +x_2 & \leq 2 \\ & x_{1,} & x_2 & \geq 0\end{cases}$$

```
data PL;
input       _row_ $ X1 X2 _type_ $ _rhs_;
datalines;
                z   1  2    MAX      .
               C1   2  1     LE      3
               C2   1  1     LE      2
;
run;
proc lp data=PL RANGERHS;
run;
```

La solución de $(PL7)$ que proporciona el procediment PROC LP de SAS és:

```
                         The LP Procedure
                         Variable Summary

               Variable                                   Reduced
           Col Name      Status Type        Price  Activity      Cost

             1 X1               NON-NEG         1         0        -1
             2 X2        BASIC  NON-NEG         2         2         0
             3 C1        BASIC  SLACK           0         1         0
             4 C2               SLACK           0         0        -2

                        Constraint Summary

        Constraint             S/S                        Dual
      Row Name         Type      Col       Rhs  Activity  Activity

        1 z          OBJECTVE     .          0         4         .
        2 C1         LE           3          3         2         0
        3 C2         LE           4          2         2         2

                        RHS Range Analysis

         ---------Minimum Phi-------- ---------Maximum Phi--------
   Row              Rhs Leaving  Objective        Rhs Leaving  Objective

   C1                 2 C1               4  INFINITY .                .
   C2                 0 X2               0         3 C1               6
```

a) Comproveu que la solució primal i dual que mostra la sortida de PROC LP satisfà el teorema fort de dualitat.

b) La sortida de PROC LP ens mostra que l'interval d'estabilitat del terme independent b_2 (constricció C2) és [0,3]. Calculeu aquest valors aplicant l'anàlisi de sensibilitat local estudiat a teoria.

c) Considereu que el valor de b_2 passa a ser $b_2 = 4$. Trobeu la nova solució òptima reoptimitzant amb l'algorisme del símplex dual a partir de la solució bàsica proporcionada per PROC LP.

(SOLUCIÓ EXERCICI 61)

EXERCICI 62. Formulació del dual i anàlisi de sensibilitat.

Considereu el següent problema de programació lineal (P):

$$(PL)\begin{cases}\min & 4x_1 & +5x_2 & \\ \text{s.a.:} & x_1 & +4x_2 & \geq 5 \\ & 3x_1 & +2x_2 & \geq 7 \\ & x_{1,} & x_2 & \geq 0\end{cases}$$

La base òptima és $\mathcal{B} = \{1,2\}$, amb $B^{-1} = \begin{bmatrix} -1/5 & 2/5 \\ 3/10 & -1/10 \end{bmatrix}$

a) Formuleu el problema dual de (PL).
b) Trobeu l'interval d'estabilitat del coeficient c_1.

(SOLUCIÓ EXERCICI 62)

EXERCICI 63. Prodem S.L.

L'empresa Prodem S.L. fabrica els productes A, B i C. En la fabricació d'aquests tres productes es consumeixen un tipus de recurs, amb una disponibilitat màxima de $b_1 = 20Tm$. A més, l'empresa s'ha compromès a satisfer una certa demanda no inferior a $b_2 = 15Tm$. Els costos de fabricació d'una unitat de producte A, B y C són, respectivament, 10, 2 i 3 u.m. (unitats monetàries). El problema lineal (P) que permet calcular les quantitats de producte A (x_1), B (x_2) i C (x_3) que minimitzen els costos de producció és:

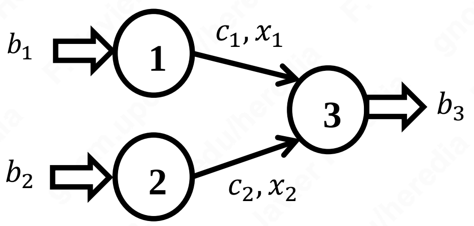
$$(P)\begin{cases} \min & z = 10x_1 & +2x_2 & +3x_3 & & \\ \text{s.a.:} & & & & & \\ & 3x_1 & +2x_2 & +x_3 & \leq 20 & Recurs \\ & x_1 & +x_2 & +x_3 & \geq 15 & Demanda \\ & x_1, & x_2, & x_3 & \geq 0 & \end{cases}$$

a) Sense realitzar cap iteració del mètode del símplex, comproveu que la producció òptima correspon a la base $\mathcal{B} = \{2,3\}$
b) Formuleu el dual de (P) i representeu-lo gràficament. Trobeu totes les solucions bàsiques factibles del problema dual i identifiqueu l'òptima. Comproveu que el valor de les variables duals a l'òptim λ^* coincideix amb el que proporciona el corol·lari del teorema fort de dualitat.
c) Considereu que el cost de fabricació del producte A passés a ser $1/2$ u.m. Analitzeu si amb aquest canvi la base $\mathcal{B} = \{2,3\}$ continuaria essent òptima. En cas que la resposta sigui negativa, trobeu la nova solució òptima.
d) L'empresa vol saber quin és el mínim valor la disponibilitat de recursos $\phi_{b_1}^{min}$ que permet satisfer la demanda actual $b_2 = 15Tm$. Trobeu aquest valor mínim usant la representació gràfica del problema dual (D) i expliqueu què passaria $\phi_{b_1} < \phi_{b_1}^{min}$. Quina repercussió econòmica té passar del valor original $b_1 = 20Tm$ al valor mínim $\phi_{b_1}^{min}$?

(SOLUCIÓ EXERCICI 63)

EXERCICI 64. Anàlisi de sensibilitat i transport (1).

Considereu el problema de transport entre dos plantes de producció, amb capacitat b_1 i b_2 respectivament, i un centre de consum amb demanda b_3 :



$$(P)\begin{cases} \min & c_1x_1 & +c_2x_2 & \\ \text{s.a.:} & x_1 & & \leq b_1 \\ & & x_2 & \leq b_2 \\ & x_1 & +x_2 & = b_3 \\ & x_1, & x_2 & \geq 0 \end{cases}$$

Els costos unitaris totals de producció i transport de cada planta són c_1 i c_2. Considerarem les següents hipòtesis sobre els paràmetres del problema:

i. Les capacitats i costos son no negatius: $c_1, c_2, b_1, b_2 \geq 0$

ii. El problema és factible: $b_1 + b_2 \geq b_3$
iii. La planta 1 és la més rendible: $c_1 < c_2$.

Sota aquestes hipòtesis, la solució òptima trivial de (P) és $x_1^* = b_1$, $x_2^* = b_3 - b_1$.

Resoleu els següents apartats, justificant la vostra resposta usant la teoria d'anàlisi de sensibilitat local.

a) Indiqueu, basant-vos en els resultats de l'anàlisi de sensibilitat local si convindria o no, augmentar la capacitat de la planta 1 (b_1). En cas afirmatiu, indiqueu fins a quin valor convindria augmentar b_1 i quant estaríem disposats a pagar per cada unitat addicional de capacitat.

Un cop resolt el problema (P) s'observa que una fracció $\alpha \in [0,1]$ de la mercaderia subministrada des de la planta 1 es perd per deficiències del mitjà de transport (factor de pèrdua). El problema $(\tilde{P})$ resultant és:

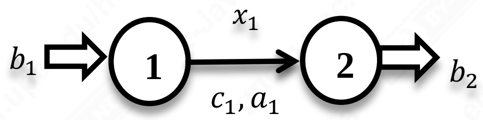
$$
(\tilde{P})\begin{cases}
\min & c_1x_1 & +\,c_2x_2 & \\
\text{s.a.:} & x_1 & & \leq b_1 \\
 & & x_2 & \leq b_2 \\
 & \boldsymbol{\alpha} x_1 & +x_2 & = b_3 \\
 & x_1, & x_2 & \geq 0
\end{cases}
$$

b) Indiqueu quin és el valor mínim del factor de pèrdua α que conserva la solució òptima de (P) consistent en subministrar la capacitat total de la planta 1 ($x_1^* = b_1$) i la demanda residual des de la planta 2 ($x_2^* = b_3 - \alpha b_1$).

(SOLUCIÓ EXERCICI 64)

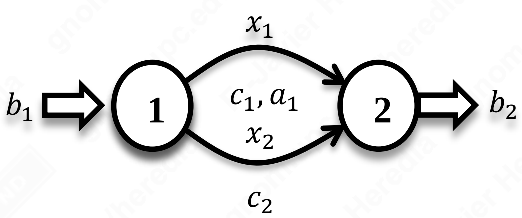
EXERCICI 65. Logistics: dualitat i anàlisi de sensibilitat.

L'empresa transportista Logistics ha de fer arribar cada setmana b_2 tones de productes alimentaris al mercat central d'una gran ciutat des dels centres de producció agrícola. Els aliments es transporten per carretera amb un cost per tona transportada igual a c_1. Degut al temps que triga en realitzar el transport sabem que una fracció $a_1 \in]0,1[$ de la quantitat total d'aliments es farà malbé. El centre de producció agrícola té una capacitat de producció màxima de b_1 tones suficient per subministrar tota la demanda ($b_1 \geq b_2/a_1$). La situació actual queda representada pel següent gràfic:



Òbviament, en l'actualitat l'única solució possible consisteix en transportar una quantitat $x_1 = b_2/a_1$ d'aliments per cobrir la demanda b_2.

Logistics es planteja substituir el transport per carretera per transport ferroviari. Transportar una tona d'aliment per ferrocarril costa c_2 ($c_2 > c_1$). A canvi de pagar més, no es perd cap tona d'aliment durant el transport. El problema de programació lineal (P) que permet decidir la quantitat òptima de tones a transportar per carretera (x_1) i ferrocarril (x_2) és:



$$
(P)\begin{cases}
\min & c_1x_1 & +c_2x_2 & \\
\text{s.a.:} & x_1 & +x_2 & \leq b_1 \\
 & a_1x_1 & +x_2 & = b_2 \\
 & x_1, & x_2 & \geq 0
\end{cases}
$$

a) Useu la teoria d'anàlisi de sensibilitat per calcular a partir de quin valor de c_2 és beneficiós substituir el transport per carretera pels transport ferroviari.
b) Considereu ara que $c_1 = 1€/t$, $c_2 = (6/5)€/t$, $a_1 = 4/5$, $b_1 = 20t$, $b_2 = 10t$. Demostreu, usant l'algorisme del símplex per trobar la solució òptima de (P), que amb aquestes dades l'opció de transport ferroviari és la millor.
c) Formuleu el problema dual de (P) i comproveu, usant el corol·lari iii del teorema feble de dualitat, que el valor de les variables duals λ corresponents a la solució trobada a l'apartat anterior són la solució òptima del problema dual de (P)

(SOLUCIÓ EXERCICI 65)

EXERCICI 66. Dualitat i anàlisi de sensibilitat amb OPTMODEL (1).

Considereu el següent codi OPTMODEL amb el que es defineix i resol un problema de programació lineal (P):

```
proc optmodel;
var X{1..3} >=0;
max Z = -2*X[1] +   X[2] + 2*X[3];
con C1:    X[1] + 3*X[2] + 5*X[3] <= 15;
con C2:  4*X[1] -   X[2]          = 20;
solve;
print X.sol X.rc;
print C1.body C1.dual;
print C2.body C2.dual;
```

[1]	X.SOL	X.RC
1	5	0.0
2	0	-0.8
3	2	-0.0

C1.BODY	C1.DUAL
15	0.4

C2.BODY	C2.DUAL
20	-0.6

a) Formuleu el problema dual (D) i ressoleu-lo gràficament.
b) Calculeu la solució del problema (D) usant l'expressió de λ^* que es deriva del teorema de dualitat forta. Comproveu que el valor de λ^*obtingut coincideix amb el valor que proporciona SAS i el trobat a l'apartat a).
c) Trobeu el valor de l'interval d'estabilitat del coeficient c_2. Comproveu, a partir de la representació de l'apartat a), que quan c_2 es troba sobre el límit de l'interval d'estabilitat, el problema dual es degenerat.
d) Indiqueu quin és el valor mínim del terme b_1 que conserva l'optimalitat de la base trobada per SAS. Amb l'ajut del símplex dual indiqueu quina és la solució òptima de (P) si $b_1$es redueix per sota d'aquest valor mínim. Expliqueu com hauríem pogut arribar al mateix resultat a partir de la representació gràfica del problema dual analitzant com afecta a la solució del problema dual el canvi en b_1 per sota del valor mínim.

(SOLUCIÓ EXERCICI 66)

EXERCICI 67. Dualitat i anàlisi de sensibilitat amb OPTMODEL (2).

Considereu el següent codi **OPTMODEL** d'un problema de programació lineal (P) i la seva solució:

```
proc optmodel;
var X{1..3} >=0;

min Z =    X[1]          +   X[3];

con C1:    X[1]          + 2*X[3] <=  4;
con C2:  4*X[1] - 5*X[2]          = 10;

solve;
print X.sol X.rc;
print C1.body C1.dual C2.body C2.dual;
```

[1]	X.SOL	X.RC
1	2.50	0.00
2	0.00	1.25
3	0.00	1.00

C1.BODY	C1.DUAL	C2.BODY	C2.DUAL
2.5	0	10	0.25

a) Formuleu el problema dual (D) i ressoleu-lo gràficament. Comproveu que la solució òptima coincideix amb els preus ombra λ^* i amb els valors que proporciona SAS.

b) Indiqueu quin és el valor mínim del terme b_1 que conserva l'optimalitat de la base trobada per SAS. Amb l'ajut del símplex dual indiqueu quina és la solució òptima de (P) si b_1 es redueix per sota d'aquest valor mínim. Expliqueu com hauríem pogut arribar a la mateixa conclusió analitzant gràficament com afecta a la solució òptima del problema dual el canvi en b_1 per sota del valor mínim.

(SOLUCIÓ EXERCICI 67)

EXERCICI 68. Propietats de (PL) i base parametritzada

Considereu el problema (P) de programació lineal en forma estàndard amb $n = 7$ i $m = 3$ i la base $\mathcal{B} = \{1,2,3\}$ ($\mathcal{N} = \{4,5,6,7\}$) amb els següents valors associats:

$$x_B = \begin{bmatrix} \alpha \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad r' = [\beta \quad 3 \quad \gamma \quad \delta], \quad D_B = -B^{-1}A_N = \begin{bmatrix} -\eta & -1 & 0 & -3 \\ 2 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Trobeu un conjunt de valors dels paràmetres $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ i η que ens permetin assegurar que les següents afirmacions son certes:

a) El problema (P) té solució òptima única sense degeneració primal ni dual.
b) El problema (P) és il·limitat.
c) El problema (P) és infactible.

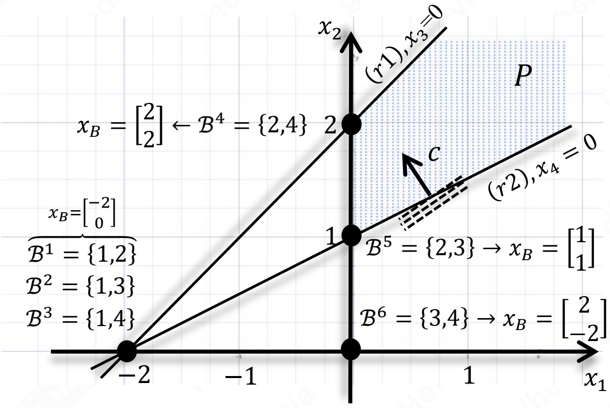
Justifiqueu les vostres respostes a partir de les propietats dels problemes de programació lineal i de les seves bases.

(SOLUCIÓ EXERCICI 68)

EXERCICI 69. Dualitat i anàlisi de sensibilitat (1).

Considereu el següent problema de programació lineal i la seva representació gràfica:

$$(P)\begin{cases} \min & -x_1 & +\frac{3}{2}x_2 & \\ \text{s.a.:} & -x_1 & +x_2 & \leq 2 \\ & -x_1 & +2x_2 & \geq 2 \\ & x_1, & x_2 & \geq 0 \end{cases}$$



a) Sense fer cap càlcul, indiqueu quina és la solució òptima del problema dual de (P) justificant la vostra resposta fent servir només el teorema feble de dualitat i els seus corol·laris.

Considereu a partir d'ara una funció objectiu del problema (P) igual a $c' = [1 \quad 1]$.

b) Formuleu el problema dual i representeu gràficament la seva regió factible.
c) Trobeu gràficament la solució òptima dual λ^* i comproveu que coincideix amb el valor de la solució dual que proporciona el corol·lari del teorema fort de dualitat.
d) Obtingueu la solució òptima del problema (P) realitzant una iteració del símplex dual a partir de la base $\mathcal{B}^6 = \{3,4\}$. Identifiqueu la iteració realitzada sobre el poliedre dual, és a dir, indiqueu al gràfic de l'apartat b) els vectors λ corresponents a $\mathcal{B}^6$ i a la base òptima $\mathcal{B}^*$.

e) Calculeu l'interval d'estabilitat de b_2, Φ_{b_2}. Trobeu gràficament la solució del problema dual quan $\phi_{b_2} = \phi_{b_2}^{\min}$. Quina característica especial té el problema dual quan es formula per aquest nou valor de b_2?

(SOLUCIÓ EXERCICI 69)

EXERCICI 70. Anàlisi problema parametritzat.

Considereu el següent problema de programació lineal:

$$(P)\begin{cases} \min & 3x_1 & +\boldsymbol{\phi_{c_2}}x_2 & +2x_3 & +4x_4 & \\ \text{s.a.:} & 2x_1 & +x_2 & +x_3 & & =2 \\ & & -x_2 & +x_3 & +2x_4 & =\boldsymbol{\phi_{b_2}} \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4 & \geq 0 \end{cases}$$

a) Trobeu totes solucions bàsiques té el problema (P), indicant només el conjunt $\mathcal{B}$ associat. Expliqueu clarament i concisa quin és el criteri que heu fet servir per identificar-les.
b) Calculeu el rang de valors possibles per als paràmetres ϕ_{c_2} i ϕ_{b_2} si sabem que la base òptima de (P) és $\mathcal{B} = \{2,4\}$.
c) Reoptimitzeu el problema a partir de la base $\mathcal{B} = \{2,4\}$ amb $\phi_{c_2} = -3$ i $\phi_{b_2} = -3$.

Considereu a partir d'ara el cas $\phi_{c_2} = 1$ i $\phi_{b_2} = 0$.

d) Formuleu el problema dual de (P) i representeu-lo gràficament i indiqueu sobre la gràfica la solució dual òptima.
e) Seleccioneu dues solucions bàsiques factibles del problema primal (P). Indiqueu, sense calcular els valor dels costos reduïts, si aquestes dues bases són factibles duals, fent ús del corol·lari del Ta. fort de dualitat i dels resultats de l'apartat anterior.

(SOLUCIÓ EXERCICI 70)

EXERCICI 71. Ta. de folga complementària sobre bases degenerades.

Considereu el següent problema de programació lineal:

$$(P)\begin{cases} \min & 3x_1 & +x_2 & +2x_3 & +\boldsymbol{\phi_{c_4}}x_4 & \\ \text{s.a.:} & 2x_1 & +x_2 & +x_3 & & =\boldsymbol{\phi_{b_1}} \\ & & -x_2 & +x_3 & +2x_4 & =2 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4 & \geq 0 \end{cases}$$

a) Calculeu el rang de valors possibles per als paràmetres ϕ_{c_4} i ϕ_{b_1} que asseguren que la base òptima de (P) és $\mathcal{B} = \{2,4\}$.
b) Formuleu el problema dual de (P) associat a $\phi_{c_4} = 1$ i $\phi_{b_1} = 0$. Representeu-lo gràficament. Indiqueu la solució dual òptima sobre la gràfica i trobeu la seva expressió matemàtica.
c) Comproveu usant el teorema de folga complementària, que la SBF x^* associada a la base $\mathcal{B} = \{2,4\}$ de (P) si $\phi_{c_4} = 1$ i $\phi_{b_1} = 0$ és òptima.
d) Repetiu els apartats b) i c) amb $\phi_{c_4} = 1$ i $\phi_{b_1} = 2$ i la base $\mathcal{B} = \{1,3\}$.

(SOLUCIÓ EXERCICI 71)

EXERCICI 72. Símplex dues fases, anàlisi de sensibilitat i reoptimització.

Considereu el següent problema de programació lineal (P):

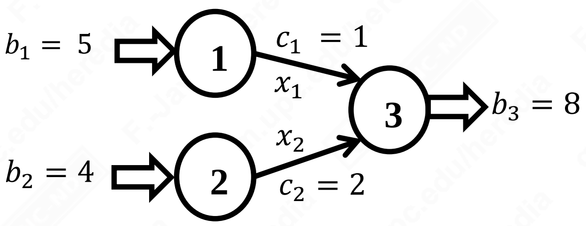
$$(P)\begin{cases}\min & x_1 & & +x_3 & \\ \text{s.a.:} & x_1 & & +2x_3 & \leq 4\\ & 4x_1 & -5x_2 & & =10\\ & x_1, & x_2, & x_3 & \geq 0\end{cases}$$

a) Comproveu, aplicant l'algorisme del símplex de les dues fases, que la base òptima de (P) és $\mathcal{B}^* = \{1,4\}$.
b) Indiqueu quin és el valor mínim del terme ϕ_{b_1}, $\phi_{b_1}^{min}$, que conserva l'optimalitat $\mathcal{B}^* = \{1,4\}$.
c) Amb l'ajut del símplex dual indiqueu quina és la solució òptima de (P) si b_1 es redueix per sota de $\phi_{b_1}^{min}$.
d) A través de l'anàlisi de la representació gràfica del problema dual de (P) indiqueu quina és la solució òptima de (P) si ϕ_{b_1} es redueix per sota de $\phi_{b_1}^{min}$.

(SOLUCIÓ EXERCICI 72)

EXERCICI 73. Anàlisi de sensibilitat i transport (2).

Considereu el problema de transport entre dos plantes de producció, amb capacitat b_1 i b_2 respectivament, i un centre de consum amb demanda b_3 :



$$(P)\begin{cases}\min & x_1 & +2x_2 & \\ \text{s.a.:} & x_1 & & \leq 5\\ & & x_2 & \leq 4\\ & x_1 & +x_2 & \geq 8\\ & x_1, & x_2 & \geq 0\end{cases}$$

La base òptima trivial d'aquest problema és $\mathcal{B}^* = \{1,2,4\}$ amb $B^{-1} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{bmatrix}$

a) Calculeu, amb l'ajut del corol·lari del teorema fort de dualitat, el valor òptim de les variables duals λ^*.
b) Formuleu el problema dual (D) i passeu-lo a la forma estàndard (D_e).
c) Calculeu la base del problema (D_e) que correspon al vector λ^* trobat a l'apartat a) i comproveu que és òptima pel problema (D_e) fent servir els costos reduïts de (D_e).
d) Calculeu l'interval d'estabilitat del coeficient c_2.
e) Usant anàlisi de sensibilitat, indiqueu fins a quin valor màxim $\phi_{b_3}^{max}$ pot augmentar la demanda del node 3, sense que la base $\mathcal{B}^*$ deixi de ser òptima.
f) Trobeu la nova solució òptima de (P) quan $\phi_{b_3} > \phi_{b_3}^{max}$ amb l'ajut de l'algorisme del símplex dual.
g) Analitzeu amb la metodologia pròpia de l'anàlisi de sensibilitat com afectaria a l'optimalitat de la base $\mathcal{B}^*$ un canvi en la desigualtat de la primera constricció, és a dir, substituir $x_1 \leq 5$ per $x_1 \geq 5$. En cas que es perdi l'optimalitat, amb quina versió de l'algorisme del símplex caldria iterar per reoptimitzar?

(SOLUCIÓ EXERCICI 73)

EXERCICI 74. Dual en forma estàndard i anàlisi de sensibilitat.

Considereu el següent problema de programació lineal:

$$(P)\begin{cases}\min\limits_{x\in\mathbb{R}^2} z = & -x_1 & +2x_2 & \\ \text{s.a:} & 2x_1 & -2x_2 & \leq 1 \\ & 2x_1 & +2x_2 & \geq 3 \\ & x_1, & x_2 & \geq 0\end{cases}$$

a) Formuleu el problema dual de (P), transformeu-lo a la forma estàndard $(D)_e$, i comproveu que la solució del problema dual que proporciona el corol·lari del Ta fort de dualitat satisfà les condicions d'optimalitat de $(D)_e$, és a dir, satisfà les condicions de factibilitat primal i dual de $(D)_e$.

b) Indiqueu quin és el valor mínim del terme ϕ_{b_2}, $\phi_{b_2}^{min}$, que conserva l'optimalitat de la base de (P). Amb l'ajut de l'algorisme del símplex dual indiqueu quina és la solució òptima de (P) si ϕ_{b_2} adopta un valor no negatiu qualsevol per sota del valor mínim $\phi_{b_2}^{min}$ trobat a l'apartat anterior.

c) Trobeu el valor de l'interval d'estabilitat del coeficient c_2. Comproveu, sense fer servir la repressentació gràfica de (D), que quan ϕ_{c_2} es troba sobre el límit de l'interval d'estabilitat, el problema dual presenta degeneració primal (és a dir, alguna de les variables bàsiques del problema $(D)_e$ son nul·les a l'òptim).

(SOLUCIÓ EXERCICI 74)

EXERCICI 75. Propietats dels problemes de (PL) i dels seus algorismes.

Considereu el mètode del símplex aplicat a un problema de programació lineal en forma estàndard $(P)\ \min\limits_{x\in\mathbb{R}^n}\{c'x|Ax=b, x\geq 0\}$ amb matriu A de rang complet. Demostreu o refuteu en base als teoremes estudiats a classe, o amb un contraexemple, els següents enunciats:

a) En una iteració del mètode del símplex es pot fer un desplaçament estrictament positiu tot passant d'una solució factible a un altre de diferent sense canviar el valor de la funció objectiu.

b) Una variable que acaba de sortir d'una base no degenerada no pot tornar a entrar en la iteració següent.

c) Si existeix una base òptima no degenerada, llavors existeix una única base òptima.

d) Si (P) és infactible el seu dual (D) serà il·limitat.

e) Si la modificació d'un dels coeficients a_{ij} de la matriu A fa perdre l'optimalitat de la base $\mathcal{B}^*$ sempre es podrà reoptimitzar el problema a partir de la base òptima $\mathcal{B}^*$ ja sigui amb l'algorisme del símplex primal o dual.

(SOLUCIÓ EXERCICI 75)

EXERCICI 76. Dualitat i condicions de Karush-Kuhn-Tucker.

La teoria de dualitat en programació lineal està fortament relacionada amb les condicions d'optimalitat per a problemes d'optimització no lineal contínua. Efectivament, considerem el problema $(P)\ \min\limits_{x\in\mathbb{R}^n}\{c'x|Ax\leq b\}$, factible no degenerat de rang complet, i el seu problema dual associat (D).

a) Formuleu el problema dual de (P).

b) Enuncieu i demostreu el teorema de folga complementària.

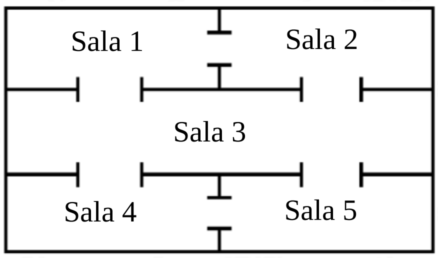
c) Recolzant-vos en el desenvolupament dels apartats a) i b) demostreu que si la solució primal factible x^* satisfà les condicions de Karush-Kuhn-Tucker amb multiplicadors de Lagrange μ^* llavors el vector $-\mu^*$ és solució òptima del problema dual (D).

(SOLUCIÓ EXERCICI 76)

FORMULACIÓ DE PROBLEMES DE PROGRAMACIÓ LINEAL ENTERA

EXERCICI 77. Vigilants.

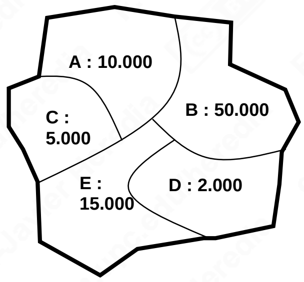
La figura adjunta representa el conjunt de sales d'un museu. El servei de seguretat d'aquest museu vol col·locar vigilants a les portes de comunicació entre sales. Cada vigilant pot controlar les dues sales adjacents a la porta que té assignada. Formuleu un problema de programació lineal entera completament parametritzat que permeti trobar la col·locació dels vigilants de forma que es puguin controlar totes les sales amb el mínim nombre possible de vigilants.



(SOLUCIÓ EXERCICI 77)

EXERCICI 78. Editorial Omega.

L'editorial Omega ven llibres de text universitaris. Opera en una regió amb cinc autonomies, A, B, C i D. La gràfica adjunta mostra la ubicació geogràfica de les diferents autonomies i el nombre d'alumnes universitaris a cada autonomia. L'editorial té dos representants disponibles per al conjunt de les cinc autonomies. Cadascú ha de tenir assignades dues autonomies, però aquestes han de ser contigües, és a dir, el mateix representant no pot cobrir l'autonomia A i la D, per exemple. L'objectiu d'Omega és que els seus dos representants donin servei al màxim nombre d'alumnes universitaris possible. Formuleu el model de PLE que permet resoldre aquest problema.



(SOLUCIÓ EXERCICI 78)

EXERCICI 79. Remington Manufacturing: problemes de càrrega fixa.

El procés de manufactura de l'empresa Remington Manufacturing consisteix en tres operacions, *mecanització*, *polvorització* i *assemblatge* amb les següents dades:

Operació	**Hores consumides per unitat produïda:**			**Hores disponibles**
	Prod 1	**Prod 2**	**Prod 3**	
Mecanització	2	3	6	600
Polvorització	6	3	4	300
Assemblatge	5	6	2	400
Benefici unitari (€)	48	55	50	
Costos fixos (€)	1000	800	900	

Formuleu matemàticament i ressoleu amb OPTMODEL el problema (PLE) completament parametritzat que permet la quantitat òptima de producte a fabricar.

(SOLUCIÓ EXERCICI 79)

EXERCICI 80. CRT-Technologies: problemes de selecció de projectes.

La Companyia tecnològica CRT-Technologies es planteja la possibilitat de posar en marxa 6 projectes per als pròxims 5 anys. Les dades amb les que s'ha de basar la decisió sobre quins d'ells encetar es troba a la següent taula:

Projecte	Valor esperat del NPV (10^3€)	Inversió necessària (10^3€)				
		Any 1	Any 2	Any 3	Any 4	Any 5
1	141	75	25	20	15	10
2	187	90	35	0	0	30
3	121	60	15	15	15	15
4	83	30	20	10	5	5
5	265	100	25	20	20	20
6	127	50	20	10	30	40
	Capital disponible(10^3€):	250	75	50	50	50

CRT-Technologies vol determinar quins projectes ha de posar en marxa de forma que es maximitzi el valor total de NPV esperat, sense que la inversió total superi el capital disponible a cada any.

Formuleu matemàticament el problema (PLE) completament parametritzat que permet resoldre el problema de selecció de projectes de l'empresa CRT-Technologies.

(SOLUCIÓ EXERCICI 80)

EXERCICI 81. Air-Express: problemes de planificació de plantilles.

La companyia aèria *Air-Express* ha de confeccionar la programació de vol de la seva tripulació de cabina. La tripulació s'organitza per torns que descansen dos dies de la setmana d'acord amb la següent taula:

Torn	Dies descans	Sou
1	diumenge, dilluns	680€
2	dilluns, dimarts	705€
3	dimarts, dimecres.	705€
4	dimecres, dijous	705€
5	dijous, divendres	705€
6	divendres, dissabte	680€
7	dissabte, diumenge	680€

Les necessitats estimades de treballadors durant els diferents dies de la setmana són:

Dia	Treballadors
Diumenge	18
Dilluns	27
Dimarts	22
Dimecres	26
Dijous	25
Divendres	21
Dissabte	19

A banda del cost per treballador contractat a cada torn, si es decideix posar en marxa un torn (és a dir, si es contracta algun treballador per aquest torn) existeixen uns costos fixos mensuals, associats a la contractació i gestió laboral dels torns, que s'indiquen a la següent taula:

Torn→	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Cost fix (€) →	1000	950	950	950	950	1000	1000

Air-Express vol trobar el nombre de treballadors que s'han de contractar a cada torn de forma que s'asseguri el nombre de treballadors diaris necessaris i que el cost total de la plantilla sigui el mínim possible.

(SOLUCIÓ EXERCICI 81)

EXERCICI 82. Prodem S.L.

L'empresa Prodem SL. fabrica els productes A, B i C. En la fabricació d'aquests tres productes es fabriquen a través del procés de manufactura que consumeixen un recurs amb una disponibilitat màxima de $b = 40Tm$. A més, l'empresa s'ha compromès a satisfer una certa demanda no inferior a $d = 33Tm$. Els costos de fabricació d'una unitat de producte A, B y C són, respectivament, 10, 2 i 3 u.m. (unitats monetàries). El problema lineal (P) que permet calcular les quantitats de producte A (x_1), B (x_2) i C (x_3) que minimitzen els costos de producció és:

$$(P)\begin{cases} \min & 10x_1 & +2x_2 & +3x_3 & & \\ \text{s.a.:} & & & & & \\ & 3x_1 & +2x_2 & +x_3 & \leq 40 & \text{Procés manufactura 1} \\ & x_1 & +x_2 & +x_3 & \geq 33 & \text{Demanda} \\ & x_1, & x_2, & x_3 & \geq 0 & \end{cases}$$

L'empresa té la possibilitat de substituir el procés de manufactura 1 per un procés alternatiu, al que denotarem per "procés de manufactura 2". Aquest procés és més eficient que el procés 1, de forma que el consum de tones de recurs per cada unitat de producte A, B i C fabricat és redueix a 1.5, 1 i 0.5 respectivament. Com a contrapartida, alguns dels costos de fabricació d'aquest procés de manufactura 2 augmenten, passant a ser 15, 2 i 4 respectivament. Els dos processos son incompatibles, és a dir, tot els productes A, B i C s'han de fabricar a través del procés 1 o del procés 2.

Formuleu el model matemàtic completament parametritzat del problema (PLE) que permet determinar quin dels dos processos de manufactura cal usar i la quantitat òptima a fabricar dels productes A, B i C.

(SOLUCIÓ EXERCICI 82)

ALGORISMES DE PROGRAMACIÓ LINEAL ENTERA

EXERCICI 83. Test programació lineal entera.

TEST 1. Donat un problema de programació lineal entera (PE) de minimització i la seva relaxació lineal (RL) es satisfà:

a) V / F $K_{PE} \supset K_{RL}$.

b) V / F $z_{RL}^{*} \leq z_{PE}^{*}$.

c) V / F (PE) només té solució òptima si K_{RL} és un polítop.

TEST 2. Considereu el problema (PE) de minimització i la seva relaxació lineal (RL):

a) V / F $\mathrm{K_{PE}} \subseteq \mathrm{K}_{RL}$.

b) V / F $c'x_{RL} \leq c'x_{PE},\ \forall x_{RL} \in K_{RL}\ , \forall x_{PE} \in K_{PE}$.

c) V / F $x_{PE}^{*} \in K_{RL} \Rightarrow z_{PE}^{*} = z_{RL}^{*}$.

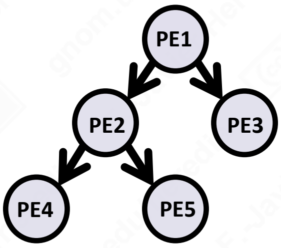
TEST 3. La formulació ideal (PEI) d'un problema de programació lineal entera (PE):

a) V / F Té la mateixa solució òptima que (PE).

b) V / F Tots els punts extrems K_{RLI} pertanyen a K_{PE}.

c) V / F És la formulació vàlida de (PE) que s'obté en finalitzar l'algorisme de plans de tall de Gomory.

TEST 4. Al següent arbre d'exploració del B&B d'un problema (PE) de minimització:



a) V / F $(PE4)$ i $(PE5)$ son una separació de $(PE1)$.

b) V / F $(PE2)$ i $(PE4)$ son formulacions vàlides de (PE) més fortes que $(PE1)$.

c) V / F z_{PE4}^{*} i z_{PE5}^{*} son $\geq\ z_{PE3}^{*}$.

TEST 5. El tall de Gomory de (PE) associat a x_{RL}^{*} és una constricció de desigualtat tal que:

a) V / F Tota solució factible (PE) $x_{PE} \in K_{PE}$ la satisfà.

b) V / F Tota solució factible (RL) $x_{RL} \in K_{RL}$ la satisfà.

c) V / F Només la solució òptima de (RL), x_{RL}^{*} la satisfà.

TEST 6. El tall de Gomory $x_{B(i)} + \sum_{j \in \mathcal{N}} \lfloor v_{ij} \rfloor x_j \leq \lfloor x_{B(i)}^{*} \rfloor$ associat a (PE) i x_{RL}^{*}és una constricció de desigualtat:

a) V / F Que no satisfà x_{RL}^{*}.

b) V / F Que no satisfà x_{PE}^{*}.

c) V / F Que defineix una formulació ideal de (PE).

TEST 7. Quan apliquem un algorisme de plans secant de Gomory a un problema de (PE) de minimització:

a) **V** / **F** A cada iteració es millora, en general, la fita inferior de z_{PE}^*.
b) **V** / **F** A cada iteració s'obté una formulació vàlida més forta de (PE).
c) **V** / **F** S'obté la formulació ideal de (PE) a l'última iteració.

TEST 8. Per tal que una constricció lineal de desigualtat sigui una desigualtat vàlida cal que:

a) **V** / **F** Sigui satisfeta per totes les solucions factibles de (RL).
b) **V** / **F** Sigui violada per la incumbent.
c) **V** / **F** Es formi a través d'un tall de Gomory.

TEST 9. Quan apliquem un algorisme de Branch&Cut a un problema de (PE):

a) **V** / **F** Farà, en general, menys iteracions del símplex que un alg. de Brach&Bound.
b) **V** / **F** Generarà, en general, menys nodes que un alg. de Brach&Bound.
c) **V** / **F** Les fites a z_{PEi}^* són, en general, millors que les que s'obtenen amb el Branch and Bound.

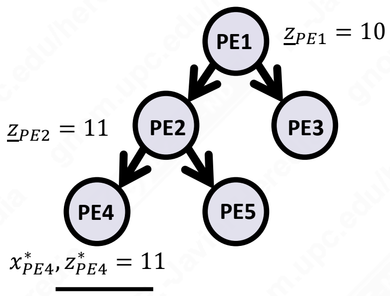
TEST 10. Quan apliquem un algorisme de Branch&Cut a un problema de (PE):

a) **V** / **F** Les fites $\underline{z}_{PEi}^*$ són, en general, millors que les que s'obtenen amb el Branch and Bound.
b) **V** / **F** Els criteris de ramificació son diferents als de l'algorisme de Branch&Bound.
c) **V** / **F** Sempre realitzarà un nombre d'iteracions igual o inferior a les del Branch&Bound.

TEST 11. Considereu el problema (PE1) de minimització i les relaxacions lineal (RL1) i (RL2) de les dues primeres iteracions de l'algorisme de plans secant de Gomory:

a) **V** / **F** $K_{PE1} \subseteq K_{RL2} \subseteq K_{RL1}$.
b) **V** / **F** $z_{RL1} \geq z_{RL2} \geq z_{PE}$.
c) **V** / **F** $x_{RL1}^* \in K_{RL2}$.

TEST 12. El següent arbre d'exploració del B&B d'un problema (PE1) de minimització mostra la situació després de realitzar tres iteracions i trobar l'òptim del subproblema (PE4):



a) **V** / **F** x_{PE4}^* és la solució de (PE1).
b) **V** / **F** Cal resoldre (RL5) per trobar la solució òptima de (PE1).
c) **V** / **F** L'òptim de (PE1) es pot trobar a K_{PE3}.

TEST 13. Si $x_{RL1} = [x_1, x_2]' = \begin{bmatrix} 5/3 \\ 4/3 \end{bmatrix}$ i $V = \begin{bmatrix} 5/3 & -1/3 \\ -2/3 & 1/3 \end{bmatrix}$ el tall de Gomory associat a x_1:

a) **V** / **F** És $x_1 \leq 0$.
b) **V** / **F** És $x_1 - x_3 \leq 1$.
c) **V** / **F** És $x_1 + x_3 - x_4 \leq 1$.

TEST 14. Donades dues formulacions vàlides $(PE1)$ i $(PE2)$ de (PE), si $(PE1)$ és més forta que $(PE2)$ podem assegurar que:

a) **V** / **F** $K_{PE1} \subset K_{PE2}$.
b) **V** / **F** $K_{RL1} \subset K_{RL2}$.
c) **V** / **F** $(PE1)$ conté més desigualtats vàlides que $(PE2)$.

TEST 15. La formulació ideal (PEI):

a) **V** / **F** És la formulació més forta possible.
b) **V** / **F** Té associat un políedre amb punts extrems enters.
c) **V** / **F** Necessitarà una única ramificació quan s'apliqui B&B.

TEST 16. Donades dues formulacions vàlides $(PE1)$ i $(PE2)$ del problema de maximització (PE), llavors:

a) **V** / **F** $K_{PE1} \subset K_{PE2}$.
b) **V** / **F** $K_{RL1} \subset K_{RL2} \Rightarrow (PE1)$ és més forta que $(PE2)$.
c) **V** / **F** $\mathrm{K}_{\mathrm{RL1}} \subset \mathrm{K}_{\mathrm{RL2}} \Rightarrow \mathrm{z}^*_{\mathrm{PE1}} > \mathrm{z}^*_{\mathrm{PE2}}$.

TEST 17. Sigui $\mathcal{B}^*$ l'òptim de la relaxació lineal del problema (PE1) a la iteració 1 de l'algorisme de Gomory i $\widetilde{\mathcal{B}}$ la base inicial a partir de la qual es reoptimitzarà amb el símplex dual:

a) **V** / **F** La base $\widetilde{\mathcal{B}}$ serà factible dual infactible primal.
b) **V** / **F** La base $\widetilde{\mathcal{B}}$ té les mateixes variables bàsiques que $\mathcal{B}^*$.
c) **V** / **F** Els vector de costos reduïts associat a $\widetilde{\mathcal{B}}$ té una component més que l'associat a $\mathcal{B}^*$.

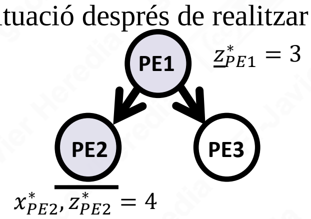
TEST 18. El tall de Gomory $x_{B(i)} + \sum_{j\in\mathcal{N}} \lfloor v_{ij} \rfloor x_j \le \lfloor x^*_{B(i)} \rfloor$ associat a (PE) i x^*_{RL}:

a) **V** / **F** És una de les constriccions que defineixen (RL).
b) **V** / **F** És una constricció que no satisfà x^*_{PE}.
c) **V** / **F** És una constricció que forma part de la formulació ideal de (PE).

TEST 19. Donat un problema de PLE (PE) de minimització, la formulació vàlida $(PE1)$ és més forta que la formulació vàlida $(PE2)$

a) **V** / **F** Si $z^*_{PE1} \le z^*_{PE2}$.
b) **V** / **F** Si $z^*_{RL1} \ge z^*_{RL2}$.
c) **V** / **F** Si $K_{RL1} \subset K_{RL2}$.

TEST 20. El següent arbre d'exploració del B&B d'un problema $(PE1)$ de minimització mostra la situació després de realitzar dues iteracions i trobar l'òptim del subproblema $(PE2)$:



a) **V** / **F** Es pot assegurar que x^*_{PE2} és la solució de (PE1).
b) **V** / **F** $(PE2)$ i $(PE3)$ són una separació de $(PE1)$.
c) **V** / **F** L'òptim de (PE1) es pot trobar a K_{PE3}.

TEST 21. Donades dues formulacions vàlides $(PE1)$ i $(PE2)$ de (PE), si $(PE1)$ és més forta que $(PE2)$ podem assegurar que:

a) **V** / **F** $(PE1)$ conté menys desigualtats vàlides que $(PE2)$.

b) **V / F** $K_{RL1} \subset K_{RL2}$.

c) **V / F** $K_{PE1} \subset K_{RL2}$.

(SOLUCIÓ EXERCICI 83)

EXERCICI 84. Algorisme de ramificació i poda (1).

Considereu el següent problema de programació lineal entera:

$$(PE)\begin{cases} \min & -x_1 \\ \text{s.a.:} & x_1 \quad -x_2 \quad \leq \quad -1 \\ & 2x_1 \quad +2x_2 \quad \leq \quad 5 \\ & x_1, \quad x_2 \quad \geq \quad 0, enteres \end{cases}$$

Resoleu el problema (PE) aplicant l'algorisme de Branch & Bound d'acord amb el següent criteri:

- Preneu com a variable de separació x_1 abans que x_2.
- Exploreu primer la branca associada a la fita $x_i \leq \lfloor x^*_{RL_i} \rfloor$.
- Resoleu totes les relaxacions lineal necessàries gràficament.
- En acabar representeu l'arbre d'exploració.

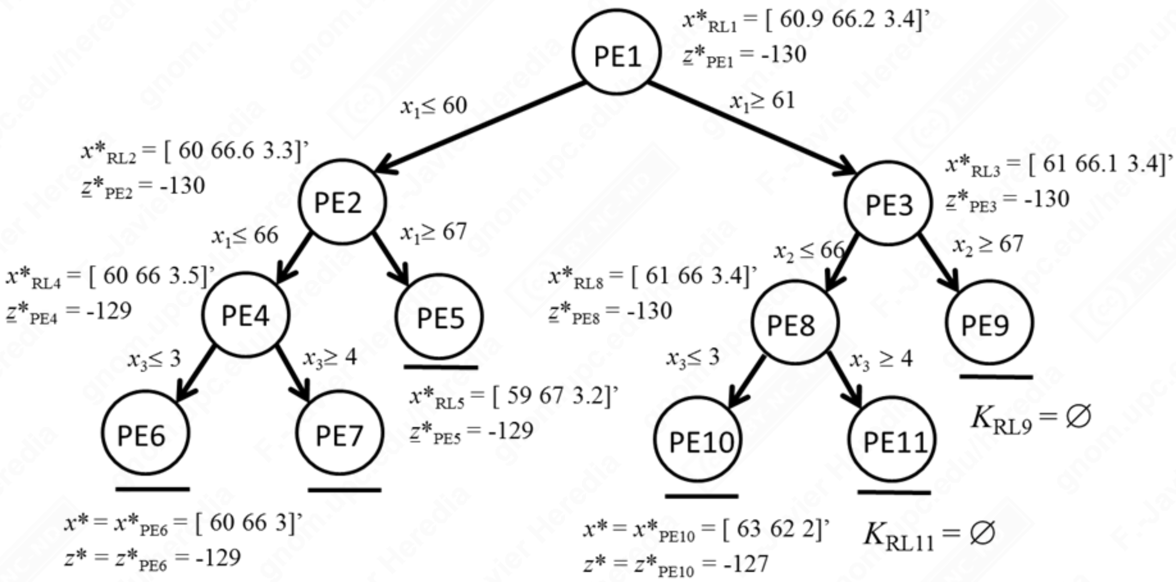
(SOLUCIÓ EXERCICI 84)

EXERCICI 85. Algorisme de ramificació i tall.

Considereu el següent problema de programació lineal entera (PE):

$$(PE)\begin{cases} \min & -x_1 \quad -x_2 \quad -x_3 \\ \text{s.a.:} & \\ & \quad 3x_2 \quad +12x_3 \quad \leq 240 \\ & 3x_1 \quad +5x_3 \quad \leq 200 \\ & 2x_1 \quad +3x_2 \quad -6x_3 \quad \leq 300 \\ & x_1 \quad \leq 90 \\ & x_1, \quad x_2, \quad x_2 \quad \geq 0, enteres \end{cases}$$

L'arbe d'exploració de l'algorisme *branch and cut* que resol aquest problema és:



L'ordre de visita dels nodes ha estat: PE1→ PE2→ PE4→ PE6→ PE5→ PE3→ PE8→ PE10→ PE11→ PE9

a) A la vista de l'arbre d'exploració, quina és la solució del problema (PE)?
b) Tenint en compte que la solució de la formulació vàlida associada al problema $(PE1)$ és $x^*_{RL1} = [60.9 \quad 66.2 \quad 3.4]'$, justifiqueu el valor de la fita inferior $\underline{z}^*_{PE1} = -130$.
c) Expliqueu per quina raó podem eliminar el subproblema $(PE7)$ sense necessitat de tractar-lo, és a dir, sense necessitat de resoldre la seva relaxació lineal, mentre que, pel contrari, cal tractar (resoldre la relaxació lineal) el problema $(PE5)$ abans de poder-ho eliminar.

(SOLUCIÓ EXERCICI 85)

EXERCICI 86. Algorismes de ramificació i poda (2).

Considereu el següent problema de programació lineal entera:

$$(PE)\begin{cases} \text{min} & -x_1 & -2x_2 & \\ \text{s.a.:} & 2x_1 & +x_2 & \leq 3 \\ & x_1 & +3x_2 & \leq 2 \\ & x_{1,} & x_2 & \geq 0 \quad ,enteres \end{cases}$$

Trobeu la solució òptima de (PE) mitjançant l'algorisme de B&B.

- Seleccioneu com a variables de ramificació x_1 abans que x_2.
- Exploreu primer la branca de l'esquerra ($x_i \leq \lfloor x_i^* \rfloor$).
- Seleccioneu primer últims subproblemes generats.

Expliqueu els detalls de cada iteració.

(SOLUCIÓ EXERCICI 86)

EXERCICI 87. Algorisme de ramificació i poda (3).

Considereu el problema $(PE) \min_{x\in\mathbb{Z}^2}\left\{z_{PE} = -2x_1 - 5x_2 \middle| \begin{bmatrix}1 & 4\\1 & 1\end{bmatrix} x \leq \begin{bmatrix}8\\4\end{bmatrix}, x \geq 0\right\}$. Trobeu la solució òptima de (PE) amb l'algorisme de Branch&Bound d'acord amb el següent criteri:

- Preneu com a variable de separació x_2 abans que x_1.
- Exploreu primer la branca associada a la fita $x_i \geq \lceil x^*_{RL_i} \rceil$.
- Resoleu totes les relaxacions lineal necessàries gràficament.

En acabar representeu l'arbre d'exploració.

(SOLUCIÓ EXERCICI 87)

EXERCICI 88. Algorisme de ramificació i poda amb símplex dual.

Considereu el següent problema de programació lineal entera $(PE1)$:

$$(PE1)\begin{cases} \text{min} & x_1 & +x_2 & \\ \text{s.a.:} & x_1 & +2x_2 & \geq 1 \\ & 2x_1 & +x_2 & \geq 1 \\ & x_{1,} & x_2 & \geq 0, \text{ enteres} \end{cases}$$

a) Trobeu la solució òptima de (PE1) amb l'algorisme de ramificació i poda (B&B) amb els següents criteris:
   - Resoleu les relaxacions lineals gràficament.
   - Seleccioneu com a variable de ramificació la primera variable no entera.
   - Exploreu primer la branca de l'esquerra ($x_i \leq \lfloor x_i^* \rfloor$).

   Indiqueu detalladament les passes de cada iteració i, en acabar, representeu l'arbre d'exploració.

b) Trobeu ara l'òptim el problema relaxat $(RL2)$ de l'anterior aplicació del B&B per reoptimització amb l'algorisme del símplex dual a partir de la base òptima del problema $(RL1)$.

(SOLUCIÓ EXERCICI 88)

EXERCICI 89. Desigualtats de Chvátal-Gomory i algorisme de ramificació i poda.

Donat un problema de programació entera $(PE)\min\{c'x | x \in K_{PE}\}$ amb regió factible $K_{PE} = \{x \in \mathbb{Z}^n | \sum_{i=1}^{n} A_i x_i \leq b, x \geq 0\}$ el **procediment de Chvátal-Gomory** és un mètode per generar de forma sistemàtica noves desigualtats de formulacions vàlides, és a dir, que són satisfetes per tot $x \in K_{PE}$. Les passes d'aquest mètode són:

Passa 1: es genera la desigualtat $\sum_{i=1}^{n} u' A_i x_i \leq u'b$, amb un vector $u \in \mathbb{R}^m, u \geq 0$ qualsevol.

Passa 2: s'arrodoneixen els coeficients del terme de l'esquerra: $\sum_{i=1}^{n} \lfloor u' A_i \rfloor x_i \leq u'b$.

Passa 3: s'arrodoneix el terme de la dreta: $\sum_{i=1}^{n} \lfloor u' A_i \rfloor x_i \leq \lfloor u'b \rfloor$.

a) Demostreu que les desigualtats generades pel procediment de Chvátal-Gomory són vàlides per a (PE), és a dir, que $\sum_{i=1}^{n} \lfloor u' A_i \rfloor x_i \leq \lfloor u'b \rfloor$ per a tot $x \in K_{PE}$.

b) Sigui $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ i $b = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix}$. Comproveu gràficament que si afegim a la formulació de (PE) la desigualtat de Chvátal-Gomory amb $u = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}$ s'obté la formulació ideal de (PE).

(SOLUCIÓ EXERCICI 89)

EXERCICI 90. Talls de Gomory

Demostreu que el tall de Gomory $x_{B(i)} + \sum_{j \in \mathcal{N}} \lfloor v_{ij} \rfloor x_j \leq \lfloor x_{B(i)}^* \rfloor$ és un tall del problema $(PE)\{\min c'x \,|Ax = b, x \geq 0 \; enteres\}$ sobre la solució de la relaxació lineal x^* amb $x_{B(i)}^*$ no entera, és a dir:

i. La desigualtat és satisfeta per totes les solucions enteres $x \in \mathcal{K}_{PE}$.

ii. La desigualtat és violada per la solució de la relaxació lineal x_{RL}^*.

(SOLUCIÓ EXERCICI 90)

EXERCICI 91. Algorisme de ramificació i poda i plans secants.

Considereu el següent problema de programació lineal entera $(PE1)$:

$$(PE1)\begin{cases} \min & x_1 & +x_2 & \\ \text{s.a.:} & x_1 & +2x_2 & \geq 1 \\ & 2x_1 & +x_2 & \geq 1 \\ & x_1, & x_2 & \geq 0, \text{ enteres} \end{cases}$$

a) Trobeu la solució òptima de (PE1) amb l'algorisme de plans secants de Gomory. Resoleu les relaxacions lineals gràficament, triant com a variable de generació del tall $x_1$abans que x_2.
b) Torneu a aplicar ara l'algorisme de plans secants de Gomory aplicat d'acord amb les següents indicacions:
   - Trobeu la solució de (RL1) gràficament.
   - Resoleu les relaxacions lineals per reoptimització amb l'algorisme del símplex dual.
   - Trieu com a variable de generació del tall $x_1$abans que x_2.

(SOLUCIÓ EXERCICI 91)

EXERCICI 92. Formulació ideal i algorisme de plans de tall.

Considereu el següent problema de programació lineal entera:

$$(PE)\begin{cases}\min & x_1 & +3x_2 & \\ \text{s.a.:} & x_1 & +x_2 & \leq 3\\ & \frac{2}{5}x_1 & +x_2 & \geq 2\\ & x_1, & x_2 & \geq 0, enteres\end{cases}$$

a) Indiqueu raonadament si (PE) és la formulació ideal del problema que volem resoldre. En cas de resposta negativa, trobeu el conjunt de desigualtats vàlides que calen per obtenir la formulació ideal.
b) Trobeu la solució òptima de (PE) mitjançant l'algorisme de plans secants de Gomory, seguint les següents regles:
   - Seleccioneu com a variables de generació del tall la primera variable no entera.
   - Ressoleu les relaxacions lineals gràficament.

   Expliqueu el detall de cada iteració i afegiu el gràfic que representi el problema (PE) i els talls de Gomory generats.

(SOLUCIÓ EXERCICI 92)

EXERCICI 93. Algorisme de plans secants amb resolució gràfica (1).

Considereu el següent problema de programació lineal entera (PE):

$$(PE)\begin{cases}\min & -x_1 & -x_2 & \\ \text{s.a.:} & 3x_1 & +2x_2 & \leq 6\\ & 2x_1 & +3x_2 & \leq 6\\ & x_{1,} & x_2 & \geq 0, \text{enteres}\end{cases}$$

Trobeu la solució òptima de (PE) amb l'algorisme de plans secants de Gomory resolent els problemes relaxats gràficament i trieu com a variable de generació del tall $x_1$abans que x_2.

(SOLUCIÓ EXERCICI 93)

EXERCICI 94. Algorisme de plans secants amb resolució gràfica (2).

Resoleu el següent problema de (PE) amb l'algorisme de plans de tall de Gomory.:

$$(PE)\begin{cases}\min & x_1 & +x_2 & & \\ \text{s.a.:} & & & & \\ (r1) & x_1 & +x_2 & \geq & 1\\ (r2) & 2x_1 & -x_2 & = & 0\\ & x_1, & x_2 & \geq & 0, x\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

Resoleu les relaxacions lineals gràficament i seleccioneu com a variable de generació del tall la que tingui el menor índex.

(SOLUCIÓ EXERCICI 94)

EXERCICI 95. Algorismes de plans secants amb símplex dual (1)

Considereu el següent problema de programació lineal entera (PE):

$$(PE)\begin{cases}\min & 4x_1 & +5x_2 & \\ \text{s.a.:} & x_1 & +3x_2 & \geq 5 \\ & 3x_1 & +2x_2 & \geq 7 \\ & x_{1,} & x_2 & \geq 0, enteres\end{cases}$$

La solució òptima de la relaxació lineal de (PE) ve donada per:

$$\mathcal{B}=\{1,2\}\,;\; B=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 3 & 2\end{bmatrix}\;;\; B^{-1}=\begin{bmatrix}-2/7 & 3/7\\ 3/7 & -1/7\end{bmatrix}\;;\; x_B=\begin{bmatrix}11/7\\ 8/7\end{bmatrix}$$

$$\mathcal{N}=\{3,4\}\,;\; A_N=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\;;\; V=B^{-1}A_N=\begin{bmatrix}2/7 & -3/7\\ -3/7 & 1/7\end{bmatrix}\;;\; r'=[1 \quad 1]$$

a) Trobeu el tall de Gomory associat a x_1.
b) Apliqueu l'algorisme de plans secants de Gomory a la resolució de (PE) i comproveu com, si definiu a la primera iteració el tall associat a x_1 , s'arriba a la solució òptima en només dues iteracions. Resoleu les relaxacions lineal per reoptimització amb el símplex dual.

(SOLUCIÓ EXERCICI 95)

EXERCICI 96. Algorismes de plans secants amb símplex dual (2)

Considereu el següent problema de programació lineal entera (PE1):

$$(PE1)\begin{cases}\min & 4x_1 & +5x_2 & \\ \text{s.a.:} & x_1 & +3x_2 & \geq 5 \\ & 3x_1 & +2x_2 & \geq 7 \\ & x_{1,} & x_2 & \geq 0, \text{ enteres}\end{cases}$$

La solució òptima de la relaxació lineal (RL1) ve donada per:

$$\mathcal{B}=\{1,2\}\,;\; B=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 3 & 2\end{bmatrix}\;;\; B^{-1}=\begin{bmatrix}-2/7 & 3/7\\ 3/7 & -1/7\end{bmatrix}\;;\; x_B=\begin{bmatrix}11/7\\ 8/7\end{bmatrix}$$

$$\mathcal{N}=\{3,4\}\,;\; A_N=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\;;\; V=B^{-1}A_N=\begin{bmatrix}2/7 & -3/7\\ -3/7 & 1/7\end{bmatrix}\;;\; r'=[1 \quad 1]$$

Suposeu que esteu resolent (PE1) mitjançant l'algorisme de plans secants de Gomory, i que ja heu realitzat la primera iteració, on s'ha introduït el tall de Gomory associat a x_2. Realitzeu la segona iteració de l'algorisme resolent la relaxació lineal per reoptimització amb el símplex dual. En particular:

a) Trobeu el tall de Gomory associat a $\mathbf{x}_2$
b) Formuleu el problema (PE2) i trobeu l'òptim de la seva relaxació lineal (RL2) reoptimitzant amb l'algorisme del símplex dual a partir de la base òptima de (RL1).

c) Definiu el nou tall de Gomory associat a la variable de la solució obtinguda de (RL2) amb part fraccional més gran i el problema (PE3) resultant.

(SOLUCIÓ EXERCICI 96)

EXERCICI 97. Algorisme de ramificació i tall amb resolucions gràfiques (1).

Considereu el següent problema de programació lineal entera (PE1):

$$(PE)\begin{cases}\min & -x_1 & -x_2 & \\ \text{s.a.:} & x_1 & +2x_2 & \leq 1 \\ & 2x_1 & +x_2 & \leq 1 \\ & x_{1,} & x_2 & \geq 0, \text{enteres}\end{cases}$$

a) Trobeu la solució òptima de (PE) amb l'algorisme de ramificació i tall (*Branch* & Cut) aplicat seguint les següents indicacions:
   - Ressoleu els problemes relaxats gràficament.
   - Introduïu un tall de Gomory a cada node de l'arbre d'exploració..
   - Trieu com a variable de generació del tall i de ramificació $x_1$abans que x_2.
   - Exploreu primer la branca de l'esquerra ($x_i \leq \lfloor x_i^* \rfloor$).

b) Expliqueu quina és la millora que s'obté en aplicar l'algorisme de B&C al problema (PE) en relació a l'aplicació de l'algorisme de B&B comparant els respectius arbres d'exploració.

(SOLUCIÓ EXERCICI 97)

EXERCICI 98. Algorisme de ramificació i tall amb resolucions gràfiques (2).

Considereu el següent problema de programació lineal entera (PE):

$$(PE)\begin{cases}\min & x_1 & -x_2/2 & & \\ \text{s.a.:} & x_1 & +2x_2 & \leq 2 & (r1) \\ & 3x_1 & +x_2 & \geq 3 & (r2) \\ & x_{1,} & x_2 & \geq 0, \text{enteres} & \end{cases}$$

a) Trobeu la solució òptima de (PE) amb l'algorisme de ramificació i tall (Branch & Cut) aplicat seguint les següents indicacions:
   - Ressoleu els problemes relaxats gràficament.
   - Introduïu un tall de Gomory a cada node de l'arbre d'exploració..
   - Trieu com a variable de generació del tall i de ramificació $x_1$abans que x_2.
   - Exploreu primer la branca de l'esquerra ($x_i \leq \lfloor x_i^* \rfloor$).

b) Expliqueu quina és la millora que s'obté en aplicar l'algorisme de B&C al problema (PE) en relació a l'aplicació de l'algorisme de B&B comparant els respectius arbres d'exploració.

(SOLUCIÓ EXERCICI 98)

EXERCICI 99. Algorisme de ramificació i tall amb resolucions gràfiques (3).

Considereu el següent problema de programació lineal entera:

$$(PE)\begin{cases}\min & x_1 & -x_2 & \\ \text{s.a.:} & x_1 & -x_2 & \leq -1 \\ & & x_2 & \leq \frac{5}{2} \\ & x_{1,} & x_2 & \geq 0, enteres\end{cases}$$

Resoleu el problema (PE) aplicant l'algorisme de Branch & Cut fent:

- Afegiu un tall de Gomory a cada node de l'arbre.
- Preneu com a variable de generació de tall i de separació x_1 abans que x_2.
- Resoleu les relaxacions lineals gràficament.

(SOLUCIÓ EXERCICI 99)

EXERCICI 100. Algorisme de ramificació i tall amb resolucions gràfiques (4).

Considereu el següent problema de programació lineal entera:

$$(PE)\begin{cases}\min & -x_1 & & \\ \text{s.a.:} & x_1 & -x_2 & \leq -1 \\ & x_1 & +x_2 & \leq \dfrac{5}{2} \\ & x_{1,} & x_2 & \geq 0, enteres\end{cases}$$

Resoleu el problema (PE) aplicant l'algorisme de Branch & Cut d'acord amb el següent criteri:

- Afegiu un tall de Gomory a cada node de l'arbre.
- Preneu com a variable de generació de tall i de separació x_1 abans que x_2.
- Resoleu la primera relaxació lineal de cada node gràficament i la resta reoptimitzant amb el símplex dual. Les podeu resoldre-les també totes gràficament, amb una penalització sobre la nota d'un punt.
- En acabar, representeu l'arbre d'exploració

(SOLUCIÓ EXERCICI 100)

EXERCICI 101. Algorisme de plans secants i B&B amb resolucions gràfiques.

Considereu el següent problema de programació lineal entera:

$$(PE)\begin{cases}\min & x_2 & & & \\ \text{s.a.:} & 2x_1 & -2x_2 & \leq & 1 \\ & 2x_1 & +2x_2 & \geq & 3 \\ & x \geq 0, & x \in \mathbb{Z} & & \end{cases}$$

a) Realitzeu la primera iteració de l'algorisme de plans secants de Gomory resolent la relaxació lineal $(RL1)$ gràficament.
b) Obtingueu la solució òptima del problema relaxat de la segona iteració de Gomory per reoptimització amb l'algorisme del símplex dual a partir de x^*_{RL1}.
c) Resoleu el problema (PE) aplicant l'algorisme de ramificació i tall (Branch&Cut) d'acord amb els següents criteris:

   - Resoleu totes les relaxacions lineal gràficament.
   - Introduïu un tall de Gomory (podeu aprofitar els càlculs fets a l'apartat a)).
   - Preneu com a variable de separació x_1 abans que x_2.
   - Exploreu primer la branca associada a la fita $x_i \leq \lfloor x^*_{RL_i} \rfloor$.

   Indiqueu molt clarament les diferents passes de l'algorisme.

(SOLUCIÓ EXERCICI 101)

EXERCICI 102. Algorisme de ramificació i tall amb resolucions gràfiques (5).

Es vol resoldre el següent problema (PE) amb l'algorisme de ramificació i tall amb la introducció d'un tall de Gomory a cada iteració:

$$(PE)\begin{cases}\min & -x_1 & +2x_2 & & \\ \text{s.a.:} & & & & \\ (r1) & 2x_1 & -2x_2 & \leq & 1 \\ (r2) & 2x_1 & +2x_2 & \geq & 3 \\ & x_1, & x_2 & \geq & 0, x \in \mathbb{Z}\end{cases}$$

Resoleu el problema (PE) amb l'algorisme de ramificació i tall tenint en compte que:

- Heu de resoldre totes les relaxacions lineal gràficament.
- Heu d'introduir un tall de Gomory a cada iteració.
- Heu de prendre com a variable de separació x_1 abans que x_2.
- Heu d'explorar primer la branca associada a la fita $x_i \leq \lfloor x^*_{RL_i} \rfloor$.

Podeu usar la següent informació:

- El tall de Gomory introduït a la primera iteració de l'algorisme és $(r3)$: $3x_2 \geq 2$.
- L'òptim del problema relaxat $(RL1{,}1)$ associat al tall de Gomory $(r3)$ és $x^*_{RL1,1} = \begin{bmatrix}7/6\\2/3\end{bmatrix}$.

Indiqueu molt clarament les diferents passes de l'algorisme.

(SOLUCIÓ EXERCICI 102)

EXERCICI 103. Algorisme de ramificació i tall amb símplex dual (1).

Considereu el següent problema de PLE: $(PE)\begin{cases}\min & -x_1 & -2x_2 & \\ \text{s.a.:} & 2x_1 & +x_2 & \leq 3 \\ & x_1 & +3x_2 & \leq 2 \\ & x_{1,} & x_2 & \geq 0 & , enteres\end{cases}$

Sabent que la base òptima de la relaxació lineal de (PE) és $\mathcal{B} = \{1,2\}$, amb $B^{-1} = \begin{bmatrix}3/5 & -1/5\\-1/5 & 2/5\end{bmatrix}$, realitzeu la primera iteració d'un algorisme B&C, explicant les diferents passes (selecció, relaxació, eliminació, separació) que apliqueu. Seguiu les següents indicacions:

- Genereu un únic tall de Gomory que sigui l'associat a la variable bàsica no entera d'índex menor.
- Resoleu les relaxacions lineals reoptimitzant amb l'algorisme del símplex dual.
- Preneu com a variable de separació la variable no entera d´índex menor.

(SOLUCIÓ EXERCICI 103)

EXERCICI 104. Algorisme de plans secants amb símplex dual (2).

Considereu el següent problema de programació lineal entera:

$$(PE)\begin{cases}\min & -x_1 & -x_2 & \\ \text{s.a.:} & x_1 & -x_2 & \leq -1 \\ & & x_2 & \leq \dfrac{5}{2} & \leftarrow \text{ vigileu!!} \\ & x_{1,} & x_2 & \geq 0, enteres\end{cases}$$

Resoleu el problema (PE) aplicant l'algorisme de plans secants de Gomory fent:

- Preneu com a variable de generació de tall x_1 abans que x_2.
- Resoleu la primera relaxació lineal gràficament i les restants reoptimitzant amb el símplex dual.

(SOLUCIÓ EXERCICI 104)

EXERCICI 105. Algorisme de ramificació i tall amb símplex dual (3).

Considereu el següent problema de programació lineal entera:

$$(PE)\begin{cases} \min & -x_1 & & \\ \text{s. a.}: & & x_2 & \geq 1 \\ & 2x_1 & +2x_2 & \leq 5 \\ & x_{1,} & x_2 & \geq 0, enteres \end{cases}$$

Resoleu el problema (PE) aplicant l'algorisme de Branch & Cut d'acord amb el següent criteri:

- Afegiu un tall de Gomory a cada node de l'arbre.
- Preneu com a variable de generació de tall i de separació x_1 abans que x_2.
- Resoleu la primera relaxació lineal de cada node gràficament i la resta reoptimitzant amb el símplex dual.

(SOLUCIÓ EXERCICI 105)

EXERCICI 106. Arbre del B&B i algorisme de B&C amb símplex dual (4).

Considereu el següent problema de (PE)

$$(PE)\begin{cases} \min & x_1 & +x_2 & & \\ \text{s.a.:} & & & & \\ & x_1 & +x_2 & \geq & 1 \\ & 2x_1 & -x_2 & = & 0 \\ & x_1, & x_2 & \geq & 0, x \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Volem resoldre aquest problema amb l'algorisme del B&B i del B&C amb els següents criteris:

- Seleccioneu com a variable de ramificació i de generació del tall la que tingui el major índex.
- Exploreu l'arbre en profunditat triant primer la branca de la esquerra ($x_i \leq \lfloor x_i^* \rfloor$).

a) Obtingueu l'arbre d'exploració de l'algorisme de ramificació i poda (no cal que indiqueu el detall de les iteracions de l'algorisme, només l'arbre d'exploració final). Indiqueu a cada node separat la fita $\underline{z}_{PEj}^*$ i el valor de x_{RLj}^* i a cada node eliminat els valors de z^* i x^* o el motiu de la seva eliminació.

b) Resoleu el problema (PE) amb l'algorisme de ramificació i tall (B&C) reforçant les formulacions amb un tall de Gomory. Resoleu la primera relaxació lineal gràficament la resta reoptimitzant amb l'algorisme del símplex dual.

(SOLUCIÓ EXERCICI 106)