Resolución de SLNHs

Rafael Ramírez Ros

Clase 9 (de problemas de EDOs-GM)

Abreviaturas

- SL = Sistema lineal
- SLH/SLNH = Sistema lineal homogéneo/no homogéneo
- CC = Coeficientes constantes
- PVI = Problema de valor inicial (o de Cauchy)
- LI/LD = Linealmente independiente/dependiente
- VAP/VEP = Valor/vector propio
- PEQ = Punto de equilibrio

Estructura de la soluciones

- Sea $A : I \to \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ una función matricial y sea $\boldsymbol{b} : I \to \mathbb{R}^n$ una función vectorial, ambas continuas en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$.
- La solución general del SLNH $\boldsymbol{x}' = A(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}(t)$ es

$$\boldsymbol{x}_{\mathrm{g}}(t) = \boldsymbol{x}_{\mathrm{h}}(t) + \boldsymbol{x}_{\mathrm{p}}(t)$$

  donde:
  - $\boldsymbol{x}_{\mathrm{h}}(t)$ es la solución general del SLH $\boldsymbol{x}' = A(t)\boldsymbol{x}$; y
  - $\boldsymbol{x}_{\mathrm{p}}(t)$ es una solución particular del SLNH $\boldsymbol{x}' = A(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}(t)$.
- Si $\Phi(t)$ es una matriz fundamental del SLH $\boldsymbol{x}' = A(t)\boldsymbol{x}$,

$$\boldsymbol{x}_{\mathrm{h}}(t) = \Phi(t)\boldsymbol{c},$$

  donde el vector constante $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ queda libre.

Variación de las constantes (1a parte)

- Buscamos una solución particular $\boldsymbol{x}_{\mathrm{p}}(t)$ sustituyendo el vector constante $\boldsymbol{c}$ por una función $\boldsymbol{u}(t)$.
- Si la función vectorial $\boldsymbol{u} : I \to \mathbb{R}^n$ es derivable y

  $$\Phi(t)\boldsymbol{u}'(t) = \boldsymbol{b}(t),$$

  entonces

  $$\boldsymbol{x}_{\mathrm{p}}(t) = \Phi(t)\boldsymbol{u}(t)$$

  es una solución particular del SLNH $\boldsymbol{x}' = A(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}(t)$.
- No se necesita ninguna constante de integración al calcular las primitivas, pues solo queremos una solución particular.
- Ejemplos: Problemas 25 y 27.

Variación de las constantes (2a parte)

- Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbf{R})$ una matriz constante.
- Sea $\boldsymbol{b} : I \to \mathbf{R}^n$ una función vectorial continua.
- Condición inicial: $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$ con $t_0 \in I$ y $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbf{R}^n$.
- La única solución del PVI es:

$$\boldsymbol{x}(t) = \mathrm{e}^{(t-t_0)A}\boldsymbol{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{(t-s)A}\boldsymbol{b}(s)\mathrm{d}s.$$

- Ejemplo: Problema 26.

Coeficientes indeterminados (término constante)

- SLNH: $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$, con $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbf{R})$ y $\boldsymbol{b} \in \mathbf{R}^n$ constantes.
- ¿Existen soluciones particulares constantes: $\boldsymbol{x}_{\mathrm{p}}(t) \equiv \boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{R}^n$?
- Nota: Las soluciones constantes son PEQs del SLNH.
- Observación: $\boldsymbol{x}_{\mathrm{p}}(t) \equiv \boldsymbol{\alpha}$ solución particular $\Leftrightarrow A\boldsymbol{\alpha} = -\boldsymbol{b}$.
- Respuestas:
  1. $\det(A) \neq 0$ (o sea, $\lambda = 0$ no es un VAP de A) $\Rightarrow \exists!\, \boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{R}^n$;
  2. Si $\det(A) = 0$ y $\operatorname{rango}(A|\boldsymbol{b}) = \operatorname{rango}(A) \Rightarrow \exists\infty\, \boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{R}^n$; y
  3. Si $\det(A) = 0$ y $\operatorname{rango}(A|\boldsymbol{b}) > \operatorname{rango}(A) \Rightarrow \nexists\, \boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{R}^n$.
- Ejercicio: Si $\lambda = 0$ es un VAP semi-simple, $\exists!\, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \mathbf{R}^n$ tales que $\boldsymbol{x}_{\mathrm{p}}(t) = \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} t$ es una solución particular del SLNH.
- Ejemplo: Problema 23.

Coeficientes indeterminados (término “exponencial”)

- SLNH: $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{p}(t)\mathrm{e}^{\lambda t}$, donde
  - $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbf{R})$ es una matriz constante;
  - $\lambda \in \mathbf{R}$ no es un VAP de A; y
  - $\boldsymbol{p}(t) = \sum_{j=0}^{m} \boldsymbol{p}_j t^j \in \left(\mathbf{R}^n\right)_m[t]$ es un polinomio de grado $\leq m$.
- Teorema: $\exists!\, \boldsymbol{q}(t) \in \left(\mathbf{R}^n\right)_m[t]$ tal que

$$\boldsymbol{x}_{\mathrm{p}}(t) = \boldsymbol{q}(t)\mathrm{e}^{\lambda t}$$

  es una solución particular del SLNH.
- Demostración: Dado $\boldsymbol{p}(t) = \sum_{j=0}^{m} \boldsymbol{p}_j t^j$ imponemos que $q(t) = \sum_{j=0}^{m} \boldsymbol{q}_j t^j$ cumpla la tesis. Obtenemos un sistema lineal compatible determinado en las incógnitas $\boldsymbol{q}_0, \ldots, \boldsymbol{q}_m$.
- Advertencia: Es un sistema de dimensión $(m+1)n$.
- Nota: Si $\lambda = 0$, el término no homogéneo es polinomial.
- Ejemplos: Problemas 24a y 27.

Coeficientes indeterminados (término "trigonométrico")

- SLNH: $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x} + \mathrm{e}^{\alpha t}\left[\boldsymbol{c}(t)\cos(\beta t) + \boldsymbol{s}(t)\sin(\beta t)\right]$, donde
  - $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbf{R})$ es una matriz constante;
  - $\lambda_\pm = \alpha \pm \beta\mathrm{i} \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$ no son VAPs de A; y
  - $\boldsymbol{c}(t), \boldsymbol{s}(t) \in \left(\mathbf{R}^n\right)_m[t]$ son dos polinomios de grado $\leq m$.
- Tesis: $\exists!\, \boldsymbol{b}(t), \boldsymbol{r}(t) \in \left(\mathbf{R}^n\right)_m[t]$ tales que

$$\boldsymbol{x}_{\mathrm{p}}(t) = \mathrm{e}^{\alpha t}\left[\boldsymbol{b}(t)\cos(\beta t) + \boldsymbol{r}(t)\sin(\beta t)\right]$$

  es una solución particular del SLNH.
- Demostración: Dados $\boldsymbol{c}(t)$ y $\boldsymbol{s}(t)$, imponemos que $\boldsymbol{b}(t)$ y $\boldsymbol{r}(t)$ cumplan la tesis. Obtenemos un sistema lineal compatible determinado en las incógnitas $\boldsymbol{b}_0, \boldsymbol{r}_0, \ldots, \boldsymbol{b}_m, \boldsymbol{r}_m$.
- Advertencia: Es un sistema de dimensión $2(m+1)n$.
- Ejemplo: Problema 24b.

Reducción de la dimensión (caso SLHs)

- SLH: $\boldsymbol{x}' = A(t)\boldsymbol{x}$ con $A(t)$ continua en un intervalo $I \subset \mathbf{R}$.
- $\boldsymbol{h}_1(t), \ldots, \boldsymbol{h}_m(t)$ soluciones LI del SLH.
- $\boldsymbol{h}_1(t), \ldots, \boldsymbol{h}_n(t)$ base para todo $t \in \mathbf{R}$.
- $H(t)$ matriz obtenida al poner esas funciones por columnas.
- Cambio de variable dependiente: $\boldsymbol{x} = H(t)\boldsymbol{u}$.
- SLH transformado: $\boldsymbol{u}' = B(t)\boldsymbol{u}$, donde las primeras m columnas de $B(t)$ son nulas.
- Hemos reducido la "dimensión" de n a $n - m$.
- Ejemplo con $m = 1$ y $n = 2$: Problema 28.

Sistemas triangulares

- SLNH: $\boldsymbol{x}' = A(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}(t)$ con $A(t)$ triangular inferior/superior.
- Resolvemos recursivamente en orden descendente/ascendente las ecuaciones del sistema, empezando por la primera/última.
- Ejemplo: Problema 29.