Entregable 0: Teorema de Sylvester.

Àlgebra Multilineal i Geometria. Grau en Matemàtiques, UPC, tardor 2020.

Àlex Batlle Casellas

Sigui A una matriu $n \times n$ simètrica. Denotem per δ_k els menors principals de la matriu A, és a dir,

$$\delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1k} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}.$$

Teorema de Sylvester. A és definida positiva si, i només si, $\delta_1, \dots, \delta_n > 0$.
1. Proveu la implicació directa.

Primer de tot, recordem el **Teorema Espectral**: $\mathbf{k} = \mathbb{R}$ el cos dels reals, si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{k})$ és $A^T = A$, aleshores A diagonalitza a valors propis reals, i ho fa en una base ortonormal de vectors propis. Per tant, la nostra A diagonalitza, i el determinant (en ser invariant per canvis de base) és el mateix en les dues bases. En particular, és $\det A = \prod_{i=1}^n \lambda_i$. Provarem el següent resultat:

Lema. Els menors principals δ_k compleixen

$$\delta_k = \prod_{i=1}^k \lambda_i, \ \forall k \in \mathbb{N} : 1 \leq k \leq n.$$

Demostració. Suposem (sense pèrdua de generalitat) que A està expressada en la base canònica de $\mathbf{k}^n$. Aleshores, A té l'aspecte següent:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Si agafem la base canònica de $\mathbf{k}^n$ i li canviem l'últim vector $\mathbf{e}_n$ per un altre vector $\mathbf{v}_n \in \ker(A - \lambda_n \mathrm{Id})$ que sigui linealment independent amb la resta de vectors de la base canònica, i per tant la base resultant és

$$\mathbf{v}^n := \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{n-1}, \mathbf{v}_n\},$$

aleshores la matriu A en aquesta base és

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_{[n-1,n-1]} & 0 \\ \hline 0 & \lambda_n \end{array} \right).$$

Aquest $\mathbf{v}_n$ el podrem trobar sempre, ja que si es donés el cas que $\ker(f - \lambda_n \mathrm{Id}) \subseteq \langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{n-1} \rangle$, aleshores canviaríem de valor propi i trobaríem un vector propi que satisfés la nostra necessitat, pel fet que existeix una base de vectors propis. Com que el determinant és invariant per canvi de base,

$$\det A = \det \left(\begin{array}{c|c} A_{[n-1,n-1]} & 0 \\ \hline 0 & \lambda_n \end{array} \right) = \lambda_n \cdot \delta_{n-1}.$$

Sabent que $\det A = \prod_{i=1}^n \lambda_i$, això es tradueix en que $\delta_{n-1} = \prod_{i=1}^{n-1} \lambda_i$. Aquest procés el podem repetir fins a n vegades, canviant sempre l'últim vector que queda de la base canònica $\mathbf{e}_l$ per un vector propi de valor propi λ_l, linealment independent amb la resta per la condició de base de vectors propis, i la base corresponent seria $\mathbf{v}^l = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{l-1}, \mathbf{v}_l, \ldots, \mathbf{v}_n\}$. Per exemple, pel següent, tindríem que

$$\det A = \det \left(\begin{array}{c|cc} A_{[n-2,n-2]} & \multicolumn{2}{c}{0} \\ \hline \multirow{2}{*}{0} & \lambda_{n-1} & 0 \\ & 0 & \lambda_n \end{array}\right) = \lambda_n \cdot \lambda_{n-1} \cdot \delta_{n-2},$$

i per tant, que $\delta_{n-2} = \prod_{i=1}^{n-2} \lambda_i$. Iterant aquest procés, arribarem a tenir $\mathbf{v}^1 = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$, amb la qual veiem que efectivament, $\delta_k = \prod_{i=1}^{k} \lambda_i$.

Utilitzant aquest lema i sabent que A és definida positiva, això vol dir que tots els $\lambda_i > 0$, i per tant, per extensió, tots els δ_k també són positius, per ser producte de positius ■

2. Sigui $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ una base d'un espai vectorial E i $F \subset E$ un subespai de dimensió d. Proveu que si $m < d$, aleshores $F \cap \langle \mathbf{u}_{m+1}, \ldots, \mathbf{u}_n \rangle \neq \{0\}$.

Suposem que $d > 0$. D'una altra manera, el resultat és immediatament fals, ja que $F = \{0\}$. Ho provarem utilitzant la **fórmula de Grassman**: sigui $G = \langle \mathbf{u}_{m+1}, \ldots, \mathbf{u}_n \rangle$, observem que $G \subset E$ n'és un subespai de dimensió $n - m$. Com que $m < d$, tenim que $n - m + d > n$, i com que tant F com G són subespais d'E, $F + G = E$. Aleshores, aplicant la fórmula de Grassmann,

$$\dim(F \cap G) + \dim(F + G) = \dim F + \dim G,$$

veiem que $\dim(F \cap G) + n = d + (n - m)$, i treient n d'ambdós costats, tenim

$$\dim(F \cap G) = d - m > 0,$$

i per tant, $F \cap \langle \mathbf{u}_{m+1}, \ldots, \mathbf{u}_n \rangle \neq \{0\}$ ■

3. Amb les notacions del paràgraf anterior, sigui φ una forma bilineal simètrica de matriu A en la base $\mathcal{B}$. Proveu que si φ_F és definida positiva, aleshores com a mínim d dels valors propis d'A (comptats amb multiplicitat) són positius.