Facultat de Matemàtiques i Estadística

Universitat Politècnica de Catalunya - BarcelonaTech

Geometría Afín y Euclídea (Q2)

Àlex Batlle Casellas

February 12, 2019

Índex

1 Espacio Afín.

1.1 Definiciones.

<u>**Definición**</u>:
Sea E un $\mathbb{K}$-e.v. Un **espacio afín** asociado a E es una triple $\mathbb{A} = (A, E, \delta)$ donde A es un conjunto y δ es una aplicación

$$\begin{aligned}\delta\colon A \times A &\to E\\ (p,q) &\mapsto \delta(p,q).\end{aligned}$$

que cumple con las siguientes propiedades:

1. $\forall p_1, p_2, p_3 \in A,\ \delta(p_1, p_2) + \delta(p_2, p_3) = \delta(p_1, p_3)$.

2. $\forall p \in A$, la siguiente aplicación es biyectiva:

$$\begin{aligned}\delta_p\colon A &\to E\\ q &\mapsto \delta_p(q) := \delta(p,q).\end{aligned}$$

A los elementos de A les llamaremos **puntos**. Usaremos la siguiente notación:

1. $\dim A := \dim E$.

2. Si $\vec{u} = \delta(p,q)$, p es el **origen** de $\vec{u}$ y q es su **extremo**.

3. $\delta(p,q) := \vec{pq} = q - p$.

4. Usando la anterior notación, la propiedad (1): $(p_2 - p_1) + (p_3 - p_2) = (p_3 - p_1)$.

5. Si $\vec{u} = \vec{pq} = q - p \implies q = p + \vec{u}$.

<u>Ejemplos</u>:

1. $\mathbb{A} = ((0,\infty), \mathbb{R}, \delta)$:

$$\begin{aligned}\delta\colon A \times A &\to E\\ (p,q) &\mapsto \delta(p,q) := \ln q - \ln p.\end{aligned}$$

   Comprobemos las propiedades:

   - Propiedad 1: $\delta(p_1,p_2) + \delta(p_2,p_3) = (\ln p_2 - \ln p_1) + (\ln p_2 - \ln p_3) = \ln p_3 - \ln p_1 = \delta(p_1, p_3)$.
   - Propiedad 2: Si fijamos p,

$$\begin{aligned}\delta_p\colon A &\to E\\ q &\mapsto \delta_p(q) := \ln q - \ln p\end{aligned}$$

     es biyectiva.$\square$

2. $\mathbb{A} = (\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2, \delta)$, y δ es la aplicación tal que si $p = (x_1, y_1), q = (x_2, y_2)$, entonces

$$\begin{aligned} \delta \colon A \times A &\to E \\ (p, q) &\mapsto \delta(p, q) := (x_2 - x_1, y_2 - y_1). \end{aligned}$$

Definición:
$\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ es el espacio afín definido como $\mathbb{A} = (\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^n, \delta)$, y δ es la aplicación de **resta de coordenadas**.
Propiedades:
Sea $\mathbb{A}$ un espacio afín:

1. $\delta(p, q) = \vec{0} \iff q = p$.
2. $\delta(p, q) = -\delta(q, p)$.
3. $\delta(p_1, p_2) = \delta(p_3, p_4) \iff \delta(p_1, p_3) = \delta(p_2, p_4)$. (regla del paralelogramo)

Demostración:

1. (a) $\Leftarrow$) Cojamos $\vec{u} \in E$. Recordemos que δ_p es biyectiva para todo $p \in A$ fijado. Entonces, $\exists q \in A$ tal que $\vec{u} = \delta(p, q)$. Entonces, $\delta(p, p) + \vec{u} = \delta(p, p) + \delta(p, q) = \delta(p, q) = \vec{u} \implies \delta(p, p) = \vec{0}$.
   (b) $\Rightarrow$) Por hipótesis, $\delta(p, q) = \vec{0}$, y como ya hemos visto, $\delta(p, p) = \vec{0}$. Como δ_p es biyectiva, $p = q$.$\square$
2. $\delta(p, q) + \delta(q, p) = \delta(p, p) = \vec{0} \implies \delta(p, q) = -\delta(q, p)$.$\square$
3. Por simetría, solo hace falta demostrar una dirección. Por tanto, demostremos $\Rightarrow$, con hipótesis $\delta(p_1, p_2) = \delta(p_3, p_4)$:

$$\delta(p_1, p_3) = \delta(p_1, p_2) + \delta(p_2, p_3) = \delta(p_3, p_4) + \delta(p_2, p_3) = \delta(p_2, p_4).\square$$

1.2 Combinaciones afines de puntos.

Observación: Hasta ahora, las "operaciones" definidas son:

1. Combinaciones lineales de vectores en E.
2. $p, q \in A \implies \delta(p, q) = q - p \in E$.
3. $p \in A, \vec{u} \in E \implies p + \vec{u} \in A$.

En general, hacer "combinaciones lineales" de una colección de puntos $p_1, \ldots, p_r \in A$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{K}$,

$$\alpha_1 p_1 + \ldots + \alpha_r p_r = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i p_i$$

no tiene sentido, pero hay **dos casos** en los que sí lo tiene:

1. $\sum \alpha_i = 1$.
Definición:
Sean $p_1, \ldots, p_r \in A$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{K}$ tales que $\sum_{i=1}^r \alpha_i = 1$. Entonces, por definición,

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i p_i := \bar{p} + \sum_{i=1}^{r} \alpha_i (p_i - \bar{p}) \in A, \text{ cogiendo } \bar{p} \in A \text{ como punto auxiliar.}$$

Proposición:
El proceso anterior no depende del punto auxiliar $\bar{p}$ que escojamos.
Demostración:
Sean $\bar{p}, \bar{\bar{p}} \in A$ puntos cualesquiera de A. Entonces,

$$\begin{aligned}
\bar{p} + \sum \alpha_i (p_i - \bar{p}) &= \bar{\bar{p}} + \sum \alpha_i (p_i - \bar{\bar{p}}) \\
&\iff (\bar{p} - \bar{\bar{p}}) + \sum \alpha_i (p_i - \bar{p}) \\
&= (\bar{\bar{p}} - \bar{\bar{p}}) + \sum \alpha_i (p_i - \bar{\bar{p}}) \\
&\iff (\bar{p} - \bar{\bar{p}}) + \sum \alpha_i [(p_i - \bar{p}) - (p_i - \bar{\bar{p}})] \\
&= \vec{0} \\
&\iff (\bar{p} - \bar{\bar{p}}) + \sum \alpha_i [(p_i - \bar{p}) + (\bar{\bar{p}} - p_i)] \\
&= \vec{0} \\
&\iff (\bar{p} - \bar{\bar{p}}) + \sum \alpha_i [(\bar{\bar{p}} - \bar{p})] \\
&= \vec{0} \\
&\iff (\bar{p} - \bar{\bar{p}}) + (\bar{\bar{p}} - \bar{p}) \\
&= \vec{0} \\
&\iff \delta(\bar{p}, \bar{p}) \\
&= \vec{0}. \square
\end{aligned} \tag{1}$$

Definición:
Dada una colección de puntos $p_1, \ldots, p_m \in A$, el **baricentro** de todos ellos es el punto b resultante de la combinación afín siguiente:

$$b = \frac{1}{m} p_1 + \frac{1}{m} p_2 + \ldots + \frac{1}{m} p_m = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{m} p_i \in A.$$

2. $\sum \alpha_i = 0$.
Definición:
Sean $p_1, \ldots, p_r \in A$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{K}$ tales que $\sum_{i=1}^r \alpha_i = 0$. Entonces, por definición,

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i p_i := \sum_{i=1}^{r} \alpha_i (p_i - \bar{p}) \in E, \text{ cogiendo } \bar{p} \in A \text{ como punto auxiliar.}$$

Proposición:
El proceso anterior no depende del punto auxiliar $\bar{p}$ que escojamos.

Demostración:
Sean $\bar{p}, \bar{\bar{p}} \in A$ puntos cualesquiera de A. Entonces,

$$\sum \alpha_i(p_i - \bar{p}) \underset{\Longleftrightarrow}{=} \sum \alpha_i(p_i - \bar{\bar{p}}) \tag{2}$$

Observación: Combinaciones de puntos.

1. $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$. En esta situación, sean $p_1 = (a_1, \dots, a_n)$, $p_2 = (b_1, \dots, b_n)$. Entonces, $\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 = (\alpha_1 a_1 + \alpha_2 b_1, \dots, \alpha_1 a_n + \alpha_2 b_n)$ (si $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$ o $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$).
2. Ejemplo: $p_1 - \frac{3}{2}p_2 + \frac{1}{2}p_3 = (p_1 - p_2) + \frac{1}{2}(p_3 - p_2)$.

1.3 Coordenadas.

Definición:
Sea $\mathbb{A}$ un espacio afín de $\dim A = n < \infty$ asociado a un $\mathbb{K}$-e.v. E.

1. Llamaremos **sistema de referencia en** $\mathbb{A}$ a

$$\mathcal{R} = \{p;\ v_1, \dots, v_n\},\ \text{donde } p \in A,\ \mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\} \text{ base de E.}$$

2. Dado $q \in A$, llamaremos **coordenadas de** q **en** $\mathcal{R}$ a $q_{\mathcal{R}} = (\vec{pq})_{\mathcal{B}}$.

Observación:

1. Como δ_p es biyectiva y

$$\begin{aligned} E &\to \mathbb{K}^n \\ v &\mapsto v_B \end{aligned}$$

también lo es, la asignación de coordenadas a un punto es biyectiva.

2. $q_R = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \iff q - p = \sum_{i=1}^n x_i v_i$.

Ejemplos:

1. $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$.
$\mathcal{R} = \{p = (1,3);\ v_1 = (1,1), v_2 = (2,1)\}$, $q = (4,5)$. Entonces, $q - p = (4,5) - (1,3) = (3,2) = v_1 + v_2 \implies q_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
2. $\mathcal{R} = \{(0,0);\ e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)\}$. $q = (4,5) \implies q_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Definición:
En $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ llamaremos **referencia ordinaria** a

$$\mathcal{R}_{\text{ord}} := \{0;\ \mathcal{B}_{\text{canónica}}\}.$$

Observación: $q = (q_1, \ldots, q_n) \in \mathbb{K}^n,\ q_{\text{ord}} = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}$.

Proposición:
Sea $\mathbb{A}$ un espacio afín de dimensión finita, y sea la referencia $\mathcal{R} = \{p;\ B\}$, con B una base de E. Entonces,

1. $p_1, \ldots, p_r \in A,\ \alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{K} :\ \sum \alpha_i = 1$. Entonces, $(\alpha_1 p_1 + \ldots + \alpha_r p_r)_{\mathcal{R}} = \alpha_1 (p_1)_{\mathcal{R}} + \ldots + \alpha_r (p_r)_{\mathcal{R}}$.
2. $p_1, \ldots, p_r \in A,\ \alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{K} :\ \sum \alpha_i = 0$. Entonces, $(\alpha_1 p_1 + \ldots + \alpha_r p_r)_B = \alpha_1 (p_1)_{\mathcal{R}} + \ldots + \alpha_r (p_r)_{\mathcal{R}}$.
3. Caso particular. $(p_2 - p_1)_B = (p_2)_{\mathcal{R}} - (p_1)_{\mathcal{R}}$.

Demostración:

Proposición:
Cambio de sistema de referencia. Sea $\mathbb{A}$ un espacio afín de dimensión finita n. Sean $\mathcal{R}_1 = \{p_1;\ v_1, \ldots, v_n\}, \mathcal{R}_2 = \{p_2;\ w_1, \ldots, w_n\}$ dos sistemas de referencia. Sean $(p_2)_{\mathcal{R}_1} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, y $S = M_{B_2 \to B_1} = \begin{pmatrix} | & & | \\ (w_1)_{B_1} & \cdots & (w_n)_{B_1} \\ | & & | \end{pmatrix}$. Sea $q \in A$ tal que $q_{\mathcal{R}_1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, q_{\mathcal{R}_2} = \begin{pmatrix} \bar{x_1} \\ \vdots \\ \bar{x_n} \end{pmatrix}$. Entonces,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} \bar{x_1} \\ \vdots \\ \bar{x_n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad q_{\mathcal{R}_1} = S q_{\mathcal{R}_2} + (p_2)_{\mathcal{R}_2}.$$

Demostración:
$q_{\mathcal{R}_1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. $q - p_1 = (q - p_2) + (p_2 - p_1)$. Entonces,

$$(q - p_1)_{B_1} = (q - p_2)_{B_1} + (p_2 - p_1)_{B_1} \implies \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = q_{\mathcal{R}_1} = S(q - p_2)_{B_2} + (p_2)_{\mathcal{R}_1} = S \begin{pmatrix} \bar{x_1} \\ \vdots \\ \bar{x_n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}. \square$$

<u>Observación</u>: Fórmula matricial de cambio de referencia.

$$\begin{pmatrix} q_{\mathcal{R}_1} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} S & (p_2)_{\mathcal{R}_1} \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right) \begin{pmatrix} \bar{x_1} \\ \vdots \\ \bar{x_n} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{S} = \left(\begin{array}{c|c} S & (p_2)_{\mathcal{R}_1} \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right) \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K}).$$

También definiremos $\tilde{S} := M_{\mathcal{R}_2 \to \mathcal{R}_1}$. Esta matriz cumple $\det \tilde{S} = \det S$.
<u>Definición</u>:
Coordenadas ampliadas. $\mathcal{R} = \{p; B\}, q \in A, v \in B$,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = q_{\mathcal{R}} \longmapsto q_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha 1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = v_B \longmapsto v_B = \begin{pmatrix} \alpha 1 \\ \vdots \\ \alpha_n \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Llamaremos a los elementos de la derecha las **coordenadas ampliadas** de un punto y un vector.
<u>Observación</u>:

1. $\mathcal{R}_1 \xleftarrow{\tilde{S}} \mathcal{R}_2 \xleftarrow{\tilde{T}} \mathcal{R}_3$, entonces $M_{\mathcal{R}_3 \to \mathcal{R}_1} = \tilde{S}\tilde{T}$.
2. Otras ventajas de las coordenadas ampliadas: ecuaciones de variedades lineales, afinidades, cuádricas.
3. Las coordenadas ampliadas son coherentes con las combinaciones afines de puntos. Si $p_1, \ldots, p_m \in A, \alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{K}$, entonces

$$(\alpha_1 p_1 + \ldots + \alpha_m p_m)_{\mathcal{R}} = \alpha_1 (p_1)_{\mathcal{R}} + \ldots + \alpha_m (p_m)_{\mathcal{R}} = \alpha_1 \begin{pmatrix} | \\ | \\ 1 \end{pmatrix} + \ldots + \alpha_m \begin{pmatrix} | \\ | \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | \\ | \\ \sum \alpha_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | \\ | \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1.4 Variedades lineales.

<u>Definición</u>:
Sea $\mathbb{A}$ un espacio afín asociado a un $\mathbb{K}$-e.v. E. Entonces, una **variedad lineal** de $\mathbb{A}$ es un subconjunto:

$$V := p + F = \{p + \vec{u} | \vec{u} \in F\}, \ p \in A, \ F \subseteq E \text{subespacio vectorial}.$$

Definimos $\dim V := \dim F$.
<u>Ejemplos:</u>

1. Variedades lineales de dimensión 0: **puntos**, $\{p\}$.
2. Variedades lineales de dimensión 1: **rectas**, $\{p\} + [\vec{u}]$.
3. Variedades lineales de dimensión 2: **planos**, $\{p\} + [\vec{u}, \vec{v}]$.
4. Variedades lineales de dimensión $n - 1$: **hiperplanos**.
5. $A = p + E$.

Definición:
Sea $\mathbb{A}$ un espacio afín. Sean V y W variedades lineales, $V = p + F, W = q + G$. Entonces, definimos las siguientes **posiciones relativas** de dos variedades lineales:

1. V y W son **paralelas** $\iff F \subseteq G$ o $G \subseteq F$.
2. $V \subseteq W$: V está **incluída** en W.
3. $V \cap W \neq \emptyset \implies V$ y W se **cortan**.
4. V y W se **cruzan** $\iff V \nparallel W \wedge V \cap W = \emptyset$.

Proposición:
Sean $V = p + F, W = q + G$ variedades lineales. Entonces,

1. $V \subseteq W \iff F \subseteq G \wedge p - q \in G$. En particular, $V = W \iff F = G \wedge p - q \in F$.
2. $V \subseteq W \implies \dim V \leq \dim W$.
3. $V \subseteq W \wedge \dim V = \dim W \implies V = W$.

Demostración:

Proposición:
Sean $V = p + F, W = q + G$ variedades lineales. Entonces, $V \cap W \neq \emptyset \iff p - q \in F + G$.
Demostración:

1.4.1 Variedades lineales y combinaciones de puntos.

Proposición:
Sea $V = p + F$ una variedad lineal de $\mathbb{A}$. Sean $p_1, \ldots, p_m \in V$.