INTEGRALES IMPROPIAS

Curso 2019-2020

$$(\sqrt{\pi})^n = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2}\, dx$$

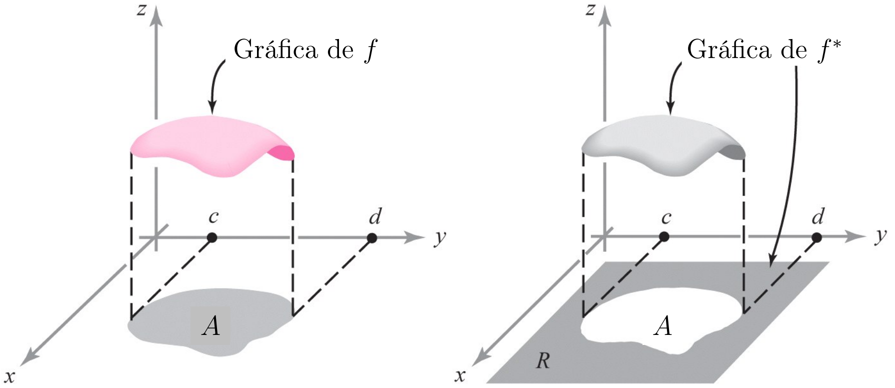
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Facultat de Matemàtiques i Estadística

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Departament de Matemàtiques

Integración en conjuntos medibles Jordan

Sea $A \in \mathfrak{J}(\mathbb{R}^n)$ y R un rectángulo tal que $A \subset R$. Si $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ está acotada definimos $f^*\colon R \longrightarrow \mathbb{R}$ su extensión a R por 0 fuera de A

- $f \in \mathscr{R}(A)$ sii es acotada y continua c.s. en A



Integración en conjuntos medibles Jordan

Sea $A \in \mathfrak{J}(\mathbb{R}^n)$ y R un rectángulo tal que $A \subset R$. Si $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ está acotada definimos $f^*\colon R \longrightarrow \mathbb{R}$ su extensión a R por 0 fuera de A

- $f \in \mathscr{R}(A)$ sii es acotada y continua c.s. en A

- ¿Podemos extender el concepto de función integrable al caso de conjuntos no acotados o más generalmente no medibles Jordan y/o funciones no acotadas.

Integración en conjuntos medibles Jordan

Sea $A \in \mathfrak{J}(\mathbb{R}^n)$ y R un rectángulo tal que $A \subset R$. Si $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ está acotada definimos $f^*\colon R \longrightarrow \mathbb{R}$ su extensión a R por 0 fuera de A

- $f \in \mathscr{R}(A)$ sii es acotada y continua c.s. en A
- ¿Podemos extender el concepto de función integrable al caso de conjuntos no acotados o más generalmente no medibles Jordan y/o funciones no acotadas.
- Como es de esperar el planteamiento reproducirá en la medida de lo posible el desarrollo que realizamos en el caso de funciones de una variable, aunque ahora los dominios de integración serán más generales que los intervalos.

Exhauciones

Denominaremos **exhaución de $E \subset \mathbb{R}^n$** a $\{E_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathfrak{J}(\mathbb{R}^n)$, una sucesión de subconjuntos medibles Jordan, tales que $E_k \subset E_{k+1} \subset E$ para todo $k \in \mathbb{N}^*$ y $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$.

Exhauciones

Denominaremos **exhaución de $E \subset \mathbb{R}^n$** a $\{E_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathfrak{J}(\mathbb{R}^n)$, una sucesión de subconjuntos medibles Jordan, tales que $E_k \subset E_{k+1} \subset E$ para todo $k \in \mathbb{N}^*$ y $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$. $\iff \chi_{E_k} \uparrow \chi_E$

Exhauciones

Denominaremos **exhaución de $E \subset \mathbb{R}^n$** a $\{E_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathfrak{J}(\mathbb{R}^n)$, una sucesión de subconjuntos medibles Jordan, tales que $E_k \subset E_{k+1} \subset E$ para todo $k \in \mathbb{N}^*$ y $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$. $\Longleftrightarrow \chi_{E_k} \uparrow \chi_E$

- Existen subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ para los que no existe ninguna exhaución

Exhauciones

Denominaremos **exhaución de $E \subset \mathbb{R}^n$** a $\{E_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathfrak{J}(\mathbb{R}^n)$, una sucesión de subconjuntos medibles Jordan, tales que $E_k \subset E_{k+1} \subset E$ para todo $k \in \mathbb{N}^*$ y $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$. $\Longleftrightarrow \chi_{E_k} \uparrow \chi_E$

- Existen subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ para los que no existe ninguna exhaución
- $E_k = [-k, k]^n$, $\widehat{E}_k = B(0, k)$, $k \in \mathbb{N}^*$ son exhauciones de $E = \mathbb{R}^n$.

Exhauciones

Denominaremos **exhaución de $E \subset \mathbb{R}^n$** a $\{E_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathfrak{J}(\mathbb{R}^n)$, una sucesión de subconjuntos medibles Jordan, tales que $E_k \subset E_{k+1} \subset E$ para todo $k \in \mathbb{N}^*$ y $E = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$. $\Longleftrightarrow \chi_{E_k} \uparrow \chi_E$

- Existen subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ para los que no existe ninguna exhaución
- $E_k = [-k,k]^n$, $\widehat{E}_k = B(0,k)$, $k \in \mathbb{N}^*$ son exhauciones de $E = \mathbb{R}^n$.
- Si $\mathbb{Q}^n = \{q_k\}_{k=1}^{\infty}$, $E_k = \{q_1,\dots,q_k\}$ es una exhaución de $E = \mathbb{Q}^n$.

Exhauciones

Denominaremos **exhaución de $E \subset \mathbb{R}^n$** a $\{E_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathfrak{J}(\mathbb{R}^n)$, una sucesión de subconjuntos medibles Jordan, tales que $E_k \subset E_{k+1} \subset E$ para todo $k \in \mathbb{N}^*$ y $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$. $\iff \chi_{E_k} \uparrow \chi_E$

- Existen subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ para los que no existe ninguna exhaución
- $E_k = [-k, k]^n$, $\widehat{E}_k = B(0, k)$, $k \in \mathbb{N}^*$ son exhauciones de $E = \mathbb{R}^n$.
- Si $\mathbb{Q}^n = \{q_k\}_{k=1}^{\infty}$, $E_k = \{q_1, \ldots, q_k\}$ es una exhaución de $E = \mathbb{Q}^n$.
- Todo es abierto no vacío $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tiene exhauciones $\{\Omega_k\}_{k=1}^{\infty}$ formadas por abiertos medibles Jordan tales que $\bar{\Omega}_k \subset \Omega_{k+1}$ para cada $k \in \mathbb{N}^*$.

Exhauciones

Denominaremos **exhaución de $E \subset \mathbb{R}^n$** a $\{E_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathfrak{J}(\mathbb{R}^n)$, una sucesión de subconjuntos medibles Jordan, tales que $E_k \subset E_{k+1} \subset E$ para todo $k \in \mathbb{N}^*$ y $E = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$. $\iff \chi_{E_k} \uparrow \chi_E$

- Existen subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ para los que no existe ninguna exhaución
- $E_k = [-k, k]^n$, $\widehat{E}_k = B(0, k)$, $k \in \mathbb{N}^*$ son exhauciones de $E = \mathbb{R}^n$.
- Si $\mathbb{Q}^n = \{q_k\}_{k=1}^{\infty}$, $E_k = \{q_1, \dots, q_k\}$ es una exhaución de $E = \mathbb{Q}^n$.
- Todo es abierto no vacío $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tiene exhauciones $\{\Omega_k\}_{k=1}^{\infty}$ formadas por <u>abiertos medibles</u> Jordan tales que $\bar{\Omega}_k \subset \Omega_{k+1}$ para cada $k \in \mathbb{N}^*$.
- Si $E \in \mathfrak{J}(\mathbb{R}^n)$, entonces E admite exhauciones.

Exhauciones

Denominaremos **exhaución de $E \subset \mathbb{R}^n$** a $\{E_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathfrak{J}(\mathbb{R}^n)$, una sucesión de subconjuntos medibles Jordan, tales que $E_k \subset E_{k+1} \subset E$ para todo $k \in \mathbb{N}^*$ y $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$. $\iff \chi_{E_k} \uparrow \chi_E$

- Existen subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ para los que no existe ninguna exhaución
- $E_k = [-k, k]^n$, $\widehat{E}_k = B(0, k)$, $k \in \mathbb{N}^*$ son exhauciones de $E = \mathbb{R}^n$.
- Si $\mathbb{Q}^n = \{q_k\}_{k=1}^{\infty}$, $E_k = \{q_1, \ldots, q_k\}$ es una exhaución de $E = \mathbb{Q}^n$.
- Todo es abierto no vacío $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tiene exhauciones $\{\Omega_k\}_{k=1}^{\infty}$ formadas por abiertos medibles Jordan tales que $\bar{\Omega}_k \subset \Omega_{k+1}$ para cada $k \in \mathbb{N}^*$.
- Si $E \in \mathfrak{J}(\mathbb{R}^n)$, entonces E admite exhauciones.
- Si $E \in \mathfrak{J}(\mathbb{R}^n)$ y $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ es una exhaución, entonces $\mathsf{v}(E_k) \uparrow \mathsf{v}(E)$

Exhauciones

Denominaremos **exhaución de $E \subset \mathbb{R}^n$** a $\{E_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathfrak{J}(\mathbb{R}^n)$, una sucesión de subconjuntos medibles Jordan, tales que $E_k \subset E_{k+1} \subset E$ para todo $k \in \mathbb{N}^*$ y $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$. $\iff \chi_{E_k} \uparrow \chi_E$

- Existen subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ para los que no existe ninguna exhaución
- $E_k = [-k,k]^n$, $\widehat{E}_k = B(0,k)$, $k \in \mathbb{N}^*$ son exhauciones de $E = \mathbb{R}^n$.
- Si $\mathbb{Q}^n = \{q_k\}_{k=1}^{\infty}$, $E_k = \{q_1, \dots, q_k\}$ es una exhaución de $E = \mathbb{Q}^n$.
- Todo es abierto no vacío $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tiene exhauciones $\{\Omega_k\}_{k=1}^{\infty}$ formadas por abiertos medibles Jordan tales que $\bar{\Omega}_k \subset \Omega_{k+1}$ para cada $k \in \mathbb{N}^*$.
- Si $E \in \mathfrak{J}(\mathbb{R}^n)$ y $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ es una exhaución, entonces $\mathsf{v}(E_k) \uparrow \mathsf{v}(E)$
- Sea $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ una exhaución de $E \in \mathfrak{J}(\mathbb{R}^n)$. Para cada $f \in \mathscr{R}(E)$ se satisface que $f_{|_{E_k}} \in \mathscr{R}(E_k)$ y además $\displaystyle\int_E f = \lim_{k\to\infty} \int_{E_k} f$

Integral Impropia

Sean $E \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto que admite exhauciones y $f\colon E \longrightarrow \mathbb{R}$. Diremos que f tiene **integral impropia en E** si se satisfacen las dos condiciones siguientes:

1. Existe $\{E_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathfrak{J}(\mathbb{R}^n)$ una exhaución de E tal que $f_{|_{E_k}} \in \mathscr{R}(E_k)$ para cada $k \in \mathbb{N}^*$ y tal que existe $\displaystyle\lim_{k\to\infty}\int_{E_k} f$.
2. Para cada $\{\widehat{E}_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathfrak{J}(\mathbb{R}^n)$ exhaución de E tal que $f_{|_{\widehat{E}_k}} \in \mathscr{R}(E_k)$ para cada $k \in \mathbb{N}^*$ se satisface que existe $\displaystyle\lim_{k\to\infty}\int_{\widehat{E}_k} f$ y además $\displaystyle\lim_{k\to\infty}\int_{\widehat{E}_k} f = \lim_{k\to\infty}\int_{E_k} f$

Entonces, la **integral impropia de f en E** es $\displaystyle\int_E f = \lim_{k\to\infty}\int_{E_k} f$.

Si el límite es finito, la integral impropia se denomina **convergente**, si el límite es $\pm\infty$, **divergente**.

Integral Impropia de funciones no negativas

• Cuestión 13: Para cada $k \in \mathbb{N}^*$ sea $F_k \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto de <u>contenido nulo</u>. Consideremos $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$ y $f \colon E \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que f está acotada en F_k, para cada $k \in \mathbb{N}^*$. Se pide:

(i) Demostrar que E tiene medida nula y admite una exhaución.

(ii) Si $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ es una exhaución de E, demostrar que $\mathrm{v}(E_k) = 0$, para cada $k \in \mathbb{N}^*$.

(iii) Demostrar que f tiene integral impropia convergente en E y hallar $\displaystyle\int_E f$.

Integral Impropia de funciones no negativas

• **Cuestión 13:** Para cada $k \in \mathbb{N}^*$ sea $F_k \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto de <u>contenido nulo</u>. Consideremos $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$ y $f\colon E \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que f está acotada en F_k, para cada $k \in \mathbb{N}^*$. Se pide:

(i) Demostrar que E tiene medida nula y admite una exhaución.

(ii) Si $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ es una exhaución de E, demostrar que $\mathrm{v}(E_k) = 0$, para cada $k \in \mathbb{N}^*$.

(iii) Demostrar que f tiene integral impropia convergente en E y hallar $\displaystyle\int_E f$.

▶ Sean $E \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto que admite exhauciones y $f\colon E \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f \geq 0$ y es integrable sobre los subconjuntos de al menos una exhaución de E. Entonces, existe la integral impropia de f en E (convergente o divergente).

Funciones localmente integrables

Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto no vacío y $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$.

1. f es **Localmente acotada** si para cada $x \in \Omega$ existe un rectángulo no degenerado R_x tal que $x \in \overset{\circ}{R_x}$ y f es acotada en R_x.
2. f es **Localmente integrable** si para cada $x \in \Omega$ existe un rectángulo no degenerado R_x tal que $x \in \overset{\circ}{R_x}$ y $f_{|_{R_x}} \in \mathscr{R}(R_x)$.

Funciones localmente integrables

Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto no vacío y $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$.

1. f es **Localmente acotada** si para cada $x \in \Omega$ existe un rectángulo no degenerado R_x tal que $x \in \overset{\circ}{R_x}$ y f es acotada en R_x.
2. f es **Localmente integrable** si para cada $x \in \Omega$ existe un rectángulo no degenerado R_x tal que $x \in \overset{\circ}{R_x}$ y $f_{|_{R_x}} \in \mathscr{R}(R_x)$.

- Toda función localmente integrable es localmente acotada.

Funciones localmente integrables

Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto no vacío y $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$.

1. f es **Localmente acotada** si para cada $x \in \Omega$ existe un rectángulo no degenerado R_x tal que $x \in \overset{\circ}{R}_x$ y f es acotada en R_x.
2. f es **Localmente integrable** si para cada $x \in \Omega$ existe un rectángulo no degenerado R_x tal que $x \in \overset{\circ}{R}_x$ y $f_{|_{R_x}} \in \mathscr{R}(R_x)$.

- Toda función localmente integrable es localmente acotada.

- Si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es abierto y $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ las siguientes afirmaciones son equivalentes:
  1. f es localmente integrable.
  2. $f_{|_K} \in \mathscr{R}(K)$ para cada compacto $K \subset \Omega$ medible Jordan.
  3. f es localmente acotada y continua c.s. en Ω.

Funciones localmente integrables

Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto no vacío y $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$.

1. f es **Localmente acotada** si para cada $x \in \Omega$ existe un rectángulo no degenerado R_x tal que $x \in \overset{\circ}{R}_x$ y f es acotada en R_x.
2. f es **Localmente integrable** si para cada $x \in \Omega$ existe un rectángulo no degenerado R_x tal que $x \in \overset{\circ}{R}_x$ y $f_{|_{R_x}} \in \mathscr{R}(R_x)$.

- Toda función localmente integrable es localmente acotada.

- Si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un abierto no vacío, toda función no negativa y localmente integrable en Ω tiene integral impropia en Ω, convergente o divergente.

Funciones localmente integrables

Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto no vacío y $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$.

1. f es **Localmente acotada** si para cada $x \in \Omega$ existe un rectángulo no degenerado R_x tal que $x \in \overset{\circ}{R_x}$ y f es acotada en R_x.
2. f es **Localmente integrable** si para cada $x \in \Omega$ existe un rectángulo no degenerado R_x tal que $x \in \overset{\circ}{R_x}$ y $f_{|R_x} \in \mathscr{R}(R_x)$.

- Toda función localmente integrable es localmente acotada.
- Si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un abierto no vacío, toda función no negativa y localmente integrable en Ω tiene integral impropia en Ω, convergente o divergente.

Ejemplo: Demostrar que la integral $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} e^{-(x_1^2+\cdots+x_n^2)}dx_1\cdots dx_n$ es convergente y su valor es $\pi^{\frac{n}{2}}$.

Integrales absolutamente convergentes

Si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es abierto y $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ es localmente integrable, entonces f tiene integral impropia convergente sii $|f|$ tiene integral impropia convergente y en este caso

$$\left|\int_\Omega f\right| \leq \int_\Omega |f|.$$

Integrales absolutamente convergentes

Si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es abierto y $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ es localmente integrable, entonces f tiene integral impropia convergente sii $|f|$ tiene integral impropia convergente y en este caso

$$\left|\int_\Omega f\right| \le \int_\Omega |f|.$$

⚠ Convergencia y convergencia absoluta son equivalentes

Integrales absolutamente convergentes

Si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es abierto y $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ es localmente integrable, entonces f tiene integral impropia convergente sii $|f|$ tiene integral impropia convergente y en este caso

$$\left| \int_\Omega f \right| \le \int_\Omega |f|.$$

⚠ Convergencia y convergencia absoluta son equivalentes

- Comparar con los resultados del Tema $1b$.

  ¿Dónde está la diferencia?