Vamos a calcular este límite en dos caminos particulares: para $h\in\mathbb{R}$ y para $ih$, $h\in\mathbb{R}$.

directamente desde $\boxtimes$

O bien, escribir:

$h=\sigma\in\mathbb{R}$

$h=i\sigma$, $\sigma\in\mathbb{R}$

Así:
$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}}} \frac{\overline{a+h}-\bar{a}}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}}} \frac{\cancel{\bar{a}}+h-\cancel{\bar{a}}}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}}} \frac{h}{h} = 1.$$

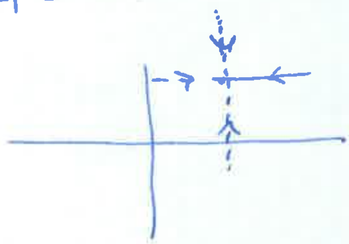
$a=\alpha+i\beta$

$a+h=(\alpha+h)+i\beta \Rightarrow \overline{a+h}=\bar{a}+\bar{h}=\bar{a}+h$

O bien: $\displaystyle\lim_{\substack{h\to 0\\ h=i\sigma}} \frac{\bar{h}}{h} = \lim_{\sigma\to 0}\frac{-i\sigma}{i\sigma} = \lim_{\sigma\to 0} -1 = -1.$

Mientras que
$$\lim_{\substack{ih\to 0\\ h\in\mathbb{R}}} \frac{\overline{a+ih}-\bar{a}}{ih} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}}} \frac{\cancel{\bar{a}}-ih-\cancel{\bar{a}}}{ih} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}}} (-1) = -1$$

$\overline{a+ih}=\bar{a}+\overline{ih}=\bar{a}-ih$



Por lo tanto $\nexists f'(a)$ para ningún $a\in\mathbb{C}$.

Sin embargo, $f(z)=\bar{z}$, como función de $\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2$, $f(x,y)=(x,-y)$ es $\mathcal{C}^\infty$! (de hecho es lineal)

4) $f(z)=|z|^2 = z\cdot\bar{z} = x^2+y^2$ si $z=x+iy$

Ejercicio: Comprobad que $f$ es $\mathbb{C}$-diferenciable sólo en $z=0$.

Observación: Si $f$ es $\mathbb{C}$-diferenciable en $z=a \rightarrow f$ es continua en $z=a$ y además, existen las derivadas parciales de $f$ en $z=a$.

En efecto:

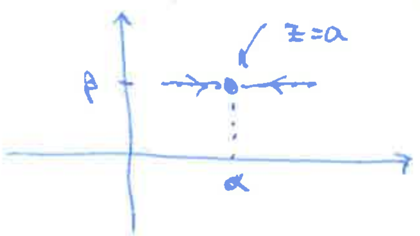
- $\lim\limits_{z\to a}\left(f(z)-f(a)\right) = \lim\limits_{z\to a} \dfrac{f(z)-f(a)}{z-a}\cdot(z-a) = f'(a)\cdot 0 = 0$

- $f_x(a) = \lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{f(x+i\beta)-f(\alpha+i\beta)}{x-\alpha}$ o, mejor, $\boxed{f_x(a)} = \dfrac{\partial f}{\partial x}(a) = \lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}}} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$

$a=\alpha+i\beta$

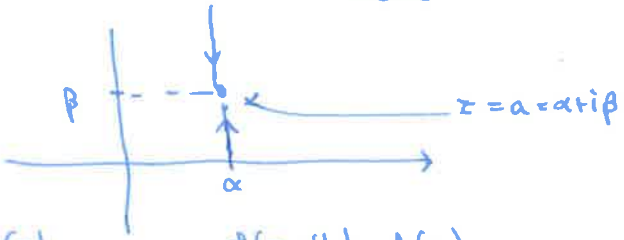
$z=x+iy$

$= \boxed{f'(a)}$ pues corresponde al caso particular de $f'(a) = \lim\limits_{\substack{z\to 0\\ z\in\mathbb{C}}} \dfrac{f(a+z)-f(a)}{z}$ con $z=h$.



Por otro lado:

$$\boxed{f_y(a) = \frac{\partial f}{\partial y}(a) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}}} \frac{f(a+ih)-f(a)}{h} = i \lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}}} \frac{f(a+ih)-f(a)}{ih} = i f'(a)}$$




pues $\lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}}} \frac{f(a+ih)-f(a)}{ih} = \lim_{\substack{ih\to 0\\ h\in\mathbb{R}}} \frac{f(a+ih)-f(a)}{ih}$ es un caso particular de ⊠

con $z = ih$, $h\in\mathbb{R}$.

**Prop:** (Condiciones de compatibilidad de Cauchy-Riemann) (C-R)

Si $f: \Omega\subset\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ es $\mathbb{C}$-diferenciable en $z=a$ entonces $\boxed{f_y(a) = i f_x(a)}$

**Observación:** Una manera más usual de escribir C-R es, denotando

$f(x,y) = u(x,y) + i v(x,y)$, como: $\boxed{\begin{array}{l} u_x(a) = v_y(a) \\ u_y(a) = -v_x(a) \end{array}}$

**dem:** $f_y(a) = i f_x(a) \iff u_y(a) + i v_y(a) = i\left(u_x(a) + i v_x(a)\right) \iff$

$$\iff \begin{cases} u_y(a) = -v_x(a) \\ u_x(a) = v_y(a) \end{cases}$$

**Corolario:** Las siguientes condiciones son equivalentes:

i) $u_x(a) = v_y(a)$, $\quad u_y(a) = -v_x(a)$ $\quad$ (C-R)

ii) $f_y(a) = i f_x(a)$

iii) $\frac{\partial f}{\partial \bar z}(a) = 0$ $\quad$ donde recordemos que $\frac{\partial f}{\partial \bar z} = \frac{1}{2}(f_x + i f_y)$

**dem:** De ii) $f_y(a) = i f_x(a) \iff i f_x(a) - f_y(a) = 0 \iff i\left(f_x(a) + i f_y(a)\right) = 0$

$$\iff \frac{1}{2}\left(f_x(a) + i f_y(a)\right) = 0 \iff f_{\bar z}(a) = \frac{\partial f}{\partial \bar z}(a) = 0$$

□

<u>Observación</u>: Si $f$ $\mathbb{C}$-diferenciable entonces

$$\boxed{f'(a) = u_x(a) + i v_x(a) = v_y(a) - i u_y(a)}$$

<u>Nota</u>: Recordemos que $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x} - i\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) = \dfrac{1}{2}(f_x - i f_y)$

Si $f$ $\mathbb{C}$-diferenciable en $z=a \Rightarrow f_y(a) = i f_x(a) \Rightarrow f_z(a) = \frac{1}{2}\left(f_x(a) - i^2 f_x(a)\right)$

$= f_x(a)$. O sea, $f$ $\mathbb{C}$-diferenciable en $z=a \rightarrow \begin{cases} f_z(a) = f_x(a) = f'(a) \\ f_{\bar{z}}(a) = 0 \end{cases}$

<u>Ejemplos (anteriores)</u>:

2)- $f(z) = z^2 = (x+iy)^2 = x^2 + (iy)^2 + 2xyi = \underbrace{(x^2-y^2)}_{u(x,y)} + i\underbrace{2xy}_{v(x,y)}$

$u_x = 2x \qquad v_x = 2y$

$u_y = -2y \qquad v_y = 2x$

Luego $u_x = v_y$ y $u_y = -v_x$ $\forall x,y$

3) $f(z) = \bar{z} = x - iy \Rightarrow u(x,y) = x, \quad v(x,y) = -y$

Ahora: $\left.\begin{array}{l} u_x = 1 \\ \quad\ \ \neq \\ v_y = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow$ CR no se satisface para ningún $x,y$, o sea,

$f$ no es $\mathbb{C}$-diferenciable en ningún $z \in \mathbb{C}$.

4) $f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2 \qquad u(x,y) = x^2 + y^2$

$v(x,y) = 0$

Así: $u_x = 2x \qquad u_y = 2y \qquad \Rightarrow \left[\begin{array}{l} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{array}\right. \Longleftrightarrow \begin{array}{l} 2x = 0 \\ -2y = 0 \end{array} \Longleftrightarrow x = y = 0$

$v_y = 0 \qquad v_x = 0$

O sea, $f$ solamente podría ser $\mathbb{C}$-diferenciable en $z=0$.