2. Sigui M_n l'espai vectorial de les matrius quadrades $n \times n$ amb coeficients *reals*. Considerem l'aplicació

$$g\colon \mathsf{M}_n \times \mathsf{M}_n \to \mathbf{R}\,, \quad g(A,B) = \operatorname{tr}(AB)\,.$$

(a) Proveu que g és una forma bilineal simètrica.
[3 pt] Proveu que g és no degenerada. (Calculeu explícitament $g(A,B)$ amb $B = A^\top$.)

g és bilineal perquè la multiplicació de matrius és bilineal i la traça és lineal. Amb més detall, $g(A{+}A',B) = \operatorname{tr}((A{+}A')B) = \operatorname{tr}(AB + A'B) = \operatorname{tr}(AB) + \operatorname{tr}(A'B) = g(A,B) + g(A',B)$, etc.
La simetria és conseqüència de la propietat cíclica de la traça: $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.

Una forma bilineal simètrica és degenerada quan hi ha un vector no nul ortogonal a tots. I, en efecte, si $A \neq 0$, hi ha una matriu a la qual no és ortogonal, a saber, $A^\top$; usant que $\operatorname{tr}(AB) = \sum_{ij} a_{ij}b_{ji}$,

$$g(A,A^\top) = \operatorname{tr}(AA^\top) = \sum_{i,j} a_{ij}a_{ij} = \sum_{i,j}(a_{ij})^2 > 0\,.$$

(b) En el cas $n = 2$ escriviu la matriu de g en la base canònica de l'espai de matrius i classifiqueu la forma
[3'5 pt] quadràtica corresponent. Quines són totes les matrius tals que $g(A,A) = 0$?

Amb la base canònica E_{ij} de M_n identifiquem una matriu $A = \left(\begin{smallmatrix} x & y \\ z & t \end{smallmatrix}\right) = x\,E_{11} + y\,E_{12} + z\,E_{21} + t\,E_{22}$ amb els seus components $(x,y,z,t) \in \mathbf{R}^4$. Llavors

$$g(A,A) = \operatorname{tr}(A^2) = \operatorname{tr}\begin{pmatrix} x^2 + yz & y(x+t) \\ z(x+t) & t^2 + yz \end{pmatrix} = x^2 + t^2 + 2yz\,,$$

que és l'equació de la forma quadràtica. En deduïm que la matriu de g en la base esmentada és $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Observant aquesta matriu veiem que els subespais $\langle E_{11}, E_{22}\rangle$ i $\langle E_{12}, E_{21}\rangle$ són ortogonals, que la restricció de g al primer és definida positiva, i la restricció de g al segon és no-degenerada i indefinida. Per tant la signatura de g és $r_+ = 3$, $r_- = 1$. Aquests nombres també es poden obtenir amb el mètode de la congruència-pivot.

Les matrius tals que $g(A,A) = 0$ són aquelles amb $\operatorname{tr}(A^2) = 0$, és a dir, amb la notació anterior, aquelles tals que $x^2 + t^2 + 2yz = 0$. Més detalladament, són matrius de la forma $\left(\begin{smallmatrix} 0 & y \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ z & 0 \end{smallmatrix}\right)$, i $\left(\begin{smallmatrix} x & y \\ z & t \end{smallmatrix}\right)$ amb $yz = -\frac{1}{2}(x^2 + t^2) \neq 0$.

(c) Tornant a dimensió arbitrària, considereu els subespais S_n i A_n de M_n formats per les matrius
[3'5 pt] simètriques i antisimètriques, respectivament.
Proveu que la restricció de g a aquests subespais és definida positiva i definida negativa, respectivament. Proveu que tota matriu simètrica és ortogonal a tota matriu antisimètrica.

Si A és simètrica i no nul·la

$$g(A,A) = \operatorname{tr}(AA) = \operatorname{tr}(AA^\top) = \sum_{i,j}(a_{ij})^2 > 0\,.$$

Anàlogament si és antisimètrica i no nul·la

$$g(A,A) = \operatorname{tr}(AA) = -\operatorname{tr}(AA^\top) = -\sum_{i,j}(a_{ij})^2 < 0\,.$$

Amb això hem provat la primera afirmació.

Considerem ara matrius A simètrica i B antisimètrica. Llavors

$$\operatorname{tr}(AB) = -\operatorname{tr}(A^\top B^\top) = -\operatorname{tr}\left((BA)^\top\right) = -\operatorname{tr}(BA) = -\operatorname{tr}(AB)\,,$$

on hem usat la fórmula de la transposada del producte, que la traça d'una matriu no canvia en transposar-la, i la propietat cíclica de la traça. Hem provat, doncs, que $2\operatorname{tr}(AB) = 0$, que implica $\operatorname{tr}(AB) = g(A,B) = 0$, és a dir, que A i B són ortogonals.