Anàlisi Real – notes ampliades del curs
Capítol 4: Teoria de la mesura iintegral de Lebesgue
4.1.- Introducció: l'integral de Riemann és de 'juguet'

Fins ara hem estudiat amb molt de detall l'espai de les funcions contínues definides en intervals mitjançant l'ús de la norma del suprem. Així mateix, quan hem volgut treballar amb normes més laxes (com la norma quadràtica) ens hem trobat amb problemes de completessa. L'objectiu d'aquest capítol és trobar una solució a aquest problema...i a molts d'altres que ara ficarem en rellevància.

Recordeu que si f és integrable Riemann en l'interval $[a, b]$, aleshores si prenem una partició $\mathcal{P}$ de l'interval $[a, b]$, digue'm-ne $a = y_0 < \cdots < y_N = b$ i definim

$$S_{\mathcal{P}}(f) = \sum_{i=1}^{N} (y_i - y_{i-1}) \sup_{y_{i-i} \leq x \leq y_i} f(x)$$

aleshores com més fina és la partició $\mathcal{P}$ (i amb independència de com és), millor és l'aproximació a $\int_a^b f(x)\,dx$. El mateix podem dir si en lloc de prendre suprem prneem ínfims.

En aquesta definició és important notar que tenim un ordre ($a < b$), cosa que si fessim una intregal a $\mathbb{R}^n$ no tindriem. Aquest fet tan innocent és una de les claus dels problemes de l'integral de Riemann.Aquesta integral, però, té alguns altres problemes. Anem-los a enumerar, sense ser exhaustius:

1. És incompatible amb intercanviar límits – integrals. Dit d'altra forma, si $\{f_n\}_{n \geq 1}$ és una successió de funcions definides en $[a, b]$ tal que $f_n(x)$ tendeix a $f(x)$ puntualment, NO és cert en general que
$$\lim_n \int_a^b f_n(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt.$$
De fet, és ben possible que el límit puntual d'una successió de funcions integrables Riemann NO sigui integrable (el que hem vist és que el límit uniforme sí que ho és!)

   Aquesta fòrmula sabem que funciona si hi ha convergència uniforme, però molts cops això és una condició massa forta per a poder-la demostrar.

2. Pas al límit: el nostre càlcul d'integrals de Riemann impròpies es basa esn saber fer bé els càlculs per integrals definides, i després passar al límit. Per tant, ens trobem de nou amb un problema similar al que acabem de descriure.

3. Integrals múltiples: sabem que l'integral de Riemann en $\mathbb{R}^n$ pot interpretar-se com el hipervolum sota de la gràfica donada per la funció que estem integrant. Ara bé, el problema de fons és que quan fem integrals múltiples amb la integral de Riemann estem forçant una subdivisió del pla que no és canònica en el sentit que estem establint un ordre (que passava en $\mathbb{R}$), i per tant, justificar en general que
$$\int_a^b \int_c^d f(x, y)\,dxdy = \int_c^d \int_a^b f(x, y)\,dydx$$
és prou difícil.

4. El que ja varem veure al capítol anterior: ens cal una noció d'integral més relaxada, que ens permeti integrar funcions que no són integrables Riemann, perquè aquestes poden ser límit de successions de funcions prou regulars (contínues a troços, per exemple).

5. Hi han funcions fitades ben naturals que no són integrables Riemann! L'exemple més representatiu és la funció definida en $[0, 1]$ que val 0 si $x \in \mathbb{Q}$ i 0 altrament. Aquesta funció NO és integrable Riemann perquè les sumes superiors sempre valen 1, mentre que les inferiors sempre valen 0.

Per totes aquestes reons ens cal aprendre a integrar d'una manera "més abstracta" i que acomodi l'integral de Riemann en un context més general. Això serà la noció d'integral de Lebesgue.

L'idea clau de la nova manera d'integrar: L'integració de Lebesgue que començarem a desenvolupar en aquest capítol, es basa en la següent idea sencilla.

Supossem que tenim unes quantitats ordenades:

$$a_1, a_2, \ldots, a_n$$

i ens demanen sumar-les. Veurem dues maneres de fer-ho:

- (à la Riemann) Sumem $S = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$.
- (à la Lebesgue) Fem paquets: d'aquests valors (n en total) tenim $b_1, \ldots, b_r$ diferents, i cadascun d'aquests apareix N_i cops ($i = 1, \ldots, r$). És clar que $N_1 + \cdots + N_r = n$. Aleshores, és clar que
$$S = b_1 N_1 + \cdots + b_r N_r.$$

Observeu que en el segon cas NO importa l'ordre: estem mirant, per a cada valor possible b el seu pes, o la seva mesura en la contribució total.

Aquesta és l'idea que desenvoluparem

Pla d'aquest capítol: En aquest capítol desenvoluparem els següents temes:

4.1.- Introducció (Ja ho hem fet :-))

4.2.- Teoria de la mesura. Mesura de Lebesgue en $\mathbb{R}$.

4.3.- Intregal de Lebesgue per espais de mesura.

4.4.- Teoremes integrals: teorema de la convergència monòtona i teorema de la convergència dominada. Aplicacions.

4.5.- Espais L_p. Completessa i relació amb les sèries de Fourier.