Àlex Batlle Casellas

3.19. Sigui f un endomorfisme d'un espai vectorial E.

(a) **Proveu que** $\operatorname{Im} f^{n+1} \subset \operatorname{Im} f^n$ **i** $\operatorname{Nuc} f^n \subset \operatorname{Nuc} f^{n+1}$ **per a tot nombre natural** n.
Com que $f \in \operatorname{End} f$, E és f-invariant, és a dir, que $f(E) \subseteq E$. També tenim que, per ser endomorfisme, $f(f(E)) \subseteq f(E)$, o el que és el mateix, que $\operatorname{Im} f^2 \subseteq \operatorname{Im} f$. Fem un procés inductiu sobre n per veure que

$$\operatorname{Im} f^{n+1} \subset \operatorname{Im} f^n \tag{1}$$

és compleix:

1. Cas base: $n = 0$
En aquest cas, veiem que $\operatorname{Im} f^{0+1} \subseteq \operatorname{Im} f^0 = E$ Com ja hem vist, $f(E) \subseteq E$, i per tant és cert per $n = 0$.
2. Hipòtesi d'inducció:
$$\forall n \leq n_0 \in \mathbb{N} \;\; \operatorname{Im} f^{n+1} \subseteq \operatorname{Im} f^n. \tag{2}$$
3. Pas inductiu: volem veure que (2) és compleix per tota $n > n_0$. Per veure-ho, construïm l'aplicació lineal f^{n+1}:
$$\begin{aligned} f^{n+1} : \operatorname{Im} f^n &\longrightarrow E \\ v &\longmapsto f^{n+1}(v) := f(v) \end{aligned}.$$
Com que f és un endomorfisme, necessàriament $f(V) \subseteq V \; \forall V \subseteq E$ i $f^{n+1}(V) \subseteq \operatorname{Im} f^n \; \forall n > n_0, V \subseteq \operatorname{Im} f^n$. Per tant, $f^{n+1}(\operatorname{Im} f^n) \subseteq \operatorname{Im} f^n \; \forall n \in \mathbb{N}$.$\square$
Pel cas del nucli, tenim:
$$\begin{aligned} &\operatorname{Nuc} f \subseteq E \\ &\operatorname{Nuc} f^2 \subseteq \operatorname{Im} f \\ &\dots \\ &\operatorname{Nuc} f^n \subseteq \operatorname{Im} f^{n-1} \end{aligned}$$
Utilitzant el resultat anterior:
$$\operatorname{Im} f^{n+1} \subseteq \operatorname{Im} f^n \subseteq \operatorname{Im} f^{n-1}$$
Ja que $\operatorname{Im} f^{k-1}$ és l'espai de sortida de l'aplicació f^k per tota k natural. Ara volem veure:
$$\operatorname{Nuc} f^n \subseteq \operatorname{Nuc} f^{n+1} \; \forall n \in \mathbb{N}. \tag{3}$$
Farem també un procés inductiu sobre n per veure aquest resultat:
(a) Cas base: $n = 0$

(b) **Demostreu que, si** E **té dimensió finita, existeix un natural** m **tal que** $\operatorname{Im} f^n = \operatorname{Im} f^m$ **i** $\operatorname{Nuc} f^n = \operatorname{Nuc} f^m$ **per a tot** $n \geq m$.

(c) **Proveu, donant un contraexemple a l'espai de polinomis** $\mathbb{R}[x]$**, que l'apartat (b) no és cert si** E **no té dimensió finita.**