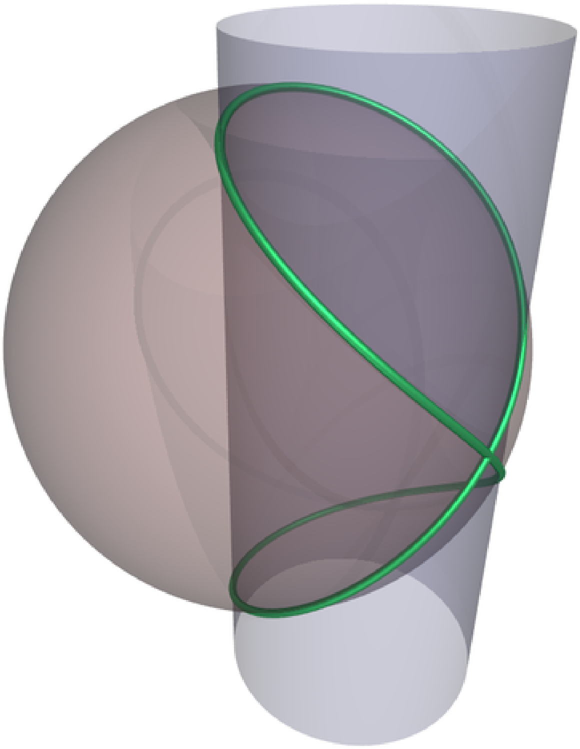
CÀLCUL INTEGRAL

PROBLEMES

Grau en Matemàtiques



UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Facultat de Matemàtiques i Estadística

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Departament de Matemàtiques

Esta colección de problemas es una adaptación de las utilizada en cursos anteriores en la misma asignatura, Càlcul Integral (FME), que a su vez estaba fuertemente basada en las listas de Problemes d'Anàlisi Vectorial (ETSETB, 2002-2010). La lista de problemas se complementa con la colección de Problemas resueltos que aparecen al final de cada capítulo de los Apuntes de la Asignatura y con la colección de Problemas de exámenes de cursos anteriores.Todo el material está a disposición del alumnado de la asignatura en la plataforma docente ATENEA.

Portada: *Curva, Superficie y Bóveda de Viviani*.

Imagen obtenida en Wikipedia

PROBLEMES

1a SÈRIES NUMÈRIQUES

Problema 1. Sumeu les sèries telescòpiques

$$\text{(a)} \ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}, \qquad \text{(b)} \ \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2k+3}{(k+1)(k+2)}.$$

Problema 2. Comproveu que les sèries següents tenen **caràcter telescòpic** i calculeu-ne la suma.

$$\text{(a)} \ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(4k-1)(4k+3)} \qquad \text{(b)} \ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+12}{k^3+5k^2+6k}$$

Problema 3. S'anomena **sèrie telescòpica generalitzada** una sèrie de la forma $\sum a_n$ on $a_n = b_n - b_{n+m}$, essent (b_n) una successió i m un enter positiu.

(a) Proveu que si la successió (b_n) és convergent, llavors la sèrie telescòpica $\sum a_n$ és convergent. Quant val la seva suma?

(b) Donar un exemple on la sèrie telescòpica $\sum a_n$ és convergent però la successió (b_n) no convergeix.

(c) Calculeu la suma $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+m)}$ y expliciteu aquests valors per $m = 1, 2, 3$.

Problema 4. Sigui (a_n) la **successió de Fibonacci**, definida per $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ y por $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, $n \geq 2$. Sabem que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Sigui $b_k = a_{2k+1}$. Estudieu la convergència de la sèrie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{b_k}$. (El valor $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ se denomina **razón aúrea**)

Problema 5. Estudieu la convergència de les sèries numèriques següents:

$$\text{(a)} \ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}, \qquad \text{(c)} \ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+2^n}, \qquad \text{(e)} \ \sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1+\frac{2}{n}\right),$$

$$\text{(b)} \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}, \qquad \text{(d)} \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\sqrt{n}}, \qquad \text{(f)} \ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{1+\sqrt{n}}\left(1-\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right).$$

Problema 6. Estudieu la convergència de les sèries numèriques següents:

$$\text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} \big(\arctan(n)\big)^n, \qquad \text{(b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!}, \qquad \text{(c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}.$$

Problema 7. Estudieu el caràcter de les sèries següents:

$$\text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^3}{\big(\log(2)\big)^n}, \qquad \text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{1+\frac{1}{n}}}.$$

Problema 8. Sigui (a_n) una successió de termes positius.

(i) Proveu que la sèrie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{1+n^2 a_n}$ és convergent.

(ii) Proveu que, si $\sum a_n$ és convergent, aleshores $\sum a_n^2$ és convergent. És això cert si la successió no és de termes positius?

Problema 9. Determineu el caràcter de la sèrie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{\alpha^n + \alpha^{-n}}$ en funció del paràmetre real $\alpha \neq 0$.

Problema 10. Determineu el caràcter de la sèrie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \operatorname{sen}^{2n}(\alpha)}{n^\beta}$ segons el valor dels paràmetres $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Problema 11. Estudieu el caràcter de les sèries següents en funció del valor del paràmetre real α:

$$\text{(a)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{k^\alpha}, \qquad \text{(b)} \sum_{k=2}^{\infty} \left(\log\left(\frac{k+1}{k-1}\right)\right)^\alpha.$$

Problema 12. Considereu les sèries de termes positius $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$, i la sèrie **diferència** $a_1 - b_1 + \cdots + a_n - b_n + \cdots$ Indiqueu si és certa alguna de les afirmacions següents:

(a) Si la sèrie diferència es convergent, aleshores ho són $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$.

(b) Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ són convergents, aleshores la sèrie diferència es absolutament convergent.

(c) Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ són divergents, aleshores la sèrie diferència també ho és.

Problema 13. Apliqueu el criteri de condensació per estudiar la convergència de las sèries:

$$\text{(a)} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\log(k)}, \qquad \text{(b)} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\log(k)\log\big(\log(k)\big)}.$$

Problema 14. Si $a, b > 0$, estudiar la convergència de la sèrie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}{b(b+1)(b+2)\cdots(b+n)}.$$

Problema 15. Para cada $a \geq 0$, estudieu la convèrgencia de la sèrie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{(n+1)!} \prod_{k=0}^{n}(3k+1).$$

Problema 16. Si $a > 0$, determineu el caràcter de la sèrie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \prod_{k=2}^{n} \left(a - \sqrt[k]{a}\right)$

Problema 17. Estudieu la convergència de la sèrie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\, e^{\alpha n}}{(n+1)\cdots 2n}$$

en funció del paràmetre $\alpha \in \mathbb{R}$.

Problema 18. (**El criteri logarítmic**). Sigui (a_n) una successió de termes estrictament positius. Suposem que existeix $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\log\left(\frac{1}{a_n}\right)}{\log(n)} = L \in [0, +\infty]$. Proveu que si $L > 1$ aleshores $\sum a_n$ és convergent, i si $L < 1$ aleshores $\sum a_n$ és divergent.

Problema 19. Se anomena **sèrie de Bertrand** la sèrie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}\big(\log(n)\big)^{\beta}}, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Proveu que la sèrie és convergent si $\alpha > 1$ o $\alpha = 1$ i $\beta > 1$, i és divergent en cas contrari.

Problema 20. Apliqueu el criteri de la integral a les sèries següents:

$$\text{(a)} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\log(k)}{k}, \qquad \text{(b)} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\log(k)}{k^2}.$$

(El carácter de estas series ya ha sido estudiado en el Problema 3 de la sección de problemas resueltos en los apuntes).

Problema 21. Estudieu la convèrgencia de la sèrie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arc\,tang}(n)}{\pi^2(1+n^2)^{\alpha}}$ en funció del paràmetre real α. Proveu que $\displaystyle\frac{3}{32} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arc\,tang}(n)}{\pi^2(1+n^2)} \leq \frac{3}{32} + \frac{1}{8\pi}$.

Problema 22. Siguin (a_n) i (b_n) dues successions de termes estrictament positius. Se suposa que, a partir d'un n_0, es compleix que $\displaystyle\frac{b_{n+1}}{b_n} \leq \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Proveu que, si $\sum a_n$ és convergent, aleshores $\sum b_n$ també és convergent.

(Proveu per inducció que $\displaystyle\frac{b_{n_0+1} + \cdots + b_N}{b_{n_0}} \leq \frac{a_{n_0+1} + \cdots + a_N}{a_{n_0}}$ per a tota $N > n_0$.)

Problema 23. Estudieu la convergència de les sèries numèriques següents:

$$\text{(a)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-\sqrt{n}}, \qquad \text{(c)} \sum_{n=0}^{\infty} \sin\Big(\frac{\pi}{3}\, n\Big), \qquad \text{(e)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{1+n} \sin\Big(\frac{n}{1+n^2}\Big),$$

$$\text{(b)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log(n)}{n}, \qquad \text{(d)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\arctan(n)}{n^3+1}, \qquad \text{(f)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\big(\log(n)\big)^{\log(n)}}.$$

Problema 24. Estudieu el caràcter de les sèries següents en funció del valor del paràmetre real α:

$$\text{(a)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k\alpha)}{k^2}, \qquad \text{(c)} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\big(\log(k)\big)^{\alpha \log(k)}},$$

$$\text{(b)} \sum_{k=2}^{\infty} k^{\alpha}\Big(\frac{1}{\sqrt{k-1}} - \frac{1}{\sqrt{k}}\Big), \qquad \text{(d)} \sum_{k=2}^{\infty} \Big(1+\frac{\alpha}{k}\Big)^{-k\log(k)}.$$

Problema 25. Estudieu el caràcter de la sèrie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1^{\alpha}+2^{\alpha}+\cdots+k^{\alpha}}$ en funció del valor del paràmetre enter α.

PROBLEMES 1b

INTEGRALS IMPRÒPIES

Problema 1. Determineu, a partir de la definició, quines de les integrals impròpies següents són convergents i, si és el cas, doneu-ne el valor.

(a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x}$, (e) $\displaystyle\int_0^1 \log\left(\frac{1}{x}\right) dx$, (i) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+5}$,

(b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$, (f) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$, (j) $\displaystyle\int_3^5 \frac{dx}{x^2-7x+10}$,

(c) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^4}$, (g) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan(x)\, dx$, (k) $\displaystyle\int_6^{+\infty} \frac{dx}{x^2-7x+10}$,

(d) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$, (h) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(x)\right) dx$.

Problema 2. Estudieu la convergència de les integrals impròpies següents:

(a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x+\sin(x)}$, (c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\, dx}{\sqrt{1+x^4}}$, (e) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2+\sqrt{x}}$,

(b) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{(3+2x^2)^{\frac{1}{7}}}{(x^3-1)^{\frac{1}{5}}} dx$, (d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$, (f) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{dx}{\sin(x)}$.

Problema 3. Determineu el caracter de les integrals impròpies següents en funció del paràmetre real α.

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+|x|^\alpha}}$, (b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x^\alpha}}{x^3+x} dx$, (c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{1+x} dx$.

Problema 4. Estudieu la integral impròpia $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x-a)^2+b^2}$ $(b > 0)$ i, si és el cas, calculeu-la.

Problema 5. Sigui $a > 0$. Estudieu la convergència i calculeu les integrals impròpies

(a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-ax}\cos(bx)\, dx$, (b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-ax}\sin(bx)\, dx$

Problema 6. Apliqueu el criteri de Dirichlet a l'estudi de la convergència de les integrals següents, on $\alpha > 0$.

(a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\sin(\alpha x)}{1+x^2} dx$, (b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{\sin(x)}\sin(2x)}{x^\alpha} dx$.

Problema 7. Calculeu les integrals impròpies següents, per als valors de λ que les fan convergents.

$$\text{(a)} \int_2^{+\infty} \Big(\frac{\lambda x}{x^2+1} - \frac{1}{2x+1}\Big)\, dx, \qquad \text{(b)} \int_1^{+\infty} \Big(\frac{x}{2x^2+1} - \frac{\lambda}{2x+1}\Big)\, dx$$

Problema 8. Trobeu els valors de a i b que fan $\displaystyle\int_1^{+\infty} \Big(\frac{2x^2+ax+b}{x(2x+b)} - 1\Big)\, dx = 1.$

Problema 9. Sigui $\lambda > 0$. Estudieu la convergència i calculeu, si és el cas, les integrals impròpies:

$$\text{(a)} \int_a^{+\infty} e^{-\lambda x} dx, \quad \text{(b)} \int_a^{+\infty} x e^{-\lambda x} dx, \quad \text{(c)} \int_a^{+\infty} x^2 e^{-\lambda x} dx, \quad \text{(d)} \int_a^{+\infty} P(x) e^{-\lambda x} dx$$

on P és un polinomi de grau d.

Problema 10. Demostreu que les integrals impròpies

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\big(\sin(x)\big)\, dx \quad \text{i} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\big(\cos(x)\big)\, dx,$$

són convergents i tenen el mateix valor. Calculeu-lo.
(Considereu la suma de les dues integrals.)

Problema 11. Expresseu en termes de la funció Γ les integrals següents:

$$\text{(a)} \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2} dt, \qquad \text{(c)} \int_0^1 x^3 \big(\log(x)\big)^2 dx,$$

$$\text{(b)} \int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-st} dt, \ (\alpha > -1,\ s > 0) \qquad \text{(d)} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{-\log(x)}}.$$

Problema 12. Per a quins valors de $\alpha \in \mathbb{R}$ és convergent la integral impròpia

$$\int_0^{+\infty} \frac{\big(e^{-t^2} - e^{-\alpha t^2}\big)}{t}\, dt \ ?$$

Problema 13. Sean $p(x)$, $q(x)$ dos funciones polinómicas de grados $d+1$ i $d+2$ respectivamente y tales que $q(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

(i) Demostrar que d es par.

(ii) Demostrar que $p(x) = \alpha q'(x) + Q(x)$, donde $\alpha \in \mathbb{R}^*$ y Q es un polinomio de grado menor o igual a d.

(iii) Demostrar $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Q(x)}{q(x)}\, dx$ es absolutamente convergente y además,

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} \frac{p(x)}{q(x)}\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Q(x)}{q(x)}\, dx.$$

PROBLEMES 2

INTEGRACIÓ A $\mathbb{R}^n$

Problema 1. Dar un ejemplo de función $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ igual c.s. a una función continua pero que no es continua c.s. Encontrar también un ejemplo de función $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua c.s. pero que puede ser igual c.s. a una función continua.

Problema 2. Si $A \subset \mathbb{R}^n$ tiene medida nula, ¿es cierto que $\bar{A}$ tiene medida nula?

Problema 3. Se define la **función de Thomae** como $f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x = 0 \text{ ó } x = 1, \\ \dfrac{1}{q}, & \text{si } x \in \mathbb{Q},\ x = \dfrac{p}{q},\ q > 0 \text{ y } \operatorname{mcd}(p,q) = 1, \\ 0, & \text{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

(a) Hallar el conjunto de puntos de discontinuidad de f.

(b) Demostrar que $f \in \mathscr{R}([0,1])$ y hallar $\displaystyle\int_0^1 f$.

(c) Consideremos $\phi\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como $\phi(0) = 0$ y $\phi(x) = 1$ si $0 < x \leq 1$. Demostrar que $\phi \circ f \notin \mathscr{R}([0,1])$.

(d) Para cada $n \in \mathbb{N}^*$, consideremos $\psi_n\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como $\psi_n(x) = nx$ si $0 \leq x \leq \frac{1}{n}$ y $\psi_n(x) = 1$ si $\frac{1}{n} < x \leq 1$. Demostrar que $\psi_n \circ f \in \mathscr{R}([0,1])$.

Problema 4. Digueu quins dels conjunts següents són de **mesura nul·la** o de **contingut nul**.

(a) $\{(x,0) : x \in [0,1]\} \subset \mathbb{R}^2$.

(b) $\{(x,0) : x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$.

(c) $\{(x,x^2) : x \in [0,1]\} \subset \mathbb{R}^2$.

(d) $\{(0,y) : y \in [0,1] \cup \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{R}^2$.

(e) $\{(x,0) : x \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{R}^2$.

(f) $\{(x,y) : x \in [0,1],\ y \in [0,1] \cup \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{R}^2$.

(g) $\{(x,y) : y = \sin(x),\ x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$.

(h) $\{(x,y) : 0 < x < 1,\, 0 < y < 1\} \subset \mathbb{R}^2$.

Problema 5. Sea $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función **monótona**.

(a) Si $x_1, \ldots, x_m \in [a,b]$, demostrar que $\sum_{j=1}^{m} \omega(f, x_j) \le |f(b) - f(a)|$.

(b) Demostrar que para cada $m \in \mathbb{N}^*$, el conjunto $\left\{x \in [a,b] : \omega(f,x) > \frac{1}{m}\right\}$ es finito.

(c) Demostrar que el conjunto de puntos de discontinuidad de f es numerable.

(d) ¿Se satisface que $f \in \mathscr{R}([a,b])$?

Problema 6. Considereu la funció $f\colon [0,1] \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida per

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 2y, & \text{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Estudieu l'existència de les integrals

$$\int\!\!\int_{[0,1]\times[0,1]} f, \qquad \int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y)dy, \qquad \int_0^1 dy \int_0^1 f(x,y)dx.$$

Problema 7. Sigui $A = \left\{\left(\frac{p}{2^n}, \frac{q}{2^n}\right) : n \ge 0,\, p,\, q \text{ imparells}, 1 \le p, q \le 2^n\right\}$, i sigui χ_A la seva **funció característica**.

(a) Calculeu les integrals iterades de χ_A sobre el quadrat $[0,1] \times [0,1]$.

(b) Estudieu si χ_A és integrable Riemann sobre el mateix quadrat.

Problema 8. Calculeu les integrals de les funcions següents sobre els rectangles indicats:

(a) $f(x,y) = x|y|$; $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 2,\, -1 \le y \le 3\}$.

(b) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$; $R = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -1 \le x, y, z \le 1\}$.

Problema 9. Calculeu les integrals de les funcions següents sobre les regions indicades:

(a) $f(x,y) = x - y$; $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y < 1,\, x > 0,\, y > 0\}$.

(b) $f(x,y) = 1$; $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \le y \le x\}$

(c) $f(x,y) = 1$; $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \ge 1,\, x^2 + y^2 \le 1\}$.

Problema 10. Calculeu l'integral de les funcions $f(x,y) = |\cos(x+y)|$ i $g(x,y) = \cos(x+y)$ sobre el quadrat $[0,\pi] \times [0,\pi]$.

Problema 11. Considereu la funció definida en $D = \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ per

$$f(x,y) = \begin{cases} a, & \text{si } y < \sin(x), \\ b, & \text{si } y = \sin(x), \\ c, & \text{si } y > \sin(x). \end{cases}$$

on $a, b, c \in \mathbb{R}$. Quin és el conjunt de punts de discontinuïtat de f? És f integrable? Calculeu

$$\int\int_D f(x,y)dxdy.$$

Problema 12. Obteniu la probabilitat que l'equació $ax^2 + bx + c = 0$, els coeficients de la qual s'escullen a l'atzar en l'interval $[0,1]$, tingui arrels reals. Més generalment, si $\ell_1, \ell_2, \ell_3 > 0$ determinar la probabilitat que l'equació tingui arrels reals quan a es tria a l'atzar en l'interval $[0,\ell_1]$, b es tria a l'atzar en l'interval $[0,\ell_2]$ i c es tria a l'atzar en l'interval $[0,\ell_3]$.

Problema 13. Si $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z^2,\ 0 \leq z \leq 3\}$ i f es contínua en A, rescriviu $\int_A f(x,y,z)dxdydz$ integrant primer respecte a x, després respecte a y, i després respecte a z.

Problema 14. Reexpresseu les integrals dobles següents canviant l'ordre d'integració:

(a) $\displaystyle\int_0^4 dx \int_{3x^2}^{12x} f(x,y)dy,$ (b) $\displaystyle\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)dx.$

Problema 15. Si $0 < a < b$, aplicando el Teorema de Fubini a la integral $\displaystyle\int_{[0,1]\times[a,b]} x^y dxdy$, hallar el valor

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\log(x)}\,dx$$

Problema 16. Si $1 < a$ y consideramos el conjunto elemental

$$R = \left\{1 \leq x \leq a,\ \sqrt[5]{x} \leq y \leq \sqrt{x}\right\} \cup \left\{a \leq x \leq a^{\frac{5}{2}},\ \sqrt[5]{x} \leq y \leq \sqrt{a}\right\},$$

hallar el valor

$$\int_R e^{xy^{-2}} dydx$$

Problema 17. Calculeu la integral de la funció $f(x,y) = x^2 + y^2$ sobre la regió definida per les desigualtats $|x| \leq |y| \leq 2$.

Problema 18. Usar el cambio de variables $x = u - v$, $y = 2u - v$ para evaluar

$$\int\int_P xy\,dxdy$$

donde P es el paralelogramo comprendido entre las rectas

$$y = 2x,\quad y = 2x - 2,\quad y = x,\quad y = x + 1.$$

Problema 19. Calculeu les integrals $\int_A f$ indicades. (Utilitzeu canvis de variables apropiats.)

(a) $f(x,y) = 1$; $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x+y)^2 + (2x - y + 1)^2 \leq 1\}$.

(b) $f(x,y) = x^2 + y^2$; $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \alpha \leq x^2 - y^2 \leq \beta, \gamma \leq xy \leq \delta\}$, essent $0 < \alpha < \beta$, $0 < \gamma < \delta$ constants donades.

(c) $f(x,y) = e^{\frac{x-y}{x+y}}$; $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\ y > 0,\ 1 < x + y < 2\}$.

Problema 20. Calculeu les integrals $\displaystyle\int_A f$ indicades:

(a) $f(x,y) = x^2 + y^2$; $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 2ax \leq 0\}$.

(b) $f(x,y,z) = z^2$, A la regió comuna a les esferes $x^2+y^2+z^2 \leq R^2$ i $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2Rz$, on $R > 0$.

(c) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2}$, donde
$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 1, x^2 + y^2 < z^2, z > 0\}$.

Problema 21. Expresseu en coordenades polars la integral $\displaystyle\int\int_A f(x,y)dxdy$ on A és el domini limitat per les rectes $y = x$, $y = -x$ i $y = 1$.

Problema 22. Sigui A la regió plana definida en coordenades polars per $\phi_1 < \phi < \phi_2$, $r < R(\phi)$, on R és una funció positiva.

(a) Proveu que la seva àrea es pot calcular amb la integral $\displaystyle\frac{1}{2}\int_{\phi_1}^{\phi_2} R(\phi)^2 d\phi$.

(b) Calculeu l'àrea tancada per la cardioide: $r = a\big(1 + \cos(\phi)\big)$.

(c) Calculeu l'àrea tancada per la lemniscata: $r^2 = a^2\cos(2\phi)$.

(d) Calculeu l'àrea tancada per un pètal de la rosa: $r = a\sin(\phi)$ (essent $a > 0$).

Problema 23. Calculeu l'àrea de les regions definides per les desigualtats indicades:

(a) $a \leq \dfrac{y}{x} \leq b$, $\alpha \leq \dfrac{y}{x^2} \leq \beta$, amb $0 < a < b$, $0 < \alpha < \beta$.

(b) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} \leq a^{\frac{2}{3}}$, amb $a > 0$ (astroide.)

Problema 24. Considereu el recinte $S = S_1 \cup S_2$, on S_1 és el recinte limitat per les rectes $y = 0$, $y = x$, $x = 1$, $x = 2$, i S_2 és el recinte limitat, en el primer quadrant, per les rectes $y = x$, $y = 3x$ i les circumferències $x^2 + y^2 = 2$, $x^2 + y^2 = 8$. Calculeu $\displaystyle\int\int_S (x^2 + y^2)dxdy$.

Problema 25. Calculeu l'integral $\displaystyle\int\int_D \sqrt{xy}dxdy$ on D és la regió limitada per $xy = 1$, $xy = 2$, $y^2 = x$ i $y^2 = 2x$.

Problema 26. Sigui $D \subset \mathbb{R}^2$ un conjunt **mesurable Jordan**, **simètric respecte a l'eix OX** (és a dir, si $(x,y) \in D$, també $(x,-y) \in D$.)

(a) Raoneu que podeu escriure $D = D_1 \cup D_2$, on D_1 és dins el semiplà superior i $D_2 = \varphi(D_1)$, essent $\varphi(x, y) = (x, -y)$ la simetria respecte a l'eix OX. Són disjunts D_1 i D_2?

(b) Sigui $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ integrable Riemann. Proveu que si f **es parella respecte a** y (és a dir, $f(x, -y) = f(x, y)$) llavors $\displaystyle\int_D f = 2\int_{D_1} f$, i si f **es imparella respecte a** y (és a dir, $f(x, -y) = -f(x, y)$) llavors $\displaystyle\int_D f = 0$.

(Apliqueu el teorema del canvi de variables amb φ per a calcular $\displaystyle\int_{D_2} f$.)

Problema 27. Calculeu:

(a) L'àrea tancada per l'el·lipse de semieixos $a > 0$ i $b > 0$.

(b) El volum tancat per l'el·lipsoide de semieixos $a > 0$, $b > 0$ i $c > 0$.

Problema 28. Si $\alpha \geq 0$ y $\beta, \gamma, k > 0$, hallar $\displaystyle\int_s (x^2 + y^2)^\alpha dxdydz$, donde S es el sólido limitado por el plano $\{z = \gamma\}$ y la superficie $x^2 + y^2 = kz^\beta$.

Problema 29. Sigui A un sòlid de revolució obtingut fent girar la regió $B \subset \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0,\ y = 0\big\}$ al voltant de l'eix OZ.

(a) Proveu que el seu volum es pot calcular amb la integral $\displaystyle 2\pi \int\int_B x dx dz$.

(b) Supusem que B és la regió simple descrita per $z_1 < z < z_2$, $f(z) < x < g(z)$. Proveu que el volum de revolució és $\displaystyle\pi \int_{z_1}^{z_2} \big(g(z)^2 - f(z)^2\big) dz$.

(c) Calculeu el volum d'un con circular recte de radi $a > 0$ i alçada $h > 0$.

(d) Calculeu el volum tancat pel tor de revolució de generatriu $(x - a)^2 + z^2 = b^2$ (on $0 < b < a$.)

Problema 30. Sigui D el recinte determinat per $x^2 + y^2 \leq 8$, $0 \leq y \leq 2$, i sigui $\displaystyle I = \int\int_D y dx dy$.

(a) Expresseu I aplicant el teorema de Fubini, en els dos ordres possibles, en coordenades cartesianes.

(b) Expresseu I en coordenades polars.

(c) Calculeu el valor de I.

(d) Sense fer més càlculs, raoneu quins són els valors de les integrals

$$\int\int_D x dx dy, \qquad \int\int_D (x + y) dx dy, \qquad \int\int_D xy dx dy.$$

Problema 31. Sigui $A \subset \mathbb{R}^3$ un conjunt **mesurable Jordan**, tal que cadascuna de les seves seccions horitzontals $A_c = A \cup \{z = c\}$ és mesurable Jordan (en el pla $z = c$).

(a) Supusem que $A \subset R \times [z_1, z_2]$, amb $R \subset \mathbb{R}^2$ un cert rectangle compacte. Proveu que $\mathsf{vol}(A) = \displaystyle\int_{z_1}^{z_2} \mathsf{àrea}(A_z)dz.$

(Useu el teorema de Fubini, $\displaystyle\int_A 1 = \int_{z_1}^{z_2} \int \int_R \chi_A(x, y, z)dxdy$, on χ_A és la funció característica de A.

(b) Proveu el **Principi de Cavalieri**: Si A i B tenen les seccions horitzontals amb mateixes àrees, llavors $\mathsf{vol}(A) = \mathsf{vol}(B)$.

(c) Sense fer cap càlcul, proveu que per $h > 0$, el **cilindre recte**

$$\big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \le 1,\ 0 \le z \le h\big\}$$

i el **cilindre oblic**

$$\big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + (y - z)^2 \le 1,\ 0 \le z \le h\big\}$$

tenen mateix volum.

Problema 32. Siguin Ω la regió de l'espai definida per $z \ge \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2$, i Γ la definida per $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 \le 1$. Determineu el valor de $\lambda > 0$ que fa que siguin iguals els volums dels fragments de Ω i Γ compresos entre els plans $z = 0$ i $z = \lambda$.

Problema 33. Considereu el paraboloide d'equació $z = a - x^2 - y^2$ i el pla $z = \lambda a$, on $0 < \lambda < 1$. Sigui $\mathsf{v}(A)$ el volum del paraboloide comprès entre el seu vèrtex i el pla, i $\mathsf{v}(B)$ el volum comprès entre el pla donat i el pla XY. Determineu λ per tal que se satisfaci que $\mathsf{v}(A) = k\mathsf{v}(B)$, $k > 0$.

Problema 34. Consideremos los números reales $\alpha, \beta, a, b, c \in \mathbb{R}$, tales que $\beta > 0$, $c > 0$ y $0 < a < b$. Hallar el valor de la integral

$$\int_R xy^\beta z\big(x^2 + y^2 + z^2\big)^\alpha dxdydz,$$

donde

$$R = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0,\ x^2 + y^2 \le c^2 z^2,\ a^2 \le x^2 + y^2 + z^2 \le b^2\Big\}.$$

Problema 35. Calculeu les integrals impròpies $\displaystyle\int_A f$ indicades.

(a) $f(x, y) = xe^{-y}$; $A = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1,\ y \ge 0\big\}$.

(b) $f(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - y}}$; $A = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \le x \le 1,\ 0 \le y < x^2\big\}$.

Problema 36. Considereu el recinte

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\ y > 0,\ \left(\frac{x}{a}\right)^p + \left(\frac{y}{b}\right)^q \leq 1\right\}$$

i la funció $f(x, y) = x^{\alpha-1}y^{\beta-1}$, on $a, b, p, q, \alpha, \beta > 0$. Demostreu la **Fórmula de Dirichlet bidimensional**:

$$\int_A f = \frac{a^\alpha b^\beta}{pq} \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{p}\right)\Gamma\left(\frac{\beta}{q}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{q} + 1\right)}.$$

Indicació: Feu el canvi $u = \left(\frac{x}{a}\right)^p$, $v = \left(\frac{y}{b}\right)^q$, apliqueu la definició de la funció Beta i la seva expressió en termes de la funció Γ

Observació: Per a α o β menors que 1, la fórmula de Dirichlet calcula una integral impròpia.

Problema 37. Calculeu l'àrea S_n del recinte limitat, en el primer quadrant, pels eixos coordenats i la corba $x^{\frac{2}{n}} + y^{\frac{2}{n}} = a^{\frac{2}{n}}$, on $a > 0$ i $n \in \mathbb{N}^*$.

(Expresseu el resultat segons la paritat de n.)

Problema 38. Fijados $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ y $a_1, \ldots, a_n > 0$ consideramos la aplicación $T\colon (0, +\infty) \times \left(0, \frac{\pi}{2}\right)^{n-2} \times (0, 2\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^n$, definida como $T(r, \varphi_1, \ldots, \varphi_n) = (x_1, \ldots, x_n)$ donde

$$\begin{aligned}
x_1 &= c_1 + a_1 r \operatorname{sen}(\varphi_1)\cos(\varphi_2)\\
x_2 &= c_2 + a_2 r \operatorname{sen}(\varphi_1)\operatorname{sen}(\varphi_2)\cos(\varphi_3)\\
x_3 &= c_3 + a_3 r \operatorname{sen}(\varphi_1)\operatorname{sen}(\varphi_2)\operatorname{sen}(\varphi_3)\cos(\varphi_4)\\
&\vdots\\
x_{n-2} &= c_{n-2} + a_{n-2} r \operatorname{sen}(\varphi_1)\operatorname{sen}(\varphi_2)\cdots\operatorname{sen}(\varphi_{n-2})\cos(\varphi_{n-1})\\
x_{n-1} &= c_{n-1} + a_{n-1} r \operatorname{sen}(\varphi_1)\operatorname{sen}(\varphi_2)\cdots\operatorname{sen}(\varphi_{n-2})\operatorname{sen}(\varphi_{n-1})\\
x_n &= c_n + a_n r\cos(\varphi_1).
\end{aligned}$$

Demostrar que T es un cambio de variable y hallar el volumen del **elipsoide n-dimensional de centro c y semiejes $a_1, \ldots, a_n$**,

$$E = \left\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \frac{(x_1 - c_1)^2}{a_1^2} + \cdots + \frac{(x_n - c_n)^2}{a_n^2} \leq 1\right\}.$$

Problema 39. Considéresen $n \in \mathbb{N}^*$, $T\colon (0, 1)^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definida como

$$T(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}, u_n) = \big(u_1(1 - u_2), u_1u_2(1 - u_3), \ldots, u_1u_2\cdots u_{n-1}(1 - u_n), u_1u_2\cdots u_n\big)$$

y $\Delta_n = T\big((0, 1)^n\big)$.

(i) Demostrar que $\sum_{i=j}^{n} x_i = \prod_{i=1}^{j} u_i$ y concluir que T es un cambio de variable.

(ii) Demostrar que el jacobiano de T es $J_T(u_1, \ldots, u_n) = u_1^{n-1}u_2^{n-2}\cdots u_{n-2}^2 u_{n-1}$.

(iii) Demostrar que $\Delta_n = \left\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_j > 0,\ j = 1, \ldots, n \text{ y } \sum_{j=1}^{n} x_j < 1\right\}$.

(iv) Hallar $\mathsf{v}\big(\Delta_n\big)$, el volumen de Δ_n.

(v) Si $\alpha_i \geq 0$, $i = 0, \ldots, n$, y $f(x_1, \ldots, x_n) = \Big(1 - \sum\limits_{i=1}^{n} x_i\Big)^{\alpha_0} \prod\limits_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i}$, calcular

$$\int_{\Delta_n} f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \cdots dx_n.$$

Particularizar la expresión obtenida al caso en el que $\alpha_i \in \mathbb{N}$, $i = 0, , n$.

Problema 40. Consideremos $n \in \mathbb{N}^*$, $a > 0$, $r = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$ y la bola cerrada $B(a) = \{x \in \mathbb{R}^n : r(x) \leq a\}$. Demostrar que el potencial logarítmo $\log\left(\dfrac{1}{r}\right)$ y los potenciales de Riesz $\dfrac{1}{r^\alpha}$ con $0 < \alpha < n$ tienen integral convergente en $B(a)$ y hallar su valor

Problema 41. En un sòlid pla S de densitat uniforme, área $\mathsf{a}(S)$ i massa m, les coordenades del seu centre de masses $(x_{\rm cm}, y_{\rm cm})$ estan determinades per les expressions

$$x_{\rm cm} = \frac{1}{\mathsf{a}(S)} \int_S x dx dy \quad \text{e} \quad y_{\rm cm} = \frac{1}{\mathsf{a}(S)} \int_S y dx dy,$$

Considereu el sòlid pla de densitat uniforme limitat per la **cardioide** d'equació

$$r = a\big(1 + \cos(\phi)\big)$$

en coordenades polars. Calculeu-ne el centre de massa.

Problema 42. En un sòlid pla S de densitat uniforme i massa m, el moment d'inèrcia de S respecte d'un eix E està determinat per l'expressi

$$I = m \int_S r^2(x, y) dx dy, \quad \text{on } r(x, y) \text{ és la distància del punt } (x, y) \in S \text{ a l'eix } E.$$

Considereu el sòlid pla de densidat uniforme i massa m limitat per la **lemniscata** d'equació $r^2 = a^2 \cos(2\phi)$ en coordenades polars. Calculeu-ne el moment d'inèrcia respecte a un eix perpendicular al pla i que passa per l'origen.

PROBLEMES

3 INTEGRALS DE LÍNIA I DE SUPERFÍCIE

Problema 1. Calculeu la llargada de les corbes següents:

(a) **Hèlix**: $c(t) = \big(a\cos(t), a\sin(t), bt\big)$, $0 < t < 4\pi$

(b) **Arc de Cicloide**: $x = R\big(t - \sin(t)\big)$, $y = R\big(1 - \cos(t)\big)$, $0 < t < 2\pi$.

(c) **Astroide o hipocicloide de quatre puntes**: $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.
(El canvi $u = \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{3}}, v = \left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{1}{3}}$ us en pot inspirar una parametrització).

Problema 2. Obteniu les fórmules que permeten calcular la llargada d'una corba plana en els supòsits indicats:

(a) Corba en forma explícita, $y = f(x)$, $x_1 < x < x_2$, on $f \in \mathcal{C}^1([x_1, x_2])$.

(b) Corba en coordenades polars, $r = f(\phi)$, $\phi_1 < \phi < \phi_2$.

Problema 3. Calculeu la llargada de les corbes expressades en coordenades polars següents:

(a) **Cardioide**: $r = a\big(1 + \cos(\phi)\big)$, $0 < \phi < 2\pi$.

(b) **Espiral logarítmica**: $r = e^{-\phi}$, $0 < \phi < +\infty$.

Problema 4. Calculeu la llargada de **l'espiral** $\alpha(t) = \left(t\cos\left(\frac{2\pi}{t}\right), t\sin\left(\frac{2\pi}{t}\right)\right)$, amb $0 < t < 1$.

Problema 5. Calculeu les integrals de línia següents:

(a) $\displaystyle\int_C \sqrt{a^2 - y^2}\, d\boldsymbol{\ell}$, on C és la corba $x^2 + y^2 = a^2$, $y > 0$.

(b) $\displaystyle\int_C \frac{d\boldsymbol{\ell}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, on C és la corba $x^2 + y^2 = R^2$, $z = d$.

Problema 6. Calculeu les integrals de línia $\displaystyle\int_C \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{\ell}$ següents:

(a) $\displaystyle\int_{(R,0)}^{(-R,0)} x dy$ al llarg de la corba $x^2 + y^2 = R^2$, $y > 0$.

(b) $\displaystyle\int_{(1,1)}^{(-1,1)} \big((x^2-2xy)dx + (y^2-2xy)dy\big)$, al llarg de la paràbola $y = x^2$.

(c) $\displaystyle\int_{(1,0,0)}^{(2,1,2)} \mathbf{F}\cdot d\boldsymbol{\ell}$ al llarg del segment que uneix ambdós punts, on el camp $\mathbf{F}$ ès $\mathbf{F}(x,y,z) = \big(\frac{1}{x-y}, \frac{1}{y-x}, z\big)$.

(d) $\mathbf{F}(x,y,z) = (x+y, y+z, z+x)$, C és l'arc de la paràbola $x = z^2$, $y = 0$, des de $(1,0,-1)$ fins $(1,0,1)$.

(e) $\mathbf{F}(x,y,z) = (x^3+y, y^2+z, x+y+z)$, C és la circumferència $x^2+y^2 = 3$, $z = 0$, orientada en el pla XY en sentit positiu.

Problema 7. Calculeu l'àrea de les superfícies següents:

(a) **Con** $\dfrac{x^2+y^2}{a^2} = \dfrac{z^2}{h^2}$, $0 < z < h$.

(b) **Esfera** de radi a.

(c) El tros de l'esfera $x^2+y^2+z^2-2az = 0$ (on $a \geq 0$) contingut dins el paraboloide $2z = x^2+y^2$.

(d) El fragment del con d'equació $x^2+y^2 = z^2$ limitat pels plans $z = 0$ i $y + 2z = 1$.

Problema 8. Integreu les funcions següents sobre les superfícies indicades:

(a) $f(x,y,z) = (x^2+y^2)z$, sobre l'hemisferi superior de l'esfera de radi a centrada en l'origen. essent $a > 0$.

(b) $f(x,y,z) = x$, sobre el cilindre definit per $x^2+y^2 = a^2$, amb $0 < z < 1$.

Problema 9. Sigui S la superfície de revolució obtinguda fent girar la corba generatriu $C \subset \{(x,y,z) : x > 0,\ y = 0\}$ al voltant de l'eix OZ.

(a) (Teorema de Guldin) Si $x = a(t)$, $z = c(t)$ $(t_1 < t < t_2)$ és una parametrització injectiva i regular de C, proveu que l'àrea de S és $2\pi \displaystyle\int_{t_1}^{t_2} a(t)\sqrt{a'(t)^2 + c'(t)^2}\, dt$

(b) Apliqueu-ho a calcular l'àrea del tor de revolució de generatriu $(x-R)^2 + z^2 = r^2$.

Problema 10. Calculeu les integrals de superfície $\displaystyle\int_S \mathbf{F}\cdot d\boldsymbol{S}$ indicades:

(a) $\mathbf{F}(x,y,z) = (y, -x, 1)$, sobre la superfície parametritzada per la funció $g(t,\theta) = \big(t\cos(\theta), t\,\mathrm{sen}(\theta), \theta\big)$, amb $0 < t < 1$ i $0 < \theta < 2\pi$.

(b) $\mathbf{F}(x,y,z) = (x+y+z, y+z, z)$ a través de la frontera del cub $0 \leq x,y,z \leq 2$, orientada vers l'exterior.

(c) $\mathbf{F}(x, y, z) = (x + y, y - x, z)$, a través de la superfície $S = \{z = 4 - x^2 - y^2,\ z \geq 0\}$ orientada amb el vector normal *cap amunt.*

(d) $\mathbf{F}(x, y, z) = (0, 0, z^2)$ a través de la superfície cònica $C = \{(z-1)^2 = x^2 + y^2,\ 0 \leq z \leq 1\}$, tancada amb el pla $\{z = 0\}$, orientada cap a l'exterior

(e) $\mathbf{F}(x, y, z) = \left(x, y, \frac{1}{3}\right)$, a través de l'hemisferi $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z > 0\}$, orientat amb el vector normal *cap amunt.*

(f) $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z)$, a través de la superfície $S = \left\{(x, y, z) : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 = 1,\ z > 0\right\}$, orientada amb el vector normal *cap amunt.*

(g) $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, 0, 0)$, sobre el fragment de l'esfera de centre l'origen i radi 1 contingut *dins* el semicon $\{x^2 + y^2 = z^2,\ z > 0\}$, orientat segons el vector normal en sentit radial.

(h) $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y^2, z)$, sobre la frontera de la regió tancada pel pla $x + y + z = 1$ i els plans coordenats, orientada vers l'exterior.

Problema 11. Calculeu les integrals de línia següents:

(a) $\displaystyle\oint_C (x^2 + y^2)d\boldsymbol{\ell}$, on C és la circumferència de centre $(0, 0)$ i radi R.

(b) $\displaystyle\int_C (xy + z^2)d\boldsymbol{\ell}$, on C és l'arc d'hèlix $x = \cos(t)$, $y = \sin(t)$, $z = t$ comprès entre $(1, 0, 0)$ i $(-1, 0, \pi)$.

Problema 12. Calculeu les integrals de línia dels camps vectorials donats al llarg de les corbes orientades indicades:

(a) $\mathbf{F}(x, y, z) = (2xy, 3z, 5zy)$ al llarg de la corba parametritzada $\gamma(t) = (t+1, t^3-1, t^2)$ des de $(0, -2, 1)$ fins $(2, 0, 1)$.

(b) $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, xz - y)$, sobre el segment que va des de $(0, 0, 0)$ fins $(1, 2, 4)$.

(c) $\mathbf{F}(x, y, z) = \left(\dfrac{x + y}{x^2 + y^2}, \dfrac{y - x}{x^2 + y^2}\right)$, al llarg de la circumferència $x^2 + y^2 = a^2$ recorreguda positivament.

(d) $\mathbf{F}(x, y, z) = (3xy, -y^2, e^z)$, al llarg de la corba d'equacions $\{z = 0,\ y = 2x^2\}$, des de $(0, 0, 0)$ fins $(1, 2, 0)$.

(e) $\displaystyle\oint_C \big(ydx + zdy + xdz\big)$, on C és la circumferència de radi 2 centrada en $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ i situada en el pla $x + y + z = 1$, recorreguda en el sentit de les busques del rellotge vista des de l'origen.

(f) $\displaystyle\int_{(2,1,\frac{\pi}{2})}^{(2,1,\pi)} \big(\operatorname{sen}^2(z)dx + x\operatorname{sen}(2z)dz\big)$ al llarg de la recta que uneix ambdós punts.

Problema 13. Proveu que la integral de línia $\int_C \left(\frac{dx}{yz} + \frac{dy}{xz} + \frac{dz}{xy}\right)$ al llarg de qualsevol corba situada sobre un octant d'una esfera centrada a l'origen i de radi arbitrari val zero.

Problema 14. Una tanca circular, centrada a l'origen i de radi 1, té alçada $h(x, y) = |x| + |y|$. Calculeu-ne l'àrea.

Problema 15. Calculeu el centre de massa del sòlid pla

$$S = \big\{(x, y, z) : x + y + z = 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0\big\}$$

(amb densitat distribuïda uniformement).

Problema 16. Calculeu el centre de massa de la regió de l'esfera $\{x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}$ compresa entre els plans $z = a$ i $z = b$, amb $|a|, |b| \leq r$ (amb densitat distribuïda uniformement).

Problema 17. Calculeu el flux dels camps vectorials següents a través de les superfícies orientades indicades:

(a) $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$ a través de la superfície definida per $g(t, u) = (t+u, t-u, t)$, amb $0 < t < 2$ i $1 < u < 3$.

(b) $\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(y, -y, 1)$, a través del paraboloide $z = 1-x^2-y^2$, on $0 < z < 1$, orientat amb el vector normal *cap amunt*.

(c) $\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(y, -y, 1)$, a través de la meitat inferior de l'esfera de radi 1 centrada a l'origen i orientada amb el vector normal *cap avall*.

(d) $\mathbf{F}(x, y, z) = y\mathsf{i} + z\mathsf{j} + x\mathsf{k}$, a través de la superfície de la piràmide limitada pels plans $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = a$, $a > 0$.

(e) $\mathbf{F}(x, y, z) = (4xz, -y^2, yz)$, a través de la frontera del cub $0 \leq x, y, z \leq 1$.

(f) $\mathbf{F}(x, y, z) = (x - y, x - y, 5z^3)$, a través de la superfície esfèrica $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, orientada cap a fora.

(g) $\mathbf{F}(x, y, z) = (y, -y^2z, yz^2 - x^2)$, a través de la superfície $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $z > 0$, orientada cap a fora.

(h) $\mathbf{F}(x, y, z) = (z-y, x-z, z-x)$, a través de la superfície $x^2+y^2+z^2 = 9$, $1 < z < 2$, orientada en sentit radial positiu.

(i) $\mathbf{F}(x, y, z) = (x + z, z - y, 1)$, a través de la porció superfície cònica $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} = z^2$, compresa entre els plans $z = 0$ i $z = 1$, orientada en direcció positiva.

Problema 18. Siguin $\mathbf{F} = (2, -3, 1)$, i S un cercle de radi a, situat en un pla P. Doneu l'equació dels plans P per als quals el flux de $\mathbf{F}$ a través de S es màxim.

PROBLEMES

4 TEOREMES INTEGRALS DE L'ANÀLISI VECTORIAL

Problema 1. Si u, v son campos escalares y f, g campos vectoriales, demostrar las siguientes identidades:

(a) $\nabla(uv) = u\nabla(v) + v\nabla(u)$.

(b) $\operatorname{div}(u\mathsf{f}) = u\operatorname{div}(\mathsf{f}) + \langle \nabla u, \mathsf{f}\rangle$.

(c) $\operatorname{rot}(u\mathsf{f}) = u\operatorname{rot}(\mathsf{f}) + \nabla(u) \times \mathsf{f}$.

(d) $\operatorname{div}(\mathsf{f} \times \mathsf{g}) = \langle \mathsf{g}, \operatorname{rot}(\mathsf{f})\rangle - \langle \mathsf{f}, \operatorname{rot}(\mathsf{g})\rangle$.

(e) $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}(\mathsf{f}) = \nabla\big(\operatorname{div}(\mathsf{f})\big) - \Delta(\mathsf{f})$.

(f) $\operatorname{rot}(\mathsf{f} \times \mathsf{g}) = \mathsf{f}\operatorname{div}(\mathsf{g}) - \mathsf{g}\operatorname{div}(\mathsf{f}) + (\mathsf{g} \cdot \nabla)\mathsf{f} - (\mathsf{f} \cdot \nabla)\mathsf{g}$, donde

$$(\mathsf{f} \cdot \nabla)\mathsf{g} = \Big(\langle \mathsf{f}, \nabla g_1\rangle, \langle \mathsf{f}, \nabla g_2\rangle, \langle \mathsf{f}, \nabla g_3\rangle\Big)$$

Problema 2. Si r **és el camp radial de** $\mathbb{R}^3$, calculeu el rotacional dels camps vectorials $\mathsf{a} \times \mathsf{r}$ i $\langle \mathsf{a}, \mathsf{r}\rangle \cdot \mathsf{b}$ on $\mathsf{a}, \mathsf{b} \in \mathbb{R}^3$ són vectors constants.

Problema 3. Si f i g són camps escalars de classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3)$, què val $\operatorname{div}(\nabla f \times \nabla g)$?

Problema 4. Un fluid gira al voltant de l'eix OZ amb velocitat angular $\omega(x, y, z)$.

(a) Calculeu el seu camp de velocitats $\mathsf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathsf{r}$, on $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega)$.

(b) Calculeu el rotacional de v.

(c) En el cas que ω només depengui de la distància ρ a l'eix OZ, esbrineu quan v ès irrotacional.

Problema 5. Estudieu si els camps vectorials següents admeten funció potencial. En cas afirmatiu, calculeu-la.

(a) $\mathsf{f}(x, y) = (xy, 1)$.

(b) $\mathsf{f}(x, y) = (y, x)$.

(c) $\mathsf{f}(x, y) = (x + 2y, 2x + y^3)$.

(d) $\mathsf{f}(x, y) = (x^2 - 3xy, x^2 - x^3 + y)$.

(e) $\mathsf{f}(x,y) = \big(e^{x-y}(1+x+y), e^{x-y}(1-x-y)\big)$.

(f) $\mathsf{f}(x,y) = \left(\dfrac{2x}{x^2+y}, \dfrac{1}{y+x^2}\right)$.

Problema 6. Comproveu que la integral de línia

$$\int_{(0,0,0)}^{(1,1,1)} (3x^2+yz)dx + (3y^2+xz)dy + (3z^2+xy)dz$$

no depèn del camí, i calculeu-la.

Problema 7. Donada la relació $\nabla \times \mathsf{f} = \big(x(y^2+z^2), y(x^2+z^2) - z(x^2+y^2+az^2)\big)$, determineu a.

Problema 8. Trobeu $P(x,y,z)$ per tal que $\operatorname{rot}(P,(x-z)y,0) = (y,z,x)$.

Problema 9. Demostreu que el camp vectorial

$$\mathsf{f}(x,y,z) = (y-z)\mathsf{i} + (z-x)\mathsf{j} + (x-y)\mathsf{k}$$

és solenoïdal, i obteniu un camp vectorial g tal que $\mathsf{f} = \operatorname{rot}\mathsf{g}$.

Problema 10. Sigui φ una funció de classe $\mathcal{C}^1$ en un obert simplement connex D, i f un camp vectorial conservatiu de classe $\mathcal{C}^1$ en D. Proveu que el camp vectorial $\varphi\mathsf{f}$ és conservatiu sii $\nabla\varphi$ i f són en cada punt proporcionals.

Problema 11. Comproveu que els camps vectorials següents són conservatius, i calculeu-ne potencials escalars.

(a) $\mathsf{f} = \dfrac{\mathsf{r}}{r}$.

(b) $\mathsf{f} = \dfrac{\mathsf{r}}{r^2}$.

(c) $\mathsf{f} = r^\alpha \mathsf{r}$, $\alpha \neq -2$.

(d) $\mathsf{f}(x,y,z) = (2xy+z^3, x^2, 3xz^2)$.

(e) $\mathsf{f}(x,y,z) = (y^2z, 2xyz, xy^2-1)$.

Problema 12. Sigui el camp vectorial $\mathsf{f} = \dfrac{\mathsf{r}}{r^{\frac{3}{2}}}$ definit a $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$.

(a) Proveu que no existeix un camp vectorial g tal que $\mathsf{f} = \operatorname{rot}\mathsf{g}$.

(b) Proveu que $\mathsf{f} = \nabla(u)$, per a cert camp escalar u; trobeu-lo.

Problema 13. Trobeu $P(x,y,z)$ per tal que $\operatorname{rot}(P,(x-z)y,0) = (y,z,x)$.

Problema 14. Comproveu que les integrals de línia següents són independents del camí, i calculeu-les.

(a) $\displaystyle\int_C xdx + ydy$, al llarg de la corba $y = \varphi(x)$ des de $x = 0$ fins $x = 2\pi$.

(b) $\displaystyle\int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} \varphi(x)dx + \psi(y)dy$.

(c) $\displaystyle\int_{(1,0)}^{(2,2)} \frac{4x(y^2+1)dx - 4x^2ydy}{(x^2+y^2+1)^2}$.

Problema 15. Calculeu les integrals de línia següents, aplicant el Teorema de Green:

(a) $\displaystyle\oint \left(x^2ydx - xy^2dy\right)$ sobre la **circumferència** $x^2+y^2 = R^2$ (orientada positivament).

(b) $\displaystyle\oint_C \frac{(x+2y)dx + ydy}{(x+y)^2}$ on C és la **circumferència** de radi 1, centrada en $(2,0)$.

(c) $\displaystyle\oint_C \left(y^2dx + xdy\right)$ al llarg del quadrat de vèrtexs $(0,0)$, $(2,0)$, $(2,2)$ i $(0,2)$.

(d) $\displaystyle\oint_C \left((x^3-3y)dx + (x+\mathrm{sen}(y))dy\right)$ on C és el triangle de vèrtexs $(0,0)$, $(1,0)$ i $(0,2)$.

(e) $\displaystyle\oint_C \left(-x^2ydx + xy^2dy\right)$ essent C la corba definida por $x^2+y^2 = 1$, $y > 0$, orientada des de $(1,0)$ fins a $(-1,0)$.

Problema 16. Sigui $\mathsf{f} = (P,Q)$ un camp vectorial al pla. Sigui $C \subset \mathbb{R}^2$ una corba de Jordan i R la regió que tanca.

(a) Com ha de ser f per tal d'assegurar que $\displaystyle\oint_C \mathsf{f}\, d\boldsymbol{\ell}$ sigui l'àrea de R?

(b) Comproveu que $\mathsf{f} = \frac{1}{2}(-y,x)$ ho satisfà.

(c) Apliqueu-ho a calcular l'àrea tancada per l'el·lipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

Problema 17. Sigui $U \subset \mathbb{R}^2$ un obert del pla, i f un camp vectorial de classe $\mathcal{C}^1$ en U. Sigui $D \subset U$ una regió amb vora $\partial D = C$. Proveu el **Teorema de la divergència en el pla**:

$$\int_C \langle \mathsf{f}, \mathsf{n}\rangle\, d\ell = \int_D \mathrm{div}(\mathsf{f})\, dxdy$$

on n és el vector normal unitari exterior a D.
(Si $\mathsf{f} = (P,Q)$, considereu el camp vectorial $\mathsf{g} = (-Q,P)$, i apliqueu-hi el teorema de Green.)
(El primer membre s'anomena **flux de F a través de** C.)

Problema 18. Comproveu que les integrals de línia següents són independents del camí que uneix els punts inicial i final, i calculeu-les.

(a) $\displaystyle\int_C \mathsf{f}\,d\boldsymbol{\ell}$, amb $\mathsf{f} = \big(e^{y^2}\cos(x), 2ye^{y^2}\,\mathrm{sen}(x)\big)$, i $C = \big\{(x,y) : y = \mathrm{sen}(x)\big\}$ des de $(0,0)$ fins $(\pi, 0)$.

(b) $\displaystyle\int_C \frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, on C és el quart d'el·lipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ situat en el primer quadrant, i orientat des de $(a,0)$ fins $(0,b)$, $(a,b>0)$.

Problema 19. Sigui el camp vectorial $\mathsf{f}(x,y) = \left(\dfrac{-y}{x^2+y^2}, \dfrac{x}{x^2+y^2}\right)$.

(a) Calcular la integral de f al llarg de la circumferència $x^2+y^2=r^2$, orientada positivament.

(b) Sigui C una corba tancada simple que no deixa l'origen en el seu interior. Proveu que $\displaystyle\oint_C \mathsf{f}\,d\boldsymbol{\ell} = 0$.

(c) Sigui C una corba tancada simple (orientada positivament) que conté l'origen en el seu interior. Proveu que el valor $\displaystyle\oint_C \mathsf{f}\,d\boldsymbol{\ell}$ és independent de la corba considerada. Quin és aquest valor?

(d) Verifiqueu que el camp vectorial f compleix $\dfrac{\partial f_1}{\partial y} = \dfrac{\partial f_2}{\partial x}$. Admet funció potencial en el seu domini de definició? Per qué?

(e) Sigui $U = (0,1)\times(0,1)$. Comproveu que la integral $\displaystyle\oint_{\partial U} \mathsf{f}\,d\boldsymbol{\ell}$ no es pot calcular mitjançant la fórmula de Green. per qué?

Problema 20. Siguin

$$D = \big\{(x,y) : x^2+y^2 < 16,\ (x+2)^2+y^2 > 1,\ (x-1)^2+y^2 > 1\big\},$$

$\mathsf{f} = (f_1, f_2)$ un camp vectorial de classe C^1 amb domini D, i $C \subset D$ una corba tancada simple, orientada positivament. Quants valors diferents pot valdre $\displaystyle\oint_C \mathsf{f}\,d\boldsymbol{\ell}$ (segons l'elecció de C) en els casos següents?

(a) si f és el gradient d'un camp escalar en D.

(b) Si $\dfrac{\partial f_1}{\partial y} = \dfrac{\partial f_2}{\partial x}$.

Problema 21. Calculeu les integrals de línia següents, aplicant el **teorema de Green**:

(a) $\displaystyle\oint_C (y^2\cos x - 2e^y)dx + (2y\,\mathrm{sen}\,x - 2xe^y)dy$, on C ès la corba d'equació $x^2+y^2=\pi$ (orientada positivament).

(b) $\displaystyle\oint_C (2xe^{x^2-y^2} - 4y)dx - (2ye^{x^2-y^2} - 4x)dy$, on C ès la circumferència $2x^2 + 2y^2 - 3x + 5y = 0$.

(c) $\displaystyle\oint_C \mathsf{f}d\boldsymbol{\ell}$, amb $\mathsf{f} = (y - \cos x \cos y, -x + \sin x \sin y)$ al llarg de la circumferència $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0$.

(d) $\displaystyle\oint_C \mathsf{f}d\boldsymbol{\ell}$, amb $\mathsf{f} = \left(xy + x^2y, \frac{x^2}{2} + e^y \operatorname{sen} y\right)$ al llarg de la circumferència $x^2 + y^2 = 1$.

(e) $\displaystyle\oint_C (x^2 + y^2)dx + x(1 + 2y)dy$, essent C la corba orientada definida per la parametrització $x = a(t - \operatorname{sen} t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 < t < 2\pi$ (**cicloide**).

Problema 22. Considereu el camp vectorial

$$\mathsf{f}(x,y) = \left(\sqrt{x^2+y^2}, y\left[xy + \log\left(x + \sqrt{x^2+y^2}\right)\right]\right).$$

(a) Raoneu si s'hi pot aplicar el **teorema de Green** en el rectangle $R = [1,4] \times [0,2]$.

(b) Calculeu la circulació de f al llarg de la vora de R.

Problema 23. Determineu l'àrea del domini comprès entre l'eix OX i l'arc de cicloide definit per la parametrització $x = R(t - \operatorname{sen} t)$, $y = R(1 - \cos t)$, amb $0 \leq t \leq 2\pi$.

Problema 24. Calculeu la circulació dels camps vectorials següents al llarg de les corbes orientades indicades, utilitzant el **teorema de Kelvin-Stokes**:

(a) $\mathsf{f}(x,y,z) = (x^2y^3, 1, z)$, C **circumferència** $\left\{x^2 + y^2 = R^2,\ z = 0\right\}$, recorreguda en el sentit positiu.

(b) $\mathsf{f}(x,y,z) = (y, -2z, x)$, C **el·lipse** intersecció del cilindre $x^2 + y^2 = R^2$ i el pla $\{x = z\}$, recorreguda de manera que la seva projecció sobre el pla XY sigui positiva.

(e) $\mathsf{f}(x,y,z) = (yz, -x, 2y)$, C el **triangle** de vèrtexs $(1,0,0), (0,1,0)$ i $(0,0,1)$, orientat en aquest sentit.

Problema 25. Verifiqueu el **teorema de Kelvin-Stokes** per a la superfície helicoïdal definida per la parametrització $\sigma(u,v) = \left(u\cos(v), u\sin(v), v\right)$, $(u,v) \in [0,1] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, i el camp vectorial donat per $\mathsf{f}(x,y,z) = (xz, yx, zy)$.

Problema 26. Calculeu el flux del rotacional del camp vectorial $\mathsf{f} = (y, xz, xyz)$ a través de la superfície $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$, orientada amb el vector normal *cap amunt*.

Problema 27. Sigui el camp vectorial $\mathsf{g}(x,y,z) = (-x, -y, 2z)$.

(a) Existeix algun camp q tal que $\operatorname{rot}(\mathsf{q}) = \mathsf{g}$? En cas afirmatiu, determineune algun.

(b) Calculeu $\displaystyle\int\int_S \mathsf{g}d\boldsymbol{S}$, essent

$$S = \{(x, y, z) : (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2,\ z > c\},$$

semiesfera orientada en la direcció radial.

Problema 28. Calculeu la circulació dels camps vectorials següents al llarg de les corbes indicades, utilitzant el **teorema de Kelvin-Stokes**:

(a) $\mathsf{f}(x, y, z) = (3xz + yz, 3xz - 3zy, 2xy)$, C, corba tancada obtinguda intersecant el pla $2x + 2y - z = 2$ amb la frontera del cub $Q = [0, 1]^3$, recorreguda en el sentit que va de $(1, 0, 0)$ a $(0, 1, 0)$.

(b) $\mathsf{f}(x, y, z) = (x + y, y + z, z + x)$, C, el.lipse intersecció del cilindre $x^2 + y^2 = 3$ amb el pla $2x + 2y + z = 0$, recorreguda de manera que la seva projecció al pla XY es recorri positivament.

(c) $\mathsf{f}(x, y, z) = (y, z, x)$, C, corba intersecció de les dues superfícies $x + y = 2$, $x^2 + y^2 + z^2 = 2(x + y)$, recorreguda de manera que, vista des de l'origen, el sentit ès el de les busques del rellotge.

(d) $\mathsf{f}(x, y, z) = (x - y + z, y - z + x, z - x + y)$, C, corba intersecció de $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ amb $2x + 2y + z = 0$, orientada de manera que la seva projecció sobre el pla XY sigui recorreguda en sentit positiu.

Problema 29. Siguin $\mathsf{f} = (ye^{xy}, xe^{xy} + a(x - z), -ax)$ i C la corba intersecció de $x + y + z = 1$ amb $x^2 + y^2 = 1$. Calculeu a per tal que la circulació de f al llarg de C valgui π.

Problema 30. Siguin u i v camps escalars de classe $\mathcal{C}^1$ en un conjunt obert $D \subset \mathbb{R}^3$, i $C \subset D$ una corba tancada orientada. Obteniu $\displaystyle\oint_C (u\nabla v + v\nabla u)d\boldsymbol{\ell}$.

Problema 31. Obteniu $\displaystyle\int\int_S \langle \mathrm{rot}(\mathsf{f}), \mathsf{n}\rangle d\boldsymbol{S}$, essent $\mathsf{f} = (x - z, x^3 + yz, -3xy^2)$ i S la superfície $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$, $0 < z < 2$ orientada amb el vector normal *cap amunt*.

Problema 32. Siguin f un camp amb rotacional $(1, 2, 3)$ i C la corba intersecció de $x^2 + y^2 = 1$ amb $x + y + z = 1$ recorreguda de manera que, en projectar sobre el pla XY, doni sentit positiu. Determineu $\displaystyle\int_C \mathsf{f}d\boldsymbol{\ell}$.

Problema 33. Sigui f un camp vectorial de classe $\mathcal{C}^1$ normal a una superfície regular S. Proveu que $\mathrm{rot}(\mathsf{f})$ és tangent a S. (Apliqueu el **teorema de Kelvin-Stokes**.)

Problema 34. Calculeu els fluxos dels camps vectorials següents a través de les superfícies orientades donades, utilizant el **teorema de Gauss–Ostrogradskiĭ**:

(a) $\mathsf{f}(x, y, z) = (xy, y^2, z^2)$, S la vora del cub $(0, 1)^3$.

(b) $\mathsf{f}(x,y,z) = (x^2y, xy^2, xyz)$, S, la vora de la regió

$$V = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z < a^2,\ x,y,z > 0\}$$

on $a > 0$ és una constant.

Problema 35. Siguin $a, b, c > 0$ constants. Considereu les funcions

$$\varphi(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \ \text{ i } \ g(x,y,z) = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}.$$

Aplicant el **teorema de Gauss–Ostrogradskiĭ**, calculeu el flux del camp gradφ a través de la superfície $S = \{(x,y,z) : g(x,y,z) = 1, x > 0, y > 0, z > 0\}$ orientada segons el vector normal *cap avall.*

Problema 36. Calculeu els fluxos dels camps vectorials a través de les superfícies orientades donades, utilizant el **teorema de Gauss–Ostrogradskiĭ**:

(a) $\mathsf{f}(x,y,z) = (yz, xz, xy)$, S, la vora del cub $|x| < 1$, $|y| < 1$, $|z| < 1$.

(b) $\mathsf{f}(x,y,z) = (x^2, y^2, z^2)$, S, la mateixa.

(c) $\mathsf{f}(x,y,z) = (x - y, y - z, x - y)$, S, la mateixa.

Problema 37. Sigui U una regió de $\mathbb{R}^3$ que no contingui l'origen, i sigui S la vora de U. Expresseu $\displaystyle\int\!\!\int_S r^\alpha\, \mathsf{r}\, d\boldsymbol{S}$ com una integral en la regió U. Què s'obté si $\alpha = 0$?

Problema 38. Calculeu $\displaystyle\int\!\!\int_S \operatorname{rot}(\mathsf{f})\, d\boldsymbol{S}$, on $\mathsf{f}(x,y,z) = (-y, x^2, z^3)$ i S és la superfície que limita la regió $x^2 + y^2 + z^2 \le 1$, $\frac{1}{2} \le z \le 1$.

Problema 39. Siguin el camp vectorial $\mathsf{f} = (ye, x\cos z, x\cos y - b)$ i S la superfície $x^2 + y^2 + z^2 - 2az = 1$, $z > 0$, on $a > 0$. Determineu b per tal que el flux radial positiu a través de S sigui π, independentment de a.

Problema 40. Donat el camp vectorial $\mathsf{f} = \left(y + z^2 - x, z^2 + y - x, \frac{\sqrt{2}}{3}\, az\right)$ i les superfícies $S_1 = \{(z-2)^2 = x^2 + y^2, 0 < z < 2\}$, i $S_2 = \{x^2 + y^2 < 4, z = 0\}$, trobeu el valor de a per tal que els fluxos *cap amunt* de f a través d'ambdues superfícies coincideixin.

Problema 41. Proveu que el flux d'un camp constant a través d'una superfície tancada S és nul. Proveu també que si a és un vector fixat, llavors $\displaystyle\int\!\!\int_S \cos(\mathsf{n}, \mathsf{a})\, dS = 0$.

Problema 42. Un camp escalar $f(x,y,z)$ satisfà $||\nabla f||^2 = 4f$, $\nabla\cdot(f\nabla f) = 10f$. Calculeu $\displaystyle\int\!\!\int_S \frac{\partial f}{\partial \mathsf{n}}\, dS$ essent S l'esfera unitat centrada a l'origen i $\dfrac{\partial f}{\partial \mathsf{n}}$ la derivada direccional de f segons el vector normal unitari exterior a S.

Problema 43. Suposem que els camps escalars f i g satisfan les equacions $\nabla^2 g = 0$ $g\nabla^2 f = x + y$ i $\nabla\cdot(g\nabla f) = x + y + z$. Calculeu la integral de superfície $f\dfrac{\partial g}{\partial \mathsf{n}}\, dS$, essent S l'el·lipsoide $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ i $\dfrac{\partial g}{\partial \mathsf{n}}$ la derivada direccional segons el vector normal exterior a S.

Problema 44. Sigui V una regió de l'espai, i $S = \partial V$ la seva vora.

(a) Aplicant el **teorema de Gauss–Ostrogradskiĭ** a $\int\int_S \phi\nabla\phi dS$ obteniu l'expressió

$$\int\int\int_V ||\nabla\phi||^2 dV = -\int\int\int_V \phi\Delta\phi dV + \int\int_S \phi\frac{\partial\phi}{\partial \mathsf{n}} dS,$$

essent $\frac{\partial}{\partial \mathsf{n}}$ la derivada direccional segons el vector normal unitari exterior a S.

(b) Demostreu que si ϕ_1 i ϕ_2 són dues solucions del **problema de Neumann**

$$\nabla^2\phi = h \ \text{ en } V, \qquad \frac{\partial\phi}{\partial \mathsf{n}} = g \ \text{ en } S$$

cal $\phi_1 - \phi_2 = \text{const.}$ (Considereu $\psi = \phi_1 - \phi_2$.)

(c) Demostreu que un camp vectorial f definit en una regió V queda determinat pel seu rotacional i la seva divergència en V, i el seu component normal en $S = \partial V$. (Considereu $\mathsf{g} = \mathsf{f}_1 - \mathsf{f}_2$ amb f_1i f_2 dos camps amb mateixa divergència i rotacional en V, i mateix component normal en S.)

Problema 45. Demostreu que, a fi que el **problema de Neumann**

$$\Delta u = f \ \text{ en } \Omega, \qquad \frac{\partial u}{\partial \mathsf{n}} = g \ \text{ en } \Gamma = \partial\Omega$$

tingui una solució, és necessari que $\int_\Omega f dV = \int_\Gamma g dS$.

(Apliqueu el **teorema de Gauss–Ostrogradskiĭ** a $\int_\Gamma \langle\nabla u, \mathsf{n}\rangle dS$.)

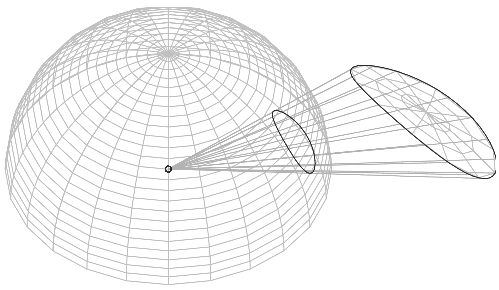
Problema 46. Es consideren coordenades esfèriques (r, θ, ϕ), ($r^2 = x^2+y^2+z^2$, $z = r\cos\phi$). Sigui u una solució del problema $\nabla^2 u = u$ si $r < 1$, i $\frac{\partial u}{\partial r} = \operatorname{sen}\theta$ si $r = 1$. Obteniu $\int\int\int_{r<1} u\, dV$.

Problema 47. De la mateixa manera que en el pla dues semirectes que parteixen d'un punt defineixen un angle, en l'espai podem definir **angle sòlid** com una regió formada per semirectes que parteixen d'un origen O. La mesura d'aquest angle és l'àrea de la superfície obtinguda tallant amb l'esfera S de centre O i radi 1.

(a) Vist des de l'origen, quant val l'angle sòlid de tot l'espai? I el d'un octant ?

(b) Sigui M una superfície regular que no conté O i tal que cada semirecta amb origen O talla M com a molt en un sol punt. Sigui $\Omega(M)$ el conjunt d'aquestes semirectes que tallen M; s'anomena **angle sòlid de vèrtex O subtendit per M**.
Proveu que la seva mesura es pot calcular amb la integral de superfície $\int_M \frac{\mathsf{r}}{r^3}\, dS$
(Sigui M_a la projecció de M sobre l'esfera de centre O i radi a, amb $a > 0$ prou petit,

i sigui U la *regió cònica* compresa entre M_a i M. Utilitzeu el **teorema de Gauss–Ostrogradskiĭ** en U per a provar que la integral de superfície anterior coincideix amb $\dfrac{1}{a^2}\displaystyle\int_{M_a} dS$, i noteu que aquesta quantitat no depèn del radi a triat.)



(c) Calculeu la mesura de l'angle sòlid, amb vèrtex a l'origen, subtendit per la superfície esfèrica $x^2+y^2+z^2=a^2$, $z>a\cos\alpha$.

Problema 48. Un camp escalar $f(x,y,z)$ satisfà $||\nabla f||^2=4f$, $\nabla\cdot(f\nabla f)=10f$. Calculeu $\displaystyle\int\int_S \frac{\partial f}{\partial \mathsf{n}}\,dS$ essent S l'esfera unitat centrada a l'origen i $\dfrac{\partial f}{\partial \mathsf{n}}$ la derivada direccional de f segons el vector normal unitari exterior a S.

PROBLEMES

5 FORMES DIFERENCIALS I TEOREMA DE STOKES

Problema 1. A $\mathbb{R}^3$ considereu les formes diferencials $\alpha = xdx - ydy$, $\beta = zdx + xdz$ i $\gamma = zdy$. Calculeu $\alpha \wedge \beta$, $\alpha \wedge \beta \wedge \gamma$, $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$ i $d(\alpha \wedge \beta)$.

Problema 2. A $\mathbb{R}^n$ sigui $r = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$ la distància euclidiana a l'origen, i considereu la 1-forma diferencial $\theta = x_1 dx_1 + \cdots + x_n dx_n$.

(a) Calculeu dr i $dh(r)$ (on h ès una funció diferenciable d'una variable) i dr^α, expressant el resultat en termes de θ.

(b) Calculeu $d\theta$ i $d(r^\alpha \theta)$.

Problema 3. Considereu l'aplicació $F\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $F(u,v) = (u^2 - v^2, 2uv)$. Calculeu els *pull-backs* següents: $F^*(x^2+y^2)$, $F^*(dx)$, $F^*(dy)$, $F^*(dx \wedge dy)$, $F^*(-ydx + xdy)$

Problema 4. Calculeu la integral de la 1-forma diferencial $\omega = (x-y)(dx+dy)$ sobre la línia poligonal de $\mathbb{R}^2$ definida pels vèrtexs

$$(1,0) \longrightarrow (0,1) \longrightarrow (-1,0) \longrightarrow (0,-1) \longrightarrow (1,0).$$

Problema 5. A $\mathbb{R}^3$ sigui $\omega = -(y+z)dx + \cos(xyz)dy + (x+y)dz$. Sigui S el mig el.lipsoide definit per $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{36} + \dfrac{z^2}{9} = 1$, $y > 0$, orientat amb el vector normal*cap enfora* respecte a l'el.lipsoide complet.

(a) Calculeu $\displaystyle\int_S d\omega$ aplicant directament el **teorema de Stokes**.

(b) Sigui T la superfície plana definida per $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{z^2}{9} < 1$, $y = 0$, orientada amb el vector normal $(0,1,0)$ en cada punt. Calculeu $\displaystyle\int_T d\omega$ a partir de la definició de la integral d'una forma diferencial.

(c) Expliqueu per qué $\displaystyle\int_S d\omega = \int_T d\omega$.

Problema 6. Es considera la 2-forma

$$\omega = z(x^2+y^2)dx \wedge dy + y(x^2+z^2)dx \wedge dz + x(z^2-y^2)dy \wedge dz.$$

Calculeu $\displaystyle\int_S \omega$, on S és el conjunt definit per $x^2+y^2+z^2 = 1$, $0 < z < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, orientat amb el vector normal *cap enfora* de l'esfera.

Problema 7. Considereu l'esfera unitat $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. Digueu quins d'aquests camps vectorials de $\mathbb{R}^3$ hi són tangents.

(a) $F(x, y, z) = (-y, x, 0)$.

(b) $F(x, y, z) = (x, y, z)$.

(c) $F(x, y, z) = (y, x, 0)$.

(d) $F(x, y, z) = (yz, xz, -2xy)$.

Problema 8. Considereu l'esfera unitat S parametritzada amb coordenades esfèriques:

$$\sigma(u, v) = (\cos u \cos v, \operatorname{sen} u \cos v, \operatorname{sen} v), \quad u \in [0, 2\pi], \quad v \in [0, \pi].$$

Siguin T_u, T_v els vectors tangents de la parametrització.

(a) Sigui $\omega_1 = -xzdx - yzdy + (x^2 + y^2)dz$. Calculeu $\omega_1(T_u)$ i $\omega_1(T_v)$. Interpreteu el resultat.

(b) Sigui $\omega_2 = \omega_1 + xdx + ydy + zdz$. Proveu que si X és un camp vectorial en $\mathbb{R}^3$ tangent a S en tot punt aleshores, per a tot $p \in S$, $\omega_2(p)(X) = \omega_1(p)(X)$. Interpreteu el resultat.

(c) Considereu f, g i h els següents camps vectorials en $\mathbb{R}^3$: $\mathsf{f}(x, y, z) = (-y, x, 0)$, $\mathsf{g}(x, y, z) = (yz, xz, -2xy)$ i $\mathsf{h}(x, y, z) = (-xz, -yz, x^2 + y^2)$. Comproveu que $(dx \wedge dy \wedge dz)(\mathsf{f}, \mathsf{g}, \mathsf{h}) = 0$, i expliqueu el resultat.

Problema 9. Calculeu l'expressió en coordenades de $df \wedge dg$, essent

$$f(x, y, z) = \ln\left(1 + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right), \quad g(x, y, z) = \operatorname{sen}\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right).$$

Problema 10. A $\mathbb{R}^6$ considereu $\omega = dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4 + dx_5 \wedge dx_6$. Calculeu $\omega \wedge \omega \wedge \omega$.

Problema 11. Considereu l'espaitemps ordinari $\mathbb{R}^4$ amb coordenades cartesianes (t, x, y, z), i les formes diferencials

$$\begin{aligned} A &= \varphi dt - A_1 dx - A_2 dy - A_3 dz, \\ F &= E_1 dt \wedge dx + E_2 dt \wedge dy + E_3 dt \wedge dz \\ &\quad - B_1 dy \wedge dz - B_2 dz \wedge dx - B_3 dx \wedge dy. \end{aligned}$$

(a) Utilitzant l'operador ∇ en el mateix sentit que en el càlcul vectorial de $\mathbb{R}^3$, proveu que la relació $F = dA$ equival a

$$\mathsf{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \mathsf{A}}{\partial t}, \quad \mathsf{B} = \nabla \times \mathsf{A}.$$

(b) Semblantment, proveu que $dF = 0$ equival a

$$\nabla \times \mathsf{E} = -\frac{\partial \mathsf{B}}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \mathsf{B} = 0.$$

Problema 12. A $\mathbb{R}^4 \setminus \{(0,0,0,0)\}$ considereu la funció $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}$, el camp vectorial radial

$$\Delta = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_3} + x_4 \frac{\partial}{\partial x_4},$$

la 3-forma diferencial

$$\Sigma = x_1 dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4 - x_2 dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_4 - x_3 dx_1 \wedge dx_4 \wedge dx_2 - x_4 dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$$

i la forma de volum

$$\Omega = dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4.$$

(a) Comproveu que $d\Sigma = 4\Omega$

(b) Comproveu que $\frac{1}{r} dr \wedge \Sigma = \Omega$.

(c) Comproveu que $i_\Delta \Omega = \Sigma$.

Problema 13. Recordem que una forma diferencial θ es diu **tancada** si $d\theta = 0$, i es diu **exacta** si existeix una altra forma diferencial ω tal que $d\omega = \theta$.

(a) Demostreu que el producte exterior de dues formes tancades és una forma tancada.

(b) Demostreu que el producte exterior d'una forma exacta per una forma tancada és una altra forma exacta.

(c) Demostreu que si ω és una 1-forma diferencial i f una funció enlloc nul.la tals que $f\omega$ és tancada, aleshores $\omega \wedge d\omega = 0$.

(d) Doneu un exemple d'una forma diferencial ω tal que $\omega \wedge d\omega \neq 0$

(e) Si ω és una forma diferencial de grau parell, proveu que $\omega \wedge d\omega$ es tancada.

Problema 14. Considereu l'aplicació $L(\omega) = \omega \wedge d\omega$. És cert que $L^2(\omega) = 0$? I és cert que $dL(\omega) = L(d\omega)$?

Problema 15. Considereu l'aplicació $F\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ donada per $F(u,v) = (uv, 1)$. Calculeu $F^*(dx)$, $F^*(dy)$, $F^*(ydx)$, $F^*(dx \wedge dy)$.

Problema 16. Calculeu $\int_D (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{\alpha}{2}} dx \wedge dy \wedge dz$, on $\alpha \geq 0$ i D és la mitja bola definida per $x^2 + y^2 + z^2 < R^2$, $z > 0$.

Problema 17. Donada la 2-forma

$$\omega = \Big(\frac{x}{r^3} + a\Big) dy \wedge dz + \Big(\frac{y}{r^3} + b\Big) dz \wedge dx + \Big(\frac{z}{r^3} + c\Big) dx \wedge dy,$$

amb a, b, c constants, calculeu $\int_S \omega$, on S és una esfera de radi R i centre l'origen orientada amb el vector normal *cap enfora*.