Grau de Matemàtiques, FME

Programació Matemàtica

Tema 1 : Programació Lineal

Fonaments

Jordi Castro, F.-Javier Heredia, Josep Homs

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH

Departament d'Estadística
i Investigació Operativa

Programació Lineal: introducció i fonaments

1. **Introducció**
   - Definició problema de Programació Lineal i exemples.
   - Orígens històrics.
2. **Propietats geomètriques dels problemes (PL)**
   - Políedres i polítops.
   - Classificació dels problemes (PL).
   - Convexitat i poliedres.
   - Punts extrems.
   - Forma estàndard.
   - Solucions bàsiques factibles.
3. **Annex:**
   - Models bàsics de programació lineal.

Bibliografia: Cap. 2 - 5 "*Introduction to Linear Optimization*", D. Bertsimas, N. Tsitsiklis

Def. problema de Programació Lineal (PL)

Def. Problema de programació lineal $(\boldsymbol{PL})$:

Donats els vectors $c, l, u \in \mathbb{R}^n$,$b \in \mathbb{R}^m$ i la matriu $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ es defineix el problema de programació lineal com el següent problema d'optimització matemàtica:

$$
(PL)\begin{cases}
\min\limits_{x\in\mathbb{R}^n} z = & c'x & & & \textbf{funció objectiu} \\
\quad s.a.: & & & & \\
 & Ax & \begin{smallmatrix}\leq\\=\\\geq\end{smallmatrix} & b & \textbf{constriccions} \\
 & l \leq x \leq u & & & \textbf{fites}
\end{cases}
$$

amb: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = [A_1, \dots, A_n] = \begin{bmatrix} a'_1 \\ \vdots \\ a'_m \end{bmatrix}$.

- **Regió factible de $(\boldsymbol{PL})$:** $P = \left\{x \in \mathbb{R}^n : Ax \begin{smallmatrix}\leq\\=\\\geq\end{smallmatrix} b, l \leq x \leq u\right\}$.
- **Solució factible de $(\boldsymbol{PL})$:** $x \in P$.
- **Conjunt solució de $(\boldsymbol{PL})$:** $\mathcal{X}^* = \{x^* \in P : c'x^* \leq c'y, \forall y \in P\}$.
- **Solució òptima de $(\boldsymbol{PL})$:** $x^* \in \mathcal{X}^*$.
- Notació: $(PL) \min\limits_{x\in\mathbb{R}^n}\{c'x | x \in P\}$, $\mathcal{X}^* \equiv \underset{x\in\mathbb{R}^n}{\operatorname{argmin}}\{c'x | x \in \mathcal{F}\}$.

Exemples prob. de Programació Lineal (PL)

Problema de programació de la producció

Paràmetres:

- n: nre. productes a fabricar
- m: nre. recursos consumits
- c_i: benefici producte $i, i = 1, \dots, n$
- b_j: disponibilitat recurs $j, j = 1, \dots, m$
- a_{ji}: quantitat recurs j consumit pel producte i.

Variables:

- x_i: quantitat a fabricar producte i

Funció objectiu: es maximitzen els beneficis totals.

Constriccions: el programa de producció no consumeix més recursos dels existents.

$$
(PL) \begin{cases} \max\limits_{x \in \mathbb{R}^n} z = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} c_i x_i & \\ \quad s.a.: & \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i \le b_j & j = 1,2,\dots,m \\ x_i \ge 0 & i = 1,2,\dots,n \end{cases}
$$

Exemples prob. de Programació Lineal (PL)

Problema de la dieta

Paràmetres:

- n: nre. aliments diferents disponibles.
- m: nre. de nutrients essencials dieta.
- c_i: cost aliment i, $\mathrm{i} = 1, \dots, n$
- b_j: quantitat diària mínima nutrient j, $j = 1, \dots, m$
- a_{ji}: quantitat nutrient j aportat per kg aliment i.

Variables:

- x_i: quantitat diària aliment i a la dieta.

Funció objectiu: es minimitzen el preu total de la dieta.

Constriccions: la dieta aporta les quantitats necessàries de cada nutrient.

$$
(PL)\begin{cases}
\min\limits_{x \in \mathbb{R}^n} z = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} c_i x_i & \\
s.a.: & \\
\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i \geq b_j & j = 1,2, \dots, m \\
x_i \geq 0 & i = 1,2, \dots, n
\end{cases}
$$

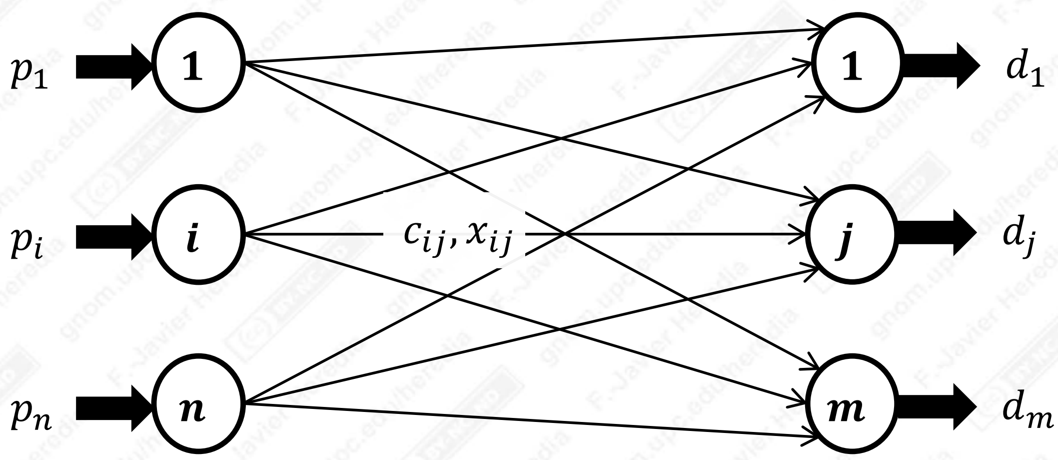
Problema de transport

Paràmetres:
- n: nre. centres producció.
- m: nre. centres consum
- c_{ij}: cost unitari transport entre centres i, j
- p_j: producció centre $i, i = 1, \dots, n$
- d_j: demanda centre consum $j, j = 1, \dots, m$

Variables:
- x_{ij}: quantitat de producte a transportar de i a j.

Funció objectiu: es minimitzen els costos totals de transport

Constriccions:
1) Cada centre de producció envia tota la seva producció.
2) Cada centre de consum rep la seva demanda.



UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA BARCELONATECH
Departament d'Estadística i Investigació Operativa

Problema de transport

Paràmetres:

- n: nre. centres producció.
- m: nre. centres consum
- c_{ij}: cost unitari transport entre centres i, j
- p_j: producció centre $i, i = 1, \dots, n$
- d_j: demanda centre consum $j, j = 1, \dots, m$

Variables:

- x_{ij}: quantitat de producte a transportar de i a j.

Funció objectiu: es minimitzen els costos totals de transport

Constriccions:

1) Cada centre de producció envia tota la seva producció.
2) Cada centre de consum rep la seva demanda.

$$
(PL)\left\{
\begin{array}{llll}
\min\limits_{x \in R^{n \times m}} z = & \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij} & & \\
s.a.: & & & \\
1) & \displaystyle\sum_{j=1}^{m} x_{ij} & = p_i & i = 1,2, \dots, n \\
2) & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_{ij} & = d_j & j = 1, \dots, m \\
 & x_{ij} \geq 0 & & \begin{array}{l} i = 1,2, \dots, n \\ j = 1, \dots, m \end{array}
\end{array}
\right.
$$

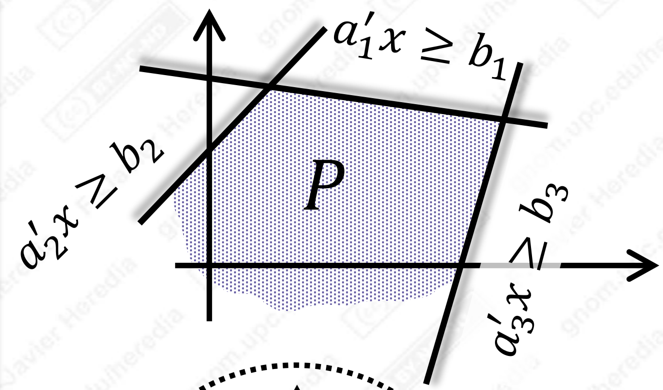
Orígens històrics de la PL

- **Període clàssic, fonaments:**
  - **Fourier, 1826**: mètode per a resoldre sistemes d'inequacions lineals (eliminació de Fourier-Motzkin, secció 2.8 Bertsimas).
  - **Farkas, Caratheodory, Minkowsky, 1870-1930**: fonaments.
  - **von Neumann, 1928**: teoria de dualitat dins de la teoria de jocs.
  - **Kantorovich, Koopmans, 1939**: formulacions com a PL de problemes d'economia (Premis Nobel d'economia 1975).
- **Període modern, algorismes:**
  - **George Dantzig, 1947: mètode del símplex**.
    - **1950:** aplicacions.
    - **1960:** optimització de grans dimensions (algorisme Dantzig-Wolfe).
    - **1970:** complexitat algorísmica.
  - **Khachyan, 1979:** mètode de l'el·lipsoide.
  - **Karmarkar, 1984:** mètodes de punt interior.

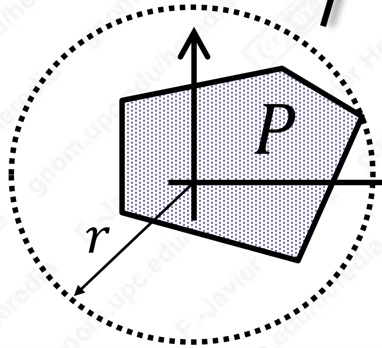
Políedres i polítops : definicions

Def. Políedre: *un políedre* P *és un conjunt de* $\mathbb{R}^n$ *que pot ser expressat com a intersecció d'una col·lecció finita de semiespais:*

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax \geq b\}, A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m$$



Def. Polítop: políedre no buit i fitat.



Proposició 1:

i. La regió factible de qualsevol problema (PL) *és un políedre.*

ii. Els polítops són conjunts compactes (tancats i fitats)

Demo: immediata

Classificació dels problemes (PL) (1/4)

Def. Problema (PL) amb solució òptima:

- *Problema (PL) t.q. $\exists x^* \in P : c'x^* \leq c'y, \forall y \in P$ (x^* solució òptima).*
- *Problema (PL) t.q. $\{c'x | x \in P\}$ està fitat inferiorment.*
- *Si x^* no és únic, les (infinites) solucions òptimes de (PL) s'anomenen **òptims alternatius**.*
- ***Conjunt solució $\mathcal{X}^*$**: el conjunt de totes les solucions òptimes (PL).*

Def. Problema (PL) infactible: *problema (PL) amb $P = \emptyset$.*

Def. Problema (PL) il·limitat: *problema (PL) factible amb $\mathcal{X}^* = \emptyset$.*

- *Problema (PL) factible t.q. $\{c'x | x \in P\}$ no està fitat inferiorment.*
- *Problema (PL) factible t.q. $\exists x \in P, d \in \mathbb{R}^n$ que satisfan:*
  1. $x + \theta d \in P, \forall \theta > 0$ *(diem que d és un raig del políedre P).*
  2. $c'd < 0$ *(diem que d és una direcció de descens sobre x).*

Classificació dels problemes (PL) (1/4)

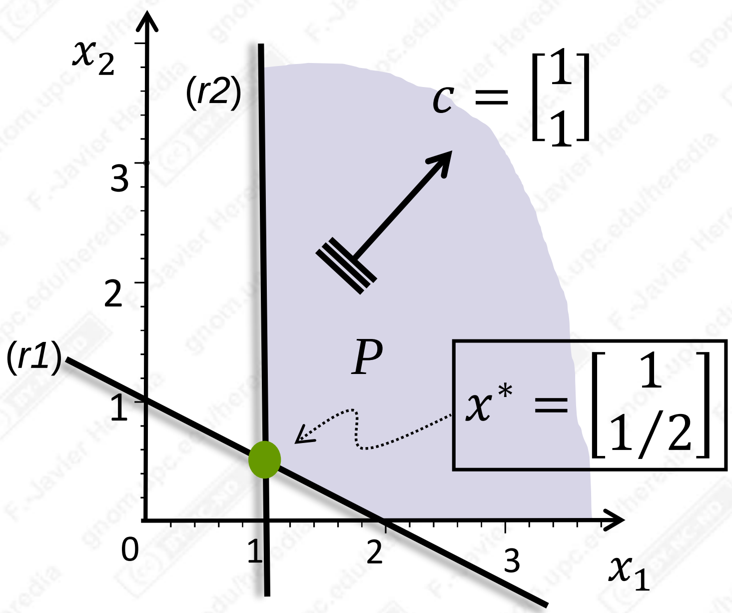
- (PL)
  - $P = \emptyset$ $\Rightarrow$ **infactible (sense solució).**
  - $P \neq \emptyset$
    - $\mathcal{X}^* = \emptyset$ $\Rightarrow$ **il·limitat (sense solució)**
    - $\mathcal{X}^* \neq \emptyset$
      - $|\mathcal{X}^*| = 1$ $\Rightarrow$ **òptim únic.**
      - $|\mathcal{X}^*| > 1$ $\Rightarrow$ **òptims alternatius.**

- **(PL) amb solució òptima**

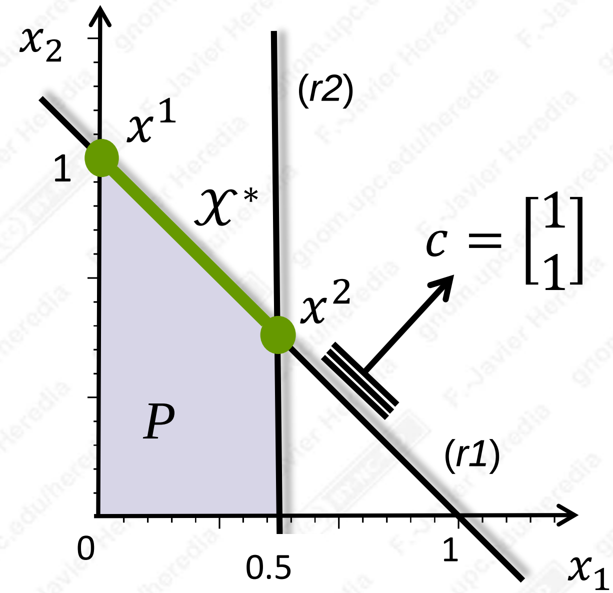
$$(PL)\begin{cases}\min & z = & x_1 & +x_2 & & \\ \text{s.a.:} & & x_1 & +2x_2 & \geq 2 & (r1) \\ & & x_1 & & \geq 1 & (r2) \\ & & x_1, & x_2 & \geq 0 & \end{cases}$$

$$(PL)\begin{cases}\max & z = & x_1 & +x_2 & & \\ \text{s.a.:} & & x_1 & +x_2 & \leq 1 & (r1) \\ & & 2x_1 & & \leq 1 & (r2) \\ & & x_1, & x_2 & \geq 0 & \end{cases}$$

Solució única:



Infinites solucions (òptims alternatius):

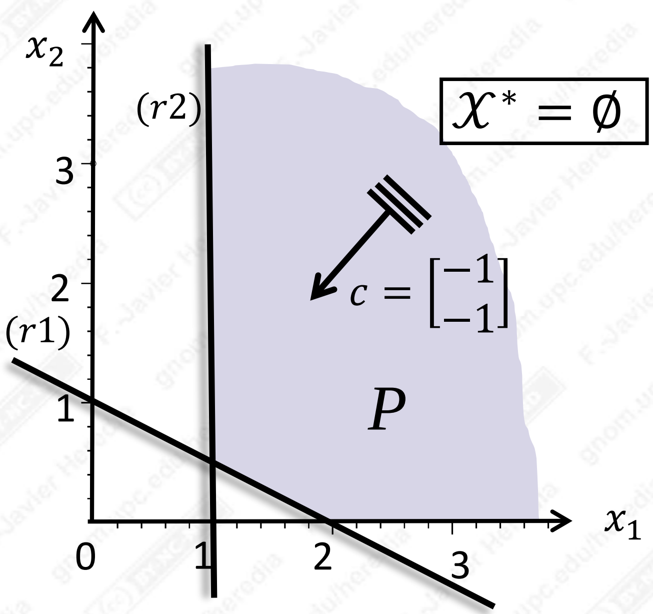


$$\boxed{\mathcal{X}^* = \{x \in \mathbb{R}^2 | \lambda x^1 + (1-\lambda)x^2, \lambda \in [0,1]\}}$$

Classificació dels problemes (PL) (3/4)

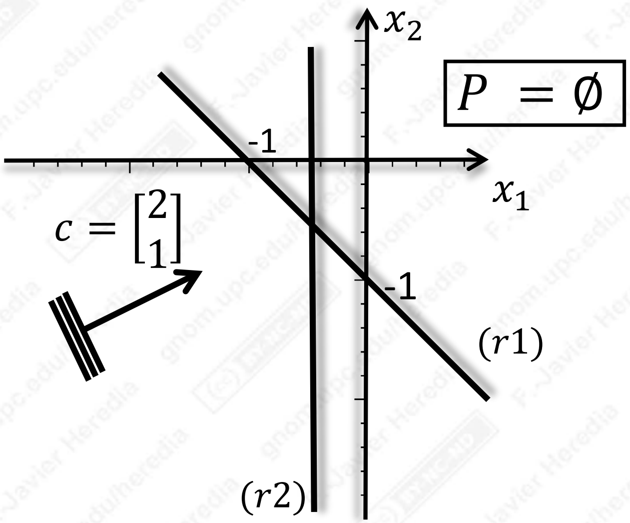
- **(PL) il·limitat (∄mínim):**

$$(PL)\begin{cases} \min & z = -x_1 - x_2 \\ \text{s.a.:} & x_1 + 2x_2 \geq 2 \quad (r1) \\ & x_1 \geq 1 \quad (r2) \\ & x_1, \; x_2 \geq 0 \end{cases}$$



- **(PL) infactible (∄solució factible):**

$$(PL)\begin{cases} \max & z = 2x_1 + x_2 \\ \text{s.a.:} & x_1 + x_2 \leq -1 \quad (r1) \\ & 2x_1 \leq -1 \quad (r2) \\ & x_1, \; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

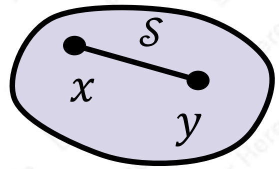


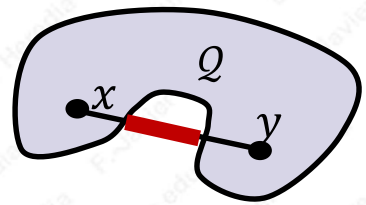
Convexitat i políedres (1/2)

Def. conjunt convex:

Conjunt $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$ *tal que* $\forall x, y \in \mathcal{S}$, $\forall \lambda \in [0,1]$ *:* $\lambda x + (1-\lambda) y \in \mathcal{S}$

Convex





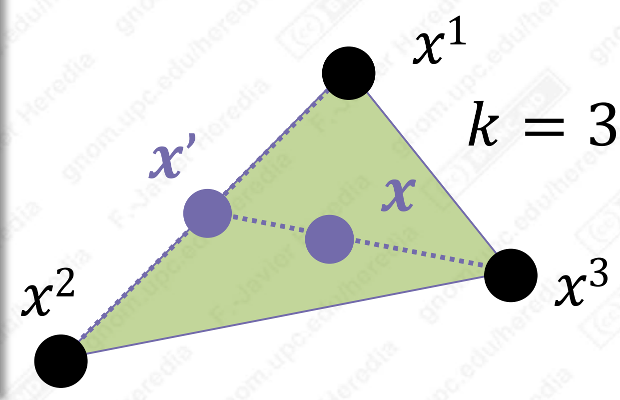
No Convex

Def. combinació convexa:

Siguin $x^1, \dots, x^k \in \mathbb{R}^n$ *, i* $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ t.q.

$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1, \;\; \lambda_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, k.$

Llavors, $x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^i$ *és combinació convexa* de $x^1, \dots, x^k$



Def. embolcall convex (*convex hull*) de $x^1, \dots, x^k$:

Conjunt de totes les combinacions convexes de $x^1, \dots, x^k$*:*

$$\mathrm{CH}(x^1, \dots, x^k) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \,|\, x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^i \,, \lambda_i \geq 0 \; \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1 \right\}$$

Convexitat i políedres

Proposició 2: propietats conjunts convexos.

i. *La intersecció de conjunts convexos és convexa.*

ii. ***Tot políedre és un conjunt convex*****.**

iii. *La combinació convexa d'un nombre finit d'elements d'un conjunt convex pertany al conjunt convex.*

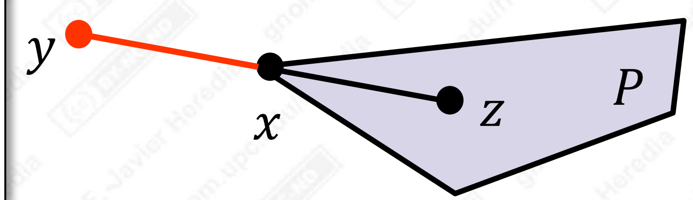
iv. *L'embolcall convex d'un conjunt finit de vectors és un conjunt convex.*

Demo: exercici 9.

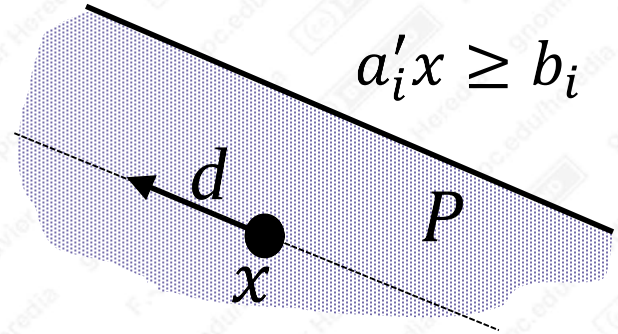
- ***La propietat ii*** implica que ***la regió factible dels problemes*** (PL) ***és un conjunt convex***.

Punts extrems: definició i existència

Def. punt extrem: *sigui el políedre* P. *Un vector* $x \in P$ *és un punt extrem de* P *si no existeix cap parell de vectors* $y, z \in P$, *diferents de* x, *ni cap escalar* $\lambda \in [0,1]$ *tals que:* $x = \lambda y + (1-\lambda) z$



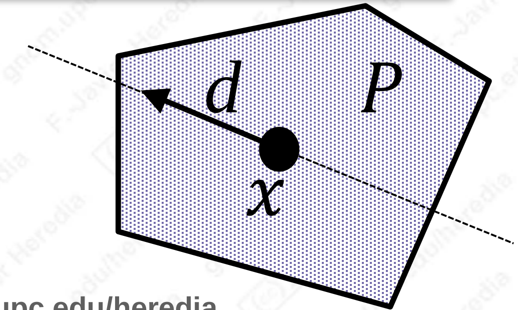
Def. línia: *direm que el políedre* $P \subset \mathbb{R}^n$ *conté una línia si existeix el vector* $x \in P$ *i el vector no nul* $d \in \mathbb{R}^n$ *tals que* $x + \lambda d \in P$ *per a tot escalar* λ.



Teorema 1 (Ta 2.6 B&T): existència punts extrems.

El políedre no buit P *té algun punt extrem* $\Leftrightarrow$ P *no conté cap línia.*

Corol·lari 1.1: *Tot políedre no buit fitat (polítop) té algun punt extrem.*



Punts extrems, optimalitat

Teorema 2 (Ta 2.7 B&T): optimalitat dels punts extrems

Sigui $(PL)\ \min_{x\in\mathbb{R}^n}\{c'x | x \in P\}$, P *políedre. Suposem que* P *conté algun punt extrem i que existeix una solució òptima. Llavors existeix una solució òptima que és un punt extrem de* P.

Demo : pissarra.

- **Interpretació:**

  (PL) amb solució òptima sense pts. extrems: $(PL)\ \min_{x\in\mathbb{R}^2}\{c'x \mid x_1 + x_2 \geq 3\}$

  (PL) amb pts. extrems sense sol. òptima: $(PL)\ \min_{x\in\mathbb{R}^2}\{-x_1 - x_2 | x_1 + x_2 \geq 3, x \geq 0\}$

  (PL) amb òptims pts. extrems i no pts. extrems: $(PL)\ \min_{x\in\mathbb{R}^2}\{c'x | x_1 + x_2 \leq 1, x \geq 0\}$

- **Problema:** la caracterització de les solucions òptimes de problemes (PL) com a punts extrems no permet el seu tractament computacional. Necessitem desenvolupar el concepte de

solucions bàsiques factibles de políedres en forma estàndard.

Forma estàndard (1/3)

Definició formes estàndard:

- **Políedre en forma estàndard**: $P_e = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = b, x \geq 0\}$
- **Problema $(\boldsymbol{PL})$ en forma estàndard:** $(PL)_e \min_{x\in\mathbb{R}^n}\{c'x : x \in P_e\}$.

Proposició 3: propietats poliedre estàndard $\boldsymbol{P_e}$.

i. *P_e és un políedre.*

ii. *Tot políedre P es pot expressar com a políedre en forma estàndard.*

iii. *Tot P_e no buit té algun punt extrem.*

Demo: immediata (desenvolupar ii).

Proposició 4: transformació $(\boldsymbol{PL}) \rightarrow (\boldsymbol{PL})_{\boldsymbol{e}}$.

Aplicant Prop. 3-ii tot problema (PL) es pot transformar en un problema equivalent en forma estàndard $(PL)_e$, en el sentit que:

a) *Donada una solució factible d'un problema podem trobar una solució factible de l'altre amb el mateix cost.*

b) *Les solucions òptimes de (PL) i $(PL)_e$ coincideixen.*

Exemple: exercici 10

Forma estàndard (2/3)

- **Idea**: Si $P_e \neq \emptyset$ no té $rang(A) = m$ es poden eliminar equacions linealment dependents:

Teorema 2: condició A rang complet.

Sigui P_e un políedre estàndard no buit amb $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ i files $a_1', \ldots, a_m'$.

Suposem que $\mathrm{rang}(A) = k < m$ *i que les files* $a_{i_1}', \ldots, a_{i_k}'$ *són linealment independents. Considerem el políedre*

$$Q_e = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \middle| a_{i_1}'x = b_{i_1}, \ldots, a_{i_k}'x = b_{i_k}, x \geq 0 \right\}$$

Llavors $Q_e = P_e$.

Demo: exercici 11

Exemple: $P_e = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \middle| \begin{array}{ll} x_1 + x_2 & = 1 \\ x_1 & = \frac{1}{2}, x \geq 0 \\ 2x_1 + x_2 & = \frac{3}{2} \end{array} \right\}$ →exercici 12.

Forma estàndard (3/3)

Regles pràctiques de transformació a la forma estàndard	
$(\boldsymbol{PL})$	$(\boldsymbol{PL})_e$
$a_j'x \leq b_j$	$a_j'x + x_k = b_j, x_k \geq 0,(x_k$ **variable de folga**)
$a_j'x \geq b_j$	$a_j'x - x_k = b_j, x_k \geq 0,(x_k$ **variable d'escreix**)
$\underline{b}_j \leq a_j'x \leq \overline{b}_j$	$a_j'x + x_k = \overline{b}_j, \quad 0 \leq x_k \leq \overline{b}_j - \underline{b}_j$
$x_i \leq 0$	Canvi de variable: $y_i = -x_i \quad , \quad y_i \geq 0$
x_i lliure	Mètode 1: $x_i = u_i - v_i \quad , \quad u_i \quad , \quad v_i \geq 0$ Mètode 2: s'elimina x_i d'una constricció $a_j'x = b_j$
$x_i \leq u_i$	Canvi de variable: $y_i = u_i - x_i \quad , \quad y_i \geq 0$
$l_i \leq x_i$	Canvi de variable: $y_i = x_i - l_i \quad , \quad y_i \geq 0$
$\max c'x$	$\min -c'x$

- Exemple: transformeu a la forma estàndard $(PL)\begin{cases} \max\limits_{x\in\mathbb{R}^3} z = & 3x_1 & +2x_2 & +3x_3 & \\ s.a.: & & & & \\ & 4 \leq 2x_1 & +x_2 & +x_3 & \leq 20 \\ & 3x_1 & -x_2 & +2x_3 & \leq 6 \\ & x_1 \geq 0 & x_2 \geq 3 & & \end{cases}$

Solucions Bàsiques Factibles : definició

Definició Solució Bàsica (SB):

Sigui $(PL)_e \min_{x\in\mathbb{R}^n}\{c'x|Ax=b, x\geq 0\}$, A *matriu* $m\times n$ *de* ***rang complet.***

El vector $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$ ***és una solució bàsica de*** $(\boldsymbol{P})_{\boldsymbol{e}}$ *sii es satisfan les condicions:*

a) $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$.

b) $\exists\mathcal{B}=\{B(1),\dots,B(m)\}\subseteq\{1,\dots,n\}$ *tals que:*

i. *La* ***matriu bàsica*** $B\overset{\text{def}}{=}\left[A_{B(1)},A_{B(2)}\dots,A_{B(m)}\right]$ *és* ***no singular.***

ii. $\forall\boldsymbol{i}\notin\boldsymbol{\mathcal{B}}\colon\boldsymbol{x_i}=\boldsymbol{0}$.

Anomenem ***variables bàsiques*** *(VB) a les variables* $\boldsymbol{x_i}, \boldsymbol{i}\in\boldsymbol{\mathcal{B}}$

Anomenem ***variables no bàsiques*** *(VNB) a les variables:* $\boldsymbol{x_i}\in\boldsymbol{\mathcal{N}}=\{\boldsymbol{1},\dots,\boldsymbol{n}\}\setminus\boldsymbol{\mathcal{B}}$

- **Solució Bàsica Factible (SBF)**: *SB que és factible, i.e.:* $x\geq 0$.
- **Solució Bàsica Degenerada (SBD)** : *SB tal que* $\exists i\in\mathcal{B}: x_i=0$.

- **Exemples:** $\begin{cases}(PL)\min_{x\in\mathbb{R}^2}\{c'x|x_1+x_2=2, x_1\leq 1, x\geq 0\}\\(PL)\min_{x\in\mathbb{R}^2}\{c'x|x_1+x_2\leq 2, x_1\leq 1, x\geq 0\}\\(PL)\min_{x\in\mathbb{R}^2}\{c'x|x_1+x_2=2, x_1\leq 2, x\geq 0\}\end{cases}$ → **Exercicis 13-18.**

Solucions Bàsiques: càlcul.

- **Càlcul d'una SB**: considerem el següent políedre:

$$P = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 | \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} x \leq \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}, x \geq 0 \right\}$$

1. Es sel·leccionen m variables d'indexos $\mathcal{B} = \{B(1), \dots, B(m)\}$ amb columnes de A linealment independents (**variables bàsiques**):

$$x_B = \left[x_{B(1)}, x_{B(2)}, \dots, x_{B(m)} \right]', B \stackrel{\text{def}}{=} \left[A_{B(1)}, A_{B(2)} \dots, A_{B(m)} \right]$$

2. Es fixen les $n - m$ **variables no bàsiques** a zero:

$$\mathcal{N} \stackrel{\text{def}}{=} \{ i \mid i \notin \mathcal{B} \} \equiv \{ N(1), \dots, N(n-m) \}$$

$$x_N = [0] \quad , A_N \stackrel{\text{def}}{=} \left[A_{N(1)}, A_{N(2)}, \dots, A_{N(n-m)} \right]$$ (**matriu no-bàsica**)

3. Es calcula el valor de les variables bàsiques:

$$Ax = [B \quad A_N] \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = B x_B + A_N \overbrace{x_N}^{=0} = B x_B = b, \boxed{x_B = B^{-1} b}$$

Conjunt de les SB d'un problema PL

- **Problema de planificació de la producció en forma estàndard:**

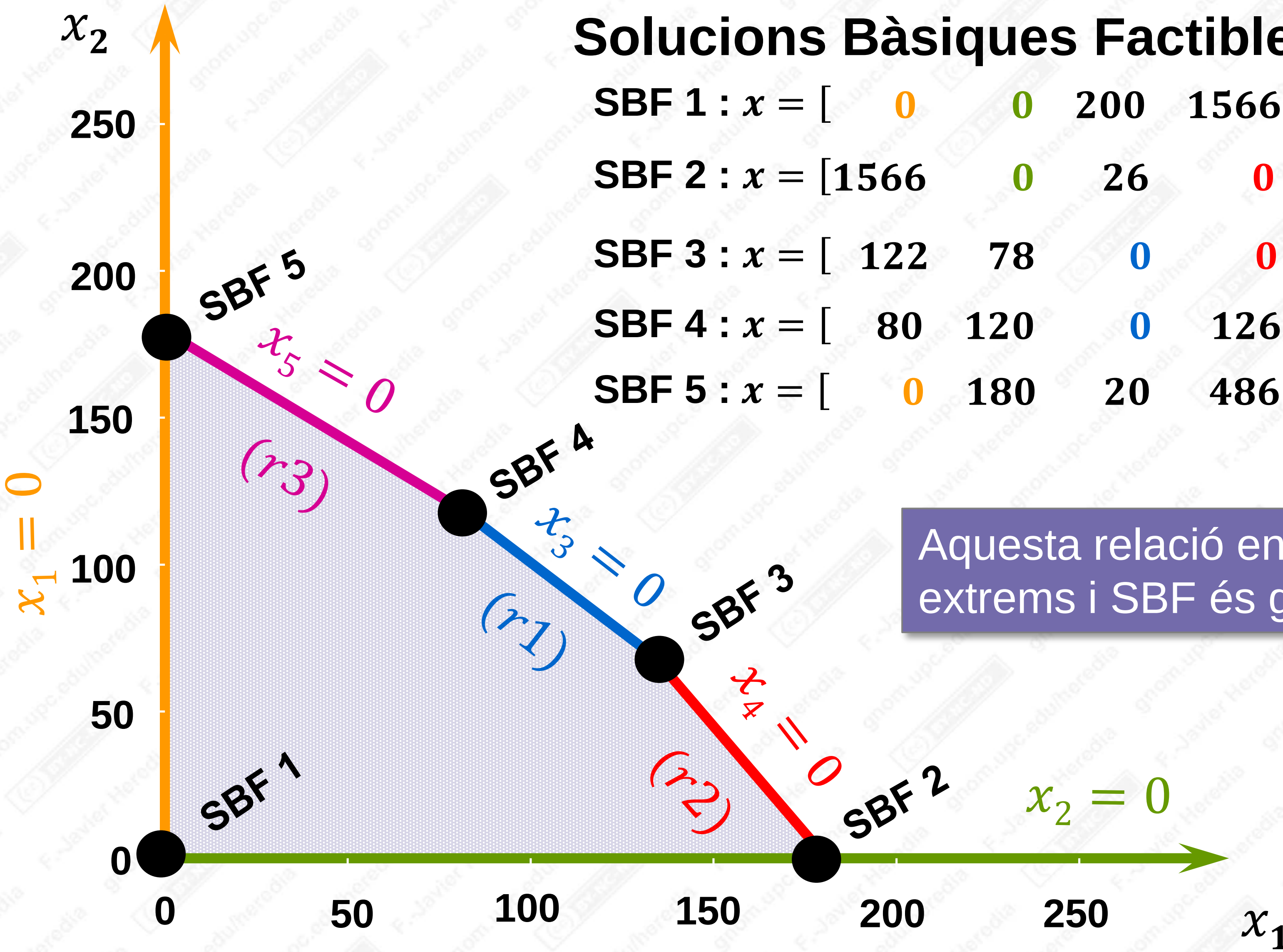
$$(PL)\begin{cases} \min & z = -350x_1 \quad -300x_2 \\ \text{s.a.:} & x_1 + x_2 + x_3 = 200 \quad (r1) \\ & 9x_1 + 6x_2 + x_4 = 1566 \quad (r2) \\ & 12x_1 + 16x_2 + x_5 = 2880 \quad (r3) \\ & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0\ \ x_5 \geq 0 \end{cases}$$

- **Nombre total de SB** $\leq \binom{n}{m} = \binom{5}{3} = 5!/3!\,2! = 10$

SB	x_B	x_N	x	z
1	x_3, x_4, x_5	x_1, x_2	$x = [0 \quad 0 \quad 200 \quad 1566 \quad 2880]'$	0
2	x_1, x_3, x_5	x_2, x_4	$x = [174 \quad 0 \quad 26 \quad 0 \quad 792]'$	-60900
3	$\boldsymbol{x_1, x_2, x_5}$	$\boldsymbol{x_3, x_4}$	$\boldsymbol{x = [122 \quad 78 \quad 0 \quad 0 \quad 168]' = x^*}$	**-66100**
4	x_1, x_2, x_4	x_3, x_5	$x = [80 \quad 120 \quad 0 \quad 126 \quad 0]'$	-64000
5	x_2, x_3, x_4	x_1, x_5	$x = [0 \quad 180 \quad 20 \quad 486 \quad 0]'$	-54000
6	x_1, x_2, x_3	x_4, x_5	$x = [108 \quad 99 \quad -7 \quad 0 \quad 0]'$	-67500
7	x_1, x_3, x_4	x_2, x_5	$x = [240 \quad 0 \quad -40 \quad -594 \quad 0]'$	-84000
8	x_1, x_4, x_5	x_2, x_3	$x = [200 \quad 0 \quad 0 \quad -234 \quad 480]'$	-70000
9	x_2, x_4, x_5	x_1, x_3	$x = [0 \quad 200 \quad 0 \quad 366 \quad -320]'$	-60000
10	x_2, x_3, x_5	x_1, x_4	$x = [0 \quad 261 \quad -61 \quad 0 \quad -1296]'$	-78300

Solucions bàsiques factibles | solució bàsica factible òptima | solucions bàsiques infactibles

Solucions Bàsiques Factibles i punts extrems



Solucions Bàsiques Factibles :

SBF 1 : $x = [\ 0 \quad 0 \quad 200 \quad 1566 \quad 2880]'$

SBF 2 : $x = [1566 \quad 0 \quad 26 \quad 0 \quad 792]'$

SBF 3 : $x = [\ 122 \quad 78 \quad 0 \quad 0 \quad 168]'$

SBF 4 : $x = [\ 80 \quad 120 \quad 0 \quad 126 \quad 0]'$

SBF 5 : $x = [\ 0 \quad 180 \quad 20 \quad 486 \quad 0]'$

Aquesta relació entre pts. extrems i SBF és general.

Teorema 3: equivalència punts extrems – SBF

Sigui P un políedre no buit en forma estàndard de rang complet, i sigui $x^* \in P_e$. Llavors: x^* és un punt extrem $\Leftrightarrow$ x^* és una solució bàsica factible.

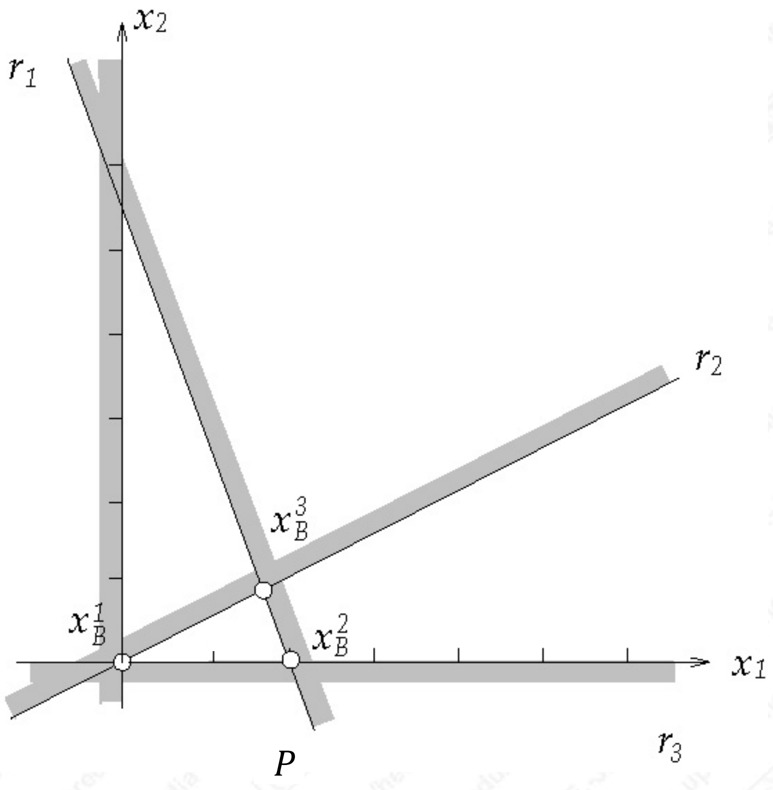
Demostració: pissarra.

Interpretació:

- **Hipòtesis:** P_e políedre estàndard no buit $\xRightarrow{\text{Cor. ii Ta 1}}$ $\exists$ **un pt extrem**.
- **Tesi:** la correspondència pt. extrem – SBF **és biunívoca**?
  - Considerem les SBF de (PL) en funció del valor de $b_2 \in [0,1]$:

$$(PL)\begin{cases} \min & z = & c_1x_1 & +c_2x_2 & & \\ s.a.: & & x_1 & +x_2 & \leq 1 & (r1) \\ & & & x_2 & \leq b_2 & (r2) \\ & & x_1, & x_2 & \geq 0 & \end{cases}$$

Solucions bàsiques: exemple 1

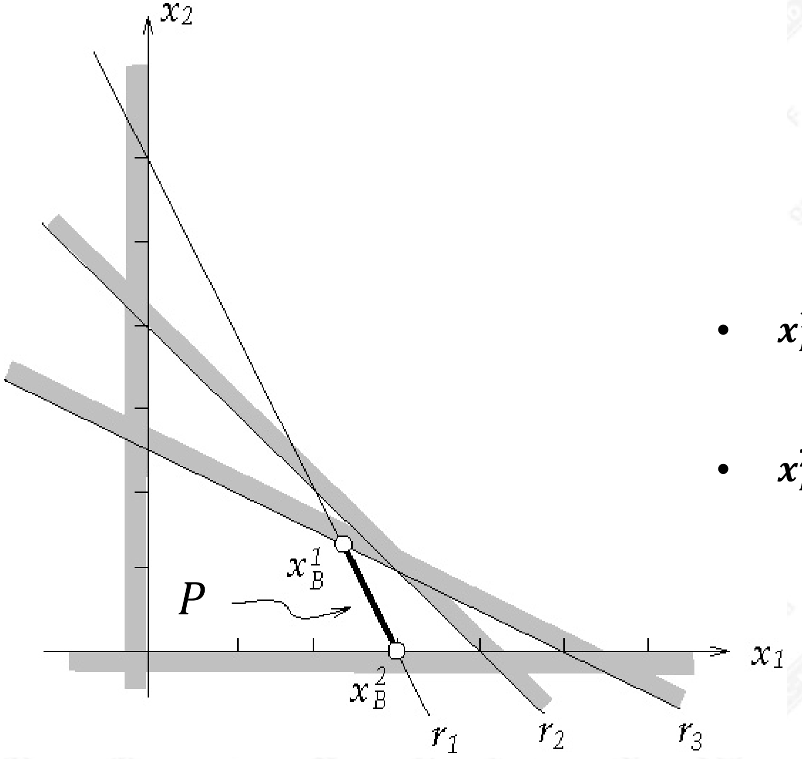


$$
(PL)\begin{cases} \min \quad z = & -4x_1 & +x_2 & & \\ \text{s.a.:} & 3x_1 & +x_2 & \leq 6 & (r1) \\ & -x_1 & +2x_2 & \leq 0 & (r2) \\ & x_1, & x_2 & \geq 0 & \end{cases}
$$

- $\boldsymbol{x_B^1}$: $\begin{cases} \mathcal{B}=\{3,1\}, \ x_B^1 = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_1 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \mathcal{B}=\{3,2\}, \ x_B^1 = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \mathcal{B}=\{3,4\}, \ x_B^1 = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix} \end{cases}$
- $\boldsymbol{x_B^2}$: $\mathcal{B}=\{1,4\}, \ x_B^2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$
- $\boldsymbol{x_B^3}$: $\mathcal{B}=\{1,2\}, \ x_B^3 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12/7 \\ 6/7 \end{bmatrix}$

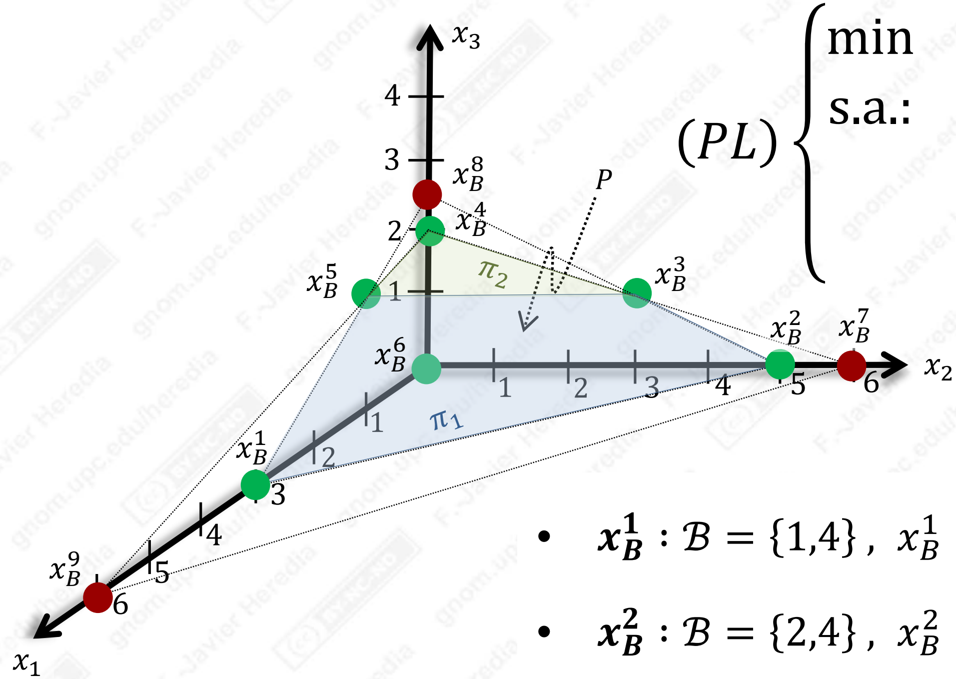
Solucions bàsiques: exemple 2

$$(PL)\begin{cases} \min & z = & 5x_1 & -x_2 & & \\ \text{s.a.:} & & 2x_1 & +x_2 & = 6 & (r1) \\ & & x_1 & +x_2 & \leq 4 & (r2) \\ & & x_1 & +2x_2 & \leq 5 & (r3) \\ & & x_1, & x_2 & \geq 0 & \end{cases}$$



- $\boldsymbol{x_B^1}$: $\mathcal{B} = \{1,2,3\}$, $x_B^1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/3 \\ 4/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}$
- $\boldsymbol{x_B^2}$: $\mathcal{B} = \{1,3,4\}$, $x_B^2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

Solucions bàsiques: exemple 3



$$(PL)\begin{cases} \min \quad z = & 5x_1 + 3x_2 + 9x_3 & \\ \text{s.a.:} & x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 & = 6 \quad \pi_1 \\ & 5x_1 + 3x_2 + 6x_3 + x_5 & = 15 \quad \pi_2 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 & \geq 0 \end{cases}$$

π_1: pla definit per $x_B^1 - x_B^2 - x_B^8$

π_2: pla definit per $x_B^4 - x_B^7 - x_B^9$

- $\boldsymbol{x_B^1}$: $\mathcal{B} = \{1,4\}$, $x_B^1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 6 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$
- $\boldsymbol{x_B^2}$: $\mathcal{B} = \{2,4\}$, $x_B^2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 6 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$
- $\boldsymbol{x_B^3}$: $\mathcal{B} = \{2,3\}$, $x_B^3 = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 6 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$
- $\boldsymbol{x_B^4}$: $\mathcal{B} = \{3,5\}$, $x_B^4 = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_5 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 6 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$
- $\boldsymbol{x_B^5}$: $\mathcal{B} = \{1,3\}$, $x_B^5 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 6 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5/3 \end{bmatrix}$
- $\boldsymbol{x_B^6}$: $\mathcal{B} = \{4,5\}$, $x_B^6 = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 6 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 15 \end{bmatrix}$

Models bàsics de programació lineal

- Planificació de la producció.
- Problema de la dieta.
- Problema de transport.
- Altres problemes de PL.
- Problemes de fluxos en xarxes:
  - Flux de cost mínim, transport i assignació.
  - Camins mínims.
  - Flux màxim.

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Departament d'Estadística
i Investigació Operativa

Planificació de la producció (1/3)

- **Exemple:** Una empresa de manufactura d'acer ha de programar la producció setmanal d'un taller de laminat que transforma planxes d'acer en tres tipus de peces, **bandes**, **espirals** i **plaques**, d'acord amb les següents dades:

	Benefici unit.	Comandes setmanals	Capacitat mercat	Capacitat de la fase d'escalfat	Capacitat del fase de laminat
Unitats	(€/Tm)	(Tm)	(Tm)	(Tm/h)	(Tm/h)
Bandes	25	1.000	6.000	200	200
Espirals	30	500	4.000	200	140
Plaques	29	750	3.500	200	160
Hores setmanals disponibles				35	40

Planificació de la producció (2/3)

Formulació parametritzada:

Paràmetres:

- n: nre. productes a fabricar
- m: nre. recursos consumits
- c_i: benefici producte $i, i = 1, \dots, n$
- b_j: disponibilitat recurs $j, j = 1, \dots, m$
- a_{ji}: quantitat recurs j consumit pel producte i.
- l_i, u_i: fites a la producció

Variables:

- x_i: quantitat a fabricar producte i

Funció objectiu: es maximitzen els beneficis totals.

Constriccions: el programa de producció no consumeix més recursos dels existents.

$$
(PL) \left\{ \begin{array}{llll}
\max\limits_{x \in \mathbb{R}^n} z = & \sum\limits_{i=1}^{n} c_i x_i & & \\
s.a.: & & & \\
& \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ji} x_i \leq b_j & & j = 1,2, \dots, m \\
& l_i \leq x_i \leq u_i & & i = 1,2, \dots, n
\end{array} \right.
$$

Planificació de la producció (3/3)

$$
(PL)\begin{cases}
\max_{x\in\mathbb{R}^n} z = & \sum_{i=1}^{3} c_i x_i = & 25x_1 & +30x_2 & +29x_3 & \\
s.a.: & & & & & \\
\text{temps escalfat}: & \sum_{i=1}^{3} a_{1i}x_i \le b_1 \rightarrow & \frac{1}{200}x_1 & +\frac{1}{200}x_2 & +\frac{1}{200}x_3 & \le 35 \\
\text{temps laminat}: & \sum_{i=1}^{3} a_{2i}x_i \le b_2 \rightarrow & \frac{1}{200}x_1 & +\frac{1}{140}x_2 & +\frac{1}{160}x_3 & \le 40 \\
\text{comandes}: & l_i \le x_i \le u_i \rightarrow & \begin{bmatrix}1000\\500\\750\end{bmatrix} & \le \begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} & \le \begin{bmatrix}6000\\4000\\3500\end{bmatrix} &
\end{cases}
$$

Solució òptima amb AMPL/CPLEX : $x^* = \begin{bmatrix}3357{,}14\\500\\3142{,}86\end{bmatrix}$

Problema de la dieta (1/3)

Llaunes de plats pre-cuinats	Cost Unitari	Vitamina A	Vitamina C	Vitamina B1	Vitamina B2
Unitats	$/llauna	% del mínim diari			
Vedella	3.19	60	20	10	15
Pollastre	2.59	8	0	20	20
Peix	2.29	8	10	15	10
Pernil	2.89	40	40	35	10
Macarrons	1.89	15	35	15	15
Pastis de carn	1.99	70	30	15	15
Spaghetti	1.99	25	50	25	15
Gall d'indi	2.49	60	20	15	10

(Basat en : *AMPL A Modeling Language for Mathematical Programming*, cap. 2)

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Departament d'Estadística
i Investigació Operativa

Problema de la dieta (2/3)

Formulació parametritzada:

Paràmetres:

- n: nre. aliments diferents disponibles.
- m: nre. de nutrients essencials dieta.
- c_i: cost aliment $i, \mathrm{i} = 1, \dots, n$
- b_j: quantitat diària mínima nutrient $j, j = 1, \dots, m$
- a_{ji}: quantitat nutrient j per unitat aliment i.
- l_i, u_i : fites quantitat aliment i.

Variables:

- x_i: quantitat diària aliment i a la dieta.

Funció objectiu: es minimitza el preu total de la dieta.

Constriccions: la dieta aporta les quantitats necessàries de cada nutrient.

$$(PL)\begin{cases} \min\limits_{x\in\mathbb{R}^n} z = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i x_i \\ s.a.: \\ \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ji} x_i \geq b_j \quad j = 1,2,\dots,m \\ l_i \leq x_i \leq u_i \quad i = 1,2,\dots,n \end{cases}$$

Problema de la dieta (3/3)

$$
(PL)\left\{\begin{array}{llllllllll}
\min\limits_{x\in\mathbb{R}^8} & z = 3{,}19x_1 & +2{,}59x_2 & +2{,}29x_3 & +2{,}89x_4 & +1{,}89x_5 & +1{,}99x_6 & +1{,}99x_7 & +2{,}49x_8 & \\
\text{s.a.:} & & & & & & & & & \\
 & 60x_1 & +8x_2 & +8x_3 & +40x_4 & +15x_5 & +70x_6 & +25x_7 & +60x_8 & \geq 100 \\
 & 20x_1 & & +10x_3 & +40x_4 & +35x_5 & +30x_6 & +50x_7 & +20x_8 & \geq 100 \\
 & 10x_1 & +20x_2 & +15x_3 & +35x_4 & +15x_5 & +15x_6 & +25x_7 & +15x_8 & \geq 100 \\
 & 15x_1 & +20x_2 & +10x_3 & +10x_4 & +15x_5 & +15x_6 & +15x_7 & +10x_8 & \geq 100 \\
 & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6, & x_7, & x_8 & \geq 0
\end{array}\right.
$$

Solució òptima (AMPL/CPLEX):

$$x^* = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 6.\hat{6}\ (\text{macarrons}) \quad 0 \quad 0 \quad 0]', \qquad f(x^*) = 12{,}6$$

Si $x_i \in \mathbb{Z}$:

$$x^* = [0 \quad 2 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 3 \quad 1 \quad 0]', \qquad f(x^*) = 12{,}84$$

Problema de transport (1/5)

- La producció setmanal dels tres tallers de laminat de l'empresa ha de ser transportada a set factories d'automòbils per l'empresa de logística TransCat, d'acord amb les següents dades:

TransCat (costos en €/Tm)		**Tallers laminat**			***Demanda*** (Tm)
		Gary	Cleveland	Pittsburg	
Factories	Framingham	39	27	24	900
	Detroit	14	9	14	1.200
	Lansing	11	12	17	600
	Windsor	14	9	13	400
	St. Louis	16	26	28	1.700
	Fremont	82	95	99	1.100
	Lafayette	8	17	20	1.000
Producció (Tm)		1.400	2.600	2.900	

Problema de transport (2/5)

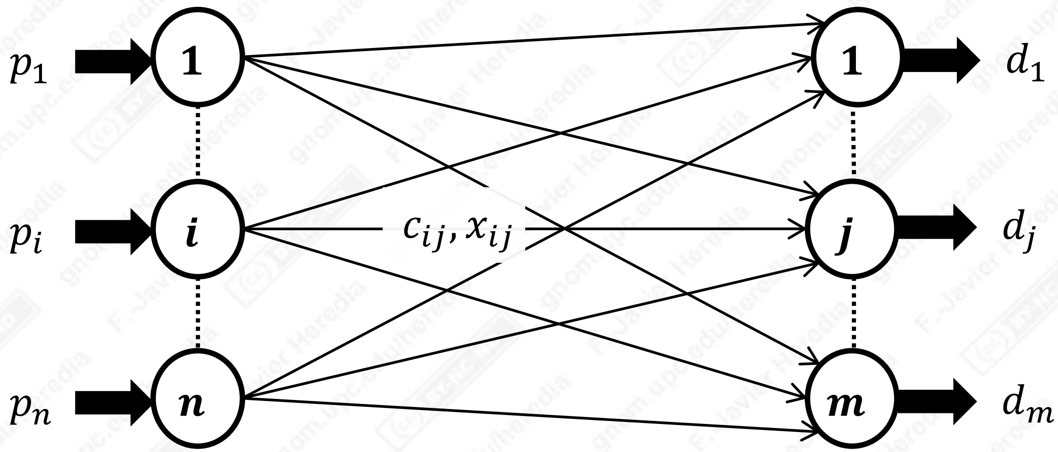
Formulació parametritzada:

Paràmetres:
- n: nre. centres producció.
- m: nre. centres consum
- c_{ij}: cost unitari transport entre centres i, j
- p_j: producció centre $i, i = 1, \ldots, n$
- d_j: demanda centre consum $j, j = 1, \ldots, m$

Variables:
- x_{ij}: quantitat de producte a transportar de i a j.

Funció objectiu: es minimitzen els costos totals de transport

Constriccions:
1) Cada centre de producció envia tota la seva producció.
2) Cada centre de consum rep la seva demanda.

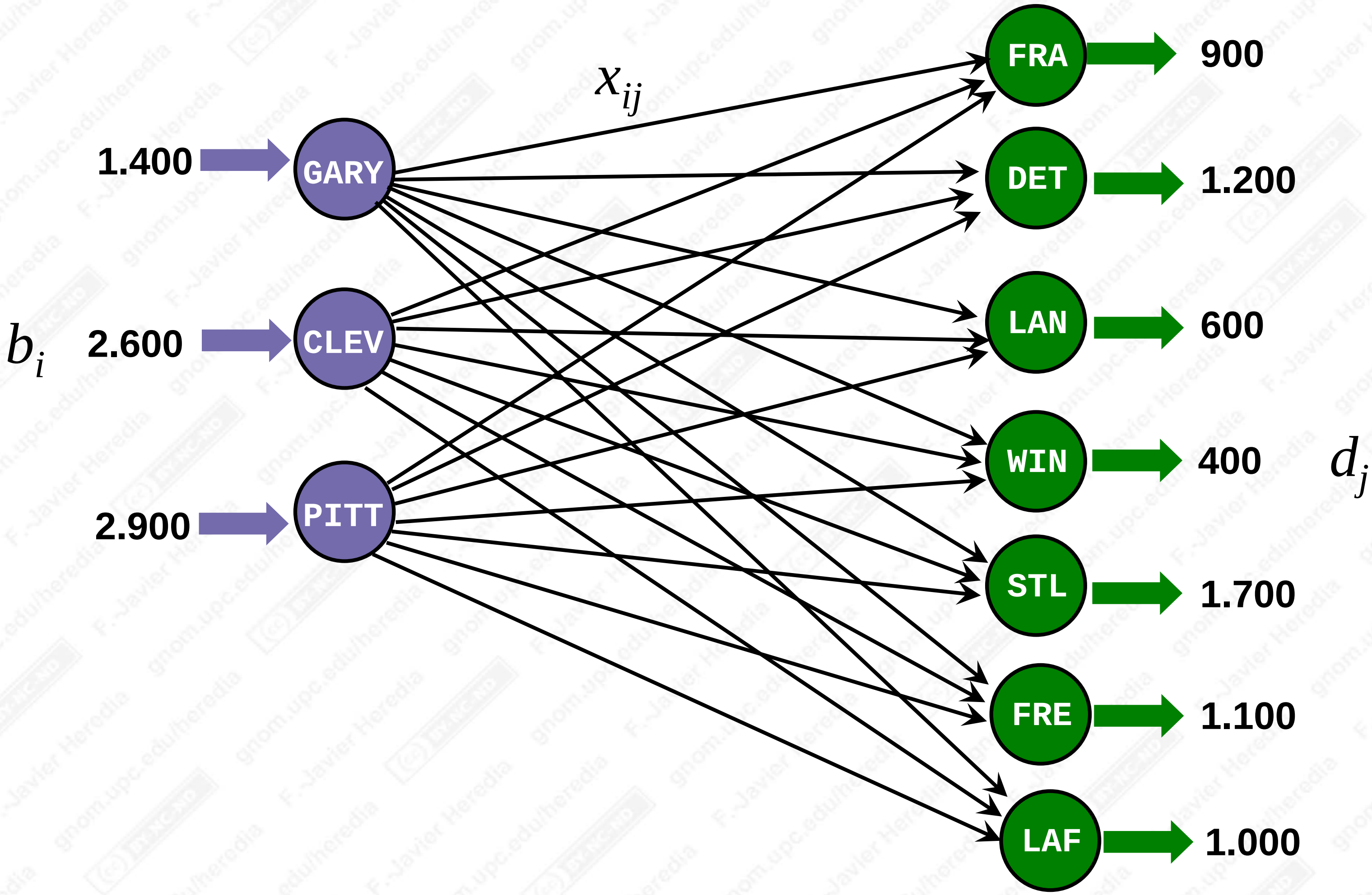


Problema de transport (3/5)

Formulació parametritzada:

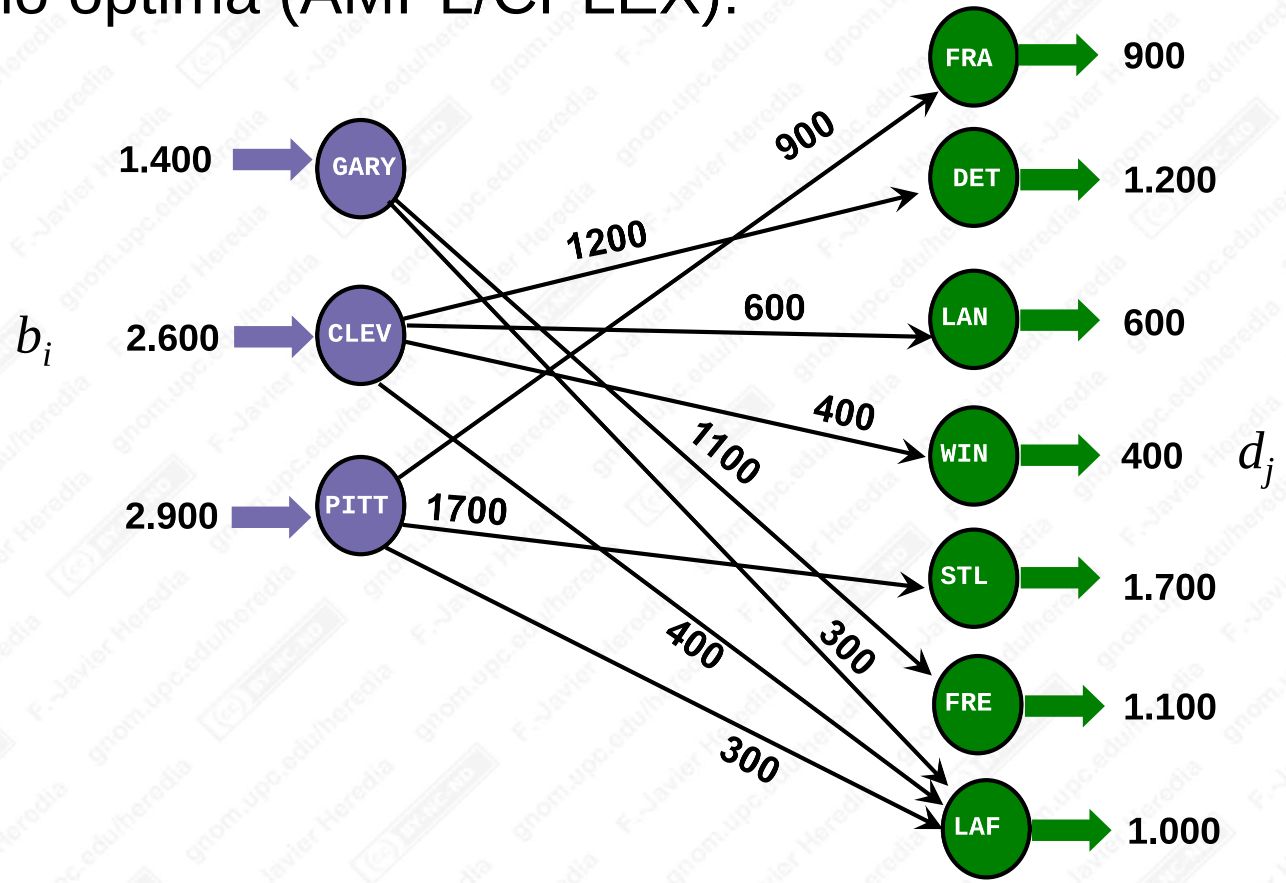
$$
(PL)\left\{
\begin{array}{llll}
\min\limits_{x\in R^{n\times m}} z = & \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij} & & \\
s.a.: & & & \\
1) & \sum\limits_{j=1}^{m} x_{ij} & = \quad p_i & i = 1,2,\dots,n \\
2) & \sum\limits_{i=1}^{n} x_{ij} & = \quad d_j & j = 1,\dots,m \\
 & x_{ij} \geq 0 & & \begin{array}{l} i = 1,2,\dots,n \\ j = 1,\dots,m \end{array}
\end{array}
\right.
$$

Problema de transport (4/5)



Problema de transport (5/5)

Solució òptima (AMPL/CPLEX):



$$z^* = 196.200$$

Altres problemes de (PL) (1/4)

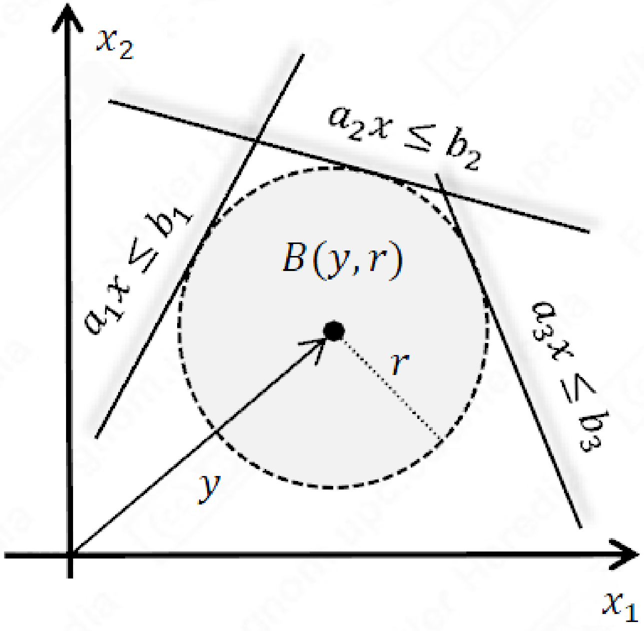
- Exercici 1: Centre de Chebychev:

Considereu el poliedre $P = \{x \in \mathbb{R}^n | a_j x \leq b_j, j = 1,2,\dots,m\}$. Una bola amb centre y i radi r es defineix com el conjunt de tots els punts dins d'una distància Euclidiana r de y:

$$B(y,r) = \{x \in \mathbb{R}^n | \|x - y\|_2 \leq r\}.$$

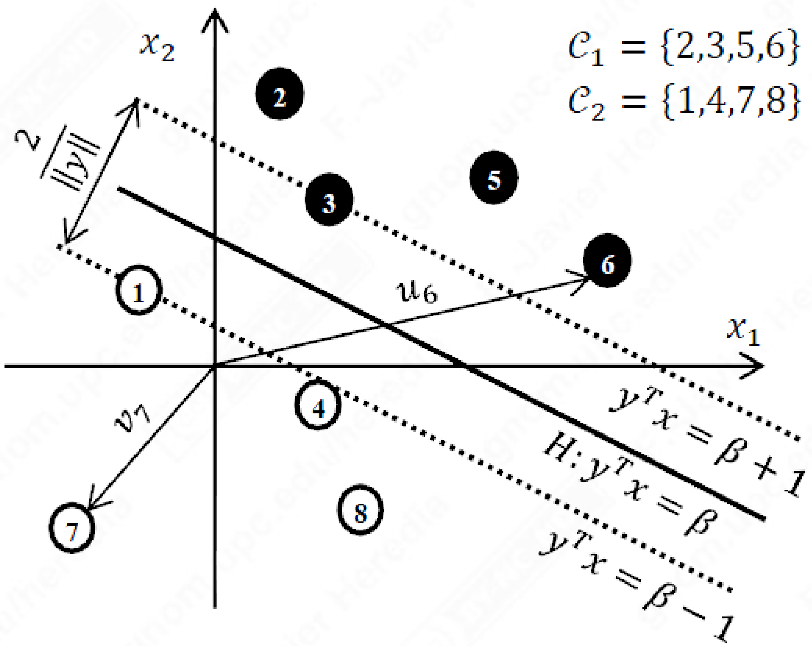
Formuleu el problema de programació lineal que permet obtenir el centre y i radi r de la bola de radi màxim inscrita en P: $\max\{r \in \mathbb{R}^+ | B(y,r) \subset P\}$

El centre y d'aquesta bola de radi màxim es coneix com a *centre de Chebychev*. (la figura adjunta mostra un cas per $n = 2$ i $m = 3$).



- Exercici 2: Support Vector Machines

Una de les tècniques més populars d'aprenentatge supervisat per a la classificació automàtica són les conegudes com a *Support Vector Machines* (SVM). Suposeu que representem a m individus en funció del valor de n atributs a través de vectors d'un espai de dimensió n. Els individus estan separats en dues classes $\mathcal{C}_1$ i $\mathcal{C}_2$. A la gràfica adjunta es representen $m = 8$ individus amb $n = 2$ atributs (x_1, x_2), separats en dos classes. Per exemple, x_1 i x_2 poden ser el nivell en sang de dos marcadors d'una certa malaltia, $\mathcal{C}_1$ el conjunt de mesures en individus sans i $\mathcal{C}_2$ el conjunt de mesures en individus malats. Sigui $u_j, j \in \mathcal{C}_1$, i $v_j, j \in \mathcal{C}_2$, els vectors d'atributs de cada individu.



Les tècniques SVM es basen en trobar un hiperplà $H: y^T x = \beta$ que separi les observacions de les dues classes $\mathcal{C}_1$ i $\mathcal{C}_2$ i que ens permeti classificar dins de cada classe noves observacions.

l_1 regression and linear programming

- **Problem**: to find the relation between the **size of a LP problem** (# of constraints, and variables) and the **execution time** (# of iterations) when using a given algorithm (the Self-Dual Simplex Method in this case).
- **Observations**: execution time of $k = 69$ LP instances from the Netlib repository with the Self-Dual Símplex method:

Name	m	n	iters	Name	m	n	iters
etamacro	334	542	1580	share1b	107	217	404
fffff800	476	817	1029	share2b	93	79	189
finnis	398	541	680	shell	487	1476	1155
fit1d	24	1026	925	ship04l	317	1915	597
fit1p	627	1677	15284	ship04s	241	1291	560
forplan	133	415	576	ship08l	520	3149	1091
ganges	1121	1493	2716	ship08s	326	1632	897
greenbea	1948	4131	21476	ship12l	687	4224	1654
grow15	300	645	681	ship12s	417	1996	1360
grow22	440	946	999	sierra	1212	2016	793
grow7	140	301	322	standata	301	1038	74
israel	163	142	209	standmps	409	1038	295
kb2	43	41	63	stocfor1	98	100	81
lotfi	134	300	242	stocfor2	2129	2015	2127
maros	680	1062	2998				

Observed data: $\begin{cases} t = & \text{\# of iterations} \\ m = & \text{\#of constraints} \\ n = & \text{\#of variables} \end{cases}$

Model:

$$\begin{cases} t \approx 2^{\boldsymbol{\alpha}} \cdot (m+n)^{\boldsymbol{\beta}} \\ \downarrow \\ \log(t) = \log(2)\cdot\boldsymbol{\alpha} + \log(m+n)\cdot\boldsymbol{\beta} + \underbrace{\epsilon}_{error} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \log t_1 \\ \log t_2 \\ \vdots \\ \log t_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \log 2 & \log(m_1+n_1) \\ \log 2 & \log(m_2+n_2) \\ \vdots & \vdots \\ \log 2 & \log(m_k+n_k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\beta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_1 \\ \vdots \\ \epsilon_k \end{bmatrix} \rightarrow \epsilon = b - A\boldsymbol{x} \rightarrow \begin{cases} \textbf{Least Square Regression} \\ \boldsymbol{x}^*_{LSR} \coloneqq \operatorname{argmin}_{\boldsymbol{x}} \|b - A\boldsymbol{x}\|_2^2 = (A^TA)^{-1}A^Tb \\ \textbf{Absolute Deviation Regression} \\ \boldsymbol{x}^*_{ADR} \coloneqq \operatorname{argmin}_{\boldsymbol{x}} \|b - A\boldsymbol{x}\|_1 = \sum_i \left| b_i - \sum_j a_{ij}\boldsymbol{x_j} \right| \end{cases}$$

Altres problemes de (PL) (4/4)

- **Absolute Deviation Regression and Linear Programming:**

Taking $\epsilon_i = t_i^+ - t_i^-$ problem ADR with m observations and n parameters

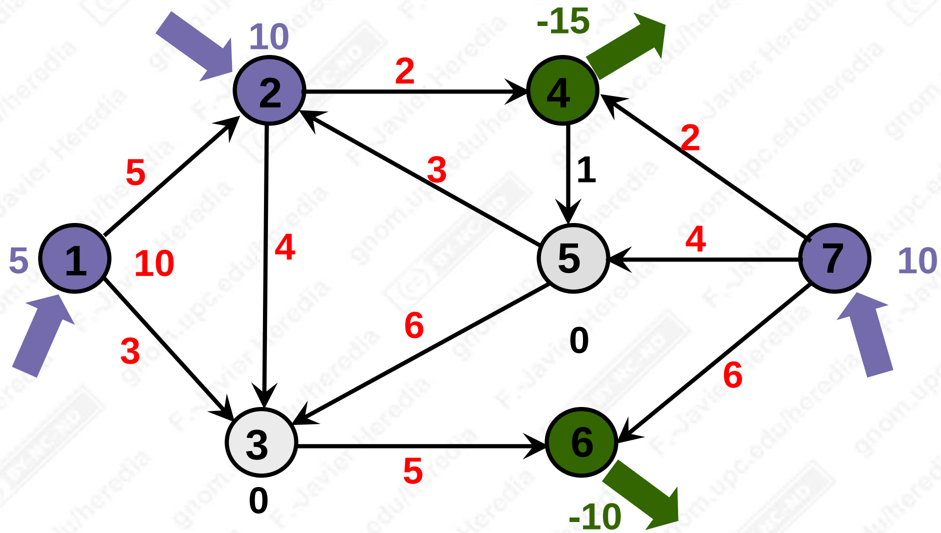
$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^{m} \overbrace{\left| b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right|}^{\epsilon_i}$$

is equivalent to the linear programming problem:

$$(P_{ADR}) \begin{cases} \min\limits_{x,t^+,t^-} & \sum_{i=1}^{m} (t_i^+ + t_i^-) \\ \text{s.t.:} & \\ & t_i^+ - t_i^- = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \quad i = 1,2,\dots,m \\ & t_i^+, t_i^- \geq 0 \quad i = 1,2,\dots,m \end{cases}$$

Problemes de flux de cost mínim (PFCM)

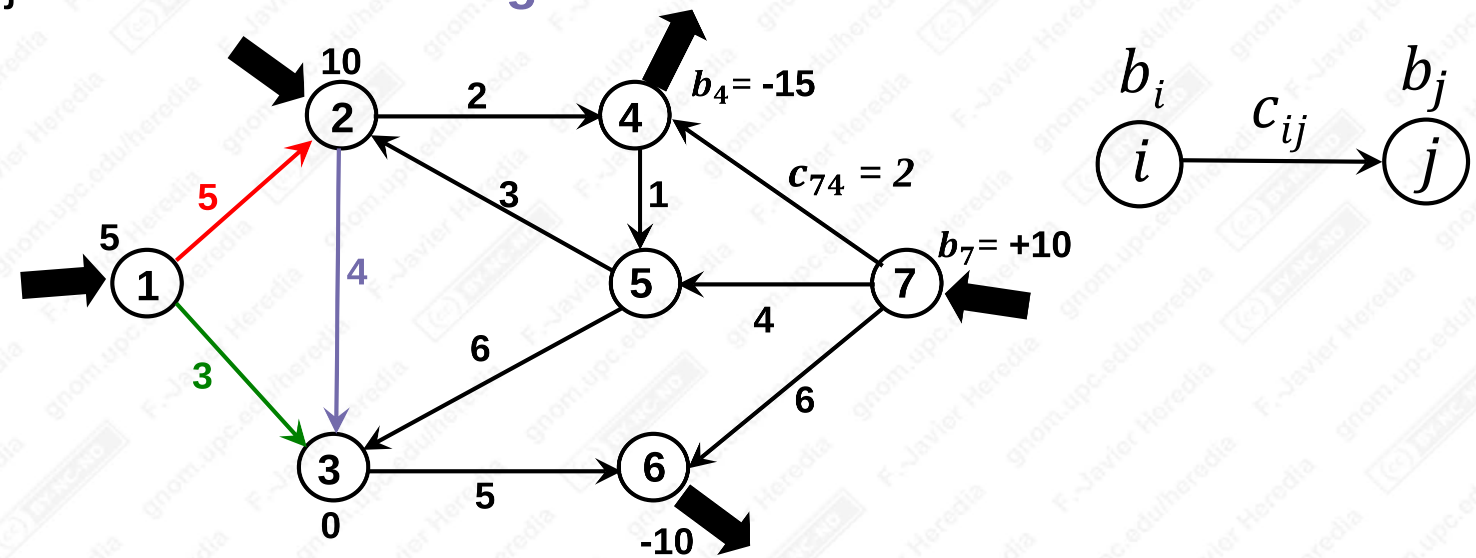
- Trobar la forma més econòmica de transportar una mercaderia entre els **centres de producció** i els **centres de demanda** a traves d'una xarxa amb **costos**.



Aplicacions:
  - Logística.
  - Transit.
  - Bioinformàtica, xarxes de comunicacions,...

Forma estàndard del (PFCM) (1/2)

- Sigui $\mathcal{G} = (\mathcal{N}, \mathcal{A})$ el graf dirigit definit per un conjunt $\mathcal{N}$ de n **nodes** i un conjunt $\mathcal{A}$ de m **arcs dirigits**.



$$n = 7\ ;\ m = 11\ ;\ \mathcal{N} = \{1,2,3,4,5,6,7\}\ ;\ \mathcal{A} = \{\ (1,2), (1,3), (2,3), \ldots\}$$

Vector de produccions ($b_j \geq 0$)/demandes ($b_j \leq 0$):

$$b_j\ , j = 1,2, \ldots, n:\ b = [5,10,0,-15,0,5,10]'$$

Vector de costos: $c_{ij}\ , (i,j) \in \mathcal{A}\ :\ \ c = [5,3,4, \ldots]'$

Fluxos: $x_{ij}\ , (i,j) \in \mathcal{A}$: quantitat de mercaderia (**flux**) que circula per l'arc (i,j).

Forma estàndard del (PFCM) (2/2)

- **Formulació matemàtica**:

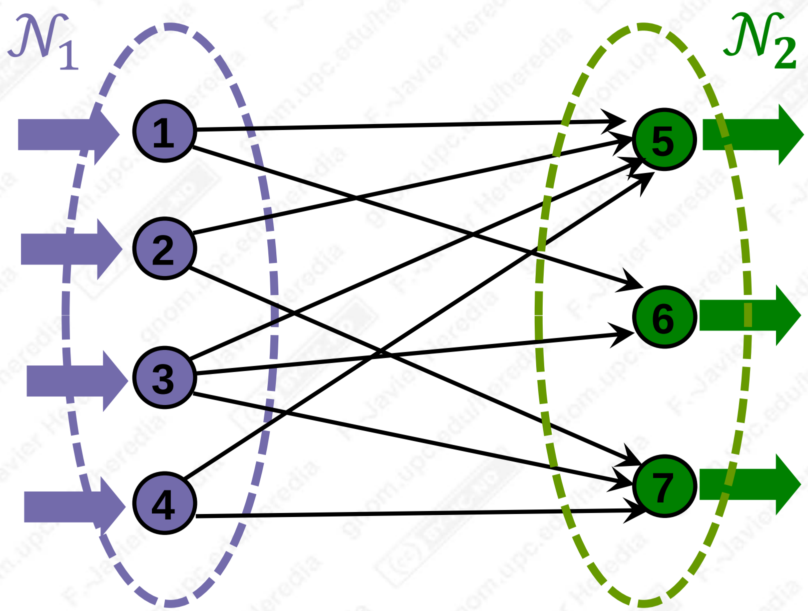
$$
(PFCM)\begin{cases} \min\limits_{x\in\mathbb{R}^{|\mathcal{A}|}} & z = \sum\limits_{(i,j)\in\mathcal{A}} c_{ij}x_{ij} & & \\ \text{s.a.:} & \sum\limits_{(i,j)\in\mathcal{A}} x_{ij} - \sum\limits_{(j,i)\in\mathcal{A}} x_{ji} = b_i & i \in \mathcal{N} & (1) \\ & x_{ij} \geq 0 & (i,j) \in \mathcal{A} & \end{cases}
$$

  - (1): **equacions de balanç.**
  - **Hipòtesi:** $\sum_{i\in\mathcal{N}} b_i = 0$ (xarxa balancejada)...mmmm i si no es satisfà?
  - **Propietat d'integritat dels problemes de fluxos en xarxes:**

$$b_i \text{ enter}, i \in \mathcal{N} \Rightarrow x_{ij}^* \text{ enter}, (i,j) \in \mathcal{A}$$

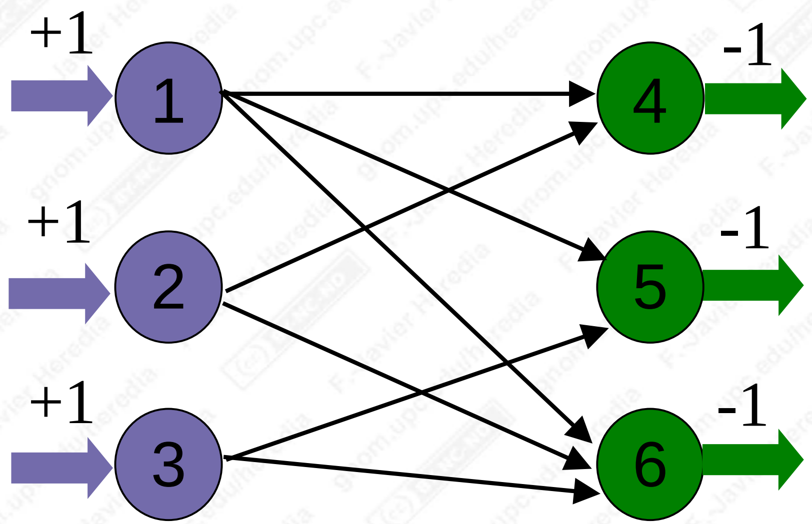
(demo fora de temari, basada en la *unimodularitat* de la matriu A)

Problema de transport com a $(PFCM)$



- Característiques: $(PFCM)$ sobre **graf bipartit**:
  - $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2 \subset \mathcal{N}$ partició de $\mathcal{N}$ $(\mathcal{N} = \mathcal{N}_1 \cup \mathcal{N}_2, \mathcal{N}_1 \cap \mathcal{N}_2 = \emptyset)$
  - $\mathcal{N}_1$: nodes de produció; $\mathcal{N}_2$: nodes de demanda.
  - $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{N}_1 \times \mathcal{N}_2$

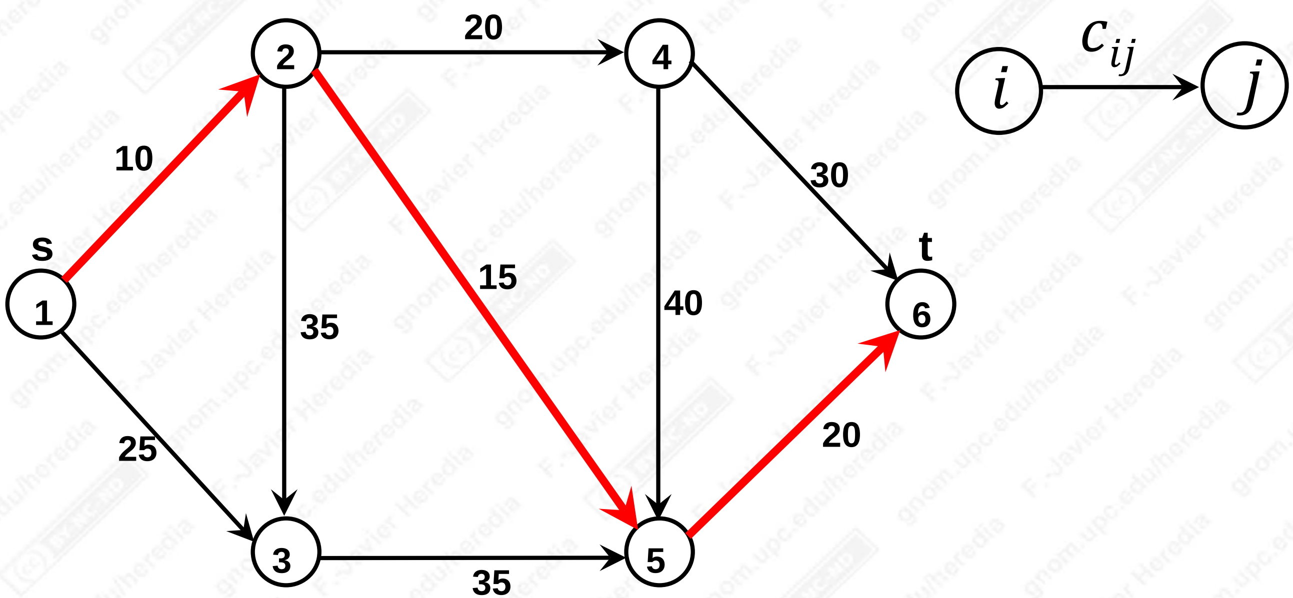
Problema d'assignació com a $(PFCM)$



- Característiques:
  - $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2 \subset \mathcal{N}$ partició de $\mathcal{N}$ i $|\mathcal{N}_1| = |\mathcal{N}_2|$
  - $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{N}_1 \times \mathcal{N}_2$.
  - $\forall j \in \mathcal{N}_1 : b_j = +1; \forall j \in \mathcal{N}_2 : b_j = -1$

Problemes de camins mínims (PCM)

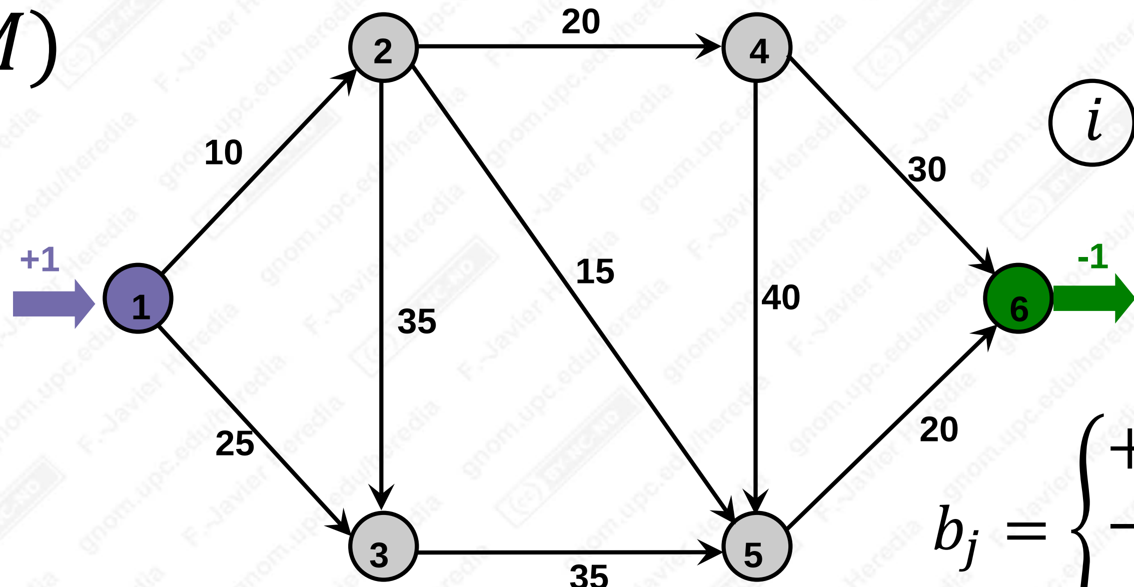
- Identificar el camí més curt entre el node origen ("s") i el node destí ("t").



- Aplicacions:
  - Trobar el camí de cost mínim.
  - Trobar el camí de temps de trànsit mínim.
  - Problemes de substitució d'equips.

Problema de camins mínims com a $(PFCM)$

(PCM)



$$i \xrightarrow{c_{ij}} j$$

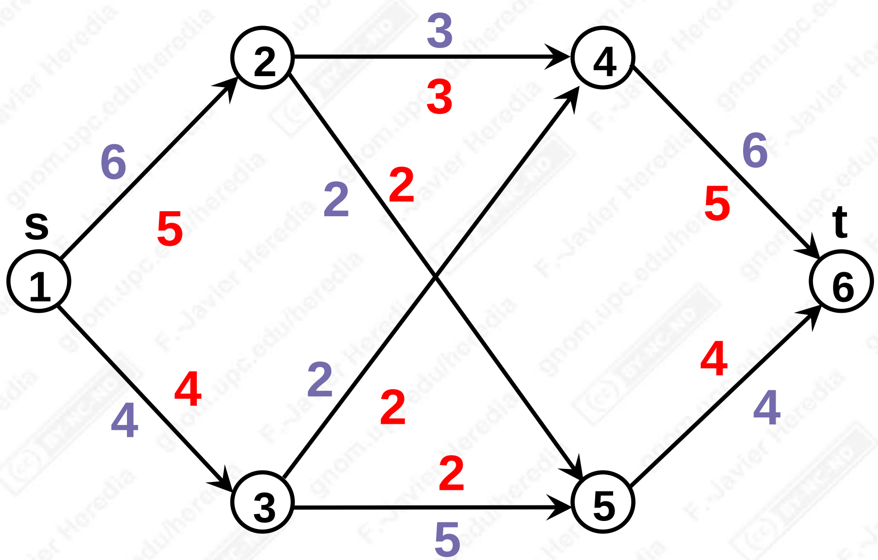
$$b_j = \begin{cases} +1 & j = 1 \\ -1 & j = 6 \\ 0 & j \notin \{1,6\} \end{cases}$$

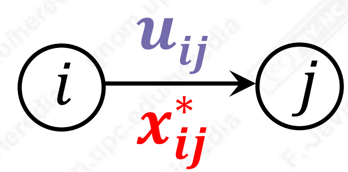
- Obviament, el (PCM) es pot expressar com a $(PFCM)$...

  ...pero... segur que la solució del $(PFCM)$ associat al (PCM) mínims proporciona un camí?

Problemes de flux màxim (PFM)

- Trobar el **flux màxim** que es pot enviar entre el node origen ("s") i el node destí ("t") d'una xarxa **amb capacitats u_{ij}**.

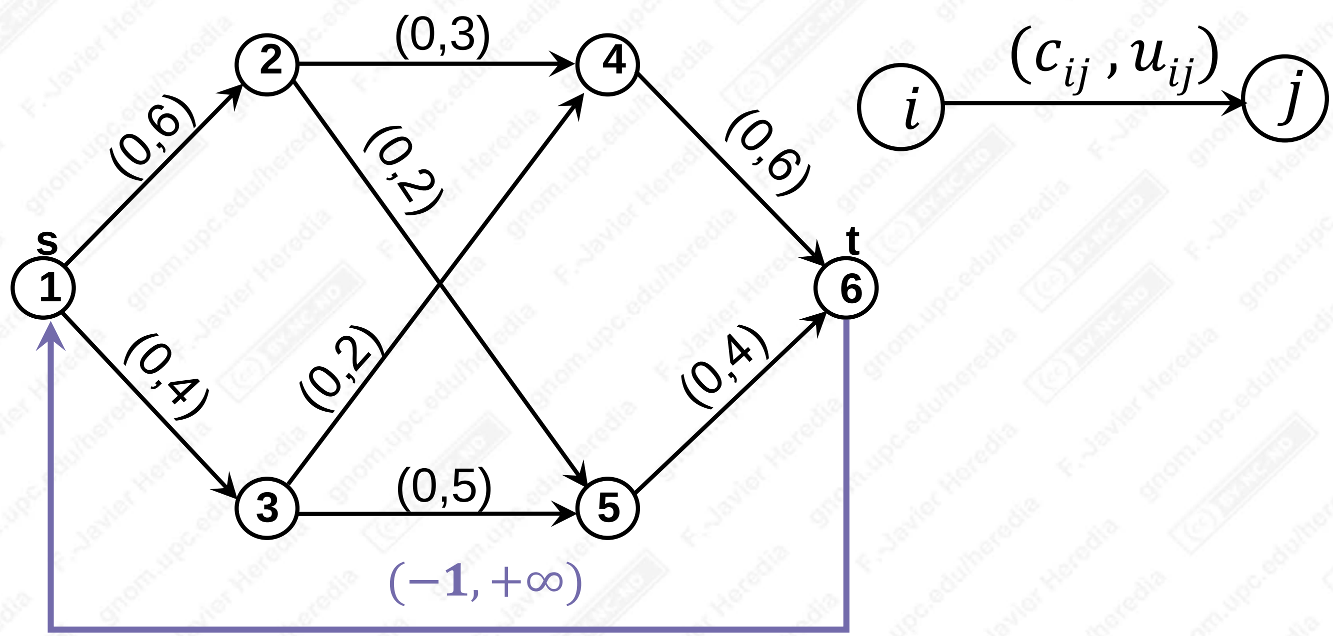




- Aplicacions: trobar el flux màxim a l'estat estacionari de:
  - Petroli en una xarxa d'oleoductes.
  - Cotxes en una xarxa de carreteres.
  - Missatges en una xarxa de comunicacions.
  - Assignació de tasques a processadors en computació en paral·lel.

(PFM) com a $(PFCM)$

(PFM)



- El (PFM) també es pot expressar com a $(PFCM)$:
  - Arc artificial x_{ts} amb $c_{ts} = -1$ i $u_{ts} = +\infty$.
  - $c_{ij} = 0\,, (i,j) \neq (t,s),\, b = [0]$.