Integració numèrica

Objectiu: volem calcular $\int_a^b f(x)\,dx$ amb $f(x)$ contínua

Prenem $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_m \leq b$ $m+1$ abscisses a $[a,b]$ (típicament equiespaiades). Considerem el polinomi interpolador $P_m(x)$ t.q. $P_m(x_k) = f_k$, $k = 0 \div m$. i prenem

$$(1) \quad \int_a^b f(x)\,dx \simeq \int_a^b P_m(x)\,dx = \int_a^b \sum_{k=0}^m f_k\, l_k(x) = \sum_{k=0}^m f_k \underbrace{\int_a^b l_k(x)\,dx}_{W_k}$$

Anomenem els W_k els pesos de la fórmula d'integració (són únics i no depenen de f). $l_k(x) = \prod_{\substack{i \neq k \\ i=0}}^m \frac{x - x_i}{x_k - x_i}$

- Càlcul dels W_k:

  (i) o bé integrant

  (ii) o bé fem el canvi $x = a + ht$ (llavors $x_i = a + ih$, $h = \frac{b-a}{m}$)

$$\int_a^b l_k(x)\,dx = \int_0^m \prod_{i \neq k} \frac{\cancel{h}(t-i)}{\cancel{h}(k-i)}\, h\,dt = \int_0^m h \prod_{i \neq k} \frac{t-i}{(k-i)}\,dt$$

(iii) o bé com que $f(x) - P_m(x) = \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!}(x - x_0)\dots(x - x_m)$

Observem que si $f(x) = 1, x, x^2, \dots, x^m$ l'error és 0 per tant

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b P_m(x)\,dx$$

Imposem que la fórmula (1) sigui exacta si $f(x) = 1, x, \dots, x^m$ ie

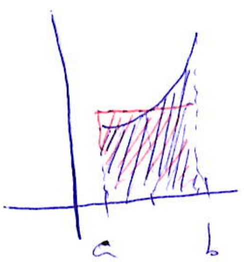
$$\int_a^b x^j \, dx = \sum_{k=0}^{m} x_k^{\,j} W_k \quad , j=0,\dots,m$$

així obtenim un sistema lineal en les variables $W_0, \dots, W_m$. Com que el determinant del sistema és el determinant de Van der Monde (ie no nul), el sistema lineal tindrà una única solució $W_0, \dots, W_m$.

Aquest és l'anomenat mètode dels coeficients indeterminats.

Exemples

1. $m=0$, prenem $x_0 = \frac{a+b}{2}$, $P_0(x) = f\left(\frac{a+b}{2}\right)$, $h = b-a$

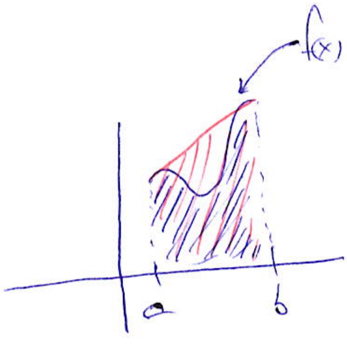


$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \simeq \int_a^b P_0(x)\,dx = (b-a)\, f\left(\frac{a+b}{2}\right)}$$ és la fórmula del rectangle

2. $m=1$, $h=b-a$, $x_0=a$, $x_1=b$

$$W_0 = \int_a^b \frac{x-b}{a-b}\,dx = \frac{(x-b)^2}{2(a-b)}\Big|_a^b = -\frac{(a-b)^2}{2(a-b)} = \frac{h}{2}$$

$$W_1 = \int_a^b \frac{x-a}{b-a}\,dx = \frac{b-a}{2} = \frac{h}{2}$$



Per tant $$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \simeq \frac{h}{2} f(a) + \frac{h}{2} f(b) = \frac{h}{2}\left[f(a) + f(b) \right]}$$ fórmula dels trapezis

3. $m=2$ Apliquem el mètode dels coeficients indeterminats a $[-1,1]$ prenent les abscisses $-1,0,1$ i busquem els pesos W_{-1}, W_0, W_1 tal que la fórmula

$$\int_{-1}^{1} g(t)\,dt \approx W_{-1}g_{-1} + W_0 g_0 + W_1 g_1$$

sigui exacta per a polinomis de grau ≤ 2, i.e. en $1, t, t^2$:

$$\left.\begin{array}{lll} g(t)=1 & W_{-1}+W_0+W_1 = 2 \\ g(t)=t & -W_{-1} \quad\quad +W_1 = 0 \\ g(t)=t^2 & W_{-1} \quad\quad +W_1 = \frac{2}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow W_{-1}=W_1=\frac{1}{3}, \quad W_0=\frac{4}{3}$$

i prenem la fórmula

$$\int_{-1}^{1} g(t)\,dt \approx \frac{1}{3}\left(g_{-1}+4g_0+g_1\right)$$

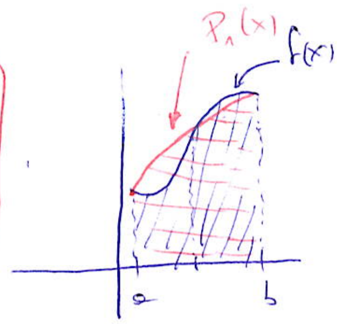
Per tal de tenir la corresponent fórmula en $[a,b]$ i $f(x)$, fem el canvi $\frac{x-a}{b-a} = \frac{t-(-1)}{2} \Leftrightarrow x = \frac{b-a}{2}t + \frac{a+b}{2}$

Fórmula de Simpson

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} g(t)\,dt \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]}$$

que també escriurem com

$$\boxed{\int_{c-h}^{c+h} f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\left[f(c-h)+4f(c)+f(c+h)\right]}.$$



Pregunta. Quin és l'error en fer aquestes aproximacions?

Error en la fórmula del rectangle

$h = b-a$, $f \in C^2([a,b])$

$$\boxed{E = \int_a^b f(x)\,dx - h f\left(\overset{c}{\frac{a+b}{2}}\right) = \frac{h^3}{24} f''(\eta), \quad \eta \in (a,b)}$$

Prova

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(\sigma)}{2!}(x-c)^2$$

$$E = \int_a^b \Big(f(x) - \underbrace{P_0(x)}_{f(c)}\Big)dx = \underbrace{\cancel{\int_a^b f'(c)(x-c)\,dx}}_{0} + \frac{1}{2!}\int_a^b f''(\sigma)(x-c)^2\,dx$$

$$\overset{\text{Lema}}{=} \frac{f''(\eta)}{2!}\int_a^b (x-c)^2\,dx = \frac{f''(\eta)}{2}\left[\int_a^{\frac{a+b}{2}} (x-c)^2\,dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b (x-c)^2\,dx\right] =$$

$$= \frac{f''(\eta)}{6}\left[\underbrace{-\Big(\underbrace{a - \frac{a+b}{2}}_{\frac{a-b}{2}}\Big)^3}_{-\left(\frac{a-b}{2}\right)^3} + \underbrace{\Big(\underbrace{b - \frac{a+b}{2}}_{\frac{b-a}{2}}\Big)^3}_{\left(\frac{b-a}{2}\right)^3}\right] = f''(\eta)\frac{(b-a)^3}{24} = \frac{f''(\eta)\,h^3}{24}$$

Lema

Siguin $F(x)$, $G(x)$ contínues i $G(x)$ amb signe constant a $[a,b]$.

Llavors $$\int_a^b F(x)G(x)\,dx = F(c)\int_a^b G(x)\,dx \qquad c \in (a,b)$$

Error en la fórmula dels trapezis

Si $f \in \mathcal{C}^2([a,b])$ aleshores

$$\boxed{E = \int_a^b f(x)\,dx - \frac{h}{2}\left[f(a)+f(b)\right] = \frac{-h^3}{12} f''(c), \quad c \in (a,b),\ h = b-a}$$

Prova.

$$E = \int_a^b \left(f(x) - P_1(x)\right) dx = \int_a^b \frac{f''(\xi)}{2!}(x-a)(x-b)\,dx \underset{\text{lema}}{=} \frac{f''(c)}{2}\int_a^b (x-a)(x-b)\,dx$$

$$\underset{x=a+ht}{=} \frac{f''(c)}{2}\int_0^1 ht\,(a+ht-b)\,h\,dt = \frac{-h^3}{12} f''(c).$$

Error en la fórmula de Simpson

Si $f \in \mathcal{C}^4([a,b])$, $h = \frac{b-a}{2}$, llavors

$$\boxed{E = \int_a^b f(x)\,dx - \frac{h}{3}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right] = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\eta), \quad \eta \in (a,b)}$$

Prova. De fet provarem

$$\int_{c-h}^{c+h} f(x)\,dx - \frac{h}{3}\left[f(c-h) + 4f(c) + f(c+h)\right] = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\eta)$$

amb $f \in \mathcal{C}^4([c-h, c+h])$

Definim $E_S(h) = \int_{c-h}^{c+h} f(x)\,dx - \frac{h}{3}\left[f(c-h)+4f(c)+f(c+h)\right]$

Llavors es compleix $E_S(0) = E_S'(0) = E_S''(0) = 0$

En efecte

$E_S(0) = \int_0^0 = 0$

$E_S'(h) = f(c+h) + f(c-h) - \frac{1}{3}[\dots] - \frac{h}{3}\left[-f'(c-h)+f'(c+h)\right]$

$E_S'(0) = 2f(c) - \frac{1}{3}6f(c) = 0$

$E_S''(h) = f'(c+h) - f'(c-h) - \frac{1}{3}\left[-f'(c-h)+f'(c+h)\right] -$

$- \frac{1}{3}\left[-f'(c-h)+f'(c+h)\right] - \frac{h}{3}\left[f''(c-h)+f''(c+h)\right] =$

$= \frac{1}{3}f'(c+h) - \frac{1}{3}f'(c-h) - \frac{h}{3}\left[f''(c-h)+f''(c+h)\right]$

$E_S''(0) = 0$

$E_S'''(h) = \frac{1}{3}f''(c+h) + \frac{1}{3}f''(c-h) - \frac{1}{3}\left[f''(c-h)+f''(c+h)\right]$

$- \frac{h}{3}\left[-f'''(c-h)+f'''(c+h)\right] = -\frac{h}{3}\left[f'''(c+h)-f'''(c-h)\right]$

Ara prenem

$$F(h) = \begin{cases} \dfrac{f'''(c+h)-f'''(c-h)}{2h} & \text{si } h \neq 0 \\ f^{(4)}(c) & \text{si } h = 0 \end{cases}$$

Es compleix . $F(h)$ és contínua (en $h=0$, $\lim_{h\to 0} F(h) = F(0)$)

. $\forall \xi \in [0,h]$ $\quad F(\xi) = f^{(4)}(\eta)$ per a algun η entre $c-h$ i $c+h$

En efecte

$$F(\xi) = \frac{1}{2\xi}\left[f'''(c+\xi) - f'''(c-\xi) \right] =$$

$$= \frac{1}{2\xi}\left[f'''(c) + f^{(4)}(\sigma_1)\xi - \left(f'''(c) - f^{(4)}(\sigma_2)\xi \right) \right] =$$

$$= \frac{1}{2\xi}\left[f^{(4)}(\sigma_1)\xi + f^{(4)}(\sigma_2)\xi \right] = \frac{1}{2}\left[f^{(4)}(\sigma_1) + f^{(4)}(\sigma_2) \right] \underset{\text{lema}}{=}$$

$$= f^{(4)}(\eta)$$

Per la fórmula de Taylor amb el reste en forma integral

es té

$$E_s(h) = E_s(0) + E_s'(0)h + E_s''(0)\frac{h^2}{2!} + R_2(h) =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^h (h-s)^2 E_s'''(s)\,ds =$$

$$R_2(x) = f(x) - \underbrace{P_n(x)}_{\text{Taylor}} = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^x (x-s)^n f^{(n+1)}(s)\,ds$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^h (h-s)^2 \left(-\frac{s}{3}\left[\underbrace{f'''(c+s) - f'''(c-s)}_{\overset{\text{def } F}{=}\ 2sF(s)} \right] \right) ds =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^h (h-s)^2 \left(-\frac{2}{3}\right) s^2 F(s)\,ds = -\frac{1}{3}\int_0^h (h-s)^2 s^2 F(s)\,ds =$$

$$\underset{\text{lema}}{=} -\frac{1}{3}F(\xi)\underbrace{\int_0^h (h-s)^2 s^2\,ds}_{\frac{1}{30}h^5} = -\frac{1}{90} f^{(4)}(\eta) h^5$$

lema: $(h-s)^2 s^2$ no canvia de signe

✓

Fórmula general de l'error en les fórmules d'integració interpolatòria

$$E_m = \int_a^b f(x)\,dx - \sum_{k=0}^{m} f_k W_k = \int_a^b \left(f(x) - P_m(x)\right) dx =$$

$$= \int_a^b \frac{f^{(m+1)}(\xi_x)}{(m+1)!} (x-x_0)\cdots(x-x_m)\,dx$$

Si $|f^{m+1}(x)| \leq M_{m+1}$ $\forall x \in [a,b]$ llavors tenim la fita:

$$|E_m| \leq \frac{M_{m+1}}{(m+1)!} \int_a^b |(x-x_0)\cdots(x-x_m)|\,dx$$

Fórmules de Newton - Cotes

Són les fórmules d'integració interpolatòria quan les abscisses són equiespaiades

Exemple

			$-E$	
$m=1$	Trapezi	$\frac{h}{2}[f(x_0)+f(x_1)]$	$\frac{h^3}{12} f''(c)$	$h=b-a$
$m=2$	Simpson	$\frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)]$	$\frac{h^5}{90} f^{(4)}(c)$	$h=\frac{b-a}{2}$
$m=3$	Regla 3/8	$\frac{3}{8}h[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)]$	$\frac{3}{80}h^5 f^{(4)}(c)$	$h=\frac{b-a}{3}$