PROBLEMES D'EQUACIONS DIFERENCIALS 1

Curs 2020–21

TEMA 1

NOCIÓ D'EQUACIÓ DIFERENCIAL ORDINÀRIA, SOLUCIONS

1.1 Conceptes bàsics

* 1 Una *equació diferencial ordinària* (e.d.o.) és una equació del tipus $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$, $F : U \subset \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}$, lligant una funció y d'una variable real x amb les seves derivades $y', \ldots, y^{(n)}$ fins a un cert ordre $n \geq 1$ finit. Es diu que l'equació és d'*ordre* n si la derivada d'ordre més alt que hi apareix és d'ordre n. Una *solució* de l'e.d.o. $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$ és una funció n vegades diferenciable $x \to y = f(x)$ definida sobre un interval I de $\mathbb{R}$ i complint $F(x, f(x), f'(x), \ldots, f^{(n)}(x)) = 0$, $x \in I$.

Digueu quines de les següents són e.d.o., i de quin ordre són.

(a) $y'(x) = y(x)$

(b) $y'(x) = y(x + 1)$

(c) $\frac{dy}{dx} = a_0(x) + a_1(x)y + a_2(x)y^2$

(d) $y'(x) = y(y(x))$

(e) $y'' = 6x + y^2$

(f) $y'(x) = \int_0^x (1 + y(s)^2)^{\frac{1}{2}} ds$

(g) $y(x) = \int_0^1 (y'(s)^2 + y(s)^2) ds$.

2 Als problemes següents determineu si la funció donada és solució de l'e.d.o. indicada.

(a) $y = \sin x + x^2$, $\quad \frac{d^2y}{dx^2} + y = x^2 + 2$.

(b) $y = e^{2x} - 3e^{-x}$, $\quad \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 2y = 0$.

(c) $x = 2e^{3t} - e^{2t}$, $\quad \frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{dx}{dt} + 3x = -2e^{2t}$.

(d) $x = \cos 2t$, $\quad \frac{dx}{dt} + tx = \sin 2t$.

(e) $x = \cos t - 2\sin t$, $\quad x'' + x = 0$.

(f) $y = 3\sin 2x + e^{-x}$, $\quad y'' + 4y = 5e^{-x}$.

(g) $x^2 + y^2 = 4$, $\quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$.

(h) $y - \log y = x^2 + 1$, $\quad \frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{y-1}$.

(i) $e^{xy} + y = x - 1$, $\quad \frac{dy}{dx} = \frac{e^{-(xy)} - y}{e^{-(xy)} + x}$.

(j) $x(t) = ce^{at}$, $\quad \frac{dx}{dt} = ax$, $x \in \mathbb{R}$.

3 Determineu si $A(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{pmatrix}$ és solució de $A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} A$, amb $A : \mathbb{R} \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

4 Determineu si les funcions

$$\begin{aligned} x_1(t) &= Ce^{2t} - De^{-t}, \\ x_2(t) &= -Ce^{2t} + 2De^{-t}, \end{aligned}$$

són solució del sistema d'equacions diferencials

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 5x_1 + 3x_2, \\ \dot{x}_2 &= -6x_1 - 4x_2, \qquad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

5 Determineu per a quins valors de m la funció $f(x) = x^m$ és solució de l'e.d.o.

(a) $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} - y = 0,$

(b) $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} - 5y = 0.$

* 6 El *problema de Cauchy (o de valors inicials)* és el següent: Donades $x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)}$ (*condicions inicials*) trobar una solució de l'e.d.o. $F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$ complint $f(x_0) = y_0$,$f'(x_0) = y_0'$,...,$f^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$. Resoleu el problema de Cauchy corresponent a l'equació del problema 2(j) amb $x(0) = x_0$.

7 Proveu que $f(x) = \sin x - \cos x$ és una solució del problema de valor inicial

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0, \quad y(0) = -1,\ y'(0) = 1.$$

8 Resoleu el problema de Cauchy donat pel problema 4 amb $x_1(0) = 3$, $x_2(0) = -1$.

9 Donada la funció contínua $(t, x) \in \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to f(t, x) \in \mathbb{R}^n$, i donada una aplicació $\phi : I \to \mathbb{R}^n$ contínua, proveu que si f és contínua, ϕ és solució del problema de Cauchy $\dot{x} = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$ si i només si ϕ és solució de l'*equació integral* $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s))ds,\ t \in I$ $((t_0, x_0) \in \Omega)$.
Apliqueu-ho al cas que f no depèn de x, per resoldre l'equació $\dot{x} = f(t)$, $x(t_0) = x_0$.
Aplicació: resoleu $\dot{x} = (1 - t^2)^{-\frac{1}{2}}$, $x(0) = 0$.

10 Trobeu la solució de l'equació integral $y(t) = \int_0^t y(s)ds + t + a$.

1.2 Equació diferencial d'un feix de corbes

11 Trobeu l'e.d.o. satisfeta per la família de paràboles $y = c_1(x - c_2)^2$

12 Trobeu l'e.d.o. satisfeta per les circumferències del pla.

13 Trobeu l'e.d.o. satisfeta per les el·lipses centrades del pla ($\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$).

14 Trobeu l'e.d.o. satisfeta per les circumferències amb centre sobre la recta $y = x$, i que són tangents a l'eix y.

15 Trobeu l'e.d.o. satisfeta per les còniques $x^2 + 2axy + by^2 = k$, on k és fix, i a i b són paràmetres variables.

16 Trobeu l'e.d.o. satisfeta per la família de corbes $y = Ae^{2x+B}$.

17 Trobeu l'e.d.o. satisfeta per la família de paràboles $y = \frac{x^2}{2} + ax + a^2$, representant alguns elements de la família. Hi ha més corbes que satisfan l'e.d.o. trobada?

18 Siguin u_1, u_2 funcions dues vegades derivables. Proveu que l'e.d.o. associada a $y = c_1u_1(x)+c_2u_2(x)$ es pot escriure com

$$\begin{vmatrix} y & u_1 & u_2 \\ y' & u_1' & u_2' \\ y'' & u_1'' & u_2'' \end{vmatrix} = 0.$$

Què passa si $W(u_1, u_2) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1' & u_2' \end{vmatrix} \equiv 0$? (W s'anomena el wronskià de u_1, u_2).
Aplicació: $y = c_1x^4 + c_2 \sin x + c_3 \cos x$.

1.3 Isoclines

*19 L'e.d.o. $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$, $(x,y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$, associa a cada punt $(x,y) \in \Omega$ una *direcció* de pendent $m = f(x,y)$. Una manera sistemàtica de dibuixar aquest camp de direccions és determinar primer el lloc geomètric dels punts que tenen associada la mateixa direcció. Aquests llocs venen determinats per les equacions $f(x,y) = c$ i reben el nom d'*isoclines*).

Dibuixeu el camp de direccions corresponent a l'equació $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$ i esbosseu les corbes solució.

20 Dibuixeu el camp de direccions corresponent a l'equació $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$.

21 Idem amb $\frac{dy}{dx} = x - y$.

22 Idem amb $\frac{dy}{dx} = y$.

23 Idem amb $\frac{dy}{dx} = \frac{y-x}{y+x}$.

TEMA 2

EQUACIONS LINEALS

2.1 Equacions lineals unidimensionals

* 1 L'e.d.o. $y' = a(x)y + b(x)$ s'anomena *lineal* ($a, b : I \to \mathbb{R}$ contínues). Es diu que és *lineal homogènia* si $b(x) \equiv 0$ i *lineal no homogènia* en cas contrari.

(a) Proveu que si es coneix una solució particular $y_p(x)$ de l'e.d.o. lineal no homogènia $y' = a(x)y + b(x)$, aleshores la seva solució general és $y = y_p(x) + y_h(x)$, essent $y_h(x)$ la solució general de l'e.d.o. lineal homogènia associada, $y' = a(x)y$.

(b) Escrivint $y_h(x) = Cy_1(x)$, proveu que es pot trobar una solució particular $y_p(x)$ mitjançant el canvi $y(x) = u(x)y_1(x)$ (*mètode de variació de les constants*), que redueix l'e.d.o. lineal no homogènia a calcular una primitiva.

(c) Deduïu que la solució que compleix la condició inicial $y(x_0) = y_0$ ve donada per l'expressió

$$y(x) = \mathrm{e}^{\int_{x_0}^{x} a(r)dr} y_0 + \int_{x_0}^{x} \mathrm{e}^{\int_{s}^{x} a(r)dr} b(s)ds \ , \quad x \in I.$$

(d) Aplicació: $x^2y' + 2xy = 1$.

2 (a) Proveu que la família de corbes $y = Cf(x) + g(x)$ és la solució general de l'e.d.o. $y' = F(x, y)$ si i només si aquesta e.d.o. és lineal.

(b) Proveu que la raó simple de tres solucions diferents qualssevol d'una e.d.o. lineal és constant.

(c) Deduïu com obtenir la solució general sense fer cap quadratura, si hom coneix dues solucions diferents de l'e.d.o. lineal.

3 Proveu que tota solució de $x' = a(t)x + b(t)$, $a, b : (\alpha, \infty) \to \mathbb{R}$ contínues, $a(t) \leq -c < 0$, $t > \alpha$, $\lim_{t\to\infty} b(t) = 0$, tendeix a zero quan $t \to \infty$.

4 Sigui $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua i T-periòdica, $b \in \mathbb{R}$. Proveu que tota solució de $x' = a(t)x + b$ és T-periòdica si i només si $\int_0^T a(s)ds = 0$, i $b = 0$.

5 Proveu que l'e.d.o. lineal $x' = ax + b(t)$ $a \in \mathbb{R}$, $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua i T-periòdica, admet una única solució T-periòdica si $a \neq 0$. I si $a = 0$?

2.2 Aplicacions senzilles

6 La *llei de Newton del refredament* estableix que la raó del canvi de temperatura $T(t)$ d'un cos és proporcional a la diferència entre la temperatura del medi $M(t)$ i la del cos: $\frac{dT}{dt} = K[M(t) - T(t)]$, on $K > 0$ és una constant.

(a) Resoleu l'equació en el cas que M sigui constant.

(b) Un termòmetre que marca 100^o es posa en un medi a una temperatura constant de 70^o, i 6 minuts després el termòmetre marca 80^o. Quina serà la temperatura després de 20 minuts?

7 Un plasma sanguini està emmagatzemat a 40^o. Abans de poder-lo usar, s'ha d'elevar la temperatura a 90^o. Si el plasma es col·loca en un forn que és a 120^o, es necessiten 45 minuts abans que el plasma arribi als 90^o. Suposem que s'aplica la llei de Newton i que la constant de proporcionalitat no depèn de la temperatura del forn, la cual suposem constant. Quant de temps caldrà per elevar la temperatura del plasma a 90^o si la temperatura del forn és
(a) 100^o, (b) 140^o, (c) 80^o.

8 Un tanc és ple amb 40 litres d'aigua-sal que contenen 2.5 kg de sal. Després s'introdueix aigua-sal amb una concentració de 0.4 kg de sal per litre, amb una raó de 8 l/min. Si la barreja es manté ben remenada i surt del tanc a la mateixa velocitat, calculeu quina quantitat de sal hi ha en el tanc després de 10 min. Quina quantitat de sal hi haurà al tanc si es deixa passar un temps prou llarg?

9 Està nevant amb regularitat. A les 12 h. surt una màquina llevaneus que en una hora recorre 2 km. En la segona hora recorre només 1 km. A quina hora va començar a nevar ? (La quantitat de neu treta per unitat de temps és constant).

10 Segons la *llei malthusiana*, el creixement de les poblacions grans i aillades és proporcional al nombre d'individus. Usant aquesta llei trobeu l'expressió $p(t)$ per la població de la terra, usant que al 1961 era de 3.06×10^9 i que va creixer un 2 per cent en un any. Calculeu $p(1700)$, $p(1900)$, $p(2510)$, $p(2670)$. Discutiu la validesa d'aquest model.

11 En un cert cultiu de bacteries, la velocitat d'augment és proporcional al nombre present (llei malthusiana). Si s'ha trobat que el nombre es duplica cada 4 hores, quin nombre s'ha d'esperar al cap de 12 hores? Si hi ha 10^4 bactèries al cap de 3 hores, i $4 \cdot 10^4$ al cap de 5 hores, quantes n'hi havia al principi?

2.3 Sistemes lineals homogenis

12 Els vectors $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^t$, $x_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} e^t + \begin{pmatrix} 8 \\ -8 \end{pmatrix} te^t$ són solucions del sistema $x' = Ax$. Determineu si formen un conjunt fonamental a $-\infty < t < +\infty$.

13 Donat el sistema $x' = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} x$, els vectors columna $x_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}$, $x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5t}$ formen un conjunt fonamental de solucions del sistema a $-\infty < t < +\infty$. Construïu una matriu fonamental $\Phi(t)$ i calculeu $\Phi(t)^{-1}$. Trobeu la matriu fonamental $\Psi(t)$ que satisfà $\Psi(0) = I$ per a aquest sistema.

14 Dibuxeu el retrat de fase dels següents sistemes lineals, especificant el caràcter de l'origen en cada cas.

(a)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x \\ \dot{y} &= 2x + 2y \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x + 2y \\ \dot{y} &= x - y \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 2x - 8y \\ \dot{y} &= x - 2y \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x \\ \dot{y} &= x - y \end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -3x + 2y \\ \dot{y} &= -2x \end{aligned}$$

15 Trobeu la solució general dels sistemes següents:

(a) $x' = \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} x$

(b) $x' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} x$

(c)

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 2x + y + 2z \\ \frac{dy}{dt} &= 3x + 6z \\ \frac{dz}{dt} &= -4x - 3z \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 3x + 2y + 4z \\ \frac{dy}{dt} &= 2x + 2z \\ \frac{dz}{dt} &= 4x + 2y + 3z \end{aligned}$$

16 Sigui A una matriu real o complexa $n \times n$, $p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} ... (\lambda - \lambda_k)^{m_k}$, el seu polinomi característic, amb $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ diferents dos a dos, $m_1 + \cdots + m_k = n$. Sigui $Q(\lambda) = \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_1\lambda + \alpha_0$ el polinomi de grau $n-1$ que verifica $Q^{(j)}(\lambda_i) = e^{\lambda_i}$, $j = 0, \ldots, m_i - 1$, $i = 1, \ldots, k$ ($Q(\lambda)$ és el polinomi d'interpolació d'Hermite). Proveu que $e^A = Q(A)$.

Aplicació: resoleu $x' = Ax,\ x(t_0) = x_0$, amb $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(calculeu $f(tA) = e^{tA} = Q_{tA}(tA)$).

17 Resoleu els sistemes següents amb condicions inicials:

(a) $x' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} x \ , \quad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

(b) $x' = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} x \ , \quad x(0) = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \end{pmatrix}$

18 Resoleu els sistemes següents:

(a)

$$\begin{aligned} x' &= -x - y + z \\ y' &= -y - z \\ z' &= y - 3z \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} x' &= x - y + z \\ y' &= x + y - z \\ z' &= -y + 2z \end{aligned}$$

amb $(x(1), y(1), z(1)) = (1, -1, 1)$.

(c)

$$\begin{aligned} x' &= 2x + y - z \\ y' &= -3x - y + z \\ z' &= 9x + 3y - 4z \end{aligned}$$

19 Resoleu el sistema triangular $x_1' = -x_1$, $x_2' = (\sin t)x_1 - x_2$, i trobeu una matriu fonamental $\Phi(t)$ tal que $\Phi(0) = Id$.

20 Resoleu $x' = Ax$, $x(t_0) = x_0$, on $A = \begin{pmatrix} 10 & 4 & 13 \\ 5 & 3 & 7 \\ -9 & -4 & -12 \end{pmatrix}$ (la solució és $x(t) = e^{(t-t_0)A}x_0$).

21 Sigui $A = \frac{1}{d}\begin{pmatrix} d - abt & -b^2t \\ a^2t & d + abt \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$, amb $d \neq 0$.

(a) Calculeu $B(t) = e^{\int_0^t A(s)ds}$.

(b) Proveu que $A(t)B(t) = B(t)A(t)$.

(c) Resoleu $x' = A(t)x$, $x(0) = x_0$

22 Esbosseu tots els espais de fases dels sistemes lineals a coeficients constants homogenis

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

amb $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. (Estudieu les diferents formes normals de Jordan).

2.4 Sistemes lineals no homogenis

23 Trobeu la solució general del sistema $x' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

24 Resoleu, fent servir el mètode dels coeficients indeterminats, els següents sistemes per a $-\infty < t < +\infty$:

(a)

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x - 4y + 4t + 9e^{6t} \\ \frac{dy}{dt} &= 4x + y - t + e^{6t} \end{aligned}$$

(b) $x' = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \sin t \\ -2\cos t \end{pmatrix}$

25 Feu servir el mètode de variació de paràmetres per resoldre els sistemes següents:

(a) $x' = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 2 \\ e^{-3t} \end{pmatrix}$

(b) $x' = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

26 Resoleu $x' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1/t \\ 1/t \end{pmatrix}$, $\quad x(1) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

27 Resoleu $x' = Ax + b(t)$, amb $b(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{ct}$, $c \neq 1$, i $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, mitjançant variació de les constants. Podeu trobar alguna solució particular del tipus $x(t) = e^{ct}v$, on v és un vector constant ?

28 Resoleu $x' = A(t)x + b(t)$, amb $A(t) = \begin{pmatrix} 1-t & -t \\ t & 1+t \end{pmatrix}$, $b(t) = \begin{pmatrix} te^t \\ (1-t)e^t \end{pmatrix}$.

(Ind.: Trobeu una solució del tipus $\Phi_1(t) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} e^t$ de l'edo homogènia, i feu després el canvi $x = H(t)u$, amb $H(t) = (\Phi_1(t)|\Phi_2(t))$ regular.)

29 Resoleu el sistema triangular $\frac{dx}{dt} = -\frac{2}{t^2}x + \frac{2}{t}y + t^3$, $\frac{dy}{dt} = y + t^4$. Escriviu una matriu fonamental del sistema homogeni.

2.5 Equacions lineals d'ordre n homogènies

30 Sigui $I \subset \mathbb{R}$, un interval. El conjunt $\mathcal{F} = \{y \mid y : I \to \mathbb{R}\}$ de les funcions de I en $\mathbb{R}$ és un espai vectorial real. Les funcions $y_1, \ldots, y_n \in \mathcal{F}$ són linealment independents si $\lambda_1 y_1(x) + \cdots + \lambda_n y_n(x) = 0$, per a tot $x \in I$, implica que $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$. Donades $y_1, \ldots, y_n : I \to \mathbb{R}$, $n-1$ vegades derivables, el seu wronskià es defineix com

$$W(y_1, \ldots, y_n)(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & \cdots & y_n(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}.$$

(a) Proveu que, donades $y_1, \ldots, y_n : I \to \mathbb{R}$, $n-1$ vegades derivables, si existeix $x_0 \in I$ tal que $W(y_1, \ldots, y_n)(x_0) \neq 0$, llavors $y_1, \ldots, y_n$ són linealment independents.

(b) Proveu, mitjançant un exemple, que el recíproc, sense hipòtesis addicionals, és fals, és a dir, trobeu dues funcions $y_1, y_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, linealment independents i tals que $W(y_1, y_2)(x) = 0$, per a tot $x \in \mathbb{R}$.

31 (a) Proveu que $f_1(x) = x^2$ i $f_2(x) = x|x|$ són linealment independents en $-\infty < x < +\infty$.

(b) Proveu que $W(f_1(x), f_2(x)) = 0$, per a tot nombre real.

(c) Proveu que $y_1 = 1$ i $y_2 = \ln x$ són solucions de l'e.d.o. no lineal $y'' + (y')^2 = 0$ a l'interval $0 < x < +\infty$.

(d) És $c_1y_1 + c_2y_2$ una solució de l'equació per c_1 i c_2 constants arbitràries?

32 Considerem l'edo lineal homogènia d'ordre n, $y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_0(x)y = 0$, on $a_i : I \to \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$), $i = 0, \ldots, n-1$, són contínues en l'interval I. Suposem que $y_1, \ldots, y_n : I \to \mathbb{R}$ són solucions de l'edo.

(a) Proveu que $W(y_1, \ldots, y_n)$ satisfà

$$\frac{d}{dx}W + a_{n-1}W = 0.$$

Deduïu que, o bé $W(y_1, \ldots, y_n)(x) \neq 0$, per a tot $x \in I$, o bé $W(y_1, \ldots, y_n)(x) = 0$, per a tot $x \in I$.

(b) Suposeu que existeix $x_0 \in I$ tal que $W(y_1, \ldots, y_n)(x_0) \neq 0$. Proveu que si $\tilde{y}$ és una altra solució de l'edo, existeixen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tals que

$$\lambda_1 y_1^{(j)}(x) + \cdots + \lambda_n y_n^{(j)}(x) = \tilde{y}(x), \qquad \text{per a tot } x \in I,$$

és a dir, si una edo lineal homogènia d'ordre n té n solucions satisfent $W(y_1, \ldots, y_n)(x_0) \neq 0$, per a algun x_0, el conjunt de solucions de l'edo és un espai vectorial de dimensió n.

Comentari: es tracta de provar l'apartat (b) directament a partir de les propietats del wronskià, sense fer servir el que pugueu saber de teoria. Observeu que en aquest problema no estem afirmant que l'edo té solucions sino que, si en té, com a molt pot tenir-ne n amb wronskià no nul. Es pot donar el cas que $y_1, \ldots, y_n$ siguin solucions linealment independents de l'edo però $W(y_1, \ldots, y_n)(x) = 0$, per a tot $x \in I$?

33 Considerem l'edo lineal homogènia d'ordre n amb coeficients constants, $y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_0(x)y = 0$, on $a_i \in \mathbb{C}$, $i = 0, \ldots, n-1$. Anomenarem polinomi característic de l'edo al polinomi $p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_0$.

(a) Proveu que $x^{k-1}e^{\alpha x}$ és solució de l'edo si i només si α és una arrel de multiplicitat al menys k de p.

Nota: recordeu que α és arrel de multiplicitat al menys k d'un polinomi p si i només si existeix un polinomi q tal que $p(\lambda) = (\lambda - \alpha)^k q(\lambda)$ si i només si $p(\alpha) = \cdots = p^{(k-1)}(\alpha) = 0$.

(b) Siguin $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{C}$ tals que $\alpha_i \neq \alpha_j$, $i \neq j$, i $p(\lambda) = (\lambda - \alpha_1)^{n_1} \cdots (\lambda - \alpha_k)^{n_k}$ (en particular, $n_1 + \cdots + n_k = n$). Proveu que un sistema fonamental de solucions de l'edo (és a dir, una base de l'espai de solucions) és

$$\{e^{\alpha_1 x}, \ldots, x^{n_1-1}e^{\alpha_1 x}, \ldots, e^{\alpha_k x}, \ldots, x^{n_k-1}e^{\alpha_k x}\}.$$

Indicació: podeu fer servir que, si $k \geq 2$,

$$W\left(e^{\alpha_1 x}, \ldots, \frac{x^{n_1-1}}{(n_1-1)!}e^{\alpha_1 x}, \ldots, e^{\alpha_k x}, \ldots, \frac{x^{n_k-1}}{(n_k-1)!}e^{\alpha_k x}\right)_{|x=0} = \prod_{1 \leq i < j \leq k} (\alpha_i - \alpha_j)^{n_i n_j}.$$

Intenteu provar aquesta igualtat.

(c) En el cas de que els coeficients de l'edo siguin reals, trobeu un sistema fonamental de solucions amb funcions a valors reals.

34 Donada una edo lineal d'ordre n, $a_0(t)x^{(n)} + \cdots + a_{n-1}(t)x' + a_n(t)x = 0$, $a_i : I \to \mathbb{C}$ contínua, $a_0(t) \neq 0$, proveu que si es coneix una solució $x_1(t) \not\equiv 0$, es pot reduir l'ordre l'equació fent el canvi $x(t) = w(t)x_1(t)$ (*mètode de reducció de l'ordre*).

En el cas $n = 2$, useu això per provar que una segona solució $x_2(t)$, independent de $x_1(t)$, ve donada per la fórmula següent:

$$x_2(t) = x_1(t) \int \frac{e^{-\int \frac{a_1(t)}{a_0(t)}\, dt}}{x_1(t)^2}\, dt.$$

Com a aplicació, resoleu les equacions diferencials:

(a) $4t^2x'' + x = 0$ essent $x_1 = t^{1/2}\ln t$ una solució,

(b) $(1+t)x'' + tx' - x = 0$ essent $x_1 = t$ una solució,

(c) $t^2x'' - 20x = 0$ essent $x_1 = t^{-4}$ una solució.

35 Trobeu les solucions generals de les equacions diferencials següents:

(a) $2y'' - 3y' + 4y = 0$

(b) $y''' - y'' - 4y = 0$

(c) $y^{(4)} - 7y'' - 18y = 0$

(d) $2y^{(5)} - 7y^{(4)} + 12y''' + 8y'' = 0.$

(e) $x^{(10)} - 2x^{(9)} + 2x^{(8)} - 2x^{(7)} + 2x^{(5)} - 2x^{(4)} + 2x^{(3)} - x^{(2)} = 0.$

36 Resoleu els problemes de Cauchy següents:

(a) $4y'' - 4y' - 3y = 0, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 5$

(b) $y^{(4)} - y = 0, \quad y(0) = y'(0) = y''(0) = 0,\ y'''(0) = 1.$

37 Trobeu la solució general de l'equació $y''' + 6y'' + y' - 34y = 0$ sabent que $e^{-4x}\cos x$ és una solució.

38 Demostreu que si y_1 i y_2 són solucions linealment independents de $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ a (a,b), no poden tenir simultàniament un extrem en el mateix punt $x_0 \in (a,b)$.

2.6 Equacions lineals d'ordre n no homogènies

39 Escriviu l'edo lineal d'ordre n

$$a_0(t)x^{(n)} + \cdots + a_{n-1}(t)x' + a_n(t)x = f(t), \tag{1}$$

$a_i : I \to \mathbb{C}$ contínua, $a_0(t) \neq 0$, com un sistema lineal de primer ordre: $X' = A(t)X + b(t)$, indicant la seva resolució a través de la forma de les matrius fonamentals. Donades $\phi_1, \cdots, \phi_n$ solucions de l'edo homogènia, proveu que $W(\phi_1, \cdots, \phi_n)(t) = W(\phi_1, \cdots, \phi_n)(t_0) \exp\left(-\int_{t_0}^{t} \frac{a_1(s)}{a_0(s)} ds\right)$, on $W(\phi_1, \cdots, \phi_n)(t) = \det\left(\phi_j^{(i-1)}(t)\right)_{i,j=1,\ldots,n}$ rep el nom de *wronskià* de $\phi_1, \ldots, \phi_n$. Indiqueu com s'aplica el mètode de variació de constants per resoldre (1).
Aplicació: resoleu $\ddot{x} + x = \tan t$, $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $x(0) = \dot{x}(0) = 1$.

40 Considerem una edo lineal homogènia amb coeficients constants amb polinomi característic $p(\lambda)$, és a dir,

$$p\left(\frac{d}{dx}\right) y = 0.$$

(vegeu el problema (33)). Suposeu que $f(x)$ és una solució no trivial de l'edo lineal homogènia amb coeficients constants amb polinomi característic $q(\lambda)$, és a dir,

$$q\left(\frac{d}{dx}\right) f(x) = 0.$$

(a) Sigui y_p una solució de l'edo lineal amb coeficients constants

$$p\left(\frac{d}{dx}\right) y = f.$$

Proveu que y_p és una solució de

$$q\left(\frac{d}{dx}\right) p\left(\frac{d}{dx}\right) y = 0$$

que no satisfà $p\left(\frac{d}{dx}\right) y = 0$.

(b) Suposeu que $f(x) = x^j e^{\alpha x}$, amb $p(\alpha) \neq 0$. Llavors existeixen $a_0, \ldots, a_j \in \mathbb{R}$ tals que

$$y_p(x) = (a_0 + a_1 x + \cdots + a_j x^j)e^{\alpha x},$$

és solució de $p\left(\frac{d}{dx}\right) y = f$.

(c) Suposeu que $f(x) = x^j e^{\alpha x}$, amb α arrel de multiplicitat k de p. Llavors existeixen $a_0, \ldots, a_j \in \mathbb{R}$ tals que

$$y_p(x) = x^k(a_0 + a_1 x + \cdots + a_j x^j)e^{\alpha x},$$

és solució de $p\left(\frac{d}{dx}\right) y = f$.

41 Resoleu les equacions diferencials següents pel mètode dels coeficients indeterminats:

(a) $2y'' - 7y' + 5y = -29$

(b) $y'' + 4y = 4\cos x + 3\sin x - 8$

(c) $y'' + 4y = \cos^2 x$

(d) $y^{(4)} - 5y'' + 4y = 2\cosh x - 6$.

42 Resoleu el problema de valor inicial $y^{(4)} - y''' = x + e^x$, $y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0$.

43 Trobeu la solució general de $x^{(6)} - 3x^{(2)} - 2x = 72t\cos t$ i comenteu el comportament de les solucions quan $t \to \infty$.

44 Resoleu les equacions diferencials següents pel mètode de variació de paràmetres i doneu un interval en el qual la solució general estigui definida:

(a) $y'' + y = \sec x \tan x$

(b) $y'' - 2y' + y = e^x \arctan x$.

45 Resoleu pel mètode de variació de paràmetres el problema de valor inicial $2y'' + y' - y = x + 1$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

46 Resoleu: $x'' - 2x - 3y = e^{2t}$, $y'' + 2y + x = 0$, $x(0) = y(0) = 1$, $x'(0) = y'(0) = 0$ (derivant i eliminant la variable y, obteniu una edo d'ordre 4 per a x).

47 (a) Demostreu que l'equació d'Euler $ax^2\frac{d^2y}{dx^2} + bx\frac{dy}{dx} + cy = 0$ es transforma en l'equació de coeficients constants $a\frac{d^2y}{dt^2} + (b-a)\frac{dy}{dt} + cy = 0$ mitjançant el canvi de variable independent $x = e^t$. (Sug.: Proveu que $x\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}$, i $x^2\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}$.)

(b) Useu l'apartat anterior per trobar la solució general de $x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 2x\frac{dy}{dx} - 6y = 0$, $x > 0$.

(c) Trobeu la solució general de $x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 5x\frac{dy}{dx} + 4y = 0$, $x > 0$.

(d) Resoleu el problema de valors inicials
$3x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 11x\frac{dy}{dx} - 3y = 8 - 3\log x$, $y(1) = 1$, $\frac{dy}{dx}(1) = \frac{4}{3}$.

48 Les edo lineals a coeficients variables $a_0t^nx^{(n)} + a_1t^{n-1}x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}tx' + a_nx = f(t)$, amb a_i constants, s'anomenen *equacions d'Euler*. Proveu que el canvi $|t| = e^s$ la transforma en una edo a coeficients constants $\tilde{P}(D)y = f(\pm e^s)$ per a $y(s) = x(t)$, amb $\tilde{P}(\lambda) = a_0\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-n+1) + a_1\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-n+2) + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n$
(Sug.: $t^rD_t^r = D_s(D_s-1)\cdots(D_s-r+1)$, $r \geq 1$, $D_t = \frac{d}{dt}$, $D_s = \frac{d}{ds}$).
Aplicació: $t^2x'' + 4tx' + 2x = \cos(\log|t|)$. Existeix solució definida per a $t = 0$?

49 Resoleu: $x'' + \frac{x}{4t^2} = f(t)$, $t > 0$, f contínua, buscant primer una solució $\Phi_1(t) = t^\alpha$ de l'homogènia i fent després el canvi $x = \Phi_1(t)y$.

2.7 Sistemes lineals periòdics

50 Sigui $t \to A(t)$ contínua T-periòdica. Proveu que si $x(t)$ és solució de $x' = A(t)x$, també $t \to x(t+T)$ és solució. Donada una matriu fonamental $\Phi(t)$ de $x' = A(t)x$, definim la *matriu de monodromia* $M = M_\Phi$ associada a $\Phi(t)$ mitjançant $\Phi(t+T) = \Phi(t)M_\Phi$. Si M_Ψ és la matriu de monodromia associada a una altra matriu fonamental $\Psi(t)$, proveu que M_Φ i M_Ψ són similars: $\exists S$ regular tal que $M_\Psi = S^{-1}M_\Phi S$. Els *multiplicadors característics* de $x' = A(t)x$ són els valors propis $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ de qualsevol matriu de monodromia. Proveu: $\prod_{i=1}^n \lambda_i = \exp\left(\int_0^T \mathrm{tr}A(s)ds\right)$

51 Proveu que tota matriu fonamental $\Phi(t)$ de $x' = A(t)x$, on $A(t)$ és T-periòdica, és de la forma $\Phi(t) = P(t)e^{Bt}$, on $P(t)$ és una matriu T-periòdica (o $2T$-periòdica) i B és una matriu constant (*teoria de Floquet*, feu $M_\Phi = e^{TB}$, i proveu que $P(t) = P(t+T)$). Fent el canvi $x = P(t)y$, transformeu $x' = A(t)x$ en $y' = By$ edo lineal a coeficients constants. Comenteu l'estabilitat.

52 Trobeu la matriu de monodromia del sistema 2π-periòdic

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (-1+\cos t)x \\ \dot{y} &= x\cos t - y \end{aligned}$$

Hi ha alguna solució fitada que no sigui la trivial? N'hi ha alguna de no fitada? Doneu exemples.

53 Donada la e.d.o. de segon ordre $\ddot{x} = -f(t)x$, on

$$f(t) = \begin{cases} (\omega+\varepsilon)^2 & \text{si} \quad 0 \leq t < \pi \\ (\omega-\varepsilon)^2 & \text{si} \quad \pi \leq t < 2\pi \end{cases}$$

i $f(t+2\pi) = f(t)$, on $\varepsilon \ll 1$,

(a) busqueu la matriu de monodromia del sistema lineal associat. (Ind.: Busqueu solucions de l'equació contínues).

(b) Proveu que si $\omega \neq k/2$, per $k \in \mathbb{Z}$, el sistema és estable, per ε prou petit.

(c) Proveu que si $\omega = k/2$ per $k \in \mathbb{Z}$, el sistema no és estable, per ε prou petit.

(d) Trobeu la forma del domini d'estabilitat, en el pla (ω, ε), del sistema.

54 Trobeu la forma del domini d'estabilitat, en el pla (ω, ε) del sistema associat a l'edo de segon ordre $\ddot{x} = -\omega^2(1 + \varepsilon \cos t)x$, on $\varepsilon \ll 1$.

55 Donat el sistema

$$y' = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ \sin t & -\cos t \end{pmatrix} y$$

(a) Transformeu-lo en l'equació complexa $z' = e^{it}\bar{z}$.

(b) Busqueu solucions d'aquesta equació de la forma $z(t) = (a + bi)e^{(\pm\sqrt{3}/2 + i/2)t}$.

(c) Calculeu, pel sistema, una matriu fonamental, la descomposició de Floquet, la matriu de monodromia i els exponents i multiplicadors característics.

2.8 Aplicacions

56 Tenim un circuit elèctric amb una inductància L, resistència R i capacitat C. Si el generador produeix un voltatge $E(t) = E_0 \sin(\omega t)$, deduïu que el corrent I satisfà

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = E_0\omega\cos(\omega t), \tag{2}$$

i que la càrrega Q compleix una edo similar. Resoleu (2) quan $E_0 = 0$ i proveu que el règim de corrent del circuit és transitori: $E_0 = 0 \Rightarrow$ per a tota solució $I_0(t)$ de (2), $I_0(t) \to 0$, quan $t \to +\infty$. Resoleu ara (2) quan $E_0 \neq 0$, i trobeu les solucions no transitòries de (2), comprovant que són periòdiques. Per a quin valor de ω és màxima l'amplitud A de $I(t)$?

57 Una partícula P de massa 2 gr es mou sobre l'eix X i és atreta per l'origen O amb una força de 8 vegades la seva distància a l'origen. Si al principi es troba en repòs en $x = 10$, trobeu la seva posició en cada instant suposant:

(a) que no actua cap altra força.

(b) actua una força de fregament de 8 vegades la velocitat instantània.

58 Una molla en posició vertical està lligada a un sostre pel seu extrem superior, i del seu extrem inferior es penja una massa de 2 kg. Si la freqüència del moviment harmònic simple que es produeix és $2/\pi$ oscil·lacions per segon, calculeu la constant K de la molla. Si substituïm la massa per una de 8 kg, calculeu el període del nou moviment.

59 Una oscil·lació harmònica $x(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$ es representa de vegades com la primera component d'un vector de mòdul A (vector "amplitud") que gira amb velocitat angular ω. Una altra representació interessant és la del "pla de fases" (en què les coordenades són posició i velocitat), per mitjà de la corba $(x(t), x'(t))$ (noteu que és possible definir-la encara que la llei $x(t)$ no sigui harmònica). Mostreu que en el cas harmònic la corba $(x(t), x'(t))$ és una el·lipse recorreguda amb velocitat areolar (respecte a l'origen) constant.

60 El moviment d'una porta giratòria amb un cargol d'ajust que controla la quantitat de fregament de la porta amb les frontisses ve donat per el problema de valors inicials $I\theta'' + b\theta' + k\theta = 0$, $\theta(0) = \theta_0$, $\theta'(0) = v_0$, on θ és l'angle d'obertura de la porta, I és el moment d'inèrcia de la porta respecte de les frontisses, $b > 0$ és una constant d'esmorteïment que varia amb la quantitat de fregament de la porta, $k > 0$ és la constant de ressort associada amb la porta giratòria, θ_0 és l'angle inicial d'obertura de la porta, i v_0 és la velocitat angular inicial donada a la porta. Si I i k són fixes, determineu per a quins valors de b la porta no oscil·larà contínuament endavant i endarrere quan es tanqui.

61 En un sistema mecànic d'equació $mx'' = -kx$, l'energia cinètica és $\frac{1}{2}m(x')^2$ i l'energia potencial elàstica és $\frac{1}{2}kx^2$. Deduïu que l'energia total es conserva al llarg del temps i concluïu que el mòdul de la velocitat és màxim quan el mòbil passa per la posició d'equilibri. Mostreu també que en presència d'un terme de fregament ($mx'' = -kx - ax'$, $a > 0$) l'energia decreix estrictament, si no és que $x(t) \equiv 0$.

62 D'una molla vertical de constant 0.5 N/m es penja una massa de 0.8 kg. El medi ofereix una resistència igual a $\sqrt{2}$ vegades la velocitat instantània. El cos es deixa anar des de la posició d'equilibri amb una velocitat de 1.5 m/s dirigida cap a avall. Trobeu l'instant en el que el cos assoleix el seu desplaçament màxim respecte a la posició d'equilibri. Quina és la posició del cos en aquest instant?

63 En el cas d'un moviment sub-esmorteït $x(t)$, mostreu que els successius valors màxims relatius de $x(t)$ (o els successius mínims relatius) formen una progressió geomètrica.

64 Trobeu l'única solució periòdica de l'equació $\varepsilon^2 \frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = F_0 \sin\gamma t$ (amb $\varepsilon, \lambda, \omega > 0$) i feu $\varepsilon \longrightarrow 0$. Interpreteu el resultat.

65 Trobeu el període mínim de cadascuna de les següents funcions $b(t)$. Decidiu en cada cas si l'equació $x'' + x = b(t)$ té solucions periòdiques, i en cas afirmatiu calculeu-les i trobeu els seus períodes mínims:

(a) $b(t) = \sin \pi t$

(b) $b(t) = \sin 2t + \sin 3t$

(c) $b(t) = 4\sin^3 t$

(d) $b(t) = 2\sin^2 t$

66 (a) Mostreu que la solució de $x'' + \omega^2 x = F_0 \cos\gamma t$, $x(0) = x'(0) = 0$ pot escriure's en la forma $x(t) = \frac{-2F_0}{\omega^2-\gamma^2} \sin\frac{1}{2}(\gamma-\omega)t \sin\frac{1}{2}(\gamma+\omega)t$ (si $\omega^2 \neq \gamma^2$).

(b) Calculeu $\lim\limits_{\gamma\to\omega} x(t)$.

(c) Mostreu que si $\varepsilon = \frac{1}{2}(\gamma-\omega)$ és prou petit, $x(t)$, és aproximadament $\frac{F_0}{2\varepsilon\omega} \sin\varepsilon t \sin\omega t$.

(d) Feu $\varepsilon \longrightarrow 0$ en aquesta aproximació i representeu-la gràficament (fenòmen de "pulsació").

67 Considereu la funció $f(t) = \sin at + \sin bt$, de manera que a/b és irracional. Demostreu que $f(t)$ no és periòdica.

TEMA 3

CASUÍSTICA D'EQUACIONS DIFERENCIALS ORDINÀRIES

3.1 Equacions separables

* 1 Una equació diferencial $y' = f(x,y)$ es diu que és *separable* si es pot expressar com una funció que depèn de x per una que depèn només de y o, el que és el mateix la podem escriure com $h(y)y' = g(x)$.

Proveu que si $G(x)$, $H(y)$ són primitives de $g(x)$, $h(y)$ aleshores l'equació $H(y) = G(x) + c$ (que se sol escriure com $\int h(y)dy = \int g(x)dx + c$), on c és una constant arbitrària, dóna totes les solucions de l'equació $h(y)\frac{dy}{dx} = g(x)$. Proveu aquest resultat per comprovació directa, fent el canvi $z = H(y)$, o fent el canvi $t = G(x)$.

2 Resoleu el problema de valor inicial $x^2 + 2yy' = 0$, $y(0) = 2$.

3 Idem amb $\frac{dy}{dx} = y \sin x$, $y(\pi) = -3$.

4 Idem amb $\frac{dy}{dx} = x^2(1+y)$, $y(0) = 3$.

5 *Pèrdua de solucions en el mètode de separació de variables.*

(a) Resoleu l'equació $\frac{dy}{dx} = (x-3)(1+y)^{\frac{2}{3}}$ pel mètode de separació de variables i deduïu-ne la solució $y = -1 + \left(\frac{x^2}{6} - x + c\right)^3$.

(b) Demostreu que $y = -1$ és solució de l'equació proposada.

(c) Demostreu que la família de solucions obtinguda a l'apartat a) no dóna la solució de b) per a cap valor de la constant c. Expliqueu-ne la causa.

3.2 Canvis de variable

* 6 Sigui $s \in I \to t = \varphi(s) \in J$, un difeomorfisme de classe $\mathcal{C}^k$, $k \geq 1$, amb I, J intervals oberts de $\mathbb{R}$. Sigui $(t,x) \in \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to f(t,x) \in \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^r$, $r \geq 0$.

Proveu que $t \to x = \phi(t)$ és solució de $\frac{dx}{dt} = f(t,x)$ si i només si $s \to x = \phi(\varphi(s))$ és solució de $\frac{dx}{ds} = f(\varphi(s), x)\varphi'(s)$. (El canvi $t = \varphi(s)$ s'anomena *canvi de variable independent*). Aplicació: resoleu $\frac{dx}{dt} = \frac{ax}{1+t^2}$ fent el canvi de variable independent $t = \tan s$.

* 7 Sigui $(t,y) \in W \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to x = \psi(t,y) \in \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^k$, $k \geq 1$ tal que $(t,y) \in W \to (t, \psi(t,y)) \in U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ sigui un difeo $\mathcal{C}^k$.

Proveu que $t \to x = \alpha(t)$ és solució de $\frac{dx}{dt} = f(t,x)$ si i només si $t \to y = \beta(t)$ és solució de $\frac{dy}{dt} = g(t,y)$, on β ve determinada per $\alpha(t) = \psi(t, \beta(t))$, i $g(t,y) = D_2\psi(t,y)^{-1}(f(t,\psi(t,y)) - D_1\psi(t,y))$. (El canvi $x = \psi(t,y)$ s'anomena *canvi de funció incògnita*). Aplicació: resoleu el problema de Cauchy $\frac{dx}{dt} = ax + b(t)$, $x(0) = x_0$, fent el canvi $x = e^{at}y$.

8 Feu el canvi $x = \arctan\sqrt{t}$ a l'equació $y'\cos^4 x - y \sin 2x = 0$.

9 Resoleu $x' = x - 4t$.

*10 Tenim el sistema

$$\begin{aligned} x' &= f(x,y), \\ y' &= g(x,y) \end{aligned}$$

i fem el canvi a coordenades polars $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$. Trobeu l'expressió del sistema en aquestes variables, discutint quin és el domini de definició. Anàlogament, apliqueu el procés invers al sistema:

$$\begin{aligned} r' &= F(r,\theta), \\ \theta' &= G(r,\theta) \end{aligned}$$

11 Aplicant el canvi a coordenades polars, resoleu el sistema

$$\begin{aligned} x' &= y + x(x^2+y^2) \\ y' &= -x + y(x^2+y^2) \end{aligned}$$

12 Resoleu el sistema $x' = Ax$, amb $x \in \mathbb{R}^2$, $A = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$. Representeu gràficament les seves òrbites.

*13 Donada $x \to y = \varphi(x)$ solució de $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$, amb $f(x,\varphi(x)) \neq 0$, proveu que $y \to x = \varphi^{-1}(y)$ és solució de $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x,y)}$.

3.3 Equacions de Bernoulli i de Riccati

*14 L'e.d.o. $y' = a(x)y + b(x)y^r$, $r \in \mathbb{R}$, proposada per Jakob Bernoulli el desembre de 1695, fou resolta per Leibniz el 1696 mitjançant el canvi $z = y^{1-r}$, que la transforma en una e.d.o. lineal. Comproveu-ho. Aplicació: $2xy' + y + 3x^2y^2 = 0$.

15 Fent el canvi $y = u(x)z$ amb una u adequada, Johann Bernoulli la transformà en una e.d.o. separable. Aplicació: $y' + xy = x^3y^3$.

16 Resoleu

(a) $(x^2 - y^2)dx + 2xydy = 0$

(b) $\frac{dy}{dx} - y = e^{2x}y^3$

(c) $\frac{dy}{dx} + y = \frac{e^x}{y^2}$

17 Proveu que la família de corbes $y = [cf(x) + g(x)]^{\frac{1}{1-r}}$ és la solució general de $y' = F(x,y)$ sii aquesta e.d.o. és de Bernoulli.

18 Feu un canvi a l'equació $y' = \frac{1}{f(y)x + g(y)x^n}$ per passar-la a una equació coneguda. Apliqueu-ho a $y' = \frac{\cos y}{1 - x\sin y}$, $y' = \frac{y}{x^2y^2 - x}$.

*19 *L'e.d.o. (generalitzada) de Riccati* $y' = a_0(x) + a_1(x)y + a_2(x)y^2$ no és, en general, resoluble per quadratures. Però si hom coneix una solució particular $y_1(x)$, proveu que $y = y_1 + z$ la redueix a una e.d.o. de Bernoulli, i $y = y_1 + \frac{1}{u}$ a una e.d.o. lineal.

Aplicacions:

(a) $\left(1 - x^3\right)y' = y^2 - x^2y - 2x$, cercant-ne primer una solució polinòmica.

(b) $2(xy' + y^2)(1 - x^2) + (3x^2 - 5)(y - 1) + 2(x^2 - 1) = 0$.

20 Proveu que si coneixem dues solucions particulars y_1, y_2 diferents, llavors mitjançant el canvi $z = \frac{y - y_1}{y - y_2}$, podem reduir l'e.d.o. de Riccati a una e.d.o. separable.

Aplicació: resoleu $(ax^2 + bx + c)(xy' - y) = y^2 - x^2$ (idea: trobeu solucions independents de a, b, c).

3.4 Equacions homogènies

*21 Una funció $F : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ s'anomena *homogènia de grau* $\alpha \in \mathbb{R}$ si es compleix que $F(\lambda x) = \lambda^\alpha F(x)$, $\forall\, x \in U$ i $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda x \in U$. Proveu:

(a) Si P i Q són dues funcions homogènies de grau α, aleshores P/Q es homogènia de grau 0.

(b) Una funció $F(x, y)$ és homogènia de grau 0 si i només si és de la forma $f(y/x)$.

*22 L'e.d.o. $\frac{dy}{dx} = F(x, y)$ s'anomena *homogènia* si F és una funció homogènia de grau 0. Proveu que el canvi $u(x) = \frac{y(x)}{x}$ transforma l'e.d.o. homogènia en una e.d.o. separable.
Aplicació: $\frac{dy}{dx} = \frac{xy+y^2+x^2}{x^2}$.

23 Resoleu les següents equacions fent primer un canvi del tipus $y = u^\alpha x^\beta$.

(a) $(x^2y^2 - 1)y' + 2xy^3 = 0$

(b) $xy' = (y^2 + x^6)^{\frac{1}{2}}$

(c) $yf(xy) + xg(xy)y' = 0$

24 Resoleu $x' = \frac{x+t}{4x+t}$, amb $x(1) = 0$, i després amb $x(0) = 2$.

25 Proveu que $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax+by+c}{a'x+b'y+c'}\right)$, amb $ab' - a'b \neq 0$, pot ser transformada en una e.d.o. homogènia mitjançant el canví $x = h + u$, $y = k + v$ on h, k compleixen $ah + bk + c = a'h + b'k + c' = 0$. Aplicació : resoleu $(3y - 7x + 7)dx + (7y - 3x + 3)dy = 0$.

26 En el problema anterior, si tenim $ab' - a'b = 0$, proveu que $z = ax + by$ dóna lloc a una e.d.o. separable. Aplicació: $(x + y - 1)dy + (x + y + 1)dx = 0$.

3.5 Corbes solució

*27 Direm que $C \subset \mathbb{R}^2$ és una *corba regular* $\mathcal{C}^r$, $r \geq 1$, si per a tot $p_0 \in C$ existeix un entorn obert $U_0 \ni p_0$ i una *parametrització* $\Phi : I_0 \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ de classe $\mathcal{C}^r$, amb $\Phi'(t) \neq 0$, $t \in I_0$, tal que $C \cap U_0 = \Phi(I_0) = \{\Phi(t) \text{ amb } t \in I_0\}$.

Donades $P,\ Q : W \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, on W és obert, contínues, amb $(P(x, y), Q(x, y)) \neq (0, 0)$, $(x, y) \in W$, direm que una corba regular $C \subset W$ de classe $\mathcal{C}^r$ és una *corba solució de l'e.d.o.*

$$P(x, y)\; dx + Q(x, y)\; dy = 0 \tag{1}$$

si per a tot $p_0 \in C$, donada una parametrització $\Phi(t) = (\alpha(t), \beta(t))$ de C en un entorn de p_0, es compleix $P(\Phi(t))\alpha'(t) + Q(\Phi(t))\beta'(t) = 0$, $t \in I_0$.

(a) Proveu que la definició de corba solució de (1) no depèn de la parametrització escollida.

(b) Interpreteu geomètricament la definició de corba solució en termes d'un vector tangent i normal a la corba en cada punt.

*28

(a) Proveu que $C \subset \mathbb{R}^2$ és una corba regular $\mathcal{C}^r$ si i només si per a tot punt $p_0 \in C$ existeix un entorn obert U_0 on la corba és *gràfica* d'una funció de classe $\mathcal{C}^r$, $y = f(x)$ o $x = g(y)$, és a dir, $C \cap U_0 = \{(x, y) \mid x \in I_0 \text{ i } y = f(x)\}$ o bé $C \cap U_0 = \{(x, y) \mid y \in I_0 \text{ i } x = g(y)\}$.

(b) Usant l'apartat anterior, proveu que sobre $A = \{(x, y) \in W \mid Q(x, y) \neq 0\}$, l'equació (1) és equivalent a

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P(x, y)}{Q(x, y)},$$

i que sobre $B = \{(x, y) \in W \mid P(x, y) \neq 0\}$, l'equació (1) és equivalent a

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{Q(x, y)}{P(x, y)}.$$

*29

(a) Proveu que $C \subset \mathbb{R}^2$ és una corba regular $\mathcal{C}^r$ si i només si per a tot punt $p_0 \in C$ existeix un entorn obert U_0 on la corba ve donada *en forma implícita* per una equació $h(x,y) = 0$, és a dir, existeix una funció $h : U_0 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^r$, amb $Dh(p) \neq 0,\ p \in U_0$, tal que $C \cap U_0 = h^{-1}(0) = \{(x,y) \in U_0 \mid h(x,y) = 0\}$. Com s'expressen un vector tangent i normal a la corba en cada punt en termes de la funció h?

(b) Proveu que la família de corbes $h(x,y) = a$, amb $h : U_0 \subset W \to \mathbb{R}$ amb $Dh(x,y) \neq 0$, $(x,y) \in U_0$, satisfà l'e.d.o. (1) si i només si $\begin{vmatrix} P & h_x \\ Q & h_y \end{vmatrix} \equiv 0$ sobre U_0.

(c) Aplicació: trobeu l'e.d.o. satisfeta per la família de corbes $x^2 + y^2 = a^2$.

3.6 Equacions exactes

*30 L'e.d.o. (1) del problema 27 amb P i Q de classe $\mathcal{C}^1(W)$, s'anomena *exacta* si $P_y = Q_x$ sobre W. Proveu que sobre qualsevol rectangle $V \subset W, \exists\, U : V \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ tal que $U_x = P,\ U_y = Q$ sobre V, i que sobre tot obert V_0 on puguem definir U, la solució de (1) ve donada per $U(x,y) =$ const.

31 Per resoldre edos exactes podem considerar $U(x,y) = \int P(x,y)dx + h(y)$, amb $h'(y) = Q(x,y) - \int P_y(x,y)dx$. Aplicació: $(3y + e^x)dx + (3x + \cos y)dy = 0$.

32 Per resoldre edos exactes podem considerar $U(x,y) = \int Q(x,y)dy + K(x)$, amb $K'(x) = P(x,y) - \int Q_x(x,y)dy$. Aplicació: $4t^3e^{t+y} + t^4e^{t+y} + 2t + (t^4e^{t+y} + 2y)\frac{dy}{dt} = 0$, $y(0) = 1$.

33 Podem combinar els dos procediments anteriors $U(x,y) = \int P(x,y)dx + h(y) = \int Q(x,y)dy + K(x)$ i trobar U operant. Aplicació: $(3x^2y + 8xy^2)dx + (x^3 + 8x^2y + 12y^2)dy = 0$, $y(2) = 1$.

34 Resoleu l'e.d.o. $2xy\ dx + (x^2 + \cos y)\ dy = 0$. (Ind.: "agrupeu termes".)

35 Donada l'e.d.o. exacta $y(x^2 + y^2)^{-1}dx - x(x^2 + y^2)^{-1}dy = 0$ sobre $W = \mathbb{R}^2 - \{0\}$, proveu que *no existeix* cap funció U definida sobre tot W tal que $\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{y}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{-x}{x^2+y^2}$. (Sug.: Estudieu la funció $V(r,\theta) = U(r\cos\theta, r\sin\theta)$, 2π-periòdica en θ.)

3.7 Equacions reduïbles a exactes: factors integrants

36 Proveu que la família de corbes $U(x,y) = a$, amb $U : W_0 \subset W \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, amb $DU(x,y) \neq 0$ on $(x,y) \in W_0$, satisfà l'e.d.o. (1) del problema 27 si i només si $\exists\ \mu : W_0 \to \mathbb{R}$ contínua amb $\mu(x,y) \neq 0$ on $(x,y) \in W_0$, tal que $U_x = \mu P,\ U_y = \mu Q$. Sota aquestes condicions, proveu que tota solució de (1) sobre W_0 satisfà $U(x,y) =$ const.

*37 Es defineix *factor integrant* per a (1), amb P i Q de classe $\mathcal{C}^1$, com una funció $\mu : W \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ tal que $\mu P dx + \mu Q dy = 0$ sigui exacta. Proveu que μ és un factor integrant de (1) si i només si satisfà l'equació en derivades parcials (e.d.p.) de primer ordre:

$$Q\frac{\partial \mu}{\partial x} - P\frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right).$$

38 Siguin $\Phi, P, Q : W \to \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^r$, $r \geq 1$, amb $E = Q\Phi_x - P\Phi_y \neq 0$ sobre W. Proveu que (1) admet un factor integrant de la forma $\mu = f(\Phi)$, on f es de classe $\mathcal{C}^r$, si i només si $D = \frac{P_y - Q_x}{E}$ és funció només de Φ : $D(x,y) = g(\Phi(x,y))$, on g és de classe $\mathcal{C}^{r-1}$. En aquest cas, proveu que $\mu = k \exp \int g(\Phi)d\Phi$ és un factor integrant de (1). Expliciteu aquesta condició i doneu el factor integrant en el cas que

(a) $\mu = f(x)$

(b) $\mu = f(y)$

39 Resoleu les següents e.d.o., buscant un factor integrant :

(a) $(\frac{y^2}{2} + 2ye^x)dx + (y + e^x)dy = 0,$

(b) $(2xy^4e^y + 2xy^3 + y)dx + (x^2y^4e^y - x^2y^2 - 3x)dy = 0.$

(c) $ydx + (3 + 3x - y)dy = 0$

(d) $(x + y^2)dx - 2xydy = 0$

(e) $(y^2 + xy + 1)dx + (x^2 + xy + 1)dy = 0$, $(\mu = f(xy))$

(f) $(3x + 2y + y^2)dx + (x + 4xy + 5y^2)dy = 0$, $(\mu = f(x + y^2))$

40 Proveu que $\mu = e^{-\int_{x_0}^{x} a(t)dt}$ és un factor integrant de l'e.d.o. lineal $y' = a(x)y + b(x)$. Apliqueu això per resoldre $y' + \frac{y}{x} = x^2 - 1$.

41 Proveu que l'e.d.o. $y(a + \alpha x^m y^n)dx + x(b + \beta x^m y^n)dy = 0$ té un factor integrant $\mu = x^p y^q$, si $b\alpha - \beta a \neq 0$. I si $b\alpha - \beta a = 0$?

42 Proveu que si $P = yp(xy)$, i $Q = xq(xy)$ aleshores $\mu = \frac{1}{xP - yQ}$ és un factor integrant de (1). Aplicació: $(x^2y^3 + 2y)dx + (2x - 2x^3y^2)dy = 0$.

3.8 Equacions de Lagrange i de Clairaut

*43 L'e.d.o. $y = xf(y') + g(y')$, amb f, g de classe $\mathcal{C}^1$ s'anomena *equació de Lagrange*. Resoleu-la i trobeu les corbes isoclines. (Ind.: Escriviu $p = \frac{dy}{dx}$ i deriveu respecte x per a trobar una e.d.o. per a $p(x)$.)
Aplicació: $y = (1 + x)(y')^2$.

*44 L'e.d.o. $y = xy' + g(y')$, amb g de classe $\mathcal{C}^1$ s'anomena *equació de Clairaut*. Resoleu-la, mostrant que totes les isoclines són rectes i que són solució. Existeix alguna altra solució? (Ind.: la mateixa que per al problema 43.)
Aplicació: $y = xy' + ay'(1 + y'^2)^{-\frac{1}{2}}$.

3.9 Aplicacions

45 D'acord amb la *llei de la radiació de Stefan*, la rapidesa amb què varia la temperatura d'un cos a temperatura absoluta T és $\frac{dT}{dt} = k(M^4 - T^4)$ on M és la temperatura absoluta del medi circumdant i k una constant positiva. Trobeu una solució d'aquesta equació diferencial. Demostreu que quan $T - M$ és petit comparat amb M, la llei de Newton del refredament és una bona aproximació d'aquesta equació particular. (Sug.: factoritzeu $M^4 - T^4$).

46 Dos productes químics A i B reaccionen formant un de nou C. S'observa que la velocitat a la qual es forma C és directament proporcional al producte de les quantitats de A i B presents, i que la seva formació requereix 2 kg de A per cada kg de B. Si inicialment hi ha 10 kg de A i 20 kg de B, i en 20 minuts s'han format 6 kg de C, trobeu la quantitat de C en qualsevol moment.

47 La velocitat de desintegració d'un cos radioactiu és proporcional a la quantitat de matèria del cos. Trobeu la e.d.o. satisfeta, i la relació entre el període de semidesintegració i la constant de desintegració.

48 Una mostra de carbó de la zona de la cova de Lascaux (França) que havia estat habitada, donava una mitjana, en 1950, de 0.97 desintegracions de carboni-14 (^{14}C) per minut i gram, mentre que per a arbres vius es mesuraven 6.68. Estimeu la data probable en que foren fetes les famoses pintures de la cova de Lascaux. (Per a una planta viva, la raó d'ingestió de ^{14}C equilibra la de desintegració de ^{14}C). Període del ^{14}C=5568 anys.

49 Trobeu la forma general de les corbes planes tals que en cada punt (x, y) la pendent $\frac{dy}{dx}$ és igual al doble de la suma de les coordenades en aquest punt.

50 Trobeu la forma general de les corbes planes tals que en cada punt (x, y) la pendent $\frac{dy}{dx}$ és igual a la inversa de l'ordenada en aquest punt.

51 Trobeu la corba del pla passant pel punt $(1, e)$ tal que en cada punt la subtangent és proporcional al quadrat de l'abscissa.

52 Trobeu la família de corbes amb subnormal de longitud constant a.

53 Trobeu la família de corbes amb subtangent de longitud constant a.

54 Trobeu la família de corbes amb subtangent de longitud doble que l'abscissa.

55 La suma de les longituds de la subtangent i la subnormal d'una família de corbes és igual a 2. Trobeu l'equació de la família.

56 Proveu que tota corba tal que les seves normals passen per un punt constant és una circumferència.

57 Trobeu les corbes tals que la longitud del segment entre l'origen i el punt de tall entre la tangent i l'eix de les x és la mateixa que hi ha entre aquest últim i el punt de tangència.

58 Trobeu les corbes tals que l'ordenada en cada punt és igual a la longitud del segment perpendicular des de l'origen a la normal.

59 Trobeu les corbes tals que cada punt és el punt mitjà del segment de tangent comprès entre els eixos coordenats.

60 Per un punt arbitrari d'una corba passant per l'origen tracen rectes paral·leles als eixos, formant un rectangle amb aquests, dividit per la corba en dues regions A, B, tals que àrea A=n×àrea B. Trobeu la corba.

61 Trobeu les corbes $y = f(x)$, tals que el volum del cos limitat per la superfície de revolució obtinguda al girar entorn de l'eix x la corba $\{(s, f(s)), s \in [0, x]\}$ és igual al del cilindre generat pel rectangle de base Ox i alçada $\frac{f(x)}{2}$.

62 Trobeu les corbes tals que la tangent forma amb els eixos un triangle d'àrea constant $S = 2a^2$.

63 Trobeu l'e.d.o. satisfeta per totes les tangents a la paràbola $y^2 = 4x$, i comproveu que la paràbola també n'és solució.

64 Donada una família de corbes $f(x, y) = c$, proveu que la *família de corbes ortogonals* satisfà l'e.d.o. $\frac{dy}{dx} = \frac{f_y(x,y)}{f_x(x,y)}$. Anàlogament , proveu que si una família de corbes $f(x, y, c) = 0$ satisfà l'e.d.o. $g(x, y, \frac{dy}{dx}) = 0$, la família de corbes ortogonals satisfà l'e.d.o. $g\left(x, y, -\frac{1}{\frac{dy}{dx}}\right) = 0$.
Aplicació: trobeu la família de corbes ortogonals a $x^2 + y^2 = cx$.

65 Obteniu les trajectòries ortogonals de les famílies de corbes donades

(a) $y = e^{c_1 x}$.

(b) $y = -x - 1 + c_1 e^x$.

66 Determineu la família de corbes ortogonals a $y = C_1 e^x$.

67 Obteniu les trajectòries ortogonals de les corbes $y = Ce^{x|x|}$.

68 *Trajectòries ortogonals en coordenades polars.*

(a) Si una edo ve donada en coordenades polars com $F(\theta, \rho, \rho') = 0$, o bé $\rho' = f(\theta, \rho)$, aleshores és convenient usar, en comptes de l'angle que fa la tangent amb l'horitzontal $(y'(x))$, l'angle que forma la corba amb el radi vector. Veieu que si ψ és aquest angle, aleshores $\tan \psi = \rho \frac{d\theta}{d\rho} = \rho \frac{1}{\frac{d\rho}{d\theta}}$.

(b) Proveu que la familia de corbes ortogonals a les solucions de $F(\theta, \rho, \rho') = 0$, són solucions de $F(\theta, \rho, -\rho^2 \frac{d\theta}{d\rho}) = 0$.

(c) Proveu que les corbes ortogonals a la familia de corbes solució de $\rho\frac{d\theta}{d\rho} = h(\theta, \rho)$, són solucions de $\rho\frac{d\theta}{d\rho} = -\frac{1}{h(\theta,\rho)}$.

(d) Useu aquest problema per trobar la familia ortogonal a la família de circumferències tangents a l'origen al eix d'ordenades.

69 Una família de corbes que s'interseca amb una família de corbes donada formant un angle constant α especificat, $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$, es denomina *família isogonal*. Es diu que cadascuna de les dues famílies són *trajectòries isogonals* de l'altra. Si $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ és l'equació diferencial de la família donada, demostreu que l'equació diferencial de la família isogonal és

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x, y) \pm \tan\alpha}{1 \mp f(x, y)\tan\alpha}.$$

70 Useu el resultat del problema anterior per trobar la família isogonal que s'interseca amb la família uniparamètrica de rectes $y = C_1 x$ format un angle de 30°. Representeu gràficament les corbes obtingudes. (Ind.: useu coordenades polars per a fer la representació.)

71 Un paracaigudista (i el seu paracaigudes, no cal dir-ho) cau partint del repòs. Suposant que obre el paracaigudes des del moment que salta, calculeu la velocitat límit, en funció del pes W i del coeficient β de fregament. (Suposem que el fregament és proporcional a la velocitat).

72 Llancem una bola de ferro verticalment des de la superfície de la terra amb una velocitat inicial $v_0 > 0$. Triga més la bola pujant fins a l'alçada màxima o baixant a terra des d'aquesta alçada? Suposem g constant i un fregament proporcional a la velocitat.

73 Una solució d'àcid nítric flueix a raó constant de 6 l/min cap a l'interior d'un gran tanc que inicialment conté 200 l d'una solució d'àcid nítric al 0.5%. La solució del tanc es remena bé i surt cap a l'exterior amb una raó de 8 l/min. Si la solució que entra en el tanc és de 20% d'àcid nítric, determineu la quantitat d'àcid nítric present en el tanc al cap de t minuts. En quin moment el percentatge d'àcid nítric del tanc serà del 10% ?

74 El model de Verhulst per a una població està basat en l'e.d.o. $p' = ap - bp^2$ (*equació logística*). Resoleu-la. Aplicació: per a la població de la terra s'ha estimat que $a = 0.029$. Si $p(1961) = 3.06 \times 10^9$ i creixia un 2% a l'any, calculeu la població límit de la terra (compareu amb el problema 10).

75 Llancem sis homes en caiguda lliure des de 9570 m fins 640 m d'alçada i obtenim un temps mitjà de 116 s. Suposant que el fregament és proporcional a v^2 ($= kv^2$), trobeu k i la velocitat límit (pes de cada home més equipatge igual a 118.5 kg).

76 Trobeu la forma d'un mirall que reflecteixi paral·lelament a una direcció donada tots els raigs de llum que surten d'un punt fix.

TEMA 4

TEOREMES FONAMENTALS

1 Estudieu la unicitat de solucions de les equacions:

(a) $y' = -\frac{y}{x}$,

(b) $y' = x^2 + y^2$,

(c) $y' = (y-x)^{2/3} + 5$,

(d) $y' = (y-x)^{2/3} + 1$.

(e) $y' = \frac{x+y}{x-y}$.

2 Sota quines condicions la equació lineal $\dot{x} = a(t)x + b(t)$ satisfà les condicions del teorema d'existència i unicitat?

3 Integreu les edos següents i comenteu l'interval màxim de definició de les solucions.

(a) $y' = -\frac{x}{y}$, $y(0) = 1$,

(b) $y' = y^2$, $y(1) = 1$,

(c) $\dot{x} = ax^2$, $a > 0$.

4 Proveu la *desigualtat de Gronwall*:
Donades $u, v, w : [a, b) \to \mathbb{R}$ contínues, $v \geq 0$, tals que

$$u(t) \leq w(t) + \int_a^t v(s)u(s)ds, \qquad t \in [a, b),$$

llavors per a tot $t \in [a, b)$ tenim

$$u(t) \leq w(t) + \int_a^t w(s)v(s)\exp\left(\int_s^t v(r)dr\right) ds.$$

(Ind.: deriveu $y(t) = \int_a^t v(s)u(s)ds$, i després feu $z(t) = y(t)\exp\left(-\int_a^t v(s)ds\right)$.)

Suposant a més que w és de classe $\mathcal{C}^1$, llavors per a $t \in [a, b)$,

$$u(t) \leq w(a)\exp\left(\int_a^t v(s)ds\right) + \int_a^t w'(s)\exp\left(\int_s^t v(r)dr\right) ds$$

(integreu per parts).

Aplicacions: (a) $w(t) \equiv A$, (b) $w(t) = A + B(t-a)$, $v \equiv K$.

5 Sigui $(t, x) \in \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to f(t, x) \in \mathbb{R}^n$ una aplicació contínua, amb constant de Lipschitz $K > 0$, respecte a x. Siguin $\phi_i : (a, b) \to \mathbb{R}^n$ solucions ε_i-aproximades de $x' = f(t, x)$, $i = 1, 2$, (és a dir $|\phi_i'(t) - f(t, \phi_i(t))| \leq \varepsilon_i$, $i = 1, 2$), sigui $t_0 \in [a, b]$. Proveu que

$$|\phi_1(t) - \phi_2(t)| \leq |\phi_1(t_0) - \phi_2(t_0)| e^{K|t-t_0|} + \frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{K}\left(e^{K|t-t_0|} - 1\right).$$

per a $t \in [a, b]$ (desigualtat fonamental). Aplicació: usant el mètode de Euler (o d'aproximació per poligonals), proveu el teorema de Picard.

6 Donada l'aplicació $(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to f(t,x) \in \mathbb{R}^n$ contínua, i localment Lipschitz respecte x, tal que $|f(t,x)| \leq a(t)|x| + b(t),\ t \in \mathbb{R},\ |x| \geq R$, on $a,\ b\ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ són contínues i no negatives, proveu que tota solució es pot definir $\forall t \in \mathbb{R}$ (useu Gronwall).

7 Estudieu si tota solució es pot definir $\forall t \in \mathbb{R}$ en les equacions: $x' = |x|^\alpha$, $x' = 1 + |x|^\alpha$, on $x \in \mathbb{R}$ i essent $\alpha \leq 1$.

8 Sigui $X : (a_1, a_2) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua tal que $X(x) = 0$ si i només si $x = x_0$. Proveu que el problema de Cauchy $x' = X(x)$, $x(t_0) = x_0$ té solució única si i només si $\int_{x_0^+} \frac{ds}{X(s)}$, $\int_{x_0^-} \frac{ds}{X(s)}$, són divergents. Doneu exemples.

9 Considerem un camp X localment Lipschitz sobre $\mathbb{R}$, tenint només un nombre finit de zeros $a_1 < \cdots < a_N$. Proveu que si $x_0 \in (a_i, a_{i+1})$, la solució de $x' = X(x)$, $x(t_0) = x_0$ està definida $\forall t \in \mathbb{R}$, i esbosseu el retrat de fases. Cal X localment Lipschitz? Què passa si $x_0 < a_1$ o $x_0 > a_N$?

10 Sigui $X : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un camp localment Lipschitz, $W : U \to \mathbb{R}$, U obert i W de classe $\mathcal{C}^1$ tal que $\dot{W}(x) \equiv DW(x)X(x) \leq 0$, $\forall\, x \in W^{-1}([c, \infty))$, amb $W^{-1}((-\infty, c])$ compacte de U. Proveu que tota solució Φ de $x' = X(x)$ tal que $W(\Phi(t_0)) \leq c$ es pot prolongar sobre $[t^0, \infty)$ i que $W(\Phi(t)) \leq c$, $\forall\, t \in [t^0, \infty)$. Aplicació: $x'' = -V'(x)$, $V(x) = x^{2m}$, $m \in \mathbb{N}$.

11 Proveu que, donat el sistema d'edos $x' = f(t,x)$, i $\phi(t; t_0, x_0)$ la solució amb $\phi(t_0; t_0, x_0) = x_0$, es verifica

(a) $\phi(t_3; t_2, \phi(t_2; t_1, x_0)) = \phi(t_3; t_1, x_0)$, si un dels dos membres està definit.

(b) $\phi(t; t_0, x_0) = x$ si i només si $\phi(t_0; t, x) = x_0$.

(c) En el cas autònom $x' = f(x)$, proveu que $\phi(t; t_0, x_0) = \phi(t - t_0; 0, x_0)$. Definint $\varphi(t, x_0) = \phi(t; 0, x_0)$ proveu que $\varphi(t + s, x_0) = \varphi(t, \varphi(s, x_0))$, $\varphi(0, x_0) = x_0$, i que $\varphi(t, x_0) = x$ si i només si $\varphi(-t, x) = x_0$.

12 Donat un *camp vectorial* $X : W \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ localment Lipchitz, sigui S el conjunt de punts d'equilibri de X: $S = \{x \in W : X(x) = 0\}$. Direm que Γ és solució de

$$\frac{dx_1}{X_1(x)} = \cdots = \frac{dx_n}{X_n(x)} \tag{1}$$

si $\Gamma = \alpha(I)$, I interval de $\mathbb{R}$, $\alpha : I \to W$, C^1 tal que

(a) Si $\Gamma \cap S$ és buit , $0 \neq \alpha'(t)$ és paral·lel a $X(\alpha(t))$, $t \in I$.

(b) Si $\exists p \in \Gamma \cap S$, $\Gamma = \{p\}$ (per tant $\alpha(t) \equiv p$).

Sobre $A_1 = \{x \in W :\ X_1(x) \neq 0\}$, proveu que (1) és equivalent a

$$\frac{dx_i}{dx_1} = \frac{X_i(x)}{X_1(x)},\ i = 2, ..., n, \tag{2}$$

en el sentit següent: $\Gamma \subset A_1$ és solució de (1) si i només si Γ= gràfica ϕ, amb ϕ solució de (2). (Ind.: si $\Gamma = \alpha(I)$, $\phi_i(x_1) = \alpha_i(\alpha_1^{-1}(x_1))$, $i = 2, ..., n$.)

13 Proveu que $x' = X(x)$ és equivalent a

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx_1}{X_1(x)} = \cdots = \frac{dx_n}{X_n(x)},$$

i que (1) és equivalent a

$$\frac{dx_1}{\rho(x)X_1(x)} = \cdots = \frac{dx_n}{\rho(x)X_n(x)},$$

si $\rho : W \to \mathbb{R}$ contínua, $\rho(x) \neq 0$, $x \in W$.

14 Donat $X : W \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, amb W obert, localment Lipschitz, una *corba integral* o *trajectòria* del camp X és una solució de l'edo $x' = X(x)$, $x \in W$, i una *òrbita* del camp X és la imatge sobre W d'una corba integral de X.

Proveu que $\Gamma \subset W$ és una òrbita de X si i només si és solució de (1), anomenada per això *equació de les òrbites* de X. Proveu que per cada punt de W passa una única solució de (1), i indiqueu com trobar a partir de les òrbites de X, les solucions de $x' = X(x)$.

Aplicació: Trobeu les trajectòries i òrbites del camp $X(x_1, x_2) = (x_1, -x_2)$ i de $X(x_1, x_2) = (x_2, -x_1)$.

15 Sigui $X : U \to \mathbb{R}^n$, on U és un obert de $\mathbb{R}^n$ i X és de classe $\mathcal{C}^r$, $r \geq 1$, sigui $\phi : D \subset \mathbb{R} \times U \to U$ el flux associat al camp X: $\phi(0, x^0) = x^0$, $\frac{\partial \phi(t,x^0)}{\partial t} = X(\phi(t, x^0))$. Desenvolupant $\phi(t, x) = \phi(t, x^0) + D\phi(t, x^0)(x - x^0) + \frac{1}{2} D^2\phi(t, x^0)(x - x^0)^2 + \cdots + o_r(x - x^0)$ (aquí $D\Phi = D_x\Phi$), trobeu les *equacions variacionals* d'ordre m ($m = 1, \ldots, r$) satisfetes per $D^m\phi(t, x^0)$. Considereu també el cas $X = X_0 + \epsilon X_1$, suposant conegut el flux $\phi_0(t, x)$ associat a X_0.

Aplicació: considereu les següents equacions:

(i) $\ddot{x} + (1 + \epsilon)^2 x = 0$.

(ii) $\ddot{x} + (1 + \epsilon)^2 x + \epsilon x^2 = 0$.

Volem trobar la solució d'aquestes equacions tal que $x(0) = 0$ i $\dot{x}(0) = 1$:

(a) Busqueu aquestes solucions desenvolupant en potencies del paràmetre ϵ: $x(t) = x_0(t) + \epsilon x_1(t) + \mathcal{O}(\epsilon^2)$. Calculeu x_0 i x_1. Surt periòdica aquesta aproximació ?

(b) Useu el mètode de Lindstedt-Poincaré: $x(t) = f_0(\tau) + \epsilon f_1(\tau) + \mathcal{O}(\epsilon^2)$, on $\tau = \omega t$ i $\omega = \omega_0 + \omega_1 \epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2)$, per obtenir un desenvolupament de la solució on les funcions aproximants, f_0, f_1, etc. siguin periòdiques.

TEMA 5

TEORIA QUALITATIVA

1 Descriviu el comportament asimptòtic de les solucions dels sistemes següents prop del punt d'equilibri. Feu un croquis de les trajectòries dels sistemes lineals associats.

(a)

$$\dot{x} = 2\sin x + y$$
$$\dot{y} = \sin x - 3y$$

(b)

$$\dot{x} = -x - x^2 + xy$$
$$\dot{y} = -y + xy - y^2$$

2 Determineu el tipus del punt crític $(0,0)$, depenent del valor del paràmetre real μ, ($\mu \neq 2$), per al sistema

$$\dot{x} = -2x - y + x^2$$
$$\dot{y} = 4x + \mu y - y^2$$

3 Siguin $x(t)$ i $y(t)$ les poblacions a l'instant t de dues espècies biològiques que interaccionen seguint el patró depredador–presa. Un model per a l'evolució d'ambdues poblacions ve donat pel sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax - bxy - ex^2 \\ \dot{y} &= -cy + dxy - fy^2 \end{aligned}$$

on a, b, c, d, e, f són constants positives.

(a) Trobeu els punts d'equilibri del sistema continguts en el primer quadrant i classifiqueu-los.

(b) Suposant $c/d > a/e$, proveu que tota solució $(x(t), y(t))$, amb $x(0) > 0$ i $y(0) > 0$ tendeix al punt d'equilibri $(a/e, 0)$ quan $t \to +\infty$. Interpreteu el resultat.

4 Siguin $x(t)$ i $y(t)$ les poblacions a l'instant t de dues espècies biològiques que competeixen en un mateix medi (per exemple, bactèries competint per una mateixa font d'aliment limitada). Un model per a l'evolució d'ambdues poblacions ve donat pel sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a(x - bx - cy) \\ \dot{y} &= y(d - ex - fy) \end{aligned}$$

on a, b, c, d, e, f són constants positives.

(a) Trobeu els punts d'equilibri del sistema i classifiqueu-los.

(b) Intenteu fer un croquis global de les trajectories del sistema al primer quadrant, i interpreteu-lo. És possible la coexistència entre les dues espècies?

5 Siguin $x(t)$ i $y(t)$ quantitats denotant el nombre d'individus de dues espècies biològiques que interaccionen seguint el model depredador-presa de les equacions de Lotka-Volterra:

$$\dot{x} = -\left(\left(x - \frac{1}{2}\right)(x-2) + y\right)x$$
$$\dot{y} = (x - 1 - y)\,y$$

Mostreu que ambdues poblacions desapareixeran si inicialment són prou petites. Calculeu tots els punts crítics del sistema per $x(t) \geq 0$, $y(t) \geq 0$ i feu un croquis de les trajectòries. Interpreteu el resultat.

6 Donada $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ contínua, proveu que $t \in I \to x(t) \in \mathbb{R}^n$ és solució de $x' = Ax + f(x)$ si i només si $x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{(t-s)A} f(x(s))ds$, $t \in I$ (feu el canvi $x(t) = e^{At}y(t)$).

7 Donada $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, localment Lipschitz, $0 \in U$, obert, amb $f(x) = o(x)_{x \to 0}$, i A matriu real amb tots els valors propis amb part real negativa. Proveu que l'origen de $x' = Ax + f(x)$ és asimptòticament estable. (Sug.: Useu el problema 6). Aplicació: $x_1' = -2x_1 + x_2 + 3x_3$, $x_2' = -6x_2 - 5x_3 + 7x_3^5$, $x_3' = -x_3 + x_1^2 + x_2^2$.

8 Sigui $X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ el camp donat per $(x, y) \to (-y + (1 - x^2 - y^2)x, x + (1 - x^2 - y^2)y)$. Trobeu les òrbites periòdiques i l'aplicació de Poincaré associada. (Sug.: Passeu a coordenades polars).

9 Sigui γ una òrbita periòdica estable de $X = (X_1, X_2)$, de classe $\mathcal{C}^1$. Sigui

$$X_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix},$$

camp obtingut a partir de X a través d'una rotació d'angle θ.

(a) Proveu que $\exists\, \epsilon > 0$ i $\forall \theta$, $|\theta| \leq \epsilon$, X_θ té una òrbita periòdica γ_θ tal que $\gamma_\theta \to \gamma$ quan $\theta \to 0$,

(b) totes les γ_θ són disjuntes: $\gamma_{\theta_1} \cap \gamma_{\theta_2} = \emptyset$ si $\theta_1 \neq \theta_2$, i $\bigcup_{|\theta| \leq \epsilon} \gamma_\theta$ és una regió anular del pla.

(c) Proveu una versió anàloga de (a) i (b) si γ és inestable.

(d) Si γ és semi-estable, proveu que per θ amb signe apropiat, existeixen 2 òrbites periòdiques $\gamma_{1\theta}, \gamma_{2\theta} \to \gamma$ quan $\theta \to 0$ ($\theta > 0$ o $\theta < 0$ segons el cas).

10 Sigui $X : \Delta \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ amb $X(x_0) = 0$, i sigui $V : U \to \mathbb{R}$ una funció de Lyapunov de x_0. Suposant que no existeix cap trajectòria del camp X enterament continguda en $Z = \{x \in U \mid \dot{V}(x) = 0\}$, excepte x_0. Proveu que x_0 és asimptòticament estable. Aplicació: $\ddot{x} + x^2\dot{x} + x^3 = 0$.

11 En el pèndol amb fricció, $\ddot{x} + k\dot{x} + \sin x = 0$, essent $k > 0$, proveu que l'origen és un punt d'equilibri asimptòticament estable. (Ind.: useu l'energia total com a funció de Lyapunov.)

12 Esbosseu els espais de fase dels següents sistemes, trobant a més els conjunts límit, i comproveu que no tenen punts d'equilibri hiperbòlics:

(a) $x' = x^2$, $y' = -y$,

(b) $x' = (1 - r)x - y(1 - \frac{x}{r})$, $y' = (1 - r)y + x(1 - \frac{x}{r})$, on $r^2 = x^2 + y^2$.

13 Sigui $F : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$. Considerem el sistema conservatiu d'un grau de llibertat $\ddot{x} = F(x)$, o equivalentment, el sistema

$$\begin{aligned} x' &= v \\ v' &= F(x) \end{aligned} \tag{1}$$

Proveu que:

(a) L'energia total $E = T + V$ és una integral primera de (1), on $T(v) = \frac{v^2}{2}$ (energia cinètica) i $V' = -F$ (energia potencial).

(b) Tots els punts d'equilibri de (1) són sobre l'eix x, i tota òrbita periòdica de (1) és simètrica respecte l'eix x i el talla.

(c) Si $V(x_1) = V(x_2) = h$, $V(x) < h$ si $x_1 < x < x_2$, $V'(x_1) \neq 0$, $V'(x_2) \neq 0$, llavors (1) té una òrbita periòdica que passa per $(x_1, 0)$, $(x_2, 0)$.

(d) Si $\forall x\ 0 < |x - x_0| < a$ $F(x) \neq 0$ i $F(x_0) = 0$, llavors (1) té un centre (resp. una sella) en $(x_0, 0)$ si $V''(x_0) < 0$ (resp. > 0).

14 Usant el problema anterior determineu l'espai de fases de:

(a) $x'' = -x$ (molla),

(b) $x'' = -\sin x$ (pèndol),

(c) $x'' = -\frac{x}{|x|^3}$ (gravitació).

15 Proveu que, $\forall\ \epsilon > 0$ prou petit, l'edo de Van der Pol $x'' = -x + \epsilon x'(1 - x^2)$, o equivalentment, el sistema

$$u' = v - \epsilon\left(\frac{u^3}{3} - u\right), \quad v' = -u,$$

posseeix un únic cicle estable prop del cercle $u^2 + v^2 = 4$, i que aquest cicle tendeix al cercle esmentat quan $\epsilon \to 0$. (Ind.: Feu el canvi $u = r\cos\theta$, $v = -r\sin\theta$, i busqueu solucions $2\pi-$periòdiques en el sistema transformat. Comproveu que $r(2\pi) = r(0) + \mu\beta(r(0)) + o(\mu^2)$, amb $\beta(r^0) = \int_0^{2\pi} R(r^0, \theta, 0)d\theta$).

16 Proveu que: $x' = 2x - x^5 - xy^4$, $y' = y - y^3 - yx^2$ no té cap òrbita periòdica (proveu que els únics punts d'equilibri es troben sobre els eixos i que aquests són invariants).

17 Determineu els punts d'equilibri de $\ddot{x} + \frac{k}{m}\dot{x} + \frac{g}{l}\sin x = 0$ (pèndol amb fregament), proveu que no té cap òrbita periòdica si $k > 0$, i esbosseu l'espai de fases (useu que si un camp té òrbites periòdiques la seva divergència no pot tenir signe constant).

18 Sigui $\gamma = \{\phi(t, p_0),\ t \in [0, T]\}$ una òrbita periòdica de $x' = X(x)$, on $x \in U \subset \mathbb{R}^n$ i X és de classe $\mathcal{C}^r$, $r \geq 1$. Proveu que $D\phi(T, p_0)$ sempre té $X(p_0)$ com a vector propi de valor propi 1 .

19 Donat un camp $X : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, de classe $\mathcal{C}^r$, $r \geq 1$, sigui p_0 un punt regular de X ($X(p_0) \neq 0$). Sigui $p_1 = \phi(T_0, p_0)$, $T_0 \neq 0$, on ϕ és el flux associat a X. Sigui Σ_1 una secció transversal a X en p_1 (hipersuperfície de classe $\mathcal{C}^r$, amb $X(p_1) \notin T_{p_1}\Sigma_1$). Proveu que $\exists\ U_0$ entorn de p_0, U_1 entorn de p_1, I_0 entorn de T_0 i una única aplicació $\tau : U_0 \to I_0$ de classe $\mathcal{C}^r$ tal que $\tau(p_0) = T_0$ i $\phi(t, x) \in \Sigma \cap U_1 \Leftrightarrow t = \tau(x)$ sobre $(t, x) \in I_0 \times U_0$.

20 Sigui γ una òrbita periòdica d'un camp X, $\mathcal{C}^r$, de periode T: $\gamma = \{x(t), t \in [0, T]\}$, amb $x' = X(x)$, $p_0 = x(0) = x(T) \neq x(t)$, $0 < t < T$. Sigui Σ_0 una secció transversal a X en p_0. Definim $P_0 : \Sigma_0 \cap U_0 \to \Sigma_0 \cap U_0'$, *aplicació de Poincaré associada a* γ mitjançant $x \to \varphi(\tau(x), x)$, $\tau(p_0) = T$ (notació del problema anterior). Proveu que si P_1 és una altra aplicació de Poincaré associada a γ en un altre punt p_1, $\exists h : W_0 \to W_1$, $\mathcal{C}^r$ amb W_i entorn de p_i, $i = 1, 2$ tal que $W_i \subset U_i \cap U_i'$ amb $P_1 \circ h = h \circ P_0$ sobre W_0. A més $\exists g : W_1 \to W_0$, $\mathcal{C}^r$ tal que $g = h^{-1}$ en $W_1 \cap \Sigma_1$.

21 Proveu que l'aplicació temps 2π: $x_0 \to x(2\pi + t_0)$, on $x(t)$ és la solució de $x' = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$, si f és 2π-periòdica en t, no és res més que una aplicació de Poincaré de l'edo ampliada $x' = f(s, x)$, $s' = 1$. Sota quines condicions està definida $\forall x_0$?