— Departament de TSC —

Señales y Sistemas – Ciencia e Ingeniería de Datos
3 de julio de 2019 de 15:00h a 18:00h

Notas provisionales . . . . 8 de julio
Periodo de alegaciones . . . .
Notas definitivas . . . . 12 de julio

Profesoras: **Asunción Moreno, Olga Muñoz** Duración: 3h Consultas sobre el examen: **9 de julio**

Importante

- Entregue cada problema en **hojas separadas**.

P1. (10 puntos) Para generar una amplia variedad de señales periódicas se propone la utilización de un generador de un tren de pulsos rectangulares. El tren de pulsos se aplica a un filtro lineal e invariante de respuesta impulsional $h(t)$ como se indica en la figura. Cambiando el filtro se pueden obtener diferentes señales.

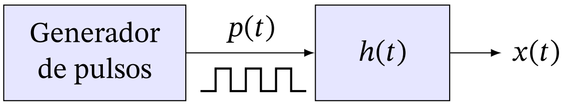


Figura 1

Suponga que la señal formada por pulsos rectangulares es $p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \prod\left(\frac{t-nT}{\tau}\right)$, siendo el parámetro τ ajustable. Para este ejercicio suponga $\tau = \frac{T}{4}$. Responda a las siguientes preguntas:

a) Calcule $P(f)$ y dibújela.

b) Suponga $h(t) = \prod\left(\frac{t}{t_1}\right)$. Dibuje detalladamente $x(t)$ para los casos $t_1 = \tau$ y $t_1 = \frac{\tau}{2}$.

c) Calcule $X(f)$ para $h(t) = \prod\left(\frac{t}{t_1}\right)$ con $t_1 = \tau$. Dibuje $|X(f)|$.

d) Halle $h(t)$ para que $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$ con $f_0 = \frac{1}{T}$.

Solución:

a) La señal $p(t)$ se puede escribir como:

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \prod\left(\frac{t-nT}{\tau}\right) = \prod\left(\frac{t}{\tau}\right) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT). \tag{1}$$

Su transformada de Fourier es:

$$P(f) = \tau \text{sinc}(\tau f) \cdot \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T}\right) = \frac{\tau}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{sinc}\left(\tau \frac{k}{T}\right) \cdot \delta\left(f - \frac{k}{T}\right), \tag{2}$$

que se muestra en la figura 2 .

b) Si $h(t) = \prod\left(\frac{t}{t_1}\right)$, tenemos que:

$$x(t) = h(t) * p(t) = \prod\left(\frac{t}{t_1}\right) * \prod\left(\frac{t}{\tau}\right) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT). \tag{3}$$

Calcularemos $x_b(t) = \prod\left(\frac{t}{t_1}\right) * \prod\left(\frac{t}{\tau}\right)$, con $t_1 \leq \tau$. En la señal resulante, el flanco de subida y de bajada tiene duración igual a t_1, es decir, la duración del pulso de menor longitud. La longitud total es $t_1 + \tau$ y el máximo de $x_b(t)$ vale τ calculado como el área del pulso menor multiplicada por la amplitud del pulso mayor. El resultado se muestra en la figura 3. Nótese que si $t_1 = \tau$ se obtiene una señal triangular.

Obtenemos $x(t)$ repetiendo $x_b(t)$ cada T segundos. Ni para $t_1 = \tau$ (figura 4) ni para $t_1 = \frac{\tau}{2}$(figura 5) hay solape de réplicas.

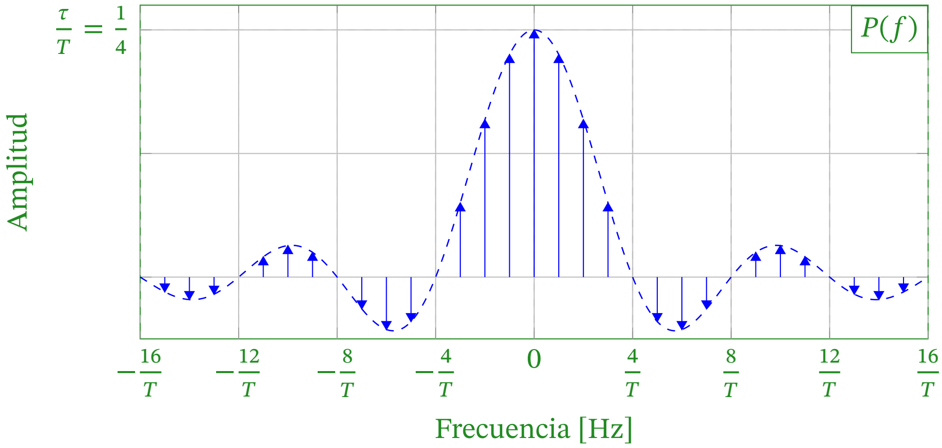


Figura 2: Transformada de Fourier de $p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \prod\left(\frac{t-nT}{\tau}\right)$.

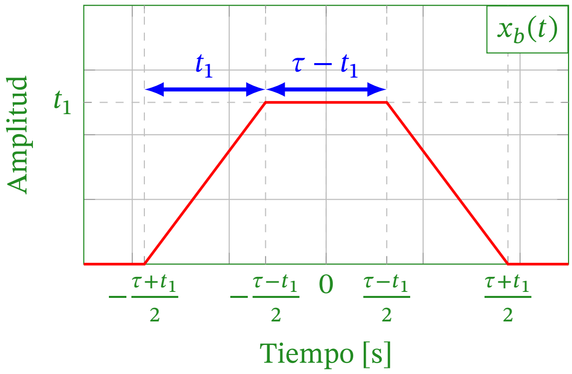


Figura 3: Resultado de la convolución de dos pulsos, $x_b(t) = \prod\left(\frac{t}{t_1}\right) * \prod\left(\frac{t}{\tau}\right)$, con $t_1 < \tau$.

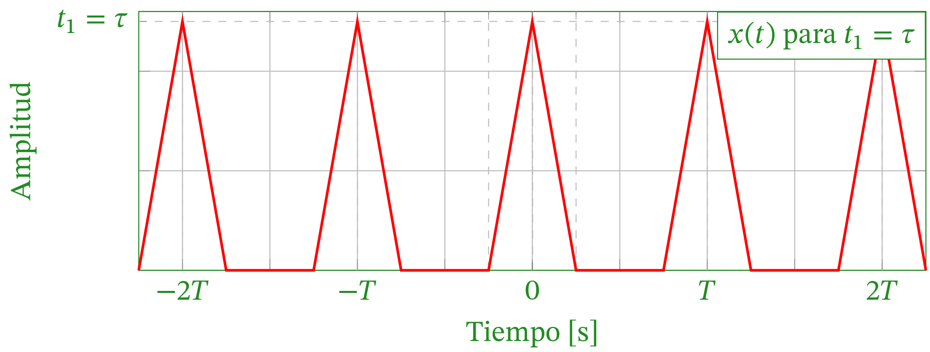


Figura 4: Resultado de $x(t) = \prod\left(\frac{t}{t_1}\right) * \prod\left(\frac{t}{\tau}\right) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$ con $t_1 = \tau$.

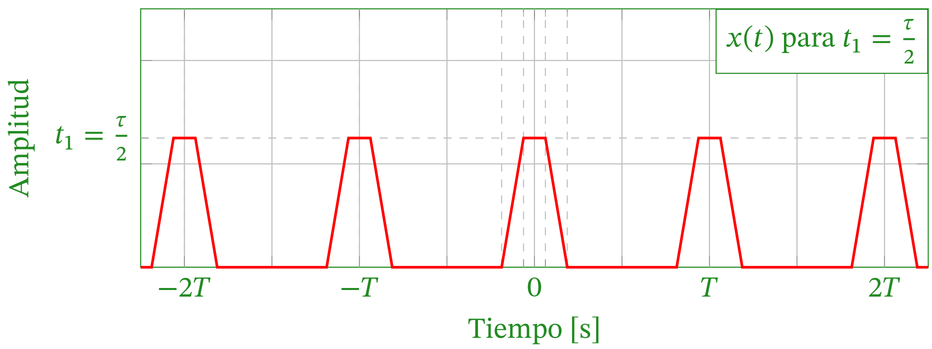


Figura 5: Resultado de $x(t) = \prod\left(\frac{t}{t_1}\right) * \prod\left(\frac{t}{\tau}\right) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$ con $t_1 = \frac{\tau}{2}$.

c) Para $t_1 = \tau$, tenemos que

$$X(f) = \tau \text{sinc}(\tau f) \cdot \tau \text{sinc}(\tau f) \cdot \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - \frac{k}{T}) = \frac{\tau^2}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{sinc}^2(\tau \frac{k}{T}) \cdot \delta(f - \frac{k}{T}), \tag{4}$$

que se muestra en la figura 6 .

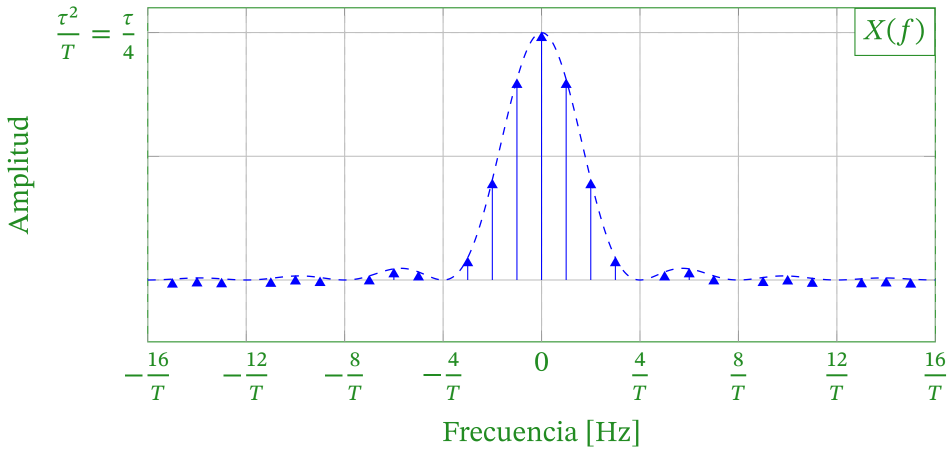


Figura 6: Transformada de Fourier de $x(t) = \prod\left(\frac{t}{\tau}\right) * \prod\left(\frac{t}{\tau}\right) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$.

d) Para seleccionar el armónico fundamental, necesitamos un filtro paso banda centrado en $f_0 = \frac{1}{T}$ y de anchura $B < 2f_0$. Para que la señal de salida tenga amplitud 1, escoregemos la ganancia del filtro como el inverso de $\frac{\tau}{T}\text{sinc}\left(\frac{\tau}{T}\right) = \frac{1}{4}\text{sinc}\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}}$, es decir, $G = \pi\sqrt{2}$ (véase ecuación 2). Tomando por ejemplo $B = f_0$:

$$H(F) = G \prod\left(\frac{f + f_0}{f_0}\right) + G \prod\left(\frac{f - f_0}{f_0}\right), \tag{5}$$

que en el dominio del tiempo el filtro es:

$$h(t) = G f_0 \text{sinc}(f_0 t) e^{j2\pi f_0 t} + G f_0 \text{sinc}(f_0 t) e^{-j2\pi f_0 t} = \frac{2G}{T} \text{sinc}\left(\frac{t}{T}\right) \cos\left(2\pi \frac{t}{T}\right). \tag{6}$$

⁕

P2. (10 puntos) Un modelo simplificado de la señal analógica correspondiente a una nota producida por un instrumento corresponde a la expresión:

$$s_{nota}(t) = \sum_{k=1}^{K} A_k \cos(2\pi k f_0 t + \theta_k)$$

donde f_0 es la frecuencia fundamental, 'la nota', los armónicos están a las frecuencias $k \cdot f_0$ y las correspondientes amplitudes, A_k, y desfases, θ_k, dependen del instrumento. Por simplicidad, supondremos que todas las fases θ_k son iguales a cero. Suponga que $f_0 = 261{,}6$ Hz (Do) y que $s_{nota}(t)$ se filtra con un filtro paso bajo de frecuencia de corte $f_c = 500$ Hz. A continuación se muestrea a $f_m = \frac{1}{T_m} = 1000$ Hz, obteniéndose la siguiente señal discreta:

$$s[n] = A_1 \cos(2\pi f_0 n T_m) = A_1 \cos(2\pi F_0 n)$$

Para estudiar la señal en el dominio frecuencial, primero se enventana, utilizando, por ejemplo, una ventana rectangular de longitud L, $p_L[n]$.

a) Calcule la transformada de Fourier de $p_L[n]$. ¿Cuál es la anchura del lóbulo principal? ¿Cuál es la amplitud del lóbulo principal de la ventana?

b) Calcule la transformada de Fourier de la secuencia $s[n]p_L[n]$. Represente aproximadamente el módulo de la transformada de Fourier obtenida.

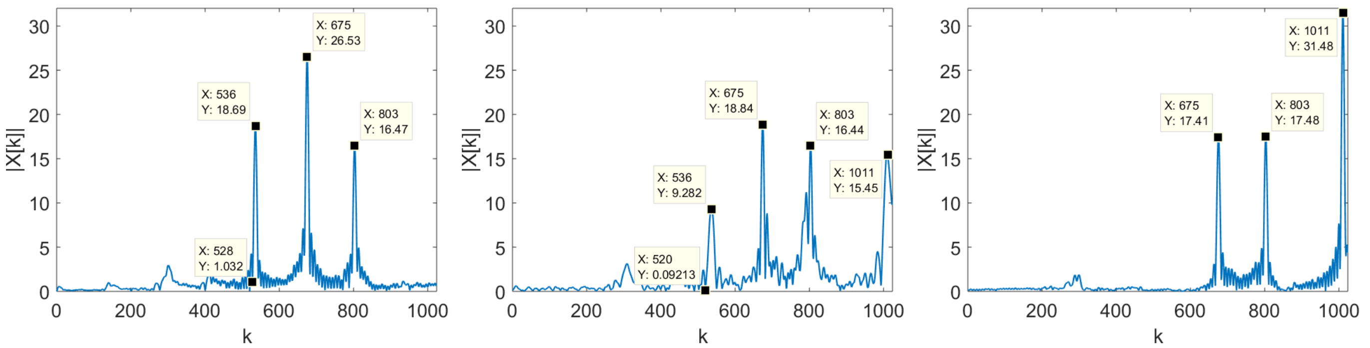
Do	261,626 Hz	Fa#	369,994 Hz
$Do_{\#}$	277,183 Hz	Sol	391,995 Hz
Re	293,665 Hz	Sol#	415,305 Hz
$Re_{\#}$	311,127 Hz	La	440,000 Hz
Mi	329,628 Hz	La#	466,164 Hz
Fa	349,228 Hz	Si	493,883 Hz

Teniendo en cuenta lo anterior, se quiere desarrollar un software para determinar automáticamente la secuencia de acordes tocados por un pianista. Los acordes (triadas) están formados por 3 notas cualesquiera de la tabla adjunta (por simplicidad se considera sólo la octava central). Los acordes están enlazados (no hay silencios) y no se repiten. El primer acorde empieza en la muestra $n = 0$.

La señal se registra con un micrófono, se filtra paso bajo (frecuencia de corte: $f_c = 500$Hz) y se muestrea a $f_m = \frac{1}{T_m} = 1000$ Hz. Para cada nota, el filtro paso bajo elimina todos los armónicos, excepto el fundamental. Para analizar la secuencia $x[n]$ resultante, se toman bloques consecutivos (y disjuntos) de L muestras y para cada bloque se hace una DFT de tamaño N.

c) ¿Cuál es el valor mínimo de L para que se puedan distinguir frecuencialmente las 12 notas de la tabla? Nota: la menor diferencia frecuencial entre notas es de 15,56 Hz.

En la figura 7 se representa el módulo la DFT de tamaño $N = 2048$ para tres tramos consecutivos de señal. En las figuras sólo se representan las primeras 1024 muestras de la DFT.



(a) $X[k] = \mathrm{DFT}_N\{x[0], ..., x[L-1]\}$ (b) $X[k] = \mathrm{DFT}_N\{x[L], ..., x[2L-1]\}$ (c) $X[k] = \mathrm{DFT}_N\{x[2L], ..., x[3L-1]\}$

Figura 7

d) Sabiendo que $L = 256$, determine el primer acorde tocado.

e) A la vista de las gráficas, ¿qué puede decir sobre la duración aproximada en segundos del primer acorde?

f) A partir de la secuencia $x[n]$, se obtiene la secuencia $y[n] = x[2n]$ eliminando 1 de cada dos muestras. Justifique porqué este procedimiento es equivalente a haber muestreado la señal original con una frecuencia de 500 Hz.

g) ¿Cómo quedarían las frecuencias del primer acorde en $y[n]$?

Solución:

a) La transformada de Fourier de $p_L[n]$ es:

$$P_L(F) = e^{-j\pi F(L-1)} \frac{\sin(\pi F L)}{\sin(\pi F)} \tag{7}$$

que es periódica de periodo 1. La anchura del lóbulo principal es $\Delta_F = \frac{2}{L}$. La amplitud del lóbulo principal es L.

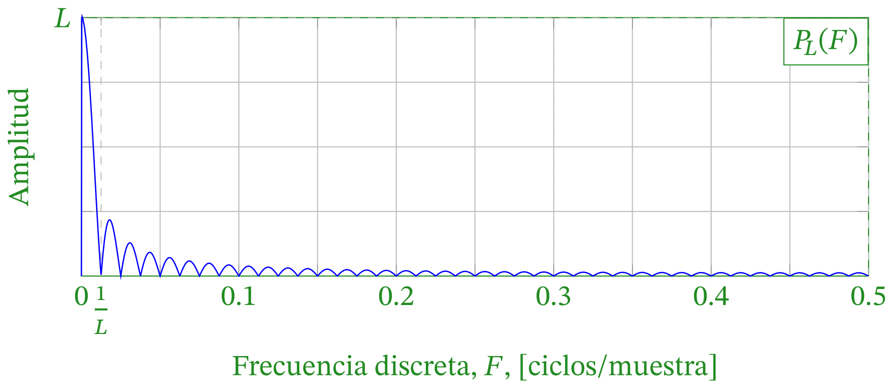


Figura 8: Transformada de Fourier de un pulso rectangular de longitud $L = 80$

b) La transformada de Fourier de la secuencia $x[n] = A\cos(2\pi F_0 n)p_L[n]$ es:

$$X(F) = P_L(F) \otimes \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{A}{2}\delta(F + F_0 - k) + \frac{A}{2}\delta(F - F_0 - k) \right) \tag{8}$$

que es igual a:

$$X(F) = P_L(F) * \left(\frac{A}{2}\delta(F + F_0) + \frac{A}{2}\delta(F - F_0) \right) = \frac{A}{2}P_L(F + F_0) + \frac{A}{2}P_L(F - F_0) \tag{9}$$

Esta señal es periódica de periodo 1.

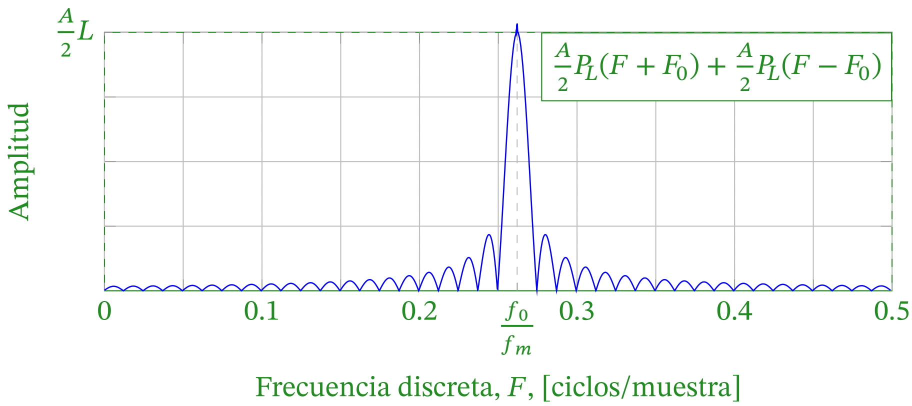


Figura 9: Transformada de Fourier de $s[n]p_L[n]$, con $L = 80$ y $F_0 = \frac{f_0}{f_m} = 0.262$

c) La separación frecuencial en términos de frecuencia discreta F es $\frac{15.56}{f_m}$. El lóbulo principal de la ventana tiene que ser menor que la separación frecuencial para poder distinguir las diferentes frecuencias. Por tanto:

$$\frac{2}{L} \leq \frac{15.56}{f_m} \Rightarrow L \geq \frac{2 \cdot 1000}{15.56} \Rightarrow L \geq 128.5 \tag{10}$$

La duración mínima es 129 muestras.

d) Para saber los acordes hemos de convertir el índice de la DFT a frecuencia analógica: $f_x = \frac{k}{N}f_m$. En la primera ventana sólo está presente el primer acorde:

$$f_1 = \frac{536}{2048}1000 = 261{,}7\,\text{Hz}; \qquad f_2 = \frac{675}{2048}1000 = 329{,}6\,\text{Hz}; \qquad f_3 = \frac{803}{2048}1000 = 392\,\text{Hz} \tag{11}$$

que corresponde a Do, Mi, Sol.

e) Observamos que en la segunda ventana están las mismas frecuencias que en la primera ventana más una adicional (corresponde a la nota Si). Como cada acorde tiene tres notas, ello indica que en la segunda ventana está presente el final del primer acorde y el inicio del siguiente. En la tercera ventana solo está presente el segundo acorde. La única nota del primer acorde que no forma parte del segundo es el Do (frecuencia 261,7 Hz). Si observamos el lóbulo principal de la sinc centrada en esta frecuencia, vemos que su anchura en la segunda ventana es el doble que en la primera. Ello indica que la duración de la nota en la segunda ventana será la mitad. Por tanto, el primer acorde dura $D = 1.5L = 1.5 \cdot 256$ muestras. Dividiendo por la frecuencia de muestreo obtenemos $D \approx 0.4$ segundos.

f) En $x[n]$ la separación entre muestras es $T_m = 1$ ms. En $y[n]$ se elimina una de cada dos muestras, por lo que la separación entre muestras es $T'_m = 2$ ms que equivale a una frecuencia de muestreo $f'_m = \frac{1}{T'_m} = 500$ Hz.

g) Las frecuencias del primer acorde son $f_1 = 261{,}7$ Hz (Do), $f_2 = 329{,}6$ Hz (Mi) y $f_3 = 392$ Hz (Sol). Si la frecuencia de muestreo es 500 Hz tendremos aliasing para las tres frecuencias. Al hacer el análisis frecuencial las observaremos cambiadas, concretamente veremos los picos en $f'_1 = 500 - 261{,}7 = 238{,}3$ Hz, $f'_2 = 500 - 329{,}6 = 170{,}4$ Hz y $f'_3 = 500 - 392 = 108$ Hz.

Nota adicional: Aunque no se pedía, estas frecuencias corresponden a una escala inferior, y quedan entre medio de dos notas. Así f'_1 queda en medio de la$\sharp_2$ y si$_2$, f'_2 queda en medio de mi$_2$ y fa$_2$ y f'_3 queda en medio de sol$\sharp_1$/ y la$_1$.

*

P3. (10 puntos) Se desea transmitir la información de $M = 5$ canales de forma simultánea para después procesarla en el receptor. Cada canal m contiene una señal $x_m(t)$ de ancho de banda $B_m = 1$ kHz ($X_m(f) = 0$, $|f| > B_m$). Para transmitir las señales se opta por multiplexarlas en frecuencia formando la señal:

$$x(t) = \sum_{m=0}^{M-1} x_m(t) \cos(2\pi m f_0 t)$$

de forma que cada canal está centrado en frecuencia alrededor de la frecuencia $m f_0$. El sistema de comunicaciones dispone de un ancho de banda $B_s = 25$ kHz, por lo que la señal $x(t)$ se genera de manera que $X(f)$ ocupe desde $f = 0$ hasta la frecuencia máxima $f = 25$ kHz.

a) Halle y dibuje $X(f)$ en función de $X_m(f)$. Suponga un dibujo simple para cada $X_m(f)$, por ejemplo, un triángulo.

b) Determine f_0 para que para que $X(f)$ ocupe desde $f = 0$ hasta la frecuencia máxima$f = 25$ kHz.

c) Con la f_0 elegida en el apartado anterior, determine la distancia frecuencial f_g (se denomina banda de guarda) que hay entre $X_m(f)$ y $X_{m+1}(f)$ para $0 \leq m < M$.

d) El receptor se realiza con tecnología discreta. ¿Cuál es la mínima frecuencia de muestreo a la que se debe muestrear $x(t)$ para no perder información?

El sistema muestrea la señal a $f_s = 100$ kHz. Para recuperar $x_m[n]$ se utiliza el siguiente esquema donde el oscilador genera un coseno a la frecuencia $m\frac{f_0}{f_s} = mF_0$.

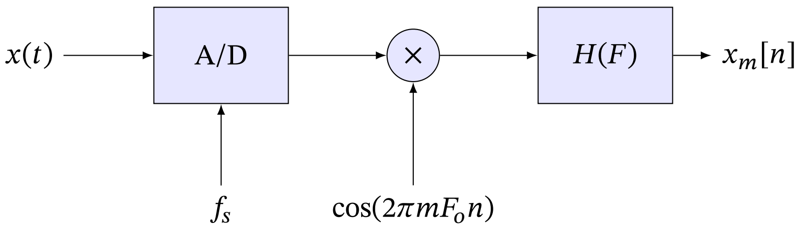


Figura 10

e) Especifique $H(F)$ suponiendo que puede ser un filtro ideal.

f) En caso de que $H(F)$ sea un filtro realizable de Chebychev, complete la plantilla de especificaciones del filtro $(\alpha_a, \alpha_p, F_p, F_a)$ suponiendo $\alpha_p = 1$dB, $\alpha_a = 40$dB.

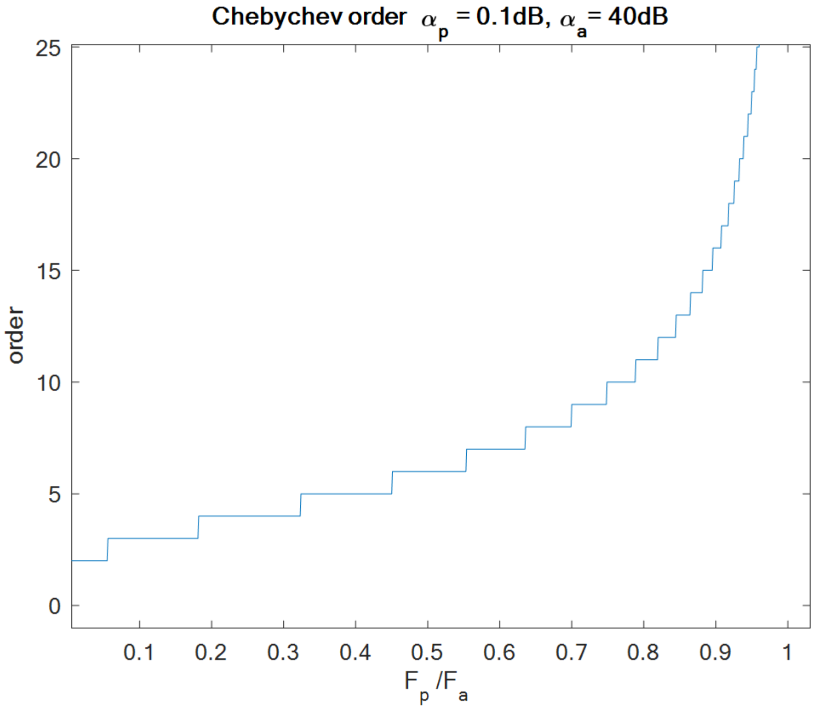


Figura 11

---

g) Utilizando la gráfica de la figura 11, determine el orden del filtro.

h) Si el número de canales a transmitir fuera $M = 12$, rehaga la parte necesaria del ejercicio para determinar la plantilla de especificaciones y el orden del filtro necesario para recuperar las señales $x_m[n]$ con la misma calidad que en el caso $M = 5$.

Solución:

a) Transformada de Fourier de $x(t)$

$$X(f) = \frac{1}{2}\sum_{m=0}^{M-1} X_m(f + mf_0) + \frac{1}{2}\sum_{m=0}^{M-1} X_m(f - mf_0)$$

Los triángulos tendrán base 2 kHz. Dibujaremos 5 centrados en mf_0 para $m = 0, 1, 2, 3, 4$. Suponiendo simetría hermítica, también podemos representar el espectro para las frecuencias negativas.

b) La última señal estará centrada en $4f_0$. Como tiene 1 kHz de ancho de banda, la frecuencia más alta será $4f_0 + 1 = 25 \Rightarrow 4f_0 = 24 \Rightarrow f_0 = 6\,\text{kHz}$

c) $f_g = (nf_0 - 1) - ((n-1)f_0 + 1) = f_0 - 2 = 4\,\text{kHz}$

d) $f_s = 50\,\text{kHz}$

e) $H(F) = \prod\left(\frac{F}{2\frac{B_m}{f_s}}\right)$ para $-0.5 \leq F < 0.5$

f) Las zonas prohibidas de la plantilla son: entre 0 y F_p la atenuación no puede ser superior a 1dB. De F_a en adelante la atenuación no puede ser inferior a 40 dB. $F_p = \frac{1}{100}$ y $F_a = \frac{B_m + f_g}{f_s} = \frac{5}{100}$.

g) $\frac{F_p}{F_a} = \frac{f_p}{f_a} = \frac{1}{5} = 0.2$. Necesitamos orden 5, de acuerdo con la gráfica 11.

h) Si el número de canales es $M = 12$, la frecuencia $11f_0 + 1 = 25 \Rightarrow 4f_0 = 24 \Rightarrow f_0 = 2{,}18\,\text{kHz}$, $F_p = \frac{1}{100}$, $F_a = \frac{B_m + f_g}{f_s} = \frac{1.18}{100}$ y $\frac{F_p}{F_a} = \frac{1}{1.18} = 0.8475$. Necesitamos orden 13, de acuerdo con la gráfica 11.

*