1 . Considerem la forma quadràtica $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida per $q(x, y, z) = 2xy + 2xz + 2yz$.

(*a*) Trobeu una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ tal que la matriu de q en la base $\mathcal{B}$ sigui diagonal.

(*b*) Trobeu un subespai vectorial $F \subseteq \mathbb{R}^3$ de dimensió màxima tal que $q|_F$ sigui definida negativa.

(*c*) Raoneu si existeix algun subespai vectorial $G \subset \mathbb{R}^3$ de dimensió 2 tal que $q|_G$ tingui rang 1.

2 . Donada la forma quadràtica de $\mathbb{R}^3$ definida per $q(x, y, z) = x^2 - 4xy + y^2 - 4yz + 2z^2 + 4xz$, trobeu un subespai F de $\mathbb{R}^3$ de dimensió 1 i un subespai G de $\mathbb{R}^3$ de dimensió 2, tals que $q|_F$ sigui definida positiva i $q|_G$ sigui definida negativa.

3 . Doneu la classificació afí, trobant una forma reduïda, el rang i l'índex, de les formes quadràtiques següents. Indiqueu si són definides positives, definides negatives o no definides.

De $\mathbb{R}^3$: $q(x, y, z) = 2x^2 + 5y^2 + 2z^2 - 4xy - 2xz + 4yz$; $q(x, y, z) = -3x^2 + 4xy + 10xz - 4yz$.

De $\mathbb{R}^4$: $q(x, y, z, t) = 2xt + 6yz$.

4 . Doneu la classificació afí, trobant una forma reduïda, el rang i l'índex, de les formes quadràtiques de $\mathbb{R}^n$ que tenen matrius en bases canòniques:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 9 & -3 & 0 \\ -3 & 5 & -4 \\ 0 & -4 & 5 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 8 & 11 \\ 3 & 8 & 14 & 20 \\ 4 & 11 & 20 & 30 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 3 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 3 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}.$$

5 . Estudieu per a quins valors de α les matrius següents són definides positives.

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha \\ \alpha & 1 & \alpha \\ \alpha & \alpha & 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 1 & 1 & 1 \\ \alpha & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

6 . Sigui $q_\alpha : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ la forma quadràtica que té matriu associada en la base canònica

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}.$$

(*a*) Classifiqueu q_α en funció del paràmetre $\alpha \in \mathbb{R}$. Per a quins valors de α, q_α és definida positiva? I definida negativa?

(*b*) En el cas $\alpha = 0$, doneu subespais F i G de $\mathbb{R}^4$ de dimensió màxima tals que $q|_F$ sigui definida positiva i $q|_G$ sigui definida negativa.