Entregable 2: Una desigualtat isoperimètrica.

Anàlisi Real. Grau en Matemàtiques, UPC, primavera 2021.

Àlex Batlle Casellas

Sigui $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ una parametrització d'una corba injectiva, llevat d'en els extrems (és a dir, Γ, que n'és la imatge, és tancada), tal que el vector velocitat γ' estigui definit en tot l'interval $[0,1]$. Suposarem tota l'estona que $\ell(\Gamma) = 1$, i després veurem què passa quan $\ell(\Gamma)$ és arbitrari. Abans de posar-nos amb sèries de Fourier, però, necessitarem alguns resultats previs:

(0) (Això ho he afegit jo) Sigui $g : [a,b] \to [c,d]$ contínua, estrictament monòtona (injectiva) i derivable arreu, i tal que la derivada no s'anul·la en cap punt d'$[a,b]$. Aleshores, g té inversa derivable, $g^{-1} : g([a,b]) \to [a,b]$:

En efecte, si g és estrictament monònota (suposem estrictament creixent), sigui $x \in (a,b)$. Aleshores,

$$0 < g'(x) = \lim_{y\to x} \frac{g(x)-g(y)}{x-y} < +\infty \implies \frac{1}{g'(x)} \in \mathbb{R}.$$

Per tant, podem invertir l'expressió anterior per obtenir:

$$\frac{1}{g'(x)} = \frac{1}{\lim_{y\to x} \frac{g(x)-g(y)}{x-y}},$$

i per ser la inversió contínua fora del zero, podem commutar límit i inversió per dir que

$$\frac{1}{g'(x)} = \lim_{y\to x} \frac{1}{\frac{g(x)-g(y)}{x-y}} = \lim_{y\to x} \frac{x-y}{g(x)-g(y)}.$$

Ara, atès que g és injectiva, té inversa restringida a l'espai $g([a,b])$ (que també es tracta d'un interval compacte, per continuïtat de g, compacitat d'$[a,b]$, i en definitiva pel Teorema de Weierstrass), que també és contínua. A més, per continuïtat de la g i la g^{-1}, sabem que, anomenant $\tilde{x} = g(x)$ i $\tilde{y} = g(y)$, $x \to y \iff \tilde{x} \to \tilde{y}$. Per tant, reescrivim l'anterior expressió com:

$$\frac{1}{g'(g^{-1}(\tilde{x}))} = \lim_{\tilde{y}\to\tilde{x}} \frac{g^{-1}(\tilde{x}) - g^{-1}(\tilde{y})}{\tilde{x}-\tilde{y}}.$$

Ara acabem dient que l'expressió de la dreta és la derivada de g^{-1} en el punt $\tilde{x} \in g([a,b])$, és a dir, que

$$\left(g^{-1}\right)'(\tilde{x}) = \frac{1}{g'(g^{-1}(\tilde{x}))}.$$

Per tant, tenim un resultat semblant al teorema de la funció inversa, però més laxe, per funcions d'una sola variable. Això ens anirà molt bé per resoldre l'apartat (a).

(a) Demostreu que podem agafar una parametrització de la corba Γ, $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, que tingui vector tangent de norma 1 per a tota t, és a dir, tal que $\|\gamma'(t)\| = 1$.

Primer de tot, sigui φ una parametrització (derivable) de Γ qualsevol tal que la seva derivada no s'anul·li enlloc. En particular, $\varphi(0) = \varphi(1)$. Aleshores, definim la funció $s : [0,1] \to [0,1]$ de la següent manera:

$$s(t) := \int_0^t \|\varphi'(s)\| ds$$

Aquesta funció satisfà les següents propietats:

- És contínua: per les propietats regularitzadores de la integral, això és evident.
- És derivable arreu i estrictament monòtona: pel Teorema Fonamental del Càlcul, la derivada a cada punt de $s(t)$ és
$$s'(t) = \|\varphi'(t)\| > 0,$$
amb la desigualtat estricta atès que la norma d'$\mathbb{R}^2$ és no degenerada i el vector velocitat de φ no s'anul·la mai.
- És exhaustiva: tenim que $s(0) = 0$ i que $s(1) = 1$, i com que és contínua i estrictament creixent, ha de prendre tots els valors intermedis pel Teorema del Valor Intermedi.

En definitiva, compleix les hipòtesis del resultat que hem demostrat abans. Per tant, s admet inversa derivable, amb derivada $\left(s^{-1}\right)'(t) = \frac{1}{s'(s^{-1}(t))} = \frac{1}{\|\varphi'(s^{-1}(t))\|}$.
Ara, sigui $\gamma = \varphi \circ s^{-1}$. Vegem que també és una parametrització de Γ. En efecte, $s^{-1} : [0,1] \to [0,1]$, i $\varphi : [0,1] \to \Gamma$, ambdues funcions exhaustives i en particular s^{-1} també injectiva. Això vol dir que γ es tracta d'una funció exhaustiva en Γ, però tal que $\gamma(0) = \gamma(1)$, atès que $\varphi(0) = \varphi(1)$. Per tant, $\gamma : [0,1] \to \Gamma$ també és una parametrització de la corba Γ. A més, el seu vector velocitat té norma 1: usant la regla de la cadena,

$$\gamma'(\cdot) = (\varphi \circ s^{-1})'(\cdot) = \varphi'(s^{-1}(\cdot)) \left(s^{-1}\right)'(\cdot) = \frac{\varphi'(s^{-1}(\cdot))}{\|\varphi'(s^{-1}(\cdot))\|},$$

que té norma 1.

(b) Per aquesta parametrització donada a (a), demostreu que es compleix que

$$1 = \int_0^1 x'(t)^2 + y'(t)^2 dt, \;\; A = \frac{1}{2}\left|\int_0^1 x(t)y'(t) - x'(t)y(t)dt\right|,$$

on A és l'àrea de la regió tancada per la corba Γ.

Primer de tot, observem que com que $\|\gamma'(t)\| = 1$ per a tota $t \in [0,1]$, la integral

$$\int_0^1 \|\gamma'(t)\| dt = \int_0^1 dt = 1.$$

Per tant, de fet, integrar el quadrat d'aquest mòdul, com que és 1, és com integrar el mòdul sol:

$$\int_0^1 \|\gamma'(t)\|^2 dt = \int_0^1 \|\gamma'(t)\| dt = 1.$$

Ara, si escrivim $\gamma'(t) = (x'(t), y'(t))$, el seu mòdul al quadrat és $x'(t)^2 + y'(t)^2$ per tota t. Aleshores, escrivim la integral d'aquí sobre com:

$$1 = \int_0^1 \|\gamma'(t)\|^2 dt = \int_0^1 x'(t)^2 + y'(t)^2 dt,$$

amb el que hem provat la primera igualtat. Per la segona part de l'apartat, farem servir el teorema de Green-Stokes. Aleshores, sigui ara Ω la regió tancada per Γ, és a dir, que $\partial\Omega = \Gamma$. Sigui f el camp vectorial $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $f(x,y) = (-y, x)$. Aquesta funció de fet és $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$. Aleshores, fem la integral de línia d'f sobre la corba Γ:

$$\int_\Gamma f d\ell = \pm \int_0^1 f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \pm \int_0^1 (-y(t), x(t)) \cdot (x'(t), y'(t)) dt = \pm \int_0^1 x(t)y'(t) - y(t)x'(t) dt,$$

on hem posat $\pm$ arreu perquè el valor de la integral depèn de la orientació de la corba Γ. D'altra banda, usant el Teorema de Green, tenim que

$$\int_\Gamma f d\ell = \int_{\partial\Omega} f d\ell = \iint_\Omega f_{2,x} - f_{1,y} dxdy,$$

on $f_1(x,y) = -y,\ f_2(x,y) = x$, i per tant l'expressió resulta en

$$\iint_\Omega 1 - (-1)dxdy = 2\iint_\Omega dxdy = 2A,$$

amb $A = A(\Omega)$. Per tant, si agafem valor absolut a l'expressió que hem trobat més amunt per la integral de línia d'f sobre la corba Γ, veiem que

$$|2A| = \left| \pm \int_0^1 x(t)y'(t) - x'(t)y(t)dt \right|,$$

és a dir, que arribem a l'expressió que volíem (ja que $A > 0$ per ser una àrea),

$$A = \frac{1}{2}\left| \int_0^1 x(t)y'(t) - x'(t)y(t)dt \right|.$$

Observem que les funcions $x(t), y(t)$ les podem considerar com a funcions 1-periòdiques, ja que estan definides en $[0,1]$ i a més enganxen bé en els extrems (perquè Γ és tancada). Per tant, podem calcular la seva sèrie de Fourier complexa amb

$$a_n = \int_0^1 x(t)e^{-2\pi int}dt, \quad b_n = \int_0^1 x(t)e^{-2\pi int}dt.$$

(c) Quins són els coeficients de Fourier complexos de $x'(t)$ i $y'(t)$?

Els volem calcular com a teoria. Per poder fer això, hem d'assegurar que la parametrització γ és PS. De fet, en ser γ derivable arreu (per tant, és contínua), podem intuïr que la seva derivada serà "contínua a trossos"[1], i per tant, podem calcular-ne els coeficients de Fourier, resolent les següents integrals per parts:

$$a'_n = \int_0^1 x'(t)e^{-2\pi int}dt, \quad b'_n = \int_0^1 y'(t)e^{-2\pi int}dt,$$

i surten (ho fem només per a'_n)

$$\begin{aligned} a'_n = \int_0^1 x'(t)e^{-2\pi int}dt &= x(t)e^{-2\pi int}\big|_0^1 - \int_0^1 (-2\pi in)e^{-2\pi int}x(t)dt \\ &= x(1)e^{-2\pi in} - x(0) + 2\pi in\int_0^1 x(t)e^{-2\pi int}dt = 2\pi ina_n. \end{aligned}$$

Similarment, passa amb b'_n. Per tant,

$$a'_n = 2\pi ina_n, \qquad b'_n = 2\pi inb_n.$$

[1]El conjunt de punts de discontinuïtat d'una funció derivada pot ser força estrany, i de fet, ha de ser una unió numerable de tancats amb una certa condició, com es veu en aquest article, pàgines 4-5. Tot això ens "assegura"que els coeficients de Fourier de la derivada tindran un cert sentit: la sèrie que defineixen tindrà convergència quadràtica cap a γ', però depenent de com d'estranya sigui γ' potser no hi haurà convergència puntual en uns quants punts (Du Bois-Reymond, per exemple per la funció que es construeix aquí), que podrien ser, de fet, gairebé tots (Kolmogorov, en francès, gairebé arreu i arreu).

(d) Usant Parseval, demostreu que:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2\left(|a_n|^2+|b_n|^2\right)=\frac{1}{4\pi^2}.$$

Podem aplicar la identitat de Parseval, perquè x' i y' són funcions definides en $[0,1]$ i (previsiblement) integrables o almenys de quadrat integrable, que és un espai vectorial equipat amb el producte escalar (hermític) típic

$$(f,g)=\int_0^1 f(x)\overline{g(x)}dx,$$

i on les sèries de Fourier de x' i y' exhibeixen almenys convergència quadràtica. Aleshores, fent servir la identitat de Parseval a cada una de les funcions derivades x' i y', tenim

$$\left.\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbb{Z}}|a_n'|^2&=\|x'\|_2^2=\int_0^1 x'(t)^2dt,\\ \sum_{n\in\mathbb{Z}}|b_n'|^2&=\|y'\|_2^2=\int_0^1 y'(t)^2dt.\end{aligned}\right\}\implies \sum_{n\in\mathbb{Z}}\left(|a_n'|^2+|b_n'|^2\right)=\int_0^1 x'(t)^2+y'(t)^2dt=1.$$

Ara, cadascuna de les sumes de l'esquerra resulta que és, substituint les expressions d'a_n' i b_n',

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}|a_n'|^2=\sum_{n\in\mathbb{Z}}|2\pi i n a_n|^2=\sum_{n\in\mathbb{Z}}4\pi^2n^2|a_n|^2,$$
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}|b_n'|^2=\sum_{n\in\mathbb{Z}}|2\pi i n b_n|^2=\sum_{n\in\mathbb{Z}}4\pi^2n^2|b_n|^2,$$

amb el que finalment obtenim que

$$4\pi^2\sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2\left(|a_n|^2+|b_n|^2\right)=1,$$

amb el que acabem la prova.

(e) Demostreu que

$$A=\frac{1}{2}\left|\int_0^1 x(t)y'(t)-x'(t)y(t)dt\right|\leq 2\pi\left|\sum_{n\in\mathbb{Z}} n a_n\overline{b_n}\right|.$$

Per a fer-ho, modifiqueu l'argument que us dóna Parseval per tal de poder calcular les integrals $\int_0^1 x(t)y'(t)dt$ i $\int_0^1 x'(t)y(t)dt$ en termes dels coeficients de les sèries de Fourier corresponents.

De fet, tenim igualtat: primer observarem un parell de resultats previs:

- Si fem una integral per parts,

$$\int_0^1 x(t)y'(t)dt=x(t)y(t)|_0^1-\int_0^1 x'(t)y(t)dt=-\int_0^1 x'(t)y(t)dt.$$

- Per tant, si anomenem $I_1=\int_0^1 x'(t)y(t)dt$ i $I_2=\int_0^1 x(t)y'(t)dt$, tenim que $I_1+I_2=0$ (també ho podíem veure per ser la derivada del producte $x(t)y(t)$), i que $I_1-I_2=-2I_2=2I_1$. Per tant, podem veure que

$$A=\frac{1}{2}\left|\int_0^1 x(t)y'(t)-x'(t)y(t)dt\right|=\frac{1}{2}|I_2-I_1|=\frac{1}{2}|2I_2|=|I_2|.$$

  Per tant, en tindrem prou de calcular I_2.

- La sèrie de Fourier d'x té límit uniforme i a més, aquest coincideix amb x, per ser aquesta contínua. Aleshores, la funció $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{2\pi int} y'(t)$ convergeix uniformement a $x(t)y'(t)$.
- Els coeficients de Fourier complexos c_n de qualsevol funció f, per la qual estigui definida la integral que els calcula, satisfan que $c_{-n} = \overline{c_n}$. Vegem-ho:

$$c_{-n} = \int_0^1 f(t)e^{-2\pi int}dt = \int_0^1 f(t)\left(\cos(-2\pi nt) + i\sin(-2\pi nt)\right)dt =$$
$$\int_0^1 f(t)\cos(2\pi nt)dt - i\int_0^1 f(t)\sin(2\pi nt)dt = \overline{\int_0^1 f(t)(\cos(2\pi nt) + i\sin(2\pi nt))dt} =$$
$$\overline{c_n}.$$

Amb tot això, podem demostrar la igualtat:

$$\left|\int_0^1 x(t)y'(t)dt\right| = \left|\int_0^1 \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{2\pi int}\right) y'(t)dt\right| = \left|\int_0^1 \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n y'(t)e^{2\pi int}dt\right| =$$
$$\left|\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \int_0^1 y'(t)e^{2\pi int}dt\right| = \left|\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n b'_{-n}\right| = \left|\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \overline{b'_n}\right| = \left|\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \overline{2\pi in b_n}\right| =$$
$$\left|\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n 2\pi(-i)n\overline{b_n}\right| = 2\pi\left|\sum_{n\in\mathbb{Z}} na_n\overline{b_n}\right|.$$

Potser cal notar que estem intercanviant integral i sumatori, i això ho podem fer per la convergència uniforme del sumatori, que és la sèrie de Fourier d'x multiplicada a cada terme per $y'(t)$.

(f) Demostreu que per tota parella de valors $a_n,\ b_n$ i per tot nombre natural n,

$$2|n|\left|a_n\overline{b_n}\right| \le 2n^2|a_n||b_n| \le n^2\left(|a_n|^2 + |b_n|^2\right). \tag{1}$$

Combineu-ho amb els apartats anteriors per demostrar que $A \le \frac{1}{4\pi}$.

Tractem el cas $n \neq 0$, atès que en $n = 0$ totes les desigualtats se satisfan amb igualtat. Per la primera desigualtat, ens fixem en que $|n| \le n^2$ per a tota $n \in \mathbb{Z}$, i en que el producte dins del mòdul és el mateix que fora i per tant, $\left|a_n\overline{b_n}\right| = |a_n|\left|\overline{b_n}\right| = |a_n||b_n|$. Amb tot això, com que $|n|$ i n^2 són sempre constants positives, quan les multipliquem per la igualtat ens queda:

$$2|n|\left|a_n\overline{b_n}\right| \le 2n^2|a_n||b_n|.$$

Per la segona desigualtat, observem que si $n \neq 0$, dividim entre n i

$$2|a_n||b_n| \le |a_n|^2 + |b_n|^2 \iff 0 \le |a_n|^2 + |b_n|^2 - 2|a_n||b_n| \iff 0 \le (|a_n| - |b_n|)^2,$$

que és sempre cert. Aleshores, combinant això amb els apartats (d) i (e), tenim que (sent ara a_n i b_n coeficients de Fourier complexos):

$$A = 2\pi\left|\sum_{n\in\mathbb{Z}} na_n\overline{b_n}\right| \le 2\pi\sum_{n\in\mathbb{Z}} |n||a_n|\left|\overline{b_n}\right| \le 2\pi\sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2|a_n||b_n| \le \pi\sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2\left(|a_n|^2 + |b_n|^2\right) = \frac{1}{4\pi}.$$

Ja tenim el primer resultat important: tota corba regular i simple de longitud 1 tanca una àrea inferior a $\frac{1}{4\pi}$. Aquest resultat és l'anomenada desigualtat isoperimètrica. El que veurem ara, de nou usant la teoria de sèries de Fourier, és en quins casos tenim la igualtat. Per a que hi hagi igualtat necessàriament ens caldrà que les desigualtats (1) es donin amb igualtat.

(g) En vista de l'observació anterior, demostreu que si la desigualtat isoperimètrica es dóna amb igualtat, necessàriament $a_n = b_n = 0$ si $|n| > 1$.

Primer de tot, confirmem la observació: totes les sumes per les que hem demostrat les desigualtats a (f) formen una cadena de desigualtats, que si $A = \frac{1}{4\pi}$ es converteix en cadena d'igualtats. A més, les diferències entre les més grans i les més petites són de termes positius, amb el que si són iguals a 0, necessàriament tots els termes han de ser iguals a 0 i per tant, tenim igualtats en les desigualtats d'(1). Ara, fem servir la observació anterior:

$$2\,|n|\,|a_n|\,|b_n| = 2\,|n|\,\left|a_n\overline{b_n}\right| = 2n^2\,|a_n|\,|b_n| = n^2\left(|a_n|^2 + |b_n|^2\right).$$

Per aquestes igualtats, tenim que

$$n^2\left(|a_n|^2 + |b_n|^2\right) - 2\,|n|\,|a_n|\,|b_n| = 0.$$

Fins ara, és per a tota $n \in \mathbb{Z}$. Ara, suposem que $|n| > 1$, i suposem que un dels dos (a_n, b_n) és diferent de 0. Aleshores,

$$|a_n|^2 + |b_n|^2 > 0 = 2\,|a_n|\,|b_n| \implies n^2\left(|a_n|^2 + |b_n|^2\right) - 2\,|n|\,|a_n|\,|b_n| > 0,$$

on hem multiplicat per la desigualtat $n^2 > |n| > 0$ quan $|n| > 1$. Hem arribat, doncs, a una contradicció (> 0 i $= 0$), i per tant, ambdues a_n i b_n han de ser 0 per $|n| > 1$.

(h) Demostreu que $a_{-1} = \overline{a_1}$, i similarment per b_1 i b_{-1}. Demostreu que $|a_{-1}| = |a_1| = |b_{-1}| = |b_1| = \frac{1}{4\pi}$.

Les igualtats $a_{-1} = \overline{a_1}, b_{-1} = \overline{b_1}$ les hem vistes més amunt, a l'apartat (e). Ara vegem que $|a_n| = |b_n|$ per tota $|n| > 0$. Per les igualtats d'(1),

$$n^2\left(|a_n|^2 + |b_n|^2 - 2\,|a_n|\,|b_n|\right) = 0 \iff n^2\left(|a_n| - |b_n|\right)^2 = 0 \iff |a_n| = |b_n|.$$

Aleshores, l'àrea A és igual a

$$A = \pi\sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2\left(|a_n|^2 + |b_n|^2\right) = \frac{1}{4\pi}.$$

Aleshores, com que $a_n = b_n = 0$ per tota $|n| > 1$, la suma és

$$|a_{-1}|^2 + |b_{-1}|^2 + |a_1|^2 + |b_1|^2 = \frac{1}{4\pi^2}.$$

Com que hem vist que els índexs negatius corresponen a conjugar, i el mòdul del conjugat és el mateix que el mòdul normal, l'equació realment queda:

$$2\left(|a_1|^2 + |b_1|^2\right) = \frac{1}{4\pi^2} \iff |a_1|^2 + |b_1|^2 = \frac{1}{8\pi^2}.$$

Finalment, hem vist que els mòduls d'a_n i b_n són iguals per a tota $|n| > 0$, i per tant, tenim

$$|a_1|^2 = \frac{1}{16\pi^2} \implies |a_1| = |b_1| = |a_{-1}| = |b_{-1}| = \frac{1}{4\pi}.$$

Per tant, tenim que $a_1 = \frac{1}{4\pi}e^{2\pi i\alpha}$ i $b_1 = \frac{1}{4\pi}e^{2\pi i\beta}$, per certs valors d'$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(i) Useu l'expressió de l'àrea A en termes dels coeficients de Fourier per demostrar que $\alpha - \beta = \frac{1}{4}(2k+1)$, on k és un enter.

Desenvolupem la suma per l'àrea:

$$A = \frac{1}{4\pi} = 2\pi \left| \sum_{n\in\mathbb{Z}} n a_n \overline{b_n} \right| = 2\pi \left| a_1\overline{b_1} - \overline{a_1}b_1 \right| = 2\pi \left| \frac{1}{16\pi^2}e^{2\pi i\alpha}e^{-2\pi i\beta} - \frac{1}{16\pi^2}e^{-2\pi i\alpha}e^{2\pi i\beta} \right|.$$

Per tant,

$$\frac{1}{8\pi^2} = \left| \frac{1}{16\pi^2}\left(e^{2\pi i(\alpha-\beta)} - e^{-2\pi i(\alpha-\beta)}\right) \right|.$$

Si ens hi fixem, en multiplicar per $8\pi^2$ a cada costat, a la dreta ens apareix la fòrmula del sinus desenvolupat en exponencials complexes:

$$1 = \left| \frac{1}{2}\left(e^{2\pi i(\alpha-\beta)} - e^{-2\pi i(\alpha-\beta)}\right) \right| = \left|\sin(2\pi(\alpha-\beta))\right|.$$

Per tant, d'aquí deduïm que $2\pi(\alpha-\beta) = \frac{\pi}{2}(2k+1)$, és a dir, que $\alpha - \beta = \frac{1}{4}(2k+1)$.

(j) Finalment, vegeu que $x(t) = a_0 + \frac{1}{2\pi}\cos\left(2\pi(\alpha+t)\right), y(t) = b_0 \pm \frac{1}{2\pi}\sin\left(2\pi(\alpha+t)\right)$, i que, per tant, $\gamma(t)$ descriu una circumferència de centre (a_0, b_0) i radi $\frac{1}{2\pi}$.

Efectivament, tenim

$$\begin{array}{ll} a_1 = \frac{1}{4\pi}e^{2\pi i\alpha}, & a_{-1} = \frac{1}{4\pi}e^{-2\pi i\alpha}, \\ b_1 = \frac{1}{4\pi}e^{2\pi i\beta}, & b_{-1} = \frac{1}{4\pi}e^{-2\pi i\beta}, \end{array}$$

i per tant podem escriure x i y com

$$\begin{array}{rcccl} x(t) & = & \frac{1}{4\pi}e^{-2\pi i\alpha}e^{-2\pi it} + a_0 + \frac{1}{4\pi}e^{2\pi i\alpha}e^{2\pi it} & = & \frac{1}{4\pi}e^{-2\pi i(\alpha+t)} + a_0 + \frac{1}{4\pi}e^{2\pi i(\alpha+t)}, \\ y(t) & = & \frac{1}{4\pi}e^{-2\pi i\beta}e^{-2\pi it} + b_0 + \frac{1}{4\pi}e^{2\pi i\beta}e^{2\pi it} & = & \frac{1}{4\pi}e^{-2\pi i(\beta+t)} + b_0 + \frac{1}{4\pi}e^{2\pi i(\beta+t)}. \end{array}$$

Si ens hi fixem, els $\frac{1}{4\pi}$ estan multiplicant una suma d'exponencials complexes, que es pot escriure com un cosinus. Per tant,

$$\begin{array}{rcl} x(t) & = & a_0 + \frac{1}{2\pi}\cos(2\pi(\alpha+t)), \\ y(t) & = & b_0 + \frac{1}{2\pi}\cos(2\pi(\beta+t)). \end{array}$$

Si ara agafem la relació que tenen α i β de l'apartat anterior, podem reescriure $y(t)$ com

$$\begin{aligned} y(t) = b_0 + \frac{1}{2\pi}\cos(2\pi(\beta+t)) = b_0 + \frac{1}{2\pi}\cos\left(2\pi\left(\alpha - \frac{1}{4}(2k+1) + t\right)\right) &= \\ b_0 + \frac{1}{2\pi}\cos\left(2\pi(\alpha+t) - \frac{\pi}{2}(2k+1)\right) &= \\ b_0 \pm \frac{1}{2\pi}\sin\left(2\pi(\alpha+t)\right)&, \end{aligned}$$

perquè $\sin\left(\frac{\pi}{2}(2k+1)\right) = (-1)^k$, per $k \geq 0$. En definitiva, hem acabat veient que $\gamma = (x, y)$ és, quan assoleix l'àrea màxima,

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x(t) & = & a_0 + \frac{1}{2\pi}\cos(2\pi(\alpha+t)), \\ y(t) & = & b_0 \pm \frac{1}{2\pi}\sin(2\pi(\alpha+t)). \end{array} \right.$$

Aquestes dues funcions, quan les posem com a components en el pla, descriuen una circumferència tancada de radi $r = \frac{1}{2\pi}$ al voltant del centre (a_0, b_0).

(k) Com canvia tot si la longitud de la corba és ℓ enlloc de 1?

Finalment vegem què passa quan $\ell(\Gamma) = \ell$ és arbitrària. Aleshores, a l'apartat (a), s ara va de $[0,1] \to [0,\ell]$, hi és contínua igual i la seva derivada és la mateixa. Per tant, seguint els mateixos raonaments que abans, $\gamma = \phi \circ s^{-1} : [0,\ell] \to [0,1] \to \Gamma$ segueix tenint derivada de norma 1.

A l'apartat (b), haurem de substituïr les integrals que ens dóna l'enunciat per

$$\ell = \int_0^\ell x'(t)^2 + y'(t)^2 dt, \qquad A = \frac{1}{2}\left|\int_0^\ell x(t)y'(t) - x'(t)y(t)dt\right|.$$

A l'apartat (c), els coeficients de Fourier canvien (lleugerament) perquè ha canviat el domini de la funció, i per tant la seva extensió periòdica té període ℓ enlloc d'1. Per tant, els nous coeficients seran

$$a_n = \frac{1}{\ell}\int_0^\ell x(t)e^{\frac{2\pi}{\ell}int}, \qquad b_n = \frac{1}{\ell}\int_0^\ell y(t)e^{\frac{2\pi}{\ell}int}.$$

Obviem la comprovació de que les funcions de la base són ortogonals i que les podem fer ortonormals dividint-les per $\sqrt{\ell}$. La relació entre coeficients de la derivada i coeficients normals és pràcticament la mateixa, excepte per un factor $\frac{1}{\ell}$, és a dir, que els coeficients de les derivades queden:

$$a_n' = \frac{2\pi}{\ell} i n a_n, \qquad b_n' = \frac{2\pi}{\ell} i n b_n.$$

A l'apartat (d), com que la relació entre els coeficients de la derivada i els normals ha canviat, també ho fan les sumes que estàvem estudiant, així que queden

$$\frac{4\pi^2}{\ell^2}\sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2\left(|a_n|^2 + |b_n|^2\right) = 1,$$

amb el que la suma finalment queda $\frac{\ell^2}{4\pi^2}$.

A l'apartat (e), la igualtat es manté exactament de la mateixa manera, ja que ens apareixen una ℓ multiplicant que prové del càlcul dels coeficients b_n' i una altra ℓ que divideix, provinent de la relació entre coeficients de la derivada i coeficients normals.

A l'apartat (f), quan fem servir la suma de $n^2\left(|a_n|^2 + |b_n|^2\right)$, ara hi haurem de posar $\frac{\ell^2}{4\pi^2}$ davant de tot, i se'ns cancel·larà un π del denominador, amb el que la desigualtat isoperimètrica quedarà, per ℓ arbitrària,

$$\boxed{A \leq \frac{\ell^2}{4\pi}.}$$

L'apartat (g) és exactament el mateix, ja que no depèn d'ℓ. A l'apartat (h), canvia el mòdul dels coeficients de Fourier per un factor ℓ al numerador, sent $|a_1| = |b_1| = \frac{\ell}{4\pi}$. A l'apartat (i) hi apareix una ℓ^2 a la dreta de la igualtat de l'àrea (conseqüència del canvi de mòdul dels coeficients) i per tant, ens queda una equació com:

$$\frac{1}{\ell^2} = |\cos(2\pi(\alpha - \beta))|,$$

de manera que no podem concloure el mateix que concloem a l'apartat (i) original.

Finalment, a l'apartat (j) sortirà una circumferència igual, però aquest cop les components de la corba seran

$$\begin{aligned} x(t) &= a_0 + \tfrac{\ell}{2\pi}\cos(2\pi(\alpha + t)), \\ y(t) &= b_0 + \tfrac{\ell}{2\pi}\cos(2\pi(\beta + t)), \end{aligned}$$

és a dir, que Γ serà una circumferència centrada en (a_0, b_0) de radi $r = \frac{\ell}{2\pi}$.