Problemes d'Anàlisi Real
FME Curs 2019/20

Tema 4: Integral i mesura de Lebesgue

1. Sigui (A_n) una successió de subconjunts de X.

   (a) Definim A com el conjunt dels elements de X que pertanyen a infinits elements de la successió. Demostreu que
   $$A = \bigcap_{m=1}^{+\infty} \left[\bigcup_{n=m}^{+\infty} A_n \right].$$
   El conjunt A s'anomena el límit superior dels (A_n), $\limsup A_n$.

   (b) Definim B com el conjunt dels elements dels $x \in X$ que pertanyen a tots excepte a un nombre finit dels A_n. Demostreu que
   $$B = \bigcup_{m=1}^{+\infty} \left[\bigcap_{n=m}^{+\infty} A_n \right].$$
   El conjunt B s'anomena el límit inferior dels (A_n), $\liminf A_n$.

   (c) Demostreu que si (E_n) és una successió monòtonament creixent de subconjunts de X, llavors
   $$\limsup E_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n = \liminf E_n.$$

   (d) Demostreu que si (F_n) és una successió monòtonament decreixent de subconjunts de X, llavors
   $$\limsup F_n = \bigcap_{n=1}^{+\infty} F_n = \liminf F_n.$$

   (e) Demostreu que
   $$\emptyset \subseteq \liminf A_n \subseteq \limsup A_n \subseteq X.$$
   Doneu un exemple tal que $\liminf A_n = \emptyset$ i $\limsup A_n = X$. Doneu un exemple en què (A_n) no sigui monòtonament creixent ni decreixent, però tal que
   $$\liminf A_n = \limsup A_n.$$
   Sempre que es té aquesta darrera igualtat, el valor comú s'anomena el límit de (A_n).

2. Demostreu que $[a,b] = \bigcap_{n=1}^{+\infty} (a - 1/n, b + 1/n)$ i que $(a,b) = \bigcup_{n=1}^{+\infty} [a + 1/n, b - 1/n]$. Això demostra que qualsevol σ-àlgebra que contingui els tancats conté els oberts, i viceversa. Demostreu que l'àlgebra de Borel també és generada pels semioberts $(a,b]$ i per les semirectes $(a, +\infty)$.

3. Doneu un exemple de funció de X a $\mathbb{R}$ que no sigui $\mathcal{X}$-mesurable, però tal que $|f|$ i f^2 siguin $\mathcal{X}$-mesurables.

4. Demostreu que si f és mesurable i $A > 0$, llavors el truncament f_A definit per
   $$f_A(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } |f(x)| \le A, \\ A & \text{si } f(x) > A, \\ -A & \text{si } f(x) < -A \end{cases}$$
   és mesurable.

5. Demostreu que qualsevol funció $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ creixent és Borel-mesurable.

6. Sigui f una funció de X en Y. Sigui $\mathcal{X}$ una σ-àlgebra de conjunts de X i sigui $\mathcal{Y} = \{E \subseteq Y \mid f^{-1}(E) \in \mathcal{X}\}$. Demostreu que $\mathcal{Y}$ és una σ-àlgebra.

7. Es considera $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció mesurable, $a, \lambda \in \mathbb{R}$, t, h definides per

$$\begin{array}{rccc} t: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & a+x \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} h: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \lambda x \end{array}$$

   Demostreu que $t \circ f$, $h \circ f$ són mesurables.

8. Sigui $(X, \mathcal{X})$ un espai mesurable i f una funció de X en $\mathbb{R}$. Demostreu que f és $\mathcal{X}$-mesurable sii $f^{-1}(E) \in \mathcal{X}$ per a tot conjunt de Borel E.

9. Demostreu que una funció f de X a $\mathbb{R}$ és $\mathcal{X}$-mesurable sii $A_\alpha = \{x \in X \mid f(x) > \alpha\}$ pertany a $\mathcal{X}$ per a tot $\alpha \in \mathbb{Q}$.

10. Sigui $(X, \mathcal{X})$ un espai mesurable, f una funció $\mathcal{X}$-mesurable de X en $\mathbb{R}$ i ϕ una funció contínua de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Demostreu que la composició $\phi \circ f$ és $\mathcal{X}$-mesurable.

11. Sigui f com en l'exercici precedent i sigui ψ una funció mesurable de Borel. Demostreu que $\psi \circ f$ és $\mathcal{X}$-mesurable.

12. Demostreu que si μ és una mesura a $\mathcal{X}$ i A és un conjunt fixat de $\mathcal{X}$, llavors la funció λ definida per $\lambda(E) = \mu(A \cap E)$ és una mesura a $\mathcal{X}$.

13. Demostreu que si μ_1, μ_2, $\ldots$, μ_n són mesures a $\mathcal{X}$ i a_1, a_2, $\ldots$, a_n són nombres reals no negatius, llavors

$$\lambda(E) = \sum_{j=1}^{n} a_j \mu_j(E)$$

    és una mesura a $\mathcal{X}$.

14. Si μ és una mesura, demostreu que $\limsup \mu(E_n) \leq \mu(\limsup E_n)$ sempre que $\mu(\cup E_n) < +\infty$. Demostreu que això pot fallar si $\mu(\cup E_n) = +\infty$.

15. Sigui μ una càrrega a $\mathcal{X}$ (és a dir, com una mesura però sense la no-negativitat; vegeu Bartle, pàg. 23). Si $E \in \mathcal{X}$ definim

$$\pi(E) = \sup\{\mu(A) \mid A \subseteq E, A \in \mathcal{X}\}.$$

    Demostreu que π és una mesura a $\mathcal{X}$.

16. Sigui $(X, \mathcal{X}, \mu)$ un espai de mesura i siguin (E_n) mesurables tals que $\sum_n \mu(E_n) < +\infty$. Demostreu que el conjunt format pels x que pertanyen a infinits E_n és mesurable i nul.

17. Demostreu que $f(x) = [x] + [x-2]$ és Borel-mesurable.

18. Sigui $(X, \mathcal{X}, \mu)$ un espai de mesura. Considerem $E_K \subset X$ una col.lecció de subconjunts mesurables tal que tot punt de X pertany, com a molt, a p conjunts de la família. Demostreu que

$$\mu(\bigcup E_k) \leq \sum \mu(E_k) \leq p\mu(\bigcup E_k)$$

19. Demostreu que la suma, multiplicació per escalar i producte de funcions simples és una funció simple. Demostreu que també ho són les funcions que s'obtenen amb $\vee$ i $\wedge$.

20. Sigui $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{X} = \mathbf{B}$ i λ la mesura de Lebesgue a $\mathbf{B}$. Si $f_n = \chi_{[0,n]}$, la successió és monòtonament creixent cap a $f = \chi_{[0,+\infty)}$. Si bé les funcions estan uniformement fitades per 1 i les integrals de totes les f_n són finites, tenim que $\int f \mathrm{d}\lambda = +\infty$. Es pot aplicar el Teorema de la Convergència Monòtona?.

21. Es considera
$$\begin{array}{lcll} g(x) & = & \begin{cases} 0 & \\ 1 & \end{cases} & \begin{array}{l} (0 \le x \le \frac{1}{2}) \\ (\frac{1}{2} < x \le 1) \end{array} \\ f_{2k}(x) & = & g(x) & (0 \le x \le 1) \\ f_{2k+1}(x) & = & g(1-x) & (0 \le x \le 1) \end{array}$$
Comproveu que
$$\liminf f_n(x) = 0 \qquad (0 \le x \le 1)$$
Tanmateix
$$\int_0^1 f_n(x)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}$$
Això demostra que en el lema de Fatou pot donar-se la desigualtat estricta.

22. Es defineix
$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & (|x| \le n) \\ 0 & (|x| > n) \end{cases}$$
Demostreu que $f_n(x) \longrightarrow 0$ uniformement sobre $\mathbb{R}$ però
$$\int_{-\infty}^{\infty} f_n\ \mathrm{d}x = 2 \qquad\qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

23. Es considera les funcions $f_n : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ definides per
$$f_n(x) = \begin{cases} x^\alpha & \text{si } x > 1/n \\ 0 & \text{si } 0 \le x \le 1/n \end{cases} \qquad \alpha < 0$$
Estudieu i calculeu quan s'escaigui:
   (a) $\lim_{n\to\infty} f_n$.
   (b) $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\ \mathrm{d}x$

24. Calculeu
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n (1 + x/n)^n e^{ax} dx$$

25. Demostreu que si $f \in L(\mathbb{R})$, aleshores
$$\lim_{n\to\infty} f(n^2 x) = 0 \qquad \text{g.a. } x \in \mathbb{R}$$

26. Sigui $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{X} = \mathbf{B}$ i λ la mesura de Lebesgue a $\mathbf{B}$. Si $f_n = (1/n)\chi_{[n,+\infty)}$, demostreu que (f_n) és monòtonament decreixent i convergeix uniformement a $f = 0$, però
$$0 = \int f \mathrm{d}\lambda \neq \lim \int f_n \mathrm{d}\lambda = +\infty.$$
Això demostra que no hi ha un Teorema de la Convergència Monòtona per a successions decreixents a M^+.

27. Es defineix els nombres
$$a_0 = 0, \quad a_n = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n,$$
i els intervals $F_n = [a_{n-1}, a_n)$ per a $n \geq 1$. Sigui f la funció que val n a F_n. Calculeu
$$\int_0^1 f(x)\ \mathrm{d}x.$$

28. Si $f_n = (-1/n)\chi_{[0,n]}$, la successió (f_n) convergeix uniformement a $f = 0$ a $[0, +\infty)$. Demostreu que $\int f_n \mathrm{d}\lambda = -1$, mentre que $\int f \mathrm{d}\lambda = 0$, de manera que
$$\liminf \int f_n \mathrm{d}\lambda = -1 < 0 = \int f \mathrm{d}\lambda,$$
de manera que $f_n \geq 0$ no es pot treure de les hipòtesis del lema de Fatou.

29. El lema de Fatou té una extensió al cas que les f_n agafin valors negatius. Sigui $h \in M^+(X, \mathcal{X})$ tal que $\int h \mathrm{d}\mu < +\infty$. Demostreu que si (f_n) és una successió a $M(X, \mathcal{X})$ i si $-h \leq f_n$, llavors
$$\int \liminf f_n\ \mathrm{d}\mu \leq \liminf \int f_n \mathrm{d}\mu.$$

30. (Desigualtat de Chebyshev) Sigui f una funció no negativa definida en un conjunt mesurable E. Per $\alpha > 0$, demostreu que
$$\mu\{x \in E | \ \ f(x) \geq \alpha\} \leq \frac{1}{\alpha} \int_E f\ d\mu.$$

31. Si $f \in M^+(X, \mathcal{X})$ i $\int f \mathrm{d}\mu < +\infty$, demostreu que $\mu\{x \in X \mid f(x) = +\infty\} = 0$. Ajuda: si $E_n = \{x \in X \mid f(x) \geq n\}$, llavors $n\chi_{E_n} \leq f$.

32. Si $f \in M^+(X, \mathcal{X})$ i $\int f \mathrm{d}\mu < +\infty$, demostreu que $N = \{x \in X \mid f(x) > 0\}$ és σ-finit, és a dir, existeix (F_n) a $\mathcal{X}$ tal que $N \subseteq \cup F_n$ i $\mu(F_n) < +\infty$, $\forall n$.

33. Suposem que $(f_n) \subset M^+(X, \mathcal{X})$, que (f_n) convergeix a (f) i que $\int f \mathrm{d}\mu = \lim \int f_n \mathrm{d}\mu < +\infty$. Demostreu que
$$\int_E f \mathrm{d}\mu = \lim \int_E f_n \mathrm{d}\mu$$
$\forall E \in \mathcal{X}$ i que el resultat pot no ser cert si es treu la condició $\lim \int f_n \mathrm{d}\mu < +\infty$.

34. Demostreu que si $f \in L(X, \mathcal{X}, \mu)$ i g és una funció fitada mesurable, aleshores el producte fg també pertany a $L(X, \mathcal{X}, \mu)$.

35. Demostreu que del fet que $f \in L(X, \mathcal{X}, \mu)$ no es segueix que $f^2 \in L(X, \mathcal{X}, \mu)$.

36. Suposem que $f_n \in L(X, \mathcal{X}, \mu)$ i que
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int |f_n|\ \mathrm{d}\mu < +\infty.$$
Demostreu que llavors la sèrie $\sum f_n(x)$ convergeix g.a. a una funció $f \in L(X, \mathcal{X}, \mu)$ i que
$$\int f\ \mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} \int f_n\ \mathrm{d}\mu.$$

37. Donada $f \in L^1(\mathbb{R})$, demostreu que per a tot $\epsilon > 0$ existeix $\delta > 0$ tal que si $\mu(E) < \delta$ aleshores
$$\int_E f \mathrm{d}\mu < \epsilon.$$

38. Considerem les funcions $f_n(x) = x^{-3/2}\chi_{[1/(n+1),1/n)}(x)$. Demostreu que no estan majorades per una integrable Lebesgue i, tanmateix, són integrables Lebesgue.

39. Demostreu que
$$f(x) = \frac{\log x}{x\sqrt{x^2-1}} \in L(1,\infty)$$

40. Demostreu que
$$f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{x}} \notin L(0,\infty)$$

41. Demostreu que
$$f(x) = \frac{\sin x}{x} \notin L(0,\infty)$$

42. Sigui $(X, \mathcal{X}, \mu)$ un espai de mesura. Considerem una funció mesurable $f : X \to [0,\infty)$ tal que
$$\int_X f^n d\mu = 1 \qquad \forall n$$
Demostreu que és una funció característica.

43. Demostreu que si $\alpha > 1$ llavors
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{nx \sin x}{1+(nx)^\alpha}\ \mathrm{d}x = 0.$$

44. Demostreu que
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{\log(n+x)}{n} e^{-x} \cos x\ \mathrm{d}x = 0.$$

45. Demostreu que
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n x^{1/n}} = 1.$$

46. Demostreu que si $a > 0$ aleshores
$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^{+\infty} \frac{n^2 x e^{-n^2x^2}}{1+x^2} \mathrm{d}x = 0.$$
Què passa si $a = 0$?

47. Establiu les igualtats que segueixen, provant a cada cas la integrabilitat de la funció considerada:
$$\int_0^1 x^{-x}\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}, \qquad \int_0^1 \sin x \log x \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n(2n)!},$$
$$\int_0^{+\infty} e^{-x} \cos\sqrt{x}\ \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{n!}{(2n)!}, \qquad \int_0^1 \log\frac{1}{1-x}\ \mathrm{d}x = 1.$$

48. Sigui $f : (0,1] \to \mathbb{R}$ definida per $f(x) = 0$ si x és racional i $f(x) = [1/x]^{-1}$ si x és irracional. Demostreu que f és integrable i calculeu $\int_0^1 f$.

49. Probeu que la successió $f_n(x) = \sin nx$ no té cap subsuccessió puntualment convergent sobre $[0, 2\pi]$. Ajuda: considereu $g_j(x) = (\sin n_j x - \sin n_{j+1} x)^2$, $n_1 < n_2 < \cdots$.

50. Demostreu que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és uniformement contínua i integrable Lebesgue llavors
$$\lim_{|x| \to +\infty} f(x) = 0.$$

51. Calculeu $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x$ en els casos següents:
$$f_n(x) = \frac{n\sqrt{x}}{1+n^2x^2}, \quad f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}, \quad f_n(x) = \frac{1+nx}{1+x^n}.$$

52. Calculeu $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\ \mathrm{d}x$ en els casos següents:
$$f_n(x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^{-n} \sin\frac{x}{n}, \quad f_n(x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^{n} e^{-2x}, \quad f_n(x) = \left(\frac{n+x}{n+2x}\right)^{n} e^{-x/2}.$$

53. Considereu una funció mesurable Borel
$$f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}.$$
Es defineix el conjunt $E = \{x \in [0,1] \mid f(x) \in \mathbb{Z}\}$.
   (a) Demostreu que E és un borelià.
   (b) Demostreu que també és mesurable Borel la funció
$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R} & \longmapsto & [0,1] \\ & x & \longmapsto & |\cos(\pi f(x))|^m \end{array}$$
   per a tot m natural.
   (c) Calculeu
$$\lim_{m\mapsto\infty} \int_0^1 |\cos(\pi f(x))|^m\ \mathrm{d}x.$$

54. (a) Demostreu que la funció
$$g(x) = \frac{\log(1+x^a)}{x}$$
   és una funció fitada per a $x \in (0,\infty)$ i $a \geq 1$.
   (b) Sigui (X,μ) un espai de mesura i f una funció mesurable i positiva definida sobre X tal que $\displaystyle\int_X f\ \mathrm{d}\mu = \|f\|_1 < \infty$. Provi's que
$$\lim_{n\to\infty} \int_X n\log\left[1+\left(\frac{f(x)}{n}\right)^{\alpha}\right]\ \mathrm{d}\mu(x) = \begin{cases} \|f\|_1 & \text{si } \alpha = 1\ ; \\ 0 & \text{si } \alpha > 1 \end{cases}$$

55. (a) Trobeu el mínim valor de la constant C tal que
$$\log(1+e^t) < C + t, \quad \forall t > 0.$$

(b) Si $f > 0$ i $f \in L^1([0,1])$, calculeu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int_0^1 \log(1 + e^{nf(x)})\, \mathrm{d}x.$$

56. Sigui un espai de mesura (X, χ, μ) i $f \in L^1$, $f \neq 0$ gairebé arreu. Proveu que

$$\lim_{n\to\infty} \int |f|^{1/n} = \mu(X).$$

57. Sigui E un conjunt de mesura finita. Demostreu que

$$L^q(E) \subset L^p(E) \qquad \forall 1 \leq p \leq q \leq \infty$$

58. Demostreu que

$$L^r(E) \subset L^p(E) + L^q(E) \qquad \forall p < r < q$$

59. Siguin $E \subset \mathbb{R}^n$ un conjunt mesurable i $f \in L^p(E)$ per cert $1 \leq p < \infty$. Definim $E(l) = \{x \in E | |f(x)| > l\}$. Demostreu que gairebé per tot $x \in E$, existeix $l_x \in \mathbb{R}$ tal que $x \notin E(l_x)$. Calculeu $\lim_{l\to\infty} l^p \mu(E(l))$.

60. Donada $f \in L^p(E) \cap L^q(E)$, demostreu que $f \in L^r(E)$, sempre que $1 \leq p \leq r \leq q < \infty$. Indicació: Essent $p \leq r \leq q$, es té $r = ap + (1-a)q$, amb $a \in [0,1]$.

61. (a) Demostreu que si $p < 1/2$, $\frac{1}{(x(1-x))^p} \in L^1(0,1)$. Indicació: Cauchy-Schwarz.

    (b) Si $1 \leq p_i < \infty$ $(i = 1,2,3)$ són tals que

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{1}{p_i} = 1,$$

    proveu que per a $f_i \in L^{p_i}$, $i = 1,2,3$

$$\|f_1 f_2 f_3\|_1 \leq \|f_1\|_{p_1} \|f_2\|_{p_2} \|f_3\|_{p_3}.$$

    (c) Si $p < 1/3$, demostreu que $\frac{1}{|x(1-x)(2-x)|^p} \in L^1(0,2)$.

62. Siguin $f_1, \ldots, f_p \in L^1$. Demostreu que

$$\left(\sum_{k=1}^{p} \left| \int f_k \right|^2 \right)^{1/2} \leq \int \left(\sum_{k=1}^{p} |f_k|^2 \right)^{1/2}.$$

Ajuda: multipliqueu i dividiu f_k per

$$\sqrt[4]{\sum_{i=1}^{p} |f_i|^2}.$$

63. Discutiu, segons el paràmetre, si les següents funcions són o no de $L^p(0,\infty)$.

    (a) x^a.

    (b) e^{ax}.

    (c) $|\log x|^a$.

64. Donada $f \in L^2(E)$ i $F_n \subset E$ tals que $\lim_{n\to\infty} \mu(F_n) = 0$, proveu que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\mu(F_n)}} \int_{F_n} |f| \, \mathrm{d}\mu = 0.$$

65. El producte de dues funcions de L^2 és de L^1? I el producte de dues de L^1, és de L^1?

66. Sigui $(X, \mathcal{X}, \mu)$ un espai de mesura finita i sigui f una funció mesurable. Considerem $E_n = \{x \in X | n-1 \leq |f(x)| < n\}$. Demostreu que $f \in L^1$ si, i només si,

$$\sum_{n\geq 1} n\mu(E_n) < \infty$$

Més generalment, $f \in L^p$ si, i només si,

$$\sum_{n\geq 1} n^p \mu(E_n) < \infty$$

67. Sigui $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}(1+|\log x|)}$. Demostreu que $f \in L^p(0,\infty)$ si, i només si, $p = 2$.

68. Siguin $f \in L^p$, $1 \leq p \leq \infty$ i $g \in L^\infty$. Demostreu que el producte és de L^p i que la norma del producte és menor o igual que el producte de normes.

69. Sigui $(X, \mathcal{X}, \mu)$ un espai de mesura finita i $1 \leq p < \infty$. Sigui φ una funció contínua de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ tal que existeixen $K, M > 0$ de manera que $|\varphi(t)| \leq K|t|$ si $|t| \geq M$. Proveu que si $f \in L^p(X)$ llavors també $\varphi \circ f \in L^p(X)$. Cerqueu un contraexemple que demostri que el resultat és fals si φ no satisfà la condició esmentada sobre el seu comportament asimptòtic.

70. Considereu la funció

$$f(x,y) = \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}$$

en el quadrat $\Delta = [-1,1] \times [-1,1]$. Demostreu que

$$\int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} f(x,y) \; dy \; dx = \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} f(x,y) \; dx \; dy,$$

tot i que f no és integrable Lebesgue en Δ (useu coordenades polars).

71. Considereu la funció

$$f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

definida en $\Delta = [0,1] \times [0,1]$. Demostreu que les integrals iterades són diferents.

72. (a) Calculeu $\dfrac{\partial \phi}{\partial x}, \dfrac{\partial \phi}{\partial y}$ en els casos següents:

    i. $\phi(x,y) = \displaystyle\int_1^x e^{ty} \; \mathrm{d}t.$

    ii. $\phi(x,y) = \displaystyle\int_0^x \cos(ty) \; \mathrm{d}t.$

    iii. $\phi(x,y) = \displaystyle\int_1^x e^{y-t} \; \mathrm{d}t.$

    iv. $\phi(x,y) = \displaystyle\int_y^x e^{xyt} \; \mathrm{d}t.$

(b) En els tres primers exercicis comproveu els resultats obtinguts calculant les integrals i derivant.

73. Comproveu, fent les integrals, que es pot canviar l'ordre d'integració per a la funció $f(x,y) = y\sin(xy)$ definida a $[0,1]\times[0,\pi/2]$.

74. Comproveu que la funció
$$\phi(x) = \int_0^x f(t)\sin(x-t)\ \mathrm{d}t$$
satisfà l'equació $y'' + y = f(x)$, essent f una funció contínua.

75. Un mètode per calcular la integral de Gauss.
Es consideren les funcions:
$$f(x) = \left[\int_0^x e^{-t^2}\ \mathrm{d}t\right]^2 \qquad\qquad g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\ \mathrm{d}t$$

(a) Comproveu que $f(x) + g(x) =$ constant i determineu-la.

(b) Proveu que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

(c) Deduïu que $\lim\limits_{x\to+\infty} \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\ \mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

76. Calculeu:
$$\text{i)}\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_1^2 \frac{\sin tx}{t}\ \mathrm{d}t \qquad \text{ii)}\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{x^2}^{x^3} \frac{\sin tx}{t}\ \mathrm{d}t$$

77. Calculeu $F(x) = \displaystyle\int_0^b t^2\cos(tx)\ \mathrm{d}t$ derivant la funció $f(x) = \displaystyle\int_0^b \cos(tx)\ \mathrm{d}t$.

78. Demostreu que, si $0 < a \le b$,
$$\int_0^{+\infty} \left(e^{-a^2/x^2} - e^{-b^2/x^2}\right)\ \mathrm{d}x = \sqrt{\pi}(b-a).$$
Ajuda: noteu que els dos membres són iguals si $a = b$ i proveu que les derivades respecte a a coincideixen; Recordeu també el resultat
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\ \mathrm{d}x = \sqrt{\pi}.$$

79. Sigui $p > a, b > 0$. Calculeu
$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{x} e^{-px}\ \mathrm{d}x.$$

80. Sabent que per a tot $r \in \mathbb{R}$
$$\int_0^{\infty} e^{-ax}\cos rx\ \mathrm{d}x = \frac{a}{a^2+r^2}, \quad a > 0,$$
calculeu
$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-bx} - e^{-cx}}{x}\cos rx\ \mathrm{d}x \quad b, c > 0.$$

81. Producte de convolució.
Definició: Siguin f i g funcions reals de variable real, s'anomena producte de convolució $f*g$ a la funció definida per:
$$(f*g)(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(x-\tau)\ \mathrm{d}\tau$$
en cas que aquesta integral existeixi.
Es consideren f i g de $L^1(\mathbb{R})$ i, a més, g contínua i fitada a $\mathbb{R}$. Demostreu que:
    (a) $f*g$ existeix $\forall x\in R$.
    (b) $f*g$ està fitada.
    (c) $f*g$ és contínua.
    (d) $f*g$ és absolutament integrable.
    (e) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}(f*g)(x)\ \mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ \mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\ \mathrm{d}x$
    (f) $f*g=g*f$

82. L'objectiu d'aquest problema és demostrar que no existeix element neutre per al producte de convolució de les funcions integrables Lebesgue. El procediment serà suposar que existeix un element neutre $\delta(x)$ i arribar a contradicció. Sigui doncs $\delta(x)$ tal que
$$\delta*f=f*\delta=f\quad\forall f\in L^1$$
    (a) Veieu que
    $$\int_E\delta(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}1 & \text{si}\quad 0\in E,\\ 0 & \text{si}\quad 0\notin E,\end{cases}$$
    per a tot E de mesura finita.
    (b) Considereu $E'=\{x\in\mathbb{R}\ \mid\ \delta(x)>0\}$. Demostreu que
    $$\int_{E'}\delta(x)\mathrm{d}x=0.$$
    Indicació: Escriviu $E'=\lim_{n\to\infty}E_n$, on $E_n=\{x\in R\ \mid\ 0<\|x\|\le n,\ \delta(x)>0\}$.
    (c) Anàlogament, veieu que si $F'=\{x\in R\ \mid\ \delta(x)<0\}$, aleshores
    $$\int_{F'}\delta(x)\mathrm{d}x=0.$$
    (d) D'aquí es pot concloure que $\delta(x)=0$ gairebé arreu. Arribeu a contradicció usant aquest fet.

83. Es considera les funcions
$$f(t)=\begin{cases}\sin t & \text{si } t\ge 0\\ 0 & \text{altrament}\end{cases}\qquad g(t)=\begin{cases}t & \text{si } t\ge 0\\ 0 & \text{altrament}\end{cases}$$
$$F(s)=\textstyle\int_0^{+\infty}e^{-st}\sin t\ \mathrm{d}t\qquad G(s)=\int_0^{+\infty}e^{-st}t\ \mathrm{d}t$$
    (a) Calculeu $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-st}(f*g)(t)\ \mathrm{d}t$, amb $s>0$.
    (b) Comproveu que el resultat anterior coincideix amb $F(s)\cdot G(s)$.

Comentari: $F(s)$ és la transformada de Laplace de $f(t)$.

84. Suposem que tant $f(x)$ com $g(x) = xf(x)$ són funcions de $L^1(\mathbb{R})$. Definim la transformada de Fourier de f com
$$\hat{f}(\xi) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\xi x}\, dx, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$
Proveu que $\hat{f}$ és derivable i que $(\hat{f})'(\xi) = -i\hat{g}(\xi)$.

85. Donada $f : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ suposem que la transformada de Laplace de f, $\mathcal{F}$, definida per
$$\mathcal{F}(s) := \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt,$$
està ben definida per $s > s_0$, $s_0 \geq 0$. És a dir, $f(t)e^{-st} \in L^1(0, +\infty)$ per $s \in (s_0, +\infty)$.
Justifiqueu, mitjançant derivació sota el signe integral, que $\mathcal{F}'(s)$ també existeix per $s > s_0$ i que, en aquest cas,
$$\mathcal{F}'(s) = -\int_0^{+\infty} tf(t)\, e^{-st}\, dt.$$

86. **La funció Γ.**
Una de les funcions més importants de l'anàlisi és la funció Γ
$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1}\, \mathrm{d}t.$$
   (a) Demostreu que la integral impròpia està definida per a $x > 0$.
   (b) Demostreu que Γ és contínua a l'interval $(0, +\infty)$.
   (c) Demostreu que Γ és derivable i que la seva derivada val
   $$\Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} \ln t\, \mathrm{d}x.$$
   (d) Apliqueu integració per parts per a demostrar que
   $$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$
   (e) Demostreu que $\Gamma(1) = 1$ i per tant $\Gamma(n) = (n-1)!$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.
   (f) Utilitzeu el problema 75 per a obtenir $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

87. (a) Deduïu la següent expressió de la derivada de la funció Γ.
   $$\Gamma^{(n)}(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} (\ln t)^n\, \mathrm{d}t \qquad x > 0.$$
   (b) Proveu que aquesta fórmula es pot escriure, per a $x = 1$, com
   $$\Gamma^{(n)}(1) = \int_0^1 \left(t^2 + (-1)^n e^{t-\frac{1}{t}}\right) e^{-t} t^{-2} (\ln t)^n\, \mathrm{d}t.$$
   (c) Demostreu que $\Gamma^{(n)}(1)$ té el mateix signe que $(-1)^n$.

88. **La funció Beta.**
Si $m > 0$ i $n > 0$, es defineix la funció Beta per

$$\mathrm{B}(m,n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\ \mathrm{d}x.$$

(a) Demostreu que

$$\mathrm{B}(m,n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

Indicació: Considereu $G(t) = \displaystyle\int_0^t x^{m-1}(t-x)^{n-1}dx$, apliqueu transformades de Laplace i finalment feu $s = 1$.

(b) Demostreu que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m-1}\theta \cos^{2n-1}\theta\ \mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\mathrm{B}(m,n).$$

Tema 4: La mesura de Lebesgue

1. Sigui $A \in \mathbb{R}^p$ mesurable amb $m(A) < +\infty$ i sigui $A \subset B$. Demostreu que $m^*(B - A) = m^*(B) - m^*(A)$.

2. Sigui $S \subset \mathbb{R}$ un conjunt fitat tal que $m^*(S) > 0$. Demostreu que la funció
$$f(t) = m^*\left(S \cap (-t, t)\right)$$
és contínua. Deduïu que qualsevol $x \in \mathbb{R}$ és el punt mig d'un interval obert $I = (a, b)$ tal que
$$m^*(S \cap I) = m^*(S \cap I^c) = \frac{1}{2} m^*(S).$$

3. Sigui
$$\{q_1, q_2, \ldots, q_n, \ldots\} = \mathbb{Q}$$
una enumeració del racionals i
$$G = \bigcup_{n=1}^{+\infty} G_n, \quad G_n = \left(q_n - \frac{1}{n^2}, q_n + \frac{1}{n^2}\right).$$
Proveu que $m(G) < +\infty$ i que per a cada conjunt tancat $F \in \mathbb{R}$ es verifica $m(G \Delta F) > 0$.

4. Considerem $X = (0, \infty)$ i l'espai de mesura $(X, \mathcal{M}_X, \mu_X)$. Siguin les funcions
$$f(x) = x \qquad f_n(x) = \frac{n-1}{n} x, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$
   (a) Proveu que $f_n \longrightarrow f$ g.a. puntualment.
   (b) Proveu que $\{f_n\}$ no convergeix gairebé uniformement vers f. *($\forall \varepsilon > 0$, $\exists P \subset X$ de manera que $\mu(X - P) < \varepsilon$ i $f_n \longrightarrow f$ uniformement a P.)*

5. Proveu que si f és mesurable i $g = f$ g.a., aleshores g és mesurable.

6. Sigui $A \in \mathbb{R}$ el subconjunt dels reals que són de la forma
$$n + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon_k}{2^{2k}},$$
on n és un enter i $\varepsilon_k \in \{0, 1\}$. Demostreu que A és un conjunt nul i que existeixen conjunts nuls A, B de $\mathbb{R}$ tals que $A + B = \mathbb{R}$.

7. Demostreu que el conjunt de Cantor és un compacte no buit, sense punts interiors i sense punts aïllats, no numerable i nul.

8. Demostreu que hi ha conjunts de $\mathbb{R}$ que no són Lebesgue-mesurables.

9. Proveu que si $E \in \mathbb{R}$ és mesurable i $m(E) > 0$, existeix un compacte $K \subset E$ i un obert G, $K \subset G$, tals que $m(G - K) < m(K)$. Demostreu que el conjunt
$$\hat{E} = \{x - y \mid x, y \in E\}$$
conté $(-\delta, \delta)$, on $\delta > 0$ ve definit per
$$\delta = \inf\{|x - y| \mid x \in K, y \in G^c\}.$$

10. Sigui $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funció mesurable que verifica l'equació funcional
$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$
per a tot $x, y \in \mathbb{R}$. Demostreu que f és contínua i que, per tant, és de la forma
$$f(x) = \alpha x, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$