Anàlisi Real – notes ampliades del curs
Capítol 4: Teoria de la mesura i integral de Lebesgue
Prova del teorema de Riesz-Fischer

En aquesta nota demostrarem el resultat fonamental d'espais L^p:

Teorema 1 (Riesz-Fischer)**.** *Sigui* $1 \leq p < \infty$. *Aleshores* $(L^p, \|\cdot\|_p)$ *és un espai complet.*

Veguem la prova. Prenem una successió de Cauchy $\{f_n\}_{n\geq 1}$ dins de L^p, i volem veure que té límit i que aquest és un element de L^p. Sabem doncs que, per tot $\varepsilon > 0$ existeix un índex $n_0 := n_0(\varepsilon)$ tal que si $n, m \geq n_0$ aleshores $\|f_n - f_m\|_p < \varepsilon$.

Anem a triar diferents valors de ε. Per $\varepsilon = 1/2$. Sigui $N_1 := n_0(1/2)$. Aleshores si $n > N_1$,

$$\|f_n - f_{N_1}\|_p < \frac{1}{2}.$$

Ara prenem $\varepsilon = 1/4 = 1/2^2$ i considerem $n > N_2 > N_1$ pel qual

$$\|f_n - f_{N_2}\|_p < \frac{1}{4}.$$

En general, considerem doncs $1/2^k$, i $n > N_k > \cdots > N_1$ pels quals

$$\|f_n - f_{N_k}\|_p < \frac{1}{2^k}.$$

Així doncs, considerem la subsuccessió $\{f_{N_k}\}_{k\geq 1}$. Observeu que, per la suma telescòpica, $f_{N_k}(x) = f_{N_1}(x) + \sum_{j=1}^{k-1}(f_{N_{j+1}}(x) - f_{N_j}(x))$. Definim ara també

$$g_k(x) = |f_{N_1}(x)| + \sum_{j=1}^{k-1} |f_{N_{j+1}}(x) - f_{N_j}(x)|.$$

Definim $g(x)$ com els límit puntuals de l'anterior successió. Observeu que, a priori, aquests límit pot NO existir per moltres tries de x (a priori, podria passar que per cert valors de x, $\lim_k g_k(x)$ no existís). Això ho arreglarem veiem que això passarà amb mesura 0.

Per a veure-ho usarem un argument indirecte.

(1) $g \in L^p$: Com $g_k(x) = |f_{N_1}(x)| + \sum_{j=1}^{k-1} |f_{N_{j+1}}(x) - f_{N_j}(x)|$, podem usar la desigualtat de Minkowski i

$$\|g_k\|_p \leq \|f_{N_1}\|_p + \sum_{j=1}^{k-1} \|f_{N_{j+1}} - f_{N_j}\|_p \leq \|f_{N_1}\|_p + \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{2^j} \leq \|f_{N_1}\|_p + 1,$$

i això és cert per tot valor de k. Per altra banda, $|g_k(x)|^p \leq |g_{k+1}(x)|^p$ (ja que es sumen més termes positius), i per tant, pel teorema de la convergència monòtona:

$$\int |g(x)|^p\,dx = \int \lim |g_k(x)|^p\,dx \overset{TCM}{=} \lim \int |g_k(x)|^p\,dx < (\|f_{N_1}\|_p + 1)^p < \infty.$$

Això el que diu, a més, és que el conjunt de punts x on $|g(x)| < \infty$ té mesura 0: altrament la intergral no seria finita. Per tant, $|g(x)| = g(x)$ convergeix gairebé arreu.

Considerem ara $\lim_k f_{N_k}(x) := f(x)$. Tenim ara el següent:.

(2) f convergeix gairebé arreu: per cada x tenim que

$$|f_{N_n}(x) - f_{N_m}(x)| \leq |f_{N_n}(x) - f_{N_{n-1}}(x)| + \cdots + |f_{N_{m+1}}(x) - f_{N_m}(x)| \leq g_{n-1}(x) - g_{m-1}(x) = |g_{n-1}(x) - g_{m-1}(x)|.$$

Per tant, en els punts on hi ha convergència de $g(x)$ (que és gairebé arreu) podem afirmar que $\{f_{N_k}(x)\}_{k\geq 1}$ és una successió de Cauchy i que per tant, gairebé arreu, el límit existeix. Aquest límit és doncs $f(x)$.

(3) $f \in L^p$**:** en vista de l'anterior, f està definida gairebé arreu. Aleshores, com hem vist que $g \in L^p$, ara tenim que $|f| \leq |g| = g \in L^p$. Això ens diu que $\|f\|_p \leq \|g\|_p < \infty$.

Ara ja tenim gairebé tots els ingredients que ens feien falta. Totes les afirmacions que vindran ara són gairebé arreu, ja que s'hereten del que hem fet abans.

Observeu que per tot x,

$$|f(x) - f_{N_k}(x)|^p \leq (2 \max\{|f(x)|, |f_{N_k}(x)|\})^p \leq 2^p |f(x)|^p + 2^p |f_{N_k}(x)|^p \leq 2^{p+1} |g(x)|^p$$

Per tant, la funció $2^{p+1}|g(x)|^p$ domina a $\{|f(x) - f_{N_k}(x))|^p\}_{k\geq 1}$ i per tant podem aplicar el TCD. En efecte, tenim per una banda que $\lim |f(x) - f_{N_k}(x)|^p = 0$ gairebé arreu, i per tant

$$0 = \int 0\, dx = \int \lim_k |f(x) - f_{N_k}(x)|^p\, dx \stackrel{TCD}{=} \lim_k \int |f(x) - f_{N_k}(x)|^p\, dx = \lim_k \|f - f_{N_k}\|_p^p$$

i, per tant, hem vist que $\lim_k \|f - f_{N_k}\|_p = 0$. Ara només ens falta acabar-ho de lligar per a veure que el límit de les f_n també és f. Sigui $\varepsilon > 0$, volem veure que per n prou gran $\|f_n - f\|_p < \varepsilon$. Comencem ja dient que n serà més grossa que $n_0(\varepsilon/2)$ que dóna la condició de Cauchy.

Per acabar-ho de rematar,, usem la desigualtat triangular.

$$\|f_n - f\|_p \leq \|f_n - f_m\|_p + \|f_m - f\|_p,$$

i ara cal triar m amb astúcia. Com ho fem? si triem m de la forma N_k, per k prou gran, tindrem que $\|f - f_{N_k}\|_p < \varepsilon/2$ (limit), mentre que pel fet de ser una successió de Cauchy, $\|f_n - f_m\|_p < \varepsilon/2$.

Per tant la suma és més petita que ε, que és el que voliem, i per tant f és el límit de la successió $\{f_n\}_{n\geq 1}$ quan ho mesurem tot plegat amb la norma L^p.