CONJUNTOS MEDIBLES JORDAN

Curso 2019-2020

Camille Jordan
1838-1822

Henri L. Lebesgue
1875-1941

Conjuntos medibles Jordan

Si $A \subset \mathbb{R}^n$, denominaremos **función característica de A** a $\chi_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $\chi_A(x) = 1$ si $x \in A$ y $\chi_A(x) = 0$ si $x \notin A$.

- Si $A \subset \mathbb{R}^n$, entonces $\{x \in \mathbb{R}^n : \chi_A \text{ no es continua en } x\} = \partial A$
- Si A es acotado y R es un rectángulo cerrado tal que $A \subset R$, entonces $\chi_A \in \mathscr{R}(R)$ sii ∂A tiene contenido nulo.
- Diremos que $A \subset \mathbb{R}^n$ es **medible Jordan** si es acotado y su frontera tiene contenido nulo (o medida nula).

  $\mathfrak{J}(\mathbb{R}^n) \equiv$ conjunto de los subconjuntos medibles Jordan de $\mathbb{R}^n$.

  Si $A \in \mathfrak{J}(\mathbb{R}^n)$, denominamos **volumen de A** a $\mathrm{v}(A) = \displaystyle\int_R \chi_A$, donde R es cualquier rectángulo cerrado que contiene a A.

Conjuntos medibles Jordan

1. Si R es un rectángulo, $R \in \mathfrak{J}(\mathbb{R}^n)$.
2. Completitud: Todo subconjunto de contenido nulo es medible Jordan.
3. Invariancia por difeomorfismos: Si $A \in \mathfrak{J}(\mathbb{R}^n)$, $F\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es un difeomorfismo de clase $\mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ y $\bar{A} \subset \Omega$, entonces $F(A) \in \mathfrak{J}(\mathbb{R}^n)$.
4. Estabilidad: Si $A, B \in \mathfrak{J}(\mathbb{R}^n)$ entonces $A \cup B, A \cap B, A \setminus B \in \mathfrak{J}(\mathbb{R}^n)$.
5. Compatibilidad geométrica: Si $A \in \mathfrak{J}(\mathbb{R}^k)$ y $B \in \mathfrak{J}(\mathbb{R}^m)$, entonces $A \times B \in \mathfrak{J}(\mathbb{R}^{k+m})$. Si $C \in \mathfrak{J}(\mathbb{R}^{k+m})$ entonces $C_x \in \mathfrak{J}(\mathbb{R}^m)$ c.s. en $\mathbb{R}^k$ y $C_y \in \mathfrak{J}(\mathbb{R}^k)$ c.s. en $\mathbb{R}^m$.
6. Compatibilidad topológica: Si $A \in \mathfrak{J}(\mathbb{R}^n)$ entonces $\mathring{A}, \bar{A}, \partial A \in \mathfrak{J}(\mathbb{R}^n)$. Más aún, si $\mathring{A} \subset B \subset \bar{A}$, entonces $B \in \mathfrak{J}(\mathbb{R}^n)$.
7. Continuidad en abiertos: Si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es abierto y no vacío, existe una sucesión $\{\Omega_k\}_{k=1}^{\infty}$ de abiertos medibles Jordan tal que $\Omega = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \Omega_k$ y $\bar{\Omega}_k \subset \Omega_{k+1} \subset \Omega$, para cada $k \in \mathbb{N}^*$.

Volumen de conjuntos medibles Jordan

1. Positividad: Si $A \in \mathfrak{J}(\mathbb{R}^n)$, entonces $\mathsf{v}(A) \geq 0$ y $\mathsf{v}(A) = 0$ sii A tiene contenido nulo.

Volumen de conjuntos medibles Jordan

1. Positividad: Si $A \in \mathfrak{J}(\mathbb{R}^n)$, entonces $\mathsf{v}(A) \geq 0$ y $\mathsf{v}(A) = 0$ sii A tiene contenido nulo.
2. Monotonía: Si $A, B \in \mathfrak{J}(\mathbb{R}^n)$ y $A \subset B$, entonces $\mathsf{v}(A) \leq \mathsf{v}(B)$ con igualdad sii $B \setminus A$ tiene contenido nulo. Por tanto, si $C \in \mathbb{R}^n$ es tal que $A \subset C \subset B$ y $\mathsf{v}(A) = \mathsf{v}(B)$, entonces $C \in \mathfrak{J}(\mathbb{R}^n)$ y además $\mathsf{v}(C) = \mathsf{v}(A) = \mathsf{v}(B)$.

Volumen de conjuntos medibles Jordan

1. Positividad: Si $A \in \mathfrak{J}(\mathbb{R}^n)$, entonces $\mathsf{v}(A) \geq 0$ y $\mathsf{v}(A) = 0$ sii A tiene contenido nulo.
2. Monotonía: Si $A, B \in \mathfrak{J}(\mathbb{R}^n)$ y $A \subset B$, entonces $\mathsf{v}(A) \leq \mathsf{v}(B)$ con igualdad sii $B \setminus A$ tiene contenido nulo.
3. Invariancia por isomorfismos: Si $F\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es un isomorfismo con matriz asociada M y $A \in \mathfrak{J}(\mathbb{R}^n)$ con $\bar{A} \subset \Omega$, entonces $\mathsf{v}\big(F(A)\big) = |\det \mathsf{M}|\mathsf{v}(A)$.

Volumen de conjuntos medibles Jordan

1. Positividad: Si $A \in \mathfrak{J}(\mathbb{R}^n)$, entonces $\mathsf{v}(A) \geq 0$ y $\mathsf{v}(A) = 0$ sii A tiene contenido nulo.
2. Monotonía: Si $A, B \in \mathfrak{J}(\mathbb{R}^n)$ y $A \subset B$, entonces $\mathsf{v}(A) \leq \mathsf{v}(B)$ con igualdad sii $B \setminus A$ tiene contenido nulo.
3. Invarianza por isomorfismos: Si $F\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es un isomorfismo con matriz asociada M y $A \in \mathfrak{J}(\mathbb{R}^n)$ con $\bar{A} \subset \Omega$, $\mathsf{v}\big(F(A)\big) = |\det \mathsf{M}|\mathsf{v}(A)$.
4. Compatibilidad geométrica: Si $A \in \mathfrak{J}(\mathbb{R}^k)$ y $B \in \mathfrak{J}(\mathbb{R}^m)$, $\mathsf{v}_{k+m}(A \times B) = \mathsf{v}_k(A)\mathsf{v}_m(B)$.

Volumen de conjuntos medibles Jordan

1. Positividad: Si $A \in \mathfrak{J}(\mathbb{R}^n)$, entonces $\mathsf{v}(A) \geq 0$ y $\mathsf{v}(A) = 0$ sii A tiene contenido nulo.
2. Monotonía: Si $A, B \in \mathfrak{J}(\mathbb{R}^n)$ y $A \subset B$, entonces $\mathsf{v}(A) \leq \mathsf{v}(B)$ con igualdad sii $B \setminus A$ tiene contenido nulo.
3. Invariancia por isomorfismos: Si $F\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es un isomorfismo con matriz asociada M y $A \in \mathfrak{J}(\mathbb{R}^n)$ con $\bar{A} \subset \Omega$, $\mathsf{v}\big(F(A)\big) = |\det \mathsf{M}|\mathsf{v}(A)$.
4. Compatibilidad geométrica: Si $A \in \mathfrak{J}(\mathbb{R}^k)$ y $B \in \mathfrak{J}(\mathbb{R}^m)$, $\mathsf{v}_{k+m}(A \times B) = \mathsf{v}_k(A)\mathsf{v}_m(B)$.
5. Compatibilidad topológica: Si $A \in \mathfrak{J}(\mathbb{R}^n)$ y $\mathring{A} \subset B \subset \bar{A}$, entonces $\mathsf{v}(B) = \mathsf{v}(A)$. En particular, $\mathsf{v}(\mathring{A}) = \mathsf{v}(A) = \mathsf{v}(\bar{A})$.

Volumen de conjuntos medibles Jordan

1. Positividad: Si $A \in \mathfrak{J}(\mathbb{R}^n)$, entonces $\mathsf{v}(A) \geq 0$ y $\mathsf{v}(A) = 0$ sii A tiene contenido nulo.
2. Monotonía: Si $A, B \in \mathfrak{J}(\mathbb{R}^n)$ y $A \subset B$, entonces $\mathsf{v}(A) \leq \mathsf{v}(B)$ con igualdad sii $B \setminus A$ tiene contenido nulo.
3. Invariancia por isomorfismos: Si $F\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es un <u>isomorfismo</u> con matriz asociada M y $A \in \mathfrak{J}(\mathbb{R}^n)$ con $\bar{A} \subset \Omega$, $\mathsf{v}\big(F(A)\big) = |\det \mathsf{M}|\mathsf{v}(A)$.
4. Compatibilidad geométrica: Si $A \in \mathfrak{J}(\mathbb{R}^k)$ y $B \in \mathfrak{J}(\mathbb{R}^m)$, $\mathsf{v}_{k+m}(A \times B) = \mathsf{v}_k(A)\mathsf{v}_m(B)$.
5. Compatibilidad topológica: Si $A \in \mathfrak{J}(\mathbb{R}^n)$ y $\mathring{A} \subset B \subset \bar{A}$, entonces $\mathsf{v}(B) = \mathsf{v}(A)$. En particular, $\mathsf{v}(\mathring{A}) = \mathsf{v}(A) = \mathsf{v}(\bar{A})$.
6. Aditividad Finita: Si $A_1, \dots, A_m \in \mathfrak{J}(\mathbb{R}^n)$ son tales que $\mathring{A}_i \cap \mathring{A}_j = \emptyset$ si $i \neq j$ y $A = \bigcup\limits_{j=1}^{m} A_j$, entonces $\mathsf{v}(A) = \sum\limits_{j=1}^{m} \mathsf{v}(A_j)$.

Volumen de conjuntos medibles Jordan

1. Continuidad: Si $A \subset \mathfrak{J}(\mathbb{R}^n)$, para cada sucesión $\{A_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathfrak{J}(\mathbb{R}^n)$ tal que $A_k \subset A_{k+1}$ y $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ se satisface que $\mathsf{v}(A_k) \uparrow \mathsf{v}(A)$.

   Análogamente, si $B \subset \mathfrak{J}(\mathbb{R}^n)$, para cada sucesión $\{B_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathfrak{J}(\mathbb{R}^n)$ tal que $B_{k+1} \subset B_k$ y $B = \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k$ se satisface que $\mathsf{v}(B_k) \downarrow \mathsf{v}(B)$.

Volumen de conjuntos medibles Jordan

1. Continuidad: Si $A \subset \mathfrak{J}(\mathbb{R}^n)$, para cada sucesión $\{A_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathfrak{J}(\mathbb{R}^n)$ tal que $A_k \subset A_{k+1}$ y $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ se satisface que $\mathsf{v}(A_k) \uparrow \mathsf{v}(A)$.
   Análogamente, si $B \subset \mathfrak{J}(\mathbb{R}^n)$, para cada sucesión $\{B_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathfrak{J}(\mathbb{R}^n)$ tal que $B_{k+1} \subset B_k$ y $B = \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k$ se satisface que $\mathsf{v}(B_k) \downarrow \mathsf{v}(B)$.
2. Regularidad: Si $A \in \mathfrak{J}(\mathbb{R}^n)$, para cada $\varepsilon > 0$ existen $G \in \mathfrak{J}(\mathbb{R}^n)$ unión <u>finita</u> de rectángulos abiertos y $K \in \mathfrak{J}(\mathbb{R}^n)$ unión <u>finita</u> de rectángulos cerrados tales que $K \subset \overset{\circ}{A} \subset A \subset \bar{A} \subset G$ y $\mathsf{v}(G \setminus K) \leq \varepsilon$.

Integración en conjuntos medibles Jordan

Sea $A \in \mathfrak{J}(\mathbb{R}^n)$ y R un rectángulo tal que $A \subset R$. Si $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ está <u>acotada</u> definimos $f^*\colon R \longrightarrow \mathbb{R}$ su extensión a R por 0 fuera de A

Integración en conjuntos medibles Jordan

Sea $A \in \mathfrak{J}(\mathbb{R}^n)$ y R un rectángulo tal que $A \subset R$. Si $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ está acotada definimos $f^*\colon R \longrightarrow \mathbb{R}$ su extensión a R por 0 fuera de A

- $f^*(x) = f(x)$, si $x \in A$, $f^*(x) = 0$ si $x \in R \setminus A$

Integración en conjuntos medibles Jordan

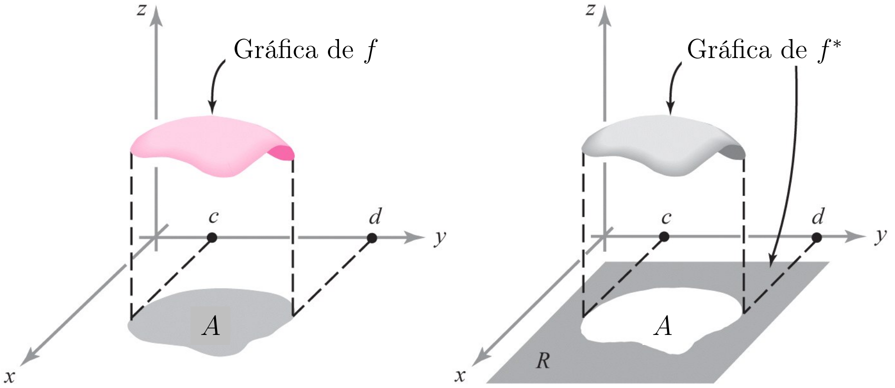
Sea $A \in \mathfrak{J}(\mathbb{R}^n)$ y R un rectángulo tal que $A \subset R$. Si $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ está acotada definimos $f^*\colon R \longrightarrow \mathbb{R}$ su extensión a R por 0 fuera de A

- $f^*(x) = f(x)$, si $x \in A$, $f^*(x) = 0$ si $x \in R \setminus A$ $\quad \Longrightarrow f^* = f\chi_A$

Integración en conjuntos medibles Jordan

Sea $A \in \mathfrak{J}(\mathbb{R}^n)$ y R un rectángulo tal que $A \subset R$. Si $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ está <u>acotada</u> definimos $f^*\colon R \longrightarrow \mathbb{R}$ su extensión a R por 0 fuera de A

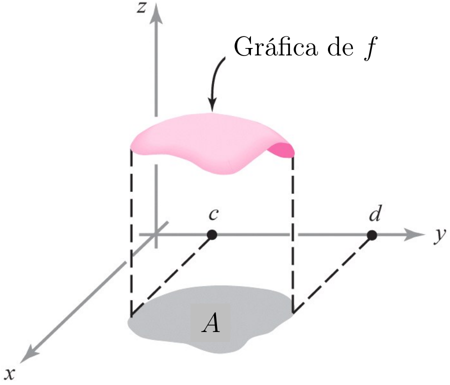
- $f^*(x) = f(x)$, si $x \in A$, $f^*(x) = 0$ si $x \in R \setminus A$ $\quad \Longrightarrow f^* = f\chi_A$

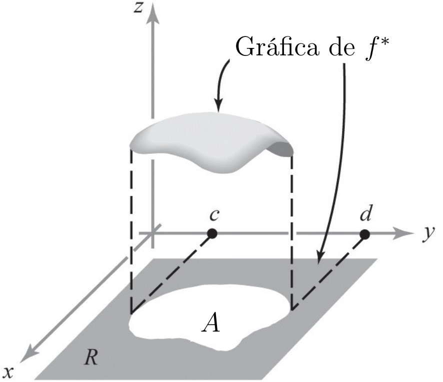


Integración en conjuntos medibles Jordan

Sea $A \in \mathfrak{J}(\mathbb{R}^n)$ y R un rectángulo tal que $A \subset R$. Si $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ está acotada definimos $f^* : R \longrightarrow \mathbb{R}$ su extensión a R por 0 fuera de A

- f es integrable en A sii $f^* \in \mathscr{R}(R)$ y entonces $\displaystyle\int_A f = \int_R f^*$

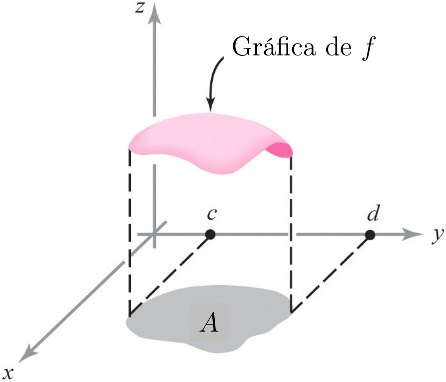


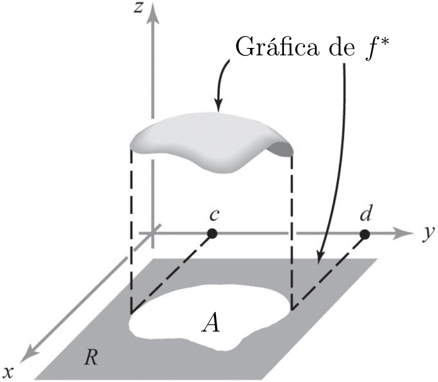


Criterio de Lebesgue

Sea $A \in \mathfrak{J}(\mathbb{R}^n)$ y R un rectángulo tal que $A \subset R$. Si $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ está acotada definimos $f^*\colon R \longrightarrow \mathbb{R}$ su extensión a R por 0 fuera de A

- $f \in \mathscr{R}(A)$ sii es acotada y continua c.s. en A





Propiedades de la integral

Sean $A \subset \mathfrak{J}(\mathbb{R}^n)$ y $\mathscr{R}(A)$ el conjunto de funciones integrables en A.

1. Linealidad: $\mathscr{R}(A)$ es un espacio vectorial real que contiene a $\mathscr{C}^b(A)$ y la integral un funcional lineal sobre él: Si $f, g \in \mathscr{R}(A)$, para cada $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\alpha f + \beta g \in \mathscr{R}(A)$ y $\displaystyle\int_A (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_A f + \beta \int_A g$.

   Además, sobre el conjunto de funciones constantes en A, la integral coincide con la multiplicación por $\mathsf{v}(A)$.

Propiedades de la integral

Sean $A \subset \mathfrak{J}(\mathbb{R}^n)$ y $\mathscr{R}(A)$ el conjunto de funciones integrables en A.

1. Linealidad: $\mathscr{R}(A)$ es un espacio vectorial real que contiene a $\mathscr{C}^b(A)$ y la integral un funcional lineal sobre él.
2. Estabilidad: Si $\mathscr{O}\colon \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua, entonces para cada $f_1, \dots, f_m \in \mathscr{R}(A)$ se satisface que $\mathscr{O}(f_1, \dots, f_m) \in \mathscr{R}(A)$. En particular, $|f|, f^2 \in \mathscr{R}(A)$ cuando $f \in \mathscr{R}(A)$ y $fg, \max\{f, g\}, \min\{f, g\} \in \mathscr{R}(A)$, para cada $f, g \in \mathscr{R}(A)$.

Propiedades de la integral

Sean $A \subset \mathfrak{J}(\mathbb{R}^n)$ y $\mathscr{R}(A)$ el conjunto de funciones integrables en A.

1. Linealidad: $\mathscr{R}(A)$ es un espacio vectorial real que contiene a $\mathscr{C}^b(A)$ y la integral un funcional lineal sobre él.
2. Estabilidad: Si $\mathscr{O}\colon \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua, entonces para cada $f_1, \ldots, f_m \in \mathscr{R}(A)$ se satisface que $\mathscr{O}(f_1, \ldots, f_m) \in \mathscr{R}(A)$.
3. Valor medio: Si $\emptyset \neq A$ es conexo y $f \in \mathscr{C}^b(A)$, existe $a \in A$ tal que $\displaystyle\int_A f = f(a)\mathsf{v}(A)$.

Propiedades de la integral

Sean $A \subset \mathfrak{J}(\mathbb{R}^n)$ y $\mathscr{R}(A)$ el conjunto de funciones integrables en A.

1. Linealidad: $\mathscr{R}(A)$ es un espacio vectorial real que contiene a $\mathscr{C}^b(A)$ y la integral un funcional lineal sobre él.
2. Estabilidad: Si $\mathscr{O}\colon \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua, entonces para cada $f_1, \dots, f_m \in \mathscr{R}(A)$ se satisface que $\mathscr{O}(f_1, \dots, f_m) \in \mathscr{R}(A)$.
3. Positividad: La integral es un funcional positivo sobre $\mathscr{R}(A)$; es decir, si $f \in \mathscr{R}(A)$ y $f \geq 0$ c.s. en A, entonces $\displaystyle\int_A f \geq 0$.
4. Monotonía: Si $f, g \in \mathscr{R}(A)$ y $f \leq g$ c.s. en A, entonces $\displaystyle\int_A f \leq \int_A g$.

   En particular, si $f \in \mathscr{R}(A)$, entonces $\displaystyle\left|\int_A f\right| \leq \int_A |f|$.
5. Anulación: Si $\mathrm{v}(A) = 0$, entonces toda función acotada es integrable en A y su integral es nula. Si $f \in \mathscr{R}(A)$ es tal que $f \geq 0$ c.s. A, entonces $\displaystyle\int_A f = 0$ sii $f = 0$ c.s. en A.

Propiedades de la integral

Sean $A \subset \mathfrak{J}(\mathbb{R}^n)$ y $\mathscr{R}(A)$ el conjunto de funciones integrables en A.

1. Linealidad: $\mathscr{R}(A)$ es un espacio vectorial real que contiene a $\mathscr{C}^b(A)$ y la integral un funcional lineal sobre él.
2. Estabilidad: Si $\mathscr{O}\colon \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua, entonces para cada $f_1, \ldots, f_m \in \mathscr{R}(A)$ se satisface que $\mathscr{O}(f_1, \ldots, f_m) \in \mathscr{R}(A)$.
3. Positividad: La integral es un funcional positivo, si $f \in \mathscr{R}(A)$ y $f \geq 0$ c.s. en A, entonces $\int_A f \geq 0$, con igualdad sii $f = 0$ c.s. en A.
4. Aditividad respecto del conjunto de integración: Si $B \subset \mathfrak{J}(\mathbb{R}^n)$ y $f\colon A \cup B \longrightarrow \mathbb{R}$ es acotada, entonces $f \in \mathscr{R}(A)$ sii $f_{|_A} \in \mathscr{R}(A)$ y $f_{|_B} \in \mathscr{R}(B)$ y en ese caso,

$$\int_{A\cup B} f = \int_A f + \int_B f - \int_{A\cap B} f.$$

Propiedades de la integral

Sean $A \subset \mathfrak{J}(\mathbb{R}^n)$ y $\mathscr{R}(A)$ el conjunto de funciones integrables en A.

1. Linealidad: $\mathscr{R}(A)$ es un espacio vectorial real que contiene a $\mathscr{C}^b(A)$ y la integral un funcional lineal sobre él.
2. Estabilidad: Si $\mathscr{O}\colon \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua, entonces para cada $f_1, \dots, f_m \in \mathscr{R}(A)$ se satisface que $\mathscr{O}(f_1, \dots, f_m) \in \mathscr{R}(A)$.
3. Positividad: La integral es un funcional positivo, si $f \in \mathscr{R}(A)$ y $f \geq 0$ c.s. en A, entonces $\int_A f \geq 0$, con igualdad sii $f = 0$ c.s. en A.
4. Aditividad respecto del conjunto de integración: Si $B \subset \mathfrak{J}(\mathbb{R}^n)$ y $f\colon A \cup B \longrightarrow \mathbb{R}$ es acotada, entonces $f \in \mathscr{R}(A)$ sii $f_{|_A} \in \mathscr{R}(A)$ y $f_{|_B} \in \mathscr{R}(B)$ y en ese caso, $\int_{A \cup B} f = \int_A f + \int_B f - \int_{A \cap B} f$.
5. Compatibilidad topológica: Si $\overset{\circ}{A} \subset B \subset \bar{A}$ y $f\colon \bar{A} \longrightarrow \mathbb{R}$ está acotada, entonces $f \in \mathscr{R}(A)$ sii $f \in \mathscr{R}(B)$ y además, $\displaystyle\int_B f = \int_A f$.

   En particular, $\displaystyle\int_{\overset{\circ}{A}} f = \int_A f = \int_{\bar{A}} f$.

Propiedades de la integral

Sean $A \subset \mathfrak{J}(\mathbb{R}^n)$ y $\mathscr{R}(A)$ el conjunto de funciones integrables en A.

1. Linealidad: $\mathscr{R}(A)$ es un espacio vectorial real que contiene a $\mathscr{C}^b(A)$ y la integral un funcional lineal sobre él.
2. Estabilidad: Si $\mathscr{O}\colon \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua, entonces para cada $f_1, \dots, f_m \in \mathscr{R}(A)$ se satisface que $\mathscr{O}(f_1, \dots, f_m) \in \mathscr{R}(A)$.
3. Positividad: La integral es un funcional positivo, si $f \in \mathscr{R}(A)$ y $f \geq 0$ c.s. en A, entonces $\int_A f \geq 0$, con igualdad sii $f = 0$ c.s. en A.
4. Aditividad respecto del conjunto de integración: Si $B \subset \mathfrak{J}(\mathbb{R}^n)$ y $f\colon A \cup B \longrightarrow \mathbb{R}$ es acotada, entonces $f \in \mathscr{R}(A)$ sii $f_{|_A} \in \mathscr{R}(A)$ y $f_{|_B} \in \mathscr{R}(B)$ y en ese caso, $\int_{A\cup B} f = \int_A f + \int_B f - \int_{A\cap B} f$.
5. Compatibilidad topológica: Si $\overset{\circ}{A} \subset B \subset \bar{A}$ y $f\colon \bar{A} \longrightarrow \mathbb{R}$ está acotada, entonces $f \in \mathscr{R}(A)$ sii $f \in \mathscr{R}(B)$ y además, $\int_B f = \int_A f$.
6. Continuidad respecto del integrando: Si $f, g \in \mathscr{R}(A)$ son tales que $|f(x) - g(x)| \leq \varepsilon$ para cada $x \in A$, entonces $\left| \int_A f - \int_A g \right| \leq \varepsilon \mathrm{v}(A)$.

Propiedades de la integral

Sean $A \subset \mathfrak{J}(\mathbb{R}^n)$ y $\mathscr{R}(A)$ el conjunto de funciones integrables en A.

1. Linealidad: $\mathscr{R}(A)$ es un espacio vectorial real que contiene a $\mathscr{C}^b(A)$ y la integral un funcional lineal sobre él.
2. Estabilidad: Si $\mathscr{O}\colon \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua, entonces para cada $f_1, \dots, f_m \in \mathscr{R}(A)$ se satisface que $\mathscr{O}(f_1, \dots, f_m) \in \mathscr{R}(A)$.
3. Positividad: La integral es un funcional positivo, si $f \in \mathscr{R}(A)$ y $f \geq 0$ c.s. en A, entonces $\int_A f \geq 0$, con igualdad sii $f = 0$ c.s. en A.
4. Aditividad respecto del conjunto de integración: Si $B \subset \mathfrak{J}(\mathbb{R}^n)$ y $f\colon A \cup B \longrightarrow \mathbb{R}$ es acotada, entonces $f \in \mathscr{R}(A)$ sii $f_{|_A} \in \mathscr{R}(A)$ y $f_{|_B} \in \mathscr{R}(B)$ y en ese caso, $\int_{A\cup B} f = \int_A f + \int_B f - \int_{A\cap B} f$.
5. Compatibilidad topológica: Si $\overset{\circ}{A} \subset B \subset \bar{A}$ y $f\colon \bar{A} \longrightarrow \mathbb{R}$ está acotada, entonces $f \in \mathscr{R}(A)$ sii $f \in \mathscr{R}(B)$ y además, $\int_B f = \int_A f$.
6. Continuidad respecto del integrando: Si $\{f_m\}_{m=1}^{\infty} \subset \mathscr{R}(A)$ converge uniformemente hacia f, entonces $f \in \mathscr{R}(A)$ y $\displaystyle\lim_{m\to\infty} \int_A f_m = \int_A f$.

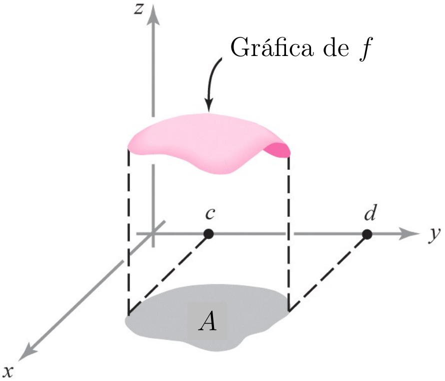
Propiedades de la integral

- Compatibilidad geométrica de la integral:

  Si $A \in \mathfrak{J}(\mathbb{R}^n)$ y $f \in \mathscr{R}(A)$ es tal que $f \geq 0$, entonces

$$E = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in A,\ \ 0 \leq y \leq f(x)\Big\}$$

  satisface que $E \in \mathfrak{J}(\mathbb{R}^{n+1})$ y además $\mathsf{v}_{n+1}(E) = \displaystyle\int_A f$.



Conjuntos Elementales

Si $A \in \mathfrak{J}(\mathbb{R}^n)$ y $\phi, \psi \in \mathscr{R}(A)$ tales que $\phi \leq \psi$, definimos los conjuntos

$$\widetilde{E}_{\phi,\phi} = \Big\{(x,y) : x \in A, \phi(x) \leq y \leq \psi(x)\Big\}, \quad \widehat{E}_{\phi,\psi} = \Big\{(x,y) : x \in A, \phi(x) < y < \psi(x)\Big\}$$
$$\widetilde{F}_{\phi,\psi} = \Big\{(x,y) : y \in A, \phi(y) \leq x \leq \psi(y)\Big\}, \quad \widehat{F}_{\phi,\psi} = \Big\{(x,y) : y \in A, \phi(y) < x < \psi(y)\Big\}.$$

Conjuntos Elementales

Si $A \in \mathfrak{J}(\mathbb{R}^n)$ y $\phi, \psi \in \mathscr{R}(A)$ tales que $\phi \le \psi$, definimos los conjuntos

$$\widetilde{E}_{\phi,\phi} = \Big\{(x,y) : x \in A, \phi(x) \le y \le \psi(x)\Big\}, \quad \widehat{E}_{\phi,\psi} = \Big\{(x,y) : x \in A, \phi(x) < y < \psi(x)\Big\}$$
$$\widetilde{F}_{\phi,\psi} = \Big\{(x,y) : y \in A, \phi(y) \le x \le \psi(y)\Big\}, \quad \widehat{F}_{\phi,\psi} = \Big\{(x,y) : y \in A, \phi(y) < x < \psi(y)\Big\}.$$

- Si $n \in \mathbb{N}^*$, $E \subset \mathbb{R}^{n+1}$ es un **conjunto elemental** si existen un conjunto $A \in \mathfrak{J}(\mathbb{R}^n)$ y funciones $\phi, \psi \in \mathscr{R}(A)$ tales que $\phi \le \psi$ y o bien $\widehat{E}_{\phi,\psi} \subset E \subset \widetilde{E}_{\phi,\psi}$ o bien $\widehat{F}_{\phi,\psi} \subset F \subset \widetilde{F}_{\phi,\psi}$.

Conjuntos Elementales

Si $A \in \mathfrak{J}(\mathbb{R}^n)$ y $\phi, \psi \in \mathscr{R}(A)$ tales que $\phi \le \psi$, definimos los conjuntos

$$\widetilde{E}_{\phi,\phi} = \Big\{(x,y) : x \in A, \phi(x) \le y \le \psi(x)\Big\}, \quad \widehat{E}_{\phi,\psi} = \Big\{(x,y) : x \in A, \phi(x) < y < \psi(x)\Big\}$$

$$\widetilde{F}_{\phi,\psi} = \Big\{(x,y) : y \in A, \phi(y) \le x \le \psi(y)\Big\}, \quad \widehat{F}_{\phi,\psi} = \Big\{(x,y) : y \in A, \phi(y) < x < \psi(y)\Big\}.$$

- Si $n \in \mathbb{N}^*$, $E \subset \mathbb{R}^{n+1}$ es un **conjunto elemental** si existen un conjunto $A \in \mathfrak{J}(\mathbb{R}^n)$ y funciones $\phi, \psi \in \mathscr{R}(A)$ tales que $\phi \le \psi$ y o bien $\widehat{E}_{\phi,\psi} \subset E \subset \widetilde{E}_{\phi,\psi}$ o bien $\widehat{F}_{\phi,\psi} \subset F \subset \widetilde{F}_{\phi,\psi}$.

- Cada conjunto elemental simple $\widehat{E}_{\phi,\psi} \subset E \subset \widetilde{E}_{\phi,\psi}$ y cada conjunto elemental simple $\widehat{F}_{\phi,\psi} \subset F \subset \widetilde{F}_{\phi,\psi}$ satisfacen que $E, F \in \mathfrak{J}(\mathbb{R}^{n+1})$ y $\mathsf{v}_{n+1}(E) = \mathsf{v}_{n+1}(F) = \displaystyle\int_A (\psi - \phi)$.

Teorema de Fubini

Si $A \in \mathfrak{J}(\mathbb{R}^n)$ y $\phi, \psi \in \mathscr{R}(A)$ tales que $\phi \leq \psi$, definimos los conjuntos

$$\widetilde{E}_{\phi,\phi} = \Big\{(x,y) : x \in A, \phi(x) \leq y \leq \psi(x)\Big\}, \quad \widehat{E}_{\phi,\psi} = \Big\{(x,y) : x \in A, \phi(x) < y < \psi(x)\Big\}$$
$$\widetilde{F}_{\phi,\psi} = \Big\{(x,y) : y \in A, \phi(y) \leq x \leq \psi(y)\Big\}, \quad \widehat{F}_{\phi,\psi} = \Big\{(x,y) : y \in A, \phi(y) < x < \psi(y)\Big\}.$$

- Si $n \in \mathbb{N}^*$, $E \subset \mathbb{R}^{n+1}$ es un **conjunto elemental** si existen un conjunto $A \in \mathfrak{J}(\mathbb{R}^n)$ y funciones $\phi, \psi \in \mathscr{R}(A)$ tales que $\phi \leq \psi$ y o bien $\widehat{E}_{\phi,\psi} \subset E \subset \widetilde{E}_{\phi,\psi}$ o bien $\widehat{F}_{\phi,\psi} \subset F \subset \widetilde{F}_{\phi,\psi}$.

- Para cada $f \in \mathscr{C}^b(E)$ y cada $g \in \mathscr{C}^b(F)$ se satisface que
$$\int_E f(x,y)dxdy = \int_A \left[\int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy\right]dx,$$
$$\int_F g(x,y)dxdy = \int_A \left[\int_{\phi(y)}^{\psi(y)} g(x,y)dx\right]dy$$

Teorema del Cambio de Variable

Sean $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ abierto y $F\colon\Omega\longrightarrow\mathbb{R}^n$ un difeomorfismo de clase $\mathscr{C}^1(\Omega;\mathbb{R}^n)$ y consideremos $A\in\mathfrak{J}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\bar{A}\subset\Omega$. Entonces $F(A)\in\mathfrak{J}(\mathbb{R}^n)$, $f\in\mathscr{R}\big(F(A)\big)$ sii $f\circ F\in\mathscr{R}(A)$ y además,

$$\int_{F(A)} f=\int_A (f\circ F)\,|\det D_F)|.$$

En particular, $\mathsf{v}\big(F(A)\big)=\displaystyle\int_A |\det D_F)|.$