

FACULTAT DE MATEMÀTIQUES I ESTADÍSTICA

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA - BARCELONATECH

**Exercicis resolts de Fonaments de les
Matemàtiques (Primer curs del Grau de
Matemàtiques)**

Àlex Batlle Casellas

October 11, 2018

Índex

1	2
2 Conjunts i aplicacions.	2
3 Relacions, operacions i estructures.	2

1

2 Conjunts i aplicacions.

21. Sigui $A_1, A_2, B_1, B_2 \neq \emptyset$. Demostreu:

$$21.3. (A_1 \cup A_2) \times (B_1 \cup B_2) = (A_1 \times B_1) \cup (A_1 \times B_2) \cup (A_2 \times B_1) \cup (A_2 \times B_2):$$

Sigui $y \in (A_1 \cup A_2) \times (B_1 \cup B_2)$. Aleshores, $\exists y_1 \in A_1 \cup A_2, y_2 \in B_1 \cup B_2 : y = (y_1, y_2)$.

$$\iff (y_1 \in A_1 \vee y_1 \in A_2) \wedge (y_2 \in B_1 \vee y_2 \in B_2) \iff (y_1 \in A_1 \wedge y_2 \in B_1)$$

$$\vee (y_1 \in A_2 \wedge y_2 \in B_1) \wedge (y_1 \in A_1 \wedge y_2 \in B_2) \vee (y_1 \in A_2 \wedge y_2 \in B_2)$$

$$\iff y \in (A_1 \times B_1) \cup (A_2 \times B_2) \cup (A_1 \times B_2) \cup (A_2 \times B_1). \square$$

30. Considerem una aplicació $f : A \mapsto B$ i subconjunts $A', A'' \subseteq A$ i $B', B'' \subseteq B$. Demostreu:

30.1. Si $A' \subseteq A''$, aleshores $f(A') \subseteq f(A'')$. Demostreu que la igualtat és certa si f és injectiva.

$$\text{Sigui } A' \subseteq A''. \text{ Aleshores } f(A') = \{y \in B : (\exists x \in A' : f(x) = y)\}$$

$$\subseteq \{y \in B : (\exists x \in A'' : f(x) = y)\} = f(A'') \implies f(A') \subseteq f(A''). \square$$

Si f és injectiva, volem veure que $f(A'') \subseteq f(A')$ (ja que la primera inclusió per la igualtat ja l'hem demostrada a l'apartat anterior).

$$\text{Sigui } A' \subseteq A''. \text{ Aleshores } f(A'') \subseteq f(A') \iff A'' \subseteq A' \text{ (resultat anterior)} \iff$$

$$A'' = A' \text{ (perquè sabem } A' \subseteq A'') \iff \text{(sabent que } f(A') \subseteq f(A'')) \text{ } f \text{ és injectiva.} \square$$

30.2. Si $B' \subseteq B''$, aleshores $f^{-1}(B') \subseteq f^{-1}(B'')$. Demostreu que la igualtat és certa si f és exhaustiva.

$$\text{Sigui } B' \subseteq B''. \text{ Aleshores, } f^{-1}(B') = \{x \in A : (\exists y \in B' : f^{-1}(\{y\}) = \{x\})\}$$

$$\subseteq \{x \in A : (\exists y \in B'' : f^{-1}(\{y\}) = \{x\})\} = f^{-1}(B'').$$

3 Relacions, operacions i estructures.