Recordeu de la lliçó anterior on varem definir espai de Hilbert:

Definició 1 (Espai de Hilbert). Sigui X un espai vectorial on hi podem definir un producte escalar $(\cdot,\cdot)_X$. Direm que X, junt amb aquest producte escalar és un espai de Hilbert i X junt amb la norma induïda per aquest producte escalar és un espai de Banach (i.e., un espai complet).

El que farem ara és intentar copiar l'estructura que tenim a $\mathbb{R}^n$ en aquest context més general, en particular la noció d'ortogonalitat.

Definició 2 (Sistema ortogonal; sistema ortonormal). Donat un espai de Hilbert X amb el producte escalar $(\cdot,\cdot)_X$, una família d'elements $\{\phi_n\}_{n\in I}$ de X direm que es un sistema ortogonal si compleix que

$$n \neq m,\ (\phi_n, \phi_m)_X = 0.$$

Si, a més a més, $(\phi_n, \phi_n) = 1$ per tot valor de $n \in I$, direm que el sistema $\{\phi_n\}_{n\in I}$ és ortonormal.

Observeu que tot sistema ortogonal és pot convertir fàcilment en un sistema ortonormal simplement normalitzant les funcions ϕ_n pel seu mòdul (és a dir, dividint entre $(\phi_n, \phi_n)_X$.

Veguem primer alguns exemples que seran molt importants en el que vindrà més endavant.

Exemple 1. Considerem $E = \mathcal{C}(-\pi,\pi)$ i la família de funcions $\phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$, $\phi_n(x) = \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}}$ i $\psi_n(x) = \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}}$. Aleshores $\{\phi_n\}_{n\geq 0} \cup \{\psi_n\}_{n\geq 1}$ és un sistema ortonormal. En efecte, recordant les relacions trigonomètriques següents:

$$\begin{aligned}
\sin(a)\sin(b) &= \tfrac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a-b)),\\
\sin(a)\cos(b) &= \tfrac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b)),\\
\cos(a)\cos(b) &= \tfrac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b)),
\end{aligned}$$

és dedueix molt fàcilment (fent el càlcul de les integrals corresponents) que $(\phi_n, \phi_m) = (\psi_n, \psi_m) = 0$ si $n \geq 0$, $m \geq 1$ i $n \neq m$, mentre que $(\phi_n, \phi_n) = (\psi_n, \psi_n) = 1$ per tot valor de n.

Observeu que d'aquest exemple podem dir una cosa semblant si prenem un interval $(-L/2, L/2)$ en lloc de l'interval $(-\pi,\pi)$ si fem un canvi de reescalat de les variables (en el interval $(-L/2, L/2)$ caldria prendre la variable $n\frac{2\pi}{L}x$ en lloc de nx).

Exemple 2. Considerem ara un exemple trasladat de l'exemple anterior: considerem $\mathcal{C}(0,\pi)$. En aquest espai la família $\{\phi_n\}_{n\geq 1}$ amb $\phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(nx)$ és ortonormal.

Remarca 1. En tota la discussió que veurem més endavant treballarem principalment sobre l'espai $\mathcal{C}(-\pi,\pi)$, però coses similars es podrien dir sobre intervals centrats a l'origen i, fins hi tot, no necessariament centrats (fent reescalat i translacions en les variables).

El nostre objectiu es poder donar, en els nostres espais de funcions, criteris per els quals un sistema ortonormal sigui una base de l'espai vectorial subjacent. Observeu també que tot subconjunt d'un sistema ortonormal és també un sistema ortonormal, amb la qual cosa ens agradaria trobar-ne que siguin *maximals* amb aquest propietat. Dit d'altra forma:

Podem trobar un sistema ortonormal $\{\phi_n\}_{n\in I}$ en $E = \mathcal{C}(-\pi,\pi)$, que sigui a més una base de l'espai vectorial E? O que hi hagi alguna mena de convergència en sumes parcials?

Fixeu-vos que d'aconseguir-ho el que estariem fent és copiar l'estructura geomètrica que tenim a $\mathbb{R}^n$ en l'espai $\mathcal{C}(-\pi,\pi)$, ja que en particular tindrem una noció d'ortogonalitat, de distancia, etc. Fixeu-vos també que la segona pregunta és menys restrictiva, ja que en el nostre cas és possible que tinguem sumes infinites, i aleshores cal anar amb compte amb les questions de convergència.

Abans de veure que efectivament podrem definir aquest sistema ortonormal, anem a respondre una pregunta no menys important i que també ve inspirada pel què passa a $\mathbb{R}^n$: considerem en $\mathbb{R}^n$ una família de vectors $\{v_1,\ldots,v_k\}$, el subespai generat per ells H i un altre vector w.

Quin és el vector $v \in H$ que fa que $\|v-w\|$ sigui mínima (on estem prenent la norma euclidiana)? La geometria elemental (o no tan elemental...) ens diu que

$$\mathbb{R}^n = H \oplus H^{\perp},$$

i que per tant, $w = w_H + w_{H^\perp}$ on w_H i $w_{H^\perp}$ són ortogonals (i per tant, w_H és la projecció ortogonal de w en el subespai H). Ara un càlcul elemental (que essencialment és el teorema de Pitàgores) ens diu que el mínim $\|w-v\|$ s'assoleix precisament al prendre $v = w_H$.

Veguem-ho ara en el cas general d'espais vectorials en abstracte:

<u>Lema</u> 1. *Sigui E un espai vectorial dotat del producte escalar $(\cdot,\cdot)$. Sigui $f \in E$ i $\{\phi_n\}_{n\geq 1}$ un sistema ortonormal. Sigui $a_n = (f, \phi_n)$, i definim*

$$f_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \phi_k,\ \ g_n = \sum_{k=1}^{n} b_k \phi_k,\ b_i \in \mathbb{R}.$$

Aleshores $\|f - f_n\|_2 \leq \|f - g_n\|_2$ i tenim igualtat si i només si $b_i = a_i$ per tots els índexos i.

Abans de fer la prova (que és la que faríem en $\mathbb{R}^n$) observeu el que diu el lema: la millor aproximació de f per una funció f_n en el subespai generat per $\{\phi_1, \ldots, \phi_n\}$ ve donada per la projecció ortogonal en aquest subespai (la projecció ortogonal ens determina els coeficients a_i).

Demostració. Anem primer a calcular $\|f - g_n\|_2^2$. Aquí el que estarem fent és usar la versió abstracta del teorema de Pitàgores:

$$\|f - g_n\|_2^2 = (f - g_n, f - g_n) = (f,f) - 2(f, g_n) + (g_n, g_n) = \|f\|_2^2 + \|g_n\|_2^2 - 2(f, g_n).$$

Anem ara a desenvolupar els termes que depenen de g_n. Per una banda,

$$(f, g_n) = \left(f, \sum_{k=1}^{n} b_k \phi_k\right) = \sum_{k=1}^{n} b_k (f, \phi_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k.$$

Per altra banda,

$$\|g_n\|_2^2 = \sum_{k=1}^{n} b_k^2.$$

Per tant,

$$\|f - g_n\|_2^2 = \|f\|_2^2 + \sum_{k=1}^{n} b_k^2 - 2\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \overbrace{\|f\|_2^2 - \sum_{k=1}^{n} a_k^2} + \sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k)^2.$$

Fixeu-vos ara que el terme en $\overbrace{\cdot}$ és fix i només depèn de f (i del sistema ortonormal), i que el segon terme és una suma de quadrats (per tant, positiva). Aquesta suma serà el més petita possible quan prenguem precisament $b_k = a_k$ per tots els índexs possibles.

En aquesta situació, el que obtenim és que

$$\|f - g_n\|_2^2 \geq \|f\|_2^2 - \sum_{k=1}^{n} a_k^2,$$

però aquesta expressió és igual que $\|f - f_n\|_2^2$, que és el que volíem demostrar. $\square$

Observeu de la prova que, a mesura que agafem més termes (n) en les sumes $\sum_{k=1}^{n} a_k \phi_k$ haurien de ser cada cop més i més semblants a f. En efecte, això passarà quan hi hagi convergència en aquesta norma:

<u>Teorema</u> 1. *Sigui E un espai vectorial amb un producte escalar $(\cdot,\cdot)$, i sigui $\{\phi_n\}_{n\geq 1}$ un sistema ortonormal. Per $f \in E$, sigui*

$$f_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \phi_k,\ a_k = (f, \phi_k).$$

Aleshores:

(Desigualtat de Bessel) $\sum_{k\geq 1} a_k^2$ *convergeix i satisfà que* $\sum_{k\geq 1} a_k^2 \leq \|f\|_2^2$.

(Identitat de Parseval) *Si, a més,* $\lim_n \|f - f_n\|_2 = 0$ *(hi ha convergència quadràtica de* $\{f_n\}_{n\geq 1}$ *cap a* f*), aleshores de fet tenim que*

$$\sum_{k\geq 1} a_k^2 = \|f\|_2^2.$$

Demostració. Per a veure la desigualtat de Bessel, basta usar el teorema anterior. Hem vist abans que $0 \leq \|f - f_n\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{k=1}^n a_k^2$, d'on tenim que per tot valor de n, es compleix que $\sum_{k=1}^n a_k^2 \leq \|f\|_2^2$. Per tant, al pasar al límit n tendint a infinit també serà cert. Això demostra la desigualtat de Bessel.

La identitat de Parseval també la trobem inmediatament si fem tendir a 0 el terme $\|f - f_n\|_2^2$ en l'identitat $\|f - f_n\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{k=1}^n a_k^2$. $\square$

Deixarem aquí la lliçó per avui comentant un parell de coses importants a tenir en ment:

- Per a tenir la identitat de Parseval ens cal poder assegurar la convergència quadràtica, cosa que a priori encara no hem estudiat amb calma. El que veurem en la propera lliçó és que en el nostre espai de funcions $\mathcal{C}(-\pi, \pi)$ (de fet, en un espai una mica més restringit per un costat, però més àmpli per un altre...) podrem definir els ϕ_n i els coeficients a_k i podrem fer tota la feina (en particular, assegurar convergència quadràtica). Això serà precisament les sèries de Fourier que donen títol al capítol.

- Un problema més dificil serà el d'estudiar quan un sistema ortonormal és una base. De fet el tipus de questions que estudiarem seran la convergència puntual, i veurem que en alguns punts (especialment els punts de discontinuïtat, perquè estudiarem funcions discontínues) presentaran un comportament ben peculiar (serà el contingut del teorema de Dirichlet, que serà el resultat fonamentel de la propera part).