



## Croquis de SLHs 2D a CC

14) Dibuja el retrato de fases (también llamado croquis) de los siguientes SLH 2D a CC. Además, clasifica el sistema y determina su estabilidad.

a)  $\vec{x}' = A\vec{x}$ , con  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

b)  $\vec{x}' = B\vec{x}$ , con  $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

c)  $\vec{x}' = C\vec{x}$ , con  $C = \begin{pmatrix} 2 & -8 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

d)  $\vec{x}' = D\vec{x}$ , con  $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

e)  $\vec{x}' = E\vec{x}$ , con  $E = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ .

### Observaciones:

\* Las posibles clasificaciones son: silla, nodo, foco, centro y sistemas degenerados. Además, los nodos pueden ser propios o impropios

\* Las posibles estabilidades son: atractor, estable no atractor, inestable no repulsor y repulsor.

\* El criterio traza-determinante proporciona una forma sencilla de clasificar y determinar la estabilidad en el caso 2D.

\* Usando el programa de Matlab que os pasare', es fácil realizar dibujos de comprobación.

a) A triangular inferior  $\Rightarrow$  VAPs:  $\begin{cases} \lambda_1 = 1 \text{ (simple)} \\ \lambda_2 = 2 \text{ (simple)} \end{cases}$

$\Rightarrow$  El sistema es un nodo propio repulsor,

pues A diagonaliza y ambas VAPs son  $> 0$

VEPs:

$$A - \lambda_1 \text{Id} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{1 \cdot \vec{e}_1 + (-2) \vec{e}_2 = \vec{0}} \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ VEP de VAP } \lambda_1 = 1$$

$$A - \lambda_2 \text{Id} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\quad} \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ VEP de VAP } \lambda_2 = 2$$

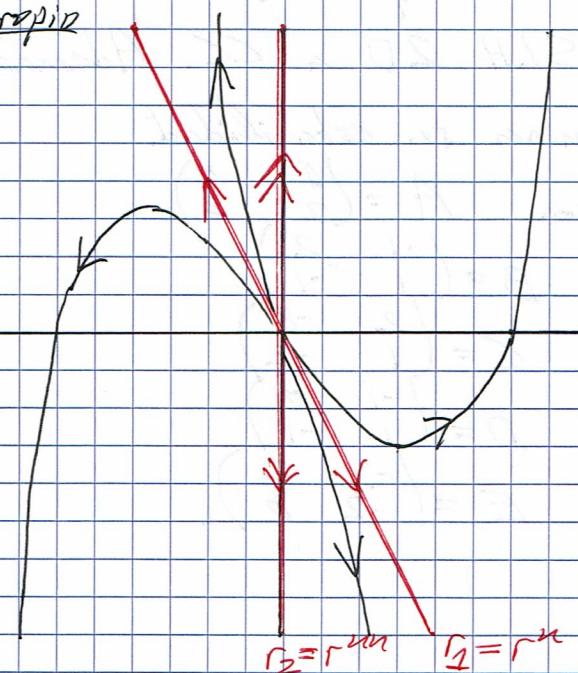
+ columnas que ya están en forma diagonal



R.I.:  $r = [\vec{v}_1]$  es la recta invariante inestable lenta

$r_2 = [\vec{v}_2]$  " " " " " " rápida

Coquizis del modo propio



Nota: Las trayectorias no contenidas en las dos R.I.s salen del origen tangentes a la RI lenta y poco a poco adquieren la dirección rápida.

b)  $T = \text{traza}[B] = -2$

$$D = \det[B] = -1 \Rightarrow Q_B(\lambda) = \lambda^2 - T\lambda + D = \lambda^2 + 2\lambda - 1$$

$$\text{VAPs: } \lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1^2 + 1} = -1 \pm \sqrt{2} \quad \lambda_1 = -1 - \sqrt{2} < 0$$

$\Rightarrow$  El sistema es una silla, luego es inestable, pues B tiene VAPs reales de signos diferentes.

$$\text{VEPs: } B - \lambda_1 I_d = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 2 \\ 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{\sqrt{2} \cdot \vec{e}_1 + (-1) \vec{e}_2 = \vec{0}} \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix} \text{ VEP de VAP } \lambda_1 = -1 - \sqrt{2}$$

Como  $B \in M_{2 \times 2}(\mathbb{Q}(\sqrt{2}))$ , entonces  $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix}$  es el VEP del VAP "conjugado"  $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1 = -1 + \sqrt{2}$ . (Conjugado en  $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ , claro.)

RIs:  $r_1 = [\vec{v}_1]$  es la recta invariante estable (o de entrada)

$r_2 = [\vec{v}_2]$  " " recta invariante inestable (o de salida)

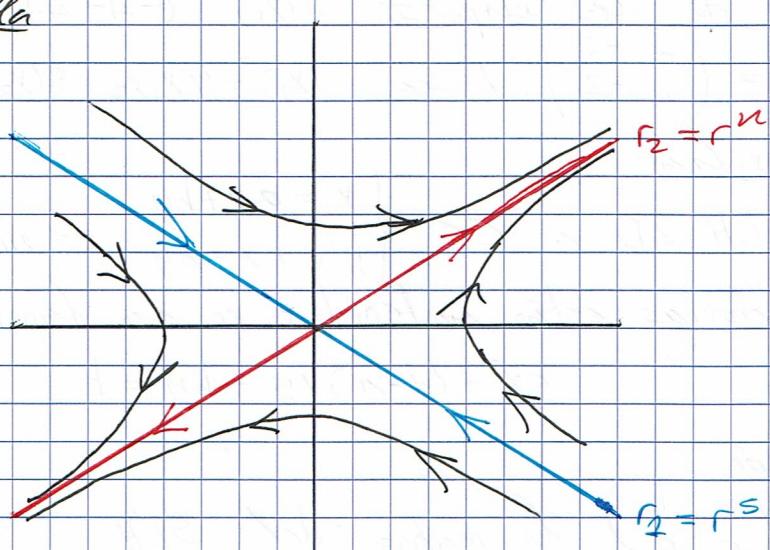
Notas: Estas dos RIs son permutadas por las simetrías

$$(x, y) \mapsto (-x, y) \quad \& \quad (x, y) \mapsto (x, -y).$$





Croquis de la silla



Nota: Las trayectorias no contenidas en las dos RIs se acercan más rápido a  $r^u$  cuando  $t \rightarrow +\infty$  de lo que se acercan a  $r^s$  cuando  $t \rightarrow -\infty$  pues  $\lambda^u > |\lambda^s|$  donde

$$\lambda^u = \lambda_2 = \sqrt{2} - 1 \text{ es el VAP instable}$$

$$\lambda^s = \lambda_1 = -1 - \sqrt{2} \text{ " " VAP estable}$$

$$\begin{aligned} c) T &= \text{traza}[C] = 0 \\ D &= \det[C] = 4 \end{aligned} \Rightarrow Q_C(\lambda) = \lambda^2 - T\lambda + D = \lambda^2 + 4$$

VAPs:  $\lambda_{\pm} = \alpha \pm \beta i$  con  $\alpha = 0$  y  $\beta = 2$  (VAPs imaginarios puros)

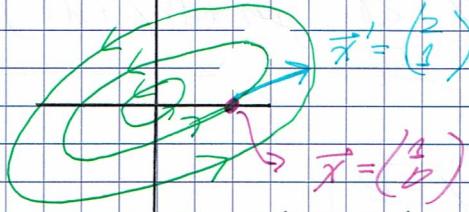
$\Rightarrow$  El sistema es un centro, luego es estable no atractor

En este caso, las trayectorias describen elipses centradas en el origen, todas ellas con los mismos ejes y la misma excentricidad.

Sentido de giro: Evaluaremos la velocidad  $\vec{x}' = C\vec{x}$  en una posición  $\vec{x} \neq \vec{0}$ . Por ejemplo:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{x}' = C\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 & -8 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Croquis del centro



Sentido de giro  
antihorario

Periodo de giro: Las trayectorias tardan  $T = \frac{2\pi}{f} = \pi$  unidades de tiempo en completar una vuelta.





Funciones de los elipses:  $(x_1)^2 + ((-2)-2)x_1x_2 - (-8)(x_2)^2 = \text{cte}$ ,  
 pues  $C = \begin{pmatrix} 2 & -8 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ . D sea,  $(x_1)^2 - 4x_1x_2 + 8(x_2)^2 = \text{cte}$ .

### Lema auxiliar

Si el SLH 2D es CC  $\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$  es un centro, entonces sus trayectorias están contenidas en la familia de elipses  $cx^2 + (d-a)xy - by^2 = k$ , con  $k \in \mathbb{R}$ .

### Demonstración

Sea  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  la matriz del SLH.

$$\begin{aligned} T &= \text{traza}[A] = a+d \quad \Rightarrow Q_A(\lambda) = \lambda^2 - T\lambda + D \Rightarrow \begin{cases} \text{VAPs:} \\ \lambda_{\pm} = \frac{T \pm \sqrt{T^2 - 4D}}{2} \end{cases} \\ D &= \det[A] = ad - bc \quad \begin{aligned} \lambda_{\pm} &= \frac{T \pm \sqrt{T^2 - 4D}}{2} \text{ son imaginarios puros} \\ \bar{x}' = A\bar{x} \text{ centro} \Leftrightarrow & \lambda_{\pm} = \frac{T \pm \sqrt{T^2 - 4D}}{2} \\ \Leftrightarrow T = a+d = 0 & \quad 4D = T^2 > 0 \\ \Leftrightarrow T = a+d = 0 & \quad D = ad - bc > 0 \end{aligned} \end{aligned}$$

La hipótesis inicial es que el SLH es un centro, luego a partir de ahora supondremos que  $a+d=0$  y  $ad>bc$ .

Si las trayectorias  $(x(t), y(t))$  están contenidas en las cónicas

$$\frac{\alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2}{2} = k, \quad k \in \mathbb{R},$$

para algunos parámetros constantes  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ , entonces derivando respecto al tiempo  $t$  obtenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(k) &= \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2}{2} \right\} = \alpha x x' + \beta x' y + \beta x y' + \gamma y y' \\ &= (\alpha x + \beta y) x' + (\beta x + \gamma y) y' = (\alpha x + \beta y)(ax + by) + (\beta x + \gamma y)(cx + dy) \\ &= (ad + c\beta) x^2 + [bd + (a+d)\beta + c\gamma] xy + (b\beta + d\gamma) y^2 \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

pues  $a+d=0$



$$\left. \begin{array}{l} \alpha x + c\beta = 0 \\ bd + c\gamma = 0 \\ b\beta + d\gamma = 0 \end{array} \right\}$$





Recordamos que  $bc < ad = -a^2 \leq 0$ , luego  $b \neq 0$  &  $c \neq 0$ .

$$1^{\text{a}} \text{ ecuación} \rightsquigarrow bx + c\gamma = 0 \Rightarrow x = -\frac{c}{b}\gamma$$

$$2^{\text{a}} \text{ ecuación} \rightsquigarrow b\beta + d\gamma = 0 \Rightarrow \beta = -\frac{d}{b}\gamma = \frac{a}{b}\gamma, \text{ pues } d = -a.$$

pues  $b \neq 0$

La  $1^{\text{a}}$  ecuación es L.D. de las otras dos, luego  $\gamma \in \mathbb{R}$  queda libre. Escogemos el valor  $\gamma = -b$ , luego  $x = c$  y  $\beta = -a = d$ .

Finalmente,  $2\beta = \beta + \beta = d - a$ , luego

$$V(x, y) = cx^2 + (d-a)xy - by^2$$

es una cantidad conservada (también llamada integral  $1^{\text{a}}$ ) y todas las trayectorias están contenidas en curvas de nivel

$$cx^2 + (d-a)xy - by^2 = k, \text{ con } k \in \mathbb{R}.$$

El hecho de que estas cónicas son elipses es una consecuencia de las condiciones  $a+d=0$  y  $bc < ad$ .

$$\text{d)} D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ triangular inferior} \Rightarrow \text{VAPs: } \lambda_1 = \lambda_2 = -1 \text{ (doble)}$$

Además,  $D$  no diagonaliza, pues  $D$  no es diagonal

Lema auxiliar: Si  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$  tiene un único VAP  $\lambda \in \mathbb{R}$  de multiplicidad algebraica  $n$ , entonces:

$$A \text{ diagonaliza} \Leftrightarrow n = \text{MO}(\lambda) = n - \text{rg}(A - \lambda \text{Id})$$

$$\Leftrightarrow \text{rg}(A - \lambda \text{Id}) = 0$$

$$\Leftrightarrow A = \lambda \text{Id} \text{ es diagonal}$$

Por tanto, el sistema es un node impropio atractor, pues ambos VAPs son  $\leq 0$   $\rightarrow$  columna nula

$$\text{VEP: } D + \lambda \text{Id} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ VEP de VAP } \lambda = -1$$

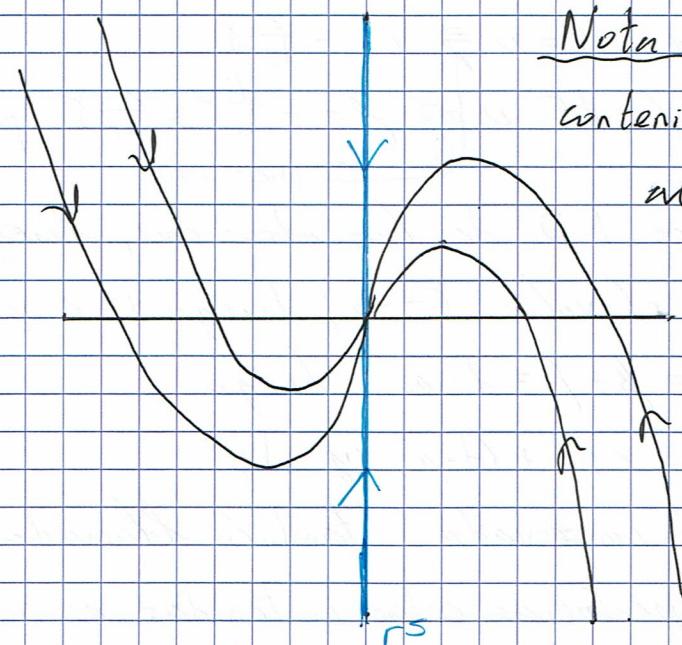
$$\text{RI: } r^S = [\vec{v}] = \text{recta invariante estable}$$

Nota: Los nodos impropios tienen una única RI. Sus croquis deben imaginarse como el límite de los croquis de otros nodos propios cuyas dos RIs coinciden en el límite.



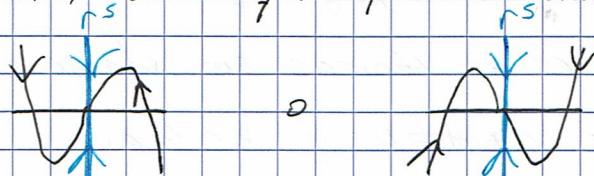


Croquis del nodo impropio:



Nota 1: Las trayectorias no contenidas en la RI "entran" al origen tangentes a la RI, dan "medias vueltas" y lejos del origen vuelven a tener una dirección similar a la RI.

Nota 2: En realidad, el croquis podría tener dos aspectos diferentes:



Para decidir cuál es el correcto, basta evaluar la velocidad  $\vec{x}' = D\vec{x}$  en una posición  $\vec{x} \notin r^s$ . Por ejemplo:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{x}' = D\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{x}' = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Y descartamos la opción de la derecha.

$$\left. \begin{array}{l} \text{g) } T = \text{traza}[E] = -3 \\ D = \det E [E] = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow Q_E(\lambda) = \lambda^2 - T\lambda + D = \lambda^2 + 3\lambda + 4$$

$$\text{VAPs: } \lambda_{\pm} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 16}}{2} = -\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{7}}{2}i = \alpha \pm \beta i \text{ con } \begin{cases} \alpha = -\frac{3}{2} < 0 \\ \beta = \frac{\sqrt{7}}{2} \end{cases}$$

$\Rightarrow$  El sistema es un foco atractor, pues los VAPs son complejos conjugados de parte real  $< 0$ .

En este caso, las trayectorias describen espirales y tienden al origen.

$$\text{Sentido de giro: Posición } \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Velocidad } \vec{x}' = D\vec{x} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

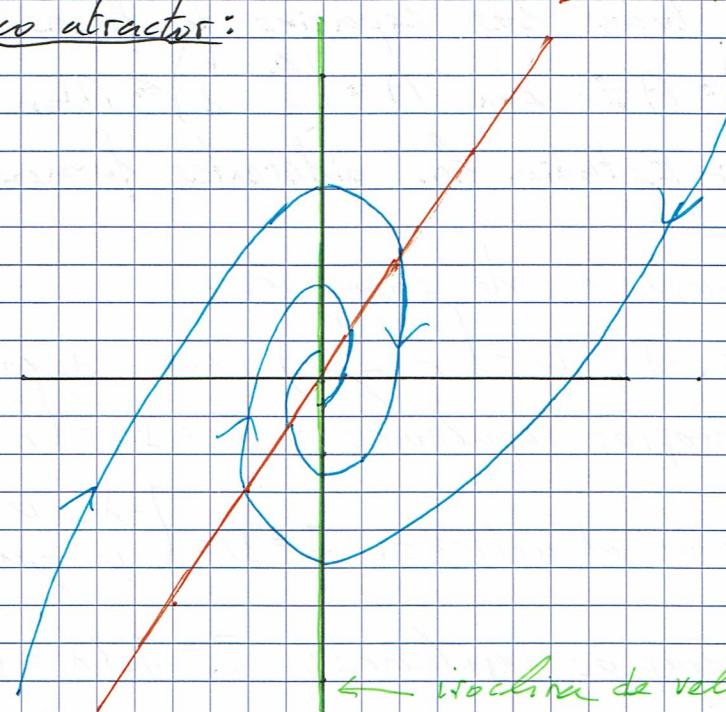


Sentido de giro  
horario



Gráfica del foco atractor:

✓ isoclinia de velocidad vertical



Isoclinas:

- \*  $x_1' = -3x_1 + 2x_2 = 0 \Leftrightarrow x_2 = \frac{3}{2}x_1$  (recta de pendiente  $\frac{3}{2}$ )
- \*  $x_2' = -2x_1 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$  (eje vertical)

Tiempo en completar una vuelta:  $T = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{5\pi}{17} \approx 4'75$

Factor de acercamiento tras completar una vuelta:  $f = e^{\frac{2\pi\alpha}{T}} \approx 8 \cdot 10^{-4}$

Contracción del área tras completar una vuelta:  $F = f^2 = e^{\frac{4\pi\alpha}{T}} \approx 6'5 \cdot 10^{-7}$

Nota: Todas las trayectorias espiralan hacia el origen.

"Tardan" un tiempo infinito en "llegar" al origen y dan un número infinito de vueltas alrededor del origen antes de "llegar".



22) Esboza todos los espacios de fases de los SISTEMAS 2D en CC  $\vec{x}' = A\vec{x}$  con  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2x2}(\mathbb{R})$ .

Indicación: Estudia las diferentes formas de Jordan.

La lista completa de casos es:

- \* Sillas:  $J = D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$  con  $\lambda, \mu > 0$
- \* Nodos propios repeltores:  $J = D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$  con  $\lambda, \mu > 0$
- \* Nodos propios atractores:  $J = D = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$  con  $\lambda, \mu > 0$
- \* Nodos impropios repeltores:  $J = J_2(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$  con  $\lambda > 0$
- \* Nodos impropios atractores:  $J = J_2(-\lambda) = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}$  con  $\lambda > 0$ .
- \* Degenerados inestables:  $J = D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  con  $\lambda > 0$
- \* Degenerados estables:  $J = D = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  con  $\lambda > 0$ .

\* Degenerados dobles inestables:  $J = J_2(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

\* Matriz nula:  $J = A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

\* Centros:  $J = \begin{pmatrix} i\beta & 0 \\ 0 & -i\beta \end{pmatrix} \rightsquigarrow J_{IR} = \begin{pmatrix} 0 & -\beta \\ \beta & 0 \end{pmatrix}$  con  $\beta \neq 0$

\* Focos repeltores:  $J = D = \begin{pmatrix} \alpha + i\beta & 0 \\ 0 & \alpha - i\beta \end{pmatrix} \rightsquigarrow J_{IR} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$  con  $\{\alpha > 0, \beta \neq 0\}$

\* Focos atractores:  $J = D = \begin{pmatrix} \alpha + i\beta & 0 \\ 0 & \alpha - i\beta \end{pmatrix} \rightsquigarrow J_{IR} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$  con  $\{\alpha < 0, \beta \neq 0\}$

Los casos no degenerados ya han quedado claros en el problema anterior. Por tanto, solo esbozamos los croquis de los cuatro casos degenerados.

Matriz nula:  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  implica que  $\vec{x}' = A\vec{x} = \vec{0}, \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^2$

Es decir, la velocidad es cero en todas partes y todo  $\mathbb{R}^2$

está formado por puntos de equilibrio. Nada se mueve.



Degeneración inestable doble:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{x}' = A\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

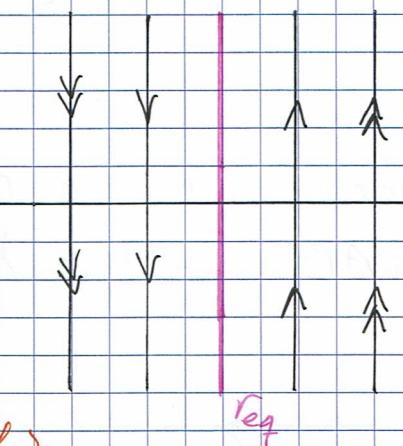
$\Rightarrow \begin{cases} \text{Si } x_1 > 0, \text{ la velocidad es vertical hacia arriba} \\ \text{Si } x_1 < 0, " " " " " \text{ abajo} \\ \text{Si } x_1 = 0, " " " " \text{ nula} \end{cases}$

Por tanto,  $r_{eq} = [\vec{e}_2] = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x_1 = 0 \}$  es una RI de puntos de equilibrio.

Nota: Si  $A \neq J$ , entonces

$r_{eq} = [\vec{v}]$ , donde  $\vec{v}$  es el

VEP de VAP  $\lambda = 0$ .

Degeneración inestable simple:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ VEP de VAP } \lambda_1 = \lambda > 0 \\ \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} " " " " \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow r^n = [\vec{e}_1] = \text{RI inestable (de salida)}$

$r_{eq} = [\vec{e}_2] = \text{RI de puntos de equilibrio}$

Además:

$$\vec{x}' = A\vec{x} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{cases} \text{Si } x_1 > 0, \vec{x}' \text{ es horizontal derecha} \\ \text{Si } x_1 < 0, \vec{x}' " " \text{ izquierda} \\ \text{Si } x_1 = 0, \vec{x}' \text{ es nula} \end{cases}$$

Nota:

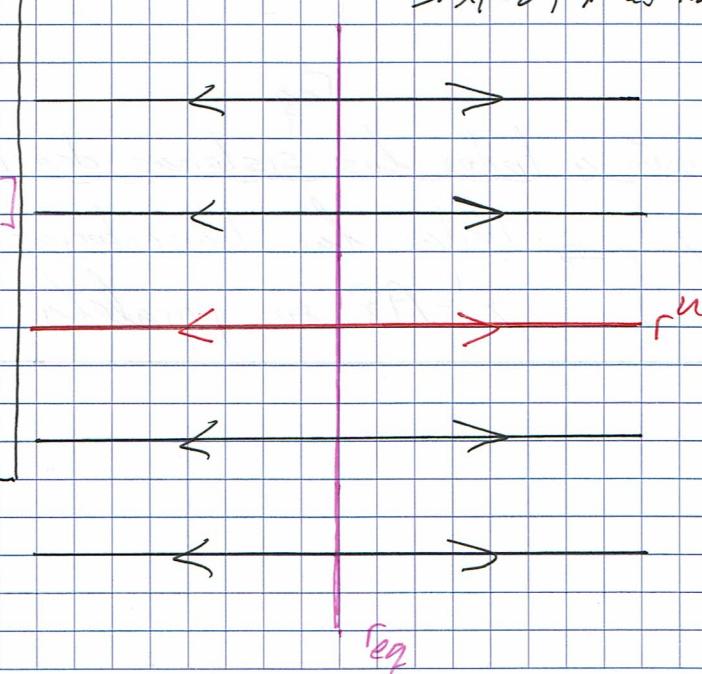
Si  $A \neq J$ , entonces:

$$r^n = [\vec{v}^n] \text{ y } r_{eq} = [\vec{v}_{eq}]$$

donde  $\vec{v}^n$  y  $\vec{v}_{eq}$

son los VEPs de

VAPs  $> 0$  y  $= 0$ .



Degenerado estable (simple):

$$A = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \vec{e}_1 = (0) \\ \vec{e}_2 = (0) \end{cases} \text{ VEP de VAP } \lambda^s = -\lambda < 0$$

$$\begin{cases} \vec{e}_1 = (0) \\ \vec{e}_2 = (0) \end{cases} \text{ " " " } \lambda_{eq} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r^s = [\vec{e}_1] = \text{RI estable (de entrada)} \\ r_{eq} = [\vec{e}_2] = \text{RI de puntos de equilibrio} \end{cases}$$

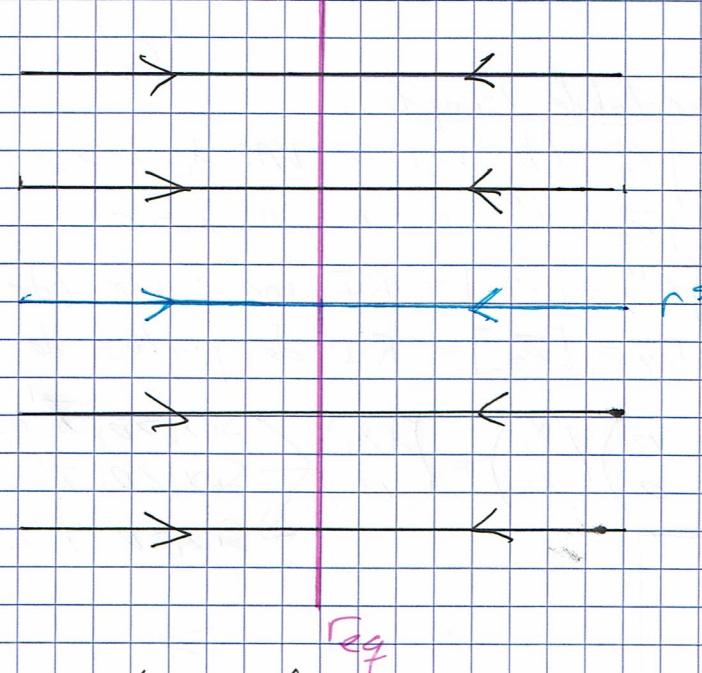
Además:

$$\vec{x}' = A\vec{x} = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si  $x_1 > 0$ ,  $\vec{x}'$  es horizontal izquierda  
Si  $x_1 < 0$ ,  $\vec{x}'$  es horizontal derecha  
Si  $x_1 = 0$ ,  $\vec{x}'$  es nula

Nota:

Si  $A \neq J$ , entonces  $r^s = [\vec{v}^s]$  y  $r_{eq} = [\vec{v}_{eq}]$  donde  $\vec{v}^s$  y  $\vec{v}_{eq}$  son VEPs de VAPs  $\lambda^s < 0$  y  $\lambda_{eq} = 0$ .

CroquisObservación común a todos los sistemas degenerados

$A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$   $\det[A] = 0$   $\Rightarrow$  Todas las trayectorias del SLH son paralelas entre sí