Àlex Batlle Casellas

**12.** Si $A \subset \mathbb{R}^m$, demostreu que:

a) $\mathring{A}$ és el conjunt obert més gran contingut en $A$. És a dir, si $B$ és un obert dins $A$, aleshores $B \subset \mathring{A}$.

b) $\bar{A}$ és el conjunt tancat més petit que conté $A$. És a dir, si $C$ és un tancat que conté $A$, aleshores $\bar{A} \subset C$.

**Resolució**

a) $B$ és obert $\iff \mathring{B} = B \iff \forall p \in B\ \exists B_r(p) \subset B \implies \forall p \in B \subset A\ \exists B_r(p) \subset B \subset A \implies \mathring{B} \subset \mathring{A} \implies B \subset \mathring{A}.\square$

b) $\forall p \in \bar{A}\ (\forall B_r(p)\ A \cap B_r(p) \neq \emptyset) \implies \forall p \in \bar{A}\ (\forall B_r(p)\ C \cap B_r(p) \neq \emptyset) \implies \forall p \in \bar{A}, p \in \bar{C} = C \implies \bar{A} \subset C.\square$

**13.** Donats dos conjunts $A, B$, es defineix $A + B = \{x + y \mid x \in A, y \in B\}$. Suposeu $A$ obert.

a) Demostreu que si $y \in B$, el conjunt $A + \{y\}$ és obert.

b) Demostreu que el conjunt $A + B$ és obert.

**Resolució**

a) $A + \{y\} = \{a + y \mid a \in A\}$. Com que la suma ha d'estar ben definida, sumar $y$ al conjunt és anàleg a fer un desplaçament fixat de tot el conjunt $A$. Aquesta operació no modifica l'estructura d'$A$, doncs només el desplaça a una altra localització dins del conjunt ambient $M$, i els elements de la frontera d'$A$ segueixen sense pertànyer a $A + \{y\}$. Per tant, sabent que $\operatorname{Int} A, \operatorname{Fr} A, \operatorname{Ext} A$ formen una partició del conjunt ambient per qualsevol conjunt $A$, segueix que $A + \{y\} = \operatorname{Int}(A + \{y\})$, i per tant, $A + \{y\}$ és un obert.$\square$

b) Això ho podem veure utilitzant l'apartat anterior; $A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$ és el mateix que la unió següent:

$$\bigcup_{y \in B} (A + \{y\}).$$

Com que $A + \{y\}$ és obert i és sabut que la unió arbitrària d'oberts és oberta, es dedueix que $A + B$ és un obert.

**15.** Demostreu que:

a) La intersecció d'un nombre arbitrari (finit o infinit) de subconjunts compactes de $\mathbb{R}^n$ també és compacte.

b) La unió d'un nombre finit de subconjunts compactes de $\mathbb{R}^n$ també és compacte.

c) La unió d'un nombre infinit de subconjunts compactes de $\mathbb{R}^n$ pot no ser compacte. (Doneu-ne exemples).

**Resolució**

a) Com que ens trobem a $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$, n'hi ha prou amb veure que la intersecció arbitrària de tancats és tancada (vist a teoria) i que la intersecció arbitrària de fitats és fitada.

Tancada. Vist a teoria.

Fitada. Tenim un nombre arbitrari de conjunts fitats $\{A_\alpha\}, A_\alpha \subseteq M$. Sabem, com a propietat elemental de conjunts, que $\bigcap_\alpha A_\alpha \subseteq A_i\ \forall i$. Com que els $A_i$ són fitats, existeix una bola $B_{r_i}(p_i)$, per algun $p_i \in A_i$ tal que $A_i \subseteq B_{r_i}(p_i)$. Per tant, sigui $B_{r_0}(p_0)$ la bola més gran que fita els conjunts $A_i$; aleshores tenim $\bigcap_\alpha A_\alpha \subseteq A_i \subseteq B_{r_0}(p_0)\ \forall i$ i, per tant, $\bigcap_\alpha A_\alpha$ està fitat.$\square$

b) Com que ens trobem a $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$, n'hi ha prou amb veure que la unió finita de tancats és tancada (vist a teoria) i que la unió finita de fitats és fitada.

Tancada. Vist a teoria.

Fitada.

c)