Àlex Batlle Casellas

1. **Proveu que** $f(x) = \sqrt{x}$ **és uniformement contínua a** $[0, \infty)$**.**
Indicació: Separeu el cas $[0, 1]$ de l'interval $[1, \infty)$. En aquest darrer cas, proveu que f satisfà una condició de Lipschitz.
Per a que la funció $\sqrt{x}$ sigui uniformement contínua, ha de complir la següent condició:

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \ |x - y| < \delta \implies |\sqrt{x} - \sqrt{y}| < \epsilon.$$

Si partim l'interval en els intervals $I_1 = [0, 1]$ i $I_2 = [1, \infty)$, podem raonar-ho pels dos casos. Per l'interval I_1, tenim que $\sqrt{x} \leq x$ per qualsevol valor dins d'I_1. Si prenem $\delta = \epsilon^2$, veiem el següent: (podem suposar que $y \leq x$)

$$x - y < \epsilon^2 \iff \sqrt{x - y} < \epsilon.$$

També es pot demostrar que $\sqrt{x - y} \leq \sqrt{x} - \sqrt{y}$:

$$\sqrt{x - y} \leq \sqrt{x} - \sqrt{y} \iff x - y \leq x + y - 2\sqrt{x}\sqrt{y} \iff -2y \leq -2\sqrt{xy} \iff y \leq \sqrt{y}\sqrt{x}.$$

Com que $\sqrt{x} \leq 1 \ \forall x \in I_1$, la primera condició és compleix. Per tant, tenim $\sqrt{x - y} < \sqrt{x} - \sqrt{y} < \epsilon$ i per tant, $x - y < \epsilon^2$. Hem trobat la δ per l'interval I_1.
Per demostrar la continuïtat uniforme a l'interval I_2, recordem l'enunciat de la condició de K-Lipschitz per la funció arrel quadrada:

$$\forall x, y \quad |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq K|x - y|.$$

Veiem, doncs, que aquesta condició es dóna per tota x, y de l'interval I_2:

$$\sqrt{x} - \sqrt{y} \leq K(x - y) \iff x - y \leq K(x - y)(\sqrt{x} + \sqrt{y}) \iff 1 \leq K(\sqrt{x} + \sqrt{y}).$$

Aquesta última condició es verifica sempre, ja que dins d'I_2, $\sqrt{x} + \sqrt{y} \geq 2 \ \forall x, y$. Per tant, la mínima K que podem agafar és $K = \frac{1}{2}$. Aleshores, f és $\frac{1}{2}$-Lipschitziana i per tant, és uniformement contínua.$\square$

2. **Proveu que** $f(x) = x^2$ **no és uniformement contínua a** $[0, \infty)$**, veient explícitament que existeix** $\epsilon > 0$**, i successions** $(x_n)_n$ **i** $(y_n)_n$ **no fitades amb** $(x_n - y_n)_n$ **convergent a zero i tal que** $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon$**.**
Si fos uniformement contínua, f compliria l'enunciat:

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \ |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

Per tant, podem fer servir la indicació per demostrar que $f(x) = x^2$ no és uniformement contínua. Com a exemples podem agafar les successions:

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{n^2}{n+1} \\ y_n &= \frac{n^2 - 1}{n+1} \end{aligned} .$$

Com es pot observar cap de les dues està fitada superiorment. Si en fem la resta, en canvi,

$$\{x_n - y_n\}_n = \left\{\frac{n^2}{n+1} - \frac{n^2-1}{n+1}\right\}_n = \left\{\frac{1}{n+1}\right\}_n,$$

que convergeix a 0, i per tant compleixen que $|x-y| < \delta$. Si fem ara la diferència dels seus quadrats (el que equivaldria a $f(x_n) - f(y_n)$), observem el següent:

$$\left(\frac{n^2}{n+1}\right)^2 - \left(\frac{n^2-1}{n+1}\right)^2 = \frac{n^4 - (n^4 + 1 - 2n^2)}{(n+1)^2} = \frac{2n^2-1}{(n+1)^2}.$$

Aquesta expressió convergeix a 2, i per tant existeix una $\epsilon > 0$ tal que $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon$, concretament $\epsilon = 2$. Per tant, $f(x) = x^2$ no és uniformement contínua.

3. **Proveu que $f(x) = \sin x$ és uniformement contínua a tot $\mathbb{R}$ veient que satisfà una condició 1-Lipschitz a tota la recta real.**
   Indicació: Useu que, per tot $a, b \in \mathbb{R}$,

   $$\sin a - \sin b = 2\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

   (*Observació:* $f(x) = \sin x$ és, doncs, una funció vàlida com l'exemple que es demana a l'exercici 16 del Tema 3).
   Tenim que $|\cos x| \leq 1$ $\forall x \in \mathbb{R}$ i que $|\sin x| \leq 1$ $\forall x \in \mathbb{R}$. També,

   $$|x-y| > \left|\frac{x-y}{2}\right| > \left|\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\right| \iff |x-y| > \left|2\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\right|.$$

   Com que sabem que $|\cos x| \leq 1$,

   $$|x-y| > \left|(x-y)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\right| > \left|2\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\right|.$$

   Del que podem concloure que

   $$\left|2\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\right| = |\sin x - \sin y| = |f(x) - f(y)| < 1|x-y|$$

   i per tant, que $f(x) = \sin x$ és 1-Lipschitz.