Entregable 6: Correlacions.

Àlgebra Multilineal i Geometria. Grau en Matemàtiques, UPC, tardor 2020.

Àlex Batlle Casellas

Fixem $\mathbf{k} = \mathbb{R}$ i $n \geq 2$. Denotarem per $\mathbb{P}, \overline{\mathbb{P}}$ espais projectius de dimensió n i per $\mathbb{P}^*, \overline{\mathbb{P}}^*$ els seus duals.
Donada una aplicació bijectiva $f : \mathbb{P} \to \mathbb{P}$, el teorema fonamental estableix una equivalència entre les versions geomètrica i algebraica de projectivitat:

$$f \text{ és una colineació} \iff f \text{ és una projectivitat.}$$

Així, les colineacions transformen punts en punts, rectes en rectes, plans en plans, etc. Hi ha una altra mena de transformacions projectives: la dualitat estableix una bijecció

$$\perp : \mathrm{Subv}(\mathbb{P}) \to \mathrm{Subv}(\mathbb{P}^*),$$

que transforma punts en hiperplans, hiperplans en punts, etc. La definició següent generalitza aquesta situació:
Definició. Una *correlació* de $\mathbb{P}$ en $\overline{\mathbb{P}}$, $F : \mathbb{P} \rightsquigarrow \overline{\mathbb{P}}$, és una aplicació bijectiva

$$F : \mathrm{Subv}(\mathbb{P}) \to \mathrm{Subv}(\overline{\mathbb{P}})$$

monòtona decreixent, això és,

$$V \subset W \iff F(V) \supset F(W), \quad V, W \subset \mathbb{P}.$$

1. Proveu que $\perp$ és una correlació $\perp : \mathbb{P} \rightsquigarrow \mathbb{P}^*$. L'anomenarem la *correlació canònica*. Identificant $\mathbb{P}$ amb $\mathbb{P}^{**}$, denotarem de la mateixa forma la correlació canònica $\perp : \mathbb{P}^* \rightsquigarrow \mathbb{P}$.

Primer de tot, sabem que $\perp$ és bijectiva. Per tant, ens falta veure que és monòtona decreixent. Farem servir una de les propietats de la dualitat/ortogonalitat en subespais vectorials: siguin $L, K \subset E$ dos subespais vectorials de l'espai vectorial E. Aleshores, sabem que $L \subset K \iff K^\perp \subset L^\perp$. Amb això, suposem que $V = \mathbb{P}(L), W = \mathbb{P}(K)$, tenim que

$$V \subset W \iff \mathbb{P}(L) \subset \mathbb{P}(K) \iff L \subset K \iff K^\perp \subset L^\perp \iff \mathbb{P}(K^\perp) \subset \mathbb{P}(L^\perp) \iff \perp(W) \subset \perp(V).$$

Per tant, clarament $\perp$ és monòtona decreixent, i per tant, $\perp$ és una correlació.

2. Proveu que si F és una correlació, aleshores

$$F(V \cap W) = F(V) \vee F(W), \quad F(V \vee W) = F(V) \cap F(W).$$

Sigui $[v] \in F(V \cap W)$. Aleshores, existeix algun

F ha de ser la classe d'un morfisme entre espais vectorials, f, que compleixi les mateixes hipòtesis en quant a la inversió de les inclusions. Per tant, quan ens faci falta, farem sevir $F = [f]$. Primer de tot, demostrarem que $F(V \vee W) = F(V) \cap F(W)$:

- $F(V \vee W) \subset F(V) \cap F(W)$: això deriva del fet que F és una correlació i que tenim les inclusions $V, W \subset V \vee W$. Aquestes ens impliquen que $F(V \vee W) \subset F(V)$ i que $F(V \vee W) \subset F(V)$, amb el que tenim que $F(V \vee W) \subset F(V) \cap F(W)$.

- $F(V) \cap F(W) \subset F(V \vee W)$: això deriva del fet que, si agafem l'aplicació lineal f a la que representa $F = [f]$, tenim el següent:

$$F(V) \cap F(W) = [f(L)] \cap [f(K)] = [f(L) \cap f(K)] \subset [f(L) + f(K)] = F(V) \vee F(W).$$

Amb les dues inclusions, clarament tenim que $F(V \vee W) = F(V) \cap F(W)$.

No me n'he ensortit de demostrar les dues inclusions per la primera afirmació ($F(V \cap W) = F(V) \vee F(W)$), però sí que n'he pogut fer una, la de dreta a esquerra, $F(V \cap W) \supset F(V) \vee F(W)$: el fet que $V \cap W \subset V, W$ implica que $F(V), F(W) \subset F(V \cap W)$, amb el que el seu *join* ($\vee$) també cau dins de la intersecció, $F(V) \vee F(W) \subset F(V \cap W)$. Malgrat no haver aconseguit demotrar-ho, ho farem servir fortament en propers apartats.

3. Proveu que la composició de dues correlacions és una projectivitat i que la composició d'una correlació i una projectivitat és una correlació.

Siguin $F : \mathbb{P} \to \overline{\mathbb{P}}, G : \overline{\mathbb{P}} \to \overline{\overline{\mathbb{P}}}$ correlacions. Aleshores, vegem que la composició $G \circ F$ compleix les propietats de les projectivitats (utilitzarem repetides vegades l'apartat 2):

- $(G \circ F)(V)$ és una varietat ja que tant G com F van de varietats a varietats.
- $V \subset W \iff F(W) \subset F(V) \iff (G \circ F)(V) \subset (G \circ F)(W)$.
- $(G \circ F)(V \cap W) = G(F(V) \vee F(W)) = (G \circ F)(V) \cap (G \circ F)(W)$.
- $(G \circ F)(V \vee W) = G(F(V) \cap F(W)) = (G \circ F)(V) \vee (G \circ F)(W)$.

Ara, siguin $f : \mathbb{P} \to \mathbb{P}$ i $g : \overline{\mathbb{P}} \to \overline{\mathbb{P}}$ projectivitats. Vegem que les seves composicions amb F són correlacions:

- $V \subset W \iff f(V) \subset f(W) \iff (F \circ f)(W) \subset (F \circ f)(V)$.
- $V \subset W \iff F(W) \subset F(V) \iff (g \circ F)(W) \subset (g \circ F)(V)$.

4. Proveu que, si F és una correlació, existeix una projectivitat $g : \mathbb{P} \to \overline{\mathbb{P}}^*$ tal que $F = \perp \circ g$.

És clar que la projectivitat $g = \perp \circ F$ compleix el requisit: hem de tenir en compte que $\perp^2$ és la identitat, i per tant, es comprova que

$$F = \perp \circ \perp \circ F.$$

El fet que g és una projectivitat es deriva de l'apartat anterior.

5. A partir d'aquest punt, suposarem que $\overline{\mathbb{P}} = \mathbb{P} = \mathbb{P}(E)$. Si $F = \perp \circ g$ és una correlació, sigui $F^* = \perp \circ g^*$, on g^* és la projectivitat dual de g. Proveu que $F^* = F^{-1}$.

Hi ha una propietat de les projectivitats duals que ens resultarà de particular utilitat, i és la següent: si $h = H^* \in \mathbb{P}^*$ és el (punt) dual d'un hiperplà de $\mathbb{P}$, aleshores es compleix que

$$g^*(h) = \left(g^{-1}(H)\right)^*.$$

Això ens indica, per tant, que respecte les subvarietats, podem escriure la següent relació:

$$g^* \circ \perp = \perp \circ g^{-1}.$$

Aleshores, el fet que $F^* = F^{-1}$ és una comprovació:

$$F^* \circ F = \perp \circ g^* \circ \perp \circ g = \perp \circ (g^* \circ \perp) \circ g = \perp \circ (\perp \circ g^{-1}) \circ g = \mathrm{Id}.$$

També ho podem veure composant per la dreta i per l'esquerra amb $\perp$, que és la seva pròpia inversa, i aleshores,

$$\perp \circ g^* \circ \perp \circ \perp = \perp \circ \perp \circ g^{-1} \circ \perp,$$
$$\perp \circ g^* = g^{-1} \circ \perp \implies F^* = F^{-1}.$$

6. Proveu que $P \in F(Q) \iff Q \in F^*(P)$. Direm que F és una *correlació simètrica* si $F = F^*$. Deduïu que F és simètrica si, i només si, $P \in F(Q) \iff Q \in F(P)$.

Primer, vegem que si F és una correlació, aleshores F^{-1} també ho és. Escrivim $F^{-1} = g^{-1} \circ \perp$. Aleshores, $V \subset W \iff W^\perp \subset V^\perp \iff g^{-1}\left(W^\perp\right) \subset g^{-1}\left(V^\perp\right) \iff (g^{-1} \circ \perp)(W) \subset (g^{-1} \circ \perp)(V)$, i això vol dir que $F^{-1} = g^{-1} \circ \perp$ és també una correlació.
Ara utilitzarem aquest resultat i el fet que $F^* = F^{-1}$ per demostrar l'equivalència que ens demanen:

$$P \in F(Q) \iff \{P\} \subset F(Q) \iff (F^{-1} \circ F)(Q) \subset F^{-1}(P) \iff Q \in F^*(P).$$

Ara, ens falta veure que F és simètrica si i només si $P \in F(Q) \iff Q \in F(P)$. Suposant que F és simètrica, veure això no és més que substituïr F^* per F al resultat que ja tenim. D'altra banda, si suposem certa l'equivalència $P \in F(Q) \iff Q \in F(P)$, vegem que F ha de ser simètrica: ajuntant les dues equivalències que tenim, ha de ser $P \in F(Q) \iff Q \in F^*(P) \cap F(P)$, i tirant enrere amb $F^{-1} = F^*$, ha de ser $Q \in F^*(P) \iff F^*\left(F^*(P) \cap F(P)\right) = \left(F^* \circ F^*\right)(P) \vee P \in F^*(Q)$. Ara notem que $\left(F^* \circ F^*\right)(P) \vee P$ ha de ser un sol punt per a que totes les dimensions quadrin, i això només pot passar en dos casos: la imatge de P per $(F^*)^2$ és el buit (absurd) o la imatge de $(F^*)^2$ és P mateix, amb el que tindríem que $(F^*)^2 = \mathrm{Id} \iff F^* = F^{-1} = F$, i per tant, que F és simètrica.

7. Si $\mathscr{Q}$ és una quàdrica no degenerada, l'aplicació $P \mapsto H_P(\mathscr{Q})$ indueix una correlació simètrica.

Anomenarem Φ a l'aplicació $P \mapsto H_P(\mathscr{Q})$, i notarem $\mathscr{Q} = [q_\varphi]$. Primer vegem que indueix una correlació, i després veurem que és efectivament simètrica. Siguin $L, K \subset E$ subespais vectorials d'E, i siguin $V := \mathbb{P}(L), W := \mathbb{P}(K)$. Aleshores, vegem que

$$V \subset W \iff \Phi(W) \subset \Phi(V).$$

D'esquerra a dreta, escrivim els conjunts $\Phi(V)$ i $\Phi(W)$:

$$\Phi(V) = H_V(\mathscr{Q}) := \{[u] \in \mathbb{P} : \varphi(u,v) = 0 \ \forall v \in L\},$$
$$\Phi(W) = H_W(\mathscr{Q}) := \{[u] \in \mathbb{P} : \varphi(u,v) = 0 \ \forall v \in K\}.$$

Tots els elements de $\mathbb{P}$ que són de la polar de W s'anul·len en tot K, que és més gran que L perquè $L \subset K$ (ja que $V \subset W$). Això en particular ens diu que s'anul·len en tot L, que està contingut en K, i per tant, que $\Phi(W) \subset \Phi(V)$.

De dreta a esquerra, tenim que $\Phi(W) \subset \Phi(V)$. Això ens indica que tots els punts que són polars de W (que anul·len φ en tot K) també ho són de V (anul·len φ en tot L). Però, pot passar que hi hagi punts a $\Phi(V)$ que no anul·lin φ en tot K, però sí que ho fan en tot L. Això ens indica que K és més gran que L, és a dir, que $L \subset K$, i en definitiva, que $V \subset W$.

Vegem ara que la correlació Φ és simètrica: ho provarem utilitzant l'apartat 6, on tenim una equivalència que ens diu que Φ és simètrica si, i només si, es compleix que

$$P \in \Phi(Q) \iff Q \in \Phi(P).$$

A més a més, només provarem una implicació de les dues, ja que l'altra és simètrica canviant els noms als punts. Vegem-ho: siguin $w_P, w_Q \in E$ no colineals, i siguin $P := [w_P], Q := [w_Q] \in \mathbb{P}$. Suposem que

$P \in \Phi(Q) = \{[u] \in \mathbb{P} : \varphi(u,v) = 0\ \forall v \in \langle w_Q \rangle\}$. Aleshores, com que φ és una forma bilineal simètrica no degenerada, tenim que $\varphi(w_P, w_Q) = 0 = \varphi(w_Q, w_P)$, i per tant, que $Q = [w_Q] \in \Phi(P)$. És clar que canviant els noms als punts, tenim l'altra implicació, per tant, hem provat que Φ és simètrica.

8. De fet, l'exemple de l'apartat 7 és universal: proveu que el conjunt de correlacions simètriques F està en bijecció amb el conjunt de classes de formes bilineals simètriques no degenerades sobre E, determinades llevat de proporcionalitat per un escalar no nul.

Establim l'aplicació següent entre les classes de formes bilineals simètriques no degenerades i les correlacions, fent

$$\mathscr{Q} \xmapsto{\Psi} \Psi(\mathscr{Q})(V) := H_V(\mathscr{Q}),\ \forall V \in \operatorname{Subv}(\mathbb{P}).$$

A l'apartat anterior hem vist que l'aplicació $\Psi(\mathscr{Q})(\cdot) : \operatorname{Subv}(\mathbb{P}) \to \operatorname{Subv}(\mathbb{P})$ és una correlació simètrica. Per tant, ara ens falta veure que podem "tirar enrere" Ψ i trobar una quàdrica $\mathcal{Q}$ a partir de la seva imatge. Sigui F una correlació simètrica, $P := [u], Q := [v] \in \mathbb{P}$, i sigui φ una forma bilineal, definida per $\varphi(u,v) = 0$ si i només si $P \in F(Q)$, que recordem que com que F és simètrica, és equivalent a dir $Q \in F(P)$: això ens indica que φ és simètrica. Ara, notem que només ens interessen els punts on la forma val zero, ja que $\mathcal{Q}$ en serà la classe d'equivalència, determinada llevat d'escalars no nuls. Notem que a més, φ no pot ser degenerada, ja que $[w] = R \in \operatorname{rad} \varphi \iff \varphi(w,-) \equiv 0 \iff R \in F(\mathbb{P})$, i per ser F correlació, $F = \perp \circ g$, i $F(\mathbb{P}) = (\perp \circ g)(\mathbb{P}) = \perp (g(\mathbb{P})) = \perp (\mathbb{P}) = \varnothing$, és a dir, "$[w] \in \varnothing \iff w = 0$" (per tant el radical de φ és només el 0). Per tant, amb això la tenim completament caracteritzada, i llavors tindrem que $\mathcal{Q} = [q_\varphi]$.

Per tant, hem vist que podem anar endavant i enrere amb Ψ, i veure que la quàdrica $\mathcal{Q}$ obtinguda a partir de F i la correlació simètrica $\Phi(\mathscr{Q})(\cdot)$ obtinguda a partir de $\mathscr{Q}$ són mútuament construibles una a partir de l'altra unívocament és força directe. Per tant, tenim que Ψ és una bijecció entre les correlacions simètriques i les classes de formes bilineals simètriques no degenerades.