Conceptes i resultats de teoria de la mesura

Teoria de la probabilitat GM-FME

2021-22(Q1)

Aquest breu resum recull els conceptes i resultats de teoria de la mesura i d'integració que necessitarem per al fonament teòric de la probabilitat.

1 σ-àlgebres i mesures

Definició 1 *Donat un conjunt E, direm que una família $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(E)$ de subconjunts de E Ã©s una* σ-algebra *si es compleix:*

(i) $\emptyset \in \mathcal{A}$;

(ii) si $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \overline{A} \in \mathcal{A}$;

(iii) si $A_n \in \mathcal{A}$ *per a tot* $n \geq 1$, *aleshores* $\bigcup_{n\geq 1} A_n \in \mathcal{A}$.

Si en la propietat (iii) només es demana que sigui tancada per unions finites, parlarem d'una *àlgebra*.

Propietats: $\mathcal{P}(E)$ i $\{\emptyset, E\}$ són σ-àlgebres; les interseccions numerables d'elements de $\mathcal{A}$ pertanyen a $\mathcal{A}$; la intersecció de σ-àlgebres és una σ-àlgebra; donat $F \subseteq \mathcal{P}(X)$ hi ha una més petita σ-àlgebra que conté F, l'anomenarem $\sigma(F)$, la σ-àlgebra generada per F. (Les demostracions són senzilles.)

El lema següent també es demostra sense massa dificultat.

Lema 2 *Siguin $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ dues σ-àlgebres sobre els conjunts E_A i E_B, respectivament. Aleshores el conjunt*

$$\{C \subseteq E_A \times E_B \mid C \text{ és una unió disjunta finita d'elements de } \mathcal{A} \times \mathcal{B}\}$$

és una àlgebra.

Per a la definició de mesura en general ens cal considerar la recta real extesa $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ amb les operacions i indeterminacions habituals.

Definició 3 *Sigui $\mathcal{A}$ una àlgebra o una σ-àlgebra sobre el conjunt E. Una mesura en $\mathcal{A}$ és una aplicació $\mu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ tal que*

(i) $0 \leq \mu(\emptyset) \leq \mu(A)$ *per a tot* $A \in \mathcal{A}$, *i*

(ii) si $\{A_n\}_{n\geq 1}$ *és una colÂ·lecció numerable d'elements disjunts de $\mathcal{A}$ i <u>la seva unió pertany a $\mathcal{A}$</u>, aleshores* $\mu\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right) = \sum_{n\geq 1} \mu(A_n)$.

Fixeu-vos que en el cas d'una σ-àlgebra la part subratllada es compleix per definició. En aquest cas, la terna $(E, \mathcal{A}, \mu)$ s'anomena *espai de mesura*.

Lema 4 *Una mesura μ en $\mathcal{A}$ satisfà les propietats següents (tots els conjunts que es mencionen pertanyen a $\mathcal{A}$):*

(i) Si $A \subseteq B$, *aleshores* $\mu(A) \leq \mu(B)$.

(ii) Si $A \subseteq \bigcup_{n\geq 1} A_n$, *aleshores* $\mu(A) \leq \sum_{n\geq 1} \mu(A_n)$.

(iii) Si $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots$, *aleshores* $\mu(\bigcup_{n\geq 1} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_i)$.

(iv) Si $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots$, *aleshores* $\mu(\bigcap_{n\geq 1} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_i)$.

La demostració fa servir les mateixes idees que el resultat anàleg per a espais de probabilitat (o la podeu consultar a [1]).

Una manera habitual per construir mesures és via l'anomenat teorema d'extensió, que ens permet estendre una mesura en una àlgebra $\mathcal{A}$ a tota la σ-àlgebra $\sigma(\mathcal{A})$.

Teorema 5 ***(Teorema d'extensió, atribuït a CarathÃ©odory, Hopf, Hahn, Kolmogorov, o quasevol combinació entre ells.)*** *Sigui $\mathcal{A}$ una àlgebra en E i μ una mesura σ-finita en $\mathcal{A}$, és a dir, tal que existeix una partició $E = \bigcup_{n\geq 1} A_n$ amb $A_n \in \mathcal{A}$ i $\mu(A_n) < \infty$ per a tot $n \geq 1$.*

Aleshores μ es pot extendre de manera única a $\sigma(\mathcal{A})$.

En la demostració del teorema hi apareixen els conceptes i idees que es fan servir per a construir la mesura de Lebesgue en el curs d'Anàlisi Real [1] (la mesura exterior, els conjunts mesurables, etc). Es poden trobar demostracions del Teorema d'extensió a la referència clàssica [2] o a l'apèndix del llibre [4]. Recordem també que sovint la mesura s'extén a una σ-àlgebra $\mathcal{A}^*$ que conté estrictament $\sigma(\mathcal{A})$, com passa en la construcció de la mesura de Lebesgue respecta als borelians.

Aplicacions: el teorema d'extensió és l'eina habitual per a construir espais de probabilitat com a producte d'altres espais. També es fa servir per garantir que donada una funció $F(x)$ no decreixent i contínua per la dreta, existeix una mesura p_F en $\mathbb{R}$ tal que $p_F((a,b)) = F(b) - F(a)$ (les anomenades mesures de Lebesgue-Stieljes). Per a comprovar que se satisfan les hipòtesis sovint es fa servir una mica d'integració per facilitar alguns arguments, com per exemple a l'apèndix de [4], però això no és realment necessari, com es veu a [3].

2 Funcions mesurables

Definició 6 *Siguin $(E_1, \mathcal{A}_1)$ i $(E_2, \mathcal{A}_2)$ dues σ-àlgebres. Una aplicació $f : E_1 \to E_2$ és* mesurable *si per a tot $B \in \mathcal{A}_2$ es té $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}_1$.*

Les següents són propietats estàndar de les funcions mesurables.

Propietats:

1. Si $\mathcal{A}_2 = \sigma(\mathcal{B})$, és a dir si $\mathcal{A}_2$ és la més petita σ-àlgebra que conté el conjunt $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(E_2)$, aleshores és suficient comprovar la condició per a tot $B \in \mathcal{B}$.
2. Les constants són funcions mesurables.
3. La funció característica $\chi_A : E_1 \to \mathbb{R}$ és mesurable per a tot $A \in \mathcal{A}_1$.
4. El conjunt de funcions mesurables (entre dues σ-àlgebres donades) és tancat per sumes, productes, valor absolut, composició, ínfims, supremems i límits.

Quan l'espai d'arribada és $\mathbb{R}$, com en una variable aleatòria unidimensional X, l'elecció més habitual és prendre els borelians com a σ-àlgebra. Per tant, és suficient comprovar, per exemple, que $X^{-1}((-\infty, a])$ és mesurable per a tot $a \in \mathbb{R}$.

3 La integral en un espai de mesura

En tot el que segueix, $(E, \mathcal{A}, \mu)$ és un espai de mesura fixat. Comencem definint la integral respecte μ d'una funció $f : E \to \mathbb{R}$ mesurable i no negativa, per posteriorment definir la classe de funcions integrables respecete μ. El desenvolupament és estàndar que es segueix a la majoria de textos [1, 2, 3], on es pot trobar la justificació de tots els resultats.

Primer considerem el cas en què f és *simple*, és a dir, tal que $\mathrm{Im}(f)$ és finita. Una funció simple no negativa es pot escriure com $f = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}$, on els A_i són conjunts mesurables i $a_i \geq 0$.

Definició 7 *La* integral *d'una funció simple no negativa $f : E \to \mathbb{R}$ respecte μ és*

$$\int_E f \, \mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i).$$

Es comprova que la definició és independent de la representació de f escollida.

Es un fet clau que tota funció mesurable no negativa es pot escriure com el límit de funcions simples.

Lema 8 *Tota funció $f : E \to \mathbb{R}$ mesurable no negativa es pot escriure com $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, on $\{f_n\}_{n\geq 1}$ és una successió de funcions simples tals que $0 \leq f_n(x) \leq f(x)$ per a tot $x \in E$*

I això ens porta a la definició de la integral d'una funció no negativa.

Definició 9 *Donada una funció $f : E \to \mathbb{R}$ mesurable no negativa, la seva* integral respecte la mesura *μ és*

$$\int_E f \, \mathrm{d}\mu = \sup \int_E g \, \mathrm{d}\mu,$$

on el suprem es prent sobre totes les funcions simples g tals que $0 \leq g(x) \leq f(x)$ per a tot $x \in E$.

Observació: totes les funcions mesurables no negatives tenen integral, però aquesta pot valer $+\infty$.

Finalment, arribem a la definició de funció integrable.

Definició 10 *Sigui $f : E \to \mathbb{R}$ una funció mesurable, i siguin $f^+ = \max(0, f)$ i $f^- = \max(0, -f)$ les seves parts positiva i negativa, respectivament (que són també funcions mesurables). Es diu que la funció f és* integrable *si tant f^+ com f^- tenen integral finita (respecte μ). En aquest cas, definim la* integral *de f respecte μ com*

$$\int_E f \mathrm{d}\mu = \int_E f^+ \mathrm{d}\mu - \int_E f^- \, \mathrm{d}\mu.$$

Notació: si $A \in \mathcal{A}$ és un conjunt mesurable i $f : E \to \mathbb{R}$ és una funció mesurable, direm que f és integrable en A respecte μ si $f\chi_A$ és integrable respecte μ. En tal cas, escriurem

$$\int_A f \, \mathrm{d}\mu = \int_E f\chi_A \, \mathrm{d}\mu.$$

4 Propietats de la integral

Per qüestions de practicitat es reuneixen aquí tot de resultats i propietats de la integral, tot i que si volguéssim fer el desenvolupament ben fet els hauríem anat intercalant amb les definicions i entre ells.

Proposició 11

1. *Si f i g són funcions mesurables no negatives, i $f \leq g$, tenim*

$$\int_E f \, \mathrm{d}\mu \leq \int_E g \, \mathrm{d}\mu.$$

2. *Si f és una funció mesurable no negativa, aleshores $\int_E f \, \mathrm{d}\mu = 0$ si i només si f és constant igual a zero gairebé arreu.*

3. *Una funció mesurable f és integrable si i només si $|f|$ és integrable, i en tal cas*

$$\left| \int_E f \, \mathrm{d}\mu \right| \leq \int_E |f| \, \mathrm{d}\mu.$$

4. *Si f, g són funcions integrables i $a, b \in \mathbb{R}$, aleshores*

$$\int_E (af + bg) \, \mathrm{d}\mu = a \int_E f \, \mathrm{d}\mu + b \int_E g \, \mathrm{d}\mu.$$

Teorema 12 ***(Teorema de la convergència monòtona)*** *Si $\{f_n\}_{n\geq 1}$ és una successió monòtona creixent de funcions mesurables no negatives que convergeix a f, aleshores*

$$\int f \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n \, \mathrm{d}\mu.$$

Teorema 13 ***(Teorema de la convergència dominada)*** *Si $\{f_n\}_{n\geq 1}$ és una successió de funcions integrables que convergeix a f i tal que existeix una funció integrable g amb $|f_n| \leq g$ per a tot $n \geq 1$, aleshores f és integrable i*

$$\int f \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n \, \mathrm{d}\mu.$$

Referències

[1] Carles Batlle i Enric Fossas, *Apunts d'Anàlisi Real*, descarregables a `https://dafme.upc.edu/ca/apunts`.

[2] Robert G. Bartle, *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*, Wiley, 1995.

[3] J. L. Doob, *Measure Theory*, Springer, 1994.

[4] Richard Durrett, *Probability: theory and examples*, Duxbury Press, 1991.