Problemes de Variable Complexa FME, curs 2019-20

Tema 1: El pla complex

1. Passeu de forma rectangular a exponencial o viceversa, i representeu en el pla complex:

(i) $3 - 3\mathrm{i}$.

(ii) $-2 - 4\mathrm{i}$.

(iii) -8.

(iv) $\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$.

(v) $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{3}}$.

(vi) $\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}$

2. Calculeu els següents nombres complexes en forma exponencial:

(i) $\frac{-4}{1+\mathrm{i}}$.

(ii) $\left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$.

(iii) $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{2}\mathrm{i}}$.

(iv) $\mathrm{i}^{37}\overline{\left(\frac{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{7}}}{-3+3\mathrm{i}}\right)}$.

(v) $\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$.

(vi) $(2 + 2\mathrm{i})^8$.

3. Trobeu les arrels complexes que s'indiquen:

(i) Les arrels cúbiques de 1.

(ii) (ii) Les arrels quadrades de i.

(iii) $(3\sqrt{3} - 27\mathrm{i})^{\frac{1}{5}}$.

(iv) $(-64)^{\frac{1}{6}}$.

4. Calculeu:

(i) $\sqrt{\frac{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}}$.

(ii) $\sqrt[4]{-1}$.

(iii) $\sqrt[4]{\mathrm{i}}$.

5. Resoleu les equacions

(i) $z^2 + (-5+4\mathrm{i})z + 11 - 7\mathrm{i} = 0.$

(ii) $z - \mathrm{i}\bar{z} = 1.$

6. Useu la fórmula de Cardano per trobar la solució real de l'equació $x^3 + 15x - 4 = 0.$

7. Descriviu els conjunts

(i) $|z+\mathrm{i}| < 5.$

(ii) $|2\mathrm{i} - z| = |z + 1 + 3\mathrm{i}|.$

(iii) $2 > \mathrm{Re}\ z > -3.$

(iv) $\mathrm{Re}\ [(3-4\mathrm{i})z] > 0.$

(v) $|z + 2 - \mathrm{i}| = 3.$

(vi) $|(1+\mathrm{i})z - 4| = 2.$

(vii) $\mathrm{Re}\ \left(\frac{z-\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right) > 1.$

8. Proveu:

(i) Si $a, b \in \mathbb{C},\ |a| < 1,\ |b| < 1 \implies \left|\dfrac{a-b}{1-\bar{b}a}\right| < 1.$

(ii) Si $a, b \in \mathbb{C},\ |a| < 1,\ |b| = 1 \implies \left|\dfrac{a-b}{1-\bar{b}a}\right| = 1.$

9. $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{C}$. Demostreu que són els vèrtexs d'un triangle equilàter sí, i només sí, $(a_1 \neq a_2 \neq a_3)$

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1.$$

10. Trobeu les condicions per tal que $az + b\bar{z} + c = 0$ tingui una única solució i trobeu-la.

11. Si ω és un generador de les arrels n-èsimes de la unitat ($\omega^n = 1$ i $\omega^m \neq 1$ si $m < n$),

$$1 + \omega^h + \omega^{2h} + \cdots + \omega^{(n-1)h} = 0,$$

sent $h \in \mathbb{Z},\ h \neq \dot{n}.$

12. Per a quins valors de a, b i c, $az + b\bar{z} + c = 0$ és una recta?

13. Comproveu que per $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ no nuls es té que $z_1z_2 \in \mathbb{R} \iff z_2 = \lambda\bar{z}_1$ amb $\lambda \in \mathbb{R}.$

14. Resoleu el sistema d'equacions lineals

$$\begin{cases} (1+\mathrm{i})x - 2y = 4\mathrm{i} \\ -x + (2+\mathrm{i})y = 0 \end{cases}$$

15. Utilitzant la forma exponencial d'un nombre complex, expresseu les funcions trigonomètriques $\cos(\theta_1 \pm \theta_2)$, $\sin(\theta_1 \pm \theta_2)$, $\cos(n\theta)$, $\sin(n\theta)$ en termes de $\cos\theta$, $\cos\theta_1$, $\cos\theta_2$, $\sin\theta$, $\sin\theta_1$, $\sin\theta_2$.

16. Comproveu que si pensem dos nombres complexos z_1, z_2 com dos vectors del pla $\mathbb{R}^2$, el seus producte escalar i determinant satisfan

$$\bar{z}_1 z_2 = \langle z_1, z_2 \rangle + i \det(z_1, z_2) \ .$$

17. Proveu la identitat de Lagrange: siguin $a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n \in \mathbb{C}$. Aleshores es compleix

$$\left| \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \right|^2 = \sum_{i=1}^{n} |a_i|^2 \sum_{i=1}^{n} |b_i|^2 - \sum_{1 \le i < j \le n} |a_i \bar{b}_j - a_j \bar{b}_i|^2.$$

18. Projecció estereogràfica i l'esfera de Riemann.
Sigui $\mathbb{S}^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$, $N = (0,0,1)$ (*pol nord*) i identifiquem el pla $x_3 = 0$ amb $\mathbb{C}$. Considerem l'aplicació $\phi : \mathbb{S}^2 \setminus \{N\} \to \mathbb{C}$ (que anomenem *projecció estereogràfica*) tal que per cada punt $P \in \mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$, $\phi(P)$ és el nombre complex obtingut de tallar la recta definida pels punts N i P amb el pla $x_3 = 0$.

Prescrivint que la imatge de N sigui ∞, la projecció estereogràfica estén a una aplicació $\phi : \mathbb{S}^2 \to \overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, que continuarem denotant ϕ. En aquest context, a $\mathbb{S}^2$ se l'anomena *esfera de Riemann.*

(i) Trobeu les expressions en coordenades de ϕ^{-1} i de ϕ.

(ii) Demostreu que els cercles que passen per N són en correspondència bijectiva amb les rectes de $\mathbb{C}$.

(iii) Demostreu que els cercles que no passen per N són en correspondència bijectiva amb els cercles de $\mathbb{C}$.

(iv) Si definim la distància entre dos punts de $\overline{\mathbb{C}}$ com la distància entre les seves corresponents antiimatges en $\mathbb{S}^2$, trobeu $d(z_1, z_2)$ si $z_1, z_2 \in \overline{\mathbb{C}}$, i $d(z, \infty)$, si $z \in \mathbb{C}$.

(v) Demostreu que si z_1 i z_2 es corresponen a punts diametralment oposats en $\mathbb{S}^2$ segons ϕ^{-1}, aleshores $z_1 \bar{z}_2 = -1$.

19. Transformacions de Möbius.

Sigui $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ una matriu amb coeficients complexos, $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, i determinant no nul, $ad - bc \neq 0$. Definim la *transformació de Möbius* associada a A com $T = T_A : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$:

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

.

(i) Demostreu que tota transformació de Möbius T és una bijecció de $\overline{\mathbb{C}}$ i trobeu T^{-1}.

(ii) Demostreu que donats $z_1, z_2, z_3 \in \overline{\mathbb{C}}$, diferent dos a dos, existeix una única transformació de Möbius S tal que $S(z_1) = 1$, $S(z_2) = 0$ i $S(z_3) = \infty$, donada per $S(z) = \frac{z - z_2}{z - z_3} \cdot \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_2}$.

(iii) Donades dues ternes z_1, z_2, z_3 i z_1', z_2', z_3' com les de (ii) proveu existeix una única transformació de Möbius T tal que $T(z_j) = z_j'$, $\forall j = 1, 2, 3$.

(iv) Donats quatre punts $z, z_1, z_2, z_3 \in \overline{\mathbb{C}}$, diferents dos a dos, la seva raó doble és defineix com $(z, z_1, z_2, z_3) = S(z)$, on S és la transofrmació de (ii) (calculada en termes de z_1, z_2, z_3). Demostreu si T és una transformació de Möbius, llavors T preserva el valor de la raó doble: $(T(z), T(z_1), T(z_2), T(z_3)) = (z, z_1, z_2, z_3)$.

(v) Si T és una transformació de Möbius i denotem $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, llavors és té:

$$T(\bar{\mathbb{R}}) = \bar{\mathbb{R}} \iff \exists a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ tals que } T = T_A.$$

(vi) Si T és una transformació de Möbius llavors $T(\bar{\mathbb{R}}) = C$, on C és un "cercle de $\bar{\mathbb{C}}$", això és, C és un cercle de $\mathbb{C}$ o una recta de $\mathbb{C}$ a la que afegim ∞.

(vii) Proveu que $(z, z_1, z_2, z_3) \in \bar{R} \iff z, z_1, z_2, z_3$ són sobre un "cercle".

(viii) Proveu que si T és una transformació de Möbius llavors transforma "cercles" en "cercles".

(ix) Si T és una transformació de Möbius que envia el cercle unitat $C(0;1)$ en ell mateix, llavors $T(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \dfrac{z - z_0}{\bar{z}_0 z - 1}$, sent $\theta \in \mathbb{R}$ i $z_0 \notin C(0;1)$.

(x) Si T és una transformació de Möbius que envia $\bar{\mathbb{R}}$ en $C(0;1)$, llavors $T(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \dfrac{z - z_0}{z - \bar{z}_0}$, sent $\theta \in \mathbb{R}$ i $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.