Facultat de Matemàtiques i Estadística

# Equacions diferencials ordinàries

Pau Martín

22 d'octubre de 2020

# Índex

# Capítol 1

# Introducció i definicions bàsiques

## 1.1 Introducció

Les equacions diferencials han estat l'eina que ha permès passar de la descripció a la predicció en l'estudi de tots els fenòmens que ens envolten, des del moviment dels planetes i estrelles a les partícules subatòmiques. La diferència fonamental entre les lleis de Kepler i la llei de la gravitació universal de Newton rau en que les primeres descriuen les trajectòries dels planetes en el seu conjunt (i, per tant, són aproximades al conjunt de dades que les conformen) mentre que la segona, en quantificar els canvis infinitessimals d'aquestes les trajectòries, sense donar-les explícitament, les conté. El cert és que les lleis de Kepler són només una aproximació de les solucions de les equacions definides per la llei de gravitació universal.

Aquest curs només vol ser una introducció a la teoria de les equacions diferencials ordinàries. Per la seva curta durada, ens limitarem a l'estudi dels sistemes lineals, als teoremes fonamentals d'existència, unicitat i regularitat de solucions de equacions diferencials ordinàries i intentarem donar unes pinzellades de teoria qualitativa i teoria de pertorbacions. En qualsevol cas, els continguts del curs seran una base suficient per a poder aprofundir en el tema en cursos posteriors.

## 1.2 Equacions diferencials ordinàries. Conceptes bàsics

### 1.2.1 Definició d'equació diferencial ordinària

Sense entrar en precisions tècniques, una equació diferencial és una equació que relaciona una funció incògnita amb les seves derivades. Així, són equacions diferencials

**Exemple 1.1.** *1.* $y' = y$, *on la incògnita és una funció* $y(x)$,

*2.* $y'' = -\sin(y)$, *on la incògnita és una funció* $y(x)$,

3. $y'' = -\sin(y) + \cos(x)$, *on la incògnita és una funció* $y(x)$,

4. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$, *on la incògnita és una funció* $z(x, y)$,

5. $y''(x) = -y(x-1)$, *on la incògnita és una funció* $y(x)$.

En aquest curs estudiarem només les anomenades equacions diferencials ordinàries.

**Definició 1.1.** *Anomenarem* equació diferencial ordinària, *que escriurem de manera abreujada* e.d.o., *a una equació de la forma*

$$g(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0, \tag{1.1}$$

*on la incògnita* $y(x) = (y_1(x), \ldots, y_m(x))^\top$ *és una funció de* $m$ *components i* una *variable* $x \in \mathbb{R}$, $y' = dy/dx$ *i* $g(x, z_1, z_2, \ldots, z_{n+1})$, $z_i \in \mathbb{R}^m$, *és una funció de* $1+m(n+1)$ *variables. La variable* $x$ *de la que depèn la incògnita* $y$ *s'anomena* variable independent.

*Sovint ens interessarà el cas en que hom pot aïllar* $y^{(n)}$ *de* (1.1), *és a dir, el cas en que l'e.d.o. és de la forma*

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)). \tag{1.2}$$

*En aquest darrer cas, direm que l'e.d.o. està en forma* explícita, *mentre que en el cas de* (1.1) *direm que l'e.d.o. està en forma* implícita. *Per simplificar, sovint escriurem* (1.2) *com*

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}),$$

*sobreentenent que* $y$ *és una funció avaluada en* $x$.

*Direm que les equacions* (1.1) *i* (1.2) *són e.d.o. de* $m$ *incògnites i d'ordre* $n$.

En l'exemple 1.1, són e.d.o. les equacions a 1, 2 i 3. La 1 és d'ordre 1. La 2 i la 3, d'ordre 2. La 4 no és una e.d.o. perquè la incògnita depèn de dues variables. Aquesta mena d'equacions s'anomenen equacions en derivades parcials. L'equació a 5 tampoc és una e.d.o. perquè la incògnita està avaluada en $x$ i en $x-1$. Aquesta equació és un exemple d'equació diferencial amb retard.

Al llarg d'aquest curs, estudiarem e.d.o. explícites.

**Definició 1.2.** *Considerem l'e.d.o. de* $m$ *incògnites d'ordre* $n$

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}).$$

*Direm que una funció* $\varphi : (a, b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ *n'és una* solució *si* $\varphi$ *és* $n$ *vegades derivable i*

$$\varphi^{(n)}(x) = f(x, \varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(n-1)}(x)) = 0, \qquad \forall x \in (a, b).$$

*En particular, cal que*

$$\{(x, \varphi(x), \ldots, \varphi^{(n-1)}(x)) \mid x \in (a, b)\} \subset \text{domini}\,(f).$$

*Anomenarem* solució general *de l'e.d.o. al* conjunt de totes les seves solucions.

La qüestió més elemental que ens podem plantejar davant una e.d.o. és si admet solucions. Veurem més endavant sota quines condicions es pot assegurar que una e.d.o. n'admet.

**Comentari 1.3.** *Sempre es pot transformar una e.d.o. de $m$ incògnites i d'ordre $n$ en una e.d.o. de $n \cdot m$ incògnites i ordre $1$. Per tant, ens podrem restringir a l'estudi de les e.d.o. d'ordre $1$.*

*En efecte, donada l'e.d.o. de $m$ incògnites i d'ordre $n$*

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}),$$

*podem definir les noves incògnites*

$$z_1 = y,\ z_2 = y', \dots,\ z_n = y^{(n-1)}.$$

*Observeu que cada $z_i$, $i = 1, \dots, n$, és un vector de $m$ components. Llavors, fent servir que $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$, tenim que les funcions $z_i$, $i = 1, \dots, n$, han de satisfer*

$$\begin{aligned} z_1' &= y' = z_2, \\ z_2' &= y'' = z_3, \\ &\vdots \\ z_{n-1}' &= y^{(n-1)} = z_n, \\ z_n' &= y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = f(x, z_1, z_1, \dots, z_n), \end{aligned}$$

*que és una e.d.o. de $n \cdot m$ incògnites i ordre $1$. De manera abreujada, definint $Z$ com el vector que té per components $z_1, \dots, z_n$ (és a dir, $Z^\top = (z_1^\top, \dots, z_n^\top)$), l'e.d.o. queda*

$$Z' = \begin{pmatrix} z_2 \\ \vdots \\ z_n \\ f(x, Z) \end{pmatrix}.$$

**Exemple 1.2.** *Considerem l'e.d.o. d'una incògnita i ordre $2$*

$$y'' + y = 0.$$

*Observeu que està escrita en forma implícita. En forma explícita és*

$$y'' = -y.$$

*Si definim $z_1 = y$ i $z_2 = y'$, tenim que, per la igualtat immediatament a sobre,*

$$\begin{aligned} z_1' &= y' = z_2, \\ z_2' &= y'' = -y = -z_1. \end{aligned}$$

*Per tant, l'e.d.o. d'ordre $2$ $y'' + y = 0$ és equivalent l'e.d.o. d'ordre $1$*

$$\begin{aligned} z_1' &= z_2, \\ z_2' &= -z_1. \end{aligned}$$

### 1.2.2 Sistemes autònoms i no autònoms

Tal com hem vist en la subsecció anterior, sense perdre generalitat ens podem restringir a considerar e.d.o.'s d'ordre 1.

**Definició 1.4.** *Direm que una e.d.o. és* autònoma *si no depèn explícitament de la variable independent, és a dir, si és de la forma*

$$y' = f(y).$$

*Anàlogament, direm que una e.d.o. és* no autònoma *si és de la forma*

$$y' = f(x, y).$$

La següent proposició posa de manifest la diferència entre les e.d.o. autònomes i no autònomes.

**Proposició 1.5.** *Siguin $y' = f(y)$, una e.d.o. autònoma de $m$ variables, i $\varphi : (a, b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$, una solució. Llavors, per tot $\alpha \in \mathbb{R}$, la funció $\varphi_\alpha : (a+\alpha, b+\alpha) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$, traslladada de $\varphi$, definida per*

$$\varphi_\alpha(x) = \varphi(x - \alpha)$$

*n'és també solució.*

*Demostració.* En efecte, com $\varphi'(x) = f(\varphi(x))$, per ser $\varphi$ solució de l'e.d.o.,

$$\varphi'_\alpha(x) = \varphi'(x - \alpha) = f(\varphi(x - \alpha)) = f(\varphi_\alpha(x)).$$

Per tant, $\varphi_\alpha$ també n'és solució. $\square$

**Exercici 1.1.** *En certa manera, el recíproc de la Proposició 1.5 és cert, és a dir, si per a tota solució $\varphi$ d'una e.d.o., les seves traslladades també en són solució, llavors l'e.d.o. és autònom. Preciseu l'enunciat. Veurem com fer-ho més endavant.*

**Comentari 1.6.** *Considereu l'e.d.o. no autònoma*

$$y' = f(x, y).$$

*Sigui $z = (x, y)$. Com $dx/dx = 1$, tenim que*

$$z' = (x', y') = (1, f(x, y)) = (1, f(z)).$$

*La variable $z$ és solució del sistema autònom $z' = g(z)$, on $g(z) = (1, f(z))$.*

*Per tant, és possible transformar un sistema no autònom en un sistema autònom d'una variable més.*

### 1.2.3 El problema de Cauchy (o de valor inicial)

La primera qüestió que ens podem plantejar sobre una e.d.o. és l'existència de solucions. Si un pot trobar-les totes explícitament, la pregunta es torna trivial. Aquest serà el cas d'alguns tipus d'equacions. Però, en general, no serà possible trobar-ne explícitament les solucions. Llavors, la qüestió de la seva existència és delicada. Per a tractar-la, considerarem els anomenats problemes de Cauchy.

**Definició 1.7.** *Siguin* $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$*, un conjunt obert, i* $f : U \to \mathbb{R}^n$*, una funció o camp vectorial.*

*Donat* $(x_0, y_0) \in U$*, anomenarem problema de Cauchy o problema de valor inicial a trobar una solució* $\varphi$ *de* $y' = f(x, y)$ *tal que* $\varphi(x_0) = y_0$*, és a dir a trobar una funció* $\varphi : (a, b) \to \mathbb{R}^n$*, amb* $x_0 \in (a, b)$*, solució de*

$$\begin{aligned} y' &= f(x, y), \\ y(x_0) &= y_0. \end{aligned}$$

*El punt* $(x_0, y_0)$ *s'anomena* condició inicial.

S'anomena problema de valor inicial (que abreujarem com p.v.i.), perquè busquem una solució de l'e.d.o. que satisfà un determinat valor $y_0$ en un instant inicial $x_0$.

Alguns exemples són els següents.

**Exemple 1.3.** *Una solució del p.v.i.*

$$\begin{aligned} y' &= y, \\ y(0) &= 1 \end{aligned}$$

*és* $\varphi(x) = e^x$*. En efecte,* $\varphi'(x) = (e^x)' = e^x = \varphi(x)$ *i* $\varphi(0) = e^0 = 1$*.*

De fet, l'e.d.o. $y' = y$ admet solucions per a qualsevol condició inicial.

**Exemple 1.4.** *Per a qualsevol* $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$*, una solució del p.v.i.*

$$\begin{aligned} y' &= y, \\ y(x_0) &= y_0 \end{aligned}$$

*és* $\varphi(x) = y_0 e^{(x-x_0)}$*. En efecte,* $\varphi'(x) = (y_0 e^{(x-x_0)})' = y_0 e^(x - x_0) = \varphi(x)$ *i* $\varphi(x_0) = y_0 e^0 = y_0$*.*

**Exercici 1.2.** *Proveu que la funció* $\varphi(x) = y_0 e^{(x-x_0)}$ *en l'exemple anterior és l'única solució del p.v.i.* $y' = y$*,* $y(x_0) = y_0$*. Això ho provarem en el proper capítol.*

Però un p.v.i. pot admetre més d'una solució, com mostra el proper exemple.

**Exemple 1.5.** *El p.v.i.*

$$\begin{aligned} yy' - x &= 0, \\ y(0) &= 0 \end{aligned}$$

*admet dues solucions:* $\varphi_\pm(x) = \pm x$*.*

O pot no tenir-ne cap.

**Exemple 1.6.** *Veurem més endavant que el p.v.i.*

$$\begin{aligned} yy' + x &= 0, \\ y(0) &= 0 \end{aligned}$$

*no té cap solució.*

**Exercici 1.3.** *Proveu que el p.v.i. de l'Exemple 1.6 no té solucions.*

### 1.2.4 Interpretació geomètrica d'una e.d.o.

Considerem, per a simplificar, una funció $f : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on $U$ és un obert, i l'e.d.o.

$$y' = f(x, y). \tag{1.3}$$

Una funció $\varphi$ n'és solució si $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$. Ara bé, $\varphi'(x)$ és el pendent de la recta tangent a la gràfica de $\varphi$. Llavors, la igualtat $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$ ens diu que el pendent de la recta tangent a la gràfica de la solució $\varphi(x)$ és precisament $f(x, \varphi(x))$. Així, podem interpretar la funció $f(x, y)$ a (1.3) com un camp de pendents, és a dir, una funció que, a cada punt $(x, y)$, li assigna un pendent $f(x, y)$.

En dimensió superior, tenim una interpretació similar. Suposem ara que, a (1.3), la funció $f : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ és un camp vectorial. Les funcions $\varphi : (a, b) \to \mathbb{R}^n$ es poden interpretar com corbes a $\mathbb{R}^n$. En cada punt $\varphi(x)$, el vector $\varphi'(x)$ és el vector tangent a la corba. Llavors, $\varphi$ és solució de (1.3) si el seu vector tangent en $\varphi(x)$ és $f(x, \varphi(x))$, és a dir, si la corba $\varphi(x)$ és tangent al camp vectorial $f$ en el punt $(x, \varphi(x))$, per a tot $x \in (a, b)$

### 1.2.5 Alguns exemples

1. Considerem una molla elàstica, amb factor de rigidesa $\kappa > 0$. Suposem que a l'extrem de la molla pengem una massa $m$. Sigui $y(t)$ la posició de la massa en l'instant $t$, mesurada a partir del pun d'equilibri de la molla. De la segona llei de Newton i de la llei de Hooke tenim que la posició de la massa ha de satisfer l'equació de segon ordre

   $$m\ddot{y} = -\kappa y.$$

   Aquesta és l'equació d'un *oscil·lador harmònic*. Observem que $\dot{y} = dy/dt$.

2. Considerem una massa $m$ que penja d'un pèndol de longitud $\ell$ en un camp gravitatori constant de força $g$. Sigui $\theta$ l'angle que fa el pèndol respecte a la vertical, on $\theta = 0$ indica que el pèndol està en la posició inferior. L'equació que satisfà $\theta$ és

   $$m\ell\ddot{\theta} = -g \sin\theta \qquad \Longleftrightarrow \ddot{\theta} = -\frac{g}{\ell} \sin\theta.$$

3. Siguin $q_1, \ldots, q_n$ les posicions a l'espai (en un sistema de referència fixat) de $n$ cossos puntuals de masses $m_1, \ldots, m_n$. Segons la llei de gravitació universal de Newton, la força que exerceix el cos $i$ sobre el cos $j$ és inversament proporcional al quadrat de la distància entre ells i proporcional al producte de les seves masses. Proveu que les posicions $q_i$, $i = 1, \ldots, n$, satisfan les e.d.o.

   $$m_i \ddot{q}_i = G \sum_{j \neq i} \frac{m_i m_j}{\|q_j - q_i\|^3} (q_j - q_i), \qquad i = 1, \ldots, n.$$

4. Model epidemiològic SIR (vegeu, per exemple, això). Si considereu una població susceptible, $S$, un conjunt d'infectats, $I$, i el grup dels que surten

del total — ja sigui perquè es recuperen o perquè moren —, un model molt conegut de l'expansió de la grip és el conjunt de e.d.o.'s

$$\begin{cases} \dot{S} = -\dfrac{\beta}{N} SI, \\ \dot{I} = \dfrac{\beta}{N} SI - \gamma I, \\ \dot{R} = \gamma I, \end{cases}$$

on $N = S + I + R$ és la població total, que es suposa constant, i $\beta$ i $\gamma$ són paràmetres. Es pot veure que la dinàmica del sistema depèn essencialment de $R_0 = \beta/\gamma$, que s'anomena nombre reproductiu bàsic.

5. E.d.o.'s de famílies de corbes. Com a exemple, considerem la família de les circumferències al pla centrades a l'origen,

$$x^2 + y^2 = r^2, \qquad r \in \mathbb{R}.$$

Si suposem que $y$ és una funció de $x$, derivant aquesta darrera igualtat respecte a $x$ obtenim

$$2x + 2yy' = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad y' = -\frac{x}{y}.$$

Ara podríem considerar les família de corbes ortogonals a la família $\{x^2 + y^2 = r^2,\ r \in \mathbb{R}\}$. L'e.d.o. que satisfà és

$$y' = \frac{y}{x}.$$

Comproveu que les solucions d'aquesta darrera equació són $y = \alpha x$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

# Capítol 2

# Equacions diferencials lineals

En aquest capítol estudiarem les e.d.o. lineals. En primer lloc, considerarem els sistemes lineals en general, donant-ne les propietats bàsiques. En general, però, no és possible resoldre explícitament aquesta mena de sistemes. Després passarem a estudiar el cas particular dels sistemes lineals amb coeficients constants, els quals sí podem resoldre completament.

Aprofitem per canviar el nom de la variable independent, que passa a ser $t$. La incògnita serà indistintament $x$ o $y$. Les derivades de la incògnita respecte a $t$ les denotarem indistintament com $x'$ o $\dot{x}$.

## 2.1 Sistemes lineals generals

Al llarg d'aquesta secció, $I \subset \mathbb{R}$ denotarà un interval obert.

### 2.1.1 Definicions bàsiques

**Definició 2.1.** *Direm que una e.d.o. o sistema d'e.d.o.'s és* lineal *si és de la forma*

$$\dot{x} = A(t)x + b(t),$$

*on, per a tot $t \in I \subset \mathbb{R}$, $A(t) \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ (o $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$) i $b(t) \in \mathbb{R}^n$. La funció incògnita $x$ és un vector $n$-dimensional.*

*Direm que el sistema és* homogeni *si $b(t) = 0$, per a tot $t$.*

*Direm que el sistema és* de coeficients constants *si la matriu $A$ és constant.*

**Exemple 2.1.** *L'oscil·lador harmònic forçat externament $\ddot{y} + a^2 y = \cos t$ defineix un sistema lineal. En efecte, introduint $x_1 = y$ i $x_2 = \dot{y}$, l'e.d.o. es transforma en el sistema*

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -a^2 x_1 + \cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \cos t \end{pmatrix}.$$

El motiu de considerar sistemes lineals és el següent. Considerem el sistema d'e.d.o.'s

$$\dot{x} = f(t, x),$$

on $f$ és una funció de classe $C^1$ respecte a $x$. Suposem que en coneixem una solució, $x_0(t)$, $t \in I$, i que volem estudiar-ne les solucions properes a $x_0$. Per a fer-ho, escrivim $x = x_0 + \tilde{x}$ o, equivalentment, $\tilde{x} = x - x_0$. Com la funció $f$ és de classe $C^1$ respecte a $x$, podem escriure

$$f(t,x) = f(t,x_0(t)) + D_x f(t,x_0(t))(x - x_0(t)) + o((x - x_0(t)),$$

on $D_x f$ denota la matriu diferencial de $f$ respecte a $x$, amb el que l'equació es transforma en

$$\dot{x} = f(t,x_0(t)) + D_x f(t,x_0(t))(x - x_0(t)) + o((x - x_0(t)).$$

Com $x = x_0 + \tilde{x}$, ens queda

$$\dot{x}_0 + \dot{\tilde{x}} = f(t,x_0(t)) + D_x f(t,x_0(t))\tilde{x} + o(\tilde{x}).$$

Fent servir que $\dot{x}_0 = f(t,x_0(t))$, perquè estem suposant que $x_0$ és solució de l'e.d.o., aquesta darrera equació és

$$\dot{\tilde{x}} = D_x f(t,x_0(t))\tilde{x} + o(\tilde{x}).$$

Si menyspreem els termes de l'error $o(\tilde{x})$, el comportament de les solucions de $\dot{x} = f(t,x)$ a prop de la solució $x_0(t)$ ve donat, en primer ordre, per les solucions del sistema lineal (i homogeni)

$$\dot{\tilde{x}} = D_x f(t,x_0(t))\tilde{x}. \tag{2.1}$$

Si sabem resoldre aquest sistema lineal, tindrem el primer ordre de les solucions del sistema original properes a $x_0$.

### 2.1.2 Estructura de l'espai de solucions de sistemes lineals

La estructura lineal dels sistemes que estem considerant en aquest capítol se'n tradueix al nivell de les solucions. Més concretament, quan el sistema és homogeni, tenim el següent resultat.

**Proposició 2.2.** *Considerem el sistema lineal homogeni*

$$\dot{x} = A(t)x.$$

*Siguin $x_1$ i $x_2$ dues solucions del sistema. Llavors, per a tot $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$), $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$ n'és també solució. És a dir, la solució general del sistema és un espai vectorial (real i complex). Aquesta propietat és sovint anomenada* principi *de superposició.*

*Demostració.* Tenim que, per hipòtesi, $\dot{x}_i(t) = A(t)x_i(t)$, $i = 1,2$. Siguin $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Tenim que, per la linealitat de $A$,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\lambda_1 x_1(t) + \lambda_2 x_2(t)) &= \lambda_1 \dot{x}_1(t) + \lambda_2 \dot{x}_2(t) \\ &= \lambda_1 A(t)x_1(t) + \lambda_2 A(t)x_2(t) = A(t)(\lambda_1 x_1(t) + \lambda_2 x_2(t)).\end{aligned}$$

Per tant, $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$ és també solució del sistema. □

Observeu que la Proposició 2.2 només diu que la solució general d'un sistema lineal homogeni és un espai vectorial, sense donar-ne informació sobre la dimensió. En particular, aquesta podria ser 0 si el sistema només admetés la solució $x(t) = 0$ per a tot $t$. La dimensió de l'espai de solucions està lligada a l'existència i unicitat de solucions dels p.v.i. associats al sistema, com veurem en el Teorema 2.8.

Quan el sistema és no homogeni, tenim el següent resultat sobre la seva solució general.

**Proposició 2.3.** *Considerem el sistema lineal homogeni*

$$\dot{x} = A(t)x + b(t).$$

*Sigui $\varphi_p$, una solució del sistema. Llavors, $\varphi$ n'és solució si i només si existeix $\varphi_h$, solució del sistema homogeni associat $\dot{x} = A(t)x$, tal que $\varphi = \varphi_p + \varphi_h$.*

*Demostració.* Suposem que $\varphi$ és solució del sistema $\dot{x} = A(t)x + b(t)$. Afirmem que $\varphi_h = \varphi - \varphi_p$ és solució del sistema homogeni associat. En efecte,

$$\dot{\varphi}_h = \dot{\varphi} - \dot{\varphi}_p = A(t)\varphi + b(t) - A(t)\varphi_p - b(t) = A(t)(\varphi - \varphi_p) = A(t)\varphi_h.$$

Per tant, $\varphi = \varphi_p + \varphi_h$. Això prova la implicació cap a la dreta.

La implicació cap a l'esquerra és immediata perquè si $\varphi = \varphi_p + \varphi_h$, amb $\varphi_h$ solució del sistema homogeni associat, llavors

$$\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_p + \dot{\varphi}_h = A(t)\varphi_p + b(t) + A(t)\varphi_h = A(t)(\varphi_p + \varphi_h) + b(t) = A(t)\varphi + b(t).$$

□

Una conseqüència important d'aquestes dues proposicions és que per a resoldre un sistema lineal no homogeni $\dot{x} = A(t)x + b(t)$ una manera de procedir és la següent:

1. trobar la solució general del sistema homogeni associat, $\dot{x} = A(t)x$, $\{\varphi_h \mid \dot{\varphi}_h = A(t)\varphi_h\}$,
2. trobar una solució particular del sistema complet, $\varphi_p$.

Llavors, la solució general de l'e.d.o. és

$$\{\varphi_p\} + \{\varphi_h \mid \dot{\varphi}_h = A(t)\varphi_h\} = \{\varphi \mid \varphi = \varphi_p + \varphi_h,\ \dot{\varphi}_h = A(t)\varphi_h\}.$$

**Comentari 2.4.** *Les Proposicions 2.2 i 2.3 les podem reescriure fent servir el llenguatge de l'àlgebra lineal de la manera següent.*

*Donat el sistema d'e.d.o.'s lineal i homogeni $\dot{x} = A(t)x$, definim l'operador $\mathcal{L}$, actuant sobre funcions derivables, com*

$$\mathcal{L}\,x = \dot{x} - A(t)x. \tag{2.2}$$

*Fent servir aquest operador, el sistema $\dot{x} = A(t)x$ s'escriu $\mathcal{L}\,x = 0$.*

*Observem que l'operador $\mathcal{L}$ és lineal. En efecte, per a qualsevol parell de funcions derivables, $x_1$ i $x_2$, i per a tot $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$,*

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\,(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) &= \frac{d}{dt}(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) - A(t)(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)\\ &= \lambda_1 \dot{x}_1 + \lambda_2 \dot{x}_2 - \lambda_1 A(t)x_1 - \lambda_2 A(t)x_2\\ &= \lambda_1 \mathcal{L}\,x_1 + \lambda_2 \mathcal{L}\,x_2.\end{aligned}$$

*Llavors, com l'e.d.o. és $\mathcal{L}\,x = \dot{x} - A(t)x = 0$, tenim que la seva solució general és*

$$\{\varphi \mid \ \dot{\varphi} - A(t)\varphi = 0\} = \{\varphi \mid \ \mathcal{L}\,\varphi = 0\} = \ker \mathcal{L}$$

*Ara bé, el nucli d'un operador lineal és un espai vectorial. Això és el que diu la Proposició 2.2.*

*El sistema no homogeni $\dot{x} = A(t)x + b(t)$ s'escriu, fent servir l'operador $\mathcal{L}$, com*

$$\mathcal{L}\,x = b.$$

*Com $\mathcal{L}$ és lineal, tenim que per a qualsevol $\varphi_p$ tal que $\mathcal{L}\,\varphi_p = b$,*

$$\{\varphi \mid \ \mathcal{L}\,\varphi = b\} = \{\varphi_p\} + \ker \mathcal{L} = \{\varphi \mid \varphi = \varphi_p + \varphi_h,\ \varphi_h \in \ker \mathcal{L}\,\}.$$

*Això és la traducció a aquest llenguatge del que diu la Proposició 2.3.*

### 2.1.3 E.d.o.'s lineals unidimensionals

El cas unidimensional és molt especial. És l'únic cas general que sempre es pot resoldre — o, al menys, les seves solucions sempre es poden expressar explícitament en termes de quadratures —. Aquest fet ens permetrà resoldre alguns sistemes lineals de dimensió superior.

Considerem l'e.d.o.

$$\dot{x} = a(t)x + b(t), \tag{2.3}$$

on $a, b : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ són funcions contínues. Per a resoldre'l, tal com vam dir en la secció anterior, primer trobarem la solució general de l'e.d.o. homogènia associada i, després, trobarem una solució particular de l'e.d.o. completa.

**Proposició 2.5.** *Considerem l'e.d.o. lineal homogènia associada a* (2.3),

$$\dot{x} = a(t)x. \tag{2.4}$$

*Sigui $t_0 \in I$. La solució general de* (2.4) *és*

$$\left\{\lambda e^{\int_{t_0}^{t} a(s)\, ds} \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\}.$$

*Demostració.* Observem que, com la funció $a$ és contínua $I$, la funció $\int_{t_0}^{t} a(s)\, ds$ és de classe $C^1$ a $I$ i

$$\frac{d}{dt}\int_{t_0}^{t} a(s)\, ds = a(t).$$

Sigui[1]

$$\varphi(t) = e^{\int_{t_0}^{t} a(s)\, ds}.$$

[1]Perquè hem escollit aquesta funció? El raonament és el següent. De $\dot{x}(t) = a(t)x(t)$, si suposem que $x(t) \neq 0$, com $x(t)$ és una funció escalar, tenim que

$$\frac{\dot{x}(t)}{x(t)} = a(t).$$

Integrant a ambdós costats de la igualtat entre $t_0$ i $t$, tenim que

$$\int_{t_0}^{t} \frac{\dot{x}(s)}{x(s)}\, ds = \int_{t_0}^{t} a(s)\, ds.$$

Observem que $\varphi(t) \neq 0$, per a tot $t \in I$, perquè l'exponencial no s'anul·la a $\mathbb{R}$. Afirmem que $\varphi$ és solució de (2.4). En efecte,

$$\dot{\varphi}(t) = \frac{d}{dt}\left(e^{\int_{t_0}^t a(s)\,ds}\right) = e^{\int_{t_0}^t a(s)\,ds}\frac{d}{dt}\int_{t_0}^t a(s)\,ds = a(t)e^{\int_{t_0}^t a(s)\,ds} = a(t)\varphi(t).$$

La Proposició 2.2 implica llavors que

$$\left\{\lambda e^{\int_{t_0}^t a(s)\,ds} \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\} \subset \{x \mid \dot{x} = a(t)x\}.$$

Ens falta veure la inclusió contrària.

Sigui $\tilde{\varphi} : \tilde{I} \subset I \to \mathbb{R}$ una solució de (2.4). Com $\varphi$ no s'anul·la, podem escriure $\tilde{\varphi}(t) = c(t)\varphi(t)$, on $c : \tilde{I} \to \mathbb{R}$ és una funció derivable[2]. Del fet que tant $\varphi$ com $\tilde{\varphi}$ siguin solució de (2.4) deduïm que

$$a(t)c(t)\varphi(t) = \frac{d}{dt}(c(t)\varphi(t)) = \dot{c}(t)\varphi(t) + c(t)\varphi(t),$$

el que implica que $\dot{c}(t)\varphi(t) = 0$, per a tot $t \in \tilde{I}$. Com $\varphi$ no s'anul·la, tenim que $\dot{c}(t) = 0$, per a tot $t \in \tilde{I}$, és a dir $c(t) = \lambda$, per a algun $\lambda \in \mathbb{R}$. □

**Exercici 2.1.** *Per què aquesta demostració no funciona en el cas de que l'e.d.o. sigui de dimensió més gran que 1? **Indicació:** si bé es pot definir*

$$\tilde{A}(t) = \int_{t_0}^t A(s)\,ds,$$

*quan $A$ és una matriu, simplement integrant cada element d'$A$, i definir la seva exponencial com*

$$e^{\tilde{A}(t)} = \sum_{j \geq 0} \frac{1}{j!}\tilde{A}(t)^j,$$

*que resulta ser una matriu derivable (feu servir el criteri $M$ de Weierstrass de manera adient) veieu que, en general,*

$$\frac{d}{dt}e^{\tilde{A}(t)} \neq A(t)e^{\tilde{A}(t)}.$$

*Què ha de satisfer la matriu $A$ per a que aquesta darrera igualtat sigui certa?*

Ara estem en condicions de donar la solució general de (2.3).

---

Ara bé, com $\frac{d}{dt}\log x(t) = \frac{\dot{x}(s)}{x(s)}$, tenim que

$$\int_{t_0}^t \frac{\dot{x}(s)}{x(s)}\,ds = \log x(t) - \log x(t_0) = \log x(t) - \log x_0.$$

Per tant,

$$\log x(t) = \log x_0 + \int_{t_0}^t a(s)\,ds.$$

Prenent exponencials a ambdós costats, obtenim la funció $\varphi$.

[2] $c(t) = \tilde{\varphi}(t)/\varphi(t)$ és un quocient de funcions derivables amb denominador no nul.

**Proposició 2.6.** *Sigui $t_0 \in I$. La solució general de l'e.d.o.* (2.3) *és*

$$\left\{ \lambda e^{\int_{t_0}^t a(s)\,ds} + e^{\int_{t_0}^t a(s)\,ds} \int_{t_0}^t e^{-\int_{t_0}^s a(u)\,du} b(s)\,ds \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

*Equivalentment, per a qualsevol $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}$, la única solució del p.v.i.*

$$\dot{x} = a(t)x + b(t), \quad x(t_0) = x_0$$

*és*

$$\begin{aligned} \varphi(t, t_0, x_0) &= e^{\int_{t_0}^t a(s)\,ds} \left( x_0 + \int_{t_0}^t e^{-\int_{t_0}^s a(u)\,du} b(s)\,ds \right) \\ &= e^{\int_{t_0}^t a(s)\,ds} x_0 + \int_{t_0}^t e^{\int_s^t a(u)\,du} b(s)\,ds. \end{aligned}$$

*Demostració.* La demostració es basa en el *mètode de variació de les constants*[3], fonamental en l'estudi de tot tipus d'equacions que involucren operadors diferencials. Busquem les solucions $x$ de (2.3) introduint la nova incògnita $c$ tal que

$$x(t) = e^{\int_{t_0}^t a(s)\,ds} c(t). \tag{2.5}$$

Observem que $c$ està ben definida, perquè l'exponencial no s'anul·la. La substitució de $x$ en (2.5) en l'equació (2.3) dóna

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= a(t)x(t) + b(t) && \iff \\ \frac{d}{dt}\left(e^{\int_{t_0}^t a(s)\,ds}\right) c(t) + e^{\int_{t_0}^t a(s)\,ds} \dot{c}(t) &= a(t) e^{\int_{t_0}^t a(s)\,ds} c(t) + b(t) && \iff \\ a(t) e^{\int_{t_0}^t a(s)\,ds} c(t) + e^{\int_{t_0}^t a(s)\,ds} \dot{c}(t) &= a(t) e^{\int_{t_0}^t a(s)\,ds} c(t) + b(t) && \iff \\ e^{\int_{t_0}^t a(s)\,ds} \dot{c}(t) &= b(t). \end{aligned}$$

És a dir,

$$\dot{c}(t) = e^{-\int_{t_0}^t a(s)\,ds} b(t).$$

Per tant, fixat qualsevol $t_0 \in I$, tenim que totes les funcions $c$ satisfent aquesta darrera igualtat són

$$c(t) = \lambda + \int_{t_0}^t e^{-\int_{t_0}^s a(u)\,du} b(s)\,ds.$$

La proposició queda provada substituint aquesta expressió de $c$ en (2.5).

Respecte a la fórmula de $\varphi(t, t_0, x_0)$ només cal observar que s'obté de l'anterior prenent $\lambda = x_0$. Com

$$\int_{t_0}^{t_0} e^{-\int_{t_0}^s a(u)\,du} b(s)\,ds = 0.$$

$\varphi(t_0, t_0, x_0) = x_0$, el que implica que és solució del p.v.i.. □

[3]En el context d'equacions en derivades parcials, aquest mètode es coneix com principi de Duhamel.

### 2.1.4 Sistemes lineals homogenis

El primer resultat que enunciem el podeu generalitzar adaptant-lo convenientment a sistemes d'e.d.o.'s no necessàriament lineals.

**Proposició 2.7.** *Considerem el sistema lineal homogeni*

$$\dot{x} = A(t)x.$$

*Suposem que els coeficients de la matriu $A$ són de classe $C^k$ en $I \subset \mathbb{R}$, amb $k \geq 0$. Llavors, totes les solucions del sistema són de classe $C^{k+1}$ en $I$.*

*Demostració.* Ho provarem per inducció sobre $k$. Comencem per $k = 0$.

Per definició, una funció $\varphi$ és solució del sistema si és derivable i $\dot{\varphi}(t) = A(t)\varphi(t)$. Tant, $\dot{\varphi}(t)$ és el producte de $A$, que és de classe $C^0$, amb $\varphi$, que és derivable. En conseqüència, $\dot{\varphi}$ és contínua i, per tant, $\varphi$ és de classe $C^1$.

Suposem ara que $A$ és de classe $C^k$ i que $\varphi$ és una solució de classe $C^{k-1}$ del sistema. De la igualtat $\dot{\varphi}(t) = A(t)\varphi(t)$ tenim que $\dot{\varphi}(t)$ és de classe $C^{k-1}$, però això implica que $\varphi$ és de classe $C^k$. □

Ja hem vist a la Proposició 2.2 que la solució general d'un sistema lineal homogeni és un espai vectorial, sense dir-ne res sobre la dimensió. Per a establir la dimensió de l'espai de solucions ens caldrà establir un resultat sobre l'existència i unicitat de solucions de p.v.i. associats a sistemes lineals homogenis, en el següent teorema. Ara només en donarem la demostració en el cas de que el sistema sigui unidimensional. El cas general serà un corol·lari dels Teoremes **??** i **??**, al Capítol **??**. Trobareu una demostració directa d'aquest teorema a l'Apèndix **??**, però és molt tècnica i preferim no mostrar-la en aquestes alçades del curs.

**Teorema 2.8.** *Siguin $I \subset \mathbb{R}$, un interval obert, i $A \in C(I, \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}))$ (és a dir, $A$ és una matriu $n \times n$ amb coeficients reals o complexos continus en $I$). Llavors, per a qualsevol $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^n$ (o $I \times \mathbb{C}^n$), el p.v.i.*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(t)x, \\ x(t_0) &= x_0, \end{aligned} \tag{2.6}$$

*admet una solució $\varphi$, definida a $I$. A més, si $\tilde{\varphi} : \tilde{I} \subset I \to \mathbb{R}$ n'és una altra, llavors $\tilde{\varphi}(t) = \varphi(t)$, per a tot $t \in \tilde{I}$. És a dir, el problema de valor inicial té una única solució, que, a més, està definida allà on els coeficients dels sistema són continus.*

El Teorema 2.8 assegura que l'aplicació

$$\begin{aligned} \varphi : I \times I \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \quad \mathbb{R}^n \\ (t, t_0, x_0) &\longrightarrow \quad \varphi(t, t_0, x_0) \end{aligned} \tag{2.7}$$

on $\varphi(t, t_0, x_0)$ és la solució del p.v.i. (2.6), està ben definida.

**Definició 2.9.** *L'aplicació $\varphi$ a* (2.7) *s'anomena* flux generat per l'e.d.o. (2.6).

Més endavant veurem que el flux també estarà definit — amb algunes limitacions respecte el seu domini de definició - per a p.v.i. associats a e.d.o. generals, sota hipòtesis raonables.

La propietat del flux $\varphi$ en el exercici següent només és vàlida per a sistemes lineals homogenis.

**Exercici 2.2.** *Proveu que el flux $\varphi(t, t_0, x_0)$ definit a 2.9 és una aplicació lineal respecte a $x_0$, és a dir, $\varphi(t, t_0, \lambda x + \mu y) = \lambda\varphi(t, t_0, x) + \mu\varphi(t, t_0, y)$, per a tot $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.*

**Teorema 2.10.** *Siguin $I \subset \mathbb{R}$ i $A \in C(I, \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}))$ (és a dir, $A$ és una matriu $n \times n$ amb coeficients reals o complexos continus en $I$). Llavors, la solució general de*

$$\dot{x} = A(t)x$$

*és un espai vectorial de dimensió $n$.*

*Demostració.* Siguin $e_i$, $i = 1, \dots, n$, els vectors de la base canònica de $\mathbb{R}^n$. Fixem $t_0 \in I$. Per a cada $i = 1, \dots, n$, sigui $\varphi_i : I \to \mathbb{R}^n$ la solució del p.v.i.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(t)x, \\ x(t_0) &= e_i, \end{aligned}$$

donada pel Teorema 2.8.

Veiem primer que les funcions $\{\varphi_i\}_{i=1,\dots,n}$ són linealment independents. En efecte, siguin $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tals que

$$\lambda_1\varphi_1(t) + \cdots + \lambda_n\varphi_n(t) = 0, \qquad \forall t \in I.$$

En $t = t_0$, com $\varphi_i(t_0) = e_i$, la igualtat de sobre implica que

$$\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n = 0.$$

Ara bé, com els vectors $\{e_i\}_{i=1,\dots,n}$ són linealment independents, aquesta darrera igualtat implica que $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$. Per tant, la dimensió de la solució general del sistema és mes gran o igual que $n$.

Veiem ara que $\{\varphi_i\}_{i=1,\dots,n}$ generen totes les solucions del sistema. Sigui $\tilde{\varphi}$ una solució del sistema. Siguin $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tals que

$$\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n = \tilde{\varphi}(t_0).$$

Afirmem que $\tilde{\varphi}(t) = \lambda_1\varphi_1(t) + \cdots + \lambda_n\varphi_n(t)$, per a tot $t \in I$. En efecte, tenim que la funció $\hat{\varphi}(t) = \tilde{\varphi}(t) - (\lambda_1\varphi_1(t) + \cdots + \lambda_n\varphi_n(t))$ és solució del sistema, perquè és una combinació lineal de solucions i $\hat{\varphi}(t_0) = 0$, el que implica que $\hat{\varphi}$ és solució del p.v.i.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(t)x, \\ x(t_0) &= 0. \end{aligned}$$

Ara bé, la funció 0 n'és també solució. Pel Teorema 2.8, $\hat{\varphi}(t) = 0$, per a tot $t \in I$.

En resum, hem vist que les funcions $\{\varphi_i\}_{i=1,\dots,n}$ són base de la solució general del sistema. □

**Comentari 2.11.** *Observeu que els Teoremes 2.8 i 2.10 no ens proporcionen cap manera de trobar les solucions dels sistemes de la forma $\dot{x} = A(t)x$. En general, no n'hi ha cap. Veurem algunes tècniques per a trobar-les en casos particulars.*

**Definició 2.12.** *Siguin $I \subset \mathbb{R}$ i $A \in C(I, \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}))$ (és a dir, $A$ és una matriu $n \times n$ amb coeficients reals o complexos continus en $I$). Anomenarem* sistema fonamental de solucions *a qualsevol base de la solució general de $\dot{x} = A(t)x$. El Teorema 2.10 assegura que un sistema fonamental de solucions consta de $n$ funcions.*

**Definició 2.13.** *Siguin $I \subset \mathbb{R}$ i $A \in C(I, \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}))$. Sigui $\{\varphi_i\}_{i=1,\dots,n}$ un sistema fonamental del sistema $\dot{x} = A(t)x$. Sigui $M(t)$ la matriu que té per columnes les funcions $\varphi_i$, $i = 1,\dots,n$. Direm que $M$ és una* matriu fonamental *del sistema $\dot{x} = A(t)x$.*

**Exercici 2.3.** *Siguin $I \subset \mathbb{R}$ i $A \in C(I, \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}))$. Proveu que, donats $C \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ (o $C \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$) i $t_0 \in I$, existeix una única matriu $\Phi(t)$, $t \in I$, tal que*

$$\dot{\Phi}(t) = A(t)\Phi(t), \qquad \Phi(t_0) = C. \tag{2.8}$$

**Resolució.** En efecte, siguin $\varphi_i$ i $c_i$ les columnes $i$-èssimes de les matrius $\Phi$ i $C$, respectivament. La igualtat (2.8) és equivalent a la col·lecció de p.v.i.

$$\dot{\varphi}_i(t) = A(t)\varphi_i(t), \qquad \varphi_i(t_0) = c_i, \quad i = 1,\dots,n.$$

Ara bé, el Teorema 2.8 assegura que aquests p.v.i. tenen solució única, definida a $I$. Per tant, les columnes $\varphi_i$ estan definides unívocament.

Les següents propietats de les matrius fonamentals són senzilles.

**Proposició 2.14.** *Siguin $I \subset \mathbb{R}$ i $A \in C(I, \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}))$. Considerem el sistema $\dot{x} = A(t)x$.*

1. *Si $M(t)$ és una matriu fonamental de $\dot{x} = A(t)x$, llavors $\det M(t) \neq 0$, per a tot $t \in I$.*
2. *$M(t)$ és una matriu fonamental de $\dot{x} = A(t)x$ si i només si $\dot{M}(t) = A(t)M(t)$ i existeix $t_0 \in I$ tal que $\det M(t_0) \neq 0$.*
3. *Sigui $M(t)$, una matriu fonamental de $\dot{x} = A(t)x$. Llavors $N(t)$ és matriu fonamental de $\dot{x} = A(t)x$ si i només si existeix una matriu $C$, constant, amb $\det C \neq 0$, tal que $N(t) = M(t)C$, per a tot $t \in I$.*
4. *Sigui $M(t)$, una matriu fonamental de $\dot{x} = A(t)x$. La solució general de $\dot{x} = A(t)x$ és $\{M(t)v \mid v \in \mathbb{R}^n\}$. Equivalentment, la solució del p.v.i. $\dot{x} = A(t)x$, $x(t_0) = x_0$ és*

$$\varphi(t, t_0, x_0) = M(t)M(t_0)^{-1}x_0.$$

*Demostració.* Comencem provant 1. Suposem que existeix $t_0 \in I$ tal que $\det M(t_0) = 0$. Com la matriu $M(t_0)$ és singular, existeix $\lambda = (\lambda_1,\dots,\lambda_n)^\top \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \neq 0$, tal que $M(t_0)\lambda = 0$. Sigui $\varphi(t) = M(t)\lambda$. Com les columnes de $M$ són solució de $\dot{x} = A(t)x$, $\varphi$ és també solució. Ara bé, $\varphi(t_0) = 0$ i 0 és l'única solució del p.v.i. $\dot{x} = A(t)x$, $x(t_0) = 0$. Per tant, $\varphi(t) = M(t)\lambda = 0$, per a tot $t \in I$. Com $\lambda \neq 0$, això implica que les columnes de $M(t)$ no són linealment independents i, en conseqüència, no poden ser una base de l'espai de solucions.

Ara provem 2. La implicació cap a la dreta és una conseqüència immediata de 1. La implicació cap a l'esquerra és una modificació de la demostració del Teorema 2.10 i es deixa com a exercici.

Ara provem 3. La implicació cap a l'esquerra és una comprovació immediata. En efecte, si $M(t)$ és una matriu fonamental i $\det C \neq 0$, es compleix que, per una banda $\det M(t)C = \det M(t) \det C \neq 0$ i

$$\frac{d}{dt}M(t)C = \dot{M}(t)C = A(t)M(t)C.$$

Llavors 2 implica que $M(t)C$ és matriu fonamental. La implicació cap a la dreta es dedueix de l'exercici 2.3 i del fet que $N(t)$ i $M(t)M(t_0)^{-1}N(t_0)$ són solució del mateix p.v.i. i, per tant, han de coincidir sempre.

Finalment 4 es segueix del fet que, si $\varphi(t)$ és una solució del sistema, $\varphi(t)$ i $M(t)M(t_0)\varphi(t_0)$ són solució del mateix p.v.i. i, pel Teorema 2.8, han de coincidir. □

**Exercici 2.4.** *Siguin $I \subset \mathbb{R}$ i $A \in C(I, \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}))$. Considerem el sistema $\dot{x} = A(t)x$. Sigui $\varphi(t, t_0, x_0)$, la solució del p.v.i. $\dot{x} = A(t)x$, $x(t_0) = x_0$. Proveu que, per a qualsevol $t, t_0, s \in I$*

$$\varphi(t, t_0, x_0) = \varphi(t, s, \varphi(s, t_0, x_0)).$$

*Deduïu que, fixats $t, t_0$, l'aplicació $x_0 \mapsto \varphi(t, t_0, x_0)$ és un difeomorfisme. Recordeu que, per l'Exercici 2.2, aquesta aplicació és lineal. Proveu que, fixats $t, t_0$,*

$$\varphi(t_0, t, \varphi(t, t_0, x_0)) = x_0.$$

**Exemple 2.2.** *Si bé és cert que en general no és possible resoldre — mitjançant quadratures — els sistemes lineals, hi ha alguns casos particulars en els que sí es poden trobar les solucions. El més important, que veurem més endavant, és el cas en que la matriu $A$ que defineix el sistema sigui constant. Un altre, que considerem aquí, el trobem quan la matriu $A(t)$ és triangular.*

*Com a exemple, considerem el sistema*

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{1}{t}x + y, \\ \dot{y} = \dfrac{1}{t}y. \end{cases} \tag{2.9}$$

*És un sistema lineal homogeni amb matriu*

$$A(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{t} & 1 \\ 0 & \frac{1}{t} \end{pmatrix}.$$

*Aquesta mena de sistemes es poden resoldre perquè els sistemes lineals unidimensionals es poden resoldre, fent servir el mètode exposat en les Proposicions 2.5 i 2.6. Així, la segona equació de (2.9), només depèn de la variable $y$. Les seves solucions, segons la Proposició 2.5, són*

$$y(t, \lambda) = \lambda t, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

*Si ara substituïm l'expressió trobada per a $y(t, \lambda)$ a la primera equació de (2.9), obtenim l'e.d.o. lineal*

$$\dot{x} = \frac{1}{t}x + \lambda t.$$

*Enlloc d'aplicar directament la fórmula de la Proposició 2.6, a mode il·lustratiu fem servir el mètode de variació de les constants en la que es basa. Una solució no nul·la de* $\dot{x} = \frac{1}{t}x$ *és* $x(t) = t$ *(observeu que s'anul·la precisament on els coeficients de l'e.d.o. deixen de ser continus). Busquem la solució de l'e.d.o. no homogènia escrivint-la com* $x(t) = c(t)t$*. La funció* $c$ *ha de complir*

$$\dot{c}(t)t = \lambda t \qquad \Longleftrightarrow \qquad c(t) = \mu + \lambda t, \quad \mu \in \mathbb{R},$$

*és a dir, les solucions de* $\dot{x} = \frac{1}{t}x + \lambda t$ *són*

$$x(t, \lambda, \mu) = \mu t + \lambda t^2, \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

*Les solucions del sistema* (2.9) *són*

$$\begin{aligned} x(t, \lambda, \mu) &= \mu t + \lambda t^2, \\ y(t, \lambda) &= \lambda t, \end{aligned} \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}. \tag{2.10}$$

*Per a obtenir-ne un sistema fonamental de solucions, només en necessitem dues linealment independents. Per exemple,*

$$\varphi_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \varphi_2(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t \end{pmatrix},$$

*que hem obtingut fent* $\lambda = 0$, $\mu = 1$, *per a* $\varphi_1$, *i* $\lambda = 1$, $\mu = 0$, *per a* $\varphi_2$. *Una matriu fonamental del sistema és, doncs,*

$$M(t) = \begin{pmatrix} t & t^2 \\ 0 & t \end{pmatrix}.$$

*Observeu que* $\det M(t) \neq 0$ *excepte si* $t = 0$, *que és on els coeficients del sistema deixen de ser continus.*

*Finalment, donat* $t_0 \neq 0$, *podem trobar la solució del sistema* (2.9) *que en* $t = t_0$ *val* $(x_0, y_0)^\top$ *trobant* $\lambda$ *i* $\mu$ *en* (2.10), *imposant que* $x(t_0, \lambda, \mu) = x_0$ *i* $y(t_0, \lambda) = y_0$ *o bé mitjançant la fórmula*

$$\begin{aligned} \varphi(t, t_0, x_0, y_0) &= M(t)M(t_0)^{-1}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} t & t^2 \\ 0 & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t_0^{-1} & -t_0 \\ 0 & t_0^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} t_0^{-1}t & -t_0 t + t_0^{-1}t^2 \\ 0 & t_0^{-1}t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

El punt 1 de la Proposició 2.14 és també un corol·lari del resultat següent.

**Teorema 2.15.** *Sigui* $\Phi(t)$, *una matriu tal que* $\dot{\Phi}(t) = A(t)\Phi(t)$, *on* $A(t) \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. *Llavors,*

$$\frac{d}{dt}\det\Phi(t) = \textit{traça}\, A(t)\det\Phi(t).$$

*Demostració.* Siguin $\{\varphi_i\}_{i=1,\ldots,n}$, les columnes de la matriu $\Phi$. La hipòtesi és equivalent a $\dot{\varphi}_i = A\varphi_i$, $i = 1, \ldots, n$. Llavors, per la propietat de la derivada del producte,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\det\Phi(t) &= \frac{d}{dt}\det(\varphi_1,\dots,\varphi_n)\\ &= \det(\dot\varphi_1,\dots,\varphi_n)+\cdots+\det(\varphi_1,\dots,\dot\varphi_n)\\ &= \det(A\varphi_1,\dots,\varphi_n)+\cdots+\det(\varphi_1,\dots,A\varphi_n)\end{aligned}$$

Tenint en compte aquesta igualtat, definim l'aplicació $f:(\mathbb{R}^n)^n\to\mathbb{R}$ definida per

$$f(v_1,\dots,v_n)=\det(Av_1,\dots,v_n)+\cdots+\det(v_1,\dots,Av_n).$$

És un exercici comprovar que, per a tot $v_1,\tilde v_1,v_2,\dots,v_n\in\mathbb{R}^n$ i $\lambda\in\mathbb{R}$,

1. $f(v_1,\dots,v_i,\dots,v_j,\dots,v_n)=-f(v_1,\dots,v_j,\dots,v_i,\dots,v_n)$,
2. $f(\lambda v_1,\dots,v_n)=\cdots=f(v_1,\dots,\lambda v_n)=\lambda f(v_1,\dots,v_n)$ i
3. $f(v_1+\tilde v_1,\dots,v_n)=f(v_1,\dots,v_n)+f(\tilde v_1,\dots,v_n)$.

És a dir, $f$ és una aplicació $n$-lineal alternada a $\mathbb{R}^n$. Però l'espai d'aplicacions $n$-lineals alternades a $\mathbb{R}^n$ és 1-dimensional. Per tant, existeix una constant $a$ tal que

$$f(v_1,\dots,v_n)=a\det(v_1,\dots,v_n).$$

Per a determinar la constant $a$, n'hi ha prou en considerar $v_i=e_i$, els vectors de la base canònica, perquè llavors

$$\det(e_1,\dots,Ae_i,\dots,e_n)=\text{element } i\text{-èssim de la diagonal de } A,$$

el que implica que $a=\operatorname{traça}A$. □

**Corol·lari 2.16** (Fórmula de Liouville)**.** *Siguin $I\subset\mathbb{R}$, un interval obert, $A\in C(I,\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}))$ i $\Phi(t)$, una matriu tal que $\dot\Phi(t)=A(t)\Phi(t)$. Llavors, donat $t_0\in I$, per a tot $t\in I$,*

$$\det\Phi(t)=\det\Phi(t_0)e^{\int_{t_0}^{t}\mathit{traça}\,A(s)\,ds}.$$

*En particular es compleix que* $\det\Phi(t)\neq 0$*, per a tot $t\in I$ si i només si existeix $t_0\in I$ tal que* $\det\Phi(t_0)\neq 0$*.*

*Demostració.* Pel Teorema de Liouville, $\det\Phi(t)$ satisfà $\dot x=\operatorname{traça}A(t)x$. La única solució d'aquesta equació que compleix $x(t_0)=\det\Phi(t_0)$ és

$$\det\Phi(t_0)e^{\int_{t_0}^{t}\operatorname{traça}A(s)\,ds}.$$

□

**Exercici 2.5.** *Considereu el sistema lineal homogeni*

$$\begin{cases}\dot x=tx+e^ty,\\ \dot y=\cos tx-ty.\end{cases}\tag{2.11}$$

*Sigui $M(t)$ una matriu fonamental del sistema. Sigui $\varphi(t,t_0,x_0,y_0)$ la solució del sistema que val $(x_0,y_0)$ en $t=t_0$, és a dir*

$$\varphi(t,t_0,x_0,y_0)=M(t)M(t_0)^{-1}\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}.$$

*Proveu que, per a qualsevol regió mesurable $D \in \mathbb{R}^2$ i tot parell $t, t_0 \in I$,*

$$\text{àrea}\,(D) = \text{àrea}(\varphi(t, t_0, D)).$$

***Indicació:*** *tingueu en compte que*

$$\text{àrea}\,(D) = \int_D dx\,dy.$$

*Feu servir el teorema del canvi de variables i la fórmula de Liouville.*

### 2.1.5 Sistemes lineals no homogenis

Considerem el sistema lineal no homogeni

$$\dot{x} = A(t)x + b(t).$$

Veurem en aquesta secció que el mètode de variació de les constants introduït a la Proposició 2.6 per a e.d.o.'s lineals unidimensionals també resulta vàlid en dimensió superior. Com en el cas unidimensional, per a poder aplicar-lo, cal conèixer les solucions del sistema homogeni associat. Com ja hem dit, sovint no és possible resoldre el sistema homogeni.

**Proposició 2.17.** *Siguin $I \subset \mathbb{R}$, un interval obert, $A \in C\,(I, \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}))$, $b \in C(I, \mathbb{R}^n)$ i $t_0 \in I$. Sigui $M(t)$, una matriu fonamental del sistema lineal homogeni $\dot{x} = A(t)x$. Llavors, la solució general del sistema $\dot{x} = A(t)x + b(t)$ és*

$$\left\{ M(t)v + M(t) \int_{t_0}^{t} M(s)^{-1} b(s)\,ds \mid v \in \mathbb{R}^n \right\}.$$

*Equivalentment, per a qualsevol $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^n$, l'única solució del p.v.i.*

$$\dot{x} = A(t)x + b(t), \quad x(t_0) = x_0$$

*és*

$$\begin{aligned} \varphi(t, t_0, x_0) &= M(t) \left( M(t_0)^{-1} x_0 + \int_{t_0}^{t} M(s)^{-1} b(s)\,ds \right) \\ &= M(t) M(t_0)^{-1} x_0 + M(t) \int_{t_0}^{t} M(s)^{-1} b(s)\,ds. \end{aligned}$$

*Demostració.* És anàloga a la de la Proposició 2.6 i es deixa com exercici. □

## 2.2 Sistemes lineals amb coeficients constants

### 2.2.1 Definicions. La matriu exponencial

En aquesta secció resoldrem explícitament els sistemes de e.d.o.'s amb coeficients constants. També descriurem qualitativament les seves solucions.

**Definició 2.18.** *Direm que un sistema lineal de e.d.o.'s és de* coeficients constants *si és de la forma*

$$\dot{x} = Ax + b(t),$$

*on $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ (o $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$) i $b \in C(I, \mathbb{R})$, on $I \subset \mathbb{R}$ és un interval obert.*

Tenint en compte la Proposició 2.17, podrem resoldre el sistema amb coeficients constants $\dot{x} = Ax + b(t)$ si i només si podem obtenir una matriu fonamental del sistema homogeni associat, $\dot{x} = Ax$. I aquesta la trobarem fent servir el mètode indicat en l'Exercici 2.1. Allà vam explicar perquè en general no permet calcular la matriu fonamental. Veurem aquí que, en el cas de sistemes amb coeficients constants, sí que ho fa.

**Definició 2.19.** *Sigui $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ (o $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$). Definim la seva exponencial, que denotarem $e^A$, com*

$$e^A = \sum_{j\geq 0} \frac{1}{j!} A^j.$$

Sigui $\|\cdot\|$ és una norma a $\mathbb{R}^n$ (totes hi són equivalents). Denotarem amb el mateix símbol la norma matricial associada, $\|A\| = \sup_{\|x\|\neq 0} \|Ax\|\|x\|^{-1}$. Com $\|A^j\| \leq \|A\|^j$, tenim que

$$\|e^A\| \leq \sum_{j\geq 0} \frac{1}{j!}\|A^j\| \leq \sum_{j\geq 0} \frac{1}{j!}\|A\|^j \leq e^{\|A\|} < \infty.$$

Per tant, l'exponencial d'una matriu $A$ està sempre ben definida.

**Lema 2.20.** *Siguin $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ (o $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$). Si $AB = BA$, llavors*

$$e^{A+B} = e^A e^B.$$

*Demostració.* És una comprovació simple. Per una banda,

$$\begin{aligned} e^A e^B &= \sum_{i\geq 0} \frac{1}{i!} A^i \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!} B^k = \sum_{i\geq 0} \sum_{k\geq 0} \frac{1}{i!} \frac{1}{k!} A^i B^k \\ &= \sum_{j\geq 0} \sum_{i+k=j} \frac{1}{i!} \frac{1}{k!} A^i B^k = \sum_{j\geq 0} \sum_{k=0}^{j} \frac{1}{(j-k)!} \frac{1}{k!} A^{j-k} B^k \\ &= \sum_{j\geq 0} \frac{1}{j!} \sum_{k=0}^{j} \frac{j!}{(j-k)!k!} A^{j-k} B^k = \sum_{j\geq 0} \frac{1}{j!} \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} A^{j-k} B^k. \end{aligned}$$

Per l'altra,

$$e^{A+B} = \sum_{j\geq 0} \frac{1}{j!} (A+B)^j.$$

Ara bé, com $AB = BA$, es compleix que

$$(A+B)^j = \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} A^{j-k} B^k.$$

En efecte. Provem l'afirmació per inducció. Si $j = 1$, ens queda $A+B = A+B$, que és cert. Suposem l'afirmació certa per a $j-1$. Llavors, com $BA = AB$,

$$\begin{aligned}
(A+B)^j = (A+B)^{j-1}(A+B) &= \sum_{k=0}^{j-1} \binom{j-1}{k} A^{j-1-k} B^k (A+B) \\
&= \sum_{k=0}^{j-1} \binom{j-1}{k} A^{j-1-k} B^k A + \sum_{k=0}^{j-1} \binom{j-1}{k} A^{j-1-k} B^{k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{j-1} \binom{j-1}{k} A^{j-k} B^k + \sum_{k=0}^{j-1} \binom{j-1}{k} A^{j-1-k} B^{k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} A^{j-k} B^k.
\end{aligned}$$

□

**Lema 2.21.** *Sigui $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ (o $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$). Llavors*

$$\frac{d}{dt} e^{tA} = Ae^{tA} = e^{tA}A.$$

*Demostració.* En efecte, com les matrius $tA$ i $sA$ commuten, pel Lemma 2.20,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} e^{tA} &= \lim_{s\to 0} \frac{e^{(t+s)A} - e^{tA}}{s} = \lim_{s\to 0} \frac{e^{tA+sA} - e^{tA}}{s} \\
&= \lim_{s\to 0} \frac{e^{sA}e^{tA} - e^{tA}}{s} = \lim_{s\to 0} \frac{e^{sA} - \mathrm{Id}}{s} e^{tA} \\
&= \lim_{s\to 0} \frac{1}{s} \sum_{j\geq 1} \frac{1}{j!} s^j A^j e^{tA} = \lim_{s\to 0} \sum_{j\geq 1} \frac{1}{j!} s^{j-1} A^j e^{tA} \\
&= Ae^{tA}.
\end{aligned}$$

La segona igualtat és certa perquè $e^{(t+s)A} = e^{tA}e^{sA} = e^{sA}e^{tA}$. □

**Proposició 2.22.** *Sigui $\Phi(t)$ la matriu fonamental del sistema homogeni amb coeficients constants $\dot{x} = Ax$ tal que $\Phi(0) = \mathrm{Id}$ (per l'Exercici 2.3, $\Phi$ existeix i és única). Llavors,*

1. *$\Phi(t) = e^{tA}$,*
2. *$e^{(t+s)A} = e^{tA}e^{sA}$, per a qualsevol $t, s \in \mathbb{R}$,*
3. *$e^{-tA} = (e^{tA})^{-1}$ i*
4. *si $M(t)$ és una matriu fonamental qualsevol de $\dot{x} = Ax$, llavors $e^{tA} = M(t)M(0)^{-1}$.*

*Demostració.* Per a provar 1, observem que

$$\frac{d}{dt} e^{tA} = Ae^{tA} = e^{tA}A.$$

En efecte, com les matrius $tA$ i $sA$ commuten, pel Lemma 2.20,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}e^{tA} &= \lim_{s\to 0}\frac{e^{(t+s)A}-e^{tA}}{s} = \lim_{s\to 0}\frac{e^{tA+sA}-e^{tA}}{s}\\ &= \lim_{s\to 0}\frac{e^{sA}e^{tA}-e^{tA}}{s} = \lim_{s\to 0}\frac{e^{sA}-\mathrm{Id}}{s}e^{tA}\\ &= \lim_{s\to 0}\frac{1}{s}\sum_{j\geq 1}\frac{1}{j!}s^jA^je^{tA} = \lim_{s\to 0}\sum_{j\geq 1}\frac{1}{j!}s^{j-1}A^je^{tA}\\ &= Ae^{tA}.\end{aligned}$$

A més, $e^{0A} = \mathrm{Id} = \Phi(0)$. Com $\Phi(t)$ i $e^{tA}$ satisfan el mateix p.v.i., coincideixen.

Sigui $s \in \mathbb{R}$. Definim $\Phi_1(t) = \Phi(t+s)$ i $\Phi_2(t) = \Phi(t)\Phi(s)$. Com que $\Phi(0) = \mathrm{Id}$, tenim que $\Phi_1(0) = \Phi_2(0) = \Phi(s)$. A més, com $\dot{\Phi}(t) = A\Phi(t)$,

$$\begin{aligned}\dot{\Phi}_1(t) &= \dot{\Phi}(t+s) = A\Phi(t+s) = A\Phi_1(t)\\ \dot{\Phi}_2(t) &= \dot{\Phi}(t)\Phi(s) = A\Phi(t)\Phi(s) = A\Phi_2(t).\end{aligned}$$

És a dir, $\Phi_1$ i $\Phi_2$ són ambdues solució del p.v.i. matricial $\dot{M} = AM$, $M(0) = \Phi(s)$. Per tant, han de coincidir per a tot $t$. Això prova 2. Una prova alternativa d'aquest fet la dóna el Lemma 2.20.

3 és conseqüència de 2. En efecte, si a 2 prenem $s = -t$, ens queda

$$\mathrm{Id} = \Phi(0) = \Phi(t)\Phi(-t) = \Phi(-t)\Phi(t) \quad\Longrightarrow\quad \Phi(t)^{-1} = \Phi(-t).$$

Finalment, $M(t)M(0)^{-1}$ és una matriu fonamental i, en $t = 0$, satisfà $M(0)M(0)^{-1} = \mathrm{Id}$. Per tant, $\Phi(t) = e^{tA} = M(t)M(0)^{-1}$. □

**Corol·lari 2.23.** *Si $A$ és una matriu $n \times n$ amb coeficients constants, el flux $\varphi(t, t_0, x_0)$ de $\dot{x} = Ax$ satisfà*

$$\varphi(t, t_0, x_0) = \varphi(t - t_0, 0, x_0).$$

*Demostració.* En efecte, per l'apartat 4 de la Proposició 2.14,

$$\varphi(t, t_0, x_0) = e^{tA}(e^{t_0A})^{-1}x_0 = e^{tA}e^{-t_0A}x_0 = e^{(t-t_0)A}x_0 = \varphi(t - t_0, 0, x_0).$$

□

**Exercici 2.6.** *Proveu el Corol·lari 2.23 fent servir només el Teorema 2.8.*

**Exemple 2.3.** *Sigui $A = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, és a dir,*

$$A = \begin{pmatrix}\lambda_1 & \ldots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \ldots & \lambda_n\end{pmatrix}.$$

*Llavors,*

$$e^{tA} = \mathrm{diag}(e^{t\lambda_1}, \ldots e^{t\lambda_n}) = \begin{pmatrix}e^{t\lambda_1} & \ldots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \ldots & e^{t\lambda_n}\end{pmatrix}. \tag{2.12}$$

*Ho veurem de dues maneres diferents.*

1. *És immediat comprovar que*

$$A^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n^k \end{pmatrix}.$$

*Llavors,*

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!} t^k A^k = \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!} t^k \begin{pmatrix} \lambda_1^k & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n^k \end{pmatrix} \\ &= \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!} t^k A^k = \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!} \begin{pmatrix} t^k\lambda_1^k & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & t^k\lambda_n^k \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!} t^k \lambda_1^k & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!} t^k \lambda_n^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{t\lambda_n} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2. *El sistema associat a la matriu $A$, $\dot{x} = Ax$, és*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \lambda_1 x_1, \\ \quad \vdots \\ \dot{x}_n = \lambda_n x_n. \end{cases}$$

*Com cada equació és una e.d.o. lineal unidimensional, les podem resoldre. Per la Proposició 2.5, la solució general de l'equació $j$ és*

$$\{x_j(t) = c_j e^{t\lambda_j} \mid c_j \in \mathbb{R}\}. \tag{2.13}$$

*Trobem la matriu fonamental, $\Phi$, de $\dot{x} = Ax$ que satisfà $\Phi(0) = \mathrm{Id}$. La columna i-èssima de $\Phi$, $\varphi_i$, ha de satisfer $\dot{\varphi}_i = A\varphi_i$, $\varphi_i(0) = e_i$, on $e_i$ és l'i-èssim vector de la base canònica. Tenint en compte* (2.13)*, la component $j$-èssima de $\varphi_i$, $\varphi_{ij}$ és $\varphi_{ij}(t) = c_{ij}e^{t\lambda_i}$. La condició $\varphi_i(0) = e_i$ es tradueix en*

$$\begin{cases} \varphi_{ij}(0) = c_{ij} = 0, & \textit{si } i \neq j, \\ \varphi_{ii}(0) = c_{ii} = 1, \end{cases}$$

*és a dir, $\varphi_i(t) = e^{t\lambda_i} e_i$. Per tant,*

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{t\lambda_n} \end{pmatrix}.$$

*Com, per l'apartat 1 de la Proposició 2.22, $\Phi(t) = e^{t\mathcal{A}}$, hem provat* (2.12).

**Exercici 2.7.** *Sigui $v \in \ker(A - \lambda\mathrm{Id})^k$. Llavors*

$$e^{tA}v = e^{\lambda t} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{t^j}{j!} (A - \lambda\mathrm{Id})^j v.$$

***Indicació:*** *feu servir que les matrius $\lambda\mathrm{Id}$ i $A - \lambda\mathrm{Id}$ commuten i l'Exemple 2.3.*

La següent proposició serà molt útil per a calcular $e^{tA}$.

**Proposició 2.24.** *Considerem el sistema lineal homogeni amb coeficients constants $\dot{x} = Ax$. Sigui $C \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ (o $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$) tal que $\det C \neq 0$. Definim $C\tilde{x} = x$. Llavors, $\tilde{x}$ és solució de*

$$\dot{\tilde{x}} = C^{-1}AC\tilde{x}.$$

*Conseqüentment,*

$$e^{tC^{-1}AC} = C^{-1}e^{tA}C.$$

*Demostració.* En efecte, com $\dot{C} = 0$ i $\tilde{x} = C^{-1}x$,

$$\dot{\tilde{x}} = C^{-1}\dot{x} = C^{-1}Ax = C^{-1}AC\tilde{x}.$$

Respecte a les matrius exponencials, observem que ambdues són Id en $t = 0$ i són solució de la mateixa e.d.o.. En efecte, per una banda,

$$\frac{d}{dt}[C^{-1}e^{tA}C] = C^{-1}\frac{d}{dt}e^{tA}C = C^{-1}Ae^{tA}C = C^{-1}AC[C^{-1}e^{tA}C].$$

Per l'altre, 1 de la Proposició 2.22 ens assegura que $e^{tC^{-1}AC}$ satisfà la mateixa e.d.o. □

**Exercici 2.8.** *Proveu que si $\tilde{N}$ és una matriu fonamental qualsevol de $\dot{\tilde{x}} = C^{-1}AC\tilde{x}$, on $C \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, $N = C\tilde{N}$ és matriu fonamental de $\dot{x} = Ax$.*

### 2.2.2 Càlcul de la matriu exponencial

En vista de la Proposició 2.24, per a resoldre el sistema $\dot{x} = Ax$, considerarem un canvi lineal de variables, $C\tilde{x} = x$, de manera que el sistema transformat, $\dot{\tilde{x}} = C^{-1}AC\tilde{x}$ tingui una forma tal que en podem calcular $e^{tC^{-1}AC}$. Llavors,

$$e^{tA} = Ce^{tC^{-1}AC}C^{-1}.$$

La forma adient per a calcular $e^{tC^{-1}AC}$ és la *forma canònica de Jordan* de la matriu A. Resumim les propietats de la forma canònica de Jordan en la proposició següent. Podeu trobar-ne la prova i indicacions de com calcular-la aquí.

**Proposició 2.25** (Forma canònica de Jordan)**.** *Sigui $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ o $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$. Existeix una matriu $C$ tal que $J = C^{-1}AC$ té la forma*

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & J_k \end{pmatrix}, \tag{2.14}$$

*on cada bloc $J_j$ és una matriu $n_j \times n_j$, $n_j \geq 1$, $n_1 + \cdots + n_k = n$, de la forma*

$$J_j = \begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_j & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_j & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_j \end{pmatrix}. \tag{2.15}$$

*El nombres $\lambda_j$ són els valors propis d'A. Si tots els valors propis d'A són reals, $C$ és real.*

El següent lemma es deixa com a exercici.

**Lema 2.26.** *Sigui $J$ la matriu diagonal per blocs*

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & J_k \end{pmatrix},$$

*(els blocs no tenen pas perquè tenir la mateixa mida). Llavors, per a tot $j \geq 0$,*

$$J^j = \begin{pmatrix} J_1^j & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & J_k^j \end{pmatrix},$$

**Corol·lari 2.27.** *Sigui $J$ la matriu de la forma*

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & J_k \end{pmatrix}.$$

*Llavors*

$$e^{tJ} = \begin{pmatrix} e^{tJ_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{tJ_k} \end{pmatrix}.$$

*Demostració.* Fent servir el Lemma 2.26,

$$\begin{aligned} e^{tJ} &= \sum_{j\geq 0} \frac{1}{j!} t^j J^j = \sum_{j\geq 0} \frac{1}{j!} t^j \begin{pmatrix} J_1^j & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & J_k^j \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{j\geq 0} \frac{1}{j!} t^j J_1^j & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sum_{j\geq 0} \frac{1}{j!} t^j J_k^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{tJ_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{tJ_k} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

□

Només ens falta calcular la matriu exponencial d'un bloc de Jordan.

**Proposició 2.28.** *Considerem la matriu $k \times k$*

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

*on $\lambda \in \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$). Llavors,*

$$e^{tJ} = \begin{pmatrix} e^{t\lambda} & te^{\lambda t} & \dots & \frac{1}{(k-1)!} t^{k-1} e^{t\lambda} \\ 0 & e^{t\lambda} & \dots & \frac{1}{(k-2)!} t^{k-2} e^{t\lambda} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{t\lambda} \end{pmatrix}$$

*Demostració.* Observem que $J = \lambda\mathrm{Id} + N$, on

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es comprova immediatament que $N^j$ és la matriu que té 1's en la diagonal superior $(j+1)$-èssima i 0's a la resta de components. En particular,

$$N^{k-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad N^k = 0.$$

A més, $\lambda\mathrm{Id}$ i $N$ commuten (perquè $\lambda\mathrm{Id}$ commuta amb totes les matrius). Llavors, pel Lema 2.20, l'Exercici 2.3 i fent server que $N^j = 0$, si $j \geq k$,

$$e^{tA} = e^{t\lambda\mathrm{Id}+tN} = e^{t\lambda\mathrm{Id}}e^{tN} = e^{t\lambda}\sum_{j\geq 0}\frac{1}{j!}t^jN^j = e^{t\lambda}\sum_{j=0}^{k-1}\frac{1}{j!}t^jN^j.$$

□

**Exercici 2.9.** *Suposeu que $\lambda$ és valor propi d'$A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, amb vector propi $v$. Proveu que $e^{t\lambda}v$ és solució de $\dot{x} = Ax$.*

**Exercici 2.10.** *Suposeu que $\lambda = a + ib$, amb $b \neq 0$, és valor propi d'$A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, amb vector propi (complex) $v$. Proveu que $e^{t\lambda}v + e^{t\bar{\lambda}}\bar{v}$ i $i(e^{t\lambda}v - e^{t\bar{\lambda}}\bar{v})$ són dues solucions reals linealment independents de $\dot{x} = Ax$.*

*Aplicació: trobeu $e^{tA}$, on*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ té un valor propi complex $\lambda = a + ib$, $b \neq 0$, existeix un canvi de base real, $C$, tal que $C^{-1}AC$ està una forma similar a la de Jordan. Més concretament,

$$C^{-1}AC = \begin{pmatrix} J_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & J_k \end{pmatrix},$$

on

$$J_j = \begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_j & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_j & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_j \end{pmatrix},$$

si $\lambda_j$ és un valor propi real d'$A$ i

$$J_j = \begin{pmatrix} \Lambda_j & \mathrm{Id}_{2\times 2} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda_j & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \Lambda_j & \mathrm{Id}_{2\times 2} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \Lambda_j \end{pmatrix}, \qquad \Lambda_j = \begin{pmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{pmatrix}, \tag{2.16}$$

si $\lambda_j = a_j + ib_j$, $b_j \neq 0$, és un valor propi complex d'$A$.

Llavors, tenint en compte el Corol·lari 2.27, per a calcular $e^{tA}$ només ens falta calcular $e^{tJ_j}$, on $J_j$ és una matriu de la forma (2.16). Per a fer-ho, es procedeix com en el cas real. Sigui $2k$ la mida de la matriu $J_j$. Considerem les matrius

$$a_j \mathrm{Id}_{2k\times 2k}, \quad b_j \widetilde{R}, \quad \widetilde{N}$$

on $\widetilde{R}$ i $\widetilde{R}$ són les matrius $2k \times 2k$

$$\widetilde{R} = \begin{pmatrix} R & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & R \end{pmatrix}, \qquad R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

i

$$\widetilde{N} = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{Id}_{2\times 2} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \mathrm{Id}_{2\times 2} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Es compleix que

$$J_j = a_j \mathrm{Id}_{2k\times 2k} + b_j \widetilde{R} + \widetilde{N}.$$

És fàcil veure que les matrius $a_j \mathrm{Id}_{2k\times 2k} + b_j \widetilde{R}$ i $\widetilde{N}$ commuten[4], i que, a la seva vegada, les matrius $a_j \mathrm{Id}_{2k\times 2k}$ i $b_j \widetilde{R}$ (perquè $\mathrm{Id}_{2k\times 2k}$ commuta amb totes les matrius), el que implica que

$$\begin{aligned} e^{tJ_j} &= e^{t(a_j \mathrm{Id}_{2k\times 2k} + b_j \widetilde{R} + \widetilde{N})} = e^{t(a_j \mathrm{Id}_{2k\times 2k} + b_j \widetilde{R})} e^{t\widetilde{N}} \\ &= e^{ta_j \mathrm{Id}_{2k\times 2k}} e^{tb_j \widetilde{R}} e^{t\widetilde{N}} = e^{ta_j} e^{tb_j \widetilde{R}} e^{t\widetilde{N}}. \end{aligned}$$

**Exercici 2.11.** *Comproveu que, com a la demostració de la Proposició 2.28,*

$$e^{t\widetilde{N}} = \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_{2\times 2} & t\mathrm{Id}_{2\times 2} & \dots & \frac{1}{(k-1)!} t^{k-1} \mathrm{Id}_{2\times 2} \\ 0 & \mathrm{Id}_{2\times 2} & \dots & \frac{1}{(k-2)!} t^{k-2} \mathrm{Id}_{2\times 2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathrm{Id}_{2\times 2} \end{pmatrix}$$

[4] La matriu $a_j \mathrm{Id}_{2k\times 2k} + b_j \widetilde{R}$ és diagonal per blocs, amb tots els blocs diagonals iguals i els blocs de $\widetilde{N}$ commuten amb els de $a_j \mathrm{Id}_{2k\times 2k} + b_j \widetilde{R}$, perquè o bé són nuls o bé són $\mathrm{Id}_{2\times 2}$

Per tant, només falta calcular $e^{tb_j\widetilde{R}}$. Ara bé, com aquesta matriu és diagonal per blocs, tenim que

$$e^{tb_j\widetilde{R}} = \begin{pmatrix} e^{tb_jR} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{tb_jR} \end{pmatrix}$$

**Proposició 2.29.**
$$e^{tb_jR} = \begin{pmatrix} \cos(b_jt) & -\sin(b_jt) \\ \sin(b_jt) & \cos(bjt) \end{pmatrix}$$

*Demostració.* En donarem dues demostracions.

La primera és una simple comprovació. La matriu $e^{tb_jR}$ és la matriu fonamental del sistema $\dot{x} = b_jRx$ que en $t = 0$ és la identitat. Clarament, per una banda tenim que

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \cos(b_jt) & -\sin(b_jt) \\ \sin(b_jt) & \cos(bjt) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b_j\sin(b_jt) & -b_j\cos(b_jt) \\ b_j\cos(b_jt) & -b_j\sin(bjt) \end{pmatrix}$$

i, per l'altra,

$$\begin{pmatrix} 0 & -b_j \\ b_j & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos(b_jt) & -\sin(b_jt) \\ \sin(b_jt) & \cos(bjt) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b_j\sin(b_jt) & -b_j\cos(b_jt) \\ b_j\cos(b_jt) & -b_j\sin(bjt) \end{pmatrix}.$$

Com

$$\begin{pmatrix} \cos(b_jt) & -\sin(b_jt) \\ \sin(b_jt) & \cos(bjt) \end{pmatrix}_{|t=0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

la proposició queda provada.

La segona prova consisteix en calcular explícitament $e^{tb_jR}$ mitjançant la fórmula

$$e^{tb_jR} = \sum_{\ell\geq 0}\frac{t^\ell b_j^\ell}{\ell!}R^\ell.$$

Per a sumar aquesta sèrie només cal observar que

$$\begin{aligned}
R^0 &= \mathrm{Id}_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
R &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\
R^2 &= -\mathrm{Id}_{2\times 2} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \\
R^3 &= R^2R = -R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \\
R^4 &= R^2R^2 = \mathrm{Id}_{2\times 2},
\end{aligned}$$

el que implica que

$$\begin{aligned}
e^{tb_jR} &= \begin{pmatrix} \sum_{\ell\geq 0}(-1)^\ell\frac{(tb_j)^{2\ell}}{(2\ell)!} & -\sum_{\ell\geq 0}(-1)^\ell\frac{(tb_j)^{2\ell+1}}{(2\ell+1)!} \\ \sum_{\ell\geq 0}(-1)^\ell\frac{(tb_j)^{2\ell+1}}{(2\ell+1)!} & \sum_{\ell\geq 0}(-1)^\ell\frac{(tb_j)^{2\ell}}{(2\ell)!} \end{pmatrix}. \\
&= \begin{pmatrix} \cos(b_jt) & -\sin(b_jt) \\ \sin(b_jt) & \cos(b_jt) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

□

### 2.2.3 Sistemes lineals amb coeficients constants no homogenis

Per a resoldre sistemes de la forma

$$\dot{x} = Ax + b(t),$$

es pot fer servir el mètode de variació de les constants, tal com es va veure a la Proposició 2.17. La reformulem fent servir la matriu exponencial de la manera següent.

**Proposició 2.30.** *Siguin $I \subset \mathbb{R}$, un interval obert, $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, $b \in C(I, \mathbb{R}^n)$ i $t_0 \in I$. Llavors, la solució general del sistema $\dot{x} = Ax + b(t)$ és*

$$\left\{ e^{tA}v + e^{tA}\int_{t_0}^{t} e^{-sA}b(s)\,ds \mid v \in \mathbb{R}^n \right\}.$$

*Equivalentment, per a qualsevol $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^n$, l'única solució del p.v.i.*

$$\dot{x} = Ax + b(t), \quad x(t_0) = x_0$$

*és*

$$\begin{aligned}\varphi(t, t_0, x_0) &= e^{tA}\left(e^{-t_0A}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-sA}b(s)\,ds\right) \\ &= e^{(t-t_0)A}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A}b(s)\,ds.\end{aligned}$$

Ara bé, si la matriu $A$ té coeficients constants i el vector $b(t)$ té una forma particular, es poden trobar solucions particulars del sistema similars a $b(t)$. Es deixa com exercici provar el següent resultat.

**Exercici 2.12.** *Sigui $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ (o $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$). Suposeu que $b(t) = t^k e^{t\lambda}v$, $v \in \mathbb{C}^n$, on $\lambda \notin \operatorname{spec} A$. Llavors, existeixen $v_0, \dots, v_k \in \mathbb{C}^n$ (a $\mathbb{R}^n$, si $A$ i $\lambda$ són reals) tals que*

$$\varphi(t) = e^{t\lambda}(v_0 + \cdots t^k v_k)$$

*és solució de $\dot{x} = Ax + b(t)$.*

*Aplicació: trobeu una solució real de*

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\cos t\\ 0\end{pmatrix},$$

*sense fer servir variació de les constants.*

**Exercici 2.13.** *Si $\lambda \in \operatorname{spec} A$, l'afirmació de l'exercici anterior no és certa en general. Com s'ha de corregir la solució $\varphi$ per a tenir un resultat anàleg?*

## 2.3 Retrats de fase de sistemes lineals

### 2.3.1 Retrats de fase. Òrbites

Considerem el sistema lineal homogeni amb coeficients constants $\dot{x} = Ax$, on $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Com el sistema és autònom, per la Proposició 1.5,si $\varphi(t)$ n'és una solució, per a tot $t_0 \in \mathbb{R}$, la seva traslladada en el temps, $\varphi_{t_0}(t) = \varphi(t - t_0)$ ho és també. De fet, tenim la següent proposició.

**Proposició 2.31.** *Donats* $t_0 \in \mathbb{R}$ *i* $x_0 \in \mathbb{R}^n$, *sigui* $\varphi(t, t_0, x_0)$ *la solució del p.v.i.*

$$\dot{x} = Ax, \qquad x(t_0) = x_0.$$

*Llavors, per a tot* $t_1 \in \mathbb{R}$, $\varphi(t - (t_0 - t_1), t_1, x_0) = \varphi(t, t_0, x_0) = \varphi(t - t_0, 0, x_0)$.

*Demostració.* Per definició, $\varphi(t - (t_0 - t_1), t_1, x_0)$, $\varphi(t, t_0, x_0)$ i $\varphi(t - t_0, 0, x_0)$ són solució de $\dot{x} = Ax$. Totes tres funcions valen $x_0$ en $t = t_0$. Per tant, han de coincidir sempre. □

En particular, per a qualssevol $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$, imatge $\varphi(\cdot, t_0, x_0) =$ imatge $\varphi(t, t_0, x_0)$, és a dir, la imatge de les solucions de

$$\dot{x} = Ax, \qquad x(t_0) = x_0$$

no depèn de $t_0$.

Això justifica la següent definició.

**Definició 2.32.** *Considerem el sistema* $\dot{x} = Ax$, *on* $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. *Sigui* $x_0 \in \mathbb{R}^n$. *Anomenarem* òrbita per $x_0$ *a*

$$\mathcal{O}(x_0) = \{\varphi(t, t_0, x_0) \in \mathbb{R}^n \mid t \in \mathbb{R}\} = \text{imatge}\, \varphi(\cdot, t_0, x_0).$$

*La Proposició 2.31 assegura que* $\mathcal{O}(x_0)$ *no depèn de* $t_0$ *i, per tant, està ben definida.*

És a dir, la òrbita de $x_0$ és el recorregut que fan *totes* les solucions de $\dot{x} = Ax$ que passen en algun instant per $x_0$. La Proposició 2.31 és pot interpretar dient que per tot punt de $\mathbb{R}^n$ passa una *única* òrbita del sistema $\dot{x} = Ax$.

**Proposició 2.33.** *Considerem l'e.d.o.* $\dot{x} = Ax$, *con* $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}^n)$. *Siguin* $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$. *Es compleix que* $x_1 \in \mathcal{O}(x_0)$ *si i només si* $\mathcal{O}(x_1) = \mathcal{O}(x_0)$.

*Demostració.* La implicació cap a la dreta és trivial, perquè $x_1 \in \mathcal{O}(x_1)$.

Suposem que $x_1 \in \mathcal{O}(x_0)$, és a dir existeixen $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$ tals que $x_1 = \varphi(t_1, t_0, x_0)$. Però llavors, per a tot $t \in \mathbb{R}$,

$$\varphi(t, t_1, x_1) = \varphi(t, t_1, \varphi(t_1, t_0, x_0)) = \varphi(t, t_0, x_0),$$

el que implica que $\mathcal{O}(x_1) = \mathcal{O}(x_0)$. □

**Exemple 2.4.** *L'òrbita més simple d'un sistema lineal homogeni és* $\mathcal{O}(0) = 0$, *que correspon a la família de solucions* $\varphi(t, t_0, 0) = 0$, *per a tot* $t \in \mathbb{R}$.

**Definició 2.34.** *Considerem el sistema* $\dot{x} = Ax$, *on* $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. *El seu* retrat de fases *és el dibuix de totes les seves òrbites, amb el sentit en que estan recorregudes.*

**Exemple 2.5.** *Dibuixem el retrat de fases del sistema lineal al pla*

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x. \end{cases}$$

*Una manera de trobar les òrbites del sistema és trobar-ne les solucions i dibuixar-ne la imatge. Però trobar-ne les solucions vol dir calcular-ne la dependència* *respecte al temps, la qual cosa és irrellevant per a l'obtenció de les òrbites. Una alternativa és descriure les òrbites com a gràfiques de funcions de $x$ o de $y$, sense obtenir la dependència de les solucions respecte a $t$. Així, observem que*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = -\frac{x}{y}. \tag{2.17}$$

*Això només tindrà sentit en els punts $(x, y)$ on $\dot{x} \neq 0$, és a dir, a $\mathbb{R}^2 \setminus \{y = 0\}$. A $\{y = 0\}$, si $x \neq 0$, podem escriure $x$ en funció de $y$ com*

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\frac{dx}{dt}}{\frac{dy}{dt}} = \frac{\dot{x}}{\dot{y}} = -\frac{y}{x}.$$

*L'únic punt on no podem posar les solucions com a gràfica és $(0, 0)$, però ja hem vist a l'Exemple 2.4 que $\{(0, 0)\}$ és una òrbita (que no és una corba).*

*Resolem l'equació (2.17). Busquem-ne la solució que passa pel punt $(x_0, y_0)$. La podem escriure com*

$$y\frac{dy}{dx} = -x.$$

*Fixat $x_0$ qualsevol, integrant a ambdues bandes entre $x_0$ i $x$, obtenim*

$$\begin{aligned}
\int_{x_0}^{x} y(\sigma)\frac{dy}{dx}(\sigma)\, d\sigma = -\int_{x_0}^{x} \sigma\, d\sigma \quad &\Longleftrightarrow \\
\frac{1}{2}(y(x)^2 - y(x_0)^2) = -\frac{1}{2}(x^2 - x_0^2) \quad &\Longleftrightarrow \\
x^2 + y^2 = x_0^2 + y_0^2, &
\end{aligned}$$

*és a dir, la òrbita per $(x_0, y_0)$ és una circumferència centrada en $(0, 0)$ de radi $\sqrt{x_0^2 + y_0^2}$.*

### 2.3.2 Retrats de fase de sistemes plans

En aquesta secció farem una classificació dels retrats de fase dels sistemes lineals homogenis amb coeficients constants 2-dimensionals.

Considerem el sistema

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \tag{2.18}$$

on $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Per a simplificar, suposarem que $A$ està en la forma més simple possible: diagonal, si diagonalitza amb valors propis reals, en forma de Jordan, si no diagonalitza i en una forma adient, si els valors propis tenen part imaginària no nul·la. Com haurem fixat els vectors propis, que seran els vectors de la base en la que treballem, els retrats de fase que pintarem només dependran dels valors propis. Es deixa com a exercici fer els retrats de fase en el cas de que els vectors propis siguin arbitraris.

Al llarg d'aquesta secció, $\lambda_1$ i $\lambda_2$ seran els valors propis d'$A$, no necessàriament diferents. Si $\lambda_1 \in \mathbb{R}$, $e_1 = (1, 0)^\top$ en serà el vector propi. Si, a més, $\lambda_2 \neq \lambda_1$ o la matriu és $\lambda_1 \mathrm{Id}$, $e_2 = (0, 1)^\top$ serà el vector propi de valor propi $\lambda_2$. Considerarem casos i subcasos.

1. Cas $\lambda_1\lambda_2 \neq 0$ (és a dir, $\det A \neq 0$).

(a) Cas $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

i. Cas $\lambda_1 \geq \lambda_2 > 0$. **Node repulsor**.

A. Cas $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$. En aquest cas les solucions són

$$(x, y)^\top = \varphi(t, t_0, x_0, y_0) = (x_0 e^{\lambda_1(t-t_0)}, y_0 e^{\lambda_2(t-t_0)})^\top.$$

El·liminant la variable $t$, ens queda

$$y = c|x|^{\lambda_2/\lambda_1}, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Vegeu les figures 2.1 i 2.2.

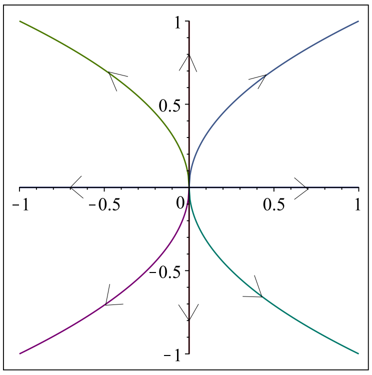


Figura 2.1: Node repulsor, $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = 2$.

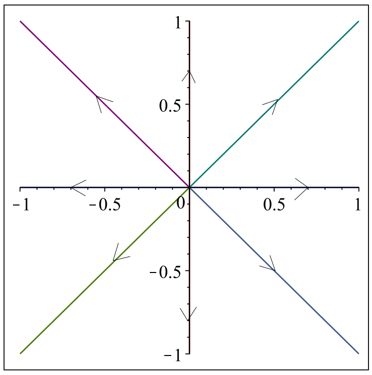


Figura 2.2: Node repulsor, $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = 1$.

B. Cas $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$. Les solucions són

$$\begin{aligned} (x, y)^\top &= \varphi(t, t_0, x_0, y_0) \\ &= (x_0 e^{\lambda_1(t-t_0)} + y_0(t-t_0)e^{\lambda_1(t-t_0)}, y_0 e^{\lambda_1(t-t_0)})^\top \\ &= x_0 e^{\lambda_1(t-t_0)} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y_0 e^{\lambda_1(t-t_0)} \begin{pmatrix} t-t_0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Aillant $t - t_0$, obtenim que el recorregut de les solucions ve donat per

$$x = a|y| + b|y|\log|y|, \qquad a, b \in \mathbb{R}.$$

Vegeu la figura 2.3. Observeu que en aquest cas l'eix $\{x = 0\}$ no és invariant (l'única òrbita que conté és $\{(0,0)\}$).

ii. Cas $\lambda_1 \leq \lambda_2 < 0$. **Node atractor**. El retrat de fases és com el del cas $\lambda_1 \geq \lambda_2 > 0$, amb el sentit de recorregut invers. Això és degut a que si $\varphi(t)$ és una solució de $\dot{x} = Ax$, la funció $\psi(t) = \varphi(-t)$, que representa la mateixa corba recorreguda en sentit invers, és solució de $\dot{x} = -Ax$.

iii. Cas $\lambda_1 > 0 > \lambda_2$. **Sella**. Les solucions són

$$(x, y)^\top = \varphi(t, t_0, x_0, y_0) = (x_0 e^{\lambda_1(t-t_0)}, y_0 e^{\lambda_2(t-t_0)})^\top.$$

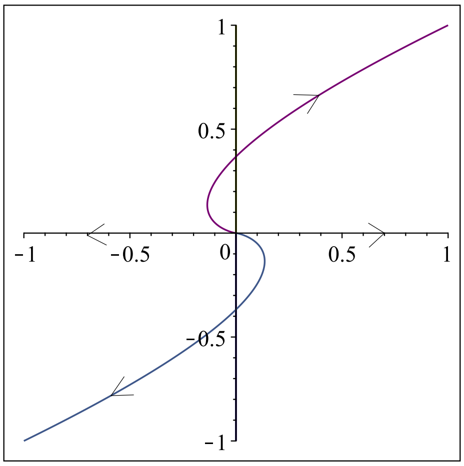


Figura 2.3: Node repulsor, amb caixa de Jordan no trivial.

El·liminant la variable $t$, ens queda de nou

$$y = c|x|^{\lambda_2/\lambda_1}, \qquad c \in \mathbb{R},$$

on ara $\lambda_2/\lambda_1 < 0$. Vegeu la figura 2.4.

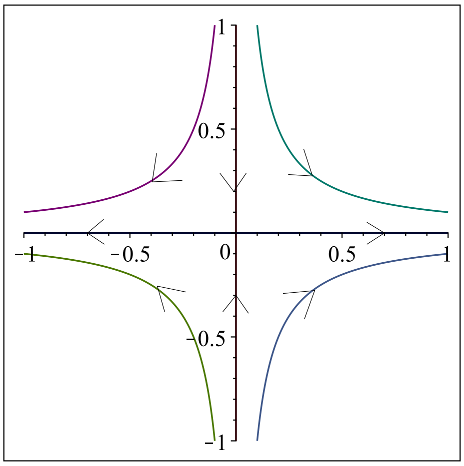


Figura 2.4: Sella, $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = 1$.

(b) Cas $\lambda_1, \lambda_2 \notin \mathbb{R}$, és a dir $\lambda_1 = a + ib$, $\lambda_2 = a - ib$, $b \neq 0$. En aquest cas, es pot veure que hi ha una base en la que la matriu $A$ és

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Les solucions del sistema són

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{at}\left[c_1 \begin{pmatrix} \cos bt \\ \sin bt \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -\sin bt \\ \cos bt \end{pmatrix}\right], \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

i. Cas $a > 0$. **Focus repulsor**. Vegeu la figura 2.5.

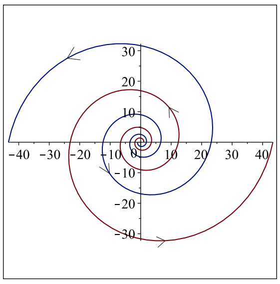


Figura 2.5: Focus repulsor, $b > 0$.

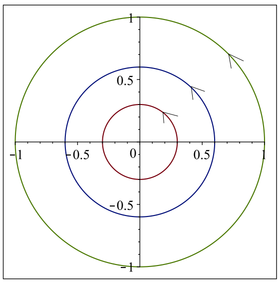


Figura 2.6: Centre, $b > 0$.

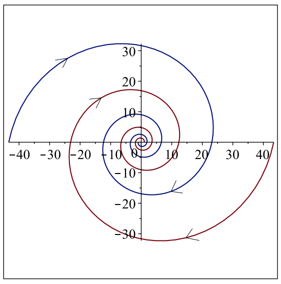


Figura 2.7: Focus atractor, $b < 0$.

ii. Cas $a < 0$. **Focus atractor**. Vegeu la figura 2.7.

iii. Cas $a = 0$. **Centre**. Vegeu la figura 2.6.

2. Cas $\lambda_1\lambda_2 = 0$ (és a dir, $\det A = 0$).

(a) Cas $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 = 0$. Les solucions són

$$(x, y)^\top = (c_1 e^{\lambda_1 t}, c_2)^\top, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Observeu que cada punt de la recta $\{x = 0\}$ és una òrbita. Vegeu la figura 2.8.

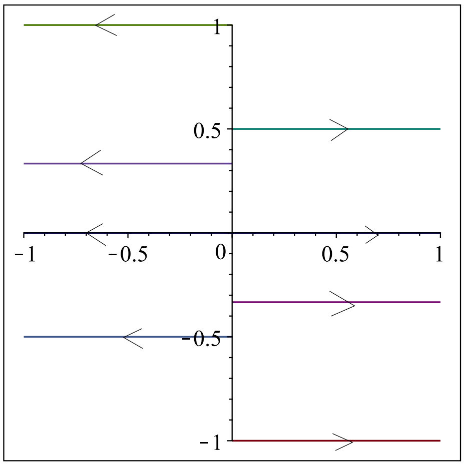


Figura 2.8: Cas, $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 = 0$.

(b) Cas $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 = 0$. Igual que el cas anterior, amb el sentit de recorregut invertit.

(c) Cas $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

i. Cas $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Les solucions són

$$(x, y)^\top = (c_1 t, c_2)^\top, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Quina és la diferència entre els retrats de fases d'aquest cas i el del cal $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 = 0$?

ii. Cas $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. En aquest cas, tot punt de $\mathbb{R}^2$ és una òrbita.

### 2.3.3 Estabilitat de solucions de sistemes lineals

A partir dels retrats de fase dels sistemes lineals al pla, en la secció anterior, podem observar que quan la part real d'algun valor propi d'$A$ és positiva, sempre hi ha solucions de $\dot{x} = Ax$ que s'allunyen, quan el temps creix, de la solució 0. De fet, comproveu que si la part real d'algun valor propi d'$A$ és positiva i $\varphi$ n'és una solució passant per un punt $(x_0, y_0)$, hi ha solucions que passant tant a prop com vulgueu de $(x_0, y_0)$ que es separan arbitràriament de $\varphi$ quan el temps creix. D'aquesta propietat en direm *inestabilitat*.

Si la part real de tots els valors propis és 0 i la part imaginària és no nul·la, les solucions ni s'allunyen ni s'acosten. Quan no s'allunyen, en direm que són *estables*.

Si la part real de tots els valors propis d'$A$ és negativa no només no s'allunyen quan el temps creix, sinó que totes les solucions tendeixen a $(0, 0)$. En aquest cas parlarem de solucions *asimptòticament estables*.

En aquesta secció donarem les definicions precises d'aquests conceptes i un resultat preliminar.

**Definició 2.35.** *Considerem el sistema lineal*

$$\dot{x} = A(t)x + b(t), \tag{2.19}$$

*on* $A \in C(\mathbb{R}, \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}))$ *i* $b \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. *Sigui* $\varphi_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una solució de* (2.19). *Direm que* $\varphi_0$ *és*

1. estable *si, per a tot* $\varepsilon > 0$, *existeix* $\delta > 0$ *tal que si* $\varphi$ *és una solució de* (2.19) *satisfent* $\|\varphi(t_0) - \varphi_0(t_0)\| < \delta$, *per a algun* $t_0 \in \mathbb{R}$, *llavors* $\|\varphi(t) - \varphi_0(t)\| < \varepsilon$, *per a tot* $t \geq t_0$,

2. asimptòticament estable *si és estable i existeix* $\varepsilon > 0$ *tal que si* $\|\varphi(t_0) - \varphi_0(t_0)\| < \varepsilon$, *per a algun* $t_0 \in \mathbb{R}$, *llavors* $\lim_{t\to\infty} |\varphi(t) - \varphi_0(t)\| = 0$ *i*

3. inestable *si no és estable.*

Una primera observació és la següent.

**Proposició 2.36.** *Considerem* $A \in C(\mathbb{R}, \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}))$ *i* $b \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. *Qualsevol solució del sistema* $\dot{x} = A(t)x + b(t)$ *té el mateix caràcter d'estabilitat que la solució* 0 *del sistema lineal homogeni* $\dot{x} = A(t)x$.

*Demostració.* De la Definició 2.35, l'estabilitat d'una solució $\varphi_0$ de $\dot{x} = A(t)x + b(t)$ depèn de la evolució de $\phi(t) = \varphi_0(t) - \varphi(t)$, on $\varphi$ n'és una altra solució. Ara bé, si $\varphi_0$ i $\varphi$ són solucions del sistema complet, $\phi(t)$ ho és de $\dot{x} = A(t)x$. La condició $\|\varphi(t_0) - \varphi_0(t_0)\| < \delta$ és equivalent a $\|\phi(t_0) - 0\| < \delta$. □

Estudiar la estabilitat de les solucions de un sistema $\dot{x} = A(t)x$ és, en general, un problema no trivial. Si el sistema té coeficients constants, com podem trobar les solucions explícitament, la qüestió té fàcil solució.

**Proposició 2.37.** *Sigui $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Llavors*

1. *si* $\operatorname{Spec} A \subset \{z \in \mathbb{C} \mid \Re z < 0\}$, *llavors la solució* $0$ *de* $\dot{x} = Ax$ *(equivalentment, totes les solucions de* $\dot{x} = Ax$*) és asimptòticament estable,*

2. *si existeix un* $\lambda \in \operatorname{Spec} A$ *tal que* $\Re\lambda > 0$, *llavors la solució* $0$ *de* $\dot{x} = Ax$ *(equivalentment, totes les solucions de* $\dot{x} = Ax$*) és inestable.*

*Demostració.* Donat $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, farem servir la norma

$$\|v\| = \sum_{j=1}^{n} |v_j|.$$

És un càlcul directe comprovar que la norma matricial associada a $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ és

$$\|A\| = \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

(és a dir, el màxim de la norma de cada columna).

Suposem que $\operatorname{Spec} A \subset \{z \in \mathbb{C} \mid \Re z < 0\}$. Sigui $a = \max_{\lambda\in\operatorname{Spec} A} \Re\lambda < 0$. Sigui $\nu > 0$ tal que $a + \nu < 0$. Sigui $C$ la matriu tal que $C^{-1}AC$ està en la forma de Jordan real. Tenim que, si $t > 0$,

$$\|e^{tC^{-1}AC}\| \le e^{ta} \sum_{j=0}^{n} \frac{t^j}{j!}.$$

Existeix una constant $K > 0$ tal que[5]

$$e^{ta} \sum_{j=0}^{n} \frac{t^j}{j!} \le K e^{(a+\nu)t}, \qquad \text{per a tot } t \ge 0.$$

En conseqüència, si $t \ge 0$,

$$\|e^{tC^{-1}AC}\| \le K e^{(a+\nu)t}.$$

Sigui $\varepsilon > 0$. Llavors, si

$$\|x_0\| \le \frac{\varepsilon}{\|C\|\|C^{-1}\|K},$$

es compleix que, si $t \ge 0$,

$$\|e^{tA}x_0\| = \|Ce^{tC^{-1}AC}C^{-1}x_0\| \le \|C\|\|C^{-1}\|K\|e^{tC^{-1}AC}\|\|x_0\| \le \varepsilon e^{(a+\nu)t}.$$

Aquesta darrera desigualtat implica que

$$\|e^{tA}x_0\| \le \varepsilon, \qquad \text{per a tot } t \ge 0$$

el que prova que la solució 0 és estable. A més, $\lim_{t\to\infty} \|e^{tA}x_0\| = 0$, el que prova que és asimptòticament estable. Això prova 1.

[5]En efecte, només cal observar que la funció $e^{-\nu t}\sum_{j=0}^{n} \frac{t^j}{j!}$ està fitada a $[0,\infty)$.

Suposem ara que existeix $\lambda \in \operatorname{Spec} A$ tal que $\Re\lambda > 0$. Si $\lambda \in \mathbb{R}$, existeix $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$, tal que $\varphi(t) = e^{\Re\lambda t} v$ és solució del sistema. Si $\Im\lambda \neq 0$, existeixen $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$, linealment independents, tals que

$$\varphi(t) = e^{t\Re\lambda}(\cos(\Im\lambda t)v_1 + \sin(\Im\lambda t)v_2)$$

és solució del sistema. En ambdós casos, $c\varphi$ també n'és solució, per a tot $c \in \mathbb{R}$. Llavors, per a qualsevol $\varepsilon > 0$, existeix $c$ tal que $\|c\varphi(0)\| < \varepsilon$, però prenent $t$ prou gran, com $\lim_{t\to\infty} e^{\Re\lambda t} = \infty$, $\|c\varphi(t)\| > 1$, el que prova que la solució 0 és inestable. $\square$

**Exercici 2.14.** *Proveu que si les solucions de $\dot{x} = Ax$ són estables però no asimptòticament estables, llavors* $\operatorname{Spec} A \subset \{z \in \mathbb{C} \mid \Re z \leq 0\}$. *Doneu un exemple de sistema $\dot{x} = Ax$ tal que les seves solucions siguin estables però no asimptòticament estables. Doneu un exemple de sistema $\dot{x} = Ax$ tal que* $\operatorname{Spec} A \subset \{z \in \mathbb{C} \mid \Re z \leq 0\}$ *però que les seves solucions siguin inestables.*

## 2.4 Sistemes lineals periòdics. Teoria de Floquet

Considerem l'e.d.o. autònoma $\dot{x} = f(x)$. Direm que una solució, $\varphi$, és $T$-periòdica si $\varphi(t+T) = \varphi(t)$, per a tot $t \in \mathbb{R}$. Aquestes solucions, si existeixen, juguen un paper molt important en l'estudi de l'e.d.o.. Provar-ne la existència és sovint una tasca fortament no trivial.

Suposem, però, que coneixem una solució $T$-periòdica, $\varphi$, de l'e.d.o. $\dot{x} = f(x)$, on $f$ és de classe $C^1$ respecte a $x$. Tal com vàrem veure a (2.1), esperem que el comportament de les solucions de $\dot{x} = f(x)$ properes a $\varphi_0$ vindrà governat pel comportament de les solucions del sistema lineal

$$\dot{x} = Df(\varphi_0(t))x.$$

Ara bé, com $\varphi_0$ és $T$-periòdica, també ho són els coeficients de la matriu $Df(\varphi_0(t))$. És a dir, l'estudi dels sistemes lineals amb coeficients constants ens permetrà obtenir informació del comportament de les solucions properes a solucions periòdiques en sistemes arbitraris.

### 2.4.1 Propietats elementals

**Proposició 2.38.** *Sigui $A \in C(\mathbb{R}, \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}))$, $T$-periòdica. Llavors es compleix el següent.*

1. *Si $\varphi(t)$ és una solució de $\dot{x} = A(t)x$, $\tilde{\varphi}(t) = \varphi(t+T)$ també ho és.*

2. *Sigui $\ell \in \mathbb{N}$. Llavors $\varphi$ és una solució $\ell T$-periòdica si i només si existeix $t_0$ tal que $\varphi(t_0) = \varphi(t_0 + \ell T)$.*

*Demostració.* Per a veure 1 només cal comprovar que

$$\dot{\tilde{\varphi}}(t) = \dot{\varphi}(t+T) = A(t+T)\varphi(t+T) = A(t)\tilde{\varphi}(t).$$

La implicació cap a la dreta de 2 és immediata. Suposem que $\varphi(t_0) = \varphi(t_0+\ell T)$, per a algun $t_0$. Definim $\hat{\varphi}(t) = \varphi(t+\ell T)$. Es compleix $\hat{\varphi}(t_0) = \varphi(t_0+\ell T) = \varphi(t_0)$. A més,

$$\dot{\hat{\varphi}}(t) = \dot{\varphi}(t+\ell T) = A(t+\ell T)\varphi(t+\ell T) = A(t)\hat{\varphi}(t).$$

Això prova la implicació cap a l'esquerra. □

### 2.4.2 La matriu de monodromia

**Proposició 2.39.** *Sigui $A \in C(\mathbb{R}, \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}))$, $T$-periòdica. Sigui $\Phi(t)$ una matriu fonamental de $\dot{x} = A(t)x$. Les afirmacions següents són certes.*

1. *$\Phi(t+T)$ n'és també una matriu fonamental.*
2. *Existeix una matriu constant $M = \Phi(0)^{-1}\Phi(T)$, amb $\det M \neq 0$, tal que $\Phi(t+T) = \Phi(t)M$. A la matriu $M$ se li diu* matriu de monodromia.
3. *Si $\widetilde{M}$ és la matriu de monodromia associada a una altra matriu fonamental $\widetilde{\Phi}$, existeix una matriu $C$ tal que $\widetilde{M} = C^{-1}MC$.*

*Demostració.* Sigui $\Psi(t) = \Phi(t+T)$. Tenim que, com $A(t+T) = A(t)$,

$$\dot{\Psi}(t) = \dot{\Phi}(t+T) = A(t+T)\Phi(t+T) = A(t)\Phi(t+T) = A(t)\Psi(t).$$

Això prova 1.

Tenim que $\Phi(t+T)$ i $\Phi(t)\Phi(0)^{-1}\Phi(T)$ són matrius fonamentals de $\dot{x} = A(t)x$ i coincideixen en $t = 0$. Han de coincidir per a tot $t$. Això prova 2.

Si $\widetilde{\Phi}$ n'és una altra matriu fonamental, per una banda, $\widetilde{\Phi}(t) = \Phi(t)C$ i, per una altra, $\widetilde{\Phi}(t+T) = \widetilde{\Phi}(t)\widetilde{M}$. Llavors, per a tot $t$,

$$\Phi(t)MC = \Phi(t+T)C = \widetilde{\Phi}(t+T) = \widetilde{\Phi}(t)\widetilde{M} = \Phi(t)C\widetilde{M}.$$

□

Suposem que $\Phi$ és la matriu fonamental de $\dot{x} = A(t)x$, amb $A$ $T$-periòdica, tal que $\Phi(t_0) = \mathrm{Id}$. Observem que, si $\varphi$ és el flux de $\dot{x} = A(t)x$, pel punt 4 de la Proposició 2.14, com $\varphi(t, t_0, x_0) = \Phi(t)x_0$,

$$\varphi(t_0+T, t_0, x_0) = \Phi(t_0+T)x_0 = \Phi(t_0)Mx_0 = Mx_0.$$

Per tant, $M$ codifica com es transforma una solució del sistema amb condició inicial $x_0$ en $t = t_0$ en $t = t_0 + T$. Com $\Phi(t+T) = \Phi(t)M$,

$$\begin{aligned}\varphi(t_0+kT, t_0, x_0) = \Phi(t_0+kT)x_0 &= \Phi(t_0+(k-1)T+T)x_0 \\ &= \Phi(t_0+(k-1)T)Mx_0 = \cdots = M^k x_0.\end{aligned}$$

En particular, considereu l'exercici següent.

**Exercici 2.15.** *Suposeu que $M$ és la matriu de monodromia del sistema $T$-periòdic $\dot{x} = A(t)x$. Sigui $\ell \in \mathbb{N}$. Proveu que el sistema admet una solució $\ell T$ periòdica no trivial si i només si $M$ té algun valor propi $\lambda$ tal que $\lambda^\ell = 1$.*

A més, els valors propis de la matriu de monodromia ens caracteritzen l'estabilitat de les solucions dels sistemes amb coeficients periòdics.

**Definició 2.40.** *Els valors propis de la matriu de monodromia s'anomenen* multiplicadors característics.

**Teorema 2.41.** *Sigui $M$ una matriu de monodromia del sistema $T$-periòdic amb coeficients continus $\dot{x} = A(t)x$. Llavors,*

1. *si* $\operatorname{spec} M \subset \{z \in \mathbb{C} \mid \ |z| < 1\}$, *totes les solucions del sistema són asimptòticament estables,*
2. *si* $\operatorname{spec} M \subset \{z \in \mathbb{C} \mid \ |z| = 1\}$ *i $M$ diagonalitza (presumiblement, en $\mathbb{C}$) les solucions del sistema són estables però no asimptòticament estables i*
3. *si* $\operatorname{spec} M \not\subset \{z \in \mathbb{C} \mid \ |z| \leq 1\}$ *o la forma de Jordan de $M$ té un bloc no diagonal de mida més gran que* 1 *associat a un valor propi de mòdul* 1*, les solucions del sistema són inestables.*

La demostració, similar a la de la Proposició 2.37, és deixa com a exercici. En donarem una altra després del Teorema 2.44.

### 2.4.3 Teoria de Floquet

Tot sistema lineal amb coeficients periòdics es pot transformar mitjançant un canvi de variables lineal en un sistema lineal amb coeficients constants. El canvi està determinat per la matriu de monodromia del sistema.

**Lema 2.42.** *Siguin $M \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$) ($\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$)), una matriu tal que* $\det M \neq 0$*. Llavors existeix una matriu $B$ tal que*

$$e^B = M.$$

*Direm que $B = \log M$.*

La demostració és deixa com a exercici. Podeu mirar aquí. Els comentaris següent us en poden donar pistes.

**Comentari 2.43.** *Sobre la matriu $B$ del Lema 2.42 val la pena remarcar el següent.*

1. *$B$ pot ser complexa encara que $M$ sigui una matriu real. Per exemple, si $M = -1$, $\log M = \pi i + 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$. Però observem que*
$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \exp\begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}.$$
*En particular,*
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \exp\begin{pmatrix} 0 & -\pi \\ \pi & 0 \end{pmatrix}.$$
2. *Si $B$ satisfà $e^B = M$, $B + 2k\pi i\mathrm{Id}$ també, per a tot $k \in \mathbb{Z}$.*
3. *Si el valors propis de $M$ són tots positius, $B$ es pot escollir real.*

4. *Com* $C^{-1}MC = C^{-1}e^BC = e^{C^{-1}BC}$, *podem suposar que o bé* $M$ *o bé* $B$ *estan en forma de Jordan.*

5. *Per a calcular la matriu* $B$, *es procedeix com per a calcular l'exponencial d'una matriu. Si* $M = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, $B = \operatorname{diag}(\log \lambda_1, \ldots, \log \lambda_n)$. *Si* $M$ *és un bloc de Jordan, és a dir, si és de la forma* $M = \lambda\mathrm{Id}(\mathrm{Id} + N)$, *amb* $N^k = 0$, *com* Id *i* $N$ *commuten, proveu que*

$$\log M = \log \lambda\mathrm{Id}(\mathrm{Id} + N) = \log \lambda\mathrm{Id} + \log(\mathrm{Id} + N)$$

*on*

$$\log(\mathrm{Id} + N) = \sum_{j=1}^{k-1} \frac{(-1)^{j+1}}{k} N^j.$$

**Teorema 2.44** (Teorema de Floquet)**.** *Sigui* $A \in C(\mathbb{R}, \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}))$, $T$*-periòdica. Sigui* $M$ *una matriu de monodromia del sistema* $\dot{x} = A(t)x$. *Sigui* $B$ *tal que* $e^{TB} = M$. *Llavors existeix una matriu* $T$*-periòdica* $P(t)$ *tal que* $P(t)e^{tB}$ *és una matriu fonamental de* $\dot{x} = A(t)x$.

*En conseqüència, el canvi* $x = P(t)\tilde{x}$ *transforma el sistema* $\dot{x} = A(t)x$ *en* $\dot{\tilde{x}} = B\tilde{x}$.

*Demostració.* Sigui $\Phi$ la matriu fonamental de $\dot{x} = A(t)x$ tal que $\Phi(t + T) = \Phi(t)M$. Sigui $P(t) = \Phi(t)e^{-tB}$. Llavors,

$$P(t + T) = \Phi(t + T)e^{-(t+T)B} = \Phi(t)Me^{-TB}e^{-tB} = \Phi(t)MM^{-1}e^{-tB} = P(t).$$

Definint $x = P(t)\tilde{x} = \Phi(t)e^{-tB}\tilde{x}$, tenim que

$$\begin{aligned} A(t)\Phi(t)e^{-tB}\tilde{x} = A(t)x(t) = \dot{x}(t) &= \dot{\Phi}(t)e^{-tB}\tilde{x} - \Phi(t)e^{-tB}B\tilde{x} + \Phi(t)e^{-tB}\dot{\tilde{x}} \\ &= A(t)\Phi(t)e^{-tB}\tilde{x} - \Phi(t)e^{-tB}B\tilde{x} + \Phi(t)e^{-tB}\dot{\tilde{x}}, \end{aligned}$$

que implica que $\dot{\tilde{x}} = B\tilde{x}$. □

*Demostració del Teorema 2.41.* Tenim que $M = e^{TB}$. Per la Proposició 2.37 i l'Exercici (2.14), si els valors propis de $B$ tenen part real negativa (si i només si els valors propis de $M$ tenen mòdul menor que 1) les solucions de $\dot{\tilde{x}} = B\tilde{x}$ són asimptòticament estables, si algun valor propi de $B$ té part real positiva (si i només si algun valor propi de $M$ té mòdul més gran que 1) les solucions de $\dot{\tilde{x}} = B\tilde{x}$ són inestables i si els valors propis de $B$ tenen part real 0 o negativa i els valors propis amb part real 0 són simples o la dimensió del seu nucli és igual a la seva multiplicitat (si i només si els valors propis de $M$ tenen mòdul menor o igual a 1 i els valors propis amb mòdul 1 són simples o la dimensió del seu nucli és igual a la seva multiplicitat), les solucions són estables però no asimptòticament estables. □

### 2.4.4 Un exemple d'estudi de l'estabilitat de solucions de sistemes periòdics

Considerem l'equació de Mathieu

$$\ddot{x} + (\omega^2 + \varepsilon \cos 2t)x = 0, \tag{2.20}$$

on $\omega, \varepsilon \in \mathbb{R}$ són paràmetres. El sistema equivalent és

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = A(t,\omega,\varepsilon)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad A(t,\omega,\varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 - \varepsilon\cos 2t & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.21}$$

Observem que és un sistema $\pi$-periòdic. Definim $A_0$ i $A_1$ tals que

$$A(t,\omega,\varepsilon) = A_0 + \varepsilon A_1(t),$$

és a dir

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_1(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\cos 2t & 0 \end{pmatrix}.$$

Sigui $\Phi(t,\varepsilon)$ la matriu fonamental de (2.21) que en $t = 0$ és Id. La matriu de monodromia associada és $M_\varepsilon = \Phi(\pi,\varepsilon)$. Pel Teorema 2.41, l'estabilitat de les solucions de (2.21) està determinada pels valors propis de $M_\varepsilon$. Per a calcular-los, una primera observació és la següent.

**Proposició 2.45.** *Per a tot $\omega, \varepsilon \in \mathbb{R}$, $\det M_\varepsilon = 1$.*

*Demostració.* Per la fórmula de Liouville,

$$\frac{d}{dt}\det\Phi(t,\varepsilon) = \text{traça}\, A(t,\omega,\varepsilon)\det\Phi(t,\varepsilon) = 0,$$

el que implica que $\det\Phi(t,\varepsilon)$ és constant. Com $\det\Phi(0,\varepsilon) = \det \mathrm{Id} = 1$ i $M_\varepsilon = \Phi(\pi,\varepsilon)$, la proposició queda provada. □

**Proposició 2.46.** *Es compleix el següent.*

1. *Si $|\text{traça}\, M_\varepsilon| > 2$, les solucions de (2.21) són inestables.*

2. *Si $|\text{traça}\, M_\varepsilon| < 2$, les solucions de (2.21) són estables.*

*Demostració.* Tenint present aquesta proposició, el polinomi característic de $M_\varepsilon$ és $p(\lambda) = \lambda^2 - \text{traça}\, M_\varepsilon\lambda + \det M_\varepsilon = \lambda^2 - \text{traça}\, M_\varepsilon\lambda + 1$. Per tant, els valors propis de $M_\varepsilon$ són

$$\lambda_\pm = \frac{1}{2}\left(\text{traça}\, M_\varepsilon \pm \sqrt{(\text{traça}\, M_\varepsilon)^2 - 4}\right).$$

Si $|\text{traça}\, M_\varepsilon| > 2$, el discriminant és positiu i els dos valors propis de $M_\varepsilon$ són reals. Com $\lambda_-\lambda_+ = \det M_\varepsilon = 1$ i $\lambda_- \neq \lambda_+$, un d'ells té mòdul més gran que 1. Llavors el Teorema 2.41 assegura que les solucions de (2.21) són inestables.

Si $|\text{traça}\, M_\varepsilon| < 2$, el discriminant és negatiu i els dos valors propis de $M_\varepsilon$ són complexos conjugats, amb part imaginària no nul·la. Com $\lambda_-\lambda_+ = \det M_\varepsilon = 1$, tots dos tenen mòdul 1 i, com la part imaginària és no nul·la, són simples. El Teorema 2.41 assegura que les solucions de (2.21) són estables. □

Per tant, per a establir l'estabilitat de les solucions de (2.21) hem de calcular $|\text{traça}\, M_\varepsilon|$. Ho farem per a cada valor d'$\omega$, prenent $\varepsilon$ petit. Per a fer-ho, però, haurem de fer servir un resultat de regularitat de les solucions que encara no hem provat.

El sistema (2.21) és un sistema lineal, depenent de $t$, i tal que els coeficients depenen analíticament (de fet, de forma polinomial) d'$\varepsilon$. Veurem en el Teorema **??** que les solucions d'aquest sistema i, en conseqüència, les seves matrius fonamentals, també en depenen de forma analítica. Així, per a cada $\omega$,

$$\Phi(t,\varepsilon) = \sum_{k\geq 0} \varepsilon^k \Phi_k(t) \tag{2.22}$$

La importància de poder escriure $\Phi(t,\varepsilon)$ com a sèrie és la següent: si bé no podrem calcular explícitament $\Phi$, sí que podrem calcular $\Phi_k$, per a qualsevol $k$. Això no ens permetrà determinar les solucions del sistema (2.21), però sí calcular $|\operatorname{traça} M_\varepsilon|$, si prenem $\varepsilon$ prou petit.

**Proposició 2.47.** *Sigui* $\Phi(t,\varepsilon)$*, la matriu fonamental de* (2.21) *que en* $t=0$ *és* Id *i siguin* $\Phi_k$ *les matrius definides per* (2.22)*. Llavors*

1. $\Phi_0$ *satisfà*
$$\dot\Phi_0(t) = A_0\Phi_0(t), \quad \Phi_0(0) = \mathrm{Id},$$
*és a dir,*
$$\Phi_0(t) = e^{tA_0} = \begin{pmatrix} \cos\omega t & \omega^{-1}\sin\omega t \\ -\omega\sin\omega t & \cos\omega t \end{pmatrix}, \qquad \text{si } \omega \neq 0,$$
$$\Phi_0(t) = e^{tA_0} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{si } \omega = 0,$$

2. *si* $k\geq 1$*,* $\Phi_k$ *satisfà*
$$\dot\Phi_k(t) = A_0\Phi_k(t) + A_1(t)\Phi_{k-1}(t), \quad \Phi_k(0) = 0.$$

*Demostració.* Substituint (2.22) en (2.21), obtenim

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\sum_{k\geq 0}\varepsilon^k\Phi_k(t) = \sum_{k\geq 0}\varepsilon^k\dot\Phi_k(t) \\ &= (A_0 + \varepsilon A_1(t))\sum_{k\geq 0}\varepsilon^k\Phi_k(t) \\ &= \sum_{k\geq 0}\varepsilon^k A_0\Phi_k(t) + \sum_{k\geq 0}\varepsilon^{k+1}A_1(t)\Phi_k(t) \\ &= A_0\Phi_0(t) + \sum_{k\geq 1}\varepsilon^k(A_0\Phi_k(t) + A_1(t)\Phi_{k-1}(t)) \end{aligned}$$

Igualant els termes amb la mateixa potència d'$\varepsilon$ obtenim les equacions per $\Phi_k$. Les condicions en $t=0$ s'obtenen de

$$\mathrm{Id} = \Phi(0,\varepsilon) = \sum_{k\geq 0}\varepsilon^k\Phi_k(0)$$

i de igualar els termes amb la mateixa potència d'$\varepsilon$ a ambdues bandes.

Clarament, com $A_0$ no depèn de $t$,

$$\Phi_0(t) = e^{tA_0}.$$

Per a obtenir les fórmules de $e^{tA_0}$ només cal observar que les columnes de les matrius donades són solució del sistema i, en $t=0$, són Id. ◻

**Proposició 2.48.** *Sigui $\omega \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Existeix $\varepsilon_0 > 0$ tal que si $|\varepsilon| < \varepsilon_0$, les solucions de* (2.21) *són estables.*

*Demostració.* Tenim que

$$\begin{aligned}\text{traça}\, M_\varepsilon = \text{traça}\, \Phi(\pi, \varepsilon) = \text{traça} \sum_{k\geq 0} \varepsilon^k \Phi_k(\pi) \\ = \sum_{k\geq 0} \varepsilon^k \text{traça}\, \Phi_k(\pi) = \text{traça}\, \Phi_0(\pi) + \mathcal{O}(\varepsilon).\end{aligned}$$

Ara bé, per la Proposició 2.47, si $\omega \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$

$$|\text{traça}\, \Phi_0(\pi)| = 2|\cos \omega\pi| < 2.$$

Per tant, si $\varepsilon$ és prou petit,

$$|\text{traça}\, \Phi(\pi, \varepsilon)| = |\text{traça}\, \Phi_0(\pi) + \mathcal{O}(\varepsilon)| \leq |\text{traça}\, \Phi_0(\pi)| + |\, \mathcal{O}(\varepsilon)| < 2.$$

□

Si $\omega = \ell \in \mathbb{Z}$, $\text{traça}\, \Phi_0(\pi) = 2\cos \ell\pi = 2(-1)^\ell$. Sigui $k \geq 1$ tal que $\text{traça}\, \Phi_j(\pi) = 0$, per a $1 \leq j \leq k-1$, i tal que $\text{traça}\, \Phi_k(\pi) \neq 0$. Llavors

$$\text{traça}\, \Phi(\pi, \varepsilon) = 2(-1)^\ell + \varepsilon^k \text{traça}\, \Phi_k(\pi) + \mathcal{O}(\varepsilon^{k+1}).$$

Per tant, l'estabilitat de les solucions de (2.21) dependrà del signe de $\text{traça}\, \Phi_k(\pi)$ i de la paritat de $\ell$.

**Proposició 2.49.** *Per a qualsevol $\omega = \ell \in \mathbb{Z}$, $\ell \neq 0$, $\text{traça}\, \Phi_1(\pi) = 0$.*

*Demostració.* Per la Proposició 2.47 i fent servir el mètode de variació de les constants escrivint $\Phi_1 = \Phi_0 \Psi_1$, tenim que

$$\Phi_0(t)\dot{\Psi}_1(t) = A_1(t)\Phi_0(t), \qquad \Psi_1(0) = 0.$$

Per tant, $\dot{\Psi}_1(t) = \Phi_0(t)^{-1} A_1(t) \Phi_0(t)$, el que implica que, com la traça d'una matriu es preserva per canvis de base lineals,

$$\frac{d}{dt}(\text{traça}\, \Psi_1(t)) = \text{traça}\, \dot{\Psi}_1(t) = \text{traça}\, A_1(t) = 0.$$

Com $\Psi_1(0) = 0$, tenim que $\text{traça}\, \Psi(t) = 0$, per a tot $t$. Finalment, de l'expressió de $\Phi_0$ donada per la Proposició 2.47 i tenint en compte que $\ell \in \mathbb{Z}$,

$$\text{traça}\, \Phi_1(\pi) = \text{traça}\, (\Phi_0(\pi)\Psi(\pi)) = \text{traça}\, ((-1)^\ell \Psi(\pi)) = 0.$$

□

Per tant, l'estabilitat vindrà donada per $\Phi_k$, amb $k \geq 2$.

**Exercici 2.16.** *Completeu l'estudi de l'estabilitat calculant $\Phi_k$, per a $k$ adient. El valor de $k$ depèn de $\ell$. Obtindreu el següent.*

1. *Si* $\ell = 0$, *traça* $\Phi_1(\pi) = 0$ *i traça* $\Phi_2(\pi) = -\pi^2/8$. *En aquest cas,*

$$\text{traça}\,\Phi(\pi, \varepsilon) = 2 - \frac{\pi^2}{8}\varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3).$$

   *Per tant* $|\text{traça}\,\Phi(\pi, \varepsilon)| < 2$, *si* $\varepsilon \neq 0$ *i és prou petit. Le solucions són estables.*

2. *Si* $\ell = 1$, *traça* $\Phi_2(\pi) = -\pi^2/16$. *En aquest cas,*

$$\text{traça}\,\Phi(\pi, \varepsilon) = -2 - \frac{\pi^2}{16}\varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3).$$

   *Per tant traça* $\Phi(\pi, \varepsilon) < -2$, *si* $\varepsilon \neq 0$ *i és prou petit. Le solucions són inestables.*

3. *Si* $\ell = 2$, *traça* $\Phi_2(\pi) =$ *traça* $\Phi_3(\pi) = 0$ *i traça* $\Phi_4(\pi) = 5\pi^2/36864$. *En aquest cas,*

$$\text{traça}\,\Phi(\pi, \varepsilon) = 2 + \frac{5\pi^2}{36864}\varepsilon^4 + \mathcal{O}(\varepsilon^5).$$

   *Per tant traça* $\Phi(\pi, \varepsilon) > 2$, *si* $\varepsilon \neq 0$ *i és prou petit. Le solucions són inestables.*

4. *Si* $\ell \geq 3$, *traça* $\Phi_2(\pi) =$ *traça* $\Phi_3(\pi) = 0$ *i traça* $\Phi_4(\pi) = (-1)^{\ell+1}c_\ell$, *on* $c_\ell > 0$. *Deduïu que les solucions són estables.*

*Els càlculs són llargs i feixucs. Feu servir un ordinador, si ho considereu convenient. També podeu calcular numèricament la matriu* $\Phi(\pi, \varepsilon)$ *i obtenir-ne la traça.*

# Capítol 3

# Teoremes fonamentals

## 3.1 Existència i unicitat de solucions de p.v.i.

Siguin $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, un conjunt obert i $f : U \to \mathbb{R}^n$, una funció. Donat $(t_0, x_0) \in U$, considerem el p.v.i. o problema de Cauchy

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= f(t,x), \\ x(t_0) &= x_0. \end{aligned}\right\} \tag{3.1}$$

En aquesta secció veurem que si $f$ satisfà certes condicions, el p.v.i. admetrà solucions i que, sota condicions addicionals, la solució del p.v.i. serà única. Les condicions que donarem seran *suficients* però no *necessàries*, en general. Una de les dificultats de respondre aquestes qüestions rau en el fet de que, a diferència del que passa amb els sistemes lineals, les solucions de (3.1) no tenen pas perquè estar definides pels mateixos valors de $t$ pels quals està definida la funció $f$. Dedicarem una part d'aquesta secció a estudiar el domini d'existència d'aquestes solucions.

### 3.1.1 El problema de Cauchy com a equació integral

Per a resoldre el p.v.i. (3.1), el primer que farem serà transformar-lo en una equació de la forma $x = F(x)$, on $F$ serà una funció adient.

**Proposició 3.1.** *Siguin $U \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$, un conjunt obert i $f : U \to \mathbb{R}^n$, una funció contínua. Sigui $I$, un interval obert, tal que $t_0 \in I$. Una funció $x : I \to \mathbb{R}^n$ és solució del p.v.i.* (3.1) *si i només si és contínua i satisfà*

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds, \qquad t \in I. \tag{3.2}$$

*Demostració.* Veiem primer la implicació cap a la dreta. Sigui $x : I \to \mathbb{R}^n$, una solució del p.v.i. (3.1). Com, per definició de solució, és derivable, també és contínua. Com $f$ és contínua, $f(t, x(t))$ és contínua i, com $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$, $\dot{x}$ és també contínua. Per tant, per a qualsevol $t \in I$, podem integrar la igualtat $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$ entre $t_0$ i $t$ i, fent servir que $x(t_0) = x_0$, obtenim que $x(t)$ satisfà

$$x(t) - x_0 = x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t} \dot{x}(s)\, ds = \int_{t_0}^{t} \dot{f}(s, x(s))\, ds.$$

Veiem ara la implicació cap a l'esquerra. Sigui $x : I \to \mathbb{R}^n$ una funció contínua satisfent (3.2). Com $x$ és contínua, $f(t, x(t))$ és contínua i, en conseqüència, $\int_{t_0}^t f(s, x(s))\, ds$ és derivable. Llavors, com $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s))\, ds$, tenim que $x$ és derivable. Derivant, obtenim que $\dot{x} = f(t, x(t))$. A més, avaluant a $t = t_0$, obtenim que $x(t_0) = x_0$. $\square$

### 3.1.2 El teorema del punt fix de Banach

La Proposició 3.1 ens diu que, si la funció $f$ és contínua, trobar una funció derivable $x$ solució de (3.1) és equivalent a trobar una funció contínua $x$ solució de (3.2).

Observem que la part dreta de (3.2) ens permet definir l'operador que a cada funció contínua $x : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ tal que $\operatorname{graf}(x) = \{(t, x(t)) \mid t \in I\} \subset U$ li fa correspondre la funció $\mathcal{F}(x)$, on

$$\mathcal{F}(x)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s))\, ds, \tag{3.3}$$

que és contínua.

Una manera intuïtiva d'obtenir una solució de (3.2) és la següent: definim $\varphi_0(t) = x_0$, per a tot $t$, i i $\varphi_k = \mathcal{F}(\varphi_{k-1})$. Obtenim d'aquesta manera una successió de funcions $\varphi_k$, que esperem estaran definides en un interval no nul. Veurem que, si $f$ satisfà alguna hipòtesi addicional, aquesta successió serà convergent cap a la solució de (3.2) (que és la solució de (3.1)). Això és coneix com *esquema iteratiu de Picard*.

**Exemple 3.1.** *Considerem el p.v.i.*

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= x, \\ x(0) &= 1. \end{aligned}\right\}$$

*L'equació integral equivalent donada per la Proposició 3.1 és*

$$x(t) = \mathcal{F}(x)(t) = 1 + \int_0^t x(s)\, ds$$

*Apliquem l'esquema iteratiu de Picard en aquest cas. Comencem amb $\varphi_0(t) = 1$. Llavors els tres primers iterats són*

$$\begin{aligned}
\varphi_1(t) &= \mathcal{F}(\varphi_0)(t) = 1 + \int_0^t 1\, ds = 1 + t, \\
\varphi_2(t) &= \mathcal{F}(\varphi_1)(t) = 1 + \int_0^t (1 + s)\, ds = 1 + t + \frac{1}{2}t^2, \\
\varphi_3(t) &= \mathcal{F}(\varphi_2)(t) = 1 + \int_0^t \left(1 + s + \frac{1}{2}t^2\right) ds = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3!}t^3,
\end{aligned}$$

*Proveu per inducció que $\varphi_k$ és el polinomi de Taylor de grau $k$ en $t = 0$ de $e^t$, que és la solució del p.v.i. que estem considerant. Clarament, en aquest cas concret, l'esquema de Picard convergeix cap a la solució.*

L'eina fonamental per a provar la convergència de l'esquema de Picard és el teorema del punt fix de Banach.

**Definició 3.2.** *Siguin $(\mathcal{X}, d)$ un espai mètric, on $d$ és la distància a $\mathcal{X}$, i $\mathcal{F} : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, una aplicació. Direm que $\mathcal{F}$ és una* contracció *si existeix $0 < \lambda < 1$ tal que $d(\mathcal{F}(x), \mathcal{F}(\tilde{x})) \leq d(x, \tilde{x})$, per a tot $x, \tilde{x} \in \mathcal{X}$.*

**Comentari 3.3.** *Si $\mathcal{F} : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, on $\mathcal{X}$ és un espai mètric, és una contracció, $\mathcal{F}$ és contínua. En efecte, si $\tilde{x} \in \mathcal{X}$ i $\lim_{k\to\infty} x_k = \tilde{x}$, llavors*

$$0 \leq d(\mathcal{F}(x_k), \mathcal{F}(\tilde{x})) \leq \lambda d(x_k, \tilde{x}) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.$$

**Exemple 3.2.** *Exemples d'alguns espais mètrics complets són els següents.*

1. *Si $\mathcal{X}$ és un espai de Banach amb norma $\|\cdot\|$, és un espai mètric complet amb la distància $d(x, \tilde{x}) = \|x - \tilde{x}\|$.*

2. *Siguin $\mathcal{X}$, un espai de Banach, $x_0 \in \mathcal{X}$, $\rho > 0$ i $\bar{\mathcal{B}}_\rho(x_0) = \{x \in \mathcal{X} \mid \|x - x_0\| \leq \rho\}$, la bola tancada de radi $\rho$ i centre $x_0$ a $\mathcal{X}$. Llavors $\bar{\mathcal{B}}_\rho(x_0)$ és un espai mètric complet amb la distància induïda per la norma de $\mathcal{X}$.*

3. *Sigui $K \subset \mathbb{R}^k$, un conjunt compacte. L'espai*

   $$C(K, \mathbb{R}^n) = \{\varphi : K \to \mathbb{R}^n \mid \varphi \text{ és contínua}\}$$

   *amb la norma*

   $$\|\varphi\| = \sup_{x\in K} \|\varphi(x)\|$$

   *és un espai de Banach. Aquesta norma té la següent propietat: si $\varphi \in C(K, \mathbb{R}^n)$, per a tot $x \in K$,*

   $$\|\varphi(x)\| \leq \sup_{\tilde{x}\in K} \|\varphi(\tilde{x})\| = \|\varphi\|. \tag{3.4}$$

4. *Siguin $I \subset \mathbb{R}$, un interval compacte, i $x_0 \in C(I, \mathbb{R}^n)$. Llavors $\bar{\mathcal{B}}_\rho(x_0)$ és un espai mètric complet.*

5. *Observeu que si $K$ no és compacte, $C(K, \mathbb{R}^n)$ no és un espai de Banach perquè $\sup_{x\in K} \|\varphi(x)\|$ pot ser infinit: la norma no està ben definida. Sí que és un espai de Banach, amb la mateixa norma, l'espai*

   $$C_f(K, \mathbb{R}^n) = \{\varphi : K \to \mathbb{R}^n \mid \varphi \text{ és contínua i} \sup_{x\in K} \|\varphi(x)\| < \infty\}.$$

   *El subíndex $f$ de $C_f$ vol dir* funcions contínues i fitades. *Les boles tancades en $C_f(K, \mathbb{R}^n)$ són espais mètric complets.*

**Definició 3.4.** *Sigui $\mathcal{F} : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, una aplicació. Direm que $p_0 \in \mathcal{X}$ és un* punt fix *de $\mathcal{F}$ si $\mathcal{F}(p_0) = p_0$.*

**Teorema 3.5** (Lema de la contracció)**.** *Siguin $\mathcal{X}$, un espai mètric complet, i $\mathcal{F} : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, una contracció. Llavors $\mathcal{F}$ té un únic punt fix.*

*Demostració.* Sigui $d$, la distància a $\mathcal{X}$.

Provem primer que el punt fix, si existeix, és únic. Suposem que $p$ i $q$ són punts fixos de $\mathcal{F}$. Llavors,

$$d(p, q) = d(\mathcal{F}(p), \mathcal{F}(q)) \leq \lambda d(p, q) \quad \Longrightarrow \quad (1 - \lambda) d(p, q) \leq 0.$$

Com $0 < \lambda < 1$ i $d(p,q) \geq 0$, $d(p,q) = 0$.

Veiem ara que $\mathcal{F}$ té un punt fix. Sigui $q_0 \in \mathcal{X}$. Consideren la successió $q_j = \mathcal{F}(q_{j-1})$, $j \geq 1$. Afirmem que és una successió de Cauchy. En efecte, per a qualsevol $n, k \geq 1$,

$$
\begin{aligned}
d(q_{n+k}, q_n) \leq \sum_{j=1}^{k} d(q_{n+j}, q_{n+j-1}) &= \sum_{j=1}^{k} d(\mathcal{F}^{n+j}(q_0), \mathcal{F}^{n+j-1}(q_0)) \\
&\leq \lambda^n \sum_{j=1}^{k} \lambda^{j-1} d(\mathcal{F}(q_0), q_0) \leq d(\mathcal{F}(q_0), q_0) \frac{\lambda^n}{1-\lambda},
\end{aligned}
$$

que tendeix a 0 quan $n, k \to \infty$. Com la successió $(q_k)_k$ és de Cauchy i $\mathcal{X}$ és complet, té límit, $p$. Com $\mathcal{F}$ és contínua, es compleix que

$$p = \lim_{k\to\infty} x_k = \lim_{k\to\infty} \mathcal{F}(x_{k-1}) = \mathcal{F}(\lim_{k\to\infty} x_{k-1}) = \mathcal{F}(p).$$

□

El següent lemma ens serà útil.

**Lema 3.6.** *Siguin $\mathcal{X}$, un espai mètric complet, i $\mathcal{F} : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$. Si existeix $k \geq 1$ tal que $\mathcal{F}^k$ és una contracció, llavors $\mathcal{F}$ té un únic punt fix.*

*Demostració.* Sigui $p$, l'únic punt fix de $\mathcal{F}^k$. Llavors

$$\mathcal{F}(p) = \mathcal{F}(\mathcal{F}^k(p)) = \mathcal{F}^{k+1}(p) = \mathcal{F}^k(\mathcal{F}(p))$$

és també punt fix de $\mathcal{F}^k$. Com el punt fix de $\mathcal{F}^k$ és únic, $\mathcal{F}(p) = p$. Si $\mathcal{F}$ tingués un altre punt fix, $q$, també ho seria de $\mathcal{F}^k$ i, per tant, $q = p$. □

### 3.1.3 El teorema de Picard

**Definició 3.7.** *Sigui $f : U \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n : (t,x) \mapsto f(t,x)$, una funció. Direm que $f$ és Lipschitz respecte a $x$ si existeix $L > 0$ tal que $\|f(t,x) - f(t,\tilde{x})\| \leq L\|x - \tilde{x}\|$, per a tot $(t,x), (t,\tilde{x}) \in U$. A qualsevol constant $L$ satisfent aquesta propietat li direm* constant de Lipschitz de $f$.

Observem que si el conjunt $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ satisfà que el segment que uneix $(t,x), (t,\tilde{x}) \in U$ està inclòs a $U$, per tot $(t,x), (t,\tilde{x}) \in U$, i $f : U \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ és de classe $C^1$ en $U$ amb

$$\sup_{(t,x)\in U} \left\| \frac{\partial f}{\partial x}(t,x) \right\| < \infty,$$

llavors $f$ és Lipschitz respecte a $x$ en $U$. En particular, si $f : U \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ és de classe $C^1$ a $U$, $U$ satisfà que el segment que uneix $(t,x), (t,\tilde{x}) \in U$ està inclòs a $U$ i $U$ és compacte, llavors $f$ és Lipschitz respecte a $x$ en $U$.

**Exercici 3.1.** *Proveu les afirmacions anteriors. Recordeu que, si $U$ satisfà que el segment que uneix $(t,x), (t,\tilde{x}) \in U$ està inclòs a $U$, per tot $(t,x), (t,\tilde{x}) \in U$, i $f : U \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ és de classe $C^1$,*

$$f(t,x) - f(t,\tilde{x}) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(t, \tilde{x} + s(x-\tilde{x}))\, ds (x - \tilde{x}).$$

*En efecte, només cal tenir en compte que, per la regla de la cadena,*

$$\frac{d}{ds}[f(t,\tilde{x}+s(x-\tilde{x}))] = \frac{\partial f}{\partial x}(t,\tilde{x}+s(x-\tilde{x}))(x-\tilde{x})$$

*i integrar entre $s=0$ i $s=1$.*

**Teorema 3.8** (Teorema de Picard)**.** *Donats $t_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $a,b>0$, considerem el conjunt compacte $V_{a,b} = I_a(t_0) \times \bar{B}_b(x_0) \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$, on*

$$\begin{aligned} I_a(t_0) &= [t_0-a, t_0+a], \\ \bar{B}_b(x_0) &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x-x_0\| \le b\}. \end{aligned}$$

*Siguin $f : V_{a,b} \to \mathbb{R}^n$ una funció contínua i Lipschitz respecte a $x$ i $M = \max_{(t,x)\in V_{a,b}} \|f(t,x)\|$ (que existeix perquè $V_{a,b}$ és compacte i $f$ és contínua). Llavors el problema de valor inicial*

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= f(t,x), \\ x(t_0) &= x_0, \end{aligned}\right\}$$

*té una única solució $\varphi : I_\alpha(t_0) = [t_0-\alpha, t_0+\alpha] \to \mathbb{R}^n$, on $\alpha = \min\{a, b/M\}$.*

**Comentari 3.9.** *Observeu que l'interval de definició de la solució depèn de la fita de la funció $f$ i de la mida del domini de $f$ però no en depèn de la constant de Lipschitz.*

*Demostració.* Sigui $\mathcal{F}$ l'operador definit a (3.3). Per la Proposició 3.1, trobar una solució $\varphi$ del p.v.i. és equivalent a trobar una funció $\varphi$ tal que $\varphi = \mathcal{F}(\varphi)$, és a dir, un punt fix de l'operador $\mathcal{F}$. Per a veure que $\mathcal{F}$ té un únic punt fix, provarem que $\mathcal{F}$ està ben definit en un espai mètric adient i que existeix $k>1$ tal que $\mathcal{F}^k$ és una contracció. El Lema 3.6 ens donarà l'existència i unicitat del punt fix.

Considerem l'espai metric

$$\bar{\mathcal{B}}_{\alpha,b} = \{\varphi \in C(I_\alpha(t_0),\mathbb{R}^n) \mid \|\varphi - x_0\| \le b\} \subset C(I_\alpha(t_0),\mathbb{R}^n) \tag{3.5}$$

on $\|\varphi\| = \sup_{t\in I_\alpha(t_0)} \|\varphi(t)\|$. Provem que $\mathcal{F} : \bar{\mathcal{B}}_{\alpha,b} \to \bar{\mathcal{B}}_{\alpha,b}$ està ben definit. Sigui $\varphi \in \bar{\mathcal{B}}_{\alpha,b}$. Com $\|\varphi - x_0\| \le b$, fent servir (3.4), per a tot $t \in I_\alpha(t_0)$ es compleix

$$\|\varphi(t) - x_0\| \le \|\varphi - x_0\| \le b \quad \Longrightarrow \quad (t,\varphi(t)) \in I_\alpha(t_0) \times \bar{B}_b(x_0).$$

Com $I_\alpha(t_0) \subset I_a(t_0)$, perquè $\alpha \le a$, això implica que la funció $f(t,\varphi(t))$ està ben definida per a tot $t \in I_\alpha(t_0)$ si $\varphi \in \bar{\mathcal{B}}_{\alpha,b}$. A més, com $\varphi$ és contínua a $I_\alpha(t_0)$, $f(t,\varphi(t))$ també ho és. Llavors,

$$\mathcal{F}(\varphi)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s,\varphi(s))\,ds$$

és contínua a $I_\alpha(t_0)$. Ens falta veure que $\mathcal{F}(\varphi) \in \bar{\mathcal{B}}_{\alpha,b}$. Tenim que, com $\|f(s,x)\| \le M$, si $(s,x) \in I_a(t_0) \times \bar{B}_b(x_0)$, per a tot $t \in I_\alpha(t_0)$

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}(\varphi)(t) - x_0\| &= \left\| \int_{t_0}^t f(s,\varphi(s))\,ds \right\| \\ &\le \left| \int_{t_0}^t \|f(s,\varphi(s))\| ds \right| \le M|t-t_0| \le M\alpha \le b, \end{aligned}$$

el que implica que $\|\mathcal{F}(\varphi)-x_0\| \le b$. Això prova que l'operador $\mathcal{F} : \bar{\mathcal{B}}_{\alpha,b} \to \bar{\mathcal{B}}_{\alpha,b}$ està ben definit.

Veiem que existeix $k \ge 1$ tal que $\mathcal{F}^k$ és una contracció. Sigui $L > 0$ una constant de Lipschitz de $f$. Afirmem primer que, per a tot $k \ge 1$, per a qualsevol parell $\varphi, \tilde{\varphi} \in \bar{\mathcal{B}}_{\alpha,b}(x_0)$, i per a tot $t \in I_\alpha(t_0)$

$$\left\|\mathcal{F}^k(\varphi)(t) - \mathcal{F}^k(\tilde{\varphi})(t)\right\| \le \frac{L^k}{k!}|t-t_0|^k \|\varphi - \tilde{\varphi}\|. \tag{3.6}$$

Suposem que hem provat (3.6). Prenent suprems a $I_\alpha(t_0)$ ens queda

$$\left\|\mathcal{F}^k(\varphi) - \mathcal{F}^k(\tilde{\varphi})\right\| \le \frac{(L\alpha)^k}{k!}\|\varphi - \tilde{\varphi}\|.$$

Com $(L\alpha)^k/k! \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$, existeix $k$ tal que $0 \le (L\alpha)^k/k! < 1$. Llavors, $\mathcal{F}^k$ és una contracció. Pel Lemma 3.6, $\mathcal{F}$ té un únic punt fix, que és l'única solució del p.v.i. considerat.

Només ens falta provar (3.6). Ho farem per inducció. Observem que la desigualtat és trivial per a $k=0$, perquè $\mathcal{F}^0 = \mathrm{Id}$. Suposem (3.6) cert per $k-1$. Llavors, fent servir que $f$ és Lipschitz amb constant de Lipschitz $L$ i la hipòtesi d'inducció,

$$\begin{aligned}
\left\|\mathcal{F}^k(\varphi)(t) - \mathcal{F}^k(\tilde{\varphi})(t)\right\| &= \left\|\int_{t_0}^t \left(f(s,\mathcal{F}^{k-1}(\varphi)(s)) - f(s,\mathcal{F}^{k-1}(\tilde{\varphi})(s))\right) ds\right\| \\
&\le \int_{t_0}^t L\left\|\mathcal{F}^{k-1}(\varphi)(s) - \mathcal{F}^{k-1}(\tilde{\varphi})(s)\right\| ds \\
&\le \int_{t_0}^t L\left\|\mathcal{F}^{k-1}(\varphi)(s) - \mathcal{F}^{k-1}(\tilde{\varphi})(s)\right\| ds \\
&\le \int_{t_0}^t \frac{L^k}{(k-1)!}|s-t_0|^{k-1}\left\|\varphi - \tilde{\varphi}\right\| ds \\
&= \frac{L^k}{k!}|t-t_0|^k\left\|\varphi - \tilde{\varphi}\right\|.
\end{aligned}$$

□

**Corol·lari 3.10.** *Siguin $U \subset \mathbb{R}^n$, un conjunt obert, i $f : U \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ una funció tal que $\partial f/\partial x$ és contínua a $U$. Per a tot punt $(t_0,x_0) \in U$, existeix un entorn tancat $V = I(t_0)\times\bar{B}(x_0) \subset U$ tal que el p.v.i. $\dot{x} = f(t,x)$, $x(t_0) = x_0$ té una única solució $x : I(t_0) \to \bar{B}(x_0)$.*

*Demostració.* Sigui $(t_0,x_0) \in U$. Com $U$ és obert, existeix un entorn compacte de $(t_0,x_0)$ de la forma $I_a(t_0)\times\bar{B}_b(x_0) \subset U$. El Teorema 3.8 assegura que el p.v.i. $\dot{x} = f(t,x)$, $x(t_0) = x_0$ té una única solució $x : I_\alpha(t_0) \to \bar{B}(x_0)$, on $\alpha = \min\{a, b/M\}$ i $M = \max_{(t,x)\in I_a(t_0)\times\bar{B}_b(x_0)}\|f(t,x)\|$. Només cal prendre $I(t_0) = I_\alpha(t_0)$. □

La tècnica del punt fix ens permet obtenir variacions del Teorema de Picard, modificant-ne les hipòtesis. La proposició següent n'és un exemple. Ens serà útil per a tractar sistemes lineals.

**Proposició 3.11.** *Siguin $I = [a, b] \in \mathbb{R}$, un interval compacte, i $f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, una funció contínua i Lipschitz respecte a $x$. Llavors, per a qualssevol $t_0 \in I$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, el problema de valor inicial*

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= f(t, x), \\ x(t_0) &= x_0, \end{aligned}\right\}$$

*té una única solució $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$.*

*Demostració.* Considerem l'espai $C(I, \mathbb{R}^n)$, amb la norma del suprem. Com $f$ és contínua a $I \times \mathbb{R}^n$, si $\varphi \in C(I, \mathbb{R}^n)$, $\mathcal{F}(\varphi) \in C(I, \mathbb{R}^n)$, on $\mathcal{F}(\varphi)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))\, ds$ és l'operador definit a (3.3). En efecte, només cal observar que la funció $f(t, \varphi(t))$ està ben definida i és contínua a $I$ perquè és composició de funcions contínues.

Per acabar la prova, tenint en compte el Teorema 3.5 i el Lemma 3.6, només ens cal veure que, per a algun $k \geq 1$, $\mathcal{F}^k$ és una contracció. Per a fer-ho. observem que, com $f$ és Lipschitz amb constant de Lipschitz $L$, la desigualtat (3.6) també és vàlida en aquest cas. Llavors, amb un raonament anàleg al de la prova del Teorema 3.8, es compleix que, per a tot parell $\varphi, \tilde{\varphi} \in C(I, \mathbb{R}^n)$

$$\left\|\mathcal{F}^k(\varphi) - \mathcal{F}^k(\tilde{\varphi})\right\| \leq \frac{(L \operatorname{llarg}(I))^k}{k!} \|\varphi - \tilde{\varphi}\|,$$

on $\operatorname{llarg}(I) = b - a$ és la llargària de l'interval $I$. Prenent $k$ tal que $(L \operatorname{llarg}(I))^k / k! < 1$, tenim que $\mathcal{F}^k$ és una contracció. Així queda provat el teorema. $\square$

Ara farem servir aquesta darrera proposició per a provar que tot p.v.i. associats a sistemes lineals amb coeficients definits en un interval *obert* $I$ té una única solució *definida a tot* $I$.

**Corol·lari 3.12** (Teorema 2.8)**.** *Siguin $I \subset \mathbb{R}$, un interval obert, $A \in C(I, \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}))$ i $b \in C(I, \mathbb{R}^n)$. Llavors, per a tot $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^n$, el p.v.i. $\dot{x} = A(t)x + b(t)$, $x(t_0) = x_0$ té una única solució $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$.*

*Demostració.* Sigui $f(t, x) = A(t)x + b(t)$. Considerem una norma qualsevol a $\mathbb{R}^n$ i la seva norma matricial associada, $\|\cdot\|$. Sigui $(I_n)_n$ una seqüència d'intervals compactes tals que $t_0 \in I$, $I_n \subset I_{n+1}$, per tot $n \geq 1$, i $\cup_{n\geq 1} I_n = (a, b)$. Sigui $L_n = \max_{t\in I_n} \|A(t)\|$. Per a $(t, x), (t, \tilde{x}) \in I_n \times \mathbb{R}^n$, es compleix que

$$\|f(t, x) - f(t, \tilde{x})\| = \|A(t)(x - \tilde{x})\| \leq \|A(t)\|\|x - \tilde{x}\| \leq L_n\|x - \tilde{x}\|.$$

Per tant, $f$ satisfà les hipòtesis de la Proposició 3.11 a $I_n \times \mathbb{R}^n$. Sigui $\varphi_n : I_n \to \mathbb{R}^n$ l'única solució del p.v.i. a $I_n$ donada per la Proposició 3.11. Es compleix que si $t \in I_k \cap I_\ell$, llavors $\varphi_k(t) = \varphi_\ell(t)$. En efecte, si $k \leq \ell$, com $I_k \subset I_\ell$, $\varphi_k$ i $\varphi_{\ell|I_k}$ són dues solucions del p.v.i. definides a $I_k$. Per la unicitat donada per la Proposició 3.11, han de coincidir. D'aquesta manera, la funció $\varphi : (a, b) \to \mathbb{R}^n$, on $\varphi(t) = \varphi_n(t)$, si $t \in I_n$, és l'única solució del p.v.i. definida a $(a, b)$. $\square$

Amb el mateix argument podeu provar corol·lari de la Proposició 3.11 següent.

**Corol·lari 3.13.** *Sigui $f : (a, b) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, una funció contínua i Lipschitz respecte a $x$. Llavors, per a qualssevol $t_0 \in (a, b)$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, el problema de valor inicial*

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= f(t, x), \\ x(t_0) &= x_0, \end{aligned}\right\}$$

*té una única solució $\varphi : (a, b) \to \mathbb{R}^n$.*

**Exercici 3.2.** *Proveu el Corol·lari 3.13, aplicant el raonament del Corol·lari 3.12.*

**Exemple 3.3.** *Considereu el sistema autònom que descriu el pèndol,*

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\sin x. \end{cases}$$

*Comproveu que satisfà les hipòtesis de la Proposició 3.13 amb constant de Lipschitz $L = 1$. Per tant, qualsevol $(t_0, x_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$, hi ha una única solució del sistema, $(x(t), y(t))$, tal que $(x(t_0), y(t_0)) = (x_0, y_0)$ definida per a tot $t \in \mathbb{R}$.*

**Comentari 3.14.** *Observeu que la hipòtesi de que $f$ sigui Lipschitz a tot $I \times \mathbb{R}^n$ de la Proposició 3.11 és molt restrictiva i imposa, de fet, que el creixement de $\|f\|$ quan $\|x\|$ tendeix a infinit pot ser, com a molt, lineal. Així, si considereu l'e.d.o. $\dot{x} = x^2$, si bé satisfà les hipòtesis del Teorema 3.8 per a qualsevol p.v.i. associat, no és Lipschitz a $\mathbb{R}$: la constant de Lipschitz a un conjunt $U$ de la funció $f(x) = x^2$ només es pot fitar pel $\sup_{x \in U} |f'(x)| = \sup_{x \in U} |2x|$. Si $U$ no està fitada, $f_{|U}$ no té pas perquè ser Lipschitz. Això implica que, si bé tot p.v.i. associat té solució única, aquesta no té pas perquè estar definida a tot $\mathbb{R}$. De fet, això és el que passa, doncs la solució de $\dot{x} = x^2$, $x(0) = x_0$ és*

$$\varphi(t) = \frac{x_0}{1 - x_0 t},$$

*que està definida a $(-\infty, 1/x_0)$, si $x_0 > 0$, a $(1/x_0, \infty)$, si $x_0 < 0$ i només està definida a $\mathbb{R}$ si $x_0 = 0$. Per tant, totes les solucions diferents de $0$ de $\dot{x} = x^2$ arriban a $\infty$ en temps finit.*

### 3.1.4 El teorema de Peano

En la secció anterior hem donat condicions sobre una funció $f(t, x)$ per a que els p.v.i. associats a l'e.d.o. $\dot{x} = f(t, x)$ tinguin solució i aquesta sigui única. Què en podem dir si afeblim aquestes condicions? El següent exemple ens en dona una pista.

**Exemple 3.4.** *Sigui $f(x) = x^{2/3}$. És contínua a $\mathbb{R}$. Considerem el p.v.i.*

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) \\ x(0) &= 0. \end{aligned}\right\}$$

*Observeu que, com*

$$|f(x) - f(0)| = |x^{2/3} - 0| = \frac{1}{|x|^{1/3}} |x - 0|,$$

*$f$ no és Lipschitz respecte a $x$ en cap interval que contingui $x = 0$. És immediat comprovar que, donats $t_0 < 0 < t_1$, la funció*

$$\varphi(t) = \begin{cases} 3^{-3}(t - t_0)^3, & \text{si } t < t_0, \\ 0, & \text{si } t_0 \le t \le t_1, \\ 3^{-3}(t - t_1)^3, & \text{si } t > t_1, \end{cases}$$

*és solució del p.v.i..*

L'exemple anterior ens mostra que si la funció que defineix l'e.d.o. no és Lipschitz, la unicitat no està garantida.

**Teorema 3.15** (Teorema de Peano)**.** *Donats* $t_0 \in \mathbb{R}$*,* $x_0 \in \mathbb{R}^n$*,* $a, b > 0$*, considerem el conjunt compacte* $V_{a,b} = I_a(t_0) \times \bar{B}_b(x_0) \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$*, on*

$$\begin{aligned} I_a(t_0) &= [t_0 - a, t_0 + a], \\ \bar{B}_b(x_0) &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| \le b\}. \end{aligned}$$

*Sigui* $f : V_{a,b} \to \mathbb{R}^n$ *una funció contínua. Sigui* $M$ *tal que* $\max_{(t,x)\in V_{a,b}} \|f(t,x)\| < M$*. Llavors el problema de valor inicial*

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= f(t,x), \\ x(t_0) &= x_0, \end{aligned}\right\}$$

*té al menys una solució* $\varphi : I_\alpha(t_0) = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \to \mathbb{R}^n$*, on* $\alpha = \min\{a, b/M\}$*.*

*Demostració.* Com en el cas del Teorema de Picard, la prova consisteix en veure que l'equació de punt fix $\varphi = \mathcal{F}(\varphi)$, on $\mathcal{F}$ és l'operador definit a (3.3), té almenys una solució. En aquest cas, no hi ha esperança de provar que l'operador és contractiu. Si ho fos, el punt fix seria únic, però l'Exemple 3.4 mostra que, si $f$ és només contínua, els p.v.i. associats poden tenir més d'una solució.

Com $f$ és contínua i $V_{a,b}$ és compacte, existeix una successió $(f_k)_k$ de polinomis que convergeix uniformement cap a $f$ a $V_{a,b}$. Com $(f_k)_k$ és uniformement convergent, existeix $k_0$ tal que si $k \ge k_0$, $\max_{(t,x)\in V_{a,b}} \|f_k(t,x)\| < M$. Com $f_k$ és un polinomi, és de classe $C^\infty$ i, en particular, satisfà les hipòtesis del Teorema 3.8. Per tant, el p.v.i. $\dot{x} = f_k(t,x)$, $x(t_0) = x_0$ té una única solució $\varphi_k : I_\alpha(t_0) \to \bar{B}_b(x_0)$. Afirmem que la successió $(\varphi_k)_k$ és una successió equiacotada i equicontínua. En efecte, com

$$\varphi_k(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f_k(s, \varphi_k(s))\, ds,$$

tenim que, primer,

$$\|\varphi_k(t)\| \le \|x_0\| + \left\| \int_{t_0}^{t} f_k(s, \varphi_k(s))\, ds \right\| \le \|x_0\| + M|t - t_0| \le \|x_0\| + Ma$$

i, segon,

$$\|\varphi_k(t) - \varphi_k(\tilde{t})\| = \left\| \int_{\tilde{t}}^{t} f_k(s, \varphi_k(s))\, ds \right\| \le M|t - \tilde{t}|.$$

Pel Teorema d'Ascoli-Arzelà, $(\varphi_k)_k$ té una parcial uniformement convergent, $(\varphi_{k_i})_i$, amb límit $\varphi$. Comprovem que $\varphi$ és solució del p.v.i. $\dot{x} = f(t,x)$, $x(t_0) = x_0$. En efecte, tenim que, com $f_{k_i}$ convergeix uniformement cap a $f$,

$$\varphi(t) = \lim_{i\to\infty} \varphi_{k_i}(t) = \lim_{i\to\infty} x_0 + \int_{t_0}^{t} f_{k_i}(s, \varphi_{k_i}(s))\, ds = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))\, ds.$$

$\square$

**Corol·lari 3.16.** *Siguin* $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$*, un conjunt obert, i* $f : U \to \mathbb{R}^n$*, una funció contínua. Siguin* $U_1 \subset U_2 \subset U$ *tals que* $d(U_1, U \setminus U_2) > 0$ *i* $\sup_{(t,x)\in U_2} \|f(t,x)\| < M < \infty$*. Llavors existeix* $\alpha > 0$ *tal que per a qualsevol* $(t_0, x_0) \in U_1$*, el p.v.i.* $\dot{x} = f(t,x)$*,* $x(t_0) = x_0$ *té una solució* $\varphi : I_\alpha(t_0) \to \mathbb{R}^n$ *tal que* $\mathrm{graf}(f) \subset U_2$*.*

*Demostració.* Sigui $0 < a < d(U_1, U \setminus U_2)$. Donat $(t_0, x_0) \in U_1$, considerem $V_{a,a} = I_a(t_0) \times \bar{B}_a(x_0) \subset U_2$ i $\alpha = \min\{a, a/M\}$ al Teorema 3.15. Sigui $\varphi : I_\alpha(t_0) \to \mathbb{R}^n$, la solució que el teorema proporciona. $\square$

### 3.1.5 Solucions maximals

Els Teoremes de Picard i Peano ens donen l'existència de solucions de p.v.i. d'e.d.o.'s de la forma $\dot{x} = f(t, x)$ sota certes condicions sobre $f$. Ara bé, l'interval de definició d'aquestes solucions és petit. Només és gran si es compleixen condicions globals força estrictes, com les de la Proposició 3.11 o el Corol·lari 3.12. Per altra banda, hem de tenir en compte l'Exemple

# Capítol 4

# Apèndixs

## 4.1 Demostració alternativa del Teorema de Picard

Aquí donem una altra demostració del Teorema 3.8, deguda a Inma Baldomà. Aquesta demostració es basa en el fet següent. Considerem $\mathcal{F} : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, una aplicació definida en un espai mètric amb distància $d$. Suposem que $\mathcal{F}$ és Lipschitz respecte a aquesta distància, és a dir, que existeix una constant $L > 0$ tal que $d(\mathcal{F}(x), \mathcal{F}(y)) \leq Ld(x, y,)$ per a tot $x, y \in \mathcal{X}$. Sigui $\tilde{d}$ és una distància equivalent a $d$, és a dir $\tilde{d}$ és una distància a $\mathcal{X}$ tal que existeixen constants $c_1, c_2 > 0$ satisfent $c_1\tilde{d}(x, y) \leq d(x, y) \leq c_2\tilde{d}(x, y)$, per a tot $x, y \in \mathcal{X}$. Llavors $\mathcal{F}$ també és Lipschitz respecte a $\tilde{d}$. En efecte,

$$\tilde{d}(\mathcal{F}(x), \mathcal{F}(y)) \leq c_1^{-1} d(\mathcal{F}(x), \mathcal{F}(y)) \leq c_1^{-1} Ld(x, y) \leq c_2 c_1^{-1} Ld(x, y).$$

Ara bé, la constant de Lipschitz de $\mathcal{F}$ ha canviat: passa de ser $L$, per a la distància $d$, a ser $c_2 c_1^{-1} L$, per a la distància $\tilde{d}$. Per tant, $\mathcal{F}$ pot ser una contracció per a la distància $d$ i no ser-ho per a $\tilde{d}$. Però si ho és en una, té un únic punt fix. Llavors, per a provar el Teorema de Picard el que farem serà considerar una distància equivalent a la induïda per la norma del suprem en l'espai de les funcions contínues per a la que l'operador $\mathcal{F}$ definit a (3.3) i actuant en l'espai metric $\bar{\mathcal{B}}_{\alpha,b}(x_0)$ a (3.5) sigui una contracció.

Sigui $L$ la constant de Lipschitz de $f$ en $V_{a,b}$ i $\rho > L$. Definim, donada $\varphi \in C(I_\alpha(t_0), \mathbb{R}^n)$, on $\alpha = \min\{a, b/M\}$,

$$\|\varphi\|_\rho = \sup_{t \in I_\alpha(t_0)} e^{-\rho|t-t_0|} \|\varphi(t)\|. \tag{4.1}$$

És un exercici comprovar que, com $e^{-\rho|t-t_0|} > 0$, per a tot $t \in I_\alpha(t_0)$, $\|\cdot\|_\rho$ és una norma a $C(I_\alpha(t_0), \mathbb{R}^n)$. Observem que, com, per a tot $t \in I_\alpha(t_0)$

$$e^{-\rho|t-t_0|}\|\varphi(t)\| \leq \|\varphi(t)\| \leq e^{\rho|\alpha|}\|e^{-\rho|t-t_0|}\varphi(t)\|,$$

es compleix que $\|\varphi\|_\rho \leq \|\varphi\| \leq e^{\rho|\alpha|}\|\varphi\|_\rho$, on $\|\cdot\|$ denota la norma del suprem a $C(I_\alpha(t_0), \mathbb{R}^n)$. Per tant, ambdues normes són equivalents.

L'avantatge que suposa fer servir el pes $e^{-\rho|t|}$ a la definició de la norma $\rho$ és la següent. Si $\varphi \in C(I_\alpha(t_0), \mathbb{R}^n)$, llavors

$$\begin{aligned} \|\varphi(t)\| &\leq e^{\rho|t-t_0|}\|e^{-\rho|t-t_0|}\varphi(t)\| \\ &\leq e^{\rho|t-t_0|} \sup_{s\in I_\alpha(t_0)} \|e^{-\rho|s-t_0|}\varphi(s)\| = e^{\rho|t-t_0|}\|\varphi\|_\rho. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Considerem l'espai metric $\bar{B}_{\alpha,b}(x_0)$, introduït a (3.5), amb la distància $\tilde{d}(\varphi, \tilde{\varphi}) = \|\varphi - \tilde{\varphi}\|_\rho$. Ja hem vist que $\mathcal{F}$ envia funcions de $\bar{B}_{\alpha,b}(x_0)$ a $\bar{B}_{\alpha,b}(x_0)$. Veiem que $\mathcal{F}$ és una contracció fent servir la distància $\tilde{d}$. En efecte, si $\varphi, \tilde{\varphi} \in \bar{B}_{\alpha,b}(x_0)$, fent servir que $f$ és Lipschitz i la propietat (4.2) de la norma $\rho$, tenim que

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}(\varphi) - \mathcal{F}(\tilde{\varphi})\|_\rho &= \sup_{t\in I_\alpha(t_0)} \|e^{-\rho|t|}(\mathcal{F}(\varphi) - \mathcal{F}(\tilde{\varphi}))\| \\ &= \sup_{t\in I_\alpha(t_0)} \left\| e^{-\rho|t-t_0|} \int_{t_0}^t (f(s,\varphi(s)) - f(s,\tilde{\varphi}(s)))\, ds \right\| \\ &\leq \sup_{t\in I_\alpha(t_0)} \left| e^{-\rho|t-t_0|} \int_{t_0}^t \|f(s,\varphi(s)) - f(s,\tilde{\varphi}(s))\|\ ds \right| \\ &\leq \sup_{t\in I_\alpha(t_0)} \left| e^{-\rho|t-t_0|} \int_{t_0}^t L\, \|\varphi(s) - \tilde{\varphi}(s)\|\ ds \right| \\ &\leq \sup_{t\in I_\alpha(t_0)} L \left| e^{-\rho|t-t_0|} \int_{t_0}^t e^{\rho|s-t_0|}\, \|\varphi - \tilde{\varphi}\|_\rho\ ds \right| \\ &= L\|\varphi - \tilde{\varphi}\|_\rho \sup_{t\in I_\alpha(t_0)} \left| \int_{t_0}^t e^{-\rho|t-t_0|} e^{\rho|s-t_0|}\, ds \right|. \end{aligned}$$

És immediat comprovar que

$$\left| \int_{t_0}^t e^{-\rho|t-t_0|} e^{\rho|s-t_0|}\, ds \right| = \frac{1}{\rho}(1 - e^{-\rho|t-t_0|}) \leq \frac{1}{\rho},$$

el que implica que

$$\|\mathcal{F}(\varphi) - \mathcal{F}(\tilde{\varphi})\|_\rho \leq \frac{L}{\rho}\|\varphi - \tilde{\varphi}\|_\rho.$$

Com $\rho > L$, $\mathcal{F}$ és una contracció en aquesta norma. Té, per tant, un únic punt fix.