Tercer problema per lliurar d'anàlisi real. El teorema $\pi - \lambda$ de Dynkin.

En aquest entregable demostrarem un teorema important de la branca de teoria de la mesura i en veurem alguna aplicació. Començarem amb les definicions bàsiques.
Sigui X un conjunt. Siguin P, L famílies de subconjunts de X.

<u>Definició</u> 1 (π–Sistema)**.** Direm que la família de conjunts P és un π-sistema si per tota parella de conjunts $A, B \in P$, es compleix que $A \cap B \in P$.

<u>Definició</u> 2 (λ–sistema)**.** Direm que la família L és un λ-sistema si compleix les tres propietats següents:

(λ1) $\emptyset \in L$

(λ2) Si $A \in L$ aleshores $\overline{A} \in L$

(λ3) L és tancat per unions numerables i <u>disjuntes</u>: si $\{A_i\}_{i \geq 1} \subseteq L$, i $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$, aleshores $\cup_{i \geq 1} A_i \in L$.

El primer objectiu d'aquest entregable és demostrar el següent teorema, conegut com teorema $\pi - \lambda$ de Dynkin:

<u>Teorema</u> 1 (π–λ de Dynkin)**.** *Sigui P, un π-sistema. Sigui L un λ–sistema tal que $P \subseteq L$. Aleshores $\sigma(P) \subseteq L$.*

El que ens diu és la σ–àlgebra generada per (recordeu que la σ-àlgebra generada per un conjunt és la σ-àlgebra més petita que conté el conjunt en qüestió) un π-sistema contingut en un λ-sistema no és més gran que el λ-sistema L.

a) Demostreu que en un λ-sistema L, si $A, B \in L$, $B \subseteq A$, aleshores la seva diferència $A - B = \{x \in A : x \notin B\} \in L$.

b) Demostreu que si $\mathcal{A}$ és, alhora, un π–sistema i un λ–sistema, aleshores és una σ-àlgebra. (*Indicació:* falta veure que la unió numerable, no necessariament disjunta, és de $\mathcal{A}$. Useu adequadament la propietat de π-sistema en aquest punt).

c) Siguin L_1 i L_2 dos λ–sistemes. Demostreu que $L_1 \cap L_2$ també ho és. Generalitzeu-ho per una intersecció arbitraria de λ-sistemes.

Abans de passar a la demostració propiament del teorema $\pi - \lambda$ ens cal un pas més. Donat una família de conjunts P definits sobre X, definim $l(P)$ com l'intersecció de tots els λ-sistemes que contenen P.
Ara anem al pas més complicat de tot plegat.Ara demostrarem el següent lema:

<u>Lema</u> 1. *Sigui P un π–sistema definit sobre X. Aleshores $l(P)$ és una σ–àlgebra.*

Per a demostrar-lo, vegueu els següents punts:

d) Donat $A \in l(P)$, el conjunt $\{B \subset X : A \cap B \in l(P)\}$ és un λ-sistema.

e) Supossem que $A \in P$ i $B \in l(P)$. Demostreu que $A \cap B \in l(P)$.

f) Si $A, B \in l(P)$, aleshores $A \cap B \in l(P)$. Conclogueu el lema.

Amb això ja tenim tots els ingredients, per tant:

g) Demostreu el teorema $\pi - \lambda$ de Dynkin.

Veguem per acabar la següent aplicació que és rellevant en el context de la mesura de Lebesgue:

h) Considerem un espai mesurable $(X, \mathcal{A})$. Sigui P un π-sistema. Demostreu que si tenim dues mesures μ_1 i μ_2 que coincideixen en P i amb $\mu_1(X) = \mu_2(X) < +\infty$, aleshores també coincideixen en $\sigma(P)$ (*Indicació:* demostreu que $L = \{A \in \mathcal{A} : \mu_1(A) = \mu_2(A)\}$ és un λ-sistema).

i) Què ens diu l'anterior en el cas de la mesura de Lebesgue? (*Indicació:* considereu els intervals $(n, n+1)$)