1. Sigui $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una aplicació lineal definida per $f(x, y, z) = (2x + y, y - z)$ i siguin $\mathcal{B}_1 = \{u_1 = (1, 1, 0), u_2 = (0, 1, 0), u_3 = (0, 1, -1)\}$ i $\mathcal{V}_1 = \{v_1 = (1, 0), v_2 = (1, 1)\}$ bases de $\mathbb{R}^3$ i $\mathbb{R}^2$ respectivament.

(a) Sigui $\mathcal{B}_2^* = \{e_1^*, e_2^*, e_3^*\}$ la base dual de la base canònica de $\mathbb{R}^3$. Si $\mathcal{B}_1^* = \{u_1^*, u_2^*, u_3^*\}$ és la base dual de $\mathcal{B}_1$, és certa la igualtat $u_1^* = e_1^* + e_2^*$?

(b) Trobeu les components de $w = 2e_1^* + e_2^* - e_3^*$ en base $\mathcal{B}_1^*$.

(c) Determineu la matriu $M_{\mathcal{V}_1^*, \mathcal{B}_1^*}(f^*)$ de l'aplicació dual de f en les bases $\mathcal{V}_1^*$ i $\mathcal{B}_1^*$, duals de $\mathcal{V}_1$ i $\mathcal{B}_1$, respectivament.

2. Siguin E i F $\mathbf{k}$-espais vectorials de dimensió finita. Doneu un isomorfisme *canònic* (és a dir, que és independent d'eleccions de bases) entre $\mathcal{L}_2(E, F; \mathbf{k})$ i $\mathcal{L}(E; F^*)$. (Nota: recordeu que per espais vectorials E, F, denotem per $\mathcal{L}_2(E, F; \mathbf{k})$ el conjunt d'aplicacions bilineals de $E \times F$ en $\mathbf{k}$).

3. Sigui E un espai vectorial sobre un cos $\mathbf{k}$. Sigui $\varphi : E \times E^* \to \mathbf{k}$ definida per $\varphi(x, \omega) = \omega(x)$.

(1) Proveu que φ és un tensor mixte 1-covariant i 1-contravariant.

(2) Sigui F un subespai vectorial de E i G un subespai vectorial de E^*. Proveu que $F^\perp = \{\omega \in E^* \mid \varphi(x, \omega) = 0 \text{ per a tot } x \text{ de } F\}$ i $G^\perp = \{x \in E \mid \varphi(x, \omega) = 0 \text{ per a tot } \omega \text{ de } G\}$ són subespais vectorials de E^* i E, respectivament, i que $\dim F + \dim F^\perp = \dim E$ i $\dim G + \dim G^\perp = \dim E$.

(3) Proveu que $F^{\perp\perp} = F$ i que $G^{\perp\perp} = G$.

(4) $F_1 \subseteq F_2 \Longleftrightarrow F_1^\perp \supseteq F_2^\perp$ i $G_1 \subseteq G_2 \Leftrightarrow G_1^\perp \supseteq G_2^\perp$.

(5) $(F_1 + F_2)^\perp = F_1^\perp \cap F_2^\perp$ i $(G_1 + G_2)^\perp = G_1^\perp \cap G_2^\perp$.

(6) $(F_1 \cap F_2)^\perp = F_1^\perp + F_2^\perp$ i $(G_1 \cap G_2)^\perp = G_1^\perp + G_2^\perp$.

(7) Hi ha bijecció $\textsc{Sev}(E) \leftrightarrow \textsc{Sev}(E^*)$, definida per $F \to F^\perp$ i $G \to G^\perp$.

4. Si $E = \mathbb{R}^3$, proveu que $f : E \times E \to \mathbb{R}$, definida per $f(x, y) = 2x_1y_3 - 3x_2y_3 + x_2y_1 - x_3y_2$, és un tensor 2-covariant. Expresseu-lo en la base $\{e_i^* \otimes e_j^*\}_{1 \le i,j \le 3}$, on $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ indica la base canònica d'E i $\mathcal{B}^* = \{e_1^*, e_2^*, e_3^*\}$ la seva base dual. Trobeu la matriu de f en la base $\mathcal{B}$.

5. Sigui $\mathcal{B} = \{e_1, e_2\}$ una base de E. Proveu que el tensor $e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1 \in T^2(E)$ no es pot escriure com $x \otimes y$ amb x, $y \in E$.

6. Sigui $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$ una base de l'espai vectorial E. Sigui $\Phi : E \to T^2(E)$, definida per $\Phi(x) = u_1 \otimes x$. Proveu que Φ és una aplicació lineal injectiva i trobeu la matriu en bases naturals.

7. Sigui $\mathcal{B} = \{e_1, e_2\}$ la base de canònica de $\mathbb{R}^2$ i $\mathcal{B}^* = \{e_1^*, e_2^*\}$ la seva base dual. Considereu el 3-tensor covariant $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definit per:

$$\varphi = e_1^* \otimes e_1^* \otimes e_1^* + e_1^* \otimes e_1^* \otimes e_2^* - e_1^* \otimes e_2^* \otimes e_1^* - e_2^* \otimes e_1^* \otimes e_1^* + e_2^* \otimes e_2^* \otimes e_1^* + e_2^* \otimes e_2^* \otimes e_2^*.$$

Trobeu $\varphi((x_1, x_2), (y_1, y_2), (z_1, z_2))$. És φ un tensor simètric?

8. Canvi de base. Siguin $\mathcal{B}_1 = \{u_1, \dots, u_n\}$ i $\mathcal{B}_2 = \{v_1, \dots, v_n\}$ bases de l'espai vectorial E amb $v_j = \sum_i s_j^i u_i$. Sigui $S = M_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1} = (s_j^i)$, la matriu dels vectors de $\mathcal{B}_2$ en funció dels de $\mathcal{B}_1$, entenent que el super-índex denota la fila i el sub-índex, la columna. Sigui $T = (S^\top)^{-1}$. Denotem $T = (t_j^i)$.

(a) Proveu que si $\mathcal{B}_1^* = \{u_1^*, \dots, u_n^*\}$ i $\mathcal{B}_2^* = \{v_1^*, \dots, v_n^*\}$ són les bases duals respectives i $f \in T_2(E)$ és tal que

$$f = \sum_{i,j} \lambda_{ij}\, u_i^* \otimes u_j^* , \qquad f = \sum_{i,j} \mu_{ij}\, v_i^* \otimes v_j^* , \text{ aleshores } \mu_{ij} = \sum_{k,l} s_i^k s_j^l \lambda_{kl} .$$

(b) Trobeu una fórmula anàloga per a un tensor contravariant $\varphi \in T^2(E)$.

(c) Si $F \in T_1^1(E)$ és

$$F = \sum_{i,j} \lambda_{ij}\, u_i^* \otimes u_j = \sum_{i,j} \mu_{ij}\, v_i^* \otimes v_j , \text{ proveu que } \mu_{ij} = \sum_{k,l} s_i^k t_j^l \lambda_{kl}.$$

(d) Comproveu que si $F \in T_2(E)$, aleshores $\overline{A} = S^t A S$, i que si $G \in T_1^1(E)$, aleshores $\overline{A} = S^t A (S^t)^{-1}$.

9. Sigui $\mathcal{B} = \{e_1, e_2\}$ una base de l'espai vectorial E i siguin $u_1 = 2e_1 + e_2$, $u_2 = -e_1 + 3e_2$. Trobeu les components del tensor $t = -e_1^* \otimes e_1^* + 2e_2^* \otimes e_1^* + e_2^* \otimes e_2^* \in T_2(E)$ en la base $\{u_i^* \otimes u_j^*\}_{1 \le i,j \le 2}$.

10. Considerem la forma bilineal $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida per

$$\varphi(x, y) = \varphi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1 y_1 + x_2 y_2 - x_1 y_2 + 2x_2 y_1.$$

(a) Trobeu $M_{\mathcal{B}_1}(\varphi)$, la matriu de φ en la base canònica $\mathcal{B}_1 = \{e_1, e_2\}$.

(b) Trobeu $M_{\mathcal{B}_2}(\varphi)$, la matriu de φ en la base $\mathcal{B}_2 = \{u_1, u_2\}$, on $u_1 = (1, 1)$ i $u_2 = (1, 2)$.

(c) Existeix alguna base $\mathcal{B}_3$ de $\mathbb{R}^2$ tal que $M_{\mathcal{B}_3}(\varphi)$ sigui simètrica?

(d) Expresseu el tensor $\varphi \in T_2(\mathbb{R}^2)$ en base $\{e_i^* \otimes e_j^*\}_{1 \le i,j \le 2}$ i en base $\{u_i^* \otimes u_j^*\}_{1 \le i,j \le 2}$.

11. Proveu que si $\{e_1, e_2, e_3\}$ és una base de l'espai vectorial E, aleshores el tensor

$$\varphi = e_1^* \otimes e_1^* + 2e_1^* \otimes e_2^* - e_1^* \otimes e_3^* + 2e_2^* \otimes e_1^* + 3e_2^* \otimes e_3^* + 3e_3^* \otimes e_2^* - e_3^* \otimes e_1^* \in T_2(E)$$

és simètric i el tensor $\eta = e_1^* \otimes e_2^* + e_1^* \otimes e_3^* - e_2^* \otimes e_1^* - e_3^* \otimes e_1^*$ és antisimètric.

12. (a) Proveu que un tensor 2-covariant és simètric (resp. antisimètric) si i només si la seva matriu és simètrica (resp. antisimètrica).

(b) Sigui A la matriu d'un tensor 2-covariant ϕ en una base B. Demostreu que les matrius de $S(\phi)$ i $A(\phi)$ en la base $\mathcal{B}$ són $\frac{1}{2}(A + A^\top)$ i $\frac{1}{2}(A - A^\top)$, respectivament.

13. Contracció tensorial: sigui E un espai vectorial de dimensió n, amb base $\mathcal{B}_1 = \{e_1, \dots, e_n\}$. Considerem un tensor $T \in T_p^q(E)$ que s'escriu en la base B com

$$\sum_{1 \le i_r, j_s \le n} \alpha_{i_1,\dots,i_p;j_1,\dots,j_q} e_{i_1}^* \otimes \cdots \otimes e_{i_p}^* \otimes e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_q}.$$

La *contracció tensorial* c_1^1 de T es defineix com

$$\widetilde{T} = \sum_{1 \le i_r, j_s \le n} \alpha_{i_1,\dots,i_p;j_1,\dots,j_q} e_{i_1}^*(e_{j_1}) e_{i_2}^* \otimes \cdots \otimes e_{i_p}^* \otimes e_{j_2} \otimes \cdots \otimes e_{j_q}.$$

(a) Demostreu que $\widetilde{T} \in T^{q-1}_{p-1}(E)$. És cert que si $T_1, T_2 \in T^1_2(E)$ aleshores $\widetilde{T_1 + T_2} = \widetilde{T_1} + \widetilde{T_2}$?

(b) Siguin $v \in E$ i $f \in E^*$. Proveu que $\widetilde{f \otimes v} = f(v)$.

(c) Sigui $T = \sum_{i,j} \alpha_{ij} e_i^* \otimes e_j$. Proveu que $\widetilde{T}$ és l'escalar $\sum_{1 \leq i \leq n} \alpha_{ii}$.

(d) Sigui $T = \sum_{i,j,k,l} \alpha_{ijkl} e_i^* \otimes e_j^* \otimes e_k \otimes e_l$. Calculeu $\widetilde{\widetilde{T}}$.

(e) Sigui $E = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{B}_2 = \{(1,1), (-1,1)\}$. Calculeu la contracció, en la base $\mathcal{B}_2$, del tensor

$$T = 2e_1 \otimes e_2 \otimes e_1^* - e_2 \otimes e_2 \otimes e_1^* + 3e_2 \otimes e_1 \otimes e_1^*.$$

14 . Sigui $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ base d'un espai vectorial E. Calculeu el simetritzat i l'antisimetritzat dels tensors següents:

(a) $e_1 \otimes e_3 + 2e_2 \otimes e_4 - e_3 \otimes e_4$.

(b) $2e_1 \otimes e_1 \otimes e_2 - e_1 \otimes e_1 \otimes e_3 - 2e_1 \otimes e_4 \otimes e_2 + e_1 \otimes e_4 \otimes e_3$.

15 . Siguin E un espai vectorial, $S_p(E)$ el conjunt dels p-tensors covariants simètrics i $A_p(E)$ el conjunt dels p-tensors covariants antisimètrics.

(a) Proveu que $A_p(E) \cap S_p(E) = 0$, per a tot $p \geq 2$.

(b) Proveu que $T_2(E) = A_2(E) \oplus S_2(E)$.

(c) És cert $T_p(E) = A_p(E) \oplus S_p(E)$, per a $p > 2$?

16 . Tensors simètrics: Sigui E un espai vectorial i $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ una base de E.

(a) Proveu que $\{S(e_{i_1}^* \otimes \cdots \otimes e_{i_p}^*)\}_{1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_p \leq n}$ és una base de $S_p(E)$ i deduïu que $S_p(E)$ té dimensió $\binom{n+p-1}{p}$.

(b) Sigui $\mathbf{k}[t_1, \ldots, t_n]$ l'anell de polinomis de n-variables i denotem per $\mathbf{k}[t_1, \ldots, t_n]^{(p)}$ l'espai vectorial dels polinomis homogenis de grau p. Proveu que l'aplicació lineal φ definida sobre els elements de la base anterior per

$$\begin{array}{rcl} \varphi : S_p(E) & \longrightarrow & \mathbf{k}[t_1, \ldots, t_n]^{(p)} \\ S(e_{i_1}^* \otimes \cdots \otimes e_{i_p}^*) & \longmapsto & t_{i_1} \cdots t_{i_p} \end{array}$$

és un isomorfisme d'espais vectorials.

(c) Definim el producte simètric de dos tensors simètrics $f \in S_p(E), g \in S_q(E)$ per

$$f \odot g = \frac{(p+q)!}{p!q!} S(f \otimes g),$$

on S és el morfisme de simetrització. Proveu que el producte simètric $\odot$ satisfà les propietats:

(a) $f \odot (g + h) = f \odot g + f \odot h$, $(\lambda f) \odot g = \lambda(f \odot g) = f \odot (\lambda g)$.

(b) $f \odot (g \odot h) = (f \odot g) \odot h$.

(c) $f \odot g = g \odot f$.

(d) Deduïu de l'apartat anterior que $\varphi(f \odot g) = \varphi(f)\varphi(g)$. Proveu que φ defineix un isomorfisme d'anells $S(E) = \oplus_p S_p(E) \longrightarrow \mathbf{k}[t_1, \ldots, t_n]$.

Observació: l'isomorfisme φ no és canònic, depèn de la base de E escollida.

17. Considereu els tensors de $T_2(\mathbb{R}^3)$ següents:

$$f_1(x,y) = 2x_1y_3 - 3x_2y_3 + x_2y_1 - x_3y_2\,,$$
$$f_2(x,y) = 5x_2y_2 - x_1y_3 + 4x_3y_2 + 2x_3y_3\,.$$

Antisimetritzeu-los i feu el producte exterior dels seus antisimetritzats.

18. Sigui $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canònica de $E = \mathbb{R}^3$. Siguin $f, g, h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ les aplicacions lineals donades per $f(x,y,z) = 3x - y$, $g(x,y,z) = x + y + z$ i $h(x,y,z) = 2z$.

(a) Escriviu f, g i h en la base $\mathcal{B}^* = \{e_1^*, e_2^*, e_3^*\}$ de $T_1(\mathbb{R}^3) = E^*$.

(b) Calculeu $f \wedge g$, $f \wedge h$, $g \wedge h$ i $f \wedge g \wedge h$.

(c) Donats els vectors $u = (1, -1, 2)$, $v = (0, 3, -1)$ i $w = (-1, 0, 1)$, calculeu $(f \wedge g)(u, v)$ i $(f \wedge g \wedge h)(u, v, w)$.

19. Siguin E un $\mathbb{R}$-espai vectorial de dimensió finita i $u_1, \ldots, u_r \in E$ vectors linealment independents.

(a) Sigui $v \in E$. Proveu que $v \in \langle u_1, \ldots, u_r\rangle$ si i només si $u_1 \wedge \cdots \wedge u_r \wedge v = 0$.

(b) Siguin $F = \langle u_1, \ldots, u_r\rangle \subseteq E$ i $\mathcal{B}_2 = \{v_1, \ldots, v_r\}$ una altra base de F. Proveu que, si $S = M_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1}$ és la matriu del canvi de la base $\mathcal{B}_2 = \{v_1, \ldots, v_r\}$ a la base $\mathcal{B}_1 = \{u_1, \ldots, u_r\}$, aleshores

$$v_1 \wedge \ldots \wedge v_r = \det(S) \cdot u_1 \wedge \ldots \wedge u_r.$$

(c) Siguin $w_1, \ldots, w_r \in E$. Proveu que $\langle w_1, \ldots, w_r\rangle = \langle u_1, \ldots, u_r\rangle \Leftrightarrow \langle w_1 \wedge \ldots \wedge w_r\rangle = \langle u_1 \wedge \ldots \wedge u_r\rangle$.

20. Proveu que $\Phi : A^2(\mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}^3$, definit per $\Phi(u\wedge v) = u\wedge v = (u_2v_3-u_3v_2, u_3v_1-u_1v_3, u_1v_2-u_2v_1)$ (el segon $\wedge$, el producte vectorial de dos vectors de $\mathbb{R}^3$), defineix un isomorfisme.

21. Sigui E un $\mathbb{R}$-espai vectorial de dimensió finita n. Un tensor $f \in A^p(E)$ es diu *descomponible* quan existeixen vectors $u_1, \ldots, u_p \in E$ tals que $f = u_1 \wedge \cdots \wedge u_p$. Diem que un subespai de dimensió 1 de $A^p(E)$ és *pur* si està generat per un tensor descomponible.

(a) Sigui $F \subset E$ un subespai i $u_1, \ldots, u_p$ una base de F. Proveu que la recta pura generada per $u_1 \wedge \cdots \wedge u_p$ és independent de la base escollida.

(b) Recíprocament, si $f = u_1 \wedge \cdots \wedge u_p$ és un vector descomponible, proveu que le nucli de l'aplicació lineal

$$\begin{array}{rcl} e_f : E & \longrightarrow & A^{p+1}(E) \\ v & \longmapsto & v \wedge f \end{array}$$

és un subespai de E de dimensió p.

(c) Deduïu dels apartats anteriors que hi ha una bijecció

$$\{\text{subespais de } E \text{ de dimensió } p\} \longleftrightarrow \{\text{rectes pures de} A^p(E)\}.$$

(d) Proveu que si $f \in A^p(E), g \in A^q(E)$ són descomponibles i F_f, F_g són els subespais de E que els correspon, se satisfà:

(d_1) $F_f \cap F_g = 0 \Leftrightarrow f \wedge g \neq 0$ i, en aquest cas, $F_f + F_g = F_{f\wedge g}$.

(d_2) $F_f \subset F_g \Leftrightarrow \exists h \in A^{q-p}(E), f \wedge h = g$.

(e) Proveu que orientar un subespai de dimensió p és equivalent a orientar la recta pura que li correspon.

22. (a) Proveu que, si E té dimensió n, tot tensor de $A^{n-1}(E)$ és descomponible.

(b) Sigui $p > 1$. Proveu que tots els tensors de $A^p(E)$ són descomponibles si, i només si, $p \geq n-1$.

23. (a) Sigui $f \in A^2(E)$. Proveu que f és descomponible $\iff f \wedge f = 0 \in A^4(E)$.

(b) Supossant que treballem en $A^2(E)$, doneu un exemple de tensor indescomponible i un exemple de tensor descomponible en què la descomposició no sigui única.

24. Sigui $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ una base de l'espai vectorial E. Digueu quins dels tensors següents són descomponibles i, quan ho siguin, doneu-ne una descomposició:

(a) $e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4$;

(b) $e_1 \wedge e_2 + e_2 \wedge e_3$;

(c) $e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 + e_1 \wedge e_2 \wedge e_4 - 2e_1 \wedge e_3 \wedge e_4 + 3e_2 \wedge e_3 \wedge e_4$;

(d) $(2e_1 \wedge e_4 + 3e_2 \wedge e_3) \wedge (e_1 \wedge e_3 - e_1 \wedge e_4 - 2e_2 \wedge e_3 + e_2 \wedge e_4)$.

25. Sigui E un espai vectorial. Donats $v \in E$ i $\omega \in A_p(E)$ $(p \geq 1)$ es defineix el *producte interior* $i_v\omega \in A_{p-1}(E)$ per la fórmula

$$(i_v\omega)(v_2, \ldots, v_p) := \omega(v, v_2, \ldots, v_p)\,.$$

Si $p = 0$ convenim que $i_v\omega = 0$.

(a) Si $u \in E$ és un altre vector, proveu que $i_v(i_u\omega) = -i_u(i_v\omega)$. Deduïu-ne que $i_v \circ i_v = 0$.

(b) Proveu que, si $\alpha_1, \ldots, \alpha_p \in E^*$, llavors

$$i_v(\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_p) = \sum_{i=1}^{p} (-1)^{i-1}\, \alpha_i(v)\, \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\alpha_i} \wedge \cdots \wedge \alpha_p\,.$$

(Noteu que $i_{v_1}(\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_p)(v_2, \ldots, v_p)$ és un determinant; desenvolupeu-lo per la primera columna.)

(c) Si $\omega \in A_p(E)$ i $\theta \in A_q(E)$, proveu que

$$i_v(\omega \wedge \theta) = (i_v\omega) \wedge \theta + (-1)^p\, \omega \wedge (i_v\theta)\,.$$

(Basta provar-ho per a ω i θ descomponibles; per què?)

(d) Siguin $v = e_1 + e_2 + e_4$, $\theta = 2\,e^2 \wedge e^4 + e^1 \wedge e^3$, $\eta = e^1 \wedge e^4 - e^1 \wedge e^3$, on (e_i) és una base de E i (e^j) la seva base dual. Calculeu $i_v(\theta \wedge \eta)$.

26. Sigui $F \subseteq \mathbb{R}^3$ el subespai generat per $u_1 = (1, 1, 0)$ i $u_2 = (0, 1, -1)$. Siguin $v_1 = (1, 2, -1)$ i $v_2 = (1, 0, 1)$ i $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canònica de $\mathbb{R}^3$. Sigui $i : F \to \mathbb{R}^3$ la injecció de F en $\mathbb{R}^3$.

(a) Demostreu que $\{v_1, v_2\}$ genera F. Trobeu l'expressió matricial de i en les dues bases.

(b) Calculeu $i^*(e_1^*)$, $i^*(e_3^*)$ i $i^*(e_1^* \wedge e_3^*)$ en les dues bases duals de $\{u_1, u_2\}$ i $\{v_1, v_2\}$.

27. Sigui $(E, \langle , \rangle)$ un $\mathbb{R}$-espai euclidià i $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ una base ortonormal. Definim l'aplicació bilineal $\langle , \rangle : A^p(E) \times A^p(E) \longrightarrow \mathbb{R}$ determinada sobre els elements de la base per

$$\langle e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p}, e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_p} \rangle = \det(\langle e_{i_k}, e_{j_\ell} \rangle).$$

(a) Proveu que es defineix així un producte escalar a $A^p(E)$ i que la base $\{e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p} \mid 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_p \leq n\}$ és una base ortonormal.

(b) Proveu que si u_i, v_j són vectors de E, aleshores

$$\langle u_1 \wedge \cdots \wedge u_p, v_1 \wedge \cdots \wedge v_p \rangle = \det(\langle u_i, v_j \rangle).$$

Deduïu que $\| u_1 \wedge \cdots \wedge u_p \|^2 = G(u_1, \ldots, u_p)$, on G és el grammià.

(c) Proveu que, si $u_1, \ldots, u_n$ és una base positiva, aleshores

$$u_1 \wedge \cdots \wedge u_n = \sqrt{\det(\langle u_i, u_j \rangle)}\; e_1 \wedge \cdots \wedge e_n.$$

28 . *Producte tensorial d'espais vectorials.* Siguin E i F dos $\mathbb{K}$-espais vectorials. Un *producte tensorial* de E i F és un parell $(E \otimes F, \tau)$ on $E \otimes F$ és un $\mathbb{K}$-espai vectorial i $\tau : E \times F \to E \otimes F$ és una aplicació bilineal que satisfà la propietat universal següent: per a tot $\mathbb{K}$-espai vectorial G i tota aplicació bilineal $\varphi : E \times F \to G$ existeix una única aplicació lineal $f_\varphi : E \otimes F \to G$ tal que $f_\varphi \circ \tau = \varphi$.

$$\begin{array}{rll} \tau : & E \times F & \to E \otimes F \\ & \varphi \downarrow & \swarrow f_\varphi \\ & G & \end{array}$$

(a) Proveu que, si existeix, el producte tensorial $(E \otimes F, \tau)$ és únic llevat d'isomorfisme (de parells).

(b) Proveu que, si existeix el producte tensorial, aleshores per a tot $\mathbb{K}$-espai vectorial G es compleix $\mathcal{L}_2(E \times F, G) \simeq \mathcal{L}(E \otimes F, G)$ (isomorfisme d'espais vectorials).

(c) Proveu que el parell format per $\mathcal{L}_2(E^* \times F^*, \mathbb{K})$ i $\tau(x, y) = x \otimes y$ satisfà la propietat universal de $E \otimes F$ i, per tant, n'és un model.

(d) Proveu que si $\{u_1, \ldots, u_n\}$ i $\{v_1, \ldots, v_m\}$ són bases de E i F, respectivament, aleshores $\{u_i \otimes v_j\}$, és una base de $E \otimes F$.

(e) Observeu que si $F = E$, aleshores $E \otimes E \cong T^2(E)$ i $E^* \otimes E^* \cong T_2(E)$.

29 . *Producte tensorial d'aplicacions lineals.* Siguin $f_i : E_i \longrightarrow F_i$, $i = 1, 2$, dues aplicacions lineals entre espais vectorials sobre $\mathbf{k}$ de dimensió finita. Es defineix l'aplicació producte tensorial $f_1 \otimes f_2 : E_1 \otimes E_2 \longrightarrow F_1 \otimes F_2$ segons

$$f_1 \otimes f_2(u, v) = f_1(u_1) \otimes f_2(u_2).$$

(a) Proveu que $f_1 \otimes f_2$ és un isomorfisme si, i només si, ho són f_1 i f_2 i que, en aquest cas se satisfà $(f_1 \otimes f_2)^{-1} = f_1^{-1} \otimes f_2^{-1}$.

(b) Trobeu la matriu de $f_1 \otimes f_2$ a partir de les matrius de f_1 i f_2 en bases dels espais vectorials involucrats.

(c) Suposem que $F_i = E_i$, $i = 1, 2$ i que E_1, E_2 tenem dimensions m i n respectivament. Proveu que

$$\det(f_1 \otimes f_2) = (\det f_1)^n (\det f_2)^m.$$