Señales y Sistemas

Tema 1: Señales y Sistemas

Asunción Moreno

Departamento de Teoría de la Señal y Comunicaciones
Universitat Politècnica de Catalunya (UPC)
<asuncion.moreno@upc.edu>

con la colaboración de Antonio Bonafonte
Febrero 2018
v. 1.3

TEMA 1 Señales y Sistemas

1.1 Señales

1.1.1 Caracterización de señales

Una señal es la manifestación física de un determinado suceso. Podemos hablar de señales acústicas, sismológicas, índices económicos, electroencefalogramas, señales de televisión, señales de imagen.... La representación de las señales bajo un formato común es útil para poder realizar análisis o medidas utilizando unas herramientas similares aunque las señales provengan de entornos completamente distintos.

Para caracterizar las señales es conveniente agruparlas bajo algún criterio de forma que facilite su estudio. Una forma habitual de dividir las señales es, en el entorno de procesado de señal, atendiendo a su rango y su dominio. Si las señales son función de una o más variables continuas, hablamos de señales de dominio continuo o analógicas; si las señales están definidas únicamente en instantes discretos, las señales son de dominio discreto, también denominadas secuencias. Atendiendo al rango o conjunto de valores que puede tomar la señal, también hablaremos de señales continuas, si el rango es continuo o señales discretas si únicamente pueden tomar valores entre un conjunto no continuo. Sin pérdida de generalidad habitualmente nos referiremos a la variable independiente de las señales continuas como t, de tiempo, en el bien entendido que las señales pueden depender de cualquier variable y la elección de una referencia temporal únicamente es por sencillez. La variable independiente de las señales de dominio continuo la anotaremos entre paréntesis (ej. $x(t)$). La variable independiente de las secuencias la anotaremos entre corchetes (ej. $x[n]$).

Ejemplos de señales de dominio continuo son la señal de voz (presión acústica en función del *tiempo*), una imagen (brillo en función de las *variables espaciales x,y*) o la temperatura en función de la *altura*.
Ejemplos de señales de dominio discreto son series de datos que muestran la evolución del índice de la bolsa en función del *día*, el stock de un almacén al cierre del *año* o el número de habitantes de un país *anualmente*.

El índice de la bolsa es una señal de rango continuo, toma cualquier valor real, mientras la población es una señal de rango discreto, se mide en enteros.
La representación de señales analógicas mediante secuencias se denomina muestreo y, dependiendo de ciertas características de la señal analógica, es posible realizarlo sin pérdida de información. La representación de señales de rango continuo mediante otras de rango discreto se denomina cuantificación y en este proceso se pierde información que no es recuperable.

1.1.2 Transformación de la variable independiente

Las transformaciones más usuales son las siguientes:

Giro o reflexión

Transforma *x(t)* en *x(-t)*. La señal está reflejada alrededor de *t=0.* Si se trata de una secuencia, el giro transforma la secuencia x[n] en la secuencia x[-n], es decir, la refleja alrededor de n=0.

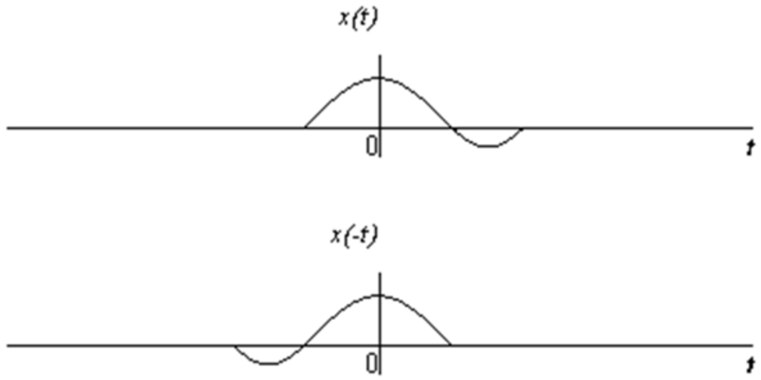
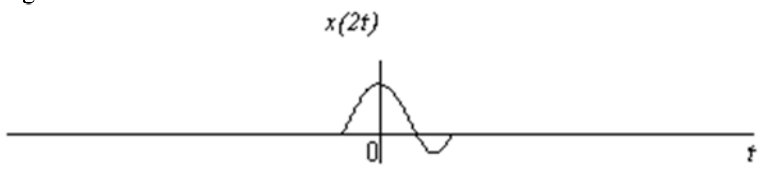


Figura 1.1.1

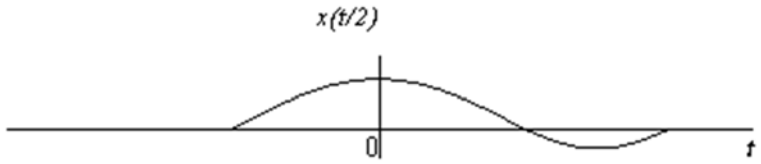
Un ejemplo podría ser una grabación de voz reproducida al revés.

Escalado

Transforma *x(t)* en *x(at)* con $a > 0$. Si $a > 1$ la señal se comprime. Si $a < 1$, la señal se expande. Para la señal de la Figura 1.1 se tiene:



a)



b)

Figura 1.1.2

El caso a) correspondería a una grabación de audio reproducida al doble de la velocidad de grabación mientras el caso b) correspondería a una grabación de audio reproducida a mitad de velocidad.

En el caso de secuencias dada la secuencia x[n], podemos aplicar el escalado x[an] si a es entero (en caso contrario la secuencia no está definida) y a>1, es decir, comprimimos la señal. Si a<1, debemos especificar qué valores deben tomar los nuevos puntos, esto es, si asignamos un valor cero o un valor interpolado entre los contiguos y en qué forma. Dejaremos el tema para un capítulo posterior.

Retardo

Transforma *x(t)* en $x(t-t_o)$ con $t_o > 0$. Diremos que $x(t-t_o)$ está retardada t_o seg. respecto *a x(t)*. Ocurre t_o seg. más tarde. En el caso de secuencias, utilizaremos la misma denominación, retardo y transforma la secuencia x[n] en la secuencia $x[n-n_0]$ con $n_0 > 0$, la secuencia $x[n-n_0]$ ocurre n_0 muestras más tarde.

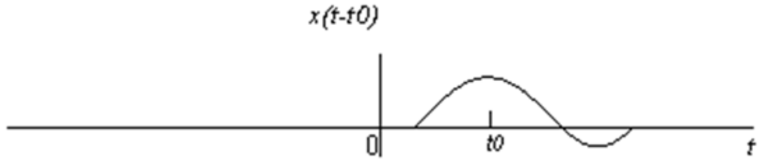


Figura 1.1.3

EJEMPLO 1.1-1

Combinando las transformaciones giro y retardo se obtiene la señal de la figura.

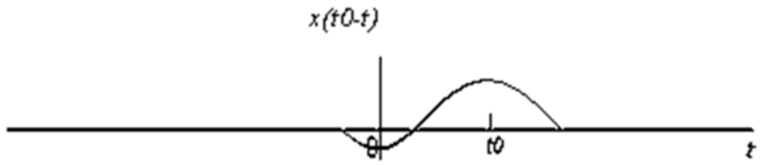


Figura 1.1.4

1.1.3 Señal par y señal impar

Una señal par cumple la condición

$$x(t) = x(-t) \tag{1.1.1}$$

y para secuencias

$$x[n] = x[-n]$$

Una señal es impar si

$$x(t) = -x(-t) \tag{1.1.2}$$

$$x[n] = -x[-n]$$

Una señal impar cumple *x(0)=0* o *x[0]=0*

Parte par y parte impar de una señal

La parte par de una señal se define como

$$Par\{x(t)\} = \frac{x(t) + x(-t)}{2} \tag{1.1.3}$$

y es una señal par. Análogamente se define la parte impar de una señal

$$Impar\{x(t)\} = \frac{x(t) - x(-t)}{2} \tag{1.1.4}$$

Una señal cualquiera puede descomponerse en su parte par y su parte impar

$$x(t) = Par\{x(t)\} + Impar\{x(t)\} \tag{1.1.5}$$

Las definiciones para secuencias son análogas.

EJEMPLO 1.1-2

Las figuras muestran la descomposición de dos pulsos rectangulares en su parte par y su parte impar.

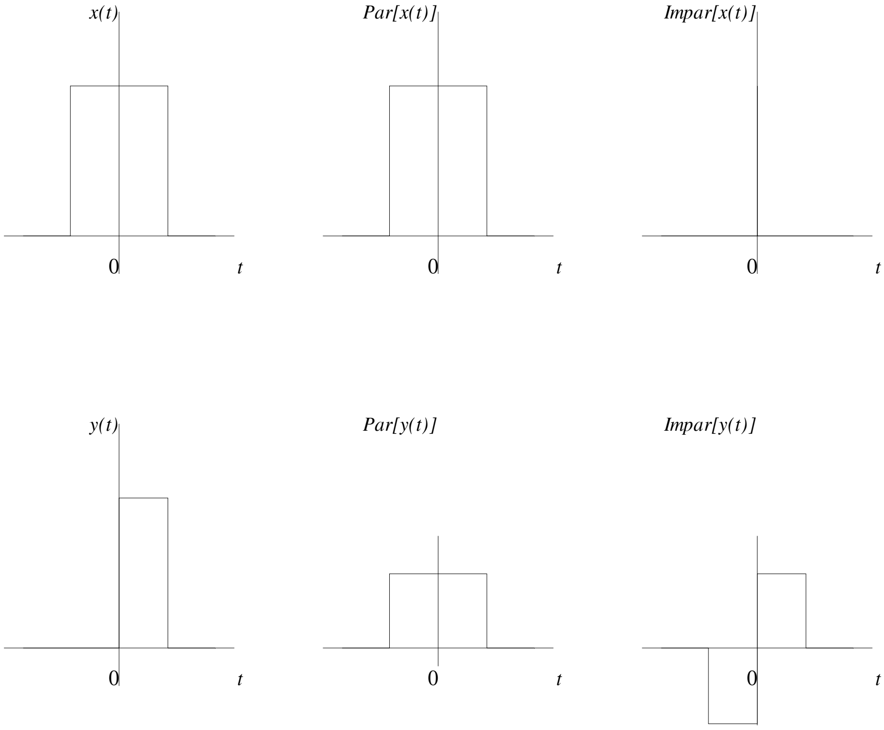


Figura 1.1.5

1.1.4 Señales periódicas

Una señal de variable continua periódica cumple la propiedad

$$x(t) = x(t+T_0) \quad \forall t$$
$$x(t) = x(t+mT_0) \tag{1.1.6}$$

Se denomina periodo fundamental T_0 de x(t) al menor número positivo que cumpla la ecuación (1.1.6). Si x(t) es constante, T_0 está indefinido.

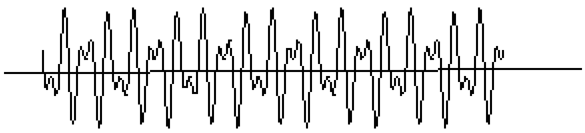


Figura 1.1.6

Una secuencia periódica se define de forma análoga. La secuencia x[n] es periódica de periodo N (<u>*entero*</u>) si

$$x[n] = x[n+N] \textit{para todo } n$$

Si esta ecuación se satisface para N, también se satisface para 2N, 3N.. el periodo fundamental N_0 es el valor *entero* positivo más pequeño que cumple la ecuación anterior.

EJEMPLO 1.1-3

Una representación habitual de las señales periódicas es a partir de otra señal f(t)

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t - nT_0) \qquad (1.1.7)$$

Es fácil demostrar que la señal $x(t)$ es periódica de periodo T_0 independientemente de la duración de la señal $f(t)$. Aplicando la definición

$$x(t + T_0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t - (n-1)T_0)$$

y dado que el índice de la suma se extiende entre menos infinito e infinito

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t - (n-1)T_0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t - nT_0)$$

lo que prueba la validez de la ecuación (1.1.7) para la representación de señales periódicas y que la señal es periódica de periodo T_0. La Figura 1.1.7 muestra dos señales periódicas distintas generadas a partir de una señal $f(t)$ triangular. En el primer caso, T_0 es mayor que la duración de $f(t)$ y la señal $x(t)$ coincide con $f(t)$ en un periodo. En el segundo caso, T_0 es menor que la duración de $f(t)$ y la señal $x(t)$ no coincide con $f(t)$ en un periodo.

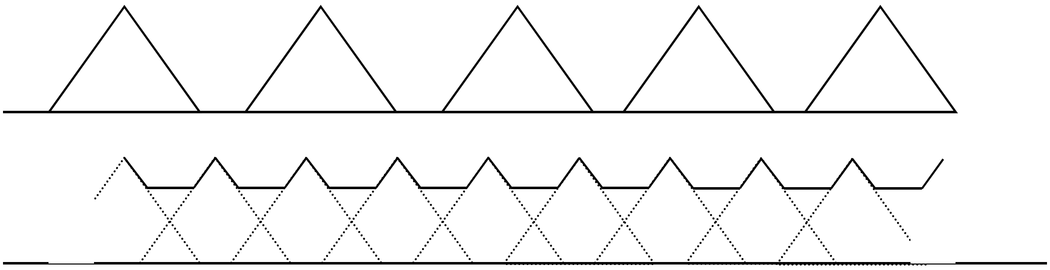


Figura 1.1.7

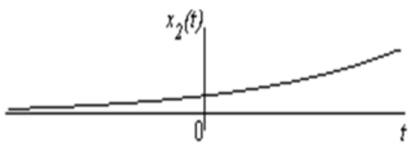
1.1.5 Señales continuas básicas

En este apartado se definen y dibujan las señales deterministas más habituales que se utilizarán a lo largo del texto.

Exponencial

$$x(t)=Ce^{at} \qquad (1.1.8)$$

Donde C y a pueden ser reales o complejas. Casos particulares son:



C real a<0: respuesta de un RC

C real a>0: explosión atómica

Si a es imaginaria pura $\qquad x(t) = e^{j\omega_0 t} \qquad (1.1.9)$

se tiene el conjunto de exponenciales complejas. Estas señales son periódicas de periodo

$$T_0 = \frac{2\pi}{|\omega_0|}$$

En efecto aplicando la definición de señales periódicas

$$x(t+T_0) = e^{j\omega_0(t+T_0)} = e^{j\omega_0 t} e^{j\omega_0 T_0}$$
$$= e^{j\omega_0 t} = x(t)$$

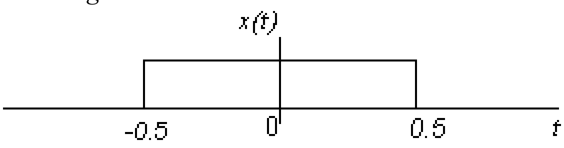
El conjunto de señales $x_k(t) = e^{jk\omega_0 t} \; k = \pm 1, \pm 2 \cdots$

son todas periódicas de periodo $T_k = \dfrac{2\pi}{|k\omega_o|}$

El periodo común es el mayor, $T_0 = \dfrac{2\pi}{|\omega_0|}$

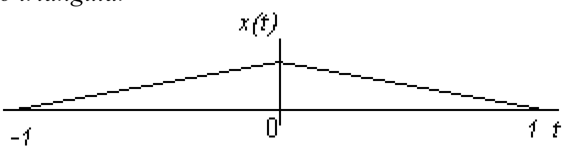
y las demás se dice que están armónicamente relacionadas.

Pulso rectangular



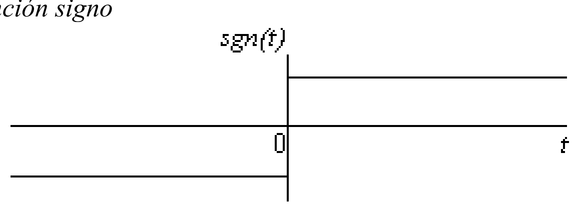
$$\prod(t) = \begin{cases} 1 & |t| < 0.5 \\ 0 & resto \end{cases} \qquad (1.1.10)$$

Pulso triangular



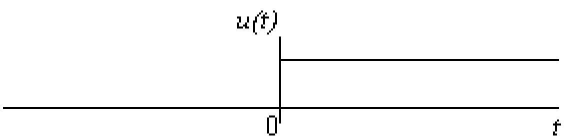
$$\Delta(t) = \begin{cases} 1-|t| & |t| < 1 \\ 0 & resto \end{cases} \qquad (1.1.11)$$

Función signo



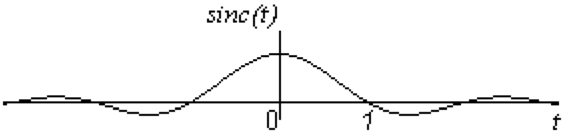
$$\operatorname{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ -1 & t < 0 \end{cases} \qquad (1.1.12)$$

Función escalón



$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases} \qquad (1.1.13)$$

Función sinc



$$\mathrm{sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t} \qquad (1.1.14)$$

Figura 1.1.8

Los ceros de *sinc(t)* están situados en valores de t entero excepto en el origen que vale 1. En efecto para t<<1 el seno se aproxima por el ángulo y

$$\lim_{t \to 0} \frac{\sin \pi t}{\pi t} = 1$$

EJEMPLO 1.1-4

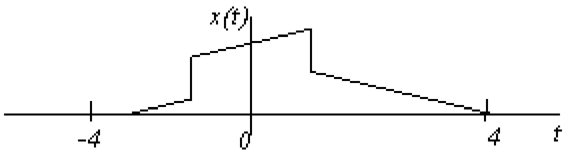
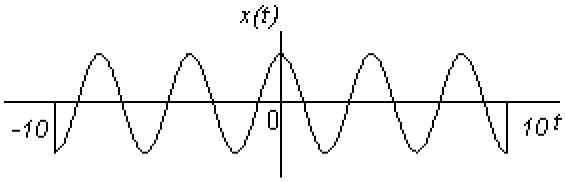
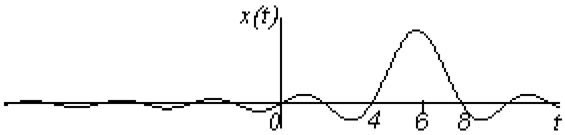
$\prod\left(\frac{t}{2}\right) + \Delta\left(\frac{t-1}{3}\right)$	
$\cos(2\pi t/4)\prod\left(\frac{t}{20}\right)$	
$A\mathrm{sinc}\left(\frac{t-t_0}{\tau}\right)$ $t_0 = 6$, $\tau = 2$	

Figura 1.1.9

EJEMPLO 1.1-5

Dibuje y compare estas dos señales:

$$y_1(t) = x(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\prod\left(\frac{t-nT}{\tau}\right) \qquad y_2(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\prod\left(\frac{t-nT}{\tau}\right)$$

Con $x(t) = e^{-t/10}u(t)$ $\quad$ *T=2s, τ=1s*

.

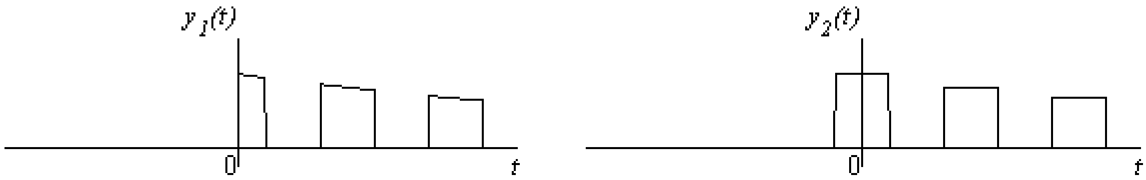
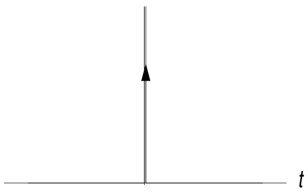


Figura 1.1.10

1.1.6 Delta de Dirac

Representación



$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases} \qquad (1.1.15)$$

Figura 1.1.11

Definición como funcional

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t)dt = x(0) \qquad (1.1.16)$$

Asigna a una función *x(t)* continua en el origen el valor *x(0).*

Para ligar ambas definiciones podemos utilizar la función pulso rectangular y ver la función $\delta(t)$ según la expresión (1.1.15) como

$$\delta(t) = \lim_{\Delta \to 0} \frac{1}{\Delta} \prod\left(\frac{t}{\Delta}\right) \qquad (1.1.17)$$

Aplicando esta aproximación a la delta en su definición como funcional obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \ \lim_{\Delta \to 0} \frac{1}{\Delta} \prod\left(\frac{t}{\Delta}\right) dt &= \lim_{\Delta \to 0} \frac{1}{\Delta} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \ \prod\left(\frac{\mathrm{t}}{\Delta}\right) dt \\ &= \lim_{\Delta \to 0} \frac{1}{\Delta} \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} x(t) dt \\ &\cong \lim_{\Delta \to 0} \frac{1}{\Delta} \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} x(0) dt \\ &= x(0) \end{aligned}$$

Que coincide con la definición de funcional (1.1.16)

Propiedades

1. La delta de Dirac es una función de área unidad

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(t)dt = 1 \qquad (1.1.18)$$

Se demuestra con *x(t)=1* en la definición. El símbolo representado en la Figura 1.1.12 representa una delta de área k.

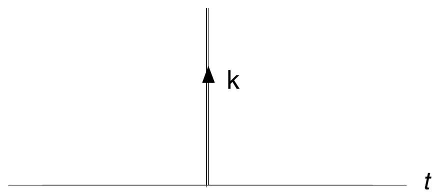


Figura 1.1.12

2. Escalado de la delta

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t) \tag{1.1.19}$$

Para ver que ambos miembros de la ecuación se comportan de la misma manera, sustituimos *δ(at)* en la definición y aplicamos el cambio de variable *at=t'*

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(at)dt = \begin{cases} \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} x(\frac{\tau}{a})\delta(\tau)d\tau & a > 0 \\ \frac{1}{a}\int_{\infty}^{-\infty} x(\frac{\tau}{a})\delta(\tau)d\tau & a < 0 \end{cases} \tag{1.1.20}$$

y aplicando la igualdad $a = -|a|$ si $a < 0$ ambas expresiones equivalen a

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|a|} x\left(\frac{\tau}{a}\right)\delta(\tau)d\tau = \frac{x(0)}{|a|}$$

Que es exactamente el mismo resultado que se obtendría aplicando en la definición de la delta el segundo miembro de la igualdad (1.1.19), lo que demuestra la propiedad 2. Este resultado se puede interpretar con la ayuda de la expresión (1.1.17). Dado que la transformación aplicada sobre la variable independiente no cambia los valores de amplitud sino únicamente la duración de la señal,

$$\begin{aligned} \delta(at) &= \lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}\prod\left(\frac{at}{\Delta}\right) = \\ &= \frac{1}{a}\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta/a}\prod\left(\frac{t}{\Delta/a}\right) \end{aligned} \tag{1.1.21}$$

Donde simplemente se ha multiplicado y dividido por *a*. Al tender Δ a cero el límite tiende a δ(t) ya que efectivamente su área es unitaria, con lo que se comprueba la expresión (1.1.19). La misma justificación puede aplicarse si a<0.

Conclusión: La delta de Dirac es una función par. Se demuestra sustituyendo a=-1 en la ecuación (1.1.19).

3. $\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = x(t)$

Por ser la *δ(t)* una función par

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(\tau - t)d\tau$$

y aplicando el cambio de variable *τ-t=t'* se obtiene la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t'+t)\delta(t')dt' = x(t)$$

La anterior integral admite varias interpretaciones. Una de ellas es que cualquier señal x(t) puede ponerse como combinación lineal de funciones δ(t) convenientemente escaladas y desplazadas. Supongamos que una señal cualquiera x(t) la podemos descomponer en funciones básicas sencillas como por ejemplo pulsos rectangulares de duración Δ como se representa en la Figura 1.1.13

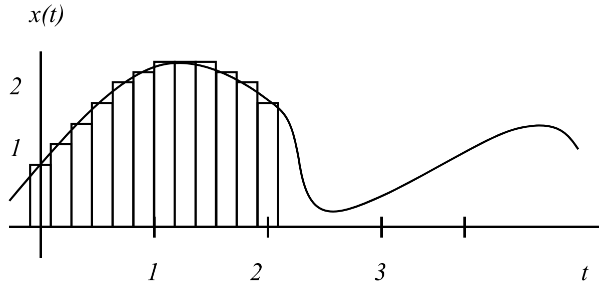


Figura 1.1.13

$$x(t) \cong \sum_i x(i\Delta) \prod\left(\frac{t - i\Delta}{\Delta}\right)$$

La aproximación será tanto mejor cuanto más pequeña sea la duración de los pulsos elegidos de manera que podemos decir que

$$x(t) = \lim_{\Delta \to 0} \sum_i x(i\Delta) \prod\left(\frac{t - i\Delta}{\Delta}\right)$$

Definiendo por analogía a (1.1.17) $\delta_\Delta(t) = \frac{1}{\Delta} \prod\left(\frac{t}{\Delta}\right)$

La señal x(t) se puede expresar mediante esta función

$$x(t) = \lim_{\Delta \to 0} \sum_i x(i\Delta) \delta_\Delta(t - i\Delta)\Delta$$

y en el límite

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t - \tau)d\tau$$

4. $x(t)\ \delta(t) = x(0)\ \delta(t)$
$x(t)\ \delta(t-t_0) = x(t_0)\ \delta(t-t_0)$

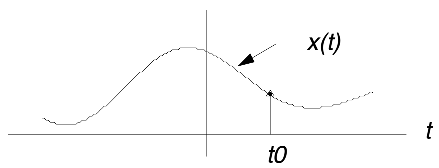


Figura 1.1.14

Demostraremos la primera igualdad en el sentido de que ambos miembros son iguales si se comportan de la misma forma bajo la definición de funcional (1.1.16) con una función genérica g(t). Sustituyendo la primera expresión

$$\int_{\infty}^{\infty} g(t)x(t)\delta(t)dt = g(0)x(0)$$

ya que la δ(t) se aplica ahora sobre la función g(t)x(t). Sustituyendo x(0)δ(t) en la definición

$$\int_{\infty}^{\infty} g(t)x(0)\delta(t)dt = g(0)x(0)$$

ya que la constante *x(0)* puede salir fuera de la integral.
La demostración para la segunda igualdad de esta propiedad es similar.

5. Relación con el escalón

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$$

Comprobamos que definen el mismo funcional. Resolviendo la integral por partes

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\frac{du(t)}{dt}dt &= x(t)u(t)\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} x'(t)u(t)dt = x(\infty) - \int_{0}^{\infty} x'(t)dt \\ &= x(\infty) - \left[x(\infty) - x(0)\right] \\ &= x(0)\end{aligned}$$

La interpretación del escalón como integral puede expresarse de las siguientes formas alternativas

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau = \int_{0}^{\infty} \delta(t-\sigma)d\sigma$$

Figura 1.1.15

que admiten las siguientes representaciones gráficas. Las dos Figuras 1.1.15 superiores muestran un intervalo de integración entre -∞ y *t* con *t < 0* y *t > 0* respectivamente. Las figuras 1.1.15 inferiores muestran la interpretación de la última integral donde el intervalo de integración es fijo pero la delta se mueve dependiendo del valor de *t*.

Funciones cuyo límite es δ(t)

La función δ(t) puede verse como límite de algunas funciones tales que bajo una condición en uno de sus parámetros, su duración tienda a cero, su amplitud tienda a infinito y el área se mantenga constante e igual a la unidad. Las siguientes funciones son algunos ejemplos:

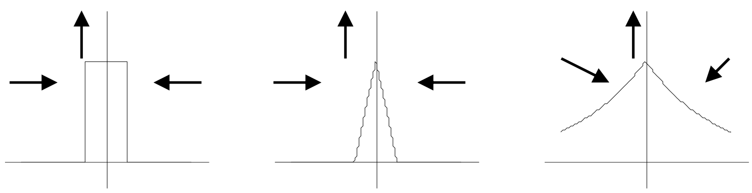


Figura 1.1.16

$$\delta(t) = \lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}\prod\left(\frac{t}{\Delta}\right) \qquad \delta(t) = \lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}\Delta\left(\frac{t}{\Delta}\right) \qquad \delta(t) = \lim_{\tau\to 0}\frac{1}{2\tau}e^{-|t|/\tau}$$

El área de la exponencial bilateral es efectivamente unitaria

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\tau}e^{-|t|/\tau}dt &= 2\int_{0}^{\infty}\frac{1}{2\tau}e^{-t/\tau}dt \\ &= -e^{-t/\tau}\Big|_{0}^{\infty} = 1\end{aligned}$$

Y también $\delta(t) = \lim_{\Delta \to 0} \frac{1}{\Delta} \text{sinc}\left(\frac{\text{t}}{\Delta}\right)$

En primer lugar, demostramos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen}(x)}{x} dx = \pi$$

A partir de la integral

$$I(a) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-at} sent}{t} dt$$

$$\frac{dI(a)}{da} = -\int_0^{\infty} e^{-at} sentdt = \frac{asent + \cos t}{a^2 + 1} e^{-at} \Big|_0^{\infty} = -\frac{1}{a^2 + 1}$$

$$I(a) = \int \frac{dI(a)}{da} da + C = -arctg(a) + C$$
$$I(\infty) = -\pi / 2 + C = 0 \to C = \pi / 2$$
$$I(a) = -arctg(a) + \pi / 2$$
$$I(0) = \pi / 2$$

y por lo tanto como sen(x)/x es una función par, queda demostrado que su área vale π. Volviendo a la delta como límite de una función sinc:

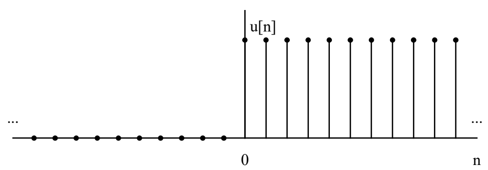
$$Area = \lim_{\Delta \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\Delta} \text{sinc}\left(\frac{\text{t}}{\Delta}\right) dt = 2 \lim_{\Delta \to 0} \int_0^{\infty} \frac{1}{\Delta} \frac{\text{sen}(\pi t/\Delta)}{\pi t / \Delta} dt$$

Haciendo el cambio x=πt/Λ; dx=(π/Λ) dt

$$Area = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\text{sen}(x)}{x} dx = \frac{2}{\pi} I(0) = 1$$

1.1.7 Secuencias discretas básicas

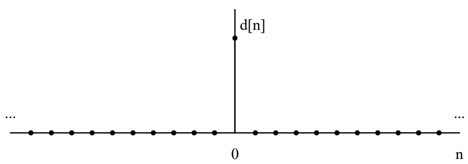
Función escalón



$$u[n] = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ 1 & n \geq 0 \end{cases} \qquad (1.1.22)$$

Figura 1.1.17

Función delta o impulso unidad



$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases} \qquad (1.1.23)$$

Figura 1.1.18

La función delta (de Kroneker) en el dominio discreto tiene algunas propiedades similares a las de la delta de Dirac en el dominio continuo. Por ejemplo, dado que es una secuencia con un único valor distinto de cero, es fácil comprobar que:

$$x[n]\ \delta[n] = x[0]\ \delta[n]$$

$$x[n]\ \delta[n-n_0] = x[n_0]\ \delta[n-n_0]$$

y la relación con el escalón:

$$\delta[n] = u[n]-u[n-1]$$

$$u[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} \delta[m] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k]$$

Donde la última expresión se ha obtenido sustituyendo m por k=n-m.

La delta también puede servir para describir secuencias, por ejemplo, la secuencia

$$x[n] = \begin{cases} n+1 & n = 0,1,2 \\ 0 & resto \end{cases}$$

Puede escribirse como

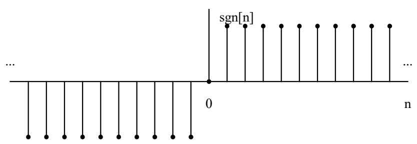
$$x[n]=\delta[n]+ 2\delta[n-1]+ 3\delta[n-2]$$

y de forma general

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$$

Función signo

s

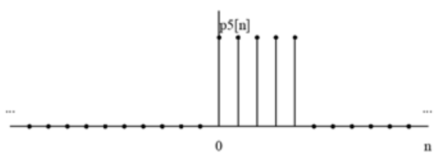


$$\mathrm{sgn}[n] = \begin{cases} 1 & n > 0 \\ 0 & n = 0 \\ -1 & n < 0 \end{cases} \qquad (1.1.24)$$

Figura 1.1.19

Pulso rectangular

El pulso rectangular discreto lo definimos como



$$p_L[n] = \begin{cases} 1 & 0 \le n \le L-1 \\ 0 & resto \end{cases} \qquad (1.1.25)$$

Figura 1.1.20

Exponencial compleja y senoidales

La secuencia exponencial compleja la definimos como:

$$x[n]= C\ a^n$$

Donde C y a son en general complejos. También se puede expresar como

$$x[n]= C\ e^{bn}$$

Donde $a=e^b$

Si C y a son reales, la secuencia es creciente si |a|>1 y decreciente si |a| <1. Si a es positiva, todos los valores de la secuencia son del mismo signo, pero si a es negativa, los valores de la secuencia se alternan en signo.

Ejercicio MATLAB: Genere y dibuje las secuencias

$$x[n]= C\, a^n$$

Para C=2 y distintos valores de a: 2, -2, 1, -1, 0.5, -0.5

Otra exponencial muy utilizada es la exponencial compleja con b imaginaria pura. En este caso tenemos las secuencias del tipo:

$$\begin{aligned} x[n] &= e^{j\Omega_0 n} = e^{j2\pi F_0 n} = \\ &= \cos(2\pi F_0 n) + j sen(2\pi F_0 n) \end{aligned}$$

Donde se utiliza $\Omega_0 = 2\,\pi\, F_0$ para distinguirlas de ω_o y f_o utilizadas con señales continuas.

Estas señales tienen una particularidad si las comparamos con las señales exponenciales complejas continuas. En primer lugar, no siempre son periódicas en n y en segundo lugar son periódicas en F_0 siendo 0.5 la frecuencia máxima que pueden alcanzar.

Para comprobar la primera afirmación, miramos si es periódica en n

$$\begin{aligned} x[n+N_0] &= e^{j2\pi F_0 (n+N_0)} \\ &= e^{j2\pi F_0 n} e^{j2\pi F_0 N_0} \end{aligned}$$

La segunda exponencial únicamente valdrá 1 si $F_0 N_0 = K$ siendo K entero. Dado que N_0 tiene que ser entero, esto limita a ciertos valores de F_0 la periodicidad de la secuencia x[n], concretamente, F_0 debe ser racional.

Para comprobar la segunda afirmación, consideramos $x[n] = e^{j2\pi F_0 n}$ y

$$\begin{aligned} y[n] &= e^{j2\pi (F_0+1)n} = e^{j2\pi F_0 n} e^{j2\pi n} = \\ &= e^{j2\pi F_0 n} = x[n] \end{aligned}$$

La señal x[n] con frecuencia F_0 es la misma que la secuencia y[n] con frecuencia F_0+1 y en general F_0+K con K entero.

Ejercicio MATLAB: Calcule el periodo de las secuencias x[n]= cos (2πn/12), x[n]= cos (8πn/31) y x[n]= cos (n/6) y verifique el resultado con MATLAB. (Sol: 12, 31 y no periódica)

Ejercicio MATLAB: genere las secuencias x[n]=cos $2\pi F_0 n$ con F_0= 0, 1/16, 1/8, ¼, ½, ¾, 7/8, 15/16 y 1. Identifique las secuencias que son idénticas y explique el resultado

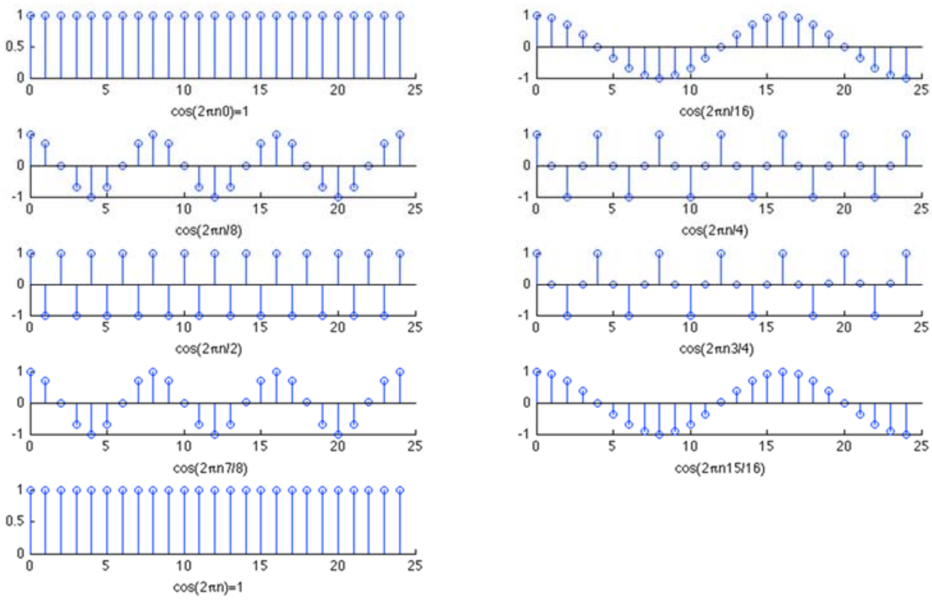


Figura 1.1.21 Secuencias senoidales para distintas frecuencias

---

1.1.8 Margen dinámico, Energía y Potencia

El margen dinámico de una señal es la diferencia entre su valor máximo y su valor mínimo.

La energía o potencia de una señal continua cualquiera, se define de forma similar a la definición en términos eléctricos. Supongamos una resistencia R con una tensión aplicada $v(t)$, por la que pasa una corriente $i(t)=v(t)/R$. La potencia instantánea disipada es

$$P(t) = \frac{|v(t)|^2}{R}$$

o equivalentemente

$$P(t) = |i(t)|^2 R$$

La energía total y la potencia media se definen como las integrales

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} P(t)dt$$

$$P = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} P(t)dt$$

respectivamente. De una forma equivalente haciendo R=1 se define para cualquier señal $x(t)$:

Energía de una señal $$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$

Las señales con $0 < E_x < \infty$ se denominan *Señales de Energía Finita (EF)*

Potencia media $$P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{Energía\ en\ T}{T} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt \qquad (1.1.26)$$

La expresión para el cálculo de la Potencia media se simplifica cuando se desea calcular sobre una señal periódica de periodo T_0. Eligiendo el intervalo de integración *T* de la ecuación (1.1.26) múltiplo del periodo, $T=MT_0$ la integral en el intervalo *T*, es *M* veces la integral en T_0., por lo que

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}|x(t)|^2\,dt = \lim_{M\to\infty}\frac{M}{MT_0}\int_{<T_0>}|x(t)|^2\,dt$$

y el cálculo de la potencia media coincide con la potencia en un periodo

$$P_x = \frac{1}{T_0}\int_{T_0}|x(t)|^2 dt$$

Las señales con $0 < P_x < \infty$ se denominan *Señales de Potencia Media Finita (PMF)*

EJEMPLO 1.1-6

Calcular la energía de la señal *x(t)* y la potencia de la señal periódica *y(t)*

$$x(t) = \prod(t) \qquad y(t) = \sum_{-\infty}^{\infty}\prod\left(\frac{t-nT_0}{\tau}\right)$$

$$E_x = \int_{-1/2}^{1/2} dt = 1$$

Por ser la señal *y*(*t*) periódica de periodo T_0,

$$P_y = \frac{1}{T_0}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} dt = \frac{\tau}{T_0}$$

La Energía de una secuencia se define de forma análoga a la de señales continuas:

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty}|x(n)|^2$$

y la potencia media de una secuencia:

$$P_x = \lim_{N->\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N}|x(n)|^2$$

EJEMPLO 1.1-7

Calcular la potencia de *x[n]=u[n]*

$$P_x = \lim_{N->\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N}|u(n)|^2 == \lim_{N->\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=0}^{N}1 =$$

$$= \lim_{N->\infty}\frac{1}{2N+1}(N+1) = \frac{1}{2}$$

1.2 Sistemas

Un sistema es un proceso que transforma una señal de entrada *x(t)* en una señal de salida *y(t).* O bien una secuencia de entrada *x[n]* en una secuencia de salida *y[n]*

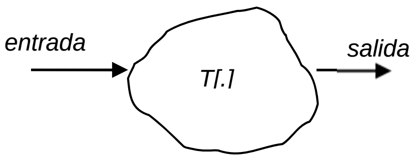


Figura 1.2.22

La transformación que se realiza sobre la entrada la denominamos T[.].

1.2.1 Propiedades de los sistemas

Linealidad

Un proceso es lineal si la transformación sobre una combinación lineal de entradas da la misma combinación lineal de salidas:

$$T[a_1x_1(t)+a_2x_2(t)] = a_1\, T[x_1(t)]+ a_2\, T[x_2(t)] \qquad (1.2.27)$$

$$T[a_1x_1[n])+a_2x_2[n]] = a_1\, T[x_1[n]]+ a_2\, T[x_2[n]]$$

Es decir, cumple la propiedad de superposición ya que la respuesta a la suma de entradas es la suma de las respuestas individuales a cada entrada, y la propiedad de homogeneidad ya que al multiplicar la entrada por una constante, la salida queda multiplicada por la misma constante. La primera propiedad se demuestra sustituyendo en (1.2.27) $a_1 = a_2 = 1$. La segunda propiedad se demuestra sustituyendo $a_2 = 0$ en (1.2.27)

EJEMPLO 1.2-8

El sistema definido mediante la transformación

$$T[x(t)] = x(t)\cos(2\pi f_0 t) \qquad (1.2.28)$$

es lineal. En efecto, aplicando una combinación lineal de señales a su entrada,

$$\begin{aligned} T[a_1x_1(t)+a_2x_2(t)] &= [a_1x_1(t)+a_2x_2(t)]\cos(2\pi f_0 t) \\ &= a_1x_1(t)\cos(2\pi f_0 t)+a_2x_2(t)\cos(2\pi f_0 t) \\ &= a_1T[x_1(t)]+a_2T[x_2(t)] \end{aligned}$$

Se obtiene la misma combinación lineal de salidas.

EJEMPLO 1.2-9

El sistema definido mediante la transformación

$$T[x[n]] = x^2[n] \qquad (1.2.\ 29)$$

no es lineal. En efecto, aplicando una combinación lineal de señales a su entrada,

$$\begin{aligned} T[a_1x_1[n]+a_2x_2[n]] = [a_1x_1[n]+a_2x_2[n]]^2 &= a_1^2x_1^2[n]+a_2^2x_2^2[n]+2a_1x_1[n]a_2x_2[n] \\ &\neq a_1x_1^2[n]+a_2x_2^2[n] \end{aligned}$$

Este ejemplo no cumple ni la propiedad de homogeneidad ni la de superposición

---

EJERCICIO 1.2-1

Demostrar que el sistema definido por la siguiente ecuación lineal, no es lineal. No cumple ni superposición ni homogeneidad.

$$T[x(t)] = ax(t) + b$$

Sistema real

Un caso particular de sistema lineal es un sistema real. Un sistema lineal es real si la transformación sobre una señal real es real. Si sobre un sistema real se aplica una señal compleja de parte real $x_1(t)$ y parte imaginaria $x_2(t)$, la salida

$$T[x_1(t) + jx_2(t)] = T[x_1(t)] + jT[x_2(t)] \tag{1.2. 30}$$

tiene como parte real la respuesta a la parte real y como parte imaginaria la respuesta a la parte imaginaria.

Invarianza

Un sistema es invariante si al aplicar dos señales que difieren en un retardo, las salidas únicamente difieren en el mismo retardo. Un sistema invariante responde con la misma forma de onda independientemente del momento en que se aplique la entrada. Llamando

$$T[x(t)] = y(t) \tag{1.2. 31}$$

El sistema es invariante si

$$T[x(t - t_0)] = y(t - t_0) \tag{1.2. 32}$$

Esta propiedad se puede ilustrar con el siguiente diagrama que muestra que la propiedad de invarianza se puede resumir en que un sistema invariante y un retardador son intercambiables.

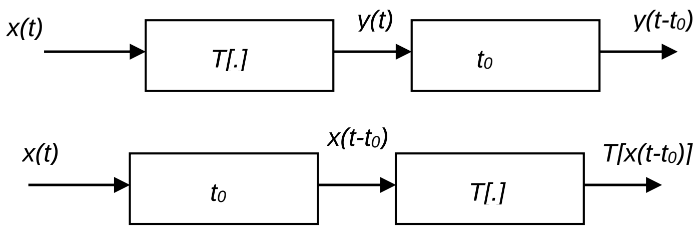


Figura 1.2.23

Análogamente para secuencias, si la respuesta a x[n] es y[n], el sistema será invariante si la respuesta a x[n-n_0] es y[n-n_0]

EJEMPLO 1.2-10

El sistema definido mediante la transformación

$$T[x[n]] = x^2[n] = y[n]$$

es invariante. En efecto, aplicando una entrada retardada,

$$T[x[n - n_0]] = x^2[n - n_0]$$

Que difiere de y(t) en un retardo

$$y(n - n_0) = x^2[n - n_0]$$

El sistema definido mediante la transformación

$$T[x(t)] = x(t)\cos(2\pi f_0 t) = y(t)$$

es variante. En efecto, aplicando a su entrada la misma señal desplazada en tiempo se obtiene

$$T[x(t-t_0)] = x(t-t_0)\cos(2\pi f_0 t)$$

Que no difiere de la anterior únicamente en un retardo ya que

$$y(t-t_0) = x(t-t_0)\cos(2\pi f_0 (t-t_0))$$

El sistema definido mediante la transformación

$$T[x(t)] = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau = y(t)$$

es invariante. En efecto, aplicando a su entrada la misma señal desplazada en tiempo se obtiene

$$T[x(t-t_0)] = \int_{-\infty}^{t} x(\tau - t_0)d\tau$$

Mientras que $$y(t-t_0) = \int_{-\infty}^{t-t_0} x(\tau)d\tau$$

Ambas integrales son idénticas lo que es fácil de demostrar haciendo el cambio $\tau - t_0 = t'$ en la primera de ellas

---

Estabilidad

Un sistema es estable si para cualquier entrada acotada, la salida está acotada.

EJEMPLO 1.2-11

El sistema definido por la transformación

$$T[x[n]] = x^2[n]$$

es estable ya que si la entrada está acotada $|x[n]| \leq A$, la salida también está acotada ya que $|y[n]| \leq A^2$
El sistema definido por la ecuación

$$T[x(t)] = y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$$

no es estable. Para probarlo buscamos la salida al escalón $u(t)$ que evidentemente está acotado $|u(t)| \leq 1$.

$$T[u(t)] = \int_{-\infty}^{t} u(\tau)d\tau = \begin{cases} \int_0^t d\tau & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$
$$= tu(t)$$

Para $t \to \infty$ la señal de salida crece indefinidamente. El sistema anterior puede responder con una salida acotada a algunas señales, por ejemplo $\Pi(t)$, pero la condición de estabilidad debe cumplirse para cualquier señal.

Causalidad

Un sistema es causal si la salida en cualquier instante determinado no depende de valores futuros de la entrada. Todo sistema realizable debe ser causal si la variable independiente *t (o n)* se refiere a tiempo. Si la variable independiente se refiere a posición (distancia), o el sistema realiza un procesado espacial de imágenes, el sistema no causal si puede ser realizable ya que un escalado de la variable independiente es una ampliación o reducción de una imagen, y lo que hemos definido como desplazamiento temporal o retardo es un desplazamiento espacial.

EJEMPLO 1.2-12

El sistema definido por la ecuación

$$T[x(t)] = y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$$

es causal. La salida en un instante determinado depende de los valores de la entrada necesarios para realizar la integral, únicamente contribuyen los valores pasados y presente $x(-\infty)...x(t)$. No contribuyen los valores futuros $x(t^+),... x(\infty)$

El sistema definido por la transformación

$$T[x[n]] = x[n+1]$$

No es causal. La salida en un instante n depende de la entrada en un instante futuro $n + 1$

EJERCICIO 1.2-2

Demostrar, para cada sistema, las siguientes propiedades

Sistema	Linealidad	Invarianza	Causalidad	Estabilidad
$T[x(t)] = x(2t)$	✓	-	-	✓
$T[x(t)] = \frac{dx(t)}{dt}$	✓	✓	✓	-
$T[x[n]] = nx[n-n_0]$	✓	-	si $n_0 > 0$	-
$T[x(t)] = e^{x(t)}$	-	✓	✓	✓
$T[x[n]] = \sum_{k=n-1}^{n+2} x[k]$	✓	-	-	✓
$T[x(t)] = x(t-t_0)$	✓	✓	si $t_0 > 0$	✓
$T[x(t)] = x(t)f(t)$	✓	-	✓	si *f(t)* acotada
$T[x[n]] = x[n-1] - x[1-n]$	✓	-	-	✓
$T[x(t)] = \int_{-\infty}^{t+1} x(t)$	✓	✓	-	-
$T[x(t)] = \cos(x(t))$	-	✓	✓	✓
$T[x(t)] = \begin{cases} Ax(t) & \lvert x(t)\rvert < 1 \\ A\,\mathrm{sgn}(x(t)) & \lvert x(t)\rvert \geq 1 \end{cases}$	-	✓	✓	✓

Tabla 1.2.1

1.3 Sistemas lineales e invariantes

Los sistemas que son a la vez lineales e invariantes (SLI) tienen la siguiente particularidad. Supóngase que una señal *x(t)* admite la siguiente descomposición en función de una señal *f*(*t*)

$$x(t) = \sum_i a_i f(t - t_i)$$

y que se conoce la respuesta del sistema a la señal *f(t)*

$$T\,[f(t)] = g(t)$$

Podemos comprobar que por ser el sistema Lineal e Invariante, la respuesta a x(t) estará formada por una combinación lineal de funciones *g(t)* convenientemente desplazadas. En efecto por ser el sistema lineal, la respuesta a una combinación lineal de señales es la misma combinación lineal de las respuestas a cada una de las señales individuales

$$T[x(t)] = T\left[\sum_i a_i f(t - t_i)\right] = \sum_i a_i T[f(t - t_i)]$$

y por ser el sistema invariante, la respuesta

$$T\,[f(t-t_i)] = g(t-t_i)$$

Por consiguiente, la respuesta a la señal *x(t)* se puede escribir en función de la respuesta conocida *g(t)*

$$T[x(t)] = \sum_i a_i g(t - t_i)$$

EJEMPLO 1.3-13

Sabiendo que la respuesta a $T\,[\Pi(t)] = \Delta(t)$ se pide hallar la salida a la señal *x(t)* representada en la Figura 1.3.24

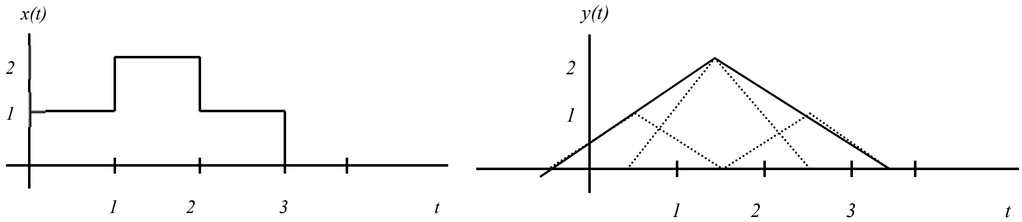


Figura 1.3.24

La señal *x(t)* puede expresarse como combinación lineal de la función $\Pi(t-t_i)$

$$x(t) = \prod(t - 0.5) + 2\prod(t - 1.5) + \prod(t - 2.5)$$

y por tanto la salida es

$$y(t) = \Delta(t - 0.5) + 2\Delta(t - 1.5) + \Delta(t - 2.5)$$

Otra posible representación de x(t) es

$$x(t) = \prod\left(\frac{t - 1.5}{3}\right) + \prod\left(t - 1.5\right)$$

El sistema dado es lineal e invariante, pero no es invariante respecto a un escalado, por tanto no es correcto aplicar la propiedad de linealidad e invarianza como en la siguiente ecuación:

$$\xcancel{y(t) = \Delta\left(\frac{t-1.5}{3}\right) + \Delta(t-1.5)}$$

1.3.1 Respuesta impulsional de SLI discretos. Ecuación de convolución.

Al definir la secuencia delta *δ[n]* vimos que cualquier secuencia se puede expresar como:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k] \tag{1.3. 33}$$

que podemos interpretar, como en el apartado anterior, que cualquier secuencia se puede expresar como una combinación lineal de deltas cada una de ellas ponderadas por el valor de la secuencia donde está la delta. Si hacemos pasar esta secuencia por un sistema lineal, a la salida se obtiene:

$$\begin{aligned} T\big[x[n]\big] &= T\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]\right] = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} T\big[x[k]\delta[n-k]\big] = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]T\big[\delta[n-k]\big] \end{aligned}$$

La salida es una combinación lineal de las respuestas a cada muestra de la secuencia de entrada.

Si la respuesta a la delta en el origen *δ[n]* la denominamos *h[n],* si el sistema es invariante, la respuesta a una entrada desplazada *δ[n-k]* será *h[n-k]*. Por lo tanto si el sistema además de lineal es invariante

$$\begin{aligned} T\big[x[n]\big] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]T\big[\delta[n-k]\big] = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \end{aligned}$$

Y la salida de un sistema lineal e invariante a cualquier secuencia puede calcularse conociendo únicamente la respuesta al impulso unidad (delta en el origen). Esta ecuación se denomina ecuación de convolución.

$$T\big[x[n]\big] = y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \tag{1.3. 34}$$

EJEMPLO 1.3-14

Supongamos un sistema LI con respuesta impulsional h[n]= δ[n]-δ[n-2]. A su entrada se aplica la secuencia x[n] = δ[n]+2δ[n-1]+3δ[n-2]+4δ[n-3]. Hallar la salida.

Cada uno de los sumandos x[k] δ[n-k] genera a la salida x[k]h[n-k] como se muestra en la figura. La señal resultante es la suma componente a componente de cada sumando.

$$
\begin{aligned}
y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = \\
&= h[n] + 2h[n-1] + 3h[n-2] + 4h[n-3] = \\
&= \delta[n] - \delta[n-2] + 2\delta[n-1] - 2\delta[n-3] + 3\delta[n-2] - 3\delta[n-4] + 4\delta[n-3] - 4\delta[n-5] = \\
&= \delta[n] + 2\delta[n-1] + 2\delta[n-2] + 2\delta[n-3] - 3\delta[n-4] - 4\delta[n-5]
\end{aligned}
$$

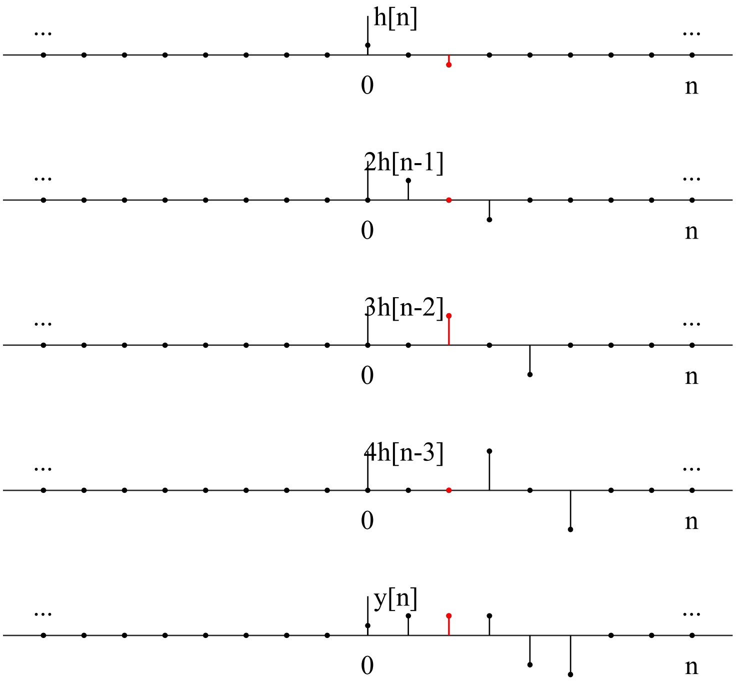


Figura 1.3.25

Para señales más complicadas que las del ejemplo, es habitual realizar la convolución teniendo en cuenta que la salida en un instante n=n_0 viene dada por:

$$y[n_0] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n_0-k]$$

Es decir, se multiplica la señal de entrada x[k] por la respuesta impulsional girada y desplazada n_0 muestras y se suman todos los valores del producto resultante. Repitiendo el procedimiento para todos los valores de n (-∞,∞) se obtiene la salida deseada. La figura 1.3.3 ilustra este procedimiento. Se muestra la señal x[k] y la señal h[n-k] en función de k para distintos valores de n, concretamente, n=-3, n=1 y n=2

Para n<0 el producto es $x[k]h[n-k]=0$ y la suma y[n]=0 para n<0.

Para n=1 el producto es $x[k]h[1-k] = \begin{cases} 2 & k=1 \\ 0 & resto \end{cases}$ y la suma es y[1]=2.

Para n=2 el producto es $x[k]h[2-k]=\begin{cases}3 & k=2\\ -1 & k=0\\ 0 & resto\end{cases}$ y la suma y[2]=3-1=2

Se deja como ejercicio comprobar los demás valores de la salida:
y[0]=1; y[3]=4-2=2; y[4]=-3; y[5]=-4; y[n]=0 para n>5

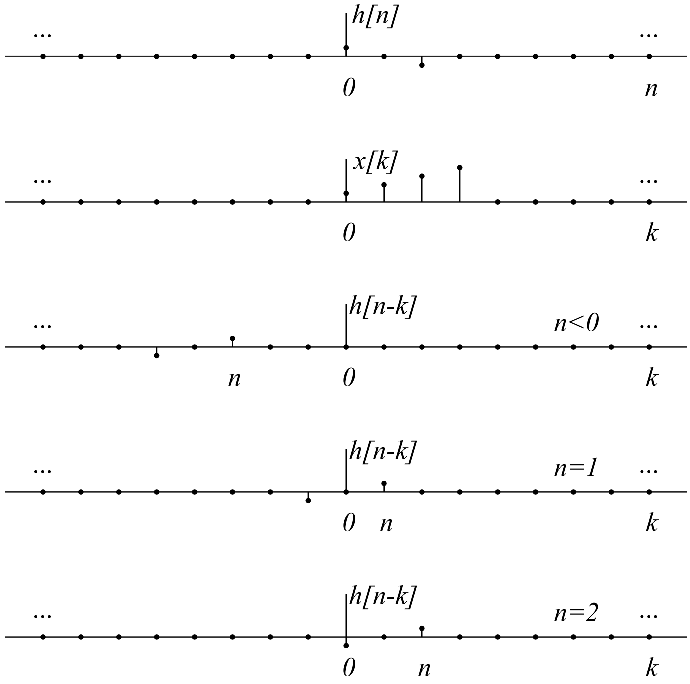


Figura 1.3.26

Con ayuda de la figura es fácil ver que lo que hace el sistema para calcular la salida en un instante n, es restar la muestra n y la n-2 de la señal de entrada. Matemáticamente lo podemos comprobar fácilmente, sustituimos h[n-k] en la expresión (1.3.2)

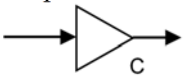
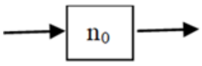
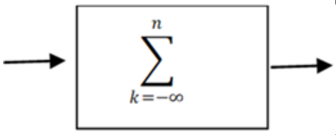
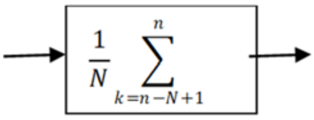
$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k][\delta[n-k]-\delta[n-k-2]]$$

Separando los dos sumandos y utilizando (1.3.1) obtenemos:

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]\delta[n-k]-\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]\delta[n-k-2]=x[n]-x[n-2]$$

EJEMPLO 1.3-15

Respuesta impulsional de sistemas LI en tiempo discreto. La siguiente tabla muestra varios ejemplos de sistemas lineales e invariantes básicos, su respuesta impulsional, y la relación entrada y salida. Se deja como ejercicio la verificación de las propiedades de linealidad e invarianza para cada uno de ellos y comprobar las expresiones mostradas en la tabla.

Sistema	*Relación entrada-salida*	*Respuesta impulsional*
Amplificador 	$y[n] = Cx[n]$	$h[n] = C\delta[n]$
Retardador de n_0 muestras 	$y[n] = x[n-n_0]$	$h[n] = \delta[n-n_0]$
Acumulador 	$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k] = x[n] + y[n-1]$	$h[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta[k] = u[n]$
Media de N muestras 	$y[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=n-N+1}^{n} x[k]$	$h[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=n-N+1}^{n}\delta[n] = \frac{1}{N}[u[n]-u[n-N]] = \frac{1}{N}p_N[n]$

EJEMPLO 1.3-16

Calcular la convolución entre $x[n] = a^n u[n]$ y $h[n] = p_4[n]$.

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

A partir de la figura, observamos tres casos diferentes:

Para n<0 *x*[*k*] y *h*[*n-k*] no se solapan, su producto *x*[*k*] y *h*[*n-k*] =0 y por tanto y[n]=0

Para $0 \le n \le 3$ x[k] y h[n-k] se solapan en un intervalo $y[n] = \sum_{k=0}^{n} a^k u[k] = \sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$

Para $n > 3$ x[k] y h[n-k] se solapan totalmente $y[n] = \sum_{k=n-3}^{n} a^k = \frac{a^{n-3}-a^{n+1}}{1-a}$

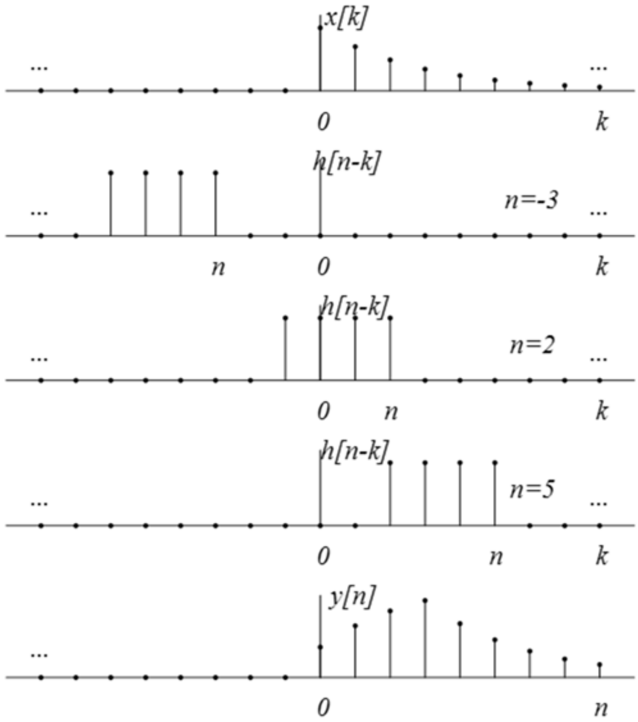


Figura 1.3.27

1.3.2 Respuesta impulsional de SLI continuos. Ecuación de convolución.

Una caracterización habitual de T[.] es la conocida ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes:

$$\sum_{i=0}^{N} a_i \frac{d^i x(t)}{dt^i} = \sum_{j=0}^{M} b_j \frac{d^j y(t)}{dt^j}$$

Esta ecuación es de difícil solución y manipulación y obliga a entrar a considerar cómo está realizado el circuito, es decir, requiere conocer los coeficientes y no es un método experimental de análisis de sistemas lineales. En este apartado vamos a ver cómo el impulso unidad se puede utilizar para generar un gran número de señales y este hecho, junto con las propiedades de superposición e invarianza en el tiempo, nos va a llevar a una completa caracterización de cualquier sistema lineal e invariante en términos de la respuesta al impulso unidad.

Cuando vimos las propiedades fundamentales de la función $\delta(t)$encontramos:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

Esta ecuación indica que la señal $x(t)$ puede expresarse como una combinación lineal de funciones $\delta(t)$ desplazadas en tiempo. En un sistema lineal vimos que

$$T[L[x_i(t)]] = L[T[x_i(t)]]$$

Vamos ahora a aplicar esta propiedad. Aplicando x(t) a un sistema lineal e invariante se tiene:

$$T[x(t)] = T\left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau\right]$$

Por ser el sistema lineal, y dado que *x(τ)* no depende de *t*, es el factor de escala de cada función individual,

$$T\left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau\right] = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)T\left[\delta(t-\tau)\right]d\tau$$

Llamando *h(t, τ)* a la respuesta de un sistema cuando a la entrada se aplica *δ(t- τ)*

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)T\left[\delta(t-\tau)\right]d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t,\tau)d\tau$$

Si el sistema, es invariante, h(t,τ) depende únicamente de la diferencia de tiempos h(t-τ). En efecto, llamando h(t) a la respuesta del sistema a la δ(t)

$$h(t) = T\left[\delta(t)\right]$$

Por ser invariante $$T\left[\delta(t-t_0)\right] = h(t-t_0)$$

y por lo tanto al ser el sistema lineal e invariante

$$T\left[x(t)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)T\left[\delta(t-\tau)\right]d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

Por lo que queda la ecuación de convolución

$$T\left[x(t)\right] = y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \qquad (1.3.\ 35)$$

La convolución se representa por un asterisco

*y(t) = x(t) * h(t)*

Nótese que si el sistema es variante, la respuesta a *δ(t- τ)* no depende de la diferencia de tiempos, no es *h(t-τ)*, y por tanto la ecuación de convolución no aplica

1.3.3 Propiedades de la convolución de señales continuas y de secuencias

Conmutativa *x(t) * h(t) = h(t) * x(t)*

*x[n] * h[n] = h[n] * x[n]*

Asociativa $[x(t) * h_1(t)] * h_2(t) = x(t) * [h_1(t) * h_2(t)]$

$[x[n] * h_1[n]] * h_2[n] = x[n] * [h_1[n] * h_2[n]]$

Distributiva respecto a la suma

$x(t) * [h_1(t) + h_2(t)] = x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t)$

$x[n] * [h_1[n] + h_2[n]] = x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n]$

Elemento neutro *x(t) * δ(t) = x(t)*

*x[n] * δ[n] = x[n]*

*δ(t) * δ(t) = δ(t)*

Esta última igualdad debe interpretarse como un “se comporta igual que *δ(t)* como funcional”

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t')\delta(t')dt'\,dt = \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t')\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\delta(t-t')dt'\,dt$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t')x(t')dt'$$
$$= x(0)$$

La propiedad conmutativa se demuestra con un cambio de variable y las demás con algunas manipulaciones de las integrales. Estas propiedades se interpretan de la siguiente manera como interconexión de sistemas (es análogo para señales y sistemas discretos):

Conmutativa

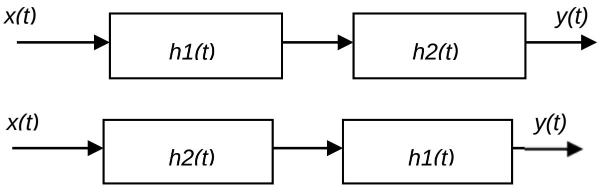


Figura 1.3.28

Asociativa

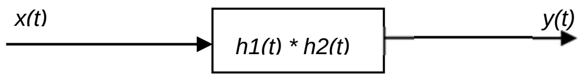


Figura 1.3.29

Distributiva

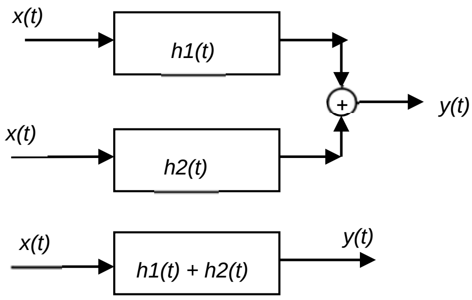
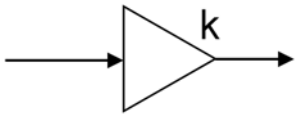
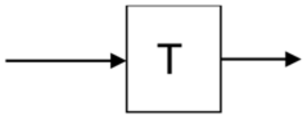
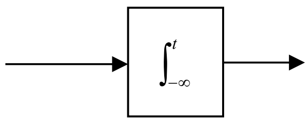
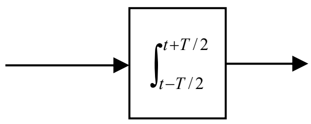
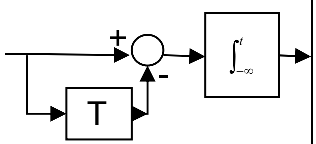
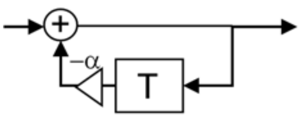


Figura 1.3.30

EJEMPLO 1.3-17

Respuesta impulsional de sistemas LI en tiempo continuo. La siguiente tabla muestra varios ejemplos de sistemas lineales e invariantes básicos, su representación en forma de diagrama, la relación entrada y salida y la respuesta impulsional. Se deja como ejercicio la verificación de las propiedades de linealidad e invarianza para cada uno de ellos.

Esquema	*Relación entrada-salida*	*Respuesta impulsional*
Amplificador 	$y(t) = k\,x(t)$	$h(t) = k\delta(t)$
Retardador 	$y(t) = x(t-T)$	$h(t)= \delta(t-T)$
Integrador 	$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$	$h(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau = u(t)$
Alisador 	$y(t) = \int_{t-T/2}^{t+T/2} x(\tau)d\tau$	$h(t) = \int_{t-T/2}^{t+T/2} \delta(\tau)d\tau = u(t+T/2)-u(t-T/2)$ $= \prod\left(\frac{t}{T}\right)$
Alisador causal 	$y(t) = \int_{-\infty}^{t} [x(\tau)-x(\tau-T)]d\tau =$ $= \int_{t-T}^{t} x(\tau)d\tau$	$h(t) = \int_{-\infty}^{t} [\delta(\tau)-\delta(t-T)]d\tau = u(t)-u(t-T$ $= \prod\left(\frac{t-T/2}{T}\right)$
Reverberador 	$y(t) = x(t)-\alpha y(t-T)$	$h(t) = \delta(t) - \alpha\delta(t-T) + \alpha^2\delta(t-2T) + \cdots$ $= \sum_{0}^{\infty} (-\alpha)^n \delta(t-nT)$

El sistema caracterizado por la relación

$$y(t) = x(t)\cos 2\pi f_0 t$$

no es invariante.

$$T[\delta(t)] = \delta(t)\cos 2\pi f_0 t$$

$$T[\delta(t-t_0)] = \delta(t-t_0)\cos 2\pi f_0 t$$

$$h(t,\tau) = T[\delta(t-\tau)] = \delta(t-\tau)\cos 2\pi f_0 t = \delta(t-\tau)\cos 2\pi f_0 \tau$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)\cos 2\pi f_0 \tau\, d\tau$$

$$= x(t)\cos 2\pi f_0 t$$

EJEMPLO 1.3-18

Convolución de una exponencial decreciente y el escalón. Sean $x(t) = u(t)$ y $h(t) = e^{-\alpha t}\,u(t)$

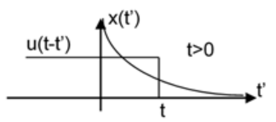
$$
\begin{aligned}
y(t) &= x(t) * h(t) = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} u(t')e^{-\alpha t'}u(t-t')dt'
\end{aligned}
$$

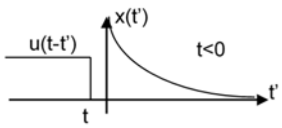
Y teniendo en cuenta la definición del escalón:

$$
\begin{aligned}
u(t-t') &= \begin{cases} 0 & t-t' < 0 \\ 1 & t-t' > 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & t' > t \\ 1 & t' < t \end{cases}
\end{aligned}
$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-\alpha t'}u(t')dt'$$

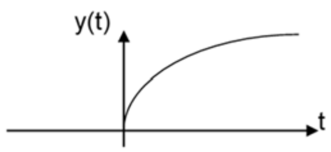
Debido a u(t') el integrando es cero para t'<0 y los límites de integración se pueden escribir según





$$y(t) = \begin{cases} \int_{0}^{t} e^{-\alpha t'}dt' & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

Y resolviendo la integral



$$y(t) = \frac{1}{\alpha}\left(1 - e^{-\alpha t}\right)u(t)$$

Figura 1.3.31

EJEMPLO 1.3-19

Convolución entre una exponencial decreciente y un pulso rectangular

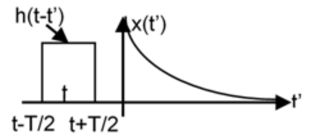
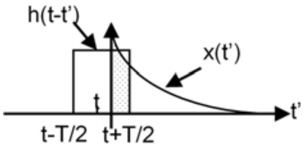
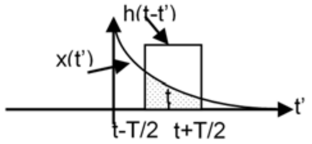
Sean $x(t) = \prod\left(\frac{t}{T}\right)$ y $h(t) = e^{-\alpha t}\,u(t)$

$$
\begin{aligned}
y(t) &= x(t) * h(t) = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} u(t')e^{-\alpha t'}\prod\left(\frac{t-t'}{T}\right)dt'
\end{aligned}
$$

Debido a u(t') el integrando es cero para t'<0 y los límites de integración se pueden escribir según

$$y(t)=\int_0^{\infty} e^{-\alpha t'}\prod\left(\frac{t-t'}{T}\right)dt'$$

El integrando se anula en un entorno de duración T centrado en $t' = t$, como para cada valor de t, tendremos posiciones relativas del pulso y la exponencial distintas, nos ayudamos de un gráfico para verlas mejor.

	Para $t < -T/2$ las dos funciones no se solapan, el integrando es cero y por tanto la integral es cero	$y(t) = 0$
	Para $-T/2 < t < T/2$ las dos funciones se solapan únicamente en el intervalo $0 < t' < t + T/2$ y su producto en ese intervalo es $e^{-\alpha t'}$	$y(t)=\int_0^{t+T/2} e^{-\alpha t'}dt' =$ $=\frac{1}{\alpha}\left(1-e^{-\alpha(t+T/2)}\right)$
	Para $t > T/2$ las dos funciones se solapan en el intervalo $t-T/2 < t' < t+T/2$ y su producto en ese intervalo es $e^{-\alpha t'}$	$y(t)=\int_{t-T/2}^{t+T/2} e^{-\alpha t'}dt' =$ $=\frac{-1}{\alpha}\left(e^{-\alpha(t+T/2)}-e^{-\alpha(t-T/2)}\right)$

La figura muestra la salida y(t)

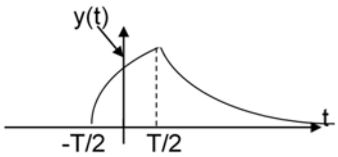


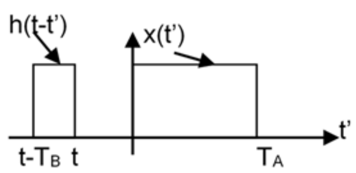
Figura 1.3.32

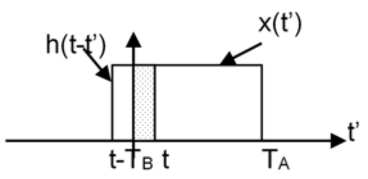
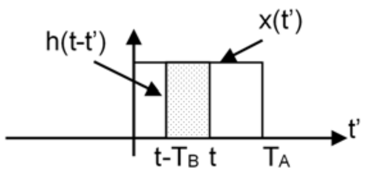
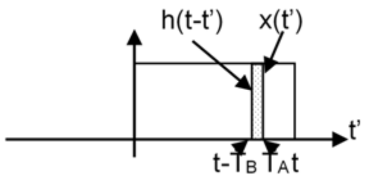
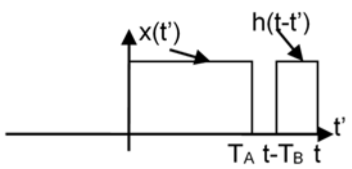
EJEMPLO 1.3-20

Calcular la convolución de dos pulsos. Sean $x(t) = \prod\left(\frac{t-T_A/2}{T_A}\right)$ y $h(t) = \prod\left(\frac{t-T_B/2}{T_B}\right)$

$$y(t) = x(t) * h(t) =$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\prod\left(\frac{t'-T_A/2}{T}\right)\prod\left(\frac{t-T_B/2-t'}{T_B}\right)dt'$$

El integrando se anula según el valor de t en el que busquemos la salida ya que las posiciones relativas de los pulsos harán que el integrando se anule. Observamos las distintas posiciones relativas:

	Para $t < 0$ las dos funciones no se solapan, el integrando es cero y por tanto la integral es cero	$y(t) = 0$

	Para $0 < t < T_B$ las dos funciones se solapan únicamente en el intervalo $0 < t' < t$ y su producto en ese intervalo es 1	$y(t) = \int_0^t dt' = t$
	Para $T_B < t < T_A$ las dos funciones se solapan en el intervalo $t\text{-}T_B < t' < t$ y su producto en ese intervalo es 1	$y(t) = \int_{t-T_B}^{t} dt' = T_B$
	Para $T_A < t < T_A+T_B$ las dos funciones se solapan en el intervalo $t\text{-}T_B < t' < T_A$ y su producto en ese intervalo es 1	$y(t) = \int_{t-T_B}^{T_A} dt' =$ $= T_A + T_B - t$
	Para $t > T_A+T_B$ las funciones no se solapan, su producto es cero.	$y(t) = 0$

La figura muestra la salida y(t)

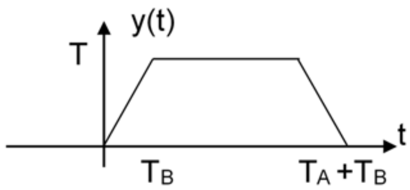


Figura 1.3.33

La duración del trapecio es la suma de las duraciones de los dos rectángulos. Si $T_A=T_B$ el resultado es un triángulo. $\prod(t/T) * \prod(t/T) = T\Delta(t/T)$

EJERCICIO 1.3-1

Sea una señal x(t) de duración T_x comprendida entre t_{xini} y t_{xfin} y una señal y(t) de duración T_y comprendida entre t_{yini} y t_{yfin} . Comprobar que la señal z(t)=x(t)*y(t) tiene una duración $T_z = T_x+T_y$ y que está comprendida en el intervalo $t_{zini}=t_{xini}+t_{yini}$ y $t_{zfin}=t_{xfin}+t_{yfin}$

Sea una secuencia x[n] de duración N_x comprendida entre n_{xini} y n_{xfin} y una señal y[n] de duración N_y comprendida entre n_{yini} y n_{yfin} . Comprobar que la secuencia z[n] =x[n] *y[n] tiene una duración $N_z = N_x+N_y-1$ y que está comprendida en el intervalo $n_{zini}=n_{xini}+n_{yini}$ y $n_{zfin}=n_{xfin}+n_{yfin}$

1.3.4 Relación entre la respuesta impulsional y las propiedades de los SLI

Hemos caracterizado completamente un sistema lineal e invariante en el tiempo en función de su respuesta al impulso unidad mediante la integral de convolución para señales y sistemas continuos:

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)h(\tau)d\tau = \\
&= x(t) * h(t)
\end{aligned}
$$

Y también para señales y sistemas discretos:

$$
\begin{aligned}
y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n-k]h[k] = \\
&= x[n] * h[n]
\end{aligned}
$$

Ahora vamos a ver algunas propiedades de los sistemas lineales e invariantes en función de la respuesta al impulso:

Causalidad. Un sistema Lineal e Invariante es causal si y sólo si

$$h(t) = 0 \ \ \forall t < 0 \qquad (1.3.36)$$

A partir de la integral de convolución y sustituyendo la expresión (1.3.36) se tiene

$$y(t) = \int_{0}^{\infty} x(t-\tau)h(\tau)d\tau$$

y se observa, a partir de los límites de integración que la salida en el instante t depende únicamente de valores pasados y presentes de la entrada $x(t-\infty), \ldots x(t)$ ya que el resto de valores de τ no intervienen en el cálculo de la integral. En un sistema L.I. si $x(t) = 0,\ t < t_0$, se cumple que $y(t) = 0,\ t < t_0$ Se deja la demostración como ejercicio.

En el dominio discreto, un sistema Lineal e Invariante es causal si:

$$h[n] = 0 \ \ \forall n < 0$$

A partir de la ecuación de convolución, sustituyendo esta condición obtenemos:

$$
\begin{aligned}
y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n-k]h[n] = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} x[n-k]h[n]
\end{aligned}
$$

Donde se evidencia que la salida solo depende de x[n]….x[n-∞]

Estabilidad Un sistema Lineal e Invariante es estable si se cumple:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty \qquad (1.3.37)$$

La condición es suficiente puesto que si aplicamos una entrada acotada $|x(t)| < A$, la salida

$$\begin{aligned}\left|y(t)\right| &= \left|\int_{-\infty}^{\infty} x(t-t')h(t')dt'\right| \le \\ &\le \int_{-\infty}^{\infty} \left|x(t-t')h(t')\right| dt' = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left|x(t-t')\right| \left|h(t')\right| dt' \le \\ &\le A\int_{-\infty}^{\infty} \left|h(t')\right| dt'\end{aligned}$$

Que estará acotado si se cumple la condición (1.3.37). La condición es necesaria. Si no se cumple, entradas acotadas pueden dar salidas no acotadas. Por ejemplo, formamos la señal

$$x(t) = \mathrm{sgn}\left[h(-t)\right] = \begin{cases} 0 & si\ h(-t) = 0 \\ \dfrac{h(-t)}{\left|h(-t)\right|} & si\ h(-t) \ne 0 \end{cases}$$

la salida

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(-\tau)}{\left|h(-\tau)\right|} h(t-\tau)d\tau$$

$$y(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(-\tau)}{\left|h(-\tau)\right|} h(-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \left|h(-\tau)\right| d\tau < \infty$$

La salida en el origen está acotada sólo si se cumple la condición (1.3.37)

Análogamente, la condición de estabilidad de un sistema Lineal e Invariante en el dominio discreto es que su respuesta impulsional sea módulo sumable

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|h[n]\right| < \infty$$

EJEMPLO 1.3-21

Determinar si es estable el sistema integrador definido por

$$h(t) = u(t)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|h(t)\right| dt = \int_{0}^{\infty} dt = \infty$$

El sistema no es estable

1.3.5 Sistemas definidos por ecuaciones en diferencias finitas

Un grupo especialmente importante dentro de los sistemas discretos lineales e invariantes es el de los sistemas que su relación entrada-salida se puede caracterizar mediante una ecuación en diferencias finitas. Es el equivalente a las ecuaciones en derivadas parciales para las señales analógicas.

$$\sum_{k=0}^{N} a_k\, y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k\, x[n-k] \tag{1.3.38}$$

Despejando y(n), y asumiendo que a_0=1 (en caso contrario siempre se pueden normalizar los coeficientes para que se cumpla la condición anterior), se obtiene:

$$y(n) = \underbrace{\sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]}_{\text{Parte no recursiva}} - \underbrace{\sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k]}_{\text{Parte recursiva}} \qquad (1.3.39)$$

Esta ecuación se puede interpretar como una combinación lineal de la señal de entrada x(n) y copias retrasadas de ella misma, y copias retrasadas de la propia señal de salida (recursividad o realimentación).

Respuesta impulsional
Empezaremos por dos ejemplos que seguidamente generalizaremos.

EJEMPLO 1.3-22

Supongamos en primer lugar el sistema:

y[n] = (x[n]+x[n-1]+x[n-2])/3

Este sistema consta únicamente de la parte no recursiva con M=2 y N=0
La respuesta impulsional de este sistema es

h[n]=(1/3) (δ[n]+ δ [n-1]+ δ [n-2])

EJEMPLO 1.3-23

Supongamos ahora el sistema

y[n]-ay[n-1]=x[n]

y despejando y[n]

y[n] =x[n] + ay[n-1]

Este sistema es recursivo con N=1. Para hallar la respuesta impulsional ponemos a la entrada x[n]= δ[n]. Para hallar y[0] precisamos el valor de y[-1], las *condiciones iniciales (CI)*. Supondremos que el sistema inicialmente está en *reposo*, es decir que las condiciones iniciales son nulas: y[-1]=0. Dando valores obtenemos:

h[0]=1
h[1]= 0 +a = a
$h[2]=a^2$
$h[3]=a^3$
….
$h[n] = a^n u[n]$

Este mismo sistema se puede expresar como:

y[n-1]=(-x[n]+y[n])/a

o lo que es lo mismo:

y[n]=(-x[n+1]+y[n+1])/a

Suponiendo condiciones iniciales nulas y anticausal: h[n]=0, n>0, de forma análoga a la anterior se obtiene:

$h[n]=-a^n u[-n-1]$

La misma ecuación en diferencias puede definir dos sistemas distintos. Es preciso siempre añadir las condiciones iniciales y si el filtro es causal o no.

Generalizando los ejemplos anteriores, y suponiendo N=0 tenemos

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] \qquad (1.3.40)$$

La salida es una combinación de valores pasados y presente únicamente de la entrada, por esta razón es no recursivo. La ecuación (1.3.8) se puede interpretar como una convolución. La respuesta impulsional:

$$h[n] = \begin{cases} b_n & 0 \le n \le M \\ 0 & resto \end{cases}$$

Los sistemas con N=0 son sistemas de respuesta impulsional finita FIR (Finite Impulse Response)

Si N≠0 la ecuación en diferencias es realmente una ecuación de recurrencia

$$y(n) = \underbrace{\sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k)}_{\text{Parte no recursiva}} - \underbrace{\sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k)}_{\text{Parte recursiva}}$$

La respuesta impulsional de los sistemas recursivos no viene definida únicamente por la ecuación en diferencias sino que precisa conocer las condiciones iniciales y[-1], y[-2]…y[-N]. Por ahora asumiremos CI nulas: y[-1] = y[-2] =…= y[-N] = 0 y causalidad.
Suponiendo N>M tenemos

$$h[n] = \begin{cases} b_n - \sum_{k=1}^{n} a_k h(n-k) & 0 \le n \le N, M \\ -\sum_{k=1}^{N} a_k h(n-k) & n > N, M \end{cases}$$

Normalmente los sistemas con N≠0 son de Respuesta Impulsional Infinita IIR (Infinite Impulse Response). Se deja como ejercicio hallar la respuesta impulsional de un sistema recursivo (2) con N<M

Realizaciones
Desarrollando la ecuación (1.3.7) en forma de diagrama de bloques utilizando retardadores de una muestra (módulos etiquetados como z^{-1} tal como se verá al hablar de la transformada Z), sumadores y multiplicadores por constantes (coeficientes), la ecuación (1.3.7) puede representarse a partir del siguiente esquema genérico válido para cualquier sistema definido por una ecuación en diferencias finitas. Esta implementación se denomina *forma directa I* por tratarse de la implementación directa de la ecuación anterior.

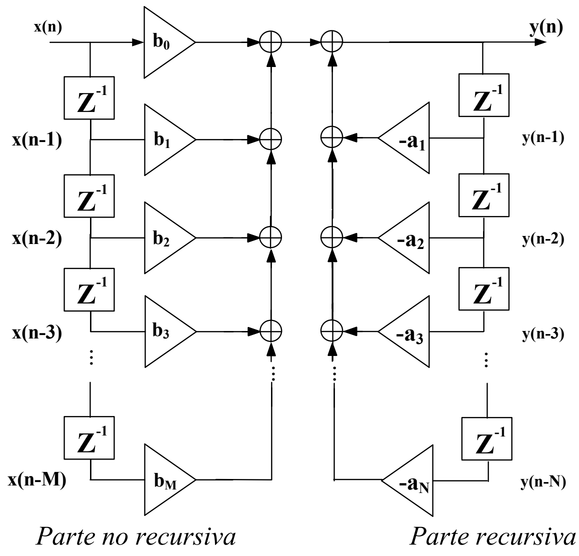


Figura 1.3.34

Este diagrama se puede interpretar como dos subsistemas en cascada, uno no recursivo (FIR) y otro recursivo (IIR). Conmutando de orden los dos subsistemas, y agrupando los módulos retardadores, se obtiene un diagrama más compacto que requiere menos retardos (memorias en el momento de implementar el sistema). A esta estructura se le denomina *forma directa II* o, por tratarse de una implementación más eficiente, *forma canónica*.

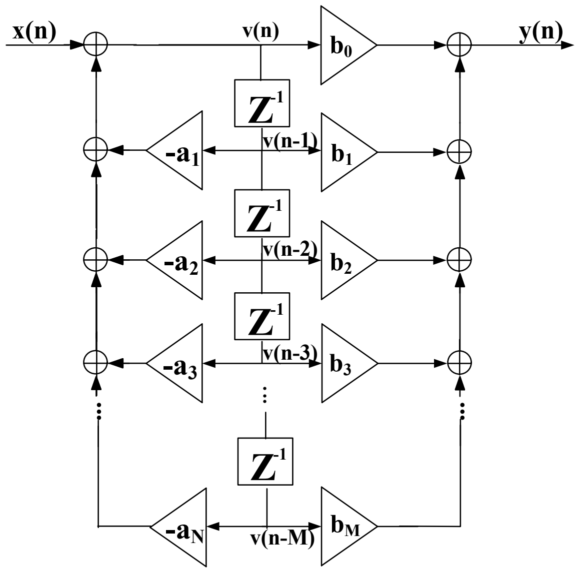


Figura 1.3.35

En el momento de implementar el sistema anterior, y con la finalidad de disminuir los errores provocados por el redondeo de los coeficientes se puede replantear el diseño de un sistema IIR genérico de orden elevado (N>2) como el descrito en el esquema anterior en base a la concatenación en cascada de estructuras IIR de primer y segundo orden como se muestra en la siguiente figura. En este caso los valores de los coeficientes (A's y B's) deben calcularse para que ambos sistemas resulten equivalentes (el uso de la transformada Z simplifica esta tarea).

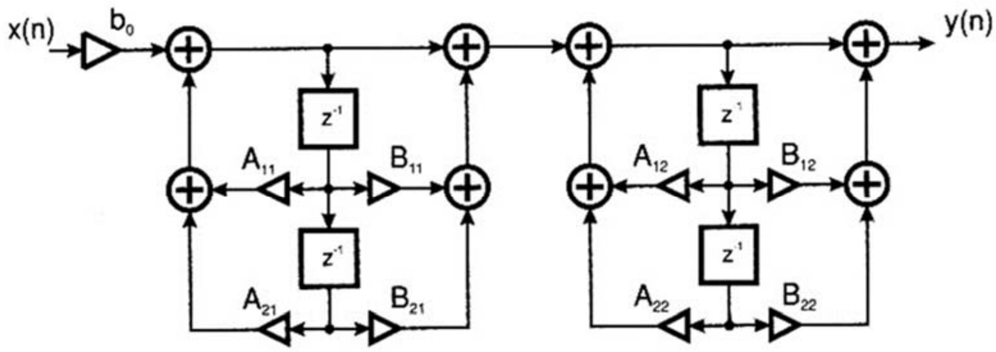


Figura 1.3.36