

FACULTAT DE MATEMÀTIQUES I ESTADÍSTICA

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA - BARCELONATECH

Apunts d'Àlgebra Lineal (Primer curs del Grau de Matemàtiques)

Alex Batlle Casellas

February 15, 2019

Índex

1	Matrius, determinants i sistemes lineals.	2
2	Espais vectorials.	3
2.1	Operacions a \mathbb{R}^n	3
2.2	Espai vectorial sobre un cos \mathbb{K}	3
2.3	Subespais vectorials.	5
3	Aplicacions lineals	7
4	Diagonalització	8

1 Matrius, determinants i sistemes lineals.

2 Espais vectorials.

Considerem el conjunt d' n -tuples de nombres reals:

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) | x_i \in \mathbb{R}\}.$$

2.1 Operacions a \mathbb{R}^n .

1. **Suma:** Sigui $u = (x_1, x_2, \dots, x_n), v = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Aleshores:

$$u + v = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \in \mathbb{R}^n.$$

2. **Multiplicació per un escalar:** Sigui $u = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R}$. Aleshores:

$$cu = (cx_1, cx_2, \dots, cx_n) \in \mathbb{R}^n.$$

PROPIETATS:

- $u + v = v + u$. (commutativitat)
- $(u + v) + w = u + (v + w)$. (associativitat)
- $\exists \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n : u + \mathbf{0} = u$. (vector zero; notació alternativa, $\vec{0}$)
- $\forall u \in \mathbb{R}^n \exists -u \in \mathbb{R}^n : u + (-u) = \mathbf{0}$.
- $c(u + v) = cu + cv$. (distributivitat)
- $(c + d)u = cu + du$. (distributivitat)
- $c(du) = (cd)u$.
- $1u = u$.

2.2 Espai vectorial sobre un cos \mathbb{K} .

Sigui \mathbb{K} un cos commutatiu (per exemple $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$). Un espai vectorial sobre \mathbb{K} (\mathbb{K} -e.v.) és un conjunt de vectors E amb dues operacions $+$ i \cdot .

- $+$: Donats $u, v \in E$ dona un element $u + v$ també d' E .
És una operació commutativa, associativa, té element neutre ($\mathbf{0}$ o $\vec{0}$) i tot $u \in E$ té invers respecte $+$ ($-u$).
- \cdot : Donats $u \in E$ i $c \in \mathbb{K}$ dona un element cu d' E .

La suma i el producte compleixen

$$c(u + v) = cu + cv \quad (c + d)u = cu + du \quad c(du) = (cd)u \quad 1u = u \quad \forall u, v \in E, c, d \in \mathbb{K}.$$

Exemple:

- $\mathbb{K}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) | x_i \in \mathbb{K}\}$ és un \mathbb{K} -e.v. amb la suma i el producte naturals heretats de \mathbb{K} .
- $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ és un \mathbb{K} -e.v. format per matrius de dimensions $m \times n$ amb entrades a \mathbb{K} i les operacions naturals de la suma de matrius i el producte per un escalar.
- El conjunt de polinomis de grau $\leq d$, $\mathbb{R}_d[x] = \{p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_dx^d | a_i \in \mathbb{R}\}$ és un espai vectorial amb la suma de polinomis i el producte per un escalar.
- $\mathbb{R}[x] = \{\text{polinomis en una variable } x \text{ i coeficients en els reals}\}$ és un \mathbb{R} -e.v.
- El conjunt $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ de funcions $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ és un \mathbb{R} -e.v.

PROPIETATS:

1. $0u = \mathbf{0} = c\mathbf{0}$.
2. $(-1)u = -u$.
3. $(-c)u = c(-u) = -(cu) = -cu$.
4. $cu = \mathbf{0} \iff c = 0 \vee u = \mathbf{0}$.

Demostració:

1. Sigui $v = 0u = (0 + 0)u = 0u + 0u = v + v$. Aleshores $v = v + v \iff v + (-v) = v + v + (-v) \iff v = \mathbf{0}$. \square

2. Sigui $v = (-1)u$. Aleshores si $u + v = \mathbf{0}$, $v = -u$.

$$u + v = u + (-1)u = (u_1, \dots, u_n) + (-u_1, \dots, -u_n) = (u_1 - u_1, \dots, u_n - u_n) = (0, \dots, 0) = \mathbf{0}. \square$$

3. $-c = (-1)c \implies (-c)u = (-1)cu = c(-1)u = c(-u) = (-1)cu = -(cu) = -cu$. \square

4. $\implies : cu = \mathbf{0} \wedge c \neq 0 \implies$ **PENDENT D'ACABAR.**

Definició:

Un vector u és combinació lineal dels vectors u_1, u_2, \dots, u_k si existeixen escalars c_1, c_2, \dots, c_k tals que $u = c_1 u_1 + c_2 u_2 + \dots + c_k u_k$. Els escalars c_i són els coeficients de la combinació lineal.

Esbrinar si un vector a \mathbb{K}^n és combinació lineal d'una colecció de vectors donada és equivalent a resoldre un sistema lineal d'equacions:

$$\exists c_1, c_2, \dots, c_k \in \mathbb{K} : u = c_1 u_1 + c_2 u_2 + \dots + c_k u_k?$$

$$c_1 \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{pmatrix} + \dots + c_k \begin{pmatrix} x_{1k} \\ x_{2k} \\ \vdots \\ x_{nk} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1k} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_k \end{pmatrix}$$

Proposició:

Un sistema $Ax = b$ és compatible si i només si b és una combinació lineal de les columnes d' A .

Demostració: $Ax = b$ és compatible $\iff \exists c_1, \dots, c_n$ solució de:

$$\begin{pmatrix} a^1 & \dots & a^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \end{pmatrix} \iff c_1(a^1) + \dots + c_n(a^n) = (b) \iff b \text{ és una combinació}$$

lineal dels vectors columna d' A amb coeficients c_1, \dots, c_n . \square

2.3 Subespais vectorials.

Sigui E un \mathbb{K} -e.v. Aleshores un subconjunt $V \neq \emptyset$ d' E és un subespai vectorial si V és un espai vectorial en si mateix (amb la suma i el producte d' E). Això és equivalent a:

$$\forall u, v \in V \quad \forall c, d \in \mathbb{K} \quad cu + dv \in V.$$

Exemple:

- $V = \mathbb{K}^n$ és un subespai vectorial de \mathbb{K}^n .
- $V = \{\mathbf{0}\}$ és un subespai vectorial de qualsevol E .
- $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = 0, 3z = 0\}$ és un subespai vectorial d' \mathbb{R}^3 .
- $F = \{(a + 2b, 0, b) \in \mathbb{R}^3 \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ és un subespai vectorial d' \mathbb{R}^3 .

IMPORTANT! Els subespais vectorials són **tancats respecte combinacions lineals**.

Proposició:

Sigui $Ax = \mathbf{0}$ un sistema lineal (homogeni), on $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$. Aleshores, el conjunt de solucions $V = \{v \in \mathbb{K}^n | Av = \mathbf{0}\}$ és un subespai vectorial de \mathbb{K} .

Demostració: Si $u \in V$ i $v \in V$, $Au = \mathbf{0}$ i $Av = \mathbf{0}$. Aleshores, $u + v \in V$ i $A(u + v) = Au + Av = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$. \square

Definició:

Siguin v_1, \dots, v_k vectors d' E . El conjunt de totes les combinacions lineals de v_1, \dots, v_k ,

$$\{c_1 v_1 + \dots + c_k v_k | c_1, \dots, c_k \in \mathbb{K}\}$$

s'anomena el **conjunt generat** per v_1, \dots, v_k i s'escriu $[v_1, \dots, v_k]$.

Proposició:

$V = [v_1, \dots, v_k]$ és un subespai vectorial i és el subespai més petit que conté a $\{v_1, \dots, v_k\}$.

Demostració: Siguin $u, v \in V$. Aleshores, $u = x_1 v_1 + \dots + x_k v_k$ i $v = y_1 v_1 + \dots + y_k v_k$, $x_i, y_i \in \mathbb{K}$.

$$\begin{aligned} \implies cu + dv &= (cx_1 + dy_1)v_1 + \dots + (cx_k + dy_k)v_k \text{ és} \\ &\text{combinació lineal de } v_1, \dots, v_k \implies cu + dv \in V. \square \end{aligned}$$

3 Aplicacions lineals

4 Diagonalització

Definició:

Diem que un endomorfisme és *diagonalitzable* a \mathbb{K} si existeix una base v d' E tal que $M_v(f)$ és una matriu diagonal $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.