Problema general d'aproximació

Donat un conjunt I d'abscisses i uns funcions bàsiques $\varphi_0(x), \ldots, \varphi_n(x)$ linealment independents sobre I, i donada una funció $f(x)$ definida a I, volem trobar

$$f_n(x) = a_0\varphi_0(x) + \cdots + a_n\varphi_n(x)$$

tal que l'error $e(x) = f(x) - f_n(x)$ sigui mínim.

Per mesurar l'error podríem prendre diferents normes. Nosaltres prendrem la $\|\ \|_2$ i direm aproximació per mínims quadrats.

- Si $I = \{x_0, \ldots, x_m\}$ és un conjunt discret, parlarem d'aproximació <u>discreta</u>

Prendrem

$$\|e(x)\|_2 = \|f(x) - f_n(x)\|_2 = \left[\sum_{k=0}^{m} |e_k|^2\right]^{1/2}$$

$$e_k = e(x_k)$$

Quan es vol donar una importància diferent als errors e_k, s'introdueixen uns pesos positius ω_k $(k=0 \div m)$ i definim la norma euclidiana ponderada

$$\|e\|_{2,\omega} = \left[\sum_{k=0}^{m} \omega_k |e_k|^2\right]^{1/2}$$

Recordem que al cas discret, donada la xarxa $\{x_i\}_{i=0\div m}$

$$\varphi_0(x), \dots, \varphi_n(x) \ \text{LI} \iff \text{rang}\begin{pmatrix} \varphi_0(x_0) & \dots & \varphi_n(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_0(x_m) & \dots & \varphi_n(x_m) \end{pmatrix} \text{ és màxim}$$

Lema

Si $\{\varphi_j(x)\}_{j=0\div n}$ és LI ~~llavors~~ $\left\|\sum_{j=0}^{n} a_j\varphi_j\right\|_2 = 0 \Rightarrow a_j = 0 \ \forall j$.

Prova

$$0 = \left\|\sum_{j=0}^{n} a_j\varphi_j\right\|_2^2 = \sum_{i=0}^{m}\left(\sum_{j=0}^{n} a_j\varphi_j(x_i)\right)^2 =$$

$$= \left(\sum_{j=0}^{n} a_j\varphi_j(x_0)\right)^2 + \dots + \left(\sum_{j=0}^{n} a_j\varphi_j(x_m)\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sum_{j=0}^{n} a_j\varphi_j(x_0) = 0 \\ \vdots \\ \sum_{j=0}^{n} a_j\varphi_j(x_m) = 0 \end{cases} \quad \text{i} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} \varphi_0(x_0) & \dots & \varphi_n(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_0(x_m) & \dots & \varphi_n(x_m) \end{pmatrix}}_{\text{rang } A = \text{màxim} = n+1}\begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A: \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^{m+1}$$

$$n+1 = \underbrace{\text{rang } A}_{n+1} + \text{Nuc } A \Rightarrow \text{Nuc } A = 0 \Rightarrow a_j = 0 \ \forall j$$

- En el cas d'aproximació continua, $I=[a,b]$

i definim

$$\|e\|_2 = \left[\int_a^b |e(x)|^2\,dx\right]^{1/2}$$

o bé donada una funció pes $w \in \mathcal{C}([a,b])$, $w(x)>0$

a I, definim

$$\|e\|_{2,w} = \left[\int_a^b w(x)\,|e(x)|^2\,dx\right]^{1/2}$$

Es pot comprovar que aquestes definicions compleixen les propietats de norma sobre $\mathcal{C}([a,b])$

NOTA 1. Recordem que ja varem estudiar el cas discret a 1r a Àlgebra lineal numèrica. Aquí considerarem a més el cas continu.

2. Recordem la definició i propietats del producte escalar:

$$(u,v) = \int_a^b w(x)\,u(x)\,v(x)\,dx$$

llavors $\|u\|_{2,w} = (u,u)$

Se satisfà: (i) $(u,u)\geq 0$ i $(u,u)=0 \Leftrightarrow u=0$

(ii) $(u,v)=(v,u)$

(iii) $(a_1u_1+a_2u_2,v) = a_1(u_1,v)+a_2(u_2,v)$, $\forall a_1,a_2 \in \mathbb{R}$

$\forall\, u_1, u_2, u, v$ funcions a I

Definició del problema d'aproximació discreta / contínua

Suposem donades $\varphi_0(x), \dots, \varphi_n(x)$ linealment independents a I

$F_n = \{ f_n = a_0\varphi_0(x) + \dots + a_n\varphi_n(x),\ a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R} \}$

Donada $f(x)$ sobre I, volem $f_n^* \in F_n$ tq

$$\| f - f_n^* \|_2 = \min_{f_n \in F_n} \| f - f_n \|_2$$

on denotem $\| \ \|_2 = \| \ \|_{2,w}$, és a dir volem $a_0^*, \dots, a_n^*$

tal que $f_n^* = a_0^*\varphi_0(x) + \dots + a_n^*\varphi_n(x)$

Veiem ara que aquesta f_n^* existeix i és única

Teorema

Donat I i $\{\varphi_i(x)\}_{i=0 \div n}$ linealment independents,

existeix una única $f_n^* = \sum_{k=0}^{n} a_k^* \varphi_k(x)$ que minimitza

$\| f - f_n \|_2$ a F_n i $\| f - f_n^* \|_2 = \min_{f_n \in F_n} \| f - f_n \|_2$

Prova

Definim $\phi : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$

$(a_0, \dots, a_n) = a \longmapsto \phi(a) = \| f - \sum_{j=0}^{n} a_j \varphi_j \|_2^2$,

Volem el mínim de ϕ per a $a = a^*$ adequat

• $\phi(a) = \left(f - \sum_j a_j \varphi_j, f - \sum_j a_j \varphi_j\right) =$

$$= \|f\|_2^2 - 2\sum_{j=0}^{n} a_j (f, \varphi_j) + \sum_{i,j=0}^{n} a_i a_j (\varphi_i, \varphi_j) =$$

$$= \|f\|_2^2 - 2b^T a + a^T A a$$

on $b = \left((f, \varphi_j)\right)_{j=0 \div n}$

$a = (a_0, \dots, a_n)$

$A = \left((\varphi_i, \varphi_j)\right)_{i,j=0 \div n} = A^T$

• $D\phi(a^*) = -2b + 2a^* A = 0 \Leftrightarrow \boxed{Aa^* = b}$ $\exists!\, a^*$ solució (det $A > 0$) per Sylvester

$A = A^T$

A és definida positiva: $aAa^T = \|\sum_{j=0}^{n} a_j \varphi_j\|_2^2 \geq 0$

$aAa^T = 0 \Leftrightarrow \|\sum_{j=0}^{n} a_j \varphi_j\|_2^2 = 0 \Leftrightarrow \sum_{j=0}^{n} a_j \varphi_j = 0 \quad \forall x \in I \Rightarrow$

propietats $\|\ \|$

Cas continu

$\Rightarrow a_j = 0 \quad \forall j.$

$\{\varphi_j\}_j$ L.I

(Cas discret: vist a 1r)

• a^* és un mínim: Verifiquem que la hessiana és definida positiva:

$$H\phi(a) = 2A$$ ✓

$\boxed{\text{NOTA}}$ Recordem d'ALN de 1r que f_n^* ve caracteritzada per $(f - f_n^*, \varphi_i) = 0 \ \forall i \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(f(x) - \sum_{j=0}^{n} a_j^* \varphi_j(x), \varphi_i(x)\right) = 0 \ \forall i \Leftrightarrow \sum_{j=0}^{n} a_j^* (\varphi_j, \varphi_i) = (f, \varphi_i) \ \forall i \Leftrightarrow \boxed{Aa^* = b}$

Així doncs trobarem $a_0^*, \ldots, a_n^*$ resolent el sistema d'eq. normals

$$\boxed{A a^* = b}$$

Podrem fer-ho amb el mètode de Txolski, calculant primer tots els coeficients d'A, i.e. tots els possibles productes escalars. Podria passar que A fos mal condicionada pel fet de que les φ_j's siguin "poc independents".

Observem, i és el que farem, que si podem fer servir una base de funcions $\{\varphi_j\}_{j=0 \div n}$ ortogonals (i.e. $(\varphi_i, \varphi_j) = 0$ si $i \neq j$), llavors el sistema d'eq. normals esdevé diagonal i immediat de resoldre, i.e.

si $$f_n^*(x) = \sum_{j=0}^{n} c_j^* \varphi_j(x)$$

llavors $$\left[c_j^* = \frac{b_j}{a_{jj}} = \frac{(\varphi_j, f)}{(\varphi_j, \varphi_j)}, \quad j = 0 \div n. \right]$$

Veiem ara com a partir de les $\{\varphi_j\}_{j=0\div n}$ LI obtenim les $\{\psi_j\}_{j=0\div n}$ ortogonals: (mètode de Gram-Schmidt)

Plantegem el sistema

$$\begin{cases} \varphi_0(x) = r_{00}\,\psi_0(x) \\ \varphi_1(x) = r_{01}\,\psi_0(x) + r_{11}\,\psi_1(x) \\ \varphi_2(x) = r_{02}\,\psi_0(x) + r_{12}\,\psi_1(x) + r_{22}\,\psi_2(x) \\ \vdots \\ \varphi_n(x) = r_{0n}\,\psi_0(x) + r_{1n}\,\psi_1(x) + \cdots + r_{nn}\,\psi_n(x) \end{cases}$$

o equivalentment: $(\varphi_0(x) \ldots \varphi_n(x)) = (\psi_0(x) \ldots \psi_n(x)) \begin{pmatrix} r_{00} & \cdots & r_{0n} \\ & r_{11} & \cdots & r_{1n} \\ & & \ddots & \\ & & & r_{nn} \end{pmatrix}$

i el resolem per arbitrari cap endavant:

$\psi_0(x) = \varphi_0(x)$, prenem $r_{00} = 1$ i definim $d_0 = (\psi_0, \psi_0)$

$\psi_1(x) = \varphi_1(x) - r_{01}\,\psi_0(x)$, prenem $r_{11} = 1$, i r_{01} adequat t.q. $(\psi_0, \psi_1) = 0$:

$$(\psi_0, \varphi_1) - r_{01}\underbrace{(\psi_0, \psi_0)}_{d_0} = 0 \Rightarrow r_{01} = \frac{(\varphi_1, \psi_0)}{d_0}$$

i definim $d_1 = (\psi_1, \psi_1)$.

$\psi_2(x) = \varphi_2(x) - (r_{02}\,\psi_0(x) + r_{12}\,\psi_1(x))$ on prenem $r_{22} = 1$

i r_{02}, r_{12} adequats t.q. $(\psi_0, \psi_2) = 0$, $(\psi_1, \psi_2) = 0$:

prenem $r_{02} = \dfrac{(\varphi_2, \psi_0)}{d_0}$, $r_{12} = \dfrac{(\varphi_2, \psi_1)}{d_1}$

Veiem que

$$(\psi_0,\psi_2)=(\psi_0,\varphi_2)-\frac{(\varphi_2,\psi_0)}{\cancel{(\psi_0,\psi_0)}}\cancel{(\psi_0,\psi_0)}-\frac{(\varphi_2,\psi_1)}{(\psi_1,\psi_1)}\underbrace{(\psi_0,\psi_1)}_{=0}=0$$

$$(\psi_1,\psi_2)=(\psi_1,\varphi_2)-\underbrace{\frac{(\varphi_2,\psi_0)}{(\psi_0,\psi_0)}}_{r_{02}}\underbrace{(\psi_1,\psi_0)}_{=0}-\underbrace{\frac{(\varphi_2,\psi_1)}{\cancel{(\psi_1,\psi_1)}}}_{r_{12}}\cancel{(\psi_1,\psi_1)}=0$$

i definim $d_2=(\psi_2,\psi_2)$

En general

$$\frac{(\psi_i,\varphi_j)}{d_i} = \frac{(\varphi_j,\psi_i)}{d_i}$$

$$\begin{cases}\psi_0(x)=\varphi_0(x) & d_0=(\psi_0,\psi_0),\quad r_{00}=1\\ j=0\div n\quad \psi_j(x)=\varphi_j(x)-\displaystyle\sum_{i=0}^{j-1} r_{ij}\,\psi_i(x), & d_j=(\psi_j,\psi_j),\ r_{ij}=\dfrac{(\varphi_j,\psi_i)}{d_i},\end{cases}$$

$$i=0\div j-1,\quad r_{jj}=1$$

o bé

$$\begin{cases}\psi_0(x)=\varphi_0(x)\\ \psi_j(x)=\varphi_j(x)-\displaystyle\sum_{i=0}^{j-1}\frac{(\varphi_j,\psi_i)}{(\psi_i,\psi_i)}\psi_i(x)\end{cases}$$

ie

$$\begin{cases}\psi_0(x)=\varphi_0(x)\\ \psi_1(x)=\varphi_1(x)-\dfrac{(\varphi_1,\psi_0)}{(\psi_0,\psi_0)}\psi_0(x)\\ \psi_2(x)=\varphi_2(x)-\dfrac{(\varphi_2,\psi_0)}{(\psi_0,\psi_0)}\psi_0(x)-\dfrac{(\varphi_2,\psi_1)}{(\psi_1,\psi_1)}\psi_1(x)\\ \vdots\\ \psi_n(x)=\varphi_n(x)-\dfrac{(\varphi_n,\psi_0)}{(\psi_0,\psi_0)}\psi_0(x)-\dots-\dfrac{(\varphi_n,\psi_{n-1})}{(\psi_{n-1},\psi_{n-1})}\psi_{n-1}(x)\end{cases}$$

<u>NOTA</u>. Si volguéssim una base ortonormal, prendríem

$$\tilde{\varphi}_j = \frac{\varphi_j}{\sqrt{(\varphi_j,\varphi_j)}} = \frac{\varphi_j}{\sqrt{d_j}} \qquad j=0\div n.$$

Aquests compleixen $(\tilde{\varphi}_i, \tilde{\varphi}_j) = \delta_{ij}$, $i,j=0\div n$.

Així doncs procedirem així:

(i) De les $\{\varphi_j\}$ calcularem les $\{\varphi_j\}$ ortogonals

(ii) Calculem (φ_i,φ_i)

(iii) Resolem el sistema d'eqs normals, <u>diagonal</u>

$$c_i^* = \frac{(\varphi_i,f)}{(\varphi_i,\varphi_i)} \qquad i=0,\dots,n.$$

(iv) $f_n^*(x) = c_0^*\varphi_0(x) + \dots + c_n^*\varphi_n(x)$

<u>Comentari</u>.

Si $\varphi_0(x),\dots,\varphi_n(x)$ són ortogonals, $f_n^*(x) = \sum_{j=0}^{n} c_j^*\varphi_j(x)$ és l'aproximació mínim-quadràtica, llavors l'error és

$$\boxed{\|f-f_n^*\|^2 = \|f\|^2 - \|f_n^*\|^2}$$

En efecte, $f-f_n^*$ ve caracteritzada perquè $(f-f_n^*,\varphi_j)=0 \ \forall j \Rightarrow$

$\Rightarrow (f-f_n^*, f_n^*) = \langle f-f_n^*, \sum_j c_j\varphi_j(x)\rangle = \sum_j c_j \langle f-f_n^*, \varphi_j\rangle = 0$

llavors $\|f\|^2 = \|f-f_n^*+f_n^*\|^2 \underset{(*)}{=} \|f-f_n^*\|^2 + \|f_n^*\|^2$

<u>Lema</u> (*) Si $f(x), g(x)$ són ortogonals llavors $\|f+g\|^2 = \langle f+g, f+g\rangle = \|f\|^2+\|g\|^2+2\overset{0}{\langle f,g\rangle}$
$= \|f\|^2+\|g\|^2$

Cas d'aproximació polinomial: polinomis ortogonals

Suposem ara $\varphi_0(x), \ldots, \varphi_n(x)$ LI on $\varphi_j(x)$ és un polinomi de grau j (per exemple $\varphi_j(x) = x^j$) i $F_n = P_n$ el conjunt de polinomis de grau $\leq n$.

- Donada $f(x)$ volem trobar l'aproximació mínim quadràtica ie volem $P_n^*(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j^* \varphi_j(x)$

tq $\|f - p_n^*\|_2 = \min_{p_n \in P_n} \|f - p_n\|_2$

- Sabem que el sistema d'eqs normals associades és

$$\sum_{j=0}^{n} (\varphi_i, \varphi_j)\, a_j^* = (\varphi_i, f) \qquad i = 0 \div n.$$

i té una única solució $a_0^*, \ldots, a_n^*$

Com que les eqs normals poden ser mal condicionades,
- El que farem però serà trobar a partir de les φ_j's una família de polinomis ortogonals

- Considerem l'ortogonalitat tant en el cas discret com continu. Utilitzarem 3 propietats:

(1) $(xu, v) = (u, xv) \quad \forall u, v \in P_n$

(2) Donats $\psi_0, \ldots, \psi_i$ amb grau $\psi_j(x) = j$, $\{\psi_j\}_j$ ortogonals ($\Rightarrow$ LI), tot polinomi $p_i(x)$ de grau i s'escriu de manera única com

$$p_i(x) = c_0 \psi_0(x) + \ldots + c_i \psi_i(x)$$

A-9'

T. Pitàgores (Cowen)

Siguin $\{\varphi_j\}_{j=0\div n}$ ortogonals $\Rightarrow \forall \{c_j\}_{j=0\div n}$ $\|\sum_{j=0}^{n} c_j\varphi_j\|_2^2 = \sum_{j=0}^{n} c_j^2 \|\varphi_j\|_2^2$

Prova

Per inducció sobre n

$n=1$ $\quad \|c_0\varphi_0+c_1\varphi_1\|_2^2 = (c_0\varphi_0+c_1\varphi_1, c_0\varphi_0+c_1\varphi_1) =$

$= c_0^2\|\varphi_0\|_2^2 + c_1^2\|\varphi_1\|_2^2$

Suposem-ho cert per a $n-1$, vegem el cas n:

$\|\sum_{j=0}^{n} c_j\varphi_j\|_2^2 = \|\sum_{j=0}^{n-1} c_j\varphi_j + c_n\varphi_n\|_2^2 = \left(\sum c_j\varphi_j + c_n\varphi_n, \sum c_j\varphi_j + c_n\varphi_n\right) =$

$= \left(\sum^{n-1} c_j\varphi_j, \sum^{n-1} c_j\varphi_j\right) + 2c_n \underbrace{\sum_0^{n-1} c_j(\varphi_j,\varphi_n)}_{0} + c_n^2(\varphi_n,\varphi_n)$

$\underset{\text{inducció}}{=} \sum^{n-1} c_j^2\|\varphi_j\|^2 + c_n^2\|\varphi_n\|^2 = \sum^{n} c_j^2\|\varphi_j\|^2$. ✓

Corol·lari $\{\varphi_j\}_{j=0\div n}$ són ortogonals $\Rightarrow$ són l.i.

Prova $\sum c_j\varphi_j(x) = 0 \Rightarrow \|\sum c_j\varphi_j\|_2^2 = 0$

$\| = \sum c_j^2 \underbrace{\|\varphi_j\|^2}_{\neq 0}$, $\underset{\geq 0}{}$ $\Rightarrow c_j^2 = 0 \Downarrow c_j = 0$ ✓ $\forall j$

(3) És complex $(\psi_j, p_i) = 0$ $\forall p_i(x)$ de grau $i<j$:

$$(\psi_j, p_i) = (\psi_j, c_0\psi_0 + \cdots + c_i\psi_i) = \sum_{k=0}^{i} c_k (\psi_j, \psi_k) = 0$$
$$\uparrow_{k<j}$$

Anem ara a construir una família de polinomis ortogonals (associada a un producte escalar i funció $p(x)$). Comencem:

$\psi_0(x) = A_0 \neq 0$. Suposem trobats $\psi_0(x), \dots, \psi_j(x)$ polinomis ortogonals amb $\psi_j(x) = A_j x^j + \dots$

Apliquem el mètode de Gram-Schmidt al conjunt $\psi_0, \dots, \psi_j, \varphi_{j+1}$ on prenem (A) $\varphi_{j+1} = \alpha_j x \psi_j(x)$ amb $\alpha_j \neq 0$ (és grau $j+1$)

Com que $\psi_0, \dots, \psi_j$ són ortogonals només cal trobar $\psi_{j+1}(x) = A_{j+1} x^{j+1} + \dots$ amb $A_{j+1} \neq 0$

Per G-S sabem que

(B) $$\psi_{j+1} = \varphi_{j+1}(x) - \sum_{i=0}^{j} r_{i,j+1} \psi_i(x) \overset{(A)}{=}$$

$$= \alpha_j x \psi_j(x) - \sum_{i=0}^{j-2} r_{i,j+1} \psi_i(x) - r_{j-1,j+1}\psi_{j-1}(x) - r_{j,j+1}\psi_j(x)$$

on $$r_{i,j+1} = \frac{(\varphi_{j+1}, \psi_i)}{(\psi_i, \psi_i)} \underset{(A)}{=} \alpha_j \frac{(x\psi_j, \psi_i)}{d_i} \underset{(1)}{=} \alpha_j \frac{(\psi_j, x\psi_i)}{d_i}$$

és a dir (C) $$r_{i,j+1} = \alpha_j \frac{(\psi_j, x\psi_i)}{d_i}$$

Ara mirem quant val: $r_{i,j+1}$ $\begin{cases} i=0 \div j-2 \\ i=j-1 \\ i=j \end{cases}$

· $i=0\div j-2$: grau $x\psi_i$ = $i+1$ però $i+1 \le j-1 < j$ $\Rightarrow$

$$\underset{(3)}{\Rightarrow} \quad (\psi_j, x\psi_i)=0 \quad \underset{(r)}{\Rightarrow} \quad r_{i,j+1}=0$$

· $i=j-1$

$$r_{j-1,j+1} \underset{(r)}{=} \alpha_j \frac{(\psi_j, x\psi_{j-1})}{d_{j-1}} \underset{def}{:=} \gamma_j$$

· $i=j$

$$r_{j,j+1} = \alpha_j \frac{(\psi_j, x\psi_j)}{d_j} \underset{def}{:=} \alpha_j\beta_j$$

Per tant de (B) tenim

$$\text{(C)} \quad \psi_{j+1}(x) = \alpha_j x\psi_j(x) - \gamma_j\psi_{j-1}(x) - \alpha_j\beta_j\psi_j(x) =$$

$$= \boxed{\alpha_j(x-\beta_j)\psi_j(x) - \gamma_j\psi_{j-1}(x), \quad j \ge 0}$$

per conveni $\psi_{-1}(x)=0$, $\gamma_0=0$

on $\boxed{\alpha_j = \frac{A_{j+1}}{A_j}}$, $j \ge 0$

$\varphi_{j+1} = \alpha_j x\psi_j(x)$

En efecte: de (B) $\underset{\underline{A_{j+1}x^{j+1}+\dots}}{\psi_{j+1}(x)} = \varphi_{j+1}(x) - \underbrace{\sum_{i=0}^{j}\dots}_{\text{grau}\le j} = \alpha_j x\psi_j(x) - \sum_{i=0}^{j}\dots$

$= \underline{\alpha_j A_j x^{j+1}} + \dots$ i ja

$\psi_j(x) = A_j x^j + \dots$

A-12

$$\boxed{\beta_j \underset{\substack{\uparrow \\ \text{de la} \\ \text{def}}}{=} \frac{(\psi_j, x\psi_j)}{d_j} = \frac{(\psi_j, x\psi_j)}{(\psi_j,\psi_j)}, \ j \geq 0}$$

$j \geq 1$

$$\boxed{\gamma_j \underset{\substack{\text{de} \\ \text{la} \\ \text{def}}}{=} \alpha_j \frac{(\psi_j, x\psi_{j-1})}{(\psi_{j-1},\psi_{j-1})} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Veiem} \\ (*)}}{=} \frac{\alpha_j}{\alpha_{j-1}} \frac{(\psi_j,\psi_j)}{(\psi_{j-1},\psi_{j-1})} = \frac{\alpha_j d_j}{\alpha_{j-1} d_{j-1}}}$$

(*) En efecte, de (G)

$$\psi_j(x) = \alpha_{j-1}(x-\beta_{j-1})\psi_{j-1}(x) - \gamma_{j-1}\psi_{j-2}(x) =$$

$$= \alpha_{j-1}x\psi_{j-1}(x) - \alpha_{j-1}\beta_{j-1}\psi_{j-1}(x) - \gamma_{j-1}\psi_{j-2}(x)$$

i ara fem

$$(\psi_j,\psi_j) = (\psi_j, \alpha_{j-1}x\psi_{j-1}) - \alpha_{j-1}\beta_{j-1}\underbrace{\cancel{(\psi_j,\psi_{j-1})}}_{0 \text{ ortog}} - \gamma_{j-1}\underbrace{\cancel{(\psi_j,\psi_{j-2})}}_{0 \text{ ortog}}$$

$$= \alpha_{j-1}(\psi_j, x\psi_{j-1}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\psi_j, x\psi_{j-1}) = \frac{1}{\alpha_{j-1}}(\psi_j,\psi_j) \quad \text{ok.}$$

Resumint tenim la recurrència

(RAPO)

$$\psi_0(x) = A_0 \qquad (\psi_{-1}(x) = 0)$$

$$\psi_{j+1}(x) = \alpha_j (x - \beta_j)\psi_j(x) - \gamma_j \psi_{j-1}(x), \quad j \geq 0$$

amb

$$\alpha_j = \frac{A_{j+1}}{A_j} \qquad j \geq 0$$

$$\beta_j = \frac{(\psi_j, x\psi_j)}{(\psi_j, \psi_j)} = \frac{(\psi_j, x\psi_j)}{d_j}, \quad j \geq 0$$

$$\gamma_j = \frac{\alpha_j}{\alpha_{j-1}} \frac{(\psi_j, \psi_j)}{(\psi_{j-1}, \psi_{j-1})} = \frac{\alpha_j}{\alpha_{j-1}} \frac{d_j}{d_{j-1}}, \quad j \geq 1$$

Comentaris

1. Obtenim de manera única $\psi_{j+1}(x)$ a partir de $\psi_j(x)$, $\psi_{j-1}(x)$ i triant el coeficient principal $A_{j+1} = \alpha_j A_j \neq 0$

2. Si volem polinomis ortogonals mònics ie $A_j = 1$, $j \geq 0$, prendrem $\alpha_j = 1$, $\forall j \geq 0$

3. Usant la (RAPO) (recurrència aproximació amb polinomis ortogonals), llavors la solució del problema d'aproximació per mínims quadrats ve donada per

$$\boxed{p_n^*(x) = \sum_{j=0}^{n} c_j^* \psi_j(x)}$$

on c_j^* és la solució del sistema d'equacions normals ara diagonal:

$$\boxed{c_j^* = \frac{(\varphi_j, f)}{(\varphi_j, \varphi_j)} \qquad j = 0 \div n}$$

Procediment:

- Calculem $\psi_0(x)$

$$\psi_0(x) = A_0 \qquad (A_0 \text{ lliure})$$

- Calculem $\psi_1(x)$:

$$\psi_1(x) = \alpha_0 (x-\beta_0)\psi_0(x) = A_0\alpha_0 (x-\beta_0) \quad \text{amb}$$

$\parallel$ volem

$A_1 x + \cdots$

per tant cal ~~triar~~ α_0 ($\circ A_1$)

$\Rightarrow \quad \dfrac{A_1}{A_0} = \alpha_0$

$$\beta_0 = \frac{(\psi_0, x\psi_0)}{(\psi_0, \psi_0)} \quad \checkmark$$

- Calcule $\psi_2(x) = \alpha_1 (x-\beta_1)\psi_1(x) - \gamma_1 \psi_0(x)$ amb

$\parallel$

$A_2 x^2 + \cdots$ triem A_2 llavors $\dfrac{A_2}{A_1} = \alpha_1 \checkmark$

$\psi_0(x), \psi_1(x) \checkmark$

$$\beta_1 = \frac{(\psi_1, x\psi_1)}{(\psi_1, \psi_1)}$$

$$\gamma_1 = \frac{\alpha_1}{\alpha_0}\frac{(\psi_1, \psi_1)}{(\psi_0, \psi_0)}$$

etc.

Exemple

$$x_i = 10 + \frac{i-1}{5} \qquad i = 1, \dots, 6$$

$$f(x) = 10 - 2x + \frac{x^2}{10}$$

Volem aproximar la taula per mínims quadrats amb

$$\hat{f}(x) = c_0^* + c_1^* x + c_2^* x^2$$

a) Prenem $\varphi_0(x) = 1$, $\varphi_1(x) = x$, $\varphi_2(x) = x^2$

$$\begin{pmatrix} (\varphi_0, \varphi_0) & (\varphi_0, \varphi_1) & (\varphi_0, \varphi_2) \\ (\varphi_1, \varphi_0) & (\varphi_1, \varphi_1) & (\varphi_1, \varphi_2) \\ (\varphi_2, \varphi_0) & (\varphi_2, \varphi_1) & (\varphi_2, \varphi_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0^* \\ c_1^* \\ c_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (f, \varphi_0) \\ (f, \varphi_1) \\ (f, \varphi_2) \end{pmatrix}$$

Segueix pàgina següent

b) A partir de la recurrència, calculem primer els polinomis ortogonals mònics:

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x - 10{,}5, \quad P_2(x) = (x - 10{,}5)^2 - \frac{7}{60}$$

En efecte:

En aquest cas si calculem la matriu A de la equació normal $A=(\varphi_i,\varphi_j))_{i,j}$ s'obté

$$A=\begin{bmatrix} 6 & 63 & 662{,}2 \\ 63 & 662{,}2 & 6967{,}8 \\ 662{,}2 & 6967{,}8 & 73393{,}5664 \end{bmatrix}$$

Si calculem $\|A\|_\infty \simeq 8\cdot 10^4$

i el nombre de condició $\mu(A)=\|A\|_\infty\cdot\|A^{-1}\|_\infty \gtrsim 10^5$.

- Si treballem amb 14 dígits obtenim

$c_0^* = 9{,}9999997437\ldots$

$c_1^* = -1{,}999999511\ldots$

$c_2^* = 0{,}09999999976\ldots$

$\max(|c_0-c_0^*|,|c_1-c_1^*|,|c_2-c_2^*|)=0{,}0000002\ldots$

- Si arrodonim el coeficient a_{33} per $73393{,}6$ s'obté

$c_0^* = 6{,}035\ldots, \quad c_1^* = -1{,}243\ldots, \quad c_2^* = 0{,}0639\ldots$

El que evidencia que tenim un sistema mal condicionat

- O bé si treballessim amb 7 dígits obtindriem

$c_0^* = 8{,}492\ldots \quad c_1^* = -1{,}712\ldots \quad c_2^* = 0{,}0863\ldots$!!

(aproximació dolenta)

Tenim $\{x_0 \to x_5\} = \{10, 10+\frac{1}{5}, \to \underbrace{10+\frac{5}{5}}_{11}\}$

$\boxed{\varphi_0(x) = 1}$ el prenem mònic

$j=0$ $\boxed{\varphi_1(x) = \alpha_0 (x-\beta_0)\varphi_0(x) - \gamma_0 \underbrace{\varphi_{-1}(x)}_{=0} = x - \frac{63}{6} = x - 10{,}5}$

(mònic) $\alpha_0 = \frac{A_1}{A_0} = \frac{1}{1} = 1$

$$\beta_0 = \frac{(\varphi_0, x\varphi_0)}{(\varphi_0, \varphi_0)} = \frac{\sum_{k=0}^{5} x_k}{(\varphi_0, \varphi_0)} = \frac{63}{6} = 10{,}5$$

$$\sum_0^5 x_k = \sum\left(10 + \frac{k}{5}\right) = 60 + \frac{1}{5}\underbrace{\sum k}_{\frac{1+5}{2}\cdot 5} = 63$$

$j=1$ $\boxed{\varphi_2(x) = \alpha_1 (x-\beta_1)\varphi_1(x) - \gamma_1 \underbrace{\varphi_0(x)}_{1} = (x-10{,}5)^2 - \frac{7}{60}}$

(treballant amb 7 dígits $0{,}1166667$)

(mònic)

$$\alpha_1 = \frac{A_2}{A_1} = 1$$

$$\beta_1 = \frac{(\varphi_1, x\varphi_1)}{(\varphi_1, \varphi_1)} = \frac{\sum_{k=0}^{5} x_k (x_k - 10{,}5)^2}{\sum_{k=0}^{5} (x_k - 10{,}5)^2} = \frac{147/20}{7/10} = \frac{147}{14} = 10{,}5$$

$$\gamma_1 = \frac{\alpha_1}{\alpha_0} \frac{(\varphi_1, \varphi_1)}{(\varphi_0, \varphi_0)} = \frac{7/10}{6} = \frac{7}{60}$$

Ara volem $P^*(x) = \hat{f}(x) = d_0^* \underbrace{p_0(x)}_{\varphi_0(x)} + d_1^* \underbrace{p_1(x)}_{\varphi_1(x)} + d_2^* \underbrace{p_2(x)}_{\varphi_2(x)}$

I el sistema d'equacions normals ara és diagonal:

(treballant amb 7 dígits)

$$d_0^* = \frac{(\varphi_0, f)}{(\varphi_0, \varphi_0)} = \frac{\sum_{i=0}^{5} f_i \varphi_0(x_i)}{\sum_{i=0}^{5} (\varphi_0(x_i))^2} = 0{,}0366667$$

$$d_1^* = \frac{(\varphi_1, f)}{(\varphi_1, \varphi_1)} = \frac{\sum_{i=0}^{5} f_i \varphi_1(x_i)}{\sum_{i=0}^{5} (\varphi_1(x_i))^2} = 0{,}1$$

$$d_2^* = \frac{(\varphi_2, f)}{(\varphi_2, \varphi_2)} = \frac{\sum_{i=0}^{5} f_i \varphi_2(x_i)}{\sum_{i=0}^{5} (\varphi_2(x_i))^2} = 0{,}0999999$$

Llavors substituint aquests valors, calculem:

$$P^*(x) = \hat{f}(x) = c_0^* + c_1^* x + c_2^* x^2 \quad \text{i a te}$$

$c_0^* = 9{,}99998\ldots$, $c_1^* = -1{,}9999997\ldots$, $c_2^* = 0{,}0999999$

$\simeq 10$ $\quad \simeq -2$ $\quad \approx \frac{1}{10}$

Bon resultat!