

Segona Pràctica d'Àlgebra Lineal Numèrica

Àlex Batlle Casellas

6 de maig de 2019

1 Demostració.

Objectiu. Volem demostrar que

$$\sqrt{\sum_{i=1}^m (p_q(x_i) - y_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^m (r_q(x_i) - y_i)^2} \quad \forall r_q(x) \in \mathbb{R}_q[x]$$

$\iff p_q(x)$ és solució de les equacions normals.

Observem que demostrar això es equivalent a demostrar que el vector $a^* \in \mathbb{R}^{q+1}$ minimitza $\|Aa - y\|_2$ per tota $a \in \mathbb{R}^{q+1}$ si i només si $A^t(Aa^* - y) = 0$, amb $A \in \mathcal{M}_{m \times q+1}(\mathbb{R})$ les últimes $q+1$ columnes de la matriu de Vandermonde associada al vector x donat. Aquesta demostració la vam fer a classe i la reproduïm aquí:

\Leftarrow) Suposem que a^* compleix $A^t(Aa^* - y) = 0$. Aleshores, prenem $a \in \mathbb{R}^{q+1}$, i cal veure que $\|Aa - y\|_2 \geq \|Aa^* - y\|_2$. Veurem un resultat equivalent amb els quadrats respectius de cada costat, i tenint en compte que $\|u - v\|_2 = |-1| \|v - u\|_2 = \|v - u\|_2$. Escrivim $y - Aa = y - Aa^* + A(a^* - a)$. Aleshores,

$$\begin{aligned} \|y - Aa\|_2^2 &= \langle y - Aa, y - Aa \rangle = \langle y - Aa^* + A(a^* - a), y - Aa^* + A(a^* - a) \rangle = \\ &= \|y - Aa^*\|_2^2 + \|A(a^* - a)\|_2^2 + 2 \langle y - Aa^*, A(a^* - a) \rangle = \|y - Aa^*\|_2^2 + \|A(a^* - a)\|_2^2 + \\ &\quad 2 \langle A^t(y - Aa^*), a^* - a \rangle \geq \|y - Aa^*\|_2^2. \end{aligned}$$

\Rightarrow) Suposem que a^* minimitza la norma que volem i que $A^t(y - Aa^*) = z \neq 0$, i arribem a un absurd. $\forall \epsilon > 0$ prenem $a = a^* + \epsilon z$. Aleshores,

$$\begin{aligned} \|y - Aa\|_2^2 &= \|y - A(a^* + \epsilon z)\|_2^2 = \langle y - Aa^* - \epsilon Az, y - Aa^* - \epsilon Az \rangle = \|y - Aa^*\|_2^2 \\ &\quad + \epsilon^2 \|Az\|_2^2 - 2\epsilon \langle y - Aa^*, Az \rangle = \|y - Aa^*\|_2^2 + \epsilon^2 \|Az\|_2^2 - 2\epsilon \|z\|_2^2 = \|y - Aa^*\|_2^2 - \\ &\quad \epsilon(2\|z\|_2^2 - \epsilon\|Az\|_2^2) \implies \|y - Aa\|_2^2 < \|y - Aa^*\|_2^2, \text{ on tenim una contradicció.} \end{aligned}$$

Per tant, agafant a^* la solució de les equacions normals, queda demostrada la proposició. \square

2 Justificació del mètode emprat.

Hem utilitzat el mètode de descomposició $A = QR$ per trobar l'ajustament per mínims quadrats. Aquest està justificat doncs, si plantegem altre cop les equacions en forma matricial, tenim

$$\begin{pmatrix} x_1^q & x_1^{q-1} & \cdots & x_1 & 1 \\ x_2^q & x_2^{q-1} & \cdots & x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_m^q & x_m^{q-1} & \cdots & x_m & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_q \\ a_{q-1} \\ \vdots \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Les equacions normals d'aquest sistema són de la forma (dient A a la matriu del sistema, a al vector de coeficients i y al vector de valors de la funció) $A^t A a = A^t y$. Si descomposem $A = QR$ i tornem a escriure les equacions normals, queda (sabent que Q és ortogonal)

$$(QR)^t Q R a = (QR)^t y \iff R^t Q^t Q R a = R^t Q^t y \iff R a = Q^t y,$$

i per tant, resoldre el sistema triangular $R a = Q^t y$ és equivalent a resoldre $A^t A a = A^t y$.

3 Especificació de la funció polminquad.

Objectius. La funció polminquad té com a objectiu calcular l'ajustament polinòmic pel mètode de mínims quadrats d'una taula de dades $(x_i, y_i)_{i=1, \dots, m}$ donada. La funció utilitza la descomposició QR per resoldre el sistema d'equacions normals, i per comprovar fins a quin nivell la descomposició és efectiva, treu per pantalla la norma del residu $\|Q^t Q - Id_{q+1}\|_\infty$ (variable `residu_Q_ortogonal`). Si es demana, la funció dibuixa el polinomi trobat.

Paràmetres d'entrada.

x: vector d'abcisses de la taula de dades donada.

y: vector d'ordenades de la taula de dades donada.

grau: grau del polinomi que es vol trobar pel mètode de mínims quadrats.

plt: paràmetre d'entrada opcional. Si apareix, indica el nombre de punts equiespaiats amb els que es dibuixarà la gràfica del polinomi.

Paràmetres de sortida.

coefs: vector de coeficients del polinomi trobat.

norm2Res: norma-2 del residu que dona el polinomi trobat; si a^* identifica el vector **coefs**, aquest paràmetre de sortida val $\|Aa^* - y\|_2$.