Facultat de Matemàtiques i Estadística

Universitat Politècnica de Catalunya - BarcelonaTech

Apunts d'Àlgebra Lineal (Primer curs del Grau de Matemàtiques)

Àlex Batlle Casellas

October 7, 2018

Índex

1 Matrius, determinants i sistemes lineals.

2 Espais vectorials.

Considerem el conjunt d'n-tuples de nombres reals:

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) | x_i \in \mathbb{R}\}.$$

2.1 Operacions a $\mathbb{R}^n$.

1. **Suma:** Sigui $u = (x_1, x_2, \dots, x_n), v = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Aleshores:

$$u + v = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \in \mathbb{R}^n.$$

2. **Multiplicació per un escalar:** Sigui $u = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R}$. Aleshores:

$$cu = (cx_1, cx_2, \dots, cx_n) \in \mathbb{R}^n.$$

<u>Propietats:</u>

- $u + v = v + u$. (commutativitat)
- $(u + v) + w = u + (v + w)$. (associativitat)
- $\exists \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n : \; u + \mathbf{0} = u$. (vector zero; notació alternativa, $\vec{0}$)
- $\forall u \in \mathbb{R}^n \exists -u \in \mathbb{R}^n : \; u + (-u) = \mathbf{0}$.
- $c(u + v) = cu + cv$. (distributivitat)
- $(c + d)u = cu + du$. (distributivitat)
- $c(du) = (cd)u$.
- $1u = u$.

2.2 Espai vectorial sobre un cos $\mathbb{K}$:

Sigui $\mathbb{K}$ un cos commutatiu (per exemple $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$). Un espai vectorial sobre $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K}$-e.v.) és un conjunt de vectors E amb dues operacions $+$ i $\cdot$.

- $+$: Donats $u, v \in E$ dóna un element $u + v$ també d'E.
  És una operació commutativa, associativa, té element neutre ($\mathbf{0}$ o $\vec{0}$) i tot $u \in E$ té invers respecte $+$ $(-u)$.
- $\cdot$: Donats $u \in E$ i $c \in \mathbb{K}$ dóna un element cu d'E.

La suma i el producte compleixen

$$c(u + v) = cu + cv \quad (c + d)u = cu + du \quad c(du) = (cd)u \quad 1u = u \quad \forall u, v \in E, c, d \in \mathbb{K}.$$

Exemples d'espais vectorials:

- $\mathbb{K}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) | x_i \in \mathbb{K}\}$ és un $\mathbb{K}$-e.v. amb la suma i el producte naturals heretats de $\mathbb{K}$.
- $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ és un $\mathbb{K}$-e.v. format per matrius de dimensions $m \times n$ amb entrades a $\mathbb{K}$ i les operacions naturals de la suma de matrius i el producte per un escalar.
- El conjunt de polinomis de grau $\leq d$, $\mathbb{R}_d[x] = \{p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n | a_i \in \mathbb{R}\}$ és un espai vectorial amb la suma de polinomis i el producte per un escalar.
- $\mathbb{R}[x] = \{$polinomis en una variable x i coeficients en els reals$\}$ és un $\mathbb{R}$-e.v.
- El conjunt $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ de funcions $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ és un $\mathbb{R}$-e.v.