GREEN, STOKES, GAUSS

Curso 2019-2020

C.F. Gauss
1777-1855

G. Green
1793-1841

G.G. Stokes
1819-1903

Campos Escalares y Vectoriales

Consideremos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto no vacío (habitualmente, $n = 2, 3$).

1. Un campo escalar en Ω es una aplicación $u\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$. El campo u se denomina de clase $\mathcal{C}^k(\Omega)$, $k \geq 0$, si u es de clase $\mathcal{C}^k(\Omega)$.

   Los campos escalares serán habitualmente denotados por u, v, f, g.

2. Un campo vectorial en Ω es una aplicación $\mathsf{f}\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

   Como $\mathsf{f}(x) = \big(f_1(x), \dots, f_n(x)\big)$, a los campos escalares o funciones $f_j\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $j = 1, \dots, n$, se las denomina componentes del campo f.
   El campo f se denomina de clase $\mathcal{C}^k(\Omega; \mathbb{R}^n)$, $k \geq 0$ si f es de clase $\mathcal{C}^k(\Omega; \mathbb{R}^n)$; es decir, si para cada $j = 1, \dots, n$, $f_j \in \mathcal{C}^k(\Omega)$.

   Los campos vectoriales serán denotados por $\mathsf{f}, \mathsf{g}, \mathsf{u}, \boldsymbol{F}$.

Campos Escalares y Vectoriales

Consideremos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto no vacío (habitualmente, $n = 2, 3$).

1. Un campo escalar en Ω es una aplicación $u \colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$. El campo u se denomina de clase $\mathcal{C}^k(\Omega)$, $k \geq 0$, si u es de clase $\mathcal{C}^k(\Omega)$.
2. Un campo vectorial en Ω es una aplicación $\mathsf{f} \colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$. El campo f se denomina de clase $\mathcal{C}^k(\Omega; \mathbb{R}^n)$, $k \geq 0$ si $\mathsf{f} \in \mathcal{C}^k(\Omega; \mathbb{R}^n)$.

$\rightsquigarrow$ El campo $\mathsf{r} \colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definido como $\mathsf{r}(x) = (x_1, \dots, x_n)$ se denomina campo radial de $\mathbb{R}^n$. La componente j-ésima del campo radial es $\mathsf{r}_j(x) = x_j$. Claramente, $\mathsf{r} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.

Campos Escalares y Vectoriales

Consideremos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto no vacío (habitualmente, $n = 2, 3$).

1. Un campo escalar en Ω es una aplicación $u\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$. El campo u se denomina de clase $\mathcal{C}^k(\Omega)$, $k \geq 0$, si u es de clase $\mathcal{C}^k(\Omega)$.
2. Un campo vectorial en Ω es una aplicación $\mathsf{f}\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$. El campo f se denomina de clase $\mathcal{C}^k(\Omega;\mathbb{R}^n)$, $k \geq 0$ si $\mathsf{f} \in \mathcal{C}^k(\Omega;\mathbb{R}^n)$.

$\rightsquigarrow$ El campo $\mathsf{r}\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definido como $\mathsf{r}(x) = (x_1, \dots, x_n)$ se denomina campo radial de $\mathbb{R}^n$. La componente j-ésima del campo radial es $\mathsf{r}_j(x) = x_j$. Claramente, $\mathsf{r} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.

$\rightsquigarrow$ La norma del campo radial, es el campo escalar $r\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ definido como $r(x) = |\mathsf{r}(x)| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} \Longrightarrow r \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$.

Campos Escalares y Vectoriales

Consideremos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto no vacío (habitualmente, $n = 2, 3$).

1. Un campo escalar en Ω es una aplicación $u\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$. El campo u se denomina de clase $\mathcal{C}^k(\Omega)$, $k \geq 0$, si u es de clase $\mathcal{C}^k(\Omega)$.
2. Un campo vectorial en Ω es una aplicación $\mathsf{f}\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$. El campo f se denomina de clase $\mathcal{C}^k(\Omega; \mathbb{R}^n)$, $k \geq 0$ si $\mathsf{f} \in \mathcal{C}^k(\Omega; \mathbb{R}^n)$.

$\rightsquigarrow$ El campo $\mathsf{r}\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definido como $\mathsf{r}(x) = (x_1, \dots, x_n)$ se denomina campo radial de $\mathbb{R}^n$. La componente j-ésima del campo radial es $\mathsf{r}_j(x) = x_j$. Claramente, $\mathsf{r} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.

$\rightsquigarrow$ La norma del campo radial, es el campo escalar $r\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ definido como $r(x) = |\mathsf{r}(x)| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} \Longrightarrow r \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$.

- Un campo escalar $u\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ se denomina radial si existe $h\colon (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ con $u(x) = h\big(r(x)\big)$.

  Claramente $u \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ sii $h \in \mathcal{C}^k\big((0, +\infty)\big)$.

Gradiente, Divergencia, Laplaciano

Sean un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, el campo escalar $u\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ y el campo vectorial $\mathsf{f}\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ cuyas componentes son $f_1, \dots, f_n$.

1. Si $u \in \mathcal{C}^1(\Omega)$, el **gradiente de u** es el campo

$$\nabla u = \Big(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\Big)^\top.$$

2. Si $\mathsf{f} = (f_1, \dots, f_n)^\top \in \mathcal{C}^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$, la **divergencia de f** es la función

$$\operatorname{div}(\mathsf{f}) = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}.$$

3. Si $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, el **laplaciano de u** es la función

$$\Delta(u) = \operatorname{div}(\nabla u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}.$$

Operadores Diferenciales

Sean $p, q \in \mathbb{N}$, $k, m, n \in \mathbb{N}^*$ y $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto. Denominaremos **operador diferencial** a $T\colon \mathcal{C}^p(\Omega;\mathbb{R}^k) \longrightarrow \mathcal{C}^q(\Omega;\mathbb{R}^m)$ que sea **lineal**.

Operadores Diferenciales

Sean $p, q \in \mathbb{N}$, $k, m, n \in \mathbb{N}^*$ y $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto. Denominaremos **operador diferencial** a $T\colon \mathcal{C}^p(\Omega;\mathbb{R}^k) \longrightarrow \mathcal{C}^q(\Omega;\mathbb{R}^m)$ que sea **lineal**.

1. **Gradiente**: Si $p \geq 1$, $\nabla\colon \mathcal{C}^p(\Omega) \longrightarrow \mathcal{C}^{p-1}(\Omega;\mathbb{R}^n)$

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)^\top.$$

2. **Divergencia**: Si $p \geq 1$, $\operatorname{div}\colon \mathcal{C}^p(\Omega;\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{C}^{p-1}(\Omega)$

$$\operatorname{div}(\mathsf{f}) = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}.$$

3. **Laplaciano**: Si $p \geq 2$, $\Delta\colon \mathcal{C}^p(\Omega) \longrightarrow \mathcal{C}^{p-2}(\Omega)$, $\Delta = \operatorname{div} \circ \nabla$,

$$\Delta(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}.$$

Operadores Diferenciales

Sean $p, q \in \mathbb{N}$, $k, m, n \in \mathbb{N}^*$ y $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto. Denominaremos **operador diferencial** a $T\colon \mathcal{C}^p(\Omega;\mathbb{R}^k) \longrightarrow \mathcal{C}^q(\Omega;\mathbb{R}^m)$ que sea **lineal**.

1. **Gradiente**: Si $p \geq 1$, $\nabla\colon \mathcal{C}^p(\Omega) \longrightarrow \mathcal{C}^{p-1}(\Omega;\mathbb{R}^n)$

   El campo vectorial f se denomina gradiente si existe una función $u \in \mathcal{C}^1(\Omega)$, denominada potencial (escalar) de f, tal que $\mathsf{f} = \nabla u$.

2. **Divergencia**: Si $p \geq 1$, $\operatorname{div}\colon \mathcal{C}^p(\Omega;\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{C}^{p-1}(\Omega)$

   El campo $\mathsf{f} \in \mathcal{C}^1(\Omega,\mathbb{R}^n)$ se denomina solenoidal o incompresible si $\operatorname{div}\mathsf{f} = 0$; es decir si $\mathsf{f} \in \ker(\operatorname{div})$. A veces se denota $\operatorname{div}(\mathsf{f}) = \nabla \cdot \mathsf{f}$.

3. **Laplaciano**: Si $p \geq 2$, $\Delta\colon \mathcal{C}^p(\Omega) \longrightarrow \mathcal{C}^{p-2}(\Omega)$, $\Delta = \operatorname{div} \circ \nabla$,

   El campo escalar $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ se denomina armónico si $\Delta u = 0$; es decir si $u \in \ker(\Delta)$.

Operadores Diferenciales

Sean $p, q \in \mathbb{N}$, $k, m, n \in \mathbb{N}^*$ y $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto. Denominaremos **operador diferencial** a $T\colon \mathcal{C}^p(\Omega;\mathbb{R}^k) \longrightarrow \mathcal{C}^q(\Omega;\mathbb{R}^m)$ que sea **lineal**.

1. **Gradiente**: Si $p \geq 1$, $\nabla\colon \mathcal{C}^p(\Omega) \longrightarrow \mathcal{C}^{p-1}(\Omega;\mathbb{R}^n)$
2. **Divergencia**: Si $p \geq 1$, $\operatorname{div}\colon \mathcal{C}^p(\Omega;\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{C}^{p-1}(\Omega)$
3. **Laplaciano**: Si $p \geq 2$ $\operatorname{div}\colon \mathcal{C}^p(\Omega) \longrightarrow \mathcal{C}^{p-2}(\Omega)$
4. **Laplaciano de campos**: Si $p \geq 2$, $\boldsymbol{\Delta}\colon \mathcal{C}^p(\Omega;\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{C}^{p-2}(\Omega;\mathbb{R}^n)$

$$\boldsymbol{\Delta}(\mathsf{f}) = \big(\Delta f_1, \dots, \Delta f_n\big)^\top.$$

El campo vectorial $\mathsf{f} \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$ se denomina armónico si $\boldsymbol{\Delta}\mathsf{f} = 0$; es decir si $\mathsf{f} \in \ker(\boldsymbol{\Delta})$.

Reglas de Leibniz

Dados $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto, funciones $u, v \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ y $\mathsf{f} \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ un campo vectorial, entonces

1. $\nabla(uv) = u\nabla(v) + v\nabla(u)$.
2. $\operatorname{div}(u\mathsf{f}) = u \operatorname{div}(\mathsf{f}) + \langle \nabla u, \mathsf{f} \rangle$.

Reglas de Leibniz

Dados $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto, funciones $u, v \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ y $\mathsf{f} \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ un campo vectorial, entonces

1. $\nabla(uv) = u\nabla(v) + v\nabla(u)$.
2. $\operatorname{div}(u\mathsf{f}) = u \operatorname{div}(\mathsf{f}) + \langle \nabla u, \mathsf{f} \rangle$.

- Si $\nabla u = \nabla v \Longrightarrow u - v$ es constante en cada componente conexa de Ω.

Reglas de Leibniz

Dados $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto, funciones $u, v \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ y $\mathsf{f} \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ un campo vectorial, entonces

1. $\nabla(uv) = u\nabla(v) + v\nabla(u)$.
2. $\operatorname{div}(u\mathsf{f}) = u \operatorname{div}(\mathsf{f}) + \langle \nabla u, \mathsf{f}\rangle$.

- Si $\nabla u = \nabla v \Longrightarrow u - v$ es constante en cada componente conexa de Ω.
- Un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ no es conexo sii $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ donde Ω_1 y Ω_2 son abiertos no vacíos de $\mathbb{R}^n$ tales que $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$.

Reglas de Leibniz

Dados $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto, funciones $u, v \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ y $\mathsf{f} \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ un campo vectorial, entonces

1. $\nabla(uv) = u\nabla(v) + v\nabla(u)$.
2. $\mathrm{div}(u\mathsf{f}) = u\,\mathrm{div}(\mathsf{f}) + \langle \nabla u, \mathsf{f}\rangle$.

- Si $\nabla u = \nabla v \Longrightarrow u - v$ es constante en cada componente conexa de Ω.
- Un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ no es conexo sii $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ donde Ω_1 y Ω_2 son abiertos no vacíos de $\mathbb{R}^n$ tales que $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$.
- Cada abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ puede expresarse como unión disjunta de abiertos conexos no vacíos, las componentes conexas de Ω.

Reglas de Leibniz

Dados $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto, funciones $u, v \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ y $\mathsf{f} \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ un campo vectorial, entonces

1. $\nabla(uv) = u\nabla(v) + v\nabla(u)$.
2. $\operatorname{div}(u\mathsf{f}) = u \operatorname{div}(\mathsf{f}) + \langle \nabla u, \mathsf{f} \rangle$.

- Si $\nabla u = \nabla v \Longrightarrow u - v$ es constante en cada componente conexa de Ω.
- Un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ no es conexo sii $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ donde Ω_1 y Ω_2 son abiertos no vacíos de $\mathbb{R}^n$ tales que $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$.
- Cada abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ puede expresarse como unión disjunta de abiertos conexos no vacíos, las componentes conexas de Ω.
- Si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un abierto conexo, cualesquiera dos puntos de Ω pueden conectarse por una curva poligonal cuyos tramos son paralelos a los ejes coordenados.

Reglas de Leibniz

Dados $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto, funciones $u, v \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ y $\mathsf{f} \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ un campo vectorial, entonces

1. $\nabla(uv) = u\nabla(v) + v\nabla(u)$.
2. $\operatorname{div}(u\mathsf{f}) = u \operatorname{div}(\mathsf{f}) + \langle \nabla u, \mathsf{f} \rangle$.

- Si $\nabla u = \nabla v \Longrightarrow u - v$ es constante en cada componente conexa de Ω.
- Un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ no es conexo sii $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ donde Ω_1 y Ω_2 son abiertos no vacíos de $\mathbb{R}^n$ tales que $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$.
- Cada abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ puede expresarse como unión disjunta de abiertos conexos no vacíos, las componentes conexas de Ω.
- Si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un abierto conexo, cualesquiera dos puntos de Ω pueden conectarse por una curva poligonal cuyos tramos son paralelos a los ejes coordenados $\Longrightarrow u \in \mathcal{C}^1(\Omega), \nabla u = 0$ en Ω sii u es constante.

Reglas de Leibniz

Dados $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto, funciones $u, v \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ y $\mathsf{f} \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ un campo vectorial, entonces

1. $\nabla(uv) = u\nabla(v) + v\nabla(u)$.
2. $\operatorname{div}(u\mathsf{f}) = u \operatorname{div}(\mathsf{f}) + \langle \nabla u, \mathsf{f} \rangle$.

La siguiente propiedad de los campos gradientes se basa en la igualdad de derivadas cruzadas de funciones de clase $\mathcal{C}^2(\Omega)$:

Dados $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $\mathsf{f}\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un campo con $\mathsf{f} = (f_1, \dots, f_n)$,

- Si $\mathsf{f} = \nabla u$ y $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, entonces $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j} = \dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}$, $i, j = 1, \dots, n$

Reglas de Leibniz

Dados $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto, funciones $u, v \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ y $\mathsf{f} \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ un campo vectorial, entonces

1. $\nabla(uv) = u\nabla(v) + v\nabla(u)$.
2. $\operatorname{div}(u\mathsf{f}) = u\operatorname{div}(\mathsf{f}) + \langle \nabla u, \mathsf{f} \rangle$.

La siguiente propiedad de los campos gradientes se basa en la igualdad de derivadas cruzadas de funciones de clase $\mathcal{C}^2(\Omega)$:

Dados $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $\mathsf{f}\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un campo con $\mathsf{f} = (f_1, \dots, f_n)$,

- Si $\mathsf{f} = \nabla u$ y $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, entonces $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j} = \dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}$, $i, j = 1, \dots, n$

- El recíproco no es cierto: Ejemplo: $\mathsf{f} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$,

$$\mathsf{f}(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right).$$

Campos Conservativos

- Los campos gradiente en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ pueden ser caracterizados en términos de su circulación sobre curvas parametrizadas

Campos Conservativos

- Los campos gradiente en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ pueden ser caracterizados en términos de su circulación sobre curvas parametrizadas

- El campo vectorial $\mathsf{f} \in \mathcal{C}(\Omega; \mathbb{R}^n)$ se denomina conservativo si para cualquier curva parametrizada $\alpha\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de clase $\mathcal{C}^1_s([a,b])$ tal que $C_\alpha \subset \Omega$, la circulación de f a lo largo de α, depende sólo de los valores de f en los extremos de la curva $\alpha(a)$ y $\alpha(b)$

Campos Conservativos

- Los campos gradiente en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ pueden ser caracterizados en términos de su circulación sobre curvas parametrizadas

- El campo vectorial $\mathrm{f} \in \mathcal{C}(\Omega; \mathbb{R}^n)$ se denomina conservativo si para cualquier curva parametrizada $\alpha\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de clase $\mathcal{C}^1_s([a,b])$ tal que $C_\alpha \subset \Omega$, la circulación de f a lo largo de α, depende sólo de los valores de f en los extremos de la curva $\alpha(a)$ y $\alpha(b)$

Dado $\mathrm{f} \in \mathcal{C}(\Omega; \mathbb{R}^n)$ donde $\mathrm{f} = (f_1, \dots, f_n)$, son equivalentes:

1. f es conservativo.
2. Si $\alpha\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es una curva parametrizada de clase $\mathcal{C}^1_s([a,b])$ con $C_\alpha \subset \Omega$ y <u>cerrada</u>; es decir $\alpha(a) = \alpha(b)$, entonces $\displaystyle\oint_\alpha \mathrm{f}\, d\boldsymbol{\ell} = 0$.
3. f es gradiente.

El Rotacional de campos vectoriales en $\mathbb{R}^3$

Consideremos un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ y $\mathsf{f} = (f_1, f_2, f_3) \in \mathcal{C}^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$.

1. Definimos el rotacional (curl) de f como el campo dado por

$$\operatorname{rot} \mathsf{f} = \nabla \times \mathsf{f} = \det \begin{bmatrix} \mathsf{i} & \mathsf{j} & \mathsf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{bmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}, \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right)$$

2. Si dado $\mathsf{g} \in \mathcal{C}(\Omega; \mathbb{R}^3)$, existe $\mathsf{f} \in \mathcal{C}^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$ con $\mathsf{g} = \operatorname{rot} \mathsf{f}$, entonces f se denomina potencial vector de g.

3. Si $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ y $\mathsf{f} \colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^2$ con $\mathsf{f} = (f_1, f_2)$, podemos identificar f con un campo en $\mathbb{R}^3$ considerando $\mathsf{f} = (f_1, f_2, 0)$. Entonces,

$$\operatorname{rot} \mathsf{f} = \left(0, 0, \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right)$$

Reglas de Leibniz

- Si $p \geq 1$, $\operatorname{rot}\colon \mathcal{C}^p(\Omega; \mathbb{R}^3) \longrightarrow \mathcal{C}^{p-1}(\Omega; \mathbb{R}^3)$ es un operador diferencial

Reglas de Leibniz

- Si $p \geq 1$, $\mathrm{rot}\colon \mathcal{C}^p(\Omega;\mathbb{R}^3) \longrightarrow \mathcal{C}^{p-1}(\Omega;\mathbb{R}^3)$ es un operador diferencial

Dados $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ abierto, $u \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ y $\mathsf{f}, \mathsf{g} \in \mathcal{C}^1(\Omega;\mathbb{R}^3)$, entonces

1. $\mathrm{rot}(u\mathsf{f}) = u\,\mathrm{rot}(\mathsf{f}) + \nabla(u) \times \mathsf{f}$.
2. $\mathrm{div}(\mathsf{f} \times \mathsf{g}) = \langle \mathsf{g}, \mathrm{rot}(\mathsf{f})\rangle - \langle \mathsf{f}, \mathrm{rot}(\mathsf{g})\rangle$.
3. $\mathrm{rot}(\mathrm{rot}(\mathsf{f}) = \nabla\big(\mathrm{div}(\mathsf{f})\big) - \boldsymbol{\Delta}(\mathsf{f})$.
4. $\mathrm{rot}(\mathsf{f} \times g) = \mathsf{f}\mathrm{div}(\mathsf{g}) - \mathsf{g}\mathrm{div}(\mathsf{f}) + (\mathsf{g} \cdot \nabla)\mathsf{f} - (\mathsf{f} \cdot \nabla)\mathsf{g}$, donde

$$(\mathsf{f} \cdot \nabla)\mathsf{g} = \Big(\langle \mathsf{f}, \nabla g_1\rangle, \langle \mathsf{f}, \nabla g_2\rangle, \langle \mathsf{f}, \nabla g_3\rangle\Big)$$

Reglas de Leibniz

- Si $p \geq 1$, $\operatorname{rot}\colon \mathcal{C}^p(\Omega;\mathbb{R}^3) \longrightarrow \mathcal{C}^{p-1}(\Omega;\mathbb{R}^3)$ es un operador diferencial

Dados $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ abierto, $u \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ y $\mathsf{f},\mathsf{g} \in \mathcal{C}^1(\Omega;\mathbb{R}^3)$, entonces

1. $\operatorname{rot}(u\mathsf{f}) = u\operatorname{rot}(\mathsf{f}) + \nabla(u) \times \mathsf{f}$.
2. $\operatorname{div}(\mathsf{f} \times \mathsf{g}) = \langle \mathsf{g}, \operatorname{rot}(\mathsf{f})\rangle - \langle \mathsf{f}, \operatorname{rot}(\mathsf{g})\rangle$.
3. $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}(\mathsf{f}) = \nabla\big(\operatorname{div}(\mathsf{f})\big) - \boldsymbol{\Delta}(\mathsf{f})$.
4. $\operatorname{rot}(\mathsf{f} \times g) = \mathsf{f}\operatorname{div}(\mathsf{g}) - \mathsf{g}\operatorname{div}(\mathsf{f}) + (\mathsf{g}\cdot\nabla)\mathsf{f} - (\mathsf{f}\cdot\nabla)\mathsf{g}$, donde
$$(\mathsf{f}\cdot\nabla)\mathsf{g} = \Big(\langle \mathsf{f}, \nabla g_1\rangle, \langle \mathsf{f}, \nabla g_2\rangle, \langle \mathsf{f}, \nabla g_3\rangle\Big)$$

1. Si $\mathsf{f} = \nabla u$, entonces $\operatorname{rot}\mathsf{f} = 0$; es decir el gradiente es irrotacional.
2. Si $\mathsf{f} = \operatorname{rot}\mathsf{g}$, entonces $\operatorname{div}\mathsf{f} = 0$; es decir, f es solenoidal.

Reglas de Leibniz

- Si $p\geq 1$, $\mathrm{rot}\colon \mathcal{C}^p(\Omega;\mathbb{R}^3)\longrightarrow \mathcal{C}^{p-1}(\Omega;\mathbb{R}^3)$ es un operador diferencial

Dados $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ abierto, $u\in\mathcal{C}^1(\Omega)$ y $\mathsf{f},\mathsf{g}\in\mathcal{C}^1(\Omega;\mathbb{R}^3)$, entonces

1. $\mathrm{rot}(u\mathsf{f}) = u\,\mathrm{rot}(\mathsf{f}) + \nabla(u)\times\mathsf{f}$.
2. $\mathrm{div}(\mathsf{f}\times\mathsf{g}) = \langle \mathsf{g},\mathrm{rot}(\mathsf{f})\rangle - \langle \mathsf{f},\mathrm{rot}(\mathsf{g})\rangle$.
3. $\mathrm{rot}(\mathrm{rot}(\mathsf{f}) = \nabla\big(\mathrm{div}(\mathsf{f})\big) - \boldsymbol{\Delta}(\mathsf{f})$.
4. $\mathrm{rot}(\mathsf{f}\times g) = \mathsf{f}\mathrm{div}(\mathsf{g}) - \mathsf{g}\mathrm{div}(\mathsf{f}) + (\mathsf{g}\cdot\nabla)\mathsf{f} - (\mathsf{f}\cdot\nabla)\mathsf{g}$, donde
$$(\mathsf{f}\cdot\nabla)\mathsf{g} = \Big(\langle \mathsf{f},\nabla g_1\rangle, \langle \mathsf{f},\nabla g_2\rangle, \langle \mathsf{f},\nabla g_3\rangle\Big)$$

1. Si $\mathsf{f}=\nabla u$, entonces $\mathrm{rot}\,\mathsf{f}=0$; es decir el gradiente es irrotacional.
2. Si $\mathsf{f}=\mathrm{rot}\,\mathsf{g}$, entonces $\mathrm{div}\,\mathsf{f}=0$; es decir, f es solenoidal.

- $$\boxed{0 \xrightarrow{0} \mathcal{C}^\infty(\Omega) \xrightarrow{\nabla} \mathcal{C}^\infty(\Omega;\mathbb{R}^3) \xrightarrow{\mathrm{rot}} \mathcal{C}^\infty(\Omega;\mathbb{R}^3) \xrightarrow{\mathrm{div}} \mathcal{C}^\infty(\Omega) \xrightarrow{0} 0}$$

Lema de Poincaré

- Si $p \geq 1$, $\operatorname{rot}\colon \mathcal{C}^p(\Omega;\mathbb{R}^3) \longrightarrow \mathcal{C}^{p-1}(\Omega;\mathbb{R}^3)$ es un operador diferencial

1. Si $\mathsf{f} = \nabla u$, entonces $\operatorname{rot} \mathsf{f} = 0$; es decir el gradiente es irrotacional.
2. Si $\mathsf{f} = \operatorname{rot} \mathsf{g}$, entonces $\operatorname{div} \mathsf{f} = 0$; es decir, f es solenoidal.

- ¿Es cierto el recíproco?

Lema de Poincaré

- Si $p \geq 1$, $\operatorname{rot}\colon \mathcal{C}^p(\Omega;\mathbb{R}^3) \longrightarrow \mathcal{C}^{p-1}(\Omega;\mathbb{R}^3)$ es un operador diferencial

1. Si $\mathsf{f} = \nabla u$, entonces $\operatorname{rot}\mathsf{f} = 0$; es decir el gradiente es irrotacional.
2. Si $\mathsf{f} = \operatorname{rot}\mathsf{g}$, entonces $\operatorname{div}\mathsf{f} = 0$; es decir, f es solenoidal.

- ¿Es cierto el recíproco?
- Si $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j} = \dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}$, $i, j = 1, \dots, n$ (en $\mathbb{R}^3$ si $\operatorname{rot}(\mathsf{f}) = 0$)

  u es solución del sistema de EDP, $f_j = \dfrac{\partial u}{\partial x_j}$, $j = 1, \dots, n$

Lema de Poincaré

- Si $p \geq 1$, $\mathrm{rot}\colon \mathcal{C}^p(\Omega;\mathbb{R}^3) \longrightarrow \mathcal{C}^{p-1}(\Omega;\mathbb{R}^3)$ es un operador diferencial

1. Si $\mathsf{f} = \nabla u$, entonces $\mathrm{rot}\,\mathsf{f} = 0$; es decir el gradiente es irrotacional.
2. Si $\mathsf{f} = \mathrm{rot}\,\mathsf{g}$, entonces $\mathrm{div}\,\mathsf{f} = 0$; es decir, f es solenoidal.

- ¿Es cierto el recíproco?
- Si $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j} = \dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}$, $i,j = 1,\dots,n$ (en $\mathbb{R}^3$ si $\mathrm{rot}(\mathsf{f}) = 0$)

  u es solución del sistema de EDP, $f_j = \dfrac{\partial u}{\partial x_j}$, $j = 1,\dots,n$

- Si $\mathrm{div}(\mathsf{f}) = 0$, $\mathsf{g} = (g_1, g_2, g_3)^\top$ debe ser solución del sistema de EDP

$$f_1 = \frac{\partial g_3}{\partial x} - \frac{\partial g_2}{\partial z}, \qquad f_2 = \frac{\partial g_1}{\partial z} - \frac{\partial g_3}{\partial x}, \qquad f_3 = \frac{\partial g_2}{\partial x} - \frac{\partial g_1}{\partial y}$$

$\rightsquigarrow$ Podemos suponer que $g_1 = 0$, o que $g_2 = 0$ o que $g_3 = 0$

Lema de Poincaré

1. Si $\mathsf{f} = \nabla u$, entonces $\operatorname{rot} \mathsf{f} = 0$; es decir el gradiente es irrotacional.
2. Si $\mathsf{f} = \operatorname{rot} \mathsf{g}$, entonces $\operatorname{div} \mathsf{f} = 0$; es decir, f es solenoidal.

▶ ¿Es cierto el recíproco?

Lema de Poincaré

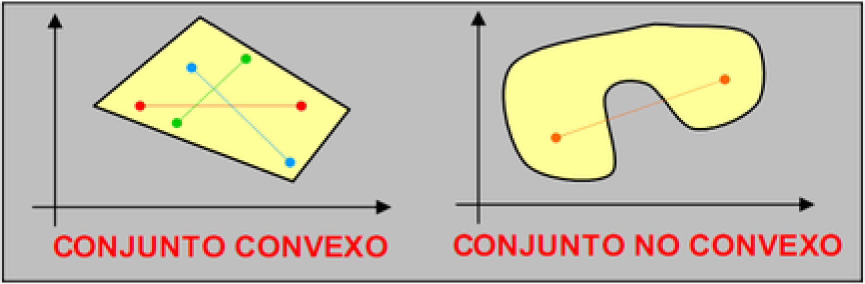
1. Si $\mathsf{f} = \nabla u$, entonces $\operatorname{rot} \mathsf{f} = 0$; es decir el gradiente es irrotacional.
2. Si $\mathsf{f} = \operatorname{rot} \mathsf{g}$, entonces $\operatorname{div} \mathsf{f} = 0$; es decir, f es solenoidal.

- ¿Es cierto el recíproco?
- Ω es convexo si $x, y \in \Omega \Longrightarrow (1-t)x + ty \in \Omega$, para cada $t \in [0,1]$.

Lema de Poincaré

1. Si $\mathrm{f} = \nabla u$, entonces $\operatorname{rot} \mathrm{f} = 0$; es decir el gradiente es irrotacional.
2. Si $\mathrm{f} = \operatorname{rot} \mathrm{g}$, entonces $\operatorname{div} \mathrm{f} = 0$; es decir, f es solenoidal.

- ¿Es cierto el recíproco?
- Ω es convexo si $x, y \in \Omega \Longrightarrow (1-t)x + ty \in \Omega$, para cada $t \in [0,1]$.



Lema de Poincaré

1. Si $\mathsf{f} = \nabla u$, entonces $\operatorname{rot} \mathsf{f} = 0$; es decir el gradiente es irrotacional.
2. Si $\mathsf{f} = \operatorname{rot} \mathsf{g}$, entonces $\operatorname{div} \mathsf{f} = 0$; es decir, f es solenoidal.

- ¿Es cierto el recíproco?

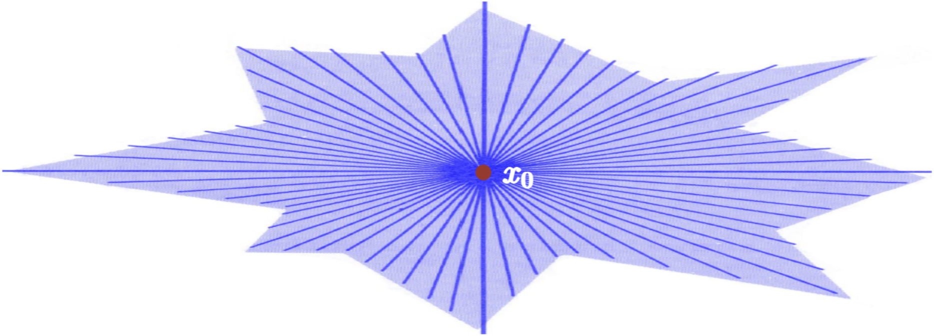
- Ω tiene forma de estrella si existe x_0, el centro de la estrella, tal que $(1-t)x_0 + tx \in \Omega$, para cada $x \in \Omega$ y cada $t \in [0,1]$.

Lema de Poincaré

1. Si $\mathsf{f} = \nabla u$, entonces $\operatorname{rot}\mathsf{f} = 0$; es decir el gradiente es irrotacional.
2. Si $\mathsf{f} = \operatorname{rot}\mathsf{g}$, entonces $\operatorname{div}\mathsf{f} = 0$; es decir, f es solenoidal.

- ¿Es cierto el recíproco?

- Ω tiene forma de estrella si existe x_0, el centro de la estrella, tal que $(1-t)x_0 + tx \in \Omega$, para cada $x \in \Omega$ y cada $t \in [0,1]$.



Lema de Poincaré

1. Si $\mathsf{f} = \nabla u$, entonces $\operatorname{rot} \mathsf{f} = 0$; es decir el gradiente es irrotacional.
2. Si $\mathsf{f} = \operatorname{rot} \mathsf{g}$, entonces $\operatorname{div} \mathsf{f} = 0$; es decir, f es solenoidal.

- ¿Es cierto el recíproco?

- Ω tiene forma de estrella si existe x_0, el centro de la estrella, tal que $(1-t)x_0 + tx \in \Omega$, para cada $x \in \Omega$ y cada $t \in [0,1]$.

Lema de Poincaré

Supongamos que $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ es un abierto con forma de estrella y que $\mathsf{f}\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es un campo de clase $\mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$.

1. Si f es irrotacional, es decir tal que $\operatorname{rot} \mathsf{f} = 0$, entonces es conservativo, es decir existe $u \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ tal que $\mathsf{f} = \nabla u$.
2. Si f es solenoidal, es decir $\operatorname{div} \mathsf{f} = 0$, entonces f tiene un potencial vector; es decir, existe $\mathsf{g} \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ tal que $\mathsf{f} = \operatorname{rot} \mathsf{g}$.

Lema de Poincaré

1. Si $\mathsf{f} = \nabla u$, entonces $\operatorname{rot} \mathsf{f} = 0$; es decir el gradiente es irrotacional.
2. Si $\mathsf{f} = \operatorname{rot} \mathsf{g}$, entonces $\operatorname{div} \mathsf{f} = 0$; es decir, f es solenoidal.

Lema de Poincaré

Supongamos que $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ es un abierto con forma de estrella y que $\mathsf{f} \colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es un campo de clase $\mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$.

1. Si f es irrotacional, es decir tal que $\operatorname{rot} \mathsf{f} = 0$, entonces es conservativo, es decir existe $u \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ tal que $\mathsf{f} = \nabla u$.
2. Si f es solenoidal, es decir $\operatorname{div} \mathsf{f} = 0$, entonces f tiene un potencial vector; es decir, existe $\mathsf{g} \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ tal que $\mathsf{f} = \operatorname{rot} \mathsf{g}$.

▶ Ejemplo 1: Determínese $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)$ para que el campo

$$\mathsf{f}(x, y, z) = \big(h(x, y, z), 2x - 3zy^2, 2xz - y^3\big)$$

sea conservativo y en ese caso obtener un potencial escalar.

Lema de Poincaré

1. Si $\mathsf{f} = \nabla u$, entonces $\operatorname{rot} \mathsf{f} = 0$; es decir el gradiente es irrotacional.
2. Si $\mathsf{f} = \operatorname{rot} \mathsf{g}$, entonces $\operatorname{div} \mathsf{f} = 0$; es decir, f es solenoidal.

Lema de Poincaré

Supongamos que $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ es un abierto con forma de estrella y que $\mathsf{f}\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es un campo de clase $\mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$.

1. Si f es irrotacional, es decir tal que $\operatorname{rot} \mathsf{f} = 0$, entonces es conservativo, es decir existe $u \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ tal que $\mathsf{f} = \nabla u$.
2. Si f es solenoidal, es decir $\operatorname{div} \mathsf{f} = 0$, entonces f tiene un potencial vector; es decir, existe $\mathsf{g} \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ tal que $\mathsf{f} = \operatorname{rot} \mathsf{g}$.

▶ Ejemplo 2: Demostrar que el campo $\mathsf{f}(x, y, z) = (-x, -y, 2z)$ es solenoidal y hallar un potencial vector.

Lema de Poincaré

- Regla de Leibniz: $$\boxed{u(x) = \int_a^b k(x,s)ds \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x_j} = \int_a^b \left(\frac{\partial k}{\partial x_j}\right)(x,s)ds}$$

Lema de Poincaré

- Regla de Leibniz: $\boxed{u(x) = \int_a^b k(x,s)ds \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x_j} = \int_a^b \Big(\frac{\partial k}{\partial x_j}\Big)(x,s)ds}$

- Si $\Omega \in \mathbb{R}^n$ tiene forma de estrella con centro en x_0 y $\mathsf{f}\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es un campo tal que $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$, $i,j = 1,\dots,n$, entonces

$$u(x) = \int_0^1 \big\langle \mathsf{f}\big(tx + (1-t)x_0\big), \mathsf{r}(x - x_0)\big\rangle\, dt$$

es un potencial escalar de f.

- Si $x_0 = (a_1,\dots,a_n)$ y $\mathsf{f} = (f_1,\dots,f_n)$, se tiene que

$$u(x_1,\dots,x_n) = \sum_{j=1}^n (x_j - a_j)\int_0^1 f_j\big(t(x_1-a_1)+a_1,\dots,t(x_n-a_n)+a_n\big)dt$$

Lema de Poincaré

- Regla de Leibniz: $$\boxed{u(x)=\int_a^b k(x,s)ds \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x_j}=\int_a^b \Big(\frac{\partial k}{\partial x_j}\Big)(x,s)ds}$$

- Si $\Omega \in \mathbb{R}^n$ tiene forma de estrella con centro en x_0 y $\mathsf{f}\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es un campo tal que $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}=\dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}$, $i,j=1,\ldots,n$, entonces

$$u(x)=\int_0^1 \big\langle \mathsf{f}\big(tx+(1-t)x_0\big), \mathsf{r}(x-x_0)\big\rangle\, dt$$

es un potencial escalar de f.

- Si $x_0=(0,\ldots,0)$, entonces

$$u(x_1,\ldots,x_n)=\int_0^1 \big\langle \mathsf{f}(tx), \mathsf{r}(x)\big\rangle\, dt=\sum_{j=1}^n x_j \int_0^1 f_j(tx_1,\ldots,tx_n)dt$$

Lema de Poincaré

- Regla de Leibniz: $$\boxed{u(x) = \int_a^b k(x,s)ds \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x_j} = \int_a^b \Big(\frac{\partial k}{\partial x_j}\Big)(x,s)ds}$$

- Si $\Omega \in \mathbb{R}^n$ tiene forma de estrella con centro en x_0 y $\mathsf{f}\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es un campo tal que $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j} = \dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}$, $i, j = 1, \ldots, n$, entonces

$$u(x) = \int_0^1 \big\langle \mathsf{f}\big(tx + (1-t)x_0\big), \mathsf{r}(x - x_0)\big\rangle\, dt$$

es un potencial escalar de f.

- Determínese $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)$ para que el campo

$$\mathsf{f}(x,y,z) = \big(h(x,y,z), 2x - 3zy^2, 2xz - y^3\big)$$

sea conservativo y en ese caso obtener un potencial escalar.

Lema de Poincaré

- Regla de Leibniz: $\boxed{u(x)=\int_a^b k(x,s)ds \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x_j}=\int_a^b \Big(\frac{\partial k}{\partial x_j}\Big)(x,s)ds}$

- Si $\Omega \in \mathbb{R}^3$ tiene forma de estrella con centro en x_0 y $\mathsf{f}\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es un **campo solenoidal**, es decir $\operatorname{div} \mathsf{f} = 0$, entonces

$$\mathsf{g}(x,y,z)=\int_0^1 t\Big(\mathsf{f}\big(tx+(1-t)x_0\big)\times \mathsf{r}(x-x_0)\Big)dt$$

es un potencial vector de f.

Lema de Poincaré

- Regla de Leibniz: $\boxed{u(x) = \int_a^b k(x,s)ds \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x_j} = \int_a^b \Big(\frac{\partial k}{\partial x_j}\Big)(x,s)ds}$

- Si $\Omega \in \mathbb{R}^3$ tiene forma de estrella con centro en x_0 y $\mathsf{f}\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es un **campo solenoidal**, es decir $\operatorname{div}\mathsf{f} = 0$, entonces

  $$\mathsf{g}(x,y,z) = \int_0^1 t\Big(\mathsf{f}\big(tx + (1-t)x_0\big) \times \mathsf{r}(x - x_0)\Big)dt$$

  es un potencial vector de f.

- $x_0 = (0,0,0)$, entonces $\mathsf{g}(x,y,z) = \int_0^1 t\big(\mathsf{f}(tx) \times \mathsf{r}(x)\big)dt$
- Hallar un potencial vector del campo $\mathsf{f}(x,y,z) = (-x,-y,2z)$.

TEOREMA DE GREEN

G. Green, 1793-1841

$\Omega, \widehat{\Omega} \subset \mathbb{R}^2$ abiertos tales que $\overline{\Omega} \subset \widehat{\Omega}$ y $\partial\Omega$ es la traza de una curva positivamente orientada. Si $\mathsf{f} = (f_1, f_2) \in \mathcal{C}^1(\widehat{\Omega})$, entonces

$$\oint_{\partial\Omega} \mathsf{f} d\boldsymbol{\ell} = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dxdy$$

1828

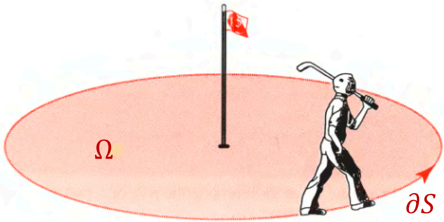
TEOREMA DE GREEN

G. Green, 1793-1841

$\Omega, \widehat{\Omega} \subset \mathbb{R}^2$ abiertos tales que $\overline{\Omega} \subset \widehat{\Omega}$ y $\partial\Omega$ es la traza de una curva positivamente orientada. Si $\mathsf{f} = (f_1, f_2) \in \mathcal{C}^1(\widehat{\Omega})$, entonces

$$\oint_{\partial\Omega} \mathsf{f}\, d\boldsymbol{\ell} = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dxdy$$

1828



caminar sobre $\partial\Omega$ con Ω a la izquierda

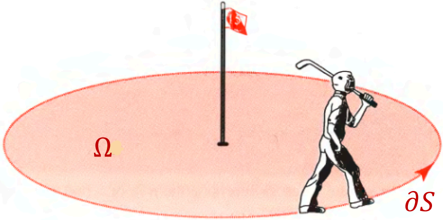
TEOREMA DE GREEN

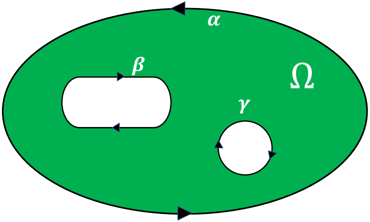
G. Green, 1793-1841

$\Omega, \widehat{\Omega} \subset \mathbb{R}^2$ abiertos tales que $\overline{\Omega} \subset \widehat{\Omega}$ y $\partial\Omega$ es la traza de una curva positivamente orientada. Si $\mathsf{f} = (f_1, f_2) \in \mathcal{C}^1(\widehat{\Omega})$, entonces

$$\oint_{\partial\Omega} \mathsf{f}\, d\boldsymbol{\ell} = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dxdy$$

1828





TEOREMA DE GREEN

G. Green, 1793-1841

$\Omega, \widehat{\Omega} \subset \mathbb{R}^2$ abiertos tales que $\overline{\Omega} \subset \widehat{\Omega}$ y $\partial\Omega$ es la traza de una curva positivamente orientada. Si $\mathsf{f} = (f_1, f_2) \in \mathcal{C}^1(\widehat{\Omega})$, entonces

$$\oint_{\partial\Omega} \mathsf{f} d\boldsymbol{\ell} = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dxdy$$

1828

- Si $\mathsf{f} = (f_1, f_2)$ es tal que $\dfrac{\partial f_2}{\partial x} - \dfrac{\partial f_1}{\partial y} = 1 \Longrightarrow \boxed{\mathsf{a}(\Omega) = \oint_{\partial\Omega} \mathsf{f}\, d\boldsymbol{\ell}}$

TEOREMA DE GREEN

G. Green, 1793-1841

$\Omega, \widehat{\Omega} \subset \mathbb{R}^2$ abiertos tales que $\overline{\Omega} \subset \widehat{\Omega}$ y $\partial\Omega$ es la traza de una curva positivamente orientada. Si $\mathsf{f} = (f_1, f_2) \in \mathcal{C}^1(\widehat{\Omega})$, entonces

$$\oint_{\partial\Omega} \mathsf{f} d\boldsymbol{\ell} = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dxdy$$

1828

- Si $\mathsf{f} = \frac{1}{2}(-y, x)$, o $\mathsf{f} = (-y, 0)$, o $\mathsf{f} = (0, x)$,

$$\mathsf{a}(\Omega) = \frac{1}{2} \oint_{\partial\Omega} (-y, x)\, d\boldsymbol{\ell} = \oint_{\partial\Omega} (-y, 0)\, d\boldsymbol{\ell} = \oint_{\partial\Omega} (x, 0)\, d\boldsymbol{\ell}$$

TEOREMA DE GREEN


G. Green, 1793-1841

$\Omega, \widehat{\Omega} \subset \mathbb{R}^2$ abiertos tales que $\overline{\Omega} \subset \widehat{\Omega}$ y $\partial\Omega$ es la traza de una curva positivamente orientada. Si $\mathsf{f} = (f_1, f_2) \in \mathcal{C}^1(\widehat{\Omega})$, entonces

$$\oint_{\partial\Omega} \mathsf{f} d\boldsymbol{\ell} = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dxdy$$

1828

- $\mathrm{rot}(\mathsf{f}) = \left(0, 0, \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right) \Longrightarrow \boxed{\oint_{\partial\Omega} \mathsf{f} d\boldsymbol{\ell} = \int_{\Omega} \mathrm{rot}(\mathsf{f}) d\boldsymbol{S} = \int_{\Omega} \mathrm{rot}(\mathsf{f}) dxdy}$

TEOREMA DE GREEN

G. Green, 1793-1841

$\Omega, \widehat{\Omega} \subset \mathbb{R}^2$ abiertos tales que $\overline{\Omega} \subset \widehat{\Omega}$ y $\partial\Omega$ es la traza de una curva positivamente orientada. Si $\mathsf{f} = (f_1, f_2) \in \mathcal{C}^1(\widehat{\Omega})$, entonces

$$\oint_{\partial\Omega} \mathsf{f}\, d\boldsymbol{\ell} = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dxdy$$

1828

- $\operatorname{rot}(\mathsf{f}) = \left(0, 0, \dfrac{\partial f_2}{\partial x} - \dfrac{\partial f_1}{\partial y}\right) \Longrightarrow \boxed{\oint_{\partial\Omega} \mathsf{f}\, d\boldsymbol{\ell} = \int_{\Omega} \operatorname{rot}(\mathsf{f})\, d\boldsymbol{S} = \int_{\Omega} \operatorname{rot}(\mathsf{f})\, dxdy}$
- Como $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $\sigma\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $\sigma(x,y) = (x,y,0)$ es una parametrización $\Longrightarrow \sigma_x = (1,0,0)^\top, \sigma_y = (0,1,0)^\top$
  $\Longrightarrow$ su campo normal unitario es $\mathsf{n} = (0,0,1)^\top$

TEOREMA DE GREEN


G. Green, 1793-1841

$\Omega, \widehat{\Omega} \subset \mathbb{R}^2$ abiertos tales que $\overline{\Omega} \subset \widehat{\Omega}$ y $\partial\Omega$ es la traza de una curva positivamente orientada. Si $\mathsf{f} = (f_1, f_2) \in \mathcal{C}^1(\widehat{\Omega})$, entonces

$$\oint_{\partial\Omega} \mathsf{f}\, d\boldsymbol{\ell} = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dxdy$$

1828

- Si $\mathsf{g} = (f_2, -f_1) \Longrightarrow \mathrm{div}(\mathsf{g}) = \dfrac{\partial f_2}{\partial x} - \dfrac{\partial f_1}{\partial y}$
- Si $\mathsf{t} = (t_1, t_2)$ es el tangente unitario a $\partial\Omega \Longrightarrow \mathsf{n} = (t_2, -t_1)$ es el normal unitario *exterior* a $\partial\Omega$ y $\{-\mathsf{t}, \mathsf{n}\}$ está positivamente orientada.

TEOREMA DE GREEN

G. Green, 1793-1841

$\Omega, \widehat{\Omega} \subset \mathbb{R}^2$ abiertos tales que $\overline{\Omega} \subset \widehat{\Omega}$ y $\partial\Omega$ es la traza de una curva positivamente orientada. Si $\mathsf{f} = (f_1, f_2) \in \mathcal{C}^1(\widehat{\Omega})$, entonces

$$\oint_{\partial\Omega} \mathsf{f}\, d\boldsymbol{\ell} = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dxdy$$

1828

- Si $\mathsf{g} = (f_2, -f_1) \Longrightarrow \mathrm{div}(\mathsf{g}) = \dfrac{\partial f_2}{\partial x} - \dfrac{\partial f_1}{\partial y}$
- Si $\mathsf{t} = (t_1, t_2)$ es el tangente unitario a $\partial\Omega \Longrightarrow \mathsf{n} = (t_2, -t_1)$ es el normal unitario *exterior* a $\partial\Omega$ y $\{-\mathsf{t}, \mathsf{n}\}$ está positivamente orientada.
- $\langle \mathsf{f}, \mathsf{t} \rangle = f_1 t_1 + f_2 t_2 = -g_2 t_1 + g_1 t_2 = \langle \mathsf{g}, \mathsf{n} \rangle$

TEOREMA DE GREEN

G. Green, 1793-1841

$\Omega, \widehat{\Omega} \subset \mathbb{R}^2$ abiertos tales que $\overline{\Omega} \subset \widehat{\Omega}$ y $\partial\Omega$ es la traza de una curva positivamente orientada. Si $\mathsf{f} = (f_1, f_2) \in \mathcal{C}^1(\widehat{\Omega})$, entonces

$$\oint_{\partial\Omega} \mathsf{f}\, d\boldsymbol{\ell} = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dxdy$$

1828

- Si $\mathsf{g} = (f_2, -f_1) \Longrightarrow \mathrm{div}(\mathsf{g}) = \dfrac{\partial f_2}{\partial x} - \dfrac{\partial f_1}{\partial y}$
- $\langle \mathsf{f}, \mathsf{t} \rangle = f_1 t_1 + f_2 t_2 = -g_2 t_1 + g_1 t_2 = \langle \mathsf{g}, \mathsf{n} \rangle$
- $\boxed{\displaystyle\int_{\partial\Omega} \langle \mathsf{g}, \mathsf{n} \rangle d\ell = \int_{\Omega} \mathrm{div}(\mathsf{g}) d\boldsymbol{S} = \int_{\Omega} \mathrm{div}(\mathsf{g}) dxdy}$

TEOREMA DE GREEN

G. Green, 1793-1841

$\Omega, \widehat{\Omega} \subset \mathbb{R}^2$ abiertos tales que $\overline{\Omega} \subset \widehat{\Omega}$ y $\partial\Omega$ es la traza de una curva positivamente orientada. Si $\mathsf{f} = (f_1, f_2) \in \mathcal{C}^1(\widehat{\Omega})$, entonces

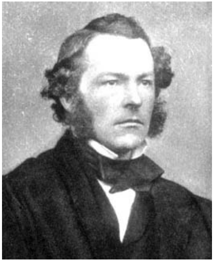
$$\oint_{\partial\Omega} \mathsf{f} d\boldsymbol{\ell} = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dxdy$$

1828

- Calcular las circulaciones siguientes, aplicando el teorema de Green:
  - $\oint_C \big(-2xye^{-x^2}dx + (e^{-x^2} + 3x)dy \big)$, $C = \{x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0\}$.
  - $\oint_{C_1} \mathsf{f} d\boldsymbol{\ell} - \oint_{C_2} \mathsf{f} d\boldsymbol{\ell}$ con $\mathsf{f} = \big(e^x \cos(y) - y, -e^x \operatorname{sen}(y)\big)$

    $C_1 = \{x^2 + y^2 = 4\}$ y $C_2 = \{x^2 - 2x + y^2 = 0\}$, orientadas posit.

TEOREMA DE STOKES



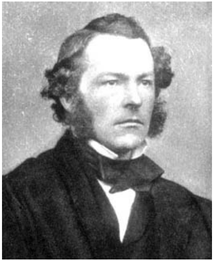
G.G. Stokes, 1819-1903

$S \subset \mathbb{R}^3$ es una superficie orientada cuya frontera ∂S es una curva regular con la orientación inducida por S. Si $\mathsf{f} \in \mathcal{C}^1(\Omega;\mathbb{R}^3)$, con Ω abierto tal que $\overline{S} \subset \Omega$, entonces

$$\oint_{\partial S} \mathsf{f}\, d\boldsymbol{\ell} = \int_S \operatorname{rot} \mathsf{f}\, d\boldsymbol{S}$$

c. 1850

TEOREMA DE STOKES

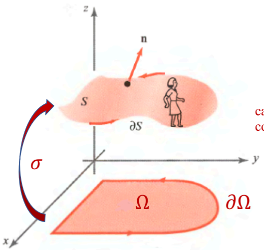


G.G. Stokes, 1819-1903

$S \subset \mathbb{R}^3$ es una superficie orientada cuya frontera ∂S es una curva regular con la orientación inducida por S. Si $\mathsf{f} \in \mathcal{C}^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$, con Ω abierto tal que $\overline{S} \subset \Omega$, entonces

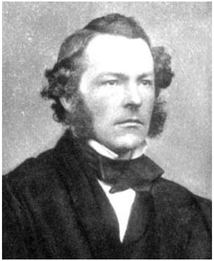
$$\oint_{\partial S} \mathsf{f}\, d\boldsymbol{\ell} = \int_S \mathrm{rot}\, \mathsf{f}\, d\boldsymbol{S}$$

c. 1850



caminar sobre ∂S
con S a la izquierda

TEOREMA DE STOKES

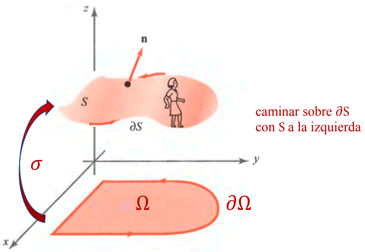


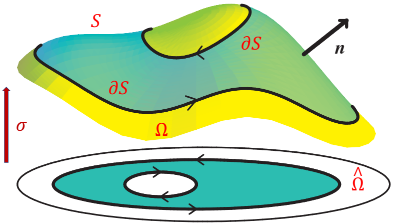
G.G. Stokes, 1819-1903

$S \subset \mathbb{R}^3$ es una superficie orientada cuya frontera ∂S es una curva regular con la orientación inducida por S. Si $\mathrm{f} \in \mathcal{C}^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$, con Ω abierto tal que $\overline{S} \subset \Omega$, entonces

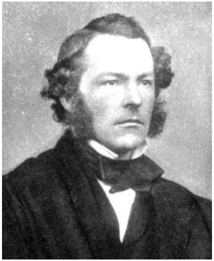
$$\oint_{\partial S} \mathrm{f}\, d\boldsymbol{\ell} = \int_S \mathrm{rot\, f}\, d\boldsymbol{S}$$

c. 1850





TEOREMA DE STOKES



G.G. Stokes, 1819-1903

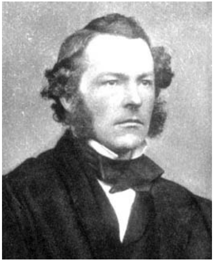
$S \subset \mathbb{R}^3$ es una superficie orientada cuya frontera ∂S es una curva regular con la orientación inducida por S. Si $\mathsf{f} \in \mathcal{C}^1(\Omega;\mathbb{R}^3)$, con Ω abierto tal que $\overline{S} \subset \Omega$, entonces

$$\oint_{\partial S} \mathsf{f}\, d\boldsymbol{\ell} = \int_S \operatorname{rot} \mathsf{f}\, d\boldsymbol{S}$$

c. 1850

- Si el campo f es irrotacional; es decir $\operatorname{rot} \mathsf{f} = 0$, entonces $\displaystyle\int_{\partial S} \mathsf{f}\, d\boldsymbol{\ell} = 0$,
- Si la superficie S es cerrada; es decir, $\partial S = \emptyset$, entonces $\displaystyle\int_S \operatorname{rot} \mathsf{f}\, d\boldsymbol{S} = 0$

TEOREMA DE STOKES


G.G. Stokes, 1819-1903

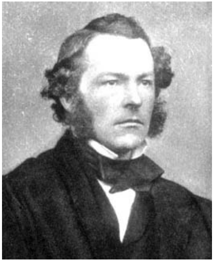
$S \subset \mathbb{R}^3$ es una superficie orientada cuya frontera ∂S es una curva regular con la orientación inducida por S. Si $\mathsf{f} \in \mathcal{C}^1(\Omega;\mathbb{R}^3)$, con Ω abierto tal que $\overline{S} \subset \Omega$, entonces

$$\oint_{\partial S} \mathsf{f}\, d\boldsymbol{\ell} = \int_S \operatorname{rot} \mathsf{f}\, d\boldsymbol{S}$$

c. 1850

- Si el campo f es irrotacional; es decir $\operatorname{rot} \mathsf{f} = 0$, entonces $\displaystyle\int_{\partial S} \mathsf{f}\, d\boldsymbol{\ell} = 0$,
- Si la superficie S es cerrada; es decir, $\partial S = \emptyset$, entonces $\displaystyle\int_S \operatorname{rot} \mathsf{f}\, d\boldsymbol{S} = 0$
- El Teorema de Green es un caso particular del Teorema de Stokes

TEOREMA DE STOKES



G.G. Stokes, 1819-1903

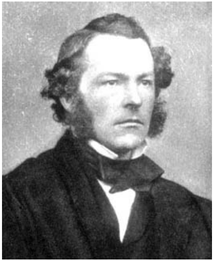
$S \subset \mathbb{R}^3$ es una superficie orientada cuya frontera ∂S es una curva regular con la orientación inducida por S. Si $\mathsf{f} \in \mathcal{C}^1(\Omega;\mathbb{R}^3)$, con Ω abierto tal que $\overline{S} \subset \Omega$, entonces

$$\oint_{\partial S} \mathsf{f}\, d\boldsymbol{\ell} = \int_S \operatorname{rot} \mathsf{f}\, d\boldsymbol{S}$$

c. 1850

- Calcular $\oint_C \mathsf{f} d\boldsymbol{\ell}$ donde $\mathsf{f}(x,y,z) = (ye^{xy}, xe^{xy}, xyz)$ y C es la curva del primer octante, obtenida cortando el cono $x^2+y^2=(z-1)^2$ con los planos coordenados y recorrida de manera que desde el origen se vea en el sentido de las agujas del reloj.

TEOREMA DE STOKES



G.G. Stokes, 1819-1903

$S \subset \mathbb{R}^3$ es una superficie orientada cuya frontera ∂S es una curva regular con la orientación inducida por S. Si $\mathsf{f} \in \mathcal{C}^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$, con Ω abierto tal que $\overline{S} \subset \Omega$, entonces

$$\oint_{\partial S} \mathsf{f}\, d\boldsymbol{\ell} = \int_S \operatorname{rot} \mathsf{f}\, d\boldsymbol{S}$$

c. 1850

► Calcular el flujo del rotacional del campo vectorial $\mathsf{f} = (y, xz, xyz)$ a través de la superficie $S = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z \geq 0\}$, orientada con el vector normal *hacia arriba*.

TEOREMA DE GAUSS

G.F. Gauss, 1777-1855

$\Omega, \widehat{\Omega} \subset \mathbb{R}^3$ abiertos tales que $\overline{\Omega} \subset \widehat{\Omega}$ y $\partial\Omega$ es una superficie regular.
Si $\mathsf{f} \in \mathcal{C}^1(\widehat{\Omega}; \mathbb{R}^3)$, entonces

$$\int_{\partial\Omega} \langle \mathsf{f}, \mathsf{n} \rangle \, d\boldsymbol{S} = \int_{\partial\Omega} \mathsf{f} \, d\boldsymbol{S} = \int_{\Omega} \mathrm{div}(\mathsf{f}) \, d\boldsymbol{V}$$

1813

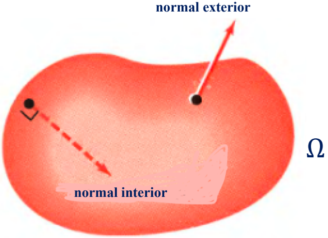
TEOREMA DE GAUSS

G.F. Gauss, 1777-1855

$\Omega, \widehat{\Omega} \subset \mathbb{R}^3$ abiertos tales que $\overline{\Omega} \subset \widehat{\Omega}$ y $\partial\Omega$ es una superficie regular.
Si $\mathsf{f} \in \mathcal{C}^1(\widehat{\Omega}; \mathbb{R}^3)$, entonces

$$\int_{\partial\Omega} \langle \mathsf{f}, \mathsf{n} \rangle \, d\boldsymbol{S} = \int_{\partial\Omega} \mathsf{f} \, d\boldsymbol{S} = \int_{\Omega} \mathrm{div}(\mathsf{f}) \, d\boldsymbol{V}$$

1813



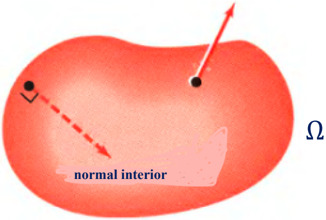
TEOREMA DE GAUSS

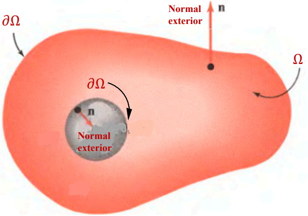
G.F. Gauss, 1777-1855

$\Omega, \widehat{\Omega} \subset \mathbb{R}^3$ abiertos tales que $\overline{\Omega} \subset \widehat{\Omega}$ y $\partial\Omega$ es una superficie regular.
Si $\mathsf{f} \in \mathcal{C}^1(\widehat{\Omega}; \mathbb{R}^3)$, entonces

$$\int_{\partial\Omega} \langle \mathsf{f}, \mathsf{n} \rangle \, d\boldsymbol{S} = \int_{\partial\Omega} \mathsf{f} \, d\boldsymbol{S} = \int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathsf{f}) \, d\boldsymbol{V}$$

1813





TEOREMA DE GAUSS

G.F. Gauss, 1777-1855

$\Omega, \widehat{\Omega} \subset \mathbb{R}^3$ abiertos tales que $\overline{\Omega} \subset \widehat{\Omega}$ y $\partial\Omega$ es una superficie regular.
Si $\mathsf{f} \in \mathcal{C}^1(\widehat{\Omega}; \mathbb{R}^3)$, entonces

$$\int_{\partial\Omega} \langle \mathsf{f}, \mathsf{n} \rangle \, d\boldsymbol{S} = \int_{\partial\Omega} \mathsf{f} \, d\boldsymbol{S} = \int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathsf{f}) \, d\boldsymbol{V}$$

1813

- Si f es solenoidal; es decir $\operatorname{div} \mathsf{f} = 0$, entonces $\displaystyle\int_{\partial\Omega} \mathsf{f} \, d\boldsymbol{S} = 0$.

TEOREMA DE GAUSS

G.F. Gauss, 1777-1855

$\Omega, \widehat{\Omega} \subset \mathbb{R}^3$ abiertos tales que $\overline{\Omega} \subset \widehat{\Omega}$ y $\partial\Omega$ es una superficie regular.
Si $\mathsf{f} \in \mathcal{C}^1(\widehat{\Omega}; \mathbb{R}^3)$, entonces

$$\int_{\partial\Omega} \langle \mathsf{f}, \mathsf{n} \rangle \, d\boldsymbol{S} = \int_{\partial\Omega} \mathsf{f} \, d\boldsymbol{S} = \int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathsf{f}) \, d\boldsymbol{V}$$

1813

- Si $\mathsf{f} = (f_1, f_2, f_3)$ es tal que $\operatorname{div} \mathsf{f} = 1$,

  $\rightsquigarrow$ $\mathsf{f} = \frac{1}{3}\mathsf{r}$ o bien $\mathsf{f}_1 = (x, 0, 0)$, $\mathsf{f}_2 = (0, y, 0)$ o $f_3 = (0, 0, z)$

$$\mathsf{v}(\Omega) = \frac{1}{3} \int_{\partial\Omega} \mathsf{r} \, d\boldsymbol{S} = \int_{\partial\Omega} \mathsf{f}_j \, d\boldsymbol{S}, \; j = 1, 2, 3.$$

TEOREMA DE GAUSS

G.F. Gauss, 1777-1855

$\Omega, \widehat{\Omega} \subset \mathbb{R}^3$ abiertos tales que $\overline{\Omega} \subset \widehat{\Omega}$ y $\partial\Omega$ es una superficie regular.
Si $\mathsf{f} \in \mathcal{C}^1(\widehat{\Omega}; \mathbb{R}^3)$, entonces

$$\int_{\partial\Omega} \langle \mathsf{f}, \mathsf{n} \rangle \, d\boldsymbol{S} = \int_{\partial\Omega} \mathsf{f} \, d\boldsymbol{S} = \int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathsf{f}) \, d\boldsymbol{V}$$

1813

▶ Calcular $\displaystyle\int_S \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{S}$, donde $\mathbf{F}(x,y,z) = (x^3, x^2y, x^2z)$ y S es la frontera de $\Omega = \{x^2 + y^2 < a^2,\ 0 < z < b\}$, orientada *hacia el exterior*.

TEOREMA DE GREEN

G. Green, 1793-1841

$\Omega, \widehat{\Omega} \subset \mathbb{R}^2$ abiertos tales que $\overline{\Omega} \subset \widehat{\Omega}$ y $\partial\Omega$ es la traza de una curva positivamente orientada. Si $\mathsf{f} = (f_1, f_2) \in \mathcal{C}^1(\widehat{\Omega})$, entonces

$$\oint_{\partial\Omega} \mathsf{f}\, d\boldsymbol{\ell} = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dxdy$$

1828

Demostración del Teorema de Green

- $\alpha \in \mathcal{C}([a,b];\mathbb{R}^2)$ es una **curva de Jordan** si es cerrada y simple.

Demostración del Teorema de Green

- $\alpha \in \mathcal{C}([a,b];\mathbb{R}^2)$ es una **curva de Jordan** si es cerrada y simple.

Teorema de la curva de Jordan

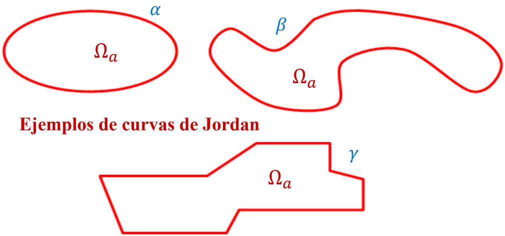
Si $\alpha \in \mathcal{C}([a,b];\mathbb{R}^2)$ es una curva de Jordan, $\mathbb{R}^2 \setminus C_\alpha = \Omega_a \cup \Omega_e$ tiene dos componentes conexas, una acotada, Ω_a, **su interior** y otra no acotada, Ω_e, **su exterior** cuya frontera común es C_α.

Demostración del Teorema de Green

- $\alpha \in \mathcal{C}([a,b];\mathbb{R}^2)$ es una **curva de Jordan** si es cerrada y simple.

Teorema de la curva de Jordan

Si $\alpha \in \mathcal{C}([a,b];\mathbb{R}^2)$ es una curva de Jordan, $\mathbb{R}^2 \setminus C_\alpha = \Omega_a \cup \Omega_e$ tiene dos componentes conexas, una acotada, Ω_a, **su interior** y otra no acotada, Ω_e, **su exterior** cuya frontera común es C_α.

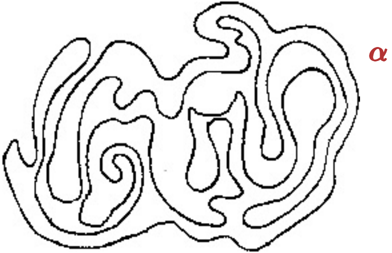


Demostración del Teorema de Green

- $\alpha \in \mathcal{C}([a,b];\mathbb{R}^2)$ es una **curva de Jordan** si es cerrada y simple.

Teorema de la curva de Jordan

Si $\alpha \in \mathcal{C}([a,b];\mathbb{R}^2)$ es una curva de Jordan, $\mathbb{R}^2 \setminus C_\alpha = \Omega_a \cup \Omega_e$ tiene dos componentes conexas, una acotada, Ω_a, **su interior** y otra no acotada, Ω_e, **su exterior** cuya frontera común es C_α.



Demostración del Teorema de Green

- $\alpha \in \mathcal{C}([a,b];\mathbb{R}^2)$ es una **curva de Jordan** si es cerrada y simple.

Teorema de la curva de Jordan

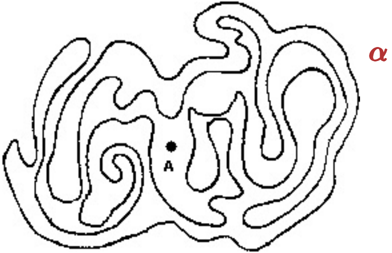
Si $\alpha \in \mathcal{C}([a,b];\mathbb{R}^2)$ es una curva de Jordan, $\mathbb{R}^2 \setminus C_\alpha = \Omega_a \cup \Omega_e$ tiene dos componentes conexas, una acotada, Ω_a, **su interior** y otra no acotada, Ω_e, **su exterior** cuya frontera común es C_α.

Demostración del Teorema de Green

- $\alpha \in \mathcal{C}([a,b];\mathbb{R}^2)$ es una **curva de Jordan** si es cerrada y simple.

Teorema de la curva de Jordan

Si $\alpha \in \mathcal{C}([a,b];\mathbb{R}^2)$ es una curva de Jordan, $\mathbb{R}^2 \setminus C_\alpha = \Omega_a \cup \Omega_e$ tiene dos componentes conexas, una acotada, Ω_a, **su interior** y otra no acotada, Ω_e, **su exterior** cuya frontera común es C_α.



Demostración del Teorema de Green

- $\alpha \in \mathcal{C}([a,b];\mathbb{R}^2)$ es una **curva de Jordan** si es cerrada y simple.

Teorema de la curva de Jordan

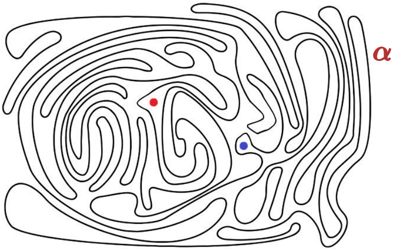
Si $\alpha \in \mathcal{C}([a,b];\mathbb{R}^2)$ es una curva de Jordan, $\mathbb{R}^2 \setminus C_\alpha = \Omega_a \cup \Omega_e$ tiene dos componentes conexas, una acotada, Ω_a, **su interior** y otra no acotada, Ω_e, **su exterior** cuya frontera común es C_α.

Demostración del Teorema de Green

- $\alpha \in \mathcal{C}([a,b];\mathbb{R}^2)$ es una **curva de Jordan** si es cerrada y simple.

Teorema de la curva de Jordan

Si $\alpha \in \mathcal{C}([a,b];\mathbb{R}^2)$ es una curva de Jordan, $\mathbb{R}^2 \setminus C_\alpha = \Omega_a \cup \Omega_e$ tiene dos componentes conexas, una acotada, Ω_a, **su interior** y otra no acotada, Ω_e, **su exterior** cuya frontera común es C_α.

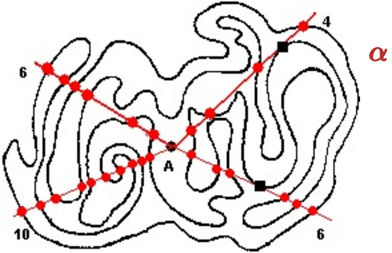


Demostración del Teorema de Green

- $\alpha \in \mathcal{C}([a,b];\mathbb{R}^2)$ es una **curva de Jordan** si es cerrada y simple.

Teorema de la curva de Jordan

Si $\alpha \in \mathcal{C}([a,b];\mathbb{R}^2)$ es una curva de Jordan, $\mathbb{R}^2 \setminus C_\alpha = \Omega_a \cup \Omega_e$ tiene dos componentes conexas, una acotada, Ω_a, **su interior** y otra no acotada, Ω_e, **su exterior** cuya frontera común es C_α.

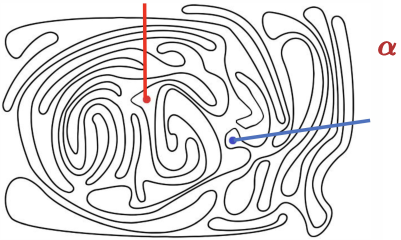


Demostración del Teorema de Green

- $\alpha \in \mathcal{C}([a,b];\mathbb{R}^2)$ es una **curva de Jordan** si es cerrada y simple.

Teorema de la curva de Jordan

Si $\alpha \in \mathcal{C}([a,b];\mathbb{R}^2)$ es una curva de Jordan, $\mathbb{R}^2 \setminus C_\alpha = \Omega_a \cup \Omega_e$ tiene dos componentes conexas, una acotada, Ω_a, **su interior** y otra no acotada, Ω_e, **su exterior** cuya frontera común es C_α.



Demostración del Teorema de Green

- $\alpha \in \mathcal{C}([a,b];\mathbb{R}^2)$ es una **curva de Jordan** si es cerrada y simple.

Teorema de la curva de Jordan

Si $\alpha \in \mathcal{C}([a,b];\mathbb{R}^2)$ es una curva de Jordan, $\mathbb{R}^2 \setminus C_\alpha = \Omega_a \cup \Omega_e$ tiene dos componentes conexas, una acotada, Ω_a, **su interior** y otra no acotada, Ω_e, **su exterior** cuya frontera común es C_α.

- $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ es un **dominio de Jordan** si es abierto, conexo, acotado y $\partial\Omega = C_\alpha$ donde $\alpha \in \mathcal{C}([a,b];\mathbb{R}^2)$ es una **curva de Jordan**.

Demostración del Teorema de Green

- $\alpha \in \mathcal{C}([a,b];\mathbb{R}^2)$ es una **curva de Jordan** si es cerrada y simple.

Teorema de la curva de Jordan

Si $\alpha \in \mathcal{C}([a,b];\mathbb{R}^2)$ es una curva de Jordan, $\mathbb{R}^2 \setminus C_\alpha = \Omega_a \cup \Omega_e$ tiene dos componentes conexas, una acotada, Ω_a, **su interior** y otra no acotada, Ω_e, **su exterior** cuya frontera común es C_α.

- $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ es un **dominio de Jordan** si es abierto, conexo, acotado y $\partial\Omega = C_\alpha$ donde $\alpha \in \mathcal{C}([a,b];\mathbb{R}^2)$ es una **curva de Jordan**.
- $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ dominio de Jordan $\Rightarrow$ Ω es la componente acotada de $\mathbb{R}^2 \setminus \partial\Omega$

Demostración del Teorema de Green

- $\alpha \in \mathcal{C}([a,b];\mathbb{R}^2)$ es una **curva de Jordan** si es cerrada y simple.

Teorema de la curva de Jordan

Si $\alpha \in \mathcal{C}([a,b];\mathbb{R}^2)$ es una curva de Jordan, $\mathbb{R}^2 \setminus C_\alpha = \Omega_a \cup \Omega_e$ tiene dos componentes conexas, una acotada, Ω_a, **su interior** y otra no acotada, Ω_e, **su exterior** cuya frontera común es C_α.

- $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ es un **dominio de Jordan** si es abierto, conexo, acotado y $\partial\Omega = C_\alpha$ donde $\alpha \in \mathcal{C}([a,b];\mathbb{R}^2)$ es una **curva de Jordan**.
- $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ dominio de Jordan $\Rightarrow$ Ω es la componente acotada de $\mathbb{R}^2 \setminus \partial\Omega$
- Toda curva de Jordan es homeomorfa a una circunferencia

Demostración del Teorema de Green

- $\alpha \in \mathcal{C}([a,b];\mathbb{R}^2)$ es una **curva de Jordan** si es cerrada y simple.

Teorema de la curva de Jordan

Si $\alpha \in \mathcal{C}([a,b];\mathbb{R}^2)$ es una curva de Jordan, $\mathbb{R}^2 \setminus C_\alpha = \Omega_a \cup \Omega_e$ tiene dos componentes conexas, una acotada, Ω_a, **su interior** y otra no acotada, Ω_e, **su exterior** cuya frontera común es C_α.

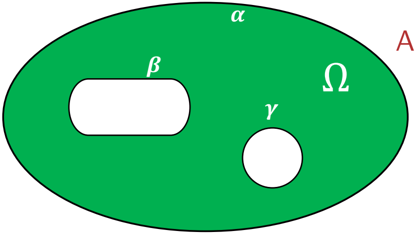
- $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ es un **abierto de Jordan** si es abierto, conexo, acotado y $\partial\Omega = \bigcup_{j=1}^{m} C_{\alpha_j}$ es unión disjunta de trazas de **curvas de Jordan**.

Demostración del Teorema de Green

- $\alpha \in \mathcal{C}([a,b];\mathbb{R}^2)$ es una **curva de Jordan** si es cerrada y simple.

Teorema de la curva de Jordan

Si $\alpha \in \mathcal{C}([a,b];\mathbb{R}^2)$ es una curva de Jordan, $\mathbb{R}^2 \setminus C_\alpha = \Omega_a \cup \Omega_e$ tiene dos componentes conexas, una acotada, Ω_a, **su interior** y otra no acotada, Ω_e, **su exterior** cuya frontera común es C_α.



Abierto de Jordan

Demostración del Teorema de Green

- $\alpha \in \mathcal{C}([a,b];\mathbb{R}^2)$ es una **curva de Jordan** si es cerrada y simple.

Teorema de la curva de Jordan

Si $\alpha \in \mathcal{C}([a,b];\mathbb{R}^2)$ es una curva de Jordan, $\mathbb{R}^2 \setminus C_\alpha = \Omega_a \cup \Omega_e$ tiene dos componentes conexas, una acotada, Ω_a, **su interior** y otra no acotada, Ω_e, **su exterior** cuya frontera común es C_α.

- Los abiertos Elementales de $\mathbb{R}^2$ son dominios de Jordan:

$\rightsquigarrow$ Existen $[a,b] \subset \mathbb{R}$ y $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathscr{C}([a,b])$ tales que $\varphi_1 < \varphi_2$.

TIPO I: $E = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a < x < b,\ \ \varphi_1(x) < y < \varphi_2(x)\big\}$

TIPO II: $F = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a < y < b,\ \ \varphi_1(y) < x < \varphi_2(y)\big\}$

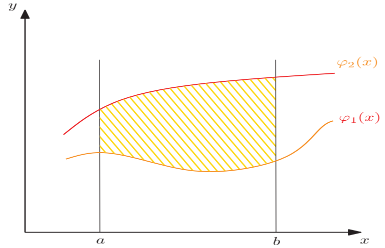
Demostración del Teorema de Green

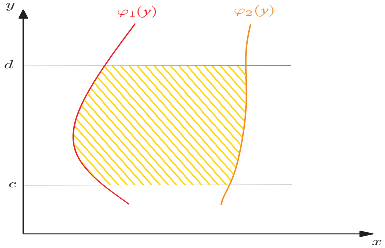
- $\alpha \in \mathcal{C}([a,b];\mathbb{R}^2)$ es una **curva de Jordan** si es cerrada y simple.

Teorema de la curva de Jordan

Si $\alpha \in \mathcal{C}([a,b];\mathbb{R}^2)$ es una curva de Jordan, $\mathbb{R}^2 \setminus C_\alpha = \Omega_a \cup \Omega_e$ tiene dos componentes conexas, una acotada, Ω_a, **su interior** y otra no acotada, Ω_e, **su exterior** cuya frontera común es C_α.

- Los abiertos Elementales de $\mathbb{R}^2$ son dominios de Jordan:





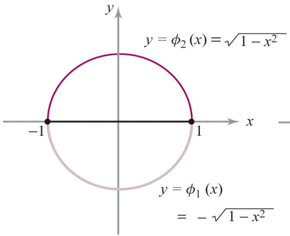
Demostración del Teorema de Green

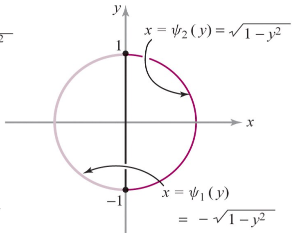
- $\alpha \in \mathcal{C}([a,b];\mathbb{R}^2)$ es una **curva de Jordan** si es cerrada y simple.

Teorema de la curva de Jordan

Si $\alpha \in \mathcal{C}([a,b];\mathbb{R}^2)$ es una curva de Jordan, $\mathbb{R}^2 \setminus C_\alpha = \Omega_a \cup \Omega_e$ tiene dos componentes conexas, una acotada, Ω_a, **su interior** y otra no acotada, Ω_e, **su exterior** cuya frontera común es C_α.

- Los abiertos Elementales de $\mathbb{R}^2$ son dominios de Jordan:





TEOREMA DE GREEN

G. Green, 1793-1841

Sean $\Omega, \widehat{\Omega} \subset \mathbb{R}^2$ tales que $\overline{\Omega} \subset \widehat{\Omega}$ y Ω es elemental de TIPO I y II con $\partial\Omega$ de clase $\mathcal{C}^1_s$. Si $\mathsf{f} = (f_1, f_2) \in \mathcal{C}^1(\widehat{\Omega}, \mathbb{R}^2)$, entonces

$$\oint_{\partial\Omega} \mathsf{f} d\boldsymbol{\ell} = \int_{\Omega} \Big(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\Big) dx dy$$

1828

TEOREMA DE GREEN

G. Green, 1793-1841

Sean $\Omega, \widehat{\Omega} \subset \mathbb{R}^2$ tales que $\overline{\Omega} \subset \widehat{\Omega}$ y Ω es elemental de TIPO I y II con $\partial\Omega$ de clase $\mathcal{C}_s^1$. Si $\mathsf{f} = (f_1, f_2) \in \mathcal{C}^1(\widehat{\Omega}, \mathbb{R}^2)$, entonces

$$\oint_{\partial\Omega} \mathsf{f} d\boldsymbol{\ell} = \int_{\Omega} \Big(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\Big) dx dy$$

1828

- $\partial\Omega$ se considera con la orientación positiva

TEOREMA DE GREEN


G. Green, 1793-1841

Sean $\Omega, \widehat{\Omega} \subset \mathbb{R}^2$ tales que $\overline{\Omega} \subset \widehat{\Omega}$ y Ω es elemental de TIPO I y II con $\partial\Omega$ de clase $\mathcal{C}^1_s$. Si $\mathsf{f} = (f_1, f_2) \in \mathcal{C}^1(\widehat{\Omega}, \mathbb{R}^2)$, entonces

$$\oint_{\partial\Omega} \mathsf{f} d\boldsymbol{\ell} = \int_{\Omega} \Big(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\Big) dxdy$$

1828

- $\partial\Omega$ se considera con la orientación positiva
- El Teorema es equivalente a las identidades

$$\oint_{\partial\Omega} f_1 dx = -\int_{\Omega} \frac{\partial f_1}{\partial y}\, dxdy \quad \text{e} \quad \oint_{\partial\Omega} f_2 dy = \int_{\Omega} \frac{\partial f_2}{\partial x}\, dxdy$$

TEOREMA DE GREEN

G. Green, 1793-1841

Sean $\Omega, \widehat{\Omega} \subset \mathbb{R}^2$ tales que $\overline{\Omega} \subset \widehat{\Omega}$ y Ω es elemental de TIPO I y II con $\partial\Omega$ de clase $\mathcal{C}^1_s$. Si $\mathsf{f} = (f_1, f_2) \in \mathcal{C}^1(\widehat{\Omega}, \mathbb{R}^2)$, entonces

$$\oint_{\partial\Omega} \mathsf{f} d\boldsymbol{\ell} = \int_{\Omega} \Big(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\Big) dxdy$$

1828

- $\partial\Omega$ se considera con la orientación positiva
- El Teorema es equivalente a las identidades

$$\oint_{\partial\Omega} f_1 dx = -\int_{\Omega} \frac{\partial f_1}{\partial y}\, dxdy \quad \text{e} \quad \oint_{\partial\Omega} f_2 dy = \int_{\Omega} \frac{\partial f_2}{\partial x}\, dxdy$$

- Aplicar el Teorema de Fubini

TEOREMA DE GREEN

G. Green, 1793-1841

Sean $\Omega, \widehat{\Omega} \subset \mathbb{R}^2$ tales que $\overline{\Omega} \subset \widehat{\Omega}$ y Ω es elemental de TIPO I y II con $\partial\Omega$ de clase $\mathcal{C}^1_s$. Si $\mathsf{f} = (f_1, f_2) \in \mathcal{C}^1(\widehat{\Omega}, \mathbb{R}^2)$, entonces

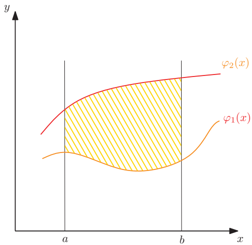
$$\oint_{\partial\Omega} \mathsf{f}\, d\boldsymbol{\ell} = \int_{\Omega} \Big(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \Big) dx dy$$

1828

- $$\oint_{\partial\Omega} f_1 dx = -\int_{\Omega} \frac{\partial f_1}{\partial y}\, dx dy$$

  $$\Omega = \big\{ a < x < b, \varphi_1(x) < y < \varphi_2(x) \big\}$$

  $$\int_{\Omega} \frac{\partial f_1}{\partial y}\, dx dy = \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial f_1}{\partial y}\, dx dy$$



TEOREMA DE GREEN

G. Green, 1793-1841

Sean $\Omega, \widehat{\Omega} \subset \mathbb{R}^2$ tales que $\overline{\Omega} \subset \widehat{\Omega}$ y Ω es elemental de TIPO I y II con $\partial\Omega$ de clase $\mathcal{C}^1_s$. Si $\mathsf{f} = (f_1, f_2) \in \mathcal{C}^1(\widehat{\Omega}, \mathbb{R}^2)$, entonces

$$\oint_{\partial\Omega} \mathsf{f}\, d\boldsymbol{\ell} = \int_{\Omega} \Big(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\Big) dx dy$$

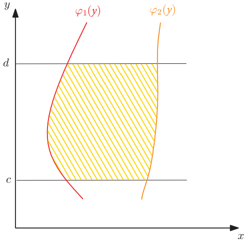
1828

▶

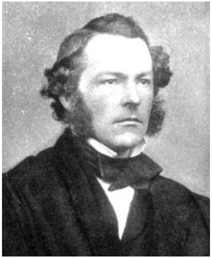
$$\oint_{\partial\Omega} f_2 dx = \int_{\Omega} \frac{\partial f_2}{\partial x}\, dx dy$$

$$\Omega = \big\{c < y < d, \varphi_1(y) < x < \varphi_2(y)\big\}$$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial f_2}{\partial x}\, dx dy = \int_c^d \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} \frac{\partial f_2}{\partial x}\, dx dy$$



TEOREMA DE STOKES



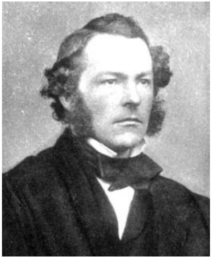
G.G. Stokes, 1819-1903

$S \subset \mathbb{R}^3$ es una superficie orientada cuya frontera ∂S es una curva regular con la orientación inducida por S. Si $\mathsf{f} \in \mathcal{C}^1(\Omega;\mathbb{R}^3)$, con Ω abierto tal que $\overline{S} \subset \Omega$, entonces

$$\oint_{\partial S} \mathsf{f}\, d\boldsymbol{\ell} = \int_S \operatorname{rot} \mathsf{f}\, d\boldsymbol{S}$$

1828

TEOREMA DE STOKES



G.G. Stokes, 1819-1903

$S \subset \mathbb{R}^3$ es una superficie orientada cuya frontera ∂S es una curva regular con la orientación inducida por S. Si $\mathsf{f} \in \mathcal{C}^1(\Omega;\mathbb{R}^3)$, con Ω abierto tal que $\overline{S} \subset \Omega$, entonces

$$\oint_{\partial S} \mathsf{f}\, d\boldsymbol{\ell} = \int_S \operatorname{rot} \mathsf{f}\, d\boldsymbol{S}$$

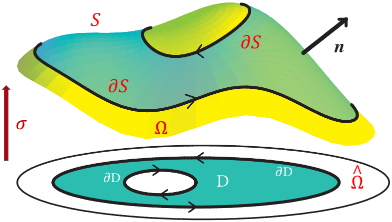
1828

$\widehat{\Omega} \subset \mathbb{R}^2$ abierto, $\sigma \in \mathcal{C}^2(\widehat{\Omega};\mathbb{R}^3)$

inyectiva y regular

Sea $D \subset \widehat{\Omega}$ abierto de Jordan

$S = \sigma(),\quad \partial S = \sigma(\partial D)$



TEOREMA DE GAUSS

G.F. Gauss, 1777-1855

$\Omega, \widehat{\Omega} \subset \mathbb{R}^3$ abiertos tales que $\overline{\Omega} \subset \widehat{\Omega}$ y $\partial\Omega$ es una superficie regular.
Si $\mathsf{f} \in \mathcal{C}^1(\widehat{\Omega}; \mathbb{R}^3)$, entonces

$$\int_{\partial\Omega} \langle \mathsf{f}, \mathsf{n} \rangle \, d\boldsymbol{S} = \int_{\partial\Omega} \mathsf{f} \, d\boldsymbol{S} = \int_{\Omega} \mathrm{div}(\mathsf{f}) \, d\boldsymbol{V}$$

1813

TEOREMA DE GAUSS

G.F. Gauss, 1777-1855

$\Omega, \widehat{\Omega} \subset \mathbb{R}^3$ abiertos tales que $\overline{\Omega} \subset \widehat{\Omega}$ y $\partial\Omega$ es una superficie regular.
Si $\mathsf{f} \in \mathcal{C}^1(\widehat{\Omega}; \mathbb{R}^3)$, entonces

$$\int_{\partial\Omega} \langle \mathsf{f}, \mathsf{n} \rangle \, d\boldsymbol{S} = \int_{\partial\Omega} \mathsf{f} \, d\boldsymbol{S} = \int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathsf{f}) \, d\boldsymbol{V}$$

1813

- Ω es elemental expresable como

$$\Omega = \big\{(x,y,z) : a < x < b,\ \varphi(x) < y < \psi(x),\ \phi(x,y) < z < \rho(x,y)\big\}$$
$$\Omega = \big\{(x,y,z) : a < y < b,\ \varphi(y) < z < \psi(y),\ \phi(y,z) < x < \rho(y,z)\big\}$$
$$\Omega = \big\{(x,y,z) : a < x < b,\ \varphi(x) < z < \psi(x),\ \phi(z,x) < y < \rho(z,x)\big\}$$

TEOREMA DE GAUSS

G.F. Gauss, 1777-1855

$\Omega, \widehat{\Omega} \subset \mathbb{R}^3$ abiertos tales que $\overline{\Omega} \subset \widehat{\Omega}$ y $\partial\Omega$ es una superficie regular.
Si $\mathsf{f} \in \mathcal{C}^1(\widehat{\Omega}; \mathbb{R}^3)$, entonces

$$\int_{\partial\Omega} \langle \mathsf{f}, \mathsf{n} \rangle \, d\boldsymbol{S} = \int_{\partial\Omega} \mathsf{f} \, d\boldsymbol{S} = \int_{\Omega} \mathrm{div}(\mathsf{f}) \, d\boldsymbol{V}$$

1813

- Si $\mathsf{f} = (f_1, f_2, f_3)$ y $\mathsf{f}_1 = (f_1, 0, 0)$, $\mathsf{f}_2 = (0, f_2, 0)$, $\mathsf{f}_3 = (0, 0, f_3)$, el Teorema es equivalente a las identidades

$$\int_{\partial\Omega} \mathsf{f}_1 d\boldsymbol{S} = \int_{\Omega} \frac{\partial f_1}{\partial x} \, d\boldsymbol{V}, \quad \int_{\partial\Omega} \mathsf{f}_2 d\boldsymbol{S} = \int_{\Omega} \frac{\partial f_2}{\partial y} \, d\boldsymbol{V}, \quad \int_{\partial\Omega} \mathsf{f}_3 d\boldsymbol{S} = \int_{\Omega} \frac{\partial f_3}{\partial z} \, d\boldsymbol{V}$$

TEOREMA DE GAUSS

G.F. Gauss, 1777-1855

$\Omega, \widehat{\Omega} \subset \mathbb{R}^3$ abiertos tales que $\overline{\Omega} \subset \widehat{\Omega}$ y $\partial\Omega$ es una superficie regular.
Si $\mathsf{f} \in \mathcal{C}^1(\widehat{\Omega}; \mathbb{R}^3)$, entonces

$$\int_{\partial\Omega} \langle \mathsf{f}, \mathsf{n} \rangle \, d\boldsymbol{S} = \int_{\partial\Omega} \mathsf{f} \, d\boldsymbol{S} = \int_{\Omega} \mathrm{div}(\mathsf{f}) \, d\boldsymbol{V}$$

1813

- Si $\mathsf{f} = (f_1, f_2, f_3)$ y $\mathsf{f}_1 = (f_1, 0, 0)$, $\mathsf{f}_2 = (0, f_2, 0)$, $\mathsf{f}_3 = (0, 0, f_3)$,

  el Teorema es equivalente a las identidades

$$\int_{\partial\Omega} \mathsf{f}_1 d\boldsymbol{S} = \int_{\Omega} \frac{\partial f_1}{\partial x} \, d\boldsymbol{V}, \quad \int_{\partial\Omega} \mathsf{f}_2 d\boldsymbol{S} = \int_{\Omega} \frac{\partial f_2}{\partial y} \, d\boldsymbol{V}, \quad \int_{\partial\Omega} \mathsf{f}_3 d\boldsymbol{S} = \int_{\Omega} \frac{\partial f_3}{\partial z} \, d\boldsymbol{V}$$

- Aplicar el Teorema de Fubini