Prenem $h = \frac{1}{4}$ i calculem Y_1, Y_2:

$$Y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Y_1 = Y_0 + h\, F(x_0, Y_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0+1 \\ 1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/4 \\ 1/4 \end{pmatrix}$$

$$\approx$$

$$Y(\underbrace{x_0+h}_{x_1}) = Y(\underbrace{0+\tfrac{1}{4}}_{x_1})$$

$x_1 = 1/4$

$$Y_2 = Y_1 + h\, F(x_1, Y_1) = \begin{pmatrix} 5/4 \\ 1/4 \end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \frac{1}{4} + 5/4 \\ \frac{5}{4} + \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13/8 \\ 5/8 \end{pmatrix}$$

$$\approx$$

$$Y(\underbrace{x_1+h}_{x_2}) = Y(\underbrace{x_0+2h}_{x_2}) = Y\left(\tfrac{1}{2}\right)$$

Mètodes de multipàs

Tornem al cas d'una sola EDO (es generalitza automàticament a un sistema d'EDO).

Considerem el problema de Cauchy o de valors inicials:

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

$x \in [a,b]$, $y \in \mathbb{R}$, $y_0 \in \mathbb{R}$, $f: [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és una funció prou bona per assegurar l'existència i unicitat de solució.

Fins ara hem vist els mètodes d'un sol pas que el càlcul de y_{n+1} només depenia del valor de (x_n, y_n).

Una altra possibilitat és utilitzar més punts anteriors (i, per tant, ja calculats) per calcular l'aproximació y_{n+1}; aquesta és l'essència dels mètodes de multipàs.

Considerem mètodes multipas lineals de k passos que són definits per una equació del tipus:

$$(MM)\quad \begin{cases} y(a)=y_0 \\ y_{n+1}=\underbrace{\sum_{i=1}^{k}\alpha_i y_{n+1-i}}_{\alpha_1 y_n+\alpha_2 y_{n-1}+\dots+\alpha_k y_{n+1-k}} + h\underbrace{\sum_{i=0}^{k}\beta_i f(x_{n+1-i},y_{n+1-i})}_{\beta_0 f(x_{n+1},y_{n+1})+\beta_1 f(x_n,y_n)+\dots+\beta_k f(x_{n+1-k},y_{n+1-k})},\quad n=0\div N-1 \end{cases}$$

Observem que si $\beta_0\neq 0$, y_{n+1} no està aïllada (i per tant s'ha de resoldre l'equació. En aquest cas s'anomena <u>mètode implícit</u>. Si $\beta_0=0$, llavors y_{n+1} està aïllada i es diu <u>mètode explícit</u>.

Fem una altra observació en els mètodes de multipas que no passa en els mètodes d'un pas: per calcular y_{n+1} es necessiten els k punts anteriors (si prenem un mètode de multipas amb k passos), i per tant el mètode no és aplicable per calcular $y_1, y_2, \dots, y_{k-1}$. Aquests els calcularem típicament amb un mètode d'un pas, que tingui el mateix ordre que el mètode de multipas que estem considerant.

Pel que fa a l'error i l'ordre del mètode tenim el següent resultat

Teorema

Si per a tot $x \in [a,b]$

$$y(x+h) - \sum_{i=1}^{k} \alpha_i y(x-(i-1)h) - h\sum_{i=0}^{k} \beta_i f(x-(i-1)h, y(x-(i-1)h)) =$$

$= O(h^{p+1})$, $p \in \mathbb{N}$, llavors el mètode d'integració considerat té ordre p.

Mètodes d'Adams-Bashforth

La forma més corrent de generar mètodes de multipas és la següent: integrem el PVI $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(a) = y_0 \end{cases}$ en $[x_n, x_{n+1}]$

$$y(x_{n+1}) - y(x_n) = \int_{x_n}^{x_{n+1}} y'(x)dx = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x))dx \approx \int_{x_n}^{x_{n+1}} P(x)dx$$

on $P(x)$ és un polinomi que aproxima $f(x, y(x))$

Per exemple, una forma d'obtenir aquest polinomi és la següent: siguin $y_n, y_{n-1}, \dots, y_{n-(k-1)}$ les aproximacions de la solució en els punts $x_n, \dots, x_{n-(k-1)}$ que suposem equiespaiats amb pas h. Prenem $P(x)$ el polinomi de grau $\leq k-1$ que satisfà

$$P(x_i) = f(x_i, y_i) \qquad i = n-(k-1) \div n$$

és a dir el polinomi interpolador de la xarxa $(x_i, f(x_i, y_i))$ $i = n-(k-1) \div n$.

L'algorisme d'aquest mètode serà doncs:

$$\begin{cases} y(a) = y_0 \\ y_{n+1} = y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} P(x)\,dx \end{cases}, \quad n = 0 \div N-1$$

- Així, per exemple, si $k=1$, el polinomi $P(x)$ té grau ≤ 0 i per ~~tant~~ és la constant $f(x_n, y_n) = P(x)$ (ja que $P(x_i) = f(x_i, y_i)$ $i=n$) i l'algorisme s'escriu

$$\begin{cases} y(a) = y_0 \\ y_{n+1} = y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x_n, y_n)\,dx = y_n + h f(x_n, y_n) \end{cases}, \quad n = 0 \div N-1$$

que és justament el mètode d'Euler. En aquest cas, seguint la notació de (MM), és $k=1$, $\alpha_1 = 1$, $\beta_0 = 0$, $\beta_1 = 1$ i es tracta d'un mètode d'un pas.

- Si $k=2$, el polinomi $P(x)$ té grau ≤ 1 i ha de satisfer

$$P(x_n) = f(x_n, y_n), \quad P(x_{n-1}) = f(x_{n-1}, y_{n-1}).$$

Prenent la fórmula de Lagrange per obtenir el polinomi interpolador.

$$P(x) = f(x_{n-1}, y_{n-1}) \frac{x - x_n}{x_{n-1} - x_n} + f(x_n, y_n) \frac{x - x_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}$$

Ara integrant $P(x)$ entre x_n i x_{n+1} obtenim l'algoritme

$$\begin{cases} y(a) = y_0 \\ y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left[3 f(x_n, y_n) - f(x_{n-1}, y_{n-1})\right] \end{cases}, \quad n = 1 \div N-1$$

Ara d'acord amb (MM) $\alpha_1 = 1, \ \alpha_2 = 0$

$\beta_0 = 0, \ \beta_1 = \frac{3}{2}, \ \beta_2 = -\frac{1}{2}$.

i tenim un mètode de 2 passos.

- Si $k=3$, s'obté de forma anàloga un mètode de 3 passos

$$\begin{cases} y(a) = y_0 \\ y_{n+1} = y_n + \frac{h}{12}\left[23 f(x_n, y_n) - 16 f(x_{n-1}, y_{n-1}) + 5 f(x_{n-2}, y_{n-2})\right] \end{cases}$$

$n = 2 \div N-1$

- Si $k=4$, s'obté un mètode de 4 passos:

$$y(a) = y_0$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}\Big[55 f(x_n, y_n) - 59 f(x_{n-1}, y_{n-1}) + 37 f(x_{n-2}, y_{n-2}) - 9 f(x_{n-3}, y_{n-3})\Big], \quad n = 3 \div N-1$$

Aquestes fórmules es coneixen per "mètodes d'Adams-Bashforth".
L'ordre d'aquests mètodes coincideix amb el nombre de nodes considerats a la interpolació, és a dir, k.

Per exemple, si $k=2$, tenim 2 nodes i desenvolupant per Taylor al voltant de x, resulta que

$$\frac{y(x+h)-y(x)}{h} = y'(x) + \frac{h}{2}y''(x) + O(h^2)$$

$$\frac{3}{2}f(x,y(x)) - \frac{1}{2}f(x-h, y(x-h)) =$$

$$= \frac{3}{2}f(x,y(x)) - \frac{1}{2}f(x-h, y(x) \underbrace{-y'(x)h + O(h^2)}_{\Delta y}) =$$

$$y(x-h) = y(x) - y'(x)h + O(h^2)$$

$$= \frac{3}{2}f(x,y(x)) - \frac{1}{2}f(x,y(x)) - \frac{1}{2}\Big[f_x(x,y(x))(-h) +$$

$$+ f_y(x,y(x))\underbrace{\left[-y'(x)h + O(h^2)\right]}_{\Delta y}\Big] + O(h^2) =$$

$$= f(x,y(x)) + \frac{h}{2}\left[f_x(x,y(x)) + f_y(x,y(x))y'(x)\right] + O(h^2)$$

Per tant, de cara a aplicar el teorema de la p.19:

$$\frac{y(x+h)-y(x)}{h} - \frac{1}{2}\left[3f(x,y(x)) - f(x-h, y(x-h))\right] =$$

$$= y'(x) + \frac{h}{2}y''(x) + O(h^2) - f(x,y(x)) + \frac{h}{2}\left[f_x(x,y(x)) + f_y(x,y(x))y'(x)\right] +$$

$$+ O(h^2) =$$

$= 0 + 0 + O(h^2) = O(h^2)$

$y'(x) - f(x, y(x)) = 0$

De $y'(x) = f(x, y(x)) \Rightarrow y''(x) = f_x(x, y(x)) + f_y(x, y(x))\, y'(x)$

Pel teorema anterior, el mètode d'Adams-Bashforth obtingut amb $k=2$ té ordre 2

En general es demostra el teorema següent

Teorema. El mètode d'Adams-Bashforth de k nodes té ordre k.