Mètodes de continuació.

Continuació dels zeros d'un sistema no lineal d'equacions

Considerem un sistema d'equacions depenent d'un paràmetre p

$$f(x,p)=0, \quad x\in\mathcal{U}\subset\mathbb{R}^n,\ p\in[a,b],\ f(x,p)\in\mathbb{R}^n. \tag{1}$$

Estem interessats en trobar les seves solucions i com depenen del paràmetre p. Els procediments per fer-ho s'anomenen mètodes de continuació.

Per exemple, si

$$\dot{x}=f(x,p)$$

és un sistema autònom d'equacions diferencials ordinàries (EDOs), el sistema (1) ens proporciona els seus punts d'equilibri.

Suposarem que coneixem una solució inicial de (1), (x^0,p^0). Podem suposar, a més, que la corba (x,p) està parametritzada per la seva longitud d'arc, s. Es a dir $(x,p)=(x(s),p(s))$. Recordem que si tenim $x=x(p)$, la relació entre p i s és

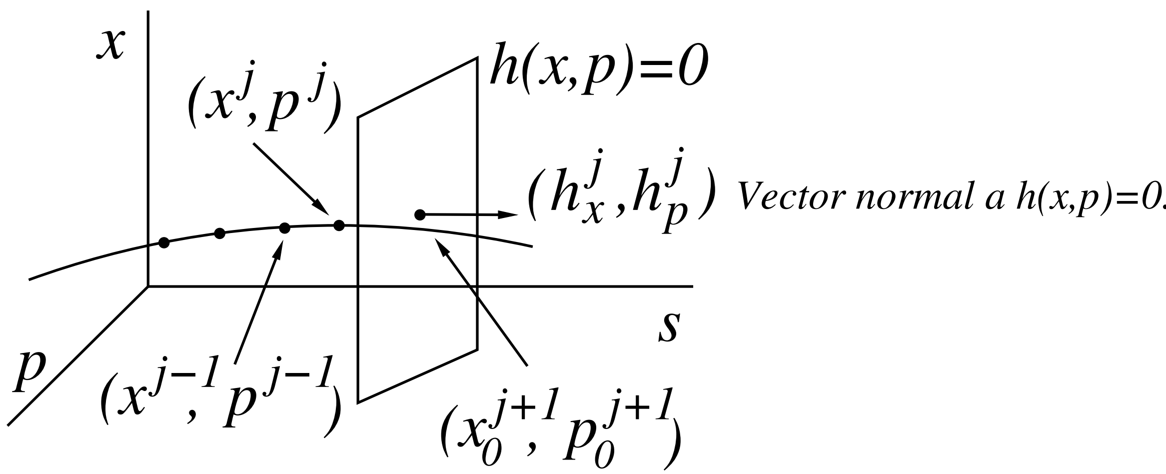
$$s=\int_{p^0}^{p}\sqrt{1+\|dx/dp\|^2}dp.$$

Això defineix $s=s(p)$, amb $s(p^0)=0$. Com que $ds/dp=\sqrt{1+\|dx/dp\|^2}>0$ podem invertir la funció per tenir $p=p(s)$ i escriure $(x(s),p(s))=(x(p(s)),p(s))$. Aquesta parametrització permet descriure fàcilment els possibles punts de retrocés.

Volem determinar simultàniament $x(s)$ i $p(s)$ de manera que siguin solució de (1). Ens falta una equació $h(x,p)=0$ (en molts casos lineal), per completar el sistema que determini una única parella (x,p),

$$f(x,p)=0,$$
$$h(x,p)=0.$$

Els mètodes de continuació són normalment del tipus predictor-corrector. Si (x^i,p^i), $i=0,\cdots,j$ són les solucions prèviament obtingudes sobre la corba $(x(s),p(s))$, es construeix a partir d'elles una condició inicial (x_0^{j+1},p_0^{j+1}) per a (x^{j+1},p^{j+1}) (predicció), que es refina pel mètode de Newton (correcció).



Cada possible $h(x,p)=0$ i cada mètode de fer la predicció determina un mètode de continuació.

El punt inicial (x_0^{j+1}, p_0^{j+1}) es pot predir

- Agafant la darrera solució obtinguda sobre la corba, $(x_0^{j+1}, p_0^{j+1}) = (x^j, p^j)$.
- Per extrapolació polinomial de les solucions anteriors. Per exemple, si

  $$(v_x^j, v_p^j) = \frac{(x^j, p^j) - (x^{j-1}, p^{j-1})}{\|(x^j, p^j) - (x^{j-1}, p^{j-1})\|}$$

  podem fer la predicció

  $$(x_0^{j+1}, p_0^{j+1}) = (x^j, p^j) + \Delta s_j (v_x^j, v_p^j)$$

  (predicció per la secant) amb $\Delta s_j > 0$ un cert increment de s.
- Si (v_x^j, v_p^j) és la tangent (unitària) a la corba de solucions al punt (x^j, p^j) podem fer també

  $$(x_0^{j+1}, p_0^{j+1}) = (x^j, p^j) + \Delta s_j (v_x^j, v_p^j).$$

  Derivant $f(x(s), p(s)) = 0$ respecte de s tenim

  $$\begin{aligned} &D_x f(x(s), p(s)) \frac{dx}{ds} + D_p f(x(s), p(s)) \frac{dp}{ds} = 0, \text{ i} \\ &D_x f(x^j, p^j) v_x^j + D_p f(x^j, p^j) v_p^j = 0, \end{aligned}$$

  amb $\|v_x^j\|^2 + (v_p^j)^2 = 1$. Es pot calcular primer (v_x^j, v_p^j) imposant alguna altra condició lineal, per exemple $\langle (v_x^{j-1}, v_p^{j-1}), (v_x^j, v_p^j) \rangle = 1$ per preservar l'orientació de la corba, i després normalitzar el vector (v_x^j, v_p^j) obtingut. En el primer punt, (x^0, p^0), podem agafar simplement, $(v_x^0, v_p^0) = (0, \pm 1)$ per començar la continuació incrementant o decrementant el paràmetre.

L'equació $h(x,p)=0$ corresponent a cada cas dels anteriors pot ser

- $h(x,p)=p-p^{j+1}$ amb $p^{j+1}=p^j+\Delta p^j$ el valor fixat per a p en la següent solució. Aquest mètode rep el nom de continuació respecte del paràmetre.
- $h(x,p)=\langle v_x^j, x-x^j\rangle + v_p^j(p-p^j)=\Delta s_j$. Llavors $h(x,p)=0$ és l'equació d'un hiperplà que passa per (x_0^{j+1},p_0^{j+1}), ja que $(x_0^{j+1},p_0^{j+1})=(x^j,p^j)+\Delta s_j(v_x^j,v_p^j)$ i

  $$\langle v_x^j, x_0^{j+1}-x^j\rangle + v_p^j(p_0^{j+1}-p^j)=\langle v_x^j, x^j-x^j\rangle + v_p^j(p^j-p^j)+\Delta s_j(\langle v_x^j,v_x^j\rangle + v_p^j v_p^j)=\Delta s_j,$$

  amb vector normal $(h_x^j,h_p^j)=(v_x^j,v_p^j)$.

  Aquesta condició diu que la projecció del vector $(x-x^j,p-p^j)$ sobre el vector unitari (v_x^j,v_p^j) val Δs_j.
- Igual que l'anterior. En aquest cas el mètode rep el nom de continuació pseudo-longitud d'arc.

Aplicant el mètode de Newton per al sistema

$$f(x,p)=0,$$
$$h(x,p)=0,$$

començant amb (x_0,p_0), tenim (eliminant el superíndex $j+1$ per simplificar la notació)

$$(x_{k+1},p_{k+1})=(x_k,p_k)+(\Delta x_k,\Delta p_k),$$

amb

$$\begin{pmatrix} D_x f(x_k,p_k) & D_p f(x_k,p_k) \\ h_x(x_k,p_k)^\mathsf{T} & h_p(x_k,p_k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_k \\ \Delta p_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f(x_k,p_k) \\ -h(x_k,p_k) \end{pmatrix},$$

essent (h_x,h_p) el vector normal a $h(x,p)=0$.

Exemple. Si $f(x,y)$ és una funció en dues variables, les seves corbes de nivell $f(x,y)=c$ es poden calcular per continuació. Volem $(x(s),y(s))$ tal que $f(x(s),y(s))=c$. El paper del paràmetre p el fa ara qualsevol de les dues variables. Podem pensar tant en la corba $x=x(y)$ o $y=y(x)$ segons convingui i quan sigui possible.

Solucions estacionàries de l'equació de Kuramoto-Sivashinsky

Com a exemple, considerem l'equació en derivades parcials (EDP) per a $u(t,x)$

$$u_t + 4u_{xxxx} + \lambda(u_{xx} + uu_x) = 0$$

a l'interval $x \in [0,\pi]$, per a $t \geq 0$, amb condicions de contorn $u(0) = u(\pi) = 0$, i amb $\lambda \geq 0$ un paràmetre. Cerquen solucions estacionàries (independents de t, $u_t = 0$) de la forma $u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \sin nx$. Si trunquem la serie a $n = N$, es a dir, si fem $u(x) = \sum_{n=1}^{N} u_n \sin nx$ i la substituïm a l'equació, s'obté un sistema de N equacions polinòmiques de segon grau per als coeficients u_n, $n = 1, \cdots, N$. Les branques de solucions d'equilibri que bifurquen de la solució trivial $u(x) = 0$ es poden veure a la figura, que correspon a $N = 64$, $0 \leq \lambda \leq 300$, amb $\|u\|$ la norma euclídia del vector $(u_1, \cdots, u_N)$. La gran majoria de les solucions són inestables. No es mostren les branques de solucions periòdiques, quasi-periòdiques, etc.