Croquis de SLHs 2D a CC

Rafael Ramírez Ros

Clase 8 (de problemas de EDOs-GM)

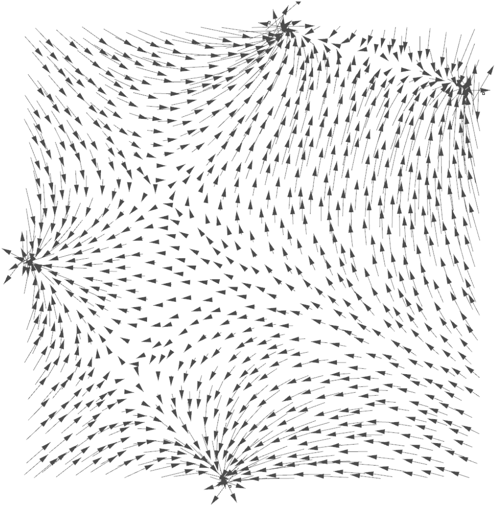
Abreviaturas

- SL = Sistema lineal
- SLH/SLNH = Sistema lineal homogéneo/no homogéneo
- CC = coeficientes constantes
- LI/LD = Linealmente independiente/dependiente
- VAP/VEP = Valor/vector propio
- PEQ = Punto de equilibrio
- RI/PI = Recta/plano invariante

Tiempo, posición y velocidad

- Sea A una matriz real $n \times n$.
- Dado el SLH a CC
$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x},$$
diremos que
  - La variable independiente $t \in \mathbf{R}$ es el tiempo;
  - La variable dependiente $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t) \in \mathbf{R}^n$ es la posición; y
  - La primera derivada $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}'(t) \in \mathbf{R}^n$ es la velocidad.
- La fórmula $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$ permite calcular la velocidad $\boldsymbol{x}'$ asociada a cada posición $\boldsymbol{x}$ y dibujar los llamados campos de velocidades.

Campo de vectores: Ejemplo 2D



Definiciones

- Un punto $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbf{R}^n$ es un PEQ del SLH $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$ cuando la velocidad en ese punto sea cero: $\boldsymbol{x}_0 \in \operatorname{Nuc} A$.
- El SLH $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$ es degenerado cuando tiene infinitos PEQs. Es decir, cuando $\det A = 0$.
- Diremos que el SLH $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$ es:
  - Repulsor si todas sus soluciones no triviales escapan a infinito cuando $t \to +\infty$;
  - Inestable no repulsor si alguna (pero no todas) de sus soluciones escapa a infinito cuando $t \to +\infty$;
  - Estable no atractor cuando todas sus soluciones están acotadas para $t \geq 0$ y alguna de ellas no tiende al origen; y
  - Atractor si todas sus soluciones no triviales tienden al origen cuando $t \to +\infty$.

Soluciones "sencillas" de SLHs a CC

- Si $\boldsymbol{v}$ es un VEP de VAP λ de una matriz A, entonces

$$\boldsymbol{x}(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}\boldsymbol{v}$$

  es una solución del SLH $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$.

- Si $\boldsymbol{v}_\pm = \boldsymbol{u} \pm \boldsymbol{w}\mathrm{i}$ son VEPs complejos conjugados de VAPs $\lambda_\pm = \alpha \pm \beta\mathrm{i}$ de una matriz real A, entonces

$$\boldsymbol{y}(t) = \mathrm{e}^{\alpha t}\big(\boldsymbol{u}\cos\beta t - \boldsymbol{w}\sin\beta t\big),$$
$$\boldsymbol{z}(t) = \mathrm{e}^{\alpha t}\big(\boldsymbol{u}\sin\beta t + \boldsymbol{w}\cos\beta t\big),$$

  son dos soluciones reales LI del SLH $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$.

- Nota: $\boldsymbol{u} = \mathrm{Re}(\boldsymbol{v}_+)$, $\boldsymbol{w} = \mathrm{Im}(\boldsymbol{v}_+)$, $\alpha = \mathrm{Re}(\lambda_+)$, $\beta = \mathrm{Im}(\lambda_+)$.

Rectas invariantes (RIs)

- Si $\boldsymbol{v}$ es un VEP de VAP $\lambda \in \mathbf{R}$ de la matriz A, entonces $r = [\boldsymbol{v}]$ es una
  - RI inestable (o de salida) del SLH $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$ cuando $\lambda > 0$.
  - RI estable (o de entrada) del SLH $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$ cuando $\lambda < 0$.
  - RI de PEQS del SLH $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$ cuando $\lambda = 0$.
- Explicación:
  - Dado $\boldsymbol{x}_0 \in r$ arbitrario, la función $\boldsymbol{x}(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}\boldsymbol{x}_0$ es la solución del PVI
  $$\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0.$$
  - $\boldsymbol{x}(t) \in r$ para todo $t \in \mathbf{R}$.
  - $\lambda > 0 \Rightarrow \lim_{t\to+\infty} \|\boldsymbol{x}(t)\| = +\infty$.
  - $\lambda < 0 \Rightarrow \lim_{t\to+\infty} \boldsymbol{x}(t) = \mathbf{0}$.
  - $\lambda = 0 \Rightarrow \boldsymbol{x}(t) \equiv \boldsymbol{x}_0$.

Planos invariantes (PIs)

- Si $\boldsymbol{v}_\pm = \boldsymbol{u} \pm \boldsymbol{w}\mathrm{i}$ son VEPs complejos conjugados de VAPs $\lambda_\pm = \alpha \pm \beta\mathrm{i}$ de la matriz A, entonces $\Pi = [\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}]$ es un
  - PI inestable (o de salida) del SLH $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$ cuando $\alpha > 0$.
  - PI estable (o de entrada) del SLH $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$ cuando $\alpha < 0$.
  - PI de giros cerrados del SLH $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$ cuando $\alpha = 0$.
- Ejercicio para casa:
  - Dado $\boldsymbol{x}_0 = a_0\boldsymbol{u} + b_0\boldsymbol{w} \in \Pi$ arbitrario, la función

    $$\boldsymbol{x}(t) = \mathrm{e}^{\alpha t}\big[(a_0 \cos \beta t + b_0 \sin \beta t)\boldsymbol{u} + (b_0 \cos \beta t + a_0 \sin \beta t)\boldsymbol{w}\big]$$

    es la solución del PVI

    $$\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0.$$

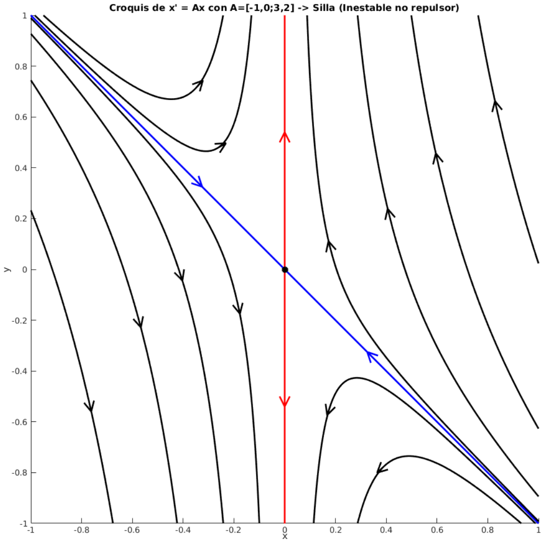
  - $\boldsymbol{x}(t) \in \Pi$ para todo $t \in \mathbf{R}$.
  - $\alpha > 0 \Rightarrow \lim_{t\to+\infty} \|\boldsymbol{x}(t)\| = +\infty$.
  - $\alpha < 0 \Rightarrow \lim_{t\to+\infty} \boldsymbol{x}(t) = \mathbf{0}$.
  - $\alpha = 0 \Rightarrow \boldsymbol{x}(t+p) = \boldsymbol{x}(t)$ para todo $t \in \mathbf{R}$, donde $p = 2\pi/\beta$.

Clasificación de SLHs 2D a CC

Sea A una matriz real 2×2. El SLH 2D a CC $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$ es

- Degenerado cuando $\det A = 0$;
- Una silla, si los VAPs son reales y de signos diferentes;
- Un nodo, si los VAPs son reales pero del mismo signo, en cuyo caso diremos que el nodo es:
  - atractor/repulsor si ambos VAPs son negativos/positivos;
  - *propio/impropio* si la matriz diagonaliza/no diagonaliza;
- Un centro, si los VAPs son imaginarios puros; y
- Un foco, si los VAPs son complejos conjugados de parte real no nula, en cuyo caso diremos que el foco es atractor/repulsor si su parte real es negativa/positiva.

Croquis de una silla

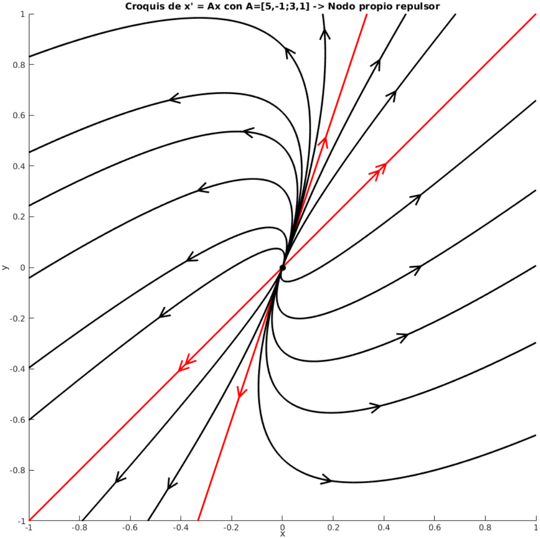


2 RIs:

- inestable y
- estable.

Las otras trayectorias son "hipérbolas".

Croquis de un nodo propio repulsor



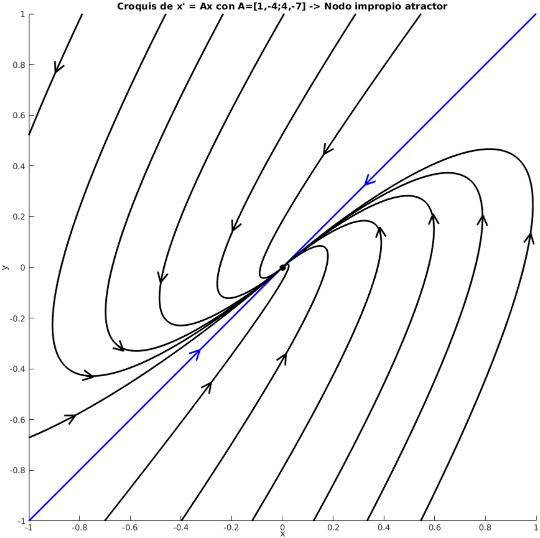
2 RIs:

- inestable rápida
- inestable lenta.

Las otras trayectorias son "parábolas" tangentes a la dirección lenta en el origen y con la dirección rápida lejos de origen.

Nota: El caso atractor tiene la misma "forma".

Croquis de un nodo impropio atractor



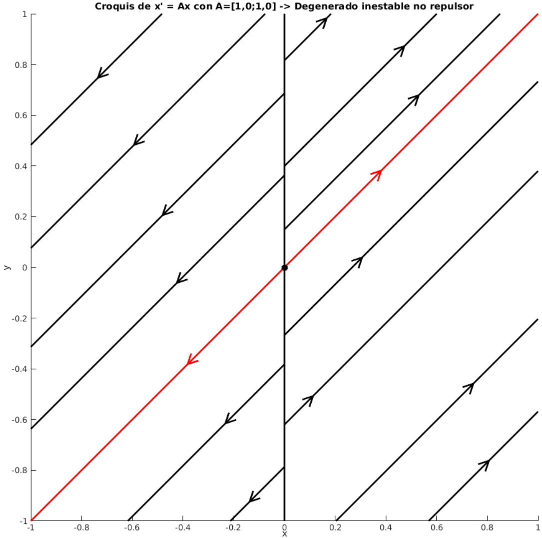
1 RI:

- estable

Las otras trayectorias tiene forma de "S" y son tangentes a la RI en el origen y con esa misma dirección pero sentido opuesto lejos de origen.

Nota: El caso repulsor tiene la misma "forma".

Croquis de un degenerado inestable



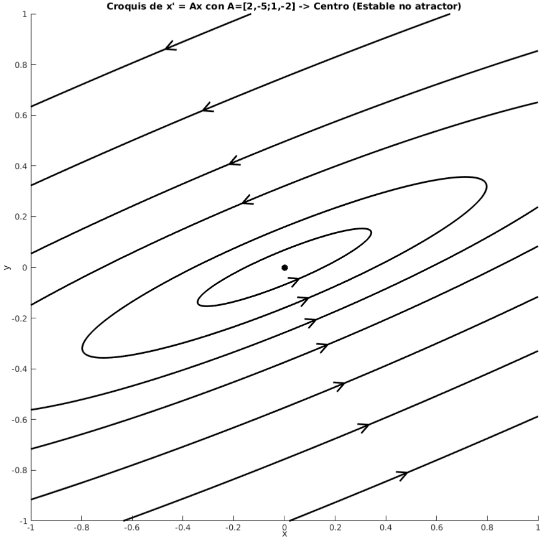
2 RIs:

- inestable y
- de PEQs.

Las otras trayectorias son paralelas a la RI inestable.

Nota: El caso estable tiene la misma "forma".

Croquis de un centro



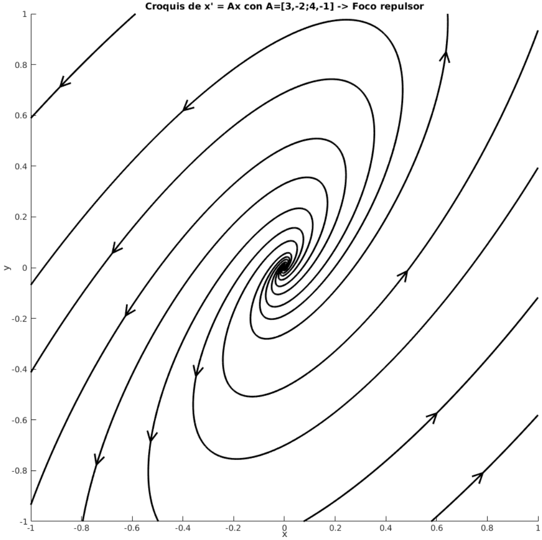
$\nexists$ RIs

Las trayectorias son periódicas y forman elipses.

El sentido de giro se determina calculando la velocidad en un punto.

Periodo: $p = \frac{2\pi}{\beta}$

Croquis de un foco repulsor



$\nexists$ RIs

Las trayectorias son espirales.

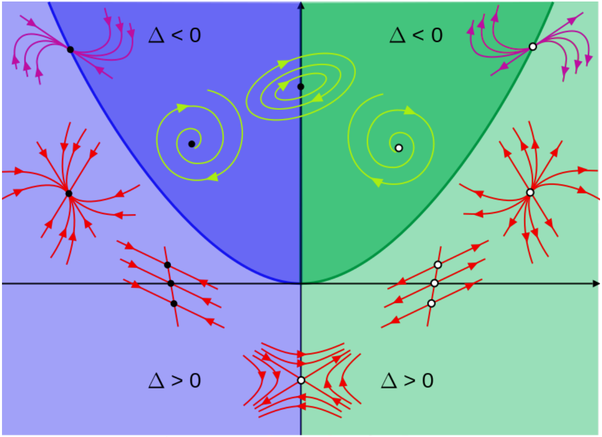
El sentido de giro se determina calculando la velocidad en un punto.

Tiempo en completar una vuelta: $p = \frac{2\pi}{\beta}$

Nota: El caso atractor tiene la misma "forma".

Criterio traza-determinante

Si $T = \operatorname{traza} A$, $D = \det A$ y $\Delta = T^2 - 4D$, entonces tenemos el siguiente esquema en el plano (T, D):



¿Cómo calcular las elipses de un centro?

- Supongamos que el SLH 2D de 1er orden a CC

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$$

es un centro, luego $T = a + d = 0$ y $D = ad - bc > 0$.

- Al imponer que $V(x, y) = (\alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2)/2$ sea una cantidad conservada:

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = (\alpha x + \beta y)(ax + by) + (\beta x + \gamma y)(cx + dy)$$
$$= (a\alpha + c\beta)x^2 + (b\alpha + (a + d)\beta + c\gamma)xy + (b\beta + d\gamma)y^2 \equiv 0,$$

obtenemos que $\alpha = c$, $\beta = d = -a$ y $\gamma = -b$.

- Por tanto, las trayectorias del centro describen las elipses

$$cx^2 + (d - a)xy - by^2 = \text{ ctte } .$$