Programació Lineal

Demostracions

F.-Javier Heredia

http://gnom.upc.edu/heredia

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH

Departament d'Estadística
i Investigació Operativa

Programació lineal

1. Introducció i propietats geomètriques.

- Proposició 1: propietats políedres (imm.).
- Proposició 2: prop. conjunts convexos (ex.9).
- Teorema 1: existència de pts. extrems (omesa).
- Teorema 2: optimalitat dels punts extrems.
- Proposició 3: propietats poliedre estàndard P_e.
- Proposició 4: transformació $P \to P_e$. (ex. 10)
- Teorema 2: condició A rang complet (ex.11).
- Teorema 3 : correspondència pts extrems-SBF

2. L'algorisme del símplex primal.

- Proposició 5: factibilitat de les DB , P_e no deg. (imm.).
- Teorema 4: $y = x + \theta^* d$ solució bàsica factible.
- Proposició 6: propietats direccions de descens (imm.).
- Teorema 5 : condicions d'optimalitat de SBF.
- Teorema 6: convergència de l'ASP, cas P_e no deg. (imm.).
- Proposició 7 : conseqüències de la degeneració (imm.).
- Teorema 7: convergència de l'ASP, cas P_e degenerat (omesa).
- Proposició 8,9 : Fase I (iimediats; ex. 46).

3. Dualitat.

- Proposició 10: Relaxació Lagrangiana (imm.)
- Proposició 11: Simetria dual (imm.)
- Teorema 8: Equivalència duals f.est. (ex. 55)
- Teorema 9: Ta. feble de dualitat.
- Teorema 10: Ta fort de dualitat.
- Teorema 11: folga complementària.
- Proposició 12: SBF del poliedre dual.
- Teorema 12: convergència de l'ASD (imm.).
- **Dualitat i problema de flux màxim-tall mínim:**
  - Teorema 13: relació capacitat tall $\mathcal{S}$ – flux $s\text{–}t$.
  - Teorema 14: dual del problema de flux màxim.
  - Teorema 15: relacions talls – solucions factibles duals.
  - Teorema 16: max-flow min-cut theorem.

Prop. 2: propietats conjunts convexos (1/3)

Proposició 2: propietats conjunts convexos.

i. La intersecció de conjunts convexos és convexa.

Demo:

- Sigui $S_i, i \in \mathcal{I}$ conjunts convexos, $x, y \in \bigcap_{i\in\mathcal{I}} \mathcal{S}_i$ i $\lambda \in [0,1]$.
- $\forall i \in \mathcal{I}$, S_i és convex i conté x i $y \Rightarrow \lambda x + (1-\lambda)y \in S_i, \forall i \in \mathcal{I} \Rightarrow \bigcap_{i\in\mathcal{I}} \mathcal{S}_i$ conv. ■

ii. Tot políedre és un conjunt convex.

Demo:

- Sigui $x, y \in P = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax \geq b\}$ i $w = \lambda x + (1-\lambda)y$. Llavors:

$$Aw = \lambda Ax + (1-\lambda)Ay \geq \lambda b + (1-\lambda)b = b \Rightarrow w \in P \Rightarrow P \text{ convex } ■$$

Prop. 2: propietats conjunts convexos (2/3)

iii. La combinació convexa d'un nombre finit d'elements d'un conjunt convex pertany al conjunt convex.

Demo:

- Per inducció:
  - Cert per $x^1, x^2 \in \mathcal{S}$, convex. Suposem que es satisfà per $x^1, \dots, x^k \in \mathcal{S}$ (1) i demostrem que es satisfà per $x^1, \dots, x^k, x^{k+1} \in \mathcal{S}$.
  - Sigui $\lambda_1, \dots, \lambda_{k+1} \geq 0, \sum_i \lambda_i = 1$. Assumint que $\lambda_{k+1} \neq 1$ tenim:

$$\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i x^i = \lambda_{k+1} x^{k+1} + (1 - \lambda_{k+1}) \sum_{i=1}^{k} \overbrace{\frac{\lambda_i}{(1 - \lambda_{k+1})}}^{\tilde{\lambda}_i} x^i$$

  - Els coeficients $\tilde{\lambda}_i$ son ≥ 0 i $\sum_i \tilde{\lambda}_i = 1 \overset{(1)}{\Rightarrow} \tilde{x} = \sum_{i=1}^{k} \tilde{\lambda}_i x^i \in \mathcal{S}$
  - $\mathcal{S}$ convex $\Rightarrow \lambda_{k+1} x^{k+1} + (1 - \lambda_{k+1}) \tilde{x} = \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i x^i \in \mathcal{S}$ ■

Prop. 2: propietats conjunts convexos (3/3)

iv. L'embolcall convex d'un conjunt finit de vectors és un conjunt convex.

Demo:

- Sigui: $\mathcal{S} = CH\left(x^1, \dots, x^k\right)$ i $y, z \in \mathcal{S}$
  - $y = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x^i \in \mathcal{S}$; $\alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1$
  - $z = \sum_{i=1}^{k} \beta_i x^i \in \mathcal{S}$; $\beta_i \geq 0, \sum_{i=1}^{k} \beta_i = 1$
- Sigui $\lambda \in [0,1]$. Llavors:

$$\lambda y + (1 + \lambda) z = \lambda \sum_{i=1}^{k} \beta_i x^i + (1 - \lambda) \sum_{i=1}^{k} \beta_i x^i = \sum_{i=1}^{k} \overbrace{(\lambda \alpha_i + (1 - \lambda) \beta_i)}^{\delta_i} x^i$$

Els coeficients δ_i satisfan $\delta_i \geq 0$ i $\sum_i \delta_i = 1 \Rightarrow \lambda y + (1 + \lambda) z \in \mathcal{S} \Rightarrow \mathcal{S}$ convex ■

Teorema 2: optimalitat dels pts. extrems (1/2)

Teorema 2 (Ta 2.7 B&T): optimalitat dels punts extrems

"Sigui$(PL)\ \min_{x\in\mathbb{R}^n}\{c'x | x\in P\}$*,* P *políedre. Suposem que* P *conté algun punt extrem i que existeix una solució òptima. Llavors existeix una solució òptima que és un pt. extrem de* P*."*

Demo:

1. El conjunt $Q \neq \emptyset$ de solucions òptimes de (PL) **és un políedre que conté un punt extrem**:
   - Sigui v el valor òptim de la funció objectiu. Llavors

     $$Q = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \geq b, c'x = v\}$$

     és un políedre.
   - $\left.\begin{array}{c} Q \subset P \\ P \text{ no conté cap línia} \end{array}\right\} \Rightarrow Q$ no conté cap línia $\Rightarrow$ $\boldsymbol{Q}$ **té punts extrems**.

Teorema 2: optimalitat dels pts. extrems (1/2)

Demo (cont):

2. Sigui x^* un punt extrem de Q. Demostrarem, per reducció a l'absurd, que **x^* és punt extrem de P**:

- Si x^* **no** és pt. extrem de P llavors:

$$\exists y, z \in P, y \neq x^*, z \neq x^* \text{ i } \lambda \in [0,1] \text{ t.q.: } x^* = \lambda y + (1-\lambda) z$$

- Aleshores:

$$c'x^* = \lambda \overbrace{c'y}^{\geq v} + (1-\lambda) \overbrace{c'z}^{\geq v} = v \Rightarrow c'y = c'z = c'x^* \Rightarrow y, z \in \mathrm{Q} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ ***x^* no és pt. extrem de Q*: contradicció.**

- Llavors, existeix un vector x^*, pt. extrem del conjunt solució Q, que és punt extrem de P ■

Proposició 3 : propietats P_e

Proposició 3 : propietats poliedre estàndard P_e.

i. *P_e és un políedre.*

ii. *Tot políedre $P = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax \geq b\}$ es pot expressar com a políedre en forma estàndard.*

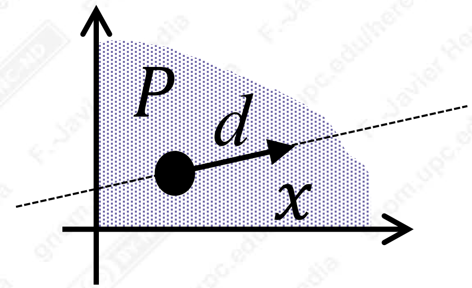
iii. *Tot P_e no buit té algun punt extrem.*

Demo:

i. $$Ax = b, x \geq 0 \rightarrow \begin{bmatrix} A \\ -A \\ I \end{bmatrix} x \geq \begin{bmatrix} b \\ -b \\ 0 \end{bmatrix}$$

ii. $$Ax \geq b \xrightarrow[w \geq 0]{\substack{x=u-v \\ u,v \geq 0}} \overbrace{\begin{bmatrix} A & -A & -I \end{bmatrix}}^{A_e} \overbrace{\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}}^{x_e} = A_e x_e = b, x_e \geq 0$$

iii. *Tot P_e **no buit** té algun punt extrem, doncs no conté cap línia, ja que $P_e \subset \{x \in \mathbb{R}^n | x \geq 0\}$.* ■



UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Departament d'Estadística i Investigació Operativa

Teorema 3: equivalència punts extrems – SBF (1/2)

Teorema 3 (Ta. 2.3 B&T) : equivalència pts extrems-SBF

"Sigui P_e un políedre no buit en forma estàndard de rang complet, i sigui $x^* \in P_e$. Llavors: x^* és un punt extrem $\Leftrightarrow$ x^* és una solució bàsica factible."

***Demo*: (pt. extrem $\Rightarrow$ SBF)**

1. Sigui $x = [x_1, x_2, \dots, x_r, 0, \dots, 0]'$ punt extrem de $P_e \Rightarrow Ax = b \Rightarrow \sum_{i=1}^{r} A_i x_i = b \quad (1)$
2. Els vectors $A_i\ i = 1,2, \dots, r$ son linealment independents (per red. l'absurd) :
   - Considerem que x és punt extrem i $\exists \alpha_i \neq 0 : \sum_{i=1}^{r} \alpha_i A_i = 0 \quad (2)$
   - Considerant (1), (2) i $\theta > 0$ tenim:

     $\sum_{i=1}^{r} A_i(x_i + \theta\alpha_i) = b$ i $\sum_{i=1}^{r} A_i(x_i - \theta\alpha_i) = b \quad (3)$
   - Triant θ prou petit com per que $(x_i + \theta\alpha_i) > 0$ i $(x_i - \theta\alpha_i) > 0$, $i = 1,2, \dots, r$:
     - $x^1 = [x_1 + \theta\alpha_1, \dots, x_r + \theta\alpha_r, 0, \dots, 0\,]', x^2 = [x_1 - \theta\alpha_1, \dots, x_r - \theta\alpha_r, 0, \dots, 0]'$,
     - $x^1, x^2 \in P_e$: $(3) \Rightarrow Ax^1 = b, Ax^2 = b\,; x^1, x^2 \geq 0$
     - $x = \frac{1}{2}x^1 + \frac{1}{2}x^2 \Rightarrow x$ no és pt. extrem $\Rightarrow A_i, i = 1,2, \dots, r$ lin. independents
3. $A_i \in \mathbb{R}^m, i = 1,2, \dots, r$ son linealment independents ($\therefore \boldsymbol{r \leq m}$) $\Rightarrow$ **formen una base** ■

Demo (cont.) **: (SBF$\Rightarrow$ pt. extrem)**

1. Sigui $x \in P_e$ SBF $\Rightarrow x = [x_1, x_2, \dots, x_s, 0, \dots, 0]'$ amb $x_j > 0, j = 1,2,\dots,s, s \leq \mathrm{m}.$ $\quad (1)$
2. Llavors $\sum_{i=1}^{s} A_i x_i = b$ i $A_i, i = 1,2,\dots,s$ son linealment independents (doncs x SBF).
3. x és un pt. extrem (per reducció l'absurd) :

- Considerem que x NO és punt extrem. Llavors x es pot expressar com a combinació convexa dels vectors de P_e x^1 i x^2:

$$x = \lambda x^1 + (1-\lambda)x^2,\ x^1, x^2 \in P_\mathrm{e},\ x^1 \neq x^2,\ 0 < \lambda < 1 \qquad (2)$$

- $x^1, x^2 \geq 0, \lambda > 0 \xRightarrow{(1),(2)} x_i^1 = x_i^2 = 0, i = s+1, \dots, n$ $\quad (3)$

- $x^1, x^2 \in P_\mathrm{e} \overset{(3)}{\Rightarrow} \sum_{i=1}^{s} A_i x_i^1 = \sum_{i=1}^{s} A_i x_i^2 = b$ $\quad (4)$

- $(4) \xRightarrow{A_i \text{ lin. independent}} x_i^1 = x_i^2, i = 1, \dots, s \Rightarrow x^1 = x^2 \Rightarrow$ ***x* pt. extrem** □

Teorema 4: $y = x + \theta^* d$ solució bàsica factible

Teorema 4 (Ta. 3.2 B&T): $y = x + \theta^* d$ és solució bàsica factible.

"Sigui x SBF de P_e no buit, de rang complet, no degenerat, i sigui d DBF sobre x. Llavors:

i. Si $d_B \ngeq 0$, $y = x + \theta^* d$ amb $\theta^* = \min_{\{i \mid d_{B(i)}<0\}} \left\{ -\frac{x_{B(i)}}{d_{B(i)}} \right\}$ és SBF de P_e.

ii. Si $d_B \geq 0$, no existeix cap $\theta > 0$ t.q. $y = x + \theta d$ sigui SBF de P_e."

Demo: Per construcció, $y \in P_e$ i té $n - m$ VNB nul·les. Només cal demostrar que la base $\bar{B}$ associada al nou conjunt de variables bàsiques és no singular.

1. Si q i $B(p)$ representen, respectivament, les variables que entren i surten de la base, llavors, $\bar{\mathcal{B}} := \{B(1), \dots, B(p-1), q, B(p+1), \dots, B(m)\}$ i la nova base és:

$$\bar{B} = \left[A_{\bar{B}(1)}, \dots, A_{\bar{B}(m)} \right] = \left[A_{B(1)}, \dots, A_{B(p-1)}, A_q, A_{B(p+1)}, \dots, A_{B(m)} \right]$$

Demostrarem que $\bar{B}$ és no singular de dues formes alternatives:

a. Demostrant que les columnes de $\bar{B}$ són linealment independents.
b. Demostrant que existeix la inversa $\bar{B}^{-1}$.

Teorema 4: $y = x + \theta^* d$ solució bàsica factible

Demo (cont):

a. Les columnes de $\bar{B}$ son linealment independents: per reducció a l'absurd:

- Suposem $\bar{B}$ singular. Llavors $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_m \neq 0$:

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i A_{\bar{B}(i)} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{m} \lambda_i B^{-1} A_{\bar{B}(i)} = 0 \Rightarrow B^{-1} A_{\bar{B}(i)} \text{ lin. dependent}$$

- Demostrarem que $B^{-1} A_{\bar{B}(i)}$ són linealment independents :
  - Per $i \neq p$: $B^{-1} A_{\bar{B}(p)} = B^{-1} A_{B(i)} = B^{-1} B_i = e_i$ **vectors lin. indep. amb component p-èssima nul·la**. (2)
  - Per $i = p$: $B^{-1} A_{\bar{B}(p)} = B^{-1} A_q = -d_B$, **vector amb component p-èssima** $d_{B(p)} < 0$ **per definició**. (3)
  - $(2), (3) \Rightarrow B^{-1} A_{\bar{B}(p)}$ i $B^{-1} A_{\bar{B}(i)}$, $i \neq p$, linealment independents $\Rightarrow \bar{B}$ no singular $\Rightarrow y$ SBF ■

Teorema 4: $y = x + \theta^* d$ solució bàsica factible

Demo (cont):

b. Existeix la matriu $\bar{B}^{-1}$:

- Contruim la matriu $B^{-1}\bar{B}$: $B^{-1}\bar{B} = \left[e_1 \cdots \overbrace{-d_B}^{p} \cdots e_m\right]$
- Premultipliquem $B^{-1}\bar{B}$ per la matriu eta $\mathrm{H} = \left[e_1 \cdots \overbrace{\eta}^{p} \cdots e_m\right]$:

$$\mathrm{H}(B^{-1}\bar{B}) = \left[e_1 \cdots \overbrace{\mathrm{H}(-d_B)}^{p} \cdots e_m\right]$$

amb $\mathrm{H}(-d_B) = \begin{bmatrix} -d_{B(1)} - \eta_1 d_{B(p)} \\ \vdots \\ -\eta_p d_{B(p)} \\ \vdots \\ -d_{B(m)} - \eta_m d_{B(p)} \end{bmatrix}$. Imposem $\begin{bmatrix} -d_{B(1)} - \eta_1 d_{B(p)} \\ \vdots \\ -\eta_p d_{B(p)} \\ \vdots \\ -d_{B(m)} - \eta_m d_{B(p)} \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}}^{e_p} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} i \neq p: & -d_{B(i)} - \eta_i d_{B(p)} = 0 \xrightarrow{d_{B(p)}<0} \eta_i = -d_{B(i)}/d_{B(p)} \\ i = p: & -\eta_p d_{B(p)} = 1 \xrightarrow{d_{B(p)}<0} \eta_p = -1/d_{B(p)} \end{cases}$$

- Llavors, la inversa de $\bar{B}$ existeix i la seva expressió és $\bar{B}^{-1} = \mathrm{H}B^{-1}$ ■

Teorema 5 (Ta. 3.1 B&T): condicions d'optimalitat de SBF

"Sigui P_e políedre no buit en forma estàndard, x SBF de P_e i sigui el vector de costos reduïts associat a x : $r' = c'_N - c'_B B^{-1} A_N$. Llavors:

a) Si $r \geq [0] \Rightarrow x$ és SBF òptima.

b) Si x és SBF òptima i no degenerada $\Rightarrow r \geq [0]$."

Demo a)* : $\boldsymbol{r} \geq [\mathbf{0}] \Rightarrow \boldsymbol{x}$ *és òptima

1. Sigui $v \in P_e$. Definim $d = v - x$. Llavors $Ad = A(v-x) = b - b = [0]$ i:

$$Ad = Bd_B + A_N d_N = [0] \rightarrow d_B = -B^{-1} A_N d_N$$

2. Calculem ara el valor de la funció objectiu sobre $v = x + d$:

$$c'v = c'x + c'd = c'x + \begin{bmatrix} c'_B & c'_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_B = -B^{-1} A_N d_N \\ d_N \end{bmatrix}$$
$$= c'x + (c'_N - c'_B B^{-1} A_N) d_N \rightarrow c'v = c'x + r' d_N$$

3. Atès que $d_N = v_N - \overbrace{x_N}^{=0} = v_N \geq 0$, si $r \geq [0]$ tenim que $r' d_N \geq [0]$ i:

$$c'v \geq c'x \;\; \forall v \in P_e \Rightarrow x \text{ òptima } \blacksquare$$

Teorema 5 : condicions d'optimalitat de SBF (2/2)

Teorema 5 (Ta. 3.1 B&T): condicions d'optimalitat de SBF

"*Sigui P_e políedre no buit en forma estàndard, x SBF de P_e i sigui el vector de costos reduïts associat a x : $r' = c_N' - c_B' B^{-1} A_N$. Llavors:*

a) Si $r \geq [0] \Rightarrow x$ és SBF òptima.

b) Si x és SBF òptima i no degenerada $\Rightarrow r \geq [0]$."

Demo b) : $\boldsymbol{x}$ SBF òptima no degenerada $\Rightarrow \boldsymbol{r} \geq [0]$ **(per reducció a l'absurd)**

– Suposem x SBF òptima no degenerada i que $\exists j \in \mathcal{N}\ t.q.\, r_j < 0$

– Considerem els vectors $y \in P_e$ que s'obtenen com a $y = x + \theta d$ amb d direcció bàsica factible associada a $d_N = e_j$. Atès que d és DBF i x és SBF **no degenerada** podem asegurar que $\exists \theta > 0$: $y = x + \theta d \in P_e$. Llavors:

$$c'y = c'x + \theta r' d_N = c'x + \theta r' e_j = c'x + \overbrace{\theta r_j}^{<0} < c'x \qquad (1)$$

– Pero (1) implicaria que x no seria òptima (contradicció) $\Rightarrow r \geq [0]$ ■

Teorema 9: Ta feble de dualitat

Teorema 9: Ta. feble de dualitat (Ta. 4.3 B&T, *weak duality)*:

Sigui x solució factible del problema (P), i sigui λ solució factible del problema dual (D) associat. Llavors es satisfà:

$$\lambda' b \leq c' x.$$

Demo:

- Per a tot i $x \in \mathbb{R}^n$ i $\lambda \in \mathbb{R}^m$ definim: $\begin{cases} u_j = \lambda_j \left(a_j' x - b_j \right) & j = 1,2, \dots, m \\ v_i = (c_i - \lambda' A_i) x_i & i = 1,2, \dots, n \end{cases}$
- Si x i λ son factibles $\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Si } a_j' x \neq b_j \text{, els signes de } \lambda_j \text{ i } \left(a_j' x - b_j \right) \\ \text{Si } \lambda' A_i \neq c_i \text{, els signes de } x_i \text{ i } (c_i - \lambda' A_i) \end{array} \right\}$ coincideixen $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{u_j \geq 0, v_i \geq 0 \ \forall i, j}.$$

- Llavors : $\begin{Bmatrix} \sum_j u_j = \lambda' A x - \lambda' b \\ \sum_i v_i = c' x - \lambda' A x \end{Bmatrix} \Longrightarrow \sum_j u_j + \sum_i v_i = c' x - \lambda' b \overset{u \geq 0, v \geq 0}{\overbrace{\geq}} 0 \Rightarrow \lambda' b \leq c' x$ ■
- Comentari: si (P) en forma estàndard, demo trivial: $\forall x, \lambda$ factibles: $\lambda' b = \lambda' A x \leq c' x$

Teorema 10: Ta. fort de dualitat (*von Neumann 1947, Ta. Minimax*) :

"Si un problema de programació lineal (P) té solució òptima, el seu dual (D) també en té, i els valors respectius de la funció objectiu coincideixen."

Demo:

1. Sigui $(\boldsymbol{P})$ **en forma estàndard de rang complet amb sol. òptima**. Sigui B base òptima obtinguda per l'ASP amb regla de Bland. Llavors $\boldsymbol{r} \geq \boldsymbol{0}$.
2. Es demostrarà que $\boldsymbol{\lambda}' = \boldsymbol{c}_B'\boldsymbol{B}^{-1}$ **és (a) una solució factible** $(\boldsymbol{D})$ **i (b) que és òptima**:
   a) $x_B = B^{-1}b$ solució òptima $(P) \Rightarrow r' = c_N' - c_B'B^{-1}A_N \geq 0 \Rightarrow c_B'B^{-1}A_N \leq c_N'$. Llavors:
   $$\lambda'A = c_B'B^{-1}[B \quad A_N] = [c_B' \quad c_B'B^{-1}A_N] \leq [c_B' \quad c_N'] = c' \Rightarrow$$
   $$\Rightarrow \lambda' = c_B'B^{-1} \text{ factible } (D)$$
   b) $\lambda'b = c_B'B^{-1}b = c_B'x_B \Rightarrow \lambda' = c_B'B^{-1}$ òptima (D).
3. Si (P) és un problema general el podem transformar a un problema $(P)_e$ estàndard amb $\operatorname{rang}(A) = m$. Llavors en virtut del Ta. 7 i dels apartats (1)-(2) anteriors tenim que
$$z_{(P)}^* = z_{(P)_e}^* \overset{(1,2)}{=} z_{(D)_e}^* \overset{Ta.7}{=} z_{(D)}^* \blacksquare$$

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Departament d'Estadística i Investigació Operativa

Teorema 11: Ta folga complementària

Teorema 10: Ta. de folga complementària :

*Siguin x i λ **solucions factibles de** $(\boldsymbol{P})$ **i** $(\boldsymbol{D})$ respectivament.*

Els vectors x i λ són solucions òptimes si i només si satisfan les condicions de folga complementària (CFC):

$$(CFC)\begin{cases}\lambda_j\left(a_j'x-b_j\right)=0 & j=1,2,\dots,m\\ (c_i-\lambda'A_i)x_i=0 & i=1,2,\dots,n\end{cases}$$

Demo:

$\boxed{\Rightarrow}$ Si x i λ factibles, de la demostració del Ta. feble de dualitat sabem que:

i. $u_j=\lambda_j\left(a_j'x-b_j\right)\geq 0 \quad , \; v_i=(c_i-\lambda'A_i)x_i\geq 0 \;\; \forall i,j$

ii. $c'x-\lambda b=\sum_j u_j+\sum_i v_i$

Pel Ta. fort de dualitat sabem que si x i λ òptimes llavors $c'x=\lambda'b\Rightarrow$ $\boxed{u_j=v_i=0 \;\; \forall i,j}$

$\boxed{\Leftarrow}$ Si $u_j=v_i=0\;\forall i,j\overset{\text{ii}}{\Rightarrow}c'x-\lambda'b=0\xRightarrow{Cor.9,iii}\boxed{x,\lambda \text{ òptimes}}$. ■

Proposició 12: SBF del políedre dual.

La solució dual y *associada a una SBFD de* $(P)_e$ *és una SBF del políedre dual* D_e *amb matriu bàsica* $B_D = \begin{bmatrix} B' & 0 \\ A_N{}' & I_{n-m} \end{bmatrix}$.

Demo:

$\boldsymbol{y}' = [\boldsymbol{\lambda}' \quad \boldsymbol{r}_N' \quad 0]$ **factible** $(\boldsymbol{D}) : y \in P_D = \left\{ y \in \mathbb{R}^{n+m} \mid [\boldsymbol{A}' \quad \boldsymbol{I}_n] \begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda} \\ \boldsymbol{r} \end{bmatrix} = \boldsymbol{c}, \boldsymbol{r} \geq \boldsymbol{0} \right\}$

$$[\boldsymbol{A}' \quad \boldsymbol{I}] \begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda} \\ \boldsymbol{r} \end{bmatrix} = \boldsymbol{c} : \begin{bmatrix} B' & 0 & I_m \\ A_N' & I_{n-m} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ r_N \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_B \\ c_N \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} B'\lambda = c_B \Rightarrow \boxed{\lambda' = c_B' B^{-1}} \\ \boxed{r_N' = c_N' - \lambda' A_N} \end{cases}$$

$$\boldsymbol{r} \geq \boldsymbol{0} : r = \begin{bmatrix} r_N \geq [0] \\ r_B = [0] \end{bmatrix} \geq 0$$

$\boldsymbol{n} + \boldsymbol{m}$ **constriccions actives lin. independents sobre** $[\boldsymbol{\lambda}' \quad \boldsymbol{r}_N' \quad \boldsymbol{0}]$ **:**

$$\overbrace{\begin{bmatrix} B' & 0 \\ A_N{}' & I_{n-m} \end{bmatrix}}^{B_D \text{ no sing.}} \overbrace{\begin{bmatrix} \lambda \\ r_N \end{bmatrix}}^{y_B} = \begin{bmatrix} c_B \\ c_N \end{bmatrix} \qquad r_B = [0]$$

$$\begin{matrix} (n \text{ cons. act.}) \\ (m \text{ cons. act.}) \end{matrix} \Bigg\} \overbrace{\begin{bmatrix} B' & 0 & 0 \\ A_N' & I_{n-m} & 0 \\ 0 & 0 & I_m \end{bmatrix}}^{\text{lin. indep.}} \begin{bmatrix} \lambda \\ r_N \\ r_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_B \\ c_N \\ 0 \end{bmatrix} \quad \blacksquare$$

Teorema 13: relació capacitat tall $\mathcal{S}$ – flux $s-t$.

Per a tot flux factible $[x' \quad f]$ *i tall* $\mathcal{S}$ *del* (PFM) *es satisfà:*

a) $f = \sum_{\{(i,j)\in\mathcal{A} | i\in\mathcal{S}, j\in\bar{\mathcal{S}}\}} x_{ij} - \sum_{\{(i,j)\in\mathcal{A} | i\in\bar{\mathcal{S}}, j\in\mathcal{S}\}} x_{ij}$

b) $f \le u(\mathcal{S})$.

Demo:

El flux net que travessa qualsevol tall $\mathcal{S}$ en sentit $\mathcal{S} \to \bar{\mathcal{S}}$ és:

$$f(\mathcal{S}) = \sum_{\{(i,j)\in\mathcal{A}: i\in\mathcal{S}, j\in\bar{\mathcal{S}}\}} x_{ij} - \sum_{\{(i,j)\in\mathcal{A}: i\in\bar{\mathcal{S}}, j\in\mathcal{S}\}} x_{ij} \overbrace{\le}^{0\le x_{ij}\le u_{ij}} \sum_{\{(i,j)\in\mathcal{A}: i\in\mathcal{S}, j\in\bar{\mathcal{S}}\}} u_{ij} = u(\mathcal{S})$$

Per les equacions de balanç podem assegurar que $f = f(\mathcal{S}) \Rightarrow f \le u(\mathcal{S})$.■

Teorema 14: dual del problema de flux màxim.

El dual del problema de flux màxim associat al graf $\mathcal{G} = (\mathcal{N}, \mathcal{A})$ amb $|\mathcal{N}| = m$ nodes, $|\mathcal{A}| = n$ arcs, capacitats u i nodes font s i pou t és:

$$(D_{FM}) \begin{cases} \min\limits_{\pi\in\mathbb{R}^m, \mu\in\mathbb{R}^n} & \mu' u & \\ \text{s.a.:} & \pi_i - \pi_j + \mu_{ij} \geq 0 & (i,j) \in \mathcal{A} \\ & \pi_t - \pi_s \geq 1 & \\ & \mu_{ij} \geq 0 & (i,j) \in \mathcal{A} \end{cases}$$

Demo: expressem el problema primal en forma matricial:

$$(FM) \begin{cases} \max & f \\ \text{s.a.:} & Ax + ef = 0 \\ & x \leq u \\ & x, f \geq 0 \end{cases} \rightarrow (FM) \begin{cases} \max & [0 \quad 1] \begin{bmatrix} x \\ f \end{bmatrix} & & \\ \text{s.a.:} & [A \quad e] \begin{bmatrix} x \\ f \end{bmatrix} & = [0] & \rightarrow \pi \in \mathbb{R}^m \\ & [I \quad 0] \begin{bmatrix} x \\ f \end{bmatrix} & \leq u & \rightarrow \mu \in \mathbb{R}^n \\ & x, \quad f \geq 0 & & \end{cases}$$

$$(D_{FM}) \begin{cases} \min & [\pi' \quad \mu'] \begin{bmatrix} 0 \\ u \end{bmatrix} & \\ \text{s.a.:} & [\pi' \quad \mu'] \begin{bmatrix} A \\ I \end{bmatrix} & \geq [0] \\ & [\pi' \quad \mu'] \begin{bmatrix} e \\ 0 \end{bmatrix} & \geq 1 \\ & \mu' \geq 0 & \end{cases} \longrightarrow \boxed{(D_{FM}) \begin{cases} \min & \mu' u & & \\ \text{s.a.:} & \pi_i - \pi_j + \mu_{ij} & \geq 0 & (i,j) \in \mathcal{A} \\ & \pi_t - \pi_s & \geq 1 & \\ & \mu_{ij} \geq 0 & & (i,j) \in \mathcal{A} \end{cases}} . \blacksquare$$

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Departament d'Estadística
i Investigació Operativa

Teorema 15: relacions talls – solucions factibles duals

a) *Per a tot tall $\mathcal{S}$, els vectors $\pi(\mathcal{S})$, $\mu(\mathcal{S})$ definits per:*

$$\pi_i(\mathcal{S}) = \begin{cases} \alpha & i \in \mathcal{S} \\ \alpha+1 & i \in \bar{\mathcal{S}} \end{cases}, \qquad \mu_{ij}(\mathcal{S}) = \begin{cases} 1 & i \in \mathcal{S}, j \in \bar{\mathcal{S}} \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

son una solució factible del problema dual amb $\mu(\mathcal{S})'u = u(\mathcal{S})$.

b) $\mathcal{U} = \cup_{\mathcal{S}} \begin{bmatrix} \pi(\mathcal{S}) \\ \mu(\mathcal{S}) \end{bmatrix} \subset P_D$ *(no tota solució factible dual té associat un tall).*

Demo: ***a)***

- El problema dual és: $(D_{FM}) \begin{cases} \min\limits_{\pi \in \mathbb{R}^m, \mu \in \mathbb{R}^n} & \mu' u & & \\ \text{s.a.:} & \pi_i - \pi_j + \mu_{ij} \geq 0 & (i,j) \in \mathcal{A} & (1) \\ & \pi_t - \pi_s \geq 1 & & (2) \\ & \mu_{ij} \geq 0 & (i,j) \in \mathcal{A} & \end{cases}$
- (2): $\pi_s = \alpha, \pi_t = \alpha + 1 \Rightarrow \pi_t - \pi_s = 1 \geq 1.$
- (1): $\begin{cases} i \in \mathcal{S}, j \in \bar{\mathcal{S}}: & \pi_i - \pi_j + \mu_{ij} = & \alpha - \alpha - 1 + 1 = 0 \geq 0 \\ i \in \mathcal{S}, j \in \mathcal{S}: & \pi_i - \pi_j + \mu_{ij} = & \alpha - \alpha + 0 = 0 \geq 0 \\ i \in \bar{\mathcal{S}}, j \in \mathcal{S}: & \pi_i - \pi_j + \mu_{ij} = & \alpha + 1 - \alpha + 0 = 1 \geq 0 \\ i \in \bar{\mathcal{S}}, j \in \bar{\mathcal{S}}: & \pi_i - \pi_j + \mu_{ij} = & (\alpha+1) - (\alpha+1) + 0 \geq 0 \end{cases}$
- El valor de la funció dual: $\mu' u = \sum_{(i,j)\in\mathcal{A}} \mu_{ij} u_{ij} = \sum_{\{(i,j)\in\mathcal{A}: i \in \mathcal{S}, j \in \bar{\mathcal{S}}\}} u_{ij} = u(\mathcal{S})$. ■

Teorema 15: relacions talls – solucions factibles duals

a) *Per a tot tall $\mathcal{S}$, els vectors $\pi(\mathcal{S})$, $\mu(\mathcal{S})$ definits per:*

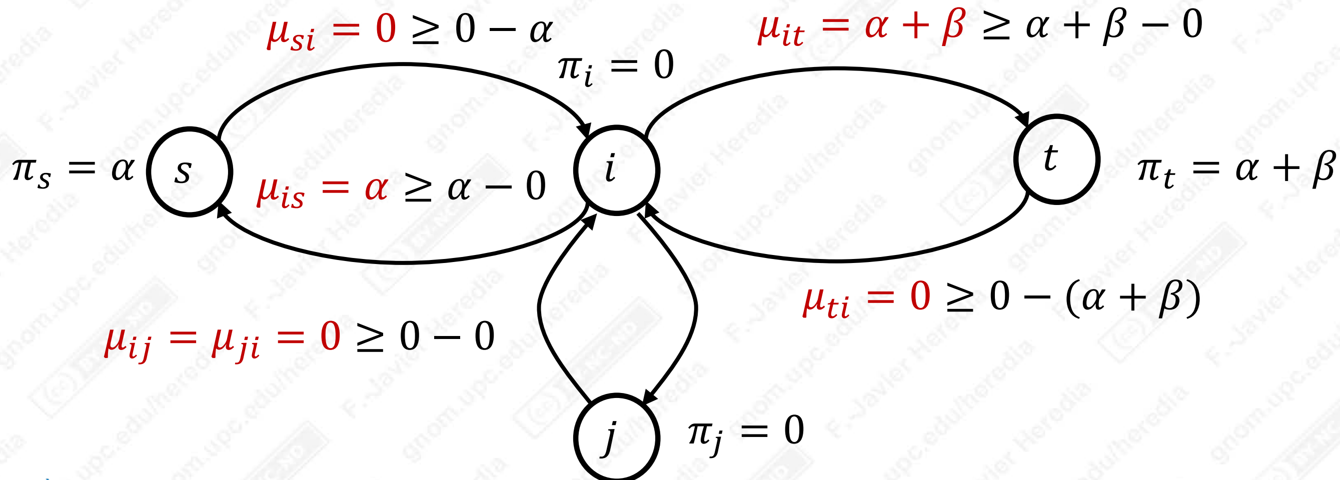
$$\pi_i(\mathcal{S}) = \begin{cases} \alpha & i \in \mathcal{S} \\ \alpha + 1 & i \in \bar{\mathcal{S}} \end{cases}, \qquad \mu_{ij}(\mathcal{S}) = \begin{cases} 1 & i \in \mathcal{S}, j \in \bar{\mathcal{S}} \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

son una solució factible del problema dual amb $\mu(\mathcal{S})'u = u(\mathcal{S})$.

b) $\mathcal{U} = \cup_{\mathcal{S}} \begin{bmatrix} \pi(\mathcal{S}) \\ \mu(\mathcal{S}) \end{bmatrix} \subset P_D$ *(no tota solució factible dual té associat un tall).*

Demo: ***b)***

- Es construirà una sol. fact. (D) que no sigui tall: $\pi_s = \alpha \geq 0, \pi_t = \alpha + \beta \geq \alpha + 1, \pi_i = 0\ \forall i \neq s, t$ i els valors de μ indicats:



Teorema 16: max-flow – min-cut

Teorema 16: ***Max-flow min-cut theorem (Dantzig & Fulkerson 1955)***

El valor màxim del flux f és igual al valor mínim de la capacitat de tall $u(\mathcal{S})$.

Demo:

- Pel Ta 13 (o pel Ta feble de dualitat aplicat a $(PFM)-(PTM)$) sabem que : $f \leq u(\mathcal{S})\ \forall f, \mathcal{S}$ factibles $(P)-(D)$ respectivament. Només cal trobar un flux f^* i un tall $\mathcal{S}^*$ tals que $f^* = u(\mathcal{S}^*)$
- Sigui x^*, f^* òptim (PFM) i π^*, μ^* òptims (D_{PFM}). Llavors :

$$\text{Fact.}(D)\begin{cases} \pi_i^* - \pi_j^* + \mu_{ij}^* \geq 0, \forall (i,j) \in \mathcal{A} & (1) \\ \pi_t^* - \pi_s^* \geq 1 & (2) \text{ , Ta. folga} \\ x_{ij} \geq 0, \forall (i,j) \in \mathcal{A} & (3) \end{cases}$$

$$\text{comp.}\begin{cases} \pi^*(Ax^* + ef^*) = 0 & (4) \\ \boldsymbol{\mu_{ij}^*(x_{ij} - u_{ij}) = 0, \forall (i,j) \in \mathcal{A}} & \mathbf{(5)} \\ \boldsymbol{(\pi_j^* - \pi_i^* - \mu_{ij}^*)x_{ij} = 0, \forall (i,j) \in \mathcal{A}} & \mathbf{(6)} \\ (1 + \pi_s^* - \pi_t^*)f^* = 0 & (7) \end{cases}$$

Teorema 16: ***Max-flow min-cut theorem (Dantzig & Fulkerson 1955)***

El valor màxim del flux f és igual al valor mínim de la capacitat de tall $u(\mathcal{S})$.

Demo (cont.):

- π^* factible (D), llavors $(2) \Rightarrow \pi_t^* \geq \pi_s^* + 1 > \pi_s^*$.
- Definim la partició de $\mathcal{N}$ associada a π^* : $\mathcal{S}^* = \{k \in \mathcal{N} | \pi_k^* \leq \pi_s^*\}$. $\mathcal{S}^*$ és un tall doncs, per definició, $s \in \mathcal{S}^*$ i $t \in \bar{\mathcal{S}}^*$. Es demostrarà que la capacitat d'aquest tall (sol. factible dual) és igual al flux màxim:
  - $\forall (i,j) \in \mathcal{A}$ t.q. $i \in \mathcal{S}^*, j \in \bar{\mathcal{S}}^*$:

$$\text{Fact. } (D) \overset{(1)}{\Rightarrow} \mu_{ij}^* \geq \pi_j^* - \pi_i^* \overset{\pi_i^* \leq \pi_s^* < \pi_j^*}{>} 0 \Rightarrow \mu_{ij}^* > 0 \overset{(5)}{\Rightarrow} \boxed{x_{ij}^* = u_{ij}} \; (8).$$

  - $\forall (i,j) \in \mathcal{A}$ t.q. $i \in \bar{\mathcal{S}}^*, j \in \mathcal{S}^*$:

$$\pi_j^* \leq \pi_s^* < \pi_i^* \Rightarrow \left(\overbrace{\pi_j^* - \pi_i^*}^{<0} \overbrace{-\mu_{ij}^*}^{\leq 0} \right) < 0 \overset{(6)}{\Rightarrow} \boxed{x_{ij}^* = 0} \; (9).$$

  - $f^* \overset{Ta.13}{=} \sum_{\{(i,j) \in \mathcal{A} | i \in \mathcal{S}^*, j \in \bar{\mathcal{S}}^*\}} x_{ij}^* - \sum_{\{(i,j) \in \mathcal{A} | i \in \bar{\mathcal{S}}^*, j \in \mathcal{S}^*\}} x_{ij}^* \overset{(8),(9)}{=} \sum_{\{(i,j) \in \mathcal{A} | i \in \mathcal{S}^*, j \in \bar{\mathcal{S}}^*\}} u_{ij}^* = u(\mathcal{S}^*)$ ∎