Facultat de Matemàtiques i Estadística

Universitat Politècnica de Catalunya - BarcelonaTech

Exercicis resolts de Fonaments de les Matemàtiques (Primer curs del Grau de Matemàtiques)

Àlex Batlle Casellas

October 14, 2018

Índex

1 Formalisme matemàtic: enunciats i demostracions.

2 Conjunts i aplicacions.

21. **Siguin** $A_1, A_2, B_1, B_2 \neq \emptyset$**. Demostreu:**

21.3. $(A_1 \cup A_2) \times (B_1 \cup B_2) = (A_1 \times B_1) \cup (A_1 \times B_2) \cup (A_2 \times B_1) \cup (A_2 \times B_2)$**.**

Sigui $y \in (A_1 \cup A_2) \times (B_1 \cup B_2)$. Aleshores, $\exists y_1 \in A_1 \cup A_2,\ y_2 \in B_1 \cup B_2 :\ y = (y_1, y_2)$.

$$\iff (y_1 \in A_1 \vee y_1 \in A_2) \wedge (y_2 \in B_1 \vee y_2 \in B_2) \iff (y_1 \in A_1 \wedge y_2 \in B_1)$$
$$\vee (y_1 \in A_2 \wedge y_2 \in B_1) \wedge (y_1 \in A_1 \wedge y_2 \in B_2) \vee (y_1 \in A_2 \wedge y_2 \in B_2)$$
$$\iff y \in (A_1 \times B_1) \cup (A_2 \times B_2) \cup (A_1 \times B_2) \cup (A_2 \times B_1). \square$$

30. **Considerem una aplicació** $f:\ A \mapsto B$ **i subconjunts** $A', A'' \subseteq A$ **i** $B', B'' \subseteq B$**.**

30.1. **Demostreu que si** $A' \subseteq A''$**, aleshores** $f(A') \subseteq f(A'')$**.**

$$\text{Sigui } A' \subseteq A''. \text{ Aleshores } f(A') = \{y \in B : (\exists x \in A' :\ f(x) = y)\}$$
$$\subseteq \{y \in B : (\exists x \in A'' : f(x) = y)\} = f(A'') \implies f(A') \subseteq f(A''). \square$$

30.3. **Demostreu que si** $B' \subseteq B''$**, aleshores** $f^{-1}(B') \subseteq f^{-1}(B'')$**.**

$$\text{Sigui } B' \subseteq B''. \text{ Aleshores, } f^{-1}(B') = \{x \in A : (\exists y \in B' : f^{-1}(\{y\}) = \{x\})\} \subseteq$$
$$\{x \in A : (\exists y \in B'' : f^{-1}(\{y\}) = \{x\})\} = f^{-1}(B'') \implies f^{-1}(B') \subseteq f^{-1}(B''). \square$$

30.2. **Demostreu que** $f(A') \subseteq f(A'')$ **implica que** $A' \subseteq A''$**, per a tot** $A', A'' \subseteq A$**, si, i només si,** f **és injectiva.**
Si fem el conjunt antiimatge dels dos costats de la hipòtesi ($f(A') \subseteq f(A'')$):

$$f^{-1}(f(A')) \subseteq f^{-1}(f(A'')) \implies (f^{-1} \circ f)(A') \subseteq (f^{-1} \circ f)(A'') \implies$$
$$Id_A(A') \subseteq Id_A(A'') \implies A' \subseteq A''.$$

Això només passarà quan f és injectiva, doncs en tal cas A' i A'' no podrien ser disjunts.$\square$
Si f no fos injectiva, en canvi, A' i A'' podrien ser disjunts però donar el mateix conjunt imatge sense inconvenient.

30.4. **Demostreu que** $f^{-1}(B') \subseteq f^{-1}(B'')$ **implica que** $B' \subseteq B''$**, per a tot** $B', B'' \subseteq B$**, si, i només si,** f **és exhaustiva.**

31. **Considerem una aplicació** $f:\ A \mapsto B$**. Demostreu:**

31.1. **Si** $A' \subseteq A$**, aleshores** $A' \subseteq f^{-1}(f(A'))$**.**

$$f(A') = \{y \in B : (\exists x \in A' : f(x) = y)\}.$$
$$f^{-1}(f(A')) = \{x \in A : f(x) \in f(A')\}.$$

Tenint en compte que podrien existir elements d'A que corresponguessin amb l'aplicació a elements d'$f(A')$, el conjunt antiimatge $f^{-1}(f(A'))$ és un superconjunt d'A'.

$$\implies A' \subseteq f^{-1}(f(A')). \square$$

31.2. f **és injectiva si i només si** $A' = f^{-1}(f(A'))\ \forall A' \subseteq A$**.**
Agafant la igualtat que volem demostrar, si apliquem f als dos costats, ens ha de quedar una identitat per poder afirmar que f és injectiva. Com podem efectivament comprovar,

$$f(A') = f(f^{-1}(f(A'))) = Id_B(f(A')) = f(A')$$

i $A' = A'$, per tant, queda demostrat l'enunciat.$\square$

3 Relacions, operacions i estructures.

4 Conjunts de nombres. Numerabilitat.

5 El cos dels nombres complexos.

6 Aritmètica

7 Polinomis.