Ejercicios

Jose Pérez Cano · 16-03-2020

3.21.- Demostrar $\mathbb{P}^1 \simeq \mathbb{S}^1$.

Primero, $\mathbb{P}^1 \simeq \mathbb{S}^1/\{p \sim -p : p \in \mathbb{S}^1\}$. Basta considerar la proyección de cada $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ a $\hat{v} = \pm\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$, donde el signo se escoge para que el vector quede en el primer o segundo cuadrante. Como que es multiplicar por un escalar es continuo, y claramente respeta las clases de equivalencia.

Segundo, $\mathbb{S}^1/\{p \sim -p : p \in \mathbb{S}^1\} \simeq (-1, 1]$. Tomando como representantes la semicircunferencia superior que tiene el $(1, 0)$ pero no el $(-1, 0)$, la función $(x, y) \mapsto x$ es una proyección de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ y por tanto es continua en los subespacios correspondientes. En este caso, es también biyectiva y de inversa continua porque $y = \sqrt{1 - x^2}$ es continua.

Tercero, $(-1, 1] \simeq [0, 1)$, usando $a \mapsto \frac{-1}{2}(a-1)$. Y finalmente, $\begin{aligned} f\colon [0,1) &\to \mathbb{S}^1 \\ t &\mapsto (cos(2\pi t), sin(2\pi t)) \end{aligned}$, es un homeomorfismo.

3.19.- Demostrar $Q = (\mathbb{S}^1 \times [0, \infty))/\mathbb{S}^1 \times \{0\}) \simeq \mathbb{R}^2_{euc}$. Usando coordenadas polares.

En coordenadas polares la siguiente función es un homeomorfismo:

$$\begin{aligned} f\colon Q &\to \mathbb{R}^2 \\ (1, \theta, z) &\mapsto (z, \theta) \end{aligned}$$

$f(\mathbb{S}^1 \times \{0\}) = (0, 0)$. Ya que cuando $z \to 0$, $(1, \theta, z)$ tiende a un punto de $(\mathbb{S}^1 \times \{0\})$ y (z, θ) al $(0, 0)$. Por lo demás, es fácil ver que es continua.

3.18.- Demostrar que $\mathbb{D}^2/\mathbb{S}^1 \simeq \mathbb{S}^2$, donde $\mathbb{D}^2/\mathbb{S}^1$ es el disco unidad colapsando la frontera en un punto.

En primer lugar, sea p la transformación a polares:

$$\begin{aligned} p\colon \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\} &\to \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi) \\ (x, y) &\mapsto (\sqrt{x^2+y^2}, arctg^*(\tfrac{y}{x})) \end{aligned}$$

El asterisco en la arcotangente hace referencia a la versión continua. Y sea c la transformación a cilíndricas

$$\begin{aligned} c\colon \mathbb{R}^3\backslash\{(0,0,0)\} &\to \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi) \times \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\mapsto (\sqrt{x^2+y^2}, arctg^*(\tfrac{y}{x}), z) \end{aligned}$$

Ahora sea f un homeomorfismo entre $\mathring{\mathbb{D}}^2$ y $\mathbb{S}^2\backslash\{(0,0,0)\}$ de la siguiente manera; en polares y cilíndricas:

$$f(r,\theta) = \begin{cases} (2r, \theta, -\sqrt{1-4r^2}) & 0 \leqslant r < \frac{1}{2} \\ (-2r+2, \theta, \sqrt{1-(2r-2)^2} & \frac{1}{2} \leqslant r < 1 \end{cases}$$

Ahora solo queda enviar el punto $(0,0)$ al $(0,0,0)$ en coordenadas cartesianas y ver que sigue siendo continua. Basta ver que cuando $r \to 0$ las función f tiende al origen. Y que es biyectiva se deduce con el teorema de Pitágoras, es decir, en cilíndricas $r^2 + z^2 = 1$ sobre $\mathbb{S}^2$.

Finalmente, el homeomorfismo pedido es este:

$$\begin{aligned} h\colon \mathbb{D}^2/\mathbb{S}^1 &\to \mathbb{S}^2 \\ (x,y) &\mapsto \begin{cases} (c^{-1} \circ f \circ p)(x,y), \text{ si } (x,y) \neq (0,0), (x,y) \notin \mathbb{S}^1 \\ (0,0,0) \qquad , \text{ si } (x,y) = (0,0) \\ (0,0,1) \qquad , \text{ si } (x,y) \in \mathbb{S}^1 \end{cases} \end{aligned}$$

3.16.- Demostrar $\mathbb{I}/\sim \simeq \mathbb{S}^1$, donde $0 \sim 1$. Demostrar $\mathbb{T}^2 \simeq \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

$$
\begin{aligned}
\pi \colon \mathbb{I} &\to [0,1) \\
x &\mapsto \begin{cases} x, \text{ si } x \neq 0,1 \\ 0, \text{ si } x = 0,1 \end{cases}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f \colon [0,1) &\to \mathbb{S}^1 \\
t &\mapsto (cos(2\pi t), sin(2\pi t))
\end{aligned}
$$

Como f es homeomorfismo, la composición con la proyección también lo es. Ahora para la segunda parte basta ver que $\mathbb{T}^2 = (\mathbb{I}/\sim)^2$, y por tanto si cuatro espacios son homeomorfos a pares, los productos también lo serán y hemos acabado.