Topologia FME
Resum de teoria i llista de problemes

Curs 2019/2020

11 de maig de 2020

Índex

6 Homotopia

6.1 Homotopia d'aplicacions

El concepte d'homotopia entre dues aplicacions contínues f i g formalitza la idea intuïtiva de "deformació contínua" de l'una en l'altra:

Definició 6.1 (Homotopia) *Siguin $f, g\colon X \to Y$ aplicacions contínues. Una* homotopia *entre f i g és una aplicació contínua $F\colon X\times[0,1] \to Y$ tal que $F(x,0) = f(x)$ i $F(x,1) = g(x)$ per a tot $x \in X$.*

Si existeix una homotopia les aplicacions f i g es diuen homòtopes i es denota $f \simeq g$.

Exemples 6.2 *Les aplicacions següents són homòtopes:*

1. *Les circumferències en el pla $x \mapsto re^{2\pi ix}\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ per a tots els valors de $r > 0$.*
2. *Totes les aplicacions contínues d'un espai qualsevol en un subespai convex de $\mathbb{R}^n$.*
3. *Totes les aplicacions constants d'un espai qualsevol en un espai arc-connex.*

En canvi les següents no ho són:

4. *Dues aplicacions contínues en un espai arc-connex que prenen valors en components arc-connexes diferents d'un altre espai.*

Prova: La primera és un cas particular de la segona:

1. Donades circumferències de radis r i s l'aplicació $F\colon [0,1]\times[0,1]\to\mathbb{R}^2$ definida posant
$$F(x,t)=\big((1-t)r+ts\big)e^{2\pi ix}$$
és una homotopia amb $F(x,0)=re^{2\pi ix}$ i $F(x,1)=se^{2\pi ix}$.
2. Recordi's que un subconjunt $Y\subseteq\mathbb{R}^n$ es diu convex si conté el segment $(1-t)\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{y}$ que uneix qualsevol parell de punts $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in Y$. Donades aplicacions contínues $f,g\colon X\to Y$ es defineix l'aplicació
$$F\colon X\times[0,1]\to Y,\qquad F(x,t)=(1-t)f(x)+tg(x).$$
La convexitat de Y assegura que aquesta aplicació pren efectivament valors en Y. És contínua per haver-se obtingut a partir d'aplicacions contínues de les variables x i t amb productes i sumes. És una homotopia entre f i g ja que $F(x,0)=f(x)$ i $F(x,1)=g(x)$ per a tot $x\in X$.
3. Siguin $f,g\colon X\to Y$ aplicacions constants amb $f(x)=a$ i $f(y)=b$ per a tot $x\in X$. Com que Y és arc-connex existeix un camí $\sigma\colon[0,1]\to Y$ que uneix a amb b. L'aplicació $F\colon X\times[0,1]$ definida posant $F(x,t)=\sigma(t)$ és una homotopia entre les aplicacions donades: $F(x,0)=\sigma(0)=a$ i $F(x,1)=\sigma(1)=b$ per a tot $x\in X$.
4. Siguin $f,g\colon X$ contínues que prenen valors $f(x_1)=y_1$ i $g(x_2)=y_2$ en components arc-connexes diferents de Y. Se suposa que X és arc-connex. Suposi's que existeix una homotopia $F\colon X\times[0,1]\to Y$. Aleshores $F(x_1,0)=f(x_1)=y_1$ i $F(x_2,1)=g(x_2)=y_2$. L'espai $X\times[0,1]$ és arc-connex per ser-ne producte. Si $\sigma\colon[0,1]\to X\times[0,1]$ és un camí que uneix $(x_1,0)$ amb $(x_2,1)$ la composició $F\circ\sigma$ seria un camí en Y que uneix y_1 amb y_2, en contradicció amb el fet que aquests dos punts pertanyen a components arc-connexes diferents.

Proposició 6.3 (Classes d'homotopia) *La relació d'homotopia és d'equivalència en el conjunt $\mathscr{C}(X,Y)$ de les aplicacions contínues de X en Y.*

Es denota $[X,Y]=\big\{[f]:f\in\mathscr{C}(X,Y)\big\}$ el conjunt de les classes d'homotopia.

Prova: La reflexiva i la simètrica són òbvies. Per veure la transitiva n'hi ha prou a observar que si F i G són homotopies entre f i g i entre g i h, respectivament, aleshores l'aplicació
$$H\colon X\times[0,1]\to Y,\qquad H(x,t)=\begin{cases}F(x,2t), & \text{si}\quad 0\leqslant t\leqslant\frac12,\\ G(x,2t-1), & \text{si}\quad \frac12\leqslant t\leqslant 1,\end{cases}$$
és contínua, ja que està definida per funcions contínues en el recobriment de $X\times[0,1]$ format pels dos conjunts tancats $X\times[0,\frac12]$ i $X\times[\frac12,1]$, que coincideixen en la intersecció de tots dos $X\times\{\frac12\}$, on prenen els valors $g(x)=F(x,1)=F(x,2\frac12)=G(x,2\frac12-1)=G(x,0)=g(x)$, i és una homotopia entre f i h ja que $H(x,0)=f(x,0)=f(x)$ i $H(x,1)=G(x,1)=h(x)$ per a tot $x\in X$. □

Exemple 6.4 *Sigui $\mathbb{I}=[0,1]$. Per a tot espai topològic X el cardinal de $[\mathbb{I},X]$ és el nombre de components arc-connexes de X.*

Prova: Es tria un punt p en cada component arc-connexa de X i es denota $[p]$ la component arc-connexa corresponent. Es denota σ_p el camí constant que pren valors en un punt p.

Es vol veure que l'aplicació $[p] \mapsto [\sigma_p]$ que envia cada component arc-connexa de l'espai en la classe d'homotopia del camí constant és una bijecció entre el conjunt de components arc-connexes i el conjunt $[\mathbb{I}, X]$.

L'aplicació és injectiva: si $[\sigma_p] = [\sigma_q]$ aleshores les aplicacions constants iguals a p i a q són homòtopes definides en el conjunt arc-connex $\mathbb{I}$. Per tant han de prendre valors en la mateixa component arc-connexa (últim dels exemples 6.2), de manera que els dos punts han de ser els mateixos.

L'aplicació és exhaustiva: sigui $\sigma\colon \mathbb{I} \to X$ una aplicació contínua. Com que $\sigma(\mathbb{I})$ és arc-connex està contingut en una única component arc-connexa de X. Sigui p el punt que representa aquesta component. Es vol veure que $\sigma \simeq \sigma_p$. S'agafa un camí que uneixi p amb $\sigma(0)$. Concatenant-los s'obté un camí τ tal que $\tau(0) = p$ i $\tau(\frac{1}{2} + \frac{t}{2}) = \sigma(t)$. Aleshores l'aplicació $F\colon \mathbb{I} \times [0,1] \to X$ definida posant $F(x,t) = \tau\big(t\big((1-x)\frac{1}{2}+x\big)\big)$ està ben definida i és contínua ja que el paràmetre de τ en aquesta expressió varia entre 0 i 1 contínuament respecte x i t. És una homotopia entre el camí constant i σ. En efecte, es té $F(x,0) = \tau(0) = p = \sigma_p(x)$ i $F(x,1) = \tau(\frac{1}{2} + \frac{x}{2}) = \sigma(x)$. □

Lema 6.5 *L'homotopia d'aplicacions es comporta bé respecte la composició: donades aplicacions contínues $f_1, f_2\colon X \to Y$ i $g_1, g_2\colon Y \to Z$ es té*

$$\left.\begin{aligned} f_1 &\simeq f_2 \\ g_1 &\simeq g_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow g_1 \circ f_1 \simeq g_2 \circ f_2.$$

Prova: Siguin $F\colon X \times [0,1] \to Y$ i $G\colon Y \times [0,1] \to Z$ homotopies entre les funcions f_1 i f_2 i entre les funcions g_1 i g_2, respectivament. Aleshores l'aplicació contínua $(x,t) \mapsto G\big(F(x,t),t\big)\colon X \times [0,1] \to Z$ és una homotopia entre $g_1 \circ f_1$ i $g_2 \circ f_2$.

En efecte, aquesta aplicació envia el punt $(x,0)$ a

$$G\big(F(x,0),0\big) = G\big(f_1(x),0\big) = g_1\big(f_1(x)\big) = (g_1 \circ f_1)(x),$$

i anàlogament $(x,1) \mapsto G\big(F(x,1),1\big) = (g_2 \circ f_2)(x)$. □

6.2 Equivalència homotòpica

Definició 6.6 (Equivalència homotòpica) *Una* equivalència homotòpica *entre dos espais topològics X i Y és una aplicació contínua $f\colon X \to Y$ per a la qual existeix una aplicació contínua $g\colon Y \to X$ tal que $g \circ f \simeq \mathrm{Id}_X$ i $f \circ g \simeq \mathrm{Id}_Y$.*

Dos espais topològics entre els quals hi ha una equivalència homotòpica es diuen homotòpicament equivalents *o bé* del mateix tipus d'homotopia. *Es denota $X \simeq Y$.*

Proposició 6.7 *Ser del mateix tipus d'homotopia és una relació d'equivalència.*

Prova: Les propietats reflexiva i simètrica són immediates. Per veure la transitiva, siguin $X \simeq Y$ i $Y \simeq Z$. Siguin $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to X$ tals que $g \circ f \simeq \mathrm{Id}_X$ i $f \circ g \simeq \mathrm{Id}_Y$. Siguin $\phi\colon Y \to Z$, $\psi\colon Z \to Y$ tals que $\psi \circ \phi \simeq \mathrm{Id}_Y$ i $\phi \circ \psi \simeq \mathrm{Id}_Z$.

Aleshores, usant el lema 6.5, que diu que la composició conserva la homotopia, es veu que les aplicacions $\phi \circ f\colon X \to Z$ i $g \circ \psi\colon Z \to X$ satisfan:

$$\begin{aligned}(g \circ \psi) \circ (\phi \circ f) &= g \circ (\psi \circ \phi) \circ f \simeq g \circ \mathrm{Id}_Y \circ f = g \circ f \simeq \mathrm{Id}_X,\\ (\phi \circ f) \circ (g \circ \psi) &= \phi \circ (f \circ g) \circ \psi \simeq \phi \circ \mathrm{Id}_Y \circ \psi = \phi \circ \psi \simeq \mathrm{Id}_Z,\end{aligned}$$

i això és dir que $X \simeq Z$. $\square$

Així, el tipus d'homotopia classifica els espais topològics en classes d'equivalència homotòpica. Dos espais topològics homeomorfs són clarament del mateix tipus d'homotopia: un homeomorfisme f i l'homeomorfisme invers g satisfan la condició de la definició d'equivalència homotòpica, però el recíproc no sempre es compleix. Per tant la classificació en tipus d'homotopia és més grollera que la classificació en classes d'homeomorfisme.

Exemples 6.8 *Els espais següents són del mateix tipus d'homotopia que la circumferència $\mathbb{S}^1$, però no són homeomorfs a la circumferència:*

1. *La circumferència "amb cua" $X = \mathbb{S}^1 \cup [1,2] \subset \mathbb{C}$;*
2. *Una corona circular $X = \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R\}$ de radis $0 < r < R$.*

En canvi el l'espai següent no és del mateix tipus d'homotopia que la circumferència $\mathbb{S}^1$:

3. *Un punt $X = \{p\}$.*

PROVA:

1. Es considera la inclusió $f\colon \mathbb{S}^1 \hookrightarrow X$ i l'aplicació $g\colon X \to \mathbb{S}^1$ que és la identitat sobre $\mathbb{S}^1$ i envia tota la cua al punt 1. Són aplicacions contínues. La composició $g \circ f\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ és la identitat en $\mathbb{S}^1$, i per tant és homòtopa a aquesta aplicació. La composició $f \circ g\colon X \to X$ és la mateixa aplicació g, seguida per la inclusió de $\mathbb{S}^1$ en X. Es considera l'aplicació $F\colon X \times [0,1] \to X$ definida posant

$$F(z,t) = \begin{cases} z, & \text{si} \quad z \in \mathbb{S}^1, \\ (1-t)z + t, & \text{si} \quad z \in [1,2]. \end{cases}$$

   Està ben definida en el sentit que $F(z,t) \in X$ per a tot parell $(z,t) \in X \times [0,1]$, ja que els punts $(1-t)z + t$ pertanyen a $[1,2] \subset X$ per a tot $z \in [1,2]$ i $t \in [0,1]$. És contínua ja que ho és en cadascun dels dos subespais tancats $\mathbb{S}^1 \times [0,1]$ i $[1,2] \times [0,1]$, que formen un recobriment de X, en els quals la funció està definida amb expressions contínues diferents, i totes dues expressions coincideixen en la intersecció: el segment $\{1\} \times [0,1]$, on totes dues prenen el valor 1. És una homotopia entre la identitat en X i la funció $f \circ g$ ja que $F(z,0) = z = \mathrm{Id}_X(z)$ per a tot $z \in X$ i $F(z,1) = z$ si $z \in \mathbb{S}^1$ i $F(z,1) = 1$ si $z \in [1,2]$, de manera que $F(z,1) = (f \circ g)(z)$.

   L'espai X no és homeomorf a $\mathbb{S}^1$: tots dos espais són connexos però si es treuen a X els punts -1 i 2 l'espai segueix sent connex i, en canvi, si es treuen dos punts diferents qualsevol a $\mathbb{S}^1$ l'espai se separa.

2. Llevat d'homeomorfisme, que conserva el tipus d'homotopia, es pot suposar que la corona és la de radis $r = \frac{1}{2}$ i $R = 2$ (o, simplement, que conté $\mathbb{S}^1$). Es considera la inclusió $f\colon \mathbb{S}^1 \hookrightarrow X$ i l'aplicació $g\colon X \twoheadrightarrow \mathbb{S}^1$ que projecta cada punt sobre la circumferència: $g(z) = \frac{z}{|z|}$. La composició $g \circ f$ és directament la identitat $\mathrm{Id}_{\mathbb{S}^1}$. La composició $f \circ g\colon X \to X$ és la projecció de la corona en la circumferència. L'aplicació $F\colon X \times [0,1] \to X$ definida posant $F(z,t) = (1-t)z + t\frac{z}{|z|}$ és una homotopia entre la identitat $\mathrm{Id}_X = F(\cdot, 0)$ l'aplicació $g \circ f = F(\cdot, 1)$.

   Els espais no són homeomorfs ja que dos punts diferents qualsevol separen la circumferència però no separen la corona circular.

   Les corones tancades o semitancades (amb desigualtat estricta en un dels radis i no estricta en l'altre) també són del mateix tipus d'homotopia de la circumferència.

3. Aquesta comprovació es deixa per a la secció següent: per veure que no existeix cap homotopia entre la identitat de $\mathbb{S}^1$ i una aplicació constant es veurà que aquestes dues aplicacions tenen graus diferents: la primera té grau 1 i la segona grau zero. $\square$

Definició 6.9 (Espai contràctil) *Un espai topològic es diu* contràctil *si és del mateix tipus d'homotopia que un punt.*

Exemples 6.10 *Els espais següents són contràctils:*

1. tots els intervals no buits dins de $\mathbb{R}$;

2. l'espai $\mathbb{R}^n$ i totes les boles, siguin obertes o tancades;

3. tot subconjunt estrellat de $\mathbb{R}^n$.

En canvi els següents no ho són:

4. La circumferència $\mathbb{S}^1$.

Prova: Els exemples d'espais contràctils donats tots entren en la categoria de subconjunts estrellats de $\mathbb{R}^n$: subconjunts $X \subseteq \mathbb{R}^n$ tals que existeix un punt $p \in X$ de manera que els segments que uneixen p amb cada punt de X estan continguts en X: $(1-t)\boldsymbol{x} + tp \in X$ per a tot $\boldsymbol{x} \in X$ i tot $t \in [0,1]$.

Cadascun d'aquests espais és homotòpicament equivalent a l'espai $\{p\}$ format per aquest únic punt. Per veure-ho es considera la inclusió $\{p\} \hookrightarrow X$ i l'aplicació constant $X \to \{p\}$, que tenen com a composició la identitat en $\{p\}$ i l'aplicació $X \to X$ constant igual a p. Per veure que aquesta segona és homòtopa a la identitat n'hi ha prou a agafar la homotopia $F(\boldsymbol{x}, t) = (1-t)\boldsymbol{x} + tp$, que dona la identitat quan $t = 0$ i la constant quan $t = 1$.

El fet que la circumferència no és contràctil és conseqüència, com ja s'ha dit en els exemples 6.8, de que no és del mateix tipus d'homotopia que un punt. Això està pendent de demostrar-se a la secció següent. $\square$

Definició 6.11 (Retracció, retracte) *Sigui $S \subseteq X$ un subespai de l'espai topològic X. Una* retracció *de X en el subespai S és una aplicació contínua $r\colon X \to S$ tal que $r|_S = \mathrm{Id}_S$. O sigui, tal que $r(x) = x$ per a tot $x \in S \subseteq X$.*

Es diu que el subespai S és un retracte *de l'espai X si existeix una retracció de X en S.*

Per exemple, el subespai $S = \{x\} \subseteq X$ format per un únic punt sempre és un retracte de l'espai X. En canvi un subespai $S = \{x, y\} \subset \mathbb{R}^2$ format per dos punts diferents $x \neq y$ no sempre és un retracte: un subespai discret format per dos punts és un retracte d'un espai si, i només si, aquests punts pertanyen a components connexes diferents.

Definició 6.12 (Retracte de deformació) *Un* retracte S *d'un espai* X *es diu* retracte de deformació *si existeix una retracció* $r\colon X \to S \subseteq X$ *que sigui homòtopa a la identitat de* X.

Hi ha retractes que no són de deformació. Per exemple, un punt qualsevol $x \in X$ és un retracte de tot espai topològic X, però només és retracte de deformació quan l'espai és contràctil.

6.3 Grau d'homotopies de $\mathbb{S}^1$ en $\mathbb{S}^1$

En aquesta secció es considera la circumferència $\mathbb{S}^1$ com a subespai de l'espai euclidià $\mathbb{R}^2$, que s'identifica amb el cos $\mathbb{C}$ dels nombres complexos. Les topologies habituals en $\mathbb{R}^2$ i en $\mathbb{C}$ són la mateixa. Veure $\mathbb{S}^1$ dins de $\mathbb{C}$ té l'avantatge que en $\mathbb{C}$ hi ha definit un producte que és una aplicació contínua, el qual restringeix a la circumferència, que és el subgrup del grup multiplicatiu $\mathbb{C}^*$ format pels punts de mòdul 1.

Es denotarà $\exp\colon \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$ l'aplicació contínua $t \mapsto e^{2\pi i t} = \cos 2\pi t + i \sin 2\pi t$. Aquesta aplicació és una identificació, corresponent a la relació d'equivalència que identifica t amb $t+k$ per a tot $t \in \mathbb{R}$ i tot $k \in \mathbb{Z}$, la qual permet veure $\mathbb{S}^1$ com el quocient $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. La restricció de exp a l'interval $[0,1]$ també és una identificació, i en aquest cas dona lloc a l'isomorfisme $[0,1]/\{0,1\} \cong \mathbb{S}^1$. L'aplicació exponencial no té inversa per la dreta en tot $\mathbb{S}^1$ però sí que en té en qualsevol subespai propi:

Lema 6.13 (Inverses locals per la dreta) *Sigui* $S \subset \mathbb{S}^1$ *un subespai propi.*

1. *Existeix una aplicació contínua* $\log\colon S \to \mathbb{R}$ *tal que* $\exp \circ \log = \mathrm{Id}_S$.
2. *L'aplicació* $\log + k$ *satisfà la mateixa propietat per a tot enter* $k \in \mathbb{Z}$.
3. *Si* S *és connex aleshores dues inverses per la dreta de* exp *difereixen en un enter.*

Prova: Es considera la funció contínua $\arccos\colon [-1,1] \to [0,\pi]$, inversa de la funció cosinus. El subespai $\mathbb{S}^1 \setminus \{1\}$ és la imatge del subespai $(0,1) \subset \mathbb{R}$ per la funció exponencial. La funció $\exp|_{(0,1)}$ és un homeomorfisme amb la imatge, amb inversa $\operatorname{Log}\colon \mathbb{S}^1 \setminus \{1\} \to (0,1)$ la funció definida com:

$$\operatorname{Log}(z) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\arccos x, & \text{si} \quad y \geqslant 0, \\ \frac{1}{2\pi}(2\pi - \arccos x), & \text{si} \quad y \leqslant 0, \end{cases} \qquad z = x + iy \in \mathbb{S}^1 \setminus \{1\}.$$

Aquesta funció està definida per expressions contínues diferents en dos subespais tancats que coincideixen en la intersecció de tots dos: el punt $-1 = -1 + i0$, on prenen el valor comú

$$\operatorname{Log}(-1) = \frac{1}{2} = \frac{1}{2\pi}\arccos(-1) = \frac{1}{2\pi}\big(2\pi - \arccos(-1)\big).$$

Per tant, defineix efectivament una funció contínua que és la inversa de $\exp|_{(0,1)}$.

1. Donat un subespai propi $S \subset \mathbb{S}^1$ sigui $p \in \mathbb{S}^1 \setminus S$ i sigui $u \in \mathbb{R}$ tal que $\exp u = p$ (l'aplicació $\exp\colon \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{S}^1$ és exhaustiva). Aleshores l'aplicació $\log\colon S \to \mathbb{R}$ definida com $\log z = \operatorname{Log}(zp^{-1}) + u$ està ben definida i és contínua en S, ja que $zp^{-1} \neq 1$ per a tot $z \in S$ i satisfà
$$\exp\big(\log z\big) = \exp\big(\operatorname{Log}(zp^{-1}) + u\big) = \exp\big(\operatorname{Log}(zp^{-1})\big)\exp u = zp^{-1}p = z \qquad \forall z \in S.$$
2. Immediat: $\exp(\log + k) = \exp(\log)\exp(k) = \exp(\log)1 = \exp(\log) = \mathrm{Id}_S$.
3. Siguin $\log_1$ i $\log_2$ inverses per la dreta de exp en S. Es considera la seva diferència, que és una aplicació contínua $\log_2 - \log_1\colon S \to \mathbb{R}$. Es té
$$\begin{aligned}\exp\big((\log_2 - \log_1)(z)\big) = \exp\big(\log_2(z)\big)\exp\big(\log_1(z)\big)^{-1} = zz^{-1} = 1 \\ \Rightarrow \quad (\log_2 - \log_1)(z) \in \exp^{-1}(1) = \mathbb{Z} \quad \forall z \in S.\end{aligned}$$
És a dir, que la imatge del conjunt S per $\log_2 - \log_1$ està continguda en els enters. Si S és connex la seva imatge també és connexa i els únics subconjunts connexos del subespai discret $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ són els punts: $\log_2 - \log_1$ és una constant $k \in \mathbb{Z}$. $\square$

Definició 6.14 (Aixecament) *Un* aixecament *d'una aplicació contínua $f\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ és una aplicació contínua $\widetilde{f}\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ tal que $\exp\big(\widetilde{f}(t)\big) = f\big(\exp(t)\big)$ per a tot $t \in [0,1]$.*

O sigui, és una aplicació contínua $\widetilde{f}$ que faci commutatiu el diagrama següent:

$$\begin{array}{ccc} [0,1] & \xrightarrow{\widetilde{f}} & \mathbb{R} \\ \downarrow{\scriptstyle \exp} & & \downarrow{\scriptstyle \exp} \\ \mathbb{S}^1 & \xrightarrow{f} & \mathbb{S}^1 \end{array}$$

Si $\widetilde{f}\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ és un aixecament de $f\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ aleshores l'aplicació $\widetilde{f} + k$ és també un aixecament per a tot enter $k \in \mathbb{Z}$. El lema següent assegura que sempre existeixen aixecaments i que tots difereixen entre ells d'aquesta manera.

Lema 6.15 (Lema d'aixecament) *Tota aplicació contínua $f\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ té aixecaments. Fixat un aixecament $\widetilde{f}$, tot altre aixecament és de la forma $\widetilde{f} + k$ per a algun enter k.*

Prova: Es considera l'aplicació contínua $\phi = f \circ \exp\colon [0,1] \to \mathbb{S}^1$.

Per ser $[0,1]$ compacte és uniformement contínua. S'agafa $\epsilon = 2$ i sigui δ el valor corresponent en la definició de continuïtat uniforme: per a tot $x, y \in [0,1]$ es té $|x - y| < \delta \Rightarrow |\phi(x) - \phi(y)| < 2$. S'agafa una partició $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ de l'interval de diàmetre $\max\big\{|t_i - t_{i-1}| : 1 \leqslant i \leqslant n\big\} < \delta$. Aleshores $\phi\big([t_{i-1}, t_i]\big)$ és un subconjunt propi $S_i \subseteq \mathbb{S}^1$, ja que la distància de $\phi(x)$ a $\phi(t_i)$ és < 2 per a tot x de l'interval, i per tant aquest subconjunt no pot contenir el punt de la circumferència que és l'antipodal de $\phi(t_i)$, el qual està a distància 2, el diàmetre de $\mathbb{S}^1$.

Per a cada $i = 1, \ldots, n$ s'agafa una inversa per la dreta de l'exponencial $\log_i\colon S_i \to \mathbb{R}$, de manera que $\exp \circ \log_i(z) = z$ per a tot $z \in S_i$. Com que els S_i són connexos per ser imatges d'intervals aquestes inverses queden unívocament determinades només llevat de sumar un nombre enter. Es trien aquestes constants enteres de la manera següent:

- la constant de la primera inversa local $\log_1$ es tria arbitràriament;
- ara s'agafa la constant en $\log_2$ de tal manera que totes dues inverses locals $\log_2$ i $\log_1$ coincideixin en el punt comú $\phi(t_1) \in S_1 \cap S_2$;
- i així successivament, mentre $i < n$ s'agafa la constant en $\log_{i+1}$ de tal manera que les inverses locals $\log_i$ i $\log_{i+1}$ coincideixin en el punt comú $\phi(t_i) \in S_i \cap S_{i+1}$.

Es defineix l'aixecament posant $\widetilde{f}(t) = \log_i\big(\phi(t)\big)$ si $t \in [t_{i-1}, t_i]$. Està ben definit gràcies a la tria de les inverses locals: en els extrems $t_i \in [t_{i-1}, t_i] \cap [t_i, t_{i+1}]$ dels intervals on ve donada per dues expressions diferents, totes dues expressions coincideixen. És una aplicació contínua ja que s'ha construït a partir d'aplicacions contínues definides en subespais tancats, que coincideixen en les interseccions. Té la propietat d'aixecament:

$$\exp\big(\widetilde{f}(t)\big) = (\exp \circ \log_i)\big(\phi(t)\big) = \phi(t) = f\big(\exp(t)\big) \quad \forall\, t \in [0,1].$$

Finalment, donades dues aplicacions $\widetilde{f}_1$ i $\widetilde{f}_2$ que compleixin aquesta propietat, la seva diferència satisfà

$$\exp\big((\widetilde{f}_1 - \widetilde{f}_2)(t)\big) = \exp\big(\widetilde{f}_1(t)\big)\exp\big(\widetilde{f}_1(t)\big)^{-1} = f\big(\exp(t)\big) f\big(\exp(t)\big)^{-1} = 1.$$

Per tant la funció diferència $\widetilde{f}_1 - \widetilde{f}_2$ pren valors en els enters dins de $\mathbb{R}$, i per ser contínua sobre el connex $[0,1]$ ha de ser constant amb valor un enter $k \in \mathbb{Z}$. $\square$

Aquest lema permet assegurar que el grau, definit a continuació, està ben definit:

Definició 6.16 (Grau) *El* grau *d'una aplicació contínua* $f\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ *és el nombre enter definit com la diferència* $\deg f = \widetilde{f}(1) - \widetilde{f}(0) \in \mathbb{Z}$*, on* $\widetilde{f}\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ *és un aixecament de* f *qualsevol.*

Teorema 6.17 (Invariància del grau per homotopia) *El grau d'una aplicació contínua* $f\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ *és un invariant de la classe d'homotopia de* f*:* $[f] = [g] \Rightarrow \deg f = \deg g$*.*

PROVA: Aquest teorema es demostra amb un anàleg del lema d'aixecament en el quadrat $[0,1]^2$ en comptes de l'interval $[0,1]$.

És a dir: donada una aplicació contínua $F\colon [0,1]^2 \to \mathbb{S}^1$ existeix una aplicació contínua $\widetilde{F}\colon [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ tal que $\exp \circ \widetilde{F} = F$, i aquesta aplicació $\widetilde{F}$ queda unívocament determinada llevat de sumar-li una constant entera.

La demostració es fa exactament igual que en el lema d'aixecament, lema 6.15, amb les observacions següents: la continuïtat uniforme de F permet trobar una partició de l'interval $[0,1]$ tal que les imatges dels quadrats $[t_{i-1}, t_i] \times [t_{j-1}, t_j]$ estiguin contingudes en subespais propis de $\mathbb{S}^1$, en els quals hi ha logaritmes locals: $\log_{i,j}$ és una inversa local per la dreta de l'exponencial en el conjunt $S_{i,j} = F\big([t_{i-1}, t_i] \times [t_{j-1}, t_j]\big)$. Cadascun d'aquests logaritmes locals està determinat només llevat de sumar-li un enter. Ara es trien tots els logaritmes locals de manera coherent seguint el mateix esquema que en el lema d'aixecament, però ara resseguint la partició en quadrats primer per files i després per columnes:

- la constant de la primera inversa local $\log_{1,1}$ es tria arbitràriament;
- ara s'agafa la constant en $\log_{2,1}$ de tal manera que totes dues inverses locals $\log_{1,1}$ i $\log_{2,1}$ coincideixin en el subconjunt connex $F\big(\{t_1\} \times [0,t_1]\big) \subseteq S_{1,1} \cap S_{2,1}$;
- i així successivament, mentre $i < n$ s'agafa la constant en $\log_{i,1}$ de tal manera que les inverses locals $\log_{i,1}$ i $\log_{i+1,1}$ coincideixin en la imatge de l'interval comú $\{t_i\} \times [0,t_1]$;
- ara es determinen les inverses locals en la segona fila de manera que coincideixin amb les de la primera fila en la intersecció: es comença agafant la constant en $\log_{1,2}$ de tal manera que coincideixi amb la inversa local $\log_{1,1}$ en la imatge comú de l'interval $[0,t_1] \times \{t_1\}$;
- un cop construïdes les $\log_{i,2}$, i mentre $i < n$, es construeix $\log_{i+1,2}$ de manera que coincideixi amb la inversa ja construïda sobre la imatge comú de la reunió connexa d'intervals $\big([t_i,t_{i+1}] \times \{t_1\}\big) \cup \big(\{t_i\} \times [t_1,t_2]\big)$;
- procedint de la mateixa manera es van determinant les constants de totes les inverses locals $\log_{i,j}$ de tal manera que coincideixin amb la funció que ja es té, obtenint-se finalment una inversa local comuna.

Un cop determinades aquestes inverses locals es defineix l'aixecament posant

$$\widetilde{F}(\boldsymbol{x}) = \log_{i,j}\big(F(\boldsymbol{x})\big) \quad \text{si} \quad \boldsymbol{x} \in [x_{i-1},x_i] \times [x_{j-1},x_j].$$

És una funció contínua en cada quadrat, i per tant ho és en tot $[0,1]^2$ ja que les definicions en els segments intersecció de dos d'ells coincideixen. És clarament un aixecament de F.

Es passa ara a demostrar l'enunciat: el grau és un invariant de la classe d'homotopia. Siguin $f,g\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ aplicacions contínues homòtopes. Siguin $\phi = f \circ \exp, \psi = g \circ \exp\colon [0,1] \to \mathbb{S}^1$ les aplicacions contínues obtingudes en compondre amb el pas al quocient $\exp\colon [0,1] \twoheadrightarrow \mathbb{S}^1$. Sigui $\Phi\colon \mathbb{S}^1 \times [0,1] \to \mathbb{S}^1$ una homotopia entre f i g i sigui $F\colon [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{S}^1$ la composició amb la projecció canònica $\exp\colon [0,1] \to \mathbb{S}^1$ en la primera component. Aleshores $f \simeq g \Rightarrow \phi \simeq \psi$ i $F(0,t) = F(1,t) = \Phi(1,t)$ per a tot $t \in [0,1]$.

Sigui $\widetilde{F}\colon [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ un aixecament. Aleshores $\widetilde{f}(x) := \widetilde{F}(x,0)$ satisfà

$$\exp\big(\widetilde{f}(x)\big) = \exp\big(\widetilde{F}(x,0)\big) = F(x,0) = \phi(x) = f\big(\exp(x)\big)$$

i, per tant, és un aixecament de f. Anàlogament $\widetilde{g}(x) := \widetilde{F}(x,1)$ és un aixecament de g.

L'aplicació $\widetilde{F}(1,t) - \widetilde{F}(0,t)\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ és constant (i pren un valor enter). En efecte, es té

$$\exp\big(\widetilde{F}(1,t) - \widetilde{F}(0,t)\big) = \exp\big(\widetilde{F}(1,t)\big)\exp\big(\widetilde{F}(0,t)\big)^{-1} = F(1,t)F(0,t)^{-1} = 1.$$

Per tant la diferència $\widetilde{F}(1,t) - \widetilde{F}(0,t)$ pren valors en $\mathbb{Z} = \exp^{-1}(1)$. Com que és una funció contínua en un connex i els únics connexos de $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ són els punts ha de ser una aplicació constant (amb valor un enter). Aleshores

$$\deg f = \widetilde{f}(1) - \widetilde{f}(0) = \widetilde{F}(1,0) - \widetilde{F}(0,0) = \widetilde{F}(1,1) - \widetilde{F}(0,1) = \widetilde{g}(1) - \widetilde{g}(0) = \deg g$$

i, efectivament, les aplicacions homòtopes f i g tenen el mateix grau. $\square$

Donades aplicacions contínues $f, g\colon X \to \mathbb{S}^1$ el fet que el producte de nombres complexos sigui una aplicació contínua $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ assegura que l'aplicació producte $fg\colon X \to \mathbb{S}^1$ amb $fg(x) = f(x)g(x)$ és contínua. A continuació es veu que aquest producte d'aplicacions respecta les classes d'homotopia:

Lema 6.18 *Si $f_1, f_2, g_1, g_2\colon X \to \mathbb{S}^1$ són contínues,*

$$\left.\begin{aligned} f_1 &\simeq f_2 \\ g_1 &\simeq g_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow f_1 g_1 \simeq f_2 g_2.$$

El producte d'aplicacions indueix una operació en el conjunt $[X, \mathbb{S}^1]$ de classes d'homotopia que li dona estructura de grup commutatiu.

Prova: Donades homotopies $F, G\colon X \times [0,1] \to \mathbb{S}^1$ entre les aplicacions f_i i g_i es defineix l'aplicació $H\colon X \times [0,1] \to \mathbb{S}^1$ com el seu producte $H(x,t) = F(x,t) \cdot G(x,t)$. És una aplicació contínua i es comprova immediatament que és una a homotopia entre $f_1 g_1$ i $f_2 g_2$.

Aleshores $[f] \cdot [g] := [f \cdot g]$ és una operació ben definida en el conjunt $[X, \mathbb{S}^1]$: no depèn de les aplicacions contínues f i g agafades com a representants de les classes d'homotopia. Com que el producte de nombres complexos a $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$ és commutatiu aquesta operació també ho és. Com que el producte de nombres complexos és associatiu aquesta operació també ho és. Clarament la classe d'homotopia de l'aplicació constant igual a 1 és un element neutre, ja que multiplicar qualsevol aplicació per la constant 1 la deixa igual. Finalment, la classe de l'aplicació $1/f$ definida per $(1/f)(x) = f(x)^{-1}$, que és també una aplicació contínua $X \to \mathbb{S}^1$ si f ho és, és l'invers de la classe de l'aplicació f. $\square$

Teorema 6.19 *L'aplicació $[f] \mapsto \deg f$ és un isomorfisme de grups $[\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1] \to \mathbb{Z}$.*

Prova: El lema 6.15 assegura que el grau d'una aplicació contínua està ben definit i el teorema 6.17 assegura que és un invariant de la classe d'homotopia. Per tant l'aplicació $[f] \mapsto \deg f\colon [\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1] \to \mathbb{Z}$ està ben definida.

El lema 6.18 defineix una estructura de grup en el conjunt $[\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1]$ de les classes d'homotopia. Per veure que l'aplicació grau és un morfisme de grups n'hi ha prou a observar que si $\widetilde{f}$ i $\widetilde{g}$ són aixecaments d'aplicacions contínues $f, g\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ aleshores l'aplicació $\widetilde{f} + \widetilde{g}$ és un aixecament del producte fg. En efecte, és una aplicació contínua per ser-ne suma, i, tenint en compte que exp envia sumes a productes,

$$\begin{aligned} \exp\big((\widetilde{f} + \widetilde{g})(x)\big) &= \exp\big(\widetilde{f}(x) + \widetilde{g}(x)\big) = \exp\big(\widetilde{f}(x)\big)\exp\big(\widetilde{g}(x)\big) \\ &= f\big(\exp(x)\big) g\big(\exp(x)\big) = (fg)\big(\exp(x)\big). \end{aligned}$$

Aleshores, el grau de l'aplicació producte fg és

$$\deg(fg) = (\widetilde{f} + \widetilde{g})(1) - (\widetilde{f} + \widetilde{g})(0) = \widetilde{f}(1) - \widetilde{f}(0) + \widetilde{g}(1) - \widetilde{g}(0) = \deg f + \deg g.$$

Es consideren les aplicacions contínues $f_n\colon \mathbb{S}^1 = [0,1]/\{0,1\} \to \mathbb{S}^1$ definides posant $f_n(t) = e^{2\pi i n t}$, que estan ben definides ja que 0 i 1 tenen la mateixa imatge 1. Les aplicacions contínues $\widetilde{f}_n(t) = nt$ en són aixecaments. Per tant $\deg f_n = f_n(1) - f_n(0) = n$. Això demostra que l'aplicació grau és exhaustiva: hi ha aplicacions contínues $\mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ amb grau n per a tot enter $n \in \mathbb{Z}$.

Falta veure que el morfisme és injectiu. Sigui $f\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ una aplicació de grau zero. Sigui $\widetilde{f}\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ un aixecament, que ha de tenir $\widetilde{f}(1) = \widetilde{f}(0)$. Aquesta aplicació indueix una aplicació contínua en el quocient $\phi\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ tal que $\widetilde{f} = \phi \circ \exp$ (observi's que aquí $\exp\colon [0,1] \to \mathbb{S}^1$ és l'aplicació canònica $\pi\colon [0,1] \twoheadrightarrow \mathbb{S}^1$). Per tant, i usant que $\exp\colon [0,1] \twoheadrightarrow \mathbb{S}^1$ és exhaustiva,

$$f \circ \exp = \exp \circ \widetilde{f} = \exp \circ \phi \circ \exp \quad \text{a} \quad [0,1] \qquad \Leftrightarrow \qquad f = \exp \circ \phi \quad \text{a} \quad \mathbb{S}^1.$$

Com que $\mathbb{R}$ és contràctil ϕ és homòtopa a constant, per exemple la constant 0. Per tant $\exp \circ \phi$ és homòtopa a constant, per exemple la constant $\exp 0 = 1$. Es dedueix que f és homòtopa a la constant 1, que representa l'element neutre del grup $[\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1]$. □

Com que la identitat té grau 1 i una aplicació constant té grau 0 es dedueix el que ja s'havia anunciat sense demostrar-ho en els exemples 6.8:

Corol·lari 6.20 *L'espai $\mathbb{S}^1$ no és del mateix tipus d'homotopia d'un punt; en particular no és contràctil.*

6.4 Aplicacions a la topologia del pla

A continuació es veuen diverses aplicacions de les propietats del grau d'aplicacions $\mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ a l'estudi de la topologia del pla $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$. En particular es veuran versions 2-dimensionals de resultats que en dimensió 1 són conseqüència immediata del teorema del valor intermedi: punt fix de Brouwer, Borsuk-Ulam, invariància de la dimensió, etc. Aquests resultats també són certs en dimensió superior i es poden demostrar de manera semblant, a partir d'una classificació de $[\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n]$ basada en l'estudi del grau en dimensió superior (veure també text).

Es comença, però, amb una aplicació de caire diferent: una demostració de l'existència d'arrels de polinomis no constants sobre els complexos.

Teorema 6.21 (Teorema fonamental de l'Àlgebra) *Tot polinomi a coeficients complexos no constant té alguna arrel.*

Prova: Sigui $P(X) \in \mathbb{C}[X]$ un polinomi a coeficients complexos que no té cap arrel. En particular $P \neq 0$. Sigui

$$P(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 \cdots + a_{n-1} X^{n-1} + a_n X^n, \quad n \geqslant 0, a_n \neq 0.$$

Per a tot nombre $a \in \mathbb{C}^*$ el polinomi $Q(X) = P(aX)$ tampoc té arrels

$$Q(X) = P(aX) = a_0 + a_1 a X + a_2 a^2 X^2 \cdots + a_{n-1} a^{n-1} X^{n-1} + a_n a^n X^n.$$

Dividint pel coeficient líder $a_n a^n$ s'obté el polinomi mònic també sense arrels

$$R(X) = \frac{1}{a^n a_n} Q(X) = b_0 + b_1 X + \cdots + b_{n-1} X^{n-1} + X^n$$

amb coeficients

$$b_k = \frac{a_k}{a_n a^{n-k}}, \quad k = 0, \dots, n-1.$$

Agafant un complex a de mòdul suficientment gran es pot fer que els b_k tinguin mòdul petit. En particular es pot aconseguir, agafant $|a|$ prou gran, que

$$|b_0| + |b_1| + \cdots + |b_{n-1}| < 1.$$

Per exemple, n'hi ha prou a demanar que per a tot $k = 0, \dots, n-1$ tal que $a_k \neq 0$ sigui

$$|b_k| = \left| \frac{a_k}{a_n a^{n-k}} \right| < \frac{1}{n} \quad \Leftrightarrow \quad |a|^{n-k} > \frac{n|a_n|}{|a_k|} \quad \Leftrightarrow \quad |a| > \left(\frac{n|a_n|}{|a_k|} \right)^{1/(n-k)},$$

i per tant es pot agafar un $a \in \mathbb{C}^*$ amb mòdul més gran que aquests n nombres.

Amb això l'enunciat s'ha reduït a demostrar que tot polinomi mònic $R(X) = b_0 + b_1 X + \cdots + b_{n-1} X^{n-1} + X^n$ sense arrels amb coeficients que satisfan $|b_0| + \cdots + |b_{n-1}| < 1$ ha de tenir grau $n = 0$, el qual equival a dir què és el polinomi constant $R(X) = 1$.

Per veure-ho demostrarà que l'aplicació potència n-èsima $z \mapsto z^n \colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$, amb aixecament $t \mapsto nt$, que té grau n igual al grau del polinomi, és homòtopa a una aplicació constant $z \mapsto c \colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$, que té grau zero. Aplicant el teorema 6.19 es dedueix que $n = 0$.

La homotopia entre aquestes dues aplicacions s'obtindrà veient que totes dues són homòtopes a l'aplicació $f \colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ definida posant $f(z) = \frac{R(z)}{|R(z)|}$. Aquesta aplicació $\mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ està ben definida ja que R no s'anul·la mai, i és clarament contínua.

L'aplicació

$$F \colon \mathbb{S}^1 \times [0,1] \to \mathbb{S}^1, \qquad F(z,t) = \frac{R(zt)}{|R(zt)|}$$

està ben definida ja que R no s'anul·la en $\mathbb{C}$ i, en particular, no ho fa al disc $\mathbb{D}^2$ on varia el paràmetre zt. És clarament contínua. És una homotopia entre $f(z) = F(z,1)$ i l'aplicació constant $z \mapsto c = F(z,0) = \frac{R(0)}{|R(0)|} \in \mathbb{S}^1$.

L'aplicació

$$G \colon \mathbb{S}^1 \times [0,1] \to \mathbb{S}^1, \qquad G(z,t) = \frac{tR(z) + (1-t)z^n}{|tR(z) + (1-t)z^n|}$$

està ben definida. En efecte, el denominador és

$$\begin{aligned} \left| tR(z) + (1-t)z^n \right| &= \left| z^n + t(b_{n-1}z^{n-1} + \cdots + b_1 z - b_0) \right| \\ &\geqslant |z^n| - t|b_{n-1}z^{n-1} + \cdots + b_1 z + b_0| > 1 - t > 0 \end{aligned}$$

ja que, com que $|z| = 1$, la propietat dels coeficients del polinomi R assegura que:

$$|b_{n-1}z^{n-1} + \cdots + b_1 z + b_0| \leqslant |b_{n-1}| + \cdots + |b_1| + |b_0| < 1.$$

És clarament contínua. És una homotopia entre $f(z) = G(z,1)$ i $z^n = G(z,0)$. Per tant es té $c \simeq f(z) \simeq z^n$ i aplicant el teorema 6.19 es dedueix que $n = \deg(z^n) = \deg(c) = 0$.

S'ha demostrat, per tant, que els únics polinomis sobre els complexos que no s'anul·len mai són els polinomis constants no nuls. $\square$

Lema 6.22 *No existeix cap retracció del disc $\mathbb{D}^2$ en $\mathbb{S}^1$.*

Prova: Suposi's que $r\colon \mathbb{D}^2 \to \mathbb{S}^1$ és una retracció. Component amb la inclusió $\imath\colon \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{D}^2$ s'obté l'aplicació identitat $\mathrm{Id}_{\mathbb{S}^1} = r \circ \imath\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$.

Com que el disc $\mathbb{D}^2$ és un espai contràctil tota aplicació contínua és homòtopa a una constant. En particular $\imath \simeq \mathbf{1}$. En compondre amb el retracte es dedueix que $\mathrm{Id}_{\mathbb{S}^1} = r \circ \imath \simeq r \circ \mathbf{1} = \mathbf{1}$. Això contradiu el fet que la identitat, que té grau 1, no és homòtopa a una aplicació constant, que té grau zero.

Observi's que aquesta mateixa demostració val en dimensió superior quan se sap que l'aplicació identitat $\mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ no és homòtopa a una constant. Això es fa de manera semblant al cas de dimensió 1: es defineix el grau d'aquestes aplicacions, que és un enter, es demostra que és un invariant de la classe d'homotopia, i es veu que la identitat té grau 1 i una constant té grau zero. $\square$

Teorema 6.23 (Teorema del punt fix de Brouwer en dimensió 2) *Tota aplicació contínua $\mathbb{D}^2 \to \mathbb{D}^2$ té algun un punt fix.*

Prova: Sigui $f\colon \mathbb{D}^2 \to \mathbb{D}^2$ contínua. Si f no tingués cap punt fix es podria construir una retracció $r\colon \mathbb{D}^2 \to \mathbb{S}^1$ de la manera següent: per a cada punt $x \in \mathbb{D}^2$ es defineix $r(x)$ com el punt d'intersecció amb $\mathbb{S}^1$ de la semirecta d'origen $f(x)$ que passa per x. Aquesta recta està ben definida gràcies a la hipòtesi que no hi ha punts fixos, que assegura que $f(x) \neq x$ i per tant la semirecta està ben definida i, com es veurà a continuació, el punt d'intersecció $r(x)$ varia contínuament amb x. Si $x \in \mathbb{S}^1$ aleshores aquest punt d'intersecció és el mateix punt x, de manera que $r|_{\mathbb{S}^1} = \mathrm{Id}_{\mathbb{S}^1}$, i per tant r és, efectivament, una retracció.

L'únic que potser no és clar immediatament és la continuïtat de l'aplicació r definida amb la construcció geomètrica descrita en tots els punts del disc $\mathbb{D}^2$. Per assegurar aquesta continuïtat es pot donar una fórmula explicita per a r de la manera següent: la semirecta té equació $f(x) + \lambda\bigl(x - f(x)\bigr)$ amb $\lambda \geqslant 0$. La intersecció d'aquesta semirecta amb $\mathbb{S}^1$ es produeix en l'únic punt que té mòdul 1. O sigui,

$$\bigl|f(x) + \lambda\bigl(x - f(x)\bigr)\bigr| = 1 \Leftrightarrow \bigl(f(x) + \lambda\bigl(x - f(x)\bigr)\bigr)\,\overline{\bigl(f(x) + \lambda\bigl(x - f(x)\bigr)\bigr)} = 1.$$

Això és equivalent a la identitat

$$\bigl|x - f(x)\bigr|^2\lambda^2 + 2\,\mathrm{Re}\,\bigl(\overline{f(x)}(x - f(x))\bigr)\lambda + \bigl|f(x)\bigr|^2 - 1 = 0,$$

que té dues solucions diferents: una amb $\lambda > 0$ (de fet, $\geqslant 1$) i una altra amb $\lambda \leqslant 0$, corresponents a les dues interseccions de la recta amb la circumferència. Cadascuna d'aquestes solucions depèn contínuament de la variable x: es pot expressar en funció d'aquesta variable amb la fórmula que dona les solucions de les equacions de segon grau, agafant el signe positiu o el negatiu en l'arrel quadrada del discriminant per obtenir la solució amb λ positiva o negativa, respectivament.

Substituint λ per aquesta expressió en l'equació de la recta s'obté el punt $r(x)$ com una funció contínua del punt $x \in \mathbb{D}^2$.

Aquesta mateixa demostració val en dimensió superior suposant l'anàleg del lema anterior, que, com s'ha comentat, també és cert i es demostra amb el mateix argument. $\square$

Lema 6.24 *Una aplicació senar $f\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ no pot tenir grau zero.*

PROVA: Una aplicació senar és la que satisfà $f(-x) = -f(x)$. Sigui $\widetilde{f}\colon I \to \mathbb{R}$ un aixecament. Suposi's que f té grau zero: $\widetilde{f}(0) = \widetilde{f}(1)$. Aleshores l'aplicació $\widetilde{f}$ indueix una aplicació contínua en l'espai quocient $\widetilde{f}\colon \mathbb{S}^1 = [0,1]/\{0,1\} \to \mathbb{R}$. Aplicant Borsuk-Ulam en dimensió 1 es dedueix que existeix $x \in \mathbb{S}^1$ tal que $\widetilde{f}(x) = \widetilde{f}(-x)$. Aplicant l'exponencial es dedueix que $f(x) = f(-x)$. Però afegit a la condició de paritat això implica que $f(x) = 0$, que és impossible ja que f pren valors en $\mathbb{S}^1$. $\square$

Teorema 6.25 (Teorema de Borsuk-Ulam en dimensió 2) *Tota aplicació contínua $f\colon \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^2$ pren el mateix valor en algun parell de punts antipodals: existeix un punt $p \in \mathbb{S}^2$ tal que $f(p) = f(-p)$.*

PROVA: Es considera l'aplicació $g\colon \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida com $g(p) = f(p) - f(-p)$. Aquesta aplicació és senar: $g(-p) = -g(p)$. Es vol veure que s'anul·la en algun punt $p \in \mathbb{S}^2$. Suposi's que no fos així. Aleshores es tindria una aplicació contínua

$$\phi\colon : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^1, \qquad \phi(p) = \frac{g(p)}{\|g(p)\|}.$$

En compondre amb l'aplicació $\jmath\colon \mathbb{D}^2 \hookrightarrow \mathbb{S}^2$ definida posant $\jmath(x,y) = \bigl(x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2}\bigr)$, que identifica el disc amb la semiesfera superior, s'obté una aplicació contínua $\phi \circ \jmath\colon \mathbb{D}^2 \to \mathbb{S}^1$.

Es considera ara la inclusió $\imath\colon \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{D}^2$. En compondre amb l'anterior s'obté una aplicació

$$\psi = \phi \circ \jmath \circ \imath\colon \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{D}^2 \hookrightarrow \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^1.$$

El mateix argument del lema 6.22 usant que la inclusió $\imath$ és homòtopa a constant, assegura que aquesta aplicació $\psi\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ és homòtopa a constant. Per tant té grau zero.

Però $\psi\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ és senar: $\psi(z) = -\psi(-z)$, per ser-ho g, i per tant també ϕ. En efecte, $\phi(-p) = \frac{g(-p)}{\|g(-p)\|} = \frac{-g(p)}{\|-g(p)\|} = -\frac{g(p)}{\|g(p)\|} = -\phi(p)$ i per a tot $z = (x,y) \in \mathbb{S}^1$, amb $x^2 + y^2 = 1$,

$$\begin{aligned}\psi(-z) = \phi\bigl(\jmath(\imath(-x,-y))\bigr) &= \phi\bigl(\jmath(-x,-y)\bigr) = \phi(-x,-y,0)\\ &= -\phi(x,y,0) = -\phi\bigl(\jmath(x,y)\bigr) = -\phi\bigl(\jmath(\imath(x,y)\bigr) = -\psi(z).\end{aligned}$$

Això contradiu el fet que una aplicació senar no pot tenir grau zero, tal com s'ha vist al lema anterior. $\square$

Teorema 6.26 (Teorema de la invariància de la dimensió en dimensió 2) *Un obert no buit de $\mathbb{R}^2$ no pot ser homeomorf a un de $\mathbb{R}^n$ per a cap $n \neq 2$.*

PROVA: Es comença demostrant-ho per a $n \geqslant 3$. Suposi's que es té un homeomorfisme $f\colon \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^2$ entre oberts de $\mathbb{R}^n$ i de $\mathbb{R}^2$.

Tot obert de $\mathbb{R}^n$ per a $n \geqslant 3$ conté un subespai homeomorf a $\mathbb{S}^2$. En efecte, tot obert de $\mathbb{R}^n$ conté una bola oberta $B_r(\boldsymbol{x})$, la qual és homeomorfa a $\mathbb{R}^n$, i es tenen immersions

$$\mathbb{S}^2 = \partial\mathbb{D}^3 \hookrightarrow \mathbb{D}^3 \hookrightarrow \mathbb{R}^3 \hookrightarrow \mathbb{R}^n \simeq B_r(\boldsymbol{x}) \subseteq \mathcal{U},$$

on la immersió $\mathbb{R}^3 \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ es pot agafar, per exemple, com l'aplicació que envia els punts en els que tenen les mateixes tres primeres coordenades i les demés $n-3$ coordenades iguals a zero (o a qualsevol constant prefixada).

En compondre l'homeomorfisme f, que en particular és injectiu, amb aquesta immersió $\mathbb{S}^2 \hookrightarrow \mathcal{U}$, s'obté una aplicació contínua injectiva $\mathbb{S}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$, que no pot existir pel teorema de Borsuk-Ulam: tota aplicació contínua de l'esfera en $\mathbb{R}^2$ pren el mateix valor en dos punts antipodals, que són punts diferents, i per tant no pot ser injectiva.

Observi's que en realitat el que s'ha demostrat és que no existeix cap aplicació injectiva contínua d'un obert n-dimensional en un obert 2-dimensional, si $n \geqslant 3$.

Falta el cas $n = 1$. De fet és fàcil veure, més en general, que cap obert de $\mathbb{R}$ és homeomorf a cap obert de $\mathbb{R}^n$ per a $n \geqslant 2$. Es pot demostrar exactament de la mateixa manera usant el teorema de Borsuk-Ulam 1-dimensional, que ja s'ha demostrat en parlar de connexió, o també es pot demostrar amb un argument de punts separadors: traient un punt es pot separar qualsevol obert de $\mathbb{R}$ però mai se separa un obert connex de $\mathbb{R}^n$ per a $n \geqslant 2$. Si hi hagués oberts homeomorfs agafant components connexes també hi hauria oberts connexos homeomorfs, i amb un punt separador en dimensió 1 s'arriba a una contradicció. $\square$

Problemes

6.1. Siguin $f_i, g_i\colon X_i \to Y_i$ aplicacions contínues per a cada $i \in I$. Demostreu que si $f_i \simeq g_i$ per a cada $i \in I$ aleshores $\Pi f_i \simeq \Pi g_i\colon \Pi X_i \to \Pi Y_i$.

6.2. S'identifica $\mathbb{S}^1$ amb la frontera del disc unitat $\mathbb{D}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 1\}$. Demostreu que una aplicació contínua $f\colon \mathbb{S}^1 \to X$ és homòtopa a una aplicació constant si, i només si, es pot estendre de manera contínua al disc $\mathbb{D}^2$; o sigui, si existeix una aplicació contínua $\phi\colon \mathbb{D}^2 \to X$ tal que $\phi|_{\mathbb{S}^1} = f$.
Indicació: comproveu que es té un homeomorfisme $\mathbb{D}^2 \cong \big(\mathbb{S}^1 \times [0, 1]\big)/\big(\mathbb{S}^1 \times \{0\}\big)$.

6.3. Sigui $\mathbb{D}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ el disc unitat i sigui $h\colon \mathbb{D}^2 \to \mathbb{D}^2$ definida en coordenades polars per $h(0) = 0$ i $h(r, \alpha) = (r, \alpha + 2\pi r)$. Demostreu que $h \simeq \mathrm{Id}$ trobant explícitament una homotopia.

6.4. *Homotopies amb imatge a $\mathbb{S}^n$.* Sigui X un espai topològic. Demostreu que

1. Si $f, g\colon X \to \mathbb{S}^n$ són contínues tals que $f(x) \neq -g(x)$ $\forall x$ aleshores $f \simeq g$.
2. Tota funció contínua $f\colon X \to \mathbb{S}^n$ no exhaustiva és homòtopa a constant.
3. Si $f\colon \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ no és homòtopa a la identitat existeix $x \in \mathbb{S}^n$ amb $f(x) = -x$.

6.5. Demostreu la propietat de ser connex es conserva per tipus d'homotopia: si dos espais X i Y són del mateix tipus d'homotopia aleshores l'un és connex si, i només si, ho és l'altre.
Vegeu que això també és cert per la propietat de ser arc-connex.

6.6. La propietat de ser compacte, es conserva per tipus d'homotopia?

6.7. Demostreu que un espai X és contràctil si, i només si, l'aplicació identitat és homòtopa a una aplicació constant.

6.8. Siguin $C = \mathbb{S}^1 \times [0, 1]$ un cilindre i $M = [0, 1] \times [-1, 1]/\{(x, y) \sim (x, 1 - y)\}$ una banda de Möbius. Demostreu que tots dos espais contenen subespais homeomorfs a la circumferència que en són retractes de deformació.

Deduïu que C i M són homotòpicament equivalents (en canvi, tot i que aquí no es demana demostrar-ho, no són homeomorfs).

6.9. *Propietat transitiva dels retractes de deformació.* Siguin $Z \subseteq Y \subseteq X$ subespais d'un espai X. Demostreu que si Y és un retracte de deformació de X i Z és un retracte de deformació de Y, aleshores Z és també un retracte de deformació de X.

6.10. Comproveu els retractes de deformació dels conjunts següents:

1. Una circumferència que sigui retracte de $\mathbb{R}^2 - \{p\}$.
2. $\mathbb{S}^n$ com a un retracte de deformació de $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$.

3. El vuit com a un retracte de deformació de d'$\mathbb{R}^2 - \{p, q\}$ $(p \neq q)$.
4. El vuit com a retracte de deformació de $\mathbb{T}^2 - \{p\}$ (el tor menys un punt).
5. Siguin H un pla i R una recta a $\mathbb{R}^3$ que es tallin en un punt p. Poseu $H \setminus \{p\}$ és un retracte de deformació de $\mathbb{R}^3 \setminus H$.

6.11. Demostreu que tot homeomorfisme $f\colon \mathbb{D}^2 \to \mathbb{D}^2$ envia punts de la frontera a punts de la frontera.

6.12. Calculeu els graus de les aplicacions de $\mathbb{S}^1$ en $\mathbb{S}^1$ següents:

1. L'aplicació antipodal $f(x, y) = (-x, -y)$.
2. Un gir d'angle α.
3. $f(x, y) = (-x, y)$.
4. $f(e^{it}) = e^{int}$ per a un enter $n \in \mathbb{Z}$.

6.13. Sigui $f\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ contínua i sigui $p \in \mathbb{S}^1$. Demostreu que si $\#f^{-1}(p) = n$, aleshores $|\deg f| \leqslant n$. Què diu això quan $n = 0$?

6.14. Sigui $f\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ una aplicació contínua. Demostreu que existeix una aplicació contínua $\widehat{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $\exp \circ \widehat{f} = f \circ \exp$, i determineu tots els aixecaments com aquest.

6.15. *Grau de la composició.* Siguin $f, g\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ contínues. Demostreu que

1. $\deg(f \circ g) = \deg f \cdot \deg g$.
2. $f = f \circ f \Rightarrow \deg f = 0$ ó 1.
3. f homemorfisme $\Rightarrow \deg f = \pm 1$.
4. f sense punts fixos $\Rightarrow \deg f = 1$.
5. f injectiva $\Rightarrow \deg f = \pm 1$.

6.16. *Índex d'una corba tancada.* Una *corba tancada* al pla és una aplicació contínua $\gamma\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2$. Es defineix l'*índex de γ respecte d'un punt p* que no sigui de la imatge $p \notin \gamma(\mathbb{S}^1)$ com:

$$\mu(\gamma, p) = \deg(N_p \circ \gamma), \qquad N_p\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{p\} \to \mathbb{S}^1, \quad N_p(z) = \frac{z - p}{\|z - p\|}$$

Demostreu que donades dues corbes tancades $\gamma_1, \gamma_2\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2$ i un punt p no contingut en cap de les dues imatges es té

$$\mu(\gamma_1, p) = \mu(\gamma_2, p) \quad \Leftrightarrow \quad \gamma_1 \simeq \gamma_2 \quad \text{com a aplicacions} \quad \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2 \setminus \{p\}.$$

6.17. Es consideren corbes tancades en el pla complex: aplicacions contínues $\mathbb{S}^1 \to \mathbb{C}$.

1. Siguin $f, g\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Demostreu que $\mu(f \cdot g, 0) = \mu(f, 0) + \mu(g, 0)$.
2. Sigui $f\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{C}$ definida per $f(z) = z - a$. Calculeu $\mu(f, p)$ per a cada punt $p \notin f(\mathbb{S}^1)$.

3. Sigui $f\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{C}$ un camí polinòmic, és a dir, definit per $f(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$. Calculeu $\mu(f, p)$ per a cada punt $p \notin f(\mathbb{S}^1)$.
4. Calculeu $\mu(f, 1-i)$ amb $f(z) = z^4 + z^3 - z^2 + z - 1 - i$.
5. Calculeu $\mu(f, 1+i)$ amb $f(e^{2\pi i t}) = e^{4\pi i t} + e^{2\pi i t} + 1$, $t \in [0,1]$.

6.18. Sigui $\gamma\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2$ una corba tancada. Sigui $\{p_n\}_{n\geqslant 1}$ una successió de punts de $\mathbb{R}^2 \smallsetminus \gamma(\mathbb{S}^1)$ tals que $\mu(\gamma, p_n) \neq \mu(\gamma, p_m)$ sempre que $n \neq m$. Demostreu que la successió té una parcial convergent cap a un punt $p \in \gamma(\mathbb{S}^1)$.

6.19. Es considera la corona circular $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leqslant \|(x,y)\| \leqslant 2\}$. Sigui $f\colon E \to \mathbb{R}^2$ contínua. Es consideren les corbes tancades $f_i\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2$ definides per $f_1(z) = f(z)$ i $f_2(z) = f(2z)$. Demostreu que per a tot punt $p \in \mathbb{R}^2$ tal que $p \notin \operatorname{Im} f_1 \cup \operatorname{Im} f_2$ es té $\mu(f_1, p) \neq \mu(f_2, p) \Rightarrow p \in \operatorname{Im} f$.

6.20. Sigui $f\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ una aplicació contínua. Demostreu que si f es homòtopa a constant, aleshores té un punt fix. Deduïu que si f no es exhaustiva, aleshores té un punt fix.

6.21. Sigui $f\colon \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ una aplicació contínua. Demostreu que existeix un punt $(x,y,z) \in \mathbb{S}^2$ tal que $f(x,y,z) = (x,y,\pm z)$.

6.22. *Propietat del punt fix.* Es diu que un espai topològic X té la *propietat del punt fix* si tota aplicació contínua $f\colon X \to X$ té algun punt fix.

1. Demostreu que la propietat del punt fix es conserva per homeomorfisme.
2. Es conserva per equivalència homotòpica?
3. Es manté la propietat en prendre un retracte?

6.23. Demostreu que tota matriu $A \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ amb totes les components no negatives: $a_{ij} \geqslant 0$ per a tot i, j, té algun valor propi real $\geqslant 0$.

6.24. Demostreu que el sistema d'equacions següent té solució:

$$\left.\begin{array}{l} \cos(\sin\pi(x^5 + y^7) + 1) = x \\ \sin(\cos\pi(x^7 + y^5) + 1) = y \end{array}\right\} \qquad x, y \in \mathbb{R}.$$

6.25. Sigui $f\colon \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ una aplicació contínua que aplica homeomòrficament la circumferència equatorial en si mateixa. Demostreu que el pol nord o el pol sud han de ser de la imatge.

6.26. Sigui $f\colon \mathbb{D}^2 \to \mathbb{R}^2$ contínua. Demostreu que existeix un nombre real positiu r_0 tal que per a tot $r \geqslant r_0$ existeix un punt $x \in \mathbb{D}^2$ tal que $f(x) = rx$.

6.27. Sigui $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ contínua tal que $\displaystyle\lim_{z\to\infty} \frac{f(z)}{z^n} = 1$ per a un $n \geqslant 2$. Demostreu que f té un punt fix.

6.28. Demostreu que, per a cada $n \geqslant 1$, les versions següents del teorema de Borsuk-Ulam són equivalents:

1. Tota funció contínua $f\colon \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^n$ pren el mateix valor en algun parell de punts antipodals.
2. Tota funció contínua senar $g\colon \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^n$ pren el valor $0 \in \mathbb{R}^n$.

6.29. Demostreu que tota funció $f\colon \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ contínua i injectiva és un homeomorfisme.
Nota: la mateixa propietat és certa a $\mathbb{S}^n$ i pot demostrar de la mateixa manera fent servir Borsuk-Ulam en dimensió arbitrària.

6.30. Demostreu que en tot instant hi ha dos punts antipodals a la superfície terrestre amb la mateixa pressió i temperatura.

6.31. Siguin $A, B, C \subseteq \mathbb{S}^2$ tres subconjunts que formen un recobriment, dels quals almenys dos són tancats. Demostreu que algun dels tres conté un parell de punts antipodals.
OBSERVACIÓ: la propietat anàloga és certa a $\mathbb{S}^n$ (amb $n+1$ conjunts dels quals almenys n són tancats) i es demostra de la mateixa manera fent servir Borsuk-Ulam en dimensió arbitrària.

6.32. Demostreu que la propietat del problema anterior també es compleix si tots tres conjunts són oberts (o tots $n + 1$ conjunts són oberts, en el cas n-dimensional).

6.33. *Teorema del pastís tridimensional.* Demostreu que, donats tres subconjunts acotats i mesurables dins de $\mathbb{R}^3$ existeix un pla que els divideix tots tres en dues parts del mateix volum (veure Kosniowski, p. 172).