Anàlisi Real—Tema 0

1. Sigui a_n una successió de nombres reals fitada i $L(a_n)$ el conjunt dels seus punts límit. Recordem que $\alpha \in L(a_n)$ si i només si existeix una subsuccessió de a_n amb límit α. Com que a_n és fitada, també ho és $L(a_n)$ i podem definir

$$a^* = \sup L(a_n), \quad a_* = \text{ínf}\, L(a_n).$$

   a) a^* i a_* són elements de $L(a_n)$.

   b) per a tot $\varepsilon > 0$ existeix $\nu \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq \nu$ llavors $a_n < a^* + \varepsilon$.

   c) per a tot $\varepsilon > 0$ existeix $\nu \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq \nu$ llavors $a_n > a_* - \varepsilon$.

2. Si a_n és una successió qualsevol de nombres reals definim

$$\text{lím sup}\, a_n = \begin{cases} a^* & \text{si } a_n \text{ està fitada superiorment,} \\ +\infty & \text{altrament.} \end{cases}$$

$$\text{lím inf}\, a_n = \begin{cases} a_* & \text{si } a_n \text{ està fitada inferiorment,} \\ -\infty & \text{altrament.} \end{cases}$$

   Calculeu lím sup i lím inf de les successions

$$(-1)^n, \quad (-1)^{n-1}(1+\frac{1}{n}), \quad (-1)^n\frac{n}{n+1} + (-1)^{n+1}\frac{2n}{n+1}.$$

3. Trobeu exemples que demostrin que, en general,

$$\text{lím sup}(a_k + b_k) \neq \text{lím sup}\, a_k + \text{lím sup}\, b_k, \quad \text{lím sup}(a_k b_k) \neq (\text{lím sup}\, a_k)(\text{lím sup}\, b_k),$$

   i el mateix per a lím inf.

4. Demostreu que, si $a_k \leq b_k$

$$\text{lím sup}\, a_k \leq \text{lím sup}\, b_k, \quad \text{lím inf}\, a_k \leq \text{lím inf}\, b_k.$$

5. Demostreu que,

$$\text{lím sup}(a_k + b_k) \leq \text{lím sup}\, a_k + \text{lím sup}\, b_k,$$

   mentre que

$$\text{lím inf}(a_k + b_k) \geq \text{lím inf}\, a_k + \text{lím inf}\, b_k.$$

6. Demostreu que una successió a_n convergeix si i només si $a_* = a^*$, i llavors

$$\lim_n a_n = a_* = a^*.$$

7. Demostreu que si v_n és una successió fitada i $\lim u_n = 1$, llavors $\limsup v_n = \limsup v_n u_n$.

8. Demostreu que, si $a_n > 0$ llavors

$$\limsup \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n}, \quad \liminf \sqrt[n]{a_n} \geq \liminf \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

9. Demostreu que si $a_n > 0$ i existeix $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$ llavors també existeix $\lim \sqrt[n]{a_n}$ i els dos límits coincideixen. Apliqueu-ho al càlcul de

$$\lim_n \frac{1}{n} \sqrt[n]{(n+1)(n+2) - 2n}.$$

10. Sigui $a_k \longrightarrow a$ i sigui la successió de valors mitjans

$$s_k = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_k}{k}.$$

Demostreu que $s_k \longrightarrow a$. Indicació: demostreu que $a_* \leq s_* \leq s^* \leq a^*$.

11. Definim el nombre e mitjançant la sèrie convergent

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}.$$

Proveu que la successió

$$e_k = \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k,$$

convergeix a e. Indicació: proveu que

$$\limsup e_k \leq e \leq \liminf e_k$$

.