Apunts d'Anàlisi Real

Carles Batlle Arnau   Enric Fossas Colet

Índex

Presentació

L'obra que presentem pretén ser una eina pels estudiants de l'assignatura d'Anàlisi Real de la Facultat de Matemàtiques de la UPC. Com passa tant sovint, cap dels llibres existents a la bibliografia recull el temari complet del curs i això és el que, sense cap pretensió d'originalitat, hem intentat solucionar.

Com a suport addicional, el llibre anirà acompanyat d'un recull de problemes característics, seleccionats d'entre els que s'han proposat als estudiants els darrers anys. Els autors voldrien reconèixer la contribució del professor M.C. Muñoz-Lecanda, que va iniciar la impartició de l'assignatura a la FME.

Vilanova i la Geltrú, gener 2002

1 Successions i sèries funcionals

En aquest tema desenvolupem la teoria de successions i sèries funcionals; el concepte de convergència uniforme juga un paper fonamental. Qualsevol referència pot ser vàlida, però especialment [MH98], [Spr87] i [Apo79].

1.1 Successions i sèries de funcions

Sigui $E \subset \mathbb{R}$ i (f_n) una successió de funcions i suposem que les successions numèriques $(f_n(x))$ convergeixen per a tot $x \in A \subset E$. Es defineix la funció límit

$$\begin{array}{rcccl} f & : & A & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \lim f_n(x), \end{array}$$

s'escriu $f_n \to f$ en $A \subset E$ i es diu que "f és el límit puntual de (f_n)"o que "(f_n) convergeix puntualment vers f".

De la mateixa manera, les sèries es tracten com a successions de les seves sumes parcials

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x).$$

Si $(s_n(x))$ convergeix per a tot $x \in A \subset E$, s'escriu $s_n \to f$ i es diu que "f és la suma (puntual) de $(\sum f_n)$".

Exemples:

1. $f_n(x) = x^n$, $x \in E = [0,1]$. Tenim

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{si } x \in [0,1) \end{cases}$$

   i $A = E = [0,1]$.

2. $f_n(x) = \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$, $x \in \mathbb{R}$. Aleshores

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n} = 0, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

3.

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^2}{(1+x^2)^k} = x^2 \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(1+x^2)^k}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Aquesta és una sèrie geomètrica de raó $1/(1+x^2)$ si $x \neq 0$. Si $x = 0$, llavors $s_n(0) = 0 \; \forall n$. Per tant

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0, \\ x^2 \dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{1+x^2}} = 1 + x^2 & \text{si } x \neq 0. \end{cases}$$

4. $f_n(x) = \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$, $x \in \mathbb{R}$. Llavors

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

5. $f_n(x) = nx(1-x^2)^n$, $x \in [0,1]$. Es comprova que $f_n(0) = f_n(1) = 0$ per a tot n, mentre que si $x \in (0,1)$ es té una indeterminació que es pot resoldre aplicant L'Hôpital:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} nx(1-x^2)^n &= \lim_{y\to+\infty} yx(1-x^2)^y = x \lim_{y\to+\infty} \frac{y}{(1-x^2)^{-y}} \\ &= x \lim_{y\to+\infty} \frac{1}{-\log(1-x^2)(1-x^2)^{-y}} = x \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Per tant $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \; \forall x \in [0,1]$.

Fixem-nos en el següent:

- A l'exemple 1, $f(x)$ és una funció discontínua, mentre que les $f_n(x)$ són funcions contínues. Malgrat això, fer la integral de la funció límit dóna el mateix que fer el límit de les integrals de les funcions de la successió:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x) \, dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 = \int_0^1 f(x) \, dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x) \, dx.$$

- A l'exemple 4, $f_n(x)$ i $f(x)$ són contínues, derivables i $f_n'(x) = \sqrt{n} \cos nx$; tanmateix la successió de derivades no convergeix per a cap valor de x. Tenim així que la funció límit, $f(x) = 0$, és derivable, però no existeix $\lim_{n\to\infty} f_n'(x)$.

- A l'exemple 5 tenim que $\int_0^1 f(x) \, dx = \int_0^1 0 \, dx = 0$, però en canvi

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x) \, dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 nx(1-x^2)^n \, dx = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \frac{1}{2}.$$

A la vista d'això ens podem preguntar sota quines condicions

- f_n contínua implica que f és contínua o, el que és el mateix

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} \lim_{n\to\infty} f_n(x) \overset{?}{=} \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to a} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(a) = f(a),$$

- $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \int_A f_n(x) \, dx \overset{?}{=} \int_A \lim_{n\to\infty} f_n(x) \, dx = \int_A f(x) \, dx,$

- $\displaystyle f'(x) = \Big(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\Big)' \overset{?}{=} \lim_{n\to\infty} f_n'(x),$

és a dir, quan podem canviar $\lim_{n\to\infty}$ amb

- el límit respecte a x?
- la integració respecte a x?
- la derivació respecte a x?

Donarem una resposta a aquestes tres peguntes en les Seccions següents en termes del concepte de *convergència uniforme*. En el cas de la integració, ens basarem en la integral de Riemann, però veurem una resposta més elegant en el Tema 3 emprant la integral de Lebesgue.

1.2 Convergència uniforme

El concepte fonamental és el de **convergència uniforme**.

Es diu que (f_n) convergeix uniformement a f en el conjunt A si, per a qualsevol $\varepsilon > 0$, existeix $\nu_\varepsilon \in \mathbb{N}$, independent de x, de manera que, si $n \geq \nu_\varepsilon$, aleshores

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in A.$$

Equivalentment, $\forall \varepsilon > 0\ \exists \nu_\varepsilon \in \mathbb{N}$ de manera que si $n > \nu_\varepsilon$

$$\sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

i, per tant, una definició equivalent de convergència uniforme és

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

Aquesta darrera és la més cómoda en la majoria de càlculs concrets.

Exercici. Compareu amb la definició de **continuïtat uniforme**. Recordeu com es demostra que $1/x$ és contínua però no uniformement contínua en $(0, +\infty)$.

Per a les demostracions és sovint més convenient una altra caracterització de la convergència uniforme.

Proposició 1.1 ***(Criteri de Cauchy)*** *Donada (f_n) convergent puntualment a f en A, la condició per a que convergeixi uniformement és que, donat $\varepsilon > 0$, existeixi $\nu_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que, si $n, m \geq \nu_\varepsilon$, llavors*

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in A,$$

o, equivalentment,

$$\sup_{x \in A} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Demostració.

$\Rightarrow$) Suposem $f_n \to f$ uniformement en A. Donat $\varepsilon > 0$, existeix $\nu_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que si $n > \nu_\varepsilon$

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall x \in A.$$

Per tant, si $n, m > \nu_\varepsilon$,

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

$\Leftarrow$) Si (f_n) verifica la condició de Cauchy llavors, donat $x \in A$, $(f_n(x))$ és una successió de Cauchy de nombres reals i per tant convergeix a un cert nombre real $f(x)$. Això defineix f punt a punt en A:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \quad \forall x \in A.$$

Tornant a la condició de Cauchy, donat $\varepsilon > 0$ existeix $\nu_\varepsilon \in N$ tal que

$$\forall n, m \geq \nu_\varepsilon, \forall x \quad |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon/2$$

és a dir

$$-\varepsilon/2 < f_n(x) - f_m(x) < \varepsilon/2$$

és a dir

$$f_m(x) - \varepsilon/2 < f_n(x) < f_m(x) + \varepsilon/2.$$

Fixat $n \geq \nu_\varepsilon$, fem ara $m \to \infty$:

$$f(x) - \varepsilon/2 \geq f_n(x) \leq f(x) + \varepsilon/2$$

i per tant $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon/2$ d'on

$$\forall n > \nu_\varepsilon,\ \forall x \in A, \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

$\square$

Tal com ja hem dit, el criteri més utilitzat per a provar la convergència uniforme en casos concrets és

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

Exemple: Sigui $f_n(x) = x^n$, $x \in [0, 1]$. Tenim

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 1, \\ 0 & \text{si } x \in [0, 1). \end{cases}$$

Llavors

$$\sup_{x\in[0,1]} |x^n - f(x)| = \sup_{x\in[0,1)} |x^n - f(x)| = \sup_{x\in[0,1)} |x^n - 0| = 1,$$

on en el primer pas hem eliminat la contribució de $x = 1$, que és nul·la i no pot canviar el suprem. Per tant, com que

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} |x^n - f(x)| = 1 \neq 0,$$

la convergència no és uniforme.

Per a les sèries, l'aplicació directa d'aquest criteri es troba amb la impossibilitat, en general, d'obtenir una expressió tancada per a $s_n(x)$ i calcular

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in A} \left| \sum_{k=1}^{n} f_k(x) - f(x) \right|.$$

En aquest cas haurem de cercar criteris basats directament en el terme general de la sèrie, $f_n(x)$, i no en les sumes parcials.

1.3 Convergència uniforme i continuïtat

Teorema 1.2 *Sigui* (f_n) *una successió de funcions contínues que convergeix uniformement vers* f *en* A*. Llavors també* $f \in \mathcal{C}(A)$*.*

Demostració. Sigui a un punt interior de A. Tenim

$$|f(x) - f(a)| \le |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(a)| + |f_n(a) - f(a)|.$$

Amb les hipòtesis de convergència uniforme i continuïtat de les f_n, donat $\varepsilon > 0$ existeixen $\nu_\varepsilon \in \mathbb{N}$, $\nu'_\varepsilon \in \mathbb{N}$ i $\delta_{\epsilon,n} > 0$ tals que

- $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon/3$ per a tot $x \in A$ si $n \ge \nu_\varepsilon$, per la convergència uniforme,
- $|f_n(x) - f_n(a)| < \varepsilon/3$ si $|x - a| < \delta_{\varepsilon,n}$, per la continuïtat de cada f_n,
- $|f(a) - f_n(a)| < \varepsilon/3$ si $n \ge \tilde{\nu}_\varepsilon$, per la convergència puntual.

Com que ν_ε és independent de x per la convergència uniforme, podem escollir $\nu''_\epsilon = \max\{\nu_\varepsilon, \nu'_\varepsilon\}$ independent de x. Llavors queda fixat $\delta_{\varepsilon,\nu''_\varepsilon}$ i si x és tal que $|x-a| < \delta_{\varepsilon,\nu''_\varepsilon}$ i queda $|f(x)-f(a)| < \varepsilon$ i per tant f és contínua en a. Noteu que la cadena d'elecció és

$$\varepsilon \longrightarrow \nu''_\varepsilon \longrightarrow \delta_{\varepsilon,\nu''_\varepsilon}$$

i que no podriem escollir $|x - a| < \delta_{\varepsilon,\nu''_\varepsilon}$ si ν''_ε fós dependent de x. Noteu també que tant $\delta_{\varepsilon,\nu''_\varepsilon}$ com ν'_ε depenen d'a i per tant la continuïtat de f no serà, en general, uniforme. □

Exercici: Sigui $f_n(x) = x^n$, $x \in [0, 1]$, que convergeix no uniformement. Vegeu explícitament quin és l'obstacle que impedeix procedir amb la demostració del Teorema 1.2.

Exemple: Si f_n i f són contínues, la convergència no és necessàriament uniforme. Si $f_n(x) = x^n$, $x \in (0, 1)$, tenim $f(x) = \lim_{x\to\infty} f_n(x) = 0$ per a tot $x \in (0, 1)$, que és contínua. La convergència no és, però, uniforme:

$$\sup_{x\in(0,1)} |x^n - 0| = 1.$$

Cal afegir quelcom més, tant al conjunt A com a les f_n, si volem garantir la convergència uniforme.

Lema 1.3 *(Lema de Dini) Sigui* $(f_n) \to f$ *puntualment sobre un compacte* A*, amb* f_n *i* f *contínues i de manera que la successió* (f_n) *és puntualment monòtona (creixent o decreixent). Aleshores la convergència és uniforme en* A*.*

Demostració. Suposem per exemple que (f_n) és monòtonament decreixent i sigui $g_n = f_n - f$. Les g_n són contínues, $(g_n(x)) \to 0$ i $g_n(x) \ge g_{n+1}(x)$ per a tot $x \in A$. Sigui $\varepsilon > 0$. Com que $(g_n(x)) \to 0$, per a cada $x \in A$ existeix un $\nu_x \in \mathbb{N}$ tal que $g_n(x) < \varepsilon/2$ si $n \ge \nu_x$. Noteu que no posem el valor absolut ja que les g_n són positives (*decreixen* cap a zero).

Per ser g_{ν_x} contínua, existeix un entorn U_x de x tal que $g_{\nu_x}(y) \le \varepsilon$ si $y \in U_x$, i per tant, pel decreixement monòton, $g_n(y) \le \varepsilon$ si $n \ge \nu_x$.

La família $\{U_x\}_{x\in A}$ és un recobriment obert d'A i, per ser A compacte, admet un subrecobriment finit $\{U_1, U_2, \ldots, U_k\}$ corresponent als punts $x_1, \ldots, x_k$ amb índex $\nu_1, \ldots, \nu_k$. Sigui $\nu = \max\{\nu_1, \ldots, \nu_k\}$ i sigui $x \in A$, que estarà en un dels U_m. Si $n \ge \nu$ tindrem

$$|g_n(x)| = g_n(x) \le g_\nu(x) \le g_{\nu_m}(x) < \varepsilon,$$

és a dir
$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in A, \quad n \geq \nu$$
amb ν independent de x, i queda per tant demostrada la convergència uniforme. □

Exercici: Repetiu la demostració si la successió és monòtonament creixent.

Exemple: La monotonia és necessària. Sigui la successió de funcions definida per

$$f_n(x) = \begin{cases} 4n^2 x & \text{si } x \in [0, 1/(2n)) \\ 4n - 4n^2 x & \text{si } x \in [1/(2n), 1/n) \\ 0 & \text{si } x \in [1/n, 1] \end{cases}$$

Tenim $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ per a tot $x \in [0,1]$, però en canvi

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - 0| = 2n$$

de manera que la convergència no és uniforme. El motiu és la no monotonia: hi ha punts arbitràriament propers a zero on f_n primer creix i després decreix, fins quedar-se a zero.

1.4 Convergència uniforme i integració

Teorema 1.4 *Sigui (f_n) una successió de funcions integrables de Riemann a $[a,b]$ ($f_n \in R[a,b]$), que convergeix uniformement vers f en $[a,b]$. Llavors $f \in R[a,b]$ i a més a més*

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n.$$

Demostració: Hem de veure que, donat $\varepsilon > 0$, existeix una partició P_ε de l'interval $[a,b]$ tal que
$$S(f, P_\varepsilon) - I(f, P_\varepsilon) < \varepsilon.$$
Sota les condicions del teorema, existeix $\nu_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq \nu_\varepsilon$ llavors

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a} \quad \forall x \in [a,b],$$

és a dir,
$$f_n(x) - \frac{\varepsilon}{b-a} < f(x) < f_n(x) + \frac{\varepsilon}{b-a} \quad \forall x \in [a,b]. \tag{1.1}$$
Sigui $n \geq \nu_\varepsilon$ fixat. Com que f_n és integrable, existeix una partició P_ε de $[a,b]$ tal que[1]

$$S(f_n, P_\varepsilon) - I(f_n, P_\varepsilon) < \varepsilon. \tag{1.2}$$

Com que per a tota partició tenim que $S(f+g) \leq S(f) + S(g)$ i $I(f+g) \geq I(f) + I(g)$, de (1.1) es segueix

$$\begin{aligned} S(f, P_\varepsilon) &< S(f_n, P_\varepsilon) + S(\frac{\varepsilon}{b-a}, P_\varepsilon) = S(f_n, P_\varepsilon) + \varepsilon, & (1.3) \\ I(f, P_\varepsilon) &> I(f_n, P_\varepsilon) + I(-\frac{\varepsilon}{b-a}, P_\varepsilon) = I(f_n, P_\varepsilon) - \varepsilon, & (1.4) \end{aligned}$$

[1]Noteu que aquesta partició depén de ε directament i a través de $n \geq \nu_\varepsilon$.

i llavors

$$\begin{aligned} S(f,P_\varepsilon) - I(f,P_\varepsilon) &= S(f,P_\varepsilon) - S(f_n,P_\varepsilon) + S(f_n,P_\varepsilon) - I(f_n,P_\varepsilon) + I(f_n,P_\varepsilon) - I(f,P_\varepsilon) \\ &\underset{(1.2)(1.3)(1.4)}{<} \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon \end{aligned}$$

i queda demostrat que f és integrable en $[a,b]$. A més

$$\left|\int_a^b f_n - \int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f_n - f| < \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a} = \varepsilon$$

i per tant

$$\int_a^b f_n \to \int_a^b f.$$

□

Comentaris:

- És fonamental demostrar primer l'existència de $\int_a^b f$.
- La demostració no és vàlida si la regió d'integració no és fitada. Cal afegir llavors que les f_n estiguin fitades per una funció integrable.

Corol·lari 1.5 *En les mateixes condicions del teorema, si* $x \in [a,b]$

$$\left(\int_a^x f_n\right) \to \int_a^x f$$

uniformement.

Demostració: De la mateixa demostració del teorema es dedueix la convergència puntual per a tot $x \in [a,b]$. Donat $\varepsilon > 0$, existeix $\nu_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq \nu_\varepsilon$ llavors

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a} \quad \forall x \in [a,b],$$

i per tant

$$\left|\int_a^x f_n - \int_a^x f\right| \leq \int_a^x |f_n - f| < \int_a^x \left|\frac{\varepsilon}{b-a}\right| = \frac{\varepsilon}{b-a}(x-a) \leq \varepsilon,$$

amb n independent de x. □

1.5 Convergència uniforme i derivació

Teorema 1.6 *Sigui* (f_n) *una successió de funcions derivables en* $[a,b]$. *Suposem que existeix* $x_0 \in [a,b]$ *tal que* $(f_n(x_0))$ *convegeix. Si* (f_n') *convergeix uniformement vers una funció* g *en* $[a,b]$, *aleshores* (f_n) *convergeix uniformement vers una funció* f *en* $[a,b]$, *que és derivable, i es verifica* $f' = g$.

Demostració: Per fer la demostració més curta, suposarem que les f_n a més de ser derivables són $C^1[a,b]$. Si f_n' és contínua podem escriure

$$f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^x f_n' \quad \forall x \in [a,b]. \tag{1.5}$$

Per la hipòtesi de convergència en x_0 tenim que

$$f_n(x_0) \to \lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = f(x_0)$$

mentre que la convergència uniforme de la successió de derivades ens permet aplicar-hi el corol·lari 1.5 i escriure

$$\lim_{n\to\infty} \int_{x_0}^{x} f_n' = \int_{x_0}^{x} g.$$

Per tant, prenent el límit a (1.5),

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} g$$

i $f' = g$. A més la convergència de f_n a f és uniforme ja que, pel Corol·lari 1.5, $\int_{x_0}^{x} f_n'$ convergeix uniformement. $\square$

Comentaris:

- A diferència de la integració, per a la derivació la convergència uniforme de la successió original és irrellevant: cal que la sigui la successió de les derivades la que convergeixi uniformement.
- Per a demostrar la derivació en un punt concret, n'hi ha prou a cercar un $[a, b]$ convenient que contingui el punt.

Exercici: Feu la demostració sense suposar que les f_n són C^1.

1.6 Criteris de convergència uniforme per a sèries

Tal com hem dit, si tenim

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x), \quad x \in A,$$

el problema d'aplicar el test

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in A} |s_n(x) - s(x)|$$

és trobar formes tancades per a $s_n(x)$ i $s(x)$. Aniria bé disposar de criteris basats directament en les funcions f_n.

Proposició 1.7 *(Criteri de Weierstrass) Sigui (f_n) tal que $\forall n\ \exists M_n$ tal que, $\forall x \in A$, $|f_n(x)| \le M_n$. Llavors, si $\sum M_n$ és convergent, $\sum f_n$ convergeix uniformement sobre A.*

Demostració: Aplicarem el criteri de Cauchy de convergència uniforme. Tenim

$$|s_n(x) - s_m(x)| = \left| \sum_{k=m+1}^{n} f_k(x) \right| \le \sum_{k=m+1}^{n} |f_k(x)| \le \sum_{k=m+1}^{n} M_k.$$

Atès que $\sum M_n$ és convergent, pel criteri de Cauchy, $\forall \varepsilon\ \exists \nu_\varepsilon$ tal que $\forall m, n > \nu_\varepsilon$, $\displaystyle\sum_{k=m+1}^{n} M_k < \varepsilon$. $\square$

Tot seguit veurem dos criteris més elaborats. El primer d'ells permet obtenir una sèrie uniformement convergent modificant lleugerament una que ja ho és.

Proposició 1.8 *(Test d'Abel) Siguin (f_n) i (g_n) successions definides en A tals que*

1. *$\sum f_n$ convergeix uniformement en A.*
2. *$\forall n$, $\forall x \in A$, $|g_n(x)| < M$.*
3. *(g_n) és monòtona decreixent.*

Llavors $\sum f_n g_n$ convergeix uniformement en A.

El segon criteri permet obtenir una sèrie uniformement convergent a partir d'una sèrie fitada (pot ser que ni tant sols sigui convergent) i una successió uniformement convergent a zero.

Proposició 1.9 *(Test de Dirichlet) Siguin (f_n) i (g_n) successions definides en A tals que*

1. *$\sum f_n$ és uniformement fitada en A: $\forall n$, $\forall x \in A$, $|\sum_{k=1}^{n} f_k(x)| < M$.*
2. *(g_n) és monòtona decreixent en A.*
3. *(g_n) tendeix a 0 uniformement en A.*

Llavors $\sum f_n g_n$ convergeix uniformement en A.

Comentari: En molts casos s'utilitza $f_k(x) = (-1)^k$, ja que les seves sumes parcials estan fitades per 1 i, al ser independent d'x, estan uniformement fitades.

La demostració d'ambdues propossicions es basa en el

Lema 1.10 *(Fórmula de sumació d'Abel) Donades dues successions de nombres reals (a_n), (b_n), sigui $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Llavors*

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} a_k b_k &= s_n b_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} s_k (b_{k+1} - b_k) \\ &= s_n b_1 + \sum_{k=1}^{n} (s_n - s_k)(b_{k+1} - b_k).\end{aligned}$$

Demostració: Tenim

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n} (s_k - s_{k-1}) b_k = \sum_{k=1}^{n} s_k b_k - \sum_{k=1}^{n} s_{k-1} b_k,$$

on $s_0 = 0$. Com que

$$\sum_{k=1}^{n} s_{k-1} b_k = \sum_{k=1}^{n} s_k b_{k+1} - s_n b_{n+1}$$

obtenim el primer resultat. El segon resultat s'obtè substituint

$$b_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} (b_{k+1} - b_k) + b_1$$

en el primer. □

Exercici: Demostreu els tests d'Abel i Dirichlet.

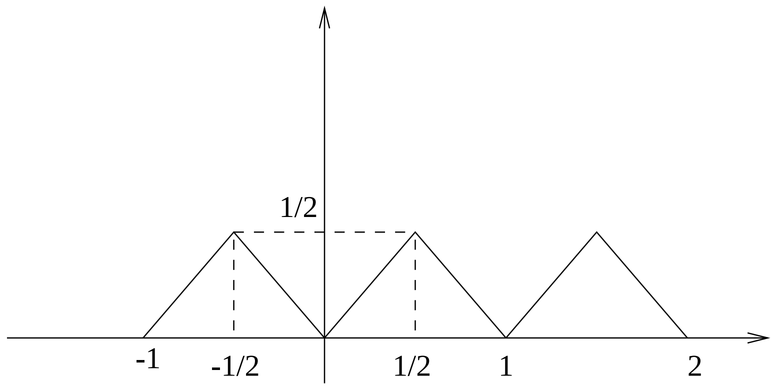


Figura 1.1: La funció bàsica.

Per al test d'Abel, si r_n són les sumes parcials de $\sum f_n g_n$ i s_n les de $\sum f_n$, vegeu que

$$r_n(x) - r_m(x) = (s_n(x) - s_m(x))g_1(x) + \sum_{k=m+1}^{n} (s_n(x) - s_k(x))(g_{k+1}(x) - g_k(x)).$$

Per al test de Dirichlet, vegeu que

$$r_n(x) - r_m(x) = s_n(x)g_{n+1}(x) - s_m(x)g_{m+1}(x) - \sum_{k=m+1}^{n} s_k(x)(g_{k+1}(x) - g_k(x)).$$

Exercici: Són els lemes d'Abel i Dirichlet certs si la successió (g_n) és monòtona creixent en lloc de decreixent?

1.7 Una funció contínua no derivable enlloc

En aquesta Secció utilitzarem els resultats sobre convergència de sèries funcionals per a construir una funció contínua arreu però no derivable enlloc. Funcions d'aquest tipus havien estat considerades per Bolzano (1830) i Weierstrass (1872), però l'exemple que presentarem aquí és de van der Waerden (1930).

Sigui $f_0(x)$ la funció periòdica de periode 1 que per a $|x| \leq 1/2$ val $|x|$ (vegeu la Figura 1.1).

A partir d'aquesta, per a $n \geq 0$ definim

$$f_n(x) = \frac{1}{4^n} f_0(4^n x).$$

Aquestes funcions tenen les següents propietats:

- f_n és lineal a trossos i contínua a $\mathbb{R}$.
- f_n està fitada per
$$0 \leq f_n(x) \leq \frac{1}{2}\frac{1}{4^n} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$
- f_n és periòdica de periode $1/4^n$.
- en els punts on és derivable, f_n té derivada ± 1.

Sigui ara

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4^n} f_0(4^n x). \tag{1.6}$$

Proposició 1.11 *La funció definida per (1.6) és contínua arreu.*

Demostració: Sols cal aplicar el lema de Weierstrass:

$$\left| \frac{1}{4^n} f_0(4^n x) \right| = \frac{1}{4^n} |f_0(4^n x)| \le \frac{1}{2} \frac{1}{4^n} = \frac{1}{2} \frac{1}{4^n},$$

i com que $\sum 1/4^{2n}$ és convergent, la convergènia és uniforme. Com que les sumes parcials són contínues, per ser sumes finites de contínues, la funció límit és contínua. $\square$

Proposició 1.12 *La funció definida per (1.6) no és derivable enlloc.*

Demostració: Per a cada $n \in \mathbb{N}$ tenim

$$f_n(x \pm \frac{k}{4^n}) - f_n(x) = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

Si considerem un m fixat i $n \ge m$ podrem escriure

$$\frac{1}{4^m} = \frac{4^{n-m}}{4^n} = \frac{k}{4^n}, \quad k \in \mathbb{N}$$

i per tant

$$f_n(x \pm \frac{1}{4^m}) - f_n(x) = 0, \quad n \ge m \tag{1.7}$$

D'altra banda, si $n \le m - 1$, com que els trossos de pendent constant ± 1 de f_n són de longitud

$$\frac{1}{2} \frac{1}{4^n} > \frac{1}{4^m}$$

resultarà que x està en el mateix tros que $x + 1/4^m$ o que $x - 1/4^m$, de manera que

$$f_n(x + \frac{1}{4^m}) - f_n(x) = \pm \frac{1}{4^m} \tag{1.8}$$

o bé

$$f_n(x) - f_n(x - \frac{1}{4^m}) = \pm \frac{1}{4^m}. \tag{1.9}$$

A més, la relació que sigui certa per a $n = m - 1$ ho serà també per a $n = 0, 1, \ldots, m - 1$, amb el signe de la dreta possiblement canviant. En qualsevol cas, si tenim una x que verifica (1.8), combinant-ho amb (1.7), podrem calcular la derivada amb

$$\begin{aligned} \frac{f(x + \frac{1}{4^m}) - f(x)}{\frac{1}{4^m}} &= 4^m \left\{ \sum_{n=0}^{m-1} \left[f_n(x + \frac{1}{4^m}) - f_n(x) \right] + \sum_{n=m}^{\infty} \left[f_n(x + \frac{1}{4^m}) - f_n(x) \right] \right\} \\ &= 4^m \sum_{n=0}^{m-1} \left[f_n(x + \frac{1}{4^m}) - f_n(x) \right] = \sum_{n=0}^{m-1} \pm 1 \end{aligned}$$

de manera que la derivada per la dreta no existirà, mentre que si es verifica (1.9) s'obté la no existència de la derivada per l'esquerra. $\square$

Exercici: Dibuixeu algunes aproximacions de f.

1.8 Sèries de potències

Denotarem les sèries de potències per

$$\sum_{n\geq 0} a_n x^n \quad \text{o} \quad \sum_{n\geq 0} a_n (x-a)^n.$$

Amb un canvi de variable la segona forma es converteix en la primera, i per tant a partir d'ara sols considerarem sèries de potències centrades en zero.

Proposició 1.13 *1. Si $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ convergeix en $x_0 \neq 0$, llavors convergeix absolutament $\forall x \in \mathbb{R}$ amb $|x| < |x_0|$. A més, convergeix uniformement en tot $[a,b] \subset (-|x_0|, |x_0|)$.*

2. Si $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ divergeix en $y_0 \in \mathbb{R}$ llavors divergeix en tot $x \in \mathbb{R}$ amb $|x| > |y_0|$.

Demostració:

1. Si $\sum_{n\geq 0} a_n x_0^n$ convergeix llavors $a_n x_0^n \to 0$ i per tant existeix $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $|a_n x_0^n| < \lambda$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Tindrem així
$$|a_n x^n| = |a_n x_0^n| \left|\frac{x}{x_0}\right|^n < \lambda \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$$
i per tant, si $|x| < |x_0|$,
$$\sum_{n\geq 0} |a_n x^n| < \lambda \sum_{n\geq 0} \left|\frac{x}{x_0}\right|^n = \lambda \frac{1}{1 - \left|\frac{x}{x_0}\right|}.$$
Per veure que la convergència és uniforme en $[a,b] \subset (-|x_0|, |x_0|)$, sigui $\alpha \in (-|x_0|, |x_0|)$ amb $\alpha > \max(|a|, |b|)$. Com que $\alpha < |x_0|$, $\sum |a_n|\alpha^n$ convergeix. Llavors, si $x \in [a,b]$,
$$|a_n x^n| < |a_n|\alpha^n$$
i $\sum |a_n x^n|$ convergeix uniformement pel criteri de Weierstrass.

2. Si $\sum a_n y_0^n$ divergeix, llavors $\sum a_n x^n$ amb $|x| > |y_0|$ també divergeix, ja que en cas contrari $\sum a_n y_0^n$ hauria de convergir per la primera part de la Proposició.

□

De la Proposició 1.13 es dedueix que al considerar $\sum a_n x^n$ hi ha tres situacions possibles:

1. No hi ha cap $x_0 \neq 0$ on la sèrie sigui convergent. La sèrie només convergeix per a $x = 0$, per exemple $\sum n! x^n$ o $\sum n^n x^n$.

2. La sèrie convergeix per a tot $x \in \mathbb{R}$, per exemple $\sum x^n/n!$.

3. Existeix un $R > 0$ tal que $\sum a_n x^n$ convergeix si $|x| < R$ i divergeix si $|x| > R$. Aquest R s'anomena **radi de convergència** de la sèrie de potències. Per exemple
$$\begin{aligned} \sum x^n \quad & \text{té radi de convergència } R = 1, \\ \sum \frac{x^n}{3^{n+1}} \quad & \text{té radi de convergència } R = 3, \\ \sum (-1)^n \frac{x^n}{n+2} \quad & \text{té radi de convergència } R = 1. \end{aligned}$$

Per extensió, en el primer cas es diu que $R = 0$ i en el segon que $R = \infty$.

Proposició 1.14 *Donada* $\sum a_n x^n$ *sigui*[2]

$$\gamma = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Llavors el radi de convergència és

$$R = \frac{1}{\gamma}.$$

Demostració: Aplicant el criteri de l'arrel a la sèrie positiva $\sum |a_n x^n|$, és té

$$\sqrt[n]{|a_n x^n|} = \sqrt[n]{|a_n|}|x|$$

d'on

$$\limsup \sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \cdot \gamma.$$

La sèrie convergeix si $\limsup \sqrt[n]{|a_n x^n|} < 1$ i divergeix si $\limsup \sqrt[n]{|a_n x^n|} > 1$. Per tant, si $\gamma = 0$ la sèrie convergeix per a tot $x \in \mathbb{R}$; si $0 < \gamma < \infty$ la sèrie convergeix si $|x| < 1/\gamma$; i si $\gamma = \infty$ la sèrie només convergeix si $x = 0$. □

Cal notar que si R és el radi de convergència, la sèrie convergeix uniformement en tot $[a, b] \subset (-R, R)$, però no necessàriament en tot $(-R, R)$. Per exemple, la sèrie $\sum_{n \geq 0} x^n$ és convergent en $(-1, 1)$ ja que $R = 1$; en $x = \pm 1$ és divergent. És uniformement convergent en $(-1, 1)$? Aquest és un cas en què podem calcular les sumes parcials $s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$ i la suma, $s(x) = 1/(1 - x)$. Llavors

$$\sup_{x \in (-1,1)} \left| \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} - \frac{1}{1 - x} \right| = \sup_{x \in (-1,1)} \left| \frac{-x^{n+1}}{1 - x} \right| = \infty$$

i no tenim convergència uniforme. El mateix passa en el cas $R = \infty$: en aquest cas la sèrie convergeix uniformement en qualsevol interval fitat, però no necessàriament a tot $\mathbb{R}$. Per exemple, $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$ té $R = \infty$. Aplicant el criteri de Cauchy de convergència uniforme tindrem, per a $x > 0$,

$$|s_m(x) - s_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{m} \frac{x^k}{k!} \right| \overset{x>0}{\geq} \frac{|x|^m}{m!},$$

i llavors

$$\sup_{x \in} |s_m(x) - s_n(x)| \geq \sup_{x \in \ ,\, x>0} |s_m(x) - s_n(x)| \geq \sup_{x \in \ ,\, x>0} \frac{|x|^m}{m!} = \infty$$

i no tenim convergència uniforme a $\mathbb{R}$.

El següent teorema dóna condicions suficients per a la convergència uniforme en el tancat $[0, R]$.

Teorema 1.15 *(Teorema d'Abel)*

1. *Si* $\sum a_n x^n$ *té radi de convergència* R *i* $\sum a_n R^n$ *convergeix, llavors* $\sum a_n x^n$ *convergeix uniformement en* $[0, R]$.

2. *Si* $\sum a_n R^n = A$, *llavors* $\lim_{x \to R^-} \sum a_n x^n = A$.

[2]En l'expressió que segueix lim sup denota el límit superior de la successió corresponent, i no s'ha de confondre amb l'expressió composta $\limsup_A$ que ja ha aparegut.

El resultat també val canviant R per $-R$ en les sèries i considerant $[-R,0]$ i $\lim\limits_{x\to -R^+}$.

Demostració:

1. Donat $\varepsilon > 0$ existeix $\nu_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que si $q > p > \nu_\varepsilon$ es verifica que

$$\left| \sum_{n=p+1}^{q} a_n R^n \right| < \varepsilon.$$

Llavors, per a $x \in [0,R]$ i $q > p > \nu_\varepsilon$ es té

$$\left| \sum_{n=p+1}^{q} a_n x^n \right| = \left| \sum_{n=p+1}^{q} a_n R^n \left(\frac{x}{R}\right)^n \right|.$$

Utilitzarem ara la identitat

$$\sum_{n=p+1}^{q} a_n R^n \left(\frac{x}{R}\right)^n = \sum_{n=p+1}^{q} \left(\sum_{k=p+1}^{n} a_k R^k \right) \left(\left(\frac{x}{R}\right)^n - \left(\frac{x}{R}\right)^{n+1} \right) + \left(\sum_{k=p+1}^{q} a_k R^k \right) \left(\frac{x}{R}\right)^{q+1},$$

que es pot verificar mirant els coeficients de x^n per a $n = p+1, \ldots, q+1$ a dreta i esquerra, o considerant la primera igualtat de la fórmula de sumació d'Abel començant en $p+1$ en lloc de 1. Tenim així

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{n=p+1}^{q} a_n x^n \right| &= \left| \sum_{n=p+1}^{q} \left(\sum_{k=p+1}^{n} a_k R^k \right) \left(\left(\frac{x}{R}\right)^n - \left(\frac{x}{R}\right)^{n+1} \right) + \left(\sum_{k=p+1}^{q} a_k R^k \right) \left(\frac{x}{R}\right)^{q+1} \right| \\
&\leq \sum_{n=p+1}^{q} \left| \sum_{k=p+1}^{n} a_k R^k \right| \left(\left(\frac{x}{R}\right)^n - \left(\frac{x}{R}\right)^{n+1} \right) + \left(\frac{x}{R}\right)^{q+1} \left| \sum_{k=p+1}^{q} a_k R^k \right| \\
&\leq \sum_{n=p+1}^{q} \left| \sum_{k=p+1}^{q} a_k R^k \right| \left(\left(\frac{x}{R}\right)^n - \left(\frac{x}{R}\right)^{n+1} \right) + \left(\frac{x}{R}\right)^{q+1} \left| \sum_{k=p+1}^{q} a_k R^k \right| \\
&< \varepsilon \left(\left(\frac{x}{R}\right)^{p+1} - \left(\frac{x}{R}\right)^{q+1} \right) + \varepsilon \left(\frac{x}{R}\right)^{q+1} \\
&= \varepsilon \left(\frac{x}{R}\right)^{p+1} \leq \varepsilon, \quad \forall x \in [0,R]
\end{aligned}$$

i queda demostrat.

2. Com que $\sum a_n x^n$ convergeix uniformement en $[0,R]$, ho fa cap a una funció contínua, $f(x)$. Llavors

$$A = \sum a_n R^n = f(R) \overset{\text{continuitat de } f}{=} \lim_{x\to R^-} f(x) = \lim_{x\to R^-} \sum a_n x^n.$$

□

Exercici: On és l'error en aquest raonament alternatiu per a demostrar el primer apartat del lema d'Abel:

$$\left| \sum_{n=p+1}^{q} a_n x^n \right| \leq \left| \sum_{n=p+1}^{q} a_n R^n \right| < \varepsilon.$$

1.9 Propietats de les funcions definides per sèries de potències

En aquesta Secció suposarem que tenim una certa sèrie de potències que defineix, en la seva regió de convergència, una funció

$$f(x) = \sum a_n x^n$$

i ens preguntarem quines propietats té aquesta funció.

Lema 1.16 *Les sèries de potències $\sum a_n x^n$ i $\sum n a_n x^{n-1}$ tenen el mateix radi de convergència.*

Demostració: En primer lloc, és evident que $\sum n a_n x^{n-1}$ i $\sum n a_n x^n$ tenen el mateix radi de convergència. A més

$$\sqrt[n]{|na_n|} = \sqrt[n]{n}\,\sqrt[n]{|a_n|}.$$

Emprant ara que si (v_n) és fitada i (u_n) té límit 1 llavors $\limsup u_n v_n = \limsup v_n$, tindrem

$$\limsup \sqrt[n]{|na_n|} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$$

i queda demostrat. □

Proposició 1.17 *Si $\sum a_n x^n$ té radi de convergència R, llavors $f(x) = \sum a_n x^n$ es derivable en $(-R, R)$ i a més $f'(x) = \sum n a_n x^{n-1}$.*

Demostració: Si $x \in (-R, R)$, existeix $[a, b] \subset (-R, R)$ amb $x \in [a, b]$. La sèrie $\sum a_n x^n$ convergeix en algun punt (en tots!) de $[a, b]$ i la sèrie $\sum n a_n x^{n-1}$, que té el mateix radi de convergència, convergeix uniformement en $[a, b]$. Aplicant el resultat sobre derivació de sèries de funcions s'obté l'enunciat. □

Proposició 1.18 *Si $\sum a_n x^n$ té radi de convergència R, llavors $f(x) = \sum a_n x^n$ es pot integrar terme a terme en $(-R, R)$ i la sèrie resultant té el mateix radi de convergència.*

Demostració: Donats x_0, x en $(-R, R)$ els podem posar dins un $[a, b] \subset (-R, R)$ on la sèrie convergeix uniformement i podem llavors aplicar el resultat sobre integració de successions:

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x} f &= \int_{x_0}^{x} \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \, \mathrm{dt} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{x_0}^{x} a_n t^n \, \mathrm{dt} \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x_0^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \end{aligned}$$

amb $b_0 = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x_0^{n+1}$ i $b_n = a_{n-1}/n$ per a $n \geq 1$. Emprant el mateix resultat que per a la sèrie derivada, és immediat demostrar que el radi de convergència de $\sum b_n x^n$ és també R. □

Tant la derivació com la integració es poden repetir tantes vegades com vulguem. En particular, la derivada d'ordre p és

$$f^{(p)}(x) = \sum_{n=p}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-p+1) a_n x^{n-p}$$

per a $x \in (-R, R)$. Si posem $x = 0$ resulta

$$f^{(p)}(0) = p! a_p$$

i per tant

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n, \qquad x \in (-R, R), \tag{1.10}$$

que s'anomena sèrie de Taylor de f al voltant de $x = 0$. Fixem-nos que la definició original de f és a través de la sèrie $\sum a_n x^n$ i l'únic que diu (1.10) és que els a_n es poden calcular d'una certa manera. No estem dient que una funció qualsevol es pugui expressar com a sèrie de Taylor; això ho veurem a la següent Secció.

L'expressió (1.10) demostra que els coeficients de la sèrie de potències de f en $(-R, R)$ queden totalment determinats pels valors de f i les seves derivades en $x = 0$. Tenim per tant el següent

Teorema 1.19 *Sigui $f(x) = \sum a_n x^n$ i $g(x) = \sum b_n x^n$ amb radi de convergència $R > 0$. Si $f = g$ en un obert al voltant de l'origen llavors $a_n = b_n$ $\forall n$.*

De manera més general, es pot demostrar el següent

Teorema 1.20 *Sigui $f(x) = \sum a_n x^n$ i $g(x) = \sum b_n x^n$ amb radi de convergència $R > 0$. Sigui*

$$E = \{x \in (-R, R) \mid g(x) = f(x)\}.$$

Llavors, si E té un punt d'acumulació, es té $f(x) = g(x)$ $\forall x \in (-R, R)$ i per tant $a_n = b_n$ $\forall n$.

1.10 Sèries de Taylor

Hem vist que una sèrie $\sum a_n x^n$ és C^∞ a $(-R, R)$. Ens podem ara preguntar si una funció C^∞ es pot escriure com una sèrie de potències en algun $(-R, R)$. La resposta, per a funcions de variable real, és negativa en general.

Exemple: Sigui

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

És fàcil veure que $f^{(n)}(0) = 0$ $\forall n$. Per tant la sèrie de Taylor de f al voltant de $x = 0$ és idènticament nul·la i no és igual a $f(x)$ fora de $x = 0$.

El primer resultat que veurem ens diu en quines condicions podem moure el centre d'una sèrie de potències.

Teorema 1.21 *(Teorema de Taylor) Suposem que $\sum a_n x^n$ convergeix a $(-R, R)$. Si $c \in (-R, R)$ llavors*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x - c)^n$$

per a tot x tal que $|x - c| < R - |c|$.

Demostració: Sigui $x \in (-R, R)$ fixat. Tenim que

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n((x - c) + c)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} c^{n-m} (x - c)^m = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} b_{mn}(x), \end{aligned}$$

on

$$b_{mn}(x) = \binom{n}{m} a_n c^{n-m}(x-c)^m,$$

i hem posat $b_{mn}(x) = 0$ si $m > n$.

L'ordre de sumació de la sèrie doble $\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} b_{mn}(x)$ es pot intercanviar si la sèrie convergeix absolutament. Per a cada valor de n tenim

$$\sum_{m=0}^{\infty} |b_{mn}(x)| = |a_n| \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} |c|^{n-m}|x-c|^m = |a_n|(|x-c|+|c|)^n$$

i

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|(|x-c|+|c|)^n$$

convergeix si $|x-c|+|c| < R$. Per a aquests valors, intercanviem els sumatoris i queda

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} b_{mn}(x) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=m}^{\infty} b_{mn}(x) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{n=m}^{\infty} a_n \binom{n}{m} c^{n-m}\right)(x-c)^m = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f^{(m)}(c)}{m!}(x-c)^m, \quad |x-c|+|c| < R, \end{aligned}$$

donat que

$$f^{(m)}(c) = \sum_{n=m}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-m+1)a_n c^{n-m} = m! \sum_{n=m}^{\infty} \binom{n}{m} a_n c^{n-m}$$

per a $c \in (-R, R)$. □

Comentari: La sèrie de centre c pot tenir radi de convergència més gran que el mínim $R - |c|$ assegurat pel teorema. Per exemple,

$$\sum_{n\geq 0} x^n = \frac{1}{1-x}$$

té radi de convergència 1. Si desplacem la sèrie a $c = 1/3$, obtenim una sèrie de radi de convergència $2/3 = 1 - 1/3$, però si la posem en $c = -1/3$ en surt una amb radi $4/3 > 2/3$.

Aquest resultat ens permet calcular la sèrie de Taylor, en un punt diferent, d'una funció que ja sabem que té una sèrie de potències de radi no nul. Si no sabem si f té una representació en sèrie de potències, el següent resultat pot ser útil:

Teorema 1.22 *Si f té derivades de qualsevol ordre en un interval obert (a, b) i existeix una constant γ tal que*

$$|f^{(n)}(x)| \leq \gamma \quad \forall x \in (a, b),\ \forall n$$

llavors f té sèrie de Taylor de radi no nul al voltant de cada punt $c \in (a, b)$.

Demostració: Segons el teorema del polinomi de Taylor

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + R_n(x)$$

per a tot n i per a tot $x \in (a,b)$, amb

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}$$

i amb ξ entre x i c. Tenim així

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k \right| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1} \right| \leq \frac{\gamma(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

per a tot $x \in (a,b)$. Llavors, donat $\varepsilon > 0$ podem trobar n tal que la darrera fracció sigui més petita que ε. Per tant la sèrie convergeix en $x \neq c$. $\square$

Comentari: La condició $|f^{(n)}(x)| \leq \gamma$ es pot substituir per la menys restrictiva $|f^{(n)}(x)| \leq \gamma^n$ o fins i tot per $|f^{(n)}(x)| \leq Mn!\gamma^n$. En qualsevol dels casos, el radi de convergència de la sèrie resultant pot ser més gran que el determinat per (a,b).

1.10.1 Exemples de sèries de potències

1. $f(x) = e^x$. Tenim $f^{(n)}(x) = e^x$ i donat un punt qualsevol $c \in (a,b)$, $f^{(n)}(c)$ està fitat per $e^b = \gamma$. Per tant hi ha sèrie de potències de radi no nul al voltant de qualsevol punt. En particular

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \forall x \in \mathbb{R} \tag{1.11}$$

ja que la sèrie té radi de convergència infinit. Combinant sèries d'exponencials hom obté també

$$\sinh x \equiv \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \ \forall x \in \mathbb{R}, \tag{1.12}$$

$$\cosh x \equiv \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{1.13}$$

2. $f(x) = \sin x$. Hom té $|f^{(n)}(x)| \leq 1$ per a tot x i per tant $f(x)$ té sèrie de potències de radi no nul al voltant de qualsevol punt. Un càlcul més detallat mostra que

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \ \forall x \in \mathbb{R}, \tag{1.14}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{1.15}$$

3. $f(x) = (1+ax)^\alpha$, $a, \alpha \in \mathbb{R}$. Hom té

$$|f^{(n)}(x)| = |\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)||a|^n|1+ax|^{\alpha-n}$$

i això és complicat de fitar. Si calculem la sèrie de Taylor al voltant $c = 0$ tenim

$$g(x) = \sum_{n\geq 0} \binom{\alpha}{n} a^n x^n,$$

on

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha \cdot (\alpha - 1) \cdots (\alpha - n + 1)}{n!}.$$

Anem a demostrar directament que $f(x) = g(x)$. Hom té, de manera trivial,

$$f'(x) = \frac{\alpha a}{1 + ax} f(x)$$

i de manera menys trivial es veu també que

$$g'(x) = \frac{\alpha a}{1 + ax} g(x)$$

Com que $f(0) = 1$ i $g(0) = 1$, pel teorema d'existència i unicitat de solucions d'EDO es té que $g(x) = f(x)$ en un entorn de 0 i per tant, pel Teorema 1.19, $f(x) = g(x)$ en tot el radi de convergència, que resulta ser $1/|a|$. Per tant

$$(1 + ax)^{\alpha} = \sum_{n \geq 0} \binom{\alpha}{n} a^n x^n, \quad x \in (-\frac{1}{|a|}, \frac{1}{|a|}). \tag{1.16}$$

4. Com a cas particular de (1.16), sigui $f(x) = 1/(1 - x)$, és a dir, $a = 1$, $\alpha = -1$. Tenim $R = 1$ i
$$\binom{-1}{n} = \frac{(-1)(-2) \cdots (-1 - n + 1)}{n!} = \frac{n!(-1)^n}{n!} = (-1)^n$$
i per tant $1/(1 - x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (-1)^n x^n$. Hom obtè així
$$\frac{1}{1 - x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad x \in (-1, 1), \tag{1.17}$$
i de la mateixa manera
$$\frac{1}{1 + x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \quad x \in (-1, 1). \tag{1.18}$$

5. Si integrem (1.17) entre $x = 0$ i un x qualsevol amb $|x| < 1$ tindrem
$$-\log(1 - x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n + 1}$$
d'on
$$\log(1 - x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}, \quad x \in (-1, 1), \tag{1.19}$$
i, igualment, partint de (1.18) o canviant x per $-x$ a (1.19),
$$\log(1 + x) = -\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n}, \quad x \in (-1, 1). \tag{1.20}$$

6. Sigui $f(x) = \arctan x \in (-\pi/2, \pi/2)$ (branca principal de l'arctangent). Tenim

$$f'(x) = \frac{1}{x^2+1}$$

i la sèrie d'aquesta es pot obtenir de (1.18) canviant x per x^2:

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}, \quad x \in (-1,1).$$

Integrant entre 0 i x en $(-1,1)$ obtenim

$$\arctan x - \arctan(0) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad x \in (-1,1).$$

Com que és la branca principal, $\arctan(0) = 0$ i resulta

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad x \in (-1,1). \tag{1.21}$$

2 Espais de funcions contínues

En aquest tema volem desenvolupar dos resultats fonamentals que generalitzen als espais de funcions contínues resultats ben coneguts a $\mathbb{R}$. La referència fonamental és [Spr87]; [MH98] també pot ser útil en alguns punts.

2.1 Espais de funcions contínues

Començarem recordant les següents propietats de $\mathbb{R}$:

- Donat un compacte $K \subset \mathbb{R}$ i un subconjunt del mateix amb un nombre infinit d'elements, aquest darrer té un punt d'acumulació en el compacte. Si substituim compacte per fitat el resultat continua sent cert, però pot ser que el punt d'acumulació no sigui del conjunt. Aquest resultat s'utilitza normalment en referència a successions:

  $$\{a_n\} \subset A \text{ fitat} \Rightarrow \text{existeix una successió parcial de } (a_n) \text{ que és convergent}$$

  Que hi hagi una successió parcial convergent no vol dir, naturalment, que tota parcial sigui convergent. Si $A = K$ és compacte, el límit de la parcial pertany a K.

  Exemple. Si $K = [0, 1]$ i

  $$\{a_n\} = (0, \frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 1 - \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \ldots)$$

  tenim

  $$\begin{aligned} (0, 1 - \frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{3}, 1 - \frac{1}{4}, \ldots) &\rightarrow 1 \in K \\ (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ldots) &\rightarrow \frac{1}{2} \in K \\ (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \ldots) &\rightarrow \frac{1}{3} \in K \end{aligned}$$

  Exemple. Sigui $A = (0, 1)$, fitat, però no tancat. Com que estem a $\mathbb{R}^n$ podem aplicar el teorema de Heine-Borel i A és no compacte. Tenim que $(\frac{1}{2} - \frac{1}{n})$ convergeix a $\frac{1}{2} \in A$, però $(\frac{1}{n})$ convergeix a $0 \notin A$.

  Exemple. Sigui $A = [1, +\infty)$, no fitat. De $(n) \subset A$ no s'en pot extreure cap parcial convergent.

- Donat un nombre real qualsevol, existeix una successió de racionals que tendeix cap a ell. Dit en altres paraules, un real es pot aproximar tant com volguem per un racional. Aquí, el "tant com volguem" és en el sentit de la distància donada pel valor absolut.

El que volem fer ara és veure en quin sentit aquestes dues propietats, l'existència de parcials convergents dins un compacte de $\mathbb{R}$ i l'aproximació de reals per un conjunt numerable, els racionals, es poden extendre quan es canvia $\mathbb{R}$ per un espai molt més complicat, l'espai de les funcions reals contínues sobre un cert conjunt $A \subset \mathbb{R}$:

$$\mathcal{C}(A, \mathbb{R}) = \{f : A \to \mathbb{R}, f \text{ contínua en } A\}.$$

El primer que s'ha de fer és dotar $\mathcal{C}(A, \mathbb{R})$ amb una distància, ja que els fets que hem comentat depenen de la noció de distància entre punts de $\mathbb{R}$. De fet, aprofitant que $\mathcal{C}(A, \mathbb{R})$ és un espai vectorial sobre $\mathbb{R}$, podem fer quelcom millor: dotar $\mathcal{C}(A, \mathbb{R})$ amb una norma, convertint-lo en un espai normat, en lloc de simplement un espai mètric.

Volem que la norma de $\mathcal{C}(A, \mathbb{R})$ tingui bones propietats respecte a la continuïtat, és a dir, si l'extenem a funcions qualssevol, no volem que una funció discontínua pugui estar arbitràriament a la vora d'una funció contínua. Tenint en compte la nostra experiència amb la convergència uniforme, definim a $\mathcal{C}(A, \mathbb{R})$

$$\begin{aligned} ||\cdot|| : \mathcal{C}(A, \mathbb{R}) &\to \mathbb{R} \\ f &\mapsto \sup_{x \in A}\{|f(x)|\}. \end{aligned}$$

Sense més restriccions, això pot no existir: si $A = (0, 1)$, $f(x) = \frac{1}{x}$, $f \in \mathcal{C}(A, \mathbb{R})$ però $||f|| = \sup_{x \in (0,1)} \{|\frac{1}{x}|\} = +\infty$. El problema està en la no compacitat de A. Per tant a partir d'ara suposarem $A = K$ compacte i definim

$$\begin{aligned} ||\cdot|| : \mathcal{C}(K, \mathbb{R}) &\to \mathbb{R} \\ f &\mapsto \sup_{x \in K}\{|f(x)|\}. \end{aligned}$$

Alternativament, podem considerar $\mathcal{C}_b(A, \mathbb{R})$, l'espai de funcions contínues fitades sobre A, amb A no necessàriament compacte. Per a un compacte, $\mathcal{C}_b(K, \mathbb{R}) = \mathcal{C}(K, \mathbb{R})$.

Per veure que això és una norma, cal demostrar

(N1) No negativitat: $||f|| \geq 0$.

(N2) No degeneració: $||f|| = 0$ sii $f = 0$.

(N3) Multiplicativitat: $||\alpha f|| = |\alpha| ||f||$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

(N4) Desigualtat triangular: $||f + g|| \leq ||f|| + ||g||$.

Tot això és evident a partir de les propietats del suprem i del valor absolut. Per exemple

$$\begin{aligned} ||f + g|| &= \sup_{x \in K}\{|f(x) + g(x)|\} \leq \sup_{x \in K}\{|f(x)| + |g(x)|\} \\ &\leq \sup_{x \in K}\{|f(x)|\} + \sup_{x \in K}\{|g(x)|\} \\ &= ||f|| + ||g||. \end{aligned}$$

Aquestes propietats de la norma es tradueixen en propietats de la distància associada:

$$d(f, g) = ||f - g||,$$

que són

(D1) No negativitat: $d(f,g) \geq 0$.

(D2) No degeneració: $d(f,g) = 0$ sii $f = g$.

(D3) Simetria: $d(f,g) = d(g,f)$.

(D4) Desigualtat triangular: $d(f,g) \leq d(f,h) + d(h,g)$, $\forall h$.

Exemple. Sigui $K = [0,1]$ i

$$\mathcal{F} = \{f \in \mathcal{C}(K, \mathbb{R}), f(x) > 0 \quad \forall x \in [0,1]\}.$$

Anem a demostrar que $\mathcal{F}$ és un conjunt obert de $\mathcal{C}(K,\mathbb{R})$ amb la topologia de la distància induïda per la norma del suprem.

Hem de veure que, donat un punt $f \in \mathcal{F}$, existeix $\epsilon > 0$ tal que si $||f-g|| < \epsilon$ llavors $g \in \mathcal{F}$. Com que f és contínua en el compacte $[0,1]$, hi assoleix un valor mínim, m, que haurà de ser $m > 0$. Escollint $\epsilon = \frac{m}{2}$, tindrem que, de $||f-g|| < \frac{m}{2}$, es dedueix $|f(x) - g(x)| < \frac{m}{2}$, $\forall x \in [0,1]$ és a dir,

$$-\frac{m}{2} < g(x) - f(x) < \frac{m}{2}, \quad \forall x \in [0,1].$$

Llavors emprant la desigualtat de l'esquerra en la identitat

$$g(x) = f(x) + g(x) - f(x)$$

s'arriba a

$$g(x) > m + \left(-\frac{m}{2}\right) = \frac{m}{2} > 0,$$

i per tant $g \in \mathcal{F}$.

Direm que una successió (f_n) de $\mathcal{C}(K,\mathbb{R})$ és de Cauchy si, donat $\epsilon > 0$, existeix ν_ϵ tal que

$$\forall n, m > \nu_\epsilon \;\Rightarrow\; ||f_n - f_m|| < \epsilon.$$

Per a $n, m > \nu_\epsilon$ tindrem

$$\sup_{x \in K}\{|f_n(x) - f_m(x)|\} < \epsilon$$

i per tant la convergència de Cauchy de successions en l'espai $\mathcal{C}(K,\mathbb{R})$ equival a la convergència uniforme de Cauchy que hem tractat en el tema anterior. La norma que hem definit a $\mathcal{C}(K,\mathbb{R})$ s'anomena **norma del suprem**, i ja coneixem les seves propietats. En particular

Teorema 2.1 *$\mathcal{C}(K,\mathbb{R})$ amb la norma del suprem és un espai normat i complet.*

Demostració. Que és un espai normat ja ho hem demostrat. Sols cal veure que és complet, és a dir, que conté el límit de qualsevol successió de Cauchy. Si $\{f_n\}$ és de Cauchy, per a tot $\epsilon > 0$ existeix ν_ϵ tal que

$$||f_n - f_m|| < \epsilon \quad \forall n, m > \nu_\epsilon,$$

és a dir,

$$\sup_{x \in K}\{|f_n(x) - f_m(x)|\} < \epsilon,$$

i per tant

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon \quad \forall x \in K.$$

Fixat $x \in K$, la successió numèrica $\{f_n(x)\}$ és, per tant, de Cauchy (a $\mathbb{R}$), i com que $\mathbb{R}$ és complet, convergeix a un valor real que anomenen $f(x)$. Això defineix $f(x)$ per a cada $x \in K$ i, del tema anterior, sabem que $f \in \mathcal{C}(K,\mathbb{R})$. $\square$

Un espai normat i complet s'anomena un **espai de Banach**. Per tant podem reformular el teorema anterior com

Teorema 2.2 $\mathcal{C}(K,\mathbb{R})$ *amb la norma del suprem és un espai de Banach.*

A més de les operacions d'espai vectorial, a $\mathcal{C}(K,\mathbb{R})$ hi podem definir el producte ordinari de funcions

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x).$$

Un espai vectorial que té un producte intern distributiu respecte de la suma s'anomena una àlgebra. Un espai de Banach que sigui una àlgebra s'anomena una **àlgebra de Banach** si la norma verifica

(AB1) $||1|| = 1$.

(AB2) $||f \cdot g|| \leq ||f|| \cdot ||g||$.

A la primera propietat, l'1 de l'esquerra és l'element neutre respecte al producte, que en el nostre cas és la funció constant igual a 1. És evident que aquesta propietat es verifica per a $\mathcal{C}(K,\mathbb{R})$. Pel que fa a la segona propietat, tenim

$$||f \cdot g|| = \sup_{x \in K}\{|(f \cdot g)(x)|\} = \sup_{x \in K}\{|f(x)g(x)|\} = \sup_{x \in K}\{|f(x)||g(x)|\}.$$

De $|f(x)| \leq \sup_{x \in K}\{|f(x)|\}$, $|g(x)| \leq \sup_{x \in K}\{|g(x)|\}$ es dedueix, com que tot és no negatiu,

$$|f(x)||g(x)| \leq \sup_{x \in K}\{|f(x)|\} \sup_{x \in K}\{|g(x)|\}$$

i per tant

$$\sup_{x \in K}\{|f(x)||g(x)|\} \leq \sup_{x \in K}\{\sup_{x \in K}\{|f(x)|\} \sup_{x \in K}\{|g(x)|\}\} = \sup_{x \in K}\{|f(x)|\} \sup_{x \in K}\{|g(x)|\} = ||f|| \cdot ||g||,$$

i això completa el càlcul. Podem per tant afirmar que

Teorema 2.3 $\mathcal{C}(K,\mathbb{R})$ *amb la norma del suprem és una àlgebra de Banach.*

2.2 Equicontinuïtat

Sigui $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(A,\mathbb{R})$ un conjunt de funcions contínues de A en $\mathbb{R}$, amb A no necessàriament compacte. Sigui, donat $x \in A$,

$$\mathcal{F}_x = \{f(x),\ f \in \mathcal{F}\} \subset \mathbb{R}.$$

Diem que $\mathcal{F}$ és **puntualment fitat** si $\mathcal{F}_x$ és fitat $\forall x \in A$ i que $\mathcal{F}$ és **uniformement fitat** si existeix $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$||f|| < \alpha,\ \forall f \in \mathcal{F}.$$

Exercici: Demostreu que si $\mathcal{F}$ és uniformement fitat llavors és puntualment fitat, però no a l'inrevés. Pel contraexemple, podeu considerar $\mathcal{F} = \{f, g\}$ i $A = (0,1)$, amb $f(x) = \frac{1}{x}$ i $g(x) = \sin x$. Vegeu que $\mathcal{F}$ és puntualment fitat a A, però en canvi $||f||$ no existeix i per tant $\mathcal{F}$ no pot ser uniformement fitat.

Les successions uniformement convergents de $\mathcal{C}(A,\mathbb{R})$ són uniformement fitades si A és compacte:

Proposició 2.4 *Sigui K compacte i sigui (f_n) una successió de funcions de $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$. Si la successió és uniformement convergent llavors el conjunt*

$$\mathcal{F} = \{f_n\}$$

és uniformement fitat.

Demostració. Per la convergència uniforme, agafant $\epsilon = 1$, existeix un k tal que si $n > k$ llavors

$$||f_k - f_n|| < 1, \forall n > k.$$

Com que K és compacte, cada funció contínua f_n està fitada. Sigui

$$m = \max\{||f_1||, \ldots, ||f_k||\} + 1,$$

de manera que per a $n \leq k$ les funcions estan fitades per m. Si $n > k$ tindrem, emprant la desigualtat triangular,

$$||f_n|| \leq ||f_k|| + ||f_n - f_k|| < ||f_k|| + 1 \leq m,$$

de manera que $\alpha = m$ és una fita de tota la successió. □

Una família de funcions $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(A, \mathbb{R})$ és **equicontínua** en A si, $\forall \epsilon > 0$, existeix $\delta_\epsilon > 0$ tal que, si $x, y \in A$ amb $|x - y| < \delta_\epsilon$, llavors

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon \quad \forall f \in \mathcal{F}.$$

Fixem-nos que δ_ϵ no depèn ni del punt *ni del membre de la família de funcions.*

De nou, les successions uniformement convergents en un compacte tenen bones propietats respecte a l'equicontinuïtat:

Proposició 2.5 *Sigui K compacte i sigui (f_n) una successió de funcions de $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$. Si la successió és uniformement convergent llavors el conjunt*

$$\mathcal{F} = \{f_n\}$$

és equicontinu.

Demostració. Sigui $\epsilon > 0$ donat. Per la convergència uniforme, existeix $n = n_\epsilon$ tal que

$$||f_q - f_n|| < \frac{\epsilon}{3} \quad \forall q > n.$$

Com que cada funció és contínua, per a tot m existeix $\delta_m > 0$ tal que si $|x - y| < \delta_m$, $x, y \in K$ llavors

$$|f_m(x) - f_m(y)| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Sigui

$$\delta = \min\{\delta_1, \ldots, \delta_n\}.$$

Obviament $\delta > 0$ i si $|x - y| < \delta$, amb $x, y \in K$, tindrem, si $k \leq n$, per la construcció de δ,

$$|f_k(x) - f_k(y)| < \frac{\epsilon}{3},$$

mentre que si $k > n$

$$|f_k(x) - f_k(y)| \leq |f_k(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f_k(y)| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3}$$

on hem emprat la convergència uniforme per al primer i tercer termes i la continuïtat de f_n per al segon terme. En qualsevol cas, existeix $\delta > 0$, que depén només de ϵ, tal que si $x, y \in K$ amb $|x - y| < \delta$ llavors

$$|f_k(x) - f_k(y)| < \epsilon \quad \forall k.$$

□

Podem combinar les dues proposicions en un sol resultat

Teorema 2.6 *Sigui K compacte i sigui (f_n) una successió de funcions de $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$. Si la successió és uniformement convergent llavors el conjunt*

$$\mathcal{F} = \{f_n\}$$

és equicontinu i uniformement fitat.

2.3 Teorema d'Arzelà-Ascoli

Ens preguntem ara si les condicions necessàries per la convergència uniforme que teniem en el darrer teorema són també suficients. La resposta és afirmativa i s'expressa en la següent

Proposició 2.7 *Qualsevol successió de funcions equicontínua i uniformement fitada en un compacte té una parcial uniformement convergent.*

Demostració. Suposem que $\{f_n\}$ satisfà les hipòtesis de la proposició. Tindrem, del fet que és uniformement fitada, que existeix α tal que

$$||f_n|| < \alpha \quad \forall n.$$

Sigui $\{b_n\}$ una successió de punts fixada, però arbitrària, que formi un conjunt B dens en el conjunt compacte. Sigui la successió de funcions avaluada sobre el primer punt:

$$f_1(b_1), f_2(b_1), f_3(b_1), \ldots$$

Com que això és una successió fitada de reals (noteu que sols emprem que $\{f_n\}$ és puntualment fitada), contindrà una parcial convergent

$$f_{1,1}(b_1), f_{1,2}(b_1), f_{1,3}(b_1), \ldots$$

Si aquestes mateixes funcions les avaluem en el segon punt tindrem una nova successió fitada de reals

$$f_{1,1}(b_2), f_{1,2}(b_2), f_{1,3}(b_2), \ldots$$

que al seu torn contindrà una parcial convergent

$$f_{2,1}(b_2), f_{2,2}(b_2), f_{2,3}(b_2), \ldots$$

D'aquesta manera podrem construir una família de successions de funcions

$$\begin{array}{rcl} \sigma_1(x) & : & f_{1,1}(x), f_{1,2}(x), f_{1,3}(x), \ldots \\ \sigma_2(x) & : & f_{2,1}(x), f_{2,2}(x), f_{2,3}(x), \ldots \\ \sigma_3(x) & : & f_{3,1}(x), f_{3,2}(x), f_{3,3}(x), \ldots \\ & \vdots & \end{array}$$

amb les següents propietats

(a) Per a cada $n \in \mathbb{N}$, $\sigma_{n+1}(x)$ és una parcial de $\sigma_n(x)$.

(b) Per a cada $n \in \mathbb{N}$, $(f_{n,m}(b_n))$ convergeix quan $m \to \infty$.

(c) L'ordre de les funcions a cada sucessió és el mateix, fins que desaparèixen.

Apliquem ara el procediment diagonal de Cantor, escollint les funcions de la diagonal principal

$$\sigma(x) \ : \ f_{1,1}(x), f_{2,2}(x), f_{3,3}(x), \ldots$$

Sigui n qualsevol. Segons (c), la parcial

$$f_{n,n}(x), f_{n+1,n+1}(x), f_{n+2,n+2}(x), \ldots,$$

que coincideix amb $\sigma(x)$ a partir de la posició n, és una parcial de $\sigma_n(x)$. Per (b), convergeix en b_n. Com que això passa per a tot n, la successió $\sigma(x)$ convergeix puntualment en el conjunt B dens a K.

Fins ara sols hem emprat que la successió està (puntualment) fitada. Emprant l'equicontinuïtat veurem que la successió diagonal σ convergeix uniformement en K.

Sigui $\epsilon > 0$. Per l'equicontinuïtat, existeix $\delta = \delta_\epsilon > 0$ tal que si $x, y \in K$, $|x - y| < \delta_\epsilon$

$$|f_n(x) - f_n(y)| < \frac{\epsilon}{3} \quad \forall n.$$

A cada punt $b \in B$ li associem l'obert $B_\delta(b) = (b - \delta, b + \delta)$. Com que B és dens a K, $\cup_{b \in B} B_\delta(b)$ és un recobriment de K, i per ser K compacte en podem extreure un de finit, amb centres $b_1, b_2, \ldots, b_r$:

$$K \subset \cup_{j=1}^r B_\delta(b_j).$$

Per la convergència puntual en B, per a cada $j = 1, \ldots, r$ hi ha un $k_\epsilon^{(j)}$ tal que, si $m, n > k_\epsilon^{(j)}$,

$$|f_{m,m}(b_j) - f_{n,n}(b_j)| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Si $k_\epsilon = \max_{j=1,\ldots,r}\{k_\epsilon^{(j)}\}$ i $m, n > k_\epsilon$,

$$|f_{m,m}(b_j) - f_{n,n}(b_j)| < \frac{\epsilon}{3}, \quad j = 1, \ldots, r.$$

Si $x \in K$ és un punt arbitrari, tindrem que $x \in B_\delta(b_j)$ per a algun $j \in \{1, \ldots, r\}$ (potser més d'un), i per tant, si $m, n > k_\epsilon$,

$$\begin{aligned} |f_{m,m}(x) - f_{n,n}(x)| &\leq |f_{m,m}(x) - f_{m,m}(b_j)| + |f_{m,m}(b_j) - f_{n,n}(b_j)| + |f_{n,n}(b_j) - f_{n,n}(x)| \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon, \end{aligned}$$

on el primer i darrer $\frac{\epsilon}{3}$ són per l'equicontinuïtat, i el segon és per la convergència puntual en b_j. □

Comentaris:

- Si considerem $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(M, N)$, amb M un espai mètric i N un espai de Banach qualsevols, cal canviar la condició de (puntualment) fitat per puntualment compacte (definició evident) per tal d'assegurar l'existència de les parcials convergents (d'elements de N) que permeten engegar la construcció.

- El teorema de Dini també donava condicions suficients per a que una successió fos, *tota ella*, uniformement convergent. El teorema de Dini és, en aquest sentit, més fort que la proposició que acabem de veure, però alhora és molt més particular que el resultat que finalment trobarem aquí.

Ja hem notat que sols hem utilitzat el fet que la successió de funcions reals és puntualment fitada. De fet, tenim el següent

Lema 2.8 *Sigui K compacte i sigui $(f_n) \subset \mathcal{C}(K, \mathbb{R})$. Si la successió és equicontínua i puntualment fitada, llavors és uniformement fitada.*

Demostració. Sigui $\epsilon > 0$. Emprant l'equicontinuïtat de la successió, sigui $\delta = \delta_\epsilon > 0$ tal que, si $|x - y| < \delta$, $x, y \in K$,

$$|f_n(x) - f_n(y)| < \epsilon \tag{2.1}$$

Per a cada $x \in K$, sigui

$$\varphi(x) = \sup_{n\in}\{|f_n(x)|\},$$

que existeix degut a que la successió és puntualment fitada. Es demostra que φ és contínua sobre el compacte K, i per tant és fitada, de manera que existeix α tal que

$$|\varphi(x)| = \varphi(x) < \alpha \quad \forall x \in K,$$

i, per tant, $\forall n$,

$$|f_n(x)| \le \varphi(x) < \alpha \quad \forall x \in K$$

i

$$||f_n|| \le \alpha \quad \forall n.$$

□

Exercici: Demostreu que la funció φ del lema és contínua. Ajuda: per a ε prou petit, podeu suposar que $f_n(x)$ i $f_n(y)$ tenen el mateix signe.

Tots aquests resultats es poden condensar en el

Teorema 2.9 *(d'Arzelà-Ascoli) Sigui $K \subset \mathbb{R}$ compacte i sigui $\mathcal{F}$ una família de funcions reals contínues sobre K. Llavors les següents afirmacions són equivalents:*

(a) La família $\mathcal{F}$ és puntualment fitada i equicontínua en K.

(b) De cada successió d'elements de $\mathcal{F}$ s'en pot extreure una parcial uniformement convergent.

Demostració.

(a)⇒(b) Ha estat demostrat en la proposició i lema anteriors.

(b)⇒(a) Ho veurem demostrant que si (a) és fals llavors (b) és fals. Veurem que si $\mathcal{F}$ no és puntualment fitada o no és equicontínua, llavors s'en pot extreure una successió sense cap parcial uniformement convergent.

Si $\mathcal{F}$ no és puntualment fitada en algun $x \in K$, existeix una successió (f_n), $f_n \in \mathcal{F}$ tal que

$$|f_n(x)| > n$$

i per tant $||f_n|| > n$. Cap parcial de (f_n) serà tampoc uniformement fitada i, pels resultats de la Secció 2.2, no serà uniformement convergent.

Si $\mathcal{F}$ no és equicontínua, donat $\epsilon > 0$, per a cada $\delta > 0$ existeix una successió $\{f_n\}$ d'elements de $\mathcal{F}$ i punts x, y de K amb $|x - y| < \delta$ tals que

$$|f_n(x) - f_n(y)| \geq \epsilon.$$

Si la successió té una parcial convergent, ho serà a una funció f tal que

$$|f(x) - f(y)| \geq \epsilon$$

amb $|x - y| < \delta$. Per tant f, si existeix, és no contínua i la convergència no pot ser uniforme.

□

El teorema que acabem de veure sols tracta de l'existència de parcials uniformement convergents, però no diu si la funció límit és o no de la família. Afegint que el conjunt de funcions $\mathcal{F}$ sigui tancat tenim, sense més demostració, una altra versió del teorema d'Arzelà-Ascoli:

Teorema 2.10 *Sigui $K \subset \mathbb{R}$ compacte i sigui $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(K, \mathbb{R})$. Llavors $\mathcal{F}$ és compacte, i.e. de qualsevol successió d'elements de $\mathcal{F}$ s'en pot extreure una parcial uniformement convergent a un element de $\mathcal{F}$, sii $\mathcal{F}$ és tancat, equicontinu i puntualment fitat.*

Comentaris:

- El teorema és vàlid si $K \subset M$, amb M qualsevol espai mètric, i considerem $\mathcal{C}(M, N)$, amb N un espai de Banach qualsevol, simplement canviant "puntualment fitat"per "puntualment compacte".
- La diferència principal respecte a la caracterització dels compactes a $\mathbb{R}^n$ (teorema d'Heine-Borel), és l'exigència d'equicontinuïtat.

2.4 Teorema d'aproximació de Weierstrass

Sigui $K = [a, b]$ i sigui l'espai de Banach $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$. L'any 1885 Karl Weierstrass va demostrar el següent

Teorema 2.11 *(Teorema d'aproximació de Weierstrass) Donada $f \in \mathcal{C}(K, \mathbb{R})$ i un $\epsilon > 0$ qualsevol, existeix un polinomi $p \in \mathbb{R}[x]$, que depèn de ϵ, tal que*

$$||f - p|| = \sup_{x \in [a,b]} |f(x) - p(x)| < \epsilon.$$

En altres paraules, donada una funció contínua en un compacte, sempre és possible trobar un polinomi tal que la distància entre gràfiques sigui arbitràriament petita en el compacte. De les diverses demostracions d'aquest resultat veurem aquí una deguda a Bernstein, que és constructiva. Notem primer el següent. La transformació

$$t = a + (b - a)x$$

estableix un homeomorfisme de $[a, b]$ en $[0, 1]$, de manera que, si $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$, llavors

$$g(x) = f(a + (b - a)x)$$

defineix $g \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$. Si $p \in \mathbb{R}[x]$ és un polinomi tal que $||g-p|| < \epsilon$ en $[0,1]$, llavors

$$q(t) = p\left(\frac{t-a}{b-a}\right) = p(x)$$

és tal que

$$\begin{aligned}\sup_{t\in[a,b]} |f(t)-q(t)| &= \sup_{x\in[0,1]} |f(a+(b-a)x) - q(a+(b-a)x)| \\ &= \sup_{x\in[0,1]} |g(x)-p(x)| < \epsilon.\end{aligned}$$

Per tant, n'hi a prou amb demostrar el teorema en $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$. A tal efecte introduïm els polinomis de Bernstein:

Donada $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, el polinomi

$$B_{n,f}(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}, \quad n \in \mathbb{N},$$

s'anomena el **polinomi de Bernstein d'ordre** n de f.

El teorema d'aproximació de Weierstrass és llavors una conseqüència de la discussió anterior i del següent

Teorema 2.12 *(Teorema d'aproximació de Bernstein) Si $f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, per a tot $\epsilon > 0$ existeix $n \in \mathbb{N}$, que depèn de ϵ, tal que*

$$||f - B_{n,f}|| < \epsilon.$$

La demostració es basa en el lema següent.

Lema 2.13 $\forall x \in [0,1]$, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n}\left(x-\frac{k}{n}\right)^2\binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} \leq \frac{1}{4n}.$$

Demostració. Del teorema del binomi de Newton

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} x^k a^{n-k} = (x+a)^n \tag{2.2}$$

tenim, derivant respecte a x i multiplicant per x,

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} k x^k a^{n-k} = nx(x+a)^{n-1}. \tag{2.3}$$

Repetint la mateixa operació amb (2.3) queda

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} k^2 x^k a^{n-k} = nx(x+a)^{n-1} + n(n-1)x^2(x+a)^{n-2}. \tag{2.4}$$

Si en aquestes tres relacions canviem a per $1-x$ resulta

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\ x^k(1-x)^{n-k} \ = \ 1, \tag{2.5}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\ kx^k(1-x)^{n-k} \ = \ nx, \tag{2.6}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\ k^2x^k(1-x)^{n-k} \ = \ nx+n(n-1)x^2. \tag{2.7}$$

Multiplicant aquestes darreres per n^2x^2, $-2nx$ i 1, respectivament, i sumant-les, s'obté

$$\sum_{k=0}^{n}(nx-k)^2\binom{n}{k}\ x^k(1-x)^{n-k} = nx(1-x),$$

o, finalment,

$$\sum_{k=0}^{n}\left(x-\frac{k}{n}\right)^2\binom{n}{k}\ x^k(1-x)^{n-k} = \frac{x(1-x)}{n}.$$

El resultat desitjat s'obté tenint en compte que $x(1-x)\leq\frac{1}{4}$ si $x\in[0,1]$. $\square$

Demostració del teorema d'aproximació de Bernstein. Emprant (2.5) podem escriure

$$f(x) = f(x)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\ x^k(1-x)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}f(x)\binom{n}{k}\ x^k(1-x)^{n-k},$$

i per tant

$$\begin{aligned}|f(x)-B_{n,f}(x)| \ &= \ \left|\sum_{k=0}^{n}\left(f(x)-f\left(\frac{x}{n}\right)\right)\binom{n}{k}x(1-x)^{n-k}\right| \\ &\leq \ \sum_{k=0}^{n}\left|f(x)-f\left(\frac{x}{n}\right)\right|\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\end{aligned} \tag{2.8}$$

Sigui ara $\alpha=||f||$. Donat $\epsilon>0$, existeix un $\delta=>0$ tal que $|f(x)-f(y)|<\frac{\epsilon}{2}$ si $\delta>|x-y|$, amb δ que depèn només de ϵ. Sigui n tal que

$$n\geq\max\left\{\frac{1}{\delta^4},\frac{\alpha^2}{\epsilon^2}\right\},$$

que també depèn tant sols de ϵ. Fixat $x\in[0,1]$, sigui $I\subset\{0,1,2,\dots n\}$ el conjunt dels enters tals que

$$\left|x-\frac{k}{n}\right|<\frac{1}{\sqrt[4]{n}}<\delta,\ k\in I.$$

Noteu que pot ser $I=\emptyset$. Sigui $\tilde{I}=\{0,1,2,\dots n\}-I$. Descomposant (2.8) en aquests dos conjunts tindrem

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\left|f(x)-f\left(\frac{x}{n}\right)\right|\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \ &= \ \sum_{k\in I}\left|f(x)-f\left(\frac{x}{n}\right)\right|\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \\ &+ \ \sum_{k\in\tilde{I}}\left|f(x)-f\left(\frac{x}{n}\right)\right|\binom{n}{k}x(1-x)^{n-k}.\end{aligned}$$

Com que els punts on està avaluada f en el sumatori sobre I estan a una distància menor que δ, podem emprar la continuïtat de f per fer aquest sumatori tant petit com volguem:

$$\begin{aligned}\sum_{k\in I}\left|f(x)-f\left(\frac{x}{n}\right)\right|\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} &< \frac{\epsilon}{2}\sum_{k\in I}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\\ &\leq \frac{\epsilon}{2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=\frac{\epsilon}{2}.\end{aligned}$$

Els índex k de $\tilde{I}$ són tals que $\left|x-\frac{k}{n}\right|\geq\frac{1}{\sqrt[4]{n}}$, és a dir

$$\left(x-\frac{k}{n}\right)^2\geq\frac{1}{\sqrt{n}},\quad k\in\tilde{I}.$$

El sumatori sobre $\tilde{I}$ es pot fer tant petit com es vulgui emprant el resultat del lema anterior i el fet que la diferència de dos valors de f no pot ser més gran que 2α:

$$\begin{aligned}\sum_{k\in\tilde{I}}\left|f(x)-f\left(\frac{x}{n}\right)\right|\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} &< 2\alpha\sum_{k\in\tilde{I}}\binom{n}{k}\,x^k(1-x)^{n-k}\\ &= 2\alpha\sum_{k\in\tilde{I}}\binom{n}{k}\frac{\left(x-\frac{n}{k}\right)^2}{\left(x-\frac{n}{k}\right)^2}x^k(1-x)^{n-k}\\ &\leq 2\alpha\sqrt{n}\sum_{k\in\tilde{I}}\left(x-\frac{n}{k}\right)^2\binom{n}{k}\,x^k(1-x)^{n-k}\\ &\leq 2\alpha\sqrt{n}\sum_{k=0}^{n}\left(x-\frac{n}{k}\right)^2\binom{n}{k}\,x^k(1-x)^{n-k}\\ &\leq 2\alpha\sqrt{n}\frac{1}{4n}=\frac{\alpha}{2\sqrt{n}}\leq\frac{\epsilon}{2}.\end{aligned}$$

Hem arribat així a

$$|f(x)-B_{n,f}(x)|<\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon,$$

per a tot $x\in[0,1]$, i per tant

$$||f-B_{n,f}||<\epsilon,$$

amb un n que només depèn de ϵ, tal com voliem demostrar. □

El teorema d'aproximació de Weierstrass permet demostrar que $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ és **separable**, és a dir, existeix un conjunt numerable d'elements de $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$, els polinomis amb coeficients racionals, que és dens a $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$. Això es demostra en dos passos:

1. El conjunt de polinomis amb coeficients racionals és dens a $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$.

2. El conjunt de polinomis amb coeficients racionals és numerable.

Per veure la primera afirmació, sigui p amb coeficients reals obtingut, per exemple, amb el teorema d'aproximació de Bernstein, tal que

$$\sup_{x\in[a,b]}|a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0-f(x)|<\frac{\epsilon}{2},$$

i sigui

$$M = \sup_{x\in[a,b]} |x^n + \cdots + x + 1|,$$

que depen de n i per tant de ϵ. Siguin $b_j \in \mathbb{Q}$ tals que

$$|b_j - a_j| < \frac{\epsilon}{2M},\ j = 0, 1, \ldots, n.$$

Llavors

$$\begin{aligned} \sup_{x\in[a,b]} |b_n x^n + \cdots + b_1 x + b_0 - f(x)| &\leq \sup_{x\in[a,b]} |(b_n - a_n)x^n + \cdots + (b_1 - a_1)x + (b_0 - a_0)| \\ &+ \sup_{x\in[a,b]} |a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 - f(x)| \\ &< \frac{\epsilon}{2M} \sup_{x\in[a,b]} |x^n + \cdots + x + 1| + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \end{aligned}$$

i per tant el polinomi amb coeficients racionals $p(x) = b_n x^n + \cdots + b_1 x + b_0$ és tal que

$$||p - f|| < \epsilon.$$

Per veure la numerabilitat, demostrarem que els polinomis amb coeficients enters són numerables, i deixem com exercici veure com se'n dedueix la numerabilitat dels polinomis amb coeficients racionals. Sigui

$$p(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0$$

un polinomi amb coeficients enters. Sigui

$$H(p) = n + |c_n| + |c_{n-1}| + \cdots + |c_1| + |c_0|.$$

Es verifica que $H(p) \in \mathbb{N}$ i $H(p) \geq 1$. Per a un $h \in \mathbb{N}$ fixat, sols hi ha un nombre finit de polinomis tals que $h = H(p)$ (això és fals si treiem la n de la definició de $H(p)$). Podem llavors numerar tots els polinomis amb coeficients enters per ordre creixent de $H(p)$, amb ordenació arbitrària per a un $H(p)$ donat. Aquesta mateixa demostració serveis per veure que el conjunt de nombres algebraics, els que satisfan equacions polinòmiques amb coeficients racionals, és numerable.

Resumint, hem establert la següent analogia amb el conjunt dels reals, pel que fa a les propietats d'aproximació:

$$\begin{aligned} (\mathbb{R}, |\cdot|) &\Leftrightarrow (\mathcal{C}([a,b], \mathbb{R}), ||\cdot||_{\sup}) \\ \mathbb{Q} &\Leftrightarrow \mathbb{Q}[x] \end{aligned}$$

2.5 Teorema de Stone-Weierstrass

Ens preguntem ara si és possible generalitzar el resultat del teorema d'aproximació de Weirestrass: existeixen altres conjunts de funcions, a més dels polinomis, que permetin aproximar uniformement funcions contínues arbitràries sobre un compacte?

Per respondre a aquesta pregunta, començarem introduint una mica de notació. Donades dues funcions reals qualsevols es defineix

$$\begin{aligned} (f \vee g)(x) &= \max\{f(x), g(x)\}, \\ (f \wedge g)(x) &= \min\{f(x), g(x)\}. \end{aligned}$$

Hom té les següents identitats evidents

$$f \vee g = \frac{f+g}{2} + \frac{|f-g|}{2}, \tag{2.9}$$

$$f \wedge g = \frac{f+g}{2} - \frac{|f-g|}{2}, \tag{2.10}$$

d'on es dedueix que, si f i g són contínues, també ho són $f \vee g$ i $f \wedge g$. Direm que $\mathcal{B} \subset \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$ és un **reticle** si és tancat per les operacions $\vee$ i $\wedge$.

A principis de la década dels 30, Marshall Harvey Stone va demostrar el

Teorema 2.14 *(Teorema d'aproximació de Stone) Sigui $\mathcal{B} \subset \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$ tal que*

1) $\mathcal{B}$ és un reticle.

2) Donats dos punts diferents i dos valors reals, existeix una funció de $\mathcal{B}$ que passa per ells, és a dir, $\forall x \neq y$, $x, y \in [a,b]$, i $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, existeix $f \in \mathcal{B}$ tal que $f(x) = \alpha$, $f(y) = \beta$.

Llavors $\mathcal{B}$ és dens a $\mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$.

Fixem-nos que els polinomis verifiquen la segona condició però no la primera, i per tant aquest resultat no és una generalització del de Weierstrass.

Demostració. Sigui $\epsilon > 0$ i $f \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$. Començarem demostrant que, per a cada $\xi \in [a,b]$, existeix $f_\xi \in \mathcal{B}$ tal que

(a) $f_\xi(\xi) = f(\xi)$,

(b) $f_\xi(x) < f(x) + \epsilon$, $\forall x \in [a,b]$.

De la hipòtesi 2), per a cada $t \in [a,b]$, $t \neq \xi$, existeix $f_t \in \mathcal{B}$ tal que

$$f_t(\xi) = f(\xi), \;\; f_t(t) = f(t).$$

Amb t donat, la continuïtat de f_t ens assegura l'existència d'un obert $B_{r_t}(t)$, amb radi r_t depenent de t i ϵ, tal que

$$\forall x \in B_{r_t}(t) \cap [a,b], \quad f_t(x) - f(x) < \epsilon.$$

El conjunt d'oberts $\{B_{r_t}(t)\}_{t \in [a,b], t \neq \xi}$ és un recobriment obert del compacte $[a,b]$, i podem obtenir un nombre finit de punts $t_1, \ldots, t_n$ d'$[a,b]$ tals que

$$[a,b] \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_{r_{t_i}}(t_i).$$

Siguin $f_{t_1}, f_{t_2}, \ldots, f_{t_n}$ les funcions corresponents a aquests punts i sigui

$$f_\xi = f_{t_1} \wedge f_{t_2} \wedge \ldots \wedge f_{t_n}.$$

Com que $\mathcal{B}$ és un reticle, tenim $f_\xi \in \mathcal{B}$. Com que $f_t(\xi) = f(\xi)$ per a tot t, serà $f_\xi(\xi) = f(\xi)$ i ja tenim (a). Donat ara $x \in [a,b]$, existirà $t_i \in [a,b]$ tal que $x \in B_{r_{t_i}}(t_i)$. En aquest obert $f_{t_i}(x) < f(x) + \epsilon$, i com que $f_\xi(x) \leq f_{t_i}(x)$, tindrem que $f_\xi(x) < f(x) + \epsilon$ i això és (b).

El que hem fet fins ara és, per a cada punt $\xi \in [a,b]$, construir una funció que passa per $(\xi, f(\xi))$ i que està, en tots els punts d'$[a,b]$, per sota de $f + \epsilon$. Ara considerarem el conjunt de les f_ξ, $\xi \in [a,b]$ i, amb ajuda de l'operació $\vee$, construirem la funció de $\mathcal{B}$ que aproxima uniformement f.

Com que $f_\xi(\xi) = f(\xi)$, per a cada ξ existeix $B_{r_\xi}(\xi)$, on r_ξ depén de ξ i de ϵ, tal que

$$\forall x \in B_{r_\xi}(\xi) \cap [a,b], \quad f(x) - f_\xi(x) < \epsilon.$$

La compacitat de $[a,b]$ ens permet de nou trobar un nombre finit de punts $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$, tals que

$$[a,b] \subset \bigcup_{i=1}^{m} B_{r_{\xi_i}}(\xi_i).$$

Posem ara

$$g = f_{\xi_1} \vee f_{\xi_2} \vee \cdots \vee f_{\xi_m}.$$

Donat $x \in [a,b]$, existirà un ξ_i dels esmentats tal que $x \in B_{r_{\xi_i}}(\xi_i)$ i, en aquest obert,

$$f_{\xi_i}(x) > f(x) - \epsilon,$$

i com que $g(x) \geq f_{\xi_i}(x)$, serà

$$g(x) > f(x) - \epsilon, \ \forall x \in [a,b]. \tag{2.11}$$

D'altra banda, tots els f_ξ verifiquen que $f_\xi(x) < f(x) + \epsilon$, per a tot $x \in [a,b]$. Com que, a cada punt, $g(x)$ coincideix amb un $f_{\xi_i}(x)$, també serà

$$g(x) < f(x) + \epsilon, \ \forall x \in [a,b]. \tag{2.12}$$

Combinant (2.11) i (2.12) ens queda

$$|g(x) - f(x)| < \epsilon, \ \forall x \in [a,b],$$

és a dir,

$$||g - f|| < \epsilon,$$

tal com voliem. Fixem-nos que tota la demostració no és més que un procediment de tallar i enganxar. $\square$

Ens queda ara relacionar els resultats de Stone i Weierstrass. Necessitarem algunes definicions i resultats previs.

Direm que $\mathcal{B} \subset \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ **separa punts** si $\forall x, y \in [a,b]$, $x \neq y$, existeix $f \in \mathcal{B}$ tal que $f(x) \neq f(y)$. En altres paraules, el conjunt de funcions de $\mathcal{B}$ és capaç de distingir entre x i y.

Proposició 2.15 *Sigui $\mathcal{B} \subset \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ una subàlgebra (n'hi ha prou que sigui subespai vectorial) que conté les constants i que separa punts. Aleshores $\mathcal{B}$ té la propietat 2) del teorema d'aproximació de Stone.*

Demostració. Siguin $x, y \in [a,b]$, $x \neq y$, i siguin $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Com que $\mathcal{B}$ separa punts, existeix $g \in \mathcal{B}$ tal que $g(x) \neq g(y)$. Llavors

$$f(\cdot) = \frac{\alpha - \beta}{g(x) - g(y)}(g(\cdot) - g(y)) + \beta \cdot 1$$

té la propietat 2) de Stone requerida, $f(x) = \alpha$, $f(y) = \beta$, i a més $f \in \mathcal{B}$, ja que $\mathcal{B}$ és un subespai vectorial i conté la funció constant 1. $\square$

El valor absolut juga un paper important en el nostre intent de relacionar els resultats de Stone i Weierstrass. Un primer resultat, trivial, és el següent:

Proposició 2.16 *Un subespai vectorial de funcions és un reticle sii és tancat respecte al valor absolut.*

Demostració. Evident a partir de (2.9) i (2.10) i les relacions inverses corresponents. □

El penúltim pas, més important, és el següent lema, anomenat del valor absolut:

Lema 2.17 *Si $\mathcal{B} \subset \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ és una subàlgebra que conté les constants i $f \in \mathcal{B}$, llavors $|f| \in \bar{\mathcal{B}}$.*

Demostració. En primer lloc, cal dir que el resultat és cert encara que la subàlgebra no contingui les constants, però és llavors lleugerament més llarg de demostrar. Com que en la Proposició 2.15 aquesta condició és fonamental i al final ho barrejarem tot, la posem també aquí per simplificar.

Hem de veure que podem aproximar uniformement $|f|$ amb elements de $\mathcal{B}$. Sigui $\epsilon > 0$ i sigui $g \in \mathcal{C}([-||f||,||f||],\mathbb{R})$ donada per $g(x) = |x|$. Pel teorema d'aproximació de Weierstrass, existeix $p \in \mathbb{R}[x]$ tal que

$$||p-g|| = \sup_{x\in[-||f||,||f||]} |p(x) - |x|| < \epsilon.$$

Sigui $p(\xi) = \sum_{k=0}^{n} a_k \xi^k$. Tindrem

$$(p \circ f)(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (f(x))^k.$$

Com que $f \in \mathcal{B}$ i $\mathcal{B}$ és una subàlgebra que conté les constants, tenim que $p \circ f \in \mathcal{B}$. Llavors

$$|(p \circ f)(x) - |f(x)|| = |p(f(x)) - |f(x)|| < \epsilon, \ \forall x \in [a,b]$$

ja que $f(x) \in [-||f||,||f||]$ si $x \in [a,b]$. Per tant

$$||p \circ f - |f|| < \epsilon$$

amb $p \circ f \in \mathcal{B}$ i queda demostrat el que voliem. □

Qüestió: Vegeu com s'ha de canviar la demostració si la subàlgebra no conté les constants.

Ara ja podem enunciar el

Teorema 2.18 *(de Stone-Weierstrass) Sigui $\mathcal{B} \subset \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ una subàlgebra que conté les constants i separa punts. Llavors $\bar{\mathcal{B}} = \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$.*

Demostració.

Sols s'ha de veure que si $\mathcal{B}$ és una subàlgebra també ho és $\bar{\mathcal{B}}$. Si $f = \lim f_n$, $g = \lim g_n$, $(f_n) \subset \mathcal{B}$, $(g_n) \subset \mathcal{B}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, tenim

$$\begin{aligned} \alpha f &= \alpha \lim f_n = \lim(\alpha f_n) \in \bar{\mathcal{B}}, \\ f+g &= \lim f_n + \lim g_n = \lim(f_n + g_n) \in \bar{\mathcal{B}}, \\ fg &= \lim f_n \lim g_n = \lim(f_n g_n) \in \bar{\mathcal{B}}, \end{aligned}$$

ja que, al ser $\mathcal{B}$ subàlgebra, αf_n $f_n + g_n$ $f_n g_n$ són successions de $\mathcal{B}$ i el seu límit està a $\bar{\mathcal{B}}$.

De les Proposicions 2.15 i 2.16, el Lema 2.17 i el teorema d'aproximació de Stone es dedueix que $\bar{\mathcal{B}}$ és dens a $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ i per tant $\mathcal{B}$ també. Es deixa al lector fer un diagrama detallat amb les implicacions. □

Comentaris:

- Els polinomis satisfan les hipòtesis del teorema.
- En referència al Lema 2.17, tal com ja hem dit, els polinomis $\mathbb{Q}[x]$ no formen un reticle, però $\overline{\mathbb{Q}[x]} = \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ sí.
- Hi ha conjunts de funcions que són reticle però no subàlgebra, com ara el conjunt de funcions contínues lineals a trossos en $[a,b]$. A aquests conjunts se'ls pot aplicar el teorema d'aproximació de Stone però no el de Stone-Weierstrass.
- Hi ha una demostració del Lema 2.17 que no es basa en el teorema d'aproximació de Weierstrass, i per tant aquest darrer es pot llavors deduïr del de Stone-Weierstrass.
- La condició de contenir les constants es pot canviar per la de "no anul·lar-se a cap punt". Es diu que $\mathcal{B} \subset \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ **no s'anul·la a cap punt** si $\forall x \in [a,b]$ existeix un $f \in \mathcal{B}$ tal que $f(x) \neq 0$. Es pot veure ([Spr87], 233-234) que si $\mathcal{B}$ separa punts i no s'anul·la a cap punt, llavors es verifica també la condició 2) del teorema d'aproximació de Stone, i tot segueix endavant.
- Si les funcions de $\mathcal{B}$ són C^k, llavors les aproximacions són també C^k.

3 La integral de Lebesgue

En aquest tema desenvoluparem les idees fonamentals de la integral de Lebesgue, culminant en els teoremes de convergència monòtona i de convergència dominada, i les desigualtats fonamentals als espais L_p. La referència fonamental, entre moltes altres possibles, és els primers capítols de [Bar95]. A [BMV87] poden trobar-se molts exercicis fets i proposats.

3.1 De la integral de Riemann a la de Lebesgue

Recordem que un interval a $\mathbb{R}$ és un conjunt que té una de les quatre formes següents:

$$\begin{aligned}
[a,b] &= \{x \in \mathbb{R}\ ,\ a \leq x \leq b\}\\
(a,b) &= \{x \in \mathbb{R}\ ,\ a < x < b\}\\
[a,b) &= \{x \in \mathbb{R}\ ,\ a \leq x < b\}\\
(a,b] &= \{x \in \mathbb{R}\ ,\ a < x \leq b\}
\end{aligned}$$

sempre amb $a < b$. En qualsevol cas, a i b són els extrems de l'interval i $b - a > 0$ és la seva longitud. Recordem també que si E és un conjunt, la seva funció característica, $\mathcal{X}_E$ o $\mathbb{I}_E$, es defineix per

$$\mathbb{I}_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in E, \\ 0 & \text{si } x \notin E. \end{cases}$$

Una **funció esglaonada** és una combinació lineal (suma finita) de funcions característiques d'intervals:

$$\varphi = \sum_{j=1}^{n} c_j \mathbb{I}_{E_j}, \quad \text{amb } E_j \text{ un interval i } c_j \in \mathbb{R} \text{ per a cada } j = 1, \ldots, n.$$

Si a_j, b_j són els intervals d'E_j, la integral de φ és

$$\int \varphi = \sum_{j=1}^{n} c_j (b_j - a_j).$$

Si f és una funció fitada en $[a,b]$ i no és massa discontínua, la integral de Riemann de f es defineix com el límit, en sentit apropiat, de integrals de funcions esglaonades que aproximen f. Per exemple, la integral de Riemann inferior de f sobre $[a,b]$, $L(f;[a,b])$, es defineix com el suprem de les integrals de les funcions esgalonades φ tals que $\varphi(x) \leq f(x)$ si $x \in [a,b]$ i $\varphi(x) = 0$ si $x \notin [a,b]$, mentre que la integral de Riemann superior de f sobre $[a,b]$, $U(f;[a,b])$, es defineix com l'ínfim de les integrals de les funcions esgalonades φ tals que $\varphi(x) \geq f(x)$ si

$x \in [a,b]$ i $\varphi(x) = 0$ si $x \notin [a,b]$. Es diu llavors que f és integrable de Riemann en $[a,b]$, i s'escriu $f \in R([a,b])$, si

$$L(f;[a,b]) = U(f;[a,b]).$$

La integral de Lebesgue s'obté per un procés similar, excepte que les funcions esglaonades es substitueixen per un conjunt diferent de funcions i la noció de longitud s'estén a una col·lecció $\mathcal{X}$ de subconjunts de $\mathbb{R}$ més generals que els intervals, obtenint-se el que s'anomena mesura o longitud generalitzada, μ. En concret, les funcions esglaonades es substitueixen per **funcions simples**, que són funcions combinació lineal de funcions característiques de conjunts de $\mathcal{X}$ (les funcions esglaonades en són un cas particular). Si

$$\varphi = \sum_{j=1}^{n} c_j \mathbb{I}_{E_j}$$

és una funció simple, aleshores

$$\int \varphi = \sum_{j=1}^{n} c_j \mu(E_j).$$

Si f és una funció no negativa definida sobre $\mathbb{R}$ que té unes certes propietats, definirem la seva integral de Lebesgue com el suprem de les integrals de totes les funcions simples φ tals que $\varphi(x) \leq f(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$. La integral es pot estendre després a funcions apropiades amb els dos signes.

Un exemple de funció simple que no és una funció esglaonada ve donat per

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1], \\ 0 & \text{altrament,} \end{cases}$$

que es pot escriure com

$$\varphi = 1 \cdot \mathbb{I}_{\ \cap[0,1]} + 0 \cdot \mathbb{I}_{\overline{\ \cap[0,1]}}$$

i per tant

$$\int \varphi = 1 \cdot \mu(\mathbb{Q} \cap [0,1]) + 0 \cdot \mu(\overline{\mathbb{Q} \cap [0,1]}) = \mu(\mathbb{Q} \cap [0,1]).$$

Veurem que les propietats que requerirem a la mesura μ per estendre correctament la noció de longitud d'un interval fan que la mesura de qualsevol conjunt numerable, que és el cas de $\mathbb{Q} \cap [0,1]$, sigui zero. Per tant

$$\int \varphi = 0.$$

En canvi, es fàcil veure que aquesta funció no és integrable de Riemann, donat que la suma superior val 1 i la inferior val 0.

De manera simbòlica, podem dir que

$$\text{integral de Riemann} \sim \sum_{\text{intervals}} \text{bases} \times \text{alçades}$$

mentre que

$$\text{integral de Lebesgue} \sim \sum_{\text{valors de } \varphi} \text{alçades} \times \text{sumes de bases.}$$

Fixem-nos que en el nostre exemple hem posat $0 \cdot \mu(\overline{\mathbb{Q} \cap [0,1]}) = 0$ encara que cal esperar que $\mu(\overline{\mathbb{Q} \cap [0,1]}) = \mu(\mathbb{R}) = +\infty$. De fet, l'aparició de conjunts de mesura infinita ens porta a treballar amb la recta real ampliada en lloc de $\mathbb{R}$. Per tal de treballar amb els símbols $\pm\infty$ juntament amb $x \in \mathbb{R}$, definirem

$$\begin{aligned}
(\pm\infty) + (\pm\infty) &= x + (\pm\infty) = (\pm\infty) + x = \pm\infty, \\
(\pm\infty)(\pm\infty) &= +\infty, \\
(\pm\infty)(\mp\infty) &= -\infty, \\
x(\pm\infty) &= (\pm\infty)x = \begin{cases} \pm\infty & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \\ \mp\infty & \text{si } x < 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

Noteu en particular $0(\pm\infty) = 0$, que s'utilitza essencialment per indicar que la integral de la funció zero sobre qualsevol conjunt, fitat o no, és zero. En canvi, no donem cap significat a $(\pm\infty) - (\pm\infty)$.

La noció d'integral de Lebesgue es pot estendre definint mesures arbitràries que no necessàriament coincideixin amb la longitud sobre intervals, i les propietats de convergència de la integral resultant són igualment vàlides. Sigui $X \subset \mathbb{R}$ un conjunt qualsevol de reals i sigui $\mathcal{X} \subset \mathcal{P}(X)$ tal que $\emptyset \in \mathcal{X}$ i $\mathcal{X}$ és tancat respecte l'operació d'agafar el complementari respecte a X i sota la unió numerable. Suposem que existeix una funció, la mesura,

$$\mu : \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

tal que $\mu(\emptyset) = 0$ i que és numerablement additiva:

$$\mu\left(\cup_{j=1}^{\infty} E_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j)$$

si $E_j \in \mathcal{X}$ i $E_j \cap E_k = \emptyset$ per a $j \neq k$. Llavors la integral es pot definir per a funcions que tingui certa propietat respecte de $\mathcal{X}$ (ser "$\mathcal{X}$-mesurables"), i té bones propietats de convergència.

Nosaltres estarem especialment interessats en aquestes propietats de convergència (intercanvi de limits i integració), i per tant de moment ens creurem que existeix una mesura mesurablement additiva que generalitza la longitud d'un interval, l'anomenada mesura de Lebesgue. En el següent tema veurem com construir aquestes mesures.

3.2 Funcions mesurables

Anem a desenvolupar la teoria de la integració de funcions reals definides sobre un conjunt X. Aquest conjunt pot ser un interval obert real, un tancat a $\mathbb{R}^2$ o pot ser $X = \mathbb{N}$. La construcció que farem no depèn dels detalls de X, sempre i quan tinguem una família de subconjunts $\mathcal{X}$ ben comportada en un cert sentit tècnic, el de ser una $\sigma-$àlgebra.

$\mathcal{X} \subset \mathcal{P}(X)$ és una **$\sigma-$àlgebra** si

(σ1) $\emptyset \in \mathcal{X}$.

(σ2) si $A \in \mathcal{X}$, llavors $\overline{A} = X - A \in \mathcal{X}$.

(σ3) si $A_n \in \mathcal{X}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, llavors $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{X}$.

Direm que $(X, \mathcal{X})$ és un **espai mesurable** i els elements de $\mathcal{X}$ els anomenarem **conjunts $\mathcal{X}-$mesurables**. Recordem que $A - B = A \cap \overline{B}$ i que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A}_n},$$

de manera que la intersecció numerable de mesurables també és mesurable.

Exemples de $\sigma-$àlgebres

1. X qualsevol conjunt i $\mathcal{X} = \mathcal{P}(X)$.

2. X qualsevol conjunt i $\mathcal{X} = \{\emptyset, X\}$.

3. X qualsevol conjunt, $E \subset X$ i $\mathcal{X} = \{\emptyset, E, \overline{E}, X\}$.

4. Donades dues $\sigma-$àlgebres $\mathcal{X}_1$ i $\mathcal{X}_2$ sobre el mateix conjunt X, llavors $\mathcal{X}_3 = \mathcal{X}_1 \cap \mathcal{X}_2$ és també una $\sigma-$àlgebra.

5. Sigui $\mathcal{Z} \subset \mathcal{P}(X)$. Tenim que $\mathcal{P}(X)$ és una $\sigma-$àlgebra que conté $\mathcal{Z}$, i que la intersecció de dues $\sigma-$àlgebres que continguin $\mathcal{Z}$ és també una $\sigma-$àlgebra que conté $\mathcal{Z}$. Per tant hi ha una $\sigma-$àlgebra mínima (en el sentit d'inclusió de conjunts) que conté $\mathcal{Z}$, i és la intersecció de totes les $\sigma-$àlgebres que contenen $\mathcal{Z}$. S'anomena la $\sigma-$àlgebra generada per $\mathcal{Z}$.

6. Sigui $X = \mathbb{R}$. L'**àlgebra de Borel**, $\mathcal{B}$, és la $\sigma-$àlgebra generada per tots els intervals oberts (a, b). Coincideix amb la generada pels intervals tancats, pels intervals semioberts o per les semirrectes. Un conjunt de $\mathcal{B}$ s'anomena **borelià**.

7. Sigui $X = \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Si E és un borelià, siguin
$$\begin{aligned} E_1 &= E \cup \{-\infty\}, \\ E_2 &= E \cup \{+\infty\}, \\ E_3 &= E \cup \{-\infty, +\infty\}, \end{aligned}$$
Llavors
$$\mathcal{B}^* = \bigcup_{E \in \mathcal{B}} \{E, E_1, E_2, E_3\}$$
és una $\sigma-$àlgebra sobre $\mathbb{R}^*$, anomenada l'àlgebra de Borel estesa.

Podem ara passar a introduir les funcions sobre les que es desenvolupa la teoria de la integració. Una funció $f : X \to \mathbb{R}$ s'anomena $\mathcal{X}-$**mesurable** si $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ el conjunt
$$A_\alpha = \{x \in X,\ f(x) > \alpha\}$$
pertany a $\mathcal{X}$. En altres paraules, $f^{-1}((\alpha, +\infty)) \in \mathcal{X}$ per a tot $\alpha \in \mathbb{R}$. El següent resultat mostra que hi ha diverses maneres equivalents de definir la característica de ser mesurable.

Proposició 3.1 *Si $f : X \to \mathbb{R}$ i $\mathcal{X}$ és una $\sigma-$àlgebra sobre X, les afirmacions següents són equivalents:*

(a) $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ A_\alpha = f^{-1}((\alpha, +\infty)) \in \mathcal{X}$.

(b) $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ B_\alpha = f^{-1}((-\infty, \alpha]) \in \mathcal{X}$.

(c) $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ C_\alpha = f^{-1}([\alpha, +\infty)) \in \mathcal{X}$.

(d) $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ D_\alpha = f^{-1}((-\infty, \alpha)) \in \mathcal{X}$.

Demostració: Com que $\overline{A}_\alpha = B_\alpha$ i $\overline{C}_\alpha = D_\alpha$, tenim que *(a)* és equivalent a *(b)* i *(c)* és equivalent a *(d)*. Sols falta demostrar, per exemple, que *(a)* i *(c)* són equivalents. Tenim que

$$\begin{aligned}
[\alpha, +\infty) &= \bigcap_{n=1}^{\infty} (\alpha - \frac{1}{n}, +\infty) \\
(\alpha, +\infty) &= \bigcup_{n=1}^{\infty} [\alpha - \frac{1}{n}, +\infty),
\end{aligned}$$

i com que

$$\begin{aligned}
f^{-1}(A \cup B) &= f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \\
f^{-1}(A \cap B) &= f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B),
\end{aligned}$$

tindrem

$$C_\alpha = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{\alpha - 1/n} \tag{3.1}$$

$$A_\alpha = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{\alpha + 1/n}. \tag{3.2}$$

De (3.2) es veu, emprant (σ1), que si es verifica *(c)* es verifica *(a)*. D'altra banda, de (3.1),

$$\overline{C}_\alpha = \overline{\bigcap_{n=1}^{\infty} A_{\alpha - 1/n}} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A}_{\alpha - 1/n}$$

i per tant *(a)* implica *(c)*. $\square$

Exemples de funcions mesurables:

1. Qualsevol funció constant $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ és mesurable. Si $f(x) = c\ \forall x \in X$, tenim

   - si $\alpha \geq c$, $\{x \in X\ ,\ f(x) > \alpha\} = \emptyset \in \mathcal{X}$.
   - si $\alpha < c$, $\{x \in X\ ,\ f(x) > \alpha\} = X \in \mathcal{X}$.

   Fixem-nos que això és independent de la $\sigma-$àlgebra.

2. Si $E \in \mathcal{X}$, llavors $\mathbb{I}_E$ és $\mathcal{X}$-mesurable atès que

   - si $\alpha \geq 1$, $\{x \in X\ ,\ f(x) > \alpha\} = \emptyset \in \mathcal{X}$.
   - si $\alpha \in [0, 1)$, $\{x \in X\ ,\ f(x) > \alpha\} = E \in \mathcal{X}$.
   - si $\alpha \in (-\infty, 0)$, $\{x \in X\ ,\ f(x) > \alpha\} = X \in \mathcal{X}$.

3. Qualsevol funció contínua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $\mathcal{B}$-mesurable. Efectivament, si f és contínua, llavors $f^{-1}((\alpha, +\infty))$ és un obert, i per tant és unió numerable d'intervals oberts, la qual pertany a $\mathcal{B}$.

4. Qualsevol funció monòtona $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $\mathcal{B}$-mesurable. Suposem per exemple que $x \leq y$ implica $f(x) \leq f(y)$. Aleshores $f^{-1}((\alpha, +\infty))$ és, per a a depenent de α, un dels següents conjunts $(a, +\infty)$, $[a, +\infty)$, $\emptyset$ o $\mathbb{R}$, els quals són tots borelians. Feu la gràfica de la funció corresponent a cada cas.

Algunes combinacions algebraiques de funcions mesurables són mesurables:

Proposició 3.2 *Siguin f i g funcions reals $\mathcal{X}$-mesurables. Llavors, si $c \in \mathbb{R}$,*

$$i) cf, \quad ii)\ f^2, \quad iii)\ f+g, \quad iv)\ fg, \quad v)\ |f|$$

són també $\mathcal{X}$-mesurables.

Demostració:

i) Si $c = 0$, $cf = 0$ és una funció constant i per tant $\mathcal{X}$-mesurable. Si $c > 0$, llavors

$$\{x \in X \ ; \ cf(x) > \alpha\} = \{x \in X \ ; \ f(x) > \alpha/c\},$$

que pertany a $\mathcal{X}$ per ser f $\mathcal{X}$-mesurable, mentre que si $c < 0$,

$$\{x \in X \ ; \ cf(x) > \alpha\} = \{x \in X \ ; \ f(x) < \alpha/c\}$$

també és de $\mathcal{X}$.

ii) Si $\alpha < 0$, $\{x \in X \ ; \ (f(x))^2 > \alpha\} = X \in \mathcal{X}$. Si $\alpha \geq 0$,

$$\{x \in X \ ; \ (f(x))^2 > \alpha\} = \{x \in X \ ; \ f(x) > \sqrt{\alpha}\} \bigcup \{x \in X \ ; \ f(x) < -\sqrt{\alpha}\},$$

que és la unió de dos elements de $\mathcal{X}$ i, per tant, de $\mathcal{X}$.

iii) Sigui $r \in \mathbb{Q}$ i sigui

$$S_r = \{x \in X \ ; \ f(x) > r\} \cap \{x \in X \ ; \ g(x) > \alpha - r\},$$

que pertany a $\mathcal{X}$ per ser f i g funcions $\mathcal{X}$-mesurables. Demostrarem que

$$\{x \in X \ ; \ (f+g)(x) > \alpha\} = \bigcup_{r\in} S_r$$

i haurem acabat, degut al tercer axioma de σ-àlgebra (per això és important emprar aquí els racionals, que són numerables). D'una banda, si $x \in \bigcup_{r\in} S_r$, existirà $r \in \mathbb{Q}$ tal que $x \in S_r$ i per tant $(f+g)(x) = f(x)+g(x) > r+\alpha-r = \alpha$. D'altra banda, si $(f+g)(x) > \alpha$, sigui $k = \alpha - g(x)$, *i.e.* $g(x) = \alpha - k$. Llavors ha de ser

$$\alpha < f(x) + g(x) = f(x) + \alpha - k,$$

d'on $f(x) > k$. Sigui $r \in \mathbb{Q}$ tal que $k < r < f(x)$. Es té llavors $f(x) > r$ i $g(x) = \alpha - k > \alpha - r$, d'on $x \in S_r$.

iv) Evident a partir de $fg = 1/4((f+g)^2 - (f-g)^2$ i els tres apartats anteriors.

v) Es fa igual que per al quadrat.

$\square$

Si $f : X \to \mathbb{R}$, siguin f^+ i f^- les funcions no negatives donades per

$$f^+ = f \vee 0, \ f^- = (-f) \vee 0,$$

anomenades **part positiva** i **part negativa** de f. Donat que

$$f = f^+ - f^-, \ |f| = f^+ + f^-, \ f^+ = \frac{1}{2}(|f| + f), \ f^- = \frac{1}{2}(|f| - f),$$

es dedueix de la proposició prèvia el

Corol·lari 3.3 *f és $\mathcal{X}$-mesurable sii f^+ i f^- ho són.*

Tal com ja hem anunciat, és convenient treballar amb la recta real estesa per tal de considerar la mesura de conjunts no fitats. També és convenient, però, per no excloure funcions que prenen valor infinit. Anem per tant a definir la mesurabilitat per a funcions que prenen valors a $\mathbb{R}^*$.

Direm que $f : X \to R^*$ és **$\mathcal{X}$-mesurable** si $\{x \in X \ ; \ f(x) > \alpha\} \in \mathcal{X}$ per a tot $\alpha \in \mathbb{R}$. El conjunt de funcions de X en $\mathbb{R}^*$ que siguin $\mathcal{X}$-mesurables el denotarem per $\mathcal{M}(X, \mathcal{X})$. Fixem-nos que

$$
\begin{aligned}
A &\equiv \{x \in X \ ; \ f(x) = +\infty\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X \ ; \ f(x) > n\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X \ ; \ f(x) \geq n\}, \\
B &\equiv \{x \in X \ ; \ f(x) = -\infty\} = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X \ ; \ f(x) > -bn\}} \\
&= \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\{x \in X \ ; \ f(x) > -n\}} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X \ ; \ f(x) \leq -n\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X \ ; \ f(x) < -n\},
\end{aligned}
$$

i per tant els conjunts on f pren valors infinit són de $\mathcal{X}$ si $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{X})$.

El següent lema permet testejar la mesurabilitat de les funcions reals esteses.

Lema 3.4 *Una funció $f : X \to \mathbb{R}^*$ és $\mathcal{X}$-mesurable sii els conjunts A i B són de $\mathcal{X}$ i si la funció $f_1 : X \to \mathbb{R}$ definida per*

$$
f_1(x) = \begin{cases} f(x) & si \ x \notin A \cup B, \\ 0 & si \ x \in A \cup B, \end{cases}
$$

és $\mathcal{X}$-mesurable.

Demostració: Si $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{X})$ ja hem vist que A i B són de $\mathcal{X}$. Sigui ara $\alpha \in \mathbb{R}$. Si $\alpha \geq 0$,

$$
\{x \in X \ ; \ f_1(x) > \alpha\} = \{x \in X \ ; \ f(x) > \alpha\} - A = \{x \in X \ ; \ f(x) > \alpha\} \bigcap \overline{A} \in \mathcal{X},
$$

mentre que si $\alpha < 0$,

$$
\{x \in X \ ; \ f_1(x) > \alpha\} = \{x \in X \ ; \ f(x) > \alpha\} \bigcup B \in \mathcal{X}.
$$

Per tant f_1 és $\mathcal{X}$-mesurable. Suposem ara que A i B són de $\mathcal{X}$ i que f_1 és $\mathcal{X}$-mesurable. Si $\alpha \geq 0$

$$
\{x \in X \ ; \ f(x) > \alpha\} = \{x \in X \ ; \ f_1(x) > \alpha\} \bigcup A \in \mathcal{X},
$$

i si $\alpha < 0$

$$
\{x \in X \ ; \ f(x) > \alpha\} = \{x \in X \ ; \ f_1(x) > \alpha\} - B = \{x \in X \ ; \ f_1(x) > \alpha\} \bigcap \overline{B} \in \mathcal{X},
$$

i per tant f és $\mathcal{X}$-mesurable. $\square$

Dels darrers resultats es dedueix que, si $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{X})$, llavors cf, f^2, $|f|$, f^+ i f^- també són de $\mathcal{M}(X, \mathcal{X})$, amb l'únic comentari que si $c = 0$ llavors $cf = 0$, *i.e.* $0 \cdot (\pm\infty) = 0$.

Si f i g són de $\mathcal{M}(X, \mathcal{X})$, llavors $f + g$ no està ben definida per $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ per a x dels conjunts

$$
\begin{aligned}
E_1 &= \{x \in X \ ; \ f(x) = -\infty, g(x) = +\infty\} \\
E_2 &= \{x \in X \ ; \ f(x) = +\infty, g(x) = -\infty\},
\end{aligned}
$$

els quals són elements de $\mathcal{X}$. Si **definim** $f + g = 0$ en $E_1 \cup E_2$, llavors la funció resultant és $\mathcal{X}$-mesurable. Per determinar la mesurabilitat de fg per a funcions reals esteses ens cal un resultat auxiliar:

Lema 3.5 *Sigui* (f_n) *una successió de funcions de* $\mathcal{M}(X, \mathcal{X})$ *i siguin les funcions definides punt a punt per*

$$\begin{aligned} f(x) &= \inf f_n(x), \\ F(x) &= \sup f_n(x), \\ f^*(x) &= \liminf f_n(x), \\ F^*(x) &= \limsup f_n(x). \end{aligned}$$

Llavors f, F, f^* *i* F^* *pertanyen a* $\mathcal{M}(X, \mathcal{X})$.

Demostració: Atès que (les demostracions es deixen al lector)

$$\begin{aligned} \{x \in X \ ; \ f(x) \geq \alpha\} &= \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X \ ; \ f_n(x) \geq \alpha\} \\ \{x \in X \ ; \ F(x) > \alpha\} &= \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X \ ; \ f_n(x) > \alpha\}, \end{aligned}$$

resulta que f i F són $\mathcal{X}$-mesurables si les f_n ho són. A més

$$\begin{aligned} f^*(x) &= \sup\{\inf_{m \geq n} f_m(x)\}, \\ F^*(x) &= \inf\{\sup_{m \geq n} f_m(x)\} \end{aligned}$$

i per tant també queda establerta la $\mathcal{X}$-mesurabilitat de f^* i de F^*. □

Corol·lari 3.6 *Si* (f_n) *és una successió de funcions de* $\mathcal{M}(X, \mathcal{X})$ *que convergeix puntualment vers* $f : X \to \mathbb{R}^*$, *llavors* $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{X})$.

Demostració: En aquest cas, $f(x) = \lim f_n(x) = \liminf f_n(x)$. □

Tornem ara a la mesurabilitat del producte. Si $n \in \mathbb{N}$, sigui

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } |f(x)| \leq n \\ n & \text{si } f(x) > n \\ -n & \text{si } f(x) < -n, \end{cases}$$

i sigui g_n definit de manera anàloga. És fàcil veure que f_n i g_n són $\mathcal{X}$-mesurables per a tot n. Com que aquestes són funcions que prenen valors a $\mathbb{R}$, els productes $f_n g_m$ són $\mathcal{X}$-mesurables per a tot m, n. Com que $f(x) = \lim f_n(x)$, tenim, pel darrer corol·lari, que $f g_m \in \mathcal{M}(X, \mathcal{X})$ ja que

$$f(x) g_m(x) = \lim_n (f_n(x) g_m(x)).$$

Finalment, com que

$$f(x) g(x) = \lim_m (f(x) g_m(x)),$$

una altra aplicació del corol·lari demostra que fg és $\mathcal{X}$-mesurable. □

Anem finalment a veure un resultat que permet aproximar funcions no negatives de $\mathcal{M}(X, \mathcal{X})$ per successions monòtonament creixents de funcions de $\mathcal{M}(X, \mathcal{X})$ amb un nombre finit de valors.

Proposició 3.7 *Sigui* $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{X})$ *amb* $f(x) \geq 0$ *per a tot* $x \in X$. *Aleshores existeix una successió* (φ_n) *de funcions de* $\mathcal{M}(X, \mathcal{X})$ *tal que*

1. $0 \leq \varphi_n(x) \leq \varphi_{n+1}(x)$ *per a tot* $n \in \mathbb{N}$ *i tot* $x \in X$.

2. *cada* φ_n *pren un nombre finit de valors reals.*

3. $f(x) = \lim \varphi_n(x)$ *per a tot* $x \in X$.

Demostració: Sigui $n \in \mathbb{N}$. Donat $k = 0, 1, \ldots, n2^n - 1$ definim

$$E_{kn} = \{x \in X \ ; \ k2^{-n} \leq f(x) < (k+1)2^{-n}\},$$

mentre que per a $k = n2^n$ posem

$$E_{kn} = \{x \in X \ ; \ f(x) \geq n\}.$$

Els conjunts E_{kn}, $k = 0, 1, \ldots, n2^n - 1, n2^n$ són disjunts, pertanyen a $\mathcal{X}$ i la seva unió és X (per la no negativitat de f). En E_{kn} definim $\varphi_n(x) = k2^{-n}, \forall x \in E_{kn}$. Donat $\alpha \in \mathbb{R}$ tenim

$$\{x \in X \ ; \ \varphi_n(x) > \alpha\} = \bigcup_{k=0; k2^{-n} > \alpha}^{n2^n} E_{kn} \in \mathcal{X},$$

i per tant $\varphi_n \in \mathcal{M}(X, \mathcal{X})$.

Els E_{kn} tenen rangs d'imatge de longitud 2^{-n}, excepte el darrer, la imatge del qual és $[n, +\infty)$. Quan passem de n a $n+1$, els rangs es divideixen per tant per 2, excepte el darrer, i per tant es dobla el nombre de conjunts. En conseqüència, si dessignem amb subíndex "old" i "new" els k corresponents a n i $n+1$, llavors si $x \in E_{k_{\text{old}}n}$, es té $x \in E_{k_{\text{new}}(n+1)}$ amb

$$k_{\text{new}} \geq 2k_{\text{old}}.$$

Llavors

$$\varphi_{n+1}(x) = k_{\text{new}}2^{-(n+1)} \geq 2k_{\text{old}}2^{-(n+1)} = k_{\text{old}}2^{-n} = \varphi_n(x).$$

Per tant $\varphi_{n+1}(x) \geq \varphi_n(x)$, $\forall x \in X$, $\forall n \in \mathbb{N}$. A més, és evident que $\varphi_n(x) \geq 0$, que una φ_n donada pren sols un nombre finit de valors, que $\varphi_n(x) \leq f(x)$, i que $\lim_n \varphi_n(x) = f(x)$ $\forall x \in X$, ja que $|f(x) - \varphi_n(x)| < 2^{-n}$. □

Encara que ens limitarem a funcions $\mathbb{R}$ o $\mathbb{R}^*$-valorades, en alguns casos serà convenient considerar funcions

$$f : X \to Y$$

amb $(X, \mathcal{X})$ i $(Y, \mathcal{Y})$ espais mesurables. En aquest cas es diu que f és mesurable si

$$f^{-1}(E) = \{x \in X \ , \ f(x) \in E\}$$

és de $\mathcal{X}$ per a tot $E \in \mathcal{Y}$. Això coincideix amb la nostra definició de mesurabilitat per a funcions $X \to \mathbb{R}^*$ agafant $Y = \mathbb{R}^*$ i $\mathcal{Y} = \mathcal{B}$.

Aquesta definició mostra l'analogia

$$\boxed{\text{funcions mesurables entre espais mesurables} \sim \text{funcions contínues entre espais topològics.}}$$

3.3 Mesures

Donat un espai mesurable $(X, \mathcal{X})$, una **mesura** μ és una funció

$$\mu : \mathcal{X} :\longrightarrow \mathbb{R}^*$$

tal que

1. $\mu(\emptyset) = 0$.
2. $\mu(E) \geq 0$, $\forall E \in \mathcal{X}$.
3. donat $(E_n) \subset \mathcal{X}$, si $E_n \bigcap E_m = \emptyset$ per a $n \neq m$, llavors

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n). \tag{3.3}$$

Amb motiu de la darrera propietat, es diu que μ és **numerablement additiva**. Com que μ pot prendre el valor $+\infty$, si això passa a la dreta de (3.3), vol dir que, o bé $\mu(E_n) = +\infty$ per a algun(s) E_n, o que la sèrie de termes no negatius és divergent.

Si μ no pren mai el valor $+\infty$, direm que és una **mesura finita**. Si existeix $(E_n) \subset \mathcal{X}$ tal que $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ i $\mu(E_n) < +\infty$ $\forall n$, direm que μ és una **mesura σ-finita**.

Exemples de mesures:

1. Sigui $X \neq \emptyset$ i sigui $\mathcal{X} = \mathcal{P}(X)$. Definim $\mu_1(E) = 0$ $\forall E \in \mathcal{X}$ i $\mu_2(\emptyset) = 0$, $\mu_2(E) = +\infty$ si $E \neq \emptyset$. Tant μ_1 com μ_2 són mesures, si bé no gaire interessants.

2. Sigui $(X, \mathcal{X})$ un espai mesurable amb $X \neq \emptyset$ i sigui $p \in X$ un element fixat. Definim

$$\mu_p(E) = \begin{cases} 0 & p \notin E \\ 1 & p \in E. \end{cases}$$

   Això és una mesura anomenada **mesura unitat concentrada en** p.

3. Sigui $X = \mathbb{N}$, $\mathcal{X} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Definim

$$\#(E) = \begin{cases} \text{card}(E) & \text{si } E \text{ és finit} \\ +\infty & \text{si } E \text{ no és finit.} \end{cases}$$

   Això és una mesura anomenada **mesura numerable** a $\mathbb{N}$. Fixem-nos que $\#$ no és finita però és σ-finita.

4. Sigui $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{X} = \mathcal{B}$. Demostrarem més endavant que existeix una única mesura λ definida a $\mathcal{B}$ que coincideix amb la longitud quan s'aplica a intervals. S'anomena **mesura de Lebesgue** o **mesura de Borel** (hi ha, de fet, una petita diferència tècnica). No és finita però és σ-finita.

Un **espai de mesura** és una tripleta $(X, \mathcal{X}, \mu)$, on $(X, \mathcal{X})$ és un espai mesurable i μ és una mesura sobre $\mathcal{X}$. Direm que una proposició és **certa μ-gairebé arreu** si existeix un $N \in \mathcal{X}$ amb $\mu(N) = 0$ tal que la proposició és certa a $\overline{N}$. Per exemple, direm que una successió de funcions (f_n) sobre X convergeix μ-gairebé arreu si existeix $\lim f_n(x)$ per a tot $x \notin N$, amb $\mu(N) = 0$, i escriurem

$$f = \lim f_n \qquad \mu\text{-g.a.}$$

Es presenten a continuació alguns resultats senzills.

Proposició 3.8 *Sigui* $(X, \mathcal{X}, \mu)$ *un espai de mesura. Si* $E, F \in \mathcal{X}$ *i* $E \subset F$ *llavors*

$$\mu(E) \leq \mu(F).$$

Si, a més, $\mu(E) \neq +\infty$*, llavors*

$$\mu(F - E) = \mu(F) - \mu(E).$$

Demostració. Com que $F = E \bigcup (F - E)$ i $E \bigcap (F - E) = \emptyset$ i $F - E \in \mathcal{X}$, tenim

$$\mu(F) = \mu(E) + \mu(F - E), \tag{3.4}$$

i com que $\mu(F - E) \geq 0$, serà

$$\mu(F) \geq \mu(E).$$

Si $\mu(E) < +\infty$, restant $\mu(E)$ de (3.4) tindrem

$$\mu(F) - \mu(E) = \mu(F - E).$$

Si $\mu(E) = +\infty$, de la primera part de la proposició tenim $\mu(F) = +\infty$ i no podem dir res sobre el valor de $\mu(F) - \mu(E)$. □

Proposició 3.9 *Sigui* $(X, \mathcal{X}, \mu)$ *un espai de mesura.*

- *Si* (E_n) *és una successió creixent de* $\mathcal{X}$*, i.e.* $E_n \subset E_{n+1}$*, llavors*

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n). \tag{3.5}$$

- *Si* (F_n) *és una successió decreixent de* $\mathcal{X}$*, i.e.* $F_{n+1} \subset F_n$*, i* $\mu(F_1) < +\infty$*, llavors*

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(F_n). \tag{3.6}$$

Demostració.

- Si $\mu(E_n) = +\infty$ per a algun n, de la proposició anterior es dedueix que els dos costats de (3.5) són $+\infty$. Suposem per tant que $\forall n$, $\mu(E_n) < +\infty$. Sigui $A_1 = E_1$, $A_n = E_n - E_{n-1}$ per a $n > 1$. Com que $E_{n-1} \subset E_n$, tenim que els A_n són disjunts i

$$E_n = \bigcup_{j=1}^{n} A_j, \qquad \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Llavors

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} \mu(A_n).$$

Per la proposició anterior i la finitud de tots els $\mu(E_n)$, $\mu(A_n) = \mu(E_n) - \mu(E_{n-1})$ per a $n > 1$, i per tant

$$\sum_{n=1}^{m} \mu(A_n) = \mu(E_m),$$

i finalment

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{m\to\infty} \mu(E_m).$$

- Sigui $E_n = F_1 - F_n$, de manera que (E_n) és creixent. Tindrem, aplicant la primera part de la Proposició,
$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_n \mu(E_n) = \lim_n \mu(F_1 - F_n).$$
Com que $\mu(F_1) < +\infty$, tenim $\mu(F_n) < +\infty$ $\forall n$ i per tant
$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(F_1 - F_n) = \lim_{n\to\infty} (\mu(F_1) - \mu(F_n)) = \mu(F_1) - \lim \mu(F_n).$$
D'altra banda, com que $\cup_{n=1}^{\infty} E_n = F_1 - \cap_{n=1}^{\infty} F_n$, tindrem
$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \mu(F_1) - \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n\right).$$
Combinant ambdues expressions i simplificant $\mu(F_1) < +\infty$ obtenim el resultat desitjat.

□

3.4 La mesura exterior

El problema que es tractarà tot seguit és com construir mesures, més enllà d'exemples trivials com ara la mesura del cardinal. La dificultat principal rau en demostrar que es satisfà la σ-additivitat per a una unió numerable qualsevol de disjunts de la σ-àlgebra. Per solucionar aquest problema, es comença rebaixant el concepte de σ-àlgebra. Els resultats principals s'enuncien sense demostració, el lector interessat pot recòrrer al Capítol 9 de [Bar95].

Una família $\mathcal{A}$ de subconjunts de X és una **àlgebra de conjunts** si

1. $\emptyset \in \mathcal{A}$.
2. Si $E \in \mathcal{A}$, llavors $X - E \in \mathcal{A}$.
3. Si $E_1, E_2, \ldots, E_n$ és una família finita de conjunts d'$\mathcal{A}$, llavors
$$\bigcup_{i=1}^{n} E_i \in \mathcal{A}.$$

Sobre una àlgebra de conjunts, una mesura és una aplicació amb valors a $\mathbb{R}^*$ amb la σ-additivitat rebaixada:

Una funció $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^*$ és una mesura sobre l'àlgebra $\mathcal{A}$ si

1. $\mu(\emptyset) = 0$.
2. $\mu(E) \geq 0$, $\forall E \in \mathcal{A}$.
3. Si (E_n) és una successió de conjunts disjunts d'$\mathcal{A}$ tal que
$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{A},$$
llavors
$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n).$$

Fixem-nos que no estem imposant σ-additivitat per a qualsevol unió disjunta: $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)$ no té sentit si $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ no pertany a $\mathcal{A}$. Aquest possibilitat no hi era per a σ-àlgebres.

L'objectiu és definir una mesura en una σ-àlgebra que contingui $\mathcal{A}$ i que, sobre $\mathcal{A}$, coincideixi amb la mesura que ja hi tenim. El primer pas és definir una *pseudomesura* per a qualsevol subconjunt de X:

Sigui $\mathcal{A}$ una àlgebra de conjunts de X i sigui μ una mesura en $\mathcal{A}$. Si $B \in \mathcal{P}(X)$ definim

$$\mu^*(B) = \inf \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j)$$

on l'ínfim es calcula sobre totes les col·leccions (E_j) de conjunts d'$\mathcal{A}$ tals que

$$B \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j.$$

Fixem-nos que aquest conjunt de col·leccions no és buit, ja que com a mínim conté $(X, \emptyset, \emptyset, \ldots)$. La funció de conjunt μ^* s'anomena **mesura exterior** associada a $(X, \mathcal{A}, \mu)$. No és, en general, una mesura sobre $\mathcal{P}(X)$, però en té quasi totes les propietats:

Proposició 3.10 *Si μ^* és la mesura exterior associada a $(X, \mathcal{A}, \mu)$ llavors*

1. $\mu^*(\emptyset) = 0$.
2. $\mu^*(B) \geq 0$, $\forall B \in \mathcal{P}(X)$.
3. *Si $A \subset B$ llavors $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.*
4. *Si $B \in \mathcal{A}$ llavors $\mu^*(B) = \mu(B)$.*
5. *Si $(B_n) \subset \mathcal{P}(X)$ llavors (**subadditivitat numerable**)*

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(B_n).$$

La mesura exterior té l'avantatge d'estar definida per a conjunts arbitraris de X, però té el problema de no ser, en general, additiva, ni finita ni mesurablement. Convenientment restringida és, però, una mesura.

Direm que un subconjunt E de X és **μ^*-mesurable** si satisfà la condició de Carathéodory

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A - E)$$

per a tot $A \subset X$. Aquesta condició diu que E és μ^*-mesurable si ell i el seu complementari estan prou separats (respecte de μ^*) per dividir un conjunt arbitrari A de manera μ^*-additiva. Fixem-nos que de la subadditivitat de la mesura exterior ja tenim $\mu^*(A) \leq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A - E)$, i la condició sols estableix la igualtat. Denotarem per $\mathcal{A}^*$ la col·lecció de conjunts μ^*-mesurables de X associats a l'àlgebra de conjunts $\mathcal{A}$. Tenim llavors el següent teorema fonamental:

Teorema 3.11 *(Teorema d'extensió de Carathéodory) El conjunt $\mathcal{A}^*$ és una σ-àlgebra que conté $\mathcal{A}$ i per tant $(X, \mathcal{A}^*)$ és un espai mesurable. A més, si (E_n) és una successió disjunta d'elements d'$\mathcal{A}^*$,*

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n),$$

i per tant $(X, \mathcal{A}^*, \mu^*)$ és un espai de mesura.

Demostració. Capítol 9 de [Bar95]. □

Comentaris:

- S'acostuma a escriure μ en lloc de μ^* quan s'està a $\mathcal{A}^*$.
- $\mathcal{A}^*$ no és necessàriament la σ-àlgebra més petita que conté $\mathcal{A}$.

Es diu que una σ-àlgebra $\mathcal{X}$ és **completa** respecte a una mesura μ si per a tot $E \in \mathcal{X}$ amb $\mu(E) = 0$ es verifica que $B \subset E$ implica $B \in \mathcal{X}$, i per tant $\mu(B) = 0$.

Proposició 3.12 *La σ-àlgebra $\mathcal{A}^*$ és completa respecte de μ^*.*

Hom pot preguntar-se si és possible definir una altra mesura a $\mathcal{A}^*$, a més de μ^*, de manera que també coincideixi amb μ sobre $\mathcal{A}$. La resposta és negativa si s'hi afegeix quelcom:

Teorema 3.13 *(Teorema d'extensió de Hahn) Sigui μ una mesura σ-finita sobre $(X, \mathcal{A})$, és a dir, existeix $(E_n) \subset \mathcal{A}$ amb $\mu(E_n) < +\infty$ $\forall n$ i $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Llavors μ té una única extensió, μ^*, a una mesura en $\mathcal{A}^*$.*

3.5 La mesura de Lebesgue a

Volem ara aplicar el procediment descrit a la Secció anterior per construir a $\mathbb{R}$ una mesura que coincideixi amb la longitud, l, sobre els intervals. Per fer-ho considerarem només els intervals semioberts, ja que una vegada construida la σ-àlgebra la resta d'intervals s'obtenen fàcilment. Posem per tant

$$\begin{aligned} l((a,b]) &= b - a, \\ l((-\infty, b]) &= l((a, +\infty)) = l((-\infty, +\infty)) = +\infty. \end{aligned}$$

D'aquesta manera hem definit una mesura sobre l'àlgebra de conjunts formada per les unions finites d'intervals semioberts:

Proposició 3.14 *La col·lecció $\mathcal{F}$ de totes les unions finites de conjunts de la forma*

$$\emptyset, (a,b], (-\infty, b], (a, +\infty), (-\infty, +\infty)$$

és una àlgebra de conjunts de $\mathbb{R}$ i l és una mesura en aquesta àlgebra.

Demostració. Es trivial que $\mathcal{F}$ és una àlgebra de conjunts. Per veure que l és una mesura, només s'ha de demostrar que l'additivitat numerable es verifica per a unions numerables disjuntes el resultat de les quals és un element de $\mathcal{F}$. Vegeu els detalls al començament del Capítol 9 de [Bar95]. □

Si ara apliquem el procediment d'extensió de Carathéodory a $(\mathbb{R}, \mathcal{F}, l)$ obtindrem un espai de mesura $(\mathbb{R}, \mathcal{F}^*, l^*)$. $\mathcal{F}^*$ s'anomena σ-àlgebra dels conjunts mesurables de Lebesgue. No és, però, la σ-àlgebra més petita que conté $\mathcal{F}$, que és la dels Borelians, $\mathcal{B}$. Les inclusions són, a més, estrictes, és a dir,

$$\mathcal{F} \subsetneq \mathcal{B} \subsetneq \mathcal{F}^* \subsetneq \mathcal{P}(\mathbb{R}).$$

La penúltima inclusió estricta vol dir que hi ha subconjunts de $\mathbb{R}$ que satisfan la condició de Carathéodory i que no poden obtenir-se mitjançant les operacions de σ-àlgebra a partir dels intervals, mentre que la darrera implica que hi ha subconjunts de $\mathbb{R}$ no mesurables de Lebesgue. La demostració de l'existència dels darrers no és constructiva, però, i es basa en l'axioma d'elecció.

La restricció de l^* a $\mathcal{B}$ s'anomena mesura de Borel o Lebesgue i es denota per λ. Els borelians s'anomenen també conjunts mesurables de Borel. No es perd massa treballant amb $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \lambda)$ en lloc de $(\mathbb{R}, \mathcal{F}^*, l^*)$, en el sentit que

- qualsevol conjunt mesurable de Lebesgue es pot posar dins un conjunt mesurable de Borel, amb la mateixa mesura.
- qualsevol funció mesurable de Lebesgue és l^*-g.a. igual a una mesurable de Borel.

De fet, la pèrdua principal és la de la completesa:

- $\mathcal{F}^*$ és completa però $\mathcal{B}$ no ho és: hi ha borelians de mesura nul·la que contenen subconjunts no borelians.

3.6 La integral. El Teorema de Convergència Monòtona

Sigui un espai de mesura fixat, $(X, \mathcal{X}, \mu)$. Denotarem per $\mathcal{M}^+(X, \mathcal{X})$ el conjunt de funcions positives, $\mathcal{X}$-mesurables de X en $\mathbb{R}^*$:

$$\mathcal{M}^+(X, \mathcal{X}) = \{f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{X}) \ ; \ f(x) \geq 0 \ \forall x \in X\}.$$

L'objectiu és definir la integral de qualsevol funció de $\mathcal{M}^+(X, \mathcal{X})$ respecte a la mesura μ. Per ferho introduirem el concepte de funció simple, per a les que és convenient demanar que prenguin valors a $\mathbb{R}$ enlloc de $\mathbb{R}^*$.

Definició: Una funció $\varphi : X \to \mathbb{R}$ s'anomena **simple** si la seva imatge és un conjunt finit. Una funció **simple mesurable** es podrà escriure com

$$\varphi = \sum_{j=1}^{n} a_j \mathbb{I}_{E_j} \tag{3.7}$$

on $\forall j,\ a_j \in \mathbb{R},\ E_j \in \mathcal{X}$. Hi ha, però, moltes representacions del tipus (3.7) per a una mateixa funció simple mesurable.

Exemple. Sigui

$$\varphi(x) = \begin{cases} 3 & x \in [0,1] \\ 2 & x \in (1,5) \\ 2 & x \in (7,10] \\ 0 & \text{altrament.} \end{cases}$$

Podem escriure

$$\varphi = 3 \cdot \mathbb{I}_{[0,1]} + 2 \cdot \mathbb{I}_{(1,5)} + 2 \cdot \mathbb{I}_{(7,10]} + 0 \cdot \mathbb{I}_{[-3,-2]},$$

però també

$$\varphi = 3 \cdot \mathbb{I}_{[0,2]} - 1 \cdot \mathbb{I}_{(1,2]} + 2 \cdot \mathbb{I}_{(1,5)} + 2 \cdot \mathbb{I}_{(7,10]}.$$

Entre totes les representacions de φ n'hi ha una, anomenada canònica, caracteritzada pel fet que els a_j són diferents dos a dos i els E_j són disjunts, no buits i tals que la seva unió és X. En l'exemple anterior, la representació canònica és

$$\varphi = 3 \cdot \mathbb{I}_{[0,1]} + 2 \cdot \mathbb{I}_{(1,5)\cup(7,10]} + 0 \cdot \mathbb{I}_{\overline{[0,5)\cup(7,10]}}.$$

Exercici: Demostreu que la representació canònica és única.

Si φ és una funció simple de $\mathcal{M}^+(X, \mathcal{X})$ amb representació canònica (3.7), definim la **integral de φ respecte de μ** com el valor de $\mathbb{R}^*$ donat per

$$\int \varphi \, \mathrm{d}\mu = \sum_{j=1}^{n} a_j \mu(E_j). \tag{3.8}$$

Com sempre, en aquesta definició prenem la convenció $0 \cdot (+\infty) = 0$. La integral està ben definida ja que els a_j són no negatius i no poden aparèixer expressions no definides com $\infty - \infty$. Si considerem la funció característica $\mathbb{I}_E$ d'un $E \in \mathcal{X}$, amb representació canònica $\varphi = 1 \cdot \mathbb{I}_E + 0 \cdot \mathbb{I}_{\overline{E}}$, tindrem

$$\int \mathbb{I}_E \, \mathrm{d}\mu = 1 \cdot \mu(E) + 0 \cdot \mu(\overline{E}) = \mu(E).$$

Si s'entén quina mesura s'utilitza escriurem $\int \varphi$ en lloc de $\int \varphi \, \mathrm{d}\mu$.

Lema 3.15 *Sigui $(X, \mathcal{X}, \mu)$ un espai de mesura.*

1. *Si $c \geq 0$ i $\varphi \in \mathcal{M}^+(X, \mathcal{X})$ és una funció simple,*

$$\int c\varphi = c \int \varphi.$$

2. *Si $\varphi, \psi \in \mathcal{M}^+(X, \mathcal{X})$ són funcions simples,*

$$\int (\varphi + \psi) = \int \varphi + \int \psi.$$

3. *Si $\varphi \in \mathcal{M}^+(X, \mathcal{X})$ és una funció simple,*

$$\lambda(E) = \int \varphi \mathbb{I}_E \, d\mu$$

és una mesura a $\mathcal{X}$.

Demostració.

1. Si $c = 0$, llavors $c\varphi$ és la funció simple identicament igual a zero i la relació és certa, encara que $\int \varphi$ pugui ser $+\infty$, ja que $0 \cdot \infty = 0$. Si $c > 0$ llavors $c\varphi \in \mathcal{M}^+(X, \mathcal{X})$ amb representació canònica heretada de la de φ:

$$c\varphi = \sum_{j=1}^{n} (ca_j) \mathbb{I}_{E_j}.$$

Per tant

$$\int c\varphi = \sum_{j=1}^{n} (ca_j) \mu(E_j) = c \sum_{j=1}^{n} a_j \mu(E_j) = c \int \varphi.$$

2. Suposem les representacions canòniques

$$\varphi = \sum_{j=1}^{n} a_j \mathbb{I}_{E_j}, \quad \psi = \sum_{k=1}^{m} b_k \mathbb{I}_{F_k}.$$

Llavors, emprant les propietats dels conjunts que intervenen en una representació canònica,

$$\begin{aligned}
\varphi + \psi &= \sum_{j=1}^{n} a_j \mathbb{I}_{E_j} + \sum_{k=1}^{m} b_k \mathbb{I}_{F_k} \\
&= \sum_{j=1}^{n} a_j \mathbb{I}_{E_j \bigcap (\cup_{k=1}^{m} F_k)} + \sum_{k=1}^{m} b_k \mathbb{I}_{F_k \bigcap (\cup_{j=1}^{n} E_j)} \\
&= \sum_{j=1}^{n} a_j \mathbb{I}_{\bigcup_{k=1}^{m} (E_j \cap F_k)} + \sum_{k=1}^{m} b_k \mathbb{I}_{\bigcup_{j=1}^{n} (F_k \cap E_j)} \\
&= \sum_{j=1}^{n} a_j \sum_{k=1}^{m} \mathbb{I}_{E_j \cap F_k} + \sum_{k=1}^{m} b_k \sum_{j=1}^{n} \mathbb{I}_{F_k \cap E_j} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} (a_j + b_k) \mathbb{I}_{E_j \cap F_k}.
\end{aligned}$$

Encara que els $E_j \cap F_k$ són disjunts, els valors $a_j + b_k$ poden no ser diferents, de manera que la darrera expressió no és necessàriament la representació canònica de $\varphi + \psi$. Siguin c_h, $h = 1, \ldots, p$ els valors diferents en el conjunt

$$\{a_j + b_k;\ j = 1, \ldots, n, \quad k = 1, \ldots, m\}$$

i sigui G_h la unió de tots aquells $E_j \cap F_k \neq \emptyset$ tals que $c_h = a_j + b_k$. Com que els $E_j \cap F_k$ són disjunts,

$$\mu(G_h) = \sum_{(h)} \mu(E_j \cap F_k),$$

on (h) indica la suma sobre els j, k tals que $a_j + b_k = c_h$ i $E_j \cap F_k \neq \emptyset$. La representació canònica de $\varphi + \psi$ serà

$$\varphi + \psi = \sum_{h=1}^{p} c_h \mathbb{I}_{G_h},$$

i per tant

$$\begin{aligned}\int(\varphi+\psi) &= \sum_{h=1}^{p} c_h\mu(G_h) = \sum_{h=1}^{p} c_h \sum_{(h)} \mu(E_j\cap F_k) = \sum_{h=1}^{p}\sum_{(h)} c_h\mu(E_j\cap F_k)\\ &= \sum_{h=1}^{p}\sum_{(h)}(a_j+b_k)\mu(E_j\cap F_k) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}(a_j+b_k)\mu(E_j\cap F_k)\\ &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} a_j\mu(E_j\cap F_k) + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} b_k\mu(E_j\cap F_k)\\ &= \sum_{j=1}^{n} a_j\mu(E_j) + \sum_{k=1}^{m} b_k\mu(F_k) = \int\varphi + \int\psi,\end{aligned}$$

on hem emprat

$$\sum_{k=1}^{m}\mu(E_j\cap F_k) = \mu(\cup_{k=1}^{m}(E_j\cap F_k)) = \mu(E_j\cap(\cup_{k=1}^{m}F_k)) = \mu(E_j\cap X) = \mu(E_j)$$

i el mateix per a $\sum_{j=1}^{n}\mu(E_j\cap F_k)=\mu(F_k)$.

3. Escrivint

$$\varphi\mathbb{I}_E = \sum_{j=1}^{n} a_j\mathbb{I}_{E_j}\mathbb{I}_E = \sum_{j=1}^{n} a_j\mathbb{I}_{E_j\cap E} + 0\cdot\mathbb{I}_{\overline{E}},$$

tindrem, per la linealitat ja demostrada,

$$\begin{aligned}\lambda(E) &= \int\varphi\mathbb{I}_E \,\mathrm{d}\mu = \int\left(\sum_{j=1}^{n} a_j\mathbb{I}_{E_j\cap E}\right)\mathrm{d}\mu\\ &= \sum_{j=1}^{n} a_j\int\mathbb{I}_{E_j\cap E}\,\mathrm{d}\mu = \sum_{j=1}^{n}\mu(E_j\cap E),\end{aligned}$$

i és fàcil ara comprobar que això és efectivament una mesura. □

Ara ja podem introduir la integral d'una funció qualsevol de $\mathcal{M}^+(X,\mathcal{X})$.

Donat un espai de mesura $(X,\mathcal{X},\mu)$ i $f\in\mathcal{M}^+(X,\mathcal{X})$, definim **la integral de f respecte de μ** com

$$\int f\,\mathrm{d}\mu = \sup_{\varphi}\int\varphi\,\mathrm{d}\mu \in [0,+\infty)\cup\{+\infty\}$$

on el suprem és respecte a totes les funcions simples $\varphi\in\mathcal{M}^+(X,\mathcal{X})$ tals que

$$0\le\varphi(x)\le f(x)\quad\forall\, x\in X.$$

Si $E\in\mathcal{X}$, llavors $f\mathbb{I}_E$ també és de $\mathcal{M}^+(X,\mathcal{X})$ i definim **la integral de f respecte de μ sobre E** com

$$\int_E f\,\mathrm{d}\mu = \int f\mathbb{I}_E\,\mathrm{d}\mu.$$

Com a primera propietat, demostrarem que la integral d'una funció de $M^+(X,\mathcal{X})$ és monòtona respecte a l'integrant i el conjunt d'integració.

Lema 3.16 *Siguin $f, g \in M^+(X, \mathcal{X})$ i $E, F \in \mathcal{X}$.*

1. *Si $f \leq g$ llavors $\int f \leq \int g$.*
2. *Si $E \subset F$ llavors $\int_E f \leq \int_F f$.*

Demostració.

1. Si φ és una funció simple de $M^+(X, \mathcal{X})$ tal que $0 \leq \varphi \leq f$, també verificarà $0 \leq \varphi \leq g$. Per tant
$$\int f = \sup_{0 \leq \varphi \leq f} \int \varphi \leq \sup_{0 \leq \varphi \leq g} \int \varphi = \int g.$$
2. Com que $f\mathbb{I}_E \leq f\mathbb{I}_F$, el resultat es dedueix de l'apartat anterior. □

Podem ara demostrar ja el resultat més important de la integral de funcions de $\mathcal{M}^+(X, \mathcal{X})$.

Teorema 3.17 *(Teorema de convergència monòtona) Si (f_n) és una successió monòtonament creixent, i.e. $\forall n$, $\forall x \in X$, $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$, de funcions de $M^+(X, \mathcal{X})$, i si (f_n) convergeix vers f puntualment, llavors*
$$\int f = \lim_n \int f_n.$$

Demostració. Del Corol·lari 3.6 es dedueix que si $f_n \in M^+(X, \mathcal{X})$, llavors també $f \in M^+(X, \mathcal{X})$, i per tant té sentit $\int f$. Com que $f_n \leq f$, del Lema 3.16 es dedueix
$$\int f_n \leq \int f \quad \forall n$$
i per tant (a partir d'ara ometrem la indicació de respecte a quína variable es fa el límit, sempre que això sigui evident pel contexte)
$$\lim \int f_n \leq \int f,$$
i només ens queda demostrar la desigualtat oposada. Sigui $\alpha \in \mathbb{R}$ amb $0 < \alpha < 1$, i sigui φ una funció simple de $M^+(X, \mathcal{X})$ tal que $0 \leq \varphi \leq f$. Sigui
$$A_n = \{x \in X \ ; \ f_n(x) \geq \alpha\varphi(x)\}.$$
És fàcil veure que $A_n \in \mathcal{X}$, i que $A_n \subset A_{n+1}$. A més $X = \cup_{n \geq 1} A_n$. Eefectivament, si $x \in X$ no pertany a cap A_n, vol dir que $\forall n$, $f_n(x) < \alpha\varphi(x)$. Però $\alpha\varphi(x) \leq \alpha f(x)$ i llavors
$$\forall n \ \ f_n(x) < \alpha f(x),$$
amb $0 < \alpha < 1$, de manera que $\lim\limits_n f_n(x) \neq f(x)$ per a aquest x, en contra de la hipòtesi de convergència puntual a tot X.

Emprant els lemes 3.15 i 3.16, tindrem
$$\alpha \int_{A_n} \varphi = \int_{A_n} \alpha\varphi \leq \int_{A_n} f_n \leq \int f_n. \tag{3.9}$$
A més, emprant la mesura generada per φ i la relació (3.5) de la Proposició 3.9, obtenim
$$\begin{aligned} \int \varphi &= \int \varphi\mathbb{I}_{\cup_{n\geq 1} A_n} = \lambda(\cup_{n \geq 1} A_n) \\ &= \lim \lambda(A_n) = \lim \varphi\mathbb{I}_{A_n} = \lim \int_{A_n} \varphi. \end{aligned}$$

Prenent el límit de (3.9) i emprant aquesta darrera relació ens queda

$$\alpha \int \varphi \leq \lim \int f_n,$$

i com que α pot ser arbitràriament proper a 1,

$$\int \varphi \leq \lim \int f_n.$$

Aquesta construcció es pot fer per a qualsevol φ de les que entren en el càlcul de $\int f$. Per tant

$$\int f = \sup_{0 \leq \varphi \leq f} \int \varphi \leq \lim \int f_n.$$

□

Cal notar que pot donar-se el cas $\int f = +\infty = \lim \int f_n$.

Anem a veure algunes conseqüències del Teorema de Convergència Monòtona (TCM). El primer resultat és el de linealitat.

Corol·lari 3.18 *Sigui $c \geq 0$, $f, g \in \mathcal{M}^+(X, \mathcal{X})$. Llavors*

$$\int (cf) = c \int f, \quad \int (f+g) = \int f + \int g.$$

Demostració. Si $c = 0$ és evident, ja que cf és idènticament zero. Si $c > 0$, sigui (φ_n) una successió de funcions simples monòtonament creixent de $\mathcal{M}^+(X, \mathcal{X})$ que convergeixen cap a f (per exemple, la donada a la Proposició 3.7). Llavors $(c\varphi_n)$ és una successió amb les mateixes propietats però que convergeix a cf. Emprant TCM i la linealitat de la integral de funcions simples, tindrem

$$\int cf \overset{\text{TCM}}{=} \lim \int c\varphi_n = c \lim \int \varphi_n \overset{\text{TCM}}{=} c \int f.$$

Siguin ara (φ_n) i (ψ_n) monòtonament creixents cap a f i g respectivament. Llavors $(\varphi_n + \psi_n)$ és monòtonament creixent cap a $f + g$ i amb els mateixos arguments tenim

$$\int (f+g) \overset{\text{TCM}}{=} \lim \int (\varphi_n + \psi_n) = \lim \int \varphi_n + \lim \int \psi_n \overset{\text{TCM}}{=} \int f + \int g.$$

□

El següent resultat indica qué es pot dir de les successions no monòtones.

Lema 3.19 *(Lema de Fatou) Si (f_n) és una successió de funcions de $\mathcal{M}^+(X, \mathcal{X})$,*

$$\int \liminf f_n \leq \liminf \int f_n.$$

Demostració. Sigui $g_m = \inf\{f_m, f_{m+1}, \ldots\}$, de manera que $g_m \leq f_n$ si $m \leq n$. Llavors

$$m \leq n \Rightarrow \int g_m \leq \int f_n$$

i per tant

$$\int g_m \leq \liminf \int f_n.$$

La successió (g_m) és creixent i convergeix cap a $\liminf f_n$. Aplicant-hi TCM tenim

$$\lim \int g_m = \int \lim g_m = \int \liminf f_n,$$

i combinant-ho amb el resultat anterior,

$$\int \liminf f_n = \lim \int g_m \leq \lim \liminf \int f_n = \liminf \int f_n,$$

tal com voliem. □

Comentaris:

- No cal que la successió sigui convergent. Fixem-nos que $\liminf f_n(x) \geq 0 \ \forall x$ i que $\liminf \int f_n \geq 0$.
- El resultat del lema de Fatou deixa de ser cert per a funcions que no siguin nonegatives, amb la definició d'integral que donarem més endavant.

De la mateixa manera que una funció simple definia una mesura a través de la integral, ara podem demostrar el mateix per a una funció qualsevol de $\mathcal{M}^+(X, \mathcal{X})$.

Corol·lari 3.20 *Si $f \in \mathcal{M}^+(X, \mathcal{X})$, llavors*

$$\lambda(E) = \int_E f$$

defineix una mesura a $\mathcal{X}$.

Demostració. Com que $f \geq 0$, serà $\lambda(E) \geq 0 \ \forall E \in \mathcal{X}$. Com que $f\mathbb{I}_\emptyset = 0$ i $\lambda(\emptyset) = 0$. Per veure que λ és numerablement additiva, sigui (E_n) una successió de conjunts disjunts de $\mathcal{X}$ amb $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = E$, i sigui

$$f_n = \sum_{k=1}^{n} f\mathbb{I}_{E_k}.$$

Llavors

$$\int f_n = \sum_{k=1}^{n} \int f\mathbb{I}_{E_k} = \sum_{k=1}^{n} \lambda(E_k).$$

Com que (f_n) tendeix a $f\mathbb{I}_E$ de forma monòtonament creixent, serà

$$\lambda(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \lambda(E) = \int f\mathbb{I}_E = \int \lim f_n \stackrel{\text{TCM}}{=} \lim \int f_n = \lim \sum_{k=1}^{n} \lambda(E_k) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n).$$

□

El següent resultat mostra que una funció que sigui zero gairebé arreu, respecte a la mesura que tinguem, té una integral nul·la respecte a aquesta mesura, i a l'inrevés.

Corol·lari 3.21 *Sigui un espai de mesura $(X, \mathcal{X}, \mu)$ i $f \in \mathcal{M}^+(X, \mathcal{X})$. Llavors*

$$\int f \ d\mu = 0 \Longleftrightarrow f = 0 \quad \mu\text{-}g.a.$$

Demostració. Si $\int f = 0$ sigui la successió creixent de conjunts

$$E_n = \{x \in X | f(x) \geq \frac{1}{n}\},$$

de manera que

$$f \geq \frac{1}{n}\mathbb{I}_{E_n}.$$

Llavors

$$0 = \int f \geq \int \frac{1}{n}\mathbb{I}_{E_n} = \frac{1}{n}\mu(E_n) \geq 0,$$

d'on $\mu(E_n) = 0 \ \forall n$. Sigui el conjunt

$$E = \{x \in X \ ; \ f(x) > 0\} = \cup_{n=1}^{\infty} E_n.$$

Com que els E_n formen una successió creixent,

$$\mu(E) = \mu(\cup_{n=1}^{\infty} E_n) = \lim \mu(E_n) = \lim 0 = 0$$

i per tant el conjunt de valors on f és diferent de zero té mesura nul·la, tal com voliem veure.

Sigui ara $f = 0$ μ-g.a. i sigui de nou $E = \{x \in X \ ; \ f(x) > 0\}$, que té mesura nul·la per hipòtesi. Sigui $f_n = n\mathbb{I}_E$. Es té

$$\lim f_n(x) = \begin{cases} +\infty & f(x) > 0 \\ 0 & f(x) = 0, \end{cases}$$

i per tant $f \leq \lim f_n = \liminf f_n$. Aplicant el lema de Fatou tindrem

$$0 \leq \int f \leq \int \liminf f_n \overset{\text{Fatou}}{\leq} \liminf \int f_n = \liminf \int n\mathbb{I}_E = \liminf n\mu(E) = \liminf 0 = 0,$$

d'on $\int f = 0$. □

En el mateix esperit, veurem ara que el Teorema de Convergència Monòtona no deixa de ser vàlid si la convergència és a tot arreu excepte excepte en un conjunt de mesura nul·la.

Corol·lari 3.22 *(Generalització del Teorema de Convergència Monòtona) Si (f_n) és una successió de funcions de $\mathcal{M}^+(X, \mathcal{X})$, monòtonament creixent cap a f excepte en un conjunt de mesura nul·la, llavors*

$$\int f = \lim \int f_n.$$

Demostració. Sigui $N \in \mathcal{X}$ amb $\mu(N) = 0$ el conjunt on (f_n) no creix monòtonament, i sigui $M = X - N$. Tindrem que $(f_n\mathbb{I}_M)$ convergeix monòtonament cap a $f\mathbb{I}_M$ a tot X i

$$\int f\mathbb{I}_M \overset{\text{TCM}}{=} \lim \int f_n\mathbb{I}_M.$$

Com que $\mu(N) = 0$, les funcions $f_n\mathbb{I}_N$ i $f\mathbb{I}_N$ són zero μ-g.a., i pel Corol·lari anterior,

$$\int f_n\mathbb{I}_N = 0 = \int f\mathbb{I}_N.$$

Com que $f = f\mathbb{I}_M + f\mathbb{I}_N$ i $f_n = f_n\mathbb{I}_M + f_n\mathbb{I}_N$,

$$\begin{aligned}\int f &= \int (f\mathbb{I}_M + f\mathbb{I}_N) = \int f\mathbb{I}_M + \int f\mathbb{I}_N = \int f\mathbb{I}_M = \lim \int f_n\mathbb{I}_M \\ &= \lim \left(\int f_n\mathbb{I}_M + \underbrace{\int f_n\mathbb{I}_N}_{=0\ \forall n} \right) = \lim \int (f_n\mathbb{I}_M + f_n\mathbb{I}_N) = \lim \int f_n.\end{aligned}$$

□

La darrera conseqüència del Teorema de Convergència Monòtona que veurem permet commutar la integral amb una sèrie.

Corol·lari 3.23 *Sigui (g_n) una successió de funcions de $\mathcal{M}^+(X, \mathcal{X})$. Llavors*

$$\int \left(\sum_{n=1}^{\infty} g_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \int g_n.$$

Demostració. Sigui $f_n = \sum_{k=1}^{n} g_k$. Tenim que (f_n) és una successió monòtonament creixent (per la no negativitat de les g_n) de funcions de $\mathcal{M}^+(X, \mathcal{X})$ i per tant, si $f = \lim f_n$,

$$\int \left(\sum_{n=1}^{\infty} g_n \right) = \int f \overset{\text{TCM}}{=} \lim \int f_n = \lim \int \sum_{k=1}^{n} g_k = \lim \sum_{k=1}^{n} \int g_k = \sum_{n=1}^{\infty} \int g_n.$$

□

3.7 Funcions integrables. El Teorema de Convergència Dominada

A la Secció anterior hem definit la integral respecte de la mesura μ per a funcions de $\mathcal{M}^+(X, \mathcal{X})$, i el resultat podia ser $+\infty$. Volem discutir ara la integració de funcions mesurables que puguin prendre valors positius i negatius. És convenient requerir que les funcions i les seves integrals prenguin valors a $\mathbb{R}$ en lloc de $\mathbb{R}^*$, per tal d'evitar les expressions indefinides del tipus $\infty - \infty$.

El conjunt $L = L(X, \mathcal{X}, \mu)$ de funcions **integrables** o **sumables** està format per les funcions $f : X \to \mathbb{R}$ $\mathcal{X}$-mesurables tals que f^+ i f^- tenen integrals finites respecte de μ. La integral de f respecte de μ es defineix llavors com

$$\int f \, \mathrm{d}\mu = \int f^+ \, \mathrm{d}\mu - \int f^- \, \mathrm{d}\mu,$$

i si $E \in \mathcal{X}$,

$$\int_E f \, \mathrm{d}\mu = \int_E f^+ \, \mathrm{d}\mu - \int_E f^- \, \mathrm{d}\mu.$$

De fet, és fàcil veure que si $f = f_1 - f_2$, on f_1 i f_2 són funcions mesurables no negatives amb integral finita (no necessàriament f^+ i f^-) llavors

$$\int f = \int f_1 - \int f_2.$$

En efecte, és immediat que $f^+ + f_2 = f_1 + f^-$, essent les quatre funcions mesurables i no negatives. Per tant, per la linealitat de la Secció precedent,

$$\int f^+ + \int f_2 = \int f_1 + \int f^-,$$

i com que totes les integrals són finites,

$$\int f = \int f^+ - \int f^- = \int f_1 - \int f_2.$$

El següent resultat que veurem es coneix com la propietat d'integrabilitat absoluta de la integral de Lebesgue. Recordem que si una integral de Riemann pròpia d'una funció existeix, també existeix la integral del seu valor absolut, però això deixa de ser cert en conjunts no fitats. Per exemple, com a integral de Riemann,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$$

però

$$\int_0^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right|\,\mathrm{d}x = +\infty.$$

Aquesta situació no pot donar-se per a la integral de Lebesgue:

Teorema 3.24 *Una funció mesurable f és de L si i sols si $|f|$ és de L, i llavors*

$$\left|\int f\right| \leq \int |f|.$$

Demostració. $f \in L$ sii f^+ i f^- són de $\mathcal{M}$ i tenen integrals finites. Com que $|f|^+ = |f| = f^+ + f^-$ i $|f|^- = 0$, resulta que $|f|^+$ i $|f|^-$ són de $\mathcal{M}$ i tenen integrals finites. Per tant si $f \in L$ llavors $|f| \in L$. Inversament, com que $f^+ \leq |f|^+$ i $f^- \leq |f|^+$, si $|f| \in L$ també $f \in L$. A més

$$\begin{aligned}\left|\int f\right| &= \left|\int f^+ - \int f^-\right| \leq \left|\int f^+\right| + \left|\int f^-\right| \\ &= \int f^+ + \int f^- = \int |f|^+ = \int |f|^+ - \int |f|^- = \int |f|.\end{aligned}$$

□

Corol·lari 3.25 *Si f és mesurable, g és integrable i $|f| \leq |g|$, llavors f és integrable i*

$$\int |f| \leq \int |g|.$$

Demostració. Si f és mesurable llavors $|f|$ és mesurable, i com que $|f| \leq |g|$ serà

$$\int |f| \leq \int |g|.$$

Si $\int |g| < +\infty$ també serà $\int |f| < +\infty$ i per tant $|f| \in L$, d'on $f \in L$. □

Anem ara a veure la linealitat (que ja hem vist per a funcions simples i per a funcions no negatives).

Teorema 3.26 *Si $f, g \in L$ i $\alpha \in \mathbb{R}$ llavors αf i $f+g$ també són de L i*

$$\int(\alpha f) = \alpha \int f, \qquad \int(f+g) = \int f + \int g.$$

Demostració. Si $\alpha = 0$ és evident. Si $\alpha > 0$ llavors $(\alpha f)^+ = \alpha f^+$, $(\alpha f)^- = \alpha f^-$, d'on

$$\begin{aligned}\int(\alpha f) &= \int(\alpha f)^+ - \int(\alpha f)^- = \int(\alpha f^+) - \int(\alpha f^-)\\ &= \alpha \int f^+ - \alpha \int f^- = \alpha\left(\int f^+ - \int f^-\right) = \alpha \int f,\end{aligned}$$

mentre que si $\alpha < 0$ llavors es té $(\alpha f)^+ = -\alpha f^-$, $(\alpha f)^- = -\alpha f^+$ i es fa un raonament semblant emprant que $-\alpha > 0$.

Si f i g són de L llavors també ho són $|f|$ i $|g|$. Com que $|f+g| \leq |f| + |g|$, és immediat veure, emprant la linealitat per a funcions no negatives, que $|f+g|$, i per tant $f+g$, també són de L. Com que

$$f + g = (f^+ + g^+) - (f^- + g^-)$$

i tant $f^+ + g^+$ com $f^- + g^-$ són funcions mesurables no negatives, serà

$$\int(f+g) = \int(f^+ + g^+) - \int(f^- + g^-) = \int f^+ + \int g^+ - \int f^- - \int g^- = \int f + \int g.$$

□

El següent resultat és el més important dels que permeten intercanviar el límit amb la integral.

Teorema 3.27 *(Teorema de Convergència Dominada) Sigui (f_n) una successió de funcions mesurables que convergeix μ-g.a. a una funció f. Si existeix una funció integrable g tal que $|f_n| \leq g$ $\forall n$, llavors f és integrable i*

$$\int f = \lim \int f_n.$$

Demostració. Redefinint f_n i f en un conjunt de mesura nul·la, podem suposar que la convergència és a tot X i això no afecta el valor de les integrals (completar els detalls es deixa com a exercici pel lector). Com que les f_n són mesurables i $|f_n| \leq g$, tindrem que les f_n són integrables. Per ser límit de mesurables, f és mesurable, i $|f_n| \leq g$ implica $|f| \leq g$, de manera que f també és integrable.

Com que $g + f_n \leq 0$, podem aplicar el lema de Fatou i la linealitat i escriure

$$\begin{aligned}\int g + \int f &= \int(g+f) = \int(g + \lim f_n) = \int(g + \liminf f_n) = \int(\liminf(g + f_n) \leq\\ &\overset{\text{Fatou}}{\leq} \liminf \int(g+f_n) = \liminf\left(\int g + \int f_n\right) = \int g + \liminf \int f_n,\end{aligned}$$

i per tant, com que $\int g < +\infty$,

$$\int f \leq \liminf \int f_n.$$

Com que $g - f_n \geq 0$, el mateix procediment dóna

$$\int g - \int f = \int(g - f) \leq \liminf \int(g - f_n) = \int g - \limsup \int f_n,$$

on hem emprat que $\liminf (-A) = -\limsup A$. D'aquí

$$\limsup \int f_n \leq \int f.$$

Combinant ambdues relacions s'obté

$$\limsup \int f_n \leq \int f \leq \liminf \int f_n$$

i per tant

$$\int f = \limsup \int f_n = \liminf \int f_n = \lim \int f_n.$$

□

3.8 Relació entre la integral de Riemann i la de Lebesgue

A la Secció 3.4 hem construït una mesura en una σ-àlgebra que generalitza la longitud d'un interval. Ens podem preguntar què té a veure la integral de Lebesgue a $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \lambda)$ amb la integral de Riemann. Obviament cal esperar que coincideixin quan aquesta darrera existeix, ja que intuitivament estem calculant àrees en ambdós casos. El resultat precís és el següent

Teorema 3.28 *Si f és integrable de Riemann en $[a, b]$, llavors $f \cdot \mathbb{I}_{[a,b]} \in L(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \lambda)$ i*

$$\int f \cdot \mathbb{I}_{[a,b]} \; d\lambda = \int_a^b f(x) \; dx.$$

Demostració. Vegeu pp 294-300 de [Spr87]. □

Recordem que si la integral de Riemann és impròpia sobre un conjunt no fitat, la integral de Lebesgue pot no exisitir. Si f és absolutament integrable de Riemann a $\mathbb{R}$ però, llavors també ho és de Lebesgue. En efecte, sigui f tal que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-n}^{n} |f(x)| \,\mathrm{d}x < +\infty.$$

Pel teorema anterior, tenim

$$\int |f| \cdot \mathbb{I}_{[-n,n]} \,\mathrm{d}\lambda = \int_{-n}^{n} |f(x)| \,\mathrm{d}x, \quad \forall n.$$

Definint $g_n = |f| \cdot \mathbb{I}_{[-n,n]}$, tenim $g_{n+1} \geq g_n \geq 0$ i, aplicant el TCM,

$$\begin{aligned} +\infty \quad &> \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| \,\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \int_{-n}^{n} |f(x)| \,\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \int |f| \cdot \mathbb{I}_{[-n,n]} \,\mathrm{d}\lambda \\ &\overset{\text{TCM}}{=} \int |f| \lim_{n\to+\infty} \mathbb{I}_{[-n,n]} \,\mathrm{d}\lambda = \int |f| \,\mathrm{d}\lambda \end{aligned}$$

i per tant $|f|$, i f, són de $L(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \lambda)$. La igualtat de les integrals sense el valor absolut s'obté llavors aplicant el mateix raonament a les parts positiva i negativa.

3.9 Integrals depenents de paràmetres

A vegades es consideren integrals on l'integrand depèn d'un paràmetre real. Anem a veure com el TCD permet tractar aquestes situacions. En el que segueix, f serà una funció real definida a $X \times [a, b]$, i suposarem que la funció
$$x \mapsto f(x, t)$$
és $\mathcal{X}$-mesurable per a cada $t \in [a, b]$. Les hipòtesis addicionals s'especificaran en cada cas. Per evitar confusions amb el paràmetre t, indicarem la integració de Lebesgue en X mitjançant $\mathrm{d}\mu(x)$.

Lema 3.29 *Suposem que, per a algun* $t_0 \in [a, b]$,

$$f(x, t_0) = \lim_{t \to t_0} f(x, t), \quad \forall x \in X,$$

i que existeix una funció integrable $g \in L(X, \mathcal{X}, \mu)$ *tal que* $|f(x, t)| \leq g(x)$, $\forall t \in [a, b]$, $\forall x \in X$. *Aleshores*
$$\int f(x, t_0)\ d\mu(x) = \lim_{t \to t_0} \int f(x, t)\ d\mu(x).$$

Demostració. Sigui (t_n), $t_n \in [a, b]$ $\forall n$, amb $t_n \to t_0$. Definim $f_n(x) = f(x, t_n)$. per hipòtesi tenim
$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} f(x, t_n) = f(x, \lim_{n\to\infty} t_n) = f(x, t_0)$$
i llavors

$$\begin{aligned}\int f(x, t_0)\ \mathrm{d}\mu(x) &= \int \lim_{n\to\infty} f_n(x)\ \mathrm{d}\mu(x) \overset{\text{TCD}}{=} \lim_{n\to\infty} \int f_n(x)\ \mathrm{d}\mu(x) \\ &= \lim_{n\to\infty} \int f(x, t_n)\ \mathrm{d}\mu(x) = \lim_{t\to t_0} \int f(x, t)\ \mathrm{d}\mu(x).\end{aligned}$$

□

Corol·lari 3.30 *Si la funció* $t \mapsto f(x, t)$ *és contínua en* $[a, b]$ $\forall x \in X$ *i si existeix* $g \in L(X, \mathcal{X}, \mu)$ *tal que* $|f(x, t)| \leq g(x)$ $\forall t \in [a, b]$, $\forall x \in X$, *llavors la funció*

$$F(t) = \int f(x, t)\ d\mu(x)$$

és contínua en $[a, b]$.

Demostració. Podem aplicar el Lema 3.29 a qualsevol punt $t_0 \in [a, b]$, i llavors

$$\lim_{t\to t_0} F(t) = \lim_{t\to t_0} \int f(x, t)\ \mathrm{d}\mu(x) \overset{3.29}{=} \int f(x, t_0)\ \mathrm{d}\mu(x) = F(t_0).$$

□

Corol·lari 3.31 *Suposem que la funció* $x \mapsto f(x, t_0)$ *és integrable per a algun* $t_0 \in [a, b]$, *que* $\frac{\partial f}{\partial t}(x, t)$ *existeix en* $X \times [a, b]$, *i que existeix* $g \in L(X, \mathcal{X}, \mu)$ *tal que*

$$|\frac{\partial f}{\partial t}(x, t)| \leq g(x) \forall t \in [a, b], \forall x \in X.$$

Llavors la funció

$$F(t) = \int f(x,t)\ d\mu(x)$$

és derivable en $[a,b]$ *i*

$$F'(t) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\ d\mu(x).$$

Demostració. Sigui $t \in [a,b]$ i sigui $(t_n) \subset [a,b]$, $t_n \to t$, $t_n \neq t$. Llavors

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x,t) = \lim_{t_n \to t} \frac{f(x,t_n) - f(x,t)}{t_n - t},\ x \in X.$$

La funció $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)$ és per tant mesurable per a cada t, per ser límit de mesurables. Per a cada $x \in X$ podem aplicar el teorema del valor mig (respecte a la variable t) i deduir que existeix s entre t_0 i t tal que

$$f(x,t) - f(x,t_0) = (t - t_0)\frac{\partial f}{\partial t}(x,s).$$

Per tant

$$|f(x,t)| \leq |f(x,t_0)| + |t - t_0| g(x),$$

de manera que $x \mapsto f(x,t)$ és integrable per a cada $t \in [a,b]$. Per tant, emprant la linealitat, si $t_n \neq t$,

$$\frac{F(t_n) - F(t)}{t_n - t} = \int \frac{f(x,t_n) - f(x,t)}{t_n - t} \mathrm{d}\mu(x).$$

L'integrand està dominat en valor absolut per $g(x)$ i per tant

$$\begin{aligned} \int \frac{\partial f}{\partial t} \mathrm{d}\mu(x) &= \int \lim_{n\to\infty} \frac{f(x,t_n) - f(x,t)}{t_n - t} \mathrm{d}\mu(x) \overset{\text{TCD}}{=} \lim_{n\to\infty} \int \frac{f(x,t_n) - f(x,t)}{t_n - t} \mathrm{d}\mu(x) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{F(t_n) - F(t)}{t_n - t} = F'(t). \end{aligned}$$

□

Corol·lari 3.32 *Si la funció* $t \mapsto f(x,t)$ *és contínua en* $[a,b]$ $\forall x \in X$ *i si existeix* $g \in L(X, \mathcal{X}, \mu)$ *tal que* $|f(x,t)| \leq g(x)$ $\forall t \in [a,b]$, $\forall x \in X$, *llavors*

$$\int_a^b \left\{ \int f(x,t)\ d\mu(x) \right\} dt = \int \left\{ \int_a^b f(x,t)\ dt \right\} d\mu(x),$$

on les integrals respecte a t *es consideren en el sentit de Riemann.*

Demostració. Recordem que, per a la integral de Riemann, si ϕ és contínua en $[a,b]$,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_a^t \phi(s)\ \mathrm{d}s = \phi(t), \quad t \in [a,b].$$

Aplicant aquest resultat a $h(x,t) = \int_a^t f(x,s)\ \mathrm{d}s$, tindrem

$$\frac{\partial h}{\partial t}(x,t) = f(x,t),\ \forall t \in [a,b], \forall x \in X.$$

La integral de Riemann $\int_a^t f(x,s)\ \mathrm{d}s$ serà el límit d'una successió de sumes de Riemann, cada una de les quals és una funció mesurable. Per tant $x \mapsto h(x,t)$ és mesurable per a cada t. A més

$$|h(x,t)| \leq \int_a^t |f(x,s)|\ \mathrm{d}s \leq \int_a^t g(x)\ \mathrm{d}s = g(x)(t-a) \leq g(x)(b-a),$$

de manera que $x \mapsto h(x,t)$ és integrable $\forall t \in [a,b]$. Sigui ara

$$H(t) = \int h(x,t)\ \mathrm{d}\mu(x).$$

Del Corol.lari 3.31 es segueix

$$H'(t) \overset{3.31}{=} \int \frac{\partial h}{\partial t}(x,t)\ \mathrm{d}\mu(x) = \int f(x,t)\ \mathrm{d}\mu(x) \equiv F(t).$$

Aplicant el teorema fonamental del càlcul integral (de Riemann) s'obté llavors

$$\int_a^b F(t)\ \mathrm{d}t = H(b) - H(a) = \int (h(x,b) - h(x,a))\ \mathrm{d}\mu(x) = \int \left\{ \int_a^b f(x,t)\ \mathrm{d}t \right\} d\mu(x).$$

□

3.10 Espais L_p

En aquesta Secció es mostra com dotar d'una estructura d'espai de Banach el conjunt de funcions integrables d'un espai de mesura $(X, \mathcal{X}, \mu)$. Si $f \in L(X, \mathcal{X}, \mu)$ es defineix

$$N_\mu(f) = \int |f|\ \mathrm{d}\mu. \tag{3.10}$$

Proposició 3.33 *L'espai L és un espai vectorial respecte de les operacions suma i producte per escalar, i N_μ és una seminorma a L. A més $N_\mu(f) = 0$ sii $f = 0$ μ-g.a.*

Demostració. Que és espai vectorial s'ha vist en el Teorema 3.26. Està clar que

$$0 \leq N_\mu(f) < +\infty \quad \forall f \in L$$

i que $N_\mu(\alpha f) = |\alpha| N_\mu(f)$, $N_\mu(f+g) \leq N_\mu(f) + N_\mu(g)$. Finalment, el Corol·lari 3.21 ens diu que $N_\mu(f) = 0$ sii $|f| = 0$ μ-g.a., és a dir, sii $f = 0$ μ-g.a. □

Per tal de convertir L en un espai normat, haurem d'identificar dues funcions que sols difereixin sobre un conjunt de mesura nul·la. Dues funcions $f, g \in L$ s'anomenen μ-equivalents, i s'escriu $f \overset{\mu}{\sim} g$, si són iguals μ-g.a.

Lema 3.34 *La relació $\overset{\mu}{\sim}$ és d'equivalència.*

Demostració. La reflexivitat i simetria són evidents. Si $f \overset{\mu}{\sim} g$ i $g \overset{\mu}{\sim} h$ tindrem $f(x) = g(x)$ si $x \notin N_1$, amb $\mu(N_1) = 0$, i $g(x) = h(x)$ si $x \notin N_2$, amb $\mu(N_2) = 0$. Per tant $f(x) = g(x)$ si $x \notin N_1 \bigcup N_2$ i sols cal veure que $\mu(N_1 \bigcup N_2) = 0$.

Tenim

$$\begin{aligned} 0 &\leq \mu(N_1 \bigcup N_2) = \int \mathbb{I}_{N_1 \bigcup N_2} \leq \int (\mathbb{I}_{N_1} + \mathbb{I}_{N_2}) = \int \mathbb{I}_{N_1} + \int \mathbb{I}_{N_2} \\ &= \mu(N_1) + \mu(N_2) = 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

i per tant $\mu(N_1 \bigcup N_2) = 0$. □

El conjunt de classes d'equivalència $\{[f] \ ; \ f \in L\}$ es designa per $L_1 = L_1(X, \mathcal{X}, \mu)$ i s'anomena l'espai de Lebesgue L_1. Si $[f] \in L_1$, definim la seva norma per

$$|| \ [f] \ ||_1 = \int |f| \ \mathrm{d}\mu, \tag{3.11}$$

on f és qualsevol element de $[f]$.

Lema 3.35 *La norma donada per (3.11) està ben definida.*

Demostració. Si f i g són representants de $[f]$, vol dir que $f = g$ sobre $M = X - N$, on $\mu(N) = 0$. Com que $|f|\mathbb{I}_N$ i $|g|\mathbb{I}_N$ són zero μ-g.a., les seves integrals són nul·les i

$$\begin{aligned} \int |f| &= \int (|f|\mathbb{I}_M + |f|\mathbb{I}_N) = \int |f|\mathbb{I}_M + \int |f|\mathbb{I}_N = \int |f|\mathbb{I}_M \\ &= \int |g|\mathbb{I}_M = \int |g|\mathbb{I}_M + \int |g|\mathbb{I}_N = \int (|g|\mathbb{I}_M + |g|\mathbb{I}_N) = \int |g|. \end{aligned}$$

□

Teorema 3.36 $(L_1, || \cdot ||_1)$ *és un espai normat.*

Demostració. Conseqüència de la proposició i els dos lemes precedents. □

Encara que cal recordar que els elements de L_1 són classes d'equivalència, és costum designar-les amb la notació de funcions i escriure $f \in L_1$ en lloc de $[f] \in L_1$.

L'espai L_1 es pot generalitzar de la següent manera. Si $1 \leq p < +\infty$, l'espai $L_p = L_p(X, \mathcal{X}, \mu)$ està format per les classes de μ-equivalència de funcions $\mathcal{X}$-mesurables de X amb valors a $\mathbb{R}$ tals que $|f|^p$ és integrable. En L_p es defineix

$$||f||_p = \left(\int |f|^p \ \mathrm{d}\mu \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{3.12}$$

Per veure que això és una norma a L_p, necessitarem la següent desigualtat bàsica:

Lema 3.37 *(Desigualtat de Hölder) Siguin $f \in L_p$, $g \in L_q$, amb $p > 1$ i*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Aleshores $fg \in L_1$ i

$$||fg||_1 \leq ||f||_p \cdot ||g||_q. \tag{3.13}$$

Demostració. Sigui $0 < \alpha < 1$ i sigui $\varphi(t) = \alpha t - t^\alpha$ per a $t \geq 0$. Hom té $\varphi'(t) < 0$ si $0 < t < 1$ i $\varphi'(t) > 0$ si $t > 1$, $\varphi(t) \geq \varphi(1)$ i que $\varphi(t) = \varphi(1)$ sii $t = 1$. Per tant

$$\alpha t - t^\alpha \geq \alpha - 1, \quad t \geq 0,$$

és a dir

$$t^\alpha \leq \alpha t + (1 - \alpha), \quad t \geq 0.$$

Si $a \geq 0$ i $b > 0$ i posem $t = a/b$, queda

$$\left(\frac{a}{b}\right)^\alpha \leq \alpha\frac{a}{b} + 1 - \alpha,$$

i multiplicant per b,

$$a^\alpha b^{1-\alpha} \leq \alpha a + (1-\alpha)b \tag{3.14}$$

amb igualtat només si $a = b$. Prenent $\alpha = 1/p$ s'obté

$$a^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{q}} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q},$$

i si $a = A^p$, $b = B^q$ (amb $A \geq 0$, $B > 0$) resulta

$$AB \leq \frac{A^p}{p} + \frac{B^q}{q} \tag{3.15}$$

amb igualtat sii $A^p = B^q$.

Suposem ara que $f \in L_p$, $g \in L_q$, i que $||f||_p \neq 0$, $||g||_q \neq 0$ (en cas contrari, $fg = 0$ i tot és trivial). El producte fg és $\mathcal{X}$-mesurable, i posant

$$A = \frac{|f(x)|}{||f||_p}, \quad B = \frac{|g(x)|}{||g||_q}$$

s'obté

$$\frac{|f(x)g(x)|}{||f||_p||g||_q} \leq \frac{|f(x)|^p}{p||f||_p^p} + \frac{|g(x)|^q}{q||g||_q^q}. \tag{3.16}$$

Com que, per hipòtesi, els dos termes de la dreta són integrables, es dedueix que $|fg|$ és integrable. A més, integrant (3.16),

$$\frac{||fg||_1}{||f||_p||g||_q} \leq \frac{1}{p||f||_p^p}\int |f|^p \,\mathrm{d}\mu + \frac{1}{q||g||_q^q}\int |g|^q \,\mathrm{d}\mu = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

□

La desigualtat de Hölder implica que el producte d'una "funció" de L_p i una de L_q és integrable si $p > 1$ i q és tal que $p + q = pq$. Dos reals que satisfan aquesta relació s'anomenen conjugats. L'únic real autoconjugat és $p = 2$ i per tant el producte de dues funcions de L_2 és integrable:

Proposició 3.38 *(Desigualtat de Cauchy-Schwarz-Bunyakovskii) Si $f, g \in L_2$, llavors fg és integrable i*

$$||fg||_1 \leq ||f||_2||g||_2.$$

Demostració. $p = q = 2$ a la desigualtat de Hölder. □

La desigualtat triangular per a $||\cdot||_p$ té nom propi:

Lema 3.39 *(Desigualtat de Minkowski) Si $f, g \in L_p$ amb $p \geq 1$. Llavors $f + g \in L_p$ i*

$$||f+g||_p \leq ||f||_p + ||g||_p.$$

Demostració. El cas $p = 1$ ja l'hem considerat i per tant suposarem $p > 1$. La suma $f + g$ és mesurable, i com que $\forall x \in X$

$$|f + g|^p \leq (2\text{màx}\{|f|, |g|\})^p \leq 2^p\{|f|^p + |g|^p\}$$

i $|f|^p$ i $|g|^p$ són integrables per hipòtesi, resulta que $|f + g|^p$ és integrable i $f + g \in L_p$. A més

$$|f + g|^p = |f + g||f + g|^{p-1} \leq \underbrace{|f||f + g|^{p-1}}_{1} + \underbrace{|g||f + g|^{p-1}}_{2}.$$

Com que $f + g \in L_p$, tenim que $|f + g|^p \in L_1$ i, escollint q conjugat de p,

$$+\infty > \int |f + g|^p = \int |f + g|^{(p-1)q} = \int \left||f + g|^{p-1}\right|^q,$$

i per tant $|f + g|^{p-1} \in L_q$. Aplicant la desigualtat de Hölder a la integral del terme 1 tindrem

$$\begin{aligned}
\int |f||f + g|^{p-1} &\leq ||f||_p \left(\int |f + g|^{(p-1)q}\right)^{1/q} \\
&= ||f||_p \left(\int |f + g|^p\right)^{1/q} = ||f||_p||f + g||_p^{p/q}.
\end{aligned}$$

Fent el mateix amb el terme 2 i ajuntant-ho tot s'obté

$$||f + g||_p^p \leq ||f||_p||f + g||_p^{p/q} + ||g||_p||f + g||_p^{p/q} = \{||f||_p + ||g||_p\} \, ||f + g||_p^{p/q}.$$

Si $A = ||f + g||_p = 0$, la desigualtat de Minkowski és trivial. Si $A \neq 0$ podem dividir per $A^{p/q}$ i queda

$$||f + g||_p^{p-p/q} \leq ||f||_p + ||g||_p$$

d'on $||f + g||_p \leq ||f||_p + ||g||_p$. □

Teorema 3.40 $(L_p, || \cdot ||_p)$, $p \geq 1$, *és un espai normat.*

Demostració. Evident de la desigualtat de Minkowski. □

L_p és complet, resultat que es coneix a vegades com a teorema de Riesz-Fischer.

Teorema 3.41 *(Teorema de completesa de L_p) L_p amb $|| \cdot ||_p$ és un espai de Banach.*

Demostració. No la fem. Una demostració pel cas $p = 2$ es pot trobar a [Fol92], i la demostració del cas general a [Bar95]. □

Per a finalitzar, anem a introduir un espai que està relacionat amb els L_p.

L'espai $L_\infty = L_\infty(X, \mathcal{X}, \mu)$ està format per les classes d'equivalència de funcions μ-g.a. iguals, $\mathcal{X}$-mesurables i reals que són fitades μ-g.a. Una funció de L_∞ s'anomena **essencialment fitada**.

Si $f \in L_\infty$ i $N \in \mathcal{X}$ amb $\mu(N) = 0$, definim

$$S(N) = \sup_{x \notin N}\{|f(x)|\},$$

i

$$||f||_\infty = \inf\{S(N) \;\; ; \;\; N \in \mathcal{X}, \mu(N) = 0\}.$$

Exemples.

1. Sigui $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{X} = \mathcal{B}$ i
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \neq 0, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$
Si N és un conjunt de mesura (de Lebesgue) nul·la, hi ha punts que no són de N i que estan tant a la vora de zero com volguem. Per tant, si $\mu(N) = 0$ llavors $S(N) = +\infty$, d'on $\inf\{S(N) \ ; \ \mu(N) = 0\} = +\infty$ i $f \notin L_\infty$.

2. De nou $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{X} = \mathcal{B}$ i
$$f(x) = \begin{cases} n & x = \pm\frac{1}{n}, \ n \in \mathbb{N}, \\ 1 & \text{altrament.} \end{cases}$$
Sigui $N = \bigcup_{n\in} \left\{-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right\}$. Com que aquest conjunt és numerable, té mesura de Lebesgue nul·la, $\mu(N) = 0$. En el complementari de N, $f(x) = 1$ i per tant f és fitada μ-g.a. De fet, la classe d'equivalència de f conté la funció constant igual a 1. És fàcil veure que $||f||_\infty = 1$.

3. Amb $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{X} = \mathcal{B}$, sigui
$$f(x) = \frac{3}{1 + x^2}.$$
Com que f està fitada per 3 a tot $\mathbb{R}$, tenim que $f \in L_\infty$. De fet, $||f||_\infty = 3$ ja que $S(N) = 3$ per a tot N de mesura nul·la.

Exercicis:

1. Si $f \in L_\infty$, llavors $|f(x)| \leq ||f||_\infty$ μ-g.a.

2. Si $A < ||f||_\infty$, existeix un conjunt de mesura no nul·la en el que $|f(x)| \geq A$.

3. $|| \cdot ||_\infty$ està ben definida. Si $f, g \in [f]$, llavors $||f||_\infty = ||g||_\infty$.

4 Sèries de Fourier

L'anàlisi de Fourier és una de les branques més actives i riques tant de la matemàtica aplicada com de l'anàlisi, i té una importància molt gran en moltes aplicacions d'enginyeria. Veurem que el marc natural de les sèries de Fourier és l'espai de les funcions de quadrat integrable, L_2. Les principals referències que emprarem són [Fol92], [Apo79] i [Sta98]. A [Fra99] es pot trobar material més avançat.

4.1 L'equació de la calor

Encara que des del punt de vista matemàtic les sèries de Fourier es poden veure de forma natural com una generalització de les idees dels espais euclidians, el seu origen històric prové de l'intent de descriure certs fenòmens físics, i començarem aquest tema presentant-ne un.

Sigui un tub molt prim i homogeni de longitud l. Si $T(x,t)$ representa la temperatura d'un punt del tub de coordenada x a l'instant t, l'equació que governa l'evolució de $T(x,t)$ és

$$\frac{\partial T}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \tag{4.1}$$

on $c^2 > 0$ és una constant que depèn de la calor específica i de la conductivitat tèrmica del material del tub. Aquesta EDP és del tipus anomenat *parabòlic*, i el que diu és que l'evolució temporal de la temperatura, per efecte de la conducció calorífica des de les parts més calentes a les més fredes, tendeix a igualar els valors de T al llarg del tub: en els punts on T és còncava (respecte de x), *i.e* a prop de mínims locals, T creix respecte del temps, mentre que a prop de màxims locals decreix. El que volem fer aquí és resoldre formalment (4.1), amb els requeriments següents:

- condicions de contorn: $0 = T(0,t) = T(l,t)$, $\forall t \geq 0$,
- condicons inicials: $T(x,0) = f(x)$, $x \in [0,l]$.

La funció f dóna el perfil inicial de temperatura, i el fet de mantenir els extrems a zero farà que per a temps gran tot el tub estigui a temperatura propera a zero.

Per resoldre el problema emprarem el mètode de separació de variables, és a dir, cercarem una solució de la forma

$$T(x,t) = A(x)B(t).$$

Substituïnt a (4.1) queda

$$\frac{B'(t)}{B(t)} = c^2 \frac{A''(x)}{A(x)}.$$

El membre de la dreta no depèn de t, i si satisfà l'equació tampoc depèn de x; ha de ser, per tant, igual a una constant, que ha de coincidir amb el membre de l'esquerra. Així doncs

$$\frac{B'(t)}{B(t)} = \alpha = c^2 \frac{A''(x)}{A(x)}.$$

La igualtat anterior proporciona dues equacions diferencials ordinàries lineals que depenen del paràmetre, de moment indeterminat, α. La primera ve donada per

$$B' = \alpha B,$$

amb solució

$$B(t) = Be^{\alpha t},$$

on B és una constant arbitrària. La solució de

$$A'' = \frac{\alpha}{c^2} A$$

és

- si $\alpha \geq 0$
$$A(x) = A_1 e^{\frac{\sqrt{\alpha}}{c}x} + A_2 e^{\frac{-\sqrt{\alpha}}{c}x}$$
amb A_1, A_2 constants arbitràries. Si s'imposen les condicions de contorn, això porta a que necessàriament $\alpha = 0$ i $A_1 = -A_2$, de manera que de fet $A(x) = 0$ $\forall x \in [0, l]$ i $T(x, t) = 0$ $\forall x \in [0, 1], \forall t \geq 0$. Si volem obtenir solucions no trivials cal considerar per tant la segona opció:

- si $\alpha \leq 0$
$$A(x) = A_1 \cos \frac{\sqrt{-\alpha}}{c} x + A_2 \sin \frac{-\sqrt{-\alpha}}{c} x$$
amb A_1, A_2 constants arbitràries. La imposició de les condicions de contorn dóna ara $A_1 = 0$ i
$$0 = BA_2 \sin \frac{-\sqrt{-\alpha}}{c} l.$$
Posant $\alpha = -k^2$ amb $k \geq 0$ tenim, si volem solució no trivial,
$$\sin \frac{k}{c} l = 0,$$
és a dir, obtenim una col·lecció de posibles valors de k, i per tant d'α, indexats pels naturals (no cal considerar enters no positius, ja que $n = 0$ dóna solució trivial i $n < 0$ dóna una solució que és la mateixa que la positiva canviant el valor de les constants arbitràries):
$$k_n = \frac{n\pi c}{l}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Hem obtingut així una col·lecció de solucions

$$T_n(x, t) = A_n(x) B_n(t) = T_n \ \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) \ e^{-\frac{n^2 c^2 \pi^2}{l^2} t} \tag{4.2}$$

Està clar, però, que cap d'aquestes solucions satisfà la condició inicial excepte si $f(x) = A\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$ per a algun $n \in \mathbb{N}$. Per tal de satisfer la condició inicial en general podem considerar una suma infinita de solucions d'aquest tipus, amb coeficients arbitraris:

$$T(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n \ \sin\frac{n\pi}{l}x \ \ e^{-\frac{n^2c^2\pi^2}{l^2}t}. \tag{4.3}$$

Aquesta sèrie satisfà les condicions de contorn i és, formalment, solució de l'EDP. Diem formalment ja que no sabem si podem derivar la sèrie terme a terme, encara que, per a $t > 0$, sembla que això serà possible si els T_n no creixen exponencialment. Imposant la condició inicial queda

$$f(x) = T(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n \sin\frac{n\pi}{l}x, \quad x \in [0,l]. \tag{4.4}$$

Podrem per tant resoldre le nostre problema si som capaços d'expressar f com a sèrie en sinus de periodes espacials

$$\tau_n = \frac{2l}{n}$$

que són tots divisors del periode fonamental $2l$. La sèrie (4.4) és un cas especial del que s'anomena sèrie de Fourier trigonomètrica (el cas general conté també termes en cosinus, que aquí valen zero degut a les condicions de contorn).

De la forma de (4.3) ja es veu que

$$\lim_{t\to+\infty} T(x,t) = 0,$$

tal com era esperat donades les condicions de contorn imposades, que permeten el flux de calor pels extrems cap a $T = 0$. Aquest tipus de condicions, que fixen el valor de la solució en els extrems (sigui zero o no) s'anomenen condicions de contorn de Dirichlet. Si en lloc d'això es fixa el valor del gradient espacial $\frac{\partial T}{\partial x}$ en els extrems, s'obtenen les anomenades condicions de contorn de von Neumann. Per exemple,

$$\frac{\partial T}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial T}{\partial x}(l,t) = 0 \ \ \forall t \geq 0$$

corresponen a flux de calor nul pels extrems (i per tant a un valor constant en el temps de la integral espacial de T).

Exercici. Sota les condicions de flux de calor nul en els extrems, demostreu formalment que la solució de l'equació de la calor satisfà

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^l T(x,t)\ \mathrm{d}x = 0.$$

Repetiu el càlcul de la solució pel procediment de separació de variables en aquest cas.

4.2 Producte escalar i sistemes ortonormals

Per tal de descriure de manera més clara els problemes bàsics de la teoria de sèries de Fourier, és necessari introduir el concepte de producte escalar i algunes idees sobre funcions ortogonals. L'espai $L_2(I)$, on I és un interval de $\mathbb{R}$, juga un paper fonamental.

Si $f, g \in L_2(I)$, definim el seu producte escalar com el nombre real (f,g) donat per

$$(f,g) = \int_I fg. \tag{4.5}$$

Fixem-nos que el valor de la integral és finit, degut a la desigualtat de Cauchy-Schwarz-Bunyakovskii:

$$|(f,g)| = |\int_I fg| \leq \int_I |fg| = ||fg||_1 \leq ||f||_2 ||g||_2.$$

La pertinença de les funcions f i g a $L_{(I)}$ és, per tant, fonamental. El producte escalar té, entre altres, les següents propietats evidents:

1. $(f,g) = (g,f)$.
2. $(f+g,h) = (f,h) + (g,h)$.
3. $(cf,g) = c(f,g)$, $c \in \mathbb{R}$.
4. $(f,f) = ||f||_2^2$.

Donat un espai vectorial dotat d'un producte escalar $(\cdot,\cdot)$, sempre és possible definir una norma mitjançant

$$||f|| = (f,f)^{1/2},$$

i una distància

$$d(f,g) = ||f-g||,$$

i dotar-lo d'estructura d'espai normat i d'espai mètric i discutir llavors qüestions de convergència. Un espai vectorial amb producte escalar que sigui complet respecte a la norma associada al producte escalar s'anomena **espai de Hilbert**. Com que $(L_2, ||\cdot||_2)$ és un espai de Banach, resulta que L_2 amb el producte escalar (4.5) és un espai d'Hilbert.

Cal recordar que **no** tota norma permet definir un producte escalar mitjançant la *identitat de polarització*

$$(f,g) = \frac{1}{4}(||f+g||^2 - ||f-g||^2).$$

Per fer-ho, cal que la norma satisfaci la *llei del paral·lelogram*

$$||f+g||^2 + ||f-g||^2 = 2||f||^2 + 2||g||^2$$

per tal que el producte escalar sigui lineal. Naturalment, la norma associada a un producte escalar satisfà la llei del paral·lelogram.

Sigui $\mathcal{S} = (\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots)$ una col·lecció de funcions de $L_2(I)$. Si

$$(\varphi_n, \varphi_m) = 0$$

sempre que $m \neq n$, es diu que la col·lecció $\mathcal{S}$ és un **sistema ortogonal** de funcions de $L_2(I)$. Si

$$(\varphi_n, \varphi_m) = \delta_{n,m} = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ 1 & n = m \end{cases}$$

es diu que es té un **sistema ortonormal**.

Exemples de sistemes ortonormals

1. Sigui
$$\varphi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$
i
$$\varphi_{2n-1}(x) = \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \quad \varphi_{2n}(x) = \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \quad n = 1, 2, \ldots$$
Emprant
$$\begin{aligned} \cos Ax \cos Bx &= \frac{1}{2}\left[\cos(A+B)x + \cos(A-B)x\right] \\ \sin Ax \sin Bx &= \frac{1}{2}\left[\cos(A-B)x - \cos(A+B)x\right] \\ \cos Ax \sin Bx &= \frac{1}{2}\left[\sin(A+B)x + \sin(A-B)x\right] \end{aligned}$$
és fàcil veure que això és un sistema ortonormal a $L_2((-\pi,\pi))$.

2. El conjunt
$$\mathcal{S} = \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nx \right)_{n=1,2,\ldots}$$
és un sistema ortonormal a $L_2((0,\pi))$. Aquest sistema **no** es pot ampliar amb funcions cosinus i mantenir l'ortogonalitat. Per exemple
$$\int_0^{\pi} \sin nx \cos mx \; \mathrm{d}x = (1 - (-1)^{m+n}) \frac{m}{m^2 - n^2}$$
que és diferent de zero si $m+n$ és senar i $m \neq 0$.

3. El conjunt donat per
$$\varphi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{L}}, \quad \varphi_{2n-1}(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \cos \frac{2\pi n}{L} x, \quad \varphi_{2n}(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{2\pi n}{L} x, \quad n = 1, 2, \ldots$$
és un sistema ortonormal a $L_2((0,L))$, o a qualsevol $L_2((a,a+L))$, i es redueix al primer exemple considerat si $L = 2\pi$.

4. Els polinomis de Legendre
$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} (x^2 - 1)^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$
satisfan
$$\int_{-1}^{1} P_n(x) P_m(x) \; \mathrm{d}x = \delta_{n,m} \frac{4}{2n+1},$$
i per tant la col·lecció $\mathcal{S} = (\hat{P}_n)$, on
$$\hat{P}_n(x) = \frac{\sqrt{2n+1}}{2} P_n(x),$$
és un sistema ortonormal a $L_2((-1,1))$.

5. Els polinomis d'Hermite

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} e^{-x^2}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

verifiquen

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) \ \mathrm{d}x = \delta_{n,m} 2^n n! \sqrt{\pi}$$

i, definint (això ja no són polinomis)

$$\hat{H}_n(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{1}{2^{n/2}\sqrt{n!}\sqrt[4]{\pi}} H_n(x),$$

tenim un sistema ortonormal a $L_2(\mathbb{R})$.

A partir d'ara escriurem $||\cdot||$ en lloc de $||\cdot||_2$, ja que aquesta serà l'unica norma que apareixerà.

El problema bàsic de la teoria de funcions ortogonals és com aproximar el millor possible una funció $L_2(I)$ mitjançant una combinació lineal (finita!) d'elements d'un sistema ortonormal. Sigui $\mathcal{S} = (\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots)$ ortonormal a $L_2(I)$ i sigui, donat un $n \in \mathbb{N}$ fixat,

$$t_n(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k \varphi_k(x).$$

Ens preguntem com hem d'escollir els b_k de manera que la distància, en el sentit de L_2, de f a t_n sigui el més petita possible. Veurem que hi ha una única elecció dels b_k que minimitza $||f - t_n||$, però per a motivar el resultat començarem presentant un cas familiar a $\mathbb{R}^n$.

A $\mathbb{R}^n$, la millor aproximació d'un vector v per vectors d'un subespai vectorial W ve donada per la projecció ortogonal de v sobre W.

Al intentar generalitzar aquest resultat a un sistema ortonormal de $L_2(I)$ ens trobem amb el problema de que no coneixem d'antuvi l'expressió "exacta" equivalent a $v = v_1e_1 + \ldots + v_ne_n$, on $e_1, \ldots, e_n$ és una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$. Tenim, però, que la tria dels millors coeficients segueix el mateix criteri:

Teorema 4.1 *Sigui $\mathcal{S} = (\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots)$ ortonormal a $L_2(I)$ i sigui $f \in L_2(I)$. Fixat $n \in \mathbb{N}$, siguin*

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k \varphi_k(x), \quad t_n(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k \varphi_k(x),$$

on els b_k són arbitraris i

$$c_k = (f, \varphi_k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Llavors es té

$$||f - s_n|| \leq ||f - t_n||,$$

i la igualtat es verifica sii $b_k = c_k$, $k = 0, 1, \ldots, n$.

Demostració. Es tracta de veure que

$$||f - t_n||^2 = ||f||^2 - \sum_{k=0}^{n} c_k^2 + \sum_{k=0}^{n} (b_k - c_k)^2, \tag{4.6}$$

i llavors és immediat. Tenim, emprant les propietats del producte escalar,

$$||f - t_n||^2 = (f - t_n, f - t_n) = (f, f) - 2(f, t_n) + (t_n, t_n) = ||f||^2 - 2(f, t_n) + (t_n, t_n),$$

on hem emprat explícitament $(f, t_n) = (t_n, f)$. Hom té

$$\begin{aligned}
(t_n, t_n) &= \left(\sum_{k=0}^{n} b_k\varphi_k, \sum_{l=0}^{n} b_l\varphi_l\right) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n} b_k b_l(\varphi_k, \varphi_l) \\
&= \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n} b_k b_l \delta_{k,l} = \sum_{k=0}^{n} b_k^2, \\
(f, t_n) &= \left(f, \sum_{k=0}^{n} b_k\varphi_k\right) = \sum_{k=0}^{n} b_k(f, \varphi_k) = \sum_{k=0}^{n} b_k c_k,
\end{aligned}$$

de manera que

$$\begin{aligned}
||f - t_n||^2 &= ||f||^2 - 2\sum_{k=0}^{n} b_k c_k + \sum_{k=0}^{n} b_k^2 \\
&= ||f||^2 - \sum_{k=0}^{n} c_k^2 + \sum_{k=0}^{n}(b_k - c_k)^2,
\end{aligned}$$

i ja tenim (4.6). Variant les b_k a (4.6), el valor mínim serà quan el darrer terme sigui nul, és a dir, $b_k = c_k$, $k = 0, 1, \ldots, n$ i llavors t_n és c_n. Per tant

$$||f - t_n||^2 \geq ||f||^2 - \sum_{k=0}^{n} c_k^2 = ||f - s_n||^2.$$

□

Encara que en un espai com L_2 la intuició geomètrica es pot perdre, resulta tanmateix que la millor manera d'aproximar un element emprant una combinació lineal d'un nombre finit de funcions d'un sistema ortonormal continua sent mitjançant la projecció ortogonal sobre el subespai generat per aquestes funcions.

4.3 Sèrie de Fourier respecte a un sistema ortonormal

Donats $\mathcal{S} = (\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots)$ un sistema ortonormal en $L_2(I)$ i una funció $f \in L_2(I)$, definim la sèrie de Fourier de f respecte de $\mathcal{S}$ com

$$SF\mathcal{S}(f)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\varphi_n(x) \tag{4.7}$$

on els coeficients de la sèrie són

$$c_n = (f, \varphi_n) = \int_I f(x)\varphi_n(x)\, \mathrm{d}x. \tag{4.8}$$

Exemples de sèries de Fourier

1. Sèrie de Fourier trigonomètrica a $L_2((-\pi,\pi))$. La sèrie és

$$SFT(f)(x) = c_0\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(c_{2n-1}\frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}} + c_{2n}\frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}\right)$$

amb

$$\begin{aligned} c_0 &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ \mathrm{d}x \\ c_{2n-1} &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}\ \mathrm{d}x \\ c_{2n} &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}\ \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

A la majoria de llibres d'enginyeria i física, però, s'acostuma a redefinir els coeficients:

$$a_0 = 2\frac{c_0}{\sqrt{2\pi}},\ a_n = \frac{c_{2n-1}}{\sqrt{\pi}},\ b_n = \frac{c_{2n}}{\sqrt{\pi}},$$

i s'obté la forma (més popular, per raons òbvies)

$$SFT(f)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$$

amb

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ \mathrm{d}x \\ a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\ \mathrm{d}x, \quad n = 1,2,\ldots, \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\ \mathrm{d}x, \quad n = 1,2,\ldots. \end{aligned}$$

Hom ha de tenir en compte que

(a) per a calcular els coeficients, sols es necessita conèixer f entre $-\pi$ i π. Com que la sèrie de Fourier és una funció periòdica de periode 2π, podem suposar que f està estesa 2π-periòdicament fora de $(-\pi,\pi)$.

(b) emprant aquesta periodicitat, tant de f com dels sinus i cosinus, les integrals es poden calcular sobre qualsevol interval de longitud 2π, ja que per a qualsevol $a \in \mathbb{R}$

$$\int_a^{a+2\pi} = \int_a^{2\pi} + \int_{2\pi}^{a+2\pi} = \int_a^{2\pi} + \int_a^0 = \int_0^{2\pi}.$$

(c) per tal de que existeixin els coeficients de la sèrie de Fourier trigonomètrica, i per tant la sèrie, n'hi ha prou que $f \in L_1((-\pi,\pi))$, ja que el sinus i el cosinus estàn fitats. Recordem que per a espais de mesura finita, si $p > q$ llavors $L_p \subset L_q$ i per tant $L_2((-\pi,\pi)) \subset L_1((-\pi,\pi))$. Les sèries de Fourier trigonomètriques sols tenen, però, bones propietats si $f \in L_2((-\pi,\pi))$.

(d) les simetries de f poden estalviar molts càlculs. Concretament, és fàcil veure que

- Si f és antisimètrica, $a_n = 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.
- Si f és simètrica, $b_n = 0$, $n = 1, 2, \ldots$.
- Si $f + k$, amb k una constant, és antisimètrica, llavors $a_n = 0$, $n = 1, 2, \ldots$.

2. Com a exemple concret, sigui la funció de $L_2((-\pi, \pi))$ definida per

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\pi, 0), \\ 1 & x \in (0, \pi). \end{cases}$$

Hom té

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 1\ \mathrm{d}x = 1, \\
a_n &= \frac{1}{]}\pi \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\ \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 1\ \cos nx\ \mathrm{d}x = \frac{1}{n\pi} \sin nx|_0^{\pi} = 0, \\
b_n &= \frac{1}{]}\pi \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\ \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 1\ \sin nx\ \mathrm{d}x = -\frac{1}{n\pi} \cos nx|_0^{\pi} \\
&= \frac{1}{n\pi}(1 - (-1)^n) = \begin{cases} 0 & n \text{ parell}, \\ \frac{2}{n\pi} & n \text{ senar}. \end{cases}
\end{aligned}$$

Per tant

$$SFT(f)(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n \text{ senar}} \frac{2}{n\pi} \sin nx = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sin(2n+1)x.$$

A la Figura 4.1 hi apareixen f i les sumes parcials dels 1, 2, 3 i 11 primers termes no nuls de la sèrie.

3. Amb el sistema trigonomètric a $L_2((0, L))$, efectuant la mateixa redefinició de coeficients que abans, tenim

$$SFT(f)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2\pi n x}{L} + b_n \sin \frac{2\pi n x}{L} \right),$$

amb

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{2\pi n x}{L}\ \mathrm{d}x, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \\
b_n &= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{2\pi n x}{L}\ \mathrm{d}x, \quad n = 1, 2, \ldots,
\end{aligned}$$

i valen els mateixos comentaris, amb les adaptacions òbvies, que per al sistema trigonomètric a $L_2((-\pi, \pi))$.

4. El conjunt d'exponencials complexes

$$\left(e^{i \frac{2\pi n x}{L}} \right)_{n \in}$$

és, amb algunes modificacions degudes a la presència de complexos, un sistema ortonormal a $L_2([0, L])$.

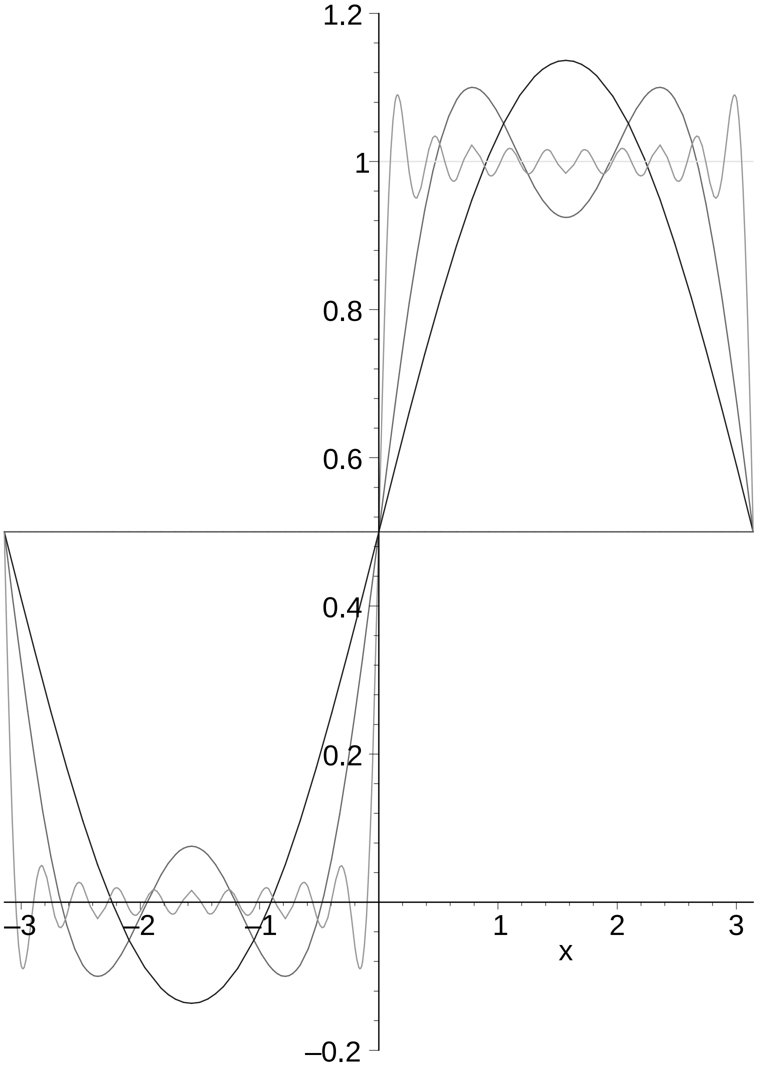


Figura 4.1: La funció $f(x)$ i les sumes parcials dels primers 1, 2, 3 i 11 termes no nuls de la seva sèrie de Fourier.

Formalment, es pot obtenir la sèrie de Fourier en aquest sistema a partir de la trigonomètrica emprant la relació d'Euler

$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

d'on es dedueixen les expressions inverses

$$\cos\alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}, \quad \sin\alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}.$$

Substituïnt els cosinus i sinus a la sèrie de Fourier trigonomètrica en termes d'exponencials complexes i agrupant termes, hom obté

$$\begin{aligned} SFT(f)(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{a_n - ib_n}{2} e^{i\frac{2\pi nx}{L}} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-i\frac{2\pi nx}{L}} \right\} \\ &= C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n e^{i\frac{2\pi nx}{L}} + C_{-n} e^{-i\frac{2\pi nx}{L}} \right) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{i\frac{2\pi nx}{L}}, \end{aligned}$$

on

$$\begin{aligned} C_0 &= \frac{a_0}{2} = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\,\mathrm{d}x, \\ C_n &= \frac{a_n - ib_n}{2} = \frac{1}{L}\int_0^L f(x) e^{-i\frac{2\pi nx}{L}}\,\mathrm{d}x, \\ C_{-n} &= C_n^* = \frac{a_n + ib_n}{2} = \frac{1}{L}\int_0^L f(x) e^{i\frac{2\pi nx}{L}}\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

La sèrie així obtinguda s'anomena sèrie exponencial (complexa) de Fourier i s'escriu:

$$SFE(f)(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{i\frac{2\pi nx}{L}}.$$

Aquesta forma de la sèrie de Fourier és especialment útil per a l'anàlisi espectral en temps discret, el que s'anomena la transformada discreta de Fourier (DFT), i la seva implemetació ràpida, la transformada ràpida de Fourier (FFT), i també per a estendre l'anàlisi de Fourier a funcions no periòdiques, cas en que s'obté l'anomenada integral (o transformada) de Fourier.

Valen els mateixos comentaris que per a la SFT, excepte que ara la simetria o antisimetria de f fa que els C_n, en general complexos, siguin reals o imaginaris purs. Fixem-nos que

$$C_n = \int_{[0,L]} f\phi^*, \quad \phi(x) = e^{i\frac{2\pi nx}{L}},$$

i que podem definir un sistema ortonormal sobre $(0, L)$ si posem

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{i\frac{2\pi nx}{L}}, \ n \in \mathbb{Z},$$

i **si definim el producte escalar** com

$$(f, g) = \int_{[0,L]} f g^*.$$

El producte escalar en espais vectorial sobre $\mathbb{C}$, com és el cas, no és simètric sinó **hermític**

$$(f, g) = (g, f)^*,$$

però els resultats que veurem pel cas real es traslladen al cas complex amb modificacions òbvies, com per exemple canviar expressions del tipus $\sum c_n^2$ per $\sum |C_n|^2$.

Fins ara no hem dit res sobre la convergència de la sèrie de Fourier d'una funció respecte a un sistema ortonormal. El primer resultat fonamental és el següent:

Teorema 4.2 *Sigui $\mathcal{S} = (\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots)$ ortonormal en $L_2(I)$, $f \in L_2(I)$ i*

$$SFS(f) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$$

Llavors

1. *la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2$ convergeix i satisfà la **desigualtat de Bessel***

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 \leq ||f||^2.$$

2. *la **identitat de Parseval***

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 = ||f||^2,$$

es verifica sii les sumes parcials de la sèrie de Fourier, $s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k \varphi_k$, convergeixen en norma a f; i.e.

$$\lim_{n \to \infty} ||f - s_n|| = 0.$$

Demostració.

1. Si a la relació (4.6) posem $b_k = c_k$ queda

$$0 \leq ||f - s_n||^2 = ||f||^2 - \sum_{k=0}^{n} c_k^2$$

d'on

$$||f||^2 \geq \sum_{k=0}^{n} c_k^2$$

per a tot n i per tant es segueix la desigualtat de Bessel.

2. Fixant-nos ara en

$$||f - s_n||^2 = ||f||^2 - \sum_{k=0}^{n} c_k^2$$

la segona part de l'enunciat és evident.

□

Comentaris.

- La segona part del teorema no diu que hi hagi cap funció tal que el coeficients de la seva sèrie de Fourier verifiqui la identitad de Parseval: sols dóna una condició equivalent.
- Per al sistema trigonomètric a $L_2((0, L))$, la identitat de Parseval s'escriu

$$\frac{2}{L}\int_0^L f^2(x)\ \mathrm{d}x = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2).$$

Corol·lari 4.3 *Si $f \in L_2(I)$ els coeficients de la seva sèrie de Fourier verifiquen*

$$\lim_{n\to\infty} c_n = 0.$$

Demostració. Òbvia a partir de la convergència de la suma dels quadrats. □

El següent teorema és el recíproc de l'anterior.

Teorema 4.4 *Sigui $\mathcal{S} = (\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots)$ ortonormal en $L_2(I)$ i sigui (c_n) una successió arbitrària tal que $\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 < +\infty$. Llavors existeix una funció $\tilde{f} \in L_2(I)$ tal que*

1. $(\tilde{f}, \varphi_k) = c_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$
2. $||\tilde{f}||^2 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^2.$

Demostració. Sigui $s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k\varphi_k(x)$. Provarem que existeix una funció $\tilde{f} \in L_2(I)$ tal que $(\tilde{f}, \varphi_k) = c_k$ i tal que

$$\lim_{n\to\infty} ||s_n - \tilde{f}|| = 0.$$

Llavors la segona afirmació es seguirà de la segona part del teorema anterior.

Posant $m > n$ tenim

$$||s_n - s_m||^2 \;=\; ||\sum_{k=n+1}^{m} c_k\varphi_k||^2 = \sum_{k=n+1}^{m}\sum_{l=n+1}^{m} c_k c_l(\varphi_k, \varphi_l) = \sum_{k=n+1}^{m} c_k^2,$$

i com que, per hipòtesi, $\sum c_n^2$ convergeix, es dedueix que (s_n) és de Cauchy a $L_2(I)$. Com que $L_2(I)$ és complet amb la norma $||\cdot|| = ||\cdot||_2$, es segueix que existirà $\tilde{f} \in L_2(I)$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} ||s_n - \tilde{f}|| = 0.$$

Per veure que $(\tilde{f}, \varphi_k) = c_k$ per a cada k, fixem k. Llavors, per a tot $n \geq k$ tenim

$$(s_n, \varphi_k) = \sum_{l=0}^{n} c_l(\varphi_l, \varphi_k) = c_k$$

i

$$\begin{aligned} 0 &\leq |c_k - (\tilde{f}, \varphi_k)| = |(s_n, \varphi_k) - (\tilde{f}, \varphi_k)| = |(s_n - \tilde{f}, \varphi_k)| \\ &= \left| \int_I (s_n - \tilde{f}) \varphi_k \right| \leq \int_I \left| (s_n - \tilde{f}) \varphi_k \right| \\ &= ||(s_n - \tilde{f}) \varphi_k||_1 \overset{\text{CSB}}{\leq} ||s_n - \tilde{f}|| ||\varphi_k|| = ||s_n - \tilde{f}||. \end{aligned}$$

Fent tendir ara n a ∞ queda $0 \leq |c_k - (\tilde{f}, \varphi_k)| \leq 0$ i per tant $|c_k - (\tilde{f}, \varphi_k)| = 0$, tal com voliem.

□

Comentaris.

- La completitud de $(L_2, || \cdot ||_2)$ ha jugat un paper fonamental en la demostració.
- La funció $\tilde{f}$ que apareix en el teorema pot ser diferent de la f que ens pugui haver donat els coeficients c_k en primer lloc. Les dues funcions proporcionen els mateixos coeficients:

  $$(f, \varphi_k) = (\tilde{f}, \varphi_k) \ \forall k$$

  d'on

  $$(f - \tilde{f}, \varphi_k) = 0 \quad \forall k,$$

  però d'aquí no es dedueix que $f = \tilde{f}$ (com elements de $L_2(I)$: no estem parlant de que les dues funcions difereixin en un conjunt de mesura nul·la).

Per aclarir el darrer comentari, sigui el conjunt

$$\left(\varphi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x, \varphi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin 2x, \dots \right)$$

que és ortonormal a $L_((-\pi, \pi))$. Les funcions $f(x) = 1 + \sin x$ i $\tilde{f}(x) = \sin x$ són de $L_((-\pi, \pi))$ i proporcionen els mateixos coeficients. De fet, $c_0 = \sqrt{\pi}$ i $c_n = 0$ per a $n = 1, 2, \dots$. Tenim

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 = \pi, \quad ||f||^2 = 3\pi, \quad ||\tilde{f}||^2 = \pi$$

i és per tant $\tilde{f}$ la funció l'existència de la qual es prova en el Teorema 4.4.

Exercici: Repetiu el darrer exemple amb tot igual excepte que ara treballeu a $L_2((0, \pi))$ i canvieu els $1/\sqrt{\pi}$ per $\sqrt{1/\pi}$. Vegeu que en aquest cas $\tilde{f} = f$.

A partir dels exemples anteriors i del Teorema 4.4 ens podem preguntar qué li falta a un sistema ortonormal per a que la funció cap a la que tendeixen les sumes parcials de la sèrie de Fourier d'una funció donada coincideixi amb aquesta. El següent teorema estableix quatre condicions equivalents i dóna la resposta definitiva.

Teorema 4.5 *Sigui $\mathcal{S} = (\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots)$ ortonormal en $L_2(I)$. Les quatre condicions següents són equivalents:*

1. $\forall f \in L_2(I)$, $\lim_{n \to \infty} ||f - \sum_{k=0}^{n} (f, \varphi_k) \varphi_k|| = 0$.

2. *$\mathcal{S}$ és maximal: no existeix cap $\varphi \in L_2(I)$ tal que $\{\varphi\} \bigcup \mathcal{S}$ sigui ortonormal.*

3. *$\mathcal{S}$ és complet: si $f \in L_2(I)$ és tal que $(f, \varphi_k) = 0$ per a tot k, llavors $f = 0$.*

4. *$\forall f \in L_2(I)$, $||f||^2 = \sum_{n=0}^{\infty}(f, \varphi_n)^2$.*

Demostració.

(2. $\Rightarrow$ 3.) Suposem que 3. sigui fals, és a dir, que existeix $\varphi \in L_2(I)$ tal que $\varphi \neq 0$ i $(\varphi, \varphi_k) = 0$ $\forall k$. Llavors $\varphi/||\varphi||$ és ortogonal a tots els φ_k i té norma 1, i per tant $\mathcal{S}$ no és maximal.

(3. $\Rightarrow$ 1.) Donat $f \in L_2(I)$, sabem pel Teorema 4.2 que $\sum (f, \varphi_n)^2$ és convergent i pel Teorema 4.4 que $\sum_{k=1}^{n}(f, \varphi_k)\varphi_k$ convergeix a una funció $\tilde{f} \in L_2(I)$, de manera que:

$$\lim_{n\to\infty} ||\tilde{f} - \sum_{k=1}^{n}(f, \varphi_k)\varphi_k|| = 0, \tag{4.9}$$

amb $(\tilde{f}, \varphi_k) = (f, \varphi_k)$ $\forall k$. Llavors $(\tilde{f} - f, \varphi_k) = 0$ $\forall k$ i, per 3., $\tilde{f} = f$. Substituint a (4.9) queda així

$$\lim ||f - \sum_{k=1}^{n}(f, \varphi_k)\varphi_k|| = 0,$$

tal com voliem.

(1. $\Rightarrow$ 4.) Ja demostrat.

(4. $\Rightarrow$ 2.) Suposem que 2. sigui fals, és a dir, que existeixi $\varphi \in L_2(I)$ amb $||\varphi|| = 1$ tal que $\forall k$, $(\varphi, \varphi_k) = 0$. Llavors de 4. tindriem

$$1 = ||\varphi||^2 = \sum_{k=0}^{\infty}(\varphi, \varphi_k)^2 = \sum_{k=0}^{\infty} 0 = 0.$$

$\square$

Comentaris.

- Del teorema es dedueix que un sistema ortonormal proporciona una sèrie de Fourier que convergeix en mitjana quadràtica a la funció que la genera sii el sistema és complet o és maximal (que són condicions alhora equivalents). Depenent del sistema, pot ser més fàcil comprovar una propietat o l'altra.

- Que un sistema sigui o no complet depén dels elements del sistema y de l'espai on es treballa.

4.4 Sèries de Fourier trigonomètriques

Comencem amb la completitud dels sistemes trigonomètrics.

Teorema 4.6 *El sistema trigonomètric*

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx\right)_{n=1,2,\ldots}$$

és complet a $L_2((-\pi,\pi))$.

Demostració. La demostració utilitza el teorema de Fubini i el teorema fonamental del càlcul per a la integral de Lebesgue. Vegeu [Fra99]. □

Com a resultat immediat tenim

Corol·lari 4.7 *El sistema trigonomètric*

$$\left(\frac{1}{\sqrt{L}}, \sqrt{\frac{2}{L}}\cos\frac{2\pi nx}{L}, \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\frac{2\pi nx}{L}\right)_{n=1,2,\ldots}$$

és complet a $L_2((0,L))$.

Demostració. Simple canvi de variables. □

Corol·lari 4.8 *Els sistemes trigonomètrics (la constant de normalització és irrellevant per a la completesa)*

$$(\cos nx)_{n=0,1,2,\ldots}, \quad (\sin nx)_{n=1,2,3,\ldots}$$

són, cada un d'ells per separat, complets a $L_2((0,\pi))$.

Demostració. Sigui per exemple el sistema dels cosinus. Sigui $f \in L_2((0,\pi))$ tal que

$$(f, \cos nx) = \int_0^\pi f(x)\cos nx \, \mathrm{d}x = 0, \quad \forall n.$$

Sigui

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & x \in (0,\pi), \\ f(-x) & x \in (-\pi,0). \end{cases}$$

Llavors $g \in L_2(-\pi,\pi)$ i

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} g(x)\cos nx \, \mathrm{d}x &\overset{\text{per simetria}}{=} 2\int_0^\pi g(x)\cos nx \, \mathrm{d}x \overset{\text{per hipòtesi}}{=} 0, \quad n = 0,1,2,\ldots \\ \int_{-\pi}^{\pi} g(x)\sin nx \, \mathrm{d}x &\overset{\text{per simetria}}{=} 0, \quad n = 1,2,\ldots, \end{aligned}$$

i per tant, emprant el Teorema 4.6, tenim $g = 0$ g.a., d'on $f = 0$ g.a. La completesa del sistema de sinus es demostra de manera semblant. □

Dels resultats de la Secció anterior es segueix que la sèrie de Fourier d'una funció de L_2 de qualsevol dels sistemes trigonomètrics convergeix en mitjana quadràtica cap a la funció. La convergència en norma a L_2 és, però, molt diferent de la convergència puntual. Per poder dir quelcom sobre la darrera, ens haurem de restringir a funcions molt més ben comportades que les de L_2.

Direm que f és **contínua a trossos** en $[a,b]$, i escriurem $f \in PC[a,b]$, si

1. f és contínua en $[a,b]$ excepte, possiblement, en un nombre finit de punts.

2. En els punts de discontinuïtat existeixen els límits, per la dreta i l'esquerra, i són finits.

Direm que f és **suau a trossos** en $[a,b]$, i escriurem $f \in PS[a,b]$, si $f \in PC[a,b]$ i $f' \in PC[a,b]$. Una funció és PC o PS a $\mathbb{R}$ si ho és a qualsevol interval fitat.

Per a preparar el resultat principal d'aquesta Secció, sigui $f \in L_2((-\pi,\pi))$, estesa 2π-periòdicament fora de $(-\pi,\pi)$, i sigui $S_N^f(x)$ la suma parcial N-èsima de la seva sèrie de Fourier trigonomètrica, que expressem en forma complexa:

$$S_N^f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \sum_{n=-N}^{N} C_n e^{inx}, \tag{4.10}$$

on

$$C_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,\mathrm{d}x. \tag{4.11}$$

Substituint (4.11) a (4.10), canviant n per $-n$, efectuant un canvi de variable i emprant la periodicitat de l'integrand, hom obté

$$S_N^f(x) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-N}^{N}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+z)e^{inz}\,\mathrm{d}z = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+z)D_N(z)\,\mathrm{d}z, \tag{4.12}$$

on hem introduit el **nucli de Dirichlet**, $D_N(z)$, que admet les expressions següents (la comprovació es deixa al lector com a exercici):

$$\begin{aligned} D_N(z) &= \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-N}^{N} e^{inz} &(4.13)\\ &= \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{N}\cos nz &(4.14)\\ &= \frac{1}{2\pi}\frac{e^{i(N+1)z}-e^{-iNz}}{e^{iz}-1} &(4.15)\\ &= \frac{1}{2\pi}\frac{\sin(N+\frac{1}{2})z}{\sin\frac{z}{2}}. &(4.16)\end{aligned}$$

De la darrera forma és immediat veure que $D_N(z)$ té un màxim de valor $(2N+1)/(2\pi)$ en $z=0$, és simètric té un primer zero a $\pm 2\pi/(2N+1)$ (vegeu Figura 4.2). Quan N creix, cal esperar per tant que sols els valors al voltant de $z=0$ contribuiran a la integral i, intuitivament,

$$S_N^f(x) \overset{N\gg 1}{\approx} f(x).$$

Moltes coses poden anar malament en aquest raonament heurístic, en particular si f no és contínua. Amb l'objectiu d'aclarir-ho s'encuncia el següent:

Lema 4.9 *El nucli de Dirichlet satisfà*

$$\int_{-\pi}^{0} D_N(x)\ dx = \int_{0}^{\pi} D_N(x)\ dx = \frac{1}{2}, \quad \forall N \in \mathbb{N}. \tag{4.17}$$

Demostració. Evident a partir de (4.14). □

Ara ja es pot donar el resultat més important de convergència puntual.

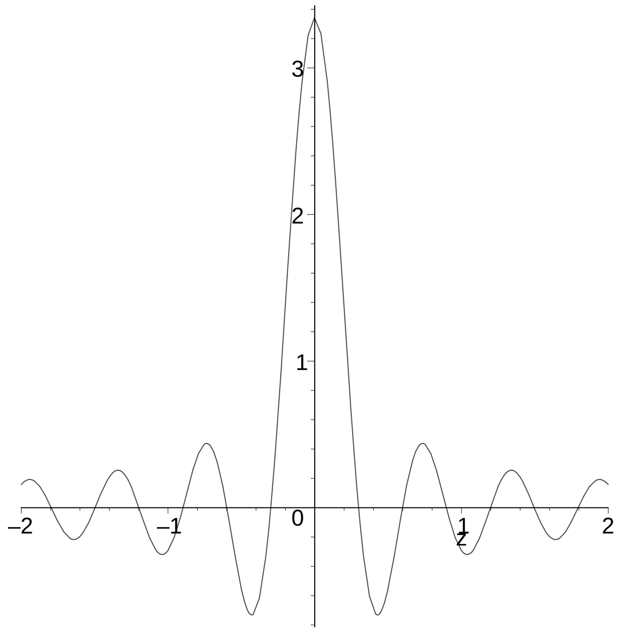


Figura 4.2: El nucli de Dirichlet per a $N = 10$.

Teorema 4.10 *(Teorema de Dirichlet) Si f és 2π-periòdica i $f \in PS(\mathbb{R})$, aleshores*

$$\lim_{N\to\infty} S_N^f(x) = \frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-)),$$

on $f(x^\pm) = \lim_{h\to\pm 0} f(x+h)$ existeixen per ser $f \in PC(\mathbb{R})$. En particular, si, a més, f és contínua en x, $\lim_{N\to\infty} S_N^f(x) = f(x)$.

Demostració. Per (4.17) tenim

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}f(x^-) &= f(x^-)\int_{-\pi}^{0} D_N(y)\ \mathrm{d}y, \\ \frac{1}{2}f(x^+) &= f(x^+)\int_{0}^{\pi} D_N(y)\ \mathrm{d}y, \end{aligned}$$

i per tant, de (4.12),

$$S_N^f(x) - \frac{1}{2}(f(x^+)+f(x^-)) = \int_{-\pi}^{0}(f(x+y)-f(x^-))D_N(y)\ \mathrm{d}y + \int_0^{\pi}(f(x+y)-f(x^+))D_N(y)\ \mathrm{d}y.$$

Definint la funció

$$g(y) = \begin{cases} \frac{f(x+y)-f(x^-)}{e^{iy}-1} & y \in (-\pi, 0), \\ \frac{f(x+y)-f(x^+)}{e^{iy}-1} & y \in (0, \pi), \end{cases}$$

i emprant (4.15) podem escriure finalment

$$S_N^f(x) - \frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-)) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(y)\left(e^{i(N+1)y} - e^{-iNy}\right)\ \mathrm{d}y. \tag{4.18}$$

Notem que g és tant bona com f a $(-\pi,\pi)$, excepte possiblement en $y=0$. Aplicant però la regla de l'Hôpital tenim

$$\lim_{y\to 0^+} g(y) = -if'(x^+), \quad \lim_{y\to 0^-} g(y) = -if'(x^-),$$

que existeixen per ser f de $PS(-\pi,\pi)$. Per tant g és de $PC(-\pi,\pi)$ i per tant de $L_2((-\pi,\pi))$. Aplicant la desigualtat de Bessel, si $\hat{C}_n = (\hat{a}_n - i\hat{b}_n)/2$ són els coeficients de Fourier complexos de g, tindrem

$$\lim_{n\to\pm\infty} \hat{C}_n = 0$$

amb

$$\hat{C}_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(y)e^{-iny}\,\mathrm{d}y.$$

Però (4.18) és

$$S_N^f(x) - \frac{1}{2}(f(x^+)+f(x^-)) = \hat{C}_{-(N+1)} - \hat{C}_N$$

i per tant

$$\lim_{N\to\infty}\left(S_N^f(x) - \frac{1}{2}(f(x^+)+f(x^-))\right) = 0.$$

$\square$

Exercici. Escriviu i demostreu els teoremes de Dirichlet per al sistema trigonomètric a $(0,L)$ i per als sistemes de cosinus i de sinus a $(0,\pi)$. Es pot fer amb canvis de variables i extensions simètriques o antisimètriques.

A més de la convergència puntual, ens interessa també saber si es pot dir quelcom d'específic respecte a la derivació i integració de sèries de Fourier trigonomètriques, així com sobre la seva convergència uniforme, més enllà dels resultats generals per a sèries funcionals. Un fet fonamental és el següent

Lema 4.11 *Sigui f 2π-periòdica, contínua i $PS(\mathbb{R})$. Siguin a_n, b_n, C_n els seus coeficients de Fourier (reals i complexos) i siguin a'_n, b'_n, C'_n els de f'. Llavors*

$$a'_n = nb_n,\ b'_n = -na_n,\ C'_n = inC_n.$$

Demostració. És una simple integració per parts. Noteu que no assegurem que el teorema de Dirichlet sigui aplicable a f', pero tantmateix els seus coeficients de Fourier existeixen per ser f' de $PC(\mathbb{R})$. Tenim

$$\begin{aligned} C'_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)e^{-inx}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2\pi}\left(f(\pi)e^{-in\pi} - f(-\pi)e^{in\pi}\right) + \frac{in}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2\pi}(-1)^n(f(\pi)-f(-\pi)) + inC_n = inC_n \end{aligned}$$

per ser f contínua. Llavors

$$\begin{aligned} a'_n &= \frac{1}{2}(C'_n + C'^*_n) = \frac{1}{2}n(iC_n - iC^*_n) = ni\frac{C_n - C^*_n}{2} = nb_n, \\ b'_n &= \frac{i}{2}(C'_n - C'^*_n) = \frac{i}{2}n(iC_n + iC^*_n) = -n\frac{C_n + C^*_n}{2} = -na_n. \end{aligned}$$

Teorema 4.12 *Sigui f 2π-periòdica, contínua i $PS(\mathbb{R})$ i, a més, $f' \in PS(\mathbb{R})$. Si*

$$f(x) = SFT(f)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{inx},$$

llavors

$$\frac{1}{2}(f'(x^+) + f'(x^-)) = SFT(f')(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(nb_n \cos nx - na_n \sin nx) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} inC_n e^{inx}.$$

Demostració. Com que f' és 2π-periòdica i $PS(\mathbb{R})$, li podem aplicar el Teorema de Dirichlet i

$$\frac{1}{2}(f'(x^+) + f'(x^-)) = SFT(f')(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C'_n e^{inx} \stackrel{\text{lema 4.11}}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} inC_n e^{inx}.$$

□

Al considerar la integració d'una sèrie de Fourier, cal tenir en compte que la integral (indefinida) d'una funció periòdica pot no ser periòdica. Per exemple $f(x) = 1$ és periòdica però $F(x) = x$ no ho és. En una sèrie de Fourier, la integral de cada terme és una funció periòdica, excepte el terme constant. Això ens porta al següent resultat:

Teorema 4.13 *Sigui f 2π-periòdica i $PC(\mathbb{R})$ amb coeficients a_n, b_n, C_n, i sigui $F(x) = \int^x f$. Si $C_0 = \frac{a_0}{2} = 0$ llavors*

$$F(x) = K + \sum_{n\in\ ,n\neq 0} \frac{C_n}{in} e^{inx}, \tag{4.19}$$

on el terme constant és igual al valor promig de F (que depén de quina primitiva s'agafi)

$$K = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\ dx.$$

Si $C_0 \neq 0$ llavors la sèrie val $F(x) - C_0 x$, amb el mateix valor de K.

Demostració. Com que és la integral d'una PC, F és contínua i PS. A més

$$F(x+2\pi) - F(x) = \int_x^{x+2\pi} f(t)\ \mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\ \mathrm{d}t = 2\pi C_0,$$

de manera que si $C_0 = 0$ llavors F és 2π-periòdica. Pel Teorema de Dirichlet, $F(x) = SFT(F)(x)$ a tots els punts, i com que $F' = f$, emprant el lema 4.11, s'obté (4.19). Si $C_0 \neq 0$, els mateix argument pot aplicar-se a $g(x) = f(x) - C_0$, que dóna lloc a una primitiva $G(x) = F(x) - C_0 x$ que és 2π-periòdica. □

Una condició suficient per a la convergència uniforme ve donada pel següent teorema.

Teorema 4.14 *Si f és 2π-periòdica, contínua i $PS(\mathbb{R})$, llavors $SFT(f)(x)$ convergeix a f uniforme i absolutament a tot $\mathbb{R}$.*

Demostració. Per ser f contínua i PS, la sèrie de Fourier de f convergeix puntualment a f en tot $x \in \mathbb{R}$. Per veure la convergència uniforme i absoluta, sols cal demostrar que $\sum |a_n|$ i $\sum |b_n|$ convergeixen, ja que

$$\frac{|a_0|}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n \cos nx + b_n \sin nx| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| + \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|.$$

Si C'_n són els coeficients complexos de f' sabem, sota les condicions del teorema, que $C'_n = inC_n$. Per la desigualtat de Bessel

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |C'_n|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)|^2 \mathrm{d}x < +\infty$$

i, per tant, per a tot $N \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=-N}^{N} |C_n| &= |C_0| + \sum_{n=-N, n\neq 0}^{N} \frac{|C'_n|}{n} \\
&\stackrel{\text{CS}}{\leq} |C_0| + \left(\sum_{n=-N, n\neq 0}^{N} \frac{1}{n^2} \right)^{1/2} \left(\sum_{n=-N, n\neq 0}^{N} |C'_n|^2 \right)^{1/2} \\
&\leq |C_0| + \left(\sum_{n=-\infty, n\neq 0}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right)^{1/2} \left(\sum_{n=-\infty, n\neq 0}^{\infty} |C'_n|^2 \right)^{1/2} = k < +\infty,
\end{aligned}$$

on k és finit i independent de N, i a on hem utilitzat la desigualtat de Cauchy-Schwarz (CS) a $\mathbb{R}^{2N}$. Per tant

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n| = \lim_{N\to\infty} \sum_{-N}^{N} |C_n| < +\infty,$$

i d'aquí es segueix la convergència de les sèries dels valors absoluts dels coeficients reals. □

Els resultats que hem vist fan pensar que com més derivades contínues tingui f més depressa decreixeran els seus coeficients de Fourier amb n. Concretament hom té la

Proposició 4.15 *Sigui f 2π-periòdica i de classe $C^{k-1}(\mathbb{R})$, i a més $f^{k-1} \in PS(\mathbb{R})$, és a dir, f té derivades contínues a tot $\mathbb{R}$ fins ordre $k-1$ i la derivada k és $PC(\mathbb{R})$. Llavors*

$$\sum (n^k a_n)^2 < +\infty, \quad \sum (n^k b_n)^2 < +\infty, \quad \sum |n^k C_n|^2 < +\infty,$$

d'on

$$\lim_{n\to\infty} n^k a_n = \lim_{n\to\infty} n^k b_n = \lim_{n\to\infty} n^k C_n = 0.$$

Demostració. Sota les condicions esmentades, podem aplicar el lema 4.11 k vegades fins arribar a que els coeficients de Fourier $C_n^{(k)}$ de $f^{(k)}$ són $C_n^{(k)} = (in)^k C_n$, i llavors sols cal aplicar la desigualtat de Bessel a la sèrie de Fourier de $f^{(k)}$. □

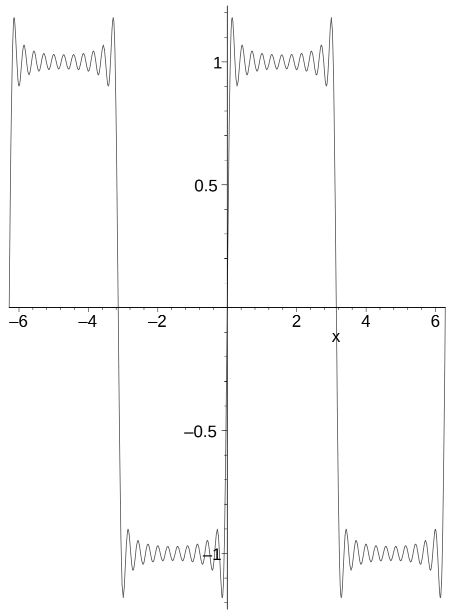
Ja sabem que qualsevol funció de L_2 té coeficients de Fourier que tendeixen a zero, però aquest resultat diu quelcom més. Per exemple, si f és $C^0(\mathbb{R})$ i $PS(\mathbb{R})$, llavors, amb $k = 1$,

$$\lim_{n\to\infty} na_n = \lim_{n\to\infty} nb_n = 0,$$

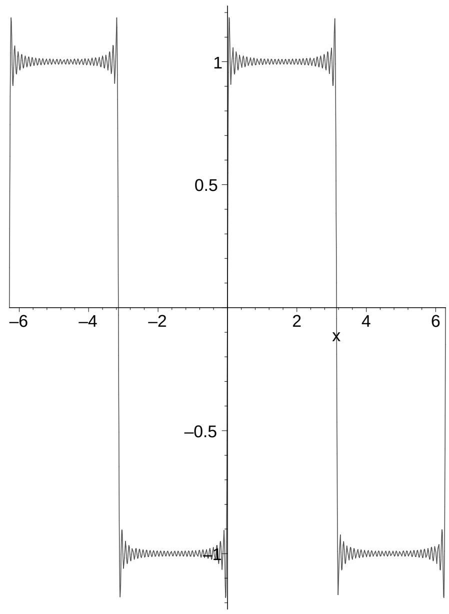
mentre que si f és $C^1(\mathbb{R})$ i f' és $PS(\mathbb{R})$, llavors, amb $k = 2$,

$$\lim_{n\to\infty} n^2 a_n = \lim_{n\to\infty} n^2 b_n = 0.$$

Resumint, les propietats de convergència local de les sèries de Fourier trigonomètriques d'una funció 2π-periòdica són



(a) $N = 10$



(b) $N = 30$

Figura 4.3: Sumes parcials per a la funció signe periòdica.

$f \in PS(\mathbb{R})$	$SFT(f)(x) = (f(x^+) + f(x^-))/2$
f contínua, $f, f' \in PS(\mathbb{R})$	$(SFT(f)(x))' = SFT(f')(x) = (f'(x^+) + f'(x^-))/2$
$f \in PC(\mathbb{R})$	$SFT(f)(x)$ integrable terme a terme
f contínua i $PS(\mathbb{R})$	$SFT(f)(x)$ convergeix uniforme i absolutament a $\mathbb{R}$
$f \in C^{(k-1)}(\mathbb{R})$, $f^{(k)} \in PC(\mathbb{R})$	$\lim_{n\to\infty} n^k a_n = \lim_{n\to\infty} n^k b_n = 0$

Amb les modificacions evidents, els mateixos resultats valen per les altres sèries de Fourier trigonomètriques.

4.5 El fenomen de Gibbs

Quan f és $PS(\mathbb{R})$ però no contínua, la convergència de $SFT(f)(x)$ cap a $(f(x^+) + f(x^-))/2$ no és uniforme: si ho fos, al ser les sumes parcials funcions contínues, la sèrie hauria de convergir cap a una funció contínua i $g(x) = (f(x^+) + f(x^-))/2$ no ho és si f no és contínua. Aquesta convergència no uniforme de les sèries de Fourier de funcions discontínues es manifesta gràficament en l'anomenat, per raons històriques, fenomen de Gibbs.

Sigui per exemple la funció signe estesa 2π-periòdicament,

$$\epsilon(x) = \begin{cases} 1 & x \in (0, \pi), \\ -1 & x \in (-\pi, 0). \end{cases}$$

Hom té immediatament $a_n = 0\ \forall n$ i $b_{2n} = 0$, $b_{2n+1} = \frac{4}{\pi}\frac{1}{2n+1}$, de manera que les sumes parcials són

$$S_N(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{2k+1} \sin(2k+1)x.$$

A la Figura 4.3 apareixen representades les sumes parcials per a $N = 10$ i $N = 30$.

S'observa la presència de pics a prop de les discontinuïtats de la funció, la magnitud dels quals no disminieix amb N, encara que s'acosten a les discontinuïtats al crèixer N. Per a cada punt hi ha convergència puntual, però per a una N donada sempre hi ha punts a una distància fixada del valor cap al qual tendeixen eventualment. Això és el fenomen de Gibbs.

Anem a calcular el valor del màxim $(x^*, S_N(x^*))$ més proper a zero, i veurem que no decreix quan aumenta N. Tenim

$$S_N'(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{N}\cos(2k+1)x = \frac{2}{\pi}\frac{\sin(2N+2)x}{\sin x}.$$

Cal observar que $S_N'(x) > 0$ en un entorn prou petit (que disminueix amb N) de zero. Imposant $S_N'(x) = 0$ tindrem

$$(2N+2)x = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

de manera que el primer màxim relatiu a la dreta del zero (és màxim per la positivitat de la derivada en un entorn de zero) és

$$x^* = \frac{\pi}{2N+2}.$$

Llavors

$$S_N(x^*) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{N}\frac{1}{2k+1}\sin\frac{(2k+1)\pi}{2N+2}.$$

Això es pot interpretar com una suma de Riemann corresponent a la integral de la funció $\mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}$. En efecte, dividint $[0,\pi]$ en $N+1$ intervals

$$[n\frac{\pi}{N+1}, (n+1)\frac{\pi}{N+1}], \quad n = 0, \dots, N,$$

i escollint el punt central de cada interval per fer la suma. Efectivament

$$\begin{aligned} S_N(x^*) &= \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{N}\frac{\sin\frac{(2k+1)\pi}{2N+2}}{\frac{(2k+1)\pi}{2N+2}}\frac{\pi}{2N+2} = \\ &= \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{N}\underbrace{\frac{\sin\frac{(2k+1)\pi}{2N+2}}{\frac{(2k+1)\pi}{2N+2}}}_{\frac{\sin x_k}{x_k}}\underbrace{\frac{\pi}{N+1}}_{\Delta x_k} \end{aligned}$$

on

$$x_k = \frac{(2k+1)\pi}{2N+2}.$$

Per tant

$$\begin{aligned} \lim_{N\to\infty} S_N(x^*) &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin y}{y}\,\mathrm{d}y = \\ &= 1 + 2\left(\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin y}{y}\,\mathrm{d}y - \frac{1}{2}\right) \\ &\sim 1 + 2\times 0.0895, \end{aligned}$$

on hem utilitzat

$$\int_0^\pi \frac{\sin y}{y}\,\mathrm{d}y \sim 1.852.$$

Donat que 2 és el valor de la discontinuïtat en $x = 0$ i que 1 és el límit de $\epsilon(x)$ per la dreta de zero, veiem que hi ha un "sobrepuig" d'aproximadament el 9% del valor de la discontinuïtat, per a tot N.

Exercici. Repetiu tots els càlculs amb $f(x) = x$, $x \in (-\pi, \pi)$, estesa 2π-periòdicament.

De fet, no cal fer el càlcul per a cada funció discontínua que tinguem, ja que qualsevol discontinuïtat es pot modelar mitjançant la funció signe. Fent una traslació, sempre podem suposar que la discontinuïtat, de magnitud A, està en $x = 0$. Llavors

$$f(x) = g(x) + A\theta(x),$$

on $\theta(x)$ és la funció de Heaviside

$$\theta(x) = \begin{cases} 0 & x < 0, \\ 1 & x > 0, \end{cases}$$

i està relacionada amb la funció signe mitjançant

$$\theta(x) = \frac{1}{2}(\epsilon(x) + 1).$$

La funció $g(x)$ pot tenir discontinuïtats en altres punts, però és PS i és contínua en $x = 0$. Per la linealitat dels coeficients de Fourier respecte a la funció, tindrem

$$S_N^f(x) = S_N^g(x) + A\frac{1}{2}(S_N^\epsilon(x) + 1).$$

Com que g és contínua en $x = 0$, serà

$$\lim_{N\to\infty} S_N^g(x) = g(x)$$

per x en un entorn de zero, i en particular per a $x^* = \frac{\pi}{2N+2}$ per a N prou gran. Llavors

$$S_N^f(x^*) = S_N^g(x^*) + \frac{A}{2}(S_N^\epsilon(x^*) + 1)$$

i

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to\infty} S_N^f(x^*) &= g(x^*) + \frac{A}{2}\left(\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin y}{y}\,\mathrm{d}y + 1\right) = \\
&= g(x^*) + A + A\left(\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin y}{y}\,\mathrm{d}y - \frac{1}{2}\right) \sim \\
&\sim g(x^*) + A + A \times 0.0895 = \\
&= f(x^*) + 0.0895A.
\end{aligned}$$

Per tant, per qualsevol N, sempre hi ha punts a la vora de la discontinuïtat a on la suma parcial de la sèrie de Fourier i la funció difereixen en un 9% del valor de la discontinuïtat.

Bibliografia

[Apo79] T.M. Apostol. *Análisis Matemático*. Ed. Reverté, Barcelona, 1979.

[Bar95] R. Bartle. *The elements of integration and Lebesgue measure*. Wiley, 1995.

[BMV87] F. Bombal, L.R. Marín i G. Vera. *Problemas de análisis matemático, volumen 3*. Ed. AC, Madrid, 1987.

[Fol92] G.B. Folland. *Fourier Analysis and its Applications*. Brooks/Cole Publishing, 1992.

[Fra99] M.W. Frazier. *An introduction to wavelets through linear algebra*. Springer-Verlag, 1999.

[MH98] J. Marsden i M. Hoffmann. *Análisis clásico elemental*. Addison-Wesley, 1998.

[Spr87] D.A. Sprecher. *Elements of real analysis*. Dover, 1987.

[Sta98] I. Stakgold. *Green's functions and boundary value problems*. Wiley, second edition, 1998.