Facultat de Matemàtiques i Estadística
Examen de topologia
17 de juny de 2020

Temps: 3,5 hores
Tots tres problemes puntuen igual
Al final dels enunciats teniu algunes definicions i resultats

1. Un espai topològic X es diu T_1 si els seus punts són conjunts tancats. Tot espai de Hausdorff és T_1. Sigui X un espai topològic T_1. Per a cada subconjunt $A \subseteq X$ sigui A' el seu derivat: el conjunt dels seus punts d'acumulació. Sigui $p \in X$ un punt. Demostreu que

1. $\{p\}' = \varnothing$;
2. $\big(A \setminus \{p\}\big)' = A' = \big(A \cup \{p\}\big)'$;
   Observació: Podeu fer servir, sense demostrar-ho, que en tots els espais topològics es compleix la propietat $(A \cup B)' = A' \cup B'$.
3. A' és un conjunt tancat;
4. $\big(A'\big)' \subseteq A'$.

2. Sigui X un espai topològic i $Y \subseteq X$, un subespai de X. Suposem que Y és un retracte de X.

1. Suposem que X és Hausdorff. Podem deduir que Y és un tancat de X?
2. Suposem que X és Hausdorff. Podem deduir que Y és un obert de X?
3. Suposem que X és compacte. Podem deduir que Y és un tancat de X?
4. Suposem que X és compacte. Podem deduir que Y és un obert de X?

3. Un *revestiment* d'espais topològics és una aplicació contínua exhaustiva $p\colon \widetilde{X} \twoheadrightarrow X$ tal que per a tot punt $x \in X$ existeix un entorn obert $\mathcal{V}_x \subseteq X$ amb $p^{-1}(\mathcal{V}_x) = \sqcup_{i\in I}\mathcal{U}_i$, on els $\mathcal{U}_i$ són oberts disjunts de $\widetilde{X}$ tals que la restricció $p|_{\mathcal{U}_i}\colon \mathcal{U}_i \to \mathcal{V}_x$ de p a cadascun d'ells és un homeomorfisme $\mathcal{U}_i \cong \mathcal{V}_x$. Els oberts $\mathcal{V}_x$ i $\mathcal{U}_i$ satisfent la condició demanada es diuen *entorns oberts regulars* del revestiment.

Dos exemples importants de revestiments són les projeccions de la recta en la circumferència $x \mapsto e^{2\pi i x}\colon \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{S}^1$ i de l'esfera en l'espai projectiu $x \mapsto [x]\colon \mathbb{S}^n \twoheadrightarrow \mathbb{P}^n$ obtinguda identificant punts antipodals.

Sigui $f\colon Y \to X$ una aplicació contínua d'un espai topològic Y en X. Un *aixecament* $\widetilde{f}$ de f és una aplicació contínua $\widetilde{f}\colon Y \to \widetilde{X}$ tal que $p \circ \widetilde{f} = f$.

Sigui $p\colon \widetilde{X} \twoheadrightarrow X$ un revestiment. Siguin $\widetilde{x}_0 \in \widetilde{X}$ i $x_0 \in X$ punts amb $p(\widetilde{x}_0) = x_0$ (o sigui, tals que $\widetilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$). Sigui $\mathcal{V}_{x_0}$ un entorn regular de x_0. Demostreu que

1. Tota aplicació contínua $f\colon Y \to X$ amb $f(y_0) = x_0$ i tal que $f(Y) \subseteq \mathcal{V}_{x_0}$ té un aixecament $\widetilde{f}\colon Y \to \widetilde{X}$ amb $\widetilde{f}(y_0) = \widetilde{x}_0$.

2. Si Y és connex una aplicació contínua $f\colon Y \to X$ amb $f(y_0) = x_0$ té *com a màxim* un aixecament $\widetilde{f}\colon Y \to \widetilde{X}$ amb $\widetilde{f}(y_0) = \widetilde{x}_0$.
   INDICACIÓ: estudieu el subconjunt de Y on dos d'aquests aixecaments coincideixen.
3. Tot camí $\sigma\colon [0,1] \to X$ amb origen $\sigma(0) = x_0$ té un únic aixecament $\widetilde{\sigma}\colon [0,1] \to \widetilde{X}$ amb origen $\widetilde{\sigma}(0) = \widetilde{x}_0$.
4. L'aplicació $p_*\colon \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0) \to \pi_1(X, x_0)$ induïda per p en els grups d'homotopia és *injectiva*.
   OBSERVACIÓ: Per demostrar això podeu fer servir, sense demostrar-ho, que tota aplicació contínua $F\colon [0,1]^2 \to X$ amb $F(0,0) = x_0$ té un únic aixecament $\widetilde{F}\colon [0,1]^2 \to \widetilde{X}$ amb $\widetilde{F}(0,0) = \widetilde{x}_0$. Això es pot demostrar amb arguments anàlegs als de l'apartat 3, tal com s'ha vist a classe en dos casos particulars.

Algunes definicions i resultats

Definició 1 (Acumulació) *Sigui A un subconjunt d'un espai topològic X. Un punt $x \in X$ és un punt d'acumulació de A si tot entorn obert $\mathcal{U}_x$ de x interseca A en algun punt diferent d'ell mateix: $A \cap \big(\mathcal{U}_x \setminus \{x\}\big) \neq \varnothing$.*

Es denota A' el conjunt de punts d'acumulació de A; de vegades se'l coneix pel nom de conjunt derivat de A.

Definició 2 (Retracte) *Un subespai $Y \subseteq X$ és un retracte de l'espai X si existeix una aplicació contínua $r\colon X \to Y$ tal que $r(y) = y$, per a tot $y \in Y$.*

Definició 3 (Morfisme induït) *Sigui $f\colon X \to Y$ una aplicació contínua, $x \in X$ i $y \in Y$ punts amb $f(x) = y$. Es defineix l'aplicació $f_*\colon \pi_1(X, x) \to \pi_1(Y, y)$ posant*

$$f_*\big([\sigma]\big) = [f \circ \sigma], \qquad \sigma\colon [0,1] \to X, \quad \sigma(0) = \sigma(1) = x.$$

Aquesta aplicació està ben definida i és un morfisme de grups.

Teorema 1 (Lema del nombre de Lebesgue) *Sigui E un espai mètric compacte, X un espai topològic, $f\colon E \to X$ una aplicació contínua i $(\mathcal{U}_i)_{i\in I}$ un recobriment obert de X.*

Existeix un nombre $\delta > 0$ tal que les imatges de totes les boles de radi δ estan contingudes en algun dels oberts del recobriment:

$$\forall x \in E \ \ \exists i \in I \quad \textit{tal que} \quad f\big(B_\delta(x)\big) \subseteq \mathcal{U}_i.$$

Aquest enunciat no és exactament el mateix que el donat a classe però es pot veure molt fàcilment que tots dos són equivalents. Podeu usar aquest resultat, si us cal, en la resolució de l'examen.