EQUACIONS EN DERIVADES PARCIALS

Apunts basats en el curs impartit pel Xavier Cabré

ApuntsFME

Barcelona, Juny 2019

Autors: Martí Oller, Miquel Ortega.

Última modificació: 18 de maig de 2021.

Índex

Tema 1

Introducció. Notació i EDPs més importants

1.1 Notació

A les EDPs on no apareix el temps denotarem per $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ la variable independent i per $u = u(x) = u(x_1, \dots, x_n)$ la funció incògnita o variable dependent. A les EDPs on apareix el temps (anomenades equacions d'evolució) denotarem per $(x,t) = (x_1, \dots, x_n, t)$ les variables independents i per $u = u(x,t)$ les dependents. En general, escriurem les derivades parcials d'una funció com $\frac{\partial u}{\partial x_1} = \partial_{x_1} u = u_{x_1}$. Habitualment utilitzarem aquesta última notació però en alguna ocasió també farem servir $u_{x_1} = u_1$ per fer-la més lleugera. Anàlogament, per les derivades parcials en més d'una variable, $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} = \partial_{x_1 x_2} u = u_{x_1 x_2} = u_{12}$. Tota EDP es pot escriure com $F(t, x_1, \dots, x_n, u_t, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}, u, u_{tt}, u_{tx_1}, \dots) = 0$, és a dir, és una equació en termes de les variables independents, la funció incògnita i un nombre finit de les seves respectives derivades parcials.

Definició 1.1.1. L'ordre d'una EDP és l'ordre de les derivades parcials més gran que apareix a l'equació.

Definició 1.1.2. Diem que una EDP és lineal si l'equació que la defineix és lineal en la variable u i en totes les seves derivades parcials (no cal que sigui lineal en les variables independents). Diem que és no lineal en cas contrari.

Exemple 1.1.3. Vegem un exemple d'una EDP no lineal de segon ordre:

$$tu_{x_1} + (u_{tx_2})^2 - 3 = 0,$$

Un exemple d'una EDP de segon ordre que és lineal (encara que la funció F sigui no lineal en la variable t) és el següent:

$$t^2 u_{x_1} + u_{tx_2} - 3 = 0.$$

1.2 EDPs principals

En aquest curs tractarem EDPs de primer i segon ordre. Veurem ara les EDPs més rellevants.

Definició 1.2.1. Una equació general de primer ordre és de la forma

$$F(x, u, \nabla u) = 0,$$

amb $u = u(x)$ i F no necessàriament lineal.

Observació 1.2.2. En general, quan parlem del gradient ∇u i del Laplacià Δu d'una funció $u = u(x, t)$, aquests seran només respecte x, és a dir, $\nabla u = \nabla_x u$ i $\Delta u = \Delta_x u$.

Definició 1.2.3. L'equació de Laplace per u (on $u = u(x)$) és

$$\Delta u = 0.$$

On Δu és el Laplacià, és a dir, $\Delta u = u_{x_1 x_1} + \cdots + u_{x_n x_n} = \operatorname{tr} D^2 u = \operatorname{div} \boldsymbol{\nabla} u$. Si u satisfà l'equació de Laplace es diu que és harmònica.

Definició 1.2.4. L'equació de Poisson és el cas no homogeni de la de Laplace, és a dir,

$$-\Delta u = f(x).$$

L'Equació de Poisson no lineal és

$$-\Delta u = f(u).$$

Definició 1.2.5. L'equació de difusió o de la calor per u és

$$u_t - D\Delta u = 0,$$

on $D > 0$ s'anomena la constant de difusió, o bé

$$u_t - D\Delta u = f(x, t).$$

en el cas no homogeni. Habitualment s'anomena equació de la calor quan u és una temperatura i equació de difusió quan u és una concentració.

Observació 1.2.6. L'equació de difusió amb $D = 1$ i quan u és independent del temps és l'equació de Laplace.

Definició 1.2.7. L'equació d'ones per u és

$$u_{tt} - c^2 \Delta u = 0,$$

on $c > 0$ és la velocitat d'ones, una constant.

Presentem dues equacions més. La primera prové dels models de la mecànica quàntica i la segona de models financers (governa el preu d'una opció). Les tractarem en alguns problemes.

Definició 1.2.8. L'equació de Schrodinger per $u = u(x, t) \in \mathbb{C}$ és

$$iu_t + \Delta u = 0.$$

Definició 1.2.9. L'equació de Black-Scholes per u és

$$u_t + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 u_{xx} + rxu_x - ru = 0.$$

on u és el preu d'una opció com a funció del seu preu de mercat x i el temps t, r és la taxa d'interès (lliure de risc) i σ és la volatilitat del mercat.

Veiem finalment dues equacions que no estudiarem aquest curs però que són també rellevants. Serveixen per modelar el comportament dels fluids.

Definició 1.2.10. L'equació d'Euler per $\vec{u}$ és el sistema

$$\begin{cases} \vec{u}_t + (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u} = -\nabla p \\ \operatorname{div} \vec{u} = 0. \end{cases}$$

on p és la pressió i on $\vec{u} \cdot \nabla = u_1 \partial_{x_1} + \cdots + u_n \partial x_n$ (aquí $\vec{u} = (u_1, ..., u_n)$ i u_i indica la i-èssima funció component de $\vec{u}$ i no la derivada parcial respecte de la i-èssima component).

Definició 1.2.11. L'equació de Navier-Stokes per $\vec{u}$ és el sistema

$$\begin{cases} \vec{u}_t + (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u} - \nu \Delta u = -\nabla p \\ \operatorname{div} \vec{u} = 0. \end{cases}$$

on ν és la constant de viscositat i p, com abans, és la pressió.

Tema 2

Equacions de primer ordre

2.1 Equació lineal del transport

En aquesta secció estudiarem l'equació lineal del transport. Sigui $u = u(x,t)$ la densitat o concentració d'una substància a temps t en el punt $x \in \mathbb{R}$ en un tub (prou llarg) que modelitzarem per $\mathbb{R}$. Suposem que la substància corre a velocitat constant $c \in \mathbb{R}$ en el tub o canal. La massa total del fluid o substància en un interval (a,b) a temps t ve donada per

$$\int_a^b u(x,t)\,\mathrm{d}x.$$

La variació temporal de la massa a l'interval (a,b) és per tant

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_a^b u(x,t)\,\mathrm{d}x = c(u(a,t) - u(b,t)).$$

On la darrera igualtat s'ha d'interpretar com un principi físic de conservació de massa. És a dir, el canvi de massa a l'interval es pot descriure en termes del canvi de massa als seus extrems. Com això és cert per a tot interval (a,b) es té que

$$\int_a^b u_t(x,t)\,\mathrm{d}x + c\,(u(b,t) - u(a,t)) = 0 \iff \int_a^b u_t(x,t) + cu_x(x,t)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Si suposem que l'integrand és una funció contínua en x, dividint aquesta última igualtat per $b-a$ i fent tendir $b \to a$ obtenim, pel teorema fonamental del càlcul,

$$0 = \lim_{b\to a} \frac{\int_a^b u_t(x,t) + cu_x(x,t)\,\mathrm{d}x}{b-a} = u_t(a,t) + cu_x(a,t).$$

Això és cert per a tota a i tot t i per tant obtenim l'equació del transport lineal

$$u_t + cu_x = 0.$$

Per tant, podem formular ara el problema de Cauchy (o de valors inicials) per l'equació lineal del transport.

Definició 2.1.1. Donada $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la concentració a temps $t = 0$, el problema de Cauchy per l'equació lineal del transport consisteix a trobar $u = u(x,t)$ tal que

$$\begin{cases} u_t + cu_x = 0, & x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = g(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{2.1}$$

Proposició 2.1.2. Donada $g \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ existeix una única solució $u \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ del problema de Cauchy de l'equació de transport lineal (2.1). A més a més, la solució ve donada per $u(x,t) = g(x-ct)$. Les solucions d'aquesta forma s'anomenen ones viatgeres.

Demostració. Considerem la derivada direccional de u en la direcció $(c,1)$. Tenim que aquesta és $(c,1)\cdot\nabla u = cu_x + u_t = 0$. Per tant, la funció és constant sobre la recta que passa per (x,t) i és paral·lela al vector $(c,1)$. Volem intersecar aquesta recta amb la condició inicial ($t=0$). Per tant, parametritzant la recta per $(x,t)+s(c,1) = (x+sc, t+s)$ ($s \in \mathbb{R}$), volem $t+s=0$, és a dir, $u(x,t) = u(x-ct,0) = g(x-ct)$. Per tant, tenim que $u(x,t) = g(x-ct)$ és una condició necessària per satisfer el problema de Cauchy però per la pròpia construcció de la solució ja satisfà l'equació en les derivades parcials. □

El problema es pot plantejar de forma anàloga per dimensions superiors i modela, per exemple, un llac on hi ha un corrent a velocitat constant en la direcció $\vec{c}$. S'escriu, per $\vec{c} \in \mathbb{R}^n$ i $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ donats,

$$\begin{cases} u_t + \vec{c}\cdot\nabla u = 0, & x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = g(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Proposició 2.1.3. Donada $g \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^n)$ existeix una única solució $u \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ del problema de Cauchy de l'equació de transport lineal en dimensions superiors. A més a més, ve donada per $u(x,t) = g(x-ct)$.

Demostració. La demostració és anàloga a la del problema en una sola dimensió. □

Definició 2.1.4. A l'equació lineal del transport, les rectes paral·leles al vector $(c,1)$ sobre cadascuna de les quals u és constant es diuen rectes característiques.

2.2 Transport a velocitat variable

Considerem ara que la velocitat pot dependre tant del punt x com del temps t. És a dir, $c = c(x,t)$. Aquest problema modela, per exemple, aigua baixant per una muntanya amb pendent no constant (en una situació on, pel que sigui, coneixem les velocitats instantànies i ens oblidem de l'acceleració o gravitació). Per formular el problema, procedim igual que quan la velocitat és constant. És a dir, igual que abans, per la conservació de massa,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_a^b u(x,t)\,\mathrm{d}x = c(a,t)u(a,t) - c(b,t)u(b,t).$$

I, per tant,

$$\int_a^b u_t(x,t)\,\mathrm{d}x + \int_a^b \left(c(x,t)u(x,t)\right)_x \mathrm{d}x = 0.$$

Finalment,

$$0 = \lim_{b\to a} \frac{\int_a^b u_t(x,t) + \left(c(x,t)u\right)_x \mathrm{d}x}{b-a} = u_t + \left(c(x,t)u\right)_x = 0.$$

D'on

$$u_t + c(x,t)u_x + c_x(x,t)u = 0.$$

Per resoldre aquest problema, podem utilitzar el que es coneix com a mètode de les corbes característiques, que generalitza el procediment utilitzat per resoldre el problema a velocitat constant. Considerem el camp vectorial $X(x,t) = (c(x,t),1)$. En primer lloc trobem les corbes integrals del camp X, és a dir, $(x(s),t(s))$ tal que $(x'(s),t'(s)) = X(x(s),t(s))$. Per fer això cal resoldre el sistema d'EDOs

$$\begin{cases} x'(s) = c(x(s),t(s)) \\ t'(s) = 1 \end{cases}$$

Com $t'(s) = 1$, tenim que $t = s$ i volem resoldre la EDO $x'(s) = c(x(s),s)$. Aquestes solucions s'anomenen corbes característiques. Si restringim $u(x,t)$ sobre una corba característica obtenim $v(s) := u(x(s),t(s))$ amb derivada

$$v'(s) = u_x(x(s),t(s))x'(s) + u_t(x(s),t(s))t'(s).$$

Que, aplicant la EDO pel camp X, és igual a

$$u_x(x(s),t(s))c(x(s),t(s)) + u_t(x(s),t(s)) \overset{\text{EDP}}{=} -c_x(x(s),t(s))u(x(s),t(s)) = \\ -c_x(x(s),t(s))v(s) =: -\alpha(s)v(s).$$

Per tant, $v'(s) = -\alpha(s)v(s)$ i, resolent aquesta equació diferencial,

$$v(s) = \exp\left(C - \int_0^s \alpha(z)\,\mathrm{d}z\right).$$

Si avaluem en un instant s_1 tal que $t(s_1) = 0$, com ja coneixem g podem determinar la constant. Finalment, avaluem l'expressió a s_2 tal que $x(s_2) = x$ i $t(s_2) = t$ per obtenir el valor a (x,t).

Més generalment, describim ara el mètode de les corbes caràcterístiques per resoldre l'equació lineal de primer ordre

$$a(x,t)u_t + b(x,t)u_x + d(x,t)u - f(x,t) = 0$$

amb $x,t \in \mathbb{R}$. Alguns termes de l'equació tenen noms que provenen de la seva interpretació física; $b(x,t)u_x$ és el terme de convecció, $d(x,t)u$ és el terme de reacció o absorció i $f(x,t)$ és la font.

El procediment del mètode de les característiques és fonamentalment igual al que acabem d'utilitzar.

1. Considerem el camp $X(x,t) = (b(x,t),a(x,t))$. En trobem les seves corbes integrals resolent la EDO corresponent:

$$\begin{pmatrix} x'(s) \\ t'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b(x(s),t(s)) \\ a(x(s),t(s)) \end{pmatrix}$$

2. Restringim la funció u sobre una corba integral del camp X parametritzada per $(x(s),t(s))$:

$$v(s) := u(x(s),t(s)).$$

   Aleshores

$$v'(s) = u_x x'(s) + u_t t'(s) = bu_x + au_t = f(x(s),t(s)) - d(x(s),t(s))v(s).$$

   Finalment, resolem aquesta última EDO i en determinem les constants additives gràcies a la condició inicial.

Observació 2.2.1. En lloc de condició inicial a vegades coneixerem la solució a una corba diferent de $t = 0$. El procediment és anàleg.

Estudiarem ara una proposició que físicament es pot interpretar com el fet que la massa es conserva quan es veu sotmesa al transport a velocitat variable (haurem de suposar que la massa inicialment estava concentrada en una regió fitada).

Proposició 2.2.2. Sigui $u \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ solució de $u_t + (c(x,t)u)_x = 0$. Suposem que c és globalment Lipschitz i que $u(x,0)$ té suport compacte. Aleshores per a tota $t \in \mathbb{R}$, el suport de $u(\cdot,t)$ és compacte i

$$\int_{\mathbb{R}} u(x,t)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} u(x,0)\,\mathrm{d}x.$$

Observació 2.2.3. Pel cas c constant, com disposem d'una solució explícita, la proposició es pot verificar fàcilment. Però pel cas general no disposem d'una fórmula explícita i caldrà una demostració més potent.

Demostració. En primer lloc, cal veure que pel mètode de les característiques podem assegurar que $u(\cdot,T)$ té suport compacte. Sigui $[-R,R]$ tal que $\operatorname{supp} u(\cdot,0) \subset [-R,R]$. Considerem γ_1 la corba característica que passa per $(-R,0)$ i γ_2 la que passa per $(R,0)$ (aquestes corbes estan definides per tot temps $t \in \mathbb{R}$ doncs c és globalment Lipschitz). Considerem x_1 la coordenada x del punt de tall de la recta $t = T$ amb γ_1 i x_2 la del punt de tall amb γ_2 (aquests punts existeixen i estan ben definits ja que les corbes característiques són de la forma $(x(t),t)$ per $t \in \mathbb{R}$). Aleshores, com les corbes característiques no es creuen i la funció u és constant sobre les corbes característiques, $\operatorname{supp} u(\cdot,T) \subset [x_1,x_2]$. És a dir, també té suport compacte. Sigui $A > 0$ tal que $-A < x(t) < A$ per tot $t \in [0,T]$. Aleshores, per $0 < t < T$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}} u(x,t)\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{-A}^{A} u(x,t)\,\mathrm{d}x = \int_{-A}^{A} u_t(x,t)\,\mathrm{d}x = -\int_{-A}^{A} (c(x,t)u(x,t))_x\,\mathrm{d}x \\ = -\left(c(A,t)u(A,t) - c(-A,t)u(-A,t)\right) = 0.\end{aligned}$$

□

2.3 Equació de transport no homogeni

Considerem ara el problema del transport no homogeni, és a dir, l'equació

$$\begin{cases} u_t + c\nabla u = f(x,t) & x \in \mathbb{R}^n,\ t \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = g(x) & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{2.2}$$

La interpretació física del terme $f(x,t)$ és que és una font de substància, amb unitats $kg \cdot m^{-1}s^{-1}$.

Aquest problema ja el sabem resoldre pel mètode de les característiques. Això, si es fa, portaria a una fórmula (no tan simple) que, com apareix en altres situacions, és bo entendre d'una manera més profunda o general. Per això serà útil introduir el concepte de semigrup de l'equació homogènia.

Definició 2.3.1. El semigrup de l'equació homogènia és l'aplicació que assigna la funció condició inicial d'una EDP a la solució a temps t. En el cas particular de l'equació del transport, fixat un temps t, es defineix el semigrup com

$$\begin{aligned} T_t \colon \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^n) &\to \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^n) \\ g &\mapsto v(\cdot, t) = g(\cdot - ct) \end{aligned}$$

Notem que T_t és un endomorfisme lineal.

Proposició 2.3.2. Per a tot $t, s \in \mathbb{R}$ tenim que $T_s \circ T_t = T_{t+s}$.

Demostració. En donarem dues proves. La primera és específica del problema de transport. Aplicant la solució explícita del problema,

$$(T_s(T_t(g)))(x) = (T_t g)(x - cs) = g((x - cs) - ct) = g(x - c(t + s)) = T_{t+s}(g)(x).$$

La segona és més general. Per exemple, també serveix quan la velocitat no és constant. Suposem que T_t és el semigrup del problema

$$u_t + (c(x)u)_x = 0.$$

Cal remarcar que en aquest cas c no depèn de t. Aleshores, com l'equació és autònoma, per la unicitat de les solucions que ja hem demostrat tenim automàticament que $T_s \circ T_t = T_{t+s}$. Hi ha una única solució que porta g a $T_t g$, i, com l'equació és autònoma, començar a temps t amb condició inicial g i traslladar-se un temps s és equivalent a començar a temps 0 amb condició $T_t g$ i traslladar-se un temps s. $\square$

Observació 2.3.3. El mateix raonament serveix per EDOs i EDPs no lineals i autònomes, donat un teorema d'existència i unicitat. Per exemple, podem comprovar que la propietat de semigrup es satisfà per l'equació

$$u_t = u^2.$$

En aquest cas, per separació de variables la solució ve donada per $u = -\frac{1}{t+c}$. Si $u(0) = g$, aleshores $c = -\frac{1}{g}$ i $u(t) = \frac{g}{1-gt}$. Aleshores, el semigrup a temps t serà

$$T_t g = \frac{g}{1 - gt}.$$

I aquest satisfà la propietat de semigrup:

$$T_s(T_t g) = \frac{T_t g}{1 - sT_t g} = \frac{\frac{g}{1-gt}}{1 - \frac{sg}{1-gt}} = \frac{g}{1 - g(t + s)} = T_{t+s}(g).$$

Vegem ara com utilitzar el semigrup per resoldre l'equació de transport no homogeni (2.2). En primer lloc intentarem trobar la solució de manera intuitiva, partint del problema que estem modelitzant. En aquest cas, el problema homogeni modela un fluid que es transporta a velocitat constant. El terme no homogeni es pot interpretar com una font de fluid. Aleshores, la quantitat de fluid total a (x, t) serà la suma del que prové de la condició inicial, que donarà un terme $(g(x - \vec{c}t))$, i la contribució de les fonts desplaçada a la velocitat corresponent. Aquest últim terme es correspon a integrar al llarg del temps la font a la posició adequada. Això ens permet introduir el que es coneix com la fórmula de Duhamel.

Definició 2.3.4. Per al problema del transport no homogeni, la fórmula de Duhamel és

$$u(x,t) = g(x - \vec{c}t) + \int_0^t f(x - \vec{c}(t-s), s)\,\mathrm{d}s. \tag{2.3}$$

O, més generalment, en termes del semigrup (i aplicable a altres problemes)

$$u(x,t) = (T_t g)(x) + \int_0^t \left(T_{t-s} f(\cdot, s)\right)(x)\,\mathrm{d}s.$$

Observació 2.3.5. La fórmula 2.3 es pot derivar a partir del mètode de les característiques (com farem a continuació) o bé simplement per consideracions de la modelització: la concentració de substància a un instant t és la suma de la contribució de la concentració inicial que ha evolucionat segons l'equació del transport homogènia donant lloc al terme $g(x - \vec{c}t)$ més les contribucions de la concentració que es va afegint a través de la font als instants $0 < s < t$, que també evoluciona segons l'equació del transport homogènia (durant un temps $t - s$) donant lloc al terme $f(x - \vec{c}(t-s), s)$, i que cal integrar en la variable s perquè $f(x,t)$ representa la concetració que s'afegeix en un instant infintessimal de temps.

Proposició 2.3.6. Donades $g, f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ existeix una única solució $u = u(x,t)$ de classe $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ que resol el problema de Cauchy del transport no homogeni (2.2). A més a més, la solució ve donada per la fórmula de Duhamel (2.3.4).

Demostració. Vegem en primer lloc la unicitat. Siguin $u, \tilde{u}$ dues solucions. Aleshores $v = u - \tilde{u}$ és solució del problema

$$\begin{cases} v_t + \vec{c}\nabla v = 0 \\ v(x,0) = 0 \end{cases}$$

que ja hem demostrat que implica que $v = 0$ pel mètode de les característiques.

Vegem ara l'existència de la solució pel mètode de les característiques. Prenem, com en el cas del problema homogeni, la recta $(x + \tilde{s}\vec{c}, t + \vec{s})$ amb paràmetre $\tilde{s}$. Aleshores, si definim $w(\tilde{s}) = u(x + \tilde{s}\vec{c}, t + \tilde{s})$, es té que

$$w'(\tilde{s}) = \vec{c}\nabla u(x + \tilde{s}\vec{c}, t + \tilde{s}) + u_t(x + \tilde{s}\vec{c}, t + \tilde{s}) = f(x + \tilde{s}\vec{c}, t + \tilde{s}).$$

Per tant,

$$u(x,t) = w(0) = w(-t) + \int_{-t}^0 w'(\tilde{s})\,\mathrm{d}\tilde{s} =$$
$$= u(x - \vec{c}t, 0) + \int_{-t}^0 f(x + \tilde{s}\vec{c}, t + \tilde{s})\,\mathrm{d}\tilde{s} \overset{t+\tilde{s}=s}{=} g(x - \vec{c}t) + \int_0^t f(x - (t-s)\vec{c}, s)\,\mathrm{d}s.$$

Com ja s'ha comentat anteriorment, la construcció amb el mètode de les corbes característiques ja assegura que es satisfaci l'equació. Alternativament, també es podria demostrar l'existència derivant directament la fórmula de Duhamel (2.3.4). □

Observació 2.3.7. En equacions diferencials, s'entén habitualment per un problema ben posat (*well-posed problem*) un problema les solucions del qual satisfan:

- Existència.

- Unicitat.

- Estabilitat: es poden obtenir solucions a temps t arbitràriament properes (amb certa norma) si es prenen condicions inicials suficientment properes. Altrament dit, el semigrup $T_t\colon g \mapsto u(\cdot, t)$ és continu, un cop escollit un espai de Banach apropiat (i, per tant, una norma).

Observació 2.3.8. A $\mathbb{R}^k$ totes les normes són equivalents i per tant la tria de norma no és rellevant quan estudiem l'estabilitat d'una EDO. Ara bé, en espais de Banach arbitraris no totes les normes són equivalents, i per tant la tria de norma és rellevant i serà diferent segons la EDP estudiada.

Definició 2.3.9. $\mathscr{C}_b^1(\mathbb{R}^n)$ denota el conjunt de funcions $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^n)$ fitades i amb primeres derivades fitades. En aquest espai, la següent norma està ben definida

$$||f||_{\mathscr{C}_b^1(\mathbb{R}^n)} = ||f||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} + ||\boldsymbol{\nabla} f||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$$

per a $f \in \mathscr{C}_b^1(\mathbb{R}^n)$, on la norma $||.||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$ és la norma del suprem.

Proposició 2.3.10. Donat $t \in \mathbb{R}$, el semigrup

$$\begin{aligned} T_t\colon \mathscr{C}_b^1(\mathbb{R}^n) \times \mathscr{C}_b^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) &\to \mathscr{C}_b^1(\mathbb{R}^n) \\ (g, f) &\mapsto u(\cdot, t) \end{aligned}$$

de l'equació del transport no homogeni és lineal i continu amb les normes dels espais de Banach respectius.

Demostració. La linealitat és directa. Vegem la continuïtat. Sigui $u(\cdot, t)$ una solució de l'equació. Aleshores

$$\begin{aligned} ||u(\cdot, t)||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} &= \left\| g(\cdot - \vec{c}t) + \int_0^t f(\cdot - \vec{c}(t-s), s)\,\mathrm{d}s \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \\ &\leq ||g||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} + t||f||_{L^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})}. \end{aligned}$$

Podem calcular el gradient a partir de l'Equació 2.3, que dona lloc a

$$\boldsymbol{\nabla} u(x, t) = \boldsymbol{\nabla} g(x - \vec{c}t) + \int_0^t \boldsymbol{\nabla} f(x - \vec{c}(t-s), s)\,\mathrm{d}s$$

i de forma anàloga es té

$$||\boldsymbol{\nabla} u(\cdot, t)||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq ||\boldsymbol{\nabla} g||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} + t||\boldsymbol{\nabla} f||_{L^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})}.$$

Aleshores, per la linealitat de l'equació,

$$||u - u_{\mathrm{ap}}||_{\mathscr{C}_b^1(\mathbb{R}^n)} \leq ||g - g_{\mathrm{ap}}||_{\mathscr{C}_b^1(\mathbb{R}^n)} + t||f - f_{\mathrm{ap}}||_{\mathscr{C}_b^1(\mathbb{R}^n)}.$$

Si imposem $||g - g_{\mathrm{ap}}||_{\mathscr{C}_b^1(\mathbb{R}^n)} < \frac{\varepsilon}{2}$ i $t||f - f_{\mathrm{ap}}||_{\mathscr{C}_b^1(\mathbb{R}^n)} < \frac{\varepsilon}{2}$, aleshores $\|u - u_{\mathrm{ap}}\|_{\mathscr{C}_b^1(\mathbb{R}^n)} < \varepsilon$. $\square$

2.4 Solucions generalitzades

Fins ara hem considerat solucions de classe $\mathscr{C}^1$ per una EDP d'ordre 1. Aquestes s'anomenen solucions clàssiques. Però també es pot admetre un concepte més general de solució, anomenat solució generalitzada o solució en sentit feble. Vegem un exemple on apareix aquest tipus de solució.

Exemple 2.4.1. Considerem el problema

$$\begin{cases} u_t + c\nabla u = 0 & x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = g(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

amb condició inicial $g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}$. Aquesta condició inicial modelitza un tub amb una comporta que manté l'aigua a $x < 0$, que s'obre a l'instant $t = 0$.

Tenim un candidat a solució $u(x,t) = g(x - ct) = \begin{cases} 1 & \text{si } x - ct < 0 \\ 0 & \text{si } x - ct > 0 \end{cases}$, però aquest no és $\mathscr{C}^1$ sobre la recta $x = ct$.

Definició 2.4.2. Sigui $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $(x,t) \in \Omega$ i $u \colon \Omega \to \mathbb{R}$, $u = u(x,t)$ possiblement discontínua. Diem que u és una solució generalitzada de $u_t + cu_x = 0$ a Ω si per a tot $[a,b]$ i tot $[t_1,t_2]$ tal que $[a,b] \times [t_1,t_2] \subset \Omega$ es té que $\int_a^b u(x,t)\,\mathrm{d}x$ és derivable quasi per a tot temps $t \in [t_1,t_2]$ i per aquests temps tenim

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_a^b u(x,t)\,\mathrm{d}x = -cu(b,t) + cu(a,t)$$

si (a,t) i (b,t) són punts de continuïtat de u.

Observació 2.4.3. Amb aquesta definició la solució proposada a l'exemple anterior és una solució generalitzada. Si l'interval $[a,b]$ es troba completament a un costat de la recta $x = t$, la igualtat buscada és directa. Si l'interval $[a,b]$ talla la recta al punt d, aleshores

$$\int_a^b u(x,t)\,\mathrm{d}x = d - a$$

i

$$\int_a^b u(x,t+h)\,\mathrm{d}x = d - a + ch.$$

I, per tant,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_a^b u(x,t) = c = -cu(b,t) + cu(a,t).$$

Tema 3

Espais de Banach, operadors i semigrups

Al llarg del capítol $(E, ||\cdot||)$ serà un espai de Banach.

3.1 Espais de Banach

Observació 3.1.1. Recordem que un espai de Banach és un espai vectorial normat i complet, i que una norma és una aplicació $||\cdot||\colon E \to \mathbb{R}$ tal que

- $||u|| \geq 0$.
- $||u+v|| \leq ||u|| + ||v||$.
- $||\lambda u|| = |\lambda| ||u||$.
- $||u|| = 0 \iff u = 0$.

Exemple 3.1.2.

1. Per $K \subset \mathbb{R}^n$ compacte, $E = \mathscr{C}^0(K) = \mathscr{C}(K)$ amb la norma $||u||_\infty = \max_{x\in K} |u(x)|$ és un espai de Banach.
2. $E = L^2(a,b)$, amb norma $||u||_2 = \left(\int_a^b |u|^2(x)\, \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$ és un espai de Banach.

Observació 3.1.3. Donat $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ obert i fitat aleshores $\overline{\Omega}$ és compacte i $\mathscr{C}\left(\overline{\Omega}\right)$ és un espai de Banach. Si Ω no és fitat, cal considerar $\mathscr{C}_b\left(\overline{\Omega}\right)$ (el subíndex b prové de "bounded"), l'espai de funcions contínues i fitades, que sí és un espai de Banach. Anàlogament $\mathscr{C}^k\left(\overline{\Omega}\right)$ és un espai de Banach quan Ω és fitat i cal imposar que les derivades d'ordre menor o igual a k siguin fitades en cas contrari. Finalment, l'espai $\mathscr{C}^\infty$ no és de Banach.

Observació 3.1.4. Per $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ no necessàriament fitat, l'espai $L^p(\Omega)$, $p \in \mathbb{R}$, $1 \leq p < \infty$ és un espai de Banach amb la norma

$$||u||_p = ||u||_{L^p} = \left(\int_\Omega |u|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

I l'espai $L^\infty(\Omega)$ de funcions mesurables i essencialment fitades (fitades gairebé arreu per una constant) amb la norma

$$||u||_\infty = \inf\{b \in \mathbb{R} \colon |\{|u(x)| > b\}| = 0\}$$

(on $|\cdot|$ és la mesura de Lebesgue a $\mathbb{R}^n$) també ho és.

Teorema 3.1.5. *Teorema del punt fix de Banach.*
Sigui E un espai de Banach i $T \colon \overline{B_M}(u) \subset E \to \overline{B_M}(u)$ una contracció, és a dir, $||Tu - Tv|| \leq \lambda ||u - v||$ per a tot $u, v \in \overline{B_M}(u)$, amb $0 \leq \lambda < 1$. Aleshores T té un únic punt fix.

Demostració. La demostració es deixa com exercici per al lector. Consisteix a iterar un punt qualsevol i veure que la successió donada per aquesta iteració és de Cauchy fitant les diferències amb una progressió geomètrica. □

3.2 Operadors

Definició 3.2.1. Un operador és una aplicació entre espais de funcions.

Es diu que un operador és lineal quan l'aplicació ho és i no lineal altrament.

Exemple 3.2.2. La diferenciació és un operador lineal

$$\begin{aligned} D \colon \mathscr{C}^1([0,1]) &\to \mathscr{C}^0([0,1]) \\ u = u(x) &\mapsto u' = u'(x). \end{aligned}$$

Proposició 3.2.3. Siguin E, F espais de Banach i $A \colon E \to F$ un operador lineal. Aleshores són equivalents

(i) A és continu.

(ii) A és un "operador fitat", és a dir, existeix C tal que $||Au||_F \leq C||u||_E$ per a tot $u \in E$ [1].

Demostració. Vegem primer que la segona condició implica la primera. Donat $u_k \to u$, aleshores $||u_k - u|| \to 0$, d'on $||Au_k - Au|| \leq C||u_k - u|| \to 0$, i per tant $Au_k \to Au$, és a dir, A és continu. La implicació conversa es deixa com a exercici. Per demostrar-la, cal veure que la norma que definirem a continuació està ben definida per operadors lineals i continus. □

Definició 3.2.4. Donat un operador $A \colon E \to F$ lineal i continu, es defineix com la norma de A la constant $C \in \mathbb{R}$ més petita que fita l'operador. És a dir,

$$||A|| = \inf\{C \geq 0 \colon ||Au||_F \leq C||u||_E \ \forall u \in E\} = \sup_{u \in E\setminus\{0\}} \frac{||Au||_F}{||u||_E} =$$
$$= \sup_{v \in E,\, ||v||_E = 1} ||Av||_F = \sup_{v \in E,\, ||v||_E \leq 1} ||Av||_F.$$

Aquesta norma indueix un altre espai de Banach que definim a continuació.

[1] Si $A \not\equiv 0$ això no vol dir que A sigui una aplicació fitada a E, doncs $||A(\lambda u)|| = |\lambda| ||Au|| \to \infty$ si $|\lambda| \to \infty$ i $Au \neq 0$.

Definició 3.2.5. El conjunt d'operadors lineals i continus entre espais de Banach, $\mathcal{L}(E,F)$, és un espai vectorial i amb la norma $||A||$ que hem definit anteriorment és un espai de Banach.

Exemple 3.2.6.

1. *Diferenciació*: Donat $u = u(t)$ amb $t \in [a,b]$, l'operador $D\colon u \to u'$ és un operador lineal. Malgrat això, no és un endomorfisme, per exemple, envia $\mathscr{C}^1([a,b])$ a $\mathscr{C}^0([a,b])$, però no $\mathscr{C}^1([a,b])$ a $\mathscr{C}^1([a,b])$, i això veurem que crearà greus dificultats quan vulguem usar teoremes de punt fix per trobar solucions d'EDPs no lineals.

   També podem comprovar que no existeix C tal que $||Du||_\infty \leq C||u||_\infty$, prenent per exemple la família de funcions e^{at}, que necessitaria constants C arbitràriament grans, i per tant tampoc és un operador continu quan és mirat amb la mateixa norma de sortida i d'arribada calculant-lo en funcions $\mathscr{C}^\infty$.

2. *Integració*: Donat $u = u(t)$, l'operador "integració" (o "primitiva")

$$(I(u))(t) = \int_a^t u$$

   és un endomorfisme continu de $\mathscr{C}([a,b])$ a si mateix. En efecte, si $u \in \mathscr{C}([a,b])$, pel teorema fonamental del càlcul $I(u) \in \mathscr{C}([a,b])$. A més, l'operador és trivialment lineal i és fitat perquè donat $u \in \mathscr{C}([a,b])$,

$$\begin{aligned} ||I(u)||_\infty &= \max_{t\in[a,b]} \left\{ \left| \int_a^t u(x)\,\mathrm{d}x \right| \right\} \leq \max_{t\in[a,b]} \left\{ \int_a^t |u(x)|\,\mathrm{d}x \right\} \\ &\leq \max_{t\in[a,b]} \left\{ \int_a^t ||u||_\infty\,\mathrm{d}x \right\} = (b-a)||u||_\infty, \end{aligned}$$

   i, per tant, és continu.

Exercici 3.2.7. Demostreu que l'operador integració és un endomorfisme continu a l'espai $E = L^p(a,b)$.

3.3 Resolució d'EDPs per punt fix

Definició 3.3.1. Diem que una funció $F : E \to E$ és localment Lipschitz si per a tot conjunt T tancat i fitat de E, existeix una constant C_T tal que

$$||F(u) - F(v)|| \leq C_T||u - v||,$$

per a tot $u, v \in T$.

Proposició 3.3.2. Donat $u = u(t)$ de la forma $u\colon [a,b] \to E$ i $F\colon E \to E$ localment Lipschitz, existeix una única solució de l'EDO per un cert interval (petit) de temps I (obert i amb $a \in I$)

$$\begin{cases} u' = F(u) \\ u(a) = g \in E. \end{cases}$$

Demostració. La idea fonamental consisteix a escriure l'EDO a l'espai de Banach E de forma integral (mètode de Picard). Volem resoldre aleshores

$$u(t) - u(a) = \int_a^t u'(s)\,\mathrm{d}s = \int_a^t F(u(s))\,\mathrm{d}s.$$

És a dir, cal resoldre

$$u(t) = g + \int_a^t F(u(s))\,\mathrm{d}x$$

per a tot $t \in \overline{I}$. Si definim $\tilde{E} = \mathscr{C}^0(\overline{I}, E)$ espai de Banach, podem interpretar les solucions d'aquest problema com punts fixos de l'operador $\mathcal{F}\colon \tilde{E} \to \tilde{E}$

$$(\mathcal{F}(u))\,(t) = g + \int_a^t F(u(s))\,\mathrm{d}s.$$

Si veiem que, per un interval $\overline{I}$ adequat, $\mathcal{F}$ restringida a una bola adequada envia aquesta bola a si mateixa i és una contracció, aleshores podrem aplicar el teorema del punt fix i trobar una solució. En primer lloc, observem que, donada $u \in \tilde{E}$, aleshores $\mathcal{F}(u) \in \mathscr{C}^0(\overline{I}, E)$, és més, $\mathcal{F}(u) \in \mathscr{C}^1(\overline{I}, E)$. Prenguem ara una bola de radi M centrada en g (entesa g com la funció constant en t). Vegem que, si $u \in \overline{B_M}(g)$, aleshores $\mathcal{F}(u) \in \overline{B_M}(g)$. Per a veure això, sigui C_M la constant de Lipschitz de F a la bola $\overline{B_M}(g)$ (entesa g aquí com element de E). Prenent $M := ||F(g)||$ i $|I| \leq \frac{1}{2}$, tenim

$$\begin{aligned}
||\mathcal{F}(u(t)) - g|| &= \left\| \int_a^t F(u(s))\,\mathrm{d}s \right\| \leq \int_{\min(a,t)}^{\max(a,t)} ||F(u(s))||\,\mathrm{d}s \leq \\
&\leq \int_{\min(a,t)}^{\max(a,t)} \left(||F(u(s)) - F(u(a))|| + ||F(g)||\right)\mathrm{d}s \leq \\
&\leq \int_{\min(a,t)}^{\max(a,t)} \left(C_M ||u(s) - u(a)|| + ||F(g)||\right)\mathrm{d}s \leq \\
&\leq |I|\left(C_M M + ||F(g)||\right) \leq |I| C_M M + \frac{1}{2} M \leq M
\end{aligned}$$

si fem $|I|$ prou petit. Per tant, prenent suprem per a tot t, tenim que $\mathcal{F}(u) \in \overline{B_M}(g)$. Vegem que és una contracció per a tot $u, v \in \overline{B_M}(g)$.

$$\begin{aligned}
||\mathcal{F}(u)(t) - \mathcal{F}(v)(t)|| &= \left\| \int_0^t F(u(s)) - F(v(s))\,\mathrm{d}s \right\| \leq \int_{\min(a,t)}^{\max(a,t)} ||F(u(s)) - F(v(s))||\,\mathrm{d}s \leq \\
&\leq C_M \int_{\min(a,t)}^{\max(a,t)} ||u(s) - v(s)||\,\mathrm{d}s \leq C_M\,|I|\,||u - v||_{\tilde{E}}.
\end{aligned}$$

Finalment, $\lambda = C_M|I|$ és menor que 1 si $|I|$ és prou petit, i podem prendre suprem per a tot t per obtenir

$$||\mathcal{F}(u) - \mathcal{F}(v)||_{\tilde{E}} \leq \lambda ||u - v||_{\tilde{E}}.$$

Per tant, ja hem vist que $\mathcal{F}$ és una contracció que envia la bola $\overline{B_M}(g)$ a si mateixa. Si apliquem el teorema del punt fix de Banach obtenim una solució $u \in \tilde{E}$ única a la bola definida. $\square$

Observació 3.3.3. Si la funció F és globalment Lipschitz, podem prendre $\mathcal{F}$ sobre tot $\tilde{E}$ i obtenir que $\mathcal{F}$ és una contracció amb una fita independent de la condició inicial, és a dir, la longitud de l'interval I necessària perquè $\mathcal{F}$ sigui una contracció no dependrà de la condició inicial. Aleshores es pot prolongar la solució a tot $\mathbb{R}$ (només cal afegir tants intervals de mida |I| com sigui necessari).

Estudiem ara el mateix problema restringint-nos al cas on F és lineal i contínua. Veurem que, com en el cas de les EDOs, la solució ve donada per l'exponencial. En primer lloc, caldrà definir l'exponencial adequadament.

Definició 3.3.4. Donada una aplicació $A\colon E \to E$ lineal i contínua, definim l'aplicació $e^{tA}\colon E \to E$ com

$$e^{tA} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}.$$

Proposició 3.3.5. Donada una aplicació $A\colon E \to E$ lineal i contínua, e^{tA} està ben definida i és una aplicació lineal i contínua.

Demostració. Per comprovar que està ben definida hem de veure que la sèrie corresponent és convergent. Veurem, de fet, que és absolutament convergent.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\| \frac{t^k A^k}{k!} \right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|t|^k}{k!} ||A^k|| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|t|^k}{k!} ||A||^k = e^{|t|||A||} < \infty.$$

És clar que aleshores també és lineal, i per veure que és contínua cal observar que $||e^{tA}|| \leq e^{|t|||A||}$. □

Proposició 3.3.6. Sigui $A\colon E \to E$ una aplicació lineal i contínua amb E espai de Banach. L'única solució de

$$\begin{cases} u_t = Au, & t \in \mathbb{R}, \\ u(0) = g \in E, \end{cases}$$

ve donada per $u(t) = e^{tA} g$.

Demostració. La unicitat ja l'hem vista mitjançant el teorema del punt fix de Banach (3.3.2 i 3.3.3). Hem de veure per tant que $u(t) = e^{tA} g$ és efectivament una solució. En primer lloc,

$$u(0) = e^{0A} g = \operatorname{Id} g = g.$$

En segon lloc,

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k t^{k-1}}{k!} A^k g = \sum_{k=1}^{\infty} A \frac{t^{k-1} A^{k-1}}{(k-1)!} g = A e^{tA} g,$$

on hem pogut derivar terme a terme perquè $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{k-1}A^{k-1}}{(k-1)!} Ag$ és absolutament convergent. □

Volem ara resoldre l'EDO no homogènia

$$\begin{cases} u_t = Au + f(t) \\ u(0) = g \in E \end{cases} \tag{3.1}$$

amb $f\colon \mathbb{R} \to E$. Sabem que el semigrup de l'equació homogènia ve donat per $T_t g = e^{tA} g$, que satisfà la propietat del semigrup: $T_s \circ T_t = e^{sA} e^{tA} = e^{(s+t)A} = T_{s+t}$. La solució del problema no homogeni ve donada per la fórmula de Duhamel o de variació de les constants:

$$u(t) = e^{tA}g + \int_0^t e^{(t-s)A} f(s)\,\mathrm{d}s.$$

Observació 3.3.7. S'anomena també fórmula de variació de les constants perquè es pot obtenir amb el mètode de variació de les constants de EDOs. En efecte, si busquem la solució u de la forma $u(t) = e^{tA}g(t)$, volem que

$$Ae^{At}g(t) + f(t) \overset{(3.1)}{=} u'(t) = Ae^{tA}g(t) + e^{tA}g'(t).$$

I per tant

$$g'(t) = e^{-tA}f(t),$$

d'on

$$g(t) = g(0) + \int_0^t e^{-sA} f(s)\,\mathrm{d}s.$$

I finalment

$$u(t) = e^{tA}g + \int_0^t e^{(t-s)A} f(s)\,\mathrm{d}s.$$

Volem finalment resoldre EDPs de transport no lineals, com ara

i)

$$\begin{cases} u_t + cu_x = u^2, & x \in \mathbb{R}, t \in I, \\ u(x,0) = g(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

ii)

$$\begin{cases} (u_t + cu_x)(x,t) = \frac{1}{x}\int_0^x \cos(u(y,t))\,\mathrm{d}y, & x, t \in \mathbb{R}, \\ u(x,0) = g(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

El primer cas ja el sabem resoldre pel mètode de les característiques (veure problema 5 de la primera llista). El segon, però, no dona una EDO sobre la recta característica. Ara bé, com sabem resoldre el problema homogeni lineal i en sabem descriure el semigrup, podem utilitzar la fórmula de Duhamel. És a dir, voldríem trobar solucions de

$$u(x,t) = (T_t g)(x) + \int_0^t (T_{t-s}F(u(\cdot,s)))(x) =: (Nu)(x,t)\,\mathrm{d}s,$$

on $(T_t v)(x) = v(x - ct)$ és el semigrup pel problema lineal homogeni $v_t + cv_x = 0$. Si definim $E = \mathscr{C}_b^0(\mathbb{R})$, $\tilde{E} = \mathscr{C}_b^0(\overline{I}, \mathbb{R})$,[2] i $\overline{I} = [-\varepsilon, \varepsilon]$, aleshores tenim que F és

$$\begin{aligned} F\colon E &\to E \\ w &\mapsto \frac{1}{x}\int_0^x \cos(w(y))\,\mathrm{d}y \end{aligned}$$

[2]La tria de l'espai de Banach sobre el que treballem és rellevant. En aquest cas, el fet que fixem l'espai de funcions contínues farà que puguem veure que és una contracció més fàcilment però només obtindrem una solució integral (o generalitzada). No obtenim en la demostració una solució clàssica $\mathscr{C}^1$ (sense usar arguments suplementaris com els d'EDOs, usant l'equació del punt fix que resolem). Podríem, però, treballar a $\mathscr{C}_b^1$ i trobar solucions clàssiques, si bé la demostració es complica doncs la norma $\mathscr{C}^1$ inclou més termes.

i a l'origen $F(w)(0) = \cos(w(0))$. Busquem aleshores un punt fix de $N\colon \tilde{E} \to \tilde{E}$.

Procedirem igual que hem fet anteriorment per aplicar el teorema del punt fix de Banach. En primer lloc cal veure que, com hem afirmat, N envia elements de $\tilde{E}$ a $\tilde{E}$. Sigui $u \in \tilde{E}$. En primer lloc veiem que $N(u)$ és fitada sobre $I \times \mathbb{R}$. Sabem que T_t és lineal i continu, i per tant és Lipschitz. De fet, $||T_t g||_E = ||g(\cdot - ct)||_E = ||g||_E$, és a dir, és una isometria. També tenim que

$$|F(u(\cdot, s))(x)| \le \frac{1}{|x|} \int_0^x |\cos(u(\tilde{x}, s)))|\,\mathrm{d}\tilde{x} \le \frac{|x|}{|x|} \le 1.$$

Aleshores $||N(u(\cdot, t))||_E \le ||g||_E + \varepsilon$, és a dir, és fitat. Com T_t és continu respecte de t i F també, $N(u)$ també ho serà. Vegem ara, suposant que F és globalment Lipschitz, que N és una contracció.

$$\begin{aligned}
||N(u)(\cdot, t) - N(w)(\cdot, t))||_E &= \left\| \int_0^t T_{t-s}(F(u(\cdot, s)) - F(w(\cdot, s)))\,\mathrm{d}s \right\|_E \le \\
&\le \int_0^t \|T_{t-s}(F(u(\cdot, s)) - F(w(\cdot, s)))\|_E\,\mathrm{d}s = \\
&= \int_0^t \|F(u(\cdot, s)) - F(w(\cdot, s))\|_E\,\mathrm{d}s \le C_L \varepsilon ||u - w||_{\tilde{E}}.
\end{aligned}$$

Prenent suprem per a tot t, $||N(u) - N(w)||_{\tilde{E}} \le C_L \varepsilon ||u - w||_{\tilde{E}}$, i per tant N és una contracció si ε és prou petit. Demostrarem ara que F és globalment Lipschitz, com acabem de suposar.

$$\begin{aligned}
||(F(v_1) - F(v_2))(x)|| &\le \frac{1}{|x|} \int_{\min(0,x)}^{\max(0,x)} |\cos(v_1(y)) - \cos(v_2(y))|\,\mathrm{d}y = \\
&= \frac{1}{|x|} \int_{\min(0,x)}^{\max(0,x)} |\sin \xi(y)||v_1(y) - v_2(y)|\,\mathrm{d}y \le ||v_1 - v_2||_E.
\end{aligned}$$

Prenent suprem per a tota x, $||F(v_1) - F(v_2)||_E \le ||v_1 - v_2||_E$, és a dir, F és Lipschitz i per tant N és una contracció i podem trobar un punt fix $Nu = u$. Remarquem que aquest punt fix pertany a $\tilde{E}$ i per tant no és necessàriament diferenciable, és a dir, només obtenim una solució integral o generalitzada.

Tema 4

L'equació d'ones

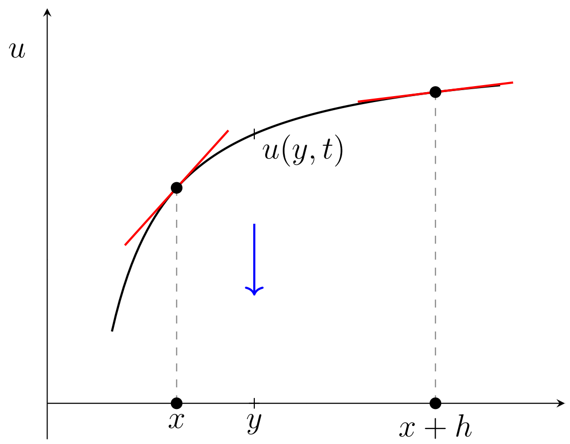
4.1 Modelització

Considerem una corda vibrant infinita disposada sobre l'eix x, i amb posició vertical $u(x,t)$ en el temps t en la posició horitzontal x. Per a modelar el problema, assumirem que la corda és flexible i elàstica, i que les vibracions són petites (ja que sinó la EDP a resoldre seria no lineal).

Aplicarem la segona llei de Newton. D'una banda, si $\rho(y)$ és la densitat de massa en el punt y, la força que actua sobre el punt y a temps t és:

$$\rho(y)u_{tt}(y,t).$$

D'altra banda, hi ha una força de tensió que actua sobre la corda. Si considerem l'interval $(x, x+h)$, per a h prou petit, podem considerar que la tensió serà proporcional a la diferència de derivades als extrems de l'interval (la corda estarà més doblegada com major sigui la diferència de derivades).



En altres paraules, la tensió total a temps t en l'interval $(x, x+h)$ serà:

$$\tau(u_x(x+h,t) - u_x(x,t)),$$

sent τ una constant positiva (al dibuix, la tensió, indicada amb la fletxa blava, és negativa i $u_x(x+h,t) - u_x(x,t) < 0$).

Si, a més, considerem l'acció de forces externes $f(y,t)$, la segona llei de Newton ens diu que:

$$\int_x^{x+h} \rho(y)u_{tt}(y,t)\,\mathrm{d}y = \tau(u_x(x+h,t) - u_x(x,t)) + \int_x^{x+h} f(y,t)\,\mathrm{d}y.$$

Per tant, per a tot interval $(x, x+h)$ i tot temps t es compleix

$$\int_x^{x+h} (\rho(y)u_{tt}(y,t) - \tau u_{xx}(y,t) - f(y,t))\,\mathrm{d}y = 0.$$

Dividint per h i aplicant el teorema fonamental del càlcul, arribem a:

$$0 = \lim_{h\to 0} \frac{\int_x^{x+h} (\rho(y)u_{tt}(y,t) - \tau u_{xx}(y,t) - f(y,t))\,\mathrm{d}y}{h} = \rho(x)u_{tt}(x,t) - \tau u_{xx}(x,t) - f(x,t).$$

De moment, considerem que la densitat de massa $\rho(y)$ és constant. Definint

$$\frac{\tau}{\rho} = c^2,$$

i després de reanomenar $\frac{f}{\rho} \rightsquigarrow f$, arribem a l'equació

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(x,t),$$

que és l'equació d'ones desitjada. Es tracta d'una EDP lineal de segon ordre.

Estudiem les unitats dels termes de l'equació d'ones a partir del plantejament físic del problema. Com u mesura una a distància, $u \sim m$, així que $u_{xx} \sim m^{-1}$ i $u_{tt} \sim ms^{-2}$. Per tant, $c^2 \sim m^2 s^{-2}$ i c té unitats de velocitat.

Definició 4.1.1. El problema de Cauchy de l'equació d'ones consisteix a trobar $u = u(x,t)$ tal que:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(x,t), & x \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = g(x), & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) = h(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{4.1}$$

donades $g \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R})$ (posició inicial de la corda) i $h \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ (velocitat inicial de la corda). La constant $c > 0$ és anomenada la velocitat de les ones en la corda.

4.2 Equació d'ones homogènia

Proposició 4.2.1. *Fórmula de d'Alembert.* Donades $g \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R})$ i $h \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$, l'equació d'ones homogènia

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, & x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}, \\ u(x,0) = g(x), & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x,0) = h(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{4.2}$$

admet una única solució clàssica $u \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$. A més, ve donada per l'expressió

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(g(x-ct) + g(x+ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} h(y)\,\mathrm{d}y.$$

Demostració. Escrivim l'equació homogènia de la següent forma:

$$0 = u_{tt} - c^2 u_{xx} = (\partial_t^2 - c^2 \partial_x^2)u,$$

on $\partial_t^2 = \partial_t\partial_t = \partial_{tt}$. Inspirant-nos en la diferència de quadrats, comprovem que:

$$(\partial_t + c\partial_x)(\partial_t - c\partial_x)u = (\partial_{tt} - c\partial_t\partial_x + c\partial_x\partial_t - c^2\partial_{xx})u = (\partial_{tt} - c^2\partial_{xx})u = 0,$$

on hem usat el lema de Schwarz ($u_{xt} = u_{tx}$), ja que $u \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$. Així doncs, podem escriure l'equació homogènia com un problema de transport:

$$v := u_t - cu_x \implies (\partial_t + c\partial_x)v = 0.$$

La condició inicial d'aquest problema de transport és:

$$v(x,0) = (u_t - cu_x)(x,0) = h(x) - cg'(x).$$

En conseqüència,

$$v(x,t) = (h - cg')(x - ct).$$

D'aquesta manera, hem de resoldre una altra equació de transport:

$$\begin{cases} u_t - cu_x = (h - cg')(x - ct) =: \tilde{f}(x,t) \\ u(x,0) = g(x). \end{cases}$$

Aquest problema no homogeni es pot resoldre amb la fórmula de Duhamel per a l'equació de transport (2.3.4):

$$u(x,t) = g(x+ct) + \int_0^t T_{t-s}\left(\tilde{f}(\cdot,s)\right)(x)\,\mathrm{d}s.$$

Usant que $T_{t-s}\left(\tilde{f}(\cdot,s)\right)(x) = \tilde{f}(x + c(t-s), s) = (h - cg')(x + c(t-s) - cs)$, tenim que

$$u(x,t) = g(x+ct) + \int_0^t h(x - 2cs + ct)\,\mathrm{d}s - c\int_0^t g'(x - 2cs + ct)\,\mathrm{d}s.$$

Fent el canvi $y = x - 2cs + ct$, obtenim:

$$u(x,t) = g(x+ct) - \frac{1}{2c}\int_{x+ct}^{x-ct} h(y)\,\mathrm{d}y + \frac{1}{2}\int_{x+ct}^{x-ct} g'(y)\,\mathrm{d}y.$$

Aplicant el teorema fonamental del càlcul a l'última integral, arribem a l'expressió desitjada:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(g(x-ct) + g(x+ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} h(y)\,\mathrm{d}y.$$

Es deixa com a exercici comprovar que l'expressió anterior realment és solució de l'EDP. La unicitat de solucions és conseqüència de l'argument anterior fet amb $g \equiv h \equiv 0$, que són les condicions inicials que satisfà la diferència de dues solucions de (4.2) i del fet que hi ha unicitat de solucions pel problema del transport. □

Definició 4.2.2. La fórmula de d'Alembert és

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(g(x-ct) + g(x+ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} h(y)\,\mathrm{d}y. \tag{4.3}$$

L'operador $(\partial_{tt} - c^2\partial_{xx})$ s'anomena operador d'ones o d'Alembertià.

Proposició 4.2.3. El semigrup solució està ben definit i és un endomorfisme continu:

$$T_t\colon \mathscr{C}_b^2(\mathbb{R}) \times \mathscr{C}_b^1(\mathbb{R}) \to \mathscr{C}_b^2(\mathbb{R}) \times \mathscr{C}_b^1(\mathbb{R})$$
$$\begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u(\cdot,t) \\ u_t(\cdot,t) \end{pmatrix}$$

Serà útil més endavant per a la resolució de problemes no lineals (per exemple $u_{tt} - c^2 u_{xx} = u^2$). La demostració, que es deixa com a exercici, és simple i s'indica a continuació.

Exercici 4.2.4. Sigui u solució de (4.2). Si $g \in \mathscr{C}_b^2(\mathbb{R})$ i $h \in \mathscr{C}_b^1(\mathbb{R})$, llavors, donat un temps t, es compleix $u(\cdot,t) \in \mathscr{C}_b^2(\mathbb{R})$ i

$$||u(\cdot,t)||_\infty \le ||g||_\infty + t||h||_\infty.$$

La demostració és immediata a partir de la fórmula de d'Alembert (4.3). També a partir de la fórmula de d'Alembert, trobeu una fórmula per a u_t, u_{tx}, u_x, u_{xx}. Useu-la per fitar $||u_t(\cdot,t)||_\infty, ||u_{tx}(\cdot,t)||_\infty, ||u_x(\cdot,t)||_\infty, ||u_{xx}(\cdot,t)||_\infty$ i veure que $u_t(\cdot,t) \in \mathscr{C}_b^1(\mathbb{R})$ i $u(\cdot,t) \in \mathscr{C}_b^2(\mathbb{R})$.

Definició 4.2.5. Un problema en EDPs (de Cauchy, o de contorn) es diu que està ben posat ("well-posed" en anglès) si gaudeix de:

(1) Existència de solució

(2) Unicitat de solució

(3) Propietat d'estabilitat

Sempre voldrem tenir les tres propietats. Amb existència i unicitat ((1)-(2)) no n'hi ha prou. L'estabilitat vol dir que si els ingredients del problema (condició inicial o condicions de vora o forces f) es canvien lleugerament, llavors les solucions canvien, però ho fan lleugerament, de manera controlada (amb fites).

Pel problema de Cauchy d'una equació (EDP o EDO), estabilitat vol dir "estabilitat de Lyapunov": $\forall \epsilon > 0 \, \exists \delta > 0$ tal que si dues condicions inicials satisfan $||(g,h) - (g_{ap}, h_{ap})|| \le \delta$, llavors $||u(\cdot,t) - u_{ap}(\cdot,t)|| \le \epsilon$ (per als temps t en un cert interval del nostre interès), on (g_{ap}, h_{ap}) és qualsevol altra condició inicial (el subíndex ap fa referència a "aproximada", doncs sempre fem errors en mesurar una condició inicial).

Observació 4.2.6. Per l'equació d'ones evidentment tenim estabilitat, gràcies a les fites pel semigrup que hem trobat. Com a norma per l'estabilitat podem prendre la de $\mathscr{C}_b^2(\mathbb{R}) \times \mathscr{C}_b^1(\mathbb{R})$.

Observem que donat un error $\epsilon > 0$, l'error δ l'haurem de prendre més i més petit si volem controlar errors per temps més i més grans (a causa del terme $\cdots + t||h - h_{ap}||_\infty$ a la fita d'estabilitat).

Exercici 4.2.7. Per EDPs d'evolució lineals, la propietat (3) d'estabilitat (de Lyapunov) és equivalent a que el semigrup sigui un endomorfisme continu.

Observació 4.2.8. Existeix una deducció alternativa de la fórmula de d'Alembert, que es detalla a continuació. Considerem el problema homogeni (4.2) (amb $c = 1$, per simplificar):

$$u_{tt} = u_{xx}.$$

Hi ha un canvi de variables que simplifica l'EDP. Considerem:

$$\begin{cases} y = t + x; \\ z = t - x \end{cases} \iff \begin{cases} t = \frac{1}{2}(y+z) \\ x = \frac{1}{2}(y-z) \end{cases}$$

Per la regla de la cadena, observem que:

$$u_t = \frac{\partial y}{\partial t} u_y + \frac{\partial z}{\partial t} u_z = u_y + u_z$$
$$u_x = u_y - u_z.$$

Així, les segones derivades queden:

$$u_{tt} = (u_t)_t = (u_t)_y + (u_t)_z = (u_y + u_z)_y + (u_y + u_z)_z = u_{yy} + 2u_{yz} + u_{zz}$$

$$u_{xx} = (u_x)_x = (u_x)_y - (u_x)_y = (u_y - u_z)_y - (u_y - u_z)_z = u_{yy} - 2u_{yz} + u_{zz}.$$

L'EDP resultant és

$$0 = u_{tt} - u_{xx} = 4u_{yz} \implies u_{yz} = 0.$$

L'expressió obtinguda és tan simple que podem "integrar-la" i trobar una solució general. Definint $v := u_y$, tenim:

$$u_{yz} = 0 \implies v_z = 0,\ v = v(y,z) \iff v = v(y).$$

D'aquesta manera:

$$u(y,z) = \int_0^y v(s)\,\mathrm{d}s + c(z) = G(y) + F(z),$$

amb F, G arbitràries a trobar segons les condicions inicials. Desfent el canvi,

$$u(x,t) = F(x-t) + G(x+t),$$

o, per a c arbitrària:

$$u(x,t) = F(x-ct) + G(x+ct). \tag{4.4}$$

Aquesta darrera equació és la solució general de $u_{yz} = 0$ [1].

Imposant les condicions inicials de l'equació (4.2), veiem:

$$\begin{cases} g(x) = F(x) + G(x) \\ h(x) = -cF'(x) + cG'(x). \end{cases}$$

Derivant la primera equació deduïm que

$$g'(x) = F'(x) + G'(x).$$

Fent les combinacions lineals adequades amb el sistema, obtenim:

$$\begin{cases} cg'(x) - h(x) = 2cF'(x) \\ cg'(x) + h(x) = 2cG'(x). \end{cases}$$

[1]De fet, hem demostrat que tota solució de l'equació d'ones en un convex $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ (tindrem $(x,t) \in \Omega$) és de la forma (4.4) per a certes funcions F i G. En aquest resultat no imposem condicions inicials.

Integrant ambdues equacions podem obtenir expressions per a F, G:

$$F(x) = \frac{1}{2c}\left(cg(x) - \int_0^x h(y)\,\mathrm{d}y + A\right)$$
$$G(x) = \frac{1}{2c}\left(cg(x) + \int_0^x h(y)\,\mathrm{d}y + B\right),$$

per a unes certes constants A, B. Finalment, l'expressió de la solució general queda:

$$u(x,t) = F(x-ct) + G(x+ct) = \frac{1}{2}\left(g(x-ct) + g(x+ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} h(y)dy + A + B,$$

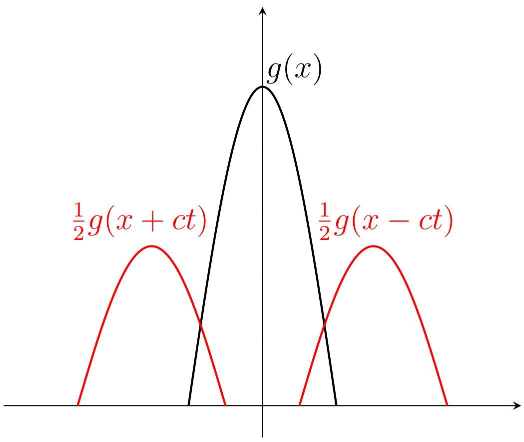
d'on deduïm que $A + B = 0$.

Observació 4.2.9. L'equació (4.4) diu que tota solució de l'equació d'ones u es pot expressar com la superposició de dues ones viatgeres F i G, que es desplacen a velocitat c en direccions oposades. Per exemple, si F i G tenen suport disjunt i el suport de F es troba a l'esquerra del de G, en avançar el temps l'ona viatjera F es mourà cap a la dreta mentre la G avança cap a l'esquerra i quan intersequin, l'alçada resultant serà la suma d'ambdues alçades.

Exemple 4.2.10. Considerem una corda de guitarra sobre l'eix x, amb posició inicial $g(x)$ i velocitat inicial zero. Si la deixem anar, aleshores la posició vertical de la corda ve donada per l'expressió:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(g(x-ct) + g(x+ct)),$$

És a dir, el resultat són dues ones viatgeres iguals a la inicial però de la meitat d'amplitud.



La fórmula de d'Alembert ens diu que el valor de u a la posició (x,t) només depèn de les condicions inicials a l'interval $[x-ct, x+ct]$. Recíprocament, els valors de la posició i velocitat inicials en un punt x_0 afectaran tot el sector $x_0 - ct \leq x \leq x_0 + ct$, donat un temps t. Aquests fets se sintetitzen en les següents definicions:

Definició 4.2.11. El domini de dependència de (x,t), o bé del punt x a temps t, és l'interval $[x-ct, x+ct]$.

Definició 4.2.12. El rang d'influència a temps t del punt x_0 és el sector $x_0 - ct \leq x \leq x_0 + ct$.

4.3 Equació d'ones no homogènia

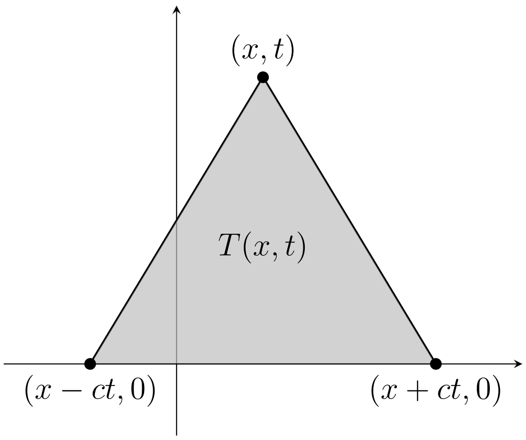
Proposició 4.3.1. Donades $g \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R})$, $h \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$, $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$, el problema no homogeni

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(x,t), & x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = g(x), & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) = h(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{4.5}$$

admet una única solució de classe $\mathscr{C}^2(\mathbb{R})$, i ve donada per la fórmula de d'Alembert-Duhamel:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(g(x-ct) + g(x+ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} h(y)\,\mathrm{d}y + \frac{1}{2c}\iint_{T(x,t)} f(y,s)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s. \tag{4.6}$$

Al darrer terme, estem integrant sobre el conjunt $T(x,t) = \{(y,s) \in \mathbb{R}^2;\ 0 < s < t,\ x - c(t-s) < y < x + c(t-s)\}$, el triangle característic amb vèrtex superior (x,t). A continuació es mostra un dibuix de $T(x,t)$.



Demostració. Siguin v, w respectivament les solucions de les següents EDPs:

$$\begin{cases} v_{tt} - c^2 v_{xx} = 0, & x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R} \\ v(x,0) = g(x), & x \in \mathbb{R} \\ v_t(x,0) = h(x), & x \in \mathbb{R}; \end{cases} \qquad \begin{cases} w_{tt} - c^2 w_{xx} = f(x,t), & x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R} \\ w(x,0) = 0, & x \in \mathbb{R} \\ w_t(x,0) = 0, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Aleshores, si u és solució de l'EDP no homogènia (4.5), es complirà que $u = v + w$. Observem que v satisfà una EDP homogènia, i per tant la seva expressió ve donada per la fórmula de d'Alembert (4.3). Per tant, només ens cal trobar l'expressió de w. La idea és utiltzar la fórmula de Duhamel. Per a fer-ho necessitem afegir el vector auxiliar $\vec{w} = \begin{pmatrix} w \\ w_t \end{pmatrix}$, que satisfà el següent problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \vec{w}_t = \begin{pmatrix} w_t \\ w_{tt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_t \\ c^2 w_x x + f \end{pmatrix} = A\vec{w} + \vec{f}, \\ \vec{w}(0) = \vec{0}, \end{cases}$$

on

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c^2\partial_{xx} & 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}.$$

El semigrup del problema lineal ($\vec{w}_t = A\vec{w}$) el coneixem gràcies a la fórmula de D'Alembert (4.3) i ve donat per:

$$T_t \colon \mathscr{C}^2(\mathbb{R}) \times \mathscr{C}^1(\mathbb{R}) \to \mathscr{C}^2(\mathbb{R}) \times \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$$
$$(g, h) \mapsto \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(g(x-ct) + g(x+ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} h(y)\,\mathrm{d}y \\ \frac{c}{2}\left(-g'(x-ct) + g'(x+ct)\right) + \frac{1}{2}\left(h(x+ct) + h(x-ct)\right). \end{pmatrix}$$

En aquest context, podem aplicar la fórmula de Duhamel per trobar el vector solució $\vec{w}$:

$$\vec{w}(x,t) = \left(T_t\vec{0}\right) + \int_0^t (T_{t-s}\vec{f}(\cdot, s))(x)\,\mathrm{d}s = \int_0^t \left(T_{t-s}\begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}(\cdot, s)\right)(x)\,\mathrm{d}s.$$

Finalment, podem trobar l'expressió per w, que és la primera component del vector $\vec{w}$, usant l'expressió explícita del semigrup:

$$w(x,t) = \frac{1}{2c}\int_0^t \int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} f(y,s)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s = \frac{1}{2c}\iint_{T(x,t)} f,$$

on $T(x,t)$ és el triangle característic anteriorment definit. Per tant, com que $u = v + w$, se segueix el resultat. $\square$

Observació 4.3.2. A EDOs, tota solució es podia expressar com a suma d'una solució particular i una solució de l'homogènia. A l'anterior demostració ens hem basat en una idea similar. Suposem que coneixem una solució "particular" de $u_{tt} - c^2u_{xx} = f$ (que no necessàriament satisfà les condicions inicials). Sigui w aquesta solució. Aleshores, la solució general u de l'EDP es pot expressar com $u = w + v$, on v és la solució de

$$\begin{cases} v_{tt} - c^2v_{xx} = 0 \\ v(x,0) = g - w(x,0) \\ v_t(x,0) = h - w_t(x,0). \end{cases}$$

Tot i que no és necessari trobar una solució particular perquè la fórmula de d'Alembert-Duhamel sempre funciona, en alguns problemes els càlculs potser es simplifiquen si, per inspecció, podem trobar una "solució particular" de l'equació i la restem de la solució del problema que busquem. Vegem a continuació un exemple.

Exemple 4.3.3. Considerem el problema

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2u_{xx} = x\sin t \\ u(x,0) = g(x) \\ u_t(x,0) = h(x). \end{cases}$$

Per inspecció, es pot trobar la 'solució particular" $w = -x\sin t$ ($w_{tt} = x\sin t, w_{xx} = 0$). Per tant, considerant $v = u - w$, només cal resoldre:

$$\begin{cases} v_{tt} - c^2v_{xx} = 0 \\ v(x,0) = g(x) \\ v_t(x,0) = h(x) + x, \end{cases}$$

que és una equació homogènia.

4.4 Condicions de vora

4.4.1 Ona semi-infinita

Fins ara, hem considerat que la corda era infinita, una suposició que ha simplificat el problema però que no és realista físicament. Ara farem un pas més i suposarem que la corda és semi-infinita, és a dir, que $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$. Per tal de garantir que el problema estigui ben posat (*well-posed*), haurem de preescriure el comportament de la corda a la vora, en el nostre cas a $x = 0$.

Definició 4.4.1. Les condicions de Dirichlet fixen la posició o alçada de la corda a la seva vora per tot temps:

$$u(0, t) = d(t).$$

Es diu que les condicions de vora són homogènies si $d(t) \equiv 0$, i no homogènies altrament. Les condicions de Dirichlet homogènies descriuen una corda que està lligada pel seu extrem.

Definició 4.4.2. Les condicions de Neumann fixen l'angle (amb l'eix horitzontal) de la corda a la seva vora per tot temps. La condició es decriu en termes del pendent:

$$u_x(0, t) = n(t).$$

Es diu que les condicions de vora són homogènies si $n(t) \equiv 0$, i no homogènies altrament. Les condicions de Neumann homogènies descriuen una corda que llisca a l'extrem (és sempre tangent a la direcció horitzontal).

Tot seguit, fem una observació sobre el problema de la corda infinita que ens permetrà resoldre el problema semi-infinit.

Observació 4.4.3. Sigui u una solució del problema no homogeni a tot $\mathbb{R}$ (4.5). Si g, h i $f(\cdot, t)$ per tot temps $t \in \mathbb{R}$ són funcions parelles (respectivament, senars o L-periòdiques) en $x \in \mathbb{R}$, llavors, per tot temps $t \in \mathbb{R}$, $u(\cdot, t)$ també serà parella (respectivament, senar o L-periòdica).

Per a provar això es podria fer amb la fórmula de d'Alembert-Duhamel, que dóna les solucions explícites pel problema de Cauchy de l'equació d'ones. Alternativament, podem provar aquest fet fent servir només la unicitat de solucions del problema de Cauchy, sense usar cap fórmula explícita. Aquest mètode és molt més general i ens pot servir per a altres problemes de Cauchy en què no tinguem una fórmula explícita per les solucions.

Es farà la demostració només en el cas parell, la resta de casos són anàlegs. Considerem la funció $u^*(x, t) := u(-x, t)$, la reflexió parella de u. En primer lloc, observem que:

$$u^*(x, t) = u(-x, t) \implies u^*_x(x, t) = -u_x(-x, t) \implies u^*_{xx}(x, t) = u_{xx}(-x, t).$$

Vegem ara quina equació satisfà u^*:

$$\begin{cases} (u^*_{tt} - c^2 u^*_{xx})(x, t) = (u_{tt} - c^2 u_{xx})(-x, t) = f(-x, t) = f(x, t) \\ u^*(x, 0) = u(-x, 0) = g(-x) = g(x) \\ u^*_t(x, 0) = u_t(x, 0) = h(-x) = h(x). \end{cases}$$

Per tant, si g, h i $f(\cdot, t)$ són parelles, u^* resol el mateix problema que la u, i per unicitat de solucions s'ha de tenir

$$u(x, t) = u^*(x, t) = u(-x, t),$$

com volíem demostrar.

A partir d'aquesta observació, podem resoldre el problema de Cauchy de l'equació d'ones amb condició de Dirichlet homogènia en la corda semi-infinita:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(x,t), & x \geq 0, t \in \mathbb{R} \\ u(0,t) = 0, & t \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = g(x), & x \geq 0 \\ u_t(x,0) = h(x), & x \geq 0. \end{cases}$$

Considerem les reflexions senars de $f(\cdot,t)$, g i h:

$$g_s(x) = \begin{cases} g(x), & x \geq 0 \\ -g(-x), & x < 0, \end{cases}$$

$$h_s(x) = \begin{cases} h(x), & x \geq 0 \\ -h(-x), & x < 0, \end{cases}$$

$$f_s(x,t) = \begin{cases} f(x,t), & x \geq 0 \\ -f(-x,t), & x < 0. \end{cases}$$

A partir d'aquí podem resoldre el problema per a la corda infinita:

$$\begin{cases} \tilde{u}_{tt} - c^2 \tilde{u}_{xx} = f_s(x,t), & x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R} \\ \tilde{u}(x,0) = g_s(x), & x \in \mathbb{R} \\ \tilde{u}_t(x,0) = h_s(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Aquest problema ja l'hem resolt abans amb la fórmula de d'Alembert-Duhamel:

$$\tilde{u}(x,t) = \frac{1}{2}\left(g_s(x-ct) + g_s(x+ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} h_s(y)\,\mathrm{d}y + \frac{1}{2c}\iint_{T(x,t)} f_s.$$

Si $g_s \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R})$, $h_s \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$, i $f_s \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$, l'observació anterior garanteix que $\tilde{u}$ és una funció senar de x i contínua, de manera que per a tot temps t

$$\tilde{u}(0,t) = 0.$$

Per tant, $u = \tilde{u}_{|[0,+\infty)}$ és $\mathscr{C}^2([0,+\infty) \times \mathbb{R})$ i resol el problema de Dirichlet (és solució clàssica).

Si tinguéssim condicions de Neumann homogènies, tot seria anàleg, però caldria considerar g_p, h_p i f_p, les reflexions parelles de g, h i f, respectivament.

Observem que hem necessitat unes condicions suficients per tal d'assegurar-nos que u sigui $\mathscr{C}^2$. Aquestes condicions les hem imposat sobre g_s, h_s i f_s, i ara ens agradaria traduir-les a condicions per a g, h i f. Es té:

$$g_s(x) = \begin{cases} g(x), & x \geq 0 \\ -g(-x), & x < 0, \end{cases}$$

$$\implies g_s'(x) = \begin{cases} g'(x), & x \geq 0 \\ g'(-x), & x < 0, \end{cases}$$

$$\implies g_s''(x) = \begin{cases} g''(x), & x \geq 0 \\ -g''(-x), & x < 0. \end{cases}$$

Per tant, g_s serà $\mathscr{C}^2$ si i només si $g(0) = 0$ i $g''(0) = 0$. Anàlogament, h_s serà $\mathscr{C}^1$ si i només si $h(0) = 0$, i f_s serà $\mathscr{C}^1$ si i només si $f(0,t) = 0$, $\forall t$.

Les condicions obtingudes anteriorment són condicions suficients, però no necessàries. Ara trobarem unes condicions de compatibilitat o necessàries per tal que la solució del problema compleixi $u \in \mathscr{C}^2([0,+\infty), \mathbb{R})$. En primer lloc, comparant les condicions inicials de u per a $(x,0)$ i $(0,t)$:

$$g(0) = u(0,0) = 0.$$

Si ara considerem les condicions inicials per a u_t:

$$u(0,t) = 0 \implies u_t(0,t) = 0 \implies h(0) = u_t(0,0) = 0,$$

obtenint així una altra condició necessària. Finalment:

$$\begin{cases} u_{tt}(0,t) = 0, \\ u_{xx}(x,0) = g''(x) \end{cases} \implies f(0,0) = (u_{tt} - c^2 u_{xx})(0,0) = -c^2 g''(0).$$

Hem obtingut, per tant, tres condicions necessàries per tal que u sigui solució clàssica.

Definició 4.4.4. Les condicions

- $g(0) = 0$
- $h(0) = 0$
- $f(0,0) + c^2 g''(0) = 0$

s'anomenen condicions de compatibilitat.

A nivell informatiu, es pot demostrar que les condicions de compatibilitat o necessàries són també suficients per a l'existència de solució $u \in \mathscr{C}^2([0,+\infty) \times \mathbb{R})$. Es deixa com a exercici, si bé és laboriós demostrar-ho.

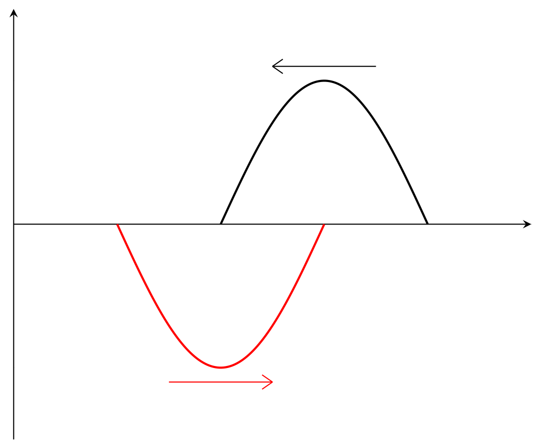
Exemple 4.4.5. Analitzem la reflexió d'una ona fixada a la paret (condicions de Dirichlet homogènies) quan $f \equiv 0$, $h \equiv 0$. En aquest cas, l'ona ve donada per la fórmula:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(g_s(x+ct) + g_s(x-ct)),$$

o, equivalentment:

$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(g(x+ct) + g(x-ct)), & \text{si } x \geq ct \\ \frac{1}{2}(g(x+ct) - g(-x+ct)), & \text{si } x \leq ct \end{cases} \qquad (t \geq 0)$$

D'aquí, podem interpretar que quan l'ona xoca amb la paret es produeix un canvi de signe de la seva amplitud.



4.4.2 Ona finita

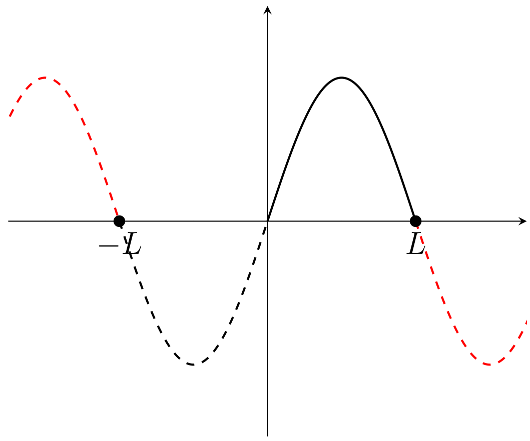
Considerem ara una corda finita continguda a l'interval $x \in [0, L]$. Assumint condicions de Dirichlet homogènies, es té:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(x,t), & x \in [0,L],\, t \in \mathbb{R} \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, & t \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = g(x), & x \in [0,L] \\ u_t(x,0) = h(x), & x \in [0,L]. \end{cases} \tag{4.7}$$

Resoldrem el problema mitjançant el mètode de reflexions:

1. Estenem g, h, $f(\cdot, t)$ de forma senar respecte $x = 0$, de manera que les funcions queden definides a $[-L, L]$.

2. Fem l'extensió $2L$-periòdica de les funcions obtingudes anteriorment.



Siguin g_{ext}, h_{ext} i f_{ext} les extensions obtingudes, i sigui $\tilde{u}$ la corresponent solució obtinguda amb la fórmula de d'Alembert-Duhamel (4.6) a tot $\mathbb{R}$. Volem que

$$u = \tilde{u}_{|[0,L]}$$

sigui solució clàssica del problema de la corda finita.

Si la solució u resulta ser clàssica, llavors compleix les condicions de vora, ja que això es segueix del fet que g_{ext}, h_{ext} i f_{ext} són senars respecte $x = 0$ i $x = L$ (la comprovació es deixa com a exercici pel lector), i de l'observació 4.4.3.

Observació 4.4.6. En aquest cas, també tenim unes condicions necessàries o de compatibilitat, que també resulten ser suficients. En concret, són:

- $g(0) = g(L) = 0$
- $h(0) = h(L) = 0$
- $f(0,0) + c^2 g''(0) = f(L,0) + c^2 g''(L) = 0$

Proposició 4.4.7. Donades g, h, f funcions mesurables, si existeix una solució $u \in \mathscr{C}^2([0,L] \times \mathbb{R})$ del problema (4.7), llavors és única.

Demostració. Suposem que tenim dues solucions u_1 i u_2. Sigui $v = u_1 - u_2$, amb $v \in \mathscr{C}^2([0,L] \times \mathbb{R})$. v resol (4.7) amb $g = h = f \equiv 0$. Considerem v_s, l'extensió senar de v respecte $x = 0$, definida a $[-L, L] \times \mathbb{R}$. Vegem que $v_s \in \mathscr{C}^2([-L,L] \times \mathbb{R})$. Observem que:

- $v(0,t) = 0$
- $v(0,t) = 0 \implies v_{tt}(0,t) = 0 \implies v_{xx}(0,t) = \frac{1}{c^2} v_{tt}(0,t) = 0.$

Per tant, v_s és $\mathscr{C}^2([-L,L] \times \mathbb{R})$. Pel mateix argument, podem veure que $v_{ext} \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$.

Un cop hem fet reflexions senar i periòdiques, és fàcil comprovar que v_{ext} resol l'equació d'ones a tot $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. A més, té condicions inicials nul·les i és $\mathscr{C}^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$. Pel que sabem de la corda infinita, deduïm que $v_{ext} \equiv 0$ a $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Per tant, $v = v_{ext}|_{[0,L]\times\mathbb{R}} \equiv 0$. □

4.5 Condicions de vora no homogènies

Fins ara, hem solucionat EDPs amb condicions de vora homogènies, i ens preguntem com podem resoldre el cas no homogeni. Considerem condicions de Dirichlet no homogènies:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(x,t), & 0 \leq x \leq L,\ t \in \mathbb{R} \\ u(0,t) = d_0(t), & t \in \mathbb{R} \\ u(L,t) = d_L(t), & t \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = g(x), & x \in [0,L] \\ u_t(x,0) = h(x), & x \in [0,L]. \end{cases}$$

L'objectiu és reduir el cas no homogeni al cas homogeni, que ja sabem resoldre. Ho farem restant una certa funció a la incògnita u, de manera que passi a satisfer condicions de vora homogènies. L'opció més senzilla serà restar la recta que uneix $d_0(t)$ i $d_L(t)$:

$$v := u(x,t) - \left(d_0(t) + (d_L(t) - d_0(t)) \frac{x}{L} \right),$$

que, en efecte, satisfà:

$$v(0,t) = v(L,t) = 0.$$

Per tant, v satisfà una equació amb condicions de vora homogènies amb unes certes $\tilde{f}$, $\tilde{g}$, $\tilde{h}$ que es poden determinar fàcilment (es deixa com a exercici pel lector).

Observació 4.5.1. L'elecció de v no és única.

Considerem ara condicions de Neumann no homogènies ($u_x(0,t) = n_0(t)$, $u_x(L,t) = n_L(t)$). Volem trobar una funció que tingui pendent $n_0(t)$ a $x = 0$ i $n_L(t)$ a $x = L$. Una paràbola servirà:

$$w(x,t) = n_0(t)x + \frac{n_L(t) - n_0(t)}{L} \frac{x^2}{2}.$$

Les condicions de vora seran:

$$w_x(0,t) = n_0(t);$$
$$w_x(L,t) = n_0(t) + \frac{n_L(t) - n_0(t)}{L} L = n_L(t).$$

Per tant, $\tilde{u} := u - w$ satisfarà unes condicions de vora homogènies.

Com al cas amb condicions de Dirichlet, $\tilde{u}$ satisfà una equació amb condicions de vora homogènies amb unes certes $\tilde{f}$, $\tilde{g}$, $\tilde{h}$ que es poden determinar fàcilment (es deixa com a exercici pel lector).

4.6 Conservació de l'energia i aplicacions

A un dels problemes de la llista de problemes sobre l'equació d'ones s'estudia la conservació de l'energia en una corda infinita que satisfà l'equació homogènia i que té les condicions inicials amb suport compacte. Què succeeix en una corda finita?

Proposició 4.6.1. Per l'equació d'ones homogènia amb condicions de vora nul·les (de Dirichlet o de Neumann), l'energia total d'una solució $u \in \mathscr{C}^2([0,L]\times\mathbb{R})$,

$$E(t) = \int_0^L \left(\frac{1}{2}u_t^2(x,t) + \frac{1}{2}c^2u_x^2(x,t)\right)\mathrm{d}x,$$

és constant en el temps, independentment de les condicions inicials.

Demostració. Calculem la derivada de l'energia respecte el temps i veiem que és 0:

$$E'(t) = \int_0^L \Big(u_tu_{tt} + c^2u_xu_{xt}\Big)\,\mathrm{d}x = c^2u_xu_t\Big|_{x=0}^{L} + \int_0^L \Big(u_tu_{tt} - c^2u_{xx}u_t\Big)\,\mathrm{d}x,$$

on a l'última igualtat hem integrat per parts. Si les condicions són de Dirichlet,

$$\begin{aligned} &u(0,t) = u(L,t) = 0 \\ \Longrightarrow\ &u_t(0,t) = u_t(L,t) = 0. \end{aligned}$$

D'altra banda, si les condicions són de Neumann,

$$u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0.$$

En qualsevol cas,

$$\left.\begin{aligned} c^2u_xu_t\Big|_{x=0}^{L} &= 0 \\ u_tu_{tt} - c^2u_{xx}u_t &= 0 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow E'(t) = 0.$$

□

Una conseqüència molt important de la conservació de l'energia és que ens permet demostrar de manera alternativa la unicitat de solucions:

Corol·lari 4.6.2. Donades g i h, si existeix solució de classe $\mathscr{C}^2([0,L]\times\mathbb{R})$ al problema de valors inicials per l'equació d'ones amb condicions de vora (homogènies o no, i de Dirichlet o de Neumann), aleshores la solució és única.

Demostració. Si u i $\tilde{u}$ són solucions, aleshores $v = u - \tilde{u}$ resol el problema completament homogeni. L'energia és:

$$E(t) = \int_0^L \left(\frac{1}{2}v_t^2 + \frac{c^2}{2}v_x^2\right)\mathrm{d}x.$$

Com que l'energia és constant, $E(t) = E(0)$. A $t = 0$, $v(x,0) = 0 \Longrightarrow v_x(x,0) = 0$ i $v_t(x,0) = 0$. Per tant,

$$\left(\frac{1}{2}v_t^2 + \frac{c^2}{2}v_x^2\right)(x,0) = 0 \Longrightarrow E(t) = E(0) = 0.$$

Aleshores, tenim que la integral d'una funció contínua i positiva o nul·la és 0, de manera que la funció ha de ser idènticament 0. En conseqüència,

$$\frac{1}{2}v_t^2 + \frac{c^2}{2}v_x^2 \equiv 0 \Longrightarrow v_t \equiv 0 \Longrightarrow v \equiv 0,$$

on hem usat que $v(x,0) = 0$ a la darrera implicació. □

4.7 Equació d'ones en dimensions superiors

Definició 4.7.1. Direm que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ és un domini si és un obert connex.

Teorema 4.7.2. *Teorema de la divergència.*
Donat un camp vectorial $X \in \mathscr{C}^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n)$, on $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ és un domini fitat suficientment regular[2]. Aleshores,

$$\int_\Omega \operatorname{div} X \, \mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} X \cdot \nu \, \mathrm{d}S, \tag{4.8}$$

sent ν la normal exterior a Ω, que està definida sobre $\partial\Omega$. El terme $\int_{\partial\Omega} X \cdot \nu \, \mathrm{d}S$ és el flux de X a través de la vora.

El resultat és equivalent a la fórmula d'integració per parts a $\mathbb{R}^n$, que veiem a continuació.

Corol·lari 4.7.3. *Integració per parts a $\mathbb{R}^n$.* Donades $u, v \colon \Omega \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1(\overline{\Omega})$, amb Ω domini fitat Lipschitz i donat $i \in \{1, ..., n\}$, es compleix

$$\int_\Omega u v_{x_i} = \int_{\partial\Omega} u v \nu^i - \int_\Omega u_{x_i} v, \tag{4.9}$$

on u_{x_i} representa la derivada parcial respecte x_i i ν^i és la component i-èsima de ν.

Demostració. Considerant

$$X = (0, ..., 0, uv, 0, ..., 0)$$

i aplicant (4.8) s'obté la fórmula d'integració per parts a $\mathbb{R}^n$ a partir del Teorema de la divergència. □

La prova que es pot obtenir el Teorema de la divergència a partir de la fórmula d'integració per parts a $\mathbb{R}^n$ és també immediata i es deixa com a exercici.

Fixem-nos ara en l'equació d'ones en n dimensions:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 \Delta u = 0, & x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \\ u(x,0) = g & x \in \Omega \\ u_t(x,0) = h & x \in \Omega \\ \text{condicions de vora} & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{4.10}$$

on les condicions de vora poden ser:

- de Dirichlet: $u = 0$
- de Neumann: $\nabla u \cdot \nu = \frac{\partial u}{\partial \nu} = u_\nu = 0$, és a dir, la derivada normal de u a $\partial\Omega$ s'anul·la.

Per a $n = 2$, ens podem imaginar que u descriu l'alçada d'una membrana vibrant amb domini Ω. Les condicions de Dirichlet corresponen a una membrana amb la vora fixada, mentre que les condicions de Neumann corresponen a una membrana lliscant a la vora.

[2] Per exemple, si Ω és Lipschitz (és a dir, si Ω és localment la gràfica d'una funció Lipschitz). Notem aquí que per un resultat anomenat Teorema de Rademacher (fora de l'abast d'aquest curs), tota funció Lipschiz és diferenciable a quasi tot punt, i per tant, la normal ν està definida a quasi tot punt de $\partial\Omega$. Considerem dominis Lipschitz per tal d'incloure rectangles o triangles al pla, cubs a l'espai, etc.

Proposició 4.7.4. Sigui Ω un domini fitat Lipschitz i $u \in \mathscr{C}^2(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ una solució del problema (4.10) per l'equació d'ones n-dimensional, aleshores l'energia

$$E(t) = \int_\Omega \left(\frac{1}{2} u_t^2 + \frac{c^2}{2} |\nabla u|^2 \right) \mathrm{d}x$$

és constant en el temps.

Demostració. Derivant E respecte el temps:

$$\frac{d}{dt} E(t) = \int_\Omega \left(u_t u_{tt} + c^2 \nabla u \nabla u_t \right) \mathrm{d}x.$$

Ara, integrant per parts:

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \left(u_t u_{tt} + c^2 \nabla u \nabla u_t \right) \mathrm{d}x &= \int_\Omega \left(u_t u_{tt} + c^2 \sum_{i=1}^n u_{x_i} u_{t x_i} \right) \mathrm{d}x \\
&= \int_\Omega u_t u_{tt} \, \mathrm{d}x - \int_\Omega c^2 \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i} u_t \, \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} c^2 \sum_{i=1}^n u_t u_{x_i} \nu^i \, \mathrm{d}S \\
&= \int_\Omega \left(u_t u_{tt} - c^2 \Delta u u_t \right) \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} c^2 u_t \nabla u \cdot \nu \, \mathrm{d}S,
\end{aligned}$$

però el primer terme és zero utilitzant la EDP i el segon terme és zero a causa de les condicions de vora homogènies (de Dirichlet o Neumann). Per tant,

$$\frac{d}{dt} E(t) = 0,$$

com volíem veure. □

Corol·lari 4.7.5. Si existeix alguna solució $u \in \mathscr{C}^2(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ pel problema de contorn i valors inicials (4.10), aleshores és única.

Demostració. Suposem que u, v són dues solucions $\mathscr{C}^2(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$. Aleshores, $w := u - v$ resol el problema amb $h = g = 0$. Per la proposició anterior, per tot $t \geq 0$

$$E(t) = E(0) = 0 \implies w_t = 0 \implies w \equiv 0,$$

on hem fet servir primer que com $h = g = 0$, $E(0) = 0$; a la primera implicació que $E(t)$ és la integral d'una funció ≥ 0, així que si s'anul·la cal que la funció sigui zero; i finalment a la darrera implicació que $w(x, 0) = 0$ $\forall x \in \Omega$. □

Observació 4.7.6. La prova de la unicitat donada pel Corol·lari anterior també serveix per condicions de vora no homogènies, ja que la diferència entre dues solucions sí que satisfarà condicions de vora homogènies.

Tema 5

Equació de la calor o de difusió

5.1 Introducció

Considerem una vareta modelada com un segment $[0, L]$. Al llarg del tema $u(x,t)$ modelarà la temperatura de la vareta al punt $x \in [0, L]$ i instant t o la concentració d'una substància que es difon al llarg de la vareta. Com hem fet ja a temes anteriors, deduirem l'equació diferencial que regeix el comportament d'aquests fenòmens a partir de sengles principis físics. La llei de Fourier diu que la calor flueix dels punts més calents als més freds amb flux proporcional al gradient de la temperatura. La llei de Fick estableix el mateix comportament al estudiar la concentració d'una substància en difusió.

Considerem ara un interval $[a, b]$ de la vareta. La massa o energia calòrica totals a temps t es calculen com $\int_a^b u(x,t)\,\mathrm{d}x$. Si suposem que no hi ha fonts de calor (o de massa) a la vareta, la variació d'aquesta quantitat depèn exclusivament de la massa o calor que entra o surt per la vora, és a dir, el flux que passa a través de la vora. Per tant,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_a^b u(x,t)\,\mathrm{d}x = q(b,t) - q(a,t) \overset{\text{Fick/Fourier}}{=} D(u_x(b,t) - u_x(a,t)).$$

D'on

$$\int_a^b u_t(x,t)\,\mathrm{d}x - D\int_a^b u_{xx}(x,t)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Com això és cert per tot $[a, b]$, en deduïm l'equació de la calor,

$$u_t = Du_{xx},$$

per $x \in (0, L)$ i $t > 0$. La constant $D > 0$ s'anomena coeficient de difusió. Reescalant adequadament les variables, podem assumir que $D = 1$.

Quan autors com Euler, D'Alembert o Fourier van començar l'estudi de l'equació de la calor, es coneixien exemples particulars de solucions. Per exemple, la funció

$$u(x,t) = e^{-k^2 t}\sin(kx)$$

satisfà

$$u_{xx} = -k^2 e^{-k^2 t}\sin(kx) = u_t.$$

A partir d'aquests exemples un pot observar que $\partial_{xx}\sin(kx) = -k^2\sin(kx)$. Diem que $\sin(kx)$ és una funció pròpia de l'operador ∂_{xx} amb valor propi $-k^2$. Podem veure, a més, que l'operador $A = \partial_{xx}$ és simètric. Recordem que un operador és simètric si

$(Ax, y) = (x, Ay)\,\forall x, y \in \mathbb{E}$ (en el cas de dimensió finita és equivalent a $A^T = A$). En aquest cas, considerant el producte escalar habitual de L^2, $(u, v) = (u, v)_{L^2} = \int_0^L uv$, es té

$$(Au, v) = \int_0^L u_{xx}v = [u_x v]_0^L - \int_0^L u_x v_x = \int_0^L uv_{xx} = (u, Av),$$

on el primer terme de la resta s'anul·la si tenim condicions homogènies de Dirichlet o de Neumann. Notem que els vectors propis de valors propis diferents són ortogonals, i que el teorema espectral real diu que un operador simètric i compacte diagonalitza. Intentarem diagonalitzar l'operador ∂_{xx}, és a dir, trobar una base de funcions que siguin funcions pròpies de l'operador i que les seves combinacions lineals generin totes les funcions de l'espai que ens interessi. Concretament, si fixem $L = \pi$ i plantegem el problema amb condicions de Dirichlet:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \end{cases}$$

Com ja hem dit, les funcions $\sin(kx)$ són funcions pròpies de ∂_{xx} i cal que $k \in \mathbb{Z}$ per tal que siguin solucions del problema, és a dir, per tal que pertanyin a l'espai de funcions que volem estudiar, i.e. funcions que s'anul·len a la vora. Per ara, procedirem per analogia amb el cas de dimensió finita i intentarem veure si obtenim així la solució que busquem. Concretament, si A fos un operador de dimensió finita i tinguéssim el problema

$$\begin{cases} u_t = Au \\ u(0) = g \end{cases}$$

Obtindríem la solució $u = e^{At}g$, i, si A diagonalitzés amb valors propis λ_k, tindríem (en la base formada pels vectors propis)

$$u = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} g_1 \\ \vdots \\ e^{\lambda_k t} g_k \end{pmatrix}$$

Volem veure ara si les combinacions lineals de la família $\sin(kx)$ amb $k \in \mathbb{Z}^+$ poden generar totes les solucions del problema, però sabem que això és cert perquè qualsevol condició inicial $g = g(x) \in L^2(0, \pi)$ admet una sèrie de Fourier de la forma

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx),$$

on veurem en detall més endavant que els termes dels cosinus són innecessaris (avancem que això és perquè ens trobem a l'interval $(0, \pi)$ en lloc de $(0, 2\pi)$ i desenvolupem amb funcions 2π-periòdiques). Aleshores la solució del problema[1] és de la forma

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{-k^2 t} \sin(kx).$$

Notem que u serà solució del problema si podem derivar sota el sumatori i que satisfà la condició inicial $u(x, 0) = g(x)$. Per tant, si tenim unicitat de solucions, com veurem més endavant, totes les solucions es poden expressar així.

[1] Aquesta deducció de la solució de l'equació de la calor és una primera aproximació al problema. La demostració que fem és vàlida, però en farem els detalls amb rigor més endavant.

5.2 Mètode de separació de variables

Fins ara hem vist una via per resoldre el problema mitjançant combinacions lineals de sinus, funcions pròpies del laplacià. Veurem ara que s'obté el mateix resultat amb el mètode anomenat de separació de variables, que és més calculístic però és útil per altres EDPs com la d'ones o la d'electromagnetisme.

Considerem el problema $u_t = Du_{xx}$. Busquem solucions de l'equació a variables separades, és a dir, de la forma $u(x,t) = v(x)w(t)$. Si l'EDP és "adequada" per aquest mètode, obtindrem EDOs per a v i w (per certes EDPs això no funcionarà).

i) En primer lloc, cal imposar l'equació $u_t = Du_{xx}$. Separant u,

$$u_t = v(x)w'(t) = Dv''(x)w(t) = Du_{xx}.$$

És a dir,

$$-\frac{v''(x)}{v(x)} = \frac{-w'(t)}{Dw(t)} = c,$$

amb c constant perquè no depèn ni de la posició ni del temps.

ii) En segon lloc, cal imposar les condicions de vora i resoldre la EDO corresponent:

$$\begin{cases} v(0) = v(L) = 0 \\ -v''(x) = cv(x) \quad x \in (0, L) \end{cases}$$

Si fixem $c < 0$, es té

$$v(x) = ae^{\sqrt{-c}x} + be^{-\sqrt{-c}x}.$$

Imposant $v(0) = 0$, tenim $a + b = 0$, i imposant $v(L) = 0$ obtenim

$$ae^{\sqrt{-c}L} - ae^{-\sqrt{-c}L} = 0$$

Que només és cert si $a = b = 0$. Per tant, aquest cas no ens proporciona solucions de variables separades. Ara bé, si fixem $c > 0$, obtenim les solucions de la forma

$$v(x) = a\sin\left(\sqrt{c}x\right) + b\cos\left(\sqrt{c}x\right).$$

Amb $v(0) = 0$ obtenim $b = 0$ i imposant $v(L) = 0$, tenim que $\sin\left(\sqrt{c}L\right) = 0$, és a dir, $c = \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2$. Per tant, en aquest cas obtenim la família de solucions de la forma $v(x) = a_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$ per $k \in \mathbb{N}^+$. Trobem aleshores la w associada a v per k fixada

$$\frac{-w'(t)}{Dw(t)} = \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 \implies w(t) = Be^{-\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 Dt}.$$

iii) Finalment, hem d'imposar la condició inicial del problema. Considerem com a candidates a solució les combinacions lineals de les solucions a variables separades obtingudes. És a dir,

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{-\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 Dt} \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right).$$

I, a $t = 0$, volem que

$$g(x) = u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right).$$

5.3 L'equació de la calor en una vareta homogènia

Observació 5.3.1. Les funcions L-periòdiques i que pertanyen a $L^2(0,L)$ es poden escriure en termes de la seva seriè de Fourier

$$s_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} \left(a_k \cos\left(\frac{2k\pi}{L}x\right) + b_k \sin\left(\frac{2k\pi}{L}x\right)\right),$$

en el sentit que $\lim_{N\to\infty} ||f - s_N||_{L^2(0,L)} = 0$.

Proposició 5.3.2. Donat $L > 0$, la família de funcions $\left\{\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)\right\}$ per $k \in \mathbb{N}^+$ és una base ortonormal de $L^2(0,L)$.

Demostració. Donada $g \in L^2(0,L)$, definim la reflexió senar

$$g_s(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x \in (0,L) \\ -g(x) & \text{si } x \in (-L,0) \end{cases}$$

Tenim doncs que $g_s \in L^2(-L,L)$ i per tant sabem que, per

$$s_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} \left(a_k \cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right) + b_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)\right).$$

on a_k i b_k són els coeficients de la sèrie de Fourier, es té $\lim_{N\to\infty} ||g_s - s_N||_2 = 0$. A més,

$$a_k = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} g_s(x)\cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right) \mathrm{d}x.$$

Per ser el primer terme del producte senar i el segon parell, el producte és senar i la integral és zero, és a dir, $a_k = 0$. Anàlogament, $a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} g_s(x) = 0$. Per tant,

$$s_N(x) = \sum_{k=1}^{N} b_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right).$$

I en particular l'aproximació de g_s també serà vàlida per $g(x) = g_s(x)$ a l'interval $(0,L)$. És a dir, hem vist que

$$\lim_{N\to\infty} ||g_s - s_N||_2^2 = \lim_{N\to\infty} \int_0^L |g(x) - s_N(x)|^2 \,\mathrm{d}x = 0.$$

Encara quedaria veure que els elements de la base són de norma 1 i ortogonals entre ells. Es deixa com exercici pel lector. $\square$

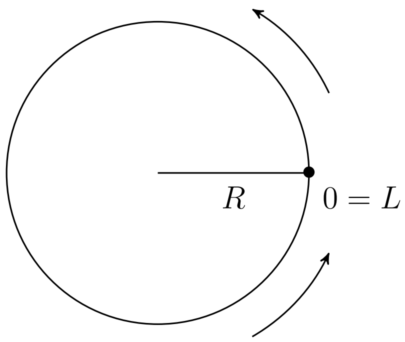
Observació 5.3.3. Així com per les condicions de Dirichlet la base ortonormal adecuada de $L^2(0,\pi)$ és $\left\{\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)\right\}$ per $k \in \mathbb{N}^+$, per les condicions de Neumann la base ortonormal adecuada és $\left\{\sqrt{\frac{2}{L}}\cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right)\right\}$ per $k \in \mathbb{N}^+$, perquè volem que els elements de la base satisfacin les condicions de vora.

Presentem ara els principals tipus de condicions de vora.

- Condicions de Dirichlet: Es prescriu el valor de u a la vora de $(0, L)$. En aquest cas absorbim tota la calor a la vora i la mantenim sempre a temperatura zero. Per exemple, si hi ha una massa gran, com el mar, que pot absorbir tanta energia com calgui.

- Condicions de Neumann (o aïllants): La vora de $(0, L)$ és aïllant, no hi ha flux de calor a la vora.
$$u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0 \quad \forall t \geq 0.$$

- Condicions periòdiques: Vareta circular de longitud L, és a dir, de radi $R = \frac{L}{2\pi}$.
$$\left.\begin{aligned} u(0,t) &= u(L,t) \\ u_x(0,t) &= u_x(L,t) \end{aligned}\right\} \forall t \geq 0.$$



- Condicions mixtes: $u(0,t) = 0$ i $u_x(L,t) = 0$.

- Condicions de Robin (o radiació):
$$\begin{aligned} u_x(0,t) + \alpha u(0,t) &= 0 \\ u_x(L,t) + \beta u(L,t) &= 0 \end{aligned}$$
Amb $\alpha, \beta > 0$ constants. Aquestes constants descriuen materials que aïllen més o menys en funció de la temperatura a la que es trobin.

Observació 5.3.4. En el cas de Neumann o periòdic no s'absorbeix ni s'afegeix calor. Per tant, l'energia calòrica total (o la massa de la substància) es conserva en el temps. En efecte,
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_0^L u(x,t)\,\mathrm{d}x = \int_0^L u_t(x,t)\,\mathrm{d}x = D \int_0^L u_{xx}(x,t)\,\mathrm{d}x = D(u_x(L,t) - u_x(0,t)) = 0.$$

5.3.1 Existència i unicitat pel problema de Dirichlet

Recordem el problema de Dirichlet de la calor o de la difusió (en aquesta subsecció agafarem $D = 1$):
$$\begin{cases} u_t = D u_{xx} & (x,t) \in (0,\pi) \times (0,\infty) \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & t > 0 \\ u(x,0) = g(x) & x \in (0,\infty) \end{cases}$$

Si $g \in L^2(0,\pi)$ i $g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx)$, considerem $u(x,t) = \sum_{k \geq 1} b_k e^{-k^2 t} \sin(kx)$ que hem vist que és solució en sentit formal. Vegem ara amb més precisió el caràcter d'aquesta solució.

Observació 5.3.5. Per la demostració del següent teorema recordem el següent resultat propi de l'anàlisi real. Donada una succesió de funcions h_N tal que existeix x_0 amb $h_N(x_0) \to h(x)$ puntualment i $h'_N \to \varphi$ uniformement, aleshores h és diferenciable i $h' = \varphi$.

Teorema 5.3.6. Sigui $g \in L^2(0,\pi)$ i b_k els seus coeficients de Fourier en base de sinus. Aleshores

i) La funció u definida com $u(x,t) = \sum_{k\geq 1} b_k e^{-k^2 t}\sin(kx)$ és la única funció $u \in \mathscr{C}^\infty([0,\pi]\times(0,\infty))$ que satisfà

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & (x,t) \in (0,\pi)\times(0,\infty) \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & t > 0 \\ u(\cdot,t) \to g(x) & \text{en } L^2(0,\pi) \text{ quan } t \to 0^+ \end{cases}$$

De fet, és l'unica funció $\mathscr{C}^2([0,\pi]\times(0,\infty))$ que ho satisfà.

ii) Si a més a més $g \in \mathscr{C}^1([0,\pi])$ i $g(0) = g(\pi) = 0$, aleshores $u \in \mathscr{C}^0([0,\pi]\times[0,\infty))$ i $u(x,0) = g(x)\,\forall x \in [0,\pi]$.

iii) Podem fitar la seva norma $L^2(0,\pi)$ per

$$||u(\cdot,t)||_{L^2(0,\pi)} \leq e^{-t}||g||_{L^2(0,\pi)}.$$

Demostració.

i) Veurem el primer apartat per parts. Vegem en primer lloc la regularitat de la solució per $t > 0$. Considerem la successió dels coeficients de la sèrie de Fourier de g, $(b_k) \in l^2$, és a dir, $\sum_{k\geq 1} b_k^2 < \infty$. Es té que $b_k \to 0$, i per tant $|b_k| \leq B$ per alguna B. Sigui $t_0 > 0$ un temps tan petit com vulguem. Demostrarem que tenim convergència uniforme a $[0,\pi]\times[t_0,\infty)$ per totes les derivades. Per poder aplicar el resultat de l'observació anterior, en primer lloc fitem les derivades. Es té que[2]

$$\left|\partial_t^{(i)}\partial_x^{(j)} u_N(x,t)\right| = \left|\sum_{k=1}^N b_k(-k^2)^i k^j e^{-k^2 t}\left[\pm\sin(kx) \text{ o } \pm\cos(kx)\right]\right| \leq$$
$$\leq \sum_{k=1}^N |B| k^{2i+j} e^{-k^2 t_0} < \infty.$$

Aplicant el criteri M de Weierstrass les derivades de u_N convergeixen uniformement i podem aplicar el resultat anterior per dir que les u_N convergeixen uniformement i són infinitament derivables. En particular, podem derivar terme a terme i obtenim que

$$u_t = u_{xx}.$$

A més, per $t \geq t_0 > 0$ (on t_0 és arbitràriament petit) $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$, perquè $u_N(0,t) = u_N(\pi,t) = 0$ i tenim convergència a 0 i π.

Vegem ara que $u(\cdot,t) \to g$ a $L^2(0,\pi)$ quan $t \to 0^+$, és a dir,

$$||u(\cdot,t) - g||^2_{L^2(0,\pi)} \to 0$$

[2] La derivada del sinus és el sinus o el cosinus segons la paritat de j.

quan $t \to 0$. Tenim que

$$||u(\cdot,t) - g||^2_{L^2(0,\pi)} = \int_0^\pi |u(x,t) - g(x)|^2 \,\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \left| \sum_{k=1}^\infty b_k \left(e^{-k^2 t} - 1 \right) \sin(kx) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right|^2 \mathrm{d}x$$

Que, per la identitat de Parseval, és igual a

$$\frac{\pi}{2} \sum_{k=1}^\infty |b_k|^2 |e^{-k^2 t} - 1|^2. \tag{5.1}$$

A més, com podem fitar els termes de la suma per

$$|b_k|^2 |e^{-k^2 t} - 1| \leq |b_k|^2.$$

I la suma $\sum_{k\geq 1} |b_k|^2 < \infty$ com hem dit al principi, per tant si fem tendir t a 0 la suma de 5.1, podem intercanviar el límit i la suma i obtenir

$$\lim_{t\to 0} \sum_{k=1}^\infty |b_k|^2 |e^{-k^2 t} - 1| = \sum_{k=1}^\infty \lim_{t\to 0} |b_k|^2 |e^{-k^2 t} - 1| = 0.$$

Demostrem finalment la unicitat de la solució. Suposem que u, v són solucions del problema. Aleshores $w := u - v$ satisfà el mateix problema que hem plantejat, però amb $g = 0$. Per tant, $w(\cdot,t) \to 0$ a $L^2(0,\pi)$ quan $t \to 0$. Farem servir el mètode integral o "de l'energia", com vam fer per l'equació d'ones. Considerem l' "energia"

$$E(t) = \int_0^\pi w^2(x,t) \,\mathrm{d}x.$$

Per $t > 0$, tenim que

$$E'(t) = \int_0^\pi w w_t \,\mathrm{d}x = \int_0^\pi 2w w_{xx} \,\mathrm{d}x =$$
$$= [2w w_x]_0^\pi - \int_0^\pi 2w_x w_x \,\mathrm{d}x = -\int_0^\pi 2w_x^2 \,\mathrm{d}x \leq 0.$$

És a dir, $E(t)$ és decreixent en el temps. A més, $E(t) \geq 0$ i $\lim_{t\to 0} E(t) = 0$, i per tant $E(t) = 0$ per a tot $t \geq 0$. Això implica que $w(x,t) = 0$, d'on $u = v$.

ii) No demostrarem el segon apartat, es fa com un dels exercicis de la llista corresponent de problemes.

iii)
$$||u(\cdot,t)||^2_{L^2(0,\pi)} = \frac{\pi}{2} \sum_{k=1}^\infty |b_k|^2 |e^{-2k^2 t}| \leq e^{-2t} \sum_{k=1}^\infty |b_k|^2 = e^{-2t} ||g||^2_{L^2(0,\pi)}$$

□

Corol·lari 5.3.7. L'equació de la calor té un efecte regularitzador. Per a qualsevol $g \in L^2(0,\pi)$, la solució u esdevé $\mathscr{C}^\infty$ en x i $t > 0$ instantàniament, és a dir, per a tot temps $t \geq t_0 > 0$ arbitràriament petit.

Observació 5.3.8.

i) Les condicions de vora (i.e. imposar que la temperatura sigui de zero graus a la vora) fan que la temperatura tendeixi cap a zero exponencialment ràpid en el temps per tota condició inicial (per molt calenta que sigui la temperatura inicial).

ii) El corol·lari anterior 5.3.7 estableix una diferència molt important entre les solucions de $u_t = u_{xx}$ i $u_{tt} = u_{xx}$, ja que les ones no tenen cap efecte regularitzant sobre la condició inicial.

Corol·lari 5.3.9. Per la majoria de condicions inicial g, per exemple sempre que g no sigui analítica, no es pot resoldre l'equació de difusió per temps negatius, per petits que siguin aquests temps. Diem que l'equació de difusió és irreversible.

Demostració. Hem demostrat que la solució per temps futur és $\mathscr{C}^\infty$ en x i t si $g \in L^2(0,\pi)$. És més, l'expressió de la solució u implica que aquesta és analítica[3]. Suposem ara que existeix $\varepsilon > 0$ tal que es pot resoldre l'equació a $t \in (-\varepsilon, \infty)$. Aleshores $t = 0$ és un temps futur respecte de $-\varepsilon$ i per tant es pot expressar com la solució d'una condició inicial passada, cosa que implica que g ha de ser $\mathscr{C}^\infty$ i analítica. □

Observació 5.3.10. Per algunes funcions analítiques (les que tenen coeficients de Fourier que decauen exponencialment ràpid), $u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{-k^2 t} \sin(kx)$ encara pot definir una solució per $-\varepsilon < t < 0$, amb ε petit.

Observació 5.3.11.

i) Considerem el cas amb coeficient de difusió $D > 0$ amb condicions de Dirichlet i una vareta de longitud L. Aleshores la solució és de la forma

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{-k^2\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 Dt} \sin\left(k\frac{\pi}{L}x\right).$$

I podem observar que la taxa de refredament de la vareta és inversament proporcional a L^2. És a dir, si augmenta la longitud de la vareta, l'exponencial decau més lentament. En canvi, és directament proporcional a la conductivitat de la vareta D, i, per tant, l'exponencial decau més lentament si el coeficient de difusió de calor D decreix.

ii) El mètode de separació de variables és equivalent a diagonalitzar l'operador (en aquest cas el Laplacià). És, però, útil també per altres equacions, com ara l'equació d'ones. Si considerem el problema

$$u_{tt} = c^2 u_{xx},$$

i busquem solucions de la forma $u = v(x)w(t)$, obtenim dues EDOs. La primera ens diu que $\frac{v''(x)}{v(x)} = -\lambda$, d'on

$$v(x) = \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right),$$

[3] No demostrarem aquest fet.

i $\lambda = k^2 \left(\frac{\pi}{L}\right)^2$. La segona ens diu que $\frac{w''(t)}{c^2 w(t)} = -\lambda$, d'on

$$w_k(t) = a_k \cos\left(\frac{k\pi}{L} ct\right) + b_k \sin\left(\frac{k\pi}{L} ct\right).$$

Si ara imposem les condicions de vora i inicials, suposant que

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{a}_k \sin\left(\frac{k\pi}{L} x\right),$$
$$h(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{b}_k \cos\left(\frac{k\pi}{L} x\right).$$

aleshores

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\tilde{a}_k \cos\left(\frac{k\pi}{L} ct\right) + \tilde{b}_k \frac{L}{c\pi k} \sin\left(\frac{k\pi}{L} ct\right)\right] \sin\left(k\frac{\pi}{L} x\right).$$

En particular, la solució u és periòdica en el temps amb període $\frac{2L}{c}$ (tal i com havíem vist al corol·lari **??** usant la fórmula de d'Alambert i les reflexions).

5.4 El cas no homogeni

5.4.1 Vareta no homogènia. Teoria de Sturm-Liouville

Sigui $p = p(x)$ la conductivitat tèrmica de la vareta, i $r = r(x)$ la seva densitat de massa. Aleshores, amb el model que havíem plantejat, l'equació resultant és

$$r(x)u_t = (p(x)u_x)_x,$$

és a dir,

$$r(x)u_t = p(x)u_{xx} + p'(x)u_x.$$

També el podem escriure com $u_t = Au$, on A és l'operador $A = \frac{1}{r(x)}\partial_x(p(x)\partial_x)$. Voldríem aplicar el teorema espectral real per poder afirmar que A diagonalitza. Ara bé, amb el producte escalar habitual A no és simètric. Definim aleshores el producte escalar

$$\langle u, v\rangle_r = \int_0^L uvr(x)\,\mathrm{d}x,$$

suposant $r > 0, p > 0$ prou regulars. Amb aquest producte escalar,

$$\langle Au, v\rangle_r = \int_0^L \frac{1}{r(x)}(p(x)u_x)_x v r(x)\,\mathrm{d}x = [p(x)u_x v]_0^L - \int_0^L p(x)u_x v_x\,\mathrm{d}x =$$
$$= -[up(x)v_x]_0^L + \int_0^L u(p(x)v_x)_x\,\mathrm{d}x = \langle u, Av\rangle_r.$$

On hem aplicat que $[p(x)u_x v]_0^L = -[up(x)v_x]_0^L = 0$ sota condicions de vora nul·les de Dirichlet o Neumann. És a dir, A és simètric sota condicions de vora nul·les de Dirichlet o Neumann. A més, tenim que amb aquest producte escalar $L^2(a,b)$ és un espai de Hilbert amb la mateixa topologia que amb el producte escalar habitual, si suposem que

$$0 < c_1 \leq r(x) \leq c_2,$$

per a tota $x \in [a,b]$, i per tant

$$c_1||u||_{L^2} \leq ||u||_r \leq c_2||u||_{L^2}.$$

Teorema 5.4.1. Donades unes condicions de vora homogènies de Dirichlet (resp. de Neumann), existeix una base de $L^2(a,b)$ ortonormal respecte el producte escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle_r$ formada per funcions pròpies de l'operador A. De fet, existeixen $\varphi_1, \varphi_2, \dots \in L^2(a,b)$ ortonormals i $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$ valors propis tals que per tota k

$$\begin{cases} \frac{-1}{r(x)}(p(x)\partial_x \varphi_k(x))_x = \lambda_k \varphi_k(x) & x \in (a,b) \\ \varphi_k(a) = \varphi_k(b) = 0 \text{ (resp. } \partial_x\varphi_k(a) = \partial_x\varphi_k(b) = 0). \end{cases}$$

Aleshores, si $g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \varphi_k(x)$, la solució del problema de valors inicials i de contorn és

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{-\lambda_k t} \varphi_k(x).$$

Observació 5.4.2. En el context del Teorema anterior, les funcions i valors propis del problema de Dirichlet i de Neumann no coincideixen, com quan $p = r \equiv 1$.

Exemple 5.4.3. Per a certes funcions $r(x)$ i $p(x)$, la base ortonormal per l'equació del calor és una família famosa de polinomis ortogonals. Alguns exemples són els següents.

i) Hermite: $r(x) = p(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$, amb $x \in (-\infty, \infty)$.

ii) Laguerre: $r(x) = e^{-x}$, $p(x) = xe^{-x}$, amb $x \in (0, \infty)$.

iii) Chebyshev: $r(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $p(x) = \sqrt{1-x^2}$, amb $x \in (-1,1)$.

5.4.2 Equació de la calor no homogènia

Tornant al problema original, considerem

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + f(x,t) & x \in (0,\pi),\ t > 0 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & t > 0 \\ u(x,0) = g(x) & x \in (0,\pi) \end{cases}$$

On hem introduït el terme no homogeni $f(x,t)$. La fórmula de Duhamel (2.3.4) ens diu que

$$u(x,t) = (T_t g)(x) + \int_0^t T_{t-s} f(\cdot, s)(x) \, \mathrm{d}s.$$

on T_t és el semigrup lineal i continu

$$\begin{gathered} T_t \colon L^2(0,\pi) \to L^2(0,\pi) \\ g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx) \mapsto (T_t g)(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{-k^2 t} \sin(kx) \end{gathered}$$

Tenim que

$$||T_t g||^2 = \sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 e^{-2k^2 t} \frac{\pi}{2} \leq e^{-2t} ||g||^2.$$

Per tant, T_t és una contracció, doncs $e^{-t} < 1$.

Alternativament, sense usar la fórmula de Duhamel, podem resoldre el problema buscant una solució de la forma

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t)\sin(kx).$$

Si $f(x,t) = \sum_{k\geq 1} d_k(t)\sin(kx)$, com coneixem b_k i $d_k(t)$ podem imposar la EDP no homogènia per obtenir una EDO de primer ordre per $c_k(t)$:

$$\begin{cases} c_k' + k^2 c_k = d_k(t), \\ c_k(0) = b_k \end{cases}$$

que haurem de resoldre utilitzant el mètode de variació de les constants.

Observació 5.4.4. Donades condicions de vora no homogènies podem resoldre el problema restant a u una funció $h(x,t)$ que satisfaci les condicions de vora.

Resolguem el cas particular on $f(x)$ no depèn de t. Podem interpretar f com una font de calor o fred a cada punt de l'interior de la vareta. La podem resoldre explícitament amb la fórmula de Duhamel. Si b_k i d_k són els coeficients de Fourier de g i f, tenim que el seu comportament assimptòtic quan $t \to +\infty$ satisfà

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = \lim_{t\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{-k^2 t}\sin(kx) + \int_0^t \sum_{k=1}^{\infty} d_k e^{-k^2(t-s)}\sin(kx)\,\mathrm{d}s\right) =$$

$$= \lim_{t+\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty} d_k e^{-k^2 t}\left(\int_0^t e^{k^2 s}\,\mathrm{d}s\right)\sin(kx) = \lim_{t\to+\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{d_k}{k^2}(1-e^{-k^2 t})\sin(kx) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{d_k}{k^2}\sin(kx) =: v(x).$$

És a dir, tenim que $\lim_{t\to+\infty} u(x,t) = v(x)$. Aquesta funció $v(x)$ satisfà

$$\begin{cases} v_{xx} + f(x) = 0 \qquad x \in (0,\pi) \\ v(0) = v(\pi) = 0 \end{cases}$$

Que anomenem el problema estacionari perquè és el problema que resulta de l'equació de difusió $u_t = u_{xx} + f(x)$ si suposem que la solució no depèn del temps ($u_t = 0$).

5.5 Unicitat de la solució a $\mathbb{R}^n$

Demostrarem en aquesta secció la unicitat de la solució per a l'equació de la calor en oberts fitats prou regulars (per exemple, Lipschitz) de $\mathbb{R}^n$ mitjançant el mètode integral.

Definició 5.5.1. Un domini $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ és un obert connex.

Proposició 5.5.2. Si Ω és un domini fitat i Lipschitz, $u \in \mathscr{C}^2(\overline{\Omega})$ i $v \in \mathscr{C}^1(\overline{\Omega})$, llavors

$$\int_\Omega (\Delta u)v = \int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial\nu}v - \int_\Omega \nabla u\nabla v.$$

Aquest resultat es coneix com identitat de Green.

Demostració. Usant integració per parts a $\mathbb{R}^n$ (4.7.3),

$$\int_\Omega (\Delta u)v = \int_\Omega \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i} v = \int_{\partial\Omega} \sum_{i=1}^n u_{x_i} v \nu^i - \int_\Omega \sum_{i=1}^n u_{x_i} v_{x_i} =$$
$$= \int_{\partial\Omega} (\nabla u \cdot \nu) v - \int_\Omega \nabla u \nabla v = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} v - \int_\Omega \nabla u \nabla v.$$

□

Proposició 5.5.3. Sigui $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un domini fitat i de classe $\mathscr{C}^1$ (Lipschitz seria suficient), és a dir, que tingui vora regular. L'equació de difusió amb condició de Dirichlet (respectivament, Neumann) a Ω

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + f(x,t) \\ u(x,t) = 0 \text{ (resp. } u_\nu(x,t) = 0) & x \in \partial\Omega,\, t > 0 \\ u(x,0) = g(x) & x \in \Omega \end{cases}$$

si té solució $u \in \mathscr{C}^2\left(\overline{\Omega} \times [0,\infty)\right)$, llavors és única.

Demostració. Considerem dues solucions u_1, u_2 i definim $v := u_1 - u_2$. Aleshores v resol

$$\begin{cases} v_t = \Delta v \\ v|_{\partial\Omega} = 0 \\ v(\cdot, 0) = 0 \end{cases}$$

Definim

$$E(t) = \int_\Omega v^2(x,t)\,\mathrm{d}x,$$

que podem integrar per ser $\overline{\Omega}$ compacte. Aleshores, usant la identitat de Green (5.5.2),

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} E(t) = \int_\Omega 2 v v_t \,\mathrm{d}x = \int_\Omega 2 v \Delta v \,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial \nu} v - \int_\Omega \nabla v \nabla v.$$

El primer terme d'aquesta resta és nul perquè $v = 0$ si treballem amb Dirichlet i $\frac{\partial v}{\partial \nu} = 0$ per Neumann. Així doncs,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} E(t) = -\int_\Omega 2|\nabla v|^2 \leq 0.$$

Com $0 \leq E(t)$ i $E(0) = \int_\Omega v^2(x,0)\,\mathrm{d}x = 0$, aleshores $E(t) = 0$. Finalment,

$$0 = E(t) = \int_\Omega v^2(x,t)\,\mathrm{d}x \implies v = 0.$$

És a dir, $u_1 = u_2$. □

Observació 5.5.4. La demostració funciona exactament igual si les condicions de vora no són homogènies.

Tema 6

El laplacià. Funcions harmòniques

6.1 Introducció

Les solucions de l'equació de la calor $u_t - \Delta u = f(x)$ convergiran, quan $t \to \infty$, cap a la solució estacionària del problema, és a dir, la solució de

$$\begin{cases} -\Delta v = f(x) & \Omega \subset \mathbb{R}^n \\ \text{condicions de vora} & \end{cases}$$

Això ens indueix de forma natural a estudiar aquesta nova equació, coneguda com l'equació de Poisson o, en el cas homogeni $f \equiv 0$, com l'equació de Laplace.

Definició 6.1.1. Sigui $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ obert, $u \in \mathscr{C}^2(\Omega)$. Direm que u és harmònica a Ω si

$$\Delta u = u_{x_1x_1} + ... + u_{x_nx_n} = 0 \text{ a } \Omega.$$

De la mateixa manera, direm que u és subharmònica a Ω si $-\Delta u \leq 0$, i direm que u és superharmònica a Ω si $-\Delta u \geq 0$.

Observació 6.1.2. Tota funció $u \in \mathscr{C}^2$ convexa en $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ convex és subharmònica. La convexitat d'una funció es pot caracteritzar per les següents condicions equivalents.

- A cada punt de la gràfica, l'hiperplà tangent per aquell punt queda per sota de la gràfica.
- Restringida a qualsevol segment és una funció convexa d'una variable real. Aquesta condició permet fer una analogia de les funcions convexes en dimensió n a les funcions convexes en dimensió 1.
- Per a tot $x, y \in \Omega$, es compleix $u(\frac{x+y}{2}) \leq \frac{u(x)+u(y)}{2}$. Aquesta condició no requereix que u sigui $\mathscr{C}^2$. Hi ha, per tant, funcions convexes que no són $\mathscr{C}^2$, ni $\mathscr{C}^1$. Exemple: $u(x) = |x|$, que compleix aquesta condició. Nosaltres, però, ens centrarem en funcions $\mathscr{C}^2$ per poder calcular puntualment el seu Laplacià.
- Si u és $\mathscr{C}^2$, per a tot $x \in \Omega$, es compleix $D^2u(x) \geq 0$. És a dir, la Hessiana és una matriu simètrica definida positiva o nul·la.

Per tant, per ser D^2u definida positiva o nul·la, tenim pel criteri de Sylvester

$$\Delta u = \operatorname{tr} D^2 u \geq 0.$$

Un exemple molt senzill de funcions harmòniques són les funcions les gràfiques de les quals són un pla o un hiperplà, és a dir, les funcions afins $u(x) = a \cdot x + b$, amb $a \in \mathbb{R}^n$ i $b \in \mathbb{R}$. En dimensió 1, de fet, aquestes són totes les funcions harmòniques (per integració directa de l'equació). En dimensió 2, ens és convenient fer la identificació

$$\begin{gathered}\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C} \\ (x, y) \leftrightarrow z = x + iy.\end{gathered}$$

Recordem que una funció $\varphi\colon \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ és holomorfa o analítica si és derivable (o equivalentment $\mathscr{C}^1$) com a funció de variable complexa, i que tota funció holomorfa és automàticament $\mathscr{C}^\infty$. També recordem que podem escriure $\varphi = u + iv$, sent $u, v\colon \Omega \to \mathbb{R}$ les parts real i imaginària de φ. En particular,

Proposició 6.1.3. *Equacions de Cauchy-Riemann.* Si $\varphi = u + iv$ és holomorfa, llavors $u_x = v_y$ i $u_y = -v_x$.

Corol·lari 6.1.4. Les parts real i imaginària u i v d'una funció holomorfa són $\mathscr{C}^\infty$ i harmòniques a Ω.

Demostració.

$$\begin{aligned}\Delta u &= u_{xx} + u_{yy} = (v_y)_x + (-v_x)_y = v_{yx} - v_{xy} = 0. \\ \Delta v &= v_{xx} + v_{yy} = (-u_y)_x + (u_x)_y = -u_{yx} + u_{xy} = 0.\end{aligned}$$

□

Recíprocament, també és cert que si $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ és harmònica en Ω simplement connex, llavors existeix una altra funció harmònica $v\colon \Omega \to \mathbb{R}$ (l'harmònica conjugada) de manera que $u + iv$ és holomorfa. En tot cas, aquí el que volem és donar exemples de funcions harmòniques de dues variables. Per exemple,

$$\varphi(z) = z^2 = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + i(2xy),$$

i així, tant $x^2 - y^2$ com $2xy$ són funcions harmòniques. Podem fer el mateix per a z^k, $k = 1, 2, 3, ...$ per a obtenir una família de polinomis harmònics. Si ho fem en coordenades polars,

$$z^k = (re^{i\theta})^k = r^k e^{ik\theta} = (r^k \cos(k\theta)) + i(r^k \sin(k\theta)),$$

i per tant $r^k \cos(k\theta)$ i $r^k \sin(k\theta)$ són harmòniques.

Exercici 6.1.5. Demostreu que el laplacià en coordenades polars és

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{u_r}{r} + \frac{u_{\theta\theta}}{r^2} = \frac{1}{r}(ru_r)_r + \frac{u_{\theta\theta}}{r^2}.$$

Observació 6.1.6. Les funcions holomorfes són $\mathscr{C}^\infty$ i analítiques en el sentit quep per a tot punt, la sèrie de Taylor o de potències coincideix amb la funció de partida. Si φ és holomorfa en un disc $B_1(0)$, aleshores la podem expressar com a sèrie de potències en aquest domini:

$$\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k,$$

amb $a_k = \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}$. Usant que $z = re^{i\theta}$ i que $e^{ik\theta} = \cos(k\theta) + i\sin(k\theta)$

$$\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k (\cos(k\theta) + i\sin(k\theta)).$$

Si $a_k = b_k + ic_k$, amb $b_k, c_k \in \mathbb{R}$, podem observar que la part real de φ,

$$u(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(b_k r^k \cos(k\theta) - c_k r^k \sin(k\theta) \right),$$

està expressada en sèrie de Fourier i serà harmònica. Així, observem que una sèrie de Taylor en variable complexa es converteix en una sèrie de Fourier quan s'expressa en coordenades polars.

Finalment, donem exemples de funcions holomorfes que no són polinomis:

$$\varphi(z) = e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$$
$$\varphi(z) = \operatorname{Log} z = \log r + i\theta.$$

D'aquí obtenim altres exemples de funcions harmòniques, com $e^x \cos y$ i $e^x \sin y$ en el cas de l'exponencial i $\log\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$ i $\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ pel logaritme complex (aquest últim només en un domini simplement connex que no contingui el 0).

Exercici 6.1.7. Comproveu que $\log\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$ i $\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ són funcions harmòniques calculant els seus Laplacians.

6.2 Existència i unicitat de solucions

En aquesta secció, estudiarem els resultats relacionats amb l'existència i unicitat de solucions de l'equació de Poisson. Mentre que els resultats d'existència seran més complicats d'obtenir en general, la unicitat la podem demostrar amb relativa facilitat per a dominis generals de $\mathbb{R}^n$.

Proposició 6.2.1. Donats $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ obert regular Lipschitz fitat i funcions $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ i $g\colon \partial\Omega \to \mathbb{R}$, considerem el problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{a } \Omega, \\ u = g & \text{a } \partial\Omega. \end{cases}$$

Si el problema admet una solució $u \in \mathscr{C}^2(\overline{\Omega})$, aleshores és única.

Demostració. Utilitzarem el mètode integral o d'energia. En primer lloc, suposem que $u, v \in \mathscr{C}^2(\overline{\Omega})$ són solucions del problema. Aleshores, $w = u - v$ satisfà el problema completament homogeni:

$$\begin{cases} -\Delta w = 0 & \text{a } \Omega, \\ w = 0 & \text{a } \partial\Omega. \end{cases}$$

Aleshores,

$$0 = \int_\Omega w\Delta w = \cancel{\int_{\partial\Omega} w \frac{\partial w}{\partial \nu}}^{\,0} - \int_\Omega |\nabla w|^2 = -\int_\Omega |\nabla w|^2,$$

on hem usat la integració per parts i el primer terme es cancel·la per les condicions de Dirichlet. Com que $|\nabla w|^2$ és sempre positiu o nul, deduïm:

$$\nabla w = 0 \text{ a } \overline{\Omega} \implies \left.\begin{array}{l} w \equiv \text{constant} \\ w|_{\partial\Omega} = 0 \end{array}\right\} \implies w \equiv 0 \text{ a } \overline{\Omega}.$$

□

Observació 6.2.2. Si consideréssim el problema amb condicions de Neumann tindríem que la solució és única excepte per a una constant aditiva.

Observació 6.2.3. A $\mathbb{R}^2$, podem fer una associació entre funcions harmòniques al pla real i funcions holomorfes a $\mathbb{C}$. D'aquí es dedueix que tota funció harmònica ($u \in \mathscr{C}^2(\Omega \subset \mathbb{R}^2)$) resulta ser $\mathscr{C}^\infty(\Omega)$ i analítica. El mateix , resultat és cert per a funcions harmòniques en oberts de $\mathbb{R}^n$, però no ho demostrarem aquí.

Mirant enrere, recordem que per l'equació de la calor també es dona aquest efecte regularitzant, però que això no té perquè ser cert per l'equació d'ones (per exemple, una solució és $u(x,y) = |x-y|^{2.5}$). Aquesta diferència és deguda a que l'equació de Poisson és el·líptica, l'equació de la calor és parabòlica i l'equació d'ones és hiperbòlica. Tot seguit detallem una mica més aquesta classificació.

Considerem una EDP de segon ordre a coeficients constants en $\mathbb{R}^2$

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} = 0.$$

Només considerem els termes d'ordre dos, que són els termes dominants. Podem reescriure l'EDP com:

$$\operatorname{tr}\left[\begin{pmatrix} u_{xx} & u_{xy} \\ u_{xy} & u_{yy} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}\right] = \operatorname{tr}\left[(D^2u)M\right] = 0.$$

Ens agradaria trobar una base ortonormal per la matriu dels coeficients (que existirà perquè és simètrica), de manera que

$$0 = \operatorname{tr}\Big((D^2u)M\Big) = \operatorname{tr}\Big((D^2u)O\tilde{D}O^t\Big) = \operatorname{tr}\Big(O^t(D^2u)O\tilde{D}\Big).$$

Això és el mateix que fer un canvi de variables entre (x,y) i uns certs (ξ,η) a determinar:

$$u(x,y) \to \tilde{u}(\xi,\eta) = u\left(C\begin{pmatrix}\xi \\ \eta\end{pmatrix}\right) \implies D^2\tilde{u} = C^t(D^2u)C \text{ o } C(D^2u)C^t,$$

on a l'última igualtat deixem com a exercici pel lector determinar quina de les dues expressions és la correcta. Si prenem $C = O^t$ o $C = O$ (segons la resposta correcta), l'EDP s'expressa com a

$$\operatorname{tr}\Big((D^2\tilde{u})\tilde{D}\Big) = \lambda_1 u_{\xi\xi} + \lambda_2 u_{\eta\eta}. \qquad (\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R})$$

Reescalant ξ i η adequadament, ens queden tres opcions, que és la classificació d'equacions de 2n ordre lineals al pla $\mathbb{R}^2$:

- Si λ_1 i λ_2 tenen el mateix signe, ens queda, després de reescalar les variables independents, $u_{xx} + u_{yy} = 0$ i diem que l'equació és el·líptica.

- Si λ_1 i λ_2 tenen el signe diferent, ens queda, després de reescalar les variables independents, $u_{xx} - u_{yy} = 0$ i diem que l'equació és hiperbòlica.

- Si $\lambda_1 = 0$ o $\lambda_2 = 0$, ens queda, després de reescalar les variables independents, $u_{xx} = 0$. Si a més tinguessim una derivada d'ordre 1 en el temps, $u_t - u_{xx} = 0$ (equació de difusió), diem que l'equació és parabòlica.

Observació. La terminologia ve de substituir derivades per polinimis: u_{xx} per X^2, u_t per T, etc. Laplace esdevé $X^2 + Y^2$ el·lipse, ones $X^2 - Y^2$ hipèrbola, difusió T$-X^2$ paràbola.

Tot seguit, estudiarem l'existència de solucions per l'equació de Laplace en un disc de $\mathbb{R}^2$. Al problema 3 de la llista 6 de problemes del curs, es demostra que, per l'equació de Poisson esdevé l'EDO:

$$\begin{cases} -u'' = f, \\ u(0) = u(L) = 0, \end{cases}$$

hi ha existència i unicitat de solucions, i que la solució es pot expressar de la forma

$$u(x) = \int_0^L G(x,y) f(y) \, \mathrm{d}y,$$

on la funció $G(x,y)$ és explícita i rep el nom de funció de Green. Una utilitat de G és que si $f, G \in \mathscr{C}^\infty$, aleshores les solucions del problema seran $\mathscr{C}^\infty$. Una altra utilitat de la funció de Green és que, un cop es coneix, no cal resoldre l'EDO $-u''(x) = f(x)$ per cada f donada, sino que només cal calcular la seva integral, de $f(y)$, contra $G(\cdot, y)$.

Proposició 6.2.4. Sigui $B_R \subset \mathbb{R}^2$ la bola de radi R centrada a l'origen. Donada $g \colon \partial B_R \to \mathbb{R}$ contínua, el problema

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{a } B_R, \\ u = g & \text{a } \partial B_R, \end{cases}$$

admet una solució $u \in \mathscr{C}^2(B_R) \cap \mathscr{C}^0(\overline{B_R})$ i ve donada per

$$u(x) = \int_{\partial B_R} P_R(x,y) g(y) \, \mathrm{d}y = \frac{R^2 - |x|^2}{2\pi R} \int_{\partial B_R} \frac{g(y)}{|x-y|^2} \, \mathrm{d}y.$$

Observació. P_R és $\mathscr{C}^\infty$ ja que el denominador no s'anul·la.

Demostració. Aplicarem el mètode de separació de variables en coordenades polars aprofitant la simetria de B_R. Busquem una solució de la forma

$$u(x) = v(r) w(\theta).$$

Usant l'expressió del laplacià en polars:

$$0 = \Delta u = u_{rr} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} \implies 0 = v'' w + \frac{v' w}{r} + \frac{v w''}{r^2}.$$

Separant la part que depèn de r i de θ:

$$r^2 \frac{v'' + \frac{v'}{r}}{v} = \frac{-w''}{w} = \lambda,$$

sent λ una constant. Com que w és 2π-periòdica, deduïm que:

$$w(x) = a\cos(k\theta) + b\sin(k\theta),$$

amb $k \in \mathbb{Z}$ i, per tant, podem calcular $\lambda = k^2$ a partir de $-\frac{w''}{w} = \lambda$. Pel que fa a l'altra equació:

$$v'' + \frac{v'}{r} - \frac{k^2}{r^2}v = 0.$$

Busquem solucions del tipus $v(r) = r^\alpha$:

$$\alpha(\alpha-1)r^{\alpha-2} + \alpha r^{\alpha-2} - k^2 r^{\alpha-2} = 0 \implies \alpha^2 - k^2 = 0 \implies \alpha = \pm k.$$

Així, les candidates a solucions són

$$r^k(a\cos(k\theta) + b\sin(k\theta)).$$

D'aquestes, descartem les que tinguin k negatiu, ja que són singulars a l'origen i volem resoldre el problema de Laplace amb solucions que són $\mathscr{C}^2$. Per tant, la solució general de l'equació seran les combinacions lineals de les candidates:

$$u = u(r,\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r^k}{R^k}(a_k\cos(k\theta) + b_k\sin(k\theta)).$$

Com que $\sum_{k=1}^{\infty} r_k\cos(k\theta)$ i $\sum_{k=1}^{\infty} r_k\sin(k\theta)$ són harmòniques, u és harmònica. Per ara la sèrie és formal. Falta imposar la condició inicial. Com que $g \in \mathscr{C}^0(\partial B_R)$, la podem expressar en sèrie de Fourier:

$$u|_{r=R} = g(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos(k\theta) + b_k\sin(k\theta)),$$

amb els coeficients:

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\beta)\cos(k\beta)\,\mathrm{d}\beta,$$
$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\beta)\sin(k\beta)\,\mathrm{d}\beta.$$

Així, en l'expressió de la u, podem canviar sumatori i integrals:

$$u(r,\theta) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\beta g(\beta)\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{r^k}{R^k}(\cos(k\beta)\cos(k\theta) + \sin(k\beta)\sin(k\theta))\right)\right).$$

Com que

$$(\cos(k\beta)\cos(k\theta) + \sin(k\beta)\sin(k\theta)) = \cos(k(\theta-\beta)) = \mathrm{Re}(e^{ik(\theta-\beta)}),$$

el sumatori es converteix en

$$u(r,\theta) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\beta g(\beta)\left(\frac{1}{2} + \mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^k e^{ik(\theta-\beta)}\right)\right) =$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\beta g(\beta)\left(\frac{1}{2} + \mathrm{Re}\left(\frac{\frac{r}{R}e^{i(\theta-\beta)}}{1-\frac{r}{R}e^{i(\theta-\beta)}}\right)\right).$$

Fent les operacions pertinents, l'expressió es converteix en:

$$u(r,\theta) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\beta g(\beta) \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\theta - \beta)},$$

que, desfent el canvi a polars, és l'expressió desitjada. □

Definició 6.2.5. El nucli de Poisson pel disc $B_R \subset \mathbb{R}^2$ és la funció

$$P_R(x,y) = \frac{R^2 - |x|^2}{2\pi R}\frac{1}{|x-y|^2}.$$

És la funció de Green pel problema de Dirichlet per l'equació de Poisson.

Corol·lari 6.2.6. Si $u \in \mathscr{C}^2(\overline{B_R})$, aleshores

$$u(x) = \int_{\partial B_R} P_R(x,y) g(y)\,\mathrm{d}y$$

és l'única solució. De fet és $\mathscr{C}^\infty$ ja que P_R és $\mathscr{C}^\infty$ respecte de $x \in B_R$ ($y \in \partial B_R$ i per tant $x \neq y$ i el denominador no s'anul·la).

Observació 6.2.7. Pels mètodes de variable complexa sabíem que $u \in \mathscr{C}^\infty$. Però aquest nou mètode amb funcions de Green serveix també per dimensions superiors, $\mathbb{R}^n$ (si bé no ho fem al curs).

Exercici 6.2.8. Demostreu l'existència de solucions per a la mateixa equació en un domini rectangular de $\mathbb{R}^2$, i trobeu el seu nucli de Poisson (potser escrit com una sèrie). És útil separar la condició inicial $g = g_1 + g_2 + g_3 + g_4$, on cada g_i correspon a un costat del rectangle, i resoldre el problema suposant que totes menys una són nul·les.

Observació 6.2.9. De fet, demostrar existència i unicitat de solucions per a un disc és suficient per a demostrar-ho per a un obert de $\mathbb{R}^2$ simplement connex, ja que

- Per a tot obert $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ simplement connex, existeix $\varphi\colon \Omega \to D_1$ holomorfa i bijectiva (Teorema de l'aplicació conforme de Riemann).
- Si $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ és harmònica, aleshores $u \circ \varphi^{-1}\colon D_1 \to \mathbb{R}$ també és harmònica.

Per tant, en un obert simplement connex de $\mathbb{R}^2$ hi ha existència i unicitat de solucions pel problema de Laplace.

6.3 Probabilitats i el laplacià

Considerem el següent problema: Tenim una regió fitada $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, de manera que la seva vora està partida en dos subconjunts disjunts: $\partial\Omega = \Gamma_o \cup \Gamma_t$, $\Gamma_o \cap \Gamma_t = \varnothing$ (la part "oberta" i la part "tancada"). Fixem una partícula $x = (x_1, x_2) \in \Omega$ que camina "aleatòriament" dins de Ω sortint inicialment de x de manera que:

- No privilegia cap direcció.
- No té memòria.

Aquest és un procés de difusió o moviment Brownià. Volem calcular la funció $u(x)$, que és la probabilitat que el primer cop que el camí toqui la vora $\partial\Omega$, ho faci a la part oberta Γ_o. A u se li diu la probabilitat d'escapament o de sortida. Depèn del punt x d'inici.

Discretitzem el problema. Suposem que cada vegada que ens movem, ho fem en passos de distància $h > 0$, i que ho fem en alguna de les quatre direccions cardinals (nord, est, sud o oest) amb probabilitat uniforme. Aleshores, per la fórmula de les probabilitats condicionades:

$$u^h(x) = \frac{1}{4}(u^h(E) + u^h(O) + u^h(N) + u^h(S)),$$

o, en coordenades:

$$u^h(x_1, x_2) = \frac{1}{4}(u^h(x_1 + h, x_2) + u^h(x_1 - h, x_2) + u^h(x_1, x_2 + h) + u^h(x_1, x_2 - h)).$$

Això és equivalent a:

$$0 = [u^h(x_1+h, x_2)+u^h(x_1-h, x_2)-2u^h(x_1, x_2)]+[u^h(x_1, x_2+h)+u^h(x_1, x_2-h)-2u^h(x_1, x_2)]$$

que, dividint per h^2, és el quocient incremental per la segona derivada. Així, si $u \in \mathscr{C}^2$, es té

$$0 = (u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2})(x_1, x_2) = \Delta u(x).$$

Per tant, la probabilitat d'escapar (o el guany esperat) és una funció harmònica. Notem que hem utilitzat que $u^h \to u$ quan $h \to 0$. Observem que si fóssim a $\mathbb{R}^n$, podríem resoldre el problema exactament igual.

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{a } \Omega \\ u = \delta_\Gamma & \text{a } \partial\Omega \end{cases} \qquad \text{on } \delta_\Gamma = \begin{cases} 1 \text{ si estem a la part oberta } \Gamma_o \\ 0 \text{ si estem a la part tancada } \Gamma_t \end{cases}$$

Vam veure en el punt anterior que en dominis simplement connexos tenim una fórmula per a calcular u. Considerem un altre problema: Sigui $t > 0$ un instant de temps donat, i $x = 0$ la posició inicial d'una partícula unidimensional que es mou aleatòriament per la recta real. Quina és la probabilitat que després d'un cert temps t, la partícula estigui en el punt x?

Com abans, discretitzem: considerem uns passos de temps $\Delta t = \tau > 0$ i d'espai $\Delta x = h > 0$, de manera que una partícula a la posició x es pot moure a les posicions $x \pm h$ indistintament en l'increment de temps τ, amb probablititat $1/2$ per cada posició (dreta/esquerra). La probabilitat $u^h(x, t)$ que la partícula estigui a x a temps t és:

$$u^h(x, t) = \frac{1}{2}(u^h(x - h, t - \tau) + u^h(x + h, t - \tau)).$$

Això és equivalent a:

$$\frac{u^h(x, t) - u^h(x, t - \tau)}{h^2} = \frac{1}{2}\frac{u^h(x - h, t - \tau) + u^h(x + h, t - \tau) - 2u^h(x, t - \tau)}{h^2}.$$

El terme de la dreta, quan $h, \tau \to 0$, és $\frac{1}{2}u_{xx}(x, t)$. El terme de l'esquerra és més simple. Per tal que el límit existeixi, fixem una constant $D > 0$ i fem l'elecció $h^2 = 2D\tau$. D'aquesta manera:

$$\frac{u(x, t) - u(x, t - \tau)}{2D\tau} \to \frac{1}{2D}u_t(x, t),$$

i així l'equació queda

$$u_t = Du_{xx},$$

que és l'equació de difusió. Pel que fa a la condició inicial, sabem que en temps 0 la partícula està a la posició $x = 0$. Com que u és una funció de densitat de probabilitat, això es tradueix com $u(x, 0) = \delta(x)$, on δ és la delta de Dirac, que satisfà:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\,\mathrm{d}x = 1, \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)\,\mathrm{d}x = f(0).$$

Podem pensar la delta de Dirac com una funció que és zero arreu excepte a l'origen, on és infinit, i que imposem que tingui integral 1 per tal que sigui una probabilitat o "mesura".

Procedim ara a resoldre l'equació de la calor que hem obtingut a tota la recta real. No hi ha condicions de vora com quan hem resolt, per Fourier, l'equació de la calor a un interval fitat. Observem que les solucions de l'equació són invariants pel canvi

$$\begin{aligned} x &\to \lambda x, \\ t &\to \lambda^2 t, \end{aligned}$$

si $\lambda > 0$ és una constant. És a dir, que si u és solució, aleshores $\tilde{u} = u(\lambda x, \lambda^2 t)$ també ho és. Ens preguntem si hi ha solucions invariants pel canvi anterior, és a dir, tals que $\tilde{u} = u$ per a tot $\lambda > 0$. En aquest cas,

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{t}} \implies u(x,t) = u\left(\frac{x}{\sqrt{t}}, 1\right) = \phi\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right),$$

que és una funció d'una variable. u resol la EDP si, i només si, ϕ resol l'EDO. Es pot comprovar que existeixen solucions de l'equació de difusió del tipus $u(x,t) = \phi(\frac{x}{\sqrt{t}})$, però no són les que ens interessen, ja que:

$$\int_{\mathbb{R}} u(x,t)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \phi\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)\mathrm{d}x = \sqrt{t}\int_{\mathbb{R}} \phi(y)\,\mathrm{d}y,$$

la integral anterior, en el nostre cas, ha de valdre 1 per tot t, doncs u és una densitat de probabilitat. A la vista del resultat, assagem solucions del tipus:

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{t}}\phi\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right).$$

Aquestes solucions sí que tindran integral constant en el temps i així serà $u(x,t)$ una probabilitat per a tot temps. Trobem-les:

$$\begin{aligned} u_t &= -\frac{x}{2t^2}\phi'\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) - \frac{1}{2t^{3/2}}\phi\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right), \\ u_{xx} &= \frac{1}{t^{3/2}}\phi''\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right). \end{aligned}$$

Imposant l'equació:

$$\frac{x}{2t^2}\phi'\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) + \frac{1}{2t^{3/2}}\phi\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) + \frac{1}{t^{3/2}}\phi''\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) = 0.$$

Multiplicant per $2t^{3/2}$:

$$\frac{x}{\sqrt{t}}\phi'\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)+\phi\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)+2\phi''\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)=0.$$

Així, fent el canvi $z=\frac{x}{\sqrt{t}}$, ens queda l'EDO:

$$2\phi''+z\phi'+\phi=0 \iff (z\phi)'=-2\phi''.$$

Integrant,

$$z\phi=-2\phi'+C.$$

Intuïtivament, veiem que u ha de ser parella en x, ja que la partícula té la mateixa probabilitat d'anar a la dreta i a l'esquerra. En aquest cas, $u_x(0,t)=0 \implies \phi'(0)=0$, i per tant:

$$C=z\phi+2\phi'\Big|_{z=0}=0.$$

Observem també que

$$(\log\phi)'=\frac{\phi'}{\phi}=-\frac{z}{2} \implies \log\phi=-\frac{z^2}{4}+D \implies \phi=ae^{-z^2/4},$$

sent $a>0$ una constant positiva, que trobem imposant que $u(x,t)$ sigui una funció de densitat de probabilitat:

$$1=\int_{\mathbb{R}}u(x,t)\,\mathrm{d}x=\frac{a}{\sqrt{t}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2/4t}\,\mathrm{d}x.$$

Com que la integral és invariant en el temps, podem prendre qualsevol temps, com ara $t=1$. Veiem que ens queda una integral Gaussiana, que ja sabem calcular:

$$\int_{\mathbb{R}}e^{-x^2/4}\,\mathrm{d}x=2\sqrt{\pi} \implies a=\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \implies u(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-x^2/4t}.$$

Així, el resultat final és una funció de densitat Gaussiana.

Si en comptes d'una delta de Dirac, la condició inicial fos una funció g general, aleshores per a cada punt $y\in\mathbb{R}$ podem aproximar la funció com a $g(y)h\delta(y)$ per a cert h. Per tant,

$$g\approx\sum_{k\in\mathbb{Z}}g(kh)h\delta(kh)\to\sum_{k\in\mathbb{Z}}g(kh)h\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{\frac{-(x-kh)^2}{4t}}=\tilde{u}(x,t).$$

Observem que aquest últim terme és una suma de Riemann, que quan $h\to 0$, esdevé:

$$u(x,t)=\int_{\mathbb{R}}g(y)\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{\frac{-(x-y)^2}{4t}}\,\mathrm{d}y=g*\left(\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{\frac{-x^2}{4t}}\right).$$

És la solució de l'equació de la calor a tota la recta real. Anàlogament, podem considerar el problema en dimensions superiors $u_t=D\Delta u$. Assagem una solució de la forma:

$$\Gamma(x,t)=\frac{1}{(Dt)^{n/2}}\varphi\left(\frac{|x|}{(Dt)^{1/2}}\right).$$

Definició 6.3.1. Anomenem Funció de Green per l'equacio de difusió a la recta real a:

$$G(x,y,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{\frac{-(x-y)^2}{4t}}$$

També se l'anomena solució fonamental de l'equació de difusió a la recta real (o $\mathbb{R}^n$) o Nucli de Gauss (per la gaussiana).

Observació 6.3.2. Les funcions de dues variables $u(x,t)$ que resolen l'equació de difusió i que es poden expressar de forma més senzilla com una funció d'una variable real s'anomenen funcions autosimilars (self-similar). La propietat que tenen aquestes funcions és que si es canvien les unitats, les funcions en sí no canvien o bé canvien de foma molt simple (per exemple $\frac{1}{\sqrt{t}}$). Diem que són autosimilars perquè són (pràcticament) elles mateixes multiplicades per una constant quan canvien les unitats.

Exercici 6.3.3. Comproveu que

$$\partial_{x_i} r = \partial_r x_i = \frac{x_i}{r}.$$

Procediment:

i) Deriveu $r = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}$

ii) $x = r\sigma$, amb σ a la esfera unitat S^{n-1} i obteniu $\partial_r x_i = \sigma_i = \frac{x_i}{r}$

Proveu també que si $u = u(r)$ és radialment simètrica a $\mathbb{R}^n$, llavors:

$$\Delta u = r^{1-n}(r^{n-1}u_r)_r = u_{rr} + \frac{n-1}{r}u_r.$$

Si se substitueix Γ a l'equació (usant l'exercici anterior) i es resol l'EDO que en resulta, s'obté la solució:

$$\Gamma(x,t) = \frac{1}{(4\pi Dt)^{n/2}} e^{-|x|^2/(4Dt)},$$

que té la mateixa forma que la unidimensional. També de forma anàloga amb l'anterior, si la condició inicial és $u(x,0) = g$, aleshores:

$$u = \Gamma(\cdot, t) * g.$$

6.4 Propietat de la mitjana i Principi del màxim

Tot seguit estudiarem dues propietats molt interessants de les funcions harmòniques com són la propietat de la mitjana i el principi del màxim, i en veurem les seves conseqüències en referència al problema de Laplace.

Proposició 6.4.1. *Propietat de la mitjana.* Sigui $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un obert, i sigui $u \in \mathscr{C}^2(\Omega)$ una funció harmònica a Ω. Llavors, per a tot $x_0 \in \Omega$ i per a tota bola $\overline{B}_r(x_0) \subset \Omega$, es té:

$$u(x_0) = \fint_{\partial B_r(x_0)} u(y)\,\mathrm{d}y = \fint_{B_r(x_0)} u(y)\,\mathrm{d}y.$$

on $\fint$ vol dir integrar i dividir per la mesura del conjunt on s'integra. És per tant la mitjana de u sobre el conjunt.

Demostració. Quant a l'integral sobre la vora de la bola, veurem que és constant respecte el radi. Per a fer-ho, considerem el canvi a polars $r = |x|$, $\sigma = \frac{x}{|x|}$:

$$\frac{d}{dr} \fint_{\partial B_r(x_0)} u(y)\,\mathrm{d}y = \frac{d}{dr} \fint_{\mathbb{S}^{n-1}} u(x_0 + r\sigma)\,\mathrm{d}\sigma = \fint_{\mathbb{S}^{n-1}} \nabla u(x_0 + r\sigma) \cdot \sigma\,\mathrm{d}\sigma.$$

Com que per a tot punt $\sigma \in \mathbb{S}^{n-1}$, la normal exterior és $\nu = \sigma$:

$$\fint_{\mathbb{S}^{n-1}} \nabla u(x_0 + r\sigma) \cdot \sigma\,\mathrm{d}\sigma = \fint_{\partial B_r(x_0)} \frac{\partial u}{\partial \nu}(y)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{|\partial B_r(x_0)|} \int_{B_r(x_0)} \Delta u = 0,$$

on a la penúltima integral hem usat la identitat de Green amb $v = 1$. Per tant,

$$\fint_{\partial B_r(x_0)} u \text{ constant en } r \implies \fint_{\partial B_r(x_0)} u = \lim_{r \downarrow 0} \fint_{\partial B_r(x_0)} u = u(x_0).$$

Pel que fa a la integral sòlida, usarem el "Fubini esfèric" demostrat al problema 5 de la llista 4 de problemes:

$$\int_\Omega u = \int_0^{+\infty} \mathrm{d}\rho \int_{\partial B_\rho \cap \Omega} \mathrm{d}\sigma\, u.$$

En el nostre cas, usant Fubini esfèric i el resultat anterior:

$$\fint_{B_r} u = \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r} u = \frac{1}{|B_r|} \int_0^r \mathrm{d}\rho \int_{\partial B_\rho} u = \frac{1}{|B_r|} \int_0^r \mathrm{d}\rho |\partial B_\rho| u(x_0).$$

Com que

$$|B_r| = \int_{B_r} 1 = \int_0^r \mathrm{d}\rho \int_{\partial B_\rho} 1 = \int_0^r \mathrm{d}\rho |\partial B_\rho|,$$

obtenim:

$$\fint_{B_r} u = \frac{1}{|B_r|} \int_0^r \mathrm{d}\rho |\partial B_\rho| u(x_0) = u(x_0).$$

□

Observació 6.4.2. El recíproc també és cert però no ho demostrarem en aquest curs, en el sentit que si una funció $u \in \mathscr{C}^0(\Omega)$ satisfà la propietat de la mitjana, aleshores $u \in \mathscr{C}^2(\Omega)$ i $-\Delta u = 0$.

Proposició 6.4.3. *Principi del màxim i del mínim.* Sigui $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un obert fitat, i sigui $u \in \mathscr{C}^2(\Omega) \cap \mathscr{C}^0(\overline{\Omega})$. Aleshores,

i) Si $-\Delta u \leq 0$ a Ω, llavors la funció u assoleix el seu màxim a $\overline{\Omega}$ en algun punt de $\partial\Omega$.

ii) Si $-\Delta u \geq 0$ a Ω, llavors la funció u assoleix el seu mínim a $\overline{\Omega}$ en algun punt de $\partial\Omega$.

iii) Si u és harmònica, aleshores satisfà el principi del màxim i del mínim.

Demostració. Només cal demostrar *i*), la resta se segueixen immediatament. En primer lloc, suposem que $-\Delta u(x) < 0$ per a tot $x \in \Omega$ (després ens reduïrem a aquest cas). Sigui $x_0 \in \Omega$ un punt de màxim interior. Llavors, $\Delta u(x_0) \leq 0$, entrant en contradicció. Per tant, u ha d'assolir el seu màxim a la vora.

En conseqüència, només ens cal reduir-nos al cas $-\Delta u(x) < 0$. Suposem $-\Delta u(x) \leq 0$ i, per a cert $\varepsilon > 0$, considerem la funció

$$u_\varepsilon(x) = u(x) + \varepsilon x_1^2 \implies \Delta u_\varepsilon = \Delta u + 2\varepsilon > 0.$$

En aquest cas, per a tot $x \in \overline{\Omega}$ se satisfà:

$$u(x) \leq u_\varepsilon(x) \leq \max_{\overline{\Omega}} u_\varepsilon = \max_{\partial\Omega} u_\varepsilon.$$

Com que Ω és fitat, existeix una constant C tal que $x_1^2 \leq C$ a Ω. Per tant,

$$\max_{\partial\Omega} u_\varepsilon \leq \max_{\partial\Omega} u + \varepsilon C.$$

Per tant, fent $\varepsilon \to 0$, obtenim:

$$u(x) \leq \max_{\partial\Omega} u \implies \max_{\overline{\Omega}} u \leq \max_{\partial\Omega} u.$$

L'altra desigualtat és immediata. □

Notem que la hipòtesi de Ω fitat és necessari: $u(x,y) = e^x \sin y$ és harmònica. Si $\Omega = \mathbb{R} \times (0,\pi)$, aleshores u és nul·la a la vora però $u \neq 0$.

Corol·lari 6.4.4. Sigui $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ obert fitat. El problema de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x) & x \in \Omega \\ u = g(x) & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

si té solució $u \in \mathscr{C}^2(\Omega) \cap \mathscr{C}^0(\overline{\Omega})$, llavors aquesta és única.

Demostració. Si u_1 i u_2 són solucions, aleshores $v = u_1 - u_2$ resol el problema completament homogeni. Com que $\Delta v = 0$, aleshores v assoleix el màxim i el mínim a la vora. Però a la vora aquesta funció és idènticament nul·la, així que el màxim i el mínim han de ser zero, concloent que $v \equiv 0$. □

Per a l'equació de difusió també és certa una versió del principi del màxim, que estudiem tot seguit. Considerem l'equació de difusió en un obert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, i considerem el cilindre $Q_T = \Omega \times (0,T)$.

Definició 6.4.5. Donada $u \in \mathscr{C}^2(Q_T)$, direm que u és subcalòrica si $u_t - \Delta u \leq 0$ a Q_T.

Definició 6.4.6. La frontera parabòlica de Q_T és

$$\partial_P Q_T = (\overline{\Omega} \times \{0\}) \cup (\partial\Omega \times [0,T]).$$

És a dir, la frontera parabòlica consta de la tapa inferior i la frontera lateral, però no la tapa de dalt (que correspondria a $t = T$).

Proposició 6.4.7. *Principi del màxim per l'equació de difusió.* Sigui Ω un obert fitat de $\mathbb{R}^n$, i sigui $T > 0$. Considerem $u \in \mathscr{C}^2(Q_T) \cap \mathscr{C}^0(\overline{Q_T})$, i $u_t - \Delta u \leq 0$ a Q_T. Llavors, u assoleix el màxim a la seva frontera parabòlica $\partial_P Q_T$.

Demostració. Procedim com en el cas del laplacià. En primer lloc, suposem que $u_t - \Delta u < 0$ a Q_T. Per contradicció suposem que el màxim s'assoleix a $\overline{Q_T} \setminus \partial_P Q_T$. Per tant, hi ha dues opcions:

i) El màxim s'assoleix a l'interior Q_T. En aquest cas, si $(x_0, t_0) \in Q_T$ és un punt de màxim:

$$\left.\begin{array}{l} u_t(x_0,t_0)=0 \\ \Delta u(x_0,t_0)\le 0 \end{array}\right\} \implies (u_t-\Delta u)(x_0,t_0)\ge 0,$$

arribant a contradicció.

ii) El màxim s'assoleix a $\Omega \times \{T\}$. En aquest cas,

- $u(x_0,\cdot)\colon [0,T]\to\mathbb{R}$ té un màxim a T, de manera que $u_t(x_0,T)\ge 0$.
- $u(\cdot,T)\colon \Omega\to\mathbb{R}$ té un màxim a $x_0\in\Omega$, de manera que $\Delta u(x_0,T)\le 0$.

Combinant-ho, obtenim que $(u_t-\Delta u)(x_0,T)\ge 0$, arribant a contradicció.

Per tant, és suficient reduir-nos al cas anterior, i això ho podem considerant la funció:

$$u_\varepsilon = u+\varepsilon x_1^2.$$

Els detalls són iguals que a la demostració anterior. □

De fet, una conseqüència immediata del principi del màxim anterior és l'equació de la calor amb condicions de Dirichlet:

$$\begin{cases} u_t-\Delta u = f(x,t) & (x,t)\in Q_T \\ u(x,t)=d(x,t) & (x,t)\in\partial\Omega\times[0,T] \\ u(x,0)=g(x) & \Omega\times\{0\}. \end{cases}$$

El problema té unicitat. Si hi ha dues solucions u, v, prenem $w=u-v$ que soluciona el problema homogeni. Pel principi del màxim i del mínim, aquests s'assoleixen a la frontera parabòlica, on $w=0$. Per tant $w=0$. Si $f\le 0$, aleshores el màxim de u serà el màxim entre els màxims de g i el de d. Si $f\ge 0$, aleshores el mínim de u serà el mínim entre els mínims de g i el de d.

El principi del màxim també és cert per a altres equacions. Per exemple, quan $n=2$,

$$Lu = u_{x_1x_1}+3u_{x_2x_2}-5u_{x_2}.$$

Si se satisfà $Lu\le 0$ a Ω, aleshores el màxim se satisfà a la vora pel Principi del màxim. La comprovació d'aquest fet és anàloga a les anteriors i es deixa com a exercici. Una versió més general del principi del màxim la podem obtenir considerant:

$$Lu = \operatorname{tr}\Big(A(x)D^2u(x)\Big)+b(x)\cdot\nabla u(x),$$

amb $A(x)$ una matriu simètrica definida positiva per a tot $x\in\Omega$ i així l'operador serà de tipus el·líptic.

Lema 6.4.8. Si $-B=-D^2u(x_0)$ i $A=A(x_0)$ són matrius simètriques definides positives o nul·les, aleshores $\operatorname{tr}(-BA)\ge 0$.

A partir d'aquest lema d'àlgebra lineal, es pot fer la demostració del principi del màxim igual que abans.

6.5 El principi de comparació

Considerem el problema de Dirichlet:

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x) & x \in \Omega \\ u = g(x) & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

Definició 6.5.1. Direm que v és una subsolució del problema si $v \in \mathscr{C}^2(\Omega) \cap \mathscr{C}^0(\overline{\Omega})$ i

$$\begin{cases} -\Delta v \leq f(x) & x \in \Omega \\ v \leq g(x) & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Definició 6.5.2. Direm que w és una supersolució del problema si $w \in \mathscr{C}^2(\Omega) \cap \mathscr{C}^0(\overline{\Omega})$ i

$$\begin{cases} -\Delta w \geq f(x) & x \in \Omega \\ w \geq g(x) & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Proposició 6.5.3. *Principi de comparació.* Considerem el problema de Dirichlet a un obert fitat $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Si v i w són subsolució i supersolució respectivament, llavors $v \leq w$ a $\overline{\Omega}$. Si, a més, u és solució, llavors $v \leq u \leq w$.

Demostració. És conseqüència del principi del màxim. Considerem $\varphi = v - w$, subsolució del problema completament homogeni. En particular és subharmònica. Llavors,

$$\varphi(x) \leq \max_{\partial\Omega} \varphi \leq 0.$$

Si u és solució, en particular és supersolució i subsolució. Per tant $v \leq u \leq w$. □

El principi de comparació és una de les eines més potents en la teoria de EDPs (per aquelles equacions que el satisfan, que són les equacions el·líptiques i parabòliques; en efecte, es poden trobar exemples de solucions de l'equació d'ones que no satisfan el principi del màxim o de comparació).

És una eina molt útil doncs: trobar solucions exactes (o demostrar la seva existència) és, en general, difícil. En canvi, trobar subsolucions i supersolucions (inclús explícites) és més fàcil, ja que només cal provar una desigualtat. El principi de comparació, llavors, ens dirà que la solució (desconeguda) ha d'estar entre la subsolució i la supersolució. Així podem "controlar" i afitar la solució.

A continuació veiem dos exemples d'això. Considerem en primer lloc el problema

$$\begin{cases} -\Delta u = 1 & \text{a } \Omega \\ u = 0 & \text{a } \partial\Omega, \end{cases}$$

sent $\Omega \in \mathbb{R}^n$ un obert fitat. Aquest problema és important i té una interpretació probabilística (és un problema de la llista). A u se l'anomena temps de sortida (exit time). Donat un punt x, el valor de u representa el temps esperat per a què un moviment brownià, que comença en el punt x, impacti en la vora. Pel principi del màxim, $u \geq 0$ a Ω. Ara voldríem trobar una fita superior per a u, i ho farem trobant una supersolució del problema. Suposem que $\Omega \subset B_R$ per a alguna R. Resolem:

$$\begin{cases} -\Delta v = 1 & \text{a } B_R \\ v = 0 & \text{a } \partial B_R, \end{cases}$$

Per inspecció, podem suposar que v tindrà simetria radial ja que si rotem la bola, tindríem unes altres solucions però com que hi ha unicitat de solucions, v és invariant per rotacions. Per tant, v només depèn de la distància al centre de la bola. Considerant el laplacià en polars, només cal integrar:

$$-r^{1-n}(r^{n-1}v_r)_r = 1.$$

Es pot comprovar que la solució obtinguda així és:

$$v(x) = \frac{1}{2n}(R^2 - |x|^2).$$

Com que $v \geq 0$ a $\overline{B_R}$, obtenim que v és supersolució del problema a Ω. Per tant,

$$0 \leq u(x) \leq v = \frac{R^2 - |x|^2}{2n} \leq \frac{R^2}{2n}.$$

Una altra aplicació del principi de comparació la veiem en la següent equació de difusió:

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{a } \Omega \times (0, +\infty) \\ u = 0 & \text{a } \partial\Omega \times (0, +\infty) \\ u(x,0) = g(x) & \text{a } \overline{\Omega}. \end{cases}$$

Proposició 6.5.4. En aquest problema, existeix una constant C depenent de Ω tal que, si $g \in \mathscr{C}^0(\overline{\Omega})$, llavors:

$$u(x,t) \leq \frac{C}{t^{n/2}}||g||_{L^\infty}.$$

Per exemple, $C = e^{\frac{R^2}{4}}$ per R suficientment gran.

Demostració. Ja vam veure que una solució de l'equació de difusió era:

$$v(x,t) = \Gamma(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{\frac{-|x|^2}{4t}}.$$

Com que no està definida per $t = 0$, la podem desplaçar temporalment per a que ho estigui. També podem reescalar-la per una certa constant, obtenint:

$$\tilde{v}(x,t) = \frac{C_0||g||_{L^\infty}}{(4\pi(t+1))^{n/2}} e^{\frac{-|x|^2}{4(t+1)}}.$$

Volem escollir C_0 per tal que la funció compleixi:

$$\begin{cases} \tilde{v}_t - \Delta\tilde{v} = 0 & \text{a } \Omega \times [0, +\infty) \\ \tilde{v} \geq 0 & \text{a } \partial\Omega \times [0, +\infty) \\ \tilde{v} \geq g & \text{a } \Omega \times \{0\} \\ \tilde{v} \in \mathscr{C}^0(\overline{\Omega} \times [0, +\infty)). \end{cases}$$

Per a $t = 0$, se satisfà:

$$\tilde{v}(x,0) = \frac{C_0||g||_{L^\infty}}{(4\pi)^{n/2}} e^{\frac{-|x|^2}{4}} \geq \frac{C_0}{(4\pi)^{n/2}} e^{\frac{-R^2}{4}} ||g||_{L^\infty}.$$

Si prenem $C_0 = (4\pi)^{n/2} e^{R^2/4}$, aleshores:

$$\tilde{v}(x,0) \geq ||g||_{L^\infty} \geq g(x).$$

Pel principi de comparació, sabem que $u(x,t) \leq \tilde{v}(x,t)$, i per tant:

$$u(x,t) \leq \frac{e^{\frac{R^2}{4}}}{(t+1)^{n/2}} e^{\frac{-|x|^2}{4(t+1)}} ||g||_{L^\infty} \leq \frac{e^{\frac{R^2}{4}}}{t^{n/2}} ||g||_{L^\infty}.$$

$\square$

Índex alfabètic