1. Calculeu $f(0)$ usant la fórmula d'interpolació de Newton per a la taula

x_k	0.1	0.2	0.4	0.8
f_k	64987	62055	56074	43609

2. Interpoleu $f(x) = \sin(x)$ en els punts $0, \pi/6, \pi/4, \pi/3, \pi/2$. Fiteu l'error a $[0, \pi/2]$.

3. (a) Calculeu $f(3)$ per interpolació quadràtica de la taula

x_k	1	2	4	5
f_k	0	2	12	21

   (a.1) utilitzant els valors $x = 1, 2, 4$.

   (a.2) utilitzant els valors $x = 2, 4, 5$.

   (b) Calculeu $f(3)$ per interpolació cúbica.

4. Donada la següent taula de la funció $f(x) = \mathrm{e}^x$:

x_k	0.0	0.2	0.4	0.6
f_k	1.0000	1.2214	1.4918	1.8221

   (a) Trobeu valors aproximats de $\sqrt[3]{\mathrm{e}}$ per interpolació lineal i cúbica, emprant els mètodes de Lagrange i Newton.

   (b) Doneu les fites respectives dels errors deguts a la interpolació. Compareu les fites trobades amb l'error exacte, sabent que $\sqrt[3]{\mathrm{e}} = 1.395612425\ldots$

5. Doneu l'expressió del polinomi interpolador de Lagrange en cas d'utilitzar abscisses equidistants: $x_k = x_0 + kh$, per a $k = 0, 1, 2, \ldots, n$.

6. Donada la següent taula,

x_k	0.00	0.25	0.50	0.75
f_k	0.20000	0.25680	0.32974	0.42340

   trobeu $x \in (0, 0.75)$ que satisfaci $x = f(x)$ interpolant de la següent forma:

   (a) Construïu la taula per a $g(x) = x - f(x)$.

   (b) Escriviu la taula inversa.

   (c) Busqueu el polinomi interpolador per a aquesta última taula de valors.

   (d) Calculeu la solució x demanada usant l'apartat anterior. Justifiqueu la resposta.

7. L'equació $x^3 - 15x + 4 = 0$ té una arrel pròxima a 0.3. Obteniu aquesta arrel amb 3 xifres decimals usant interpolació inversa.

8. Utilitzeu la interpolació inversa per a trobar una aproximació a la solució de l'equació $x - \mathrm{e}^{-x} = 0$ a partir de la taula

x_k	0.3	0.4	0.5	0.6
e^{-x_k}	0.7408	0.6703	0.6065	0.5488

9. Calculeu el polinomi interpolador d'Hermite per a la funció $g(x)$ de la qual sabem que $g(0) = 0$, $g'(0) = 1$, $g(1) = 3$, $g'(1) = 6$.

10. Disposem de les dades següents d'una funció f:

x_k	0.4	0.5
$f(x_k)$	1.554284	1.561136
$f'(x_k)$	0.243031	−0.089618

   (a) Trobeu l'abscissa del màxim de f a $[0.4, 0.5]$, aproximant-la per l'abscissa del màxim del polinomi interpolador d'Hermite $p_3(x)$ a la taula de f i f' donada.

   (b) Suposant que $f \in \mathcal{C}^4([x_0, x_1])$, trobeu la següent expressió per a la derivada e_3' de l'error en la interpolació d'Hermite en dos punts $x_0 < x_1$:

$$e_3' := f'(x) - p_3'(x) = \frac{f^{(4)}(\eta(x))}{3!}(x - x_0)(x - x_1)(x - \xi),$$

   on $\xi \in (x_0, x_1)$ i $\eta(x) \in \langle x_0, x_1, x_2 \rangle$.

(c) Sabent que $\left|f^{(4)}(x)\right| < 10^3$ i $\left|f^{(2)}(x)\right| > 1$, $\forall\, x \in (0.4, 0.5)$, fiteu l'error en l'abscissa del màxim degut a la interpolació.

11. Calculeu $\tan 22.5°$ fent servir interpolació d'Hermite en $0°$ i $45°$. Fiteu l'error comès i compareu la fita trobada amb el valor exacte.

12. Siguin $x_k = x_0 + kh$, $k = 0, 1, \ldots, m$ punts equidistants donats.
    (a) Determineu un *spline cúbic* $B_i(x)$ que compleixi:
        (i) $B_i(x)$ és un polinomi de grau 3 en cada subinterval $[x_k, x_{k+1}]$,
        (ii) $B_i(x_j) = \begin{cases} 0, & \text{si } j < i-1 \text{ ó } j > i+1, \\ 1, & \text{si } j = i, \end{cases}$
        (iii) $B_i'(x) = B_i''(x) = 0$ per a $x = x_{i-2}, x_{i+2}$.
    (b) Demostreu que $B_i(x) = 0$ quan $|x - x_i| \geq 2h$ i $B_i(x) > 0$ quan $|x - x_i| < 2h$ (i.e., el support de B_i és $[x_{i-2}, x_{i+2}]$).
    (c) Les funcions $B_i(x)$ s'anomenen *B-splines*. Veieu que tot spline cúbic amb nodes sobre la xarxa $\{x_k\}_{k=0,1,\ldots,m}$ té una única representació de la forma $s(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i B_i(x)$ (i.e., els B-splines són una base dels splines cúbics).

13. Suposeu que $a < b$. Demostreu que l'únic $p \in \mathcal{P}_3[x]$ (polinomi de grau 3) que satisfà

$$p(a) = A, \quad p'(a) = A', \quad p(b) = B, \quad p'(b) = B',$$

és

$$\begin{aligned} p(x) = {} & A\left[\frac{(x-b)^2}{(a-b)^2} - \frac{2(x-a)(x-b)^2}{(a-b)^3}\right] + B\left[\frac{(x-a)^2}{(b-a)^2} - \frac{2(x-b)(x-a)^2}{(b-a)^3}\right] \\ & + A'\frac{(x-a)(x-b)^2}{(a-b)^2} + B'\frac{(x-b)(x-a)^2}{(b-a)^2}. \end{aligned}$$

14. Donats els punts $x_0, x_1, \ldots, x_n$ volem interpolar-los per un spline cúbic que compleixi

$$\begin{aligned} p(x_j) &= f_j, \quad j = 0, \ldots, n, \\ p'(x_0) &= s_0', \quad p'(x_n) = s_n'. \quad \text{(Derivada primera fixada als extrems).} \end{aligned}$$

Denotant $\Delta x_j = x_{j+1} - x_j$, $\Delta f_j = f_{j+1} - f_j$, demostreu que els valors que ha de prendre la primera derivada del spline a cada node $p'(x_i) = s_i'$ ($i = 1 \div n-1$) vénen donats pel sistema tridiagonal $(n-1) \times (n-1)$ següent

$$\Delta x_i s_{i-1}' + 2(\Delta x_i + \Delta x_{i-1}) s_i' + \Delta x_{i-1} s_{i+1}' = 3\left[\frac{\Delta x_i}{\Delta x_{i-1}} \Delta f_{i-1} + \frac{\Delta x_{i-1}}{\Delta x_i} \Delta f_i\right].$$

(Indicació: utilitzeu el resultat del problema 13 i imposeu que en els punts interiors les segones derivades empalmin bé).