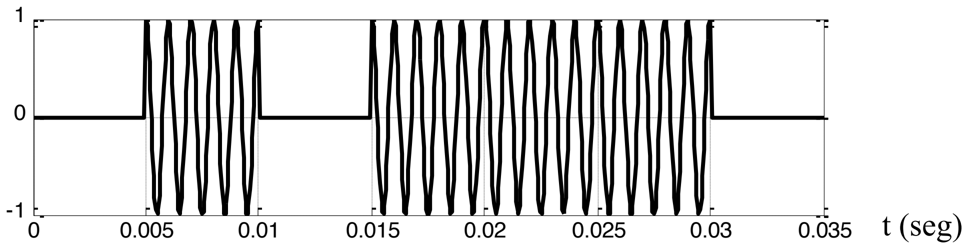
Sisco Vallverdú, Toni Gasull

No es permet l'ús de cap tipus de material auxiliar. Duració: **3h**

Problema 1

Per un sistema de comunicacions es volen transmetre simultàniament el senyal de Morse, $x_1(t)$, que parcialment es mostra en la figura, i un altre senyal de Morse, $x_2(t)$, amb missatges diferents. Pels dos senyals la unitat bàsica de temps (duració del punt) és la mateixa.

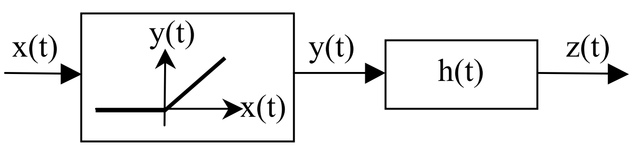


El senyal generat es pot expressar com $x_1(t)=s_1(t)\cdot p_1(t)$, on $s_1(t)=\cos(2\pi f_1 t)$ i $p_1(t)$ conté la informació del missatge.
Es demana:

a) Expressi $p_1(t)$ pel senyal de la figura.
b) Quin és el període i la freqüència de $s_1(t)$?
c) Faci un dibuix aproximat de l'espectre (mòdul de la transformada de Fourier) del senyal Morse $x_1(t)$ de la figura. Justifiqui detalladament la resposta, especificant els valors significatius.
d) Proposi justificadament un valor de la freqüència f_2 que escolliria per l'altre senyal de Morse. Quin és l'ample de banda de la suma de $x_1(t)$ i $x_2(t)$.
e) Proposi raonadament un esquema pel receptor que li ha de permetre obtenir separadament els dos senyals transmesos, $x_1(t)$ i $x_2(t)$.

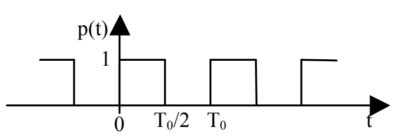
Problema 2

L'esquema de la figura representa un receptor d'AM (modulació d'amplitud) que permet recuperar el senyal d'informació, g(t), utilitzant un rectificador de mitja ona i un filtre h(t) passabaixes.



Es considera el senyal modulat $x(t)= g(t)\cdot\sin(2\pi f_0 t)$ on $g(t)$ és un senyal positiu: $g(t)\geq 0$, i limitat en banda: $G(f) = 0,\ |f| > B$.

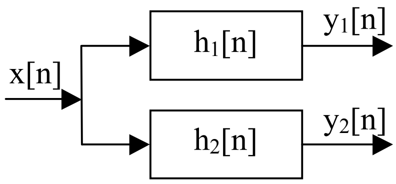
Es demana:



a) Calculi i dibuixi la transformada de Fourier del senyal p(t) de la figura.
b) Comprovi la validesa de l'esquema receptor indicant-ne la relació necessària entre B i f_0. Especifiqui com ha de ser el filtre h(t) (guany i freqüència de tall) per tal de recuperar a la sortida $z(t)=g(t)$.
c) Com s'hauria de modificar el filtre per obtenir a la sortida el senyal g(t) modulat a la freqüència $f_1=4f_0$. Doni l'expressió analítica de la sortida.

Problema 3

Donat l'esquema de la figura, es demana:



a) Considerant el sistema global: entrada x[n] i sortida $y[n]=y_1[n]+y_2[n]$, obtingui la resposta freqüencial d'aquest sistema global.
b) Com han de ser $h_1[n]$ i $h_2[n]$ per tal de que la resposta freqüencial global sigui imaginaria i imparell? Justifiqui la resposta.

A partir d'aquí suposi que $h_1[n]=[1/2,1/2]$ i que $h_2[n]= [1/2,-1/2]$.

c) Obtingui la relació entre la seqüència de sortida y_1 i la seqüència d'entrada x. Ídem amb $y_2[n]$.
d) Obtingui $H_1(z)$. Representi el seu diagrama de pols i zeros.
e) Obtingui i <u>dibuixi</u> les respostes freqüencials (mòdul i fase) dels dos subsistemes i del sistema global.
f) Si disposa de $y_1[n]$ i de $y_2[n]$, és possible recuperar x[n]? I si només disposa de la meitat de punts; per exemple, disposant només de $y_1[n]$ i de $y_2[n]$ per n imparell?
g) Obtingui la DFT inversa de la resposta freqüencial del subsistema 1 mostrejada amb 32 mostres.
h) Suposi un senyal x(t) amb un alt contingut de baixa freqüència, és a dir, gairebé tota la seva potència queda concentrada en un marge de freqüències de 0 fins a 4kHz. Es presenta emmascarat per soroll blanc (igual potència de soroll per qualsevol freqüència). Proposi un sistema complet, que inclogui el sistema de la figura, i que permeti obtenir una reducció important del soroll que emmascara x(t).

Sisco Vallverdú, Toni Gasull

No es permet l'ús de cap tipus de material auxiliar. Duració: **3h**

Exercici 1.

S'analitzarà en aquest exercici un possible sistema que ajudi a la detecció dels símbols transmesos a través d'un senyal FSK. En la figura 1 es mostra l'esquema corresponent, on x(t) és el senyal FSK compost seqüencialment de sinusoides de freqüències f_1 i f_2 segons es transmeti el bit 0 o el bit 1, respectivament. Com que el comportament dels dos sistemes de l'esquema és el similar se'n analitzarà només un. Per exemple el *Sistema 1*, que ve caracteritzat per la seva resposta impulsional:

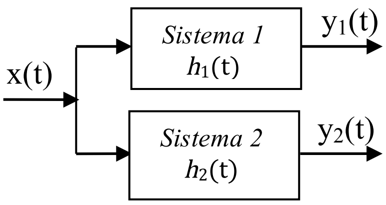


Figura 1

$$h_1(\mathrm{t}) = \begin{cases} cos(2\pi f_1 t) & \text{per } t \in [-T_b/2, T_b/2] \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$$

on T_b és la duració d'un símbol (bit), que és el invers de la velocitat de transmissió r_b bps. Es demana:

a) Analitzi les propietats del *Sistema 1*.

b) El comportament d'aquest *Sistema 1* és equivalent al de l'esquema de la figura 2? Justifiqui la resposta.

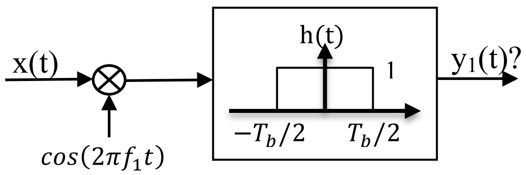


Figura 2

c) Suposant que el missatge transmès és ...01010101..., com es va veure en el segon control, el senyal x(t) es pot escriure com:

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

on $x_1(t) = p(t)\,cos(2\pi f_1 t)$, i $x_2(t) = p(t - T_b)\,cos(2\pi f_2 t)$, essent $p(t)$ un tren de polsos rectangulars. Obtingui X(f) i dibuixi el seu mòdul.

d) Calculi i dibuixi el senyal de sortida del *Sistema 1* quan l'entrada és $x_1(t)$.

e) Obtingui la sortida del *Sistema 1* a la component $x_2(t)$ del senyal de l'apartat c) pel cas $f_2 = f_1 + 1.5 r_b$.

Exercici 2.

a) A partir del teorema de la convolució (o de la propietat del producte) demostri que la transformada de Fourier conserva el producte escalar de dos senyals . A partir d'aquest resultat, demostri el teorema de Parceval. Nota: es recorda que el producte escalar entre $x(t)$ i $y(t)$ és $\int_{-\infty}^{\infty} x(t) y^*(t)\, dt$.

c) Expliqui tot el que coneix sobre la interpolació ZOH (zero-order hold), en el context de conversió D/A.

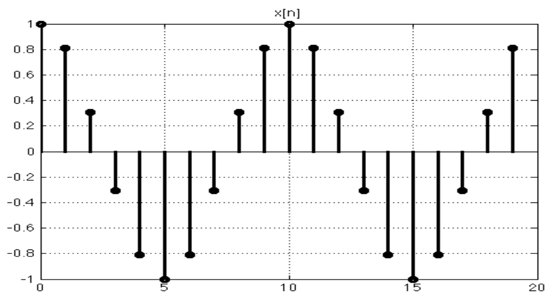
b) Calculi l'energia i la potència de les seqüències $p_L[n]$ i $u[n]$.

d) Compari les característiques del filtratge FIR i del filtratge IIR en els dominis z, F i n.

e) Quina és la relació entre X(z) i X(F)? Justifiqui la resposta. Indiqui-ho també de forma gràfica en el pla z. Posi un exemple.

Exercici 3.

Donada la seqüència sinusoïdal x[n] de la figura (s'ha fet servir stem(n,x) en Matlab), es demana:



a) Què s'obtindria si es fa, amb Matlab, el conjunt d'instruccions:

```
» X=fft(x,100);
» figure; plot(abs(X))
```

Indiqui clarament la posició i valor del màxim i d'altres valors característics.

b) Dibuixi el senyal, xi[n], que s'obtindria si a continuació de les instruccions anteriors es fes `xi=ifft(X,100);`

c) Si x[n] s'hagués obtingut per mostratge d'un senyal x(t), amb una freqüència de mostratge $f_m = 8000\ Hz$, a quina freqüència es troba el màxim absolut de $X(f) = \mathcal{F}\{x(t)\}$?

d) Seguint amb la hipòtesi de l'apartat anterior, afegeixi les instruccions de Matlab a les de l'apartat a) per fer una representació que li doni directament la informació de $|X(f)|$? Perquè aquesta informació no es correspon <u>exactament</u> amb mostres de $|X(f)|$?

e) Alguna de les següents afirmacions és certa (justifiqui la resposta)?

   e.1) "Si es fa `ifft(X.^2,100);` no s'obté la convolució de x[n] amb ella mateixa sinó la seva convolució circular".

   e.2) "Si es fa `ifft(X.^2,100);` no s'obté la convolució de x[n] amb ella mateixa ja que en elevar al quadrat la X és perd la fase".

Duració: **3h** No es permet l'ús de cap tipus de material auxiliar

Entregui cada exercici per separat. No es pot sortir de l'aula durant la primera hora de la prova

Les notes provisionals es publicaran el 27-I, les definitives el 31-I. Les al·legacions es podran fer fins el 30-I a les 14:00h

Sisco Vallverdú, Antoni Gasull, Albino Nogueiras, Josep Salavedra

Exercici 1.

Respongui breument però **<u>justificadament</u>** cadascuna de les següents preguntes:

a) Un senyal d'àudio de fins a 12 kHz, extret d'una gravació digital efectuada a una freqüència de mostratge de 48 kHz, queda contaminada per un soroll que afecta per igual a tota la banda freqüencial (soroll blanc). Dibuixi les especificacions d'un filtre digital $H(F)$, en la banda $0 \le F < 1$, que permeti disminuir l'efecte del soroll. Consideri els dB d'atenuació i el límit de la banda atenuada que li semblin raonables.

b) A partir del dibuix el senyal $x(t) = \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}\left(t - \frac{T_0}{2}\right)\right)\right) \cdot \Pi\left(\frac{t - T_0/2}{T_0}\right)$ trobi l'instant de temps en que $x(t) * x(t)$ és màxim.

c) Analitzi les propietats de linealitat i invariància del sistema $y(t) = x(-2t)$

d) Es vol obtenir, amb Matlab i mitjançant DFT, una bona aproximació a la convolució de $x(t) = \Pi\left(\frac{t-5}{10}\right)$ amb $y(t) = e^{-t}u(t)$. Discuteixi i proposi els valors que faria servir per les variables *fm*, *T*, *N* i *A* en el següent programa Matlab:

```
fm=???;
Tm=1/fm;
T=???;
t=0:Tm:T;
x=1.0*(t>=0 & t<=10);
y=exp(-t).*(t>=0);
N=???;
X=fft(x,N);
Y=fft(y,N);
Z=X.*Y;
A=???;
z=A*ifft(Z,N);
```

e) Representi el mòdul de la transformada de Fourier de $p_8[n] = \begin{cases} 1, & \text{per } 0 \le n<8 \\ 0, & \text{per altres n} \end{cases}$; i obtingui la seva DFT per N=8.

f) Sigui un senyal $x_m(t)$ obtingut per mostratge ideal d'un senyal *x(t)* de banda limitada a B Hz. Obtingui $X_m(f)$ en funció de *X(f)*.

Exercici 2.

El senyal periòdic $x(t)$ de la figura 2.2, format per una seqüencia infinita "*ratlla-silenci*" codificat en Morse a partir d'una sinusoide de freqüència $f_1 = 1000$ Hz, amb $T_p = 2/f_1$ el temps de durada d'un "*punt*" (igual a la durada d'un "silenci curt"), s'ha obtingut amb el sistema 2 de figura 2.1.

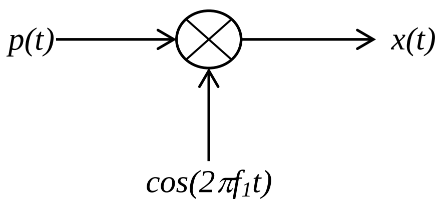


Fig 2.1. Sistema 2

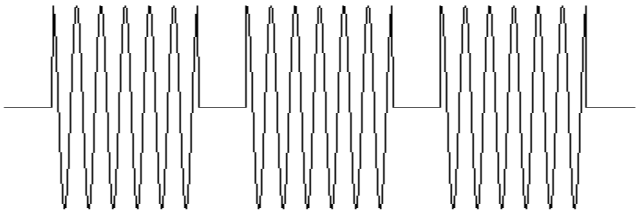


Fig 2.2. Senyal x(t)

a) Dibuixi $p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Pi\left(\frac{t - n \cdot T}{3T_p}\right)$, especificant el valor de la freqüència fonamental de *x(t)* i trobi el desenvolupament en sèrie de Fourier de *p(t)*, especificant el valor dels coeficients més significatius.

b) Trobi la transformada de Fourier de *x(t)* i representi aproximadament el seu mòdul.

El senyal *x(t)* és contaminat amb una interferència sinusoïdal *y(t)* de freqüència f_2=3500 Hz. Per recuperar *x(t)* es fa servir l'esquema de la figura 2.3, que conté un conversor A/D amb freqüència de mostratge f_m, sense filtre antialiàsing, i un filtre digital passabanda *H(z)*.

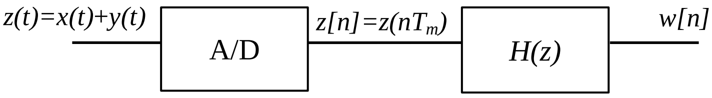


Figura 2.3

c) Quina freqüència de mostratge escolliria pel conversor A/D?

d) Si només es disposa d'un conversor A/D amb f_m=4 kHz, quines especificacions freqüencials faria servir pel filtre *H(z)*?

e) Fent servir un filtre digital d'ordre 2, amb

$$H(z)=\frac{b_0+b_1z^{-1}}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}}=b_0\frac{1-z_1z^{-1}}{(1-p_1z^{-1})(1-p_2z^{-1})} \qquad \text{essent } p_1=p_2^*=j\sqrt{0.5} \text{ i } z_1=0$$

e.1) Representi el diagrama de pols i zeros i trobi a quina freqüència el mòdul del filtre és màxim.

e.2) Quin ha de ser el valor de b_o per que el valor màxim del mòdul al quadrat valgui 1?

e.3) Quina atenuació tindrà la sinusoide interferent? (Deixi els càlculs indicats).

f) Expressi la sortida del filtre *w[n]* en funció seva entrada *z[n]* i els coeficients de numerador i denominador de *H(z)*.

Exercici 3.

Analitzant la resposta a l'esglaó es pot tenir una idea aproximada de diferents característiques d'un sistema lineal i invariant (s.l.i.). En aquest exercici s'il·lustrarà aquesta afirmació amb tres exemples. En la figura 1 es mostra la sortida de tres s.l.i. amb resposta impulsional real quan l'entrada és *u(t)*.

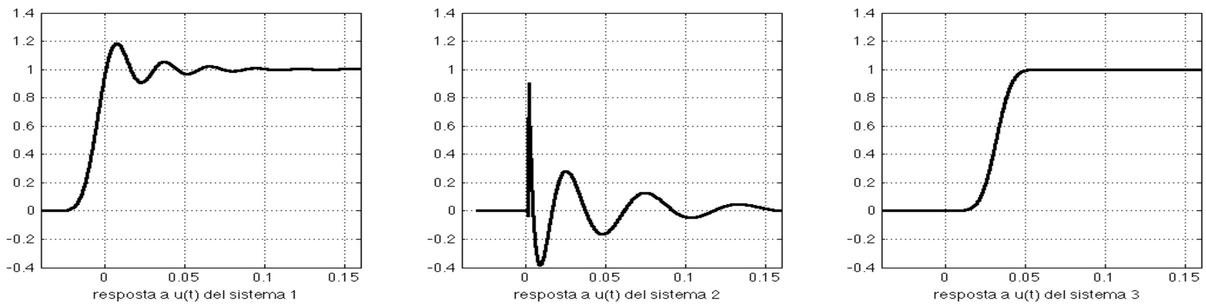


Figura 1

a) Pot deduir-ne les propietats de causalitat i estabilitat? En cas afirmatiu, analitzi-les per cada sistema.

b) Demostri que la resposta d'un s.l.i. a $u(t)$ per $t=\infty$ és igual a $H(0)$, on $H(f)$ és la resposta freqüencial del sistema.

c) Quin/quins dels tres sistemes creu que és un filtre passabaixes? Quin/quins dels tres creu que és passaaltes? Justifiqui les respostes.

d) Per un filtre passabaixes, com creu que influirà l'ample de banda en la resposta a $u(t)$?

L'anàlisi de la resposta a l'esglaó també permet estudiar la linealitat de fase. Per comprovar-ho contesti als següents apartats:

e) Demostri en el domini freqüencial que un senyal *x(t)* imparell a l'entrada d'un s.l.i. de resposta impulsional parell ens donarà un senyal de sortida *y(t)* amb una certa simetria. Quina?

f) Faci la demostració en el domini temporal de la propietat demostrada en l'apartat anterior.

g) Utilitzi la propietat demostrada en els dos apartats anteriors per justificar que el tercer sistema és de fase lineal.

Senyals i Sistemes **ETSETB** **Examen final. 15 de juny de 2012**

Duració: **3h** No es permet l'ús de cap tipus de material auxiliar

Entregui cada exercici per separat. No es pot sortir de l'aula durant la primera hora de la prova

Les notes provisionals es publicaran com a molt tard el 26-VI, i s'obrirà un període d'al·legacions de tres dies, des de la data de publicació.

Antoni Gasull, Albino Nogueiras, Josep Salavedra, Sisco Vallverdú

Exercici 1

Es vol generar un senyal $z(t)$, com es mostra a la figura 1, format per dues components sinusoïdals, a partir del tren de polsos

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \Pi\left(\frac{t-2nT_o}{T_o}\right)$$

Malauradament es presenta també el següent senyal interferent $i(t) = \cos(2\pi f_o t)$, amb $f_o = \frac{1}{T_o}$

Per tal d'eliminar el senyal interferent es filtra el senyal $x(t) + i(t)$ amb un sistema lineal i invariant de resposta impulsional $h(t) = \frac{1}{T_o}\Pi\left(\frac{t}{T_o}\right)$

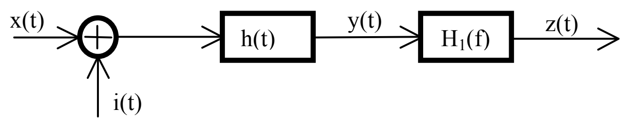


Figura 1

a) Demostri que el sistema $h(t)$ elimina la interferència $i(t)$
b) Calculi i dibuixi el senyal $y(t)$ (sortida del filtre $h(t)$)
c) Obtingui el desenvolupament en sèrie de Fourier de $y(t)$

A partir de $y(t)$ ja s'està en condicions de generar $z(t)$ mitjançant un filtre passa-banda $H_1(f)$

d) Trobi l'expressió (com a funció real) del senyal $z(t)$, fent servir el filtre $H_1(f) = \Pi\left(\frac{4f-4f_o}{3f_o}\right) + \Pi\left(\frac{4f+4f_o}{3f_o}\right)$

Exercici 2

El senyal $x(t)$, amb una amplada de banda de 400Hz, es mostreja a $f_m = 8kHz$ i es modula digitalment a la freqüència F_1, obtenint-se el senyal $y[n]$. A la figura 2.1 es mostra el diagrama de blocs del sistema desmodulador complet.

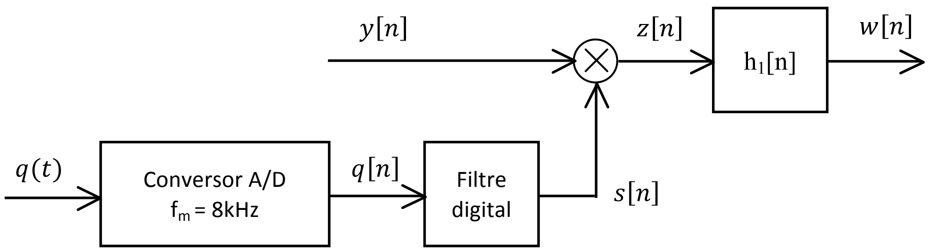


Figura 2.1

La sinusoide digital $s[n]$ que permet fer la desmodulació s'obté filtrant la versió mostrejada, també a $8kHz$, del senyal periòdic $q(t)$. La figura 2.2 mostra el mòdul de la transformada de Fourier del senyal $q(t)$, $|Q(f)|$.

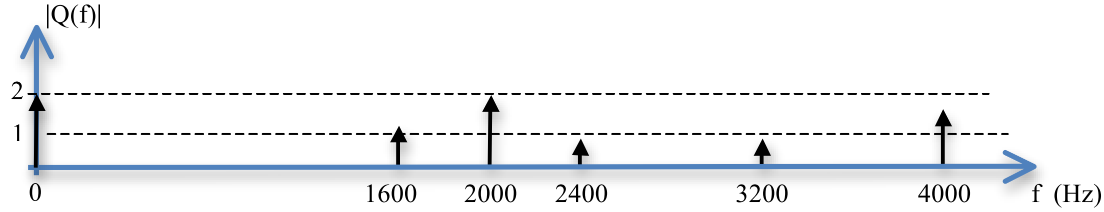


Figura 2.2

El filtre digital està caracteritzat per la següent relació entrada-sortida:

$$s[n] = \sum_{i=1}^{4}\{q[n-i] - q[n+i]\}$$

Es demana:

a) Utilitzaria un filtre antialiàsing per obtenir $q[n]$? Justifiqui la resposta.

b) Analitzi les propietats del filtre digital

c) Calculi la resposta freqüencial, $H(F)$, del filtre digital.

d) A la figura 2.3 es mostra el mòdul de la resposta freqüencial $|H(F)|$ que s'ha aplicat per obtenir el senyal $s[n]$ desitjat. Quina és l'expressió analítica de $s[n]$? (indiqui els paràmetres que conegui).

e) Quines característiques imposaria a $|H_1(F)|$ per tal d'obtenir $w[n] \approx x[n]$?

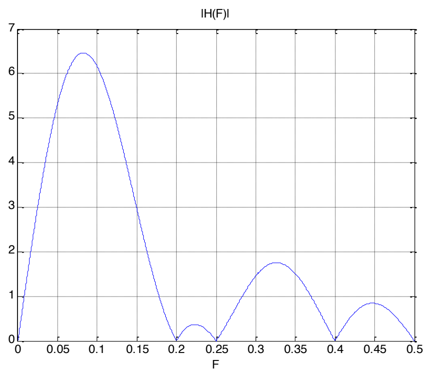


Figura 2.3

Exercici 3

a) Calculi la sortida al sistema caracteritzat per $h(t) = e^{-\frac{t}{2}}u(t)$ si el senyal d'entrada és $x(t) = e^{-\frac{t}{10}}u(t)$

b) La convolució entre els senyals $x(t)\ i\ h(t)$ de l'apartat a) es vol simular amb un sistema digital. Per això es mostregen els senyals $x(t)\ i\ h(t)$ a una freqüència de mostratge $f_m\ (Hz)$, durant un interval temporal de T segons, i es calcula $z[n] = x[n] * h[n]$. Expliqui els criteris que faria servir per escollir els valor de $f_m\ i\ T$. Expliqui també com aproximaria $z(t) = x(t) * h(t)$ a partir de $z[n]$

c) Sabent que $x(t) = e^{-\pi t^2} \overset{TF}{\leftrightarrow} X(f) = e^{-\pi f^2}$, calculi l'àrea de $y(t) = 2e^{-t^2}$

d) Un senyal sinusoïdal $x(t)$ es mostreja a $f_m = 500Hz$ i s'obté una seqüència $x[n]$ de 25 mostres. A la figura 3.c es representa el mòdul de la seva transformada discreta de Fourier $|X[k]|$, calculat amb N=50. Faci una estimació de l'amplitud i freqüència (en Hz) del senyal sinusoïdal.

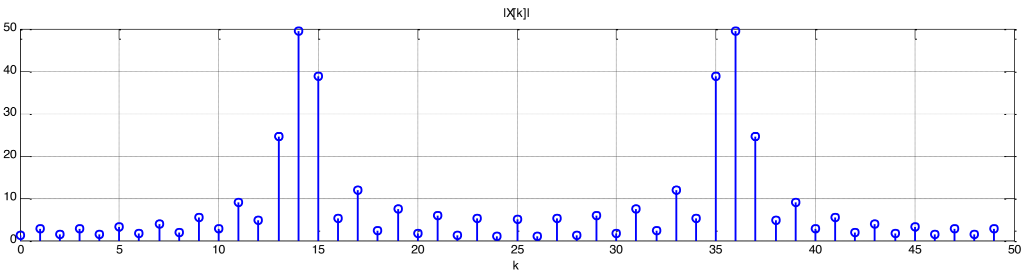


Figura 3.c

e) El senyal $x(t)$, d'ample de banda B_x, es mostreja idealment a la freqüència de Nyquist, obtenint-se el senyal

$$x_m(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_m)\delta(t - nT_m)$$

Per intentar recuperar $x(t)$ es fa servir el filtre interpolador $h(t) = \Pi\left(\frac{t-\frac{T_m}{2}}{T_m}\right)$

1.- Dibuixi el segment de senyal de sortida prenent com a exemple la següent seqüència de mostres de senyal d'entrada: {...,1,0,-1,2,1,...}

2.- Compari la transformada de Fourier del senyal recuperat amb el resultat ideal $X(f)$

3.- Opcional. Repeteixi e.1 i e.2 amb $h(t) = \Lambda\left(\frac{t}{T_m}\right)$. Amb quin dels dos filtres s'obtenen millors resultats? (justifiqui la resposta).

Senyals i Sistemes **ETSETB-UPC** **Examen final 9 de gener de 2013**

Duració: **3h**

- Entregui cada exercici per separat
- No es permet l'ús de cap tipus de material auxiliar
- Les notes provisionals es publicaran abans del 23-I. Un cop publicades es donarà un marge de quatre dies per presentar al·legacions

Antoni Gasull, Asunción Moreno, Josep Salavedra, Elisa Sayrol, Sisco Vallverdú

Exercici 1

Es defineix la funció de correlació creuada, o simplement funció de correlació, entre dos senyals reals $x(t)$ i $y(t)$ com:

$$r_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t+\tau)\, y(\tau)\, d\tau$$

En el cas particular de que $y(t) = x(t)$ es coneix com a funció d'autocorrelació. Es demana:

a) Obtingui la correlació $r_{xy}(t)$ pel cas $x(t) = e^{-t}u(t)$ i $y(t) = u(t-1)$.

b) De les següents igualtats demostri la que és correcte

1) $r_{xy}(t) = x(t) * y(t)$
2) $r_{xy}(t) = x(-t) * y(t)$
3) $r_{xy}(t) = x(t) * y(-t)$

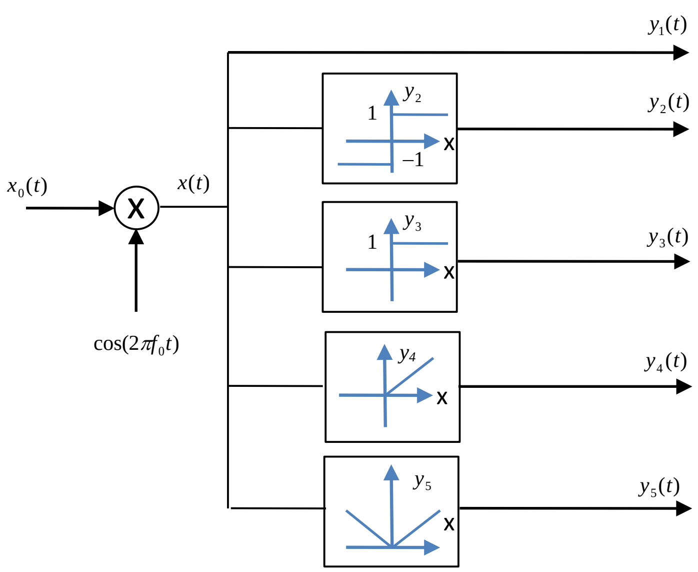
c) Donades les transformades de Fourier, $X(f)$ i $Y(f)$, de dos senyals reals qualssevol, obtingui $R_{xy}(f)$, la transformada de Fourier de la correlació. Es pot dir que $|R_{xy}(f)| = |\mathcal{F}\{x(t) * y(t)\}|$?

d) Quina característica o paràmetre d'un senyal $x(t)$ mesura la seva funció d'autocorrelació a l'origen, $r_{xx}(0)$?

e) Demostri que la transformada de Fourier, $R_{xx}(f)$, de la funció d'autocorrelació és real i positiva. A partir d'això analitzi si té algun efecte sobre l'autocorrelació la introducció d'un retard en el senyal $x(t)$.

Exercici 2

L'esquema de la figura 1 permet generar senyals periòdics



$$y_1(t) = x(t)$$

$$y_2(t) = \begin{cases} 1, si\ x(t) \geq 0 \\ -1, si\ x(t) < 0 \end{cases}$$

$$y_3(t) = \begin{cases} 1,\ si\ x(t) \geq 0 \\ 0,\ si\ x(t) < 0 \end{cases}$$

$$y_4(t) = \{x(t),\ si\ x(t) \geq 0$$

$$y_5(t) = |x(t)|$$

Figura 1

Suposant que $x_0(t) = 1$, es demana:

a) Dibuixi cadascun dels senyals $y_i(t)$ i indiqui quin és el període en cada cas (en funció de f_0)
b) Trobi la transformada de Fourier i el desenvolupament en sèrie de Fourier de $y_2(t)$
c) Trobi la transformada de Fourier de $y_5(t)$ i representi-la de manera aproximada
d) Doni una possible freqüència de mostratge pel senyal $y_1(t)$. En aquest cas, quin filtre $h(t)$ li permetria recuperar el senyal previ al mostratge? (justifiqui la resposta)
e) Si es vol mostrejar els senyals de sortida $y_2(t)$ i $y_5(t)$, compari els filtres antialiasing que faria servir en cada cas?

Exercici 3

Consideri el sistema de la figura 2, amb $h[n]$ i $g[n]$ la resposta impulsional de dos sistemes lineals i invariants, i els conversors analògic-digital (AD) i digital-analògic (DA) ideals.

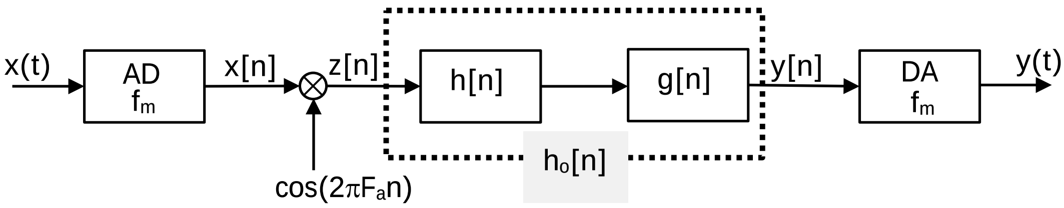


Figura 2

$h[n] = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \cos(2\pi F_o n) \cdot u[n]$; $F_o = \frac{1}{4}$

$G(z) = TZ\{g[n]\} = 1 - z^{-2}$; sent $g[n]$ un sistema causal

Si el senyal d'entrada és $x(t) = -2\cos(2\pi f_1 t) + 3\cos(2\pi f_2 t)$,

amb $f_1 = 1kHz$, $f_2 = 3kHz$ i $f_m = 8kHz$

a) Analitzi la invariància del sistema digital complet, $y[n] = T\{x[n]\}$
b) Trobi $H(z) = TZ\{h[n]\}$ i representi el seu diagrama de pols-zeros (nota: $\cos(2\pi F_o n) = \frac{e^{j2\pi F_o n} + e^{-j2\pi F_o n}}{2}$)
c) Trobi $H(F)$ i representi el seu mòdul al quadrat, especificant els valors de màxims i mínims, així com les freqüències a les que es produeixen
d) Trobi la resposta freqüencial corresponent a $h_o[n]$ i representi el seu mòdul (o mòdul al quadrat)
e) Si $F_a = \frac{f_2}{f_m}$, trobi $y[n]$ i $y(t)$

Consideri ara que es disposa de la seqüència $x[n]$ obtinguda de la discretització de 0.5 segons del senyal $x(t)$. Es demana:

f) Trobi $X(F)$, la transformada de Fourier de $x[n]$ (recordi que $f_m = 8000 mostres/s$) i representi aproximadament el seu mòdul
g) Fent la transformada discreta de Fourier, $X[k]$ amb N=5000 punts, trobi el valor de k, en l'interval $0 \le k \le N/2$, on es troba el màxim de $|X[k]|$ i el valor d'aquest màxim
h) Si es vol trobar una bona aproximació de $y[n]$ a partir de la transformada discreta de Fourier inversa de $Y[k]$, calculada com $Y[k] = Z[k] \cdot H_o[k]$, discuteixi quin és el mínim valor de N que es pot fer servir per calcular les transformades
i) Escrigui les instruccions per implementar el sistema de la figura 2 amb Matlab

---

Senyals i Sistemes **ETSETB-UPC** **Examen final 21 de juny de 2013**

- Duració: **3h**
- Tingui un document que l'identifiqui en lloc visible
- Entregui cada exercici per separat
- No es permet l'ús de cap tipus de material auxiliar
- Les notes provisionals es publicaran al metacurs d'Atenea abans del 29 de juny. Un cop publicades es donarà un marge de 2 dies per presentar al·legacions, mitjançant la intranet de l'ETSETB

A. Gasull, A. Moreno, C. Nadeu, A. Nogueiras, J. Salavedra, E. Sayrol, S. Vallverdú

Exercici 1

El senyal $x(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n\delta(t-nT_0)$ es filtra amb el sistema lineal i invariant caracteritzat per $h(t)=\cos(2\pi f_c t).\prod\left(\frac{t-T_1/2}{T_1}\right)$, obtenint-se la sortida $y(t)$.

Es demana:

a) Trobi el període T_p de $x(t)$ i un senyal base $x_b(t)$ que permeti obtenir $x(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x_b(t-nT_p)$. Calculi $X_b(f)$.

b) Trobi $X(f)$, transformada de Fourier de $x(t)$, i representi-la gràficament.

c) Trobi el desenvolupament en sèrie de Fourier de $x(t)$.

d) Calculi la resposta freqüencial $H(f)$ del filtre.
Dibuixi el seu mòdul $|H(f)|$ de manera aproximada (consideri $f_c \gg 1/T_1$), indicant la posició dels zeros del lòbul principal.

e) Dibuixi $Y(f)$, transformada de Fourier de la sortida del filtre.

f) Trobi un valor per T_1 per obtenir, com a senyal de sortida $y(t)$, un sol to freqüencial, considerant $f_c=\frac{3}{2T_0}$, i especifiqui l'expressió exacta de $y(t)$. Calculi l'energia i la potència mitjana de $y(t)$.

Exercici 2

En certes aplicacions, en lloc de processar el senyal a mesura que es va adquirint, es guarda primerament el senyal digitalitzat $\boldsymbol{x}[\boldsymbol{n}]$ en un arxiu i posteriorment es processa. Si és aquest el cas, es pot filtrar el senyal emmagatzemat sense alterar-ne la fase amb el procediment descrit a la figura 1, que consisteix en una doble convolució.

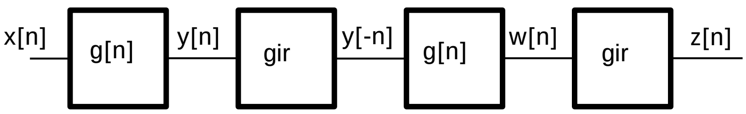


Figura 1

Suposant que totes les seqüències són **reals**, es demana:

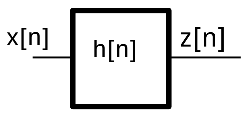


Figura 2

a) Partint de la definició de la convolució, demostrar pas a pas que

$$y[-n]=x[-n]*g[-n]$$

b) Demostrar que l'esquema de la figura 1 és equivalent al de la figura 2, és a dir que $z[n]=x[n]*h[n]$, obtenint $h[n]$ en funció de $g[n]$.

c) Trobar la resposta freqüencial $H(F)$ del sistema en funció de $G(F)$, transformada de Fourier de $g[n]$.

Consideri, pels propers apartats:

- $g[\mathrm{n}]=\delta[\mathrm{n}]-\delta[\mathrm{n}-1]$

- si no s'ha pogut trobar $h[n]$ en l'apartat (b) consideri com a $h[n]$ alternativa $h[n] = Part\ parella\{g[n]\}$ (aquest NO és el resultat correcte de l'apartat (b)).

d) Calcular $h[n]$ i $H(F)$. Dibuixar $H(F)$ en un període, indicant clarament els valors rellevants en els dos eixos. Indicar justificadament si la banda de pas està situada a freqüències baixes, mitjanes o altes.

e) Usant DFTs de *N* punts, es vol calcular la sortida $z[n]$ del sistema de tal manera que s'obtingui exactament la convolució lineal entre $x[n]$ i $h[n]$.
Suposant que $x[n]$ és un pols rectangular causal de longitud $L = 10$ mostres:
   1. Explicar el procediment a seguir i indicar raonadament el valor mínim de *N*, *Nmin*, que permet obtenir correctament $z[n]$.
   2. Donar els valors dels elements dels vectors **x** i **h** de longitud *Nmin* a partir dels quals es calcularan les DFTs de $x[n]$ i de $h[n]$.

Exercici 3

a) Quines característiques generals té la transformada de Fourier de qualsevol senyal real ($x^*(t) = x(t)$) i imparell ($x(-t) = -x(t)$)? Justifiqui la resposta.

b) A partir de la definició de la transformada de Fourier de $x(t)$ demostri la propietat de la derivació en freqüència de la transformada de Fourier $\left(\frac{d}{df}X(f)\right)$.

c) Calculi $X(f)$, la transformada de Fourier del senyal $x(t) = t \cdot \Pi\left(\frac{t}{2}\right)$.

d) Analitzi l'esquema de la figura 3 i especifiqui els valors de a (positiu o negatiu), t_0 (positiu), T_1 i C, de manera que si a l'entrada hi ha el senyal $x(t) = t \cdot \Pi\left(\frac{t}{2}\right)$ es vol obtenir a la sortida $y(t) = dent\left(\frac{t}{T}\right) = \left(1 - \frac{t}{T}\right)\Pi\left(\frac{t-T/2}{T}\right)$. Expressi $y(t)$ en funció de $x(t)$.

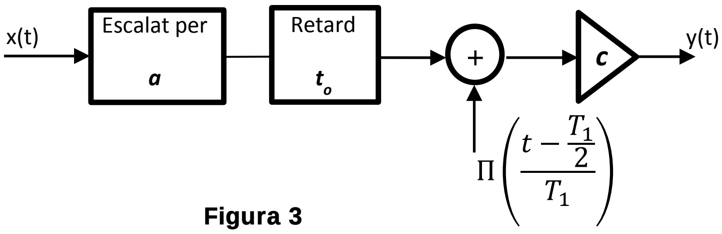


Figura 3

e) En base al resultat de l'apartat anterior obtingui $Y(f)$, la transformada de Fourier del senyal $y(t) = dent\left(\frac{t}{T}\right)$.

f) Per un valor de *T=4 segons,* completi el programa Matlab que li permetria comprovar si el resultat anterior, $Y(f)$, és correcte. Justifiqui els valors escollits per cadascuna de les variables en negreta (**fm**, **N**, **F**, **B**).

```
% càlcul del senyal y mostrejat a fm
        T=4;
        fm=;
        Tm=1/fm;
        t=0:Tm:T;
        y=1-t/T;
% càlcul de la transformada de la seqüència amb DFT de N punts
        N=;
        Y_dft=fft(y,N);
        F=;
% transformada teòrica de y(t)
        f=fm*F(1:N/2+1);
        Y=p6_Y(f,T);  % expressió teòrica de la transformada de Fourier de dent(t/T), calculada als valors donats per f;
% comparació gràfica dels mòduls
        B=;
        plot(f,abs(Y)), title('Mòdul de la transformada teòrica')
        hold on;
        plot(f,B*abs(Y_dft(1:N/2+1))), title('Mòdul de la transformada aproximada amb DFT')
```

g) Suposi que el senyal anterior, $y(t) = dent\left(\frac{t}{4}\right)$, s'hagués mostrejat tan sols a una velocitat de 1 mostra/s. Quan valdria $Y_{100}[0]$; és a dir, la DFT_N, $Y[k]$, de la seqüència resultant feta amb $N = 100$, per $k = 0$? D'altra banda, obtingui $Y(0) = Transf.\mathcal{F}ourier\left\{dent\left(\frac{t}{4}\right)\right\}\Big|_{f=0} = Y(f)|_{f=0}$ sense calcular $Y(f)$. Justifiqui la relació entre ambdós valors, $Y_{100}[0]$ i $Y(0)$ i comenti la possible discrepància entre ells.

- Duració: **3h**
- Tingui un document que l'identifiqui en lloc visible
- Entregui cada exercici per separat
- No es permet l'ús de cap tipus de material auxiliar
- Les notes provisionals es publicaran al metacurs d'Atenea abans del 23 de gener.

A. Gasull, A. Moreno, F. Rey, J. Salavedra, S. Vallverdú

Ejercicio 1

Dados $x(t) = \Pi\left(\frac{t}{T_A}\right)$ y $h(t) = \Pi\left(\frac{t}{T_B}\right)$, siendo $T_A > T_B$

Se pide:

1. Calcule y dibuje y(t)=x(t)*h(t).
2. Se forma la señal

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t - nT)$$

   Calcule y dibuje $z(t)=x_p(t)*h(t)$. Suponga para hacer su dibujo $T > 2T_A$

3. Con T_A=3s, T_B=1s. ¿Con qué valor de T obtendría z(t)=1? Justifique la respuesta.
4. Justifique que Z(f) se puede expresar como

$$Z(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} Y\left(\frac{m}{T}\right) \delta\left(f - \frac{m}{T}\right)$$

   y compruebe que el valor de T elegido en el apartado anterior es correcto, es decir, que con ese T se consigue $Z(f) = \delta(f)$

Exercici 2

El senyal $x[n] = A\cos(2\pi F_x n)$, amb $A = 4$, $F_x = 0.25$ s'enfinestra amb una finestra de 19 mostres, centrada a n=0, $w[n]$, obtenint-se $y[n] = x[n] \cdot w[n]$.

Es fa servir una finestra amb transformada $W(F) = \frac{1}{10}\frac{\sin^2(\pi 10F)}{\sin^2(\pi F)}$

1. Trobi la transformada de Fourier $Y(F)$ per $-\infty < F < \infty$.
2. Dibuixi acuradament els mòduls de $X(F)$ i de $Y(F)$ en el marge $0 \leq F < 1$
3. Es desplaça $y[n]$ per tal d'obtenir un senyal causal $y_1[n] = y[n-9]$, de manera que $Y_1(F) = Y(F) \cdot e^{-j2\pi 9F}$. Es mostreja $Y_1(F)$ amb $N = 100$ punts en el marge $0 \leq F < 1$, obtenint-se $Y_1[k] = Y_1(F)|_{F=\frac{k}{N}}$. Trobi el valor i posició dels màxims absoluts de $|Y_1[k]|$.
4. A partir del senyal $Z[k] = (Y_1[k])^2$, es calcula la transformada inversa $z[n] = DFT_N^{-1}\{Z[k]\}$. Expressi $z[n]$ en funció de $y_1[n]$ i justifiqui per a quins valors de N $z[n] = y_1[n] * y_1[n]$.

Exercici 3

Consideri el senyal $x(t)$ de dos components

$$x(t) = Acos(2\pi f_1 t) + Bcos(2\pi f_2 t)$$

El diagrama de blocs de la Fig. 1 permet mesurar la potència mitjana de cada component, segons sigui la freqüència moduladora F_i. El senyal analògic es mostreja amb una freqüència de mostratge f_m i es modula a les freqüències normalitzades amb f_m , F_1 o F_2. El senyal modulat és filtrat amb un filtre passabaixes. Finalment, es mesura la potència mitjana del senyal de sortida del filtre.

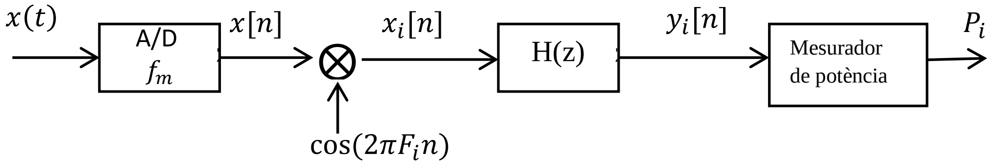


Fig. 1. Diagrama de blocs del detector de potència

El diagrama de blocs de la Fig. 2 mostra la implementació del filtre digital passabaixes $H(z)$.

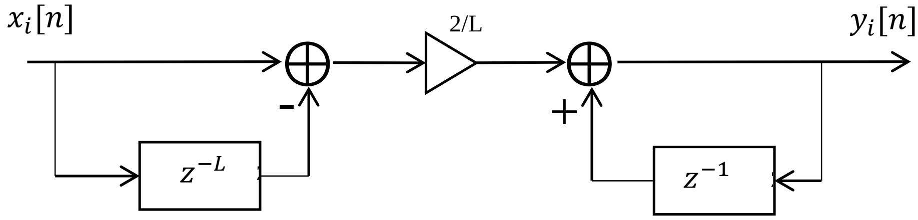


Fig. 2. Filtre passabaixes H(z)

1. Representi la transformada de Fourier dels diferents senyals de l'esquema de la Fig. 1 per $f_m = 100Hz, f_1 = 10Hz,\ f_2 = 25Hz$ i $F_i = F_2 = \frac{f_2}{f_m}$, considerant que $H(z)$ és un filtre passabaixes ideal d'ample de banda B_h=0,1 i guany G=1. Quina és la potència mitjana de $y_2[n]$? Compari el resultat amb la potència teòrica del segon component de $x(t)$.
2. Trobi la relació entrada-sortida del sistema de la Fig. 2, és a dir expressi $y_i[n]$ en funció de $x_i[n]$.
3. Trobi la funció de transferència $H(z)$, en funció de L, del filtre passabaixes de la Fig. 2. Representi el diagrama de pols i zeros per $L = 4$.
4. Trobi la seva resposta freqüencial $H(F)$ i representi el seu mòdul per L=4 en el marge $0 \leq F < 1$
5. Considerant la transformada $X_2(F)$ proposi justificadament el valor de L que faria servir per tal de poder mesurar correctament la potencia mitjana del segon component de $x(t)$.
6. Escrigui un programa Matlab per implementar el diagrama de blocs de la Fig. 1, considerant que disposa d'un vector x que conté N_x mostres del senyal $x(t)$.

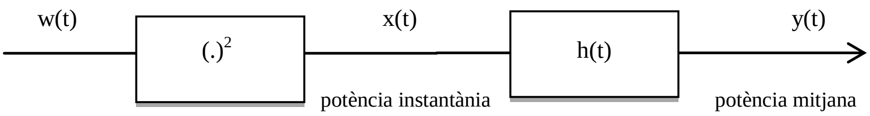
Nota: cos a cos b = 0,5 (cos(a+b) + cos(a-b))

Senyals i Sistemes **Examen Final P14: 16 de Juny de 2014** **Durada: 2:50h**

Notes Prov.: 25-6-14 Veure examen corregit: 26-6-14 (11h) Al.legacions: fins 27-6-14 Notes Def.: 1-7-14

No es permet l'ús de calculadores, mòbils, llibres i/o apunts.
Les respostes d'exercicis diferents s'han d'entregar en fulls separats.

EXERCICI 1



Considerarem el sistema de la figura, que calcula la potència mitjana al llarg del temps del senyal real w(t). Primer es troba la potència instantània $x(t)=w^2(t)$ i, a continuació s'aplica un sistema lineal allisador de resposta impulsional h(t) per obtenir el senyal de potència mitjana y(t).

La resposta impulsional que considerarem és $h(t)=Ce^{-Ct}u(t)$, on C és una constant real positiva.

Suposarem que el senyal d'entrada és $w(t)=A{\cdot}u(t)$, on *A* és una constant real:

a) Calcular el senyal de potència mitjana y(t).
b) Dibuixar el senyal y(t) obtingut i raonar si un augment de C fa que l'esglaó d'entrada quedi més o menys allisat.

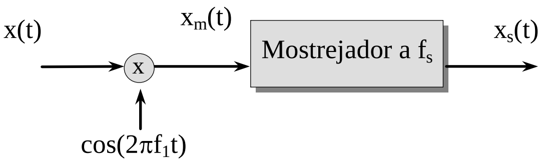
El sistema allisador es vol realitzar digitalment. Amb aquesta finalitat, es mostregen tant x(t) com h(t) amb una freqüència de mostratge f_s. Es demana:

c) Trobar h[n] en funció de C i $T_s=1/f_s$. Expressar h[n] en funció de la constant $a=e^{-CT_s}$.
d) Usant l'expressió de h[n] en funció de *a*, calcular pas a pas la funció de transferència H(z).
e) Demostrar que el sistema és estable per a qualsevol valor no nul de T_s i C.
f) Donar la resposta freqüencial H(F) i dibuixar-ne el mòdul per a $-1\leq F\leq 1$.
g) Trobar pas a pas l'equació entrada-sortida (en diferències finites) que expressa y[n] en funció de x[n]. Donar el diagrama de realització (de blocs) del sistema discret corresponent.
h) Per comparar el sistema dissenyat amb el sistema allisador alternatiu $h_2[n]=\begin{cases} L-n, & 0\leq n<L \\ 0, & \text{altre n} \end{cases}$, es demana:

1) Quina longitud tenen els segments que consideren cada un dels sistemes per calcular la potència mitjana?
2) Com pondera cada sistema el senyal x[n] dins d'un segment? Dibuixar la forma.
3) Relacionar els paràmetres L i C en termes de grau d'allisament.
4) Quantes multiplicacions per mostra de y[n] necessita cada un dels dos allisadors? Quin és preferible en termes de càlcul?

EXERCICI 2

Sigui el sistema de la figura que simula idealment un mostrejador de senyals prèviament modulats.



Si es considera el senyal d'entrada $x(t)=B\,\text{sinc}^2(Bt)$, es demana:

a) Trobi l'expressió i dibuixi acuradament X(f), $X_m(f)$ i $X_s(f)$, tot indicant-hi detalladament els valors més rellevants corresponents als dos eixos. Suposi B=5 kHz, f_1=10 kHz i $\frac{1}{T_s}=f_s>>f_1$.
b) Quina és la freqüència de mostratge f_s mínima que verifica el criteri de Nyquist?
c) Prengui ara $f_s=f_1$=10 kHz i dibuixi en aquest cas $X_s(f)$. Raoni si per aquest valor de f_s es podria recuperar x(t) a partir de $x_s(t)$. Compari el valor de f_s pres amb el resultat de l'apartat anterior.

Si l’entrada és el senyal periòdic $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \Lambda\left(\frac{t-n2T_0}{T_0}\right)$

d) Dibuixi el senyal x(t) i indiqui el valor del seu període.

e) Trobi la transformada de Fourier $X_b(f)$ del senyal bàsic de x(t), que conté un sol període de x(t).

f) Trobi la transformada de Fourier X(f). Dibuixi X(f) tot indicant-hi els valors més significatius. Suposi $\frac{1}{T_0} = 20KHz$.

g) Trobi l’expressió del desenvolupament en sèrie de Fourier de x(t) en forma de sinusoides.

EXERCICI 3

Un senyal d’informació, modelat per un pols rectangular, està distorsionat per una interferència sinusoïdal de freqüència f_0 que es vol eliminar. Quan aquest senyal es mostreja a una freqüència de mostratge f_s=8 kHz s’obté la seqüència

$$x[n] = p_{20}[n] + 0.5\cos(2\pi\ 9/20\ n).$$

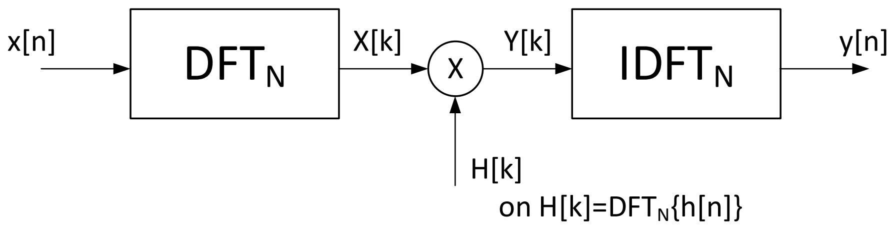
Es demana respondre a les següents preguntes:

a) Indicar els possibles valors de la freqüència analògica f_0 si el mostratge es fa sense filtre antialiasing.

b) Donar l'expressió de la transformada de Fourier X(F) i dibuixar-ne el mòdul entre F=0 i F=1.

c) Si la seqüència x[n] s’enfinestra amb un pols rectangular de durada N=2000 mostres, obtenint-se $x_N[n]$, indicar, sense fer cap nou dibuix, quins canvis hi hauria en l'expressió de la seva transformada de Fourier.

El senyal x[n] es vol processar per eliminar la interferència sinusoïdal seguint el següent esquema, on el nombre de punts de la DFT és N=2000:



d) Sent X[k] la DFT de N punts de x[n], 0≤n≤(N-1), indicar:
- Els valors de k pels quals X[k]=0;
- L’amplitud de X[0];
- L’amplitud i posició dels pics de la DFT deguts a la sinusoide interferent.

e) Indicar la seqüència H[k] que aconsegueix eliminar la interferència de manera que $y[n]=p_{20}[n]$ per a 0≤n≤(N-1).

f) Demostrar que la interferència també queda eliminada amb el filtre h[n] = δ[n] + 1.9.δ[n-1] + δ[n-2], resultant $y[n] \approx 3.9 \cdot p_{20}[n]$ per a 0≤n≤(N-1). *Nota:* Seguir considerant N=2000 i tenir en compte que $2\cos(0.9\pi) = -1.9$.

g) Raonar si s’aconseguiria eliminar completament el senyal interferent (sinusoide) en el cas que el nombre de punts de la DFT fos N=2010.

h) Si **x** és un vector de L_x mostres que conté els valors de x[n], i **h** és un vector de L_h mostres que conté els valors de h[n], escollir un valor de N apropiat, raonant-ne la seva elecció, i escriure el codi MATLAB que, fent ús de la DFT, generi el vector z=conv(x,h).

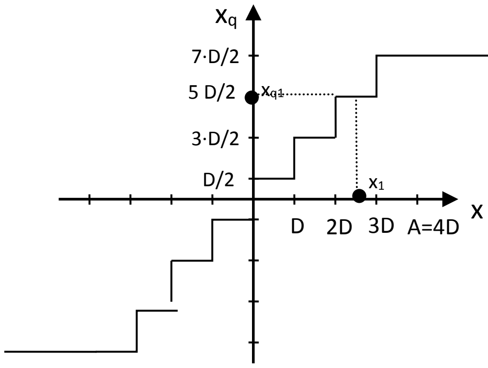
- Duració: **3h**
- Tingui un document que l'identifiqui en lloc visible
- Entregui cada exercici per separat
- No es permet l'ús de cap tipus de material auxiliar
- Les notes provisionals es publicaran al metacurs d'Atenea abans del 23 de gener.

A. Gasull, A. Moreno, T. Pascual, F. Rey, J. Salavedra, S. Vallverdú

Problema 1 (4 ejercicios independientes)

a) La condició de causalitat d'un sistema lineal i invariant és pot estudiar directament a partir la resposta impulsional h(t) del sistema. Com? Per què? (demostri-ho).

b) Un sistema de quantificació de B nivells té una característica de transferència entrada-sortida, $y(t) = Q\{x(t)\} = x_q(t)$ del tipus que es mostra en la figura amb B=8. Per exemple, pot comprovar que el valor de la entrada x = x1 comprés entre 2D i 3D queda quantificat amb x_{q1}= 5D/2. Estudiï les propietats de linealitat i invariància d'aquest sistema.



c) Suposi que el quantificador és de dos nivells $\left(\pm\frac{A}{2}\right)$, es a dir $y(t) = \begin{cases} -A/2 & x(t) \leq 0 \\ A/2 & x(t) > 0 \end{cases}$ i que el senyal d'entrada és una sinusoide d'amplitud A. Obtingui l'energia i la potència del senyal de sortida.

d) Es disposa de tecnologia digital per filtrar passa altes el senyal $x(t) = \Delta\left(\frac{t-10^{-3}}{10^{-3}}\right)$. Per això es mostreja el senyal a una freqüència f_m i es filtra amb un FIR de dos coeficients: $h[n] = 0.5\delta[n] + a\delta[n-1]$. Es demana:

- que proposi justificadament la freqüència de mostratge.
- el valor del segon coeficient, a, del FIR, per tal de que sigui un passa altes amb valor màxim de 1 de la resposta freqüencial a l'extrem de la banda.
- que dibuixi el senyal digitalitzat x[n] i el senyal digital filtrat y[n] amb els paràmetres que ha proposat.

Problema 2

Considerem un senyal del qual coneixem la seva transformada de Fourier que bé donada per l'expressió:

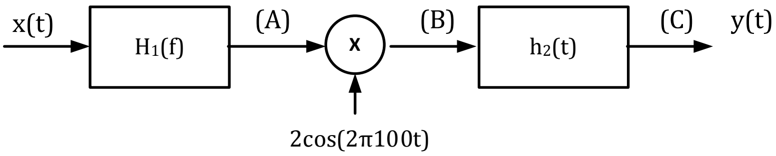
$$X(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{20}\left(sinc^2\left(\frac{m}{10} - 100\right) e^{-j2\pi\left(\frac{m}{10}-100\right)} + sinc^2\left(\frac{m}{10} + 100\right) e^{-j2\pi\left(\frac{m}{10}+100\right)}\right) \delta\left(f - \frac{m}{10}\right)$$

a) Raonar que x(t) és un senyal periòdic de període T_0 i senyal bàsic:

$$x_b(t) = \Lambda\left(\frac{t-T}{T}\right)\cos(2\pi f_c t)$$

b) Proposar uns valors per T, T_0, f_c

El senyal x(t) es fa passar al través del següent sistema:



On,

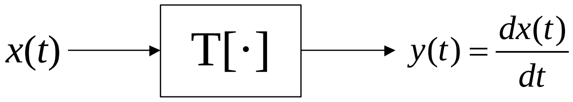
$$H_1(f) = \Pi\left(\frac{f-100}{0.3}\right) + \Pi\left(\frac{f+100}{0.3}\right) \qquad h_2(t) = 100sinc(100t)$$

c) Dibuixar amb detall y justificadament la transformada de Fourier del senyal en els punts A, B i C (indicant clarament els valors mes significatius).

d) Donar l'expressió (el més compacta possible) del senyal y(t).

Problema 3

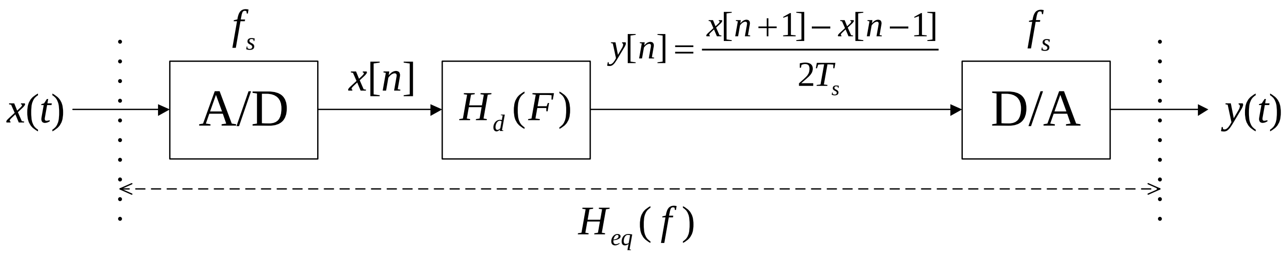
Consideramos el siguiente sistema lineal e invariante analógico derivador:



(a) Argumente si el sistema es estable o no.

(b) Calcule la respuesta frecuencial: $H_a(f)=\dfrac{Y(f)}{X(f)}$.

El objetivo a continuación es aproximar el sistema anterior mediante el siguiente sistema digital. Los <u>conversores A/D y D/A son ideales</u> trabajando ambos a una frecuencia de muestreo $f_s=1/T_s$ Hz. Tanto el filtro antialiasing del conversor A/D como el filtro reconstructor del conversor D/A son filtros paso bajo ideales de frecuencia de corte $f_s/2$



(c) Determine la respuesta impulsional del sistema digital $h_d[n]$ y su respuesta frecuencial $H_d(F)$. Dibuje el módulo y la fase de $H_d(F)$

Supongamos que la señal analógica *x*(*t*) tiene un ancho de banda B Hz (es decir, X(f)=0, |f|≥B) y que se cumple el criterio de Nyquist en el muestreo:

(d) Dibuje la respuesta frecuencial del sistema global equivalente $H_{eq}(f)=\dfrac{Y(f)}{X(f)}$. Argumente bajo qué condiciones el sistema equivalente $H_{eq}(f)$ aproxima adecuadamente el sistema derivador original.

(e) Suponga en el esquema anterior x[n] una secuencia de Nx muestras (0,..Nx-1). Se desea obtener y[n] a partir de x[n] utilizando DFTs. Para ello se plantea el siguiente procedimiento

1) Cálculo de $X_N[k]=DFT_N[x[n]]$, k=0, …N-1

2) Formamos la secuencia $h[n]=\begin{cases}-1/2T_s & n=1\\ 1/2T_s & n=N-1\\ 0 & n=0, y\ 2\le n\le N-2\end{cases}$

3) Cálculo de $H_N[k]=DFT_N\{h[n]\}$, k=0, …N-1

4) $z[n]=DFT_N^{-1}\{X[k]H[k]\}$, n=0, …, N-1

5) $y[n]=\begin{cases}z[n] & 0\le n\le N-2\\ z[N-1] & n=-1\\ 0 & resto\end{cases}$

¿Cuál debe ser el valor mínimo de N?. Compruebe que $H_N[k]=H_d(F)|_{F=k/N}$

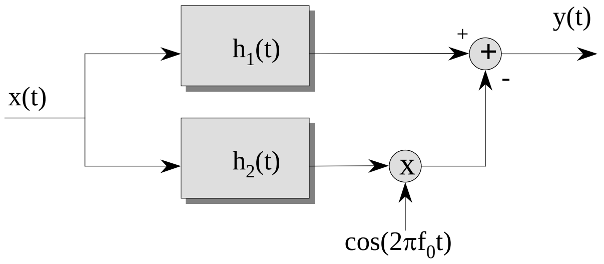
Senyals i Sistemes **Examen Final P15: 17 de Juny de 2015** **Durada: 2:50h**

Notes Prov.: 25-6-15 Veure examen corregit: 26-6-15 (10h) Al.legacions: fins 29-6-15 (10h) Notes Def.: 30-6-15

Cal justificar bé cada pas dels raonaments. No es permet l'ús de calculadores, mòbils, llibres i/o apunts. Les respostes d'exercicis diferents s'han d'entregar en fulls separats

EXERCICI 1

Sigui el sistema de la Figura on els blocs rectangulars són dos sistemes lineals i invariants amb respostes impulsionals $h_1(t)$ i $h_2(t)$ respectivament:



a) Trobi la relació entrada-sortida del sistema global $T[x(t)] = y(t)$.

b) Analitzi justificadament les propietats d'invariància i causalitat del sistema global.

c) Obtingui l'expressió de $Y(f)$, en funció de $X(f)$, $H_1(f)$ i $H_2(f)$.

d) Pel cas $x(t) = \prod(Bt)$, $h_1(t) = 2B.\text{sinc}(2Bt)$ i $h_2(t) = B.\text{sinc}^2(Bt)$, dibuixi detalladament $|Y(f)|$ (per a fer el dibuix consideri $f_0=3B$).

Si es vol recuperar $y_2(t)=x(t)*h_2(t)$ a partir de $y(t)$, es demana:

e) Quin és el valor mínim de f_0 (en funció de B), que permet recuperar $y_2(t)$.

f) Defineixi un possible esquema receptor, que fent ús d'un filtre passa-baix ideal, permeti obtenir $y_2(t)$ a partir del senyal multiplexat $y(t)$.

g) A partir del senyal $y_2(t)$, es podria recuperar el senyal d'entrada $x(t)$? Raoni la seva resposta

EXERCICI 2

Sigui un sistema lineal invariant definit per la resposta impulsional

$$h[n] = \delta[n] - \tfrac{1}{2}\delta[n-1] - \tfrac{1}{2}\delta[n+1] \ .$$

Es demana:

a) Dibuixi h[n] i analitzi les propietats de causalitat i estabilitat del sistema.

b) Trobi, per convolució, y[n] per a $x[n]=p_5[n]$, i dibuixi-la.

c) Trobi H(z), transformada Z del sistema. Obtingui i dibuixi els seus zeros en el pla complex z.

d) Trobi la resposta freqüencial $H(F)$. Dibuixi-la per a l'interval $-2 \le F \le 2$. ¿De quin tipus de filtre es tracta, passa-banda o passa-alt?

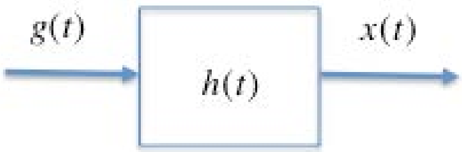
e) Si $H'[k] = H(F)\big|_{F=\frac{k}{4}}$, per a $0 \le k < 4$, obtingui $h'[n] = DFT^{-1}\{H'[k]\}$, $0 \le n < 4$, aplicant la definició de DFT inversa amb N=4.

f) Mostri de forma justificada la relació matemàtica entre la h'[n] trobada a l'apartat anterior i la h[n] del sistema.

g) Si es vol calcular la DFT inversa anterior per a un valor de N gran, cal usar un programa informàtic. Escrigui un codi Matlab que permeti calcular x[n], 0≤n<N, a partir de la seva DFT de N punts X[k], 0≤k<N.

EXERCICI 3

El senyal x(t), d'una nota musical, es pot caracteritzar amb l'esquema de la figura, on l'entrada g(t) és un tren de deltes que determina la freqüència f_0 de la nota, i la resposta impulsional h(t) modela l'instrument musical. En aquest exercici suposarem una h(t) que aproximadament es correspon a la d'un trombó.



$$g(t) = A\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t - nT_0), \quad \text{on} \quad T_0 = \frac{1}{f_0}$$
$$h(t) = e^{-\alpha t}u(t)$$

Es demana:

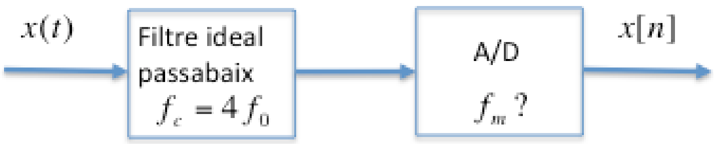
a) Doni l'expressió de $x(t)$ i dibuixi-la aproximadament.

b) Trobi H(f), Transformada de Fourier de h(t).

c) Calculi els coeficients del Desenvolupament en Sèrie de Fourier (DSF) de x(t). A partir dels coeficients anteriors, doni l'expressió de X(f), Transformada de Fourier del senyal periòdic $x(t)$ (també pot calcular en primer lloc la Transformada de Fourier i després els coeficients del DSF). Dibuixi |X(f)|.

Nota: si no ha trobat la H(f) a ***b)****, pot deixar els coeficients en funció de l'expressió genèrica H(f).*

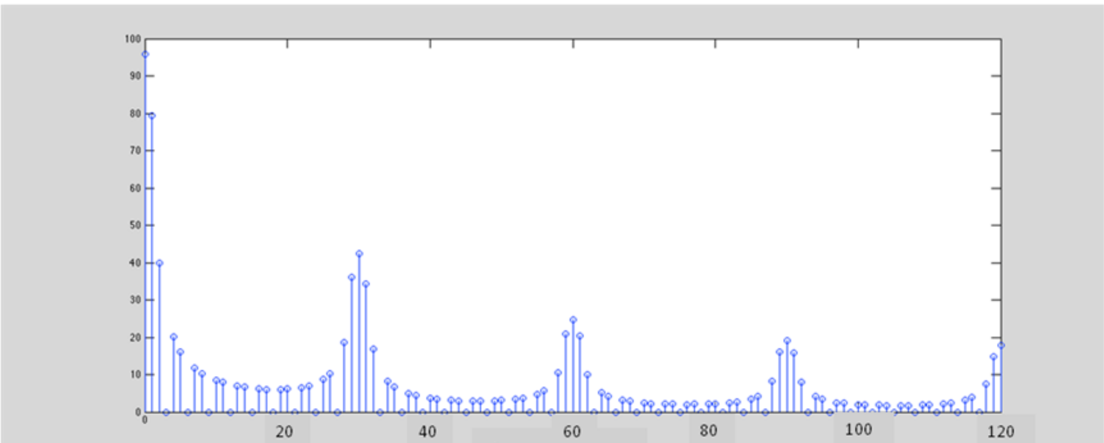
El senyal $x(t)$ es mostreja segons l'esquema de la figura:



d) Indiqui raonadament quins components freqüencials deixa passar el filtre, i quina és la freqüència de mostratge mínima (en funció de f_0) que verifica el Criteri de Nyquist. A partir de la X(f) trobada a **c)**, doni l'expressió de $X(F)$, Transformada de Fourier del senyal discret x[n], per a $-\infty<F<\infty$.

e) Si al senyal x[n] se li aplica una finestra rectangular causal de durada *L*, és a dir, $x[n]\cdot w[n] = x_w[n]$, trobi $X_W(F)$ a partir de la $X(F)$ obtinguda a l'apartat anterior, deixant-ho en funció de $W(F)$.

A continuació es calcula la DFT del senyal $x_w[n]$ amb N=240 punts, on N≥L. A la següent figura es representa el mòdul de la DFT entre 0 i N/2.



f) Trobi raonadament el període *P* de x[n]. A partir de *P*, i suposant que la freqüència de mostratge val f_m=4kHz, obtingui la freqüència de la nota musical f_0.

g) Dedueixi, a partir de la figura, quina és la longitud *L* de la finestra rectangular.

Asunción Moreno, Sisco Vallverdú

No se permite utilizar libros, apuntes, calculadoras, móviles ni cualquier otro dispositivo electrónico

Problema 1. Se desea transmitir una señal de música estéreo. La señales a transmitir son la información del canal derecho como $x_d(t)$ y la del canal izquierdo como $x_i(t)$. El ancho de banda de cada canal es BHz, $(X_d(f) = X_i(f) = 0, |f > B|)$ y la potencia de cada canal es P. Se forma la señal $x(t)$:

$x(t) = x_d(t) + x_i(t) \cdot \cos(2\pi f_o t) + \alpha \cdot \cos(\pi f_o t)$, con $f_o = (2 \cdot B + \Delta f)$ y $\Delta f \ll B$.

El último coseno $p(t) = \alpha \cdot \cos(\pi f_o t)$ se denomina *piloto* y se transmite para generar en el receptor el oscilador a la frecuencia f_0. La potencia asociada al piloto es pequeña comparada con la potencia total. La figura 1 muestra el esquema receptor.

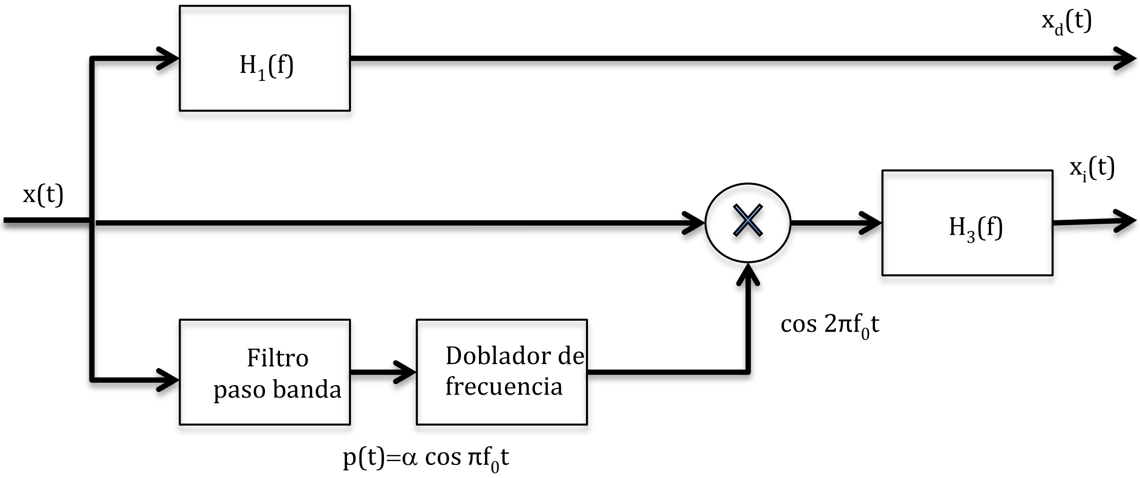


Figura 1

Se pide:

a) Calcule y dibuje la Transformada de Fourier $X(f)$ de $x(t)$. Para hacer los dibujos suponga <u>únicamente</u> a efectos del dibujo, una forma triangular para $X_d(f)$ y una forma rectangular para $X_i(f)$.

b) Ancho de banda de la señal $x(t)$ en función de B y Δf.

c) Determine la respuesta frecuencial ideal de los filtros $H_1(f)$, y $H_3(f)$ y compruebe que el sistema receptor permite recuperar $x_d(t)$ y $x_i(t)$.

d) Encuentre la potencia de la señal piloto $p(t)$

Problema 2. En sistemas de comunicaciones como el del problema anterior, junto a la parte correspondiente al mensaje es habitual transmitir un *piloto* $p(t) = \alpha \cdot \cos(\pi f_o t)$, es decir, un coseno de poca potencia a un submúltiplo de la frecuencia de la portadora f_o. En el receptor, para generar la portadora $\cos(2\pi f_o t)$ se selecciona el piloto y se aplica a un doblador de frecuencia. La figura 2 muestra una implementación del sistema. El primer filtro es un filtro paso banda de ancho de banda $\Delta f \ll f_o$ centrado a la frecuencia $\pm \frac{f_o}{2}$ y ganancia unidad

$$H_i(f) = \Pi\left(\frac{f - \frac{f_o}{2}}{\Delta f}\right) + \Pi\left(\frac{f + \frac{f_o}{2}}{\Delta f}\right)$$

El objetivo del filtro es seleccionar el piloto, por lo que a su salida se obtiene $p(t)$. El sistema a continuación es un rectificador de onda completa con relación entrada-salida $y(t) = |x(t)|$. El filtro $H_o(f)$ es un filtro paso banda a determinar. Se pide:

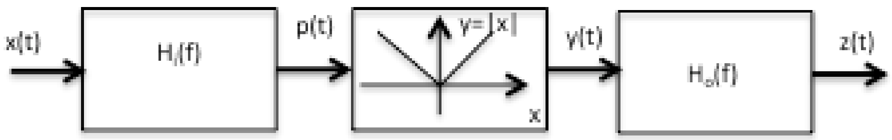


Figura 2

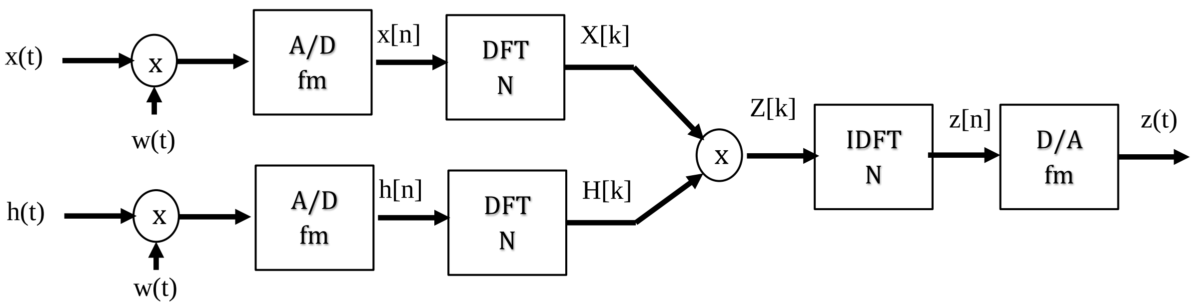
a) El rectificador de onda completa ¿es un sistema lineal? ¿es variante? Demuestre sus respuestas.
b) Un sistema lineal e invariante, ¿Puede generar a su salida frecuencias que no están a su entrada?. Demuestre su respuesta.
c) Periodo de la señal $p(t)$ de entrada al rectificador de onda completa y periodo de la señal de salida $y(t)$.
d) Calcule el desarrollo en serie de Fourier de $y(t)$
e) Calcule la Transformada de Fourier $Y(f)$. Dibuje aproximadamente $|Y(f)|$
f) Determine la ganancia y ancho de banda del filtro paso banda ideal $H_o(f) = G \prod\left(\frac{|f|-f_0}{B_h}\right)$ para que a su salida se obtenga $z(t) = \cos(2\pi f_o t)$

Problema 3.

Se desea calcular la convolución entre las señales $x(t) = \Pi\left(\frac{t-1}{2}\right)$ y $h(t) = e^{-t}u(t)$ mediante un sistema digital.

a) Obtenga y dibuje la convolución $y(t) = x(t) * h(t)$
b) Obtenga la transformada de Fourier de $x(t)$ y $h(t)$ y represente su módulo

Para obtener la convolución y(t) se considera el esquema de la figura, donde z(t) debe ser una aproximación a la convolución deseada.



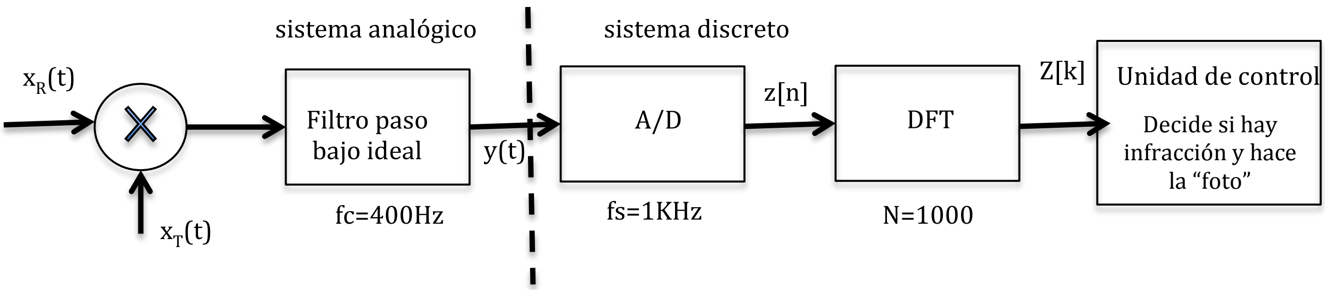
c) Elija justificadamente la frecuencia de muestreo f_m que considere adecuada para realizar la convolución mediante el sistema digital
d) Elija justificadamente la duración T de una ventana rectangular $w(t) = \Pi\left(\frac{t-\frac{T}{2}}{T}\right)$ que le permita obtener una aproximación digital a la convolución deseada.
e) Cuál es el valor de N adecuado para que z(t) sea una buena aproximación a y(t)?

Problema 4. Un posible método para determinar la velocidad a la que circulan los vehículos por una carretera, y si es pertinente sancionar al conductor, consiste en hacer uso de un radar basado en el principio físico de la frecuencia Doppler. Este tipo de equipos emiten una señal periódica de radiofrecuencia y miden la señal recibida obtenida a partir del rebote de la señal emitida sobre el vehículo del que se quiere determinar la velocidad. Por el principio físico de la frecuencia Doppler la señal recibida habrá sufrido una desviación en frecuencia que será proporcional a la velocidad del vehículo, y por tanto, midiendo esta desviación se puede determinar la velocidad del objeto móvil.

El objetivo de este ejercicio será estudiar, de forma muy simplificada, el posible funcionamiento de uno de estos equipos. Para ello, supongamos que la señal emitida $x_T(t) = sen(2\pi f_o t)$ es una sinusoide de frecuencia f_o = 1GHz (1GHz = 10^9 Hz) y la señal recibida $x_R(t) = sen(2\pi(f_o + f_d)\,t)$ otra sinusoide de frecuencia $f_o + f_d$ (donde f_d es la frecuencia Doppler producida por el movimiento del vehículo). El valor de la frecuencia Doppler viene dada por $f_d = f_o \cdot \left(\frac{2v}{c}\right)$. Sabiendo que f_o = 1GHz, v es la velocidad del móvil, y $c = 3 \cdot 10^8$ m/s es la velocidad de la luz, utilizaremos la siguiente fórmula para relacionar f_d y v:

$$v = 0.54 \cdot f_d$$

donde v es la velocidad en Km/h y f_d la frecuencia en Hz. A modo de ejemplo, si la la f_d es de 100Hz la velocidad es de 54Km/h. El sistema completo está formado por dos subsistemas, uno analógico y otro discreto, tal como se muestra en la siguiente figura:



Se pide:

a) Dibujar la transformada de Fourier de la señal y(t) a la salida del filtro paso bajo (para hacer el dibujo puede suponer un valor concreto de fd, por ejemplo fd = 100Hz).

b) Si la frecuencia de corte del filtro es de 400Hz, ¿cuál es la velocidad máxima que es capaz de medir este equipo?

c) ¿Cuál debe ser la mínima frecuencia de muestreo para que no se produzca aliasing?

d) El módulo DFT enventana la entrada con N=1000 puntos y calcula la DFT de N puntos. Para el caso de un vehículo circulando a 54Km/h (por lo tanto con una de fd = 100Hz) haga un dibujo aproximado del módulo de Z[k] (módulo de la DFT) indicando los valores más representativos (amplitudes y posiciones (índice k) de los máximos significativos).

e) Si se detecta que los máximos absolutos de Z[k] están en k=370 y k=630, ¿cuál era la velocidad del vehículo?

e) Justificar por qué con N = 1000 puntos la precisión en la detección de la frecuencia Doppler es de ± 0.5Hz (o, de forma equivalente, la precisión en la detección de la velocidad es de ± 0.27 Km/h).

f) Si se tomara una frecuencia de muestreo de fs = 500 Hz y no se modifica el filtro antialiasing, que mantiene la frecuencia de corte a fc = 400Hz, qué velocidad detectaría el sistema cuando un vehículo circulara a 216 Km/h?

Nota:

$$sen(a) \cdot sen(b) = \frac{1}{2}\big(cos\,(a-b) - cos\,(a+b)\big)$$

$$\cos(a) \cdot \cos(b) = \frac{1}{2}\big(cos\,(a-b) + cos\,(a+b)\big)$$

$$sen(a) \cdot \cos(b) = \frac{1}{2}\big(cos\,(a-b) - sen(a+b)\big)$$

Escola Tècnica Superior d'Enginyeria de Telecomunicació de Barcelona
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

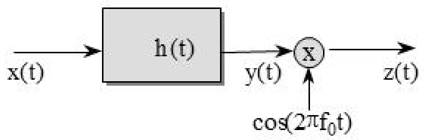
Senyals i Sistemes **Examen Final T15 : 7 de Gener del 2016** **Durada: 3h**

Notes Prov.: 15-1-16 **Veure examen corregit: 19-1-16** **Al.legacions: fins 21-1-16 (10h)** **Notes Def.: 22-1-16**

Cal justificar bé cada pas dels raonaments. No es permet l'ús de calculadores, mòbils, llibres i/o apunts. Les respostes d'exercicis diferents s'han d'entregar en fulls separats

EXERCICI 1

Es considera el sistema LI caracteritzat per $h(t) = e^{-t}.\Pi\left(\frac{t-t_1}{5}\right)$, es demana:



a) Discuteixi, en funció del paràmetre t_1, les propietats d'invariància i causalitat del sistema lineal global z(t)=T[x(t)].

b) En el domini freqüencial, expressi justificadament Z(f) en funció de X(f) i de H(f).

Pel següent apartat consideri t_1=3,5 seg , es demana:

c) Sigui $x(t) = e^{t}.\Pi\left(\frac{t-3{,}5}{3}\right)$ el senyal d'entrada al sistema h(t), calculi en el domini temporal (convolució gràfica) el senyal de sortida y(t) .

EXERCICI 2

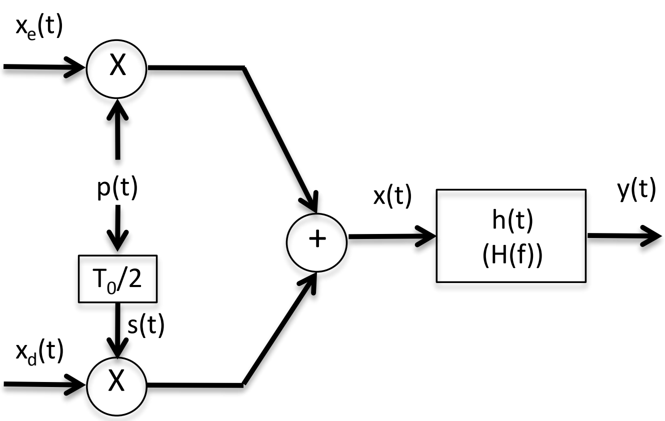


Figura 2.a)

L'objectiu del sistema de la Fig. 2.a) és generar el senyal:

$$y(t) = a_S\,(x_e(t) + x_d(t)) \;+\; a_R\,(x_e(t) - x_d(t))\cos(2\pi f_R t)$$

on a_S i a_R són constants, i f_R és la freqüència de modulació del senyal resta.

Aquest senyal ha de ser compatible, tant per a sistemes receptors d'àudio en estèreo com per a sistemes mono. A l'entrada hi ha els canals esquerra i dret provinents del senyal d'àudio en estèreo. Tots dos tenen el mateix ampla de banda B. El senyal de sortida conté dos components, un serà la suma del canal dret i de l'esquerra. El segon component serà la resta d'aquests dos canals modulat a una certa freqüència f_R.

El senyal suma és compatible amb un sistema receptor mono. Quan es disposa de la suma i de la resta, es poden obtenir els dos canals per separat, i poden ser reproduïts per un sistema receptor en estèreo. Tal com es veu a la Fig.2.a), es multiplica el canal esquerra $x_e(t)$ pel senyal p(t), i el senyal provinent del canal dret $x_d(t)$ pel senyal $s(t) = p\left(t - \frac{T_0}{2}\right)$.

El senyal p(t) es mostra a la Fig.2.b):

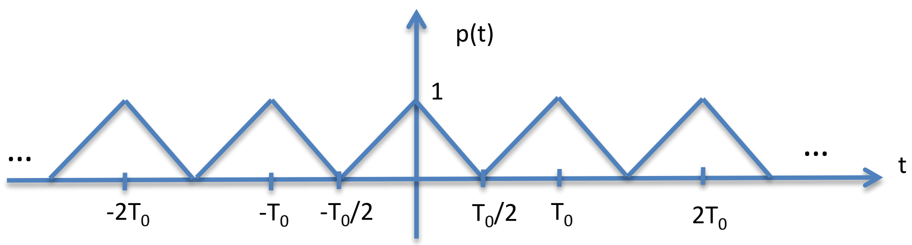


Figura 2.b) $\left(f_0 = \frac{1}{T_0} = 40kHz\right)$

a) Indiqui si els senyals $p(t)$ i s(t) són d'energia finita o de potència mitjana finita. Justifiqui la seva resposta i doni els valors de l'energia i de la potència mitjana pels dos senyals.

b) Trobi la TF i el DSF de $p(t)$. Respongui en l'ordre que li sigui més còmode. Dibuixi amb detall P(f), la TF de $p(t)$, indicant-hi clarament els valors més significatius.

c) Trobi la TF de $s(t)$. Quina relació hi ha entre els coeficients del DSF de $s(t)$ i els del DSF de $p(t)$?

d) Trobi la TF de $x(t)$ en funció de les TF de $x_d(t)$ i de $x_e(t)$. Indiqui en particular els termes que pertanyen al marge freqüencial $-3f_0 - B \le f \le 3f_0 + B$.

e) Quin és l'ample de banda màxim dels senyals $x_e(t)$ i $x_d(t)$ per tal que el sistema generi correctament el senyal suma i el senyal diferència. Quant val f_R? Com ha de ser el filtre $H(f)$, per a generar $y(t)$? Justifiqui les respostes.

EXERCICI 3

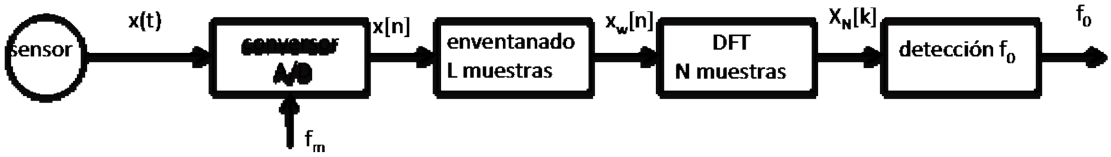
Se desea realizar una monitorización de un paciente para detectar posibles arritmias, es decir, variaciones en su ritmo cardiaco. La señal del electrocardiograma (ECG) tomada por un sensor, es prácticamente periódica y se puede expresar según:

$$x(t) = \sum_{m=1}^{M} c_m \cos\left(2\pi m f_0 t + \varphi_m\right)$$

donde f_0 es la frecuencia fundamental que queremos detectar (en Hz) y el ritmo cardiaco R_c medido será:

$R_c = 60\ f_0$ (en latidos/min)

Para el análisis se utiliza el siguiente esquema:



a) El ancho de banda que maneja el sensor está limitado a B_x=200 Hz. ¿Qué debe cumplir la frecuencia de muestreo para que no haya aliasing?

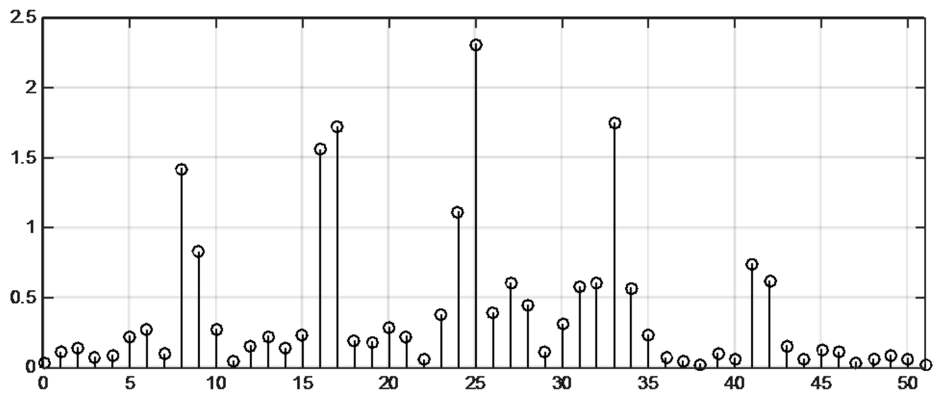
b) Halle la expresión de la señal x[n], a la salida del conversor A/D.

c) Obtenga la expresión de la Transformada de Fourier de x[n] para el caso concreto de M=2, $c_1=c_2=1$, f_0=1Hz, f_m=500Hz, $\varphi_1=0$, $\varphi_2=\pi/4$. Dibuje |X(F)| en el intervalo $0 \le F \le 0.5$.

d) El enventanado se realiza con una ventana rectangular $w_L[n]$ con transformada de Fourier $W_L(F)$, justifique que la transformada de Fourier de la señal a analitzar $x_w[n]=x[n]\ w_L[n]$ es :

$$X_W(F) = \sum_{m=1}^{M} \frac{c_m}{2} e^{j\varphi_m} W_L\left(F - mF_0\right) + \sum_{m=1}^{M} \frac{c_m}{2} e^{-j\varphi_m} W_L\left(F + mF_0\right)$$

e) La señal se muestrea con f_m=500Hz, y se analiza por tramos de T=6 seg para hacer un análisis frecuencial. Este se realiza por medio de una DFT de N= 4000 puntos. La figura muestra la $DFT_N\{x[n]\}$ de una señal con M=5, en el intervalo $0 \le k \le 51$. Los máximos locales de la figura están en las posiciones k= 8, 17, 25, 33 y 41. Estime el valor de F_0, el valor de f_0 y el ritmo cardiaco R_c del paciente en latidos/min.



f) Por el hecho de usar la DFT está haciendo un muestreo en frecuencia de $X_w(F)$ cada ΔF. Este valor influye en la estimación de F_0, y en definitiva de f_0 y en la del ritmo cardiaco R_c del paciente. ¿Qué error, en latidos/min, tiene el sistema en la estimación del ritmo cardiaco del paciente?

Senyals i Sistemes **Examen Final Extraordinari P16: 7 de Juliol del 2016** **Durada: 3h**

Publ. Notes Prov.: 12-7-16 Veure examen: 13-7-16 (9h30') Al.leg.: 13-7-16 (Fins 12h) Pub Notes Def: 14-7-16

No es permet l'ús de calculadores, mòbils, llibres i/o apunts. Les respostes d'exercicis diferents s'han d'entregar en fulls separats

Exercici 1

Una forma de sintetitzar determinats tipus de sons en aplicacions d'audio és la de generar un senyal x(t) com a sortida d'un filtre al qual s'hi aplica un tren de deltes. Aquest procediment és el que es mostra en la figura 1.

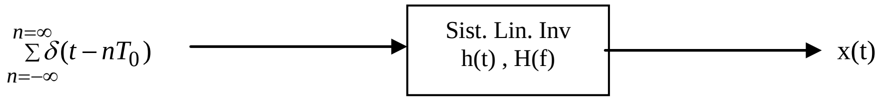


Figura 1

En aquest problema s'analitzen alguns aspectes d'aquest sintetitzador.

a) Es pot afirmar, en qualsevol cas, que el senyal generat x(t) és periòdic? Justifiqui-ho. Expressi x(t) en funció de h(t).

b) Podria ser que el senyal generat x(t) fos una sinusoide? En cas afirmatiu, de quina o quines freqüències es podria generar aquesta sinusoide? Justifiqui-ho i doni una possible expressió de h(t) que ho permeti.

c) El senyal generat x(t) s'aplica a un analitzador d'espectres obtenint-se la funció mostrada en la figura 2. L'analitzador d'espectres ens dóna el mòdul de la Transformada de Fourier Y(f), on y(t) és el senyal x(t) observat en un interval de T seg. :

c.1) A partir de Y(f), quina informació coneix relativa a la resposta freqüencial del filtre? Doni l'expressió de X(f) i la TF del senyal y(t) present a la pantalla de l'analitzador.

c.2) Trobi justificadament el valor de T_0 i la durada T de la finestra d'observació. Què canviaria si s'augmenta el valor de T?

c.3) Quant val A_{xo}, l'àrea d'un periode de x(t)? I A_h, l'àrea de h(t)?

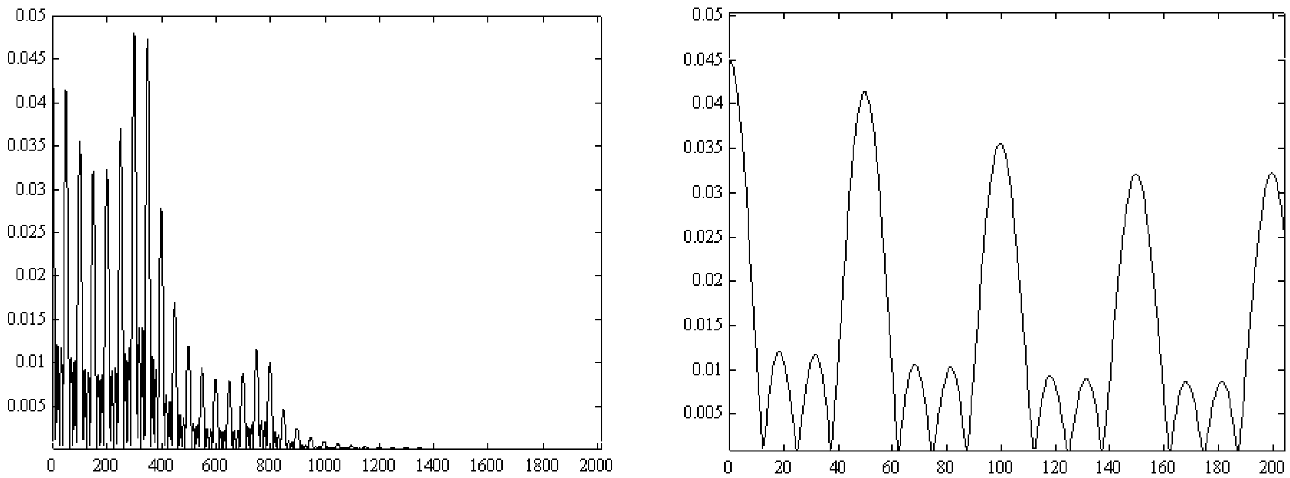


Figura 2. Resultat de l'analitzador d'espectre. A la dreta ampliació d'aquest resultat en el marge de 0 a 200 Hz.

d) Suposi que substitueix, com a senyal d'entrada del sintetitzador, el tren de deltes per un tren de polsos rectangulars $\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \Pi(\frac{t-nT_0}{\tau})$, en què canviaria el resultat |Y(f)| que apareix a la pantalla de l'analitzador d'espectres? Si ho creu necessari, trobi l'expressió de Y(f).

Exercici 2

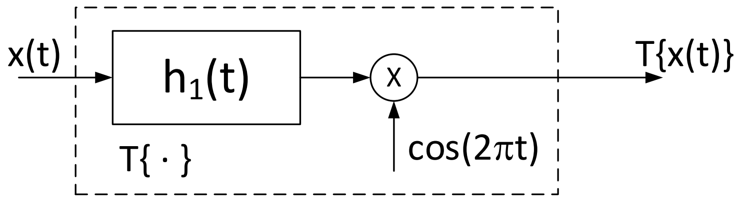
Donat un sistema que està caracteritzat per la seva resposta impulsional $h(t) = [\, e^{-2t}.u(t+1)\,].\cos(2\pi t)$, es demana:

a) Discutir justificadament les propietats de linealitat, invariància temporal, causalitat i estabilitat.

b) Trobar, mitjançant la convolució, la sortida del sistema anterior quan l'entrada és $x(t) = e^{-2t}.u(t)$.

c) Calcular H(f), la resposta en freqüència del sistema.

d) Justificar si el sistema de l'apartat **a)** és equivalent al de la següent figura, on $h_1(t) = e^{-2t}.u(t+1)$.



e) Si es volgués implementar el sistema de l'apartat **a)** mitjançant un DSP (Processador Digital del Senyal) caldria obtenir una resposta impulsional h[n] que fos equivalent a la h(t) analògica. Aquesta h[n] la volem obtenir mostrejant la h(t). Es demana:

e.1) Justificar per què no seria possible obtenir un sistema que reproduís exactament el comportament del sistema analògic.
e.2) Proposar un valor de freqüència de mostratge raonable per tenir un sistema discret que es comporti de forma similar a l'analògic.
e.3) Pel valor proposat, dibuixar les cinc primeres mostres no nul·les de h[n], indicant clarament els valors i posicions.
e.4) Seria un sistema FIR o IIR?

Exercici 3

Considerem un sistema digital amb resposta impulsional $h[n]=p_4[n]$.

a) Determineu (deduïu) l'expressió de la TF de $p_L[n]$. Dibuixeu-ne aproximadament el mòdul per a L=4 entre F=-1 i F=1.

Si l'entrada al sistema és el senyal real d'energia finita $x[n]$, i la sortida és $y[n]$, llavors la correlació creuada entre sortida i entrada ve definida per : $R_{yx}[m]= y[m]*x[-m]$

b) Determineu l'expressió de $R_{yx}[m]$ en funció de l'autocorrelació de l'entrada $R_{xx}[m]$ i de la resposta impulsional $h[m]$. Obtingueu l'expressió equivalent en el domini transformat, és a dir, en funció de F, on $S_{yx}(F)$ és la Transformada de Fourier de $R_{yx}[m]$.

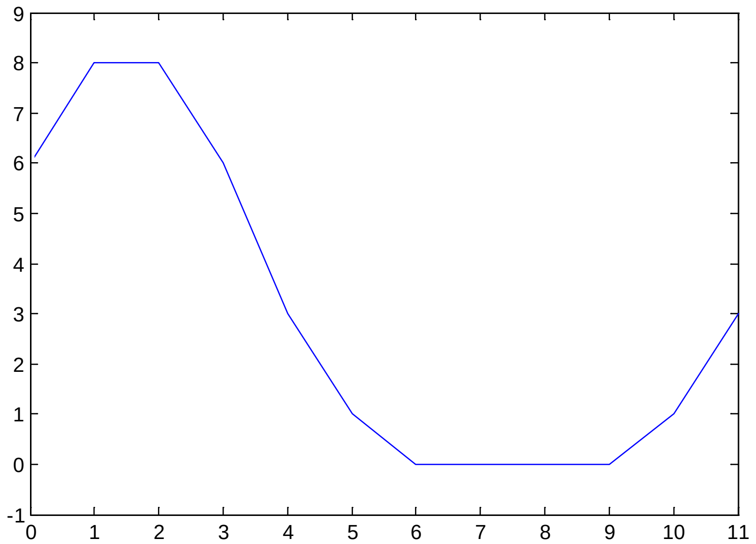
A partir d'ara suposarem que $x[n]=p_3[n]$.

Es vol usar la DFT de N punts per a calcular $R_{yx}[m]$. Amb aquest propòsit, es demana:

c) Expliqueu el procediment a seguir per obtenir $R_{yx}[m]$ a partir de $x[n]$ i $h[n]$ amb la DFT (sense convolucions) i indiqueu raonadament el valor mínim de N.

d) Doneu els valors de $H[k]$, DFT de $h[n]$, per a N=4. Poseu-los en relació amb el dibuix de $H(F)$ realitzat a (a). A continuació, indiqueu sobre el dibuix els valors de $H[k]$ per a N=12 (no cal calcular-los).

e) Als valors $S_{yx}[k]$, k=0,1,...,11, obtinguts amb el procediment de l'apartat **c)** i usant DFTs de longitud N=12, se'ls ha aplicat una DFT inversa de la mateixa longitud, i s'ha obtingut la seqüència de 12 valors que es mostra a la següent figura. A partir d'aquesta seqüència, trobeu raonadament els valors de $R_{yx}[m]$, $-\infty<m<\infty$, justificant adequadament la relació existent entre la seqüència que s'observa a la figura i $R_{yx}[m]$.



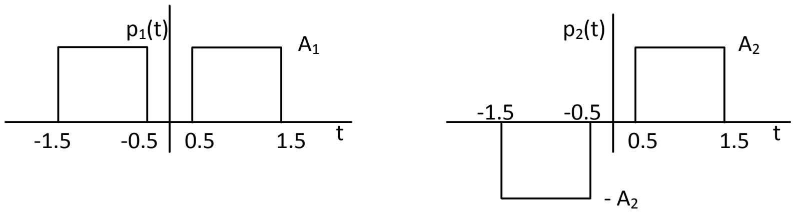
Senyals i Sistemes **Examen Final P16: 7 de Juny del 2016** **Durada: 3h**

Pub Notes Prov.: 14 -6-16 Veure Examen: 15-6-16 (10h) Al.legacions: 16-6-16 (fins 10h) Pub. Notes Def: 20-6-16

No es permet l'ús de calculadores, mòbils, llibres i/o apunts. Les respostes d'exercicis diferents s'han d'entregar en fulls separats

Exercici 1

Tenim un parell de senyals de durada finita $p_1(t)$ i $p_2(t)$:

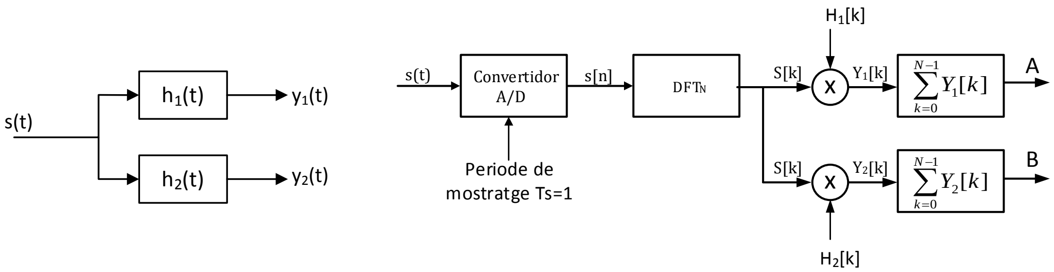


a) Indiqueu quin ha de ser el valor de A_1 i A_2 per a que l'energia dels polsos sigui en els dos casos unitària.

b) Calculeu la correlació creuada entre els polsos $p_1(t)$ i $p_2(t)$ si $R_{p1p2}(\tau) = p_1(\tau) * p_2(-\tau)$

c) Sabent que dos senyals són ortogonals quan $R_{xy}(0)=0$, justifiqueu si els polsos $p_1(t)$ i $p_2(t)$ ho són.

Amb la intenció de saber si el senyal s(t) correspon al pols $p_1(t)$ o al pols $p_2(t)$ es calcula $y_1(t)$ com la correlació creuada entre s(t) i $p_1(t)$, i $y_2(t)$ com la correlació creuada entre s(t) i $p_2(t)$ tal com il·lustra la figura de l'esquerra:



La implementació del sistema anterior es fa mitjançant la DFT segons es mostra a la figura de la dreta, on $0 \leq n,k \leq N-1$.

d) Obtingueu de forma justificada la resposta impulsional del sistema $h_2(t)$ per a que el senyal $y_2(t)$ sigui la correlació creuada entre s(t) i $p_2(t)$.

e) Justifiqueu que per N=8 el valor de $H_2[k]$ és: $H_2[k]=2\cdot j\cdot \sin(\pi/4k)$ amb $0 \leq k \leq 7$.

f) Justifiqueu quin ha de ser el valor mínim de N (número de punts de la DFT)?

g) En referència als sumatoris sobre els senyals $Y_1[k]$ i $Y_2[k]$,
- Per què es fa el sumatori?
- Si $s(t)=p_2(t)$, quins seran els valors de A i B a la sortida dels dos sumatoris?
- Expliqueu com podem utilitzar aquest resultat per saber si el senyal s(t) correspon al pols $p_1(t)$ o al pols $p_2(t)$.

h) Argumenteu si $T_s=1$ és un valor adequat per a poder implementar el sistema amb el propòsit desitjat (saber si el senyal s(t) correspon al pols $p_1(t)$ o al pols $p_2(t)$).

Exercici 2

Sigui el senyal $x(t) = \cos(2\pi t).\Pi(2t)$

a) Obtingui justificadament X(f), la Transformada de Fourier de x(t). Quant val l'àrea de x(t)?

b) Dibuixi $x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t-2n)$. Calculi i dibuixi la seva Transformada de Fourier. Indiqui si presenta alguna simetria.

Es desitja filtar $x_p(t)$ amb un filtre ideal h(t), de manera que a la sortida del filtre s'obtingui un senyal de la forma $y(t)= a_1 \cos(2\pi f_1 t) + a_2 \cos(2\pi f_2 t)$ amb f_1= 1Hz , f_2 = 1.5Hz. Es demana:

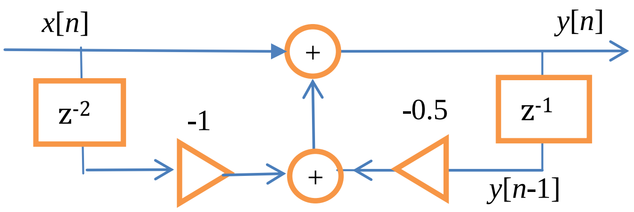
c) Dedueixi justificadament la Resposta Freqüencial d'un possible filtre ideal h(t). Trobi la seva la Resposta Impulsional.

d) Obtingui (de forma exacta) el Desenvolupament en Sèrie de Fourier de la sortida y(t). És periòdic el senyal y(t)? En cas afirmatiu, trobi el seu període i la seva freqüència fonamental. (Nota: Si no ha trobat els valors de a_1 i a_2, en endavant deixi-ho tot indicat en funció d'aquestes constants)

e) Discuteixi si seria possible mostrejar els senyals $x_p(t)$ i y(t), verificant el Criteri de Nyquist. En cas afirmatiu, indiqui quina condició hauria de complir la freqüència de mostratge.

Exercici 3

Sigui el sistema digital causal definit pel diagrama següent:



Es demana:

a) Escriure l'equació de diferències finites que relaciona la sortida $y[n]$ amb l'entrada $x[n]$.

b) A partir de l'equació anterior, obtenir $H(z)$. Indicar l'ordre del sistema, i mostrar la posició dels pols i zeros en el pla z i en relació al cercle de radi 1.

c) Fer un esbós del mòdul de la resposta freqüencial $H(F)$ per a l'interval freqüencial $0 \leq F \leq 2$. Indicar quin tipus de filtre és (passa-baix, etc) i discutir la seva estabilitat (què determina que sigui o no estable, per què ho determina).

Considerem un senyal analògic que es pot expressar amb la següent descomposició en sèrie de cosinus:

$$x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} 0.5^i \cos(4000\pi i t)$$

Aquest senyal $x(t)$ es converteix a digital, obtenint-se $x[n]$, el qual és processat pel sistema digital de la figura anterior per obtenir $y[n]$.

La freqüència de mostratge f_m del conversor A/D és 8 kHz i la freqüència de tall del filtre antiàlies (que se suposa ideal) és igual a 3.6 kHz.

Es demana:

d) Trobar justificadament quins components freqüencials de $x(t)$ continuen estant presents a $x[n]$ i quins a $y[n]$ (s'han d'indicar tots els components dins l'interval $-\infty \leq F \leq +\infty$).

e) Obtenir $Y(F)$, transformada de Fourier de $y[n]$.

f) A partir de $Y(F)$, obtenir justificadament l'expressió (trigonomètrica) de $y[n]$, donant-la amb valors concrets. Si és periòdica, indicar quin és el seu període.

Si es vol usar la DFT per analitzar espectralment el senyal $y[n]$, cal partir d'un segment de longitud N del senyal $y[n]$, que anomenarem $s[n]$, és a dir, $s[n]=y[n]$, n=0,1,...,N-1. <u>Nota</u>: si no s'han resolt els apartats anteriors, suposi's que $y[n]$ és una sinusoide de freqüència F_0.

g) Indicar raonadament de quina funció $S(F)$ són mostres els valors $S[k]$ de la DFT de N punts de $s[n]$. Escriure $S(F)$ detalladament, sense deixar-la en funció de cap altra transformada. Fer un esbós del mòdul de $S(F)$.

h) Trobar, justificant-ho adequadament, la condició que ha de complir N per tal d'observar a $S[k]$ deltes discretes a les freqüències on $Y(F)$ hi té deltes de Dirac i només en elles. Indicar els valors de l'índex k a aquestes freqüències en funció de N.

Senyals i Sistemes **Examen Final P16:** **7 de Juny del 2016**
Durada: 3h

Publicació Notes Prov.: 10/06 Rev. Examen : 13/6 Al.legacions:13/6 (11h) Pub. Notes Def:14/6

No es permet l'ús de calculadores, mòbils, llibres i/o apunts.

Les respostes d'exercicis diferents s'han d'entregar en fulls separats

Exercici 1

Sigui el senyal $x(t)=\cos\left(\frac{2\pi}{8}t\right)\cdot\Pi\left(\frac{t}{4}\right)$

a) Representi gràficament $x(t)$
   1. Obtingui justificadament i dibuixi $X(f)$, la Transformada de Fourier de $x(t)$
   2. Calculi les àrees de $x(t)$ i de $X(f)$

b) A partir de $x(t)$ es genera el senyal periòdic $x_p(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(t-8\cdot n)$.
   1. Representi gràficament $x_p(t)$ i indiqui el valor del seu període.
   2. Calculi i dibuixi la seva Transformada de Fourier $X_p(f)$.

c) Trobi el valor exacte de l'Energia i la Potència mitjana dels senyals $x(t)$ i $x_p(t)$.

Es desitja filtrar $x_p(t)$ amb un filtre ideal de resposta impulsional $h(t)$, de manera que a la sortida del filtre s'obtingui un senyal de la forma $y(t)=C+A\cos(2\pi f_1 t)$ amb $f_1=\frac{1}{8}Hz$. Es demana:

d) Dedueixi justificadament la resposta freqüencial del filtre $H(f)$ i la seva resposta impulsional $h(t)$

e) Indiqui els valors de C i A

Exercici 2

Es vol mostrejar el senyal $x(t)=\cos(2\pi f_1 t)+A\cdot\cos(2\pi f_2 t)$, amb $f_1=1000Hz$ i $f_2=5000Hz$, amb un sistema conversor analògic-digital ideal i freqüència de mostratge f_m, sense filtre antialiàsing, per obtenir $x[n]=x(t)\big|_{t=nT_m}$.

a) Trobi la transformada de Fourier de $x(t)$, $X(f)$ i representi gràficament el seu mòdul.

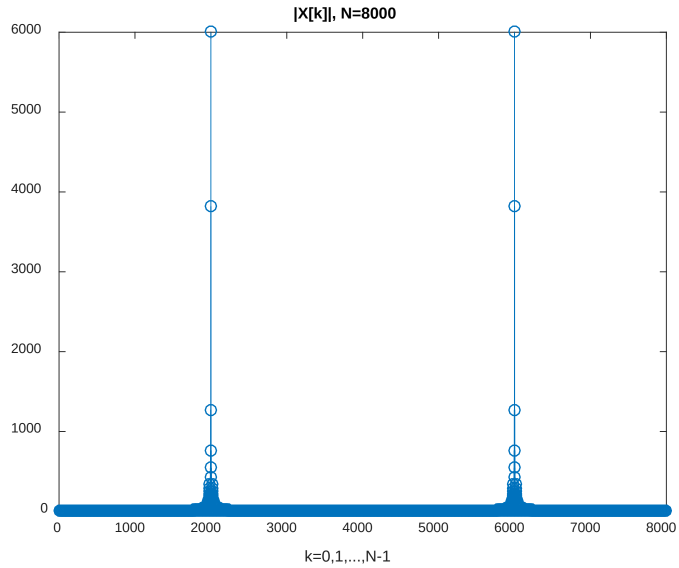
b) Quina és la freqüència de mostratge mínima per poder recuperar el contingut complet del senyal?

El senyal $x(t)$ es mostreja amb $f_m=4000Hz$

c) Obtingui $x[n]$ i representi gràficament 10 mostres de la seqüència digital

d) Trobi i representi el mòdul de la transformada de Fourier de $x[n]$, $X(F)$ entre $-0.5\le F\le 0.5$

Es consideren $L_x=4000$ mostres de senyal i es calcula la DFT$_N$ de $x_{L_x}[n]=x[n]\cdot p_{L_x}[n]$, amb N=8000, obtenint el resultat de la figura



A partir del senyal digital $x[n]$ es recupera el senyal analògic $y(t)$ amb un conversor digital-analògic ideal.

e) Trobi el senyal $y(t)$ tot relacionant els valors d'amplitud i freqüència amb els valor que es dedueixen de la DFT$_N$ de $x_{L_x}[n]$. Dedueixi el valor A d'amplitud de la segona sinusoide de $x(t)$

Ejercicio 3

Sea una señal discreta x[n] distinta de cero en $0 \le n < M-1$ y otra secuencia discreta $y[n]$ distinta de cero en $0 \le n < L-1$. Se desea hallar la convolución entre las secuencias: $z[n] = x[n] * y[n]$. El cálculo de la convolución de una señal discreta $x[n]$ de M muestras y otra $y[n]$ de L muestras precisa M·L operaciones tipo multiplicación. Esta convolución se puede realizar mediante DFTs. Por existir un algoritmo rápido para su cálculo, el uso de DFTs puede ser computacionalmente ventajoso cuando M y L tienen valores grandes, por ejemplo mayores que 256 muestras. El algoritmo a realizar es:

1. Calcular $X_N[k] = DFT_N\{x[n]\}$
2. Calcular $Y_N[k] = DFT_N\{y[n]\}$
3. Multiplicar las DFTs $V[k] = X_N[k] \cdot Y_N[k]$
4. Hallar la DFT inversa $v[n] = IDFT_N\{V[k]\}$, $0 \le n < N-1$

No obstante, la validez del algoritmo depende de la correcta elección de N.

a) Relacione $v[n]$ con $z[n]$

b) ¿Cuánto debe valer N para que $z[n] = v[n]$; $0 \le n < N-1$?

c) Suponga $x[n] = \{\underline{1},1,1,1\}$, $y[n] = \{\underline{1},2,3\}$. Calcule su convolución $z[n] = x[n] * y[n]$

d) Obtenga $v[n]$ si $N = 8$

e) Obtenga $v[n]$ si $N = 4$

Senyals i Sistemes **Examen Final T16 : 13 de Gener del 2017** **Durada: 3h**

Notes Prov.: 20-1-17 **Veure examen corregit: 24-1-17** **Al·legacions: fins 25-1-17 (11h)** **Notes Def.: 26-1-17**

Cal justificar bé cada pas dels raonaments. No es permet l'ús de calculadores, mòbils, llibres i/o apunts. Les respostes d'exercicis diferents s'han d'entregar en fulls separats

EXERCICI 1

El "tremolo" és un efecte musical que consisteix en provocar variacions lentes de l'amplitud del senyal d'àudio. Es pot formular genèricament com: $y(t)= [(1-\alpha) - \alpha\, z(t)]\, x(t)$, on α és una constant entre 0 i 0.5, z(t) és un senyal periòdic (un cas habitual és el de z(t) sinusoïdal) de baixa freqüència (típicament $\leq 20Hz$) i d'amplitud normalitzada, i x(t) és el senyal d'àudio sobre el que s'aplica l'efecte.

Per començar, analitzem un cas simple. Suposi $x(t)=\sin(2\pi f_x t)$, $z(t)=\cos(2\pi f_0 t)$, i els paràmetres $\alpha=0{,}5$ i $f_0=10$ Hz i $f_x=100$ Hz.

a) Faci un dibuix aproximat de y(t) en l'interval $0 \leq t \leq 0{,}1$.

b) Calculi i dibuixi acuradament Y(f).

Suposi ara que el senyal x(t) té una Transformada de Fourier, X(f), com la que es mostra en la figura 1.

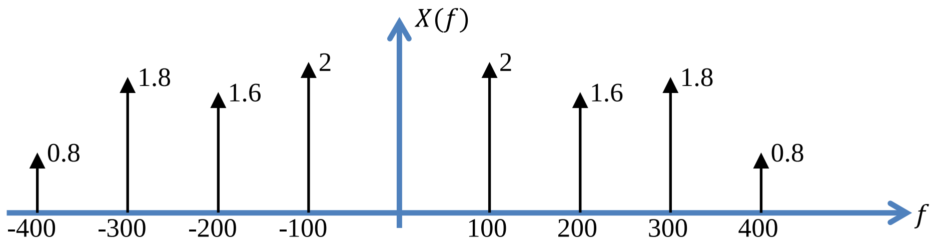


Figura 1

c) Dibuixi Y(f) pel cas $\alpha=0{,}5$ i $f_0=10$ Hz.

Un altre cas força habitual és el de provocar variacions lineals de l'amplitud del senyal d'àudio. És el cas en que l'envoltant z(t) segueix una forma d'ona com la mostrada en la figura 2.

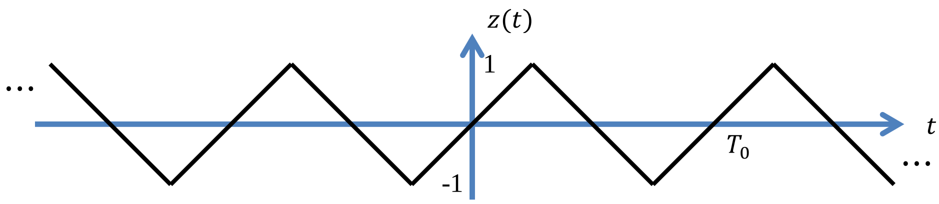


Figura 2

d) Escrigui l'expressió analítica d'aquest z(t) de periodicitat T_0.

e) Obtingui Z(f).

Pels següents apartats utilitzi els valors de $\alpha=0{,}5$ i $f_0=10$ Hz (amb $T_0=1/f_0$).

f) Tenint en compte l'anterior Z(f) i la X(f) de la figura 1, a quines freqüències hi hauran les deltes de Y(f)?
Nota: Suposi que pot prescindir de tots els harmònics de z(t) superiors al primer.

g) De l'apartat anterior dedueixi quin és el període del senyal y(t), si és que creu que és periòdic. En qualsevol cas, justifiqui la resposta.

EXERCICI 2

Para identificación de pulsos reales se suele utilizar lo que se denomina filtro adaptado. Para una señal x(t) definida en el intervalo (0,T) seg y energía finita E_x, el filtro adaptado a la señal x(t) es un sistema LI de respuesta impulsional h(t)=x(-t).

a) Demuestre que si y(t)=x(t)*h(t), siempre se verifica que $y(0)=E_x$

b) Sea la señal $x(t)=\prod\left(\frac{t-1}{2}\right)-\prod\left(\frac{t-3}{2}\right)$ y un sistema LI caracterizado por h(t)=x(-t). Halle y dibuje la salida y(t)=x(t)*h(t).

c) El sistema definido en b), ¿es causal?, ¿es estable? Justifique las respuestas.

d) Modifique h(t) para que el sistema sea causal. ¿Con el sistema modificado, en qué instante t_0 se obtiene $y(t_0)=E_x$?

e) Pruebe que si al filtro adaptado a una señal x(t) se aplica otra señal z(t) de igual energía y duración que x(t), el máximo de la salida g(t)=z(t)*h(t) siempre será menor que E_x a menos que z(t)=±x(t-tr). Para resolver este apartado, escriba la ecuación de convolución de g(t) en función de x(t) y z(t) y aplique la desigualdad de Schwarz.

f) ¿Cómo utilizaría las propiedades del filtro adaptado vistas en a) y e) para la identificación de pulsos con la forma de x(t), entre otros pulsos z(t) de igual energía?

g) Relacione la señal y(t) del apartado a) y la señal g(t) del apartado e) con funciones de autocorrelación y correlación cruzada.

<u>Nota:</u> Desigualdad de Schwarz $\left|\int u.v^*\right|^2 \leq \int |u|^2 \int |v|^2$ Se cumple con igualdad si $u=kv$

EXERCICI 3

Donat un senyal format per dos tons mostrejats sense aliasing a una freqüència f_s=8KHz : $x[n]=\cos\left(2\pi\frac{5}{16}n\right)+\cos\left(2\pi\frac{3}{8}n\right)$

Es demana:

a) Doni l'expressió de la seva Transformada de Fourier (TF) X(F)

b) Dibuixi X(F) en l'interval $0 \leq F < 1$.

c) Quina és la freqüència original dels tons (abans de mostrejar)?

La seqüència, no obstant, s'ha de limitar en duració.

d) Si la limitació es realitza amb una finestra rectangular de duració L mostres (amb L senar):

$$w_R[n]=p_L\left[n+\frac{L-1}{2}\right]=\begin{cases}1 & |n|\leq\frac{L-1}{2}\\ 0 & |n|>\frac{L-1}{2}\end{cases}$$

obtingui la TF de la finestra $W_R(F)=TF\{w_R[n]\}$ a partir de la definició de TF

Una altra opció consisteix en utilitzar una finestra triangular. En aquest cas la TF d'una finestra de la mateixa duració L, té la següent expressió: $W_T(F)=\dfrac{\sin^2\left(\pi F\frac{L+1}{2}\right)}{\sin^2(\pi F)}$

e) Analitzem primer el cas en que x[n] només contingués el to de més baixa freqüència, obtingui doncs $X_{T_1}(F)=TF\left\{\cos\left(2\pi\frac{5}{16}n\right).w_T[n]\right\}$ per a una L genèrica. Pel cas particular de $L=31$ dibuixi $X_{T_1}(F)$ en l'interval $0 \leq F < 1$. Indiqui clarament la posició dels zeros i el valor i la posició dels dos màxims absoluts.

f) Considerant ja el senyal amb els dos tons, obtingui i dibuixi $X_T(F)=TF\{x_T[n]\}=TF\{x[n]w_T[n]\}$ amb $L=31$. Per aquest cas concret, compari avantatges i inconvenients d'utilitzar la finestra rectangular o bé la finestra triangular.

Finalment, suposi que el senyal es limita amb la finestra triangular de durada $L=127$ i es treballa amb valors discrets en freqüència.

g) Per a la DFT de $x_T\left[n-\frac{L-1}{2}\right]$ amb $N=512$ punts (pot anomenar-la $X_T[k]$), trobi els valors de k on es situen els màxims de $|X_T[k]|$ i el valor d'aquests màxims.

Problema 1

El sistema de la figura 1 modula i filtra el senyal a la seva entrada.

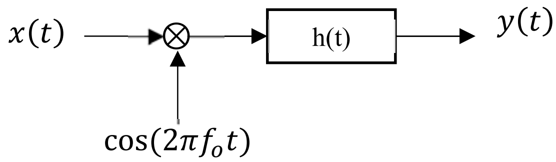


Figura 1

On $h(t) = e^{-\frac{t}{2}}u(t)$

a) Analitzi les propietats de causalitat, invariància i estabilitat del sistema complet
b) Obtingui $H(f)$ i representi gràficament el seu mòdul
c) Per $x(t) = Acos(2\pi f_x t)$, amb $f_x \geq f_o$, trobi $Y(f)$ i representi-la gràficament
d) Obtingui $y(t)$ per $A = 6\ i\ f_o = f_x = 5Hz$

Problema 2

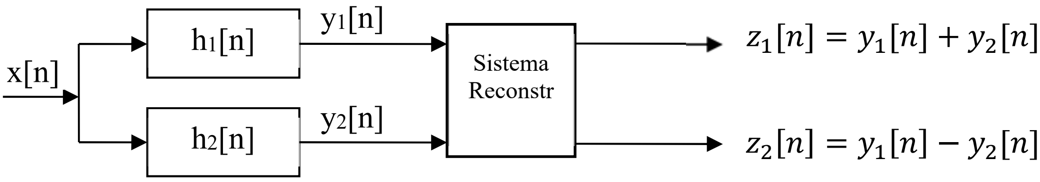


Figura 2

A la figura 2 es mostra un sistema equalitzador de dues bandes. El senyal es separa en banda baixa i banda alta. Cada banda queda amplificada/atenuada per un factor constant. Finalment, un sistema reconstructor combina els dos senyals obtenint dos senyals de sortida.

Consideri:

$$h_1[n] = A(\delta[n] + \delta[n-1])$$
$$h_2[n] = B(\delta[n] - \delta[n-1])$$

a) Obtingui la relació entre la seqüència de sortida $y_1[n]$ i la seqüència d'entrada x[n]. Ídem amb $y_2[n]$.
b) Obtingui $H_1(z)$ i $H_2(z)$. Representi els seus diagrames de pols i zeros.
c) Obtingui i dibuixi les respostes freqüencials dels dos subsistemes $H_1(F) i\ H_2(F)$, indicant quin dels dos és passa-baixes i quin passa-altes.
d) Obtingui $z_1[n]\ i\ z_2[n]$ en funció de $x[n]$.
    a. Per quins valors de A i B pot recuperar el senyal $x[n]$? Expliqui el procediment que faria servir.
e) En el cas en que $A = B$, dedueixi com podria recuperar el senyal complet $x[n]$ si només es coneixen les mostres per n parell de $z_1[n]$ i $z_2[n]$.
f) $H_1(F)$ es mostreja amb N mostres equiespaiades en l'interval $0 \leq F < 1$, per obtenir $H_1[k] = H_1(F)|_{F=\frac{k}{N}}$, amb $k = 0,1, \ldots, N-1$. Quina és la seqüència que s'obtindrà fent DFT inversa, amb N=5?

Problema 3

L'esquema de la figura 3 representa un model simplificat d'un sistema generador de senyal sonor:

$$x(t) = A\sum_{n=-\infty}^{\infty} \Pi\left(\frac{t-nT_p}{T}\right)$$

amb $f_p = \frac{1}{T_p} = 2kHz$

A=0.5

$T = 0.2ms$

$$h(t) = \frac{1}{T}\Pi\left(\frac{t}{T}\right)$$

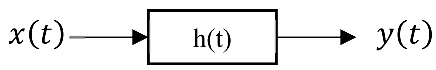


Figura 3

Es demana:

a) Obtingui el desenvolupament en sèrie de Fourier i la transformada de Fourier de $x(t)$ i faci una representació gràfica de $x(t)$ i $X(f)$

b) Obtingui la resposta freqüencial de filtre, $H(f)$ i representi el seu mòdul

c) Trobi el senyal a la sortida del filtre, $y(t)$ i representi'l acuradament

   a. Quan val el seu període?
   b. Quina és la seva freqüència fonamental?
   c. Calculi la seva potència mitjana

d) Trobi la transformada de Fourier de $y(t)$ i representi gràficament el seu mòdul

El senyal $y(t)$ es mostreja amb un convertidor analògic-digital ideal de freqüència $f_m = 40kHz$, obtenint-se la seqüència

$$y[n] = y(t)|_{t=nT_m}$$

e) Argumenti si la freqüència de mostratge és adequada i expliqui quins efectes de distorsió es poden produir

f) Del senyal $y[n]$ es consideren les L primeres mostres, i es fa una DFT_N amb $N = 4000$. A la figura 4 es representa el mòdul de $Y[k], per\ k = 0, \dots, \frac{N}{2}$. Obtingui el valor de L a partir de mesures realitzades en aquest gràfic:

   El màxim es troba a $k = 0$ i val $Y[0] = 40$

   Per $k = 180, k = 220$, entre d'altres, $Y[k] = 0$

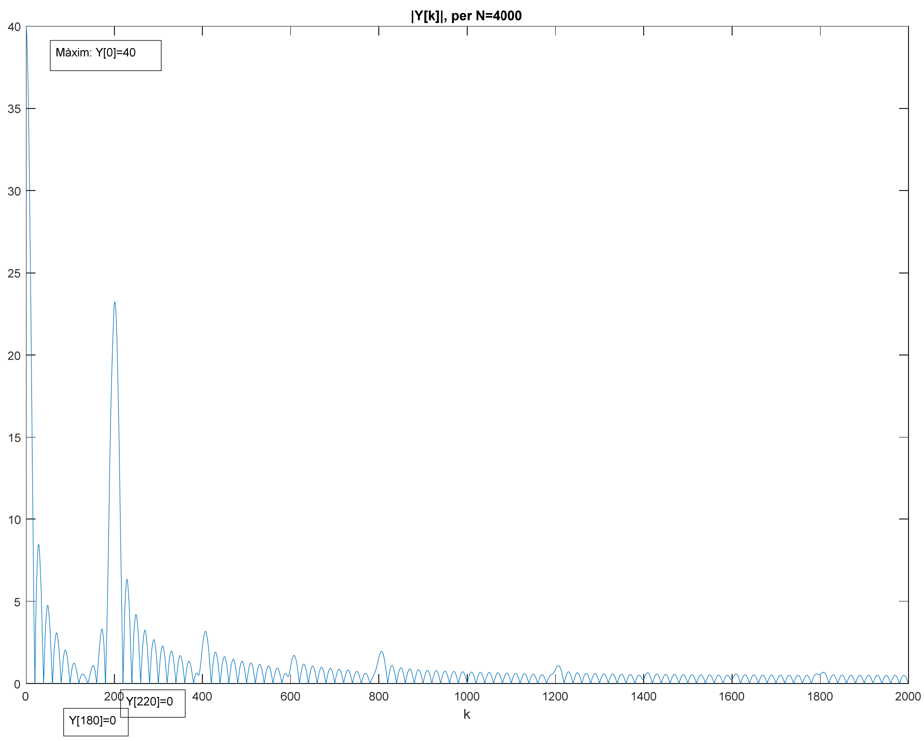


Figura 4

Senyals i Sistemes **Examen Final P17 : 6 de Juliol del 2017** **Durada: 3h**

Notes Prov.: 12-7-17 Veure examen corregit: 13-7-17 Al·legacions: fins 14-7-17 (10h) Notes Def.: 17-7-17

<u>Cal justificar bé cada pas dels raonaments. No es permet l'ús de calculadores, mòbils, llibres i/o apunts. Les respostes d'exercicis diferents s'han d'entregar en fulls separats</u>

EXERCICI 1

Sigui el senyal $x(t)=\Pi\left(\frac{t-1}{2}\right)-\Pi\left(\frac{t+1}{2}\right)$ que s'aplica a un SLI de resposta impulsional $h(t)=e^{-t}u(t+1)$. Es demana:

a) Dedueixi justificadament si el sistema caracteritzat per $h(t)$ verifica les propietats de causalitat i estabilitat.

b) La Transformada de Fourier (TF) d'un senyal real i parell verifica que és real i parell. No és el cas del senyal x(t) anterior, que és real i senar. Quina propietat verifica la Transformada de Fourier per senyals d'aquest tipus? Demostri-ho (pel cas general).

c) Calculi el senyal de sortida y(t)=x(t)*h(t).

d) Obtingui la TF de la sortida, Y(f)

e) Si a la entrada del sistema s'hi aplica el senyal periòdic $x_p(t)=4\sin(2\pi 2t)$, obtingui justificadament:

   a. la seva sortida $y_p(t)$, deixant indicats els càlculs numèrics

   b. la potència mitjana dels senyals d'entrada $x_p(t)$ i de sortida $y_p(t)$

EXERCICI 2

Donat el senyal real

$$x[n]=\{\underline{1}\,,1\,,a\,,1\,,1,0,0,0\};\quad per\quad n=0,1,2,3,4,5,6,7$$

i la seva DFT amb N=8 punts

$$X[k]=\{6\,,-(2+\sqrt{2})\,j\,,0\,,(2-\sqrt{2})j\,,2\,,b\,,c\,,d\};\quad per\quad k=0,1,2,3,4,5,6,7$$

on ***a***, ***b***, ***c***, i ***d*** són valors desconeguts.

Aplicant les propietats de la DFT, respongui a les següents preguntes. <u>Totes les respostes han d'estar degudament justificades</u>. No es considerarà vàlida cap resposta correcta sense la seva deguda justificació.

a) Trobi el valor de la constant ***a***.

b) Indiqui quin és el valor de les constants ***b***, ***c***, i ***d***.

c) Sigui $y_1[n]=DFT_N^{-1}\left\{X[k]\cdot e^{-j\frac{2\pi}{8}6k}\right\}$, quin serà el valor de $y_1[0]$?

d) Sigui $Y_2[k]$ la seqüència $Y_2[k]=\{\,0\,,(2-\sqrt{2})j\,,2\,,b\,,c\,,d,6\,,-(2+\sqrt{2})\,j\,\}$, quina és la seqüència $y_2[n]=DFT_N^{-1}\{Y_2[k]\}$?

Sigui $H[k]$ la seqüència de N números resultant de mostrejar $H(F)=e^{-j2\pi 2F}$ en $F=\frac{k}{N}$ per $k=0\ldots N-1$, i $y_3[n]=DFT_N^{-1}\{X[k]\cdot H[k]\}$.

e) Per N=8, podem afirmar que en l'interval $0\le n\le N-1$ les convolucions lineal i circular entre x[n] i h[n] coincideixen, és a dir que s'acompleix la igualtat?:

$$y_3[n]=x[n]\circledast h[n]=x[n]*h[n]$$

f) Quin ha de ser el mínim valor de N en aquest cas per a que la condició s'acompleixi? (Nota, es demana un valor concret, no es considerarà vàlida una fórmula genèrica).

EXERCICI 3

Para producir una nota en un instrumento musical de cuerda se debe hacer vibrar una de las cuerdas con una longitud determinada al efecto de generar la frecuencia de la nota que se quiere reproducir y sus armónicos. El sonido producido por la cuerda entra en la caja de resonancia del instrumento y ésta amplifica el sonido producido por la cuerda de una forma característica para cada instrumento en particular. Cada instrumento tiene una respuesta frecuencial propia y produce un sonido u otro en función de las frecuencias originadas por la vibración de la cuerda pulsada. Esta interpretación nos conduce a suponer un modelo simplificado de la señal analógica producida por el instrumento dado por la expresión:

$$x(t) = \sum_{k=1}^{K} C_k \cos(2\pi k f_0 t + \varphi_k)$$

Donde f_0 es la frecuencia fundamental, 'la nota', los armónicos están a las frecuencias $k \cdot f_0$ y la caja de resonancia produce las amplitudes características del instrumento y los correspondientes desfases, C_k y φ_k. Por simplicidad, supondremos que **todas las fases** φ_k son iguales a **cero**.

Se desea realizar el análisis frecuencial de una señal originada por una guitarra. Para analizar esta señal primero se realiza un filtrado paso bajo a la frecuencia f_c. Llamamos $x_a(t)$ a la señal filtrada

$$x_a(t) = x(t) * h(t) = \sum_{k=1}^{M} C_k \cos(2\pi k f_0 t) \quad con\ M \cdot f_0 < f_c < (M+1) \cdot f_0 \ \ y\ M < K$$

A continuación se digitaliza con una frecuencia de muestreo $f_m = 1/T_m$, por lo que a la salida del conversor A/D se obtiene

$$x_d[n] = x_a(n \cdot T_m) = \sum_{k=1}^{M} C_k \cos(2\pi k f_0 n T_m) = \sum_{k=1}^{M} C_k \cos(2\pi k F_0 n) \quad \text{donde } F_0 = f_0/f_m$$

a) La frecuencia de muestreo f_m se elige suficientemente grande para que no haya aliasing, ¿Qué debe verificar f_m en este caso concreto?

b) Calcule $X_d(F)$, la Transformada de Fourier de $x_d[n]$. Deje el resultado en función de C_k, F_0 y M

La relación entre $X_a(f)$ y $X_d(F)$ viene dada por la expresión: $f_m \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_a(f - n f_m) = X_d(F)|_{F=f/f_m}$
Como la señal $x_a(t)$ es de banda limitada a f_c , y se ha muestreado correctamente, no hay aliasing, por lo que podemos suponer que $X_a(f)$ se puede aproximar razonablemente por $X_a(f) \approx \frac{1}{f_m} X_d(F)|_{F=f/f_m}$ en el intervalo $|f| < f_m/2$ y analizar la T.F. de la señal analógica por medio de la T.F. de la secuencia $x_d[n]$. Para analizar la señal se utiliza un segmento de señal de L muestras, es decir se enventana con $w_L[n]$

$$x_w[n] = x_d[n] \cdot w_L[n]$$

c) Calcule $X_w(F)$, la T. de Fourier de $x_w[n]$. Deje el resultado expresado en función de $W_L(F)$, la TF de $w_L[n]$, C_k, F_0 y L.

Suponga que desea conocer la nota producida por una guitarra al tocar únicamente una cuerda; se dispone de una grabación muestreada a f_m=40 KHz. La señal se enventana mediante una ventana de Hamming de L=1000 muestras. A continuación se calcula $X_w[k]$, la DFT de N=2000 muestras de ese segmento enventanado. La Figura 1 muestra $|Xw[k]|$ para k=0,…,N/2; detallando algunos valores medidos de la DFT (resaltados con un círculo negro). Se pide:

d) Ancho de banda de la señal analógica
e) Frecuencia fundamental f_0 de la señal acústica que servirá para determinar 'la nota'

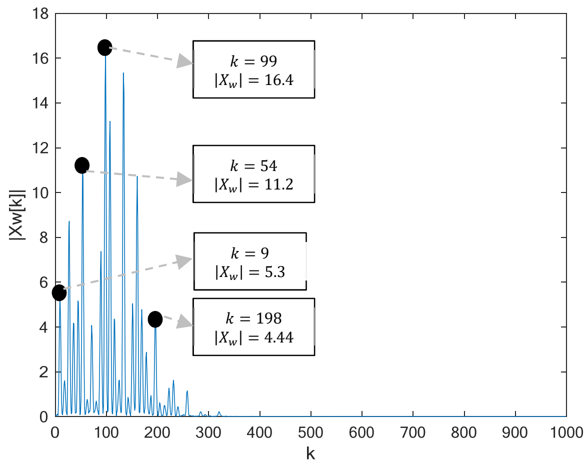


Figura 1

Escola Tècnica Superior d'Enginyeria de Telecomunicació de Barcelona
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Senyals i Sistemes **Examen Final P17 : 7 de Juny del 2017** **Durada: 3h**

Notes Prov.: 14-6-17 **Veure examen corregit: 15-6-17** **Al·legacions: fins 16-6-17 (10h)** **Notes Def.: 19-6-17**

Cal justificar bé cada pas dels raonaments. No es permet l'ús de calculadores, mòbils, llibres i/o apunts. Les respostes d'exercicis diferents s'han d'entregar en fulls separats

EXERCICI 1

Sea un sistema lineal e invariante con respuesta impulsional real $h[n]=b^n u[n]$.

a) ¿Es el sistema causal? Justifique la respuesta.

b) ¿Bajo qué condiciones el sistema es estable?.

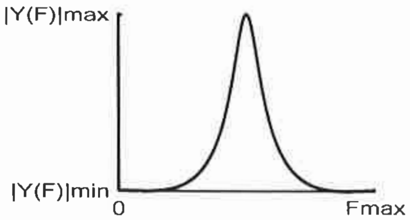
A la entrada del sistema se aplica la señal real $x[n]=a^n u[n]$ y se obtiene a la salida $y[n]= x[n]*h[n]$

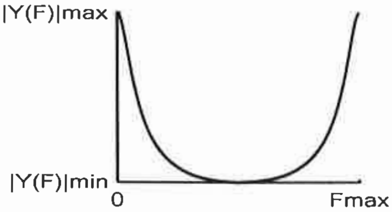
c) Demuestre que la señal de salida satisface $y[n]=x[n]*h[n]=\dfrac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}u[n]$.

d) Halle Y(F), la Transformada de Fourier de la señal de salida y[n].

e) Las dos figuras mostradas a continuación representan |Y(F)| para a=0.2 y b=0.7 y para a=0.2 y b=-0.7. Identifique a qué valor de b corresponde cada una de ellas. Justifique su respuesta.

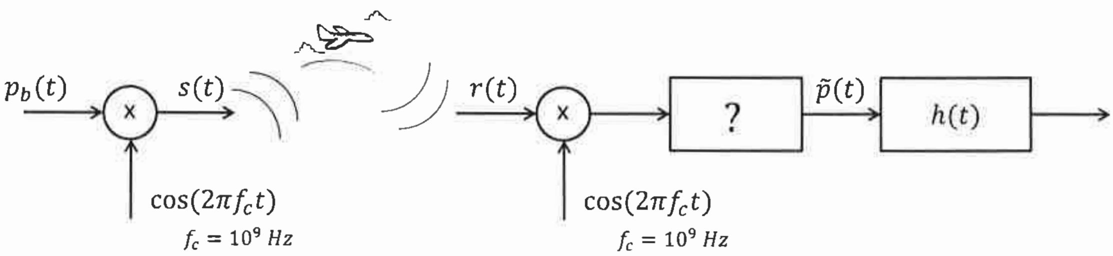
f) Complete en ambas figuras el eje de ordenadas (valor máximo y mínimo de cada gráfica) y el de abcisas (frecuencia máxima y posición de los máximos y mínimos)





EXERCICI 2

Un radar de posició, que té per objectiu mesurar la posició d'un blanc, emet un senyal conegut que rebota en el blanc i a partir de mesures sobre el senyal rebut es pot conèixer la seva posició (distància). La següent figura il·lustra el sistema complet:



Si $p_b(t)=\prod(2t)\cos(2\pi t)$ és el pols utilitzat pel radar, la seva Transformada és $P_b(f)=\frac{1}{4}\mathrm{sinc}\left(\frac{f-1}{2}\right)+\frac{1}{4}\mathrm{sinc}\left(\frac{f+1}{2}\right)$

a) Indiqui si el senyal $p_b(t)$ és un senyal de potencia mitjana finita o d'energia finita, justificant-ne la resposta, i calculi la seva energia o potencia mitjana (segons correspongui).

b) Si $R_p(\tau)$ és l'autocorrelació del pols $p_b(t)$, indiqui el valor del màxim de l'autocorrelació i la seva posició (valor de τ en el que hi ha el màxim).

A fi de poder transmetre el pols $p_b(t)$ es genera el senyal s(t) segons s'indica a la figura anterior, que es radia amb una antena transmissora. Alhora, una altra antena receptora, en la mateixa ubicació, espera a rebre el senyal r(t) provinent de la reflexió en el blanc. En cas de que existeixi un blanc, en una situació ideal, el senyal rebut, $r(t)=\alpha\cdot s(t-2t_0)$, seria el senyal transmès s(t) amb una atenuació α i un retard (on t_0 representaria el temps de propagació entre el radar i el blanc).

c) Indiqui justificadament com hauria de ser el sistema desconegut representat per "?" tal que faci que la sortida $\tilde{p}(t)$ sigui proporcional a $p_b(t-2t_0)$.

d) Si el senyal $\tilde{p}(t)$ es filtra amb un sistema lineal i invariant que té per resposta impulsional $h(t)=p_b(-t)$, raoni, sense fer cap càlcul, quan valdria el valor del màxim a la sortida del filtre, en quin instant de temps es produiria, i com podríem determinar la distància del blanc.

L'esquema anterior permetria realitzar una sola mesura. A fi d'estar constantment mesurant la posició dels blancs s'implementa un radar polsat que consisteix en transmetre periòdicament el pols $p_b(t)$ i mesurar la seva possible reflexió. Aquest comportament es pot modelar substituint el pols $p_b(t)$ pel senyal p(t): $p(t) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} p_b(t-l)$

e) Indiqui si el senyal p(t) és un senyal de potència mitjana finita o d'energia finita, justificant la seva resposta.

f) Trobi $S_p(f)$ la seva densitat espectral d'energia o potència (segons correspongui).

Nota : $\cos^2(a) = \dfrac{1+\cos(2a)}{2}$

EXERCICI 3

Sigui la seqüència periòdica y[n]=cos(nπ/2), es demana:

a) Trobi el seu període P. Doni l'expressió de la seva Transformada de Fourier (TF) Y(F) i dibuixi-la per a $-1 \le F \le 1$

b) Es genera la seqüència $z[n] = \begin{cases} y[n] & 0 \le n \le L-1 \\ 0 & altre\ \text{n} \end{cases}$. Es demana:

b.1) Si la seqüència z[n] , pel cas de L=100 mostres, s'ha obtingut per mostratge (f_s=1kHz) d'un tros de durada T seg d'un to analògic y(t)= A cos(2πf_1t), dedueixi justificadament els valors de f_1 , T i A

b.2) Expressi Z(F) en funció de Y(F).

b.3) A partir de la relació anterior, obtingui l'expressió de Z(F). Dibuixi aproximadament |Z(F)| pel cas L=8, amb tots els valors d'interès, per a l'interval $0 \le F \le 1$

b.4) Sigui $Z[k] = DFT_N\{z[\text{n}]\}$ i consideri L=8, es demana:

(a) Pels casos N=100 i N=4, indiqui per a quin (o quins) cas(os) es pot afirmar que $Z[k] = Z(F)$ per a $F = \dfrac{k}{N}$

(b) Pels casos N=100 i N=4, trobi justificadament quant val màx{|Z[k]|} i per a quin (o quins) valor(s) de k s'obté aquest valor.

c) Sigui $X[k] = DFT_4\{x[\text{n}]\}$, on $x[n] = \{\underline{1}, 0, -1, 0\}$, per a cadascun dels casos següents obtingui $g[n] = DFT_4^{-1}\{G[\text{k}]\}$ per a $n = 0,1,2,3$ sense necessitat de calcular X[k] :

c.1) $G[k] = (X[k])^2$, $k = 0,1,2,3$

c.2) $G[k] = X[k] \otimes X[k]$, $k = 0,1,2,3$

c.3) $G[k] = X[k]e^{-j\pi k}$, $k = 0,1,2,3$

ETSETB Examen final SSIS 12 enero 2018

A. Gasull, A. Moreno, F. Rey, J. Sala, J. Salavedra, E. Sayrol, S. Vallverdú 3 horas

---

No se permiten libros, apuntes, calculadoras, teléfonos etc. Únicamente la tabla de TF disponible en Atenea

Notas provisionales: 23 enero, ver examen: 24 enero, alegaciones 23-25 enero (hasta las 10h). Notas definitivas: 25 enero

Problema 1

Donats els següents sistemes analògics o discrets representats amb la seva relació entrada-sortida o la seva resposta impulsional, respongui a les següents preguntes. Caldrà que justifiqui en tots els casos correctament la resposta.

Sistema 1	$y[n] = \sqrt{n} \cdot x[n+1]u[n]$	
Sistema 2	$y(t) = x(t) * x(-t)$	
Sistema 3	$y[n] = x[n] - x[n-1]$	Sistema lineal
Sistema 4	$h(t) = u(t+1)$	Sistema lineal
Sistema 5	$y(t) = \begin{cases} 1 & x(t) \geq 0 \\ 0 & x(t) < 0 \end{cases}$	Sistema no lineal

a) Dels sistemes 1 i 2, quins són lineals? Cal que faci la demostració.

b) A part del sistema 4, hi ha més sistemes que es puguin caracteritzar per la resposta impulsional? Indiqui quina és aquesta resposta quan sigui pertinent.

c) Estudiï la causalitat i estabilitat del sistema 4.

d) Algun dels sistemes lineals i invariants anteriors té un comportament tipus passaalt?

e) Si a l'entrada del sistema 4 tenim el senyal $x(t) = e^{-\alpha t}u(t)$, quan valdrà y(2) (valor del senyal a la sortida en l'instant t=2)? Deixi el resultat en funció de α.

f) Si a l'entrada del sistema 2 tenim el senyal $x(t) = e^{-\alpha t}u(t)$, en quin instant de temps es trobarà el valor màxim de y(t) i quin serà el seu valor ?

g) Si a l'entrada del sistema 5 tenim el senyal $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$, dibuixi el senyal y(t) generat a la sortida.

Problema 2

La figura 2.1 mostra un diagrama que permet generar diferents senyals periòdics a partir del senyal $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \prod\left(\frac{t-nT_0}{T_0/2}\right)$ i d'un banc de sistemes per obtenir cadascun dels senyals periòdics desitjats.

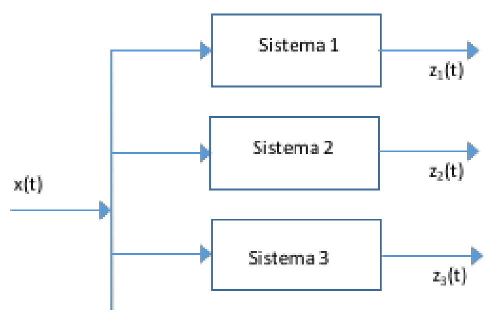


Figura 2.1

Per tal d'analitzar com es generen els senyals es demana el següent:

a) Obtingui la Transformada de Fourier de $x(t)$, dibuixi-la indicant clarament els valors més significatius. Obtingui el Desenvolupament en Sèrie de Fourier (indiqui-ho en funció de cosinus).

b) Proposi un sistema (sistema 1) per generar el senyal $z_1(t) = \cos(6\pi f_0 t)$ on $f_0 = 1/T_0$. Si utilitza algun filtre especifiqui la seva resposta freqüencial.

c) Proposi un sistema (sistema 2) per generar el senyal de la figura 2.2. Indiqui tots els paràmetres de forma clara.

d) El senyal $z_2(t)$, és un senyal d'energia finita o potència mitjana finita? En funció d'aquesta resposta, calculi la seva energia o potència mitjana.

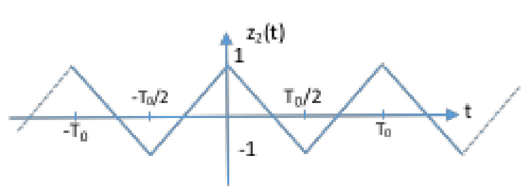


Figura 2.2

Problema 3

Se desea medir la frecuencia del sonido emitido por una cuerda al hacerla vibrar. El sonido se puede simular como un tono (coseno) que se va atenuando lentamente,

$$x(t) = e^{-\alpha t}u(t)\cos(2\pi f_0 t)$$

Para medir la frecuencia f_0 se dispone del sistema de la figura 3.1 que consiste en un conversor A/D, un enventanado y un sistema que calcula la DFT de la señal y muestra su módulo en pantalla.

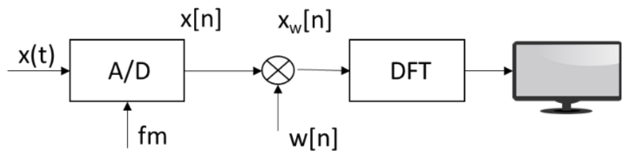


Figura 3.1

El conversor A/D trabaja con una frecuencia de muestreo fm, la señal se enventana con una ventana rectangular de L muestras y la DFT calcula N muestras frecuenciales.

Se pide:

a) Expresión de la señal de salida del conversor A/D, x[n]

b) Calcule la transformada de Fourier de x[n]. Si le resulta más cómodo, puede dejarla en función de $a=e^{-\alpha/fm}$. Responda a esta pregunta detallando todos los pasos necesarios para llegar al resultado.

c) Suponga ahora α=100, fm=8000Hz. La figura 3.2 muestra el módulo de la DFT con N=1000 de la señal enventanada con L=40 y L=500 en el intervalo $0 \leq k \leq 500$. ¿Qué figura se corresponde con L=40 y con L=500?. Razone la respuesta.

d) El máximo de la figura 3.2 a) se encuentra en k=126 y el máximo de la figura 3.2 b) se encuentra en k= 125. ¿Qué frecuencia (en Hz) ha emitido la cuerda según cada gráfica? ¿Cuál le parece más exacta? Justifique la respuesta.

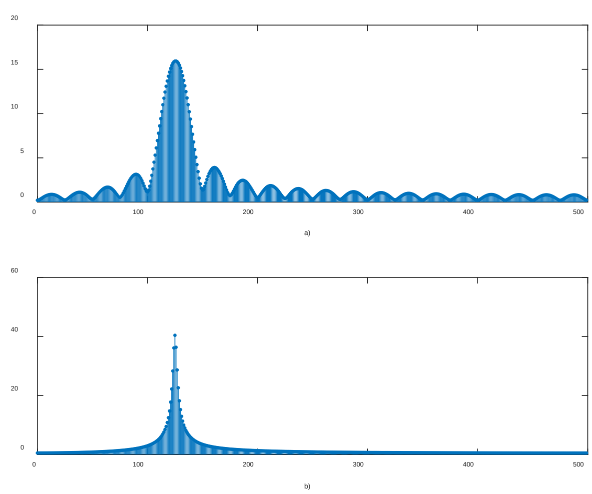


Figura 3.2

Senyals i Sistemes — Examen Final Curs 17-18 Q2. 18 de juny del 2018 — Durada: 3h

Notes prov.: 22-6-18 — Veure examen corregit: 25-6-18 — Al·legacions: fins 26-6-18 — Notes def.: 27-6-18

No es permet l'ús de calculadores, mòbils, llibres i/o apunts.
Les respostes d'exercicis diferents s'han d'entregar en fulls separats

EXERCICI 1

a) Anàlisi de propietats de sistemes (x entrada, y sortida):

- **a1)** Analitzi les propietats de linealitat i invariància del sistema: $y(t) = x(t/2)\,u(t)$
- **a2)** Analitzi les propietats de causalitat i estabilitat del sistema: $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k+1]$

b) Donat el sistema definit per la relació d'entrada-sortida: $y[n] = \sum_{k=n-3}^{n} x[k]$

- **b1)** Calculi la resposta impulsional $h[n]$.
- **b2)** Calculi la $H(z)$. Doni l'esquema per a realitzar el sistema.

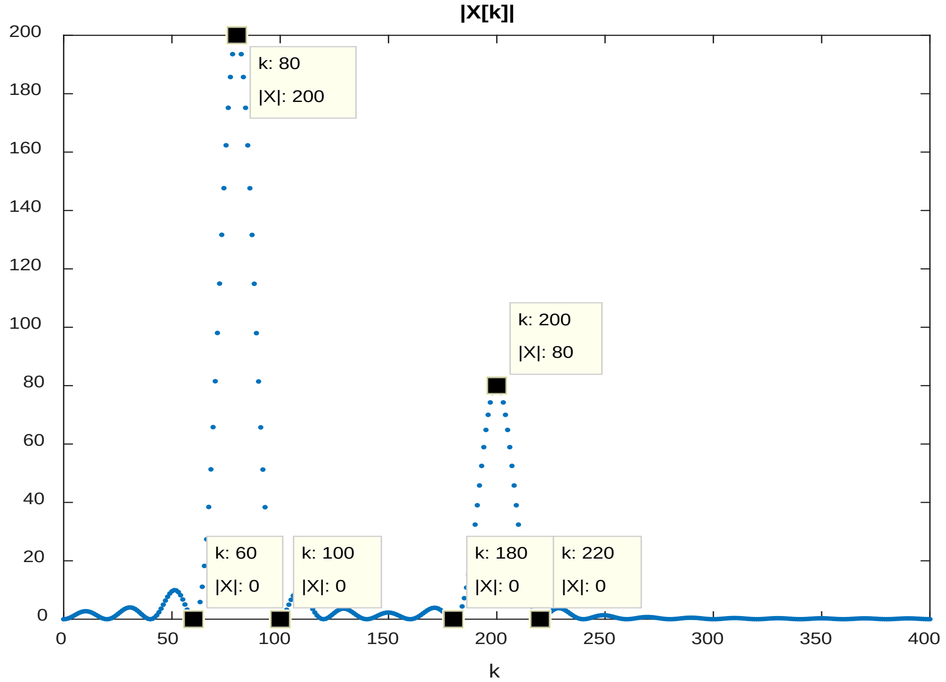
c) Calculi la convolució $y(t) = x(t) * h(t)$, essent $x(t) = e^{-\alpha t}u(t+1)$ i $h(t) = e^{-\alpha t}u(t-1)$, amb $\alpha > 0$.

d) Donats dos senyals arbitraris $x(t)$ i $h(t)$ definim el senyal $y(t)$ com la seva convolució: $y(t) = x(t) * h(t)$. Obtingui justificadament, en funció de $y(t)$, el resultat de:

- **d1)** $\left[e^{-j2\pi t}x(t)\right] * \left[e^{-j2\pi t}h(t)\right]$, si és possible.
- **d2)** $[-x(-t-2)] * [-h(-t-2)]$, si és possible.

EXERCICI 2

Es vol mesurar l'amplitud i freqüència (en Hz) d'un senyal analògic $x_a(t)$ format per una suma de N_s sinusoides. Per fer-ho, es capturen T segons de senyal amb una finestra triangular $v_T(t)$ de durada T segons. El senyal resultant, $x(t)$ es mostreja amb $f_m = 40kHz$, obtenint-se el senyal digital $x[n]$. A la figura es representa el mòdul de la seva transformada discreta de Fourier, calculada amb N punts, $|X[k]|$, per $0 \le k \le N/2$.



a) Especifiqui la transformada del senyal

$$x_a(t) = \sum_{l=1}^{N_s} A_l \cos(2\pi f_l t)$$

Representi el mòdul de la transformada. Consideri pel dibuix $N_s = 2$.

b) Consideri $v_T(t) = \Lambda\left(\frac{t-T/2}{T/2}\right)$. Trobi la seva transformada de Fourier i representi el seu mòdul. Especifiqui el seu valor màxim i l'amplada del lòbul principal, en funció de T.

c) Obtingui la transformada de Fourier de $x(t) = x_a(t) \cdot v_T(t)$ i faci un esbós del mòdul de la transformada, especificant els punts significatius (pel dibuix suposi $N_s = 2$).

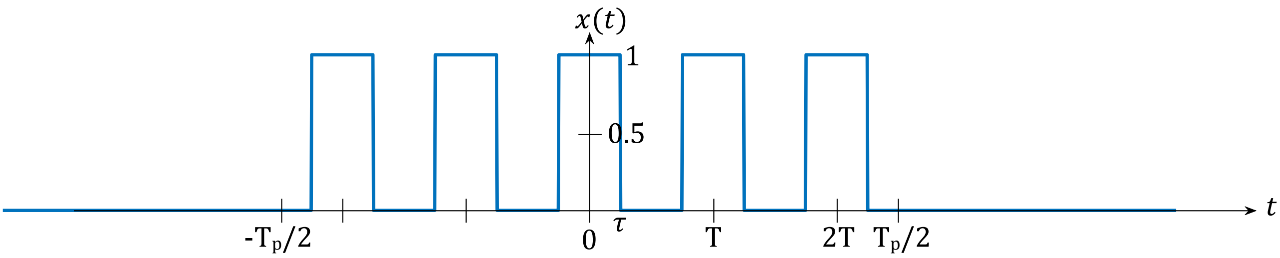
d) Relacioni les transformades de Fourier dels senyals $x(t)$ i la seva versió mostrejada, $x[n] = x(t)|_{t=n/f_m}$

e) A partir de la informació de $|X[k]|$ del gràfic de la figura obtingui el nombre de punts N amb que s'ha fet la $DFT_N\{x[n]\}$, les freqüències (en Hz) de cada una de les sinusoides del senyal $x_a(t)$, la durada T (en segons) del segment de senyal capturat i les amplituds de les sinusoides.

EXERCICI 3

a) Sea $p(t) = \prod\left(\frac{t}{T_p}\right)$. ¿Cuál es su transformada de Fourier?. Dibújela. Determine su energía y su potencia media.

Para limitar la energía del pulso $p(t)$ se realiza un recorte del mismo como se indica en la figura. El pulso resultante consta de $2N+1$ pulsos rectangulares de duración 2τ como se muestra en la figura



$$x(t) = \left[\sum_{n=-N}^{N} \prod\left(\frac{t-nT}{2\tau}\right)\right] p(t) \quad \text{con } \tau = \frac{T}{4}$$

Se desea calcular la transformada de Fourier de $x(t)$. Para ello:

b) Calcule la transformada de Fourier de la señal periódica $z(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \prod\left(\frac{t-nT}{2\tau}\right)$. Dibuje $Z(f)$ indicando en su dibujo los valores más significativos y las posiciones de los armónicos.

c) Calcule la transformada de Fourier de la señal $x(t) = z(t)\, p(t)$. Dibuje $X(f)$ con N=2 indicando en su dibujo el valor de $X(0)$ y las posiciones de los cruces por cero de $X(f)$.

d) Energía y potencia media de $x(t)$.

e) Obtenga los valores de la autocorrelación en el origen de $p(t)$ y $x(t)$. ¿Se modificarían ambos valores si los pulsos fueran causales, es decir $p\left(t - \frac{T_p}{2}\right)$ y $x\left(t - \frac{T_p}{2}\right)$?. Justifique la respuesta.

Senyals i Sistemes Examen Final Curs 17-18 Q2. 9 de juliol del 2018
Durada: 3h

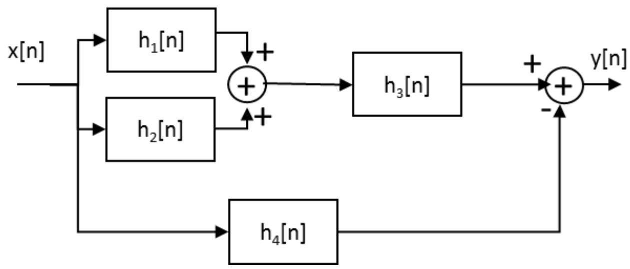
Notes prov.: 16-7-18 Veure examen corregit: 17-7-18 Al·legacions: fins 18-7-18 (10:00h.) Notes def.: 19-7-18

No es permet l'ús de calculadores, mòbils, llibres i/o apunts.
Les respostes d'exercicis diferents s'han d'entregar en fulls separats

---

Problema 1

Sea la interconexión de sistemas L.I. de la figura donde:



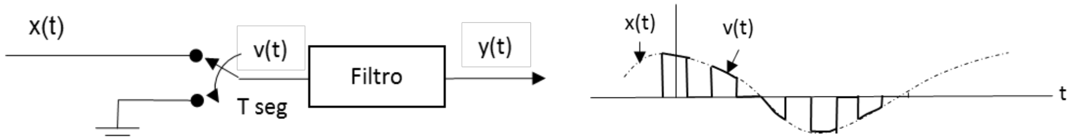
h1[n]=u[n]
h2[n]=u[n+2]-u[n]
h3[n]=δ[n-2]
h4[n]=a^nu[n], |a|<1

Se pide:

a) Hallar la respuesta impulsional del sistema global, h[n] que relaciona x[n] con y[n].
b) ¿Es el sistema global causal? Justifíquelo.
c) ¿Es el sistema global estable? Justifíquelo.
d) Hallar la salida y[n] si a la entrada se aplica p_6[n] y a=0.5. No deje el resultado en forma de ecuación de convolución, resuélvala. Nota. Si no ha sabido responder el apartado a) tome h[n]=(a^n – 1)u[n]+u[n+6]
e) Indique a qué valor tiende la y[n] para valores grandes de n.

Problema 2

Sea una señal x(t) genérica de ancho de banda Bx, |X(f)|=0 |f|>Bx y se desea realizar un modulador de amplitud y(t)=x(t) cos (2π3t). Se dispone del esquema de la figura donde el conmutador cambia de estado cada T segundos (está T segundos conectado a la línea x(t) y T segundos conectado a cero).



El objetivo es determinar las relaciones entre Bx, la frecuencia f_0=3Hz y T, y las características filtro H(f) para que el sistema funcione como un modulador.

a) Compruebe que la señal v(t) se puede expresar como el producto de x(t) con la señal periódica $p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Pi\left(\frac{t-nT_1}{T_2}\right)$. Exprese T_1 y T_2 en función de T (T_1>T_2).

b) Calcule y dibuje la T.F. de p(t) indicando claramente las posiciones de las componentes frecuenciales no nulas.

c) Calcule y dibuje la T.F. de v(t)

d) Deduzca la relación entre Bx y T y proponga un valor de T y las características del filtro H(f) para generar la salida y(t) deseada (para el filtro es necesario que indique claramente la amplitud y las frecuencias de corte del mismo).

Problema 3

Sea una secuencia x[n] de duración L_x, (0≤n≤L_x-1) que se desea filtrar con un filtro h[n] de duración L_h muestras (0≤n≤L_h-1) para obtener y[n]=x[n]*h[n]. El filtrado se desea realizar mediante la utilización de la DFT. Sea X_N[k]=DFT_N{x[n]} 0≤n≤N-1; H_N[k]=DFT_N{h[n]}; 0≤n≤N-1. La propiedad de convolución establece que

e) $$x[n] \underset{N}{\circledast} \mathrm{h[n]}\,;\; 0 \leq \mathrm{n} \leq \mathrm{N}-1 \overset{DFT_N}{\longleftrightarrow} X_N[k]H_N[k];\;\; 0 \leq \mathrm{k} \leq \mathrm{N}-1$$

Donde $\underset{N}{\circledast}$ indica convolución circular de N puntos. Se pide:

a) ¿Cuál es el menor número de puntos, N, para que se cumpla esta propiedad?

b) ¿Qué condición debe cumplir N para que y[n], la convolución lineal de las dos secuencias, coincida con su convolución circular en el intervalo $0 \leq n \leq N-1$?

c) Si x[n]=[$\underline{1}$, 2, 3 ,4, 5], h[n]=[$\underline{1}$, 0, -1] obtenga para N=10 y N=5 los valores exactos de

$z[n] = DFT_N^{-1}\{X_N[k]H_N[k]\}\;\; 0 \leq n \leq N-1$. Realice el apartado sin efectuar las DFTs

d) Para el caso N=5 indique las muestras que ha obtenido de z[n] que coinciden exactamente con muestras de y[n]. Generalice el resultado para el caso de que las secuencias tengan como duraciones L_x y L_h respectivamente, y se elige N tal que max{L_x, L_h} ≤ N < L_x+L_h-1

e) Suponga que la duración de x[n] es muy larga y su ordenador no tiene capacidad (numérica o de memoria) para realizar el filtrado de la señal completa ni con la función conv ni con las DFTs. La alternativa es dividir x[n] en segmentos más pequeños, realizar el filtrado de cada segmento y finalmente componer la señal resultante. Suponga que elige dividir x[n] en segmentos consecutivos x_r[n] no solapados de L_r=1000 muestras, el filtro tiene L_h=25 muestras y realiza el filtrado con DFTs de N=1024 muestras.

$$x[n] = \sum_{r=0}^{\infty} x_r\,[n - rL_r]$$

Siendo

$$x_r[n] = \begin{cases} x[n + rL_r] & 0 \leq n \leq L_r - 1 \\ 0 & resto \end{cases}$$

Llamando a los segmentos filtrados y_r[n]=x_r[n]*h[n], indique la longitud de y_r[n] y explique cómo recompondría la señal y[n] a partir de ellos.