Pràctica 2. Continuació Numèrica. Aplicació: càlcul de les corbes de velocitat zero en el PCRTBP

Índex

1 Mètode de Newton per a sistemes d'equacions no lineals

La primera part de la pràctica consisteix en implementar el mètode de Newton per sistemes d'equacions no lineals. Caldrà pujar un fitxer `nnewtom.m` amb la funció,

```
function [XK,DFk,res,it] = nnewton(x0,tol,itmax,fun,dfun)
```

que calculi la solució de $f(x) = 0$, $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, pel mètode de Newton; on els paràmetres d'entrada són:

`x0`: aproximació inicial, x_0, del zero de $f(x)$ que busquem,

`tol`: tolerància. La iteració s'atura quan la distància entre l'aproximació del zero obtinguda en el pas actual i l'aproximació al pas pas anterior és menor que `tol`, i.e., quan: $\|x_n - x_{n-1}\| <$ `tol`,

`itmax`: nombre màxim d'iterats permesos. Si no hi ha convergència en `itmax` iteracions del mètode, s'ha d'emetre un missatge,

`fun`: la funció $f(x)$,

`dfun`: la matriu de derivades $Df(x)$ de la funció $f(x)$,

i els de sortida són:

`XK`: matriu. Les seves col·lumnes contenen les aproximacions successives a la solució,

`DFk`: matriu de derivades de $f(x)$, $Df(x)$, calculada a l'última aproximació obtinguda, `X(:,end)`,

`res`: vector que conté els "residus" per al mètode de Newton, i.e., $\text{res}_k := \|f(x_k)\|$,

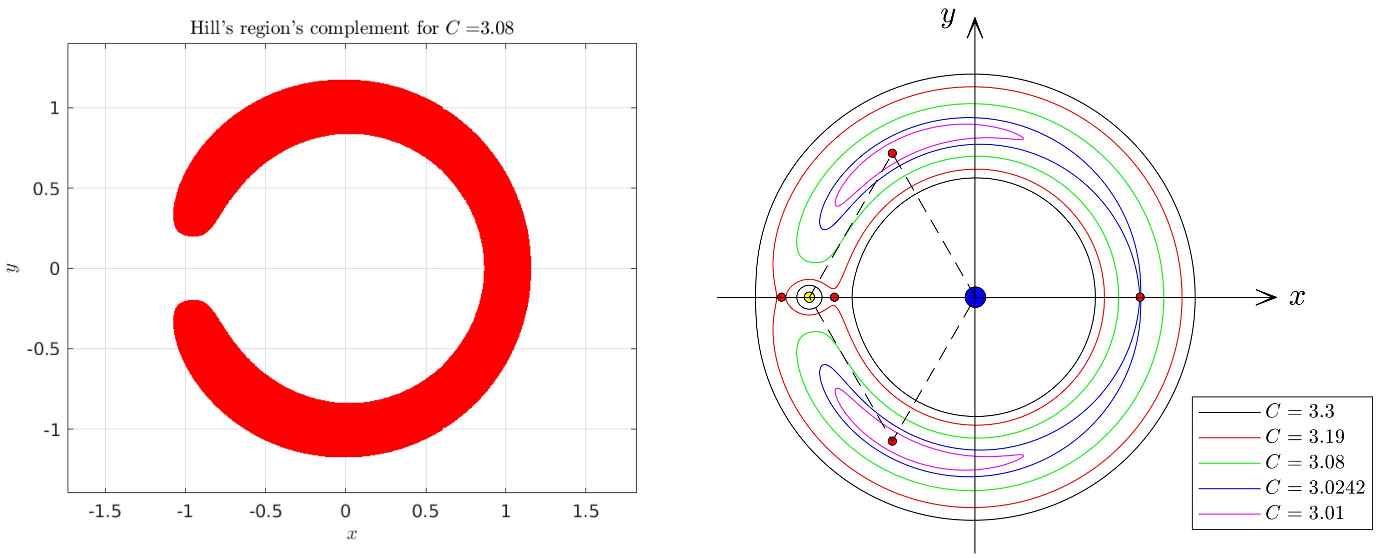
`it`: nombre d'iteracions del mètode de Newton que s'han dut a terme.

Exercici 1.1. Apliqueu el mètode de Newton implementat a la funció *nnewton* tal com s'ha descrit dalt, per a calcular la solució del sistema no lineal,

$$x^2 + y^2 = 1, \qquad x - y = 0.$$

Exercici 1.2 (Exercici 10 de la llista de problemes del tema 1). Íd., per a calcular la solució del sistema no lineal,

$$x = \sin(x + y), \qquad y = \cos(x - y).$$



(a) (b)

Figura 1

2 Aplicació

Seguint amb el context del PCRTBP que hem introduït a la pràctica 1, en aquesta pràctica buscarem les anomenades *corbes de velocitat zero* (zvc) per al valor del paràmetres de masses $\mu = 0.0121529$ corresponent als sistema Terra-Lluna i certs valors de la integral de Jacobi, C. Aquestes corbes delimiten les *regions de Hill*, i.e., les regions accessibles per a les trajectòries del sistema. En efecte, de l'expressió de la integral de Jacobi

$$2\Omega(x, y) - C = x'^2 + y'^2,$$

on

$$\Omega(x, y) = \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right) + \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} + \frac{1}{2}\mu(1-\mu)$$

amb

$$r_1 = \sqrt{(x-\mu)^2 + y^2}, \qquad r_2 = \sqrt{(x-\mu+1)^2 + y^2},$$

es dedueix que el moviment només és possible en aquells punts

$$(x, y) \in \mathbb{R}^3 : \; 2\Omega(x, y) - C \geq 0,$$

(vid. [2], cap. 4, sec. 4, ó [3], cap. 4, sec. 7). Aquí veurem quina forma tenen les regions de Hill per i com canvien en variar C. En concret:

(i) Com ja hem assenyalat fixem $\mu = 0.0121529$, corresponent al paràmetre de masses del sistema Terra-Lluna. Per a aquest valor de μ, Calcularem la posició dels punts colineals d'Euler, L_1, L_2, L_3 i els puts triangulars de Lagrange L_4, L_5 i el valor de L_i i C_i, per a $i = 1, ..., 5$.

(ii) Si C_i són els valors de la constant de Jacobi als punts L_i, $i = 1, 2, 3, 4, 5$ respectivament, considerarem els valors de C següents: $C = 3.3, 3.19, 3.08, 3.0242$, i 3.01 (notem que $C = 3.3 > C_1 = 3.2004 > C = 3.19 > C_2 = 3.1842 > C = 3.08 > C = C_3 = 3.0242 > C = 3.01 > C_4 = C_5 = 3$). En cada cas, per tal de tenir una primera intuïció de la forma de les corresponents regions de Hill (i quantes components connexes tindran) agafarem una regió de punts en la finestra $[-1.5, 1.5] \times [-1.5, 1.5]$, avaluarem a cada punt la funció $2\Omega(x, y) - C$ i pintarem de vermell els punts amb signe negatiu. Així, per exemple, a la figura 1(a), l'àrea en vermell correspon al complement al pla de la regió de Hill per a $C = 3.08$.

(iii) Per a cadascun d'aquest valors de C, voldrem traçar les corbes de velocitat zero. Per a això, amb C fixada, continuarem les corbes definides per l'equació $F(z) = 0$, on

$$F(z) = 2\Omega(z) - C, \qquad z = (x, y),$$

a partir de solucions aproximades, $z_0 = (x_0, y_0)$, que obtindrem de la representació de les regions de Hill pel procediment descrit a *(ii)*. El mètode de continuació que farem servir serà el *mètode del pseudo-arc*, el qual presentem breument a sota, a la secció 3.

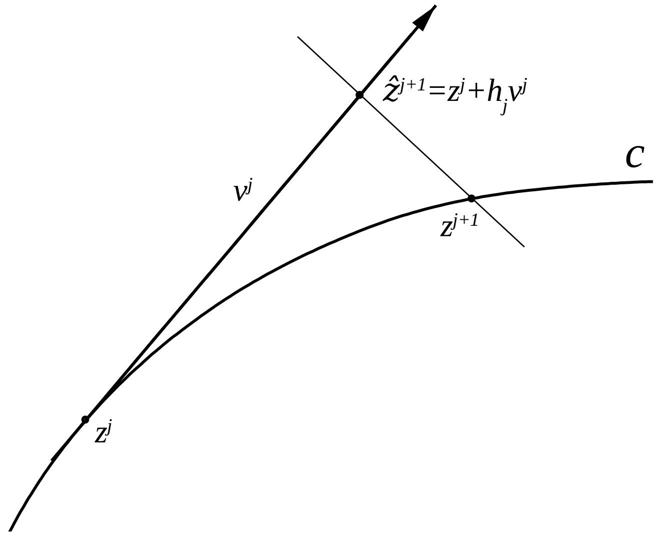


Figura 2

3 El mètode de continuació del pseudo-arc

Volem trobar punts sobre la corba,

$$\mathcal{C} = \left\{ z \in \mathbb{R}^{n+1} : F(z) = 0 \right\}$$

amb $F : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Suposem conegut $z^j \in \mathbb{R}^{n+1}$, un punt *regular* de la corba: $F(z^j) = 0$, rang $DF(z^j) = n$. Per a trobar el punt següent, $z^{j+1} \in \mathcal{C}$, implementarem el mètode del pseudo-arc (vegeu [1], cap. 10, sec. 2) en el dos passos següents

1. *Predicció:* agafarem $\hat{z}^{j+1} = z^j + h_j v^j$ com a aproximació del nou punt z^{j+1}, on $h_j \in \mathbb{R}$ és el pas i $v^j \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\|v^{j-1}\| = 1$, és el vector tangent a la corba $\mathcal{C}$ al punt z^j, el qual determinarem resolent el *sistema ampliat*,

$$\begin{aligned} DF\left(z^j\right) v &= 0, \\ \left\langle v^{j-1}, v \right\rangle &= 1, \end{aligned} \tag{1}$$

   on $v^{j-1} \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\|v^{j-1}\| = 1$, és el vector tangent a la corba $\mathcal{C}$ al punt z^{j-1}, tots dos prèviament calculats. Com s'observa a [1]:

   (i) El sistema lineal (1) és no singular si $\mathcal{C}$ és una corba regular (i.e., si rang $DF(z) = n$, $z \in \mathcal{C}$) i els punts z^{j-1} i z^j estan suficientment a prop.

   (ii) La solució $v^* \in \mathbb{R}^{n+1}$ satisfà la $\langle v^{j+1}, v^* \rangle = 1$, per tant es preserva la direcció al llarg de la corba.

   Per últim, normalitzem per tenir $v^j = v^* / \|v^*\|$. *Nota:* a l'inici, quan $j = 0$, no podrem escriure el sistema (1), sinó que resoldrem el sistema $n \times n$ que s'obté de seleccionar n columnes linealment independents (siguin les columnes $1, 2, \ldots, i-1, i-1, \ldots, n, n+1$) de $DF(z^j)$ a la primera equació de (1) i fixar $v_i = 1$. D'aquesta manera trobarem un vector $v^* \in \mathbb{R}^n$, $v_i^* = 1$, t.q. $DF(z^0)v^* = 0$. Llavors $v^0 = \pm v^* / \|v^*\|$, on la tria del signe determinarà la direcció en què es continua la corba.

2. *Correcció.* Per a "refinar" el valor aproximat $\hat{z}^{j+1} = z^j + h_j v^j$ del pas predictiu pel mètode de Newton i determinar el nou punt sobre la corba, $z^{j+1} \in \mathcal{C}$, s'ha d'afegir alguna equació addicional al sistema $F(z) = 0$. Al mètode del pesudo-arc, s'imposa que $z^{j+1} \in \hat{z}^{j+1} + \langle v^j \rangle^{\perp}$; això és, que el punt z^{j+1} pertanyi també al hiperplà perpendicular al vector v^j que conté $\hat{z}^{j+1}$. Usant el producte escalar aquesta condició geomètrica s'escriu com,

$$\left\langle z^{j+1} - \hat{z}^{j+1}, v^j \right\rangle = \left\langle z^{j+1} - z^j - h_j v^j, v^j \right\rangle = \left\langle z^{j+1} - z^j, v^j \right\rangle - h_j = 0$$

   (vegeu la figura 2). Aleshores aplicarem el mètode de Newton al sistema no lineal

$$\begin{aligned} F(z) &= 0, \\ \left\langle z - z^j, v^j \right\rangle &= h_j, \end{aligned}$$

prenent $z^{(0)} = \hat{z}^{j+1}$ com a aproximació inicial.

4 Presentació de la pràctica

Haureu de pujar el fitxer `nnewton.m` amb la funció descrita a la secció 1, el fitxer `iteracio_simple.m` de la pràctica 1, a més de

1. Un fitxer, `contzvc.m`, amb la funció

   ```
   function X = contzvc(x0,ds,smax,sgn,f,Df)
   ```

   que fa la continuació numèrica de la corba definida per l'equació $f(x) = 0$, $f : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Aquesta és la funció que farem servir per trobar les corbes de velocitat zero. Els paràmetres d'entrada de la funció són:

   x0: aproximació inicial, x_0. Com a primer pas la funció refinarà aquesta aproximació per obtenir un punt sobre la corba[1],

   ds: longitud del pas per a fer la continuació. Aquí farem servir pas fix ($h_j =$ `ds`),

   smax: longitud màxima del pseudo-arc,

   sgn: ± 1. Fixa la direcció en què continuem la corba,

   f: funció $f(x)$,

   Df: nom de la funció de la matriu amb les derivades parcials, $Df(x)$,

   i els paràmetres de sortida són:

   X: Matriu $(n+1) \times m$. Les columnes `X(:,1)`, `X(:,2)`,...,`X(:,m)` són els punts calculats de la corba.

2. Dos fitxers de comandes:

   - `hillRegion.m` Donat uns valor de μ i de C, pinta de vermell els punts del complement al pla de la regió de Hill, i.e., els punts t.q. $2\Omega(x, y) - C < 0$ i produeix un dibuix com la figura 1(a) per als valors de μ i C corresponents. Els punts de la vora d'aquesta regió ens donaran les aproximacions per calcular les corbes de velocitat zero.
   - `zvc.m` per a $\mu = 0.0121529$ crida la funció *contzvc* per a dibuixar les corbes de velocitat zero corresponents als valors de $C = 3.3$, 3.19, 3.08, 3.0242 (approx. C at L_3), i $C = 3.01$. Cal també que representi les posicions de la Terra, de la Lluna i les dels punts d'equilibri L_i, $i = 1, 2, 3, 4$ (fent servir la funció *iteracio_simple* de la primiera pràctica per a calcular-los). Com a resultat, l'script ha de treure la figura 1(b).

5 Referències

[1] Yuri A. Kuznetsov. *Elements of Applied Bifurcation Theory*, volume 112 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, third edition, 2004. 3

[2] Kenneth R. Meyer and Daniel C. Offin. *Introduction to Hamiltonian Dynamical Systems and the N-Body Problem*, volume 90 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer, Cham, third edition, 2017. 2

[3] V.G. Szebehely. *Theory of Orbits, the Restricted Problem of Three Bodies*. Academic Press, New York, 1967. 2

[1] S'haurà d'afegir alguna condició addicional. Una possibilitat és fixar alguna de les coordenades, x ó y (depenent de quina corba vulguem continuar potser és més convenient fixar l'una o l'altra). Així, per exemple, si fixem $y = 0$, aplicaríem el mètode de Newton a la funció $g(x) = (f(x), x_2)$, agafant el punt `x0` com aproximació inicial.