Resum de Funcions de Variable Complexa

Ferran López

Barcelona, Juny 2019

Aquest document conté, resumides, les demostracions que s'han fet a classe. No hi ha tots els resultats, només els que s'han provat.

Índex

1 Nombres complexos **2**
Teorema de Cauchy-Hadamard . . . 2

2 Funcions de variable complexa **2**
Teorema Fonamental de l'Àlgebra (1) . . . 2
Principi de prolongació analítica (1) . . . 3

3 Derivació. Funcions holomorfes **3**
Teorema de Cauchy-Riemann . . . 4

4 Integració. Teorema de Cauchy **4**
Segon Teorema Fonamental del Càlcul (Regla de Barrow) . . . 5
Primer Teorema Fonamental del Càlcul . . . 5
Teorema de Goursat . . . 6
Teorema de Cauchy . . . 7

5 Fórmula integral de Cauchy i aplicacions **8**
Fórmula integral de Cauchy . . . 8
Teorema de Liouville . . . 9
Teorema de Morera . . . 10
Holomorfa $\Rightarrow$ Analítica . . . 10
Principi de prolongació analítica (2) . . . 11
Principi del mòdul màxim i mínim . . . 11
Derivació sota el signe integral . . . 12

6 Funcions meromorfes i residus **13**
Teorema de Riemann d'evitació de singularitats . . . 13
Teorema de Casorati-Weierstrass . . . 14
Teorema del residu . . . 16
Teorema de Rouché . . . 16

1 Nombres complexos

Proposició 1.1. Tot complex $z \neq 0$ té n arrels n-èssimes diferents. Si $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$,

$$\sqrt[n]{z} = \left\{ \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha + 2\pi t}{n} + i\sin\frac{\alpha+2\pi t}{n}\right) \mid 0 \leq t < n \right\}.$$

Demostració. Si $w = s(\cos\beta + i\sin\beta)$,

$$w^n = s^n(\cos n\beta + i\sin n\beta) = z \iff s = \sqrt[n]{z} \text{ i } n\beta \equiv \alpha \pmod{2\pi}$$

$\square$

Teorema 1.2. Si dues sèries $\sum z_n$ i $\sum w_n$ són absolutament convergents, aleshores el seu producte (de Cauchy) també ho és i val $\sum p_n = (\sum z_n)(\sum w_n)$.

Demostració. Siguin s_n, t_n i μ_n les sumes parcials de z, w i p, i ν_n la de $(\sum|z_n|)(\sum|w_n|)$.

- Abs. convergent: Fitem $\sum_{i=0}^{n}|z_i| \leq M_z$ i $\sum_{i=0}^{n}|w_i| \leq M_w$.

$$\nu_n \leq \sum_{i=0}^{n}\sum_{r+s=i}|z_r||w_s| \leq \left(\sum_{i=0}^{n}|z_i|\right)\left(\sum_{i=0}^{n}|w_i|\right) \leq M_z M_w$$

  i per M de Weierstrass és abs. convergent.

- Valor:

$$|s_n t_n - \mu_n| = \left|\sum_{\substack{r,s\leq n\\ r+s\geq n+1}} z_r w_s\right| \leq \sum_{r+s=n+1}^{2n}|z_r||w_s| = \nu_{2n} - \nu_n$$

  ν_n conv. $\implies$ ν_n Cauchy $\implies$ $|s_n t_n - \mu_n| \to 0$.

$\square$

Teorema 1.3. *Teorema de Cauchy-Hadamard.*
$\sum a_n(z-z_0)^n$. Si $|z-z_0| < R$ convergeix absolutament i si $|z-z_0| > R$ divergeix.

Demostració. Pel criteri de l'arrel, si $r < R$, $\limsup \sqrt[n]{a_n r^n} = rR^{-1} < 1$. Anàleg si $r > R$. $\square$

2 Funcions de variable complexa

Lema 2.1. Lema: $p(x)$ té una arrel sii $q(x) = ap(bx+c)$ en té, $a, b \in \mathbb{C}^*, c \in \mathbb{C}$.

Demostració. $p(z) = 0 \Leftrightarrow q(\frac{z-c}{b}) = 0$. $\square$

Teorema 2.2. *Teorema Fonamental de l'Àlgebra (1).*
Tot polinomi no constant de $\mathbb{C}[x]$ té alguna arrel.

Demostració.

$$\lim_{|z|\to\infty}\frac{|f(z)^n|}{|z|^n} = |a_n| \implies \lim_{|z|\to\infty}|f(z)| = \infty \implies \exists r \text{ t. q. } |z| > r \Rightarrow |f(z)| > |a_0|$$

$|f(z)|$ pren mínim a $z_0 \in \bar{\mathcal{D}}(0,r)$ comp. Canviant z per $z - z_0$, $|f(0)| = |a_0|$ és mínim. Suposem $a_0 \neq 0$, si no 0 ja és arrel. Canviant p per $\frac{1}{a_0}p$ el mínim és 1.

Sigui $\omega = \sqrt[h]{-a_h}$. Canviem $p(z)$ per $p(\frac{z}{\omega})$ i serà $p(z) = 1 - z^h + z^h g(z)$, amb $g(0) = 0$. Sigui $t \in [0,1] \subset \mathbb{R}$ tal que $g(z) < \frac{1}{2}$. $|f(t)| < 1 - t^h + \frac{1}{2}t^h < 1$, però el mínim és 1, contradicció. Necessàriament a_0 havia de ser 0. $\square$

Proposició 2.3. $f(z) = \sum a_n(z - z_0)^n$ és unif. conv. sobre compactes a $D = \mathcal{D}(z_0, R)$, $R = \rho(f)$.

Demostració. Sigui $p_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k(z - z_0)^k$. $K \subset D$, $r = \max\{|z - z_0|, z \in K\} < R$.

$$\left|f(z) - p_n(z)\right| \leq \sum_{k>n} |a_k| r^k < \epsilon$$

on el darrer pas emprem que $\sum a_n(z - z_0)^n$ convergeix ($r < R$). Per M de Weierstrass, $f(z)$ convergeix. □

Proposició 2.4. f és contínua a D.

Demostració.

- Per conv. unif. sobre $\bar{\mathcal{D}}(z_0, r)$ comp., $\exists N$ t. q. $\left|f(z) - p_n(z)\right| < \frac{\epsilon}{3} \forall n > N \forall z \in \bar{\mathcal{D}}(z_0, r)$.
- Sigui $n \geq N$ fixat, p_n és un polinomi, per tant és continu i $\exists \delta$ t. q. $|z - w| < \delta \Rightarrow \left|p_n(z) - p_n(w)\right| < \frac{\epsilon}{3}$.

Per tot ϵ, si $\delta' = \min\{\delta, r - |w - z_0|\}$ i n el fixat adés, $|z - w| < \delta' \implies \left|f(z) - f(w)\right| \leq \left|f(z) - p_n(z)\right| + \left|p_n(z) - p_n(w)\right| + \left|f(w) - p_n(w)\right| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$. □

Proposició 2.5. $e^{z+w} = e^z e^w$

Demostració. $e^{z+w} = \sum_{n\geq 0} \frac{(z+w)^n}{n!} = \sum_{n\geq 0} \sum_{k\leq n} \frac{1}{k!(n-k)!} z^k w^{n-k} = \sum_{n\geq 0} \sum_{k\leq n} \frac{z^k}{k!} \frac{w^{n-k}}{(n-k)!} = e^z e^w$, on en l'últim pas hem fet servir el producte de Cauchy (les sèries són abs. convergents). □

Proposició 2.6. *Fórmula d'Euler.* $e^{it} = \cos t + i \sin t$

Demostració. Desenvolupem e^{it} com a sèrie de potències i la separem en termes parells i senars. □

Teorema 2.7. *Principi de prolongació analítica (1).*
Sigui Ω obert connex, $S \subseteq \Omega$ subconjunt amb un punt d'acumulació. Aleshores,

(i) Si $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ és analítica i $f(z) = 0 \forall z \in S$, llavors $f \equiv 0$ a Ω

(ii) Si $U \subseteq \Omega$ obert i $f\colon U \to \mathbb{C}$ analítica a U, llavors existeix com a molt una *prolongació analítica* $\tilde{f}\colon \Omega \to \mathbb{C}$ tal que $\tilde{f}|_U = f$.

Demostració. Sigui z_0 el punt d'acumulació. Per continuïtat, $f(z_0) = 0$ (hi ha una successió a S que hi tendeix). $f(z) = \sum a_n(z - z_0)^n$ a $\mathcal{D}(z_0, R) \cap \Omega$, veurem que $\forall n, a_n = 0$.

Suposem el contrari, $m = \min\{a_n \neq 0\}$. $f(z) = a_m(z - z_0)^m(1 + \frac{a_{m+1}}{a_m}(z - z0) + \cdots) = a_m(z - z_0)^m g(z)$. g és contínua. $g(z_0) = 1$ i per continuïtat hi ha un entorn de z_0 on no és nul·la, i $(z - z_0)^m$ només s'anul·la en z_0, per tant z_0 és un punt aïllat de S i arribem a contradicció, f és nul·la a $\mathcal{D}(z_0, R) \cap \Omega$.

Sigui U l'interior del conjunt de punts de Ω on f val 0. U és obert per definició, U és tancat perquè si $w \in U' \Rightarrow w \in U$ i U no és buit, per tant $U = \Omega$.

$\tilde{f}_1$ i $\tilde{f}_2$ compleixen $\tilde{f}_1 - \tilde{f}_2 = 0$ a U, prenem $S = U$ i per (i) tenim $\tilde{f}_1 - \tilde{f}_2$ a Ω. □

3 Derivació. Funcions holomorfes

Proposició 3.1. *Analítica $\Rightarrow$ Holomorfa.* Si $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n(z - z_0)^n$ a $\mathcal{D}(z_0, R)$, aleshores és holomorfa a tot $\mathcal{D}$ i $f'(z) = \sum_{n\geq 1} n a_n(z - z_0)^{n-1}$.

Demostració. Les dos sèries tenen el mateix radi de convergència ($\sqrt[n]{n} \to 1$) i són abs. i unif. convergents sobre compactes de D. Siguin p_n i p'_n les sumes parcials de f i f', i $r_n = f - p_n$.

- $\exists N_2$ tal que $|p_n'(z_0) - f'(z_0)| < \frac{\epsilon}{3}$ per $n \geq N_1$
- $\exists N_1$ tal que $|z_0| < r < R \implies \left|a_k \frac{z^k - z_0^k}{z - z_0}\right| \leq |a_k| \left(|z|^{k-1} + |z|^{k-2}|z_0| + \cdots + |z_0|^{k-1}\right) \leq k|a_k|\, r^{k-1} \implies \left|\frac{r_n(z) - r_n(z_0)}{z - z_0}\right| = \left|\sum_{k>n} a_k \frac{z^k - z_0^k}{z - z_0} \leq \sum_{k>n} k|a_k|\, r^{k-1}\right| < \frac{\epsilon}{3}$ per $n \geq N_2$
- $\forall n$ i en particular per $N = \max\{N_1, N_2\}$, $\exists \delta > 0$ t. q. $|z - z_0| < \delta \Rightarrow \left|\frac{p_n(z) - p_n(z_0)}{z - z_0} - p_n'(z_0)\right|$

Per tant $\left|\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0)\right| \leq \left|\frac{p_N(z) - p_N(z_0)}{z - z_0} - p_N'(z_0)\right| + |p_N'(z_0) - f'(z_0)| + \left|\frac{r_N(z) - r_N(z_0)}{z - z_0}\right| < 3\frac{\epsilon}{3} \implies f'(z_0)$ és la derivada de f a z_0. □

Teorema 3.2. *Teorema de Cauchy-Riemann.*
$f\colon U \to \mathbb{C}$ és derivable (complexa) a $z_0 \in U$ sii f és dierenciable (real) a z_0, $\frac{\partial u}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(z_0)$ i $\frac{\partial u}{\partial y}(z_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(z_0)$. En aquest cas la derivada és $f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = -i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)$.

Demostració. $\boxed{\implies}$ $f'(z_0) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$, fem tendir $h \to 0$ per la recta real i la imaginària i igualem les parts real i imaginària. A més $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\|f(z_0+h) - f(z_0) - Df(z_0)h\|}{\|h\|}$ amb $Df(z_0) = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ on $f'(z_0) = \alpha + i\beta$

$\boxed{\impliedby}$ Si f és diferenciable i satisfà $Df(z_0) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\|f(z_0+h) - f(z_0) - f'(z_0)h\|}{\|h\|} = 0$ amb $f'(z_0) = a + ib$. □

4 Integració. Teorema de Cauchy

Proposició 4.1. *Desigualtat triangular.* $\left|\int_a^b \phi(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_a^b |\phi(t)|\,\mathrm{d}t$

Demostració. Suposem $\neq 0$, si no és trivial. Si $\int_a^b \phi(t)\,\mathrm{d}t = re^{it}$, $r \in \mathbb{R}$.

$$\left|\int_a^b \phi(t)\,\mathrm{d}t\right| = r = e^{-ia}\int_a^b \phi(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \Re(e^{-ia}\phi(t))\,\mathrm{d}t \leq \int_a^b \left|e^{-ia}\phi(t)\right|\mathrm{d}t$$

□

Lema 4.2. Dos punts d'un obert connex es poden unir a través d'un contorn poligonal (esglaonat) contingut dins l'obert.

Demostració. Sigui U connex ($\Leftrightarrow$ arc-connex a $\mathbb{C}$), $\gamma\colon [a,b] \to U$ corba entre z_1 i z_2, $I = \{t$ tals que z_1 es pot unir amb $\gamma(t)$ amb un contorn poligonal (esglaonat) a $U\} \subseteq [a,b]$ i $\beta = \sup I$. Suposem que $\beta < b$.

Per continuïtat de γ, $\gamma((\beta - \delta, \beta + \delta)) \subset \mathcal{D}(\gamma(\beta), \epsilon) \subset U$. Per ser β suprem, $\forall\delta\exists t \in (\beta - \gamma, \beta]$. Es pot unir $\gamma(t)$ amb $\gamma(\beta + \frac{\delta}{2})$ i z_1 amb $\gamma(t)$, els dos amb contorns poligonals (esglaonats), per tant $\beta + \frac{\delta}{2}) \in I$, contradicció. Per tant $\beta = b$. □

Proposició 4.3. L'índex d'un contorn tancat és enter.

Demostració.

$$\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z - z_0} = \int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z_0}\,\mathrm{d}t = F(b) = F(a)$$

On $F(t)$ és primitiva de la funció que s'integra. Pel TFC real, $F(t) = \int_a^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z_0}\,\mathrm{d}s$. $F(a) = 0$, per tant la integral val $F(b)$. Considerem $\phi(t) = \frac{\gamma(t) - z_0}{e^{F(t)}}$, derivant es veu que $\phi'(t) = 0$, ϕ és constant i $\phi(t) = \phi(a)\forall t \implies e^{F(t)} = \frac{\gamma(t) - z_0}{\gamma(a) - z_0}e^{F(a)} \implies e^F(b) = 1$ i per tant $F(b)$ és múltiple enter de $2\pi i$. □

Proposició 4.4. *Propietats de la integral de contorn.*

(i) $\left|\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leq Ml(\gamma)$ si $|f(z)| < M \forall z \in \gamma^*$

(ii) Si $f_n \to f$ uniformement cobre comapctes, $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \lim \int_\gamma f_n(z)\,\mathrm{d}z$. Anàlogament, si $s = \sum f_n$, $\int_\gamma s(z)dz = \sum \int_\gamma f_n(z)\,\mathrm{d}z$

Demostració.

(i) $\left|\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t))||\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t \leq M\int_a^b |\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t$

(ii) $\left|\int_\gamma f_n(z) - \int_\gamma f(z)\right| \leq \int_\gamma |f_n(z) - f(z)|\,\mathrm{d}z < \frac{\epsilon}{l(\gamma)} l(\gamma)$, perquè $|f_n(z) - f(z)| < \frac{\epsilon}{l(\gamma)}$, per n prou gran.

□

Teorema 4.5. *Segon Teorema Fonamental del Càlcul (Regla de Barrow).*
$f\colon U \to \mathbb{C}$ contínua que té una primitiva F a U. Per tot contorn γ,

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

Demostració. Sigui $f = u + iv$, $F = U + iV$ i $\gamma = x + iy$. Considerem $F \circ \gamma$:

$$\frac{\mathrm{d}(U\circ\gamma)}{\mathrm{d}t}(t) = \frac{\partial(U\circ\gamma)}{\partial x}(x(t), y(t))x'(t) + \frac{\partial(U\circ\gamma)}{\partial y}(x(t), y(t))y'(t)$$

$F' = f$, per Cauchy-Riemann $u = \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y}$ i $v = \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{-\partial U}{\partial y}$ i obtenim:

$$\frac{\mathrm{d}(U\circ\gamma)}{\mathrm{d}t}(t) = u(x(t), y(t))x'(t) + v(x(t), y(t))y'(t) = \Re(f(\gamma(t))\gamma'(t)$$

i per la regla de Barrow a $\mathbb{R}$ la part real de la integral és $U(x(b), y(b)) - U(x(a), y(a)) = U(\gamma(b)) - U(\gamma(a))$. Anàlogament per la part imaginària. □

Corol·lari 4.6. Si $f\colon U \to \mathbb{C}$ és holomorfa amb derivada $f' = 0$, aleshores f és constant.

Demostració. Siguin $z, w \in U$ i γ contorn entre z i w, $f(z) - f(w) = \int_\gamma f'(z)\,\mathrm{d}z = \int_\gamma 0 = 0$ □

Teorema 4.7. *Primer Teorema Fonamental del Càlcul.*
Sigui $f\colon U \to \mathbb{C}$ contínua, U connex. Si la integral sobre tot contorn tancat és 0 i la integral sobre un contorn qualsevol només depén dels punts inicial i final, f té una primitiva a U.

Demostració. Fixat un $z_0 \in U$, definim $F(z) = \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$ on γ és un contorn que va de z_0 a z. Veurem $F'(z) = f(z)$.

$F(z+h) - F(z) = \int_\gamma f(\omega)\,\mathrm{d}\omega$, $\gamma = \gamma_{z\to z+h}$ segment. $f(\omega) = f(z) + \psi(\omega)$ on $\lim\limits_{\omega\to z} \psi(\omega) = 0$.

$F(z+h) - F(z) = \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}\omega + \int_\gamma \psi(\omega)\,\mathrm{d}\omega = f(z)h + \int_\gamma \psi(\omega)\,\mathrm{d}\omega \leq f(z)h + M_h|h|$, on M_h és una fita de $\psi(\omega)$ a γ.

$\left|\frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z)\right| = \left|\frac{f(z)h}{h} - \frac{\int_\gamma \psi(\omega)\,\mathrm{d}\omega}{h} - f(z)\right| \leq \frac{M_h|h|}{|h|} \to 0$ quan $h \to 0$. □

Lema 4.8. *Determinacions contínues de l'argument.*

(i) No existeix cap determinació contínua de $\arg(z) = \{\alpha + 2\pi k\colon k \in \mathbb{Z}\}$ a $\mathbb{C}^*$.

(ii) Dues determinacions contínues a un obert connex difereixen en una constant de la forma $2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

(iii) Existeixen determinacions contínues als semiplans $x > 0$, $x > 0$, $y > 0$ i $y < 0$, i per tant en tot disc $\mathcal{D} \in \mathbb{C}^*$

(iv) Si $\operatorname{Arg}\colon U \to \mathbb{R}$ és una determinació contínua de arg, aleshores $\frac{\partial \operatorname{Arg}}{\partial x} = \frac{-y}{x^2+y^2}$ i $\frac{\partial \operatorname{Arg}}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2}$.

(v) Tota determinació contínua de $\log(z)$ és holomorfa amb derivada $\frac{1}{z}$.

Demostració. (i) Suposem $\operatorname{Arg}\colon \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}$ contínua. Sigui $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}^*$, $\phi(\alpha) = e^{i\alpha}$, contínua i 2π-periòdica. $\Phi = \operatorname{Arg} \circ \phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és contínua i $\Phi(\alpha) \in \{\alpha + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}\}$. $\Psi(\alpha) = \Phi(\alpha) - \alpha$ contínua i pren valors a $2\pi\mathbb{Z}$. Està definida a tot $\mathbb{R}$ (connex) i per tant és constant. $\Phi(\alpha) = \alpha + C \implies \Phi(\alpha) = \Phi(\alpha + 2\pi) \implies 2\pi = 0$ contradicció.

(ii) Inmediat: $\operatorname{Arg}_1 - \operatorname{Arg}_2$ contínua

(iii) Es defineixen amb determinacions Arcsin i Arccos, per exemple a $x > 0$ és $\operatorname{Arg}(z) = \operatorname{Arcsin}\left(\frac{y}{|z|}\right)$.

(iv) $\operatorname{Arg}(x,y) = \operatorname{Arcsin}\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$, derivem respecte a x i y.

(v) Corol·lari de les anteriors

□

Teorema 4.9. *Integral sobre corbes rectificables.*
Si γ és rectificable i f és contínua, aleshores $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$ existeix.

Demostració. Veurem que si tenim dues particions amb diàmetre menor que δ, aleshores la diferència entre les dues sumes de Riemann és menor que ϵ. És suficient amb veure-ho en el cas que una és refinament de l'altra.

Sigui $\mathcal{P}_1 = \{t_i\}$ i $\left\{t_{i,k}\right\}_{i=0\div n, k=0\div j_i}$ un refinament on $t_{i-1} = t_{i,0} < t_{i,1} < \cdots < t_{i,j_i} = t_i$. La diferència entre les dues sumes de Riemann és

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\gamma(t_i^*))(\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})) - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{j_i} f(\gamma(t_{i,j}^*))(\gamma(t_{i,j}) - \gamma(t_{i,j-1}))\right|$$
$$\leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{j_i}\Big|f(\gamma(t_i^*) - \gamma(t_{i,j}^*))\Big|\big|\gamma(t_{i,j}) - \gamma(t_{i,j-1})\big|$$

$f \circ \gamma$ és contínua i per tant unif contínua a $[a,b]$ compacte

$$\forall \epsilon \exists \delta \text{ t. q. } \Big|t - t'\Big| < \delta \Rightarrow \Big|f(\gamma(t)) - f(\gamma(t'))\Big| < \frac{\epsilon}{l(\gamma)} \implies$$
$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{j_i}\Big|f(\gamma(t_i^*) - \gamma(t_{i,j}^*))\Big|\big|\gamma(t_{i,j}) - \gamma(t_{i,j-1})\big| < \frac{\epsilon}{l(\gamma)}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{j_i}\big|\gamma(t_{i,j}) - \gamma(t_{i,j-1})\big| < \epsilon$$

□

Teorema 4.10. *Teorema de Goursat.*
Si $f\colon U \to \mathbb{C}$ holomorfa, aleshores per a tot triangle sòlid $\mathcal{T} \subseteq U$ es té $\int_T f(z)\,\mathrm{d}z$, on $T = \partial\mathcal{T}$

Demostració. Dividim el triangle $\mathcal{T}^{(0)} = \mathcal{T}$ en 4 triangles amb diàmetre i perímetre la meitat de l'original. Sigui $\mathcal{T}^{(1)}$ el triangle dels quatre pel qual $\left|\int_T^{(1)} f(z)\,\mathrm{d}z\right|$ és més gran, tenim

$\left|\int_{\mathcal{T}^{(0)}} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leq 4\left|\int_{\mathcal{T}^{(1)}} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leq 4^n\left|\int_{\mathcal{T}^{(n)}} f(z)\,\mathrm{d}z\right|$. Sigui $z_0 = \bigcap_{n\geq 0} \mathcal{T}^{(n)}$, que és un punt (és una successió estrictament decreixent de compactes i el diàmetre tendeix a 0).

Per la definició d'holomorfa, es pot escriure $f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0) + \psi(z)(z-z_0)$, $\lim_{z\to z_0} \psi(z) = 0 \implies \int_{T^{(n)}} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{T^{(n)}} \psi(z)(z-z_0)\,\mathrm{d}z$, perquè $\int_{T^{(n)}} f(z_0)+f'(z_0)(z-z_0) = 0$ perquè la funció te primitiva a tot $\mathbb{C}$ (és polinòmica) i la corba és tancada.

$\psi(z) \to 0 \implies \forall\epsilon\exists\delta$ t. q. $|z-z_0| < \delta \Rightarrow \left|phi(z)\right| < \frac{\epsilon}{2}$. Amb n prou gran el diàmetre del triangle és menor que δ. Es té per $z \in \mathcal{T}^{(n)}$, $|z-z_0| < d_n < \delta$ i per tant $\left|\psi(z)\right| \epsilon_n \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon \implies f(z)(z-z_0) \leq \epsilon_n d_n \implies \left|\int_{T^{(n)}} \psi(z)(z-z_0)\,\mathrm{d}z\right| \leq \epsilon_n d_n p_n \implies \left|\int_T \psi(z)(z-z_0)\,\mathrm{d}z\right| \leq \epsilon_n d_n p_n \leq \epsilon_n 2^n d_n 2^n p_n = \epsilon_n d_0 p_0 \to 0$. ☐

Teorema 4.11. *Teorema de Goursat amb singularitats.*
Si $f\colon U \to \mathbb{C}$ holomorfa excepte en un punt on és contínua o està fitada, aleshores per a tot triangle sòlid $\mathcal{T} \subseteq U$ es té $\int_T f(z)\,\mathrm{d}z$, on $T = \partial\mathcal{T}$. També val si hi ha un nombre finit de punts d'aquesta mena.

Demostració. Spdg suposem que el punt z_0 és un vèrtex del triangle (si està a fora no afecta i si està a dins o a una aresta podem dividir el triangle de manera que el punt sigui un vèrtex).

Dividim $\partial\mathcal{T}^{(i)}$ en 4 triangles i agafem el $\partial\mathcal{T}^{(i+1)}$ que té z_0 com a vèrtex. La resta tenen integral 0 per Goursat. $\forall n\left|\int_T\right| = \left|\int_{T^{(n)}}\right|$, i si $M = \sup_{z\in\mathcal{T}}|f(z)|$, $\left|\int_{T^{(n)}} f\right| \leq Ml(T^{(n)}) \to 0$ ☐

Teorema 4.12. *Teorema de Cauchy en un convex.*
Si $f\colon U \to \mathbb{C}$ és holomorfa i U convex, aleshores $\int_\gamma f = 0$ per tot γ contorn tancat.

Demostració. Per Goursat la integral és 0 sobre tot triangle. La prova del primer TFC es pot fer igual només suposant que la integral val 0 per tot triangle. Pel primer TFC, f té primitiva en U, i pel segon, la integral val 0 per tot γ. ☐

Observació 4.13. En particular, és cert si U és un disc

Proposició 4.14. *Integral sobre camins homòtops.* Si $f\colon U \to \mathbb{C}$ és holomorfa, $\int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f$ per tot parell de camins homòtops.

Demostració. Sigui $\phi\colon [0,1]\times[a,b] \to U$ l'homotopia, que és unif. contínua, per ser la imatge del domini K un compacte. Sigui $r = d(K,U^c) > 0$, i δ t. q. $|s-s'| < \delta, |r-r'| < \delta \Rightarrow \left|\phi(s,t)-\phi(s',t')\right| < \epsilon$.

Siguin $0 = s_0 < \cdots < s_n = 1, a = t_0 < \cdots < t_m = b$ amb $\left|s_i - s_{i-1}\right|, \left|t_i - t_{i-1}\right| < \delta$, i $Q_{ij} = [s_{i-1},t_{j-1}]\times[s_i,t_j]$. $Q_{ij} \subset \mathcal{D}(\phi(s_i,t_j);r)$. Per Cauchy sobre un disc, $\int_{\partial Q_{ij}} f = 0$. $\int_{\gamma_{\phi(1,a)\to\cdots\to\phi(1,b)}} f - \int_{\gamma_{\phi(0,a)\to\cdots\to\phi(0,b)}} f = \sum_i\sum_j \int_{\partial Q_{ij}} f = 0$, perquè les interiors s'anul·len i les integrals sobre $\gamma_{\phi(0,a)\to\cdots\to\phi(1,a)}$ i $\gamma_{\phi(0,b)\to\cdots\to\phi(1,b)}$ són 0 per ser els punts inicial i final constants (es recomana fer-ne un dibuix).

γ_1 és la concatenació dels $\gamma_{1,j} = \gamma_i\,|_{[t_{j-1},t_j}$. A més $\int_{\gamma_{1,j}} f = \int_{\gamma_{\phi(0,j-1)\to\phi(0,j)}} f$, perquè ambdós camins estan continguts a $\mathcal{D}(\phi(0,j);r)$ (Cauchy sobre disc). Per tant $\int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_{\phi(0,a)\to\cdots\to\phi(0,b)}} f$, i anàlogament per $\int_{\gamma_2} f$. Com s'ha vist adés, les dues coincideixen. ☐

Teorema 4.15. *Teorema de Cauchy.*
Si $f\colon U \to \mathbb{C}$ és holomorfa i U simplement connex, aleshores $\int_\gamma f = 0$ per tot γ contorn tancat.

Demostració. Pel teorema anterior, el contorn tancat és homòtop al camí tancat trivial (o a un triangle), la integral del qual és 0. ☐

Corol·lari 4.16. *Existència de les determinacions.* Sigui $U \subseteq \mathbb{C}^*$ un obert simplement connex.

(i) Existeix una determinació del logaritme a U holomorfa amb derivada $\frac{1}{z}$. Dues determinacions difereixen en $2\pi i k, k \in \mathbb{Z}$.

(ii) Existeix una determinació contínua de $\mathrm{Arg}(z)$, i dues d'aquestes difereixen en $2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

(iii) Existeix una determinació de l'arrel n-èssima $\sqrt[n]{z}$ holomorfa amb derivada $\frac{\sqrt[n]{z}}{nz}$, i dues difereixen en una constant multiplicativa $e^{2\pi ik/n}, k \in \mathbb{Z}$.

(iv) Existeix una determinació holomorfa de la potència ω-èssima $e^{\omega \log(z)} = z^{\omega}$, amb derivada $\omega z^{\omega-1}$, i dues difereixen en $e^{2\pi ik\omega}, k \in \mathbb{Z}$.

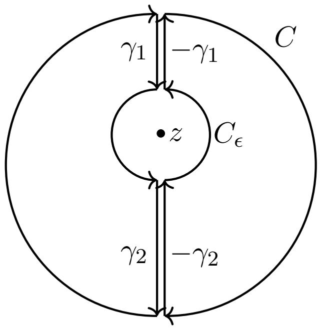
Demostració. □

5 Fórmula integral de Cauchy i aplicacions

Teorema 5.1. *Fórmula integral de Cauchy en un disc.*
Sigui $f\colon U \to \mathbb{C}$ holomorfa a U, $\bar{D} = \bar{\mathcal{D}}(z_0, r) \subset U$, i $C = \partial D$. Aleshores, per tot $z \in D$,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta}{\zeta - z} \,\mathrm{d}\zeta$$

Demostració. Per Cauchy la integral sobre cada semicorona és 0 i es té $0 = \int_C - \int_{C_\epsilon} + \int_{\gamma_1} + \int_{-\gamma_1} + \int_{\gamma_2} + \int_{-\gamma_2} = \int_C - \int_{C_\epsilon} \forall \epsilon$. Definim $F(\zeta) = \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z}$ si $\zeta \neq z$ i $f'(z)$ a z. F és contínua i per tant fitada a $\bar{D} \subset U, |f(z)| \leq M$ a $\bar{D}$.



$$\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \,\mathrm{d}\zeta = \int_{C_\epsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \,\mathrm{d}\zeta = \int_{C_\epsilon} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} + \frac{f(z)}{\zeta - z} \,\mathrm{d}\zeta \leq$$
$$M \int_{C_\epsilon} \mathrm{d}\zeta + f(z) \int_{C_\epsilon} \frac{1}{\zeta - z} \,\mathrm{d}\zeta = M 2\pi\epsilon + 2\pi i f(z) \to 2\pi i f(z)$$

□

Corol·lari 5.2. *Teorema del valor mitjà.* Sigui $f\colon U \to \mathbb{C}$ holomorfa, $\bar{\mathcal{D}}(z_0; r) \subseteq U$. Aleshores

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) \,\mathrm{d}t$$

Demostració. Parametritzant $\zeta = z + re^{it}$ a la fórmula de Cauchy en el disc. □

Teorema 5.3. *Fórmula integral de Cauchy.*
Sigui $f\colon U \to \mathbb{C}$ holomorfa amb U simplement connex, i γ contorn tancat. Aleshores, per tot $z \notin \gamma^*$,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i I_\gamma(z)} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta}{\zeta - z} \,\mathrm{d}\zeta$$

Demostració. Semblant a la fórmula en el disc, però ara $\int_\gamma \frac{f(z)}{\zeta - z} \,\mathrm{d}\zeta = f(z) 2\pi i I_\gamma(z)$. □

Teorema 5.4. *Fórmula integral de Cauchy per les derivades.*
Sigui $f\colon U \to \mathbb{C}$ holomorfa a U, aleshores és infinitament derivable en U. A més, si $\bar{D} = \bar{\mathcal{D}}(z_0, r) \subset U$, i $C = \partial D$, es té per tot $z \in D$,

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} \,\mathrm{d}\zeta$$

Demostració. Per inducció sobre n. El cas base és la fórmula integral de Cauchy. Suposem cert per $n-1$. Sigui h prou petit perquè $z+h \in D$,

$$\begin{aligned}\frac{f^{(n-1)}(z+h)-f^{(n-1)}(z)}{h} &= \frac{(n-1)!}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{h}\left(\frac{1}{(\zeta-z-h)^n}-\frac{1}{(\zeta-z)^n}\right)\mathrm{d}\zeta \\ &= \frac{(n-1)!}{2\pi i}\sum_{k=1}^{n}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z-h)^k(\zeta-z)^{n+1-k)}}\mathrm{d}\zeta\end{aligned}$$

On hem fet servir l'expressió $(a^n-b^n)=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+b^{n-1})$ per desenvolupar la diferència de dins del parèntesi. Per demostrar el teorema només falta provar que per tot k

$$\lim_{h\to 0}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z-h)^k(\zeta-z)^{n+1-k)}} = \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1<}}\mathrm{d}\zeta$$

La diferència entre les dues integrals és, usant de nou l'expressió per a^k-b^k,

$$\int_C f(\zeta)\left(\frac{(\zeta-z)^k-(\zeta-z-h)^k}{(\zeta-z-h)^k(\zeta-z)^{n+1}}\right) = \int_C f(\zeta)h\frac{P_z(\zeta,h)}{(\zeta-z-h)^k(\zeta-z)^{n+1}}$$

on P_z és un polinomi que està fitat per $\zeta\in C$ i h fitat i el denominador està fitat inferiorment per h prou petit: si $|h|<\frac{d}{2}=\frac{d(z,C)}{2}$, es té $|\zeta-z-h|\geq|\zeta-z|-|h|\geq d-\frac{d}{2}$. Si M_1 i M_2 són fites de $|f(\zeta)|$ i $|P_z(\zeta,h)|$, la diferència entre les integrals és $\leq\frac{M_1M_2|h|}{(d/2)^kd^{n+1}}l(C)$, que tendeix a zero quan $h\to 0$. □

Observació 5.5. Tota funció holomorfa és $\mathscr{C}^\infty$, en particular és $\mathscr{C}^1$

Corol·lari 5.6. *Teorema de la funció inversa.* Si f és holomorfa a un entorn de z_0 amb $f'(z_0)\neq 0$, aleshores existeixen entorns oberts $U\ni z_0$, $V\ni f(z_0)$, tals que $f|_U\colon U\to V$ és bijectiva i la inversa $f^{-1}\colon V\to U$ també és holomorfa amb derivada $(f^{-1})(f(z))=f'(z)^{-1}$

Demostració. f és $\mathscr{C}^1$ per ser holomorfa. $f(z_0)\neq 0 \implies (Df)(z_0)\neq 0$, $Df(z_0)$ és l'aplicació lineal de multiplicar per $f'(z_0)$. Apliquem el TFI de Càlcul Diferencial, existeixen U,V com els de l'enunciat, f i f^{-1} bijectives i $\mathscr{C}^1$ i $D(f^{-1})(f(z))=Df(z)^{-1}$. L'aplicació inversa és lineal i correspon a la multiplicaició per $f'(z_0)^{-1}$, que també correspon a la inversa f^{-1} en $f(z)$. Les parcials satisfan Cauchy-Rieann, de manera que f^{-1} és derivable amb eixa derivada. □

Corol·lari 5.7. *Desigualtats de Cauchy.* Si $f(\zeta)\leq M,\quad\forall\zeta\in C(z_0,R)$, aleshores

$$\left|f^{(n)}(z_0)\right|\leq\frac{n!}{R^n}M$$

Demostració. $\left|f^{(n)}(z_0)\right|=\left|\frac{n!}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta\right|\leq\frac{n!}{2\pi}\frac{M}{R^{n-1}}l(C)$ □

Teorema 5.8. *Teorema de Liouville.*
Tota funció entera i fitada és constant.

Demostració. Donat $z_0\in\mathbb{C}$, apliquem la desigualtat de Cauchy a $C(z_0,R)\quad\forall R$: $|f'(z_0)|\leq\frac{M}{R}\quad\forall R\implies|f'(z_0)|=0$. Això és cert $\forall z_0$, per tant f és constant. □

Observació 5.9. Si f entera i $|f(z)|\leq|P(z)|$ per $|z|>M$, f és un polinomi. Es prova anàlogament a l'anterior.

Corol·lari 5.10. *Teorema fonamental de l'Àlgebra (2).* Tot polinomi de $\mathbb{C}[x\}$ no constant té alguna arrel complexa.

Demostració. Suposem que f no té arrels, aleshores $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ és entera no constant. $\lim_{z\to\infty} |f(z)| = \infty \implies \forall M \exists r$ t. q. $|z| \geq r \implies |f(z)| \geq M \implies |g(z)|$ està fitada per $\max\left\{\frac{1}{M_1}, \frac{1}{M_2}\right\}$, on M_2 és el mínim de $f(z)$ a $\mathcal{D}(0;r)$. $|g|$ és fitada i entera, per tant constant, contradicció. □

Teorema 5.11. *Teorema de Morera.*
Invers del teorema de Cauchy: Si $f\colon U \to \mathbb{C}$ és contínua i $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$ per tot contorn tancat γ a U, aleshores f és holomorfa.

Demostració. Amb les hipòtesis, pel TFC té una primitiva F a U, i $f = F'$ és holomorfa. □

Teorema 5.12. *Convergència uniforme i holomorfia.*
Siguin $(f_n)_n$, $f_n\colon U \to \mathbb{C}$ holomorfes. Si $(f_n) \to f$ uniformement sobre compactes de U, aleshores f és holomorfa i $(f_n') \to f'$ uniformement sobre compactes de U.

Demostració. f és contínua per ser límit uniforme sobre compactes de f_n contínues. Sigui γ contorn tancat, $\int_\gamma f = \lim \int_\gamma f_n = 0$ per Cauchy, i per Morera f és holomorfa.

Per la FI de Cauchy es té per tot z,

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} = \lim \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^2} = \lim f_n'(z)$$

on emprem que $\frac{f_n(\zeta)}{(\zeta-z)^2} \to \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2)}$ uniformement, perquè $\left|\frac{f_n(\zeta)}{(\zeta-z)^2} - \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}\right| = \frac{f_n(\zeta)-f(\zeta)}{r^2} < \epsilon$ [1].

Falta vore que la convergència és unif sobre compactes. Siguin $K \subset U$, $R = \frac{d(K,U^c}{2}$ i $K_1 = \{z \in U\colon d(z,K) < R\}$ compacte. Per tot z es té $\bar{\mathcal{D}}(z,R) \subseteq U$. Aplicant una desigualtat anàloga a [1] a K_1 per tot $\zeta \in C(z,R) \subset K_1$ tenim que $f_n' \to f$ uniformement sobre compactes dins U. □

Teorema 5.13. *Holomorfa ⇒ Analítica.*
Sigui $f\colon U \to \mathbb{C}$ holomorfa i $\bar{D}(z_0;R) \subset U$. Aleshores existeix una sèrie de potències tal que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \quad \forall z \in \mathcal{D}$$

i el radi de convergència de la sèrie és $\geq R$. A més,

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_0,R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n-1}}\,\mathrm{d}\zeta$$

.

Demostració. Per la fórmula de Cauchy $f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta$.

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z_0)(1 - \frac{z-z_0}{\zeta - z_0})} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}$$

on $\left|\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right| < 1$, car $z \in \mathcal{D}$. Així $f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \left[\frac{f(\zeta)(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\right]\mathrm{d}\zeta$. f és contínua i C compacte, per tant f és fitada sobre C per M. Sigui $r = |z - z_0| < R$, $\left|\frac{f(\zeta)(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\right| = |f(\zeta)|\frac{r^n}{R^{n+1}} \leq \frac{M}{R}\left(\frac{r}{R}\right)^n$ i $\sum \frac{M}{R}\left(\frac{r}{R}\right)^n < \infty$, la sèrie és unif convergent a C i per tant podem intercanviar sumatori i integral:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}^{n+1}\mathrm{d}\zeta\right)(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z0)^n$$

□

Observació 5.14. Com a coroŀlari tenim una altra demostració de f holomorfa $\implies$ infinitament derivable.

Corol·lari 5.15. *Fórmula integral de Cauchy per les derivades (demostració alternativa).*

Demostració. Sigui $\bar{D}(z_0, R) \subset U$, $C = \partial D$, $z \in D$, $r = \frac{1}{2}d(z, C)$. Apliquem el teorema anterior sobre $\mathcal{D}(z, r) \subset U$: $f(\omega) = \sum a_n(\omega - z)^n$ amb $a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C(z,r)} \frac{f(\zeta)}{z-\zeta}\,\mathrm{d}\zeta = \frac{f^{(n)}(z)}{n!}$ per $\omega \in D(z, r)$, i per Cauchy $\int_{C(z,r)} \frac{f(\zeta)}{z-\zeta}\,\mathrm{d}\zeta = \int_{C(z,R)} \frac{f(\zeta)}{z-\zeta}\,\mathrm{d}\zeta$. □

Teorema 5.16. *Principi de prolongació analítica (2).*
f, g holomorfes a un obert connex Ω. Si $f(z) = g(z)$ per $z \in S \subset \Omega$ tal que S té un punt d'acumulació a Ω, aleshores $f = g$ a Ω.

Alternativament, f holomorfa a Ω connex i hi ha un subconjunt de Ω amb un punt d'acumulació a Ω on f s'anul·la. Aleshores $f = 0$ a tot Ω.

Demostració. En demostrarem la segona forma. Sigui z_0 el punt d'acumulació, $f(z_0) = 0$ per continuïtat. Vorem que $f = 0$ en un entorn de z_0, suposem el contrari. A $\mathcal{D}(z_0, r)$ es té $f(z) = \sum a_n(z - z_0)^n$. Sigui m el primer terme no nul (si són tots nuls ja ho tindríem), $f(z) = (z - z_0)^m(a_m + a_{m+1}(z - z_0) + \cdots) = (z - z_0)^m g(z)$, g contínua. $g(z_0) = a_m$, g no s'anul·la en un entorn de z_0 i $(z - z_0)^m$ només s'anul·la en z_0, per tant z_0 és un zero aïllat de f, contradicció. Per tant $f = 0$ en un entorn U de z_0.

U és un obert. Tota successió de punts de U convergent té límit a U, perquè conté tot punt d'acumulació del conjunt de zeros, per tant U és tancat. U és obert i tancat, i no és el buit ($z_0 \in U$), per tant és el total $U = \Omega$. □

Observació 5.17. Si f és holomorfa a U i $U \subset \Omega$ obert connex, existeix com a màxim una $\tilde{f}$ holomorfa a Ω tal que $\tilde{f}|_U = f$.

Proposició 5.18. *Existència del logaritme i l'arrel.* Si $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa, Ω obert simplement connex, $f(z) \neq 0 \quad \forall z \in \Omega$, aleshores existeixen funcions:

(1) $\operatorname{Log} f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa tal que $e^{\operatorname{Log} f(z)} = f(z) \quad \forall z \in \Omega$, que té derivada $\frac{f(z)}{f'(z)}$.

(2) $f^{1/n}\colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa tal que $\left(f^{1/n}(z)\right)^n = f(z) \quad \forall z \in \Omega$, que té derivada $\frac{f^{1/n}(z)f'(z)}{nf(z)}$.

Demostració. $\frac{f(z)}{f'(z)}$ està ben definida i és holomorfa a Ω, per tant té una primitiva F, única llevat de constant. Amb constant adeqüada $f(z_0) = e^{F(z_0)}$ en algun punt z_0 de Ω. La funció $f(z)e^{-F(z)}$ és holomorfa amb derivada $f'(z)e^{-F(z)} + f(z)e^{-F(z)}\frac{-f'(z)}{f(z)} = 0$, per tant és constant. La constant és 1 perquè pren aquest valor a z_0. Per tant $e^{F(z)} = f(z)$. Per (2), agafem $f^{1/n}(z) = e^{\frac{1}{n}\operatorname{Log} f(z)}$. □

Teorema 5.19. *Principi del mòdul màxim i mínim.*
Si f és holomorfa i no constant a un obert connex Ω, el valor absolut $|f|$ no té màxims locals a Ω. A més, si té mínims locals són els punts on $f(z) = 0$.

Demostració. Sigui z_0 un màxim local i $D = \mathcal{D}(z_0; R)$ on $|f(z_0)| \geq |f(z)| \quad \forall z \in D$. Provarem que $f(z) = f(z_0)$ a D i per prolongació analítica f constant a D.

Pel teorema del valor mitjà i la desigualtat triangular $\forall r < R$ tenim

$$|f(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f(z_0 + re^{it})\right| \mathrm{d}t \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0)| = |f(z_0)|$$

Per tant les desigualtats són igualtats i $\left|f(z_0 + re^{it})\right| = |f(z_0)|$. La segona part es dedueix aplicant la primera a $\frac{1}{|f|}$ □

Teorema 5.20. *Teorema de l'aplicació oberta.*
Si f és holomorfa no constant a un obert connex Ω, aleshores $f(U)$ és obert per tot $U \subseteq \Omega$ obert.

Demostració. Hem de veure que $\forall z \in U$ existeix ϵ tal que $\mathcal{D}(f(z_0);\epsilon) \subset f(U)$. Suposarem spdg que $f(z_0) = 0$.

$U \ni z_0$ obert, $\exists r$ t. q. $\bar{\mathcal{D}}(z_0, r) \subset U$. f és no constant i holomorfa, pel T$^{\text{a}}$ de prolongació analítica f no s'anul̈a a cap punt $\neq z_0$ de U. Sigui $\epsilon = \frac{1}{2}\min\left\{|f(z)| : z \in C > 0\right\}, C = C(z_0;r)$.

Considerem per cada $w \in \mathcal{D}(0;\epsilon)$ la funció $f_w(z) := f(z) - w$. Tenim per $\zeta \in C(z_0, r)$, $|f_w(\zeta)| \geq |f(\zeta)| - |w| > 2\epsilon - \epsilon$, i per altra banda $|f_w(z_0)| = |w| < \epsilon$. Per tant f_w és contínua en un compacte, pren un calor mínim a $\mathcal{D}(z_0;r)$ i pel principi del mòdul mínim eixe mínim val 0. Això vol dir que, per tot w, $f(z) = w$ per a cert $z \in \mathcal{D}(z_0, r)$, és a dir, w pertany a la imatge $f(U)$. Per tant $\mathcal{D}(0;\epsilon) \subset f(\mathcal{D}(z_0, r) \subset f(U)$. □

Lema 5.21. Siguin $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ i $\eta\colon [c,d] \to \mathbb{C}$ contorns, $\Phi\colon \gamma^* \times \eta^* \to \mathbb{C}$ contínua. Aleshores

$$\int_\gamma \left(\int_\eta \Phi(z,\zeta)\,\mathrm{d}\zeta\right)\mathrm{d}z = \int_\eta \left(\int_\gamma \Phi(z,\zeta)\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}\zeta$$

Demostració.

$$\int_\gamma \left(\int_\eta \Phi(z,\zeta)\,\mathrm{d}\zeta\right)\mathrm{d}z = \int_c^d \left(\int_a^b \Phi(z,\zeta)\eta'(s)\,\mathrm{d}s\right)\gamma'(t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_c^d \left(\int_a^b \Phi(z,\zeta)\eta'(s)\gamma'(t)\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t = \int_a^b \left(\int_c^d \Phi(z,\zeta)\eta'(s)\gamma'(t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}s$$

$$= \cdots = \int_e ta \left(\int_\gamma \Phi(z,\zeta)\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}\zeta$$

On hem aplicat el teorema de Fubini (Càlcul Integral) a les components real i imaginària de la funció Φ, que són contínues. □

Teorema 5.22. *Derivació sota el signe integral.*
Sigui $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ contorn, $\Phi\colon U \times \gamma^* \to \mathbb{C}$ amb U obert tals que:

(1) Φ és contínua a $U \times \gamma^*$

(2) $z \mapsto \Phi(z,\zeta)$ és holomorfa a U $\forall \zeta \in \gamma^*$

(3) $\frac{\partial \Phi}{\partial z}(z,\zeta)$ és contínua a $U \times \gamma^*$

aleshores $f(z) = \int_\gamma \Phi(z,\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$ és holomorfa a U i $f'(z) = \int_\gamma \frac{\partial\Phi}{\partial z}(z,\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$.

Demostració. La propietat és local i es pot reduir la demostració al cas que U és un disc. f (que és contínua) és holomorfa pel teorema de Morera. Sigui η un entorn tancat,

$$\int_\eta f = \int_\eta \int_\gamma \Phi(z,\zeta)\,\mathrm{d}\zeta\,\mathrm{d}z \overset{\text{lema}}{=} \int_\gamma \int_\eta \Phi \overset{\text{Cauchy}}{=} \int_\gamma 0 = 0$$

Per la FI de Cauchy aplicada a f,

$$f'(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \left(\int_\gamma \frac{\Phi(z,\zeta)}{(z-w)^2}\,\mathrm{d}\zeta\right)\mathrm{d}z \overset{\text{lema}}{=} \int_\gamma \left(\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\Phi(z,\zeta)}{(z-w)^2}\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}\zeta = \int_\gamma \frac{\partial\Phi}{\partial z}(z,\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$$

□

6 Funcions meromorfes i residus

Teorema 6.1. *Teorema de Riemann d'evitació de singularitats.*
Tota funció holomorfa i fitada a l'entorn d'una singularitat z_0 es pot estendre a z_0 de manera holomorfa (la singularitat és evitable).

En donem dues demostracions:

Demostració. Si f és holomorfa i fitada a $\mathcal{D}'(z_0;r)$, per Goursat per tot triange $T \subset \mathcal{D}'$ es té $\int_T f = 0$, pel TFC f té una primitiva F a $\mathcal{D}'$ que està definida a $\mathcal{D}$. Aleshores definim $f(z_0) = F'(z_0)$ i obtenim una extensió holomorfa (F és holomorfa a z_0: ho és on f contínua i és contínua a z_0, on també és holomorfa si $\Phi = \int F$ i fem $f(z_0) = \Phi''(z_0)$). ☐

Demostració. Definim $g(z) = (z - z_0)^2 f(z)$ a $z \neq 0$ i $g(z_0) = 0$. És holomorfa a $\mathcal{D}'(z_0, r)$. A z_0 també: $\lim\limits_{z\to z_0} \frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0} = \lim\limits_{z\to z_0} \frac{(z-z_0)^2)f(z)}{z-z_0} = 0$ perquè f és fitada. g és holomorfa i per tant analítica a $\mathcal{D}(z_0, r)$, $g(z) = \sum a_n(z - z_0)^n = (z - z_0)^2 \sum a_{n+2}(z - z_0)^n$ i aquesta segona sèrie és una extensió holomorfa de f a z_0. ☐

Observació 6.2. El recíproc és trivialment cert.

Corol·lari 6.3. f holomorfa a U obert, $z_0 \in U$. $f(z_0) = 0$ sii $f(z) = (z - z_0)g(z)$ amb $g(z)$ holomorfa.

Demostració. La implicació inversa és certa per definició. Definim $g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} & \text{si } z \neq z_0 \\ f'(z_0) & \text{si } z = z_0 \end{cases}$.
g és holomorfa a $U \setminus \{z_0\}$ i contínua a $z_0 \implies g$ fitada en un entorn de $z_0 \overset{\text{teor}}{\implies}$ Es pot definir g perquè sigui holomorfa a z_0 i satisfarà $g(z_0) = f'(z_0)$, doncs g és holomorfa $\implies g$ contínua $\implies \lim\limits_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \lim\limits_{z\to z_0} g(z) \implies g$ és holomorfa a U. ☐

Corol·lari 6.4. *Ordre d'un zero.* Si f és holomorfa a U, $z_0 \in U$, $f(z_0) = 0$ i f no és localment zero a z_0, aleshores existeix un únic $m \in \mathbb{N}$ tal que $f(z) = (z - z_0)^m g(z)$ amb $g(z)$ holomorfa a z_0 i $g(z_0) \neq 0$.

Demostració. Aplicant reiteradament el resultat anterior podem escriure f amb aquesta forma, vegem que és única. Suposem que $f(z) = (z - z_0)^m g(z) = (z - z_0)^{m'} h(z)$ amb $m \geq m'$. Llavors $(z - z_0)^{m-m'} g(z) = h(z)$, i $h(z_0) \neq 0$, per tant $m = m'$. A més $g = h$ a $U \setminus \{z_0\}$ i per continuïtat $g(z_0) = h(z_0)$. ☐

Teorema 6.5. Sigui $f\colon U \to \mathbb{C}$ holomorfa, $z_0 \in U$, f no localment constant a $z_0 0$. Sigui $w_0 = f(z_0)$ i $m\colon = \operatorname{ord}_{z_0}(f(z) - w_0) \geq 1$ (és a dir, s'anul̈a a z_0. Aleshores existeix un entorn $U \ni z_0$ tal que:

(i) $f(z) = w_0 + h(z)^m$ amb h holomorfa a U, $h(z_0) = 0$, $h'(z_0) \neq 0$.

(ii) Tot punt $w \in f(U) \setminus \{w_0\}$ té exavtament m antiimatges diferents per f.

(iii) w_0 té una única antiimatge a U (que és z_0).

Demostració.

(i) $f(z) - w_0 = (z - z_0)^m g(z)$ amb g holomorfa i $g(z_0) \neq 0$. Per continuïtat de g, existeix R tal que g no s'anul̈a a $\mathcal{D}(z_0, R)$, i aleshores existeix $z \mapsto g(z)^{1/m}$ holomorfa en $\mathcal{D}$ (que és simplement connex). Sigui $h(z) = (z - z_0)g(z)^{1/m}$, holomorfa a $\mathcal{D}$ amb $h(z_0) = 0$. $h'(z_0) = g(z_0)^{1/m} \neq 0$ (comproveu-ho) i $f(z_0) = w_0 + f(z_0) - w_0 = w_0 + (z - z_0)^m g(z) = w_0 + h(z)^m$.

(iii) En aquest obert, $h(z) = (z - z_0)h(z)^{1/m}$ només s'anul·la en $z = z_0$ en el disc, per ser $g(z) \neq 0$ en tots els punts del disc. Per tant $f(z) \neq w_0$ per tot $z \neq z_0$ de $\mathcal{D}(z_0, R)$.

(ii) Pel teorema de la funció inversa aplicat a h, existeixen entorns $U \subseteq \mathcal{D}(z_0, R)$ de z_0 i V de $h(z_0) = 0$ tals que $h\colon U \to V$ és un difeomorfisme. Prenent $\mathcal{D}(0, r) \subseteq V$ podem suposar que V és un disc i $U = h^{-1}(V)$. Sigui $w = f(z) \in f(U) \setminus \{w_0\}$. $h(z) \neq 0 \implies e^{2\pi ik/m}h(z) \in \mathcal{D}(0; r)$ per $k = 0, \ldots, m-1$ i són tots diferents. Les seues antiimatges per h, z'_k, són diferents per la bijectivitat de h, i $f(z'_k) = w_0 + h(z'_k)^m = w_0 + \left(e^{2\pi ik/m}h(z)\right)^m = w_0 + h(z)^m = f(z) = w$, i per tant són m antiimatges diferents de w. Per veure que no n'hi ha més, sigui $z' \in U$ tal que $f(z') = f(z)$. Aleshores $w_0 + h(z')^m = w_0 + h(z)^m \implies \left(\frac{h(z')}{h(z)}\right)^m = 1 \implies h(z') = e^{2\pi ik/m}h(z)$

□

Corol·lari 6.6. Si f és holomorfa i injectiva en un obert U, aleshores $f'(z) \neq 0 \quad \forall z \in U$ i $f\colon U \to f(U)$ és un difeomorfisme.

Demostració. Si $f'(z_0) = 0$ per a cert $z_0 \in U$, aleshores $m = \operatorname{ord}_{z_0}(f(z) - f(z_0) \geq 2$ i per (ii) f no és injectiva, contradicció. □

Proposició 6.7. *Ordre d'un pol.* Una singularitat z_0 és un pol sii f es pot escriure a l'entorn del punt, de manera única, com $f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^m}$ amb $m \in \mathbb{N}^+$, $g(z)$ holomorfa i $g(z_0) \neq 0$.

Demostració. $\boxed{\Longleftarrow}$ $\lim_{z\to z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0} \frac{g(z)}{(z-z_0)^m} = \infty$ per ser g fitada a un entorn de z_0

$\boxed{\Longrightarrow}$ Sigui $\mathcal{D}'(z_0; R)$ on f no s'anul·la i $f_1(z) = \frac{1}{f(z)}$ holomorfa en aquest disc amb $\lim_{z\to z_0} f_1(z) = 0$. Pel teorema de Riemann d'evitació, f_1 és fitada en un entorn de z_0 i la podem estendre holomorfament a $\mathcal{D}(z_0; R)$ amb $f_1(z_0) = 0$, i serà $f_1(z) = (z-z_0)^m g_1(z)$, g holomorfa amb $g_1(z_0) \neq 0$. Definim $g(z) = (z - z_0)^m f(z)$ a $z \neq z_0$, que satisfà la fórmula, i l'estenem holomorfament a $\mathcal{D}$ fent $g(z_0) = \frac{1}{g_1(z_0)}$. g és única, es demostra anàlogament a quan z_0 és un zero (6.4). □

Teorema 6.8. *Teorema de Casorati-Weierstrass.*
Una singularitat z_0 d'una funció holomorfa és essencial sii la imatge de tot entorn seu és densa a $\mathbb{C}$

Demostració. $\boxed{\Longleftarrow}$ Si és evitable la imatge d'un entorn prou petit és fitada i per tant no és densa a $\mathbb{C}$. Anàlogament, si és un pol la imatge d'un entorn prou petit és fitada inferiorment.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Sigui $\mathcal{D}'(z_0; R)$ un entorn on la imatge no és densa a $\mathbb{C}$, existeix $w \in \mathbb{C}, r > 0$ tal que $f(\mathcal{D}'(z_0; R)) \cap \mathcal{D}(w, r) \neq \varnothing$. Definim $g(z) = \frac{1}{f(z)-w}$ a $\mathcal{D}'(z_0; R)$, que està ben definida, és holomorfa i està fitada ($|f(z) - w| \geq r$). Pel teorema de Riemann d'evitació, podem definir $g(z_0)$ de manera que g és holomorfa a $\mathcal{D}(z_0; R)$. $\lim_{z\to z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0} \frac{1}{g(z)} + w$. Si $g(z_0) \neq 0$ el límit és un nombre complex i la singularitat és evitable, i si és 0 el límit és ∞ i és un pol, la singularitat no és essencial. □

Proposició 6.9. El conjunt $\mathcal{M}(\Omega)$ de les funcions meromorfes en un obert connex Ω és un cos.

Demostració. Sigui $z_0 \in \Omega$ i $f, g \in \mathcal{M}(\Omega)$.

- Suma: Si f és localment zero a z_0, és zero a Ω i $f + g = g \in \mathcal{M}(\Omega)$. Si no, $f(z) = (z - z_0)^m\phi(z)$ i $g(z) = (z - z_0)^n\psi(z)$, $\phi, \psi \neq 0$. Spdg, $m \geq n$ i $(f + g)(z) = (z - z_0)^n(\psi(z) + (z - z_0)^{n-m}\phi(z)) = (z - z_0)^n h(z)$. Si $h \equiv 0$, $f + g \equiv 0$ holomorfa. Si no, $h(z) = (z - z_0)^p\chi(z) \implies (f + g) = (z - z_0)^{n+p}\chi(z)$ meromorfa.

- Producte: $(fg)(z) = (z - z_0)^{m+n}\phi(z)\psi(z)$, que és holomorfa si $m + m \geq 0$ i un pol si $m + n < 0$.

- Inversa: $(\frac{1}{f})(z) = (z - z_0)^{-m}\frac{1}{\psi(z)}$ meromorfa.

$\square$

Corol·lari 6.10.

- $\operatorname{ord}_{z_0}(f+g) \geq \min\{\operatorname{ord}_{z_0}(f), \operatorname{ord}_{z_0}(g)\}$
- $\operatorname{ord}_{z_0}(fg) = \operatorname{ord}_{z_0}(f) + \operatorname{ord}_{z_0}(g)$
- $\operatorname{ord}_{z_0}(\frac{1}{f}) = -\operatorname{ord}_{z_0}(f)$

Proposició 6.11. Tota sèria de Laurent $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ és absolutament convergent a la corona circular $\mathcal{D}(z_0; r, R)$ on $r = \limsup \sqrt[n]{|a_{-n}|}$ i $R^{-1} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$ i és divergent a l'exterior de la corona.

A més és uniformement convergent sobre compactes en aquesta corona i per tant defineix una funció holomorfa.

Demostració. La part ordinària és abs conv en $|z - z_0| < R$ i divergent en $|z - z_0| > R$. La part principal $\sum_{n\geq 1} a_{-n}(\frac{1}{z-z_0})^n$ és abs conv si $\frac{1}{|z-z_0|} \leq \frac{1}{r}$ i divergent si $|z - z_0| < r$. Per tant cal que $R > |z - z_0| < r$.

Sigui $K \in \mathcal{D}(z_0; r, R)$ compacte, $m = \min_k |z - z_0|$ i $M = \max_k |z - z_0|$. Aplicarem el criteri M de Weierstrass. $|a_n(z - z_0)^n| \leq |a_n| M^n$ i $\sum |a_n| M^n$ convergent perquè $M < R$, i anàlogament per m i $|a_{-n}|$. $\square$

Lema 6.12. Sigui $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$ a $\mathcal{D}(z_0; r, R)$ i $r < \rho R$, $C = C(z_0; \rho)$. Aleshores $\int_C f = 2\pi i a_{-1}$

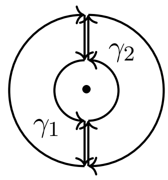
Demostració.

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int_C \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n\,\mathrm{d}z = \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{-1\}} \left[a_n \int_C (z - z_0)^n\,\mathrm{d}z\right] + a_{-1}\int_C \frac{\mathrm{d}z}{z - z_0} = 0 + 2\pi i$$

Les integrals del sumatori valen 0 perquè $(z - z_0)^n$ té primitiva sempre que $n \neq -1$. $\square$

Lema 6.13. *Teorema de Cauchy a una corona.* Si $f\colon U \to \mathbb{C}$ holomorfa, $\bar{\mathcal{D}}(z_0; r, R) \subset U$, aleshores $\int_{C_R} f - \int_{C_r} f = 0$.

Demostració. $\int_{C_R} * \int_{C_r} = \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} = 0 + 0$ per Cauchy. $\square$



Proposició 6.14. *Fórmula integral de Cauchy a una corona.* Sigui $f\colon U \to \mathbb{C}$ holomorfa, $\bar{\mathcal{D}}(z_0; r, R) \subset U$. Aleshores $\forall z \in \mathcal{D}(z_0; r, R)$,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta$$

Demostració. $\square$

Proposició 6.15. Sigui $f\colon U \to \mathbb{C}$ holomorfa, $\bar{\mathcal{D}}(z_0; r, R) \subset U$. Aleshores existeix una única descomposició $f = f_1 + f_2$ tal que f_1 és holomorfa a $\mathcal{D}(z_0; R) \cup U$ i f_2 és holomorfa a $\mathcal{D}(z_0; r)^C \cup U$ amb $\lim\limits_{z\to\infty} f_2(z) = 0$

Demostració. $\square$

Teorema 6.16. Si f és holomorfa a una corona $\mathcal{D}(z_0; r, R)$ aleshores ve donada per una única sèrie de Laurent $\forall z \in \mathcal{D}(z_0; r, R)$ de coeficients $a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta$ per tot $n \in \mathbb{Z}$, on $C = C(z_0, \rho)$ amb $r < \rho < R$.

Demostració. □

Corol·lari 6.17. Si z_0 és una singularitat d'una funció holomorfa en algun entorn perforar seu, té un desenvolupament de Laurent en l'entorn i la singularitat és:

- Evitable si $a_{-n} = 0 \quad \forall n \geq 1$.
- Pol si $a_{-n} = 0 \quad \forall n \geq m$ per algun $m > 1$ tal que $a_{-m} \neq 0$.
- Essencial si $a_{-n} \neq 0$ per infinits $n \geq 1$.

Demostració. Si és evitable es pot expressar com a sèrie només amb part principal, si és un pol $f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^m} \implies f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^m} \sum_{n\geq 0} a_n(z-z_0)^m = \sum_{n\geq -m} a_{n+m}(z-z_0)^n$, i altrament és essencial. □

Lema 6.18. Si z_0 és un pol simple, $\operatorname{Res}(f, z_0) = \lim_{z\to z_0} (z-z_0)f(z)$, i en general si és un pol de multiplicitat m, $\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z\to z_0} \frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}} \underbrace{\left((z-z_0)^m f(z)\right)}_{g(z)}$

Demostració. $f(z) = \sum_{n\geq -m} a_n(z-z_0)^n$ i per tant $g(z) = \sum_{n\geq 0} a_{n-m}(z-z_0)^n$ i el coeficient a_{-1} s'obté amb $n = m-1$, que és $\frac{1}{(m-1)!} \lim_{z\to z_0} g^{(m-1)}(z)$ □

Teorema 6.19. *Teorema del residu.*
Sigui $f\colon U \setminus S \to \mathbb{C}$ holomorfa i $S \subset U$ un conjunt de singularitats aïllades de f. Si $\bar{\mathcal{D}} \subset U$ és un disc tancat i $C = \partial D$ no passa per cap singularitat,

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{z_i \in D\cap S} \operatorname{Res}(f, z_i)$$

Demostració. □

Teorema 6.20. *Principi de l'argument.*
Sigui f és meromorfa a un obert U i $S = f^{-1}(\{0, \inf\})$ els seus zeros i pols. Si $\bar{\mathcal{D}} \subset U$ és un disc tancat i $C = \partial D$ no passa per cap zero ni pol,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z = \sum_{z_i\in D\cap S} \operatorname{ord}_{z_i}(f) \in \mathbb{Z}$$

Demostració. f'/f és holomorfa als punts que no són zeros ni pols de f. Si f té un zero o un pol a z_i, $f(z) = (z-z_i)^m g(z)$ amb $m \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ i g holomorfa a un entorn de z_i, $g(z_i) \neq 0$. $f'(z) = m(z-z_i)^{-1}g(z) + (z-z_i)^n g'(z) \implies \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{z-z_i} + \frac{g'(z)}{g(z)} = \frac{m}{z-z_i} + \sum_{n\geq 0} a_n(z-z_i)^n \implies$ $\operatorname{Res}(\frac{f'}{f}, z_i) = m$, on hem emprat que g'/g és holomorfa en un entorn de z_i. Pel teorema del residu, $\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i} 2\pi i \sum_{z_i\in D\cap S} \operatorname{Res}(\frac{f'}{f}, z_i) = \sum_{z_i\in D\cap S} \operatorname{ord}_{z_i}(f)$. □

Teorema 6.21. *Teorema de Rouché.*
Si f i g són holomorfes a U, $\bar{D} \subset U$ disc de vora C i $|f(z)| > |g(z)| \quad \forall z \in C$. Aleshores f i $f+g$ tenen el mateix nombre de zeros a D, comptant multiplicitats.

Demostració. □

Observació 6.22. El TFA és pot demostrar a partir del teorema de Rouché, agafant $f(z) = a_0 + a_1 z \cdots + a_n z^n$ i $g(z) = -a_0 - a_1 z - \cdots - a_{n-1}z^{n-1}$.