Departament de Matemàtiques

# Problemes d'Anàlisi Real
# FME Curs 2020/21

# Tema 2: Teoremes d'Ascoli-Arzelà i de Stone-Weiesstrass

1. Demostreu que $\mathcal{C}^n([a,b],\mathbb{R})$ amb la norma

$$\|f\| = \sup\{|f(x)|\} + \sup\{|f'(x)|\} + \ldots + \sup\{|f^{(n)}(x)|\}$$

és un espai de Banach. Demostreu que per a $n = 0, 1$ la norma així definida satisfà la propietat multiplicativa.

2. Sigui $E_n$ un espai de Banach i sigui $L(E_n)$ el conjunt dels seus endomorfismes continus. A $L(E_n)$ definim

$$||T|| = \sup_{||x||<1} ||Tx|| = \sup_{||x||\leq 1} ||Tx||.$$

   (a) Comproveu que això és una norma.
   (b) Demostreu que amb aquesta norma $L(E_n)$ és complet.
   (c) Demostreu que amb la composició tenim una àlgebra.
   (d) Demostreu que aquesta àlgebra conté la unitat.

3. Es considera $E$ l'espai vectorial de funcions contínues sobre $\mathbb{R}$, periòdiques de període $2\pi$, amb la norma de la convergència uniforme. Demostreu que $E$ és una àlgebra de Banach commutativa i associativa, amb el producte:

$$(f * g)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(x-t)\ \mathrm{d}t$$

4. Sigui $\mathcal{B} = \{f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}) \mid f(x) > 0\}$. Demostreu que és un conjunt obert de $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$. Quina és la seva clausura?

5. Sigui $\mathcal{B} = \{f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f(x) > 0\}$. És obert? Si no ho és, calculeu $\mathrm{int}(B)$.

6. Demostreu que $\mathcal{C}_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$ és complet amb la norma del suprem.

7. Quines de les famílies següents és equicontínua en el conjunt que s'indica?

   (a) les funcions contínues de Lipschitz a $[0,1]$.
   (b) les funcions contínues $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ que satisfan $||f|| \leq 1$.
   (c) el conjunt $\{\sin nx\}_{n\in\mathbb{N}}$, $x \in [0,\pi]$.

8. Sigui $\{f_n\}$ una successió de funcions reals derivables a $[0,1]$, tals que $\{f_n(x_0)\}$ convergeix per algun $x_0 \in [0,1]$. Demostreu que si $\{f_n'\}$ està uniformement fitada a $[0,1]$, llavors $\{f_n\}$ conté una parcial convergent.

9. Sigui $I : \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ donada per

$$I(f) = \int_0^1 f(x)\ \mathrm{d}x.$$

   (a) Demostreu que $I$ és una aplicació contínua.
   (b) Sigui $\mathcal{B} \subset \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ un conjunt tancat, fitat i equicontinu. Demostreu que existeix $f_0 \in \mathcal{B}$ que maximitza $I$ sobre $\mathcal{B}$.

10. Sigui $E$ un espai mètric, $F$ un espai normat, $H$ un subconjunt fitat de $\mathcal{C}_b(E,F)$. Per a qualsevol $x \in E$ es defineix
$$\begin{array}{rcl} \tilde{x} : H & \longrightarrow & F \\ u & \longmapsto & u(x) \end{array}$$
Demostreu que $H$, amb la norma de l'exercici 2, és puntualment equicontinu en $x_0$ si i només si l'aplicació $x \mapsto \tilde{x}$ és contínua en $x_0$.

11. Sigui $E$ un espai mètric, $F$ un espai normat, $(f_n)$ una successió equicontínua en $\mathcal{C}_b(E,F)$. Demostreu que el conjunt de punts $x \in E$ tals que $(f_n(x))$ és una successió de Cauchy en $F$ és tancat en $E$.

12. Sigui E un espai mètric, F un espai normat, $(f_n)$ una successió de funcions que és equicontínua en un punt $a \in E$. Demostreu que si la successió $(f_n(a))$ és convergent vers $b \in F$ aleshores, per a cada successió $(x_n)$ de E tal que $\lim_{n\mapsto\infty} x_n = a$, la successió $(f_n(x_n))$ convergeix vers $b \in F$.

13. Sigui $\{f_n(x)\}$ una successió de funcions uniformement fitades i integrables Riemann a l'interval $[a,b]$. Es defineix la successió $\{F_n(x)\}$ com
$$F_n(x) = \int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t \qquad \forall x \in [a,b].$$
Demostreu que la successió $\{F_n(x)\}$ té una parcial uniformement convergent.

14. Sigui $\mathcal{F}$ una família de funcions uniformement fitades i equicontínues de $D$ en $\mathbb{R}$. Es defineix
$$f^*(x) = \sup_{f\in\mathcal{F}}\{f(x)\}.$$
Proveu que $f^*$ és contínua a $D$. Demostreu amb un contraexemple que el resultat és fals si es treu la hipòtesi d'equicontinuïtat.

15. (a) Dieu si les successions donades per
$$\begin{array}{rcl} f_n(x) & = & x^n(1-x), \\ g_n(x) & = & x^n(1-x^n), \end{array}$$
convergeixen uniformement en $[0,1]$.

    (b) Demostreu que la successió amb terme general
$$f_n(x) = ne^{\frac{x}{n}}, \quad x \in [-1,2],$$
és equicontínua peró no té cap parcial uniformement convergent. Contradiu això algun resultat teòric?

16. Sigui $f \in C([0,1])$ amb $||f||_{\text{sup}} = \alpha < 1$. Proveu que la família de funcions $\{f^n\}_{n\in\mathbb{N}}$, on $f^n$ denota la potència $n$-èssima de $f$, és equicontínua. Demostreu amb un contraexemple que la propietat anterior és falsa si $\alpha \geq 1$.

17. Sigui una família equicontínua de funcions $F$. Demostreu que
$$G = \{f\ ;\ \exists\ (f_n) \subset F, (f_n(x)) \to f(x)\}$$
també és equicontínua.

18. Sigui $f$ una funció real definida a l'interval $[0,1]$. Es defineixen els moments de $f$ per

$$\int_0^1 x^n f(x)dx \qquad n = 0, 1, \ldots.$$

Demostreu que dues funcions reals contínues definides a l'interval $[0,1]$ coincideixen si i només si tenen la mateixa successió de moments.

19. Sigui $\mathcal{D}$ l'àlgebra dels polinomis parells.

    (a) Demostreu que $\mathcal{D}$ és una àlgebra i conté les funcions constants, peró no separa punts a $[-1,1]$.

    (b) Demostreu que $\mathcal{D}$ no és densa a $\mathcal{C}([-1,1],\mathbb{R})$.

20. (a) Es considera l'espai $\mathcal{C}([0,1])$ amb la norma de la convergència uniforme.
    Sigui $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}([0,1])$ el subconjunt format per les funcions que són lineals a trossos. Proveu que $\mathcal{A}$ és un reticle però no una subàlgebra de $\mathcal{C}([0,1])$.
    Proveu que $\mathcal{A}$ és dens a $\mathcal{C}([0,1])$.
    *Ajuda:* $f : [0,1] \longrightarrow R$ és lineal a trossos si existeix una partició de $[0,1]$, $P = \{0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = 1\}$ de manera que a l'interval $[x_i, x_{i+1}]$ la funció $f$ sigui lineal.Això és

$$f(x) = f(x_i) + \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}(x - x_i) \quad x \in [x_i, x_{i+1}]$$

    (b) Proveu que la famÃlia $\mathcal{A} = \{1, \sin x, \cos x\}$ separa punts a l'interval $[0, \pi/4]$ i també és un reticle. Tanmateix la seva adherència no és $\mathcal{C}([0,\pi/4])$. Quina diferència hi ha respecte l'apartat anterior?

21. Sigui $A$ el conjunt de les combinacions lineals de funcions exponencials amb exponent enter i més gran o igual que 1, és a dir,

$$A = \left\{ \sum_{k=1}^{m} c_k e^{kx}, m \in \mathbb{N}, m \geq 1 \ \text{ arbitrari}, c_k \in \mathbb{R} \right\}.$$

Sigui $K$ un compacte de $\mathbb{R}$. Demostreu que $A$ és dens a $\mathcal{C}(K,\mathbb{R})$.

22. Es consideren $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ i $\varepsilon > 0$ qualsevol. Proveu que si $f$ és contínua, aleshores existeixen $p_1(x), p_2(x) \in R[x]$ de manera que $\forall x \in [a,b] \;\; p_1(x) \leq f(x) \leq p_2(x)$ i

$$\int_a^b p_2(x) \,\mathrm{d}x - \int_a^b p_1(x) \,\mathrm{d}x < \varepsilon$$

23. Donat un espai compacte $X$ es considera l'àlgebra $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ de les funcions reals contínues a $X$ amb la norma de la convergència uniforme.

    (a) Sigui $f_n \to f$ a $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$. Suposem que $f(P) = 0$ per a un cert $P$ de $X$, proveu que $(f_n - f_n(P)) \to f$ a $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$.

    (b) Poseu un exemple d'un subconjunt $A \subset \mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ tancat per a sumes i productes i pel producte per un escalar, que no contingui la funció unitat.

    (c) Sigui $A \subset \mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ satisfent les condicions de l'apartat b) i suposem que existeixi $P \in X$ de manera que $f(P) = 0$, per a qualsevol $f \in A$.
    Proveu que $B = \{f + \lambda | f \in A, \lambda \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ és una subàlgebra (conté la unitat).

(d) Sigui $A$ com a l'apartat anterior i suposem que $A$ separa punts de $X$. Proveu que $A$ és dens en el conjunt d'elements de $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ que s'anul.len a $P$.

*Ajuda:* Proveu que si $A$ separa punts, aleshores $B$ és densa a $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$.

24. Sigui $C_0([1, +\infty))$ l'àlgebra de les funcions contínues $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ tals que $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ existeix i és finit.

   (a) Proveu que si $f \in C_0([1, +\infty))$ llavors $f$ és fitada.

   (b) Proveu que $C_0([1, +\infty))$ amb la norma del suprem és completa.

   (c) Sigui $C([0, 1])$ l'àlgebra de les funcions reals contínues a $[0, 1]$ amb la norma de la convergència uniforme. Definim $\varphi : (0, 1] \to [1, +\infty)$ per $\varphi(x) = 1/x$ i considerem l'aplicació $\Phi : C_0([1, +\infty)) \to C([0, 1])$ donada per

$$\Phi(g)(x) = \begin{cases} (g \circ \varphi)(x) & \text{si } x \neq 0, \\ \lim_{x \to +\infty} g(x) & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

   Proveu que $\Phi$ és lineal i que $\Phi(fg) = \Phi(f)\Phi(g)$. Demostreu que $\Phi$ és bijectiva i que la norma de $\Phi(f)$ és igual a la norma de $f$.

   (d) Deduïu d'aquí que si $f \in C_0([1, +\infty))$, donat $\epsilon > 0$ existeix $p \in \mathbb{R}[x]$ tal que

$$\sup_{x \in [1, +\infty)} \left| f(x) - p\left(\frac{1}{x}\right) \right| < \epsilon$$

25. Siguin $P_1$, $P_2$ dos punts diferents sobre $S^1$ no diametralment oposats. Siguin $f_i : S^1 \longrightarrow [0, \pi] \subset \mathbb{R}$, $i = 1,\ 2$ les funcions que donen la mínima distància angular d'un punt de $S^1$ a $P_1$ i $P_2$, respectivament.

   (a) Proveu que les funcions $f_i$ són contínues.

   (b) Demostreu que $\mathbb{R}[f_1(x), f_2(x)]$ és dens a $C(S^1, \mathbb{R})$ dotada de la convergència uniforme.

   Nota: les funcions sobre $S^1$ són les funcions $f$ sobre $[0, 2\pi]$ que satisfan $f(0) = f(2\pi)$.

26. Sigui $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$. Demostreu que, donat $\epsilon > 0$, existeix $p \in \mathbb{R}[x]$, amb $p(x) > 0$ $\forall\, x \in [0, 1]$, tal que, amb la norma del suprem a $[0, 1]$,

$$||f - \log p|| < \epsilon.$$

   *Ajuda: Considereu* $g = \exp f$.

27. Demostreu que tota funció contínua $f(x)$ definida a l'interval $[0, \pi]$ es pot aproximar uniformement per polinomis en cosinus, $p(\cos x)$, $p \in \mathbb{R}[x]$. Què passa si l'interval és $[0, 2\pi]$?

28. (a) Demostreu que per a tot $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^\pi x \sin^n x \, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \sin^n x \, \mathrm{d}x.$$

   Indicació: Demostreu que la integral de la diferència és 0.

   (b) Demostreu que

$$\int_0^\pi x\ p(\sin x)\, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi p(\sin x)\, \mathrm{d}x$$

   per a tot polinomi $p \in \mathbb{R}[x]$.

(c) Si $g \in C([-1,1])$, demostreu que

$$\int_0^\pi x\ g(\sin x)\ \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi g(\sin x)\ \mathrm{d}x.$$

(d) Calculeu

$$\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x}\ \mathrm{d}x.$$

29. Sigui $\epsilon > 0$ i $f \in C([a,b])$. Sigui $g$ contínua i estrictament monòtona en $[a,b]$. Proveu que existeixen reals $c_0, c_1, \ldots, c_n$ tals que

$$\sup_{x\in[a,b]} \left| f(x) - \sum_{k=0}^n c_k g^k(x) \right| < \epsilon,$$

on $g^k$ és la potència $k$-èssima de $g$.