Física - CFIS

Barcelona, Gener 2020

Autors principals: Àlex Batlle Casellas.

Altres autors: [insert persones]

Revisors: [insert més persones]

Aquí puc escriure molta cosa, per exemple per donar les gràcies a aquells que han anat a classe i ens han passat els apunts.

Última modificació: 8 de gener de 2020.

Continguts

Tema 1

Càlcul vectorial

1.1 Relacions útils i definicions bàsiques

1. Producte vectorial:
   - $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ (d'aquí en endavant en aquest tema s'utilitzarà la fletxeta només quan no posar-la pugui dur a malentesos)
   - $a \times (b \times c) \neq (a \times b) \times c$
   - $a \times (b \times c) = (a \cdot c)b - (a \cdot b)c$
   - Pel tensor antisimètric,
   $$c_i = \sum_{j,k} \epsilon_{ijk} a_j b_k$$
   on
   $$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 0, \text{ si } i = j \vee j = k \vee i = k \\ +1, \text{ si } (i,j,k) \text{ és una permutació parella de } (1,2,3) \\ -1, \text{ si } (i,j,k) \text{ és una permutació imparella de } (1,2,3) \end{cases}$$

2. Desigualtat de Cauchy-Schwarz: $|u \cdot v| \leq |u||v|$

3. Representació vectorial de superfícies: el vector que representa una superfície és perpendicular a aquesta i té mòdul igual a la seva àrea.

1.2 Derivades i integrals de funcions vectorials

1. Vector gradient: $\vec{\nabla} T = \left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z} \right)$, $\frac{\partial T}{\partial \hat{n}} = \vec{\nabla} T \cdot \hat{n}$.

2. Derivada d'una funció escalar respecte d'un escalar: donat un canvi de coordenades $\{\varphi \mapsto \varphi', s \mapsto s'\}$, aleshores $\varphi_s = \frac{d\varphi}{ds} = \frac{d\varphi'}{ds'} = \varphi'_{s'}$.

3. Derivada d'una funció vectorial respecte d'un escalar:
$$\frac{d\vec{A}(s)}{ds} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\vec{A}(s + \Delta s) - \vec{A}(s)}{\Delta s}.$$

Donat un canvi de coordenades,

$$A'_i(s') = \sum_j \lambda_{ij} A_j(s), \quad \frac{dA'_i(s')}{ds'} = \frac{dA'_i(s)}{ds} = \frac{d}{ds}\left(\sum_j \lambda_{ij} A_j(s)\right) = \sum_j \lambda_{ij} \frac{dA_j}{ds}$$

4. Integral d'una funció vectorial respecte un escalar:

$$\int A(s)ds = \sum_i u_i \int A_i(s)ds, \text{ on els } u_j \text{ formen una base ortonormal}$$

5. Derivada total d'un camp escalar:

$$d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x}dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y}dy + \frac{\partial \Phi}{\partial z}dz$$

   Per tant, $d\Phi = \vec{\nabla}\Phi \cdot d\vec{r}$.

6. Laplacià d'una funció vectorial:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}\Phi = \nabla^2\Phi \equiv \Delta\Phi.$$

1.2.1 Divergència i rotacional

1. La **divergència** d'un camp vectorial és $\vec{\nabla} \cdot A$, la suma de les seves derivades parcials en la component corresponent.

2. El **rotacional** d'un camp vectorial és $\vec{\nabla} \times A$.

3. **Circulació d'un vector**: tenim una corba en l'espai $\vec{r}(s)$. La integral entre dos punts d'aquesta és

$$\int_a^b \vec{A} \cdot d\vec{r},$$

   la circulació. Si ho integrem al llarg d'una corba tancada, tenim

$$\oint \vec{A} \cdot d\vec{r}.$$

   Si es compleix $\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{r} = 0$, aleshores tenim

$$\int_{a\ C_1}^b \vec{A} \cdot d\vec{r} + \int_{a\ C_2}^b \vec{A} \cdot d\vec{r} = 0 \iff \int_{a\ C_1}^b \vec{A} \cdot d\vec{r} = \int_{b\ C_2}^a \vec{A} \cdot d\vec{r}.$$

   Aleshores, $\vec{A}$ és un *camp conservatiu.* Si definim $A = \vec{\nabla}\Phi$, aleshores

$$\int_a^b A \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{\nabla}\Phi \cdot d\vec{r} = \int_a^b d\Phi = \Phi(b) - \Phi(a).$$

   Si volem calcular la integral sobre una corba tancada, donarà zero.

4. **Flux** d'un camp vectorial A a través d'una superfície S:

$$\Phi = \iint_S A \cdot d\vec{s}.$$

   Si S és tancada, altre cop s'utilitza la notació encerclant el centre de les integrals. Si A és constant, el flux a través d'una superfície tancada és 0.

Teorema 1.2.1. *Teorema de Gauss.*

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{A} dV = \oint_S \vec{A} \cdot d\vec{s}.$$

Si $\oint_S \vec{A} \cdot d\vec{s} = 0$, $\vec{A}$ s'anomena *camp solenoidal*.

Teorema 1.2.2. *Teorema d'Stokes.*

$$\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{A}) d\vec{s} = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l}.$$

Si $\vec{A}$ és un camp conservatiu, $\vec{\nabla} \times \vec{A} = 0$. Si $\vec{A} = \vec{\nabla}\Phi$, aleshores $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}\Phi) = 0$

1.2.2 Potencial associat a una força conservativa

Si tenim $\vec{F}$ una força conservativa ($\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$), aleshores es té

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} E_p.$$

Això dóna lloc al sistema d'equacions $-\nabla E_p = \vec{F}$,

$$\begin{cases} F_x = -\dfrac{\partial E_p}{\partial x}, \\ F_y = -\dfrac{\partial E_p}{\partial y}, \\ F_z = -\dfrac{\partial E_p}{\partial z}. \end{cases}$$

Integrant, podem trobar $E_p(x, y, z)$. També, utilitzant truquis de Càlcul Integral (primer quatri de segon), podem calcular el potencial (escalar) d'$\vec{F}$ com

$$E_p(\mathbf{x}) = \int_0^1 \left\langle \vec{F}(t\mathbf{x}), \vec{r}(\mathbf{x}) \right\rangle dt.$$

Tema 2

Cinemàtica de la partícula

2.1 Moviment

L'objectiu d'aquesta secció és descriure el moviment d'una partícula mitjançant expressions matemàtiques. Per tal de fer això, necessitarem un espai amb

- un origen;
- una base vectorial.

Definició 2.1.1. El moviment d'una partícula és un vector $\vec{r}$ que uneix l'origen de coordenades amb la posició de la partícula, i que pot dependre de diversos paràmetres. Si depèn del paràmetre t, en coordenades cartesianes el podem escriure com

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{\mathbf{i}} + y(t)\hat{\mathbf{j}} + z(t)\hat{\mathbf{k}}.$$

Definició 2.1.2. La velocitat d'una partícula amb moviment $\vec{r}$ és la seva derivada respecte el temps,

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}.$$

La velocitat sempre és tangent a la trajectòria, i per tant, si $\hat{\mathbf{t}}$ és el vector unitari en la direcció tangent a $\vec{r}$, tenim $\vec{v} = v\hat{\mathbf{t}}$. En coordenades cartesianes,

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{\mathbf{i}} + \frac{dy}{dt}\hat{\mathbf{j}} + \frac{dz}{dt}\hat{\mathbf{k}}.$$

Definició 2.1.3. L'acceleració d'una partícula amb velocitat $\vec{v}$ és la seva derivada respecte el temps,

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}.$$

2.2 Canvis de coordenades

2.2.1 Coordenades polars

$$\begin{cases}\hat{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{i}}\cos\theta + \hat{\mathbf{j}}\sin\theta \\ \hat{\theta} = -\hat{\mathbf{i}}\sin\theta + \hat{\mathbf{j}}\cos\theta\end{cases} \iff \begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{\mathbf{i}} \\ \hat{\mathbf{j}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\hat{\mathbf{r}} \\ \hat{\theta}\end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{\mathbf{r}} \\ \hat{\theta}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\hat{\mathbf{i}} \\ \hat{\mathbf{j}}\end{pmatrix}$$

Canvis en la velocitat i l'acceleració

- Velocitat:
$$\begin{cases}v_r = \dot{r} \\ v_\theta = r\dot{\theta}\end{cases}$$
- Acceleració:
$$\begin{cases}a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\end{cases}$$

2.2.2 Coordenades intrínseques

$$\vec{r}(t),\ \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = v\hat{t},\ \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\hat{t}) = \frac{dv}{dt}\hat{t} + v\frac{d\hat{t}}{dt}.$$

Tenim que $\hat{t}\cdot\hat{t} = 1$, i aleshores

$$\frac{d}{dt}(\hat{t}\cdot\hat{t}) = 0 \implies 2\hat{t}\frac{d\hat{t}}{dt} = 0 \implies \frac{d\hat{t}}{dt} \perp \hat{t}.$$

Si considerem un diferencial d'arc de la trajectòria, tenim que localment $ds = \rho d\theta$. També, el mòdul del vector tangent $\hat{t}$ és localment $|d\hat{t}| = d\theta$. Sabent que $\frac{d\hat{t}}{dt} = a\hat{n}$, aleshores

$$\left|\frac{d\hat{t}}{dt}\right| = \left|\frac{d\hat{t}}{ds}\right|\frac{ds}{dt} = v\frac{d\theta}{ds} = \frac{v}{\rho} \implies \frac{d\hat{t}}{dt} = \frac{v}{\rho}\hat{n}.$$

Canvis en la velocitat i l'acceleració

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\hat{t} + \frac{v^2}{\rho}\hat{n} = a_t\hat{t} + a_n\hat{n},\ a_t = \frac{dv}{dt},\ a_n = \frac{v^2}{\rho}.$$

Si sabem a i v,

$$\begin{cases}v\cdot a = v\cdot(\vec{a}_t + \vec{a}_n) = va_t \\ v\times a = va_n(\hat{t}\times\hat{n})\end{cases} \implies \begin{cases}a_t = \dfrac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{v} \\ a_n = \dfrac{|\vec{v}\times\vec{a}|}{v} \\ \rho = \dfrac{v^3}{|\vec{v}\times\vec{a}|}\end{cases}$$

2.3 Tipus de moviments

2.3.1 Uniforme

$\vec{v} = \vec{v}_0$ és constant, $\vec{r}(t) = \int\vec{v}dt = \vec{v}_0 t + \vec{r}_0$ és una recta.

2.3.2 Uniformement accelerat

$\vec{a} = \vec{a}_0$ constant, per tant

$$\vec{v} = \int \vec{a}dt = \vec{a}_0 t + \vec{v}_0 \implies \vec{r}(t) = \int \vec{v}dt = \int (\vec{a}_0 t + \vec{v}_0)dt = \vec{a}_0 \frac{t^2}{2} + \vec{v}_0 t + \vec{r}_0.$$

$\vec{v}$ es troba sempre en el pla definit per $\vec{v}_0$ i $\vec{a}_0$, i $\vec{r} - \vec{r}_0$ també es troba en aquest mateix pla $\implies$ el moviment és sempre en el mateix pla.

2.3.3 Circular

La velocitat és tangent a la circumferència que descriu el moviment, $\vec{v} \perp \vec{r}$, i $|\vec{r}| = R$ constant. És habitual representar la velocitat angular amb un vector ω, de direcció l'eix de rotació i sentit governat per la regla de la mà dreta. En aquest cas, $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$. La velocitat i l'acceleració són, respectivament,

$$\text{Velocitat:} \begin{cases} v_r = \dot{r} = 0 \\ v_\theta = r\dot{\theta} = \omega R \end{cases} \quad ; \quad \text{Acceleració:} \begin{cases} a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -r\omega^2 \\ a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = r\dot{\omega} \end{cases} \quad .$$

Si ω és constant, tenim $a_\theta = 0$, i aleshores,

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}).$$

Tema 3

Dinàmica de la partícula

3.1 Principis de la mecànica clàssica

I. Tot cos es manté en un estat de repòs o de moviment rectilini uniforme excepte si se l'obliga a variar aquest estat mitjançant forces que actuen sobre ell.

II. La variació del moviment és proporcional a la força que actua sobre el cos i s'efectua en la direcció de la recta en la que actua la força.

III. A tota acció s'oposa sempre una reacció igual.

3.1.1 La primera llei de Newton: la llei de la inèrcia

3.1.1.1 Transformacions de Galileu

Tots els referencials inercials són equivalents. Siguin dos referencials inercials S i S' que es mouen un respecte l'altre amb velocitat uniforme, de manera que el vector entre els seus origens O i O' és $\vec{OO'} = \vec{v}_0 t$. La recta de posició del punt P està relacionada per $\vec{r}_P = \vec{r'}_P + \vec{v}_0 t$, on suposarem que $t = t'$, de manera que la mesura del temps és la mateixa a S i a S'. Això és la transformació de Galileu. Derivant un cop,

$$\vec{v'} = \frac{d\vec{r'}}{dt'} = \frac{d\vec{r'}}{dt}, \quad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r'}}{dt} + \vec{v}_0 = \vec{v'} + \vec{v}_0.$$

Per l'acceleració,

$$\vec{a'} = \frac{d\vec{v'}}{dt'}, \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \implies \vec{a} = \vec{a}'.$$

L'acceleració queda invariant. D'aquí arribem al principi de relativitat de Galileu: les lleis bàsiques de la física són idèntiques en totes els referencials que es mouen amb velocitat uniforme els uns respecte dels altres.

3.1.1.2 Transformacions de Lorentz

No imposarem que $t = t'$, però sí que la velocitat de la llum és la mateixa mesurada en qualsevol referencial inercial. Un dels sistemes es mou amb velocitat v respecte de l'altre. Si fem

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

aleshores, les transformacions de Lorentz són

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma(t - \frac{xv}{c^2}) \end{cases}$$

3.1.2 La segona llei de Newton

Actualment, l'escrivim com $\vec{F} = m\vec{a}$. Si tenim que la mateixa força provoca acceleracions diferents en cossos diferents, podem definir el quocient de les seves masses (la seva inèrcia, o oposició al moviment) com

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{a_2}{a_1}.$$

A partir d'una massa patró podem definir la resta.
Tantmateix, l'enunciat original de Newton no parla ni de massa ni d'acceleració, sinó de variació de moviment. Podem definir la quantitat de moviment com $\vec{p} = m\vec{v}$, de manera que podem escriure la segona llei de Newton com

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}.$$

Per una partícula puntual passa això, però no per un sistema de partícules. En mecànica relativista, coses.

3.1.3 La tercera llei de Newton

Si un cos A exerceix una força sobre un cos B, $\vec{F}_{AB}$, aleshores B exerceix una força $\vec{F}_{BA}$ sobre A, tal que $\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB}$.

3.1.3.1 Conservació de la quantitat de moviment

Siguin dues partícules aïllades que exerceixen forces entre elles. Per la segona llei de Newton,

$$\vec{F}_1 = \frac{d\vec{p}_1}{dt}, \quad \vec{F}_2 = \frac{d\vec{p}_2}{dt}.$$

Però, segons la tercera llei,

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0 \implies \frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} = 0 \implies \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \text{const.}$$

3.1.4 Forces de fricció

Dos cossos en contacte presenten una força entre ells que s'oposa a que llisquin. Aquesta força és proporcional a la força normal (la força de reacció del terra al pes del cos), $F_R \propto N$, $F_R = \mu N$. La força de fregament s'oposa al moviment, i per tant és $\vec{F}_R = -\mu N \vec{v}$.
Existeixen dos coeficients de fregament,

- $\mu_s \longrightarrow$ coeficient de fregament estàtic
- $\mu_d \longrightarrow$ coeficient de fregament dinàmic

3.1.4.1 Forces de fregament en fluids

Les forces de fregament en fluids normalment són proporcionals a la velocitat, $\vec{F}_R = -k\eta\vec{v}$. η és el *coeficient de viscositat*, i k és un factor geomètric; per una esfera, $k = 6\pi r$, $\vec{F}_R = -6\pi r\eta\vec{v}$ (l'anomenada Força d'Stokes).

3.1.5 Sistemes de massa variable

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \frac{dm}{dt}\vec{v} + \frac{d\vec{v}}{dt}m.$$

Si les forces externes són zero, la quantitat de moviment es conserva.

3.2 Moviment curvilini

Si la força no és proporcional a la velocitat, aleshores el moviment descrit serà curvilini. Com que tenim $\vec{F} = m\vec{a}$, aleshores podem definir les components tangencial i normal de la força, de manera que:

$$\begin{cases} F_t = ma_t = m\dfrac{dv}{dt} \\ F_n = ma_n = \dfrac{mv^2}{\rho} \end{cases}.$$

En el cas de moviment circular, $\rho = R,\ v = \omega R$, i les forces són

$$\begin{cases} F_t = mR\dfrac{d\omega}{dt} \\ F_n = m\dfrac{m\omega^2 R^2}{R} = m\omega^2 R \end{cases}.$$

Si a més, ω és uniforme,

$$\begin{cases} F_t = 0 \\ F_n = m\omega^2 R \end{cases} \implies \vec{a} = \vec{\omega} \times \vec{v},\ \vec{F} = m\vec{a} = \vec{\omega} \times m\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{p}.$$

Tema 4

Sistemes de referència en rotació

No sempre podem escollir un sistema de referència inercial. En alguns casos hem de plantejar les equacions en un sistema de referència no inercial (per exemple, lligat a la Terra). En aquest cas apareixen forces lligades a la inèrcia, forces fictícies o inercials, que venen donades per $-m\vec{a}_0$, on $\vec{a}_0$ és l'acceleració del sistema de referència no inercial respecte de l'inercial.

4.1 Moviment relatiu rotacional

Suposem per simplicitat que disposem de dos sistemes de referència amb origen comú, $S = XYZ$ i $S' = X'Y'Z'$, que roten l'un sobre l'altre respecte un eix donat per $\vec{\omega}$. La posició d'un punt P ve donada per:

$$\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k} \text{ a S}, \quad \vec{r}' = \vec{r} = x'\hat{\imath}' + y'\hat{\jmath}' + z'\hat{k}' \text{ a S'}.$$

4.1.1 Velocitat relativa rotacional

La velocitat del punt P a S és:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{\imath} + \frac{dy}{dt}\hat{\jmath} + \frac{dz}{dt}\hat{k}.$$

Això a S' és

$$\vec{v}' = \frac{d\vec{r}'}{dt}|_M = \frac{dx'}{dt}\hat{\imath}' + \frac{dy'}{dt}\hat{\jmath}' + \frac{dz'}{dt}\hat{k}'.$$

Però $\vec{v} \neq \vec{v}'$! L'equació que ens determina com funciona realment això és:

$$\frac{d\vec{r}'}{dt}|_F = \frac{dx'}{dt}\hat{\imath}' + \frac{dy'}{dt}\hat{\jmath}' + \frac{dz'}{dt}\hat{k}' + x'\frac{d\hat{\imath}'}{dt} + y'\frac{d\hat{\jmath}'}{dt} + z'\frac{d\hat{k}'}{dt}.$$

Utilitzarem que $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}\ \forall\vec{r}$, aleshores tenim

$$\frac{d\hat{\imath}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{\hat{\imath}}, \quad \frac{d\hat{\jmath}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{\hat{\jmath}}, \quad \frac{d\hat{k}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{\hat{k}}.$$

Aleshores,

$$\vec{v} = \vec{v}' + x'(\vec{\omega} \times \hat{\imath}) + y'(\vec{\omega} \times \hat{\jmath}) + z'(\vec{\omega} \times \hat{k}) = \vec{v}' + \vec{\omega} \times (x'\hat{\imath}' + y'\hat{\jmath}' + z'\hat{k}') \implies \vec{v} = \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}'.$$

En el cas més general en el que els referencials no comparteixen l'origen, aleshores un es mou respecte l'altre amb velocitat $\vec{v}_0$, i tenim $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}'$, on:

- $\vec{v} \longrightarrow$ velocitat de la partícula en el referencial fixe
- $\vec{v}' \longrightarrow$ velocitat de la partícula en el referencial mòbil
- $\vec{v}_0 \longrightarrow$ velocitat del referencial mòbil respecte el fixe
- $\vec{\omega} \longrightarrow$ velocitat angular de rotació del referencial mòbil respecte el fixe.
- $\vec{\omega} \times \vec{r}' \longrightarrow$ velocitat d'arrossegament

En general, tenim

$$\frac{d\vec{r}}{dt}|_F = \frac{d\vec{r}'}{dt}|_M + \vec{\omega} \times \vec{r}', \quad \frac{d\vec{A}}{dt}|_F = \frac{d\vec{A}'}{dt}|_M + \vec{\omega} \times \vec{A}' \ \forall \vec{A}.$$

4.1.2 Acceleració relativa rotacional

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}|_F = \frac{d\vec{v}_0}{dt}|_F + \frac{d\vec{v}'}{dt}|_F + \frac{d(\vec{\omega} \times \vec{r}')}{dt}|_F.$$

Això implica que

$$\vec{a} = \vec{a}_0 + \frac{d\vec{v}'}{dt}|_M + \vec{\omega} \times \vec{v}' + \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}')|_M + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') \implies$$

$$\vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{a}' + \vec{\omega} \times \vec{v}' + \frac{d\vec{\omega}}{dt}|_M \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}'}{dt}|_M + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') \implies$$

$$\vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{a}' + 2\vec{\omega} \times \vec{v}' + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}'),$$

on

- $\vec{a} \longrightarrow$ acceleració mesurada en S
- $\vec{a}_0 \longrightarrow$ acceleració mesurada en S' respecte S
- $\vec{a}' \longrightarrow$ acceleració mesurada en S'
- $2\vec{\omega} \times \vec{v}' \longrightarrow$ acceleració de Coriolis
- $\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' \longrightarrow$ acceleració tangencial
- $\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') \longrightarrow$ acceleració centrífuga

4.2 Forces fictícies (o inercials)

En un sistema de referència inercial, $\vec{F} = m\vec{a}$. En un sistema en rotació, en canvi, tenim

$$\vec{F} = m(\vec{a}_0 + \vec{a}' + 2\vec{\omega} \times \vec{v}' + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')).$$

La força efectiva, $\vec{F}_{eff}$, serà $\vec{F}_{eff} = m\vec{a}'$, i per tant,

$$\vec{F}_{eff} = \vec{F}' - m\vec{a}_0 - 2m\vec{\omega} \times \vec{v} - m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}').$$

4.3 Moviment relatiu a la Terra

En el nostre cas, la velocitat angular l'agafarem constant, aleshores

$$m\vec{a}' = \vec{F}_g - m\vec{a}_0 - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}' \implies$$

$$\vec{a}' = \frac{\vec{F}_g}{m} - \vec{a}_0 - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') - 2\vec{\omega} \times \vec{v}'.$$

Amb $\vec{a}_0 = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{R}_0)$ i $\vec{g}_{eff} = \vec{g} - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{R}_0)$, obtenim que

$$\vec{a}' = \vec{g}_{eff} - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') - 2\vec{\omega} \times \vec{v}'.$$

Tema 5

Treball i energia

De la 2a llei de Newton, $\vec{a}(t) = \dfrac{\vec{F}(t)}{m}$.

5.1 Treball d'una força.

Sobre el camí C, el treball d'$\vec{F}$ es calcula com

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Si la força total és suma de diverses forces,

$$W_{AB} = \int_A^B \sum_i \vec{F}_i d\vec{r} = \sum_i \int_A^B \vec{F}_i d\vec{r} = \sum_i W_i.$$

La potència es defineix com la velocitat a la que es fa el treball

$$P = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}.$$

L'energia cinètica és la capacitat d'un cos per a realitzar treball. El treball és:

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{t_A}^{t_B} \vec{F} \cdot \vec{v} dt = \int_{t_A}^{t_B} m\vec{a} \cdot \vec{v} dt = \int_{t_A}^{t_B} m\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} dt = \frac{1}{2} m \int_{t_A}^{t_B} \frac{d}{dt}(\vec{v} \cdot \vec{v}) dt = \frac{1}{2} m \int_{t_A}^{t_B} 2v dv = \frac{1}{2}$$

5.2 Camps de forces. Forces conservatives.

El treball en general depèn de la trajectòria, excepte quan $\oint \vec{F} d\vec{r} = 0$. Aleshores, es diu que $\vec{F}$ és conservativa. Un cas important són les forces centrals.

5.2.1 Energia potencial.

Suposem que tenim un camp conservatiu. Aleshores,

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = -(E_p(B) - E_p(A)) \equiv -\Delta E_p.$$

L'energia potencial es defineix de manera que el treball realitzat pel camp la fa disminuïr. Únicament té sentit físic la diferència d'energia potencial, però si fixem l'energia potencial d'un punt, aleshores

$$E_p(B) = E_p(A) - \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = E_p(\infty) - \int_\infty^B \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Si $E_p(\infty) = 0$,

$$E_p(\vec{r}) = - \int_\infty^{r_B} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{r_B}^\infty \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Per un desplaçament infinitesimal, $dE_p = -\vec{F} \cdot d\vec{r} \implies \vec{F} = -\vec{\nabla} E_p$. Per una força central, si està expressada en polars, tenim que la energia potencial depèn únicament del radi (és a dir, $\frac{\partial E_p}{\partial \theta} = 0$).

5.2.2 Conservació de l'energia mecànica

A falta de temps,

$$\Delta E_c + \Delta E_p = 0, \quad E_p + E_c = E_M.$$

En una dimensió, totes les forces són conservatives.

5.2.3 Forces que depenen del temps.

Sigui $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, t)$ conservativa ($\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$). L'energia potencial és

$$E_p(\vec{r}, t) = - \int_\infty^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{r}, t) d\vec{r}, \quad \vec{F}(\vec{r}, t) = -\vec{\nabla} E_p.$$

Sembla que es manté l'energia mecànica, tanmateix,

$$-\Delta E_p \neq W_{AB} : \quad W_{AB} = \int_A^B \vec{F}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{r}.$$

Tema 6

Forces centrals

6.1 Definicions bàsiques

Definició 6.1.1. Sigui una força que actua sobre una partícula. Definirem el moment de la força respecte un punt O com el producte

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}.$$

Definició 6.1.2. Definirem el moment angular d'una partícula respecte cert punt O com

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} = \vec{r} \times \vec{p}.$$

Si tenim un moviment de rotació,

$$v = \omega \times r \implies L = m(r \times (\omega \times r)) = m\omega(r^2) - mr(\omega \cdot r),$$

però com que $\omega \perp r$,

$$L = m\omega r^2.$$

Si definim $I = mr^2$ el *moment d'inèrcia*, aleshores

$$L = I\omega.$$

Observació 6.1.3. Variació del moment angular:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt}(r \times p) = \frac{dr}{dt} \times p + r \times \frac{dp}{dt} = r \times F = M,$$

i sabent que $L = I\omega$,

$$M = I\frac{d\omega}{dt} = I\alpha.$$

Conservació del moment angular: Si $M = 0$,

$$M = \sum_i M_i = \sum_i r_i \times F_i \implies \frac{dL}{dt} = 0 \implies L \text{ és constant.}$$

6.2 Forces centrals

Una força central és tal que $F = f(r)\hat{r}$ respecte el seu origen. El moment de la força respecte l'origen és zero: $M = r \times F = 0$, ja que r i F són paral · leles. Per tant, el moment angular respecte l'origen és constant. Com que $L = r \times p$, el moviment serà en un pla.

6.2.1 Moviment de la partícula en coordenades polars.

El moment angular segueix sent constant i amb la mateixa expressió. L'acceleració en polars és $\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta}$. Com que la component angular és zero,

$$\begin{cases} f(r) = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2), \\ 0 = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}). \end{cases}$$

Multiplicant la component angular per r tenim $r^2\ddot{\theta} + 2r\dot{r}\dot{\theta} = 0 \implies \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0 \implies r^2\dot{\theta} = \text{const.} = \frac{L}{m} \implies \dot{\theta} = \frac{L}{mr^2}$. Ara, de la primera equació (la component radial), obtenim

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = \frac{f(r)}{m} \implies \ddot{r} = \frac{f(r)}{m} + \frac{L^2}{m^2r^3}.$$

Aleshores, per la segona llei de Newton,

$$F(r) = f(r) + \frac{L^2}{mr^3} = -\frac{\partial E_p^{eff}}{\partial r},$$

i podem calcular E_p^{eff} l'energia potencial efectiva com

$$E_p^{eff} = E_p(r) + \frac{L^2}{2mr^2}.$$

Si apliquem tot això a la conservació de l'energia mecànica, sent $E = E_M$,

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_p^{eff} = E \implies \dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E - E_p^{eff}\right)}.$$

6.2.2 Equació de l'òrbita

Si $r = r(\theta)$,

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{mr^2}\frac{dr}{d\theta}.$$

Això implica que

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{L}{mr^2}\frac{dr}{d\theta}\right) = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{L}{mr^2}\frac{dr}{d\theta}\right)\frac{d\theta}{dt} = (*).$$

Aquí utilitzem el fet que

$$\frac{d}{d\theta}\left(\frac{L}{mr^2}\right) = \frac{d}{dr}\left(\frac{L}{mr^2}\right)\frac{dr}{d\theta},$$

i aleshores, tenim que

$$(*) = \frac{L}{mr^2}\left(\frac{L}{mr^2}\frac{d^2r}{d\theta^2} - \frac{2L}{mr^3}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right) = \frac{L^2}{m^2r^4}\frac{d^2r}{d\theta^2} - \frac{2L^2}{m^2r^5}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2.$$

Aleshores, ajuntant-ho tot tenim

$$\ddot{r} = \frac{f(r)}{m} + \frac{L^2}{m^2r^3}, \quad \ddot{r} = \frac{L^2}{m^2r^4}\frac{d^2r}{d\theta^2} - \frac{2L^2}{m^2r^5}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 \implies$$

$$\frac{f(r)}{m}+\frac{L^2}{m^2r^3}=\frac{L^2}{m^2r^4}\frac{d^2r}{d\theta^2}-\frac{2L^2}{m^2r^5}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 \iff \frac{f(r)}{m}=\frac{L^2}{m^2r^4}\frac{d^2r}{d\theta^2}-\frac{2L^2}{m^2r^5}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2-\frac{L^2}{m^2r^3} \iff$$

$$f(r)=\frac{-L^2}{mr^2}\left[\frac{1}{r}-\frac{1}{r^2}\frac{d^2r}{d\theta^2}+\frac{2}{r^3}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right]=\frac{-L^2}{mr^2}\left[\frac{1}{r}+\frac{d^2r}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right)\right]$$

Tema 7

Oscil · lacions

7.1 Moviment Harmònic Simple.

Ara no tinc temps per explicar merdes, però tens un potencial i té un mínim i volem saber com es mouen les coses al voltant d'aquest mínim. Expandim per Taylor i queden expressions com

$$F(x) = -\frac{E_p}{dx} \approx -kx, \quad F = ma = m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

i d'aquí l'*equació del moviment harmònic simple*,

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0.$$

Es prova una solució del tipus $x = Ae^{\lambda t}$, en surten dues, així que les superposem, i queda

$$x = c_1e^{\lambda_1 t} + c_2e^{\lambda_2 t}, \quad \lambda = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Diem $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. La solució general és per tant

$$x(t) = Ae^{i\omega_0 t}+Be^{-i\omega_0 t} = A(\mathrm{cis}(\omega_0 t))+B(\mathrm{cis}(-\omega_0 t)) = (A+B)\cos(\omega_0 t)+i(A-B)\sin(\omega_0 t)$$

$$= C\cos(\omega_0 t) + D\sin(\omega_0 t) = \boxed{A'\cos(\omega_0 t + \delta).}$$

Direm $T = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$ el *període d'oscil · lació.*

7.1.1 Energia del MHS.

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega_0 t + \delta), \quad E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega_0^2\sin^2(\omega_0 t + \delta) \implies$$

$$E = E_p + E_c = \frac{1}{2}kA^2, \quad A = \sqrt{\frac{2E}{k}}.$$

7.2 Oscil · lacions harmòniques en dues dimensions.

En dues dimensions tindrem

$$F = -k\vec{r} = -kr\hat{r} = -k(x\hat{\imath} + y\hat{\jmath}),$$

i per tant les equacions

$$\begin{cases} m\ddot{x} + kx = 0 \implies x(t) = A\cos(\omega_0 t + \delta), \\ m\ddot{y} + ky = 0 \implies y(t) = B\cos(\omega_0 t + \gamma). \end{cases}$$

Si triem l'origen del temps tal que $\gamma = 0$,

$$\begin{cases} x(t) = A\cos(\omega_0 t + \delta), \\ y(t) = B\cos(\omega_0 t); \end{cases} \implies x(t) = A[\cos(\omega_0 t)\cos\delta - \sin(\omega_0 t)\sin\delta]$$

$$= A\left[\frac{y}{B}\cos\delta - \sqrt{1 - \frac{y^2}{B^2}}\sin\delta\right] \implies (\cdots) \implies$$

$$\boxed{x^2 + \frac{A^2}{B^2}y^2 - 2\frac{A}{B}xy\cos\delta = A^2\sin^2\delta.}$$

7.3 Oscil · lacions amortiguades.

Suposem un amortiguament proporcional a la velocitat, $F = -bv$. L'equació del moviment queda

$$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x} \implies \ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0.$$

Definirem $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$, $\beta = \dfrac{b}{2m}$, i aleshores tenim

$$\boxed{\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0.}$$

Suposem una solució $x(t) = Ae^{\lambda t}$, i la solució general de l'equació de sobre és

$$\lambda = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}, \quad x(t) = Ae^{\lambda^+ t} + Be^{\lambda^- t} = e^{-\beta t}(Ae^{\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}t} + Be^{-\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}t}).$$

Definim

- **Oscil · lacions sobreamortiguades:** En les que $\beta^2 > \omega_0^2$.
- **Oscil · lacions crítiques:** En les que $\beta^2 = \omega_0^2$. Aquí, $x(t) = (A + Bt)e^{-\beta t}$.
- **Oscil · lacions subamortiguades:** En les que $\beta^2 < \omega_0^2$.

En aquestes últimes, si $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$,

$$x(t) = e^{-\beta t}(Ae^{\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}t} + Be^{-\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}t}) = e^{-\beta t}(C\cos(\omega t) + D\sin(\omega t)) = e^{-\beta t}A'\cos(\omega t + \delta) = A'(t)\cos(\omega t +$$

Si $\beta << \omega$, $v(t) \approx -A\omega e^{-\beta t}\sin(\omega t + \delta)$. L'energia és $E = \dfrac{1}{2}kA^2e^{-2\beta t}$.

7.4 Oscil · lacions forçades.

Suposarem un oscil · lador harmònic subamortiguat subjecte a un forçat extern periòdic. Suposarem que tenim una força sinusoidal, $F = F_0 \cos(\omega_F t)$. L'equació del moviment serà

$$\boxed{\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = A\cos(\omega_F t),} \quad A = \frac{F_0}{m}.$$

La solució general serà

$$\boxed{x(t) = x_h(t) + x_p(t),}$$

respectivament solució de l'equació homogènia i solució particular. Suposarem

$$\begin{cases} x_p(t) = D\cos(\omega_F t - \delta), \\ \dot{x}_p = -\omega_F D \sin(\omega_F t - \delta), \\ \ddot{x}_p = -\omega_F^2 D \cos(\omega_F t - \delta). \end{cases}$$

Per a ser solució ha de complir l'equació

insertar substitució en l'equació

$$(\cdots) \iff D = \frac{A}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_F^2)^2 + 4\omega_F^2\beta^2}}, \quad \tan\delta = \frac{2\beta\omega_F}{\omega_0^2 - \omega_F^2}.$$

Freqüència de ressonància: aquella que maximitza D. És [insertar càlculs]

$$\omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2},$$

i D val

$$D_{\max} = \frac{F_0}{2m\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}.$$

7.4.1 Superposició de forces.

Les oscil · lacions forçades satisfan una equació de la forma

$$\boxed{\left(\frac{d^2}{dt^2} + 2\beta\frac{d}{dt} + \omega_0^2\right) x(t) = A\cos(\omega_F t).}$$

A l'operador entre parèntesi l'anomenarem $\mathcal{L}$. Per tant, tenim que l'equació satisfeta per les oscil · lacions forçades és

$$\mathcal{L}x(t) = F(t).$$

$\mathcal{L}$ és lineal (superposició, producte per constant, etc). Si la força externa es pot representar com la suma de diverses forces,

$$F(t) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i F_i(t) \implies x(t) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i(t),$$

sent sempre que $\mathcal{L}x_i(t) = F_i(t)$. Donada una força periòdica, podem escriure-la en sèrie de Fourier com

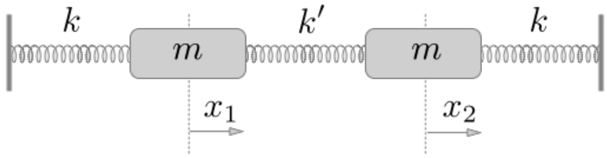
$$F(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n\geq 1}(a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)),$$

sent

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T F(s)\cos(n\omega s)ds, \quad b_n = \frac{2}{T}\int_0^T F(s)\sin(n\omega s)ds.$$

7.5 Oscil · lacions acoplades

Acoplament de dos oscil · ladors harmònics:



$$F_1 = -kx_1 + k'(x_2 - x_1), \quad F_2 = -kx_2 - k'(x_2 - x_1).$$

Les equacions del moviment són

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + (k + k')x_1 - k'x_2 = 0, \\ m\ddot{x}_2 + (k + k')x_2 - k'x_1 = 0. \end{cases}$$

Les solucions generals,

$$x_1 = B_1 e^{\lambda t}, \quad x_2 = B_2 e^{\lambda t},$$

i suposarem $\lambda = i\omega$. Substituint a les equacions, passen coses, estan a la llibreta. El fet és que B_1 i B_2 són diferents de zero sii

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \text{ o,} \quad \omega^2 = \frac{k + 2k'}{m},$$

les anomenades *freqüències normals.*

- Si $\omega^2 = \dfrac{k}{m}$, aleshores $\boxed{B_1 = B_2}$ i $\boxed{x_1 = x_2}$. (*Oscil · lacions en fase*)
- Si, pel contrari, $\omega^2 = \dfrac{k + 2k'}{m}$, aleshores $\boxed{B_1 = -B_2}$ i $\boxed{x_1 = -x_2}$. (*Oscil · lacions en oposició de fase*)

La solució general serà

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} B_1 \cos(\omega_1 t + \delta) + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} B_2 \cos(\omega_2 t + \delta).$$

Fent un canvi de coordenades, $\eta_1 = x_1 - x_2$, $\eta_2 = x_1 + x_2$ (els *modes normals*), passen coses i

$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2B_2 \cos(\omega_2 t + \delta) \\ 2B_1 \cos(\omega_1 t + \delta) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\dfrac{k}{m}} \\ \sqrt{\dfrac{k + 2k'}{m}} \end{pmatrix}.$$

7.6 Ones.

Passen coses. Amb una corda discreta. Llibreta. Algun dia les apuntaré. La qüestió és que l'*equació d'ones* és

$$\boxed{\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} = \frac{T}{\rho} \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} = v^2 \frac{\partial^2 q}{\partial x^2}.}$$

Solucions de l'equació d'ones: qualsevol funció de la forma $q(x - vt)$ o $q(x + vt)$.

7.6.1 Ones harmòniques.

$$f(x,t) = A\sin(kx - \omega t) = A\sin(k(x - vt)), \quad v = \frac{\omega}{k}, T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{vk}, \lambda = \frac{2\pi}{k}.$$

7.6.2 Equacions de Maxwell en absència de càrregues i corrents.

"Otro día, vale?"

ODE Cheat Sheet

First Order Equations

Separable

$y'(x) = f(x)g(y)$
$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx + C$

Linear First Order

$y'(x) + p(x)y(x) = f(x)$
$\mu(x) = \exp \int^x p(\xi)\,d\xi$ Integrating factor.
$(\mu y)' = f\mu$ Exact Derivative.
Solution: $y(x) = \frac{1}{\mu(x)}\left(\int f(\xi)\mu(\xi)\,d\xi + C\right)$

Exact

$0 = M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy$
Solution: $u(x,y) = \text{const}$ where
$du = \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy$
$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x,y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = N(x,y)$

Condition: $M_y = N_x$

Non-Exact Form

$\mu(x,y)\,(M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy) = du(x,y)$
$M_y = N_x$
$N\frac{\partial \mu}{\partial x} - M\frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right).$

Special cases

If $\frac{M_y - N_x}{M} = h(y)$, then $\mu(y) = \exp \int h(y)\,dy$
If $\frac{M_y - N_x}{N} = -h(x)$, then $\mu(y) = \exp \int h(x)\,dx$

Second Order Equations

Linear

$a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = f(x)$
$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$
$y_h(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$

Constant Coefficients

$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = f(x)$
$y(x) = e^{rx} \Rightarrow ar^2 + br + c = 0$

Cases

Distinct, real roots: $r = r_{1,2}$, $y_h(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$
One real root: $y_h(x) = (c_1 + c_2 x)e^{rx}$
Complex roots: $r = \alpha \pm i\beta$, $y_h(x) = (c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)e^{\alpha x}$

Cauchy-Euler Equations

$ax^2 y''(x) + bxy'(x) + cy(x) = f(x)$
$y(x) = x^r \Rightarrow ar(r-1) + br + c = 0$

Cases

Distinct, real roots: $r = r_{1,2}$, $y_h(x) = c_1 x^{r_1} + c_2 x^{r_2}$
One real root: $y_h(x) = (c_1 + c_2 \ln|x|)x^r$
Complex roots: $r = \alpha \pm i\beta$,
$y_h(x) = (c_1 \cos(\beta \ln|x|) + c_2 \sin(\beta \ln|x|))x^\alpha$

Nonhomogeneous Problems

Method of Undetermined Coefficients

$f(x)$	$y_p(x)$
$a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$	$A_n x^n + \cdots + A_1 x + A_0$
ae^{bx}	Ae^{bx}
$a\cos\omega x + b\sin\omega x$	$A\cos\omega x + B\sin\omega x$

Modified Method of Undetermined Coefficients: if any term in the guess $y_p(x)$ is a solution of the homogeneous equation, then multiply the guess by x^k, where k is the smallest positive integer such that no term in $x^k y_p(x)$ is a solution of the homogeneous problem.

Reduction of Order

Homogeneous Case

Given $y_1(x)$ satisfies $L[y] = 0$, find second linearly independent solution as $v(x) = v(x)y_1(x)$. $z = v'$ satisfies a separable ODE.

Nonhomogeneous Case

Given $y_1(x)$ satisfies $L[y] = 0$, find solution of $L[y] = f$ as $v(x) = v(x)y_1(x)$. $z = v'$ satisfies a first order linear ODE.

Method of Variation of Parameters

$y_p(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$
$c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) = 0$
$c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) = \frac{f(x)}{a(x)}$

Applications

Free Fall

$x''(t) = -g$
$v'(t) = -g + f(v)$

Population Dynamics

$P'(t) = kP(t)$
$P'(t) = kP(t) - bP^2(t)$

Newton's Law of Cooling

$T'(t) = -k(T(t) - T_a)$

Oscillations

$mx''(t) + kx(t) = 0$
$mx''(t) + bx'(t) + kx(t) = 0$
$mx''(t) + bx'(t) + kx(t) = F(t)$

Types of Damped Oscillation

Overdamped, $b^2 > 4mk$
Critically Damped, $b^2 = 4mk$
Underdamped, $b^2 < 4mk$

Numerical Methods

Euler's Method

$y_0 = y(x_0)$,
$y_n = y_{n-1} + \Delta x f(x_{n-1}, y_{n-1}), \quad n = 1, \ldots, N.$

Series Solutions

Taylor Method

$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, $c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$

1. Differentiate DE repeatedly.
2. Apply initial conditions.
3. Find Taylor coefficients.
4. Insert coefficients into series form for $y(x)$.

Power Series Solution

1. Let $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$.
2. Find $y'(x)$, $y''(x)$.
3. Insert expansions in DE.
4. Collect like terms using reindexing.
5. Find recurrence relation.
6. Solve for coefficients and insert in $y(x)$ series.

Ordinary and Singular Points

$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$. x_0 is a
Ordinary point: $a(x), b(x)$ real analytic in $|x - x_0| < R$
Regular singular point: $(x - x_0)a(x)$, $(x - x_0)^2 b(x)$ have convergent Taylor series about $x = x_0$.
Irregular singular point: Not ordinary or regular singular point.

Frobenius Method

1. Let $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^{n+r}$.
2. Obtain indicial equation $r(r-1) + a_0 r + b_0$.
3. Find recurrence relation based on types of roots of indicial equation.
4. Solve for coefficients and insert in $y(x)$ series.

Laplace Transforms

Transform Pairs

c	$\frac{c}{s}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}, \quad s > a$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0$
$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\cos\omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$\sinh at$	$\frac{a}{s^2 - a^2}$
$\cosh at$	$\frac{s}{s^2 - a^2}$
$H(t-a)$	$\frac{e^{-as}}{s}, \quad s > 0$
$\delta(t-a)$	$e^{-as}, \quad a \geq 0, s > 0$

Laplace Transform Properties

$\mathcal{L}[af(t)+bg(t)] = aF(s)+bG(s)$
$\mathcal{L}[tf(t)] = -\dfrac{d}{ds}F(s)$
$\mathcal{L}\left[\dfrac{df}{dt}\right] = sF(s)-f(0)$
$\mathcal{L}\left[\dfrac{d^2f}{dt^2}\right] = s^2F(s)-sf(0)-f'(0)$
$\mathcal{L}[e^{at}f(t)] = F(s-a)$
$\mathcal{L}[H(t-a)f(t-a)] = e^{-as}F(s)$
$\mathcal{L}[(f*g)(t)] = \mathcal{L}[\displaystyle\int_0^t f(t-u)g(u)\,du] = F(s)G(s)$

Solve Initial Value Problem

1. Transform DE using initial conditions.
2. Solve for $Y(s)$.
3. Use transform pairs, partial fraction decomposition, to obtain $y(t)$.

Special Functions

Legendre Polynomials

$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$
$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0.$
$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \ldots.$
$g(x,t) = \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n, \quad |x| \le 1, |t| < 1.$

Bessel Functions, $J_p(x)$, $N_p(x)$

$x^2y'' + xy' + (x^2-p^2)y = 0.$

Gamma Functions

$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt, \quad x > 0.$
$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$

Systems of Differential Equations

Planar Systems

$x' = ax + by$
$y' = cx + dy.$
$x'' - (a+d)x' + (ad-bc)x = 0.$

Matrix Form

$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \equiv A\mathbf{x}.$
Guess $\mathbf{x} = \mathbf{v}e^{\lambda t} \Rightarrow A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}.$

Eigenvalue Problem

$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}.$
Find Eigenvalues: $\det(A-\lambda I) = 0$
Find Eigenvectors $(A-\lambda I)\mathbf{v} = 0$ for each λ.

Cases

Real, Distinct Eigenvalues: $\mathbf{x}(t) = c_1e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}_1 + c_2e^{\lambda_2 t}\mathbf{v}_2$
Repeated Eigenvalue: $\mathbf{x}(t) = c_1e^{\lambda t}\mathbf{v}_1 + c_2e^{\lambda t}(\mathbf{v}_2 + t\mathbf{v}_1)$, where $A\mathbf{v}_2 - \lambda\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1$ for $\mathbf{v}_2$.
Complex Conjugate Eigenvalues: $\mathbf{x}(t) = c_1 Re(e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\sin\beta t)\mathbf{v}) + c_2 Im(e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\sin\beta t)\mathbf{v}).$

Solution Behavior

Stable Node: $\lambda_1, \lambda_2 < 0.$
Unstable Node: $\lambda_1, \lambda_2 > 0.$
Saddle: $\lambda_1\lambda_2 < 0.$
Center: $\lambda = i\beta.$
Stable Focus: $\lambda = \alpha + i\beta$, $\alpha < 0.$
Unstable Focus: $\lambda = \alpha + i\beta$, $\alpha > 0.$

Matrix Solutions

Let $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}.$
Find eigenvalues λ_i
Find eigenvectors $\mathbf{v}_i = \begin{pmatrix} v_{i1} \\ v_{i2} \end{pmatrix}$
Form the Fundamental Matrix Solution:
$\Phi = \begin{pmatrix} v_{11}e^{\lambda_1 t} & v_{21}e^{\lambda_2 t} \\ v_{12}e^{\lambda_1 t} & v_{22}e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}$
General Solution: $\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\mathbf{C}$ for $\mathbf{C}$
Find C: $\mathbf{x}_0 = \Phi(t_0)\mathbf{C} \Rightarrow \mathbf{C} = \Phi^{-1}(t_0)\mathbf{x}_0$
Particular Solution: $\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\mathbf{x}_0.$
Principal Matrix solution: $\Psi(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0).$
Particular Solution: $\mathbf{x}(t) = \Psi(t)\mathbf{x}_0.$
Note: $\Psi' = A\Psi, \quad \Psi(t_0) = I.$

Nonhomogeneous Matrix Solutions

$\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\mathbf{C} + \Phi(t)\int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s)\mathbf{f}(s)\,ds$
$\mathbf{x}(t) = \Psi(t)\mathbf{x}_0 + \Psi(t)\int_{t_0}^t \Psi^{-1}(s)\mathbf{f}(s)\,ds$

2×2 Matrix Inverse

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$