Facultat de Matemàtiques i Estadística

Universitat Politècnica de Catalunya - BarcelonaTech

Apunts de Fonaments de les Matemàtiques (Primer curs del Grau de Matemàtiques)

Àlex Batlle Casellas

October 17, 2018

Índex

1

2 Conjunts i aplicacions.

Axioma 2.1. *Axioma d'extensionalitat.*

$$A = B \iff \forall x (x \in A \leftrightarrow x \in B).$$

Definició 2.1. *Relació d'inclusió.*

$$B \subseteq A \iff \forall x (x \in B \to x \in A).$$

<u>Propietats:</u>

1. $A \subseteq A$;
2. $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \implies A \subseteq C$;
3. $A \subseteq B \wedge B \subseteq A \iff A = B$;
4. $\forall A,\ \emptyset \subseteq A$.

<u>Inclusió estricta:</u>

1. $A \not\subset A$;
2. $B \subset A \implies A \not\subset B$;
3. $A \subset B \wedge B \subset C \implies A \subset C$;
4. $A \neq \emptyset \iff \emptyset \subset A$.

2.1 Operacions amb conjunts.

Definició 2.2. *Unió d'A i B ($A \cup B$).*

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}.$$

<u>Propietats:</u>

1. $A \cup A = A$;
2. $A \cup B = B \cup A$;
3. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$;
4. $A \cup \emptyset = A$;
5. $A \subseteq A \cup B,\ B \subseteq A \cup B$;
6. $A \subseteq B \iff A \cup B = B$;
7. $A \cup B \subset C \iff A \subseteq C \wedge B \subseteq C$.

Definició 2.3. *Intersecció d'A i B ($A \cap B$).*

$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}.$$

<u>Propietats:</u>

1. $A \cap A = A$;
2. $A \cap B = B \cap A$;
3. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$;
4. $A \cap \emptyset = \emptyset$;
5. $A \cap B \subseteq A,\ A \cap B \subseteq B$;
6. $A \subseteq B \iff A \cap B = A$;
7. $C \subset A \cap B \iff C \subseteq A \wedge C \subseteq B$.

Definició 2.4. *Diferència d'A i B ($A - B$ o $A \backslash B$).*

$$A \backslash B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}.$$

<u>Propietats:</u>

1. $A - \emptyset = A, \emptyset - A = \emptyset, A - A = \emptyset$;
2. $A - B \subseteq A$;
3. $(A - B) \cap B = \emptyset$;
4. $A \subseteq B \iff A - B = \emptyset$;
5. $C \subseteq A - B \iff (C \subseteq A) \wedge (C \cap B = \emptyset)$.

<u>Propietats de la unió i la intersecció:</u>

1. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;
2. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
3. $A \cap (A \cup B) = A$;
4. $A \cup (A \cap B) = A$.

Definició 2.5. *Conjunt complementari. Fixem un conjunt Ω i considerem només subconjunts d'Ω. El complementari d'un subconjunt A d'Ω és el conjunt de tots els elements d'Ω que no pertanyen a A. (Notació: A^c o $\bar{A}$):*

$$A^c = \{x \in \Omega : x \notin A\} = \Omega - A.$$

<u>Propietats:</u>

1. $\emptyset^c = \Omega,\ \Omega^c = \emptyset$;

2. $(A^c)^c = A$;

3. $A \cap A^c = \emptyset$;
   $A \cup A^c = \Omega$;

4. $A \subseteq B \iff B^c \subseteq A^c$;

5. $A \cap B = \emptyset \iff A \subseteq B^c \iff B \subseteq A^c$;

6. $A \cup B = \Omega \iff A^c \subseteq B \iff B^c \subseteq A$;

7. $A - B = A \cap B^c$;

8. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

Definició 2.6. *Parell ordenat. El parell ordenat de x i y és un objecte que denotem per (x, y) que compleix:*

$$(x, y) = (z, t) \iff x = z \wedge y = t.$$

Definició de Kuratowski:

$$(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}.$$

Definició 2.7. *Producte cartesià. El producte cartesià de dos conjunts A, B és el conjunt format per tots els parells ordenats (x, y) tals que $x \in A$ i $y \in B$. (Notació: $A \times B$)*

$$A \times B = \{(x, y) : x \in A \wedge y \in B\};$$

anàlogament,

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_i \in A_i \forall i\}.$$

<u>Propietats:</u>

1. $A \times \emptyset = \emptyset = \emptyset \times A$;

2. $A \times B = B \times A \iff A = B \vee A = \emptyset \vee B = \emptyset$.

2.2 Conjunt de les parts.

Definició 2.8. *Conjunt de les parts. Anomenem el conjunt de les parts d'A el conjunt que té per elements tots els subconjunts d'A. Notació: $\mathcal{P}(A)$.*

$$\mathcal{P}(A) = \{X : X \subseteq A\}$$

<u>Propietats:</u>

1. $X \in \mathcal{P}(A) \iff X \subseteq A$;

2. $\emptyset \in \mathcal{P}(A),\ A \in \mathcal{P}(A)$.

2.3 Aplicacions.

Definició 2.9. *Correspondència. Una correspondència és una terna* (A, B, G) *on* A *i* B *són conjunts i* $G \subseteq A \times B$.

Definició 2.10. *Aplicació. Una aplicació és una correspondència* (A, B, f) *on* $f \subseteq A \times B$:

$$\forall x \in A \ \exists! y \in B : (x, y) \in f.$$

Anomenem a $f(x) = y$ *la imatge d'x per* f.

Notació:

$$f : \ A \mapsto B.$$

$$A \xrightarrow{f} B.$$

Al conjunt A l'anomenem domini, i al conjunt B codomini.

Definició 2.11. *Restricció. Donada una aplicació* $f : \ A \mapsto B$ *i un subconjunt* $A' \subseteq A$, *anomenem la restricció d'f per* A' *a l'aplicació* $f_{|A'} : \ A' \mapsto B$.

Definició 2.12. *Aplicació identitat. L'aplicació identitat en un conjunt* A *està definida per*

$$I_A : \ A \mapsto A \quad I_A(x) = x \ \forall x \in A.$$

Definició 2.13. *Conjunt imatge. Si* $f : \ A \mapsto B$ *i* $A' \subseteq A$, *aleshores*

$$f(A') = \{y \in B : \exists a \in A'(y = f(a))\} = \{f(a) : a \in A'\}$$

és el conjunt imatge d'A' *per* f.

Definició 2.14. *Conjunt antiimatge. Si* $f : \ A \mapsto B$ *i* $B' \subseteq B$, *aleshores*

$$f^{-1}(B') = \{x \in A : f(x) \in B'\} \subseteq A$$

és el conjunt antiimatge de B' *per* f.

Una qüestió de notació: notem per f^{-1} tant *el conjunt antiimatge* com *la funció inversa*. És important saber distingir entre aquests dos significats:

- $f^{-1}(\{b\})$ és el *conjunt antiimatge* del conjunt $\{b\}$ per f.
- $f^{-1}(b)$ pot ser (fent un abús de notació) el conjunt antiimatge del conjunt que té per únic element a b, com s'indica a 1., però també pot ser l'aplicació inversa (definida més endavant), que no sempre existeix.

2.3.1 Injectivitat, exhaustivitat i bijectivitat.

Definició 2.15. *Injectivitat.* $f: A \mapsto B$ *és injectiva si i només si*

$$\forall a_1, a_2 \in A(a_1 \neq a_2 \implies f(a_1) \neq f(a_2)).$$

Se sol utilitzar el recíproc,

$$\forall a_1, a_2 \in A(f(a_1) = f(a_2) \implies a_1 = a_2).$$

Definició 2.16. *Exhaustivitat.* $f: A \mapsto B$ *és exhaustiva si i només si*

$$\forall b \in B \exists a \in A : f(a) = b.$$

Observació:

1. $|A| > |B|$: no hi ha aplicacions injectives $A \mapsto B$. Si n'hi hagués, $|A| \leq |B|$.
2. $|B| > |A|$: no hi ha aplicacions exhaustives $A \mapsto B$. Si n'hi hagués, $|A| \geq |B|$.

Definició 2.17. *Bijectivitat.* $f: A \mapsto B$ *és exhaustiva si i només si* f *és injectiva i exhaustiva.*

Observació: A, B finits i existeix una bijecció.

$$A \mapsto B \implies (|A| \leq |B|) \wedge (|A| \geq |B|) \implies |A| = |B|.$$

Aleshores, f és bijectiva si i només si $|A| = |B|$. Donat un $y \in B$,

- f és injectiva $\implies \exists x \in A : f(x) = y$.
- f és exhaustiva $\implies \exists! x \in A : f(x) = y$.

Definició 2.18. *Aplicació inversa. L'aplicació inversa d'una bijecció* f *és aquella aplicació que a cada membre del codomini li assigna l'antiimatge per* f.

$$\forall y \in B \exists! x \in A : f(x) = y$$

Es nota $f^{-1}: B \mapsto A$. *Si* f *bijectiva, aleshores*

$$f(x) = y \iff f^{-1}(y) = x$$

Propietats:

1. L'aplicació inversa és única;
2. f bijectiva $\iff f^{-1}$ bijectiva $\wedge (f^{-1})^{-1} = f$;
3. Si $f: A \mapsto B$ i $g: B \mapsto C$ són bijectives, aleshores $g \circ f$ és bijectiva i $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$;
4. f bijectiva, aleshores $f \circ f^{-1} = I_B,\ f^{-1} \circ f = I_A$;
5. $f: A \mapsto B$ és bijectiva $\iff \exists!\ g: B \mapsto A$ tal que $g \circ f = I_A$ i $f \circ g = I_B$. En tal cas, f i g són inverses mútuament.

2.3.2 Composició d'aplicacions.

Definició 2.19. *Composició d'aplicacions. Si* $f: A \mapsto B$ *i* $g: B \mapsto C$ *són aplicacions, la composició de* f *i* g *és l'aplicació* $g \circ f: A \mapsto C$ *tal que* $(g \circ f)(a) = g(f(a))$*, per a tot* $a \in A$*.*

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

$$a \to f(a) \to g(f(a))$$

<u>PROPIETATS:</u>

1. Associativitat. Si $f: A \mapsto B$, $g: B \mapsto C$ i $f: C \mapsto D$, aleshores

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f;$$

2. No commutativitat. En general, la composició d'aplicacions no és commutativa. Si $f: A \mapsto A$ i $g: A \mapsto A$, no sempre és cert que

$$f \circ g = g \circ f;$$

3. Si $f: A \mapsto B$, aleshores $I_B \circ f = f = f \circ I_A$.

<u>PROPIETATS DE LA COMPOSICIÓ D'APLICACIONS: RELACIÓ AMB LA INJECTIVITAT I L'EXHAUSTIVITAT.</u>

1. f i g injectives $\Longrightarrow$ $g \circ f$ injectiva;
2. $g \circ f$ injectiva $\Longrightarrow$ f injectiva;
3. $g \circ f$ injectiva i f exhaustiva $\Longrightarrow$ g injectiva;
4. f i g exhaustives $\Longrightarrow$ $g \circ f$ exhaustiva;
5. $g \circ f$ exhaustiva $\Longrightarrow$ g exhaustiva;
6. $g \circ f$ exhaustiva i g injectiva $\Longrightarrow$ f exhaustiva;
7. f i g bijectives $\Longrightarrow$ $g \circ f$ bijectiva;
8. $g \circ f$ bijectiva $\Longrightarrow$ g exhaustiva i f injectiva.

Definició 2.20.

3 Relacions, operacions i estructures.

Definició 3.1. *R és una relació binària en un conjunt A si $R \subseteq A \times A$.*

PROPIETATS:

- **Reflexiva:** $\forall x \in A(xRx)$.
- **Simètrica:** $\forall x, y \in A(xRy \to yRx)$.
- **Antisimètrica:** $\forall x, y \in A(xRy \wedge yRx \to x = y)$.
- **Transitiva:** $\forall x, y, z \in A(xRy \wedge yRz \to xRz)$.
- **Connexa:** $\forall x, y \in A(xRy \vee yRx)$.

3.1 Relacions d'equivalència.

Definició 3.2. *Una relació R en un conjunt $A \neq \emptyset$ s'anomena d'equivalència si compleix les propietats reflexiva, simètrica i transitiva.*

Definició 3.3. *Definim la classe d'equivalència d'un element $x \in A$ com:*

$$[x]_R = \{y \in A | yRx\}.$$

També escrivim $[x]$ o $\bar{x}$ quan no hi ha risc de confusió.

PROPIETATS:

1. $\forall x \in A(x \in [x])$.
2. $\forall x, y \in A(xRy \iff [x] = [y])$.
3. $A = \bigcup_{x \in A} [x]$.

Definició 3.4. *Anomenem una partició d'un conjunt a una família Π de subconjunts d'A i diferents del buit, disjunts dos a dos, tals que la seva unió és tot A. És a dir, $\Pi \subseteq \mathcal{P}(A)$.*

PROPIETATS:

1. $X \neq \emptyset \ \forall X \in \Pi$.
2. $X \cap Y = \emptyset$ si $X, Y \in \Pi, X \neq Y$.
3. $A = \bigcup_{X \in \Pi} X$.

Els subconjunts $X \in \Pi$ s'anomenen les *parts* o *blocs de la partició.*

Definició 3.5. *Anomenem el conjunt quocient d'un altre conjunt A respecte la relació R al conjunt format per totes les classes d'equivalència definides a partir d'R.*

$$A/R = \{\alpha | \exists x \in A([x] = \alpha)\}.$$

Proposició 3.1. *El conjunt quocient A/R és una partició d'A.*

Demostració:
PENDENT D'ACABAR.
PROPIETATS:

1. Tota relació d'equivalència definida en un conjunt A indueix una partició d'A: el conjunt quocient A/R;
2. Recíprocament, associada a tota partició Π d'A definim una relació R_Π en A:
$$xR_\Pi y \iff \exists B \in \Pi : x \in B \land y \in B;$$
3. La relació R_Π és d'equivalència.

Proposició 3.2. *Relacions i particions.*

1. *Si R és una relació d'equivalència en A, llavors $R_{A/R} = R$;*
2. *Si Π és una partició d'A, llavors $A/R_\Pi = \Pi$.*

3.1.1 Descomposició canònica d'una aplicació.

Sigui $f: \; A \mapsto B$ una aplicació. Definim a A la relació:
$$xR_f y \iff f(x) = f(y).$$

Proposició 3.3. *R_f és una relació d'equivalència a A.*

Definim les aplicacions:
$$\pi: \; A \mapsto A/R_f, \quad \pi(x) = [x]_{R_f}. \tag{1}$$
$$\bar{f}: \; A/R_f \mapsto f(A), \quad \bar{f}([x]_{R_f}) = f(x). \tag{2}$$
$$i: \; f(A) \mapsto B, \quad i(y) = y. \tag{3}$$
$$\implies f = i \circ \bar{f} \circ \pi.$$

3.2 Relacions d'ordre.

Sigui $\leq$ una relació binària en un conjunt A.

- La relació $\leq$ és un *preordre* si és reflexiva i transitiva. Es diu que $(A, \leq)$ és un *conjunt preordenat.*
- La relació $\leq$ és un *ordre parcial* si és un preordre amb la propietat antisimètrica. Es diu que $(A, \leq)$ és un *conjunt parcialment ordenat.*
- La relació $\leq$ és un *ordre total* si és un ordre parcial amb la propietat connexa. Es diu que $(A, \leq)$ és un *conjunt totalment ordenat.*

PENDENT D'ACABAR. Falten definicions de mínim, màxim, minimal i maximal.

Definició 3.6. *Un conjunt parcialment ordenat $(A, \leq)$ està* ***ben ordenat*** *si tot subconjunt $X \subseteq A, X \neq \emptyset$ té un mínim.*