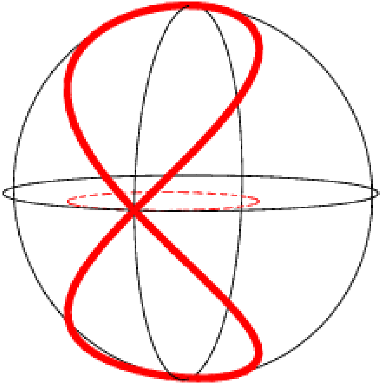
INTEGRACIÓN DE LÍNEA Y SUPERFICIE

Curso 2019-2020



Producto vectorial en $\mathbb{R}^n$

Denotaremos por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ al producto escalar habitual en $\mathbb{R}^n$:
$\mathsf{u} = (u_1, \ldots, u_n)^\top$, $\mathsf{w} = (w_1, \ldots, w_n)^\top \Longrightarrow \langle \mathsf{w}, \mathsf{u} \rangle = u_1 w_1 + \cdots + u_n w_n$.

Producto vectorial en $\mathbb{R}^n$

Denotaremos por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ al producto escalar habitual en $\mathbb{R}^n$:
$\mathsf{u} = (u_1, \ldots, u_n)^\top$, $\mathsf{w} = (w_1, \ldots, w_n)^\top \Longrightarrow \langle \mathsf{w}, \mathsf{u} \rangle = u_1 w_1 + \cdots + u_n w_n$.

- Si $\ell \in (\mathbb{R}^n)^*$, existe un único $\mathsf{u} \in \mathbb{R}^n$ tal que $\ell(\mathsf{w}) = \langle \mathsf{w}, \mathsf{u} \rangle$

Producto vectorial en $\mathbb{R}^n$

Denotaremos por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ al producto escalar habitual en $\mathbb{R}^n$:
$\mathsf{u} = (u_1, \ldots, u_n)^\top$, $\mathsf{w} = (w_1, \ldots, w_n)^\top \Longrightarrow \langle \mathsf{w}, \mathsf{u} \rangle = u_1 w_1 + \cdots + u_n w_n$.

- Si $\ell \in (\mathbb{R}^n)^*$, existe un único $\mathsf{u} \in \mathbb{R}^n$ tal que $\ell(\mathsf{w}) = \langle \mathsf{w}, \mathsf{u} \rangle$

  Si $\mathsf{A} = (a_j) \in \mathcal{M}_{1\times n}(\mathbb{R})$ es la matriz de ℓ en la base canónica

Producto vectorial en $\mathbb{R}^n$

Denotaremos por $\langle\cdot,\cdot\rangle$ al producto escalar habitual en $\mathbb{R}^n$:
$\mathsf{u}=(u_1,\dots,u_n)^\top$, $\mathsf{w}=(w_1,\dots,w_n)^\top \Longrightarrow \langle \mathsf{w},\mathsf{u}\rangle = u_1w_1+\cdots+u_nw_n$.

- Si $\ell\in(\mathbb{R}^n)^*$, existe un único $\mathsf{u}\in\mathbb{R}^n$ tal que $\ell(\mathsf{w})=\langle \mathsf{w},\mathsf{u}\rangle$

  Si $\mathsf{A}=(a_j)\in\mathcal{M}_{1\times n}(\mathbb{R})$ es la matriz de ℓ en la base canónica

  $a_j=\ell(\mathsf{e}_j)$, $\mathsf{e}_j=(0,\dots,0,\overbrace{\;1\;}^{j},0,\dots,0)^\top$, $j=1,\dots,n$

Producto vectorial en $\mathbb{R}^n$

Denotaremos por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ al producto escalar habitual en $\mathbb{R}^n$:
$\mathsf{u} = (u_1, \dots, u_n)^\top$, $\mathsf{w} = (w_1, \dots, w_n)^\top \Longrightarrow \langle \mathsf{w}, \mathsf{u} \rangle = u_1 w_1 + \cdots + u_n w_n$.

- Si $\ell \in (\mathbb{R}^n)^*$, existe un único $\mathsf{u} \in \mathbb{R}^n$ tal que $\ell(\mathsf{w}) = \langle \mathsf{w}, \mathsf{u} \rangle$

  Si $\mathsf{A} = (a_j) \in \mathcal{M}_{1\times n}(\mathbb{R})$ es la matriz de ℓ en la base canónica

  $a_j = \ell(\mathsf{e}_j)$, $\mathsf{e}_j = (0, \dots, 0, \overbrace{1}^{j}, 0, \dots, 0)^\top$, $j = 1, \dots, n$

  $\ell(\mathsf{w}) = a_1 w_1 + \cdots a_n w_m \Longrightarrow$ Basta tomar $\mathsf{u} = (a_1, \dots, a_n)^\top$

Producto vectorial en $\mathbb{R}^n$

Denotaremos por $\langle\cdot,\cdot\rangle$ al producto escalar habitual en $\mathbb{R}^n$:
$\mathsf{u}=(u_1,\dots,u_n)^\top$, $\mathsf{w}=(w_1,\dots,w_n)^\top \Longrightarrow \langle\mathsf{w},\mathsf{u}\rangle = u_1w_1+\cdots+u_nw_n$.

- Si $\ell\in(\mathbb{R}^n)^*$, $\ell(\mathsf{w})=\langle\mathsf{w},\mathsf{u}\rangle$, donde $v_j=\ell(\mathsf{e}_j)$, $j=1,\dots,n$
- Dados $\mathsf{u}_1,\dots,\mathsf{u}_{n-1}\in\mathbb{R}^n$ definimos $\ell\in(\mathbb{R}^n)^*$ como

$$\ell(\mathsf{w})=\det\left[\mathsf{u}_1,\dots,\mathsf{u}_{n-1},\mathsf{w}\right]=\det\begin{bmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1n-1} & w_1\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ u_{n1} & \cdots & u_{nn-1} & w_n\end{bmatrix}$$

$$=\det\left[\mathsf{u}_1,\dots,\mathsf{u}_{n-1},\mathsf{w}\right]^\top=\det\begin{bmatrix} u_{11} & \cdots & u_{n1}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ u_{1n-1} & \cdots & u_{nn-1}\\ w_1 & \cdots & w_n\end{bmatrix}$$

Producto vectorial en $\mathbb{R}^n$

Denotaremos por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ al producto escalar habitual en $\mathbb{R}^n$:
$\mathsf{u} = (u_1, \dots, u_n)^\top$, $\mathsf{w} = (w_1, \dots, w_n)^\top \Longrightarrow \langle \mathsf{w}, \mathsf{u} \rangle = u_1 w_1 + \cdots + u_n w_n$.

- Si $\ell \in (\mathbb{R}^n)^*$, $\ell(\mathsf{w}) = \langle \mathsf{w}, \mathsf{u} \rangle$, donde $u_j = \ell(\mathsf{e}_j)$, $j = 1, \dots, n$
- Dados $\mathsf{u}_1, \dots, \mathsf{u}_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ definimos $\ell \in (\mathbb{R}^n)^*$ como

$$\ell(\mathsf{w}) = \det\left[\mathsf{u}_1, \dots, \mathsf{u}_{n-1}, \mathsf{w}\right] = \det\left[\mathsf{u}_1, \dots, \mathsf{u}_{n-1}, \mathsf{w}\right]^\top$$

- $\mathsf{u}_1 \times \cdots \times \mathsf{u}_{n-1} \Longrightarrow \langle \mathsf{w}, \mathsf{u}_1 \times \cdots \times \mathsf{u}_{n-1} \rangle = \ell(\mathsf{w})$ para cada $\mathsf{w} \in \mathbb{R}^n$

Producto vectorial en $\mathbb{R}^n$

Denotaremos por $\langle\cdot,\cdot\rangle$ al producto escalar habitual en $\mathbb{R}^n$:
$\mathsf{u}=(u_1,\dots,u_n)^\top$, $\mathsf{w}=(w_1,\dots,w_n)^\top \Longrightarrow \langle \mathsf{w},\mathsf{u}\rangle = u_1w_1+\cdots+u_nw_n$.

- Si $\ell\in(\mathbb{R}^n)^*$, $\ell(\mathsf{w})=\langle\mathsf{w},\mathsf{u}\rangle$, donde $u_j=\ell(\mathsf{e}_j)$, $j=1,\dots,n$
- Dados $\mathsf{u}_1,\dots,\mathsf{u}_{n-1}\in\mathbb{R}^n$ definimos $\ell\in(\mathbb{R}^n)^*$ como

$$\ell(\mathsf{w})=\det\left[\mathsf{u}_1,\dots,\mathsf{u}_{n-1},\mathsf{w}\right]=\det\left[\mathsf{u}_1,\dots,\mathsf{u}_{n-1},\mathsf{w}\right]^\top$$

- $\mathsf{u}_1\times\cdots\times\mathsf{u}_{n-1}\Longrightarrow\langle\mathsf{w},\mathsf{u}_1\times\cdots\times\mathsf{u}_{n-1}\rangle=\ell(\mathsf{w})$ para cada $\mathsf{w}\in\mathbb{R}^n$

- Si $d_j=(-1)^{n+j}\det\begin{bmatrix}u_{11}&\cdots&u_{1n-1}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ u_{n1}&\cdots&u_{nn-1}\end{bmatrix}_j$, quitando la fila j

$$\mathsf{u}_1\times\cdots\times\mathsf{u}_{n-1}=(d_1,\dots,d_n)^\top$$

Producto vectorial en $\mathbb{R}^n$

Dados $\mathsf{u}_1, \dots, \mathsf{u}_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ definimos $\mathsf{u}_1 \times \cdots \times \mathsf{u}_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ como el único

$$\langle \mathsf{w}, \mathsf{u}_1 \times \cdots \times \mathsf{u}_{n-1} \rangle = \det[\mathsf{u}_1, \dots, \mathsf{u}_{n-1}, \mathsf{w}] = \det[\mathsf{u}_1, \dots, \mathsf{u}_{n-1}, \mathsf{w}]^\top$$

- $\boxed{\mathsf{u}_1 \times \cdots \times \mathsf{u}_{n-1} = (d_1, \dots, d_n)^\top,\ d_j = (-1)^{n+j} \det[\mathsf{u}_1, \dots, \mathsf{u}_{n-1}]_j}$

Producto vectorial en $\mathbb{R}^n$

Dados $\mathsf{u}_1, \dots, \mathsf{u}_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ definimos $\mathsf{u}_1 \times \cdots \times \mathsf{u}_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ como el único

$$\langle \mathsf{w}, \mathsf{u}_1 \times \cdots \times \mathsf{u}_{n-1} \rangle = \det[\mathsf{u}_1, \dots, \mathsf{u}_{n-1}, \mathsf{w}] = \det[\mathsf{u}_1, \dots, \mathsf{u}_{n-1}, \mathsf{w}]^\top$$

- $\boxed{\mathsf{u}_1 \times \cdots \times \mathsf{u}_{n-1} = (d_1, \dots, d_n)^\top,\ d_j = (-1)^{n+j} \det[\mathsf{u}_1, \dots, \mathsf{u}_{n-1}]_j}$

1. $\mathsf{u}_1 \times \cdots \times \mathsf{u}_{n-1} = 0$ sii $\mathsf{u}_1, \dots, \mathsf{u}_{n-1}$ son linealmente dependientes.

Producto vectorial en $\mathbb{R}^n$

Dados $\mathsf{u}_1, \dots, \mathsf{u}_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ definimos $\mathsf{u}_1 \times \cdots \times \mathsf{u}_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ como el único

$$\langle \mathsf{w}, \mathsf{u}_1 \times \cdots \times \mathsf{u}_{n-1} \rangle = \det[\mathsf{u}_1, \dots, \mathsf{u}_{n-1}, \mathsf{w}] = \det[\mathsf{u}_1, \dots, \mathsf{u}_{n-1}, \mathsf{w}]^\top$$

- $\boxed{\mathsf{u}_1 \times \cdots \times \mathsf{u}_{n-1} = (d_1, \dots, d_n)^\top,\ d_j = (-1)^{n+j} \det[\mathsf{u}_1, \dots, \mathsf{u}_{n-1}]_j}$

1. $\mathsf{u}_1 \times \cdots \times \mathsf{u}_{n-1} = 0$ sii $\mathsf{u}_1, \dots, \mathsf{u}_{n-1}$ son linealmente dependientes.
2. Si $\mathsf{u}_1, \dots, \mathsf{u}_{n-1}$ son linealmente independientes, entonces $\{\mathsf{u}_1, \dots, \mathsf{u}_{n-1}, \mathsf{u}_1 \times \cdots \times \mathsf{u}_{n-1}\}$ es base **positivamente orientada**.

Producto vectorial en $\mathbb{R}^n$

Dados $\mathsf{u}_1,\dots,\mathsf{u}_{n-1}\in\mathbb{R}^n$ definimos $\mathsf{u}_1\times\cdots\times\mathsf{u}_{n-1}\in\mathbb{R}^n$ como el único

$$\langle \mathsf{w},\mathsf{u}_1\times\cdots\times\mathsf{u}_{n-1}\rangle=\det[\mathsf{u}_1,\dots,\mathsf{u}_{n-1},\mathsf{w}]=\det[\mathsf{u}_1,\dots,\mathsf{u}_{n-1},\mathsf{w}]^\top$$

- $\boxed{\mathsf{u}_1\times\cdots\times\mathsf{u}_{n-1}=(d_1,\dots,d_n)^\top,\ d_j=(-1)^{n+j}\det[\mathsf{u}_1,\dots,\mathsf{u}_{n-1}]_j}$

1. $\mathsf{u}_1\times\cdots\times\mathsf{u}_{n-1}=0$ sii $\mathsf{u}_1,\dots,\mathsf{u}_{n-1}$ son linealmente dependientes.
2. Si $\mathsf{u}_1,\dots,\mathsf{u}_{n-1}$ son linealmente independientes, entonces $\{\mathsf{u}_1,\dots,\mathsf{u}_{n-1},\mathsf{u}_1\times\cdots\times\mathsf{u}_{n-1}\}$ es base **positivamente orientada**.
3. $\mathsf{u}_1\times\cdots\times\mathsf{u}_i\times\cdots\times\mathsf{u}_j\times\cdots\times\mathsf{u}_{n-1}=-\mathsf{u}_1\times\cdots\times\mathsf{u}_j\times\cdots\times\mathsf{u}_i\times\cdots\times\mathsf{u}_{n-1}$.

Producto vectorial en $\mathbb{R}^n$

Dados $\mathsf{u}_1, \dots, \mathsf{u}_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ definimos $\mathsf{u}_1 \times \cdots \times \mathsf{u}_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ como el único

$$\langle \mathsf{w}, \mathsf{u}_1 \times \cdots \times \mathsf{u}_{n-1} \rangle = \det[\mathsf{u}_1, \dots, \mathsf{u}_{n-1}, \mathsf{w}] = \det[\mathsf{u}_1, \dots, \mathsf{u}_{n-1}, \mathsf{w}]^\top$$

- $\boxed{\mathsf{u}_1 \times \cdots \times \mathsf{u}_{n-1} = (d_1, \dots, d_n)^\top,\ d_j = (-1)^{n+j} \det[\mathsf{u}_1, \dots, \mathsf{u}_{n-1}]_j}$

1. $\mathsf{u}_1 \times \cdots \times \mathsf{u}_{n-1} = 0$ sii $\mathsf{u}_1, \dots, \mathsf{u}_{n-1}$ son linealmente dependientes.
2. Si $\mathsf{u}_1, \dots, \mathsf{u}_{n-1}$ son linealmente independientes, entonces $\{\mathsf{u}_1, \dots, \mathsf{u}_{n-1}, \mathsf{u}_1 \times \cdots \times \mathsf{u}_{n-1}\}$ es base **positivamente orientada**.
3. $\mathsf{u}_{\sigma(1)} \times \cdots \times \mathsf{u}_{\sigma(n-1)} = (-1)^{\mathrm{sig}(\sigma)}\, \mathsf{u}_1 \times \cdots \times \mathsf{u}_{n-1}$.
4. $\mathsf{u}_1 \times \cdots \times (a\mathsf{u}_i + b\widehat{\mathsf{u}}_i) \times \cdots \times \mathsf{u}_{n-1} = a\,(\mathsf{u}_1 \times \cdots \times \mathsf{u}_i \times \cdots \times \mathsf{u}_{n-1}) + b\,(\mathsf{u}_1 \times \cdots \times \widehat{\mathsf{u}}_i \times \cdots \times \mathsf{u}_{n-1})$.

Producto vectorial en $\mathbb{R}^n$

Dados $\mathsf{u}_1,\dots,\mathsf{u}_{n-1}\in\mathbb{R}^n$ definimos $\mathsf{u}_1\times\cdots\times\mathsf{u}_{n-1}\in\mathbb{R}^n$ como el único

$$\langle \mathsf{w},\mathsf{u}_1\times\cdots\times\mathsf{u}_{n-1}\rangle=\det[\mathsf{u}_1,\dots,\mathsf{u}_{n-1},\mathsf{w}]=\det[\mathsf{u}_1,\dots,\mathsf{u}_{n-1},\mathsf{w}]^\top$$

- $$\boxed{\mathsf{u}_1\times\cdots\times\mathsf{u}_{n-1}=(d_1,\dots,d_n)^\top,\ d_j=(-1)^{n+j}\det[\mathsf{u}_1,\dots,\mathsf{u}_{n-1}]_j}$$

1. $\mathsf{u}_1\times\cdots\times\mathsf{u}_{n-1}=0$ sii $\mathsf{u}_1,\dots,\mathsf{u}_{n-1}$ son linealmente dependientes.
2. Si $\mathsf{u}_1,\dots,\mathsf{u}_{n-1}$ son <u>linealmente independientes</u>, entonces $\{\mathsf{u}_1,\dots,\mathsf{u}_{n-1},\mathsf{u}_1\times\cdots\times\mathsf{u}_{n-1}\}$ es base **positivamente orientada**.
3. $\mathsf{u}_{\sigma(1)}\times\cdots\times\mathsf{u}_{\sigma(n-1)}=(-1)^{\mathrm{sig}(\sigma)}\,\mathsf{u}_1\times\cdots\times\mathsf{u}_{n-1}$.
4. $$\mathsf{u}_1\times\cdots\times(a\mathsf{u}_i+b\widehat{\mathsf{u}}_i)\times\cdots\times\mathsf{u}_{n-1}=a\,(\mathsf{u}_1\times\cdots\times\mathsf{u}_i\times\cdots\times\mathsf{u}_{n-1})+b\,(\mathsf{u}_1\times\cdots\times\widehat{\mathsf{u}}_i\times\cdots\times\mathsf{u}_{n-1}).$$
5. $\langle\mathsf{u}_j,\mathsf{u}_1\times\cdots\times\mathsf{u}_{n-1}\rangle=0$, para cada $j=1,\dots,n-1$.

Producto vectorial en $\mathbb{R}^n$

Dados $u_1, \dots, u_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ definimos $u_1 \times \cdots \times u_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ como el único

$$\langle w, u_1 \times \cdots \times u_{n-1} \rangle = \det[u_1, \dots, u_{n-1}, w] = \det[u_1, \dots, u_{n-1}, w]^\top$$

- $$\boxed{u_1 \times \cdots \times u_{n-1} = (d_1, \dots, d_n)^\top,\ d_j = (-1)^{n+j} \det[u_1, \dots, u_{n-1}]_j}$$

1. $u_1 \times \cdots \times u_{n-1} = 0$ sii $u_1, \dots, u_{n-1}$ son linealmente dependientes.
2. $u_1, \dots, u_{n-1}$ l.i. $\Longrightarrow \{u_1, \dots, u_{n-1}, u_1 \times \cdots \times u_{n-1}\}$ base **p. o.**.
3. El producto vectorial es alternado.
4. El producto vectorial es multilineal.
5. $u_1 \times \cdots \times u_{n-1} \in \mathrm{sg}\{u_1, \dots, u_{n-1}\}^\perp$.
6. $\langle u_1 \times \cdots \times u_{n-1}, u_n \rangle = (-1)^{n-1} \langle u_2 \times \cdots \times u_{n-1} \times u_n, u_1 \rangle$.

Producto vectorial en $\mathbb{R}^n$

Dados $\mathsf{u}_1, \dots, \mathsf{u}_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ definimos $\mathsf{u}_1 \times \cdots \times \mathsf{u}_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ como el único

$$\langle \mathsf{w}, \mathsf{u}_1 \times \cdots \times \mathsf{u}_{n-1} \rangle = \det[\mathsf{u}_1, \dots, \mathsf{u}_{n-1}, \mathsf{w}] = \det[\mathsf{u}_1, \dots, \mathsf{u}_{n-1}, \mathsf{w}]^\top$$

- $\boxed{\mathsf{u}_1 \times \cdots \times \mathsf{u}_{n-1} = (d_1, \dots, d_n)^\top,\ d_j = (-1)^{n+j} \det[\mathsf{u}_1, \dots, \mathsf{u}_{n-1}]_j}$

1. $\mathsf{u}_1 \times \cdots \times \mathsf{u}_{n-1} = 0$ sii $\mathsf{u}_1, \dots, \mathsf{u}_{n-1}$ son linealmente dependientes.
2. $\mathsf{u}_1, \dots, \mathsf{u}_{n-1}$ l.i. $\Longrightarrow \{\mathsf{u}_1, \dots, \mathsf{u}_{n-1}, \mathsf{u}_1 \times \cdots \times \mathsf{u}_{n-1}\}$ base **p. o.**.
3. El producto vectorial es alternado.
4. El producto vectorial es multilineal.
5. $\mathsf{u}_1 \times \cdots \times \mathsf{u}_{n-1} \in \mathrm{sg}\{\mathsf{u}_1, \dots, \mathsf{u}_{n-1}\}^\perp$.
6. $\langle \mathsf{u}_1 \times \cdots \times \mathsf{u}_{n-1}, \mathsf{u}_n \rangle = (-1)^{n-1} \langle \mathsf{u}_2 \times \cdots \times \mathsf{u}_{n-1} \times \mathsf{u}_n, \mathsf{u}_1 \rangle$.
7. Para cada $\mathsf{u}_n \in \mathbb{R}^n$, $|\langle \mathsf{u}_1 \times \cdots \times \mathsf{u}_{n-1}, \mathsf{u}_n \rangle| = \mathsf{v}_n(P_n)$, donde P_n es el paralelepípedo de aristas $\mathsf{u}_1, \dots, \mathsf{u}_{n-1}, \mathsf{u}_n$.

Producto vectorial en $\mathbb{R}^n$

Dados $\mathsf{u}_1, \dots, \mathsf{u}_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ definimos $\mathsf{u}_1 \times \cdots \times \mathsf{u}_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ como el único

$$\langle \mathsf{w}, \mathsf{u}_1 \times \cdots \times \mathsf{u}_{n-1} \rangle = \det[\mathsf{u}_1, \dots, \mathsf{u}_{n-1}, \mathsf{w}] = \det[\mathsf{u}_1, \dots, \mathsf{u}_{n-1}, \mathsf{w}]^\top$$

- $\boxed{\mathsf{u}_1 \times \cdots \times \mathsf{u}_{n-1} = (d_1, \dots, d_n)^\top,\ d_j = (-1)^{n+j} \det[\mathsf{u}_1, \dots, \mathsf{u}_{n-1}]_j}$
  - $\mathsf{u}_1 \times \cdots \times \mathsf{u}_{n-1} = 0$ sii $\mathsf{u}_1, \dots, \mathsf{u}_{n-1}$ son linealmente dependientes.
  - El producto vectorial es multilineal y alternado.
  - $\mathsf{u}_1 \times \cdots \times \mathsf{u}_{n-1} \in \mathrm{sg}\{\mathsf{u}_1, \dots, \mathsf{u}_{n-1}\}^\perp$.
  - $|\langle \mathsf{u}_1 \times \cdots \times \mathsf{u}_{n-1}, \mathsf{u}_n \rangle| = \mathsf{v}_n(P_n)$, para cada $\mathsf{u}_n \in \mathbb{R}^n$.
- Matriz de Gram para $\mathsf{w}_1, \dots, \mathsf{w}_k \in \mathbb{R}^n$: $\mathsf{G}(\mathsf{w}_1, \dots, \mathsf{w}_k) = \big(\langle \mathsf{w}_i, \mathsf{w}_j \rangle\big)$.

  Notación: $g_{ij} = \langle \mathsf{w}_i, \mathsf{w}_j \rangle$, $i, j = 1, \dots, k$, $\quad g = \det \mathsf{G}(\mathsf{w}_1, \dots, \mathsf{w}_k)$

Producto vectorial en $\mathbb{R}^n$

Dados $\mathsf{u}_1, \ldots, \mathsf{u}_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ definimos $\mathsf{u}_1 \times \cdots \times \mathsf{u}_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ como el único

$$\langle \mathsf{w}, \mathsf{u}_1 \times \cdots \times \mathsf{u}_{n-1} \rangle = \det[\mathsf{u}_1, \ldots, \mathsf{u}_{n-1}, \mathsf{w}] = \det[\mathsf{u}_1, \ldots, \mathsf{u}_{n-1}, \mathsf{w}]^\top$$

- $\mathsf{u}_1 \times \cdots \times \mathsf{u}_{n-1} = (d_1, \ldots, d_n)^\top$, $d_j = (-1)^{n+j} \det[\mathsf{u}_1, \ldots, \mathsf{u}_{n-1}]_j$
  - $\mathsf{u}_1 \times \cdots \times \mathsf{u}_{n-1} = 0$ sii $\mathsf{u}_1, \ldots, \mathsf{u}_{n-1}$ son linealmente dependientes.
  - El producto vectorial es multilineal y alternado.
  - $\mathsf{u}_1 \times \cdots \times \mathsf{u}_{n-1} \in \mathrm{sg}\{\mathsf{u}_1, \ldots, \mathsf{u}_{n-1}\}^\perp$.
  - $|\langle \mathsf{u}_1 \times \cdots \times \mathsf{u}_{n-1}, \mathsf{u}_n \rangle| = \mathsf{v}_n(P_n)$, para cada $\mathsf{u}_n \in \mathbb{R}^n$.
- Matriz de Gram para $\mathsf{w}_1, \ldots, \mathsf{w}_k \in \mathbb{R}^n$: $\mathsf{G}(\mathsf{w}_1, \ldots, \mathsf{w}_k) = \big(\langle \mathsf{w}_i, \mathsf{w}_j \rangle\big)$.

  Notación: $g_{ij} = \langle \mathsf{w}_i, \mathsf{w}_j \rangle$, $i, j = 1, \ldots, k$, $g = \det \mathsf{G}(\mathsf{w}_1, \ldots, \mathsf{w}_k)$
- G es semidefinida positiva, $g \geq 0$ y $g = 0$ sii $\mathsf{w}_1, \ldots, \mathsf{w}_k$ son l.d.

Producto vectorial en $\mathbb{R}^n$

Dados $\mathsf{u}_1, \dots, \mathsf{u}_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ definimos $\mathsf{u}_1 \times \cdots \times \mathsf{u}_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ como el único

$$\langle \mathsf{w}, \mathsf{u}_1 \times \cdots \times \mathsf{u}_{n-1} \rangle = \det[\mathsf{u}_1, \dots, \mathsf{u}_{n-1}, \mathsf{w}] = \det[\mathsf{u}_1, \dots, \mathsf{u}_{n-1}, \mathsf{w}]^\top$$

- $\mathsf{u}_1 \times \cdots \times \mathsf{u}_{n-1} = (d_1, \dots, d_n)^\top$, $d_j = (-1)^{n+j} \det[\mathsf{u}_1, \dots, \mathsf{u}_{n-1}]_j$
  - $\mathsf{u}_1 \times \cdots \times \mathsf{u}_{n-1} = 0$ sii $\mathsf{u}_1, \dots, \mathsf{u}_{n-1}$ son linealmente dependientes.
  - El producto vectorial es multilineal y alternado.
  - $\mathsf{u}_1 \times \cdots \times \mathsf{u}_{n-1} \in \mathrm{sg}\{\mathsf{u}_1, \dots, \mathsf{u}_{n-1}\}^\perp$.
  - $|\langle \mathsf{u}_1 \times \cdots \times \mathsf{u}_{n-1}, \mathsf{u}_n \rangle| = \mathsf{v}_n(P_n)$, para cada $\mathsf{u}_n \in \mathbb{R}^n$.
- Matriz de Gram para $\mathsf{u}_1, \dots, \mathsf{u}_{n-1} \in \mathbb{R}^n$: $\mathsf{G} = \big(\langle \mathsf{u}_i, \mathsf{u}_j \rangle\big)$.

  Notación: $g_{ij} = \langle \mathsf{u}_i, \mathsf{u}_j \rangle$, $i, j = 1, \dots, n-1$, $g = \det \mathsf{G}$
- $\big|\mathsf{u}_1 \times \cdots \times \mathsf{u}_{n-1}\big| = \sqrt{g}$

Producto vectorial en $\mathbb{R}^n$

Dados $\mathsf{u}_1,\dots,\mathsf{u}_{n-1}\in\mathbb{R}^n$ definimos $\mathsf{u}_1\times\cdots\times\mathsf{u}_{n-1}\in\mathbb{R}^n$ como el único

$$\langle \mathsf{w},\mathsf{u}_1\times\cdots\times\mathsf{u}_{n-1}\rangle=\det[\mathsf{u}_1,\dots,\mathsf{u}_{n-1},\mathsf{w}]=\det[\mathsf{u}_1,\dots,\mathsf{u}_{n-1},\mathsf{w}]^\top$$

- $\boxed{\mathsf{u}_1\times\cdots\times\mathsf{u}_{n-1}=(d_1,\dots,d_n)^\top,\ d_j=(-1)^{n+j}\det[\mathsf{u}_1,\dots,\mathsf{u}_{n-1}]_j}$
  - $\mathsf{u}_1\times\cdots\times\mathsf{u}_{n-1}=0$ sii $\mathsf{u}_1,\dots,\mathsf{u}_{n-1}$ son linealmente dependientes.
  - El producto vectorial es multilineal y alternado.
  - $\mathsf{u}_1\times\cdots\times\mathsf{u}_{n-1}\in\operatorname{sg}\{\mathsf{u}_1,\dots,\mathsf{u}_{n-1}\}^\perp$.
  - $|\langle\mathsf{u}_1\times\cdots\times\mathsf{u}_{n-1},\mathsf{u}_n\rangle|=\mathsf{v}_n(P_n)$, para cada $\mathsf{u}_n\in\mathbb{R}^n$.

- Matriz de Gram para $\mathsf{u}_1,\dots,\mathsf{u}_{n-1}\in\mathbb{R}^n$: $\mathsf{G}=\big(\langle\mathsf{u}_i,\mathsf{u}_j\rangle\big)$.

  Notación: $g_{ij}=\langle\mathsf{u}_i,\mathsf{u}_j\rangle$, $i,j=1,\dots,n-1$, $g=\det\mathsf{G}$

- $\boxed{|\mathsf{u}_1\times\cdots\times\mathsf{u}_{n-1}|=\sqrt{g}\Longrightarrow\sqrt{g}=\mathsf{v}_{n-1}(P_{n-1})}$

Producto vectorial en $\mathbb{R}^n$

Dados $\mathsf{u}_1,\dots,\mathsf{u}_{n-1}\in\mathbb{R}^n$ definimos $\mathsf{u}_1\times\cdots\times\mathsf{u}_{n-1}\in\mathbb{R}^n$ como el único

$$\langle \mathsf{w}, \mathsf{u}_1\times\cdots\times\mathsf{u}_{n-1}\rangle = \det[\mathsf{u}_1,\dots,\mathsf{u}_{n-1},\mathsf{w}] = \det[\mathsf{u}_1,\dots,\mathsf{u}_{n-1},\mathsf{w}]^\top$$

- $\boxed{\mathsf{u}_1\times\cdots\times\mathsf{u}_{n-1} = (d_1,\dots,d_n)^\top,\ d_j = (-1)^{n+j}\det[\mathsf{u}_1,\dots,\mathsf{u}_{n-1}]_j}$

Producto vectorial en $\mathbb{R}^n$

Dados $\mathsf{u}_1, \dots, \mathsf{u}_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ definimos $\mathsf{u}_1 \times \cdots \times \mathsf{u}_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ como el único

$$\langle \mathsf{w}, \mathsf{u}_1 \times \cdots \times \mathsf{u}_{n-1} \rangle = \det[\mathsf{u}_1, \dots, \mathsf{u}_{n-1}, \mathsf{w}] = \det[\mathsf{u}_1, \dots, \mathsf{u}_{n-1}, \mathsf{w}]^\top$$

- $\boxed{\mathsf{u}_1 \times \cdots \times \mathsf{u}_{n-1} = (d_1, \dots, d_n)^\top,\ d_j = (-1)^{n+j} \det[\mathsf{u}_1, \dots, \mathsf{u}_{n-1}]_j}$
- Si $\mathsf{u} = (u_1, \dots, u_{n-1})^\top \in \mathbb{R}^{n-1} \Longrightarrow \mathsf{u} = (u_1, \dots, u_{n-1}, 0)^\top \in \mathbb{R}^n$

Producto vectorial en $\mathbb{R}^n$

Dados $\mathsf{u}_1, \ldots, \mathsf{u}_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ definimos $\mathsf{u}_1 \times \cdots \times \mathsf{u}_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ como el único

$$\langle \mathsf{w}, \mathsf{u}_1 \times \cdots \times \mathsf{u}_{n-1} \rangle = \det[\mathsf{u}_1, \ldots, \mathsf{u}_{n-1}, \mathsf{w}] = \det[\mathsf{u}_1, \ldots, \mathsf{u}_{n-1}, \mathsf{w}]^\top$$

- $\boxed{\mathsf{u}_1 \times \cdots \times \mathsf{u}_{n-1} = (d_1, \ldots, d_n)^\top,\ d_j = (-1)^{n+j} \det[\mathsf{u}_1, \ldots, \mathsf{u}_{n-1}]_j}$
- Si $\mathsf{u} = (u_1, \ldots, u_{n-1})^\top \in \mathbb{R}^{n-1} \Longrightarrow \mathsf{u} = (u_1, \ldots, u_{n-1}, 0)^\top \in \mathbb{R}^n$
- Si $\mathsf{u}_1, \ldots, \mathsf{u}_{n-1} \in \mathbb{R}^{n-1} \Longrightarrow \mathsf{u}_1 \times \cdots \times \mathsf{u}_{n-1} = (0, \ldots, 0, d_n)^\top$

  donde $d_n = \det \begin{bmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n-11} & \cdots & u_{n-1n-1} \end{bmatrix}$

Producto vectorial en $\mathbb{R}^3$

Dados $\mathsf{u}_1, \mathsf{u}_2 \in \mathbb{R}^3$ definimos $\mathsf{u}_1 \times \mathsf{u}_2 \in \mathbb{R}^3$ como el único

$$\langle \mathsf{w}, \mathsf{u}_1 \times \mathsf{u}_2 \rangle = \det[\mathsf{u}_1, \mathsf{u}_2, \mathsf{w}] = \det \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & w_1 \\ u_{21} & u_{22} & w_2 \\ u_{31} & u_{32} & w_3 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} u_{11} & u_{21} & u_{31} \\ u_{12} & u_{22} & u_{32} \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix}$$

Producto vectorial en $\mathbb{R}^3$

Dados $\mathsf{u}_1, \mathsf{u}_2 \in \mathbb{R}^3$ definimos $\mathsf{u}_1 \times \mathsf{u}_2 \in \mathbb{R}^3$ como el único

$$\langle \mathsf{w}, \mathsf{u}_1 \times \mathsf{u}_2 \rangle = \det[\mathsf{u}_1, \mathsf{u}_2, \mathsf{w}] = \det \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & w_1 \\ u_{21} & u_{22} & w_2 \\ u_{31} & u_{32} & w_3 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} u_{11} & u_{21} & u_{31} \\ u_{12} & u_{22} & u_{32} \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix}$$

- $\langle \mathsf{w}, \mathsf{u}_1 \times \mathsf{u}_2 \rangle = \det[\mathsf{w}, \mathsf{u}_1, \mathsf{u}_2] = \det \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ u_{11} & u_{21} & u_{31} \\ u_{12} & u_{22} & u_{32} \end{bmatrix}$

Producto vectorial en $\mathbb{R}^3$

Dados $\mathsf{u}_1, \mathsf{u}_2 \in \mathbb{R}^3$ definimos $\mathsf{u}_1 \times \mathsf{u}_2 \in \mathbb{R}^3$ como el único

$$\langle \mathsf{w}, \mathsf{u}_1 \times \mathsf{u}_2 \rangle = \det[\mathsf{u}_1, \mathsf{u}_2, \mathsf{w}] = \det \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & w_1 \\ u_{21} & u_{22} & w_2 \\ u_{31} & u_{32} & w_3 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} u_{11} & u_{21} & u_{31} \\ u_{12} & u_{22} & u_{32} \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix}$$

- $\langle \mathsf{w}, \mathsf{u}_1 \times \mathsf{u}_2 \rangle = \det[\mathsf{w}, \mathsf{u}_1, \mathsf{u}_2] = \det \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ u_{11} & u_{21} & u_{31} \\ u_{12} & u_{22} & u_{32} \end{bmatrix}$
- $\boxed{\mathsf{u}_1 \times \mathsf{u}_2 = (d_1, d_2, d_3)^\top,\ d_j = (-1)^{3+j} \det[\mathsf{u}_1, \mathsf{u}_2]_j}$

Producto vectorial en $\mathbb{R}^3$

Dados $\mathsf{u}_1, \mathsf{u}_2 \in \mathbb{R}^3$ definimos $\mathsf{u}_1 \times \mathsf{u}_2 \in \mathbb{R}^3$ como el único

$$\langle \mathsf{w}, \mathsf{u}_1 \times \mathsf{u}_2 \rangle = \det[\mathsf{u}_1, \mathsf{u}_2, \mathsf{w}] = \det \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & w_1 \\ u_{21} & u_{22} & w_2 \\ u_{31} & u_{32} & w_3 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} u_{11} & u_{21} & u_{31} \\ u_{12} & u_{22} & u_{32} \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix}$$

- $\langle \mathsf{w}, \mathsf{u}_1 \times \mathsf{u}_2 \rangle = \det[\mathsf{w}, \mathsf{u}_1, \mathsf{u}_2] = \det \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ u_{11} & u_{21} & u_{31} \\ u_{12} & u_{22} & u_{32} \end{bmatrix}$
- $\boxed{\mathsf{u}_1 \times \mathsf{u}_2 = (d_1, d_2, d_3)^\top,\ d_j = (-1)^{3+j} \det[\mathsf{u}_1, \mathsf{u}_2]_j}$
- $d_1 = u_{21}u_{32} - u_{22}u_{31},\ d_2 = u_{12}u_{31} - u_{11}u_{32},\ d_3 = u_{11}u_{22} - u_{12}u_{21}$

Producto vectorial en $\mathbb{R}^3$

Dados $\mathsf{u}_1, \mathsf{u}_2 \in \mathbb{R}^3$ definimos $\mathsf{u}_1 \times \mathsf{u}_2 \in \mathbb{R}^3$ como el único

$$\langle \mathsf{w}, \mathsf{u}_1 \times \mathsf{u}_2 \rangle = \det[\mathsf{u}_1, \mathsf{u}_2, \mathsf{w}] = \det \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & w_1 \\ u_{21} & u_{22} & w_2 \\ u_{31} & u_{32} & w_3 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} u_{11} & u_{21} & u_{31} \\ u_{12} & u_{22} & u_{32} \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix}$$

- $\langle \mathsf{w}, \mathsf{u}_1 \times \mathsf{u}_2 \rangle = \det[\mathsf{w}, \mathsf{u}_1, \mathsf{u}_2] = \det \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ u_{11} & u_{21} & u_{31} \\ u_{12} & u_{22} & u_{32} \end{bmatrix}$
- $d_1 = u_{21}u_{32} - u_{22}u_{31}$, $d_2 = u_{12}u_{31} - u_{11}u_{32}$, $d_3 = u_{11}u_{22} - u_{12}u_{21}$
- $$\boxed{\mathsf{u}_1 \times \mathsf{u}_2 = \det \begin{bmatrix} \mathsf{i} & \mathsf{j} & \mathsf{k} \\ u_{11} & u_{21} & u_{31} \\ u_{12} & u_{22} & u_{32} \end{bmatrix} = (d_1, d_2, d_3)^\top}$$

Producto vectorial en $\mathbb{R}^3$

Dados $\mathsf{u}_1, \mathsf{u}_2 \in \mathbb{R}^3$ definimos $\mathsf{u}_1 \times \mathsf{u}_2 = \det \begin{bmatrix} \mathsf{i} & \mathsf{j} & \mathsf{k} \\ u_{11} & u_{21} & u_{31} \\ u_{12} & u_{22} & u_{32} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$

- $\boxed{\mathsf{u}_1 \times \mathsf{u}_2 = \big(u_{21}u_{32} - u_{22}u_{31}, u_{12}u_{31} - u_{11}u_{32}, u_{11}u_{22} - u_{12}u_{21}\big)^\top}$

Producto vectorial en $\mathbb{R}^3$

Dados $\mathsf{u}_1, \mathsf{u}_2 \in \mathbb{R}^3$ definimos $\mathsf{u}_1 \times \mathsf{u}_2 = \det \begin{bmatrix} \mathsf{i} & \mathsf{j} & \mathsf{k} \\ u_{11} & u_{21} & u_{31} \\ u_{12} & u_{22} & u_{32} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$

- $\boxed{\mathsf{u}_1 \times \mathsf{u}_2 = \big(u_{21}u_{32} - u_{22}u_{31}, u_{12}u_{31} - u_{11}u_{32}, u_{11}u_{22} - u_{12}u_{21}\big)^\top}$
- $\langle \mathsf{w}, \mathsf{u}_1 \times \mathsf{u}_2 \rangle = \det[\mathsf{w}, \mathsf{u}_1, \mathsf{u}_2] = \det \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ u_{11} & u_{21} & u_{31} \\ u_{12} & u_{22} & u_{32} \end{bmatrix}$

Producto vectorial en $\mathbb{R}^3$

Dados $\mathsf{u}_1, \mathsf{u}_2 \in \mathbb{R}^3$ definimos $\mathsf{u}_1 \times \mathsf{u}_2 = \det \begin{bmatrix} \mathsf{i} & \mathsf{j} & \mathsf{k} \\ u_{11} & u_{21} & u_{31} \\ u_{12} & u_{22} & u_{32} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$

- $\boxed{\mathsf{u}_1 \times \mathsf{u}_2 = \big(u_{21}u_{32} - u_{22}u_{31}, u_{12}u_{31} - u_{11}u_{32}, u_{11}u_{22} - u_{12}u_{21}\big)^\top}$
- $\langle \mathsf{w}, \mathsf{u}_1 \times \mathsf{u}_2 \rangle = \det[\mathsf{w}, \mathsf{u}_1, \mathsf{u}_2] = \det \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ u_{11} & u_{21} & u_{31} \\ u_{12} & u_{22} & u_{32} \end{bmatrix}$
- $\mathsf{u}_1 \times \mathsf{u}_2$ es ortogonal al subespacio generado por u_1 y u_2. Además,

$$|\mathsf{u}_1 \times \mathsf{u}_2| = \sqrt{|\mathsf{u}_1|^2 |\mathsf{u}_2|^2 - \langle \mathsf{u}_1, \mathsf{u}_2 \rangle^2} = \sqrt{g}, \quad g = \det \begin{bmatrix} |\mathsf{u}_1|^2 & \langle \mathsf{u}_1, \mathsf{u}_2 \rangle \\ \langle \mathsf{u}_1, \mathsf{u}_2 \rangle & |\mathsf{u}_2|^2 \end{bmatrix}$$

Producto vectorial en $\mathbb{R}^3$

Dados $\mathsf{u}_1, \mathsf{u}_2 \in \mathbb{R}^3$ definimos $\mathsf{u}_1 \times \mathsf{u}_2 = \det \begin{bmatrix} \mathsf{i} & \mathsf{j} & \mathsf{k} \\ u_{11} & u_{21} & u_{31} \\ u_{12} & u_{22} & u_{32} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$

- $\boxed{\mathsf{u}_1 \times \mathsf{u}_2 = \big(u_{21}u_{32} - u_{22}u_{31}, u_{12}u_{31} - u_{11}u_{32}, u_{11}u_{22} - u_{12}u_{21}\big)^\top}$
- $\langle \mathsf{w}, \mathsf{u}_1 \times \mathsf{u}_2 \rangle = \det[\mathsf{w}, \mathsf{u}_1, \mathsf{u}_2] = \det \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ u_{11} & u_{21} & u_{31} \\ u_{12} & u_{22} & u_{32} \end{bmatrix}$
- $\mathsf{u}_1 \times \mathsf{u}_2$ es ortogonal al subespacio generado por u_1 y u_2. Además,

$$|\mathsf{u}_1 \times \mathsf{u}_2| = \sqrt{|\mathsf{u}_1|^2 |\mathsf{u}_2|^2 - \langle \mathsf{u}_1, \mathsf{u}_2 \rangle^2}$$

$\rightsquigarrow$ $\langle \mathsf{u}_1, \mathsf{u}_2 \rangle = |\mathsf{u}_1|\,|\mathsf{u}_2| \cos\big(\theta(\mathsf{u}_1, \mathsf{u}_2)\big)$, donde $\theta(\mathsf{u}_1, \mathsf{u}_2) \in [0, \pi]$

Producto vectorial en $\mathbb{R}^3$

Dados $\mathsf{u}_1, \mathsf{u}_2 \in \mathbb{R}^3$ definimos $\mathsf{u}_1 \times \mathsf{u}_2 = \det \begin{bmatrix} \mathsf{i} & \mathsf{j} & \mathsf{k} \\ u_{11} & u_{21} & u_{31} \\ u_{12} & u_{22} & u_{32} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$

- $\boxed{\mathsf{u}_1 \times \mathsf{u}_2 = \big(u_{21}u_{32} - u_{22}u_{31}, u_{12}u_{31} - u_{11}u_{32}, u_{11}u_{22} - u_{12}u_{21}\big)^\top}$
- $\langle \mathsf{w}, \mathsf{u}_1 \times \mathsf{u}_2 \rangle = \det[\mathsf{w}, \mathsf{u}_1, \mathsf{u}_2] = \det \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ u_{11} & u_{21} & u_{31} \\ u_{12} & u_{22} & u_{32} \end{bmatrix}$
- $\mathsf{u}_1 \times \mathsf{u}_2$ es ortogonal al subespacio generado por u_1 y u_2. Además,

$$|\mathsf{u}_1 \times \mathsf{u}_2| = \sqrt{|\mathsf{u}_1|^2 |\mathsf{u}_2|^2 - \langle \mathsf{u}_1, \mathsf{u}_2 \rangle^2}$$

$\rightsquigarrow$ $\langle \mathsf{u}_1, \mathsf{u}_2 \rangle = |\mathsf{u}_1|\,|\mathsf{u}_2| \cos\big(\theta(\mathsf{u}_1, \mathsf{u}_2)\big)$, donde $\theta(\mathsf{u}_1, \mathsf{u}_2) \in [0, \pi]$

- $\boxed{|\mathsf{u}_1 \times \mathsf{u}_2| = |\mathsf{u}_1|\,|\mathsf{u}_2| \operatorname{sen}\big(\theta(\mathsf{u}_1, \mathsf{u}_2)\big)}$

Producto vectorial en $\mathbb{R}^3$

Dados $\mathsf{u}_1, \mathsf{u}_2 \in \mathbb{R}^3$ definimos $\mathsf{u}_1 \times \mathsf{u}_2 = \det \begin{bmatrix} \mathsf{i} & \mathsf{j} & \mathsf{k} \\ u_{11} & u_{21} & u_{31} \\ u_{12} & u_{22} & u_{32} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$

- $\boxed{\mathsf{u}_1 \times \mathsf{u}_2 = \big(u_{21}u_{32} - u_{22}u_{31}, u_{12}u_{31} - u_{11}u_{32}, u_{11}u_{22} - u_{12}u_{21}\big)^\top}$
- $|\mathsf{u}_1 \times \mathsf{u}_2| = |\mathsf{u}_1|\,|\mathsf{u}_2| \operatorname{sen}\big(\theta(\mathsf{u}_1, \mathsf{u}_2)\big)$, área del paralelogramo $P(\mathsf{u}_1, \mathsf{u}_2)$

Producto vectorial en $\mathbb{R}^3$

Dados $\mathsf{u}_1, \mathsf{u}_2 \in \mathbb{R}^3$ definimos $\mathsf{u}_1 \times \mathsf{u}_2 = \det \begin{bmatrix} \mathsf{i} & \mathsf{j} & \mathsf{k} \\ u_{11} & u_{21} & u_{31} \\ u_{12} & u_{22} & u_{32} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$

- $\mathsf{u}_1 \times \mathsf{u}_2 = \big(u_{21}u_{32} - u_{22}u_{31}, u_{12}u_{31} - u_{11}u_{32}, u_{11}u_{22} - u_{12}u_{21}\big)^\top$
- $|\mathsf{u}_1 \times \mathsf{u}_2| = |\mathsf{u}_1|\,|\mathsf{u}_2|\,\mathrm{sen}\big(\theta(\mathsf{u}_1, \mathsf{u}_2)\big)$, área del paralelogramo $P(\mathsf{u}_1, \mathsf{u}_2)$
- $|\langle \mathsf{u}_1 \times \mathsf{u}_2, \mathsf{w}\rangle|$, volumen del paralelepípedo $P(\mathsf{u}_1, \mathsf{u}_2, \mathsf{w})$

Producto vectorial en $\mathbb{R}^3$

Dados $\mathsf{u}_1, \mathsf{u}_2 \in \mathbb{R}^3$ definimos $\mathsf{u}_1 \times \mathsf{u}_2 = \det \begin{bmatrix} \mathsf{i} & \mathsf{j} & \mathsf{k} \\ u_{11} & u_{21} & u_{31} \\ u_{12} & u_{22} & u_{32} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$

- $\boxed{\mathsf{u}_1 \times \mathsf{u}_2 = \big(u_{21}u_{32} - u_{22}u_{31}, u_{12}u_{31} - u_{11}u_{32}, u_{11}u_{22} - u_{12}u_{21}\big)^\top}$
- $\boxed{|\mathsf{u}_1 \times \mathsf{u}_2| = |\mathsf{u}_1|\,|\mathsf{u}_2| \operatorname{sen}\big(\theta(\mathsf{u}_1, \mathsf{u}_2)\big)\text{, área del paralelogramo } P(\mathsf{u}_1, \mathsf{u}_2)}$
- $\boxed{|\langle \mathsf{u}_1 \times \mathsf{u}_2, \mathsf{w}\rangle|\text{, volumen del paralelepípedo } P(\mathsf{u}_1, \mathsf{u}_2, \mathsf{w})}$

- El producto vectorial es anticonmutativo, $\mathsf{v} \times \mathsf{w} = -\mathsf{w} \times \mathsf{v}$ y distributivo, respecto de la suma, $(\mathsf{u} + \mathsf{v}) \times \mathsf{w} = \mathsf{u} \times \mathsf{w} + \mathsf{v} \times \mathsf{w}$
- El producto vectorial no es asociativo: $\mathsf{u} \times (\mathsf{v} \times \mathsf{w}) = \langle \mathsf{u}, \mathsf{w}\rangle\, \mathsf{v} - \langle \mathsf{u}, \mathsf{v}\rangle\, \mathsf{w}$ y $(\mathsf{u} \times \mathsf{v}) \times \mathsf{w} = \langle \mathsf{u}, \mathsf{w}\rangle\, \mathsf{v} - \langle \mathsf{v}, \mathsf{w}\rangle\, \mathsf{u}$

Producto vectorial en $\mathbb{R}^3$

Dados $\mathsf{u}_1, \mathsf{u}_2 \in \mathbb{R}^3$ definimos $\mathsf{u}_1 \times \mathsf{u}_2 = \det \begin{bmatrix} \mathsf{i} & \mathsf{j} & \mathsf{k} \\ u_{11} & u_{21} & u_{31} \\ u_{12} & u_{22} & u_{32} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$

- $\boxed{\mathsf{u}_1 \times \mathsf{u}_2 = \big(u_{21}u_{32} - u_{22}u_{31}, u_{12}u_{31} - u_{11}u_{32}, u_{11}u_{22} - u_{12}u_{21}\big)^\top}$
- $\boxed{|\mathsf{u}_1 \times \mathsf{u}_2| = |\mathsf{u}_1|\,|\mathsf{u}_2|\operatorname{sen}\big(\theta(\mathsf{u}_1, \mathsf{u}_2)\big)\text{, área del paralelogramo } P(\mathsf{u}_1, \mathsf{u}_2)}$
- $\boxed{|\langle \mathsf{u}_1 \times \mathsf{u}_2, \mathsf{w}\rangle|\text{, volumen del paralelepípedo } P(\mathsf{u}_1, \mathsf{u}_2, \mathsf{w})}$
- Si $\mathsf{u} = (u_1, u_2)^\top \in \mathbb{R}^2 \Longrightarrow \mathsf{u} = (u_1, u_2, 0)^\top \in \mathbb{R}^3$

Producto vectorial en $\mathbb{R}^3$

Dados $\mathsf{u}_1, \mathsf{u}_2 \in \mathbb{R}^3$ definimos $\mathsf{u}_1 \times \mathsf{u}_2 = \det \begin{bmatrix} \mathsf{i} & \mathsf{j} & \mathsf{k} \\ u_{11} & u_{21} & u_{31} \\ u_{12} & u_{22} & u_{32} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$

- $\boxed{\mathsf{u}_1 \times \mathsf{u}_2 = \big(u_{21}u_{32} - u_{22}u_{31}, u_{12}u_{31} - u_{11}u_{32}, u_{11}u_{22} - u_{12}u_{21}\big)^\top}$
- $\boxed{|\mathsf{u}_1 \times \mathsf{u}_2| = |\mathsf{u}_1|\,|\mathsf{u}_2| \operatorname{sen}\big(\theta(\mathsf{u}_1, \mathsf{u}_2)\big), \text{ área del paralelogramo } P(\mathsf{u}_1, \mathsf{u}_2)}$
- $\boxed{|\langle \mathsf{u}_1 \times \mathsf{u}_2, \mathsf{w}\rangle|, \text{ volumen del paralelepípedo } P(\mathsf{u}_1, \mathsf{u}_2, \mathsf{w})}$
- Si $\mathsf{u} = (u_1, u_2)^\top \in \mathbb{R}^2 \Longrightarrow \mathsf{u} = (u_1, u_2, 0)^\top \in \mathbb{R}^3$
- Si $\mathsf{u}_1, \mathsf{u}_2 \in \mathbb{R}^2 \Longrightarrow \mathsf{u}_1 \times \mathsf{u}_2 = (0, 0, d_3)^\top$, $d_3 = \det \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix}$

Funciones seccionalmente derivables

Sean $a < b$, $k \in \mathbb{N}^*$ y $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$

1. $f \in \mathcal{C}^k([a,b])$ si f tiene k derivadas en $[a,b]$ y f^k es continua.
   ($f^{j)}(a)$ y $f^{j)}(b)$, $1 \leq j \leq k$, deben entenderse derivadas laterales)

Funciones seccionalmente derivables

Sean $a < b$, $k \in \mathbb{N}^*$ y $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$

1. $f \in \mathcal{C}^k([a,b])$ si f tiene k derivadas en $[a,b]$ y f^k es continua.
2. f se denomina **k veces derivable a trozos** o seccionalmente derivable de clase $\mathcal{C}^k$ y lo denotamos como $f \in \mathcal{C}_s^k([a,b])$ si $f \in \mathcal{C}^{k-1}([a,b])$ y existen $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = b$, tales que $f \in \mathcal{C}^k([x_{j-1}, x_j])$, $j = 1, \ldots, m$.

Funciones seccionalmente derivables

Sean $a < b$, $k \in \mathbb{N}^*$ y $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$

1. $f \in \mathcal{C}^k([a,b])$ si f tiene k derivadas en $[a,b]$ y f^k es continua.
2. f se denomina **k veces derivable a trozos** o seccionalmente derivable de clase $\mathcal{C}^k$ y lo denotamos como $f \in \mathcal{C}_s^k([a,b])$ si $f \in \mathcal{C}^{k-1}([a,b])$ y existen $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = b$, tales que $f \in \mathcal{C}^k([x_{j-1}, x_j])$, $j = 1, \ldots, m$.

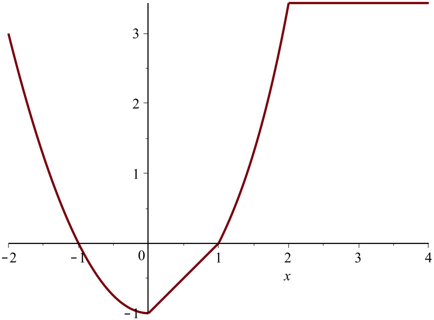
- $f \in \mathcal{C}_s^k([a,b])$ si tiene $k-1$ derivadas continuas, $f^{k-1)}$ tiene derivadas laterales en cada punto de $[a,b]$ y $f^{k)}$ es continua excepto en una cantidad finita de puntos. Siempre f es continua en $[a,b]$.

Funciones seccionalmente derivables

Sean $a < b$, $k \in \mathbb{N}^*$ y $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$

1. $f \in \mathcal{C}^k([a,b])$ si f tiene k derivadas en $[a,b]$ y f^k es continua.
2. f se denomina **k veces derivable a trozos** y lo denotamos como $f \in \mathcal{C}_s^k([a,b])$ si $f \in \mathcal{C}^{k-1}([a,b])$ y existen $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = b$, con $f \in \mathcal{C}^k([x_{j-1}, x_j])$, $1 \le j \le m$.

- Siempre f es continua en $[a,b]$.



Curvas en $\mathbb{R}^n$

Si $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo de interior no vacío, denominamos **camino o curva parametrizada** a cualquier aplicación continua $\alpha\colon I \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

1. Si $\alpha(t) = \big(\alpha_1(t), \dots, \alpha_n(t)\big)$, $\alpha_j\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ es la componente j-ésima.

Curvas en $\mathbb{R}^n$

Si $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo de interior no vacío, denominamos **camino o curva parametrizada** a cualquier aplicación continua $\alpha\colon I \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

1. Si $\alpha(t) = \big(\alpha_1(t), \dots, \alpha_n(t)\big)$, $\alpha_j\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ es la componente j-ésima.
2. Si $k \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathcal{C}^k(I; \mathbb{R}^n)$ si $\alpha_j \in \mathcal{C}^k(I)$, $j = 1, \dots, n$.
3. Si $k \in \mathbb{N}^*$, $\alpha \in \mathcal{C}^k_s([a,b]; \mathbb{R}^n)$ si $\alpha_j \in \mathcal{C}^k_s([a,b])$, $j = 1, \dots, n$.

Curvas en $\mathbb{R}^n$

Si $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo de interior no vacío, denominamos **camino o curva parametrizada** a cualquier aplicación continua $\alpha\colon I \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

1. Si $\alpha(t) = \big(\alpha_1(t), \ldots, \alpha_n(t)\big)$, $\alpha_j\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ es la componente j-ésima.
2. Si $k \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathcal{C}^k(I; \mathbb{R}^n)$ si $\alpha_j \in \mathcal{C}^k(I)$, $j = 1, \ldots, n$.
3. Si $k \in \mathbb{N}^*$, $\alpha \in \mathcal{C}^k_s([a,b]; \mathbb{R}^n)$ si $\alpha_j \in \mathcal{C}^k_s([a,b])$, $j = 1, \ldots, n$.
4. $C_\alpha = \big\{\alpha(t) : t \in I\big\}$ se denomina traza de la curva parametrizada.

Curvas en $\mathbb{R}^n$

Si $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo de interior no vacío, denominamos **camino o curva parametrizada** a cualquier aplicación <u>continua</u> $\alpha\colon I \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

1. Si $\alpha(t) = \big(\alpha_1(t), \dots, \alpha_n(t)\big)$, $\alpha_j\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ es la componente j-ésima.
2. Si $k \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathcal{C}^k(I;\mathbb{R}^n)$ si $\alpha_j \in \mathcal{C}^k(I)$, $j = 1, \dots, n$.
3. Si $k \in \mathbb{N}^*$, $\alpha \in \mathcal{C}^k_s([a,b];\mathbb{R}^n)$ si $\alpha_j \in \mathcal{C}^k_s([a,b])$, $j = 1, \dots, n$.
4. $C_\alpha = \big\{\alpha(t) : t \in I\big\}$ se denomina traza de la curva parametrizada.
5. Cuando α es inyectiva, C_α se suele denominar curva y entonces α se denomina parametrización de C_α.

Curvas en $\mathbb{R}^n$

Si $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo de interior no vacío, denominamos **camino o curva parametrizada** a cualquier aplicación continua $\alpha \colon I \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

1. Si $\alpha(t) = \big(\alpha_1(t), \dots, \alpha_n(t)\big)$, $\alpha_j \colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ es la componente j-ésima.
2. Si $k \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathcal{C}^k(I; \mathbb{R}^n)$ si $\alpha_j \in \mathcal{C}^k(I)$, $j = 1, \dots, n$.
3. Si $k \in \mathbb{N}^*$, $\alpha \in \mathcal{C}_s^k([a,b]; \mathbb{R}^n)$ si $\alpha_j \in \mathcal{C}_s^k([a,b])$, $j = 1, \dots, n$.
4. $C_\alpha = \big\{\alpha(t) : t \in I\big\}$ se denomina traza de la curva parametrizada.
5. Cuando α es inyectiva, C_α se suele denominar curva y entonces α se denomina parametrización de C_α.
6. Si $I = [a,b]$, $a < b$, $\alpha(a)$ es el origen y $\alpha(b)$ el extremo de la curva parametrizada. En general, $\alpha(a)$ y $\alpha(b)$ se llaman extremos.
   - Si $\alpha(a) = \alpha(b)$, la curva parametrizada α se denomina cerrada.
   - Si α es inyectiva en $[a,b)$, la curva C_α se denomina simple.

Curvas en $\mathbb{R}^n$

Si $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo de interior no vacío, denominamos **camino o curva parametrizada** a cualquier aplicación continua $\alpha\colon I \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

1. Si $\alpha(t) = \big(\alpha_1(t), \dots, \alpha_n(t)\big)$, $\alpha_j\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ es la componente j-ésima.
2. Si $k \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathcal{C}^k(I;\mathbb{R}^n)$ si $\alpha_j \in \mathcal{C}^k(I)$, $j = 1, \dots, n$.
3. Si $k \in \mathbb{N}^*$, $\alpha \in \mathcal{C}_s^k([a,b];\mathbb{R}^n)$ si $\alpha_j \in \mathcal{C}_s^k([a,b])$, $j = 1, \dots, n$.
4. $C_\alpha = \big\{\alpha(t) : t \in I\big\}$ se denomina traza de la curva parametrizada.
5. Cuando α es inyectiva, C_α se suele denominar curva y entonces α se denomina parametrización de C_α.
6. Si $I = [a,b]$, $a < b$, $\alpha(a)$ es el origen y $\alpha(b)$ el extremo de la curva parametrizada. En general, $\alpha(a)$ y $\alpha(b)$ se llaman extremos.
   - Si $\alpha(a) = \alpha(b)$, la curva parametrizada α se denomina cerrada.
   - Si α es inyectiva en $[a,b)$, la curva C_α se denomina simple.
7. Si $n = 2$, α se denomina plana y si $n = 3$, espacial o alabeada.

Curvas planas y alabeadas

Si $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo de interior no vacío, denominamos **camino o curva parametrizada** a cualquier aplicación continua $\alpha\colon I \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

- Toda curva plana parametrizada $\alpha : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, donde $\alpha(t) = \big(\alpha_1(t), \alpha_2(t)\big)$, puede considerarse como una curva espacial identificándola con la curva parametrizada $\hat{\alpha} : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$, donde $\hat{\alpha}(t) = \big(\alpha_1(t), \alpha_2(t), 0\big)$

Curvas planas y alabeadas

Si $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo de interior no vacío, denominamos **camino o curva parametrizada** a cualquier aplicación continua $\alpha\colon I \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

- Toda curva plana parametrizada $\alpha : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, donde $\alpha(t) = \big(\alpha_1(t), \alpha_2(t)\big)$, puede considerarse como una curva espacial identificándola con la curva parametrizada $\hat{\alpha} : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$, donde $\hat{\alpha}(t) = \big(\alpha_1(t), \alpha_2(t), 0\big)$

- Una curva espacial parametrizada $\alpha : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ se denomina plana si su traza está contenida en un plano; es decir existen escalares $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ tales que $|A| + |B| + |C| > 0$ y
$$C_\alpha = \big\{\alpha(t) : t \in [a,b]\big\} \subset \big\{Ax + By + Cz + D = 0\big\}.$$
Por tanto, si $\alpha(t) = \big(\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t)\big)$, entonces α es plana si y sólo si $A\alpha_1(t) + B\alpha_2(t) + C\alpha_3(t) + D = 0$, para cada $t \in [a,b]$.

Curvas planas y alabeadas

Si $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo de interior no vacío, denominamos **camino o curva parametrizada** a cualquier aplicación continua $\alpha\colon I \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

- Toda curva plana parametrizada $\alpha : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, donde $\alpha(t) = \big(\alpha_1(t), \alpha_2(t)\big)$, puede considerarse como una curva espacial identificándola con la curva parametrizada $\hat{\alpha} : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$, donde $\hat{\alpha}(t) = \big(\alpha_1(t), \alpha_2(t), 0\big)$

- Una curva espacial parametrizada $\alpha : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ se denomina plana si su traza está contenida en un plano; es decir existen escalares $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ tales que $|A| + |B| + |C| > 0$ y
$$C_\alpha = \big\{\alpha(t) : t \in [a,b]\big\} \subset \big\{Ax + By + Cz + D = 0\big\}.$$

- Si $\alpha : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ se identifica con la curva espacial $\hat{\alpha} : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$, entonces α es plana en el sentido anterior, puesto que $C_\alpha \subset \{z = 0\}$.

Curvas en $\mathbb{R}^n$

Si $a < b$, denominamos **camino o curva parametrizada** a cualquier aplicación continua $\alpha\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

1. Si $\alpha(t) = \big(\alpha_1(t), \dots, \alpha_n(t)\big)$, $\alpha_j\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es la componente j.
2. Si $k \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathcal{C}^k([a,b];\mathbb{R}^n)$ si $\alpha_j \in \mathcal{C}^k([a,b])$, $j = 1, \dots, n$.
3. Si $k \in \mathbb{N}^*$, $\alpha \in \mathcal{C}_s^k([a,b];\mathbb{R}^n)$ si $\alpha_j \in \mathcal{C}_s^k([a,b])$, $j = 1, \dots, n$.
4. $C_\alpha = \big\{\alpha(t) : t \in [a,b]\big\}$ se denomina traza de la curva parametrizada.
5. Cuando α es inyectiva en $[a,b)$, C_α se suele denominar curva simple y entonces α se denomina parametrización de C_α.

Curvas en $\mathbb{R}^n$

Si $a < b$, denominamos **camino o curva parametrizada** a cualquier aplicación continua $\alpha\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

1. Si $\alpha(t) = \big(\alpha_1(t), \dots, \alpha_n(t)\big)$, $\alpha_j\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es la componente j.
2. Si $k \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathcal{C}^k([a,b];\mathbb{R}^n)$ si $\alpha_j \in \mathcal{C}^k([a,b])$, $j = 1, \dots, n$.
3. Si $k \in \mathbb{N}^*$, $\alpha \in \mathcal{C}_s^k([a,b];\mathbb{R}^n)$ si $\alpha_j \in \mathcal{C}_s^k([a,b])$, $j = 1, \dots, n$.
4. $C_\alpha = \big\{\alpha(t) : t \in [a,b]\big\}$ se denomina traza de la curva parametrizada.
5. Cuando α es inyectiva en $[a,b)$, C_α se suele denominar curva simple y entonces α se denomina parametrización de C_α.

- Si $c < d$ y $\varphi\colon [c,d] \longrightarrow [a,b]$ es biyectiva y continua
  $\Longrightarrow \varphi$ y φ^{-1} son estrictamente monótonas $\Longrightarrow \varphi$ es homeomorfismo.

Curvas en $\mathbb{R}^n$

Si $a < b$, denominamos **camino o curva parametrizada** a cualquier aplicación <u>continua</u> $\alpha\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

1. Si $\alpha(t) = \big(\alpha_1(t), \dots, \alpha_n(t)\big)$, $\alpha_j\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es la componente j.
2. Si $k \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathcal{C}^k([a,b];\mathbb{R}^n)$ si $\alpha_j \in \mathcal{C}^k([a,b])$, $j = 1, \dots, n$.
3. Si $k \in \mathbb{N}^*$, $\alpha \in \mathcal{C}_s^k([a,b];\mathbb{R}^n)$ si $\alpha_j \in \mathcal{C}_s^k([a,b])$, $j = 1, \dots, n$.
4. $C_\alpha = \big\{\alpha(t) : t \in [a,b]\big\}$ se denomina traza de la curva parametrizada.
5. Cuando α es inyectiva en $[a,b)$, C_α se suele denominar curva simple y entonces α se denomina parametrización de C_α.

- Si $c < d$ y $\varphi\colon [c,d] \longrightarrow [a,b]$ es biyectiva y continua $\Longrightarrow \varphi$ y φ^{-1} son estrictamente monótonas $\Longrightarrow \varphi$ es homeomorfismo.
- $\beta = \alpha \circ \varphi$ es una curva parametrizada, $C_\beta = C_\alpha$ y β y α se denominan equivalentes. También, β es una reparametrización de α y si α es inyectiva, α y β son dos parametrizaciones de la curva $C = C_\alpha = C_\beta$

Curvas en $\mathbb{R}^n$

Si $a < b$, denominamos **camino o curva parametrizada** a cualquier aplicación continua $\alpha\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

1. Si $\alpha(t) = \big(\alpha_1(t), \dots, \alpha_n(t)\big)$, $\alpha_j\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es la componente j.
2. Si $k \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathcal{C}^k([a,b];\mathbb{R}^n)$ si $\alpha_j \in \mathcal{C}^k([a,b])$, $j = 1, \dots, n$.
3. Si $k \in \mathbb{N}^*$, $\alpha \in \mathcal{C}^k_s([a,b];\mathbb{R}^n)$ si $\alpha_j \in \mathcal{C}^k_s([a,b])$, $j = 1, \dots, n$.
4. $C_\alpha = \big\{\alpha(t) : t \in [a,b]\big\}$ se denomina traza de la curva parametrizada.
5. Cuando α es inyectiva en $[a,b)$, C_α se suele denominar curva simple y entonces α se denomina parametrización de C_α.

- Si $c < d$ y $\varphi\colon [c,d] \longrightarrow [a,b]$ es biyectiva y continua $\Longrightarrow \varphi$ y φ^{-1} son estrictamente monótonas $\Longrightarrow \varphi$ es homeomorfismo.
- $\beta = \alpha \circ \varphi$ es una curva parametrizada, $C_\beta = C_\alpha$ y β y α se denominan equivalentes. Diremos que α y β tienen la misma orientación si φ es creciente y orientación opuesta si φ es decreciente.

Curvas en $\mathbb{R}^n$

Si $a < b$, denominamos **camino o curva parametrizada** a cualquier aplicación continua $\alpha\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

1. Si $\alpha(t) = \big(\alpha_1(t), \dots, \alpha_n(t)\big)$, $\alpha_j\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es la componente j.
2. Si $k \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathcal{C}^k([a,b];\mathbb{R}^n)$ si $\alpha_j \in \mathcal{C}^k([a,b])$, $j = 1, \dots, n$.
3. Si $k \in \mathbb{N}^*$, $\alpha \in \mathcal{C}^k_s([a,b];\mathbb{R}^n)$ si $\alpha_j \in \mathcal{C}^k_s([a,b])$, $j = 1, \dots, n$.
4. $C_\alpha = \big\{\alpha(t) : t \in [a,b]\big\}$ se denomina traza de la curva parametrizada.
5. Cuando α es inyectiva en $[a,b)$, C_α se suele denominar curva simple y entonces α se denomina parametrización de C_α.

- Si $c < d$ y $\varphi\colon [c,d] \longrightarrow [a,b]$ es biyectiva y continua $\Longrightarrow \varphi$ y φ^{-1} son estrictamente monótonas $\Longrightarrow \varphi$ es homeomorfismo.

- $\beta = \alpha \circ \varphi$ es una curva parametrizada, $C_\beta = C_\alpha$ y β y α se denominan equivalentes. Si $\varphi \in \mathcal{C}^k([c,d])$ con $\varphi'(t) \neq 0$, $\beta \in \mathcal{C}^k([c,d];\mathbb{R}^n)$ sii $\alpha \in \mathcal{C}^k([a,b];\mathbb{R}^n)$ y $\beta \in \mathcal{C}^k_s([c,d];\mathbb{R}^n)$ sii $\alpha \in \mathcal{C}^k_s([a,b];\mathbb{R}^n)$.

Curvas en $\mathbb{R}^n$

Si $a < b$, denominamos **camino o curva parametrizada** a cualquier aplicación continua $\alpha\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

1. Si $\alpha(t) = \big(\alpha_1(t), \dots, \alpha_n(t)\big)$, $\alpha_j\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es la componente j.
2. Si $k \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathcal{C}^k([a,b];\mathbb{R}^n)$ si $\alpha_j \in \mathcal{C}^k([a,b])$, $j = 1, \dots, n$.
3. Si $k \in \mathbb{N}^*$, $\alpha \in \mathcal{C}^k_s([a,b];\mathbb{R}^n)$ si $\alpha_j \in \mathcal{C}^k_s([a,b])$, $j = 1, \dots, n$.
4. $C_\alpha = \big\{\alpha(t) : t \in [a,b]\big\}$ se denomina traza de la curva parametrizada.
5. Cuando α es inyectiva en $[a,b)$, C_α se suele denominar curva simple y entonces α se denomina parametrización de C_α.

- Si $c < d$, $\varphi, \psi\colon [c,d] \longrightarrow [a,b]$ definidas como

$$\varphi(t) = \frac{1}{d-c}\big[(b-a)t + ad - bc\big] \text{ y } \psi(t) = \frac{1}{d-c}\big[bd - ac - (b-a)t\big]$$

son biyectivas y de clase $\mathcal{C}^\infty([c,d])$

Si $a < b$, denominamos **camino o curva parametrizada** a cualquier aplicación continua $\alpha\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

1. Si $\alpha(t) = \big(\alpha_1(t), \dots, \alpha_n(t)\big)$, $\alpha_j\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es la componente j.
2. Si $k \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathcal{C}^k([a,b];\mathbb{R}^n)$ si $\alpha_j \in \mathcal{C}^k([a,b])$, $j = 1, \dots, n$.
3. Si $k \in \mathbb{N}^*$, $\alpha \in \mathcal{C}^k_s([a,b];\mathbb{R}^n)$ si $\alpha_j \in \mathcal{C}^k_s([a,b])$, $j = 1, \dots, n$.
4. $C_\alpha = \big\{\alpha(t) : t \in [a,b]\big\}$ se denomina traza de la curva parametrizada.
5. Cuando α es inyectiva en $[a,b)$, C_α se suele denominar curva simple y entonces α se denomina parametrización de C_α.

- Si $c < d$, $\varphi, \psi\colon [c,d] \longrightarrow [a,b]$ definidas como

$$\varphi(t) = \frac{1}{d-c}\big[(b-a)t + ad - bc\big] \text{ y } \psi(t) = \frac{1}{d-c}\big[bd - ac - (b-a)t\big]$$

son biyectivas y de clase $\mathcal{C}^\infty([c,d])$

- Si $c = a$ y $d = b \Longrightarrow \varphi(t) = t$ y $\psi(t) = a + b - t$

Curvas en $\mathbb{R}^n$

Si $a < b$, denominamos **camino o curva parametrizada** a cualquier aplicación continua $\alpha\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

1. Si $\alpha(t) = \big(\alpha_1(t), \dots, \alpha_n(t)\big)$, $\alpha_j\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es la componente j.
2. Si $k \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathcal{C}^k([a,b];\mathbb{R}^n)$ si $\alpha_j \in \mathcal{C}^k([a,b])$, $j = 1, \dots, n$.
3. Si $k \in \mathbb{N}^*$, $\alpha \in \mathcal{C}^k_s([a,b];\mathbb{R}^n)$ si $\alpha_j \in \mathcal{C}^k_s([a,b])$, $j = 1, \dots, n$.
4. $C_\alpha = \big\{\alpha(t) : t \in [a,b]\big\}$ se denomina traza de la curva parametrizada.
5. Cuando α es inyectiva en $[a,b)$, C_α se suele denominar curva simple y entonces α se denomina parametrización de C_α.

- Si $c < d$, $\varphi, \psi\colon [c,d] \longrightarrow [a,b]$ definidas como

$$\varphi(t) = \frac{1}{d-c}\big[(b-a)t + ad - bc\big] \text{ y } \psi(t) = \frac{1}{d-c}\big[bd - ac - (b-a)t\big]$$

  son biyectivas y de clase $\mathcal{C}^\infty([c,d])$

- Dos parametrizaciones inyectivas de la misma curva son equivalentes

Curvas en $\mathbb{R}^n$

Si $a < b$, denominamos **camino o curva parametrizada** a cualquier aplicación continua $\alpha\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

1. $C_\alpha = \big\{\alpha(t) : t \in [a,b]\big\}$ se denomina traza de la curva parametrizada.
2. Cuando α es inyectiva en $[a,b)$, C_α se suele denominar curva simple y entonces α se denomina parametrización de C_α.

Curvas en $\mathbb{R}^n$

Si $a < b$, denominamos **camino o curva parametrizada** a cualquier aplicación continua $\alpha\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

1. $C_\alpha = \big\{\alpha(t) : t \in [a,b]\big\}$ se denomina traza de la curva parametrizada.
2. Cuando α es inyectiva en $[a,b)$, C_α se suele denominar curva simple y entonces α se denomina parametrización de C_α.

- Si $\alpha \in \mathcal{C}^k([a,b];\mathbb{R}^n)$, $k \geq 1$, para cada $t \in [a,b]$, $\alpha'(t)$ se denomina **vector velocidad o tangente a** $\alpha(t)$ y $|\alpha'(t)|$ rapidez o velocidad

Curvas en $\mathbb{R}^n$

Si $a < b$, denominamos **camino o curva parametrizada** a cualquier aplicación continua $\alpha\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

1. $C_\alpha = \{\alpha(t) : t \in [a, b]\}$ se denomina traza de la curva parametrizada.
2. Cuando α es inyectiva en $[a, b)$, C_α se suele denominar curva simple y entonces α se denomina parametrización de C_α.

- Si $\alpha \in \mathcal{C}^k([a, b]; \mathbb{R}^n)$, $k \geq 1$, para cada $t \in [a, b]$, $\alpha'(t)$ se denomina **vector velocidad o tangente a** $\alpha(t)$ y $|\alpha'(t)|$ rapidez o velocidad
- Si $\alpha \in \mathcal{C}^k([a, b]; \mathbb{R}^n)$, $k \geq 1$, $\alpha(t) \in \mathcal{C}_\alpha$ se denomina regular si $\alpha'(t) \neq 0$.

  En este caso, $\mathrm{t}(t) = \dfrac{\alpha'(t)}{|\alpha'(t)|}$ se denomina **vector tangente unitario** a $\alpha(t)$. La curva α se denomina regular si todo punto es regular.

Curvas en $\mathbb{R}^n$

Si $a < b$, denominamos **camino o curva parametrizada** a cualquier aplicación continua $\alpha\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

1. $C_\alpha = \big\{\alpha(t) : t \in [a,b]\big\}$ se denomina traza de la curva parametrizada.
2. Cuando α es inyectiva en $[a,b)$, C_α se suele denominar curva simple y entonces α se denomina parametrización de C_α.

- Si $\alpha \in \mathcal{C}^k([a,b];\mathbb{R}^n)$, $k \geq 1$, para cada $t \in [a,b]$, $\alpha'(t)$ se denomina **vector velocidad o tangente a $\alpha(t)$** y $|\alpha'(t)|$ rapidez o velocidad
- Si $\alpha \in \mathcal{C}^k([a,b];\mathbb{R}^n)$, $k \geq 1$, $\alpha(t) \in \mathcal{C}_\alpha$ se denomina regular si $\alpha'(t) \neq 0$.

  En este caso, $\mathrm{t}(t) = \dfrac{\alpha'(t)}{|\alpha'(t)|}$ se denomina **vector tangente unitario** a $\alpha(t)$. La curva α se denomina regular si todo punto es regular.
- La noción de punto regular es independiente de la parametrización.

Curvas en $\mathbb{R}^n$

Si $a < b$, denominamos **camino o curva parametrizada** a cualquier aplicación continua $\alpha\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

1. $C_\alpha = \big\{\alpha(t) : t \in [a,b]\big\}$ se denomina traza de la curva parametrizada.
2. Cuando α es inyectiva en $[a,b)$, C_α se suele denominar curva simple y entonces α se denomina parametrización de C_α.

- Si $\alpha \in \mathcal{C}^k([a,b];\mathbb{R}^n)$, $k \geq 1$, para cada $t \in [a,b]$, $\alpha'(t)$ se denomina **vector velocidad o tangente a $\alpha(t)$** y $|\alpha'(t)|$ rapidez o velocidad
- Si $\alpha \in \mathcal{C}^k([a,b];\mathbb{R}^n)$, $k \geq 1$, $\alpha(t) \in \mathcal{C}_\alpha$ se denomina regular si $\alpha'(t) \neq 0$. En este caso, $\mathrm{t}(t) = \dfrac{\alpha'(t)}{|\alpha'(t)|}$ se denomina **vector tangente unitario** a $\alpha(t)$. La curva α se denomina regular si todo punto es regular.
- La noción de punto regular es independiente de la parametrización. Los vectores tangentes a dos parametrizaciones coinciden si tienen la misma orientación y son opuestos si tienen orientación opuesta.

Curvas en $\mathbb{R}^n$

Sean $a < b < c$, $\alpha\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ y $\beta\colon [b,c] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ con $\alpha(b) = \beta(b)$. Definimos la **composición** $\alpha * \beta\colon [a,c] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ como

$$(\alpha * \beta)(t) = \begin{cases} \alpha(t), & a \leq t \leq b, \\ \beta(t), & b \leq t \leq c. \end{cases}$$

Sean $a < b < c$, $\alpha\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ y $\beta\colon [b,c] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ con $\alpha(b) = \beta(b)$. Definimos la **composición** $\alpha * \beta\colon [a,c] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ como

$$(\alpha * \beta)(t) = \begin{cases} \alpha(t), & a \le t \le b, \\ \beta(t), & b \le t \le c. \end{cases}$$

- $\alpha \in \mathcal{C}([a,b];\mathbb{R}^n), \beta \in \mathcal{C}([b,c];\mathbb{R}^n) \Longrightarrow \alpha * \beta \in \mathcal{C}([a,c];\mathbb{R}^n)$.
- $\alpha \in \mathcal{C}^1_s([a,b];\mathbb{R}^n), \beta \in \mathcal{C}^1_s([b,c];\mathbb{R}^n) \Longrightarrow \alpha * \beta \in \mathcal{C}^1_s([a,c];\mathbb{R}^n)$.

Curvas en $\mathbb{R}^n$

Sean $a < b < c$, $\alpha\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ y $\beta\colon [b,c] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ con $\alpha(b) = \beta(b)$. Definimos la **composición** $\alpha * \beta\colon [a,c] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ como

$$(\alpha * \beta)(t) = \begin{cases} \alpha(t), & a \le t \le b, \\ \beta(t), & b \le t \le c. \end{cases}$$

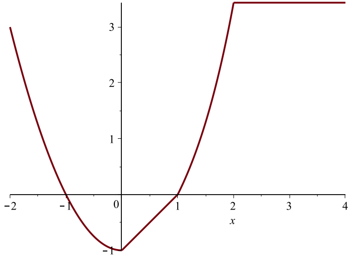
- $\alpha \in \mathcal{C}([a,b];\mathbb{R}^n), \beta \in \mathcal{C}([b,c];\mathbb{R}^n) \Longrightarrow \alpha * \beta \in \mathcal{C}([a,c];\mathbb{R}^n)$.
- $\alpha \in \mathcal{C}^k_s([a,b];\mathbb{R}^n), \beta \in \mathcal{C}^k_s([b,c];\mathbb{R}^n),\ \alpha^{j)}(b) = \beta^{j)}(b), j = 1,\dots,k-1$ $\Longrightarrow \alpha * \beta \in \mathcal{C}^k_s([a,c];\mathbb{R}^n)$.

Curvas en $\mathbb{R}^n$

Sean $a < b < c$, $\alpha\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ y $\beta\colon [b,c] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ con $\alpha(b) = \beta(b)$. Definimos la **composición** $\alpha * \beta\colon [a,c] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ como

$$(\alpha * \beta)(t) = \begin{cases} \alpha(t), & a \le t \le b, \\ \beta(t), & b \le t \le c. \end{cases}$$

- $\alpha \in \mathcal{C}([a,b];\mathbb{R}^n), \beta \in \mathcal{C}([b,c];\mathbb{R}^n) \Longrightarrow \alpha * \beta \in \mathcal{C}([a,c];\mathbb{R}^n)$.
- $\alpha \in \mathcal{C}_s^k([a,b];\mathbb{R}^n), \beta \in \mathcal{C}_s^k([b,c];\mathbb{R}^n),\ \alpha^{j)}(b) = \beta^{j)}(b), j = 1,\dots,k-1$ $\Longrightarrow \alpha * \beta \in \mathcal{C}_s^k([a,c];\mathbb{R}^n)$.



Curvas en $\mathbb{R}^n$

Sean $a < b < c$, $\alpha\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ y $\beta\colon [b,c] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ con $\alpha(b) = \beta(b)$. Definimos la **composición** $\alpha * \beta\colon [a,c] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ como

$$(\alpha * \beta)(t) = \begin{cases} \alpha(t), & a \le t \le b, \\ \beta(t), & b \le t \le c. \end{cases}$$

- $\alpha \in \mathcal{C}([a,b];\mathbb{R}^n), \beta \in \mathcal{C}([b,c];\mathbb{R}^n) \Longrightarrow \alpha * \beta \in \mathcal{C}([a,c];\mathbb{R}^n)$.
- $\alpha \in \mathcal{C}^k_s([a,b];\mathbb{R}^n), \beta \in \mathcal{C}^k_s([b,c];\mathbb{R}^n),\ \alpha^{j)}(b) = \beta^{j)}(b), j = 1,\dots,k-1$ $\Longrightarrow \alpha * \beta \in \mathcal{C}^k_s([a,c];\mathbb{R}^n)$.
- Si $\gamma \in \mathcal{C}^k_s([a,c])$ y para cada $a < b < c$ definimos $\alpha = \gamma|_{[a,b]}$, $\beta = \gamma|_{[b,c]}$

1. $\alpha \in \mathcal{C}^k_s([a,b];\mathbb{R}^n)$ y $\beta \in \mathcal{C}^k_s([b,c];\mathbb{R}^n)$.
2. $\gamma = \alpha * \beta$.

Curvas en $\mathbb{R}^n$

Sean $a < b < c$, $\alpha\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ y $\beta\colon [b,c] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ con $\alpha(b) = \beta(b)$. Definimos la **composición** $\alpha * \beta\colon [a,c] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ como

$$(\alpha * \beta)(t) = \begin{cases} \alpha(t), & a \le t \le b, \\ \beta(t), & b \le t \le c. \end{cases}$$

- $\alpha \in \mathcal{C}([a,b];\mathbb{R}^n), \beta \in \mathcal{C}([b,c];\mathbb{R}^n) \Longrightarrow \alpha * \beta \in \mathcal{C}([a,c];\mathbb{R}^n)$.
- $\alpha \in \mathcal{C}^k_s([a,b];\mathbb{R}^n), \beta \in \mathcal{C}^k_s([b,c];\mathbb{R}^n)$, $\alpha^{j)}(b) = \beta^{j)}(b), j = 1,\dots,k-1$ $\Longrightarrow \alpha * \beta \in \mathcal{C}^k_s([a,c];\mathbb{R}^n)$.
- Si $\gamma \in \mathcal{C}^k_s([a,c])$ y para cada $a < b < c$ definimos $\alpha = \gamma_{|_{[a,b]}}$, $\beta = \gamma_{|_{[b,c]}}$
  1. $\alpha \in \mathcal{C}^k_s([a,b];\mathbb{R}^n)$ y $\beta \in \mathcal{C}^k_s([b,c];\mathbb{R}^n)$.
  2. $\gamma = \alpha * \beta$.
- La composición es asociativa: Si $a_0 < a_1 < \cdots < a_n$ y $\alpha_j\colon [a_{j-1},a_j] \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $j = 1,\dots,n$, satisfacen que $\alpha_j(a_j) = \alpha_{j+1}(a_j)$, $\alpha_1 * \cdots * \alpha_k = \alpha_1 * (\alpha_2 * \cdots * \alpha_n) = (\alpha_1 * \cdots * \alpha_{n-1}) * \alpha_n$