

FACULTAT DE MATEMÀTIQUES I ESTADÍSTICA

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA - BARCELONATECH

# Apunts d'Àlgebra Lineal (Primer curs del Grau de Matemàtiques)

*Alex Batlle Casellas*

October 8, 2018

# Índex

<b>1</b>	<b>Matrius, determinants i sistemes lineals.</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Espais vectorials.</b>	<b>2</b>
2.1	Operacions a $\mathbb{R}^n$ . . . . .	2
2.2	Espai vectorial sobre un cos $\mathbb{K}$ . . . . .	2
2.3	Subespais vectorials. . . . .	4

# 1 Matrius, determinants i sistemes lineals.

## 2 Espais vectorials.

Considerem el conjunt d' $n$ -tuples de nombres reals:

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) | x_i \in \mathbb{R}\}.$$

### 2.1 Operacions a $\mathbb{R}^n$ .

1. **Suma:** Sigui  $u = (x_1, x_2, \dots, x_n), v = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ . Aleshores:

$$u + v = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \in \mathbb{R}^n.$$

2. **Multiplicació per un escalar:** Sigui  $u = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R}$ . Aleshores:

$$cu = (cx_1, cx_2, \dots, cx_n) \in \mathbb{R}^n.$$

PROPIETATS:

- $u + v = v + u$ . (commutativitat)
- $(u + v) + w = u + (v + w)$ . (associativitat)
- $\exists \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n : u + \mathbf{0} = u$ . (vector zero; notació alternativa,  $\vec{0}$  )
- $\forall u \in \mathbb{R}^n \exists -u \in \mathbb{R}^n : u + (-u) = \mathbf{0}$ .
- $c(u + v) = cu + cv$ . (distributivitat)
- $(c + d)u = cu + du$ . (distributivitat)
- $c(du) = (cd)u$ .
- $1u = u$ .

### 2.2 Espai vectorial sobre un cos $\mathbb{K}$ .

Sigui  $\mathbb{K}$  un cos commutatiu (per exemple  $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ). Un espai vectorial sobre  $\mathbb{K}$  ( $\mathbb{K}$ -e.v.) és un conjunt de vectors  $E$  amb dues operacions  $+$  i  $\cdot$ .

- $+$ : Donats  $u, v \in E$  dona un element  $u + v$  també d' $E$ .  
És una operació commutativa, associativa, té element neutre ( $\mathbf{0}$  o  $\vec{0}$ ) i tot  $u \in E$  té invers respecte  $+$  ( $-u$ ).
- $\cdot$ : Donats  $u \in E$  i  $c \in \mathbb{K}$  dona un element  $cu$  d' $E$ .

La suma i el producte compleixen

$$c(u + v) = cu + cv \quad (c + d)u = cu + du \quad c(du) = (cd)u \quad 1u = u \quad \forall u, v \in E, c, d \in \mathbb{K}.$$

Exemple:

- $\mathbb{K}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) | x_i \in \mathbb{K}\}$  és un  $\mathbb{K}$ -e.v. amb la suma i el producte naturals heretats de  $\mathbb{K}$ .
- $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$  és un  $\mathbb{K}$ -e.v. format per matrius de dimensions  $m \times n$  amb entrades a  $\mathbb{K}$  i les operacions naturals de la suma de matrius i el producte per un escalar.
- El conjunt de polinomis de grau  $\leq d$ ,  $\mathbb{R}_d[x] = \{p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_dx^d | a_i \in \mathbb{R}\}$  és un espai vectorial amb la suma de polinomis i el producte per un escalar.
- $\mathbb{R}[x] = \{\text{polinomis en una variable } x \text{ i coeficients en els reals}\}$  és un  $\mathbb{R}$ -e.v.
- El conjunt  $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  de funcions  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  és un  $\mathbb{R}$ -e.v.

PROPIETATS:

1.  $0u = \mathbf{0} = c\mathbf{0}$ .
2.  $(-1)u = -u$ .
3.  $(-c)u = c(-u) = -(cu) = -cu$ .
4.  $cu = \mathbf{0} \iff c = 0 \vee u = \mathbf{0}$ .

**Demostració:**

1. Sigui  $v = 0u = (0 + 0)u = 0u + 0u = v + v$ . Aleshores  $v = v + v \iff v + (-v) = v + v + (-v) \iff v = \mathbf{0}$ .  $\square$
2. Sigui  $v = (-1)u$ . Aleshores si  $u + v = \mathbf{0}$ ,  $v = -u$ .  
 $u + v = u + (-1)u = (u_1, \dots, u_n) + (-u_1, \dots, -u_n) = (u_1 - u_1, \dots, u_n - u_n) = (0, \dots, 0) = \mathbf{0}$ .  $\square$
3.  $-c = (-1)c \implies (-c)u = (-1)cu = c(-1)u = c(-u) = (-1)cu = -(cu) = -cu$ .  $\square$
4.  $\implies : cu = \mathbf{0} \wedge c \neq 0 \implies$  **PENDENT D'ACABAR.**

**Definició:**

Un vector  $u$  és combinació lineal dels vectors  $u_1, u_2, \dots, u_k$  si existeixen escalars  $c_1, c_2, \dots, c_k$  tals que  $u = c_1 u_1 + c_2 u_2 + \dots + c_k u_k$ . Els escalars  $c_i$  són els coeficients de la combinació lineal.

Esbrinar si un vector a  $\mathbb{K}^n$  és combinació lineal d'una colecció de vectors donada és equivalent a resoldre un sistema lineal d'equacions:

$$\exists c_1, c_2, \dots, c_k \in \mathbb{K} : u = c_1 u_1 + c_2 u_2 + \dots + c_k u_k?$$

$$c_1 \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{pmatrix} + \dots + c_k \begin{pmatrix} x_{1k} \\ x_{2k} \\ \vdots \\ x_{nk} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1k} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_k \end{pmatrix}$$

**Proposició:**

Un sistema  $Ax = b$  és compatible si i només si  $b$  és una combinació lineal de les columnes d' $A$ .

**Demostració:**  $Ax = b$  és compatible  $\iff \exists c_1, \dots, c_n$  solució de:

$$\begin{pmatrix} a^1 & \dots & a^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \end{pmatrix} \iff c_1(a^1) + \dots + c_n(a^n) = (b) \iff b \text{ és una combinació}$$

lineal dels vectors columna d' $A$  amb coeficients  $c_1, \dots, c_n$ .  $\square$

**2.3 Subespais vectorials.**

Sigui  $E$  un  $\mathbb{K}$ -e.v. Aleshores un subconjunt  $V \neq \emptyset$  d' $E$  és un subespai vectorial si  $V$  és un espai vectorial en si mateix (amb la suma i el producte d' $E$ ). Això és equivalent a:

$$\forall u, v \in V \quad \forall c, d \in \mathbb{K} \quad cu + dv \in V.$$

**Exemple:**

- $V = \mathbb{K}^n$  és un subespai vectorial de  $\mathbb{K}^n$ .
- $V = \{0\}$  és un subespai vectorial de qualsevol  $E$ .
- $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x - y = 0, 3z = 0\}$  és un subespai vectorial d' $\mathbb{R}^3$ .
- $F = \{(a + 2b, 0, b) \in \mathbb{R}^3 | a, b \in \mathbb{R}\}$  és un subespai vectorial d' $\mathbb{R}^3$ .

**IMPORTANT!** Els subespais vectorials són **tancats respecte combinacions lineals**.

**Proposició:**

Sigui  $Ax = \mathbf{0}$  un sistema lineal (homogeni), on  $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ . Aleshores, el conjunt de solucions  $V = \{v \in \mathbb{K}^n | Av = \mathbf{0}\}$  és un subespai vectorial de  $\mathbb{K}$ .

**Demostració:** Si  $u \in V$  i  $v \in V$ ,  $Au = \mathbf{0}$  i  $Av = \mathbf{0}$ . Aleshores,  $u + v \in V$  i  $A(u + v) = Au + Av = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$ .  $\square$

**Definició:**

Siguin  $v_1, \dots, v_k$  vectors d' $E$ . El conjunt de totes les combinacions lineals de  $v_1, \dots, v_k$ ,

$$\{c_1 v_1 + \dots + c_k v_k | c_1, \dots, c_k \in \mathbb{K}\}$$

s'anomena el **conjunt generat** per  $v_1, \dots, v_k$  i s'escriu  $[v_1, \dots, v_k]$ .

**Proposició:**

$V = [v_1, \dots, v_k]$  és un subespai vectorial i és el subespai més petit que conté a  $\{v_1, \dots, v_k\}$ .

**Demostració:** Siguin  $u, v \in V$ . Aleshores,  $u = x_1 v_1 + \dots + x_k v_k$  i  $v = y_1 v_1 + \dots + y_k v_k$ ,  $x_i, y_i \in \mathbb{K}$ .

$$\begin{aligned} \implies cu + dv &= (cx_1 + dy_1)v_1 + \dots + (cx_k + dy_k)v_k \text{ és} \\ &\text{combinació lineal de } v_1, \dots, v_k \implies cu + dv \in V. \square \end{aligned}$$