Vectores, tensores y cálculo vectorial

Las leyes de la física deben ser invariantes frente a un cambio de coordenadas (p.e. una rotación). Por eso se suelen expresar de forma vectorial.

Existen magnitudes tanto escalares como vectoriales. Las magnitudes escalares son invariantes frente a un cambio de coordenadas, y vienen dadas por un número:

$$T(x,y) = T(x',y') \text{, con } \begin{cases} x' = f(x,y) \\ y' = g(x,y) \end{cases}$$

→ Ej. temperatura, masa, etc.

Otras magnitudes, además de la magnitud, indican también la dirección: fuerza, velocidad, aceleración, etc. → vienen dadas por vector:

Vector: magnitud representada por un segmento rectilíneo orientado.

Notación: $\vec{a}$

Suma de vectores:

a) asociativa
b) ∃ vector nulo → espacio vectorial
c) ∃ vector opuesto

Multiplicación por un escalar:

a) $\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}$

b) $(\lambda+\mu)\vec{a} = \lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$

c) $\lambda(\vec{a}+\vec{b}) = \lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$

d) $1\vec{a} = \vec{a}$

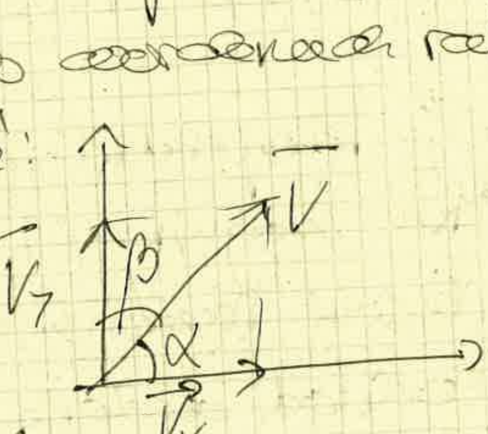
Vector unitario: aquel cuya magnitud = 1

$\vec{a} = a\hat{a}$, con $|\hat{a}|=1$

- Componentes de un vector

Un vector $\vec{V}$ se puede poner como suma de vectores. Tomando coordenadas rectangulares, un vector $\vec{V}$ será:

$\vec{V} = \vec{V}_x + \vec{V}_y$



Si definimos los vectores unitarios $\hat{i}$ y $\hat{j}$ en las direcciones x e y, entonces podemos escribir: $\vec{V}_x = V_x\hat{i}$, $\vec{V}_y = V_y\hat{j}$. Por tanto:

$\vec{V} = V_x\hat{i} + V_y\hat{j} = (V_x, V_y)$

V_x, V_y son las componentes de $\vec{V}$ en coordenadas rectangulares

Definiendo el ángulo ~~α → β~~

$\Rightarrow V_x = V\cos\alpha$, $V_y = V\sin\alpha$

El módulo V es $\sqrt{V_x^2+V_y^2}$

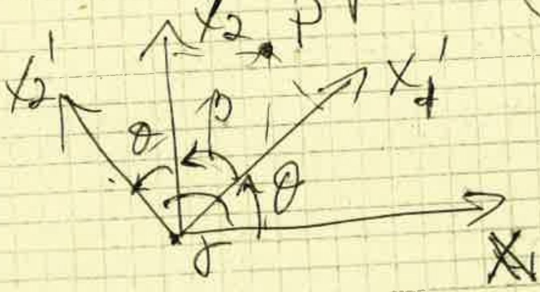
También podemos poner:

$V_x = V\cos\alpha$, $V_y = V\cos\beta$

~~(α,β)~~ ↳ cosenos directores del vector

- Transformación de coordenadas

Consideremos dos sistemas de referencia, relacionados por un giro:



Tenemos que la coordenada ~~nada~~ en la sistema (x,y) y (x',y') viene dada por:

$$x_1' = x_1\cos\theta + x_2\cos\beta = x_1\cos\theta + x_2\sin\theta$$
$$x_2' = x_1\cos\gamma + x_2\cos\theta = -x_1\sin\theta + x_2\cos\theta$$

O bien $\lambda_{ij} \equiv \cos(x_i', x_j)$

$$\begin{cases} x_1' = \lambda_{11}x_1 + \lambda_{12}x_2 \\ x_2' = \lambda_{21}x_1 + \lambda_{22}x_2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

En general, en tres dimensiones:

$$x_i' = \sum_{j=1}^{3} \alpha_{ij} x_j$$

La transformación inversa es:

$$x_i = \sum_{j=1}^{3} \alpha_{ji} x_j'$$

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}$$ – matriz de transformaciones.

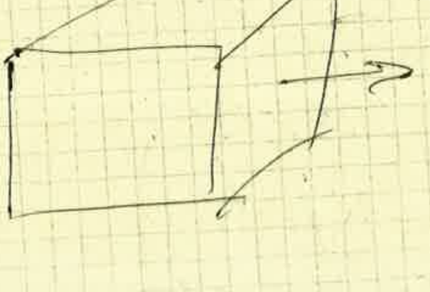
Podemos definir un vector, como una magnitud que transforma de la forma:

$$v_i' = \alpha_{ij} v_j$$

- Tensores

Es una magnitud que viene determinada por dos índices: T_{ij}

Ej.- Tensor de esfuerzos:



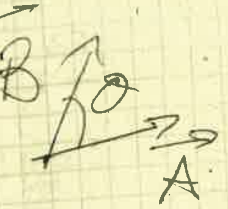
$\vec{F}_i$ $\qquad \sigma_{ij} = \dfrac{F_i}{A_j}$

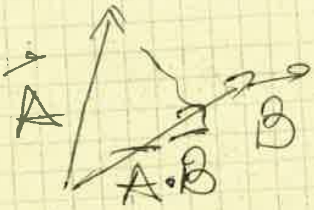
Frente a una transformación de ejes un tensor se transforma como:

$$T'_{ij} = (\lambda^{-1})_{im} T_{mn} \lambda_{nj}$$ — rotación de Euler

- Producto escalar

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos\theta$$





Propiedades - - -

En componentes:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \sum_i A_i B_i$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{A} \perp \vec{B}$$

- Producto vectorial

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} \Rightarrow \text{anticonmutativa } \vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times$$

En componentes:

$$C_i = \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} A_j B_k$$

$\varepsilon_{ijk} \to$ Tensor antisimétrico

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 0 & \text{si hay dos índices iguales} \\ +1 & \text{si } i,j,k \text{ forman una permutación par de } 1,2,3 \\ -1 & \text{si } i,j,k \text{ forman una permutación impar de } 1,2,3 \end{cases}$$

Calculemos, por ejemplo C_1:

$$C_1 = \varepsilon_{111}\cancel{A_1}B_1 + \varepsilon_{112}\cancel{A_1}B_2 + \varepsilon_{113}\cancel{A_1}B_3$$
$$+ \varepsilon_{121}\cancel{A_2}B_1 + \varepsilon_{122}\cancel{A_2}B_2 + \varepsilon_{123}A_2B_3$$
$$+ \varepsilon_{131}\cancel{A_3}B_1 + \varepsilon_{132}A_3B_2 + \cancel{\varepsilon_{133}}A_3B_3$$
$$= \varepsilon_{123}A_2B_3 + \varepsilon_{132}A_3B_2 =$$
$$= A_2B_3 - A_3B_2$$

El módulo es: $|\bar{A}\times\bar{B}| = AB\sin\theta$

Otras relaciones:

i) $\bar{A}\times\bar{B} = -\bar{B}\times\bar{A}$

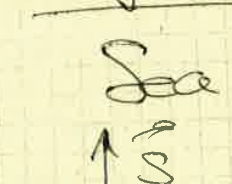
ii) $A\times(\bar{B}\times\bar{C}) \neq (\bar{A}\times\bar{B})\times\bar{C}$

iii) $A\times(\bar{B}\times\bar{C}) = (\bar{A}\cdot\bar{C})\bar{B} - (\bar{A}\cdot\bar{B})\bar{C}$

Demostración $A^2B^2\sin^2\theta = A^2B^2 - A^2B^2\cos^2\theta$
$= (\sum A_i)^2(\sum B_i)^2 - (\sum A_iB_i)^2 =$

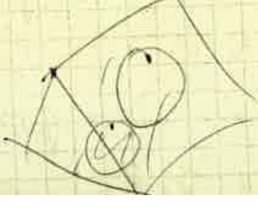
- Representación vectorial de superficies

Sea una superficie:



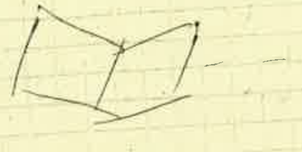
$\vec{S}$ vector con módulo S igual al área de la superficie

las componentes S_x ... son las proyecciones de la superficie en cada uno de los ejes



Para una superficie formada por varias rectas.

$\vec{S} = \bar{S}_1 + \bar{S}_2 + \dots$



- Cálculo vectorial

- Derivada de un vector respecto a un escalar:

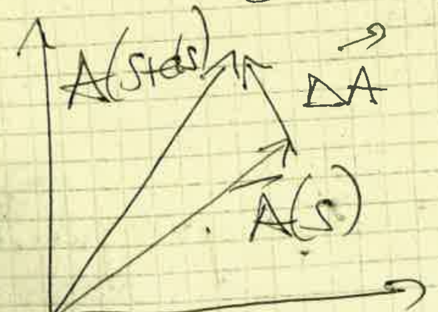
~~Sea~~ una función escalar $\varphi = \varphi(s)$.

Como φ y s son escalares, la derivada será un escalar.

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{d\varphi'}{ds'} \quad \text{porque} \quad \varphi = \varphi', \ s = s'$$

La derivada de un vector la definimos como

$$\frac{d\vec{A}}{ds} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\bar{A}(s+\Delta s) - \bar{A}(s)}{\Delta s}$$



La derivada de un vector es otro vector:

Si $\bar{A}'_i = \sum_j \lambda_{ij} A_j$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{A}'_i}{ds} = \sum_j \lambda_{ij} \frac{dA_j}{ds}$$

En componentes:

$$\frac{d\bar{A}}{ds} = \frac{dA_x}{ds}\hat{i} + \frac{dA_y}{ds}\hat{j} + \frac{dA_z}{ds}\hat{k}$$

Integral de un vector respecto a un escalar

$$\int \vec{A}(s)\,ds = \hat{i}\int A_x(s)\,ds + \hat{j}\int A_y(s)\,ds + \hat{k}\int A_z(s)\,ds$$

- Campos escalares y vectoriales

- Campo escalar → función que hace corresponder un valor con ~~fun~~ un pto del espacio $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

Ej: $T(x,y,z)$, P, ρ

- Campo vectorial → función que hace corresponder una magnitud vectorial a cada pto del espacio.

$\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

Ej: - velocidad, ~~aceleración~~, campo gravitatorio campo eléctrico, etc

- Gradiente de un campo escalar

Dada una función $\phi(x,y,z)$

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x}dx + \frac{\partial \phi}{\partial y}dy + \frac{\partial \phi}{\partial z}dz$$

Se puede expresar como el producto escalar de dos vectores. Uno:

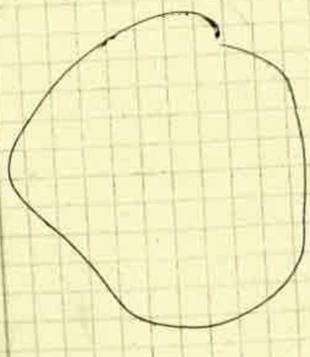
$$d\vec{r} = dx\,\hat{i} + dy\,\hat{j} + dz\,\hat{k}$$

Otro: $$\vec{\nabla}\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z}\hat{k}$$

de forma que $d\phi = \vec{\nabla}\phi \cdot d\vec{r}$

Se puede demostrar que $\vec{\nabla}\phi$ transforma como un vector.

~~Sean~~ Las superficies definidas por $\phi(x,y,z) = C \rightarrow$ son curvas de nivel o curvas equipotenciales (o equiescalares).

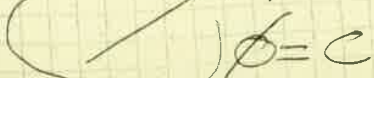


Tomemos $d\vec{r}$ a lo largo de una curva de nivel. Entonces, por definición: $d\phi = 0$. Pero $d\phi = \vec{\nabla}\phi \cdot d\vec{r} \Rightarrow \vec{\nabla}\phi \perp d\vec{r}$

El gradiente es perpendicular a las líneas de nivel. $d\phi$ será máximo cuando $\vec{\nabla}\phi \perp d\vec{r}$

El gradiente marca la dirección de máxima variación de ϕ (máxima pendiente).

Derivada direccional: si queremos saber cómo varía ϕ a lo largo de una dirección $\hat{n}$



$$\frac{\partial\phi}{\partial n} = \vec{\nabla}\phi\cdot\hat{n}$$

→ Se puede obtener de la definición:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\phi(x+\varepsilon n_1, y+\varepsilon n_2, z+\varepsilon n_3)-\phi(x,y,z)}{\varepsilon}$$

- Laplaciano:

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\phi) = \cancel{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\phi}{\partial}\right.}$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z}\right) =$$

$$= \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = \nabla^2\phi = \Delta\phi$$

$\vec{\nabla}$ → operador vectorial

- Circulación de un vector

Sea un campo vectorial $\vec{A}(\vec{r})$ y una curva en el espacio $\vec{r}(s)$. Podemos definir la integral entre dos puntos de la curva de:

$$\int_a^b \vec{A}\cdot d\vec{r}$$

El resultado será un escalar

La integral será:

$$\int_a^b \vec{A}\cdot d\vec{r} = \int_{x_a}^{x_b} A_x\,dx + \int_{y_a}^{y_b} A_y\,dy + \int_{z_a}^{z_b} A_z\,dz =$$

$$= \int_a^b \left[A_x \frac{dx}{ds} + A_y \frac{dy}{ds} + A_z \frac{dz}{ds}\right] ds$$

Si se integra a lo largo de una curva cerrada, entonces $a=b$, y ponemos:

$$\oint \vec{A}\cdot d\vec{r}$$

Si $\vec{A}$ es un vector constante, entonces:

$$\int_a^b \vec{A}\cdot d\vec{r} = \vec{A}\cdot \int_a^b d\vec{r} = A\cdot\left[\vec{r}_b - \vec{r}_a\right] = \vec{A}\cdot \vec{r}_{ba}$$

Por tanto, si $\vec{A}$ es constante $\oint \vec{A}\cdot d\vec{r} = 0$

Si $\vec{A}$ no es constante, pero cumple que

$\oint \vec{A}\cdot d\vec{r} = 0$, decimos que $\vec{A}$ es un campo conservativo. En este caso:

$$\int_a^b \vec{A}\cdot d\vec{r} + \int_b^a \vec{A}\cdot d\vec{r} = 0$$

$$\Rightarrow \int_{a\,C_1}^b \vec{A}\cdot d\vec{r} = \int_{a\,C_2}^b \vec{A}\cdot d\vec{r}$$

y la circulación no depende del camino.

Supongamos que escribimos $\vec{A}=\vec{\nabla}\phi$, como el gradiente de un campo escalar,

Entonces:

$$\oint \vec{A}\cdot d\vec{r}=\oint \vec{\nabla}\phi\cdot d\vec{r}=\oint d\phi=\phi_a-\phi_a=0$$

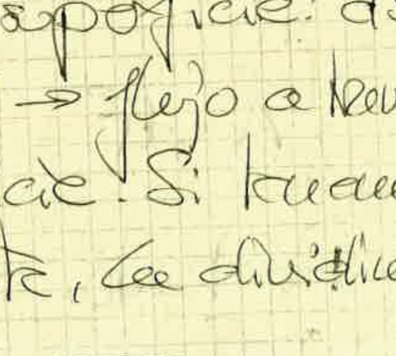
Todo campo conservativo se puede poner como el gradiente de un campo escalar

↳ función potencial.

- <u>Flujo de un campo vectorial</u>

Sea un elemento de superficie: $d\vec{S}$.

Definimos $d\Phi=\vec{A}\cdot d\vec{S}$ → flujo a través del elemento de superficie. Si tenemos una superficie no constante, la dividimos en pequeñas superficies:



$$\Delta\vec{S}_i=\Delta S_i\,\hat{e}_i$$

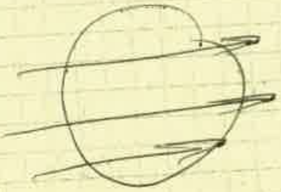
la integral de superficie será:

$$\Phi=\int_S \vec{A}\cdot d\vec{S}=\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}\vec{A}_i\cdot\Delta\vec{S}_i$$

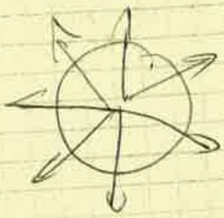
↳ flujo del campo

Si la integral es cerrada:

$$\oint_S \vec{A}\cdot d\vec{S}$$



$$\oint_S \vec{A}\cdot d\vec{S} = \Phi = 0$$ → entra tanto línea de campo como sale



$$\Phi = \oint_S \vec{A}\cdot d\vec{S} \neq 0$$

- Divergencia de un campo vectorial

Sea un volumen dV limitado por una superficie dS. La divergencia de un campo vectorial es el cociente entre el flujo a través de la superficie y el volumen

$$\operatorname{div}\vec{A} = \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{1}{\Delta V}\oint_S \vec{A}\cdot d\vec{S}$$

- Teorema de Gauss

$$\int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{A}\, dV = \oint_S \vec{A}\cdot d\vec{S}$$

La integral de volumen de la divergencia es igual al flujo a través de la superficie que limita el volumen.

Si $\oint_S \vec{A}\cdot d\vec{S} = 0 \rightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0$

↳ campo solenoidal

- Rotacional de un campo vectorial

Definimos el rotacional como:

$$\text{rot}\,\vec{A} = \vec{\nabla}\times\vec{A} = \lim_{\Delta V\to 0} \frac{1}{\Delta V}\oint_S d\vec{S}\times\vec{A}$$

con

$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

- Teorema de Stokes

$$\int_S (\vec{\nabla}\times\vec{A})\cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{A}\cdot d\vec{r}$$

$$\text{si } \oint_C \vec{A}\cdot d\vec{r} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla}\times\vec{A} = 0$$

un campo conservativo → irrotacional.

Claramente, si $\vec{A} = \vec{\nabla}\phi$

$\rightarrow \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\phi) = 0$