# **Entregable 1:** Introducció a l'anàlisi funcional.

Anàlisi Real. Grau en Matemàtiques, UPC, primavera 2021.

Àlex Batlle Casellas

Si $E$ és un espai normat, escriurem $\mathcal{L}(E)$ per denotar el conjunt dels seus endomorfismes continus. Redordi's que, com s'ha vist al problema 2 del segon tema, aquest darrer espai espai està equipat amb una norma,

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\|.$$

Diem que un operador $T \in \mathcal{L}(E)$ està fitat si $\|T\| < +\infty$, i que no ho està altrament.

**(a)** Proveu que si $E$ té dimensió finita, aleshores qualsevol operador lineal $T : E \to E$ està fitat, és a dir, la seva norma no és infinit.

Primer de tot, farem servir que **totes les normes** en un espai de dimensió finita **són equivalents**. Això vol dir, essencialment, que a $E$ de dimensió $\dim E = n < +\infty$ hi podem prendre, per exemple, la norma del taxi. Per l'equivalència de normes, existeixen $c$ i $C$ reals (positius finits) tals que

$$c\|x\|_E \leq \|x\|_1 \leq C\|x\|_E.$$

En particular, significa que tots els elements d'$E$ tenen norma finita: sigui $x \in E$, i $(x_i)_{1\leq i \leq n}$ les seves components en una certa base d'$E$. Aleshores

$$c\|x\|_E \leq \|x\|_1 = \sum_{i=0}^{n} |x_i| \leq n \max_{i=1,\dots,n} \{|x_i|\} < +\infty,$$

ja que tant $n$ com el màxim de les components d'$x$ són reals finits, $n$ per hipòtesi i $\max\{|x_i|\}$ per ser components d'un vector. Com que $c \in \mathbb{R}^+$, segueix que

$$\|x\|_E \leq \frac{n}{c} \max_{1=1,\dots,n} \{|x_i|\} < +\infty.$$

Amb això, tenim doncs que, en tenir $T$ imatge en $E$, la norma de la imatge de qualsevol element d'$E$ és finita. Per acabar, vegem que **la norma és una aplicació contínua**, i per tant, que **sobre un compacte assoleix el seu suprem**. Primer de tot, recordem que si $\|x\|_E \geq \|y\|_E$, aleshores $0 \leq \|x\|_E - \|y\|_E \leq \|x - y\|_E$ per la desigualtat triangular que compleix la norma d'$E$. Sense pèrdua de generalitat podem suposar que $\|x\|_E \geq \|y\|_E$, ja que en cas contrari, fem el mateix girant les diferències. Aleshores, es compleix que

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta := \varepsilon : \ \|x - y\|_E < \delta \implies \big|\|x\|_E - \|y\|_E\big| < \varepsilon$$

i per tant, la norma d'$E$ és una aplicació contínua d'$E$ en els reals. Aleshores, com que $\{\|x\|_E \leq 1\}$ és un compacte d'$E$, **el suprem de les normes** de les imatges de $T$ sobre aquest espai **s'assoleix**, i per tant concloem que com que aquest suprem ha de ser finit, **l'operador $T$ és fitat**.

Veieu en canvi que si $E$ té dimensió infinita, aleshores el resultat anterior pot ser fals. Més concretament, doneu un exemple d'un operador lineal $T : E \to E$ que no estigui fitat.

Considerem l'espai $c_{00}$ de les successions reals amb només un nombre finit de termes no nuls, i amb la norma $\|(a_n)\|_{\ell^\infty} = \sup |a_n|$. Aquí hi definim l'operador $T((a_n)) = (na_n)$, que donada una successió de $c_{00}$ en torna una altra, on cada terme està multiplicat per la posició que ocupa. L'operador està ben definit, però anem a veure què passa quan intentem fer-ne la norma:

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \sup_{n \in \mathbb{N}} |nx_n|.$$

Ara, observem que les successions de norma 1 són aquelles que tenen un $\pm 1$ en alguna de les seves posicions, i que és en aquestes on trobarem el suprem sobre successions de norma $\leq 1$. En aquests casos, el doble suprem amb el que treballàvem es transforma en $\sup_{n\in\mathbb{N}} n = +\infty$, i en conseqüència tenim que la norma d'aquest operador no està fitada. Concloem per tant, que aquest operador és no fitat, i per tant hem trobat un exemple del que volíem.

Podeu donar altres exemples diferents d'operadors no fitats?

Per exemple, considerem $E = \mathbb{R}[x]$ l'espai de polinomis sobre els reals, la norma del suprem sobre els seus coeficients i $T$ l'operador derivada. Aquestes condicions són:

$$P(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n, \quad \|P(x)\| = \sup_{n\geq 0} |a_n|, \quad \|T(P(x))\| = \|P'(x)\| = \sup_{n\geq 0} |na_n|.$$

Aleshores, els polinomis de norma 1 són els polinomis mònics de qualsevol grau (els polinomis tenen un nombre finit de termes), i com que poden ser de grau arbitràriament gran, estem en una situació similar al que hem provat amb l'espai $c_{00}$, és a dir, que la norma de $TP$ es pot fer arbitràriament gran, i quan prenem suprems per tant, no és finita. Per tant, l'operador derivada sobre l'espai de polinomis a coeficients reals amb la norma del suprem és no fitat.

Més en general, donats dos espais normats $E$ i $F$, es considera

$$\mathcal{L}(E,F) = \{T : E \to F : \text{ de manera que } T \text{ és lineal i fitat}\}.$$

Com que $E$ i $F$ són espais topològics, té sentit parlar de la continuïtat de $T$ en un punt d'$E$.

**(b)** Siguin $E$ i $F$ dos espais normats. Proveu que $\mathcal{L}(E,F)$ és un espai normat amb la norma donada per

$$\|T\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|Tx\|_F,$$

i que si $F$ és un espai de Banach, aleshores $\mathcal{L}(E,F)$ també ho és.

Comprovem primer que $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(E,F)}$ **és en efecte una norma**:

(N1) **No degeneració:** $\|T\| = 0 \implies T \equiv 0$:

$$\|T\|_{\mathcal{L}(E,F)} = 0 \implies \sup_{\|x\|_E\leq 1} \|Tx\|_F = 0 \implies \max_{\|x\|_E\leq 1} \|Tx\|_F = 0 \implies \|Tx\|_F = 0,\ \forall x \in \overline{B}(\mathbf{0}_E, 1)$$

$$[\text{no degeneració de la norma a } F] \implies Tx = 0\ \forall x \in \overline{B}(\mathbf{0}_E, 1);$$

$$y \in E,\ T(y) = T\left(\|y\|\frac{y}{\|y\|}\right) = \|y\|T\left(\frac{y}{\|y\|}\right) = \|y\| \cdot 0 = 0 \implies T \equiv 0.$$

(N2) **Producte per constant:** $\|\lambda T\| = |\lambda|\|T\|$:

$$\|\lambda T\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \sup_{\|x\|_E\leq 1} \|\lambda Tx\|_F = \sup_{\|x\|_E\leq 1} |\lambda|\|Tx\|_F = |\lambda| \sup_{\|x\|_E\leq 1} \|Tx\|_F = |\lambda|\|T\|_{\mathcal{L}(E,F)}.$$

(N3) **Desigualtat triangular:** $\|T+S\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq \|T\|_{\mathcal{L}(E,F)} + \|S\|_{\mathcal{L}(E,F)}$:

$$\|T+S\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \sup_{\|x\|_E\leq 1} \|Tx+Sx\|_F \leq \sup_{\|x\|_E\leq 1} (\|Tx\|_F + \|Sx\|_F) \leq$$

$$\sup_{\|x\|_E\leq 1} \|Tx\|_F + \sup_{\|x\|_E\leq 1} \|Sx\|_F = \|T\|_{\mathcal{L}(E,F)} + \|S\|_{\mathcal{L}(E,F)}.$$

Per tant, $\mathcal{L}(E,F)$ és un espai normat. Anem a veure ara que és un espai de Banach si $F$ ho és. Sigui $(T_n)_n$ una **successió de Cauchy** a $\mathcal{L}(E,F)$. Aleshores,

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}: \ \|T_n - T_m\| < \varepsilon, \ \forall n, m \geq N.$$

Això, en particular, significa que **la successió d'imatges** $(T_n(x))_n$ **és una successió de Cauchy** a $F$:

$$\|T_n - T_m\|_{\mathcal{L}(E,F)} < \varepsilon \implies \|T_n(x) - T_m(x)\|_F < \varepsilon, \ \forall n, m \geq N.$$

Com que $F$ és de Banach, això vol dir que la successió de les imatges és **convergent en** $F$, per tot punt de norma menor o igual a 1. Això implica, en definitiva, que és convergent **per tot punt d'**$E$, ja que podem dividir el punt entre la seva norma i en ser cadascun dels $T_n$ lineals, la norma del punt sortiria fora multiplicant. Aleshores, sabem que **existeix una aplicació no necessàriament lineal o fitada** a la que aquesta successió convergeix puntualment. Anomenarem a aquest límit puntual $T$. Ara, vegem que aquesta $T \in \mathcal{L}(E,F)$:

- Per una banda, $T_n(\alpha x + \beta y) \to T(\alpha x + \beta y)$, i per altra banda, $T_n(\alpha x + \beta y) = \alpha T_n(x) + \beta T_n(y) \to \alpha T(x) + \beta T(y)$. Això, per tant, ens diu que $T$ **és lineal**, ja que com que el límit existeix, és únic.

- A més a més, vegem que $T$ **està fitat**: farem servir que la norma a $\mathcal{L}(E,F)$ és contínua, cosa que veurem posteriorment: primer de tot, observem que la desigualtat triangular ens diu que $\|T\| = \|T - S + S\| \leq \|T - S\| + \|S\|$, i que per tant, $\|T\| - \|S\| \leq \|T - S\|$. Afirmem que la successió de reals $(\|T_n\|)_n$ és de Cauchy (i per tant convergent en $\mathbb{R}$): en efecte, en virtut de que la successió $(T_n)_n$ ho és,

  $$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}: \ \|T_n\| - \|T_m\| \leq \|T_n - T_m\| < \varepsilon, \ \forall n, m \geq N,$$

  agafant l'$N$ igual que l'agafàvem a la definició de successió de Cauchy de $(T_n)$. Aleshores, si la norma $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(E,F)}$ és contínua, està clar que la successió $\|T_n\| \xrightarrow{n \to +\infty} \|T\|$. Vegem que la norma és en efecte contínua (inclús, uniformement): siguin $\varepsilon > 0$, $\delta = \varepsilon$, i $T, S \in \mathcal{L}(E,F)$. Aleshores,

  $$\|T - S\| < \delta \implies \big|\|T\| - \|S\|\big| \leq \|T - S\| < \delta = \varepsilon.$$

  Per tant, en efecte la successió de les normes dels $T_n$ convergeix a la norma de $T$ en $\mathbb{R}$, i per tant, $\|T\| < +\infty$.

Per tant, essencialment el que hem vist és que el límit puntual $T \in \mathcal{L}(E,F)$. Ara, per tant, podem veure que la convergència dels $T_n$ a $T$ és uniforme:

$$\sup_{\|x\| \leq 1} \|T_n x - T_m x\| < \varepsilon \xrightarrow{m \to +\infty} \|T_n - T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|T_n x - T x\| < \varepsilon \implies \boxed{T_n \to T.}$$

Per tant, hem acabat veient que **donada una successió de Cauchy** dins de $\mathcal{L}(E,F)$, aquesta **és convergent**, i per tant, que $\mathcal{L}(E,F)$, en ser un espai normat i complet, **és un espai de Banach**.

**(c)** Siguin $E$ i $F$ dos espais normats i $T : E \to F$ un operador lineal. Proveu que les següents condicions són equivalents:

(i) $T$ és continu a l'origen.

(ii) $T$ és continu a cada punt.

(iii) $T\left(\overline{B_1(0)}\right)$ és un conjunt fitat.

(iv) $\|T\| < +\infty$.

(v) $\exists C \in \mathbb{R}: \ \|Tx\|_F \leq C\|x\|_E, \ \forall x \in E$.

(i) $\implies$ (ii)
Fixem $\varepsilon > 0$ i $x \in E$, i sigui $z = x - y \in E$, per qualsevol $y \in E$. Aleshores, de (i) tenim que $\exists \delta > 0$ tal que si $\|z\|_E < \delta$, aleshores $\|Tz\|_F < \varepsilon$. Però això vol dir que si $\|z\|_E = \|x - y\|_E < \delta$, aleshores $\|Tz\|_F = \|T(x-y)\|_F = \|Tx - Ty\|_F < \varepsilon$, el que vol dir que $T$ és continu a $x$.

(ii) $\implies$ (iii)
Sigui $\varepsilon > 0$. Com que $T$ és continu a tot punt, en particular ho és a l'origen, i per tant, $\exists \delta > 0$ tal que $\|x\|_E < \delta \implies \|Tx\|_F < \varepsilon$. Aleshores, sigui $y \in \overline{B_1(0)}$ diferent de l'origen, i prenem $\lambda_y \in \mathbb{R}^+$ tal que $\|\lambda_y y\|_E < \delta$, per exemple qualsevol $\lambda_y$ més petita que $\frac{\delta}{\|y\|_E}$. Aleshores, per ser $T$ continu a l'origen, ara tenim que $\|T(\lambda_y y)\|_F < \varepsilon$, és a dir, que $\|Ty\|_F < \frac{\varepsilon}{|\lambda_y|}$. En definitiva, per totes les $y$ que podríem agafar (diferents de l'origen) la quantitat $\frac{\varepsilon}{\lambda_y}$ sempre és finita, i per tant, totes les imatges estan fitades.

(iii) $\implies$ (iv)
Si $T\left(\overline{B_1(0)}\right)$ està fitat, això vol dir que $\exists R \in \mathbb{R}$ tal que $\|Tx\|_F < R$, per a tota $x \in \overline{B_1(0)}$. Això vol dir, per tant, que si prenem suprems,

$$\|T\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|Tx\|_F \leq R < +\infty.$$

*En dimensió finita, podríem haver utilitzat la compacitat de la bola unitat centrada a l'origen, el fet que la norma és contínua i el Teorema de Weierstrass.*

(iv) $\implies$ (v)
Vegem que podem prendre $C = \|T\|_{\mathcal{L}(E,F)}$:

$$\|Tx\|_F = \|x\|_E \|T\frac{x}{\|x\|_E}\|_F \leq \|x\|_E \|T\|_{\mathcal{L}(E,F)}.$$

Hi hem fet servir que la norma de $T$ es fa sobre tota la bola de radi 1 al voltant de l'origen, incloent-ne l'adherència. Per tant, en efecte, podem prendre $C$ com la norma de $T$.

(v) $\implies$ (i)
Per a tota $\varepsilon > 0$, prenem $\delta = \frac{\varepsilon}{C}$, i aleshores es compleix:

$$\|x\|_E < \delta \implies \|Tx\|_F \leq C\|x\|_E < C\delta = \varepsilon.$$

**Definició.** *Un operador $T : E \to F$ entre espais de Banach és **compacte** si per a tot $A \subset E$ fitat es té que $\overline{T(A)}$ és compacte.*

**(d)** Proveu que si $T : E \to F$ és un operador lineal, les següents propietats són equivalents:

(i) $T$ és compacte.

(ii) Qualsevol bola $B_r(p) \subset E$ satisfà que $\overline{T(B_r(p))}$ és compacte.

(iii) $\overline{T\left(B_1(0)\right)}$ és compacte.

(iv) Tota successió $(x_n)_n \subset \overline{B_1(0)}$ satisfà que $(T(x_n))_n$ té una subsuccessió convergent.

(i) $\implies$ (ii)
El fet que $T$ sigui un operador compacte, juntament amb el fet que qualsevol bola $B_r(p)$ és un subconjunt fitat d'$E$ (en particular, fitat per ell mateix), ens diu que l'adherència de la imatge de qualsevol bola és compacte, per definició d'operador compacte.

(ii) $\implies$ (iii)
Aquest cas és força trivial, ja que agafem $r = 1, p = \mathbf{0}$ en la propietat (ii) i ja ho tenim.

(iii) $\implies$ (iv)
Com que estem en un espai mètric (normats $\subset$ mètrics $\subset$ topològics), ser compacte per recobriments i ser compacte per successions són propietats equivalents. Aleshores, el fet que $\overline{T(B_1(0))}$ sigui un compacte (en particular, per successions) ens diu que tota successió d'elements $(y_n)_n \subset \overline{T(B_1(0))}$ hi té una parcial convergent. Notem que tota successió $(x_n)_n \subset B_1(0) \subset \overline{B_1(0)}$ dóna lloc a una successió d'aquest tipus a través de $T$, per la qual tenim sempre una parcial convergent per la condició (iii).

(iv) $\implies$ (i)
Sigui $A \subset E$ un subconjunt fitat no buit. Aleshores, com que $A$ és fitat, $\exists r \in \mathbb{R}^+$ tal que $A \subset B_r(0)$. En aquesta situació, sigui $(x_n)_n \subset A$ una successió, i sigui'n $(y_n)_n = \left(\frac{x_n}{r}\right)_n$ la "normalització", és a dir, que ara tenim $(y_n)_n \subset B_1(0)$. En virtut de (iv), la successió $(T(y_n))_n$ té una parcial convergent dins de $\overline{T(B_1(0))}$. Sigui aquesta parcial $(T(y_{n_k}))_k = \left(T\left(\frac{x_{n_k}}{r}\right)\right)_k = \left(\frac{1}{r}T(x_{n_k})\right)$. Aleshores, com que $0 < r < +\infty$, la successió $(rT(y_{n_k}))_k = (T(x_{n_k}))_k \subset (T(x_n))_n$ també és convergent, com a molt a l'adherència de l'espai on viu, que és $\overline{T(A)}$. Per tant, hem acabat veient que $(x_n)_n$ dóna lloc a una successió d'imatges per $T$, $(T(x_n))_n$, que té una subsuccessió convergent dins de $\overline{T(A)}$. Com que això que hem fet val per a tota $(x_n)_n$, només podem acabar determinant que $\overline{T(A)}$ és compacte per successions, i com que $F$ és normat (i per tant, mètric), finalment, que $\overline{T(A)}$ és un compacte d'$F$. Això val per tot $A \subset E$ fitat, i per tant, $T$ és un operador compacte.

Com a corol·lari, veieu que si $T$ és un operador lineal i continu de manera que $T(E)$ té dimensió finita, aleshores $T$ és compacte.

Primer comencem notant que si $A$ és un subconjunt fitat d'un espai mètric, aleshores la seva adherència també està fitada. Això es pot veure fàcilment ja que

$$A \subset B_r(p) \implies \overline{A} \subset \overline{B_r(p)} \subset B_{r+1}(p).$$

Ara continuem. Pel que hem vist a l'apartat (c), és equivalent que $T$ sigui continu arreu i que $T\left(\overline{B_1(0)}\right)$ sigui un conjunt fitat. Aleshores, com que $B_1(0) \subset \overline{B_1(0)}$, aleshores les seves imatges compleixen $T(B_1(0)) \subset T\left(\overline{B_1(0)}\right)$, i per tant, $T(B_1(0))$ també està fitat. Sabent que l'adherència d'un conjunt qualsevol és tancada (per definició), ja només ens queda recordar el Teorema de Heine-Borel per acabar la demostració del corol·lari. El teorema diu que, en dimensió finita (estem en espais vectorials sobre $\mathbb{R}$), un subconjunt és compacte si i només si és tancat i fitat. Per tant, l'adherència de la imatge de la bola unitat, que és tancada i fitada, és un compacte. Pel que acabem de veure, això és equivalent a dir que $T$ és un operador compacte.

**Definició.** *Un espai pre-Hilbert és un espai vectorial real $H$ juntament amb un producte escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Un espai de Hilbert és un espai pre-Hilbert complet (com a espai mètric).*

**(e)** Sigui $H$ un espai de Hilbert. Proveu que l'aplicació $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \to \mathbb{R}$ és contínua.

En apartats anteriors hem vist que **l'aplicació norma és uniformement contínua en espais de Banach** (en concret, a l'apartat (b), on ho hem demostrat per $\mathcal{L}(E, F)$). Tinguem aquest fet present, que utilitzarem en la demostració d'aquesta proposició. Recordem també la desigualtat de Cauchy-Schwarz per productes escalars:

$$|\langle u, v\rangle| \leq \sqrt{\langle u, u\rangle}\sqrt{\langle v, v\rangle}.$$

Siguin ara $(x_n)_n, (y_n)_n \subset H$ **successions convergents** respectivament a $x$ i $y$, $(x, y) \neq (0, 0)$, en l'espai normat (i de Banach) $(H, \|\cdot\|_H)$, on $\|x\|_H = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ és la norma induïda pel producte escalar $\langle\cdot,\cdot\rangle$ d'$H$. Sigui $\varepsilon > 0$, i sigui $N = \max\{N_x, N_y\}$, on $N_x$ i $N_y$ són els naturals a partir dels quals es satisfà, respectivament:

$$\|x - x_n\|_H < \frac{\varepsilon}{\|x\|_H + \|y\|_H}, \quad \|y - y_n\|_H < \frac{\varepsilon}{\|x\|_H + \|y\|_H}$$

Vegem que $\lim_{n\to+\infty} \langle x_n, y_n\rangle = \langle x, y\rangle$:

$$\begin{aligned} |\langle x, y\rangle - \langle x_n, y_n\rangle| &= |\langle x, y\rangle - \langle x_n, y\rangle + \langle x_n, y\rangle - \langle x_n, y_n\rangle| \\ [\text{Desigualtat Triangular}] &\leq |\langle x, y\rangle - \langle x_n, y\rangle| + |\langle x_n, y\rangle - \langle x_n, y_n\rangle| \\ [\text{Cauchy-Schwarz+Bilinealitat}] &\leq \|x - x_n\|_H\|y\|_H + \|x_n\|_H\|y - y_n\|_H \end{aligned}$$

Per $n \geq N$, sabem que això també ens diu que:

$$|\langle x, y\rangle - \langle x_n, y_n\rangle| < \frac{\|y\|_H + \|x_n\|_H}{\|y\|_H + \|x\|_H}\varepsilon,$$

i com que $\|\cdot\|_H$ és uniformement contínua, en particular tenim que **el quocient** que apareix a l'expressió anterior **se'n va a 1** i, per tant, que

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} :\ |\langle x, y\rangle - \langle x_n, y_n\rangle| < \varepsilon,\ \forall n \geq N.$$

És a dir, que el producte escalar $\langle\cdot,\cdot\rangle : H \times H \to \mathbb{R}$ és continu.

Sigui $H^\vee = \mathcal{L}(H, \mathbb{R})$. Proveu que l'aplicació $F : H \to H^\vee$ definida per $x \mapsto \langle\cdot, x\rangle$ és lineal, injectiva, i a més és una isometria. *Bonus: podeu dir alguna cosa sobre l'exhaustivitat d'aquesta aplicació?*

1. **Linealitat:**
   Per a tota $z \in H$ tenim

   $$F(\alpha x + \beta y)(z) = \langle\alpha x + \beta y, z\rangle = \langle\alpha x, z\rangle + \langle\beta y, z\rangle = \alpha\langle x, z\rangle + \beta\langle y, z\rangle = \alpha F(x)(z) + \beta F(y)(z).$$

   Per tant, $F$ és una aplicació lineal. A partir d'ara, escriurem $Fx := F(x)$.

2. **Injectivitat:**
   Siguin $x, y \in H$, aleshores

   $$Fx = Fy \implies \forall z \in H,\ \langle x, z\rangle = \langle y, z\rangle \implies \forall z \in H,\ \langle x - y, z\rangle = 0 \implies x - y \in \mathbb{R}^\perp = \{0\}.$$

   Per tant, $x - y = 0$, és a dir, que $x = y$. Per tant, $F$ és injectiva.

3. **Isometria:**
   $F$ serà isometria si i només si conserva les distàncies, és a dir, si i només si satisfà, per a tota $x, y \in H$, que

   $$\|Fx - Fy\|_{H^\vee} = \|x - y\|_H.$$

   Veurem ambdues desigualtats, $\leq$ i $\geq$: (recordem que $\|a\|_\mathbb{R} = |a|$)

$\boxed{\leq}$

$$
\begin{aligned}
\|Fx - Fy\|_{H^\vee} &\leq \sup_{\|z\|_H \leq 1} |\langle x - y, z\rangle| \\
\text{[Cauchy-Schwarz]} &\leq \sup_{\|z\|_H \leq 1} \|x - y\|_H \|z\|_H \\
&= \|x - y\|_H \sup_{\|z\|_H \leq 1} \|z\|_H = \|x - y\|_H.
\end{aligned}
$$

$\boxed{\geq}$

Sigui $z_0 = \dfrac{x - y}{\|x - y\|_H} \in \partial\overline{B_1(0)} \subset H$. En aquest punt, la funció $Fx - Fy$ val

$$
\begin{aligned}
(Fx - Fy)(z_0) = \left\langle x - y, \frac{x - y}{\|x - y\|_H} \right\rangle &= \frac{1}{\|x - y\|_H} \langle x - y, x - y\rangle \\
&= \frac{\|x - y\|_H^2}{\|x - y\|_H} = \|x - y\|_H.
\end{aligned}
$$

Aleshores, per la multiplicativitat de la norma, tenim que

$$
\|x - y\|_H = |\|x - y\|_H| = |(Fx - Fy)(z_0)| \leq \|Fx - Fy\|_{H^\vee} \|z_0\|_H = \|Fx - Fy\|_{H^\vee}.
$$

En definitiva, hem vist que tant es compleix $\|x - y\|_H \leq \|Fx - Fy\|_{H^\vee}$ com $\|x - y\|_H \geq \|Fx - Fy\|_{H^\vee}$, amb el que només podem concloure que $\|x - y\|_H = \|Fx - Fy\|_{H^\vee}$, és a dir, que $F$ és una isometria.

*Bonus:* Vegem que l'aplicació $x \mapsto \langle x, \cdot\rangle$ **és exhaustiva en dimensió finita**. En efecte, no és molt complicat de comprovar, doncs en dimensió finita, $H^\vee = H^*$, el dual d'$H$, que és conegut que té la mateixa dimensió que $H$. Com que la nostra aplicació és **injectiva entre espais de la mateixa dimensió**, ha de ser bijectiva (un **isomorfisme**, en particular) i per tant, exhaustiva.
En canvi, en dimensió infinita, això no té per què passar. Posem-nos en l'exemple de l'apartat (a), l'espai $c_{00}$ de successions amb un nombre finit d'elements no nuls. Hi podem definir el producte escalar $\langle (a_n), (b_n)\rangle := \sum_{n\geq 0} a_n b_n$, i una aplicació lineal $S$ de $c_{00}$ en $\mathbb{R}$ que sigui la suma de la successió $(a_n)_n$. Aquesta suma sempre existeix, ja que només sumem un nombre finit de termes no nuls, i per tant $S$ està ben definida. Però, com veurem a continuació, no se li pot definir una antiimatge. Per tal que existís aquesta antiimatge, hi hauria d'haver un element (com a mínim) $(\lambda_n)_n$ de $c_{00}$ tal que per qualsevol $(b_n)_n$ poguéssim expressar $S((b_n)_n)$ com a $\langle (\lambda_n)_n, (b_n)_n\rangle$, però això significaria que (com que ha de ser per tota successió de $c_{00}$) tots els elements $\lambda_n = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Això significaria, doncs, que $(\lambda_n)_n \notin c_{00}$. Per tant, no tenim antiimatge definida per un element de $H^\vee = c_{00}^\vee$, amb el que concloem que $F$ en aquest cas no seria exhaustiva.

Sigui $\ell^2 := \left\{(a_n)_n \subset \mathbb{R} \ : \ \sum_{i\geq 0} |a_i|^2 < +\infty\right\}$. Considereu el producte escalar definit a $\ell^2$ per:

$$
\langle (a_n)_n, (b_n)_n\rangle := \sum_{i\geq 0} a_i b_i.
$$

**(f)** Proveu que $\ell^2$ és un espai de Hilbert. Podeu donar altres exemples?

Comprovarem les següents coses, en ordre:

1. $\ell^2$ és un **espai vectorial real**.
2. $\langle \cdot, \cdot\rangle : \ell^2 \times \ell^2 \to \mathbb{R}$ és un **producte escalar**.
3. L'espai $\left(\ell^2, \|\cdot\|_{\ell^2}\right)$ és un **espai de Banach**, amb la norma induïda pel producte escalar.

**1.** Primer comprovem que $\ell^2$ **és un espai vectorial**: siguin $(a_n)_n, (b_n)_n \in \ell^2$ dues successions de quadrat sumable. Aleshores, siguin $\alpha$ i $\beta$ dos reals qualssevol, i sigui $(c_n)_n := \alpha(a_n)_n + \beta(b_n)_n$, on cada terme val $c_k = \alpha a_k + \beta b_k$. Comprovem que també és de quadrat sumable:

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0} |c_n|^2 = \sum_{n\geq 0} c_n^2 = \sum_{n\geq 0} (\alpha a_n + \beta b_n)^2 \\ = \sum_{n\geq 0} \left(\alpha^2 a_n^2 + 2\alpha\beta a_n b_n + \beta^2 b_n^2\right) \\ = \alpha^2 \sum_{n\geq 0} a_n^2 + \beta^2 \sum_{n\geq 0} b_n^2 + 2\alpha\beta \left\langle (a_n)_n, (b_n)_n \right\rangle .\end{aligned}$$

Per ser $(a_n)_n$ i $(b_n)_n$ de $\ell^2$, les quantitats $\alpha^2 \sum_{n\geq 0} a_n^2$ i $\beta^2 \sum_{n\geq 0} b_n^2$ són ambdues finites. Aleshores, ens falta veure que $2\alpha\beta \left\langle (a_n)_n, (b_n)_n \right\rangle < +\infty$. Considerem **el mateix producte escalar**, però a $\mathbb{R}^N$, $\forall N \in \mathbb{N}$, on es compleix la **desigualtat de Cauchy-Schwarz**:

$$\left| \sum_{n=0}^{N} a_n b_n \right| \leq \sqrt{\sum_{n=0}^{N} a_n^2} \sqrt{\sum_{n=0}^{N} b_n^2}.$$

Per tant, si prenem límits, tindrem que se satisfà

$$\left| \sum_{n\geq 0} a_n b_n \right| \leq \sqrt{\sum_{n\geq 0} a_n^2} \sqrt{\sum_{n\geq 0} b_n^2},$$

i per tant, $\left\langle (a_n)_n, (b_n)_n \right\rangle < +\infty \implies 2\alpha\beta \left\langle (a_n)_n, (b_n)_n \right\rangle < +\infty$. Per tant, finalment tenim que $\sum_{n\geq 0} c_n^2 < +\infty$, és a dir, que $\alpha(a_n)_n + \beta(b_n)_n = (c_n)_n \in \ell^2$, i per tant, $\ell^2$ **és un $\mathbb{R}$-espai vectorial**.

**2.** Ara comprovem que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ **és en efecte un producte escalar**. Farem servir $x := (x_n)_n$.

(PE1) **Bilinealitat:** siguin $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$. Aleshores,

$$\begin{aligned}\langle \alpha x + \beta y, \gamma z + \delta t \rangle = \sum_{n\geq 0} (\alpha x_n + \beta y_n)(\gamma z_n + \delta t_n) \\ = \alpha \sum_{n\geq 0} x_n (\gamma z_n + \delta t_n) + \beta \sum_{n\geq 0} y_n (\gamma z_n + \delta t_n) = \\ = \alpha \langle x, \gamma z + \delta t \rangle + \beta \langle y, \gamma z + \delta t \rangle = \\ = \alpha\gamma \sum_{n\geq 0} x_n z_n + \alpha\delta \sum_{n\geq 0} x_n t_n + \beta\gamma \sum_{n\geq 0} y_n z_n + \beta\delta \sum_{n\geq 0} y_n t_n \\ = \alpha\gamma \langle x, z \rangle + \alpha\delta \langle x, t \rangle + \beta\gamma \langle y, z \rangle + \beta\delta \langle y, t \rangle .\end{aligned}$$

(PE2) **Simetria:**

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n\geq 0} x_n y_n = \sum_{n\geq 0} y_n x_n = \langle y, x \rangle .$$

(PE3) **Definit positiu:** la suma dels quadrats de $x_n$ és una **suma de termes positius**:

$$\langle x, x \rangle = \sum_{n\geq 0} x_n^2 \geq 0.$$

**3.** Vegem que $\left(\ell^2, \|\cdot\|_{\ell^2}\right)$ és un espai de Banach. Sigui $(a^n)_n$ una **successió de Cauchy** a $\ell^2$, és a dir, tal que

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N_f \in \mathbb{N} : \; \|a^n - a^m\|_{\ell^2} < \varepsilon, \; \forall n, m \geq N_f.$$

L'anomenem $N_f$ perquè està associada a la norma de la **diferència entre les files** de la següent taula, que va bé per representar la successió de successions:

$$\begin{array}{cccccccccc} a_0^0, & a_1^0, & a_2^0, & a_3^0, & a_4^0, & a_5^0, & a_6^0, & a_7^0, & a_8^0, & \cdots \\ a_0^1, & a_1^1, & a_2^1, & a_3^1, & a_4^1, & a_5^1, & a_6^1, & a_7^1, & a_8^1, & \cdots \\ a_0^2, & a_1^2, & a_2^2, & a_3^2, & a_4^2, & a_5^2, & a_6^2, & a_7^2, & a_8^2, & \cdots \\ a_0^3, & a_1^3, & a_2^3, & a_3^3, & a_4^3, & a_5^3, & a_6^3, & a_7^3, & a_8^3, & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}$$

Tornant a la norma, treballarem amb el seu quadrat sovint, per alleugerir la notació. Aquesta norma de la diferència val, doncs,

$$\|a^n - a^m\|_{\ell^2} = \sum_{k\geq 0} (a_k^n - a_k^m)^2 < \varepsilon^2, \ \forall n, m \geq N_f.$$

Com que es tracta d'una **sèrie de termes positius**, cadascun d'ells és menor que $\varepsilon^2$, i.e.,

$$\forall k \geq 0, \ (a_k^n - a_k^m)^2 < \varepsilon^2, \ \forall n, m \geq N_f,$$

i treient quadrats,

$$\forall k \geq 0, \ |a_k^n - a_k^m| < \varepsilon, \ \forall n, m \geq N_f.$$

Això, el que ens diu, és que per tota $k \geq 0$, la successió $(a_k^n)_n$ és de Cauchy a $\mathbb{R}$. Com que $\mathbb{R}$ és un espai complet, aquesta successió és convergent, és a dir, $a_k^n \xrightarrow{n\to+\infty} a_k$, i tenim una **successió de límits puntuals**, $a = (a_k)_k$.

Ara volem veure que $\|a - a^n\|_{\ell^2} \xrightarrow{n\to+\infty} 0$, és a dir, que $a^n \to a$ a $\ell^2$. Per fer això, fixem $\mathbf{K} \in \mathbb{N}$, i donada $\varepsilon > 0$, definim $\hat{\varepsilon} := \frac{\varepsilon}{2\sqrt{\mathbf{K}+1}}$. Aleshores, com que $a_k^n \xrightarrow{n\to+\infty} a_k$, això vol dir que

$$\forall \tilde{\varepsilon} > 0 \ \exists N_0 := N_0(\tilde{\varepsilon}, k) \in \mathbb{N} : \ |a_k - a_k^n| < \tilde{\varepsilon}, \ \forall n \geq N_0.$$

Sigui $N_c(k) = N_0(\hat{\varepsilon}, k)$, aquest cop $N_c(k)$ perquè està **associada a la columna $k$-èssima**, i sigui $N(r) = \max_{k=0,\ldots,r}\{N_c(k)\}$. Ara definim la **successió de sumes parcials** de la norma, $S^2 = \left(S_r^2\right)_r$, i en aquesta situació, se satisfà:

$$S_{\mathbf{K}}^2 := \sum_{k=0}^{\mathbf{K}} (a_k - a_k^n)^2 < (\mathbf{K}+1)\hat{\varepsilon}^2 = \frac{(\mathbf{K}+1)\varepsilon^2}{4(\mathbf{K}+1)} = \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2, \ \forall n \geq N(\mathbf{K}).$$

Per tant, per a tota $\mathbf{K} \in \mathbb{N}$ es té que la successió de nombres reals $S$, de terme general $S_r = \sqrt{S_r^2} = \|a - a^r\|_{\ell^2}$, satisfà $|S_{\mathbf{K}}| < \frac{\varepsilon}{2}$. Finalment, notem que $S$ és una successió **monòtona creixent** (potser no estrictament) de **termes positius** (suma de quadrats), i tal que tots els termes estan **fitats estrictament** per $\frac{\varepsilon}{2}$ (constant en $\mathbf{K}$). Aquestes dues hipòtesis ens són suficients per dir que $S$ és una **successió convergent**, i que satisfà que

$$\lim_{r\to+\infty} S_r = \lim_{r\to+\infty} \|a - a^r\|_{\ell^2} \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

És a dir, que la successió de normes **convergeix a 0 en** $\mathbb{R}$, i per tant, que les **successions-fila convergeixen**, $a^n \xrightarrow{n\to+\infty} a$, a la successió dels **límits de les successions-columna**. En definitiva, hem vist que donada una **successió de Cauchy** a $\ell^2$, aquesta **convergeix respecte de la norma** $\|\cdot\|_{\ell^2}$, i per tant, que **l'espai** $\left(\ell^2, \|\cdot\|_{\ell^2}\right)$ **és de Banach**, és a dir, finalment, que **l'espai** $\left(\ell^2, \langle\cdot,\cdot\rangle\right)$ **és de Hilbert**.

Com a exemple addicional d'espai de Hilbert, podem fer una analogia al cas anterior amb les funcions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tals que el seu quadrat es pot integrar i aquesta integral és finita, equipades amb el producte escalar

$$\langle f, g\rangle := \int_{\mathbb{R}} (|f|\,|g|)^2\,.$$

Aquest espai també és de Hilbert, l'anomenat $L_2$.