Teoria de la Informació GCED-UPC curs 2019/20
Problemes; full número 3

16 d'octubre de 2019

3.1. Sigui $X_1, X_2, \ldots$ una successió de variables aleatòries i.i.d. Calculeu

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{p(X_1, X_2, \ldots, X_n)},$$

digueu quant val aquest límit si la distribució de les variables és $\mathrm{Ber}(p)$ i dibuixeu la gràfica dels seus valors per a $p \in [0,1]$.

3.2. *En un procés estacionari la incertesa coneixent el passat és la mateixa que coneixent el futur.* Sigui $(X_i)_{i\in\mathbb{Z}} = \ldots, X_{-3}, X_{-2}, X_{-1}, X_0, X_1, X_2, X_3, \ldots$ un procés estocàstic estacionari:

$$\Pr(X_i, X_{i+1}, \ldots, X_{i+n-1} = x^n) = \Pr(X_j, X_{j+1}, \ldots, X_{j+n-1} = x^n),$$

per a tot $x^n \in \mathcal{X}^n$, tot enter $n \geqslant 1$ i tot parell d'enters $i, j \in \mathbb{Z}$.

Demostreu que

$$H(X_0|X_{-1}, X_{-2}, \ldots, X_{-n}) = H(X_0|X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

i doneu una fórmula anàloga per a les entropies condicionades d'una de les variables respecte les n anteriors i les n posteriors.

3.3. Sigui $n \geqslant 3$. Siguin $X_1, \ldots, X_{n-1}$ variables aleatòries binàries independents amb distribució uniforme. Sigui $X_n = 1$ si $\sum_{i=1}^{n-1} X_i$ és senar i $X_n = 0$ si és parell.

1. Vegeu que X_i i X_j són independents per a tot parell $i \neq j$ amb $1 \leqslant i, j \leqslant n$.
2. Calculeu $H(X_i, X_j)$ si $i \neq j$.
3. Calculeu $H(X_1, \ldots, X_n)$.

3.4. Es considera un passeig aleatori sobre els enters de la forma següent: es comença al zero i en el primer pas es va a la dreta o l'esquerra amb la mateixa probabilitat; en els passos següents s'avança en la mateixa direcció amb probabilitat 0.9 i es canvia de direcció amb probabilitat 0.1. Sigui $X_0 = 0, X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n, \ldots$ la successió de variables aleatòries que donen la posició sobre $\mathbb{Z}$ quan s'han fet n passos.

1. Comproveu que els X_i són una cadena de Markov d'ordre 2.
2. És estacionària?
3. Calculeu $H(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.
4. Calculeu l'entropia del procés.
5. Calculeu el nombre esperat de passos abans de canviar de direcció.

3.5. Considereu una cadena de Markov $X_1, X_2, \ldots$ d'ordre 1 amb variables que prenen valors al conjunt $\mathcal{X} = \{0, 1, 2\} = \mathbb{Z}_3$, on X_1 té distribució uniforme i la matriu de transició entre estats és

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Considereu també el procés estocàstic $Z_1, Z_2, \ldots$ amb $Z_1 = X_1$ i $Z_i = X_i - X_{i-1} \pmod 3$ per a $i \geqslant 2$.

1. La cadena X_i, és estacionària?
2. Calculeu la seva entropia.
3. Calculeu $H(Z_1, \ldots, Z_n)$.
4. Calculeu $H(X_n)$ i $H(Z_n)$.
5. Calculeu $H(Z_n | Z_{n-1})$.
6. Les variables Z_n i Z_{n-1}, són independents?

3.6. Siguin X_i variables binaries i.i.d. amb distribució $\mathrm{Ber}(p)$. Considereu el procés $Y_1, Y_2, \ldots$ tal que Y_n dóna el nombre d'uns seguits que apareixen fins a X_n. Per exemple, si $X^n = 1011100110\ldots$ aleshores $Y^n = 1012300120\ldots$. Calculeu les entropies d'aquests dos processos.

3.7. Una font binària emet dígits de forma independent amb probabilitats $p(1) = 0.005$ i $p(0) = 0.995$. Es codifiquen les seqüències emeses per la font en blocs de 100 dígits de la manera següent: les seqüències que contenen tres o menys uns es codifiquen amb un 1 seguit d'una paraula binària de longitud fixada el més curta possible. Les seqüències que tenen més de tres uns es codifiquen amb un 0 seguit de la seqüència sencera.

1. Calculeu l'entropia de la font. Quants bits s'haurien de fer servir per codificar les seqüències de longitud 100 de manera òptima?
2. Calculeu el nombre esperat de bits que es fan servir per codificar les seqüències segons l'esquema proposat.
3. Seria millor estratègia codificar les paraules amb dos uns com a màxim? amb un 1 com a màxim?
4. Seria millor estratègia codificar amb paraules curtes les seqüències típiques?

3.8. *Exàmen gener 19.* Digueu si les afirmacions següents són certes o falses, justificant la resposta:

1. Si el procés estocàstic $X_1, X_2, X_3, \ldots$ té taxa d'entropia H aleshores es compleix:

$$\lim_{n\to\infty} H(X_n) = H.$$

2. La taxa d'entropia d'una cadena de Markov estacionària amb matriu de transició de probabilitats

$$P = \begin{pmatrix} 4/5 & 1/5 & 0 \\ 0 & 4/5 & 1/5 \\ 1/5 & 0 & 4/5 \end{pmatrix}$$

és igual a $\log 5 - \frac{8}{5}$.

3.9. *AEP*. Es genera una seqüència de dígits binaris independents amb distribució $\mathrm{Ber}(p)$. Escriviu una funció de Python que, agafant com a paràmetres la probabilitat p, un enter $n > 1$ i un nombre $\epsilon > 0$ calculi:

1. El cardinal $|A_\epsilon^{(n)}|$ i $\Pr\left(A_\epsilon^{(n)}\right)$ del conjunt de seqüències típiques

$$A_\epsilon^{(n)} = \left\{x^n \in \mathcal{X}^n : 2^{-n(H+\epsilon)} \leqslant p(x^n) \leqslant 2^{-n(H-\epsilon)}\right\} \subseteq \mathcal{X}^n.$$

La fita demostrada a teoria assegura que $e = \Pr\left(A_\epsilon^{(n)}\right) \geqslant 1 - \epsilon$.

2. El cardinal $|B_\epsilon^{(n)}|$ del mínim conjunt de probabilitat $> 1 - \epsilon$:

$$B_\epsilon^{(n)} \subseteq \mathcal{X}^n \quad \text{amb} \quad \Pr(B_\epsilon^{(n)}) \geqslant 1 - \epsilon \quad \text{tal que} \quad |B_\epsilon^{(n)}| \quad \text{és mínim.}$$

3. El cardinal $|B_e^{(n)}|$ del mínim conjunt de probabilitat $\geqslant e = \Pr\left(A_\epsilon^{(n)}\right)$:

$$B_e^{(n)} \subseteq \mathcal{X}^n \quad \text{amb} \quad \Pr(B_e^{(n)}) \geqslant e \quad \text{tal que} \quad |B_e^{(n)}| \quad \text{és mínim.}$$

És a dir, el conjunt mínim de seqüències que tenen la mateixa probabilitat que el conjunt de les seqüències típiques per a l'ϵ donat.

4. El nombre de bits per símbol usats en codificar les seqüències de longitud n segons el mètode explicat a classe de teoria en cadascun dels casos: usant el conjunt de seqüències típiques $A_\epsilon^{(n)}$ o bé usant els conjunts mínims $B_\epsilon^{(n)}$ i $B_e^{(n)}$ de probabilitat alta donada $1 - \epsilon$ o e dels apartats 2 i 3.

Usant aquesta funció compareu els valors de $|A_\epsilon^{(n)}|$ i $\Pr\left(A_\epsilon^{(n)}\right)$ que obteniu a l'apartat 1 amb les fites sobre aquests valors demostrades a classe de teoria, i experimenteu variant els paràmetres per entendre millor la propietat d'equipartició asimptòtica.