COGNOMS (en majúscula), Nom: ________________ Nota: ______

*Temps: $3^h$ $00^{min}$*

1. Expliqueu, amb tot detall, l'aproximació per mínims quadrats.

2. Considerem la matriu,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ \varepsilon - 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

essent on $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $0 < \varepsilon < 1$.

(a) Calculeu la factorització de Gauss $A = LU$ de la matriu $A$.

(b) Doneu el $\lim_{\varepsilon \to 0^+} \ell_{32}$.

(c) Feu servir la descomposició $LU$ de l'apartat (a) per trobar la inversa de la matriu $A$.

(d) Calculeu el nombre de condició $\mu_\infty(A)$.

(e) Usant (c) calculeu la solució del sistema $Ax = b$, amb $b^\top = (b_1, b_2, b_3)$.

(f) Si $b_1 = 1 \pm \delta$, $b_2 = 1 \pm \delta$, trobeu una fita de l'error absolut en calcular $x_1/x_2$, suposant que les operacions són exactes.

Adaptat de: Quarteroni, A.; Saleri, F.: *Cálculo Científico con Matlab y Octave.* Springer-Verlag 2006. Ejercicio **5.8**, pàg. 171.

**Solució:**

(a) Busquem la factorització de Gauss de la matriu $A$, i.e., $A =$

$$LU = \begin{pmatrix} 1 & & \\ \ell_{21} & 1 & \\ \ell_{31} & \ell_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ & u_{22} & u_{23} \\ & & u_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ \ell_{21}u_{11} & \ell_{21}u_{12} + u_{22} & \ell_{21}u_{13} + u_{23} \\ \ell_{31}u_{11} & \ell_{31}u_{12} + \ell_{32}u_{22} & \ell_{31}u_{13} + \ell_{32}u_{23} + u_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ \varepsilon - 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Resolent "per columnes" obtenim les componets de $L$ i de $U$. En efecte:

$$1^{\text{a}} \text{ Col.:} \begin{cases} u_{11} = 2, \\ \ell_{21}u_{11} = \varepsilon - 2 \Longrightarrow \ell_{21} = \dfrac{\varepsilon - 2}{2}, \\ \ell_{31}u_{11} = 2\ell_{31} = 0 \Longrightarrow \ell_{31} = 0. \end{cases}$$

$$2^{\text{a}} \text{ Col.:} \begin{cases} u_{12} = -2, \\ \ell_{21}u_{12} + u_{22} = \dfrac{\varepsilon - 2}{2} \times (-2) + u_{22} = 2 - \varepsilon + u_{22} = 2 \Longrightarrow u_{22} = \varepsilon, \\ \ell_{31}u_{12} + \ell_{32}u_{22} = 0 \times (-2) + \varepsilon\ell_{32} = -1 \Longrightarrow \ell_{32} = -\dfrac{1}{\varepsilon}. \end{cases}$$

$$3^{\text{a}} \text{ Col.:} \begin{cases} u_{13} = 0, \\ \ell_{21}u_{13} + u_{23} = \dfrac{\varepsilon - 2}{2} \times 0 + u_{23} = 0 \Longrightarrow u_{23} = 0, \\ \ell_{31}u_{13} + \ell_{32}u_{32} + u_{33} = 0 - \dfrac{1}{\varepsilon} \times 0 + u_{33} = 3 \Longrightarrow u_{33} = 3. \end{cases}$$

Llavors tenim $A = LU$, amb

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & \\ \frac{\varepsilon - 2}{2} & 1 & \\ 0 & -\frac{1}{\varepsilon} & 1 \end{pmatrix}, \qquad U = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ & \varepsilon & 0 \\ & & 3 \end{pmatrix}.$$

(b) De l'apartat anterior veiem que $\ell_{32} = -\dfrac{1}{\varepsilon}$. Per tant, el límit val:

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \ell_{32} = -\lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{\varepsilon} = -\infty.$$

(c) S'han de resoldre els sistemes $Ly^{(i)} = e_i$, $Ux^{(i)} = y^{(i)}$, $i = 1, 2, 3$; on els $e_i$ són els vectors de la base canònica de $\mathbb{R}^3$. i.e.:

$$Ly^{(1)} = e_1 : \begin{pmatrix} 1 & & \\ \frac{\varepsilon-2}{2} & 1 & \\ 0 & -\frac{1}{\varepsilon} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1^{(1)} \\ y_2^{(1)} \\ y_3^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{d'on:} \begin{cases} y_1^{(1)} = 1, \\ \dfrac{\varepsilon-2}{2} y_1^{(1)} + y_2^{(1)} = \dfrac{\varepsilon-2}{2} + y_2^{(1)} = 0 \Longrightarrow y_2^{(1)} = \dfrac{2-\varepsilon}{2}, \\ -\dfrac{1}{\varepsilon} y_2^{(1)} + y_3^{(1)} = 0 \Longrightarrow y_1^{(1)} = \dfrac{2-\varepsilon}{2\varepsilon}. \end{cases}$$

$$Ux^{(1)} = y^{(1)} : \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ & \varepsilon & 0 \\ & & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2-\varepsilon}{2} \\ \frac{2-\varepsilon}{2\varepsilon} \end{pmatrix}, \quad \text{d'on:} \begin{cases} 3x_3^{(1)} = \dfrac{2-\varepsilon}{2\varepsilon} \Longrightarrow x_3^{(1)} = \dfrac{2-\varepsilon}{6\varepsilon}, \\ \varepsilon x_2^{(1)} + 0 \times x_3^{(1)} = \dfrac{2-\varepsilon}{2} \Longrightarrow x_2^{(1)} = \dfrac{2-\varepsilon}{2\varepsilon}, \\ 2x_1^{(1)} - 2x_2^{(1)} + 0 \times x_3^{(1)} = 2x_1^{(1)} - \dfrac{2}{\varepsilon} + 1 = 1 \Longrightarrow x_1^{(1)} = \dfrac{1}{\varepsilon}. \end{cases}$$

Aleshores:

$$x^{(1)} = \left( \frac{1}{\varepsilon}, \frac{2-\varepsilon}{2\varepsilon}, \frac{2-\varepsilon}{6\varepsilon} \right)^\top.$$

$$Ly^{(2)} = e_2 : \begin{pmatrix} 1 & & \\ \frac{\varepsilon-2}{2} & 1 & \\ 0 & -\frac{1}{\varepsilon} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1^{(2)} \\ y_2^{(2)} \\ y_3^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{d'on:} \begin{cases} y_1^{(2)} = 0, \\ \dfrac{\varepsilon-2}{2} y_1^{(2)} + y_2^{(2)} = \dfrac{\varepsilon-2}{2} \times 0 + y_2^{(2)} = 1 \Longrightarrow y_2^{(2)} = 1, \\ -\dfrac{1}{\varepsilon} y_2^{(2)} + y_3^{(2)} = -\dfrac{1}{\varepsilon} + y_3^{(2)} = 0 \Longrightarrow y_3^{(2)} = \dfrac{1}{\varepsilon}. \end{cases}$$

$$Ux^{(2)} = y^{(2)} : \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ & \varepsilon & 0 \\ & & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ x_3^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{\varepsilon} \end{pmatrix}, \quad \text{d'on:} \begin{cases} 3x_3^{(2)} = \dfrac{1}{\varepsilon} \Longrightarrow x_3^{(2)} = \dfrac{1}{3\varepsilon}, \\ \varepsilon x_2^{(2)} + 0 \times x_3^{(2)} = 1 \Longrightarrow x_2^{(2)} = \dfrac{1}{\varepsilon}, \\ 2x_1^{(2)} - 2x_2^{(2)} + 0 \times x_3^{(2)} = 2x_1^{(2)} - \dfrac{2}{\varepsilon} = 0 \Longrightarrow x_1^{(2)} = \dfrac{1}{\varepsilon}. \end{cases}$$

Aleshores:

$$x^{(2)} = \left( \frac{1}{\varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon}, \frac{1}{3\varepsilon} \right)^\top.$$

$$Ly^{(3)} = e_3 : \begin{pmatrix} 1 & & \\ \frac{\varepsilon-2}{2} & 1 & \\ 0 & -\frac{1}{\varepsilon} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1^{(3)} \\ y_2^{(3)} \\ y_3^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{d'on:} \begin{cases} y_1^{(3)} = 0, \\ \dfrac{\varepsilon-2}{2} y_1^{(3)} + y_2^{(3)} = \dfrac{\varepsilon-2}{2} \times 0 + y_2^{(3)} = 0 \Longrightarrow y_2^{(3)} = 0, \\ -\dfrac{1}{\varepsilon} y_2^{(3)} + y_3^{(3)} = -\dfrac{1}{\varepsilon} \times 0 + y_3^{(3)} = 1 \Longrightarrow y_3^{(3)} = 1. \end{cases}$$

$$Ux^{(3)} = y^{(3)} : \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ & \varepsilon & 0 \\ & & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(3)} \\ x_2^{(3)} \\ x_3^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{d'on:} \begin{cases} 3x_3^{(3)} = 1 \Longrightarrow x_3^{(3)} = \dfrac{1}{3}, \\ \varepsilon x_2^{(3)} + 0 \times x_3^{(3)} = \varepsilon x_2^{(3)} = 0 \Longrightarrow x_2^{(3)} = 0, \\ 2x_1^{(3)} - 2x_2^{(3)} + 0 \times x_3^{(3)} = 0 \Longrightarrow x_1^{(3)} = 0. \end{cases}$$

Aleshores:

$$x^{(3)} = \left( 0, 0, \frac{1}{3} \right)^\top.$$

D'aquesta manera resulta,

$$A^{-1} = \left( x^{(1)} \,\middle|\, x^{(2)} \,\middle|\, x^{(3)} \right) = \frac{1}{\varepsilon} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \frac{2-\varepsilon}{2} & 1 & 0 \\ \frac{2-\varepsilon}{6} & \frac{1}{3} & \frac{\varepsilon}{3} \end{pmatrix}. \tag{1}$$

(d) Si $0 < \varepsilon < 1$, aplicant la definició de la norma $\|\cdot\|_\infty$ per matrius s'obté:

$$\|A\|_\infty = \text{màx}\{4, 4-\varepsilon, 4\} = 4, \qquad \|A^{-1}\|_\infty = \max\left\{\frac{2}{\varepsilon}, \frac{4-\varepsilon}{2\varepsilon}, \frac{4+\varepsilon}{6\varepsilon}\right\} = \frac{2}{\varepsilon}$$

on, per a veure la segona es pot fer servir que, si $0 < \varepsilon < 1$: $\frac{4-\varepsilon}{2\varepsilon} < \frac{4}{2\varepsilon} = \frac{2}{\varepsilon}$, i $\frac{4+\varepsilon}{6\varepsilon} < \frac{6}{6\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon} < \frac{2}{\varepsilon}$. Així doncs, el nombre de condició buscat és:

$$\mu_\infty(A) = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty = 4 \times \frac{2}{\varepsilon} = \frac{8}{\varepsilon}.$$

(e) Podem fer servir la matriu inversa (1) trobada a l'apartat (c) per resoldre el sistema $Ax = b$ i aleshores s'obté

$$x = A^{-1}b = \frac{1}{\varepsilon}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \frac{2-\varepsilon}{2} & 1 & 0 \\ \frac{2-\varepsilon}{6} & \frac{1}{3} & \frac{\varepsilon}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon}b_1 + \frac{1}{\varepsilon}b_2 \\ \frac{2-\varepsilon}{2\varepsilon}b_1 + \frac{1}{\varepsilon}b_2 \\ \frac{2-\varepsilon}{6\varepsilon}b_1 + \frac{1}{3\varepsilon}b_2 + \frac{1}{3}b_3 \end{pmatrix}$$

o, en components:

$$x_1 = \frac{1}{\varepsilon}b_1 + \frac{1}{\varepsilon}b_2, \qquad x_2 = \frac{2-\varepsilon}{2\varepsilon}b_1 + \frac{1}{\varepsilon}b_2, \qquad x_3 = \frac{2-\varepsilon}{6\varepsilon}b_1 + \frac{1}{3\varepsilon}b_2 + \frac{1}{3}b_3. \tag{2}$$

(f) Tenim $b_1 = 1$, $b_2 = 1$ amb errors absoluts $\epsilon_a(b_1) = \epsilon_a(b_2) = \delta$. Suposarem, de nou, que $0 < \varepsilon < 1$. Llavors de (2) i de la fórmula de propagació dels errors es segueix,

$$x_1 = \frac{2}{\varepsilon}, \qquad \epsilon_a(x_1) = \frac{\epsilon_a(b_1)}{\varepsilon} + \frac{\epsilon_a(b_2)}{\varepsilon} = \frac{2\delta}{\varepsilon},$$
$$x_2 = \frac{2-\varepsilon}{2\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon} = \frac{4-\varepsilon}{2\varepsilon}, \qquad \epsilon_a(x_2) = \frac{2-\varepsilon}{2\varepsilon}\epsilon_a(b_1) + \frac{1}{\varepsilon}\epsilon_a(b_2) = \frac{4-\varepsilon}{2\varepsilon}\delta,$$

i finalment obtenim una fita del l'error absolut del quocient $x_1/x_2$ tornant a aplicar la fórmula de propagació dels errors:

$$\epsilon_a\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \frac{|x_2|\epsilon_a(x_1) + |x_1|\epsilon_a(x_2)}{x_2^2} = \frac{\frac{4-\varepsilon}{2\varepsilon} \times \frac{2\delta}{\varepsilon} + \frac{2}{\varepsilon} \times \frac{4-\varepsilon}{2\varepsilon}\delta}{\left(\frac{4-\varepsilon}{2\varepsilon}\right)^2} = \frac{8\delta}{4-\varepsilon}. \tag{3}$$

Alternativament, si definim

$$F(b_1, b_2) := \frac{x_1}{x_2} = \frac{2b_1 + 2b_2}{(2-\varepsilon)b_1 + 2b_2},$$

llavors,

$$\frac{\partial F}{\partial b_1}(b_1, b_2) = \frac{2\varepsilon b_2}{((2-\varepsilon)b_1 + 2b_2)^2}, \qquad \frac{\partial F}{\partial b_2}(b_1, b_2) = -\frac{2\varepsilon b_1}{((2-\varepsilon)b_1 + 2b_2)^2},$$

Aleshores de la fórmula de propagació obtenim una nova fita de l'error absolut

$$\epsilon'_a\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \left|\frac{\partial F}{\partial b_1}(1,1)\right|\epsilon_a(b_1) + \left|\frac{\partial F}{\partial b_2}(1,1)\right|\epsilon_a(b_2) = \frac{2\varepsilon\delta}{(4-\varepsilon)^2} + \frac{2\varepsilon\delta}{(4-\varepsilon)^2} = \frac{4\varepsilon\delta}{(4-\varepsilon)^2},$$

que és sensiblement millor que (3) per a $0 < \varepsilon < 1$. □

3. Ajusteu per mínims quadrats la taula de dades (0.25,0.40), (0.50,0.50), (0.75,0.90), (1,1.28) per una funció del tipus $y = Ax^\alpha$ amb $A$ i $\alpha$ adequades a determinar.

**Solució:** Prenent logaritmes s'arriba al sistema sobredeterminat $Ma = b$, amb $M \in \mathcal{M}_{4,2}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^4$, on $m_{i,2} = \log x_i$, $b_i = \log y_i$, essent $(x_i, y_i)$ els punts donats a l'enunciat per a $i = 1,2,3,4$. Explícitament:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1{,}386\,294\,361\,119\,891 \\ 1 & -0{,}693\,147\,180\,559\,945 \\ 1 & -0{,}287\,682\,072\,451\,781 \\ 1 & 0{,}000\,000\,000\,000\,000 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}916\,290\,731\,874\,155 \\ -0{,}693\,147\,180\,559\,945 \\ -0{,}105\,360\,515\,657\,826 \\ 0{,}246\,860\,077\,931\,526 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

amb $a_1 = \log A$, $a_2 = \alpha$. La matriu $M$ del sistema (4) la podem descomposar $QR$ (per exemple, amb el mètode de

Gram-Schmidt modificat). Es comprova que $M = QR$, amb

$$Q = \begin{pmatrix} -0{,}5 & 0{,}763\,036\,047\,575\,452 \\ -0{,}5 & 0{,}097\,350\,299\,911\,923 \\ -0{,}5 & -0{,}292\,050\,899\,735\,768 \\ -0{,}5 & -0{,}568\,335\,447\,751\,607 \end{pmatrix}, \qquad R = \begin{pmatrix} -2 & 1{,}183\,561\,807\,065\,808 \\ 0 & -1{,}041\,252\,847\,898\,279 \end{pmatrix}$$

i on les columnes de $Q$ són ortogonals, i.e., $Q^\top Q = I_2$. Aleshores la solució per mínims quadrats del sistema (4), $a^*$, ve donada per la del sistema triangular $Ra = Q^\top b$, que en el nostre cas s'escriu

$$\begin{pmatrix} -2 & 1{,}183\,561\,807\,065\,808 \\ 0 & -1{,}041\,252\,847\,898\,279 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}733\,969\,175\,080\,200 \\ -0{,}876\,169\,643\,918\,605 \end{pmatrix}.$$

Fent els càlculs s'obté $a_1^* = 0{,}130\,973\,679\,342\,746$, $a_2^* = 0{,}841\,457\,140\,489\,088$. Finalment doncs, veiem que els paràmetres $A$ i $\alpha$ resultants de l'ajust són:

$$A = \exp(a_1^*) = \exp(0{,}130\,973\,679\,342\,746) = 1{,}139\,937\,777\,005\,606, \qquad \alpha = a_2^* = 0{,}841\,457\,140\,489\,088. \qquad \square$$