PROBLEMES

1b INTEGRALS IMPRÒPIES

Problema 1. Determineu, a partir de la definició, quines de les integrals impròpies següents són convergents i, si és el cas, doneu-ne el valor.

(a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x}$,

(b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\, dx$,

(c) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^4}$,

(d) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$,

(e) $\displaystyle\int_0^{1} \log\left(\frac{1}{x}\right) dx$,

(f) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$,

(g) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan(x)\, dx$,

(h) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(x)\right) dx$.

(i) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+5}$,

(j) $\displaystyle\int_3^{5} \frac{dx}{x^2-7x+10}$,

(k) $\displaystyle\int_6^{+\infty} \frac{dx}{x^2-7x+10}$,

Problema 2. Estudieu la convergència de les integrals impròpies següents:

(a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x+\sin(x)}$,

(b) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{(3+2x^2)^{\frac{1}{7}}}{(x^3-1)^{\frac{1}{5}}}\, dx$,

(c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\, dx}{\sqrt{1+x^4}}$,

(d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$,

(e) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2+\sqrt{x}}$,

(f) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{dx}{\sin(x)}$.

Problema 3. Determineu el caracter de les integrals impròpies següents en funció del paràmetre real α.

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+|x|^{\alpha}}}$,

(b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x^{\alpha}}}{x^3+x}\, dx$,

(c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha}}{1+x}\, dx$.

Problema 4. Estudieu la integral impròpia $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x-a)^2+b^2}$ $(b > 0)$ i, si és el cas, calculeu-la.

Problema 5. Sigui $a > 0$. Estudieu la convergència i calculeu les integrals impròpies

(a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-ax}\cos(bx)\, dx$,

(b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-ax}\sin(bx)\, dx$

Problema 6. Apliqueu el criteri de Dirichlet a l'estudi de la convergència de les integrals següents, on $\alpha > 0$.

(a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\sin(\alpha x)}{1+x^2}\, dx$,

(b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{\sin(x)}\sin(2x)}{x^{\alpha}}\, dx$.

Problema 7. Calculeu les integrals impròpies següents, per als valors de λ que les fan convergents.

$$\text{(a)}\ \int_2^{+\infty}\Big(\frac{\lambda x}{x^2+1}-\frac{1}{2x+1}\Big)\,dx, \qquad \text{(b)}\ \int_1^{+\infty}\Big(\frac{x}{2x^2+1}-\frac{\lambda}{2x+1}\Big)\,dx$$

Problema 8. Trobeu els valors de a i b que fan $\displaystyle\int_1^{+\infty}\Big(\frac{2x^2+ax+b}{x(2x+b)}-1\Big)\,dx=1.$

Problema 9. Sigui $\lambda>0$. Estudieu la convergència i calculeu, si és el cas, les integrals impròpies:

$$\text{(a)}\ \int_a^{+\infty} e^{-\lambda x}dx, \quad \text{(b)}\ \int_a^{+\infty} xe^{-\lambda x}dx, \quad \text{(c)}\ \int_a^{+\infty} x^2e^{-\lambda x}dx, \quad \text{(d)}\ \int_a^{+\infty} P(x)e^{-\lambda x}dx$$

on P és un polinomi de grau d.

Problema 10. Demostreu que les integrals impròpies

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log\big(\sin(x)\big)\,dx \quad \text{i} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}}\log\big(\cos(x)\big)\,dx,$$

són convergents i tenen el mateix valor. Calculeu-lo.
(Considereu la suma de les dues integrals.)

Problema 11. Expresseu en termes de la funció Γ les integrals següents:

$$\text{(a)}\ \int_0^{+\infty} t^2e^{-t^2}dt, \qquad \text{(c)}\ \int_0^1 x^3\big(\log(x)\big)^2dx,$$

$$\text{(b)}\ \int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-st}dt,\ (\alpha>-1,\ s>0) \qquad \text{(d)}\ \int_0^1\frac{dx}{\sqrt{-\log(x)}}.$$

Problema 12. Per a quins valors de $\alpha\in\mathbb{R}$ és convergent la integral impròpia

$$\int_0^{+\infty}\frac{\big(e^{-t^2}-e^{-\alpha t^2}\big)}{t}\,dt\ ?$$

Problema 13. Sean $p(x)$, $q(x)$ dos funciones polinómicas de grados $d+1$ i $d+2$ respectivamente y tales que $q(x)>0$ para todo $x\in\mathbb{R}$.

(i) Demostrar que d es par.

(ii) Demostrar que $p(x)=\alpha q'(x)+Q(x)$, donde $\alpha\in\mathbb{R}^*$ y Q es un polinomio de grado menor o igual a d.

(iii) Demostrar $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{Q(x)}{q(x)}\,dx$ es absolutamente convergente y además,

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R}\frac{p(x)}{q(x)}\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{Q(x)}{q(x)}\,dx.$$