1. Determineu la família de polinomis ortogonals mònics $\psi_j(x)$ $(j = 0 \div 4)$ corresponent a la funció pes $w(x) = x^2 + 1$ a l'interval $[-1, 1]$.

2. Es defineix el polinomi de Txebyshev de grau n com $T_n = \cos(n \arccos x)$ a l'interval $[-1, 1]$.
   (a) Proveu que es compleix la següent recurrència $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$.
   (b) Calculeu T_0, $T_1(x)$, $T_2(x)$.
   (c) Proveu que $T_n(x)$ té n zeros a $[-1, 1]$ de la forma $x_k = \cos\left(\dfrac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$ (anomenats nodes o abscisses de Txebyshev).
   (d) Proveu que els polinoms de Txebyshev són ortogonals respecte de la funció pes $w(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ a $[-1, 1]$, més concretament proveu que
$$\int_{-1}^{1} T_n(x)T_m(x)\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \pi, & \text{si } n = m = 0, \\ \pi/2, & \text{si } n = m \neq 0, \\ 0, & \text{si } n \neq m. \end{cases}$$

3. (a) Demostreu que la família de polinomis
$$Q_j(y) = T_j(2y-1), \quad j = 0, 1, 2, \ldots$$
és ortogonal a $[0, 1]$ respecte del pes $w(x) = 1/\sqrt{y(1-y)}$ a $[0, 1]$, on els polinomis $T_j(x)$ $(j = 0, 1, 2, \ldots)$ són els polinomis de Txebyshev.
   (b) Aproximeu y^{10} a l'interval $[0, 1]$ per un polinomi $p_4^*(y)$i de grau menor o igual que 4, de manera que l'error d'aproximació per mínims quadrats
$$\int_0^1 \frac{\left(y^{10} - p_4(y)\right)^2}{\sqrt{y(1-y)}}\mathrm{d}y$$
sigui mínim per a $p_4 = p_4^*$.

4. El nivell de l'aigua del mar del Nord està determinat per la marea, el període de la qual és aproximadament 12 hores, i que ajustarem per
$$H^*(t) = h_0 + a_1 \sin\left(\frac{2\pi t}{12}\right) + a_2 \cos\left(\frac{2\pi t}{12}\right)$$
t en hores. S'han fet les següents mesures en $(t, H(t))$

t	0.0	2.0	4.0	6.0	8.0	10.0
$H(t)$	1.0	1.6	1.4	0.6	0.2	0.8

(t en hores, $H(t)$ en metres).
   (a) Són ortogonals 1, $\sin\left(\dfrac{2\pi t}{12}\right)$, $\cos\left(\dfrac{2\pi t}{12}\right)$?
   (b) Ajusteu $H(t)$ a aquestes mesures utilitzant $H^*(t)$ per mínims quadrats.
   (c) Trobeu la desviació quadràtica.

5. A la teoria hem provat que les funcions $\{1, \sin(x), \cos(x), \sin(2x), \cos(2x), \ldots, \cos(2nx), \sin(2nx)\}$ són ortogonals a $[0, 2\pi]$ en el cas continu. Proveu que també ho són en el cas discret. Més concretament prenem el conjunt de $m+1$ punts $\left\{\frac{2\pi k}{m+1}\right\}_{k=0,\ldots,m}$ amb $2n \leq m$. Proveu que:
$$(\psi_j, \psi_l) = \begin{cases} \dfrac{m+1}{4}, & \text{si } j = l = 0, \\ \dfrac{m+1}{2}, & \text{si } j = l = 1, \ldots, 2n\ , \\ 0, & \text{si } j \neq l,\ j, l = 0, \ldots, 2n. \end{cases}$$

6. Sigui $f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida per $f(x) = \arccos x$.
   (a) Calculeu els coeficients c_j de l'expansió de $f(x)$ en polinomis de Txebyshev a l'interval $[-1, 1]$
$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j T_j(x).$$

(b) Fiteu (en funció de n) l'error comès al fer l'aproximació

$$f(x) \approx \sum_{j=0}^{n} c_j T_j(x).$$

(Indicació: quan calgui, fiteu $\sum\limits_{j=n+1}^{\infty} j^{-2}$ integrant x^{-2}).

7. Per a resoldre el problema lineal de valors a la frontera

$$\begin{aligned} (p(x)v'(x))' + q(x)v(x) &= f(x), \qquad 0 \le x \le 1, \\ v(0) = v(1) &= 0, \end{aligned}$$

s'utilitza el *mètode de Galerkin* que consisteix en buscar $v(x)$ com a combinació lineal $\sum\limits_{j=1}^{n} c_j \varphi_j(x)$ on $\varphi_j(0) = \varphi_j(1) = 0$ i llavors imposar que l'error residual

$$r(x) := \left(p(x) \sum_{j=1}^{n} c_j \varphi_j'(x) \right)' + q(x) \sum_{j=1}^{n} c_j \varphi_j(x) - f(x)$$

sigui ortogonal a totes les φ_j, i.e., $\displaystyle\int_0^1 r(x)\varphi_j(x)\mathrm{d}x = 0$, $\forall\, j$. Aquesta condició dóna un sistema d'equacions lineal.

Resoleu per aquest mètode el problema

$$\begin{aligned} y'' - y &= x^2, \qquad 0 \le x \le 1, \\ y(0) = y(1) &= 0, \end{aligned}$$

utilitzant, per a $j = 1, 2, 3$: (i) $\varphi_j(x) = \sin(j\pi x)$, (ii) $\varphi_j(x) = x^j(1-x)$.

8. Utilitzeu l'economització de Txebyshev per tal de calcular un polinomi de quart grau que aproximi amb un error de magnitud menor que 2×10^{-4} la funció

$$f(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{e}^t - 1}{t}\,\mathrm{d}t, \qquad \forall\, x \in [-1, 1].$$