1 . Trobeu els polinomis característic i mínim dels endomorfismes de matriu

$$\begin{pmatrix} 2 &&&&&& \\ 1 & 2 &&&&& \\ & 1 & 2 &&&& \\ &&& 2 &&& \\ &&& 1 & 2 && \\ &&&&& 2 & \\ &&&&& 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 &&&&&& \\ 1 & 2 &&&&& \\ & 1 & 2 &&&& \\ &&& 3 &&& \\ &&& 1 & 3 && \\ &&&&& 4 & \\ &&&&&& 4 \end{pmatrix}$$

2 . Trobeu els polinomis característic i mínim d'un endomorfisme $f \in End(\mathbb{R}^{13})$ tal que

$$\dim\ker(f-2I)=4, \quad \dim\ker(f-2I)^2=7, \quad \dim\ker(f-2I)^3=10,$$
$$\dim\ker(f-2I)^4=12, \quad \dim\ker(f-2I)^5=13.$$

3 . Calculeu la forma de Jordan dels endomorfismes definits per les matrius següents:

(a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -6 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 9 & 15 & 5 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & -6 & 2 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ (f) $\begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ -4 & 1 & 1 \\ -12 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ (g) $\begin{pmatrix} 3 & -3 & 26 \\ -1 & 3 & -15 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ (h) $\begin{pmatrix} 4 & -6 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

4 . Calculeu les bases i la forma de Jordan dels endomorfismes definits per les matrius següents:

(a) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 6 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 2 & 6 & 7 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & -5 & 0 \\ -4 & 4 & -20 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} -1 & -1 & -10 & -20 \\ 2 & 1 & -26 & -40 \\ 0 & 0 & -17 & -29 \\ 0 & 0 & 10 & 17 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (e) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -2 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 5 & -1 & -1 \\ 11 & -3 & 8 & -1 & -3 \\ 5 & -1 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ (f) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -6 & -2 & 1 & 6 \\ -3 & -3 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

5 . Trobeu la forma de Jordan d'un endomorfisme f de $\mathbb{R}^3$ que satisfà les condicions següents:

(a) $f(e_1)+f(e_2)+f(e_3)=(1,1,1)$,

(b) $f(e_1) - f(e_2) = f(1, 1, -2)$

(c) $f^2 = f$, i

(d) el subespai $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y + 2z = 0\} \cap \langle (1, 1, 0), (1, 0, 1) \rangle$ és invariant per f.

6. Sigui f un endomorfisme de $\mathbb{R}^7$ que té per polinomis característic i mínim, respectivament, $Q(t) = -(t-1)^4(t-2)^3$, $M(t) = (t-1)^\alpha(t-2)$.

(a) Quins són els nombres màxim i mínim de vectors propis linealment independents que pot admetre una base de Jordan de f? Per a quins valors de α?

(b) Diagonalitza f per a algun valor de α?

(c) Suposeu que $\alpha = 4$. Trobeu 12 subespais invariants per f.

7. Sigui $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -3 \\ 4 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

(a) Trobeu la forma de Jordan i una base de Jordan de M.

(b) Sigui $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0$. Trobeu les matrius A tals que $A^2 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}$.

(c) Trobeu una matriu N tal que $N^2 = M$.

8. Sigui f un endomorfisme de $\mathbb{R}^4$ que en la base canònica té matriu

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Trobeu els polinomis característic i mínim de f.

(b) Trobeu la forma de Jordan i una base de Jordan de f.

(c) Trobeu A^{1000}.

9. Sigui f un endomorfisme de $\mathbb{R}^4$ que en la base canònica té matriu

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 4 \\ -4 & 5 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Trobeu la forma de Jordan i una base de Jordan de f.

(b) Trobeu e^A.

10. L'evolució temporal d'una població d'arbres ve descrita pel model matemàtic següent:

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & a/5 \\ 1 & 9/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}.$$

amb $a \in \mathbb{R}$ un paràmetre i on x_n i y_n representen les densitats de les classes d'arbres en formació i les classes d'arbres formats, respectivament.

(a) Per a quins valors de a es té que $\lambda = 1$ és valor propi de la matriu?

(b) Per a $a = 1$ trobeu la forma de Jordan i una base de Jordan d ela matriu i estudieu el comportament a llarg termini de la població d'arbres.

(c) Per a $a = -4/5$ trobeu la forma de Jordan i una base de Jordan de la matriu.

(d) Estudieu el comportament a llarg termini de la població per a $a \geq -4/5$.

11 . S'estableix un tractament contra una plaga d'insectes de manera que en cada aplicació d'insecticida la població d'insectes canvia segons la relació

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$$

on x_n, y_n i z_n representen les quantitats d'ous, erugues i adults, respectivament.

(a) Trobeu la forma de Jordan i una base de Jordan de la matriu.

(b) Calculeu el nombre mínim d'aplicacions de l'insecticida per acabar amb la plaga independentment de la població inicial.

(c) Quin és el nombre mínim d'aplicacions per acabar amb la plaga formada si hi ha 9576 ous, 3457 orugues i 9576 adults?

12 . Resoleu el sistema lineal d'equacions diferencials següent:

$$\begin{aligned} x'(t) &= x(t) \\ y'(t) &= x(t) + 2y(t) \\ z'(t) &= -x(t) + y(t) + 2z(t) \end{aligned}$$

13 . *Forma de Jordan real.* Per als endomorfismes en espais vectorials reals tals que el polinomi característic no descompon completament es pot donar una versió adaptada de la forma de Jordan per tal de mantenir-nos sobre $\mathbb{R}$. En aquest problema donem algunes indicacions.

(a) Sigui $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ un endomorfisme amb valors propis complexos, $\lambda = a + bi, \overline{\lambda} = a - bi, b \neq 0$, i vectors propis (complexos) $w = u + iv, \overline{u} = a - iv$, amb $u, v \in \mathbb{R}^2$. Proveu que els vectors u, v són linealment independents i que, per tant, formen base de $\mathbb{R}^2$. Proveu que la matriu de f en aquesta base és

$$J = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

(b) Caluleu $J^n, n \geq 1$, essent J la matriu de l'apartat anterior.

(c) En general, si $f \in End(\mathbb{R}^n)$ té polinomi mínim de la forma $M(t) = (t^2 - 2at + a^2 + b^2)^m = (t - a - bi)^m(t - a + bi)^m, b \neq 0$, la forma de Jordan real de f està formada per blocs del tipus

$$J = \begin{pmatrix} D & 0 & \dots & 0 & 0 \\ I_2 & D & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & D & 0 \\ 0 & 0 & \dots & I_2 & D \end{pmatrix}$$

on

$$D = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \quad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

que anomenem blocs de Jordan reals. Trobeu la forma de Jordan real de la matriu (de polinomi característic $(t^2 - 2t + 2)^2$)

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 1 & -2 \\ -4 & -3 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(d) Calculeu e^A.