Polinomis de Legendre. Fórmules de quadratura de Gauss-Legendre.

Els polinoms de Legendre es defineixen com

$$P_m(x) = \frac{1}{2^m m!} \frac{d^m}{dx^m} (x^2 - 1)^m.$$

El primers sis són $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$, $P_2(x) = (3x^2 - 1)/2$, $P_3(x) = (5x^3 - 3x)/2$, $P_4(x) = (35x^4 - 30x^2 + 3)/8$, i $P_5(x) = (63x^5 - 70x^3 + 15x)/8$.

Són ortogonals relativament al pes $w(x) = 1$ a l'interval $(-1, 1)$,

$$\int_{-1}^{1} P_m(x) P_n(x) dx = \frac{2}{2m+1} \delta_{m,n},$$

i satisfan la relació de recurrència

$$P_{m+1}(x) = \frac{2m+1}{m+1} x P_m(x) - \frac{m}{m+1} P_{m-1}(x).$$

Les seves derivades es poden trobar a partir de les relacions

$$(1 - x^2) P'_m(x) = -mx P_m(x) + m P_{m-1}(x) = (m+1) x P_m(x) - (m+1) P_{m+1}(x).$$

La fórmula de quadratura de Gauss-Legendre de m punts és

$$\int_{-1}^{1} f(x) dx = \sum_{k=1}^{m} w_k f(x_k) + \frac{2^{2m+1} (m!)^4}{(2m+1)[(2m)!]^3} f^{(2m)}(\xi)$$

amb x_k, $k = 1, \cdots, m$ els m zeros de $P_m(x)$ i

$$w_k = \frac{2}{(1 - x_k^2)[P'_m(x_k)]^2} = \frac{2(1 - x_k^2)}{(m+1)^2 [P_{m+1}(x_k)]^2}.$$

Polinomis de Laguerre. Fórmules de quadratura de Gauss-Laguerre.

Els polinoms de Laguerre es defineixen com

$$L_m(x) = e^x \frac{d^m}{dx^m}(x^m e^{-x}).$$

El primers sis són $L_0(x) = 1$, $L_1(x) = 1 - x$, $L_2(x) = 2 - 4x + x^2$, $L_3(x) = 6 - 18x + 9x^2 - x^3$, $L_4(x) = 24 - 96x + 72x^2 - 16x^3 + x^4$, i $L_5(x) = 120 - 600x + 600x^2 - 200x^3 + 25x^4 - x^5$.

Són ortogonals relativament al pes $w(x) = e^{-x}$ al'interval $[0, \infty)$,

$$\int_0^\infty e^{-x} L_m(x) L_n(x) dx = (m!)^2 \delta_{m,n},$$

i satisfan la relació de recurrència

$$L_{m+1}(x) = (1 + 2m - x) L_m(x) - m^2 L_{m-1}(x).$$

Les seves derivades es poden trobar a partir de les relacions

$$x L'_m(x) = m L_m(x) - m^2 L_{m-1}(x) = (x - m - 1) L_m(x) + L_{m+1}(x).$$

La fórmula de quadratura de Gauss-Laguerre de m punts és

$$\int_0^\infty e^{-x} f(x) dx = \sum_{k=1}^{m} w_k f(x_k) + \frac{(m!)^2}{(2m)!} f^{(2m)}(\xi)$$

amb x_k, $k = 1, \cdots, m$ els m zeros de $L_m(x)$ i

$$w_k = \frac{(m!)^2}{x_k [L'_m(x_k)]^2} = \frac{(m!)^2 x_k}{[L_{m+1}(x_k)]^2}.$$

Polinomis d'Hermite. Fórmules de quadratura de Gauss-Hermite.

Els polinoms d'Hermite es defineixen com

$$H_m(x) = (-1)^m e^{x^2} \frac{d^m}{dx^m}(e^{-x^2}).$$

El primers sis són $H_0(x) = 1$, $H_1(x) = 2x$, $H_2(x) = 4x^2 - 2$, $H_3(x) = 8x^3 - 12x$, $H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12$, i $H_5(x) = 32x^5 - 160x^3 + 120x$.

Són ortogonals relativament al pes $w(x) = e^{-x^2}$ a l'interval $(-\infty, \infty)$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_m(x) H_n(x) dx = 2^m m! \sqrt{\pi}\, \delta_{m,n},$$

i satisfan la relació de recurrència

$$H_{m+1}(x) = 2x H_m(x) - 2m H_{m-1}(x).$$

Les seves derivades es poden trobar a partir de les relacions

$$H_m'(x) = 2m H_{m-1}(x) = 2x H_m(x) - H_{m+1}(x).$$

La fórmula de quadratura de Gauss-Hermite de m punts és

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x) dx = \sum_{k=1}^{m} w_k f(x_k) + \frac{m!\sqrt{\pi}}{2^m (2m)!} f^{(2m)}(\xi)$$

amb x_k, $k = 1, \cdots, m$ els m zeros de $H_m(x)$ i

$$w_k = \frac{2^{m+1} m! \sqrt{\pi}}{[H_m'(x_k)]^2} = \frac{2^{m+1} m! \sqrt{\pi}}{[H_{m+1}(x_k)]^2}.$$

Polinomis de Chebyshev. Fórmules de quadratura de Gauss-Chebyshev.

Els polinoms de Chebyshev es defineixen com

$$T_m(x) = \cos(m \arccos x).$$

El primers sis són $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$, $T_2(x) = 2x^2 - 1$, $T_3(x) = 4x^3 - 3x$, $T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$, i $T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$.

Són ortogonals relativament al pes $w(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$ l'interval $(-1, 1)$,

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} T_m(x) T_n(x) dx = c_m \pi \, \delta_{m,n},$$

amb $c_0 = 1$ i $c_m = 1/2$ si $m > 0$, i satisfan la relació de recurrència

$$T_{m+1}(x) = 2x T_m(x) - T_{m-1}(x).$$

Les seves derivades es poden trobar a partir de les relacions

$$(1-x^2) T'_m(x) = -mx T_m(x) + m T_{m-1}(x) = mx T_m(x) - m T_{m+1}(x).$$

La fórmula de quadratura de Gauss-Chebyshev de m punts és

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sum_{k=1}^{m} w_k f(x_k) + \frac{2\pi}{2^m (2m)!} f^{(2m)}(\xi)$$

amb x_k, $k = 1, \cdots, m$ els m zeros de $T_m(x)$, coneguts analíticament, i els pesos són tots iguals,

$$x_k = \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2m}\right), \qquad w_k = -\frac{\pi}{T'_m(x_k) T_{m+1}(x_k)} = \frac{\pi}{m}.$$