Anàlisi Real – notes ampliades del curs
Capítol 3: Sèries de Fourier
3.3.- Conseqüències del teorema de Dirichlet

Recordeu que en la lliçó anterior hem demostrat el resultat més important del capítol: el teorema de Dirichlet. Aquest teorema ens diu cap a on convergeix la successió de punts $\{SC_f^N(x)\}_{N\geq 1}$ per un x donat i f sent una funció suau definida en l'interval $[-\pi,\pi]$:

Teorema 1 (Teorema de Dirichlet)**.** *Sigui $f \in \mathcal{PS}[-\pi,\pi]$. Considerem la seva corresponent extensió periòdica a tot $\mathbb{R}$ (que per abús de notació també denotarem per f). Considerem aleshores $\{SC_f^N\}_{N\geq 1}$. Aleshores, per tot $x \in \mathbb{R}$,*

$$\lim_N SC_f^N(x) = \frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-)),$$

on $f(x^+)$ i $f(x^-)$ són els límits laterals de f quan la variable s'apropa a x per la dreta i per l'esquerra, respectivament.

El que veurem en aquesta lliçó es que podrem usar aquest resultat (que ens afirma convergència puntual cap a f si aquesta és de fet contínua) per deduïr-ne molts d'altres relatius a funcions associades a f. En tota la deducció treballarem novament amb l'idea que ja hem gastat en el passat de confondre una funció amb la seva extensió periòdica.

Derivada de f: Anem a veure com és comporta la sèrie de Fourier de la derivada d'una funció donada.

Lema 1. *Sigui f una funció contínua, $f \in \mathcal{PS}[-\pi,\pi]$ amb $f(\pi) = f(-\pi)$. Siguin $\{a_n, b_n\}_{n\geq 0}$ i $\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ els coeficients de la sèrie de Fourier trigonomètrica i complexa, respectivament. Sigui $\{a_n', b_n'\}_{n\geq 0}$, $\{c_n'\}_{n\in\mathbb{Z}}$ els coeficients de la sèrie de Fourier trigonomètrica i complexa de $f' \in \mathcal{PC}[-\pi,\pi]$. Aleshores,*

$$a_n' = nb_n,\ b_n' = -na_n,\ c_n' = inc_n.$$

Demostració. Essencialment el que ens està dient aquest lema es que podem derivar terme a terme la sèrie de Fourier, i que la sèrie resultant serà la sèrie de Fourier de la funció derivada.

La prova és una simple integració per parts. Farem el càlcul per les c_n, però per les a_n i les b_n es fa exactament igual. Calculem c_n' :

$$\begin{aligned} c_n' = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)e^{-inx}\,dx &= \left\{ \begin{array}{c} u = e^{-inx} \to du = (-in)e^{-inx} \\ f'(x)\,dx = dv \to f(x) = v \end{array} \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi}\left(f(\pi)e^{-in\pi} - f(-\pi)e^{in\pi}\right) + \frac{in}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx, \end{aligned}$$

i això és igual a inc_n, perquè el primer terme s'anul·la ($f(\pi) = f(-\pi)$) i el segon és inc_n. El resultat per les a_n i b_n surt traien part real i part imaginaria, o fent el càlcul directament amb els sinus i cosinus. $\square$

Observació 1. *Aquí hi ha una observació molt important que vull remarcar: l'ús de la continuïtat. Quan realitzem la integral indicada de $f'(x)$, al realitzar l'integració per parts cal triar una primitiva de la mateixa. Fixeu-vos que si no assumim que f és contínua no sabem quina primitiva cal triar. Això és degut a les discontinuïtats de salt.*

La qüestió, però, és molt més subtil. Per a mirar-ho, veguem un exemple concret. Considerem la funció $f(x)$ definida en $[-\pi,\pi]$ com $f(x) = 1$ si $|x| \leq 1$, i 0 altrament. És clar que té una discontinuïtat de salt en els punts $x = \pm 1$. És una funció contínua a troços i que compleix que f' val 0 en tots els punts on té sentit preguntar-se per f' (no estem dient res de $f'(1)$ i $f'(-1)$). En particular NO és contínua i f' (on està definida) val 0.

Calculem els coeficients de la sèrie de Fourier complexa de f. Per $n \neq 0$,

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} e^{-inx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\left.\frac{e^{-inx}}{-in}\right|_{-1}^{1}$$

i aquest terme és igual $\frac{\sin(n)}{\pi n}$. Per altra banda, si $n = 0$, l'integral val $\frac{1}{\pi}$. En particular, és clar que $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|^2 < +\infty$. Què passa ara amb f'? Si el teorema anterior fos cert i f' fos contínua a troços en el sentit estricte de la paraula la seva sèrie de Fourier hauria de tenir tots els coeficients iguals a 0, i per tant, no lliga amb el que acabem de demostrar. Quin és *el problema? La qüestió és que f' no és idènticament igual a 0 a tot arreu, i se li pot donar un significat en el context de la teoria de distribucions. Veguem-ho. Per a fer-ho calculem la següent integral on g és qualsevol funció derivable en $(-\pi,\pi)$ per la qual $g(\pi)=g(-\pi)$. Fent integració per parts obtenim:*

$$\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)g(x)\,dx = (f'(x)g(x)|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g'(x)\,dx = -\int_{-1}^{1} g'(x)\,dx = g(1)-g(-1),$$

que és, en general diferent de 0.

***Resumint**: en realitat, si f és una funció suau, la seva funció derivada en realitat no té perquè existir en el sentit de funció, tot i que nosaltres estem fent l'abus de prendre-ho com un objecte que té sentit puntual en tots els punts de continuïtat de f. Ara bé, desde el punt de vista de les integrals, la manera com actua una tal funció és molt diferent, tal i com estem observant en aquest exemple. Per tant, si f és una funció suau:*

- *Podem usar f' si volem calcular límits laterals, tal i com hem usat en la prova del teorema de Dirichlet.*
- *Desde el punt de vista de les sèries de Fourier, la sèrie de Fourier de f' té coeficients c_n' tal i com està descrit en el teorema (encara que f no sigui contínua). Ara bé, f' NO és una funció en el sentit estricte, és el que s'anomena una distribució. En particular, de l'exemple anterior veiem que no té perquè ser cert aquí que $\sum_{k\in\mathbb{Z}}|c_k|^2<\infty$.*

El problema tècnic ve doncs de "derivar en una discontinuïtat evitable". Si això no passa tot funciona bé, altrament tenim un problema amb la funció derivada sempre que es consideri dins d'una integral.

En el següent punt sí que l'usarem per tal d'assegurar que $f'\in \mathtt{PS}[-\pi,\pi]$ i poder assegurar convergència puntual:

Teorema 2. *Sigui $f\in PS[-\pi,\pi]$ tal que la seva extensió periòdica és contínua a tot $\mathbb{R}$. Suposem que $f'\in PS[-\pi,\pi]$. Aleshores, per tot $x\in\mathbb{R}$,*

$$\frac{1}{2}(f'(x^+)+f'(x^-)) = S_{f'}(x) = SC_{f'}(x),$$

on $S_{f'}(x)=\sum_{n\geq 1} nb_n\cos(nx)-na_n\sin(nx)$, $SC_{f'}(x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}} ikc_ke^{ink}$. A més a més, aquest terme és igual a $f'(x)$ si f' és contínua.

Demostració. Basta aplicar el lema anterior en quant al càlcul dels coeficients i el teorema de Dirichlet en quant a la convergència puntual. $\square$

Observeu que efectivament en aquest teorema no ens calia que la funció f' fos contínua, únicament que si això no és així no podem afirmar convergència puntual llevat dels punts de continuïtat de f'. A més a més, és necessaria la condició $f'\in\mathtt{PS}[-\pi,\pi]$ per a poder afirmar que podem aplicar el teorema de Dirichlet.

Si ara iterem aquest resultat k vegades, obtenim la següent conclusió:

Teorema 3. *Sigui $f\in PS[-\pi,\pi]$ amb la seva corresponent extensió periòdica. Supossem a més que $f\in\mathcal{C}^{k-1}(\mathbb{R})$, i $f^{k-1)}\in PS(\mathbb{R})$. Considerem les sèries de Fourier trigonomètrica i complexa de f, amb coeficients $\{a_n,b_n\}_{n\geq 0}$, $\{c_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$. Aleshores les sumes*

$$\sum_{n\geq 1} n^{2k}a_n^2,\ \sum_{n\geq 1} n^{2k}b_n^2,\ \sum_{n\in\mathbb{Z}} n^{2k}|c_n|^2$$

són convergents. En particular, $\lim_n n^ka_n=\lim_n n^kb_n=\lim_n n^kc_n=0$.

Demostració. Iterant el teorema anterior $k-1$ vegades trobem que els coeficients de la sèrie de Fourier de $f^{k-1)}$ són $\{\pm n^ka_n,\pm n^kb_n\}_{k\geq 1}$ i $\{\pm i^kn^kc_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, que tenen mòdul com s'indica a les sumes anteriors. Ara de nou, per la desigualtat de Bessel aquestes sumes són fitades per $\|f^{k-1)}\|_2^2$, d'on tenim que són convergents. La segona part (el límit dels coeficients) és clarament 0 per ser sumes convergents. $\square$

Modes de convergència de la sèrie de Fourier: ja hem vist que sota l'hipòtesis de que $f \in \mathtt{PS}[-\pi, \pi]$ podem afirmar que les sèrie de Fourier convergeixen puntualment cap a f en tots els punts de continuïtat de f, i que el límit és $\frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-))$ si f no és contínua en x.

Ara anirem una mica més enllà per a veure què passa si f és contínua arreu. El següent teorema el segon important del capítol) ens afirma que la convergència de la sèrie de Fourier no només és puntual, sino que és uniforme en tot $\mathbb{R}$.

<u>**Teorema**</u> **4** (Convergència uniforme de la sèrie de Fourier per a funcions contínues)**.** *Sigui $f \in \mathtt{PS}[-\pi, \pi]$ tal que la seva extensió periòdica a $\mathbb{R}$ és contínua. Aleshores $\{SC_f^N\}_{N\geq 1}$ convergeix absolutament i uniformement en $\mathbb{R}$ cap a f.*

Demostració. Farem la prova per la sèrie de Fourier complexa, però el mateix tipus d'argument es pot fer per la sèrie de Fourier trigonomètrica. Ja sabem que sota aquestes hipòtesis de continuïtat, pel teorema de Dirichlet, per tot x real $\{SC_f^N(x)\}_{N\geq 1}$ convergeix puntualment cap a $f(x)$.

Anem a veure què ens cal per a demostrar el que ens demanen. Observeu que

$$|SC_f(x)| = \left|\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikx}\right| \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|.$$

Per tant, si aconseguim demostrar que $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_n| < \infty$ (recordeu que això ho sabem per la suma dels quadrats!) tindrem que:

1. La convergència és absoluta, ja que la suma de valors absoluts és fitada.
2. Calculem la norma del suprem a tot $\mathbb{R}$:

$$\|SC_f^N - f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |SC_f^N(x) - f(x)| \overset{(1)}{=} \max_{x\in[-\pi,\pi]} |SC_f^N(x) - f(x)|$$
$$\overset{(2)}{=} \max_{x\in[-\pi,\pi]} |SC_f^N(x) - SC_f(x)| = \max_{x\in[-\pi,\pi]} \left|\sum_{|k|\geq N+1} c_k e^{ikx}\right| \leq \sum_{|k|\geq N+1} |c_k|,$$

   on hem usat en (1) que totes les funcions són periòdiques de periode 2π i en (2) hem usat que puntualment f i $SC_f(x)$ no les podem distingir. Això doncs, si la suma $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_n| < \infty$, aleshores la suma de les cues tendeix a 0 i per tant, donat $\varepsilon > 0$ podem trobar un N_0 tal que si $N \geq N_0$, es té que $\sum_{|k|\geq N+1} |c_k| < \varepsilon$, d'on deduïm que $\|SC_f^N - f\|_\infty < \varepsilon$.

Per tant, l'objectiu del teorema és demostrar que $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_n| < \infty$.

L'observació important és que NOMÉS usant que $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_n|^2 < \infty$ (Bessel) no ens en sortirem: hi han successions de nombres (com $A_k = \frac{1}{k}$) que compleixen que la suma dels seus quadrats és convergent, però no la suma ella mateixa. Per tant, ens caldrà alguna cosa més.

Considerem a tal efecte f', que sabem que està definida (llevat de punts de discontinuïtat, on aquestes són de salt). Segons hem vist, els coeficients de la sèrie de Fourier complexa c'_k són iguals a ikc_k, i aplicant de nou Bessel aquí tenim que $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c'_k|^2$

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c'_k|^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} k^2 |c_k|^2 < \infty$$

Això ens dóna més informació sobre els coeficients de Fourier de f. En efecte:

$$\begin{aligned}
\sum_{|k|\leq N} |c_k| &= |c_0| + \sum_{|k|\leq N, k\neq 0} \frac{|c'_k|}{k} \overset{(C-S)}{\leq} |c_0| + \left(\sum_{|k|\leq N, k\neq 0} \frac{1}{k^2}\right)^{1/2} \left(\sum_{|k|\leq N, k\neq 0} |c'_k|^2\right)^{1/2} \\
&\leq C \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c'_k|^2\right)^{1/2} = K,
\end{aligned}$$

on C és una constant fixa que depèn de la suma infinita $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^2}$.

Fixeu-vos que $\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c'_k|^2\right)^{1/2}$ també és finita perquè els coeficients c'_k venen de la sèrie de Fourier de f', i podem de nou aplicar Bessel per fitar la suma per $\|f\|_2$. Per tant, com aquesta fita que hem trobat (K) es vàlida per tota tria de N, tenim finalment que

$$\lim_N \sum_{|k|\leq N} |c_k| \leq K < \infty,$$

que és el que volíem veure. □

Aquest resultat té conseqüències importants. Com ja sabem la convergència uniforme implica la convergència en mitjana quadràtica. Per tant, no només tindrem la desigualtat de Bessel, sino que tindrem (sempre que f sigui contínua i $f \in \mathtt{PS}[-\pi,\pi]$) la identitat de Parseval.

Què passa per les funcions que són suaus, però no contínues? Aquí podem usar el que acabem de demostrar per a veure el següent:

Teorema 5. *Sigui $f \in PS[-\pi,\pi]$. Aleshores $\lim_N \|f - SC_f^N\|_2 = 0$, i per tant tenim convergència quadràtica de la sèrie de Fourier cap a f.*

Fixeu-vos que aquí no podem usar en general que $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k| < \infty$, ja que és possible que f' no sigui una funció en el sentit que estem tractant (veure l'observació anterior). Per a tenir aquesta condició ens cal una condició de regularitat més fortes de cara a f'.

Demostració. La prova és intuïtiva, i donem només l'idea de fons. Suposarem que només hi ha una discontinuïtat en el punt $-\pi < a < \pi$ (si n'hi haguessin més raonariem igual) Anem a supossar que a no és igual a $\pm\pi$ (ja que si ho són, de fet no influeixen en l'integral corresponent a la norma 2). Sabem que en aquestes condicions el teorema de Dirichlet ens diu que, per cada punt x en $[-\pi,\pi]$, $SC_f(x)$ val $f(x)$, llevat del punt $x = a$, on valen diferent. En particualr, $SC_f(x)$ és integrable Riemann perquè f ho és. Això ens diu que $\|f - SC_f\|_2 = 0$, ja que estem integrant dues funcions identiques i que només difereixen en $x = a$.

Aleshores, tenim que, usant SC_f^N i la desigualtat triangular:

$$\|f - SC_f^N\|_2 \leq \|f - SC_f\|_2 + \|SC_f^N - SC_f\|_2 = \|SC_f^N - SC_f\|_2 = \left(\sum_{|k|\geq N+1} |c_k|^2\right)^{1/2},$$

i aquesta suma és la cua de la suma $\sum_{|k|\in\mathbb{Z}} |c_k|^2$, que és finita per la desigualtat de Bessel. Per tant, podem prendre N prou gran de tal forma que això sigui més petit que ε, que és el que voliem demostrar. □

Tornarem a aquest teorema més endvant en un context més general, en el marc de l'anomenat teorema de Riesz-Fischer.

Com a conseqüència de l'anterior tenim el següent:

Teorema 6 (Identitat de Parseval, v2)**.** *Sigui $f \in PS[-\pi,\pi]$. Aleshores*

$$\|f\|_2^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\, dx = 2\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|^2 = \pi\left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n\geq 1} a_n^2 + b_n^2\right).$$

Demostració. El resultat és fàcil, perquè quan $f \in \mathtt{PS}[-\pi,\pi]$ i contínua en la seva extensió a $\mathbb{R}$ hem vist que hi ha convergència quadràtica, que era l'ingredient que faltava a la desigualtat de Bessel per a poder afirmar l'identitat de Parseval. □

Amb això acabem el capítol 3. Falten però, diverses coses per les que no tenim encara resposta.

- Hem vist que l'espai de funcions contínues respecte a la norma quadràtica no és complet (tenim successions de Cauchy que no tenen límit una funció contínua). Quin és aquest espai on hi podem ficar la norma quadràtica i l'espai sigui complet?

- Per a demostrar, en el cas de funcions contínues i suaus, que hi ha convergència quadràtica, hem usat de fet resultats més forts, com la convergència uniforme. Això ens ha permès donar l'identitat de Parseval en aquest context. Què podem dir de la convergència quadràtica quan eliminem la condició de continuïtat? Què ens cal realment per a poder afirmar convergència quadràtica?

- Hem vist que la convergència quadràtica, junt amb Bessel implica Parseval. Però, de fet, el que veurem també és que Parseval implica convergència quadràtica.

Aquestes dues preguntes, i més que vindran seguidament requeriran de generalitzar la noció d'integral a un espai de funcions més general que el de les integrables Riemann. Això ens portarà a l'úlima part del curs: el desenvolupament d'una teoria d'integració més genreal que l'integració de Riemann: l'anomenada integració de Lebesgue i la teoria de la mesura.