Integració gaussiana

Considerem ara integrals del tipus $\int_a^b f(x)w(x)dx$ on $w(x)$ és una funció positiva a $[a,b]$.

Prenem nodes $x_0, \dots, x_m$ diferents en $[a,b]$ i sigui $P_m(x) = \sum_{i=0}^{m} f_i l_i(x)$ el polinomi interpolador de Lagrange on $l_i(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq i}}^{m} \frac{x-x_k}{x_i-x_k}$

Llavors prenem l'aproximació

$$\int_a^b f(x)\,w(x)\,dx \approx \int_a^b P_m(x)w(x)dx = \sum_{i=0}^{m}\int_a^b f_i\, l_i(x)\, w(x)\, dx = \sum_{i=0}^{m}\underbrace{\left(\int_a^b l_i(x)w(x)dx\right)}_{\tilde{W}_i} f_i$$

és a dir tenim $\int_a^b f(x)\,w(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{m} \tilde{W}_i f_i$

Nota - 1. Observem que si $w(x) \equiv 1$ i els nodes x_i són equiespaiats, obtenim simplement la fórmula de Newton Cotes.

2. I també està clar que la fórmula és exacta si prenem com $f(x)$ un polinomi de grau $\leq m$. $(f \equiv P_m)$

El que farem ara serà millorar el grau d'exactitud d'aquesta fórmula escollint de manera òptima els nodes $x_0, \dots, x_m$. Concretament amb $m+1$ nodes adequats, tindrem fórmules d'integració que seran exactes per a $f(x)$ com polinomis de grau $\leq 2m+1$.

Teorema

Sigui $w(x)$ una funció contínua positiva a $[a,b]$. Diem $\varphi_m(x)$ al polinomi ortogonal de grau m respecte del producte escalar

$$(P) \qquad (g_1, g_2) = \int_a^b g_1(x) g_2(x) w(x) dx$$

llavors $\varphi_m(x)$ té m zeros simples a $[a,b]$

Prova.-

Com que φ_m és ortogonal a $\varphi_0 = 1$, $m \geq 1$, es té

$$(\varphi_m, \varphi_0) = 0 \Rightarrow \int_a^b \varphi_m(x) w(x) dx = 0$$

i com que $w(x) > 0$ cal que $\varphi_m(x)$ tingui necessàriament algun canvi de signe (i per tant un zero en $[a,b]$.

Suposem ara que φ_m té n zeros a $[a,b]$ amb $n < m$, i.e

$$\varphi_m(x) = (x - x_1) \cdots (x - x_n) Q_{m-n}(x)$$

on $Q_{m-n}(x)$ no té cap canvi de signe a $[a,b]$. Llavors

$$0 = (\varphi_m, (x-x_1)\cdots(x-x_n)) = \int_a^b (x-x_1)^2 \cdots (x-x_n)^2 Q_{m-n}(x) w(x) dx$$

la qual cosa és absurda.

Per tant, cal que $n = m$.

Finalment veiem que aquests zeros són simples: suposem que n'existeix un de doble, i.e $\varphi_m(x) = (x-a)^2 Q_{m-2}(x)$. Llavors

$$0 = (\varphi_m, Q_{m-2}) = \int_a^b (x-a)^2 Q_{m-2}^2(x) w(x) dx$$

la qual cosa és absurda.

Teorema

Sigui $w(x)$ una funció contínua i positiva a $[a,b]$. Sigui $x_0, x_1, \ldots, x_m$ els $m+1$ zeros simples de $\varphi_{m+1}(x)$ polinomi ortogonal respecte del producte escalar (P). Llavors la fórmula d'aproximació

$$\int_a^b f(x)w(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{m} \tilde{W}_i f_i$$

$$\tilde{W}_i = \int_a^b l_i(x)w(x)\,dx$$

és exacta per a tots els polinomis de grau $2m+1$ (o menys).

Prova-

Suposem que $f(x)$ és un polinomi de grau $2m+1$.

Fem el quocient $f(x)/\varphi_{m+1}(x)$ i diguem $q(x)$ i $r(x)$ al quocient i residu: $f(x) = q(x)\varphi_{m+1}(x) + r(x)$ (*)

amb el grau de $q(x)$ i $r(x)$ menor o igual que m.

$$\int_a^b f(x)w(x)\,dx = \underbrace{\int_a^b q(x)\varphi_{m+1}(x)w(x)\,dx}_{0 \leftarrow \varphi_{m+1} \text{ és ortogonal a tot polinomi de grau } \leq m.} + \int_a^b r(x)w(x)\,dx = \int_a^b r(x)w(x)\,dx$$

D'altra banda de (*)

$$\sum_{i=0}^{m}\tilde{W}_i f_i = \underbrace{\sum_{i=0}^{m}\tilde{W}_i q(x_i)\varphi_{m+1}(x_i)}_{\overset{\shortparallel}{0} \leftarrow \varphi_{m+1}(x_i)=0} + \sum_{i=0}^{m}\tilde{W}_i r(x_i) = \sum_{i=0}^{m}\tilde{W}_i r(x_i)$$

Com que $r(x)$ té grau $\leq m$ es té $\int_a^b r(x)w(x)\,dx = \sum_{i=0}^{m}\tilde{W}_i r(x_i)$

Per tant $\int_a^b f(x)w(x)\,dx = \sum_{i=0}^{m} \tilde{W}_i f_i$ ✓

Def Anomenem <u>fórmules gaussianes</u> les fórmules d'integració numèrica descrites en aquest últim teorema.

<u>Teorema</u>

L'error a les fórmules gaussianes és

$$\int_a^b f(x)w(x)\,dx - \sum_{i=0}^{m} \tilde{W}_i f_i = \underbrace{\frac{f^{(2m+2)}(c)}{(2m+2)!}\int_a^b (\Pi(x))^2 w(x)\,dx}_{:= C_m} =$$

$$= C_m f^{(2m+2)}(c)$$

on $\Pi(x) = \prod_{i=0}^{m}(x-x_i)$

<u>Prova</u>

Sigui $Q(x)$ el polinomi interpolador d'Hermite de grau $2m+1$ que compleix $Q(x_i) = f(x_i)$, $Q'(x_i) = f'(x_i)$, $i=0,\dots,m$. Sabem que la fórmula gaussiana és exacta per a aquest polinomi

$$\int_a^b Q(x)w(x)\,dx = \sum_{i=0}^{m} \tilde{W}_i Q(x_i) = \sum_{i=0}^{m} \tilde{W}_i f_i$$

Per tant

$$-\sum_{i=0}^{m} \tilde{W}_i f_i + \int_a^b f(x)w(x)\,dx = \int_a^b (f(x) - Q(x))\,w(x)\,dx =$$

$$= + \int_a^b \frac{f^{(2m+2)}(\xi)}{(2m+2)!}[\Pi(x)]^2 w(x)\,dx = \frac{f^{(2m+2)}(c)}{(2m+2)!}\int_a^b [\Pi(x)]^2 w(x)\,dx$$

lema ✓

Càlcul dels pesos de les fórmules gaussianes:

- Els pesos es poden calcular a partir de

$$\tilde{W}_k = \int_a^b l_k(x)\, w(x)\, dx \qquad \text{on } l_k(x) = \prod_{\substack{k\neq i\\ k=0}}^{m} \frac{x-x_i}{x_k-x_i}, \; K=0\div m$$

- o bé a partir del següent raonament:

Sigui $\varphi_{m+1}(x)$ el polinomi ortogonal de grau $m+1$ amb $x_0, \ldots, x_m$ els corresponents zeros i.e. $\varphi_{m+1}(x) = A_{m+1}(x-x_0)\ldots(x-x_m)$

Imposem ara l'exactitud per a una $f(x)$ concreta:

$$f(x) = \frac{\varphi_{m+1}(x)}{x-x_k} = A_{m+1}\prod_{i\neq k}(x-x_i) \quad \text{polinomi de grau } m.$$

Primer, però, observem que

(i) $f(x_i) = 0$ si $i \neq k$

(ii) $f(x_k) = \varphi'_{m+1}(x_k)$:

En efecte, $f(x)(x-x_k) = \varphi_{m+1}(x)$

$$f'(x)(x-x_k) + f(x) = \varphi'_{m+1}(x) \Rightarrow f(x_k) = \varphi'_{m+1}(x_k)$$

Tenim doncs

$$\int_a^b f(x)\, w(x)\, dx = \sum_{i=0}^{m} \tilde{W}_i f(x_i) \overset{(i)}{=} \tilde{W}_k f(x_k) = \tilde{W}_k \varphi'_{m+1}(x_k)$$

$$\parallel \int_a^b \frac{\varphi_{m+1}(x)}{x-x_k}\, w(x)\, dx$$

7-22

$$\left[\tilde{W}_k = \frac{1}{\varphi'_{m+1}(x_k)} \int_a^b \frac{w(x)\,\varphi_{m+1}(x)}{x-x_k}\,dx \qquad k=0\div m\right]$$

- Obé Suposem ara exactitud prenent $g(x) = \dfrac{\varphi_{m+1}^2(x)}{(x-x_k)^2} =$

$= A_{m+1}^2 \prod_{i\neq k}(x-x_i)^2$ polinomi de grau $2m$

Observem primer que

(iii) $g(x_i) = 0$ si $i\neq k$

(iv) $g(x_k) = (\varphi'_{m+1}(x_k))^2$:

En efecte, $\varphi_{m+1}^2(x) = (x-x_k)^2 g(x)$

$2\varphi_{m+1}(x)\varphi'_{m+1}(x) = 2(x-x_k)g(x) + (x-x_k)^2 g'(x)$

$$\underbrace{\frac{2\varphi_{m+1}(x)\,\varphi'_{m+1}(x)}{x-x_k}}_{f(x)} = 2g(x) + (x-x_k)g'(x)$$

$(f(x_k) = \varphi'_{m+1}(x_k)$ de (ii))

En $x=x_k$: $(\varphi'_{m+1}(x_k))^2 = g(x_k)$

Llavors $\displaystyle\int_a^b g(x)w(x) = \sum_{i=0}^m \tilde{W}_i g(x_i) \underset{(iii)}{=} \tilde{W}_k g(x_k) = \tilde{W}_k(\varphi'_{m+1}(x_k))^2$

$\displaystyle \| \quad \int_a^b \frac{(\varphi_{m+1}(x))^2}{(x-x_k)^2}\,w(x)\,dx$

$$\Longrightarrow \left[\tilde{W}_k = \frac{1}{(\varphi'_{m+1}(x_k))^2}\int_a^b \frac{(\varphi_{m+1}(x))^2}{(x-x_k)^2}\,w(x)\,dx, \quad k=0\div m\right] \checkmark$$

— O bé, ja havíem vist a la prova de l'error en la fórmula gaussiana que

$$(FE)\quad \int_a^b f(x)\,w(x)\,dx - \sum_{i=0}^{m} \tilde{W}_i f_i = \underbrace{\frac{f^{(2m+2)}(c)}{(2m+2)!}\int_a^b (\Pi(x))^2\,w(x)\,dx}\ =$$

on $\Pi(x) = (x-x_0)\cdots(x-x_m) = \dfrac{\Psi_{m+1}(x)}{A_{m+1}}$

prenem el polinomi ortogonal $\Psi_{m+1}(x) = A_{m+1}(x-x_0)\cdots(x-x_m)$

$$= \frac{f^{(2m+2)}(c)}{(2m+2)!}\,\frac{1}{A_{m+1}^2}\,\underbrace{\int_a^b (\Psi_{m+1}(x))^2\,w(x)\,dx}_{\overset{\shortparallel}{(\Psi_{m+1},\,\Psi_{m+1})}}$$

Ara volem aplicar (FE) prenent com a funció

$$f(x) := h(x) = \frac{\Psi_{m+1}(x)}{x-x_k}\,\Psi_{m+2}(x) = A_{m+1}A_{m+2}\,x^{2m+2} + \cdots$$

Observem que com que $\dfrac{\Psi_{m+1}}{x-x_k}$ té grau m llavors $\left(\dfrac{\Psi_{m+1}}{x-x_k}, \Psi_{m+2}\right) = 0$

i per ~~tant~~

$$\int_a^b h(x)\,w(x)\,dx \underset{\text{def}\ (,)}{=} \left(\frac{\Psi_{m+1}}{x-x_k}, \Psi_{m+2}\right) = 0$$

i d'altra banda $h^{(2m+2)}(x) = A_{m+1}A_{m+2}\,(2m+2)! \Rightarrow$

$$\Rightarrow\ h^{(2m+2)}(c) = A_{m+1}A_{m+2}\,(2m+2)!$$

Com que $x_0, \dots, x_m$ són els zeros de Ψ_{m+1}, llavors

$$h(x_k) = \frac{\Psi_{m+1}(x)}{x-x_k}\Big|_{x=x_k} \Psi_{m+2}(x_k) \underset{\text{l'H}}{=} \Psi'_{m+1}(x_k)\,\Psi_{m+2}(x_k)$$

$h(x_i)=0$ si $i \neq k$

I ara aplicant (FE) amb $f(x)=h(x)$ tenim

$$0 - \tilde{W}_k \Psi'_{m+1}(x_k)\,\Psi_{m+2}(x_k) = \frac{A_{m+1}A_{m+2}\,(2m+2)!}{(2m+2)!\,A_{m+1}^2}(\Psi_{m+1},\Psi_{m+1})$$

i s'té finalment

$$\boxed{\tilde{W}_k = -\frac{A_{m+2}(\Psi_{m+1},\Psi_{m+1})}{A_{m+1}\Psi'_{m+1}(x_k)\,\Psi_{m+2}(x_k)}, \quad k=0 \div m} \quad \text{(A)}$$

Veiem encara una fórmula més:

$$\boxed{\tilde{W}_k = \frac{A_{m+1}(\Psi_m,\Psi_m)}{A_m\,\Psi'_{m+1}(x_k)\,\Psi_m(x_k)}, \quad k=0 \div m}$$

En efecte, recordem la recurrència dels polinomis ortogonals:

$$\Psi_{m+2}(x) = \alpha_{m+1}(x-\beta_{m+1})\Psi_{m+1}(x) - \gamma_{m+1}\Psi_m(x)$$

$$\Psi_{m+1}(x) = \alpha_m(x-\beta_m)\Psi_m(x) - \gamma_m\Psi_{m-1}(x)$$

où $\alpha_j = \dfrac{A_{j+1}}{A_j}$, $\gamma_j = \alpha_j \dfrac{(\varphi_j, x\varphi_{j-1})}{(\varphi_{j-1}, \varphi_{j-1})}$ (*)

Évaluant φ_{m+2} en $x = x_k$:

$$\varphi_{m+2}(x_k) = -\gamma_{m+1}\varphi_m(x_k)$$

$$(\varphi_{m+1}, \varphi_{m+1}) = (\varphi_{m+1}, \alpha_m(x-\beta_m)\varphi_m(x) - \gamma_m\varphi_{m-1}(x)) =$$

$(\varphi_{m+1}, \varphi_{m-1}) = 0$

$$= \alpha_m(\varphi_{m+1}, (x-\beta_m)\varphi_m(x))$$

$$= \alpha_m(\varphi_{m+1}, x\varphi_m) =$$

$(\varphi_{m+1}, \varphi_m) = 0$

$$\overset{(*)}{=} \alpha_m \frac{\gamma_{m+1}(\varphi_m, \varphi_m)}{\alpha_{m+1}}$$

Nous d'(A) tenir

$$\tilde{W}_k = + \frac{A_{m+2}\,\alpha_m \cancel{\gamma_{m+1}}(\varphi_m, \varphi_m)}{A_{m+1}\,\alpha_{m+1}\,\varphi'_{m+1}(x_k)\cancel{\gamma_{m+1}}\varphi_m(x_k)} =$$

$$= \frac{A_{m+1}(\varphi_m, \varphi_m)}{A_m\,\varphi'_{m+1}(x_k)\varphi_m(x_k)}$$ ✓

NOTA. Com a fórmula de l'error tenim (de (FE))

$$\int_a^b f(x)w(x)\,dx - \sum_{i=0}^{m} \tilde{W}_i f_i = \frac{f^{(2m+2)}(c)}{(2m+2)!}\int_a^b (\Pi(x))^2 w(x)\,dx =$$

$$= \frac{f^{(2m+2)}(c)}{(2m+2)!} \cdot \frac{1}{A_{m+1}^2}(\varphi_{m+1}, \varphi_{m+1})$$

on $c \in (a,b)$

Exemples

1. Si la funció pes és $w(x)=1$ i $[a,b]=[-1,1]$ prenem el polinomi ortogonal de grau $n+1$ de Legendre:

$$\varphi_{n+1}(t) = P_{n+1}(t) = \frac{1}{2^{n+1}(n+1)!} \cdot \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}}\left[(t^2-1)^{n+1}\right]$$

amb coeficient $A_{n+1} = \dfrac{(2n+2)!}{2^{n+1}\left[(n+1)!\right]^2}$

Llavors es té (ho veurem a problemes)

$$\tilde{W}_k = \frac{2}{(1-t_k^2)\left[P'_{n+1}(t_k)\right]^2} \qquad k=0\div n \quad , t_0,\dots,t_n \text{ els zeros de } P_{n+1}(t)$$

$$\left[\int_{-1}^{1} g(t)\,dt - \sum_{k=0}^{n} \tilde{W}_k\, g(t_k) = \frac{2^{2n+3}\left[(n+1)!\right]^4}{(2n+3)\left[(2n+2)!\right]^3}\, g^{(2n+2)}(c)\right]$$

Fórmula de Gauss–Legendre

$c \in (-1,1)$

Aquesta fórmula es pot estendre a qualsevol interval $[a,b]$ amb el canvi

$$x = \frac{b-a}{2}t + \frac{a+b}{2}$$

és a dir

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2}\sum_{k=0}^{m} \tilde{W}_k f(x_k) + E_{m+1}(f)$$

amb $x_k = \frac{b-a}{2} t_k + \frac{a+b}{2}$, $\tilde{W}_k = \dfrac{2}{(1-t_k)^2\,[P'_{m+1}(t_k)]^2}$

on $t_0, \ldots, t_m \in (-1,1)$ són els zeros del polinomi de Legendre $P_{m+1}(t)$ i si la funció $f \in C^{2m+2}([a,b])$ llavors

$$E_{m+1}(f) = \frac{(b-a)^{2m+3}}{(2m+3)} \frac{[(m+1)!]^4}{[(2m+2)!]^3} f^{(2m+2)}(\xi),\ \xi \in (a,b)$$

Vegeu full següent

En efecte,

$$\int_a^b f(x)\,dx \underset{\substack{\uparrow \\ \text{canvi} \\ x\to t \\ dx=\frac{b-a}{2}dt \\ f(x(t))=g(t)}}{=} \frac{b-a}{2}\int_0^1 g(t)\,dt = \frac{b-a}{2}\left[\sum_{k=0}^{m} \tilde{W}_k \underbrace{g(t_k)}_{=f(x_k)} + E_{m+1}(g)\right] \underset{\frac{b-a}{2}E_{m+1}(g)=E_{m+1}(f)}{=}$$

$$= \frac{b-a}{2}\sum_{k=0}^{m} \tilde{W}_k f(x_k) + E_{m+1}(f)$$

on $x_k = \frac{b-a}{2} t_k + \frac{a+b}{2}$, $\tilde{W}_k = \frac{2}{(1-t_k)^2[P'_{m+1}(t_k)]^2}$

$$E_{m+1}(f) = \frac{b-a}{2} E_{m+1}(g(t)) = \frac{b-a}{2}\cdot\frac{2^{2m+3}[(m+1)!]^4}{(2m+3)[(2m+2)!]^3} g^{(2m+2)}(c) =$$

$$\underset{\uparrow}{=} \frac{(b-a)^{2m+3}[(m+1)!]^4}{(2m+3)[(2m+2)!]^3} f^{(2m+2)}(\xi), \quad \xi\in(a,b).$$

$$g'(t) = f'(x(t))\,x'(t) = f'(x(t))\cdot\frac{b-a}{2}$$

$$g^{(2m+2)}(t) = \left(\frac{b-a}{2}\right)^{2m+2} f^{(2m+2)}(x(t))$$

$$g^{(2m+2)}(c) = \left(\frac{b-a}{2}\right)^{2m+2} f^{(2m+2)}(\xi)$$

<u>Exemple</u> $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ (problema 14d/ llista)

Prenem 3 abscisses, $n+1=3$, $w(x)=1$, $n=2$

$P_3(t)$, $t\in[-1,1]$ Atenció!!! Polinomi de Legendre

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx = \frac{1-0}{2}\sum_{k=0}^{2}\tilde{W}_k\, e^{-x_k^2} + E_3(f)$$

$$\uparrow$$

$$[a,b]=[0,1]$$

on: en $t\in[-1,1]$ $P_3(t)=\frac{1}{2}(5t^3-t)$

de zeros: $t_0=-\sqrt{\frac{3}{5}}$, $t_1=0$, $t_2=\sqrt{\frac{3}{5}}$

Pesos:
$$\tilde{W}_k=\frac{2}{(1-t_k)^2[P_3'(t_k)]^2}=\begin{cases}W_0=W_2=0{,}555555556\\ W_1=0{,}888888889\end{cases}$$

Canvi de variable: $x=\frac{b-a}{2}t+\frac{a+b}{2}=\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow x_k=\frac{1}{2}(t_k+1)\Rightarrow x_k=\begin{cases}\frac{1}{2}\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}+1\right)\\ \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{3}{5}}+1\right)\end{cases}$$

Calculem $\Rightarrow e^{-x_k^2}$

obtenim

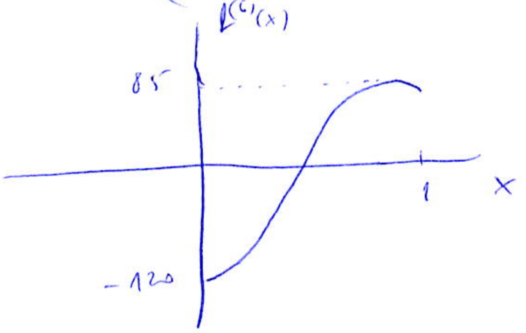
$$\int_0^1 e^{-x^2}dx\simeq 0{,}74681458$$

(valor exacte $0{,}746824413\ldots$)

$$E_3(f)=\frac{(b-a)^{2n+3}[(n+1)!]^4}{(2n+3)[(2n+2)!]^3}f^{(2n+2)}(\xi)=$$

$$= \frac{(3!)^4}{7 \cdot (6!)^3} f^{(6)}(\xi)$$

$$f^{(6)}(x) = \left(64x^6 - 480x^4 + 720x^2 - 120\right)e^{-x^2}$$



$$|f^{6}(x)| \le 120 \quad \forall x \in [0,1]$$

Llavors $|E_3(f)| \le \dfrac{(3!)^4}{7(6!)^3}\,120 = 0{,}0000593$

(de fet l'error real és $0{,}0000095$)

2. Prenem $w(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $[a,b]=[-1,1]$

$\varphi_{m+1}(x) = T_{m+1}(x) = \cos\left((m+1)\arccos x\right)$ i el polinomi

de grau $m+1$ de Txebyxev

Propietats clàssiques:

- $A_{m+1} = 2^m$

- els zeros són $x_k = \cos \tilde{\theta}_k = \cos\left(\overbrace{\dfrac{(2k+1)\pi}{2(m+1)}}\right)$, $k = 0 \div m$.

NOTA – Observem que $2k+1 < 2(m+1)$, $\forall k = 0 \div m \Rightarrow \theta_k \in (0,\pi)$ $\Rightarrow \sin\theta_k > 0$

- $(\varphi_{m+1}, \varphi_{m+1}) = \dfrac{\pi}{2}$ si $m \geq 0$

$m+2 = m+1+1$

- $\varphi_{m+2}(x_k) = \cos\left((m+2)\dfrac{(2k+1)\pi}{2(m+1)}\right) \overset{d}{=}$

$$= \cos\left(\cancel{(m+1)}\frac{(2k+1)\pi}{2\cancel{(m+1)}} + \frac{(2k+1)\pi}{2(m+1)}\right) =$$

$$= -\sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2}\right)\sin\theta_k = (-1)^{k+1}\sin\theta_k$$

- $\varphi'_{m+1}(x) = \dfrac{(m+1)}{\sqrt{1-x^2}}\sin\left((m+1)\arccos x\right)$

$$\varphi'_{m+1}(x_k) = \frac{m+1}{\sin\theta_k}\sin\left(\cancel{(m+1)}\frac{(2k+1)\pi}{2\cancel{(m+1)}}\right) = \frac{(m+1)(-1)^k}{\sin\theta_k}$$

Ara prenent els zeros $x_0, \dots, x_m$ com a nodes obtenim els pesos

$$\boxed{\tilde{W}_k = \frac{\pi}{m+1}}$$

En efecte,

$$\tilde{W}_k = -\frac{A_{m+2}(\varphi_{m+1}, \varphi_{m+1})}{A_{m+1}\,\varphi'_{m+1}(x_k)\,\varphi_{m+2}(x_k)} = -\frac{2^{m+1}\cdot \pi/2}{2^m \frac{(m+1)(-1)^k}{\cancel{\sin\theta_k}}(-1)^{k+1}\cancel{\sin\theta_k}} =$$

$$= \frac{\pi}{m+1} \checkmark$$

i la fórmula de l'error és

$$\boxed{\begin{aligned}&\int_{-1}^{1}\frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{\pi}{m+1}\sum_{k=0}^{m} f\left(\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2(m+1)}\right)\right) + E_{m+1}(f)\\ &\text{on } E_{m+1}(f) = \frac{\pi}{2^{2m+1}(2m+2)!} f^{(2m+2)}(\xi), \quad \xi\in(-1,1)\end{aligned}}$$

En efecte, sabem

$$E_{m+1}(f) = \frac{f^{(2m+2)}(\xi)}{(2m+2)!\,A_{m+1}^2}(\varphi_{m+1}, \varphi_{m+1}) = \frac{f^{(2m+2)}(\xi)}{(2m+2)!\,2^{2m}}\cdot\frac{\pi}{2} =$$

$$= \frac{\pi}{(2m+2)!\,2^{2m+1}} f^{(2m+2)}(\xi). \checkmark$$

Exemple

Volem calcular $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x^8}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ amb $m=2$ (i.e. 3 punts)

. Prenem $T_3(x)$

. Calculem els 3 zeros:

$$x_k = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2(m+1)}\right) \qquad k=0,1,2$$

i.e.

$$\cos\frac{\pi}{6}, \quad \cos\frac{\pi}{2}, \quad \cos\frac{5\pi}{6}$$

. Calculem els pesos: $\tilde{W}_k = \dfrac{\pi}{3} \quad \forall k.$

Llavors

$$\int_{-1}^{1} \frac{x^8}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \approx \underset{\substack{\uparrow \\ f(x)=x^8}}{\frac{\pi}{3}} \left\{\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]^8 + \left[\cos\frac{\pi}{2}\right]^8 + \left[\cos\frac{5\pi}{6}\right]^8\right\} =$$

$$= \boxed{0{,}6627\ldots}$$

Fórmula de l'error:

$$E_3(f) = \frac{\pi}{2^5\, 6!} f^{(6)}(\xi) \implies \boxed{|E_3(f)| \le \frac{\pi}{2^5\, 6!}\,\frac{8!}{2} = 2{,}79\ldots}$$

$f^{(6)}(x) = \frac{1}{2} 8!\, x^2$ $\qquad x \in [-1,1]$

El valor exacte és: $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x^8}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \left| \begin{array}{l} x=\cos t \\ \sqrt{1-x^2}=\sin t \end{array} \quad dx=-\sin t\,dt \right| = -\int_{\pi}^{0} \cos^8 t\,dt =$

$$= \int_0^{\pi} \cos^8 t \, dt = \boxed{0{,}8590..}$$

l'error, per tant, és $\boxed{0{,}1963..}$

que és un error gran (la cota sembla enorme!)

– Si ara repetim l'exercici prenent

$\boxed{n+1=4}$ punts (és $n=3$), l'error (nova cota) serà:

$$E_4(f) = \frac{\pi}{8!\,2^7} \underbrace{f^{(8)}(\xi)}_{8!} = \frac{\pi}{2^7} \boxed{= 0{,}024...}$$

– Si ara repetim amb

$\boxed{n+1=5}$ punts (és $n=4$), l'error (nova cota) és:

$$E_5(f) = \frac{\pi}{10!\,2^9} \underbrace{f^{(10)}(\xi)}_{0} \boxed{= 0}$$

que ja ho sabíem perquè $f(x) = x^8$ és un polinomi de grau 8 i la fórmula d'integració gaussiana serà exacta per a polinomis de grau ≤ 9.