1.4.1 Correlación de señales de Energía finita

Una herramienta útil en análisis de señales y sistemas es la correlación. La correlación obtiene información sobre las señales en base a promediados temporales y su transformada de Fourier permite obtener funciones de Densidad Espectral de Energía o Potencia, dependiendo de las características de las señales y sistemas bajo estudio. Esta propiedad es particularmente interesante puesto que la información puede obtenerse incluso si la señal carece de Transformada de Fourier. Las herramientas basadas en correlación de señales y su transformada de Fourier, son básicas en el análisis de procesos. En este capítulo se estudian aplicadas a señales deterministas. El objetivo es facilitar su comprensión y para ello se desarrolla el significado de la correlación como medida de parecido entre señales, se establecen las propiedades de la correlación cuando las señales bajo estudio están relacionadas por sistemas lineales e invariantes. En la colección de problemas se muestra una serie de aplicaciones donde la utilización de la autocorrelación es básica: medida de tiempo de retardo con aplicación a sistemas de radar, medida de sistemas lineales e invariantes a partir de señales contaminadas con ruido o interferencias, y utilización del filtro adaptado en sistemas de comunicaciones digitales.

1.4.2 Distancia entre dos señales de energía finita

En un espacio vectorial dotado de un producto escalar, se define la norma de un vector

$$\| x \| = \sqrt{(x,x)} \tag{1.4.1}$$

y distancia entre vectores

$$d(x,y) = \| x - y \| \tag{1.4.2}$$

En el conjunto de señales se define el producto escalar entre las señales de energía finita *x*(*t*) e *y*(*t*) como

1. $$(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) y^*(t) dt \tag{1.4.3}$$

y la distancia entre señales:

$$d^2(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} | x(t) - y(t) |^2 \, dt \tag{1.4.4}$$

En general, estamos interesados en buscar la distancia entre dos señales cuando una de ellas se desplaza ⍰, es decir, buscamos su parecido para todos sus valores relativos.

$$\begin{aligned} d^2(x(t+\tau), y(t)) &= \int_{-\infty}^{\infty} | x(t+\tau) - y(t) |^2 \, dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} | x(t) |^2 \, dt + \int_{-\infty}^{\infty} | y(t) |^2 \, dt - \int_{-\infty}^{\infty} x(t+\tau) y^*(t) dt - \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t+\tau) y(t) dt \end{aligned} \tag{1.4.5}$$

Definiendo:

$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t+\tau) y^*(t) dt \tag{1.4.6}$$

La distancia resultante se puede expresar según

$$\begin{aligned} d^2((x(t+\tau), y(t)) &= E_x + E_y - R_{xy}(\tau) - R_{xy}^*(\tau) = \\ &= E_x + E_y - 2\,\mathrm{Re}\left[R_{xy}(\tau)\right] \end{aligned} \tag{1.4.7}$$

Si las señales $x(t)$, $y(t)$ son reales

$$d^2((x(t+\tau), y(t)) = E_x + E_y - 2R_{xy}(\tau) \tag{1.4.8}$$

La función $R_{xy}(\tau)$ es un indicador de la medida de parecido entre señales. Dado que en la medida de distancia los valores de Energía son independientes del desplazamiento τ, la distancia entre las señales será menor para aquellos valores de desplazamiento relativo entre ellas τ, en que $R_{xy}(\tau)$ sea mayor

1.4.3 Función de correlación mutua o cruzada

Se define la función de correlación mutua o cruzada entre dos señales de E.F.

$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t+\tau) y^*(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) y^*(t-\tau) dt \tag{1.4.9}$$

Puede demostrarse fácilmente que la correlación cruzada entre dos señales de E.F. se puede expresar mediante la ecuación de convolución:

$$R_{xy}(\tau) = x(\tau) * y^*(-\tau) \tag{1.4.10}$$

Propiedades:

- Es una función acotada por el producto de las energías de las señales

$$\left|R_{xy}(\tau)\right|^2 \le E_x E_y \tag{1.4.11}$$

La demostración de esta propiedad se realiza aplicando la desigualdad de Schwarz:

$$\begin{aligned} \left|R_{xy}(\tau)\right|^2 &= \left|\int_{-\infty}^{\infty} x(t+\tau) y^*(t) dt\right|^2 \le \\ &\le \int_{-\infty}^{\infty} \left|x(t+\tau)\right|^2 dt \int_{-\infty}^{\infty} \left|y(t)\right|^2 dt = \\ &= E_x E_y \end{aligned} \tag{1.4.12}$$

El valor máximo se alcanza cuando las señales son proporcionales:

$$x(t+\tau) = k\, y(t) \tag{1.4.13}$$

- $R_{xy}(\tau) = R_{yx}^{*}(-\tau)$ (1.4.14)

  Esta propiedad puede demostrarse a partir de la igualdad

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t+\tau)y^{*}(t)dt = \left[\int_{-\infty}^{\infty} x^{*}(t+\tau)y(t)dt\right]^{*}$$

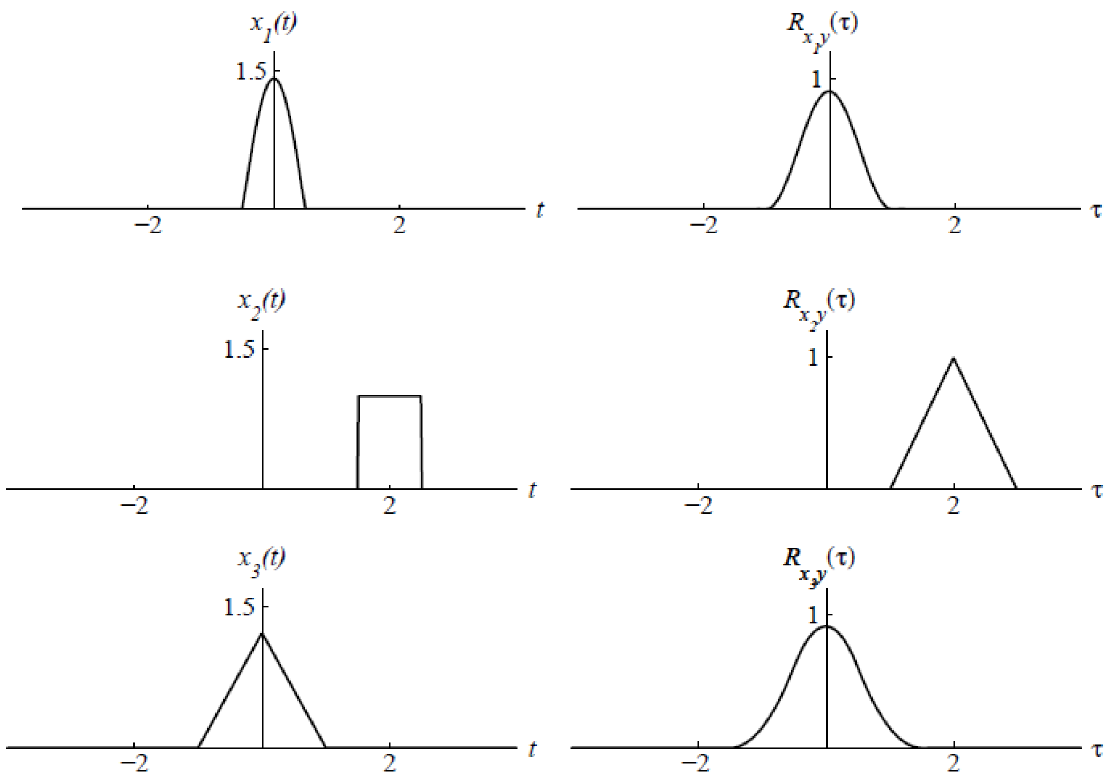
  Si *x*(*t*) e *y*(*t*) son reales, $R_{xy}(\tau)=R_{yx}(-\tau)$

EJEMPLO 1.4.1

Sean las señales

$$x_1(t) = \sqrt{2}\cos \pi t \Pi(t), \quad x_2(t) = \Pi(t-2), \quad x_3(t) = \sqrt{3/2}\Delta(t) \quad (1.4.15)$$

Es inmediato comprobar que todas estas señales tienen la misma energía E_{xi}=1. La correlación cruzada entre cualquiera de ellas y la señal *y*(*t*) = $\Pi(t)$, también de energía unitaria, está acotada al valor 1, como puede comprobarse a partir de la propiedad 1. Por la misma propiedad, el valor máximo se alcanza en la correlación cruzada entre x_2(t) y Π(t) y además toma este valor en τ = 2.



1.4.4 Función de autocorrelación.

Se define la función de autocorrelación $R_{xx}(\tau)$ de una señal $x(t)$ de E.F. con transformada de Fourier $X(f)$

$$R_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t+\tau)x^*(t)dt \qquad (1.4.16)$$

Que puede expresarse alternativamente

$R_{xx}(\tau) = x(\tau) * x^*(-\tau)$ (**¡Error! No hay texto con el estilo especificado en el documento.**17)

Propiedades:

- La energía de una señal es el valor de su autocorrelación en el origen

$$R_{xx}(0) = E_x \qquad (1.4.18)$$

Se demuestra evaluando ((1.4.16) en $\tau = 0$.

- El máximo de la autocorrelación está en el origen.

$$|R_{xx}(\tau)| \leq R_{xx}(0) \qquad (1.4.19)$$

Se demuestra sustituyendo *y(t)= x(t)* en (1.4.11) y aplicando (1.4.18)

- La autocorrelación es una función Hermítica.

$$R_{xx}(\tau) = R_{xx}^*(-\tau) \qquad (1.4.20)$$

Se demuestra sustituyendo $y(t) = x(t)$ en (1.4.14).

- Si *x(t)* es real, su autocorrelación es real y par

$$R_{xx}(\tau) = R_{xx}(-\tau) \qquad (1.4.21)$$

- Energía de la suma de dos señales

Sea la señal *z(t)* formada por la suma de otras dos señales:

$$z(t) = x(t) + y(t) \qquad (1.4.22)$$

La función de autocorrelación de $z(t)$ viene dada por:

$$R_{zz}(\tau)=R_{xx}(\tau)+R_{yy}(\tau)+R_{xy}(\tau)+R_{yx}(\tau) \qquad (1.4.23)$$

La energía de $z(t)$ es el valor de su autocorrelación en el origen:

$$E_z=E_x+E_y+ R_{xy}(0)+ R_{yx}(0) \qquad (1.4.24)$$

Para que la energía de $z(t)$ sea la suma de las energías de $x(t)$ e $y(t)$, se debe cumplir:

$$R_{xy}(0)+ R_{yx}(0)=2\, R\, e[R_{xy}(0)]=0 \qquad (1.4.25)$$

Las señales que cumplen esta propiedad se denominan *incoherentes*.

Si además se verifica que la correlación en el origen vale cero, las señales se denominan *ortogonales*.

$$R_{xy}(0) = R_{yx}(0) = 0 \tag{1.4.26}$$

Finalmente si la correlación cruzada es nula, las señales se llaman *incorreladas*

$$R_{xy}(\tau) = R_{yx}(\tau) = 0 \tag{1.4.27}$$

La Figura 1.4.2 muestra a la izquierda varias señales y a la derecha su correspondiente función de autocorrelación. Las señales son pulsos de duración 2.5 seg: rectangular, sinc y chirp (seno de frecuencia creciente) y todas de energía unitaria. Las funciones de autocorrelación muestran simetría par, el valor en el origen es $R_{xx}(0) = E_x = 1$ y su duración es el doble que la duración de la señal.

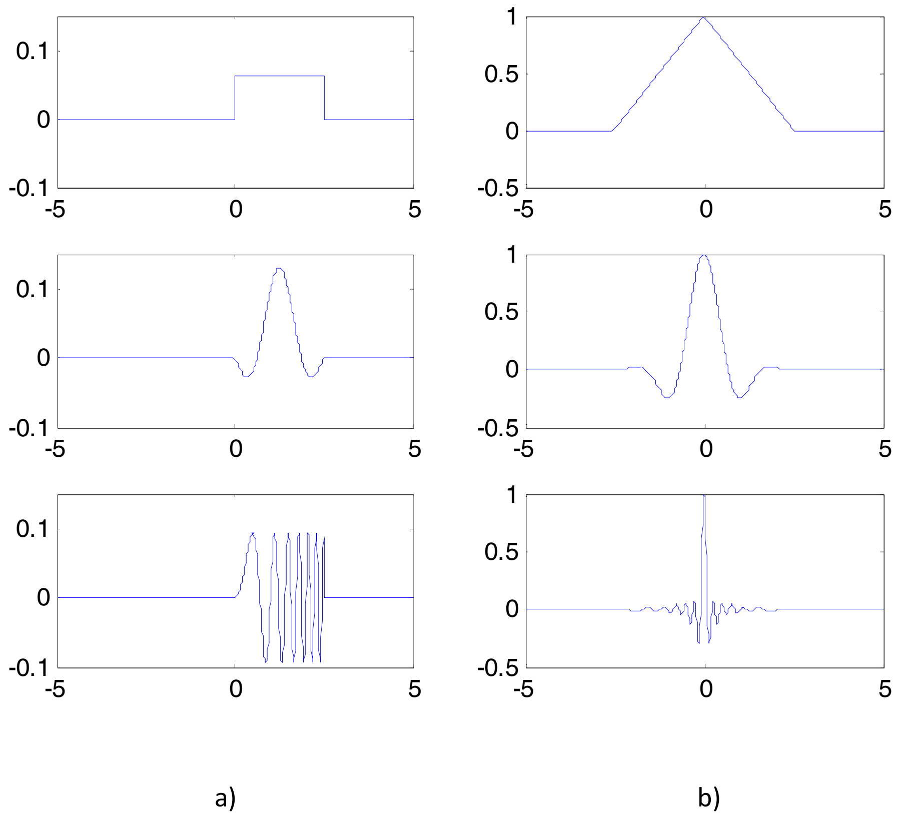


Figura 1.4.2 a) Señales de duración finita: pulso rectangular, pulso sinc y pulso chirp. Las señales tienen la misma duración y energía. b) autocorrelación de las mismas.

1.4.5 Correlación a través de sistemas lineales

Sea $y(t)$ la señal de salida de un sistema lineal e invariante con respuesta impulsional $h(t)$, cuando a su entrada se aplica $x(t)$.

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-t')h(t')dt' \tag{1.4.28}$$

Se verifican las siguientes relaciones:

$$R_{xy}(\tau) = R_{xx}(\tau) * h^*(-\tau) \tag{1.4.29}$$

$$R_{yx}(\tau) = R_{xx}(\tau) * h(\tau) \tag{1.4.30}$$

$$R_{yy}(\tau) = R_{xx}(\tau) * h(\tau) * h^*(-\tau) \tag{1.4.31}$$

La demostración de la propiedad (1.4.29) puede realizarse expresando $y^*(t)$ por medio de la ecuación de convolución en (1.4.9)

$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t+\tau)\left[\int_{-\infty}^{\infty} x^*(t-t')h^*(t')dt'\right]dt \tag{1.4.32}$$

Intercambiando el orden de integración

$$\begin{aligned} R_{xy}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} h^*(t')\left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t+\tau)x^*(t-t')dt\right]dt' = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau+t')h^*(t')dt' = \\ &= R_{xx}(\tau) * h^*(-\tau) \end{aligned} \tag{1.4.33}$$

Las demás propiedades se demuestran fácilmente de forma similar.

EJEMPLO 1.4.2

La correlación cruzada entre la señal $y(t) = x(t\text{-}t_d)$ y la señal $x(t)$

$$R_{yx}(\tau) = R_{xx}(\tau) * \delta(\tau - t_d) = R_{xx}(\tau - t_d)$$

ya que podemos suponer que $y(t)$ es la salida de un retardador cuando a la entrada se aplica $x(t)$. Por las propiedades de la autocorrelación, se deduce que la correlación cruzada entre la entrada y la salida de un retardador tiene un máximo de valor E_x en $\tau = t_d$.

EJEMPLO 1.4.3.3

Medida de tiempo de retardo en señales contaminadas con ruido

La correlación cruzada se utiliza en aplicaciones de detección de pulsos habitualmente contaminados con ruido. Suponga un sistema de radar que transmite la señal *x(t)*. Esta choca contra un blanco y se refleja, de forma que en el receptor, localizado en la misma posición que el emisor, se recibe la señal

$$y(t) = x(t-t_d) + n(t)$$

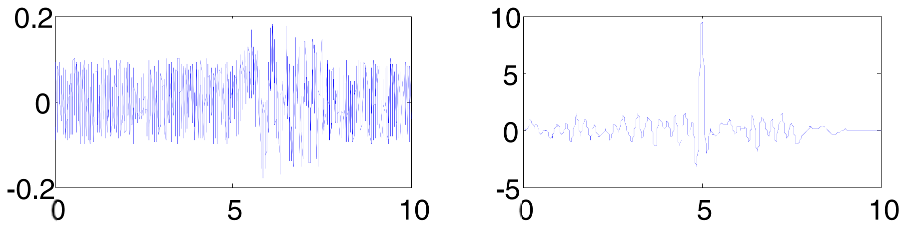
donde t_d es el tiempo que tarda la señal en ir al blanco y volver y *n(t)* es ruido que se ha sumado a la señal. El receptor del radar realiza la correlación cruzada entre *y(t)* y una copia idéntica de la señal original. Se tiene

$$R_{yx}(\tau) = R_{xx}(\tau - t_d) + R_{nx}(\tau)$$

Si la señal y el ruido están incorrelados, (su parecido es nulo), lo cual es habitual ya que están generados de forma totalmente independiente, $R_{nx}(\tau) \approx 0$, por lo que la correlación cruzada $R_{yx}(\tau)$ presentará un máximo en $\tau=t_d$. La detección de la posición del máximo de $R_{yx}(\tau)$ permite hallar t_d, que es lo que tarda la señal radar en ir y volver del blanco y dado que la señal de radar se propaga a la velocidad de la luz, la distancia al blanco será:

$$d= t_d/2c$$

La figura 1.4.3 ilustra este comportamiento. Se ha elegido como señal a transmitir *x(t)* una señal chirp como la mostrada en la Figura 1.4.2 La Figura 1.4.3 a) presenta *y(t),* la señal recibida contaminada con ruido. La figura 1.4.3 b) presenta la correlación cruzada entre y(t) y la señal transmitida x(t). La posición del pico determina el retardo t_d buscado.



a) b)

Figura 1.4.3. a) Pulso Chirp contaminado con ruido, b) Correlación cruzada entre el pulso chirp contaminado con ruido y el pulso limpio.