Facultat de Matemàtiques i Estadística

Universitat Politècnica de Catalunya - BarcelonaTech

Exercicis resolts de Fonaments de les Matemàtiques (Primer curs del Grau de Matemàtiques)

Àlex Batlle Casellas

October 14, 2018

Índex

1 Formalisme matemàtic: enunciats i demostracions.

2 Conjunts i aplicacions.

21. **Siguin $A_1, A_2, B_1, B_2 \neq \emptyset$. Demostreu:**

    21.3. $(A_1 \cup A_2) \times (B_1 \cup B_2) = (A_1 \times B_1) \cup (A_1 \times B_2) \cup (A_2 \times B_1) \cup (A_2 \times B_2)$.

    Sigui $y \in (A_1 \cup A_2) \times (B_1 \cup B_2)$. Aleshores, $\exists y_1 \in A_1 \cup A_2,\ y_2 \in B_1 \cup B_2 :\ y = (y_1, y_2)$.

$$\iff (y_1 \in A_1 \vee y_1 \in A_2) \wedge (y_2 \in B_1 \vee y_2 \in B_2) \iff (y_1 \in A_1 \wedge y_2 \in B_1)$$
$$\vee (y_1 \in A_2 \wedge y_2 \in B_1) \wedge (y_1 \in A_1 \wedge y_2 \in B_2) \vee (y_1 \in A_2 \wedge y_2 \in B_2)$$
$$\iff y \in (A_1 \times B_1) \cup (A_2 \times B_2) \cup (A_1 \times B_2) \cup (A_2 \times B_1).\square$$

30. **Considerem una aplicació $f :\ A \mapsto B$ i subconjunts $A', A'' \subseteq A$ i $B', B'' \subseteq B$. Demostreu:**

    30.1. **Si $A' \subseteq A''$, aleshores $f(A') \subseteq f(A'')$. Demostreu que la igualtat és certa si f és injectiva.**

$$\text{Sigui } A' \subseteq A''. \text{ Aleshores } f(A') = \{y \in B : (\exists x \in A' :\ f(x) = y)\}$$
$$\subseteq \{y \in B : (\exists x \in A'' : f(x) = y)\} = f(A'') \implies f(A') \subseteq f(A'').\square$$

    Si f és injectiva, volem veure que $f(A'') \subseteq f(A')$ (ja que la primera inclusió per la igualtat ja l'hem demostrada a l'apartat anterior).

    Sigui $A' \subseteq A''$. Aleshores $f(A'') \subseteq f(A') \iff A'' \subseteq A'$ (resultat anterior) $\iff$

    $A'' = A'$ (perquè sabem $A' \subseteq A''$) $\iff$ (sabent que $f(A') \subseteq f(A'')$) f és injectiva.$\square$

    30.2. **Si $B' \subseteq B''$, aleshores $f^{-1}(B') \subseteq f^{-1}(B'')$. Demostreu que la igualtat és certa si f és exhaustiva.**

$$\text{Sigui } B' \subseteq B''. \text{ Aleshores, } f^{-1}(B') = \{x \in A : (\exists y \in B' : f^{-1}(\{y\}) = \{x\})\} \subseteq$$
$$\{x \in A : (\exists y \in B'' : f^{-1}(\{y\}) = \{x\})\} = f^{-1}(B'') \implies f^{-1}(B') \subseteq f^{-1}(B'').\square$$

    Si f^{-1} és exhaustiva, volem veure que $f^{-1}(B'') \subseteq f^{-1}(B')$ (ja que la primera inclusió per la igualtat ja l'hem demostrada a l'apartat anterior) quan la igualtat dels dos conjunts B' i B'' es dóna, és a dir, quan $B' \subseteq B''$ i $B'' \subseteq B'$. Quan passa això, per l'anterior demostració:

    - $f^{-1}(B') \subseteq f^{-1}(B'')$,
    - $f^{-1}(B'') \subseteq f^{-1}(B')$.

    Per tant, tenim que $f^{-1}(B') = f^{-1}(B'')$. **PENDENT D'ACABAR.**

31. **Considerem una aplicació $f :\ A \mapsto B$. Demostreu:**

31.1. **Si $A' \subseteq A$, aleshores $A' \subseteq f^{-1}(f(A'))$.**

$$f(A') = \{y \in B : (\exists x \in A' : f(x) = y)\}.$$

$$f^{-1}(f(A')) = \{x \in A : f(x) \in f(A')\}.$$

Tenint en compte que podrien existir elements d'A que corresponguessin amb l'aplicació a elements d'$f(A')$, el conjunt antiimatge $f^{-1}(f(A'))$ és un superconjunt d'A'.

$$\Longrightarrow A' \subseteq f^{-1}(f(A')).\square$$

31.2. **f és injectiva si i només si $A' = f^{-1}(f(A'))\ \forall A' \subseteq A$.**
Agafant la igualtat que volem demostrar, si apliquem f als dos costats, ens ha de quedar una identitat per poder afirmar que f és injectiva. Com podem efectivament comprovar,

$$f(A') = f(f^{-1}(f(A'))) = Id_B(f(A')) = f(A')$$

i $A' = A'$, per tant, queda demostrat l'enunciat.

3 Relacions, operacions i estructures.

4 Conjunts de nombres. Numerabilitat.

5 El cos dels nombres complexos.

6 Aritmètica

7 Polinomis.