APUNTES

2 INTEGRACIÓ A $\mathbb{R}^n$

2.1 Introducción

En este capítulo generalizaremos el concepto de integral, ya conocido para funciones de una variable, al caso de funciones escalares de varias variables reales. Así como en una variable la integral de una función positiva en un intervalo se interpreta como el área de la región del plano $\mathbb{R}^2$ comprendida entre la gráfica de la función y el intervalo, para funciones de varias variables se puede hacer una interpretación análoga. Por ejemplo, la integral de una función escalar y positiva de dos variables corresponderá al volumen de la región de $\mathbb{R}^3$ comprendida entre la gráfica de la función y la región de $\mathbb{R}^2$ donde se integra, ver la Figura 2.1.

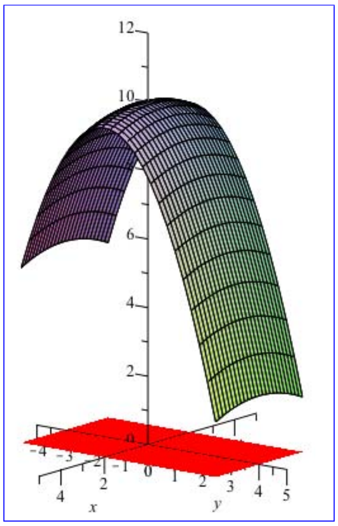

Figure 2.1: Gráfica de $f(x,y) = 24 - \dfrac{x^2}{10} - \dfrac{y^2}{2}$ en$[-2,2] \times [-3,4]$

Esta interpretación puede extrapolarse a funciones de un número arbitrario, pero finito, de variables.

Los lectores interesados en el desarrollo histórico de la Teoría de Integración, encontrarán información muy accesible en el capítulo Integración en los espacios localmente compactos del libro N. Bourbaki, *Elementos de Historia de las Matemáticas*, Alianza Universidad, 1976, pgs. 301-315. Un desarrollo minucioso pero más técnico puede encontrarse en las notas de F. Bombal, *La Teoría de la Medida: 1875-1925*, Seminario de Historia de la Matemática I, Universidad Complutense, Madrid, 1991, 107-144 (accesible desde la página web del autor).

2.2 Integración en Rectángulos

En esta sección desarrollaremos la teoría básica de integración de Riemann en rectángulos n-dimensionales; es decir, de funciones de n variables definidas en el producto cartesiano de intervalos cerrados. Como veremos, no hay diferencia substancial entre el desarrollo de la Teoría de Integración en un intervalo cerrado y en un producto de tales intervalos. Básicamente seguiremos el guión de la teoría de integración de Riemann en una variable adaptando las definiciones y técnicas al nuevo contexto. No obstante, la generalización a varias variables debe incluir necesariamente un análisis de las propiedades de descomposición y de recubrimiento de los intervalos n-dimensionales, y de su repercusión en la noción de volumen, que o no aparecen en el caso unidimensional o si lo hacen son prácticamente obvias.

Recordemos que un subconjunto $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo sii es un conjunto conexo. En particular, la propiedad anterior implica que si $x, y \in I$ y $x < y$, entonces si $x \le z \le y$, $z \in I$. Por tanto, si I no es vacío y consideramos $-\infty \le a = \inf\{I\}$ y $\sup\{I\} = b \le +\infty$, entonces $a \le b$ y $\{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} = \mathring{I}$. Los valores a y b se denominan extremos del intervalo I y al conjunto $\{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ se le denota como (a, b). La anterior notación también será utilizada si $a = b$, o incluso si $b \le a$, y entonces $(a, b) = \emptyset$. Asimismo, si $a \in \mathbb{R}$ o $b \in \mathbb{R}$, utilizaremos las notaciones $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \le x < b\}$, $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \le b\}$ y $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \le x \le b\}$. En resumen,

$I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo de extremos $a, b \in \mathbb{R}$, donde $a \le b$, si o bien $I = (a, b)$, o $I = [a, b]$, $I = [a, b)$ o $I = (a, b]$. Diremos que I es un intervalo abierto si $I = (a, b)$ y cerrado si $I = [a, b]$. En particular, $(a, a) = (a, a] = [a, a) = \emptyset$ y $\{a\} = [a, a]$. Además, si I es un intervalo de extremos a y b, entonces $\mathring{I} = (a, b)$ e $\bar{I} = [a, b]$ y su longitud es $\ell(I) = b - a$. Por tanto, $\ell(I) = \ell(\mathring{I}) = \ell(\bar{I}) \ge 0$ y $\ell(I) = 0$ si y sólo si o bien $I = \emptyset$ o bien I se reduce a un punto.

La anterior definición agota los denominados intervalos acotados. Para describir todos los intervalos en $\mathbb{R}$, debemos también considerar $(-\infty, b)$, $(-\infty, b]$, $(a, +\infty)$, $[a, +\infty)$ y $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$, que se denominan intervalos no acotados y corresponden a los casos en los que I es un conjunto conexo no acotado y por tanto, o bien $-\infty = \inf\{I\}$ o $+\infty = \sup\{I\}$. En todo el texto utilizaremos el concepto de intervalo como sinónimo de intervalo acotado; es decir, de extremos reales. Cuando nos refiramos a un intervalo de la forma $(-\infty, b)$, $(-\infty, b]$, $(a, +\infty)$, $[a, +\infty)$ o $(-\infty, +\infty)$ siempre lo haremos como intervalo no acotado.

2.2.1 Rectángulos n-dimensionales y su volumen

En esta sección nos ocuperemos de describir las propiedades del recinto básico n-dimensional, que generaliza a los intervalos de $\mathbb{R}$.

Si $n \geq 1$, denominaremos rectángulo n-dimensional al producto cartesiano de n intervalos unidimensionales; es decir a un conjunto de la forma $R = I_1 \times \cdots \times I_n$, donde para cada $j = 1, \ldots, n$, $I_j \subset \mathbb{R}$ es un intervalo, que se denomina el lado o la arista j-ésima de R.

- El rectángulo se denomina degenerado si alguna de sus arista tiene longitud nula.
- El rectángulo se denomina abierto o cerrado si es producto de intervalos abiertos o cerrados, respectivamente.
- Denominaremos cubo n-dimensional de lado ℓ a todo rectángulo n-dimensional cuyas aristas tienen la misma longitud, ℓ.

De acuerdo con las convenios que hemos adoptado, cada lado de un rectángulo n-dimensional es un conjunto acotado y por tanto, todo rectángulo es un conjunto acotado. Cuando alguno de los lados de un rectángulo sea un intervalo no acotado, nos referiremos a él como recángulo no acotado. En lo sucesivo utilizaremos el concepto de rectángulo como sinónimo de rectángulo acotado. Observar también que un rectángulo es abierto o cerrado si lo es, topológicamente, como subconjunto de $\mathbb{R}^n$.

A continuación definiremos las cantidades numéricas fundamentales asociadas a cada rectángulo.

Sean $n \geq 1$ y $R = I_1 \times \cdots \times I_n$ el rectángulo n-dimensional, donde para cada $j = 1, \ldots, n$, la arista $I_j \subset \mathbb{R}$ es el intervalo de extremos son $a_j, b_j \in \mathbb{R}$ con $a_j \leq b_j$.

- El volumen, o medida, de R es el producto de las longitudes de las aristas:

$$\mathsf{v}_n(R) = \ell(I_1) \cdots \ell(I_n) = (b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n).$$

- El diámetro de R es la distancia euclídea entre los vértices $(a_1, \ldots, a_n)$ y $(b_1, \ldots, b_n)$:

$$\delta(R) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + \cdots + (b_n - a_n)^2} = \sqrt{\ell(I_1)^2 + \cdots + \ell(I_n)^2};$$

es decir, la longitud de la **diagonal** de R.

La nociones de rectángulos n-dimensionales y de su correspondiente volumen, representan una generalización de los conceptos conocidos para dimensiones hasta 3. Así, si R es un rectángulo n-dimensional y $n = 1$, entonces R es un intervalo y $\mathsf{v}_1(R) = \ell(R)$, si $n = 2$, R es un rectángulo y $\mathsf{v}_2(R) = \mathsf{a}(R)$ corresponde a su área, mientras que si $n = 3$, R es un paralelepípedo recto y $\mathsf{v}_3(R)$ coincide con su volumen.

Los conceptos de volumen y diámetro de rectángulos están relacionados. Como se satisface que $\max\limits_{j=1,\ldots,n} \{\ell(I_j)\} \leq \delta(R) \leq \sqrt{n} \max\limits_{j=1,\ldots,n} \{\ell(I_j)\}$, resulta que

para cada rectángulo n-dimensional R se tiene que $\mathsf{v}_n(R) \leq \delta(R)^n$.

Por tanto, un rectángulo con *pequeño diámetro* tiene *volumen pequeño*. Claramente ambas condiciones son equivalentes si $n = 1$.

• Cuestión 1: Para cada $M > 0$, dar un ejemplo de rectángulo n-dimensional con $n \geq 2$ con volumen nulo y diámetro mayor que M

Si Q es un cubo n-dimensional de lado ℓ, entonces $\mathsf{v}_n(Q) = \ell^n$, mientras que $\delta(Q) = \ell\sqrt{n}$ y por tanto, para un cubo, *volumen pequeño* es equivalente a *diámetro pequeño*.

Expondremos a continuación las propiedades básicas de los rectángulos n-dimensionales, cuya demostración es prácticamente inmediata.

- Degeneración: El conjunto vacío y todo punto de $\mathbb{R}^n$ son cubos cerrados degenerados y todo cubo cerrado degenerado es de esta forma. Más generalmente si R es un rectángulo n-dimensional no vacío, entonces es degenerado sii una de sus aristas se reduce a un punto. Equivalentemente, un rectángulo n-dimensional, R , es degenerado sii $\overset{\circ}{R} = \emptyset$.

- Invariancia por traslaciones y homogeneidad: Si R es un rectángulo n-dimensional, para cada $\mathsf{w} \in \mathbb{R}^n$ se satisface que $R+\mathsf{w} = \{x+\mathsf{w} : x \in R\}$ y $\mathsf{w}R = \{(w_1x_1, \dots, w_nx_n) : x \in R\}$ son también rectángulos n-dimensionales. Si Q es un cubo de lado ℓ, entonces $Q + \mathsf{w}$ es un cubo de lado ℓ y $\mathsf{w}Q$ es un cubo sii $w_1 = \cdots = w_n = \alpha$ y en este caso tiene lado $|\alpha|\ell$.

- Estabilidad: La intersección de una cantidad arbitraria de rectángulos n-dimensionales es un rectángulo n-dimensional.

- Compatibilidad geométrica: Si $1 \leq k < n$ y $R \subset \mathbb{R}^k$ es un rectángulo k-dimensional y $\widehat{R} \subset \mathbb{R}^{n-k}$ es un rectángulo $(n-k)$-dimensional, entonces $R \times \widehat{R}$ es un rectángulo n-dimensional. Recíprocamente, para cada $1 \leq k < n$, todo rectángulo n-dimensional puede ser expresado como producto de un rectángulo k-dimensional y otro $(n-k)$-dimensional. Las mismas propiedades son válidas sustituyendo rectángulo por cubo.

- Compatibilidad topológica: Si R es un rectángulo (respectivamente, un cubo) n-dimensional, $\overset{\circ}{R}$ y $\bar{R}$ son rectángulos (respectivamente, cubos) n-dimensionales, concretamente se tiene que $\overset{\circ}{R} = \overset{\circ}{I}_1 \times \cdots \overset{\circ}{I}_n$, mientras que $\bar{R} = \bar{I}_1 \times \cdots \times \bar{I}_n$. Por otra parte, ∂R, la frontera de R, es unión de $2n$ rectángulos degenerados, concretamente

$$\partial R = \left(\bigcup_{j=1}^{n} \bar{I}_1 \times \cdots \times \{a_j\} \times \cdots \times \bar{I}_n\right) \bigcup \left(\bigcup_{j=1}^{n} \bar{I}_1 \times \cdots \times \{b_j\} \times \cdots \times \bar{I}_n\right)$$

donde para cada $j = 1, \dots, n$, a_j y b_j son los extremos de I_j.

El ejemplo de la frontera de un rectángulo n-dimensional muestra que la propiedad de estabilidad no es cierta ni siquiera para uniones finitas de rectángulos; es decir, la unión finita de rectángulos n-dimensionales <u>no</u> es, en general, un rectángulo n-dimensional. Sin embargo, se satisface el siguiente resultado general que enunciaremos sin demostración, y que será adaptado en la siguiente sección al contexto de las particiones de un rectángulo:

Propiedad de Recubrimiento: Dados $k \in \mathbb{N}^*$ y $R_1, \dots, R_k, R_{k+1}$ rectángulos n-dimensionales con $\bigcup_{j=1}^{k} R_j \subset R_{k+1}$, existen $m \in \mathbb{N}^*$ y $\widehat{R}_1, \dots, \widehat{R}_m$ rectángulos n-dimensionales disjuntos tales que $R_{k+1} = \bigcup_{i=1}^{m} \widehat{R}_i$ y para cada $j = 1, \dots, k$ existe $\emptyset \neq M_j \subset \{1, \dots, m\}$, de manera que $R_j = \bigcup_{i \in M_j} \widehat{R}_i$.

A continuación describiremos las propiedades fundamentales del volumen de rectángulos n-dimensionales, considerada como una función real sobre este tipo de conjuntos.

- Positividad: Si R es un rectángulo n-dimensional, entonces $\mathsf{v}_n(R) \geq 0$ y $\mathsf{v}_n(R) = 0$ sii R es degenerado; es decir sii $\overset{\circ}{R} = \emptyset$.

- Monotonía: Si $R, \widehat{R}$ son rectángulos n-dimensional y $R \subset \widehat{R}$, entonces $\mathsf{v}_n(R) \leq \mathsf{v}_n(\widehat{R})$.

- Invariancia por traslaciones y homogeneidad: Si R es un rectángulo n-dimensional, para cada $\mathsf{w} \in \mathbb{R}^n$ se tiene que $\mathsf{v}_n(R + \mathsf{w}) = \mathsf{v}_n(R)$ y $\mathsf{v}_n(\mathsf{w}R) = |w_1| \cdots |w_n| \mathsf{v}_n(R)$.

- Compatibilidad geométrica: Si $1 \leq k < n$ y $R \subset \mathbb{R}^k$ es un rectángulo k-dimensional y $\widehat{R} \subset \mathbb{R}^{n-k}$ es un rectángulo $(n-k)$-dimensional, entonces $\mathsf{v}_n(R \times \widehat{R}) = \mathsf{v}_k(R) \cdot \mathsf{v}_{n-k}(\widehat{R})$.

- Compatibilidad topológica: Si R es un rectángulo n-dimensional, entonces $\overset{\circ}{R} \subset R \subset \bar{R}$ y $\mathsf{v}_n(\overset{\circ}{R}) = \mathsf{v}_n(R) = \mathsf{v}_n(\bar{R})$.

- Regularidad: Si R es un rectángulo n-dimensional, para cada $\varepsilon > 0$ existen un rectángulo n-dimensional abierto $\widetilde{R}$ y un rectángulo n-dimensional cerrado $\widehat{R}$ tales que
$$\widehat{R} \subset \overset{\circ}{R} \subset R \subset \bar{R} \subset \widetilde{R} \quad \text{y} \quad \mathsf{v}_n(\widetilde{R}) - \varepsilon < \mathsf{v}_n(R) < \mathsf{v}_n(\widehat{R}) + \varepsilon.$$
Además, si R es un cubo n-dimensional, $\widehat{R}$ y $\widetilde{R}$ pueden escogerse como cubos n-dimensionales.

- Regularidad por cubos: Si R es un rectángulo n-dimensional para cada $\varepsilon > 0$ existen $k, m \in \mathbb{N}^*$, $Q_1, \dots, Q_k$ cubos n-dimensionales abiertos y $\widehat{Q}_1, \dots, \widehat{Q}_m$ cubos n-dimensionales cerrados tales que
$$\bigcup_{i=1}^{m} \widehat{Q}_i \subset \overset{\circ}{R} \subset R \subset \bar{R} \subset \bigcup_{j=1}^{k} Q_j \quad \text{y} \quad \sum_{j=1}^{k} \mathsf{v}_n(Q_j) - \varepsilon \leq \mathsf{v}_n(R) < \sum_{i=1}^{m} \mathsf{v}_n(\widehat{Q}_i) + \varepsilon.$$

Demostración: Todas las propiedades son inmediatas, excepto las de regularidad, así que demostraremos sólo éstas últimas.

Supongamos que $R = I_1 \times \cdots \times I_n$ y que para cada $j = 1, \dots, n$, I_j es el intervalo de extremos a_j y b_j con $a_j < b_j$. Definimos la función $\phi \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ como
$$\phi(t) = (\ell_1 + 2t) \cdots (\ell_n + 2t) = (b_1 - a_1 + 2t) \cdots (b_n - a_n + 2t).$$

Claramente ϕ es continua y $\phi(0) = \mathsf{v}_n(R)$. Por tanto, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|\phi(t) - \phi(0)| < \varepsilon$ si $|t| < \delta$. Como ϕ es creciente en $[0, +\infty)$, basta tomar

$$\widetilde{R} = (a_1 - t, b_1 + t)\cdots(a_n - t, b_n + t), \quad 0 < t < \delta.$$

Si R es degenerado, basta considerar $\widehat{R} = \emptyset$ (que puede considerarse como cubo). Si R es no degenerado, $\rho = \frac{1}{2}\min_{j=1,\dots,n}\{b_j - a_j\}$ satisface que $\rho > 0$ y como ϕ es decreciente en $(-\rho, 0]$, basta considerar

$$\widehat{R} = [a_1 - t, b_1 + t]\cdots[a_n - t, b_n + t], \quad -\min\{\delta, \rho\} < t < 0.$$

Observar que si R es un cubo de lado ℓ, entonces $\widetilde{R}$ y $\widehat{R}$ son cubos de lado $\ell + 2t$.

Para la regularidad por cubos, consideremos ahora $\delta' > 0$ tal que $|\phi(t) - \phi(0)| < \frac{\varepsilon}{2}$ si $|t| < \delta'$. Si suponemos que R es no degenerado, y para cada $j = 1, \dots, n$ y cada $0 < t < \min\{\delta', \rho\}$, definimos $m_j = \lfloor \frac{b_j - a_j}{2t} \rfloor$, la parte entera de $\frac{b_j - a_j}{2t}$, entonces $m_j \geq 1$, ya que $1 < \frac{\rho}{t} \leq \frac{b_j - a_j}{2t}$. Si tomamos $\ell = 2t$, y para cada $j = 1, \dots, n$ y cada $i = 1, \dots, m_j + 1$, consideramos $J_{j,i} = \big(a_j + \ell(i-1), a_j + \ell i\big)$, resulta que si $j = 1, \dots, n$

$$\bigcup_{i=1}^{m_j} J_{j,i} \subset (a_j, b_j) \subset [a_j, b_j] \subset \bigcup_{i=1}^{m_j+1} \bar{J}_{j,i}$$

Por tanto, si $1 \leq i_j \leq m_j + 1$, entonces $J_{1,k_1} \times \cdots \times J_{n,i_n}$ es un cubo abierto de lado ℓ y por la propiedad de regularidad anterior, existen $Q_{i_1,\dots,i_n}$ un cubo abierto y $\widehat{Q}_{i_1,\dots,i_n}$ un cubo cerrado tales que si $m = m_1 + \cdots + m_n$

$$\widehat{Q}_{i_1,\dots,i_n} \subset J_{1,i_1} \times \cdots \times J_{n,i_n} \subset \bar{J}_{1,k_1} \times \cdots \times \bar{J}_{n,i_n} \subset Q_{i_1,\dots,i_n},$$
$$\mathsf{v}(Q_{i_1,\dots,i_n}) - \frac{\varepsilon}{2(m+n)} \leq \mathsf{v}(\bar{J}_{1,i_1} \times \cdots \times \bar{J}_{n,i_n}) = \mathsf{v}(J_{1,k_1} \times \cdots \times J_{n,i_n}) \leq \mathsf{v}(\widehat{Q}_{i_1,\dots,i_n}) + \frac{\varepsilon}{2m}.$$

Por tanto, se satisface que

$$\bigcup_{i_1=1}^{m_1}\cdots\bigcup_{i_n=1}^{m_n} \widehat{Q}_{i_1,\dots,i_n} \subset \mathring{R} \subset R \subset \bar{R} \subset \bigcup_{i_1=1}^{m_1+1}\cdots\bigcup_{i_n=1}^{m_n+1} (\bar{J}_{1,i_1} \times \cdots \times \bar{J}_{n,i_n})$$

y como para cada $j = 1, \dots, n$ se tiene que $(b_j - a_j - \ell) \leq \ell m_j \leq \ell(m_j + 1) \leq (b_j - a_j + \ell)$,

$$\sum_{i_1=1}^{m_1}\cdots\sum_{i_n=1}^{m_n+1} \mathsf{v}(\bar{J}_{1,i_1} \times \cdots \times \bar{J}_{n,i_n}) = \ell^n(m_1+1)\cdots(m_n+1) \leq \prod_{j=1}^{n}(b_j - a_j + \ell) = \phi(t),$$
$$\sum_{i_1=1}^{m_1}\cdots\sum_{i_n=1}^{m_n} \mathsf{v}(J_{1,i_1} \times \cdots \times J_{n,i_n}) = \ell^n m_1\cdots m_n \geq \prod_{j=1}^{n}(b_j - a_j - \ell) = \phi(-t)$$

de manera que

$$\sum_{i_1=1}^{m_1+1}\cdots\sum_{i=1}^{m_j+1} \mathsf{v}(Q_{i_1,\dots,i_n}) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \phi(t) \leq \varepsilon \ \text{ y } \ \sum_{i_1=1}^{m_1}\cdots\sum_{i_n=1}^{m_n} \mathsf{v}(\widehat{Q}_{i_1,\dots,i_n}) \geq \phi(-t) - \frac{\varepsilon}{2} \geq \varepsilon$$

Si R es degenerado, basta tomar $m = 1$, $\widehat{Q}_1 = \emptyset$ y repetir el razonamiento anterior para $0 < t < \delta'$. $\square$

La propiedad de compatibilidad geométrica para rectángulos implica que todo rectángulo $(n+1)$-dimensional R puede expresarse como $R = \widehat{R} \times I$, donde $\widehat{R}$ es un rectángulo n-dimensional, denominado base de R e I es un intervalo de $\mathbb{R}$ denominado altura de R. Por otra parte, la propiedad de compatibilidad geométrica para volúmenes implica como caso particular que el volumen del rectángulo $(n+1)$-dimensional $R = \widehat{R} \times I$, coincide con el producto del volumen n-dimensional del rectángulo base, $\mathsf{v}_n(\widehat{R})$, y la longitud de su altura, $\ell(I)$. Esta propiedad, permite definir inductivamente el concepto de volumen en $\mathbb{R}^{n+1}$ a partir del de longitud en $\mathbb{R}$.

Ligadas a la propiedad de recubrimiento, tenemos las siguientes propiedades del volumen:

Consideremos $R, R_1, \dots, R_k$ rectángulos n-dimensionales.

(i) Subaditividad Finita: Si $R \subset \bigcup\limits_{j=1}^{k} R_j$, entonces $\mathsf{v}_n(R) \le \sum\limits_{j=1}^{n} \mathsf{v}_n(R_j)$.

(ii) Aditividad Finita: Si $R = \bigcup\limits_{j=1}^{k} R_j$ y $\overset{\circ}{R}_j \cap \overset{\circ}{R}_i = \emptyset$, $i \neq j$, entonces $\mathsf{v}_n(R) = \sum\limits_{j=1}^{n} \mathsf{v}_n(R_j)$.

De las dos anteriores, la propiedad esencial es la (ii) ya que la subaditividad finita es consecuencia de la aditividad finita y de las propiedades de recubrimiento. Aunque su demostración en el caso general no es difícil, requiere una preparación tediosa y por ello no la describiremos aquí, aunque si presentaremos la prueba en algunos casos particulares. Por ejemplo, si $R = I_1 \times \cdots \times I_k \times \cdots I_n$ es un rectángulo n-dimensional e $I_k = J_k \cup H_k$ con $\overset{\circ}{J}_k \cap \overset{\circ}{H}_k = \emptyset$, donde J_k y H_k son intervalos en $\mathbb{R}$, entonces $R = R_1 \cup R_2$, donde $R_1 = I_1 \times \cdots \times J_k \times \cdots I_n$ y $R_2 = I_1 \times \cdots \times H_k \times \cdots I_n$ y $\overset{\circ}{R}_1 \cap \overset{\circ}{R}_2 = \emptyset$. Además, como $\ell(I_k) = \ell(J_k) + \ell(H_k)$, tenemos que $\mathsf{v}_n(R) = \mathsf{v}_n(R_1) + \mathsf{v}_n(R_2)$.

La propiedad de aditividad finita sugiere extender la noción de volumen a conjuntos un poco más generales que rectángulos. Concretamente, si $R_1, \dots, R_k$ son rectángulos n-dimensionales tales que $\overset{\circ}{R}_i \cap \overset{\circ}{R}_j = \emptyset$ para $i, j = 1, \dots, k$, $i \neq j$, podríamos definir

$$\mathsf{v}_n(R_1 \cup \cdots \cup R_k) = \mathsf{v}_n(R_1) + \cdots + \mathsf{v}_n(R_k).$$

Aunque es fácilmente asumible, resulta técnicamente engorroso demostrar directamente que la noción anterior es consistente; es decir, que si existe otra familia de rectángulos n-dimensionales $\widehat{R}_1, \dots, \widehat{R}_m$ tales que $\overset{\circ}{\widehat{R}}_i \cap \overset{\circ}{\widehat{R}}_j = \emptyset$ para $i, j = 1, \dots, m$, $i \neq j$ y satisfaciendo además $R_1 \cup \cdots \cup R_k = \widehat{R}_1 \cup \cdots \cup \widehat{R}_m$, entonces $\mathsf{v}_n(R_1 \cup \cdots \cup R_k) = \mathsf{v}_n(\widehat{R}_1 \cup \cdots \cup \widehat{R}_m)$.

Recordar que los conjuntos que son unión de rectángulos con interiores disjuntos aparecen de forma natural cuando consideramos la frontera de un rectángulo. Con la definición anterior, si R es un rectángulo n-dimensional, entonces $\mathsf{v}_n(\partial R) = 0$, ya que cada uno de los rectángulos disjuntos que forman ∂R es degenerado. Asimismo, tenemos que $\bar{R} = \overset{\circ}{R} \cup \partial R$ y $\mathsf{v}_n(\bar{R}) = \mathsf{v}_n(\overset{\circ}{R}) + \mathsf{v}_n(\partial R)$ (recordar que $\overset{\circ}{R} \cap \partial R = \emptyset$).

2.2.2 Particiones de Rectángulos n-dimensionales

Recordemos que si $a \le b$, un conjunto $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \ldots, x_k\}$ se denomina partición del intervalo $[a, b]$ si $\boxed{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = b.}$

Los intervalos $I_i = [x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, \ldots, k-1$, se denominan subintervalos de la partición $\mathcal{P}$ y satisfacen que $[a, b] = \bigcup\limits_{i=0}^{k-1} I_i$ y que $\mathring{I}_i \cap \mathring{I}_m = \emptyset$ si $i \neq m$, de manera que $b-a = \sum\limits_{i=0}^{k-1} \ell(I_i)$. Observar que si $a = b$, la única partición posible del intervalo $[a, b]$ es precisamente $\mathcal{P} = \{a, b\}$, pero si $a < b$, entonces todos los subintervalos de cualquier partición son no degenerados; es decir, tienen interior no vacío.

Se denomina diámetro de la partición $\mathcal{P}$ al valor $\delta(\mathcal{P}) = \max\limits_{j=0,\ldots,k-1} \{\ell(I_j)\}$, o lo que es lo mismo a $\delta(\mathcal{P}) = \max\limits_{j=0,\ldots,k-1} \{x_{j+1} - x_j\}$

Si $\mathcal{P}$ y $\mathcal{P}'$ son particiones del intervalo $[a, b]$, diremos que $\mathcal{P}'$ es más fina que $\mathcal{P}$ si $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}'$; es decir, si $\mathcal{P}'$ contiene a los puntos de la partición $\mathcal{P}$. Esto significa que cada subintervalo de $\mathcal{P}$ es unión de subintervalos de $\mathcal{P}'$ e implica que $\delta(P') \le \delta(\mathcal{P})$.

• Cuestión 2: Dada una partición $\mathcal{P}$ del intervalo $[a, b]$ construir una partición $\mathcal{P}'$ que no sea más fina que $\mathcal{P}$ pero tal que $\delta(P') \le \delta(\mathcal{P})$.

Si $\mathcal{P}, \mathcal{P}'$ son particiones del intervalo $[a, b]$, siempre existe $\widehat{P}$ una partición de $[a, b]$ más fina que ambas: Si suponemos que $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \ldots, x_k\}$ y $\mathcal{P}' = \{y_0, y_1, \ldots, y_m\}$, basta tomar $\widehat{\mathcal{P}} = \{z_0, z_1, \ldots, z_\ell\}$, donde $\{z_0, z_1, \ldots, z_\ell\}$ se construye considerando todos los puntos $x_0, x_1, \ldots, x_k$ e $y_0, y_1, \ldots, y_m$, ordenándolos y eliminando los repetidos.

En el resto de esta sección consideraremos fijados $n \in \mathbb{N}^*$ y un rectángulo n-dimensional cerrado; es decir,

$$\boxed{R = [a_1, b_1] \times \cdots [a_n, b_n], \quad \text{donde } a_j \le b_j,\ j = 1, \ldots, n}$$

Observar que $\mathsf{v}_n(R) = 0$ si y sólo si $a_j = b_j$ para algún $j = 1, \ldots, n$.

Denominaremos **partición del rectángulo** R al producto cartesiano $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \times \cdots \mathcal{P}_n$ donde para cada $j = 1, \ldots, n$, $\mathcal{P}_j = \{x_{j,0}, x_{j,1}, \ldots, x_{j,k_j}\}$ es una partición del subrectángulo $I_j = [a_j, b_j]$; es decir, $a_j = x_{j,0} < x_{j,1} < \cdots < x_{j,k_j} = b_j$,.

- Los **subrectángulos de** $\mathcal{P}$ son $R_{i_1,\ldots,i_n} = [x_{1,i_1}, x_{1,i_1+1}] \times \cdots \times [x_{n,i_n}, x_{n,i_n+1}]$, $i_j = 0, \ldots, k_j - 1$, $j = 1, \ldots, n$.
- El **diámetro de** $\mathcal{P}$ es $\delta(\mathcal{P}) = \sqrt{\delta(\mathcal{P}_1)^2 + \cdots + \delta(\mathcal{P}_n)^2}$.

El conjunto de particiones de R se denota por $\mathscr{P}(R)$; es decir,

$$\mathscr{P}(R) = \Big\{\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \times \cdots \times \mathcal{P}_n : \mathcal{P}_j \text{ es una partición de } [a_j, b_j],\ j = 1, \ldots, n\Big\}.$$

Es claro que $\max\limits_{j=1,\dots,n}\{\delta(\mathcal{P}_j)\} \le \delta(\mathcal{P}) \le \sqrt{n}\max\limits_{j=1,\dots,n}\{\delta(\mathcal{P}_j)\}$ y que $\max\limits_{j=1,\dots,n}\{\delta(\mathcal{P}_j)\}$ es la mayor de las longitudes de las aristas de los rectángulos de $\mathcal{P}$; es decir, $\max\limits_{\substack{i_j=0,\dots,k_j-1,\\ j=1,\dots,n}}\{x_{j,i_j+1}-x_{j,i_j}\}$. Además, para cada $\mathcal{P}\in\mathscr{P}(R)$ cada subrectángulo, $R_{i_1,\dots,i_n}$, de $\mathcal{P}$ satisface que $\delta(R_{i_1,\dots,i_n})\le\delta(\mathcal{P})$, lo que en particular implica que $\mathsf{v}(R_{i_1,\dots,i_n})\le\delta(\mathcal{P})^n$ y si R no es degenerado, $\overset{\circ}{R}_{i_1,\dots,i_n}\neq\emptyset$; es decir todos los subrectángulos de cada partición son no degenerados. Asimismo,

$$\boxed{R=\bigcup_{i_1=0}^{k_1-1}\cdots\bigcup_{i_j=0}^{k_n-1}R_{i_1,\dots,i_n},\quad \overset{\circ}{R}_{i_1,\dots,i_n}\cap\overset{\circ}{R}_{\hat{i}_1,\dots,\hat{i}_n}=\emptyset\ \text{ si }\ (i_1,\dots,i_n)\neq(\hat{i}_1,\dots,\hat{i}_n)}$$

y además si $S=\displaystyle\sum_{i_1=0}^{k_1-1}\cdots\sum_{i_n=0}^{k_n-1}\mathsf{v}_n(R_{i_1,\dots,i_n})$, resulta la siguiente identidad que no es más que un caso particular de la propiedad de aditividad finita:

$$\begin{aligned}
S&=\sum_{i_1=0}^{k_1-1}\cdots\sum_{i_n=0}^{k_n-1}(x_{1,i_1+1}-x_{1,i_1})\cdots(x_{n,i_n+1}-x_{n,i_n})\\
&=\sum_{i_1=0}^{k_1-1}\cdots\sum_{i_{n-1}=0}^{k_{n-1}-1}(x_{1,i_1+1}-x_{1,i_1})\cdots(x_{n-1,i_{n-1}+1}-x_{n-1,i_{n-1}})\sum_{i_n=0}^{k_n-1}(x_{n,i_n+1}-x_{n,i_n})\\
&=(b_n-a_n)\sum_{i_1=0}^{k_1-1}\cdots\sum_{i_{n-1}=0}^{k_{n-1}-1}(x_{1,i_1+1}-x_{1,i_1})\cdots(x_{n-1,i_{n-1}+1}-x_{n-1,i_{n-1}})\\
&=(b_1-a_1)\cdots(b_n-a_n)=\mathsf{v}_n(R).
\end{aligned}$$

En la Figura 2.2, podemos observar una partición de un rectángulo bidimensional.

Observar que las compatibilidad geométrica de los rectángulos y de su volumen, determinan que las particiones de un rectángulo $R\times\widehat{R}$ donde $R\subset\mathbb{R}^k$ y $\widehat{R}\subset\mathbb{R}^m$ son a su vez rectángulos, satisfacen también la siguiente propiedad de compatibilidad geométrica: Cada partición $\mathcal{P}\in\mathscr{P}(R\times\widehat{R})$ se obtiene como $\mathcal{P}_R\times\mathcal{P}_{\widehat{R}}$, donde $\mathcal{P}_R\in\mathscr{P}(R)$ y $\mathcal{P}_{\widehat{R}}\in\mathscr{P}(\widehat{R})$. Así, si $R_1,\dots,R_r$ y $\widetilde{R}_1,\dots\widetilde{R}_s$ son los subrectángulos de $\mathcal{P}_R$ y $\mathcal{P}_{\widehat{R}}$, respectivamente entonces los subrectángulos de $\mathcal{P}$ son de la forma $R_i\times\widetilde{R}_j$.

La siguiente definición resultará clave en el proceso de integración de funciones en R, que abordaremos en la siguiente sección:

> Dadas $\mathcal{P},\mathcal{P}'\in\mathscr{P}(R)$, diremos que $\mathcal{P}'$ **es más fina que** $\mathcal{P}$, y lo denotaremos como $\mathcal{P}\subset\mathcal{P}'$, si para cada $j=1,\dots,n$, $\mathcal{P}_j\subset\mathcal{P}'_j$; es decir, si $\mathcal{P}'_j$ es más fina que P_j.

Finalizaremos la sección con algunas propiedades, de demostración inmediata, relativas a las particiones de un rectángulo.

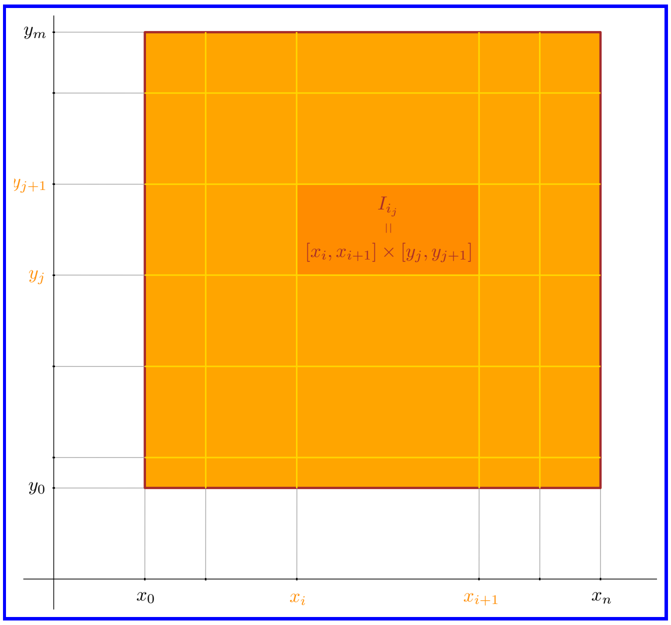

Figure 2.2: Partición $\mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2$ de $R = [a, b] \times [c, d]$

La relación *más fina que* establece un orden parcial en $\mathscr{P}(R)$. Además:

- Para cada $\varepsilon > 0$ existe $\mathcal{P} \in \mathscr{P}(R)$ tal que $\delta(\mathcal{P}) \leq \varepsilon$.
- Si $\mathcal{P}, \mathcal{P}' \in \mathscr{P}(R)$ y $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}'$, entonces $\delta(\mathcal{P}') \leq \delta(\mathcal{P})$.
- Si $\mathcal{P}, \mathcal{P}' \in \mathscr{P}(R)$ y $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}'$, entonces cada subrectángulo de $\mathcal{P}$ es unión de subrectángulos de $\mathcal{P}'$ cuyos interiores son disjuntos.
- Si $\mathcal{P}, \mathcal{P}' \in \mathscr{P}(R)$, existe $\widehat{\mathcal{P}} \in \mathscr{P}(R)$ tal que $\mathcal{P}, \mathcal{P}' \subset \widehat{\mathcal{P}}$.
- Si $\widehat{R}$ es un rectángulo n-dimensional cerrado tal que $\widehat{R} \subset R$, entonces existe $\mathcal{P} \in \mathscr{P}(R)$ tal $\widehat{R}$ es un subrectángulo de $\mathcal{P}$.

La última propiedad es un caso muy especial de las propiedades de recubrimiento e implica que si $\widehat{\mathcal{P}} \in \mathscr{P}(\widehat{R})$, entonces existe $\mathcal{P} \in \mathscr{P}(R)$ tal que cada subrectángulo de $\widehat{\mathcal{P}}$ es unión de subrectángulos de $\mathcal{P}$ cuyos interiores son disjuntos; es decir que cada partición $\widehat{\mathcal{P}}$ de un subrectángulo cerrado de R puede extenderse a una partición $\mathcal{P}$ de R. Observar que la segunda propiedad de las particiones asegura que entonces cualquier partición de R más fina que $\mathcal{P}$ induce sobre $\widehat{R}$ una partición más fina que $\widehat{P}$. Por otra parte, podemos extender el último enunciado como sigue:

Propiedad de Recubrimiento: Dados $k \in \mathbb{N}^*$ y $R_1, \ldots, R_k, R$ rectángulos n-dimensionales cerrados con $\bigcup_{j=1}^{k} R_j \subset R$, existe $\mathcal{P} \in \mathscr{P}(R)$ tal que para cada $j = 1, \ldots, k$, el rectángulo R_j es unión de subrectángulos de $\mathcal{P}$.

2.2.3 Integración de funciones acotadas

En el resto de esta sección consideraremos nuevamente fijados $n \in \mathbb{N}^*$ y el rectángulo n-dimensional cerrado; es decir,

$$R = [a_1, b_1] \times \cdots [a_n, b_n], \quad \text{donde } a_j \leq b_j,\ j = 1, \ldots, n$$

Como no hay posibilidad de confusión eliminaremos el subíndice n en la expresión del volumen. Por tanto, en esta sección v será equivalente a v_n. Asimismo, cuando no sea necesario precisar las componentes de un punto de $\mathbb{R}^n$, lo denotaremos sencillamente por x, y ó z. Así, $x \in \mathbb{R}^n$ significará, $x = (x_1, \ldots, x_n)$.

Sea $f\colon R \longrightarrow \mathbb{R}$ una función acotada y consideremos los valores $m_R = \inf\limits_{x \in R}\{f(x)\}$ y $M_R = \sup\limits_{x \in R}\{f(x)\}$. Si f es además positiva, el objetivo de esta sección es determinar el volumen ($(n+1)$-dimensional) encerrado por la gráfica de f y los hiperplanos $x_j = a_j$, $x_j = b_j$, $j = 1, \ldots, n$, $x_{n+1} = 0$, ver Figura 2.1. La idea es aproximar el volumen mediante volúmenes de rectángulos contenidos o que contienen a la región, utilizando particiones del rectángulo R, ver Figura 2.3, para el caso bidimensional.

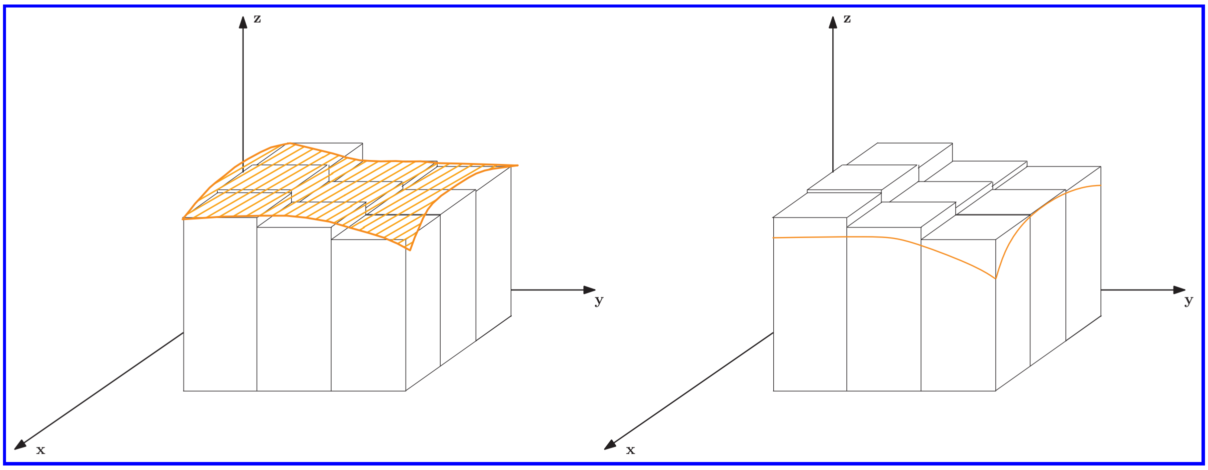

Figure 2.3: Aproximación por rectángulos

Con las notaciones de la sección anterior, consideremos $\mathcal{P} \in \mathscr{P}(R)$ y para cada subrectángulo $R_{i_1,\ldots,i_n}$, los valores $M_{i_1,\ldots,i_n} = \sup\limits_{x \in R_{i_1,\ldots,i_n}}\{f(x)\}$ y $m_{i_1,\ldots,i_n} = \inf\limits_{x \in R_{i_1,\ldots,i_n}}\{f(x)\}$.

Entonces, $S(f, \mathcal{P}) = \displaystyle\sum_{i_1=0}^{k_1-1} \cdots \sum_{i_n=0}^{k_n-1} M_{i_1,\ldots,i_n} \mathsf{v}(R_{i_1,\ldots,i_n})$, la suma de los volúmenes de los rectángulos $(n+1)$-dimensionales cuya base es el rectángulo $R_{i_1,\ldots,i_n}$ y cuya altura es el intervalo $[0, M_{i_1,\ldots,i_n}]$, será una aproximación por exceso del volumen buscado (ver Figura 2.3 derecha).

Por otra parte, $s(f, \mathcal{P}) = \displaystyle\sum_{i_1=0}^{k_1-1} \cdots \sum_{i_n=0}^{k_n-1} m_{i_1,\ldots,i_n} \mathsf{v}(R_{i_1,\ldots,i_n})$, la suma de los volúmenes de los rectángulos $(n+1)$-dimensionales cuya base es el rectángulo $R_{i_1,\dots,i_n}$ y altura es $[0, m_{i_1,\dots,i_n}]$ será una aproximación por defecto del volumen buscado (ver Figura 2.3 izquierda)

Aunque para entender mejor el significado geométrico de los valores $s(f,\mathcal{P})$ y $S(f,\mathcal{P})$ hemos supuesto que $f \ge 0$, tienen sentido sin esa hipótesis y por tanto para cualquier función acotada. Así pues,

si $f\colon R \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función acotada y $\mathcal{P} \in \mathscr{P}(R)$, para cada subrectángulo $R_{i_1,\dots,i_n}$, $i_j = 0,\dots,k_j-1$, $j=1,\dots,n$ consideramos

$$M_{i_1,\dots,i_n} = \sup_{x\in R_{i_1,\dots,i_n}} \{f(x)\} \quad \text{y} \quad m_{i_1,\dots,i_n} = \inf_{x\in R_{i_1,\dots,i_n}} \{f(x)\}.$$

Definimos las **sumas inferior y superior asociadas a f y a $\mathcal{P}$** como

$$s(f,\mathcal{P}) = \sum_{i_1=0}^{k_1-1}\cdots\sum_{i_n=0}^{k_n-1} m_{i_1,\dots,i_n}\mathsf{v}(R_{i_1,\dots,i_n}) \ \text{ y } \ S(f,\mathcal{P}) = \sum_{i_1=0}^{k_1-1}\cdots\sum_{i_n=0}^{k_n-1} M_{i_1,\dots,i_n}\mathsf{v}(R_{i_1,\dots,i_n}).$$

Como $m_R \le m_{i_1,\dots,i_n} \le M_{i_1,\dots,i_n} \le M_R$ para cada $i_j = 0,\dots,k_j-1$, $j=1,\dots,n$, y $\mathsf{v}(R) = \sum\limits_{i_1=0}^{k_1-1}\cdots\sum\limits_{i_n=0}^{k_n-1}\mathsf{v}(R_{i_1,\dots,i_n})$, es claro que $\boxed{m_R\mathsf{v}(R) \le s(f,\mathcal{P}) \le S(f,\mathcal{P}) \le M_R\mathsf{v}(R).}$

Al igual que cuando f es positiva, $s(f,\mathcal{P})$ y $S(f,\mathcal{P})$ tienen un significado geométrico claro, en este caso general podemos también dar un significado geométrico a la diferencia $S(f,\mathcal{P}) - s(f,\mathcal{P})$: Consideremos $\Gamma(f) = \big\{\big(x,f(x)\big) : x \in R\big\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$, la gráfica de $f\colon R \longrightarrow \mathbb{R}$ y para cada $i_j = 0,\dots,k_j-1$, $j=1,\dots,n$ consideremos el rectángulo $\widehat{R}_{i_1,\dots,i_n} = R_{i_1,\dots,i_n} \times [m_{i_1,\dots,i_n}, M_{i_1,\dots,i_n}] \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Claramente $\Gamma(f) \subset \bigcup\limits_{i_1=0}^{k_1-1}\cdots\bigcup\limits_{i_n=0}^{k_n-1}\widehat{R}_{i_1,\dots,i_n}$ y además

$$\sum_{i_1=0}^{k_1-1}\cdots\sum_{i_n=0}^{k_n-1}\mathsf{v}_{n+1}(\widehat{R}_{i_1,\dots,i_n}) = \sum_{i_1=0}^{k_1-1}\cdots\sum_{i_n=0}^{k_n-1}(M_{i_1,\dots,i_n} - m_{i_1,\dots,i_n})\mathsf{v}(R_{i_1,\dots,i_n}) = S(f,\mathcal{P}) - s(f,\mathcal{P})$$

Por otra parte, si $\mathcal{P}' \in \mathscr{P}(R)$ y $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}'$, cada subrectángulo $\widehat{R}$ de $\mathcal{P}$ es unión de subrectángulos $R_1,\dots,R_k$ de $\mathcal{P}'$ cuyos interiores son disjuntos, de manera que $\mathsf{v}(\widehat{R}) = \mathsf{v}(R_1)+\cdots\mathsf{v}(R_k)$. Como para cada $j=1,\dots,k$, se satisface que

$$\inf_{x\in R}\{f(x)\} \le \inf_{x\in R_j}\{f(x)\} \le \sup_{x\in R_j}\{f(x)\} \le \sup_{x\in R}\{f(x)\},$$

concluimos que si $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}'$, entonces $s(f,\mathcal{P}) \le s(f,\mathcal{P}') \le S(f,\mathcal{P}') \le S(f,\mathcal{P})$. Como además, dadas $\mathcal{P},\mathcal{P}' \in \mathscr{P}(R)$, siempre podemos encontrar $\widehat{\mathcal{P}} \in \mathscr{P}(R)$ tal que $\mathcal{P},\mathcal{P}' \subset \widehat{\mathcal{P}}$, de la propiedad anterior deducimos que $s(f,\mathcal{P}) \le s(f,\widehat{\mathcal{P}}) \le S(f,\widehat{\mathcal{P}}) \le S(f,\mathcal{P}')$ de manera que $\boxed{\text{si } \mathcal{P},\mathcal{P}' \in \mathscr{P}(R) \text{ son particiones de } R\text{, entonces } s(f,\mathcal{P}) \le S(f,\mathcal{P}').}$

El resultado anterior permite definir para cada función acotada $f\colon R \longrightarrow \mathbb{R}$ las integrales Inferior y Superior de f respectivamente como

$$\underline{\int}_R f = \sup_{\mathcal{P}\in\mathscr{P}(R)} s(f,\mathcal{P}) \qquad \text{y} \qquad \overline{\int}_R f = \inf_{\mathcal{P}\in\mathscr{P}(R)} S(f,\mathcal{P}).$$

Es claro que para cada función acotada $f\colon R \longrightarrow \mathbb{R}$ y para cada $\mathcal{P}\in\mathscr{P}(R)$, se tiene que

$$m_R \mathsf{v}(R) \le s(f,\mathcal{P}) \le \underline{\int}_R f \le \overline{\int}_R f \le S(f,\mathcal{P}) \le M_R \mathsf{v}(R),$$

desigualdades que motivan la siguiente definición.

Una función <u>acotada</u>, $f\colon R \longrightarrow \mathbb{R}$ es Integrable Riemann, o simplemente Integrable si $\underline{\int}_R f = \overline{\int}_R f$ y a ese valor se lo denota por $\int_R f$, $\int_R f(x)dx$, $\int_R f d\boldsymbol{V}$ o incluso por $\int_{a_1}^{b_1}\cdots\int_{a_n}^{b_n} f(x_1,\dots,x_n)dx_1\cdots dx_n$.
El conjunto de funciones integrables Riemann en R se denota por $\mathscr{R}(R)$.

Es importante señalar que en las definiciones anteriores es fundamental el hecho de que la función f sea acotada y no el que R sea un rectángulo cerrado. Podríamos haber efectuado el desarrollo precedente en intervalos abiertos o cualquier otra clase de intervalos acotados, sin que los resultados fundamentales se vieran afectados, ya que bastaría extender f a $\bar{R}$ manteniendo la acotación en $\bar{R}$, tal y como hicimos en el caso de una variable en el Tema 1b sobre integración impropia. Por tanto, para funciones acotadas en $\bar{R}$, tendríamos que $f\in\mathscr{R}(\bar{R})$ sii $f\in\mathscr{R}(\widehat{R})$ para rectángulo $\widehat{R}$ tal que $\mathring{R}\subset\widehat{R}\subset\bar{R}$ y además $\int_{\widehat{R}} f = \int_{\bar{R}} f$. Este resultado es compatible con la observación siguiente: Para cada rectángulo R, $\partial R = \bar{R}\setminus\mathring{R}$ es unión de rectángulos degenerados; es decir, de volumen nulo. De las desigualdades $m_R\mathsf{v}(R) \le \underline{\int}_R f \le \overline{\int}_R f \le M_R\mathsf{v}(R)$, deducimos que cualquier función acotada en un rectángulo degenerado es integrable y de integral nula. Suponiendo que hubiéramos extendido la definición de integral a una unión disjunta de rectángulos, entonces se satisface que $\int_{\bar{R}} f = \int_{\partial R} f + \int_{\mathring{R}} f = \int_{\mathring{R}} f$.

Las construcciones anteriores determinan la siguiente caracterización de las funciones integrables (Riemann):

Criterio de Darboux de integrabilidad

Si $f\colon R\longrightarrow\mathbb{R}$ es una función <u>acotada</u>, entonces $f\in\mathscr{R}(R)$ sii para cada $\varepsilon>0$ existe $\mathcal{P}\in\mathscr{P}(R)$ tal que

$$S(f,\mathcal{P}) - s(f,\mathcal{P}) \le \varepsilon$$

Si $\mathcal{P},\mathcal{P}'\in\mathscr{P}(R)$ son tales que $\mathcal{P}\subset\mathcal{P}'$, entonces $S(f,\mathcal{P}')-s(f,\mathcal{P}')\le S(f,\mathcal{P})-s(f,\mathcal{P})$ y por tanto si $\mathcal{P}$ satisface la desigualdad anterior, lo mismo ocurre para cada partición más fina que $\mathcal{P}$.

El criterio de Darboux puede interpretarse geométricamente como sigue: Si $f\in\mathscr{R}(R)$, entonces para cada $\varepsilon>0$, la gráfica de f puede recubrirse por una cantidad finita de rectángulos de interiores disjuntos y cuya suma de volúmenes es menor que ε. En la siguiente sección volveremos a esta interpretación geométrica y una vez establecidas las definiciones adecduadas, concluiremos que si $f\in\mathscr{R}(R)$, entonces su gráfica tiene contenido nulo.

Por otra parte, el criterio de integrabilidad de Darboux puede formularse en los siguientes términos secuenciales, que en ocasiones representa una fórmula algo más operativa que la anterior:

Sea $f\colon R\longrightarrow\mathbb{R}$ una función acotada. Entonces $f\in\mathscr{R}(R)$ sii existe $\{\mathcal{P}_k\}_{k=1}^{\infty}\subset\mathscr{P}(R)$ tal que $\lim\limits_{k\to\infty}\big(S(f,\mathcal{P}_k)-s(f,\mathcal{P}_k)\big)=0$. Si esto ocurre, entonces

$$\int_R f=\lim_{k\to\infty}S(f,\mathcal{P}_k)=\lim_{k\to\infty}s(f,\mathcal{P}_k).$$

Aunque no es necesario, en el resultado anterior podríamos imponer que $\lim\limits_{k\to\infty}\delta(P_k)=0$, ya que siempre podríamos sustituir $\mathcal{P}_k$ por $\mathcal{P}_k'$ tal que $\mathcal{P}_k\subset\mathcal{P}_k'$ y $\delta(\mathcal{P}_k')\le\frac{1}{k}$.

La primera pregunta que debemos plantear acerca del conjunto $\mathscr{R}(R)$ de funciones integrables Riemann en el rectángulo R, es si contiene suficientes funciones y si las propiedades de la integración son suficientes para las aplicaciones futuras. Los primeros resultados son consecuencia directa de $m_R\mathsf{v}(R)\le\underline{\int}_R f\le\overline{\int}_R f\le M_R\mathsf{v}(R)$, desigualdades que son válidas para toda función acotada en R.

- Si $f\in\mathscr{R}(R)$, entonces $m_R\mathsf{v}(R)\le\displaystyle\int_R f\le M_R\mathsf{v}(R)$.
- Si $\mathsf{v}(R)=0$, entonces toda función acotada es integrable y su integral es nula.
- Si f es constante, $f(x)=\alpha$ para cada $x\in R$, entonces $f\in\mathscr{R}(R)$ y $\displaystyle\int_R f=\alpha\mathsf{v}(R)$.
- Si $f\in\mathscr{R}(R)$ y $f(x)\ge 0$ para cada $x\in R$, entonces $0\le\displaystyle\int_R f$.

Cuando R es no degenerado, el primero de los resultados anteriores también puede interpretarse en términos del promedio de valores de f sobre R; $m_R\le\dfrac{1}{\mathsf{v}(R)}\displaystyle\int_R f\le M_R$.

El tercero de los resultados anteriores es compatible con la interpretación geométrica de la integral que motivó su construcción: Si $f(x) = \alpha$ para cada $x \in R$ y suponemos que $\alpha \geq 0$, entonces el recinto comprendido entre la gráfica de f y los hiperplanos $x_j = a_j$, $x_j = b_j$, $j = 1, \ldots, n$ es el rectángulo $(n+1)$ dimensional $R \times I$, de base R y altura $I = [0, \alpha]$, cuyo volumen es precisamente $\alpha \mathsf{v}(R)$. Asimismo, dicho resultado implica, en particular, que $\displaystyle\int_R 1 = \mathsf{v}(R)$ e $\displaystyle\int_R 0 = 0$.

Acabamos de demostrar que si R es degenerado, entonces $\mathscr{R}(R)$ coincide con las funciones acotadas sobre R y que si R no es degenerado, $\mathscr{R}(R)$ contiene al menos las funciones constantes. Más generalmente, tenemos el siguiente resultado que muestra que $\mathscr{R}(R)$ contiene contiene a todas las funciones continuas y por tanto una gran cantidad de funciones.

Si $f \in \mathscr{C}(R)$, entonces $f \in \mathscr{R}(R)$ y además, para cada sucesión $\{\mathcal{P}_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathscr{P}(R)$ tal que $\lim\limits_{k\to\infty} \delta(\mathcal{P}_k) = 0$ se satisface que

$$\int_R f = \lim_{k\to\infty} S(f, \mathcal{P}_k) = \lim_{k\to\infty} s(f, \mathcal{P}_k).$$

Demostración: Como el resultado es cierto si R es degenerado, podemos suponer que $\mathsf{v}(R) > 0$. Como R es un conjunto compacto, si $f \in \mathscr{C}(R)$, entonces f es uniformemente continua. Por tanto, $\boxed{\text{dado } \varepsilon > 0,}$ existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| \leq \dfrac{\varepsilon}{\mathsf{v}(R)}$ para cada $x, y \in R$ tales que $|x - y| \leq \delta$.

Además, si $\mathcal{P} \in \mathscr{P}(R)$ y $R_1, \ldots, R_m$ son los subrectángulos de $\mathcal{P}$, como cada uno de ellos es compacto, para cada $j = 1, \ldots, m$ existen $\xi_j, \eta_j \in R_j$ tales que $f(\xi_j) = M_j$ y $f(\eta_j) = m_j$.

Como $\lim\limits_{k\to\infty} \delta(\mathcal{P}_k) = 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}^*$ tal que si $k \geq k_0$ entonces $\delta(\mathcal{P}_k) \leq \delta$. Dado $k \geq k_0$, si $R_1, \ldots, R_m$ son los subrectángulos de $\mathcal{P}_k$ entonces $\delta(R_j) \leq \delta(\mathcal{P}) \leq \delta$, lo que implica que $|\xi_j - \eta_j| \leq \delta$ y por tanto que $|f(\xi_j) - f(\eta_j)| \leq \dfrac{\varepsilon}{\mathsf{v}(R)}$. Así pues, $\mathcal{P}_k$ satisface que

$$S(f, \mathcal{P}_k) - s(f, \mathcal{P}_k) = \sum_{j=1}^{m} \big(f(\xi_j) - f(\eta_j)\big)\mathsf{v}(R_j) \leq \frac{\varepsilon}{\mathsf{v}(R)} \sum_{j=1}^{m} \mathsf{v}(R_j) = \varepsilon.$$

de manera que $\lim\limits_{k\to\infty} \big(S(f, \mathcal{P}_k) - s(f, \mathcal{P}_k)\big) = 0$, lo que implica tanto que $f \in \mathscr{R}(R)$ como la convergencia de las sumas superiores e inferiores a su integral. $\square$

Resumiremos a continuación las propiedades de las funciones integrables y de la integral de Riemann, entendida ésta como una aplicación, o funcional, $\mathscr{I} : \mathscr{R}(R) \longrightarrow \mathbb{R}$. También, demostraremos algunas propiedades adicionales.

Propiedades de la Integral de Riemann

- **Linealidad**: $\mathscr{R}(R)$ es un espacio vectorial real que contiene a $\mathscr{C}(R)$ y la integral un funcional lineal sobre él: Si $f,g\in\mathscr{R}(R)$, para cada $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ $\alpha f+\beta g\in\mathscr{R}(R)$ y $\displaystyle\int_R(\alpha f+\beta g)=\alpha\int_R f+\beta\int_R g$. Además, sobre el conjunto de funciones constantes en R, la integral coincide con la multiplicación por $\mathsf{v}(R)$.

- **Estabilidad**: Cualquier operación continua con una función integrable Riemann en R es una función integrable Riemann en R; es decir, si $\mathscr{O}\colon\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ es continua, entonces para cada $f\in\mathscr{R}(R)$ se satisface que $\mathscr{O}(f)\in\mathscr{R}(R)$. En particular, $|f|,f^2\in\mathscr{R}(R)$ cuando $f\in\mathscr{R}(R)$ y $fg,\max\{f,g\},\min\{f,g\}\in\mathscr{R}(R)$, para cada $f,g\in\mathscr{R}(R)$.

- **Positividad**: La integral es un funcional positivo sobre $\mathscr{R}(R)$; es decir, si $f\in\mathscr{R}(R)$ y $f(x)\ge 0$ para todo $x\in R$, entonces $\displaystyle\int_R f\ge 0$.

- **Monotonía**: Si $f,g\in\mathscr{R}(R)$ y $f(x)\le g(x)$ para todo $x\in R$, entonces $\displaystyle\int_R f\le\int_R g$.
  Equivalentemente, si $f\in\mathscr{R}(R)$, entonces $\displaystyle\left|\int_R f\right|\le\int_R|f|$.

- **Anulación**: Si $\mathsf{v}(R)=0$, entonces toda función acotada es integrable en R y su integral es nula. Si R no es degenerado y $f\in\mathscr{R}(R)$ es tal que $f\ge 0$ en R y $\displaystyle\int_R f=0$, entonces f es nula en cada punto en el que es continua. En particular, si $f\in\mathscr{C}(R)$ es tal que $f\ge 0$ en R, entonces $\displaystyle\int_R f=0$ sii $f=0$ en R.

- **Aditividad respecto del rectángulo de integración**: Consideremos $R_1,\dots,R_m$ rectángulos cerrados tales que $R=\bigcup\limits_{j=1}^m R_j$ y $\mathring{R}_i\cap\mathring{R}_j=\emptyset$ si $i\ne j$. Si $f\colon R\longrightarrow\mathbb{R}$ es una función acotada, entonces $f\in\mathscr{R}(R)$ sii $f_{|R_j}\in\mathscr{R}(R_j)$, para cada $j=1,\dots,m$ y en ese caso,
$$\int_R f=\int_{R_1}f+\cdots+\int_{R_m}f.$$

- **Aditividad finita**: Consideremos $R_1,\dots,R_m$ rectángulos cerrados tales que $R=\bigcup\limits_{j=1}^m R_j$ y $\mathring{R}_i\cap\mathring{R}_j=\emptyset$ si $i\ne j$. Entonces, $\mathsf{v}(R)=\mathsf{v}(R_1)+\cdots+\mathsf{v}(R_m)$.

- **Continuidad respecto del integrando**: Si $f,g\in\mathscr{R}(R)$ son tales que $|f(x)-g(x)|\le\varepsilon$ para cada $x\in R$, entonces $\displaystyle\left|\int_R f-\int_R g\right|\le\varepsilon\mathsf{v}(R)$. Por tanto, si $\{f_m\}_{m=1}^\infty\subset\mathscr{R}(R)$ converge uniformemente hacia $f\colon R\longrightarrow\mathbb{R}$, entonces $f\in\mathscr{R}(R)$ y además,
$$\lim_{m\to\infty}\int_R f_m=\int_R f.$$

Demostración: • Positividad y Anulación: La positividad de la integral y la primera parte de la de anulación ya han sido demostradas. La monotonía es una consecuencia directa de la positividad y de que $f-g\in\mathscr{R}(R)$ cuando $f,g\in\mathscr{R}(R)$. Por otra parte, supuesto que $|f|\in\mathscr{R}(R)$ cuando $f\in\mathscr{R}(R)$, como $-|f|\le f\le|f|$ la monotonía implica que $\left|\int_R f\right|\le\int_R|f|$. Recíprocamente, si se satisface la anterior propiedad y $f\in\mathscr{R}(R)$ satisface que $f\ge 0$ en R, entonces $|f|=f$ y por tanto, $0\le\left|\int_R f\right|\le\int_R|f|=\int_R f$. Así pues, asumiendo que $\mathscr{R}(R)$ es un espacio vectorial cerrado para módulos, positividad, monotonía y la propiedad de la integral del módulo, son equivalentes.

Por otra parte, si $f\in\mathscr{R}(R)$, $f\ge 0$ en R, supongamos que f es continua en $x_0\in R$. Si $f(x_0)\ne 0$, necesariamente $f(x_0)>0$ y podemos encontrar $\widehat{R}\subset R$ un rectángulo no degenerado conteniendo a x_0 y tal que tal que $f(x)>0$ para cada $x\in\widehat{R}$, lo que implica que $m_{\widehat{R}}>0$. Si $\mathcal{P}\in\mathscr{P}(R)$ contiene a $\widehat{R}$ como subrectángulo, resulta que $0<\mathsf{v}(\widehat{R})m_{\widehat{R}}\le s(f,\mathcal{P})\le\int_R f$, lo que contradice la hipótesis $\int_R f=0$. Por tanto, $f(x_0)=0$.

• Estabilidad: Desde esta propiedad se satisface si R es degenerado, así que supondremos que R es no degenerado. Consideremos primero $g=\mathscr{O}(f)$ y los valores $m_f=\inf\limits_{x\in R}\{f(x)\}$ y $M_f=\sup\limits_{x\in R}\{f(x)\}$. Como $\mathscr{O}$ es continua en el compacto $[m_f,M_f]$, es acotada y podemos considerar $\widetilde{M}=\max\limits_{x\in[m_f,M_f]}\{|\mathscr{O}(x)|\}$. Si $\widetilde{M}=0$, entonces $g=0$ y el resultado se satisface. Supondremos pues que $\widetilde{M}>0$.

Fijado $\boxed{\varepsilon>0,}$ como $\mathscr{O}$ es uniformemente continua en $[m_f,M_f]$, $\boxed{\text{existe } 0<\delta\le\varepsilon}$ tal que $|\mathscr{O}(x)-\mathscr{O}(y)|\le\dfrac{\varepsilon}{2\mathsf{v}(R)}$ para cada $x,y\in[m_f,M_f]$ tales que $|x-y|\le\delta$.

Consideremos $\mathcal{P}\in\mathscr{P}(R)$ tal que $S(f,\mathcal{P})-s(f,P)\le\dfrac{\delta^2}{4\widetilde{M}}$, $R_1,\dots,R_N$ los subrectángulos de $\mathcal{P}$ y $m_j=\inf\limits_{x\in R_j}\{f(x)\}$, $M_j=\sup\limits_{x\in R_j}\{f(x)\}$, $m_j^*=\inf\limits_{x\in R_j}\{g(x)\}$ y $M_j^*=\sup\limits_{x\in R_j}\{g(x)\}$.

Definamos ahora los conjuntos de índices $A=\Big\{j\in\{1,\dots,N\}:M_j-m_j<\delta\Big\}$ y $B=\{1,\dots,N\}\setminus A$.

Si $i\in A$, entonces la continuidad uniforme de $\mathscr{O}$ implica que $M_i^*-m_i^*\le\dfrac{\varepsilon}{2\mathsf{v}(R)}$. Por otra parte, si $i\in B$, entonces $M_i^*-m_i^*\le 2\widetilde{M}$ y además

$$\delta\sum_{j\in B}\mathsf{v}(R_j)\le\sum_{j\in B}(M_j-m_j)\mathsf{v}(R_j)\le S(f,\mathcal{P})-s(f,P)\le\frac{\delta^2}{4\widetilde{M}},$$

lo que implica que $\sum\limits_{j\in B}\mathsf{v}(R_j)\le\dfrac{\delta}{4\widetilde{M}}\le\dfrac{\varepsilon}{4\widetilde{M}}$. De las acotaciones anteriores deducimos que

$$\begin{aligned}S(g,\mathcal{P})-s(g,\mathcal{P})&=\sum_{j\in A}(M_j^*-m_j^*)\mathsf{v}(R_j)+\sum_{j\in B}(M_j^*-m_j^*)\mathsf{v}(R_j)\\&\le\frac{\varepsilon}{2\mathsf{v}(R)}\sum_{j\in A}\mathsf{v}(R_j)+2\widetilde{M}\sum_{j\in B}\mathsf{v}(R_j)\le\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\end{aligned}$$

Aplicando la propiedad de estabilidad a $\mathscr{O}(x) = |x|$ y a $\mathscr{O}(x) = x^2$ deducimos que si $f \in \mathscr{R}(R)$, entonces $|f|, f^2 \in \mathscr{R}(R)$. Supuesta demostrada la linealidad, si $f, g \in \mathscr{R}(R)$, las identidades $4fg = (f+g)^2 - (f-g)^2$ y $2\max\{f,g\} = f + g + |f-g|$ y $2\min\{f,g\} = f + g - |f-g|$, concluyen que $fg, \max\{f,g\}, \min\{f,g\} \in \mathscr{R}(R)$.

• Linealidad: La demostración la realizaremos en dos etapas: primero probaremos la homogeneidad y después la aditividad. Recordemos que si A es un conjunto y $g\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned} &\inf_{x\in A}\{\alpha g(x)\} = \alpha \inf_{x\in A}\{g(x)\}, \quad \sup_{x\in A}\{\alpha g(x)\} = \alpha \sup_{x\in A}\{g(x)\}, \quad \text{si } \alpha \ge 0,\\ &\inf_{x\in A}\{\alpha g(x)\} = \alpha \sup_{x\in A}\{g(x)\}, \quad \sup_{x\in A}\{\alpha g(x)\} = \alpha \inf_{x\in A}\{g(x)\}, \quad \text{si } \alpha < 0, \end{aligned}$$

mientras si $\phi, \psi\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned} \inf_{x\in A}\{\phi(x)\} + \inf_{x\in A}\{\psi(x)\} \le \inf_{x\in A}\{\phi(x)+\psi(x)\} &\le \sup_{x\in A}\{\phi(x)+\psi(x)\}\\ &\le \sup_{x\in A}\{\phi(x)\} + \sup_{x\in A}\{\psi(x)\}. \end{aligned}$$

Si $f\colon R \longrightarrow \mathbb{R}$ es acotada, para cada partición $P \in \mathscr{P}(R)$ se tiene que $\boxed{\text{si } \alpha \ge 0,}$ entonces $s(\mathcal{P}, \alpha f) = \alpha s(\mathcal{P}, f)$ y $S(\mathcal{P}, \alpha f) = \alpha S(\mathcal{P}, f)$, lo que implica que $\underline{\int}_R (\alpha f) = \alpha \underline{\int}_R f$ y $\overline{\int}_R (\alpha f) = \alpha \overline{\int}_R f$, mientras que $\boxed{\text{si } \alpha < 0,}$ $s(\mathcal{P}, \alpha f) = \alpha S(\mathcal{P}, f)$ y $S(\mathcal{P}, \alpha f) = \alpha s(\mathcal{P}, f)$, lo que a su vez implica que $\underline{\int}_R (\alpha f) = \alpha \overline{\int}_R f$ y $\overline{\int}_R (\alpha f) = \alpha \underline{\int}_R f$. En definitiva, si $f \in \mathscr{R}(R)$, entonces $\alpha f \in \mathscr{R}(R)$ y además se la integral es homogenea.

Si $f, g\colon R \longrightarrow \mathbb{R}$ son acotadas, entonces para cada partición $P \in \mathscr{P}(R)$ se tiene que $s(\mathcal{P}, f) + s(\mathcal{P}, g) \le s(\mathcal{P}, f+g) \le S(\mathcal{P}, f+g) \le S(\mathcal{P}, f) + S(\mathcal{P}, g)$, lo que implica que

$$\underline{\int}_R f + \underline{\int}_R g \le \underline{\int}_R (f+g) \le \overline{\int}_R (f+g) \le \overline{\int}_R f + \overline{\int}_R g,$$

y por tanto que $f + g \in \mathscr{R}(R)$ y la aditividad de la integral cuando $f, g \in \mathscr{R}(R)$.

• Aditividad: Por la propiedad de Recubrimiento, es suficiente demostrar la aditividad respecto del rectángulo de integración cuando $R_1, \dots, R_m$ son los rectángulos de una partición $\mathcal{P} \in \mathscr{P}(R)$.

Si $f \in \mathscr{R}(R)$, para cada $j = 1, \dots, m$, denotaremos como $f_j = f_{|R_j}$. Si $\mathcal{P}' \in \mathscr{P}(R)$ entonces $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}'$ sii para cada $j = 1, \dots, m$ los subrectángulos de $\mathcal{P}'$ contenidos en R_j forman una partición $\mathcal{P}_j \in \mathscr{P}(R_j)$ y además, $s(f, \mathcal{P}') = \sum\limits_{j=1}^m s(f_j, \mathcal{P}_j)$ y $S(f, \mathcal{P}') = \sum\limits_{j=1}^m S(f_j, \mathcal{P}_j)$. Por tanto, para cada $j = 1, \dots, m$, se tiene que

$$S(f_j, \mathcal{P}_j) - s(f_j, \mathcal{P}_j) \le \sum_{i=1}^m \big(S(f_i, \mathcal{P}_i) - s(f_i, \mathcal{P}_i)\big) = S(f, \mathcal{P}') - s(f, \mathcal{P}')$$

Dado $\boxed{\varepsilon > 0,}$ si $f \in \mathscr{R}(R)$, basta tomar $\mathcal{P}'$ más fina que $\mathcal{P}$ tal que $S(f,\mathcal{P}') - s(f,\mathcal{P}') \le \varepsilon$ para concluir que $S(f_j,\mathcal{P}_j) - s(f_j,\mathcal{P}_j) \le \varepsilon$ para cada $j = 1,\dots,m$; mientras que si $f_j \in \mathscr{R}(R_j)$ para $j = 1,\dots,m$, basta tomar $\mathcal{P}_j \in \mathscr{P}(R_j)$ tal que $S(f_j,\mathcal{P}_j) - s(f_j,\mathcal{P}_j) \le \dfrac{\varepsilon}{m}$ para concluir que $f \in \mathscr{R}(R)$.

Finalmente como $s(f_j,\mathcal{P}_j) \le \int_{R_j} f \le S(f_j,\mathcal{P}_j)$ para cada $j = 1,\dots,m$, resulta que

$$s(f,\mathcal{P}') = \sum_{i=1}^{m} s(f_i,\mathcal{P}_i) \le \sum_{j=1}^{m} \int_{R_j} f \le \sum_{i=1}^{m} S(f_i,\mathcal{P}_i) = S(f,\mathcal{P}')$$

lo que implica que $\left| \int_R f - \sum\limits_{j=1}^{m} \int_{R_j} f \right| \le S(f,\mathcal{P}') - s(f,\mathcal{P}') \le \varepsilon$. Como la desigualdad se ssatisface para cada $\varepsilon > 0$, tenemos finalmente que $\int_R f = \sum\limits_{j=1}^{m} \int_{R_j} f$.

La propiedad de aditividad finita se deduce aplicando la de aditividad respecto del rectángulo de integración a la función $f = 1$ en R.

• Continuidad: Como $|f - g| \in \mathscr{R}(R)$, aplicando la aditividad y la monotonía de la integral, obtenemos que

$$\left| \int_R f - \int_r g \right| = \left| \int_R (f - g) \right| \le \int_R |f - g| \le \int_R \varepsilon = \varepsilon \mathsf{v}(R).$$

Por otra parte, como $\{f_m\}_{m=1}$ converge uniformemente hacia $f\colon R \longrightarrow \mathbb{R}$, dado $\boxed{\varepsilon > 0,}$ existe $m_0 \in \mathbb{N}^*$ tal que $|f_m(x) - f(x)| \le \frac{\varepsilon}{4\mathsf{v}(R)}$ para cada $x \in R$, si $m \ge m_0$. Si suponemos demostrado que $f \in \mathscr{R}(R)$, entonces aplicando el resultado anterior, obtenemos que para cada $m \ge m_0$,

$$\left| \int_R f_m - \int_R f \right| \le \int_R |f_m - f| \le \frac{\varepsilon}{4\mathsf{v}(R)}\, \mathsf{v}(R) = \frac{\varepsilon}{4} < \varepsilon,$$

de donde se concluye que $\lim\limits_{m\to\infty} \int_R f_m = \int_R f$.

Si $m \ge m_0$, como $f_m \in \mathscr{R}(R)$, existe $\mathcal{P} \in \mathcal{P}(R)$ tal que $S(f,\mathcal{P}) - s(f,\mathcal{P}) \le \frac{\varepsilon}{2}$. Las desigualdades $f_m(x) - \frac{\varepsilon}{2\mathsf{v}(R)} \le f(x) \le f_m(x) + \frac{\varepsilon}{4\mathsf{v}(R)}$, válidas para cada $x \in R$ implican que para cada rectángulo $\widehat{R}$ de la partición $\mathcal{P}$ se tiene que

$$\inf_{x\in R}\{f_m(x)\} - \frac{\varepsilon}{4\mathsf{v}(R)} \le \inf_{x\in R}\{f(x)\} \le \sup_{x\in R}\{f(x)\} \le \sup_{x\in R}\{f_m(x)\} + \frac{\varepsilon}{4\mathsf{v}(R)}$$

desigualdades que a su vez, implican que

$$s(f_m,\mathcal{P}) - \frac{\varepsilon}{4} \le s(f,\mathcal{P}) \le S(f,\mathcal{P}) \le S(f_m,\mathcal{P}) + \frac{\varepsilon}{4},$$

de donde deducimos que

$$S(f,\mathcal{P}) - s(f,\mathcal{P}) \le S(f_m,\mathcal{P}) - s(f_m,\mathcal{P}) + \frac{\varepsilon}{2} \le \varepsilon$$

y por tanto que $f \in \mathscr{R}(R)$. $\square$

La propiedad de estabilidad precisa de la continuidad de $\mathscr{O}$ en todo punto, ver el apartado (c) del Problema 1.

El resultado sobre la aditividad respecto del dominio, generaliza a la conocida propiedad de funciones integrables de una variable: Si $a < c < b$, entonces $f \in \mathscr{R}([a,b])$ sii $f \in \mathscr{R}([a,c]) \cap \mathscr{R}([c,b])$ y además, $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$, mucho más sencilla de demostrar.

Por otra parte, en la propiedad de aditividad respecto del rectángulo de integración, la identidad $\int_R f = \sum\limits_{j=1}^{m} \int_{R_j} f$ corrobora que necesariamente $\int_C f = 0$ para cada subrectángulo $C \subset \partial R_j$, $j = 1, \dots, n$, pues estos son los conjuntos donde *solapan* los subrectángulos de cada $\mathcal{P} \in \mathscr{P}(R)$. Ya probamos que esta propiedad es cierta, puesto que tal subrectángulo C es degenerado. A continuación precisaremos esta circunstancia con mayor detalle y aprovecharemos para concluir que $\mathscr{R}(R)$ es en general *mayor* que $\mathscr{C}(R)$, en el sentido de la inclusión.

A pesar de la propiedad de continuidad, quizá el defecto fundamental de la Teoría de integración de Riemann es su defectuoso comportamiento en el paso al límite. Volveremos a esta cuestión en secciones posteriores.

Ya hemos demostrado que el conjunto $\mathscr{R}(R)$ es estrictamente mayor que $\mathscr{C}(R)$ cuando R es un rectángulo degenerado. Mostraremos a continuación que esta propiedad es cierta también en rectángulos no degenerados. Para ello construiremos una función integrable en R que no es continua. Supongamos pues que $\mathsf{v}(R) > 0$ y consideremos el subrectángulo de R dado por $C = \{a_1\} \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$. Consideremos también $f\colon R \longrightarrow \mathbb{R}$ una función acotada tal que $f(x) = 0$ si $x \notin C$. Claramente f es discontinua en $x \in C$ sii $f(x) \neq 0$. Consideraremos también $M = \sup\limits_{x \in C}\{|f(x)|\} = \sup\limits_{x \in R}\{|f(x)|\}$, de manera que $f \notin \mathscr{C}(R)$ sii $M > 0$. Consideremos $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \times \cdots \times \mathcal{P}_n \in \mathscr{R}(R)$, donde $\mathcal{P}_1 = \{a_1 < c < b_1\}$ y para cada $j = 2, \dots, n$ se tiene que $\mathcal{P}_j = \big\{a_j, b_j\big\}$. Entonces, los rectángulos de la partición son $R_1 = [a_1, c] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ y $R_2 = [c, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots [a_n, b_n]$, de manera que $\mathsf{v}(R_1) = \dfrac{\mathsf{v}(R)}{\ell_1}(c - a_1)$, $v(R_2) = \dfrac{\mathsf{v}(R)}{\ell_1}(b_1 - c)$, $m_1 = \inf\limits_{x \in R_1}\{f(x)\} \le 0$, $M_1 = \sup\limits_{x \in R_1}\{f(x)\} \ge 0$, $m_2 = \inf\limits_{x \in R_2}\{f(x)\} = M_2 = \sup\limits_{x \in R_2}\{f(x)\} = 0$ y por tanto

$$s(f, \mathcal{P}) = m_1 \mathsf{v}(R_1) + 0\,\mathsf{v}(R_2) \quad \text{y} \quad S(f, \mathcal{P}) = M_1 \mathsf{v}(R_1) + 0\,\mathsf{v}(R_2),$$

lo que en particular implica que $S(f, \mathcal{P}) - s(f, \mathcal{P}) \le 2M\mathsf{v}(R_1)$.

Dado $\boxed{\varepsilon > 0,}$ basta considerar $\delta < \ell_1 \min\left\{1, \dfrac{\varepsilon}{2M\,\mathsf{v}(R)}\right\}$ y $c = a_1 + \delta$ para concluir que $S(f, \mathcal{P}) - s(f, \mathcal{P}) \le \varepsilon$ y por tanto, $f \in \mathscr{R}(R)$. Además, para $0 < \delta$ escogido como antes, se tiene que

$$\frac{\mathsf{v}(R)}{\ell_1} m_1\, \delta = s(f, \mathcal{P}) \le S(f, \mathcal{P}) = \frac{\mathsf{v}(R)}{\ell_1} M_1\, \delta,$$

Como $\lim\limits_{\delta \to 0} s(f, \mathcal{P}) = \lim\limits_{\delta \to 0} S(f, \mathcal{P}) = 0$, resulta que $\int_R f = 0$. En definitiva,

$$f \in \mathscr{R}(R),\ \int_R f = 0 \text{ y si existe } x \in C \text{ tal que } f(x) \neq 0, \text{ entonces } f \in \mathscr{R}(R) \setminus \mathscr{C}(R).$$

Aprovecharemos la propiedad de linealidad para generalizar el ejemplo anterior: Si para cada $j = 1, \dots, n$ consideramos los rectángulos

$$C_j = [a_1, b_1] \times \cdots \times \{a_j\} \times \cdots [a_n, b_n] \quad \text{y} \quad D_j = [a_1, b_1] \times \cdots \times \{b_j\} \times \cdots [a_n, b_n]$$

y funciones acotadas $f_j, g_j \colon R \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que $f_j(x) = 0$ si $x \notin C_j$ y $g_j(x) = 0$ si $x \notin D_j$. Adaptando a cada caso el razonamiento anterior, resulta que $f_j, g_j \in \mathscr{R}(R)$ e $\int_R f_j = \int_R g_j = 0$. Si $f = \sum\limits_{j=1}^{n}(f_j + g_j)$ entonces $f(x) = 0$ para cada $x \in \overset{\circ}{R}$ y la propiedad de linealidad implica que $f \in \mathscr{R}(R)$ y además que $\int_R f = 0$.

Por otra parte, dadas $f, g \colon R \longrightarrow \mathbb{R}$ acotadas, definamos la función $h = f - g$ y el conjunto $A = \{x \in R : f(x) \neq g(x)\}$. Si $A \subset \partial R$, entonces el razonamiento anterior muestra que $h \in \mathscr{R}(R)$ y que además $\int_R h = 0$. Como $f = g + h$, $f \in \mathscr{R}(R)$ sii $g \in \mathscr{R}(R)$. En resumen,

Consideremos $f, g \colon R \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones acotadas. Si $f = g$ en $\overset{\circ}{R}$, entonces $f \in \mathscr{R}(R)$ sii $g \in \mathscr{R}(R)$ y en ese caso, $\displaystyle\int_R f = \int_R g$. En particular, si $f = 0$ en $\overset{\circ}{R}$, entonces $f \in \mathscr{R}(R)$ y $\displaystyle\int_R f = 0$. Además, $f \in \mathscr{R}(R) \setminus \mathscr{C}(R)$ sii $f(x) \neq 0$ para algún $x \in \partial R$.

Los resultados anteriores pueden generalizarse fácilmente a la siguiente situación, que representa a su vez un caso particular de un planteamiento global que será analizado en secciones posteriores.

- **Estabilidad geométrica de la integral**: Sean $\widehat{R}$ un rectángulo tal que $\widehat{R} \subset R$ y $f \colon \widehat{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función acotada. Si $f^* \colon R \longrightarrow \mathbb{R}$ está definida como $f^* = f$ en $\widehat{R}$ y $f^* = 0$ en $R \setminus \widehat{R}$, entonces $f^* \in \mathscr{R}(R)$ sii $f \in \mathscr{R}(\widehat{R})$ y en este caso $\displaystyle\int_R f^* = \int_{\widehat{R}} f$. Por tanto, si $f, g \colon R \longrightarrow \mathbb{R}$ son funciones acotadas tales que el conjunto $A = \{x \in R : f(x) \neq g(x)\}$ está contenido en la frontera de algún subrectángulo de R, entonces $f \in \mathscr{R}(R)$ sii $g \in \mathscr{R}(R)$ y en ese caso, $\displaystyle\int_R f = \int_R g$.

Demostración: Sabemos que existe $\mathcal{P} \in \mathscr{P}(R)$ tal que $\widehat{R}$ es un subrectángulo de R. Sea $\widetilde{R}$ un subrectángulo de $\mathcal{P}$ diferente de $\widehat{R}$. Como $\overset{\circ}{\widetilde{R}} \cap \overset{\circ}{\widehat{R}} = \emptyset$, resulta que $f^* = 0$ en $\overset{\circ}{\widetilde{R}}$ y por tanto, $f^* \in \mathscr{R}(\widetilde{R})$ y además $\int_{\widetilde{R}} f^* = 0$. Aplicando la propiedad de aditividad respecto del rectángulo de integración, concluimos que $f^* \in \mathscr{R}(R)$ sii $f \in \mathscr{R}(\widehat{R})$ y en este caso $\int_R f^* = \int_{\widehat{R}} f$.

Finalmente, si suponemos que existe un rectángulo $\widehat{R}\subset R$ tal que $A\subset\partial\widehat{R}$, entonces $h=f-g$ es acotada y su restricción a $\widehat{R}$ es nula en $\overset{\circ}{\widehat{R}}$. Por tanto, $h_{|_{\widehat{R}}}\in\mathscr{R}(\widehat{R})$ y además, $\int_{\widehat{R}}h_{|_{\widehat{R}}}=0$. Como $h^*_{|_{\widehat{R}}}=h$, resulta que $h\in\mathscr{R}(R)$ y además, $\int_R h=\int_R h^*=\int_{\widehat{R}}h_{|_{\widehat{R}}}=0$. Como $f=g+h$, $f\in\mathscr{R}(R)$ sii $g\in\mathscr{R}(R)$ y si esto ocurre ambas funciones tienen la misma integral. □

Dado que cuando R es degenerado, $\mathscr{R}(R)$ coincide con el conjunto de funciones acotadas, nos planteamos si esta propiedad es cierta o falsa en rectángulos arbitrarios. Mostraremos que de hecho es falsa; es decir, existen funciones acotadas en R que no son integrables.

Ejemplo: Si $n\in\mathbb{N}^*$, dados $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, denominamos **función de Dirichlet de parámetros α,β en $\mathbb{R}^n$** a $d_{\alpha,\beta}\colon\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ definida como

$$d_{\alpha,\beta}(x)=\begin{cases}\alpha, & \text{si } x\in\mathbb{Q}^n,\\ \beta, & \text{si } x\notin\mathbb{Q}^n.\end{cases}$$

Si R es no degenerado, identificaremos $d_{\alpha,\beta}$ con su restricción a R. Como los racionales y los irracionales de cada intervalo de $\mathbb{R}$ son conjuntos densos en el intervalo, para cada subrectángulo $\widehat{R}$ de cada partición $\mathcal{P}\in\mathscr{P}(R)$ se satisface que $\widehat{R}\cap\mathbb{Q}^n,\widehat{R}\cap(\mathbb{R}^n\setminus\mathbb{Q}^n)\neq\emptyset$, de manera que $m_{\widehat{R}}=\min\{\alpha,\beta\}$ y $M_{\widehat{R}}=\max\{\alpha,\beta\}$.

Por tanto, $s(\mathcal{P},d_{\alpha,\beta})=\min\{\alpha,\beta\}\mathsf{v}(R)$, mientras que $S(\mathcal{P},d_{\alpha,\beta})=\max\{\alpha,\beta\}\mathsf{v}(R)$. En definitiva, $\underline{\int}_R d_{\alpha,\beta}=\min\{\alpha,\beta\}\mathsf{v}(R)$ y $\overline{\int}_R d_{\alpha,\beta}=\max\{\alpha,\beta\}\mathsf{v}(R)$ y por tanto,

si R es no degenerado, la función de Dirichlet de parámetros $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^n$ es integrable Riemann en el rectángulo R sii $\alpha=\beta$, en cuyo caso es una función constante

La función de Dirichlet $d_{1,0}$ de parámetros $\alpha=1$ y $\beta=0$ suele ser denominarse simplemente función de Dirichlet y se representa como d. El resto de funciones de Dirichlet pueden expresarse fácilmente como combinaciones de d y de la función constantemente igual a 1, concretamente $d_{\alpha,\beta}=\alpha d+\beta(1-d)=\beta+(\alpha-\beta)d$.

• Cuestión 3: Consideremos d, la función de Dirichlet en $\mathbb{R}$. Demostrar que se satisface que $d(x)=\lim\limits_{m\to\infty}\lim\limits_{n\to\infty}\cos^{2n}(m!\,\pi\,x)$, para cada $x\in\mathbb{R}$.

Las funciones de Dirichlet suelen utilizarse para establecer ejemplos o contraejemplos de integrabilidad. Así, para cada rectángulo no degenerado R, la función de Dirichlet de parámetros $1,-1$, $d_{1,-1}$ es un ejemplo de función no integrable Riemann en R cuyo módulo y cuadrado son integrables Riemann en R. Observar que $|d_{1,-1}|=d^2_{1,-1}$ es la función constantemente igual a 1.

Finalizaremos esta sección con una caracterización de la integrabilidad, alternativa a la de Darboux. De hecho, el resultado que demostraremos corresponde al planteamiento original de B. Riemann.

Si $f\colon R \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función acotada y $\mathcal{P} \in \mathscr{P}(R)$, para cada subrectángulo $R_{i_1,\ldots,i_n}$, $i_j = 0,\ldots,k_j-1$, $j = 1,\ldots,n$ consideramos $\xi_{i_1,\ldots,i_n} \in R_{i_1,\ldots,i_n}$. Definimos la **suma de Riemann asociada a f a $\mathcal{P}$ y a la elección de puntos $\{\xi_{i_1,\ldots,i_n}\}$** como

$$R(f,\mathcal{P},\{\xi_{i_1,\ldots,i_n}\}) = \sum_{i_1=0}^{k_1-1}\cdots\sum_{i_n=0}^{k_n-1} f(\xi_{i_1,\ldots,i_n})\mathsf{v}(R_{i_1,\ldots,i_n}).$$

En estas condiciones, diremos que $\lim\limits_{\delta(\mathcal{P})\to 0} R(f,\mathcal{P},\{\xi_{i_1,\ldots,i_n}\}) = I \in \mathbb{R}$ si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\mathcal{P} \in \mathscr{P}(R)$ con $\delta(\mathcal{P}) \le \varepsilon$ y tal que

$$|R(f,\mathcal{P}',\{\xi_{i_1,\ldots,i_n}\}) - I| \le \varepsilon$$

para cada $\mathcal{P}' \in \mathscr{P}(R)$ satisfaciendo $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}'$ y para cada elección de puntos en los subrectángulos de $\mathcal{P}'$. (Observar que I está unívocamente determinado).

Después de las definiciones anteriores, podemos formular el criterio original de integrabilidad.

El Criterio de Riemann de integrabilidad

Si $f\colon R \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función acotada, entonces $f \in \mathscr{R}(R)$ sii existe $\lim\limits_{\delta(\mathcal{P})\to 0} R(f,\mathcal{P},\{\xi_{i_1,\ldots,i_n}\})$ y cuando esto ocurre, $\displaystyle\int_R f = \lim_{\delta(\mathcal{P})\to 0} R(f,\mathcal{P},\{\xi_{i_1,\ldots,i_n}\})$.

Demostración: Observemos primero, que para cada $\mathcal{P} \in \mathscr{P}(R)$ y para cada elección de puntos $\{\xi_{i_1,\ldots,i_n}\}$ se satisface que $s(f,\mathcal{P}) \le R(f,\mathcal{P},\{\xi_{i_1,\ldots,i_n}\}) \le S(f,\mathcal{P})$ y por tanto, si $f \in \mathscr{R}(R)$, entonces $\left|R(f,\mathcal{P},\{\xi_{i_1,\ldots,i_n}\}) - \int_R f\right| \le S(f,\mathcal{P}) - s(f,\mathcal{P})$, lo que implica que existe el $\lim\limits_{\delta(\mathcal{P})\to 0} R(f,\mathcal{P},\{\xi_{i_1,\ldots,i_n}\})$ y es igual a $\int_R f$.

Recíprocamente, si $\lim\limits_{\delta(\mathcal{P})\to 0} R(f,\mathcal{P},\{\xi_{i_1,\ldots,i_n}\}) = I$, dado $\varepsilon > 0$, existe $\mathcal{P} \in \mathscr{P}(R)$ con $\delta(\mathcal{P}) \le \varepsilon$ y tal que $-\dfrac{\varepsilon}{3} \le R(f,\mathcal{P}',\{\xi_{i_1,\ldots,i_n}\}) - I \le \dfrac{\varepsilon}{3}$ para cada $\mathcal{P}' \in \mathscr{P}(R)$ satisfaciendo $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}'$ y para cada elección de puntos en los subrectángulos de $\mathcal{P}'$. Supongamos que $R_1,\ldots,R_m$ son los subrectángulos de $\mathcal{P}$ y para cada $j = 1,\ldots,m$ escojamos $x_j, y_j \in R_j$ tales que $M_j - f(x_j) \le \dfrac{\varepsilon}{3\mathsf{v}(R)}$ y $f(y_j) - m_j \le \dfrac{\varepsilon}{3\mathsf{v}(R)}$. Resulta entonces que

$$R(f,\mathcal{P},\{y_j\}) - s(f,\mathcal{P}) = \sum_{j=1}^m \big(f(y_j) - m_j\big)\mathsf{v}(R_j) \le \frac{\varepsilon}{3\mathsf{v}(R)}\sum_{j=1}^m \mathsf{v}(R_j) = \frac{\varepsilon}{3},$$
$$S(f,\mathcal{P}) - R(f,\mathcal{P},\{x_j\}) = \sum_{j=1}^m \big(M_j - f(x_j)\big)\mathsf{v}(R_j) \le \frac{\varepsilon}{3\mathsf{v}(R)}\sum_{j=1}^m \mathsf{v}(R_j) = \frac{\varepsilon}{3},$$

lo que implica que

$$\begin{aligned} S(f,\mathcal{P})-s(f,P) &= S(f,\mathcal{P})-R(f,\mathcal{P},\{x_j\})+R(f,\mathcal{P},\{x_j\})-I \\ &\quad + I - R(f,\mathcal{P},\{y_j\})+R(f,\mathcal{P},\{y_j\})-s(f,\mathcal{P}) \le \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon. \quad \square \end{aligned}$$

El criterio de Riemann es specialmente simple y útil cuando se aplica a funciones continuas

Si $f \in \mathscr{C}(R)$ para cada sucesión $\{\mathcal{P}_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathscr{P}(R)$ tal que $\lim\limits_{k\to\infty} \delta(\mathcal{P}_k)=0$ se satisface que

$$\int_R f = \lim_{k\to\infty} R(f,\mathcal{P}_k,\{x_j\}).$$

En este caso $R(f,\mathcal{P}_k,\{x_j\})$ respesenta cualquier suma de Riemann para la partición $\mathcal{P}_k$ y el límite debe entenderse en el sentido usual de sucesiones convergentes.

Así por ejemplo, si R es no degenerado, y para cada $k \in \mathbb{N}^*$ consideramos la partición $\mathcal{P}_k=\mathcal{P}_{1,k}\times\cdots\times\mathcal{P}_{n,k}$, donde para cada $j=1,\dots,n$, $\mathcal{P}_{j,k}=\{a_j+ih_j\}_{i=0}^{k}$ con $h_j=\frac{b_j-a_j}{k}$, entonces $\delta(\mathcal{P}_{j,k})=h_j$, lo que implica que $\delta(P_k)=\frac{\delta(R)}{k}$. Por otra parte, los subrectángulos de la partición son

$$R_{i_1,\dots,i_n}=[a_1+i_1h_1,a_1+(i_1+1)h_1]\times\ldots\times[a_n+i_nh_n,a_n+(i_n+1)h_n]$$

$j=1,\dots,n$, $i_j=0,\dots,k-1$, lo que implica que $\mathsf{v}(R_{i_1,\dots,i_n})=\frac{\mathsf{v}(R)}{k^n}$.

Fijado $0\le\theta\le 1$, consideraremos los puntos

$$\xi_{i_1,\dots,i_n}(\theta)=\big(a_1+(i_1+\theta)h_1,\dots,a_n+(i_n+\theta)h_n\big)\in R_{i_1,\dots,i_n}$$

Observar que si $\theta=0$ (respectivamente, si $\theta=1$), tomamos el extremo izquierdo (respectivamente derecho) en cada intervalo de cada subrectángulo $R_{i_1,\dots,i_n}$, mientras que si $\theta=\frac{1}{2}$, la elección corresponde al centro de $R_{i_1,\dots,i_n}$. Si $f\in\mathscr{R}(R)$, la suma de Riemann correspondiente a esta elección de puntos es

$$I_{k,\theta}(f)=\frac{\mathsf{v}(R)}{k^n}\sum_{i_1=0}^{k-1}\cdots\sum_{i_n=0}^{k-1} f(a_1+(i_1+\theta)h_1,\dots,a_n+(i_n+\theta)h_n),$$

expresión que configura lo que se denomina una **fórmula de cuadratura en R**; es decir, para cada $f\in\mathscr{R}(R)$ se aproxima $\int_R f$ por el valor $I_{k,\theta}(f)$.

Observar que si $\boxed{n=1,}$ y $R=[a,b]$, entonces obtenemos la conocida Regla compuesta del rectángulo

$$I_{k,\theta}(f)=h\sum_{i=0}^{k-1} f(a+(i+\theta)h), \quad \text{donde} \quad h=\frac{b-a}{k}$$

que cuando $\theta=\frac{1}{2}$ se denomina Regla compuesta del punto medio.

La fórmula de cuadratura se denomina **de orden** m si $\int_R f = I_{k,\theta}(f)$ para cada $f \in \mathbb{R}_m[x_1, \dots, x_m]$ y existe un polinomio $P \in \mathbb{R}_{m+1}[x_1, \dots, x_n]$ tal que $\int_R P \neq I_{k,\theta}(P)$. Como tanto la integral como la fórmula de cuadratura son lineales, para hallar el orden de ésta última, basta comprobar su exactitud cuando se aplica a los monomios.

Si consideramos $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}$, $m = m_1 + \cdots + m_n$ y el monomio $f(x) = x_1^{m_1} \cdots x_n^{m_n}$, entonces $f \in \mathbb{R}_m[x_1, \dots, x_n]$ y la anterior fórmula de cuadratura conduce a la identidad

$$\boxed{I_{k,\theta}(f) = \frac{\mathsf{v}(R)}{k^n} \sum_{i_1=0}^{k-1} \cdots \sum_{i_n=0}^{k-1} \big(a_1 + (i_1+\theta)h_1\big)^{m_1} \cdots \big(a_n + (i_n+\theta)h_n\big)^{m_n},}$$

mientras que en secciones posteriores demostraremos, ver la cuestión 10, que

$$\boxed{\int_R f = \frac{(b_1^{m_1+1} - a_1^{m_j+1}) \cdots (b_n^{m_n+1} - a_n^{m_n+1})}{(m_j+1)\cdots(m_n+1)}}$$

Observar que si $m_1 = \cdots = m_n = 0$; es decir si $f = 1$, entonces la fórmula anterior se reduce a la conocida identidad $\int_R f = \mathsf{v}(R)$, mientras que

$$I_{k,\theta}(f) = \frac{\mathsf{v}(R)}{k^n} \sum_{i_1=0}^{k-1} \cdots \sum_{i_n=0}^{k-1} 1 = \frac{\mathsf{v}(R)}{k^n}\, k^n = \mathsf{v}(R).$$

Por otra parte, si $f(x) = x_s$, $s = 1, \dots, n$, entonces $m_s = 1$ y $m_j = 0$ si $j \neq s$, de manera que $\int_R f = \frac{(a_s+b_s)}{2}\mathsf{v}(R)$, mientras que

$$\begin{aligned}
I_{k,\theta}(f) &= \frac{\mathsf{v}(R)}{k^n} \sum_{i_1=0}^{k-1} \cdots \sum_{i_n=0}^{k-1} \big(a_s + (i_s+\theta)h_s\big) = \frac{\mathsf{v}(R)}{k^n}\, k^{n-1} \sum_{i_s=0}^{k-1} \big(a_s + (i_s+\theta)h_s\big) \\
&= \frac{\mathsf{v}(R)}{k} \left[\sum_{i_s=0}^{k-1} \big(a_s + (i_s+\theta)h_s\big) \right] = \frac{\mathsf{v}(R)}{k} \left[k(a_s + \theta h_s) + \frac{k(k-1)}{2}\, h_s \right] \\
&= \mathsf{v}(R) \left[a_s + \frac{(2\theta + k - 1)(b_s - a_s)}{2k} \right] = \mathsf{v}(R) \left[\frac{a_s + b_s}{2} + \frac{2\theta - 1}{2k} \right]
\end{aligned}$$

Finalmente, si $f(x) = x_s^2$, $s = 1, \dots, n$, entonces $m_s = 2$ y $m_j = 0$ si $j \neq s$, de manera que $\int_R f = \frac{(a_s^2 + b_s^2 + a_s b_s)}{3}\mathsf{v}(R)$, mientras que

$$\begin{aligned}
I_{k,\frac{1}{2}}(f) &= \frac{\mathsf{v}(R)}{k^n} \sum_{i_1=0}^{k-1} \cdots \sum_{i_n=0}^{k-1} \Big(a_s + \Big(i_s + \frac{1}{2}\Big)h_s\Big)^2 = \frac{\mathsf{v}(R)}{k} \sum_{i_s=0}^{k-1} \Big(a_s + \Big(i_s + \frac{1}{2}\Big)h_s\Big)^2 \\
&= \mathsf{v}(R) \left[a_s^2 + a_s k h_s + \frac{h_s^2}{12}(4k^2 - 1) \right] = \mathsf{v}(R) \left[\frac{a_s^2 + b_s^2 + a_s b_s}{3} - \frac{(b_s - a_s)^2}{12k^2} \right]
\end{aligned}$$

En definitiva, hemos obtenido el siguiente resultado:

Para cada $k \in \mathbb{N}^*$ y cada $0 \le \theta \le 1$ con $\theta \neq \frac{1}{2}$, la fórmula de cuadratura $I_{k,\theta}$ es de orden 0, mientras que $I_{k,\frac{1}{2}}$ es de orden 1. En cualquier caso, la fórmula de cuadratura es convergente cuando se aplica a funciones continuas; es decir, si $f \in \mathscr{C}(R)$, entonces

$$\int_R f = \lim_{k\to\infty} I_{k,\theta}(f) = \lim_{k\to\infty} \frac{\mathsf{v}(R)}{k^n} \sum_{i_1=0}^{k-1} \cdots \sum_{i_n=0}^{k-1} f(a_1 + (i_1+\theta)h_1, \ldots, a_n + (i_n+\theta)h_n).$$

• Cuestión 4: Consideremos $\theta_j \in [0,1]$ y $\alpha_j > 0$, $j = 1, \ldots, m$, tales que $\sum\limits_{j=1}^{m} \alpha = 1$.

(i) Si $I_k = \sum\limits_{j=1}^{m} \alpha_j I_{k,\theta_j}$, demostrar que $\lim\limits_{k\to\infty} I_k(f) = \int_R f$, para cada $f \in \mathscr{C}(R)$ y que la cuadratura I_k tiene, al menos, orden 0.

(ii) Si $I_k = \alpha_1 I_{k,0} + \alpha_2 I_{k,1}$, determinar cuándo la cuadratura I_k tiene orden al menos 1 y en ese caso, determinar el orden de I_k.

(ii) Si $I_k = \alpha_1 I_{k,0} + \alpha_2 I_{k,\frac{1}{2}} + \alpha_3 I_{k,1}$, determinar cuándo la cuadratura I_k tiene orden 1. ¿Pueden escogerse $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ para que I_k tenga al menos orden 2? En ese caso, determinar el orden de I_k.

Aunque estas fórmulas suelen utilizarse para aproximar el valor de $\int_R f$, también pueden interpretarse como un método para calcular ciertos límites, supuesto conocido el valor de $\int_R f$. Para el caso $n = 1$, tenemos que

para todo $\theta \in [0,1]$ se satisface que $\displaystyle\int_a^b f = \lim_{k\to\infty} \frac{b-a}{k} \sum_{i=0}^{k-1} f\Big(a + \frac{(b-a)(i+\theta)}{k}\Big)$

Ejemplo: Si $0 \le \theta \le 1$ y $\alpha \ge 0$, demostrar las identidades

$$\text{(i)} \quad \lim_{k\to\infty} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{k+i+\theta} = \ln(2),$$

$$\text{(ii)} \quad \lim_{k\to\infty} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{k}{k^2+(i+\theta)^2} = \frac{\pi}{4},$$

$$\text{(iii)} \quad \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k^{\alpha+1}} \sum_{i=0}^{k-1} (i+\theta)^\alpha = \frac{1}{\alpha+1}$$

Demostración: Basta aplicar el resultado anterior al intervalo $[0,1]$ y a las funciones $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$, $g(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ y $h(x) = x^\alpha$.