FORMAS DIFERENCIALES

Curso 2019-2020

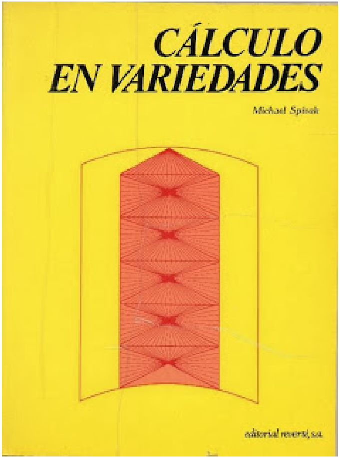
J.H. Poincaré
1854-1912

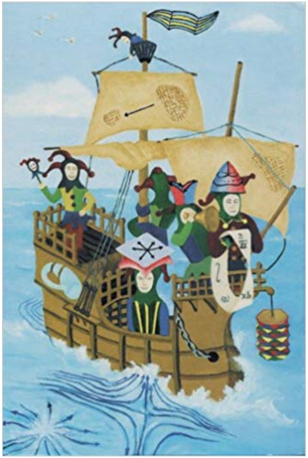
E. Cartan
1869-1951

Álgebra Multilineal

M. Spivak, *Cálculo en Variedades*, Reverté, 1988

M. Spivak, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry, I*, Publish or Perish, 1999





Álgebra Multilineal

- V espacio vectorial de dimensión $n \geq 1$. (Habitualmente $V = \mathbb{R}^n$)

Álgebra Multilineal

- V espacio vectorial de dimensión $n \geq 1$. (Habitualmente $V = \mathbb{R}^n$)
- $T \colon V \times \overset{k}{\cdots} \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ es **multilineal** si es lineal en <u>cada</u> variable

$$\begin{aligned} T(v_1, \ldots, av_j + bw_j, \ldots, v_k) &= aT(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_k) \\ &\quad + bT(v_1, \ldots, w_j, \ldots, v_k) \end{aligned}$$

Álgebra Multilineal

- V espacio vectorial de dimensión $n \geq 1$. (Habitualmente $V = \mathbb{R}^n$)

- $T\colon V \times \overset{k}{\cdots} \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ es **multilineal** si es lineal en cada variable

$$T(v_1, \dots, av_j + bw_j, \dots, v_k) = aT(v_1, \dots, v_j, \dots, v_k) + bT(v_1, \dots, w_j, \dots, v_k)$$

- **Tensor** k veces **covariante**, o simplemente tensor de orden k ($k \geq 1$)

Álgebra Multilineal

- V espacio vectorial de dimensión $n \geq 1$. (Habitualmente $V = \mathbb{R}^n$)

- $T\colon V \times \overset{k}{\cdots} \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ es **multilineal** si es lineal en <u>cada</u> variable

$$T(v_1, \dots, av_j + bw_j, \dots, v_k) = aT(v_1, \dots, v_j, \dots, v_k) + bT(v_1, \dots, w_j, \dots, v_k)$$

- **Tensor** k veces **covariante**, o simplemente tensor de orden k $(k \geq 1)$

- $\mathscr{T}^k(V)$ tiene estructura de espacio vectorial

Álgebra Multilineal

- $\boxed{V \text{ espacio vectorial de dimensión } n \geq 1. \text{ (Habitualmente } V = \mathbb{R}^n)}$
- $\boxed{T \colon V \times \overset{k}{\cdots} \times V \longrightarrow \mathbb{R} \text{ es } \textbf{multilineal} \text{ si es lineal en } \underline{\text{cada}} \text{ variable}}$

$$T(v_1, \ldots, av_j + bw_j, \ldots, v_k) = aT(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_k) + bT(v_1, \ldots, w_j, \ldots, v_k)$$

- **Tensor** k veces **covariante**, o simplemente tensor de orden k $(k \geq 1)$
- $\boxed{\mathscr{T}^k(V) \text{ tiene estructura de espacio vectorial}}$ ¿$\dim \mathscr{T}^k(V)$?

Álgebra Multilineal

- V espacio vectorial de dimensión $n \geq 1$. (Habitualmente $V = \mathbb{R}^n$)

- $T\colon V \times \overset{k}{\cdots} \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ es **multilineal** si es lineal en <u>cada</u> variable

$$\begin{aligned} T(v_1, \ldots, av_j + bw_j, \ldots, v_k) &= aT(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_k) \\ &\quad + bT(v_1, \ldots, w_j, \ldots, v_k) \end{aligned}$$

- **Tensor** k veces **covariante**, o simplemente tensor de orden k $(k \geq 1)$

- $\mathscr{T}^k(V)$ tiene estructura de espacio vectorial ¿$\dim \mathscr{T}^k(V)$?

- Si $k = 1$, $\mathscr{T}^1(V) = V^*$ el dual de V y $\dim \mathscr{T}^1(V) = n$

Álgebra Multilineal

- V espacio vectorial de dimensión $n \geq 1$. (Habitualmente $V = \mathbb{R}^n$)

- $T \colon V \times \overset{k}{\cdots} \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ es **multilineal** si es lineal en <u>cada</u> variable

$$T(v_1, \ldots, av_j + bw_j, \ldots, v_k) = aT(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_k) + bT(v_1, \ldots, w_j, \ldots, v_k)$$

- **Tensor** k veces **covariante**, o simplemente tensor de orden k $(k \geq 1)$

- $\mathscr{T}^k(V)$ tiene estructura de espacio vectorial ¿$\dim \mathscr{T}^k(V)$?

- Si $k = 1$, $\mathscr{T}^1(V) = V^*$ el dual de V y $\dim \mathscr{T}^1(V) = n$

  $\{v_1, \ldots, v_n\}$ base de $V \Longrightarrow \{v_1^*, \ldots, v_n^*\}$ base de V^*, $v_i^*(v_j) = \delta_{ij}$

Álgebra Multilineal

- V espacio vectorial de dimensión $n \geq 1$. (Habitualmente $V = \mathbb{R}^n$)

- $T\colon V \times \overset{k}{\cdots} \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ es **multilineal** si es lineal en <u>cada</u> variable

$$\begin{aligned} T(v_1, \ldots, av_j + bw_j, \ldots, v_k) = {} & aT(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_k) \\ & + bT(v_1, \ldots, w_j, \ldots, v_k) \end{aligned}$$

- **Tensor** k veces **covariante**, o simplemente tensor de orden k $(k \geq 1)$

- $\mathscr{T}^k(V)$ tiene estructura de espacio vectorial ¿$\dim \mathscr{T}^k(V)$?

- Si $k = 1$, $\mathscr{T}^1(V) = V^*$ el dual de V y $\dim \mathscr{T}^1(V) = n$

  $\{v_1, \ldots, v_n\}$ base de $V \Longrightarrow \{v_1^*, \ldots, v_n^*\}$ base de V^*, $v_i^*(v_j) = \delta_{ij}$

  $\rightsquigarrow$ $\{v_1^*, \ldots, v_n^*\}$ se denomina Base **dual**

Álgebra Multilineal

- V espacio vectorial de dimensión $n \geq 1$. (Habitualmente $V = \mathbb{R}^n$)
- $T\colon V \times \overset{k}{\cdots} \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ es **multilineal** si es lineal en cada variable
- $T \in \mathscr{T}^k(V)$, $S \in \mathscr{T}^m(V)$, definimos $T \otimes S \in \mathscr{T}^{k+m}(V)$

$$(T \otimes S)(v_1, \dots, v_k; w_1, \dots, w_m) = T(v_1, \dots, v_k)S(w_1, \dots, w_m)$$

Álgebra Multilineal

- V espacio vectorial de dimensión $n \geq 1$. (Habitualmente $V = \mathbb{R}^n$)

- $T\colon V \times \overset{k}{\cdots} \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ es **multilineal** si es lineal en cada variable

- $T \in \mathscr{T}^k(V)$, $S \in \mathscr{T}^m(V)$, definimos $T \otimes S \in \mathscr{T}^{k+m}(V)$

$$(T \otimes S)(v_1, \ldots, v_k; w_1, \ldots, w_m) = T(v_1, \ldots, v_k) S(w_1, \ldots, w_m)$$

- $\otimes$ es bilineal, asociativa, $(T \otimes S) \otimes R = T \otimes (S \otimes R)$, y no conmutativa

Álgebra Multilineal

- V espacio vectorial de dimensión $n \geq 1$. (Habitualmente $V = \mathbb{R}^n$)

- $T \colon V \times \overset{k}{\cdots} \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ es **multilineal** si es lineal en cada variable

- $T \in \mathscr{T}^k(V)$, $S \in \mathscr{T}^m(V)$, definimos $T \otimes S \in \mathscr{T}^{k+m}(V)$

$$(T \otimes S)(v_1, \ldots, v_k; w_1, \ldots, w_m) = T(v_1, \ldots, v_k)S(w_1, \ldots, w_m)$$

- $\otimes$ es bilineal, asociativa, $(T \otimes S) \otimes R = T \otimes (S \otimes R)$, y no conmutativa

- Si $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es base de V y $\{v_1^*, \ldots, v_n^*\}$ su base dual, entonces
$$\left\{v_{i_1}^* \otimes \cdots \otimes v_{i_k}^*\right\}_{1 \leq i_1, \ldots, i_k \leq n}$$
es base de $\mathscr{T}^k(V)$.

Álgebra Multilineal

- V espacio vectorial de dimensión $n \geq 1$. (Habitualmente $V = \mathbb{R}^n$)

- $T\colon V \times \overset{k}{\cdots} \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ es **multilineal** si es lineal en <u>cada</u> variable

- $T \in \mathscr{T}^k(V)$, $S \in \mathscr{T}^m(V)$, definimos $T \otimes S \in \mathscr{T}^{k+m}(V)$

$$(T \otimes S)(v_1, \ldots, v_k; w_1, \ldots, w_m) = T(v_1, \ldots, v_k)S(w_1, \ldots, w_m)$$

- $\otimes$ es bilineal, asociativa, $(T \otimes S) \otimes R = T \otimes (S \otimes R)$, y <u>no</u> conmutativa

- Si $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es base de V y $\{v_1^*, \ldots, v_n^*\}$ su base dual, entonces

$$\left\{v_{i_1}^* \otimes \cdots \otimes v_{i_k}^*\right\}_{1 \leq i_1, \ldots, i_k \leq n}$$

es base de $\mathscr{T}^k(V) \Longrightarrow \dim \mathscr{T}^k(V) = \boldsymbol{n^k}$.

Álgebra Multilineal

- V espacio vectorial de dimensión $n \geq 1$. (Habitualmente $V = \mathbb{R}^n$)

- $T\colon V \times \overset{k}{\cdots} \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ es **multilineal** si es lineal en <u>cada</u> variable

- $T \in \mathscr{T}^k(V)$, $S \in \mathscr{T}^m(V)$, definimos $T \otimes S \in \mathscr{T}^{k+m}(V)$

$$(T \otimes S)(v_1, \ldots, v_k; w_1, \ldots, w_m) = T(v_1, \ldots, v_k)S(w_1, \ldots, w_m)$$

- $F\colon V \longrightarrow W$ <u>lineal</u>, el **pull-back** es $F^*\colon \mathscr{T}^k(W) \longrightarrow \mathscr{T}^k(V)$

$$F^*(T)(v_1, \ldots, v_k) = T\big(F(v_1), \ldots, F(v_k)\big)$$

Álgebra Multilineal

- V espacio vectorial de dimensión $n \geq 1$. (Habitualmente $V = \mathbb{R}^n$)

- $T \colon V \times \overset{k}{\cdots} \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ es **multilineal** si es lineal en <u>cada</u> variable

- $T \in \mathscr{T}^k(V)$, $S \in \mathscr{T}^m(V)$, definimos $T \otimes S \in \mathscr{T}^{k+m}(V)$

$$(T \otimes S)(v_1, \dots, v_k; w_1, \dots, w_m) = T(v_1, \dots, v_k) S(w_1, \dots, w_m)$$

- $F \colon V \longrightarrow W$ <u>lineal</u>, el **pull-back** es $F^* \colon \mathscr{T}^k(W) \longrightarrow \mathscr{T}^k(V)$

$$F^*(T)(v_1, \dots, v_k) = T\big(F(v_1), \dots, F(v_k)\big)$$

- $F^*(T \otimes S) = F^*(T) \otimes F^*(S)$

Álgebra Multilineal

- V espacio vectorial de dimensión $n \geq 1$. (Habitualmente $V = \mathbb{R}^n$)
- $T\colon V \times \overset{k}{\cdots} \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ es **multilineal** si es lineal en <u>cada</u> variable
- $T \in \mathscr{T}^k(V)$ se denomina **alternado** si $T(v_1, \ldots, v_k) = 0$ cuando $\{v_1, \ldots, v_k\}$ son linealmente dependientes. El conjunto de tensores alternados de orden k se denota como $T \in \bigwedge^k(V)$.

Álgebra Multilineal

- V espacio vectorial de dimensión $n \geq 1$. (Habitualmente $V = \mathbb{R}^n$)

- $T\colon V \times \overset{k}{\cdots} \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ es **multilineal** si es lineal en <u>cada</u> variable

- $T \in \mathscr{T}^k(V)$ se denomina **alternado** ($T \in \bigwedge^k(V)$) si
$$T(v_1, \dots, v_i, \dots, v_i, \dots, v_k) = 0, \quad (i \neq j)$$

Álgebra Multilineal

- V espacio vectorial de dimensión $n \geq 1$. (Habitualmente $V = \mathbb{R}^n$)

- $T\colon V \times \overset{k}{\cdots} \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ es **multilineal** si es lineal en cada variable

- $T \in \mathscr{T}^k(V)$ se denomina **alternado** ($T \in \bigwedge^k(V)$) si
$$T(v_1, \dots, v_i, \dots, v_i, \dots, v_k) = 0, \quad (i \neq j)$$

- Ejemplo *básico* de tensor alternado de orden n en $\mathbb{R}^n$:

- V espacio vectorial de dimensión $n \geq 1$. (Habitualmente $V = \mathbb{R}^n$)

- $T \colon V \times \overset{k}{\cdots} \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ es **multilineal** si es lineal en cada variable

- $T \in \mathscr{T}^k(V)$ se denomina **alternado** ($T \in \bigwedge^k(V)$) si

$$T(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_i, \ldots, v_k) = 0, \quad (i \neq j)$$

- Ejemplo *básico* de tensor alternado de orden n en $\mathbb{R}^n$:

$$T(v_1, \ldots, v_n) = \det \begin{array}{cl} \begin{bmatrix} v_{11} & \cdots & v_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n1} & \cdots & v_{nn} \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow v_1 \\ \\ \\ \leftarrow v_n \end{array} \end{array}$$

Álgebra Multilineal

- V espacio vectorial de dimensión $n \geq 1$. (Habitualmente $V = \mathbb{R}^n$)
- $T\colon V \times \overset{k}{\cdots} \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ es **multilineal** si es lineal en <u>cada</u> variable
- $T \in \mathscr{T}^k(V)$ se denomina **alternado** ($T \in \bigwedge^k(V)$) si

$$T(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_i, \ldots, v_k) = 0, \quad (i \neq j)$$

- Ejemplo *básico* de tensor alternado de orden k en $\mathbb{R}^n$:

Álgebra Multilineal

- V espacio vectorial de dimensión $n \geq 1$. (Habitualmente $V = \mathbb{R}^n$)

- $T\colon V \times \overset{k}{\cdots} \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ es **multilineal** si es lineal en <u>cada</u> variable

- $T \in \mathscr{T}^k(V)$ se denomina **alternado** ($T \in \bigwedge^k(V)$) si
$$T(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_i, \ldots, v_k) = 0, \quad (i \neq j)$$

- Ejemplo *básico* de tensor alternado de orden k en $\mathbb{R}^n$:

$$T(v_1, \ldots, v_k) = \det \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} v_{11} & \cdots & v_{1k} & v_{1k+1} & \cdots & v_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ v_{k1} & \cdots & v_{kk} & v_{kk+1} & \cdots & v_{nn} \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow v_1 \\ \\ \leftarrow v_k \end{array} \end{array}$$

Álgebra Multilineal

- V espacio vectorial de dimensión $n \geq 1$. (Habitualmente $V = \mathbb{R}^n$)
- $T\colon V \times \overset{k}{\cdots} \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ es **multilineal** si es lineal en cada variable
- $T \in \mathscr{T}^k(V)$ se denomina **alternado** ($T \in \bigwedge^k(V)$) si
$$T(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_i, \ldots, v_k) = 0, \quad (i \neq j)$$
- Ejemplos (quizá no tan) *básicos* de tensor alternado de orden k en $\mathbb{R}^n$:

Álgebra Multilineal

- V espacio vectorial de dimensión $n \geq 1$. (Habitualmente $V = \mathbb{R}^n$)

- $T\colon V \times \overset{k}{\cdots} \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ es **multilineal** si es lineal en <u>cada</u> variable

- $T \in \mathscr{T}^k(V)$ se denomina **alternado** ($T \in \bigwedge^k(V)$) si
$$T(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_i, \ldots, v_k) = 0, \quad (i \neq j)$$

- Ejemplos (quizá no tan) *básicos* de tensor alternado de orden k en $\mathbb{R}^n$:

$$T(v_1, \ldots, v_k) = \det \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1k+1} & \cdots & v_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ldots & \vdots \\ v_{k1} & v_{k2} & \cdots & v_{kk+1} & \cdots & v_{nn} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow v_1 \\ \\ \leftarrow v_k \end{array}$$

Álgebra Multilineal

- V espacio vectorial de dimensión $n \geq 1$. (Habitualmente $V = \mathbb{R}^n$)

- $T\colon V \times \overset{k}{\cdots} \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ es **multilineal** si es lineal en cada variable

- $T \in \mathscr{T}^k(V)$ se denomina **alternado** ($T \in \bigwedge^k(V)$) si
$$T(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_i, \ldots, v_k) = 0, \quad (i \neq j)$$

- $T(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_k) = -T(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_k)$

Álgebra Multilineal

- V espacio vectorial de dimensión $n \geq 1$. (Habitualmente $V = \mathbb{R}^n$)
- $T\colon V \times \overset{k}{\cdots} \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ es **multilineal** si es lineal en cada variable
- $T \in \mathscr{T}^k(V)$ se denomina **alternado** ($T \in \bigwedge^k(V)$) si
$$T(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_i, \ldots, v_k) = 0, \quad (i \neq j)$$
- $T(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_k) = -T(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_k)$
- $T \in \bigwedge^k(V)$ y $\sigma \in \mathscr{S}_k \Longrightarrow T(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}) = \operatorname{sign}(\sigma) T(v_1, \ldots, v_k)$

Álgebra Multilineal

- V espacio vectorial de dimensión $n \geq 1$. (Habitualmente $V = \mathbb{R}^n$)

- $T\colon V \times \overset{k}{\cdots} \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ es **multilineal** si es lineal en cada variable

- $T \in \mathscr{T}^k(V)$ se denomina **alternado** ($T \in \bigwedge^k(V)$) si
$$T(v_1, \dots, v_i, \dots, v_i, \dots, v_k) = 0, \quad (i \neq j)$$

- $T(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_k) = -T(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_k)$

- $T \in \bigwedge^k(V)$ y $\sigma \in \mathscr{S}_k \Longrightarrow T(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) = \operatorname{sign}(\sigma) T(v_1, \dots, v_k)$

- $\bigwedge^k(V)$ tiene estructura de espacio vectorial ¿$\dim \bigwedge^k(V)$?

Álgebra Multilineal

- V espacio vectorial de dimensión $n \geq 1$. (Habitualmente $V = \mathbb{R}^n$)

- $T \colon V \times \overset{k}{\cdots} \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ es **multilineal** si es lineal en cada variable

- $T \in \mathscr{T}^k(V)$ se denomina **alternado** ($T \in \bigwedge^k(V)$) si
$$T(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_i, \ldots, v_k) = 0, \quad (i \neq j)$$

- $T(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_k) = -T(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_k)$

- $T \in \bigwedge^k(V)$ y $\sigma \in \mathscr{S}_k \Longrightarrow T(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}) = \operatorname{sign}(\sigma) T(v_1, \ldots, v_k)$

- $\bigwedge^k(V)$ tiene estructura de espacio vectorial ¿$\dim \bigwedge^k(V)$?

- $\bigwedge^k(V) = \{0\}$ si $k > n \Longrightarrow \dim \bigwedge^k(V) = 0$ si $k > n$

Tensores Alternados

- V espacio vectorial de dimensión $n \geq 1$. (Habitualmente $V = \mathbb{R}^n$)
- $\bigwedge^k(V)$ espacio de tensores alternados de orden k

Tensores Alternados

- V espacio vectorial de dimensión $n \geq 1$. (Habitualmente $V = \mathbb{R}^n$)
- $\bigwedge^k(V)$ espacio de tensores alternados de orden k
- Si $T \in \bigwedge^k(V)$ y $S \in \bigwedge^m(V)$, en general $T \otimes S \notin \bigwedge^{k+m}(V)$

Tensores Alternados

- $\boxed{V \text{ espacio vectorial de dimensión } n \geq 1. \text{ (Habitualmente } V = \mathbb{R}^n)}$
- $\boxed{\bigwedge^k(V) \text{ espacio de tensores alternados de orden } k}$
- Si $T \in \bigwedge^k(V)$ y $S \in \bigwedge^m(V)$, en general $T \otimes S \notin \bigwedge^{k+m}(V)$
- Definimos $\mathrm{Alt}\colon \mathscr{T}^k(V) \longrightarrow \mathscr{T}^k(V)$ como

$$\mathrm{Alt}(T)(v_1, \ldots, v_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathscr{S}_k} \mathrm{sign}(\sigma) T(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)})$$

Tensores Alternados

- V espacio vectorial de dimensión $n \geq 1$. (Habitualmente $V = \mathbb{R}^n$)
- $\bigwedge^k(V)$ espacio de tensores alternados de orden k
- Si $T \in \bigwedge^k(V)$ y $S \in \bigwedge^m(V)$, en general $T \otimes S \notin \bigwedge^{k+m}(V)$
- Definimos $\operatorname{Alt}\colon \mathscr{T}^k(V) \longrightarrow \mathscr{T}^k(V)$ como

$$\operatorname{Alt}(T)(v_1, \ldots, v_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathscr{S}_k} \operatorname{sign}(\sigma) T(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)})$$

- Alt es lineal e idempotente: $\operatorname{Alt} \circ \operatorname{Alt} = \operatorname{Alt}$

Tensores Alternados

- $\boxed{V \text{ espacio vectorial de dimensión } n \geq 1. \text{ (Habitualmente } V = \mathbb{R}^n)}$
- $\boxed{\bigwedge^k(V) \text{ espacio de tensores alternados de orden } k}$
- Si $T \in \bigwedge^k(V)$ y $S \in \bigwedge^m(V)$, en general $T \otimes S \notin \bigwedge^{k+m}(V)$
- Definimos $\mathrm{Alt}\colon \mathscr{T}^k(V) \longrightarrow \mathscr{T}^k(V)$ como

$$\mathrm{Alt}(T)(v_1, \dots, v_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathscr{S}_k} \mathrm{sign}(\sigma) T(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)})$$

- Alt es lineal e idempotente: $\mathrm{Alt} \circ \mathrm{Alt} = \mathrm{Alt}$
- $\boxed{\mathrm{Img}(\mathrm{Alt}) = \bigwedge^k(V) \text{ y } \mathrm{Alt}(T) = T \text{ para cada } T \in \bigwedge^k(V)}$

Tensores Alternados

- V espacio vectorial de dimensión $n \geq 1$. (Habitualmente $V = \mathbb{R}^n$)
- $\bigwedge^k(V)$ espacio de tensores alternados de orden k
- $T \in \bigwedge^k(V)$, $S \in \bigwedge^m(V)$, definimos $T \wedge S \in \bigwedge^{k+m}(V)$

$$T \wedge S = \frac{(k+m)!}{k!\,m!}\mathrm{Alt}(T \otimes S)$$

Tensores Alternados

- V espacio vectorial de dimensión $n \geq 1$. (Habitualmente $V = \mathbb{R}^n$)
- $\bigwedge^k(V)$ espacio de tensores alternados de orden k
- $T \in \bigwedge^k(V)$, $S \in \bigwedge^m(V)$, definimos $T \wedge S \in \bigwedge^{k+m}(V)$

$$T \wedge S = \frac{(k+m)!}{k!\,m!}\mathrm{Alt}(T \otimes S)$$

- $\wedge$ es bilineal, asociativa, si $T \in \bigwedge^k(V)$, $S \in \bigwedge^m(V)$, $R \in \bigwedge^\ell(V)$,

$$(T \wedge S) \wedge R = T \wedge (S \wedge R) = \frac{(k+m+\ell)!}{k!\,m!\,\ell!}\mathrm{Alt}(T \otimes R \otimes S)$$

Tensores Alternados

- V espacio vectorial de dimensión $n \geq 1$. (Habitualmente $V = \mathbb{R}^n$)
- $\bigwedge^k(V)$ espacio de tensores alternados de orden k
- $T \in \bigwedge^k(V)$, $S \in \bigwedge^m(V)$, definimos $T \wedge S \in \bigwedge^{k+m}(V)$

$$T \wedge S = \frac{(k+m)!}{k!\,m!}\mathrm{Alt}(T \otimes S)$$

- $\wedge$ es bilineal, asociativa, si $T \in \bigwedge^k(V)$, $S \in \bigwedge^m(V)$, $R \in \bigwedge^\ell(V)$,

$$(T \wedge S) \wedge R = T \wedge (S \wedge R) = \frac{(k+m+\ell)!}{k!\,m!\,\ell!}\mathrm{Alt}(T \otimes R \otimes S)$$

- Si $T \in \bigwedge^k(V)$, $S \in \bigwedge^m(V) \Longrightarrow T \wedge S = (-1)^{km} S \wedge T$

Tensores Alternados

- $\boxed{V \text{ espacio vectorial de dimensión } n \geq 1. \text{ (Habitualmente } V = \mathbb{R}^n\text{)}}$
- $\boxed{\bigwedge^k(V) \text{ espacio de tensores alternados de orden } k}$
- $\boxed{\text{Si } T \in \bigwedge^k(V),\ S \in \bigwedge^m(V) \Longrightarrow T \wedge S = (-1)^{km} S \wedge T}$
- Si $T \in \bigwedge^k(V)$ y k es impar $\Longrightarrow T \wedge T = 0$

Tensores Alternados

- V espacio vectorial de dimensión $n \geq 1$. (Habitualmente $V = \mathbb{R}^n$)
- $\bigwedge^k(V)$ espacio de tensores alternados de orden k
- Si $T \in \bigwedge^k(V)$, $S \in \bigwedge^m(V) \Longrightarrow T \wedge S = (-1)^{km} S \wedge T$
- Si $T \in \bigwedge^k(V)$ y k es impar $\Longrightarrow T \wedge T = 0$
- Si $T_1, \ldots, T_k \in \bigwedge^1(V)$ son linealmente dependientes, $T_1 \wedge \cdots \wedge T_k = 0$

Tensores Alternados

- V espacio vectorial de dimensión $n \geq 1$. (Habitualmente $V = \mathbb{R}^n$)

- $\bigwedge^k(V)$ espacio de tensores alternados de orden k

- Si $T \in \bigwedge^k(V)$, $S \in \bigwedge^m(V) \Longrightarrow T \wedge S = (-1)^{km} S \wedge T$

- $F\colon V \longrightarrow W$ lineal, el **pull-back** es $F^*\colon \mathscr{T}^k(W) \longrightarrow \mathscr{T}^k(V)$
$$F^*(T)(v_1, \ldots, v_k) = T\big(F(v_1), \ldots, F(v_k)\big)$$

Tensores Alternados

- V espacio vectorial de dimensión $n \geq 1$. (Habitualmente $V = \mathbb{R}^n$)

- $\bigwedge^k(V)$ espacio de tensores alternados de orden k

- Si $T \in \bigwedge^k(V)$, $S \in \bigwedge^m(V) \Longrightarrow T \wedge S = (-1)^{km} S \wedge T$

- $F\colon V \longrightarrow W$ lineal, el **pull-back** es $F^*\colon \bigwedge^k(W) \longrightarrow \bigwedge^k(V)$
$$F^*(T)(v_1, \ldots, v_k) = T\big(F(v_1), \ldots, F(v_k)\big)$$

Tensores Alternados

- V espacio vectorial de dimensión $n \geq 1$. (Habitualmente $V = \mathbb{R}^n$)

- $\bigwedge^k(V)$ espacio de tensores alternados de orden k

- Si $T \in \bigwedge^k(V)$, $S \in \bigwedge^m(V) \Longrightarrow T \wedge S = (-1)^{km} S \wedge T$

- $F\colon V \longrightarrow W$ lineal, el **pull-back** es $F^*\colon \bigwedge^k(W) \longrightarrow \bigwedge^k(V)$

$$F^*(T)(v_1, \ldots, v_k) = T\big(F(v_1), \ldots, F(v_k)\big)$$

- $F^*(T \wedge S) = F^*(T) \wedge F^*(S)$

Tensores Alternados

- V espacio vectorial de dimensión $n \geq 1$. (Habitualmente $V = \mathbb{R}^n$)
- $\bigwedge^k(V)$ espacio de tensores alternados de orden k
- Si $T \in \bigwedge^k(V)$, $S \in \bigwedge^m(V) \Longrightarrow T \wedge S = (-1)^{km} S \wedge T$
- Si $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es base de V y $\{v_1^*, \ldots, v_n^*\}$ su base dual, entonces
$$\left\{v_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge v_{i_k}^*\right\}_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n}$$
es base de $\bigwedge^k(V)$.

Tensores Alternados

- V espacio vectorial de dimensión $n \geq 1$. (Habitualmente $V = \mathbb{R}^n$)
- $\bigwedge^k(V)$ espacio de tensores alternados de orden k
- Si $T \in \bigwedge^k(V)$, $S \in \bigwedge^m(V) \Longrightarrow T \wedge S = (-1)^{km} S \wedge T$
- Si $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es base de V y $\{v_1^*, \ldots, v_n^*\}$ su base dual, entonces
$$\left\{v_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge v_{i_k}^*\right\}_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n}$$
es base de $\bigwedge^k(V) \Longrightarrow \dim \bigwedge^k(V) = \binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{k}}$.

Tensores Alternados

- V espacio vectorial de dimensión $n \geq 1$. (Habitualmente $V = \mathbb{R}^n$)
  $\bigwedge^k(V)$ espacio de tensores alternados de orden k

- Si $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es base de V y $\{v_1^*, \ldots, v_n^*\}$ su base dual, entonces
  $$\left\{v_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge v_{i_k}^*\right\}_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n}$$
  es base de $\bigwedge^k(V) \Longrightarrow \dim \bigwedge^k(V) = \binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{k}}$.

- $T_1, \ldots, T_k \in \bigwedge^1(V)$ linealmente independientes sii $T_1 \wedge \cdots \wedge T_k \neq 0$

Tensores Alternados

- V espacio vectorial de dimensión $n \geq 1$. (Habitualmente $V = \mathbb{R}^n$)
  $\bigwedge^k(V)$ espacio de tensores alternados de orden k

- Si $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es base de V y $\{v_1^*, \ldots, v_n^*\}$ su base dual, entonces
  $$\left\{v_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge v_{i_k}^*\right\}_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n}$$
  es base de $\bigwedge^k(V) \Longrightarrow \dim \bigwedge^k(V) = \binom{n}{k}$.

- Si $\boxed{k = 0,}$ definimos $\bigwedge^0(V) = \mathbb{R} \Longrightarrow \dim \bigwedge^0(V) = 1$

Tensores Alternados

- V espacio vectorial de dimensión $n \geq 1$. (Habitualmente $V = \mathbb{R}^n$)
  $\bigwedge^k(V)$ espacio de tensores alternados de orden k

- Si $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es base de V y $\{v_1^*, \ldots, v_n^*\}$ su base dual, entonces
  $$\left\{v_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge v_{i_k}^*\right\}_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n}$$
  es base de $\bigwedge^k(V) \Longrightarrow \dim \bigwedge^k(V) = \binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{k}}$.

- Si $\boxed{k = 0,}$ definimos $\bigwedge^0(V) = \mathbb{R} \Longrightarrow \dim \bigwedge^0(V) = 1$

- Si $\boxed{k = 1,}$ $\bigwedge^1(V) = \mathscr{T}^1(V) = V^*$ el dual de V y $\dim \bigwedge^1(V) = n$

Tensores Alternados

- V espacio vectorial de dimensión $n \geq 1$. (Habitualmente $V = \mathbb{R}^n$)
  $\bigwedge^k(V)$ espacio de tensores alternados de orden k

- Si $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es base de V y $\{v_1^*, \ldots, v_n^*\}$ su base dual, entonces
$$\left\{v_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge v_{i_k}^*\right\}_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n}$$
  es base de $\bigwedge^k(V) \Longrightarrow \dim \bigwedge^k(V) = \binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{k}}$.

- Si $\boxed{k = 0,}$ definimos $\bigwedge^0(V) = \mathbb{R} \Longrightarrow \dim \bigwedge^0(V) = 1$

- Si $\boxed{k = 1,}$ $\bigwedge^1(V) = \mathscr{T}^1(V) = V^*$ el dual de V y $\dim \bigwedge^1(V) = n$

- Si $\boxed{k = n - 1,}$ $\left\{v_1^* \wedge \cdots \wedge \widehat{v_i^*} \wedge \cdots \wedge v_n^*\right\}_{i=1}^n$ es base de $\bigwedge^{n-1}(V)$

Tensores Alternados

- V espacio vectorial de dimensión $n \geq 1$. (Habitualmente $V = \mathbb{R}^n$)
  $\bigwedge^k(V)$ espacio de tensores alternados de orden k

- Si $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es base de V y $\{v_1^*, \ldots, v_n^*\}$ su base dual, entonces
  $$\left\{v_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge v_{i_k}^*\right\}_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n}$$
  es base de $\bigwedge^k(V) \Longrightarrow \dim \bigwedge^k(V) = \binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{k}}$.

- Si $\boxed{k = n,}$ $v_1^* \wedge \cdots \wedge v_n^*$ es base de $\bigwedge^n(V)$

Tensores Alternados

- V espacio vectorial de dimensión $n \geq 1$. (Habitualmente $V = \mathbb{R}^n$)
  $\bigwedge^k(V)$ espacio de tensores alternados de orden k

- Si $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es base de V y $\{v_1^*, \ldots, v_n^*\}$ su base dual, entonces
$$\left\{v_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge v_{i_k}^*\right\}_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n}$$
  es base de $\bigwedge^k(V) \Longrightarrow \dim \bigwedge^k(V) = \binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{k}}$.

- Si $\boxed{k = n,}$ $v_1^* \wedge \cdots \wedge v_n^*$ es base de $\bigwedge^n(V)$

$$\begin{aligned}
(v_1^* \wedge \cdots \wedge v_n^*)(v_1, \ldots, v_n) &= \frac{(1+ \overset{k}{\cdots} +1)!}{1! \cdots 1!} \operatorname{Alt}(v_1^* \otimes \cdots \otimes v_n^*)(v_1, \ldots, v_n) \\
&= \sum_{\sigma \in \mathscr{S}_n} \operatorname{sign}(\sigma)(v_1^* \otimes \cdots \otimes v_n^*)(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(n)}) \\
&= \sum_{\sigma \in \mathscr{S}_n} \operatorname{sign}(\sigma) v_1^*(v_{\sigma(1)}) \cdots v_n^*(v_{\sigma(n)}) = 1
\end{aligned}$$

Tensores Alternados

- V espacio vectorial de dimensión $n \geq 1$. (Habitualmente $V = \mathbb{R}^n$)
  $\bigwedge^k(V)$ espacio de tensores alternados de orden k

- Si $\{v_1, \dots, v_n\}$ es base de V y $\{v_1^*, \dots, v_n^*\}$ su base dual, entonces
  $$\left\{v_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge v_{i_k}^*\right\}_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n}$$
  es base de $\bigwedge^k(V) \Longrightarrow \dim \bigwedge^k(V) = \binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{k}}$.

- Si $\boxed{k = n,}$ $v_1^* \wedge \cdots \wedge v_n^*$ es base y $(v_1^* \wedge \cdots \wedge v_n^*)(v_1, \dots, v_n) = 1$

- Si $T \in \bigwedge^n(V)$ y $w_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} u_j$, entonces
  $$T(w_1, \dots, w_n) = \det(a_{ij})\, T(u_1, \dots, u_n)$$

Tensores Alternados

- V espacio vectorial de dimensión $n \geq 1$. (Habitualmente $V = \mathbb{R}^n$)
  $\bigwedge^k(V)$ espacio de tensores alternados de orden k

- Si $\{v_1, \dots, v_n\}$ es base de V y $\{v_1^*, \dots, v_n^*\}$ su base dual, entonces
  $$\left\{v_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge v_{i_k}^*\right\}_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n}$$
  es base de $\bigwedge^k(V) \Longrightarrow \dim \bigwedge^k(V) = \binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{k}}$.

- Si $\boxed{k = n,}$ $v_1^* \wedge \cdots \wedge v_n^*$ es base y $(v_1^* \wedge \cdots \wedge v_n^*)(v_1, \dots, v_n) = 1$
- Si $T \in \bigwedge^n(V) \Longrightarrow T(w_1, \dots, w_n) = \det(a_{ij})\, T(u_1, \dots, u_n)$
  $\rightsquigarrow T \neq 0$ sii $T(u_1, \dots, u_n) \neq 0$ para cada base $\{u_1, \dots, u_n\}$

Tensores Alternados

- V espacio vectorial de dimensión $n \geq 1$. (Habitualmente $V = \mathbb{R}^n$)
  $\bigwedge^k(V)$ espacio de tensores alternados de orden k

- Si $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es base de V y $\{v_1^*, \ldots, v_n^*\}$ su base dual, entonces
  $$\left\{v_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge v_{i_k}^*\right\}_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n}$$
  es base de $\bigwedge^k(V) \Longrightarrow \dim \bigwedge^k(V) = \binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{k}}$.

- Si $\boxed{k = n,}$ $v_1^* \wedge \cdots \wedge v_n^*$ es base y $(v_1^* \wedge \cdots \wedge v_n^*)(v_1, \ldots, v_n) = 1$

- Si $T \in \bigwedge^n(V) \Longrightarrow T(w_1, \ldots, w_n) = \det(a_{ij})\, T(u_1, \ldots, u_n)$
  $\rightsquigarrow$ $T \neq 0$ sii $T(u_1, \ldots, u_n) \neq 0$ para cada base $\{u_1, \ldots, u_n\}$
  $\rightsquigarrow$ Si $T \neq 0$, $\{u_1, \ldots, u_n\}$ es base de V sii $T(u_1, \ldots, u_n) \neq 0$

Tensores Alternados

- V espacio vectorial de dimensión $n \geq 1$. (Habitualmente $V = \mathbb{R}^n$)
  $\bigwedge^k(V)$ espacio de tensores alternados de orden k

- Si $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es base de V y $\{v_1^*, \ldots, v_n^*\}$ su base dual, entonces
  $$\left\{v_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge v_{i_k}^*\right\}_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n}$$
  es base de $\bigwedge^k(V) \Longrightarrow \dim \bigwedge^k(V) = \binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{k}}$.

- Si $\boxed{k = n,}$ $v_1^* \wedge \cdots \wedge v_n^*$ es base y $(v_1^* \wedge \cdots \wedge v_n^*)(v_1, \ldots, v_n) = 1$

- Si $T \in \bigwedge^n(V) \Longrightarrow T = \alpha(v_1^* \wedge \cdots \wedge v_n^*)$

Tensores Alternados

- V espacio vectorial de dimensión $n \geq 1$. (Habitualmente $V = \mathbb{R}^n$)
  $\bigwedge^k(V)$ espacio de tensores alternados de orden k

- Si $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es base de V y $\{v_1^*, \ldots, v_n^*\}$ su base dual, entonces
$$\left\{v_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge v_{i_k}^*\right\}_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n}$$
es base de $\bigwedge^k(V) \Longrightarrow \dim \bigwedge^k(V) = \binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{k}}$.

- Si $\boxed{k = n,}$ $v_1^* \wedge \cdots \wedge v_n^*$ es base y $(v_1^* \wedge \cdots \wedge v_n^*)(v_1, \ldots, v_n) = 1$

- Si $T \in \bigwedge^n(V) \Longrightarrow T = \alpha(v_1^* \wedge \cdots \wedge v_n^*) \Longrightarrow \boxed{\alpha = T(v_1, \ldots, v_n)}$

Tensores Alternados

- V espacio vectorial de dimensión $n \geq 1$. (Habitualmente $V = \mathbb{R}^n$)
  $\bigwedge^k(V)$ espacio de tensores alternados de orden k

- Si $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es base de V y $\{v_1^*, \ldots, v_n^*\}$ su base dual, entonces
  $$\left\{v_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge v_{i_k}^*\right\}_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n}$$
  es base de $\bigwedge^k(V) \Longrightarrow \dim \bigwedge^k(V) = \binom{n}{k}$.

- Si $\boxed{k = n,}$ $v_1^* \wedge \cdots \wedge v_n^*$ es base y $(v_1^* \wedge \cdots \wedge v_n^*)(v_1, \ldots, v_n) = 1$

- Si $T \in \bigwedge^n(V) \Longrightarrow T = \alpha(v_1^* \wedge \cdots \wedge v_n^*) \Longrightarrow \boxed{\alpha = T(v_1, \ldots, v_n)}$

- Si $T \in \bigwedge^n(V)$ y $T(u_1, \ldots, u_n) = 1 \Longrightarrow T = u_1^* \wedge \cdots \wedge u_n^*$

Tensores Alternados

- V espacio vectorial de dimensión $n \geq 1$. (Habitualmente $V = \mathbb{R}^n$)
  $\bigwedge^k(V)$ espacio de tensores alternados de orden k

- Si $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es base de V y $\{v_1^*, \ldots, v_n^*\}$ su base dual, entonces
  $$\left\{v_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge v_{i_k}^*\right\}_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n}$$
  es base de $\bigwedge^k(V) \Longrightarrow \dim \bigwedge^k(V) = \binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{k}}$.

- Si $w_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} v_j$, $1 \leq i \leq k$, $\mathsf{A} = (a_{ji}) \in \mathcal{M}_{n \times k}(\mathbb{R})$, si $i_1 < \cdots < i_k$

  $\rightsquigarrow \mathsf{A}_{i_1, \ldots, i_k} \in \mathcal{M}_{k \times k}(\mathbb{R})$ selecciona las filas $i_1, \ldots, i_k$ de A.

Tensores Alternados

- V espacio vectorial de dimensión $n \geq 1$. (Habitualmente $V = \mathbb{R}^n$)
  $\bigwedge^k(V)$ espacio de tensores alternados de orden k

- Si $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es base de V y $\{v_1^*, \ldots, v_n^*\}$ su base dual, entonces
  $$\left\{v_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge v_{i_k}^*\right\}_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n}$$
  es base de $\bigwedge^k(V) \Longrightarrow \dim \bigwedge^k(V) = \boldsymbol{\binom{n}{k}}$.

- Si $w_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} v_j$, $1 \leq i \leq k$, $\mathsf{A} = (a_{ji}) \in \mathcal{M}_{n\times k}(\mathbb{R})$, si $i_1 < \cdots < i_k$

  $\rightsquigarrow$ $\mathsf{A}_{i_1,\ldots,i_k} \in \mathcal{M}_{k\times k}(\mathbb{R})$ selecciona las filas $i_1, \ldots, i_k$ de A.

- $\boxed{(v_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge v_{i_k}^*)(w_1, \ldots, w_k) = \det(\mathsf{A}_{i_1,\ldots,i_k})}$

Tensores Alternados

- V espacio vectorial de dimensión $n \geq 1$. (Habitualmente $V = \mathbb{R}^n$)
  $\bigwedge^k(V)$ espacio de tensores alternados de orden k

- Si $\{v_1, \dots, v_n\}$ es base de V y $\{v_1^*, \dots, v_n^*\}$ su base dual, entonces
  $$\left\{v_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge v_{i_k}^*\right\}_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n}$$
  es base de $\bigwedge^k(V) \Longrightarrow \dim \bigwedge^k(V) = \binom{n}{k}$.

- $(v_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge v_{i_k}^*)(w_1, \dots, w_k) = \det(\mathsf{A}_{i_1,\dots,i_k})$

- Si $T \in \bigwedge^k(V) \Longrightarrow T = \displaystyle\sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \alpha_{i_1,\dots,i_k} v_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge v_{i_k}^*$

- T es combinación de menores de orden k y $\alpha_{i_1,\dots,i_k} = T(v_{i_1}, \dots, v_{i_k})$

Pull-back de Tensores Alternados

V, W espacios vectoriales de dimensión $n, m \geq 1$.

$B_V = \{v_1, \dots, v_n\}$ base de V y $B_W = \{w_1, \dots, w_m\}$ base de W

$\bigwedge^k(V) = \mathrm{sg}\big\{v_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge v_{i_k}^*\big\}$, $\bigwedge^p(W) = \mathrm{sg}\big\{w_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge w_{i_p}^*\big\}$

- $F\colon V \longrightarrow W$ lineal y **pull-back** es $F^*\colon \bigwedge^k(W) \longrightarrow \bigwedge^k(V)$

$F^*(T)(v_1, \dots, v_k) = T\big(F(v_1), \dots, F(v_k)\big)$

$[F]_{B_V B_W} = \mathsf{A} = (a_{ji}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$: $F(v_i) = \sum_{j=1}^{m} a_{ji} w_j$,

Pull-back de Tensores Alternados

- V, W espacios vectoriales de dimensión $n, m \geq 1$.

  $B_V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ base de V y $B_W = \{w_1, \ldots, w_m\}$ base de W

  $\bigwedge^k(V) = \mathrm{sg}\big\{v^*_{i_1} \wedge \cdots \wedge v^*_{i_k}\big\}$, $\bigwedge^p(W) = \mathrm{sg}\big\{w^*_{i_1} \wedge \cdots \wedge w^*_{i_p}\big\}$

  $F\colon V \longrightarrow W$ lineal y **pull-back** es $F^*\colon \bigwedge^k(W) \longrightarrow \bigwedge^k(V)$

  $F^*(T)(v_1, \ldots, v_k) = T\big(F(v_1), \ldots, F(v_k)\big)$

  $[F]_{B_V B_W} = \mathsf{A} = (a_{ji}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$: $F(v_i) = \displaystyle\sum_{j=1}^{m} a_{ji} w_j$,

- $F^*(w^*_{i_1} \wedge \cdots \wedge w^*_{i_k}) = F^*(w^*_{i_1}) \wedge \cdots \wedge F^*(w^*_{i_k})$

Pull-back de Tensores Alternados

- V, W espacios vectoriales de dimensión $n, m \geq 1$.

  $B_V = \{v_1, \dots, v_n\}$ base de V y $B_W = \{w_1, \dots, w_m\}$ base de W

  $\bigwedge^k(V) = \mathrm{sg}\big\{v_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge v_{i_k}^*\big\}$, $\bigwedge^p(W) = \mathrm{sg}\big\{w_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge w_{i_p}^*\big\}$

  $F\colon V \longrightarrow W$ lineal y **pull-back** es $F^*\colon \bigwedge^k(W) \longrightarrow \bigwedge^k(V)$

  $F^*(T)(v_1, \dots, v_k) = T\big(F(v_1), \dots, F(v_k)\big)$

  $[F]_{B_V B_W} = \mathsf{A} = (a_{ji}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})\colon\ F(v_i) = \sum\limits_{j=1}^{m} a_{ji} w_j,$

- $\boxed{F^*(w_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge w_{i_k}^*) = F^*(w_{i_1}^*) \wedge \cdots \wedge F^*(w_{i_k}^*)}$

- $F^*(w_j^*) = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i v_i^*$, $\alpha_i = F^*(w_j^*)(v_i) = w_j^*\big(F(v_i)\big) = a_{ji}$

  $\rightsquigarrow F^*(w_j^*) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ji} v_i^*$

Pull-back de Tensores Alternados

- V, W espacios vectoriales de dimensión $n, m \geq 1$.

  $B_V = \{v_1, \dots, v_n\}$ base de V y $B_W = \{w_1, \dots, w_m\}$ base de W

  $\bigwedge^k(V) = \mathrm{sg}\big\{v_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge v_{i_k}^*\big\}$, $\bigwedge^p(W) = \mathrm{sg}\big\{w_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge w_{i_p}^*\big\}$

  $F\colon V \longrightarrow W$ lineal y **pull-back** es $F^*\colon \bigwedge^k(W) \longrightarrow \bigwedge^k(V)$

  $F^*(T)(v_1, \dots, v_k) = T\big(F(v_1), \dots, F(v_k)\big)$

  $[F]_{B_V B_W} = \mathsf{A} = (a_{ji}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$: $F(v_i) = \sum_{j=1}^{m} a_{ji} w_j$,

- $F^*(w_p^* \wedge w_q^*) = \sum_{i<j} \alpha_{ij} v_i^* \wedge v_j^*$, con $p < q$,

  $\alpha_{ij} = F^*(w_p^* \wedge w_q^*)(v_i, v_j) = (w_p^* \wedge w_q^*)\big(F(v_i), F(v_j)\big)$

  $\rightsquigarrow$ α_{ij} es el menor de filas p, q y columnas i y j de A

Pull-back de Tensores Alternados

- V, W espacios vectoriales de dimensión $n, m \geq 1$.

  $B_V = \{v_1, \dots, v_n\}$ base de V y $B_W = \{w_1, \dots, w_m\}$ base de W

  $\bigwedge^k(V) = \mathrm{sg}\{v^*_{i_1} \wedge \cdots \wedge v^*_{i_k}\}$, $\bigwedge^p(W) = \mathrm{sg}\{w^*_{i_1} \wedge \cdots \wedge w^*_{i_p}\}$

  $F\colon V \longrightarrow W$ lineal y **pull-back** es $F^*\colon \bigwedge^k(W) \longrightarrow \bigwedge^k(V)$

  $F^*(T)(v_1, \dots, v_k) = T\big(F(v_1), \dots, F(v_k)\big)$

  $[F]_{B_V B_W} = \mathsf{A} = (a_{ji}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$: $F(v_i) = \sum\limits_{j=1}^{m} a_{ji} w_j$,

- $j_1 < \cdots < j_p$, $F^*(w^*_{j_1} \wedge \cdots \wedge w^*_{j_p}) = \sum\limits_{i_1 < \cdots < i_p} \alpha_{i_1,\dots,i_p} v^*_{i_1} \wedge \cdots \wedge v^*_{i_p}$

  con $\alpha_{i_1,\dots,i_p}$ el menor de filas $j_1, \dots, j_p$ y columnas $i_1, \dots, i_p$ de A

Formas Diferenciales

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto. Si $x \in \Omega$, el espacio tangente a Ω en x es $T_x(\Omega) = \mathbb{R}^n$

Formas Diferenciales

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto. Si $x \in \Omega$, el espacio tangente a Ω en x es $T_x(\Omega) = \mathbb{R}^n$

- $T_x(\Omega) = \mathrm{sg}\{\mathsf{e}_1(x), \ldots, \mathsf{e}_n(x)\}$, $\{\mathsf{e}_1(x), \ldots, \mathsf{e}_n(x)\}$ la base canónica

Formas Diferenciales

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto. Si $x \in \Omega$, el espacio tangente a Ω en x es $T_x(\Omega) = \mathbb{R}^n$

- $T_x(\Omega) = \mathrm{sg}\{\mathsf{e}_1(x), \ldots, \mathsf{e}_n(x)\}$, $\{\mathsf{e}_1(x), \ldots, \mathsf{e}_n(x)\}$ la base canónica
- **Fibrado tangente**: $T(\Omega) = \coprod_{x \in \Omega} T_x(\Omega)$ (unión disjunta)

Formas Diferenciales

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto. Si $x \in \Omega$, el espacio tangente a Ω en x es $T_x(\Omega) = \mathbb{R}^n$

- $T_x(\Omega) = \mathrm{sg}\{\mathsf{e}_1(x), \dots, \mathsf{e}_n(x)\}$, $\{\mathsf{e}_1(x), \dots, \mathsf{e}_n(x)\}$ la base canónica
- **Fibrado tangente**: $T(\Omega) = \coprod_{x \in \Omega} T_x(\Omega)$ (unión disjunta)
- Un campo vectorial es $\mathsf{f}\colon \Omega \longrightarrow T(\Omega)$ tal que $\mathsf{f}(x) \in T_x(\Omega)$, $x \in \Omega$

Si f es un campo vectorial $\Longrightarrow \mathsf{f}(x) = f_1(x)\mathsf{e}_1(x) + \cdots + f_n(x)\mathsf{e}_n(x)$

Formas Diferenciales

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto. Si $x \in \Omega$, el espacio tangente a Ω en x es $T_x(\Omega) = \mathbb{R}^n$

- $T_x(\Omega) = \mathrm{sg}\{\mathsf{e}_1(x), \dots, \mathsf{e}_n(x)\}$, $\{\mathsf{e}_1(x), \dots, \mathsf{e}_n(x)\}$ la base canónica
- **Fibrado tangente**: $T(\Omega) = \coprod\limits_{x \in \Omega} T_x(\Omega)$ (unión disjunta)
- Un campo vectorial es $\mathsf{f}\colon \Omega \longrightarrow T(\Omega)$ tal que $\mathsf{f}(x) \in T_x(\Omega)$, $x \in \Omega$

Si f es un campo vectorial $\Longrightarrow \mathsf{f}(x) = f_1(x)\mathsf{e}_1(x) + \cdots + f_n(x)\mathsf{e}_n(x)$

- El campo f se identifica con $\mathsf{f} = (f_1, \dots, f_n)$

Formas Diferenciales

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto. Si $x \in \Omega$, el espacio tangente a Ω en x es $T_x(\Omega) = \mathbb{R}^n$

- $T_x(\Omega) = \mathrm{sg}\{\mathsf{e}_1(x), \dots, \mathsf{e}_n(x)\}$, $\{\mathsf{e}_1(x), \dots, \mathsf{e}_n(x)\}$ la base canónica
- **Fibrado tangente**: $T(\Omega) = \coprod_{x \in \Omega} T_x(\Omega)$ (unión disjunta)
- Un campo vectorial es $\mathsf{f}\colon \Omega \longrightarrow T(\Omega)$ tal que $\mathsf{f}(x) \in T_x(\Omega)$, $x \in \Omega$

Si f es un campo vectorial $\Longrightarrow \mathsf{f}(x) = f_1(x)\mathsf{e}_1(x) + \cdots + f_n(x)\mathsf{e}_n(x)$

- El campo f se identifica con $\mathsf{f} = (f_1, \dots, f_n)$
- $\mathsf{f} \in \mathcal{C}^m(\Omega; \mathbb{R}^n)$ sii $f_j \in \mathcal{C}^m(\Omega)$, $j = 1, \dots, n$

Formas Diferenciales

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto. Si $x \in \Omega$, el espacio tangente a Ω en x es $T_x(\Omega) = \mathbb{R}^n$

- $T_x(\Omega) = \mathrm{sg}\{\mathsf{e}_1(x), \dots, \mathsf{e}_n(x)\}$, $\{\mathsf{e}_1(x), \dots, \mathsf{e}_n(x)\}$ la base canónica
- **Fibrado tangente**: $T(\Omega) = \coprod_{x \in \Omega} T_x(\Omega)$ (unión disjunta)
- Un campo vectorial es $\mathsf{f}\colon \Omega \longrightarrow T(\Omega)$ tal que $\mathsf{f}(x) \in T_x(\Omega)$, $x \in \Omega$
- Si $u \in \mathcal{C}^1(\Omega)$, dado $x \in \Omega$, $d_x(u) = d(u)(x)$ es una aplicación lineal

Formas Diferenciales

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto. Si $x \in \Omega$, el espacio tangente a Ω en x es $T_x(\Omega) = \mathbb{R}^n$

- $T_x(\Omega) = \mathrm{sg}\{\mathsf{e}_1(x), \dots, \mathsf{e}_n(x)\}$, $\{\mathsf{e}_1(x), \dots, \mathsf{e}_n(x)\}$ la base canónica
- **Fibrado tangente**: $T(\Omega) = \coprod_{x \in \Omega} T_x(\Omega)$ (unión disjunta)
- Un campo vectorial es $\mathsf{f}\colon \Omega \longrightarrow T(\Omega)$ tal que $\mathsf{f}(x) \in T_x(\Omega)$, $x \in \Omega$
- Si $u \in \mathcal{C}^1(\Omega)$, dado $x \in \Omega$, $d_x(u) = d(u)(x)$ es una aplicación lineal $\rightsquigarrow d(u)(x) \in T_x(\Omega)^*$

Formas Diferenciales

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto. Si $x \in \Omega$, el espacio tangente a Ω en x es $T_x(\Omega) = \mathbb{R}^n$

- $T_x(\Omega) = \mathrm{sg}\{\mathsf{e}_1(x), \ldots, \mathsf{e}_n(x)\}$, $\{\mathsf{e}_1(x), \ldots, \mathsf{e}_n(x)\}$ la base canónica
- **Fibrado tangente**: $T(\Omega) = \coprod\limits_{x \in \Omega} T_x(\Omega)$ (unión disjunta)
- Un campo vectorial es $\mathsf{f}\colon \Omega \longrightarrow T(\Omega)$ tal que $\mathsf{f}(x) \in T_x(\Omega)$, $x \in \Omega$
- Si $u \in \mathcal{C}^1(\Omega)$, dado $x \in \Omega$, $d_x(u) = d(u)(x)$ es una aplicación lineal $\rightsquigarrow d(u)(x) \in T_x(\Omega)^*$
  $v = (v_1, \ldots, v_n)^\top \in T_x(\mathbb{R}^n) \Rightarrow d_x(u)(v) = u_{x_1}(x)v_1 + \cdots + u_{x_n}(x)v_n$

Formas Diferenciales

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto. Si $x \in \Omega$, el espacio tangente a Ω en x es $T_x(\Omega) = \mathbb{R}^n$

- $T_x(\Omega) = \mathrm{sg}\{\mathsf{e}_1(x), \dots, \mathsf{e}_n(x)\}$, $\{\mathsf{e}_1(x), \dots, \mathsf{e}_n(x)\}$ la base canónica
- **Fibrado tangente**: $T(\Omega) = \coprod_{x \in \Omega} T_x(\Omega)$ (unión disjunta)
- Un campo vectorial es $\mathsf{f}\colon \Omega \longrightarrow T(\Omega)$ tal que $\mathsf{f}(x) \in T_x(\Omega)$, $x \in \Omega$
- Si $u \in \mathcal{C}^1(\Omega)$, dado $x \in \Omega$, $d_x(u) = d(u)(x)$ es una aplicación lineal
  $\rightsquigarrow d(u)(x) \in T_x(\Omega)^*$
  $v = (v_1, \dots, v_n)^\top \in T_x(\mathbb{R}^n) \Rightarrow d_x(u)(v) = u_{x_1}(x)v_1 + \cdots + u_{x_n}(x)v_n$
- Si $u = x_j \Longrightarrow d_x(u)(v) = v_j \Longrightarrow d_x(u) = \mathsf{e}_j(x)^* \Longrightarrow d_x(u) = dx^j(x)$

Formas Diferenciales

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto. Si $x \in \Omega$, el espacio tangente a Ω en x es $T_x(\Omega) = \mathbb{R}^n$

- $T_x(\Omega) = \mathrm{sg}\{\mathsf{e}_1(x), \dots, \mathsf{e}_n(x)\}$, $\{\mathsf{e}_1(x), \dots, \mathsf{e}_n(x)\}$ la base canónica
- **Fibrado tangente**: $T(\Omega) = \coprod_{x \in \Omega} T_x(\Omega)$ (unión disjunta)
- Un campo vectorial es $\mathsf{f}\colon \Omega \longrightarrow T(\Omega)$ tal que $\mathsf{f}(x) \in T_x(\Omega)$, $x \in \Omega$
- Si $u \in \mathcal{C}^1(\Omega)$, dado $x \in \Omega$, $d_x(u) = d(u)(x)$ es una aplicación lineal
  $\rightsquigarrow d(u)(x) \in T_x(\Omega)^*$
  $v = (v_1, \dots, v_n)^\top \in T_x(\mathbb{R}^n) \Rightarrow d_x(u)(v) = u_{x_1}(x)v_1 + \cdots + u_{x_n}(x)v_n$
- Si $u = x_j \Longrightarrow d_x(u)(v) = v_j \Longrightarrow d_x(u) = \mathsf{e}_j(x)^* \Longrightarrow d_x(u) = dx^j(x)$
- $\big\{dx^1(x), \dots, dx^n(x)\big\}$ es base de $T_x(\Omega)^*$, dual de $\{\mathsf{e}_1(x), \dots, \mathsf{e}_n(x)\}$

Formas Diferenciales

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto. Si $x \in \Omega$, el espacio tangente a Ω en x es $T_x(\Omega) = \mathbb{R}^n$

- $T_x(\Omega) = \mathrm{sg}\{\mathsf{e}_1(x), \dots, \mathsf{e}_n(x)\}$, $\{\mathsf{e}_1(x), \dots, \mathsf{e}_n(x)\}$ la base canónica
- **Fibrado tangente**: $T(\Omega) = \coprod_{x \in \Omega} T_x(\Omega)$ (unión disjunta)
- Un campo vectorial es $\mathsf{f}\colon \Omega \longrightarrow T(\Omega)$ tal que $\mathsf{f}(x) \in T_x(\Omega)$, $x \in \Omega$
- Para cada $x \in \Omega$ y cada $k \in \mathbb{N}^* \Longrightarrow \bigwedge_x^k(\Omega) = \bigwedge^k \big(T_x(\Omega)\big)$

Formas Diferenciales

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto. Si $x \in \Omega$, el espacio tangente a Ω en x es $T_x(\Omega) = \mathbb{R}^n$

- $T_x(\Omega) = \mathrm{sg}\{\mathsf{e}_1(x), \dots, \mathsf{e}_n(x)\}$, $\{\mathsf{e}_1(x), \dots, \mathsf{e}_n(x)\}$ la base canónica
- **Fibrado tangente**: $T(\Omega) = \coprod_{x \in \Omega} T_x(\Omega)$ (unión disjunta)
- Un campo vectorial es $\mathsf{f}\colon \Omega \longrightarrow T(\Omega)$ tal que $\mathsf{f}(x) \in T_x(\Omega)$, $x \in \Omega$
- Para cada $x \in \Omega$ y cada $k \in \mathbb{N}^* \Longrightarrow \bigwedge_x^k(\Omega) = \bigwedge^k \big(T_x(\Omega)\big)$
- $\big\{dx^{i_1}(x) \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}(x)\big\}_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n}$ es base de $\bigwedge_x^k(\Omega)$

Formas Diferenciales

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto. Si $x \in \Omega$, el espacio tangente a Ω en x es $T_x(\Omega) = \mathbb{R}^n$

- $T_x(\Omega) = \mathrm{sg}\{\mathsf{e}_1(x), \dots, \mathsf{e}_n(x)\}$, $\{\mathsf{e}_1(x), \dots, \mathsf{e}_n(x)\}$ la base canónica
- **Fibrado tangente**: $T(\Omega) = \coprod\limits_{x \in \Omega} T_x(\Omega)$ (unión disjunta)
- Un campo vectorial es $\mathsf{f}\colon \Omega \longrightarrow T(\Omega)$ tal que $\mathsf{f}(x) \in T_x(\Omega)$, $x \in \Omega$
- Para cada $x \in \Omega$ y cada $k \in \mathbb{N}^* \Longrightarrow \bigwedge_x^k(\Omega) = \bigwedge^k \big(T_x(\Omega)\big)$
- $\Big\{dx^{i_1}(x) \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}(x)\Big\}_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n}$ es base de $\bigwedge_x^k(\Omega)$
- Para cada $k \in \mathbb{N}^* \Longrightarrow \bigwedge^k(\Omega) = \coprod\limits_{x \in \Omega} \bigwedge_x^k(\Omega)$

Formas Diferenciales

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto. Si $x \in \Omega$, el espacio tangente a Ω en x es $T_x(\Omega) = \mathbb{R}^n$

- Para cada $x \in \Omega$ y cada $k \in \mathbb{N}^* \Longrightarrow \bigwedge_x^k(\Omega) = \bigwedge^k \big(T_x(\Omega)\big)$

- $\big\{dx^{i_1}(x) \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}(x)\big\}_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n}$ es base de $\bigwedge_x^k(\Omega)$

- Para cada $k \in \mathbb{N}^* \Longrightarrow \bigwedge^k(\Omega) = \coprod_{x \in \Omega} \bigwedge_x^k(\Omega)$

Formas Diferenciales

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto. Si $x \in \Omega$, el espacio tangente a Ω en x es $T_x(\Omega) = \mathbb{R}^n$

- Para cada $x \in \Omega$ y cada $k \in \mathbb{N}^* \Longrightarrow \bigwedge_x^k(\Omega) = \bigwedge^k \big(T_x(\Omega)\big)$
- $\big\{dx^{i_1}(x) \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}(x)\big\}_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n}$ es base de $\bigwedge_x^k(\Omega)$
- Para cada $k \in \mathbb{N}^* \Longrightarrow \bigwedge^k(\Omega) = \coprod\limits_{x\,\in\,\Omega} \bigwedge_x^k(\Omega)$
- Una k-forma es $\omega\colon \Omega \longrightarrow \bigwedge^k(\Omega)$ tal que $\omega(x) \in \bigwedge_x^k(\Omega)$, $x \in \Omega$

Formas Diferenciales

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto. Si $x \in \Omega$, el espacio tangente a Ω en x es $T_x(\Omega) = \mathbb{R}^n$

- Para cada $x \in \Omega$ y cada $k \in \mathbb{N}^* \Longrightarrow \bigwedge_x^k(\Omega) = \bigwedge^k \big(T_x(\Omega)\big)$
- $\big\{dx^{i_1}(x) \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}(x)\big\}_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n}$ es base de $\bigwedge_x^k(\Omega)$
- Para cada $k \in \mathbb{N}^* \Longrightarrow \bigwedge^k(\Omega) = \coprod\limits_{x\,\in\,\Omega} \bigwedge_x^k(\Omega)$
- Una k-forma es $\omega\colon \Omega \longrightarrow \bigwedge^k(\Omega)$ tal que $\omega(x) \in \bigwedge_x^k(\Omega)$, $x \in \Omega$
- $$\omega(x) = \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n} \alpha_{i_1,\dots,i_k}(x) dx^{i_1}(x) \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}(x)$$

Formas Diferenciales

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto. Si $x \in \Omega$, el espacio tangente a Ω en x es $T_x(\Omega) = \mathbb{R}^n$

- Para cada $x \in \Omega$ y cada $k \in \mathbb{N}^* \Longrightarrow \bigwedge_x^k(\Omega) = \bigwedge^k \big(T_x(\Omega)\big)$
- $\big\{dx^{i_1}(x) \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}(x)\big\}_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n}$ es base de $\bigwedge_x^k(\Omega)$
- Para cada $k \in \mathbb{N}^* \Longrightarrow \bigwedge^k(\Omega) = \coprod\limits_{x \in \Omega} \bigwedge_x^k(\Omega)$
- Una k-forma es $\omega \colon \Omega \longrightarrow \bigwedge^k(\Omega)$ tal que $\omega(x) \in \bigwedge_x^k(\Omega)$, $x \in \Omega$
- $$\omega(x) = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} \alpha_{i_1, \dots, i_k}(x) dx^{i_1}(x) \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}(x)$$

Formas Diferenciales

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto. Si $x \in \Omega$, el espacio tangente a Ω en x es $T_x(\Omega) = \mathbb{R}^n$

- Para cada $x \in \Omega$ y cada $k \in \mathbb{N}^* \Longrightarrow \bigwedge_x^k(\Omega) = \bigwedge^k \big(T_x(\Omega)\big)$
- $\big\{dx^{i_1}(x) \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}(x)\big\}_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n}$ es base de $\bigwedge_x^k(\Omega)$
- Para cada $k \in \mathbb{N}^* \Longrightarrow \bigwedge^k(\Omega) = \coprod_{x \in \Omega} \bigwedge_x^k(\Omega)$
- Una k-forma es $\omega\colon \Omega \longrightarrow \bigwedge^k(\Omega)$ tal que $\omega(x) \in \bigwedge_x^k(\Omega)$, $x \in \Omega$
- $$\omega(x) = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} \alpha_{i_1,\dots,i_k}(x) dx^{i_1}(x) \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}(x)$$
- ω es de clase $\mathcal{C}^m$ sii $\alpha_{i_1,\dots,i_k} \in \mathcal{C}^m(\Omega)$, $1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n$.

Formas Diferenciales

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto. Si $x \in \Omega$, el espacio tangente a Ω en x es $T_x(\Omega) = \mathbb{R}^n$

- Para cada $x \in \Omega$ y cada $k \in \mathbb{N}^* \Longrightarrow \bigwedge_x^k(\Omega) = \bigwedge^k \big(T_x(\Omega)\big)$
- $\big\{dx^{i_1}(x) \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}(x)\big\}_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n}$ es base de $\bigwedge_x^k(\Omega)$
- Para cada $k \in \mathbb{N}^* \Longrightarrow \bigwedge^k(\Omega) = \coprod_{x \in \Omega} \bigwedge_x^k(\Omega)$
- Una k-forma es $\omega\colon \Omega \longrightarrow \bigwedge^k(\Omega)$ tal que $\omega(x) \in \bigwedge_x^k(\Omega)$, $x \in \Omega$
- Si $\omega_1 \in \bigwedge^k(\Omega)$, $\omega_2 \in \bigwedge^m(\Omega)$, $(\omega_1 \wedge w_2)(x) = \omega_1(x) \wedge w_2(x)$, $x \in \Omega$
- $\omega_1 \wedge w_2 \in \bigwedge^{k+m}(\Omega)$ y $\omega_1 \wedge \omega_2 = (-1)^{km}\omega_2 \wedge \omega_1$

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto. Si $x \in \Omega$, el espacio tangente a Ω en x es $T_x(\Omega) = \mathbb{R}^n$

- Para cada $x \in \Omega$ y cada $k \in \mathbb{N}^* \Longrightarrow \bigwedge_x^k(\Omega) = \bigwedge^k \big(T_x(\Omega)\big)$
- $\big\{dx^{i_1}(x) \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}(x)\big\}_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n}$ es base de $\bigwedge_x^k(\Omega)$
- Para cada $k \in \mathbb{N}^* \Longrightarrow \bigwedge^k(\Omega) = \coprod_{x \in \Omega} \bigwedge_x^k(\Omega)$
- Una k-forma es $\omega \colon \Omega \longrightarrow \bigwedge^k(\Omega)$ tal que $\omega(x) \in \bigwedge_x^k(\Omega)$, $x \in \Omega$
- Para cada $j = 1, \dots, n$, dx^j es una 1-forma.

Formas Diferenciales

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto. Si $x \in \Omega$, el espacio tangente a Ω en x es $T_x(\Omega) = \mathbb{R}^n$

- Para cada $x \in \Omega$ y cada $k \in \mathbb{N}^* \Longrightarrow \bigwedge_x^k(\Omega) = \bigwedge^k \big(T_x(\Omega)\big)$
- $\big\{dx^{i_1}(x) \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}(x)\big\}_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n}$ es base de $\bigwedge_x^k(\Omega)$
- Para cada $k \in \mathbb{N}^* \Longrightarrow \bigwedge^k(\Omega) = \coprod_{x \in \Omega} \bigwedge_x^k(\Omega)$
- Una k-forma es $\omega \colon \Omega \longrightarrow \bigwedge^k(\Omega)$ tal que $\omega(x) \in \bigwedge_x^k(\Omega)$, $x \in \Omega$
- Para cada $j = 1, \dots, n$, dx^j es una 1-forma.
- $\omega = \displaystyle\sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} \alpha_{i_1, \cdots, i_k} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$, $\alpha_{i_1, \cdots, i_k} \in \mathcal{C}^m(\Omega)$

Formas Diferenciales

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto. Si $x \in \Omega$, el espacio tangente a Ω en x es $T_x(\Omega) = \mathbb{R}^n$

- Para cada $x \in \Omega$ y cada $k \in \mathbb{N}^* \Longrightarrow \bigwedge_x^k(\Omega) = \bigwedge^k \big(T_x(\Omega)\big)$
- Para cada $k \in \mathbb{N}^* \Longrightarrow \bigwedge^k(\Omega) = \coprod\limits_{x \in \Omega} \bigwedge_x^k(\Omega)$
- Una k-forma es $\omega \colon \Omega \longrightarrow \bigwedge^k(\Omega)$ tal que $\omega(x) \in \bigwedge_x^k(\Omega)$, $x \in \Omega$
- $\omega = \sum\limits_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} \alpha_{i_1,\cdots,i_k} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$, $\alpha_{i_1,\cdots,i_k} \in \mathcal{C}^m(\Omega)$

Formas Diferenciales

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto. Si $x \in \Omega$, el espacio tangente a Ω en x es $T_x(\Omega) = \mathbb{R}^n$

- Para cada $x \in \Omega$ y cada $k \in \mathbb{N}^* \Longrightarrow \bigwedge_x^k(\Omega) = \bigwedge^k \big(T_x(\Omega)\big)$
- Para cada $k \in \mathbb{N}^* \Longrightarrow \bigwedge^k(\Omega) = \coprod_{x \in \Omega} \bigwedge_x^k(\Omega)$
- Una k-forma es $\omega \colon \Omega \longrightarrow \bigwedge^k(\Omega)$ tal que $\omega(x) \in \bigwedge_x^k(\Omega)$, $x \in \Omega$
- $\omega = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} \alpha_{i_1, \dots, i_k} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$, $\alpha_{i_1, \dots, i_k} \in \mathcal{C}^m(\Omega)$
- Si $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$, du es la 1-forma $d(f) = f_{x_1} dx^1 + \cdots + f_{x_n} dx^n$

Formas Diferenciales

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto. Si $x \in \Omega$, el espacio tangente a Ω en x es $T_x(\Omega) = \mathbb{R}^n$

- Para cada $x \in \Omega$ y cada $k \in \mathbb{N}^* \Longrightarrow \bigwedge_x^k(\Omega) = \bigwedge^k \big(T_x(\Omega)\big)$
- Para cada $k \in \mathbb{N}^* \Longrightarrow \bigwedge^k(\Omega) = \coprod_{x \in \Omega} \bigwedge_x^k(\Omega)$
- Una k-forma es $\omega \colon \Omega \longrightarrow \bigwedge^k(\Omega)$ tal que $\omega(x) \in \bigwedge_x^k(\Omega)$, $x \in \Omega$
- $\omega = \displaystyle\sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} \alpha_{i_1,\dots,i_k} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$, $\alpha_{i_1,\dots,i_k} \in \mathcal{C}^m(\Omega)$
- Si $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$, df es la 1-forma $d(f) = \dfrac{\partial f}{\partial x_1} dx^1 + \cdots + \dfrac{\partial f}{\partial x_n} dx^n$

La Diferencial Exterior

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto. Si $x \in \Omega$, el espacio tangente a Ω en x es $T_x(\Omega) = \mathbb{R}^n$

- Una k-forma es $\omega\colon \Omega \longrightarrow \bigwedge^k(\Omega)$ tal que $\omega(x) \in \bigwedge^k_x(\Omega)$, $x \in \Omega$

- $$\omega = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} \alpha_{i_1,\cdots,i_k} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k},\ \alpha_{i_1,\cdots,i_k} \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$$

La Diferencial Exterior

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto. Si $x \in \Omega$, el espacio tangente a Ω en x es $T_x(\Omega) = \mathbb{R}^n$

- Una k-forma es $\omega\colon \Omega \longrightarrow \bigwedge^k(\Omega)$ tal que $\omega(x) \in \bigwedge_x^k(\Omega)$, $x \in \Omega$
- $$\omega = \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n} \alpha_{i_1,\cdots,i_k} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}, \ \alpha_{i_1,\cdots,i_k} \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$$
- Las k-formas con $k > n$ son nulas

La Diferencial Exterior

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto. Si $x \in \Omega$, el espacio tangente a Ω en x es $T_x(\Omega) = \mathbb{R}^n$

- Una k-forma es $\omega \colon \Omega \longrightarrow \bigwedge^k(\Omega)$ tal que $\omega(x) \in \bigwedge^k_x(\Omega)$, $x \in \Omega$
- $$\omega = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} \alpha_{i_1,\cdots,i_k} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}, \ \alpha_{i_1,\cdots,i_k} \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$$
- Las k-formas con $k > n$ son nulas
- $\bigwedge^0(\Omega) = \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ y si $\omega_1, \omega_2 \in \bigwedge^0(\Omega) \Longrightarrow \omega_1 \wedge \omega_2 = \omega_1\omega_2 = \omega_2 \wedge \omega_1$

La Diferencial Exterior

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto. Si $x \in \Omega$, el espacio tangente a Ω en x es $T_x(\Omega) = \mathbb{R}^n$

- Una k-forma es $\omega\colon \Omega \longrightarrow \bigwedge^k(\Omega)$ tal que $\omega(x) \in \bigwedge_x^k(\Omega)$, $x \in \Omega$
- $$\omega = \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n} \alpha_{i_1,\cdots,i_k} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}, \ \alpha_{i_1,\cdots,i_k} \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$$
- $\bigwedge^0(\Omega) = \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ y $\bigwedge^k(\Omega) = \{0\}$ si $k > n$
- Si $f \in \bigwedge^0(\Omega)$, $df \in \bigwedge^1(\Omega)$ y $d(f) = \dfrac{\partial f}{\partial x_1} dx^1 + \cdots + \dfrac{\partial f}{\partial x_n} dx^n$

La Diferencial Exterior

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto. Si $x \in \Omega$, el espacio tangente a Ω en x es $T_x(\Omega) = \mathbb{R}^n$

- Una k-forma es $\omega \colon \Omega \longrightarrow \bigwedge^k(\Omega)$ tal que $\omega(x) \in \bigwedge^k_x(\Omega)$, $x \in \Omega$
- $$\omega = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} \alpha_{i_1,\cdots,i_k} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}, \ \alpha_{i_1,\cdots,i_k} \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$$
- $\bigwedge^0(\Omega) = \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ y $\bigwedge^k(\Omega) = \{0\}$ si $k > n$
- Si $f \in \bigwedge^0(\Omega)$, $df \in \bigwedge^1(\Omega)$ y $d(f) = \dfrac{\partial f}{\partial x_1} dx^1 + \cdots + \dfrac{\partial f}{\partial x_n} dx^n$
- Si $f \in \bigwedge^0(\Omega) = \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ y $\omega \in \bigwedge^k(\Omega)$, $f \wedge \omega = f\omega \in \bigwedge^k(\Omega)$ y

$$f\omega = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} f\, \alpha_{i_1,\cdots,i_k} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$$

La Diferencial Exterior

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto. Si $x \in \Omega$, el espacio tangente a Ω en x es $T_x(\Omega) = \mathbb{R}^n$

- Una k-forma es $\omega\colon \Omega \longrightarrow \bigwedge^k(\Omega)$ tal que $\omega(x) \in \bigwedge^k_x(\Omega)$, $x \in \Omega$
- $$\omega = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} \alpha_{i_1,\dots,i_k} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}, \; \alpha_{i_1,\dots,i_k} \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$$
- $\bigwedge^0(\Omega) = \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ y $\bigwedge^k(\Omega) = \{0\}$ si $k > n$
- Si $f \in \bigwedge^0(\Omega)$, $df \in \bigwedge^1(\Omega)$ y $d(f) = \dfrac{\partial f}{\partial x_1} dx^1 + \cdots + \dfrac{\partial f}{\partial x_n} dx^n$
- Si $k \in \mathbb{N}$, la **diferencial exterior** $d\colon \bigwedge^k(\Omega) \longrightarrow \bigwedge^{k+1}(\Omega)$ es
$$d(\omega) = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} d(\alpha_{i_1,\dots,i_k}) \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$$

La Diferencial Exterior

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto. Si $x \in \Omega$, el espacio tangente a Ω en x es $T_x(\Omega) = \mathbb{R}^n$

- Una k-forma es $\omega\colon \Omega \longrightarrow \bigwedge^k(\Omega)$ tal que $\omega(x) \in \bigwedge_x^k(\Omega)$, $x \in \Omega$

- $$\omega = \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n} \alpha_{i_1,\cdots,i_k} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k},\ \alpha_{i_1,\cdots,i_k} \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$$

- $\bigwedge^0(\Omega) = \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ y $\bigwedge^k(\Omega) = \{0\}$ si $k > n$

- Si $f \in \bigwedge^0(\Omega)$, $df \in \bigwedge^1(\Omega)$ y $d(f) = \dfrac{\partial f}{\partial x_1}\, dx^1 + \cdots + \dfrac{\partial f}{\partial x_n}\, dx^n$

- Si $k \in \mathbb{N}$, la **diferencial exterior** $d\colon \bigwedge^k(\Omega) \longrightarrow \bigwedge^{k+1}(\Omega)$ es

  $$d(\omega) = \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n} \sum_{m=1}^{n} \left(\frac{\partial \alpha_{i_1,\cdots,i_k}}{\partial x_m}\right) dx^m \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$$

La Diferencial Exterior

- Si $\omega = \displaystyle\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n} \alpha_{i_1,\cdots,i_k} dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k}$

- $d(\omega) = \displaystyle\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n} d(\alpha_{i_1,\cdots,i_k})\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k}$

Calculeu les diferencials exteriors de les formes diferencials següents:

1. $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$.
2. $P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$.
3. $P(x,y,z)dy\wedge dz + Q(x,y,z)dz\wedge dx + R(x,y,z)dx\wedge dy$.
4. $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \alpha_j(x_1,\ldots,x_n)dx^1\wedge\cdots\wedge\widehat{dx^j}\wedge\cdots dx^n$.

La Diferencial Exterior

- Sean $\widehat{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$, abierto y $\Phi\colon \Omega \longrightarrow \widehat{\Omega}$ un difeomorfismo,

$$\boxed{\Phi(x_1,\dots,x_n) = (y_1,\dots,y_n),\ \Phi^{-1}(y_1,\dots,y_n) = (x_1,\dots,x_n)}$$

La Diferencial Exterior

- Sean $\widehat{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$, abierto y $\Phi\colon \Omega \longrightarrow \widehat{\Omega}$ un difeomorfismo,

$$\Phi(x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_n),\ \Phi^{-1}(y_1, \dots, y_n) = (x_1, \dots, x_n)$$

- Para cada $j = 1, \dots, n$, $\boxed{dy^j = \sum_{i=1}^{n} \Big(\frac{\partial y_j}{\partial x_i}\Big) dx^i}$

La Diferencial Exterior

- Sean $\widehat{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$, abierto y $\Phi\colon \Omega \longrightarrow \widehat{\Omega}$ un difeomorfismo,

$$\boxed{\Phi(x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_n),\ \Phi^{-1}(y_1, \dots, y_n) = (x_1, \dots, x_n)}$$

- Para cada $j = 1, \dots, n$, $\boxed{dy^j = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial y_j}{\partial x_i}\right) dx^i}$

- $\boxed{dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^n = \big(\det D\Phi\big) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n}$

La Diferencial Exterior

- Sean $\widehat{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$, abierto y $\Phi\colon \Omega \longrightarrow \widehat{\Omega}$ un difeomorfismo,

$$\boxed{\Phi(x_1,\dots,x_n) = (y_1,\dots,y_n),\ \Phi^{-1}(y_1,\dots,y_n) = (x_1,\dots,x_n)}$$

- Para cada $j = 1,\dots,n$, $\boxed{dy^j = \sum_{i=1}^{n} \Big(\dfrac{\partial y_j}{\partial x_i}\Big) dx^i}$

- $$\boxed{\Big(\frac{\partial g}{\partial y_j}\Big) dy^j = \sum_{r=1}^{n} \Big(\frac{\partial g}{\partial x_r}\Big)\Big(\frac{\partial x_r}{\partial y_j}\Big) \sum_{i=1}^{n} \Big(\frac{\partial y_j}{\partial x_i}\Big) dx^i = \Big(\frac{\partial g}{\partial x_j}\Big) dx^j}$$

La Diferencial Exterior

- Sean $\widehat{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$, abierto y $\Phi\colon \Omega \longrightarrow \widehat{\Omega}$ un difeomorfismo,

$$\boxed{\Phi(x_1,\dots,x_n) = (y_1,\dots,y_n),\ \Phi^{-1}(y_1,\dots,y_n) = (x_1,\dots,x_n)}$$

- Para cada $j = 1,\dots,n$, $\boxed{dy^j = \sum_{i=1}^{n} \Big(\frac{\partial y_j}{\partial x_i}\Big) dx^i}$

- $$\boxed{\Big(\frac{\partial g}{\partial y_j}\Big) dy^j = \sum_{r=1}^{n} \Big(\frac{\partial g}{\partial x_r}\Big)\Big(\frac{\partial x_r}{\partial y_j}\Big) \sum_{i=1}^{n} \Big(\frac{\partial y_j}{\partial x_i}\Big) dx^i = \Big(\frac{\partial g}{\partial x_j}\Big) dx^j}$$

- $$\boxed{dg = \sum_{i=1}^{n} \Big(\frac{\partial g}{\partial y_i}\Big) dy^i = \sum_{i=1}^{n} \Big(\frac{\partial g}{\partial x_i}\Big) dx^i}$$

La Diferencial Exterior

- Sean $\widehat{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$, abierto y $\Phi\colon \Omega \longrightarrow \widehat{\Omega}$ un difeomorfismo,

$$\Phi(x_1, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots, y_n),\ \Phi^{-1}(y_1, \ldots, y_n) = (x_1, \ldots, x_n)$$

- Para cada $j = 1, \ldots, n$, $\displaystyle dy^j = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial y_j}{\partial x_i}\right) dx^i$

- Si $\displaystyle \omega = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} \alpha_{i_1, \cdots, i_k} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \in \bigwedge^k(\Omega)$

- $$\begin{aligned} d(\omega) &= \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} d(\alpha_{i_1, \cdots, i_k})(x) \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \\ &= \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} d(\alpha_{i_1, \cdots, i_k})(y) \wedge dy^{i_1} \wedge \cdots \wedge dy^{i_k} \end{aligned}$$

La Diferencial Exterior

- $$\omega = \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n} \alpha_{i_1,\cdots,i_k} dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k} \in \bigwedge^k(\Omega), \quad |\omega| = k$$
$$d(\omega) = \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n} d(\alpha_{i_1,\cdots,i_k})\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k} \in \bigwedge^{k+1}(\Omega)$$

1. d es lineal y $d\big(\bigwedge^k(\Omega)\big)\subset\bigwedge^{k+1}(\Omega)$ para todo $k\in\mathbb{N}$.
2. d actúa en $\bigwedge^0(\Omega)=\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ asignando la diferencial.
3. Regla de Leibniz: $\boxed{d(\omega_1\wedge\omega_2) = d(\omega_1)\wedge\omega_2 + (-1)^{|\omega_1|}\omega_1\wedge d(\omega_2)}$

La Diferencial Exterior

- $$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \alpha_{i_1, \cdots, i_k} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \in \bigwedge^k(\Omega), \quad |\omega| = k$$
  $$d(\omega) = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} d(\alpha_{i_1, \cdots, i_k}) \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \in \bigwedge^{k+1}(\Omega)$$

1. d es lineal y $d\left(\bigwedge^k(\Omega)\right) \subset \bigwedge^{k+1}(\Omega)$ para todo $k \in \mathbb{N}$.
2. d actúa en $\bigwedge^0(\Omega) = \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ asignando la diferencial.
3. Regla de Leibniz: $\boxed{d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d(\omega_1) \wedge \omega_2 + (-1)^{|\omega_1|} \omega_1 \wedge d(\omega_2)}$
4. $\boxed{d^2 = d \circ d = 0}$

La Diferencial Exterior

- $$\omega = \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n} \alpha_{i_1,\cdots,i_k} dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k} \in \bigwedge^k(\Omega), \quad |\omega| = k$$
  $$d(\omega) = \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n} d(\alpha_{i_1,\cdots,i_k})\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k} \in \bigwedge^{k+1}(\Omega)$$

1. d es lineal y $d\big(\bigwedge^k(\Omega)\big) \subset \bigwedge^{k+1}(\Omega)$ para todo $k\in\mathbb{N}$.
2. d actúa en $\bigwedge^0(\Omega) = \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ asignando la diferencial.
3. Regla de Leibniz: $\boxed{d(\omega_1\wedge\omega_2) = d(\omega_1)\wedge\omega_2 + (-1)^{|\omega_1|}\omega_1\wedge d(\omega_2)}$
4. $\boxed{d^2 = d\circ d = 0}$

- $\omega \in \bigwedge^k(\Omega)$ es
  1. **cerrada** si $d\omega = 0$.
  2. **exacta** si existe $\widehat{\omega}\in\bigwedge^{k-1}(\Omega)$ tal que $\omega = d\widehat{\omega}$

La Diferencial Exterior

- $$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \alpha_{i_1,\cdots,i_k} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \in \bigwedge^k(\Omega), \quad |\omega| = k$$
  $$d(\omega) = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} d(\alpha_{i_1,\cdots,i_k}) \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \in \bigwedge^{k+1}(\Omega)$$

1. Regla de Leibniz: $\boxed{d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d(\omega_1) \wedge \omega_2 + (-1)^{|\omega_1|} \omega_1 \wedge d(\omega_2)}$
2. $\boxed{d^2 = d \circ d = 0}$

- $\omega \in \bigwedge^k(\Omega)$ es
  1. **cerrada** si $d\omega = 0$.
  2. **exacta** si existe $\widehat{\omega} \in \bigwedge^{k-1}(\Omega)$ tal que $\omega = d\widehat{\omega}$

- $\boxed{d^2 = 0 \iff \text{Toda forma exacta es cerrada}}$

La Diferencial Exterior

- $$\omega = \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n} \alpha_{i_1,\cdots,i_k} dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k} \in \bigwedge^k(\Omega), \quad |\omega| = k$$
  $$d(\omega) = \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n} d(\alpha_{i_1,\cdots,i_k})\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k} \in \bigwedge^{k+1}(\Omega)$$

1. Regla de Leibniz: $\boxed{d(\omega_1\wedge\omega_2) = d(\omega_1)\wedge\omega_2 + (-1)^{|\omega_1|}\omega_1\wedge d(\omega_2)}$
2. $\boxed{d^2 = d\circ d = 0}$

- $\omega \in \bigwedge^k(\Omega)$ es
  1. **cerrada** si $d\omega = 0$.
  2. **exacta** si existe $\widehat{\omega} \in \bigwedge^{k-1}(\Omega)$ tal que $\omega = d\widehat{\omega}$

- Toda forma exacta es cerrada ¿Cuándo cerrada implica exacta?

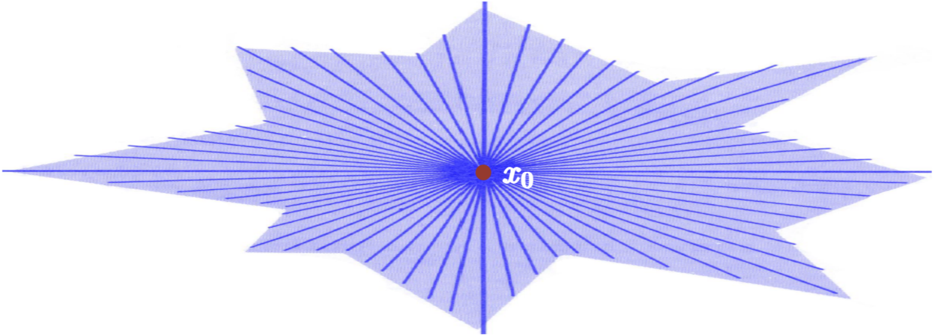
Lema de Poincaré

Si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es estrellado, entonces una forma es cerrada sii es exacta

Lema de Poincaré

Si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es estrellado, entonces una forma es cerrada sii es exacta

Ω tiene forma de estrella si existe $x_0 = (a_1, \ldots, a_n)$, el centro de la estrella, tal que $(1-t)x_0 + tx \in \Omega$, para cada $x \in \Omega$ y cada $t \in [0,1]$.



Lema de Poincaré

Si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es estrellado, entonces una forma es cerrada sii es exacta

- Para cada $k \geq 1$ definimos $K\colon \bigwedge^k(\Omega) \longrightarrow \bigwedge^{k-1}(\Omega)$

Si $\omega = \displaystyle\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n} \alpha_{i_1,\cdots,i_k} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$,

$$K(\omega) = \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n} \sum_{m=1}^{k} \beta_{m;i_1,\cdots,i_k} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^{i_m}} \wedge \cdots dx^{i_k}$$

$$\beta_{m;i_1,\cdots,i_k}(x) = (-1)^{m-1}(x_{i_m} - a_{i_m}) \int_0^1 t^{k-1} \alpha_{i_1,\cdots,i_k}\big(tx + (1-t)x_0\big) dt$$

Lema de Poincaré

Si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es estrellado, entonces una forma es cerrada sii es exacta

- Para cada $k \geq 1$ definimos $K\colon \bigwedge^k(\Omega) \longrightarrow \bigwedge^{k-1}(\Omega)$

Si $\omega = \displaystyle\sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n} \alpha_{i_1,\cdots,i_k} dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k}$,

$$K(\omega) = \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n} \sum_{m=1}^{k} \beta_{m;i_1,\cdots,i_k} dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge \widehat{dx^{i_m}} \wedge\cdots dx^{i_k}$$

$$\beta_{m;i_1,\cdots,i_k}(x) = (-1)^{m-1}(x_{i_m} - a_{i_m})\int_0^1 t^{k-1}\alpha_{i_1,\cdots,i_k}\big(tx + (1-t)x_0\big)dt$$

- $\boxed{k=1,}$ $\omega = \displaystyle\sum_{i=1}^n \alpha_i dx^i$, $m=1$, $\beta_i(x) = (x_i - a_i)\displaystyle\int_0^1 \alpha_i\big(tx+(1-t)x_0\big)dt$

$$\rightsquigarrow K(\omega)(x) = \sum_{i=1}^n \beta_i(x) = \int_0^1 \Big\langle \mathsf{f}\big(tx+(1-t)x_0\big), \mathsf{r}(x-x_0)\Big\rangle dt$$

Lema de Poincaré

Si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es estrellado, entonces una forma es cerrada sii es exacta

- Para cada $k \geq 1$ definimos $K\colon \bigwedge^k(\Omega) \longrightarrow \bigwedge^{k-1}(\Omega)$

Si $\omega = \displaystyle\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n} \alpha_{i_1,\cdots,i_k} dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k}$,

$$K(\omega) = \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n} \sum_{m=1}^{k} \beta_{m;i_1,\cdots,i_k} dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge \widehat{dx^{i_m}} \wedge\cdots dx^{i_k}$$

$$\beta_{m;i_1,\cdots,i_k}(x) = (-1)^{m-1}(x_{i_m} - a_{i_m})\int_0^1 t^{k-1}\alpha_{i_1,\cdots,i_k}\big(tx+(1-t)x_0\big)dt$$

- Para cada $\omega \in \bigwedge^k(\Omega)$, $k \geq 1$, $\omega = K\big(d(\omega)\big) + d\big(K(\omega)\big)$

Lema de Poincaré

Si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es estrellado, entonces una forma es cerrada sii es exacta

- Para cada $k \geq 1$ definimos $K\colon \bigwedge^k(\Omega) \longrightarrow \bigwedge^{k-1}(\Omega)$

Si $\omega = \displaystyle\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n} \alpha_{i_1,\cdots,i_k} dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k}$,

$$K(\omega) = \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n} \sum_{m=1}^{k} \beta_{m;i_1,\cdots,i_k} dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge \widehat{dx^{i_m}} \wedge\cdots dx^{i_k}$$

$$\beta_{m;i_1,\cdots,i_k}(x) = (-1)^{m-1}(x_{i_m} - a_{i_m})\int_0^1 t^{k-1}\alpha_{i_1,\cdots,i_k}\big(tx+(1-t)x_0\big)dt$$

- Para cada $\omega \in \bigwedge^k(\Omega)$, $k\geq 1$, $\omega = K\big(d(\omega)\big) + d\big(K(\omega)\big)$

- Si ω es cerrada $\Longrightarrow \omega = d(\widehat{\omega})$, $\widehat{\omega} = K(\omega)$

Pull-back de Formas Diferenciales

- Consideremos $\Omega \subset \mathbb{R}^n, \widehat{\Omega} \subset \mathbb{R}^m$ abiertos $n, m \geq 1$.
- $F\colon \widehat{\Omega} \longrightarrow \Omega$ de clase $\mathcal{C}^\infty(\widehat{\Omega}; \Omega)$ y $\mathsf{A}(u) = DF(u) \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$
- El **pull-back** es $F^*\colon \bigwedge^p(\Omega) \longrightarrow \bigwedge^p(\widehat{\Omega})$: Para cada $x = F(u) \in \Omega$,

$$F^*(u)\colon \bigwedge\nolimits^p \big(T_x(\Omega)\big) \longrightarrow \bigwedge\nolimits^p\big(T_u\big(\widehat{\Omega}\big)\big)$$

Pull-back de Formas Diferenciales

- Consideremos $\Omega \subset \mathbb{R}^n, \widehat{\Omega} \subset \mathbb{R}^m$ abiertos $n, m \geq 1$.
- $F\colon \widehat{\Omega} \longrightarrow \Omega$ de clase $\mathcal{C}^\infty(\widehat{\Omega}; \Omega)$ y $\mathsf{A}(u) = DF(u) \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$
- El **pull-back** es $F^*\colon \bigwedge^p(\Omega) \longrightarrow \bigwedge^p(\widehat{\Omega})$: Para cada $x = F(u) \in \Omega$,
$$F^*(u)\colon \bigwedge^p\left(T_x(\Omega)\right) \longrightarrow \bigwedge^p(T_u(\widehat{\Omega}))$$

1. F^* es lineal.
2. Si $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega) = \bigwedge^0(\Omega)$, $F^*(f) = f \circ F \in \mathcal{C}^\infty(\widehat{\Omega}) = \bigwedge^0(\widehat{\Omega})$.
3. $\omega_1 \in \bigwedge^p(\Omega)$, $\omega_2 \in \bigwedge^q(\Omega)$, $F^*(\omega_1 \wedge \omega_2) = F^*(\omega_1) \wedge F^*(\omega_2)$.
$$\boxed{F^*(f\, dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}) = F^*(f)F^*(dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p})}$$
4. $\boxed{F^* \circ d = d \circ F^*}$

Pull-back de Formas Diferenciales

- Consideremos $\Omega \subset \mathbb{R}^n, \widehat{\Omega} \subset \mathbb{R}^m$ abiertos $n, m \geq 1$.
- $F\colon \widehat{\Omega} \longrightarrow \Omega$ de clase $\mathcal{C}^\infty(\widehat{\Omega}; \Omega)$ y $\mathsf{A}(u) = DF(u) \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$
- El **pull-back** es $F^*\colon \bigwedge^p(\Omega) \longrightarrow \bigwedge^p(\widehat{\Omega})$: Para cada $x = F(u) \in \Omega$,

$$F^*(u)\colon \bigwedge^p \left(T_x(\Omega)\right) \longrightarrow \bigwedge^p(T_u(\widehat{\Omega}))$$

1. F^* es lineal y $\boxed{F^* \circ d = d \circ F^*}$
2. $$\boxed{F^*(f\, dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}) = (f \circ F) F^*(dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p})}$$
3. Si $1 \leq j_1 < \cdots < j_p \leq n$,

$$F^*(dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_p}) = \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_p\leq m} \alpha_{i_1,\dots,i_p} du^{i_1} \wedge \cdots \wedge du^{i_p}$$

con $\alpha_{i_1,\dots,i_p}$ el menor de filas $j_1, \dots, j_p$ y columnas $i_1, \dots, i_p$ de A

Pull-back de Formas Diferenciales

- Consideremos $\Omega \subset \mathbb{R}^n, \widehat{\Omega} \subset \mathbb{R}^m$ abiertos $n, m \geq 1$.
- $F \colon \widehat{\Omega} \longrightarrow \Omega$ de clase $\mathcal{C}^\infty(\widehat{\Omega}; \Omega)$ y $\mathsf{A}(u) = DF(u) \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$
- El **pull-back** es $F^* \colon \bigwedge^p(\Omega) \longrightarrow \bigwedge^p(\widehat{\Omega})$: Para cada $x = F(u) \in \Omega$,

$$F^*(u) \colon \bigwedge^p \left(T_x(\Omega)\right) \longrightarrow \bigwedge^p(T_u(\widehat{\Omega}))$$

1. F^* es lineal y $\boxed{F^* \circ d = d \circ F^*}$
2. $\boxed{F^*(f\, dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}) = (f \circ F) F^*(dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p})}$
3. Si $n = m$,

$$\boxed{F^*(dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n) = \det \mathsf{A}(u) du^1 \wedge \cdots \wedge du^n}$$

Pull-back de Formas Diferenciales

Considereu l'aplicació $F\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $F(u,v) = (\cos u, \operatorname{sen} u, v)$.

1. Calculeu $F^*(dx)$, $F^*(dy)$, $F^*(dz)$.
2. Calculeu $F^*(dx \wedge dy)$, $F^*(dx \wedge dz)$, $F^*(dy \wedge dz)$.
3. Calculeu $F^*(dx \wedge dy \wedge dz)$.

Pull-back de Formas Diferenciales

Considereu l'aplicació $F\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $F(u,v) = (\cos u, \operatorname{sen} u, v)$.

1. Calculeu $F^*(dx)$, $F^*(dy)$, $F^*(dz)$.
2. Calculeu $F^*(dx \wedge dy)$, $F^*(dx \wedge dz)$, $F^*(dy \wedge dz)$.
3. Calculeu $F^*(dx \wedge dy \wedge dz)$.

$$
\begin{aligned}
F^*(dx) &= d\big(F^*(x)\big) = d(\cos u) = -\operatorname{sen} u \, du \\
F^*(dy) &= d\big(F^*(y)\big) = d(\operatorname{sen} u) = \cos u \, du \\
F^*(dz) &= d\big(F^*(z)\big) = dv \\
F^*(dx \wedge dy) &= F^*(dx) \wedge F^*(dy) = (-\operatorname{sen} u du) \wedge (\cos u du) = 0 \\
F^*(dx \wedge dz) &= F^*(dx) \wedge F^*(dz) = -\operatorname{sen} u \, du \wedge dv \\
F^*(dy \wedge dz) &= F^*(dy) \wedge F^*(dz) = \cos u \, du \wedge dv \\
F^*(dx \wedge dy \wedge dz) &= F^*(dx) \wedge F^*(dy) \wedge F^*(dz) = 0
\end{aligned}
$$

Pull-back de Formas Diferenciales

Considereu l'aplicació $F\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $F(u,v) = (\cos u, \operatorname{sen} u, v)$.

1. Calculeu $F^*(dx)$, $F^*(dy)$, $F^*(dz)$.
2. Calculeu $F^*(dx \wedge dy)$, $F^*(dx \wedge dz)$, $F^*(dy \wedge dz)$.
3. Calculeu $F^*(dx \wedge dy \wedge dz)$.

$$(DF)(u,v) = \begin{array}{cc} u & v \\ \left[\begin{array}{cc} -\operatorname{sen} u & 0 \\ \cos u & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right] & \begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} \end{array}$$

Integración de Formas Diferenciales

Consideremos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $\omega \in \bigwedge^n(\Omega)$

Integración de Formas Diferenciales

Consideremos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $\omega \in \bigwedge^n(\Omega)$

- $\omega = f\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$ donde $f \in \mathcal{C}(\Omega)$

Integración de Formas Diferenciales

Consideremos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $\omega \in \bigwedge^n(\Omega)$

- $\omega = f\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$ donde $f \in \mathcal{C}(\Omega)$
- $$\boxed{\int_\Omega \omega = \int_\Omega f\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n = \int_\Omega f\, dx^1 \cdots dx^n = \int_\Omega f}$$

Integración de Formas Diferenciales

Consideremos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $\omega \in \bigwedge^n(\Omega)$

- $\omega = f\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$ donde $f \in \mathcal{C}(\Omega)$
- $$\boxed{\int_\Omega \omega = \int_\Omega f\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n = \int_\Omega f\, dx^1 \cdots dx^n = \int_\Omega f}$$
- La integral existe si se satisfacen las siguientes condiciones:

  Ω es medible Jordan ($\Longrightarrow \overline{\Omega}$ es compacto) y f es acotada

Integración de Formas Diferenciales

Consideremos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $\omega \in \bigwedge^n(\Omega)$

- $\omega = f\,dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$ donde $f \in \mathcal{C}(\Omega)$
- $\displaystyle \boxed{\int_\Omega \omega = \int_\Omega f\,dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n = \int_\Omega f\,dx^1 \cdots dx^n = \int_\Omega f}$
- La integral existe si se satisfacen las siguientes condiciones:

  Ω es medible Jordan ($\Longrightarrow \overline{\Omega}$ es compacto) y f es acotada
- También podemos entender la integral como impropia.

Integración de Formas Diferenciales

Consideremos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $\omega \in \bigwedge^n(\Omega)$

- $\omega = f\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$ donde $f \in \mathcal{C}(\Omega)$
- $$\boxed{\int_\Omega \omega = \int_\Omega f\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n = \int_\Omega f\, dx^1 \cdots dx^n = \int_\Omega f}$$
- La integral existe si se satisfacen las siguientes condiciones:

  Ω es medible Jordan ($\Longrightarrow \overline{\Omega}$ es compacto) y f es acotada
- También podemos entender la integral como impropia.
- Si $F\colon \widehat{\Omega} \longrightarrow \Omega$ es un difeomorfismo y Ω es conexo,

$$\boxed{\int_\Omega \omega = \pm \int_{\widehat{\Omega}} F^*(\omega)}$$

Integración de Formas Diferenciales

Consideremos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $\omega \in \bigwedge^n(\Omega)$

- $\omega = f\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$ donde $f \in \mathcal{C}(\Omega)$
- $$\int_\Omega \omega = \int_\Omega f\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n = \int_\Omega f\, dx^1 \cdots dx^n = \int_\Omega f$$
- La integral existe si se satisfacen las siguientes condiciones:

  Ω es medible Jordan ($\Longrightarrow \overline{\Omega}$ es compacto) y f es acotada
- También podemos entender la integral como impropia.
- Si $F\colon \widehat{\Omega} \longrightarrow \Omega$ es un difeomorfismo y Ω es conexo,

$$\boxed{\int_\Omega \omega = \pm \int_{\widehat{\Omega}} F^*(\omega)}$$

- El signo es el del Jacobiano de F ($+$ si se conserva la orientación)

Integración de Formas Diferenciales

- Consideremos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $\omega \in \bigwedge^{\boldsymbol{k}}(\Omega)$ con $\boldsymbol{k < n}$
- $\widehat{\Omega} \subset \mathbb{R}^{\boldsymbol{k}}$ abierto y $\sigma \colon \widehat{\Omega} \longrightarrow \Omega$, $\sigma \in \mathcal{C}^1(\widehat{\Omega}; \Omega)$

Integración de Formas Diferenciales

- Consideremos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $\omega \in \bigwedge^{\boldsymbol{k}}(\Omega)$ con $\boldsymbol{k < n}$
- $\widehat{\Omega} \subset \mathbb{R}^{\boldsymbol{k}}$ abierto y $\sigma\colon \widehat{\Omega} \longrightarrow \Omega$, $\sigma \in \mathcal{C}^1(\widehat{\Omega};\Omega)$

► La integral de ω a lo largo de σ es $\displaystyle\int_\sigma \omega = \int_{\widehat{\Omega}} \sigma^*(\omega)$

Integración de Formas Diferenciales

- Consideremos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $\omega \in \bigwedge^{\boldsymbol{k}}(\Omega)$ con $\boldsymbol{k < n}$
- $\widehat{\Omega} \subset \mathbb{R}^{\boldsymbol{k}}$ abierto y $\sigma\colon \widehat{\Omega} \longrightarrow \Omega$, $\sigma \in \mathcal{C}^1(\widehat{\Omega}; \Omega)$

▶ La integral de ω a lo largo de σ es $\displaystyle\int_\sigma \omega = \int_{\widehat{\Omega}} \sigma^*(\omega)$

Ejemplo: Si $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo, $\alpha\colon I \longrightarrow \Omega$, $\alpha \in \mathcal{C}^1(I; \mathbb{R}^n)$

$$\omega \in \bigwedge^1(\Omega) \Longrightarrow \omega = f_1 dx^1 + \cdots + f_n dx^n \Longrightarrow \int_\alpha \omega = \int_I \alpha^*(\omega)$$

Integración de Formas Diferenciales

- Consideremos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $\omega \in \bigwedge^{\boldsymbol{k}}(\Omega)$ con $\boldsymbol{k < n}$
- $\widehat{\Omega} \subset \mathbb{R}^{\boldsymbol{k}}$ abierto y $\sigma\colon \widehat{\Omega} \longrightarrow \Omega$, $\sigma \in \mathcal{C}^1(\widehat{\Omega};\Omega)$

- La integral de ω a lo largo de σ es $\displaystyle\int_\sigma \omega = \int_{\widehat{\Omega}} \sigma^*(\omega)$

Ejemplo: Si $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo, $\alpha\colon I \longrightarrow \Omega$, $\alpha \in \mathcal{C}^1(I;\mathbb{R}^n)$

$$\omega \in \bigwedge^1(\Omega) \Longrightarrow \omega = f_1 dx^1 + \cdots + f_n dx^n \Longrightarrow \int_\alpha \omega = \int_I \alpha^*(\omega)$$

- $\alpha^*(f_j dx^j) = f_j\big(\alpha(t)\big)\alpha^*(dx^j) = f_j\big(\alpha(t)\big)d(\alpha^*(x^j)) = f_j\big(\alpha(t)\big)\alpha_j'(t)dt$

Integración de Formas Diferenciales

- Consideremos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $\omega \in \bigwedge^{\boldsymbol{k}}(\Omega)$ con $\boldsymbol{k} < \boldsymbol{n}$
- $\widehat{\Omega} \subset \mathbb{R}^{\boldsymbol{k}}$ abierto y $\sigma \colon \widehat{\Omega} \longrightarrow \Omega$, $\sigma \in \mathcal{C}^1(\widehat{\Omega}; \Omega)$

- La integral de ω a lo largo de σ es $\displaystyle\int_\sigma \omega = \int_{\widehat{\Omega}} \sigma^*(\omega)$

Ejemplo: Si $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo, $\alpha \colon I \longrightarrow \Omega$, $\alpha \in \mathcal{C}^1(I; \mathbb{R}^n)$

$$\omega \in \bigwedge^1(\Omega) \Longrightarrow \omega = f_1 dx^1 + \cdots + f_n dx^n \Longrightarrow \int_\alpha \omega = \int_I \alpha^*(\omega)$$

- $\alpha^*(f_j dx^j) = f_j\big(\alpha(t)\big)\alpha^*(dx^j) = f_j\big(\alpha(t)\big)d(\alpha^*(x^j)) = f_j\big(\alpha(t)\big)\alpha_j'(t)dt$
- Si $\mathsf{f} = (f_1, \dots, f_n) \Longrightarrow \alpha^*(\omega) = \langle \mathsf{f}\big(\alpha(t)\big), \alpha'(t) \rangle dt$

Integración de Formas Diferenciales

- Consideremos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $\omega \in \bigwedge^{\boldsymbol{k}}(\Omega)$ con $\boldsymbol{k < n}$
- $\widehat{\Omega} \subset \mathbb{R}^{\boldsymbol{k}}$ abierto y $\sigma \colon \widehat{\Omega} \longrightarrow \Omega$, $\sigma \in \mathcal{C}^1(\widehat{\Omega}; \Omega)$

► La integral de ω a lo largo de σ es $\displaystyle\int_\sigma \omega = \int_{\widehat{\Omega}} \sigma^*(\omega)$

Ejemplo: Si $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo, $\alpha \colon I \longrightarrow \Omega$, $\alpha \in \mathcal{C}^1(I; \mathbb{R}^n)$

$$\omega \in \bigwedge\nolimits^1(\Omega) \Longrightarrow \omega = f_1 dx^1 + \cdots + f_n dx^n \Longrightarrow \int_\alpha \omega = \int_I \alpha^*(\omega)$$

► Si $\mathsf{f} = (f_1, \ldots, f_n) \Longrightarrow \alpha^*(\omega) = \langle \mathsf{f}\big(\alpha(t)\big), \alpha'(t) \rangle dt$

► $\displaystyle\boxed{\int_\alpha \omega = \int_\alpha \mathsf{f} d\boldsymbol{\ell}}$

El Teorema de Stokes

- Sean $[a, b] \subset I$, $u \in \mathcal{C}^1(I) = \bigwedge^0(I)$

El Teorema de Stokes

- Sean $[a, b] \subset I$, $u \in \mathcal{C}^1(I) = \bigwedge^0(I)$
- $du = u'dt \in \bigwedge^1(I)$

El Teorema de Stokes

- Sean $[a,b] \subset I$, $u \in \mathcal{C}^1(I) = \bigwedge^0 (I)$
- $du = u'dt \in \bigwedge^1 (I)$
- Regla de Barrow $u(b) - u(a) = \int_a^b u'(t)dt$

El Teorema de Stokes

- Sean $[a,b] \subset I$, $u \in \mathcal{C}^1(I) = \bigwedge^0(I)$
- $du = u'dt \in \bigwedge^1(I)$
- Regla de Barrow $u(b) - u(a) = \int_a^b u'(t)dt$
- $u(b) - u(a) = \int_{\partial(a,b)} u$, donde $\partial(a,b)$ es la frontera orientada de (a,b)

El Teorema de Stokes

- Sean $[a, b] \subset I$, $u \in \mathcal{C}^1(I) = \bigwedge^0 (I)$
- $du = u'dt \in \bigwedge^1 (I)$
- Regla de Barrow $u(b) - u(a) = \int_a^b u'(t)dt$
- $u(b) - u(a) = \int_{\partial(a,b)} u$, donde $\partial(a, b)$ es la frontera orientada de (a, b)
- $\int_a^b u'(t)dt = \int_{(a,b)} du$

El Teorema de Stokes

- Sean $[a,b] \subset I$, $u \in \mathcal{C}^1(I) = \bigwedge^0 (I)$
- $du = u'dt \in \bigwedge^1 (I)$
- Regla de Barrow $u(b) - u(a) = \int_a^b u'(t)dt$
- $u(b) - u(a) = \int_{\partial(a,b)} u$, donde $\partial(a,b)$ es la frontera orientada de (a,b)
- $\int_a^b u'(t)dt = \int_{(a,b)} du$
- $\boxed{\int_{\partial(a,b)} u = \int_{(a,b)} du}$

El Teorema de Stokes

- Sean $A \subset \mathbb{R}^k$ abierto elemental, $\phi, \psi \in \mathcal{C}^1(A)$ con $\phi(x) < \psi(x)$, $x \in A$ y el abierto elemental

$$\Omega = \big\{(x,y) : x \in A,\ \phi(x) < y < \psi(x)\big\} \subset \mathbb{R}^{k+1}$$

- $\bar{\Omega} \subset \widehat{\Omega} \subset \mathbb{R}^{k+1}$, $\sigma \colon \widehat{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ **inyectiva** y de clase $\mathcal{C}^2(\widehat{\Omega}; \mathbb{R}^n)$
- $M = \sigma(\Omega)$, $\partial M = \sigma(\partial\Omega)$ y D_σ tiene rango $k+1$ en cada punto de $\widehat{\Omega}$
- $\widetilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$ abierto tal que $\sigma(\bar{\Omega}) = M \cup \partial M \subset \widetilde{\Omega}$

El Teorema de Stokes

- Sean $A \subset \mathbb{R}^k$ abierto elemental, $\phi, \psi \in \mathcal{C}^1(A)$ con $\phi(x) < \psi(x)$, $x \in A$ y el abierto elemental

$$\Omega = \big\{(x,y) : x \in A,\ \phi(x) < y < \psi(x)\big\} \subset \mathbb{R}^{k+1}$$

- $\bar{\Omega} \subset \widehat{\Omega} \subset \mathbb{R}^{k+1}$, $\sigma\colon \widehat{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ **inyectiva** y de clase $\mathcal{C}^2(\widehat{\Omega}; \mathbb{R}^n)$
- $M = \sigma(\Omega)$, $\partial M = \sigma(\partial\Omega)$ y D_σ tiene rango $k+1$ en cada punto de $\widehat{\Omega}$
- $\widetilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$ abierto tal que $\sigma(\bar{\Omega}) = M \cup \partial M \subset \widetilde{\Omega}$

$$\boxed{\text{Para cada } \omega \in \textstyle\bigwedge^k(\widetilde{\Omega}),\ \displaystyle\int_{\partial M} \omega = \int_M d\omega}$$