

FACULTAT DE MATEMÀTIQUES I ESTADÍSTICA

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA - BARCELONATECH

Geometría Afín y Euclídea (Q2)

Àlex Batlle Casellas

February 15, 2019

Índex

1	Espacio Afín.	2
1.1	Definiciones.	2
1.2	Combinaciones afines de puntos.	3
1.3	Coordenadas.	5
1.4	Variedades lineales.	7
1.4.1	Variedades lineales y combinaciones de puntos.	8
1.4.2	Ecuaciones de variedades lineales.	9

1 Espacio Afín.

1.1 Definiciones.

Definición:

Sea E un \mathbb{K} -e.v. Un **espacio afín** asociado a E es una triple $\mathbb{A} = (A, E, \delta)$ donde A es un conjunto y δ es una aplicación

$$\begin{aligned}\delta: A \times A &\rightarrow E \\ (p, q) &\mapsto \delta(p, q).\end{aligned}$$

que cumple con las siguientes propiedades:

1. $\forall p_1, p_2, p_3 \in A, \delta(p_1, p_2) + \delta(p_2, p_3) = \delta(p_1, p_3)$.
2. $\forall p \in A$, la siguiente aplicación es biyectiva:

$$\begin{aligned}\delta_p: A &\rightarrow E \\ q &\mapsto \delta_p(q) := \delta(p, q).\end{aligned}$$

A los elementos de A les llamaremos **puntos**. Usaremos la siguiente notación:

1. $\dim A := \dim E$.
2. Si $\vec{u} = \delta(p, q)$, p es el **origen** de \vec{u} y q es su **extremo**.
3. $\delta(p, q) := \vec{pq} = q - p$.
4. Usando la anterior notación, la propiedad (1): $(p_2 - p_1) + (p_3 - p_2) = (p_3 - p_1)$.
5. Si $\vec{u} = \vec{pq} = q - p \implies q = p + \vec{u}$.

Ejemplos:

1. $\mathbb{A} = ((0, \infty), \mathbb{R}, \delta) :$

$$\begin{aligned}\delta: A \times A &\rightarrow E \\ (p, q) &\mapsto \delta(p, q) := \ln q - \ln p.\end{aligned}$$

Comprobemos las propiedades:

- Propiedad 1: $\delta(p_1, p_2) + \delta(p_2, p_3) = (\ln p_2 - \ln p_1) + (\ln p_3 - \ln p_2) = \ln p_3 - \ln p_1 = \delta(p_1, p_3)$.
- Propiedad 2: Si fijamos p ,

$$\begin{aligned}\delta_p: A &\rightarrow E \\ q &\mapsto \delta_p(q) := \ln q - \ln p\end{aligned}$$

es biyectiva. \square

2. $\mathbb{A} = (\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2, \delta)$, y δ es la aplicación tal que si $p = (x_1, y_1), q = (x_2, y_2)$, entonces

$$\begin{aligned}\delta: A \times A &\rightarrow E \\ (p, q) &\mapsto \delta(p, q) := (x_2 - x_1, y_2 - y_1).\end{aligned}$$

Definición:

$\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$ es el espacio afín definido como $\mathbb{A} = (\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^n, \delta)$, y δ es la aplicación de **resta de coordenadas**.

Propiedades:

Sea \mathbb{A} un espacio afín:

1. $\delta(p, q) = \vec{0} \iff q = p$.
2. $\delta(p, q) = -\delta(q, p)$.
3. $\delta(p_1, p_2) = \delta(p_3, p_4) \iff \delta(p_1, p_3) = \delta(p_2, p_4)$. (regla del paralelogramo)

Demostración:

1. (a) \Leftarrow Cojamos $\vec{u} \in E$. Recordemos que δ_p es biyectiva para todo $p \in A$ fijado. Entonces, $\exists q \in A$ tal que $\vec{u} = \delta(p, q)$. Entonces, $\delta(p, p) + \vec{u} = \delta(p, p) + \delta(p, q) = \delta(p, q) = \vec{u} \implies \delta(p, p) = \vec{0}$.
 (b) \Rightarrow Por hipótesis, $\delta(p, q) = \vec{0}$, y como ya hemos visto, $\delta(p, p) = \vec{0}$. Como δ_p es biyectiva, $p = q$. \square
2. $\delta(p, q) + \delta(q, p) = \delta(p, p) = \vec{0} \implies \delta(p, q) = -\delta(q, p)$. \square
3. Por simetría, solo hace falta demostrar una dirección. Por tanto, demostremos \Rightarrow , con hipótesis $\delta(p_1, p_2) = \delta(p_3, p_4)$:

$$\delta(p_1, p_3) = \delta(p_1, p_2) + \delta(p_2, p_3) = \delta(p_3, p_4) + \delta(p_2, p_3) = \delta(p_2, p_4). \square$$

1.2 Combinaciones afines de puntos.

Observación: Hasta ahora, las "operaciones" definidas son:

1. Combinaciones lineales de vectores en E .
2. $p, q \in A \implies \delta(p, q) = q - p \in E$.
3. $p \in A, \vec{u} \in E \implies p + \vec{u} \in A$.

En general, hacer "combinaciones lineales" de una colección de puntos $p_1, \dots, p_r \in A$, $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{K}$,

$$\alpha_1 p_1 + \dots + \alpha_r p_r = \sum_{i=1}^r \alpha_i p_i$$

no tiene sentido, pero hay **dos casos** en los que sí lo tiene:

1. $\sum \alpha_i = 1$.

Definición:

Sean $p_1, \dots, p_r \in A$, $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{K}$ tales que $\sum_{i=1}^r \alpha_i = 1$. Entonces, por definición,

$$\sum_{i=1}^r \alpha_i p_i := \bar{p} + \sum_{i=1}^r \alpha_i (p_i - \bar{p}) \in A, \text{ cogiendo } \bar{p} \in A \text{ como punto auxiliar.}$$

Proposición:

El proceso anterior no depende del punto auxiliar \bar{p} que escojamos.

Demostración:

Sean $\bar{p}, \bar{\bar{p}} \in A$ puntos cualesquiera de A . Entonces,

$$\begin{aligned} \bar{p} + \sum \alpha_i (p_i - \bar{p}) &= \bar{\bar{p}} + \sum \alpha_i (p_i - \bar{\bar{p}}) \\ &\iff (\bar{p} - \bar{\bar{p}}) + \sum \alpha_i (p_i - \bar{p}) \\ &= (\bar{\bar{p}} - \bar{p}) + \sum \alpha_i (p_i - \bar{\bar{p}}) \\ &\iff (\bar{p} - \bar{\bar{p}}) + \sum \alpha_i [(p_i - \bar{p}) - (p_i - \bar{\bar{p}})] \\ &= \vec{0} \\ &\iff (\bar{p} - \bar{\bar{p}}) + \sum \alpha_i [(p_i - \bar{p}) + (\bar{\bar{p}} - p_i)] \\ &= \vec{0} \\ &\iff (\bar{p} - \bar{\bar{p}}) + \sum \alpha_i [(\bar{\bar{p}} - \bar{p})] \\ &= \vec{0} \\ &\iff (\bar{p} - \bar{\bar{p}}) + (\bar{\bar{p}} - \bar{p}) \\ &= \vec{0} \\ &\iff \delta(\bar{p}, \bar{\bar{p}}) \\ &= \vec{0}. \square \end{aligned} \tag{1}$$

Definición:

Dada una colección de puntos $p_1, \dots, p_m \in A$, el **baricentro** de todos ellos es el punto b resultante de la combinación afín siguiente:

$$b = \frac{1}{m} p_1 + \frac{1}{m} p_2 + \dots + \frac{1}{m} p_m = \sum_{i=1}^m \frac{1}{m} p_i \in A.$$

2. $\sum \alpha_i = 0$.

Definición:

Sean $p_1, \dots, p_r \in A$, $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{K}$ tales que $\sum_{i=1}^r \alpha_i = 0$. Entonces, por definición,

$$\sum_{i=1}^r \alpha_i p_i := \sum_{i=1}^r \alpha_i (p_i - \bar{p}) \in E, \text{ cogiendo } \bar{p} \in A \text{ como punto auxiliar.}$$

Proposición:

El proceso anterior no depende del punto auxiliar \bar{p} que escojamos.

Demostración:

Sean $\bar{p}, \bar{\bar{p}} \in A$ puntos cualesquiera de A . Entonces,

$$\sum \alpha_i(p_i - \bar{p}) = \sum \alpha_i(p_i - \bar{\bar{p}}) \quad (2)$$
$$\Longleftrightarrow$$

Observación: Combinaciones de puntos.

1. $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$. En esta situación, sean $p_1 = (a_1, \dots, a_n)$, $p_2 = (b_1, \dots, b_n)$. Entonces, $\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 = (\alpha_1 a_1 + \alpha_2 b_1, \dots, \alpha_1 a_n + \alpha_2 b_n)$ (si $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$ o $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$).
2. Ejemplo: $p_1 - \frac{3}{2}p_2 + \frac{1}{2}p_3 = (p_1 - p_2) + \frac{1}{2}(p_3 - p_2)$.

1.3 Coordenadas.

Definición:

Sea \mathbb{A} un espacio afín de $\dim A = n < \infty$ asociado a un \mathbb{K} -e.v. E .

1. Llamaremos **sistema de referencia en \mathbb{A}** a

$$\mathcal{R} = \{p; v_1, \dots, v_n\}, \text{ donde } p \in A, \mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\} \text{ base de } E.$$

2. Dado $q \in A$, llamaremos **coordenadas de q en \mathcal{R}** a $q_{\mathcal{R}} = (p\vec{q})_{\mathcal{B}}$.

Observación:

1. Como δ_p es biyectiva y

$$E \rightarrow \mathbb{K}^n$$

$$v \mapsto v_{\mathcal{B}}$$

también lo es, la asignación de coordenadas a un punto es biyectiva.

$$2. \quad q_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \Longleftrightarrow q - p = \sum_{i=1}^n x_i v_i.$$

Ejemplos:

1. $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$.
 $\mathcal{R} = \{p = (1, 3); v_1 = (1, 1), v_2 = (2, 1)\}$, $q = (4, 5)$. Entonces, $q - p = (4, 5) - (1, 3) = (3, 2) = v_1 + v_2 \implies q_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
2. $\mathcal{R} = \{(0, 0); e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)\}$. $q = (4, 5) \implies q_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Definición:

En $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$ llamaremos **referencia ordinaria** a

$$\mathcal{R}_{\text{ord}} := \{0; \mathcal{B}_{\text{canónica}}\}.$$

Observación: $q = (q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{K}^n$, $q_{\text{ord}} = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}.$

Proposición:

Sea \mathbb{A} un espacio afín de dimensión finita, y sea la referencia $\mathcal{R} = \{p; B\}$, con B una base de E . Entonces,

1. $p_1, \dots, p_r \in A$, $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{K}$: $\sum \alpha_i = 1$. Entonces, $(\alpha_1 p_1 + \dots + \alpha_r p_r)_{\mathcal{R}} = \alpha_1 (p_1)_{\mathcal{R}} + \dots + \alpha_r (p_r)_{\mathcal{R}}$.
2. $p_1, \dots, p_r \in A$, $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{K}$: $\sum \alpha_i = 0$. Entonces, $(\alpha_1 p_1 + \dots + \alpha_r p_r)_B = \alpha_1 (p_1)_{\mathcal{R}} + \dots + \alpha_r (p_r)_{\mathcal{R}}$.
3. Caso particular. $(p_2 - p_1)_B = (p_2)_{\mathcal{R}} - (p_1)_{\mathcal{R}}$.

Demostración:**Proposición:**

Cambio de sistema de referencia. Sea \mathbb{A} un espacio afín de dimensión finita n . Sean $\mathcal{R}_1 = \{p_1; v_1, \dots, v_n\}$, $\mathcal{R}_2 = \{p_2; w_1, \dots, w_n\}$ dos sistemas de referencia. Sean

$$(p_2)_{\mathcal{R}_1} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \text{ y } S = M_{B_2 \rightarrow B_1} = \begin{pmatrix} | & & | \\ (w_1)_{B_1} & \cdots & (w_n)_{B_1} \\ | & & | \end{pmatrix}. \text{ Sea } q \in A \text{ tal que } q_{\mathcal{R}_1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, q_{\mathcal{R}_2} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix}. \text{ Entonces,}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad q_{\mathcal{R}_1} = S q_{\mathcal{R}_2} + (p_2)_{\mathcal{R}_1}.$$

Demostración:

$$q_{\mathcal{R}_1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \cdot q - p_1 = (q - p_2) + (p_2 - p_1). \text{ Entonces,}$$

$$(q - p_1)_{B_1} = (q - p_2)_{B_1} + (p_2 - p_1)_{B_1} \implies \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = q_{\mathcal{R}_1} = S(q - p_2)_{B_2} + (p_2)_{\mathcal{R}_1} = S \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}. \square$$

Observación: Fórmula matricial de cambio de referencia.

$$\begin{pmatrix} q_{\mathcal{R}_1} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{pmatrix} = \left(\frac{S}{0} \middle| \frac{(p_2)_{\mathcal{R}_1}}{1} \right) \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{S} = \left(\frac{S}{0} \middle| \frac{(p_2)_{\mathcal{R}_1}}{1} \right) \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K}).$$

También definiremos $\tilde{S} := M_{\mathcal{R}_2 \rightarrow \mathcal{R}_1}$. Esta matriz cumple $\det \tilde{S} = \det S$.

Definición:

Coordenadas ampliadas. $\mathcal{R} = \{p; B\}, q \in A, v \in B$,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = q_{\mathcal{R}} \mapsto q_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha 1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = v_B \mapsto v_B = \begin{pmatrix} \alpha 1 \\ \vdots \\ \alpha_n \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Llamaremos a los elementos de la derecha las **coordenadas ampliadas** de un punto y un vector.

Observación:

1. $\mathcal{R}_1 \xleftarrow{\tilde{S}} \mathcal{R}_2 \xleftarrow{\tilde{T}} \mathcal{R}_3$, entonces $M_{\mathcal{R}_3 \rightarrow \mathcal{R}_1} = \tilde{S}\tilde{T}$.
2. Otras ventajas de las coordenadas ampliadas: ecuaciones de variedades lineales, afinidades, cuádricas.
3. Las coordenadas ampliadas son coherentes con las combinaciones afines de puntos. Si $p_1, \dots, p_m \in A, \alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{K}$, entonces

$$(\alpha_1 p_1 + \dots + \alpha_m p_m)_{\mathcal{R}} = \alpha_1 (p_1)_{\mathcal{R}} + \dots + \alpha_m (p_m)_{\mathcal{R}} = \alpha_1 \begin{pmatrix} | \\ | \\ 1 \end{pmatrix} + \dots + \alpha_m \begin{pmatrix} | \\ | \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | \\ | \\ \sum \alpha_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | \\ | \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1.4 Variedades lineales.

Definición:

Sea \mathbb{A} un espacio afín asociado a un \mathbb{K} -e.v. E . Entonces, una **variedad lineal** de \mathbb{A} es un subconjunto:

$$V := p + F = \{p + \vec{u} | \vec{u} \in F\}, \quad p \in A, \quad F \subseteq E \text{ subespacio vectorial.}$$

Definimos $\dim V := \dim F$.

Ejemplos:

1. Variedades lineales de dimensión 0: **puntos**, $\{p\}$.
2. Variedades lineales de dimensión 1: **rectas**, $\{p\} + [\vec{u}]$.
3. Variedades lineales de dimensión 2: **planos**, $\{p\} + [\vec{u}, \vec{v}]$.
4. Variedades lineales de dimensión $n - 1$: **hiperplanos**.
5. $A = p + E$.

Definición:

Sea \mathbb{A} un espacio afín. Sean V y W variedades lineales, $V = p + F$, $W = q + G$. Entonces, definimos las siguientes **posiciones relativas** de dos variedades lineales:

1. V y W son **paralelas** $\iff F \subseteq G$ o $G \subseteq F$.
2. $V \subseteq W$: V está **incluída** en W .
3. $V \cap W \neq \emptyset \implies V$ y W se **cortan**.
4. V y W se **cruzan** $\iff V \not\parallel W \wedge V \cap W = \emptyset$.

Proposición:

Sean $V = p + F$, $W = q + G$ variedades lineales. Entonces,

1. $V \subseteq W \iff F \subseteq G \wedge p - q \in G$. En particular, $V = W \iff F = G \wedge p - q \in F$.
2. $V \subseteq W \implies \dim V \leq \dim W$.
3. $V \subseteq W \wedge \dim V = \dim W \implies V = W$.

Demostración:

Proposición:

Sean $V = p + F$, $W = q + G$ variedades lineales. Entonces, $V \cap W \neq \emptyset \iff p - q \in F + G$.

Demostración:

1.4.1 Variedades lineales y combinaciones de puntos.

Proposición:

Sea $V = p + F$ una variedad lineal de \mathbb{A} . Sean $p_1, \dots, p_m \in V$. Entonces $\forall \alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{K} : \sum \alpha_i = 1, \alpha_1 p_1 + \dots + \alpha_m p_m \in V$.

Demostración:

Definición:

Sea \mathbb{A} un espacio afín. Sea $S \subseteq A$ un subconjunto de puntos no vacío. Entonces, **la variedad lineal más pequeña que contiene a S** se denota $\langle S \rangle$.

Proposición:

Sea $S = \{p_1, \dots, p_m\}$. Entonces,

$$\langle S \rangle = \{\text{combinaciones lineales de } S\} = p_1 + [p_2 - p_1, \dots, p_m - p_1]$$

Demostración:

Definición:

$\{p_1, \dots, p_m\}, m \geq 2$ son **linealmente independientes** $\iff \{p_2 - p_1, \dots, p_m - p_1\}$ son vectores l.i.

Observación: *No depèn de l'anterior.*

Corolario:

Si p_1, \dots, p_m son l.i., $\dim \langle p_1, \dots, p_m \rangle = m - 1$.

Ejemplos:

1.4.2 Ecuaciones de variedades lineales.

Sea \mathbb{A} un espacio afín de $\dim \mathbb{A} = n$. Sea $\mathcal{R} = \{p; B = \{u_1, \dots, u_n\}\}$ un sistema de referencia en \mathbb{A} . Sea $V = q + F = q + [v_1, \dots, v_r]$, $\dim V = r$, $\{v_1, \dots, v_r\}$ base de F .