Facultat de Matemàtiques i Estadística

Universitat Politècnica de Catalunya - BarcelonaTech

Apunts de Fonaments de les Matemàtiques (Primer curs del Grau de Matemàtiques)

Àlex Batlle Casellas

October 15, 2018

Índex

1

2 Conjunts i aplicacions.

3 Relacions, operacions i estructures.

Definició:
R és una *relació binària* en un conjunt A si $R \subseteq A \times A$.
PROPIETATS:

- **Reflexiva:** $\forall x \in A(xRx)$.
- **Simètrica:** $\forall x, y \in A(xRy \to yRx)$.
- **Antisimètrica:** $\forall x, y \in A(xRy \wedge yRx \to x = y)$.
- **Transitiva:** $\forall x, y, z \in A(xRy \wedge yRz \to xRz)$.
- **Connexa:** $\forall x, y \in A(xRy \vee yRx)$.

3.1 Relacions d'equivalència.

Definició:
Una relació R en un conjunt $A \neq \emptyset$ s'anomena *d'equivalència* si compleix les propietats reflexiva, simètrica i transitiva.
Definició:
Definim la *classe d'equivalència* d'un element $x \in A$ com:

$$[x]_R = \{y \in A | yRx\}.$$

També escrivim $[x]$ o $\bar{x}$ quan no hi ha risc de confusió.
PROPIETATS:

1. $\forall x \in A(x \in [x])$.
2. $\forall x, y \in A(xRy \iff [x] = [y])$.
3. $A = \bigcup_{x \in A} [x]$.

Definició:
Anomenem una *partició d'un conjunt* a una família Π de subconjunts d'A i diferents del buit, disjunts dos a dos, tals que la seva unió és tot A. És a dir, $\Pi \subseteq \mathcal{P}(A)$.
PROPIETATS:

1. $X \neq \emptyset \ \forall X \in \Pi$.
2. $X \cap Y = \emptyset$ si $X, Y \in \Pi, X \neq Y$.
3. $A = \bigcup_{X \in \Pi} X$.

Els subconjunts $X \in \Pi$ s'anomenen les *parts* o *blocs de la partició*.

Definició:

Anomenem el *conjunt quocient* d'un altre conjunt A respecte la relació R al conjunt format per totes les classes d'equivalència definides a partir d'R.

$$A/R = \{\alpha | \exists x \in A([x] = \alpha)\}.$$

Proposició:

El conjunt quocient és una partició d'A.

Demostració: