Tema 2: Continuïtat

1. Definicions

1.1. **Definició** Una **funció escalar** és:

$$\begin{aligned} f : A \subset \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x = (x_1, \ldots, x_n) &\longmapsto f(x_1, \ldots, x_n) = f(x) \end{aligned}$$

1.2. **Definició** Una **funció vectorial** és:

$$\begin{aligned} F : A \subset \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ x = (x_1, \ldots, x_n) &\longmapsto (F_1(x), \ldots, F_m(x)) \end{aligned}$$

1.3. **Definició** El **domini** de F és el subconjunt de $\mathbb{R}^n$ on F està definida.

1.4. **Definició** La **imatge** de F és $Im(F) = \{y \in \mathbb{R}^m \mid \exists x \in \mathbb{R}^n \text{ amb } f(x) = y\}$.

1.5. **Definició** La **gràfica** de F és $Graf(F) = \{(x, F(x)) \mid x \in Dom\ F\} \subset \mathbb{R}^{n+m}$.

1.6. **Definició** Donada una funció escalar $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es defineix el **conjunt de nivell** k com $C_k(f) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = k\}$.

1.7. **Definició** Donada $F : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ i $p \in A'$. Direm que $\lim\limits_{x \to p} F(x) = L$ si per a tot $\varepsilon > 0$ existeix $\delta > 0$ tal que $d(F(x), L) < \varepsilon$ per a tot $x \in A$ tal que $0 < d(x, p) < \delta$.

1.8. **Propietat**

(i) El límit, si existeix, és únic.

(ii) Donada $F : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ i $p \in A'$, aleshores

$$\lim_{x \to p} F(x) = L \Longleftrightarrow \lim_{x \to p} F_j(x) = L_j \quad \forall j = 1, \ldots, m$$

.

1.9. **Lema** Existeix $\lim\limits_{x \to x_0} F(x) = L$ si i només si per tota successió (x_k) amb límit x_0, tal que $x_k \neq x_0$ per tot k, $\quad F(x_k) \longrightarrow L$.

1.10. **Propietats** Siguin F_1 i $F_2 : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ tals que $\lim\limits_{x \to p} F_j(x) = L_j$, i siguin f_1 i $f_2 : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ tals que $\lim\limits_{x \to p} f_j(x) = l_j$, aleshores:

(i) $\lim\limits_{x \to p} (F_1 \pm F_2)(x) = L_1 \pm L_2$

(ii) $\lim\limits_{x \to p} (rF)(x) = rL \quad \forall r \in \mathbb{R}$

(iii) $\lim\limits_{x \to p} (f_1 f_2)(x) = l_1 l_2$

(iv) $\lim\limits_{x \to p} \left(\dfrac{f_1}{f_2}\right)(x) = \dfrac{l_1}{l_2}$ sempre que la divisió tingui sentit.

1.11. **Proposició (límits de funcions de dues variables)**
Si $F : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ i $(a, b) \in D'$ tal que $\exists \lim_{(x,y) \to (a,b)} F(x, y) = L$, llavors per tota funció real i contínua g definida en un entorn de a, tal que $g(a) = b$, tenim que $\lim_{x \to a} F(x, g(x)) = L$

2. Continuïtat i continuïtat uniforme.

2.1. **Definició** Direm que F és **contínua** en $p \in A$ si existeix $\lim\limits_{x \to p} F(x) = F(p)$.
F serà contínua en A si ho és per a tot $p \in A$.

2.2. **Definició** Direm que F és **uniformement contínua** en A si
$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ tal que $d(F(x), F(y)) < \varepsilon$, per a tot $x, y \in A$ que satisfaci $d(x, y) < \delta$.

2.3. **Corol·lari** Tota funció uniformement contínua és contínua.

2.4. **Proposició** Sigui $F : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Són equivalents:

(i) F és contínua en A.

(ii) Per a tota $(x_n) \subset A$ tal que $x_n \longrightarrow p$, $F(x_n) \longrightarrow F(p)$.

(iii) Per a tot $C \subset \mathbb{R}^m$ tancat, existeix $D \subset \mathbb{R}^n$ tancat tal que $F^{-1}(C) = D \cap A$.

(iv) Per a tot obert U de $\mathbb{R}^m$, existeix V obert de $\mathbb{R}^n$ tal que $F^{-1}(U) = V \cap A$.

2.5. **Corol·lari** Siguin g i $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ funcions contínues, aleshores:

(i) $A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) > g(x)\}$ és obert.

(ii) $B = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \geq g(x)\}$ és tancat.

2.6. **Proposició** Siguin $F : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ i $G : B \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^l$, amb $A = \text{Dom F}$, $B = \text{Dom G}$, $F(A) \subset B$, $p \in A$ de manera que $q = F(p)$ i $L = G(q) = (G \circ F)(p)$. Si F és contínua en p i G ho és en q, aleshores $(G \circ F)$ és contínua en p.

2.7. **Proposició** Donada $f : I \longrightarrow J$ contínua, i I, J espais mètrics. Són equivalents:

(i) f no és uniformement contínua.

(ii) Existeix $\varepsilon > 0$ tal que per a tot $\delta > 0$ existeixen $x, x' \in I$ tal que $d(x, x') < \delta$ i $d(f(x), f(x')) \geq \varepsilon$.

(iii) Existeix $\varepsilon > 0$ i dues successions $(x_n) \subset I$ i $(x'_n) \subset I$ tals que $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x'_n) = 0$ i $d(f(x_n), f(x'_n)) \geq \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

2.8. **Teorema de Heine** Sigui $f : K \subset M \longrightarrow N$ contínua, K compacte, aleshores f és uniformement contínua.

2.9. **Teorema** Sigui $f : M \longrightarrow N$ uniformement contínua. Per a tota (x_n) successió de Cauchy en M, la successió $(f(x_n))$ és de Cauchy a N. El recíproc no és cert.

2.10. **Propietat** Sigui $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ contínua, aleshores $F(\bar{A}) \subset \overline{F(A)}$.

2.11. **Teorema** Sigui $F : K \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ contínua i K compacte, aleshores $F(K)$ és compacte.

2.12. **Teorema de Weierstrass** Sigui $f : K \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua, amb K compacte, aleshores f assoleix un mínim i un màxim absoluts.

2.13. **Teorema del valor intermedi** Sigui $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua i A connex, aleshores per tot $x, y \in A$ i per tot $c \in [f(x), f(y)] \subset R$, existeix $z \in A$ tal que $f(z) = c$.

2.14. **Lema** Sigui $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ contínua i $B \subset A$ connex, aleshores $F(B)$ és connex.

2.15. **Definició** Sigui $F : M \longrightarrow M$, amb M espai mètric complet.

i. Direm que F és **k-contractiva** si $d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y) \quad \forall x, y \in M$ amb $0 \leq k < 1$.

ii. Direm que F és **Lipschitz** si existeix $k > 0$ tal que $d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y) \quad \forall x, y \in M$.

2.16. **Teorema de l'aplicació contractiva o del punt fix** Sigui $F : M \longrightarrow M$ k-contractiva i M complet aleshores existeix un únic $x \in M$ tal que $f(x) = x$.

3. Normes i distàncies equivalents.

3.1. **Definició** En un espai mètric M, dues normes $\|\cdot\|$ i $\|\cdot\|'$ són equivalents si existeixen $\lambda, \mu > 0$ tals que $\mu\|x\|' \leq \|x\| \leq \lambda\|x\|'$.

3.2. **Teorema** A $\mathbb{R}^n$ totes les normes són equivalents.

3.3. **Definició** En un espai mètric M, dues distàncies d i d' són equivalents si

$$\begin{aligned} Id : (M, d) &\longrightarrow (M, d') \\ x &\longmapsto x \end{aligned}$$

és contínua, bijectiva i d'inversa contínua.

3.4. **Definició** En un espai mètric M, dues distàncies d i d' són uniformement equivalents si

$$\begin{aligned} Id : (M, d) &\longrightarrow (M, d') \\ x &\longmapsto x \end{aligned}$$

és uniformement contínua, bijectiva i d'inversa uniformement contínua.