Equacions en Derivades Parcials

FME-UPC

7 d'abril de 2021 Examen Parcial *Temps: 9:30–11:30*

Problema 1 (3 *punts*) Sigui $B_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 1\}$ i $\alpha \in \mathbb{R}$. Considereu el problema

$$\begin{cases} xu_x + yu_y = \alpha u & \text{a } B_1, \\ u = x^2 & \text{a } \partial B_1. \end{cases}$$

Per quins valors $\alpha \in \mathbb{R}$ la solució és clàssica? Trobeu-la.

Problema 2 (7 *punts*) Considereu l'operador $(Av)(x) = \int_0^x v(y)\,dy$, $x \in [0,1]$, actuant sobre funcions $v : [0,1] \to \mathbb{R}$. Per una funció $w = w(x,t)$ denotem per Aw la funció

$$(Aw)(x,t) := \big(A\,w(\cdot,t)\big)(x) = \int_0^x w(y,t)\,dy.$$

Discutiu la possibilitat de donar un resultat d'existència i unicitat pels següents problemes, explicant els punts principals de com seria la seva demostració:

(*a*)

$$\begin{cases} u_t + u_x = u\,A(u^2), & x \in [0,1],\ t \in [0,t_0], \\ u(0,t) = 1, & t \in [0,t_0], \\ u(x,0) = g(x), & x \in [0,1], \end{cases}$$

amb $g \in L^2([0,1])$ i un cert $t_0 > 0$.

(*b*) $u_t = Au + u_x^2$, $u(x,0) = g(x)$, amb $x \in [0,1]$ i g tan regular com calgui.

(*c*) $u_t = Au + u^2$, $u(x,0) = g(x)$, amb $x \in [0,1]$ i g tan regular com calgui.

1.- $B_1 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2<1\}$, $\alpha\in\mathbb{R}$

$$\begin{cases} xu_x + yu_y = \alpha u, & B_1, \\ u = x^2, & \partial B_1. \end{cases} \qquad (1)$$

Busquem la solució usant el mètode de les característiques.
Parametritzem ∂B_1 per $[0,2\pi)\ni\theta\longmapsto(\cos\theta,\sin\theta)\in\mathbb{R}^2$.

$$\begin{cases} dx/dt = x, & x(0)=\cos\theta, \\ dy/dt = y, & y(0) = \sin\theta. \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x(t) = e^t\cos\theta \\ y(t) = e^t\sin\theta \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \cos^2\theta = x(t)^2/e^{2t} \\ e^t = \sqrt{x(t)^2+y(t)^2} \end{cases}$$

Ara, prenent $z(t) := u(e^t\cos\theta, e^t\sin\theta)$, tenim

$$\begin{cases} z'(t) = u_x(e^t\cos\theta, e^t\sin\theta)\, e^t\cos\theta \\ \qquad + u_y(e^t\cos\theta, e^t\sin\theta)\, e^t\sin\theta \\ \quad \overset{(1)}{=} \alpha u(e^t\cos\theta, e^t\sin\theta) = \alpha z(t), \\ z(0) = u(\cos\theta,\sin\theta) \overset{(1)}{=} \cos^2\theta. \end{cases}$$

$$\Longrightarrow z(t) = e^{\alpha t}\cos^2\theta = \left(x(t)^2+y(t)^2\right)^{\alpha/2-1} x(t)^2$$

$$\Longrightarrow u(x,y) = z(\theta(x,y), t(x,y)) = (x^2+y^2)^{\frac{\alpha}{2}-1}x^2. \qquad (2)$$

Aquesta funció satisfà la EDP a $B_1\setminus\{(0,0)\}$ i la condició $u=x^2$ a ∂B_1.

Per a ser solució clàssica, cal que

$$u\in C^1(B_1)\cap C^0(\overline{B_1}).$$

Clarament, $u\in C^\infty(\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\})$ $\forall\alpha\in\mathbb{R}$

$\Longrightarrow$ l'únic punt conflictiu és $(x,y)=(0,0)\in B_1$

$\Longrightarrow$ només cal trobar els $\alpha\in\mathbb{R}$ tals que u és C^1 al voltant de $(0,0)$.

Si denotem $r=\sqrt{x^2+y^2}$ i usem coordenades polars $\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$

$$\Longrightarrow u(x,y)=r^{\alpha-2}x^2=r^{\alpha}\left(\frac{x}{r}\right)^2=r^{\alpha}\cos^2\theta$$

(en particular, $0\le |u(x,y)|\le r^{\alpha}\xrightarrow{r\to 0} 0$ si $\alpha>0$)
$\Rightarrow u\in C^0(\overline{B}_1)$ si $\alpha>0$.

Estudiem la continuïtat de ∇u a l'origen.
Calculem u_x i u_y a $B_1\setminus\{(0,0)\}$ directament de (2), o bé a partir de $u(x,y)=r^{\alpha-2}x^2$ usant que $r_x=\partial_x r=\frac{x}{r}$ i $r_y=\partial_y r=\frac{y}{r}$ (relacions que són fàcils de comprovar). Obtenim:

$$\nabla u(x,y)=(\alpha-2)r^{\alpha-4}x^2(x,y)+r^{\alpha-2}(2x,0)$$
$$=r^{\alpha-4}\left((\alpha-2)x^3+2r^2x,\ (\alpha-2)x^2y\right).$$

Veiem que
- $|(\alpha-2)x^3+2r^2x|\le(|\alpha-2|+2)r^3$
- $|(\alpha-2)x^2y|\le|\alpha-2|r^3$

$$\Longrightarrow |\nabla u(x,y)|\le r^{\alpha-4}(|\alpha-2|+2)\sqrt{2}\,r^3$$
$$=\sqrt{2}\,(|\alpha-2|+2)\,r^{\alpha-1}.$$

[Aquests càlculs estan en concordança amb el concepte de funció homogènia explicat a classe de teoria, i com són les derivades d'una funció homogènia. És a dir, com $u=r^{\alpha}\cos^2\theta$ és una funció homogènia de grau α (doncs $u(\lambda x,\lambda y)=\lambda^{\alpha}u(x,y)$ per tot $\lambda>0$), u_x i u_y són homogènies de grau $\alpha-1$.]

Per tant, si $\alpha>1$,

$$\begin{cases} \bullet\ 0 \le |\nabla u(x,y)| \le C r^{\alpha-1} \xrightarrow{r\to 0} 0 \\ \bullet\ \partial_x u(0,0) = \lim_{x\to 0} \dfrac{u(x,0)-u(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} |x|^{\alpha-2} x = 0 \\ \bullet\ \partial_y u(0,0) = 0 \quad (u(0,y)=0\ \forall y) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \nabla u(x,y) = (0,0) = \nabla u(0,0) \text{ si } \alpha>1.$$

D'aquí deduïm que si $\alpha>1$ aleshores

$$u(x,y) = r^{\alpha}(x/r)^2 \text{ amb } r=\sqrt{x^2+y^2} \qquad (3)$$

resol (1) i satisfà $u\in C^1(B_1)\cap C^0(\overline{B}_1)$.

Notem també que

$$u(x,y) = r^{\alpha-2}x^2 \Longrightarrow u(x,0) = |x|^{\alpha}$$

$\Longrightarrow u\notin C^1(B_1)$ si $\alpha\le 1$, ja que $x\mapsto |x|^{\alpha}$ no és derivable en $x=0$ si $\alpha\le 1$.

Per tant, la solució de (1) és clàssica si i només si $\alpha>1$, i ve donada per (3).

(2) $(Av)(x)=\int_0^x v(y)\,dy$, $x\in[0,1]$.

(a) És possible donar un resultat d'existència i unicitat. Com la condició inicial $g\in L^2(0,1)$, considerem l'espai de Banach $E=L^2(0,1)$. Per aplicar la fòrmula de Duhamel, hem de resoldre primer el problema homogèni associat per tal que el semigrup $\{T_t\}_{t\geq 0}$ doni, per cada $t\geq 0$, una aplicació lineal (de E en E). Això requereix, en particular, que la condició de vora sigui homogènia o nul.la.

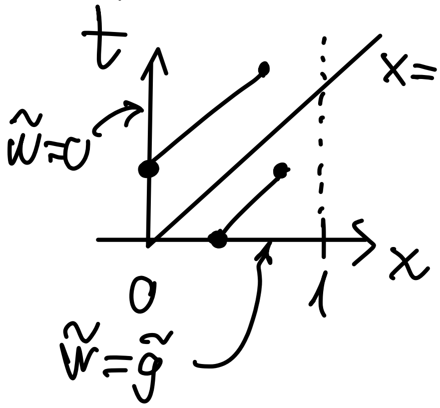
Considerem per tant $\tilde{u}:=u-1$ i $\tilde{g}:=g-1$ i

$$\begin{cases} \tilde{u}_t+\tilde{u}_x=(\tilde{u}+1)\,A(\tilde{u}+1)^2 & \\ \tilde{u}(0,t)=0 & t\in[0,t_0], \\ \tilde{u}(x,0)=\tilde{g} & x\in[0,1]. \end{cases}$$

Per trobar el semigrup hem de resoldre

$$\begin{cases} \tilde{w}_t+\tilde{w}_x=0 & \\ \tilde{w}(0,t)=0 & t\in[0,t_0], \\ \tilde{w}(x,0)=\tilde{g} & x\in[0,1], \end{cases}$$

que ve donat per (mètode de les característiques)



$$(T_t\tilde{g})(x)=\begin{cases}\tilde{g}(x-t), & 0<t<x<1\\ 0, & 0<x<t.\end{cases}$$

També el podem escriure com

$$T_t\tilde{g}=\tilde{g}_e(\cdot-t) \text{ a } (0,1)$$

on $\tilde{g}_e$ és l'extensió $\tilde{g}_e(y)=\begin{cases}\tilde{g}(y) & \text{si } 0<y<1\\ 0 & \text{si } y<0\end{cases}$

(recordem que les funcions de $L^2(0,1)$ només estan definides qpt punt de $(0,1)$)).

Un primer punt essencial per poder resoldre el problema és que, per cada $t \geq 0$, T_t envia $E = L^2(0,1)$ a $L^2(0,1)$ de manera lineal i $T_t : E \to E$ és un operador continu o afitat (es té $\|T_t\| \leq 1$ de fet). Considerem ara l'espai de Banach $G := C([0,t_0]; E)$ per un cert temps $t_0 > 0$ petit que escollirem més endavant. Gràcies a la fòrmula de Duhamel, tindrem un resultat d'exist. i unicitat si trobem un punt fix

$$\tilde{u} = N[\tilde{u}] \quad , \tilde{u} \in \overline{B}_R \subset G,$$

on $\overline{B}_R$ és una bola tancada a G (hi ha diverses possibilitats per fixar el seu centre; el radi R l'escollirem més endavant) i N és l'aplicació

$$N[\tilde{u}](x,t) := (T_t\, \tilde{g})(x) + \int_0^t \left(T_{t-s}\, \tilde{F}[\tilde{u}(\cdot,s)]\right)(x)\, ds,$$

on, per $\tilde{v} = \tilde{v}(x)$, $x \in (0,1)$,

$$\tilde{F}[\tilde{v}] := (\tilde{v}+1)\, A\, (\tilde{v}+1)^2.$$

Per trobar el punt fix, hem de demostrar que

$$N : \overline{B}_R \subset G \longrightarrow \overline{B}_R$$

és una contracció (si escollim apropiadament R i t_0).

Com només es demanaven "els punts principals de la demostració", no calia discutir una sèrie de punts que són standard i sempre iguals en els diversos problemes d'aquest tipus resolts durant el curs.
Els punts principals, o més delicats, o particulars de cada problema, són:
(i) Veure que $\tilde{F}$ envia $L^2(0,1)$ a $L^2(0,1)$ (i per tant N també ho farà, doncs ja hem discutit les propietats de T_{t-s}), i
(ii) Acotar $\|\tilde{F}(\tilde{v}_1) - \tilde{F}(\tilde{v}_2)\|_{L^2(0,1)}$ per tal que, agafant t_0 prou petit, ens resulti posteriorment que N és una contracció.

Si $\tilde{v} := v-1$, $\tilde{v}_1 := v_1 - 1$, $\tilde{v}_2 := v_2 - 1$, tenim $\|v\|_E \leq \|\tilde{v}\|_E + 1$ i $v_1 - v_2 = \tilde{v}_1 - \tilde{v}_2$. Per tant, per simplificar (això no és essencial) podem treballar amb les funcions v, v_1 i v_2 i l'operador a l'enunciat original del problema:

$$F[v] := v A v^2.$$

Veiem finalment (i) i (ii):
(i) $|(Av^2)(x)| = \left|\int_0^x v^2(y)\,dy\right| \leq \int_0^1 v^2 = \|v\|_E^2$

per tot $x \in (0,1)$. Per tant $Av^2 \in L^\infty(0,1)$ i $\|Av^2\|_{L^\infty(0,1)} \leq \|v\|_E^2$. Deduim que

$|v(x)(Av^2)(x)| \leq \|v\|_E^2 |v(x)|$ i per tant $vAv^2 \in L^2(0,1)$ i $\|vAv^2\|_E \leq \|v\|_E^3$.

(ii) $F[v_1]-F[v_2] = v_1 A v_1^2 - v_2 A v_1^2$
$$+ v_2 A v_1^2 - v_2 A v_2^2,$$

$$\|v_1 A v_1^2 - v_2 A v_1^2\|_{L^2(0,1)} = \|(Av_1^2)\cdot(v_1-v_2)\|_{L^2(0,1)}$$
$$\leq \|Av_1^2\|_{L^\infty(0,1)} \|v_1-v_2\|_{L^2(0,1)} \leq \|v_1\|_E^2 \|v_1-v_2\|_E.$$

L'altre terme:

$$\|v_2 A v_1^2 - v_2 A v_2^2\|_{L^2(0,1)} \leq \|v_2\|_{L^2(0,1)} \|A(v_1^2-v_2^2)\|_{L^\infty(0,1)}$$

i tenim

$$|(A(v_1^2-v_2^2))(x)| = \left|\int_0^x (v_1+v_2)(v_1-v_2)\right| \leq \int_0^1 |v_1+v_2||v_1-v_2|$$
$$\leq \|v_1+v_2\|_E \|v_1-v_2\|_E \quad \text{per tot } x \in (0,1).$$

desig. de Cauchy-Schwarz

gràcies a aquest factor obtindrem que N és una contracció prenent t_0 prou petit. Notem que el factor $\|v_1+v_2\|_E \leq \|v_1\|_E + \|v_2\|_E$ estarà controlat doncs v_1 i v_2 estaran a una certa bola de radi R. $\square$

Veure un fitxer adicional per un últim punt principal d'aquest apartat que no calia analitzar per tenir la puntuació màxima.

(b) Es tracta d'una equació integro-diferencial no lineal. Pel que hem après al curs, la única possibilitat de donar un resultat d'exist. i unic. seria usar la fòrmula de Duhamel associada al semigrup de $u_t = Au$. Per la seva definició, l'operador integral A resulta ser un endomorfisme continu en els espais de Banach habituals de funcions de $x \in [0,1]$: $C^k([0,1])$ $(k=0,1,2,\dots)$ i $L^p(0,1)$ $(1 \le p \le \infty)$. El greu problema és que l'operador $v \mapsto v_x$ (i, per tant, $v \mapsto v_x^2$) no envia cap d'aquests espais a si mateixos.

NO podem donar un resultat d'exist. i unicitat.

| Veure un fitxer adjunt per comentaris de com, potser, es podria resoldre el pb amb tècniques més avançades que s'escapen a aquest curs |.

(c) Es tracta d'una equació integral no-lineal per la que no tenim cap mètode explicit de resolució. Ara bé, SÍ podem donar un resultat d'exist. i unicitat. la fòrmula de Duhamel per trobar un punt fix. El punt clau és que l'operador no-lineal de funcions de $x \in [0,1]$: $v \longmapsto v^2$

Es pot fer de dues maneres diferents (amb que n'expliquessiu una ja n'hi havia prou). Un mètode és usar envia $C([0,1])$ a $C([0,1])$ de manera contínua. [No envia $L^p(0,1)$ a $L^p(0,1)$ i, per tant, no podem treballar en aquests espais].

Prenem per tant $E = C([0,1])$ i $G = C([-t_0, t_0]; E)$ (resoldrem el pb per temps petits positius i negatius). Com $A: E \to E$ és lineal continu, el semigrup $T_t: E \to E$ ve donat per $T_t = e^{tA}$ i és un endomorfisme continu de E en E. Com
$$F: E \longrightarrow E = C([0,1]), \quad v \longmapsto v^2$$
és localment Lipschitz:
$$\|v_1^2 - v_2^2\|_\infty \leq \|v_1 + v_2\|_\infty \|v_1 - v_2\|_\infty \leq (\|v_1\|_\infty + \|v_2\|_\infty) \|v_1 - v_2\|_\infty$$

Podrem resoldre el pb de manera anàloga a la ja descrita a l'apartat (a) [a comentar breument aquí si no s'ha fet a l'apartat (a)].

Una segona manera alternativa és usar el mètode de Picard, escrivint l'equació de manera integral:
$$u(t) = g + \int_0^t (Au + u^2)(s)\,ds \quad , t \in [-t_0, t_0]$$
$$=: N[u](t)$$
i trobar un punt fix u usant que $N[u]$ serà contracció si t_0 és prou petit. Aquí s'haurien de comentar els

espais de Banach a prendre (els mateixos que en el primer mètode usant Duhamel) i fer notar que els punts claus són que l'operador lineal A és continu en aquest espai E i $u \longmapsto u^2$ és localment Lipschitz (de E en E i, per tant, de G en G).
