Àlex Batlle Casellas

1. Discutiu en funció del paràmetre $a \in \mathbb{R}$ la posició relativa dels plans π_1 i π_2 de $\mathbb{A}^4_{\mathbb{R}}$ que tenen per equacions en la referència natural:

$$\pi_1 : \begin{cases} x = 1 + \lambda + \mu \\ y = -2\lambda + \mu \\ z = 2 + \mu \\ u = 2 \end{cases} \qquad (\lambda, \mu \in \mathbb{R})$$

$$\pi_2 : \begin{cases} x - 2u = 0 \\ x + 2y - az = 1 \end{cases}$$

Resolució
Comencem expressant π_1 i π_2 en coordenades cartesianes. En el cas de π_1 tenim:

$$\pi_1 : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

és a dir, que tenim π_1 expressat en forma de punt de pas més subespai vectorial en equacions paramètriques. Si ho volem en forma cartesiana, passem d'unes equacions a les altres:

$$\begin{cases} \mu = z - 2 \\ \mu = y + 2\lambda \\ \mu = x - 1 - \lambda \end{cases} \implies z - 2 = y + 2\lambda = x - 1 - \lambda; \tag{2}$$

solucionant convenientment les equacions $z - 2 = y + 2\lambda$ i $x - 1 - \lambda = z - 2$, obtenim dues equacions:

$$\begin{cases} y + 2\lambda - z + 2 = 0 \\ x - z + 1 - \lambda = 0 \end{cases} ; \tag{3}$$

i sumant dues vegades la segona equació a la primera obtenim $2x + y - 3z + 4 = 0$, que juntament amb $u = 2$ defineix el pla π_1. Aleshores, acabem d'obtenir un sistema

$$\pi_1 : \begin{cases} 2x + y - 3z = -4 \\ u = 2 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

En el cas de π_2, expressar-lo d'aquesta manera no requereix de manipulacions, doncs ja el tenim en forma de sistema lineal d'equacions:

$$\pi_2 : \begin{cases} x - 2u = 0 \\ x + 2y - az = 1 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & -a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Ara volem saber quina és la posició relativa dels dos plans. Començarem veient que no poden ser paral·lels ni estar inclosos l'un dins de l'altre.
Si $\pi_1 : Ap = b$, $\pi_2 : Cq = d$, definim $\pi_1 = p + \operatorname{Nuc} A$, $\pi_2 = q + \operatorname{Nuc} C$. Com que $\dim \pi_1 = \dim \pi_2$, $\pi_1 \parallel \pi_2 \iff \operatorname{Nuc} A = \operatorname{Nuc} C$. Com que coneixem els vectors que generen el nucli d'A, veiem què els passa quan els apliquem C; si $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, aleshores

$$Cv_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad Cv_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3-a \end{pmatrix},$$

que són diferents al vector zero, i per tant els nuclis són diferents. Això vol dir, per tant, que $\pi_1 \nparallel \pi_2 \wedge \pi_1 \not\subseteq \pi_2 \wedge \pi_2 \not\subseteq \pi_1$. Per tant, ara només queden dues posicions relatives per comprovar. Veiem primer la intersecció:
Si existeix algun punt a la intersecció, aquest verifica els dos sistemes d'equacions a la vegada. Per tant, escrivim el sistema

$$\pi_1 : \left(\frac{A}{C}\right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = \left(\frac{b}{d}\right) \iff \pi_1 : \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & -a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Per veure si la intersecció no es buida, esglaonem la matriu amb l'algoritme de Gauss:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -3 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -a & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -a & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 2a-3 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 6-a & -6 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right); \tag{7}$$

aplicant la substitució enrere, ens surten les següents solucions:

$$\begin{cases} x = 4 \\ y = 2 + 7\dfrac{2a-3}{6-a} \\ z = \dfrac{21}{6-a} \\ u = 2. \end{cases} \tag{8}$$

Per tant, podem concloure que els plans tindran intersecció quan $a \neq 6$. És a dir, en resum, els plans π_1 i π_2

- mai seran paral·lels;
- mai estaran continguts l'un dins de l'altre;
- es tallaran en un punt, $(4, 2 + 7\dfrac{2a-3}{6-a}, \dfrac{21}{6-a}, 2)$, quan $a \neq 6$;
- es creuaran quan $a = 6$.

2. A $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ considerem el pla $\Pi:\ x+2y+z=-6$ i les projeccions P i r sobre Π de l'origen i l'eix $x=z=0$, respectivament, en la direcció $(0,0,1)$. Trobeu un sistema de referència afí on l'equació del pla Π sigui $\bar{z}=\sqrt{6}$, P pertanyi a l'eix $\{\bar{x}=\bar{y}=0\}$ i r estigui sobre el pla $\bar{y}=0$. Quants sistemes de referència afins hi ha que compleixin aquestes condicions?
Resolució
Primer de tot, trobem les projeccions demanades:

- P és el punt que cau en el pla que es troba més a prop de l'origen en la direcció $(0,0,1)$; per tant, trobant una α tal que $(0,0,0)+\alpha(0,0,1)\in\pi$ ja tindrem la projecció. Aquesta α val -6 i el punt P, per tant, és $P=(0,0,-6)$.

- r és la recta que cau en el pla que es troba més a prop de l'eix y en la direcció $(0,0,1)$:

$$r:(0,\lambda,0)+\mu(0,0,1)\in\pi \iff 2\lambda+\mu=-6 \iff \mu=-6-2\lambda.$$

  Aleshores, tenim $r:(0,0,0)+\lambda(0,1,0)+(-6-2\lambda)(0,0,1)$ i per tant, la recta r és $r:(0,0,-6)+\lambda(0,1,-2)$.

El nostre sistema de referència serà $\mathcal{R}=\{\bar{O};v_1,v_2,v_3\}$. Primer trobem l'origen $\bar{O}$: per les restriccions de l'enunciat, sabem que el pla π s'ha de trobar a distància $\sqrt{6}$ de l'origen que busquem en l'eiz $\bar{z}$ i que el punt P es troba en aquest mateix eix. Per tant, sabem que l'origen de coordenades es trobarà a la recta definida pel punt P i el vector perpendicular al pla π, a la que anomenarem $O:(0,0,-6)+\lambda(1,2,1)$. Si calculem el vector unitari de la direcció d'O, veiem que dóna $u_1=\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$. Redefinint la recta $O:(0,0,-6)+\lambda' u_1$, veiem que els dos punts a distància $\sqrt{6}$ de P que cauen en aquesta recta són $P_1=(1,2,-5)$ i $P_2=(-1,-2,-7)$. Aquests són els dos candidats a origen de coordenades. Pel que fa als vectors base de $\mathbb{R}^3$, les restriccions ens forcen a que el tercer vector de la base sigui un dels vectors perpendiculars a π (dels quals només n'hi ha dos, amb signe diferent) o un múltiple d'ells, i a que el primer vector de la base sigui el director de la recta r o un múltiple. Pel que fa al segon vector de la base, no hi ha cap restricció al respecte, així que amb que n'agafem un que sigui l.i. amb els altres dos n'hi ha prou. Jo he decidit agafar el resultat del producte vectorial entre els altres dos. Per tant, com a exemple, podríem agafar el següent sistema de referència:

$$\mathcal{R}=\{\bar{O}=(1,2,-5);v_1=(0,1,-2),v_2=(-5,2,1),v_3=(1,2,1)\}. \tag{9}$$

Finalment, podem concloure que existeixen infinits sistemes de referència que compleixin aquestes condicions, tenint en compte múltiples dels vectors que venen determinats, més totes les possibilitats pel segon vector, més el fet de tenir dues possibilitats pel punt d'origen.