

Equacions en derivades parcials

FME-UPC

2020-21

4. Equació de Poisson



Equacions en derivades parcials

FME-UPC

2020-21

4. Equació de Poisson



Introducció

Si $v = v(x, t)$ resol $\sqrt{t} - \Delta v = \tilde{f}(x, t)$ i
existeixen $\lim_{t \rightarrow +\infty} \tilde{f}(x, t) := f(x)$

$$\text{&} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} v(x, t) := u(x),$$

llavors $u = u(x)$ és una sol. estacionària de
l'eq. de difusió, i.e., u resol

$$-\Delta u = f(x) \text{ a } \mathbb{S} \subset \mathbb{R}^n \quad (\text{eq de Poisson})$$

amb les mateixes condicions de vora que
 $v(x, t)$ per cada $t > 0$.

Model per a)

b) concentracions amb difusió

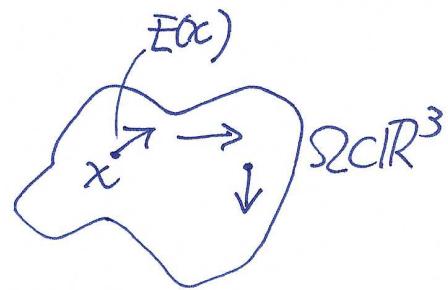
c) Camps elèctrics i gravitacionals:

E = camp de forces elèctriques o gravitacions

$$E: \mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{div } E = 4\pi \rho \\ \rho = \text{densitat de càrregues} \end{array} \right\}$$

$\left. \begin{array}{l} \text{de masses} \end{array} \right\}$



Si $E = -\nabla u$ (camp gradient \Rightarrow camp conservatiu)

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} -\Delta u = 4\pi \rho = f \end{array} \right\}$$

Si les càrregues són fixes a una de S , llavors

$$\Delta u = 0 \text{ a } S$$

u = potencial elèctric o gravitatori

Note: Té una Liouville per Edobs: $\Delta u = 0 \text{ a } S \Rightarrow$
 $\Rightarrow \text{div } \nabla u = \text{div } (-E) = 0 \Rightarrow$ el flux de E conserva el volum.

Def $u: \mathbb{S} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, s'obert de \mathbb{R}^n

$u \in C^2(\mathbb{S})$ és harmònica si $\Delta u = 0$ a \mathbb{S}

subharònica a \mathbb{S} si $-\Delta u \leq 0$ a \mathbb{S}
($\Delta u \geq 0$)

superharm. a \mathbb{S} si $-\Delta u \geq 0$ a \mathbb{S}
($\Delta u \leq 0$)

• Exemples:

1 Funcions convexes a \mathbb{R}^n

$\mathbb{S} \subset \mathbb{R}^n$ convex

$u: \mathbb{S} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ és convexa

(def)

sii $u(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)$

$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{S} \quad \forall \lambda \in (0,1) \quad \leq \lambda u(x_1) + (1-\lambda)u(x_2)$

Nota: $x \in \mathbb{R}^n \mapsto u(x) = \|x\|$ és una funció convexa que no és C^2 (ni C^1).

Ara, si $u \in C^2(\mathbb{S})$, llavors u és una

funció convexa en cada segment (1d)
 $\Leftrightarrow u_{xx} \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, |x|=1$. Per tant:

Lema u és convexa $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{S} \quad D^2u(x) \geq 0$.

En particular, $\Delta u = \text{traga } D^2u \geq 0$ a \mathbb{S} :

Tota funció convexa és subharònica.

D'altra banda:

Tota funció afí $u(x) = a \cdot x + b$, $(a, b) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$,

és harmònica.

2 $2x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$ i $e^{-x_1-x_2} \sin(\sqrt{2}x_3)$ són harmòniques a tot \mathbb{R}^3 .

3 Funcions harmòniques i funcions holomorfes
o analítiques a $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$.

$$\underline{z = x + iy \in \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2 \ni (x, y)}$$

$$\boxed{p = u + iv : \text{SAC} \rightarrow \mathbb{C}} \quad \text{holomorfa}$$

$$u = \operatorname{Re} \varphi, v = \operatorname{Im} \varphi$$

\Downarrow def

\mathbb{C} -derivable a S2.

$$\forall z \in S2 \quad \exists \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{C}}} \frac{\varphi(z+h) - \varphi(z)}{h} \in \mathbb{C}$$

Prenent límits
horizontals i verticals

\rightsquigarrow Equacions de Cauchy-Riemann:

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases} \Rightarrow \text{Pertant,}$$

$$u_{xx} = v_{yx} = v_{xy} = -u_{yy}$$

$$\Delta u = 0 \quad !! \quad \text{També} \quad \Delta v = 0.$$

Exemples de f. holomorfes:

$$\bullet m=1, 2, 3, \dots \quad z^m = (re^{i\theta})^m = r^m \{ \cos(m\theta) + i \sin(m\theta) \}$$

$$u = \frac{r^m \cos(m\theta)}{r^m \sin(m\theta)}$$

són harmòniques.

$m=2$

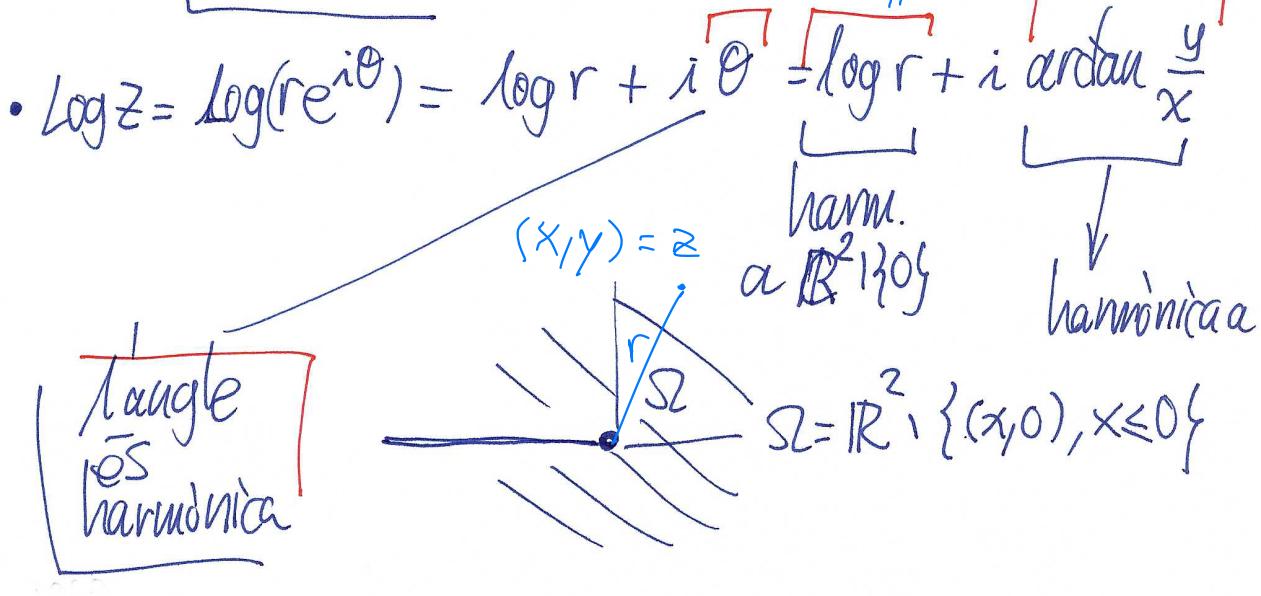
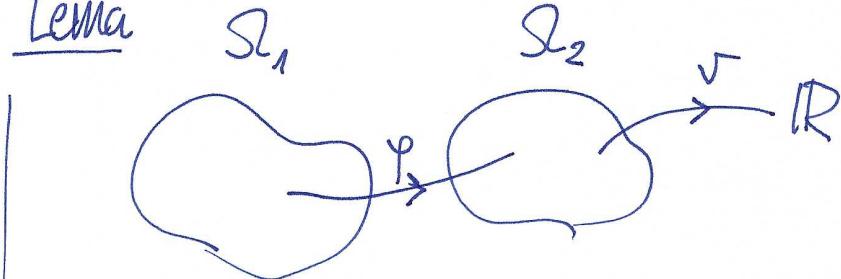
$$z^m = (x+iy)^m \Rightarrow \begin{cases} x, y, xy, x^2-y^2, x^3-3xy^2, \dots \\ \text{harmoniques.} \end{cases}$$

$m=3$

"Una sèrie de Fourier és una sèrie de Taylor a $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ en coordenades polars": $\sum_m c_m z^m = \sum_m c_m r^m (\cos(m\theta) + i \sin(m\theta))$; (prenen $r=1$ per exemple)

$$\bullet e^{\alpha z} = e^{\alpha x} e^{i\alpha y} = e^{\alpha x} \cos(\alpha y) + i e^{\alpha x} \sin(\alpha y)$$

\rightarrow $e^{\alpha x} \cos(\alpha y)$ harmònica. $\frac{1}{2} \log(x^2 + y^2)$

Lema

$$\begin{aligned} \varphi: S_1 &\rightarrow S_2 \text{ holomorfa} \\ v: S_2 &\rightarrow \mathbb{R} \text{ harmònica} \end{aligned} \Rightarrow \boxed{u := v \circ \varphi : S_1 \rightarrow \mathbb{R}}$$

harmonica

Recordar: localment tota f. harm. té harmònica conjugada

(i.e., $u + i\bar{v}$ és holomorfa)

o també en simplement connexos.

Nota: φ transformació conforme \Leftrightarrow φ holomorfa $\underset{\text{def}}{\text{bijectiva}}$.

Nota: S^2 simpl. connex \Rightarrow (Teorema Riemann)

$\exists \varphi: S^2 \rightarrow D (= \text{disc})$ bijectiva holomorfa.

$$\frac{\partial x_i}{\partial r} = \frac{x_i}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{x_i}{r}$$

$$u=u(r) \rightarrow \Delta u = r^{1-n} (r^{n-1} u_r)_r$$

$$n=2 \quad \left[\Delta u = u_{rr} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} \right]$$

$$n=3 \quad \begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \varphi \\ y &= r \sin \theta \sin \varphi \\ z &= r \cos \theta \end{aligned}$$

$$\Delta u = \frac{1}{r^2} (r^2 u_r)_r + \frac{1}{r^2 \sin \theta} (\sin \theta u_\theta)_\theta + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} u_{\varphi\varphi}$$

$$u=u(x,y)$$

$$u(r,\theta)$$

$$\tilde{u}(r,\theta) := u(r \cos \theta, r \sin \theta)$$

$$\tilde{u}_r = u_x \frac{\partial x}{\partial r} + u_y \frac{\partial y}{\partial r}$$

...

Dimensió n arbitrària i $u=u(|x|)=u(r)$ és radialment simètrica (o una "funció radial")

llavors

$$\begin{aligned} \Delta u &= r^{1-n} (r^{n-1} u_r)_r \\ &= u_{rrr} + \frac{n-1}{r} u_r \end{aligned}$$

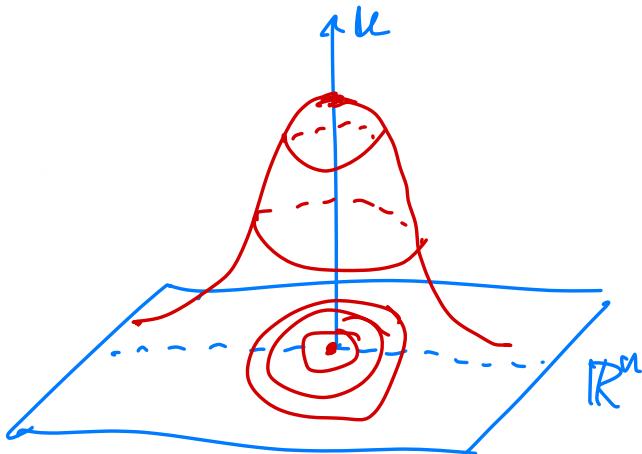
(exercici)

useu

$$u_{x_i} = \frac{\partial r}{\partial x_i} u_r$$

$$= \frac{x_i}{r} u_r ;$$

$$u_{x_i x_i} = \dots$$



Problema 2. Donada una funció f a $[0, L]$, considerem el problema

$$\begin{cases} -u'' = f(x) & \text{a } (0, L) \\ u(0) = u(L) = 0. \end{cases}$$

Resoleu el problema per simple integració de l'EDO. Demostreu que la solució ve donada per l'expressió

$$u(x) = \int_0^L G(x, y) f(y) dy, \quad (1)$$

on $G(x, y)$ es una funció explícita que no depén de f . S'anomena la funció de Green del problema. Dibuixeu la gràfica de G com a funció de y per un x donat. Comproveu que G satisfa les següents propietats: $G(x, y) \geq 0$, $G(x, y) = G(y, x)$ i $G(0, y) = G(L, y) = 0$, per tot x i y .

Problema 3. Considerem el problema de Dirichlet pel Laplacian a la bola o disc unitat B_1 de \mathbb{R}^2 :

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{a } B_1 \\ u = g & \text{a } \partial B_1, \end{cases}$$

on $g : \partial B_1 \rightarrow \mathbb{R}$ és una funció contínua donada. Volem trobar un mètode alternatiu al de separació de variables (polars) per demostrar que la solució ve donada per l'expressió

$$u(x) = \int_{\partial B_1} P(x, y) g(y) dy, \quad \text{per } x \in B_1, \quad (2)$$

on P s'anomena el nucli de Poisson i ve donat (en coordenades polars) per

$$P(x, y) = P(re^{i\alpha}, e^{i\beta}) = \frac{1-r^2}{2\pi} \frac{1}{1+r^2 - 2r \cos(\alpha - \beta)}. \quad (3)$$

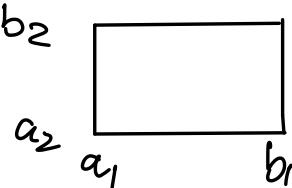
$$\Downarrow \frac{1-|x|^2}{2\pi} \frac{1}{|x-y|^2}$$

Pb 3 (nucli de Poisson al disc $B_1 \subset \mathbb{R}^2$).

Busquem solucions a variables separades però, obertes a les simetries del disc B_1 , separades en coordenades polars:

$$u(x) = u(x_1, x_2) = v(r) w(\theta)$$

[Nota: per resoldre el mateix problema en un rectangle $(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \subset \mathbb{R}^2$, buscaríem solucions $u(x) = v(x_1) w(x_2)$]



$$\text{Imosem } 0 = \Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta}$$

$$0 = (v'' + \frac{v'}{r}) w + \frac{v}{r^2} w''$$

$$-\frac{w''}{w}(\theta) = \frac{r^2}{v} (v'' + \frac{v'}{r})(r) = \lambda = \text{ctt}$$

$$\Rightarrow$$

w és 2π -periòdica

$$w(\theta) = \sum_k [a_k \cos(k\theta) + b_k \sin(k\theta)]$$

$$k=0, 1, 2, 3, \dots$$

$$\lambda = k^2$$

$$\Rightarrow v'' + \frac{v'}{r} - k^2 \frac{v}{r^2} = 0 \quad (\text{EDO que respecta les dimensions})$$

$$\downarrow \quad v(r) = r^\alpha$$

(funció homogènia)

$$v(r) = r^{\pm k}$$

$\xrightarrow{\text{J regular}} \quad a \quad r \approx 0$

$$v = r^k$$

de Moli Poisson

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ in } B_R(p) \subset \mathbb{R}^2 \\ u = g \text{ on } \partial B_R \end{cases}$$

$$u(x) = \frac{\int_{\partial B_R(p)} \frac{g(y)}{|x-y|^2} d\sigma(y)}{2\pi R}, \quad x = (x_1, x_2) \in \overline{B}_R(p)$$

In particular, $u \in C^\infty(B_R)$.

Pf: $\boxed{P=0}$

$$\begin{cases} r^k \cos(k\theta) \\ r^k \sin(k\theta) \end{cases}$$

$$g(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\theta) + b_k \sin(k\theta))$$

Efecte regularitzant del Laplacian

$$u(r, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r^k}{R^k} (a_k \cos(k\theta) + b_k \sin(k\theta))$$

$$R=1$$

$$\begin{cases} a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(\alpha) \cos(k\alpha) d\alpha \\ b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(\alpha) \sin(k\alpha) d\alpha \end{cases}$$

$$u(r, \theta) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(\alpha) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R} \right)^k (\cos(k\alpha) \cos(k\theta) + \sin(k\alpha) \sin(k\theta)) \right\}$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(\alpha) \underbrace{\left\{ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R} \right)^k \cos(k(\theta-\alpha)) \right\}}_{\text{Re } \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R} e^{i(\theta-\alpha)} \right)^k} d\alpha$$

$$\text{Re } \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R} e^{i(\theta-\alpha)} \right)^k$$

$$\bullet \text{Re } \frac{\frac{r}{R} e^{i(\theta-\alpha)}}{1 - \frac{r}{R} e^{i(\theta-\alpha)}} = \frac{r R \cos(\theta-\alpha) - r^2}{R^2 + r^2 - 2rR \cos(\theta-\alpha)}$$

$$\rightarrow u(r, \theta) = \frac{1}{2} \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2rR \cos(\theta - \alpha)}$$

$$\left[\begin{aligned} u(r, \theta) &= \frac{R^2 - r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{g(\alpha)}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\theta - \alpha)} d\alpha \\ &= \int_{S^1} P(\theta - \alpha, r) g(\alpha) d\alpha \end{aligned} \right]$$

$$\begin{aligned} X &= (r \cos \theta, r \sin \theta) \\ Y &= (R \cos \alpha, R \sin \alpha) \\ |X - Y| &= \sqrt{R^2} \\ &\Downarrow \\ &g(\theta) \end{aligned}$$

Conseqüències importants:

Ara que tenim un resultat d'existència per

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{a } S \subset \mathbb{R}^2 \\ u = g & \text{a } \partial S \end{cases}$$

(LD) ← "Laplace" "Dirichlet"

Quan $S \subset \mathbb{R}^2$ = bola, deduïm també l'existència de solució per tot S simplement connex

usant una transformació

conforme $S \xleftrightarrow{\sim} B_1(0)$, que existeix pel

Teorema de Riemann.

Teorema 1 (LD) admet existència i unicitat de solució $C^2(S) \cap C^0(\bar{S})$ en tot domini $S \subset \mathbb{R}^2$ fitat simplement connex i per tota $g \in C^0(\partial S)$. prou regular

Teorema 2 Tota funció harmònica $u \in C^2(S)$ en un obert $S \subset \mathbb{R}^2$ és de classe $C^0(S)$.

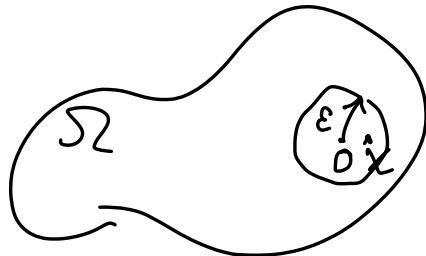
(efecte regularitzant del Laplacian)

Nota: els dos teoremes també són certs a \mathbb{H}^n (vegeu trobar el nucli de Poisson a $B_1 \subset \mathbb{R}^n$ usant els mètodes indicats al final d'aquestes notes).

Demostració del Tma 2:

rescalament ↴

Sigui $x_0 = (0,0) = 0 \in \Omega$ i suposem (w.l.g.)
 ↪ pvc suposar que $B_1 = B_1(0) \subset \Omega$



$\varepsilon \rightarrow 1$

Ara $u|_{\partial B_1} =: g$ (defineix 0), $g \in C^1(\partial B_1)$

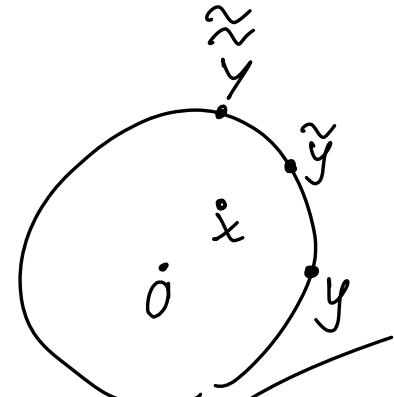
i u és la solució de

$$(LD) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta u = 0 \text{ a } B_1 \\ u = g \text{ a } \partial B_1. \end{array} \right.$$

Form. de Poisson

$x \in B_1$

$$u(x) = \frac{1 - |x|^2}{2\pi} \int_{\partial B_1} \frac{g(y)}{|x-y|^2} dy$$



↑
 és una funció C^∞ de $x \in B_1$
 (per que $x \neq y$) ■

tractat més
 endavant
 en aquestes notes

Unicitat per mètode: Mètode integral

2^{on} mètode: Príncipi del màxim

→ Demo amb el mètode integral:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta u = f \text{ a } \Omega \subset \mathbb{R}^n \\ u = g \text{ a } \partial \Omega \end{array} \right.$$



La dif. de dues solns, v , resol

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta v = 0 \text{ a } \Omega \\ v = 0 \text{ a } \partial\Omega \end{array} \right.$$

$$0 = -\Delta v \quad | \cdot v \quad & \int_{\Omega} \sim$$

$$0 = \int_{\Omega} (-\Delta v) v = - \int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial \nu} \cdot \nu + \int_{\partial\Omega} |\nabla v|^2$$

↑ ↑
 int. parts

$$= \int_{\Omega} |\nabla v|^2$$

↑ $\Rightarrow 0$
continua

$$\Rightarrow \nabla v = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} v = c + t \\ v|_{\partial\Omega} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} v = 0 \\ \text{a } \Omega \end{array}$$

Varietat de sol

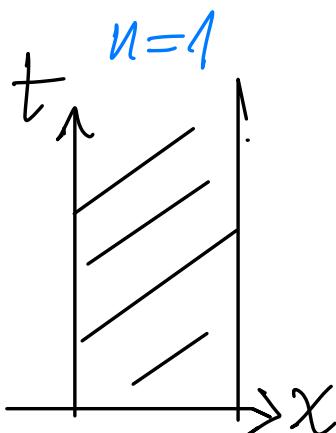
$$V \in C^2(\bar{\Omega})$$

□

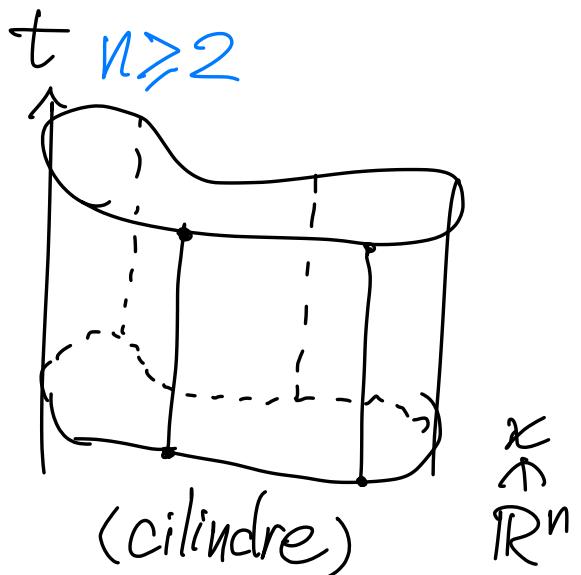
"VISIÓ GENERAL DEL CURS"

10.1

Ones
 $u_{tt} - \Delta u = f$



Calor
 $u_t - \Delta u = f$



Hem dem $\exists!$
 i trobat formules explícites
 per les solucions ($n=1$).
 Per la calor, hem hagut
 de diagonalitzar el
 Laplacian en dim $n=1$.

Hem demonstrat
 unicitat, però encara
 no existència. Per
 demostrar existència
 hi haurà dos mètodes:

① i ②

① Demostrar l'existència de funcions de Green
 pel pb (que només seràn explícites per
 alguns pocs Ω amb moltes simetries).
 Primer s'ha de saber fer per $[-\Delta u = f]$

② Diagonalitzar el Laplacian a Ω (anàlisi funcional)

↳ Estudiar $[-\Delta u = f]$

Tant per ones com calor ($n \geq 2$), primer hem
 d'entendre Poisson (estacions): $-\Delta u = f$ a Ω

Nota : Poisson no es pot mirar com un pb de devolució feut ($n=2$ per exemple): $x=x, t=y$

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \rightarrow u_{tt} = -u_{xx} = \text{A} \leq , \text{ doncs:}$$

1er) Si no és un cilindre (rectangle) en general
 2on) El pb de valors iniciais per $u_{tt} = -u_{xx}$
 (no) està ben posat: encara que signi un pb lineal només es pot resoldre per temps petits per condicions iniciales $u(\cdot, 0)$ & $u_t(\cdot, 0)$ adalítiques. (Teorema de Goursat-Kowalewsky)

Els mètodes que estem aprenent per

• Clase 35
10/15/21

- a) ONES
- b) DIFUSIÓ
- c) POISSON

Serveixen per altres a) EQ. Hiperbòliques famílies grans b) EQ. Parabòliques d'EDPs, anomenades c) EQ. Ellíptiques

de segon ordre ← APLICACIONS

$$v=v(x), x \in \mathbb{R}$$

$$(Av)(x) = \frac{1}{r(x)} (P(x)v_x)_x = \frac{P}{r} v_{xx} + \frac{P_x}{r} v_x$$

termes ordre inferior

↑ Sturm-Liouville:
mèdis no homogenis ($P \geq 0, r > 0$)

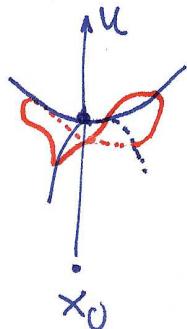
$$u_{tt} - \frac{P(x)}{r} u_{xx} = 0 \rightsquigarrow T^2 - \frac{P}{r} X^2 \quad (\text{hiperb.})$$

$$u_t - \frac{P(x)}{r} u_{xx} = 0 \rightsquigarrow T - \frac{P}{r} X^2 \quad (\text{paràbola})$$

$$\frac{P(x)}{r}(u_{xx} + u_{yy}) + \dots = 0 \rightsquigarrow X^2 + Y^2 \quad (\text{el.lipse})$$

Prop. de la mitjana i principi del màxim

Si u harmònica i $\nabla u(x_0) = 0$ llavors



$$(K_1 + K_2)(x_0) = 0 \Rightarrow$$

$u \rightarrow$ convexa en una direcció
i còncava en un'altra ortogonal

\Leftrightarrow hi ha valors més grans i més
petits que $u(x_0)$ a $\partial B_r(x_0)$ ~~per~~
petit.

De fet hi ha
un compensació molt forta:

Teorema (Propietat de la mitjana per f. harmòniques)

Si $S \subset \mathbb{R}^n$ obert i $u \in C^2(\bar{B}_R(x_0)) \cap C(\bar{B}_R(x_0))$

amb $\bar{B}_R(x_0) \subset S$ i $-\Delta u \leq 0$ a $\bar{B}_R(x_0)$

(subharmònica)

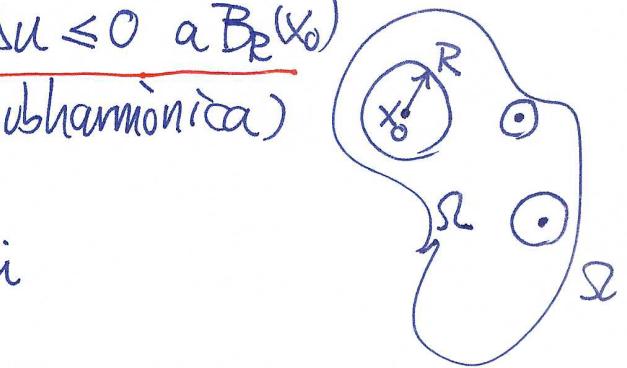
llavors

$$u(x_0) \leq \int_{B_R(x_0)} u \, dx \quad \text{i}$$

$$u(x_0) \leq \int_{\partial B_R(x_0)} u \, d\sigma$$

• u superharm $\Rightarrow \left\{ \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} \right.$

$$\bullet u \text{ harmònica} \Rightarrow u(x_0) = \int_{B_R(x_0)} u \, dx = \int_{\partial B_R(x_0)} u \, d\sigma.$$



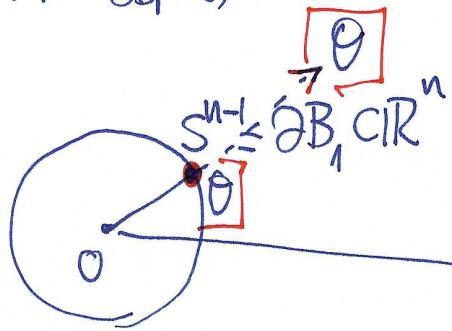
$$\int_A u := \frac{1}{|A|} \int_A u$$

promítj o mitjana.

• Demo: Veiem que

$\text{re}(0, R) \mapsto f$ i u d's és creixent \swarrow si u subharm. \nearrow d't si u harmònica :

$$\frac{d}{dr} \int_{\partial B_r(x_0)} f u d\sigma = \frac{d}{dr} \frac{1}{|B_r|} \int_{\partial B_r(x_0)} u(x) d\sigma =$$



(Jacobians $= r^{n-1}$
es simplifiquen)

$$= \frac{d}{dr} \frac{1}{|S^{n-1}|} \int_{S^{n-1}} u(x_0 + r\theta) d\theta$$

$$= \frac{1}{|S^{n-1}|} \int_{S^{n-1}} \nabla u(x_0 + r\theta) \cdot \theta d\theta = \frac{1}{|S^{n-1}|} \int_{S^{n-1}} \frac{\partial u}{\partial v}(x_0 + r\theta) d\theta$$

dibuir \rightarrow $S^{n-1}(\theta)$

$$= \frac{1}{|\partial B_r|} \int_{\partial B_r(x_0)} \frac{\partial u}{\partial v}(x) d\delta \Rightarrow \frac{1}{|\partial B_r|} \int_{B_r(x_0)} \Delta u(x) dx \geq 0$$

com $u \in C(\overline{B}_R(x_0))$

$(=0$ si
 u harm.)

fent línies $r \downarrow 0, r \uparrow R$:

$u(x_0) \leq f$ i d's (integral de superfície)
 $(=) \partial B_R(x_0)$

Integral sòlida:

$$\int_{\overline{B_R}(x_0)} u \, dx = \int_0^R dr \int_{\partial B_r(x_0)} u \, d\sigma \geq \int_0^R dr |\partial B_r(x_0)| u(x_0)$$

(=) $\int_0^R dr |\partial B_r(x_0)| u(x_0)$

Fubini
esfèric

$$u(x_0) \int_0^R dr \int_{\partial B_r(x_0)} d\sigma$$

$$u(x_0) |\overline{B_R}(x_0)| . \square$$

Conseqüència important
(demo a continuació)

Proposició (príncipi del màxim)

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ domini Lips. acotat

$u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ subharmonica a Ω . Llavors:

$$(\text{Pr. màxim}) \quad \max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$$

- Pr mínim per superharm.
- i pr max i mín. per harmòniques.

Corol.lari (del pr. màxim)

Si el pb de Dirichlet } - $Du = f$ a $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ domini
admet una solució } $u = g$ a $\partial\Omega$ Lip. acotat

$u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ és l'única (en aquesta classe de solucions)

Demo: Inmediata pel pr. màxim. \square

Nota. Aquesta és una alternativa de unicitat però més per Dirichlet. Millora el resultat anterior: $\underline{u \in C^2(\bar{\Omega})} \rightarrow$ ara $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$.

Nota: Recordem que els resultats de unicitat impliquen resultats de simetria de les solucions del pb. Per exemple: si la dada inicial, o de contorn, és senar (o parella) llavors també ho és la solució —si el pb. és invariant per reflexió senar (o parella). Això val per: transport, ones, calor, Poisson.

• Demo 1 del pr. màxim (usant la prop. mitjana):

$$\text{Sigi } M := \max_{\bar{\Omega}} u \quad i \quad B := \{x \in \Omega \mid u(x) = M\} \subset \Omega$$

$\left\{ \begin{array}{l} B \text{ és tancat} \\ B \text{ és obert: si } x_0 \in B \text{ i } B_\varepsilon(x_0) \subset \Omega, \text{ llavors} \\ \text{sigui } v := M - u \text{ superharmonica} \\ v \geq 0 \text{ a } \Omega \end{array} \right\}$

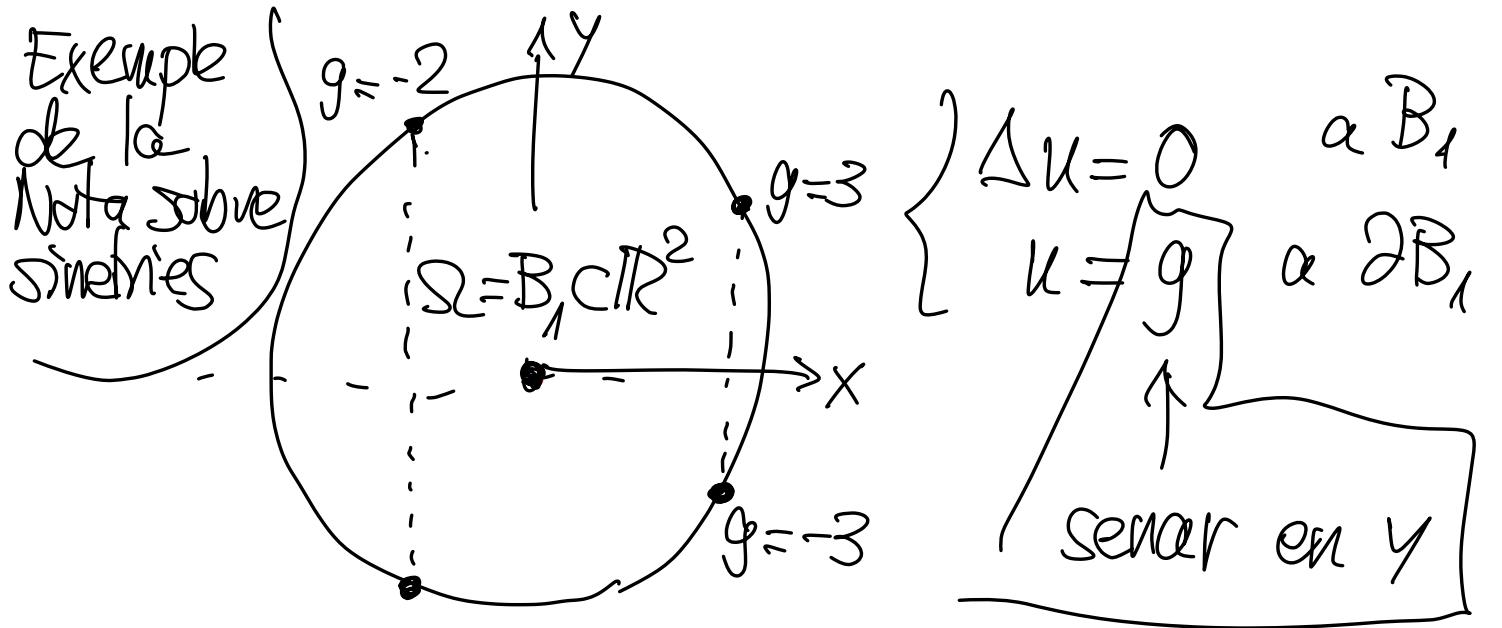
$$0 = v(x_0) \stackrel{\text{Def}}{=} \int_{B_\varepsilon(x_0)} v(x) dx \quad \left\{ \begin{array}{l} \uparrow \\ x_0 \in B \\ i \quad v \geq 0 \text{ a } \Omega \\ v \in C(\bar{\Omega}) \end{array} \right\} \Rightarrow v|_{B_\varepsilon(x_0)} \equiv 0$$

\Downarrow

$$B_\varepsilon(x_0) \subset B. \quad \square$$

• Per tant, com Ω connex,

$$\begin{aligned} B &= \Omega \quad (\text{i.e., } u = M = \max_{\bar{\Omega}} u) && \rightarrow \text{En particular,} \\ &\text{ó bé } B = \emptyset \quad (\text{i.e., } u(x) < \max_{\bar{\Omega}} u \quad \forall x \in \Omega). && \max_{\bar{\Omega}} u = \\ &&& \frac{\max_{\partial\Omega} u}{2} = \max_{\Omega} u \end{aligned}$$



$$g = 2$$

Corollari (de unicitat)

u també és senar en y .

Demo: u és l'solució

Def

$$v(x, y) := -u(x, -y)$$

EPb és invariant per aquesta simetria?

1er El domini no és. $\Omega \rightsquigarrow \bar{\Omega}$

2on

$$\begin{aligned} \Delta v(x, y) &= -\left\{ u_{xx}(x, -y) - (-1)u_{yy}(x, -y) \right\} \\ &= -\Delta u(x, -y) = 0 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{array}{l} \Delta v = 0 \text{ a } B_1 \\ v(x, y) = -g(x, -y) = g(x, y) \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \Delta u = 0 \text{ a } B_1 \\ u(x, y) = g(x, y) \end{array} \right\}$$

UNICITAT
 \Rightarrow
 $u = v$

□

operadors de Sturm-Liouville

- Demo 2 del pr. màxim (que també funciona per l'equació de difusió, com veurem, i també funciona per totes les EDPs el·lítiques i parabol·lígues).
- u subharmonica \rightarrow

a) Pas 1: $\varepsilon > 0 \Rightarrow u_\varepsilon(x) := u(x) + \varepsilon |x|^2$
 satisfa $\Delta u_\varepsilon > 0$ a Ω .

b) Pas 2: demo del pr. màxim amb $\Delta u_\varepsilon > 0$ a Ω .
 Si $\max_{\bar{\Omega}} u_\varepsilon > \max_{\partial\Omega} u_\varepsilon$, llavors existiria

$x_0 \in \Omega$ tq. u_ε té un màxim (intèrior) a x_0 .

$$\Rightarrow (i) \nabla u_\varepsilon(x_0) = 0$$

$$(ii) D^2 u_\varepsilon(x_0) \leq 0 \Rightarrow \Delta u_\varepsilon(x_0) \leq 0$$

c) Pas 3:

Aplicar b) (pr. màxim)

a u_ε i fer $\varepsilon \downarrow 0 \Rightarrow$ pr. màxim per u .

En efecte:

$$\max_{\bar{\Omega}} u \leq \max_{\bar{\Omega}} u \leq \max_{X \in \bar{\Omega}} (u(x) + \varepsilon |x|^2) =$$

$$= \max_{\bar{\Omega}} \underbrace{(u(x) + \varepsilon |x|^2)}_{u_\varepsilon(x)} \leq \max_{\bar{\Omega}} u + \varepsilon \max_{X \in \bar{\Omega}} |x|^2 \xrightarrow[\varepsilon \downarrow 0]{\max} \max_{\bar{\Omega}} u$$

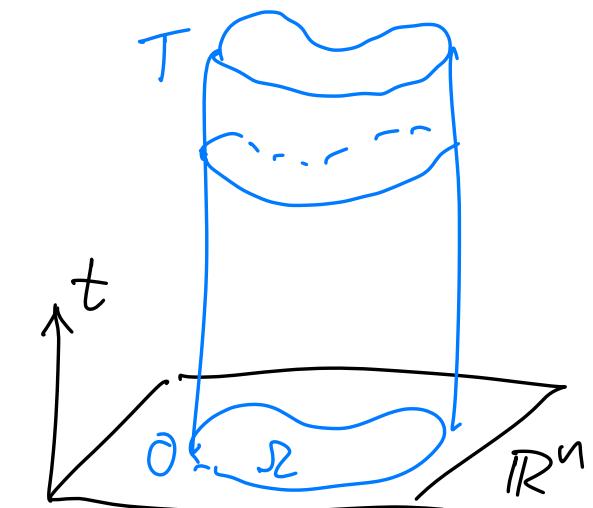
El principi del màxim per l'eq. de la calor i el mètode de sub i supersolucions (o mètode de comparació) :

$\Sigma C \subset \mathbb{R}^n$ fitat Lipschitz, $0 < T \leq +\infty$

Def: $\partial_p(\Sigma \times (0, T)) :=$

$$= (\bar{\Sigma} \times \{0\}) \cup (\partial \Sigma \times [0, T])$$

= frontera parabòlica de $\Sigma \times (0, T)$.



Si una funció és subcalòrica ($u_t - \Delta u \leq 0$) a $\Sigma \times (0, T)$, llavors assoleix el seu màxim a $\partial_p(\Sigma \times (0, T))$.

Si u resol

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t - \Delta u \leq = \geq f(x, t) \quad \text{a } \bar{\Sigma} \times [0, T] \\ u \leq = \geq d(x, t) \quad \text{a } \partial \Sigma \times [0, T] \\ u(x, 0) \leq = \geq g(x) \quad \text{a } \bar{\Sigma} \end{array} \right.$$

llavors diem que u és una subsolució (solució) (supersolució) del problema.

- El pr. del màxim implica que si u és una subsolució del pb, u és la solució del pb, i u és una supersolució del pb, llavors

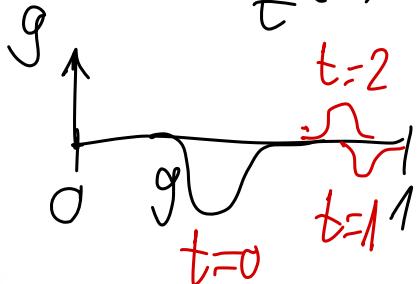
$$\underline{u} \leq u \leq \bar{u} \text{ a } \bar{\Omega} \times [0, T].$$

15-2

- Aquest resultat té moltes aplicacions (alguna es veurà a "Problemes") doncs és molt més fàcil trobar sub i super-solucions que permetran per tant controlar o aixar la veradadera solució u .
- El mateix príncipi de comparació és cert pel pb. de Poisson $\begin{cases} -\Delta u = f & \text{a } \Omega \\ u = d & \text{a } \partial\Omega \end{cases}$

Nota. El principi del màxim no és cert per l'eq d'ones, inclus

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & x \in [0, 1], t \in \mathbb{I} \\ u(0, t) = u(1, t) = 0 & \text{SO } t \in \mathbb{I} \\ u(x, 0) = g(x) & \text{SO } x \in [0, 1] \\ u_t(x, 0) = 0 & x \in [0, 1] \end{cases}$$

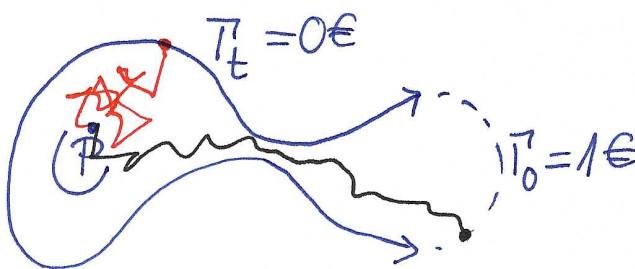


$g \leq 0$ però al cap d'un temps $u > 0$ en algun punt interior de $\Omega \times (0, +\infty) = (0, 1) \times (0, +\infty)$: falla el pr. màxim.

Funcions harmòniques i probabilitats de sortida

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ domini acotat

$$\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_t \quad \text{amb} \quad \Gamma_0 \cap \Gamma_t = \emptyset$$



$$p = (x, y) \in \Omega$$

Caminem aleatoriament
(com en la descripció
d'Einstein de rebot
d'una partícula pesada
escasa dins d'altres més
lleugeres i abundants)

Camí aleatori

(def. matemàtica:

sense memòria

sense privilegiar)

cap direcció

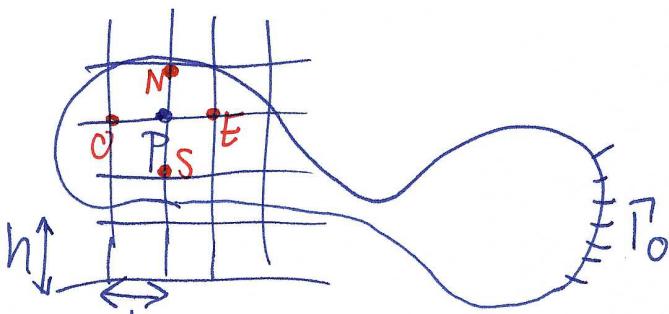
→ Moviment Brownià (veure a YouTube)

$u(p) = u(x, y) = \underline{\text{probabilitat que un camí aleatori}}$
iaiciat a $p \in \Omega$ toqui a T_0 (part oberta o
d'escapatòria) el primer cop que toca $\partial\Omega$
= guany mitjà dels camins aleatoris iniciats
a $p \in \Omega$ (al rebre 1€ a T_0 i 0€ a T_t) →

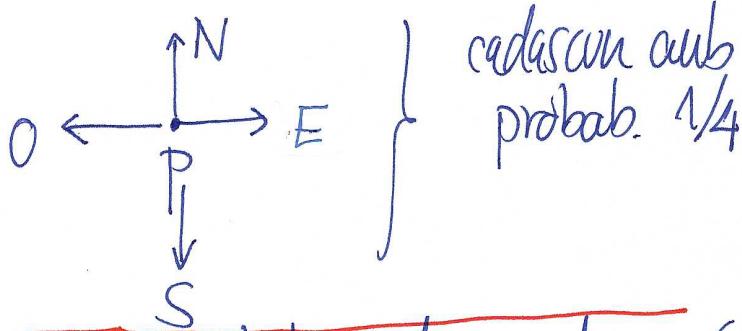
Intuïció OK: al dibuix $u(p) < \frac{1}{2}$!!

$0 \leq u \leq 1$ a $\bar{\Omega}$

Per entendre el problema analíticament,
discretitzem:



Pas $h \rightarrow 0$ (refit)



- Fórmula probab. condicionades (*i sense memòria*) \Rightarrow

$$u^h(P) = u^h(E) \text{prob}(P \rightarrow E) + u^h(O) \text{prob}(P \rightarrow O) \\ + u^h(N) \text{prob}(P \rightarrow N) + u^h(S) \text{prob}(P \rightarrow S)$$

$$\downarrow$$

$$u^h(P) = \frac{1}{4} \left\{ u^h(E) + u^h(O) + u^h(N) + u^h(S) \right\}$$

relacionar amb ja haber calculat els 4 $u^h(E), \dots, u^h(S)$

$$0 = \frac{u^h(x+h,y) + u^h(x-h,y) - 2u^h(x,y)}{h^2} + \\ + \frac{u^h(x,y+h) + u^h(x,y-h) - 2u^h(x,y)}{h^2} \xrightarrow[h \rightarrow 0]{} (u_{xx} + u_{yy})(x,y).$$

si $u^h \rightarrow u$ ($\in C^4(\Omega)$)

Nota: comentari del cas amb ordinador de u^h (n^{os} aleatoris):
mètode de Monte-Carlo.

Per tant:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ a } S\subset\mathbb{R}^n (=2) \\ u = \begin{cases} 0 & \text{a } T_t \\ 1 & \text{a } T_0 \end{cases} \text{ a } \partial S \end{cases}$$

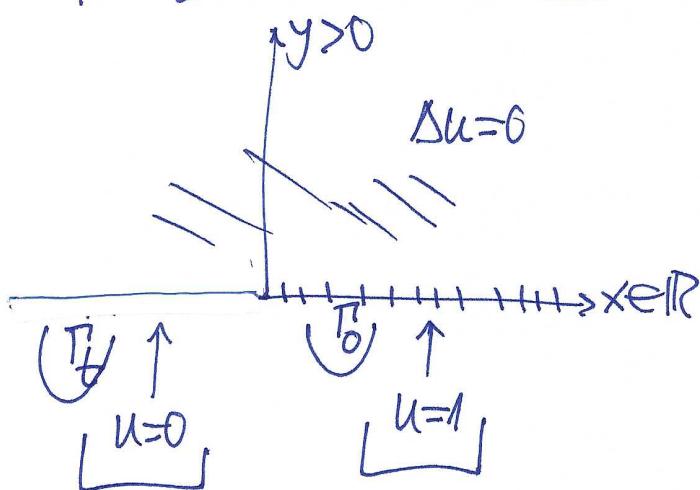
Exercici:

Mateix argument
en qualsevol dimensió

→ té $\exists!$ solució $u \in [0,1]$. No s'aplica el nostre resultat d'unicitat doncs mai hauríem ~~$u \in C(S)$~~ (sense demostració)

Nota: La probabilitat a quanys mitjà coincideix amb la temperatura de S al punt p després de molt temps (sol. estacionària) quan no hi ha fonts de calor a S però S es manté a 0° a T_t i a 1° a T_0 . !!!

Exemple: $S = \mathbb{R}_+^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$

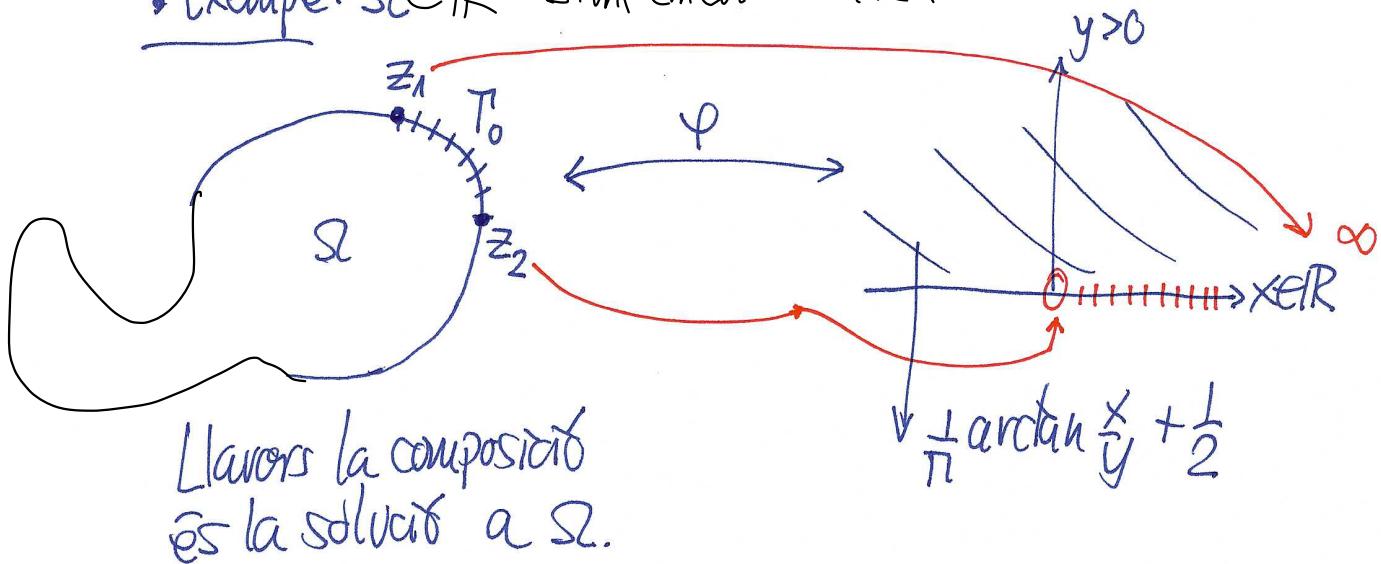


La solució és "l'àngol":

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \\ &= \frac{1}{\pi} \operatorname{arctanh} \frac{x}{y} + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Si ara "maparem" conformament H a S al semiplà podem calcular les prob. de sortida de S :

• Exemple: $S \subset \mathbb{R}^2$ simplement connex



• Temps de sortida Ara S_2 tota tancada.

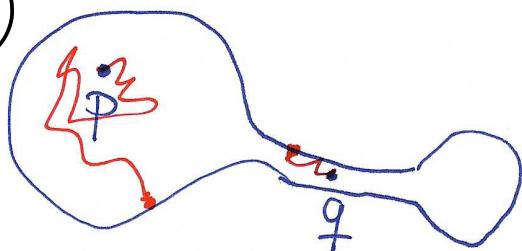
"Temps" (o ~~cost~~ dels camins) que passo dins S_2 :

$$V = V(p) = V(x, y)$$

} Intuïció:

$$V(p) \gg V(q)$$

al dibuix



$T(h) = \text{"cost" de cada pas } h \Rightarrow$

$$V^h(p) = T(h) + \frac{1}{4} (V^h(E) + V^h(O) + V^h(N) + V^h(S))$$

$$0 = \left\{ \frac{V^h(E) + V^h(O) - 2V^h(P)}{h^2} \right\} + \left\{ \frac{V^h(N) + V^h(S) - 2V^h(P)}{h^2} \right\} + \frac{4T(h)}{h^2}$$

Preuem $T(h) = \frac{1}{2}h^2$ $\rightsquigarrow \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{2}\Delta V = 1 \text{ a } S \\ V = 0 \text{ a } \partial S \end{array} \right.$

Pb 5 Llista 6 \rightarrow

$V = \text{temps de sortida}$
 $= guany esperat$

Problema 1. Demostreu les següents propietats importants del Laplaciat:

(a) La definició de Laplaciat no depèn de la base ortonormal de \mathbb{R}^n triada. És a dir

$$\sum_i \partial_{e_i e_i} u(x) = \sum_i \partial_{e'_i e'_i} u(x)$$

per cada parella de bases ortonormals $\{e_i\}, \{e'_i\}$ de \mathbb{R}^n .

(b) El Laplaciat és invariant per rotacions. És a dir, per a tota matriu ortogonal O i $u \in C^2$, si es defineix $u^*(x) := u(Ox)$ i $x^* = Ox$ es té

$$\Delta u^*(x) = \Delta u(Ox) = \Delta u(x^*).$$

(c) El Laplaciat és invariant per translacions.

(d) El Laplaciat és invariant per isometries de \mathbb{R}^n .

Problema 2. Donada una funció f a $[0, L]$, considerem el problema

$$\begin{cases} -u'' = f(x) & \text{a } (0, L) \\ u(0) = u(L) = 0. \end{cases}$$

Resoleu el problema per simple integració de l'EDO. Demostreu que la solució ve donada per l'expressió

$$u(x) = \int_0^L G(x, y) f(y) dy, \quad (1)$$

on $G(x, y)$ es una funció explícita que no depén de f . S'anomena la funció de Green del problema. Dibuixe la gràfica de G com a funció de y per un x donat. Comproveu que G satisfa les següents propietats: $G(x, y) \geq 0$, $G(x, y) = G(y, x)$ i $G(0, y) = G(L, y) = 0$, per tot x i y .

Problema 3. Considerem el problema de Dirichlet pel Laplaciat a la bola o disc unitat B_1 de \mathbb{R}^2 :

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{a } B_1 \\ u = g & \text{a } \partial B_1, \end{cases}$$

on $g : \partial B_1 \rightarrow \mathbb{R}$ és una funció contínua donada. Volem trobar un mètode alternatiu al de separació de variables (polars) per demostrar que la solució ve donada per l'expressió

$$u(x) = \int_{\partial B_1} P(x, y) g(y) dy, \quad \text{per } x \in B_1, \quad (2)$$

on P s'anomena el nucli de Poisson i ve donat (en coordenades polars) per

$$P(x, y) = P(re^{i\alpha}, e^{i\beta}) = \frac{1-r^2}{2\pi} \frac{1}{1+r^2 - 2r \cos(\alpha - \beta)}. \quad (3)$$

Per fer-ho, sigui u la part real d'una funció holomorfa φ . Fixem $z = re^{i\alpha} \in B_1$ i considerem les funcions

$$\zeta \rightarrow \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} \quad \text{i} \quad \zeta \rightarrow \frac{\varphi(\zeta)\bar{z}}{1 - \zeta\bar{z}}.$$

Sumeu les seves integrals a ∂B_1 i, usant la fórmula de Cauchy per funcions holomorfes, deduïu (2)-(3).

[Noteu la similitud de (1) i (2). Fórmules explícites com aquestes per resoldre problemes per EDPs només existeixen, en general, en dimensió $n = 1$ o bé, en dimensió $n \geq 2$, per dominis amb moltes simetries com una bola, un rectangle, cilindres, semi-espais, etc. Per dominis generals, les fórmules encara són vàlides i útils, però els nuclis G i P no són explícits (si bé, com veurem, es poden calcular numèricament discretitzant)].

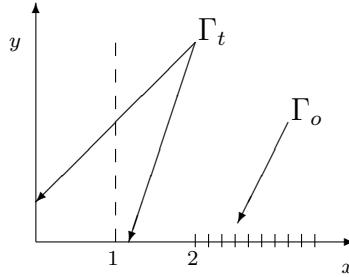
Problema 4. Quina regularitat tenen les solucions de $u_{xx} - 2u_{xy} + 2u_{yy} = 0$ en un obert de \mathbb{R}^2 ? I les de $u_{xx} - 3u_{xy} + 2u_{yy} = 0$? (Indicació: considereu de fer canvis lineals de les variables x i y).

Problema 5. Donat un domini $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, trobeu la interpretació probabilística (en termes de costos o “pagaments” durant el passeig aleatori discret) per la solució del problema

$$\begin{cases} -\Delta u = 1 & \text{a } \Omega \subset \mathbb{R}^n, \\ u = 0 & \text{a } \partial\Omega. \end{cases}$$

Quan $\Omega = B_2 \setminus \overline{B}_1 \subset \mathbb{R}^n$, trobeu els punts de Ω a on el cost és màxim.

Problema 6.* Considerem el domini $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$. Suposem que $\Gamma_o = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : x > 2\}$ és la part oberta de la frontera de Ω i que $\Gamma_t = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2\} \cup \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ és la part tancada de la frontera (veure la figura adjunta). Calculeu la coordenada y tal que la probabilitat de sortir del domini començant camins aleatoris des del punt $(1, y)$ sigui màxima.



Problema 7.* Una imatge en blanc i negre és una funció $u : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, 255] \subset \mathbb{R}$ a valors reals definida en un domini Ω del pla. El valor $u(x, y)$ representa el nivell de gris de la imatge en el punt (x, y) , on 0 representa negre i 255 blanc. Si la imatge

Imatge ideal $\equiv \boxed{\Delta u^h = 0}$

és digital (o discreta) i rectangular, llavors el seu domini de definició ve donat per la discretització d'un rectangle:

$$\{(x_i, y_j) = (ih, jh) : i = 1, \dots, I; j = 1, \dots, J\},$$

on $h > 0$. El punt (x_i, y_j) és el centre d'un pixel quadrat de mida $h \times h$ ("in 'pixel', 'pix' is slang for 'picture' and 'el' stands for 'element'"). Direm que la imatge és de mida $I \times J$.

Transmitint imatges, a vegades es perd un pixel. Si es tracta d'un pixel interior (és a dir $1 < i < I$ i $1 < j < J$), una manera natural de reassignar-li un valor és per la mitjana

$$u(x_i, y_j) = \frac{1}{4} \{u(x_{i+1}, y_j) + u(x_{i-1}, y_j) + u(x_i, y_{j+1}) + u(x_i, y_{j-1})\}. \quad (4)$$

Els pixels no interiors els anomenem de vora (són els que toquen a algun dels quatre costats de la imatge rectangular).

Una imatge digital es diu que és *ideal* si satisfa (4) en cadascun dels seus pixels interiors. Equivalentment, $\Delta_h u(x_i, y_j) = 0$ en cada pixel interior (x_i, y_j) , a on

$$\begin{aligned} \Delta_h u(x_i, y_j) &:= \\ &:= \frac{4}{h^2} \left\{ \frac{1}{4} (u(x_{i+1}, y_j) + u(x_{i-1}, y_j) + u(x_i, y_{j+1}) + u(x_i, y_{j-1})) - u(x_i, y_j) \right\}, \end{aligned} \quad (5)$$

s'anomena el *Laplacià discret* de u .

Demostreu que, coneixuts els pixels de vora d'una imatge digital, existeix una única imatge digital *ideal* que els té com valors de vora.

Problema 8* Les partícules d'una substància es mouen a \mathbb{R} amb pas $h > 0$ i passeig aleatori d'anar a la dreta amb probabilitat $p = \frac{1}{2} + ah$ ($a > 0$ constant) i probabilitat d'anar a l'esquerra $p = \frac{1}{2} - ah$. El pas temporal és $\Delta t = h^2$.

- (a) Fent el desenvolupament de Taylor de la concentració de partícules $u(x, t)$ en x a temps t , demostreu que u és solució de

$$u_t - \frac{1}{2} u_{xx} + 2au_x = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0.$$

Suposeu que resolem aquesta equació amb condició inicial $u(x, 0) = g(x)$ amb g senar, estrictament creixent i fitada a \mathbb{R} , i amb g' fitada.

- (b) Vista l'essència del moviment aleatori a (a), decidiu el signe de $u(0, t)$ per $t > 0$.
- (c) Sigui $v(y, t) := u(y + 2at, t)$. Demostreu que

$$\begin{cases} v_t - \frac{1}{2} v_{yy} = 0 & \text{a } \mathbb{R} \times (0, +\infty) \\ v(\cdot, 0) = g & \text{a } \mathbb{R}. \end{cases}$$

Deduïu que v és senar en y . Considerant l'equació satisfeta per la funció v_y , demostreu que $v_y > 0$ per tot $y \in \mathbb{R}$ i $t > 0$. Per tant, $u_x > 0$ i u és subcalòrica ($u_t - \frac{1}{2} u_{xx} < 0$). Trobeu ara rigurosament el signe de $u(0, t)$ per tot $t > 0$.

$$u_t - \Delta u = 0 \Rightarrow (u_{x_i})_t - \Delta u_{x_i} = 0$$

u_{x_i} també resol l'eq. de difusió

Problema 9.* Donat el problema

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 1 & 0 < x < 1 \quad t > 0 \\ u(0, t) = u(1, t) = 0 & t > 0 \\ u(x, 0) = 0 & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

- (a) Determineu la solució estacionaria $u^s(x)$ que satisfà les condicions de contorn.
- (b) Demostreu que $u(x, t) \leq u^s(x)$ per tot $t > 0$.
- (c) Determineu $\beta > 0$ tal que $u(x, t) \geq (1 - e^{-\beta t})u^s(x)$.
- (d) Deduïu que $u(x, t) \rightarrow u^s(x)$ uniformement en $[0, 1]$ quan $t \rightarrow +\infty$.
- (e) Resoleu el problema usant separació de variables.

Problema 10.* Considereu el domini $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 4\}$. Sigui u la solució del problema

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{a } \Omega \times (0, \infty), \\ u_\nu(x, y, t) = 0 & \text{a } \{x^2 + y^2 = 1\} \times (0, \infty), \\ u_\nu(x, y, t) = \frac{15}{2}xy & \text{a } \{x^2 + y^2 = 4\} \times (0, \infty), \\ u(x, y, 0) = g(x, y) & \text{a } \Omega \times \{0\}, \end{cases}$$

on

$$g(x, y) = 15xy \left(1 - \frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right).$$

- a) És u parella o senar en x ? I en y ? Justifiqueu les respostes. Quina relació hi ha entre $u(3/4, 3\sqrt{3}/4, 100)$ i $u(-3/4, -3\sqrt{3}/4, 100)$?
- b) Es conserva, en el temps, la temperatura mitjana?
- c) Calculeu els equilibris tèrmics del problema.
- d) Quan val $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(x, y, t)$?

Problema 11. Sigui $g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ contínua i fitada. Usant el nucli de Gauss a tot \mathbb{R} , trobeu la solució del problema

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & x > 0, \quad t > 0 \\ u(0, t) = 0, & t > 0, \\ u(x, 0) = g(x), & x \geq 0. \end{cases}$$

(Indicació: considereu de fer alguna reflexió).

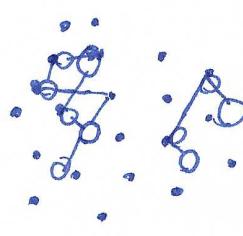
Passatge aleatori i l'eq. de difusió

Eq. de difusió modelitza:

- a) • processos de calor i combustió (flames)
- b) • propagació d'un contaminant dins un líquid, per ex.
- c) • difusió d'una espècie biològica coexistint amb un altra (espai \leftrightarrow aliment).

Pensem en (b)

Idea d'Einstein:



molècules del contaminant
son més grans que
les del líquid

reboten bastant aleatoriament,
com una pilota de platja deixada
a la grada del Nou Camp pels
gencs.

Moviment aleatori o brownià (Brown, biòleg:
pilen en aigua)



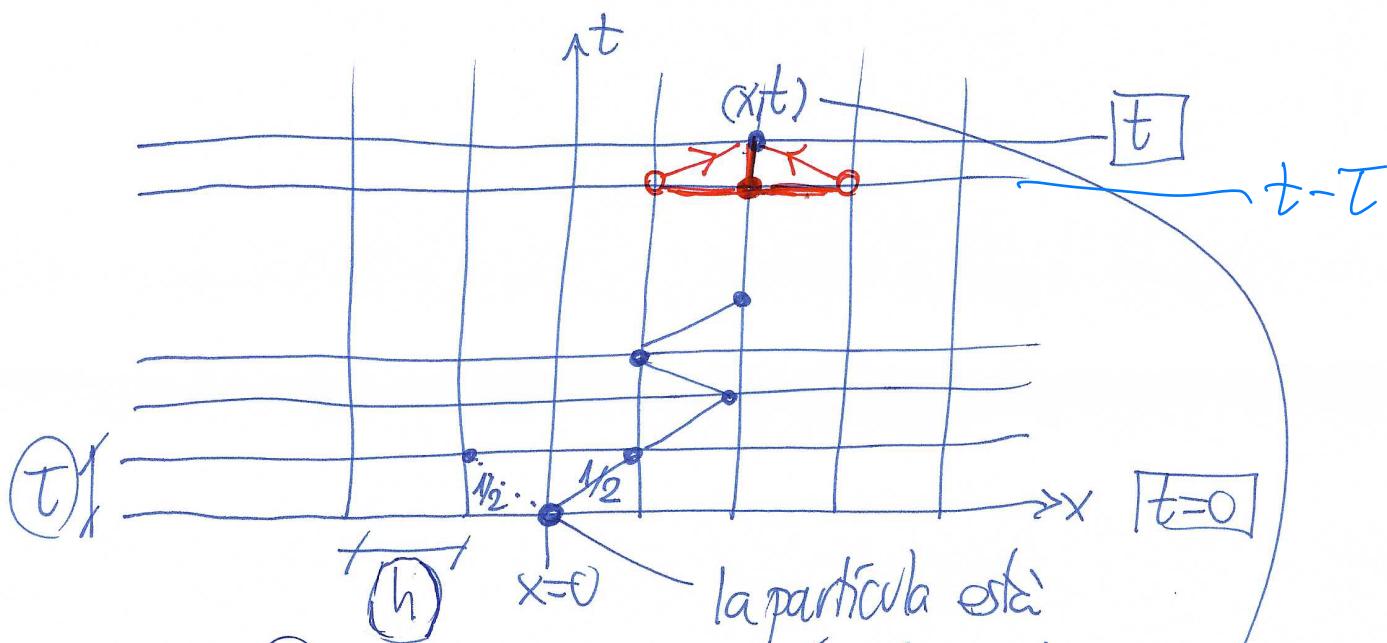
(Mirar a YouTube:
"Brownian Motion")

Voleu saber la distribució del contaminant (concentrat originalment en una petita àrea) quan el temps avança:

- Dim 1: tub infinit de líquid, i

↑ contaminant concentrat aquí
 $x=0$ situat

Rebst amb les molècules petites és anar a
espai a dire en intervals petits de temps
 i espai ↗ amb probabilitats $1/2$ i $1/2$.



$$\begin{cases} \Delta x = h \\ \Delta t = T \end{cases}$$

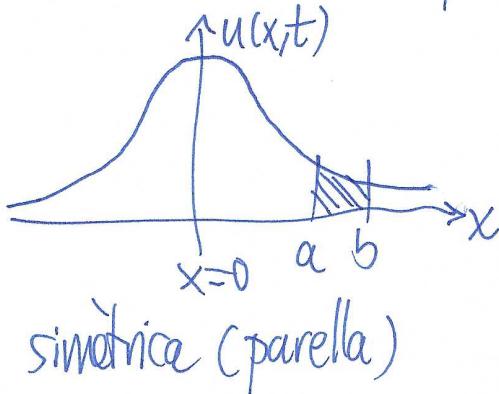
- Després de fer $h \downarrow 0$
 $T \downarrow 0$ (calcul infinitesimal)

Volem conèixer

$u(x,t) =$ densitat de probabilitat que la partícula sigui a x a temps t

Prob. d'estar aquí és un
numero combinatori
compliquat (amb h i T fikats)

- Recordar densitat de probab:



Probabilitat (la partícula
sigui a (a,b) a temps t) =
 $= \int_a^b u(x,t) dx$

Tindrem $\int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t) dx = 1 \quad \forall t > 0.$

- Fórmula de prob. condicionades :

Aquí, n'us recordem

$u = u^h + u^{h,T}$

$$\begin{aligned} u(x,t) &= u(x-h, t-T) \cdot \frac{1}{2} + u(x+h, t-T) \cdot \frac{1}{2} \\ \frac{u(x,t) - u(x,t-T)}{T} &= \frac{\frac{1}{2} \{ u(x-h, t-T) - 2u(x, t-T) + u(x+h, t-T) \}}{T} \end{aligned}$$

$T = \frac{h^2}{2D}$

$\downarrow T \downarrow 0, h \downarrow 0$

$\partial_t u(x,t) = D \partial_{xx} u(x,t)$

$u_t = Du_{xx}$

eq. resulta per la densitat de probabilitat
en el límit $T = \frac{h^2}{2D} \rightarrow 0$.

- Hem de resoldre l'eq. amb dada inicial g així:



molt concentrada en $x=0$
con està la partícula inicialment)

i amb

$$\int_R g = 1$$

Anés hem de tenir $\int_L u(x,t) dx = 1 \quad \forall t$

Classe 38. 17/5/21

- Nota 1. Si la moneda que tirarem té biaix ($\text{prob}(cara) \neq \frac{1}{2}$) es treu la simetria parella resp $x=0$, hi ha una deriva o advecció ("drift") i surt l'equació

$$u_t = D u_{xx} + c u_x$$

terme de 1^{er} ordre.

(Hi ha 1 pb a la llista).
problemes sobre això a exàmens d'anys anteriors.

- Nota 2. Si la partícula perd massa amb el temps (o qualsevol altre efecte) hi ha un terme d'absorció o de reacció

$$u_t = D u_{xx} + a u$$

(mirar S.Salsa)

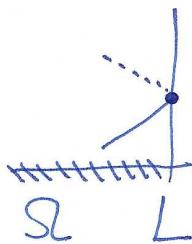
terme d'ordre 0.

heat : absorció o reacció
de calor pel material.

Nota 3

Si hi ha fronteres en el tub (o 1frontera)

i la partícula <



< és absorbida (desapareix) > per la vora

es reflexa

tenim condicions de vora

resp. < Dirichlet o de vora absorbent >

Neumann o de vora reflectant.



pensar en calor

Thermal diffusivity

From Wikipedia, the free encyclopedia

In heat transfer analysis, **thermal diffusivity** is the thermal conductivity divided by density and specific heat capacity at constant pressure.^[1] It measures the ability of a material to conduct thermal energy relative to its ability to store thermal energy, and is approximately analogous to whether a material is "cold to the touch". It has the SI unit of m²/s. Thermal diffusivity is usually denoted α but a , κ ,^[2] K ,^[3] and D are also used. The formula is:

$$\alpha = \frac{k}{\rho c_p}$$

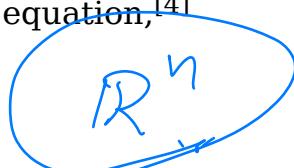
where

- k is thermal conductivity (W/(m·K))
- ρ is density (kg/m³)
- c_p is specific heat capacity (J/(kg·K))

Together, ρc_p can be considered the volumetric heat capacity (J/(m³·K)).

As seen in the heat equation,^[4]

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \nabla^2 T$$



Units

$$\text{S}^{-1} = [\alpha] \text{ m}^{-2}$$

$$[\alpha] = \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$$

thermal diffusivity is the ratio of the time derivative of temperature to its curvature, quantifying the rate at which temperature concavity is "smoothed out". In a sense, thermal diffusivity is the measure of thermal inertia.^[5] In a substance with high thermal diffusivity, heat moves rapidly through it because the substance conducts heat quickly relative to its volumetric heat capacity or 'thermal bulk'.

Thermal diffusivity is often measured with the flash method.^{[6][7]} It involves heating a strip or cylindrical sample with a short energy pulse at one end and analyzing the temperature change (reduction in amplitude and phase shift of the pulse) a short distance away.^{[8][9]}

Thermal diffusivity of selected materials and substances^[10]

| Material | Thermal diffusivity (m²/s) | Thermal diffusivity (mm²/s) |
|---|--|---|
| Pyrolytic graphite, parallel to layers | 1.22×10^{-3} | 1220 |
| Silver, pure (99.9%) | 1.6563×10^{-4} | 165.63 |
| Gold | 1.27×10^{-4} [11] | 127 |
| Copper at 25 °C | 1.11×10^{-4} [12] | 111 |
| Aluminium | 8.418×10^{-5} | 84.18 |
| Al-10Si-Mn-Mg (Silafont 36) at 20 °C | 74.2×10^{-6} [13] | 74.2 |
| Aluminium 6061-T6 Alloy | 6.4×10^{-5} [11] | 64 |
| Al-5Mg-2Si-Mn (Magsimal-59) at 20 °C | 44.0×10^{-6} [14] | 44.0 |
| Steel, 1% carbon | 1.172×10^{-5} | 11.72 |
| Steel, stainless 304A at 27 °C | 4.2×10^{-6} [11] | 4.2 |
| Steel, stainless 310 at 25 °C | 3.352×10^{-6} [15] | 3.352 |
| Inconel 600 at 25 °C | 3.428×10^{-6} [16] | 3.428 |
| Molybdenum (99.95%) at 25 °C | 54.3×10^{-6} [17] | 54.3 |
| Iron | 2.3×10^{-5} [11] | 23 |
| Silicon | 8.8×10^{-5} [11] | 88 |
| Quartz | 1.4×10^{-6} [11] | 1.4 |
| Carbon/carbon composite at 25 °C | 2.165×10^{-4} [12] | 216.5 |
| Aluminium oxide (polycrystalline) | 1.20×10^{-5} | 12.0 |
| Silicon Dioxide (Polycrystalline) | 8.3×10^{-7} [11] | 0.83 |
| Si ₃ N ₄ with CNTs 26 °C | 9.142×10^{-6} [18] | 9.142 |
| Si ₃ N ₄ without CNTs 26 °C | 8.605×10^{-6} [18] | 8.605 |
| PC (Polycarbonate) at 25 °C | 0.144×10^{-6} [19] | 0.144 |
| PP (Polypropylene) at 25 °C | 0.096×10^{-6} [19] | 0.096 |
| Paraffin at 25 °C | 0.081×10^{-6} [19] | 0.081 |
| PVC (Polyvinyl Chloride) | 8×10^{-8} [11] | 0.08 |
| PTFE (Polytetrafluoroethylene) at 25 °C | 0.124×10^{-6} [20] | 0.124 |
| Water at 25 °C | 0.143×10^{-6} [19] | 0.143 |

| Material | Thermal diffusivity (m ² /s) | Thermal diffusivity (mm ² /s) |
|--|---|--|
| Alcohol | 7×10^{-8} [11] | 0.07 |
| Water vapour (1 atm, 400 K) | 2.338×10^{-5} | 23.38 |
| Air (300 K) | 1.9×10^{-5} [11] | 19 |
| Argon (300 K, 1 atm) | 2.2×10^{-5} [21] | 22 |
| Helium (300 K, 1 atm) | 1.9×10^{-4} [21] | 190 |
| Hydrogen (300 K, 1 atm) | 1.6×10^{-4} [21] | 160 |
| Nitrogen (300 K, 1 atm) | 2.2×10^{-5} [21] | 22 |
| Pyrolytic graphite, normal to layers | 3.6×10^{-6} | 3.6 |
| Sandstone | $1.12\text{--}1.19 \times 10^{-6}$ | 1.15 |
| Tin | 4.0×10^{-5} [11] | 40 |
| Brick, common | 5.2×10^{-7} | 0.52 |
| Brick, adobe | 2.7×10^{-7} | 0.27 |
| Glass, window | 3.4×10^{-7} | 0.34 |
| Rubber | 0.89 [3] - 1.3×10^{-7} | 0.089 - 0.13 |
| Nylon | 9×10^{-8} | 0.09 |
| Wood (Yellow Pine) | 8.2×10^{-8} | 0.082 |
| Oil, engine (saturated liquid, 100 °C) | 7.38×10^{-8} | 0.0738 |

See also

- Heat equation
- Laser flash analysis
- Thermodiffusion
- Thermal effusivity
- Thermal time constant

References

1. Lide, David R., ed. (2009). *CRC Handbook of Chemistry and Physics* (90th ed.). Boca Raton, Florida: CRC Press. p. 2-65. ISBN 978-1-4200-9084-0.
2. Gladwell, Richard B. Hetnarski, M. Reza Eslami ; edited by G.M.L. (2009). *Thermal Stresses - Advanced Theory and Applications* (Online-Ausg. ed.). Dordrecht: Springer Netherlands. p. 170. ISBN 978-1-4020-9247-3.
3. Unsworth, J.; Duarte, F. J. (1979), "Heat diffusion in a solid sphere and Fourier

VIDEOS + EXPLANATION of Brownian motion + diffusion/heat:

<http://www.youtube.com/watch?v=FAxdx2Iv-UA&feature=fvwrel>

<https://www.tec-science.com/thermodynamics/temperature/temperature-and-particle-motion/>

<http://www.youtube.com/watch?v=WwS3CYItxqY>

APPLETS FOR NUMERICAL SOLUTION OF PDEs:

Load string, rectangular membrane, circular membrane

<https://www.math.uchicago.edu/~luis/#solvers>

→ usa el mètode de diferències finites.

Mètodes numèrics per EDPs:

1) Mètode d'elements finits és un mètode integral, basat en el producte escalar de L^2 :
$$-\Delta u = f \quad | \cdot v \quad \& \int_{\Omega} \Rightarrow \int_{\Omega} (\Delta u)v = \int_{\Omega} fv$$

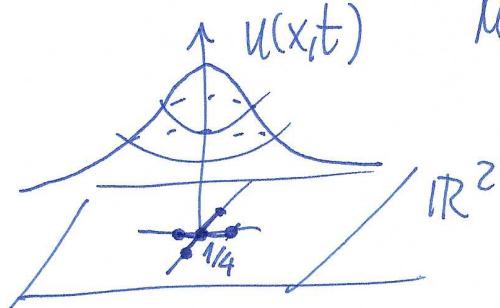
$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v = (\nabla u, \nabla v)_{L^2}$$

2) Mètode de diferències finites

$$(\Delta u = u_{xx} + u_{yy}) \approx \frac{1}{h^2} (u(x+h, y) + u(x-h, y) - 2u(x, y) + \dots)$$

3) Mètode de Montecarlo (nombres aleatoris/probab.)

La solució fonamental i el pb de Cauchy a tot \mathbb{R}^n



Mateix càlcul a \mathbb{R}^n . (el farem al Cap 2)
 \mathbb{R}^2 puc anar al nord, sud
est, oest
amb probab. $1/4$.

$$\rightarrow u_t = D \Delta u$$

$$\rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} u(x,t) dx = 1 \quad \forall t > 0$$

$$\rightarrow u \text{ radial en } x: \underline{u(x,t) = u(r,t)}$$

Aquí veurem:

$$\boxed{\tau = \frac{h^2}{2nD}}$$

• per intent : $u(x,t) = v(t) w(x) = v(t) w(r)$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} u(x,t) dx = v(t) \int_{\mathbb{R}^n} w = 1 \Rightarrow v \equiv c t \Rightarrow$$

$\Rightarrow u(x,t) = c \cdot w(r)$ independent del temps :
no té sentit pel pb que
volem resoldre.

• en intent :

Salvars auto-similars (matrixa pràctica $\forall t$ després
de rescalat la var. x i la u)

$$u(x,t) = \frac{1}{\varphi(t)^n} \sqrt{\left(\frac{x}{\varphi(t)}\right)} \quad \int_{\mathbb{R}^n} v(y) dy$$

agust factor per que $\int_{\mathbb{R}^n} u dx = 1 \quad \forall t$

Rescalament parabòlics :

$$\left\{ \begin{array}{l} x \rightsquigarrow \lambda x \\ t \rightsquigarrow \lambda^2 t \end{array} \right\} \quad u_t = D \Delta u$$

$$v(x,t) = u(\lambda x, \lambda^2 t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(v_t = \lambda^2 u_t (\lambda x, \lambda^2 t) = D \lambda^2 \Delta u \right) = D \Delta v$$

✓ Invariant per canvis d'escala parabòlics \rightsquigarrow

$$u(x,t) = \frac{1}{p(t)^n} v\left(\frac{x}{p(t)}\right) = \boxed{\frac{1}{(Dt)^{n/2}} v\left(\frac{x}{(Dt)^{1/2}}\right)}$$

Classe 39.
19/5/21

$$u(x,t) = D^{-n/2} t^{-n/2} v(D^{-1/2} t^{-1/2} r)$$

llavors

$$\begin{array}{c} !! \\ (\bar{z}) \end{array} \quad v = v(\bar{z})$$

$$\Delta u = r^{1-n} (r^{n-1} u_r)_r = r^{1-n} (r^{n-1} D^{-\frac{n}{2}-\frac{1}{2}} t^{-\frac{n}{2}-\frac{1}{2}} v(D^{\frac{1}{2}} t r))_r$$

$$= r^{1-n} D^{-1} t^{-1} (\bar{z}^{n-1} v_{\bar{z}}(\bar{z}))_r$$

$$= r^{1-n} D^{-\frac{3}{2}} t^{-\frac{3}{2}} (\bar{z}^{n-1} v_{\bar{z}})_{\bar{z}}$$

$$\begin{array}{l} u = r^{-n} \bar{z}^n v(\bar{z}) \\ \hookrightarrow u_t = r^{-n} (\bar{z}^n v(\bar{z}))_{\bar{z}} (-\frac{1}{2}) D^{-\frac{1}{2}} t^{-\frac{3}{2}} r \end{array} \quad \rightarrow$$

$$u_t = D \Delta u \Leftrightarrow (\bar{z}^{n-1} v_{\bar{z}})_{\bar{z}} = -\frac{1}{2} (\bar{z}^n v)_{\bar{z}}$$

$$\bar{z}^{n-1} v_{\bar{z}} + \frac{1}{2} \bar{z}^n v = ctt = 0$$

$$\begin{array}{l} (\log v)' = \frac{v'}{v} = -\frac{1}{2} \bar{z} = \left(-\frac{\bar{z}^2}{4}\right)' \quad \begin{array}{l} \uparrow \\ \bar{z}=0 \text{ ja que } \bar{z}^n=0 \\ \downarrow \\ v_{\bar{z}}=0 \text{ a } \bar{z}=0. \end{array} \\ \log v = ctt - \frac{\bar{z}^2}{4} \end{array}$$

$$\rightarrow 1 = \int_{\mathbb{R}^n} u \, dx = (Dt)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} v((Dt)^{-1/2} |x|) \, dx =$$

$$= C_0 (Dt)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x|^2}{4Dt}} dx = \left| \sqrt{\frac{x}{4Dt}} = y \right|$$

$$= C_0 4^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|y|^2} = C_0 4^{\frac{n}{2}} \pi^{\frac{n}{2}} \Rightarrow C_0 = (4\pi)^{\frac{n}{2}}$$

Fubini

$$U = \boxed{T_D(x,t) = \frac{1}{(4\pi Dt)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{(4Dt)}}}$$

sol fcn. de l'eq de difusió a \mathbb{R}^n .

$$\boxed{I := \int_{\mathbb{R}} e^{-z^2} dz = \pi^{\frac{1}{2}}} \quad \Leftarrow \quad I^2 = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-|x|^2} dx = \int_0^\infty r e^{-r^2} dr \cdot 2\pi$$

$$= \frac{e^{-r^2}}{2} \Big|_0^\infty \cdot 2\pi = \pi \quad \square$$

$$T_D \text{ quan } t \downarrow 0$$

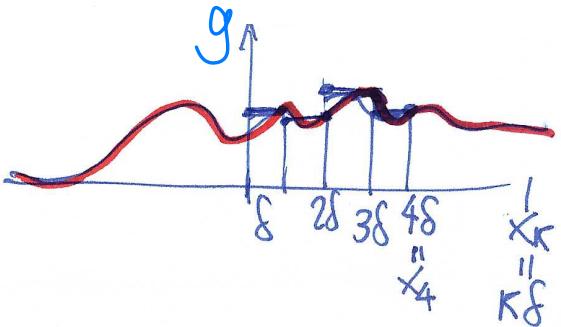
$$\infty \cdot 0 = 0 \text{ si } x \neq 0$$

$$\infty \cdot e^0 = \infty \text{ si } x=0$$

T_D és la sol. de com es difon una substància "concentrada tota" a $x=0$ de massa 1 a $t=0$

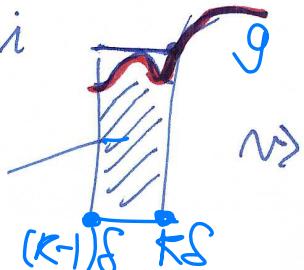
Si la condició inicial

ara és $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (fem $n=1$ per simplificar)



farem $\delta \downarrow 0$
principi superposició i

$$\text{massa} = \delta g(k\delta)$$



\rightsquigarrow es difon com

$$\approx \delta \cdot g(K\delta) \frac{e^{-\frac{|x-K\delta|^2}{4Dt}}}{(4\pi Dt)^{n/2}} = \delta g(K\delta) T_D(x-K\delta, t)$$

quan $\delta \rightarrow 0$.

$$g = \sum_{k \in \mathbb{Z}} g(K\delta) \chi_{[(k-1)\delta, k\delta]}$$

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta g(K\delta) T_D(x-K\delta, t)}$$

↓ $\delta \downarrow 0$ suma de Riemann

$$\boxed{\int_{\mathbb{R}} g(y) T_D(x-y, t) dy} !!$$

Arribem a:

Definició

Convolució $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) g(x-y) dy$$

$$= (g * f)(x)$$

$(f \in L^1 \text{ per ex.})$
 $(g \in L^\infty \text{ per ex.})$

IB de Cauchy a \mathbb{R}^n :

$$(PC) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_t = D\Delta u \text{ a } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u(\cdot, 0) = g \text{ a } \mathbb{R}^n \end{array} \right.$$

Teorema Sigui $g \in (C \cap L^\infty)(\mathbb{R}^n)$.

Entonces:

(a) La única sol. acotada ue $C^2(\mathbb{R}^n \times (0, \infty)) \cap C(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$ del (PC) ve donada per

$$u(x,t) = (T_D(\cdot, t) * g)(x)$$

A més,

$$u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0, \infty)) = \frac{1}{(4\pi D t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4Dt}} g(y) dy.$$

(b) (conservació de massa): Si $\int_{\mathbb{R}^n} g < \infty$ llavors

$$\forall t > 0 \quad \int_{\mathbb{R}^n} u(x,t) dx = \int_{\mathbb{R}^n} g(x) dx.$$

(c) (estimacions d'estabilitat): (ó control de l'energia)

$$\left. \begin{array}{l} g \approx u \\ \tilde{g} \approx \tilde{u} \end{array} \right\} \|u - \tilde{u}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))} \leq \frac{1}{\sqrt{4\pi D t}} \|g - \tilde{g}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$$

Reflexa l'exist. del pr. del màxim

Per demostrar el tma necessitem

Aproximacions de la identitat
Pr. màxim a \mathbb{R}^n (no es fa)

Def (Aproximació de la identitat)

$\{K_T\}_{T>0}$ on $K_T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ és aprox. identitat si

i) $K_T \geq 0$ a \mathbb{R}^n i $\int_{\mathbb{R}^n} K_T(x) dx = 1 \quad \forall T > 0$

ii) $\forall r > 0 \quad \int_{\{|x| > r\}} K_T(x) dx \xrightarrow{T \rightarrow 0} 0$. \square

efecte
regulantzant
de les calor

$$u(\cdot, t) = \tilde{f}_D(\cdot, t) * g$$

3/bis

Vediamo che $u(x, t) \rightarrow g(x)$ quando $t \downarrow 0$
per ogni $x \in \mathbb{R}^n$.

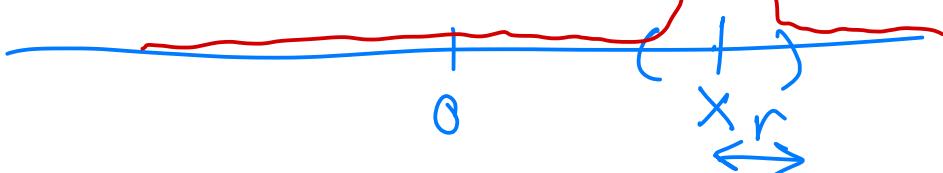
$$\text{Dimo: } |u(x, t) - g(x)| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}_D(x-y, t) g(y) dy \right| - g(x)$$

$$= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}_D(x-y, t) \{g(y) - g(x)\} dy \right|$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}_D(x-y, t) |g(y) - g(x)| dy \quad (x \text{ fisso})$$

$$\leq \int_{\{y \in \mathbb{R}^n : |y-x| \leq r\}} \tilde{f}_D(x-y, t) |g(y) - g(x)| dy \quad (\text{rag. esaurito})$$

$$+ \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_r(x)} \tilde{f}_D(x-y, t) |g(y) - g(x)| dy$$



Donat $\varepsilon > 0 \rightarrow \exists r > 0$ ($r = \delta$) 31 bis
bis

tal que $|g(y) - g(x)| \leq \varepsilon$ si $y \in B_r(x)$.

$$\Rightarrow ① \leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} T_D(x-y, t) dy = \varepsilon.$$

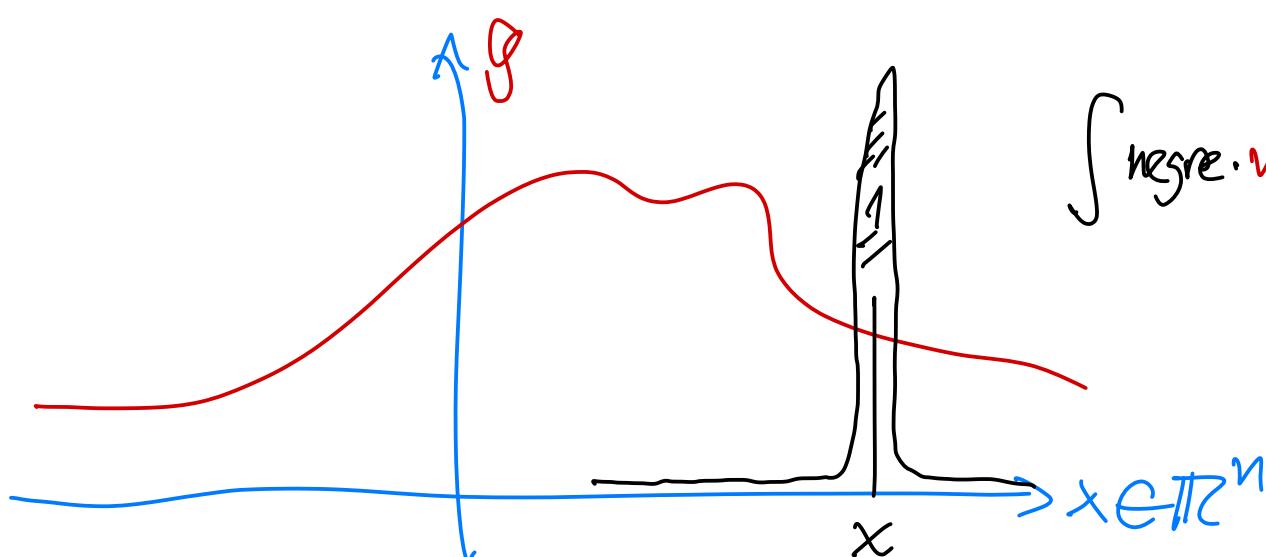
$$② \leq 2\|g\|_\infty \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_r(x)} T_D(x-y, t) dy$$

$$T_D(x-y, t) = \frac{1}{(4\pi D t)^{n/2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4Dt}} \leq$$

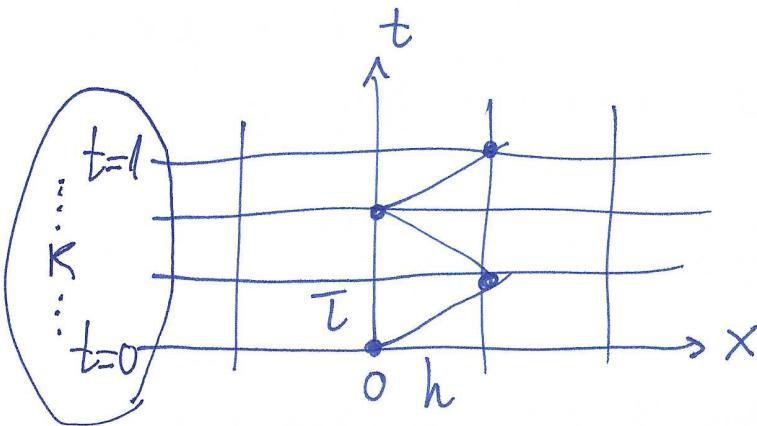
$$\leq \frac{1}{(4\pi D t)^{n/2}} e^{-\frac{r^2}{4Dt}} \leq \varepsilon$$

si t es prou petit

□



• Return a:
L'equació de difusió i probabilitat



$$\left. \begin{array}{l} T = \frac{h^2}{2D} = h^2 \\ D = 1/2 : u_t = \frac{1}{2} u_{xx} \end{array} \right\}$$

K iteracions per arribar a temps $t=1$.

$$h\bar{X}_1 + h\bar{X}_2 + \dots + h\bar{X}_K = \text{posició a temps } t=1$$

||

$$\frac{\bar{X}_1 + \dots + \bar{X}_K}{\sqrt{K}}$$

a on

\bar{X}_i v.a.i.i.d
independents

ideinticament distribuïdes

$$\bar{X}_i = \begin{cases} 1, & \text{prob} = 1/2 \\ -1, & \text{prob} = -1/2 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} 1=t=K T \\ \Rightarrow h = \sqrt{T} = \frac{1}{\sqrt{K}} \end{array} \right\}$$

a temps
 $t=1$
és la sol.
de l'eq. ob. dif

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi D t}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = N(0,1)$$

$$\bar{X}_i = \begin{cases} 1, & \text{prob} = 1/2 \\ -1, & \text{prob} = -1/2 \end{cases}$$

$$\rightarrow E(\bar{X}_i) = 0$$

$$\text{Var}(\bar{X}_i) = E((\bar{X}_i - E\bar{X}_i)^2)$$

$$= E(\bar{X}_i^2) = (-1)^2 \frac{1}{2} + 1^2 \frac{1}{2} = 1$$

Per tant \rightarrow

Això és el
Teorema Central del límit

\bar{X}_i successió de v.a.i. id amb $E(\bar{X}_i) = 0$, $E(\bar{X}_i^2) = 1$

$$\Rightarrow \frac{\bar{X}_1 + \dots + \bar{X}_K}{\sqrt{K}} \xrightarrow{K \rightarrow \infty} N(0, 1) \text{ en probabilitat.}$$

Hem quasi fet la demo pel cas de les $\bar{X}_i = \begin{cases} 1 & \text{Pr} = \frac{1}{2} \\ -1 & \text{Pr} = \frac{1}{2} \end{cases}$.

— . — . —

eq de Poisson i

Solució fonamental, ✓ funcions de Green. ($n \geq 2$)Busquem una solució radial de $-\Delta\phi = \delta_0$ a \mathbb{R}^n

$$\phi(x) = \phi = \phi(|x|) = \phi(r)$$

↑ delta a $x=0$

$$\Delta\phi = r^{1-n} (r^{n-1} \phi_r)_r = 0 \text{ per } r > 0$$

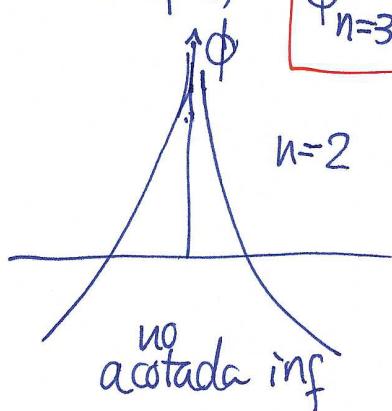
$$r^{n-1} \phi_r = a = \text{cte}, \quad \phi_r = a r^{1-n} \rightarrow$$

$$\phi = \begin{cases} a \log r + b & \text{si } n=2 \\ \frac{a}{2-n} r^{2-n} + b & \text{si } n \geq 3 \end{cases}$$

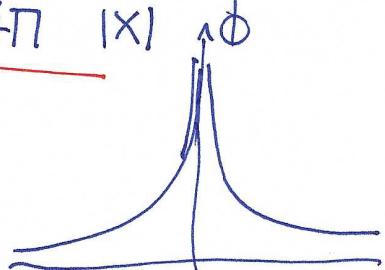
L'elecció correcte és: $\phi(x) = \phi_n(x) =$

$$\phi(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \log |x|, & \text{si } n=2 \\ \frac{1}{(n-2)|\partial B_1|} \frac{1}{|x|^{n-2}}, & \text{si } n \geq 3 \end{cases}$$

Per exemple,



$$\phi_{n=3}(x) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x|}$$



sol. fonamental
del Laplací
a \mathbb{R}^n

Volem que $-\Delta\phi = \delta_0$

$$\text{Per tant, } -\Delta\phi(\cdot-x) = \delta_x$$

Vull resoldre $-\Delta u = f(x)$ a \mathbb{R}^n donada $f =$ distribució de masses o càrregues.

Formalment tenim

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} u(y) dS_x(y) = \int_{\mathbb{R}^n} u(y) (-\Delta_y \phi(y-x)) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} u(y) (-\Delta_y \phi)(x-y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} -\Delta_y u(y) \phi(x-y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \phi(x-y) dy \quad (*) \end{aligned}$$

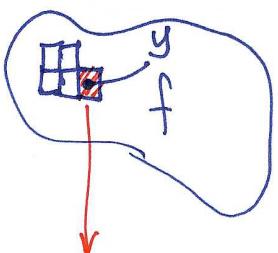
Aquesta fórmula ve de

[com a l'eq. de difusió i el pb de Cauchy]

+

aproximar f per sumes de Riemann (fins una de func. característiques)

+ principi de superposició.



$u = ?$ (potencial creat per f)

$\leftarrow E = -\nabla u$ camp elèctric.

solutió
 $f(y) \phi(-y)$ i després \sum respecte tots els rectangleles
 \rightarrow convolució, com a (*)

Teorema $n \geq 2$. Donada $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$ (C^2 a suport compacte) la funció $u = \phi * f$, i.e.,

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x-y) f(y) dy$$

$C^2(\mathbb{R}^n)$

és la única solució (excepte en dim $n=2$ a on es única excepte constant additiva) de

$$\boxed{\left. \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} u \in C^2(\mathbb{R}^n) \quad \& \quad -\Delta u = f \text{ a } \mathbb{R}^n \\ u \in L^\infty(\mathbb{R}^n) \quad (u \text{ acotada}) \end{array} \right. \leftarrow \\ \left. \begin{array}{l} \text{si } n \geq 3, \text{ llavors } u(x) \xrightarrow[|x| \rightarrow \infty]{} 0. \leftarrow \end{array} \right. \end{array} \right\} \text{"condicions de vora (a l'infini) generalitzades"}}$$

En dim 3, $u(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f(y)}{|x-y|} dy$

(potencial Newtonià de la distribució de carregues f).

Demo: • La unicitat és conseqüència del Teorema de Liouville (veure pag. 24) u_1, u_2 solns \Rightarrow

$$v := u_1 - u_2 \in C^2(\mathbb{R}^n), \quad \Delta v = 0 \text{ a } \mathbb{R}^n \quad \left. \begin{array}{l} v \text{ acotada} \\ \Rightarrow v = ctt \end{array} \right.$$

$$\text{Si } n \geq 3, \quad v = ctt = 0 \quad \square$$

\uparrow
at ∞

• L'existència: 



$$u_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n \setminus \{|y| > \varepsilon\}} C_n |y|^{2-n} f(x-y) dy$$

$$-\Delta u_\varepsilon(x) = \int_{|y| > \varepsilon} C_n |y|^{2-n} (-\Delta_y f)(x-y) dy$$

$$= \int_{|y|=\varepsilon} C_n \varepsilon^{2-n} \frac{\partial f}{\partial y} (x-y) dy \rightarrow 0$$

$$+ \int_{|y| > \varepsilon} C_n |\nabla_y| |y|^{2-n} \nabla_y f(x-y) dy$$

$$\hookrightarrow = \int_{|y|=\varepsilon} C_n (-\partial_r r^{2-n}) f(x-y) dy$$

$$\hookrightarrow C_n \frac{(n-2)}{\varepsilon^{n-1}} \int_{|y|=\varepsilon} f(x-y) dy$$

$$C_n(n-2) \frac{1}{|S^{n-1}|} \int_{|y|=\varepsilon} f(x-y) dy$$

$$\boxed{C_n = \frac{1}{(n-2)|S^{n-1}|}} \quad | \quad n=3 \\ C_3 = \frac{1}{|S^2|} = \frac{1}{4\pi}$$