Segona Pràctica: Aproximació per Mínims Quadrats

1 Objectius

Programar en `Matlab` una funció que, donada una mostra amb m punts com la de la Taula 1 (suposem $x_1 < x_2 < \cdots < x_m$), calculi els $q+1$ coeficients $a_q, a_{q-1}, \ldots, a_0$ del polinomi de grau q, amb $q < m$,

$$p_q(x) = a_q x^q + a_{q-1} x^{q-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \tag{1}$$

que l'aproxima aquests valors per mínims quadrats (veure secció 3.2 a baix).

x	x_1	x_2	x_3	x_4	$\cdots$	x_m
y	y_1	y_2	y_3	y_4	$\cdots$	y_m

Taula 1: Mostra amb m punts $(x_k, y_k)_{k=1,\ldots,m}$.

2 Comentaris

A continuació es descriuen els fitxers que caldrà entregar. Les funcions que heu fet durant el desenvolupament de la pràctica (essencialment de comprovació) no s'han d'entregar si no és que es criden des d'alguna de les funcions que sí cal entregar. Cal que respecteu estrictament tant el nom de les funcions com la passa de paràmetres.

3 Funcions i programes que caldrà entregar

S'huran de lliurar 3 arxius, `polminquad.m` `informe.tex` i `informe.pdf`; el primer d'ells és una funció `Matlab` amb l'entrada i sortida que s'indica. Els altres dos són, respectivament, el fitxer font —escrit en LaTeX—amb l'informe de la pràctica, i el PDF que es genera un cop es compila amb la comanda `pdflatex` (veure secció 3.2 a baix).

Remarca. Aquests són els únics fitxers que es podran sotmetre. Qualsevol altra funció *que sigui necessària* —en el sentit que s'assenyala dalt a la Secció 2—, s'haurà d'incloure en algun d'ells.

```
function [coefs, norm2Res] = polminquad(x,y,grau,plt)
```

Objectiu: Càlcul dels coeficients del polinomi (1) que aproxima la Taula $(x_k, y_k)_{k=1,\ldots,m}$ resolent les equacions normals per descomposició QR.

Input

`x`: `x` $= [x_1, x_2, \ldots, x_m]$. Vector que conté les abscisses de la taula ($x_1 < x_2 < \cdots < x_m$).

`y`: `y` $= [y_1, y_2, \ldots, y_m]$. Vector que conté les ordenades de la taula.

`grau`: grau q del polinomi (1) que ajusta els punts de la Taula 1 per mínims quadrats.

`plt`: paràmetre opcional. Si `plt` és present a la llista d'arguments, dibuixa els punts de la taula 1, a l'interval $[x_1, x_m]$, la gràfica del polinomi fent servir un nombre de punts (equi-espaiats) igual a `plt`. *Nota:* el nombre de paràmetres que es passa a la funció es guarda a la variable `nargin`.

Output

`coefs:` vector que conté els coeficients del polinomi (1), i.e., `coefs` $= [a_q, a_{q-1}, \ldots, a_0]$.

`norm2Res:` norma-2 del vector dels residus, i.e., `norm2Res` $= \|Aa - y\|_2$.

3.1 Metodologia

Per dur a terme la pràctica haureu de plantegar les corresponents equacions normals $A^\top Aa = y$, amb

$$A = \begin{pmatrix} x_1^q & x_1^{q-1} & \ldots & x_1 & 1 \\ x_2^q & x_2^{q-1} & \ldots & x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_m^q & x_m^{q-1} & \ldots & x_m & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m\times(q+1)}(\mathbb{R}), \quad a = \begin{pmatrix} a_q \\ a_{q-1} \\ \vdots \\ a_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{q+1}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

i resoldre el sistema triangular superior $Ra = Q^\top y$, essent $Q \in \mathcal{M}_{m\times(q+1)}(\mathbb{R})$ i $R \in \mathcal{M}_{(q+1)\times(q+1)}(\mathbb{R})$ les matrius de la descomposició $A = QR$ de la matriu A. En particular:

(i) Construïu la matriu A seleccionant les columnes adeqüades de la matriu de Vandermonde associada al vector x.

(ii) Feu la descomposició $A = QR$ usant el mètode de Gram-Schmidt modificat.

(iii) Comproveu que efectivament, les columnes de Q són *ortonormals*, i.e., que $Q^\top Q$ és, llevat d'errors de rodoniment, la matriu identitat, $I_{q+1} \in \mathcal{M}_{(q+1)\times(q+1)}(\mathbb{R})$. Convé doncs que calculeu i treieu per pantalla el valor de $\|Q^\top Q - I_{q+1}\|_\infty$.

(iv) Resoleu el sistema triangular superior $Ra = Q^\top y$ i retorneu el vector amb els coeficients calculats, i.e., `coefs` $= [a_q, a_{q-1}, \ldots, a_0]$ i la norma del residu, `norm2Res` $= \|Aa - y\|_2$.

(v) Finalment, si `plt` apareix als arguments de la funció, dibuixeu els punts de la taula i, per $x_1 \le x \le x_m$, la gràfica del polinomi trobat agafant `plt` punts equiespaiats.

3.2 Informe de la pràctica

En aquesta práctica heu de presentar un informe escrit en LaTeX. `informe.tex`, serà el fitxer font, amb el text de l'informe i les instruccions de formateig. Quan aquest es complia amb la comanda:

```
~$ pdflatex informe.tex
```

es genera l'arxiu `informe.pdf` que es pot obrir amb qualsevol lector PDF. Caldrà pujar tots dos fitxers: `informe.tex` i `informe.pdf` (juntament amb `polminquad.m`).

Contingut. En una extensió màxima de *dues pàgines*, l'informe ha d'incloure:

1. Títol de la pràctica i nom de l'autor.
2. La demostració de que $p_q(x)$ és el polinomi "òptim" o, de manera més precisa, que

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{m} \left(p_q(x_i) - y_i\right)^2} \le \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \left(r_q(x_i) - y_i\right)^2}$$

per a tot $r_q(x) \in \mathbb{R}_q[x]$, sii els seus coeficients $a_q, a_{q-1}, \ldots, a_0$ són solució de les equacions normals.

3. La justificació del mètode utilitzat per trobar les solucions de les equacions normals, explicant-lo breument.

4. La descripció dels objectius de la funció `polminquad` i dels seus paràmetres d'entrada i de sortida.

Referències

[1] `https://www.overleaf.com`. Aquí trobareu informació i eines per crear documents amb LaTeX.

[2] A. Aubanell, A. Benseny, and A. Delshams. *Eines Bàsiques de Càlcul Numèric*, volume 7 of *Manuals de la Universitat Autònoma de Barcelona*. Servei de Publicacions de la UAB, Bellaterra, 1991.

[3] E. Isaacson and H. B. Keller. *Analysis of Numerical Methods*. Dover Publications, Inc., New York, 1994. Reimpressió corregida de l'edició original [Wiley, New York 1996].

[4] J. Puig. *Taller de Matemàtiques. Pràctiques en Matlab/Octave amb un Apèndix en Python*. Iniciativa Digital Politècnica, 2011. Disponible a la Intranet (Atenea).

[5] Alfio Quarteroni and Fausto Saleri. *Scientific computing with MATLAB and Octave*, volume 2 of *Texts in Computational Science and Engineering*. Springer-Verlag, Berlin, 2ª edition, 2006.

[6] J. Stoer and R. Bulirsch. *Introduction to Numerical Analysis*, volume 12 of *Texts in Applied Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2ª edition, 1993. Traduït de l'alemany per R. Bartels, W. Gautschi i C. Witzgall.