Departament de Matemàtiques

Problemes d'Anàlisi Real
FME Curs 2020/21

Tema 1: Successions i sèries de funcions.

1. Estudieu la convergència puntual i uniforme de les següents funcions:

   (a) $f_n(x) = \begin{cases} 0 & \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \\ -nx+1 & 0 \leq x < \frac{1}{n} \end{cases}$ (b) $f_n(x) = \dfrac{\sin x}{n}, \; x \in \mathbb{R}$

   (c) $f_n(x) = \dfrac{x^{2n}}{1+x^{2n}}, \; x \in \mathbb{R}$ (d) $f_n(x) = \dfrac{(x+1)^n - 1}{(x+1)^n + 1}, \; x \in \mathbb{R}$

2. Sigui $y = f(x)$ una funció definida a l'interval $[a, b]$ satisfent $\forall x \in [a, b]$, $f(x) \geq \alpha > 0$. Es considera la successió $f_n(x) = \dfrac{nf(x)}{(1+nf(x))}$.
   Proveu que $\forall x \in [a, b]$, $f_n(x) \to 1$ uniformement. Què passa si existeix $\gamma \in [a, b]$ tal que $f(\gamma) = 0$ (amb f contínua)? i si f no és contínua (per exemple si $f(x) = 3$ si $x \neq \gamma$ però $f(\gamma) = 0$)?

3. Estudieu la convergència puntual i uniforme de les successions

   (a) $\{\sqrt[n]{x}\}, \quad x > 0$ (b) $\left\{\dfrac{e^x}{x^n}\right\}, \quad x > 0$

   (c) $\left\{e^{-nx^2}\right\}, \; x \in \mathbb{R}$ (d) $\left\{\dfrac{e^{-nx^2}}{n}\right\}, \; x \in \mathbb{R}$

4. Estudieu la convergència uniforme de

$$f_n(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)(x+2)} - \ldots - \frac{1}{(x+n-1)(x+n)}$$

   a $[0, 1]$. Ajuda: Intenteu sumar $f_n(x)$.

5. Sigui $f_n(x) = \dfrac{\sin nx}{\sqrt{n}}$. Proveu que $\{f_n(x)\}$ convergeix uniformement a tot $\mathbb{R}$ però que $f'_n(x)$ no convergeix a cap punt.

6. Sigui la funció $f_n(x) = 2nxe^{-nx^2}$ definida a l'interval $[0, 1]$. Comproveu que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x \neq \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\mathrm{d}x$$

7. Estudieu la validesa del teorema sobre la integral de la funció límit d'una successió de funcions per a la successió

$$f_n(x) = \frac{nx}{(1+nx^2)} \text{ per a } x \in [0, 1]$$

8. Feu servir els resultats sobre integració de la funció límit per provar que la successió $f_n(x) = n^2x^n(1-x)$ no convergeix uniformement a l'interval $[0, 1]$.

9. Proveu els següents resultats relatius a la successió

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & x > n^2 \\ \frac{1}{n} & n^2 \geq x \geq 0 \end{cases}$$

(a) $\{f_n(x)\}$ convergeix uniformement a $[0,\infty)$. Determineu la funció límit $f(x)$.

(b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty f_n(x)\ \mathrm{d}x \neq \int_0^\infty f(x)\ \mathrm{d}x$

Repetiu els mateixos càlculs amb la successió

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & x > n^2 \\ \frac{1}{n^3} & n^2 \geq x \geq 0 \end{cases}$$

10. Es consideren $f_n(x) = \dfrac{\sin nx}{n}$ i $f(x) = \displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x)$
Comproveu que malgrat que la convergència $\{f_n, f\}$ sigui uniforme a tot $\mathbb{R}$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n'(x) \neq f'(x)$.

11. Sigui

$$f_n(x) = \begin{cases} \sin^2(\frac{\pi}{x}) & \frac{1}{n+1} \leq x \leq \frac{1}{n} \\ \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$$

Comproveu que $f_n(x)$ convergeix vers una funció contínua però no hi convergeix uniformement.

12. Proveu els resultats següents:

(a) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} n^{-x}$ convergeix uniformement a $[r,\infty)$ amb $r > 1$

(b) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} 2^{-n}\sin(2^n\pi x)$, convergeix uniformement a qualsevol interval de la recta real.
Què li passa a la successió de les derivades?

(c) La funció límit de

$$\sum_{n\geq 1}\left(n^4 + x^4\right)^{-1}$$

és contínua.

13. Estudieu la convergència de les sèries:

$$\sum_{n\geq 1}\frac{\cos nx}{n^3} \qquad\qquad \sum\frac{1}{1+x^{2n}}$$

14. Estudieu la convergència de les sèries:

$$\sum_{n\geq 1} ne^{-nx} \qquad \sum n^{75}e^{-nx} \qquad \sum |x\ln x|^n$$

15. Estudieu la convergència de les sèries:

$$\sum_{n\geq 1}\frac{x^n}{n!}e^{-nx} \quad x\in[0,1] \qquad\qquad \sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n x^n}{n} \quad x\in[0,1]$$

$$\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n+x} \quad x\geq 0 \qquad\qquad \sum_{n\geq 1}\frac{\sin nx}{n} \quad x\in[\delta, 2\pi-\delta]; \quad \delta > 0$$

$$\sum_{n\geq 1}\frac{\sin nx}{n}e^{-nx} \quad x\in[\delta, 2\pi-\delta]; \quad \delta > 0$$

Indicació. $\sin(kx)\sin(\frac{x}{2}) = \frac{1}{2}[\cos((k+\frac{1}{2})x) - \cos((k-\frac{1}{2})x)]$. Sumeu per k.

16. Comproveu que $\displaystyle\sum_{n\geq 1}(-1)^n \frac{x^2+n}{n^2}$ convergeix uniformement sobre qualsevol interval real fitat, però no ho fa absolutament.

17. Sigui $x \in [0,1]$ i definim

$$f_n(x) = \begin{cases} (n+1)[(n+2)x-1] & \text{si } \frac{1}{n+2} \leq x \leq \frac{1}{n+1} \\ (n+1)[1-nx] & \text{si } \frac{1}{n+1} \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{pels altres } x \in [0,1]. \end{cases}$$

Demostreu que $\{f_n(x)\}$ convergeix a la funció contínua $f(x) = 0$ puntualment però que no ho fa uniformement.

18. Sigui $x \in [-1,1]$ i

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{n-1}{n} x^2 \sin\frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Demostreu que $\{f_n(x)\}$ convergeix uniformement. Calculeu la successió de derivades i vegeu que també convergeix uniformement a la derivada del límit de $\{f_n(x)\}$.

19. Demostreu que

$$\lim_{x\to 1} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx^2}{n^3+x^3} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n^3+1}.$$

20. Estudieu la convergència puntual i uniforme de la sèrie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sin nx}{\log n}.$$

21. Demostreu que la successió $(f_n(x))$ amb

$$f_n(x) = \frac{x^2}{x^2+(1-nx)^2}$$

no té cap subsuccessió que convergeixi uniformement a $[0,1]$.

22. Es considera la sèrie funcional

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n e^{-nx}\ , \qquad x \in \mathbb{R}$$

(a) Proveu que existeix $a \in \mathbb{R}$ tal que la sèrie convergeix puntualment si $x \in (a,+\infty)$ i divergeix si $x \in (-\infty, a]$.

(b) Demostreu, de dues maneres independents, que la sèrie és uniformement convergent a $[b,+\infty)$, per a tot $b > a$.

(c) Calculeu la suma de la sèrie.

23. Proveu que la sèrie funcional

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+a^2)^n} \;, \qquad 0 \le a < 1$$

convergeix uniformement a qualsevol conjunt de la forma

$$(-\infty, -\alpha] \cup [\beta, +\infty)$$

amb α , $\beta > +\sqrt{1-a^2}$. Qué passa si $a \ge 1$? Calculeu la suma de la sèrie.

24. Sigui la sèrie funcional

$$\sum_{n\ge 1} \frac{e^{-2nx}}{4n^2-1}.$$

(a) Demostreu que convergeix uniformement a $[0, +\infty)$. Sigui $S(x)$ la funció límit. L'objectiu d'aquest problema és calcular $S(x)$.

(b) Demostreu que, si multipliquem cada terme de la sèrie per e^{-x} i derivem el resultat, s'obté una sèrie que convergeix uniformement a $[\alpha, +\infty)$, $\forall \alpha > 0$. Sigui $T(x)$ la funció definida per aquesta nova sèrie.

(c) Vegeu que, si multipliquem els termes de la sèrie de $T(x)$ per e^{2x} i derivem, obtenim de nou una sèrie que convergeix uniformement a $[\alpha, +\infty)$, $\forall \alpha > 0$. Sigui $U(x)$ la funció definida per aquesta darrera sèrie.

(d) Demostreu que $U(x) = (2\sinh x)^{-1}$.

(e) Demostreu que $T(x) = 1/2e^{-2x} \log\left((e^x-1)/(e^x+1)\right)$. Ajuda: determineu la constant d'integració estudiant el comportament de $e^{3x}T(x)$ quan $x \to +\infty$.

(f) De nou integrant, calculeu $S(x)$.

(g) L'expressió obtinguda per a $S(x)$ és vàlida a $(0, +\infty)$. Es pot extendre a $x = 0$?

(h) Demostreu que $\sum_{n\ge 1} \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}$. Per tant, l'extensió de $S(x)$ a $x = 0$ coincideix amb la suma de la sèrie inicial quan $x = 0$.

25. Sigui $K : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funció tal que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |K(t)| \; \mathrm{d}t < \infty \quad , \quad \int_{-\infty}^{+\infty} K(t) \; \mathrm{d}t = 1$$

Si $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ està fitada a tot $\mathbb{R}$, definim

$$f_n(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x + \frac{t}{n}) K(t) \; \mathrm{d}t = n \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) K(n(u-x)) \; \mathrm{d}u.$$

Demostreu que $f_n \to f$ uniformement a qualsevol interval $[a, b]$.

Un exemple ve donat pel nucli de Féjer:

$$K(t) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2.$$

26. Considereu la sèrie funcional

$$\sum_{n\ge 1} (-1)^{n+1} \frac{n+1}{n} e^{nx}.$$

(a) Trobeu els intervals de convergència puntual i uniforme.
(b) Sumeu-la.

27. Sigui
$$f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$
(a) Demostreu que $(f_n) \to 0$ uniformement a $\mathbb{R}$.
(b) Proveu que
$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$
convergeix uniformement a qualsevol interval de la forma $[x_0, +\infty)$ amb $x_0 > 0$.
(c) Proveu que, si m és un enter positiu,
$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n\left(\frac{1}{m}\right) > \frac{1}{2},$$
i deduïu que la convergència de la sèrie no pot ser uniforme a cap interval que contingui el zero.

28. Determineu el radi de convergència de les sèries de potències definides pel terme general a_n.
(a) $a_n = \frac{1}{(n^2+2n)}$
(b) $a_n = \frac{\log n}{n}$
(c) $a_n = \frac{1}{(n^{\log n})}$
(d) $a_n = \frac{1}{n(\log n)^2}$
(e) $a_n = \frac{1}{(4n-1)!}$

29. Estudieu, si s'escau, la convergència de les següents sèries en els extrems de l'interval de convergència.
(a) $1 + \sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n^2}$
(b) $\sum_{n\geq 1} \frac{10^n}{n} x^n$
(c) $\sum_{n\geq 1} \frac{(n-1)}{n!} x^n$
(d) $1 + \sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n^k}$

30. Desenvolupeu en sèrie de potències centrada en el punt 0 cada una de les següents funcions. Determineu, també, els radis de convergència de les sèries que heu obtingut.
$$f(x) = \frac{1}{10+x} \qquad g(x) = \cos(x+a)$$

31. Desenvolupeu $\sqrt{x}$ en potències de $x-1$. Determineu el radi de convergència.

32. A partir dels desenvolupaments de e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\log(1+x)$ i de $(1+x)^m \quad (m \in \mathbb{R})$, determineu els de les següents funcions:

    (a) $(1+x)\log(1+x)$
    (b) $(1+x)e^x$
    (c) $(1+e^x)^3$
    (d) $\frac{1}{(4-x^4)}$
    (e) $\frac{3}{(1-x)(1+2x)}$
    (f) $\sqrt[3]{8+x}$
    (g) $\frac{x^2-3x+1}{x^2-5x+6}$

33. Sabent que

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \qquad \sum_{n\geq 1} (-1)^{n+1}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

proveu que

$$\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{12} \qquad \int_0^1 \frac{\log(1-x)}{x}\,\mathrm{d}x = -\frac{\pi^2}{6}$$

34. Relacionant-les amb sèries conegudes, calculeu la suma de les següents sèries de potències:

$$\sum_{n>1} \frac{x^n}{n(n-1)} \qquad \sum_{n>1} \frac{x^n}{n(n+1)} \qquad \sum_{n\geq 0} n^2 x^n$$

35. Elevant al quadrat l'expressió $(1-x)^{-1} = \sum_{n\geq 0} x^n$, proveu $(1-x)^{-2} = \sum_{n\geq 0}(n+1)x^n$.

36. Sabent que la corresponent sèrie és alternada, determineu el mínim nombre de termes que cal prendre per calcular $\cos 10^0$ amb un error menor que 10^{-4}. Calculeu aquest valor.

37. Calculeu $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ amb un error menor que 10^{-5}.

38. Calculeu $\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ amb un error menor que 10^{-4}.

39. Calculeu $\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ amb un error menor que 10^{-3}. Feu servir el desenvolupament en sèrie de e^{-x}.

40. Per a quins valors de x, l'aproximació $\cos x \sim 1 - \dfrac{x^2}{2}$ indueix un error menor o igual que 10^{-2}? Idem per a 10^{-5}.

41. Es diu que la sèrie numèrica $\sum_n a_n$ és *sumable Abel* a α si

$$\lim_{x\to 1^-} \sum_n a_n x^n = \alpha,$$

on la sèrie de potències es suposa que convergeix a $[0,1)$.

(a) Demostreu que la sèrie divergent $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ és sumable Abel a $1/2$.

(b) Discutiu la sumabilitat Abel de la sèrie divergent $1 - 2 + 3 - 4 + \cdots$.

(c) Discutiu la sumabilitat Abel de la sèrie harmònica $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$.