Topologia FME
Resum de teoria i llista de problemes

Curs 2019/2020

26 de març de 2020

Índex

3 Construcció de nous espais

3.1 Subespais.

Definició 3.1 (Subespai) *Sigui $(X, \mathscr{T})$ un espai topològic. Un* subespai topològic *de X és un subconjunt $S \subseteq X$ amb la topologia $\mathscr{T}|_S \subseteq \mathscr{P}(S)$ obtinguda restringint els oberts:*

$$\mathscr{T}|_S = \{\mathcal{U} \cap S : \mathcal{U} \in \mathscr{T}\}.$$

Un subespai es diu obert, tancat, discret, dens (compacte, connex), etc. si és un subconjunt que té la propietat corresponent.

Un subconjunt de X pot ser un obert de S però no del mateix X. Per exemple, $[0, \frac{1}{2})$ és un obert del subespai $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ tot i no ser un obert de $\mathbb{R}$. Per tant, en treballar amb subespais és essencial especificar respecte de quin espai es consideren els oberts, tancats, etc.

Lema 3.2 *Sigui $S \subseteq X$ un subconjunt d'un espai topològic $(X, \mathscr{T})$.*

1. *El conjunt $\mathscr{T}|_S \subseteq \mathscr{P}(S)$ de la definició 3.1 és, efectivament, una topologia en S.*
2. *Els tancats de S són les interseccions amb S de tancats de X.*
3. *Tots els oberts de X continguts en S són oberts de S. Tots els oberts de S són també oberts de X si, i només si, S és un subespai obert. Anàlogament per a tancats.*

Prova: Els oberts de S es defineixen com les interseccions amb S d'oberts de X.

1. Que aquests subconjunts de S formen una topologia és conseqüència immediata de les propietats de la reunió i la intersecció:
   - $\varnothing \in \mathscr{T} \Rightarrow \varnothing = \varnothing \cap S \in \mathscr{T}|_S$; $X \in \mathscr{T} \Rightarrow S = X \cap S \in \mathscr{T}|_S$;
   - si $(\mathcal{U}_i \cap S)$ són oberts, $\cup(\mathcal{U}_i \cap S) = (\cup \mathcal{U}_i) \cap S \in \mathscr{T}|_S$;
   - donats oberts $\mathcal{U} \cap S$ i $\mathcal{V} \cap S$ es té $(\mathcal{U} \cap S) \cap (\mathcal{V} \cap S) = (\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) \cap S \in \mathscr{T}_S$.
2. Els tancats de S són els subconjunts de la forma $S \smallsetminus (\mathcal{U} \cap S)$ per a un $\mathcal{U} \in \mathscr{T}$ i les interseccions de tancats de X amb S són els subconjunts de la forma $(X \smallsetminus \mathcal{U}) \cap S$ per a $\mathcal{U} \in \mathscr{T}$. Tots dos conjunts coincideixen.
3. L'enunciat es refereix a comparar els conjunts $\mathscr{T} \cap \mathscr{P}(S)$ i $\mathscr{T}|_S$. La inclusió $\mathscr{T} \cap \mathscr{P}(S) \subseteq \mathscr{T}|_S$ es compleix sempre: si $\mathcal{U} \in \mathscr{T}$ és un subconjunt de S aleshores $\mathcal{U} = \mathcal{U} \cap S \in \mathscr{T}|_S$.

   La inclusió recíproca no sempre es compleix i l'enunciat demana veure que la condició és que S sigui obert. En efecte, en aquest cas, tot obert $\mathcal{U} \cap S \in \mathscr{T}|_S$ és intersecció de dos oberts de X i, per tant, és un obert. La condició és necessària ja que S és un obert de $\mathscr{T}|_S$.

   Observi's que, en general $\mathscr{T} \cap \mathscr{P}(S) \subseteq \mathscr{T}|_S$. La inclusió en l'altra direcció és la que s'acaba de discutir, i es dona si, i només si, S és obert.
4. Completament anàleg a l'apartat anterior. Denotant $\mathscr{T}^c = \{\mathcal{U}^c : \mathcal{U} \in \mathscr{T}\} \subseteq \mathscr{P}(X)$ el conjunt dels tancats d'una topologia es té sempre la inclusió $\mathscr{T}^c \cap \mathscr{P}(S) \subseteq \mathscr{T}|_S^c$ però la recíproca es compleix només quan S és tancat.

Proposició 3.3 (Subespais i continuïtat) *Sigui $S \subseteq X$ un subespai topològic i Y un altre espai topològic.*

1. *L'aplicació d'inclusió $\iota \colon S \hookrightarrow X$ és contínua.*
2. *Una aplicació $f \colon Y \to S$ és contínua si, i només si, ho és $\iota \circ f$.*

Prova: Com que $\iota^{-1}(\mathcal{U}) = \mathcal{U} \cap S$ la inclusió és, efectivament, contínua.

Siguin $\mathcal{U}$ i $\mathcal{U}_S = \mathcal{U} \cap S$ oberts de X i de S, respectivament. Aleshores

$$f^{-1}(\mathcal{U}_S) = f^{-1}\big(\iota^{-1}(\mathcal{U})\big) = (\iota \circ f)^{-1}(\mathcal{U}).$$

Un és obert si, i només si, ho és l'altre. $\square$

Proposició 3.4 (Bases i subbases) *Sigui $S \subseteq X$ un subespai topològic.*

1. *Si $\mathscr{B}$ és una base de X aleshores $\mathscr{B}_S := \{\mathcal{B} \cap S : \mathcal{B} \in \mathscr{B}\}$ és una base de S.*
2. *Si $\mathscr{S}$ és una subbase de X aleshores $\mathscr{S}_S := \{\mathcal{U} \cap S : \mathcal{U} \in \mathscr{S}\}$ és una subbase de S.*

Prova: Sigui $\mathcal{U}_S = \mathcal{U} \cap S$ un obert de S.

1. Si $\mathcal{U} = \cup \mathcal{B}_i$ amb $\mathcal{B}_i \in \mathscr{B}$ aleshores $\mathcal{U}_S = (\cup \mathcal{B}_i) \cap S = \cup(\mathcal{B}_i \cap S)$ amb $\mathcal{B}_i \cap S \in \mathscr{B}_S$.

2. Si $\mathcal{U} = \cup_{i\in I}\big(\cap_{j=1}^{n_i} \mathcal{B}_{i,j}\big)$ amb $\mathcal{B}_{i,j} \in \mathscr{S}$ aleshores $\mathcal{U}_S = \cup_{i\in I}\big(\cap_{j=1}^{n_i} (\mathcal{B}_{i,j} \cap S)\big)$ amb $\mathcal{B}_{i,j} \cap S \in \mathscr{S}_S$. □

Exemples 3.5 *Tots els exemples que es donen a continuació corresponen a subespais d'espais euclidians:*

1. *intervals a $\mathbb{R}$ o a un conjunt totalment ordenat;*
2. *boles obertes i tancades a $\mathbb{R}^n$ o a un espai mètric;*
3. *circumferència $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$;*
4. *esfera $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$; esfera n-dimensional $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$;*
5. *tor $\mathbb{T}^2 \subset \mathbb{R}^3$;*
6. *banda de Möbius $\mathbb{M} \subset \mathbb{R}^3$.*

3.2 Espais producte

Definició 3.6 (Producte finit) *Siguin $(X, \mathscr{T}_X)$ i $(Y, \mathscr{T}_Y)$ dos espais topològics. L'espai producte és el conjunt producte cartesià $X \times Y$ amb la topologia producte, que té per base els productes d'oberts:*

$$\mathscr{B} = \{\mathcal{U} \times \mathcal{V} : \mathcal{U} \in \mathscr{T}_X, \mathcal{V} \in \mathscr{T}_Y\}.$$

Observi's que aquesta topologia també es pot descriure dient que $\mathcal{W} \subseteq X \times Y$ és un obert si, i només si, per a cada punt $(x, y) \in \mathcal{W}$ existeixen entorns oberts $\mathcal{U}_x$ i $\mathcal{U}_y$ tals que $\mathcal{U}_x \times \mathcal{U}_y \subseteq \mathcal{W}$.

El producte d'un nombre finit d'espais es defineix de manera anàloga, o recursivament a partir del producte de dos espais.

Exemples 3.7 *Exemples de productes d'espais:*

1. $X_{\mathsf{dis}} \times Y_{\mathsf{dis}} = (X \times Y)_{\mathsf{dis}}$;
2. $X_{\mathsf{gro}} \times Y_{\mathsf{gro}} = (X \times Y)_{\mathsf{gro}}$;
3. $(\mathbb{R}_{\mathrm{euc}})^n = (\mathbb{R}^n)_{\mathrm{euc}}$: *el producte d'espais euclidians és l'espai euclidià producte;*
4. $\mathbb{R}_{\mathsf{cf}} \times \mathbb{R}_{\mathsf{cf}} \neq (\mathbb{R}^2)_{\mathsf{cf}}$;
5. $\mathbb{R}_{\mathsf{dis}} \times \mathbb{R}_{\mathrm{euc}} = \mathbb{R}^2_{\mathsf{lex}}$;
6. $[0,1]_{\mathsf{dis}} \times [0,1]_{\mathrm{euc}} \neq [0,1]^2_{\mathsf{lex}}$.

En canvi, el producte d'una família no necessàriament finita requereix una definició una mica diferent. En aquest cas la base també està formada per productes d'oberts, però es requereix que aquests oberts siguin gairebé tots l'espai total:

Definició 3.8 (Producte arbitrari) *Sigui $(X_i, \mathscr{T}_i)_{i\in I}$ una família d'espais topològics. L'espai producte és el conjunt producte cartesià $\prod_{i\in I} X_i$ amb la topologia producte, que té per base els productes d'oberts gairebé sempre iguals a tot l'espai:*

$$\begin{aligned}\mathscr{B} &= \left\{\prod_{i\in I}\mathcal{U}_i : \mathcal{U}_i \in \mathscr{T}_i, \mathcal{U}_i = X_i \text{ gairebé per a tot índex } i \in I\right\} \\ &= \left\{\prod_{j\in J}\mathcal{U}_j \times \prod_{i\notin J} X_i : \mathcal{U}_j \in \mathscr{T}_j,\ J \subseteq I,\ |J| < \infty\right\}.\end{aligned} \tag{1}$$

Con en el cas finit això equival a dir que $\mathcal{W} \subseteq X$ és un obert si, i només si, per a cada punt $\boldsymbol{x} = (x_i)_{i\in I} \in \mathcal{W}$ existeix una família finita de índexs $J \subseteq I$ i, per a cada $j \in J$ un entorn obert $\mathcal{U}_j$ de x_j a l'espai X_j tals que $\prod_{j\in J}\mathcal{U}_j \times \prod_{i\notin J} X_i \subseteq \mathcal{W}$.

Observi's que el subconjunt

$$\mathscr{S} = \left\{\mathcal{S} = \mathcal{U}_j \times \prod_{i\neq j} X_i : \mathcal{U}_j \in \mathscr{T}_j, j \in I\right\} \tag{2}$$

és una subbase de la topologia producte ja que tots els seus elements són oberts bàsics i tot obert bàsic és una intersecció finita d'elements com aquests.

Proposició 3.9 (Producte i continuïtat) *Sigui $X = \prod X_i$ un producte d'espais topològics i Y un altre espai topològic.*

1. *Les projeccions $\pi_j \colon X \twoheadrightarrow X_j$ en les components són contínues.*
2. *$f \colon Y \to X$ és contínua si, i només si, cada $\pi_j \circ f$ ho és.*

Prova:

1. Sigui $\mathcal{U}_j$ un obert de X_j. L'antiimatge $\pi_j^{-1}(\mathcal{U}_j)$ és el subconjunt $\mathcal{U}_j \times \prod_{i\neq j} X_i \subseteq X$, que és un obert; de fet, és un obert bàsic de la base (1). Per tant les π_j són contínues.
2. Suposi's que f és contínua. Com que les projeccions ho són, cada $\pi_j \circ f$ és contínua. Suposi's que totes les $\pi_j \circ f$ són contínues. Sigui $\mathcal{U} = \mathcal{U}_j \times \prod_{i\neq j} X_i \subseteq X$ un obert sub-bàsic. La seva antiimatge és $f^{-1}(\mathcal{V}) = (\pi_j \circ f)^{-1}(\mathcal{U}_j)$, que és un obert de Y. En efecte, donat $\boldsymbol{x} = (x_i)_{i\in I} \in X$ es té $f(y) = \boldsymbol{x} \in \mathcal{U} \Leftrightarrow x_j \in \mathcal{U}_j \Leftrightarrow (\pi_j \circ f)(y) \in \mathcal{U}_j$.

   L'argument es podria fer també amb oberts bàsics: si $\mathcal{B} = \prod_{j\in J}\mathcal{U}_j \times \prod_{i\neq j} X_i$ es té $f(y) \in \mathcal{B} \Leftrightarrow (\pi_j \circ f)(y) \in \mathcal{U}_j$ per a tot $j \in J$, i es dedueix que $f^{-1}(\mathcal{B}) = \bigcap_{j\in J}(\pi_j \circ f)^{-1}(\mathcal{B})$. Com que J és finit això és una intersecció finita d'oberts, que és un obert. □

Les aplicacions $f_i := \pi_i \circ f$ són les *components* de f: per a cada $y \in Y$ la seva imatge per f és l'element $f(y) = \big(f_i(y)\big)_{i\in I} \in X$ que té components $f_i(y) \in X_i$. El segon punt permet definir aplicacions contínues que prenen valors en un producte cartesià a partir de components que siguin contínues.

Proposició 3.10 (Bases i subbases) *Sigui $X = \prod X_i$ un producte d'espais topològics.*

1. *Si $\mathscr{B}_i$ és una base de X_i per a cada i, aleshores*

$$\mathscr{B} := \left\{ \prod_{j\in J} \mathcal{B}_j \times \prod_{i\notin J} X_i : \ \mathcal{B}_j \in \mathscr{B}_j, \ J \subseteq I, \ |J| < \infty \right\}$$

   és una base de l'espai X.

2. *Si $\mathscr{S}_i$ és una subbase de X_i per a cada i, aleshores*

$$\mathscr{S} := \left\{ \mathcal{S}_j \times \prod_{i\neq j} X_i : j \in I, \ \mathcal{S}_j \in \mathscr{S}_j \right\}$$

   és una subbase de X.

PROVA: Si una topologia ve donada per una base per comprovar que un subconjunt és una (altra base) n'hi ha prou en veure que els elements del subconjunt són oberts i que tot obert de la base donada és reunió d'elements d'aquest subconjunt.

- Els elements de $\mathscr{B}$ són oberts ja que són casos particulars dels oberts bàsics (1).

  Sigui $\mathcal{B} = \prod_{j\in J} \mathcal{U}_j \times \prod_{i\notin J} X_i$ un obert de la base (1). Cada $\mathcal{U}_j$ és reunió d'oberts bàsics de la base $\mathscr{B}_j$. Sigui $\mathcal{U}_j = \cup_{k\in K_j} \mathcal{B}_{j,k}$ amb $\mathcal{B}_{j,k} \in \mathscr{B}_j$. Aleshores $\mathcal{B}$ és la reunió

$$\mathcal{B} = \prod_{j\in J} \left(\bigcup_{k\in K_j} \mathcal{B}_{j,k} \right) \times \prod_{i\notin J} X_i = \bigcup_{j\in J, k\in K_j} \left(\prod_{j\in J} \mathcal{B}_{j,k} \times \prod_{i\notin J} X_i \right).$$

- Un subconjunt és una subbase quan la família de les interseccions finites d'elements seus és una base. Siguin $\mathscr{B}_i$ les bases dels X_i obtingudes com a interseccions finites d'elements de les subbases $\mathscr{S}_i$. Es vol veure que les interseccions finites d'elements del conjunt de l'enunciat formen la base construïda al primer punt a partir de les $\mathscr{B}_i$. Cada obert d'aquesta base $\mathcal{B} = \prod_{j\in J} \mathcal{B}_j \times \prod_{i\notin J} X_i$ és intersecció finita d'oberts de la mateixa base amb una única component diferent del total:

$$\mathcal{B} = \bigcap_{j\in J} \left(\mathcal{B}_j \times \prod_{j\neq i} X_j \right).$$

  Cadascun dels oberts $\mathcal{B}_j$ és intersecció finita $\mathcal{B}_j = \cap_{k=1}^{n_j} S_{j,k}$. Aleshores

$$\mathcal{B} = \bigcap_{j\in J} \left(\left(\bigcap_{k=1}^{n_j} \mathcal{S}_{j,k} \right) \times \prod_{j\neq i} X_j \right) = \bigcap_{\substack{j\in J \\ 1\leqslant k\leqslant n_j}} \left(\mathcal{S}_{j,k} \times \prod_{j\neq i} X_j \right)$$

  dóna B com a intersecció finita d'elements de $\mathscr{S}$. Això demostra que aquest conjunt és, efectivament, una subbase. $\square$

3.3 Espais quocient

Recordi's que el conjunt quocient $X/\sim$ per una relació d'equivalència està format per les *classes d'equivalència* $[x] = \{y \in X : y \sim x\}$. L'*aplicació canònica* envia cada element a la seva classe: $\pi\colon X \to X/\sim$ està definida posant $\pi(x) = [x]$.

Una aplicació $f\colon X \to Y$ de X en un conjunt Y es diu *compatible* amb la relació $\sim$ si $x \sim y \Rightarrow f(x) = f(y)$. En aquest cas l'aplicació f indueix una aplicació en el conjunt quocient $\widetilde{f}\colon X/\sim \to Y$ definida posant $\widetilde{f}\big([x]\big) = f(x)$. És a dir, $\widetilde{f} \circ \pi = f$.

Donar una relació d'equivalència en un conjunt X equival a donar una aplicació exhaustiva $\pi\colon X \twoheadrightarrow Q$ de X en algun conjunt Q. Donada la relació $\sim$ s'agafa com a conjunt Q el quocient $X/\sim$ i com a aplicació π la projecció canònica. Donada l'aplicació exhaustiva π s'agafa la relació d'equivalència definida posant $x \sim y \Leftrightarrow \pi(x) = \pi(y)$.

Definició 3.11 (Quocient) *Sigui $(X, \mathscr{T})$ un espai topològic. Sigui $\sim$ una relació d'equivalència en X i sigui $\pi\colon X \twoheadrightarrow X/\sim$ la projecció canònica en el conjunt quocient. L'*espai quocient *de X per la relació $\sim$ és el conjunt $X/\sim$ de classes d'equivalència amb la topologia*

$$\{\mathcal{U} \subseteq X/\sim : \pi^{-1}(\mathcal{U}) \in \mathscr{T}\}.$$

Donats un espai topològic $(X, \mathscr{T})$ i una aplicació exhaustiva $\pi\colon X \twoheadrightarrow Q$ en un conjunt Q, es defineix la *topologia quocient* en el conjunt Q com la topologia $\{\mathcal{U} \subseteq Q : \pi^{-1}(\mathcal{U}) \in \mathscr{T}\}$.

Lema 3.12 *La topologia quocient està ben definida: és una topologia.*

Prova: Sigui $\mathscr{T}_Q := \{\mathcal{U} \subseteq Q : \pi^{-1}(\mathcal{U}) \in \mathscr{T}\}$. Es vol veure que és una topologia.

- Com que $\pi^{-1}(\varnothing) = \varnothing$, $\varnothing \in \mathscr{T} \Rightarrow \varnothing \in \mathscr{T}_Q$.
- Com que $\pi^{-1}(Q) = X$, $X \in \mathscr{T} \Rightarrow Q \in \mathscr{T}_Q$; observi's que en aquesta comprovació és essencial fer servir que π és exhaustiva.
- $\mathcal{U}_i \in \mathscr{T}_Q \Leftrightarrow \pi^{-1}(\mathcal{U}_i) \in \mathscr{T} \Rightarrow \cup\pi^{-1}(\mathcal{U}_i) = \pi^{-1}(\cup\mathcal{U}_i) \in \mathscr{T} \Leftrightarrow \cup\mathcal{U}_i \in \mathscr{T}_Q$.
- $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathscr{T}_Q \Leftrightarrow \pi^{-1}(\mathcal{U}), \pi^{-1}(\mathcal{V}) \in \mathscr{T} \Rightarrow \pi^{-1}(\mathcal{U}) \cap \pi^{-1}(\mathcal{V}) = \pi^{-1}(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) \in \mathscr{T} \Leftrightarrow \mathcal{U} \cap \mathcal{V} \in \mathscr{T}_Q$. $\square$

Proposició 3.13 (Quocient i continuïtat) *Siguin $Q = X/\sim$ un espai topològic quocient i Y un altre espai topològic.*

1. *La projecció canònica $\pi\colon X \twoheadrightarrow Q$ és contínua.*
2. *Una aplicació $f\colon Q \to Y$ és contínua si, i només si, ho és $f \circ \pi$.*

Prova: La definició de la topologia quocient és que $\mathcal{U} \subseteq Q$ és obert si, i només si, $\pi^{-1}(\mathcal{U}) \subseteq X$ és obert.

1. És part de la definició. De fet, la definició de topologia quocient equival a què aquesta aplicació sigui contínua i que la topologia de Q sigui la més fina per a la qual es compleix aquesta condició.

2. Si f és contínua la composició amb π també ho és. Recíprocament, si $f\circ\pi\colon X\to Y$ és contínua i $\mathcal{V}\subseteq Y$ és un obert, aleshores $(f\circ\pi)^{-1}(\mathcal{V})=\pi^{-1}\big(f^{-1}(\mathcal{V})\big)$ és obert a X. Per definició això vol dir que $f^{-1}(\mathcal{V})$ és un obert de Q. $\square$

El segon punt assegura que si una aplicació contínua $f\colon X\to Y$ és compatible amb una relació d'equivalència $\sim$ aleshores l'aplicació $\widetilde{f}\colon X/{\sim}\to Y$ induïda en el quocient (està ben definida i) també és contínua. Això permet construir aplicacions contínues en espais quocient: n'hi ha prou a definir aplicacions contínues en X que siguin compatibles.

Exemple 3.14 *Es defineix a $X=\mathbb{R}$ la relació d'equivalència $x\sim y \Leftrightarrow \exists n\in\mathbb{Z}, y=x+2\pi n$. El conjunt quocient $\mathbb{R}/{\sim}$ s'acostuma a denotar $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Les aplicacions contínues següents són compatibles amb $\sim$, i per tant indueixen aplicacions contínues en el quocient:*

1. *$f(x)=\cos x$ indueix $\widetilde{f}\colon\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\to[-1,1]$;*
2. *$f(x)=(\cos x,\sin x)$ indueix $\widetilde{f}\colon\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\to\mathbb{S}^1$; es pot veure que és un homeomorfisme;*
3. *$f(x)=(\cos kx,\sin kx)$ amb $k\geqslant 1$ indueix $\widetilde{f}\colon\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\to\mathbb{S}^1$.*

En canvi,

4. *L'aplicació $f(x)=\left\{\frac{x}{2\pi}\right\}$, on $\{\cdot\}$ indica la part fraccionària, és compatible però no és contínua en tots els punts;*
5. *L'aplicació contínua $f(x)=\cos\frac{x}{2}$ no és compatible amb $\sim$ i per tant no indueix cap aplicació en el conjunt quocient.*

PROVA: Les aplicacions $f\colon\mathbb{R}\to Y$ que són compatibles amb $\sim$ són les periòdiques de període 2π: les que $f(x)=f(x+2\pi)$ per a tot $x\in\mathbb{R}$. Les quatre primeres funcions de l'exemple ho són, i per tant indueixen funcions en el conjunt quocient. Les tres primeres són contínues i indueixen una funció contínua. En canvi la quarta no ho és: deixa de ser contínua en els punts $2\pi n$ per a $n\in\mathbb{Z}$, que corresponen a l'únic punt $[0]$ en l'espai quocient; indueix una aplicació $\widetilde{f}\colon\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\to[0,1)$ que és contínua excepte en aquest punt.

La cinquena aplicació no és compatible: $f(x+2\pi)=\cos\frac{x+2\pi}{2}=\cos\left(\frac{x}{2}+\pi\right)=-\cos\frac{x}{2}$ només coincideix amb $f(x)=\cos\frac{x}{2}$ si $\cos\frac{x}{2}=0$. $\square$

Definició 3.15 *Una* identificació *és una aplicació contínua exhaustiva entre espais topològics $\phi\colon X\twoheadrightarrow Y$ tal que l'espai d'arribada té la topologia quocient: $\mathcal{U}\in\mathscr{T}_Y\Leftrightarrow\phi^{-1}(\mathcal{U})\in\mathscr{T}_X$.*

En tal cas l'aplicació induïda $\widetilde{\phi}\colon X/{\sim}\to Y$ és un homeomorfisme, on $\sim$ és la relació d'equivalència $x\sim y\Leftrightarrow\phi(x)=\phi(y)$.

PROVA: L'aplicació induïda satisfà $\widetilde{\phi}\circ\pi=\phi$. És bijectiva: exhaustiva per ser-ho ϕ i injectiva ja que $[x]=[y]\Leftrightarrow x\sim y\Leftrightarrow\phi(x)=\phi(y)$. Transforma oberts en oberts ja que, tenint en compte la caracterització dels oberts de Y per ser espai quocient, i la dels oberts de $X/{\sim}$, per a tot $\mathcal{U}\subseteq Y$ es té

$$\mathcal{U}\in\mathscr{T}_Y\Leftrightarrow\phi^{-1}(\mathcal{U})\in\mathscr{T}_X\Leftrightarrow\pi^{-1}\big(\widetilde{\phi}^{-1}(\mathcal{U})\big)\in\mathscr{T}_X\Leftrightarrow\widetilde{\phi}^{-1}(\mathcal{U})\in\mathscr{T}_{X/\sim},$$

de manera que la bijecció $\widetilde{\phi}^{-1}$ transforma oberts en oberts. $\square$

Lema 3.16 *Tota aplicació contínua exhaustiva que sigui oberta o sigui tancada és una identificació.*

PROVA: Sigui $\pi\colon X \twoheadrightarrow Q$ contínua i exhaustiva. Per ser exhaustiva es té $\pi\big(\pi^{-1}(B)\big) = B$ per a tot subconjunt $B \subseteq Q$. Suposi's que és oberta. Per a tot subconjunt $\mathcal{U} \subseteq Q$ es té:

- com que π és contínua, si $\mathcal{U}$ és obert aleshores $\pi^{-1}(\mathcal{U})$ és obert;
- com que π és oberta, si $\pi^{-1}(\mathcal{U})$ és obert aleshores $\pi\big(\pi^{-1}(\mathcal{U})\big) = \mathcal{U}$ és obert.

Per tant, Q té la topologia quocient.

Si l'aplicació és tancada es demostra de manera anàloga, tenint en compte que la topologia quocient també es caracteritza per la propietat $\mathcal{C}$ tancat si, i només si, $\pi^{-1}(\mathcal{C})$ tancat.

Observi's que no tota identificació ha de ser necessàriament oberta o tancada. Es pot veure un contraexemple en el problema 16 (pag. 80) del Pascual-Roig. $\square$

Exemples 3.17 *Moltes construccions habituals en topologia corresponen a espais quocient. A continuació es donen noves construccions com a quocients de subespais de l'espai euclidià: circumferència, esfera, tor, ..., i també definicions de nous espais com a espai quocient: espai projectiu, ampolla de Klein, ...*

1. *identificació dels extrems:* $[0,1]/\{0 \sim 1\} \cong \mathbb{S}^1$;
2. *identificació de traslladats:* $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} = \mathbb{R}/\{x \sim x + 2\pi n : n \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{S}^1$;
3. *identificació d'òrbites per arrels de la unitat:* $\mathbb{S}^1/\{z \sim e^{2\pi i k/n} z : k \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{S}^1$;
4. *identificació de raigs:* $\big(\mathbb{R}^2 \smallsetminus \{\mathbf{0}\}\big)/\{\boldsymbol{x} \sim \lambda\boldsymbol{x} : \lambda > 0\} \cong \mathbb{S}^1$;
5. *identificació de rectes:* $\mathbb{P}^1 := \big(\mathbb{R}^2 \smallsetminus \{\mathbf{0}\}\big)/\{\boldsymbol{x} \sim \lambda\boldsymbol{x} : \lambda \neq 0\} \cong \mathbb{S}^1$;
6. *identificació de raigs:* $\big(\mathbb{R}^{n+1} \smallsetminus \{\mathbf{0}\}\big)/\{\boldsymbol{x} \sim \lambda\boldsymbol{x} : \lambda > 0\} \cong \mathbb{S}^n$;
7. *identificació de rectes:* $\mathbb{P}^n := \big(\mathbb{R}^{n+1} \smallsetminus \{\mathbf{0}\}\big)/\{\boldsymbol{x} \sim \lambda\boldsymbol{x} : \lambda \neq 0\}$;
8. *identificació de punts antipodals:* $\mathbb{S}^n/\{\boldsymbol{x} \sim -\boldsymbol{x}\} \cong \mathbb{P}^n$;
9. *identificació de circumferències:* $\mathbb{R}^2/\big\{\boldsymbol{x} \sim \boldsymbol{y} \Leftrightarrow \|\boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{y}\|\big\} \cong [0,\infty) \subset \mathbb{R}$;
10. *col·lapse d'un subespai:* $\mathbb{D}^2/\mathbb{S}^1 = \mathbb{D}^2/\{\boldsymbol{x} \sim \boldsymbol{y} : \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{S}^1\} \cong \mathbb{S}^2$;
11. *identificació de dos costats d'un rectangle* $R = [0,1] \times (0,1)$:
    - *cilindre:* $R/\big\{(0,y) \sim (1,y)\big\}$;
    - *banda de Möbius:* $R/\big\{(0,y) \sim (1,1-y)\big\}$;
12. *identificació de costats oposats d'un quadrat* $R = [0,1] \times [0,1]$:
    - *esfera:* $R/\big\{(x,0) \sim (0,x), (1,y) \sim (y,1)\big\}$, $abb^{-1}a^{-1}$;
    - *tor:* $R/\big\{(x,0) \sim (x,1), (0,y) \sim (1,y)\big\}$, $aba^{-1}b^{-1}$;
    - *pla projectiu:* $R/\big\{(x,0) \sim (1-x,1), (0,y) \sim (1,1-y)\big\}$, $abab$;
    - *ampolla de Klein:* $R/\big\{(x,0) \sim (1-x,1), (0,y) \sim (1,y)\big\}$, $abab^{-1}$;

Estudieu totes aquestes construccions procurant entendre bé en què consisteixen i trobar homeomorfismes a partir d'identificacions en els casos de subespais de l'euclidià: circumferència, esfera, interval, etc.

Prova: Es comenten breument aquests espais quocients; en molts casos les justificacions estrictes de què determinades aplicacions són homeomorfismes es podrien fer complicant-se força.

Per no complicar massa els arguments en alguns casos es farà servir el lema compacte-Hausdorff, que es demostrarà en el tema següent (compacitat), i que diu que tota aplicació contínua d'un espai compacte en un espai de Hausdorff és tancada. En particular, si és bijectiva és un homeomorfisme. Tot i que no s'ha parlat de compactes, la compacitat a $\mathbb{R}^n$ es coneix bé del càlcul diferencial: són els conjunts tancats i fitats.

En molts arguments apareix el pla, el pla foradat i la circumferència $\mathbb{S}^1$. Aquests espais topològics s'identificaran amb $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}^*$ i $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}^*$. Això permet operar si cal amb nombres complexos i treballar amb arguments. Es denotarà $\alpha = \arg z$ qualsevol nombre real tal que $z = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$. Queda unívocament determinat si es demana que pertanyi a un interval de la forma $[x, x+2\pi) \subset \mathbb{R}$.

Queda com a exercici convèncer-se que els arcs de circumferència de la forma $\alpha < \arg z < \beta$ són una base de la topologia a $\mathbb{S}^1$, i fins i tot si s'agafen només els arcs "petits" limitant la diferència imposant que $\beta - \alpha < M$ per a un nombre $M > 0$ fixat, segueixen sent una base.

1. L'aplicació contínua exhaustiva $\phi\colon [0,1] \twoheadrightarrow \mathbb{S}^1$ definida posant $\phi(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ és una identificació amb relació d'equivalència la corresponent al quocient.

   Es pot veure directament que és una identificació veient que, per a tot subconjunt $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{S}^1$, si $\phi^{-1}(\mathcal{U}) \subseteq [0,1]$ és obert aleshores $\mathcal{U} = \phi\big(\phi^{-1}(\mathcal{U})\big)$ ha de ser un obert. Sigui $z \in \mathcal{U}$. La seva antiimatge és un únic punt de $(0,1) \subset [0,1]$ si $z \neq (0,1) \in \mathbb{S}^1$ i és el conjunt $\{0,1\}$ si $z = (0,1)$. En el primer cas $t = \phi^{-1}(z) \in \phi^{-1}(\mathcal{U})$ té un entorn obert $(t-\epsilon, t+\epsilon) \subseteq \phi^{-1}(\mathcal{U})$ i la imatge d'aquest entorn és un entorn $t - \epsilon < \frac{\arg w}{2\pi} < t + \epsilon$ que està contingut en $\mathcal{U}$. En el segon cas $\{0,1\} = \phi^{-1}\big((0,1)\big) \subset \pi^{-1}(\mathcal{U})$ i aquest conjunt, que és un obert de $[0,1]$, ha de contenir un obert del tipus $[0,\epsilon) \cup (1-\epsilon, 1]$, i la imatge d'aquest obert és l'entorn $-\epsilon < \frac{\arg w}{2\pi} < \epsilon$

   Es justifica molt més fàcilment usant el criteri compacte-Hausdorff: $[0,1]$ és compacte (tancat i fitat a $\mathbb{R}$) i $\mathbb{S}^1$ és Hasudorff (tot espai mètric ho és) aleshores ϕ és tancada, i per tant és una identificació.

   L'aplicació ϕ no és oberta: la imatge de l'obert $(\frac{1}{2}, 1]$ no és un obert.

2. L'aplicació contínua exhaustiva $\phi\colon \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{S}^1$ definida posant $\phi(t) = (\cos t, \sin t)$ és una identificació amb relació d'equivalència $\sim$ la corresponent al quocient. És una aplicació oberta: la imatge d'un interval $(\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$ és l'obert format pels punts de $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$ amb argument $\alpha < \arg z < \beta$. No és tancada: exercici

3. L'aplicació contínua exhaustiva $\phi\colon \mathbb{S}^1 \twoheadrightarrow \mathbb{S}^1$ definida posant $\phi(z) = z^n$ és una identificació amb relació d'equivalència $\sim$ la corresponent al quocient. És una aplicació oberta: la imatge de l'obert format pels $z \in \mathbb{S}^1$ amb $\alpha < \arg z < \beta$ és l'obert format pels $w = z^n$ amb $n\alpha < \arg w < n\beta$.

4. L'aplicació contínua exhaustiva $\phi\colon \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{\mathbf{0}\} \twoheadrightarrow \mathbb{S}^1$ definida posant $\phi(\boldsymbol{x}) = \frac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|}$ és una identificació amb relació d'equivalència $\sim$ la corresponent al quocient. És una aplicació oberta. No és tancada: la imatge del tancat format pels punts $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ amb $xy = 1$ i $x > 0$ és el subconjunt format pels punts de $\mathbb{S}^1$ que estan en el primer quadrant, que no és un tancat.

5. L'aplicació contínua exhaustiva $\phi\colon \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{\mathbf{0}\} \twoheadrightarrow \mathbb{S}^1$ definida posant $\phi(z) = \frac{z^2}{|z^2|}$, on s'identifica el pla amb els complexos, és una identificació amb relació d'equivalència $\sim$ la corresponent al quocient.

   De fet es pot construir més fàcilment com la composició de $\boldsymbol{x} \mapsto \frac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|}\colon \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{\mathbf{0}\} \twoheadrightarrow \mathbb{S}^1$ amb elevar al quadrat $z \mapsto z^2\colon \mathbb{S}^2 \twoheadrightarrow \mathbb{S}^2$.

   És una aplicació oberta però no tancada: exercici (veure punt següent).

6. L'aplicació contínua exhaustiva $\phi\colon \mathbb{R}^{n+1} \smallsetminus \{\mathbf{0}\} \twoheadrightarrow \mathbb{S}^n$ definida posant $\phi(\boldsymbol{x}) = \frac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|}$ és una identificació amb relació d'equivalència $\sim$ la corresponent al quocient.

   És una aplicació oberta però no tancada: exercici

7. És la definició de l'espai projectiu com a espai topològic quocient.

8. La inclusió $\mathbb{S}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \smallsetminus \{\mathbf{0}\}$ composada amb la identificació de rectes que projecta aquest segon en $\mathbb{P}^n$ és una identificació amb relació d'equivalència $\boldsymbol{x} \sim -\boldsymbol{x}$.

9. L'aplicació contínua exhaustiva $\phi\colon \mathbb{R}^2 \twoheadrightarrow [0, \infty)$ definida posant $\phi(\boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{x}\|$ és una identificació amb relació d'equivalència $\sim$ la corresponent al quocient. És una aplicació oberta: la imatge de la bola $B_r(\boldsymbol{x})$ és $[0, \|\boldsymbol{x}\| + r)$ si $r > \|\boldsymbol{x}\|$ i és $(\|\boldsymbol{x}\| - r, \|\boldsymbol{x}\| + r)$ si $r \leqslant \|\boldsymbol{x}\|$. També és tancada: la distància a un punt pren un valor mínim i, si el conjunt està fitat, també màxim.

10. Veure problema resolt que penjarà dijous en Francesc Planas.

11.
   - L'aplicació $(x, y) \mapsto (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x, y)$ definida sobre el rectangle R és una identificació amb la seva imatge dins de $\mathbb{R}^3$, que és una versió del cilindre com a subespai de l'espai euclidià.

     Aquest és el cilindre "obert". Es podria considerar també la versió tancada, parametritzada per la mateixa funció en el quadrat $[0, 1]^2$.
   - Un un problema de les llistes es dóna una parametrització de la banda de Möbius com a subespai de $\mathbb{R}^3$:

     $$(u, v) \mapsto \left(\left(1 + v \cos \frac{u}{2}\right) \cos u, \left(1 + v \cos \frac{u}{2}\right) \sin u, v \sin \frac{u}{2}\right)$$

     sobre el rectangle tancat $(u, v) \in [0, 2\pi] \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, que és homeomorf a $[0, 1]^2$.

     Amb el criteri compacte-Hausdorff és immediat que això és una identificació amb la imatge: només s'ha de comprovar que els punts amb la mateixa imatge són els que s'identifiquen.

12. Són casos particulars de la construcció de superfícies compactes identificant costats de polígons que s'estudiaran més endavant.

En el cas de la circumferència es pot transformar el quadrat R en el quadrat centrat a l'origen amb vèrtexs $(0, \pm 1)$ i $(\pm 1, 0)$ a través de l'automorfisme lineal $(x, y) \mapsto (x + y - 1, -x + y)$ i després veure que l'aplicació definida en aquest segon quadrat posant

$$(x, y) \mapsto \left(x, (1 - |x|) \cos \frac{\pi y}{1 - |x|}, (1 - |x|) \sin \frac{\pi y}{1 - |x|} \right)$$

és una identificació amb l'esfera $\mathbb{S}^2$. Només s'ha de comprovar que els punts amb la mateixa imatge són els parells de punts de la forma (x, y) i $(x, -y)$, que són precisament els que s'identifiquen, i usar compacte-Hausdorff.

En el cas del tor, als problemes es dóna una parametrització

$$(\alpha, \beta) \mapsto \big((R + r \cos \alpha) \cos \beta, r \sin \alpha, (R + r \cos \alpha) \sin \beta \big), \qquad (\alpha, \beta) \in [0, 2\pi)^2$$

que permet donar una identificació amb els punts de $\mathbb{R}^3$ que satisfan l'equació

$$(X^2 + Y^2 + Z^2 + R^2 - r^2)^2 = 4R^2(X^2 + Z^2),$$

la qual es pot agafar com a definició del tor.

Per al pla projectiu i l'ampolla de Klein les construccions com a quocients es poden agafar com a definicions. En tots dos casos aquestes superfícies no es poden submergir en $\mathbb{R}^3$ però sí en espais euclidians de dimensió més gran (per exemple, 5). $\square$