Entregable 3: Descomposició de $\mathscr{T}^3(E)$.

Àlgebra Multilineal i Geometria. Grau en Matemàtiques, UPC, tardor 2020.

Àlex Batlle Casellas

Sigui E un espai vectorial sobre un cos $\mathbf{k}$, de dimensió finita n. Sabem que per als 2-tensors contravariants se satisfà $\mathscr{T}^2(E) = \mathcal{S}^2(E) \oplus \mathcal{A}^2(E)$. L'objectiu és donar una descomposició similar per als 3-tensors $\mathscr{T}^3(E) = E \otimes E \otimes E$. Denotem per $\mathcal{S}^{1,2}(E) \otimes E$ la imatge de l'aplicació lineal $\rho_{1,2} : \mathscr{T}^3(E) \to \mathscr{T}^3(E)$ que sobre els tensors descomponibles està definida per

$$\rho_{1,2}(\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{v}_3) = \frac{1}{2}(\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_3).$$

És a dir, simetritza les dues primeres posicions. Anàlogament es poden definir les aplicacions $\rho_{1,3}, \rho_{2,3}$, que simetritzen les posicions 1,3 i 2,3 respectivament.
Denotem per $\mathcal{S}_{1,3}(E) \otimes E$ la imatge de l'aplicació lineal $\rho^{1,3} : \mathscr{T}^3(E) \to \mathscr{T}^3(E)$ que sobre els tensors indescomponibles està definida per

$$\rho^{1,3}(\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{v}_3) = \frac{1}{2}(\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_3 \otimes \mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{v}_1).$$

És a dir, antisimetritza les posicions 1 i 3. Anàlogament es poden definir les aplicacions $\rho^{1,2}, \rho^{2,3}$ que antisimetritzen les posicions 1,2 i 2,3 respectivament.
1. Proveu que $\rho_{1,2}$ és un projector i calculeu la dimensió de $\mathcal{S}^{1,2}(E) \otimes E$. Trobeu la dimensió de $\mathcal{S}^{1,2}(E) \otimes E \cap \mathcal{S}^3(E)$ i de $\mathcal{S}^{1,2}(E) \otimes E \cap \mathcal{A}^3(E)$.

Vegem que si tenim un $T \in \mathcal{S}^{1,2}(E) \otimes E$, aleshores $\rho_{1,2}(T) = T$: per a tots els $\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \mathbf{v}^3 \in E^*$

$$\begin{aligned}\rho_{1,2}(T)(\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \mathbf{v}^3) = \frac{1}{2}(T(\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \mathbf{v}^3) + T(\mathbf{v}^2, \mathbf{v}^1, \mathbf{v}^3)) = \\ 2 \cdot \frac{1}{2} T(\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \mathbf{v}^3) = T(\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \mathbf{v}^3).\end{aligned}$$

Per tant, $\rho_{1,2}(T) = T$ per qualsevol $T \in \mathcal{S}^{1,2}(E) \otimes E$, i per tant, $\rho_{1,2}$ és un projector. Com que $\mathcal{B} = \{e_i \otimes e_j \otimes e_k : 1 \leq i, j, k \leq n\}$ és base de $\mathscr{T}^3(E)$ i $\rho_{1,2}$ és un projector (en particular, exhaustiu sobre la seva pròpia imatge), sabem que $\rho_{1,2}(\mathcal{B})$ és un conjunt generador de $\mathcal{S}^{1,2}(E) \otimes E$. Com que $\rho_{1,2}(e_i \otimes e_j \otimes e_k) = \rho_{1,2}(e_j \otimes e_i \otimes e_k)$, hi ha tantes tries pels dos primers elements com combinacions d'n elements agafats de 2 en 2 amb repetició. Això val $\binom{n+2-1}{2} = \binom{n+1}{2} = \frac{n^2+n}{2}$. Pel tercer, tenim n tries, perquè triem el que triem sortiran dos elements diferents de la base. Per tant, tenim

$$\dim\left(\mathcal{S}^{1,2}(E) \otimes E\right) = n\frac{n^2+n}{2} = \frac{n^3+n^2}{2} < n^3 = \dim \mathscr{T}^3(E).$$

Per calcular les dimensions de les interseccions, observem primer que $\mathcal{S}^3(E) \subset \mathcal{S}^{1,2}(E) \otimes E$: si $T \in \mathcal{S}^3(E)$, aleshores $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_3$ es té que $\sigma T = T$. Per tant, en particular, per $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_3$, que intercanvia les dues primeres posicions, tenim que $\tau T = T$, i per tant, que $T \in \mathcal{S}^{1,2}(E) \otimes E$. Per tant, $\mathcal{S}^{1,2}(E) \otimes E \cap \mathcal{S}^3(E) = \mathcal{S}^3(E)$, i la dimensió de la intersecció és per tant la mateixa que la de l'espai dels tensors simètrics. Aquesta es pot calcular seguint el mateix raonament que abans: com que dos elements de la base de $\mathscr{T}^3(E)$ seran iguals si tenen els mateixos elements, en ordre arbitrari, ara comptem el nombre de combinacions amb repetició de n elements agafats de 3 en 3, que és $\binom{n+3-1}{3} = \binom{n+2}{3} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} = \frac{n^3+3n^2+2n}{6}$. Aquest nombre té sentit, ja que és menor (o igual) que

$\frac{n^3+n^2}{2}$ per a tota $n \in \mathbb{N}$.

Observem ara que $\mathcal{A}^3(E)$ i $\mathcal{S}^{1,2}(E) \otimes E$ tenen intersecció $\{0\}$:

$$T \in \mathcal{A}^3(E) \iff \forall \sigma \in \mathfrak{S}_3,\ \sigma T = \varepsilon(\sigma)T.$$

Si $T \in \mathcal{S}^{1,2}(E) \otimes E$, aleshores $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ i $T = \tau T = \varepsilon(\sigma)T = -T \implies T = 0$. Per tant, la intersecció és $\{0\}$ i aleshores, la dimensió de la intersecció és 0.

2. Proveu que $\rho^{1,3}$ és un projector i calculeu la dimensió d'$\mathcal{A}^{1,3}(E) \otimes E$. Trobeu la dimensió de