

PROBLEMA D'AVALUACIÓ CONTINUADA

ALGEBRA LINEAL 2018

La propagació del virus de l'èbola que va tenir lloc el 2014 a Libèria es pot modelitzar amb el sistema dinàmic següent:

$$\begin{pmatrix} S_{k+1} \\ L_{k+1} \\ I_{k+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} S_k \\ L_k \\ I_k \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1.03 & 0 & -c \\ 0.1 & 0.5 & c \\ 0 & 0.5 & 0.1 \end{pmatrix},$$

on S_k , L_k , I_k indiquen la quantitat de població “sana”, “latent” (afectats d'èbola durant els primers 15 dies d'infecció, que no tenen símptomes i no contagien) i “infectada” (malalts que manifesten símptomes i contagien), respectivament, en la setmana k . Usarem la notació

$$x(k) = \begin{pmatrix} S_k \\ L_k \\ I_k \end{pmatrix}.$$

Per resoldre aquest problema podeu usar programari matemàtic (Wolfram Alpha, SAGE, Mathematica, Maple, Matlab/Octave...) i arrodonir les solucions a 3 decimals.

- Suposem que $c = 0.3$ i que la població a principis del 2014 era $x(0) = (3350000, 2100, 1500)^t$.
 - Calculeu la població que hi havia a finals d'any (és a dir, al cap de 52 setmanes).
 - Escriuiu les solucions $\{x(k)\}_{k \geq 0}$ del sistema dinàmic en funció dels valors propis i vectors propis de la matriu A .
 - Proveu que, en aquestes condicions, la població de Libèria tendeix a l'extinció.
 - Doneu un procediment per aproximar la setmana k en la qual la població s'extingirà, suposant que l'extinció es produeix a llarg termini. Discutiu si, en les condicions donades, aquesta aproximació coincideix amb el moment exacte en el qual es produeix l'extinció.
- Polítiques sanitàries van permetre canviar la constant c a 0.1. Demostreu que, amb la mateixa condició inicial $x(0) = (3350000, 2100, 1500)^t$, en aquest cas s'evita l'extinció. Doneu la distribució de la població (percentatge de sans, latents i infectats) a la que es tendeix a llarg termini.
- Trobeu un valor de c per al qual existeixi una solució $\{x(k)\}_{k \geq 0}$ del sistema dinàmic que sigui constant per a tot k i no nul·la.
- Per a aquest valor de c i les condicions inicials $x(0) = (3350000, 2100, 1500)^t$, resoleu el sistema dinàmic i deduiu quina és la distribució de la població a què es tendeix a llarg termini. Hi ha alguna condició inicial per a la qual es mantingui l'extinció?