Àlex Batlle Casellas

1. $c = 0.3$, $x(0) = \begin{pmatrix} S_0 \\ L_0 \\ I_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3350000 \\ 2100 \\ 1500 \end{pmatrix}$.

   a) Per calcular la població a finals d'any i la seva distribució respecte l'afectació pel virus de l'èbola, fem el càlcul pel sistema dinàmic donat,

   $$x(0) = \begin{pmatrix} 3350000 \\ 2100 \\ 1500 \end{pmatrix}, \quad x(k+1) = Ax(k), \quad A = \begin{pmatrix} 1.03 & 0 & -0.3 \\ 0.1 & 0.5 & 0.3 \\ 0 & 0.5 & 0.1 \end{pmatrix}.$$

   Busquem, per tant, $x(52) = Ax(51) = \cdots = A^{52}x(0)$. Per fer més senzill el càlcul, utilitzaré WolframAlpha. Així doncs, els resultats obtinguts són:

   $$x(52) = A^{52}x(0) = \begin{pmatrix} 1.03 & 0 & -0.3 \\ 0.1 & 0.5 & 0.3 \\ 0 & 0.5 & 0.1 \end{pmatrix}^{52} \begin{pmatrix} 3350000 \\ 2100 \\ 1500 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1135337.536 \\ 377054.217 \\ 215967.926 \end{pmatrix},$$

   que aproximarem al vector amb nombres enters següent:

   $$x(52) = \begin{pmatrix} 1135338 \\ 377054 \\ 215968 \end{pmatrix}.$$

   b) Volem trobar les solucions del sistema següent en funció dels seus valors i vectors propis:

   $$x(k+1) = Ax(k) = \begin{pmatrix} 1.03 & 0 & -0.3 \\ 0.1 & 0.5 & 0.3 \\ 0 & 0.5 & 0.1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_k \\ L_k \\ I_k \end{pmatrix} = \cdots = \begin{pmatrix} 1.03 & 0 & -0.3 \\ 0.1 & 0.5 & 0.3 \\ 0 & 0.5 & 0.1 \end{pmatrix}^{k} \begin{pmatrix} S_0 \\ L_0 \\ I_0 \end{pmatrix}.$$

   Per tant, busquem els vectors propis de la matriu A, altre cop utilitzant WolframAlpha. En surten tres; això indica que cada espai propi per cadascun dels valors propis té dimensió 1 i per tant, que la matriu diagonalitza. Els vectors propis són:

   $$v_1 \approx \begin{pmatrix} 0.254 \\ -0.500 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 \approx \begin{pmatrix} 1.347 \\ 1.415 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , v_3 \approx \begin{pmatrix} 5.257 \\ 1.746 \\ 1 \end{pmatrix},$$

   de corresponents valors propis

   $$\lambda_1 = -0.150233 \quad \lambda_2 = 0.807303 \quad \lambda_3 = 0.97293.$$

   Ara podem trobar A en la seva forma diagonal, que anomenarem D_A, posant els valors propis a la diagonal d'una matriu buida:

   $$D_A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.150233 & 0 & 0 \\ 0 & 0.807303 & 0 \\ 0 & 0 & 0.97293 \end{pmatrix}.$$

També ens seran útils per trobar les solucions les matrius de canvi de base de la base canònica a la base de vectors propis i viceversa. Aquestes, a les que anomenarem P i P^{-1} són:

$$P = \begin{pmatrix} 0.254187 & 1.34712 & 5.25669 \\ -0.500465 & 1.41461 & 1.74586 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \; P^{-1} = \begin{pmatrix} 0.464914 & -0.548707 & 0.713574 \\ -0.315271 & 0.702099 & 0.431514 \\ 0.268779 & -0.153393 & -0.145088 \end{pmatrix}.$$

Ara les solucions $x(k)$ les podem calcular fàcilment ja que sabem que els vectors solució de $x(k+1) = Ax(k)$ són els vectors solució de $x(k) = A^k x(0)$. Com que tenim $x(0)$ i A diagonalitzada, el càlcul resulta senzill. Els $x(k)$ seran

$$x(k) = A^k x(0) = (P^{-1} D_A P)^k x(0) = P^{-1} D_A^k P x(0) \approx$$

$$\begin{pmatrix} 0.465 & -0.549 & 0.714 \\ -0.315 & 0.702 & 0.432 \\ 0.269 & -0.153 & -0.145 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-0.150)^k & 0 & 0 \\ 0 & 0.807^k & 0 \\ 0 & 0 & 0.973^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.254 & 1.347 & 5.257 \\ -0.500 & 1.415 & 1.746 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3350000 \\ 2100 \\ 1500 \end{pmatrix}.$$

c) Efectivament, com es pot veure a la matriu diagonal D_A els elements de la diagonal són menors que 1. Per tant, en calcular-ne les potències per una k arbitràriament gran, veiem com la matriu cada vegada "s'apropa" més a la matriu nul·la. Com que quan es multiplica qualsevol matriu per la nul·la el resultat és una matriu nul·la, veiem doncs que la població de Libèria tendeix a l'extinció.

d) Un procediment que podria ser útil en aquest cas es veure quan la matriu D_A s'apropa a la matriu nul·la amb els nostres criteris d'aproximació. Si agafem els tres primers decimals com a bons per determinar el nombre real que apareix a la diagonal de D_A, veiem que el que més triga a ser igual a zero és el tercer valor propi, 0.973, que per tenir els tres primers decimals iguals a zero ha de ser elevat a 253. Per veure si realment coincideix l'aproximació que hem fet i el moment exacte en el que es produeix l'extinció, fem el càlcul del moment en que s'extingeix la població.