Facultat de Matemàtiques i Estadística

Universitat Politècnica de Catalunya - BarcelonaTech

Àlgebra Lineal Numèrica (Q2)

Àlex Batlle Casellas

March 29, 2019

Índex

1 Aritmètica finita i control d'errors **5**

2 Sistemes Lineals. **7**

2.1 Descomposició QR. 7

2.1.1 Mètode d'ortogonalització modificat de Gram-Schmidt. 7

Chapter 1

Aritmètica finita i control d'errors

Representem els nombres en un sistema de numeració posicional dependent d'una certa base b. Per representar un nombre (amb un nombre finit de decimals), seguim el següent esquema:

$$(d_p d_{p-1} \dots d_0 . d_{-1} \dots d_{-q}) = d_p b^p + \cdots + d_1 b^1 + d_0 + d_{-1} b^{-1} + \cdots + d_{-q} b^{-q} = \sum_{i=-q}^{p} d_i b^i .$$

En un ordinador, representem els nombres en binari; anem a veure com representem els enters i els reals:

Enters Els enters els representem de la forma següent:

d_{s-1}	d_{s-2}	$\cdots$	d_1	d_0

Utilitzem s bits, i el primer és pel signe ($d_{s-1} = 1 \to -, d_{s-1} = 0 \to +$). Per tant, els enters en un ordinador es representen com una suma així

$$(-1)^{s-1} \sum_{i=0}^{s-2} d_i 2^i .$$

D'aquí, deduïm que el nombre màxim que podem representar és

$$|N_{\text{màx}}| = \sum_{i=0}^{s-2} 2^i = 2^{s-1} - 1 .$$

En C/C++, que és el llenguatge que utilitzarem, tenim els següent tipus de dades

Type	**Bytes**	**Bits**	$N_{\text{màx}}$
char	1	8	$2^7 - 1 = 127$
short	2	16	$2^{15} - 1 = 32767$
int	4	32	$2^{31} - 1 = 2147483647$
unsigned int	4	32	$2^{32} - 1 = 4294967295$
float	4	32 (M:24,E:8)	$1.7815 \cdot 10^{38}$
double	8	64 (M:53,E:11)	$0.8988 \cdot 10^{308}$

Chapter 2

Sistemes Lineals.

2.1 Descomposició QR.

2.1.1 Mètode d'ortogonalització modificat de Gram-Schmidt.

Sigui $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R}), m \geq n$ de rang màxim n, volem calcular la descomposició $A = QR$ amb $Q \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ ortogonal ($Q^tQ = \mathrm{Id}$) i $R \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ triangular superior no singular.

Recordatori del mètode de Gram-Schmidt: Donada una base $\{\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_n}\}$, volem una base ortonormal $\{\vec{u_1}, \ldots, \vec{u_n}\}$:
$\vec{u_1} = \dfrac{\vec{v_1}}{||\vec{v_1}||}$ unitari,

Pas 0. Definim $A_1 = A = (a_1^{(1)} a_2^{(1)} \cdots a_n^{(1)})$, on $a_j^{(1)}$ és la columna j-èssima (amb m components d'A_1).

1. Normalitzem la primera columna $a_1^{(1)}$:

$$r_{11} = ||a_1^{(1)}||_2 \quad q_1 = \frac{a_1^{(1)}}{r_{11}}.$$

Ara ortogonalitzem, respecte d'aquesta, totes les columnes posteriors:

$$r_{1s} = q_1^t a_s^{(1)}, \quad a_s^{(2)} = a_s^{(1)} - r_{1s}q_1, \quad s = 2, \ldots, n.$$

Obtenim la matriu $A_2 = (q_1 \ a_2^{(2)} \ldots a_n^{(2)})$. Es compleix $q_1^t a_s^{(2)} = q_1^t a_s^{(1)} - r_{1s} q_1^t q_1 = r_{1s} - r_{1s} = 0, \ s = 2, \ldots, n$, i el rang d'$A_2$ és n. En forma matricial,

$$\begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & \ldots & a_{1n}^{(1)} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & a_{nn}^{(1)} \end{pmatrix} \mathrm{Diag}\left(\frac{1}{r_{11}}, 1 \ldots, 1\right) = \begin{pmatrix} q_{11} & a_{12}^{(1)} & \ldots & a_{1n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ q_{m1} & a_{m2}^{(1)} & \ldots & a_{mn}^{(1)} \end{pmatrix};$$

Ara

$$\begin{pmatrix} q_{11} & a_{21}^{(1)} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ q_{m1} & \dots & a_{mn}^{(1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -r_{12} & -r_{13} & \dots & -r_{1n} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix} =$$

Pas 2.

Pas k. Suposem que tenim la matriu $A_k = (q_1 q_2 \dots q_{k-1} a_k^{(k)} \dots a_n^{(k)})$ que satisfà (per construcció)

$$(\mathrm{Q})\ q_j^t q_l = \delta_{jl},\ q_j a_s^{(k)} = 0,\ j,l = 1,\dots,k-1,\ s = k,\dots,n.$$

Ara volem A_{k+1}:
Normalitzem la columna k-èssima

$$r_{kk} = ||a_k^{(k)}||_2, \quad q_k = \frac{a_k^{(k)}}{r_{kk}}$$

i ortogonalitzem respecte d'aquesta les columnes $a_{k+1}^{(k)}, \dots, a_n^{(k)}$, i.e.,

$$r_{ks} = q_k^t a_s^{(k)},\ a_s^{(k+1)} = a_s^{(k)} - r_{ks} q_k,\ s = k+1,\dots,n.$$

Així obtenim $A_{k+1} = (q_1 q_2 \cdots q_k a_{k+1}^{(k+1)} \cdots a_n^{(k+1)})$ i se satisfan les relacions (Q) amb $k+1$ enlloc de k:

$$q_j^t q_l = \delta_{jl}, q_j^t a_s^{(k+1)} = 0,\ j,l = 1,\dots,k,\ s = k+1,\dots,n.$$

Es té $A_k = A_{k+1} R^{(k)} \implies A_1 = A_k R^{(k-1)} \dots R^{(1)} = A_{k+1} R^{(k)} R^{(k-1)} \dots R^{(1)}$.

Després d'n passos obtenim

$$A_{n+1} = (q_1 q_2 \dots q_n),\ A_n = (q_1 \dots q_{n-1} a_n^{(n)}),$$

que té el mateix rang n i es compleix

$$A = A_{n+1} R^{(n)} \cdots R^{(1)} = QR,$$

on $Q \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ de columnes ortonormals, $R \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ triangular superior.