Dinámica de la partícula

Principios de la mecánica clásica

La dinámica estudia el movimiento de la partícula, debido a interacciones con los demás cuerpos que la rodean.

Para calcular el movimiento de la partícula en función del entorno es necesario introducir el concepto de fuerza, que es responsable de este movimiento.

Conociendo las fuerzas, el movimiento nos lo dan las tres leyes de Newton

I.- Todo cuerpo permanece en un estado de reposo o de movimiento rectilíneo y uniforme a menos que se le obligue a variar dicho estado mediante fuerzas que actúen sobre él.

II.- La variación del movimiento es proporcional a la fuerza que actúa sobre el cuerpo y se realiza en la dirección de la recta en que actúa la fuerza

III.- A toda acción se le opone siempre una reacción igual; o sea, las acciones mutuas entre dos cuerpos, uno sobre otro, son siempre

Ley de la inercia

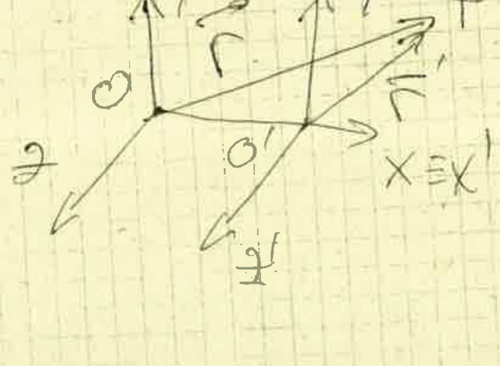
La fue formulada por Galileo. Incluye una definición operacional de lo que es la fuerza.

Cuando decimos que la partícula, sin la acción de una fuerza, está en reposo o en mov. rectilíneo, debemos decir con respecto a quién. Debe ser con respecto a otra partícula libre. Tal observador es un observador inercial, y el sistema de referencia asociado es un sist. de referencia inercial.

La Tierra, por ejemplo, no es un referencial inercial, pero para la mayoría de los problemas de interés, podemos considerarla como tal.

Transformación de Galileo

Todos los referenciales inerciales son equivalentes.



Sean dos ref. inerciales S y S', que se mueven con velocidad uniforme con respecto al otro, de forma que:

$\vec{OO'} = \vec{v}\, t$

Los vectores de posición del punto P están relacionados por:

$$\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{v}_0 t$$

donde suponemos que $t = t'$, de forma que la medida del tiempo es la misma en S y S' (suposición que la mecánica relativista mostró inválida). Esta es la transformación de Galileo. Derivando:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} = \frac{d\vec{r}\,'}{dt} + \vec{v}_0, \quad \frac{d\vec{r}\,'}{dt'} \equiv \frac{d\vec{r}\,'}{dt} = \vec{v}\,'$$

Por tanto: $\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{v}_0$

que es la ley de adición de velocidades.

Las aceleraciones son:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}, \quad \vec{a}\,' = \frac{d\vec{v}\,'}{dt'}, \quad \Rightarrow \vec{a} = \vec{a}\,'$$

La aceleración permanece invariante.

De aquí llegamos al principio de relatividad de Galileo:

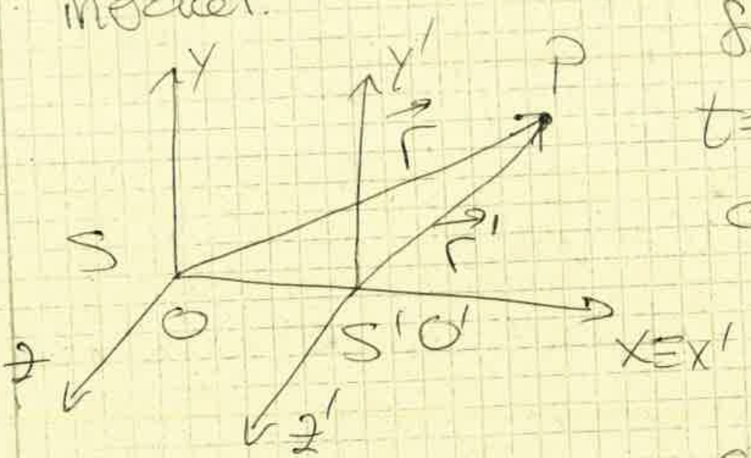
- Las leyes básicas de la Física son idénticas en todos los referenciales que se mueven con movimiento uniforme uno con respecto a otro.

Con el tiempo se vio que, para que este enunciado sea cierto, se debe abandonar

La transformación de Galileo, aparece la transformación de Lorentz, que deja invariante las leyes de Maxwell.

- Transformación de Lorentz

No imponemos que $t=t'$, pero sí que la velocidad de la luz es la misma, medida en cualquier sistema de referencia inercial.



Supongamos que en $t=t'=0$ S, S' coinciden. ~~Para S la luz~~, y desde ahí se emite un destello de luz.

Para S la luz ha tardado un tiempo t en llegar a P. ~~Por tanto~~ Como se mueve con velocidad c, entonces:

$$r^2=c^2t^2=x^2+y^2+z^2$$

De la misma forma, para S' ha tardado un tiempo t', de forma que:

$$r'^2=c^2t'^2=x'^2+y'^2+z'^2$$

Para simplificar, hemos considerado $y=y'$, $z=z'$.
Buscamos hallar una transformación:

$x' = f(x,t)$, $t' = g(x,t)$ que cumpla

las ecuaciones.
Asumimos que x' varía linealmente con x, t.

$\Rightarrow x' = \gamma x + \sigma t$

Cuando $x'=0 \Rightarrow x = vt$ (Posición de O' para S', para S). Por tanto:

$$0 = \gamma v t + \sigma t \Rightarrow \sigma = -\gamma v$$

y $x' = \gamma(x - vt)$

La transformación inversa es: $x = \gamma(x' + vt')$
Por tanto:

$$\cancel{x' = \gamma[\gamma} \quad x = \gamma[\gamma(x-vt) + vt']$$

O bien:
$$t' = \gamma t + \frac{(1-\gamma^2)x}{\gamma v}$$

Nos queda por hallar cuanto vale γ.

Podemos sustituir x', t' en:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2$$

$$\Rightarrow \gamma^2(x-vt)^2 + y^{2} + z^{2} = c^2\left[\gamma t + \frac{(1-\gamma^2)x}{\gamma v}\right]^2$$

Desarrollando, se llega a:

$$\left[\gamma^2 - \frac{(1-\gamma^2)^2 c^2}{\gamma^2 v^2}\right] x^2 - \left[2\gamma^2 v + 2\,\frac{(1-\gamma^2) c^2}{v}\right] t x$$

$$+ y^2 + z^2 = \left[c^2\gamma^2 - v^2\gamma^2\right] t^2$$

Que debe ser igual a

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2$$

Por tanto:

$$c^2 = (c^2 - v^2)\gamma^2 \Rightarrow \gamma^2 = \frac{c^2}{c^2 - v^2}$$

$$\Rightarrow \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Y la transformación de Lorentz queda:

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \dfrac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{cases}$$

- Segunda L de Newton

Actualmente se escribe de la forma:

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

donde debemos buscar alguna expresión para la fuerza, y la masa se debe definir. Por ejemplo, si vemos que la misma fuerza produce aceleraciones diferentes a diferentes cuerpos, podemos definir el cociente de sus masas (su inercia, o oposición al movimiento) como:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{a_2}{a_1}$$

A partir de una masa patrón, podemos definir el resto.

Sin embargo, el enunciado original de Newton no habla de aceleración, ni de masa, sino de variación del movimiento.

Podemos definir la cantidad de movimiento como:

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

de forma que la segunda L de Newton

La podemos escribir de la forma:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} \quad \text{(si } m \text{ cte)}.$$

Para una partícula puntual m es cte, pero no para un sistema de partículas.

En mecánica relativista la fórmula $\vec{F}=m\vec{a}$ no es correcta. Sin embargo sigue siendo cierto que:

$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$, donde $\vec{p}$ ahora se define como

$$\vec{p} = \frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

y m_0 es la masa en reposo de la partícula → la inercia aumenta con la velocidad.

<u>Invariancia</u>

La segunda ley de Newton es invariante frente a traslaciones y rotaciones del sistema de referencia. Esto es, si en S tenemos que $\vec{F}=m\vec{a}$, en S' tendremos $\vec{F}'=m\vec{a}'$ (comprobarlo).

[illegible] invariante frente a

transformaciones de Galileo, siempre, acuando $\vec{F}=\vec{F}'$ en los dos referenciales.

Esto impone restricciones a la segunda ley. Por ejemplo, no podría ser de la forma:

$$\vec{F}=m\vec{v}$$

ya que tendríamos $\vec{v}=\vec{v}_0+\vec{v}'$, por tanto:

$$\vec{F}'=m(\vec{v}_0+\vec{v}')$$

Tampoco sería invariante frente al cambio $t'=-t$, ya que $\vec{v}'=-\vec{v}$, entonces:

$$\vec{F}'=-m\vec{v}'$$

La forma $\vec{F}=m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ sí es invariante.

En particular, esta última invariancia garantiza que las leyes de la mecánica son reversibles. (Precisamente las fuerzas de rozamiento, irreversibles, son proporcionales a la velocidad).

- Tercera Ley de Newton

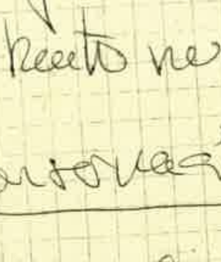
Si un cuerpo A ejerce una fuerza sobre un cuerpo B $\vec{F}_{AB}$, entonces B ejercerá una fuerza opuesta ~~B so~~ $-\vec{F}_{BA}$ sobre A.

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA} \rightarrow \text{fuerza de acción y reacción}$$

Estas fuerzas actúan sobre partículas diferentes, por tanto nunca se anulan.

- Conservación de la cantidad de movimiento

Sean dos partículas aisladas que ejercen fuerzas entre ellas:



Por la segunda ley de Newton:

$$\vec{F}_1 = \frac{d\vec{p}_1}{dt}, \quad \vec{F}_2 = \frac{d\vec{p}_2}{dt}.$$

Pero, según la tercera ley $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = cte$$

Por tanto, la cantidad de movimiento total de un sistema compuesto por dos

partículas sujetas solamente a su interacción mutua permanece constante en el tiempo.
Esto se puede generalizar para un sistema de partículas, de forma que la cantidad de movimiento total de un sistema aislado se mantiene constante.

Limitaciones de la tercera ley

Cuando la fuerza se produce entre objetos distintos, la tercera ley asume interacciones instantáneas. El problema es que esto no puede ser, sino que las interacciones se transmiten a través de algún campo (electromagnético, gravitatorio, etc). Por tanto, cuando los objetos son muy lejanos entre sí no es cierta. Lo que se cumple es la conservación del momento, siempre y cuando asignemos momento al campo. Es más fundamental que la ley de acción y reacción.
Además, la ley asume fuerzas centrales, que unen los centros de las partículas. No es cierto por ejemplo para la fuerza electromagnética.

- Fuerzas de fricción

Cuando frenan un cuerpo encima de otro, lo interceden mover, existe una oposición al movimiento, debido a la fricción entre los cuerpos. Podemos definir (la forma fenomenológica) una fuerza de fricción, o de rozamiento, que es normal a la normal de la fuerza que ejerce un cuerpo sobre el otro

$$F_r = \mu N \quad \text{(en módulo)}$$

Esta fuerza siempre se opone ~~a la velocidad~~ al movimiento, y por tanto, es opuesta a la velocidad. Si la fuerza externa que se ejerce sobre el cuerpo es $\vec{F}$, entonces la segunda ley de Newton queda:

$$m\vec{a} = \vec{F} - \hat{v}\mu N$$

Existen dos tipos de coeficientes de rozamiento.

- El coeficiente estático μ_s, que da la fuerza mínima necesaria para poner en movimiento el cuerpo
- El coeficiente cinético, μ_k, que da la

una vez que ha empezado.

Se cumple que $\mu_s > \mu_k$

- Fuerza de rozamiento en fluidos

Cuando un cuerpo se mueve en un fluido (gas o líquido) sufre una fuerza de fricción que es proporcional a su velocidad (para velocidades bajas). Por tanto, en este caso:

$$\vec{F}_r = -k\eta\vec{v}$$

donde k es el coeficiente de rozamiento, y η es el coeficiente de viscosidad (en kg/m/s). Esto se conoce como la ley de Stokes. Para una esfera de radio R, $k = 6\pi R$.

Si por ejemplo, una partícula cae en un fluido por la acción de la gravedad, entonces:

$$m\vec{a} = m\vec{g} - 6\pi R\eta\vec{v} + m_f\vec{g}$$

donde el último término es el empuje del fluido sobre la partícula. Al cabo de un

tiempo la partícula adquiere una velocidad constante (velocidad límite) dada por:

$$\vec{v} = \frac{(m - m_f)\vec{g}}{\ldots}$$

- Sistema con masa variable

Cuando la masa es constante, podemos poner:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$$

Si la masa no es constante (porque consideramos, no una partícula, sino un continuo, o un conjunto de ellas), entonces se sigue cumpliendo que

$$\vec{F} = \frac{dp}{dt}, \text{ pero } \vec{F} \neq m\vec{a}$$

Aparecerá un término debido al cambio de la masa con el tiempo:

$$\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m\vec{a} + \frac{dm}{dt}\vec{v}$$

- Movimiento curvilíneo

Si la fuerza no es proporcional a la velocidad, entonces el movimiento será curvilíneo. Como tenemos que $\vec{F} = m\vec{a}$, entonces podemos definir la componente tangencial, normal de la fuerza, de forma que:

$$\begin{cases} F_t = m a_t = m \dfrac{dv}{dt} \\ F_n = m a_n = \dfrac{m v^2}{\rho} \end{cases}$$

En el caso de movimiento circular, entonces $\rho \equiv R$ y $v = \omega R$, por tanto

$F_n = m \omega^2 R$

Si $\omega = cte$, entonces $a_t = 0$ y podemos poner $\vec{a} = \vec{\omega} \times \vec{v}$. Por tanto:

$$\vec{F} = m\vec{a} = m(\vec{\omega} \times \vec{v}) = \vec{\omega} \times m\vec{v} =$$
$$= \vec{\omega} \times \vec{p}$$