Problema 1.* Considerem l'operador

$$(Av)(x) = \int_0^1 \frac{x^2\, v(y)}{y^{1/4}}\, dy$$

i els espais de Banach $L^1((0,1))$, $L^2((0,1))$ i $C([0,1])$.

(a) Discutiu l'existència i unicitat de solució $u = u(x,t)$ pel problema

$$\begin{cases} u_t = Au \\ u(x,0) = g(x) \end{cases}$$

quan la funció g pertany a cadascun dels tres espais de Banach anteriors.

(b) Podeu trobar la suposada solució de manera explícita?

(c) Discutiu l'existència i unicitat de solució $u = u(x,t)$ pel problema

$$\begin{cases} u_t = Au + u^2 \\ u(x,0) = x^{-1/3} \end{cases}$$

en cadascun dels tres espais de Banach anteriors.

Problema 2.* Sigui E un espai de Banach de funcions definides a $[0,1]$. Per a $g \in E$ i $u = u(x,t)$, considereu el problema

$$\begin{cases} u_t = & Au + \cos(u), \quad t \in I := [-T,T], \\ u(0) = & g, \end{cases}$$

on A és l'operador integral definit per

$$(Av)(x) := \int_0^1 \frac{v(y) - v(x)}{|y-x|^{1/4}}\, dy\,, \qquad \text{per a } x \in [0,1].$$

Discutiu l'existència i unicitat de solució a l'espai $C^0(I;E)$ (en sentit integral) en els casos següents:

(1) $E = L^2((0,1))$.
(2) $E = C^0([0,1])$.

Problema 3.* Considerem l'operador

$$(Av)(x) := \int_0^x \frac{v(y)}{\sqrt{y}}\, dy, \qquad 0 \le x \le 1.$$

(a) Demostreu que A envia l'espai $C([0,1])$ en si mateix de manera contínua. Calculeu $\|A\|$.

(b) Donada $g \in C([0,1])$, volem resoldre l'equació d'evolució

$$u_t = Au + u^2 \qquad \text{per } t \in I \subset \mathbb{R},$$

amb la condició inicial $u(\cdot, 0) = g$. Considerem dos casos: (i) resoldre el problema anterior sense imposar condicions de vora; (ii) imposar $u(0,t) = 0$ per $t \in I$. Justifiqueu si (i) i/o (ii) admeten existència i unicitat de solució dient, si cal, per quines condicions inicials. Pels problemes que ho fan, demostreu en detall l'existència i unicitat de solució (en sentit integral).