Àlex Batlle Casellas

1.

(i) Sigui F un gir de $\mathbb{E}^2_{\mathbb{R}}$ al voltant d'un punt p. Si $F(q_1) = q_2$, demostreu que p pertany a la recta perpendicular a $u = q_2 - q_1$ i que conté al punt $(q_1 + q_2)/2$. Com a aplicació, trobeu el gir de $\mathbb{E}^2_{\mathbb{R}}$ que verifica $F(1, 1) = (-1, 3)$ i que $F(2, 0) = (0, 4)$ (equacions, centre i angle de gir).

(ii) Sigui F una rotació al voltant d'una recta r de $\mathbb{E}^3_{\mathbb{R}}$. Si $F(p) = q$, demostreu que l'eix r pertany al pla π perpendicular al vector $u = q - p$ i que conté al punt $(p + q)/2$. Com a aplicació,si F és una rotació de $\mathbb{E}^3_{\mathbb{R}}$ tal que $F(1, 1, 1) = (1, 1, 0)$ i que $F(0, 1, 0) = (1, 0, 1)$, trobeu l'eix, l'angle de gir i les equacions de F.

Resolució

(i) Podem resoldre la primera part d'aquest apartat passant per la definició de mediatriu. La mediatriu (a $\mathbb{E}^2_{\mathbb{R}}$) de dos punts és el lloc geomètric de tots els punts que equidisten dels dos donats. Aleshores, primer notem que tant p com el punt mig $M := (q_1 + q_2)/2$ pertanyen a la mediatriu. Això es justifica pel punt p de la següent manera: com que F és un moviment, la distància entre dos punts i les seves imatges es conserva. Per tant, tenim que $||q_1 - p||= ||F(q_1) - F(p)||= ||q_2 - p||$ (p és punt fix per definició). Com a conseqüència d'aquest fet, p pertany a la mediatriu. Pel punt M no cal justificar que hi pertany, ja que per definició de punt mig ja equidista de q_1 i q_2. Ara volem veure que la mediatriu és perpendicular a la recta $\langle q_1, q_2\rangle$. Per tant, sigui x un punt de la mediatriu. Aleshores, tenim la següent cadena d'equivalències (abús de notació: s'ometran les fletxes indicadores de vector, és a dir, que $\vec{AB} \equiv AB$):

$$||q_1x||= ||q_2x|| \iff \langle q_1x, q_1x\rangle = \langle q_2x, q_2x\rangle \iff \langle q_1M + Mx, q_1M + Mx\rangle = \langle q_2M + Mx, q_2M + Mx\rangle \iff \langle q_1M, q_1M\rangle + \langle Mx, q_1M\rangle + \langle q_1M, Mx\rangle + \langle Mx, Mx\rangle = \langle q_2M, q_2M\rangle + \langle Mx, q_2M\rangle + \langle q_2M, Mx\rangle + \langle Mx, Mx\rangle \iff \langle q_1M, Mx\rangle = \langle q_2M, Mx\rangle \iff \langle q_1M - q_2M, Mx\rangle = 0 \iff \langle q_1M + Mq_2, Mx\rangle = 0 \iff \langle q_1q_2, Mx\rangle = 0.\square$$

Per tant, la mediatriu és perpendicular a la recta $\langle q_1, q_2\rangle$.
Pel cas particular donat, per trobar les equacions, angle i centre de gir, comencem plantejant com ha de ser la matriu d'aquest gir: com que estem a $\mathbb{E}^2_{\mathbb{R}}$, la matriu de la part lineal de F ha de ser (en alguna base) de la forma

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Per tant, plantegem les següents equacions:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \tag{1}$$

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Si restem la primera a la segona, queda la següent equació,

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

que té per solució $\cos\alpha = 0, \sin\alpha = 1$; d'aquí tenim l'angle de gir, $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$. Per trobar el terme independent de les equacions de F, agafem qualsevol de les dues equacions anteriors; per exemple, (1):

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Finalment, busquem el centre de gir, un punt fix:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Per tant, ja tenim totes les dades del moviment; es tracta d'un gir d'angle $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ i de centre $p_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Les seves equacions són:

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(ii)