
Problema 1. (a) Considereu el domini del pla

$$\Omega = \{(x,y) : a < x < b, \varphi(x) < y < \psi(x)\}$$

on $\varphi, \psi \in C^1\big([a,b]\big)$ son funcions que satisfan $\varphi(x) < \psi(x)$ per a tot $x \in (a,b)$. Demostreu que per tota $u \in C^1(\overline{\Omega})$ es té

$$\int_\Omega \partial_y u \, dxdy = \int_{\partial\Omega} u\nu^y \, dl,$$

on ν^y es la segona component de la normal unitària exterior a $\partial\Omega$.

(b) Deduïu, en el domini Ω anterior i per $u, v \in C^1(\overline{\Omega})$, la fórmula d'integració per parts:

$$\int_\Omega (\partial_y u) v \, dxdy = -\int_\Omega u \partial_y v \, dxdy + \int_{\partial\Omega} uv\nu^y \, dl.$$

Nota IMPORTANT: La formula d'integració per parts a $\mathbb{R}^n$ també és vàlida amb una demostració similar. Enuncia:

Sigui $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un domini fitat Lipschitz, i siguin $u, v \in C^1(\overline{\Omega})$. Per a tot $i = 1, 2, \ldots, n$ es té

$$\int_\Omega (\partial_i u) v \, dx = -\int_\Omega u \partial_i v \, dx + \int_{\partial\Omega} uv\nu^i \, dS,$$

on ν^i és la i-èssima component de la normal unitària exterior a $\partial\Omega$.

Problema 2. El *teorema de la divergència* diu que per a tot domini fitat Lipschitz $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ i per a tot camp $X \in C^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n)$ es té

$$\int_\Omega \operatorname{div} X \, dx = \int_{\partial\Omega} X \cdot \nu \, dS,$$

on ν és la normal exterior a $\partial\Omega$. Demostreu que el teorema de la divergència i la fórmula d'integració per parts de la Nota del problema anterior són equivalents.

Problema 3. (a) Donat el domini $\Omega = \{(x,y) : x^2/a^2 + y^2 < 1\}$, considereu les el·lipses $E_\lambda = \{\sqrt{x^2/a^2 + y^2} < \lambda\}$ $(0 < \lambda < 1)$. Compareu $\int_\Omega u \, dxdy$ i $\int_0^1 \int_{\partial E_\lambda} u \, dl d\lambda$ fent un canvi de variables. Demostreu que les dues integrals anteriors són iguals per tota $u \in L^1(\Omega)$, si i només si, $a = 1$.

(b) En dimensió $n \geq 2$, demostreu el següent "Teorema de Fubini esfèric". Per a tota funció $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$, es té

$$\int_{\mathbb{R}^n} u \, dx = \int_0^\infty \int_{\partial B_r} u \, dS dr.$$

[Indicació: Primer feu el cas $n = 2$ i 3 usant coordenades polars o esfèriques. En dimensió general $n \geq 2$, per densitat podem suposar que $u \in C^1(\mathbb{R}^n)$ i, usant el teorema de la divergència, demostrar que

$$\frac{d}{dr}\int_{B_r} u\,dx = \frac{d}{dr}\int_{B_1} u(ry)\,r^n\,dy = \int_{B_1} ... = \int_{B_r} ... = \int_{\partial B_r} u\,dS.]$$

Problema 4. Demostreu les següents propietats importants del Laplacià:

(a) La definició de Laplacià no depèn de la base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ triada. És a dir

$$\sum_i \partial_{e_i e_i} u(x) = \sum_i \partial_{e'_i e'_i} u(x)$$

per cada parella de bases ortonormals $\{e_i\}$, $\{e'_i\}$ de $\mathbb{R}^n$.

(b) El Laplacià és invariant per rotacions. És a dir, per a tota matriu ortogonal O i $u \in C^2$, si es defineix $u^*(x) := u(Ox)$ i $x^* = Ox$ es té

$$\Delta u^*(x) = \Delta u(Ox) = \Delta u(x^*).$$

(c) El Laplacià és invariant per translacions.

(d) El Laplacià és invariant per isometries de $\mathbb{R}^n$.

Problema 5.* (i) Proveu que si u és de classe C^2 en un entorn de $x \in \mathbb{R}^n$ llavors

$$u(x+h) = u(x) + \nabla u(x)\cdot h + \frac{1}{2}h^T D^2u(x)h + o(|h|^2) \quad \text{quan } h \to 0,$$

on $D^2u(x)$ és la matriu Hessiana, i.e., $D^2u(x) = \big(\partial_{ij}u(x)\big)_{1\leq i,j\leq n}$. [Indicació: Fixeu $x \in \mathbb{R}^n$, considereu la funció d'una variable $g(t) = u(x+th)$ i apliqueu la fòrmula de Taylor a $\mathbb{R}$.]

(ii) Donat un obert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $u \in C^2(\Omega)$ i $x \in \Omega$, demostreu que

$$\begin{aligned} \Delta u(x) &= \lim_{r\downarrow 0}\frac{2n}{r^2} \fint_{\partial B_r(x)} \big(u(y)-u(x)\big)\,dS(y) \\ &= \lim_{r\downarrow 0}\frac{2n}{r^2}\left\{\left(\fint_{\partial B_r(x)} u(y)\,dS(y)\right) - u(x)\right\}, \end{aligned} \tag{1}$$

a on $\fint_E := \frac{1}{|E|}\int_E$ denota fer la mitjana. [Indicació: Feu servir l'aproximació de Taylor de u al voltant del punt x.]

(iii) Useu l'apartat (ii) per donar una prova alternativa de les questions (a) i (b) del problema anterior.

(iv) Useu l'apartat (ii) per determinar el signe del Laplacià en un punt de màxim (o mínim) local de u.

Problema 6.* [Desigualtat de Wirtinger] Sigui $u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció C^1 i 2π-periòdica. Proveu que

$$\int_0^{2\pi} |u - c_u|^2 dt \leq \int_0^{2\pi} |u'|^2 dt,$$

on $c_u = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u$.

[Indicació: Escriviu la desigualtat en termes de la sèrie de Fourier de u.]

Deduïu que si $v : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ és una funció C^1 i $(b-a)$-periòdica, llavors

$$\int_a^b |v - c_v|^2 dt \leq \left(\frac{b-a}{2\pi}\right)^2 \int_a^b |v'|^2 dt,$$

on $c_v = \frac{1}{b-a}\int_a^b v$.

Problema 7.* [Desigualtat isoperimètrica] Sigui $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un domini (i.e., un obert connex) regular i fitat. La desigualtat isoperimètrica enuncia que

$$4\pi|\Omega| \leq |\partial\Omega|^2, \tag{2}$$

amb igualtat si, i només si, Ω és un cercle. Per tant, (2) ens diu que d'entre tots els dominis amb mateix perímetre (dominis isoperimètrics), els cercles són els que tenen màxima àrea.

L'objectiu del problema és demostrar aquest resultat quan la vora $\Gamma = \partial\Omega$ de Ω és una corba simple (tancada i prou regular) de Jordan.

(a) Siguii $L = |\partial\Omega|$ i $\gamma : [0, L] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una parametrització de Γ amb el paràmetre arc, i.e., $|\gamma'(t)| = 1$ per a tot $t \in [0, L]$. Siguin $x(t)$ i $y(t)$ les funcions coordenades de γ, i.e., $\gamma(t) = (x(t), y(t))$. Proveu que

$$|\partial\Omega| = \int_0^L dt = \int_0^L \left\{|x'(t)|^2 + |y'(t)|^2\right\} dt$$

i

$$|\Omega| = \left|\int_0^L x(t)y'(t)dt\right|.$$

(b) Usant la desigualtat de Wirtinger del problema anterior, proveu (2).