Problema 1. Resoleu

$$\begin{cases} u_x + u_y + u = e^{x+2y} & (x,y) \in \mathbb{R}^2 \\ u(x,0) = 0 & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Problema 2. Trobeu la solució del problema

$$\begin{cases} u_x + 3y^{2/3} u_y = 2 \\ \qquad u(x,1) = 1 + x. \end{cases}$$

Problema 3.* (a) Digueu per quines funcions $d(t)$ i $g(x)$ el següent problema té solució clàssica:

$$\begin{cases} u_t + u_x = -u & x > 0,\ t > 0 \\ u(0,t) = d(t) & t > 0 \\ u(x,0) = g(x) & x > 0. \end{cases}$$

(b) Si $d \equiv 1$ i $g \equiv 0$, demostreu que la solució trobada pel mètode de les característiques és solució generalitzada (és a dir, en sentit integral).

Problema 4. Considereu l'equació de transport següent amb $c > 0$

$$\begin{cases} u_t + cu_x = f(x,t) & 0 < x < R,\ t > 0 \\ u(0,t) = 0 & t > 0 \\ u(x,0) = 0 & 0 < x < R. \end{cases}$$

Discutiu l'existència i unicitat de solució (no cal trobar-ne l'expressió explícita). Demostreu la desigualtat (estimació d'estabilitat)

$$\int_0^R u^2(x,t)\,dx \le e^t \int_0^t \int_0^R f^2(x,s)\,dx\,ds, \quad \text{per a tot } t > 0.$$

[Indicació: Multipliqueu l'equació per u, useu $c > 0$ i $2fu \le f^2 + u^2$, per arribar a

$$\frac{d}{dt}\int_0^R u^2(x,t)\,dx \le \int_0^R f^2(x,t)\,dx + \int_0^R u^2(x,t)\,dx.]$$

Problema 5.* Al pla $\mathbb{R}^2$, considerem l'EDP quasi-lineal de primer ordre

$$a(x,y,u)u_x + b(x,y,u)u_y = c(x,y,u). \tag{1}$$

Per resoldre-la, definim el camp vectorial a $\mathbb{R}^3$ donat per

$$X(x,y,z) = (a(x,y,z), b(x,y,z), c(x,y,z)).$$

Com la direcció normal a la gràfica de u és $\nu(x,y,z) = (-u_x, -u_y, 1)$, llavors la EDP és equivalent a $\nu \cdot X = (-u_x, -u_y, 1) \cdot (a,b,c) = 0$. Donat un domini $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ i donada u a una part de la frontera $\partial\Omega$, parametritzada per una corba $(\alpha(s), \beta(s))$, volem trobar u a tot (o a una part de) Ω. Les corbes característiques

$$\begin{cases} dx/dt = a(x, y, z) \\ dy/dt = b(x, y, z) \\ dz/dt = c(x, y, z) \end{cases}$$

defineix un sistema de EDOs amb condicions inicials, fixat un s, $x(0) = \alpha(s)$, $y(0) = \beta(s)$ and $z(0) = \gamma(s) := u(\alpha(s), \beta(s))$. Resolent el sistema, obtenim $x = x(s, t), y = y(s, t), z = z(s, t)$. Si, pel teorema de la funció inversa, podem invertir $x = x(s, t), y = y(s, t)$ i obtenim $s = s(x, y), t = t(x, y)$, demostreu que llavors $u = z(s(x, y), t(x, y))$ és la solució del problema. Demostreu també que la invertibilitat anterior requereix que

$$\begin{vmatrix} \dot{\alpha} & a \\ \dot{\beta} & b \end{vmatrix} \neq 0.$$

Problema 6.* Trobeu la solució $u = u(x, y)$ del problema

$$\begin{cases} uu_x + yu_y = x \\ \quad u(x, 1) = 2x. \end{cases}$$

Problema 7.* (a) En una autopista rectilínia infinita, $v = v(x, t)$ representa la densitat de cotxes, essent $v = 1$ la densitat màxima (en certes unitats; llavors tots els cotxes estan tocant-se i parats) mentre $v = 0$ és l'absència de cotxes. La velocitat d'un cotxe (el cotxe és infinitesimal i es representa per un punt x) depèn de la densitat de cotxes en aquell punt i ve donada per $120(1 - v)$, en km/h. Els cotxes estan, per tant, parats en cas de densitat màxima i circulen a 120 km/h en absència d'altres. Escriviu la llei de conservació de massa en qualsevol interval d'espai a un cert temps t i deduïu l'equació del trànsit.

(b) Feu un canvi de la variable incògnita v per escriure l'equació com la de Burgers: $u_t + uu_x = 0$. Sigui $g(x) = u(x, 0)$ la condició inicial. Useu el mètode de les característiques per demostrar que u satisfà l'equació funcional $u - g(x - ut) = 0$. Useu el teorema de la funció implícita per demostrar que, si g té derivada acotada a tot $\mathbb{R}$, llavors existeix una solució clàssica del problema de Cauchy en un interval $[0, t_0]$ amb $t_0 > 0$, i estimeu aquest temps t_0.

Demostreu que si g és creixent llavors podem prendre $t_0 = \infty$. Interpreteu el fet "g és creixent" traduït a l'apartat (a) sobre l'equació del trànsit (després de fer el canvi de u a v) i comenteu el sentit que no hi hagi xocs i la solució clàssica existeixi per tot temps positiu per aquestes condicions inicials. Es podria resoldre l'equació per temps negatius?

Problema 8.* (i) Ordeneu per ordre de feblesa les topologies provinents de les normes estàndard als espais $C([a, b])$, $C^1([a, b])$, $L^1(a, b)$ i $L^2(a, b)$. Discutiu l'existència de desigualtats relacionant aquestes normes (és a dir, que una norma sigui més petita o igual que una altra, llevat d'una constant multiplicativa), i trobeu les millors constants en aquestes desigualtats.

(ii) Digueu si les successions $\{x^k\}$, $\{(x/2)^k\}$ i $\{\sin(k\pi x)\}$ tenen parcials convergents a $L^1\big((0,1)\big)$, $L^2\big((0,1)\big)$, $C\big([0,1]\big)$, $C^2\big([0,1]\big)$.

Problema 9. Sigui E un espai de Banach. Per $g \in E$ i $u : [-\varepsilon, \varepsilon] \subset \mathbb{R} \to E$, considereu l'EDO

$$\begin{cases} u_t = F(u), & \text{per } t \in [-\varepsilon, \varepsilon], \\ u(0) = g, \end{cases}$$

on $F : E \to E$ és una funció localment Lipschitz (és a dir, és Lipschitz quan restringida sobre cada conjunt fitat de E). Escrivint l'EDO de manera integral, useu el teorema del punt fix per contraccions en espais de Banach per demostrar l'existència i unicitat de solució $u \in C^1([-\varepsilon, \varepsilon], E)$ de l'EDO si ε és prou petit.

Problema 10. Useu el mètode de les característiques per resoldre

$$\begin{cases} u_t + cu_x = e^{-t} \sin x & x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ u(x,0) = 0. \end{cases}$$

Comproveu que obteniu el mateix resultat usant la fórmula de Duhamel.

Problema 11. (a) Resoleu

$$\begin{cases} u_t + b \cdot \nabla_x u = -\gamma u & x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0 \\ u(x,0) = g(x) & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Observeu la diferència en el comportament de la solució u segons el signe de γ. En dimensió $n = 1$ i per $\gamma > 0$, aquesta equació modelitza el transport en un tub infinit amb corrent constant d'un contaminant que es degrada (per exemple degut a descomposició biològica o a que és absorbit pel medi). Aquest tipus de solució s'anomena ona viatgera esmorteïda (damped traveling wave).

(b) La solució u de l'apartat anterior es pot escriure com $u = T_t g$ on

$$T_t : C^k(\mathbb{R}^n) \longrightarrow C^k(\mathbb{R}^n)$$

és un semigrup d'operadors lineals. Trobeu T_t i comproveu la identitat de semigrup: $T_{t+s} = T_t T_s$.

Problema 12.* Un contaminant en un tub infinit amb un corrent de velocitat constant de c m/s cap a la dreta, inicialment amb una concentració de $g(x)$ g/m, s'absorbeix (en g/m/s) proporcionalment al quadrat de la seva concentració. Trobeu la concentració de contaminant a temps $t > 0$ i el semigrup no lineal associat. Comproveu que la llei de semigrup es satisfà.