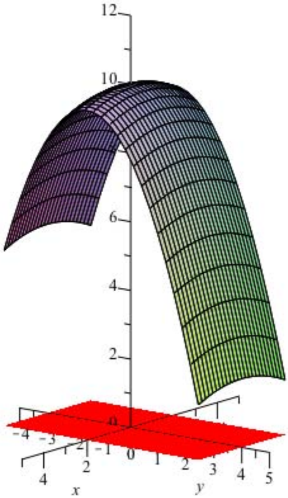
INTEGRACIÓN EN $\mathbb{R}^n$

Curso 2019-2020



Losetas y Ladrillos

Losetas y Ladrillos

Losetas y Ladrillos

Losetas y Ladrillos

Intervalos y su longitud

- $I \subset \mathbb{R}$ intervalo <u>acotado</u> $\Longrightarrow -\infty < \inf I = a \leq b = \sup I < +\infty$.
- $\boxed{I = (a,b), \quad I = [a,b], \ \ I = [a,b), \quad I = (a,b] \ \text{ con } a, b \in \mathbb{R},\ a \leq b.}$
- I es un intervalo abierto si $I = (a,b)$ y cerrado si $I = [a,b]$.
- En particular, $(a,a) = (a,a] = [a,a) = \emptyset$ y $\{a\} = [a,a]$.

Intervalos y su longitud

- $I \subset \mathbb{R}$ intervalo acotado $\Longrightarrow -\infty < \inf I = a \leq b = \sup I < +\infty$.
- $\boxed{I = (a,b), \quad I = [a,b], \; I = [a,b), \quad I = (a,b] \; \text{ con } a,b \in \mathbb{R},\; a \leq b.}$
- I es un intervalo abierto si $I = (a,b)$ y cerrado si $I = [a,b]$.
- En particular, $(a,a) = (a,a] = [a,a) = \emptyset$ y $\{a\} = [a,a]$.
- Longitud: $\ell(I) = b - a$.

Intervalos y su longitud

- $I \subset \mathbb{R}$ intervalo <u>acotado</u> $\Longrightarrow -\infty < \inf I = a \leq b = \sup I < +\infty$.
- $\boxed{I = (a,b), \quad I = [a,b], \; I = [a,b), \quad I = (a,b] \text{ con } a,b \in \mathbb{R},\; a \leq b.}$
- I es un intervalo abierto si $I = (a,b)$ y cerrado si $I = [a,b]$.
- En particular, $(a,a) = (a,a] = [a,a) = \emptyset$ y $\{a\} = [a,a]$.
- Longitud: $\ell(I) = b - a$.
- Positividad: $\ell(I) \geq 0$ y Monotonía: Si $I \subset J \Longrightarrow \ell(I) \leq \ell(J)$

Intervalos y su longitud

- $I \subset \mathbb{R}$ intervalo <u>acotado</u> $\Longrightarrow -\infty < \inf I = a \leq b = \sup I < +\infty$.
- $\boxed{I = (a,b), \quad I = [a,b], \;\; I = [a,b), \quad I = (a,b] \;\text{ con } a,b \in \mathbb{R},\; a \leq b.}$
- I es un intervalo abierto si $I = (a,b)$ y cerrado si $I = [a,b]$.
- En particular, $(a,a) = (a,a] = [a,a) = \emptyset$ y $\{a\} = [a,a]$.
- Longitud: $\ell(I) = b - a$.
- Positividad: $\ell(I) \geq 0$ y Monotonía: Si $I \subset J \Longrightarrow \ell(I) \leq \ell(J)$
- I es degenerado si $\ell(I) = 0$

Intervalos y su longitud

- $I \subset \mathbb{R}$ intervalo <u>acotado</u> $\Longrightarrow -\infty < \inf I = a \leq b = \sup I < +\infty$.
- $\boxed{I = (a,b), \quad I = [a,b], \;\; I = [a,b), \quad I = (a,b] \;\; \text{con } a,b \in \mathbb{R},\; a \leq b.}$
- I es un intervalo abierto si $I = (a,b)$ y cerrado si $I = [a,b]$.
- En particular, $(a,a) = (a,a] = [a,a) = \emptyset$ y $\{a\} = [a,a]$.
- Longitud: $\ell(I) = b - a$.
- Positividad: $\ell(I) \geq 0$ y Monotonía: Si $I \subset J \Longrightarrow \ell(I) \leq \ell(J)$
- I es degenerado si $\ell(I) = 0 \Longrightarrow I$ es degenerado sii $\mathring{I} = \emptyset$

Intervalos y su longitud

- $I \subset \mathbb{R}$ intervalo acotado $\Longrightarrow -\infty < \inf I = a \leq b = \sup I < +\infty$.
- $\boxed{I = (a,b), \quad I = [a,b], \;\; I = [a,b), \quad I = (a,b] \text{ con } a, b \in \mathbb{R},\ a \leq b.}$
- Longitud: $\ell(I) = b - a$.
- Positividad: $\ell(I) \geq 0$ y Monotonía: Si $I \subset J \Longrightarrow \ell(I) \leq \ell(J)$
- Invarianza: Si $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces $I + \alpha$ e αI son intervalos y

$$\ell(I+\alpha) = \ell(I),\ \ell(\alpha I) = |\alpha|\ell(I)$$

Intervalos y su longitud

- $I \subset \mathbb{R}$ intervalo acotado $\Longrightarrow -\infty < \inf I = a \leq b = \sup I < +\infty$.
- $\boxed{I = (a,b), \quad I = [a,b], \;\; I = [a,b), \quad I = (a,b] \text{ con } a,b \in \mathbb{R},\; a \leq b.}$
- Longitud: $\ell(I) = b - a$.
- Positividad: $\ell(I) \geq 0$ y Monotonía: Si $I \subset J \Longrightarrow \ell(I) \leq \ell(J)$
- Invarianza: Si $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces $I + \alpha$ e αI son intervalos y
$$\ell(I + \alpha) = \ell(I),\ \ell(\alpha I) = |\alpha|\ell(I)$$
- Estabilidad: La intersección de intervalos es un intervalo

Intervalos y su longitud

- $I \subset \mathbb{R}$ intervalo acotado $\Longrightarrow -\infty < \inf I = a \leq b = \sup I < +\infty$.
- $\boxed{I = (a,b), \quad I = [a,b], \;\; I = [a,b), \quad I = (a,b] \;\text{ con } a,b \in \mathbb{R},\; a \leq b.}$
- Longitud: $\ell(I) = b - a$.
- Positividad: $\ell(I) \geq 0$ y Monotonía: Si $I \subset J \Longrightarrow \ell(I) \leq \ell(J)$
- Invarianza: Si $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces $I + \alpha$ e αI son intervalos y
$$\ell(I + \alpha) = \ell(I),\; \ell(\alpha I) = |\alpha|\ell(I)$$
- Estabilidad: La intersección de intervalos es un intervalo

⚠ En general la unión, incluso finita, de intervalos no es un intervalo

Intervalos y su longitud

- $I \subset \mathbb{R}$ intervalo <u>acotado</u> $\Longrightarrow -\infty < \inf\, I = a \leq b = \sup\, I < +\infty$.
- $\boxed{I = (a,b),\quad I = [a,b],\ I = [a,b),\quad I = (a,b] \text{ con } a, b \in \mathbb{R},\ a \leq b.}$
- Longitud: $\ell(I) = b - a$.
- Positividad: $\ell(I) \geq 0$ y Monotonía: Si $I \subset J \Longrightarrow \ell(I) \leq \ell(J)$
- Invarianza: Si $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces $I + \alpha$ e αI son intervalos y

$$\ell(I + \alpha) = \ell(I),\ \ell(\alpha I) = |\alpha|\ell(I)$$

- Estabilidad: La intersección de intervalos es un intervalo
- Compatibilidad topológica: $\mathring{I}$ y $\bar{I}$ son intervalos y $\ell(\mathring{I}) = \ell(I) = \ell(\bar{I})$

Intervalos y su longitud

- $I \subset \mathbb{R}$ intervalo acotado $\Longrightarrow -\infty < \inf\ I = a \leq b = \sup\ I < +\infty$.
- $\boxed{I = (a,b), \quad I = [a,b], \ \ I = [a,b), \quad I = (a,b] \ \text{ con } a,b \in \mathbb{R},\ a \leq b.}$
- Longitud: $\ell(I) = b - a$.
- Positividad: $\ell(I) \geq 0$ y Monotonía: Si $I \subset J \Longrightarrow \ell(I) \leq \ell(J)$
- Invarianza: Si $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces $I + \alpha$ e αI son intervalos y

$$\ell(I + \alpha) = \ell(I),\ \ell(\alpha I) = |\alpha|\ell(I)$$

- Estabilidad: La intersección de intervalos es un intervalo
- Compatibilidad topológica: $\mathring{I}$ y $\bar{I}$ son intervalos y $\ell(\mathring{I}) = \ell(I) = \ell(\bar{I})$

$\rightsquigarrow \partial I = \{a\} \cup \{b\}$ es unión de 2 intervalos degenerados

Intervalos y su longitud

- $I \subset \mathbb{R}$ intervalo acotado $\Longrightarrow -\infty < \inf I = a \leq b = \sup I < +\infty$.
- $\boxed{I = (a, b), \quad I = [a, b], \;\; I = [a, b), \quad I = (a, b] \;\text{ con } a, b \in \mathbb{R},\; a \leq b.}$
- Longitud: $\ell(I) = b - a$.
- Positividad: $\ell(I) \geq 0$ y Monotonía: Si $I \subset J \Longrightarrow \ell(I) \leq \ell(J)$
- Invarianza: Si $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces $I + \alpha$ e αI son intervalos y

$$\ell(I + \alpha) = \ell(I),\; \ell(\alpha I) = |\alpha|\ell(I)$$

- Estabilidad: La intersección de intervalos es un intervalo
- Compatibilidad topológica: $\overset{\circ}{I}$ y $\bar{I}$ son intervalos y $\ell(\overset{\circ}{I}) = \ell(I) = \ell(\bar{I})$

  $\rightsquigarrow \partial I = \{a\} \cup \{b\}$ es unión de 2 intervalos degenerados
- Regularidad: Para cada $\varepsilon > 0$ existen intervalos, H abierto y J cerrado

$$J \subset \overset{\circ}{I} \subset I \subset \bar{I} \subset H \;\text{ y }\; \ell(H) - \varepsilon \leq \ell(I) \leq \ell(J) + \varepsilon$$

Intervalos y su longitud

- $I \subset \mathbb{R}$ intervalo acotado de extremos $a \leq b \Longrightarrow \ell(I) = b - a$.
- Invarianza: Si $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces $\ell(I + \alpha) = \ell(I)$, $\ell(\alpha I) = |\alpha|\ell(I)$
- Estabilidad: La intersección de intervalos es un intervalo
- Compatibilidad topológica: $\overset{\circ}{I}$ y $\bar{I}$ son intervalos y $\ell(\overset{\circ}{I}) = \ell(I) = \ell(\bar{I})$
- Regularidad: Para cada $\varepsilon > 0$ existen intervalos, H abierto y J cerrado

$$J \subset \overset{\circ}{I} \subset I \subset \bar{I} \subset H \ \text{ y } \ \ell(H) - \varepsilon \leq \ell(I) \leq \ell(J) + \varepsilon$$

Intervalos y su longitud

- $I \subset \mathbb{R}$ intervalo acotado de extremos $a \le b \Longrightarrow \ell(I) = b - a$.
- Invarianza: Si $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces $\ell(I+\alpha) = \ell(I)$, $\ell(\alpha I) = |\alpha|\ell(I)$
- Estabilidad: La intersección de intervalos es un intervalo
- Compatibilidad topológica: $\mathring{I}$ y $\bar{I}$ son intervalos y $\ell(\mathring{I}) = \ell(I) = \ell(\bar{I})$
- Regularidad: Para cada $\varepsilon > 0$ existen intervalos, H abierto y J cerrado

$$J \subset \mathring{I} \subset I \subset \bar{I} \subset H \ \text{ y } \ \ell(H) - \varepsilon \le \ell(I) \le \ell(J) + \varepsilon$$

- Aditividad Finita: Si $I = \bigcup_{j=1}^{m} I_j$ e $\mathring{I}_i \cap \mathring{I}_j = \emptyset \Longrightarrow \ell(I) = \sum_{j=1}^{m} \ell(I_j)$

Intervalos y su longitud

- $I \subset \mathbb{R}$ intervalo acotado de extremos $a \le b \Longrightarrow \ell(I) = b - a$.
- Invarianza: Si $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces $\ell(I+\alpha) = \ell(I)$, $\ell(\alpha I) = |\alpha|\ell(I)$
- Estabilidad: La intersección de intervalos es un intervalo
- Compatibilidad topológica: $\overset{\circ}{I}$ y $\bar{I}$ son intervalos y $\ell(\overset{\circ}{I}) = \ell(I) = \ell(\bar{I})$
- Regularidad: Para cada $\varepsilon > 0$ existen intervalos, H abierto y J cerrado

$$J \subset \overset{\circ}{I} \subset I \subset \bar{I} \subset H \text{ y } \ell(H) - \varepsilon \le \ell(I) \le \ell(J) + \varepsilon$$

- Aditividad Finita: Si $I = \bigcup\limits_{j=1}^{m} I_j$ e $\overset{\circ}{I}_i \cap \overset{\circ}{I}_j = \emptyset \Longrightarrow \ell(I) = \sum\limits_{j=1}^{m} \ell(I_j)$
- Recubrimiento: Si $\bigcup\limits_{j=1}^{k} I_j \subset I$, existen $J_1, \dots, J_m$ intervalos disjuntos y $\emptyset \ne M_j \subset \{1, \dots, m\}$ tales que $I = \bigcup\limits_{j=1}^{m} J_j$ e $I_j = \bigcup\limits_{i \in M_j} J_i$

Intervalos y su longitud

- $I \subset \mathbb{R}$ intervalo <u>acotado</u> de extremos $a \le b \Longrightarrow \ell(I) = b - a$.
- Invarianza: Si $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces $\ell(I+\alpha) = \ell(I)$, $\ell(\alpha I) = |\alpha|\ell(I)$
- Estabilidad: La intersección de intervalos es un intervalo
- Compatibilidad topológica: $\mathring{I}$ y $\bar{I}$ son intervalos y $\ell(\mathring{I}) = \ell(I) = \ell(\bar{I})$
- Regularidad: Para cada $\varepsilon > 0$ existen intervalos, H abierto y J cerrado

$$J \subset \mathring{I} \subset I \subset \bar{I} \subset H \ \text{ y } \ \ell(H) - \varepsilon \le \ell(I) \le \ell(J) + \varepsilon$$

- Aditividad Finita: Si $I = \bigcup\limits_{j=1}^{m} I_j$ e $\mathring{I}_i \cap \mathring{I}_j = \emptyset \Longrightarrow \ell(I) = \sum\limits_{j=1}^{m} \ell(I_j)$
- Recubrimiento: Si $\bigcup\limits_{j=1}^{k} I_j \subset I$, existen $J_1, \ldots, J_m$ intervalos <u>disjuntos</u> y $\emptyset \ne M_j \subset \{1, \ldots, m\}$ tales que $I = \bigcup\limits_{j=1}^{m} J_j$ e $I_j = \bigcup\limits_{i \in M_j} J_i$
- Subaditividad Finita: Si $I \subset \bigcup\limits_{j=1}^{m} I_j \Longrightarrow \ell(I) \le \sum\limits_{j=1}^{m} \ell(I_j)$

Rectángulos y su volumen

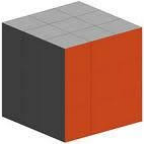
Si $n \geq 1$, denominaremos rectángulo n-dimensional al producto cartesiano de n intervalos unidimensionales; es decir a un conjunto de la forma $R = I_1 \times \cdots \times I_n$, donde para cada $j = 1, \ldots, n$, $I_j \subset \mathbb{R}$ es un intervalo, que se denomina el lado o la arista j-ésima de R.

1. El rectángulo se denomina degenerado si alguna de sus aristas tiene longitud nula.
2. El rectángulo se denomina abierto o cerrado si es producto de intervalos abiertos o cerrados, respectivamente.
3. Denominaremos cubo n-dimensional de lado ℓ a todo rectángulo n-dimensional cuyas aristas tienen la misma longitud, ℓ.

Rectángulos y su volumen

Si $n \geq 1$, denominaremos rectángulo n-dimensional al producto cartesiano de n intervalos unidimensionales; es decir a un conjunto de la forma $R = I_1 \times \cdots \times I_n$, donde para cada $j = 1, \ldots, n$, $I_j \subset \mathbb{R}$ es un intervalo, que se denomina el lado o la arista j-ésima de R.

1. El rectángulo se denomina degenerado si alguna de sus aristas tiene longitud nula.
2. El rectángulo se denomina abierto o cerrado si es producto de intervalos abiertos o cerrados, respectivamente.
3. Denominaremos cubo n-dimensional de lado ℓ a todo rectángulo n-dimensional cuyas aristas tienen la misma longitud, ℓ.



Rectángulos y su volumen

Sean $n \geq 1$ y $R = I_1 \times \cdots \times I_n$ el rectángulo n-dimensional, donde para cada $j = 1, \ldots, n$, la arista $I_j \subset \mathbb{R}$ es el intervalo de extremos son $a_j, b_j \in \mathbb{R}$ con $a_j \leq b_j$.

1. El volumen de R es el producto de las longitudes de las aristas:
$$\mathsf{v}_n(R) = \ell(I_1) \cdots \ell(I_n) = (b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n).$$
2. El diámetro de R es la longitud de la **diagonal** de R:
$$\delta(R) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + \cdots + (b_n - a_n)^2} = \sqrt{\ell(I_1)^2 + \cdots + \ell(I_n)^2}.$$

Rectángulos y su volumen

Sean $n \geq 1$ y $R = I_1 \times \cdots \times I_n$ el rectángulo n-dimensional, donde para cada $j = 1, \ldots, n$, la arista $I_j \subset \mathbb{R}$ es el intervalo de extremos son $a_j, b_j \in \mathbb{R}$ con $a_j \leq b_j$.

1. El volumen de R es el producto de las longitudes de las aristas:
$$\mathsf{v}_n(R) = \ell(I_1) \cdots \ell(I_n) = (b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n).$$
2. El diámetro de R es la longitud de la **diagonal** de R:
$$\delta(R) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + \cdots + (b_n - a_n)^2} = \sqrt{\ell(I_1)^2 + \cdots + \ell(I_n)^2}.$$

- Si $n = 1$, $\mathsf{v}_1 = \ell$, longitud y si $n = 2$, $\mathsf{v}_2 = \mathsf{a}$, área

Rectángulos y su volumen

Sean $n \geq 1$ y $R = I_1 \times \cdots \times I_n$ el rectángulo n-dimensional, donde para cada $j = 1, \ldots, n$, la arista $I_j \subset \mathbb{R}$ es el intervalo de extremos son $a_j, b_j \in \mathbb{R}$ con $a_j \leq b_j$.

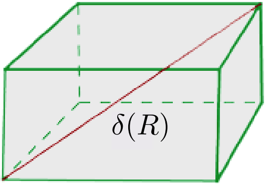
1. El volumen de R es el producto de las longitudes de las aristas:

$$\mathrm{v}_n(R) = \ell(I_1) \cdots \ell(I_n) = (b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n).$$

2. El diámetro de R es la longitud de la **diagonal** de R:

$$\delta(R) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + \cdots + (b_n - a_n)^2} = \sqrt{\ell(I_1)^2 + \cdots + \ell(I_n)^2}.$$

- Si $n = 1$, $\mathrm{v}_1 = \ell$, longitud y si $n = 2$, $\mathrm{v}_2 = \mathrm{a}$, área



Rectángulos y su volumen

Sean $n \geq 1$ y $R = I_1 \times \cdots \times I_n$ el rectángulo n-dimensional, donde para cada $j = 1, \ldots, n$, la arista $I_j \subset \mathbb{R}$ es el intervalo de extremos son $a_j, b_j \in \mathbb{R}$ con $a_j \leq b_j$.

1. El volumen de R es el producto de las longitudes de las aristas:
$$\mathsf{v}_n(R) = \ell(I_1) \cdots \ell(I_n) = (b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n).$$
2. El diámetro de R es la longitud de la **diagonal** de R:
$$\delta(R) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + \cdots + (b_n - a_n)^2} = \sqrt{\ell(I_1)^2 + \cdots + \ell(I_n)^2}.$$

- Si $n = 1$, $\mathsf{v}_1 = \ell$, longitud y si $n = 2$, $\mathsf{v}_2 = \mathsf{a}$, área
- $$\boxed{\max_{j=1,\ldots,n} \{\ell(I_j\} \leq \delta(R) \leq \sqrt{n} \max_{j=1,\ldots,n} \{\ell(I_j\} \Longrightarrow \mathsf{v}_n(R) \leq \delta(R)^n}$$

Rectángulos y su volumen

Sean $n \geq 1$ y $R = I_1 \times \cdots \times I_n$ el rectángulo n-dimensional, donde para cada $j = 1, \ldots, n$, la arista $I_j \subset \mathbb{R}$ es el intervalo de extremos son $a_j, b_j \in \mathbb{R}$ con $a_j \leq b_j$.

1. El volumen de R es el producto de las longitudes de las aristas:

$$\mathsf{v}_n(R) = \ell(I_1) \cdots \ell(I_n) = (b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n).$$

2. El diámetro de R es la longitud de la **diagonal** de R:

$$\delta(R) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + \cdots + (b_n - a_n)^2} = \sqrt{\ell(I_1)^2 + \cdots + \ell(I_n)^2}.$$

- Si $n = 1$, $\mathsf{v}_1 = \ell$, longitud y si $n = 2$, $\mathsf{v}_2 = \mathsf{a}$, área
- $$\boxed{\max_{j=1,\ldots,n} \{\ell(I_j\} \leq \delta(R) \leq \sqrt{n} \max_{j=1,\ldots,n} \{\ell(I_j\} \Longrightarrow \mathsf{v}_n(R) \leq \delta(R)^n}$$

• Cuestión 1: Para cada $M > 0$, dar un ejemplo de rectángulo n-dimensional con $n \geq 2$ con volumen nulo y diámetro mayor que M

Rectángulos y su volumen

Sean $n \geq 1$ y $R = I_1 \times \cdots \times I_n$ el rectángulo n-dimensional, donde para cada $j = 1, \dots, n$, la arista $I_j \subset \mathbb{R}$ es el intervalo de extremos son $a_j, b_j \in \mathbb{R}$ con $a_j \leq b_j$.

1. El volumen de R es el producto de las longitudes de las aristas:
$$\mathrm{v}_n(R) = \ell(I_1) \cdots \ell(I_n) = (b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n).$$
2. El diámetro de R es la longitud de la **diagonal** de R:
$$\delta(R) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + \cdots + (b_n - a_n)^2} = \sqrt{\ell(I_1)^2 + \cdots + \ell(I_n)^2}.$$

- Si $n = 1$, $\mathrm{v}_1 = \ell$, longitud y si $n = 2$, $\mathrm{v}_2 = \mathrm{a}$, área
- $$\max_{j=1,\dots,n} \{\ell(I_j\} \leq \delta(R) \leq \sqrt{n} \max_{j=1,\dots,n} \{\ell(I_j\} \Longrightarrow \mathrm{v}_n(R) \leq \delta(R)^n$$
- Si Q es un cubo de lado ℓ, entonces $\mathrm{v}_n(Q) = \ell^n$ y $\delta(Q) = \ell\sqrt{n}$

Rectángulos y su volumen

1. Degeneración: El conjunto vacío y todo punto de $\mathbb{R}^n$ son cubos cerrados degenerados y todo cubo cerrado degenerado es de esta forma. Más generalmente, si R es un rectángulo no vacío, entonces es degenerado sii una de sus aristas se reduce a un punto, sii $\overset{\circ}{R} = \emptyset$.

Rectángulos y su volumen

1. Degeneración: El conjunto vacío y todo punto de $\mathbb{R}^n$ son cubos cerrados degenerados y todo cubo cerrado degenerado es de esta forma. Más generalmente, si R es un rectángulo no vacío, entonces es degenerado sii una de sus aristas se reduce a un punto, sii $\overset{\circ}{R} = \emptyset$.
2. Positividad: $\mathsf{v}_n(R) \geq 0$ y $\mathsf{v}_n(R) = 0$ sii R es degenerado.

Rectángulos y su volumen

1. Degeneración: El conjunto vacío y todo punto de $\mathbb{R}^n$ son cubos cerrados degenerados y todo cubo cerrado degenerado es de esta forma. Más generalmente, si R es un rectángulo no vacío, entonces es degenerado sii una de sus aristas se reduce a un punto, sii $\overset{\circ}{R} = \emptyset$.
2. Positividad: $\mathsf{v}_n(R) \geq 0$ y $\mathsf{v}_n(R) = 0$ sii R es degenerado.
3. Monotonía: Si $R \subset \widehat{R}$, entonces $\mathsf{v}_n(R) \leq \mathsf{v}_n(\widehat{R})$.

Rectángulos y su volumen

1. Positividad: $\mathsf{v}_n(R) \geq 0$ y $\mathsf{v}_n(R) = 0$ sii R es degenerado.
2. Monotonía: Si $R \subset \widehat{R}$, entonces $\mathsf{v}_n(R) \leq \mathsf{v}_n(\widehat{R})$.
3. Invariancia y homogeneidad: Si R es un rectángulo, para $\mathsf{w} \in \mathbb{R}^n$, $R + \mathsf{w} = \{x + \mathsf{w} : x \in R\}$ y $\mathsf{w}R = \{(w_1 x_1, \dots, w_n x_n) : x \in R\}$ son también rectángulos. Si Q es un cubo de lado ℓ, entonces $Q + \mathsf{w}$ es un cubo de lado ℓ y $\mathsf{w}Q$ es un cubo sii $w_1 = \cdots = w_n = \alpha$ y en este caso tiene lado $|\alpha|\ell$.

Rectángulos y su volumen

1. Positividad: $\mathsf{v}_n(R) \geq 0$ y $\mathsf{v}_n(R) = 0$ sii R es degenerado.
2. Monotonía: Si $R \subset \widehat{R}$, entonces $\mathsf{v}_n(R) \leq \mathsf{v}_n(\widehat{R})$.
3. Invariancia y homogeneidad: Si R es un rectángulo, para $\mathsf{w} \in \mathbb{R}^n$, $R + \mathsf{w} = \{x + \mathsf{w} : x \in R\}$ y $\mathsf{w}R = \{(w_1x_1, \dots, w_nx_n) : x \in R\}$ son también rectángulos. Si Q es un cubo de lado ℓ, entonces $Q + \mathsf{w}$ es un cubo de lado ℓ y $\mathsf{w}Q$ es un cubo sii $w_1 = \cdots = w_n = \alpha$ y en este caso tiene lado $|\alpha|\ell$.

   Además $\mathsf{v}_n(R + \mathsf{w}) = \mathsf{v}_n(R)$ y $\mathsf{v}_n(\mathsf{w}R) = |w_1| \cdots |w_n| \mathsf{v}_n(R)$

Rectángulos y su volumen

1. Positividad: $\mathsf{v}_n(R) \geq 0$ y $\mathsf{v}_n(R) = 0$ sii R es degenerado.
2. Monotonía: Si $R \subset \widehat{R}$, entonces $\mathsf{v}_n(R) \leq \mathsf{v}_n(\widehat{R})$.
3. Invariancia y homogeneidad: Si R es un rectángulo, para $\mathsf{w} \in \mathbb{R}^n$, $R + \mathsf{w} = \{x + \mathsf{w} : x \in R\}$ y $\mathsf{w}R = \{(w_1 x_1, \dots, w_n x_n) : x \in R\}$ son rectángulos y $\mathsf{v}_n(R + \mathsf{w}) = \mathsf{v}_n(R)$ y $\mathsf{v}_n(\mathsf{w}R) = |w_1| \cdots |w_n| \mathsf{v}_n(R)$
4. Estabilidad: La intersección de rectángulos es un rectángulo.

⚠ La unión, incluso finita, de rectángulos no es un rectángulo

Rectángulos y su volumen

1. Positividad: $\mathsf{v}_n(R) \geq 0$ y $\mathsf{v}_n(R) = 0$ sii R es degenerado.
2. Monotonía: Si $R \subset \widehat{R}$, entonces $\mathsf{v}_n(R) \leq \mathsf{v}_n(\widehat{R})$.
3. Invariancia y homogeneidad: Si R es un rectángulo, para $\mathsf{w} \in \mathbb{R}^n$, $R + \mathsf{w} = \{x + \mathsf{w} : x \in R\}$ y $\mathsf{w}R = \{(w_1 x_1, \dots, w_n x_n) : x \in R\}$ son rectángulos y $\mathsf{v}_n(R + \mathsf{w}) = \mathsf{v}_n(R)$ y $\mathsf{v}_n(\mathsf{w}R) = |w_1| \cdots |w_n| \mathsf{v}_n(R)$
4. Estabilidad: La intersección de rectángulos es un rectángulo.
5. Compatibilidad geométrica: Si $1 \leq k < n$ y $R \subset \mathbb{R}^k$ es un rectángulo k-dimensional y $\widehat{R} \subset \mathbb{R}^{n-k}$ es un rectángulo $(n-k)$-dimensional, entonces $R \times \widehat{R}$ es un rectángulo n-dimensional. Recíprocamente, para cada $1 \leq k < n$, todo rectángulo n-dimensional puede ser expresado como producto de un rectángulo k-dimensional y otro $(n-k)$-dimensional. Las mismas propiedades son válidas sustituyendo rectángulo por cubo.

Rectángulos y su volumen

1. Positividad: $\mathsf{v}_n(R) \geq 0$ y $\mathsf{v}_n(R) = 0$ sii R es degenerado.
2. Monotonía: Si $R \subset \widehat{R}$, entonces $\mathsf{v}_n(R) \leq \mathsf{v}_n(\widehat{R})$.
3. Invariancia y homogeneidad: Si R es un rectángulo, para $\mathsf{w} \in \mathbb{R}^n$, $R + \mathsf{w} = \{x + \mathsf{w} : x \in R\}$ y $\mathsf{w}R = \{(w_1x_1, \ldots, w_nx_n) : x \in R\}$ son rectángulos y $\mathsf{v}_n(R + \mathsf{w}) = \mathsf{v}_n(R)$ y $\mathsf{v}_n(\mathsf{w}R) = |w_1| \cdots |w_n| \mathsf{v}_n(R)$
4. Estabilidad: La intersección de rectángulos es un rectángulo.
5. Compatibilidad geométrica: Si $1 \leq k < n$ y $R \subset \mathbb{R}^k$ es un rectángulo k-dimensional y $\widehat{R} \subset \mathbb{R}^{n-k}$ es un rectángulo $(n-k)$-dimensional, entonces $R \times \widehat{R}$ es un rectángulo n-dimensional. Recíprocamente, para cada $1 \leq k < n$, todo rectángulo n-dimensional puede ser expresado como producto de un rectángulo k-dimensional y otro $(n-k)$-dimensional. Las mismas propiedades son válidas sustituyendo rectángulo por cubo.
   Además, $\mathsf{v}_n(R \times \widehat{R}) = \mathsf{v}_k(R)\mathsf{v}_{n-k}(\widehat{R})$

Rectángulos y su volumen

1. Positividad: $\mathsf{v}_n(R) \geq 0$ y $\mathsf{v}_n(R) = 0$ sii R es degenerado.
2. Monotonía: Si $R \subset \widehat{R}$, entonces $\mathsf{v}_n(R) \leq \mathsf{v}_n(\widehat{R})$.
3. Invariancia y homogeneidad: Si R es un rectángulo, para $\mathsf{w} \in \mathbb{R}^n$, $R + \mathsf{w} = \{x + \mathsf{w} : x \in R\}$ y $\mathsf{w}R = \{(w_1 x_1, \ldots, w_n x_n) : x \in R\}$ son rectángulos y $\mathsf{v}_n(R + \mathsf{w}) = \mathsf{v}_n(R)$ y $\mathsf{v}_n(\mathsf{w}R) = |w_1| \cdots |w_n| \mathsf{v}_n(R)$
4. Estabilidad: La intersección de rectángulos es un rectángulo.
5. Compatibilidad geométrica: $\mathsf{v}_n(R \times \widehat{R}) = \mathsf{v}_k(R)\mathsf{v}_{n-k}(\widehat{R})$
6. Compatibilidad topológica: Si R es un rectángulo (un cubo), $\overset{\circ}{R}$ y $\bar{R}$ son rectángulos (cubos), concretamente se tiene que $\overset{\circ}{R} = \overset{\circ}{I}_1 \times \cdots \overset{\circ}{I}_n$, mientras que $\bar{R} = \bar{I}_1 \times \cdots \times \bar{I}_n$. Además, $\mathsf{v}_n(\overset{\circ}{R}) = \mathsf{v}_n(R) = \mathsf{v}_n(\bar{R})$.

Rectángulos y su volumen

1. Positividad: $\mathsf{v}_n(R) \geq 0$ y $\mathsf{v}_n(R) = 0$ sii R es degenerado.
2. Monotonía: Si $R \subset \widehat{R}$, entonces $\mathsf{v}_n(R) \leq \mathsf{v}_n(\widehat{R})$.
3. Invariancia y homogeneidad: Si R es un rectángulo, para $\mathsf{w} \in \mathbb{R}^n$, $R + \mathsf{w} = \{x + \mathsf{w} : x \in R\}$ y $\mathsf{w}R = \{(w_1x_1, \dots, w_nx_n) : x \in R\}$ son rectángulos y $\mathsf{v}_n(R + \mathsf{w}) = \mathsf{v}_n(R)$ y $\mathsf{v}_n(\mathsf{w}R) = |w_1| \cdots |w_n| \mathsf{v}_n(R)$
4. Estabilidad: La intersección de rectángulos es un rectángulo.
5. Compatibilidad geométrica: $\mathsf{v}_n(R \times \widehat{R}) = \mathsf{v}_k(R)\mathsf{v}_{n-k}(\widehat{R})$
6. Compatibilidad topológica: Si R es un rectángulo (un cubo), $\overset{\circ}{R}$ y $\bar{R}$ son rectángulos (cubos), concretamente se tiene que $\overset{\circ}{R} = \overset{\circ}{I}_1 \times \cdots \overset{\circ}{I}_n$, mientras que $\bar{R} = \bar{I}_1 \times \cdots \times \bar{I}_n$. Además, $\mathsf{v}_n(\overset{\circ}{R}) = \mathsf{v}_n(R) = \mathsf{v}_n(\bar{R})$. ∂R, la frontera de R, es unión de $2n$ rectángulos degenerados.

$$\partial R = \left(\bigcup_{j=1}^{n} \bar{I}_1 \times \cdots \times \{a_j\} \times \cdots \times \bar{I}_n \right) \bigcup \left(\bigcup_{j=1}^{n} \bar{I}_1 \times \cdots \times \{b_j\} \times \cdots \times \bar{I}_n \right)$$

Rectángulos y su volumen

1. Positividad: $\mathsf{v}_n(R) \geq 0$ y $\mathsf{v}_n(R) = 0$ sii R es degenerado.
2. Monotonía: Si $R \subset \widehat{R}$, entonces $\mathsf{v}_n(R) \leq \mathsf{v}_n(\widehat{R})$.
3. Invariancia y homogeneidad: Si R es un rectángulo, para $\mathsf{w} \in \mathbb{R}^n$, $R + \mathsf{w} = \{x + \mathsf{w} : x \in R\}$ y $\mathsf{w}R = \{(w_1 x_1, \dots, w_n x_n) : x \in R\}$ son rectángulos y $\mathsf{v}_n(R + \mathsf{w}) = \mathsf{v}_n(R)$ y $\mathsf{v}_n(\mathsf{w}R) = |w_1| \cdots |w_n| \mathsf{v}_n(R)$
4. Estabilidad: La intersección de rectángulos es un rectángulo.
5. Compatibilidad geométrica: $\mathsf{v}_n(R \times \widehat{R}) = \mathsf{v}_k(R)\mathsf{v}_{n-k}(\widehat{R})$
6. Compatibilidad topológica: $\mathsf{v}_n(\mathring{R}) = \mathsf{v}_n(R) = \mathsf{v}_n(\bar{R})$.
7. Regularidad: Si R es un rectángulo, para cada $\varepsilon > 0$ existen un rectángulo abierto $\widetilde{R}$ y un rectángulo cerrado $\widehat{R}$ tales que

$$\widehat{R} \subset \mathring{R} \subset R \subset \bar{R} \subset \widetilde{R} \quad \text{y} \quad \mathsf{v}_n(\widetilde{R}) - \varepsilon < \mathsf{v}_n(R) < \mathsf{v}_n(\widehat{R}) + \varepsilon.$$

Rectángulos y su volumen

1. Positividad: $\mathsf{v}_n(R) \geq 0$ y $\mathsf{v}_n(R) = 0$ sii R es degenerado.
2. Monotonía: Si $R \subset \widehat{R}$, entonces $\mathsf{v}_n(R) \leq \mathsf{v}_n(\widehat{R})$.
3. Invariancia y homogeneidad: Si R es un rectángulo, para $\mathsf{w} \in \mathbb{R}^n$, $R + \mathsf{w} = \{x + \mathsf{w} : x \in R\}$ y $\mathsf{w}R = \{(w_1x_1, \ldots, w_nx_n) : x \in R\}$ son rectángulos y $\mathsf{v}_n(R + \mathsf{w}) = \mathsf{v}_n(R)$ y $\mathsf{v}_n(\mathsf{w}R) = |w_1| \cdots |w_n| \mathsf{v}_n(R)$
4. Estabilidad: La intersección de rectángulos es un rectángulo.
5. Compatibilidad geométrica: $\mathsf{v}_n(R \times \widehat{R}) = \mathsf{v}_k(R)\mathsf{v}_{n-k}(\widehat{R})$
6. Compatibilidad topológica: $\mathsf{v}_n(\overset{\circ}{R}) = \mathsf{v}_n(R) = \mathsf{v}_n(\bar{R})$.
7. Regularidad: Si R es un rectángulo, para cada $\varepsilon > 0$ existen un rectángulo <u>abierto</u> $\widetilde{R}$ y un rectángulo <u>cerrado</u> $\widehat{R}$ tales que

$$\widehat{R} \subset \overset{\circ}{R} \subset R \subset \bar{R} \subset \widetilde{R} \quad \text{y} \quad \mathsf{v}_n(\widetilde{R}) - \varepsilon < \mathsf{v}_n(R) < \mathsf{v}_n(\widehat{R}) + \varepsilon.$$

Además, si R es un cubo, $\widehat{R}$ y $\widetilde{R}$ pueden escogerse como cubos .

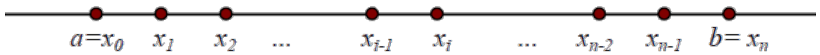
Rectángulos y su volumen

1. Positividad: $\mathsf{v}_n(R) \geq 0$ y $\mathsf{v}_n(R) = 0$ sii R es degenerado.
2. Monotonía: Si $R \subset \widehat{R}$, entonces $\mathsf{v}_n(R) \leq \mathsf{v}_n(\widehat{R})$.
3. Invariancia y homogeneidad: Si R es un rectángulo, para $\mathsf{w} \in \mathbb{R}^n$, $R + \mathsf{w} = \{x + \mathsf{w} : x \in R\}$ y $\mathsf{w}R = \{(w_1x_1, \ldots, w_nx_n) : x \in R\}$ son rectángulos y $\mathsf{v}_n(R + \mathsf{w}) = \mathsf{v}_n(R)$ y $\mathsf{v}_n(\mathsf{w}R) = |w_1| \cdots |w_n| \mathsf{v}_n(R)$
4. Estabilidad: La intersección de rectángulos es un rectángulo.
5. Compatibilidad geométrica: $\mathsf{v}_n(R \times \widehat{R}) = \mathsf{v}_k(R)\mathsf{v}_{n-k}(\widehat{R})$
6. Compatibilidad topológica: $\mathsf{v}_n(\mathring{R}) = \mathsf{v}_n(R) = \mathsf{v}_n(\bar{R})$.
7. Regularidad: Si R es un rectángulo, para cada $\varepsilon > 0$ existen un rectángulo abierto $\widetilde{R}$ y un rectángulo cerrado $\widehat{R}$ tales que
$$\widehat{R} \subset \mathring{R} \subset R \subset \bar{R} \subset \widetilde{R} \quad \text{y} \quad \mathsf{v}_n(\widetilde{R}) - \varepsilon < \mathsf{v}_n(R) < \mathsf{v}_n(\widehat{R}) + \varepsilon.$$
8. Regularidad por cubos: Sustituimos $\widetilde{R}$ por $\{Q_j\}_{j=1}^k$ cubos abiertos y $\widehat{R}$ por $\{\widehat{Q}_j\}_{j=1}^m$ cubos cerrados y $\sum_{j=1}^k \mathsf{v}_n(Q_j) - \varepsilon \leq \mathsf{v}_n(R) < \sum_{i=1}^m \mathsf{v}_n(\widehat{Q}_i) + \varepsilon$

Rectángulos y su volumen

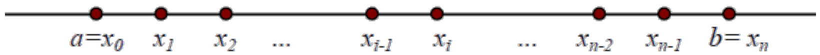
- Partición: $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ es una **partición de $[a, b]$** si

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$



Rectángulos y su volumen

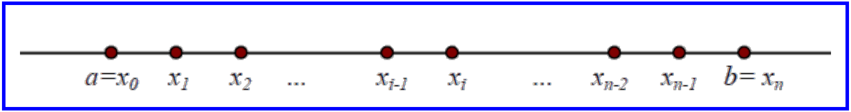
- Partición: $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ es una **partición de** $[a,b]$ si
$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$



- $I_i = [x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, \ldots, n-1$ son los subintervalos de la partición $\mathcal{P}$

Rectángulos y su volumen

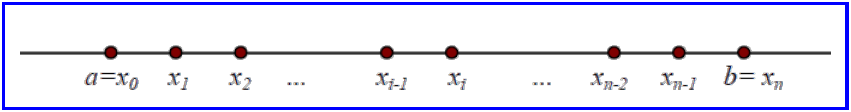
- **Partición:** $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ es una **partición de** $[a,b]$ si
$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$



- $I_i = [x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, \ldots, n-1$ son los subintervalos de la partición $\mathcal{P}$
- $[a,b] = \bigcup_{i=0}^{n-1} I_i$, $\mathring{I}_i \cap \mathring{I}_m = \emptyset$ si $i \neq m$ y $\ell([a,b]) = \sum_{i=0}^{n-1} \ell(I_i)$.

Rectángulos y su volumen

- **Partición:** $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ es una **partición de $[a,b]$** si
$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$



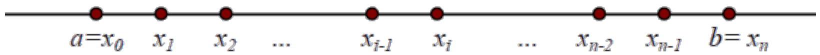
- $I_i = [x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, \ldots, n-1$ son los subintervalos de la partición $\mathcal{P}$
- $[a,b] = \bigcup_{i=0}^{n-1} I_i$, $\mathring{I}_i \cap \mathring{I}_m = \emptyset$ si $i \neq m$ y $\ell([a,b]) = \sum_{i=0}^{n-1} \ell(I_i)$.

⚠ Si $a = b$, la única partición de $[a,b]$ es $\mathcal{P} = \{a,b\}$.

Si $a < b$, todos los subintervalos son no degenerados.

Rectángulos y su volumen

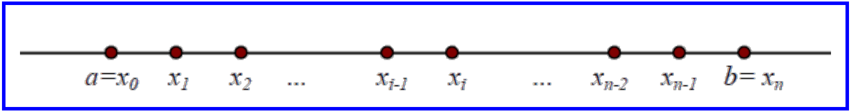
- Partición: $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ es una **partición de** $[a, b]$ si
$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$



- $I_i = [x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, \dots, n-1$ son los subintervalos de la partición $\mathcal{P}$
- $[a, b] = \bigcup_{i=0}^{n-1} I_i$, $\mathring{I}_i \cap \mathring{I}_m = \emptyset$ si $i \neq m$ y $\ell([a, b]) = \sum_{i=0}^{n-1} \ell(I_i)$.
- El diámetro de $\mathcal{P}$ es $\delta(\mathcal{P}) = \max_{j=0,\dots,n-1} \{\ell(I_j)\}$

Rectángulos y su volumen

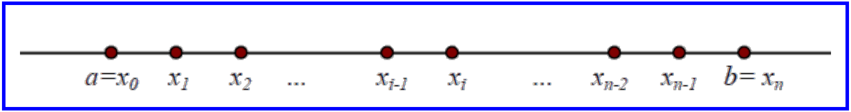
- **Partición:** $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ es una **partición de $[a,b]$** si
$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$



- $I_i = [x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, \dots, n-1$ son los subintervalos de la partición $\mathcal{P}$
- $[a,b] = \bigcup_{i=0}^{n-1} I_i$, $\mathring{I}_i \cap \mathring{I}_m = \emptyset$ si $i \neq m$ y $\ell([a,b]) = \sum_{i=0}^{n-1} \ell(I_i)$.
- El diámetro de $\mathcal{P}$ es $\delta(\mathcal{P}) = \max_{j=0,\dots,n-1} \{\ell(I_j)\}$
- $\mathcal{P}'$ es más fina que $\mathcal{P}$ si $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}'$

Rectángulos y su volumen

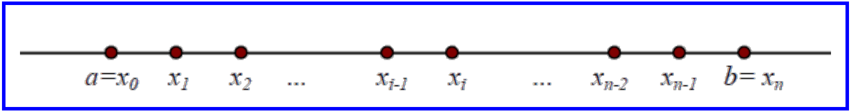
- **Partición:** $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ es una **partición de $[a,b]$** si
$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$



- $I_i = [x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, \ldots, n-1$ son los subintervalos de la partición $\mathcal{P}$
- $[a,b] = \bigcup_{i=0}^{n-1} I_i$, $\mathring{I}_i \cap \mathring{I}_m = \emptyset$ si $i \neq m$ y $\ell([a,b]) = \sum_{i=0}^{n-1} \ell(I_i)$.
- El diámetro de $\mathcal{P}$ es $\delta(\mathcal{P}) = \max_{j=0,\ldots,n-1} \{\ell(I_j)\}$
- $\mathcal{P}'$ es más fina que $\mathcal{P}$ si $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}' \implies$ Cada subintervalo de $\mathcal{P}$ es unión de subintervalos de $\mathcal{P}'$ y $\delta(\mathcal{P}') \leq \delta(\mathcal{P})$

Rectángulos y su volumen

- **Partición:** $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ es una **partición de $[a,b]$** si
$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$



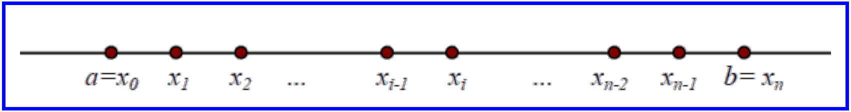
- $I_i = [x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, \dots, n-1$ son los subintervalos de la partición $\mathcal{P}$
- $[a,b] = \bigcup_{i=0}^{n-1} I_i$, $\mathring{I}_i \cap \mathring{I}_m = \emptyset$ si $i \neq m$ y $\ell([a,b]) = \sum_{i=0}^{n-1} \ell(I_i)$.
- El diámetro de $\mathcal{P}$ es $\delta(\mathcal{P}) = \max_{j=0,\dots,n-1} \{\ell(I_j)\}$
- $\mathcal{P}'$ es más fina que $\mathcal{P}$ si $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}' \implies \delta(\mathcal{P}') \leq \delta(\mathcal{P})$

• Cuestión 2: Dada $\mathcal{P}$ construir $\mathcal{P}'$ tal que $\mathcal{P} \not\subset \mathcal{P}'$ pero $\delta(P') \leq \delta(\mathcal{P})$.

Rectángulos y su volumen

- **Partición:** $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ es una **partición de** $[a, b]$ si

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$



- $I_i = [x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, \ldots, n-1$ son los subintervalos de la partición $\mathcal{P}$
- $[a, b] = \bigcup_{i=0}^{n-1} I_i$, $\mathring{I}_i \cap \mathring{I}_m = \emptyset$ si $i \neq m$ y $\ell([a, b]) = \sum_{i=0}^{n-1} \ell(I_i)$.
- El diámetro de $\mathcal{P}$ es $\delta(\mathcal{P}) = \max_{j=0,\ldots,n-1} \{\ell(I_j)\}$
- $\mathcal{P}'$ es más fina que $\mathcal{P}$ si $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}' \Longrightarrow \delta(\mathcal{P}') \leq \delta(\mathcal{P})$
- Dadas $\mathcal{P}$ y $\mathcal{P}'$ siempre existe $\mathcal{P}''$ tal que $\mathcal{P}, \mathcal{P}' \subset \mathcal{P}''$

Rectángulos y su volumen

Sean $n \in \mathbb{N}^*$ y $R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$, $I_j = [a_j, b_j]$, $j = 1, \ldots, n$.

Rectángulos y su volumen

Sean $n \in \mathbb{N}^*$ y $R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$, $I_j = [a_j, b_j]$, $j = 1, \ldots, n$.

- R es degenerado ($\mathsf{v}(R) = 0$) sii existe j tal que $b_j = a_j$ ($\ell(I_j) = 0$)

Rectángulos y su volumen

Sean $n \in \mathbb{N}^*$ y $R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$, $I_j = [a_j, b_j]$, $j = 1, \ldots, n$.

Una **partición de R** es $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \times \cdots \times \mathcal{P}_n$ donde para $j = 1, \ldots, n$, $\mathcal{P}_j = \left\{x_{j,0}, x_{j,1}, \ldots, x_{j,k_j}\right\}$ es una partición de $I_j = [a_j, b_j]$; es decir,

$$a_j = x_{j,0} < x_{j,1} < \cdots < x_{j,k_j} = b_j.$$

1. Los **subrectángulos de $\mathcal{P}$** son
$$R_{i_1,\ldots,i_n} = [x_{1,i_1}, x_{1,i_1+1}] \times \cdots \times [x_{n,i_n}, x_{n,i_n+1}],$$
$i_j = 0, \ldots, k_j - 1$, $j = 1, \ldots, n$.
2. El **diámetro de $\mathcal{P}$** es $\delta(\mathcal{P}) = \sqrt{\delta(\mathcal{P}_1)^2 + \cdots + \delta(\mathcal{P}_n)^2}$.

Rectángulos y su volumen

Sean $n \in \mathbb{N}^*$ y $R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$, $I_j = [a_j, b_j]$, $j = 1, \ldots, n$.

Una **partición de R** es $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \times \cdots \times \mathcal{P}_n$ donde para $j = 1, \ldots, n$, $\mathcal{P}_j = \left\{x_{j,0}, x_{j,1}, \ldots, x_{j,k_j}\right\}$ es una partición de $I_j = [a_j, b_j]$; es decir,

$$a_j = x_{j,0} < x_{j,1} < \cdots < x_{j,k_j} = b_j.$$

1. Los **subrectángulos de $\mathcal{P}$** son
$$R_{i_1,\ldots,i_n} = [x_{1,i_1}, x_{1,i_1+1}] \times \cdots \times [x_{n,i_n}, x_{n,i_n+1}],$$
$i_j = 0, \ldots, k_j - 1$, $j = 1, \ldots, n$.
2. El **diámetro de $\mathcal{P}$** es $\delta(\mathcal{P}) = \sqrt{\delta(\mathcal{P}_1)^2 + \cdots + \delta(\mathcal{P}_n)^2}$.

$\mathscr{P}(R) = \Big\{\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \times \cdots \times \mathcal{P}_n : \mathcal{P}_j$ es una partición de I_j, $1 \le j \le n\Big\}$.

Rectángulos y su volumen

Sean $n \in \mathbb{N}^*$ y $R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$, $I_j = [a_j, b_j]$, $j = 1, \ldots, n$.

Una **partición de R** es $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \times \cdots \times \mathcal{P}_n$ donde para $j = 1, \ldots, n$, $\mathcal{P}_j = \left\{x_{j,0}, x_{j,1}, \ldots, x_{j,k_j}\right\}$ es una partición de $I_j = [a_j, b_j]$; es decir,

$$a_j = x_{j,0} < x_{j,1} < \cdots < x_{j,k_j} = b_j.$$

1. Los **subrectángulos de $\mathcal{P}$** son

$$R_{i_1,\ldots,i_n} = [x_{1,i_1}, x_{1,i_1+1}] \times \cdots \times [x_{n,i_n}, x_{n,i_n+1}],$$

   $i_j = 0, \ldots, k_j - 1$, $j = 1, \ldots, n$.

2. El **diámetro de $\mathcal{P}$** es $\delta(\mathcal{P}) = \sqrt{\delta(\mathcal{P}_1)^2 + \cdots + \delta(\mathcal{P}_n)^2}$.

$\mathscr{P}(R) = \Big\{\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \times \cdots \times \mathcal{P}_n : \mathcal{P}_j$ es una partición de I_j, $1 \leq j \leq n\Big\}$.

- Si $\mathsf{v}(R) > 0$, entonces $\mathsf{v}(R_{i_1,\ldots,i_n}) > 0$.

Rectángulos y su volumen

Sean $n \in \mathbb{N}^*$ y $R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$, $I_j = [a_j, b_j]$, $j = 1, \ldots, n$.

Una **partición de R** es $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \times \cdots \times \mathcal{P}_n$ donde para $j = 1, \ldots, n$, $\mathcal{P}_j = \left\{x_{j,0}, x_{j,1}, \ldots, x_{j,k_j}\right\}$ es una partición de $I_j = [a_j, b_j]$; es decir,

$$a_j = x_{j,0} < x_{j,1} < \cdots < x_{j,k_j} = b_j.$$

1. Los **subrectángulos de $\mathcal{P}$** son
$$R_{i_1,\ldots,i_n} = [x_{1,i_1}, x_{1,i_1+1}] \times \cdots \times [x_{n,i_n}, x_{n,i_n+1}],$$
$i_j = 0, \ldots, k_j - 1$, $j = 1, \ldots, n$.
2. El **diámetro de $\mathcal{P}$** es $\delta(\mathcal{P}) = \sqrt{\delta(\mathcal{P}_1)^2 + \cdots + \delta(\mathcal{P}_n)^2}$.

$\mathscr{P}(R) = \Big\{\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \times \cdots \times \mathcal{P}_n : \mathcal{P}_j$ es una partición de I_j, $1 \leq j \leq n\Big\}$.

- Si $\mathsf{v}(R) > 0$, entonces $\mathsf{v}(R_{i_1,\ldots,i_n}) > 0$.
- $\delta(R_{i_1,\ldots,i_n}) \leq \delta(\mathcal{P}) \Longrightarrow \mathsf{v}(R_{i_1,\ldots,i_n}) \leq \delta(\mathcal{P})^n$

Rectángulos y su volumen

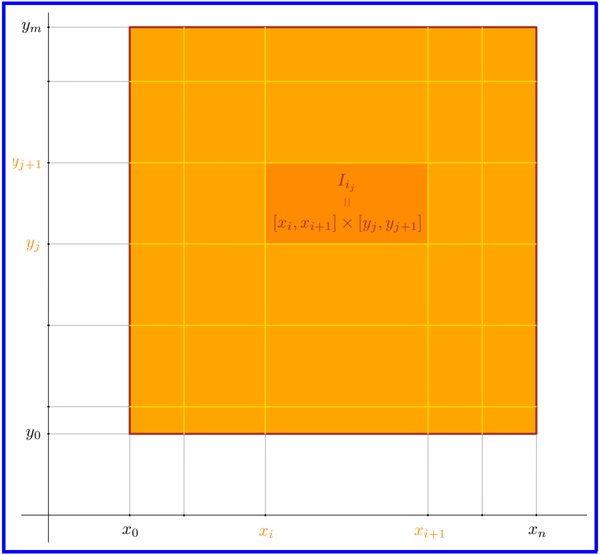


Figure: Partición $\mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2$ de $R = [a, b] \times [c, d]$

Rectángulos y su volumen

Sean $n \in \mathbb{N}^*$ y $R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$, $I_j = [a_j, b_j]$, $j = 1, \ldots, n$.
$\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \times \cdots \times \mathcal{P}_n$ y $R_{i_1,\ldots,i_n} = [x_{1,i_1}, x_{1,i_1+1}] \times \cdots \times [x_{n,i_n}, x_{n,i_n+1}]$,
$i_j = 0, \ldots, k_j - 1$, $j = 1, \ldots, n$

Rectángulos y su volumen

Sean $n \in \mathbb{N}^*$ y $R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$, $I_j = [a_j, b_j]$, $j = 1, \ldots, n$.
$\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \times \cdots \times \mathcal{P}_n$ y $R_{i_1,\ldots,i_n} = [x_{1,i_1}, x_{1,i_1+1}] \times \cdots \times [x_{n,i_n}, x_{n,i_n+1}]$,
$i_j = 0, \ldots, k_j - 1$, $j = 1, \ldots, n$

- Si $\mathsf{v}(R) > 0 \Longrightarrow \mathsf{v}(R_{i_1,\ldots,i_n}) > 0$

Rectángulos y su volumen

Sean $n \in \mathbb{N}^*$ y $R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$, $I_j = [a_j, b_j]$, $j = 1, \ldots, n$.
$\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \times \cdots \times \mathcal{P}_n$ y $R_{i_1,\ldots,i_n} = [x_{1,i_1}, x_{1,i_1+1}] \times \cdots \times [x_{n,i_n}, x_{n,i_n+1}]$,
$i_j = 0, \ldots, k_j - 1$, $j = 1, \ldots, n$

- Si $\mathsf{v}(R) > 0 \Longrightarrow \mathsf{v}(R_{i_1,\ldots,i_n}) > 0$
- $$\boxed{R = \bigcup_{i_1=0}^{k_1-1} \cdots \bigcup_{i_n=0}^{k_n-1} R_{i_1,\ldots,i_n}, \quad \mathring{R}_{i_1,\ldots,i_n} \cap \mathring{R}_{\hat{i}_1,\ldots,\hat{i}_n} = \emptyset}$$

Rectángulos y su volumen

Sean $n \in \mathbb{N}^*$ y $R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$, $I_j = [a_j, b_j]$, $j = 1, \ldots, n$.
$\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \times \cdots \times \mathcal{P}_n$ y $R_{i_1,\ldots,i_n} = [x_{1,i_1}, x_{1,i_1+1}] \times \cdots \times [x_{n,i_n}, x_{n,i_n+1}]$,
$i_j = 0, \ldots, k_j - 1$, $j = 1, \ldots, n$

- Si $\mathsf{v}(R) > 0 \Longrightarrow \mathsf{v}(R_{i_1,\ldots,i_n}) > 0$
- $\boxed{R = \bigcup_{i_1=0}^{k_1-1} \cdots \bigcup_{i_n=0}^{k_n-1} R_{i_1,\ldots,i_n}, \quad \mathring{R}_{i_1,\ldots,i_n} \cap \mathring{R}_{\hat{i}_1,\ldots,\hat{i}_n} = \emptyset}$
- Aditividad Finita: $\mathsf{v}(R) = \sum_{i_1=0}^{k_1-1} \cdots \sum_{i_n=0}^{k_n-1} \mathsf{v}(R_{i_1,\ldots,i_n})$

Rectángulos y su volumen

Sean $n \in \mathbb{N}^*$ y $R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$, $I_j = [a_j, b_j]$, $j = 1, \ldots, n$.
$\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \times \cdots \times \mathcal{P}_n$ y $R_{i_1,\ldots,i_n} = [x_{1,i_1}, x_{1,i_1+1}] \times \cdots \times [x_{n,i_n}, x_{n,i_n+1}]$, $i_j = 0, \ldots, k_j - 1$, $j = 1, \ldots, n$

- Si $\mathsf{v}(R) > 0 \Longrightarrow \mathsf{v}(R_{i_1,\ldots,i_n}) > 0$
- $$\boxed{R = \bigcup_{i_1=0}^{k_1-1} \cdots \bigcup_{i_n=0}^{k_n-1} R_{i_1,\ldots,i_n}, \quad \mathring{R}_{i_1,\ldots,i_n} \cap \mathring{R}_{\hat{i}_1,\ldots,\hat{i}_n} = \emptyset}$$
- Compatibilidad geométrica: $\mathscr{P}(R \times \widehat{R}) = \mathscr{P}(R) \times \mathscr{P}(\widehat{R})$.
  Cada subrectágulo de $\mathcal{P} \in \mathscr{P}(R \times \widehat{R})$ es producto de subrectángulos de $\mathcal{P}' \in \mathscr{P}(R)$ y $\mathcal{P}'' \in \mathscr{P}(\widehat{R})$.

Rectángulos y su volumen

Sean $n \in \mathbb{N}^*$ y $R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$, $I_j = [a_j, b_j]$, $j = 1, \ldots, n$. $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \times \cdots \times \mathcal{P}_n$ y $R_{i_1,\ldots,i_n} = [x_{1,i_1}, x_{1,i_1+1}] \times \cdots \times [x_{n,i_n}, x_{n,i_n+1}]$, $i_j = 0, \ldots, k_j - 1$, $j = 1, \ldots, n$

- Si $\mathsf{v}(R) > 0 \Longrightarrow \mathsf{v}(R_{i_1,\ldots,i_n}) > 0$
- $$R = \bigcup_{i_1=0}^{k_1-1} \cdots \bigcup_{i_n=0}^{k_n-1} R_{i_1,\ldots,i_n}, \quad \mathring{R}_{i_1,\ldots,i_n} \cap \mathring{R}_{\hat{i}_1,\ldots,\hat{i}_n} = \emptyset$$
- Compatibilidad geométrica: $\mathscr{P}(R \times \widehat{R}) = \mathscr{P}(R) \times \mathscr{P}(\widehat{R})$.
- Dadas $\mathcal{P}, \mathcal{P}' \in \mathscr{P}(R)$, diremos que $\mathcal{P}'$ **es más fina que** $\mathcal{P}$, y lo denotaremos como $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}'$, si para cada $j = 1, \ldots, n$, $\mathcal{P}_j \subset \mathcal{P}'_j$; es decir, si $\mathcal{P}'_j$ es más fina que $\mathcal{P}_j$.

Sean $n \in \mathbb{N}^*$ y $R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$, $I_j = [a_j, b_j]$, $j = 1, \ldots, n$.

La relación *más fina que* establece un orden parcial en $\mathscr{P}(R)$. Además:

1. Para cada $\varepsilon > 0$ existe $\mathcal{P} \in \mathscr{P}(R)$ tal que $\delta(\mathcal{P}) \leq \varepsilon$.
2. Si $\mathcal{P}, \mathcal{P}' \in \mathscr{P}(R)$ y $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}'$, entonces $\delta(\mathcal{P}') \leq \delta(\mathcal{P})$.
3. Si $\mathcal{P}, \mathcal{P}' \in \mathscr{P}(R)$ y $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}'$, entonces cada subrectángulo de $\mathcal{P}$ es unión de subrectángulos de $\mathcal{P}'$ de interiores disjuntos.
4. Si $\mathcal{P}, \mathcal{P}' \in \mathscr{P}(R)$, existe $\widehat{\mathcal{P}} \in \mathscr{P}(R)$ tal que $\mathcal{P}, \mathcal{P}' \subset \widehat{\mathcal{P}}$.
5. Si $\widehat{R}$ es un rectángulo n-dimensional cerrado tal que $\widehat{R} \subset R$, entonces existe $\mathcal{P} \in \mathscr{P}(R)$ tal $\widehat{R}$ es un subrectángulo de $\mathcal{P}$. Cada partición de $\widehat{R}$ puede extenderse a una partición de R.

Rectángulos y su volumen

Sean $n \in \mathbb{N}^*$ y $R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$, $I_j = [a_j, b_j]$, $j = 1, \ldots, n$.

- Propiedad de Recubrimiento: Dados $R_1, \ldots, R_k, R$ rectángulos <u>cerrados</u> con $\bigcup_{j=1}^{k} R_j \subset R$, existe $\mathcal{P} \in \mathscr{P}(R)$ tal que para cada $j = 1, \ldots, k$, el rectángulo R_j es unión de subrectángulos de $\mathcal{P}$.

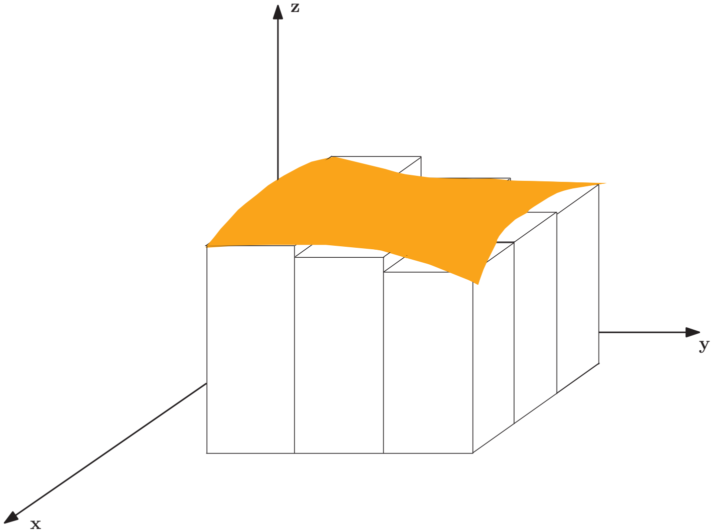
Rectángulos y su volumen

Sean $n \in \mathbb{N}^*$ y $R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$, $I_j = [a_j, b_j]$, $j = 1, \dots, n$.

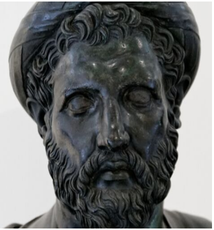
- Propiedad de Recubrimiento: Dados $R_1, \dots, R_k, R$ rectángulos cerrados con $\bigcup_{j=1}^{k} R_j \subset R$, existe $\mathcal{P} \in \mathscr{P}(R)$ tal que para cada $j = 1, \dots, k$, el rectángulo R_j es unión de subrectángulos de $\mathcal{P}$.

- Las propiedades de aditividad y subaditividad finitas son consecuencia de la anterior de recubrimiento.

INTEGRACIÓN DE RIEMANN EN $\mathbb{R}^n$



Los arquitectos



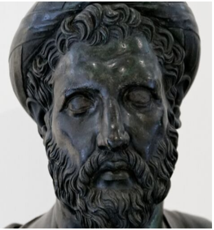
Eudoxo de Cnido
390-337 a.C.

A. Cauchy
1789-1857

B. Riemann
1826-1866

H. Lebesgue
1875-1941

Los arquitectos



Eudoxo de Cnido
390-337 a.C.

A. Cauchy
1789-1857

B. Riemann
1826-1866

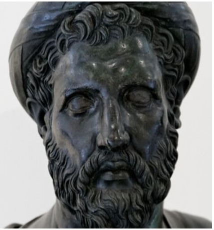
H. Lebesgue
1875-1941

G. Darboux
1842-1917

C. Jordan
1838-1922

G. Fubini
1879-1943

Los arquitectos



Eudoxo de Cnido
390-337 a.C.

A. Cauchy
1789-1857

B. Riemann
1826-1866

H. Lebesgue
1875-1941

J. Fourier
1768-1830

G. Darboux
1842-1917

C. Jordan
1838-1922

G. Fubini
1879-1943

Cuña publicitaria

Cuña publicitaria

El professor Joaquim Bruna (UAB) obrirà el curs 2019-2020 de l'FME dedicat al matemàtic francès Joseph Fourier

L'acte tindrà lloc dimecres 2 d'octubre 2019 a les 12.30 h a la sala d'actes de la Facultat. Tothom hi és convidat, acte obert a tota la comunitat matemàtica i estadística.

Integración de funciones acotadas

Sean $n \in \mathbb{N}^*$ y $R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$, $I_j = [a_j, b_j]$, $j = 1, \ldots, n$.

Integración de funciones acotadas

Sean $n \in \mathbb{N}^*$ y $R = [a_1, b_1]\times\cdots\times[a_n, b_n]$, $I_j = [a_j, b_j]$, $j = 1, \ldots, n$.

Si $f\colon R \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función acotada y $\mathcal{P} \in \mathscr{P}(R)$, para cada subrectángulo $R_{i_1,\ldots,i_n}$, $i_j = 0, \ldots, k_j - 1$, $j = 1, \ldots, n$ consideramos

$$M_{i_1,\ldots,i_n} = \sup_{x\in R_{i_1,\ldots,i_n}} \{f(x)\} \quad \text{y} \quad m_{i_1,\ldots,i_n} = \inf_{x\in R_{i_1,\ldots,i_n}} \{f(x)\}.$$

Las **sumas inferior y superior asociadas a f y a $\mathcal{P}$** son

$$s(f,\mathcal{P}) = \sum_{i_1=0}^{k_1-1}\cdots\sum_{i_n=0}^{k_n-1} m_{i_1,\ldots,i_n}\mathsf{v}(R_{i_1,\ldots,i_n})$$

$$S(f,\mathcal{P}) = \sum_{i_1=0}^{k_1-1}\cdots\sum_{i_n=0}^{k_n-1} M_{i_1,\ldots,i_n}\mathsf{v}(R_{i_1,\ldots,i_n}).$$

Integración de funciones acotadas

Sean $n \in \mathbb{N}^*$ y $R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$, $I_j = [a_j, b_j]$, $j = 1, \ldots, n$.

Si $f \colon R \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función <u>acotada</u> y $\mathcal{P} \in \mathscr{P}(R)$, para cada subrectángulo $R_{i_1,\ldots,i_n}$, $i_j = 0, \ldots, k_j - 1$, $j = 1, \ldots, n$ consideramos

$$M_{i_1,\ldots,i_n} = \sup_{x \in R_{i_1,\ldots,i_n}} \{f(x)\} \quad \text{y} \quad m_{i_1,\ldots,i_n} = \inf_{x \in R_{i_1,\ldots,i_n}} \{f(x)\}.$$

Las **sumas inferior y superior asociadas a f y a $\mathcal{P}$** son

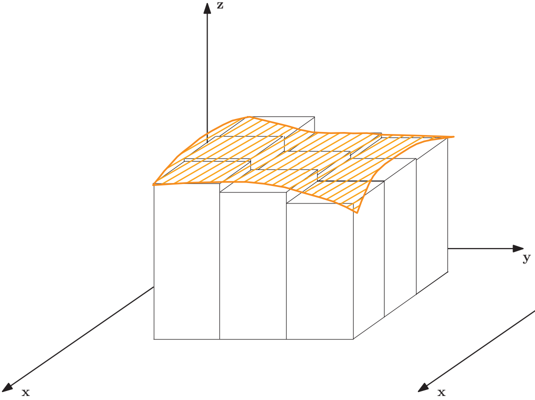
$$s(f, \mathcal{P}) = \sum_{i_1=0}^{k_1-1} \cdots \sum_{i_n=0}^{k_n-1} m_{i_1,\ldots,i_n} \mathsf{v}(R_{i_1,\ldots,i_n})$$

$$S(f, \mathcal{P}) = \sum_{i_1=0}^{k_1-1} \cdots \sum_{i_n=0}^{k_n-1} M_{i_1,\ldots,i_n} \mathsf{v}(R_{i_1,\ldots,i_n}).$$

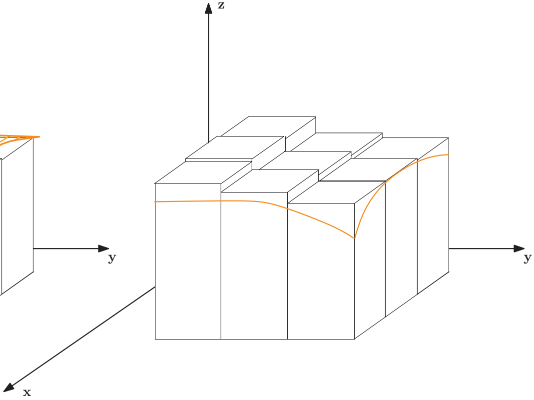
- $\mathsf{v}(R) \inf\{f\} \le s(f, \mathcal{P}) \le S(f, \mathcal{P}) \le \mathsf{v}(R) \sup\{f\}$

Integración de funciones acotadas

Sean $n \in \mathbb{N}^*$ y $R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$, $I_j = [a_j, b_j]$, $j = 1, \ldots, n$.



$s(f, \mathcal{P})$



$S(f, \mathcal{P})$

Integración de funciones acotadas

Sean $n \in \mathbb{N}^*$ y $R = [a_1, b_1]\times\cdots\times[a_n, b_n]$, $I_j = [a_j, b_j]$, $j = 1, \ldots, n$.

- $\Gamma(f) = \big\{ \big(x, f(x)\big) : x \in R \big\}$: Gŕafica de f

Integración de funciones acotadas

Sean $n \in \mathbb{N}^*$ y $R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$, $I_j = [a_j, b_j]$, $j = 1, \ldots, n$.

- $\Gamma(f) = \big\{ \big(x, f(x)\big) : x \in R \big\}$: Gráfica de f

- $$\boxed{S(f,\mathcal{P}) - s(f,\mathcal{P}) = \sum_{i_1=0}^{k_1-1} \cdots \sum_{i_n=0}^{k_n-1} (M_{i_1,\ldots,i_n} - m_{i_1,\ldots,i_n}) \mathsf{v}(R_{i_1,\ldots,i_n})}$$

Integración de funciones acotadas

Sean $n \in \mathbb{N}^*$ y $R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$, $I_j = [a_j, b_j]$, $j = 1, \ldots, n$.

- $\Gamma(f) = \big\{ \big(x, f(x)\big) : x \in R \big\}$: Gráfica de f
- $$\boxed{S(f,\mathcal{P}) - s(f,\mathcal{P}) = \sum_{i_1=0}^{k_1-1} \cdots \sum_{i_n=0}^{k_n-1} (M_{i_1,\ldots,i_n} - m_{i_1,\ldots,i_n}) \mathsf{v}(R_{i_1,\ldots,i_n})}$$
- $\widehat{R}_{i_1,\ldots,i_n} = R_{i_1,\ldots,i_n} \times \big[m_{i_1,\ldots,i_n}, M_{i_1,\ldots,i_n} \big]$

Integración de funciones acotadas

Sean $n \in \mathbb{N}^*$ y $R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$, $I_j = [a_j, b_j]$, $j = 1, \ldots, n$.

- $\Gamma(f) = \big\{ \big(x, f(x)\big) : x \in R \big\}$: Gŕafica de f
- $$\boxed{S(f, \mathcal{P}) - s(f, \mathcal{P}) = \sum_{i_1=0}^{k_1-1} \cdots \sum_{i_n=0}^{k_n-1} (M_{i_1,\ldots,i_n} - m_{i_1,\ldots,i_n}) \mathsf{v}(R_{i_1,\ldots,i_n})}$$
- $\widehat{R}_{i_1,\ldots,i_n} = \underbrace{R_{i_1,\ldots,i_n}}_{Base} \times \underbrace{\big[m_{i_1,\ldots,i_n}, M_{i_1,\ldots,i_n}\big]}_{Altura}$

Integración de funciones acotadas

Sean $n \in \mathbb{N}^*$ y $R = [a_1, b_1]\times\cdots\times[a_n, b_n]$, $I_j = [a_j, b_j]$, $j = 1, \ldots, n$.

- $\Gamma(f) = \big\{\big(x, f(x)\big) : x \in R\big\}$: Gŕafica de f
- $$\boxed{S(f,\mathcal{P}) - s(f,\mathcal{P}) = \sum_{i_1=0}^{k_1-1}\cdots\sum_{i_n=0}^{k_n-1}(M_{i_1,\ldots,i_n} - m_{i_1,\ldots,i_n})\mathsf{v}(R_{i_1,\ldots,i_n})}$$
- $\widehat{R}_{i_1,\ldots,i_n} = \underbrace{R_{i_1,\ldots,i_n}}_{Base} \times \underbrace{\big[m_{i_1,\ldots,i_n}, M_{i_1,\ldots,i_n}\big]}_{Altura}$
- $\mathsf{v}(\widehat{R}_{i_1,\ldots,i_n}) = (M_{i_1,\ldots,i_n} - m_{i_1,\ldots,i_n})\mathsf{v}(R_{i_1,\ldots,i_n})$

Integración de funciones acotadas

Sean $n \in \mathbb{N}^*$ y $R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$, $I_j = [a_j, b_j]$, $j = 1, \ldots, n$.

- $\Gamma(f) = \{(x, f(x)) : x \in R\}$: Gŕafica de f
- $$\boxed{S(f, \mathcal{P}) - s(f, \mathcal{P}) = \sum_{i_1=0}^{k_1-1} \cdots \sum_{i_n=0}^{k_n-1} (M_{i_1,\ldots,i_n} - m_{i_1,\ldots,i_n}) \mathsf{v}(R_{i_1,\ldots,i_n})}$$
- $\widehat{R}_{i_1,\ldots,i_n} = \underbrace{R_{i_1,\ldots,i_n}}_{Base} \times \underbrace{[m_{i_1,\ldots,i_n}, M_{i_1,\ldots,i_n}]}_{Altura}$
- $\mathsf{v}(\widehat{R}_{i_1,\ldots,i_n}) = (M_{i_1,\ldots,i_n} - m_{i_1,\ldots,i_n}) \mathsf{v}(R_{i_1,\ldots,i_n})$
- $\Gamma(f) \subset \bigcup_{i_1=0}^{k_1-1} \cdots \bigcup_{i_n=0}^{k_n-1} \widehat{R}_{i_1,\ldots,i_n}$

Integración de funciones acotadas

Sean $n \in \mathbb{N}^*$ y $R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$, $I_j = [a_j, b_j]$, $j = 1, \ldots, n$.

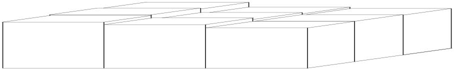
- $\Gamma(f) = \Big\{ \big(x, f(x)\big) : x \in R \Big\}$: Gráfica de f

- $$\boxed{S(f, \mathcal{P}) - s(f, \mathcal{P}) = \sum_{i_1=0}^{k_1-1} \cdots \sum_{i_n=0}^{k_n-1} (M_{i_1,\ldots,i_n} - m_{i_1,\ldots,i_n}) \mathsf{v}(R_{i_1,\ldots,i_n})}$$

- $\widehat{R}_{i_1,\ldots,i_n} = \underbrace{R_{i_1,\ldots,i_n}}_{Base} \times \underbrace{\big[m_{i_1,\ldots,i_n}, M_{i_1,\ldots,i_n} \big]}_{Altura}$

- $\mathsf{v}(\widehat{R}_{i_1,\ldots,i_n}) = (M_{i_1,\ldots,i_n} - m_{i_1,\ldots,i_n}) \mathsf{v}(R_{i_1,\ldots,i_n})$

- $\Gamma(f) \subset \bigcup_{i_1=0}^{k_1-1} \cdots \bigcup_{i_n=0}^{k_n-1} \widehat{R}_{i_1,\ldots,i_n}$



Sean $n \in \mathbb{N}^*$ y $R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$, $I_j = [a_j, b_j]$, $j = 1, \ldots, n$.

Si $f \colon R \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función <u>acotada</u> y $\mathcal{P} \in \mathscr{P}(R)$, para cada subrectángulo $R_{i_1,\ldots,i_n}$, $i_j = 0, \ldots, k_j - 1$, $j = 1, \ldots, n$ consideramos

$$M_{i_1,\ldots,i_n} = \sup_{x \in R_{i_1,\ldots,i_n}} \{f(x)\} \quad \text{y} \quad m_{i_1,\ldots,i_n} = \inf_{x \in R_{i_1,\ldots,i_n}} \{f(x)\}.$$

Las **sumas inferior y superior asociadas a f y a $\mathcal{P}$** son

$$s(f, \mathcal{P}) = \sum_{i_1=0}^{k_1-1} \cdots \sum_{i_n=0}^{k_n-1} m_{i_1,\ldots,i_n} \mathsf{v}(R_{i_1,\ldots,i_n})$$

$$S(f, \mathcal{P}) = \sum_{i_1=0}^{k_1-1} \cdots \sum_{i_n=0}^{k_n-1} M_{i_1,\ldots,i_n} \mathsf{v}(R_{i_1,\ldots,i_n}).$$

Integración de funciones acotadas

Sean $n \in \mathbb{N}^*$ y $R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$, $I_j = [a_j, b_j]$, $j = 1, \ldots, n$.

Si $f\colon R \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función <u>acotada</u> y $\mathcal{P} \in \mathscr{P}(R)$, para cada subrectángulo $R_{i_1,\ldots,i_n}$, $i_j = 0, \ldots, k_j - 1$, $j = 1, \ldots, n$ consideramos

$$M_{i_1,\ldots,i_n} = \sup_{x \in R_{i_1,\ldots,i_n}} \{f(x)\} \quad \text{y} \quad m_{i_1,\ldots,i_n} = \inf_{x \in R_{i_1,\ldots,i_n}} \{f(x)\}.$$

Las **sumas inferior y superior asociadas a f y a $\mathcal{P}$** son

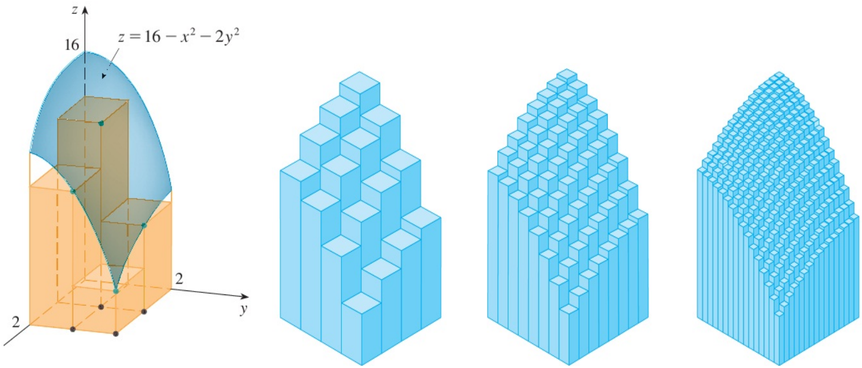
$$s(f, \mathcal{P}) = \sum_{i_1=0}^{k_1-1} \cdots \sum_{i_n=0}^{k_n-1} m_{i_1,\ldots,i_n} \mathsf{v}(R_{i_1,\ldots,i_n})$$

$$S(f, \mathcal{P}) = \sum_{i_1=0}^{k_1-1} \cdots \sum_{i_n=0}^{k_n-1} M_{i_1,\ldots,i_n} \mathsf{v}(R_{i_1,\ldots,i_n}).$$

- Si $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}' \Longrightarrow s(f, \mathcal{P}) \le s(f, \mathcal{P}') \le S(f, \mathcal{P}') \le S(f, \mathcal{P})$

Integración de funciones acotadas

Sean $n \in \mathbb{N}^*$ y $R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$, $I_j = [a_j, b_j]$, $j = 1, \ldots, n$.



Sumas inferiores de cuatro particiones cada vez más finas

Imágenes: Hermes Pantoja, UNMSM

Integración de funciones acotadas

Sean $n \in \mathbb{N}^*$ y $R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$, $I_j = [a_j, b_j]$, $j = 1, \ldots, n$.

- Si $f\colon R \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función <u>acotada</u>

$$\underline{\int}_R f = \sup_{\mathcal{P} \in \mathscr{P}(R)} s(f, \mathcal{P}) \quad \text{y} \quad \overline{\int}_R f = \inf_{\mathcal{P} \in \mathscr{P}(R)} S(f, \mathcal{P}).$$

Integración de funciones acotadas

Sean $n \in \mathbb{N}^*$ y $R = [a_1, b_1]\times\cdots\times[a_n, b_n]$, $I_j = [a_j, b_j]$, $j = 1, \dots, n$.

- Si $f\colon R \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función acotada

$$\underline{\int_R} f = \sup_{\mathcal{P}\in\mathscr{P}(R)} s(f,\mathcal{P}) \quad \text{y} \quad \overline{\int_R} f = \inf_{\mathcal{P}\in\mathscr{P}(R)} S(f,\mathcal{P}).$$

- $$\mathsf{v}(R)\inf\{f\} \le s(f,\mathcal{P}) \le \underline{\int_R} f \le \overline{\int_R} f \le S(f,\mathcal{P}) \le \mathsf{v}(R)\sup\{f\}$$

Sean $n \in \mathbb{N}^*$ y $R = [a_1, b_1]\times\cdots\times[a_n, b_n]$, $I_j = [a_j, b_j]$, $j = 1, \dots, n$.

- Si $f\colon R \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función acotada

$$\underline{\int}_R f = \sup_{\mathcal{P}\in\mathscr{P}(R)} s(f,\mathcal{P}) \quad \text{y} \quad \overline{\int}_R f = \inf_{\mathcal{P}\in\mathscr{P}(R)} S(f,\mathcal{P}).$$

- $$\mathsf{v}(R)\inf\{f\} \le s(f,\mathcal{P}) \le \underline{\int}_R f \le \overline{\int}_R f \le S(f,\mathcal{P}) \le \mathsf{v}(R)\sup\{f\}$$

- f es Integrable Riemann, si $\underline{\int}_R f = \overline{\int}_R f$ y a ese valor se lo denota por $\int_R f$, $\int_R f(x)dx$, $\int_R f d\boldsymbol{V}$ o incluso por $\int_{a_1}^{b_1}\cdots\int_{a_n}^{b_n} f(x_1,\dots,x_n)dx_1\cdots dx_n$.

Integración de funciones acotadas

Sean $n \in \mathbb{N}^*$ y $R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$, $I_j = [a_j, b_j]$, $j = 1, \ldots, n$.

- Si $f\colon R \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función acotada
$$\underline{\int_R} f = \sup_{\mathcal{P} \in \mathscr{P}(R)} s(f, \mathcal{P}) \quad \text{y} \quad \overline{\int_R} f = \inf_{\mathcal{P} \in \mathscr{P}(R)} S(f, \mathcal{P}).$$

- $\mathsf{v}(R) \inf\{f\} \leq s(f, \mathcal{P}) \leq \underline{\int_R} f \leq \overline{\int_R} f \leq S(f, \mathcal{P}) \leq \mathsf{v}(R) \sup\{f\}$

- f es Integrable Riemann, si $\underline{\int_R} f = \overline{\int_R} f$ y a ese valor se lo denota por $\displaystyle\int_R f$.

  El conjunto de funciones integrables Riemann en R es $\mathscr{R}(R)$.

Integración de funciones acotadas

Sean $n \in \mathbb{N}^*$ y $R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$, $I_j = [a_j, b_j]$, $j = 1, \ldots, n$ y $f\colon R \longrightarrow \mathbb{R}$ una función <u>acotada</u>.

- $f \in \mathscr{R}(R)$ sii $\displaystyle \underline{\int}_R f = \sup_{\mathcal{P} \in \mathscr{P}(R)} s(f, \mathcal{P}) = \inf_{\mathcal{P} \in \mathscr{P}(R)} S(f, \mathcal{P}) = \overline{\int}_R f$.

Integración de funciones acotadas

Sean $n \in \mathbb{N}^*$ y $R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$, $I_j = [a_j, b_j]$, $j = 1, \dots, n$ y $f \colon R \longrightarrow \mathbb{R}$ una función acotada.

- $f \in \mathscr{R}(R)$ sii $\displaystyle\underline{\int_R} f = \sup_{\mathcal{P} \in \mathscr{P}(R)} s(f, \mathcal{P}) = \inf_{\mathcal{P} \in \mathscr{P}(R)} S(f, \mathcal{P}) = \overline{\int_R} f$.

- Para cada rectángulo $\widehat{R}$ tal que $\overset{\circ}{R} \subset \widehat{R} \subset R$, $f \in \mathscr{R}(R)$ sii $f \in \mathscr{R}(\widehat{R})$ y además $\displaystyle\int_{\widehat{R}} f = \int_R f$ (y por tanto, $\displaystyle\int_{\partial R} f = 0$).

Integración de funciones acotadas

Sean $n \in \mathbb{N}^*$ y $R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$, $I_j = [a_j, b_j]$, $j = 1, \ldots, n$ y $f \colon R \longrightarrow \mathbb{R}$ una función acotada.

- $f \in \mathscr{R}(R)$ sii $\displaystyle\underline{\int}_R f = \sup_{\mathcal{P} \in \mathscr{P}(R)} s(f, \mathcal{P}) = \inf_{\mathcal{P} \in \mathscr{P}(R)} S(f, \mathcal{P}) = \overline{\int}_R f$.

Criterio de Darboux de integrabilidad

$f \in \mathscr{R}(R)$ sii para cada $\varepsilon > 0$ existe $\mathcal{P} \in \mathscr{P}(R)$ tal que

$$S(f, \mathcal{P}) - s(f, \mathcal{P}) \leq \varepsilon$$

Integración de funciones acotadas

Sean $n \in \mathbb{N}^*$ y $R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$, $I_j = [a_j, b_j]$, $j = 1, \ldots, n$ y $f \colon R \longrightarrow \mathbb{R}$ una función acotada.

- $f \in \mathscr{R}(R)$ sii $\displaystyle\underline{\int}_R f = \sup_{\mathcal{P} \in \mathscr{P}(R)} s(f, \mathcal{P}) = \inf_{\mathcal{P} \in \mathscr{P}(R)} S(f, \mathcal{P}) = \overline{\int}_R f.$

Criterio de Darboux de integrabilidad

$f \in \mathscr{R}(R)$ sii para cada $\varepsilon > 0$ existe $\mathcal{P} \in \mathscr{P}(R)$ tal que

$$S(f, \mathcal{P}) - s(f, \mathcal{P}) \leq \varepsilon$$

- $\displaystyle\Gamma(f) \subset \bigcup_{i_1=0}^{k_1-1} \cdots \bigcup_{i_n=0}^{k_n-1} \widehat{R}_{i_1,\ldots,i_n}$ y $\displaystyle\sum_{i_1=0}^{k_1-1} \cdots \sum_{i_n=0}^{k_n-1} \mathsf{v}(\widehat{R}_{i_1,\ldots,i_n}) \leq \varepsilon$

Integración de funciones acotadas

Sean $n \in \mathbb{N}^*$ y $R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$, $I_j = [a_j, b_j]$, $j = 1, \ldots, n$ y $f \colon R \longrightarrow \mathbb{R}$ una función acotada.

- $f \in \mathscr{R}(R)$ sii $\underline{\int_R} f = \sup\limits_{\mathcal{P} \in \mathscr{P}(R)} s(f, \mathcal{P}) = \inf\limits_{\mathcal{P} \in \mathscr{P}(R)} S(f, \mathcal{P}) = \overline{\int_R} f.$

Criterio de Darboux de integrabilidad

$f \in \mathscr{R}(R)$ sii para cada $\varepsilon > 0$ existe $\mathcal{P} \in \mathscr{P}(R)$ tal que

$$S(f, \mathcal{P}) - s(f, \mathcal{P}) \leq \varepsilon$$

- $f \in \mathscr{R}(R)$ sii existe $\{\mathcal{P}_k\}_{k=1}^{\infty}$ con $\lim\limits_{k \to \infty} \big(S(f, \mathcal{P}_k) - s(f, \mathcal{P}_k)\big) = 0.$

Integración de funciones acotadas

Sean $n \in \mathbb{N}^*$ y $R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$, $I_j = [a_j, b_j]$, $j = 1, \dots, n$ y $f\colon R \longrightarrow \mathbb{R}$ una función acotada.

- $f \in \mathscr{R}(R)$ sii $\displaystyle\underline{\int_R} f = \sup_{\mathcal{P} \in \mathscr{P}(R)} s(f, \mathcal{P}) = \inf_{\mathcal{P} \in \mathscr{P}(R)} S(f, \mathcal{P}) = \overline{\int_R} f.$

Criterio de Darboux de integrabilidad

$f \in \mathscr{R}(R)$ sii para cada $\varepsilon > 0$ existe $\mathcal{P} \in \mathscr{P}(R)$ tal que

$$S(f, \mathcal{P}) - s(f, \mathcal{P}) \leq \varepsilon$$

- $f \in \mathscr{R}(R)$ sii existe $\{\mathcal{P}_k\}_{k=1}^{\infty}$ con $\displaystyle\lim_{k \to \infty} \big(S(f, \mathcal{P}_k) - s(f, \mathcal{P}_k)\big) = 0.$
- Entonces $\displaystyle\int_R f = \lim_{k \to \infty} S(f, \mathcal{P}_k) = \lim_{k \to \infty} s(f, \mathcal{P}_k).$

Integración de funciones acotadas

Sean $n \in \mathbb{N}^*$ y $R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$, $I_j = [a_j, b_j]$, $j = 1, \ldots, n$ y $f \colon R \longrightarrow \mathbb{R}$ una función acotada.

- $\inf\limits_{x \in R}\{f(x)\}\mathsf{v}(R) \leq \underline{\int}_R f \leq \overline{\int}_R f \leq \sup\limits_{x \in R}\{f\}\mathsf{v}(R).$

Integración de funciones acotadas

Sean $n \in \mathbb{N}^*$ y $R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$, $I_j = [a_j, b_j]$, $j = 1, \ldots, n$ y $f\colon R \longrightarrow \mathbb{R}$ una función acotada.

- $\inf\limits_{x \in R}\{f(x)\}\mathsf{v}(R) \leq \underline{\int}_R f \leq \overline{\int}_R f \leq \sup\limits_{x \in R}\{f\}\mathsf{v}(R).$

- 1. Si $f \in \mathscr{R}(R)$, entonces $m_R\mathsf{v}(R) \leq \displaystyle\int_R f \leq M_R\mathsf{v}(R)$.
  2. Si $\mathsf{v}(R) = 0$, entonces toda función acotada es integrable y su integral es nula.
  3. Si f es constante, $f(x) = \alpha$ para cada $x \in R$, entonces $f \in \mathscr{R}(R)$ y $\displaystyle\int_R f = \alpha\mathsf{v}(R)$.
  4. Si $f \in \mathscr{R}(R)$ y $f(x) \geq 0$ para cada $x \in R$, entonces $0 \leq \displaystyle\int_R f$.

Integración de funciones acotadas

Sean $n \in \mathbb{N}^*$ y $R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$, $I_j = [a_j, b_j]$, $j = 1, \ldots, n$ y $f \colon R \longrightarrow \mathbb{R}$ una función <u>acotada</u>.

Criterio de Darboux de integrabilidad

$f \in \mathscr{R}(R)$ sii para cada $\varepsilon > 0$ existe $\mathcal{P} \in \mathscr{P}(R)$ tal que

$$S(f, \mathcal{P}) - s(f, \mathcal{P}) \leq \varepsilon$$

- $f \in \mathscr{R}(R)$ sii existe $\{\mathcal{P}_k\}_{k=1}^{\infty}$ con $\lim\limits_{k \to \infty} \big(S(f, \mathcal{P}_k) - s(f, \mathcal{P}_k) \big) = 0$.

Integración de funciones acotadas

Sean $n \in \mathbb{N}^*$ y $R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$, $I_j = [a_j, b_j]$, $j = 1, \ldots, n$ y $f\colon R \longrightarrow \mathbb{R}$ una función acotada.

Criterio de Darboux de integrabilidad

$f \in \mathscr{R}(R)$ sii para cada $\varepsilon > 0$ existe $\mathcal{P} \in \mathscr{P}(R)$ tal que

$$S(f, \mathcal{P}) - s(f, \mathcal{P}) \le \varepsilon$$

- $f \in \mathscr{R}(R)$ sii existe $\{\mathcal{P}_k\}_{k=1}^{\infty}$ con $\lim\limits_{k\to\infty} \big(S(f, \mathcal{P}_k) - s(f, \mathcal{P}_k)\big) = 0$.

- Si $f \in \mathscr{C}(R)$, entonces $f \in \mathscr{R}(R)$ y además, **para cada sucesión $\{\mathcal{P}_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathscr{P}(R)$ tal que $\lim\limits_{k\to\infty} \delta(\mathcal{P}_k) = 0$** se satisface que

$$\int_R f = \lim_{k\to\infty} S(f, \mathcal{P}_k) = \lim_{k\to\infty} s(f, \mathcal{P}_k).$$

Propiedades de la Integral de Riemann

1. Linealidad: $\mathscr{R}(R)$ es un espacio vectorial real que contiene a $\mathscr{C}(R)$ y la integral un funcional lineal sobre él: Si $f, g \in \mathscr{R}(R)$, para cada $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\alpha f + \beta g \in \mathscr{R}(R)$ y $\displaystyle\int_R (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_R f + \beta \int_R g$.

Propiedades de la Integral de Riemann

1. Linealidad: $\mathscr{R}(R)$ es un espacio vectorial real que contiene a $\mathscr{C}(R)$ y la integral un funcional lineal sobre él: Si $f, g \in \mathscr{R}(R)$, para cada $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\alpha f + \beta g \in \mathscr{R}(R)$ y $\displaystyle\int_R (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_R f + \beta \int_R g$.

   Además, sobre el conjunto de funciones constantes en R, la integral coincide con la multiplicación por $\mathsf{v}(R)$.

Propiedades de la Integral de Riemann

1. **Linealidad:** $\mathscr{R}(R)$ es un espacio vectorial real que contiene a $\mathscr{C}(R)$ y la integral un funcional lineal sobre él.
2. **Estabilidad**: Cualquier operación continua con una función integrable Riemann en R es una función integrable Riemann en R

Propiedades de la Integral de Riemann

1. Linealidad: $\mathscr{R}(R)$ es un espacio vectorial real que contiene a $\mathscr{C}(R)$ y la integral un funcional lineal sobre él.
2. Estabilidad: Cualquier operación continua con una función integrable Riemann en R es una función integrable Riemann en R; es decir, si $\mathscr{O}\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua, entonces para cada $f \in \mathscr{R}(R)$ se satisface que $\mathscr{O}(f) \in \mathscr{R}(R)$.

Propiedades de la Integral de Riemann

1. Linealidad: $\mathscr{R}(R)$ es un espacio vectorial real que contiene a $\mathscr{C}(R)$ y la integral un funcional lineal sobre él.

2. Estabilidad: Cualquier operación continua con una función integrable Riemann en R es una función integrable Riemann en R; es decir, si $\mathscr{O}\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es <u>continua</u>, entonces para cada $f \in \mathscr{R}(R)$ se satisface que $\mathscr{O}(f) \in \mathscr{R}(R)$. En particular, $|f|, f^2 \in \mathscr{R}(R)$ cuando $f \in \mathscr{R}(R)$ y $fg, \max\{f,g\}, \min\{f,g\} \in \mathscr{R}(R)$, para cada $f, g \in \mathscr{R}(R)$.

Propiedades de la Integral de Riemann

1. Linealidad: $\mathscr{R}(R)$ es un espacio vectorial real que contiene a $\mathscr{C}(R)$ y la integral un funcional lineal sobre él.
2. Estabilidad: Cualquier operación continua con una función integrable Riemann en R es una función integrable Riemann en R.
3. Positividad: La integral es un funcional positivo sobre $\mathscr{R}(R)$

Propiedades de la Integral de Riemann

1. Linealidad: $\mathscr{R}(R)$ es un espacio vectorial real que contiene a $\mathscr{C}(R)$ y la integral un funcional lineal sobre él.
2. Estabilidad: Cualquier operación continua con una función integrable Riemann en R es una función integrable Riemann en R.
3. Positividad: La integral es un funcional positivo sobre $\mathscr{R}(R)$; es decir, si $f \in \mathscr{R}(R)$ y $f(x) \geq 0$ para todo $x \in R$, entonces $\displaystyle\int_R f \geq 0$.

Propiedades de la Integral de Riemann

1. Linealidad: $\mathscr{R}(R)$ es un espacio vectorial real que contiene a $\mathscr{C}(R)$ y la integral un funcional lineal sobre él.
2. Estabilidad: Cualquier operación continua con una función integrable Riemann en R es una función integrable Riemann en R.
3. Positividad: La integral es un funcional positivo sobre $\mathscr{R}(R)$.
4. Monotonía: Si $f, g \in \mathscr{R}(R)$ y $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in R$, entonces $\displaystyle\int_R f \leq \int_R g$.

Propiedades de la Integral de Riemann

1. Linealidad: $\mathscr{R}(R)$ es un espacio vectorial real que contiene a $\mathscr{C}(R)$ y la integral un funcional lineal sobre él.
2. Estabilidad: Cualquier operación continua con una función integrable Riemann en R es una función integrable Riemann en R.
3. Positividad: La integral es un funcional positivo sobre $\mathscr{R}(R)$.
4. Monotonía: Si $f, g \in \mathscr{R}(R)$ y $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in R$, entonces $\displaystyle\int_R f \leq \int_R g$. Equivalentemente, si $f \in \mathscr{R}(R)$, entonces $\displaystyle\left|\int_R f\right| \leq \int_R |f|$.

Propiedades de la Integral de Riemann

1. Linealidad: $\mathscr{R}(R)$ es un espacio vectorial real que contiene a $\mathscr{C}(R)$ y la integral un funcional lineal sobre él.
2. Estabilidad: Cualquier operación continua con una función integrable Riemann en R es una función integrable Riemann en R.
3. Positividad: La integral es un funcional positivo sobre $\mathscr{R}(R)$.
4. Anulación: Si $\mathrm{v}(R) = 0$, entonces toda función acotada es integrable en R y su integral es nula.

Propiedades de la Integral de Riemann

1. Linealidad: $\mathscr{R}(R)$ es un espacio vectorial real que contiene a $\mathscr{C}(R)$ y la integral un funcional lineal sobre él.
2. Estabilidad: Cualquier operación continua con una función integrable Riemann en R es una función integrable Riemann en R.
3. Positividad: La integral es un funcional positivo sobre $\mathscr{R}(R)$.
4. Anulación: Si $\mathrm{v}(R) = 0$, entonces toda función acotada es integrable en R y su integral es nula.

   Si $\boxed{\mathrm{v}(R) > 0}$ y $f \in \mathscr{R}(R)$ es tal que $f \geq 0$ en R y $\displaystyle\int_R f = 0$, entonces f es nula en cada punto en el que es continua.

Propiedades de la Integral de Riemann

1. Linealidad: $\mathscr{R}(R)$ es un espacio vectorial real que contiene a $\mathscr{C}(R)$ y la integral un funcional lineal sobre él.
2. Estabilidad: Cualquier operación continua con una función integrable Riemann en R es una función integrable Riemann en R.
3. Positividad: La integral es un funcional positivo sobre $\mathscr{R}(R)$.
4. Anulación: Si $\mathrm{v}(R) = 0$, entonces toda función acotada es integrable en R y su integral es nula.

   Si $\boxed{\mathrm{v}(R) > 0}$ y $f \in \mathscr{R}(R)$ es tal que $f \geq 0$ en R y $\displaystyle\int_R f = 0$, entonces f es nula en cada punto en el que es continua.

   En particular, si $f \in \mathscr{C}(R)$ es tal que $f \geq 0$ en R, entonces $\displaystyle\int_R f = 0$ sii $f = 0$ en R.

Propiedades de la Integral de Riemann

1. Linealidad: $\mathscr{R}(R)$ es un espacio vectorial real que contiene a $\mathscr{C}(R)$ y la integral un funcional lineal sobre él.
2. Estabilidad: Cualquier operación continua con una función integrable Riemann en R es una función integrable Riemann en R.
3. Positividad: La integral es un funcional positivo sobre $\mathscr{R}(R)$.
4. Anulación: Si $\mathrm{v}(R) > 0$, $f \in \mathscr{R}(R)$, $f \geq 0$ en R y $\int_R f = 0$, entonces f es nula en cada punto en el que es continua.
5. Aditividad respecto del rectángulo de integración: Consideremos $R_1, \ldots, R_m$ rectángulos cerrados tales que $R = \bigcup\limits_{j=1}^{m} R_j$ y $\mathring{R}_i \cap \mathring{R}_j = \emptyset$ si $i \neq j$. Si $f\colon R \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función acotada, entonces $f \in \mathscr{R}(R)$ sii $f_{|R_j} \in \mathscr{R}(R_j)$, para cada $j = 1, \ldots, m$ y en ese caso,
$$\int_R f = \int_{R_1} f + \cdots + \int_{R_m} f.$$

Propiedades de la Integral de Riemann

1. Linealidad: $\mathscr{R}(R)$ es un espacio vectorial real que contiene a $\mathscr{C}(R)$ y la integral un funcional lineal sobre él.
2. Estabilidad: Cualquier operación continua con una función integrable Riemann en R es una función integrable Riemann en R.
3. Positividad: La integral es un funcional positivo sobre $\mathscr{R}(R)$.
4. Anulación: Si $\mathrm{v}(R) > 0$, $f \in \mathscr{R}(R)$, $f \geq 0$ en R y $\int_R f = 0$, entonces f es nula en cada punto en el que es continua.
5. Aditividad respecto del rectángulo: $R_1, \ldots, R_m$ rectángulos cerrados tales que $R = \bigcup_{j=1}^{m} R_j$ y $\overset{\circ}{R}_i \cap \overset{\circ}{R}_j = \emptyset$ si $i \neq j$. Entonces $f \in \mathscr{R}(R)$ sii $f_{|_{R_j}} \in \mathscr{R}(R_j)$, $1 \leq j \leq m$ y $\int_R f = \int_{R_1} f + \cdots + \int_{R_m} f$.

   Aditividad finita: $\mathrm{v}(R) = \sum_{j=1}^{m} \mathrm{v}(R_j)$.

Propiedades de la Integral de Riemann

1. Linealidad: $\mathscr{R}(R)$ es un espacio vectorial real que contiene a $\mathscr{C}(R)$ y la integral un funcional lineal sobre él.
2. Estabilidad: Cualquier operación continua con una función integrable Riemann en R es una función integrable Riemann en R.
3. Positividad: La integral es un funcional positivo sobre $\mathscr{R}(R)$.
4. Anulación: Si $\mathrm{v}(R) > 0$, $f \in \mathscr{R}(R)$, $f \geq 0$ en R y $\int_R f = 0$, entonces f es nula en cada punto en el que es continua.
5. Aditividad respecto del rectángulo: $R_1, \ldots, R_m$ rectángulos cerrados tales que $R = \bigcup_{j=1}^{m} R_j$ y $\overset{\circ}{R}_i \cap \overset{\circ}{R}_j = \emptyset$ si $i \neq j$. Entonces $f \in \mathscr{R}(R)$ sii $f_{|R_j} \in \mathscr{R}(R_j)$, $1 \leq j \leq m$ y $\int_R f = \int_{R_1} f + \cdots + \int_{R_m} f$.
6. Continuidad respecto del integrando: Si $f, g \in \mathscr{R}(R)$ son tales que $|f(x) - g(x)| \leq \varepsilon$ para cada $x \in R$, entonces $\left| \int_R f - \int_R g \right| \leq \varepsilon \mathrm{v}(R)$.

Propiedades de la Integral de Riemann

1. Linealidad: $\mathscr{R}(R)$ es un espacio vectorial real que contiene a $\mathscr{C}(R)$ y la integral un funcional lineal sobre él.
2. Estabilidad: Cualquier operación continua con una función integrable Riemann en R es una función integrable Riemann en R.
3. Positividad: La integral es un funcional positivo sobre $\mathscr{R}(R)$.
4. Anulación: Si $\mathrm{v}(R) > 0$, $f \in \mathscr{R}(R)$, $f \geq 0$ en R y $\int_R f = 0$, entonces f es nula en cada punto en el que es continua.
5. Aditividad respecto del rectángulo: $R_1, \ldots, R_m$ rectángulos cerrados tales que $R = \bigcup\limits_{j=1}^{m} R_j$ y $\overset{\circ}{R}_i \cap \overset{\circ}{R}_j = \emptyset$ si $i \neq j$. Entonces $f \in \mathscr{R}(R)$ sii $f_{|R_j} \in \mathscr{R}(R_j)$, $1 \leq j \leq m$ y $\int_R f = \int_{R_1} f + \cdots + \int_{R_m} f$.
6. Continuidad respecto del integrando: Si $\{f_m\}_{m=1}^{\infty} \subset \mathscr{R}(R)$ converge uniformemente hacia $f\colon R \longrightarrow \mathbb{R}$, entonces $f \in \mathscr{R}(R)$ y además,

$$\lim_{m\to\infty} \int_R f_m = \int_R f.$$

Propiedades de la Integral de Riemann

Sean $n \in \mathbb{N}^*$ y $R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$, $I_j = [a_j, b_j]$, $j = 1, \ldots, n$ y $f \colon R \longrightarrow \mathbb{R}$ una función acotada.

Propiedades de la Integral de Riemann

Sean $n \in \mathbb{N}^*$ y $R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$, $I_j = [a_j, b_j]$, $j = 1, \ldots, n$ y $f\colon R \longrightarrow \mathbb{R}$ una función acotada.

- Estabilidad geométrica de la integral: Sean $\widehat{R}$ un rectángulo con $R \subset \widehat{R}$ y $f^*\colon \widehat{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como $f^* = f$ en R y $f^* = 0$ en $\widehat{R} \setminus R$.

Propiedades de la Integral de Riemann

Sean $n \in \mathbb{N}^*$ y $R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$, $I_j = [a_j, b_j]$, $j = 1, \ldots, n$ y $f\colon R \longrightarrow \mathbb{R}$ una función acotada.

- Estabilidad geométrica de la integral: Sean $\widehat{R}$ un rectángulo con $R \subset \widehat{R}$ y $f^*\colon \widehat{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como $f^* = f$ en R y $f^* = 0$ en $\widehat{R} \setminus R$.

▶ $f^* \in \mathscr{R}(\widehat{R})$ sii $f \in \mathscr{R}(R)$ y en este caso $\displaystyle\int_R f^* = \int_{\widehat{R}} f$.

Propiedades de la Integral de Riemann

Sean $n \in \mathbb{N}^*$ y $R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$, $I_j = [a_j, b_j]$, $j = 1, \ldots, n$ y $f \colon R \longrightarrow \mathbb{R}$ una función acotada.

- Estabilidad geométrica de la integral: Sean $\widehat{R}$ un rectángulo con $R \subset \widehat{R}$ y $f^* \colon \widehat{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como $f^* = f$ en R y $f^* = 0$ en $\widehat{R} \setminus R$.

▶ $f^* \in \mathscr{R}(\widehat{R})$ sii $f \in \mathscr{R}(R)$ y en este caso $\displaystyle\int_R f^* = \int_{\widehat{R}} f$.

▶ Sean $f, g \colon R \longrightarrow \mathbb{R}$ acotadas y $A = \{x \in R : f(x) \neq g(x)\}$. Si A está contenido en la frontera de algún subrectángulo de R, entonces $f \in \mathscr{R}(R)$ sii $g \in \mathscr{R}(R)$ y en ese caso, $\displaystyle\int_R f = \int_R g$.

Propiedades de la Integral de Riemann

Sea $n \in \mathbb{N}^*$ y $R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$, $I_j = [a_j, b_j]$, $j = 1, \dots, n$.

Supongamos que R es no degenerado; es decir, $\mathsf{v}(R) > 0$

- $\mathscr{R}(R) \setminus \mathscr{C}(R) \neq \emptyset$

Propiedades de la Integral de Riemann

Sea $n \in \mathbb{N}^*$ y $R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$, $I_j = [a_j, b_j]$, $j = 1, \dots, n$.

Supongamos que R es no degenerado; es decir, $\mathrm{v}(R) > 0$

- $\mathscr{R}(R) \setminus \mathscr{C}(R) \neq \emptyset$
- Existen funciones $f\colon R \longrightarrow \mathbb{R}$ acotadas y no integrables

Propiedades de la Integral de Riemann

Sea $n \in \mathbb{N}^*$ y $R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$, $I_j = [a_j, b_j]$, $j = 1, \ldots, n$.

Supongamos que R es no degenerado; es decir, $\mathrm{v}(R) > 0$

- $\mathscr{R}(R) \setminus \mathscr{C}(R) \neq \emptyset$
- Existen funciones $f\colon R \longrightarrow \mathbb{R}$ acotadas y no integrables
- Ejemplo: **Función de Dirichlet en $\mathbb{R}^n$:** $d\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$$d(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in \mathbb{Q}^n, \\ 0, & \text{si } x \notin \mathbb{Q}^n. \end{cases}$$

Propiedades de la Integral de Riemann

Sea $n \in \mathbb{N}^*$ y $R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$, $I_j = [a_j, b_j]$, $j = 1, \dots, n$.

Supongamos que R es no degenerado; es decir, $\mathrm{v}(R) > 0$

- $\mathscr{R}(R) \setminus \mathscr{C}(R) \neq \emptyset$
- Existen funciones $f\colon R \longrightarrow \mathbb{R}$ acotadas y no integrables
- Ejemplo: **Función de Dirichlet en $\mathbb{R}^n$:** $d\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$$d(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in \mathbb{Q}^n, \\ 0, & \text{si } x \notin \mathbb{Q}^n. \end{cases}$$

- $d_{|_R} \notin \mathscr{R}(R)$

Propiedades de la Integral de Riemann

Sea $n \in \mathbb{N}^*$ y $R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$, $I_j = [a_j, b_j]$, $j = 1, \ldots, n$.

Supongamos que R es no degenerado; es decir, $\mathrm{v}(R) > 0$

- $\mathscr{R}(R) \setminus \mathscr{C}(R) \neq \emptyset$
- Existen funciones $f\colon R \longrightarrow \mathbb{R}$ acotadas y no integrables
- Ejemplo: **Función de Dirichlet en $\mathbb{R}^n$:** $d\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$$d(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in \mathbb{Q}^n, \\ 0, & \text{si } x \notin \mathbb{Q}^n. \end{cases}$$

• Cuestión 3: Consideremos d, la función de Dirichlet en $\mathbb{R}$. Demostrar que se satisface que $d(x) = \lim\limits_{m\to\infty} \lim\limits_{n\to\infty} \cos^{2n}(m!\,\pi\, x)$, para cada $x \in \mathbb{R}$.

Propiedades de la Integral de Riemann

Sea $n \in \mathbb{N}^*$ y $R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$, $I_j = [a_j, b_j]$, $j = 1, \ldots, n$.

Supongamos que R es no degenerado; es decir, $\mathrm{v}(R) > 0$

- $\mathscr{R}(R) \setminus \mathscr{C}(R) \neq \emptyset$
- Existen funciones $f\colon R \longrightarrow \mathbb{R}$ acotadas y no integrables
- Ejemplo: **Función de Dirichlet en $\mathbb{R}^n$:** $d\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$$d(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in \mathbb{Q}^n, \\ 0, & \text{si } x \notin \mathbb{Q}^n. \end{cases}$$

- Ejemplo: $f = d_{|_R} - \frac{1}{2}$
- $f \notin \mathscr{R}(R)$, pero $|f|, f^2 \in \mathscr{R}(R)$

Sumas de Riemann

Sean $n \in \mathbb{N}^*$ y $R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$, $I_j = [a_j, b_j]$, $j = 1, \ldots, n$.

Si $f \colon R \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función <u>acotada</u> y $\mathcal{P} \in \mathscr{P}(R)$, para cada subrectángulo $R_{i_1,\ldots,i_n}$, $i_j = 0, \ldots, k_j - 1$, $j = 1, \ldots, n$ consideramos

$$M_{i_1,\ldots,i_n} = \sup_{x \in R_{i_1,\ldots,i_n}} \{f(x)\} \quad \text{y} \quad m_{i_1,\ldots,i_n} = \inf_{x \in R_{i_1,\ldots,i_n}} \{f(x)\}.$$

Las **sumas inferior y superior asociadas a f y a $\mathcal{P}$** son

$$s(f, \mathcal{P}) = \sum_{i_1=0}^{k_1-1} \cdots \sum_{i_n=0}^{k_n-1} m_{i_1,\ldots,i_n} \mathsf{v}(R_{i_1,\ldots,i_n})$$

$$S(f, \mathcal{P}) = \sum_{i_1=0}^{k_1-1} \cdots \sum_{i_n=0}^{k_n-1} M_{i_1,\ldots,i_n} \mathsf{v}(R_{i_1,\ldots,i_n}).$$

Sumas de Riemann

Sean $n \in \mathbb{N}^*$ y $R = [a_1, b_1]\times\cdots\times[a_n, b_n]$, $I_j = [a_j, b_j]$, $j = 1, \dots, n$.

Si $f\colon R \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función acotada y $\mathcal{P} \in \mathscr{P}(R)$, para cada subrectángulo $R_{i_1,\dots,i_n}$, $i_j = 0, \dots, k_j - 1$, $j = 1, \dots, n$ consideramos $\xi_{i_1,\dots,i_n} \in R_{i_1,\dots,i_n}$. Definimos la **suma de Riemann asociada a f a $\mathcal{P}$ y a la elección de puntos $\{\xi_{i_1,\dots,i_n}\}$** como

$$R(f, \mathcal{P}, \{\xi_{i_1,\dots,i_n}\}) = \sum_{i_1=0}^{k_1-1} \cdots \sum_{i_n=0}^{k_n-1} f(\xi_{i_1,\dots,i_n})\mathsf{v}(R_{i_1,\dots,i_n}).$$

Sumas de Riemann

Sean $n \in \mathbb{N}^*$ y $R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$, $I_j = [a_j, b_j]$, $j = 1, \ldots, n$.

Si $f\colon R \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función acotada y $\mathcal{P} \in \mathscr{P}(R)$, para cada subrectángulo $R_{i_1,\ldots,i_n}$, $i_j = 0, \ldots, k_j - 1$, $j = 1, \ldots, n$ consideramos $\xi_{i_1,\ldots,i_n} \in R_{i_1,\ldots,i_n}$. Definimos la **suma de Riemann asociada a f a $\mathcal{P}$ y a la elección de puntos $\{\xi_{i_1,\ldots,i_n}\}$** como

$$R(f, \mathcal{P}, \{\xi_{i_1,\ldots,i_n}\}) = \sum_{i_1=0}^{k_1-1} \cdots \sum_{i_n=0}^{k_n-1} f(\xi_{i_1,\ldots,i_n}) \mathsf{v}(R_{i_1,\ldots,i_n}).$$

Diremos que $\lim\limits_{\delta(\mathcal{P}) \to 0} R(f, \mathcal{P}, \{\xi_{i_1,\ldots,i_n}\}) = I \in \mathbb{R}$ si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\mathcal{P} \in \mathscr{P}(R)$ con $\delta(\mathcal{P}) \leq \varepsilon$ y tal que $|R(f, \mathcal{P}', \{\xi_{i_1,\ldots,i_n}\}) - I| \leq \varepsilon$ para cada $\mathcal{P}' \in \mathscr{P}(R)$ tal que $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}'$ y para cada elección de puntos en los subrectángulos de $\mathcal{P}'$.

Sumas de Riemann

Sean $n \in \mathbb{N}^*$ y $R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$, $I_j = [a_j, b_j]$, $j = 1, \ldots, n$.

Si $f\colon R \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función acotada y $\mathcal{P} \in \mathscr{P}(R)$, para cada subrectángulo $R_{i_1,\ldots,i_n}$, $i_j = 0, \ldots, k_j - 1$, $j = 1, \ldots, n$ consideramos $\xi_{i_1,\ldots,i_n} \in R_{i_1,\ldots,i_n}$. Definimos la **suma de Riemann asociada a f a $\mathcal{P}$ y a la elección de puntos $\{\xi_{i_1,\ldots,i_n}\}$** como

$$R(f, \mathcal{P}, \{\xi_{i_1,\ldots,i_n}\}) = \sum_{i_1=0}^{k_1-1} \cdots \sum_{i_n=0}^{k_n-1} f(\xi_{i_1,\ldots,i_n}) \mathsf{v}(R_{i_1,\ldots,i_n}).$$

Diremos que $\lim\limits_{\delta(\mathcal{P}) \to 0} R(f, \mathcal{P}, \{\xi_{i_1,\ldots,i_n}\}) = I \in \mathbb{R}$ si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\mathcal{P} \in \mathscr{P}(R)$ con $\delta(\mathcal{P}) \le \varepsilon$ y tal que $|R(f, \mathcal{P}', \{\xi_{i_1,\ldots,i_n}\}) - I| \le \varepsilon$ para cada $\mathcal{P}' \in \mathscr{P}(R)$ tal que $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}'$ y para cada elección de puntos en los subrectángulos de $\mathcal{P}'$.

- El número I, si existe, está unívocamente determinado

Sumas de Riemann

Sean $n \in \mathbb{N}^*$ y $R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$, $I_j = [a_j, b_j]$, $j = 1, \ldots, n$.

Si $f\colon R \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función acotada y $\mathcal{P} \in \mathscr{P}(R)$, para cada subrectángulo $R_{i_1,\ldots,i_n}$, $i_j = 0, \ldots, k_j - 1$, $j = 1, \ldots, n$ consideramos $\xi_{i_1,\ldots,i_n} \in R_{i_1,\ldots,i_n}$. Definimos la **suma de Riemann asociada a f a $\mathcal{P}$ y a la elección de puntos $\{\xi_{i_1,\ldots,i_n}\}$** como

$$R(f, \mathcal{P}, \{\xi_{i_1,\ldots,i_n}\}) = \sum_{i_1=0}^{k_1-1} \cdots \sum_{i_n=0}^{k_n-1} f(\xi_{i_1,\ldots,i_n}) \mathsf{v}(R_{i_1,\ldots,i_n}).$$

Criterio de Riemann de integrabilidad

$f \in \mathscr{R}(R)$ sii existe $\displaystyle\lim_{\delta(\mathcal{P})\to 0} R(f, \mathcal{P}, \{\xi_{i_1,\ldots,i_n}\})$ y cuando esto ocurre,

$$\int_R f = \lim_{\delta(\mathcal{P})\to 0} R(f, \mathcal{P}, \{\xi_{i_1,\ldots,i_n}\}).$$

Sumas de Riemann

Sean $n \in \mathbb{N}^*$ y $R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$, $I_j = [a_j, b_j]$, $j = 1, \dots, n$.

Criterio de Riemann de integrabilidad

$f \in \mathscr{R}(R)$ sii existe $\displaystyle\lim_{\delta(\mathcal{P}) \to 0} R(f, \mathcal{P}, \{\xi_{i_1,\dots,i_n}\})$ y cuando esto ocurre,

$$\int_R f = \lim_{\delta(\mathcal{P}) \to 0} R(f, \mathcal{P}, \{\xi_{i_1,\dots,i_n}\}).$$

- Si $f \in \mathscr{C}(R)$ para cada sucesión $\{\mathcal{P}_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathscr{P}(R)$ tal que $\displaystyle\lim_{k \to \infty} \delta(\mathcal{P}_k) = 0$ se satisface que

$$\int_R f = \lim_{k \to \infty} R(f, \mathcal{P}_k, \{x_j\}).$$