Facultat de Matemàtiques i Estadística

Problemes de Càlcul Diferencial

Curs 2018-2019

Tema 1: Topologia de $\mathbb{R}^n$

Departament de Matemàtiques
Universitat Politècnica de Catalunya — BarcelonaTech

1. Demostreu que a $\mathbb{R}^n$ l'aplicació:

$$d_2(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}$$

és una distància i, per tant, $(\mathbb{R}^n, d_2)$ és un espai mètric.

2. Demostreu que a $\mathbb{R}^n$ l'aplicació:

$$d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

és una distància i, per tant, $(\mathbb{R}^n, d_1)$ és un espai mètric.

3. Demostreu que a $\mathbb{R}^n$ l'aplicació:

$$d_\infty(x,y) = \max |x_i - y_i|$$

és una distància i, per tant, $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$ és un espai mètric.

4. Demostreu que a $\mathbb{N}$ l'aplicació:

$$d(m,n) = \begin{cases} \frac{1}{m} + \frac{1}{n} & \text{si} \quad m \neq n \\ 0 & \text{si} \quad m = n \end{cases}$$

és una distància i, per tant, $(\mathbb{N}, d)$ és un espai mètric.

5. Demostreu que a $\mathbb{R}^n$ les següents aplicacions són normes:

   (a) $||x|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$.

   (b) $||x|| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$.

   (c) $||x|| = \max |x_i|$.

6. Si $\| \cdot \|$ és la norma ordinària i $\langle \cdot, \cdot \rangle$ és el producte escalar ordinari a $\mathbb{R}^m$, proveu:

   a) $4\langle x, y\rangle = \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2$ (identitat de polarització)

   b) Si x, y són ortogonals, $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

   c) $\|x + y\| \, \|x - y\| \leq \|x\|^2 + \|y\|^2$

7. Siguin A, B subconjunts no buits de $\mathbb{R}^m$ i d la distància ordinària. Definim $d(A,\, B) = \inf\{d(a, b);\ a \in A,\ b \in B\}$.

   a) És cert que $d(A, B) = 0 \Leftrightarrow A \cap B \neq \emptyset$?

   b) Demostreu $|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^m$, on $d(x, A) = d(\{x\}, A)$.

8. Donat $A \subset \mathbb{R}^m$, sigui $D_A = \{d(x,y) : \ x \in A\,,\ y \in A\} \subset \mathbb{R}$. Proveu que aquest conjunt és fitat si, i només si, A ho és. Aleshores, es defineix *diàmetre* de A per $\mathrm{diam(A) = \sup D_A}$. Siguin ara

$$\begin{aligned} B_1 &= \{x \in \mathbb{R}^m : \sum_{i=1}^{m} \mid x_i \mid < 1\}, \\ B_2 &= \{x \in \mathbb{R}^m : \parallel x \parallel < 1\}, \\ B_3 &= \{x \in \mathbb{R}^m : \max \mid x_i \mid < 1\}. \end{aligned}$$

Calculeu el diàmetre de B_1, B_2 i B_3. *Indicació: dibuixeu els conjunts en* $\mathbb{R}^2$ *i* $\mathbb{R}^3$.

9. Descriviu l'interior, exterior, frontera, adherència i conjunt de punts d'acumulació dels conjunts:

   a) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$.
   b) $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = \lambda y\}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
   c) $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$.
   d) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 1, y = 0\}$.
   e) $E = A \setminus \{(0,1)\}$.
   f) $F = B \cup \{(0,-1)\}$.
   g) $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1, x \neq 0\}$.
   h) $H = \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

10. Estudieu l'interior, la frontera, l'exterior, l'adherència i el conjunt de punts d'acumulació, i decidiu si són oberts o tancats, els següents subconjunts:

   a) $A = \{(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x + y = 1,\ x^2 + y^2 = 9 \text{ i } z = 0\}$.
   b) $B = \{(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x = 2,\ y = 3 \text{ i } z \in (-1,\, 1)\}$.
   c) $C = \{(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x = 2,\ y = 3 \text{ i } z \in [-1,\, 1]\}$.
   d) $D = \{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y = 5\}$.
   e) $E = \{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + |\, y \,| = 5\}$.
   f) $F = \{(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 < 1 \text{ i } |\, z \,| < 1\}$.

11. Siguin $A \subset \mathbb{R}^m$ i $x \in \mathbb{R}^m$. Proveu que:

   a) $x \in \mathrm{Fr}(A) \iff$ Existeixen successions convergents $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ambdues amb límit x, tals que, $\forall\, n \in \mathbb{N},\ x_n \in A$ i $y_n \notin A$.
   b) $x \in A' \iff$ existeix una successió $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ amb límit x, tal que, $\forall\, n \in \mathbb{N},\ x_n \in A$ i $x_n \neq x$.
   c) $x \in \overset{\circ}{A} \iff$ per a tota successió $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ amb límit x, $\exists\, n_0$ tal que, $\forall\, n \geq n_0,\ x_n \in A$.

12. Si $A \subset \mathbb{R}^m$, demostreu que:

   a) $\overset{\circ}{A}$ és el conjunt obert més gran contingut en A. És a dir, si B és un obert dins A, aleshores $B \subset \overset{\circ}{A}$.

b) $\overline{A}$ és el conjunt tancat més petit que conté A. És a dir, si C és un tancat que conté A, aleshores $\overline{A} \subset C$.

13. Donats dos conjunts A, B, es defineix $A+B = \{x+y \mid x \in A,\, y \in B\}$. Suposeu A obert.

a) Demostreu que si $y \in B$, el conjunt $A + \{y\}$ és obert.

b) Demostreu que el conjunt $A+B$ és obert.

14. Estudieu si són compactes els següents conjunts. En el cas dels conjunts no compactes, trobeu el compacte més petit que els conté (si és que n'hi ha cap).

a) $A = \{(x,\, y\, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x+y=1,\; x^2+y^2=9 \text{ i } z=0\}$.

b) $B = \{(x,\, y\, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x=2,\; y=3 \text{ i } z \in (-1,\, 1)\}$.

c) $C = \{(x,\, y\, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x=2,\; y=3 \text{ i } z \in [-1,\, 1]\}$.

d) $D = \{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2+y=5\}$.

e) $E = \{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2+|\,y\,|=5\}$.

f) $F = \{(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2+y^2<1 \text{ i } |\,z\,|<1\}$.

15. Demostreu que:

a) La intersecció d'un nombre arbitrari (finit o infinit) de subconjunts compactes de $\mathbb{R}^n$ també és compacte.

b) La unió d'un nombre finit de subconjunts compactes de $\mathbb{R}^n$ també és compacte.

c) La unió d'un nombre infinit de subconjunts compactes de $\mathbb{R}^n$ pot no ser compacte. (Doneu-ne exemples).

16. a) Demostreu que si $K_1 \subset \mathbb{R}^{n_1}, K_2 \subset \mathbb{R}^{n_2}$ són compactes, aleshores $K_1 \times K_2 \subset \mathbb{R}^{n_1+n_2}$ també és compacte.

b) Demostreu que si $K_1 \subset \mathbb{R}^{n_1}, \ldots, K_r \subset \mathbb{R}^{n_r}$ són compactes, aleshores $K_1 \times \cdots \times K_r \subset \mathbb{R}^{n_1+\ldots+n_r}$ també és compacte. En particular, proveu que tot k-rectangle tancat és compacte.

17. Si $A, B \subset \mathbb{R}^n$ i d és la distància ordinària, es defineix (*vegeu exercici 2*)

$$\mathrm{d}(A,B) = \inf\{\mathrm{d}(a,b);\; a \in A,\; b \in B\}.$$

Demostreu que

a) A, B compactes $\Rightarrow \exists\, a_0 \in A, b_0 \in B : \mathrm{d}(A,B) = \mathrm{d}(a_0,b_0)$.

b) A compacte $\Rightarrow \exists\, a_0 \in A : \mathrm{d}(A,B) = \mathrm{d}(\{a_0\},B)$.

c) És cert l'apartat a) si A i B són tancats però no fitats? I si $A=\{a\}$ i B és tancat?

d) $\overline{A} = \{x \in \mathbb{R}^n : \mathrm{d}(x,A) = 0\}$.

18. Demostreu que donada una successió $(x_n,)_{n\geq 1}$ amb límit x_0, el conjunt $(x_n)_{n\geq 1} \cup \{x_0\}$ és compacte. Feu la demostració emprant tant la caracterització per successions com la caracterització per recobriments.