Topologia FME
Resum de teoria i llista de problemes

Curs 2019/2020

6 d'abril de 2020

Índex

4 Compacitat

En càlcul diferencial es demostra que tota funció contínua $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ està fitada i pren un valor màxim i un valor mínim. També es veu aquesta propietat per a funcions $f\colon D \to \mathbb{R}$ sobre un subconjunt $D \subset \mathbb{R}^n$ de l'espai euclidià que sigui tancat i fitat.

La propietat de l'interval $[a,b]$ o del conjunt D que permet arribar a la conclusió és la *compacitat*. Per a espais topològics arbitraris aquesta propietat es defineix en termes de recobriments.

4.1 Espais compactes

Un *recobriment* d'un conjunt X és una família de conjunts $(A_i)_{i\in I}$ tal que X està contingut en la seva reunió: $X \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$. Un *subrecobriment* és una subfamília que sigui també un recobriment. O sigui, una família $(A_j)_{j\in J}$ amb conjunt d'índexs $J \subseteq I$ tal que $X \subseteq \bigcup_{j\in J} A_j$.

En topologia un *recobriment obert* és un recobriment per conjunts $\mathcal{U}_i$ oberts.

Definició 4.1 (Espai compacte) *Un espai topològic $(X, \mathscr{T})$ es diu* compacte *si tot recobriment obert té un subrecobriment finit.*

Un subconjunt d'un espai es diu compacte si ho és com a subespai.

O sigui, $(X, \mathscr{T})$ és compacte quan per a tot recobriment $X = \bigcup_{i\in I} \mathcal{U}_i$ amb $\mathcal{U}_i \in \mathscr{T}$ existeixen $i_1, i_2, \ldots, i_n \in I$ tals que $X = \bigcup_{k=1}^{n} \mathcal{U}_{i_k}$.

Observi's que un subespai $Y \subseteq X$ és compacte si, i només si, satisfà la propietat del subrecobriment finit per a recobriments amb oberts de X. És a dir, són equivalents:

- tot recobriment $Y = \cup \mathcal{V}_i$ per oberts $\mathcal{V}_i$ de Y té un subrecobriment finit, i
- tot recobriment $Y \subseteq \cup \mathcal{U}_i$ per oberts $\mathcal{U}_i$ de X té un subrecobriment finit.

L'equivalència s'obté relacionant tots dos tipus de recobriment a través de $\mathcal{V}_i = \mathcal{U}_i \cap Y$.

És clar que la propietat de ser compacte es conserva per homeomorfisme.

Exemples 4.2 *Els espais següents són compactes:*

1. *tot espai amb la topologia grollera;*
2. *tot espai amb la topologia dels complementaris finits;*
3. *el subespai* $\{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \geqslant 1\} \subset \mathbb{R}$*;*
4. *un interval tancat* $[a, b] \subset \mathbb{R}$*.*

Els espais següents no són compactes:

5. *un espai discret infinit;*
6. $\mathbb{R}$*;* $\mathbb{R}^n$*;*
7. *un interval obert* $(a, b) \subset \mathbb{R}$*; una bola oberta* $B_r(\boldsymbol{x}) \subset \mathbb{R}^n$*.*

Prova: Per a l'interval tancat dins dels reals es farà servir la propietat de completesa de $\mathbb{R}$ en la versió que diu que tot subconjunt no buit fitat superiorment té suprem.

1. Tota topologia amb només un nombre finit d'oberts dona un espai compacte. En particular, tot espai amb la topologia grollera, formada per només dos oberts, és compacte.
2. Si $(\mathcal{U}_i)_{i\in I}$ és un recobriment obert d'un espai X_{cf} sigui $\mathcal{U}_j$ un element de la família no buit. Aleshores $\mathcal{U}_j^c \subseteq X$ és finit; sigui $\mathcal{U}_j^c = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Cada punt x_k pertany a algun dels oberts del recobriment: $x_k \in \mathcal{U}_{i_k}$. Aleshores la subfamília formada per $\mathcal{U}_j$ i tots els $\mathcal{U}_{i_k}$ és un subrecobriment finit.
3. Sigui $(\mathcal{U}_i)_{i\in I}$ una família d'oberts de $\mathbb{R}$ que recobreix $\{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \geqslant 1\}$. Sigui $\mathcal{U}_j$ un element de la família que conté el punt 0. Sigui $B_\epsilon(0) \subseteq \mathcal{U}_j$ una bola oberta. Com que $0 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}$ existeix un N tal que $n > N \Rightarrow \frac{1}{n} \in B_\epsilon(0)$. Cada punt $\frac{1}{n}$ pertany a algun dels oberts del recobriment: $\frac{1}{n} \in \mathcal{U}_{i_n}$. Aleshores la família formada per $\mathcal{U}_j$ i els $\mathcal{U}_{i_n}$ per a $n \leqslant N$ és un subrecobriment finit.

   Aquest exemple és un cas particular de considerar, en un espai mètric qualsevol, un conjunt $\{a_n : n \geqslant 1\} \cup \{a\}$ format per una successió $(a_n)_{n\geqslant 1}$ convergent i el seu límit a.
4. Sigui $(\mathcal{U}_i)_{i\in I}$ una família d'oberts de $\mathbb{R}$ que recobreix $[a, b]$. Sigui $S \subseteq [a, b]$ el subconjunt format pels $x \in [a, b]$ tals que el subinterval $[a, x]$ es pot recobrir amb un nombre finit dels $\mathcal{U}_i$. Es vol demostrar que $b \in S$. El conjunt S és òbviament no buit, ja que conté a, i està fitat superiorment per b. Sigui s el seu suprem. És clar que $s \in [a, b]$. Es veurà primer que $s > a$, després que $s \in S$, i, finalment, que $s = b$.

- Sigui $\mathcal{U}_j$ tal que $a \in \mathcal{U}_j$. Sigui $B_\epsilon(a) \subseteq \mathcal{U}_j$. Aleshores el punt $x = \min(a + \frac{\epsilon}{2}, b) > a$ pertany a S ja que $[a, x] \subset B_\epsilon(a) \subseteq \mathcal{U}_j$ i la subfamília finita formada només per $\mathcal{U}_j$ recobreix aquest interval $[a, x]$. Per tant, $s \geqslant x > a$.
- Sigui $\mathcal{U}_j$ tal que $s \in \mathcal{U}_j$. Sigui $B_\epsilon(s) \subseteq \mathcal{U}_j$. Per ser s el suprem de S el nombre $s - \epsilon < s$ no és fita superior: existeix un element $x \in S$ tal que $s - \epsilon < x \leqslant s \Rightarrow [x, s] \subset B_\epsilon(s) \subseteq \mathcal{U}_j$. Com que $x \in S$ existeix un subrecobriment finit $(\mathcal{U}_{i_k})_{k=1}^n$ de l'interval $[a, x]$. La família formada per $\mathcal{U}_j$ i els oberts d'aquest subrecobriment és un subrecobriment finit de $[a, s]$. Per tant, $s \in S$.
- Finalment, suposi's que $s < b$. Sigui $\mathcal{U}_j$ tal que $s \in \mathcal{U}_j$. Sigui $B_\epsilon(s) \subseteq \mathcal{U}_j$. Sigui $x = \min(s + \frac{\epsilon}{2}, b) > s$. Aleshores $[s, x] \subset B_\epsilon(s) \subseteq \mathcal{U}_j$. Com que $s \in S$ existeix un subrecobriment finit $(\mathcal{U}_{i_k})_{k=1}^n$ de l'interval $[a, s]$. La família formada per $\mathcal{U}_j$ i els oberts d'aquest subrecobriment és un subrecobriment finit de $[a, x]$. Per tant, $x \in S$, i això contradiu el fet que s era el suprem del conjunt. Es dedueix que ha de ser $s = b$.

S'ha vist que $s = b$ i que $s \in S$. Per tant, $b \in S$ i això vol dir que $[a, b]$ admet un subrecobriment finit.

5. En un espai discret infinit els punts són oberts i formen un recobriment obert que no té cap subrecobriment finit.
6. La família de les boles $\big(B_1(\boldsymbol{x})\big)_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n}$ de radi fix $r = 1$ centrades en tots els punts de $\mathbb{R}^n$ és un recobriment obert sense subrecobriments finits: tota subfamília finita només pot recobrir un subconjunt de $\mathbb{R}$ que està fitat. La família $\big(B_r(\boldsymbol{x})\big)_{r>0}$ de totes les boles obertes centrades en un mateix punt també satisfà aquesta propietat.
7. La família d'oberts $\big((a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n})\big)_{n \geqslant 1}$ és un recobriment obert de (a, b) que no té cap subrecobriment finit. Alternativament, com que $\mathbb{R} \cong (a, b)$ tots dos espais han de ser al mateix temps compactes o no compactes. La família de boles $\big(B_{r_n}(\boldsymbol{x})\big)_{n \geqslant 1}$ de radis $r_n = r\frac{n}{n+1}$ són un recobriment obert de $B_r(\boldsymbol{x})$ sense subrecobriments finits. Alternativament, com que $\mathbb{R}^n \cong B_r(\boldsymbol{x})$ tots dos espais són alhora compactes o no compactes. □

4.2 Aplicacions contínues

Teorema 4.3 *La imatge d'un compacte per una aplicació contínua és un compacte.*

Prova: Sigui $f(K) \subseteq \bigcup \mathcal{V}_i$ un recobriment obert de $f(K)$. Aleshores

$$K \subseteq f^{-1}\big(f(K)\big) \subseteq f^{-1}\Big(\bigcup \mathcal{V}_i\Big) = \bigcup f^{-1}(\mathcal{V}_i)$$

i els $f^{-1}(\mathcal{V}_i)$ són un recobriment obert de K. Sigui $K \subseteq \bigcup_{k=1}^n f^{-1}(\mathcal{V}_{i_k})$ un subrecobriment finit. Aleshores

$$f(K) \subseteq f\left(\bigcup_{k=1}^n f^{-1}(\mathcal{V}_{i_k})\right) = \bigcup_{k=1}^n f\big(f^{-1}(\mathcal{V}_{i_k})\big) \subseteq \bigcup_{k=1}^n \mathcal{V}_{i_k},$$

i els $\mathcal{V}_{i_k}$ són un subrecobriment finit de $f(K)$. $\square$

Corol·lari 4.4 *Tot espai quocient d'un espai compacte és compacte.*

PROVA: Immediat: el quocient Q és imatge de l'espai X per la projecció canònica $\pi\colon X \twoheadrightarrow Q$, que és una aplicació contínua. $\square$

4.3 Subespais

A continuació es veuen algunes propietats relacionades amb la compacitat de subespais. Com a aplicació s'obté el lema compacte-Hausdorff, de gran utilitat per demostrar que una aplicació bijectiva contínua també té inversa contínua.

Teorema 4.5 *Tot subconjunt tancat d'un espai compacte és compacte.*

PROVA: Sigui $C \subseteq X$ un subconjunt tancat. Sigui $(\mathcal{U}_i)_{i\in I}$ un recobriment obert de C. La família formada per l'obert C^c i els oberts del recobriment de C recobreix tot X. Per compacitat té un subrecobriment finit, format per C^c i per alguns $(\mathcal{U}_{i_k})_{k=1}^n$ de la família. Aquest subrecobriment també recobreix C, però per a això l'obert C^c no cal, ja que no conté punts de C. Per tant els $\mathcal{U}_{i_k}$ són un subrecobriment finit de C. $\square$

Teorema 4.6 *Tot subconjunt compacte d'un espai de Hausdorff és tancat.*

PROVA: Sigui $K \subseteq X$ un subconjunt compacte. Sigui $x \notin K$. Per a cada punt $y \in K$ existeixen entorns oberts disjunts de tots dos punts: $x \in \mathcal{U}_{x,y}$ i $y \in \mathcal{U}_y$ amb $\mathcal{U}_{x,y} \cap \mathcal{U}_y = \varnothing$. La família $(\mathcal{U}_y)_{y\in K}$ és un recobriment obert del compacte. Sigui $(\mathcal{U}_{y_k})_{k=1}^n$ un subrecobriment finit. Sigui $\mathcal{U} := \cap_{k=1}^n \mathcal{U}_{x,y_k}$. Aquest conjunt és obert, per ser-ne intersecció finita, i conté x, ja que tots el contenen. Com que està contingut en tots els $\mathcal{U}_{x,y_k}$ és disjunt amb tots els $\mathcal{U}_{y_k}$. Per tant és disjunt amb la seva reunió, que conté K, i s'obté que $x \in \mathcal{U} \subseteq K^c$. Es dedueix que K^c és obert i, per tant, K és tancat. $\square$

Corol·lari 4.7 (Lema compacte-Hausdorff) *Tota aplicació contínua d'un espai compacte en un espai de Hausdorff és tancada. Es dedueix que, si l'aplicació és injectiva, aleshores és una immersió, i si és bijectiva és un homeomorfisme.*

PROVA: Sigui $f\colon X \to Y$ amb X compacte i Y de Hausdorff. Sigui $C \subseteq X$ un subconjunt tancat. El teorema 4.5 assegura que C és un compacte. El teorema 4.3 assegura que $f(C)$ és compacte. El teorema 4.6 assegura que $f(C)$ és tancat. Per tant f és una aplicació tancada.

Si f és bijectiva aleshores f^{-1} és contínua i, per tant, f és un homeomorfisme. Si f és injectiva és una bijecció amb $f(X) \subseteq Y$, que és també un espai de Hausdorff, i per tant $f\colon X \to f(X)$ és un homeomorfisme. $\square$

4.4 Producte d'espais

A continuació es demostrarà que el producte d'espais topològics es comporta bé respecte la compacitat: el producte és compacte si, i només si, ho són cadascun dels factors. Per fer-ho es necessiten dos resultats tècnics: el primer, el lema del tub, es farà servir per demostrar la compacitat dels productes finits; el segon, el teorema de la base d'Alexander, serà necessari per als productes infinits.

Lema 4.8 (Lema del tub) *Sigui $X \times Y$ un producte d'espais amb Y compacte. Tot obert de $X \times Y$ que contingui la fibra $\{x\} \times Y = \pi_X^{-1}(x)$ sobre el punt $x \in X$ conté algun tub $\mathcal{U} \times Y$ per a algun entorn obert $\mathcal{U}$ de x a l'espai X.*

PROVA: Sigui $\{x_0\} \times Y \subseteq \mathcal{W}$ amb $\mathcal{W}$ obert del producte $X \times Y$. Per a cada punt $y \in Y$ existeix un obert bàsic $\mathcal{W}_y = \mathcal{U}_y \times \mathcal{V}_y$ del producte tal que $(x_0, y) \in \mathcal{W}_y \subseteq \mathcal{W}$. Els oberts $\mathcal{V}_y$ de Y són un recobriment de l'espai; per ser compacte existeixen $y_1, \ldots, y_n$ tals que els $\mathcal{V}_{y_k}$ recobreixen Y. Sigui $\mathcal{U} = \cap_{k=1}^n \mathcal{U}_{y_k}$, que és un obert de X per ser-ne intersecció finita. Aleshores $\mathcal{U} \times Y \subseteq \mathcal{W}$. En efecte, donat un punt $(x, y) \in \mathcal{U} \times Y$ existeix un k tal que $y \in \mathcal{V}_{y_k}$. Com que x pertany a tots els $\mathcal{U}_{i_j}$ pertany a $\mathcal{U}_{i_k}$ i es té $(x, y) \in \mathcal{U}_{y_k} \times \mathcal{V}_{y_k} = \mathcal{W}_{y_k} \subseteq \mathcal{W}$.

Aquesta propietat no es compleix si l'espai Y no és compacte. Per exemple, es considera el producte $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ d'espais no compactes. Sigui $\mathcal{U}$ l'obert $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |xy| < 1\}$. Aquest obert conté òbviament la fibra $\{0\} \times \mathbb{R}$ però no conté cap tub $(-\epsilon, \epsilon) \times \mathbb{R}$ ja que no conté els punts $(\frac{\epsilon}{2}, y)$ per a $y \geqslant \frac{2}{\epsilon}$. $\square$

Teorema 4.9 (Teorema de la subbase d'Alexander) *Sigui $\mathscr{S}$ una subbase d'un espai topològic. L'espai és compacte si, i només si, tot recobriment obert* per oberts de $\mathscr{S}$ *té un subrecobriment finit.*

PROVA: El que diu el teorema és que n'hi ha prou a comprovar la condició de compacitat per subrecobriments considerant només recobriments formats per oberts que pertanyen a una subbase $\mathscr{S}$ fixada.

És clar que si la condició es compleix per a recobriments arbitraris encara més es compleix per a recobriments amb oberts que pertanyen a la subbase $\mathscr{S}$.

Suposi's que la condició es compleix per a recobriments per oberts de $\mathscr{S}$. Suposi's que no es compleix per a recobriments arbitraris. Ordenant tots els recobriments que no tenen un subrecobriment finit per inclusió, totes les cadenes tenen una fita superior: la seva reunió.

En efecte, sigui $\boldsymbol{R}$ el conjunt de tots els recobriments oberts de X que no tenen un subrecobriment finit, ordenat per inclusió. S'està suposant que $\boldsymbol{R}$ és no buit. Una cadena $C = (\mathscr{R}_\alpha)_{\alpha \in A}$ en aquest conjunt està formada per recobriments $\mathscr{R}_\alpha \in \mathscr{P}(\mathscr{T})$ que no tenen cap subrecobriment finit, tals que estan continguts els uns en els altres: per a tot parell d'índexs $\alpha, \beta \in A$ ha de ser $\mathscr{R}_\alpha \subseteq \mathscr{R}_\beta$ o bé $\mathscr{R}_\beta \subseteq \mathscr{R}_\alpha$ (aquí s'està pensant en els recobriments com a conjunts d'oberts; es podrien també pensar com a famílies, amb l'ordre que defineix el fet de ser subfamília, i en aquest cas el fet de ser una cadena voldria dir que $\mathscr{R}_\alpha$ és una subfamília de $\mathscr{R}_\beta$ o bé a l'inrevés). Sigui $\mathscr{R} = \cup_{\alpha \in A} \mathscr{R}_\alpha$ la reunió de tots els recobriments de la cadena. Clarament $\mathscr{R}$ és també un recobriment de X. A més pertany a $\boldsymbol{R}$: no té subrecobriments finits. En efecte, si tingués un subrecobriment finit format per oberts $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \ldots, \mathcal{U}_n$ aleshores cadascun d'aquests oberts pertanyeria a un dels $\mathscr{R}_\alpha$; sigui $\mathcal{U}_k \in \mathscr{R}_{\alpha_k}$ per a $k = 1, \ldots, n$. Aleshores tots els $\mathcal{U}_k$ pertanyerien al recobriment $\mathscr{R}_{\alpha_k}$ més gran de tots (com que estan totalment ordenats, i només n'estem considerant un nombre finit, algun d'ells ha de ser el més gran de tots). Això contradiu la hipòtesi que els $\mathscr{R}_\alpha$ no tenen subrecobriments finits.

Per tant el conjunt $\boldsymbol{R}$ és inductiu (tota cadena té una fita superior) i es pot aplicar el lema de Zorn: el conjunt té elements maximals. És a dir, existeix un recobriment maximal $(\mathcal{U}_i)_{i\in I}$ sense subrecobriments finits. Això, en particular, vol dir que si a aquest recobriment se li afegeix qualsevol obert que no en formi part el recobriment que resulta ja passa a tenir subrecobriments finits.

La subfamília $(\mathcal{U}_j)_{j\in J}$ formada pels oberts $\mathcal{U}_j$ que pertanyen a la subbase: $\mathcal{U}_j \in \mathscr{S}$, no pot ser un recobriment, ja que existiria un subrecobriment finit, i la hipòtesi és que la propietat del subrecobriment finit sí que la compleixen els recobriments formats per oberts de la subbase $\mathscr{S}$. Per tant existeix un punt $p \in X$ tal que $p \notin \cup_{j\in J}\mathcal{U}_j$. Sigui $\mathcal{U}_{i_p}$ un obert del recobriment $(\mathcal{U}_i)_{i\in I}$ tal que $p \in \mathcal{U}_{i_p}$. Naturalment, aquest obert no pot ser de la subbase; és a dir, l'índex corresponent satisfà $i_p \in I \setminus J$.

Per la condició de subbase existeixen oberts $S_1, \ldots, S_n$ de $\mathscr{S}$ tals que $p \in \cap_{k=1}^n S_k \subseteq \mathcal{U}_{i_p}$. Cap dels oberts S_k pot pertànyer a la família $(\mathcal{U}_j)_{j\in J}$ ja que tots ells contenen p. Es dedueix que aquests oberts tampoc pertanyen a la família $(\mathcal{U}_i)_{i\in I}$ ja que són elements de la subbase $\mathscr{S}$ i els oberts d'aquesta família que són de la subbase són els de la subfamília $(\mathcal{U}_j)_{j\in J}$.

Per a cada $k = 1, \ldots, n$ la família obtinguda afegint S_k a $(\mathcal{U}_i)_{i\in I}$ conté estrictament aquesta família i, per maximalitat, sí que té un subrecobriment finit. Siguin S_k i $(\mathcal{U}_{k,r})_{r=1}^{n_k}$ un subrecobriment finit, on els $\mathcal{U}_{k,r}$ són alguns dels $\mathcal{U}_i$, en nombre finit. L'obert S_k hi ha de ser per força ja que si no els altres serien un subrecobriment finit del recobriment inicial. Aleshores la família formada per

$$\left(\mathcal{U}_{k,r}\right)_{1\leqslant k\leqslant n, 1\leqslant r\leqslant n_k} \quad \text{i per} \quad \mathcal{U}_{i_p}$$

és un subrecobriment finit de X format per oberts del recobriment inicial $(\mathcal{U}_i)_{i\in I}$, i això contradiu la no existència de subrecobriments finits d'aquest recobriment.

En efecte, donat un element $x \in X$, per a cada $k = 1, \ldots, n$ ha de pertànyer a algun dels $\mathcal{U}_{k,r}$ o bé a S_k, ja que aquests oberts formen un recobriment. Si aquest x no pertany a cap dels $\mathcal{U}_{k,r}$ per a cap k i cap r aleshores pertany a S_k per a tots els k i, per tant, pertany a la seva intersecció, que està continguda en $\mathcal{U}_{i_p}$ Per tant tot element pertany a algun dels $\mathcal{U}_{k,r}$ o bé pertany a $\mathcal{U}_{i_p}$ i aquests oberts recobreixen X. $\square$

Teorema 4.10 (Compacitat i producte) *El producte d'espais topològics és compacte si, i només si, cadascun dels espais ho és.*

L'enunciat "el producte infinit d'espais compactes és compacte" es coneix amb el nom de teorema de Tychonoff*.*

Prova: Sigui $X = \prod_{i\in I} X_i$ un espai producte. Si X és compacte aleshores cadascun dels X_i ho és. Això és conseqüència del teorema 4.3 i el fet que les projeccions $\pi_j \colon X \twoheadrightarrow X_j$ són contínues. En aquesta implicació s'ha de fer la observació que se suposa que els espais són no buits. Per exemple, $\varnothing \times \mathbb{R} = \varnothing$ és compacte però el factor $\mathbb{R}$ no ho és. El problema aquí és que quan algun dels factors és el buit les projeccions no estan definides. Per a la implicació recíproca això no cal: el producte d'espais compactes és compacte tant si algun dels factors és el buit com si no.

La implicació recíproca és senzilla en el cas de productes finits $|I| < \infty$ i una mica més complicada en el cas infinit, en què cal usar el lema de Zorn. De fet, la compacitat de productes arbitraris de compactes (teorema de Tychonoff) és equivalent a l'axioma d'elecció.

Es veu primer el cas finit, en què cal usar el lema del tub, lema 4.8. N'hi ha prou a demostrar-lo per al producte de dos espais. Sigui $(\mathcal{W}_i)_{i\in I}$ un recobriment obert del producte $X \times Y$ de dos espais topològics compactes. Per a cada punt $x \in X$ el subespai $\{x\} \times Y$ és compacte, per ser homeomorf a Y. Per tant existeix un subrecobriment finit

$$\{x\} \times Y \subseteq \bigcup_{j\in J_x} \mathcal{W}_j, \quad J_x \subseteq I, \quad |J_x| < \infty.$$

L'obert $\mathcal{W}_x := \cup_{j\in J_x}\mathcal{W}_j$ conté la fibra $\{x\} \times Y$ i pel lema del tub ha de contenir un obert de la forma $\mathcal{U}_x \times Y$ per a algun entorn obert de x:

$$\{x\} \times Y \subseteq \mathcal{U}_x \times Y \subseteq \mathcal{W}_x = \bigcup_{j\in J_x} \mathcal{W}_j.$$

Els oberts $(\mathcal{U}_x)_{x\in X}$ són un recobriment obert de X. Per compacitat existeix un subrecobriment finit $(\mathcal{U}_{x_k})_{k=1}^n$. Aleshores els oberts $\mathcal{W}_j$ per a $j \in \cup_{k=1}^n J_{x_k}$ formen un subrecobriment finit del producte cartesià: tot element de $X \times Y$ pertany a un $\mathcal{U}_{x_k} \times Y$ i, per tant, a un d'aquests $\mathcal{W}_j$. La finitud és clara ja que la reunió de n conjunts J_{x_k} finits és finita.

Es veu a continuació el cas infinit, en què cal usar el teorema de la subbase d'Alexander, teorema 4.9, i que és on cal usar el lema de Zorn. Aquest teorema assegura que per comprovar la compacitat d'un subespai n'hi ha prou a veure l'existència de subrecobriments finits per a recobriments formats per oberts que pertanyen a una subbase fixada de l'espai. Sigui $X = \prod_{i\in I} X_i$ un producte arbitrari d'espais topològics compactes. Es considera la subbase

$$\mathscr{S} = \left\{ \mathcal{U}_j \times \prod_{i\neq j} X_i : \mathcal{U}_j \in \mathscr{T}_j, j \in I \right\}.$$

Sigui $(\mathcal{W}_\alpha)_{\alpha\in A}$ un recobriment de X per elements de la subbase $\mathscr{S}$. Suposi's que no existeix cap subrecobriment finit. Per a cada índex j es considera la família d'oberts $\mathcal{U}_{j,\alpha} \subseteq X_j$ tals que $\pi_j^{-1}(\mathcal{U}_{j,\alpha}) = \mathcal{W}_\alpha$ és un element del recobriment. Són els $\mathcal{W}_\alpha$ de la forma

$$\mathcal{W}_\alpha = \pi_j^{-1}(\mathcal{U}_{j,\alpha}) = \mathcal{U}_{j,\alpha} \times \prod_{i\neq j} X_i.$$

És a dir, són els elements del recobriment que tenen totes les components excepte la j-èsima iguals a tot l'espai X_i, i la component j-èsima és l'obert $\mathcal{U}_{j,\alpha} \subset X_j$.

Aquests oberts $\mathcal{U}_{j,\alpha}$ no poden ser un recobriment de X_j per a cap j ja que si fos així existiria un subrecobriment finit $(\mathcal{U}_{j,\alpha_k})_{k=1}^n$ i aleshores els $\mathcal{W}_{\alpha_k} = \pi_j^{-1}(\mathcal{U}_{j,\alpha_k})$ serien un subrecobriment finit de l'espai producte.

Per tant, per a cada índex j existeix un element $x_j \in X_j$ tal que $x_j \notin \cup_{\alpha\in A}\mathcal{U}_{j,\alpha}$. Sigui $\boldsymbol{x} = (x_j)_{j\in I} \in X$ l'element determinat per totes aquestes components.

Aleshores $\boldsymbol{x} \notin \cup_{\alpha\in A}\mathcal{W}_\alpha$ ja que si $\boldsymbol{x} \in \mathcal{W}_\alpha$ per a algun obert subbàsic $\mathcal{W}_\alpha$, de components $\mathcal{U}_{j,\alpha}$ i X_i per a $i \neq j$, la component j-èsima x_j pertanyeria a l'obert $\mathcal{U}_{j,\alpha}$. Això contradiu el fet que els $\mathcal{W}_\alpha$ eren un recobriment de l'espai X. □

4.5 Espais euclidians

A continuació es veuen dos resultats importants sobre compacitat en espais euclidians, que se solen veure en els cursos de càlcul diferencial. D'una banda el teorema de Heine-Borel, que dona una caracterització dels compactes com els subconjunts tancats i fitats en un espai euclidià. De fet, aquesta caracterització dels compactes s'agafa sovint com a definició en cursos de càlcul. D'una altra el teorema del valor màxim (i mínim), o teorema de Bolzano, que assegura que tota funció contínua en un compacte amb valors en $\mathbb{R}$ (està fitada i) pren un valor màxim i un valor mínim.

Corol·lari 4.11 (Teorema de Heine-Borel) *Un subconjunt de $\mathbb{R}^n$ és compacte si, i només si, és tancat i fitat.*

PROVA: Com que $\mathbb{R}^n$ és de Hausdorff, pel teorema 4.6 els seus compactes han de ser tancats.

Clarament un subconjunt no fitat de $\mathbb{R}^n$ no pot ser compacte ja que les boles obertes $\big(B_r(\mathbf{0})\big)_{r>0}$ de radi arbitrari centrades en l'origen (o en un punt qualsevol) serien un recobriment obert sense subrecobriments finits.

Per tant, si $K \subseteq \mathbb{R}^n$ és compacte aleshores és tancat i fitat.

Sigui $K \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunt tancat i fitat. Per ser fitat està contingut en un hiper-rectangle: un producte d'intervals tancats $R = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$. Pel teorema 4.10 aquest conjunt R és un compacte, per ser-ne producte. Per ser $K \subseteq R$ tancat, usant el teorema 4.5 es dedueix que K també és compacte. □

Corol·lari 4.12 (Teorema del valor màxim) *Tota funció contínua $f\colon X \to \mathbb{R}$ d'un espai compacte X en $\mathbb{R}$ pren un valor màxim i un valor mínim: existeixen punts $a, b \in X$ tals que per a tot $x \in X$ es té $f(a) \leqslant f(x) \leqslant f(b)$.*

PROVA: La imatge $f(X)$ és un compacte a $\mathbb{R}$ i, per tant, un subconjunt tancat i fitat. Per ser fitat superiorment té suprem. Per ser tancat aquest suprem ha de pertànyer al conjunt ja que el suprem s d'un subconjunt $S \subset \mathbb{R}$ sempre pertany a la seva adherència: per a tot entorn $(s-\epsilon, s+\epsilon)$ el nombre $s-\epsilon$ no és fita superior i per tant hi ha punts $x \in S$ amb $s - \epsilon < x \leqslant s$, que pertanyen a l'entorn.

Per tant el conjunt $f(X)$ té un màxim. Anàlogament, té un mínim. □

4.6 Espais mètrics

A continuació es discuteixen propietats relacionades amb la compacitat en el cas particular dels espais topològics que són espais mètrics.

Proposició 4.13 *Un subconjunt compacte d'un espai mètric és tancat i fitat, però el recíproc no sempre és cert.*

PROVA: Que un compacte ha de ser tancat i fitat es veu exactament igual que a $\mathbb{R}^n$; per veure que ha de ser tancat es fa servir que tot espai mètric és de Hausdorff.

L'espai total dins d'un interval obert $X = (a, b)$ és un subconjunt tancat i fitat, però clarament no és compacte. El subespai $X = [1, 2] \cap \mathbb{Q}$ és un subespai tancat i fitat de l'espai mètric $\mathbb{Q}$. No és compacte: els oberts $[1, a)$ amb $a < \sqrt{2}$ i $(b, 2]$ amb $b > \sqrt{2}$ són un recobriment obert sense subrecobriments finits.

Observi's que aquests contraexemples són espais mètrics no complets: hi ha successions de Cauchy no convergents. En el primer la successió $(\frac{1}{n})_{n \geqslant 1}$; en el segon una successió de racionals que tendeixi al nombre real $\sqrt{2}$. $\square$

Lema 4.14 (Lema del nombre de Lebesgue) *Sigui X un espai mètric seqüencialment compacte (tota successió té una parcial convergent). Per a cada recobriment obert de X existeix un $\delta > 0$ tal que tot subconjunt de X de diàmetre menor que δ està contingut en algun dels oberts del recobriment.*

Aquest nombre δ s'anomena nombre de Lebesgue *del recobriment.*

PROVA: Recordi's que el *diàmetre* d'un subconjunt A d'un espai mètric es defineix com $\operatorname{diam}(A) = \sup \{d(x, y) : x, y \in A\} \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Suposi's que per a un recobriment obert $(\mathcal{U}_i)_{i \in I}$ de l'espai X no existeix cap δ. S'ha de veure que X no és seqüencialment compacte. Per a cada enter $n \geqslant 1$ existeix un subconjunt A_n amb $\operatorname{diam}(A_n) < \frac{1}{n}$ que no està contingut en cap dels oberts $\mathcal{U}_i$. Sigui $(x_n)_{n \geqslant 1}$ una successió construïda agafant un punt $x_n \in A_n$ en cadascun d'aquests conjunts (són no buits perquè no estan continguts en cap $\mathcal{U}_i$). Es veurà que aquesta successió no pot tenir cap parcial convergent. Suposi's que té una parcial convergent amb límit x. Això equival a dir que tota bola oberta de centre x conté infinits termes de la successió.

Sigui $\mathcal{U}$ un obert del recobriment que conté x i sigui $B_\epsilon(x) \subseteq \mathcal{U}$. Sigui n un enter tal que $x_n \in B_{\frac{\epsilon}{2}}(x)$ i prou gran per tal que $n \geqslant \frac{2}{\epsilon}$ (es pot trobar perquè hi ha infinits n amb x_n contingut en la bola). Aleshores, recordant que $x_n \in A_n$, es té

$$y \in A_n \Rightarrow d(y, x) \leqslant d(y, x_n) + d(x_n, x) < \frac{1}{n} + \frac{\epsilon}{2} \leqslant \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \Rightarrow y \in B_\epsilon(x) \subseteq \mathcal{U}.$$

Per tant el conjunt A_n està contingut en l'obert $\mathcal{U}$, en contradicció amb la suposició. $\square$

Lema 4.15 *Sigui X un espai mètric seqüencialment compacte. Per a tot $\epsilon > 0$ existeix un recobriment finit de X format per boles obertes de radi ϵ.*

PROVA: Suposi's que per a un $\epsilon > 0$ no existeix un tal recobriment. Per tant, per a tota família finita de punts de l'espai $x_1, x_2, \ldots, x_n$ es té $\cup_{i=1}^n B_\epsilon(x_i) \neq X$.

Es construeix una successió de punts de l'espai de la manera següent: S'agafa $x_1 \in X$ qualsevol. Com que $B_\epsilon(x_1) \neq X$ s'agafa $x_2 \in X \setminus B_\epsilon(x_1)$. Un cop agafats els primers n punts $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ s'agafa x_{n+1} com un punt de X que no pertanyi a $\cup_{i=1}^n B_\epsilon(x_i)$.

S'obté així una successió infinita $(x_n)_{n \geqslant 1}$ de punts tals que $d(x_n, x_m) \geqslant \epsilon$ per a tot $n \neq m$. Aquesta successió no pot tenir cap parcial convergent: per a tot punt $x \in X$ la bola $B_{\frac{\epsilon}{2}}(x)$ pot contenir com a màxim un dels punts x_n. Per tant x no és un punt d'acumulació de la successió.

Això vol dir que l'espai no és seqüencialment compacte. $\square$

Teorema 4.16 (Caracteritzacions equivalents de la compacitat) *En un espai mètric les tres propietats següents són equivalents:*

1. *tot recobriment obert té un subrecobriment finit (compacitat per recobriments);*
2. *tot subconjunt infinit té algun punt d'acumulació (propietat de Bolzano-Weierstrass);*
3. *tota successió té alguna parcial convergent (compacitat seqüencial).*

PROVA: Sigui X un espai mètric.

- $1 \Rightarrow 2$. Sigui $A \subseteq X$ un subconjunt que no té punts d'acumulació. Es vol veure que A és finit. Com que $\overline{A} = A^{\mathsf{a}} \sqcup A'$ la condició $A' = \varnothing$ implica que $A^{\mathsf{a}} = \overline{A}$ és un subconjunt tancat, que de fet és igual a A ja que $A^{\mathsf{a}} \subseteq A \subseteq \overline{A}$. Per ser X compacte A també ho és. Per a tot punt $x \in A = A^{\mathsf{a}}$ existeix un obert $\mathcal{U}_x$ tal que $\mathcal{U}_x \cap A = \{x\}$. La família $(\mathcal{U}_x)_{x\in A}$ és un recobriment obert de A. Per ser A compacte ha de tenir un subrecobriment finit, que ha de ser el mateix recobriment ja que si no s'agafa algun $\mathcal{U}_x$ no es recobriria el punt x. Per tant, A és finit.

- $2 \Rightarrow 3$. Sigui $(x_n)_{n\geqslant 1}$ una successió. Si els termes de la successió formen un conjunt finit aleshores la successió té una parcial que és constant i, per tant, convergent. Si la successió té infinits termes diferents aleshores per hipòtesi el conjunt infinit $\{x_n : n \geqslant 1\}$ té algun punt d'acumulació. Sigui x.

  Tota bola de centre x ha de contenir infinits termes de la successió. En efecte tota bola conté termes de la successió diferents de x per ser aquest un punt d'acumulació. Si només en contingués un nombre finit $x_{n_1}, \dots, x_{n_k}$ aleshores la bola de radi $\min\left\{d(x, x_{n_1}), \dots, d(x, x_{n_k})\right\}$ no contindria cap terme diferent de x, i això contradiu que sigui punt d'acumulació.

  Sigui $\sigma(1)$ tal que $x_{\sigma(1)} \in B_1(x)$. Sigui $\sigma(2) > \sigma(1)$ tal que $x_{\sigma(2)} \in B_{\frac{1}{2}}(x)$. Es van construint termes d'aquesta manera: un cop agafat $\sigma(n)$ amb $x_{\sigma(n)} \in B_{\frac{1}{n}}(x)$ s'agafa $\sigma(n+1) > \sigma(n)$ tal que $x_{\sigma(n+1)} \in B_{\frac{1}{n+1}}(x)$. Això és possible perquè totes les boles, del radi que sigui, contenen termes de la successió amb índex tan gran com es vulgui. Aleshores l'aplicació $n \mapsto \sigma(n)$ és una aplicació estrictament creixent $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ i la successió $(x_{\sigma(n)})_{n\geqslant 1}$ és una parcial que convergeix cap a x.

- $3 \Rightarrow 1$. Suposi's que l'espai és seqüencialment compacte. Es faran servir els dos lemes anteriors: el del nombre de Lebesgue (lema 4.14) i el lema 4.15. Sigui $(\mathcal{U}_i)_{i\in I}$ un recobriment obert de X. Sigui δ el (un) nombre de Lebesgue del recobriment. Agafant $\epsilon = \frac{\delta}{3}$ en el lema 4.15 existeix un recobriment finit de X format per boles $B_\epsilon(x_k)$. Aquestes boles tenen diàmetre $2\epsilon = \frac{2}{3}\delta < \delta$. Pel lema del nombre de Lebesgue cadascuna d'aquestes boles està continguda en algun obert del recobriment: sigui $B_\epsilon(x_k) \subseteq \mathcal{U}_{i_k}$. Aleshores aquests oberts recobreixen l'espai

$$X = \bigcup_{k=1}^{n} B_\epsilon(x_k) \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} \mathcal{U}_{i_k}$$

  i el recobriment donat té un subrecobriment finit. □

4.7 Compactificació d'Alexandrov

Afegint un punt de l'infinit a l'espai euclidià $\mathbb{R}^n$, i estenent la topologia de la manera adequada, s'obté un espai homeomorf a l'esfera $\mathbb{S}^n$, que és un espai compacte. Aquest tipus de construcció es pot fer més en general de la manera següent:

Definició 4.17 (Compactificació d'Alexandrov) *Sigui X un espai de Hausdorff. En el conjunt $X^\infty := X \sqcup \{\infty\}$ obtingut afegint un punt es defineix la topologia:*

$$\mathscr{T}^\infty := \mathscr{T} \cup \big\{\mathcal{K}^c \cup \{\infty\} : \mathcal{K} \subseteq X \text{ compacte}\big\}.$$

Proposició 4.18 *Propietats de X^∞:*

1. *està ben definit: $\mathscr{T}^\infty$ és, efectivament, una topologia;*
2. *X és un subespai de X^∞;*
3. *l'espai X^∞ és compacte;*
4. *X^∞ és de Hausdorff si, i només si, tot punt de X té un entorn compacte.*

Aquest espai X^∞ s'anomena compactificació d'Alexandroff *de l'espai X.*

PROVA: S'observa que de vegades es demana que X no sigui ja compacte d'entrada (quina seria la compactificació d'Alexandroff si l'espai ja és compacte). També es defineix la compactificació per a espais no Hausdorff vegeu, tot i que el cas important és aquest.

La definició diu que els oberts de X^∞ són els subconjunts que no contenen el punt afegit ∞ i són oberts a X i els subconjunts que sí que contenen ∞ tals que els altres elements del subconjunt són el complementari d'un compacte de X.

1. Els oberts s'han definit com els subconjunts que són d'un dels dos tipus següents: els $\mathcal{U} \subseteq X$ oberts de X i els $\mathcal{K}^c \cup \{\infty\}$ amb $\mathcal{K}$ compacte de X.

   El buit és un obert de X; el total X^∞ és $\varnothing^c \cup \{\infty\}$.

   La reunió de conjunts del primer tipus és del primer tipus, la reunió de conjunts $\mathcal{K}_i^c \cup \{\infty\}$ del segon tipus és $(\cap \mathcal{K}_i)^c \cup \{\infty\}$, que és un conjunt de segon tipus ja que en un espai de Hausdorff la intersecció de compactes és un compacte (aquí cal la condició de ser de Hausdorff: compacte $\Rightarrow$ tancat, intersecció arbitrària de tancats $\Rightarrow$ tancat, tancat en un compacte $\Rightarrow$ compacte). La reunió d'un del primer tipus amb un del segon és del segon: $\mathcal{U} \cup (\mathcal{K}^c \cup \{\infty\}) = (\mathcal{U}^c \cap \mathcal{K})^c \cup \{\infty\}$ i $\mathcal{U}^c \cap \mathcal{K}$ és compacte ja que és un subconjunt tancat d'un compacte. Per tant, la reunió d'oberts és un obert.

   La intersecció de dos oberts del primer tipus és del primer tipus, la intersecció de dos oberts del segon tipus

   $$\big(\mathcal{K}_1^c \cup \{\infty\}\big) \cap \big(\mathcal{K}_2^c \cup \{\infty\}\big) = \big(\mathcal{K}_1^c \cap \mathcal{K}_2^c\big) \cup \{\infty\} = (\mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2)^c \cup \{\infty\}$$

   és del segon tipus ja que la reunió de dos compactes és un compacte i la intersecció d'un de cada tipus $\mathcal{U} \cap (\mathcal{K}^c \cup \{\infty\}) = \mathcal{U} \cap \mathcal{K}^c$ és un obert de X ja que els compactes d'un Hausdorff són tancats (aquí es fa servir la condició de Hausdorff una segona vegada).

2. X és un subconjunt de X^∞. S'ha de veure que els oberts de X són les interseccions d'oberts de $\mathscr{T}^\infty$ amb X. Tot obert de X és intersecció amb X d'ell mateix, com a obert de X^∞. Tot obert de X^∞, en intersecar amb X, dóna: $\mathcal{U} \cap X = \mathcal{U} \in \mathscr{T}$ els del primer tipus i $(\mathcal{K}^c \cup \{\infty\}) \cap X = \mathcal{K}^c \in \mathscr{T}$ els del segon tipus, ja que els compactes en un Hausdorff són tancats.

3. Sigui $X^\infty = \cup_{i\in I} \mathcal{V}_i$ un recobriment obert de X^∞. Sigui $\mathcal{V}_j = \mathcal{K}^c \cup \{\infty\}$ un dels oberts del recobriment que contingui el punt de l'infinit. Els subconjunts $\mathcal{U}_i = \mathcal{V}_i \cap X \in \mathscr{T}$ són un recobriment obert de X, i per tant també un recobriment obert de $\mathcal{K}$. Per compacitat existeix un subrecobriment finit $\mathcal{U}_{i_1}, \ldots, \mathcal{U}_{i_n}$ de $\mathcal{K}$. Aleshores $\mathcal{V}_j$ junt amb els $\mathcal{V}_{i_k}$ per a $k = 1, \ldots, n$ són un subrecobriment finit de tot l'espai X^∞: els $\mathcal{V}_{i_k} \supseteq \mathcal{U}_{i_k}$ recobreixen el compacte $\mathcal{K}$ i l'obert $\mathcal{V}_j$ recobreix (és igual a) la resta: $X^\infty \smallsetminus \mathcal{K} = \mathcal{K}^c \cup \{\infty\}$.

4. Suposi's que X^∞ és de Hausdorff. Per a cada punt $x \in X$ existeixen un entorn obert $\mathcal{U} \in \mathscr{T}$ de x i un entorn obert $\mathcal{K}^c \cup \{\infty\}$ de ∞ amb intersecció buida i, per tant, amb $x \in \mathcal{U} \subseteq \mathcal{K}$. Aleshores $\mathcal{K}$ és un entorn (ja que conté l'entorn obert $\mathcal{U}$) compacte de x.

   Recíprocament, suposi's que tot punt de X té un entorn compacte. Només s'ha de veure que tot punt $x \in X$ i ∞ tenen entorns oberts disjunts, ja que dos punts de X els tenen per ser aquest espai de Hausdorff. Sigui $\mathcal{K}$ un entorn compacte de x. Aleshores $\mathcal{K}^\circ$ és un entorn obert de x i $\mathcal{K}^c \cup \{\infty\}$ és un entorn obert de ∞, i tots dos són disjunts.