1. (*Definició alternativa d'espai afí*). Sigui $\mathbb{A}$ un conjunt no buit , un k-espai vectorial E i $\alpha : \mathbb{A} \times E \to \mathbb{A}$ una aplicació tal que

(a) Per tot $p, q \in \mathbb{A}$ existeix un únic vector $v \in E$ tal que $q = \alpha(p, v)$;

(b) $\alpha(p, 0) = p$, per tot $p \in \mathbb{A}$, i

(c) $\alpha(\alpha(p, v), w) = \alpha(p, v + w)$ per tot $p \in \mathbb{A}$ i $v, w \in E$.

Si $\delta : \mathbb{A} \times \mathbb{A} \to E$ és l'aplicació que envia el parell (p, q) a l'únic vector v tal que $q = \alpha(p, v)$, proveu que $(\mathbb{A}, E, \delta)$ és un espai afí.

2. (*Un exemple no estàndard d'espai afí*). Sigui $\mathbb{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$, $E = \mathbb{R}^2$ i considerem l'aplicació $\alpha : \mathbb{A} \times E \to \mathbb{A}$ definida per

$$\alpha((x, y),(u_1, u_2)) = (x + u_1, e^{u_2} y).$$

Proveu que α satisfà les condicions del problema anterior i trobeu la corresponent aplicació $\delta : \mathbb{A} \times \mathbb{A} \to E$ que fa de $\mathbb{A}$ un espai afí real 2-dimensional.

3. Donats tres punts qualssevol A, B, C d'un pla afí real, dibuixeu els punts $\frac{1}{3}A + \frac{2}{3}B$ i $\frac{1}{4}A - \frac{1}{2}B + \frac{5}{4}C$.

4. Proveu que les combinacions lineals de punts compleixen les propietats següents:

(a) Propietat commutativa: si $a + b = 1$, aleshores

$$aP + bQ = bQ + aP$$

(b) Propietat distributiva: si $a + b, c + d, x + y = 1$, aleshores

$$x(aP + bQ) + y(cR + dS) = (xa)P + (xb)Q + (yc)R + (yd)S$$

(c) Propietat associativa: si $a + b, b + c \neq 0$ i $a + b + c = 1$, aleshores

$$(a + b)\left(\frac{a}{a + b}P + \frac{b}{a + b}Q\right) + cR = aP + bQ + cR = aP + (b + c)\left(\frac{b}{b + c}Q + \frac{c}{b + c}R\right)$$

5. Proveu que en qualsevol espai afí real $\mathbb{A}$ les tres medianes de qualsevol triangle són concurrents, essent el baricentre del triangle el punt d'intersecció. Més en general, si $A_1, \ldots, A_k$ són punts independents qualssevol de $\mathbb{A}$, demostreu que les rectes que uneixen cada A_i, $i = 1, \ldots, k$, amb el baricentre de la resta de punts són concurrents en el baricentre de tots ells.

6. Donat un triangle ABC d'un pla afí real i tres punts A', B', C' sobre els costats BC, CA i AB, respectivament, trobeu una condició necessària i suficient per tal que els triangles ABC i $A'B'C'$ tinguin el mateix baricentre.

7. (*Espai afí sobre un cos finit*). Considereu el pla afí $\mathbb{Z}/(p) \times \mathbb{Z}/(p)$ sobre el cos $\mathbb{Z}/(p)$, amb p primer.

(a) Quants punts i quantes rectes té?

(b) Quants punts té cada recta?

(c) Quantes rectes hi ha paral·leles a una recta donada?

(d) Quants feixos diferents de rectes paral·leles hi ha?

8. Considereu les rectes de $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ que en la referència canònica tenen per equacions $r: \ 2x - y + 1 = 0$ i $s: \ x - y - 1 = 0$. Trobeu la recta que passa pel punt $Q = (1, 2)$ i talla les rectes r i s.

9. A $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ considereu la recta $r = (1, 1, 0) + \langle(1, -1, 1)\rangle$. Trobeu (si existeix) el pla Π que conté r i que compleix que la intersecció de r amb el pla $\{z = 0\}$ és el punt mig de la intersecció de Π amb els eixos x i y.

10. Estudieu la posició relativa de les rectes r_1, r_2, r_3 de $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ que tenen per equacions en la referència natural

$$r_1 : \quad \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = z + 1$$

$$r_2 : \quad \left\{ \begin{array}{l} x = 9 + t \\ y = 15 + 2t \\ z = 4 + t \end{array} \right. \qquad (t \in \mathbb{R})$$

$$r_3 : \quad \left\{ \begin{array}{l} 6x - 4y + 2 = 0 \\ x + y + z = 1 \end{array} \right.$$

11. A $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ considerem el sistema de referència $\overline{R} = \{(1, 2, 1); (1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$. Siguin r, s les rectes que en aquesta referència tenen per equacions cartesianes

$$r : \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \overline{x} - \overline{y} & = & -1 \\ \overline{z} & = & -6 \end{array} \right. \qquad\qquad s : \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \overline{x} & = & 1 \\ 3\overline{y} + 2\overline{z} & = & 16 \end{array} \right.$$

Determineu-ne la posició relativa i trobeu-ne les equacions paramètriques en la referència $\overline{R}$ i les equacions cartesianes i paramètriques en la referència natural.

12. A l'espai afí real $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ considerem les dues referències $R = \{(0, 1, -1); (0, 1, 1), (1, 2, 0), (-1, 3, 1)\}$ i $R' = \{(0, 0, 2); (1, -1, 0), (2, 1, 0), (0, 3, 1)\}$, la recta $r = \{(1, 2, 1) + \lambda(2, 0, 1)\}_R$ i el pla $\Pi = \{x + y + z - 1 = 0\}_R$. Calculeu les matrius de canvi entre les dues referències, l'equació paramètrica de r en R', i l'equació cartesiana de Π en R'.

13. A $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ amb la referència natural considerem el pla $\Pi : x + y + z = 0$ i la recta $r = \{(1, 0, 0) + t(1, -1, 0)\}$. Sigui $\overline{R}$ un altra referència afí en la qual $\Pi : \overline{z} = 0$, i $r = \{\overline{x} = 0, \overline{z} + a\overline{y} = b\}$. Quins són els possibles valors de a i b? Per aquests valors, trobeu una referència $\overline{R}$ que ho compleixi.

14. Sigui $ABCD$ un quadrilàter qualsevol d'un espai afí real de dimensió $n \geq 2$ i siguin P, Q, R, S els punts mitjos dels costats AB, BC, CD i DA, respectivament.

(a) Proveu que P, Q, R, S defineixen un quadrilàter si i només si les dues diagonals de $ABCD$ no són paral·leles.

(b) En el cas anterior, proveu que $PQRS$ sempre és un paral·lelogram de baricentre el baricentre de $ABCD$ (en particular, P, Q, R, S són coplanars encara que no ho siguin A, B, C, D).

(c) Proveu que el propi quadrilàter $ABCD$ és un paral·lelogram si i només si les seves diagonals es bisequen mútuament.

15. Proveu que si pels vèrtexs d'un tetraedre $ABCD$ d'un espai afí real 3-dimensional es tracen plans paral·lels a les respectives cares oposades s'obté un nou tetraedre $A'B'C'D'$ tal que les rectes AA', BB', CC' i DD' es tallen en un mateix punt G que és el baricentre comú dels dos tetraedres.

16. Considerem un tetràedre Δ de $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$, dues arestes oposades de Δ i els plans paral·lels a aquest parell d'arestes que no contenen cap d'elles.

(a) Proveu que aquests plans tallen la resta d'arestes en els vèrtexs d'un paral·lelogram.

(b) Proveu que els punts d'intersecció de les diagonals d'aquests paral·lelograms es troben sobre una recta. Descriviu-la geomètricament.

17. Sigui ABC un triangle i A', B', C' punts situats sobre les rectes BC, AC, AB, respectivament. Proveu que els triangles ABC i $A'B'C'$ tenen el mateix baricentre si, i només si, $(A', B, C) = (B', C, A) = (C', A, B)$.

Problemes addicionals

18. Demostreu que un subconjunt d'un espai afí és una varietat lineal si i només si per a qualsevol parell de punts del subconjunt conté la recta que determinen.

19. Sigui H un hiperplà de $\mathbb{A}^n$. Demostreu que tota varietat lineal que no talli H és paral·lela a H.

20. Donades dues rectes de l'espai afí real de dimensió 3, r, s, trobeu el lloc geomètric dels punts mitjos dels parells de punts a, b amb $a \in r$ i $b \in s$.

21. Sigui $\mathbb{A}$ un espai afí de dimensió $n \geq 2$ i siguin L, L' varietats no paral·leles de dimensions d i d' complementàries. Tenen intersecció necessàriament no buida? Raoneu la resposta en funció dels valors de d, d'.

22. Donades tres rectes r, s i t de $\mathbb{A}^3$ de manera que els seus vectors directors són independents, demostreu que existeix una única recta l' paral·lela a t i tal que $r \cap l' \neq \emptyset$, $s \cap l' \neq \emptyset$.

23. Siguin a, b, c i d punts del pla no tres alineats. Demostreu que les condicions següents són equivalents:

(a) $a \vee b$ és paral·lela a $c \vee d$, i $a \vee d$ és paral·lela a $b \vee c$ (en aquest cas, direm que a, b, c, d determinen un paral·lelogram).

(b) $\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{dc}$.

(c) $\overrightarrow{ad} = \overrightarrow{bc}$.

(d) $a + \frac{1}{2}\,\overrightarrow{ac} = b + \frac{1}{2}\,\overrightarrow{bd}$ (és a dir, les diagonals es tallen en els respectius punts mitjos).

24. Donades tres rectes de $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ que es creuen dos a dos i paral·leles a un pla, proveu que les rectes que tallen les tres són totes elles paral·leles a un mateix pla.

25. En un paral·lelogram $ABCD$ d'un pla afí una paral·lela als costats AD i BC talla els costats AB i DC en els punts M i N, respectivament, i una paral·lela als costats AB i DC talla els costats AD i BC en els punts P i Q, respectivament. Suposant que les rectes NP i MQ es tallen en un punt H, proveu que A, C i H estan alineats.

26.

(a) Sigui P un punt del pla afí real i r una recta que no passi per P. Fixat $\lambda \in \mathbb{R}$, trobeu el lloc geomètric dels punts Q tals que $(Q, A, P) = \lambda$, en variar A en r.

(b) Fixat un sistema de referència del pla $\{O; e_1, e_2\}$, considerem les rectes que tenen per equacions

$$r: \quad x - 2y + 3 = 0, \qquad\qquad s: \quad 2x + y - 4 = 0.$$

Trobeu els punts Q tals que $(Q, A, O) = \frac{1}{2}$ i $(Q, B, O) = 2$ en variar $A \in r$ i $B \in s$.

27. Discutiu en funció del paràmetre $a \in \mathbb{R}$ la posició relativa dels plans π_1 i π_2 de $\mathbb{A}^4_{\mathbb{R}}$ que tenen per equacions en la referència natural

$$\pi_1 : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + \lambda + \mu \\ y = -2\lambda + \mu, z = 2 + \mu \\ u = 2 \end{array} \right. \qquad (\lambda, \mu \in \mathbb{R})$$

$$\pi_2 : \left\{ \begin{array}{l} x - 2u = 0 \\ x + 2y - az = 1 \end{array} \right.$$

28. A $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ considerem el pla $\Pi : x + 2y + z = -6$ i les projeccions P i r sobre Π de l'origen i l'eix $\{x = z = 0\}$, respectivament, en la direcció $(0, 0, 1)$. Trobeu un sistema de referència afí on l'equació del pla Π sigui $\overline{z} = \sqrt{6}$, P pertanyi a l'eix $\{\overline{x} = \overline{y} = 0\}$ i r estigui sobre el pla $\overline{y} = 0$. Quants sistemes de referència afins hi ha que compleixin aquestes condicions?

29. (Parcial 2012) A $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ en referència natural, considereu les rectes $r_1 : x-1 = z = 0$, $r_2 : y-1 = x = 0$, $r_3 : x = y = z$ i el pla $\pi : x + y + 6 = 0$. Trobeu una recta t que talli r_1, r_2 i r_3 i sigui paral·lela a π.

30. (Parcial 2012) Siguin $ABCD$ un paral·lelogram en un espai afí real, G el seu baricentre, P i Q dos punts sobre les rectes AB i CD respectivament tals que $(A, B, P) = (C, D, Q)$. Demostreu que G pertany a la recta PQ i calculeu (P, Q, G).

31. (Parcial 2011) Considereu les varietats lineals de $\mathbb{A}^4_{\mathbb{R}}$ següents:

$$\begin{aligned} r &: (1,1,1,1)+[(a,1,0,0)] \\ \pi &: x+y+z+t-1=x+y-z=0 \end{aligned}$$

Estudieu la seva posició relativa i la dimensió de la seva suma, en funció del paràmetre a.

32. (Parcial 2012) A l'espai afí $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ amb la referència natural, considereu les rectes $r : (0,0,1) + [(1,-1,-1)]$ i $s : (1,0,0) + [(2, 2-2a, 4-3a)]$, (on $a \in \mathbb{R}$ és un paràmetre) i el pla $\pi : (2,1,-1) + [(2,0,1),(0,2,3)]$.

(i) Discutiu la posició relativa de r i s en funció del paràmetre a.

(ii) Per a quins valors del paràmetre a es pot trobar una referència $\mathcal{R}'$ on les rectes tinguin equacions cartesianes $r : \{x' = z' = 0\}$ i $s : \{y' - 3 = z' = 0\}$?

(iii) Fixem ara $a = 1$. Raoneu que existeixen infinites referències $\overline{R}$ tals que les rectes tinguin equacions $r : \{\bar{y} = \bar{z} - 1 = 0\}$ i $s : \{\bar{x} = \bar{z} = 0\}$, i l'equació cartesiana del pla sigui de la forma $\pi : \{\bar{z} = b\}$. Justifiqueu que el valor de b és el mateix per a totes elles.

(iv) Trobeu una referència amb les condicions de l'apartat anterior i calculeu el valor de b.