Grau en Matemàtiques, FME

Programació Matemàtica

Tema 3 : Programació Lineal Entera

Jordi Castro, F.-Javier Heredia, Josep Homs

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Departament d'Estadística
i Investigació Operativa

Tema 4 : Programació Lineal Entera

1. **Propietats bàsiques:**
   - Introducció: problemes i algorismes de (PLE).
   - Relaxació lineal
   - Formulacions vàlides, ideals i fortes
2. **Algorismes de programació lineal entera**
   - Algorisme de ramificació i poda (Branch & Bound).
   - Algorisme de plans de tall de Gomory.
   - Algorisme de ramificació i tall (Branch & Cut).
   - Reoptimització de (RLj) amb l'ASD (fora temari).
3. **Annex:**
   - Models bàsics de programació lineal entera.

Bibliografia:

Bertsimas i Tsitsiklis, *Introduction to Linear Optimization*. Cap 10, 11.

Definició de problema de PLE

- Quan una o diverses variables d'un problema de PL només pot adoptar valors enters, es té un problema de **Programació Lineal Entera** (PE):

$$(PE)\begin{cases} \min\limits_{x\in\mathbb{R}^n} & c'x \\ s.a.: & Ax = b \\ & x \geq 0 \\ & x_i \in \mathbb{Z}, i \in \mathcal{I} \end{cases}$$

- Els problemes de PLE són habituals quan les solucions fraccionals no tenen sentit.
- Les variables enteres també ens ajuden a construir models més acurats per a un gran nombre de problemes de presa de decisions.
- A les classes de laboratori veurem alguns exemples de models de PLE:
  - Planificació de plantilles laborals.
  - Selecció de projectes/inversions.
  - Problemes de producció amb costos fixos.

Algorismes de PE: classificació

- Considerem el següent problema de (PLE):

$$(PE)\begin{cases}\min\limits_{x\in\mathbb{R}^n} & c'x \\ s.a.: & Ax=b \\ & x\geq 0 \\ & x_i\in\mathbb{Z}, i\in\mathcal{I}\end{cases}$$

- Durant aquest curs esturiarem la resolució d'aquest aquest problema amb tres algorismes diferents:
  - **Branch-and-Bound (ramifica i poda)** : es basa en la identificació de x_{PE}^* després de visitar un conjunt "reduït" de solucions enteres del problema (PLE).
  - **Cutting Planes (plans de tall)** : afegeix constriccions addicionals (talls) fins aconseguir identificar la solució de (PLE).
  - **Branch-and-Cut (ramifica i talla)**: una combinació dels anteriors.

Relaxació Lineal (RL) (1/3)

$$(PE)\begin{cases} \min z_{PE} = & -2x_1 & -5x_2 & \\ \text{s.a.:} & & & \\ (1) & x_1 & +4x_2 & \leq 8 \\ (2) & x_1 & +x_2 & \leq 4 \\ & x_1, & x_2 & \geq 0, \text{ enteres} \end{cases}$$

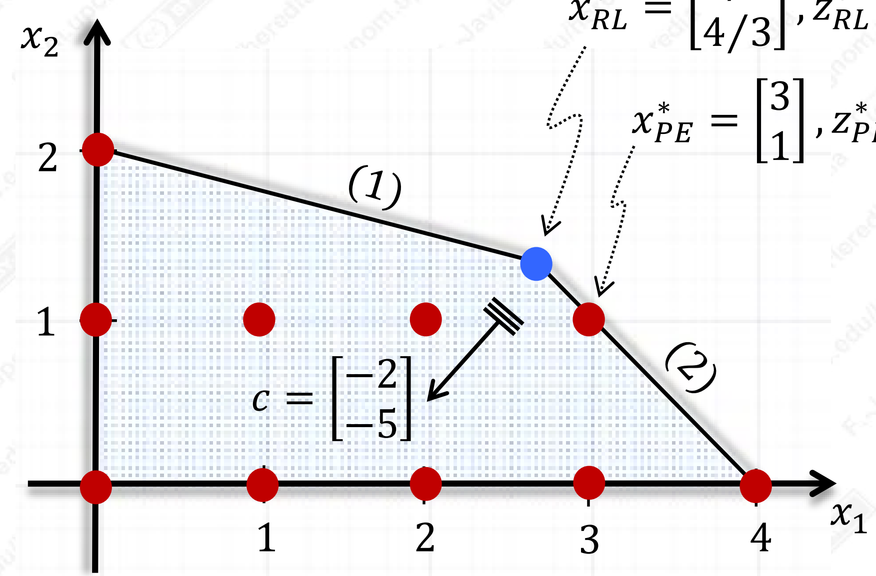
$$(RL)\begin{cases} \min z_{RL} = & -2x_1 & -5x_2 & \\ \text{s.a.:} & & & \\ (1) & x_1 & +4x_2 & \leq 8 \\ (2) & x_1 & +x_2 & \leq 4 \\ & x_1, & x_2 & \geq 0 \end{cases}$$

● Regió factible (PE): K_{PE}

Regió factible (RL): K_{RL}

$x_{RL}^* = \begin{bmatrix} 8/3 \\ 4/3 \end{bmatrix}, z_{RL}^* = -12$

$x_{PE}^* = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, z_{PE}^* = -11$



Propietats

i. $K_{PE} \subseteq K_{RL}$

ii. $z_{RL}^* \leq z_{PE}^*$

iii. Si $x_{RL}^* \in K_{PE} \Rightarrow x_{PE}^* \equiv x_{RL}^*$

Relaxació Lineal (RL) (2/3)

Si (RL) és...

...llavors (PE) és...	Sol. òptima	Infactible	Il·limitat
Sol. òptima	Possible (1)	Impossible	$\boxed{\text{Possible (4)}}$
Infactible	Possible (2)	Segur	Possible (5)
Il·limitat	Impossible (3)	Impossible	Possible

Taula 1: relació solucions $(PE)-(RL)$

(1) : Si $x^*_{RL} \in K_{PE} \Rightarrow x^*_{RL} \equiv x^*_{PE}$

(2) : $(PE)\ \min_{x\in\mathbb{Z}} \left\{ x_1 \middle| \frac{1}{4} \leq x_1 \leq \frac{3}{4} \right\}$: (PE) infactible, $x^*_{RL} = \left[\frac{1}{4}\right]$.

(3) : $z^*_{RL} \leq z^*_{PE}$.

(4) : $(PE)\ \min_{x\in\mathbb{Z}^4} \left\{ -x_1 \middle| x_3 - \sqrt{\mathbf{2}}(x_1 - x_2) = 0, x_2 + x_4 = 1, x \geq 0 \right\}$.

- (RL) il·limitat: $x = \left[\alpha, 0, \alpha\sqrt{\mathbf{2}}, 1\right]'$ factible per a tot $\alpha \geq 0$.
- (PE) òptim: $K_{PLE} = \{[0,0,0,1]', [1,1,0,0]'\}$ amb $x^*_{PE} = [1,0,0,0]'$.

(5) : $(PE)\ \min_{x\in\mathbb{Z}^2} \left\{ x_1 + x_2 \middle| \frac{1}{4} \leq x_1 \leq \frac{3}{4} \right\}$: (PE) infactible, (RL) il·limitat.

Relaxació Lineal (RL) (3/3)

Teorema 11: (Byrd, Goldman i Heller, Operations Research 1987)

Sigui $(PE)\ \min_{x\in\mathbb{Z}^n}\{c'x|Ax=b, x\geq 0\}$ *i* (RL) *la seva relaxació lineal.*

Si A *té coeficients racionals (*$a_{ji}\in\mathbb{Q}$*) i* (RL) *és il·limitat llavors el problema* (PE) *és o bé il·limitat o bé infactible.*

(PE) \ (RL)	Sol. òptima	Infactible	Il·limitat
Sol. Òptima	Possible	Impossible	$\boxed{\text{Impossible}}$
Infactible	Possible	Segur	Possible
Il·limitat	Impossible	Impossible	Possible

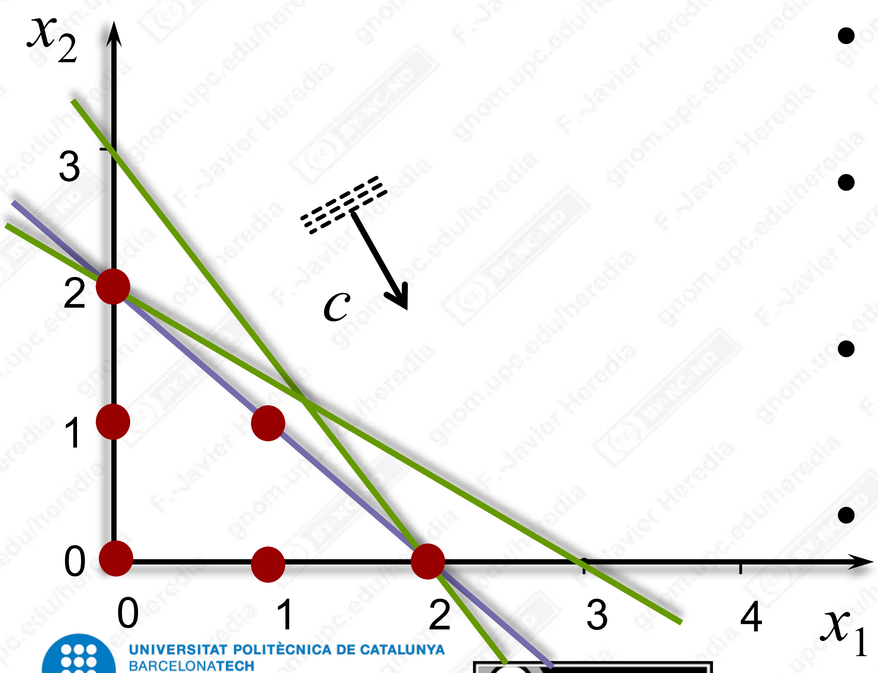
Taula 2: relacions $(PE)-(RL)$ amb A racional.

- En el desenvolupament dels algorismes assumirem que el problema (PE) té A racional.

Formulacións vàlides i fortes de problemes PE

- Sigui el $(PE)\ \min\{c'x \mid \boldsymbol{K_{PE} = \{(0,0),(0,1),(0,2),(1,0),(2,0)\}}\}$.
- Generalment hi ha més d'una forma de definir la regió factible K_{PE}:

$$(PE1)\begin{cases}\min z_{PE} = & -2x_1 \\ \text{s.a.:} & \boxed{x_1 + x_2 \le 2} \\ & x \ge 0, \text{entera}\end{cases} \qquad (PE2)\begin{cases}\min z_{PE} = & -2x_1 \\ \text{s.a.:} & \boxed{\begin{array}{ll} 3x_1 + 2x_2 & \le 6 \\ 2x_1 + 3x_2 & \le 6\end{array}} \\ & x \ge 0, \text{entera}\end{cases}$$



- **Def. desigualtat vàlida**: $a_j'x \le b_j$ és desigualtat vàlida per a K_{PE} si $a_j'x \le b_j$ per a tot $x \in K_{PE}$
- $(PE1)$ i $(PE2)$ són **formulacions vàlides**, doncs

$$\boldsymbol{K_{PE} = K_{PE1} = K_{PE2}} \text{ (i } x^*_{PE} = x^*_{PE1} = x^*_{PE2}\text{).}$$

- Quina formulació és millor? Observem que:

$$\boldsymbol{K_{RL1} \subset K_{RL2} \Rightarrow z^*_{RL2} \le z^*_{RL1} \le z^*_{PE}}$$

- **Def:** *direm que la formulació PE1 és **més forta** que PE2 si $K_{RL1} \subset K_{RL2} \Rightarrow$ la relaxació lineal RL1 proporciona una fita millor (més forta) de z^*_{PE}.*

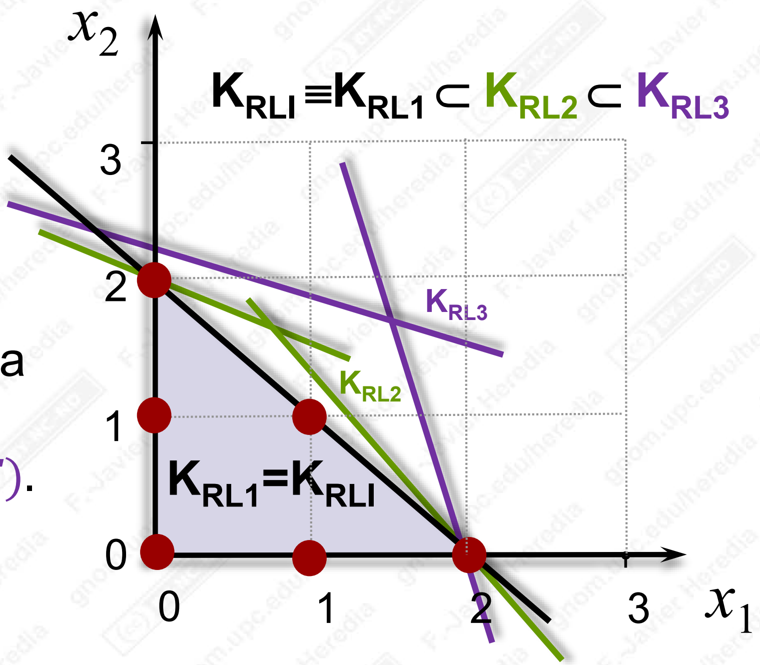
Formulació ideal d'un problema PE

- La formulació més forta possible de (PE) s'anomena **formulació ideal** (PEI) :

  (PEI) formulació vàlida t.q. $K_{RLI} \subseteq K_{RL_j}$ per a tota formulació vàlida (PEj) de (PE).

- Analitzem la formulació (PE1) anterior:

$$
(\text{PE1})\begin{cases} \text{min} & z_{PE1} = c'x \\ \text{s.a.:} & x_1 + x_2 \le 2 \\ & x \ge 0, \text{entera} \end{cases}
$$



- Observant el dibuix és evident que no hi ha cap altre formulació alternativa més forta que $(PE1)$: **és la formulació ideal de (PE)**.
- Això és així perque K_{RL1} coincideix amb **l'embolcall convex** de K_{PE}, $CH(K_{PE})$:

$$K_{RL1} = CH(K_{PE}) = \left\{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^i \,\middle|\, \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1, \lambda_i \ge 0, x^i \in K_{PE}\right\}$$

- **El problema (PE) $min\{c'x|x \in K_{PE}\}$ equival a $(P) min\{c'x|x \in CH(K_{PE})\}$.**

Algorisme de Branch&Bound

- **Algorisme de Branch-and-Bound (ramifica i poda)**: es basa en la identificació de x_{PE}^* després de visitar un conjunt "reduït" de solucions enteres del problema PE usant les fites z_{RL}^*.
- Estudiarem l'algorisme a traves de la seva aplicació al següent (PE) :

$$(PE)\begin{cases} \min & z_{PE} = -3x_1 - 5x_2 \\ \text{s.a.:} & x_1 + x_2 \geq 2 \\ & 7x_1 + 10x_2 \leq 35 \\ & x \geq 0, \text{entera} \end{cases}$$

Algorisme genèric de Branch and Bound (B&B)

A. H. Land and A. G. Doig (1960). "An automatic method of solving discrete programming problems". *Econometrica* 28 (3): pp. 497–520. doi:10.2307/1910129

Inicialització: Sigui $(PE1)$ amb $A \in \mathbb{Q}^{m \times n}$. $L = \{PE1\}$, $k := 1$; $z^* = +\infty$ (incumbent, $z^*_{PE1} \leq z^*$); $\underline{z}^*_{PE1} = -\infty$.

Mentre $L \neq \emptyset$ **fer**

Es selecciona un problema $PEj \in L$ ____ **Selecció**

Es resol la relaxació lineal RLj : x^*_{RLj} ; $\underline{z}^*_{PEj} \leftarrow z^*_{RLj}$ (o $\lceil z^*_{RLj} \rceil$ si $c \in \mathbb{Z}^n$) ____ **Relaxació**

Si RLj il·limitat ó $K_{RLj} = \emptyset$ ó $\underline{z}^*_{PEj} \geq z^*$ ó $x^*_{RLj} \in K_{PEj}$ **fer** ____ **Eliminació**

$L \leftarrow L \backslash \{PEj\}$

Si $x^*_{RLj} \in K_{PEj}$ **fer**

Si $z^*_{RLj} \leq z^*$: $x^* \leftarrow x^*_{RLj}$, $z^* \leftarrow z^*_{RLj}$

Si $z^* \leq \underline{z}^*_{PEi}$ per a algun PEi : $L \leftarrow L \backslash \left\{ PEi, \{PEl\}_{\forall (PEl) \text{ descendent de } PEi} \right\}$

Fi Si

Altrament : Es selecciona $x^*_{RLj_i} \notin \mathbb{Z}$ ____ **Separació**

Es defineix la separació de PEj en els subproblemes $PE(k+1)$, $PE(k+2)$ t.q.

$K_{PEj} = K_{PE(k+1)} \cup K_{PE(k+2)}$; $K_{PE(k+1)} \cap K_{PE(k+2)} = \emptyset$; $z_{PE(k+1)} = z_{PE(k+2)} = z_{PEj}$:

$$(PE(k+1)) \min\{c'x \mid x \in K_{PE(k+1)}\}, \qquad K_{PE(k+1)} := \left\{ x \in K_{PEj} \mid x_i \leq \lfloor x^*_{RLj_i} \rfloor \right\}$$

$$(PE(k+2)) \min\{c'x \mid x \in K_{PE(k+2)}\}, \qquad K_{PE(k+2)} := \left\{ x \in K_{PEj} \mid x_i \geq \lceil x^*_{RLj_i} \rceil \right\}$$

Es substitueix PEj pels seus descendents : $L \leftarrow L \backslash \{PEj\} \cup \{PE(k+1)\} \cup \{PE(k+2)\}$. $k := k+2$.

Fi Si

Fi Mentre

Si $z^* < +\infty$: $x^*_{PE1} \equiv x^*$.

Altrament Si $RL1$ il·limitat : $PE1$ il·lim. o infactible.

Altrament : $PE1$ infactible.

Fi Si

Pel Teorema 11:

$$(RL1) \begin{cases} \text{Sol. opt.} & \Rightarrow \quad (PE1) \begin{cases} \text{Sol. opt.} & \Rightarrow \exists (PEj) \text{ sol. opt. } (z^* < +\infty). \\ \text{Infac.} & \Rightarrow \text{Tot } (PEj) \text{ infac. } (z^* = +\infty). \end{cases} \\ \text{Infac.} & \Rightarrow \quad (PE1) \text{ infactible.} \\ \text{Il·lim.} & \Rightarrow \quad (PE1) \text{ infactible o il·limitat.} \end{cases}$$

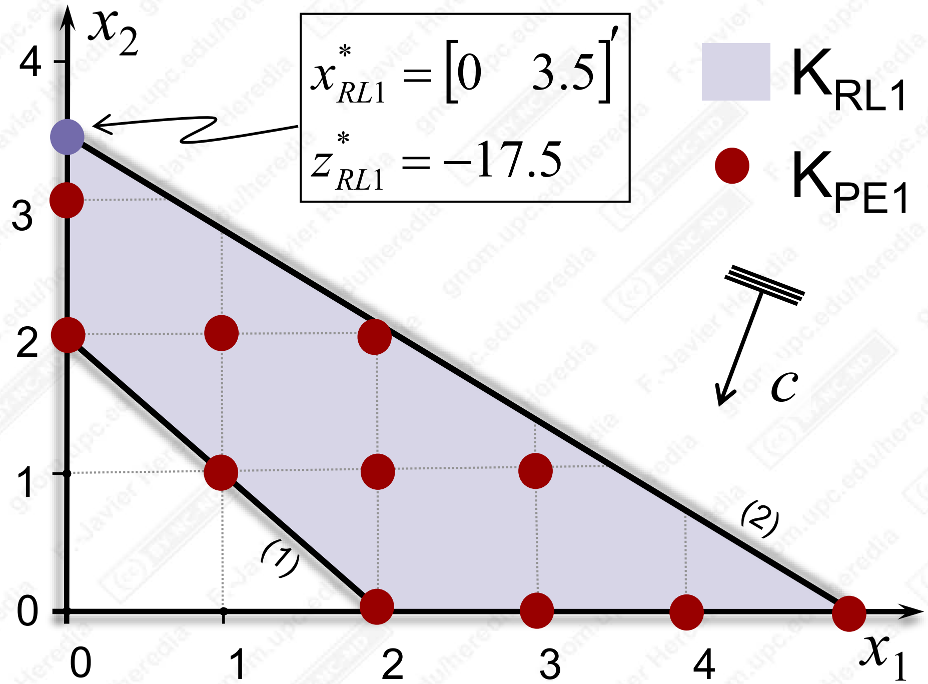
Exemple Branch&Bound: tractament de (PE1)

B&B, Iteració 1: L={(PE1)}, $\underline{z}^*_{PE1} = -\infty \le z^*_{PE1} \le \bar{z}^* = +\infty$

- **Selecció**: (PE1)
- **Relaxació**: resolució de (RL1):

$$(PE1)\begin{cases} \text{min} & z_{PE1} = -3x_1 - 5x_2 & \\ \text{s.a.:} & x_1 + x_2 \ge 2 & (1) \\ & 7x_1 + 10x_2 \le 35 & (2) \\ & x \ge 0\text{, entera} & \end{cases}$$

$\underline{z}^*_{PE1} \leftarrow \lceil -17.5 \rceil = -17$



- **Separació:** $x_2^* = 7/2 \leftarrow \begin{cases} (PE1) \wedge x_2 \le \left\lfloor \frac{7}{2} \right\rfloor = 3 \rightarrow (PE2) \\ (PE1) \wedge x_2 \ge \left\lceil \frac{7}{2} \right\rceil = 4 \rightarrow (PE3) \end{cases}$, $L \leftarrow \{(PE2),(PE3)\}$

Arbre d'exploració

Algorisme

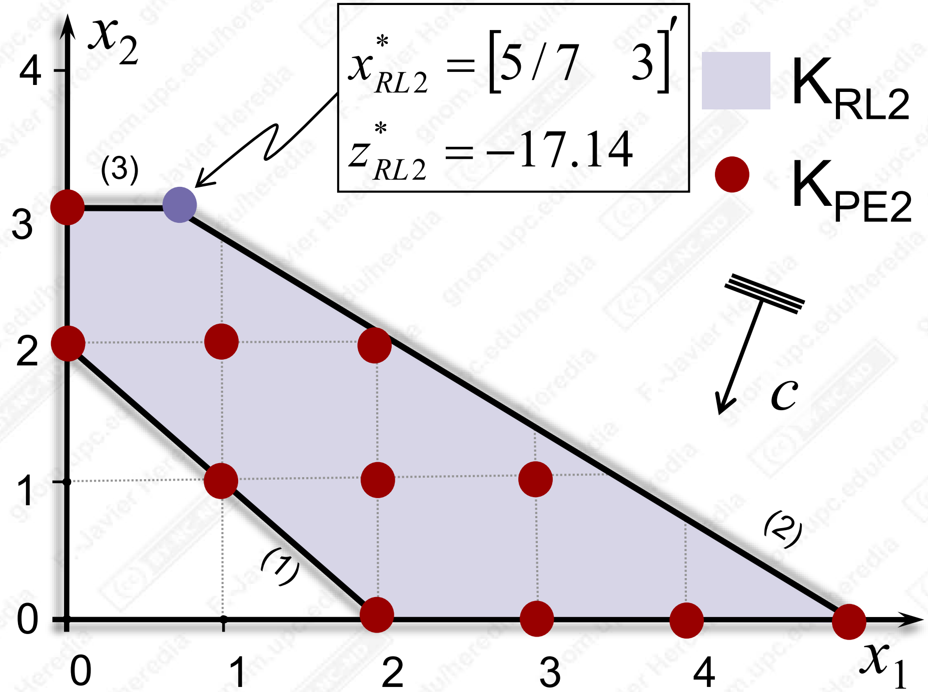
Exemple Branch&Bound: tractament de (PE2)

B&B, Iteració 2: $L=\{(PE2),(PE3)\}$, $\underline{z}^*_{PE1} = -17 \le z^*_{PE1} \le \bar{z}^* = +\infty$

- **Selecció**: (PE2)
- **Relaxació**: resolució de (RL2):

$$(PE2)\begin{cases} \min & z_{PE2} = -3x_1 - 5x_2 \\ \text{s.a.:} & x_1 + x_2 \ge 2 & (1) \\ & 7x_1 + 10x_2 \le 35 & (2) \\ & x_2 \le 3 & (3) \\ & x \ge 0, \text{ entera} \end{cases}$$

$\underline{z}^*_{PE2} \leftarrow \lceil -17.14 \rceil = -17$



- **Separació:** $x_1^* = 5/7 \leftarrow \begin{cases} (PE2) \wedge x_1 \le 0 \rightarrow (PE4) \\ (PE2) \wedge x_1 \ge 1 \rightarrow (PE5) \end{cases}$, $L \leftarrow \{(PE4),(PE5),(PE3)\}$

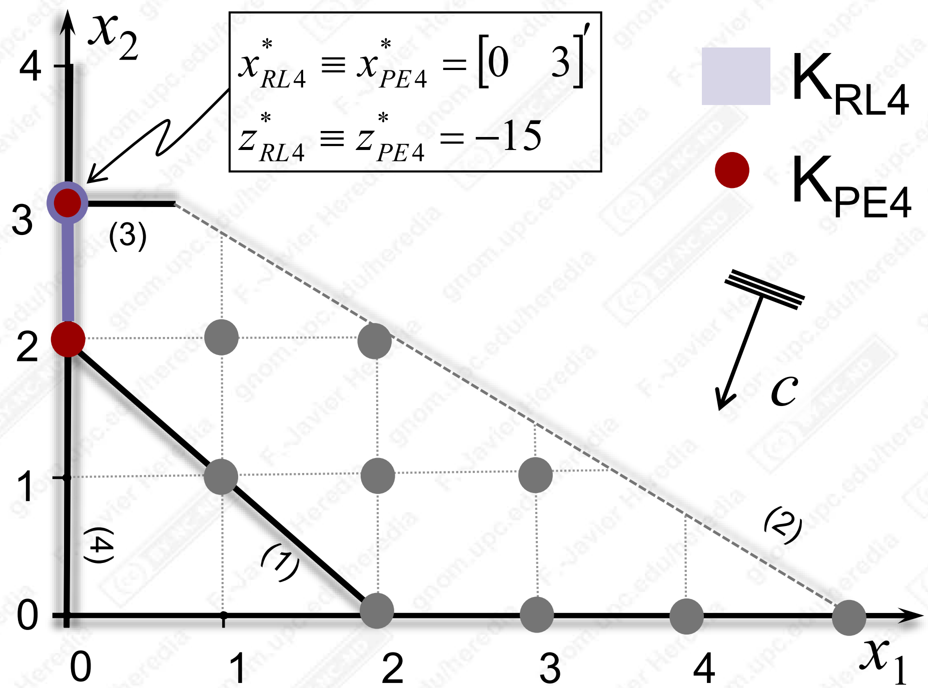
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA BARCELONATECH
Departament d'Estadística i Investigació Operativa

Exemple Branch&Bound: tractament de (PE4)

B&B, Iteració 3: L={(PE4),(PE5),(PE3)}, $\underline{z}^*_{PE1} = -17 \le z^*_{PE1} \le z^* = +\infty$

- **Selecció**: (PE4)
- **Relaxació**: resolució de (RL4):

$$
(PE4)\begin{cases}
\min & z_{PE4} = -3x_1 - 5x_2 \\
\text{s.a.:} & x_1 + x_2 \ge 2 \quad (1) \\
& 7x_1 + 10x_2 \le 35 \quad (2) \\
& x_2 \le 3 \quad (3) \\
& x_1 \le 0 \quad (4) \\
& x \ge 0,\ \text{entera}
\end{cases}
$$



- **Eliminació:** $x^*_{RL4} \in K_{PE4} \Rightarrow x^*_{PE4} \equiv x^*_{RL4}$
  - S'elimina (PE4): $L \leftarrow L \backslash \{(PE4)\} = \{(PE5),(PE3)\}$
  - $z^*_{PE4} < z^* \Rightarrow$ s'actualitza la incumbent: $x^* \leftarrow x^*_{PE4} = [\,0,\,3\,]'$, $z^* \leftarrow z^*_{PE4} = -15$
  - $z^* > \underline{z}^*_{PE1}, \underline{z}^*_{PE2}$

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA BARCELONATECH
Departament d'Estadística i Investigació Operativa

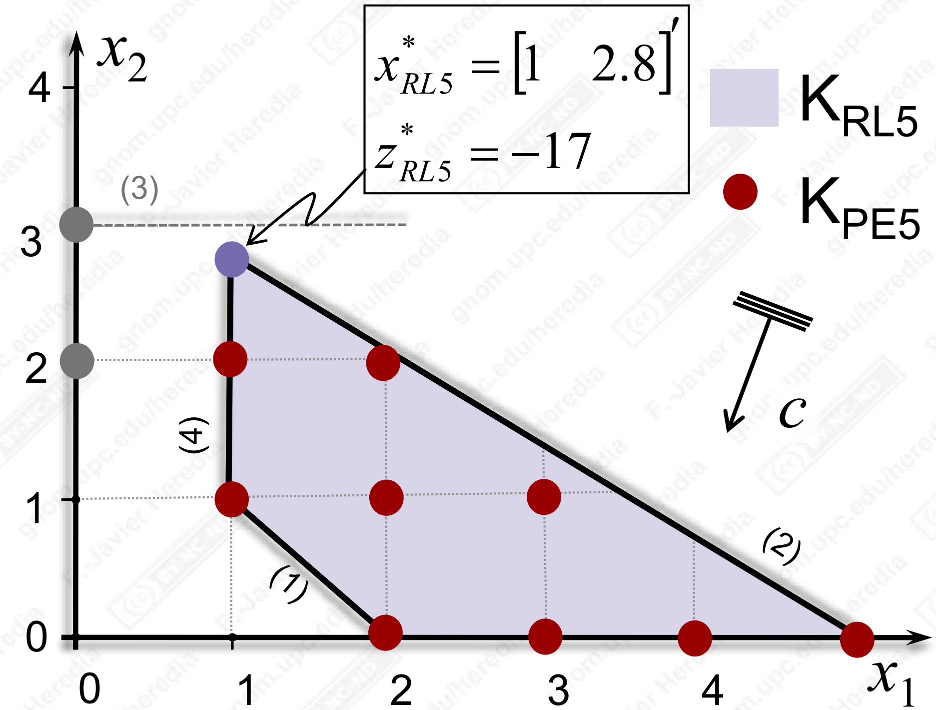
Exemple Branch&Bound: tractament de (PE5)

B&B, Iteració 4: L={(PE5),(PE3)}, $\underline{z}^*_{PE1} = -17 \le z^*_{PE1} \le z^* = -15$, $x^* = [0,3]'$

- **Selecció**: (PE5)
- **Relaxació**: resolució de (RL5):

$$
(PE5)\begin{cases}
\text{min} & z_{PE5} = -3x_1 - 5x_2 & \\
\text{s.a.:} & x_1 + x_2 \ge 2 & (1) \\
 & 7x_1 + 10x_2 \le 35 & (2) \\
 & x_2 \le 3 & (3) \\
 & x_1 \ge 1 & (4) \\
 & x \ge 0 \text{, entera} &
\end{cases}
$$

$\underline{z}^*_{PE5} \leftarrow -17$



- **Separació:** $x_2^* = 2.8 \leftarrow \begin{cases} (PE5) \wedge x_2 \le 2 \rightarrow (PE6) \\ (PE5) \wedge x_2 \ge 3 \rightarrow (PE7) \end{cases}$, $L \leftarrow \{(PE6),(PE7),(PE3)\}$

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Departament d'Estadística i Investigació Operativa

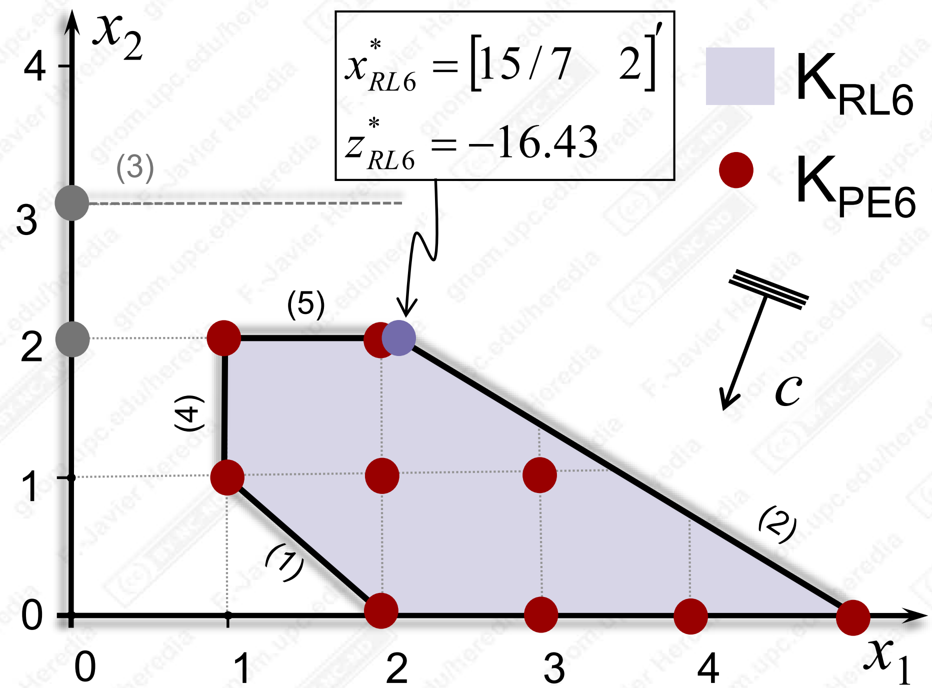
Exemple Branch&Bound: tractament de (PE6)

B&B, Iteració 5: L={(PE6), (PE7),(PE3)}, $\underline{z}^*_{PE1} = -17 \le z^*_{PE1} \le z^* = -15$, $x^* = [0,3]'$

- **Selecció**: (PE6)
- **Relaxació**: resolució de (RL6):

$$
(PE6)\begin{cases}
\text{min} & z_{PE6} = -3x_1 - 5x_2 & \\
\text{s.a.:} & x_1 + x_2 \ge 2 & (1)\\
& 7x_1 + 10x_2 \le 35 & (2)\\
& x_2 \le 3 & (3)\\
& x_1 \ge 1 & (4)\\
& x_2 \le 2 & (5)\\
& x \ge 0\text{, entera} &
\end{cases}
$$

$\underline{z}^*_{PE6} \leftarrow \lceil -16.43 \rceil = -16$



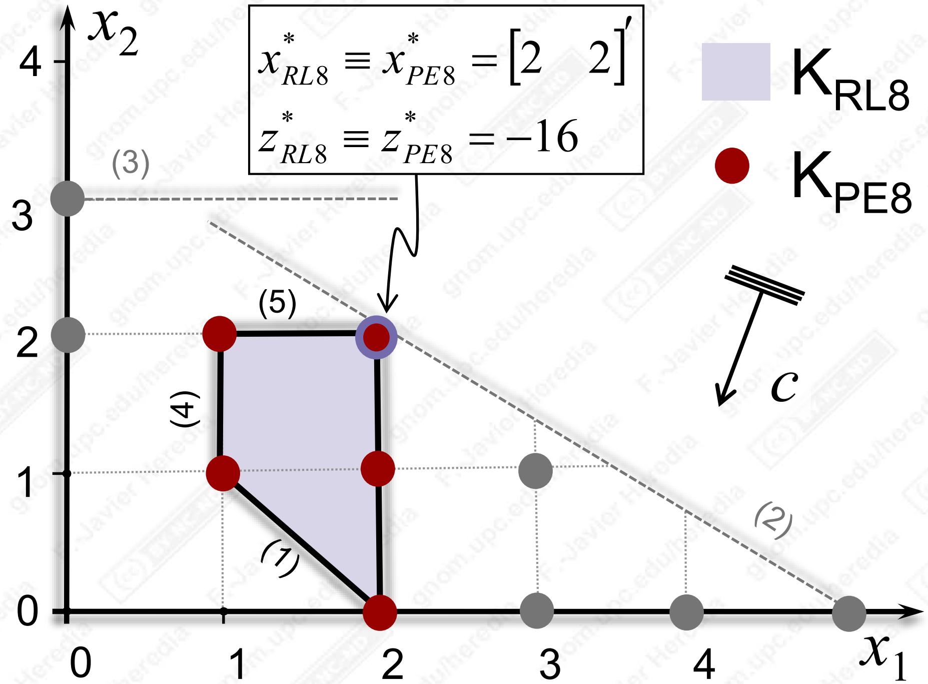
- **Separació:** $x_1^* = 15/7 \leftarrow \begin{cases} (PE6) \wedge x_1 \le 2 \rightarrow (PE8) \\ (PE6) \wedge x_1 \ge 3 \rightarrow (PE9) \end{cases}$, $L \leftarrow \{(PE8),(PE9),(PE7),(PE3)\}$

Exemple Branch&Bound: tractament de (PE8)

B&B, Iteració 6: L={(PE8), (PE9),(PE7),(PE3)}, $\underline{z}^*_{PE1} = -17 \le z^*_{PE1} \le z^* = -15$

- **Selecció**: (PE8)
- **Relaxació**: resolució de (RL8):

$$(PE8)\begin{cases} \text{min} & z_{PE8} = -3x_1 - 5x_2 \\ \text{s.a.:} & x_1 + x_2 \ge 2 & (1) \\ & 7x_1 + 10x_2 \le 35 & (2) \\ & x_2 \le 3 & (3) \\ & x_1 \ge 1 & (4) \\ & x_2 \le 2 & (5) \\ & x_1 \le 2 & (6) \\ & x \ge 0 \text{, entera} \end{cases}$$



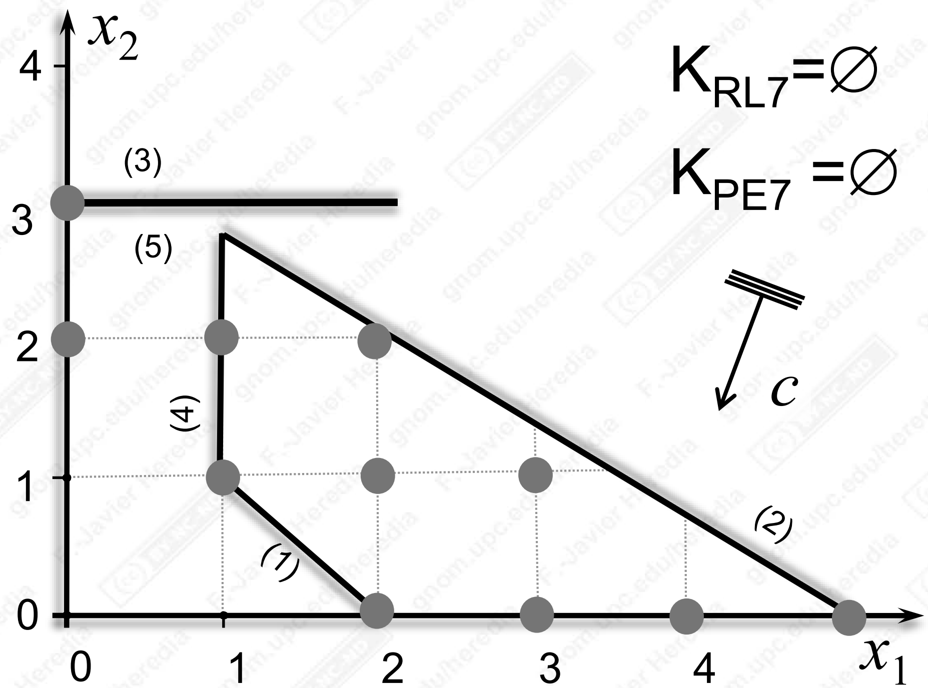
- **Eliminació:** $x^*_{RL8} \in K_{PE8} \Rightarrow x^*_{PE8} \equiv x^*_{RL8}$
  - S'elimina (PE8): $L \leftarrow L \setminus$ {(PE8)} = {(PE9),(PE7),(PE3)}
  - $z^*_{PE8} < z^* \Rightarrow$ s'actualitza la incumbent: $x^* \leftarrow x^*_{PE8} = [\,2,\,2\,]'$, $z^* \leftarrow z^*_{PE8} = -16$
  - $z^* = \underline{z}^*_{PE6} \Rightarrow$ s'eliminen descendents de (PE6): $L \leftarrow L \setminus$ {(PE9)} = {(PE7),(PE3)}

Exemple Branch&Bound: tractament de (PE7)

B&B, Iteració 7: L={(PE7),(PE3)}, $\underline{z}^*_{PE1} = -17 \le z^*_{PE1} \le \bar{z}^* = -16$, $x^*=[2,2]'$

- **Selecció**: (PE7)
- **Relaxació**: resolució de (RL7):

$$
(PE7)\begin{cases}
\min & z_{PE7} = -3x_1 - 5x_2 & \\
\text{s.a.:} & x_1 + x_2 \ge 2 & (1) \\
 & 7x_1 + 10x_2 \le 35 & (2) \\
 & x_2 \le 3 & (3) \\
 & x_1 \ge 1 & (4) \\
 & x_2 \ge 3 & (5) \\
 & x \ge 0\text{, entera} &
\end{cases}
$$



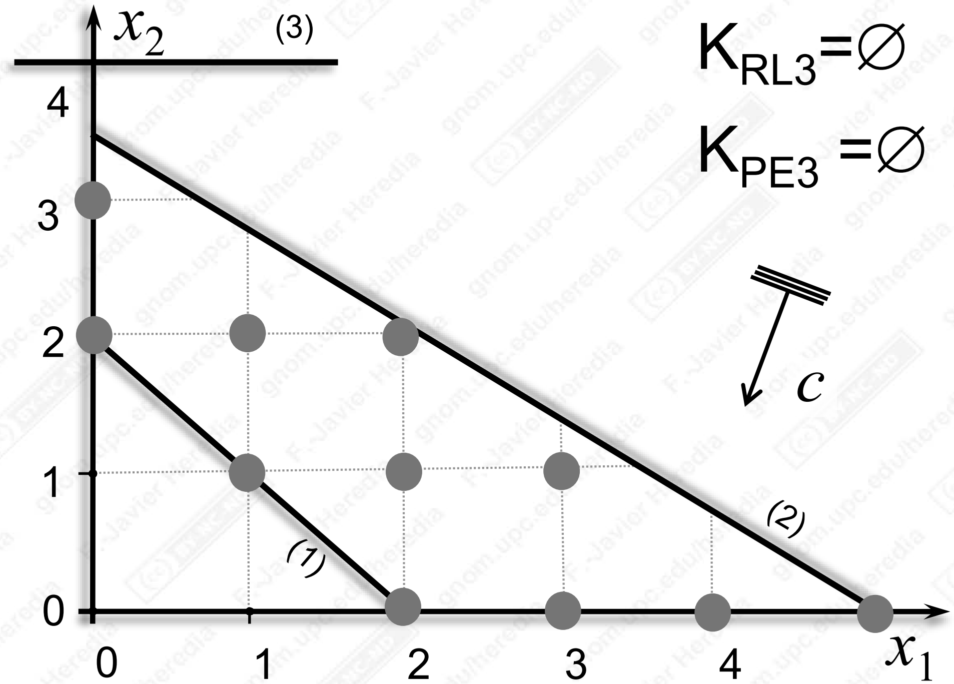
- **Eliminació:** $K_{PE7} \subseteq K_{RL7} = \emptyset \Rightarrow K_{PE7} = \emptyset$
  - S'elimina (PE7): $L \leftarrow L \setminus \{(PE7)\} = \{(PE3)\}$

Exemple Branch&Bound: tractament de (PE3)

B&B, Iteració 8: L={(PE3)}, $\underline{z}^*_{PE1}= -17 \leq z^*_{PE1} \leq \overline{z}^*= -16,\ x^*=[2,2]'$

- **Selecció**: (PE3)
- **Relaxació**: resolució de (RL1):

$$
(PE3)\begin{cases} \text{min} & z_{PE3} = -3x_1 - 5x_2 & \\ \text{s.a.:} & x_1 + x_2 \geq 2 & (1) \\ & 7x_1 + 10x_2 \leq 35 & (2) \\ & x_2 \geq 4 & (3) \\ & x \geq 0\text{, entera} & \end{cases}
$$



$K_{RL3}=\emptyset$

$K_{PE3}=\emptyset$

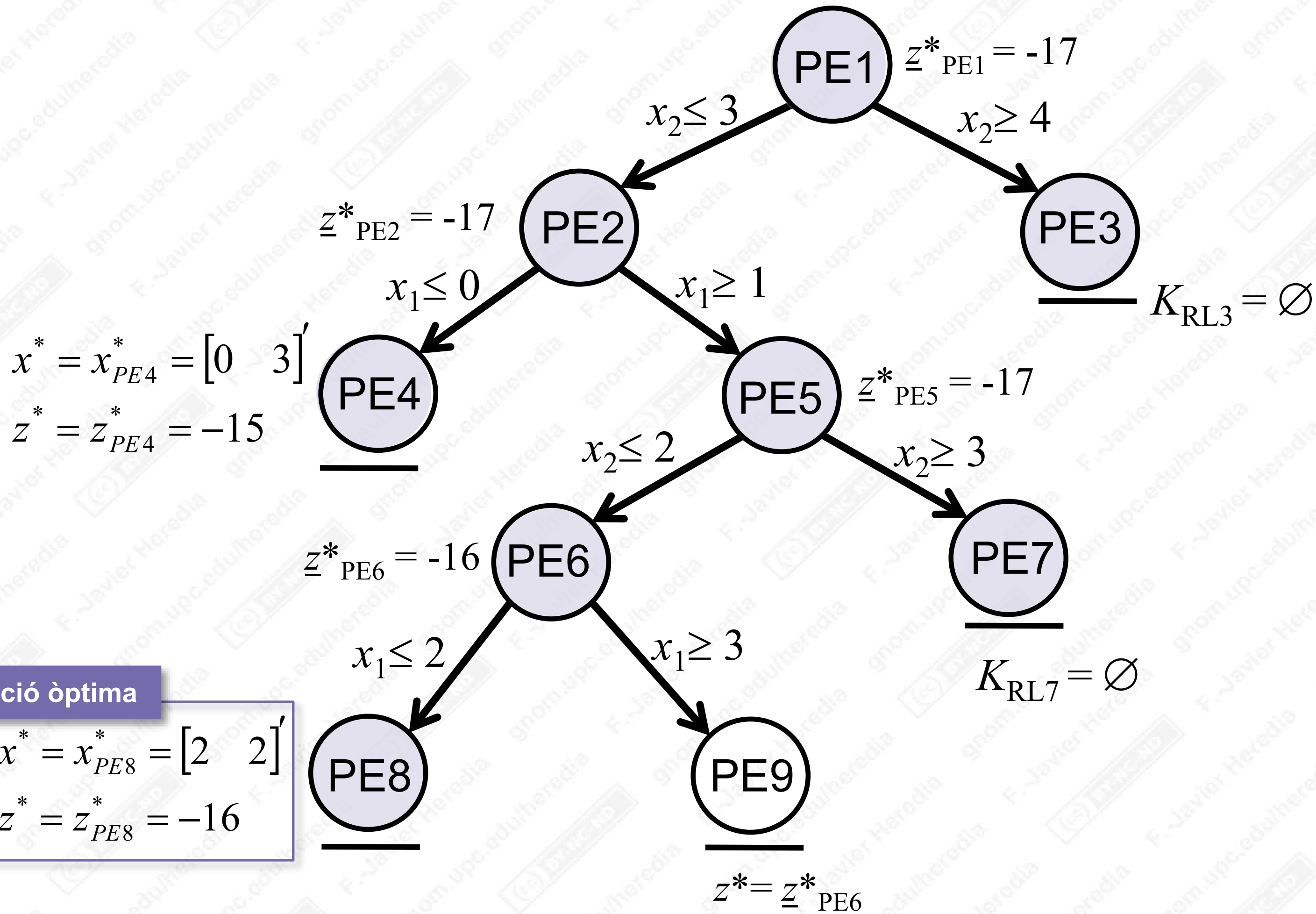
- **Eliminació:** $K_{PE3} \subseteq K_{RL3} = \emptyset \Rightarrow K_{PE3} = \emptyset$
  - S'elimina (PE3): $L \leftarrow L \backslash \{(\text{PE3})\} = \emptyset$

B&B, Iteració 9: $L= \emptyset \Rightarrow z^*_{PE1}= \overline{z}^*= -16,\ x^*_{PE1}= x^*=[2,2]'$

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Departament d'Estadística
i Investigació Operativa

Exemple Branch&Bound: arbre d'exploració

- **Arbre d'exploració B&B:**



Solució òptima

$$x^* = x^*_{PE8} = [2 \quad 2]'$$
$$z^* = z^*_{PE8} = -16$$

Talls de Gomory: definició (1/3)

- Els talls de Gomory proporcionen un **mètode sistemàtic de generació de desigualtats vàlides de problemes PE a partir de SBF de (RL)**. Considereu el problema PE i la seva relaxació lineal.

$$(PE)\begin{cases}\min & c'x \\ s.t.: & Ax = b \\ & x \geq 0, x \in \mathbb{Z}\end{cases}, \qquad (RL)\begin{cases}\min & c'x \\ s.t.: & Ax = b \\ & x \geq 0\end{cases}$$

- **Def. desigualtat vàlida de $(\boldsymbol{PE})$**: *la inequació $a_j'x \leq b_j$ és una desigualtat vàlida de (PE) sii $a_j'x \leq b_j$ per a tot $x \in K_{PE}$.*

- **Def. tall de $(\boldsymbol{PE})$ sobre $\boldsymbol{x^*_{RL}}$**: *la inequació $a_j'x \leq b_j$ és un tall de (PE) sobre x^*_{RL} sii:*

    i. $a_j'x \leq b_j$ *és una desigualtat vàlida.*

    ii. $a_j'x \leq b_j$ *és violada per x^*_{RL}.*

Talls de Gomory: definició (2/3)

- Sigui el problema (PE) i la seva relaxació lineal.

$$(PE)\begin{cases}\min\limits_{x\in\mathbb{Z}^n} z = & c'x \\ s.a.: & Ax=b \\ & x\geq 0\end{cases},\qquad (RL)\begin{cases}\min\limits_{x\in\mathbb{R}^n} z = & c'x \\ s.a.: & Ax=b \\ & x\geq 0\end{cases}$$

- Considerem que hem resolt (RL) amb l'algorisme del símplex obtenint la solució **x^*_{RL}, SBF de (RL)**. Usant teoria de programació lineal podem "re-escriure" el sistema $Ax=b$ de la següent forma:

$$Ax = Bx_B + A_N x_N = b \rightarrow B^{-1}(Bx_B + A_N x_N) = B^{-1}b = x^*_B$$

$$x_B + \underbrace{(B^{-1}A_N)}_{V} x_N = x^*_B \rightarrow \boxed{x_{B(i)} + \sum_{j\in\mathcal{N}} v_{ij}\cdot x_j = x^*_{B(i)}, i\in\mathcal{B}}$$

Usarem aquesta relació per a generar talls.

Talls de Gomory: definició (3/3)

- Considerem la relació (1) associada a una componen de x^*_{RL} fraccional:

$$x_{B(i)} + \sum_{j \in \mathcal{N}} v_{ij} \cdot x_j = x^*_{B(i)} \;,\; \boldsymbol{x^*_{B(i)}} \notin \mathbb{Z} \qquad (1)$$

  - Totes les solucions factibles de (PE) ($x_{PE} \in K_{PE}$) han de satisfer (1), doncs (1) és una de les constriccions que defineixen K_{PE}.
  - Transformarem (1) en una desigualtat vàlida usant la informació que tenim sobre x_{PE}, és a dir, que **x_{PE} és ≥ 0 (transf. 1) i entera (transf. 2)**.

- **Transformació 1**: atès que $x_{PE} \geq 0$ es satisfà, per a tot $x_{PE} \in K_{PE}$:

$$x_{B(i)} + \sum_{j \in \mathcal{N}} v_{ij} \cdot x_j = x^*_{B(i)} \xrightarrow{x_N \geq 0} x_{B(i)} + \sum_{j \in \mathcal{N}} \lfloor v_{ij} \rfloor \cdot x_j \leq x^*_{B(i)}$$

- **Transformació 2**: atès que x_{PE} és enter es satisfà, per a tot $x_{PE} \in K_{PE}$:

Tall de Gomory

$$x_{B(i)} + \sum_{j \in \mathcal{N}} \lfloor v_{ij} \rfloor \cdot x_j \leq x^*_{B(i)} \xrightarrow[\boldsymbol{x^*_{B(i)}} \notin \mathbb{Z}]{x \in \mathbb{Z}^n} \boxed{x_{B(i)} + \sum_{j \in \mathcal{N}} \lfloor v_{ij} \rfloor \cdot x_j \leq \lfloor x^*_{B(i)} \rfloor}$$

Algorisme de plans secants de Gomory[1]

- El tall de Gomory $x_{B(i)} + \sum_{j\in\mathcal{N}} \lfloor v_{ij} \rfloor \cdot x_j \leq \lfloor x^*_{B(i)} \rfloor$ (2) és una constricció de desigualtat amb les següents propietats:
  1. Tota solució factible (PE), $x_{PE} \in K_{PE}$, satisfà (2) (per construcció).
  2. La solució x^*_{RL} viola (2), doncs $x^*_{B(i)} > \lfloor x^*_{B(i)} \rfloor$.

  conseqüentment, (2) **és un tall (tall de de Gomory)**.

Algorisme de plans secants de Gomory: sigui (PE) amb A racional.

1. Es resol (RL) : x^*_{RL}
2. Si (RL) infactible o il·limitat **STOP**: (PE) no té solució.
3. Si $x^*_{RL} \in \mathbb{Z}^n$, **STOP**: $x^*_{PE} := x^*_{RL}$
4. Si $x^*_{RL} \notin \mathbb{Z}^n$: es selecciona una component x_i de x^*_{RL} no entera i s'afegeix a (PE) el tall de Gomory (2) associat a x_i.
5. Anada a 1

(1) Ralph E. Gomory. "*Outline of an algorithm for integer solutions to linear programs*". Bull. Amer. Math. Soc. **64** (1958), 275-278. http://dx.doi.org/10.1090/S0002-9904-1958-10224-4

Alg. de plans secants de Gomory: exemple (1/6)

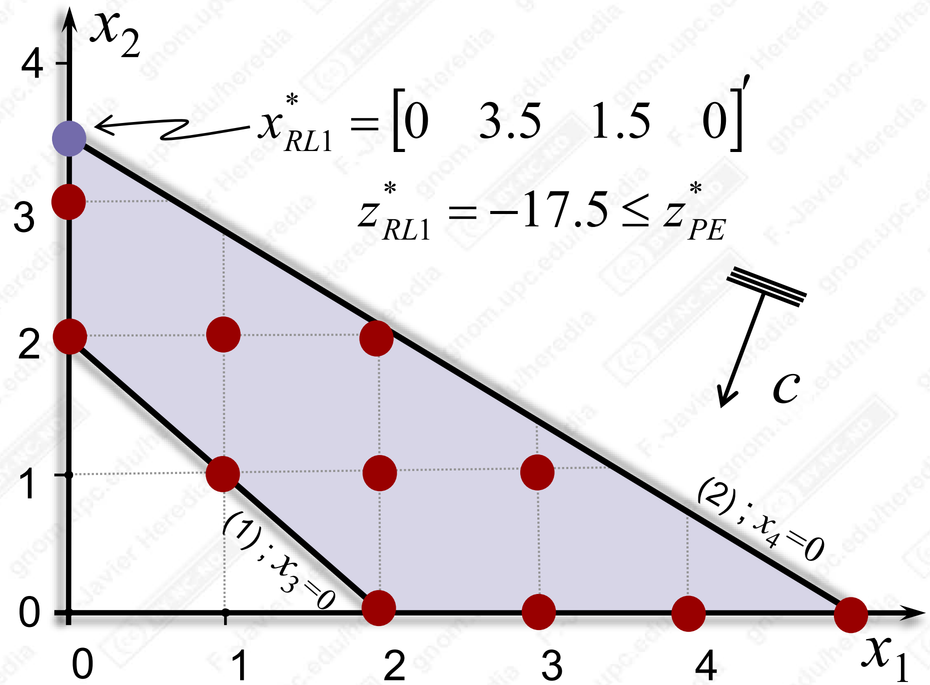
- Resoleu el següent problema amb l'algorisme de plans de tall (plans secants) de Gomory

$$(PE)\begin{cases} \min & z_{PE} = -3x_1 - 5x_2 \\ \text{s.a.:} & x_1 + x_2 \geq 2 \\ & 7x_1 + 10x_2 \leq 35 \\ & x \geq 0, \text{entera} \end{cases}$$

- **Alg. de plans secants de Gomory: Iteració 1**

1. Resolució de (RL1):

$$
(PE1)\begin{cases} \text{min} & z_{PE1} = -3x_1 - 5x_2 \\ \text{s.a.:} & x_1 + x_2 - x_3 = 2 \quad (1) \\ & 7x_1 + 10x_2 + x_4 = 35 \quad (2) \\ & x \geq 0\text{, entera} \end{cases}
$$



2. x^*_{RL1} no és entera: es defineix el **tall de Gomory**

$$
x_B = [x_2 \quad x_3]' = [3.5 \quad 1.5]' \text{, } V = B^{-1}A_N = \begin{bmatrix} 0 & 0.1 \\ -1 & 0.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 7 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.1 \\ -0.3 & 0.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{v_1} \\ v_2 \end{bmatrix}
$$

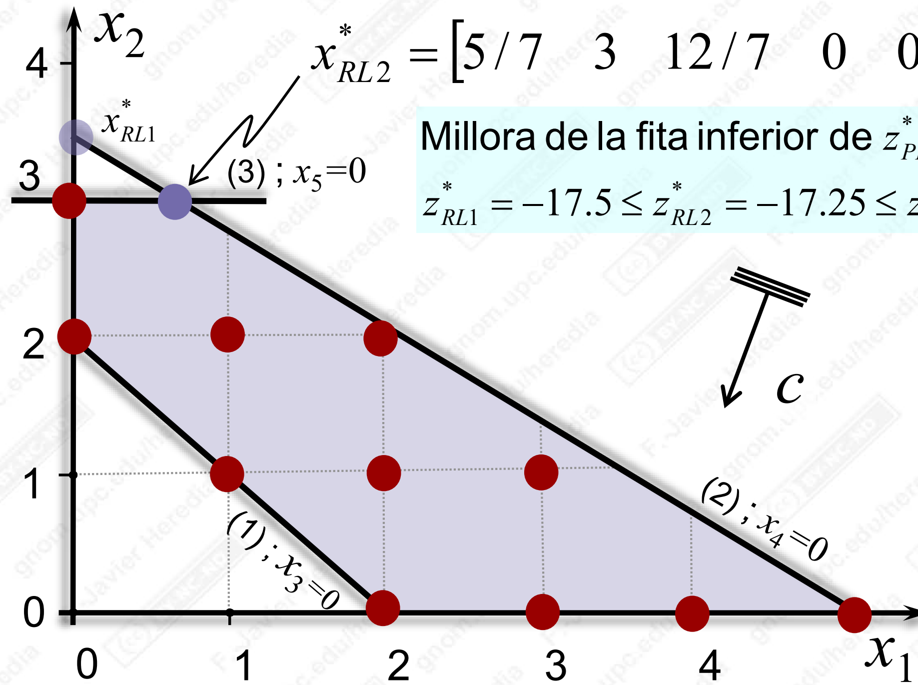
$$
x_{B\boxed{(1)}} + \sum_{j \in \mathcal{N}} \lfloor v_{1j} \rfloor x_j \leq \lfloor x_2^* \rfloor \rightarrow x_2 + \lfloor 0.7 \rfloor x_1 + \lfloor 0.1 \rfloor x_4 \leq \lfloor 3.5 \rfloor \rightarrow x_2 \leq 3
$$

Alg. de plans secants de Gomory: exemple (3/6)

- **Alg. de plans secants de Gomory: Iteració 2**

1. Resolució de (RL2):

$$(PE2)\begin{cases} \min & z_{PE2} = -3x_1 - 5x_2 \\ \text{s.a.}: & x_1 + x_2 - x_3 = 2 \quad (1) \\ & 7x_1 + 10x_2 + x_4 = 35 \quad (2) \\ & x_2 + x_5 = 3 \quad (3) \text{ nou tall} \\ & x \geq 0 \text{, entera} \end{cases}$$



$x^*_{RL2} = [5/7 \quad 3 \quad 12/7 \quad 0 \quad 0]'$

Millora de la fita inferior de z^*_{PE} :
$z^*_{RL1} = -17.5 \leq z^*_{RL2} = -17.25 \leq z^*_{PE}$

2. x^*_{RL2} no és entera: es defineix el **tall de Gomory**

$$x_B = [x_1 \quad x_2 \quad x_3]', V = B^{-1}A_N = \begin{bmatrix} 0 & 1/7 & -10/7 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1/7 & -3/7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/7 & -10/7 \\ 0 & 1 \\ 1/7 & -3/7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

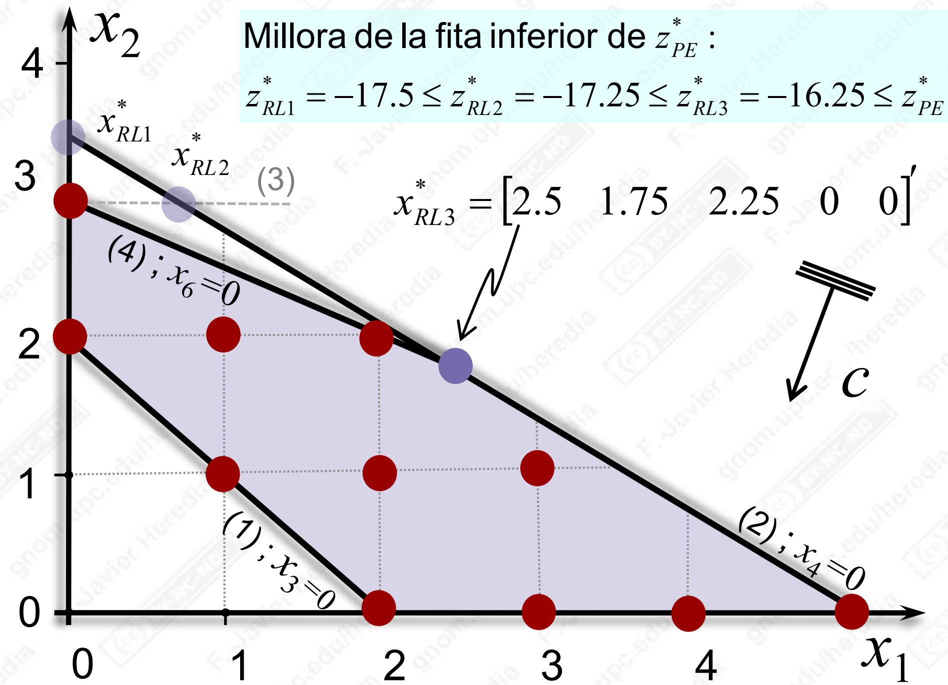
$$x_{B(1)} + \sum_{j \in \mathcal{N}} \lfloor v_{1j} \rfloor x_j \leq \lfloor x_1^* \rfloor \rightarrow x_1 + \lfloor 1/7 \rfloor x_4 + \lfloor -10/7 \rfloor x_5 \leq \lfloor 5/7 \rfloor \rightarrow x_1 - 2x_5 \leq 0 \xrightarrow{(3)} \boxed{x_1 + 2x_2 \leq 6}$$

Alg. de plans secants de Gomory: exemple (4/6)

- **Alg. de plans secants de Gomory: Iteració 3**

1. Resolució de (RL2):

$$
(\text{PE3})\begin{cases}
\text{min} & z_{PE3} = -3x_1 - 5x_2 & \\
\text{s.a.:} & x_1 + x_2 - x_3 = 2 & (1) \\
 & 7x_1 + 10x_2 + x_4 = 35 & (2) \\
 & x_2 + x_5 = 3 & (3)\ \text{redundant} \\
 & x_1 + 2x_2 + x_6 = 6 & (4)\ \text{nou tall} \\
 & x \geq 0\text{, entera} &
\end{cases}
$$



2. x^*_{RL2} no és entera: es defineix el **tall de Gomory**

$$
x_B = [x_1 \quad x_2 \quad x_3]', V = B^{-1}A_N = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & -5/2 \\ 0 & -1/4 & 7/4 \\ -1 & 1/4 & -3/4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & -5/2 \\ -1/4 & 7/4 \\ 1/4 & -3/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}
$$

$$
x_{B(2)} + \sum_{j \in \mathcal{N}} \lfloor v_{2j} \rfloor x_j \leq \lfloor x_2^* \rfloor \rightarrow x_2 + \lfloor -0.25 \rfloor x_4 + \lfloor 1.75 \rfloor x_6 \leq \lfloor 1.75 \rfloor \rightarrow \boxed{x_2 - x_4 + x_6 \leq 1}
$$

Alg. de plans secants de Gomory: exemple (5/6)

- Per tal de poder continuar resolent el problema (RL) gràficament, expressem el darrer tall de Gomory en termes de les variables x_1 i x_2 usant les constriccions (2) i (4) de (PE3):

$$(\text{PE3})\begin{cases} \text{min} & z_{PE3} = -3x_1 - 5x_2 & \\ \text{s.a.:} & x_1 + x_2 - x_3 = 2 & (1) \\ & 7x_1 + 10x_2 + x_4 = 35 & (2) \\ & x_1 + 2x_2 + x_6 = 6 & (4) \\ & x \geq 0\text{, entera} & \end{cases}$$

$$\begin{array}{rl} \rightarrow & x_4 = 35 - 7x_1 - 10x_2 \\ \rightarrow & x_6 = 6 - x_1 - 2x_2 \\ \hline & -x_4 + x_6 = 6x_1 + 8x_2 - 29 \end{array}$$

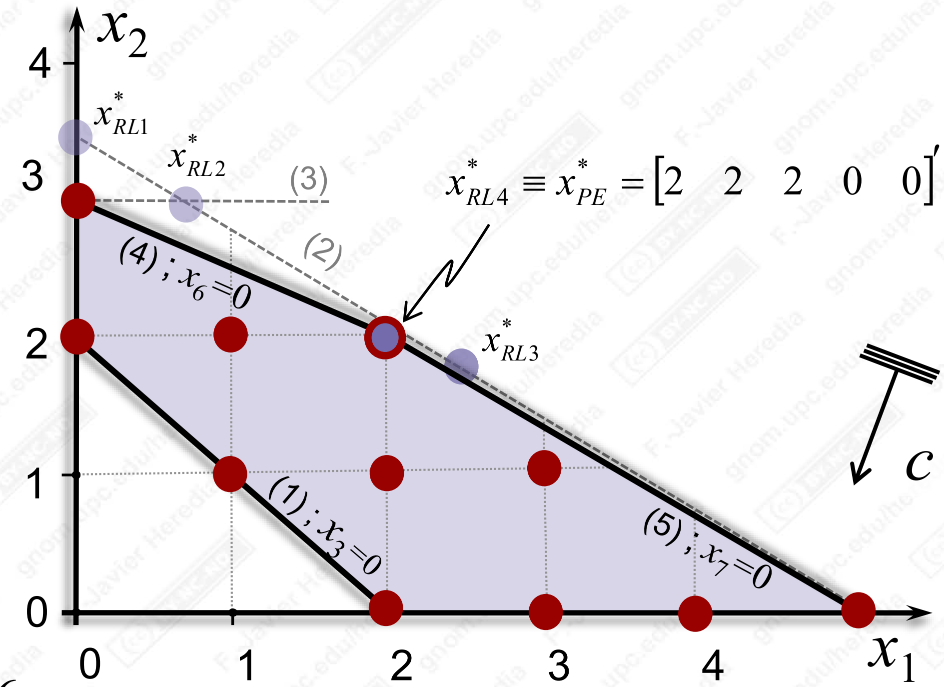
$$x_2 - x_4 + x_6 \leq 1 \rightarrow 6x_1 + 9x_2 \leq 30 \rightarrow \boxed{2x_1 + 3x_2 \leq 10}$$

Alg. de plans secants de Gomory: exemple (6/6)

- **Alg. de plans secants de Gomory: Iteració 4**

1. Resolució de (RL2):

$$(PE4)\begin{cases}\text{min} & z_{PE4} = -3x_1 - 5x_2 \\ \text{s.a.:} & x_1 + x_2 - x_3 = 2 \quad (1) \\ & 7x_1 + 10x_2 + x_4 = 35 \quad (2)\ \text{redundant} \\ & x_2 + x_5 = 3 \quad (3)\ \text{redundant} \\ & x_1 + 2x_2 + x_6 = 6 \quad (4) \\ & 2x_1 + 3x_2 + x_7 = 10 \quad (5)\ \text{nou tall} \\ & x \geq 0\text{, entera}\end{cases}$$



2. x^*_{RL2} entera: solució òptima

$$x^*_{PE} \equiv x^*_{RL4} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad , \quad z^*_{PE} \equiv z^*_{RL4} = -16$$

Comentaris:

- Les formulacions de (PE) a cada iteració son cada vegada més fortes:

$$z^*_{RL1} = -17.5 \leq z^*_{RL2} = -17.25 \leq z^*_{RL3} = -16.25 \leq z^*_{RL4} = -16 \equiv z^*_{PE}$$

- **En aquest exemple**, (PE4) és la formulació ideal: (PE4) = (PEI) = CH(K_{PE})

Inicialització: Sigui $(PE1)$ amb $A \in \mathbb{Q}^{m\times n}$. $L = \{PE1\}$, $k := 1$; $z^* = +\infty$ (incumbent, $z^*_{PE1} \leq z^*$); $\underline{z}^*_{PE1} = -\infty$.

Mentre $L \neq \emptyset$ **fer**

Es selecciona un problema $PEj \in L$ ---------- Selecció

Es resol la relaxació lineal **d'una formulació reforçada** de PEj : x^*_{RLj} ; $\underline{z}^*_{PEj} \leftarrow z^*_{RLj}$ ---------- Relaxació

Si RLj il·limitat ó $K_{RLj} = \emptyset$ ó $\underline{z}^*_{PEj} \geq z^*$ ó $x^*_{RLj} \in K_{PEj}$ **fer** ---------- Eliminació

$L \leftarrow L \backslash \{PEj\}$

Si $x^*_{RLj} \in K_{PEj}$ **fer**

Si $z^*_{RLj} \leq z^*$: $x^* \leftarrow x^*_{RLj}$, $z^* \leftarrow z^*_{RLj}$

Si $z^* \leq \underline{z}^*_{PEi}$ per a algun PEi : $L \leftarrow L\backslash\left\{PEi, \{PEl\}_{\forall(PEl)} \text{ descendent de } PEi\right\}$

Fi Si

Altrament : Es selecciona $x^*_{RLj_i} \notin \mathbb{Z}$ ---------- Separació

Es defineix la separació de PEj en els subproblemes $PE(k+1)$, $PE(k+2)$ t.q.

$K_{PEj} = K_{PE(k+1)} \cup K_{PE(k+2)}$; $K_{PE(k+1)} \cap K_{PE(k+2)} = \emptyset$; $\underline{z}^*_{PEj} = \min\{\underline{z}^*_{PE(k+1)}, \underline{z}^*_{PE(k+2)}\}$, amb:

$$(PE(k+1)) \min\{c'x \mid x \in K_{PE(k+1)}\}, \qquad K_{PE(k+1)} := \left\{x \in K_{PEj} \mid x_i \leq \lfloor x^*_{RLj_i} \rfloor\right\}$$

$$(PE(k+2)) \min\{c'x \mid x \in K_{PE(k+2)}\}, \qquad K_{PE(k+2)} := \left\{x \in K_{PEj} \mid x_i \geq \lceil x^*_{RLj_i} \rceil\right\}$$

Es substitueix PEj pels seus descendents : $L \leftarrow L \backslash \{PEj\} \cup \{PE(k+1)\} \cup \{PE(k+2)\}$. $k := k+2$.

Fi Si

Fi Mentre

Si $z^* < +\infty$: $x^*_{PE1} \equiv x^*$.

Altrament Si $RL1$ il·limitat : $PE1$ il·lim. o infac.

Altrament : $PE1$ infactible.

Fi Si

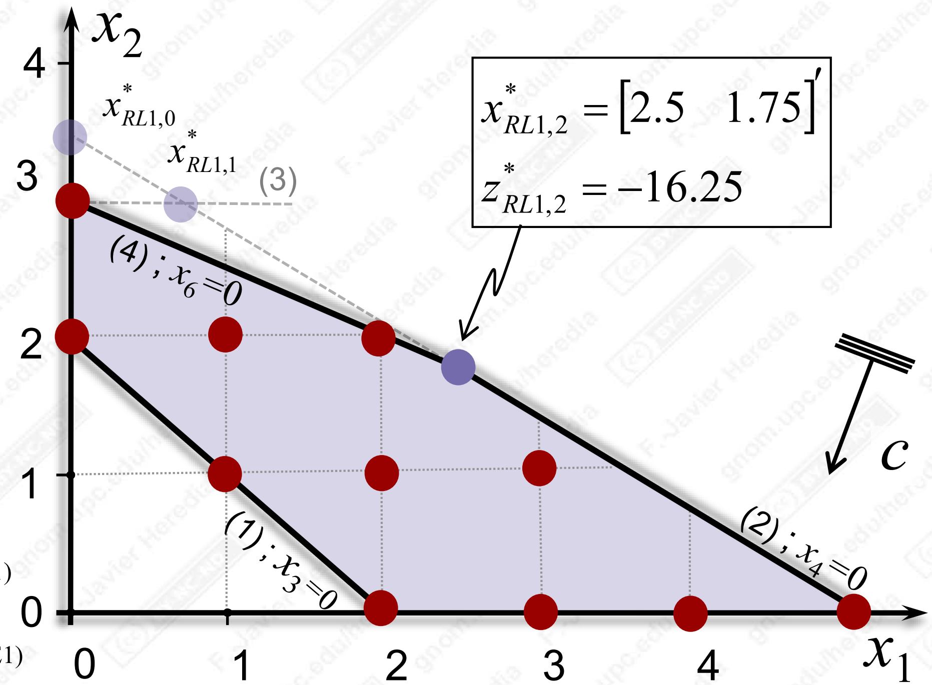
(1) M. Padberg and G. Rinaldi. *A branch-and-cut algorithm for the resolution of large-scale symmetric traveling salesman problems*. SIAM Review, 33(1):60– 100, 1991. (http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.467.1903&rep=rep1&type=pdf)

Exemple Branch&Cut: tractament (PE1)

B&C: Iteració 1: L={(PE1)}, $\underline{z}^*_{PE1} = -\infty \leq z^*_{PE} \leq \overline{z}^* = +\infty$

- **Selecció:** (PE1)
- **Relaxació:** resolució de la (RL) de (PE) amb dos talls de Gomory :

$$(PE1,2)\begin{cases} \min & z_{PE1} = -3x_1 - 5x_2 \\ \text{s.a.:} & x_1 + x_2 - x_3 = 2 \quad (1) \\ & 7x_1 + 10x_2 + x_4 = 35 \quad (2) \\ & x_2 + x_5 = 3 \quad (3) \text{ 1er tall G. (PE1)} \\ & x_1 + 2x_2 + x_6 = 6 \quad (4) \text{ 2on tall G. (PE1)} \\ & x \geq 0 \text{, entera} \end{cases}$$



Actualització : $\underline{z}_{PE1}^* \leftarrow \lceil -16.25 \rceil = -16$

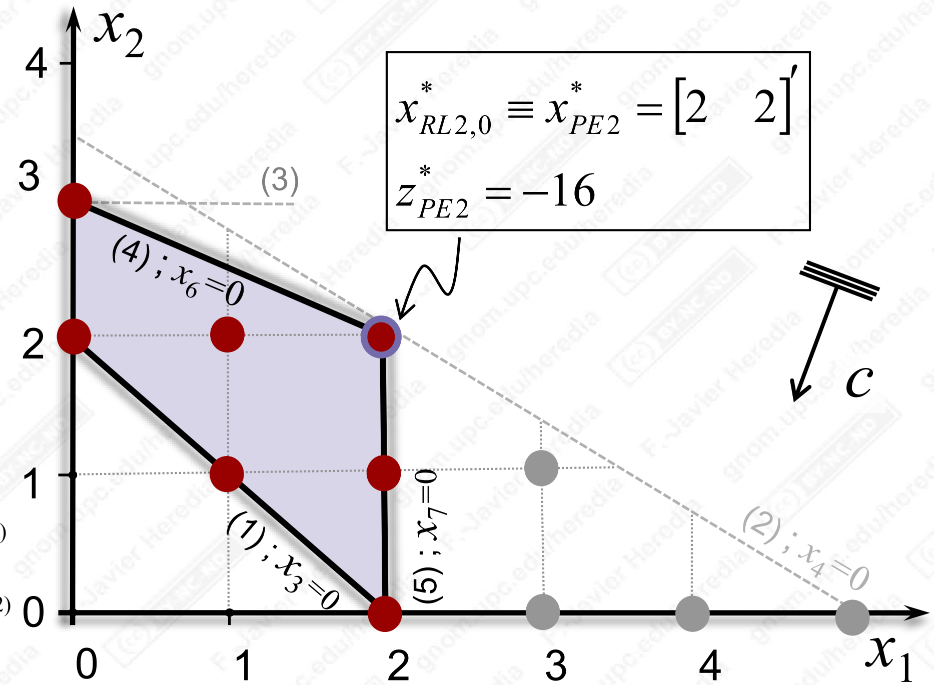
- **Separació:** $x_1^* = 2.5 \rightarrow \begin{cases} (PE1) + x_1 \leq 2 \rightarrow (PE2) \\ (PE1) + x_1 \geq 3 \rightarrow (PE3) \end{cases}, L \leftarrow \{(PE2),(PE3)\}$

Exemple Branch&Cut: tractament (PE2)

B&C, Iteració 2: L={(PE2), (PE3)}, $\underline{z}^*_{PE1} = -16 \le z^*_{PE} \le z^* = +\infty$

- **Selecció:** (PE2)
- **Relaxació:** resolució de la (RL) de de (PE2) reforçat:

$$(PE2,0) \equiv (PE2) \begin{cases} \min & z_{PE2} = -3x_1 - 5x_2 & \\ \text{s.a.}: & x_1 + x_2 - x_3 = 2 & (1) \\ & 7x_1 + 10x_2 + x_4 = 35 & (2) \\ & x_2 + x_5 = 3 & (3) \text{ 1er tall G. (PE1)} \\ & x_1 + 2x_2 + x_6 = 6 & (4) \text{ 2on tall G. (PE1)} \\ & x_1 + x_7 = 2 & (5) \text{ sep. B \& B (PE2)} \\ & x \ge 0, \text{entera} & \end{cases}$$

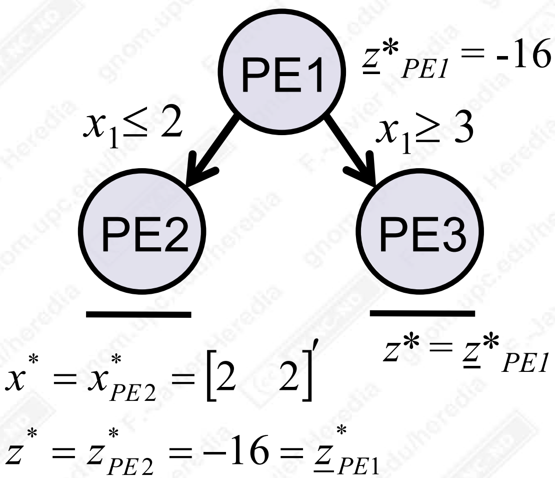


- **Eliminació:** $x^*_{RL2,0} \equiv x^*_{PE2}$
  - S'elimina (PE2): $L \leftarrow L \backslash \{(PE2)\} = \{(PE3)\}$
  - $z^*_{PE2} < z^* \Rightarrow x^* \leftarrow x^*_{PE2} = [\,2,\,2\,]'$, $z^* \leftarrow z^*_{PE2} = -16$
  - $z^* = \underline{z}^*_{PE1} \Rightarrow$ eliminem (PE3) $L \leftarrow L \backslash \{(PE3)\} = \varnothing$

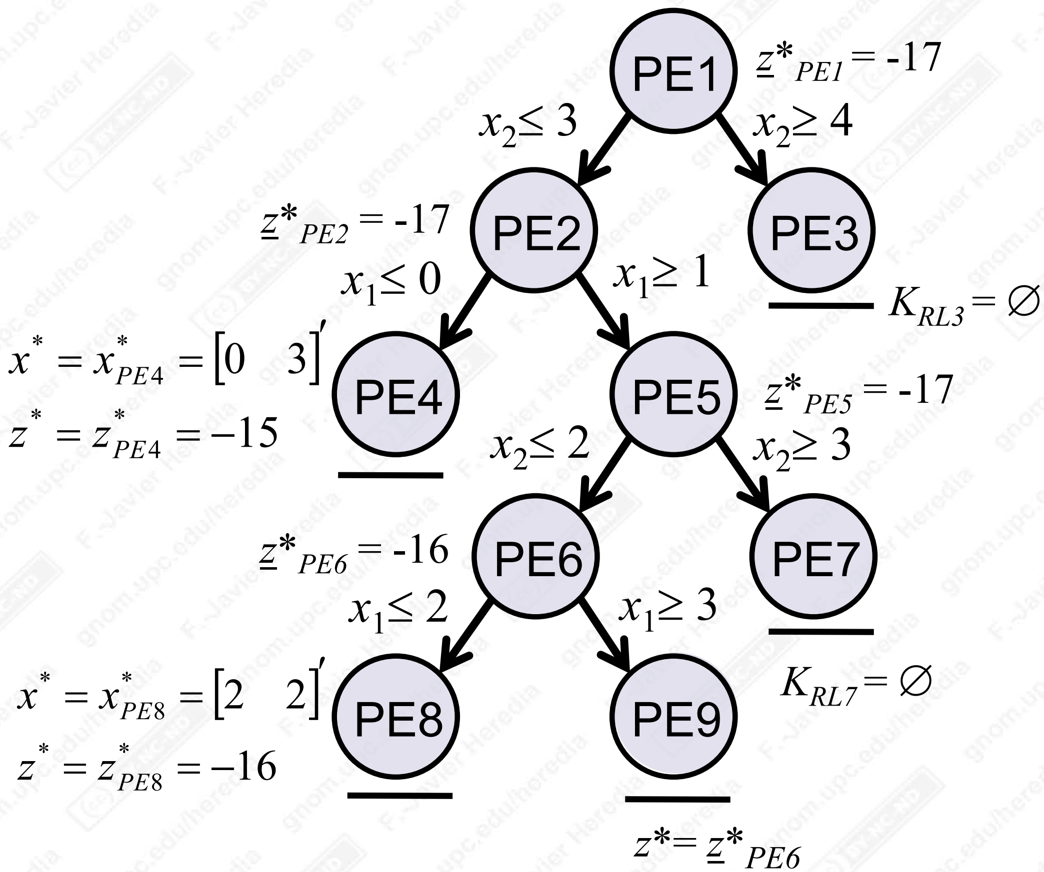
Exemple Branch&Cut: arbre d'exploració

B&C, Iteració 3: $L = \emptyset \Rightarrow x^*_{PE1} = x^* = [2,2]', \; z^*_{PE1} = z^* = -16$

Arbre d'exploració amb Branch and Cut



Arbre d'exploració amb Branch and Bound



Cost computacional problemes (PE) (1/2)

```
reset;
option randseed 46533591; # Llavor

# .mod (dins del .run)
model;
param n := 100;
param m := 75;

# Generació aleatòria de c i A:
param c {1..n}         := floor(Uniform(0,100));
param a {1..m, 1..n} := floor(Uniform(-100,100));

# Es calcula b tal que x=[1,…,1]'factible
param b {j in 1..m}  := sum {i in 1..n} a[j,i];

# Model
var x {1..n} >= 0, integer;
minimize z:  sum {i in 1..n} c[i]*x[i];
subject to r {j in 1..m}: sum {i in 1..n} a[j,i] * x[i] <= b[j];
```

PErand.run :

crea un problema (PE) aleatori i el resol junt amb la seva (RL)

Cost computacional problemes (PE) (1/2)

PErand.run (cont.)

```
option log_file 'PErand.out';   # Fitxer de sortida
option solver cplex;            # Es selecciona l'optimitzador
option cplex_options            # Opcions d'execució de cplex:
'timing=1 '                     # - Es mostrarà temps d'execució.
'mipgap=0 '                     # - Gap d'optimalitat zero (s'obtindrà la solució òptima).
'threads=8 ';                   # - Execució en paral·lel usant 8 fils (i7 amb 4 nuclis)

# Es relaxen les condicions
# d'integritat => es resoldrà (RL)

printf ('\nPE_rand: resolucio (RL) :\
option relax_integrality 1; solve;


# Es tornen a activar les condicions
# d'integritat =>solució de (PE)

printf ('\nPE_rand: resolucio (PE) :\
option relax_integrality 0; solve;

printf(':::::::::::::::::::::::::::::
option log_file '';
close 'PErand.out';
```

PErand.out

```
PE_rand: resolucio (RL):

Times (seconds):
Input =  0.009 Solve =  0.009 Output = 0.031

CPLEX 12.1.0: optimal solution; objective 850.6751963
52 dual simplex iterations (0 in phase I)

PE_rand: resolucio (PE) :

Times (seconds):
Input =  0.009 Solve =  3461.47 Output = 0.014

CPLEX 12.1.0: optimal integer solution; objective 1098
291.049.748 MIP simplex iterations
43.823.803 branch-and-bound nodes
4 Gomory cuts
```

Cost computacional problemes reals de (PE) (2/2)

<table>
<tr><th colspan="5">Problema quadràtic mixt binari ($x \in \mathbb{R}^n, y \in \{0,1\}^l$)

$(P)\ \ min_{x\in\mathbb{R}^n, y\in\{0,1\}^l,} \left\{ \frac{1}{2}[x,y]'Q\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} - c'\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} \mid A\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} \geq b \right\}$</th></tr>
<tr><td></td><td>CPLEX : branch&cut estàndard (seqüencial)</td><td>CPLEX : branch&cut estàndard (paral·lel, 24 threads)</td><td>CPLEX : branch&cut modificat (seqüencial) (1)</td><td>Mètodes de descomposició dual en paral·lel (2)</td></tr>
<tr><td>$n = 145.680$
$l = 48.240$
$m = 381.796$</td><td>Aborta als 5 dies per manca de memòria</td><td>9h</td><td>2h</td><td>2h</td></tr>
<tr><td>$\boldsymbol{n = 1.441.680}$
$\boldsymbol{l = 480.240}$
$\boldsymbol{m = 2.977.801}$</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td><td>57h</td></tr>
</table>

Servidor Fujitsu RX200 S6 (2 x CPUs Intel Xeon X5680 Six Core / 12Threads, 3.33 GHz, 64Gb RAM).

(1) : Corchero, Heredia, Mijangos "Efficient solution of optimal multimarket electricity bid models". http://dx.doi.org/10.1109/EEM.2011.5953017

(2) : A. Rengifo, F.-Javier Heredia, "Parallel Proximal Bundle Methods for Stochastic Electricity Market Problems". 27th European Conference on Operational Research. Glasgow. 2015.

Reoptimització de les relaxacions lineals: símplex dual

- Considereu el següent problema de PLE:

$$
(\text{PE})\begin{cases}\text{min} & x_1 - 2x_2 \\ \text{s.a.:} & -4x_1 + 6x_2 \le 9 \\ & x_1 + x_2 \le 4 \\ & x \ge 0\text{, entera}\end{cases}
\rightarrow (\text{PE})\begin{cases}\min & x_1 - 2x_2 \\ \text{s.a.:} & -4x_1 + 6x_2 + x_3 = 9 \\ & x_1 + x_2 + x_4 = 4 \\ & x \ge 0\text{, entera}\end{cases}
$$

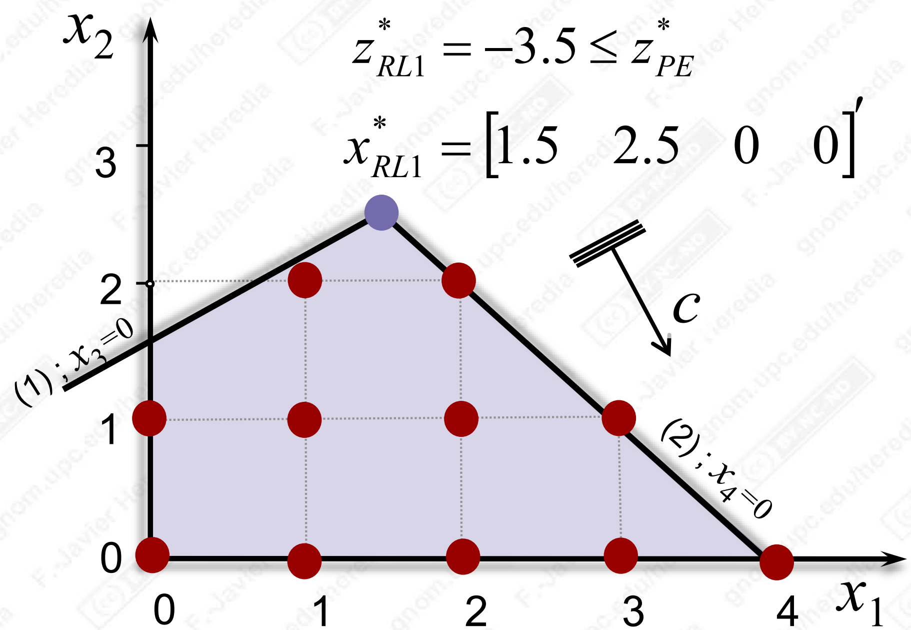
- El resoldrem amb l'algorisme de plans secant de Gomory:
  - Resolent les relaxacions lineals gràficament.
  - Resolent les relaxacions lineals reoptimitzant amb el símplex dual.
- Aquesta reoptimització també és vàlida per a B&B i B&C.

Alg. de plans secants de Gomory: exemple

- **Alg. de plans secants de Gomory: Iteració 1**

1. Resolució de (RL1):

$$(PE1)\begin{cases}\min & x_1 - 2x_2 \\ \text{s.a.}: & -4x_1 + 6x_2 + x_3 = 9 \quad (1) \\ & x_1 + x_2 + x_4 = 4 \quad (2) \\ & x \geq 0, \text{entera}\end{cases}$$



2. x^*_{RL1} no és entera: es defineix el **tall de Gomory**

$$x_B = [x_1 \quad x_2]' = [1.5 \quad 2.5]', V = B^{-1}A_N = B^{-1} = \begin{bmatrix} -0.1 & 0.6 \\ 0.1 & 0.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

$$x_{B(2)} + \sum_{j\in\mathcal{N}} \lfloor v_{2j} \rfloor x_j \leq \lfloor x_2^* \rfloor \rightarrow x_2 + \lfloor 0.1 \rfloor x_3 + \lfloor 0.4 \rfloor x_4 \leq \lfloor 2.5 \rfloor \rightarrow \boxed{x_2 \leq 2}$$

- **Alg. de plans secants de Gomory: Iteració 2**

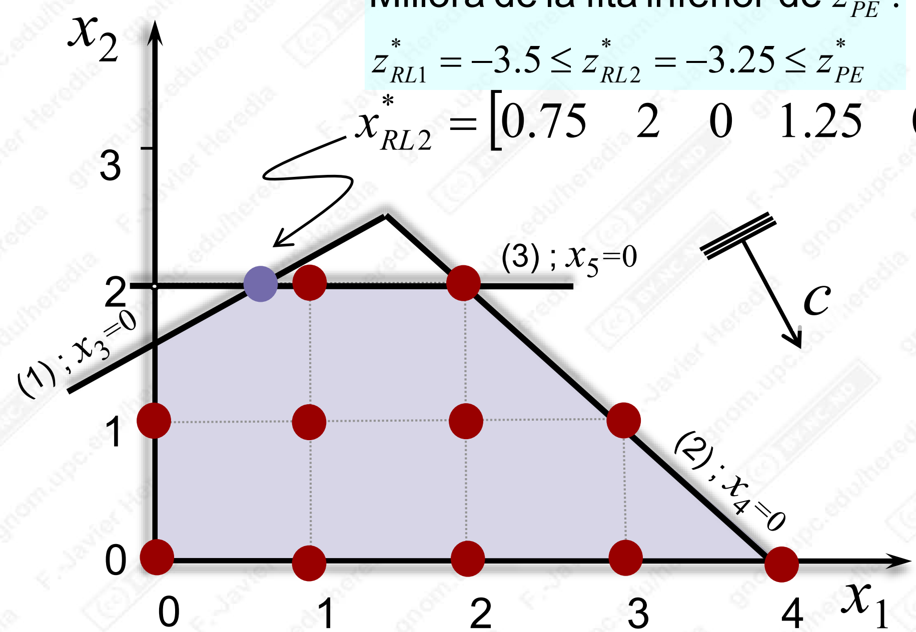
1. Resolució de (RL2):

$$(PE2)\begin{cases} \min & x_1 - 2x_2 & \\ \text{s.a.}: & -4x_1 + 6x_2 + x_3 = 9 & (1) \\ & x_1 + x_2 + x_4 = 4 & (2) \\ & x_2 + x_5 = 2 & (3) \\ & x \geq 0\text{, entera} & \end{cases}$$

Millora de la fita inferior de z^*_{PE} :

$z^*_{RL1} = -3.5 \leq z^*_{RL2} = -3.25 \leq z^*_{PE}$

$x^*_{RL2} = [0.75 \quad 2 \quad 0 \quad 1.25 \quad 0]'$



2. x^*_{RL2} no és entera: es defineix el **tall de Gomory**

$$x_B = [x_1 \quad x_2 \quad x_4]' = [0.75 \quad 2 \quad 1.25]' \text{, } V = B^{-1}A_N = \begin{bmatrix} -0.25 & 1.5 \\ 0 & 1 \\ 0.25 & -2.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

$$x_{B(1)} + \sum_{j\in\mathcal{N}} \lfloor v_{1j} \rfloor x_j \leq \lfloor x_1^* \rfloor \rightarrow x_1 + \lfloor -0.25 \rfloor x_3 + \lfloor 1.5 \rfloor x_5 \leq \lfloor 0.75 \rfloor \quad \rightarrow \quad x_1 - x_3 + x_5 \leq 0$$

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Departament d'Estadística i Investigació Operativa

Alg. de plans secants de Gomory: exemple

- Per tal de poder continuar ressolent el problema (RL) gràficament, expressem el darrer tall de Gomory en termes de les variables x_1 i x_2 usant les constriccions de (PE2):

$$
\text{(PE2)}\begin{cases}
\min & x_1 - 2x_2 \\
\text{s.a.}: & -4x_1 + 6x_2 + x_3 = 9 \quad \rightarrow x_3 = 9 + 4x_1 - 6x_2 \quad (1) \\
& x_1 + x_2 + x_4 = 4 \\
& x_2 + x_5 = 2 \quad \rightarrow x_5 = 2 - x_2 \quad (2) \\
& x \geq 0 \text{ , enteres}
\end{cases}
$$

$$
x_1 - x_3 + x_5 \leq 0 \xrightarrow{(1)} -3x_1 + 6x_2 + x_5 \leq 9 \xrightarrow{(2)} \boxed{-3x_1 + 5x_2 \leq 7}
$$

- **Alg. de plans secants de Gomory: Iteració 3**

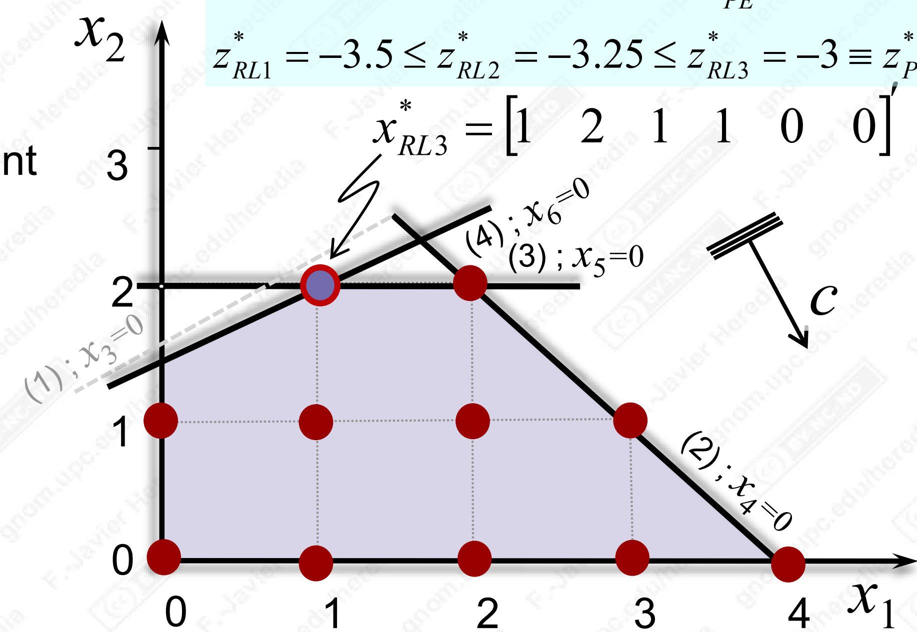
1. Resolució de (RL3):

$$(PE3)\begin{cases}\min & x_1 - 2x_2 \\ \text{s.a.}: & -4x_1 + 6x_2 + x_3 = 9 \quad (1)\ \text{redundant} \\ & x_1 + x_2 + x_4 = 4 \quad (2) \\ & x_2 + x_5 = 2 \quad (3) \\ & -3x_1 + 5x_2 + x_6 = 7 \quad (4) \\ & x \geq 0\,,\ \text{entera}\end{cases}$$

Millora de la fita inferior de z^*_{PE} :

$$z^*_{RL1} = -3.5 \leq z^*_{RL2} = -3.25 \leq z^*_{RL3} = -3 \equiv z^*_{PE}$$

$$x^*_{RL3} = \begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}'$$



2. x^*_{RL3} és entera: STOP

$$(PE)\begin{cases}\min & x_1 - 2x_2 \\ \text{s.a.}: & -4x_1 + 6x_2 \leq 9 \\ & x_1 + x_2 \leq 4 \\ & x \geq 0\,,\ \text{entera}\end{cases}$$

$$x^*_{PE} \equiv x^*_{RL3} = \begin{bmatrix}1 \\ 2\end{bmatrix}$$

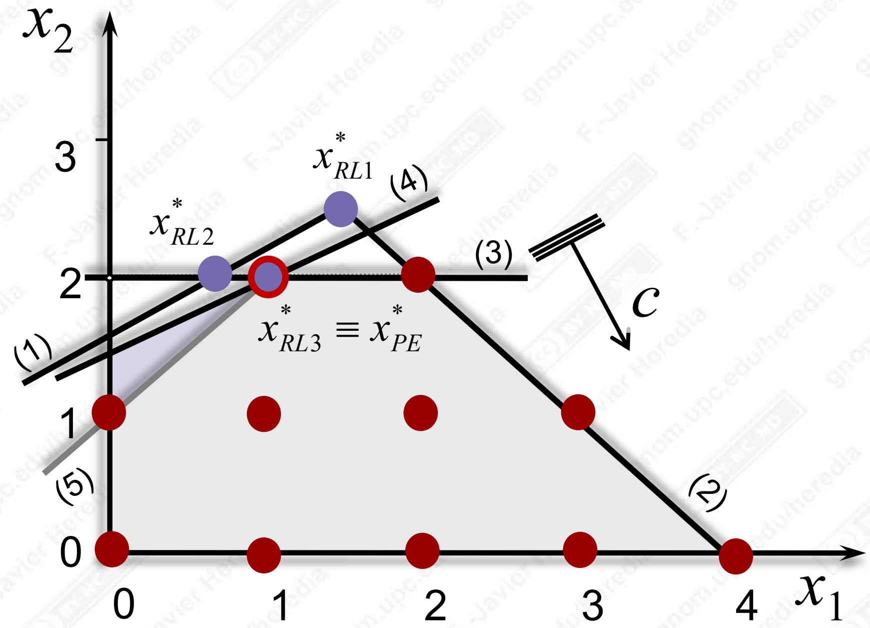
$$z^*_{PE} \equiv z^*_{RL3} = -3$$

$$(PE) \equiv (PE3)\begin{cases}\min & x_1 - 2x_2 \\ \text{s.a.}: & -4x_1 + 6x_2 \leq 9 \quad (1) \\ & x_1 + x_2 \leq 4 \quad (2) \\ & x_2 \leq 2 \quad (3) \\ & -3x_1 + 5x_2 \leq 7 \quad (4) \\ & x \geq 0\,,\ \text{entera}\end{cases}$$

Algorismes de plans secant i formulacions fortes.

- Las formulacions (PE1), (PE2) i (PE3) són equivalents al problema (PE) :

$$\text{(PE)}\min\left\{z=c'x : x\in K_{PE}=\left\{\begin{bmatrix}(0,0) & (0,1) & (0,2)\\ (0,3) & (0,4) & (1,0)\\ (1,1) & (1,2) & (1,3)\\ (2,1) & (2,2) & \end{bmatrix}\right\}\right\}$$



- A mida que afegim talls, les formulacions son cada vegada més fortes:

$$K_{RL1}\supseteq K_{RL2}\supseteq K_{RL3}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow z^*_{RL1}=-3.5\le z^*_{RL2}=-3.25\le z^*_{RL3}=-3\equiv z^*_{PE}$$

- L'última formulació, (PE3), tot i ser la més forta i proporcionar l'òptim del problema, no és la ideal:

$$\text{(PEI)}\begin{cases}\min & x_1-2x_2 & \\ \text{s.a.:} & x_1+x_2\le 4 & (2)\\ & x_2\le 2 & (3)\\ & -x_1+x_2\le 1 & (5)\\ & x\ge 0\text{, entera} & \end{cases}$$

Reoptimització dels problemes relaxats: símplex dual

- Considereu el següent problema de PLE que hem resolt amb l'algorisme de plans secants de Gomory. :

$$(PE)\begin{cases}\text{min} & x_1 - 2x_2 \\ \text{s.a.:} & -4x_1 + 6x_2 \leq 9 \\ & x_1 + x_2 \leq 4 \\ & x \geq 0\text{, entera}\end{cases}$$

- Veurem ara com s'usa **en la pràctica** la reoptimització amb l'algorisme del **símplex dual** per a resoldre **eficientment** les relaxacions lineals (RLj) que apareixen en l'aplicació de l'algorisme de plans secants de Gomory.

Addició d'una nova constricció: anàlisi

- S'introdueix una nova constricció definida per:

$$a'_{m+1}x \leq b_{m+1} \rightarrow a'_{m+1}x + x_{n+1} = b_{m+1}, \widetilde{\mathcal{B}} \leftarrow \mathcal{B} \cup \{n+1\}$$

$$\boldsymbol{\widetilde{A}_N = \begin{bmatrix} A_N \\ a'_{N,m+1} \end{bmatrix}, \widetilde{B} = \begin{bmatrix} B & 0 \\ a'_{B,m+1} & 1 \end{bmatrix}, \widetilde{B}^{-1} = \begin{bmatrix} B^{-1} & 0 \\ -a'_{B,m+1}B^{-1} & 1 \end{bmatrix}}$$

- Analitzem com afecta el canvi a les condicions d'optimalitat :
  - Factibilitat primal: $x_B = B^{-1}b \geq 0$

$$\boldsymbol{\widetilde{x}_B} = \begin{bmatrix} x_B \\ x_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^{-1} & 0 \\ -a'_{B,m+1}B^{-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ b_{m+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overbrace{\boldsymbol{x_B}}^{\geq 0} \\ \boldsymbol{b_{m+1} - a'_{B,m+1}x_B} \end{bmatrix} \overset{?}{\gtreqless} 0$$

La fact. primal es conserva $\Leftrightarrow x_{n+1} = b_{m+1} - a'_{B,m+1}x_B \geq 0$

Addició d'una nova constricció: anàlisi

- Recordem que hem introduït una nova constricció:

$$a'_{m+1} \le b_{m+1} \to a'_{m+1}x + x_{n+1} = b_{m+1}, \tilde{\mathcal{B}} \leftarrow \mathcal{B} \cup \{n+1\}$$

$$\tilde{A}_N = \begin{bmatrix} A_N \\ a'_{N,m+1} \end{bmatrix}, \tilde{B} = \begin{bmatrix} B & 0 \\ a'_{B,m+1} & 1 \end{bmatrix}, \tilde{B}^{-1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B^{-1}} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{-a'_{B,m+1}B^{-1}} & \boldsymbol{1} \end{bmatrix}$$

- Analitzem com afecta això a les condicions d'optimalitat :
  - Factibilitat dual: $r'_N = c'_N - \lambda' A_N \ge 0$

$$\tilde{\lambda}' = [c'_B \quad 0] \begin{bmatrix} B^{-1} & 0 \\ -a'_{B,m+1}B^{-1} & 1 \end{bmatrix} = [\lambda' \quad \boldsymbol{0}]$$

$$\tilde{r}'_N = c'_N - \tilde{\lambda}'\tilde{A}_N = c'_N - [\lambda' \quad 0] \begin{bmatrix} A_N \\ a'_{N,m+1} \end{bmatrix} = c'_N - \lambda' A_N = \boldsymbol{r'_N} \ge 0$$

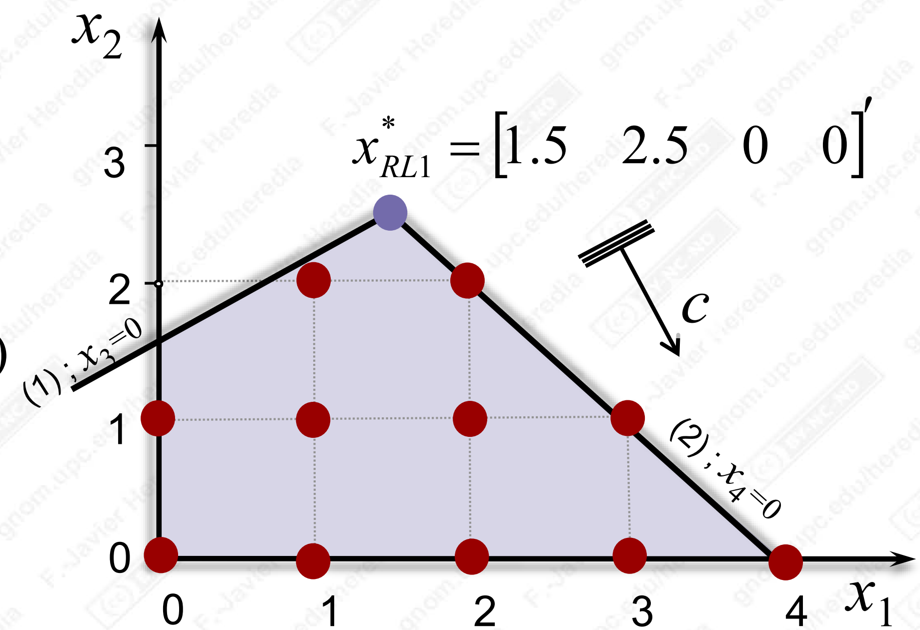
$\Rightarrow$ la factibilitat dual es conserva: si $x_{n+1} = b_{m+1} - a'_{B,m+1}x_B < 0 \Rightarrow$ reoptimització amb l'ASD

Reoptimització amb el símplex dual i PLE

- **Alg. de plans secants de Gomory: Iteració 1**

Resolució de (RL1):

$$(PE1)\begin{cases} \min & x_1 - 2x_2 \\ \text{s.a.:} & -4x_1 + 6x_2 + x_3 = 9 \quad (1) \\ & x_1 + x_2 + x_4 = 4 \quad (2) \\ & x \geq 0\text{, entera} \end{cases}$$



Solució òptima de (RL1):

$$\mathcal{B} = \{1,2\},\ B = \begin{bmatrix} -4 & 6 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},\quad B^{-1} = \begin{bmatrix} -1/10 & 3/5 \\ 1/10 & 2/5 \end{bmatrix},\quad x_B = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 2.5 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{N} = \{3,4\},\ r' = c'_N - c'_B B^{-1} A_N = [0 \quad 0] - [1 \quad -2]\begin{bmatrix} -1/10 & 3/5 \\ 1/10 & 2/5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [0.3 \quad 0.2]$$

Reoptimització amb el símplex dual

- **Alg. de plans secants de Gomory: Iteració 2**

  Resolució de (RL2): reoptimització per addició de la constricció (3)

$$(\text{RL2})\begin{cases}\min & x_1 - 2x_2 \\ \text{s.a.:} & -4x_1 + 6x_2 + x_3 = 9 \quad (1) \\ & x_1 + x_2 + x_4 = 4 \quad (2) \\ & x_2 + x_5 = 2 \quad (3) \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{B} \leftarrow \{1,2,5\},\ \mathcal{N} \leftarrow \{3,4\}$$

$$a'_{m+1}x + x_{n+1} = b_{m+1}\ ,\ x_2 + x_5 = 2$$

$$A_N \leftarrow \left[\begin{array}{c} A_N \\ \hline a'_{N,m+1} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$B \leftarrow \left[\begin{array}{c|c} B & 0 \\ \hline a'_{B,m+1} & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} -4 & 6 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 \end{array}\right],\ B^{-1} \leftarrow \left[\begin{array}{c|c} B^{-1} & 0 \\ \hline -a'_{B,m+1}B^{-1} & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} -1/10 & 3/5 & 0 \\ 1/10 & 2/5 & 0 \\ \hline -1/10 & -2/5 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left.\begin{array}{l} x_B \leftarrow \left[\begin{array}{c} x_B \\ \hline x_{n+1} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 1.5 \\ 2.5 \\ \hline -0.5 \end{array}\right] \not\geq 0 \Rightarrow \text{infactible (P)} \\ r' \leftarrow r' = [0.3 \quad 0.2] \geq 0 \Rightarrow \text{factible (D)} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{reoptimització amb el símplex (D)}$$

Reoptimització amb el símplex dual

- **1ª iteració:** $\mathcal{B} = \{1,2,5\}, \mathcal{N} = \{3,4\}$
  - Identificació de SBF òptima i selecció de la VB sortint $B(p)$:

$$x_B = [1.5 \quad 2.5 \quad -0.5]' \ngeq 0 \Rightarrow p = 3, B(3) = 5 \text{ VB sortint.}$$

  - Identificació de problema (D) il·limitat :

$$d_N^r = \left(\beta_p A_N\right)' = (\beta_3 A_N)' = \begin{bmatrix} \frac{-1}{10} & \frac{-2}{5} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{10} & \frac{-2}{5} \end{bmatrix} \ngeq 0$$

  - Selecció de la VNB entrant q:

$$\theta_D^* = \min_{\left\{j \in \mathcal{N} \middle| d_{N_j}^r < 0\right\}} \left\{-r_j / d_{N_j}^r\right\} = \min\left\{\frac{-0,3}{-1/10}, \frac{-0,2}{-2/5}\right\} = \frac{1}{2} \Rightarrow q = 4$$

  - Canvi de base i actualitzacions:

$$\mathcal{B} = \{1,2,4\}, B = \begin{bmatrix} -4 & 6 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix} -1/4 & 0 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/4 & 1 & -5/2 \end{bmatrix}, x_B = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 3/4 \\ 2 \\ 5/4 \end{bmatrix} \geq 0$$

$$x_B \geq 0 \Rightarrow \textbf{òptima}$$

Planificació de plantilles: *Air-Express*

Dades:

Dia setmana	Treballadors necessaris
Dillluns	18
Dimarts	27
Dimecres	22
Dijous	26
Divendres	25
Dissabte	21
Diumenge	19

Torn	Dies descans	Sou
1	Dium+Dill	680€
2	Dill+Dima	705€
3	Dima+Dime	
4	Dime+Dij	
5	Dij+Div	
6	Div+Diss	680€
7	Diss+Dium	655€

Objectiu: obtenir quants treballadors contractar a cada torn de forma que es minimitzin els costos de personal tot satisfent les necessitats de treballadors de cada dia.

Planificació de plantilles: formulació genèrica

- **Paràmetres:**

  n : nombre de torns.

  c_i: salari torn i, $i = 1,2,\ldots,n$

  $\mathcal{D}_i$: dies de descans torn i, $i = 1,2,\ldots,n$

  b_j: nombre de treballadors necessaris dia j, $j = 1,2,\ldots,7$

- **Variables de decisió**:

  x_i = nombre de treballadors assignats al torn i, $i = 1,2,\ldots,n$

- **Formulació :**

$$
(\mathrm{PE})\begin{cases}
\min\limits_{x} & z = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i x_i & & \text{Es minimitza el cost salarial} \\
s.a.: & \sum\limits_{i:j\notin\mathcal{D}_i} x_i \ge b_j & j = 1,2,\ldots,7 & \text{Es satisfàn les necessiats laborals} \\
 & x_i \ge 0, x_i \in \mathbb{Z} & i = 1,2,\ldots,n &
\end{cases}
$$

Planificació de plantilles: formulació específica

$$
(\mathrm{PE})\begin{cases}
\min_x & z = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \\
s.a.: & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \\ b_7 \end{bmatrix} \\
 & x \geq 0, \quad x \in \mathbb{Z}^n
\end{cases}
$$

Selecció de projectes: *CRT Technologies*

Dades:

Projecte	*Net Present Value* ($\times 10^3$€)	Inversió necessària ($\times 10^3$€)				
		Any 1	Any 2	Any 3	Any 4	Any 5
1	141	75	25	20	15	10
2	187	90	35	0	0	30
3	121	60	15	15	15	15
4	83	30	20	10	5	5
5	265	100	25	20	20	20
6	127	50	20	10	30	40

Objectiu: La companyia disposa de 250.000€ per a invertir en nous projectes el primer any. Ha pressupostat €75.000 pel finançament dels projectes a l'any 2 i €50.000 pels anys 3,4 i 5.

Selecció de projectes: variables de decisió i f.o.

- **Paràmetres:**

  n : nombre de projectes.

  m : nombre de d'anys.

  c_i : benefici esperat del projecte i (NPV), $i = 1,2,\dots,n$

  a_{ij} : capital necessari projecte i any j , $i = 1,2,\dots,n$, $j = 1,2,\dots,m$

  b_j : capital total disponible any j, $j = 1,2,\dots,m$

- **Variables de decisió:** $x_i = \begin{cases} 1, & \text{el projecte es selecciona} \\ 0, & \text{el projecte no es selecciona} \end{cases} \quad , i = 1,2,\dots,n$

- **Formulació :**

$$
(\mathrm{PE}) \begin{cases} \max\limits_{x} & z = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i x_i & & \text{Es maximitza el NPV} \\ s.a.: & \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \le b_j & j = 1,2,\dots,m & \text{sense superar el capital disponible} \\ & x \in \{0,1\}^n & & \end{cases}
$$

Variables binàries i condicions lògiques

- Les variables binàries són útils per a modelitzar **condicions lògiques**. Per exemple, considereu que:
  - Entre els projectes 1, 4 i 5, no es poden seleccionar més d'un simultàniament:

$$x_1 + x_4 + x_5 \leq 1$$

  - Entre els projectes 4, 5 i 6, s'ha de seleccionar exàctament un:

$$x_4 + x_5 + x_6 = 1$$

  - El projecte 4 no es pot seleccionar a no ser que es sel·leccioni també el projecte 3:

$$x_4 \leq x_3$$

El problema de la motxilla (*Knapsack problem*)

El problema de *CRT Technologies* és una extensió del que es coneix com a Problema de la Motxilla **(*knapsack problem*)**.

$$\begin{cases} \max\limits_{x} z = & c'x & \\ \quad s.a.: & a'x & \leq b \\ & x \in \{0,1\}^n & \end{cases}$$

on:

- c_i: "utilitat" de l'objecte i.
- a_i: pes de l'objecte i.
- b: pes total que es pot transportar.

Problema de càrrega fixa

- Moltes decisions depenen de **costos fixos** :
  - El cost d'inicialització d'una màquina o d'una línia de producció quan es comença la fabricació d'un nou producte.
  - El cost de construcció d'un nova línia o planta de producció.
  - El cost de contractar a personal addicional.

Problema de Càrrega Fixa: *Remington Manufacturing*

Dades:

Operació	Hores consumides			Hores disponibles
	Prod. 1	Prod. 2	Prod. 3	
Mecanització	2	3	6	600
Pulverització	6	3	4	300
Ensamblatge	5	6	2	400
Benefici unitari	48€	55€	50€	
Costos configuració	1000€	800€	900€	

Objectiu: obtenir el programa de producció que maximitzi el guany net (benefici menys costos) tot satisfent la disponibilitat de recursos.

Càrrega fixa: paràmetres I variables de decisió

- **Paràmetres:**

  n : nombre de productes.

  m : nombre de processos.

  c_i : benefici unitari producte i, $i = 1,2, \dots, n$

  a_{ij} : hores consumides producte i procés j , $i = 1,2, \dots, n$, $j = 1,2, \dots, m$

  b_j : hores totals disponibles procés j, $j = 1,2, \dots, m$

  k_i : costos configuració producte i, $i = 1,2, \dots, n$.

- **Variables de decisió:**

  x_i : quantitat producte i, $i = 1,2, \dots, n$

  $$y_i = \begin{cases} 1, & x_i > 0 \\ 0, & x_i = 0 \end{cases}, i = 1,2, \dots, n$$

Càrrega fixa: funció objectiu i constriccions

- **Formulació :**

$$
(PE)\begin{cases}
\max\limits_{x,y} \quad z = \sum\limits_{i=1}^{n} (c_i x_i - k_i y_i) & & \text{Es maximitza el benefici net} \\
s.a.: \quad \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \le b_j & j = 1,2,\dots,m & \text{Disponibilitat de recursos} \\
\quad x_i \le M_i y_i & i = 1,2,\dots,n & \text{Acoblament } x_i - y_i \\
\quad x \ge 0 & & \\
\quad y \in \{0,1\}^n & &
\end{cases}
$$