Curs d'EDPs. FME-UPC. 2020-21 **Llista 6bis**

Els problemes amb asterisc $*$ es resoldran a classe de problemes

---

Problema 1.* Donat un punt (x, y) del quadrat $\Omega = (0,1) \times (0,1)$, considerem la probabilitat $u(x, y)$ de sortir per primer cop de Ω pel seu costat dret al moure'ns aleatòriament començant des de (x, y).

(a) Usant separació de variables, calculeu una expressió explícita per la solució u.

(b) Digueu quant val $u(1/2, 1/2)$. Doneu una demostració rigorosa de la vostra resposta usant només que u és una funció harmònica de la qual coneixem els seus valors concrets de frontera.

(c) Demostreu que $u(3/4, 3/4) > u(1/4, 3/4)$.

Problema 2.* Sigui $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un obert fitat i Lipschitz.

(a) Donades dues funcions c i f fitades a Ω amb $c(x) > 0$ quasi per tot $x \in \Omega$, demostreu que si el problema de Neumann

$$\begin{cases} -\Delta u + c(x)u &= f(x) \quad \text{a } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} &= 0 \quad \text{a } \partial\Omega \end{cases}$$

admet solució $u \in C^2(\overline{\Omega})$ llavors és única.

(b) Useu l'enunciat de l'apartat anterior per donar una condició sobre la funció $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que garanteixi que si el problema no lineal

$$\begin{cases} -\Delta v &= \varphi(v) \quad \text{a } \Omega \\ \dfrac{\partial v}{\partial \nu} &= 0 \quad \text{a } \partial\Omega \end{cases}$$

admet solució $v \in C^2(\overline{\Omega})$ llavors és única.