Tema 3 (I): El grup simètric

3.1. Calculeu l'ordre de les permutacions següents en el grup simètric $\mathcal{S}_m$ $(m \geq 2n+1)$:

1. $\sigma_1 = (1,2)(3,4)\dots(2n-1,2n)$;
2. $\sigma_2 = (2,3)(4,5)\dots(2n-2,2n-1)$;
3. $\sigma_3 = (2n,2n+1)\sigma_2$;
4. $\sigma_1\sigma_2$;
5. $\sigma_1\sigma_3$,

i traieu conclusions sobre la relació entre ordres d'elements i del seu producte.

3.2. Demostreu que els subconjunts següents generen $\mathcal{S}_n$:

1. les transposicions (i,j);
2. les transposicions $(1,i)$;
3. les transposicions $(i,i+1)$;
4. el cicle $(1,2,\dots,n)$ i la transposició $(1,2)$;
5. el cicle $(1,2,\dots,n)$ i una transposició $(i,i+1)$.

3.3. Demostreu que els 3-cicles (i,j,k) generen el grup alternat $\mathcal{A}_n$ i que, de fet, per a generar-lo n'hi ha prou amb els 3-cicles del tipus $(1,j,k)$, i fins i tot només amb els del tipus $(1,2,k)$.

3.4. Demostreu que el grup alternat $\mathcal{A}_n$ és l'únic subgrup d'índex 2 de $\mathcal{S}_n$.
Indicació: Vegeu que un subgrup d'índex 2 no conté cap transposició.

3.5. Trobeu tots els subgrups de $\mathcal{S}_3$.

3.6. Es consideren els subgrups de $\mathcal{S}_4$ següents:

- El total $\mathcal{S}_4$, d'ordre 24;
- L'alternat $\mathcal{A}_4$, d'ordre 12 normal;
- El diedral $D_8 = \langle(1,2,3,4),(2,4)\rangle$ d'ordre 8, amb tres conjugats;
- El diedral $D_6 \simeq \mathcal{S}_3 = \langle(1,2,3),(1,2)\rangle$ d'ordre 6, amb quatre conjugats;
- El cíclic $C_4 = \langle(1,2,3,4)\rangle$ d'ordre 4, amb tres conjugats;
- El grup $V_4 = \langle(1,2)(3,4),(1,3)(2,4)\rangle \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$, d'ordre 4 normal;
- El grup $V_4' = \langle(1,2),(3,4)\rangle \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ d'ordre 4, amb tres conjugats;
- El cíclic $C_3 = \langle(1,2,3)\rangle$ d'ordre 3, amb quatre conjugats;

– El cíclic $C_2 = \langle (1,2) \rangle$ d'ordre 2, amb sis conjugats;
– El cíclic $C_2' = \langle (1,2)(3,4) \rangle$ d'ordre 4, amb tres conjugats.
– El trivial.

Demostreu que aquests 30 grups són tots els subgrups de $\mathcal{S}_4$. Per fer-ho, agafeu un subgrup $H \subseteq \mathcal{S}_4$ qualsevol i demostreu que:

1. si conté un 3-cicle i un 4-cicle, $H = \mathcal{S}_4$;
2. si conté dos 4-cicles diferents γ_1, γ_2 amb $\gamma_2 \neq \gamma_1^3$, $H = \mathcal{S}_4$;
3. si conté dos 3-cicles diferents γ_1, γ_2 amb $\gamma_2 \neq \gamma_1^2$, $\mathcal{A}_4 \subseteq H$;
4. si conté un 4-cicle γ i un element d'ordre 2 diferent de γ^2, $c(D_8) \subseteq H$;
5. si conté un 3-cicle i un element d'ordre 2, $c(D_6) \subseteq H$;
6. si conté tres elements diferents $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ d'ordre 2 amb $\sigma_3 \neq \sigma_1\sigma_2$, $H = \mathcal{S}_4$;
7. si conté dos elements diferents d'ordre 2, $V_4 \subseteq H$ o $c(V_4') \subseteq H$,

on la notació $c(G)$ indica un conjugat del grup G.

3.7. El *Joc del quinze* consta de 15 peces lliscants i d'un espai buit, amb el següent aspecte:

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

Donada una configuració inicial desordenada, l'objectiu del joc és moure les peces per arribar a la configuració original.

Les configuracions C es poden veure com a elements de $\mathcal{S}_{16}$, on $C(i)$ = posició de la peça i, amb $1 \leq i \leq 16$. Anàlogament, els moviments M també es poden veure com a elements de $\mathcal{S}_{16}$, on $M(i)$ = posició a la que va a parar i en aplicar el moviment M. Per exemple, considereu el moviment següent:

8	12	2	5
11	1	6	
7	14	10	15
9	4	3	13

$\rightsquigarrow$

8	12	5	6
11	1	2	
7	14	10	15
9	4	3	13

La configuració inicial ve donada per la permutació

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 6 & 3 & 15 & 14 & 4 & 7 & 9 & 1 & 13 & 11 & 5 & 2 & 16 & 10 & 12 & 8 \end{pmatrix}$$

que té una descomposició en cicles disjunts (1 6 7 9 13 16 8)(2 3 15 12)(4 14 10 11 5). El moviment (que és una combinació de quatre passos, quins?) porta la posició 3 a la 7, la posició 7 a la 4 i la posició 4 a la 3, de manera que vindria donat a $\mathcal{S}_{16}$ per la permutació (3 7 4).

a) Demostreu que si apliquem un moviment M a una configuració C, la configuració resultant és MC, amb el producte interpretat a $\mathcal{S}_{16}$. Verifiqueu-ho amb l'exemple anterior.

b) El repte original del joc consistia en arribar a la configuració original a partir de:

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

Demostreu que el repte és impossible.

Finalment, ens preguntem a partir de quines configuracions es pot resoldre el joc. Donada una configuració C, podem modificar-la per tal que $C(16) = 16$, de manera que només cal considerar configuracions on la posició buida queda fixa. Sigui $F \subseteq \mathcal{S}_{15}$ el conjunt de configuracions "resolubles".

c) Demostreu que $F = \mathcal{A}_{15}$.

INDICACIÓ: Recordeu que $\mathcal{A}_{15}$ està generat pels 3-cicles $(11\ 12\ i)$. Trobeu la manera d'assolir el moviment $(11\ 12\ i)$ combinant adequadament els moviments $M = (11\ 12\ 15)$ i un moviment g_i que porti i a la posició 15 i deixi fixes les posicions 11, 12 i 16.