Àlgebra Lineal

Problemes del Tema 5: Ortogonalitat

1. Considereu la forma bilineal $\phi\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida així:

$$\phi\left((x_1, x_2), (y_1, y_2)\right) = x_1 y_1 + x_2 y_2 - x_1 y_2 + 2 x_2 y_1 .$$

(a) Trobeu la seva matriu en la base canònica de $\mathbb{R}^2$.

(b) Trobeu la seva matriu en la base $\{(1, 1),\ (1, 2)\}$ de $\mathbb{R}^2$.

(c) Existeix alguna base de $\mathbb{R}^2$ en la qual la matriu de ϕ sigui simètrica?

2. Per a cadascuna de les dues aplicacions bilineals $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ següents, doneu la matriu de φ en la base canònica de $\mathbb{R}^2$ i esbrineu si φ és un producte escalar:

(a) $\varphi\left((x_1, x_2), (y_1, y_2)\right) = 2x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + 4 x_2 y_2$

(b) $\varphi\left((x_1, x_2), (y_1, y_2)\right) = x_1 y_1 - x_2 y_2$

3. Trobeu els valors del paràmetre a per als quals la matriu $\begin{pmatrix} 1 & -2a \\ a^2 & 2 \end{pmatrix}$ defineix un producte escalar en $\mathbb{R}^2$.

4. Proveu que $\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(A^t B)$ defineix un producte escalar en $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

5. Siguin E_1, E_2 dos $\mathbb{R}$-espais vectorials i $f\colon E_1 \to E_2$ una aplicació lineal. Sigui $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon E_2 \times E_2 \to \mathbb{R}$ un producte escalar en E_2 i sigui $\langle\cdot,\cdot\rangle_f\colon E_1 \times E_1 \to \mathbb{R}$ l'aplicació definida per $\langle u, v\rangle_f = \langle f(u), f(v)\rangle$ per a qualssevol $u, v \in E_1$. Demostreu que $\langle\cdot,\cdot\rangle_f$ és un producte escalar en E_1 si, i només si, f és injectiva.

6. Sigui E un espai euclidià i siguin $u, v \in E$. Proveu:

(a) (*Llei del paral·lelogram*) $\quad \|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$

(b) (*Identitat de polarització*) $\quad \|u+v\|^2 - \|u-v\|^2 = 4\langle u, v\rangle$

(c) (*Teorema de Pitàgores*) $\quad u \perp v \iff \|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$

7. Donats dos vectors $u, v \in \mathbb{R}^3$, designem per $u \times v$ el seu producte vectorial.

(a) Sigui $u \in \mathbb{R}^3$. Proveu que l'aplicació $\varphi_u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida per $\varphi_u(v) = u \times v$ és lineal, i trobeu el seu nucli i la seva imatge.

(b) Comproveu que tota matriu antisimètrica de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ és la matriu en base canònica de l'aplicació φ_u per a algun vector $u \in \mathbb{R}^3$.

8. Sigui E un espai euclidià de dimensió finita. Proveu que, si $\{u_1, \ldots, u_m\}$ és una base ortonormal d'un subespai vectorial F de E, aleshores

$$\langle x, u_1\rangle^2 + \cdots + \langle x, u_m\rangle^2 \ \le\ \|x\|^2 \qquad \text{per a tot } x \in E,$$

amb igualtat si, i només si, $x \in F$.

9. Sigui E un espai euclidià de dimensió finita. Considereu l'aplicació

$$\begin{array}{rccc} \psi : & E & \longrightarrow & E^* \\ & x & \longmapsto & \langle x, \cdot\rangle \end{array}$$

(a) Proveu que ψ és un isomorfisme.

(b) Sigui B una base de E. Proveu que B és ortonormal si, i només si, ψ envia B a la base dual B^*.

10. Trobeu una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ pel mètode de Gram-Schmidt aplicat a la base $\{(1,2,3),(0,1,2),(0,0,1)\}$.

11. A cadascun dels casos següents, trobeu una base ortonormal per al subespai F de l'espai euclidià E:

(a) $E=\mathbb{R}^4$ amb el producte escalar estàndard, i $F=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in E \mid x_1+x_2+x_3+x_4=0\}$.

(b) $F=E=\mathbb{R}^3$ amb el producte escalar definit per la matriu $\begin{pmatrix}1&1&1\\1&3&1\\1&1&5\end{pmatrix}$.

(c) $F=E=\mathbb{R}_2[x]$ amb el producte escalar definit per $\langle p(x),\, q(x)\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)\,dx$.

12. Sigui $f: E\to F$ una aplicació lineal entre espais euclidians de dimensió finita.

(a) Proveu que existeix una única aplicació lineal $f': F\to E$ tal que

$$\langle f(u),\, v\rangle \;=\; \langle u,\, f'(v)\rangle \quad \text{per a qualssevol} \quad u\in E,\, v\in F.$$

Es diu que f' és l'*aplicació adjunta* de f. Comproveu que

$$f' \;=\; \psi_E^{-1} f^* \,\psi_F,$$

on $f^*: F^*\to E^*$ és l'aplicació dual de f i $\psi_E: E\to E^*$, $\psi_F: F\to F^*$ són els isomorfismes induïts pel producte escalar de E i F, respectivament: $\psi_E(u)=\langle u,\cdot\rangle$, $\psi_F(v)=\langle v,\cdot\rangle$.

(b) Proveu que, si B_E i B_F són bases ortonormals de E i F, respectivament, aleshores

$$M_{B_F,\,B_E}(f') \;=\; \left(M_{B_E,\,B_F}(f)\right)^t.$$

(c) Proveu les igualtats

$$\operatorname{Nuc} f \;=\; \operatorname{Nuc}(f'f), \qquad \operatorname{Nuc} f' \;=\; \operatorname{Nuc}(ff'), \qquad \operatorname{Im} f' \;=\; (\operatorname{Nuc} f)^\perp, \qquad \operatorname{Nuc} f' \;=\; (\operatorname{Im} f)^\perp$$

i deduïu-ne que f, f', ff' i $f'f$ tenen el mateix rang.

13. Demostreu que qualsevol matriu A amb coeficients reals té el mateix rang que la matriu A^tA.

14. Trobeu el complement ortogonal de $[(1,1,1,1),\,(1,2,3,4)]$ en $\mathbb{R}^4$ i doneu-ne una base ortonormal.

15. Considereu l'espai euclidià $E=\mathbb{R}^4$ amb el producte escalar estàndard.

(a) Trobeu una base del complement ortogonal del subespai $F=[(1,0,2,1),\,(0,1,-2,1)]$.

(b) Trobeu equacions lineals que defineixin el complement ortogonal del subespai

$$G=\{(x,y,z)\in E \mid 2x+y+3z-t=3x+2y-2t=0\}.$$

16. Considereu, a l'espai euclidià $E=\mathbb{R}^3$ amb el producte escalar estàndard, els subespais

$$F=\{(x,y,z)\in E \mid x+ay+z=0\},$$
$$G=\{(x,y,z)\in E \mid x-y=y-bz=0\},$$

on $a,b\in\mathbb{R}$. Per a quins valors dels paràmetres a, b el subespai G és el complement ortogonal del subespai F?

17. Siguin F, G subespais vectorials d'un espai euclidià E. Proveu:

(a) $F \subseteq (F^\perp)^\perp$

(b) $G^\perp \subseteq F^\perp$ si $F \subseteq G$

(c) $F^\perp \cap G^\perp \subseteq (F+G)^\perp$ i $F^\perp + G^\perp \subseteq (F \cap G)^\perp$

18. Siguin F, G subespais vectorials d'un espai euclidià E de dimensió finita. Proveu:

(a) $(F^\perp)^\perp = F$

(b) $G^\perp \subseteq F^\perp$ si, i només si, $F \subseteq G$

(c) $F^\perp \cap G^\perp = (F+G)^\perp$ i $F^\perp + G^\perp = (F \cap G)^\perp$

19. Considereu, a l'espai euclidià $E = \mathbb{R}^4$ amb el producte escalar estàndard, els subespais

$$F = \{(x,y,z,t) \in E \mid x+y+z=0\ ,\ y+z+t=0\}\,,$$
$$G = [(1,2,3,4),\ (0,1,2,3),\ (3,3,1,2)].$$

Trobeu bases de $F^\perp$, $G^\perp$, $(F+G)^\perp$ i $(F \cap G)^\perp$.

20. Considereu l'espai euclidià $E = \mathbb{R}^4$ amb el producte escalar estàndard. Trobeu la projecció ortogonal del vector $(1,2,0,-1)$ sobre cadascun dels subespais vectorials següents:

(a) $F = [(2,3,-1,0)]$

(b) $F = \{(x,y,z,t) \in E \mid 3x - z + 2t = 0\}$

(c) $F = [(1,2,3,-1),\ (2,-1,0,1)]$

21. Considereu el pla $F = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x+y\big\}$ a l'espai euclidià $\mathbb{R}^3$ amb el producte escalar estàndard. Donat un vector $v = (a,b,c)$ de $\mathbb{R}^3$, trobeu el vector de F més proper a v i calculeu la seva distància a v.

22. Donat un subespai F de l'espai euclidià $\mathbb{R}^n$ amb el producte escalar estàndard, sigui $\pi_F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ l'aplicació lineal que envia cada vector de $\mathbb{R}^n$ a la seva projecció ortogonal sobre F.

(a) Sigui $\{u_1, \ldots, u_d\}$ una base de F. Doneu la matriu en base canònica de π_F en termes de les coordenades dels vectors $u_1, \ldots, u_d$ en base canònica.

(b) Calculeu la matriu en base canònica de π_F per al subespai $F = [(3,1,0),\ (0,1,3)]$ de $\mathbb{R}^3$.

23. Considereu a $\mathbb{R}_n[x]$ el subespai vectorial $F = \{p(x) \in \mathbb{R}_n[x] \mid p(1) = 0\}$ i el producte escalar respecte del qual la base canònica $\{1, x, ..., x^n\}$ és ortonormal.

(a) Doneu una base del complement ortogonal de F.

(b) Demostreu que la distància mínima d'un polinomi $p(x) \in \mathbb{R}_n[x]$ als polinomis de F és $\dfrac{|p(1)|}{\sqrt{n+1}}$.

24. Considereu a $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ el subespai vectorial F generat per la matriu $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Trobeu el complement ortogonal $F^\perp$ respecte del producte escalar definit per $\langle A, B \rangle = \mathrm{tr}(A^t B)$ i doneu la matriu en base canònica de la projecció ortogonal $\pi : E \to E$ sobre $F^\perp$.

25. Per a cadascuna de les matrius A_i següents, trobeu una matriu P_i ortogonal tal que $P_i^t A_i P_i$ sigui diagonal:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

26. Trobeu la descomposició en valors singulars (SVD) de les matrius següents:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad E = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}, \qquad F = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad H = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 8 & 6 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & 1 & 7 \\ 5 & 0 & 7 & 4 & 0 \\ 7 & 0 & 8 & 5 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

27. Trobeu les millors aproximacions possibles de rang 1, 2, 3 i 4 de la matriu H del problema anterior.

28. Quin és el valor màxim de $f(x,y,z) = x - 3y + z$ entre els vectors $v = (x,y,z)$ de $\mathbb{R}^3$ tals que $\|v\| = 1$? I entre els vectors v tals que $\|v\| \le 1$? I entre els vectors v tals que $\|v\| \le 10$?

29. Considereu l'aplicació $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ donada per $f(x,y) = (x - 3y,\ 2x + y,\ x + 6y)$. Trobeu el valor mínim de $\|f(x,y)\|$ entre els vectors $v = (x,y)$ de $\mathbb{R}^2$ tals que $\|v\| = 1$, així com els vectors on s'assoleix aquest mínim.

30. Considereu l'aplicació $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ donada per $f(x,y) = (x + 2y,\ 2x + y)$. Identifiqueu la corba $f(S^1)$, on S^1 és la circumferència a $\mathbb{R}^2$ de centre $(0,0)$ i radi 1.

31. Considereu l'aplicació $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ donada per $f(x,y,z) = (x + 2y + z,\ 2x - y - z)$. Descriviu $f(B)$, on B és el conjunt dels vectors v de $\mathbb{R}^3$ tals que $\|v\| \le 1$.

32. Trobeu les solucions aproximades per mínims quadrats dels sistemes lineals sobredeterminats següents:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

33. Considereu els punts $(-1,4)$, $(0,5)$, $(1,-2)$, $(2,3)$ a l'espai euclidià $\mathbb{R}^2$ amb el producte escalar estàndard.

(a) (*Regressió lineal*) Trobeu la recta del tipus $y = mx + n$ que millor aproxima els punts donats. Trobeu també la del tipus $x = My + N$.

(b) (*Regressió quadràtica*) Trobeu la paràbola del tipus $y = ax^2 + bx + c$ que millor aproxima els punts donats.

34. Trobeu a $\mathbb{R}^2$ la recta de regressió que defineixen els punts següents:

$$(1,-1),\ (2,0),\ (3,-1),\ (4,1),\ (5,-1),\ (6,2).$$