Si recordeu la lliçó anterior , vam definir la noció de sèrie de Fourier complexa d'una funció $f \in \mathtt{PS}[-\pi, \pi]$ com

$$\lim_N SC_f^N(x) = \lim_N \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ikx} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx},$$

on

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx}\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{e^{ikx}}\, dx.$$

Això és pot interpretar tenint en compte que el conjunt $\{e^{ikx}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ defineix una família ortogonal respecte al producte hermític definit en funcions reals en l'interval $[-\pi, \pi]$ que prenen valors complexos definit per

$$(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)}\, dx.$$

Fixeu-vos que aquesta definició de producte hermític encaixa perfectament en el cas de funcions que prenen valors reals. Per tant aquest producte hermític és, de fet una generalització a variable complexa del producte escalar en funcions que prenen valors reals (com hem estat fent fins ara).

Observeu també que en aquesta situació $(e^{ik_1x}, e^{ik_2x}) = 0$ si $k_1 \neq k_2$, i val 2π si $k_1 = k_2$. D'aquí doncs tenim el terme 2π que està dividint.

En aquesta lliçó veurem resultats de convergència puntual de $\{SC_f^N(x)\}_{N \geq 1}$. Observeu que tot resultat de convergència puntual d'aquesta successió es podrà traduir inmediatament a un resultat de convergència puntual per la sèrie de Fourier trigonomètrica $S_f^N(x)$, ja que segons vam veure, $S_f^N(x)$ és identicament igual a $SC_f^N(x)$ per tot x i per tot N.

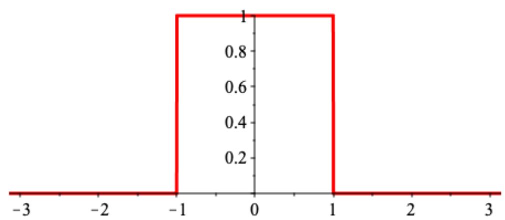
El resultat fonamental que tindrem serà el següent:

Teorema 1 (Teorema de Dirichlet)**.** *Sigui $f \in PS[-\pi, \pi]$. Considerem la seva corresponent extensió periòdica a tot $\mathbb{R}$ (que per abús de notació també denotarem per f). Considerem aleshores $\{SC_f^N\}_{N \geq 1}$. Aleshores, per tot $x \in \mathbb{R}$,*

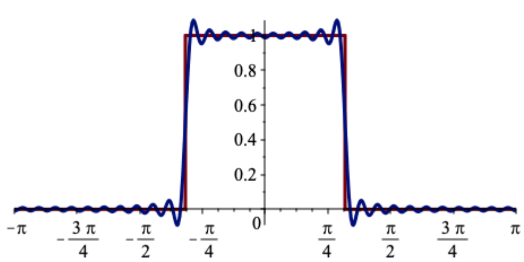
$$\lim_N SC_f^N(x) = \frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-)),$$

on $f(x^+)$ i $f(x^-)$ són els límits laterals de f quan la variable s'apropa a x per la dreta i per l'esquerra, respectivament.

Veguem un exemple. Si prenem la funció f que val 1 entre -1 i 1, i 0 fora, és clar que és una funció suau, que té el següent aspecte:



Ara ho comparem amb la sèrie de Fourier, que la dibuixem per $N = 20$:



El que s'observa és que la sèrie de Fourier aproxima molt bé la funció inicial. De fet, el teorema de Dirichlet ens diu que punt a punt, l'aproximació cada cop és millor, llevat dels punts de discontinuïtat, en que el límit és el punt mig. Això és el que passa també en la gràfica de la figura.

Anem a veure, abans de demostrar-lo, algunes conseqüències importants del teorema. La primera (i la més important) és que si els límits laterals coincideixen, $f(x^+) = f(x^-)$, i aquests són iguals a $f(x)$. Per tant, la conseqüència clau del teorema de Dirichlet és que

Si $f \in \texttt{PS}[-\pi,\pi]$ és contínua en x,
aleshores $S_f^N(x)$ convergeix puntualment cap a $f(x)$.

L'altra observació important és que en les discontinuïtats de salt (que són les que tenim en la nostra situació) el límit puntual de la sèrie de Fourier no coincideix amb el valor de la funció f en el punt: coincideix amb la mitja aritmètica entre els seus límits. És per aquesta raó que no podem dir que la sèrie de Fourier coincideixi punt a punt amb la funció inicial, sino només que això és vàlid en els punts de continuïtat de f.

Prova del teorema de Dirichlet usant el nucli de Dirichlet

Anem ara a demostrar el teorema de Dirichlet. Per a fer-ho ens caldrà introduir una funció fonamental en anàlisi:

Definició 1. Sigui $N \in \mathbb{N}$. El *nucli de Dirichlet* és

$$D_N(x) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-N}^{N} e^{inx}.$$

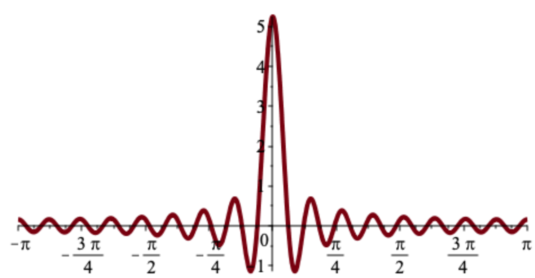
Aquesta funció de variable real que pren valors complexos, de fet pren valors reals. En efecte, per una banda, desenvolupant les exponencials en termes del sinus i cosinus tenim:

$$D_N(x) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-N}^{N} e^{inx} = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{N}\cos(nx). \tag{1}$$

Per altra banda, observeu que $D_N(z)$ està expressat en termes d'una suma geomètrica (i després recordant la fòrmula del sinus en termes d'exponecials) que pot desenvolupar-se per obtenir

$$D_N(x) = \frac{1}{2\pi}\frac{e^{i(N+1)x-e^{-iNx}}}{e^{ix}-1} = \frac{1}{2\pi}\frac{\sin\left((N+1/2)x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right).} \tag{2}$$

Aquesta gràfica, a mesura que N augmenta, el que fa es que es concentra cada vegada més al voltant de $x=0$. Aquí la dibuixem per $N=15$:



Per tant, es pot dir que és un model d'una funció contínua que aproxima (cada cop millor) una funció que es concentra en un punt (pels que ho hagueu vist en enginyeria: la delta de Dirac és el "límit" en un cert sentit que no veurem en aquest curs d'aquesta successió de funcions).

Dues propietats importants que usarem del nucli de Dirichlet són les següents:

1. Usant la identitat (1) tenim que

$$\int_{-\pi}^{0} D_N(x)\,dx = \int_{0}^{\pi} D_N(x)\,dx = \frac{1}{2}. \tag{3}$$

   Això és cert perquè les intergrals del cosinus en l'expressió (1) valen totes 0.

2. $SC_f^N(x)$ és pot expressar en termes de f i de $D_N(x)$ de la següent forma. En el càlcul que farem és especialment important pensar no en f definida en $[-\pi,\pi]$, però en la seva extensió a tot $\mathbb{R}$. Si recordem que $c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx$, aleshores,

$$SC_f^N(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx} = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-N}^{N}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(z)e^{-inz}\,dz\right)e^{inx}.$$

Fent ara $n = -m$ i reescribint-ho en termes d'aquest canvi de notació, així com intercanviant la suma finita amb l'integral, tenim que l'anterior és igual a

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\sum_{m=-N}^{N}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(z)e^{imz}\,dz\right)e^{-imx} &= \frac{1}{2\pi}\sum_{m=-N}^{N}\int_{-\pi}^{\pi} f(z)e^{im(z-x)}\,dz\\ &= \frac{1}{2\pi}\sum_{m=-N}^{N}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+u)e^{imu}\,du,\end{aligned}$$

on en l'última igualtat hem fet el canvi de variables $z-x = u$ i l'integral l'estem considerant sobre l'extensió periòdica de f a tot $\mathbb{R}$. Finalment, si ara intercanviem de nou el sumatori i l'integral, arribem a la següent relació, que serà el punt de partida de la prova del teorema de Dirichlet.

$$SC_f^N(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+u)D_N(u)\,du. \tag{4}$$

Ara ja tenim tots els ingredients per a poder passar a demostrar el teorema de Dirichlet. Anem-ho a veure. Com veurem, caldrà usar en un cert moment que la derivada de f també és una funció contínua a troços.

Comencem: el que farem serà comparar, per un x donat, $SC_f^N(x) - \frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-))$. Anem-ho a desenvolupar en termes del nucli de Dirichlet. Així:

$$\begin{aligned}SC_f^N(x) - \frac{f(x^+)+f(x^-)}{2} &= SC_f^N(x) - f(x^+)\int_0^{\pi} D_N(y)\,dy - f(x^-)\int_{-\pi}^{0} D_N(y)\,dy\\ &= \int_{-\pi}^{0}(f(x+y)-f(x^-))D_N(y)\,dy + \int_0^{\pi}(f(x+y)-f(x^+))D_N(y)\,dy. \end{aligned}\tag{5}$$

Ara volem juntar aquestes dues integrals. Per a fer-ho, definim la següent funció:

$$g(y) = \begin{cases} \frac{f(x+y)-f(x^-)}{e^{iy}-1},\ y\in[-\pi,0),\\ \frac{f(x+y)-f(x^+)}{e^{iy}-1},\ y\in(0,\pi].\end{cases}$$

Anem a estudiar com cal definir g en $y = 0$. En aquest punt $g(y)$ no està definida, però podem calcular els límits laterals (i per tant associar-li un valor a $g(0)$ per tal que estigui definida en aquest punt). Usant el teorema de l'Hôpital (si no us convenç, podeu fer-ho per la part real i part imaginaria per separat...), obtenim que

$$\lim_{y\to 0^+} g(y) = -if'(x^+),\ \lim_{y\to 0^-} g(y) = -if'(x^-).$$

Observeu que ambdos límits $f'(x^+)$ i $f'(x^-)$ existeixen perquè $f \in \mathtt{PS}[-\pi,\pi]$, i per tant $g \in \mathtt{PC}[-\pi,\pi]$. En particular, aquí només estem usant que els límits laterals de f' existeixen, i no estem avaluant la funció f' en els seus punts de discontinuïtat.

Tornem ara al càlcul que estavem fent. Recordant l'expressió de $D_N(y) = \frac{1}{2\pi}\frac{e^{i(N+1)y}-e^{-iNy}}{e^{iy}-1}$, tenim que (5) s'escriu com

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(y)(e^{i(N+1)y} - e^{-iNy})\,dy.$$

Anem ara a usar que $g(y)$ (al ser una funció contínua a troços) admet una sèrie de Fourier complexa. Denotem per $\widehat{C_n} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(y)e^{-iNy}\,dy$. Aleshores, està clar

$$SC_f^N(x) - \frac{f(x^+)+f(x^-)}{2} = \cdots = SC_f^N\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(y)(e^{i(N+1)y} - e^{-iNy}) = \widehat{C_{-(N+1)}} - \widehat{C_N}.$$

Com concloem ara? Usarem la desigualtat de Bessel: el que ens deia és que la suma al quadrat dels coeficients de la sèrie de Fourier (complexa o trigonòmetrica) està fitada per $\|f\|_2^2$, i en particular, els coeficients tendeixen a 0. Per tant, el que estem dient en aquest cas és que $\lim_N \widehat{C_{\pm N}} = 0$. I això ens demostra que $\lim_N \widehat{C_{-(N+1)}} - \widehat{C_N} = 0$. Per tant, donat $\varepsilon > 0$ existeix un N_0 prou gran tal que si $N \geq N_0$ es compleix que

$$\left|SC_f^N(x) - \frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}\right| < \varepsilon,$$

d'on deduïm que el límit puntual de $SC_f^N(x)$ és $\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$, tal i com volíem veure. $\square$

En la propera lliçó aplicarem aquest resultat en diversos contextos. En particular, veurem què podem dir per les derivades d'una funció (sempre que existeixin).