Segon problema per lliurar d'anàlisi real. Una desigualtat isoperimètrica.

Dido (també coneguda amb els noms d'Elissa o Elyssa) era una princesa filla del rei de Tir Mattan I, a Fenícia, que va fugir del seu germà Pigmalió, que conspirava pel poder, i va desembarcar a la costa de l'actual Tunísia, i hi fundà, segons la llegenda, Cartago.
La llegenda de la fundació de Cartago és rellevat pel problema que resoldrem avui (els detalls és poden trobar en l'Eneida de Virgili, bona lectura pel confinament). Dido sol·licità al rei de la contrada –Jarbas– que li cedís un troç de terra per fundar una ciutat. Davant la sol·licitud de Dido, Jarbas li concedeix "tanta terra com pugui abastar amb una pell de bou", pensant que era una bona manera d'esquivar la donació de terrenys. Dido va tallar tires molt fines a partir de la pell de l'animal i aconseguí acotar un extens perímetre en forma circular (amb un radi de aproximadament 2 kms).

El resultat que demostrarem en aquest entregable és el següent (que és el resultat que la reina Dido ja sabia quan va fundar Cartago!)

Entre totes les corbes de perímetre fixat, quines maximitzen l'àrea que tanquen?

De fet, treballarem només en el cas que les corbes siguin diferenciables. Abans de començar, introduïm notació. Sigui $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una corba injectiva, llevat dels punts extrems (és a dir, $\gamma(x) = \gamma(y)$ implica que $x, y \in \{0,1\}$). Demanarem a més que el vector velocitat γ' estigui definit per tot valor de x (és, per tant una corba diferenciable).
Supossarem tota l'estona que la longitud de la corba és 1 (ja veurem al final què cal fer si la longitud no és 1).

a) (Això no té a veure amb sèries de Fourier...) Demostreu que podem agafar una parametrització de la corba $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ que compleixi que $\|\gamma'(t)\| = 1$ (Indicació: considereu, per una parametrizació de ϕ amb $\phi'(x) \neq 0$ per tot t, la funció $s(t) = \int_0^t \|\phi'(x)\|\, dx$ per usar-la en un canvi de variables adequat).

b) Per aquesta parametrizació donada en a), demostreu que es compleix que

$$1 = \int_0^1 x'(t)^2 + y'(t)^2\, dt,\ A = \frac{1}{2}\left|\int_0^1 x(t)y'(t) - x'(t)y(t)\, dt\right|,$$

on A és l'àrea de la regió tancada per la corba.

Això és tot el que ens caldrà del curs de calcul integral. Observeu que les funcions $x(t)$ i $y(t)$ les podem considerar com funcions 1-periòdiques, i per tant podem calcular la seva sèrie de Fourier complexa (recordeu que n és enter, positiu o negatiu), amb

$$a_n = \int_0^1 x(t)e^{-2\pi int}dt,\ b_n = \int_0^1 y(t)e^{-2\pi int}dt$$

c) Quins són els coeficients de Fourier complexos de $x'(t)$ i de $y'(t)$?

d) Usant Parseval, demostreu que

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2(|a_n|^2 + |b_n|^2) = \frac{1}{4\pi^2}.$$

e) Demostreu que

$$A = \frac{1}{2}\left|\int_0^1 x(t)y'(t) - x'(t)y(t)\, dt\right| \leq 2\pi\left|\sum_{n\in\mathbb{Z}} na_n\overline{b_n}\right|.$$

Per a fer-ho, modifiqueu l'argument que us dóna Parseval per tal de poder calcular les integrals $\int_0^1 x(t)y'(t)\, dt$ i $\int_0^1 x'(t)y(t)\, dt$ en termes del coeficients de les sèries de Fourier corresponents.

f) Demostreu que per tota parella de valors a_n, b_ni per tot nombre natural n,

$$2|n||a_n\overline{b_n}| \leq 2n^2|a_n||b_n| \leq n^2\left(|a_n|^2+|b_n|^2\right). \tag{1}$$

Combineu-ho amb els apartats anterior per demostrar que $A \leq \frac{1}{4\pi}$.

Ja tenim el primer resultat important: tota corba regular i simple de longitud 1 tanca una àrea inferior a $1/(4\pi)$. Aquest resultat és l'anomenada *desigualtat isoperimètrica.*
El que veurem ara, de nou usant la teoria de sèries de Fourier, és en quins casos tenim la igualtat. Per a que hi hagi igualtat necessariament ens caldrà que les desigualtats (1) es donin amb igualtat.

g) En vista de l'observació anterior, demostreu que si la desigualtat isoperimètrica es dóna amb igualtat, necessariament $a_n = b_n = 0$ si $|n| > 1$.

h) Demostreu que $a_{-1} = \overline{a_1}$, i similarment per b_1 i b_{-1}. Demostreu que $|a_{-1}| = |a_1| = |b_{-1}| = |b_1| = \frac{1}{4\pi}$.

Per tant, tenim que $a_1 = \frac{1}{4\pi}e^{2\pi i\alpha}$ i $b_1 = \frac{1}{4\pi}e^{2\pi i\beta}$, per certs valors de α, $\beta \in \mathbb{R}$.

i) Useu l'expressió de l'àrea A en termes dels coeficients de Fourier per demostrar que $\alpha - \beta = \frac{1}{4}(2k+1)$, on k és un nombre enter.

j) Finalment, vegueu que que $x(t)) = a_0 + \frac{1}{2\pi}\cos(2\pi(\alpha+t))$, $y(t) = b_0 \pm \frac{1}{2\pi}\sin(2\pi(\alpha+t))$, i que, per tant, $\gamma(t)$ descriu una circumferència de centre (a_0, b_0) i radi $\frac{1}{2\pi}$.

k) Com canvia tot si la longitud de la corba és ℓ en lloc de 1?