Mètodes numèrics per a EDO

Considerem el problema de Cauchy o de valors inicials

$$(1)\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

on $x \in [a,b]$, $y(x) \in \mathbb{R}^m$, $y_0 \in \mathbb{R}^m$ i $f:[a,b]\times\mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ prou regular de manera que existeix una única solució.

Ens agradaria poder tenir la solució expressada en forma analítica, però en molts casos, això no és possible de fet, en general,

Els mètodes numèrics no donaran la solució analítica, sinó els valors (aproximats) de la solució en una xarxa de valors $x_0, x_1, \dots, x_n \in [a,b]$.

Denotarem per $y(x_n)$ la solució en x_n, y_n la solució obtinguda pel mètode numèric.

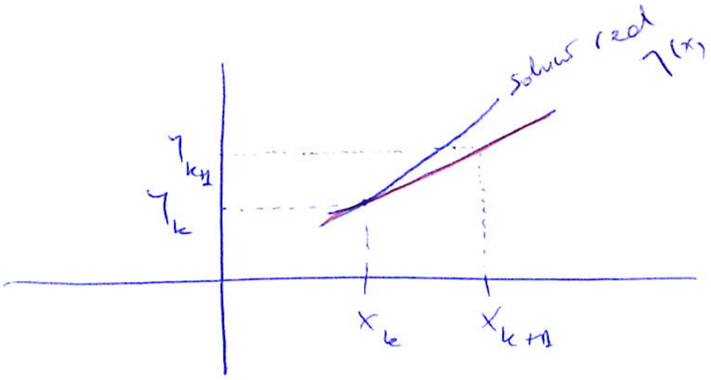
<u>Mètodes d'un pas</u>. Prenem, de moment, $m=1$

La idea és aproximar $y(x)$ en $[x_0, x_1]$ pel seu desenvolupament de Taylor de 1r ordre:

$$y(x) \simeq y(x_0) + y'(x_0)(x-x_0) = y_0 + f(x_0,y_0)(x-x_0), \quad x \in [x_0,x_1]$$

En $x = x_1$: $y(x_1) \simeq y_0 + f(x_0,y_0)\underbrace{(x_1-x_0)}_{h} = y_0 + f(x_0,y_0)\,h = y_1$

Geomètricament, equival a considerar que en $[x_0,x_1]$ la tangent a $y(x)$ en x_0 és una "bona" aproximació de la corba solució



Suposant que y_1 és una bona aproximació de $y(x_1)$, considerem el problema de Cauchy

$$\begin{cases} y_1' = f(x, y_1) \\ y_1(x_1) = y_1 \end{cases}$$

i aproximem

$$y(x) \simeq y_1(x) \approx y_1 + y'(x_1)(x-x_1) = y_1 + f(x_1, y_1)(x-x_1), \text{ per a } x \in [x_1, x_2]$$

i en $x = x_2$

$$y(x_2) \simeq y_1(x_2) \approx y_1 + f(x_1, y_1)\overbrace{(x_2 - x_1)}^{h} \equiv y_2$$

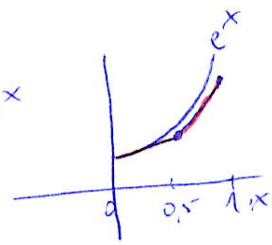
Etc. El mètode d'Euler ve donat per

$$\begin{cases} y_0 = y(x_0) \\ y_{n+1} = y_n + h f(x_n, y_n) \end{cases}, \quad n = 0 \div N-1$$

Exemple

$$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad x \in [0,1]$$

de solució analítica $y(x) = e^x$



Mètode d'Euler: $y_0 = y(0) = 1$

$$y_{n+1} = y_n + h y_n = (1+h) y_n, \quad n = 0 \div N-1, \quad h = \frac{1}{N}$$

Si prenem $h = 0{,}5$ obtenim

$x_0 = 0$	$y_0 = 1$	$y(x_0) = 1$
$x_1 = 0{,}5$	$y_1 = 1{,}5$	$y(x_1) = 1{,}6487$
$x_2 = 1$	$y_2 = 2{,}25$	$y(x_2) = 2{,}71828$

Exercici. Fer els càlculs amb $h = 0{,}125$.

$h = 0.5$		
x_n	y_n	$y(x_n)$
0	1	1
0.5	1.50000	1.64872
1	2.25000	2.71828

$h = 0.125$		
x_n	y_n	$y(x_n)$
0	1	1
0.125	1.12500	1.23148
0.250	1.26562	1.28402
0.375	1.42382	1.45499
0.500	1.60180	1.64872
0.625	1.80203	1.86824
0.750	2.02728	2.11700
0.875	2.28069	2.39887
1	2.56578	2.71828

Parlem ara de l'error

Considerem el problema de Cauchy (1) i apliquem-li un **mètode d'integració d'un pas**, és a dir, un mètode definit per un algorisme del tipus

$$\begin{cases} y_0 = y(a) \\ y_{n+1} = y_n + h\,\Phi(x_n, y_n, h), \qquad n = 0 \div N-1 \end{cases}$$

on Φ és una funció contínua a $[a,b]\times\mathbb{R}\times[0,h_0]$ i Lipschitz en y (uniformement en x,h) és a dir

$$|\Phi(x,y,h) - \Phi(x,\bar{y},h)| \leq L\,|y-\bar{y}| \qquad y,\bar{y}\in\mathbb{R}$$

$\forall x\in[a,b]$, $\forall h\in[0,h_0]$ i L independent de x,h,y

Def Anomenem error en el punt x_n al valor

$$\varepsilon_n = |y(x_n) - y_n|$$

Def Direm que un mètode d'integració té ordre global p, $p\in\mathbb{N}$, i escrivim $O(h^p)$ si i només si existeixen $h_0>0$ i $K>0$ tq per a tot pas d'integració $h\in[0,h_0]$ s compleix $\varepsilon_n \leq K h^p$, $n=0\div N$

Teorema

Si $|y(x+h) - y(x) - h\,\Phi(x,y(x),h)| \leq \hat{K} h^{p+1}$ per a certa $\hat{K}>0$ $\forall x\in[a,b]$ i $h\in[0,h_0]$, per a cert h_0, (escrivim simplement $y(x+h)-y(x) - h\,\Phi(x,y(x),h) = O(h^{p+1})$), llavors el mètode d'integració té ordre global p.

o també $\left|\frac{y(x+h)-y(x)}{h} - \Phi(x,y(x),h)\right| \leq \hat{K} h^p$

Prova. Volem veure $\varepsilon_n \leq K h^p$

Primer, però, observem que
Per hipòtesi sabem que existeixen $h_0 > 0$ i $k > 0$ t.q.

$$\left| y(x+h) - y(x) - h\Phi(x, y(x), h) \right| \le \hat{k} h^{p+1} \qquad (1)$$

per a $h \in [0, h_0]$ i que Φ és lipschitz respecte de y uniformement en x i h és a dir

$$\left| \Phi(x, y, h) - \Phi(x, \bar{y}, h) \right| \le L |y - \bar{y}| \qquad (2) \quad \forall y, \bar{y} \in \mathbb{R}$$

on L és una constant independent de x, h. Llavors

$$\varepsilon_n = |y(x_n) - y_n|$$
$$\le |y(x_n) - y(x_{n-1}) - h\Phi(x_{n-1}, y(x_{n-1}), h)| +$$
$$+ |y(x_{n-1}) + h\Phi(x_{n-1}, y(x_{n-1}), h) - y_n| \le \quad y_n = y_{n-1} + h\Phi(x_{n-1}, y_{n-1}, h)$$
$$\le \underbrace{|y(x_{n-1}+h) - y(x_{n-1}) - h\Phi(x_{n-1}, y(x_{n-1}), h)|}_{} +$$
$$+ \underbrace{|y(x_{n-1}) - y_{n-1}|}_{} + h\left|\Phi(x_{n-1}, y(x_{n-1}), h) - \Phi(x_{n-1}, y_{n-1}, h)\right|$$
$$\underset{(2)}{\overset{(1)}{\le}} \hat{k} h^{p+1} + \varepsilon_{n-1} + hL \underbrace{|y(x_{n-1}) - y_{n-1}|}_{\varepsilon_{n-1}} = \hat{k} h^{p+1} + (1+hL)\varepsilon_{n-1}$$

Per a $h \in [0, h_0]$ i $n = 0 \div N$. Llavors

$$\varepsilon_n \le \hat{k} h^{p+1} + (1+hL)\varepsilon_{n-1} \le \hat{k} h^{p+1} + (1+hL)\left[\hat{k} h^{p+1} + (1+hL)\varepsilon_{n-2}\right]$$
$$= \hat{k} h^{p+1} + (1+hL)\hat{k} h^{p+1} + (1+hL)^2 \varepsilon_{n-2} \le$$
$$\le \hat{k} h^{p+1} + (1+hL)\hat{k} h^{p+1} + (1+hL)^2 \hat{k} h^{p+1} + \dots + (1+hL)^{n-1}\varepsilon_1 \le$$

$$\underset{p}{\le} \hat{K} h^{p+1} \left[1 + (1+hL) + \dots + (1+hL)^{n-1} \right] =$$

$$\varepsilon_1 \le \hat{K} h^{p+1} + (1+hL) \underbrace{\varepsilon_0}_{=0}$$

$\Leftarrow$ premem $\eta(x_0) = \eta_0$

$$= \hat{K} h^{p+1} \frac{1 - (1+hL)^n}{-hL} = \frac{\hat{K} h^p}{L} \left((1+hL)^n - 1 \right) \le$$

$$\le \frac{\hat{K}}{L} h^p \left(e^{(b-a)L} - 1 \right) = K h^p \quad \text{pro } h \in [0, h_0]$$

$$(1+hL)^n = (1+hL)^{\frac{b-a}{h}} \le \Big(\underbrace{1 + hL + \frac{h^2L^2}{2!} + \dots}_{e^{hL}} \Big)^{\frac{b-a}{h}} = e^{(b-a)L}$$

NOTA.- Observem de $\varepsilon_n \leq K h^p$ que si $p \geq 1$, es té que quan $h \to 0$ llavors $\varepsilon_n \to 0$ $\forall n = 0 \div N$, $N = \frac{b-a}{h}$. En aquest cas direm que el mètode és convergent. Això ens indica que, llevat errors d'arrodoniment (i.e. molts més càlculs vol dir acumulació d'errors), com més petita sigui la h, millor serà l'aproximació i com més gran sigui la p, més ràpida serà la convergència.

Pel que fa a aquest teorema aplicat al mètode d'Euler tenim el següent resultat

Proposició

El mètode d'Euler té ordre 1

Prova

$$\Phi(x, y(x), h) = f(x, y(x))$$

desenvolupant per Taylor, existeix $\eta(x) \in [a, b]$ tal que

$$\left| \frac{y(x+h) - y(x)}{h} - \Phi(x, y(x), h) \right| = \left| \frac{y(x+h) - y(x)}{h} - f(x, y(x)) \right| =$$

$$= \left| \cancel{y'(x)} + \frac{y''(\eta(x))}{2!} h - \cancel{y'(x)} \right| = \left| \frac{y''(\eta(x))}{2!} \right| h \leq k \cdot h.$$

suposant $y \in \mathcal{C}^2([a,b])$