

FACULTAT DE MATEMÀTIQUES I ESTADÍSTICA

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA - BARCELONATECH

## Geometría Afín y Euclídea (Q2)

*Àlex Batlle Casellas*

February 26, 2019

# Índex

<b>1</b>	<b>Espacio Afín.</b>	<b>2</b>
1.1	Definiciones. . . . .	2
1.2	Combinaciones afines de puntos. . . . .	3
1.3	Coordenadas. . . . .	5
1.4	Variedades lineales. . . . .	7
1.4.1	Variedades lineales y combinaciones de puntos. . . . .	9
1.4.2	Ecuaciones de variedades lineales. . . . .	10
1.4.3	Suma, intersección y fórmula de Grassmann. . . . .	12
<b>2</b>	<b>Afinidades.</b>	<b>13</b>
2.1	Definición y propiedades. . . . .	13

# 1 Espacio Afín.

## 1.1 Definiciones.

### Definición:

Sea  $E$  un  $\mathbb{K}$ -e.v. Un **espacio afín** asociado a  $E$  es una triple  $\mathbb{A} = (A, E, \delta)$  donde  $A$  es un conjunto y  $\delta$  es una aplicación

$$\begin{aligned}\delta: A \times A &\rightarrow E \\ (p, q) &\mapsto \delta(p, q).\end{aligned}$$

que cumple con las siguientes propiedades:

1.  $\forall p_1, p_2, p_3 \in A, \delta(p_1, p_2) + \delta(p_2, p_3) = \delta(p_1, p_3)$ .
2.  $\forall p \in A$ , la siguiente aplicación es biyectiva:

$$\begin{aligned}\delta_p: A &\rightarrow E \\ q &\mapsto \delta_p(q) := \delta(p, q).\end{aligned}$$

A los elementos de  $A$  les llamaremos **puntos**. Usaremos la siguiente notación:

1.  $\dim A := \dim E$ .
2. Si  $\vec{u} = \delta(p, q)$ ,  $p$  es el **origen** de  $\vec{u}$  y  $q$  es su **extremo**.
3.  $\delta(p, q) := \vec{pq} = q - p$ .
4. Usando la anterior notación, la propiedad (1):  $(p_2 - p_1) + (p_3 - p_2) = (p_3 - p_1)$ .
5. Si  $\vec{u} = \vec{pq} = q - p \implies q = p + \vec{u}$ .

### Ejemplos:

1.  $\mathbb{A} = ((0, \infty), \mathbb{R}, \delta) :$

$$\begin{aligned}\delta: A \times A &\rightarrow E \\ (p, q) &\mapsto \delta(p, q) := \ln q - \ln p.\end{aligned}$$

Comprobemos las propiedades:

- Propiedad 1:  $\delta(p_1, p_2) + \delta(p_2, p_3) = (\ln p_2 - \ln p_1) + (\ln p_3 - \ln p_2) = \ln p_3 - \ln p_1 = \delta(p_1, p_3)$ .
- Propiedad 2: Si fijamos  $p$ ,

$$\begin{aligned}\delta_p: A &\rightarrow E \\ q &\mapsto \delta_p(q) := \ln q - \ln p\end{aligned}$$

es biyectiva.  $\square$

2.  $\mathbb{A} = (\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2, \delta)$ , y  $\delta$  es la aplicación tal que si  $p = (x_1, y_1), q = (x_2, y_2)$ , entonces

$$\begin{aligned}\delta: A \times A &\rightarrow E \\ (p, q) &\mapsto \delta(p, q) := (x_2 - x_1, y_2 - y_1).\end{aligned}$$

**Definición:**

$\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$  es el espacio afín definido como  $\mathbb{A} = (\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^n, \delta)$ , y  $\delta$  es la aplicación de **resta de coordenadas**.

**Propiedades:**

Sea  $\mathbb{A}$  un espacio afín:

1.  $\delta(p, q) = \vec{0} \iff q = p$ .
2.  $\delta(p, q) = -\delta(q, p)$ .
3.  $\delta(p_1, p_2) = \delta(p_3, p_4) \iff \delta(p_1, p_3) = \delta(p_2, p_4)$ . (regla del paralelogramo)

**Demostración:**

1. (a)  $\Leftarrow$  Cojamos  $\vec{u} \in E$ . Recordemos que  $\delta_p$  es biyectiva para todo  $p \in A$  fijado. Entonces,  $\exists q \in A$  tal que  $\vec{u} = \delta(p, q)$ . Entonces,  $\delta(p, p) + \vec{u} = \delta(p, p) + \delta(p, q) = \delta(p, q) = \vec{u} \implies \delta(p, p) = \vec{0}$ .  
 (b)  $\Rightarrow$  Por hipótesis,  $\delta(p, q) = \vec{0}$ , y como ya hemos visto,  $\delta(p, p) = \vec{0}$ . Como  $\delta_p$  es biyectiva,  $p = q$ .  $\square$
2.  $\delta(p, q) + \delta(q, p) = \delta(p, p) = \vec{0} \implies \delta(p, q) = -\delta(q, p)$ .  $\square$
3. Por simetría, solo hace falta demostrar una dirección. Por tanto, demostremos  $\Rightarrow$ , con hipótesis  $\delta(p_1, p_2) = \delta(p_3, p_4)$ :

$$\delta(p_1, p_3) = \delta(p_1, p_2) + \delta(p_2, p_3) = \delta(p_3, p_4) + \delta(p_2, p_3) = \delta(p_2, p_4). \square$$

## 1.2 Combinaciones afines de puntos.

**Observación:** Hasta ahora, las "operaciones" definidas son:

1. Combinaciones lineales de vectores en  $E$ .
2.  $p, q \in A \implies \delta(p, q) = q - p \in E$ .
3.  $p \in A, \vec{u} \in E \implies p + \vec{u} \in A$ .

En general, hacer "combinaciones lineales" de una colección de puntos  $p_1, \dots, p_r \in A$ ,  $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{K}$ ,

$$\alpha_1 p_1 + \dots + \alpha_r p_r = \sum_{i=1}^r \alpha_i p_i$$

no tiene sentido, pero hay **dos casos** en los que sí lo tiene:

1.  $\sum \alpha_i = 1$ .

**Definición:**

Sean  $p_1, \dots, p_r \in A$ ,  $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{K}$  tales que  $\sum_{i=1}^r \alpha_i = 1$ . Entonces, por definición,

$$\sum_{i=1}^r \alpha_i p_i := \bar{p} + \sum_{i=1}^r \alpha_i (p_i - \bar{p}) \in A, \text{ cogiendo } \bar{p} \in A \text{ como punto auxiliar.}$$

**Proposición:**

El proceso anterior no depende del punto auxiliar  $\bar{p}$  que escojamos.

**Demostración:**

Sean  $\bar{p}, \bar{\bar{p}} \in A$  puntos cualesquiera de  $A$ . Entonces,

$$\begin{aligned} \bar{p} + \sum \alpha_i (p_i - \bar{p}) &= \bar{\bar{p}} + \sum \alpha_i (p_i - \bar{\bar{p}}) \\ &\iff (\bar{p} - \bar{\bar{p}}) + \sum \alpha_i (p_i - \bar{p}) \\ &= (\bar{\bar{p}} - \bar{p}) + \sum \alpha_i (p_i - \bar{\bar{p}}) \\ &\iff (\bar{p} - \bar{\bar{p}}) + \sum \alpha_i [(p_i - \bar{p}) - (p_i - \bar{\bar{p}})] \\ &= \vec{0} \\ &\iff (\bar{p} - \bar{\bar{p}}) + \sum \alpha_i [(p_i - \bar{p}) + (\bar{\bar{p}} - p_i)] \\ &= \vec{0} \\ &\iff (\bar{p} - \bar{\bar{p}}) + \sum \alpha_i [(\bar{\bar{p}} - \bar{p})] \\ &= \vec{0} \\ &\iff (\bar{p} - \bar{\bar{p}}) + (\bar{\bar{p}} - \bar{p}) \\ &= \vec{0} \\ &\iff \delta(\bar{p}, \bar{\bar{p}}) \\ &= \vec{0}. \square \end{aligned} \tag{1}$$

**Definición:**

Dada una colección de puntos  $p_1, \dots, p_m \in A$ , el **baricentro** de todos ellos es el punto  $b$  resultante de la combinación afín siguiente:

$$b = \frac{1}{m} p_1 + \frac{1}{m} p_2 + \dots + \frac{1}{m} p_m = \sum_{i=1}^m \frac{1}{m} p_i \in A.$$

2.  $\sum \alpha_i = 0$ .

**Definición:**

Sean  $p_1, \dots, p_r \in A$ ,  $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{K}$  tales que  $\sum_{i=1}^r \alpha_i = 0$ . Entonces, por definición,

$$\sum_{i=1}^r \alpha_i p_i := \sum_{i=1}^r \alpha_i (p_i - \bar{p}) \in E, \text{ cogiendo } \bar{p} \in A \text{ como punto auxiliar.}$$

**Proposición:**

El proceso anterior no depende del punto auxiliar  $\bar{p}$  que escojamos.

**Demostración:**

Sean  $\bar{p}, \bar{\bar{p}} \in A$  puntos cualesquiera de  $A$ . Entonces,

$$\sum \alpha_i(p_i - \bar{p}) = \sum \alpha_i(p_i - \bar{\bar{p}}) \quad (2)$$
$$\Longleftrightarrow$$

**Observación:** Combinaciones de puntos.

1.  $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$ . En esta situación, sean  $p_1 = (a_1, \dots, a_n)$ ,  $p_2 = (b_1, \dots, b_n)$ . Entonces,  $\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 = (\alpha_1 a_1 + \alpha_2 b_1, \dots, \alpha_1 a_n + \alpha_2 b_n)$  (si  $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$  o  $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ ).
2. Ejemplo:  $p_1 - \frac{3}{2}p_2 + \frac{1}{2}p_3 = (p_1 - p_2) + \frac{1}{2}(p_3 - p_2)$ .

### 1.3 Coordenadas.

**Definición:**

Sea  $\mathbb{A}$  un espacio afín de  $\dim A = n < \infty$  asociado a un  $\mathbb{K}$ -e.v.  $E$ .

1. Llamaremos **sistema de referencia en  $\mathbb{A}$**  a

$$\mathcal{R} = \{p; v_1, \dots, v_n\}, \text{ donde } p \in A, \mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\} \text{ base de } E.$$

2. Dado  $q \in A$ , llamaremos **coordenadas de  $q$  en  $\mathcal{R}$**  a  $q_{\mathcal{R}} = (p\vec{q})_{\mathcal{B}}$ .

**Observación:**

1. Como  $\delta_p$  es biyectiva y

$$E \rightarrow \mathbb{K}^n$$

$$v \mapsto v_{\mathcal{B}}$$

también lo es, la asignación de coordenadas a un punto es biyectiva.

$$2. \quad q_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \Longleftrightarrow q - p = \sum_{i=1}^n x_i v_i.$$

**Ejemplos:**

1.  $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ .  
 $\mathcal{R} = \{p = (1, 3); v_1 = (1, 1), v_2 = (2, 1)\}$ ,  $q = (4, 5)$ . Entonces,  $q - p = (4, 5) - (1, 3) = (3, 2) = v_1 + v_2 \implies q_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
2.  $\mathcal{R} = \{(0, 0); e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)\}$ .  $q = (4, 5) \implies q_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ .

**Definición:**

En  $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$  llamaremos **referencia ordinaria** a

$$\mathcal{R}_{\text{ord}} := \{0; \mathcal{B}_{\text{canónica}}\}.$$

**Observación:**  $q = (q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{K}^n$ ,  $q_{\text{ord}} = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}$ .

**Proposición:**

Sea  $\mathbb{A}$  un espacio afín de dimensión finita, y sea la referencia  $\mathcal{R} = \{p; B\}$ , con  $B$  una base de  $E$ . Entonces,

1.  $p_1, \dots, p_r \in A$ ,  $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{K}$  :  $\sum \alpha_i = 1$ . Entonces,  $(\alpha_1 p_1 + \dots + \alpha_r p_r)_{\mathcal{R}} = \alpha_1 (p_1)_{\mathcal{R}} + \dots + \alpha_r (p_r)_{\mathcal{R}}$ .
2.  $p_1, \dots, p_r \in A$ ,  $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{K}$  :  $\sum \alpha_i = 0$ . Entonces,  $(\alpha_1 p_1 + \dots + \alpha_r p_r)_B = \alpha_1 (p_1)_{\mathcal{R}} + \dots + \alpha_r (p_r)_{\mathcal{R}}$ .
3. Caso particular.  $(p_2 - p_1)_B = (p_2)_{\mathcal{R}} - (p_1)_{\mathcal{R}}$ .

**Demostración:****Proposición:**

**Cambio de sistema de referencia.** Sea  $\mathbb{A}$  un espacio afín de dimensión finita  $n$ . Sean  $\mathcal{R}_1 = \{p_1; v_1, \dots, v_n\}$ ,  $\mathcal{R}_2 = \{p_2; w_1, \dots, w_n\}$  dos sistemas de referencia. Sean

$$(p_2)_{\mathcal{R}_1} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \text{ y } S = M_{B_2 \rightarrow B_1} = \begin{pmatrix} | & & | \\ (w_1)_{B_1} & \cdots & (w_n)_{B_1} \\ | & & | \end{pmatrix}. \text{ Sea } q \in A \text{ tal que } q_{\mathcal{R}_1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, q_{\mathcal{R}_2} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix}. \text{ Entonces,}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad q_{\mathcal{R}_1} = S q_{\mathcal{R}_2} + (p_2)_{\mathcal{R}_1}.$$

**Demostración:**

$$q_{\mathcal{R}_1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \cdot q - p_1 = (q - p_2) + (p_2 - p_1). \text{ Entonces,}$$

$$(q - p_1)_{B_1} = (q - p_2)_{B_1} + (p_2 - p_1)_{B_1} \implies \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = q_{\mathcal{R}_1} = S(q - p_2)_{B_2} + (p_2)_{\mathcal{R}_1} = S \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}. \square$$

**Observación:** Fórmula matricial de cambio de referencia.

$$\begin{pmatrix} q_{\mathcal{R}_1} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{pmatrix} = \left( \frac{S}{0} \middle| \frac{(p_2)_{\mathcal{R}_1}}{1} \right) \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{S} = \left( \frac{S}{0} \middle| \frac{(p_2)_{\mathcal{R}_1}}{1} \right) \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K}).$$

También definiremos  $\tilde{S} := M_{\mathcal{R}_2 \rightarrow \mathcal{R}_1}$ . Esta matriz cumple  $\det \tilde{S} = \det S$ .

**Definición:**

**Coordenadas ampliadas.**  $\mathcal{R} = \{p; B\}, q \in A, v \in B$ ,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = q_{\mathcal{R}} \mapsto q_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha 1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = v_B \mapsto v_B = \begin{pmatrix} \alpha 1 \\ \vdots \\ \alpha_n \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Llamaremos a los elementos de la derecha las **coordenadas ampliadas** de un punto y un vector.

**Observación:**

1.  $\mathcal{R}_1 \xleftarrow{\tilde{S}} \mathcal{R}_2 \xleftarrow{\tilde{T}} \mathcal{R}_3$ , entonces  $M_{\mathcal{R}_3 \rightarrow \mathcal{R}_1} = \tilde{S}\tilde{T}$ .
2. Otras ventajas de las coordenadas ampliadas: ecuaciones de variedades lineales, afinidades, cuádricas.
3. Las coordenadas ampliadas son coherentes con las combinaciones afines de puntos. Si  $p_1, \dots, p_m \in A, \alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{K}$ , entonces

$$(\alpha_1 p_1 + \dots + \alpha_m p_m)_{\mathcal{R}} = \alpha_1 (p_1)_{\mathcal{R}} + \dots + \alpha_m (p_m)_{\mathcal{R}} = \alpha_1 \begin{pmatrix} | \\ | \\ 1 \end{pmatrix} + \dots + \alpha_m \begin{pmatrix} | \\ | \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | \\ | \\ \sum \alpha_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | \\ | \\ 1 \end{pmatrix}.$$

## 1.4 Variedades lineales.

**Definición:**

Sea  $\mathbb{A}$  un espacio afín asociado a un  $\mathbb{K}$ -e.v.  $E$ . Entonces, una **variedad lineal** de  $\mathbb{A}$  es un subconjunto:

$$V := p + F = \{p + \vec{u} \mid \vec{u} \in F\}, \quad p \in A, \quad F \subseteq E \text{ subespacio vectorial.}$$

Definimos  $\dim V := \dim F$ .



### Ejemplos:

1. Variedades lineales de dimensión 0: **puntos**,  $\{p\}$ .
2. Variedades lineales de dimensión 1: **rectas**,  $\{p\} + [\vec{u}]$ .
3. Variedades lineales de dimensión 2: **planos**,  $\{p\} + [\vec{u}, \vec{v}]$ .
4. Variedades lineales de dimensión  $n - 1$ : **hiperplanos**.
5.  $A = p + E$ .

### Definición:

Sea  $\mathbb{A}$  un espacio afín. Sean  $V$  y  $W$  variedades lineales,  $V = p + F, W = q + G$ . Entonces, definimos las siguientes **posiciones relativas** de dos variedades lineales:

1.  $V$  y  $W$  son **paralelas**  $\iff F \subseteq G$  o  $G \subseteq F$ .
2.  $V \subseteq W$ :  $V$  está **incluída** en  $W$ .
3.  $V \cap W \neq \emptyset \implies V$  y  $W$  se **cortan**.
4.  $V$  y  $W$  se **cruzan**  $\iff V \not\parallel W \wedge V \cap W = \emptyset$ .

### Proposición:

Sean  $V = p + F, W = q + G$  variedades lineales. Entonces,

1.  $V \subseteq W \iff F \subseteq G \wedge p - q \in G$ . En particular,  $V = W \iff F = G \wedge p - q \in F$ .
2.  $V \subseteq W \implies \dim V \leq \dim W$ .
3.  $V \subseteq W \wedge \dim V = \dim W \implies V = W$ .

### Demostración:

1.  $\implies$ ) Si  $V \subseteq W, p + F \subseteq q + G$ . Veamos que  $p - q \in G$ :

$$p \in V \subseteq W = q + G \implies \exists \vec{v} \in G : p = q + \vec{v} \implies p - q = \vec{v} \in G.$$

Veamos ahora que  $F \subseteq G$ : sea  $\vec{u} \in F \implies (p + \vec{u}) \in V \subseteq W \implies \exists \vec{w} \in G : (p + \vec{u}) = (q + \vec{w}) \implies \vec{u} = (q - p) + \vec{w} = -(p - q) + \vec{w} \in G \implies \vec{u} \in G \implies F \subseteq G$ .

$$\Leftarrow) \text{ Sea } \bar{p} \in V = p + F \implies (\vec{u} \in F) \bar{p} = p + \vec{u} = q + (p - q) + \vec{u} \in q + G = W. \square$$

2.  $V \subseteq W \implies F \subseteq G \implies \dim F \leq \dim G \implies \dim V \leq \dim W. \square$
3.  $V \subseteq W \wedge \dim V = \dim W \implies F \subseteq G \wedge \dim F = \dim G \implies F = G$ . Como  $V \subseteq W \implies p - q \in F \implies V = W. \square$ .

**Proposición:**

Sean  $V = p + F, W = q + G$  variedades lineales. Entonces,  $V \cap W \neq \emptyset \iff p - q \in F + G$ .

**Demostración:**

$\Rightarrow$ ) Sea  $a \in V \cap W \implies \begin{cases} a \in V \implies V = a + F \implies a = p + \vec{u} (\in F) \\ a \in W \implies W = a + G \implies a = q + \vec{v} (\in G) \end{cases}$ . Entonces,  
 $p - q = a - \vec{u} - (a - \vec{v}) = \vec{v} - \vec{u} \in F + G. \square$

$\Leftarrow$ ) Si  $p - q = \vec{w}_1 (\in F) + \vec{w}_2 (\in G) \implies (V = p + F \ni) p - \vec{w}_1 = q + \vec{w}_2 (\in q + G = W) \implies \exists p \in A : p \in W \wedge p \in V \implies V \cap W \neq \emptyset. \square$

**1.4.1 Variedades lineales y combinaciones de puntos.****Proposición:**

Sea  $V = p + F$  una variedad lineal de  $\mathbb{A}$ . Sean  $p_1, \dots, p_m \in V$ . Entonces  $\forall \alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{K} : \sum \alpha_i = 1, \alpha_1 p_1 + \dots + \alpha_m p_m \in V$ .

**Demostración:**

$\forall i \ p_i \in V = p + F \implies \forall i \exists \vec{u}_i \in F : p_i = p + \vec{u}_i$ . Entonces,  $\alpha_1 p_1 + \dots + \alpha_m p_m = p + \sum \alpha_i (p_i - p) = p + \sum \alpha_i \vec{u}_i (\in F) \in V. \square$

**Definición:**

Sea  $\mathbb{A}$  un espacio afín. Sea  $S \subseteq A$  un subconjunto de puntos no vacío. Entonces, la **variedad lineal más pequeña que contiene a  $S$**  se denota  $\langle S \rangle$ .

**Proposición:**

Sea  $S = \{p_1, \dots, p_m\}$ . Entonces,

$$\langle S \rangle = \{\text{combinaciones lineales de } S\} = p_1 + [p_2 - p_1, \dots, p_m - p_1]$$

**Demostración:**

$W = \{\text{c.l. de } \{p_1, \dots, p_m\}\} = \{\sum \alpha_i p_i | \sum \alpha_i = 1\} = \{p_1 + \alpha_2(p_2 - p_1) + \dots + \alpha_m(p_m - p_1) | \sum \alpha_i = 1\} = p_1 + [p_2 - p_1, p_3 - p_1, \dots, p_m - p_1]$ . Por tanto,  $W$  es una variedad lineal. Por construcción,  $S = \{p_1, \dots, p_m\} \subseteq W$ . Sea  $V$  una variedad lineal tal que  $S \subseteq V$ . Por la proposición anterior,  $W = \{\text{c.l. de } S\} \subseteq V \implies W \subseteq V \implies W = \langle S \rangle. \square$

**Definición:**

$\{p_1, \dots, p_m\}, m \geq 2$  son **linealmente independientes**  $\iff \{p_2 - p_1, \dots, p_m - p_1\}$  son vectores l.i. Si  $m < 2$ , el conjunto siempre es l.i.

**Observación:**  $\{p_1, \dots, p_m\}$  l.i.  $\iff$  (Fijado  $i_0$ )  $\{p_1 - p_{i_0}, \dots, p_{i_0-1} - p_{i_0}, p_{i_0+1} - p_{i_0}, \dots, p_m - p_{i_0}\}$  es un conjunto de vectores l.i.

**Corolario:**

Si  $p_1, \dots, p_m$  son l.i.,  $\dim \langle p_1, \dots, p_m \rangle = m - 1$ .

**Ejemplos:**

$\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$ :

1.  $\langle p_1 \rangle = \{p_1\}$ , variedad lineal de dimensión 0.
2. 2 puntos  $p_1, p_2$  son l.i.  $\iff p_1 \neq p_2$ .  $\langle p_1, p_2 \rangle$ , variedad lineal de dimensión 1.
3. 3 puntos  $p_1, p_2, p_3$  l.i.  $\implies \langle p_1, p_2, p_3 \rangle$  plano, variedad lineal de dimensión 2.

### 1.4.2 Ecuaciones de variedades lineales.

Sea  $\mathbb{A}$  un espacio afín de  $\dim \mathbb{A} = n$ . Sea  $\mathcal{R} = \{p; B = \{u_1, \dots, u_n\}\}$  un sistema de referencia en  $\mathbb{A}$ . Sea  $V = q + F = q + [v_1, \dots, v_r]$ ,  $\dim V = r$ ,  $\{v_1, \dots, v_r\}$  base de  $F$ .

**(A) Ecuaciones paramétricas de  $V$ .**  $\bar{q} \in V \iff \bar{q} = q + \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_r v_r, \alpha_i \in \mathbb{K} \iff$

$$\bar{q}_{\mathcal{R}} = q_{\mathcal{R}} + \alpha_1 (v_1)_B + \dots + \alpha_r (v_r)_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad (\text{ecuaciones paramétricas de } V) \quad (3)$$

Ejemplos:

$$\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^3: V = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right]. \mathcal{R} = \mathcal{R}_{\text{ord}}. \text{ Entonces, } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Haciendo el proceso anterior,

$$\bar{q}_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in V \iff \exists \alpha_1, \alpha_2 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \iff$$

$$\begin{pmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 - 2 \\ x_3 - 3 \end{pmatrix} \text{ es c.l. de } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \text{rg} \begin{pmatrix} x_1 - 1 & 1 & 1 \\ x_2 - 2 & 1 & 2 \\ x_3 - 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 2 \iff$$

$$\begin{vmatrix} x_1 - 1 & 1 & 1 \\ x_2 - 2 & 1 & 2 \\ x_3 - 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \iff Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 + D = 0.$$

**(B) Ecuaciones cartesianas/implícitas de  $V$ .**  $V = q + [v_1, \dots, v_r]. \bar{q} \in A, \bar{q} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in$

$$V \iff \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = q_{\mathcal{R}} + \alpha_1 (v_1)_B + \dots + \alpha_r (v_r)_B \text{ para algunas } \alpha_i \in \mathbb{K} \iff \begin{pmatrix} x_1 - a_1 \\ \vdots \\ x_n - a_n \end{pmatrix} \in$$

$$[(v_1)_B, \dots, (v_r)_B] \iff \text{rg} \begin{pmatrix} x_1 - a_1 & | & | & | \\ \vdots & (v_1)_B & \cdots & (v_r)_B \\ x_n - a_n & | & | & | \end{pmatrix} = r \iff \text{Sus menores de orden } r+1 \text{ son cero :}$$

$$\begin{cases} \dots\dots\dots = 0 \\ \dots\dots\dots = 0 \\ \vdots \\ \dots\dots\dots = 0 \end{cases} \quad \text{sistema lineal.}$$

**Observación: Método de "orlar" un menor.**  $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}), \Delta_r = \det \begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \end{pmatrix} \neq 0.$   $\text{rg } A = r \iff$  todos los menores que contienen a  $\Delta_r$  de orden  $r + 1$  son cero.  $V = p + F = p + [v_1, \dots, v_r], r = \dim F = \dim V. q \in V \iff q_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}; p_{\mathcal{R}} =$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \cdot \text{rg} \begin{pmatrix} x_1 - a_1 & | & & | & \\ \vdots & (v_1)_B & \cdots & (v_r)_B & \\ x_n - a_n & | & & | & \end{pmatrix} = r.$$

$\implies$  Los menores  $(r + 1) \times (r + 1)$  que contienen a uno de orden  $r$  no nulo fijado deben ser cero  $\implies$  En total,  $n - r$  ecuaciones.

**Proposición:**

Sea  $\mathbb{A}$  un espacio afín de dimensión  $n$ . Sea  $\mathcal{R}$  un sistema de referencia. Sea  $V \subseteq A$ . Entonces,  $V$  es una variedad lineal de dimensión  $r \iff$  Los puntos  $q \in V$  (sus coord-

nadas  $q_{\mathcal{R}}$ ) verifican un sistema de ecuaciones lineales compatible,  $A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_r \end{pmatrix}$ , con

$\text{rg } A = n - r.$

**Demostración:**

$$\Leftrightarrow) A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix} \text{ s.l. compatible, } k = \text{rg } A \implies \text{ sus soluciones se escriben } \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \text{Nuc } A = p + F \text{ variedad lineal. } \dim(p + F) = \dim F = \dim \text{Nuc } A = n - \text{rg } A = n - k.$$

$\Rightarrow) \underline{\text{Visto.}} V = p + F, \dim F = r \implies \{\text{SEL compatible}\} \rightarrow n - r \text{ ecuaciones. } \square$

**Definición:**

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \rightarrow \text{ecuaciones implícitas (o cartesianas) de } V.$$

Ejemplos:

**Observación:**

- 1.
- 2.
- 3.

4.

5.

#### 1.4.3 Suma, intersección y fórmula de Grassmann.

## 2 Afinidades.

### 2.1 Definición y propiedades.

#### Definición:

Sean  $\mathbb{A}, \mathbb{A}'$  espacios afines con espacios vectoriales asociados  $E, E'$  (sobre el mismo cuerpo  $\mathbb{K}$ ). Sea  $f : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}'$  una función. Entonces,  $f$  es una **afinidad**  $\iff \exists p \in \mathbb{A} : \tilde{f}_p(\vec{u}) := f(p + \vec{u}) - f(p)$  ( $\vec{u} \in E$ ) es una aplicación lineal de  $E$  en  $E'$ .

#### Observación:

1.  $A \xrightarrow{f} A'$ . Entonces,  $E \xrightarrow{\delta_p^{-1}} A \xrightarrow{f} A' \xrightarrow{\delta'_{f(p)}} E'$ , y en total,  $E \xrightarrow{\tilde{f}_p} E'$ .
2. Si  $\tilde{f}_p$  es lineal  $\implies \forall q \in \mathbb{A} \tilde{f}_q = \tilde{f}_p$ . Veámoslo: sea  $\vec{u} \in E$ ,  
 $\tilde{f}_q(u) = f(q+u) - f(q) = f(p+(q-p+u)) - f(p+(q-p)) = (f(p+(q-p+u)) - f(p)) - (f(p+(q-p)) - f(p)) = \tilde{f}_p((q-p)+u) - \tilde{f}_p(q-p) = \tilde{f}_p(u) + \tilde{f}_p(q-p) - \tilde{f}_p(q-p) = \tilde{f}_p(u).$   $\square$
3. Entonces,  
 $f(p+u) - f(p) = \tilde{f}(u) \text{ (def)} \iff f(p+u) = f(p) + \tilde{f}(u) \iff f(q) = f(p) + \tilde{f}(q-p).$

#### Proposición:

1.  $f, g$  afinidades  $\implies g \circ f$  es una afinidad y  $g \circ \tilde{f} = \tilde{g} \circ f$ .
2. Sea  $f : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}'$  una afinidad. Entonces,
  - $f$  inyectiva  $\iff \tilde{f}$  inyectiva (y entonces  $\dim \mathbb{A} \leq \dim \mathbb{A}'$ ).
  - $f$  exhaustiva  $\iff \tilde{f}$  exhaustiva (y entonces  $\dim \mathbb{A} \geq \dim \mathbb{A}'$ ).
  - $f$  biyectiva  $\iff \tilde{f}$  biyectiva (y entonces  $\dim \mathbb{A} = \dim \mathbb{A}'$ ).
3. Si  $\dim \mathbb{A} = \dim \mathbb{A}' < \infty \implies (f \text{ inyectiva} \iff f \text{ exhaustiva} \iff f \text{ biyectiva}).$
4. Si  $f$  biyectiva  $\implies f^{-1}$  es una afinidad y  $\tilde{f}^{-1} = \tilde{f}^{-1}$ .

#### Demostración:

- 1.
- 2.
- 3.
- 4.

#### Proposición:

1. Sean  $f, g : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}'$  afinidades. Entonces,

$$f = g \iff \exists p \in \mathbb{A} : f(p) = g(p) \text{ y } \tilde{f} = \tilde{g}.$$

2. Sean  $p \in \mathbb{A}, q \in \mathbb{A}$  y  $\varphi : E \rightarrow E'$  una aplicación lineal. Entonces, existe una única afinidad tal que  $f(p) = q, \tilde{f} = \varphi$ .
3. Sea  $\mathbb{A}$  tal que  $\dim \mathbb{A} = n$ . Si  $p_0, p_1, \dots, p_n$  son puntos independientes de  $\mathbb{A}$ , entonces dados  $q_0, q_1, \dots, q_n$  puntos cualesquiera de  $\mathbb{A}'$  existe una única afinidad  $f : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}'$  tal que  $f(p_i) = q_i$ .

**Demostración:**

**Definición:**

Sean  $\mathbb{A}, \mathbb{A}'$  espacios afines. Entonces,

$$\mathbb{A} \cong \mathbb{A}' \iff \exists f : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}' \text{ afinidad biyectiva.}$$

**Corolario:**

Sean  $\mathbb{A}, \mathbb{A}'$  espacios afines de dimensión finita. Entonces,

$$\mathbb{A} \cong \mathbb{A}' \iff \dim \mathbb{A} = \dim \mathbb{A}'.$$

En particular, si  $n = \dim \mathbb{A}$ ,  $\mathbb{A} \cong \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n$ .