

FACULTAT DE MATEMÀTIQUES I ESTADÍSTICA

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA - BARCELONATECH

Càlcul Diferencial (Q2)

Àlex Batlle Casellas

February 21, 2019

Índex

1	Topologia d'\mathbb{R}^n.	2
1.1	Nocions de topologia.	3
1.1.1	Espais mètrics i normats.	3
1.1.2	Boles i entorns.	4

1 Topologia d' \mathbb{R}^n .

Preliminars.

Estructura afí de \mathbb{R}^n . $\mathbb{A} = (A, E, \phi)$ és un espai afí, amb

$$\begin{aligned}\phi: A \times A &\rightarrow E \\ q &\mapsto \phi(p, q)\end{aligned}$$

com a funció d'assignació de vectors entre dos punts. Es té que, per $p \in A$ fixat,

$$\begin{aligned}\phi_p: A &\rightarrow E \\ q &\mapsto \phi(p, q)\end{aligned}$$

és bijectiva. En aquest curs, prendrem $A = \mathbb{R}^n$.

1.1 Nocions de topologia.

1.1.1 Espais mètrics i normats.

Definició:

Sigui M un conjunt. Una **distància en M** és una aplicació

$$\begin{aligned}d: M \times M &\rightarrow \mathbb{R} \\(x, y) &\mapsto d(x, y).\end{aligned}$$

tal que compleix, $\forall x, y, z \in M$:

1. Definida positiva: $d(x, y) \geq 0$.
2. No degeneració: $d(x, y) = 0 \iff x = y$.
3. Simetria: $d(x, y) = d(y, x)$.
4. Desigualtat triangular: $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$.

Un **espai mètric** és un parell (M, d) .

Definició:

Sigui E un \mathbb{R} -e.v. de dimensió arbitrària. Una **norma en E** és una aplicació

$$\begin{aligned}\|\cdot\|: E &\rightarrow \mathbb{R} \\v &\mapsto \|v\|\end{aligned}$$

tal que compleix, $\forall u, v \in E$:

1. Definida positiva: $\|u\| \geq 0$.
2. No degeneració: $\|u\| = 0 \iff u = \vec{0}$.
3. Multiplicació per escalar: $\|\lambda u\| = |\lambda| \|u\| \forall \lambda \in \mathbb{R}$.
4. Desigualtat triangular: $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

Un **espai normat** és un parell $(E, \|\cdot\|)$.

Proposició:

Si $(E, \|\cdot\|)$ és un espai normat, aleshores (E, d) és un espai mètric, amb d la distància associada a la norma $\|\cdot\|$, $d(u, v) := \|u - v\|$.

Demostració:

Les propietats (1), (2), i (4) d'espai mètric són immediates (s'hereten de les propietats de la norma). Comprovem la propietat (3) d'espai mètric: siguin $u, v \in E$, aleshores

$$d(u, v) := \|u - v\| = \|-(v - u)\| = |-1| \|v - u\| = \|v - u\| = d(v, u). \square$$

Definició:

Sigui E un \mathbb{R} -e.v. Un **producte escalar euclidià en E** és una aplicació

$$\begin{aligned}\langle \cdot, \cdot \rangle: E \times E &\rightarrow \mathbb{R} \\(u, v) &\mapsto \langle u, v \rangle\end{aligned}$$

tal que compleix, $\forall u, v, w \in E, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

1. Linealitat: $\langle \alpha u + \beta v, w \rangle = \alpha \langle u, w \rangle + \beta \langle v, w \rangle$.
2. Simetria: $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$.
3. Definida positiva: $\langle v, v \rangle \geq 0$.
4. No degeneració: $\langle v, v \rangle = 0 \iff v = \vec{0}$.

Un **espai euclidià** és un parell $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

Proposició:

Si $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ és un espai euclidià, aleshores $(E, ||\cdot||)$ és un espai normat, amb $||\cdot||$ la norma induïda per el producte escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$, $||u|| := +\sqrt{\langle u, u \rangle}$.

Demostració:

Proposició:

El producte escalar i la seva norma associada tenen les següents propietats, $\forall u, v \in E$:

1. $|\langle \cdot, \cdot \rangle| \leq ||u|| ||v||$. (Desigualtat de Cauchy-Schwarz)
2. $||u - v|| \geq ||u|| - ||v||$.
3. $||u + v||^2 + ||u - v||^2 = 2||u||^2 + 2||v||^2$. (Identitat del paral·lelogram)
4. $||u + v||^2 - ||u - v||^2 = 4 \langle u, v \rangle$. (Identitat de polarització)
5. Si $u = (u_i)$, aleshores $|u_i| \leq ||u|| \leq \sum_{i=1}^n |u_i|$.

Demostració:

Proposició:

A \mathbb{R}^n es defineix:

1. $\langle u, v \rangle_2 := \sum_{i=1}^n u_i v_i$, on $u = (u_i), v = (v_i)$.
2. $||u||_2 := \sqrt{\langle u, u \rangle_2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n u_i^2}$.
3. $d(u, v)_2 := ||u - v||_2 = \sqrt{\langle u - v, u - v \rangle_2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (u_i - v_i)^2}$.

Demostració:

1.1.2 Boles i entorns.

(M, d) espai mètric.

Definició:

$p \in M, r \in \mathbb{R}^+$.

1. **Esfera** amb centre a p i radi r :

$$S_r(p) \equiv S(p, r) = \{q \in M \mid d(p, q) = r\}.$$

2. **Bola oberta** amb centre a p i radi r :

$$B_r(p) \equiv B(p, r) = \{q \in M \mid d(p, q) < r\}.$$

3. **Bola tancada** amb centre a p i radi r :

$$\bar{B}_r(p) \equiv \bar{B}(p, r) = \{q \in M \mid d(p, q) \leq r\}.$$

4. **Bola perforada** amb centre a p i radi r (pot ser oberta o tancada):

$$B_r^*(p) \equiv B^*(p, r) = \{q \in M \mid d(p, q) \leq r\} - \{p\}.$$

Definició:

$A \subseteq M$. A és un **conjunt fitat** si $\exists B_r(p), p \in A : A \subseteq B_r(p)$.

Definició:

$p \in M$. Un **entorn de p** és un conjunt $E(p) \subseteq M$ fitat tal que $\exists B_r(p) \subseteq E(p)$.