CAPÍTULO 1 : FUNCIONES HOLOMORFAS

FUNCIONES HOLOMORFAS

Los números complejos

$\mathbb{C} = \{ z = a+bi \mid a, b \in \mathbb{R} \}$ $\qquad i = \sqrt{-1},\ i^2 = -1$ unidad imaginaria

$a = \mathrm{Re}(z),\ b = \mathrm{Im}(z)$ $\qquad \bar{z} = a - ib$ conjugado de z

Suma: $z_1 + z_2 = (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$

Producto: $z_1 \cdot z_2 = (a_1 + ib_1)\cdot(a_2 + ib_2) = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)$

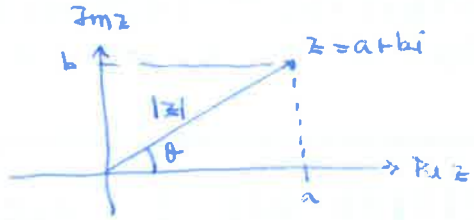
Luego $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ tiene estructura de cuerpo conmutativo.

Inverso: $z^{-1} = (a+bi)^{-1} = \dfrac{1}{a+bi} = \dfrac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)} = \dfrac{a-bi}{a^2+b^2} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$

Módulo: $z = a+bi \Rightarrow |z| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{z\cdot\bar{z}}$

El plano complejo $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$

$z = a+bi \longrightarrow (a,b)$



- Si $z \neq 0$ se define $\arg(z) = \theta$, definido mod 2π

- Notación polar: $z = a+bi = r_\theta = r\cos\theta + ir\sin\theta$

$r = |z|,\ \theta = \arg(z)$

$z_1 \cdot z_2 = (r_1 r_2)_{\theta_1+\theta_2}$ $\qquad z^{-1} = \left(\frac{1}{r}\right)_{-\theta}$

- Notación exponencial (Euler)

$z = a+bi = re^{i\theta}$, $z^{-1} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}$

- Raíces n-ésimas: $z = re^{i\theta}$

$w^n = z \iff w_k = \sqrt[n]{r}\, e^{i\frac{\theta+2\pi k}{n}}$ $\qquad k = 0, 1, \dots, n-1$

$\{w_k\}_{k=0,\dots,n-1}$ vértices de un polígono regular de n lados.

- Topología en $\mathbb{C}$:

distancia: $d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$

$(\mathbb{C}, d)$ es un espacio métrico completo (toda sucesión de Cauchy $\subset \mathbb{C}$ es convergente en $\mathbb{C}$)

si $(z_n)_n = (a_n + ib_n)_n$ entonces $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z = a+bi \iff \begin{cases} \lim a_n = a \\ \lim b_n = b \end{cases}$

$\{z_n\}_n$ de Cauchy si $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N = N(\varepsilon)$ t.q. $\forall p, q \geq N$ se tiene $|z_p - z_q| < \varepsilon$.

Nota: P.ej. $\mathbb{Q}$ no es completo ($\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$) $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ es de Cauchy pero no conv. en

si la identificamos con el módulo de $\mathbb{R}^2$ (distancia Euclid

es la misma que la de $(\mathbb{R}^2, d)$

luego que la topología del espacio métrico $(\mathbb{C}, d)$

$\left(\begin{array}{l} f+g,\ f\cdot g,\ \lambda f \text{ funciones} \\ \text{continuas en } \mathbb{C} \end{array} \right)$ Ej espacios completos $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}$ ..

- Disco abierto : $B(z_0,r)=\{z\in\mathbb{C} \mid |z-z_0|<r\}$

Disco cerrado : $\overline{B(z_0,r)}=\{z\in\mathbb{C} \mid |z-z_0|\leq r\}$

$\partial B(z_0,r)=C(z_0,r)=\{z\in\mathbb{C} \mid |z-z_0|=r\}$

Dominio $\Omega\subset\mathbb{C} \Leftrightarrow \Omega$ abierto y conexo. — que no puede ser escrito como $\Omega=U_1\cup U_2$, U_1,U_2 tq $U_1\cap U_2=\emptyset$, abiertos por la topología definida en $(\mathbb{C},d)$.

Región $\Omega\subset\mathbb{C} \Leftrightarrow \mathring{\Omega}$ es un dominio,

y $\Omega=\mathring{\Omega}\sqcup$ algunos puntos frontera. "

2.- Funciones complejas de variable compleja

por abuso de lenguaje, usualmente omitiremos la $\bar{z}$ y escribiremos $f(z)$.

$f:\Omega\subset\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}$ $\qquad \mathbb{C}\simeq\mathbb{R}^2$, $z=x+iy\simeq(x,y)$

$z\longmapsto f(z)$

$f(z)=f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)=f(z,\bar{z})$ $\qquad$ pues $x=\dfrac{z+\bar{z}}{2}$

$u(x,y)=\operatorname{Re}f(z)$, $\quad v(x,y)=\operatorname{Im}f(z)$ $\qquad y=\dfrac{z-\bar{z}}{2i}$

Podemos escribir:

$\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{\partial u}{\partial x}+i\dfrac{\partial v}{\partial x}$ o bien, equivalentemente, $f_x=u_x+iv_x$

$f_y=u_y+iv_y.$

A partir de estas expresiones podemos definir los siguientes operadores:

$$\frac{\partial f}{\partial z}:=f_z=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial z}=(u_x+iv_x)\frac{1}{2}+(u_y+iv_y)\left(\frac{1}{2i}\right)$$

$$=\frac{u_x+iv_x}{2}+\frac{-iu_y+v_y}{2}=\frac{u_x+v_y}{2}+i\,\frac{v_x-u_y}{2}$$

De hecho, simplemente, en principio:

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial z}=f_z=\frac{1}{2}f_x+\frac{1}{2i}f_y=\frac{1}{2}(f_x-if_y)}$$

Análogamente:

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=f_{\bar{z}}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \bar{z}}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \bar{z}}}=\frac{1}{2}f_x-\frac{1}{2i}f_y=\boxed{\frac{1}{2}(f_x+if_y)},$$

Ejemplos: 1) $\boxed{f(z)=z^2}$

$$f(x+iy)=(x+iy)^2=x^2+i^2y^2+2xyi=\underbrace{(x^2-y^2)}_{u(x,y)}+i\,\underbrace{2xy}_{v(x,y)}$$

$$\boxed{f_z}=\frac{1}{2}(f_x-if_y)=\text{[redacted]}=2z$$

$$f_x=u_x+iv_x=2x+i2y$$

$$f_y=u_y+iv_y=-2y+i(2x)$$

$$f_x-if_y=(2x+i2y)-i(2y+i2x)=2x+\cancel{i2y}+\cancel{2yi}+2x$$

$$=4x+i4y$$

$$\boxed{f_{\bar z}=\frac{1}{2}(f_x+if_y)=\frac{1}{2}\cdot 0=0}$$

$$f_x+if_y=(2x+i2y)+i(-2y+2ix)=\cancel{2x}+\cancel{i2y}-\cancel{i2y}-\cancel{2x}=0$$

2) $\boxed{f(z)=\bar z}$

$$f(z)=f(x+iy)=\underbrace{x}_{u(x,y)=x}-i\overbrace{y}^{v(x,y)=-y}=\frac{z+\bar z}{2}-\cancel{i}\,\frac{z-\bar z}{2\cancel{i}}=\frac{z+\bar z}{2}-\frac{z-\bar z}{2}=\bar z\quad\text{(Lógico)}$$

$$\boxed{f_z=\frac{1}{2}(f_x-if_y)=\frac{1}{2}\big(1-i(-i)\big)=\frac{1}{2}(1+i^2)=0}$$

$$f_x=u_x+iv_x=1+i\cdot 0=1$$

$$f_y=u_y+iv_y=0+i(-1)=-i$$

$$\boxed{f_{\bar z}=\frac{1}{2}(f_x+if_y)=\frac{1}{2}\big(1+i(-i)\big)=\frac{1}{2}(1+1)=1}$$

3) $\boxed{f(z)=|z|=\sqrt{z\cdot\bar z}}$

$$f(z)=f(x+iy)=\sqrt{x^2+y^2}\Rightarrow u(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$$
$$v(x,y)=0$$

$$\boxed{f_z=\frac{1}{2}(f_x-if_y)=\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}-i\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\frac{x-iy}{2}=\frac{\bar z}{2|z|}}$$

$$f_x=u_x+iv_x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\quad\cdot\quad f_y=u_y+iv_y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\boxed{f_{\bar z} = \frac{1}{2}(f_x + i f_y) = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + i\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \frac{z}{2|z|}}$$

"Directamente:

$$f_z = \frac{1}{2\sqrt{z\cdot\bar z}}\cdot \bar z$$

$$f_{\bar z} = \frac{1}{2\sqrt{z\cdot\bar z}}\cdot z$$

4) $$\boxed{f(z) = xy} = \frac{z+\bar z}{2}\cdot\frac{z-\bar z}{2i} = \boxed{\frac{z^2-\bar z^2}{4i}}$$

$$\boxed{f_z = \frac{1}{2}(f_x - i f_y) = \frac{1}{2}(y - ix) = -\frac{i}{2}(x + iy) = -\frac{i}{2}z}$$

$f_x = u_x + i v_x = y$. $f_y = u_y + i v_y = x$.

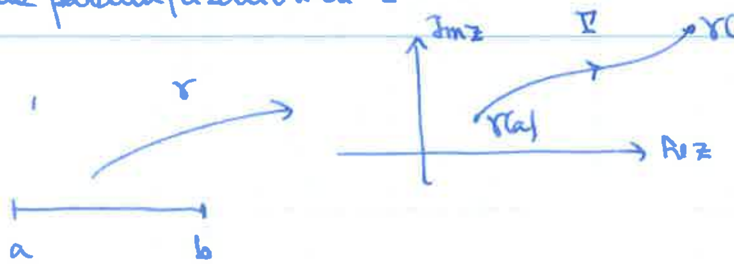
$u(x,y) = xy$, $v(x,y) = 0$

$$\boxed{f_{\bar z} = \frac{1}{2}(f_x + i f_y) = \frac{1}{2}(y + ix) = \frac{i}{2}(x - iy) = \frac{i}{2}\bar z}$$

Directamente, $f_z = \frac{1}{4i}\cdot 2z = \frac{z}{2i} = -\frac{iz}{2}$. $f_{\bar z} = \frac{-2\bar z}{4i} = -\frac{1}{2i}\bar z = \frac{i\bar z}{2}$

Ejemplo: Sea Γ una curva regular en $\mathbb{C}$ $(\simeq \mathbb{R}^2)$ y sup. que $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$, $t \longmapsto \gamma(t) = \alpha(t) + i\beta(t)$

es una parametrización de Γ



Mejor escribir $z = z(t) = \alpha(t) + i\beta(t)$

Así: $\frac{d}{dt}\left(f(z(t))\right) = \frac{\partial f}{\partial z}(z(t))\frac{\partial z(t)}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \bar z}(z(t))\frac{\partial \bar z(t)}{\partial t}$

$\frac{\partial z(t)}{\partial t} = z'(t) = \alpha'(t) + i\beta'(t)$

$\frac{\partial \bar z(t)}{\partial t} = \bar z'(t) = \overline{\alpha'(t) - i\beta'(t)}$

Vector tangente en el valor t es $\gamma'(t) = \alpha'(t) + i\beta'(t)$

Consideremos ahora $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \longmapsto f(z, \bar z)$. Entonces

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(f(\gamma(t))\right) = \frac{\partial f}{\partial z}(\gamma(t))\cdot\gamma'(t) + \frac{\partial f}{\partial \bar z}(\gamma(t))\,\overline{\gamma'(t)}}$$

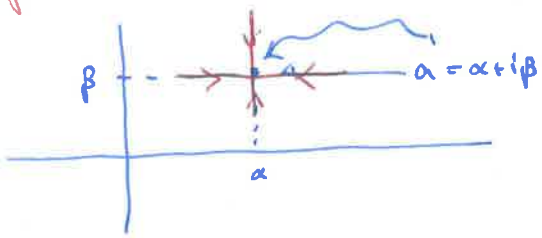
$$\frac{d}{dt}\left(f(\gamma(t))\right) = \frac{\partial f}{\partial z}(\gamma(t))\cdot\underbrace{\frac{\partial z}{\partial t}(\gamma(t))}_{\substack{\| \\ \alpha'(t)+i\beta'(t) \\ \| \\ \gamma'(t)}} + \frac{\partial f}{\partial \bar z}(\gamma(t))\cdot\underbrace{\frac{\partial \bar z}{\partial t}(\gamma(t))}_{\substack{\| \\ x'(t)-iy'(t)\big|_{(x+iy)=\gamma(t)} \\ \| \\ \alpha'(t)-i\beta'(t) = \overline{\gamma'(t)}}}$$

$z(t) = x(t) + iy(t)$ $\quad \frac{\partial z}{\partial t} = x'(t) + iy'(t)$

Dado $a=\alpha+i\beta$ podemos calcular las derivadas parciales de f en $\mathbb{C}$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = f_x(a) = \lim_{\substack{x\to\alpha\\ x\in\mathbb{R}}} \frac{f(x+i\beta)-f(\alpha+i\beta)}{x-\alpha} = \lim_{\substack{\tilde{x}\to 0\\ \tilde{x}\in\mathbb{R}}}\frac{f(a+\tilde{x})-f(a)}{\tilde{x}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a) = f_y(a) = \lim_{\substack{y\to\beta\\ y\in\mathbb{R}}} \frac{f(\alpha+iy)-f(\alpha+i\beta)}{y-\beta} = \lim_{\substack{\tilde{y}\to 0\\ \tilde{y}\in\mathbb{R}}}\frac{f(a+i\tilde{y})-f(a)}{\tilde{y}}$$



3.- Funciones holomorfas y ecuaciones de Cauchy-Riemann

Dada $f:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}$ siempre podemos pensarla como una función $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2$ y estudiar como tal su diferenciabilidad y sus derivadas parciales. El inconveniente es que este estudio se hace sobre un abierto $\Omega\subset\mathbb{C}$, sin aprovechar la estructura de cuerpo de $\mathbb{C}$. Así, en lo que sigue $\Omega\subset\mathbb{C}$ es un abierto y supondremos $f:\Omega\subset\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}$.

<u>Def</u>: $f:\Omega\longrightarrow\mathbb{C}$ es <u>$\mathbb{C}$-diferenciable en $a\in\Omega$</u> si

$$\exists\, f'(a) = \lim_{z\to a}\frac{f(z)-f(a)}{z-a} = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

(claramente, $z\in\mathbb{C}$ y $h\in\mathbb{C}$ en ambos límites)

<u>Ejemplos</u>: 1) $f(z)=c\in\mathbb{C}$ constante

$$f'(a)=\lim_{z\to a}\frac{f(z)-f(a)}{z-a}=\lim_{z\to a}\frac{c-c}{z-a}=\lim_{z\to a} 0 = 0.$$

2) $f(z)=z^2$

$$f'(a)=\lim_{z\to a}\frac{f(z)-f(a)}{z-a}=\lim_{z\to a}\frac{z^2-a^2}{z-a}=\lim_{z\to a}(z+a) = 2a$$

$\lim_{h\to 0}\frac{\overline{h}}{h}$

$\|$

3) $f(z)=\overline{z}$

$$f'(a)=\lim_{z\to a}\frac{f(z)-f(a)}{z-a}=\lim_{z\to a}\frac{\overline{z}-\overline{a}}{z-a}=\lim_{h\to 0}\frac{\overline{(a+h)}-\overline{a}}{h}$$