Equacions en derivades parcials

FME-UPC

2020-21

Introducció

Classe 1. 8/2/21

Temari:

1. Equacions de primer ordre
2. L'equació d'ones en dim $n=1$
3. L'equació de difusió o de la calor en dim $n=1$
4. El Laplacià i funcions harmòniques
5. L'eq. de difusió a $\mathbb{R}^n$
6. L'eq. de Poisson. Funcions de Green.

Bibliogràfica, de més simple a més avançada:

1. Yehuda Pinchover and Rubinstein
2. Michael Shearer & Rachel Levy
3. Walter Strauss (+llibre de pbs)
4. Sandro Salsa (+llibre de pbs Salsa & Verzini)

Introducció

EDP. $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ var. independent

$u = u(x) = u(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}$

$\hookrightarrow$ var. dependent o funció incògnita

$$\left.\begin{array}{l} x \rightsquigarrow (x,t) = (x_1, \dots, x_n, t) \\ \quad \hookrightarrow t = \text{temps} \in \mathbb{R} \end{array}\right\} u = u(x,t)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \partial_{x_1} u = u_{x_1} = u_1$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} = \partial_{x_1 x_2} u = u_{x_1 x_2} = u_{12}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = \partial_{x_1 x_1} u = \partial_{x_1}^2 u = u_{x_1 x_1} = u_{11}$$

EDP és $\underline{F(x, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}, u_{x_1 x_1}, u_{x_1 x_2}, \dots)} = 0$

nombre finit de derivades parcials

$\boxed{t = x_{n+1}}$

$$\underline{F(x_1, \dots, x_n, t, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}, u_t, u_{x_1 x_1}, \dots) = 0}$$

$u_{x_1 t}$

- L'ordre d'una EDP és l'ordre més gran de les derivades parcials que apareixen.
- Una EDP es diu que és <u>lineal</u> si la funció F és afí en les variables (conjuntament) u i les corresponents a der. parcials de la u, però no cal que sigui lineal respecte les variables independents x (i el t).

Exemples:

a) Una EDP lineal de segon ordre:

$$\underline{t^2 u_{x_1} + u_{x_2 t} - 3 = 0}$$

← F no és lineal com funció de t.

No lineal: $t^2 (u_{x_1})^2 + u_{x_2 t} - 3 = 0$

→ és <u>lineal</u> en les segones derivades de u (que <u>són les derivades parcials d'ordre més gran</u>) però no és lineal en derivades d'ordre inferior.

→ <u>EDP quasi-lineal</u>

b) $tu_{x_1} - (u_{x_2 t})^2 - 3 = 0$

EDP no lineal de segon ordre.

La EDP més general de primer ordre és

$$F(x, u, \nabla u) = 0$$

$$F(x_1, \dots, x_n, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}) = 0$$

Exemple: $tu_{x_1} - (u_{x_2})^2 - 3 = 0$

Les podrem resoldre, siguin lineals o no lineals, explícitament mòdul trobar primitives / resoldre sistema d'EDOs

---

EDPs de segon ordre més rellevants i que tractarem en aquest curs:

- L'equació de Laplace, $u = u(x)$

$$\Delta u = 0$$

$$\Delta u = u_{x_1 x_1} + \dots + u_{x_n x_n} \quad \text{: el Laplacià}$$

$$= \operatorname{div} \nabla u$$

$$= \operatorname{traça} D^2 u$$

4

$$D^2u = \text{la Hessiana de } u = \begin{pmatrix} u_{x_1x_1} & \cdots & u_{x_nx_1} \\ \vdots & & \vdots \\ u_{x_1x_n} & \cdots & u_{x_nx_n} \end{pmatrix}$$

Classe 2. 9/2/21

- EDP lineal:

$\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}$ és afí sii $\exists b \in \mathbb{R}$ tq $\varphi - b$ és una apl. lineal

E espai vectorial

Si $E = \mathbb{R}^m \Rightarrow \exists a \in \mathbb{R}^m$ tq. $\varphi(x) - b = a \cdot x$

$$\varphi(x) = a \cdot x + b$$

$$F(x, \underbrace{u, u_{x_1}, \dots}_{\text{hi ha } m \text{ der. parcials que apareixen}}) = 0$$

$F(x,p) = 0$ on $p = (p_1, \dots, p_m)$ (fixat)

L'EDP és lineal sii $\forall x \in \mathbb{R}^n$ la funció

$$\{ \underset{\substack{\| \\ E}}{p \in \mathbb{R}^m} \longmapsto F(x,p) \in \mathbb{R} \} = F(x, \cdot)$$

és una funció afí.

Exemple: $u_{x_1x_1}\, u_{x_2x_2} - f(x) = 0$

$n=2$, $(x_1,x_2)=(x,y)$: $u_{xx}\, u_{yy} - f(x) = 0$

$p = (u_{x_1x_1}, u_{x_2x_2}) = (p_1, p_2)$

EDP: $F(x,p) = p_1 \cdot p_2 - f(x)$ $(m=2)$

Fixat x i p_2, és afí en p_1

Però F no és afí en les variables (p_1, p_2) conjuntament.

L'EDP no és lineal.

EDPs de 1er ordre.

Forma general: $F(x, u, \nabla u) = 0$

i.e., $F(x_1, \dots, x_n, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}) = 0$

F és una funció $\mathbb{R}^{2n+1} \longrightarrow \mathbb{R}$.

$\rightarrow$ Forma general d'una EDP lineal de 1er ordre. Fixat $x \in \mathbb{R}^n$, $p = (p_0, p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$

$F(x,\cdot) - b(x)$ és una funció lineal de $p \in \mathbb{R}^{n+1} \iff \exists\, (a_0(x), \dots, a_n(x))$ tq. 7

$$F(x,p) - b(x) = a_0(x)\, p_0 + \dots + a_n(x)\, p_n$$

$$F(x, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}) =$$
$$= a_0(x)\, u + a_1(x)\, u_{x_1} + \dots + a_n(x)\, u_{x_n} + b(x).$$

- L'eq de Laplace $\Delta u = 0$

$$\Delta u = \text{traça } D^2 u$$

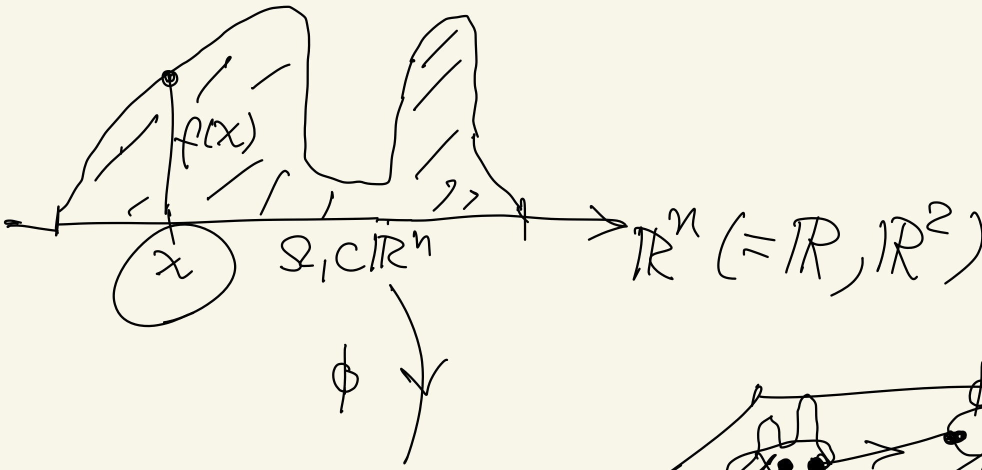
$u =$ potencial elèctric o gravitatori
$=$ temperatura (estacionària) d'un cos
$=$ concentració d'una sustància o població biològica

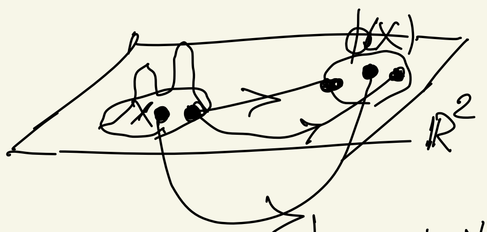
- Una EDP similar però no lineal és l'eq. de Monge-Ampère i en dim $n=2$ és

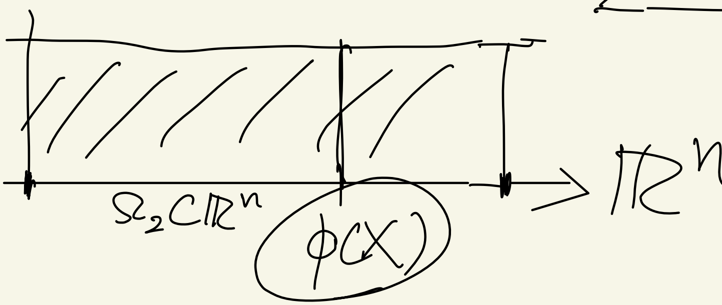
$$u_{xx}\, u_{yy} - u_{xy}^2 = f(x,y)$$

dim n: $\underline{\det D^2 u = f(x)}$, $x \in \mathbb{R}^n$

Apareix en transport òptim







ϕ minimitzant un cert cost

La $\phi : \Omega_1 \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \Omega_2 \subset \mathbb{R}^2$ òptima és de la forma:

$\phi = \nabla u$ on $u : \Omega_1 \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

i

$$\det D^2 u = f(x) \,, \quad x \in \Omega_1 \subset \mathbb{R}^2$$

$$u_{x_1x_1} u_{x_2x_2} - u_{x_1x_2}^2 = f(x_1, x_2)$$

$$\det D^2 u = \det(D\nabla u) = \mathrm{Jac}(\nabla u) = \mathrm{Jac}\,\phi$$

Alguns detalls: Volem trobar $\phi:\Omega_1\subset\mathbb{R}^n\to\Omega_2\subset\mathbb{R}^n$ que "transporti" la densitat de massa $f:\Omega_1\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ donada en una densitat de massa constant $c_0>0$ a $\Omega_2\subset\mathbb{R}^n$ i que minimitzi el cost

$$C(\phi) := \underbrace{\int_{\Omega_1}}_{\text{suma}} \underbrace{|x-\phi(x)|^2}_{\text{quadrat de la distància transportada}} \underbrace{f(x)}_{\text{massa transportada}}\,dx$$

Resulta ser (és un teorema difícil) que $\phi=\nabla u$ i $\det D^2u=f$ a $\Omega_1\subset\mathbb{R}^n$.

↳ Aquesta eq. ve de la noció de "transportar" f a $c_0=\text{ctt}$, usant la fórmula del canvi de variables. En efecte, per tota petita regió $A\subset\Omega_1$ hem de tenir (conservació de massa):

$$\int_A f(x)\,dx = \int_{\phi(A)} c_0\,dy = \int_A c_0 \operatorname{Jac}\phi(x)\,dx =$$

$$= \int_A c_0 \cdot \det D^2 u(x)\, dx. \quad \left.\begin{matrix} \\ \forall A \subset \Omega_1 \end{matrix}\right\} \Longrightarrow$$

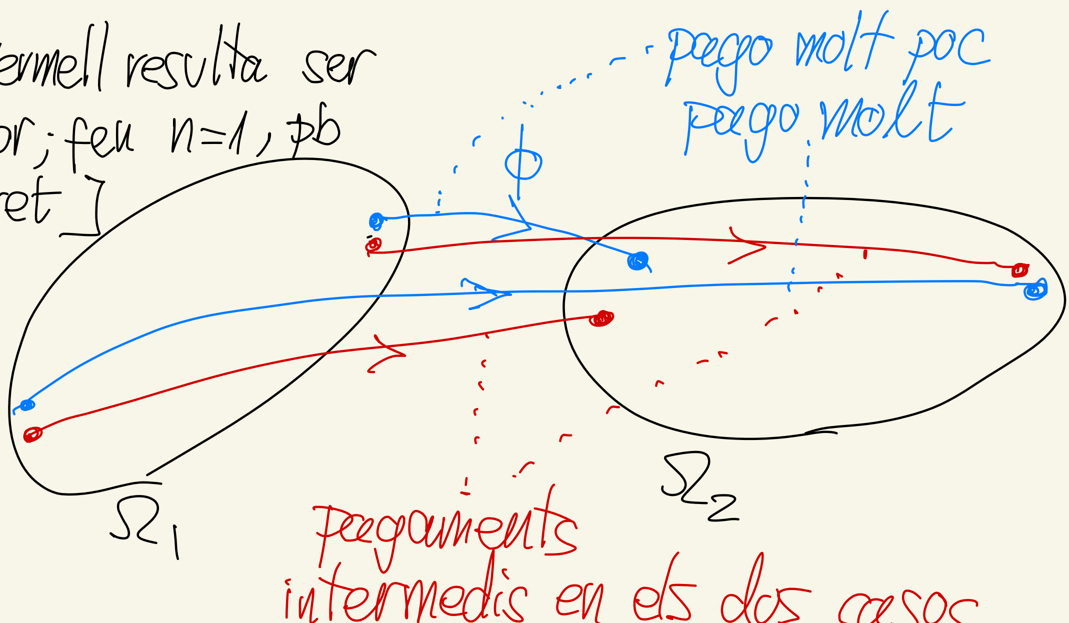
$$c_0 \cdot \det D^2 u(x) = f(x) \quad , x \in \Omega_1 .$$

(abans hem pres $c_0 \equiv 1$). Hem de requerir inicialment (prenent $A = \Omega_1$): $\int_{\Omega_1} f = \int_{\phi(\Omega_1)} c_0 = c_0 |\Omega_2|$.

Si $f \equiv c_0 = 1$ com abans, necessitem $|\Omega_1| = |\Omega_2|$.

- <u>Idea</u> intuitiva de perquè el problema no és trivial: és millor moure masses amb l'estratègia blava o la vermella ?? :

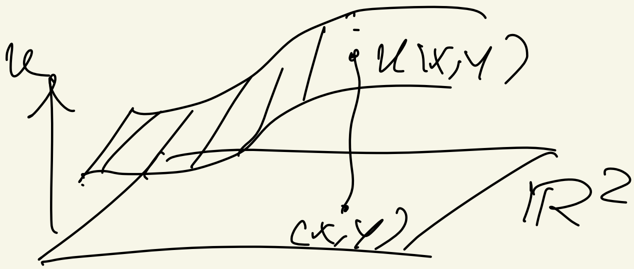
[vermell resulta ser millor; feu $n=1$, pb discret]



- Quant la $f \equiv 0$, l'eq de Monge-Ampère esdevé: $\underline{u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 = 0}$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, i determina les superfícies de $\mathbb{R}^3$ que són reglades

$$(x,y,z) = (x,y,u(x,y)) \in \mathbb{R}^3$$

Geometria Diferencial



Classe 3. 10/2/21

- Eq de difusió o de la calor $\longrightarrow$ u = temperatura
  $\hookrightarrow$ u = concentració d'una substància

$u = u(x,t)$

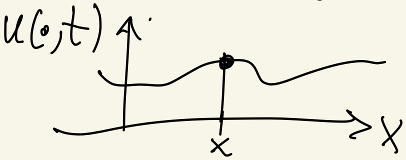
$n=1$: $\quad u_t - D \cdot u_{xx} = 0$, $D>0$ ctt

EDP de segon ordre lineal

$n \geq 1$: $\quad \underline{u_t - D \cdot \Delta u = 0}$

- L'eq. d'ones u = alçada d'una corda vibrant

$n=1$ $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$, $c = ct\,t > 0$ = velocitat de les ones



$n \geq 1$: $u_{tt} - c^2 \Delta u = 0$

u = alçada d'una membrana ($n=2$)

"Resoldrem" dues eqns importants amb els mètodes estudiats per calor i ones :

- Mècanica quàntica :

  $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$

  L'eq. de Schrödinger : $i u_t + \Delta u = 0$

- Matemàtica financera :

  u = preu d'una opció (producte financera)

  $u = u(x, t)$

  $\uparrow$ preu de mercat

$$u_t + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 u_{xx} + r x u_x - r u = 0$$

EDP lineal de segon ordre de tipus eq. de la calor però amb coef. variables i termes d'ordre 1 i d'ordre 0.

Com importants, manquen les eqns pels fluids (que no tractarem):

- Les equacions d'Euler:

$\vec{u}: \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ $(n=2, n=3)$

\\ velocitat del fluid no-viscós

$$\begin{cases} \vec{u}_t + (\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u} = -\nabla p \\ \operatorname{div}\vec{u} = 0 \end{cases} \quad ; \ p = \text{presió}$$

$$\vec{u}\cdot\nabla = u_1 \partial_{x_1} + \dots + u_n \partial_{x_n}$$

$\vec{u} = (u_1, \dots, u_n)$ ← components de $\vec{u}$ (no derivades)

sistema de EDPs $(n+1)$-equacions NO LINEAL de primer ordre.

- L'eq. de Navier-Stokes

$\vec{u}$ = velocitat d'un fluid viscós

ν = viscositat = ctt > 0

$$\begin{cases} \vec{u}_t + (\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u} - \nu\cdot\Delta\vec{u} = -\nabla p \\ \operatorname{div}\vec{u} = 0 \end{cases}$$