Topologia FME
Resum de teoria i llista de problemes

Curs 2019/2020

31 de gener de 2020

1 Espais mètrics

Definició 1.1 (Distància. Espai mètric) *Una* distància *o* mètrica *en un conjunt E és una aplicació $d\colon E \times E \to \mathbb{R}$ que compleix les condicions següents:*

1. $d(x, y) \geqslant 0$ *i* $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ *(positivitat);*
2. $d(x, y) = d(y, x)$ *(simetria);*
3. $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$ *(desigualtat triangular).*

Un espai mètric *és un conjunt on hi ha definida una mètrica. Es denota (E, d), o simplement E si la distància d se sobreentén.*

Tot subconjunt d'un espai mètric hereta una estructura d'espai mètric amb la restricció de la mètrica als punts del subconjunt.

Definició 1.2 (Boles) *Sigui E un espai mètric. Per a cada punt $x \in E$ i cada nombre real positiu r es defineixen la* bola oberta *i la* bola tancada *de* centre *x i* radi *r com:*

$$B_r(x) = \{y \in E : d(y, x) < r\}, \qquad \overline{B}_r(x) = \{y \in E : d(y, x) \leqslant r\}.$$

Lema 1.3 (Propietats de les boles obertes) *Les boles obertes d'un espai mètric satisfan les propietats següents:*

1. $B_r(x) \neq \varnothing$; $\cup_{x \in E, r>0} B_r(x) = E$;
2. *per a tot punt $y \in B_r(x)$ existeix un $s > 0$ amb $B_s(y) \subseteq B_r(x)$;*
3. *per a tot parell de boles $B_r(x)$ i $B_s(y)$ i cada punt $z \in B_r(x) \cap B_s(y)$ de la seva intersecció existeix una bola $B_t(z) \subseteq B_r(x) \cap B_s(y)$.*

Exemples 1.4 *Mètrica euclidiana a $\mathbb{R}$ i a $\mathbb{R}^n$; espais vectorials normats; mètrica discreta o trivial; distància de Hamming; mètrica p-àdica.*

Definició 1.5 (Oberts, topologia) *Un subconjunt d'un espai mètric* $\mathscr{U} \subseteq E$ *és un* obert *si conté una bola oberta de centre cadascun dels seus punts: per a cada* $x \in \mathscr{U}$ *existeix un* $r > 0$ *amb* $B_r(x) \subseteq \mathscr{U}$*. Els complementaris d'oberts s'anomenen* tancats.

El subconjunt $\mathscr{T} \subseteq \mathscr{P}(E)$ *format per tots els oberts d'un espai mètric s'anomena la* topologia mètrica *de l'espai.*

Lema 1.6 (Propietats dels oberts) *Els conjunts oberts d'un espai mètric satisfan les propietats següents:*

1. *el buit i el total són conjunts oberts;*
2. *la reunió arbitraria d'oberts és un obert;*
3. *la intersecció finita d'oberts és un obert.*

Definició 1.7 (Continuïtat) *Sigui* $f\colon (E, d_E) \to (F, d_F)$ *una aplicació entre espais mètrics. Es diu que* f és contínua en un punt $x \in E$ *si*

$$\text{per a cada } \epsilon > 0 \text{ existeix un } \delta > 0 \text{ tal que } d_E(x, y) < \delta \Rightarrow d_F\big(f(x), f(y)\big) < \epsilon.$$

L'aplicació es diu contínua *si ho és en cada punt de l'espai* E*.*

Un homeomorfisme *és una aplicació bijectiva, contínua i amb inversa contínua.*

Proposició 1.8 (Caracterització topològica de la continuïtat) *L'aplicació* $f\colon E \to F$ *és contínua si, i només si, l'antiimatge de tot obert de* F *és un obert de* E*.*

Definició 1.9 (Mètriques equivalents) *Dues mètriques* d_1 *i* d_2 *en un mateix conjunt* E *es diuen* equivalents *si la identitat* $\mathrm{Id}\colon (E, d_1) \to (E, d_2)$ *és un homeomorfisme.*

Es diuen fortament equivalents *si existeixen constants positives* $m > 0$ *i* $M > 0$ *tals que* $m d_1(x, y) \leqslant d_2(x, y) \leqslant M d_1(x, y)$ *per a tot parell de punts* $x, y \in E$*.*

Exemple 1.10 (Mètriques equivalents a l'euclidiana) *A* $\mathbb{R}^n$ *les mètriques induïdes per les normes* $\|\cdot\|_1$*,* $\|\cdot\|_2$ *i* $\|\cdot\|_\infty$ *són equivalents. Ull, en espais de funcions no ho són.*

Successions. En un espai mètric els conceptes de *límit d'una successió*, *successió convergent* i *successió de Cauchy* es defineixen exactament igual que en l'espai euclidià. L'espai es diu *complet* si tota successió de Cauchy és convergent.

Exercicis de repàs i/o discutits a classe de teoria

1.1. *Espais normats i euclidians.* Sigui E un $\mathbb{R}$-espai vectorial. Una *norma* en E és una aplicació $\boldsymbol{v} \mapsto \|\boldsymbol{v}\| \colon E \to \mathbb{R}$ que compleix les propietats següents:

- $\|\boldsymbol{v}\| \geqslant 0$ i $\|\boldsymbol{v}\| = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$;
- $\|x\boldsymbol{v}\| = |x| \cdot \|\boldsymbol{v}\|$ si $x \in \mathbb{R}$;
- $\|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\| \leqslant \|\boldsymbol{u}\| + \|\boldsymbol{v}\|$.

Un *producte escalar* en E és una aplicació $\langle\ ,\ \rangle \colon E \times E \to \mathbb{R}$ que compleix:

- $\langle\ ,\ \rangle$ és una aplicació *bilineal*;
- $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \rangle = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle$ (*simètrica*);
- $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle \geqslant 0$ i $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ (*definida positiva*).

Demostreu que

1. per a tota norma, $d(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}\|$ és una distància en E;
2. per a tot producte escalar, $\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle}$ és una norma en E.
   INDICACIÓ: Usar la *desigualtat de Cauchy-Schwarz*: $|\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle| \leqslant \sqrt{\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle \cdot \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle}$.

1.2. Comproveu que les definicions següents donen normes a l'espai $\mathbb{R}^n$:

$$\|\boldsymbol{x}\|_1 = |x_1| + \cdots + |x_n|, \quad \|\boldsymbol{x}\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}, \quad \|\boldsymbol{x}\|_\infty = \max\big\{|x_1|, \ldots, |x_n|\big\},$$

on $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, i que $\|\ \|_2$ és la norma determinada pel producte escalar

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n.$$

1.3. Comproveu que les definicions següents donen normes en l'espai $\mathscr{C}^0\big([a,b]\big)$ de les funcions contínues $f \colon [a,b] \to \mathbb{R}$:

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|\, dx, \quad \|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2\, dx}, \quad \|f\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|,$$

i que $\|\ \|_2$ és la norma determinada pel producte escalar

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) g(x)\, dx.$$

1.4. *Mètrica discreta o trivial.* Comproveu que, en un conjunt qualsevol, l'aplicació definida posant $d_{\mathsf{dis}}(x,y) = 0$ si $x = y$ i $d_{\mathsf{dis}}(x,y) = 1$ si $x \neq y$ és una mètrica.

1.5. *Distància de Hamming.* Sigui $\mathcal{A}$ un conjunt qualsevol (alfabet). El conjunt $\mathcal{A}^n$ es pensa com el conjunt de les paraules de n lletres de $\mathcal{A}$. Comproveu que l'aplicació

$$d(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = \bigl|\{i : a_i \neq b_i\}\bigr|, \qquad \boldsymbol{a} = (a_1,\dots,a_n),\quad \boldsymbol{b} = (b_1,\dots,b_n) \in \mathcal{A}^n$$

que a cada parell de paraules li fa correspondre el nombre de lletres en què totes dues difereixen és una mètrica en $\mathcal{A}^n$. Es fan servir en la teoria dels codis correctors d'errors.

1.6. *Mètrica p-àdica $\mathbb{Z}$.* Sigui p un primer. En el conjunt $\mathbb{Z}$ dels nombres enters es considera la *mètrica p-àdica* definida com

$$d_p(a,b) = \begin{cases} 0, & \text{si } a = b, \\ p^{-k}, & \text{si } p^k \mid (a-b) \ \text{ i } \ p^{k+1} \nmid (a-b). \end{cases}$$

O sigui, la distància entre dos enters depèn de la màxima potència de p que divideix la seva diferència: la màxima potència p^k tal que tots dos són congruents mòdul p^k.

1. Comproveu que d_p és una distància a $\mathbb{Z}$ que satisfà la desigualtat següent
$$d_p(a,c) \leqslant \max\bigl\{d_p(a,b), d_p(b,c)\bigr\},$$
més forta que la desigualtat triangular ordinària, anomenada desigualtat triangular ultramètrica.
2. Calculeu $d_5(1,26)$, $d_5(1,476)$, $d_5(1,477)$ i $d_p(1,p^n!)$ i $d_p(0,p^n)$.
3. Calculeu les boles de radis $1/2$ i $1/4$ centrades en 1 respecte de la distància d_3.
4. Comproveu que tot punt d'una bola és centre seu i que dues boles es tallen si, i només si, una està continguda en l'altra.
5. Vegeu que totes les boles són alhora obertes i tancades.
6. Comproveu que les boles de centre $a \in \mathbb{Z}$ són les classes de congruència de a mòdul potències de p:
$$[a]_{p^n} = a + p^n\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}.$$
7. Esteneu la mètrica al conjunt $\mathbb{Q}$ dels nombres racionals.

1.7. Determineu quins dels subconjunts següents de $\mathbb{R}^2$ són oberts amb la mètrica ordinària:

1. $\bigl\{(x,y) : x^2+y^2 < 1\bigr\} \cup \bigl\{(1,0)\bigr\}$.
2. $\bigl\{(x,y) : |x| < 1\bigr\}$.
3. $\bigl\{(x,y) : x+y \geqslant 0\bigr\}$.
4. $\bigl\{(x,y) : x+y = 0\bigr\}$.
5. $\bigl\{(x,y) : 1 \leqslant x^2+y^2 < 2\bigr\}$.
6. $\mathbb{R}^2 \setminus \bigl\{(x, \sin\frac{1}{x}) : x > 0\bigr\}$.
7. $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2$,
8. $\mathbb{Q} \times \mathbb{Z}$.

1.8. *Continuïtat per successions.* Demostreu que una aplicació $f\colon (E,d_E) \to (F,d_F)$ entre espais mètrics és contínua en $x \in E$ si, i només si, per a tota successió convergent $(x_n)_{n\geqslant 1}$ amb límit x a E la successió imatge $\bigl(f(x_n)\bigr)_{n\geqslant 1}$ és convergent amb límit $f(x)$.

Problemes

1.9. Digueu quines de les funcions següents defineixen mètriques:

1. $d(x, y) = |e^x - e^y|$, $x, y \in \mathbb{R}$;
2. $d(x, y) = |\sin x - \sin y|$, $x, y \in [0, \pi]$;
3. $d(x, y) = |\cos x - \cos y|$, $x, y \in [0, \pi]$;
4. $d(x, y) = |\cos x - \cos y|$, $x, y \in \mathbb{R}$;
5. $d(x, y) = |\arctan x - \arctan y|$, $x, y \in \mathbb{R}$.

Per fer-ho discutiu en general quines condicions ha de satisfer una funció $f\colon E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ per tal que $d(x, y) = |f(x) - f(y)|$ sigui una distància en el conjunt E.

1.10. Digueu quina de les funcions següents defineix una distància a $\mathbb{R}^n$

1. $d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$;
2. $d(x, y) = \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2$;
3. $d(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$;
4. $d(x, y) = |x_1 - y_1|$;
5. $d(x, y) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i - y_i|$;
6. $d(x, y) = \min_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i - y_i|$;
7. $d' = \lfloor d \rfloor$ (part entera) per a una distància d;
8. $d(x, y) = \sqrt{(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})^t}$ on $\boldsymbol{A} \in M_n(\mathbb{R})$ és una matriu qualsevol.
9. El mateix agafant $\boldsymbol{A}$ una matriu simètrica amb tots els valors propis > 0.

En els casos en que sigui distància dibuixeu la bola unitat centrada a l'origen.

1.11. Es consideren els conjunts següents:

$$E = \mathscr{C}^0\big([a, b]\big), \qquad F = \{f\colon [a, b] \to \mathbb{R} \text{ acotada integrable}\}$$

i les dues funcions següents, definides en tots dos conjunts:

$$d_\infty(f, g) = \sup\big\{|f(x) - g(x)| : x \in [a, b]\big\}, \qquad d_1(f, g) = \int_a^b \big|f(x) - g(x)\big|\, dx.$$

Per a cadascuna de les funcions d_∞, d_1 digueu si és o no una distància en cadascun dels conjunts E, F. Quan ho sigui, descriviu les boles de centre la funció $f(x) = \sin x$.

1.12. *Mètrica ferroviària o postal o centralista.* Donat un espai mètric (E, d) i un punt $c \in E$ es defineix $d_{\mathsf{cent}}(x, y) = d(x, c) + d(c, y)$ si $y \neq x$ i zero si $y = x$. Demostreu que d_{cent} és una mètrica en E. Com són les boles quan l'espai és el pla euclidià i el punt c és l'origen de coordenades?

1.13. Sigui (E, d) un espai mètric. Demostreu que les funcions següents defineixen mètriques en el conjunt E:

1. $\delta(x, y) = \min \{1, d(x, y)\}$;
2. $\delta(x, y) = \dfrac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$;
3. $\delta(x, y) = \alpha d(x, y)$, amb $\alpha > 0$ un nombre real positiu;
4. $\delta(x, y) = d(x, y)^c$, amb $c \in [0, 1]$ un nombre real.
   INDICACIÓ: compareu la funció $t \mapsto t^c$ amb la funció identitat.

1.14. Es considera $\mathbb{R}$ amb la mètrica usual d i amb la mètrica discreta d_{dis}. Demostreu que

1. tota aplicació $f\colon (\mathbb{R}, d_{\mathsf{dis}}) \to (\mathbb{R}, d)$ és contínua;
2. una aplicació injectiva $f\colon (\mathbb{R}, d) \to (\mathbb{R}, d_{\mathsf{dis}})$ no és contínua en cap punt.

1.15. *Producte d'espais mètrics.* Siguin (E_1, d_1) i (E_2, d_2) espais mètrics. En el producte cartesià $E = E_1 \times E_2$ es defineix:

$$D\big((x_1, x_2), (y_1, y_2)\big) = \max \big\{d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)\big\}.$$

Comproveu que D és una distància en E i digueu com són les boles.

1.16. Sigui (E, d) un espai mètric. Comproveu que la funció $d\colon E \times E \to \mathbb{R}$ és contínua, on a $E \times E$ es considera la mètrica producte i a $\mathbb{R}$ la mètrica usual.

1.17. Es considera l'espai $(\mathbb{Z}, d_p)$ amb la mètrica p-àdica (problema **1.6**). Demostreu que les aplicacions de sumar i de multiplicar són contínues com a aplicacions $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, on a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ es considera la mètrica producte.

1.18. *Mètriques equivalents.* Siguin d_1, d_2 dues mètriques en un conjunt E. Demostreu que les condicions següents són equivalents:

1. L'aplicació $\mathrm{Id}\colon (E, d_1) \to (E, d_2)$ és un homeomorfisme.
2. Els oberts de (E, d_1) són els mateixos que els oberts de (E, d_2).
3. Per a tot punt $x \in E$, tota bola oberta de centre x per a una de les mètriques conté una bola oberta de centre x per a l'altra mètrica.

1.19. Siguin d_1, d_2 mètriques equivalents en un conjunt X i sigui (Y, d) un espai mètric. Demostreu que una aplicació $X \to Y$ (resp. una aplicació $Y \to X$) és contínua quan es considera el conjunt X com a espai mètric amb la mètrica d_1 si, i només si, ho és en considerar-lo amb la mètrica d_2.

1.20. *Equivalència forta.* Dues mètriques d_1, d_2 en un conjunt E es diuen *fortament equivalents* si existeixen nombres reals positius $m, M > 0$ tals que $md_1(x, y) \leqslant d_2(x, y) \leqslant Md_1(x, y)$ per a tot $x, y \in E$.

Demostreu que dues mètriques fortament equivalents són equivalents i doneu exemples de mètriques equivalents que no siguin fortament equivalents.

1.21. Discutiu l'equivalència i l'equivalència forta de les mètriques següents:

1. les mètriques d_1, d_2 i d_∞ sobre l'espai $\mathbb{R}^n$ (problema **1.2**);
2. les mètriques δ i d del problema **1.13**;
3. dues mètriques p-àdiques sobre $\mathbb{Z}$ per a primers diferents (problema **1.6**).

1.22. *Altres mètriques en el producte.* Siguin (E_1, d_1) i (E_2, d_2) espais mètrics. En el conjunt producte cartesià $E = E_1 \times E_2$ es defineixen:

1. $D_1\big((x_1, x_2), (y_1, y_2)\big) = d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2)$,
2. $D_2\big((x_1, x_2), (y_1, y_2)\big) = \sqrt{d_1(x_1, y_1)^2 + d_2(x_2, y_2)^2}$,
3. $D_\infty\big((x_1, x_2), (y_1, y_2)\big) = \max\big\{d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)\big\}$.

Comproveu que totes tres són mètriques en E, que són equivalents entre elles, i que també són fortament equivalents.

Generalitzeu-ho a un producte d'un nombre finit qualsevol d'espais mètrics.

Problemes complementaris i/o d'ampliació

1.23. *Rang de matrius.* Demostreu que $d(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) = \operatorname{rang}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})$ defineix una mètrica en el conjunt $\mathrm{Mat}_{n\times m}(\mathbb{R})$ de les matrius de n files i m columnes amb entrades reals.

1.24. *Espai de successions.* Sigui $A^{\mathscr{N}}$ el conjunt de les successions $\boldsymbol{a} = (a_n)_{n\geqslant 0}$ d'elements d'un conjunt A. Demostreu que l'aplicació següent defineix una distància a $A^{\mathscr{N}}$:

$$d(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = \begin{cases} 0, & \text{si } \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}, \\ e^{-r} & \text{si } a_n = b_n \text{ per a } n < r \ \text{ i } \ a_r \neq b_r. \end{cases}$$

1.25. Es consideren els espais $\mathscr{C}^0([a,b])$ i $\mathscr{C}^1([a,b])$ de les funcions contínues i de les funcions derivables amb derivada contínua a l'interval $[0,1]$, amb la mètrica del suprem.

1. Demostreu que l'aplicació *derivació* $f \mapsto f'\colon \mathscr{C}^1([a,b]) \to \mathscr{C}^0([a,b])$ no és contínua.
2. Es considera ara a $\mathscr{C}^1([a,b])$ la mètrica següent:

$$\delta(f,g) = \max\left\{ \sup_{x\in[a,b]} |f(x)-g(x)| \ , \ \sup_{x\in[a,b]} |f'(x)-g'(x)| \right\}.$$

   Demostreu que aquesta expressió defineix efectivament una mètrica i que l'aplicació derivació és contínua si es considera l'espai $\mathscr{C}^1([a,b])$ amb aquesta mètrica.

1.26. Sigui $\mathscr{P}(\mathscr{N})$ el conjunt de les parts de $\mathscr{N} = \{1,2,3,\dots\}$. Donats $A,B \in \mathscr{P}(\mathscr{N})$ es defineix la seva distància $d(A,B)$ de la forma següent:

$$d(A,B) = \begin{cases} 0, & \text{si } A = B, \\ 1/m, & \text{si } A \neq B, \text{ on } \ m = \min\{A\cup B \setminus A\cap B\}. \end{cases}$$

1. Calculeu la distància entre el conjunt E dels nombres parells i el conjunt P dels nombres primers.
2. Descriviu tots els subconjunts $X \subseteq \mathscr{N}$ amb $d(E,X) = \frac{1}{3}$.
3. Proveu que $d(A,B) < 1/m$ si, i només si, $A\cap[1,m] = B\cap[1,m]$.
4. Comproveu que d és, efectivament, una distància a $\mathscr{P}(\mathscr{N})$.
5. Sigui $A = \{1\}$. Descriviu les boles $B_{\frac{1}{m}}(A)$.
6. Hi ha boles tancades i obertes alhora?
7. Proveu que $d(A,B) = d(A^c,B^c)$, on $A^c = \mathscr{N} \setminus A$ denota el complementari de A.
8. Sigui $X_1 \subseteq X_2 \subseteq \cdots \subseteq X_n \subseteq \cdots$ una successió creixent de subconjunts de $\mathscr{N}$. Proveu que la successió $(X_n)_{n\geqslant 1}$ tendeix a $X = \bigcup_{n\geqslant 1} X_n$ a l'espai mètric $\mathscr{P}(\mathscr{N})$.

Intenteu definir, i estudieu, una mètrica anàloga al conjunt de les parts de $(0,\infty) \subseteq \mathbb{R}$ i al conjunt de les parts de $(1,\infty) \subseteq \mathbb{R}$.

1.27. Donades dues mètriques d_1 i d_2 en un mateix conjunt es consideren les funcions

$$d_{\max}(x,y) = \max\{d_1(x,y), d_2(x,y)\}, \quad d_{\min}(x,y) = \min\{d_1(x,y), d_2(x,y)\}.$$

Alguna d'elles és una mètrica?

1.28. *Funcions còncaves de mètriques.* Recordeu que una funció $f\colon I \to \mathbb{R}$ definida en un interval $I \subseteq \mathbb{R}$ és *còncava* en aquest interval si per a tot parell de punts $x, y \in I$ amb $x < y$ la gràfica de f està per sobre del segment que uneix el punt $(x, f(x))$ amb el punt $(y, f(y))$.

1. Sigui $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ una funció còncava amb $f(0) \geqslant 0$. Demostreu que per a cada $x, y \in [0,\infty)$ es compleix $f(x+y) \leqslant f(x) + f(y)$.
2. Sigui $f\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ una funció còncava, creixent, i amb $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Demostreu que per a tota distància $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ l'aplicació $f \circ d$ també és una distància.
3. Vegeu que les mètriques δ del problema **1.13** són casos particulars d'aquesta construcció.

1.29. *Distància entre subconjunts.* En un espai mètric E es defineix la *distància entre subconjunts* $A, B \subseteq E$ com

$$d(A,B) = \inf_{x \in A, y \in B} d(x,y).$$

1. Proveu que per a tot subconjunt $A \subseteq E$ la funció $x \mapsto d\big(x, A\big)\colon E \to \mathbb{R}$ és contínua, on a $\mathbb{R}$ es considera la topologia ordinària.
2. Caracteritzeu els punts $x \in X$ tals que $d(x, A) = 0$.
3. Vegeu que $A \cap B \neq \varnothing \Rightarrow d(A,B) = 0$ però que el recíproc no sempre és cert.

1.30. *Diàmetre d'un conjunt.* Es defineix el *diàmetre* d'un subconjunt $A \subseteq E$ posant

$$\operatorname{diam}(A) = \sup_{x,y \in A} d(x,y) \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}.$$

El conjunt es diu fitat si $\operatorname{diam}(A) < \infty$.

1. Comproveu que
   (a) $A \subseteq B \Rightarrow \operatorname{diam}(A) \leqslant \operatorname{diam}(B)$;
   (b) $\operatorname{diam}(A \cup B) \leqslant \operatorname{diam}(A) + \operatorname{diam}(B) + d(A,B)$;
   (c) $A \cap B = \varnothing \Rightarrow \operatorname{diam}(A \cup B) \leqslant \operatorname{diam}(A) + \operatorname{diam}(B)$.
2. Doneu un exemple a $\mathbb{R}$ de dos subconjunts amb $\operatorname{diam}(A) = \operatorname{diam}(B) = \operatorname{diam}(A \cup B) = 1$.
3. Demostreu que $\operatorname{diam}\big(B_r(x)\big) \leqslant 2r$;
4. Demostreu que si $\operatorname{diam}(A) < r$ i $A \cap B_r(x) \neq \varnothing$ aleshores $A \subseteq B_{2r}(x)$.
5. Sigui $A \subseteq E$. Vegeu que les condicions següents són equivalents:

(a) A està contingut en alguna bola: $A \subseteq B_r(A)$;
(b) A té diàmetre finit: $\operatorname{diam}(A) < \infty$.

Quan es compleixen es diu que el conjunt està fitat.

1.31. *Producte infinit.* Sigui $\big((E_i, d_i)\big)_{i\in I}$ una família d'espais mètrics indexada en un conjunt I qualsevol: finit o infinit, numerable o no. Sigui $E = \prod_{i\in I} E_i$ el conjunt producte cartesià. Per a elements $\boldsymbol{x} = (x_i)_{i\in I}$ i $\boldsymbol{y} = (y_i)_{i\in I}$ es defineix:

$$D(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sup\big\{\min\big(d_i(x_i, y_i), 1\big) : i \in I\big\}.$$

Si la família és numerable amb conjunt d'índexs $I = \mathscr{N} = \{1, 2, \dots\}$ es defineix:

$$D_{\mathsf{num}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sup\left\{\frac{1}{n}\min\big(d_n(x_n, y_n), 1\big) : n \geqslant 1\right\}.$$

1. Demostreu que D i D_{num} són distàncies en E.
2. Digueu com són les boles per a cadascuna de les dues distàncies.
3. Demostreu que en el cas numerable les distancies D_{num} definides reordenant els espais són totes equivalents entre elles.
4. Sigui $I = \mathscr{N}$. Siguin $U_n \subseteq E_n$ subconjunts oberts. Sigui $S \subseteq \mathscr{N}$ un subconjunt dels naturals. Digueu si els conjunts $U_S = \prod_{n\in S} U_n \times \prod_{n\notin S} E_n \subseteq E$ són oberts o no per a cadascuna de les dues mètriques D i D_{num}.
   Indicació: Depèn de si S és finit o infinit.
5. Sigui $E = \mathbb{R}^{\mathscr{N}}$ el producte numerable de còpies de la recta euclidiana. Discutiu la continuïtat de les aplicacions $\mathbb{R} \to E$ següents:

   $$f(x) = (x, x, x, \dots), \qquad g(x) = (x, 2x, 3x, \dots)$$

   en cadascuna de les dues mètriques D i D_{num}.

1.32. *Espais ultramètrics.* Una mètrica s'anomena *ultramètrica* si satisfà la condició següent, més forta que no pas la desigualtat triangular:

$$d(x, y) \leqslant \max\big\{d(x, z), d(z, y)\big\} \qquad \text{per a tot} \quad x, y, z.$$

L'espai mètric corresponent s'anomena *espai ultramètric.* Demostreu que, en un espai ultramètric,

1. la desigualtat triangular és una igualtat si $d(x, z) \neq d(y, z)$;
2. tot punt d'una bola (oberta o tancada) és centre de la bola;
3. dues boles es tallen si, i només si, una està continguda en l'altra;
4. tot triangle és isòsceles i els costats iguals són els més llargs.

Repasseu els espais mètrics que coneixeu i digueu quins són ultramètrics i quins no.

1.33. Discutiu la completesa dels espais mètrics següents:

1. $\mathbb{R}^n$ amb cadascuna de les mètriques d_1, d_2 i d_∞;
2. un espai discret;
3. $\mathbb{Z}$ amb la mètrica p-àdica.

1.34. La condició de ser complet, es conserva per a mètriques equivalents?

1.35. *Compleció.* Sigui (E, d) un espai mètric. Donades successions $\boldsymbol{x} = (x_n)_{n\geqslant 1}$ i $\boldsymbol{y} = (y_n)_{n\geqslant 1}$ es defineix la relació $\boldsymbol{x} \sim \boldsymbol{y}$ si $\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0$.

1. Demostreu que aquesta és una relació d'equivalència en el conjunt de successions d'elements de E.

Sigui $\widehat{E}$ el conjunt

$$\widehat{E} = \{\boldsymbol{x} = (x_n)_{n\geqslant 1} : \boldsymbol{x} \text{ és de Cauchy}\}/\sim$$

de classes d'equivalència de successions de Cauchy respecte la relació anterior. En endavant els seus elements s'identifiquen amb representants.

2. Comproveu que la funció $\widehat{d}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n)$ està ben definida en el conjunt $\widehat{E}$; és a dir, que:
   (a) si $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \widehat{E}$ el límit $\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n)$ existeix i
   (b) no depèn de les successions escollides com a representants.

   i que defineix una mètrica en aquest conjunt.
3. Vegeu que identificant cada $x \in E$ amb la classe de la successió constant $x_n = x$ es té una inclusió d'espais mètrics $(E, d) \subseteq (\widehat{E}, \widehat{d})$
4. Demostreu que $(\widehat{E}, \widehat{d})$ és complet i que E és un subespai dens.
5. Discutiu la construcció de $\mathbb{R}$ com a compleció mètrica de $\mathbb{Q}$.

1.36. p-Normes. Donat un nombre real $p > 1$, a l'espai $\mathbb{R}^n$ es defineix la *p-norma* com

$$\|\boldsymbol{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}.$$

Demostreu que aquesta fórmula defineix efectivament una norma. Per fer-ho demostreu primer els apartats següents, on $q > 1$ és el nombre tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

1. *desigualtat de Young*:

$$xy \leqslant \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} \qquad \text{per a tot } x, y \in \mathbb{R}_{>0}.$$

   Indicació: la funció logaritme és convexa.
2. *desigualtat de Hölder*:

$$|\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle| \leqslant \|\boldsymbol{x}\|_p \|\boldsymbol{y}\|_q \qquad \text{per a tot } \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n.$$

   Indicació: manipuleu el quocient del primer terme pel segon usant l'apartat anterior.

3. *desigualtat de Minkowski*:

$$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|_p \leqslant \|\boldsymbol{x}\|_p + \|\boldsymbol{y}\|_p \qquad \text{per a tot } \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n.$$

Aquestes normes es fan servir en anàlisi funcional per definir els espais L^p.

1.37. Definiu la p-norma i enuncieu i demostreu fets anàlegs als de problema anterior en espais de funcions $\mathscr{C}^0\big([a,b]\big)$, canviant sumes per integrals.

Discutiu l'equivalència i l'equivalència forta de les mètriques induïdes per les p-normes en espais $\mathbb{R}^n$ i en espais de funcions.

1.38. Generalitzeu el problema **1.22**, definint una mètrica en el producte cartesià a partir de la fórmula de les p-normes del problema **1.36**, i vegeu que totes aquestes mètriques són fortament equivalents.