Problema 1. Demostreu les següents propietats importants del Laplacià:

(a) La definició de Laplacià no depèn de la base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ triada. És a dir

$$\sum_i \partial_{e_i e_i} u(x) = \sum_i \partial_{e'_i e'_i} u(x)$$

per cada parella de bases ortonormals $\{e_i\}$, $\{e'_i\}$ de $\mathbb{R}^n$.

(b) El Laplacià és invariant per rotacions. És a dir, per a tota matriu ortogonal O i $u \in C^2$, si es defineix $u^*(x) := u(Ox)$ i $x^* = Ox$ es té

$$\Delta u^*(x) = \Delta u(Ox) = \Delta u(x^*).$$

(c) El Laplacià és invariant per translacions.

(d) El Laplacià és invariant per isometries de $\mathbb{R}^n$.

Problema 2. Donada una funció f a $[0, L]$, considerem el problema

$$\begin{cases} -u'' = f(x) & \text{a } (0, L) \\ u(0) = u(L) = 0. \end{cases}$$

Resoleu el problema per simple integració de l'EDO. Demostreu que la solució ve donada per l'expressió

$$u(x) = \int_0^L G(x, y) f(y) dy, \tag{1}$$

on $G(x, y)$ es una funció explícita que no depén de f. S'anomena la funció de Green del problema. Dibuixeu la gràfica de G com a funció de y per un x donat. Comproveu que G satisfà les seguents propietats: $G(x, y) \geq 0$, $G(x, y) = G(y, x)$ i $G(0, y) = G(L, y) = 0$, per tot x i y.

Problema 3. Considerem el problema de Dirichlet pel Laplacià a la bola o disc unitat B_1 de $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{a } B_1 \\ u = g & \text{a } \partial B_1, \end{cases}$$

on $g : \partial B_1 \to \mathbb{R}$ és una funció contínua donada. Volem trobar un mètode alternatiu al de separació de variables (polars) per demostrar que la solució ve donada per l'expressió

$$u(x) = \int_{\partial B_1} P(x, y) g(y) dy, \qquad \text{per } x \in B_1, \tag{2}$$

on P s'anomena el nucli de Poisson i ve donat (en coordenades polars) per

$$P(x, y) = P(re^{i\alpha}, e^{i\beta}) = \frac{1 - r^2}{2\pi} \frac{1}{1 + r^2 - 2r \cos(\alpha - \beta)}. \tag{3}$$

Per fer-ho, sigui u la part real d'una funció holomorfa φ. Fixem $z = re^{i\alpha} \in B_1$ i considerem les funcions

$$\zeta \to \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} \qquad \text{i} \qquad \zeta \to \frac{\varphi(\zeta)\bar{z}}{1 - \zeta\bar{z}}.$$

Sumeu les seves integrals a ∂B_1 i, usant la fòrmula de Cauchy per funcions holomorfes, deduïu (2)-(3).

[Noteu la similitud de (1) i (2). Fórmules explícites com aquestes per resoldre problemes per EDPs només existeixen, en general, en dimensió $n = 1$ o bé, en dimensió $n \geq 2$, per dominis amb moltes simetries com una bola, un rectangle, cilindres, semi-espais, etc. Per dominis generals, les fórmules encara són vàlides i útils, però els nuclis G i P no són explícits (si bé, com veurem, es poden calcular numéricament discretitzant).

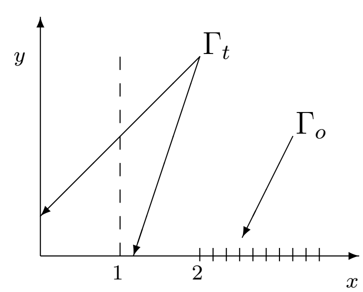
Problema 4. Quina regularitat tenen les solucions de $u_{xx} - 2u_{xy} + 2u_{yy} = 0$ en un obert de $\mathbb{R}^2$? I les de $u_{xx} - 3u_{xy} + 2u_{yy} = 0$? (Indicació: considereu de fer canvis lineals de les variables x i y).

Problema 5. Donat un domini $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, trobeu la interpretació probabilística (en termes de costos o "pagaments" durant el passeig aleatori discret) per la solució del problema

$$\begin{cases} -\Delta u = 1 & \text{a} \quad \Omega \subset \mathbb{R}^n, \\ u = 0 & \text{a} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Quan $\Omega = B_2 \setminus \overline{B}_1 \subset \mathbb{R}^n$, trobeu els punts de Ω a on el cost és màxim.

Problema 6.* Considerem el domini $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$. Suposem que $\Gamma_o = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : x > 2\}$ és la part oberta de la frontera de Ω i que $\Gamma_t = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2\} \cup \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ és la part tancada de la frontera (veure la fígura adjunta). Calculeu la coordenada y tal que la probabilitat de sortir del domini començant camins aleatoris des del punt $(1, y)$ sigui màxima.



Problema 7.* Una imatge en blanc i negre és una funció $u : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to [0, 255] \subset \mathbb{R}$ a valors reals definida en un domini Ω del pla. El valor $u(x, y)$ representa el nivell de gris de la imatge en el punt (x, y), on 0 representa negre i 255 blanc. Si la imatge

és digital (o discreta) i rectangular, llavors el seu domini de definició ve donat per la discretització d'un rectangle:

$$\{(x_i, y_j) = (ih, jh) : i = 1, \dots, I; j = 1, \dots, J\},$$

on $h > 0$. El punt (x_i, y_j) és el centre d'un pixel quadrat de mida $h \times h$ ("in 'pixel', 'pix' is slang for 'picture' and 'el' stands for 'element' "). Direm que la imatge és de mida $I \times J$.

Transmitint imatges, a vegades es perd un pixel. Si es tracta d'un pixel interior (és a dir $1 < i < I$ i $1 < j < J$), una manera natural de reassignar-li un valor és per la mitjana

$$u(x_i, y_j) = \frac{1}{4}\left\{u(x_{i+1}, y_j) + u(x_{i-1}, y_j) + u(x_i, y_{j+1}) + u(x_i, y_{j-1})\right\}. \tag{4}$$

Els pixels no interiors els anomenem de vora (són els que toquen a algun dels quatre costats de la imatge rectangular).

Una imatge digital es diu que és *ideal* si satisfà (4) en cadascun dels seus pixels interiors. Equivalentment, $\Delta_h u(x_i, y_j) = 0$ en cada pixel interior (x_i, y_j), a on

$$\begin{aligned}&\Delta_h u(x_i, y_j) := \qquad (5)\\ &:= \frac{4}{h^2}\left\{\frac{1}{4}\big(u(x_{i+1}, y_j) + u(x_{i-1}, y_j) + u(x_i, y_{j+1}) + u(x_i, y_{j-1})\big) - u(x_i, y_j)\right\},\end{aligned}$$

s'anomena el *Laplacià discret* de u.

Demostreu que, coneguts els pixels de vora d'una imatge digital, existeix una única imatge digital *ideal* que els té com valors de vora.

Problema 8.* Les partícules d'una substància es mouen a $\mathbb{R}$ amb pas $h > 0$ i passeig aleatori d'anar a la dreta amb probabilitat $p = \frac{1}{2} + ah$ ($a > 0$ constant) i probabilitat d'anar a l'esquerra $p = \frac{1}{2} - ah$. El pas temporal és $\Delta t = h^2$.

(a) Fent el desenvolupament de Taylor de la concentració de partícules $u(x, t)$ en x a temps t, demostreu que u és solució de

$$u_t - \frac{1}{2}u_{xx} + 2au_x = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0.$$

Suposeu que resolem aquesta equació amb condició inicial $u(x, 0) = g(x)$ amb g senar, estrictament creixent i fitada a $\mathbb{R}$, i amb g' fitada.

(b) Vista l'essència del moviment aleatori a (a), decidiu el signe de $u(0, t)$ per $t > 0$.

(c) Sigui $v(y, t) := u(y + 2at, t)$. Demostreu que

$$\begin{cases} v_t - \frac{1}{2}v_{yy} = 0 & \text{a} \quad \mathbb{R} \times (0, +\infty) \\ v(\cdot, 0) = g & \text{a} \quad \mathbb{R}. \end{cases}$$

Deduïu que v és senar en y. Considerant l'equació satisfeta per la funció v_y, demostreu que $v_y > 0$ per tot $y \in \mathbb{R}$ i $t > 0$. Per tant, $u_x > 0$ i u és subcalòrica ($u_t - \frac{1}{2}u_{xx} < 0$). Trobeu ara rigurosament el signe de $u(0, t)$ per tot $t > 0$.

Problema 9.* Donat el problema

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 1 & 0 < x < 1 \quad t > 0 \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 & t > 0 \\ u(x,0) = 0 & 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

(a) Determineu la solució estacionaria $u^s(x)$ que satisfà les condicions de contorn.
(b) Demostreu que $u(x,t) \le u^s(x)$ per tot $t > 0$.
(c) Determineu $\beta > 0$ tal que $u(x,t) \ge (1 - e^{-\beta t})u^s(x)$.
(d) Deduïu que $u(x,t) \to u^s(x)$ uniformement en $[0,1]$ quan $t \to +\infty$.
(e) Resoleu el problema usant separació de variables.

Problema 10.* Considereu el domini $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 4\}$. Sigui u la solució del problema

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{a} & \Omega \times (0,\infty), \\ u_\nu(x,y,t) = 0 & \text{a} & \{x^2 + y^2 = 1\} \times (0,\infty), \\ u_\nu(x,y,t) = \frac{15}{2}xy & \text{a} & \{x^2 + y^2 = 4\} \times (0,\infty), \\ u(x,y,0) = g(x,y) & \text{a} & \Omega \times \{0\}, \end{cases}$$

on

$$g(x,y) = 15xy\left(1 - \frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right).$$

a) És u parella o senar en x? I en y? Justifiqueu les respostes. Quina relació hi ha entre $u(3/4, 3\sqrt{3}/4, 100)$ i $u(-3/4, -3\sqrt{3}/4, 100)$?
b) Es conserva, en el temps, la temperatura mitjana?
c) Calculeu els equilibris tèrmics del problema.
d) Quan val $\lim_{t\to+\infty} u(x,y,t)$?

Problema 11. Sigui $g : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ contínua i fitada. Usant el nucli de Gauss a tot $\mathbb{R}$, trobeu la solució del problema

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & x > 0, \quad t > 0 \\ u(0,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = g(x), & x \ge 0. \end{cases}$$

(Indicació: considereu de fer alguna reflexió).