Àlgebra Lineal

Problemes del Tema 3: Aplicacions lineals

1. Justifiqueu si són lineals o no les aplicacions següents:

(a) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida per $f(x,y) = x + y$;

(b) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida per $f(x,y) = xy$;

(c) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida per $f(x,y) = (x + 2y,\, x - 2y,\, 3y)$;

(d) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida per $f(x,y) = x^2 + y^2$;

(e) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida per $f(x,y) = (a^2x + b^2y,\, a^3x + b^3y)$, on $a, b \in \mathbb{R}$;

(f) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ definida per $f(x,y) = (x + y,\, |x|,\, |y|,\, y)$;

(g) $f\colon \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ definida per $f(p(x)) = p'(x)$;

(h) $f\colon \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ definida per $f(p(x)) = p(x + 1)$;

(i) $f\colon \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ definida per $f(A) = A\,A^t$;

(j) $f\colon \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ definida per $f(A) = A - A^t$.

2. Calculeu el nucli i la imatge de les aplicacions lineals següents i digueu en cada cas si l'aplicació és injectiva, exhaustiva o bijectiva:

(a) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida per $f(x,y) = (x + 2y,\, 4x + 6y)$;

(b) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida per $f(x,y) = (x - y,\, 3x + 2y,\, 5x + 5y)$;

(c) $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida per $f(x,y,z) = (x + 2y + 3z,\, -x + 3y + 2z)$;

(d) $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definida per $f(x,y,z,t) = (x - y + z,\, x + t,\, y - z + t,\, x + t)$;

(e) $f\colon \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ definida per $f\big(p(x)\big) = p'(x) + p(0) + x^2p''(\pi)$;

(f) $f\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definida per $f(A) = A^t + (\operatorname{tr} A)I_2$;

(g) $f\colon \mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definida per

$$f(A) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Sigui E un espai vectorial de dimensió finita i sigui $f : E \to F$ una aplicació lineal. Proveu que, donada una base qualsevol $\{u_1, \ldots, u_n\}$ de E, se satisfà:

(a) f és injectiva si, i només si, $f(u_1), \ldots, f(u_n)$ són linealment independents;

(b) f és exhaustiva si, i només si, $f(u_1), \ldots, f(u_n)$ generen F;

(c) f és bijectiva si, i només si, $\{f(u_1), \ldots, f(u_n)\}$ és base de F.

4. Siguin $f : E \to F$ i $g : F \to G$ aplicacions lineals. Demostreu que la composició $g\,f$ és una aplicació lineal i proveu la igualtat $\operatorname{Nuc}(g\,f) = f^{-1}(\operatorname{Nuc} g)$.

5. Sigui $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'aplicació lineal definida per $f(x,y,z) = (2x-3y+z,\, -x+2y-2z,\, x-3y+5z)$. Calculeu:

(a) una base de $\operatorname{Nuc} f$ i de $\operatorname{Im} f$;

(b) $f^{-1}(u)$ i $f^{-1}(v)$ per als vectors $u=(-1,1,-2)$ i $v=(1,1,1)$;

(c) $f(E)$ i $f(F)$ per als subespais $E=[(1,0,-1),(3,3,2)]$ i $F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x-y-z=0\}$;

(d) $f^{-1}(E)$ i $f^{-1}(F)$ per als subespais

$$E=[(-1,1,-2),(-1,0,1)] \qquad \text{i} \qquad F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid\ x+y+z=x+2y+3z=0\}.$$

6. Sigui $f:\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\to\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'aplicació definida per $f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a-b & c \\ b-a & 0 & d-c \\ -c & c-d & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Proveu que f és lineal.

(b) Trobeu una base de $\operatorname{Nuc} f$ i de $\operatorname{Im} f$.

(c) És f injectiva? És f exhaustiva?

(d) Trobeu un complementari de $\operatorname{Nuc} f$ en $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ i un complementari de $\operatorname{Im} f$ en $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

7. Sigui $f:\mathbb{R}^3\to M_2(\mathbb{R})$ l'aplicació definida per $f(x_1,x_2,x_3)=\begin{pmatrix} x_1-x_2 & x_2-x_3 \\ x_3-x_2 & x_1-x_3 \end{pmatrix}$.

(a) Proveu que f és lineal.

(b) Trobeu una base de $\operatorname{Nuc} f$ i de $\operatorname{Im} f$.

(c) És f injectiva? És f exhaustiva?

(d) Trobeu un complementari de $\operatorname{Nuc} f$ en $\mathbb{R}^3$ i un complementari de $\operatorname{Im} f$ en $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

8. Discutiu si existeix alguna aplicació lineal $f\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ tal que $f(u_i)=v_i$ per a $i=1,2,3$ en cadascun dels casos següents:

(a) $u_1=(1,1,0)$, $u_2=(0,1,1)$, $u_3=(-1,1,0)$, $v_1=(1,2,3)$, $v_2=(3,2,1)$, $v_3=(8,4,0)$;

(b) $u_1=(1,1,0)$, $u_2=(0,1,1)$, $u_3=(-1,2,3)$, $v_1=(1,2,3)$, $v_2=(3,2,1)$, $v_3=(8,4,0)$;

(c) $u_1=(1,1,0)$, $u_2=(0,1,1)$, $u_3=(-1,2,3)$, $v_1=(1,2,3)$, $v_2=(3,2,1)$, $v_3=(0,1,2)$.

En cas afirmatiu, trobeu-les totes donant-ne la matriu en les bases canòniques.

9. Donada una base $\{u,v,w,t\}$ d'un $\mathbb{R}$-espai vectorial E, sigui $f\colon E\to E$ una aplicació lineal tal que

$$f(u)=u+2w,\quad f(v)=v+w,\quad f(w)=2u+v+w,\quad f(t)=2u+2v+4w.$$

Trobeu una base de $\operatorname{Nuc} f$ i de $\operatorname{Im} f$.

10. Sigui $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ l'aplicació lineal definida per $f(x,y)=(-2x-y,\,4x+2y)$. Calculeu la matriu de f en la base $\{(1,-1),\,(-2,3)\}$ de $\mathbb{R}^2$.

11. Considereu l'aplicació lineal $f\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ definida per $f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a-b+c-d,\ a+d,\ 0)$.

(a) Trobeu una base de $\operatorname{Nuc} f$ i de $\operatorname{Im} f$.

(b) Calculeu la matriu de f en la base $\{M_1, M_2, M_3, M_4\}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

i la base $\{v_1, v_2, v_3\}$ de $\mathbb{R}^3$, on $v_1 = (1,1,1)$, $v_2 = (0,1,1)$, $v_3 = (0,0,1)$.

12. Sigui $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'aplicació lineal determinada per $f(u_i) = v_i$ per a $i = 1,2,3$, on

$$\begin{array}{lll} u_1 = (0,1,1), & u_2 = (1,0,3), & u_3 = (2,1,0), \\ v_1 = (2,1,-1,0), & v_2 = (5,2,2,1), & v_3 = (5,-2,3,2). \end{array}$$

Trobeu la matriu de f en les bases canòniques de $\mathbb{R}^3$ i de $\mathbb{R}^4$. Determineu una base de $\operatorname{Nuc} f$ i de $\operatorname{Im} f$.

13. Sigui $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'aplicació lineal amb matriu associada $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ en la base canònica de $\mathbb{R}^3$.

(a) Trobeu una base de $\operatorname{Nuc} f$ i de $\operatorname{Im} f$.

(b) Trobeu una base de $\mathbb{R}^3$ tal que la matriu de f en aquesta base sigui $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

14. Sigui $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'aplicació lineal amb matriu associada $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ en la base $\{u_1, u_2, u_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ i la base $\{v_1, v_2\}$ de $\mathbb{R}^2$, on

$$u_1 = (1,1,1), \qquad u_2 = (1,1,0), \qquad u_3 = (1,0,0), \qquad v_1 = (1,1), \qquad v_2 = (1,0).$$

(a) Trobeu la matriu de f en les bases canòniques de $\mathbb{R}^3$ i $\mathbb{R}^2$.

(b) Trobeu la matriu de f en la base $\{u_1', u_2', u_3'\}$ de $\mathbb{R}^3$ i la base $\{v_1', v_2'\}$ de $\mathbb{R}^2$, on

$$u_1' = (1,0,1), \qquad u_2' = (0,1,0), \qquad u_3' = (1,1,0), \qquad v_1' = (2,1), \qquad v_2' = (1,2).$$

(c) Sigui w el vector de $\mathbb{R}^3$ amb coordenades $(1,2,3)$ en la base $\{u_1, u_2, u_3\}$. Trobeu les coordenades de $f(w)$ en la base $\{v_1', v_2'\}$.

15. Sigui f l'endomorfisme de $\mathbb{R}^3$ definit per $f(x,y,z) = (3x,\ x-y,\ 2x+y+z)$.

(a) Doneu la seva matriu en la base canònica.

(b) Trobeu la seva matriu en la base $\{(1,0,1),\ (-1,2,1),\ (2,1,1)\}$.

(c) Comproveu que f és bijectiva i calculeu les matrius de f^{-1} en les bases dels apartats (a) i (b).

(d) Proveu que $(f^2 - I)(f - 3I) = 0$.

16. Sigui f un endomorfisme d'un espai vectorial E tal que $f^2 + f + I = 0$. Proveu que f és un isomorfisme i trobeu el seu invers.

17. Sigui f un endomorfisme d'un espai vectorial V de dimensió finita. Demostreu que $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$ si, i només si, $V = \operatorname{Nuc} f \oplus \operatorname{Im} f$.

18. Sigui f un endomorfisme d'un espai vectorial E. Es diu que f és una *projecció* si és idempotent, és a dir, si $f^2 = f$.

(a) Demostreu que f és una projecció si, i només si, ho és $I - f$.

(b) Demostreu que, si f és una projecció, llavors $\operatorname{Nuc} f \oplus \operatorname{Im} f = E$. Doneu un contraexemple del recíproc.

19. Sigui f un endomorfisme d'un espai vectorial E.

(a) Proveu que $\operatorname{Im} f^{n+1} \subset \operatorname{Im} f^n$ i $\operatorname{Nuc} f^n \subset \operatorname{Nuc} f^{n+1}$ per a tot nombre natural n.

(b) Demostreu que, si E té dimensió finita, existeix un natural m tal que $\operatorname{Im} f^n = \operatorname{Im} f^m$ i $\operatorname{Nuc} f^n = \operatorname{Nuc} f^m$ per a tot $n \geq m$.

(c) Proveu, donant un contraexemple a l'espai de polinomis $\mathbb{R}[x]$, que l'apartat (b) no és cert si E no té dimensió finita.

20. Calculeu el determinant i la traça dels dos endomorfismes f de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definits així:

(a) $f(A) = A^t$.

(b) $f(A) = MA$, on $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

21. Comproveu que, per a tot endomorfisme f d'un espai vectorial E, els subespais $\operatorname{Nuc} f$ i $\operatorname{Im} f$ són invariants per f. Trobeu endomorfismes f_1, f_2, f_3 de $\mathbb{R}^4$ tals que $\dim \operatorname{Nuc} f_j = \dim \operatorname{Im} f_j = 2$ per a $j = 1, 2, 3$ i que satisfacin les condicions següents:

(a) $\operatorname{Nuc} f_1 \oplus \operatorname{Im} f_1 = \mathbb{R}^4$.

(b) $\operatorname{Nuc} f_2 = \operatorname{Im} f_2$.

(c) $\operatorname{Nuc} f_3 \cap \operatorname{Im} f_3$ té dimensió 1.

22. Considereu l'endomorfisme f de $\mathbb{R}^3$ definit per

$$f(x, y, z) = (-2x + 2y - 2z,\ -5x + 4y + 2z,\ y - z).$$

Comproveu que el subespai $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y - z = 0\}$ és invariant per f i trobeu la matriu de la restricció $f_{|E}$ en alguna base de E.

23. Considereu a $\mathbb{R}^3$ els vectors $v_1 = (5, -1, 2)$, $v_2 = (4, 1, 1)$, $v_3 = (-3, 0, 1)$ i la forma lineal

$$\phi(x, y, z) = 2x + 3y - z.$$

Comproveu que $\{v_1, v_2, v_3\}$ és una base de $\mathbb{R}^3$ i calculeu les coordenades de ϕ en la seva base dual.

24. Trobeu la forma lineal $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ que té coordenades $(1, 1, 1)$ en la base dual de la base de $\mathbb{R}^3$ formada pels vectors $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(a, b, 1)$.

25. Comproveu que $\{(1,1,0),\ (0,1,0),\ (0,1,-1)\}$ és una base de $\mathbb{R}^3$ i expresseu la seva base dual en termes de la base dual de la base canònica.

26. Donada una base $\mathcal{C} = \{e_1, e_2, e_3\}$ d'un espai vectorial E, considereu els vectors $v_1 = 5e_1 - e_2 + 2e_3$, $v_2 = 4e_1 + e_2 + e_3$, $v_3 = -3e_1 + e_3$. Sigui $\mathcal{C}^* = \{e_1^*, e_2^*, e_3^*\}$ la base dual de $\mathcal{C}$. Proveu que $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ és una base de E i expresseu la forma lineal $2e_1^* + 3e_2^* - e_3^*$ en la seva base dual.

27. Donada una base $\mathcal{C} = \{e_1, e_2, e_3\}$ d'un espai vectorial E, sigui $\mathcal{C}^* = \{e_1^*, e_2^*, e_3^*\}$ la seva base dual. Considereu les formes lineals $\omega_1 = 2e_1^* + e_2^* - e_3^*$, $\omega_2 = e_1^* - e_2^* + e_3^*$, $\omega_3 = e_3^*$. Proveu que $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ és una base de l'espai dual E^* i trobeu la base $\{v_1, v_2, v_3\}$ de E tal que $\omega_i = v_i^*$ per a $i = 1, 2, 3$.

28. Siguin $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ les formes lineals de $\mathbb{R}_2[x]$ definides per

$$\omega_1(p(x)) = p(1), \quad \omega_2(p(x)) = p(-1), \quad \omega_3(p(x)) = p(0).$$

Proveu que $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ és una base de l'espai dual de $\mathbb{R}_2[x]$ i trobeu la base de $\mathbb{R}_2[x]$ que té aquesta base com a base dual.

29. Sigui $f : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^2$ l'aplicació lineal definida per $f(a + bx + cx^2) = (a + b,\ a + c)$. Considereu les bases $\mathcal{B}_u = \{1,\ 1 + x,\ x^2\}$ de $\mathbb{R}_2[x]$ i $\mathcal{B}_v = \{(1,0),\ (1,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$. Calculeu la matriu de l'aplicació dual de f en les bases duals de $\mathcal{B}_v$ i $\mathcal{B}_u$, respectivament.

30. Donat un espai vectorial E de dimensió n, siguin $\omega_1, \ldots, \omega_n$ formes lineals de E tals que

$$\omega_1(v) = \cdots\cdots = \omega_n(v) = 0$$

per a algun vector v de E no nul. Proveu que $\omega_1, \ldots, \omega_n$ són linealment dependents.

31. Donat un espai vectorial E de dimensió n, siguin ω_1, ω_2 formes lineals de E linealment independents. Proveu que $\dim(\mathrm{Nuc}\,\omega_1 \cap \mathrm{Nuc}\,\omega_2) = n - 2$.