Facultat de Matemàtiques i Estadística

Universitat Politècnica de Catalunya - BarcelonaTech

Apunts d'Àlgebra Lineal (Primer curs del Grau de Matemàtiques)

Àlex Batlle Casellas

May 13, 2020

Índex

1 Matrius, determinants i sistemes lineals.

Definició:
Una **matriu** és una col·lecció de $m \times n$ nombres (d'un cos $\mathbb{K}$) organitzats de manera rectangular. Denotarem a_{ij} com l'element a la fila i, columna j. Notació: $A = (a_{ij})$.

- $m = n \rightarrow$matriu quadrada.
- Vector columna: $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.
- Vector fila: $\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$.
- La **matriu zero** és la matriu (de qualssevol dimensions) tots els elements de la qual són 0.
- Una **matriu diagonal** és una matriu quadrada tal que $a_{ij} = 0\ \forall i \neq j$.
- La **matriu identitat d'ordre** n és una matriu diagonal $n \times n$, $\mathrm{Id_n}$ tal que $a_{ij} = 1\ \forall i = j$.
- Una matriu triangular:
  - Superior: $a_{ij} = 0\ \forall i > j$ (zeros per sota la diagonal).
  - Inferior: $a_{ij} = 0\ \forall i < j$ (zeros per sobre la diagonal).

El conjunt de matrius $m \times n$ sobre el cos $\mathbb{K}$ és $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$.
Definició:
La **matriu transposada** d'$A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ és $A^t \in \mathcal{M}_{n\times m}$ tal que $a^t_{ij} = a_{ji}$.

- Una **matriu simètrica** és una matriu quadrada tal que $A^t = A$.
- Una **matriu antisimètrica** és una matriu quadrada tal que $A^t = -A$ (en particular, els elements de la diagonal són tots zero).

Definició:
Operacions amb matrius:

- Suma. $C := A+B \implies c_{ij} = a_{ij}+b_{ij}$. Associativa, commutativa, amb element neutre (la matriu zero), amb element oposat ($-A := (-a_{ij})$). Es té $(A+B)^t = A^t + B^t$.
- Producte per un escalar $\lambda \in \mathbb{K}$. $\lambda A := (\lambda a_{ij})$. $0A = 0, \lambda(A+B) = \lambda A+\lambda B, (\lambda A)^t?\lambda A^t$.
- Producte entre matrius. Siguin $A \in \mathcal{M}_{m\times n}, B \in \mathcal{M}_{n\times p}$. Aleshores, $AB := C \in \mathcal{M}_{m\times p}$ tal que $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$. Cada columna de la matriu producte és una combinació lineal de les columnes d'A.

Definició:
La **traça d'una matriu** $A = (a_{ij})$ és $\operatorname{tr} A := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

- $\operatorname{tr}(A + B) = \operatorname{tr} A + \operatorname{tr} B$.

- $\operatorname{tr}(\lambda A) = \lambda \operatorname{tr} A \ \forall \lambda \in \mathbb{K}$.
- $\operatorname{tr}(A^t) = \operatorname{tr} A$.
- $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.

Propietats: Producte de matrius.

- $\mathrm{Id_m}\, A = A\, \mathrm{Id_n} = A$ (element neutre).
- $A(BC) = (AB)C$.
- $A(B + C) = AB + AC$.
- $(A + B)C = AC + BC$.
- En general, $AB \neq BA$.
- $(AB)^t = B^t A^t$.
- En general, $\nexists A^{-1}$.

Definició:
La **matriu inversa** d'$A \in \mathcal{M}_n$ és una matriu $A^{-1} \in \mathcal{M}_n$ tal que $AA^{-1} = A^{-1}A = \mathrm{Id_n}$.
Propietats:

- La inversa, si existeix, és única.
- $(A^{-1})^{-1} = A$.
- $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$.
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
- $(A^{-1})^k = (A^k)^{-1}$.

Definició:
Eliminació Gaussiana.
Transformacions elementals: donada una matriu $m \times n$, les transformacions elementals són les següents:

E_1: $r_i \leftrightarrow r_j$ (canviar dues files).

E_2: $r_i \leftarrow cr_j$ (multiplicar per un escalar no nul).

E_3: $r_i \leftarrow r_i + cr_j$ (sumar un múltiple d'una fila a una altra).

Eliminació Gaussiana:

2 Espais vectorials.

Considerem el conjunt d'n-tuples de nombres reals:

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) | x_i \in \mathbb{R}\}.$$

2.1 Operacions a $\mathbb{R}^n$.

1. **Suma:** Sigui $u = (x_1, x_2, \ldots, x_n), v = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Aleshores:

$$u + v = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n) \in \mathbb{R}^n.$$

2. **Multiplicació per un escalar:** Sigui $u = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R}$. Aleshores:

$$cu = (cx_1, cx_2, \ldots, cx_n) \in \mathbb{R}^n.$$

<u>PROPIETATS:</u>

- $u + v = v + u$. (commutativitat)
- $(u + v) + w = u + (v + w)$. (associativitat)
- $\exists \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n : \; u + \mathbf{0} = u$. (vector zero; notació alternativa, $\vec{0}$)
- $\forall u \in \mathbb{R}^n \exists - u \in \mathbb{R}^n : \; u + (-u) = \mathbf{0}$.
- $c(u + v) = cu + cv$. (distributivitat)
- $(c + d)u = cu + du$. (distributivitat)
- $c(du) = (cd)u$.
- $1u = u$.

2.2 Espai vectorial sobre un cos $\mathbb{K}$.

Sigui $\mathbb{K}$ un cos commutatiu (per exemple $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$). Un espai vectorial sobre $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K}$-e.v.) és un conjunt de vectors E amb dues operacions $+$ i $\cdot$.

- $+$: Donats $u, v \in E$ dóna un element $u + v$ també d'E.
  És una operació commutativa, associativa, té element neutre ($\mathbf{0}$ o $\vec{0}$) i tot $u \in E$ té invers respecte $+$ $(-u)$.
- $\cdot$: Donats $u \in E$ i $c \in \mathbb{K}$ dóna un element cu d'E.

La suma i el producte compleixen

$$c(u + v) = cu + cv \quad (c + d)u = cu + du \quad c(du) = (cd)u \quad 1u = u \quad \forall u, v \in E, c, d \in \mathbb{K}.$$

Exemple:

- $\mathbb{K}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) | x_i \in \mathbb{K}\}$ és un $\mathbb{K}$-e.v. amb la suma i el producte naturals heretats de $\mathbb{K}$.
- $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ és un $\mathbb{K}$-e.v. format per matrius de dimensions $m \times n$ amb entrades a $\mathbb{K}$ i les operacions naturals de la suma de matrius i el producte per un escalar.
- El conjunt de polinomis de grau $\leq d$, $\mathbb{R}_d[x] = \{p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_d x^d | a_i \in \mathbb{R}\}$ és un espai vectorial amb la suma de polinomis i el producte per un escalar.
- $\mathbb{R}[x] = \{$polinomis en una variable x i coeficients en els reals$\}$ és un $\mathbb{R}$-e.v.
- El conjunt $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ de funcions $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ és un $\mathbb{R}$-e.v.

Propietats:

1. $0u = \mathbf{0} = c\mathbf{0}$.
2. $(-1)u = -u$.
3. $(-c)u = c(-u) = -(cu) = -cu$.
4. $cu = \mathbf{0} \iff c = 0 \vee u = \mathbf{0}$.

Demostració:

1. Sigui $v = 0u = (0+0)u = 0u + 0u = v + v$. Aleshores $v = v + v \iff v + (-v) = v + v + (-v) \iff v = \mathbf{0}.\square$
2. Sigui $v = (-1)u$. Aleshores si $u + v = \mathbf{0}$, $v = -u$.

   $$u+v = u+(-1)u = (u_1, \dots, u_n)+(-u_1, \dots, -u_n) = (u_1-u_1, \dots, u_n-u_n) = (0, \dots, 0) = \mathbf{0}.\square$$

3. $-c = (-1)c \implies (-c)u = (-1)cu = c(-1)u = c(-u) = (-1)cu = -(cu) = -cu.\square$
4. $\implies: cu = \mathbf{0} \wedge c \neq = \implies$ **PENDENT D'ACABAR.**

Definició:
Un vector u és combinació lineal dels vectors $u_1, u_2, \ldots, u_k$ si existeixen escalars $c_1, c_2, \ldots, c_k$ tals que $u = c_1u_1 + c_2u_2 + \ldots + c_ku_k$. Els escalars c_i són els coeficients de la combinció lineal.
Esbrinar si un vector a $\mathbb{K}^n$ és combinació lineal d'una colecció de vectors donada és equivalent a resoldre un sistema lineal d'equacions:

$$\exists c_1, c_2, \ldots, c_k \in \mathbb{K} : u = c_1u_1 + c_2u_2 + \ldots + c_ku_k?$$

$$c_1 \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{pmatrix} + \ldots + c_k \begin{pmatrix} x_{1k} \\ x_{2k} \\ \vdots \\ x_{nk} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1k} \\ x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \ldots & x_{nk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_k \end{pmatrix}$$

Proposició:
Un sistema $Ax = b$ és compatible si i només si b és una combinació lineal de les columnes d'A.
Demostració: $Ax = b$ és compatible $\iff \exists c_1, \ldots, c_n$ solució de:

$$\begin{pmatrix} a^1 & \ldots & a^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \end{pmatrix} \iff c_1(a^1) + \ldots + c_n(a^n) = (b) \iff b \text{ és una combinació}$$

lineal dels vectors columna d'A amb coeficients $c_1, \ldots, c_n$.$\square$

2.3 Subespais vectorials.

Sigui E un $\mathbb{K}$-e.v. Aleshores un subconjunt $V \neq \emptyset$ d'E és un subespai vectorial si V és un espai vectorial en si mateix (amb la suma i el producte d'E). Això és equivalent a:

$$\forall u, v \in V \ \forall c, d \in \mathbb{K} \quad cu + dv \in V.$$

Exemple:

- $V = \mathbb{K}^n$ és un subespai vectorial de $\mathbb{K}^n$.
- $V = \{\mathbf{0}\}$ és un subespai vectorial de qualsevol E.
- $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x - y = 0, 3z = 0\}$ és un subespai vectorial d'$\mathbb{R}^3$.
- $F = \{(a + 2b, 0, b) \in \mathbb{R}^3 | a, b \in \mathbb{R}\}$ és un subespai vectorial d'$\mathbb{R}^3$.

IMPORTANT! Els subespais vectorials són **tancats respecte combinacions lineals**.

Proposició:

Sigui $Ax = \mathbf{0}$ un sistema lineal (homogeni), on $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Aleshores, el conjunt de solucions $V = \{v \in \mathbb{K}^n | Av = \mathbf{0}\}$ és un subespai vectorial de $\mathbb{K}$.

Demostració: Si $u \in V$ i $v \in V$, $Au = \mathbf{0}$ i $Av = \mathbf{0}$. Aleshores, $u + v \in V$ i $A(u + v) = Au + Av = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}.\square$

Definició:

Siguin $v_1, \ldots, v_k$ vectors d'E. El conjunt de totes les combinacions lineals de $v_1, \ldots, v_k$,

$$\{c_1v_1 + \ldots + c_kv_k | c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{K}\}$$

s'anomena el **conjunt generat** per $v_1, \ldots, v_k$ i s'escriu $[v_1, \ldots, v_k]$.

Proposició:

$V = [v_1, \ldots, v_k]$ és un subespai vectorial i és el subespai més petit que conté a $\{v_1, \ldots, v_k\}$.

Demostració: Siguin $u, v \in V$. Aleshores, $u = x_1v_1 + \ldots + x_kv_k$ i $v = y_1v_1 + \ldots + y_kv_k$, $x_i, y_i \in \mathbb{K}$.

$$\implies cu + dv = (cx_1 + dy_1)v_1 + \ldots + (cx_k + dy_k)v_k \text{ és}$$

$$\text{combinació lineal de } v_1, \ldots, v_k \implies cu + dv \in V.\square$$

3 Aplicacions lineals

4 Diagonalització

Definició:
Diem que un endomorfisme és *diagonalitzable* a $\mathbb{K}$ si existeix una base v d'E tal que $M_v(f)$ és una matriu diagonal $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.