

**12.** Si  $A \subset \mathbb{R}^m$ , demostreu que:

- a)  $\overset{\circ}{A}$  és el conjunt obert més gran contingut en  $A$ . És a dir, si  $B$  és un obert dins  $A$ , aleshores  $B \subset \overset{\circ}{A}$ .
- b)  $\bar{A}$  és el conjunt tancat més petit que conté  $A$ . És a dir, si  $C$  és un tancat que conté  $A$ , aleshores  $\bar{A} \subset C$ .

**Resolució**

- a)  $B$  és obert  $\iff \overset{\circ}{B} = B \iff \forall p \in B \exists B_r(p) \subset B \implies \forall p \in B \subset A \exists B_r(p) \subset B \subset A \implies \overset{\circ}{B} \subset \overset{\circ}{A} \implies B \subset \overset{\circ}{A}. \square$
- b)  $\forall p \in \bar{A} (\forall B_r(p) A \cap B_r(p) \neq \emptyset) \implies \forall p \in \bar{A} (\forall B_r(p) C \cap B_r(p) \neq \emptyset) \implies \forall p \in \bar{A}, p \in \bar{C} = C \implies \bar{A} \subset C. \square$

**13.** Donats dos conjunts  $A, B$ , es defineix  $A + B = \{x + y \mid x \in A, y \in B\}$ . Suposeu  $A$  obert.

- a) Demostreu que si  $y \in B$ , el conjunt  $A + \{y\}$  és obert.
- b) Demostreu que el conjunt  $A + B$  és obert.

**Resolució**

- a)  $A + \{y\} = \{a + y \mid a \in A\}$ . Com que la suma ha d'estar ben definida, sumar  $y$  al conjunt és anàleg a fer un desplaçament fixat de tot el conjunt  $A$ . Aquesta operació no modifica l'estructura d' $A$ , doncs només el desplaça a una altra localització dins del conjunt ambient  $M$ , i els elements de la frontera d' $A$  segueixen sense pertànyer a  $A + \{y\}$ . Per tant, sabent que  $\text{Int } A, \text{Fr } A, \text{Ext } A$  formen una partició del conjunt ambient per qualsevol conjunt  $A$ , segueix que  $A + \{y\} = \text{Int}(A + \{y\})$ , i per tant,  $A + \{y\}$  és un obert.  $\square$
- b) Això ho podem veure utilitzant l'apartat anterior;  $A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$  és el mateix que la unió següent:

$$\bigcup_{y \in B} (A + \{y\}).$$

Com que  $A + \{y\}$  és obert i és sabut que la unió arbitrària d'oberts és oberta, es dedueix que  $A + B$  és un obert.

**15.** Demostreu que:

- a) La intersecció d'un nombre arbitrari (finit o infinit) de subconjunts compactes de  $\mathbb{R}^n$  també és compacte.
- b) La unió d'un nombre finit de subconjunts compactes de  $\mathbb{R}^n$  també és compacte.
- c) La unió d'un nombre infinit de subconjunts compactes de  $\mathbb{R}^n$  pot no ser compacte. (Doneu-ne exemples).

## Resolució

- a) Com que ens trobem a  $\mathbb{R}^n$ , n'hi ha prou amb veure que la intersecció arbitrària de tancats és tancada (vist a teoria) i que la intersecció arbitrària de fitats és fitada.

Tancada. Vist a teoria.

Fitada. Tenim un nombre arbitrari de conjunts fitats  $\{A_\alpha\}, A_\alpha \subseteq M$ . Sabem, com a propietat elemental de conjunts, que  $\bigcap_\alpha A_\alpha \subseteq A_i \forall i$ . Com que els  $A_i$  són fitats, existeix una bola  $B_{r_i}(p_i)$ , per algun  $p_i \in A_i$  tal que  $A_i \subseteq B_{r_i}(p_i)$ . Per tant, sigui  $B_{r_0}(p_0)$  la bola més gran que fita els conjunts  $A_i$ ; aleshores tenim  $\bigcap_\alpha A_\alpha \subseteq A_i \subseteq B_{r_0}(p_0) \forall i$ , per tant,  $\bigcap_\alpha A_\alpha$  està fitat.  $\square$

- b) Com que ens trobem a  $\mathbb{R}^n$ , n'hi ha prou amb veure que la unió finita de tancats és tancada (vist a teoria) i que la unió finita de fitats és fitada.

Tancada. Vist a teoria.

Fitada. Sigui  $\{A_\alpha\}$  una família finita de  $n$  subconjunts fitats de  $\mathbb{R}^n$ . Aleshores, segueix que  $\forall \alpha \exists p_\alpha \in A_\alpha, r_\alpha \in \mathbb{R}^+ : A_\alpha \subseteq B_{r_\alpha}(p_\alpha)$ . Aleshores, siguin  $p_0$  un  $p_\alpha$  qualsevol i  $r_0 = \max\{r_1, \dots, r_n\} + \max_j\{d(p_0, p_j)\}$ . Llavors tenim

$$\bigcup_\alpha A_\alpha \subseteq B_{r_0}(p_0).$$

- c) Donaré dos exemples:

- (1) Siguin  $I_n = [-n, n] \subset \mathbb{R}$ . Aleshores, tenim  $\bigcup_{n=1}^\infty I_n = \mathbb{R}$ , que no és compacte.
- (2) Siguin  $T_n \equiv \bar{B}_n(0) \subset \mathbb{R}^m$ . Aleshores, tenim  $\bigcup_{n=1}^\infty T_n = \mathbb{R}^m$ . que tampoc és compacte.