Exercicis de Càlcul d'una Variable

GRAU DE MATEMÀTIQUES. FME.

Departament de Matemàtiques
Universitat Politècnica de Catalunya

Curs 2018-2019

1 Funcions elementals

1. Trobeu el domini de la funció
$$f(x) = \frac{1}{1 + \frac{1}{1+\frac{1}{x}}}.$$

2. Resoleu les equacions següents:
   (a) $2x + \sqrt{x} = 1$.
   (b) $\sqrt{x+3} + \sqrt{x-2} = \sqrt{6x-11}$.
   (c) $\sqrt{\frac{x}{2} + 4} = \sqrt[3]{2x+8}$.
   (d) $e^{2x} - 2e^{x} = 15$.
   (e) $(\log x)^2 = \log(x^4)$.
   (f) $\cos(2x) = \sin(x)$, per $x \in [-5, 5]$.

3. Resoleu les desigualtats següents:
   (a) $\frac{2x-3}{x+2} < \frac{1}{3}$.
   (b) $x^2 - 5x + 9 > x$.
   (c) $\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} > 0$.
   (d) $x^2 - (a+b)x + ab < 0$.
   (e) $|x-5| < |x+1|$.
   (f) $|x^2 - x| > 1$.
   (g) $|x-1| + |x+1| < 1$.

4. Trobeu l'interval més gran en el qual la funció $f(x) = \sqrt{1 - |x| + |x-1|}$ té inversa. Calculeu la inversa en aquest cas.

5. Trobeu la funció inversa de $f(x) = x^2 - x + 1$ quan es restringeix a $x \geq 1/2$. Quin és el domini de la funció inversa?

6. Proveu que la funció $f(x) = 5x^3 + 9$ té inversa a tot $\mathbb{R}$ i doneu-ne l'expressió explícita.

7. Una funció f satisfà
$$f(2x+3) = x^2, \quad \text{per tot } x \in \mathbb{R}.$$
Quan val $f(t)$ per $t \in \mathbb{R}$? Quan val $f(f(2))$?

8. Proveu que si m és un nombre natural que no és quadrat de cap nombre natural, és a dir, $m \neq n^2$ per a tot $n \in \mathbb{N}$, llavors $\sqrt{m}$ és un nombre real no racional.

   Indicació: Useu la descomposició de m en factors primers.

9. Justifiqueu les afirmacions següents:

   (a) La suma d'un nombre racional i un nombre irracional és un nombre irracional.

   (b) El producte d'un nombre racional no zero per un nombre irracional és un nombre irracional.

   (c) La suma i el producte de dos nombres irracionals pot ser racional o irracional.

   (d) Els nombres $\sqrt{2}+\sqrt{3}$, $\sqrt{6}-\sqrt{2}-\sqrt{3}$ i $\dfrac{\sqrt{5}+2}{3\sqrt{5}+4}$ són irracionals.

10. Proveu les desigualtats següents i justifiqueu quan són igualtats:

    (a) $a+\dfrac{1}{a}\geq 2$, on $a>0$.

    (b) $2xy\leq x^2+y^2$.

    (c) $4xy\leq (x+y)^2$.

    (d) $x^2+xy+y^2\geq 0$.

    (e) $(a^2+a+1)(b^2+b+1)(c^2+c+1)\geq 27abc$, on $a>0,\ b>0,\ c>0$.

11. Proveu les desigualtats següents:

    (a) $0<x+y-xy<1$, sempre que $0<x<1$ i $0<y<1$.

    (b) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{a+b-x}<\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$, sempre que $0<a<x<b$.

12. Proveu que $|x|+|y|+|z|\leq |x+y-z|+|x-y+z|+|-x+y+z|$.

    Indicació: utilitzeu la desigualtat triangular per a nombres reals, $|x+y|\leq |x|+|y|$.

13. Estudieu quines de les següents igualtats són certes i, quan no ho siguin, doneu un contraexemple. Se suposa que f, g i h són funcions definides a $\mathbb{R}$.

    (a) $f\circ(g+h)=f\circ g+f\circ h$.

    (b)) $(g+h)\circ f=g\circ f+h\circ f$.

    (c) $\dfrac{1}{f\circ g}=\dfrac{1}{f}\circ g$.

    (d) $\dfrac{1}{f\circ g}=f\circ\dfrac{1}{g}$.

14. Siguin $f,\ g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$. Indiqueu el domini natural de definició de la funció h donada per la regla que a cada cas s'indica

$$h(x)=\frac{f(x)}{g(x)},\quad h(x)=\arcsin(f(x)),\quad h(x)=\log(f(x))$$

$$h(x)=\sqrt{f(x)},\quad h(x)=\arccos(f(x)),\quad h(x)=\arctan(f(x)),\quad h(x)=g(x)^{f(x)}.$$

15. Una funció f és parella si $f(x)=f(-x)$ i senar si $f(x)=-f(-x)$.

(a) Estudieu si la suma, el producte i la composició de funcions parelles o senars és una funció parella o senar. Considereu tots els casos possibles.
(b) Proveu que tota funció pot escriure's de forma única com suma d'una funció parella més una funció senar.

16. Proveu que la funció donada per $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$, és estrictament decreixent en $\mathbb{R}^+$. Deduïu que
$$\frac{|x+y|}{1+|x+y|} \leq \frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|}, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

17. (a) Compareu $a^{\log b}$ i $b^{\log a}$.
(b) Simplifiqueu les expressions $a^{\log(\log a)/\log a}$ i $\log_a(\log_a(a^{a^x}))$.

18. Proveu que $\log(x + \sqrt{1+x^2}) + \log(\sqrt{1+x^2} - x) = 0$.

19. Sigui $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció que verifica les propietats:
(a) $f(x+y) = f(x) + f(y)$ per a tot $x, y \in \mathbb{R}$.
(b) $f(xy) = f(x)f(y)$ per a tot $x, y \in \mathbb{R}$.

Proveu que o bé f és $f(x) = 0$ per a tot $x \in \mathbb{R}$, o bé és $f(x) = x$ per tot $x \in \mathbb{R}$.

Indicació: Suposeu que f no és identicament nul.la, proveu primer que f és estrictament creixent i que $f(r) = r$ per a tot $r \in \mathbb{Q}$. Suposeu també que hi ha algun nombre a tal que $f(a) \neq a$ i deduïu una contradicció (utilitzeu que entre dos nombres reals qualssevol sempre hi ha un nombre racional).

20. Sigui $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció que verifica les propietats:
(a) $f(xy) = f(x) + f(y)$ per a tot $x, y \in \mathbb{R}^+$.
(b) $f(x) > 0$ per a tot $x > 1$;
(c) $f(e) = 1$.

Prova que $f(x) = \log(x)$ per a tot $x \in \mathbb{R}^+$.

Indicació: Proveu primer que f és creixent i que $f(e^r) = r$ per a tot $r \in \mathbb{Q}$. Sigui $\varphi(x) = f(\exp(x))$. Justifiqueu que φ és estrictament creixent. Suposeu que hi ha algun nombre a tal que $\varphi(a) \neq a$ i deduïu una contradicció (utilitza que entre dos nombres reals qualssevol sempre hi ha un nombre racional).

21. Proveu les igualtats següents:
$$\cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}; \quad \sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}};$$
$$\tan(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}; \quad x \in (-1,1); \quad \arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}, \ x \in [-1,1].$$

22. Les funcions hiperbòliques elementals són el sinus, cosinus i tangent hiperbòlics, definits respectivament, com:
$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}; \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}; \quad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}.$$

(a) Proveu les igualtats següents: $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ i $\tanh^2 x = 1 - \dfrac{1}{\cosh^2 x}$.

(b) Trobeu el domini i recorregut d'aquestes tres funcions hiperbòliques i doneu les seves gràfiques.

23. Doneu l'expressió explícita de les funcions inverses de les funcions hiperbòliques elementals anomenades $\arg\sinh$, $\arg\cosh$ i $\arg\tanh$, respectivament. Trobeu els corresponents domini i recorregut d'aquestes funcions i les gràfiques respectives.

24. Proveu que la funció $f(x) = x + e^x$ és estrictament creixent, deduïu que f és bijectiva de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{R}$ i feu un esquema de la seva gràfica.

2 Successions i sèries numèriques

1. Trobeu l'ínfim i el suprem en $\mathbb{Q}$ dels conjunts següents, en cas d'existència. Quins tenen mínim o màxim?
   (a) $A = \left\{ \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N} \right\}$.
   (b) $B = A \cup \{0\}$.
   (c) $C = \left\{ \frac{1}{n} + (-1)^n,\ n \in \mathbb{N} \right\}$.
   (d) $D = \{x \in \mathbb{Q};\ x > 0,\ x^2 < 3\}$.
   (e) $E = \{x \in \mathbb{Q};\ x^2 < 4\}$.
   (f) $F = \{x \in \mathbb{Q};\ x^2 + 3x + 2 < 0\}$.

2. Utilitzant la definició de límit, proveu
   (a) $\lim_n \frac{1}{n+1} = 0$.
   (b) $\lim_n \frac{3n}{n+2} = 3$.
   (c) $\lim_n \frac{2n+1}{3n} = \frac{2}{3}$.
   (d) $\lim_n \frac{n^2+1}{2n^2+1} = \frac{1}{2}$.

3. Per a $\varepsilon = 1/1000$, trobeu el mínim n_0 tal $|a_n - l| < \varepsilon$, per a $n > n_0$ en cadascun dels límits de l'exercici anterior.

4. Proveu la desigualtat de Bernouilli:
$$(1+x)^n \geq 1 + nx, \quad \forall x > -1,\ n \in \mathbb{N}.$$
   Justifiqueu que la igualtat es verifica si i només si $n = 1$ o $x = 0$.

5. A partir de la desigualtat de Bernouilli demostreu que si $x > -1$
$$(1+x)^{\frac{1}{n}} \leq 1 + \frac{x}{n}, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$
   Deduïu de la desigualtat anterior i/o del teorema binomial:
   (a) $\lim_n \sqrt[n]{c} = 1$, si $c > 0$.
   (b) $\lim_n \sqrt[n]{n} = 1$.

6. Justifiqueu els resultats següents:
   (a) $\lim_n (\sqrt{n^2+1} - n) = 0$
   (b) $\lim_n (\sqrt{n^2+n} - n) = \frac{1}{2}$
   (c) $\lim_n \left(\frac{1 + \cdots + n}{n^2} \right) = \frac{1}{2}$
   (d) $\lim_n \frac{n!}{n^n} = 0$

7. Utilitzant que $\lim_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$, trobeu els límits següents:
   (a) $\lim_n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$
   (b) $\lim_n \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}$
   (c) $\lim_n \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n$
   (d) $\lim_n \left(1 - \frac{2}{n}\right)^{n^2}$

8. Useu el lema del *sandvitx* per calcular els límits següents:
   (a) $\lim_n \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \right)$
   (b) $\lim_n \left(\sqrt[n]{n^2+n} \right)$
   (c) $\lim_n \left((n!)^{1/n^2} \right)$

9. (a) Sigui $\{x_n\}$ una successió i suposem que existeixen nombres $\rho \in (0,1)$, $n_0 \in \mathbb{N}$, tals que per tot $n \geq n_0$ es té $|x_{n+1}| \leq \rho |x_n|$. Proveu que $\lim_n \{x_n\} = 0$.

   (b) Sigui $\{x_n\}$ una successió de nombres no nuls verificant $\lim_n \dfrac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = \lambda$, on $0 \leq \lambda < 1$. Proveu que $\lim_n \{x_n\} = 0$.

   (c) Utilitzeu l'apartat anterior per provar que, donats $a \in (-1,1)$ i $k \in \mathbb{N}$, $\lim_n \{n^k a^n\} = 0$.

10. Estudieu la convergència de les successions següents

   (a) $x_n = n^2 \left(\dfrac{1+n}{3n}\right)^n$

   (b) $x_n = \sqrt[n]{a^n + b^n}$, $(a > 0,\ b > 0)$

   (c) $x_n = \dfrac{x^n}{n!}$, $(x \in \mathbb{R})$

   (d) $x_n = \left(\sqrt{n^2 + \sqrt{n}} - n\right)\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{2n}\right)$

11. Estudieu la convergència de la successió:

$$x_n = 2\sqrt{n} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

   Indicació: Proveu que per tot $k \geq 1$, $0 < x_{k+1} - x_k < \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}$

12. Donats $0 < a_1 < b_1$, definim per tot $n \in \mathbb{N}$:

$$b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}.$$

   Justifiqueu que les successions així definides són monòtones i convergeixen al mateix valor.

13. Estudieu la convergència de les successions següents:

   (a) $x_1 = 1$, $x_{n+1} = \sqrt{3x_n}$.

   (b) $x_1 = 3$, $x_{n+1} = \dfrac{3+3x_n}{3+x_n}$.

   (c) $x_1 = 1$, $x_{n+1} = \dfrac{4+3x_n}{3+2x_n}$.

   (d) Per $a \in (-2,-1)$, definim $x_1 = a$, $x_{n+1} = \dfrac{x_n - 2}{x_n + 4}$.

   (e) Donat $a > 0$, definim $x_1 = \sqrt{a}$, $x_{n+1} = \sqrt{a + x_n}$.

   Indicació: per cada cas, estudieu monotonia i acotació.

14. (a) Sigui $\{x_n\}$ una successió de nombres reals i suposem que existeixen nombres $\rho \in (0,1)$, $M > 0$ i n_0 tal que $|x_{n+1} - x_n| \leq M\rho^n$ per tot $n \geq n_0$. Proveu que $\{x_n\}$ és convergent.

   Indicació: Tenint en compte que tot $n, h \in \mathbb{N}$ es compleix:

$$\rho^{n+h-1} + \rho^{n+h-2} + \cdots + \rho^n < \frac{\rho^n}{1-\rho}$$

   deduïu que $\{x_n\}$ verifica una condició de Cauchy.

(b) Sigui $\{x_n\}$ una successió de nombres reals i suposem que existeixen nombres $\rho \in (0,1)$, $n_0 \in \mathbb{N}$, tals que $|x_{n+1} - x_n| \leq \rho |x_n - x_{n-1}|$ per tot $n \geq n_0$. Proveu que $\{x_n\}$ és convergent utilitzant l'apartat anterior.

(c) Estudia la convergència de la successió definida per tot $n \in \mathbb{N}$ com:

$$x_1 = 1, \; x_{n+1} = \frac{1}{1 + x_n}.$$

15. Calculeu els límits superior i inferior de les successions següents

(a) $a_n = (-1)^n n/(n+1)$.

(b) $a_n = \frac{1}{n}$, si n és parell i $a_n = \frac{2n}{(3n+1)}$, si n és senar.

(c) $a_n = (-1)^n n/(n+1) + (-1)^{n+1} 2n/(n+1)$.

(d) $a_n = \cos^n \frac{2\pi n}{3}$.

16. Sigui $\{x_n\}$ una successió i suposem que hi ha dues successions parcials $\{x_{\sigma(n)}\}$ i $\{x_{s(n)}\}$ que convergeixen al mateix nombre x i tal que $\sigma(\mathbb{N}) \cup s(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$. Prova que $\{x_n\}$ també és convergent a x.

17. Sigui $\{x_n\}$ una successió tal que les successions parcials $\{x_{2n}\}$, $\{x_{2n+1}\}$ i $\{x_{3n}\}$ són convergents. Prova que $\{x_n\}$ també és convergent.

18. Suposant que $\lim\{x_n\} = x$, proveu que el conjunt $A = \{x_n; n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ té element màxim i mínim.

19. (Criteris de la mitjana aritmètica i geomètrica)

(a) Suposeu que $\{a_n\}_n \to L$ on L és un nombre real, o $L = +\infty$, $L = -\infty$, llavors es té

$$\left\{ \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \right\}_n \to L.$$

(b) Suposeu que $\{a_n\}_n \to L$ on L és un nombre real, o $L = +\infty$ i la successió $\{a_n\}_n$ és de termes positius, llavors es té

$$\{ \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \}_n \to L.$$

(c) Suposeu que $\{x_{n+1}/x_n\}_n \to L$ on $\{x_n\}_n$ és una successió de termes positius i L és un nombre real o bé $L = \infty$. Proveu que $\{\sqrt[n]{x_n}\}_n \to L$. *Indicació:* apliqueu l'apartat *b*) a la sucessió $a_1 = 1$, $a_n = x_{n+1}/x_n$ per tot $n \in \mathbb{N}$.

20. Calculeu el límit de les successions següents:

(a) $x_n = \dfrac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}}$, on $p \in \mathbb{N}$.

(b) $x_n = \dfrac{\log n}{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}}$.

(c) $x_n = \dfrac{1 + 4 + 7 + \cdots + (3n-2)}{5 + 7 + 9 + \cdots + (2n+3)}$.

(d) $x_n = \left(\dfrac{(2n)!}{(n!)^2} \right)^{1/n}$.

(e) $x_n = \sqrt[n]{\left(\dfrac{2}{1}\right)\left(\dfrac{3}{2}\right)^2 \cdots \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n}$.

21. Si $\{a_n\}$ és una successió monòtona decreixent de termes positius tal que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ és convergent, llavors:
$$\lim_{n\to\infty} n a_n = 0.$$

22. Siguin $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ successions de termes positius tals que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ i $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ són convergents. Proveu que les sèries $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (a_n+b_n)^2$ i $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n/n$ també convergeixen.

23. Estudieu el caràcter de les sèries següents:
    (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$.
    (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+2+\cdots+n}$.
    (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cosh(n)}{\cosh(2n)}$.
    (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q^n-p^n}$, on $0<p<q$.

24. Estudieu el caràcter de les sèries següents:
    (a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\log n}$.
    (b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\log^2 n}$.
    (c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^{(\log n)}}$.
    (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{5^n}$.
    (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{2^n n!}$.
    (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n^2}}{(n+1)^{n^2}}$.

25. Sigui $a_n \geq 0$ per tot $n\in\mathbb{N}$. Proveu que les sèries $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ tenen el mateix caràcter: totes dues convergents o divergents, simultàniament.

26. Estudia la convergència i, mitjançant el càlcul de les seves sumes parcials, calculeu la suma de las sèries: a)$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ i b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1+\frac{1}{n}\right)$

27. Raoneu que la sèrie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n a^n$ és convergent si i només si $|a|<1$ i trobeu la seva suma.

    Indicació: Per trobar la suma de la sèrie, calculeu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)a^n - \sum_{n=1}^{\infty} n a^n$.

3 Continuïtat i límits de funcions

1. Proveu que si $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ és contínua en a també ho és $|f|$. Doneu un exemple de funció discontínua amb valor absolut continu.

2. Denotem per $[x]$ la part entera de x, el menor nombre enter més petit o igual a x. Feu un esquema de les gràfiques de les funcions següents i estudieu la seva continuïtat:

   (a) $f(x) = x - [x]$.

   (b) $f(x) = \left[\dfrac{1}{x}\right]$.

3. Estudieu la continuïtat de la funció $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ donada per:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \text{ o } x \text{ és irracional,} \\ \frac{1}{q} & \text{si } x = p/q \text{ (fracció irreduïble).} \end{cases}$$

4. Sigui $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua. Suposem que $a \le f(x) \le b$ per tot $x \in [a,b]$. Proveu que existeix algun punt $c \in [a,b]$ tal que $f(c) = c$.

5. Sigui $a > 1$. Proveu que l'equació $x + e^{-x} = a$ té almenys una solució positiva i una negativa.

6. Proveu que l'equació $x + e^x + \arctan x = 0$ té una sola solució real. Doneu un interval de longitud 1 en el qual es trobi aquesta solució.

7. (a) Sigui $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua amb $f(a) < f(b)$. Donat $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$, proveu que hi ha algun punt $c \in \left[a, b - \frac{(b-a)}{n}\right]$ tal que

$$f(c + (b-a)/n) - f(c) = \frac{f(b) - f(a)}{n}.$$

   (b) Un corredor recorre 6 quilòmetres en 30 minuts. Proveu que en algun moment de la seva carrera recorre 1 quilòmetre en exactament 5 minuts.

8. Sigui $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua i decreixent. Proveu que hi ha un únic $a \in \mathbb{R}$ tal que $f(a) = a$.

9. Sigui $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua i complint l'equació funcional $f(x)((f \circ f)(x)) = 1$ per tot $x \in \mathbb{R}$. Sabent que $f(1000) = 999$, calculeu $f(500)$.

10. Proveu que la funció $f : (-1,1) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida per $f(x) = \log\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)$ és bijectiva. Calculeu f^{-1} i comproveu que és una funció contínua.

11. Sigui $L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Proveu que

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \to +\infty} f\left(\frac{1}{x}\right) = L,$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x\to -\infty} f\left(\frac{1}{x}\right) = L,$$

12. Sigui $f : (0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$ la funció definida per $x \in (0,1)$ com:

$$f(x) = \frac{2}{x} + \frac{1}{x(x-1)}.$$

Proveu que $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ i que $\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$. Deduïu que la imatge de f és tot $\mathbb{R}$.

13. Sigui $\alpha \in \mathbb{R}$ i $f : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ la funció definida per $f(0) = 0$ i, per $x > 0$ com

$$f(x) = x^\alpha \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

Estudieu la continuïtat de f segons els valors d'α.

14. Siguin $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ les funcions definides per:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+e^{1/x}} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{x} & \text{si } x < 0, \\ x & \text{si } 0 \leq x < 1, \\ \sqrt[5]{x}, & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

Estudieu la continuïtat de f i g en tot punt de $\mathbb{R}$ i l'existència de límits de f i g a $+\infty$ i $-\infty$.

15. Sigui $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció contínua no nul.la tal que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$. Proveu que si $f(x) > 0$ per tot $x \in \mathbb{R}$, llavors f assoleix un màxim absolut sobre $\mathbb{R}$.

16. Sigui f una funció contínua amb límit finit tant a $+\infty$ com a $-\infty$, proveu que f és fitada i uniformement contínua. Doneu un exemple d'una funció fitada i uniformement contínua, amb domini a tot $\mathbb{R}$, que no verifiqui les hipòtesis anteriors.

17. Estudieu si són uniformement contínues les funcions següents:
    (a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ a l'interval $[1,\infty)$
    (b) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ a l'interval $(0,1]$
    (c) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ a tot $\mathbb{R}$.

18. Sigui $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció contínua al punt $x = 0$ i verificant l'equació funcional de Cauchy:

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \quad \text{per tot } x, y \in \mathbb{R}.$$

Proveu que f és contínua a tot $\mathbb{R}$ i que $f(x) = ax$ per una certa constant $a \in \mathbb{R}$.

Indicació: Proveu primer que $f(x) = ax$ per $x \in \mathbb{Q}$.

19. Considerem l'equació $x^n + x^{n-1} + \cdots + x^2 + x = 1$, per a tot $n \geq 1$ enter.

(a) Fixat n, demostreu que l'equació té una única solució real positiva. Denoteu-la per α_n.

(b) Demostreu que la successió $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és decreixent i trobeu-ne el límit.

20. Sigui I un interval tancat, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció i suposem que existeix $\alpha \in (0,1)$ tal que, per tot $x, y \in \mathbb{R}$:
$$|f(x) - f(y)| \leq \alpha |x - y|.$$
Es diu llavors que f és **contractiva** en I. Suposem, a més, que $f(x) \in I$ per tot $x \in I$. Donat un punt $a \in I$, definim $x_1 = a$ i, recurrentment, $x_{n+1} = f(x_n)$ per tot $n \in \mathbb{N}$.

(a) Proveu que la successió $\{x_n\}$ és de Cauchy i, per tant convergent, cap un punt fix x de f, és a dir, $f(x) = x$.
Indicació: Podeu fer servir l'exercici 14 apartat b) del tema anterior.

(b) Proveu que aquest punt fix és únic.

(c) Estudieu la convergència de la successió $\{x_n\}$ definida per $x_1 = \sqrt{2}$, $x_{n+1} = \sqrt{2 - x_n}$ i calculeu el seu límit.

4 Derivabilitat

1. Un punt P es mou sobre la part de la paràbola $x = y^2$ situada al primer quadrant de forma que la seva coordenada x augmenta a raó de 5 cm/seg. Calculeu la velocitat a la qual el punt P s'allunya de l'origen quan $x = 9$.

2. El volum d'un cub augmenta a una raó de 70 cm^3 per minut. Calculeu la velocitat a la qual augmenta l'àrea d'aquest cub quan la longitud del costat és de 12 cm.

3. Una bola esfèrica de gel es desfà de manera uniforme a tota la superfície, a raó de 50 cm^3/min. Amb quina velocitat disminueix el radi de la bola quan aquest medeix 15 cm?

4. Calculeu el valor d'a i b en funció de c, perquè existeixi la derivada en el punt c per cadascuna de les funcions següents:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq c, \\ ax + b & x > c. \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|} & |x| > c, \\ a + bx^2 & |x| \leq c. \end{cases} \quad h(x) = \begin{cases} \cos x & x \leq c, \\ ax + b & x > c. \end{cases}$$

5. Calculeu directament, aplicant la definició, la derivada de les funcions següents en un punt genèric a del seu domini

   (a) x^3, (b) $\sqrt{x+7}$, (c) $\dfrac{1}{x+2}$

6. Suposem que f és una funció que verifica una desigualtat del tipus $|f(x)| \leq |x|^r$ a algun interval obert que conté el punt 0, on $r > 1$. Proveu que f és derivable en el 0 i calculeu $f'(0)$.

7. Calculeu la derivada en tot punt de la funció definida per:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

8. Calculeu les equacions de les rectes tangent i normal a una el.lipse d'equació

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

   en un punt (x_0, y_0) genèric d'aquesta.

9. Determineu el rectangle amb costats paral.lels als eixos coordenats inscrit a l'el.lipse d'equació $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, i que tingui àrea màxima.

10. Trobeu un punt P de la circumferència $x^2 + y^2 = 1$ amb coodenades positives i tal que el triangle els vèrtexs del qual són el punt $(0, 0)$ i les interseccions de la tangent a la circumferència en el punt P amb els eixos de coordenades tingui àrea mínima.

11. Es vol confeccionar una tenda de campanya de forma cònica amb un volum prefixat. Per fer això, es retalla un sector circular d'un cercle de tela i es construeix la tenda. Calculeu quines han de ser totes les seves dimensions perquè la quantitat de material emprat sigui mínim.

12. Demostra que de tots els triangles isòscels que poden circumscriure a una circumferència de radi r, el que té àrea mínima és l'equilàter d'alçada $3r$.

13. Calculeu el límit, en el punt a indicat a cada cas, de cadascuna de les funcions següents:
    (a) $f(x) = (\sin x + \cos x)^{1/x},\ a = 0.$
    (b) $f(x) = (\cot x)^{\sin x},\ a = 0$
    (c) $f(x) = \dfrac{x - \arctan x}{\sin^3 x},\ a = 0.$
    (d) $f(x) = (1 + \tan x)^{1/x^2},\ a = 0.$
    (e) $f(x) = \dfrac{\log(\sin x)}{(\pi - 2x)^2},\ a = \pi/2.$
    (f) $f(x) = (x + e^x)^{\frac{1}{x}},\ a = 0.$

14. Justifiqueu que per tot $r \in \mathbb{R}$ i tot $s > 0$ es verifica:
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\log x)^r}{x^s} = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^r}{e^{sx}} = 0, \quad \lim_{x\to 0^+} x^s |\log x|^r = 0.$$

15. Calculeu el límit, en el punt a que s'indica a cada cas, per les funcions següents:
    (a) $f(x) = \dfrac{x^2 \sin(1/x)}{\log x},\ a = +\infty.$
    (b) $f(x) = \sin x\ \sin\dfrac{1}{x},\ a = 0,\ a = +\infty.$
    (c) $f(x) = \sin\sqrt{1+x} - \sin\sqrt{x},\ a = +\infty.$
    (d) $f(x) = \left(\cos\dfrac{\pi}{x+2}\right)^{x^2},\ a = +\infty.$

16. Sigui $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable a $\mathbb{R}$ i dos cops derivable en el punt 0, sent a més, $g(0) = 0$. Definim $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ com $f(x) = \dfrac{g(x)}{x}$ si $x \neq 0$, $f(0) = g'(0)$. Estudieu la derivabilitat de f. És f' contínua a $x = 0$?

17. Calculeu els límits següents:
    (a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}\right).$
    (b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right)^{\frac{1}{\log x}}$
    (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^{1/x^2}$
    (d) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{1}{\log x} - \frac{1}{x-1}.$
    (e) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x - \sin x}{x(1-\cos x)}.$
    (f) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/(1-\cos x)}.$

18. Calculeu els límits següents i expliqueu perquè no és aplicable la regla de L'Hôpital:
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x - \sin x}{x + \cos x}; \quad \lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin(1/x)}{\sin x}.$$

19. Calculeu el nombre de zeros i la imatge de la funció polinòmica $f(x) = x^6 - 3x^2 + 2$.

20. Calculeu el nombre de solucions de l'equació $3\log x - x = 0$.

21. Justifiqueu que l'equació $x^2 = x\sin x + \cos x$ té exactament dues solucions reals.

22. Utilitzeu el teorema de Rolle per justificar els fets següents:

    (a) L'equació $5x^4 - 4x + 1 = 0$ té alguna solució a l'interval $[0,1]$.

    (b) Entre cada dues solucions reals de l'equació $e^x \sin x = 1$ hi ha almenys una solució real de l'equació $e^x \cos x = -1$.

23. Sigui $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua a l'interval $[a,b]$ i dos cops derivable a l'interval (a,b). Suposem que el segment d'extrems $(a, f(a))$ i $(b, f(b))$ talla la gràfica de f en un punt $(c, f(c))$ amb $a < c < b$. Demostreu que existeix algun punt $d \in (a,b)$ tal que $f''(d) = 0$.

    Indicació: Interpreteu gràficament el resultat.

24. Siguin $0 < x < y$. Proveu que:

    (a) $\dfrac{y-x}{y} < \log y - \log x < \dfrac{y-x}{x}$.

    (b) $\dfrac{y-x}{1+y^2} < \arctan y - \arctan x < \dfrac{y-x}{1+x^2}$.

25. Proveu que per tot $x > -1$ es compleix

$$\frac{x}{x+1} \leq \log(x+1) \leq x.$$

    Quan es dóna la igualtat a cadascuna de les desigualtats?

26. Proveu que per tot $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ es verifica que

    (a) $1 - \dfrac{x^2}{2} < \cos x < 1$; (b) $\dfrac{2x}{\pi} < \sin x < x < \tan x$.

27. Sigui $f : (0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció derivable tal que $|f'(x)| \leq 1$ per tot $x \in (0,1)$. Proveu que la successió $\{f(1/n)\}$ és convergent.

28. Sigui $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable amb f' creixent. Proveu que la funció $g : (a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida per tot $x \in (a,b]$ com

$$g(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

    és creixent.

29. Calculeu una funció polinòmica φ de grau mínim tal que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - \varphi(x)}{x^5} = 0$.

30. Calculeu una funció polinòmica φ de grau mínim tal que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(\arctan(x+1)) - \varphi(x)}{x^2} = 0$.

31. Calculeu, fent servir un desenvolupament de Taylor convenient, un valor aproximat del nombre real α amb un error menor de 10^{-3} en cadascun dels casos següents:

    (a) $\alpha = \sqrt[3]{7}$. (b) $\alpha = \sqrt{e}$. (c) $\alpha = \sin\left(\dfrac{1}{2}\right)$. (d) $\alpha = \sin(61^{\circ})$.

32. Useu polinomis de Taylor adequats per calcular els límits a l'origen de les següents funcions:

(a) $\dfrac{x - \tan x}{\log(1 - x^3)}$ (d) $\dfrac{(1 - \cos x)^3}{\sin(x^6)}$ (g) $\dfrac{\arctan(x)\,\cos(x^2) - x}{x^3}$

(b) $\dfrac{1 - \cos(x^2)}{\arcsin(x^4)}$ (e) $\dfrac{\cos x - e^{-x^2/2}}{\sin(x^4)}$ (h) $\dfrac{\sin(x^2) - \sin^2(x)}{x^4}$

(c) $\dfrac{e^x - x - \cos x}{\sin^3 x}$ (f) $\dfrac{(\sin x - x)^2 - \frac{1}{36}x^6}{x^8}$ (i) $\dfrac{x + \log(1 - x)}{1 - \sqrt{1 - x^2}}$

33. Calculeu els valors màxim i mínim de les funcions següents en els intervals que s'indiquen:

(a) $f(x) = x^3 - x^2 - 8x + 1$ en l'interval $[-2, 2]$.

(b) $f(x) = \dfrac{x + 1}{x^2 + 1}$ en l'interval $[-1, 2]$.

(c) $f(x) = \dfrac{1}{2}(\sin^2 x + \cos x) + 2\sin x - x$ en l'interval $[0, \pi/2]$.

(d) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}(5 - 2x)$ en l'interval $[-1, 2]$.

(e) $f(x) = -x^3 + 12x + 5$ en l'interval $[-3, 3]$.

34. Sigui $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la funció definida per $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ per $x \neq 0$, i $f(0) = 0$. Estudieu la continuïtat i derivabilitat de f i calculeu la seva imatge.

35. Raoneu si la funció $f(x) = 1 + x^8 e^{-x}$ té un extrem relatiu a l'origen, de dues maneres diferents: estudiant-ne el creixement, i a partir dels polinomis de Taylor de la funcio e^{-x}.

36. Justifiqueu que existeix una funció $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable i que verifica que $g(x) + e^{g(x)} = x$ per tot $x \in \mathbb{R}$. Calculeu $g'(1)$ i $g'(1 + e)$.

37. Sigui $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ verificant que $f(x + y) = f(x)f(y)$ per tot $x, y \in \mathbb{R}$; $f(0) \neq 0$ i f derivable al punt $x = 0$. Justifica que f és derivable a tot punt i que existeix un nombre real α tal que $f(x) = e^{\alpha x}$ per tot $x \in \mathbb{R}$.

5 Integració

1. Calculeu les primitives següents.

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx$

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}\,dx$

(c) $\displaystyle\int e^{e^x} e^x\,dx$

(d) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$

(e) $\displaystyle\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

(f) $\displaystyle\int \frac{\arctan x}{1+x^2}$

(g) $\displaystyle\int \frac{1+\sin x}{\cos^2 x}\,dx$

(h) $\displaystyle\int \frac{1}{x\log x}\,dx$

(i) $\displaystyle\int \log(\cos x)\tan x dx$

(j) $\displaystyle\int \frac{x}{\cos^2(x^2)}\,dx$

(k) $\displaystyle\int \frac{1}{\cosh x}\,dx$

(l) $\displaystyle\int \frac{1}{x\log x\log(\log x)}\,dx$

2. Calculeu les primitives següents, pel mètode d'integració per parts.

(a) $\displaystyle\int x\arctan x\,dx$

(b) $\displaystyle\int x(\log x)^2\,dx$

(c) $\displaystyle\int \log\sqrt{1+x^2}\,dx$

(d) $\displaystyle\int x^3 e^{x^2}\,dx$

(e) $\displaystyle\int e^{ax}\cos(bx)\,dx$, on $a,b\in\mathbb{R}$

3. Calculeu les primitives següents, mitjançant un canvi de variable.

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}\,dx$

(b) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{x}}\,dx$

(c) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\,dx$

(d) $\displaystyle\int \frac{\log(3x)}{x\,\log(6x)}\,dx$

(e) $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}\,dx$

(f) $\displaystyle\int \sqrt{1+x^2}\,dx$

(g) $\displaystyle\int \sqrt{x^2-1}\,dx$

(h) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-16}}\,dx$

(i) $\displaystyle\int \sqrt{-x^2+2x}\,dx$

4. Calculeu les primitives racionals següents.

(a) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^3-3x^2+3x-1}\,dx$

(b) $\displaystyle\int \frac{x^2-x+12}{(x-1)^2(x+2)}\,dx$

(c) $\displaystyle\int \frac{x+3}{x^2+x+2}\,dx$

(d) $\displaystyle\int \frac{x^3}{x^3+1}\,dx$

5. Calculeu les primitives següents, sense fer cap canvi de variable.

(a) $\displaystyle\int \cos^3 x\,dx$

(b) $\displaystyle\int \sin^2 x\,dx$

(c) $\displaystyle\int \cos^6(x/2)\,dx$

(d) $\displaystyle\int \sin^3 x\cos^2 x\,dx$

(e) $\displaystyle\int \sinh^2 x\,dx$

6. *Canvis de variable per a integrals de funcions racionals de funcions trigonomètriques.* Sigui $\mathcal{R}(z_1, z_2)$ una funció racional (quocient de polinomis) en dues variables. Els canvis de variable següents transformen integrals de funcions trigonomètriques, del tipus $\mathcal{R}(\cos x, \sin x)$, en integrals racionals.

   - $\sin x = t$, quan $\mathcal{R}(-\cos x, \sin x) = -\mathcal{R}(\cos x, \sin x)$.
   - $\cos x = t$, quan $\mathcal{R}(\cos x, -\sin x) = -\mathcal{R}(\cos x, \sin x)$.
   - $\tan x = t$, quan $\mathcal{R}(-\cos x, -\sin x) = \mathcal{R}(\cos x, \sin x)$.

   Utilitzeu algun d'aquests canvis de variable per calcular les primitives següents.

   (a) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x}$ (b) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x}$ (c) $\displaystyle\int \tan^4 x\, dx$ (d) $\displaystyle\int \frac{\sin x \cos x}{1 - \cos x}\, dx$

7. Sigui $f(x) = \dfrac{e^x \sin x}{x}$. Justifiqueu que f és integrable a $[0, 1]$ i es compleix la desigualtat
$$0 \leq \int_0^1 f(x)\ dx \leq e - 1.$$

8. Sigui f una funció contínua i positiva a l'interval $[a, b]$ tal que $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx = 0$. Proveu que $f(x) = 0$ per tot $x \in [a, b]$.

9. Fent servir que, si $x > 0$, $\displaystyle\int_1^x \frac{dt}{t} = \log x$. Justifiqueu les desigualtats
$$\frac{1}{n+1} < \log \frac{n+1}{n} < \frac{1}{n},$$
i deduïu d'aquestes que $e = \lim\limits_n \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$.

10. Calculeu els límits de les successions següents expressant-les com a sumes de Riemann

    (a) $x_n = \dfrac{1^\alpha + 2^\alpha + \cdots + n^\alpha}{n^{\alpha+1}}$, $\alpha > 0$.

    (b) $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}} + \dfrac{1}{\sqrt{n(n+2)}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n(n+n)}}$.

    (c) $x_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{n+n}$.

    (d) $x_n = \dfrac{n}{n^2+1} + \dfrac{n}{n^2+4} + \cdots + \dfrac{n}{n^2+n^2}$.

    (e) $x_n = \dfrac{n+1}{n^2+1} + \dfrac{n+2}{n^2+4} + \cdots + \dfrac{n+n}{n^2+n^2}$.

    (f) $x_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(n-k)k}{n^3}$

    (g) $x_n = \dfrac{1}{n^2} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \sin\left(\frac{k}{n}\frac{\pi}{2}\right)$

    (h) $x_n = \left(\dfrac{(2n)!}{n!\ n^n}\right)^{1/n}$.

    (i) $x_n = \displaystyle\sum_{k=np+1}^{nq} \frac{1}{k}$ $(p, q \in \mathbb{N},\ p < q)$.

11. Siguin f i g dues funcions definides en $[a, b]$, i $c \in (a, b)$. Suposem que f és integrable en $[a, b]$.

    (a) Si $g(x) = f(x)$, per a tot $x \neq c$, i $g(c) \neq f(c)$, proveu que g és integrable i $\int_a^b g(x)dx = \int_a^b f(x)dx$.

    (b) Suposem que f i g prenen els mateixos valors a $[a, b]$ excepte en un nombre finit de punts. Proveu que g és integrable i $\int_a^b g(x)dx = \int_a^b f(x)dx$.

12. Sigui f una funció integrable a $[-a, a]$, $a > 0$. Demostreu que

    (a) si f és una funció parella, aleshores $\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$.

    (b) si f és una funció senar, aleshores $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$.

    (c) si f és una funció parella o senar, aleshores $\int_{-a}^a (f(x))^2 \sin x dx = 0$.

13. Considereu la funció real f definida per

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x, & 0 \leq x \leq 1; \\ 2 - x, & 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

    Trobeu l'expressió analítica i estudieu la continuïtat i la derivabilitat de la funció

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt, \quad x \in [0, 2].$$

14. Sigui $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ la funció definida com $f(x) = 0$ si x és irracional, $f(x) = 1/n$ si $x = m/n$ és racional de $(0, 1)$ amb $\text{mcd}(m, n) = 1$. Proveu que f és integrable a $[0, 1]$ i que $\int_0^1 f(x)\ dx = 0$.

15. Comproveu les següents fórmules recurrents vàlides per $n \geq 2$, nombre natural :

    (a)
$$I_n = \int \cos^n x\ dx = \frac{1}{n}\left(\cos^{n-1} x \sin x + (n-1)I_{n-2}\right).$$

    (b)
$$J_n = \int \tan^n x\ dx = \frac{1}{n-1}\tan^{n-1} x - J_{n-2}.$$

16. Definim per tot $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\ dx$,

    (a) Proveu que $I_0 = \frac{\pi}{2}$, i $I_n = (n-1)(I_{n-2} - I_n)$, si $n \geq 2$.

(b) Proveu que $I_1 = 1$, i si $n \geq 1$

$$I_{2n} = \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-3)(2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n-2)(2n)} \cdot \frac{\pi}{2}$$

i

$$I_{2n+1} = \frac{2 \cdot 4 \cdots (2n-2)(2n)}{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)(2n+1)}.$$

(c) Deduïu que, si $n \geq 1$,

$$\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} = \left(\frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n-2)(2n)} \right)^2 \frac{(2n+1)\pi}{2}.$$

(d) Proveu les desigualtats $0 \leq I_{2n+1} \leq I_{2n} \leq I_{2n-1}$ i que, per tant,

$$1 \leq \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} \leq \frac{I_{2n-1}}{I_{2n+1}} = 1 + \frac{1}{2n}.$$

(e) Demostreu que

$$\lim_{n \to \infty} \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n-2)(2n)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)} \frac{1}{\sqrt{2n+1}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

(f) Demostreu que

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt{n} \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

17. Sigui f una funció contínua tal que $\displaystyle\int_0^x t\, f(t)\, dt = \sin x - x \cos x$. Calculeu $f(\frac{\pi}{2})$ i $f'(\frac{\pi}{2})$.

18. Sigui f una funció contínua i definim $F(x) = \displaystyle\int_1^x \left(t \int_1^t f(s)\, ds \right) dt$. Calculeu $F'(1)$ i $F''(x)$.

19. Proveu que per tot $x \in [0, \pi/2]$ es verifica la igualtat:

$$\int_0^{\cos^2 x} \arccos(\sqrt{t})\, dt + \int_0^{\sin^2 x} \arcsin(\sqrt{t})\, dt = \frac{\pi}{4}.$$

20. Sigui $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funció contínua. Es defineix $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2x} \int_{-x}^{x} f(t) dt, & x \neq 0. \\ f(0), & x = 0. \end{cases}$$

Demostreu que

(a) F és contínua a $\mathbb{R}$ i derivable a $\mathbb{R} - \{0\}$.

(b) si existeix $f'(0)$, aleshores existeix $F'(0)$.

21. Sigui $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funció contínua i derivable tal que $f(0) = 0$ i $f'(0) = 1$. Demostreu que
$$F(x) = \int_{-2x+1}^{4x^2-1} f(t)dt$$
té un mínim al punt $x = \frac{1}{2}$.

22. Estudieu la monotonia de la funció $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^4+t^2+2}}\,dt$.

23. Calculeu els límits següents:

    (a)
    $$\lim_{x\to 0^+} \frac{\int_0^{x^2} \sin(\sqrt{t})\ dt}{x^3}$$

    (b)
    $$\lim_{x\to +\infty} \frac{\left(\int_0^x e^{t^2}\ dt\right)^2}{\int_0^x e^{2t^2}\ dt}$$

    (c)
    $$\lim_{x\to 0} \frac{\int_1^{x^2+1} \frac{e^{-t}}{t}\ dt}{x^2}$$

24. Calculeu totes les funcions de classe C^1 en $\mathbb{R}$ tals que:
$$f^2(x) = \int_0^x \left(f(t)^2 + f'(t)^2\right)\ dt + 2018.$$

25. Sigui $f : [a, b] \longrightarrow [f(a), f(b)]$ una funció derivable tal que $f'(x) > 0$, per tot $x \in [a, b]$. Demostreu l'equació següent de les dues maneres que s'indiquen:
$$\int_a^b f(x)\ dx + \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(x)\ dx = bf(b) - af(a).$$

    (a) Treballant directament el membre de l'esquerra.
    (b) Derivant ambdós costats respecte b (i considerant a fix).

    Doneu una interpretació geomètrica d'aquesta fórmula.

26. Calculeu l'àrea comuna als cercles $x^2 + y^2 = 9$ i $(x - 3)^2 + y^2 = 9$.

27. Calculeu el valor d'$a > 0$ per tal que la funció $f(x) = x^3$ divideixi en dues parts iguals el triangle determinat per la funció $g(x) = ax$, l'eix OX i el punt de tall més gran de les funcions f i g.

28. Trobeu l'àrea limitada per la corba $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ i els eixos de coordenades.

29. Calculeu l'àrea de la regió comú a la circumferència $x^2+y^2 = 4$ i l'el.lipse $\frac{x^2}{16}+y^2 = 1$.