

**Exercicis per a entregar sobre continuïtat uniforme.  
Càlcul d'una variable. Grau de Matemàtiques. FME**

1. Proveu que  $f(x) = \sqrt{x}$  és uniformement contínua a  $[0, \infty)$ .

*Indicació:* Separeu el cas  $[0, 1]$  de l'interval  $[1, \infty)$ . En aquest darrer cas, proveu que  $f$  satisfà una condició de Lipschitz.

2. Proveu que  $f(x) = x^2$  no és uniformement contínua a  $[0, \infty)$ , veient explícitament que existeix  $\varepsilon > 0$ , i successions  $(x_n)_n$  i  $(y_n)_n$  no fitades amb  $(x_n - y_n)_n$  convergent a zero i tal que  $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$ .

3. Proveu que  $f(x) = \sin(x)$  és uniformement contínua a tot  $\mathbb{R}$  veient que satisfà una condició 1-Lipschitz a tota la recta real.

*Indicació:* Useu que, per tot  $a$  i  $b \in \mathbb{R}$ ,

$$\sin a - \sin b = 2 \sin \left( \frac{a - b}{2} \right) \cos \left( \frac{a + b}{2} \right).$$

(*Observació:*  $f(x) = \sin x$  és, doncs, una funció vàlida com l'exemple que es demana a l'exercici 16 del Tema 3).