Àlex Batlle Casellas

1. A la família d'afinitats de $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ d'equacions

$$\begin{cases} x' = ax + ay + b \\ y' = ax + 6y + b^2 \end{cases}$$

hi ha quatre homologies els eixos de les quals són els costats d'un paral·lelogram. Determineu els vèrtexs d'aquest paral·lelogram.

Resolució

Podem expressar les afinitats corresponents com

$$f_{a,b}(x,y) = \begin{pmatrix} a & a \\ a & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b \\ b^2 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \hat{b}.$$

Aleshores, els punts fixos compleixen $(M - \mathrm{Id}) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \hat{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Si escrivim això com a sistema lineal, trobarem valors d'a i b pels quals tenim rectes de punts fixos:

$$\left(\begin{array}{cc|c} a-1 & a & -b \\ a & 5 & -b^2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} -1 & a-5 & -b+b^2 \\ 0 & a^2-5a+5 & (a-1)b^2 - ab \end{array} \right)$$

Si volem que aquest sistema tingui per solució una recta, la matriu ha de tenir rang 1, i per tant, la segona fila ha de ser tota de zeros. Per tant, resolem les equacions que ens surten d'igualar els elements de la segona fila a zero, és a dir,

$$a^2 - 5a + 5 = 0, \qquad (a-1)b^2 - ab = 0,$$

de les que surten les solucions $a = \dfrac{5 \pm \sqrt{5}}{2}, b = 0, \dfrac{5 \pm \sqrt{5}}{3 \pm \sqrt{5}}$. En imposar aquests valors, podem agafar-ne exactament quatre combinacions, que fan una recta cada una.

$$\begin{aligned} r_1 : \ -x + \frac{-5+\sqrt{5}}{2} y &= 0, \\ r_2 : \ -x + \frac{-5-\sqrt{5}}{2} y &= 0, \\ r_3 : \ -x + \frac{-5+\sqrt{5}}{2} y &= \frac{5+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}, \\ r_4 : \ -x + \frac{-5-\sqrt{5}}{2} y &= \frac{5-\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}. \end{aligned}$$

Ara busquem les interseccions de les rectes que no són paral·leles i haurem trobat els vèrtexs del paral·lelogram.

- $r_1 \cap r_2 : x = 0, y = 0.$

- $r_1 \cap r_4 : \begin{cases} -x + \dfrac{-5+\sqrt{5}}{2} y = 0 \\ -x + \dfrac{-5-\sqrt{5}}{2} y = \dfrac{5-\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}} \end{cases} \implies (\cdots) \implies x = -\sqrt{5}, y = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}.$

- $r_3 \cap r_2 : \begin{cases} -x + \dfrac{-5-\sqrt{5}}{2} y = 0 \\ -x + \dfrac{-5+\sqrt{5}}{2} y = \dfrac{5+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} \end{cases} \implies (\cdots) \implies x = -\sqrt{5}, y = \dfrac{1+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}.$

- $r_3 \cap r_4 : \begin{cases} -x + \dfrac{-5+\sqrt{5}}{2} y = \dfrac{5+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} \\ -x + \dfrac{-5-\sqrt{5}}{2} y = \dfrac{5-\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}} \end{cases} \implies (\cdots) \implies x = 0, y = -1.$

Per tant, ja hem trobat els quatre vèrtexs, que són

$$\begin{aligned} A &= (0,0) \\ B &= (-\sqrt{5}, \frac{-1+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}) \\ C &= (-\sqrt{5}, \frac{1+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}) \\ D &= (0,1). \end{aligned}$$

2. Siguin F, A, B tres punts alineats del pla afí. Considerem totes les afinitats del pla que deixen fix F, transformen A en B i tenen una única recta fixa.

(a) Trobeu el lloc geomètric de les imatges d'un punt donat per aquestes afinitats.

(b) Demostreu que existeix una homotècia tal que les afinitats anteriors són el producte d'aquesta homotècia per les homologies especials d'eix FA.

Resolució