
Problema 1.* (a) Resoleu per separació de variables el problema

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & x \in (0,\pi), t > 0 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 1 & t > 0 \\ u(x,0) = 1 & x \in (0,\pi) \\ u_t(x,0) = \sin^2 x & x \in (0,\pi). \end{cases}$$

(b) Exteneu adequadament les condicions inicials i apliqueu la fórmula de d'Alembert per calcular $u(\pi/4, 3)$.

(c) Calculeu

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2\{4-(2k+1)^2\}}.$$

Problema 2.* Determineu la temperatura d'una barra de longitut π, si inicialment la temperatura és $x(\pi - x)$, en l'extrem de l'esquerra la temperatura sempre és nul·la i en el de la dreta no hi ha fluxe de calor. Preneu el coeficient de difusió $D = 1$.

Problema 3. En un instrument de vent recte (modelitzat per un interval per fer un primer estudi), $u(x,t)$ representa, per $x \in (0, L)$ i $t \geq 0$, la pressió de l'aire dins l'instrument. Es satisfà l'equació d'ones $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$. Quan una solució és periòdica en el temps, amb període T, la seva freqüència és $(2\pi)/T$.

En un instrument obert pels dos costats, com la flauta, la pressió u als dos extrems és igual a la pressió atmosfèrica, diem 0. Tenim, per tant, condicions de Dirichlet. En un instrument, com el clarinet, obert per un costat però no per l'altre (a on el músic exergeix pressió), tenim condicions de vora mixtes (una de Dirichlet, l'altre de Neumann; ambdues nul·les). Veure el llibre (free online) "Music: A Mathematical Offering", by Dave Benson.

Resoleu el problema de valors inicials per ambdos instruments usant sèries de Fourier. Per cada instrument, calculeu totes les freqüències que apareixen en la base de Fourier corresponent a l'instrument. S'anomenen harmònics de l'instrument. La freqüència més baixa, o to més greu, s'anomena to fonamental; els altres harmònics són sobre-tons del to fonamental (comprobeu que són múltiples enters del to fonamental).

Compareu els harmònics de la flauta i del clarinet. Perquè es fan les flautes més llargues que els clarinets en relació als seus diàmetres? Compareu també els sobretons que apareixen en cadascun dels dos instruments (això defineix el "timbre" de l'instrument).

Problema 4. Donat el problema

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & x \in (0,\pi),\ t > 0 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & t > 0 \\ u(x,0) = x(x-\pi) & x \in (0,\pi) \\ u_t(x,0) = \sin x & x \in (0,\pi), \end{cases}$$

calculeu $u(\pi/2, 2)$.

Problema 5.* (Una corda en un camp magnètic). Una corda metal·lica està fixada als punts $(0,0,0)$ i $(\pi,0,0)$ de l'eix x de $\mathbb{R}^3$. Per parametritzar el desplaçament en tres dimensions de la corda fem servir una funció que pren valors complexos $u(x) = u^z(x) + iu^y(x)$. La corda està carregada elèctricament i està immersa en un camp magnètic constant en la direcció x. Degut a les forces de Lorentz, l'equació per a petites vibracions d'aquesta corda és

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = i\kappa u_t & x \in (0,\pi), t > 0 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & t > 0 \\ u(x,0) = g(x) & x \in (0,\pi) \\ u_t(x,0) = h(x) & x \in (0,\pi), \end{cases}$$

on κ serà una certa constant (la densitat lineal de càrrega de la corda multiplicada per la intensitat del camp magnètic i dividida per la densitat lineal de la corda).

Useu separació de variables per calcular $u(x,t)$ per a $t > 0$ per $\kappa = 1$. Les forces de Lorentz provoquen amortiment de les solucions?

Problema 6. (Finances: l'equació de Black-Scholes). Els preus $u(s,t)$ dels principals derivats financers (com les *European call options*) es modelitzen amb l'equació de Black-Scholes:

$$u_t + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 u_{ss} + rsu_s - ru = 0 \qquad s > 0,\ t \in (0,T),$$

on la volatilitat σ i el tipus d'interès r son constants donades. Una "European call option" dóna dret a comprar un determinal actiu (*asset*) a un temps futur $T > 0$ i a un preu P fixats a priori. El preu real de la "call" a temps $t < T$ és igual a $u(s,t)$, i depèn per tant del valor s que té l'actiu a temps t.

(a) Trobeu $a > 0$ de forma que el canvi de variables del $s = e^{x/a}$ transformi l'equació de Black-Scholes en

$$v_t + v_{xx} + cv_x - rv = 0, \qquad x \in \mathbb{R},\ t > 0$$

on $u(s,t) = v(a \log s, t)$.

(b) Comproveu que la funció $\overline{v}(x,t) = v(x+ct, t)$ satisfà

$$\overline{v}_t + \overline{v}_{xx} - r\overline{v} = 0, \qquad x \in \mathbb{R},\ t \in (0,T).$$

(c) Feu el canvi $w(x,t) = e^{bt}\,\overline{v}(x, T-t)$ per a b apropiada per transformar l'equació anterior en la de la calor:

$$w_t - w_{xx} = 0, \qquad x \in \mathbb{R},\ t \in (0,T).$$

(d) Raoneu que el preu a temps $t = T$ d'una "European call option" és $u(s,T) = (s-P)^+$, on $(\,\cdot\,)^+$ denota la part positiva. Com podrieu calcular explícitament el valor de la opció $u(s,t)$ per a temps $t < T$?

Problema 7.* Es té l'equació de la calor amb condicions de frontera de Neumann:

$$\begin{cases} u_t - Du_{xx} = 0, & 0 < x < \pi,\ t > 0 \\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0, & t > 0 \\ u(x,0) = g(x), & 0 < x < \pi, \end{cases}$$

amb $D > 0$ i $g \in L^2\big((0,\pi)\big)$.

(a) Calculeu u per separació de variables i demostreu la convergència uniforme de u cap a la mitjana de les temperatures inicials $m = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi g(x)\,dx$ quan $t \to +\infty$.

(b) Proveu que si $g \in C^1\big([0,\pi]\big)$, llavors $u \in C^0\big([0,\pi] \times [0,\infty)\big)$.

(c) Proveu que si $g \in C^2\big([0,\pi]\big)$ i $g'(0) = g'(\pi) = 0$ llavors $u_x(\cdot,t)$ convergeix uniformement a g' en $[0,\pi]$ quan $t \to 0$. Discutiu la necessitat de la condició $g'(0) = g'(\pi) = 0$.