Àlex Batlle Casellas

1.

(i) Sigui F un gir de $\mathbb{E}^2_{\mathbb{R}}$ al voltant d'un punt p. Si $F(q_1) = q_2$, demostreu que p pertany a la recta perpendicular a $u = q_2 - q_1$ i que conté al punt $(q_1 + q_2)/2$. Com a aplicació, trobeu el gir de $\mathbb{E}^2_{\mathbb{R}}$ que verifica $F(1, 1) = (-1, 3)$ i que $F(2, 0) = (0, 4)$ (equacions, centre i angle de gir).

(ii) Sigui F una rotació al voltant d'una recta r de $\mathbb{E}^3_{\mathbb{R}}$. Si $F(p) = q$, demostreu que l'eix r pertany al pla π perpendicular al vector $u = q - p$ i que conté al punt $(p + q)/2$. Com a aplicació,si F és una rotació de $\mathbb{E}^3_{\mathbb{R}}$ tal que $F(1, 1, 1) = (1, 1, 0)$ i que $F(0, 1, 0) = (1, 0, 1)$, trobeu l'eix, l'angle de gir i les equacions de F.

Resolució

(i) Podem resoldre la primera part d'aquest apartat passant per la definició de mediatriu. La mediatriu (a $\mathbb{E}^2_{\mathbb{R}}$) de dos punts és el lloc geomètric de tots els punts que equidisten dels dos donats. Aleshores, primer notem que tant p com el punt mig $M := (q_1 + q_2)/2$ pertanyen a la mediatriu. Això es justifica pel punt p de la següent manera: com que F és un moviment, la distància entre dos punts i les seves imatges es conserva. Per tant, tenim que $||q_1 - p|| = ||F(q_1) - F(p)|| = ||q_2 - p||$ (p és punt fix per definició). Com a conseqüència d'aquest fet, p pertany a la mediatriu. Pel punt M no cal justificar que hi pertany, ja que per definició de punt mig ja equidista de q_1 i q_2. Ara volem veure que la mediatriu és perpendicular a la recta $\langle q_1, q_2\rangle$. Per tant, sigui x un punt de la mediatriu. Aleshores, tenim la següent cadena d'equivalències (abús de notació: s'ometran les fletxes indicadores de vector, és a dir, que $\vec{AB} \equiv AB$):

$$\begin{gathered} ||q_1x|| = ||q_2x|| \iff \langle q_1x, q_1x\rangle = \langle q_2x, q_2x\rangle \iff \langle q_1M + Mx, q_1M + Mx\rangle = \\ \langle q_2M + Mx, q_2M + Mx\rangle \iff \langle q_1M, q_1M\rangle + \langle Mx, q_1M\rangle + \langle q_1M, Mx\rangle + \langle Mx, Mx\rangle = \\ \langle q_2M, q_2M\rangle + \langle Mx, q_2M\rangle + \langle q_2M, Mx\rangle + \langle Mx, Mx\rangle \iff \langle q_1M, Mx\rangle = \langle q_2M, Mx\rangle \iff \\ \langle q_1M - q_2M, Mx\rangle = 0 \iff \langle q_1M + Mq_2, Mx\rangle = 0 \iff \langle q_1q_2, Mx\rangle = 0.\square \end{gathered} \tag{1}$$

Per tant, la mediatriu és perpendicular a la recta $\langle q_1, q_2\rangle$.
Pel cas particular donat, per trobar les equacions, angle i centre de gir, comencem plantejant com ha de ser la matriu d'aquest gir: com que estem a $\mathbb{E}^2_{\mathbb{R}}$, la matriu de la part lineal de F ha de ser (en alguna base) de la forma

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Per tant, plantegem les següents equacions:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \tag{2}$$

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Si restem la primera a la segona, queda la següent equació,

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

que té per solució $\cos\alpha = 0, \sin\alpha = 1$; d'aquí tenim l'angle de gir, $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$. Per trobar el terme independent de les equacions de F, agafem qualsevol de les dues equacions anteriors; per exemple, (2):

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Finalment, busquem el centre de gir, un punt fix:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Per tant, ja tenim totes les dades del moviment; es tracta d'un gir d'angle $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ i de centre $p_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Les seves equacions són:

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(ii) Per la primera part d'aquest apartat, fem un raonament semblant a l'anterior: com que les distàncies $d(p, r)$ i $d(F(q), F(r)) = d(p, r)$ es mantenen iguals a través de la rotació (perquè és un moviment), l'eix r pertany al pla mediatriu de p i q. Utilitzant la demostració (1) amb x un punt del pla mediatriu, podem veure altre cop que aquest és efectivament perpendicular a la recta $\langle p, q\rangle$ i per la definició de mediatriu, conté el punt mig del segment $\bar{pq}$.
Per trobar les equacions de la F en particular que ens demanen a la segona part, farem el següent: construïrem els plans perpendiculars a cada segment entre els punts donats i les respectives imatges, en farem la intersecció, i trobarem l'eix al voltant del qual es rota. L'angle de gir el calcularem directament un cop tinguem l'eix. I les equacions de F les escriurem en una referència ortonormal $\bar{\mathcal{R}} = \{p_0; v_1, v_2, v_3\}$ adequada, en la qual tindran la forma

$$F\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aleshores, siguin $p_1 = (1, 1, 1), F(p_1) = q_1 = (1, 1, 0)$ i $p_2 = (0, 1, 0), F(p_2) = q_2 = (1, 0, 1)$; el vector $u_1 = \vec{p_1 q_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, i el vector $u_2 = \vec{p_2 q_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$; i els punts mitjos de cada segment, $M_1 = \dfrac{1}{2}(p_1 + q_1) = \left(1, 1, \dfrac{1}{2}\right), M_2 = \dfrac{1}{2}(p_2 + q_2) = \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$. Amb aquesta informació, construïm els plans perpendiculars a cada segment que passen pels respectius punts mitjos, dels que forma part l'eix (com hem demostrat) i per tant, en fer-ne la intersecció tenim l'eix de rotació. π_i és el pla perpendicular al segment $\bar{p_i q_i}$ que passa pel seu punt mig M_i $(i = 1, 2)$. Per tant, surten

$$\begin{cases} \pi_1: & z = \dfrac{1}{2}; \\ \pi_2: & -x + y - z = \dfrac{1}{2}, \end{cases}$$

i la intersecció dóna l'eix de rotació, $r = \left(0, 1, \dfrac{1}{2}\right) + \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]$. Ara calculem el pla perpendicular a l'eix de rotació en el que es trobin, per exemple, p_1 i q_1. En general, el pla perpendicular a l'eix tindrà equació (depenent del punt de l'eix pel que passi)

$$\pi_d : \quad x + y = d. \tag{4}$$

El pla que busquem passa per p_1 i q_1; cal observar que amb que passi per un dels dos ja fem. Per tant, substituïm els valors de les coordenades de p_1 a (4), l'equació de π_d i trobem el pla perpendicular a r al qual pertanyen p_1 i q_1; l'anomenarem $\pi_\perp$. Per tant, ens queda

$$\pi_\perp : \quad x + y = 2. \tag{5}$$

Calculem la intersecció amb l'eix de rotació; surt el punt $o_1 = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Ara, mirem l'angle α que hi ha entre els vectors $v_p = \vec{o_1 p_1}$ i $v_q = \vec{o_1 q_1}$:

$$\cos\alpha = \frac{\langle v_p, v_q\rangle}{||v_p||||v_q||} = \frac{1}{4}.$$

Si orientem l'eix pel vector $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, l'angle de gir queda a l'interval $(0, \pi]$. Per tant, queda $\alpha \approx 1.31812$ rad, i les equacions de F queden, en la referència especial $\bar{\mathcal{R}}$,

$$F\begin{pmatrix}\bar{x}\\\bar{y}\\\bar{z}\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{15}}{4} & 0\\ 0 & \frac{\sqrt{15}}{4} & \frac{1}{4} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar{x}\\\bar{y}\\\bar{z}\\1\end{pmatrix}.$$

2. A l'espai euclidià $\mathbb{E}^3_{\mathbb{R}}$ amb la referència canònica, considerem els moviments f, g, h següents: f i g són les simetries especulars respecte els plants $\pi : \ x - y = 0$ i $\pi' : \ x + y + z = 0$ respectivament, i h té expressió

$$h(x, y, z) = \frac{1}{3}(x - 2y - 2z + 6, -2x - 2y + z + 6, -2x + y - 2z + 6).$$

(i) Classifiqueu el moviment $F = h \circ f$, tot donant els seus elements característics.

(ii) Classifiqueu i doneu els elements característics de $G = g \circ F$. (Indicació: no cal trobar l'expressió explícita de G).

(iii) Calculeu $F^{15}(0, 0, 0)$ i $G^{18}(0, 0, 1)$.

Resolució
Informació extreta de l'enunciat: les matrius d'f i g en referència canònica són

$$M(f; \mathcal{R}_{\text{ord}}) = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}; \quad M(g; \mathcal{R}_{\text{ord}}) = \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

(i) Primer cal posar h en forma matricial, que queda

$$h(x, y, z) = \begin{pmatrix}1/3 & -2/3 & -2/3\\ -2/3 & -2/3 & 1/3\\ -2/3 & 1/3 & -2/3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}6\\6\\6\end{pmatrix}.$$

D'aquí podem extreure tant si h és directe com si té punts fixos; veiem que és un moviment directe, i que té una recta de punts fixos, $r = (9,0,0) + [(-2,1,1)]$. A més, pel teorema de classificació podem igualar les traces de la matriu d'h en dues bases diferents, el que ens diu que h és una rotació de π rad al voltant de r. Sabem que f és un moviment invers, i per tant F és un moviment invers. Per saber si F té punts fixos, agafem un subespai director de π i veiem si el vector director de r hi pertany. Per exemple, un subespai director de π és $[(1,1,0),(0,0,1)]$. Com que el vector director de r no hi pertany, $r \cap \pi$ és un sol punt, i pel teorema de classificació, determinem que F es tracta d'un moviment invers amb un sol punt fix, que calculem tot seguit (calculant la intersecció entre r i π); surt $p_0 = (3,3,3)$.

(ii) Sabem que G és un moviment directe, ja que $\det \tilde{G} = \det \tilde{g} \det \tilde{F}$, i per tant $\det \tilde{G} = 1$, i que no té punts fixos: en particular, l'únic punt fix de F no pertany al pla de punts fixos de g. Per tant, G és un moviment helicoidal. Per calcular el vector de translació característic de G, agafarem el punt fix de F i li aplicarem G. $G(3,3,3) = (-3,-3,-3)$, i per tant el vector de translació ha de ser $v = (-6,-6,-6)$. L'angle de gir el trobarem calculant la matriu de la part lineal de G i aleshores, igualant la traça amb la forma del teorema de classificació; sortirà $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$.