Tema 2

21. Sigui $ABCD$ un paral.lelogram de diagonals AC i BD del pla afí. Estudieu l'afinitat f determinada per les condicions

$$f(A) = B \quad f(B) = D \quad f(C) = A.$$

Demostreu que f s'expressa, de forma única, com una homologia seguida d'una homologia central amb centre sobre l'eix de l'homologia.

Tenim $\vec{AD} = \vec{BC} \implies \overrightarrow{f(A)f(D)} = \overrightarrow{f(B)f(C)} = \vec{DA} \implies f(D) = f(A) + \vec{DA} = B + \vec{DA}$
Considerem la referència $\mathcal{R} = \{A; \vec{AB}, \vec{AD}\}$. *Aleshores,*

$$A = (0,0) \quad B = (1,0) \quad D = (0,1) \quad C = (1,1) \quad f(D) = (1,-1)$$

$$\tilde{f}(\vec{AB}) = \vec{BD} = (-1,1) \qquad \tilde{f}(\vec{AD}) = f(D) - f(A) = (1,-1) - (1,0) = (0,-1)$$

i

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Polinomi característic de l'endomorfisme associat:

$$\begin{vmatrix} -1-t & 0 \\ 1 & -1-t \end{vmatrix} = (-1-t)^2$$

No diagonalitzable.

Varietat de punts fixos:

$$\begin{cases} x = -x+1 \\ y = x-y \end{cases}$$

$P = (1/2, -1/4)$ *és l'unic punt fix.*

f *és una afinitat amb un únic punt fix i cap recta invariant.*

Per a descompondre f *com ens indica l'enunciat, el centre de la simetria central* S *ha d'ésser necessàriament el punt* P*, únic punt fix.*

$$S(Q) = P - \vec{PQ} \implies S\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x-1/2 \\ y-1/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-x \\ 1/2-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

Si $S \circ H = f$*, aleshores* $H = S^{-1} \circ f$*. Com que* S *és una simetria central,* $S^2 = Id$ *i* $H = S \circ f$*. Podem calcular*

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

i veure que es tracta d'una homologia (especial) d'eix $x = 1/2$*, que passa per* P*. També podem obtenir-la fent*

$$H(x,y) = S(f(x,y)) = S(-x+1, x-y) = (1-(-x+1), 1/2-(x-y)) = (x, -x+y+1/2)$$

Alternativament, podem considerar que per als punts de l'eix de l'homologia s'ha de complir $\tilde{f}(\vec{PQ}) = -\vec{PQ}$*, és a dir, que l'eix de l'homolgia té vector director* $\vec{AD} = (0,1)$*, el vector propi de valor propi* -1*, i per tant es tracta d'una homologia d'eix* $L = P + \langle \vec{AD} \rangle$*, la recta d'equació* $x = 1/2$ *en referència* $\mathcal{R}$.

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \beta & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \implies \alpha = 1 \quad \beta = -1$$

Igualant s'acaben de trobar les equacions de H.