Equacions en Derivades Parcials

Equacions en Derivades Parcials FME-UPC

3 de juny de 2021 Examen Final *Temps: 9:00–12:00*

Autoria: Xavier Cabré, Juan-Carlos Felipe-Navarro, Albert Mas

Donat $c \in \mathbb{R}$, considereu el problema

$$\begin{cases} u_t = e^{-x}(e^x u_x)_x + c, & x \in (0,\pi),\ t > 0, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = g(x), & x \in (0,\pi). \end{cases} \tag{1}$$

Problema 1. En tot aquest problema considereu (1) amb $c = 1$. Cada apartat es pot resoldre independentment dels altres.

(a) (1.5 *punts*) Doneu la interpretació probabilística del problema estacionari associat a (1) (a nivell discret) i deduïu (sense demostrar-ho rigorosament) si el màxim de la solució u per temps prou grans se situarà a l'esquerra o a la dreta de $x = \pi/2$.

(b) (1.5 *punts*) Calculeu el valor exacte del límit quan $t \to +\infty$ del punt on s'assoleix el màxim de $u(\cdot, t)$.

(c) (1 *punt*) Demostreu la propietat essencial de la qual resulta que l'operador estacionari associat a (1) diagonalitza en una base de funcions pròpies. Demostreu també que tots els seus valors propis són reals.

Problema 2. (3 *punts*) Trobeu la solució de (1) per $c = 0$ i $g(x) = e^{-x/2}$. [Recordeu que les funcions exponencials poden resoldre les EDOs lineals homogènies amb coeficients constants.]

Problema 3. Donat $a \in \mathbb{R}$, considereu el problema

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + a|u|^{3/2}, & x \in (0,\pi),\ t \in I, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & t \in I, \\ u(x,0) = g(x), & x \in (0,\pi). \end{cases} \tag{2}$$

Part de l'apartat (ii) es pot resoldre independentment de (i).

(i) (1.2 *punts*) Recordem que

$$(S_t h)(x) := \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} h(y)\, dy, \quad t > 0,$$

és el semigrup associat a l'equació de difusió $v_t - v_{xx} = 0$ a tota la recta real en l'espai de funcions contínues i fitades a $\mathbb{R}$. Useu aquest fet per resoldre (2) quan $a = 0$ i $g \in C_0([0,\pi]) := \{g \in C([0,\pi]) \,:\, g(0) = g(\pi) = 0\}$ de manera alternativa al mètode de sèries de Fourier.

(ii) (1.8 *punts*) Amb $a = 1$, discutiu la possibilitat de donar un resultat d'existència i unicitat de solució de (2) per certs intervals I depenent de l'espai de Banach $L^2(0,\pi)$ o $C_0([0,\pi])$ al que pertanyi la funció g. Doneu els principals detalls de la demostració en els casos afirmatius.

EXAMEN FINAL '21

PROBLEMA 1

a) En primer lugar observemos que

$$e^{-x}(e^{x}u_x)_x = e^{-x}(e^{x}u_x + e^{x}u_{xx}) = u_x + u_{xx}.$$

Por tanto, el problema estacionario se puede reescribir como

$$\begin{cases} -u_s'' - u_s' = 1 & \text{en } (0,\pi) \\ u_s(0) = u_s(\pi) = 0 \end{cases}$$

Veamos que esta ecuación modeliza el coste o pago antes de salir del intervalo $(0,\pi)$ de una partícula que sigue un movimiento aleatorio con mayor probabilidad de moverse hacia la derecha que hacia la izquierda.

Para ello vamos a discretizar el problema. Si discretizamos las derivadas

$$u_s''(x) \approx \frac{u_s(x+h) + u_s(x-h) - 2u_s(x)}{h^2}$$

$$u_s'(x) \approx \frac{u_s(x+h) - u_s(x-h)}{2h}$$

la ecuación nos queda

$$-\frac{u_s(x+h) + u_s(x-h) - 2u_s(x)}{h^2} - \frac{u_s(x+h) - u_s(x-h)}{2h} = 1.$$

Despejando $u_s(x)$ obtenemos

$$u_s(x) = \left(\frac{1}{2}+\frac{h}{4}\right) u_s(x+h) + \left(\frac{1}{2}-\frac{h}{4}\right) u_s(x-h) + \frac{h^2}{2}.$$

Por tanto, por la fórmula de probabilidad condicionada vemos que la ecuación estacionaria modeliza el coste esperado de salida de una partícula que se mueve hacia la derecha con probabilidad $p = \frac{1}{2}+\frac{h}{4} > \frac{1}{2}$ y hacia la izquierda con probabilidad $1-p = \frac{1}{2}-\frac{h}{4} < \frac{1}{2}$, y paga un coste $\frac{h^2}{2}$ en cada paso.

Como es más probable el movimiento hacia la derecha, es claro que $u_s(x) > u_s(\pi - x)$ para $x \in (0, \pi/2)$ ya que ambos puntos están a la misma distancia del borde, pero para el punto x es más probable que en el primer paso la partícula se aleje del borde mientras que para $\pi - x$ es más probable que se acerque. Por tanto, en media, los caminos iniciados en x tardarán más en llegar al borde que los iniciados en $\pi - x$, produciendo un mayor pago. Deducimos que es de esperar que el máximo de u_s se alcance en $(0, \pi/2)$.

b) Ya que $u(\cdot, t) \xrightarrow{t\to\infty} u_s$, será suficiente calcular la solución estacionaria de forma explícita y buscar el punto donde alcanza el máximo.

Integrando la ecuación

$$-e^{-x}(e^x u_s')' = 1 \quad \Rightarrow (e^x u_s')' = -e^x$$

$$\Rightarrow e^x u_s' = -e^x + A$$

$$\Rightarrow \quad u_s' = -1 + Ae^{-x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad u_s = -x - Ae^{-x} + B \quad \text{con } A, B \in \mathbb{R}$$

Imponiendo las condiciones de borde

$$\left.\begin{array}{l} 0 = u_s(0) = -A + B \\ 0 = u_s(\pi) = -\pi - Ae^{-\pi} + B \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} A = \dfrac{\pi}{1-e^{-\pi}} \\ B = \dfrac{\pi}{1-e^{-\pi}} \end{array}$$

Por tanto

$$u_s(x) = -x + \frac{\pi}{1-e^{-\pi}}\left(1 - e^{-x}\right)$$

Si imponemos $u_s'(x_{max}) = 0$ encontramos

$$\boxed{x_{max} = \ln \frac{\pi}{1-e^{-\pi}} \in (0, \pi/2)}$$

c) El operador $A = -e^{-x}\partial_x(e^x\partial_x)$ es un operador de tipo Sturm-Liouville con $p(x) = r(x) = e^x > 0$

Además, es claro que

$$0 < 1 \leq r(x) \leq e^{\pi} \quad \text{en } [0, \pi]$$

Vamos a ver que A con condiciones de Dirichlet nulas en el borde es un operador simétrico con el producto escalar

$$\langle v, w\rangle_{exp} = \int_0^{\pi} e^x\, v(x)\, \overline{w}(x)\, dx,$$

donde $\overline{w}$ representa el conjugado complejo de w. Así es, dadas $v, w : [0,\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$ tales que $v(0) = v(\pi) = w(0) = w(\pi) = 0$,

$$\langle Av, w \rangle_{exp} = \int_0^\pi e^x Av(x)\, \overline{w}(x)\, dx$$

integración por partes

$$= -\int_0^\pi \left(e^x v'(x)\right)' \overline{w}(x)\, dx$$

porque $w(0) = w(\pi) = 0$

$$= \int_0^\pi e^x v'(x)\, \overline{w}'(x)\, dx - \underbrace{\cancel{\left[e^x v'(x)\, \overline{w}(x)\right]_0^\pi}}_{0}$$

$$= -\int_0^\pi v(x) \left(e^x \overline{w}'(x)\right)' dx + \underbrace{\cancel{\left[e^x v(x)\, \overline{w}'(x)\right]_0^\pi}}_{0}$$

porque $v(0) = v(\pi) = 0$

$$= \int_0^\pi e^x v(x)\, \overline{Aw(x)}\, dx$$

$$= \langle v(x), Aw(x) \rangle_{exp}. \checkmark$$

A partir de la identidad anterior se puede concluir que los valores propios son reales. Sea φ una función propia no nula de valor propio $\lambda \in \mathbb{C}$. Entonces,

$$\lambda \langle \varphi, \varphi \rangle_{exp} = \langle \lambda\varphi, \varphi \rangle_{exp} = \langle A\varphi, \varphi \rangle_{exp}$$

$$= \langle \varphi, A\varphi \rangle_{exp} = \langle \varphi, \lambda\varphi \rangle_{exp}$$

$$= \overline{\lambda} \langle \varphi, \varphi \rangle_{exp},$$

y $\lambda = \overline{\lambda} \in \mathbb{R}$.

Observad que si aplicásemos el Teorema 5.4.1. de los apuntes obtendríamos que existe una base de $L^2(0,\pi)$ de funciones propias $\varphi_i \in L^2(0,\pi)$ que son ortogonales con el producto escalar $\langle \cdot , \cdot \rangle_{exp}$ y cuyos valores propios son reales y positivos satisfaciendo

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$$

2.- $\begin{cases} u_t = e^{-x}(e^x u_x)_x, & x\in(0,\pi),\ t>0, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & t>0, \\ u(x,0) = e^{-x/2}, & x\in(0,\pi). \end{cases}$

Notem que $e^{-x}(e^x u_x)_x = e^{-x}(e^x u_x + e^x u_{xx}) = u_x + u_{xx}$.

Per tant, l'equació queda $u_t = u_x + u_{xx}$. Resoldrem el problema usant separació de variables:

- Suposem que $u(x,t) = X(x)T(t) \Longrightarrow XT' \overset{(u_t = u_x + u_{xx})}{=} (X'+X'')T$

$\Longrightarrow \begin{cases} X'+X'' = -\lambda X \ \ \& \ \ X(0)=X(\pi)=0 \longleftarrow (u(0,t)=u(\pi,t)=0) \\ T' = -\lambda T \end{cases}$

on $\lambda\in\mathbb{R}$.

- La solució general (complexa) de $X''+X'+\lambda X=0$ és
$$X(x) = Ae^{\alpha_+ x} + Be^{\alpha_- x}, \quad A,B\in\mathbb{C},$$
on $\alpha_\pm$ són les arrels de $p(y) := y^2+y+\lambda = 0$. Notem que
$$p(y)=0 \iff y = \frac{-1\pm\sqrt{1-4\lambda}}{2} \longrightarrow \alpha_\pm = -\tfrac{1}{2}\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}-\lambda}.$$
Imposem les condicions $X(0)=X(\pi)=0$:
$$0 = X(0) = A+B \longrightarrow B=-A$$
$$\longrightarrow X(x) = A(e^{\alpha_+ x} - e^{\alpha_- x}) = Ae^{-x/2}\left(e^{x\sqrt{\frac14-\lambda}} - e^{-x\sqrt{\frac14-\lambda}}\right).$$
$$0 = X(\pi) \overset{(A\neq 0)}{\Longrightarrow} e^{\pi\sqrt{\frac14-\lambda}} - e^{-\pi\sqrt{\frac14-\lambda}} = 0 \Longrightarrow \tfrac14-\lambda\leq 0, \text{ i aleshores}$$
$$0 = e^{\pi\sqrt{\frac14-\lambda}} - e^{-\pi\sqrt{\frac14-\lambda}} = 2i\sin\left(\sqrt{\lambda-\tfrac14}\,\pi\right) \Longrightarrow \sqrt{\lambda-\tfrac14} = k\in\mathbb{Z}$$
$$\longrightarrow \lambda = k^2+1/4,\ k\in\mathbb{Z}.$$
Per tant, la solució general (real) de $\begin{cases} X'+X'' = -\lambda X \\ X(0)=X(\pi)=0 \end{cases}$ és
$$\left.\begin{aligned} X(x) &= Ae^{-x/2}\sin(kx),\ A\in\mathbb{R} \\ \lambda &= k^2+1/4 \end{aligned}\right\} \ k=1,2,3,\dots$$

- Tornant ara a l'equació per T, obtenim $T(t) = Ce^{-(k^2+\frac14)t}$.

- Considerem u de la forma

$$u(x,t) = \sum_{k\geq 1} c_k e^{-(k^2+1/4)t} e^{-x/2} \sin(kx)$$

i ajustem la condició inicial:

$$e^{-x/2} = u(x,0) = \sum_{k\geq 1} c_k e^{-x/2} \sin(kx) = e^{-x/2} \sum_{k\geq 1} c_k \sin(kx).$$

Per tant, volem $1 = \sum_{k\geq 1} c_k \sin(kx)$, és a dir, volem escriure la funció 1 en sèrie de sinus a $(0,\pi)$. Aleshores,

$$c_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 1\cdot \sin(kx)\,dx = -\frac{2}{\pi}\left.\frac{\cos(kx)}{k}\right|_{x=0}^{x=\pi} = \frac{2}{k\pi}\left(1-(-1)^k\right).$$

En conclusió, la solució és

$$\boxed{u(x,t) = \frac{4}{\pi} e^{-x/2} \sum_{j\geq 0} \frac{1}{2j+1} e^{-\left[(2j+1)^2+\frac{1}{4}\right]t} \sin((2j+1)x).}$$

Resolució Pb 3.

$\boxed{(i)}$ Donada $g \in C_0([0,\pi])$, considerem la seva reflexió senar g_s que està definida i és contínua (doncs $g(0)=0$) a $[-\pi,\pi]$. Considerem ara l'extensió g_e 2π-periòdica a tot $\mathbb{R}$ de g_s. Tindrem que
g_e és contínua a $\mathbb{R}$, doncs $g_s(-\pi) = -g(\pi) = 0 = g_s(\pi)$.
A més, òbviament, g_e és fitada a tot $\mathbb{R}$ i

$$\|g_e\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|g\|_{L^\infty(-\pi,\pi)}. \qquad (3.1)$$

Per tant, si $\Gamma(z,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-|z|^2/(4t)}$, la convolució

$$(S_t g_e)(x) = (\Gamma(\cdot,t) * g_e)(x)$$
$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-|x-y|^2/(4t)} g_e(y)\,dy \qquad (3.2)$$

resol l'eq. de difusió lineal homogènia a tot $\mathbb{R}$ per $t>0$. Sabem, a més, que $S_t g_e$ és contínua i fitada a $\mathbb{R}$ amb $\|S_t g_e\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|g_e\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$. Considerant ara la restricció $T_t g := (S_t g_e)|_{[0,\pi]}$, de la última desigualtat i (3.1) deduïm que

$$\|T_t g\|_{L^\infty(0,\pi)} \leq \|g\|_{L^\infty(0,\pi)}. \qquad (3.3)$$

A més, $(T_t g)(0) = (T_t g)(\pi) = 0$ doncs $S_t g_e$ és senar respecte a $x=0$ i a $x=\pi$ (per existència i unicitat, per exemple, i pel fet que g_e és senar respecte $x=0$ i a $x=\pi$).

Deduïm que $T_t g$ és la sol. de (2) per $a=0$ i, de (3.3), que el semigrup T_t és continu (amb constant 1) a l'espai

de Banach $C_0([0,\pi])$.
[NOTA: Trencant l'integral a (3.2) en suma d'integrals a $(k\pi,(k+1)\pi)$ amb $k\in\mathbb{Z}$, i expressant g_e en termes de g en cadascun dels intervals, es pot trobar explícitament la funció de Green $G_t(x,y)$ pel problema (2), i.e., tal que la solució ve donada per:
$$(T_t g)(x)=\int_0^\pi G_t(x,y)g(y)\,dy \quad \text{per } x\in[0,\pi]. \quad]$$

$\boxed{(ii)}$ Prenem ara $a=1$. El pb és nolineal i l'hauriem de resoldre per un mètode de punt fix combinat amb la fórmula de Duhamel.

- Si $g\in L^2(0,\pi)$ hauriem de treballar a l'espai $C^0(\bar{I};E)$ de funcions de $t\in\bar{I}$ a valors l'espai $E=L^2(0,\pi)$. Per cada t tindrem $u(\cdot,t)\in L^2(0,\pi)$. Però llavors no tindrem necessàriament que la nolinealitat $|u(\cdot,t)|^{3/2}$ pertanyi a $L^2(0,\pi)$, doncs
$$\left\| |u(\cdot,t)|^{3/2} \right\|^2_{L^2(0,\pi)} = \int_0^\pi |u(\cdot,t)|^3$$
podria ser $+\infty$ (no sabem si $u(\cdot,t)\in L^3(0,\pi)$). (Notem que $L^3(0,\pi)\subset L^2(0,\pi)$ però $L^2(0,\pi)\not\subset L^3(0,\pi)$).
No podrem, per tant, demostrar que la fórmula de Duhamel defineixi una aplicació de $C^0(\bar{I},E)$ a si mateix. No podem donar un resultat d'existència i unicitat.

• Si $g \in C_0([0,\pi]) =: E$, sí que podrem donar un resultat d'existència i unicitat per temps $t \in I = [0, \varepsilon]$ amb $\varepsilon > 0$ prou petit. El punt clau és que si $u \in C^0(I, E)$ llavors $|u|^{3/2}$ també pertany a $C^0(I,E)$ (ja que $u(\cdot,t) \in C_0([0,\pi])$ implica $|u(\cdot,t)|^{3/2} \in C_0([0,\pi])$).

Trobarem, per tant, un punt fix:

$$\boxed{u(t) = T_t g + \int_0^t T_{t-s}(|u(\cdot,s)|^{3/2})\, ds}$$

en una bola tancada de $\boxed{C^0(I,E)}$, amb $E = C_0([0,\pi])$. Un segon punt clau és que el semigrup $T_t : E \to E$ pel pb (2) amb $\alpha = 0$ està ben definit i és continu (amb constant 1) per l'apartat (i), per temps $t > 0$.

El tercer punt clau (a més de $|u(\cdot,t)|^{3/2} \in E$ si $u(\cdot,t) \in E$) és que l'aplicació

$$\begin{aligned} E &\longrightarrow E \\ v &\longmapsto |v|^{3/2} \end{aligned}$$

és localment Lipschitz, doncs

$$\left| |v|^{3/2} - |w|^{3/2} \right| \le \frac{3}{2} (|v| + |w|)^{1/2} |v - w| \le C |v-w|$$

doncs v i w pertanyen a una certa bola fixada.

________ . ________ . ________