Àlgebra Multilineal i Geometria FME, curs 2020-2021

Entregable 4 Axiomàtica del Pla Projectiu

En aquest curs hem donat la noció de pla projectiu partint d'un espai vectorial base de dimensió 3 i aplicant una relació d'equivalència. En aquest exercici veurem que de fet, la noció de pla projectiu pot realitzar-se de manera més general partint d'una sèrie d'axiomes.

Definició 1 (Pla projectiu axiomàtic)**.** *Un* pla projectiu axiomàtic *és una parella* (S, L)*, on* S *un conjunt d'elements (que anomenem* punts*) i* L *un conjunt de subconjunts de* S *(que anomenen* rectes*), complint els següents axiomes:*

A1 *Per tot parella de punts* $p, q \in S$*, existeix una única recta* $l \in L$ *tal que* $p, q \in l$*.*

A2 *Per tota parella de rectes* l_1*,* l_2*,* $l_1 \cap l_2$ *és un punt de* S*.*

A3 *Existeixen quatre punts* p, q*,* r*,* s *tal que tot subconjunt de 3 elements no es troben sobre una mateixa recta.*

A4 *Cada recta conté almenys tres punts.*

Ex.1: Demostreu que la construcció d'un pla projectiu real $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ compleix els axiomes anteriors.

Ex.2: Supossem que $|S|$ és finit. Demostreu que totes les rectes de (S, L) contenen el mateix nombre de punts, i que cada punt està contingut en el mateix nombre de rectes. Conclogueu que el nombre de punts (i el nombre de rectes) d'un pla projectiu finit és de la forma $n^2 + n + 1$. (*Indicació:* per la primera part, preneu dues recte i useu els axiomes per veure que han de tenir els mateix nombre de punts. Useu aleshores aquest fet per comptar el número de rectes que passen per un punt donat).

La novetat d'aquesta definició axiomàtica de pla projectiu és que abarca plans projectius que no procedeixen d'espais vectorials. En particular, una de les diferències fonamentals és que ***A1-A4*** *no impliquen el teorema de Desargues.* De fet, el teorema de Desargues sempre és cert quan el nostre pla projectiu admeti una inmersió en un espai projectiu de dimensió 3, cosa que no sempre és certa.

El que farem serà trobar una construcció axiomàtica que no compleix el teorema de Desargues. Per a tal efecte, definim una seqüència de conjunts de punts i rectes de la següent forma:

Definició 2 (Pla projectiu lliure)**.** *Sigui* S_0 *un conjunt de* 4 *punts i* L_0 *el conjunt buit. Definim els següents conjunts:*

- S_1 *és igual a* S_0*.* L_1 *s'obté afegint a* L_0*, per cada parella de punts* $p_0, p_1 \in S_0$ *no definint una recta en* L_0*, una nova recta.*
- S_2 *és igual a* S_1 *afegint, per cada parella de rectes* $l_0, l_1 \in L_1$ *no tallant-se en un punt en* S_1*, un nou punt (associat a la intersecció de les recte).* L_2 *és igual a* L_1*.*

I així successivament: en (S_n, L_n)*, per* n *parell, afegim punts corresponent a les interseccions de les rectes en* L_{n-1}*, i per* n *senar afegim rectes corresponents als punts en* S_{n-1}*.*

Finalment, considerem $S = \bigcup_{n\geq 0} S_n$*,* $L = \bigcup_{n\geq 0} L_n$*. Resulta doncs que tant* S *com* L *són infinits. Direm que* (S, L) *és el* pla projectiu lliure *generat per* (S_0, L_0)*.*

Ex.3: Dibuixeu les configuracions obtingudes per $n = 0, 1, 2$. Justifiqueu que (S_n, L_n) no és un pla projectiu axiomàtic per cap valor de n. Demostreu, però, que (S, L) és un pla projectiu axiomàtic.

Definició 3 (Configuració desarguiana)**.** *Una configuració desarguiana és una parella de punts* D *i un conjunt de rectes* R *(dins d'un pla projectiu) tal que cada punt de* D *està contingut en com a mínim 3 rectes de* R*, i cada recta de* R *conté com a mínim 3 punts de* D*. Es denotarà per* $(D, R)_{\mathcal{D}}$*.*

Ex.4: Comproveu que el teorema de Desargues dóna lloc a una configuració desarguiana amb 10 punts i 10 rectes.

El que finalment veurem és que el pla projectiu lliure (S, L) no conté configuracions desarguianes, i per tant en ell no es pot donar el teorema de Desargues.

Ex.5: Demostreu que si una configuració desarguiana *finita* $(D, R)_{\mathcal{D}}$ està continguda en (S, L), aleshores estava continguda en (S_0, L_0). Conclogueu que en (S, L) el teorema de Desargues no és cert. (*Indicació:* per a cada $p \in D$, el *nivell* de p és el valor de n pel qual $p \in S_n$, $p \neq S_{n-1}$ (definim similarment el nivell d'una recta en R). Estudiar com s'origina el punt (o la recta) amb nivell més gran en $(D, R)_{\mathcal{D}}$).