

Tema 5. Conversión A/D y D/A y cambio de la frecuencia de muestreo

1. Muestreo y conversión A/D (3/12/2019)
2. Reconstrucción y conversión D/A (10/12/2019)
3. Conversión A/D y D/A de imágenes
4. Cambio de la frecuencia de muestreo
 - 4.1 Diezmado (downsampling) (13/12/2019)
 - 4.2 Interpolación (upsampling) (17/12/2019)

2019-2020

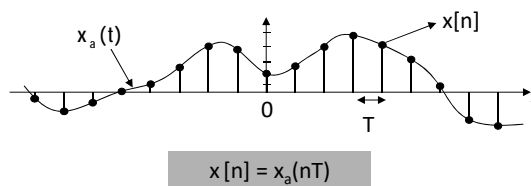
Signals and Systems (DSE)

Muestreo (1)

U5

□ Muestreo en el dominio temporal

T = Periodo de muestreo, $f_s = 1/T$ = Frecuencia de muestreo



- Relación entre transformadas: $X(F)|_{F=f_s} = f_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(f - k \cdot f_s)$
- Criterio de Nyquist: $1/T = f_s \geq 2f_{max}$

Muestreo (2)

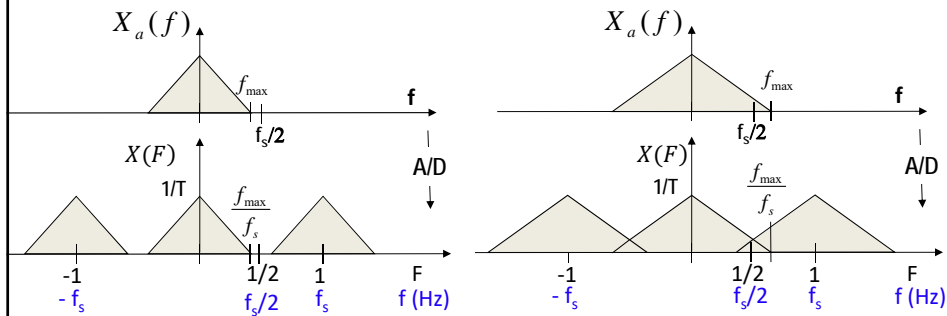
U5

Caso 1: Se cumple el criterio de Nyquist
(no hay aliasing)

$$f_s > 2f_{max}$$

Caso 2: No se cumple el criterio de Nyquist
(hay aliasing)

$$f_s < 2f_{max}$$



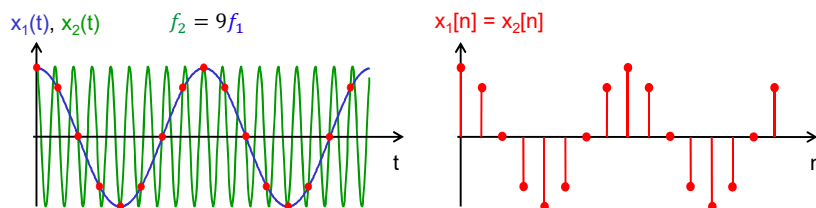
Tema 5: Conversión A/D y D/A y cambio de la frecuencia de muestreo

5.3

Aliasing de sinusoides (1)

U5

Aliasing: sinusoides analógicas diferentes producen secuencias idénticas



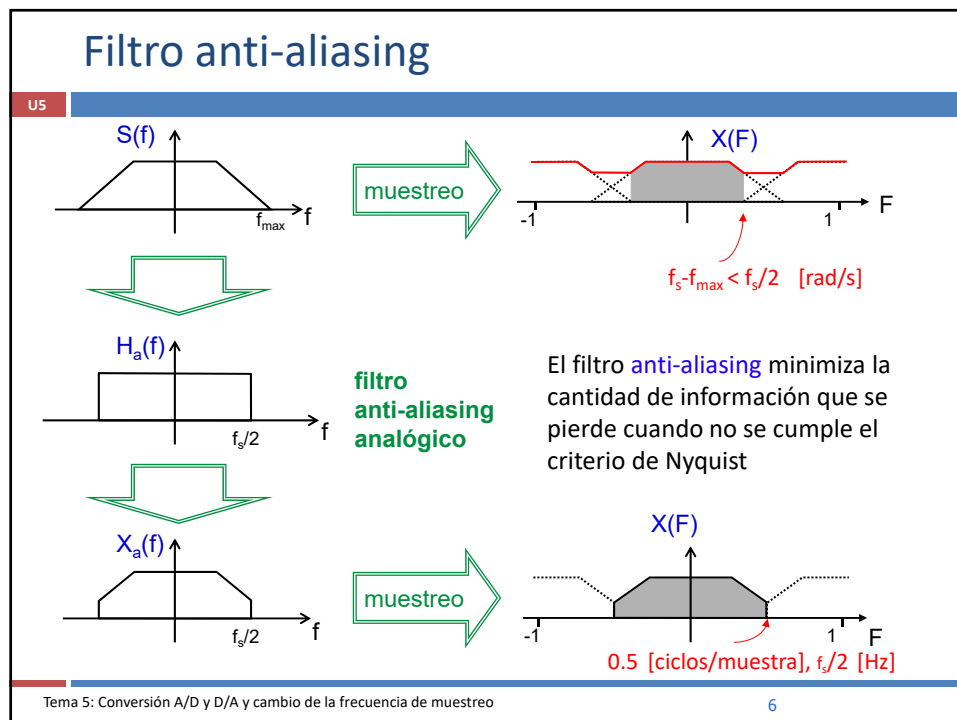
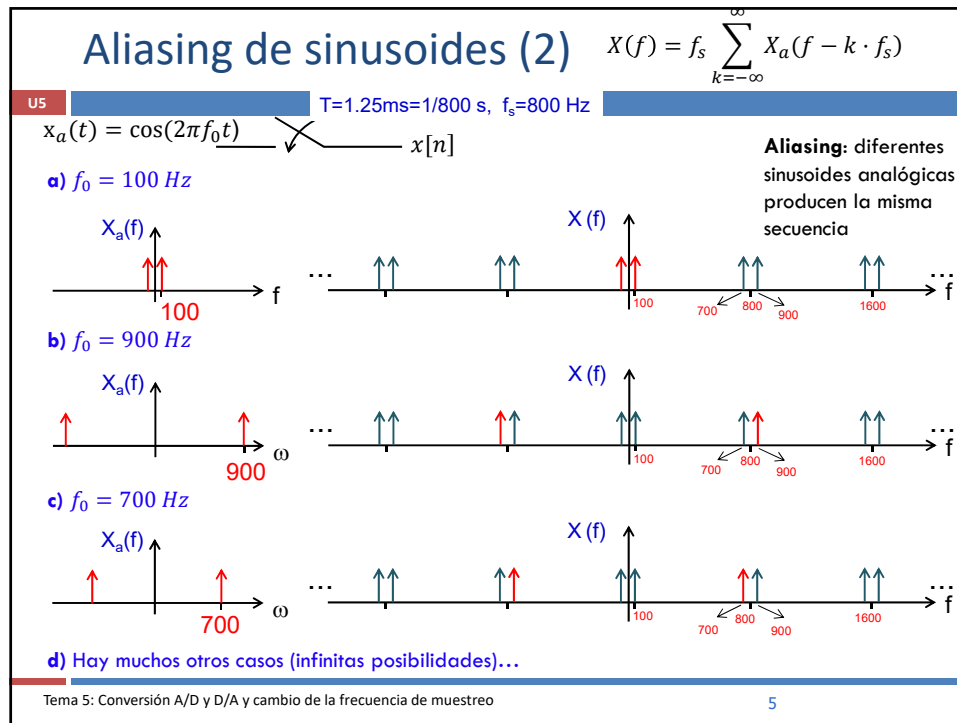
$$f_s = 8f_1 = \frac{8}{9}f_2$$

$$\cos(2\pi f_1 t) \Big|_{t=nT_s} = \cos\left(2\pi \frac{1}{8}n\right)$$

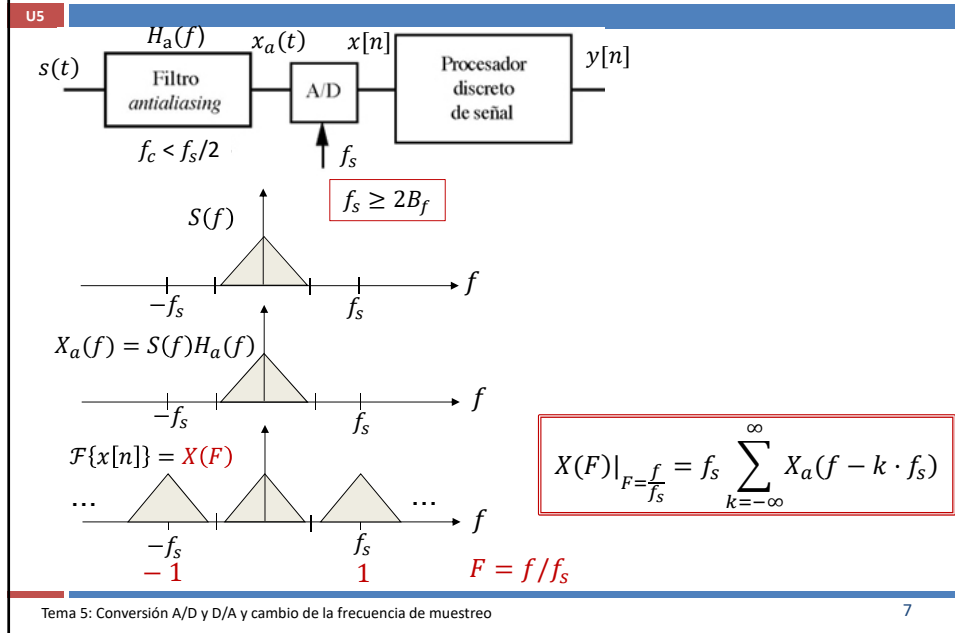
$$\cos(2\pi f_2 t) \Big|_{t=nT_s} = \cos\left(2\pi \frac{9}{8}n\right) = \cos\left(2\pi \frac{1}{8}n\right)$$

Tema 5: Conversión A/D y D/A y cambio de la frecuencia de muestreo

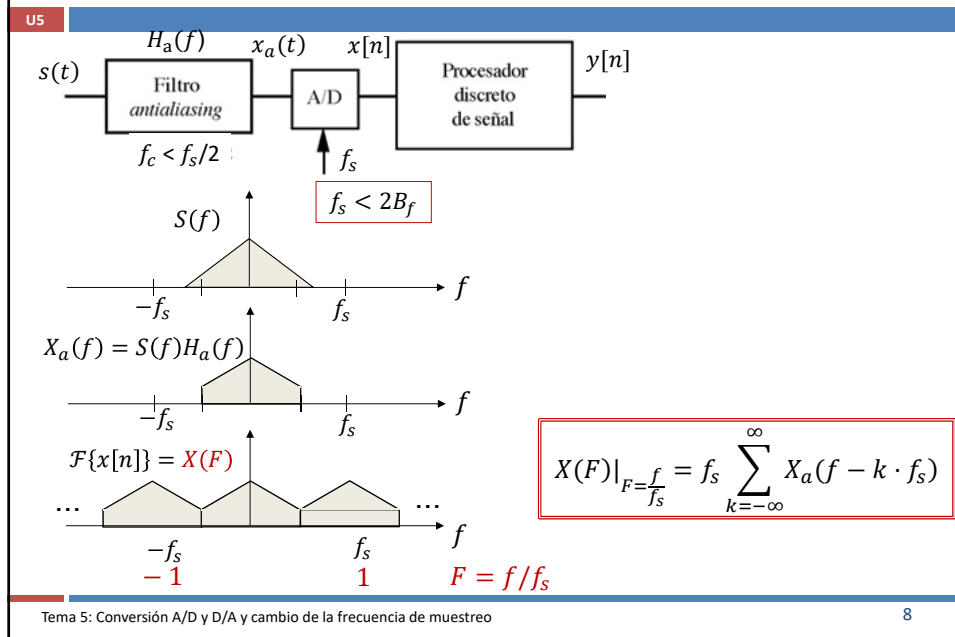
4

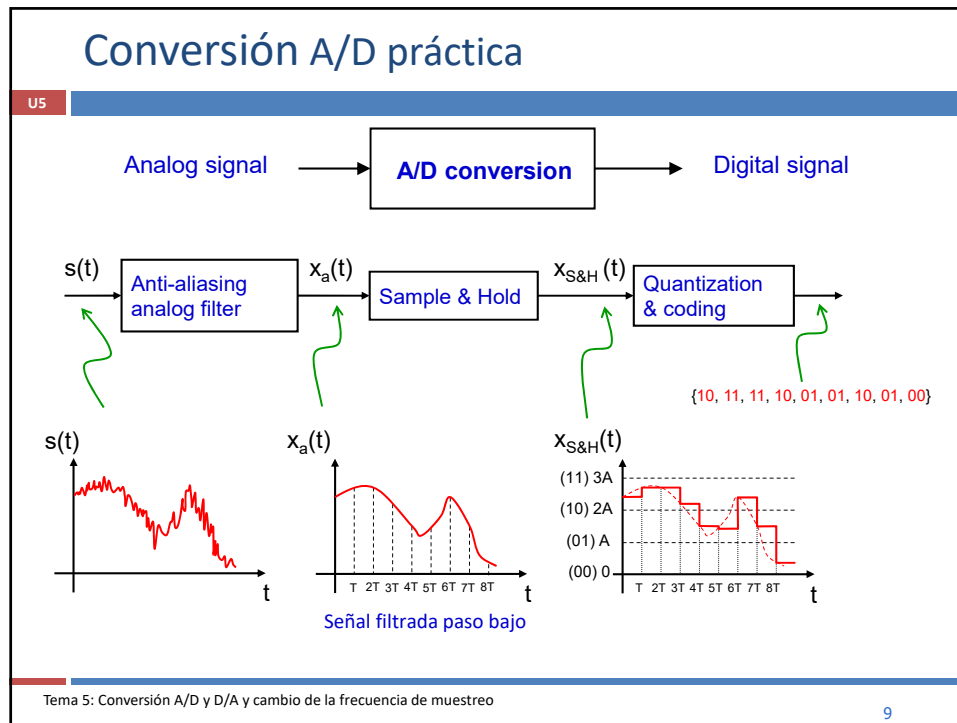


Resumen (se cumple criterio de Nyquist)



Resumen (NO se cumple criterio de Nyquist)





Tema 5. Conversión A/D y D/A y cambio de la frecuencia de muestreo

1. Muestreo y conversión A/D (3/12/2019)
2. Reconstrucción y conversión D/A (10/12/2019)
3. Conversión A/D y D/A de imágenes
4. Cambio de la frecuencia de muestreo
 - 4.1 Diezmado (downsampling) (13/12/2019)
 - 4.2 Interpolación (upsampling) (17/12/2019)

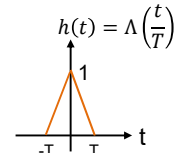
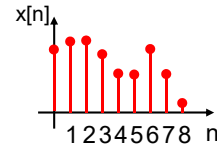
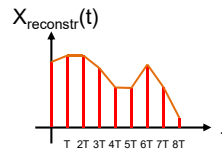
Reconstrucción (1)

U5

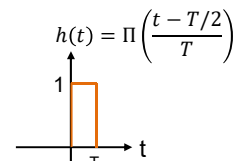
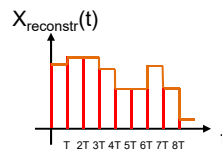
Se basa en la **interpolación**: Usamos las muestras $x[n]$ para generar una señal analógica que **aproxima** la señal analógica original antes del muestreo.

$$x_{reconstr}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] h(t - nT)$$

- Interpolador lineal:



- Interpolador de orden cero: Zero-order-hold (ZOH)



- Otros??

Tema 5: Conversión A/D y D/A y cambio de la frecuencia de muestreo

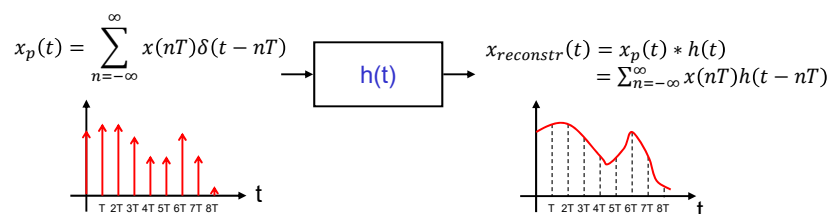
11

Reconstrucción (2)

U5

$$x_{reconstr}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] h(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \delta(t - nT) * h(t)$$

La señal analógica resultado de interpolar las muestras se puede **modelar** como la señal analógica original muestreada con deltas (**muestreo ideal**) y convolucionada con $h(t)$



¿Cuál es el mejor filtro interpolador (interpolador ideal)?

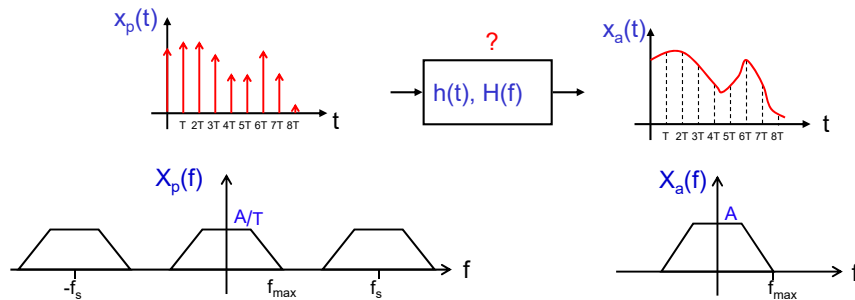
Tema 5: Conversión A/D y D/A y cambio de la frecuencia de muestreo

12

Interpolador ideal (1)

U5

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t - nT) \rightarrow \boxed{h(t), H(f)} \rightarrow \begin{aligned} x_{reconstr}(t) &= x_p(t) * h(t) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)h(t - nT) \end{aligned}$$

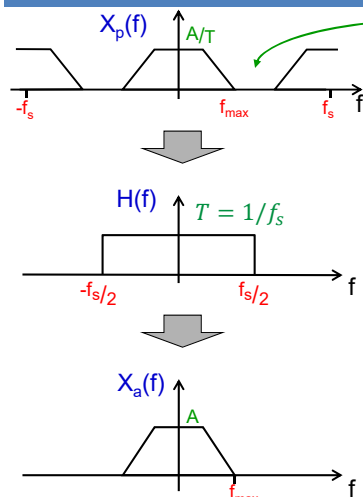


Tema 5: Conversión A/D y D/A y cambio de la frecuencia de muestreo

13

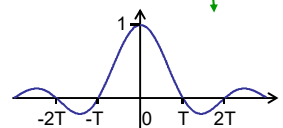
Interpolador ideal (2)

U5



Supondremos que no hay aliasing

$$\begin{aligned} h(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} H(f) e^{j2\pi f t} df = \\ &= \int_{-f_s/2}^{f_s/2} T e^{j2\pi f t} df = \frac{T}{j2\pi t} e^{j2\pi f t} \Big|_{-f_s/2}^{f_s/2} \\ &= \frac{T}{\pi t} \sin(\pi f_s t) = \text{sinc}\left(\frac{t}{T}\right) \end{aligned}$$



Tema 5: Conversión A/D y D/A y cambio de la frecuencia de muestreo

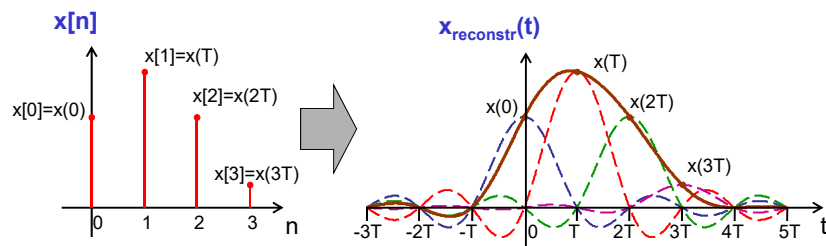
14

Interpolador ideal (3)

U5

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t - nT) \rightarrow \boxed{h(t), H(f)} \rightarrow \begin{aligned} x_{reconstr}(t) &= x_p(t) * h(t) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)h(t - nT) \end{aligned}$$

$$x_{reconstr}(t) = x_p(t) * h(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \operatorname{sinc}\left(\frac{t - nT}{T}\right)$$

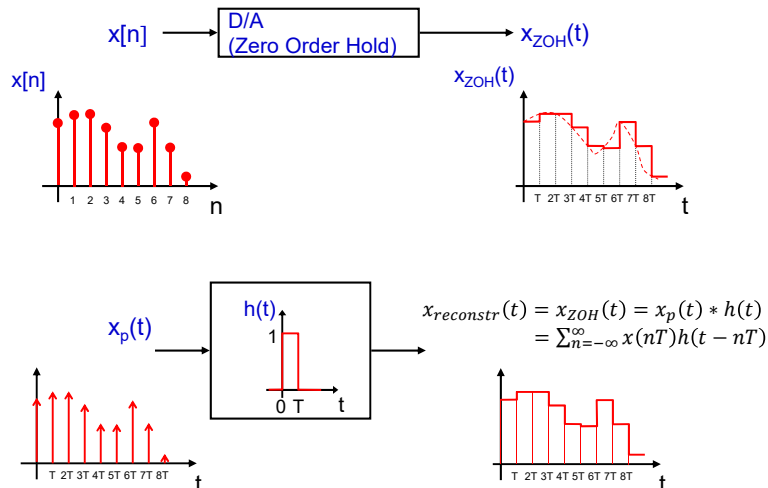


Tema 5: Conversión A/D y D/A y cambio de la frecuencia de muestreo

15

Interpolador ZOH (1)

U5

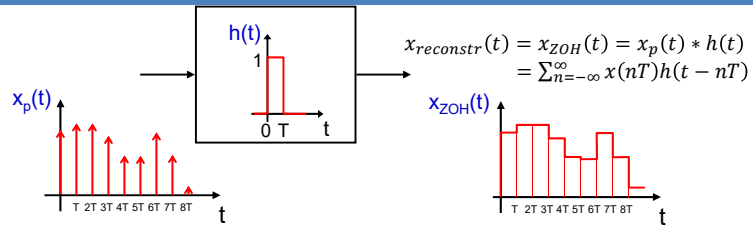


Tema 5: Conversión A/D y D/A y cambio de la frecuencia de muestreo

16

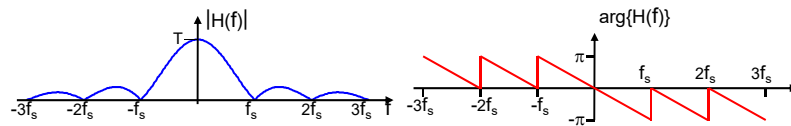
Interpolador ZOH (2)

U5



$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j2\pi ft} df = \int_0^T e^{-j2\pi ft} df = \frac{1 - e^{-j2\pi fT}}{j2\pi f} = e^{-j\pi fT} \frac{(e^{j\pi fT} - e^{-j\pi fT})}{j2\pi f}$$

$$= e^{-j\pi fT} \frac{\sin(\pi fT)}{\pi f} = e^{-j\pi fT} T \text{sinc}(fT)$$



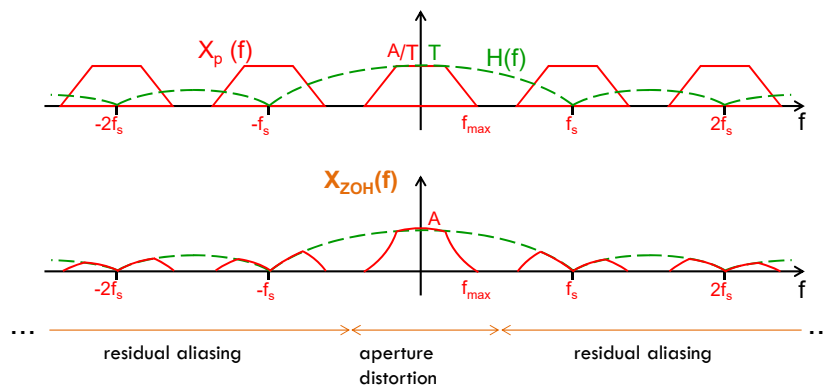
Tema 5: Conversión A/D y D/A y cambio de la frecuencia de muestreo

17

Interpolador ZOH (3)

U5

$x_p(t) \rightarrow h(t), H(f) \rightarrow x_{reconstr}(t) = x_{ZOH}(t) = x_p(t) \cdot h(t)$
 $x_{reconstr}(\omega) = X_{ZOH}(\omega) = X_p(\omega) \cdot H(\omega)$



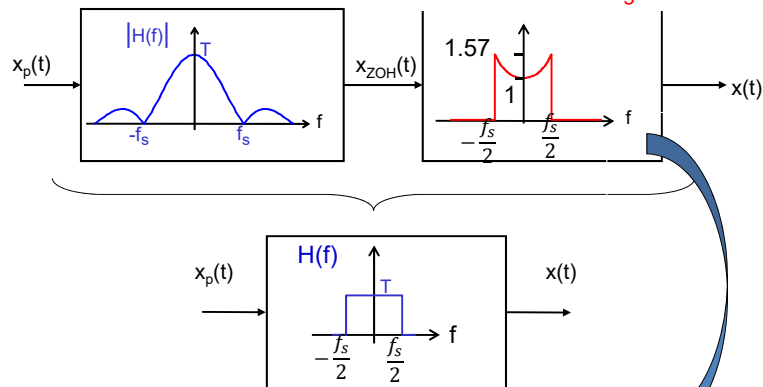
Tema 5: Conversión A/D y D/A y cambio de la frecuencia de muestreo

18

Interpolador ZOH (4)

U5

Compensation of the aperture distortion ($1/\text{sinc}$) and elimination of the residual aliasing



NOTE: in practice this filter is implemented in two stages:

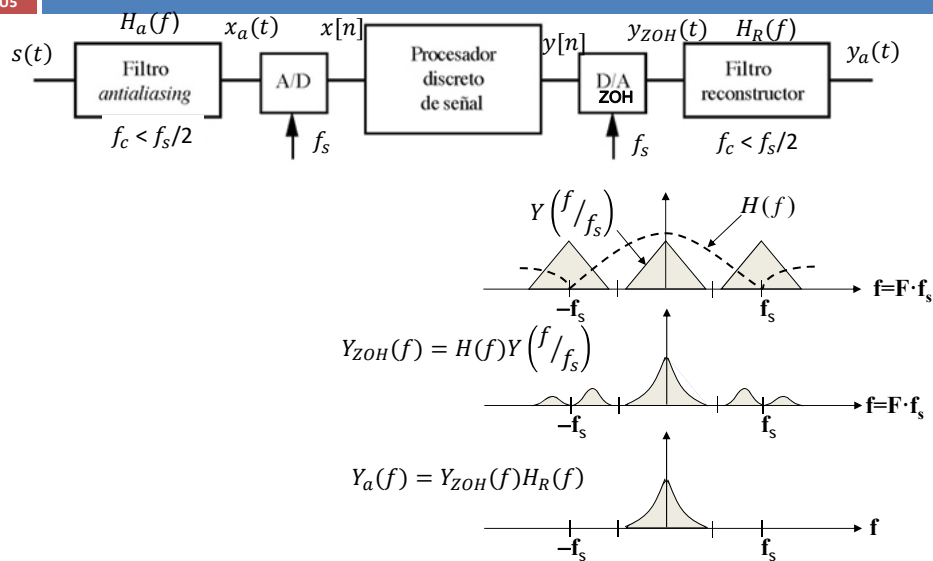
- 1) *Digital filter* (1-periodic frequency response) with response sinc^{-1} that corrects the aperture distortion
- 2) *Analog low-pass filter* that eliminates the residual aliasing

Tema 5: Conversión A/D y D/A y cambio de la frecuencia de muestreo

19

Resumen

U5



Tema 5: Conversión A/D y D/A y cambio de la frecuencia de muestreo

Tema 5. Conversión A/D y D/A y cambio de la frecuencia de muestreo

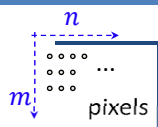
1. Muestreo y conversión A/D (3/12/2019)
2. Reconstrucción y conversión D/A (10/12/2019)
3. Conversión A/D y D/A de imágenes
4. Cambio de la frecuencia de muestreo
 - 4.1 Diezmado (downsampling) (13/12/2019)
 - 4.2 Interpolación (upsampling) (17/12/2019)

2019-2020

Signals and Systems (DSE)

Muestreo 2D

U5



256x256 pixels

El número de píxeles determina la **resolución espacial**

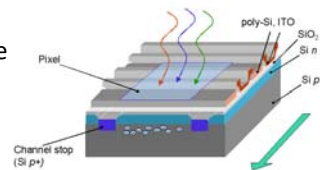


64x64

Sensores de imagen

U5

- Transforman la intensidad de luz recibida en corriente eléctrica
- Número de electrones producido proporcional a la cantidad de luz recibida
- Las dos tecnologías más importantes son:
 - ▣ **CCD** (charge-coupled device): la señal eléctrica producida por cada fotosito se envía al exterior y desde allí se amplifica y se digitaliza.
 - ▣ **CMOS** (Complementary metal-oxide-semiconductor): incorpora un amplificador de la señal eléctrica en cada detector individual (fotosito) y es común incluir el conversor digital en el propio chip. Menor consumo y mayor velocidad que CCD.

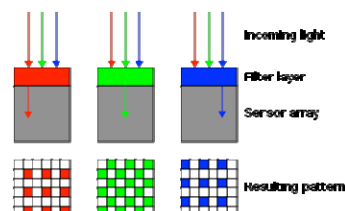
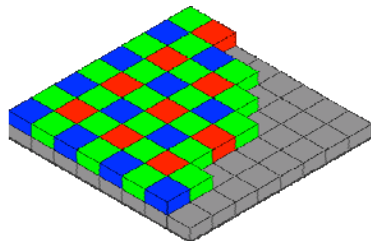


Tema 5: Conversión A/D y D/A y cambio de la frecuencia de muestreo

Filtro de Bayer

U5

- Cada fotosito registra una componente de color: roja, azul y verde (RGB)
- Para establecer la componente a la que responde cada fotosito se utiliza un patrón o filtro de Bayer
 - ▣ Cada 4 píxeles se forma una trama con una componente roja, otra azul y dos verdes

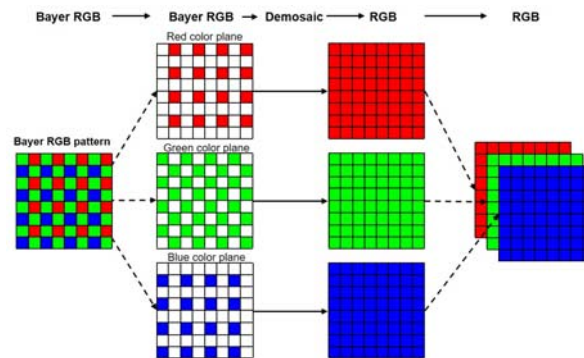


Tema 5: Conversión A/D y D/A y cambio de la frecuencia de muestreo

Filtro de Bayer

U5

- Mediante un proceso de interpolación se calcula el valor de las tres componentes en todos los píxeles de la imagen.



Source: <https://theailearner.com/2018/10/28/bayer-filter/>

Tema 5: Conversión A/D y D/A y cambio de la frecuencia de muestreo

Conversión D/A de imágenes

U5

Para reconstruir una imagen (a partir de su versión muestreada), **el propio ojo actúa como filtro rector**.

Imagen digital con diferentes resoluciones (expresadas en píxeles por dimensión)



40x40

80x80

320x320

- Si el número de píxeles es suficientemente alto la imagen se percibe como analógica => Depende del SVH, tamaño de la imagen y distancia de observación. Si nos alejamos, percibiremos las tres imágenes con calidad similar (seguramente baja).
- Los sistemas de alta definición aumentan el número de píxeles: el espectador puede acercarse más a la pantalla o tener pantallas más grandes.

Tema 5: Conversión A/D y D/A y cambio de la frecuencia de muestreo

Conversión D/A de imágenes

U5

¿Qué # píxeles debe tener una imagen para que el SVH no sea capaz de distinguir su carácter digital?

El ángulo con el que se observan dos píxeles adyacentes ha de ser menor o igual que el límite impuesto por la agudeza visual.

- Visión normal: 30 ciclos por grado (60 píxeles por grado)
- Límite SVH: 60 ciclos por grado (120 píxeles por grado)

Una **pantalla** puede denominarse **retina** (concepto introducido por Apple a partir del iPhone4) si el # píxeles que ofrece, desde la distancia a la que tiene que ser observada, está alrededor de 60 píxeles por grado

iPhone 5S: 1136x640 píxeles. H=5.86 cm= 640 píxeles.

En 1 grado = $\frac{2\pi}{360}$ radianes, para una distancia de observación L=30 cm=5.12H=3276.8 píxeles:

$$\frac{2\pi}{360} \approx \frac{h}{L} \Rightarrow h \approx 57 \text{ píxeles}$$

Formato 8K = 7680 x 4320 (WxH)

$$\frac{2\pi}{360} \approx \frac{h}{L} = \frac{60 \text{ píxeles}}{L} \Rightarrow L \approx 60 \frac{360}{2\pi} \text{ píxeles} = 0.8H$$

Formato TV HD = 1920 x 1080 (WxH)

$$\frac{2\pi}{360} \approx \frac{h}{L} = \frac{60 \text{ píxeles}}{L} \Rightarrow L \approx 60 \frac{360}{2\pi} \text{ píxeles} = 3.2H$$

Tema 5: Conversión A/D y D/A y cambio de la frecuencia de muestreo

Tema 5. Conversión A/D y D/A y cambio de la frecuencia de muestreo

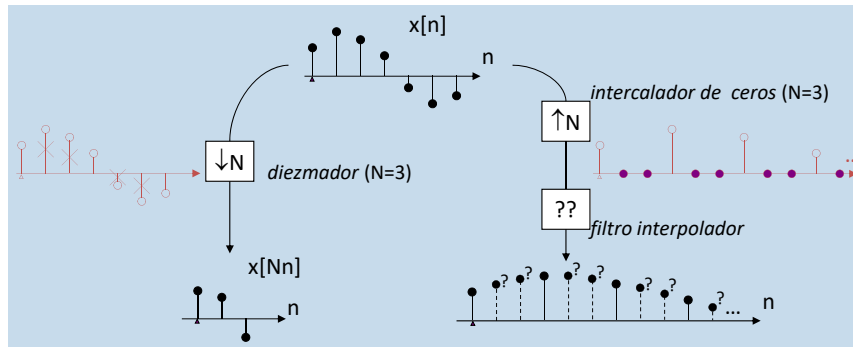
1. Muestreo y conversión A/D (3/12/2019)
2. Reconstrucción y conversión D/A (10/12/2019)
3. Conversión A/D y D/A de imágenes
4. Cambio de la frecuencia de muestreo
 - 4.1 Diezmado (downsampling) (13/12/2019)
 - 4.2 Interpolación (upsampling) (17/12/2019)

2019-2020

Signals and Systems (DSE)

Cambio de la frecuencia de muestreo

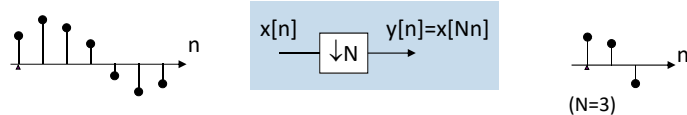
U5



Tema 5: Conversión A/D y D/A y cambio de la frecuencia de muestreo

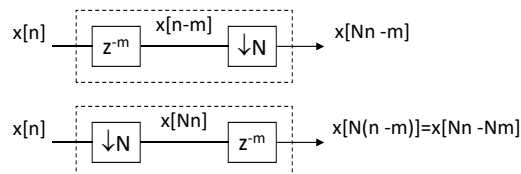
Diezmado

U5



Un diezmador ($N > 1$) es un sistema discreto

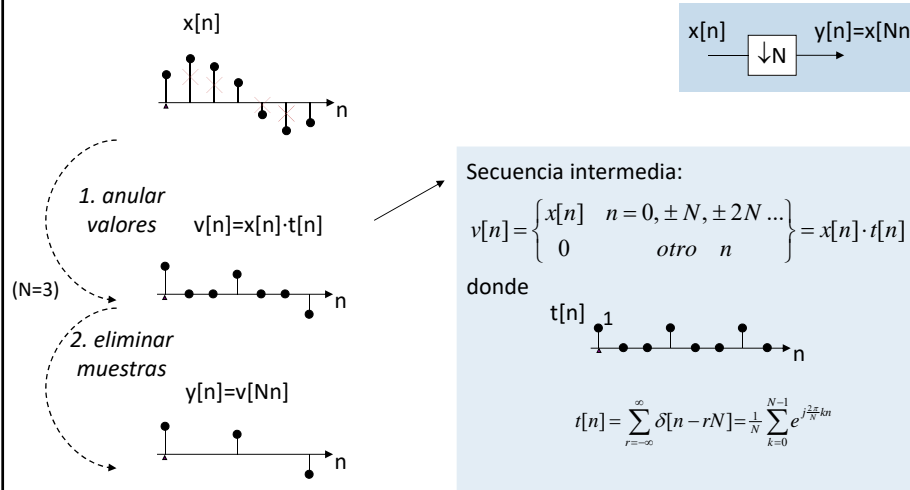
- ❑ lineal
- ❑ no causal: $Nn > n$ si $n > 0$.
- ❑ estable BIBO: "bounded input bounded output".
- ❑ variante en el tiempo: los dos sistemas siguientes no son equivalentes



Tema 5: Conversión A/D y D/A y cambio de la frecuencia de muestreo

Descomposición teórica del diezmado

U5



Tema 5: Conversión A/D y D/A y cambio de la frecuencia de muestreo

Análisis frecuencial del diezmado

U5

1. Transformada de la secuencia intermedia

$$V(F) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} v[n] e^{-j2\pi F n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \left(\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \right) e^{-j2\pi F n} =$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j2\pi \left(F - \frac{k}{N}\right)n} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X\left(F - \frac{k}{N}\right)$$

réplicas espectrales cada 1/N

2. Transformada de la secuencia diezmada: $y[n] = x[Nn] = v[Nn]$

$$Y(F) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n] e^{-j2\pi F n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} v[Nn] e^{-j2\pi F n} =$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} v[m] e^{-j2\pi F m/N} = V\left(\frac{F}{N}\right) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X\left(\frac{F}{N} - \frac{k}{N}\right)$$

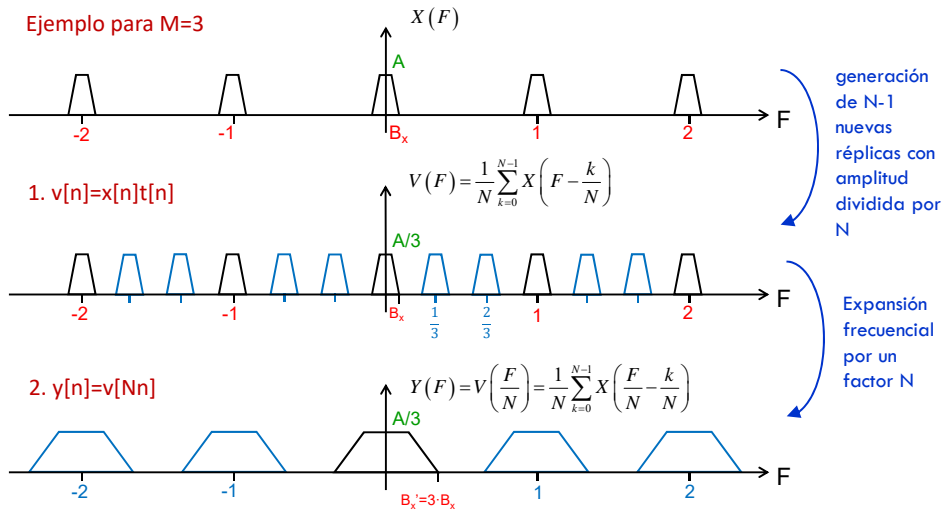
expansión frecuencial xN

$m = Nn$
posible, ya que $v[m] = 0$ $m \neq Nn$

Tema 5: Conversión A/D y D/A y cambio de la frecuencia de muestreo

Análisis frecuencial del diezmado

U5

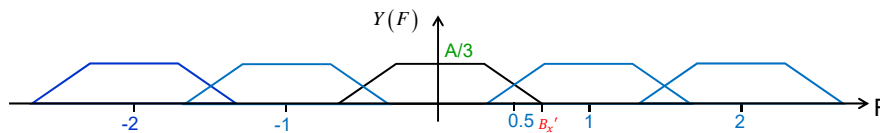
Ejemplo para $M=3$ 

Tema 5: Conversión A/D y D/A y cambio de la frecuencia de muestreo

Aliasing (1)

U5

□ Si $B_x' = N \cdot B_x > 0.5$ (i.e., si $B_x > \frac{1}{2N}$) habrá aliasing



Tema 5: Conversión A/D y D/A y cambio de la frecuencia de muestreo

Aliasing (2)

U5



Milstein playsbach, sonata #1, gmoeto (not 4)

Original, $f_m = 44.1$ kHz (CD)

<https://www.youtube.com/watch?v=k38H25fDCb4>

Diezmada por N

- $N = 2$, $f_m' = 22$ kHz



- $N = 4$, $f_m' = 11$ kHz



- $N = 8$, $f_m' = 5.5$ kHz



- $N = 16$, $f_m' = 2.8$ kHz



```
%% Load audio
sf, data = wavfile.read('Milstein.wav')
data = data/2**15
x = data[0:10*sf,:]
print('Original sampling frequency is ',sf, 'Hz')
sound(x, sf=sf)
```

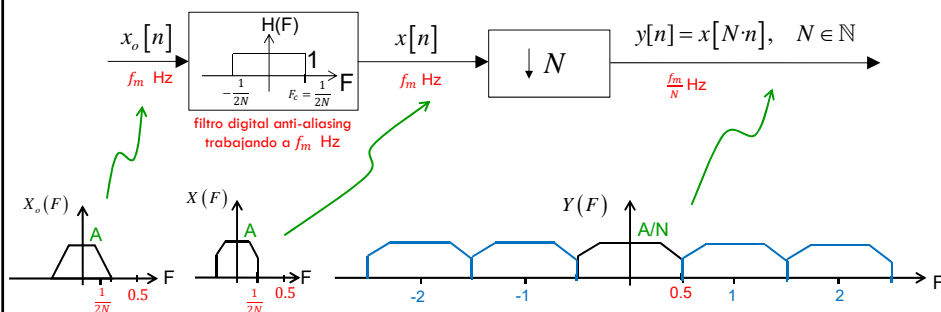
```
%% Decimation by 2, SAMPLING FREQUENCY IS 22 kHz
y1 = x[:,2,:]
fs = int(0.5*sf)
print('sampling frequency is ',fs, 'Hz')
sound(y1, sf = fs)
wavfile.write('Decimated_by_2.wav', fs, (y1*2**15).astype('int16'))
```

Tema 5: Conversión A/D y D/A y cambio de la frecuencia de muestreo

Aliasing (3)

U5

- ❑ Solución: aplicar un **filtro digital anti-aliasing** con frecuencia de corte $F_c = \frac{1}{2N}$:



Tema 5: Conversión A/D y D/A y cambio de la frecuencia de muestreo

Aliasing (4)

U5



<https://www.youtube.com/watch?v=k38H25fDCb4>

Original, $f_m = 44.1$ kHz (CD)



Diezmada:

• $N = 2$, $f_m' = 22$ kHz



• $N = 4$, $f_m' = 11$ kHz



• $N = 8$, $f_m' = 5.5$ kHz



• $N = 16$, $f_m' = 2.8$ kHz

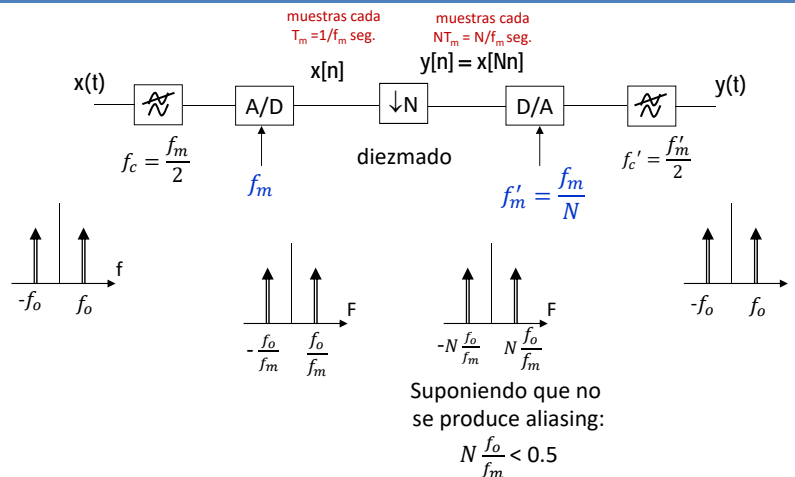


```
b, a = signal.iirdesign(wp = 1/2.05, ws =
1/2.0, gstop= 50, gpass=0.1, ftype='ellip')
z = np.zeros_like(x)
z[:,0] = signal.lfilter(b, a, x[:,0])
z[:,1] = signal.lfilter(b, a, x[:,1])
sound(z[:,2:], sf=fs)
wavfile.write('Filtered_and_dec_by_2.wav',
fs, (2**15*z[:,2:]).astype('int16'))
```

Tema 5: Conversión A/D y D/A y cambio de la frecuencia de muestreo

Relación con el entorno analógico

U5



Tema 5: Conversión A/D y D/A y cambio de la frecuencia de muestreo

Ejemplo de diezmado 2D (1)

U5

original



```
x = plt.imread('barbara.png')
plt.figure(x, cmap='gray')
```

Diezmado
(M=N=2)

```
y1 = x[:, ::2, ::2]
plt.figure(x, cmap='gray')
```

Filtrada paso
bajo antes de
diezmado
(M=N=2)

```
h = 1/9*np.ones((3,3))
z = convolve2d(x, h, mode='same')
y2 = z[:, ::2, ::2]
```

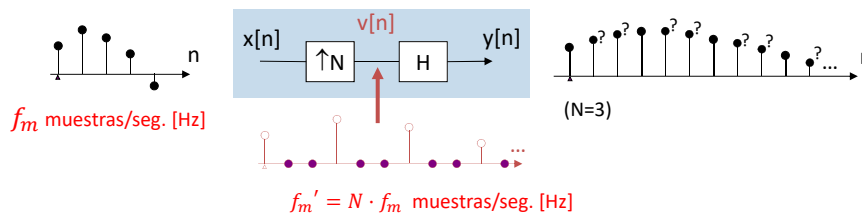
Tema 5: Conversión A/D y D/A y cambio de la frecuencia de muestreo

Interpolación de secuencias discretas

U5

□ La interpolación es una operación que comprende los pasos siguientes:

1. Se intercalan $N-1$ ceros entre cada dos muestras consecutivas de la secuencia original (simbolizado por $\uparrow N$)
2. Un filtro "interpolador" adecuado, calcula los valores de las muestras intercaladas



Tema 5: Conversión A/D y D/A y cambio de la frecuencia de muestreo

Análisis frecuencial de la interpolación

U5

1. Intercalado de ceros $v[n] = \begin{cases} x\left[\frac{n}{N}\right], & n = mN, \quad m \in \mathbb{Z} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$

$$V(F) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} v[n] e^{-j2\pi F n} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} v[mN] e^{-j2\pi F Nm} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] e^{-j2\pi F Nm} = X(NF)$$

*compresión frecuencial en un factor N
-- no hay aliasing !!!! --*

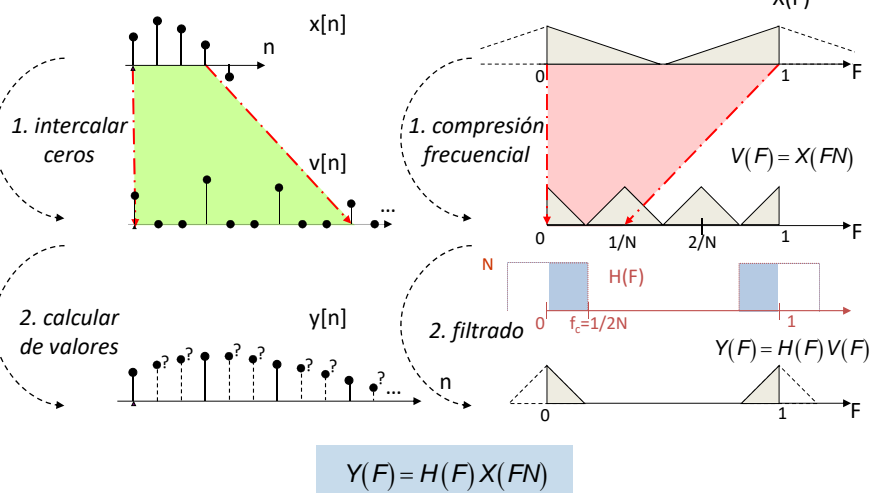
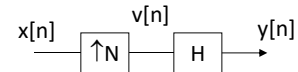
2. Filtrado: $y[n] = v[n] * h[n]$

$$Y(F) = V(F)H(F) = X(NF)H(F)$$

Tema 5: Conversión A/D y D/A y cambio de la frecuencia de muestreo

Esquema

U5

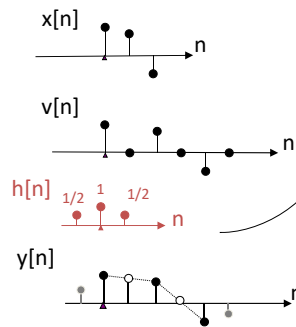
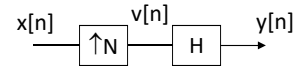


Tema 5: Conversión A/D y D/A y cambio de la frecuencia de muestreo

Ejemplo: interpolación lineal

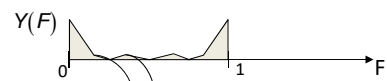
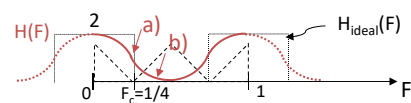
U5

- Regla de interpolación lineal con $N=2$



$$h[n] = \{1/2, 1, 1/2\} \quad (\text{no causal})$$

$$H(F) = \frac{1}{2}e^{j2\pi F} + 1 + \frac{1}{2}e^{-j2\pi F} = 1 + \cos(2\pi F)$$



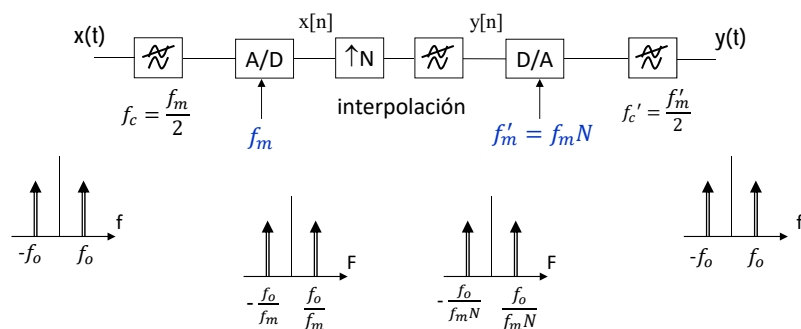
a) distorsión en frecuencias altas
b) cancelación incorrecta

Tema 5: Conversión A/D y D/A y cambio de la frecuencia de muestreo

43

Relación con el entorno analógico

U5



Tema 5: Conversión A/D y D/A y cambio de la frecuencia de muestreo

44

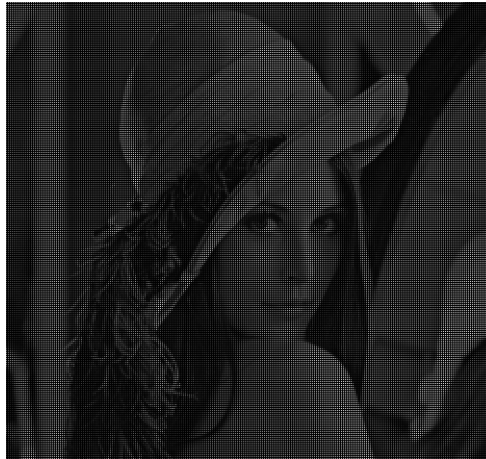
Ejemplo de interpolación (1)

U5

1. Intercalado de ceros

 $x[m, n]$


```
x = plt.imread('lena.bmp')
M, N = np.shape(x)
plt.figure(x, cmap='gray')
```



```
v = np.zeros((2*M, 2*N))
v[::2, ::2] = x
plt.figure(v, cmap='gray')
```

Tema 5: Conversión A/D y D/A y cambio de la frecuencia de muestreo

Ejemplo de interpolación (2)

U5

2. Filtrado



Filtro **Nearest Neighbour**:
copia el valor de la muestra más cercana

$$h[m, n] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

```
h = np.ones((2, 2))
y1 = convolve2d(v, h, mode='same')
plt.figure(y1, cmap='gray')
```

Tema 5: Conversión A/D y D/A y cambio de la frecuencia de muestreo

Ejemplo de interpolación (3)

U5

2. Filtrado



Interpolador bilineal:

$$h[m,n] = \begin{pmatrix} 0.5 \\ \underline{1} \\ 0.5 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0.5 & \underline{1} & 0.5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0.25 & 0.5 & 0.25 \\ 0.5 & \underline{1} & 0.5 \\ 0.25 & 0.5 & 0.25 \end{pmatrix}$$

```
a = np.array([[0.5, 1, 0.5]])
h = convolve2d(a[np.newaxis, :], a[:, np.newaxis])
y2 = convolve2d(v, h, mode='same')
plt.figure(y2, cmap='gray')
```

Tema 5: Conversión A/D y D/A y cambio de la frecuencia de muestreo