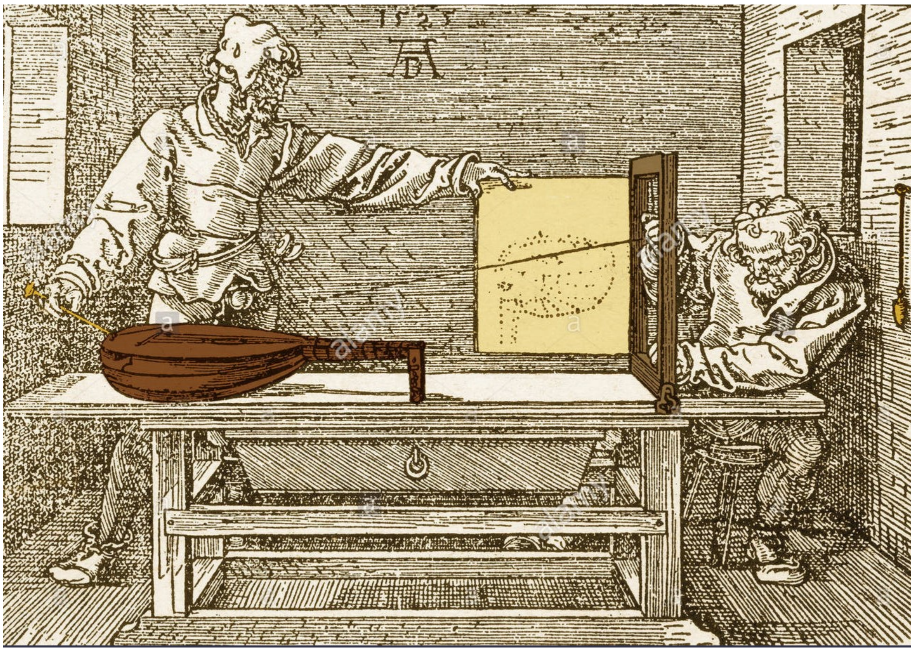
ÀLGEBRA MULTILINEAL i GEOMETRIA

(Notes de classe)

Pere Pascual Gainza



Grau en Matemàtiques

Facultat de Matemàtiques i Estadística, UPC

Setembre 2020

Imatge portada: A. Dürer, *Geometriæ*, 1532.

Índex

Prefaci

Aquestes notes recullen el contingut de l'assiganatura d' *Àlgebra Multilineal i Geometria* del Grau en Matemàtiques de la UPC. Tot i que hi ha diverses presentacions dels apunts de l'assignatura disponibles (vegeu la bibliografia) així com nombrosos manuals, m'ha semblat pertinent completar i posar a la disposició de tothom les notes personals amb les que preparo les classes. Aquestes notes haurien de servir, si més no, per fixar el contingut de l'assignatura, tenint present la incertesa amb la qual encarem el curs, que no assegura el normal desenvolupament de les classes presencials.

L'assignatura d'*Àlgebra Multilineal i Geometria* és una assignatura que tracta temes diversos que complementen l'*'Algebra Lineal* i la *Geometria Afí i Euclidiana* de primer curs. És per això que la dividim en dues parts ben diferenciades, una part algebraica (l'Àlgebra Multilineal), i una altra geomètrica (una introducció a la Geometria Projectiva). Podríem dir, sense que soni despectiu, que és una assignatura *calaix de sastre*, on s'encabeixen temes que s'inseririen de forma natural en altres assignatures, si el temps ho hagués permès.

La primera part consta de tres capítols: el dedicat a la Forma de Jordan, en el qual s'analitzen les matrius no diagonalitzables; el de Formes Quadràtiques, on s'estudien les formes reals i complexes en funció de la classificació de quàdriques del captítol 6; i el de Tensors, un concepte clau en moltes aplicacions de l'àlgebra (multi)lineal, com ara al càlcul integral, la geometria diferencial, la física o, més recentment, a l'anàlisi de dades, a banda del seu interés intrínsec per a l'àlgebra.

La segona part és una introducció a la geometria projectiva. Podríem dir que és la geometria dels pintors renaixentistes, ja que està intimament lligada a la teoria de la perspectiva. Estudia les propietats geomètriques de punts, rectes i plans invariants per projecció, amb la particularitat que se'ls ha afegit els *punts de l'infinit.* El tractament, a partir de l'àlgebra lineal, és en certa forma similar al que s'ha fet per a la geometria afí, tanmateix l'existència dels punts de l'infinit el farà més senzill, en un sentit que anirem veient. A banda de la simplificació que representa, la geometria projectiva introdueix nous problemes i conceptes, com per exemple el Principi de Dualitat, que permet derivar *automàticament* teoremes nous apartir de resultats coneguts.

Aquestes notes es basen en la bibliografia existent, ordenant el seu contingut i escollint les demostracions segons les proposem a classe. En particular, concideixen en diversos punts amb les notes dels professors que han impartit l'assignatura en cursos anteriors referenciades a la bibliografia.

Barcelona, setembre de 2020

I. Àlgebra Multilineal

1
Forma canònica de Jordan

En aquest capítol, presentem la forma canònica de Jordan d'una matriu. Fixem un cos $\mathbf{k}$ i denotarem per E un $\mathbf{k}$-espai vectorial que suposarem que és de dimensió finita. En la primera secció recordem algunes definicions i resultats vistos a l'assignatura d'Àlgebra Lineal.

1.1 Primer teorema de descomposició

Sigui $f : E \longrightarrow E$ un endomorfisme de E. Recordem que un vector $\boldsymbol{u} \in E$ és un *vector propi* de *valor propi* $\lambda \in \mathbf{k}$ si $f(\boldsymbol{u}) = \lambda \boldsymbol{u}$, i que es defineix el *polinomi característic* $P_f(t)$ de f per

$$P_f(t) = \det(f - t\,\mathsf{id}\,).$$

És un polinomi de grau $n = \dim E$, les arrels del qual són els valors propis de f.

En tot aquest capítol suposarem que el polinomi característic $P_f(t)$ descompon completament, és a dir,

$$P_f(t) = (-1)^n (t - \lambda_1)^{n_1} \cdot \cdots \cdot (t - \lambda_r)^{n_r},$$

amb $n_1 + \cdots + n_r = n$. Si $\mathbf{k} = \mathbb{C}$, aquesta hipòtesi es compleix per a tot endomorfisme f.

En el curs d'Àlgebra Lineal s'ha vist el resultat següent:

1.1.1 Teorema de descomposició. Els subespais $\ker(f - \lambda_i \mathsf{id}\,)^{n_i}$, $1 \leq i \leq r$, són f-invariants i E descompon en la forma

$$E = \ker(f - \lambda_1 \mathsf{id}\,)^{n_1} \oplus \cdots \oplus \ker(f - \lambda_r \mathsf{id}\,)^{n_r}. \qquad \diamond$$

Els subespais $\ker(f - \lambda_i \mathsf{id}\,)^{n_i}$ són de dimensió n_i, $1 \leq i \leq r$. Com són f-invariants, $f(\ker(f - \lambda_i \mathsf{id}\,)^{n_i}) \subset \ker(f - \lambda_i \mathsf{id}\,)^{n_i}$, així escollint una base de cadascun d'ells en resulta una base de E en la qual la matriu de f és diagonal per blocs

$$A = \begin{pmatrix} A_{\lambda_1} & & & \\ & A_{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_{\lambda_r} \end{pmatrix}$$

on cada bloc A_{λ_i} és la matriu de l'endomorfisme de $\ker(f - \lambda_i \mathsf{id})^{n_i}$ induït per f.

Recordem també que, pel teorema de Cayley-Hamilton es té que $P_f(f) = 0$ i que es defineix el *polinomi mínim* $m_f(t)$ com el polinomi (mònic) de menor grau que satisfà aquesta propietat: $m_f(f) = 0$. Qualsevol altre polinomi $Q(t)$ amb $Q(f) = 0$ és múltiple de $m_f(t)$.

El polinomi mínim descompon completament (perquè així ho hem suposat per a $P_f(t)$) i té les mateixes arrels que el polinomi característic:

$$m_f(t) = (t - \lambda_1)^{m_1} \cdot \dots \cdot (t - \lambda_r)^{m_r},\ 1 \leq m_i \leq n_i,\ i = 1, \dots, r.$$

És immediat comprovar que $\ker(f - \lambda_i \mathsf{id})^{n_i} = \ker(f - \lambda_i \mathsf{id})^{m_i}$ per a tot $i = 1, \dots r$. Per tant, podem usar el polinomi mínim de f en la descomposició en suma directa del Teorema 1.1.1

$$E = \ker(f - \lambda_1 \mathsf{id})^{n_1} \oplus \dots \oplus \ker(f - \lambda_r \mathsf{id})^{n_r}.$$

1.2 Forma de Jordan

Sigui $f \in End(E)$ amb polinomi mínim $m_f(t) = (t - \lambda_1)^{m_1} \cdot \dots \cdot (t - \lambda_r)^{m_r}$. En el que segueix escriurem f_λ per indicar l'endomorfisme $f - \lambda \mathsf{id} \in End(E)$.

1.2.1 Definició. Sigui λ un valor propi de f. Direm que un vector $\boldsymbol{u} \in E$ és un *vector propi generalitzat d'alçada ℓ de valor propi λ* si

$$f_\lambda^\ell(\boldsymbol{u}) = 0,\ f_\lambda^{\ell-1}(\boldsymbol{u}) \neq 0.$$

Així, un vector propi generalitzat d'alçada $\ell = 1$ no és altra cosa que un vector propi de valor propi λ en el sentit habitual.

1.2.2 Proposició. Sigui $\boldsymbol{u}$ un vector propi generalitzat d'alçada ℓ de valor propi λ. Els vectors

$$\boldsymbol{u}, f_\lambda(\boldsymbol{u}), f_\lambda^2(\boldsymbol{u}), \dots, f_\lambda^{\ell-1}(\boldsymbol{u})$$

són linealment independents. Anomenarem *cicle de Jordan de longitud ℓ* el subespai que generen.

Prova. Suposem donades constants μ_i tals que

$$\mu_1 \boldsymbol{u} + \mu_2 f_\lambda(\boldsymbol{u}) + \cdots + \mu_\ell f_\lambda^{\ell-1}(\boldsymbol{u}) = 0.$$

Si apliquem $f_\lambda^{\ell-1}$ a aquesta igualtat obtenim, tenint present que $\boldsymbol{u}$ és un vector propi generalitzat d'alçada ℓ,

$$\mu_1 f_\lambda^{\ell-1}(\boldsymbol{u}) = 0 \implies \mu_1 = 0.$$

Per tant, la igualtat inicial queda reduïda a

$$\mu_2 f_\lambda(\boldsymbol{u}) + \ldots \mu_\ell f_\lambda^{\ell-1}(\boldsymbol{u}) = 0.$$

Si apliquem ara $f_\lambda^{\ell-2}$ a aquesta nova igualtat concloem, anàlogament, que $\mu_2 = 0$. Inductivament trobem que tots els coeficients μ_i, $1 \leq i \leq \ell$ són nuls. $\diamond$

1.2.3 Observació. Un cicle de Jordan és invariant per f. En efecte, si denotem $\boldsymbol{u}_s = f_\lambda^{s-1}(\boldsymbol{u})$ els vectors de la base del cicle, aleshores

$$f_\lambda(\boldsymbol{u}_i) = \boldsymbol{u}_{i+1}, \; i < \ell, \quad f_\lambda(\boldsymbol{u}_\ell) = 0.$$

Així, si recuperem la definició de f_λ, $f_\lambda = f - \lambda\mathsf{id}$,

$$\begin{array}{rcr} f(\boldsymbol{u}_i) - \lambda \boldsymbol{u}_i = \boldsymbol{u}_{i+1} & \implies & f(\boldsymbol{u}_i) = \lambda \boldsymbol{u}_i + \boldsymbol{u}_{i+1}, \\ f(\boldsymbol{u}_\ell) - \lambda \boldsymbol{u}_\ell = 0 & \implies & f(\boldsymbol{u}_\ell) = \lambda \boldsymbol{u}_\ell. \end{array}$$

La matriu del morfisme f definit sobre un cicle de Jordan en aquesta base és doncs

$$J_\ell(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & & & & \\ 1 & \lambda & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \lambda & \\ & & & 1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Direm que $J_\ell(\lambda)$ és un *bloc de Jordan d'ordre ℓ i valor propi λ*.

1.2.4 Definició. Una *base de Jordan* per a $f \in End(E)$ és una base de E formada per cicles de Jordan per a f.

1.2.5 Teorema. Si el polinomi característic de $f \in End(E)$ descompon completament, aleshores existeix una base de Jordan per a f.

Prova. Presentem una demostració constructiva del teorema, recomenem seguir un exemple alhora que evoluciona la demostració, com ara els que hi ha més avall.

Descomponen la matriu de f en blocs segons el Teorema de descomposició 1.1.1. Analitzant cadascun dels blocs resultants separadament, podem suposar que el polinomi mínim de f és de la forma $m_f(t) = (t-\lambda)^m$ i, per tant, $E = \ker f_\lambda^m$.

Observem que es té la successió d'inclusions

$$0 \subset \ker f_\lambda \subset \ker f_\lambda^2 \subset \cdots \subset \ker f_\lambda^{m-1} \subset \ker f_\lambda^m = E.$$

Sigui $d_k = \dim \ker f_\lambda^k$, per visualitzar la demostració construïm un diagrama de caixes per pisos, de la forma següent:

el nombre de caixes del primer pis és	d_1
el nombre de caixes del segon pis és	$d_2 - d_1$
$\vdots$ $\vdots$	$\vdots$
el nombre de caixes del pis m és	$d_m - d_{m-1}$

Observem que el nombre de caixes és igual a la dimensió de E:

$$d_1 + (d_2 - d_1) + \cdots + (d_m - d_{m-1}) = d_m = \dim \ker f_\lambda^m = \dim E.$$

Si omplim les caixes amb una base de Jordan, haurem provat el teorema.

Un vector en una caixa d'un pis d'alçada k, representa un vector generalitzat d'alçada k i genera verticalment un cicle de Jordan que omple les caixes per sota seu, així doncs procedirem omplint les caixes començant pel pis més alt i baixant pis a pis.

Situem-nos al pis més alt, l'm-èsim. Escollim una base d'un suplementari de $\ker f_\lambda^{m-1}$ en $\ker f_\lambda^m = E$, que denotem per $\boldsymbol{u}_1^m, \ldots, \boldsymbol{u}_{\ell_m}^m$, on hem escrit $\ell_m = d_m - d_{m-1}$ i hem marcat un superíndex m per indicar que són vectors del pis m.

Asserció 1. Els vectors dels cicles de Jordan generats per $\boldsymbol{u}_1^m, \ldots, \boldsymbol{u}_{\ell_m}^m$ són linealment independents.

En efecte, suposem que

$$\sum_{k=0}^{m-1} \sum_{i=1}^{\ell_m} \mu_{ik} f_\lambda^k(\boldsymbol{u}_i^m) = 0. \tag{1}$$

Aplicant f_λ^{m-1} a aquesta igualtat i tenint en compte que $f_\lambda^k(\boldsymbol{u}_i^m) = 0$, per a $1 \le i \le m$ i $k \ge m$, trobem que

$$f_\lambda^{m-1}(\mu_{10}\boldsymbol{u}_1^m + \cdots + \mu_{m0}\boldsymbol{u}_{\ell_m}^m) = 0,$$

i, per tant, $\mu_{10}\boldsymbol{u}_1^m + \cdots + \mu_{m0}\boldsymbol{u}_{\ell_m}^m \in \ker f_\lambda^{m-1}$. Per l'elecció dels vectors $\boldsymbol{u}_i^m$ trobem doncs $\mu_{10}\boldsymbol{u}_1^m + \cdots + \mu_{m0}\boldsymbol{u}_{\ell_m}^m = 0$, i com aquests vectors són linealment independents, $\mu_{i0} = 0, 1 \leq i \leq \ell_m$.

Així, l'equació (1) s'ha reduït a l'equació

$$\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{i=1}^{\ell_m} \mu_{ik} f_\lambda^k(\boldsymbol{u}_i^m) = 0. \tag{2}$$

Ara apliquem f_λ^{m-2} a (2) i fem un raonament similar per deduïr que $\mu_{i1} = 0$, $1 \leq i \leq \ell_m$. Iterant el procés arribem a $\mu_{ik} = 0$, $1 \leq i \leq \ell_m, 0 \leq k \leq m-1$.

Cada vector $\boldsymbol{u}_i^m, 1 \leq i \leq \ell_m$, genera un cicle de Jordan amb el qual omplim (verticalment) totes les caixes que té per sota. El subespai que generen els vectors $f_\lambda^k(\boldsymbol{u}_i^m)$, $1 \leq i \leq m_\ell$, en el pis $m-k$ és independent del pis immediatament inferior:

Asserció 2. $\langle f_\lambda^k(\boldsymbol{u}_1^m), \ldots, f_\lambda^k(\boldsymbol{u}_{\ell_m}^m)\rangle \cap \ker f_\lambda^{m-k-1} = 0$.

En efecte, si $\boldsymbol{w} = \mu_1 f_\lambda^k(\boldsymbol{u}_1^m) + \cdots + \mu_{m_\ell} f_\lambda^k(\boldsymbol{u}_{m_\ell}^m) \in \langle f_\lambda^k(\boldsymbol{u}_1^m), \ldots, f_\lambda^k(\boldsymbol{u}_{\ell_m}^m)\rangle \cap \ker f_\lambda^{m-k-1}$, $f_\lambda^{m-k-1}(\boldsymbol{w}) = 0$. És a dir,

$$f_\lambda^{m-1}(\mu_1\boldsymbol{u}_1^m + \cdots + \mu_{m_\ell}\boldsymbol{u}_{m_\ell}^m) = 0.$$

Aleshores $\mu_1\boldsymbol{u}_1^m + \cdots + \mu_{m_\ell}\boldsymbol{u}_{m_\ell}^m \in \ker f_\lambda^{m-1}$, el que és absurd per l'elecció dels vectors $\boldsymbol{u}_i^m$ llevat que $\mu_i = 0, 1 \leq i \leq \ell_m$.

Situem-nos ara al pis $m-1$. Hi ha caixes que ja són plenes, són les corresponents als vectors que venen del pis de dalt $U_{m-1} = \langle f_\lambda(\boldsymbol{u}_1^m), \ldots, f_\lambda(\boldsymbol{u}_{\ell_m}^m)\rangle$. Segons l'asserció 2, $\ker f_\lambda^{m-2} \cap U_{m-1} = 0$; omplim la resta de caixes d'aquest pis de la forma següent: sigui $V_{m-1} \subset \ker f_\lambda^{m-1}$ un subespai tal que

$$\ker f_\lambda^{m-1} = \ker f_\lambda^{m-2} \oplus U_{m-1} \oplus V_{m-1};$$

escollim una base de V_{m-1}, $\boldsymbol{u}_1^{m-1}, \ldots, \boldsymbol{u}_{\ell_{m-1}}^{m-1}$ i omplim les caixes buides amb aquests vectors. Els vectors $\boldsymbol{u}_i^{m-1}$, $1 \leq i \leq \ell_{m-1}$ generen cicles de Jordan amb els que omplim verticalment les caixes que tenen per sota. Repetint el raonament de les assercions 1 i 2 es demostra que els cicles de Jordan generat pels vectors $\boldsymbol{u}_i^m, \boldsymbol{u}_j^{m-1}$, $1 \leq i \leq \ell_m, 1 \leq j \leq \ell_{m-1}$, són linealment independents.

Reproduint el procés pis per pis, omplim tot el diagrama de caixes per cicles de Jordan linealment independents i, per tant, per una base de Jordan. ◇

1.2.6 Corol·lari. El nombre de cicles de Jordan de longitud k és igual a

$$2\dim\ker f_\lambda^k - \dim\ker f_\lambda^{k-1} - \dim\ker f_\lambda^{k+1}.$$

Prova. Observem que el nombre de cicles de Jordan de longitud $\geq k$ ve determinat per la dimensió del pis k, $d_k - d_{k-1}$, i que, per tant, els de longitud exactament k són

$$(d_k - d_{k-1}) - (d_{k+1} - d_k) = 2d_k - d_{k-1} - d_{k+1}. \qquad \blacksquare$$

És a dir, el nombre de cicles de Jordan d'una determinada longitud depèn únicament de f. Si ordenem els cicles segons la longitud, de major a menor longitud, en resulta la unicitat de la matriu de Jordan de f.

1.2.7 Corol·lari. La forma de Jordan d'un endomorfisme f és única, llevat de reordenament dels blocs.

Aquest resultat ens permet determinar quan dues matrius són les matrius d'un mateix endomorfisme en diferents bases:

1.2.8 Corol·lari (Classificació d'endomorfismes). Dues matrius amb el mateix polinomi característic (que descompon completament) són conjugades si, i només si, tenen la mateixa forma de Jordan.

1.2.9 Exemples. (1) Busquem la reduïda de Jordan de la matriu

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

El polinomi característic de A és $P_A(t) = \det(A - tI) = -(t-3)^5$; $\lambda = 3$ és lúnic valor propi. Calculem les potències de $A - 3I$ i les dimensions d_k:

$$\begin{aligned} A - 3I &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow d_1 = 2, \\ (A - 3I)^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow d_2 = 4 \\ (A - 3I)^3 &= 0 \Longrightarrow d_3 = 5. \end{aligned}$$

El polinomi mínim és $m_A(t) = (t-3)^3$ i el diagrama de caixes

$\boldsymbol{u}_1$	
$(f - 3\mathsf{id})(\boldsymbol{u}_1)$	$\boldsymbol{v}_1$
$(f - 3\mathsf{id})^2(\boldsymbol{u}_1)$	$(f - 3\mathsf{id})(\boldsymbol{v}_1)$

de manera que la matriu de Jordan és

$$\begin{pmatrix} 3 & & & & \\ 1 & 3 & & & \\ & 1 & 3 & & \\ & & & 3 & \\ & & & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Per trobar una base de Jordan seguim els pasos indicats a la demostració del teorema:

1er pas: escollim vectors propis generalitzats d'alçada màxima, en aquest cas n'hem d'escollir un d'alçada 3. Prenem $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{e}_1$ i omplim les caixes per sota amb el cicle de Jordan que genera

$$\{\boldsymbol{u}_1 = (1,0,0,0,0),\ \boldsymbol{u}_2 = (1,-1,1,0,0),\ \boldsymbol{u}_3 = (0,0,1,0,0)\}.$$

2on pas: baixem un pis, i escollim un vector generalitzat d'alçada 2 linealment independent de $\ker(A-3I) \oplus \langle \boldsymbol{u}_2 \rangle$, és a dir, un vector de $\ker(A-3I)^2 \setminus \ker(A-3I) \oplus \langle \boldsymbol{u}_2 \rangle$. Per exemple podem prendre $\boldsymbol{v}_1 = (-1,0,0,0,1)$. El cicle que genera

$$\{\boldsymbol{v}_1 = (-1,0,0,0,1),\ \boldsymbol{v}_2 = (0,1,-1,0,0)\}$$

permet omplir les caixes buides. Així $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$ és una base de Jordan.

(2) Calculem la forma de Jordan de la matriu

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

El polinomi característic de B és $P_B(t) = (t-1)^3(t-2)$, per tant $E = \ker(B-I)^3 \oplus \ker(B-2I)$ i la matriu de Jordan té una primera divisió per blocs corresponents als dos valors propis $1, 2$. El de $\lambda = 1$ és una matriu d'ordre 3, mentre que per a $\lambda = 2$ és una matriu d'ordre 1, és a dir, un escalar (que necessàriament és 2).

Calculem les potències de $(B - I)$:

$$B - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (B-I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (B-I)^3 = (B-I)^2.$$

Per tant el polinomi mínim és $m_B(t) = (t-1)^2(t-2)$.

Bloc de Jordan corresponent a $\lambda = 1$: és la matriu de Jordan de l'endomorfisme induït per f en el subespai invariant $\ker(B-I)^2$. Del càlcul anterior se segueix que en aquest subespai $d_1 = 4 - \operatorname{rang}(B-I) = 4-2 = 2$ i $d_2 = 4 - \operatorname{rang}(B-I)^2 = 4-1 = 3$, així el bloc que li correspon és

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ 1 & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

Per determinar una base, escollim $\boldsymbol{u}_1 \in \ker(B-I)^2 \setminus \ker(B-I)$; per exemple, $\boldsymbol{u}_1 = (0,0,1,0)$ i el cicle de Jordan que genera, $\boldsymbol{u}_2 = (B-I)(u_1) = (2,-1,0,0)$. Finalment escolliem un vector propi $\boldsymbol{v}$ linealment independent amb $\boldsymbol{u}_2$, per exemple, $\boldsymbol{v} = (1,0,0,0)$.

Bloc de Jordan corresponent a $\lambda = 2$: és de dimensió 1, és suficient trobar un vector propi de valor propi 2. Per exemple $\boldsymbol{w} = (0,0,3,1)$.

En definitiva, en la base $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\}$, la matriu de l'endomorfisme definit per B és

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ 1 & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 2 \end{pmatrix}$$

1.3 Aplicacions de la forma de Jordan

Les matrius de Jordan són molt útils per calcular certes funcions de matrius. En detallem dos casos, les potències d'una matriu i l'exponencial d'una matriu, operacions fonamentals en l'anàlisi dels sistemes lineals discrets i dels sistemes lineals d'equacions diferencials ordinàries amb coeficients constants. No farem una anàlisi general d'aquestes aplicacions, ens limitarem a il·lustrar l'ús de la forma de Jordan per trobar solucions en situacions particulars.

Potència k-èsima d'una matriu: aplicació als sistemes dinàmics discrets

Un *sistema dinàmic discret* és un sistema d'equacions recurrents que modelitza els valors de certs paràmetres, codificats per un vector x_i de $\mathbf{k}^n$, mitjançant una matriu $n \times n$ A de manera que l'equació

$$x_{i+1} = Ax_i$$

modelitza l'evolució del sistema amb el pas del temps (discret).

Si x_0 és l'estat inicial del sistema, aleshores el sistema és equivalent a

$$x_i = A^i x_0, \ \forall i \geq 0.$$

En general, interessa saber com evoluciona el sistema amb el pas del temps: tendeix a un equilibri? augmenten els valors dels estats x_i indefinidament? Oscil·len? Per respondre a aquesta mena de preguntes hem d'avaluar les potències A i és aquí on la forma de Jordan és d'utilitat.

En efecte, si J és la forma de Jordan de A i S és la matriu determinada per la base de Jordan corresponent, aleshores $J = S^{-1}AS$ i, per tant, $A = SJS^{-1}$, per la qual cosa

$$A^k = (SJS^{-1})(SJS^{-1}) \overset{k)}{\cdots} (SJS^{-1}) = SJ^kS^{-1}.$$

La matriu J és una matriu diagonal per blocs de Jordan, $J_1, \dots, J_s$, d'on

$$J^k = \begin{pmatrix} J_1^k & & & \\ & J_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s^k \end{pmatrix}.$$

En definitiva, és suficient determinar com es generen les potències dels blocs de Jordan. Per tal d'avaluar la potència k-èsima d'un bloc de Jordan $J_\ell(\lambda)$ descomponem la matriu en la forma

$$J_\ell(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & & & \\ & \lambda & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

descomposició que denotarem simplement per $J_\ell(\lambda) = D + N$, on D és una matriu diagonal i N és una matriu amb uns en la subdiagonal. Els fets següents són de comprovació immediata:

(1) D^k és una matriu diagonal amb λ^k a la diagonal.

(2) N^k és una matriu amb totes les entrades 0 llevat de les corresponents a la subdiagonal $k-1$, que té totes les entrades iguals a 1. És a dir, cada potència de N desplaça els uns de la subdiagonal a la subdiagonal immediatament per sota. En particular, N és *nilpotent*: $N^n = 0$.

(3) D i N commuten, $DN = ND$ i, per tant, se satisfà la fórmula de Newton

$$(D+N)^k = D^k + kD^{k-1}N + \frac{k(k-1)}{2}D^{k-2}N^2 + \cdots + N^k.$$

Així, per $k \geq \ell$, la potència k-èsima del bloc de Jordan de mida ℓ és

$$\begin{pmatrix} \lambda^k & & & & \\ k\lambda^{k-1} & \lambda^k & & & \\ \frac{k(k-1)}{2}\lambda^{k-2} & k\lambda^{k-1} & \lambda^k & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \binom{k}{\ell}\lambda^{k-\ell+1} & \dots & \frac{k(k-1)}{2}\lambda^{k-2} & k\lambda^{k-1} & \lambda^k \end{pmatrix}.$$

Exponencial d'una matriu: aplicació als sistemes lineals d'equacions diferencials

Un *sistema lineal d'equacions diferencial ordinàries* és un sistema d'equacions

$$\begin{array}{rcllcll} x_1'(t) & = & a_{11}x_1(t) & + a_{12}x_2(t) & + & \dots & + a_{1n}x_n(t) \\ x_2'(t) & = & a_{21}x_1(t) & + a_{22}x_2(t) & + & \dots & + a_{2n}x_n(t) \\ & & \dots & \dots & \dots & & \\ x_n'(t) & = & a_{n1}x_1(t) & + a_{n2}x_2(t) & + & \dots & + a_{nn}x_n(t) \end{array}$$

on $x_i(t)$ són funcions de variable real i a_{ij} constants reals. En notació matricial,

$$x'(t) = Ax(t), \tag{4}$$

on $A = (a_{ij})$ és la matriu del sistema.

Si $n = 1$, el sistema es redueix a una equació $x'(t) = ax(t)$ per a una funció real de variable real. En aquest cas, les solucions de l'equació són de la forma $x(t) = ce^{at}$, on c és una constant arbitrària. Si imposem una condició inicial, $x(0)$, la solució esdevé $x(t) = x(0)e^{at}$. En el cas d'un sistema lineal d'ordre superior, $n \geq 1$, podem raonar de forma similar utilitzant l'exponencial de matrius.

1.3.1 Definició. Sigui A una matriu $n \times n$. Es defineix l'exponencial de A, e^A, com la suma de la sèrie

$$e^A = I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \cdots + \frac{1}{k!}A^k + \dots$$

El primer problema que es planteja és el de la convergència d'aquesta sèrie de matrius. Si suposem que el polinomi característic de A descompon completament, la convergència

resultarà del càlcul de l'exponencial de la matriu de Jordan de A, ja que raonant com a la subsecció anterior trobem
$$e^A = Se^J S^{-1}. \tag{5}$$
Així doncs, comencem per discutir l'exponencial d'un bloc de Jordan: recuperem la descomposició de l'equació (3) i escrivim $J = D + N$. Donat que D i N commuten, un càlcul formal amb les sèries que defineixen e^D i e^N prova que

$$e^{D+N} = e^D e^N,$$

mentre que per càlcul directe veiem que e^D és la matriu diagonal $e^D = e^\lambda I$ i, donat que $N^n = 0$,

$$e^N = I + N + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}N^{n-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ 1 & 1 & & & & \\ \frac{1}{2!} & 1 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \frac{1}{(n-1)!} & & & \frac{1}{2!} & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

En definitiva, resulta

$$e^J = e^\lambda \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ 1 & 1 & & & & \\ \frac{1}{2!} & 1 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \frac{1}{(n-1)!} & & & \frac{1}{2!} & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Observem que per a un bloc de Jordan $J = D + N$ de mida ℓ i segons el càlcul fet anteriorment,

$$e^{Jt} = e^{Dt}e^{Nt} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ t & 1 & & & & \\ \frac{t^2}{2!} & t & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} & & & \frac{t^2}{2!} & t & 1 \end{pmatrix}$$

Si utilitzem ara (5) per a definir l'exponencial resulta fàcilment la proposició següent:

1.3.2 Proposició. L'exponencial d'una matriu A, per a la qual descompon completament el polinomi característic, està ben definida i satisfà:

(1) $e^{rA}e^{sA} = e^{(r+s)A}$.

(2) $Ae^A = e^A A$.

(3) $d(e^{At})/dt = Ae^{At}$. $\diamond$

En conseqüència, la solució del sistema lineal (4) és $x(t) = e^{At}x_0$.

1.3.3 Exemple. Considerem el sistema lineal d'equacions diferencials

$$\begin{array}{rcrcrcr} x'(t) & = & 2x(t) & + & & & \\ y'(t) & = & x(t) & + & 2y(t) & & \\ z'(t) & = & -x(t) & + & y(t) & + & 2z(t) \end{array}$$

amb condició inicial $(x(0), y(0), z(0)) = (1, -1, 0)$. La matriu del sistema i el polinomi característic són

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad P_A(t) = -(t-2)^3.$$

Hi ha un únic valor propi, el 2. En aquesta cas, per resoldre el sistema no ens cal trobar una base de Jordan. De fet, la matriu $N = A - 2I$ és nilpotent i commuta amb $D = 2I$:

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N^3 = 0,$$

i, per tant,

$$e^{Nt} = I + Nt + N^2t^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 \\ \frac{t^2}{2} - t & t & 1 \end{pmatrix}$$

i la solució del sistema resulta d'aplicar la matriu $e^{2t}e^{Nt}$ al vector de condicions inicials,

$$x(t) = e^{2t}, \quad y(t) = (t-1)e^{2t}, \quad z(t) = \left(\frac{t^2}{2} - 2t\right)e^{2t}.$$

La hipòtesi de descomposició del polinomi característic no és essencial. De fet, hi ha una forma de Jordan *real* per a matrius reals amb valors propis complexos. Als problemes trobareu un exemple.

2
Formes quadràtiques

En aquest capítol, estudiem aspectes bàsics de les formes quadràtiques que ens seran d'utilitat en l'anàlisi de les quàdriques de l'espai projectiu. Essencialment una forma quadràtica és un polinomi homogeni de segon grau de diverses variables, com ara

$$x^2 - 4xy - zy \quad \text{o} \quad xy + 3y^2 - \frac{3}{2}xz + yz.$$

Per a la seva anàlisi usarem les tècniques de l'Àlgebra Lineal. És per això que al llarg del capítol fixem un cos $\mathbf{k}$ (de característica diferent de 2, ja que en diverses ocasions haurem de dividir per 2), que en les aplicacions serà $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Els espais vectorials als que ens referirem seran sobre $\mathbf{k}$ i suposarem que són de *dimensió finita*.

2.1 Formes bilineals i formes quadràtiques

2.1.1 Definició. Sigui E un espai vectorial. Una forma *bilineal simètrica* és una aplicació $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbf{k}$ que satisfà les següents condicions:

(1) $\varphi(\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}) = \varphi(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{v}) + \varphi(\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v})$,

(2) $\varphi(\lambda \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \lambda\varphi(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$,

(3) $\varphi(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \varphi(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u})$,

per a qualssevol vectors $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v} \in E$ i qualsevol $\lambda \in \mathbf{k}$.

Observeu que les condicions (1) i (2) expressen que φ és lineal respecte de la primera component; la linealitat respecte de la segona component se segueix de la propietat de simetria (3).

Quan $\mathbf{k} = \mathbb{R}$, un producte escalar defineix una forma bilineal, una que és definida positiva (és a dir, que satisfà $\varphi(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) > 0, \forall u \in E, \boldsymbol{u} \neq 0$), cosa que no suposem en general. En aquest sentit, una forma bilineal és una generalització de la definició de producte escalar.

2.1.2 Definició. Sigui φ una forma bilineal simètrica definida sobre E. Es defineix la *forma quadràtica* q_φ *associada a* φ com l'aplicació $q_\varphi : E \longrightarrow \mathbf{k}$ definida per

$$q_\varphi(\boldsymbol{u}) = \varphi(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}), \ \forall \boldsymbol{u} \in E.$$

2.1.3 Proposició. Si q_φ és la forma quadràtica associada a φ, aleshores

(1) $q_\varphi(\lambda \boldsymbol{u}) = \lambda^2 q_\varphi(\boldsymbol{u}), \ \forall \boldsymbol{u} \in E, \forall \lambda \in \mathbf{k}$.

(2) (si $car c\,\mathbf{k} \neq 2$), llavors

$$\varphi(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \frac{1}{2}(q_\varphi(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) - q_\varphi(\boldsymbol{u}) - q_\varphi(\boldsymbol{v})).$$

◇

La propietat (2) d'aquesta proposició mostra que podem recuperar la forma bilineal φ a partir del coneixement de la forma quadràtica. Ho enunciem en la forma

2.1.4 Corol·lari. Hi ha una bijecció

$$\{q : E \longrightarrow \mathbf{k} \mid q \text{ forma quadràtica}\} \longleftrightarrow \{\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbf{k} \mid \varphi \text{ forma bilineal simètrica}\}.$$

2.2 Matrius i bases

2.2.1 Definició. Sigui φ una forma bilineal simètrica sobre E i $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$ una base de E. La *matriu de la forma bilineal* φ (també anomenada la matriu de la forma quadràtica q_φ) en la base $\mathcal{B}$ és la matriu simètrica

$$A = (\varphi(\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_j)).$$

Si escrivim $a_{ij} = \varphi(\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_j)$ i considerem vectors $\boldsymbol{u} = x_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{u}_n$ i $\boldsymbol{v} = y_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + y_n\boldsymbol{u}_n$, aleshores

$$\varphi(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij} x_i y_j,$$

o en forma matricial, amb les notacions evidents,

$$\varphi(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = X^t A Y;$$

la forma quadràtica associada a φ defineix un polinomi homogeni de segon grau en les coordenades d'un vector:

$$q_\varphi(\boldsymbol{u}) = \sum_{1\leq i,j\leq n} a_{ij}x_ix_j.$$

2.2.2 Proposició. Si A, B són les matrius de φ/q_φ en bases $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$ i $\mathcal{B}' = \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ de E, respectivament, aleshores

$$B = S^tAS$$

on S és la matriu de canvi de base de $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$. $\diamond$

La matriu A es pot interpretar com la matriu d'una aplicació lineal canònicament associada a φ en bases adequades (vegeu també el problema 2 del tema 3):

2.2.3 Proposició. Donada una forma bilineal simètrica φ es defineix l'aplicació lineal

$$\begin{array}{rcl} \hat{\varphi} : E & \longrightarrow & E^* \\ \boldsymbol{u} & \longmapsto & \varphi(\boldsymbol{u}, -) \end{array}$$

Si A és la matriu de φ en una base $\mathcal{B}$, aleshores A és també la matriu de $\hat{\varphi}$ en les bases $\mathcal{B}$ i $\mathcal{B}^*$. $\diamond$

2.2.4 Definició. Es defineix el radical de φ/q_φ per

$$\operatorname{rad}\varphi = \{\boldsymbol{u} \in E \mid \varphi(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 0, \forall \boldsymbol{v} \in E\}.$$

Per la bilinealitat de φ, el radical és un subespai de E. Denotarem per r_0 la seva dimensió i direm que $r = n - r_0$ és el *rang de la forma bilineal* φ.

2.2.5 Proposició. El radical de φ és igual al nucli de l'aplicació $\hat{\varphi} : E \longrightarrow E^*$. En particular, si A és la matriu de φ en una base $\mathcal{B}$, es té

$$\operatorname{rang}\varphi = \operatorname{rang}\hat{\varphi} = \operatorname{rang} \mathrm{A}. \qquad \diamond$$

Observeu que el determinant de la matriu A, $\det A$, NO és un invariant de la forma bilineal. En efecte, per canvi de base les matrius de φ es relacionen segons $B = S^tAS$ i, per tant, $\det B = \det A(\det S)^2$.

2.3 Forma reduïda d'una forma quadràtica

Ens preguntem si donada una forma bilineal simètrica φ hi ha una base en la qual la matriu sigui diagonal. En termes de la forma quadràtica associada q_φ això és equivalent a demanar l'existència d'una base en la qual el polinomi homogeni de segon grau (en les coordenades d'un vector $\boldsymbol{u}$) definit per q contingui només termes de quadrat perfecte.

2.3.1 Definició. Una base *q-ortogonal* és una base $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n\}$ tal que $\varphi(\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_j) = 0, i \neq j$.

És a dir, en una base q-ortogonal es té

$$q(x_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{u}_n) = a_{11}x_1^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2.$$

2.3.2 Teorema. Donada una forma quadràtica q, existeix una base q-ortogonal.

Prova. Tot seguit veurem mètodes efectius de diagonalització d'una forma quadràtica, cosa que faria innecesari donar una demostració directa del teorema. Tot i això, n'indiquem una elemental. Ho fem per inducció sobre la dimensió de E.

Si $\dim E = 1$ no hi ha res a demostrar. Suposem el resultat cert per a $\dim E = n-1$ i provem-lo per a formes de dimensió n. Si $q = 0$, no hi ha res a demostrar. Si $q \neq 0$, hi ha un vector $\boldsymbol{u}$ tal que $q(\boldsymbol{u}) \neq 0$. Sigui $F = \{\boldsymbol{v} \in E \mid \varphi(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 0\} = \ker \hat{\varphi}(\boldsymbol{u})$. $F \subset E$ és un subespai vectorial i, com $\varphi(\boldsymbol{u}, -) \neq 0$, és de dimensió $n-1$.

És clar que $E = \langle \boldsymbol{u} \rangle \oplus F$. Per hipòtesi d'inducció, existeix una base q-ortogonal de F, $\{\boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_n\}$. Ara $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_n\}$ és una base q-ortogonal de E. ◇

Observem que els coeficients de la forma diagonal de q no estan unívocament determinats. De fet, si q admet l'expressió

$$q(x_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{u}_n) = \alpha_1 x_1^2 + \cdots + \alpha_n x_n^2$$

en la base $\mathcal{B}$ i fem el canvi de base $\mathcal{B}'$ definit per $\boldsymbol{v}_i = \lambda_i \boldsymbol{u}_i, \lambda_i \neq 0$, aleshores la nova base segueix sent q-ortogonal, però en aquesta base q s'expressa en la forma

$$q(y_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + y_n\boldsymbol{v}_n) = \alpha_1\lambda_1^2 x_1^2 + \cdots + \alpha_n\lambda_n^2 x_n^2.$$

És a dir, per canvi de base la matriu de q s'ha transformat en la forma

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & & & \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \alpha_n \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \alpha_1\lambda_1^2 & & & \\ & \alpha_2\lambda_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \alpha_n\lambda_n^2 \end{pmatrix}$$

En definitiva, *els coeficients de la diagonal estan definits llevat de quadrats de* $\mathbf{k}$.

Observem també que el nombre de coeficients $\alpha \neq 0$ d'una forma reduïda de q és igual al rang de q i, per tant, no depèn de la base q-ortogonal en la qual s'expressa. Així, una forma reduïda de q s'escriu

$$q(x_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{u}_n) = \alpha_1 x_1^2 + \cdots + \alpha_r x_r^2, \quad r = \operatorname{rang} q.$$

Mètodes de diagonalització d'una forma quadràtica

Descrivim tres mètodes per a digonalitzar una forma quadràtica.

(1) *Congrüència-pivot.* Donada una forma quadràtica q sobre E i una base $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$, sigui A la matriu de q en $\mathcal{B}$. Trobem una base en la qual la matriu de q és diagonal aplicant transformacions elementals per files i les mateixes per columnes a la matriu A, operació que representa segons hem vist un canvi de base. Per fer-ho denotem per F les matrius que realitzen operacions elementals per files i per C les que fan la mateixa operació per columnes i guardem la informació dels canvis de base efectuant les operacions per files a la matriu identitat:

$$\begin{aligned}&(A|I) \sim (F_1A|F_1) \sim (F_1AC_1|F_1) \sim \ldots\\ &\sim (F_rF_{r-1}\cdots F_1AC_1\cdots C_{r-1}C_r|F_rF_{r-1}\cdots F_1) = (D|S^t),\end{aligned}$$

on $D = F_rF_{r-1}\cdots F_1AC_1\cdots C_{r-1}C_r$ és una matriu diagonal i $S = (F_rF_{r-1}\cdots F_1)^t$, és la matriu de canvi de base en la qual la matriu de q és D.

Considerem, per exemple, la forma quadràtica de $\mathbb{R}^3$ definida per

$$q(x, y, z) = 2x^2 - 4xy + 2y^2 - 2yz,$$

que en la base ordinària té matriu

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Efectuem les operacions per files i columnes tal i com hem descrit. Oberveu que en cada fila del càlcul següent es comença aplicant una operació per files i després s'acaba aplicant la mateixa operació per columnes i que, al final d'aquests dos pasos obtenim sempre una transformada de la matriu que segueix essent simètrica:

$$
\begin{aligned}
A \quad &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
&\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
&\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
&\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)
\end{aligned}
$$

Observem que quan $\mathbf{k} = \mathbb{R}$, podem utilitzar un mètode més conceptual per diagonalitzar la forma quadràtica: com la matriu A és simètrica, digonalitza en una base ortogonal segons el teorema espectral. Així, si S és la matriu de canvi de base i D la matriu digonal formada pels valors propis de A, es té $D = S^{-1}AS = S^tAS$, ja que $S^{-1} = S^t$ en ser la nova base ortogonal.

En l'exemple, els valors propis són $4.12489, -0.761557, 0.636672$. Veiem que, com en la forma que hem trobat anteriorment, n'hi ha dos de positius i un de negatiu, que a la fi serà el que ens interessarà saber (vegeu la proposició 2.4.3).

(2) *Completació de quadrats.* Donada una forma quadràtica

$$q(x_1, \dots x_n) = \sum a_{ij}x_ix_j = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \cdots + a_{1n}x_1x_n + \text{termes que no contenen } x_1,$$

en la qual $a_{11} \neq 0$, l'escrivim en la forma

$$q(x_1, \dots x_n) = a_{11}(x_1 + \frac{a_{12}}{2a_{11}}x_2 + \cdots + \frac{a_{1n}}{2a_{11}}x_n)^2 + \text{termes que no contenen } x_1.$$

Així, si definim

$$y_1 = x_1 + \frac{a_{12}}{2a_{11}}x_2 + \cdots + \frac{a_{1n}}{2a_{11}}x_n,$$

la forma quadràtica esdevé

$$q(y_1, x_2, \dots x_n) = a_{11}y_1^2 + \text{termes que no contenen } y_1.$$

Continuant el procediment amb els termes en les variables $x_2, \dots, x_n$ arribarem a una forma diagonal de q. Si en algun moment s'anul·la el coeficient que acompanya el coeficient de la varible que volem eliminiar (per exemple, si $a_{11} = 0$), utilitzem l'equivalència $xy = u^2 - v^2$ que s'obté fent el canvi $x = u + v, y = u - v$.

Realitzem els càlculs en l'exemple anterior:

$$\begin{aligned} q(x,y,z) &= 2x^2 - 4xy + 2y^2 - 2yz = 2(x-y)^2 - 2yz \\ &= 2\overline{x}^2 - 2\overline{y}^2 + 2\overline{z}^2 \end{aligned}$$

on $\overline{x} = x - y, \overline{y} = \frac{1}{2}(y+z)$ i $\overline{z} = \frac{1}{2}(y-z)$.

(3) *Mètode de Sylvester.* De vegades ens interessa conèixer una forma reduïda d'una forma quadràtica sense haver de fer tots els càlculs associats als mètodes anteriors. Hi ha un cas en el qual podem fer-ho fàcilament.

Denotem per δ_k els menors principals de φ,

$$\delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix}.$$

Si $\delta_1, \dots, \delta_{n-1} \neq 0$, *aleshores*

$$\delta_1 x_1^2 + \frac{\delta_2}{\delta_1} x_2^2 + \dots + \frac{\delta_n}{\delta_{n-1}} x_n^2$$

és una forma reduïda de q.

La demostració d'aquest resultat no és més que una aplicació acurada del mètode de Gramm-Schmidt i no la reproduirem aquí. O si es prefereix, basta observar que el mètode de completació de quadrats dóna una matriu de canvi de base triangular superior i amb uns a la diagonal.

Observem que aquest resultat no s'aplica a l'exemple anterior, ja que $\delta_2 = 0$. Sí s'aplica, per exemple, a la matriu obtinguda després de dues transformacions elementals

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \delta_1 = 2, \delta_2 = -4, \delta_3 = -2 \rightsquigarrow 2x_1^2 - 2x_2^2 + \frac{1}{2}x_3^2.$$

2.4 Classificació de formes quadràtiques

2.4.1 Definició. Siguin φ, ψ dues formes bilineals simètriques sobre E, de matrius en una base $\mathcal{B}$, A i B, respectivament. Direm que φ i ψ (respectivament, q_φ i q_ψ) són *equivalents* si existeix un canvi de base que tranforma A en B, és a dir, si existeix una matriu invertible S tal que $B = S^t A S$.

Es diu també que les matrius A i B són congrüents.

Sobre un cos $\mathbf{k}$ arbitrari és difícil determinar les classes d'equivalència de formes quadràtiques. En aquesta secció ho farem per a $\mathbb{C}$ i $\mathbb{R}$.

Formes quadràtiques complexes.

Donat que tot nombre complex és un quadrat i que la matriu d'una forma quadràtica està definida llevat de quadrats, resulta immediatament:

2.4.2 Proposició. (1) Sigui q una forma quadràtica sobre $\mathbb{C}$ de dimensió n i rang r. Aleshores, q és equivalent a la forma

$$q(x_1, \ldots, x_n) = x_1^2 + \cdots + x_r^2.$$

(2) Siguin φ, ψ dues formes bilineals sobre $\mathbb{C}$ de la mateixa dimensió. Aleshores,

$$q_\varphi \sim q_\psi \iff \operatorname{rang} \varphi = \operatorname{rang} \psi. \qquad \diamond$$

Formes quadràtiques reals.

2.4.3 Proposició. (1) Sigui q una forma quadràtica sobre $\mathbb{R}$ de dimensió n i rang r. Existeixen una base q-ortogonal, $\mathcal{B}$, i nombres r_+, r_- tals que

$$q(x_1, \ldots, x_n) = x_1^2 + \cdots + x_{r_+}^2 - x_{r_+ +1}^2 - \cdots - x_r^2,$$

i $r = r_+ + r_-$.

(2) (*Llei d'inèrcia de Sylvester*). Si $\mathcal{B}'$ és una altra base que satisfà les propietats del punt anterior, amb enters r'_+, r'_-, aleshores $r_+ = r'_+, r_- = r'_-$.

(3) Siguin φ, ψ dues formes bilineals sobre $\mathbb{R}$ de la mateixa dimensió. Aleshores,

$$q_\varphi \sim q_\psi \iff \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{rang} \varphi = \operatorname{rang} \psi, \\ r_+(\varphi) = r_+(\psi). \end{array} \right.$$

Prova. (1) Sigui $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$ una base q-ortogonal. Sense pèrdua de generalitat podem suposar que el valor de $q(\boldsymbol{u}_i)$ és > 0 per a $1 \leq i \leq m$, < 0 per a $m+1 < i < r$ i $= 0$ per a $r+1 \leq i \leq n$. Tenint present que podem integrar quadrats en els coeficients de la forma reduïda, podem escalar els vectors de la base per a que aquests valors siguin $1, -1, 0$, respectivament. Així, $r_+ = m, r_- = r - m$.

(2) Per l'apartat anterior, es té una descomposició q-ortogonal $E = E^+ \perp E^- \perp \operatorname{rad} \varphi$ tal que q és definida positiva sobre E^+, definida negativa sobre E^- i nul·la sobre el radical.

Suposem que $E = F^+ \perp F^- \perp \operatorname{rad} \varphi$ sigui una altra descomposició amb les mateixes propietats.

És clar que $E^+ \cap F^- = 0$ i $E^- \cap F^+ = 0$, per tant

$$\begin{aligned} \dim F^+ &\leq r - \dim E^- = \dim E^+ \\ \dim F^- &\leq r - \dim E^+ = \dim E^- \end{aligned}$$

i com $\dim F^+ + \dim F^- = \dim E^+ \dim E^- = r$, les desigualtats anteriors són necessàriament igualtats.

(3) Se segueix immediatament dels apartats anteriors. $\diamond$

2.4.4 Observació. En el cas en què $\delta_1, \ldots, \delta_n \neq 0$ es pot calcular fàcilment r_- segons:

$$r_- = \sharp \text{ canvis de signe } \delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_n,$$

on $\delta_0 = 1$, com es raona fàcilment. De fet, en general podem aplicar la *regla de Descartes*: si $P(T) \in \mathbb{R}[T]$ és un polinomi amb totes les arrels reals, aleshores

$$\sharp\{\text{arrels positives de } P(T)\} = \sharp\{\text{canvis de signe en els coeficients de } P(T)\}.$$

2.4.5 Com hem assenyalat a la secció 2.2, una forma bilineal φ s'anomena *definida positiva* si $\varphi(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) > 0$ per a tot vector $\boldsymbol{u} \in E$ no nul. Una forma φ és definida positiva si, i només si, $r_+ = r = \dim E$, d'on se segueix el criteri de Sylvester

$$\varphi \textit{ definida positiva } \iff \delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n > 0.$$

Anàlogament podem parlar de formes bilineals *semidefinides positives* ($\varphi(u, u) \geq 0, \forall u \in E$) per a les quals $r_+ = r > 0$ o de *definides/semidefinides negatives* canviant el sentit de les desigualtats per < 0 i ≤ 0, per a les quals $r_- = r = n$ o $r_- = r > 0$, respectivament. Així, el critei de Sylvester per a formes definides negatives serà

$$\varphi \textit{ definida negativa } \iff \delta_1 < 0 \textit{ i } \delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n \textit{ alternen el signe.}$$

3
Aplicacions multilineals: Tensors

Fixem un cos $\mathbf{k}$, els $\mathbf{k}$-espais vectorials seran de dimensió finita.

3.1 Tensors de tipus (p, q)

Siguin $E_1, \ldots, E_p$ i F $\mathbf{k}$-espais vectorials. Direm que una aplicació $f : E_1 \times \cdots \times E_p \longrightarrow F$ és *multilineal* si és lineal en cadascuna de les variables, és a dir, si satisfà:

(1) $f(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_i + \boldsymbol{v}'_i, \ldots, \boldsymbol{v}_p) = f(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_i, \ldots, \boldsymbol{v}_p) \, + \, f(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}'_i, \ldots, \boldsymbol{v}_p)$,

(2) $f(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \lambda \boldsymbol{v}_i, \ldots, \boldsymbol{v}_p) = \lambda \, f(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_i, \ldots, \boldsymbol{v}_p)$,

per a qualssevol vectors $\boldsymbol{v}_1 \in E_1, \ldots, \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}'_i \in E_i, \ldots, \boldsymbol{v}_p \in E_p$ i qualsevol escalar $\lambda \in \mathbf{k}$.

El conjunt d'aplicacions multilineals el denotem per $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_p; F)$. És clar que la suma d'aplicacions multilineals i el producte per un escalar defineixen una estructura de $\mathbf{k}$-espai vectorial sobre $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_p; F)$.

3.1.1 Definició. Sigui E un $\mathbf{k}$-espai vectorial. Un *tensor de tipus* (p, q) de E és una aplicació multilineal

$$T : \overbrace{E \times \cdots \times E}^{p} \times \overbrace{E^* \times \cdots \times E^*}^{q} \longrightarrow \mathbf{k}.$$

Denotarem per $\mathscr{T}_p^q(E)$ el $\mathbf{k}$-espai vectorial dels tensors de tipus (p, q).

Un tensor de tipus (p, q) direm que és un tensor p vegades *covariant* i q vegades *contravariant.* Si $q = 0$, escriurem $\mathscr{T}_p(E)$ per $\mathscr{T}_p^0(E)$. Anàlogament, usarem la notació $\mathscr{T}^q(E) = \mathscr{T}_0^q(E)$.

3.1.2 Exemples. (1) $\mathscr{T}_1(E) = E^*$, els 1-tensors covariants són els elements del dual de E. Pels 1-tensors contravariants es té $\mathscr{T}^1(E) = (E^*)^* \cong E$, ja que podem identificar l'espai bidual E^{**} amb E mitjançant l'aplicació lineal $E \longrightarrow E^{**}$ que associa a un vector $\boldsymbol{v}$ el morfisme $E^* \longrightarrow \mathbf{k}$ donat per $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{w}(\boldsymbol{v})$.

(2) Observem que, en general, amb la identificació d'un espai vectorial i el seu bidual resulta la igualtat $\mathscr{T}_p^q(E) = \mathscr{T}_q^p(E^*)$.

(3) Els 2-tensors covariants $T \in \mathscr{T}_2(E)$ no són altra cosa que les formes bilineals $T : E \times E \longrightarrow \mathbf{k}$ que hem estudiat al capítol anterior.

(4) La relació entre un espai vectorial i el seu dual defineix un $(1,1)$-tensor

$$\begin{array}{rccc} T: & E \times E^* & \longrightarrow & \mathbf{k} \\ & (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) & \longmapsto & \boldsymbol{w}(\boldsymbol{v}). \end{array}$$

(5) Sigui $E = \mathbb{R}^3$, orientat per la base canònica. Donats vectors $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$, el producte mixte

$$T(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \langle \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \rangle$$

defineix un 3-tensor covariant $T \in \mathscr{T}_3(\mathbb{R})$.

(6) Sigui $E = \mathbb{R}^n$. El determinant d'n vectors de E en la base canònica defineix un tensor n-covariant

$$\begin{array}{rcl} \det : \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ (\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n) & \longmapsto & \det(\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n). \end{array}$$

Producte tensorial i bases de $\mathscr{T}_p^q(E)$

Sigui $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ una base de E i $\mathcal{B}^* = \{\boldsymbol{e}^1, \ldots, \boldsymbol{e}^n\}$ la base dual. Les (p,q)-uples $(\boldsymbol{e}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{i_p}, \boldsymbol{e}^{j_1}, \ldots, \boldsymbol{e}^{j_q})$, amb $1 \leq i_k, j_\ell \leq n$, formen base de $E^{\times p} \times E^{*\times q}$; així, per la multilinealitat dels tensors, si $T \in \mathscr{T}_p^q(E)$ i

$$\begin{array}{rcl} \boldsymbol{v}_i & = & x_i^1 \boldsymbol{e}_1 + \cdots + x_i^n \boldsymbol{e}_n, \quad 1 \leq i \leq p, \\ \boldsymbol{w}_j & = & y_1^j \boldsymbol{e}^1 + \cdots + y_n^j \boldsymbol{e}^n, \quad 1 \leq j \leq q, \end{array}$$

són p vectors i q formes lineals, en resulta

$$\boxed{\mathrm{T}(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_p, \boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_q) = \sum x_1^{i_1} \cdots x_p^{i_p} y_{j_1}^1 \cdots y_{j_q}^q T(\boldsymbol{e}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{i_p}, \boldsymbol{e}^{j_1}, \ldots, \boldsymbol{e}^{j_q})}$$

on el sumatori s'estén a tots els índexs $1 \leq i_k \leq p$ i $1 \leq j_\ell \leq q$. És clar, aleshores que la dimensió de $\mathscr{T}_p^q(E)$ és n^{p+q}.

Sovint és còmode escriure la fórmula anterior en termes de multiíndexs. Un multiíndex I de longitud $|I| = p$ és una p-upla d'enters no negatius $I = (i_1, \ldots, i_p)$. Donat un tensor T, escrivim

$$\begin{aligned} T_I^J &= T(\boldsymbol{e}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{i_p}, \boldsymbol{e}^{j_1}, \ldots, \boldsymbol{e}^{j_q}) \\ x^I &= x_1^{i_1} \cdots x_p^{i_p}, \quad y_J = y_{j_1}^1 \cdots y_{j_q}^q. \end{aligned}$$

Aleshores, la fórmula anterior esdevé

$$T(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_p, \boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_q) = \sum_{|I|=p, |J|=q} x^I y_J T_I^J.$$

Podem descriure una base $\mathscr{T}_p^q(E)$ a partir de la base de E i la base dual utilitzant una nova operació, el producte tensorial, de manera que els T_J^I siguin les components de T en aquesta base.

3.1.3 Definició. Siguin $S \in \mathscr{T}_p^q(E)$ i $T \in \mathscr{T}_r^s(E)$, es defineix el *producte tensorial* $S \otimes T$ com el $(p + r, q + s)$-tensor definit per

$$\begin{aligned} &(S \otimes T)(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_p, \boldsymbol{v}'_1, \ldots, \boldsymbol{v}'_r, \boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_q, \boldsymbol{w}'_1, \ldots, \boldsymbol{w}'_s) \\ &\qquad = S(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_p, \boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_q) \cdot T(\boldsymbol{v}'_1, \ldots, \boldsymbol{v}'_r, \boldsymbol{w}'_1, \ldots, \boldsymbol{w}'_s). \end{aligned}$$

El producte tensorial defineix una aplicació bilineal

$$\otimes : \mathscr{T}_p^q(E) \times \mathscr{T}_r^s(E) \longrightarrow \mathscr{T}_{p+r}^{q+s}(E).$$

com es recull en les dues primeres propietats del lema que segueix, de demostració immediata a partir de les definicions.

3.1.4 Lema. El producte tensorial satisfà:

(1) És distributiu en ambdues variables: $(S + S') \otimes T = S \otimes T + S' \otimes T$.

(2) És compatible amb el producte per escalars: $(\lambda S) \otimes T = \lambda(S \otimes T) = S \otimes (\lambda T)$.

(3) És associatiu: $(S \otimes T) \otimes U = S \otimes (T \otimes U)$. ◇

3.1.5 Exemple. El producte tensorial no és commutatiu. En efecte, considerem el producte $\boldsymbol{e}^1 \otimes \boldsymbol{e}^2 \in \mathscr{T}_2(\mathbb{R}^2)$, aleshores

$$(\boldsymbol{e}^1 \otimes \boldsymbol{e}^2)(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) = 1 \neq 0 = (\boldsymbol{e}^2 \otimes \boldsymbol{e}^1)(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2).$$

3.1.6 Teorema. Sigui $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n\}$ una base de E i $\mathcal{B}^* = \{\boldsymbol{e}^1, \dots, \boldsymbol{e}^n\}$ la base dual. Aleshores

$$\mathcal{B}_p^q = \{\boldsymbol{e}^{i_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{e}^{i_p} \otimes \boldsymbol{e}_{j_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{e}_{j_q} \mid 1 \leq i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_q \leq n\}$$

és una base de $\mathscr{T}_p^q(E)$. Les coordenades d'un tensor $T \in \mathscr{T}_p^q(E)$ en aquesta base són

$$T_{i_1,\dots,i_p}^{j_1,\dots,j_q} = T(\boldsymbol{e}_{i_1}, \dots, \boldsymbol{e}_{i_p}, \boldsymbol{e}^{j_1}, \dots, \boldsymbol{e}^{j_q}),$$

i la dimensió de $\mathscr{T}_p^q(E)$ és n^{p+q}.

Prova. Provem que els elements de $\mathcal{B}_p^q$ són linealment independents i que generen $\mathscr{T}_p^q(E)$. Les altres afirmacions se segueixen immediatament.

(1) Són linealment independents: suposem que

$$\sum_{1\leq i_k \leq p, 1\leq j_\ell \leq q} \lambda_{i_1,\dots,i_p}^{j_1,\dots,j_q} \boldsymbol{e}^{i_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{e}^{i_p} \otimes \boldsymbol{e}_{j_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{e}_{j_q} = 0,$$

i denotem per T el tensor que defineix aquesta combinació lineal. Si fixem índexs $i_1^0, \dots, i_p^0, j_1^0, \dots j_q^0$, aleshores

$$0 = T(\boldsymbol{e}^{i_1^0} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{e}^{i_p^0} \otimes \boldsymbol{e}_{j_1^0} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{e}_{j_q^0}) = \lambda_{i_1^0,\dots,i_p^0}^{j_1^0,\dots,j_q^0},$$

i, per tant, els coeficients λ són tots nuls.

(2) Generen $\mathscr{T}_p^q(E)$: si T és un tensor qualsevol, el tensor

$$S = \sum_{1\leq i_k \leq p, 1\leq j_\ell \leq q} T(\boldsymbol{e}_{i_1}, \dots, \boldsymbol{e}_{i_p}, \boldsymbol{e}^{j_1}, \dots, \boldsymbol{e}^{j_q}) \boldsymbol{e}^{i_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{e}^{i_p} \otimes \boldsymbol{e}_{j_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{e}_{j_q}.$$

pren els mateixos valors que T sobre $(\boldsymbol{e}_{i_1}, \dots, \boldsymbol{e}_{i_p}, \boldsymbol{e}^{j_1}, \dots, \boldsymbol{e}^{j_q})$ i, donat que tant T com S són multilineals, en resulta $T = S$. ◇

3.1.7 Observacions. (1) Així, un (p, q)-tensor és de la forma

$$T = \sum_{|I|=p, |J|=q} \alpha_{i_1,\dots,i_p}^{j_1,\dots,j_q} \boldsymbol{e}^{i_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{e}^{i_p} \otimes \boldsymbol{e}_{j_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{e}_{j_q} = \sum \alpha_I^J \boldsymbol{e}^I \otimes \boldsymbol{e}_J,$$

on hem escrit $\boldsymbol{e}^I = \boldsymbol{e}^{i_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{e}^{i_p}$, $\boldsymbol{e}_J = \boldsymbol{e}_{j_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{e}_{j_q}$. És per això que en els problemes usarem també la notació $\mathscr{T}_p^q(E) = E^{*\otimes p} \otimes E^{\otimes q}$.

(2) Si cal ordenar els elements de la base $\mathcal{B}_p^q$, ho farem segons l'ordre lexicogràfic. Per exemple, per a tensors $\mathscr{T}_p(E)$, establim l'ordre:

$$\boldsymbol{e}^{i_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{e}^{i_p} \ < \ \boldsymbol{e}^{i'_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{e}^{i'_p} \iff \exists k \ i_1 = i'_1, \ \dots, \ i_k = i'_k, \ i_{k+1} < i'_{k+1}.$$

Així, a $\mathscr{T}_2(\mathbf{k}^3)$ en resulta la base ordenada

$$\boldsymbol{e}^1 \otimes \boldsymbol{e}^1,\ \boldsymbol{e}^1 \otimes \boldsymbol{e}^2,\ \boldsymbol{e}^1 \otimes \boldsymbol{e}^3,\ \boldsymbol{e}^2 \otimes \boldsymbol{e}^1,\ \boldsymbol{e}^2 \otimes \boldsymbol{e}^2,\ \boldsymbol{e}^2 \otimes \boldsymbol{e}^3,\ \boldsymbol{e}^3 \otimes \boldsymbol{e}^1,\ \boldsymbol{e}^3 \otimes \boldsymbol{e}^2,\ \boldsymbol{e}^3 \otimes \boldsymbol{e}^3.$$

Ho fem anàlogament per als tensors de tipus (p, q).

Canvi de base

Analitzem com canvien les components d'un tensor quan es canvia de base de E i la corresponent base dual. Suposem que $\mathcal{B}' = \{\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n\}$ és una altra base de E amb base dual $\mathcal{B}'^* = \{\boldsymbol{u}^1, \dots, \boldsymbol{u}^n\}$. Sigui A la matriu de canvi de base de $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$

$$\boldsymbol{u}_i = a_i^1 \boldsymbol{e}_1 + \cdots + a_i^n \boldsymbol{e}_n, \quad i = 1, \dots, n.$$

Aleshores, la matriu de canvi de base de $\mathcal{B}'^*$ a $\mathcal{B}^*$ és $B = (A^{-1})^t$,

$$\boldsymbol{u}^i = b_1^i \boldsymbol{e}^1 + \cdots + b_n^i \boldsymbol{e}^n, \quad i = 1, \dots, n.$$

Analitzem el canvi de base que indueixen en $\mathscr{T}_1^1(E)$: sigui T un tensor de tipus $(1, 1)$, aleshores la component $\overline{T}_j^i$ de T en $\boldsymbol{u}^i \otimes \boldsymbol{u}_j$ ve determinada per les igualtats

$$\begin{aligned}
\overline{T}_i^j &= T(\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}^j) \\
&= T(a_i^1 \boldsymbol{e}_1 + \cdots + a_i^n \boldsymbol{e}_n, b_1^j \boldsymbol{e}^1 + \cdots + b_n^j \boldsymbol{e}^n) \\
&= \sum_{1 \le k, \ell \le n} a_i^k b_\ell^j T(\boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{e}^\ell) \\
&= \sum_{1 \le k, \ell \le n} a_i^k b_\ell^j T_k^\ell.
\end{aligned}$$

Raonant de forma similar per a un tensor general de tipus (p, q) s'obté:

3.1.8 Proposició. Amb les notacions anteriors

$$\overline{T}_{i_1, \dots, i_p}^{j_1, \dots, j_q} = \sum_{1 \le k_r \le p, 1 \le \ell_s \le q} a_{i_1}^{k_1} \cdots a_{i_p}^{k_p} \cdot b_{\ell_1}^{j_1} \cdots b_{\ell_q}^{j_q} \cdot T_{k_1, \dots, k_p}^{\ell_1, \dots, \ell_q}. \qquad \diamond$$

Observem que si escrivim la igualtat de la proposició en termes de multiíndexs, on escrivim $a_I^K = a_{i_1}^{k_1} \cdots a_{i_p}^{k_p}$ i $b_L^J = b_{\ell_1}^{j_1} \cdots a_{\ell_q}^{j_q}$, en resulta l'expressió

$$\overline{T}_I^J = \sum a_I^K \cdot b_L^J \cdot T_K^L,$$

en la que la suma està estesa als multiíndexs amb $|K| = p, |L| = q$.

3.1.9 Observació. Clàssicament i, en especial, en els llibres de física, els tensors de tipus (p, q) es definien com *entitats numèriques* $\{T^{j_1,\dots,j_q}_{i_1,\dots,i_p}\}$ depenents d'índexos i_k, j_ℓ que es transformaven per un canvi de referència segons les fórmules de la proposició anterior, (més precisament, els geòmetres i els físics es referien als *camps tensorials*, vegeu la darrera secció d'aquest capítol). El llenguatge de l'Àlgebra Lineal i, en particular, l'aparició dels espais duals, va permetre clarificar la noció de tensor fins a la definició que usem actualment.

Operacions amb tensors

Presentem succintament tres operacions amb tensors que són d'interès en les aplicacions. Deixarem els detalls i les seves propietats per als exercicis.

(1) *Imatge recíproca.* Sigui $f : E \longrightarrow F$ una aplicació lineal. Es defineix la *imatge recíproca* com l'aplicació lineal entre tensors covariants

$$f^* : \mathscr{T}_p(F) \longrightarrow \mathscr{T}_p(E)$$

definida per

$$f^*T(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_p) = T(f(\boldsymbol{v}_1), \dots, f(\boldsymbol{v}_p)).$$

És a dir, f^*T és l'aplicació multilineal que fa commutatiu el diagrama

$$\begin{tikzcd}
E \times \cdots \times E \arrow[d, "f\times\cdots\times f"'] \arrow[dr, dotted, "f^*T"] & \\
F \times \cdots \times F \arrow[r, "T"] & \mathbf{k}
\end{tikzcd}$$

Si $g : F \longrightarrow G$ és una altra aplicació lineal, és un exercici provar que $(gf)^* = f^*g^*$. En la literatura anglosaxona l'operació f^* s'anomena el *pullback per* f.

El lector definirà, de forma similar, la *imatge directa* o *pushout* per a tensors contravariants $f_* : \mathscr{T}^q(E) \longrightarrow \mathscr{T}^q(F)$.

(2) *Contracció de dos índexs.* Sigui $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n\}$ una base de E i $\mathcal{B}^* = \{\boldsymbol{e}^1, \dots, \boldsymbol{e}^n\}$ la base dual. Fixem dos índexs k, ℓ, amb $1 \le k \le p, 1 \le \ell \le q$. Donat un tensor T de tipus (p, q),

$$T = \sum_{|I|=p,|J|=q} T^{j_1,\dots,j_q}_{i_1,\dots,i_p} \boldsymbol{e}^{i_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{e}^{i_p} \otimes \boldsymbol{e}_{j_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{e}_{j_q}$$

es defineix la contracció c_k^ℓ de T com el tensor $c_k^\ell T$ de tipus $(p-1, q-1)$ definit per

$$
\begin{aligned}
&(c_k^\ell T)(\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_{p-1}, \boldsymbol{w}^1, \dots, \boldsymbol{w}^{q-1}) \\
&= \sum_{|I|=p,|J|=q} T_{i_1,\dots,i_p}^{j_1,\dots,j_q} \boldsymbol{e}^{i_k}(\boldsymbol{e}_{j_\ell}) \boldsymbol{e}^{i_1} \otimes \cdots \otimes \widehat{\boldsymbol{e}^{i_k}} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{e}^{i_p} \otimes \boldsymbol{e}_{j_1} \otimes \cdots \otimes \widehat{\boldsymbol{e}_{j_\ell}} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{e}_{j_q}, \\
&= \sum_{s=1}^{n} \sum_{|I|=p,|J|=q} T_{i_1,\dots,s,\dots,i_p}^{j_1,\dots,s,\dots j_q} \boldsymbol{e}^{i_1} \otimes \cdots \otimes \widehat{\boldsymbol{e}^{i_k}} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{e}^{i_p} \otimes \boldsymbol{e}_{j_1} \otimes \cdots \otimes \widehat{\boldsymbol{e}_{j_\ell}} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{e}_{j_q}.
\end{aligned}
$$

És un exercici provar que les contraccions c_i^j no depenen de la base.

(3) *Contracció interior.* Sigui $\boldsymbol{v} \in E$ i $T \in \mathscr{T}_p(E)$, es defineix la contracció interior $i_{\boldsymbol{v}}(T)$ com el $p-1$ tensor covariant $i_{\boldsymbol{v}}(T)$

$$i_{\boldsymbol{v}}(T)(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_{q-1}) = T(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_{q-1}).$$

És un exercici comprovar que es defineix així una aplicació lineal

$$i_{\boldsymbol{v}} : \mathscr{T}_p(E) \longrightarrow \mathscr{T}_{p-1}(E).$$

Aquesta operació té interès, sobretot, per als tensors antisimètrics, que introduïm en la propera secció. Als problemes n'analitzarem les propietats principals.

3.2 Tensors simètrics i antisimètrics

En aquesta secció s'introdueixen dos tipus particulars de tensors, els simètrics i els antisimètrics. Per comoditat de l'exposició suposarem que el cos base $\mathbf{k}$ és de característica zero. El lector pot suposar que $\mathbf{k} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

Realitzarem l'estudi per als p-tensors covariants; mitjançant la identificació $\mathscr{T}^q(E) = \mathscr{T}_q(E^*)$ s'obtenen els resultats anàlegs pels tensors q-contravariants.

3.2.1 Definició. Sigui $T \in \mathscr{T}_p(E)$ un p-tensor covariant.

(1) T és *simètric* si satisfà

$$T(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_i, \dots, \boldsymbol{v}_j, \dots, \boldsymbol{v}_p) = T(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_j, \dots, \boldsymbol{v}_i, \dots, \boldsymbol{v}_p),$$

per a qualsevol parell d'índexs $1 \le i < j \le p$.

(2) T és *antisimètric* (o *alternat*) si satisfà

$$T(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_i, \dots, \boldsymbol{v}_j, \dots, \boldsymbol{v}_p) = -T(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_j, \dots, \boldsymbol{v}_i, \dots, \boldsymbol{v}_p),$$

per a qualsevol parell d'índexs $1 \le i < j \le p$.

Usarem les notacions

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_p(E) &= \{T \in \mathscr{T}_p(E) \mid T \text{ simètric}\}, \\ \mathcal{A}_p(E) &= \{T \in \mathscr{T}_p(E) \mid T \text{ antisimètric}\}. \end{aligned}$$

És immediat que $\mathcal{S}_p(E), \mathcal{A}_p(E) \subset \mathscr{T}_p(E)$ són subespais vectorials.

3.2.2 Lema. T és antisimètric si, i només si, s'anul·la sobre p-uples de vectors en les que hi ha almenys una repetició:

$$T(\dots, \boldsymbol{v}, \dots, \boldsymbol{v}, \dots) = 0 \tag{$*$}$$

Prova. Si T és antisimètric, aleshores intercanviant les posicions del vector que apareix dues vegades trobem que

$$\begin{aligned} & T(\dots, \boldsymbol{v}, \dots, \boldsymbol{v}, \dots) = -T(\dots, \boldsymbol{v}, \dots, \boldsymbol{v}, \dots) \\ \Longrightarrow \quad & 2T(\dots, \boldsymbol{v}, \dots, \boldsymbol{v}, \dots) = 0 \\ \Longrightarrow \quad & T(\dots, \boldsymbol{v}, \dots, \boldsymbol{v}, \dots) = 0, \end{aligned}$$

ja que 2 és invertible a $\mathbf{k}$.

Recíprocament, si se satisfà $(*)$, aleshores

$$T(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_i + \boldsymbol{v}_j, \dots, \boldsymbol{v}_i + \boldsymbol{v}_j, \dots, \boldsymbol{v}_p) = 0,$$

d'on, per $(*)$ i la multilinealitat de T, se segueix que

$$T(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_i, \dots, \boldsymbol{v}_j, \dots, \boldsymbol{v}_p) = -T(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_j, \dots, \boldsymbol{v}_i, \dots, \boldsymbol{v}_p),$$

és a dir, que T és alternat. $\diamond$

Acció del grup simètric $\mathfrak{S}_p$

Per a l'anàlisi dels tensors simètrics i antisimètrics, i en particular per simetritzar o antisimetritzar un tensor T, és convenient caracteritzar aquests tensors mitjançant l'acció del grup simètric de p elements, $\mathfrak{S}_p$. Al final del capítol hi ha un resum de les propietats del grup simètric que utilitzarem en aquest apartat.

3.2.3 Definició. Sigui $T \in \mathscr{T}_p(E)$ un tensor covariant i $\sigma \in \mathfrak{S}_p$ una permutació d'ordre p. Es defineix l'acció de σ sobre T com el tensor $\sigma \cdot T$ determinat per

$$(\sigma T)(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_p) = T(\boldsymbol{v}_{\sigma(1)}, \dots, \boldsymbol{v}_{\sigma(p)}).$$

Per exemple, si $T \in \mathscr{T}_3(E)$ i $\sigma = (2,3,1)$, aleshores

$$(\sigma T)(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3) = T(\boldsymbol{v}_{\sigma(1)}, \boldsymbol{v}_{\sigma(2)}, \boldsymbol{v}_{\sigma(3)}) = T(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_1).$$

En particular, si $T = \boldsymbol{w}^1 \otimes \boldsymbol{w}^2 \otimes \boldsymbol{w}^3$, trobem que

$$(\sigma \boldsymbol{w}^1 \otimes \boldsymbol{w}^2 \otimes \boldsymbol{w}^3)(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3) = \boldsymbol{w}^1(\boldsymbol{v}_2)\boldsymbol{w}^2(\boldsymbol{v}_3)\boldsymbol{w}^3(\boldsymbol{v}_1) = (\boldsymbol{w}^3 \otimes \boldsymbol{w}^1 \otimes \boldsymbol{w}^2)(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3),$$

és a dir,

$$\sigma(\boldsymbol{w}^1 \otimes \boldsymbol{w}^2 \otimes \boldsymbol{w}^3) = \boldsymbol{w}^3 \otimes \boldsymbol{w}^1 \otimes \boldsymbol{w}^2.$$

Observem que la permutació $(3,1,2)$ és la inversa de la permutació $(2,3,1)$. Més en general es té:

3.2.4 Proposició. Siguin $\boldsymbol{w}^1, \dots, \boldsymbol{w}^p \in E^*$ i $\sigma \in \mathfrak{S}_p$ amb inversa σ^{-1}. Aleshores,

$$\sigma(\boldsymbol{w}^1 \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{w}^p) = \boldsymbol{w}^{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{w}^{\sigma^{-1}(p)}. \qquad \diamond$$

L'acció del grup simètric gaudeix de les propietats següents:

3.2.5 Lema. (1) És additiva: $\sigma(T+S) = \sigma T + \sigma S$.

(2) És compatible amb la composició de permutacions:

$$\sigma(\eta T) = (\sigma\eta)T, \quad \mathsf{id}\, T = T. \qquad \diamond$$

3.2.6 Proposició. Sigui $T \in \mathscr{T}_p(E)$. Aleshores,

(1) T és simètric si, i només si, $\sigma T = T$ per a tota permutació $\sigma \in \mathfrak{S}_p$.

(2) T és antisimètric si, i només si, $\sigma T = \varepsilon(\sigma) T$ per a tota permutació $\sigma \in \mathfrak{S}_p$; on $\varepsilon(\sigma)$ és el signe de la permutació σ.

Prova. En aquests enunciats en que apareixen propietats per a tensors simètrics i antisimètrics, la demostració de les quals es pot fer en paral·lel, ens centrarem en el cas antisimètric, que és el que treballarem més a fons en els propers apartats.

Suposem que T és antisimètric. Segons la definició, si $\tau \in \mathfrak{S}_p$ és una transposició, $\tau T = -T$ i, per tant, si $\tau_1, \dots, \tau_m$ són transposicions, podem raonar per inducció sobre m per deduir que el seu producte actua en la forma

$$(\tau_1 \cdots \tau_m)T = (-1)^m T = \varepsilon(\tau_1 \cdots \tau_m)T.$$

Si $\sigma \in \mathfrak{S}_p$, σ és producte de transposicions $\sigma = \tau_1 \cdots \tau_m$, d'on deduïm que $\sigma T = \varepsilon(\sigma) T$.

Recíprocament, si $\sigma T = \varepsilon(\sigma)T$ per a tota permutació, en particular $\tau T = -T$ per a qualsevol transposició, que és la definició de tensor antisimètric. $\diamond$

Simetritzat i antisimetritzat d'un tensor

3.2.7 Definició. Sigui $T \in \mathscr{T}_p(E)$. Es defineixen el *simetritzat* de T, $S(T)$, i l'*antisimetritzat* de T, $A(T)$, com els tensors

$$S(T) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} \sigma T, \qquad A(T) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} \varepsilon(\sigma)\sigma T.$$

Per exemple, si $T = \boldsymbol{e}^1 \otimes \boldsymbol{e}^2 \in \mathscr{T}_2(\mathbb{R}^3)$, aleshores

$$\begin{aligned} S(T) &= S(\boldsymbol{e}^1 \otimes \boldsymbol{e}^2) = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{e}^1 \otimes \boldsymbol{e}^2 + \boldsymbol{e}^2 \otimes \boldsymbol{e}^1\right), \\ A(T) &= A(\boldsymbol{e}^1 \otimes \boldsymbol{e}^2) = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{e}^1 \otimes \boldsymbol{e}^2 - \boldsymbol{e}^2 \otimes \boldsymbol{e}^1\right). \end{aligned}$$

Del Lema 3.2.5 se segueix immediatament que obtenim així aplicacions lineals

$$S, A : \mathscr{T}_p(E) \longrightarrow \mathscr{T}_p(E).$$

3.2.8 Proposició. Les aplicacions lineals S, A satisfan:

(1) $T \in \mathcal{A}_p(E) \iff A(T) = T$ i $T \in \mathcal{S}_p(E) \iff S(T) = T$.

(2) $\operatorname{Im} A = \mathcal{A}_p(E)$, $\operatorname{Im} S = \mathcal{S}_p(E)$.

1) $A^2 = A$ i $S^2 = S$, és a dir, A i S són projectors.

Prova. Fem la prova per l'aplicació d'antisimetrització. Donat que els tres apartats estan interrelacionats, els provem conjuntament.

Si $T \in \mathcal{A}_p(E)$, aleshores $\sigma T = \varepsilon(\sigma)T$ i, per tant,

$$\begin{aligned} A(T) &= \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} \varepsilon(\sigma)\sigma T \\ &= \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} \varepsilon(\sigma)^2 T = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} T = T. \end{aligned}$$

És a dir, si T és antisimètric, $A(T) = T$.

Provem ara que per a qualsevol tensor T, $A(T)$ és antisimètric; és a dir, provem la inclusió $\mathrm{Im}\,\mathrm{A} \subset \mathcal{A}_{\mathrm{p}}(\mathrm{E})$ de (2): sigui $\eta \in \mathfrak{S}_p$, aleshores

$$\begin{aligned}
\eta A(T) &= \eta\left(\frac{1}{p!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_p}\varepsilon(\sigma)\sigma T\right) = \frac{1}{p!}\left(\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_p}\varepsilon(\sigma)(\eta\sigma)T\right)\\
&= \varepsilon(\eta)\frac{1}{p!}\left(\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_p}\varepsilon(\eta\sigma)(\eta\sigma)T\right)\\
&= \varepsilon(\eta)A(T),
\end{aligned}$$

on en la darrera igualtat hem usat que $\eta\mathfrak{S}_p = \mathfrak{S}_p$, és a dir, que quan σ recorre tots els elements de $\mathfrak{S}_p$, el producte $\eta\sigma$, també. ◇

3.3 El producte exterior

En general, el producte tensorial de dos tensors antisimètrics no és un tensor antisimètric; per remediar aquesta situació alternarem aquest producte tensorial.

3.3.1 Definició. Siguin $S \in \mathcal{A}_p(E), T \in \mathcal{A}_q(E)$ tensors antisimètrics. Es defineix *el producte exterior* de S per T, $S \wedge T$, per

$$S \wedge T = \frac{(p+q)!}{p!q!}A(S\otimes T).$$

Es podria definir el producte exterior simplement com $A(S\otimes T)$, és a dir, sense els factorials que hem inclòs en la definició. Hem inclòs el factor $(p+q)!/p!q!$ perquè a les aplicacions dels tensors a la geometria i la física aquest factor permet simplificar algunes de les expressions que hi apareixen, com per exemple a la Poposició 3.3.4.

La proposició següent resumeix les principals propietats del producte exterior.

3.3.2 Propietats del producte exterior. Siguin $S_1, S_2 \in \mathcal{A}_p(E), T \in \mathcal{A}_q(E)$ i $U \in \mathcal{A}_r(E)$. El producte exterior satisfà les propietats següents:

(1) És distributiu: $(S_1 + S_2)\wedge T = S_1\wedge T + S_2\wedge T$.

(2) És associatiu: $(S\wedge T)\wedge U = S\wedge(T\wedge U)$.

(3) És compatible amb el producte per escalars: $(\lambda S)\wedge T = \lambda(S\wedge T) = S\wedge(\lambda T)$.

(4) És anticommutatiu: $S\wedge T = (-1)^{pq}T\wedge S$.

A més, el producte exterior és compatible amb les aplicacions induïdes per una aplicació lineal: sigui $f : E \longrightarrow F$ una aplicació lineal i $f^* : \mathcal{A}_p(F) \longrightarrow \mathcal{A}_p(E)$ l'aplicació imatge recíproca que indueix. Si $S \in \mathcal{A}_p(F), T \in \mathcal{A}_q(F)$, aleshores

(5) $f^*(S \wedge T) = f^*S \wedge f^*T.$

Prova. La demostració de les propietats (1), (3) i (5) se segueix directament de les definicions. Per provar (2) establim prèviament el resultat auxiliar següent.

3.3.3 Lema. $S \in \mathscr{T}_p(E), T \in \mathscr{T}_q(E) \implies A(A(S) \otimes T) = A(S \otimes T) = A(S \otimes A(T)).$

En efecte, identifiquem $\mathfrak{S}_p$ com el subgrup de $\mathfrak{S}_{p+q}$ que deixa fixos els darrers q elements

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{S}_p & \longrightarrow & \mathfrak{S}_{p+q} \\ \begin{pmatrix} 1 & \dots & p \\ \sigma(1) & \dots & \sigma(p) \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} 1 & \dots & p & p+1 & \dots & p+q \\ \sigma(1) & \dots & \sigma(p) & p+1 & \dots & p+q \end{pmatrix} \end{array}$$

i, anàlogament, $\mathfrak{S}_q$ com el subgrup de $\mathfrak{S}_{p+q}$ que deixa fixos els primers p elements. Aleshores,

$$\begin{aligned} A(A(S) \otimes T) &= A\left(\frac{1}{p!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_p} \varepsilon(\sigma)(\sigma S) \otimes T\right) \\ &= \frac{1}{p!}\left(\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_p} A(\varepsilon(\sigma)(\sigma S \otimes T))\right) \\ &= \frac{1}{p!}\frac{1}{(p+q)!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_p} \varepsilon(\sigma)\left(\sum_{\eta\in\mathfrak{S}_{p+q}} \varepsilon(\eta)(\eta\sigma)(S\otimes T)\right) \\ &= \frac{1}{p!}\frac{1}{(p+q)!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_p}\sum_{\eta\in\mathfrak{S}_{p+q}} \varepsilon(\eta\sigma)(\eta\sigma)(S\otimes T) \\ &= \frac{1}{p!}\frac{1}{(p+q)!}\, p! \sum_{\zeta\in\mathfrak{S}_{p+q}} \varepsilon(\zeta)(\zeta)(S\otimes T) \\ &= A(S\otimes T), \end{aligned}$$

on en la penúltima línia hem usat que $\sigma\mathfrak{S}_{p+q} = \mathfrak{S}_{p+q}$. La prova de que $A(S \otimes T) = A(S \otimes A(T))$ es fa de forma simètrica.

(2) Veiem ara com el lema permet demostrar l'associativitat del producte exterior:

$$\begin{aligned}
(S\wedge T)\wedge U &= \frac{(p+q+r)!}{(p+q)!r!}A((S\wedge T)\otimes U)\\
&= \frac{(p+q+r)!}{(p+q)!r!}\frac{(p+q)!}{p!q!}A(A(S\otimes T)\otimes U)\\
&= \frac{(p+q+r)!}{p!q!r!}A(S\otimes A(T\otimes U))\\
\ldots\\
&= S\wedge(T\wedge U).
\end{aligned}$$

(4) Prenem vectors $\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_{p+q}\in E$, aleshores

$$\begin{aligned}
&(S\wedge T)(\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_p,\boldsymbol{v}_{p+1},\ldots,\boldsymbol{v}_{p+q})\\
&\quad=\frac{(p+q)!}{p!q!}\sum\varepsilon(\sigma)S(\boldsymbol{v}_{\sigma(1)},\ldots,\boldsymbol{v}_{\sigma(p)})T(\boldsymbol{v}_{\sigma(p+1)},\ldots,\boldsymbol{v}_{\sigma(p+q)})\\
&\quad=\frac{(p+q)!}{p!q!}\sum\varepsilon(\sigma)T(\boldsymbol{v}_{\sigma(p+1)},\ldots,\boldsymbol{v}_{\sigma(p+q)})S(\boldsymbol{v}_{\sigma(1)},\ldots,\boldsymbol{v}_{\sigma(p)}).
\end{aligned}$$

Observem que si τ és la permutació

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & q & q+1 & \ldots & p+q\\ p+1 & p+2 & \ldots & p+q & 1 & \ldots & p\end{pmatrix}$$

aleshores

$$\eta=\sigma\tau=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & q & q+1 & \ldots & p+q\\ \sigma(p+1) & \sigma(p+2) & \ldots & \sigma(p+q) & \sigma(1) & \ldots & \sigma(p)\end{pmatrix}$$

i, per tant, com les permutacions $\sigma\tau$ recorren totes les permutacions de $p+q$ elements, el darrer terme del desenvolupament anterior és igual a

$$\begin{aligned}
&\frac{(p+q)!}{p!q!}\sum\varepsilon(\sigma\tau)\varepsilon(\tau)T(\boldsymbol{v}_{\eta(1)},\ldots,\boldsymbol{v}_{\eta(q)})S(\boldsymbol{v}_{\eta(q+1)},\ldots,\boldsymbol{v}_{\eta(q+p)})\\
&\qquad=\varepsilon(\tau)(T\wedge S)(\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_q,\boldsymbol{v}_{q+1},\ldots,\boldsymbol{v}_{p+q}),
\end{aligned}$$

i es conclou observant que $\varepsilon(\tau)=(-1)^{pq}$. ◇

Donats tensors antisimètrics S,T,U, l'associativitat del producte exterior permet escriure $S\wedge T\wedge U$ sense ambigüitat, ja que el producte és independent de la forma amb que associem aquest tensors per definir-lo. Al llarg de la demostració de l'associativitat del producte exterior hem vist que

$$S\wedge T\wedge U=\frac{(p+q+r)!}{p!q!r!}A(S\otimes T\otimes U).$$

En general, donats tensors $S_i \in \mathcal{A}_{p_i}(E)$,

$$S_1 \wedge \cdots \wedge S_r = \frac{(p_1 + \cdots + p_r)!}{p_1! \cdots p_r!} A(S_1 \otimes \cdots \otimes S_r)$$

En particular, si $\boldsymbol{w}^1, \ldots, \boldsymbol{w}^p \in E^*$, està definit el producte exterior $\boldsymbol{w}^1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{w}^p \in \mathcal{A}_p(E)$, que és

$$\boldsymbol{w}^1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{w}^p = p! A(\boldsymbol{w}^1 \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{w}^p) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} \varepsilon(\sigma) \boldsymbol{w}^{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{w}^{\sigma(p)}. \qquad (*)$$

Per exemple,

$$\boldsymbol{w}^1 \wedge \boldsymbol{w}^2 = \boldsymbol{w}^1 \otimes \boldsymbol{w}^2 - \boldsymbol{w}^2 \otimes \boldsymbol{w}^1.$$

3.3.4 Proposició. Amb les notacions anteriors, se satisfà:

(1) Si $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_p \in E$, aleshores

$$(\boldsymbol{w}^1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{w}^p)(\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_p) = \det(\boldsymbol{w}^j(\boldsymbol{u}_i)).$$

(2) $\boldsymbol{w}^1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{w}^p \neq 0 \iff \boldsymbol{w}^1, \ldots, \boldsymbol{w}^p$ són linealment independents.

Prova. (1) Per la igualtat $(*)$,

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{w}^1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{w}^p)(\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_p) &= \left(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} \varepsilon(\sigma) \boldsymbol{w}^{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{w}^{\sigma(p)} \right) (\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_p) \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} \varepsilon(\sigma) (\boldsymbol{w}^{\sigma(1)}(\boldsymbol{u}_1) \cdots \boldsymbol{w}^{\sigma(p)}(\boldsymbol{u}_p))\end{aligned}$$

i aquesta darrera expressió és igual a $\det(\boldsymbol{w}^j(\boldsymbol{u}_i))$ per definició del determinant.

(2) Siguin $\boldsymbol{w}^1, \ldots, \boldsymbol{w}^p$ linealment depenents. Sense pèrdua de generalitat, podem suposar que $\boldsymbol{w}^p = \sum_{j=1}^{p-1} \lambda_j \boldsymbol{w}^j$. Aleshores,

$$\boldsymbol{w}^1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{w}^p = \boldsymbol{w}^1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{w}^{p-1} \wedge (\sum_{j=1}^{p-1} \lambda_j \boldsymbol{w}^j) = \sum_{j=1}^{p-1} \lambda_j \boldsymbol{w}^1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{w}^{p-1} \wedge \boldsymbol{w}^j = 0.$$

Recíprocament, suposem que $\boldsymbol{w}^1, \ldots, \boldsymbol{w}^p$ són linealment indepenents. Pel teorema d'Steinitz, completem aquest vectors fins a obtenir una base de E^*, $\boldsymbol{w}^1 \cdots \boldsymbol{w}^p, \boldsymbol{w}^{p+1} \cdots \boldsymbol{w}^n$. Sigui $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ la base dual. Aleshores, per (1),

$$(\boldsymbol{w}^1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{w}^p)(\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_p) = \det(\boldsymbol{w}^j(\boldsymbol{u}_i)) = \det(\delta_i^j) = 1,$$

i, per tant, $\boldsymbol{w}^1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{w}^p \neq 0$. $\diamond$

3.3.5 Corol·lari. Si $\boldsymbol{w} \in E^*$, aleshores $\boldsymbol{w} \wedge \boldsymbol{w} = 0$. Més generalment, si $\boldsymbol{w}^i \in E^*$, $1 \leq i \leq p$, i hi ha un parell d'índexs $i \neq j$ tals que $\boldsymbol{w}^i = \boldsymbol{w}^j$, aleshores $\boldsymbol{w}^1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{w}^p = 0$. ◇

Base de $\mathcal{A}_p(E)$

Sigui $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ una base de E i $\mathcal{B}^* = \{\boldsymbol{e}^1, \ldots, \boldsymbol{e}^n\}$ la base dual. Aleshores,

$$\sigma(\boldsymbol{e}^{i_1} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}^{i_p}) = \boldsymbol{e}^{\sigma^{-1}(i_1)} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}^{\sigma^{-1}(i_p)} = \varepsilon(\sigma)\boldsymbol{e}^{\sigma(i_1)} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}^{\sigma(i_p)}.$$

3.3.6 Teorema. Els tensors antisimètrics

$$\boldsymbol{e}^{i_1} \wedge \boldsymbol{e}^{i_2} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}^{i_p}, \qquad 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_p \leq n,$$

formen base de $\mathcal{A}_p(E)$.

Prova. Les imatges per A dels tensors $\boldsymbol{e}^{k_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{e}^{k_p}$, $1 \leq k_i \leq n$, que són base de $\mathscr{T}_p(E)$, són generadors de $\mathcal{A}_p(E)$, ja que A és un projector. Per l'observació anterior, basta considerar les p-uples ordenades de l'enunciat.

Provem que són linealment independents: donada una combinació lineal nul·la

$$T = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n} \lambda_{i_1,\ldots,i_p} \boldsymbol{e}^{i_1} \wedge \boldsymbol{e}^{i_2} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}^{i_p} = 0,$$

l'apliquem a $(\boldsymbol{e}_{i_1^0}, \ldots, \boldsymbol{e}_{i_{p^0}})$ i trobem

$$0 = T(\boldsymbol{e}_{i_1^0}, \ldots, \boldsymbol{e}_{i_{p^0}}) = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n} \lambda_{i_1,\ldots,i_p} \det(\boldsymbol{e}^{i_k}(\boldsymbol{e}_{i_k^0})) = \lambda_{i_1^0,\ldots,i_p^0},$$

i per tant, per l'arbitrarietat de la p-upla $i_1^0 < \cdots < i_p^0$, tots els coeficients de la combinació lineal s'anul·len. ◇

3.3.7 Corol·lari. $\dim \mathcal{A}_p(E) = \begin{cases} \binom{n}{p}, & 0 \leq p \leq n, \\ 0, & \text{altrament.} \end{cases}$ ◇

3.3.8 Exemple. Sigui $E = \mathbb{R}^3$ amb la base canònica i denotem les coordenades d'un vector per superíndexs, $\boldsymbol{v} = v^1\boldsymbol{e}_1 + v^2\boldsymbol{v}^2 + v^3\boldsymbol{e}^3 \in E$. Analitzem les bases del p-tensors alternats:

$\boxed{p = 0:}$ $\mathcal{A}_0(E) = \mathbf{k}$, de dimensió 1.

$\boxed{p = 1:}$ $\mathcal{A}_1(E) = \langle \boldsymbol{e}^1, \boldsymbol{e}^2, \boldsymbol{e}^3 \rangle = E^*$, que és de dimensió 3. L'acció de $\boldsymbol{e}^i$ sobre $\boldsymbol{v}$ és $\boldsymbol{e}^i(\boldsymbol{v}) = v^i$ i, per tant, per a un 1-tensor alternat qualsevol retrobem la fórmula habitual del dual

$$(a_1\boldsymbol{e}^1 + a_2\boldsymbol{e}^2 + a_3\boldsymbol{e}^3)(\boldsymbol{v}) = a_1v^1 + a_2v^2 + a_3v^3.$$

$\boxed{p=2:}$ $\mathcal{A}_2(E) = \langle \boldsymbol{e}^1 \wedge \boldsymbol{e}^2, \boldsymbol{e}^1 \wedge \boldsymbol{e}^3, \boldsymbol{e}^2 \wedge \boldsymbol{e}^3 \rangle$, que és de dimensió 3. L'acció de $\boldsymbol{e}^i \wedge \boldsymbol{e}^j$ sobre un parell de vectors $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ és

$$(\boldsymbol{e}^i \wedge \boldsymbol{e}^j)(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = u^i v^j - u^j v^i,$$

és a dir, el menor (i,j) de la matriu definida per les coordenades del parell $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$. Així, trobem que

$$(a_{12}\boldsymbol{e}^1 \wedge \boldsymbol{e}^2 + a_{13}\boldsymbol{e}^1 \wedge \boldsymbol{e}^3 + a_{23}\boldsymbol{e}^2 \wedge \boldsymbol{e}^3)(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = a_{12}\begin{vmatrix} u^1 & v^1 \\ u^2 & v^2 \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} u^1 & v^1 \\ u^3 & v^3 \end{vmatrix} + a_{23}\begin{vmatrix} u^2 & v^2 \\ u^3 & v^3 \end{vmatrix}.$$

$\boxed{p=3:}$ $\mathcal{A}_3(E) = \langle \boldsymbol{e}^1 \wedge \boldsymbol{e}^2 \wedge \boldsymbol{e}^3 \rangle$, que és un espai de dimensió 1. En aquesta cas l'acció d'un 3-tensor alternat és

$$(a\boldsymbol{e}^1 \wedge \boldsymbol{e}^2 \wedge \boldsymbol{e}^3)(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3) = a \det(v_j^i).$$

Els càlculs reflectits en aquest exemple no són exclusius de $\mathbb{R}^3$. Per exemple:

3.3.9 Corol·lari. Sigui $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ una base de E i $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n \in E$ amb $\boldsymbol{v}_j = \sum_i v_j^i \boldsymbol{e}_i$. Si $T \in \mathcal{A}_n(E)$, aleshores

$$T(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n) = \det(v_j^i) T(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n).$$

Prova. La dimensió de $\mathcal{A}_n(E)$ és 1, per tant, si $\boldsymbol{e}^1, \ldots, \boldsymbol{e}^n$ és la base dual de $\mathcal{B}$, hi ha una constant $\lambda \in \mathbf{k}$ tal que $T = \lambda \boldsymbol{e}^1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}^n$; de fet, $\lambda = T(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$.

Avaluem T en els vectors $\boldsymbol{v}_j$:

$$\begin{aligned} T(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n) &= T(\sum_i v_1^i \boldsymbol{e}_i, \ldots, \sum_i v_n^i \boldsymbol{e}_i) \\ &= \left(\sum_{i_1, \ldots, i_n} v_1^{i_1} \cdots v_n^{i_n} \right) T(\boldsymbol{e}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{i_n}) \\ &= \left(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) v_1^{\sigma(1)} \cdots v_n^{\sigma(n)} \right) T(\boldsymbol{e}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{i_n}) \\ &= \det(v_i^j) T(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n). \end{aligned}$$

On en la penúltima igualtat hem usat que, si $\sigma = (i_1, \ldots, i_n)$, aleshores $T(\boldsymbol{e}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{i_n}) = \varepsilon(\sigma) T(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$. ◇

3.3.10 Corol·lari. Sigui $f : E \longrightarrow F$ una aplicació lineal entre espais vectorials de la mateixa dimensió, n. Si $\mathcal{B}_E = \{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ i $\mathcal{B}_F = \{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$ són bases de E i F, respectivament, aleshores

$$f^*(\boldsymbol{u}^1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{u}^n) = (\det f)\, \boldsymbol{e}^1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}^n.$$

És a dir, l'aplicació $f^* : \mathbf{k} \cong \mathcal{A}_n(F) \longrightarrow \mathcal{A}_n(E) \cong \mathbf{k}$ és la multiplicació pel determinant de f.

Prova. En efecte, si (a^i_j) és la matriu de f en aquestes bases,

$$\begin{aligned} f^*(\boldsymbol{u}^1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{u}^n)(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n) &= (\boldsymbol{u}^1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{u}^n))(f(\boldsymbol{e}_1), \ldots, f(\boldsymbol{e}_n)) \\ &= (\boldsymbol{u}^1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{u}^n)(\sum a^i_1 \boldsymbol{u}_i, \ldots, \sum a^i_n \boldsymbol{u}_i) \\ &= \det(a^i_j), \end{aligned}$$

d'on se seguiex el resultat. $\diamond$

3.3.11 Observacions. (1) Donat que els tensors antisimètrics $\boldsymbol{e}^{i_1} \wedge \boldsymbol{e}^{i_2} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}^{i_p}$ formen base de $\mathcal{A}_p(E)$ en algunes ocasions s'utilitza la notació $\bigwedge^p E^* = \mathcal{A}_p(E)$.

(2) Com hem esmentat més amunt, els resultats d'aquesta secció s'apliquen també a $\mathcal{A}^q(E)$. Així, per exemple, donats vectors $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_q \in E$ es té:

$$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_q \text{ linealment independents } \iff \boldsymbol{v}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{v}_q \neq 0.$$

Deixem com exercici provar que

$$\boldsymbol{v}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{v}_q = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_q \le n} \alpha^{i_1, \ldots, i_q} \boldsymbol{e}_{i_1} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}_{i_q},$$

on $\alpha^{i_1, \ldots, i_q}$ són els menors $(i_1, \ldots, i_q)$ de les coordenades dels vectors $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_q$ en la base $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$.

3.4 Orientació i volum

En aquest darrer apartat els espais vectorials seran reals, $\mathbf{k} = \mathbb{R}$. L'objectiu és interpretar l'orientació i el volum de $\mathbb{R}^n$ en termes de tensors antisimètrics.

Orientació d'un espai vectorial

Siguin $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ i $\mathcal{B}' = \{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$ dues bases d'un $\mathbb{R}$-espai vectorial E. El determinant dels vectors de la base $\mathcal{B}'$ respecte de la base $\mathcal{B}$, $\det_{\underline{\boldsymbol{e}}}(\underline{\boldsymbol{u}})$ és diferent de zero i, per tant, és positiu o negatiu. Recordem que es diu que les dues bases tenen la *mateixa orientació* si $\det_{\underline{e}}(\underline{u}) > 0$ i que defineixen *orientacions oposades* en cas contrari.

Podem formular aquesta definició en termes de tensors de $\mathcal{A}_n(E)$. Observem que $\dim \mathcal{A}_n(E) = 1$, cosa que permet definir una relació d'equivalència per a dos tensors $w, w' \in \mathcal{A}_n(E)$

$$w \sim w' \iff w = \lambda w' \text{ amb } \lambda > 0,$$

que dóna lloc a dues classes d'equivalència.

3.4.1 Proposició. Donar una orientació a E és equivalent a donar una classe d'equivalència de $\mathcal{A}_n(E)$.

Prova. Observem que si $\boldsymbol{u}_i = f(\boldsymbol{e}_i)$ és un canvi de base, pel Corol·lari 3.3.10 se satisfà

$$\boldsymbol{e}^1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}^n(\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n) = \det f,$$

d'on se segueix el resultat. ◇

Forma de volum

Sigui $(E, \boldsymbol{g})$ un espai euclidià: $\boldsymbol{g}$ és un producte escalar

$$\boldsymbol{g} : E \times E \longrightarrow \mathbb{R},$$

i defineix un tensor $\boldsymbol{g} \in \mathscr{T}_2(E)$.

El producte escalar $\boldsymbol{g}$ permet identificar E i E^* sense fer eleccions de bases mitjançant els morfismes musicals *bemoll* i *sostingut*: definim el bemoll

$$\begin{aligned} \flat : E &\longrightarrow E^* \\ \boldsymbol{v} &\longmapsto \boldsymbol{g}(\boldsymbol{v}, -) \end{aligned}$$

que és un isomorfisme, ja que $\boldsymbol{g}$ és no degenerat, i el sostigut com el seu invers $\natural = \flat^{-1}$.

Sigui $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ una base de E i $(g_{ij}) = (\boldsymbol{g}(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j))$ la matriu del producte escalar en aquesta base. La matrius de $\flat$ en la base $\mathcal{B}$ i la base dual $\mathcal{B}^*$ és la matriu (g_{ij}), de manera que donat un vector $\boldsymbol{v} = x^1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + x^n\boldsymbol{e}_n$, la component i-èsima de $\flat(\boldsymbol{v})$ en la base dual és

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} x^j g_{ij},$$

és a dir, $\flat$ ha baixat l'índex de les coordenades, d'on li ve el nom.

Si denotem per (g^{ij}) la matriu inversa de (g_{ij}), l'aplicació sostingut puja un índex: la coordenada i-èsima de $\natural(y_1\boldsymbol{e}^1 + \cdots + y_n\boldsymbol{e}^n)$ és

$$x^i = \sum_{j=1}^{n} y_j g^{ij}.$$

Utilitzem els isomorfismes $\flat$ i $\natural$ per traslladar el producte escalar de E a E^*: donats $\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}' \in E^*$, definim

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}') = \boldsymbol{g}(\natural\boldsymbol{w}, \natural\boldsymbol{w}').$$

3.4.2 Lema. $\boldsymbol{g}$ defineix un producte escalar a E^*. En la base dual $\mathcal{B}^*(E)$ la matriu de $\boldsymbol{g}$ és

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{e}^i, \boldsymbol{e}^j) = g^{ij},$$

i els morfismes $\flat$ i $\natural$ són isometries. $\diamond$

3.4.3 Teorema. Sigui $(E, \boldsymbol{g})$ un espai euclidià orientat per una classe $[w]$ de $\mathcal{A}_n(E)$. Existeix una única forma $\overline{w} \in [w]$ tal que

1) $\overline{w}(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n) = 1$ per a totat base $\boldsymbol{g}$-ortonormal positiva.

2) Si $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ és una base positiva qualsevol i $\{\boldsymbol{v}^1, \ldots, \boldsymbol{v}^n\}$ és la base dual, aleshores
$$\overline{w} = \sqrt{|\det \boldsymbol{g}(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j)|}\ \ \boldsymbol{v}^1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{v}^n. \qquad (*)$$
En particular, per una base $\boldsymbol{g}$-ortonormal qualsevol, $\overline{w} = \boldsymbol{e}^1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}^n$.

Prova. Com $w \neq 0$, hi ha una base ortonormal i positiva $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ tal que $w(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n) > 0$. Definim $\overline{w} \in [w]$ per $\overline{w} = \boldsymbol{e}^1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}^n$, és a dir,

$$\overline{w}(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n) = 1.$$

Suposem que $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ és una altra base de E i sigui A la matriu de canvi de base. Aleshores,

$$\overline{w}(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n) = (\boldsymbol{e}^1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}^n)(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n) = \det(\boldsymbol{e}_i(\boldsymbol{v}_j)) = \det A.$$

D'altra banda, la matriu del producte escalar canvia segons

$$(g(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j)) = A^t(g(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j))A \Longrightarrow \det g(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j) = \det g(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j)(\det A)^2 = (\det A)^2,$$

ja que la base $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ és $\boldsymbol{g}$-ortonormal. D'aquí se segueix que

$$\sqrt{|\det g(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j)|} = |\det A|.$$

Suposem ara que la base $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ és positiva, aleshores veiem que se satisfà (*). $\diamond$

Observem que el coeficient que apareix en la igualtat (*) és el grammià dels vectors $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ i, per tant, calcula el volum del paral·lelepipede que generen, cosa que justifica:

3.4.4 Definició. A la forma $\overline{w}$ determinada pel teorema anterior l'anomenem la *forma de volum* de E.

3.5 Apèndix: sobre el grup simètric $\mathfrak{S}_n$

En aquesta secció recordem alguns aspectes del grup simètric que hem utilitzat en el text principal i que s'han vist en cursos anteriors.

Denotem per $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$. El grup *simètric d'ordre* n, $\mathfrak{S}_n$, és el grup d'aplicacions bijectives $\sigma : [n] \longrightarrow [n]$, que anomenem *permutacions*. L'operació de grup és la composició d'aplicacions.

Denotarem una permutació $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ per

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

Com $\mathfrak{S}_n$ és un grup, el morfisme

$$\begin{array}{rcl} \sigma \cdot \mathfrak{S}_n & \longrightarrow & \mathfrak{S}_n \\ \eta & \longmapsto & \sigma\eta \end{array}$$

és una bijecció, $\sigma\mathfrak{S}_n = \mathfrak{S}_n$.

Una permutació τ diem que és una *transposició* si existeixen i, j, $1 \leq i, j, \leq n$ tals que

$$\tau(i) = j, \quad \tau(j) = i, \quad \tau(k) = k, \quad \forall k \neq i, j.$$

Un raonament per inducció permet veure que les transposicions generen el grup simètric:

3.5.1 Proposició. Tota permutació és producte de transposicions. $\diamond$

Finalment, necessitem el concepte de signatura d'una transposició, que serà conseqüència del següent resultat.

3.5.2 Proposició. Si $\sigma = \tau_r \cdots \tau_1 = \tau'_s \cdots \tau'_1$ són dues descomposicions de σ en producte de transposicions, aleshores $r \equiv s \mod 2$. És a dir, totes les descomposicions de σ tenen la mateixa paritat.

Prova. Tot i que s'ha vist aquest resultat en assignatures anteriors, indiquem-ne una demostració basada en idees similars a les que hem utilitzat pels tensors antisimètrics.

Sigui X un conjunt i $f : X \longrightarrow A$ una aplicació a valors en un grup commutatiu A, com per exemple, $A = \mathbb{Z}$. Diem que f és antisimètrica si per a tota transposició τ se satisfà

$$f(x_{\tau(1)}, \ldots, x_{\tau(n)}) = -f(x_1, \ldots, x_n).$$

Asserció: Si f és antisimètrica i $\sigma = \tau_r \cdots \tau_1$ és una descomposició de σ en producte de r transposicions, aleshores

$$f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) = (-1)^r f(x_1, \ldots, x_n). \tag{1}$$

La prova de l'asserció és un exercici d'inducció sobre r.

Fixem-nos que en la igualtat (1), el terme de l'esquerra és independent de la descomposició de σ en producte de transposicions i que, per tant, el de la dreta també: si $\sigma = \tau'_s \cdots \tau'_1$, aleshores

$$(-1)^r f(x_1, \ldots, x_n) = (-1)^s f(x_1, \ldots, x_n). \tag{2}$$

Per acabar el raonament hem de veure que, per a cert conjunt X, hi ha aplicacions $f : X^n \longrightarrow A$ antisimètriques no nul·les que permetin simplificar el terme $f(x_1, \ldots, x_n)$ de la igualtat (†). Per això, tenim prou en considerar $X = \mathbb{Z}$, $A = \mathbb{Z}$ i l'aplicació

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j).$$

Si les x_i són diferents dues a dues, $f(x_1, \ldots, x_n) \neq 0$ i es comprova sense dificultat que f és antisimètrica. $\diamond$

Finalment, es defineix el *signe d'una permutació* $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ per

$$\varepsilon(\sigma) = (-1)^s,$$

on s és el nombre de transposicions en una descomposició qualsevol de σ com a producte de transposicions. Així, es defineix una aplicació

$$\varepsilon : \mathfrak{S}_n \longrightarrow \{\pm 1\},$$

que és un homomorfisme de grups (és a dir, que $\varepsilon(\sigma\eta) = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\eta)$) i que sobre les transposicions val -1.

3.6 Vistes: camps tensorials i formes diferencials

Els tensors són fonamentals en diverses parts de l'Àlgebra, la Geometria i la Física i, darrerament, també a l'Anàlisi de Dades. Generalment en les aplicacions a la geometria i la física apareixen en forma de *camps* tensorials. Recordem que un camp vectorial definit en un obert $U \subset \mathbb{R}^n$ assigna un vector a cada punt de l'obert. Una manera d'expressar-ho és: un *camp vectorial* $\boldsymbol{v}$ a U és una aplicació $\mathscr{C}^\infty$ $\boldsymbol{v} : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$, (de fet, hauríem d'escriure $\boldsymbol{v}(x) \in \mathbb{R}^n_x$, on $\mathbb{R}^n_x$ indica l'espai vectorial dels vectors amb origen a x).

3.6.1 De la mateixa manera es poden definir els camps tensorials:

Un *camp tensorial p-covariant i q-contravariant a U* és una aplicació $\mathscr{C}^\infty$

$$T : U \longrightarrow \mathscr{T}^q_p(\mathbb{R}^n),$$

on identifiquem $\mathscr{T}^q_p(\mathbb{R}^n)$ amb $\mathbb{R}^{n^{p+q}}$ escollint la base canònica de $\mathbb{R}^n$. És a dir, un camp tensorial T consisteix d'un tensor $T(x)$ per a cada punt $x \in U$ que varia diferenciablement amb x. El camp T admet una única expressió

$$T = \sum_{1 \leq i_k, j_\ell \leq n} \alpha^{j_1,\dots,j_q}_{i_1,\dots,i_p} \boldsymbol{e}^{i_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{e}^{i_p} \otimes \boldsymbol{e}_{j_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{e}_{j_q},$$

on les α^J_I són funcions $\mathscr{C}^\infty(U)$. Formalment hem canviat les constants de $\mathbf{k}$ amb les que consideràvem les combinacions lineals dels tensors per funcions diferenciables a U.

Totes les operacions de tensors que hem introduït al llarg del capítol s'apliquen, punt per punt, als camps tensorials i per tant podem parlar del producte tensorial de camps tensorials, dels camps simètrics, dels antisimètrics, etc.

3.6.2 A Càlcul Integral usareu les fomes diferencials: els camps tensorials p-covariants alternats s'anomenen *formes diferencials*. Denotarem per $\Omega^p(U)$ l'espai vectorial de les p-formes diferencials definides a U.

La diferencial d'una funció $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ és un exemple de 1-forma diferencial

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}\boldsymbol{e}^1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\boldsymbol{e}^n.$$

Observem que, en particular, la funció coordenada x_i té 1-forma diferencial associada $dx_i = \boldsymbol{e}^i$. Això justifica que en la notació de les formes diferencials substituïm $\boldsymbol{e}^i$ per dx_i. Així, una p-forma diferencial $\boldsymbol{\alpha} \in \Omega^p(U)$ admet una expressió única

$$\boldsymbol{\alpha} = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n} \alpha_{i_1,\dots,i_p} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}.$$

Per exemple, a $\mathbb{R}^3$ les p-formes diferencials són:

$$\begin{array}{ll}
0-\text{formes} & \Omega^0(U)=\mathscr{C}^\infty(U),\\
1-\text{formes} & \Omega^1(U)=\{fdx+gdy+hdz \mid f,g,h\in\mathscr{C}^\infty(U)\},\\
2-\text{formes} & \Omega^2(U)=\{fdx\wedge dy+gdx\wedge dz+hdy\wedge dz \mid f,g,h\in\mathscr{C}^\infty(U)\},\\
3-\text{formes} & \Omega^3(U)=\{fdx\wedge dy\wedge dz \mid f\in\mathscr{C}^\infty(U)\}.
\end{array}$$

La importància de les formes diferencials ve determinada perquè són els "objectes que s'integren". Per exemple, a $\mathbb{R}^3$ les 1-formes s'integren sobre corbes, les 2-formes s'integren sobre superfícies i les 3-formes s'integren sobre volums.

3.6.3 Les propietats operatives de les formes diferencials són reflex de les propietats dels tensors antisimètrics que hem analitzat. En particular, es defineix la imatge recíproca per una aplicació diferenciable $\varphi : U \longrightarrow V$ entre dos oberts $U\subset\mathbb{R}^n, V\subset\mathbb{R}^m$, com l'aplicació $\varphi^* : \Omega^p(V)\longrightarrow\Omega^p(U)$ determinada per

$$\varphi^*(\boldsymbol{\alpha})=\sum_{1\le i_1<\cdots<i_p\le n}(\alpha_{i_1,\ldots,i_p}\circ\varphi)d(\varphi_{i_1})\wedge\cdots\wedge d(\varphi_{i_p}),$$

on $\varphi=(\varphi_1,\ldots,\varphi_m)$.

Obervem que si $n=m$, aleshores

$$\varphi^*(dx_1\wedge\cdots dx_n)=\det(d\varphi)du_1\wedge\cdots\wedge du_n,$$

és a dir, que el canvi de variables afecta les n-formes multiplicant pel jacobià de φ.

Per exemple, si considerem el canvi a polars de $\mathbb{R}^2$, $\varphi(r,\theta)=(r\cos\theta,r\sin\theta)$, trobem

$$\begin{aligned}
\varphi^*(dx\wedge dy) &= d(r\cos\theta)\wedge d(r\sin\theta)\\
&= (\cos\theta dr-r\sin\theta d\theta)\wedge(\sin\theta dr+r\cos\theta d\theta)\\
&= rdr\wedge d\theta.
\end{aligned}$$

3.6.4 Les formes diferencials també es poden "derivar": es defineix l'operador diferencial $d:\Omega(U)\longrightarrow\Omega^{p+1}(U)$ segons

$$d\boldsymbol{\alpha}=\sum d(\alpha_{i_1,\ldots,i_p})\wedge dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_p}.$$

Per exemple,

$$d\left((x^2+y)dx-z^2dy+e^zdz\right)=dy\wedge dx-2zdz\wedge dy.$$

L'operador diferencial té les propietats següents:

(1) $d(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}) = d\boldsymbol{\alpha} + d\boldsymbol{\beta}, \quad \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \Omega^p(U)$.

(2) $d(\boldsymbol{\alpha} \wedge \boldsymbol{\beta}) = d(\boldsymbol{\alpha}) \wedge \boldsymbol{\beta} + (-1)^p \boldsymbol{\alpha} \wedge \boldsymbol{\beta}, \quad \boldsymbol{\alpha} \in \Omega^p(U),\ \boldsymbol{\beta} \in \Omega^q(U)$.

(3) $d(d\boldsymbol{\alpha}) = 0, \quad \boldsymbol{\alpha} \in \Omega^p(U)$.

(4) Si $\varphi : U \longrightarrow V$ és una aplicació diferenciable, aleshores

$$\varphi^*(d\boldsymbol{\alpha}) = d(\varphi^*\boldsymbol{\alpha}).$$

A més, d és l'únic operador que satisfà (1)-(3) i coincideix amb df per a les funcions $f \in \mathscr{C}^\infty(U)$.

La propietat (2) correspon a la regla de Leibniz de derivació d'un producte, mentres que la propietat (3) és un reflex del teorema de Schwarz de les derivades creuades.

En el cas en que U, V siguin oberts de la mateixa dimensió, podem interpretar (4) en el sentit que la *diferencial d'una p-forma és independent del sistema de coordenades en el qual es calcula.* Aquest fet té conseqüències pràctiques per al càlcul dels operadors diferencials $\nabla, \nabla\times$ i div en coordenades diferents a les cartesianes (càlcul que es pot realitzar també a partir dels teoremes integrals), per a la qual cosa hem d'anar amb compta amb els morfismes musicals $\flat$ i $\natural$.

A títol d'exemple, comentem el cas del gradient en coordenades polars: sigui $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$. En coordenades cartesianes es té

$$\begin{aligned} \nabla f &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y} \\ df &= \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy. \end{aligned}$$

És a dir, tenen les mateixes components, cosa que reflecteix que les bases canòniques són ortonormals, i es tradueix en

$$\flat(\nabla f) = df, \qquad \natural(df) = \nabla f.$$

L'avantatge d'aquesta igualtat és que la diferencial d es calcula sempre de la mateixa manera i que, per tant, permet deduir com calcular la ∇ en coordenades polars: en aquest cas, la base en cada punt associada a les coordenade polars és

$$\frac{\partial}{\partial r} = (\cos\theta, \sin\theta), \quad \frac{\partial}{\partial \theta} = (-r\sin\theta, r\cos\theta),$$

que és ortogonal, però no ortonormal. Així, trobem

$$\begin{aligned}\nabla f &= \natural(df)\\ &= \natural\left(\frac{\partial f}{\partial r}dr+\frac{\partial f}{\partial \theta}d\theta\right)\\ &= \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial \theta}.\end{aligned}$$

II. Geometria Projectiva

4
Espai projectiu

En la geometria afí s'han estudiat configuracions de punts, rectes i plans i les transformacions que en són compatibles. La geometria projectiva afegeix als espais afins els *punts de l'infinit* d'aquestes configuracions i n'analitza les propietats. La introducció dels punts de l'infinit fa que dues rectes del pla projectiu es tallin sembre en un punt, desapareixent la noció de paral·lelisme, cosa que simplifica notablement l'anàlisi i enunciat d'alguns resultats, com per exemple el del teorema de Desargues. En aquest capítol introduim l'espai projectiu i deixem per al proper capítol l'estudi de les projectivitats.

Tradicionalment hi ha hagut dues maneres d'introduir l'espai projectiu, la sintètica i l'analítica, aquesta segona basada en coordenades i, en darrera instància, en l'Àlgebra Lineal. La presentació que seguirem serà analítica, de manera que puguem aprofitar i interpretar en aquest context les propietats conegudes de l'Àlgebra Lineal.

4.1 L'espai projectiu: varietats lineals, sistemes de coordenades

Sigui E un $\mathbf{k}$-espai vectorial de dimensió $n+1$. Donats $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in E$ considerem la relació d'equivalència

$$\boldsymbol{u} \sim \boldsymbol{v} \iff \exists\ \lambda \in \mathbf{k},\ \lambda \neq 0,\ \text{tal que } \boldsymbol{v} = \lambda \boldsymbol{u}.$$

És a dir, les classes d'equivalència $[\boldsymbol{u}], \boldsymbol{u} \neq 0$, són les rectes de E.

4.1.1 Definició. L'*espai projectiu* $\mathbb{P}(E)$ és el conjunt de classes d'equivalència de vectors no nuls

$$\mathbb{P}(E) = \{[\boldsymbol{u}] \mid \boldsymbol{u} \in E \setminus \{0\}\}.$$

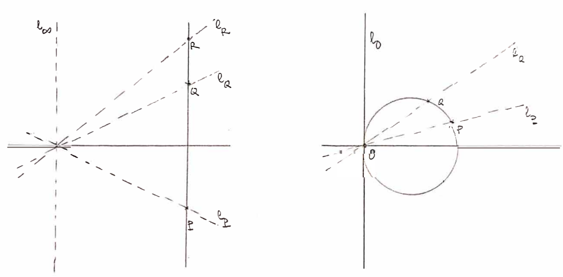
Direm que $\mathbb{P}(E)$ és un espai projectiu de dimensió n. Als elements de $\mathbb{P}(E)$ els anomenarem *punts de l'espai projectiu.*

Denotarem per $\pi : E \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}(E)$ l'aplicació de pas al quocient.

4.1.2 Exemples. (1) Si $E = \mathbf{k}^{n+1}$, escriurem $\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}} = \mathbb{P}(\mathbf{k}^{n+1}) = (\mathbf{k}^{n+1} \setminus \{0\})/\sim$. Els seus punts són les classes de vectors no nuls $P = [(x_0, \dots, x_n)]$. Qualsevol múltiple no nul del vector $(x_0, \dots, x_n)$ és un representant de P. Per evitar l'ús de claudators i parèntesis i simplificar les notacions, escriurem $(x_0 : \dots : x_n) := [(x_0, \dots, x_n)]$ i direm que $(x_0 : \dots : x_n)$ són les coordenades homogènies del punt P. Així,

$$(x_0 : \dots : x_n) = (\lambda x_0 : \dots : \lambda x_n), \ \lambda \neq 0.$$

(2) Es pot donar una imatge geomètrica de $\mathbb{P}^1_{\mathbf{k}}$ si $\mathbf{k} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Situem-nos en els cas real: $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}} = (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})/\sim$ és el conjunt de rectes del pla $\mathbb{R}^2$ que passen per l'origen. Cadascuna d'elles talla la circumferéncia $C : (x-1)^2 + y^2 = 1$ en dos punts, un dels quals és el propi origen; observeu que la recta $x = 0$ talla la circumferència C a l'origen amb multiplicitat dos, on hi és tangent. S'estableix així una bijecció entre $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ i la circumferència C.



Un raonament similar prova que en el cas $\mathbf{k} = \mathbb{C}$ s'obté una bijecció entre $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ i una esfera de $\mathbb{R}^3$.

(3) Quan l'espai vectorial E no sigui rellevant, escriurem simplement $\mathbb{P}^n$ per $\mathbb{P}(E)$. Escollint una base de E s'estableix un isomorfisme entre E i $\mathbf{k}^{n+1}$ i, per tant, una bijecció $\mathbb{P}(E) \leftrightarrow \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$, (més endavant, al proper capítol, direm que aquests espais són projectivament equivalents). Això fa que en moltes situacions puguem reduir-nos a l'anàlisi dels espais $\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$; tot i això, en d'altres ocasions serà convenient mantenir la informació determinada per l'espai vectorial E, (en especial en la secció de dualitat).

Varietats lineals

Atès que un espai projectiu s'associa a un espai vectorial, és natural traslladar nocions de E a $\mathbb{P}(E)$, com ara les de varietat lineal o els sistemes de coordenades.

4.1.3 Definició. Direm que un subconjunt $V \subset \mathbb{P}(E)$ és una *varietat lineal projectiva de dimensió* d si existeix un subespai vectorial $F \subset E$ de dimensió $d+1$ tal que

$$V = \pi(F \setminus \{0\}) = \mathbb{P}(F) \subset \mathbb{P}(E).$$

Direm que V és la varietat lineal associada a F.

Per la pròpia definició, hi ha una bijecció entre les varietats lineals de dimensió d de $\mathbb{P}(E)$ i els subespais vectorials de dimensió $d+1$ de E, que completem assignant la subvarietat buida al subespai nul de E. Per conveni, el buit és una varietat lineal de dimensió -1.

Seguint la nomenclatura habitual, si $d = 0, 1, 2$, direm que les varietats lineals corresponents són punts, rectes, o plans de $\mathbb{P}(E)$. Quan $d = n-1$ direm que V és un hiperplà.

La intersecció i la suma de subespais es tradueixen en dues propietats geomètriques ben determinades, la d'incidència (o d'intersecció) i la de generació (o suma), reflectides en els punts (3) i (4) del següent resultat.

4.1.4 Proposició. Siguin F, G subespais de E i $V = \mathbb{P}(F), W = \mathbb{P}(G)$, les varietats lineals corresponents.

(1) Si $F \subset G \iff V \subset W$.

(2) Si $V \subset W$, aleshores $\dim V \leq \dim W$. A més, en el cas d'igualtat de dimensions, $V = W$.

(3) $V \cap W$ és una varietat lineal. Més concretament, $V \cap W = \mathbb{P}(F \cap G)$.

(4) La varietat lineal $V \vee W = \mathbb{P}(F+G)$ és la varietat lineal més petita que conté V i W, l'anomenarem la *suma de V i W*.

Prova. Les demostracions d'aquestes propietats són immediates a partir de les propietats corresponents dels subespais de E. Provem, per exemple, la propietat (4):

És clar que $V, W \subset V \vee W$, ja que $F, G \subset F + G$. D'altra banda, si $V' = \mathbb{P}(F')$ conté V i W, de (1) se segueix que el subespai F' conté F i G i, per tant, conté $F + G$; és a dir, $V \vee W \subset V'$. $\diamond$

4.1.5 Fórmula de Grassmann. Siguin V, W subvarietats lineals de $\mathbb{P}(E)$, aleshores

$$\dim V + \dim W = \dim(V \vee W) + \dim(V \cap W).$$

Prova. La fórmula de Grassmann per a espais vectorials estableix que

$$\dim F + \dim G = \dim(F + G) + \dim(F \cap G),$$

i, per tant,

$$\begin{aligned} \dim V + \dim W &= \dim F - 1 + \dim G - 1 \\ &= \dim(F + G) - 1 + \dim(F \cap G) - 1 \\ &= \dim(V \vee W) + \dim(V \cap W). \end{aligned}$$

◇

Observem que en el punt (3) de la proposició, referent a la intersecció, es pot donar el cas $V \cap W = \emptyset$, que és equivalent a $F \cap G = 0$. En aquest cas direm que les dues varietats lineals *es creuen.* Així, si V, W es creuen, la fórmula de Grassmann queda en la forma

$$\dim(V \vee W) = \dim V + \dim W + 1.$$

Si V, W es creuen i, a més, $V \vee W = \mathbb{P}(E)$, direm que són *suplementàries.* És a dir, V, W són suplementàries si, i només si, $E = F \oplus G$.

A diferència del que succeeix a l'espai afí tenim ara el resultat següent, que assegura que certes interseccions no són buides.

4.1.6 Corol·lari. En les condicions anteriors

$$\dim V + \dim W \ \geq \ n = \dim \mathbb{P}(E) \quad \Longrightarrow \quad V \cap W \neq \emptyset.$$

Prova. Per la fórmula de Grasmann resulta que

$$\dim(V \cap W) + \dim(V \vee W) = \dim V + \dim W \geq \dim \mathbb{P}(E)$$

i, per tant, $\dim(V \cap W) \geq 0$. ◇

4.1.7 Exemples. Analitzem les interseccions de diverses varietats lineals en espais projectius de dimensions 2 i 3:

(1) Considerem dues rectes L_1, L_2 de $\mathbb{P}^2$. Per la fórmula de Grassmann

$$\dim(L_1 \cap L_2) + \dim(L_1 \vee L_2) = 1 + 1 = 2,$$

i, per tant, $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$. Resumint:

$\dim(L_1 \cap L_2)$	$\dim(L_1 \vee L_2)$	Posició relativa
0	1	Es tallen en un punt
1	1	$L_1 = L_2$

(2) Situem-nos a $\mathbb{P}^3$. Si L_1, L_2 són dues rectes, aleshores $\dim(L_1 \cap L_2) + \dim(L_1 \vee L_2) = 2$ i es donen les possibilitats de la taula següent:

$\dim(L_1 \cap L_2)$	$\dim(L_1 \vee L_2)$	Posició relativa
-1	3	Es creuen/són suplementàries
0	2	Es tallen en un punt
1	1	$L_1 = L_2$

(3) Si $\Pi_1, \Pi_2 \subset \mathbb{P}^3$ són dos plans, tindrem

$$\dim(\Pi_1 \cap \Pi_2) + \dim(\Pi_1 \vee \Pi_2) = 4,$$

i, per tant, $\dim(\Pi_1 \cap \Pi_2) \geq 1$. Se'n deriven les següents possibilitats:

$\dim(\Pi_1 \cap \Pi_2)$	$\dim(\Pi_1 \vee \Pi_2)$	Posició relativa
1	3	Es tallen en una recta
2	2	$\Pi_1 = \Pi_2$

(4) Considerem finalment una recta L i un pla Π de $\mathbb{P}^3$. De la fórmula de Grassmann en resulta la igualtat

$$\dim(L \cap \Pi) + \dim(L \vee \Pi) = 3,$$

pel que hi ha dues possibilitats:

$\dim(L \cap \Pi)$	$\dim(L \vee \Pi)$	Posició relativa
0	3	Es tallen en un punt
1	2	$L \subset \Pi$

4.1.8 Exemples. (1) Siguin P un punt i V una varietat lineal de $\mathbb{P}^n$ de dimensió d. Si $P \in V$, aleshores $V = P \vee V$, mentres que si $P \notin V$, resulta

$$\dim(V \vee P) = \dim V + 0 - \dim(V \cap P) = d - (-1) = d + 1.$$

En particular, per exemple, dos punts diferents P, Q, generen una recta $L = P \vee Q$, (que en alguna ocasió notarem PQ).

(2) Més en general, donats $r+1$ punts $P_0, \dots, P_r$ es té

$$\dim(P_0 \vee \cdots \vee P_r) \leq r.$$

i si $P_i = [\boldsymbol{u}_i], 0 \leq i \leq r$, aleshores

$$\dim(P_0 \vee \cdots \vee P_r) = r \Longleftrightarrow \boldsymbol{u}_0, \dots, \boldsymbol{u}_r \text{ són linealment independents.}$$

En aquest cas, direm que els punts $P_0, \dots, P_r$ són *linealment independents*. Així, el nombre màxim de punts linealment independents de $\mathbb{P}^n$ és igual a la dimensió de E, $n+1$.

D'una una successió $P_0, \dots, P_r$ de punts diferents de $\mathbb{P}^n$ en direm una *configuració de* $r+1$ punts de $\mathbb{P}^n$. Als punts P_i els anomenarem *vèrtexs* de la configuració. Destaquem dos casos particulars de configuracions d'un pla projectiu $\mathbb{P}^2$ que apareixeran al llarg del capítol:

(1) *Triangles*: configuració formada per tres punts A, B, C no alineats i les tres rectes que determinen $a = BC, b = AC, c = AB$, on hem escrit $AB = A \vee B$, etc.

(2) *Quadrangles*: configuració formada per quatre punts A, B, C, D tals que cap terna d'aquests punts sigui alineada. Podem agrupar els vèrtexs d'un quadrangle en sis parelles de punts que determinen sis rectes, que anomenarem els *costats* del quadrangle. Diem que dos costats són *oposats* si no tenen cap vèrtex en comú, així AB i CD, AD i BC, i AC i BD són les tres parelles de costats oposats. A $\mathbb{P}^2$ els costats oposats es tallen, determinant tres punts més $X = AB \cap CD, Y = AC \cap BD, Z = AD \cap BC$, que juntament amb les rectes que els uneixen formen el que anomenarem el *triangle diagonal* del quadrangle.

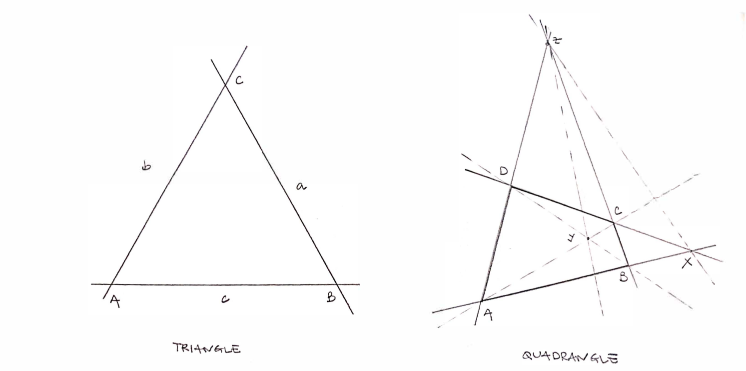
Sistemes de referència: coordenades homogènies

Si fixem una base $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_0, \dots, \boldsymbol{e}_n\}$ de l'espai vectorial E, tot vector no nul $\boldsymbol{v}$ s'escriu de manera única com a combinació lineal dels elements de $\mathcal{B}$, $\boldsymbol{v} = \lambda_0 \boldsymbol{e}_0 + \cdots + \lambda_n \boldsymbol{e}_n$ i diem que $(\lambda_0, \dots, \lambda_n)$ són les coordenades de $\boldsymbol{v}$ en aquesta base.

Observem que donats dos vectors no nuls $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ de coordenades $(\lambda_0, \dots, \lambda_n)$ i $(\mu_0, \dots, \mu_n)$, a $\mathbb{P}(E)$ es té

$$[\boldsymbol{v}] = [\boldsymbol{w}] \iff \exists \nu \neq 0,\ \boldsymbol{v} = \nu \boldsymbol{w} \iff \exists \nu \neq 0,\ (\lambda_0, \dots, \lambda_n) = \nu(\mu_0, \dots, \mu_n).$$

i, per tant, tal i com hem avançat a l'exemple 4.1.2, al punt $P = [\boldsymbol{v}]$ li podem associar les coordenades $(\lambda_0 : \cdots : \lambda_n)$, definides llevat d'escalar no nul. Direm que són *les coordenades homogènies del punt* $P = [\boldsymbol{v}]$ *en la referència projectiva* $\{[\boldsymbol{e}_0], \dots, [\boldsymbol{e}_n]\}$.



Fixem-nos que hem descendit de E a $\mathbb{P}(E)$: hem fixat una base de E i després hem considerat la referència $\{P_0 = [\boldsymbol{e}_0], \dots, P_n = [\boldsymbol{e}_n]\}$. En el sentit invers, semblaria natural que $n+1$ punts linealment independents $P_0, \dots, P_n$ de $\mathbb{P}(E)$ determinin una referència projectiva; tanmateix aquest no és el cas, ja que els punts determinen els vectors llevats d'escalars. Fixem-nos, per exemple, que si $P, Q \in \mathbb{P}(E)$, no està definida la suma $P + Q$ ja que depèn dels representants escollits: si $P = [\boldsymbol{u}]$ i $Q = [\boldsymbol{v}]$, aleshores $[\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}]$ seria un candidat per a $P + Q$, però podem prendre un altre representant de Q, posem per cas $Q = [2\boldsymbol{v}]$, i semblaria que un altre candidat (diferent!) seria $[\boldsymbol{u} + 2\boldsymbol{v}]$, cosa absurda ja que $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \nsim \boldsymbol{u} + 2\boldsymbol{v}$.

4.1.9 Definició. Direm que $P_0, \dots, P_{n+1}$ de $\mathbb{P}^n$ estan en *posició general* si qualssevol $n+1$ punts d'entre ells són linealment independents.

4.1.10 Proposició. Siguin $\{P_0, \dots, P_{n+1}\}$ $n+2$ punts en posició general. Existeix una base $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_0, \dots, \boldsymbol{e}_n\}$ de E tal que

$$P_i = [\boldsymbol{e}_i], \quad 0 \leq i \leq n, \qquad P_{n+1} = [\boldsymbol{e}_0 + \cdots + \boldsymbol{e}_n]. \tag{$*$}$$

A més, si $\mathcal{B}' = \{\boldsymbol{u}_0, \dots, \boldsymbol{u}_n\}$ és una altra base que satisfà $(*)$, existeix un $\rho \in \mathbf{k}^\times$ tal que $\boldsymbol{u}_i = \rho \boldsymbol{e}_i$, per a tot $i = 0, \dots, n$.

Prova. Escollim vectors $\boldsymbol{v}_i$ representant els punts P_i, $1 \leq i \leq n+1$: $P_i = [\boldsymbol{v}_i]$. Per hipòtesis, els vectors $\boldsymbol{v}_0, \dots, \boldsymbol{v}_n$ formen base de E, per tant existeixen escalars $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ tals que

$$\boldsymbol{v}_{n+1} = \lambda_0 \boldsymbol{v}_0 + \cdots + \lambda_n \boldsymbol{v}_n.$$

Els vectors $\boldsymbol{e}_i = \lambda_i \boldsymbol{v}_i$, $0 \le i \le n$, satisfan $(*)$.

Sigui $\mathcal{B}' = \{\boldsymbol{u}_0, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$ una altra base que satisfà $(*)$. Atès que $P_i = [\boldsymbol{e}_i] = [\boldsymbol{u}_i]$, existeixen constants $\mu_i \neq 0$ tals que $\boldsymbol{u}_i = \mu_i \boldsymbol{e}_i$ i, com $P_{n+1} = [\boldsymbol{v}_{n+1}] = [\boldsymbol{u}_0 + \cdots + \boldsymbol{u}_n]$, existeix una constant $\rho \neq 0$ tal que $\rho \boldsymbol{v}_{n+1} = \boldsymbol{u}_0 + \cdots + \boldsymbol{u}_n$. Per tant,

$$\rho \boldsymbol{v}_{n+1} = \boldsymbol{u}_0 + \cdots + \boldsymbol{u}_n = \mu_0 \boldsymbol{e}_0 + \cdots + \mu_n \boldsymbol{e}_n.$$

Per la unicitat de les coordenades d'un vector en una base, en resulta $\mu_i = \rho$. ◇

En les condicions de la proposició direm que $\mathcal{R} = \{P_0, \ldots, P_n; P_{n+1}\}$ és un *sistema de referència projectiu* de $\mathbb{P}^n$ i que $\mathcal{B}$ és una *base adaptada* a $\mathcal{R}$. Denotarem per U el punt P_{n+1} i direm que és el *punt unitat* del sistema de referència.

Si $Q \in \mathbb{P}(E)$, escriurem $Q_{\mathcal{R}} = (x_0 : \cdots : x_n)$ per indicar les *coordenades homogènies* de Q en el sistema de referència $\mathcal{R}$ de $\mathbb{P}(E)$, $Q = [x_0 \boldsymbol{e}_0 + \cdots + x_n \boldsymbol{e}_n]$.

4.1.11 Exemple. Un sistema de referència d'una recta $\mathbb{P}^1$ està determinat per 3 punts diferents dos a dos $\mathcal{R} = \{P_0, P_1; U\}$.

Considerem els punts

$$\mathcal{R} = \{(1:2), (3:1); (1:1)\}.$$

de $\mathbb{P}^1_{\mathbf{k}}$. És clar que aquests punts estan en posició general i, per tant, determinen una referència de $\mathbb{P}^1_{\mathbf{k}}$. Els vectors $(1,2), (3,1)$ i $(1,1)$ no formen una base adaptada; n'obtenim una canviant els representants dels dos primers punts de $\mathcal{R}$:

$$\lambda(1,2) + \mu(3,1) = (1,1) \implies \lambda = \frac{2}{5}, \mu = \frac{1}{5},$$

pel que podem escollir la base adaptada

$$\{(2,4), (3,1); (5,5)\}.$$

4.1.12 Canvi de referència. Suposem donats dos sistemes de referència $\mathcal{R}, \mathcal{R}'$ a $\mathbb{P}(E)$, volem determinar com es transformen les coordenades homogènies d'un punt $Q \in \mathbb{P}(E)$ d'un sistema a l'altre. Siguin $Q_{\mathcal{R}} = (x_0 : \cdots : x_n), Q_{\mathcal{R}'} = (x'_0 : \cdots : x'_n)$ les coordenades homogènies de Q en $\mathcal{R}$ i $\mathcal{R}'$.

Escollim bases adaptades $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_0, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ i $\mathcal{B}' = \{\boldsymbol{e}'_0, \ldots, \boldsymbol{e}'_n\}$ de $\mathcal{R}$ i $\mathcal{R}'$, respectivament, i sigui $S \in GL_{n+1}(\mathbf{k})$ la matriu de canvi de base de $\mathcal{B}_2$ a $\mathcal{B}_1$, és a dir, la matriu (s_i^j) determinada per $\boldsymbol{e}'_i = s_i^0 \boldsymbol{e}_0 + \cdots + s_i^n \boldsymbol{e}_n$. Si $Q = [\boldsymbol{u}]$, aleshores hi ha constants λ, μ no nul·les tals que $\boldsymbol{u} = \lambda(x_0 \boldsymbol{e}_0 + \cdots + x_n \boldsymbol{e}_n)$ i $\boldsymbol{u} = \mu(x'_0 \boldsymbol{e}'_0 + \cdots + x'_n \boldsymbol{e}'_n)$, per la qual cosa

$$Q_{\mathbb{R}} = \rho S Q_{\mathcal{R}'},$$

on $\rho = \mu\lambda^{-1}$. Direm que la matriu ρS és la *matriu de canvi de referència.* Observem que està determinada llevat de la constant no nul·la ρ.

4.1.13 Exemple. A $\mathbb{P}^2_{\mathbf{k}}$ considerem les referències

$$\begin{aligned}\mathcal{R} &= \{(1:0:0),(0:1:0),(0:0:1);(1:1:1)\},\\ \mathcal{R}' &= \{(-1:1:2),(1:-1:0),(1:0:1);(2:-1:1)\}.\end{aligned}$$

Observem que en $\mathcal{R}'$ la base de $\mathbf{k}^3$ que en resulta no és adaptada. És immediat comprovar que

$$\{(2,-2,4),(-3,-3,0),(3,0,3)\}$$

és una base adaptada de $\mathcal{R}'$. Així, la matriu de canvi de les bases adaptades és

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 3\\ -2 & 3 & 0\\ -4 & 0 & 3\end{pmatrix}$$

i les coordenades homogènies d'un punt canvien segons l'equació

$$\begin{pmatrix} x_0'\\ x_1'\\ x_2'\end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3\\ -2 & 3 & 0\\ -4 & 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0\\ x_1\\ x_2\end{pmatrix}.$$

Equacions de les varietats lineals

Fixem un sistema de referència $\mathcal{R}$ i una base adaptada $\mathcal{B}$ de $\mathbb{P}(E)$. Les varietats lineals $V \subset \mathbb{P}(E)$ es poden descriure analíticament a partir del sistema de referència en forma paramètrica o implícita.

Equacions paramètriques: Sigui $V = \mathbb{P}(F) \subset \mathbb{P}(E)$, $F \subset E$, una varietat lineal de dimensió d i $P_0 = [\boldsymbol{u_0}], \dots, P_d = [\boldsymbol{u_d}] \in V$ tals que $V = P_0 \vee \cdots \vee P_d$. Si $Q = [\boldsymbol{v}] \in \mathbb{P}(E)$, $\boldsymbol{v} \neq 0$, aleshores

$$Q \in V \Longleftrightarrow \boldsymbol{v} \in F \Longleftrightarrow \boldsymbol{v} = \alpha_0 \boldsymbol{u}_0 + \cdots + \alpha_d \boldsymbol{u}_d$$

per a certes constants $\alpha_i \in \mathbf{k}$. En termes de coordenades homogènies en el sistema de referència $\mathcal{R}$ trobem doncs,

$$Q_{\mathcal{R}} = \alpha_0 (P_0)_{\mathcal{R}} + \cdots + \alpha_d (P_d)_{\mathcal{R}},$$

i direm que són les *equacions paramètriques* de V.

Atès que el vector $\boldsymbol{v}$ és no nul, $(\alpha_0, \dots, \alpha_r) \neq 0$, podríem pensar que aquests coeficients α_i són coordenades homogènies de Q en V, però aquest no és el cas ja que depenen dels vectors $\boldsymbol{u}_i$ escollits que representen els punts P_i, (no hem escollit un punt unitat de V!).

Per exemple, al pla $\mathbb{P}^2_{\mathbf{k}}$, amb la referència ordinària, prenem la recta L determinada pels punts $P_0 = (1:0:1), P_1 = (1:2:-1)$. Paramètricament, descrivim els punts de L segons

$$Q_{\mathcal{R}} = \alpha(1:0:1) + \beta(1,2,-1),$$

variant $\alpha, \beta \in \mathbf{k}$ de manera que no siguin simultàniament zero. Observem que si prenem el vector $(2,0,2)$ com a representant de P_0, aleshores les equacions paramètriques de L que en resulten són

$$Q_{\mathcal{R}} = \alpha'(2:0:2) + \beta'(1,2,-1).$$

Així, pel punt $Q = (0:-2:2) \in L$ trobem $\alpha = 1, \beta = -1$ en el primer sistema i $\alpha' = 1, \beta' = -2$ en el segon, és a dir

$$(\alpha, \beta) = (1,-1) \neq \lambda(1,-2) = (\alpha', \beta'), \ \forall \lambda \neq 0.$$

Òbviament en variar α, β s'obtenen tots els punts de la recta, de la mateixa manera que en variar α', β' també.

Equacions implícites. Les equacions implícites de $V = \mathbb{P}(F)$ en el sistema de coordenades $\mathcal{R}$ coincideixen amb les equacions del subespai $F \subset E$ en la base adaptada $\mathcal{B}$. En efecte, si $Q = [\boldsymbol{v}]$,

$$Q_{\mathcal{R}} = (x_0 : \cdots : x_n) \in V \iff \boldsymbol{v} \in F.$$

Ara bé, $\boldsymbol{v} \in F$ si, i només si, les seves coordenades X en la base $\mathcal{B}$ satisfan un sistema d'equacions lineal i homogeni

$$AX^t = 0.$$

Donat que el sistema és homogeni trobem, independentment del respresentant escollit pel punt Q, que

$$Q \in V \iff AQ^t_{\mathcal{R}} = 0.$$

Observem que

$$d = \dim V = n - \text{rang } A,$$

ja que $\dim V = \dim F - 1 = \dim E - \text{rang } A - 1 = \dim \mathbb{P}(E) - \text{rang } A$.

Per exemple, les coordenades dels punts d'un hiperplà H estan determinades per una equació lineal homogènia

$$a_0x_0 + \cdots + a_nx_n = 0,$$

en la qual no poden anul·lar-se tots els coeficients a_i simultàniament.

4.1.14 Observacions. (1) Les equacions paramètriques són particularment útils quan es vol determinar la varietat lineal generada per dues varietats V, W, ja que

$$V \vee W = \langle P_0, \ldots, P_r \rangle \vee \langle Q_0, \ldots, Q_s \rangle = \langle P_0, \ldots, P_r, Q_0, \ldots, Q_s \rangle,$$

mentres que les equacions implícites permeten calcular fàcilment la intersecció de dues varietats: si V i W estan determinades pels sistemes lineals $AX^t = 0$ i $BX^t = 0$, aleshores els punts de $V \cap W$ són les solucions del sistema

$$AX = 0, \quad BX = 0.$$

(2) El pas d'equacions paramètriques a implícites d'una varietat lineal i viceversa es fa exactament igual a com es realitza a l'àlgebra lineal:

– Si $V = \langle P_0, \ldots, P_r \rangle$, aleshores un punt Q de coordenades homogènies $Q_{\mathcal{R}}$ és de V si, i només si,

$$\text{rang } ((P_0)_{\mathcal{R}}, \ldots, (P_r)_{\mathcal{R}}, Q_{\mathcal{R}}) = \text{rang } ((P_0)_{\mathcal{R}}, \ldots, (P_r)_{\mathcal{R}}),$$

el que dona lloc a un sistema d'equacions lineals homogènies (corresponents als menors que han d'anul·lar-se).

– Per passar de les equacions implícites de V a les equacions paramètriques, n'hi ha prou amb resoldre el sistema per obtenir les coordenades d'un conjunt de punts que generin V.

4.1.15 Exemple. A $\mathbb{P}^2_{\mathbf{k}}$ amb la referència canònica considerem els punts $P_0 = (1 : 1 : 2), P_1 = (-1 : 0 : 3)$. Aleshores les equacions paramètriques de la recta $L = P_0 \vee P_1$ són

$$\begin{aligned} (x_0 : x_1 : x_2) &= \alpha(1 : 1 : 2) + \beta(-1 : 0 : 3) \\ &= (\alpha - \beta : \alpha : 2\alpha + 3\beta), \end{aligned}$$

amb α, β no simultàniament nul·les. Per trobar l'equació implícita de L imposem que el rang de (P_0, P_1, Q) sigui 2, és a dir,

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & x_0 \\ 1 & 0 & x_1 \\ 2 & 3 & x_2 \end{vmatrix} = 3x_0 - 5x_1 + x_2 = 0.$$

4.2 Dos teoremes d'incidència clàssics: Desargues i Pappus

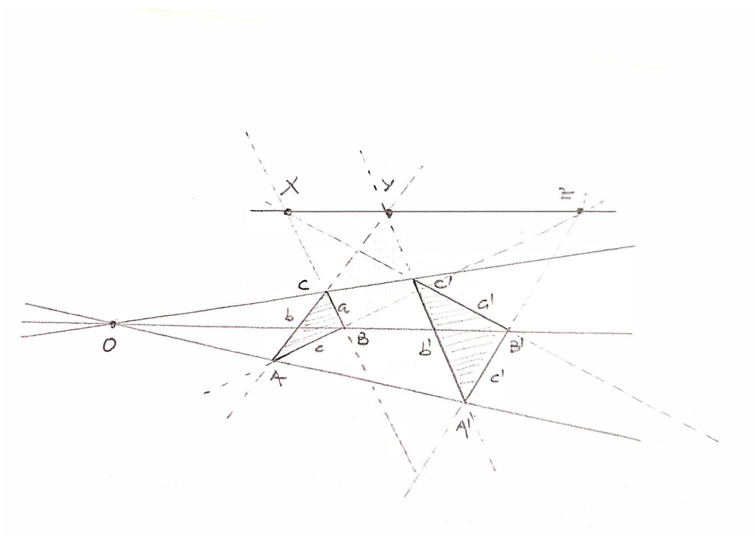
Després d'introduir les varietats lineals i els sistemes de coordenades de l'espai projectiu, estem en disposició de demostrar alguns resultats de contingut més geomètric com són els teoremes de Desargues i de Pappus, que presentem en aquesta secció, i el del quadrangle complet, que deixem per a la secció següent, un cop definida la raó doble. Tots ells són resultats del pla projectiu.

El teorema de Desargues estableix una propietat dels triangles en perspectiva del pla: dos triangles $ABC, A'B'C'$ *estan en perspectiva* si les rectes AA', BB', CC' són concurrents en un punt O, que és el centre de la perspectiva. El teorema assegura aleshores que certs punts estan alineats. Enunciarem el resultat en forma d'equivalència, ja que el seu recíproc també és cert.

4.2.1 Teorema de Desargues. Siguin $ABC, A'B'C'$ dos triangles de $\mathbb{P}^2$ de costats a, b, c, a', b', c', tals que $A \neq A', B \neq B', C \neq C', a \neq a', b \neq b', c \neq c'$. Considerem els punts

$$X = BC \cap B'C', \; Y = AC \cap A'C', \; Z = AB \cap A'B'.$$

Aleshores, les rectes AA', BB', CC' són concurrents si, i només si, els punts X, Y, Z estan alineats.



Prova. Demostrarem la implicació directa. El recíproc es podria demostrar de forma similar, però el provarem més endavant com a conseqüència del principi de dualitat. Suposem doncs que les tres rectes AA', BB', CC' són concurrents en un punt O.

Observem que $\mathcal{R} = \{A, B, C; O\}$ és una referència projectiva del pla. En efecte, A, B, C són linealment independents perquè formen un triangle de $\mathbb{P}^2$. Si A, B, O no fossin independents, B seria de la recta $OA = AA'$ i B' també, així $c = AB = A'B' =$

c', en contradicció amb les hipòtesis. Anàlogament, les ternes A, C, O i B, C, O són independents i, en defintiva, $\mathcal{R}$ és una referència.

Determinem les coordenades dels vèrtexs dels triangles en aquesta referència: les del primer triangle són clares

$$A = (1 : 0 : 0),\ B = (0 : 1 : 0),\ C = (0 : 0 : 1).$$

A' és un punt de la recta AO, que és la recta d'equació $x_1 = x_2$, així $A' = (x_0, x_1, x_1)$ i, com $A \neq A'$, $x_1 \neq 0$, de manera que si normalitzem el valor de la tercera coordenada podem escriure $A' = (\lambda : 1 : 1)$ per a cert $\lambda \in \mathbf{k}$. Raonant de forma similar trobem que

$$A' = (\lambda : 1 : 1),\ B' = (1 : \mu : 1),\ C' = (1 : 1 : \nu).$$

Calculem ara les coordenades homogènies dels punts X, Y, Z. Fem els càlculs en el cas $Z = AB \cap A'B'$: les equacions de les rectes AB i $A'B'$ són

$$\begin{aligned} AB &: \ x_2 = 0 \\ A'B' &: \ \begin{vmatrix} \lambda & 1 & x_0 \\ 1 & \mu & x_1 \\ 1 & 1 & x_2 \end{vmatrix} = (1-\mu)x_0 - (\lambda - 1)x_1 + (\lambda\mu - 1)x_2 = 0 \end{aligned}$$

pel que $Z = (\lambda - 1 : 1 - \mu : 0)$. Fent un càlcul similar per trobar X i Y, en resulta

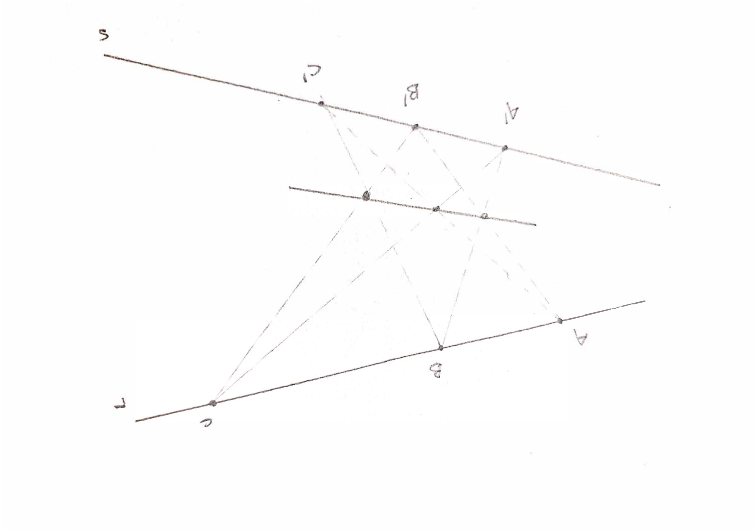
$$X = (0 : \mu - 1 : 1 - \nu),\ Y = (\lambda - 1 : 0 : \nu - 1),\ Z = (\lambda - 1 : 1 - \mu : 0),$$

per tant, aquests punts estan alineats. ◇

4.2.2 Observació. Quan es fa un tractament axiomàtic de la Geometria Projectiva del pla no sempre es compleix el teorema de Desargues, que cal imposar com a axioma si se'n vol disposar. Veieu la bibliografia.

4.2.3 Teorema de Pappus. Siguin $(A, B, C), (A', B', C')$ dues ternes de punts diferents de $\mathbb{P}^2$. Suposem que cada terna és colineal i notem per r, s les dues dues rectes $\mathbb{P}^2$ que determinen. Aleshores, els tres prunts $X = BC' \cap B'C, Y = AC' \cap A'C, Z = AB' \cap A'B$ estan alineats.

Prova. Com en el teorema de Desargues, la demostració es redueix a escollir una bona referència en la qual efectuar els càlculs, de manera que el resultat sigui simplement una comprovació. Observem que si un dels punts d'una terna pertany a la recta generada per l'altra, el resultat és evident, ja que les interseccions determinen només dos punts. Així, podem suposar que $A', B' \notin r$ i com $A' \neq B'$, $\mathcal{R} = \{A, B, A'; B'\}$ és una referència projectiva de $\mathbb{P}^2$.



Les coordenades dels punts $A, B, \ldots, C'$ són

$$\begin{aligned} A &= (1:0:0), \quad & A' &= (0:0:1), \\ B &= (0:1:0), \quad & B' &= (1:1:1), \\ C &= (1:\lambda:0), \quad & C' &= (1:1:\mu), \end{aligned}$$

amb $\lambda, \mu \neq 0$. Si calculem els punts X, Y, Z, trobem

$$X = (1:(1-\lambda)\mu:\mu),\ Y = (1:\lambda:\lambda\mu),\ Z = (0:1:1),$$

que estan alilneats, doncs

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ (1-\lambda)\mu & \lambda & 1 \\ \mu & \lambda\mu & 1 \end{vmatrix} = 0. \qquad \diamond$$

4.3 La raó doble i les quaternes harmòniques

Coordenada absoluta

Sigui $\mathcal{R} = \{P_0, P_1; U\}$ una referència projectiva de $\mathbb{P}^1$. Els punts $Q \in \mathbb{P}^1$ queden determinats per les coordenades homogènies en aquesta referència, $Q_{\mathcal{R}} = (x_0 : x_1)$. Si $Q \neq P_0$, aleshores $x_1 \neq 0$ i podem escriure $Q = (x_0/x_1 : 1)$.

4.3.1 Definició. Amb les notacions anteriors, definim la *coordenada absoluta* de Q en el sistema de referència $\mathcal{R}$ per

$$\theta = \frac{x_0}{x_1}.$$

Si escrivim formalment $\infty = 1/0$ i associem aquest valor al punt P_0, en resulta:

4.3.2 Proposició. La coordenada absoluta estableix una bijecció

$$\begin{array}{rccl} \theta : & \mathbb{P}^1 & \longrightarrow & \overline{\mathbf{k}} = \mathbf{k} \cup \{\infty\} \\ & (x_0, x_1) & \longmapsto & \theta = \frac{x_0}{x_1},\ x_1 \neq 0 \\ & (1, 0) & \longmapsto & \theta = \infty \end{array}$$

◇

La coordenada absoluta θ és una coordenada *no homogènia* a $\mathbb{P}^1$, amb la qual, en algunes situacions, és còmode treballar. Per exemple, un canvi de referència s'expressa en coordenades absolutes com una igualtat

$$\theta' = \frac{a\theta + b}{c\theta + d},$$

amb $ad - bc \neq 0$, com es comprova immediatament.

Quan treballem amb coordenades absolutes usarem l'aritmètica habitual de l'infinit: si $a \neq 0$, $a/\infty = 0, a/0 = \infty$, i entenem que $0/0$ i ∞/∞ són indeterminacions que no corresponen a cap valor de $\overline{\mathbf{k}}$.

Obervem que les coordenades absolutes dels punts de la referència $\mathcal{R}$ són:

$$\theta(P_0) = \infty, \quad \theta(P_1) = 0, \quad \theta(U) = 1.$$

Raó doble de quatre punts d'una recta

El motiu principal per introduir la raó doble de quatre punts alineats és la seva invariància per projectivitats, com veurem al proper capítol. En aquesta secció presentem la definició de la raó doble i l'aplicació a les quaternes harmòniques.

4.3.3 Definició. Siguin Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 quatre punts alineats de $\mathbb{P}^n$ i L la recta que els conté. Suposem que Q_1, Q_2, Q_3 són diferents entre ells. La *raó doble de la quaterna* Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 és la coordenada absoluta de Q_4 en la referència $\{Q_1, Q_2; Q_3\}$ de L.

Escriurem $\rho = (Q_1, Q_2, Q_3, Q_4)$ per indicar el valor de la raó doble de la quaterna alineada Q_1, Q_2, Q_3, Q_4. Observem que admetem el valor $\rho = \infty$, corresponent al cas en que $Q_4 = Q_1$. A més, segons la proposició anterior,

$$(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4) = (Q_1, Q_2, Q_3, Q_4') \iff Q_4 = Q_4'.$$

Podem efectuar el càlcul de la raó doble de quatre punts directament a partir de les seves coordenades homogènies en un sistema de referència de la recta L:

4.3.4 Lema. Siguin $Q_i = (x_i : y_i), 1 \leq i \leq 4$, punts de $\mathbb{P}^1_{\mathbf{k}}$ amb Q_1, Q_2, Q_3 diferents dos a dos. Aleshores,

$$(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4) = \frac{\begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} x_4 & y_4 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_4 & y_4 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}}.$$

Prova. Si les coordenades homogènies de Q_3 en la referència $\{Q_0, Q_1; Q_2\}$ són $(s : t)$, aleshores la raó doble és $\rho = s/t$. Per calcular aquestes coordenades, hem de resoldre el sistema

$$\begin{aligned} \lambda(x_1, y_1) + \mu(x_2, y_2) &= (x_3, y_3), \\ s\lambda(x_1, y_1) + t\mu(x_2, y_2) &= (x_4, y_4). \end{aligned}$$

La primera equació correspon a trobar una base adaptada del sistema de referència, mentres que la segona permet calcular les coordenades $(s : t)$.

El determinant del sistema $\Delta = x_1y_2 - x_2y_1$ és no nul, perquè $Q_1 \neq Q_2$; així, aplicant la regla de Cramer s'obté

$$\lambda = \frac{\begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}}{\Delta}, \quad \mu = \frac{\begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}}{\Delta}.$$

Anàlogament trobem que

$$s\lambda = \frac{\begin{vmatrix} x_4 & y_4 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}}{\Delta}, \quad t\mu = \frac{\begin{vmatrix} x_4 & y_4 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}}{\Delta}$$

d'on se segueix el resultat. ◇

4.3.5 Observació. Si escrivim el càlcul anterior en la forma

$$(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4) = \frac{\begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} x_4 & y_4 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} x_4 & y_4 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}}$$

veiem que a $\overline{\mathbf{k}}$ el càlcul de la raó doble es pot estendre a quaternes de punts en les quals hi ha dos punts coincidents:

$$\begin{array}{lcll} Q_1 = Q_4 & \text{o} & Q_2 = Q_3 & \rho = \infty \\ Q_2 = Q_4 & \text{o} & Q_1 = Q_3 & \rho = 0 \\ Q_3 = Q_4 & \text{o} & Q_1 = Q_2 & \rho = 1. \end{array}$$

Si tres punts de la quaterna coincideixen, el càlcul de la raó doble dona $0/0$ que no és un valor determinat. Direm que la raó doble d'una quaterna de punts està definida si com a molt hi ha dos punts coincidents.

Del lema resulta, immediatament:

4.3.6 Corol·lari.

$$(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4) = (Q_2, Q_1, Q_4, Q_3) = (Q_3, Q_4, Q_1, Q_2) = (Q_4, Q_3, Q_2, Q_1). \qquad \diamond$$

D'altra banda, si $\rho = (Q_0, Q_1, Q_2, Q_3)$, aleshores

$$(Q_1, Q_0, Q_2, Q_3) = \frac{1}{\rho}, \quad (Q_0, Q_2, Q_1, Q_3) = 1 - \rho,$$

d'on se segueix:

4.3.7 Proposició. El conjunt de valors de la raó doble en permutar quatre punts és

$$A_\rho = \left\{ \rho,\ \frac{1}{\rho},\ 1-\rho,\ \frac{1}{1-\rho},\ \frac{\rho}{\rho-1},\ \frac{\rho-1}{\rho} \right\}. \qquad \diamond$$

Quaternes harmòniques

4.3.8 Definició. Siguin A, B, C, D quatre punts alineats d'un espai projectiu $\mathbb{P}^n$ tals que està definida la raó doble (A, B, C, D). Direm que A, B, C, D formen una *quaterna harmònica* si $(A, B, C, D) = -1$.

Les quaternes harmòniques gaudeixen d'algunes propietats notables que resumim a continuació.

4.3.9 Observacions. (1) La condició de quaterna harmònica depèn únicament dels parells $\{A, B\}$ i $\{C, D\}$, en el sentit que no depèn de l'ordre en que es prenen aquests parells de punts ni de l'ordre dels punts de cada parell. És a dir,

$$\begin{aligned} (A, B, C, D) = -1 &\iff (B, A, C, D) = -1 \\ &\iff (A, B, D, C) = -1 \iff (C, D, A, B) = -1. \end{aligned}$$

(2) A, B, C, D és una quaterna harmònica si, i només si, hi ha vectors no nuls $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in E \setminus \{0\}$ tals que $A = [\boldsymbol{u}], B = [\boldsymbol{v}]$, $C = [\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}]$ i $D = [\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}]$.

(3) Si la característica del cos base $\mathbf{k}$ és igual a 2, aleshores $-1 = 1$ i, per tant, en una quaterna harmònica A, B, C, D el quart punt D coincideix amb el tercer, $C = D$.

En canvi, si la característica de $\mathbf{k}$ és $\neq 0$, aleshores els quatre punts d'una quaterna harmònica són sempre diferents.

Tenint present els diferents valors de la raó doble de quatre punts que s'obtenen permutant l'ordre entre ells, resulta que per a les quaternes harmòniques es redueixen a

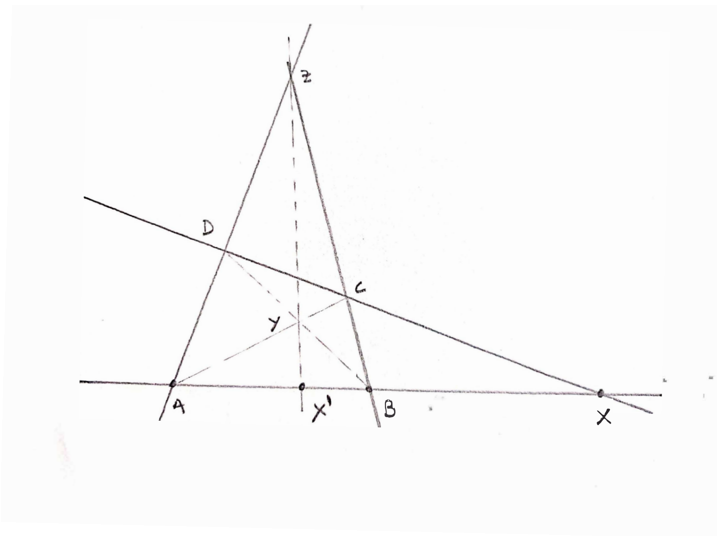
$$A_\rho = \left\{-1, \frac{1}{2}, 2\right\}.$$

Observeu que si la característica de $\mathbf{k}$ és 3, aquests valors coincideixen i, podem enunciar: la condició necessària i suficient per a que una quaterna harmònica segueixi sent harmònica en permutar de manera arbitrària els seus elements és que la característica de $\mathbf{k}$ sigui 3.

Per un estudi geomètric com en el que estem interessats, podem suposar que $\mathbf{k} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ (en particular, que és de característica zero) i evitar així la discusió de qüestions aritmètiques associades a la característica de $\mathbf{k}$.

4.3.10 Teorema del quadrangle complet. Sigui A, B, C, D un quadrangle complet i X, Y, Z el seu triangle diagonal. Sigui $X' = AB \cap YZ$, aleshores A, B, X, X' és una quaterna harmònica. Dit altrament, sobre cadascuna de les diagonals d'un quadrangle els vèrtexs del triangle diagonal i els vèrtexs del quadrangle estan separats harmònicament.

Prova. Prenem com a sistema de referència del pla $\{A, B, C; Y\}$. Aleshores, $X = (1, 1, 0)$ i $X' = (1, -1, 0)$, per la qual cosa $(A, B, X, X') = -1$. $\diamond$



4.4 El Principi de Dualitat

En la referència oridinària de $\mathbb{P}^n_{\mathbf{k}}$, un hiperplà H està definit per una equació homogènia

$$a_0 x_0 + \cdots + a_n x_n = 0,$$

on els coeficients a_i no són simultàniament nuls i estan determinats llevat d'una constant no nul·la. Podem considerar $(a_0 : \cdots : a_n)$ com coordenades homogènies d'un punt en un altre espai projectiu $\mathbb{P}^*$, que anomenarem l'espai projectiu dual. En aquesta secció proposem analitzar la geometria d'aquesta correspondència entre un espai projectiu i el seu dual, que abocarà al principi de dualitat de la geometria projectiva.

Situem-nos en un context general: sigui E un $\mathbf{k}$-espai vectorial de dimensió $n+1$ i $\mathbb{P} = \mathbb{P}(E)$ l'espai projectiu associat. A l'espai dual E^* li correspon un altre espai projectiu $\mathbb{P}^* = \mathbb{P}(E^*)$, de la mateixa dimensió n, que anomenarem l'*espai projectiu dual de* $\mathbb{P}(E)$.

Recordem que els espais E, E^* estan relacionats mitjançant l'aplicació

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & E \times E^* & \longrightarrow & \mathbf{k} \\ & (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}) & \longmapsto & \boldsymbol{w}(\boldsymbol{u}) \end{array}$$

i que, en aquest context, es defineix l'ortogonalitat segons:

4.4.1 Definició. Sigui $F \subset E$ un subespai. El *subespai ortogonal* $F^\perp \subset E^*$ de F és el subespai definit per

$$F^\perp = \{\boldsymbol{w} \in E^* \mid \boldsymbol{w}(\boldsymbol{u}) = 0,\ \forall \boldsymbol{u} \in F\}.$$

És clar que $\dim F^\perp = \dim E - \dim F$. Si denotem per $Sub_d(E)$ el conjunt de subespais vectorials de E de dimensió n, aleshores l'assignació $F \mapsto F^\perp$ defineix una aplicació

$$\perp : Sub_d(E) \longrightarrow Sub_{\dim E - d}(E^*).$$

De forma anàloga, l'ortogonalitat defineix una aplicació

$$\perp : Sub_{\dim E - d}(E^*) \longrightarrow Sub_d(E^{**}) = Sub_d(E),$$

que resulta d'identificar $E \cong E^{**}$. Aquestes aplicacions són bijectives, com estableix el punt (1) del lema que segueix, que deixem com exercici.

4.4.2 Lema. Siguin F, G subespais de E. Se satisfà:

(1) $(F^\perp)^\perp = F$.

(2) $F \subset G \Longleftrightarrow G^{\perp} \subset F^{\perp}$.

(3) $(F \cap G)^{\perp} = F^{\perp} + G^{\perp}$.

(4) $F + G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}$. ◇

4.4.3 Definició. Sigui $V = \mathbb{P}(F) \subset \mathbb{P}(E)$ una varietat lineal de dimensió d. Es defineix la *varietat lineal dual* V^* com la subvarietat de $\mathbb{P}(E^*)$ definida per

$$V^* = \mathbb{P}(F^{\perp}) \subset \mathbb{P}(E^*).$$

Observem que la dimensió de $F^{\perp}$ és $\dim E - \dim F = n + 1 - (d + 1) = n - d$ i que, per tant, la dimensió de V^* és $n - d - 1$. Per exemple, si V és un punt, aleshores V^* és un hiperplà; i, recíprocament, si V és un hiperplà, aleshores V^* és un punt. Resumim les propietats del pas al dual que es deriven del Lema 4.4.2 en el següent resultat.

4.4.4 Proposició. Denotem per $Subv_d(\mathbb{P}(E))$ el conjunt de subvarietats lineals de $\mathbb{P}(E)$. L'aplicació

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & Subv_d(\mathbb{P}(E)) & \longrightarrow & Subv_{n-d-1}(\mathbb{P}(E^*)) \\ & V & \longmapsto & V^* \end{array}$$

és una bijecció tal que si V, W són varietats lineals de $\mathbb{P}(E)$, se satisfà:

(1) $(V^*)^* = V$.

(2) $V \subset W \Longleftrightarrow W^* \subset V^*$.

(3) $(V \cap W)^* = V^* \vee W^*$.

(4) $(V \vee W)^* = V^* \cap W^*$. ◇

D'aquest resultat se segueix el principi de dualitat:

4.4.5 Principi de dualitat de la Geometria Projectiva. Tot teorema relatiu a la inclusió, intersecció i suma de varietats projectives en un espai projectiu de dimensió n sobre $\mathbf{k}$ admet un teorema dual, equivalent a l'anterior, canviant les subvarietats de dimensió d per subvarietats de dimensió $n - d - 1$, invertint les inclusions i substituint *suma* i *intersecció* per *intersecció* i *suma*, respectivament.

4.4.6 Exemples. (1) A $\mathbb{P}^2$, la dualitat associa

$\mathbb{P}^2$		$(\mathbb{P}^2)^*$
punt	$\longleftrightarrow$	recta
recta	$\longleftrightarrow$	punt

de manera que a l'enunciat *dues rectes diferents* L_1, L_2 *es tallen en un punt* $P = L_1 \cap L_2$, li correspon l'enunciat dual: dos punts diferents L_1^*, L_2^* generen una recta P^*.

(2) A l'espai $\mathbb{P}^3$, la dualitat estableix l'aparellament:

$\mathbb{P}^3$		$(\mathbb{P}^3)^*$
punt	$\longleftrightarrow$	pla
recta	$\longleftrightarrow$	recta
pla	$\longleftrightarrow$	punt

Així, si P denota un punt, L una recta i Π un pla, el principi de dualitat estableix l'equivalència de les assercions següents:

$$\begin{array}{ccc}
P \neq Q \implies \dim(P \vee Q) = 1 & \longleftrightarrow & \Pi_1 \neq \Pi_2 \implies \dim(\Pi_1 \cap \Pi_2) = 1 \\
L_1 \cap L_2 = \emptyset \implies L_1 \vee L_2 = \mathbb{P}^3 & \longleftrightarrow & L_1 \vee L_2 = \mathbb{P}^3 \implies L_1 \cap L_2 = \emptyset \\
\text{Si } P \notin L \implies \dim(P \vee L) = 2 & \longleftrightarrow & L \not\subseteq \Pi \implies \dim(L \cap \Pi) = 0
\end{array}$$

4.4.7 Observació. Tenim pendent la demostració d'una de les implicacions del teorema de Desargues, 4.2.1. Comprovem que l'enunciat dual del que ens queda per demostrar correspon a la implicació demostrada i, d'acord amb el principi de dualitat, és cert.

Dualitzem les notacions del Teorema 4.2.1: tenim dos triangles a^*, b^*, c^* i a'^*, b'^*, c'^* de $\mathbb{P}^{2*}$ de costats A^*, B^*, C^* i A'^*, B'^*, C'^*, tots diferents entre ells.

Si suposem ara que que X, Y, Z estan alineats, les rectes X^*, Y^*, Z^* són concurrents. Així, per la implicació directa del teorema de Desargues, els punts de $\mathbb{P}^{2*}$ definits per

$$x = b^*c^* \cap b'^*c'^*, \ y = a^*c^* \cap a'^*c'^*, \ z = a^*b^* \cap a'^*b'^*,$$

estan alineats, per la qual cosa les rectes x^*, y^*, z^* són concurrents.

Calculem x^*:

$$\begin{aligned}
x^* &= ((b^* \vee) c^* \cap (b'^* \vee c'^*))^* \\
&= (b \cap c) \vee (b' \cap c') = AA'.
\end{aligned}$$

Anàlogament es veu que $y^* = BB'$ i $z^* = CC'$, el que acaba la prova.

Atès que els punt de l'espai dual $\mathbb{P}(E^*)$ es corresponen bijectivament amb els hiperplans de $\mathbb{P}(E)$, les varietats lineals de $\mathbb{P}(E^*)$ s'anomenen *sistemes lineals d'hiperplans.* Podem visualitzar aquests sistemes directament a l'espai projectiu original $\mathbb{P}(E)$, ja que de la propietat (2) de la Proposició 4.4.4 se segueix:

4.4.8 Proposició. Sigui $V \subset \mathbb{P}(E)$ una varietat lineal i $V^* \subset \mathbb{P}(E^*)$ la varietat lineal dual. Aleshores,

$$h \in V^* \Longleftrightarrow V \subset h^* = H. \qquad \diamond$$

És a dir, els punts de la varietat dual a $\mathbb{P}(E^*)$ es corresponen bijectivament amb els hiperplans de $\mathbb{P}(E)$ que contenen V.

Per exemple, una recta de $\mathbb{P}(E^*)$ és una col·lecció d'hiperplans H de $\mathbb{P}(E)$ que contenen una varietat fixada $V \subset \mathbb{P}(E)$ de dimensió $n-2$. Les rectes de $\mathbb{P}(E^*)$ s'anomenen, també, *feixos d'hiperplans.*

Referència dual

Sigui $\mathcal{R} = \{P_0, \ldots, P_n; U\}$ una referència projectiva de $\mathbb{P}^n$. Aleshores,

$$\mathcal{R}^* = \{P_0^*, \ldots, P_n^*; U^*\}$$

és una referència projectiva de $(\mathbb{P}^n)^*$, que anomenarem la *referència dual* de $\mathcal{R}$.

En efecte, si $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{u}_0, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$ és una base adaptada de $\mathcal{R}$ i $\mathcal{B}^* = \{\boldsymbol{u}^0, \ldots, \boldsymbol{u}^n\}$ la base dual, aleshores, $P_i^* = [\boldsymbol{u}^i]$, és a dir,

$$\mathcal{R}^* = \{P_0^* = [\boldsymbol{u}^0], \ldots, P_n^* = [\boldsymbol{u}^n]; U^* = [\boldsymbol{u}^0 + \cdots + \boldsymbol{u}^n]\}.$$

Observem que P_i^* correspon a l'hiperplà de $\mathbb{P}^n$ $P_0 \vee \cdots \vee \hat{P}_i \vee \cdots \vee P_n$, és a dir, l'oposat al vèrtex P_i del símplex que defineix la referència $\mathcal{R}$.

Retrobem així les equacions amb les quals hem començat aquesta secció: si H és un hiperplà de $\mathbb{P}^n$ que en la referència $\mathcal{R}$ té equació

$$H \equiv a_0x_0 + \cdots + a_nx_n = 0,$$

aleshores les coordenades de H^* en la referència $\mathcal{R}^*$ són $H^*_{\mathcal{R}^*} = (a_0 : \cdots : a_n)$. I recíprocament, si $P = (b_0 : \cdots : b_n)$ són les coordenades d'un punt de $\mathbb{P}^n$ en la referència $\mathcal{R}$, aleshores l'hiperplà P^* de $(\mathbb{P}^n)^*$ té equació

$$P^* \equiv b_0x'_0 + \cdots + b_nx'_n = 0$$

en la referència $\mathcal{R}^*$.

4.5 Completació projectiva d'un espai afí

Sigui $(\mathbb{A}^n, E)$ un espai afí de dimensió n de $\mathbf{k}$-espai vectorial director E. Recordem que dos punts $P, Q \in \mathbb{A}$ determinen un vector $\overrightarrow{PQ} \in E$, de manera que fixat un d'ells, P, l'aplicació

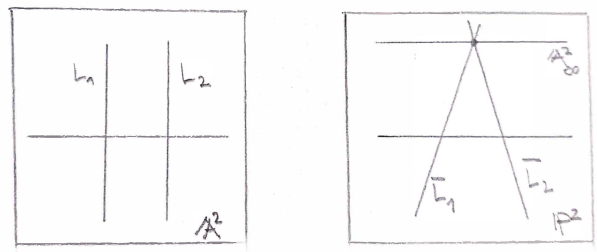
$$\begin{array}{cccc} \delta_P: & \mathbb{A}^n & \longrightarrow & E \\ & Q & \longmapsto & \overrightarrow{PQ} \end{array}$$

és una bijecció i que se satisfà

$$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}\,.$$

Dues rectes afins $L = P + \langle \boldsymbol{u} \rangle, L' = P' + \langle \boldsymbol{u}' \rangle$ de $\mathbb{A}^n$, són paral·leles si coincideixen els seus subespais directors, $\langle \boldsymbol{u} \rangle = \langle \boldsymbol{u}' \rangle$, és a dir, si existeix $\lambda \in \mathbf{k}^\times$ tal que $\boldsymbol{u}' = \lambda \boldsymbol{u}$. Així, el conjunt de direccions de les rectes de $\mathbb{A}^n$ és igual a $\mathbb{P}(E)$.

Sigui $\overline{\mathbb{A}^n} = \mathbb{A}^n \cup \mathbb{P}(E)$. Donada una recta afí $L \subset \mathbb{A}^n$ de vector director $\boldsymbol{u}$, escrivim $\overline{L} = L \cup \{[\boldsymbol{u}]\}$, és a dir, afegim a la recta L un punt *impropi* corresponent a la direcció de la recta. Dues rectes paral·leles, L, L' de $\mathbb{A}^n$ comparteixen la mateixa direcció i, per tant, $\overline{L} \cap \overline{L}' = \{[\boldsymbol{u}]\}$ es tallen en un punt de $\overline{\mathbb{A}^n}$. L'objectiu principal d'aquesta secció és veure que $\overline{\mathbb{A}^n}$ és un espai projectiu que inclou de forma natural l'espai afí $\mathbb{A}^n$.



Finestra afí   Finestra projectiva

4.5.1 Observació. Sigui $\mathbb{P} = \mathbb{P}(E)$ un espai projectiu i $H = \mathbb{P}(F) \subset \mathbb{P}$ un hiperplà. Aleshores, $\mathbb{A} = \mathbb{P} \setminus H$ té estructura d'espai afí sobre F.

En efecte, sigui $\boldsymbol{e}_0$ un vector suplementari de F en E, $E = \langle \boldsymbol{e}_0 \rangle \oplus F$. Tot element $\boldsymbol{u} \in E$ s'expressa, de manera única, com una suma $\boldsymbol{u} = \lambda \boldsymbol{e}_0 + \boldsymbol{u'}$ amb $\lambda \in \mathbf{k}$ i $\boldsymbol{u'} \in F$. Si $[\boldsymbol{u}] \in \mathbb{A}$, aleshores normalitzant el factor λ, podem suposar que $\lambda = 1$,

$$[\boldsymbol{u}] = [\boldsymbol{e}_0 + \boldsymbol{u'}] \in \mathbb{P}.$$

S'estableix així una bijecció $\mathbb{A} \ni [\boldsymbol{u}] \longleftrightarrow \boldsymbol{u'} \in F$ i l'estructura d'espai afí de F indueix una estructura d'espai afí sobre $\mathbb{A}$: si $P = [\boldsymbol{e}_0 + \boldsymbol{u'}], Q = [\boldsymbol{e}_0 + \boldsymbol{v'}]$,

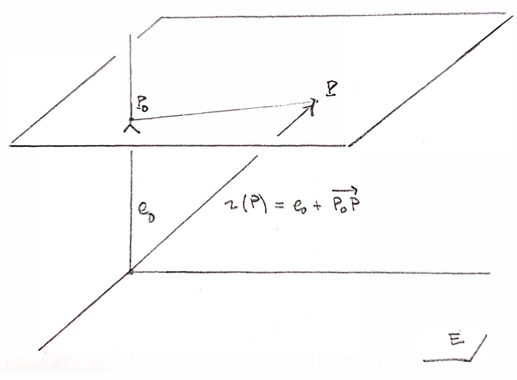
$$\overrightarrow{PQ} := \boldsymbol{u'} - \boldsymbol{v'}.$$

4.5.2 Proposició. Sigui $(\mathbb{A}^n, E, \delta)$ un espai afí de dimensió n. Existeix un espai projectiu $\overline{\mathbb{A}^n}$ de dimensió n, un hiperplà $\mathbb{A}^n_\infty$ de $\overline{\mathbb{A}^n}$ i un isomorfisme d'espais afins $\mathbb{A}^n \cong \overline{\mathbb{A}^n} \setminus \mathbb{A}^n_\infty$.

Prova. Seguint el model de l'observació anterior, anem a incloure l'espai afí $\mathbb{A}^n$ com una varietat afí d'un espai vectorial d'una dimensió més, $n+1$. Considerem el $\mathbf{k}$-espai vectorial $\overline{E} = \mathbf{k} \times E$. Podem escriure els vectors de $\overline{E}$ en la forma $(\lambda, \boldsymbol{u})$, on $\lambda \in \mathbf{k}, \boldsymbol{u} \in E$. Observem que E s'inclou en $\overline{E}$ de forma natural: $\boldsymbol{u} \mapsto (0, \boldsymbol{u})$ i que $\langle(1, \mathbf{0})\rangle$ és un subespai suplementari de E en $\overline{E}$. Escriurem $\boldsymbol{e}_0 = (1, \mathbf{0})$.

Definim la completació projectiva de $\mathbb{A}^n$ per $\overline{\mathbb{A}^n} = \mathbb{P}^n := \mathbb{P}(\overline{E})$ i l'hiperplà $\mathbb{A}^n_\infty := \mathbb{P}(E)$. Ens queda per determinar un isomorfisme entre $\mathbb{A}^n$ i $\overline{\mathbb{A}^n} \setminus \mathbb{A}^n_\infty$. Fixem un punt $P_0 \in \mathbb{A}^n$ i definim

$$\begin{array}{rccc} \iota : & \mathbb{A}^n & \longrightarrow & \mathbb{P}^n \\ & P & \longmapsto & [\boldsymbol{e}_0 + \overrightarrow{P_0P}] \end{array}$$



L'aplicació ι satisfà:

(i) És injectiva. En efecte, si $\iota(P)=\iota(Q)$, aleshores

$$[\boldsymbol{e}_0+\overrightarrow{P_0P}]=[\boldsymbol{e}_0+\overrightarrow{P_0Q}]\Longrightarrow \exists\lambda\neq 0\ \boldsymbol{e}_0+\overrightarrow{P_0P}=\lambda(\boldsymbol{e}_0+\overrightarrow{P_0Q}).$$

Com la suma $\overline{E}=\langle\boldsymbol{e}_0\rangle\oplus F$ és directa, en resulten les igualtats

$$\begin{array}{rcl}\boldsymbol{e}_0&=&\lambda\boldsymbol{e}_0\\ \overrightarrow{P_0P}&=&\lambda\,\overrightarrow{P_0Q}\,.\end{array}$$

De la primera deduïm que $\lambda=1$. Substituint aquest valor en la segona equació trobem

$$\overrightarrow{P_0P}=\overrightarrow{P_0Q}\Longrightarrow\ P=Q.$$

(ii) ι és una aplicació afí. En efecte, la descomposició $\overline{E}=\langle\boldsymbol{e}_0\rangle\oplus E$ defineix una estructura afí a $\mathbb{P}^n\setminus\mathbb{A}^n_\infty$ que com hem vist a l'Observació 4.5.1 ve donada per

$$\overrightarrow{(\iota(P),\iota(Q))}=\overrightarrow{([\boldsymbol{e}_0+P_0P],[\boldsymbol{e}_0+P_0Q])}\ \longmapsto\ \overrightarrow{P_0P}-\overrightarrow{P_0Q}\ =\overrightarrow{PQ}\,.$$

La imatge $\iota(\mathbb{A}^n)$ és doncs una varietat lineal de dimensió n de $\overline{\mathbb{A}^n}\setminus\mathbb{A}^n_\infty$ i, per tant, $\iota(\mathbb{A}^n)=\overline{\mathbb{A}^n}\setminus\mathbb{A}^n_\infty$. ◇

A l'hiperplà $\mathbb{A}^n_\infty$ de la completació projectiva $\mathbb{A}^n\subset\mathbb{P}^n$ l'anomenarem l'*hiperplà de l'infinit* de $\mathbb{A}^n$. Remarquem que en un espai projectiu $\mathbb{P}$ no hi ha un hiperplà distingit com a hiperplà de l'infinit, sinó que aquest concepte és relatiu a la inclusió d'un espai afí en $\mathbb{P}$. De fet, qualsevol hiperplà $H\subset\mathbb{P}$ és l'hiperplà de l'infinit d'un espai afí, de $\mathbb{P}\setminus H$.

Varietats lineals afins i projectives

Sigui $V=P+F\subset\mathbb{A}^n$ una varietat lineal afí que passa per $P\in\mathbb{A}^n$ amb subespai director F.

4.5.3 Definició. Definim la *clausura projectiva* de V com el subconjunt de $\mathbb{P}^n=\overline{\mathbb{A}^n}$ donat per $\overline{V}=V\cup V_\infty$, on $V_\infty=\mathbb{P}(F)$.

4.5.4 Proposició. (1) $\overline{V}$ és una varietat lineal (projectiva) de $\mathbb{P}^n$ de la mateixa dimensió que V. Més concretament, $\overline{V}=\iota(P)\vee V_\infty$.

(2) $\overline{V}$ és l'única varietat lineal de $\overline{\mathbb{A}}$ tal que $\overline{V}\cap\mathbb{A}^n=\iota(V)$.

Prova. (1) La inclusió $\overline{V}\supset\iota(P)\vee V_\infty$ és immediata.

Vegem la inclusió $\overline{V} \subset \iota(P) \vee V_\infty$. Sigui $Q \in \overline{V} = \iota(V) \cup V_\infty$. Si $Q \in V_\infty$ no hi ha res a demostrar. Suposem que $Q \in \iota(V)$, aleshores hi ha un punt $Q' \in \mathbb{A}^n$ amb $Q = \iota(Q')$, d'on

$$Q = [\boldsymbol{e}_0 + \overrightarrow{P_0 Q'}] = [\boldsymbol{e}_0 + \overrightarrow{P_0 P} + \overrightarrow{PQ'}] \in \iota(P) \vee \mathbb{P}(F),$$

doncs $\overrightarrow{PQ'} \in F$ perquè que $Q \in V$.

(2) És clar que $\overline{V} \cap \mathbb{A}^n = V$. Suposem ara que $W \subset \mathbb{P}^n$ és una varietat projectiva tal que $W \cap \mathbb{A}^n = V$ i veiem que $W = \overline{V}$. Siguin F l'espai director de V i $G \subset \overline{E}$ el subespai tal que $W = \mathbb{P}(G)$, és suficient de veure que $\langle \boldsymbol{e}_0 \rangle + F = G$.

$\langle \boldsymbol{e}_0 \rangle + F \subset G$: Com $\overline{V} \subset W$, per a tot vector $\boldsymbol{u} \in F$ tenim que $\boldsymbol{e}_0 + \boldsymbol{u} \in G$, en particular prenent $\boldsymbol{u} = 0$, tenim que $\boldsymbol{e}_0 \in G$, que amb la relació anterior dona que $\boldsymbol{u} \in G$.

$\langle \boldsymbol{e}_0 \rangle + F \supset G$: sigui $\boldsymbol{u} = \lambda \boldsymbol{e}_0 + \boldsymbol{v} \in G$, on $\boldsymbol{v} \in E$, que suposarem no nul, ja que el vector zero pertany trivialment a $\overline{F}$.

Suposem $\lambda = 0$, aleshores $\boldsymbol{v} \in G \cap E$; d'altra banda $\boldsymbol{e}_0 \in G$, per tant,

$$[\boldsymbol{v}],\ \iota(P_0) = [\boldsymbol{e}_0],\ \iota(P + \boldsymbol{v}) \in\ W.$$

Com aquests punts estan alineats, se segueix que $[\boldsymbol{v}] \in \overline{V}$, és a dir, $\boldsymbol{v} \in \overline{F}$.

Si $\lambda \neq 0$, podem normalitzar el vector i suposar que $\lambda = 1$, però aleshores

$$\iota(P + \boldsymbol{v}) \in W \cap \iota(\mathbb{A}^n) = \iota(V),$$

d'on $\boldsymbol{v} \in F$ per la injectivitat de ι. ◇

4.5.5 Observació. Siguin $V = P + F, W = Q + G$ dues varietat lineals afins. Aleshores, V, W són paral·leles si, i només si, $V_\infty \subset W_\infty$ o $V_\infty \supset W_\infty$. En particular, si $\dim V = \dim W$, aleshores $V \parallel W \iff V_\infty = W_\infty$. Per exemple, dos plans paral·lels de $\mathbb{A}^3$ es tallen en una recta de l'infinit en la clausura projectiva.

4.5.6 Corol·lari. La clausura projectiva de varietats afins indueix una bijecció

$$\{\text{varietats lineals afins de } \mathbb{A}^n\} \rightleftarrows \left\{ \begin{array}{l} \text{varietats lineals projectives de } \mathbb{P}^n \\ \text{no contingudes en } \mathbb{A}^n_\infty \end{array} \right\}.$$

◇

La completació projectiva en coordenades

Siguin $\mathbb{A}$ un espai afí de dimensió n i $\mathbb{P}$ la seva clausura projectiva. Volem descriure la relació entre $\mathbb{A}$ i $\mathbb{P}$ mitjançant l'ús de coordenades relatives a sengles referències.

Sigui $\mathcal{R} = \{P; \boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n\}$ un sistema de referència afí de $\mathbb{A}$. Aleshores,

$$\overline{\mathcal{R}} = \{\iota(P), [\boldsymbol{e}_1], \dots, [\boldsymbol{e}_n]; [\iota(P) + \boldsymbol{e}_1 + \cdots + \boldsymbol{e}_n]\}$$

és un sistema de referència (projectiu) de $\mathbb{P}$, que anomenarem el *sistema projectiu associat al sistema afí* $\mathcal{R}$.

Si denotem per $(x_1, \dots, x_n)$ les coordenades afins d'un punt Q respecte de $\mathcal{R}$ i per $(z_0 : \cdots : z_n)$ les coordenades homogènies d'un punt de $\mathbb{P}$ respecte de $\overline{\mathcal{R}}$, tenim que

$$\iota(Q) = [\boldsymbol{e}_0 + \overrightarrow{P_0Q}] = [(\boldsymbol{e}_0 + \overrightarrow{P_0P}) + \overrightarrow{PQ}]$$

i, per tant, té coordenades

$$\iota(Q)_{\overline{\mathcal{R}}} = (1 : x_1 : \cdots : x_n).$$

Així, podem resumir el pas de coordenades afins a projectives en aquests sistemes de referència i vicecersa per

coordenades afins		coordenades projectives
$(x_1, \dots, x_n)$	$\longrightarrow$	$(1 : x_1 : \cdots : x_n)$
$\left(\frac{z_1}{z_0}, \dots, \frac{z_n}{z_0}\right)$	$\longleftarrow$	$(z_0 : \cdots : z_n)$

On hem tingut present que els punts de $\iota(\mathbb{A})$ corresponen a $z_0 \neq 0$.

4.5.7 Proposició. Sigui $V \subset \mathbb{A}$ una varietat lineal afí definida, en el sistema de coordenades $\mathcal{R}$, pel sistema d'equacions

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & + & b_1 & = & 0 \\ \cdots & & \cdots & & \cdots & \cdots & & & \\ a_{n1}x_1 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n & + & b_n & = & 0 \end{array}$$

Aleshores, les equacions de $\overline{V}$ en el sistema de referència $\overline{\mathcal{R}}$ de $\mathbb{P}$ són

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}z_1 & + & \cdots & + & a_{1n}z_n & + & b_1z_0 & = & 0 \\ \cdots & & \cdots & & \cdots & \cdots & & & \\ a_{n1}z_1 & + & \cdots & + & a_{nn}z_n & + & b_nz_0 & = & 0 \end{array}$$

Prova. $\overline{V} = \iota(V) \cup V_\infty$. Els punts de $\iota(V)$ tenen coordenades projectives $(z_0 : \cdots : z_n)$ amb $z_0 \neq 0$ i podem fer el canvi $x_i = z_i/z_0$. $i \neq 0$, en el primer sistema d'equacions per obtenir el segon.

D'altra banda, els punts de $V_\infty = \mathbb{P}(F)$, on F és l'espai director de V, tenen coordenades projectives $(0 : z_1 : \cdots : z_n)$ amb $(z_1, \ldots, z_n) \in F$ i, per tant, satisfan també el sistema lineal en les variables z's. $\diamond$

El procés indicat en la demostració de la proposició anterior, que formalment es redueix a substituir x_i per z_i/z_0, es coneix com *homogeneïtzació del sistema d'equacions*; geomètricament, homogeneïtzar és trobar la clausura projectiva d'una varietat afí. Recíprocament, la *deshomogeneïtzació* d'un sistema homogeni d'equacions correspon a substituir $x_i = z_i/z_0$. Geomètricament, deshomogeneïtzar les equacions d'una varietat projectiva correspon a determinar la subvarietat afí de la qual n'és la clausura.

La descripció en coordenades de la completació projectiva sembla donar un paper particular a la coordenada z_0. De fet, sabem que si H és un hiperplà qualsevol, $\mathbb{P}$ és la completació projectiva $\mathbb{P} \setminus H$, (cf. Observació 4.5.1). En particular, si H és l'hiperplà $x_k = 0$, aleshores la correspondència *afí* $\leftrightarrow$ *projectiu* ve determinada per l'homogeneïtzació/deshomogeneïtzació respecte de la variable z_k.

4.5.8 Exemple. Sigui H l'hiperplà $a_0z_0 + \cdots + a_nz_n = 0$ de $\mathbb{P}$. Anem a descriure el procés d'homogeneïtzació/deshomogeneïtzació de $\mathbb{P} \setminus H$ a $\mathbb{P}$.

Com els coeficients a_i no poden ser zero simultàniament, podem suposar (sense pèrdua de generalitat) que $a_0 \neq 0$. Considerem el canvi de referència de $\mathbb{P}$ determinat per les equacions

$$y_0 = a_0z_0 + \cdots + a_nz_n,\ y_i = z_i,\ 1 \leq i \leq n,$$

de forma que l'equació de H esdevé $y_0 = 0$. Així tenim,

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{P} \setminus H & \longrightarrow & \mathbb{P} \\
(x_1, \ldots, x_n) & \rightarrow & \left(\frac{1 - a_1x_1 - \cdots - a_nx_n}{a_0} : x_1 : \cdots : x_n\right) \\
\left(\frac{z_1}{a_0z_0 + \cdots + a_nz_n} : \cdots : \frac{z_n}{a_0z_0 + \cdots + a_nz_n}\right) & \leftarrow & (z_0 : \cdots : z_n)
\end{array}$$

Raó simple versus raó doble

Per acabar aquesta secció establim la relació entre la raó simple, que és una noció afí, i la raó doble, que és una noció projectiva. La prova dels resultats que segueixen es redueixen a un càlcul que deixem com exercici.

Recordem que donats tres punts alineats P_1, P_2, P_3 d'un espai afí $\mathbb{A}$ es defineix la raó simple com l'escalar λ tal que

$$\overrightarrow{P_1P_3} = \lambda\ \overrightarrow{P_2P_3}\ .$$

Escriurem (P_1, P_2, P_3) per indicar el valor de la raó simple.

4.5.9 Proposició. Sigui P_∞ el punt de l'infinit de la recta determinada pels punts P_1, P_2, P_3. Aleshores,

$$(P_1, P_2, P_3) = (P_1, P_2, P_3, P_\infty). \qquad \diamond$$

Ara podem establir que la raó doble és el quocient de dues raons simples en el sentit que especifica el següent resultat.

4.5.10 Proposició. Siguin P_1, P_2, P_3, P_4 quatre punts alineats d'una recta afí. Aleshores, la raó doble de les seves imatges en la completació projectiva satisfà

$$(P_1, P_2, P_3, P_4) = \frac{(P_1, P_2, P_3)}{(P_1, P_2, P_4)}. \qquad \diamond$$

5
Projectivitats

En aquest capítol definim i analitzem les aplicacions projectives entre dos espais projectius. La definició de projectivitat la presentem a partir d'una aplicació lineal i deixem per a més endavant, a la secció 5.4, la caracterització geomètrica. L'avantatge d'aquesta presentació a partir de l'àlgebra lineal rau en que se'n deriven immediatament les propietats bàsiques de les projectivitats.

Fixem un cos $\mathbf{k}$. Al llarg de capítol suposarem que els $\mathbf{k}$-espais vectorials són de dimensió finita.

5.1 Definició i primeres propietats

5.1.1 Definició. Siguin E, E' dos $\mathbf{k}$-espais vectorials i $\phi : E \longrightarrow E'$ una aplicació lineal injectiva. Es defineix l'aplicació $f = [\phi] : \mathbb{P}(E) \longrightarrow \mathbb{P}(E')$ per

$$f([\boldsymbol{u}]) = [\phi(\boldsymbol{u})], \quad \boldsymbol{u} \in E.$$

A f l'anomenarem la *projectivitat* (o l'*aplicació projectiva*) associada a ϕ.

5.1.2 Observacions. (1) La injectivitat de ϕ és necessària: en efecte, si ϕ no és injectiva i $\boldsymbol{u} \in \ker \phi$, aleshores la imatge $\phi(\boldsymbol{u}) = 0$ no determina un punt de $\mathbb{P}(E')$ i per tant f no estaria ben definida.

(2) Llevat d'alguna ocasió concreta, com ara la inclusió d'una varietat lineal en un espai projectiu de dimensió superior, suposarem que les aplicacions lineals ϕ són isomorfismes; així, $f = [\phi]$ serà una bijecció. En aquest cas, quan $E = E'$ es diu que f és una *homografia*.

(3) Un canvi de referència a $\mathbb{P}(E)$ dona lloc a una homografia.

De les propietats de les aplicacions lineals se segueixen immediatament les propietats elementals de les projectivitats, que enunciem a continuació. Deixem l'anàlisi de les varietats invariants i la classificació de les projectivitats, que també deriven de l'àlgebra lineal, per a la propera secció.

5.1.3 *Una projectivitat f determina l'aplicació lineal ϕ llevat d'una constant no nul·la.* Siguin $\phi, \psi : E \longrightarrow E'$ dues aplicacions lineals injectives. Aleshores,

$$[\phi] = [\psi] \iff \exists\, \lambda \neq 0,\ \phi = \lambda\psi.$$

En efecte, per la definició d'espai projectiu, donat un vector qualsevol $\boldsymbol{u} \in E$, la hipòtesis $[\phi(\boldsymbol{u})] = [\psi(\boldsymbol{u})]$, implica que existeix un escalar no nul $\lambda_{\boldsymbol{u}}$ tal que $\phi(\boldsymbol{u}) = \lambda_{\boldsymbol{u}}\psi(\boldsymbol{u})$. Es tracta de veure que $\lambda_{\boldsymbol{u}}$ no depèn del vector $\boldsymbol{u}$, sinó només de ϕ i ψ.

Si $\boldsymbol{v} \in E$ és un altre vector de E, podem raonar de la mateixa manera per deduir l'existència d'un escalar no nul $\lambda_{\boldsymbol{v}}$ tal que $\phi(\boldsymbol{v}) = \lambda_{\boldsymbol{v}}\psi(\boldsymbol{v})$. Anàlogament, pel vector $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$ hi ha un escalar no nul $\lambda_{\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}}$ tal que $\phi(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = \lambda_{\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}}\psi(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})$. De la linealitat de ϕ i ψ, se segueix que

$$\begin{aligned}
\lambda_{\boldsymbol{u}}\phi(\boldsymbol{u}) + \lambda_{\boldsymbol{u}}\phi(\boldsymbol{v}) &= \psi(\boldsymbol{u}) + \psi(\boldsymbol{u}) \;=\; \psi(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) \;=\; \lambda_{\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}}\phi(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) \\
&= \lambda_{\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}}\phi(\boldsymbol{u}) + \lambda_{\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}}\phi(\boldsymbol{u}) \\
&\Longrightarrow (\lambda_{\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}} - \lambda_{\boldsymbol{u}})\phi(\boldsymbol{u}) + (\lambda_{\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}} - \lambda_{\boldsymbol{v}})\phi(\boldsymbol{v}) = 0.
\end{aligned}$$

Si prenem $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ linealment independents, les seves imatges per ϕ, $\phi(\boldsymbol{u}), \phi(\boldsymbol{v})$, també són linealment independents, perquè ϕ és injectiva. En conclusió, $\lambda_{\boldsymbol{u}} = \lambda_{\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}} = \lambda_{\boldsymbol{v}}$. ◇

5.1.4 *Les projectivitats i les aplicacions lineals són compatibles per composició.* Més concretament, se satisfà:

(1) La identitat de $\mathbb{P}(E)$ és la projectivitat corresponent a la identitat de E: $\mathsf{id}_{\mathbb{P}(E)} = [\mathsf{id}_E]$.

(2) Si $f = [\phi], g = [\psi]$ són dues projectivitats componibles, aleshores $gf = [\psi\phi]$.

(3) Si $f = [\phi]$ és una projectivitat, aleshores f és invertible i $f^{-1} = [\phi^{-1}]$. ◇

5.1.5 *Compatibilitat entre projectivitats i varietats lineals.* Siguin $f = \mathbb{P}(E) \longrightarrow \mathbb{P}(E')$ una projectivitat i $V, W \subset \mathbb{P}(E)$ varietats lineals, aleshores

(1) $f(V) \subset \mathbb{P}(E')$ és una varietat lineal de la mateixa dimensió que V.

(2) Si $V \subset W \iff f(V) \subset f(W)$.

(3) $f(V \vee W) = f(V) \vee f(W)$.

(4) $f(V \cap W) = f(V) \cap f(W)$.

En particular, se satisfà:

5.1.6 Corol·lari. (1) Si $V = P_0 \vee \cdots \vee P_d \Longrightarrow f(V) = f(P_0) \vee \cdots \vee f(P_d)$.

(2) Una projectivitat f és una colineació, és a dir, manté l'alineació dels punts. $\diamond$

Més endavant veurem, per a dimensió ≥ 2 i $\mathbf{k} = \mathbb{R}$, el recíproc del punt (2), això és: una colineació bijectiva és una projectivitat, el que es coneix com a Teorema Fonamental de la Geometria Projectiva.

5.1.7 *Matriu d'una projectivitat associada a sistemes de referència.* Sigui $\mathcal{R}, \mathcal{R}'$ sengles sistemes de referència, de bases adaptades $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ de E i E', respectivament. Sigui $f = [\phi] : E \longrightarrow E'$ una projectivitat. Si $A = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ és la matriu de ϕ en les bases $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$, aleshores direm que la matriu, definida llevat d'un escalar no nul ρ,

$$M(f) = \rho A, \;\; \rho \neq 0,$$

és la matriu de f en els sistemes de referència $\mathcal{R}, \mathcal{R}'$; ocasionalment escriurem $[M(f)]$ per indicar que està definida llevat d'un escalar no nul. Observem que en coordenades es té

$$f(Q)_{\mathcal{R}'} = M(f) Q_{\mathcal{R}} = \rho A Q_{\mathcal{R}}.$$

5.1.8 *Determinació d'una projectivitat pels valors en una referència.* Si $\mathcal{R}, \mathcal{R}'$ són referències projectives com en el punt anterior, hi ha una única projectivitat tal que $f(\mathcal{R}) = \mathcal{R}'$.

Aquesta propietat se segueix del fet que una aplicació lineal queda determinada pels valors en una base. En el nostre cas, atès que l'aplicació ha de ser un isomorfisme, cal que els valors en una base siguin alhora una base de l'espai d'arribada.

Per exemple, una referència $\mathcal{R}$ de $\mathbb{P}(E)$ indueix una projectivitat

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{P}(E) & \longrightarrow & \mathbb{P}^n_{\mathbf{k}} \\ & P & \longmapsto & P_{\mathcal{R}} = (x_0 : \cdots : x_n) \end{array}$$

en la qual una base adaptada de $\mathcal{R}$ es transforma en la base ordinària de $\mathbf{k}^{n+1}$.

5.1.9 *Projectivitat dual.* Sigui $f = [\phi] : E \longrightarrow E'$ una projectivitat. Per pas al dual, l'aplicació lineal ϕ defineix una aplicació lineal $\phi^* : (E')^* \longrightarrow E^*$, que al seu torn indueix una projectivitat $[\phi^*] : \mathbb{P}((E')^*) \longrightarrow \mathbb{P}(E^*)$ que anomenarem la *projectivitat dual* de f i denotarem per f^*.

Recordem que si $\mathcal{R}, \mathcal{R}'$ són referències de $\mathbb{P}(E)$ i $\mathbb{P}(E')$, i M és la matriu de la projectivitat f, aleshores la matriu de la projectivitat dual en les referències duals és M^t.

Quin hiperplà de $\mathbb{P}(E)$ correspon a $f^*(h)$, $h \in \mathbb{P}(E^*)$? Si $h = H^* \in \mathbb{P}(E^*)$, aleshores

$$f^*(H^*) = (f^{-1}(H))^*.$$

En efecte, Si $H = \mathbb{P}(F)$, aleshores hi ha una forma lineal $\boldsymbol{w} \in E^*$ tal que $F = \langle \boldsymbol{w}^\perp \rangle$, de manera que $H^* = [\boldsymbol{w}]$, i $f^*(H^*) = [\phi^*]([\boldsymbol{w}]) = [\phi^*(\boldsymbol{w})]$, per la qual cosa $f^*(H^*) = (\langle \phi^* \boldsymbol{w} \rangle)^\perp$. Però, per a tot vector $\boldsymbol{v} \in E$ se satisfà que $\langle \phi^* \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v} \rangle = \langle \boldsymbol{w}, \phi(\boldsymbol{v}) \rangle$ i, per tant, $[\boldsymbol{v}] \in f^*(H^*)$ si, i només si, $[\phi(\boldsymbol{v})] \in H$. ◇

5.1.10 Proposició. Sigui $f : \mathbb{P}(E) \longrightarrow \mathbb{P}(E')$ una projectivitat i $P_1, P_2, P_3, P_4 \in \mathbb{P}(E)$ quatre punts alineats per als quals està definida la raó doble. Aleshores,

$$(P_1, P_2, P_3, P_4) = (f(P_1), f(P_2), f(P_3), f(P_4)).$$

És a dir, la raó doble de quatre punts és invariant per projectivitats.

Prova. Suposem que P_1, P_2, P_3 són diferents entre ells i defineixen un sistema de referència de la recta L que els conté, aleshores $f(\mathcal{R})$ és un sistema de referència de $f(L)$. Si $P_1 = [\boldsymbol{u}_1]$, $P_2 = [\boldsymbol{u}_2]$ i $P_3 = [\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2]$, aleshores $P_4 = [\rho \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_1]$, on ρ és la coordenada absoluta de P_4 en $\mathcal{R}$ o, equivalentment, la raó doble dels quatre punts.

Si calculem les imatges d'aquests punts per f trobem

$$f(P_1) = [\phi(\boldsymbol{u}_1)], f(P_2) = [\phi(\boldsymbol{u}_2)], f(P_3) = [\phi(\boldsymbol{u}_1) + \phi(\boldsymbol{u}_2)], f(P_4) = [\rho\phi(\boldsymbol{u}_1) + \phi(\boldsymbol{u}_2)],$$

per la qual cosa

$$(f(P_1), f(P_2), f(P_3), f(P_4)) = \rho = (P_1, P_2, P_3, P_4). \qquad \diamond$$

.

5.2 Classificació d'homografies

En aquesta secció $\mathbb{P}^n$ denota un espai projectiu de dimensió n. Analitzarem la geometria i la classificació de les homografies mitjançant la descomposició del polinomi característic i la forma de Jordan de la matriu en una referència.

5.2.1 Definició. Direm que dues homografies $f, g : \mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{P}^n$ són *equivalents*, $f \sim g$, si existeix una homografia $h : \mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{P}^n$ tal que $g = h^{-1} f h$.

5.2.2 Per la definició de projectivitat i de la matriu associada en un sistema de referència, $f \sim g$ si, i només si, satisfà una de les afirmacions equivalents següents:

(1) Si $f = [\phi]$ i $g = [\psi]$ existeixen una aplicació lineal η i una constant no nul·la λ, tals que $\psi = \lambda \eta^{-1} \phi \eta$.

(2) Si A, B són les matrius de f, g en una referència $\mathcal{R}$, existeix una matriu invertible S i un escalar $\lambda \neq 0$, tals que $B = \lambda S^{-1} A S$.

(3) Existeixen dos sistemes de referència projectius de $\mathbb{P}^n$, $\mathcal{R}, \mathcal{R}'$ tals que $M_{\mathcal{R}}(f) = M_{\mathcal{R}'}(g)$.

5.2.3 En el punt (2) del paràgraf anterior es té que $B = \lambda S^{-1} A S = S^{-1} (\lambda A) S$, per la qual cosa les matrius B i λA són matrius equivalents en el sentit habitual, com a matrius d'endomorfismes. Observem, en particular, que

$$\{\text{valors propis de } B\} \;=\; \lambda \{\text{valors propis de } A\}.$$

Com el factor $\lambda \neq 0$ depèn de les bases adaptades al sistema de referència i aquestes estan definides llevat d'un factor escalar no nul, sempre podem suposar que un dels valors propis és 1. Per exemple,

$$\begin{pmatrix} a & & \\ & b & \\ & & c \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \frac{b}{a} & \\ & & \frac{c}{a} \end{pmatrix}.$$

A més, si μ és un valor propi de A, aleshores

$$\dim \left(\ker (B - \lambda \mu I)^k \right) = \dim \left(\ker (A - \mu I)^k \right), \ \forall k \geq 0,$$

per la qual cosa, si el polinomi característic de A descompon completament, les estructures en caixes de Jordan de A i de B coincideixen. Per exemple,

$$\begin{pmatrix} a & & \\ 1 & a & \\ & & b \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & & \\ 1 & 1 & \\ & & \frac{b}{a} \end{pmatrix}.$$

5.2.4 *Forma de Jordan de l'homografia dual.* Recordem que si $A = M_{\mathcal{R}}(f)$ és la matriu d'una homografia f en una referència $\mathcal{R}$, aleshores la matriu de l'homografia dual f^* en la referència dual $\mathcal{R}^*$ és A^t.

Les matrius de Jordan de A i de A^t coincideixen. En efecte, tenen el mateix polinomi característic

$$P_A(t) = \det(A - tI) = \det(A^t - tI) = P_{A^t}(t),$$

per la qual cosa tenen els mateixos valors propis. A més, si λ és un valor propi, aleshores

$$\dim\left(\ker(A - \lambda I)^k\right) = \dim\left(\ker(A^t - \lambda I)^k\right), \ \forall k \geq 0.$$

Punts fixos i varietats invariants

5.2.5 Definició. Sigui $f : \mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{P}^n$ una homografia.

(i) Direm que $P \in \mathbb{P}^n$ és un *punt fix* de f si $f(P) = P$.

(ii) Direm que una varietat lineal $V \subset \mathbb{P}^n$ és *invariant per* f (o f-invariant) si $f(V) = V$.

Així, un punt fix és una varietat f-invariant de dimensió 0. Els punts d'una varietat V f-invariant no són necessàriament fixos. En el cas en què els punts de V siguin fixos direm que V és una *varietat lineal de punts fixos.*

5.2.6 Proposició. Sigui ϕ una aplicació lineal subjacent a f, $f = [\phi]$. Aleshores, $P = [\boldsymbol{v}] \in \mathbb{P}^n$ és un punt fix de f si, i només si, $\boldsymbol{v}$ és un vector propi de ϕ.

Prova. La demostració se segueix de les definicions, ja que

$$f(P) = P \iff [\phi(\boldsymbol{v})] = [\boldsymbol{v}] \iff \exists \lambda \neq 0, \ \phi(\boldsymbol{v}) = \lambda \boldsymbol{v}. \qquad \diamond$$

Els punts fixos d'una homografia f es corresponen amb els vectors propis de la matriu de f en una referència $\mathcal{R}$ de $\mathbb{P}^n$. Recordem que aquesta matriu està definida llevat d'escalars no nuls i que podem suposar que un dels valors propis és 1.

5.2.7 Proposició. Sigui f^* l'homografia dual. Aleshores, $h = H^* \in (\mathbb{P}^n)^*$ és un punt fix de f^* si, i només si, l'hiperplà $H \subset \mathbb{P}^n$ és f-invariant.

Prova. Per 5.1.9, $f^*(H^*) = (f^{-1}(H))^*$, per la qual cosa

$$H^* = f^*(H^*) \iff H^* = (f^{-1}(H))^* \iff H = f^{-1}(H) \iff f(H) = H. \qquad \diamond$$

5.2.8 Proposició. Sigui $f : \mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{P}^n$ una homografia i f^* l'homografia dual. Se satisfà:

(1) Existeix un punt fix de f si, i només si, existeix un hiperplà f-invariant.

(2) Una varietat lineal V és f-invariant si, i només si, la varietat dual V^* és f^*-invariant.

(3) Suposem que el polinomi característic de ϕ descompon completament. Si V és una varietat lineal f-invariant, aleshores existeixen un punt fix P i un hiperplà f-invariant H tals que $P \in V \subset H$.

Prova. (1) És conseqüència directa de 5.2.4.

(2) Suposem que V és f-invariant i provem que V^* és f^*-invariant: prenem $H^* \in V^*$, és a dir, H és un hiperplà de $\mathbb{P}^n$ tal que $V \subset H$. Aleshores es tenen les equivalències següents

$$(f(H))^* \in V^* \iff (f^{-1}(H))^* \in V^* \iff f^{-1}(H) \supset V \iff H \supset f(V) = V.$$

L'altra implicació es dedueix per dualitat: si V^* és f^*-invariant, aleshores $V = (V^*)^*$ és $f = (f^*)^*$-invariant.

(3) Si $V = \mathbb{P}(F)$, aleshores el polinomi característic de $\phi_{|F}$ descompon completament, ja que és un divisor de $P_\phi(t)$, i, en particular, té almenys un valor propi λ al qual correspondrà un punt fix $P \in V$. Raonant per dualitat, $f^*_{|V^*}$ té un punt fix $h = H^*$, on H és un hiperplà de $\mathbb{P}^n$ que conté V. ◇

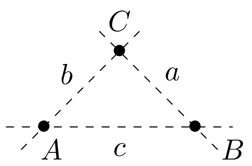
Classificació d'homografies de $\mathbb{P}^1$ *i* $\mathbb{P}^2$

Classificació d'homografies de $\mathbb{P}^1$. La matriu A d'una homografia $f : \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1$ en una referència $\mathcal{R}$ és una matriu 2×2. La forma de Jordan de A determina els punts fixos de f, segons el resum representat en el quadre següent.

$P_A(t)$	$[A]$	Punts fixos
$P_A(t) = (t-a)^2, m_A(t) = (t-a)$	$\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$	Tots els punts són fixos
$P_A(t) = m_A(t) = (t-a)^2$	$\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right]$	Hi ha un únic punt fix
$P_A(t) = (t-a)(t-b)$	$\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\right]$	Hi ha dos punts fixos
$P_A(t)$ no descompon	$\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right]$	no té punts fixos

Classificació d'homografies de $\mathbb{P}^2$. El polinomi característic de $f : \mathbb{P}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^2$ serà un polinomi de grau 3, que pot descompondre completament i tenir 3, 2 o 1 arrels o bé no descompondre. Tot seguit descrivim les diferents possibilitats que es produeixen. Denotem per A, B, C els punts d'una referència en la qual la matriu de f és la matriu de Jordan i $a = BC, b = AC, c = AB$ les rectes del triangle de referència.

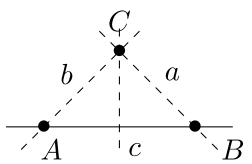
(1) La matriu de f té 3 valors propis diferents, λ, μ, ν, per la qual cosa diagonalitza.



$$J = \left[\begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \mu & \\ & & \nu \end{pmatrix}\right]$$

- Tres punts fixos no alineats, A, B, C.
- Tres rectes invariants, a, b, c.

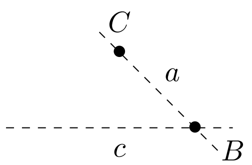
(2) La matriu de f té 2 valors propis diferents, λ, μ, i diagonalitza.



$$J = \left[\begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \lambda & \\ & & \mu \end{pmatrix}\right]$$

- Un punt fix, C.
- Una recta de punts fixos, c.
- Totes les rectes per C són invariants.

(3) La matriu de f té 2 valors propis diferents, λ, μ, i no diagonalitza.

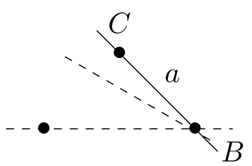


$$J = \left[\begin{pmatrix} \lambda & & \\ 1 & \lambda & \\ & & \mu \end{pmatrix}\right]$$

- Dos punts fixos, B, C.
- Dues rectes invariants, a, c.

(4) Un sol valor propi λ i diagonalitza. Aleshores $f = \mathsf{id}_{\mathbb{P}^2}$.

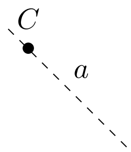
(5) Un sol valor propi λ i dos blocs de Jordan.



$$J = \left[\begin{pmatrix} \lambda & & \\ 1 & \lambda & \\ & & \lambda \end{pmatrix}\right]$$

- Una recta de punts fixos, a.
- Tota recta per B és invariant.

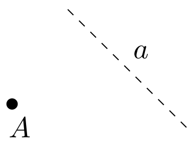
(6) Un sol valor propi λ i un bloc de Jordan.



$$J = \left[\begin{pmatrix} \lambda & & \\ 1 & \lambda & \\ & 1 & \lambda \end{pmatrix}\right]$$

- Un punt fix, C.
- Una recta invariant, a.

(7) (Per $\mathbf{k} = \mathbb{R}$). El polinomi característic no descompon en factors lineals.



$$J = \left[\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \lambda & \mu \\ & \nu & \eta \end{pmatrix}\right]$$

- Un punt fix, A.
- Una recta invariant, a.

5.2.9 Exemple. Podem fer l'anàlisi geomètrica d'una homografia f de $\mathbb{P}^3_{\mathbf{k}}$ determinada basant-nos en la classificació anterior i en la Proposició 5.2.8(3). Considerem, per exemple, l'homografia de $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$ determinada, en la referència ordinària, per la matriu

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Els polinomis característic i mínim de A són

$$P_M(t) = (t+1)^2(t-1)^2, \quad m_M(t) = (t+1)(t-1)^2.$$

Determinen les varietats invariants:

Punts fixos. Són els corresponents als vectors propis de la matriu:

- $\lambda = 1$: hi ha un únic punt fix, $P = (1 : -1 : 0 : 0)$.
- $\lambda = -1$: els punts P_2, P_3 de la referència són fixos, així com tots els punts de la recta que generen, $\ell = P_2 \vee P_3$, que té equació $x_0 = 0 = x_1$.

Plans invariants. Són els corresponents als vectors propis de f^*. A un pla $Ax_0 + Bx_1 + Cx_2 + Dx_3 = 0$ li corresponen les coordenades $(A : B : C : D)$ a $(\mathbb{P}^3)^*$, mentres que la matriu de f^* és A^t, per la qual cosa els plans invariants corresponen als vectors propis de la matriu

$$M^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- $\lambda = 1$: hi ha un únic pla invariant, $(1 : 1 : 0 : 0)$, és a dir, el pla H d'equació $x_0 + x_1 = 0$.

- $\lambda = -1$: tots els plans $A = 0 = B$ són invariants, és a dir, els plans $H_{C,D}$ definits per les equacions $Cx_2 + Dx_3 = 0$, on C, D són constants arbitràries que no s'anul·len simultàniament.

Rectes invariants. Sabem que ℓ és una recta de punts fixos i, per tant, invariant. D'altra danda, els plans $H_{C,D}$ es tallent en una recta, que necessàriament és invariant, $L = \cap H_{C,D}$.

Atès que el polinomi característic descompon completament, tota altra recta invariant ha de contenir un punt fix i alhora ha de estar continguda en un pla invariant, és a dir, a H o a $H_{C,D}$ per a certs C, D.

Abans de procedir a analitzar la restricció de f sobre cadascun dels plans invariants, observem que se satisfan les inclusions següents

$$P \in H, \quad P \in L, \quad \ell \subset H.$$

El dibuix descriu gràficament la situació.

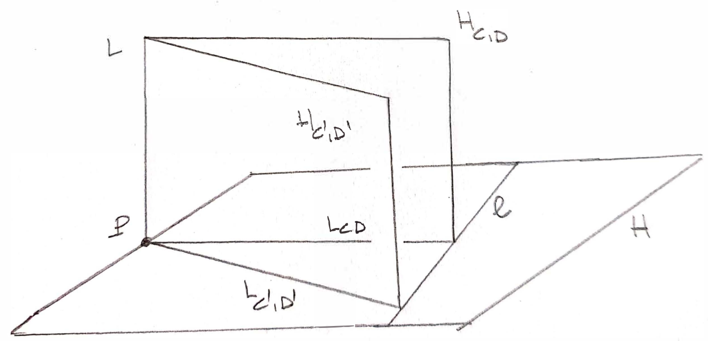
Les rectes $L_{C,D} = H \cap H_{C,D}$ són invariants.

Ara analitzem la restricció de l'homografia als plans invariants:

Restricció a $H_{C,D}$: Hi ha dos punts fixos $P, P_{C,D} = \ell \cap H_{C,D}$, i dues rectes incvariants $L, L_{C,D}$. Per tant, estem en el cas (3) de la classificació d'homografies del pla, per la qual cosa no hi ha altres rectes invariants contingudes a $H_{C,D}$.

Restricció a H: P i els punts de la recta ℓ, $P \notin \ell$, són fixos, i les rectes per P, $L_{C,D}$, són invariants. Estem en el cas (2), per la qual cosa no hi ha altres rectes invariants.

En definitiva, les rectes invariants són: $L, \ell, L_{C,D}$.



Algunes classes d'homografies particulars

En aquesta subsecció introduïm dues classes d'homografies especials, les involucions i les homologies.

5.2.10 Definició. Direm que una homografia $f : \mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{P}^n$, diferent de la identitat ($f \neq \mathsf{id}$), és una *involució* si $f^2 = \mathsf{id}$.

En termes de l'aplicació lineal subjacent ϕ, $f = [\phi]$ és una involució si, i només si, existeix un $\lambda \neq 0$ tal que $\phi^2 = \lambda \mathsf{id}$ i no existeix cap constant μ tal que $\phi = \mu \mathsf{id}$. En particular, el polinomi mínim $m_f(t)$ divideix el polinomi $t^2 - \lambda$. Per simplificar l'anàlisi, situem-nos en el cas $\mathbf{k} = \mathbb{R}$, (és un exercici adaptar el resultat al cas $\mathbf{k} = \mathbb{C}$).

5.2.11 Proposició. Suposem que $\mathbf{k} = \mathbb{R}$ i sigui $f = [\phi]$ una involució amb $\phi^2 = \lambda \mathsf{id}$. Si $\lambda = a^2 > 0$, aleshores $m_\phi(t) = (t - a)(t + a)$, per la qual cosa ϕ diagonalitza: existeix una base $\mathcal{B}$ de referència associada $\mathcal{R}$ tal que

$$M_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & a & & & \\ & & & -a & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -a \end{pmatrix}, \qquad M_{\mathcal{R}} = \rho \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -1 \end{pmatrix}.$$

Hem deixat de banda el cas $\lambda < 0$. En aquest cas no hi ha valors propis reals i, per tant, no hi ha punts fixos. Observem, en particular, que una involució de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ pot tenir dos puns fixos o no tenir-ne cap; no hi ha involucions reals amb un únic punt fix.

Siguin V la varietat lineal de punts fixos corresponents al valor propi a i W la corresponent al valor $-a$, llavors $V \cap W = \emptyset$ i $\mathbb{P}^n = V \vee W$, és a dir, són varietats suplementàries.

5.2.12 Proposició. Amb les notacions anteriors (f és una involució), si $Q \notin V \cup W$ i L és una recta per Q que talla V i W en punts Q_V, Q_W, aleshores $Q_V, Q_W, Q, f(Q)$ és una quaterna harmònica,

$$(Q_V, Q_W, Q, f(Q)) = -1.$$

Prova. Com $Q_V \in V$ i $Q_W \in W$, aquests punts són fixos i, per tant, la recta $L = Q_V \vee Q_W$ és invariant, en particular $f(Q) \in L$. Calculem la raó doble,

$$\begin{aligned} (Q_V, Q_W, Q, f(Q)) &= (f(Q_V), f(Q_W), f(Q), Q) = (Q_V, Q_W, f(Q), Q) \\ &\Longrightarrow (Q_V, Q_W, Q, f(Q)) = -1, \end{aligned}$$

on hem utilitzat la invariància de la raó doble per projectivitats. $\diamond$

5.2.13 Definició. Direm que una homografia $f : \mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{P}^n$, diferent de la identitat ($f \neq \mathsf{id}$), és una *homologia* si té un hiperplà de punts fixos.

5.2.14 Proposició. Si f és una homologia, existeix un únic punt fix $O \in \mathbb{P}^n$ tal que tota recta que passa per O és f-invariant.

Prova. Sigui $f = [\phi]$ i A la matriu de ϕ en una base $\mathcal{B}$. Com f és una homologia, el polinomi mínim de ϕ és de la forma $m_\phi(t) = (t-a)^2$ o $m_\phi(t) = (t-a)(t-b)$. Sigui $\mathcal{R} = \{P_0, \dots, P_n; U\}$ la referència projectiva on la matriu de f és la reduïda de Jordan de A, J_A. Distingim dos casos:

1*er* cas: si $m_\phi(t) = (t-a)^2$, ϕ no diagonalitza i la reduïda de Jordan és

$$J_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & \\ 1 & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

Prenem $O = P_1$. Tota recta per P_1 és f-invariant, ja que si $Q = (x_0 : \cdots : x_n)$, aleshores $f(Q) = (x_0 : x_0 + x_1 : \cdots : x_n) = x_0 P_1 + Q$. A més, O és l'únic punt amb aquesta propietat: si O' és un altre punt satisfent-la, aleshores $O \vee O'$ és una recta de punts fixos, per tant, $O' \in H$, ja que $f \neq \mathsf{id}$. Però, aleshores, les rectes $O \vee Q$ i $O' \vee Q$ són invariants per a tot Q i, atès que f no és la identitat, concloem que $O' = O$.

2*on* cas: $m_\phi(t) = (t-a)(t-b)$, ϕ diagonalitza,

$$J_A = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & a \end{pmatrix}.$$

Prenem $O = P_n$. Tota recta per O talla H en un punt fix i, per tant, és invariant. D'altra banda, O és l'únic punt amb aquesta propietat perquè $f \neq \mathsf{id}$. ◇

A l'hiperplà de punts fixos H l'anomenarem l'*eix de l'homologia* i al punt O de l'enunciat anterior, el *centre de l'homologia.* En la demostració de la proposició hem distingit dues situacions: si $O \in H$, direm que f és una *homologia especial*, mentres que si $O \notin H$, direm que és una *homologia general.*

El resultat següent serà d'utilitat més endavant.

5.2.15 Proposició. Tota homografia de $\mathbb{P}^n$ és composició d'un nombre finit d'homologies.

Prova. En efecte, sabem que tota matriu invertible A és producte de matrius elementals, és a dir, de matrius de la forma

$$E_{ij}(c) = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & c & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \quad E(c) = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & c & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

$$E_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

N'hi ha prou, doncs, en observar que aquestes matrius defineixen homologies de $\mathbb{P}^n$. Concretament, $E_{ij}(c)$ té hiperplà de punts fixos $x_j = 0$, $E_i(c)$ té hiperplà de punts fixos $x_i = 0$ i l'hiperplà corresponent per a E_{ij} és $x_i = x_j$. $\diamond$

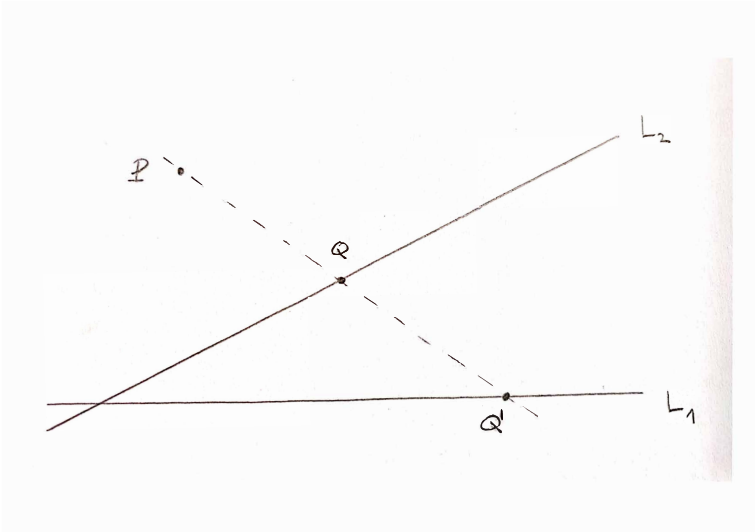
5.3 Perspectivitats: el teorema de Poncelet

Donades dues rectes L_1, L_2 d'un pla projectiu $\mathbb{P}^2$ i un punt P que no pertany a cap de les dues, es defineix la perspectivitat de centre P com l'aplicació $L_1 \longrightarrow L_2$ que a tot punt $Q \in L_1$ associa el punt $Q' = (P \vee Q) \cap L_2$, com mostra la figura.

Aquesta construcció es pot generalitzar per definir perspectivitats entre varietats de dimensió d d'un espai projectiu $\mathbb{P}^n$.

5.3.1 Definició. Siguin V_1, V_2 dues varietats lineals de dimensió d de $\mathbb{P}^n$ i W una varietat lineal complementària de V_1 i de V_2, (que tindrà dimensió $n-d-1$). La *perspectivitat de centre* W *de* V_1 *a* V_2 és l'aplicació

$$\begin{array}{rccc} \pi_W : & V_1 & \longrightarrow & V_2 \\ & P & \longmapsto & (P \vee W) \cap V_2 \end{array}$$



Hem de comprovar que $(P \vee W) \cap V_2$ és un punt i, en conseqüència, que π_W definiex una aplicació. Per la fórmula de Grassmann,

$$\dim((P \vee W) \cap V_2) = \dim(P \vee W) + \dim V_2 - \dim((P \vee W) \vee V_2).$$

Atès que $V_1 \cap W = \emptyset$, $P \notin W$ i, per tant, $\dim(P \vee W) = n - d$; d'altra banda, com W és complementària a V_2, $\dim((P \vee W) \vee V_2) = n$. En definitiva, $\dim((P \vee W) \cap V_2) = 0$.

5.3.2 Proposició. Tota perspectivitat és una projectivitat.

Prova. Sigui $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(E)$, on E és un $\mathbf{k}$-espai vectorial de dimensió $n+1$, $V_i = \mathbb{P}(F_i)$, amb $F_i \subset E$ subespais de dimensió $d+1$, i $W = \mathbb{P}(G)$, amb $G \subset E$ un subespai de dimensió $n-d$ tal que $E = F_1 \oplus G = F_2 \oplus G$. Considerem la composició ϕ de la inclusió de F_1 en E i la projecció de E en F_2 que s'obté per l'elecció del complementari G:

$$\begin{array}{ccccc} F_1 & \longrightarrow & F_1 \oplus G = E = F_2 \oplus G & \longrightarrow & F_2 \\ \boldsymbol{v}_1 & \longmapsto & \boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{w} & \longmapsto & \boldsymbol{v}_2 \end{array}$$

Detallem el pas intermedi, donat $\boldsymbol{v}_1 \in F_1 \subset E = F_2 \oplus G$, existeixen vectors unívocament determinants $\boldsymbol{v}_2 \in F_2, \boldsymbol{w} \in G$, tals que $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{w}$. És clar que el procés es pot revertir i anar de F_2 a F_1, per la qual cosa ϕ és un isomorfisme.

Per acabar, provem que $\pi_W = [\phi]$: si $P = [\boldsymbol{v}_1]$, aleshores $[\phi(\boldsymbol{v}_1)] = [\boldsymbol{v}_2] \in V_2$. A més, $[\boldsymbol{v}_2] = [\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{w}] \in P \vee W$, per la qual cosa, $\pi_W(P) = [\phi(\boldsymbol{v}_1)]$. $\diamond$

5.3.3 Observem que al llarg de la prova hem demostrat que la perspectivitat π'_W de centre W de V_2 a V_1, és l'aplicació inversa de π_W.

5.3.4 Teorema de Poncelet. Siguin $V_1, V_2 \subset \mathbb{P}^n$ subvarietats projectives de la mateixa dimensió d. Aleshores, tota projectivitat de V_1 en V_2 és una composició finita de perspectivitats. $\diamond$

Tot i que resulti redundant, començarem demostrant el teorema per a les rectes d'un espai projectiu, que és el cas que presentem a les classes presencials, i deixarem la demostració del teorema general per a la part final de la secció.

El teorema de Poncelet per a rectes de $\mathbb{P}^n$

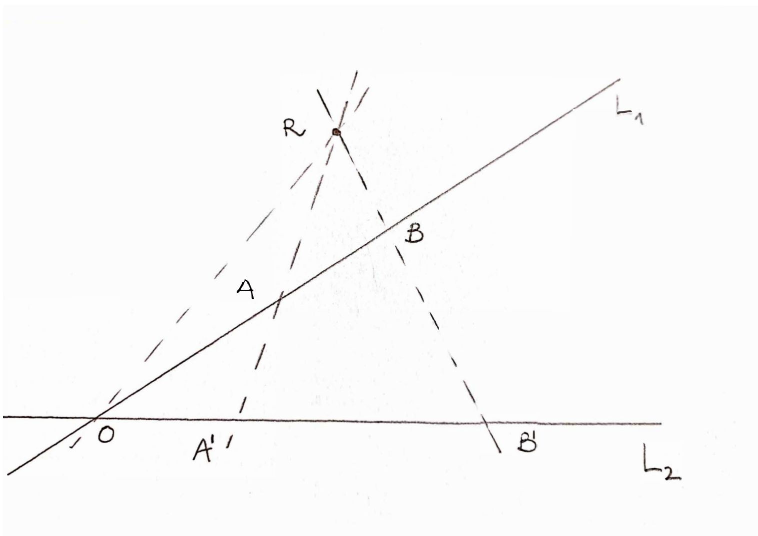
5.3.5 Teorema. Siguin L_1, L_2 dues rectes de $\mathbb{P}^n$ i $f : L_1 \longrightarrow L_2$ una projectivitat. Aleshores, f és composició de perspectivitats.

Prova. Demostrarem el teorema analitzant separadament els casos en que $n = 2, 3$ i $n > 3$.

Rectes del pla. Distingim tres casos.

1*er cas*: $L_1 \neq L_2$ i $O = L_1 \cap L_2$ és tal que $f(O) = O$. Aleshores, f és una perspectivitat.

Siguin $A, B \in L_1 \setminus \{O\}$ dos punts diferents i $A' = f(A), B' = f(B)$. Aleshores, $\mathcal{R} = \{A, B; O\}$ és una referència de L_1 i, atès que f és bijectiva, $\mathcal{R}' = \{A', B'; O\}$ és una referència de L_2.

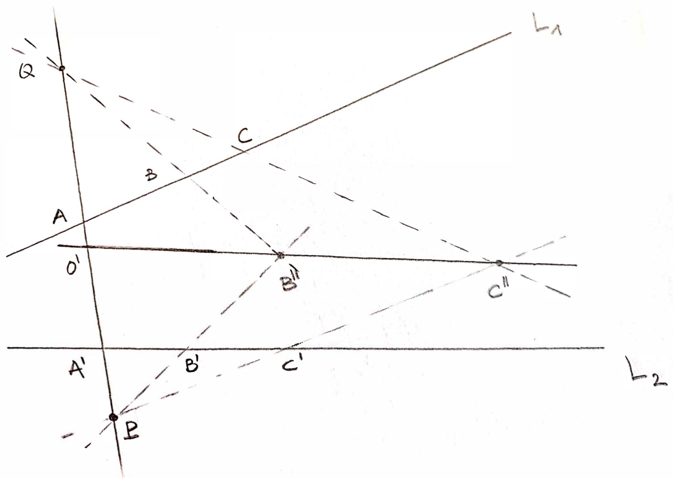


Sigui $R = AA' \cap BB'$, aleshores la perspectivitat $\pi_R : L_1 \longrightarrow L_2$ satisfá que $f(\mathcal{R}) = \pi_Q(\mathcal{R})$ i, per tant, $f = \pi_Q$.

Observem que aquest primer cas pot enunciar-se en la forma: *f és una perspectivitat si, i només si, $f(O) = O$.*

2*on cas*: $L_1 \neq L_2$ i $O = L_1 \cap L_2$ és tal que $f(O) \neq O$. Aleshores, f és composició de dues perspectivitats.

Siguin A, B, C tres punts diferents entre ells de L_1 i diferents de O. Denotem per A', B', C' les seves imatges per f. Podem suposar que aquests punts no coincideixen amb O escollints adequadaments els punt inicials de L_1.



Considerem dos punts $P, Q \in AA'$ i els punts $B'' = PB \cap QB'$, $C'' = PC \cap QC'$, (vegeu la figura). La recta $L = B''C''$ talla la recta PQ en un punt O'. La perspectivitat $\pi_P : L_1 \longrightarrow L$ transforma la referència A, B, C en O', B'', C''. D'altra banda, la perspectivitat $\pi_Q : L \longrightarrow L_2$ transforma O', B'', C'' en A', B', C', per la qual cosa $f = \pi_Q \pi_P$.

3*er cas*: $L_1 = L_2$. Aleshores, f és composició d'un màxim de tres perspectivitats.

En efecte, apliquem una perspectivitat qualsevol π de $L_1 = L_2$ sobre una recta $L \neq L_1$. Aleshores, $f\pi^{-1}$ és una projectivitat d'un dels dos primers casos, d'on se segueix el resultat ja que $f = (f\pi^{-1})\pi$.

Rectes de $\mathbb{P}^3$. Si les dues rectes es tallen, aleshores estaran contingudes en un pla Π i pel resultat anterior f és una composició de perspectivitats de Π. Observem que tota perspectivitat π_R entre dues rectes del pla Π s'estén a una perspectivitat π_L a l'espai: en efecte, prenem una recta L no continguda a Π i que passi pel centre de la perspectivitat, aleshores $\pi_L = \pi_O : L_1 \longrightarrow L_2$.

Suposem ara que $L_1 \cap L_2 = \emptyset$. En aquest cas, tota projectivitat $f : L_1 \longrightarrow L_2$ és una perspectivitat. Per a demostrar-ho, començarem establint el lema següent:

5.3.6 Lema. Siguin L_1, L_2 dues rectes disjuntes de $\mathbb{P}^3$ i $P \notin L_1, L_2$. Existeix una única recta L que satisfà

$$P \in L,\ L \cap L_1 \neq \emptyset,\ L \cap L_2 \neq \emptyset.$$

Aquesta recta és $L = (L_1 \vee P) \cap (L_2 \vee P)$.

Prova del lema. Primer de tot, L és una recta

$$\dim L = \dim(L_1 \vee P) + \dim(L_2 \vee P) - \dim((L_1 \vee P) \vee (L_1 \vee P)) = 2 + 2 - 3 = 1.$$

A més, L satisfà les propietats de l'enunciat, (remarquem, per exemple, que $L \cap L_1 \neq \emptyset$ perquè ambdues rectes estan contingudes al pla $L_1 \vee P$).

Si L' és una altra recta satisfent la tesi de l'enunciat, aleshores $P \vee (L' \cap L_1) = L'$, ja que $P \notin L_1$. Atès que $P, L' \cap L_1 \in P \vee L_1$, això implica que $L' = P \vee (L' \cap L_1) \subset P \vee L_1$. Anàlogament, $L' \subset P \vee L_2$ i, en defintiva, $L' \subset L$. Com L, L' són rectes, $L' = L$.

Continuem ara la prova del teorema: suposem que les rectes L_1, L_2 es creuen, $L_1 \cap L_2 = \emptyset$. Hem de trobar una recta s complementària a L_1 i a L_2, tal que $f = \pi_s$.

Prenem tres punts diferents A_1, A_2, A_3 de L_1 de manera que determinin una referència i considerem els punts imatge $B_1, B_2, B_3 \in L_2$, que formen una referència de L_2.

Considerem les rectes $\ell_i = A_i \vee B_i$, $1 \leq i \leq 3$. Si prenem un punt $P \in \ell_1$ i podem aplicar el lema anterior, existirà una recta s que passa per P i talla ℓ_2, ℓ_3, que serà candidata a centre de la prespectivitat que busquem. Per tant, hem de comprovar que es tenen les condicions per aplicar el lema i que la recta resultant és complementària a L_1 i L_2.

Hipòtesis del lema: afirmem que $\ell_i \cap \ell_j = \emptyset$ si $i \neq j$. En efecte, si $\ell_i \cap \ell_j \neq \emptyset$, aquestes dues rectes determinen un pla Π, però aleshores $L_1, L_2 \in \Pi$, per la qual cosa $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$, en contradicció amb el fet que L_1, L_2 es creuen.

Així, pel lema, si escollim un punt $P \in \ell_1 = A_1 \vee B_1$, que suposarem que $P \notin L_1, L_2$, existeix una única recta s de $\mathbb{P}^3$ que passa per P i talla ℓ_2, ℓ_3.

La recta s és complementària a L_1 i a L_2: hem de veure que $s \cap L_1 = \emptyset$ i $s \cap L_2 = \emptyset$. Provem-ho per $s \cap L_1$, el raonament per l'altre cas és anàleg. Suposem que $s \cap L_1 \neq \emptyset$, aleshores s i L_1 determinaran un pla $\Pi = s \vee L_1$, que conté els punts A_1, A_2, A_3 i els punts $P, s \cap \ell_2, s \cap \ell_3$ perquè són de L_1 i s, respectivament. Com $s \neq L_1$, no es poden donar les igualtats $A_2 = s \cap \ell_2, A_3 = s \cap \ell_3$ simultàniament. Suposem que $A_2 \neq s \cap \ell_2$, aleshores $\ell_1 \cap \ell_2 \neq \emptyset$, ja que ambdues rectes estan contingudes al pla Π, cosa que és una contradicció amb l'elecció d'aquestes rectes.

En definitiva, f i la perspectivitat π_s definida per s transformen la referència A_1, A_2, A_3 de L_1 en la referència B_1, B_2, B_3 de L_2, per la qual cosa coincideixen.

Rectes de $\mathbb{P}^n$, $n > 3$. Raonem de forma anàloga a com ho hem fet al $3er$ cas de la demostració per a les rectes del pla: $V = L_1 \vee L_2$ és un espai projectiu de dimensió 3 i, pel casos ja demostrats, f és composició de perspectivitats a V. Sigui W una varietat complementària a V en $\mathbb{P}^n$, si $L \subset V$ és el centre d'una perspectivitat a V, aleshores s'estén a una perspectivitat de centre $L \vee W$ a $\mathbb{P}^n$. $\diamond$

Demostració del Teorema de Poncelet 5.3.4

Basarem la demostració en dos fets: que tota projectivitat és composició d'homologies, Proposició 5.2.15, i que tota homologia és composició de dues perspectivitats, Proposició 5.3.8. Abans de demostrar 5.3.8, necessitem la propietat de les homologies que recull el resultat que segueix.

5.3.7 Proposició. Siguin $H \subset \mathbb{P}^n$ un hiperplà i $A, B \notin H$, $A \neq B$.

(1) Si $O \notin H$, diferent de A i de B i tal que O, A, B estan alineats, existeix una única homologia general de centre O i eix H tal que $f(A) = B$.

(2) Existeix una única homologia especial d'eix H tal que $f(A) = B$.

Prova. (1) Sigui f una homologia de centre O i eix H. Prenem una referència de $\mathbb{P}^n$ en la qual la matriu de f és diagonal, és a dir, amb $P_0 = O$ i $P_1, \ldots, P_n \in H$. Aleshores

$$[M(f)] = \left[\begin{pmatrix} c & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}\right],$$

per a certa constant $c \in \mathbf{k}$. Imposant que $f(A) = B$ determinem el valor de c.

(2) Sigui $O = AB \cap H$, de manera que la recta AO és invariant. Prenem una referència $\{P_0 = A, P_1 = O, P_2, \cdots, P_n; U\}$, amb $P_i \in H$, $1 \leq i \leq n$ i base adaptada $\mathcal{B} =$

$\{\boldsymbol{u}_0, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$. Si f és una homologia especial d'eix H la matriu en aquesta referència serà

$$[M(f)] = \left[\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ b & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}\right],$$

on b està determinada per $B = f([\boldsymbol{u}_0]) = [\boldsymbol{u}_0 + b\boldsymbol{u}_1]$. ◇

5.3.8 Proposició. Sigui $V \subset \mathbb{P}^n$ una varietat lineal. Tota homologia de V és composició de dues perspectivitats.

Prova. Raonant com al cas $n > 3$ del Teorema 5.3.5, podem suposar que $\dim V = n-1$, és a dir, és un hiperplà de $\mathbb{P}^n$.

Sigui $f : V \longrightarrow V$ una homologia de centre $O \in V$ i eix l'hiperplà $H \subset V$. Per la proposició anterior, f està determinada per dos punts $A, B \in V \setminus H$, alineats amb O, amb $f(A) = B$. Per tant, és suficient construir dues perspectivitats tals que la composició sigui una homologia de centre O i eix H que transforma A en B.

L'hiperplà H de V és de codimensió 2 en $\mathbb{P}^n$, pel que defineix una recta (un feix) en el dual $H^* \subset (\mathbb{P}^n)^*$. Sigui W^* un element d'aquesta recta diferent de V, és a dir, W és una varietat lineal de $\mathbb{P}^n$ tal que $\dim W = \dim V$ i $V \cap W = H$. Sigui $R \notin V \cup W$; com $A \notin H$, la recta AR talla W en un punt C. Les rectes determinades per les ternes de punts alineats O, A, B i A, R, C determinen un pla, per la qual cosa OR i BC es tallen en un punt Q, que no pertany ni a V ni a W.

La composició de les perspectivitats $\pi_R : V \longrightarrow W$ i $\pi_R : W \longrightarrow V$ deixa tots els punts de H fixos i també el punt O i, a més, transforma A en B. Per la unicitat de la Proposició 5.3.7, $f = \pi_Q \pi_R$. ◇

5.3.9 *Final de la prova del Teorema de Poncelet*: Sigui $f : V_1 \longrightarrow V_2$ una projectivitat. Escollim un complementari comú de V_1 i V_2, $W \subset \mathbb{P}^n$ i sigui $\pi_W : V_2 \longrightarrow V_1$ la perspectivitat de centre W. La composició $\pi_W f : V_1 \longrightarrow V_1$ és una projectivitat de V_1. Per la Proposició 5.2.15 $\pi_W f$ és composició d'homologies de V_1 i per la Proposició 5.3.8 aquestes són, al seu torn, composició de perspectivitats, per la qual cosa $\pi_W f$ és composició de perspectivitats. Recordem que $\pi'_W = (\pi_W)^{-1}$ és també una perspectivitat, el que acaba la prova. ◇

5.4 Projectivitats, raó doble i colineacions: el teorema fonamental

A **??** hem vist que tota projectivitat conserva les raons dobles. Per a les aplicacions (bijectives) de la recta projectiva aquesta propietat caracteritza les projectivitats.

5.4.1 Proposició. Una aplicació bijectiva $f : \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1$ és una projectivitat si, i només si, conserva la raó doble.

Prova. Suposem que f conserva les raons dobles. Sigui $\mathcal{R} = \{P_0, P_1; U\}$ una referència projectiva de $\mathbb{P}^1$. Com f és bijectiva, els tres punts de $\mathcal{R}' = f(\mathcal{R}) =$ són diferents i, per tant, formen una referència projectiva de $\mathbb{P}^1$, per la qual cosa existeix una única projectivitat $g : \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1$ tal que $g(\mathcal{R}) = \mathcal{R}'$.

Sigui Q un punt arbitrari. Per la invariància de la raó doble per f i g trobem

$$(f(P_0), f(P_1), f(U), f(Q)) = (P_0, P_1, U, Q) = (g(P_0), g(P_1), g(U), g(Q)),$$

i, atès que $f(P_1) = g(P_1), f(P_2) = g(P_2), f(U) = g(U)$, en resulta

$$(f(P_0), f(P_1), f(U), f(Q)) = (f(P_0), f(P_1), f(U), g(Q)),$$

pel que $f(Q) = g(Q)$ i, en definitiva, f és una projectivitat. ◇

5.4.2 Teorema. Sigui $f : \mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{P}^n$ una aplicació bijectiva entre espais projectius sobre un cos $\mathbf{k}$. Aleshores,

$$f \text{ és una projectivitat} \iff f \text{ és una colineació i conserva la raó doble.}$$

Prova. Hem establert a la Proposició 5.1.10 la implicació directa. Veiem ara que si f és una colineació i conserva la raó doble, aleshores f és una projectivitat. Ho farem per inducció sobre la dimensió n.

Per a $n = 1$, ho hem establert en la Proposició 5.4.1. Suposem ara que $n \geq 2$.

Sigui $\mathbb{R} = \{P_0, \ldots, P_n; U\}$ un sistema de referència de $\mathbb{P}^n$, amb base adaptada $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{u_0}, \ldots, \boldsymbol{u_n}\}$. Acceptem momentàniament l'asserció següent, que només depèn del fet que f és una colineació.

Asserció: Siguin $A_0, \cdots, A_r$ punts de $\mathbb{P}^n$. Aleshores, $f(A_0 \vee \cdots \vee A_r) = f(A_0) \vee \cdots \vee f(A_r)$.

Per l'asserció, $f(\mathcal{R})$ és una referència projectiva de $\mathbb{P}^n$, escrivim $\mathcal{R}' = f(\mathcal{R})$. Sabem que existeix una única projectivitat g tal que $g(\mathcal{R}) = \mathcal{R}'$; és suficient provar que $f = g$.

Per hipòtesi d'inducció, les restriccions de f i g sobre els hiperplans coordenats $H_k = P_0 \vee \cdots \vee \hat{P}_k \vee \cdots \vee P_n$ coincideixen.

Sigui $Q \in \mathbb{P}^n$ un punt diferent de U i que no pertany a cap dels hiperplans coordenats H_k. Prenem la recta $L = Q \vee U$. Per la fórmula de Grassmann, aquesta recta talla cadascun dels hiperplans coordenats en un punt, $Q_k = L \cap H_k$, no tots iguals (ja que en cas contrari, aquest únic punt Q' satisfaria $Q' \in \cap Q_k = \emptyset$, cosa que és absurda). Suposem que $Q_0 \neq Q_n$. Aleshores, $\{Q_0, Q_n; U\}$ defineix una referència de L.

Per la conservació de la raó doble per g i per f i atès que $f_{|H_k} = g_{|H_k}$ i $f(U) = g(U)$, es tenen les igualtats següents

$$\begin{aligned}(Q_0, Q_n, U, Q) &= (g(Q_0), g(Q_n), g(U), g(Q)) \\ (Q_0, Q_n, U, Q) &= (f(Q_0), f(Q_n), f(U), f(Q)) = (g(Q_0), g(Q_n), g(U), f(Q)).\end{aligned}$$

Així, $(g(Q_0), g(Q_n), g(U), g(Q)) = (g(Q_0), g(Q_n), g(U), f(Q))$, és a dir, $f(Q) = g(Q)$.

Prova de l'asserió: escrivim $V_r = A_0 \vee \cdots \vee A_r$ i $W_r = f(A_0) \vee \cdots \vee f(A_r)$, de manera que l'asseció assegura que $f(V_r) = W_r$ i raonem per inducció sobre r. Podem suposar que $A_0, \ldots, A_r$ són linealment independents.

Per $r = 1, 2$ el resultat se segueix de que f és una colineació bijectiva. Provem que $f(V_r) \subset W_r$: sigui $Q \in V_r = V_{r-1} \vee A_r$. La recta $Q \vee A_r$ talla l'hiperplà V_{r-1} de V_r en un punt R; atès que els punts A_r, Q, R estan alineats, els punts $f(A_r), f(Q), f(R)$ també ho estan, en particular,

$$f(Q) \in f(R) \vee f(A_r) \subset W_{r-1} \vee f(A_r) = W_r,$$

ja que $f(Q) \in W_{r-1}$ per recurrència.

Un argument similar, partint d'un punt $S \in W_r$ i considerant la recta $S \vee f(A_r)$ demostra la inclusió contrària, $f(V_r) \supset W_r$. $\diamond$

Per a $\mathbf{k} = \mathbb{R}$, podem prescindir de la condició sobre la raó doble, vegeu el Teorema 5.4.11.

5.4.3 Observació. En general, les colineacions no tenen perquè ser projectivitats.

Per exemple, si prenem $\mathbf{k} = \mathbb{C}$ i indiquem per $\overline{z}$ el conjugat de $z \in \mathbb{C}$, l'aplicació bijectiva

$$\begin{array}{cccc}\phi: & \mathbb{C}^3 & \longrightarrow & \mathbb{C}^3 \\ & (z_1, z_2, z_3) & \longmapsto & (\overline{z}_1, \overline{z}_2, \overline{z}_3)\end{array}$$

no és lineal, tanmateix indueix una colineació bijectiva $f = [\phi] : \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ que no és una projectivitat.

El teorema fonamental de la geometria projectiva

Comencem definint els automorfismes de cossos i les aplicacions semilineals.

5.4.4 Definició. Sigui $\mathbf{k}$ un cos. Un *automorfisme* de $\mathbf{k}$ és una aplicació bijectiva $\sigma : \mathbf{k} \longrightarrow \mathbf{k}$ que satisfà

(1) $\sigma(0) = 0, \sigma(1) = 1$.

(2) $\sigma(a + b) = \sigma(a) + \sigma(b)$, per a qualssevol $a, b \in \mathbf{k}$.

(3) $\sigma(ab) = \sigma(a)\sigma(b)$, per a qualssevol $a, b \in \mathbf{k}$.

Si $\sigma(1) \neq 0$, la propietats (1) es dedueix de les propietats (2) i (3).

Per exemple, la conjugació complexa defineix un automorfisme $\sigma : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $\sigma(z) = \overline{z}$.

5.4.5 Proposició. (1) Si $\mathbf{k} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$, l'únic automorfisme és la identitat.

(2) Si $\mathbf{k} = \mathbb{C}$, els únics automorfismes continus són la identitat i la conjugació complexa.

Prova. (1) Sigui σ un automorfisme de $\mathbb{R}$. De les propietats (1)-(3) dels automorfismes es dedueix immediatament que

$$\begin{array}{rcll} \sigma(n) & = & n, & \text{per a tot } n \in \mathbb{N}, \\ \sigma(-n) & = & -n, & \text{per a tot } n \in \mathbb{N}, \\ \sigma\left(\frac{p}{q}\right) & = & \frac{p}{q}, & \text{per a qualssevol } p, q \in \mathbb{Z}, \end{array}$$

per la qual cosa σ és la identitat sobre $\mathbb{Q}$.

Asserció: σ preserva el signe dels elements de $\mathbb{R}$. Més concretament, $a > 0$ si, i només si, $\sigma(a) > 0$. Anàlogament pel cas negatiu.

En efecte, si $a > 0$ existeix b amb $a = b^2$ i, per tant, $\sigma(a) = \sigma(b^2) = \sigma(b)^2 > 0$. Recíprocament, si $\sigma(a) > 0$, aleshores existeix c amb $\sigma(a) = c^2$ i, per la bijectivitat de σ, $a = \sigma^{-1}(c^2) = \sigma^{-1}(c)^2 > 0$.

Tornant a la demostració de (1), suposem que existeix a amb $a \neq \sigma(a)$. Suposem que $\sigma(a) < a$ (l'altra cas es raona de la mateixa forma) i sigui $r \in \mathbb{Q}$ tal que $\sigma(a) < r < a$, aleshores tindrem que

$$\sigma(a - r) = \sigma(a) - \sigma(r) = \sigma(a) - r < 0,$$

cosa que és absurda, per l'asserció que hem provat anteriorment.

(2) Sigui σ un automorfisme continu de $\mathbb{C}$. Com en la demostració de (1), σ és la identitat sobre $\mathbb{Q}$ i, per continuïtat, és la identitat sobre $\mathbb{R}$.

Si $x \in \mathbb{R}$, aleshores

$$\sigma(ix \cdot ix) = \sigma(i)^2 x^2,$$

i, també,

$$\sigma(ix \cdot ix) = \sigma(-x^2) = -x^2,$$

d'on deduïm que

$$\sigma(i)^2 = -1 \implies \sigma(i) = \pm i.$$

En definitiva, les dues úniques possibilitats són

$$\sigma(x+iy) = x+iy, \quad \sigma(x+iy) = x-iy. \qquad \diamond$$

Remarquem que la hipòtesi de continuïtat de σ és imprescindible en el punt (2). Si no imposem aquesta condició, aleshores es pot demostrar que hi ha una infinitat d'automorfismes de $\mathbb{C}$.

5.4.6 Definició. Sigui $\phi : E \longrightarrow E'$ una aplicació entre $\mathbf{k}$-espais vectorials. Direm que ϕ és una *aplicació semilineal* si existeix un automorfisme del cos $\mathbf{k}$, σ, tal que

(1) $\phi(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = \phi(\boldsymbol{u}) + \phi(\boldsymbol{v}), \quad \forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in E.$

(2) $\phi(\lambda \boldsymbol{u}) = \sigma(\lambda)\phi(\boldsymbol{u}), \quad \forall\, \lambda \in \mathbf{k}, \boldsymbol{u} \in E.$

Direm aleshores que ϕ és σ-semilineal.

5.4.7 Observacions. Sigui $\phi : E \longrightarrow E'$ una aplicació σ-semilineal. Les afirmacions que segueixen són de demostració immediata:

(1) Si E és de dimensió n i $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$ és una base de E, aleshores

$$\phi(x_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{u}_n) = \sigma(x_1)\phi(\boldsymbol{u}_1) + \cdots + \sigma(x_n)\phi(\boldsymbol{u}_n).$$

És a dir, les coordenades d'un vector es transformen per l'acció de l'automorfisme σ.

(2) ϕ indueix una aplicació $f = [\phi] : \mathbb{P}(E) \longrightarrow \mathbb{P}(E')$ que anomenarem *semiprojectivitat.* Aquesta aplicació f és una colineació.

(3) L'aplicació $f = [\phi]$ no conserva la raó doble, tanmateix quan està definida la transforma segons

$$(f(P_1), f(P_2), f(P_3), f(P_4)) = \sigma((P_1, P_2, P_3, P_4)). \qquad (\dagger)$$

5.4.8 Teorema Fonamental de la Geometria Projectiva. Si $f : \mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{P}^n$ és una colineació bijectiva, $n \geq 2$, aleshores f és una semiprojectivitat.

Prova. Hem de determinar un automorfisme σ de $\mathbf{k}$ i una aplicació σ-semilineal ϕ tal que $f = [\phi]$. L'equació (†) és la clau de la prova. En efecte, si trobem un automorfisme σ de $\mathbf{k}$ tal que se satisfà aquesta equació, aleshores l'aplicació $g : \mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{P}^n$ definida en coordenades per

$$g(x_0 : \cdots : x_n) = f(\sigma^{-1}(x_0) : \cdots : \sigma^{-1}(x_n)),$$

conservarà les alineacions i les raons dobles. Pel Teorema 5.4.2, g és una projectivitat i, per tant, $f(x_0 : \cdots : x_n) = g(\sigma(x_0) : \cdots : \sigma(x_n))$ és una semiprojectivitat.

Així doncs, si $a \in \mathbf{k}$, escollim punts alineats $P_1, P_2, P_3, P_4 \in \mathbb{P}^n$, amb P_1, P_2, P_3 diferents dos a dos, tals que $a = (P_1, P_2, P_3, P_4)$ i proposem la definició

$$\sigma(a) := (f(P_1), f(P_2), f(P_3), f(P_4)).$$

Per a que això tingui sentit hem de comprovar que $\sigma(a)$ no depèn dels punts alineats P_1, P_2, P_3, P_4 escollits. En efecte, siguin P'_1, P'_2, P'_3, P'_4 punts alineats amb $a = (P_1, P_2, P_3, P_4) = (P'_1, P'_2, P'_3, P'_4)$ i denotem per L i L' les rectes que determinen les dues quaternes. Com P_1, P_2, P_3 i P'_1, P'_2, P'_3 són referències de L i de L', existeix una única projectivitat $g : L \longrightarrow L'$ tal que $g(P_i) = P'_i$, $1 \leq i \leq 3$. D'altra banda, a és la coordenada absoluta de P_4 i P'_4 en les respectives referències i, atès que g conserva les raons dobles, $P'_4 = g(P_4)$.

Si provem que g indueix una projectivitat g' entre $f(L)$ i $f(L')$ que transforma els punts $f(P_i)$ en els punts $f(P'_i)$, en resultarà la independència cercada:

$$\begin{aligned}
\sigma(a) &= (f(P_1), f(P_2), f(P_3), f(P_4)) \\
&= (g'(f(P_1))), g'(f(P_2)), g'(f(P_3)), g'(f(P_4))) \\
&= (f(P'_1), f(P'_2), f(P'_3), f(P'_4)).
\end{aligned}$$

Pel teorema de Poncelet per a rectes, 5.3.5, g és composició de perspectivitats, $g = \pi_r \cdots \pi_1$. Observem que una perspectivitat $\pi : L \longrightarrow L'$ de centre W indueix una perspectivitat $\pi' : f(L) \longrightarrow f(L')$ de centre $f(W)$, que transforma els punts $f(P)$ en $\pi(f(P))$, ja que, usant el l'Asserció de la demostració del Teorema 5.4.2, se satisfà

$$(f(W) \vee f(P)) \cap f(L') = f((W \vee P) \cap L').$$

Així, $g' = \pi'_r \cdots \pi'_1$ és la projectivitat cercada.

Queda per provar que l'aplicació $\sigma : \mathbf{k} \longrightarrow \mathbf{k}$ així definida és un automorfisme de $\mathbf{k}$:

(0) σ *és bijectiva.* Suposem que $\sigma(a) = \sigma(b)$, i escollim punts alineats P_1, P_2, P_3, P_a, P_b tals que $a = (P_1, P_2, P_3, P_a), b = (P_1, P_2, P_3, P_b)$. Per hipòtesis,

$$(f(P_1), f(P_2), f(P_3), f(P_a)) = \sigma(a) = (f(P_1), f(P_2), f(P_3), f(P_b)),$$

i, per tant, $f(P_a) = f(P_b)$. Atès que f és bijectiva, en resulta que $P_a = P_b$ i, en particular, que $a = b$.

Per l'exhaustivitat de σ, sigui $b \in \mathbf{k}$. Considerem L una recta i prenem una referència P_1, P_2, P_3 de L. Sigui Q un punt de la recta $f(L)$ tal que $b = (f(P_1), f(P_2), f(P_3), Q)$. Com f és bijectiva, existeix un punt $P \in L$ tal que $f(P) = Q$; si $a = (P_1, P_2, P_3, P)$, aleshores per la definició de σ, $\sigma(a) = b$.

(1) $\sigma(0) = 0, \sigma(1) = 1$. Immediat a partir de la definició.

(2) *Additivitat de* σ. Hem de veure que $\sigma(a+b) = \sigma(a)+\sigma(b)$, per a qualssevol $a, b \in \mathbf{k}$. Provem un lema previ que mostra com determinar la suma geomètricament.

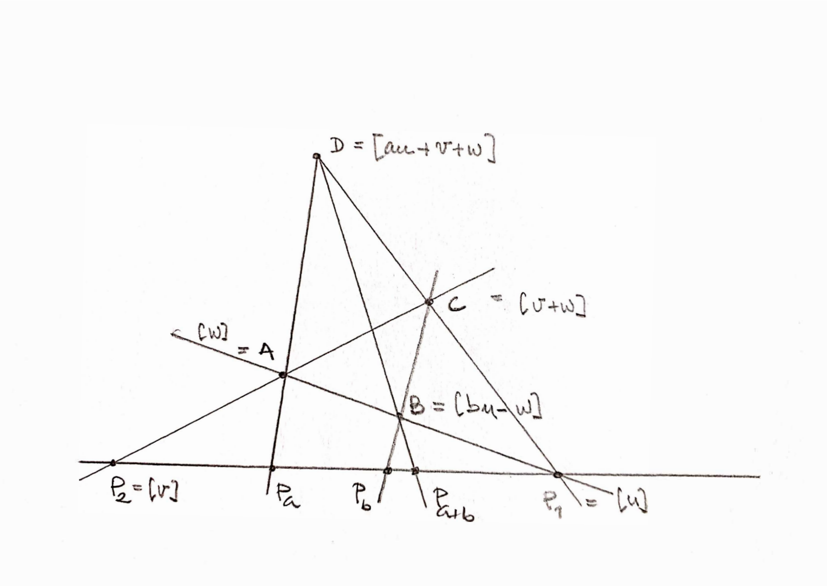
5.4.9 Lema. Sigui $L \subset \mathbb{P}^2$ una recta i $\mathcal{R} = \{P_1, P_2, P_3\}$ una referència de L. Per a cada $a \in \mathbf{k}$, sigui $P_a \in L$ el punt de coordenada absoluta a, aleshores el punt P_{a+b} es pot determinar geomètricament (de fet, per una construcció lineal) a partir dels punts P_a, P_b.

Prova. Fixem vectors tals que $P_1 = [\boldsymbol{u}], P_2 = [\boldsymbol{v}]$ i $P_3 = [\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}]$, de manera que $P_c = [c\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}]$. Considerem una recta auxiliar L' que passa per P_1 i un punt $A \notin L \cup L'$. Podem escollir un vector $\boldsymbol{w}$ de tal manera que $A = [\boldsymbol{w}]$ i $C = L' \cap P_2A = [\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}]$, (comproveu-ho!). Determinem ara els punts (veieu la figura)

$$B = P_1A \cap CP_b = [b\boldsymbol{u} - \boldsymbol{w}],\ D = P_1C \cap AP_a = [a\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}].$$

Aleshores $P_{a+b} = DB \cap P_1P_2 = [(a + b)\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}]$, és a dir, $(P_1, P_2, P_3, P_{a+b}) = a + b$, com es volia demostrar. ◇

Retornem a la demostració de l'additivitat. Prenem una recta $L = P_1 \vee P_2 \vee P_3$ i dos punts $P_a, P_b \in L$ de coordenades absolutes a i b respectivament. Atès que $n \geq 2$, (únic moment en què utilitzarem aquesta hipòtesis), existeix un pla Π tal que $L \subset \Pi$. Pel lema anterior, podem construir el punt P_{a+b} mitjançant una configuració de punts i rectes de Π que, atès que f és una colineació, es trasllada en una configuració anàloga a $f(\Pi)$ que



permet determinar el punt $f(P_{a+b})$ a partir dels punts $f(P_1), f(P_2), f(P_3), f(P_a), f(P_b)$ i, per tant,

$$\begin{aligned}
\sigma(a+b) &= (f(P_1), f(P_2), f(P_3), f(P_{a+b})) \\
&= (f(P_1), f(P_2), f(P_3), f(P_a)) + (f(P_1), f(P_2), f(P_3), f(P_b)) \\
&= \sigma(a) + \sigma(b).
\end{aligned}$$

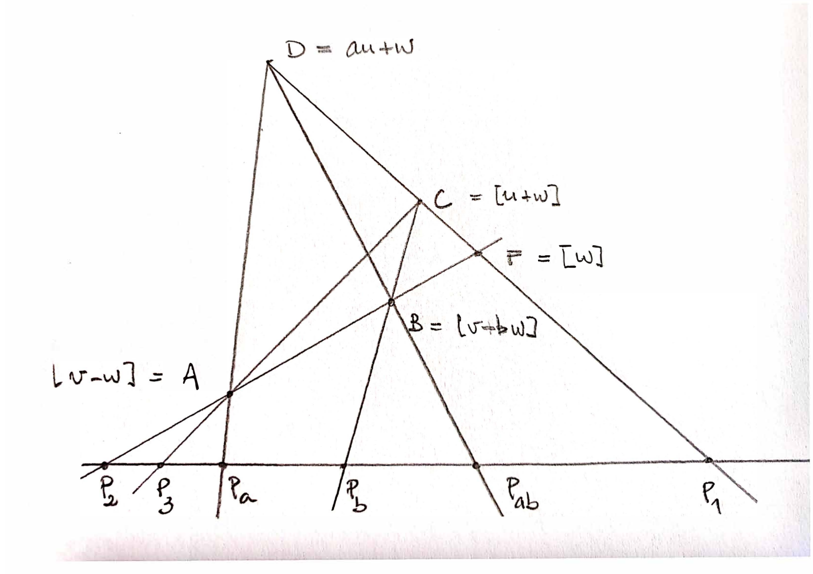
(3) *Multiplicativitat de σ.* Hem de veure que $\sigma(ab) = \sigma(a)\sigma(b)$, per a qualssevol $a, b \in \mathbf{k}$, cosa que podem fer per una construcció geomètrica similar a la utilitzada en el cas de la suma. Resumim la construcció en la figura següent.

Observem que la multiplicativitat de σ es pot deduir de forma alternativa de la propietat multiplicativa de la raó doble recollida al lema següent, de demostració immediata.

5.4.10 Lema. Siguin $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 \in \mathbb{P}^n$ punts alineats. Aleshores,

$$(P_1, P_2, P_3, P_5) = (P_1, P_2, P_3, P_4)(P_1, P_2, P_4, P_5). \qquad \diamond$$

En efecte, provem la compatibilitat de σ i el producte a partir d'aquest lema: si a o b són 0 o 1, el resultat és trivial. Suposem doncs que $a, b \neq 0, 1$.



Escollim tres punts alineats i diferents, P_1, P_2, P_3 i denotem per L la recta que els conté. Sigui $P_4 = P_a$ el punt de L amb coordenada absoluta a respecte dels punts anteriors. Atès que $a \neq 0, 1$, els punts P_1, P_2, P_4 són també una referència de L, per la qual cosa hi ha un punt $P_5 = P_b$ amb coordenada absoluta b respecte d'aquesta nova referència. Aleshores, la multiplicativitat de la raó doble establerta al lema anterior i la definició de σ permeten concloure que

$$\begin{aligned}
\sigma(ab) &= \sigma((P_1, P_2, P_3, P_4)(P_1, P_2, P_4, P_5)) \\
&= \sigma((P_1, P_2, P_3, P_5)) \\
&= (f(P_1), f(P_2), f(P_3), f(P_5)), \\
&= (f(P_1), f(P_2), f(P_3), f(P_4))(f(P_1), f(P_2), f(P_4), f(P_5)) \\
&= \sigma(a)\sigma(b),
\end{aligned}$$

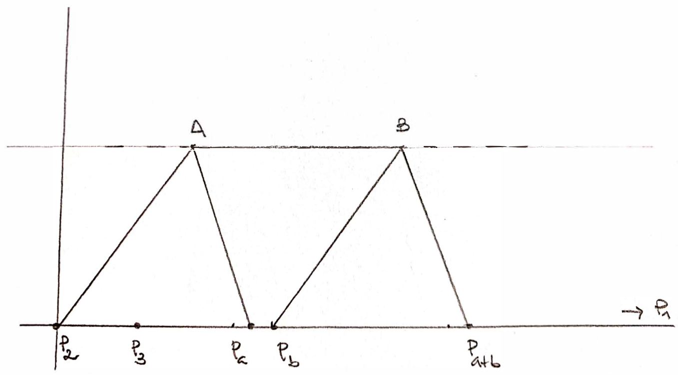
cosa que completa la demostració del teorema. ◇

Hem vist que el cos $\mathbf{k} = \mathbb{R}$ no té altres automorfismes que la identitat, per tant del teorema fonamental se segueix immediatament.

5.4.11 Corol·lari. Suposem que $\mathbf{k} = \mathbb{R}$ i sigui $f : \mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{P}^n$ una aplicació bijectiva, amb $n \geq 2$. Aleshores,

$$f \text{ és una projectivitat} \iff f \text{ és una colineació.}$$ ◇

5.4.12 Observació. La demostració de l'additivitat i la multiplicativitat de σ en el Teorema 5.4.8 pot semblar sorprenent a primera vista, tanmateix correspon heurísticament al clàssic teorema de Tales. En efecte, suposem que els punts són de l'espai afí i prenem una recta L' paral·lela a L. Aleshores usant el teorema de Tales, la configuració de la figura



determina que $(P_1, P_2, P_3, P_{a+b}) = a + b$.

5.5 Afinitats i projectivitats

En aquesta secció analitzem la relació entre les afinitats d'un espai afí i les projectivitats de la completació projectiva.

Sigui $\mathbb{A}^n$ un espai afí, d'espai vectorial director E, i $\mathbb{P}^n = \mathbb{A}^n \cup \mathbb{A}^n_\infty$, la completació projectiva amb hiperplà de l'infinit $\mathbb{A}^n_\infty$, tal i com l'hem definit a la secció 4.5. Recordem que per la inclusió de $\mathbb{A}^n$ en $\mathbb{P}^n$, fixem un punt $P_0 \in \mathbb{A}^n$ i definim $\iota(P) = [\boldsymbol{e}_0 + \overrightarrow{P_0P}]$.

5.5.1 *Projectivitat associada a una afinitat*: siguin $f : \mathbb{A}^n \longrightarrow \mathbb{A}^n$ una afinitat i $\phi : E \longrightarrow E$ l'aplicació lineal associada, és a dir, $\phi(\overrightarrow{PQ}) = \overrightarrow{f(P)f(Q)}$.

Definim la projectivitat $\overline{f} : \mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{P}^n$ per

$$\overline{f}(\lambda, \boldsymbol{u}) = [(\lambda, \lambda\overrightarrow{P_0 f(P_0)} + \phi(\boldsymbol{u}))].$$

Observem que per als punts de $\mathbb{A}^n$ es té

$$\begin{aligned}
\overline{f}(\iota(P)) &= \overline{f}[1, \overrightarrow{P_0P}] \\
&= [1, \overrightarrow{P_0f(P_0)} + \overrightarrow{f(P_0)f(P)}] \\
&= [1, \overrightarrow{P_0f(P)}] = \iota(f(P)).
\end{aligned}$$

És a dir, $\overline{f}_{|\mathbb{A}^n} = f$.

D'altra banda, a l'hiperplà de l'infinit, $\lambda = 0$, $\overline{f}$ coincideix amb la projectivitat $[\phi]$: $\mathbb{P}(E) \longrightarrow \mathbb{P}(E)$. En particular, l'hiperplà de l'infinit és $\overline{f}$-invariant.

5.5.2 *Afinitat associada a una projectivitat i un hiperplà invariant.* Sigui $\overline{f} : \mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{P}^n$ una projectivitat tal que $H = \mathbb{A}^n_\infty$ és $\overline{f}$-invariant. Atès que $\overline{f}$ és bijectiva, la restricció a $\mathbb{A}^n$ defineix una aplicació $f : \mathbb{A}^n \longrightarrow \mathbb{A}^n$. Afirmem que f és una afinitat. En efecte, es té

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{f(\iota(P))f(\iota(Q))} &= \overline{f}[\iota(Q) - \iota(P)] \\
&= \overline{\phi}(\boldsymbol{e}_0) + \overline{\phi}(\overrightarrow{P_0Q}) - \overline{\phi}(\boldsymbol{e}_0) - \overline{\phi}(\overrightarrow{P_0P})) \\
&= \overline{\phi}(\overrightarrow{P_0Q}) - \overrightarrow{P_0P}) \\
&= \overline{\phi}(\overrightarrow{PQ}) = \overline{\phi}(\overrightarrow{\iota(P)\iota(Q)}))
\end{aligned}$$

5.5.3 Proposició. Les construccions anteriors estableixen una bijecció

$$\{\text{afinitats de } \mathbb{A}^n\} \leftrightarrow \{\text{projectivitats de } \overline{\mathbb{A}^n} \text{ que deixen invariant } \mathbb{A}^n_\infty\}. \qquad \diamond$$

Afinitats vs projectivitats en coordenades

Sigui $\mathcal{R}$ un sistema de referència afí de $\mathbb{A}^n$, en el qual denotarem les coordenades per $(x_1, \ldots, x_n)$, i $\overline{\mathcal{R}}$ el sistema de referència projectiu associat, amb coordenades homogènies $(z_0 : \cdots : z_n)$.

Una afinitat $f : \mathbb{A}^n \longrightarrow \mathbb{A}^n$ s'expressa en coordenades en la forma

$$\begin{aligned}
f(x_1, \ldots, x_n) &= b + AX = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_1 & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \overline{A}(1, X)^t,
\end{aligned}$$

on A és una matriu invertible i $\overline{A}$ és la matriu ampliada. Observem que, aleshores, $\overline{A}$ és la matriu de la projectivitat $\overline{f}$.

Recíprocament, si $\overline{f}$ és una projectivitat que deixa invariant l'hiperplà de l'infinit, aleshores la matriu de $\overline{f}$ en el sistema de referència $\overline{\mathcal{R}}$ és de la forma

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} c & 0 & \cdots & 0 \\ b'_1 & a'_{11} & \cdots & a'_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b'_n & a'_{n1} & \cdots & a'_{nn} \end{pmatrix}.$$

Atès que $\overline{f}$ és una projectivitat (i per tant la matriu $\overline{A}$ és no singular), es té que $c \neq 0$, pel que podem normalitzar la matriu $\overline{A}$ dividint per c i obtenir la matriu ampliada de l'afinitat de la qual prové.

5.5.4 Exemples. (1) Sigui f una homotècia de centre l'origen de coordenades i raó $k \neq 0$, $A = k\mathsf{id}$. Aleshores la projectivitat $\overline{f}$ que li correspon és

$$[\overline{A}] = \left[\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & k & & \\ & & \ddots & \\ & & & k \end{pmatrix}\right] = \left[\begin{pmatrix} a & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}\right]$$

que és una homologia general.

Observem que si prenem $z_n = 0$ com a hiperplà de l'infinit de $\mathbb{P}^n$, $\overline{f}$ indueix una afinitat f' diferent a $\mathbb{P}^n \setminus \{z_n = 0\}$, ja que té matriu

$$A' = \begin{pmatrix} a & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$$

En particular, si $k = -1$, aleshores $a = 1/k = -1$ i f' és una simetria respecte d'un hiperplà coordenat.

(2) Considerem una homologia especial a $\mathbb{P}^2$,

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ 1 & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

La recta $L : z_0 = 0$ és una recta de punts fixos, i l'afinitat que en resulta a $\mathbb{P}^2 \setminus L$ és una translació,

$$f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

La recta $L' : z_2 = 0$ també és invariant, i l'afinitat sobre $\mathbb{P}^2 \setminus L'$ és l'homologia especial afí

$$f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

5.5.5 Exemple. Sigui $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}(\mathbf{k}^3)$ i notem $(x : y : z)$ les coordenades homogènies d'un punt en la referència ordinària. Sigui $f : \mathbb{P}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^2$ la projectivitat que té matriu, en la referència oridinària,

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & -4 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Els polinomis característic i mínim són $P(t) = (2-t)^3, m(t) = (2-t)^2$, respectivament.

La recta L d'equació $x+2y = 0$ és invariant, per tant, f indueix una afinitat $\mathbb{P}^2 \setminus L \xrightarrow{f} \mathbb{P}^2 \setminus L$. Identifiquem $\mathbb{P}^2 \setminus L : x + 2y \neq 0$, amb la varietat afí $\mathbb{A}^2$ de $\mathbf{k}^3$ determinada per l'equació $x + 2y = 1$,

$$\begin{array}{cccc} g : & \mathbb{P}^2 \setminus L & \longleftrightarrow & \mathbb{A}^2 \\ & (x : y : z) & \longrightarrow & \frac{1}{x+2y}(x, y, z) \\ & (x : y : z) & \longleftarrow & (x, y, z) \end{array}$$

Així,

$$\begin{aligned} \widetilde{f}(x, y, z) &= gfg^{-1}(x : y : z) = g(4x - 4z : -x + 2y + 2z : x) \\ &= \frac{1}{(4x - 4z + 2(-x + 2y + 2z))}(4x - 4z, -x + 2y + 2z, x) \\ &= \frac{1}{2}(4x - 4z, -x + 2y + 2z, x), \end{aligned}$$

on en la darrera igualtat hem tingut present que $x + 2y = 1$.

Prenem una referència afí de $\mathbb{A}^2$: $\mathcal{R} = \{(1, 0, 0); (-2, 1, 0), (0, 0, 1)\}$. La matriu ampliada de l'afinitat $\widetilde{f}$ en aquesta referència és

$$\left(\begin{array}{r|rr} 1 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{1}{2} & 2 & 1 \\ \frac{1}{2} & -1 & 0 \end{array}\right).$$

6
Quàdriques a l'espai projectiu

En els capítols anteriors hem estudiat la geometria lineal de l'espai projectiu, és a dir, les varietats lineals, les propietats d'incidència i les projectivitats, que són les aplicacions que preserven la linealitat. En termes de coordenades, les varietats lineals venen determinades per sistemes d'equacions lineals homogènies. En aquest capítol ens centrarem en les quàdriques de $\mathbb{P}(E)$, que són subconjunts definits per una equació homogènia de grau 2 o, dit altrament, per formes quadràtiques sobre E.

A diferència del que succeeix per les varietats lineals, en el cas de les quàdriques el conjunt de punts que les formen no determinen, en general, la forma quadràtica que la defineix. De la mateixa manera que donar un hiperplà de $\mathbb{P}(E)$ equival a donar una forma lineal $\boldsymbol{w} \in E^*$, definida llevat de constants (és a dir, un element $[\boldsymbol{w}] \in \mathbb{P}(E^*)$), donar una quàdrica serà equivalent a donar una forma bilineal simètrica $\varphi \in \mathcal{S}^2(E^*)$ determinada llevat de constants, és a dir, un element de $\mathbb{P}(\mathcal{S}^2(E^*))$. Dels resultats del capítol 2 deduirem les propietats elementals de les quàdriques.

Fixem $\mathbf{k}$ un cos. Tot i que alguns dels resultats seran certs per a un cos general de característica $\neq 2$, els resultats de classificació els establirem per $\mathbf{k} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$, per la qual cosa podeu suposar que hem fixat aquests dos casos des de l'inici del capítol.

6.1 Definició i primeres propietats

Sigui E un $\mathbf{k}$-espai vectorial de dimensió finita $n+1$. Denotarem per φ una forma bilineal simètrica definida a E i per q_φ, o simplement q, la forma quadràtica associada. Recordem que si la característica de $\mathbf{k}$ és diferent de 2, la forma q_φ determina al seu torn la forma bilineal φ.

Donades dues formes quadràtiques q, q' sobre E, definim la relació d'equivalència

$$q \sim q' \iff \exists \lambda \neq 0,\ q' = \lambda q.$$

6.1.1 Definició. Una *quàdrica projectiva* (o simplement, quàdrica) $\mathcal{Q}$ de $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(E)$ és la classe d'equivalència d'una forma quadràtica $q : E \longrightarrow \mathbf{k}$, $\mathcal{Q} = [q]$. Anomenem cònica una quàdrica de $\mathbb{P}^2$.

Observem que si $P = [\boldsymbol{u}] \in \mathbb{P}^n$, no podem parlar del valor d'una forma quadràtica q en P, ja que depèn del representant $\boldsymbol{u} \in E$ escollit, $q(\lambda\boldsymbol{u}) = \lambda^2 q(\boldsymbol{u})$; tanmateix sí que té sentit dir que q s'anul·la en P.

6.1.2 Definició. Sigui $\mathcal{Q} = [q]$ una quàdrica de $\mathbb{P}^n$. El conjunt de punts de la quàdrica $\mathcal{Q}$ és el subconjunt $|\mathcal{Q}|$ de $\mathbb{P}^n$ pefinit per

$$|\mathcal{Q}| = \{P = [\boldsymbol{u}] \in \mathbb{P}^n \mid q(\boldsymbol{u}) = 0\}.$$

6.1.3 Observació. És clar que el conjunt de punts d'una quàdrica, $|\mathcal{Q}|$, està determinat per la quàdrica $\mathcal{Q}$. En general, el recíproc no és cert, el conjunt de punts no determina la quàdrica: per exemple, a $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$, tant $q : x_0^2 + 4x_1^2$ com $q' : 2x_0^2 + 7x_1^2$ tenen $|\mathcal{Q}| = \{(0:0:1)\}$ com a conjunt de punts, tot i que no són equivalents.

Fins i tot es pot donar el cas de que una quàdrica no tingui punts. La forma quadràtica $q : x_0^2 + x_1^2 + x_2^2$ no té punts reals, ja que les solucions reals de l'equació $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$ es redueixen a $(x_0, x_1, x_2) = (0, 0, 0)$, que no defineix un punt de $\mathbb{P}^2$. Aquest fenomen no es dona per a quàdriques complexes, tota quàdrica complexa té almenys un punt; a més, es pot demostrar que per a les quàdriques complexes (i més generalment, les definides sobre un cos algebraicament tancat), els punts determinen la quàdrica, tot i que aquest resultat és fora del nostre abast.

És per l'observació anterior que hem de ser curosos distingint una quàdrica del conjunt dels seus punts, (el que podríem anomenar la *quàdrica geomètrica*). Tanmateix, per a $\mathbf{k} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ veurem que podem obviar aquesta distinció en un sentit que especificarem més endavant.

6.1.4 *Equacions en coordenades i canvi de coordenades.* Sigui $\mathcal{R} = \{P_0, \ldots, P_n; U\}$ una referència de $\mathbb{P}^n$ i $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{u}_0, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$ una base de E adaptada a $\mathcal{R}$. La matriu de la quàdrica $\mathcal{Q} = [q]$ en la referència $\mathcal{R}$ és, per definició, la matriu de q (és a dir, de la forma bilineal simètrica φ associada a q),

$$M_{\mathcal{R}}(\mathcal{Q}) = M(\varphi) = (\varphi(\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_j)).$$

Aquesta matriu està definida llevat del producte per un escalar no nul, pel que pròpiament hauríem d'escriure $[M_{\mathcal{R}}(\mathcal{Q})]$.

Així, un punt $P = (x_0 : \cdots : x_n)$ és de la quàdrica si, i només si, les seves coordenades satisfan $X^t M_{\mathcal{R}}(\mathcal{Q}) X = 0$.

Recordem que si S és la matriu d'un canvi de base, la matriu d'una forma bilineal φ canvia segons $S^t M(\varphi)S$, per la qual cosa, en canviar de referència la matriu d'una quàdrica es transfoma per
$$M_{\mathcal{R}'}(\mathcal{Q}) = S^t M_{\mathcal{R}}(\mathcal{Q})S.$$

6.1.5 *Rang d'una quàdrica. Quàdriques no degenerades.* Recordem que al capítol 2, Definició 2.2.4, hem definit el radical d'una forma bilineal φ (que també anomenem radical de la forma quadràtica associada q) per $\operatorname{rad}\varphi = \ker\hat{\varphi}$, on $\hat{\varphi}$ és l'aplicació lineal

$$\begin{array}{rccc} \hat{\varphi}: & E & \longrightarrow & E^* \\ & \boldsymbol{u} & \longmapsto & \varphi(\boldsymbol{u}, -) \end{array}$$

Si $\mathcal{Q} = [q]$, definim el *rang de la quàdrica* $\mathcal{Q}$ com el rang de la forma quadràtica q (que no depèn de la forma que representa $\mathcal{Q}$), és a dir, $\operatorname{rang}\mathcal{Q} = \operatorname{rang} q = n + 1 - r_0$, on $r_0 = \dim\operatorname{rad} q$. Direm que $\mathcal{Q}$ és una *quàdrica no degenerada* si $\operatorname{rang}\mathcal{Q} = \mathrm{n} + 1$, és a dir, si $\operatorname{rad} q = 0$.

El radical de q és un subespai vectorial de E, anomenarem *vèrtex de la quàdrica* $\mathcal{Q}$ a la varietat lineal que determina, $V_{\mathcal{Q}} = \mathbb{P}(\operatorname{rad} q)$. Observem que, en coordenades, aquesta varietat lineal es caracteritza per l'equació

$$(x_0, \ldots, x_n)M(\mathcal{Q}) = 0,$$

i que la seva dimensió és $n + 1 - \operatorname{rang}\mathcal{Q}$.

Deixem com exercici comprovar que se satisfan les dues propietats següents:

(1) $V_{\mathcal{Q}} \subset |\mathcal{Q}|$, és a dir, el vèrtex és una varietat lineal continguda a la quàdrica.

(2) Si $P \in |\mathcal{Q}|$, aleshores $V \vee P \subset |\mathcal{Q}|$.

Direm que un punt P d'una quàdrica $\mathcal{Q}$ és *simple o regular* si no és del vèrtex de $\mathcal{Q}$. En coordenades això és equivalent a que $AX^t \neq 0$, on A és la matriu de $\mathcal{Q}$ i X són les coordenades de P. En cas contrari, direm que el punt P és *singular*. Dit altrament, els punts del vèrtex són els punts singulars, mentres que els del complementari són els punts regulars. Observeu que una quàdrica no degenerada no conté punts singulars.

6.1.6 Definició. Sigui $P = [\boldsymbol{u}] \in |\mathcal{Q}|$ un punt regular. Es defineix l'*hiperplà tangent* de $\mathcal{Q}$ en P com l'hiperplà
$$T_P(\mathcal{Q}) = \mathbb{P}(\ker\varphi(\boldsymbol{u}, -)).$$

6.1.7 *Restricció/intersecció d'una quàdrica a una varietat lineal.* Si $V = \mathbb{P}(F) \subset \mathbb{P}^n$ és una varietat lineal i $\mathcal{Q}$ una quàdrica de $\mathbb{P}^n$, es defineix la *quàdrica restricció de* $\mathcal{Q}$ *a* V per

$$\mathcal{Q}_{|V} = [q_{|F}], \quad q_{|F} : F \longrightarrow \mathbf{k}.$$

Per exemple, considerem la quàdrica definida a $\mathbb{P}^3$ per la forma quadràtica

$$q(x_0, x_1, x_2, x_3) = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + 2x_0x_1 - 2x_1x_2,$$

i V el pla definit per $x_0 = x_1 = 0$.

La matriu de q en la base ordinària és

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Escollim una base del subespai F tal que $V = \mathbb{P}(F)$, per exemple,

$$\mathcal{B} = \{(1, -1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\},$$

aleshores la matriu de $q_{|F}$ en aquesta base és

$$\begin{aligned} B &= M_{\mathcal{B}}(q_{|F}) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

És a dir, si denotem per $(z_0 : z_1 : z_2)$ les coordenades de V en la referència associada a $\mathcal{B}$, els punts de la quàdrica $\mathcal{Q}_{|V}$ corresponen a les solucions de l'equació $z_1^2 - z_2^2 + 2z_0z_1 = 0$.

A $\mathcal{Q}_{|V}$ l'anomenarem també la *intersecció de* $\mathcal{Q}$ *i* V, en base al resultat següent.

6.1.8 Proposició. $|\mathcal{Q}_{|V}| = |\mathcal{Q}| \cap V$.

Prova. Si $q_{|F} = 0$, tot punt de V és de la quàdrica. De fet, $V \subset V_{\mathcal{Q}}$.

Si $q_{|F} \neq 0$, aleshores

$$P = [\boldsymbol{u}] \in |\mathcal{Q}_{|V}| \Longleftrightarrow q(\boldsymbol{u}) = 0, \boldsymbol{u} \in F \Longleftrightarrow P \in |\mathcal{Q}|, P \in V = \mathbb{P}(F). \qquad \diamond$$

6.1.9 *Transport d'una quàdrica per una projectivitat.* Sigui $f = [\phi] : \mathbb{P}(E) \longrightarrow \mathbb{P}(\overline{E})$ una projectivitat i $\mathcal{Q} = [q_\varphi]$ una quàdrica de $\mathbb{P}^n$. Atès que ϕ és un isomorfisme, podem considerar l'aplicació inversa $\phi^{-1} : \overline{E} \longrightarrow E$ i definir una forma quadràtica (o la forma bilineal associada) sobre $\overline{E}$ segons

$$\overline{q}(\boldsymbol{u}) = q(\phi^{-1}(\boldsymbol{u})), \qquad (\overline{\varphi}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \varphi(\phi^{-1}(\boldsymbol{u}), \phi^{-1}(\boldsymbol{v}))).$$

Definim la *quàdrica imatge de* $\mathcal{Q}$ *per* f com la quàdrica $f(\mathcal{Q}) = [\overline{q}]$ de $\mathbb{P}(\overline{E})$. De la definció se segueix que els punts de $f(|\mathcal{Q}|)$ són els punts imatge per f dels punts de $\mathcal{Q}$, $f(|\mathcal{Q}|) = |f(\mathcal{Q})|$.

Quan $\overline{E} = E$, f és una homografia. En aquest cas podem interpretar $f(\mathcal{Q})$ com el resultat de *moure* $\mathcal{Q}$ segons f o, també, si treballem en coordenades, com la mateixa quàdrica referida a un altre sistema de referència.

De fet, si $\mathcal{R}$ és un sistema de referència i $A = M_\mathcal{R}(\mathcal{Q})$, $P = M_\mathcal{R}(f)$, aleshores

$$M_\mathcal{R}(f(\mathcal{Q}))) = (P^{-1})^t A P^{-1}.$$

6.1.10 *Quàdrica dual.* Sigui $\mathcal{Q} = [q_\varphi]$ una quàdrica de $\mathbb{P}^n$. Recordem que la forma bilineal que la defineix, φ, indueix una aplicació lineal $\hat{\varphi} : E \longrightarrow E^*$ que, en el cas en que φ és no degenerada, és bijectiva, per la qual cosa indueix una projectivitat $\hat{f} = [\hat{\varphi}] : E \longrightarrow E^*$. Es defineix la *quàdrica dual* $\mathcal{Q}^*$ *d'una quàdrica no degenerada* $\mathcal{Q}$ segons $\mathcal{Q}^* = \hat{f}(\mathcal{Q})$.

Si $A = M_\mathcal{R}(\mathcal{Q})$, aleshores $M_\mathcal{R}(\mathcal{Q}^*) = A^{-1}$, ja que la matriu de $\hat{f}$ en la referència $\mathcal{R}$ és A i, per tant, segons el punt anterior,

$$M_\mathcal{R}(\mathcal{Q}^*) = M_\mathcal{R}(\hat{f}(\mathcal{Q})) = (A^{-1})^t A A^{-1} = A^{-1},$$

on, en la darrera igualtat hem usat que la matriu A és simètrica.

6.1.11 Proposició. Sigui $\mathcal{Q}$ una quàdrica no degenerada. Aleshores,

$$|\mathcal{Q}^*| = \{h = [H] \in (\mathbb{P}^n)^* \mid \exists P \in |\mathcal{Q}|,\ H = T_P(\mathcal{Q})\}. \qquad \diamond$$

És a dir, els hiperplans tangents a una quàdrica no degenerada representen els punts de la quàdrica dual.

6.2 Ortogonalitat, polaritat i tangència

Recordem que si E és un $\mathbf{k}$-espai vectorial i φ és una forma bilineal simètrica definida sobre E, podem definir la φ-*ortogonalitat* (o, simplement, ortogonalitat) de dos vectors

$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in E$ per $\varphi(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 0$. Si $A = (a_0, \ldots, a_n)$ són les coordenades del vector $\boldsymbol{u}$ en una base $\mathcal{B}$, aleshores els vectors ortogonals a $\boldsymbol{u}$ estan determinats per l'equació

$$\boldsymbol{u}^{\perp} = \{\boldsymbol{v}_{\mathcal{B}} = (x_0, \ldots, x_n) \mid AMX^t = 0\},$$

on $M = M_{\mathcal{B}}(\varphi)$. Atès que no hem imposat que φ sigui no degenerada, aquest conjunt tant pot ser un hiperplà de E com tot l'espai E si $\boldsymbol{u} \in \operatorname{rad} \varphi$. Més generalment, podem definir l'ortogonal de qualsevol subespai $F \subset E$ de la forma habitual.

Sigui $\mathcal{Q} = [q_\varphi]$ una quàdrica de $\mathbb{P}^n$. La forma bilineal φ està determinada llevat d'una constant no nul·la, però la relació d'ortogonalitat de dos vectors respecte de φ no depèn d'aquesta constant, per la qual cosa podem definir l'ortogonalitat respecte de la quàdrica $\mathcal{Q}$: dos punts $P = [\boldsymbol{u}], Q = [\boldsymbol{v}]$ són *$\mathcal{Q}$-ortogonals (o polars)* si $\varphi(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 0$. Més generalment,

6.2.1 Definició. Siguin $\mathcal{Q} = [q_\varphi]$ una quàdrica de $\mathbb{P}^n$ i $V = \mathbb{P}(F)$ una varietat lineal de $\mathbb{P}^n$. Es defineix la *varietat lineal polar* de V respecte de $\mathcal{Q}$ com

$$H_V(\mathcal{Q}) = \{P = [\boldsymbol{u}] \mid \varphi(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 0,\ \forall \boldsymbol{v} \in F\}.$$

6.2.2 Exemple. Determinem la polar del punt $P = (0 : 1 : 1)$ respecte de dues còniques del pla $\mathbb{P}^2$: primerament considerem la cònica $x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0$. Aleshores $H_P(\mathcal{Q})$ és la recta d'equació $x_1 - x_2 = 0$. En canvi si considerem la cònica $x_0^2 = 0$, la varietat polar de P és igual a tot el pla $\mathbb{P}^2$. La diferència entre un cas i l'altre rau en què la primera cònica és no degenerada i, per tant, P és un punt regular, mentres que en el segon cas, la cònica és degenerada i P és un punt singular de $\mathcal{Q}$.

En general, la polar d'un punt P serà tot l'espai o un hiperplà, segons que P sigui singular o regular. Tots els punts de les quàdriques no degenerades són regulars i, per tant, la polar d'un punt és sempre un hiperplà, això fa que *en l'anàlisi de la polaritat suposarem sempre que les quàdriques implicades són no degenerades.*

Per establir la relació entre polaritat i tangència, comencem analitzant la posició relativa d'una recta i una quàdrica.

6.2.3 Proposició. Sigui $\mathcal{Q} = [q_\varphi]$ una quàdrica i L una recta que no continguda en $\mathcal{Q}$. Aleshores, $|\mathcal{Q}| \cap L$ és o buit, o un punt o dos punts.

Prova. Siguin $P = [\boldsymbol{u}], Q = [\boldsymbol{v}]$ dos punts qualssevol de L. Atès que $L = PQ$, els punts de la recta L són de la forma $[\lambda \boldsymbol{u} + \mu \boldsymbol{v}]$ (amb λ, μ no nul·les simultàniament) i, per tant, són de $\mathcal{Q}$ si, i només si,

$$q_\varphi(\lambda \boldsymbol{u} + \mu \boldsymbol{v}) = \lambda^2 \varphi(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) + 2\lambda\mu\varphi(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + \mu^2 \varphi(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = 0,$$

que és una equació en les variables λ, μ. Com hem suposat que $L \subsetneq |\mathcal{Q}|$, algun dels coeficients $\varphi(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}), \varphi(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}), \varphi(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})$ és no nul.

Suposem que $L \cap |\mathcal{Q}| \neq \emptyset$. Podem suposar aleshores que $P \in |\mathcal{Q}|$, és a dir, $\varphi(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}) = 0$, amb la qual cosa l'equació anterior es redueix a

$$2\lambda\mu\varphi(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) + \mu^2\varphi(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}) = 0.$$

Per $\mu = 0$, retrobem el punt P, mentres que per $\mu \neq 0$, l'equació es redueix a

$$2\lambda\varphi(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) + \mu\varphi(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}) = 0.$$

Distingim ara dos casos:

- Si $\varphi(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) \neq 0$, aleshores hi ha una altra solució R, diferent de P, corresponent a $\lambda = \varphi(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}), \mu = 2\varphi(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$.

- Si $\varphi(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = 0$, aleshores $\varphi(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}) \neq 0$, per la qual cosa P és l'únic punt de tall. ◇

6.2.4 Definició. Donada una recta L i una quàdrica $\mathcal{Q}$ direm que L és *secant* si L talla $\mathcal{Q}$ en dos punts diferents, *tangent* si L talla $\mathcal{Q}$ en un sol punt (doble) o està completament contiguda en $|\mathcal{Q}|$.

Si $L \cap |\mathcal{Q}|$ és buida, direm que L és *exterior* a $\mathcal{Q}$, mentres que si $L \subset |\mathcal{Q}|$ direm que L és una *generatriu* de $\mathcal{Q}$.

Si $L = PQ$, amb $P = [\boldsymbol{u}], Q = [\boldsymbol{v}]$; la restricció de la forma quadràtrica q que defineix $\mathcal{Q}$ a L té matriu, en la referència $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$,

$$B = M_{\mathcal{R}}(\mathcal{Q}_L) = \begin{pmatrix} \varphi(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}) & \varphi(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) \\ \varphi(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) & \varphi(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}) \end{pmatrix}.$$

De l'anàlisi feta a la demostració de la Proposició 6.2.3 es dedueix:

(1) L és una generatriu de $\mathcal{Q}$ si, i només si, $B = 0$.

(2) L és tangent a $\mathcal{Q}$ en un punt si, i només si, $\det B = 0$, és a dir,

$$\varphi(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})\varphi(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}) - \varphi(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})^2 = 0.$$

La proposició següent recull algunes de les propietats de la polaritat en el cas de quàdriques no degenerades.

6.2.5 Proposició. Sigui $\mathcal{Q}$ una quàdrica no degenerada. Escrivim $P \sim_{\mathcal{Q}} Q$ per indicar que P i Q són punts polars. Se satisfà:

(1) $P \sim_{\mathcal{Q}} P \iff P \in |\mathcal{Q}|$.

(2) Si $P, Q \in |\mathcal{Q}|$, aleshores $P \sim_{\mathcal{Q}} Q \iff L = PQ \subset |\mathcal{Q}|$.

(3) Si $P \in |\mathcal{Q}|, Q \notin |\mathcal{Q}|$, aleshores $P \sim_{\mathcal{Q}} Q \Longleftrightarrow L = PQ$ és tangent a $\mathcal{Q}$ en P.

(4) Si $P, Q \notin |\mathcal{Q}|$, $L = PQ$ i $L \cap |\mathcal{Q}| \neq \emptyset$, aleshores $P \sim_{\mathcal{Q}} Q \Longleftrightarrow L$ és secant a $\mathcal{Q}$ i $(P, Q, R, S) = -1$, on $\{R, S\} = L \cap |\mathcal{Q}|$.

(5) Fixat un punt $P \in \mathbb{P}^n$, la varietat polar $H_P(\mathcal{Q})$ és un hiperplà. Si $P = [\boldsymbol{v}]$ i A és la matriu de $\mathcal{Q}$, $H_P(\mathcal{Q})$ té equació

$$H_P(\mathcal{Q}) \ : \quad \boldsymbol{v}AX = 0.$$

Prova. Provarem (4), ja que la resta de propietats se segueix de les definicions i els comentaris anteriors a la Proposició.

(4) Siguin $P = [\boldsymbol{u}], Q = [\boldsymbol{v}] \notin |\mathcal{Q}|$. Com hem vist a la demostració de 6.2.3, la intersecció $L \cap |\mathcal{Q}|$ està determinada per l'equació

$$\lambda^2 \varphi(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) + 2\lambda\mu\varphi(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + \mu^2 \varphi(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = 0,$$

on λ, μ no s'anul·len simultàniament. Si $P \sim_{\mathcal{Q}} Q$, aleshores $\varphi(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 0$ i, si escrivim $a = \varphi(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}), b = \varphi(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})$, l'equació anterior es redueix a

$$\lambda^2 a + \mu^2 b = 0 \implies \frac{\lambda}{\mu} = \pm\sqrt{\frac{-b}{a}},$$

on hem usat que $a \neq 0$ perquè $Q \notin |\mathcal{Q}|$ i que les arrels tenen sentit perquè $L \cap |\mathcal{Q}| \neq \emptyset$. Usant P, Q com a sistema de referència de L, trobem

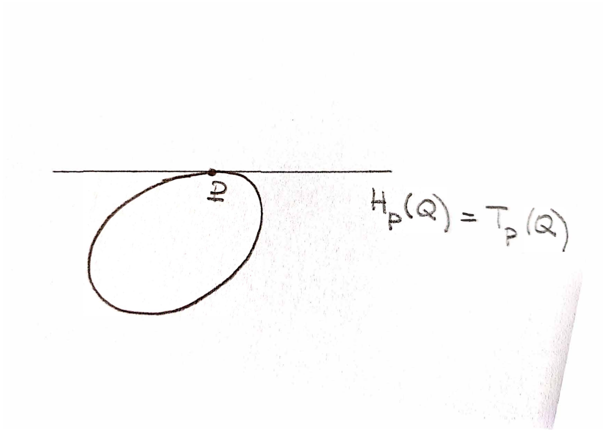
$$(P, Q, R_1, R_2) = ((1:0), (0:1), (\sqrt{\frac{-b}{a}}, 1), (\sqrt{\frac{-b}{a}}, 1)) = -1.$$

El recíproc el deixem com exercici. ◇

En particular, el punt (5) i de la Definició 6.1.6, se segueix:

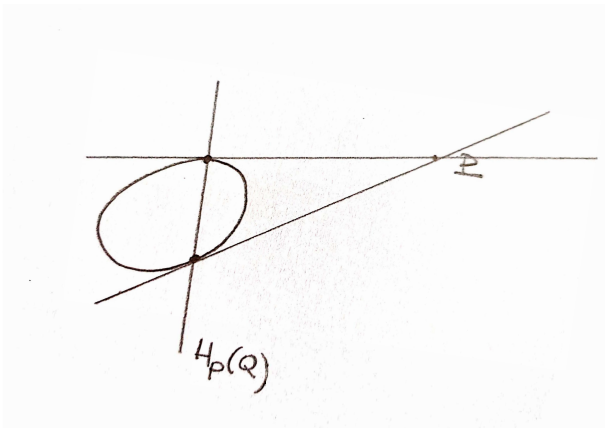
6.2.6 Corol·lari. Siguin $\mathcal{Q}$ una quàdrica no degenerada i $P \in \mathcal{Q}$, aleshores $H_p(\mathcal{Q}) = T_P(\mathcal{Q})$. ◇

6.2.7 *Construcció geomètrica de la recta polar d'un punt respecte d'una cònica no degenerada.* Siguin $\mathcal{C}$ una cònica no degenerada de $\mathbb{P}^2$ i $P \in \mathbb{P}^2$. Determinem geomètricament la recta $H_P(\mathcal{C})$ distingint tres casos:

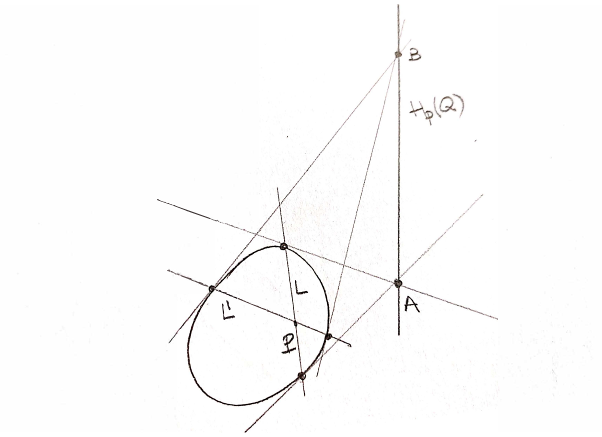


(1) Si $P \in \mathcal{C}$, aleshores $H_P(\mathcal{C}) = T_P(\mathcal{C})$.

(2) Si $P \notin \mathcal{C}$ és extern a la cònica (vegeu la figura), determinem les dues rectes tangents a $\mathcal{C}$ des de P, L_1, L_2, i els punts de contacte amb $\mathcal{C}$, $\{P_i\} = L_i \cap \mathcal{C}$ (que són diferents). Aleshores $H_P(\mathcal{C}) = P_1P_2$.



(3) Si $P \notin \mathcal{C}$ és intern (vegeu la figura) a la cònica, tracem dues rectes qualssevol per P, L, L'. Les tangents en els punts P_1, P_2 de tall de L amb $\mathcal{C}$ es tallen en un punt A; anàlogament, les tangents en els punts intersecció Q_1, Q_2 de L' amb $\mathcal{C}$ es tallen en un punt B. Aleshores, $H_P(\mathcal{C}) = AB$.



6.3 Classificació de quàdriques projectives

Sigui $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(E)$. En aquesta secció donem la classificació de les quàdriques de $\mathbb{P}^n$ quan $\mathbf{k} = \mathbb{C}, \mathbb{R}$. L'equivalència de quàdriques està determinada per canvis de referència; atès que els quàdriques es defineixen a partir de classes de formes quadràtiques, la definició d'equivalència es refereix a les formes quadràtiques que les defineixen.

6.3.1 Definició. Siguin $\mathcal{Q} = [q], \mathcal{Q}' = [q']$ dues quàdriques de $\mathbb{P}^n$. Direm que $\mathcal{Q}$ i $\mathcal{Q}'$ són *projectivament equivalents*, $\mathcal{Q} \sim \mathcal{Q}'$, si existeix una homografia $f : \mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{P}^n$ tal que $f(\mathcal{Q}) = \mathcal{Q}'$.

6.3.2 Pel que hem vist al capítol 2, les següents afirmacions són equivalents:

(1) $\mathcal{Q} \sim \mathcal{Q}'$.

(2) Existeix una referència projectiva $\mathcal{R}$ tal que $M_{\mathcal{R}}(\mathcal{Q}) = M_{\mathcal{R}}(\mathcal{Q}')$.

(3) Si A, A' són les matrius de $\mathcal{Q}, \mathcal{Q}'$ en una referència $\mathcal{R}$, existeixen una constant $\lambda \neq 0$ i una matriu invertible S tals que $A' = \lambda S^t A S$.

De la classificació de formes quadràtiques en espais vectorials complexos, Proposició 2.4.2, deduïm:

6.3.3 Teorema. Si $\mathbf{k} = \mathbb{C}$, dues quàdriques $\mathcal{Q}, \mathcal{Q}'$ són projectivament equivalents si, i només si, $\operatorname{rang} \mathcal{Q} = \operatorname{rang} \mathcal{Q}'$. En particular, hi ha $n+1$ classes d'equivalència de quàdriques a $\mathbb{P}^n$:

$$x_0^2 + \cdots + x_r^2 = 0, \qquad r = 0, \ldots, n. \qquad \diamond$$

6.3.4 *Còniques de* $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$.

rang	equació reduïda	nom
3	$x_0^2 + x_1^2 + x_3^2 = 0$	Cònica no degenerada
2	$x_0^2 + x_1^2 = (x_0 + ix_1)(x_0 - ix_1) = 0$	Parell de rectes
1	$x_0^2 = 0$	Recta doble

6.3.5 *Quàdriques de* $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$.

rang	equació reduïda	nom
4	$x_0^2 + x_1^2 + x_3^2 + x_3^2 = 0$	Quàdrica no degenerada
3	$x_0^2 + x_1^2 + x_3^2 = 0$	Con de base no degenerada
2	$x_0^2 + x_1^2 = (x_0 + ix_1)(x_0 - ix_1) = 0$	Parell de plans
1	$x_0^2 = 0$	Pla doble

Considerem ara el cas $\mathbf{k} = \mathbb{R}$. Recordem que les formes quadràtiques reals estan determinades pel rang r i el nombre de signes positius r_+ (o el de negatius, r_-) de l'equació reduïda, Proposició 2.4.3. Atès que la forma quadràtica q d'una quàdrica $\mathcal{Q}$ està definida llevat d'una constant, definim l'*índex (o signatura) de* q (o de $\mathcal{Q}$) per

$$i(q) = \text{mín}\{r_+, r_-\}.$$

6.3.6 Teorema. Si $\mathbf{k} = \mathbb{R}$, dues quàdriques $\mathcal{Q}, \mathcal{Q}'$ són projectivament equivalents si, i només si, $\operatorname{rang} \mathcal{Q} = \operatorname{rang} \mathcal{Q}'$ i $i(\mathcal{Q}) = i(\mathcal{Q}')$. En particular, tota quàdrica real pot reduir-se a la forma normal

$$x_0^2 + \cdots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \cdots - x_r^2 = 0, \qquad r = 0, \ldots, n,\ k+1 \geq r-k.$$

6.3.7 *Còniques de* $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$.

rang	signatura	equació reduïda	nom
3	0	$x_0^2 + x_1^2 + x_3^2 + x_2^2 = 0$	Cònica no degenerada imaginària
3	1	$x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0$	Cònica no degenerada real
2	0	$x_0^2 + x_1^2 = 0$	Parell de rectes imaginàries amb tall real
2	1	$x_0^2 - x_1^2 = 0$	Parell de rectes reals
1	0	$x_0^2 = 0$	Recta doble

6.3.8 *Quàdriques de* $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$.

r	i	equació reduïda	nom
4	0	$x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2=0$	Quàdrica no degenerada imaginària
4	1	$x_0^2+x_1^2+x_2^2-x_3^2=0$	Quàdrica no degenerada real, no reglada
4	2	$x_0^2+x_1^2-x_2^2-x_3^2=0$	Quàdrica no degenerada real, reglada
3	0	$x_0^2+x_1^2+x_2^2=0$	Con de base cònica no degenerada imaginària
3	1	$x_0^2+x_1^2-x_2^2=0$	Con de base cònica no degenerada real
2	0	$x_0^2+x_1^2=0$	Parell de plans imaginàris amb intersecció real
2	1	$x_0^2-x_1^2=0$	Parell de plans reals
1	0	$x_0^2=0$	Pla doble

La quàdrica reglada de $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$

Ens proposem estudiar les rectes que estan contingudes a la quàdrica no degenerada reglada $x_0^2+x_1^2-x_2^2-x_3^2=0$. Comencem per un resultat general que explica els termes reglada/no reglada de la classificació anterior i que dona una interpretació geomètrica de l'índex d'una quàdrica.

6.3.9 Proposició. Sigui $\mathcal{Q}$ la quàdrica de $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$ d'equació $x_0^2+\cdots+x_k^2-x_{k+1}^2-\cdots-x_r^2=0$. Aleshores,

(1) k és el màxim enter tal que existeix una varietat lineal $V^k\subset\mathbb{P}^3$ de dimensió k amb $V^k\cap|\mathcal{Q}|=\emptyset$.

(2) $s=n-k-1$ és el màxim enter tal que existeix una varietat lineal de dimensió s, W^s, amb $W^s\subset|\mathcal{Q}|$.

Prova. Comencem provant que existeixen varietats de les dimensions especificades amb les propietats d'incidència amb $\mathcal{Q}$ enunciades.

Considerem la varietat V^k definida per les equacions

$$x_{k+1}=0,\ \dots\ ,x_n=0,$$

que és de dimensió k. Per un punt de la intersecció $V^k\cap|\mathcal{Q}|$ se satisfan les equacions

$$\begin{aligned}&x_0^2+\cdots+x_k^2=0,\\&x_{k+1}=0,\ \dots\ ,x_n=0,\end{aligned}$$

que tenen com a única solució $x_i=0$ per a tot $0\le i\le n$. Però el vector zero no defineix cap punt de $\mathbb{P}^3$, per la qual cosa $V^k\cap|\mathcal{Q}|=\emptyset$.

Sigui ara la varietat W^s definida pel sistema d'equacions

$$x_0 = k_{k+1},\ \ldots, x_{r-k-1} = x_r$$
$$x_{r-k} = 0,\ \ldots\ , x_k = 0.$$

W^s és una varietat de dimensió s, continguda en $|\mathcal{Q}|$.

Suposem ara que V' és una varietat de dimensió $> k$ que satisfà (1). Per la fórmula de Grassmann, $V' \cap W^s \neq \emptyset$, cosa que és una contradicció.

Anàlogament, si W' és una varietat lineal de dimensió $> s$ inclosa en $|\mathcal{Q}|$, aleshores per dimensions tenim que $W' \cap V^s \neq \emptyset$, que és una contradicció. $\diamond$

En particular, a $\mathbb{P}^3$, si $r = 4, k = 3$, trobem $s = 0$, per la qual cosa la quàdrica no degenerada no reglada no conté rectes, mentres que per a $r = 4, k = 2$ la quàdrica conté rectes, ja que $s = 1$. Ens proposem analitzar el sistema de rectes contingudes en aquesta quàdrica.

Així doncs, considerem la quàdrica $\mathcal{Q}$ de $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$

$$x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0.$$

Mitjançant el canvi de variables (lineal)

$$y_0 = x_0 + x_3,\ y_3 = x_0 - x_3,\ y_1 = x_1 + x_2,\ y_2 = -x_1 + x_2,$$

l'equació de $\mathcal{Q}$ esdevé

$$y_0 y_3 - y_1 y_2 = 0,$$

forma que resultarà més adient per a l'anàlisi que fem tot seguit.

Per a tot parell $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, que no siguin simultàniament zero, considerem la varietat lineal

$$L_{\lambda,\mu}\ :\ \begin{array}{rcrcl} \lambda y_0 & + & \mu y_1 & = & 0 \\ \lambda y_2 & + & \mu y_3 & = & 0 \end{array}$$

Atès que λ, μ no s'anul·len simultàniament, el rang del sistema és 2 i, per tant, $L_{\lambda,\mu}$ és una recta de $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$.

Si $P = (y_0, y_1, y_2, y_3)$ és un punt de $L_{\lambda,\mu}$, podem pensar el sistema que defineix la recta $L_{\lambda,\mu}$ com un sistema en les variables λ, μ. Atès que és un sistema homogeni i té solucions no nul·les, el seu determinant és zero, és a dir,

$$\begin{vmatrix} y_0 & y_1 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} = y_0 y_3 - y_2 y_1 = 0.$$

D'aquí se segueixen immediatament les propietats següents del sistema de rectes $L_{\lambda,\mu}$:

(1) $L_{\lambda,\mu} \subset |\mathcal{Q}|$.

(2) Per tot $P \in |\mathcal{Q}|$ hi ha una única recta $L_{\lambda,\mu}$ que passa per P, $P \in L_{\lambda,\mu} \subset |\mathcal{Q}|$.

(3) $L_{\lambda,\mu} \cap L_{\lambda',\mu'} = \emptyset$, si (λ,μ) i (λ',μ') són linealment independents.

Anàlogament, podem definir el sistema de rectes

$$L'_{\lambda,\mu} \;:\; \begin{array}{ccccc} \lambda y_0 & + & \mu y_2 & = & 0 \\ \lambda y_1 & + & \mu y_3 & = & 0 \end{array}$$

que satisfà les propietats (1)-(3) corresponents. Les rectes d'ambdós sistemes es tallen sempre en un punt:

(4) $L_{\lambda,\mu} \cap L'_{\lambda',\mu'} = \{\text{un punt}\}$.

En efecte, si fixem $\lambda, \mu, \lambda', \mu'$, la interseció de les dues rectes ve determinada per un sistema lineal de matriu

$$\begin{pmatrix} \lambda & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \mu \\ \lambda' & 0 & \mu' & 0 \\ 0 & \lambda' & 0 & \mu' \end{pmatrix}$$

que és una matriu de rang 3.

Finalment, observem que

(5) $\mathcal{Q}$ no conté altres rectes a banda de les dels sistemes $L_{\lambda,\mu}, L'_{\lambda',\mu'}$.

En efecte, suposem que L'' és una recta continguda en $\mathcal{Q}$. Per definició, L'' és tangent a $\mathcal{Q}$ en qualsevol dels seus punts; fixem-ne un $P \in L''$ i siguin L, L' les dues rectes dels sistemes de rectes determinats anteriorment que passen per P. Per la proposició anterior, el pla $T_P(\mathcal{Q})$ no està contingut a $\mathcal{Q}$, per la qual cosa $T_P(\mathcal{Q}) \cap |\mathcal{Q}|$ és una cònica, que necessàriament conté L i L', és a dir, un parell de rectes, i, per tant, L'' ha de coincidir amb una d'elles. ◇

6.4 Classificació de quàdriques afins

En l'assignatura de Geometria Afí i Euclidiana s'han definit i analitzat les quàdriques de l'espai afí $\mathbf{k}^n$, (o, si més no, les còniques, $n = 2$). En aquesta secció veurem com estudiar les quàdriques afins inserint-les a la completació projectiva i analitzant les quàdriques projectives associades.

Al llarg d'aquesta secció, fixem un espai afí de dimensió n, $\mathbb{A}^n$, i una referència afí $\mathcal{R}$, de coordenades $(x_1, \ldots, x_n)$. Denotem per $\mathbb{P}^n = \overline{\mathbb{A}^n} = \mathbb{A}^n \cup \mathbb{A}^n_\infty$ la seva completació projectiva i per $\overline{\mathcal{R}}$ el sistema de coordenades homogènies determinat per $\mathcal{R}$, $(z_0 : \cdots : z_n)$. Recordem que l'hiperplà de l'infinit, $\mathbb{A}^n_\infty$, té equació $z_0 = 0$, i que el pas de $\mathbb{A}^n$ a $\mathbb{P}^n$ correspon a l'homogeneïtzació i la deshomogeneïtzació de coordenades, $x_i = z_i/z_0$.

6.4.1 *Quàdriques afins vs quàdriques projectives.* Una *quàdrica afí* $\mathcal{Q}$ en $\mathbb{A}^n$ és un polinomi de segon grau en les coordenades dels punts en la referència $\mathcal{R}$, determinat llevat d'un factor constant no nul. És a dir, està definida per un polinomi $F \in \mathbf{k}[x_1, \ldots, x_n]$ de grau dos:

$$\mathcal{Q} \;:\; F(x_1, \ldots, x_n) = \sum a_{ij} x_i x_j + \sum b_i x_i + c.$$

En tot el que segueix *suposarem que existeix almenys un parell* (i, j) *tal que* $a_{ij} \neq 0$, és a dir, que el polinomi F no es redueix a un polinomi de primer grau. El conjunt de *punts de la quàdrica*, $|\mathcal{Q}|$, és el subconjunt de $\mathbb{A}^n$ de solucions de l'equació

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \sum a_{ij} x_i x_j + \sum b_i x_i + c = 0. \tag{$\dagger$}$$

Com succeeix en el cas projectiu, el conjunt de punts d'una quàdrica no determina el polinomi Q. En efecte, hi ha polinomis diferents que defineixen la mateixa quàdrica: per exemple, en el cas de còniques reals, els dos polinomis x^2+y^2+1 i x^2+1 donen lloc al conjunt buit, tot i que no hi ha cap constant $\lambda \neq 0$ tal que $x^2 + y^2 + 1 = \lambda(x^2 + 1)$.

Homogeneïtzant l'equació ($\dagger$), obtenim una quàdrica projectiva $\overline{\mathcal{Q}}$:

$$\overline{\mathcal{Q}} \;:\; q(z_0 : \cdots : z_n) = z_0^2 F\left(\frac{z_1}{z_0}, \ldots \frac{z_n}{z_0}\right) = z_0^2 \left(\sum a_{ij} z_i z_j + \sum b_i z_0 z_i + c z_0^2\right) = 0.$$

Per exemple, l'el·lipse $x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$ dona lloc a la cònica projectiva $z_1^2 + z_2^2 - z_0^2 = 0$, mentres que la paràbola $x_1^2 - x_2 = 0$ determina la cònica projectiva $z_1^2 - z_0 z_1 = 0$.

Recíprocament, si $\overline{\mathcal{Q}}$ és una quàdrica projectiva no continguda a l'hiperplà de l'infinit, la intersecció $\mathbb{A}^n \cap \overline{\mathcal{Q}}$ defineix una quàdrica afí (que en termes d'equacions correspon a substituir $x_i = z_i/z_0$). Per exemple, la cònica $z_1^2 - z_2^2 - z_0^2 = 0$ dona lloc a la hipèrbola $x_1^2 - x_2^2 - 1 = 0$.

De fet, aquestes dues construccions són inverses l'una de l'altra:

6.4.2 Proposició. Hi ha una bijecció

$$\{\text{quàdriques afins } \mathbb{A}^n\} \;\leftrightarrow\; \{\text{quàdriques projectives de } \overline{\mathbb{A}^n} \text{ que no contenen } \mathbb{A}^n_\infty\}. \qquad \diamond$$

6.4.3 *Matriu (ampliada) d'una quàdrica afí.* Considerem un quàdrica afí, $\mathcal{Q}$, definida pel polinomi $F = \sum_{ij} a_{ij}x_ix_j + \sum 2b_ix_i + c$. Per comoditat d'escriptura, suposem que $a_{ij} = a_{ji}$ si $i \neq j$, i que el sumatori del polinomi F s'estén a totes les parelles i, j. D'aquesta manera evitarem dividir per 2 alguns dels coeficients de la matriu que associarem a $\mathcal{Q}$.

La *matriu ampliada* de $\mathcal{Q}$ és la matriu

$$\overline{A} = M_{\mathcal{R}}(\overline{\mathcal{Q}}) = \left(\begin{array}{c|ccc} c & b_1 & \dots & b_n \\ \hline b_1 & a_{11} & \dots & a_{1n} \\ & \dots & & \vdots \\ b_n & a_{1n} & \dots & a_{nn} \end{array}\right) = \begin{pmatrix} c & L \\ L^t & A \end{pmatrix}.$$

Així, si $\overline{X}^t = (1, x_1, \dots, x_n) = (1, X^t)$, l'equació dels punts de la quàdrica $\overline{\mathcal{Q}}$ s'escriu matricialment en la forma

$$F(X) = \begin{pmatrix} 1 & X^t \end{pmatrix} \overline{A} \begin{pmatrix} 1 \\ X \end{pmatrix} = X^tAX + X^tL^t + LX + c = 0.$$

Observem que $\overline{A}$ és la matriu de la quàdrica projectiva $\overline{\mathcal{Q}}$ i que A és la matriu de la quàdrica de l'hiperplà de l'infinit,$\overline{\mathcal{Q}}_\infty$, per la qual cosa la denotarem també com A_∞.

6.4.4 *Equivalència de quàdriques afins.* Per les quàdriques afins podem reproduir part de les definicions establertes en el cas projectiu. Així, dues quàdriques afins, $\mathcal{Q}, \mathcal{Q}'$, són *afinment equivalents* si existeix una afinitat $f : \mathbb{A}^n \longrightarrow \mathbb{A}^n$ tal que $f(\mathcal{Q}) = \mathcal{Q}'$. No reproduirem aquí tots els detalls, que d'altra banda són gairebé un calc del cas projectiu.

Observem que quàdriques no afinment equivalents, com ara l'el·lipse i la hipèrbola anteriors, poden tenir completacions projectivament equivalents; en aquest cas, la cònica no degenerada real (rang 3 i índex 1). La clau per distingir la classe d'equivalència afí d'una quàdrica afí $\mathcal{Q}$ està en la *quàdrica de l'infinit* associada,

$$\overline{\mathcal{Q}}_\infty = \overline{\mathcal{Q}} \cap \mathbb{A}^n_\infty,$$

que és la quàdrica de l'hiperplà de l'infinit d'equació

$$\overline{\mathcal{Q}}_\infty \ : \ z_0 = 0, \quad q_\infty(z_1 : \dots : z_n) = \sum_{i,j} a_{ij}z_iz_j = 0,$$

ja que segons la Proposició 5.5.3, una afinitat és una projectivitat que deixa invariant $\mathbb{A}^n_\infty$ i, per tant,

$$\mathcal{Q} \sim \mathcal{Q}' \implies \overline{\mathcal{Q}} \sim \overline{\mathcal{Q}'} \text{ i } \overline{\mathcal{Q}}_\infty \sim \overline{\mathcal{Q}'}_\infty.$$

Veurem que, per a $\mathbf{k} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$, el recíproc és també cert, 6.4.14.

En el que segueix treballarem amb les coordenades homogènies $(z_0 : \cdots : z_n)$ i entendrem per afinitat una projectivitat que deixa $\overline{\mathbb{A}}^n_\infty$ invariant. Les equacions afins les recuperarem prenent $z_0 = 1$.

Així, en termes de matrius, dues quàdriques afins $\mathcal{Q}, \mathcal{Q}'$ amb matrius $\overline{A}, \overline{A}'$ respectivament, són afinment equivalents si existeix una matriu invertible S tal que:

(1) S és una afinitat, és a dir, l'hiperplà de l'infinit $z_0 = 0$ és invariant. Equivalentment, la matriu S és de la forma

$$S = \begin{pmatrix} s_0 & 0 \\ s & S_\infty \end{pmatrix},$$

on $s_0 \neq 0$ i S_∞ és la matriu de la restricció a $\mathbb{A}^n_\infty$.

(2) $\overline{A'} = S^t \overline{A} S$.

Per tant, la classificació de quàdriques afins és equivalent a la classificació de matrius simètriques per la relació d'equivalència determinada per aquestes dues condicions. Notem que la segona condició indica que les quàdriques projectives $\overline{\mathcal{Q}}, \overline{\mathcal{Q}}'$ són projectivament equivalents, tanmateix la primera condició imposa restricions al tipus de canvis de referència que podem utilitzar, les afinitats, per la qual cosa no podem aplicar els teoremes de classificació de formes quadràtiques directament.

Equacions reduïdes de les quàdriques afins

Seguim amb les notacions anteriors. Per obtenir les equacions reduïdes de $\mathcal{Q}$ establirem diverses etapes, la primera de les quals és general:

6.4.5 Proposició. Hi ha un sistema de referència $\mathcal{R}$, amb completació projectiva $\overline{\mathcal{R}}$, en el qual l'equació de la quàdrica és de la forma

$$cz_0^2 + d_1 z_1^2 + \cdots + d_r z_r^2 + 2b_{r+1} z_0 z_{r+1} + \cdots + 2b_n z_0 z_n = 0,$$

on r és el rang de $\overline{\mathcal{Q}}_\infty$, (és a dir, de A_∞) i $d_1, \ldots, d_r \neq 0$.

Prova. Escollim una referència projectiva de la forma següent: prenem una referència de l'hiperplà de l'infinit en la qual $\overline{\mathcal{Q}}_\infty$ tingui matriu diagonal, $\{P_1, \ldots, P_n; U'\}$, 2.3.2, amb $d_1, \ldots, d_r$ a la diagonal. Prenem $P_0 \in \mathbb{A}^n$ un punt qualsevol i $U \in P_0 \vee U'$ diferent de P_0 i de U'. Aleshores $\{P_0, \ldots, P_n; U\}$ és una referència projectiva de $\mathbb{P}^n$, (comproveu-ho!), que és la completació d'una referència afí. En aquesta referència, l'equació de la quàdrica és del tipus

$$c' z_0^2 + d_1 z_1^2 + \cdots + d_r z_r^2 + 2b'_1 z_0 z_1 + \cdots + 2b'_n z_0 z_n = 0, \quad d_i \neq 0.$$

Podem completar quadrats en la forma

$$d_i z_i^2 + 2b'_i z_0 z_i = d_i \left(z_i + \frac{b'_i}{d_i} z_0 \right)^2 - \frac{(b')_i^2}{d_i^2} z_0^2,$$

que correspon al canvi de referència (afí)

$$\begin{aligned} z'_i &= z_i + \frac{b'_i}{d_i} z_0, && 1 \le i \le r, \\ z'_i &= z_i, && r+1 \le i \le n, \\ z'_0 &= z_0, \end{aligned}$$

el què acaba la prova. ◇

Els coeficients d'aquesta equació no estan unívocament determinats. Per exemple, els valors d_i que corresponen a la diagonal de la forma quadràtica q_∞ estan determinats llevat de quadrats de $\mathbf{k}$ i de l'ordre de les variables. Notem, però, que els valors d_i no canvien amb el canvi de coordenades efectuat a la demostració. Analitzarem les diferents possibilitats en els casos $\mathbf{k} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Abans, però, distribuim aquestes equacions en tres situacions especials que es deriven de l'equació de la Proposició 6.4.5.

6.4.6 *Quàdriques amb centre.* Direm que un punt $P \in \mathbb{A}^n$ és *centre de la quàdrica* $\mathcal{Q}$ si és ortogonal a tots els punts de l'hiperplà de l'infinit o, dit altrament, si $\mathbb{A}^n_\infty \subset H_P(\overline{\mathcal{Q}})$. Si la quàdrica és no degenerada, aquesta condició equival a $\mathbb{A}^n_\infty = H_P(\overline{\mathcal{Q}})$.

En termes d'equacions,

$$P = [\boldsymbol{u}] \text{ és centre de } \mathcal{Q} \iff \varphi(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 0, \ \forall \boldsymbol{v} \mid [\boldsymbol{v}] \in \mathbb{A}^n_\infty.$$

Així, si $P = (1 : a_1 : \cdots : a_n)$, P és un centre si, i només si,

$$(1, a_1, \ldots, a_n)\overline{A} \begin{pmatrix} 0 \\ X \end{pmatrix} = 0,$$

per a tot punt $(0 : x_1 : \cdots : x_n) \in \mathbb{A}^n_\infty$, d'on se segueix immediatament que els centres d'una quàdrica estan determinats pel sistema

$$A_\infty a^t + L = 0.$$

En definitiva, *una quàdrica afí té centres si, i només si, rang*$(A) =$ *rang*$(A|L)$ i, en aquest cas, el conjunt de centres de $\mathcal{Q}$ formen una varietat lineal.

El nom de centre d'una quàdrica correspon a la propietat que satisfan aquests punts:

6.4.7 Proposició. Sigui $\mathcal{Q}$ una quàdrica afí no degenerada. $P \in \mathbb{A}^n$ és un centre de $\mathcal{Q}$ si, i només si, P és centre de simetria de $\mathcal{Q}$. És a dir, si L és una recta qualsevol per P i $L \cap \mathcal{Q} \neq 0$, aleshores $L \cap \mathcal{Q} = \{P_1, P_2\}$) i $\overrightarrow{P_1 P} = -\overrightarrow{P P_2}$.

Prova. Sigui $\overline{L}$ la completació projectiva de L i $P' = \overline{L} \cap \mathcal{A}^n_\infty$. Vegem que es compleixen les condicions per aplicar el punt (4) de la Proposició 6.2.5:

- $P \sim P'$, per la definició de centre.
- $P \notin |\overline{\mathcal{Q}}|$: en cas contrari $T_P(\overline{\mathcal{Q}}) = H_P(\overline{\mathcal{Q}}) = \mathbb{A}^n_\infty$, i, en particular, $P \in \mathbb{A}^n_\infty$, en contradicció amb que P sigui un centre.
- $P' \notin |\overline{\mathcal{Q}}|$: en cas contrari, atès que $P \notin |\overline{\mathcal{Q}}|$, la intersecció de $\overline{L}$ amb $\overline{\mathcal{Q}}$ seria un sol punt, P', i, per tant, $L \cap |\mathcal{Q}| = \emptyset$, en contra de la hipòtesi.

Per tant, la intersecció $L \cap \mathcal{Q}$ està formada per dos punts P_1, P_2 i se satisfà

$$(P_1, P_2, P, P') = -1.$$

Per la Proposició 4.5.9, la raó simple de P_1, P_2, P és -1, és a dir, $\overrightarrow{P_1P} = -\overrightarrow{PP_2}$. ◇

6.4.8 Proposició. Sigui $\mathcal{Q}$ una quàdrica afí amb centre. Aleshores, hi ha una referència afí tal que l'equació de $\mathcal{Q}$ és

$$cz_0^2 + d_1x_1^2 + \cdots + d_rx_r^2 = 0,$$

amb $d_i \neq 0$.

Prova. En la demostració de la Proposició 6.4.5, podem escollir un centre de $\mathcal{Q}$ com el punt P_0. ◇

En la demostració de la Proposició 6.4.5 hem vist que el valor de c va variant al llarg de la prova, per la qual cosa pot donar-se el cas que s'anul·li, cas en què el centre P_0 és de la quàdrica. Distingirem el cas $c = 0$ del cas $c \neq 0$ establint dos tipus de quàdriques amb centre:

Tipus I	$d_1z_1^2 + \cdots + d_rz_r^2 = 0$	
Tipus II	$cz_0^2 + d_1z_1^2 + \cdots + d_rz_r^2 = 0$	$c \neq 0$

6.4.9 *Quàdriques sense centre.* Suposem ara que $\mathcal{Q}$ no té centres.

6.4.10 Proposició. Sigui $\mathcal{Q}$ una quàdrica sense centre. Hi ha una referència afí en la qual l'equació de $\mathcal{Q}$ és

$$d_1z_1^2 + \cdots + d_rz_r^2 + 2z_0z_n = 0,$$

amb $d_1, \ldots, d_r$ no nuls.

Prova. En l'expressió obtinguda a la Proposició 6.4.5, hi haurà un $b'_i \neq 0$, que podem suposar que és b'_n. Definim una nova referència mitjançant les equacions

$$z'_0 = z_0, \ \dots, \ z'_{n-1} = z_{n-1}, \ z'_n = \frac{c}{2} z_0 + b_{r+1} z_{r+1} + \cdots + b_n z_n,$$

d'on resulta la proposició. ◇

L'equació reduïda que hem obtingut per a les quàdriques sense centre direm que és de tipus III:

$$\text{Tipus III} \quad d_1 z_1^2 + \cdots + d_r z_r^2 - 2 z_0 z_n = 0.$$

Resumint, hem provat:

6.4.11 Proposició. Tota quàdrica afó $\mathcal{Q}$ de $\mathbb{A}^n$ és afinment equivalent a una quàdrica d'un dels tres tipus:

$$\begin{array}{ll} \text{Tipus I} & d_1 z_1^2 + \cdots + d_r z_r^2 = 0 \\ \text{Tipus II} & c z_0^2 + d_1 z_1^2 + \cdots + d_r z_r^2 = 0 \\ \text{Tipus III} & d_1 z_1^2 + \cdots + d_r z_r^2 - 2 z_0 z_n = 0. \end{array}$$

amb $c, d_1, \dots, d_r \neq 0$. ◇

Surgeix ara la pregunta de si quàdriques de tipus diferent poden ser equivalents. Respondrem aquesta qüestió en el cas $\mathbf{k} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

Classificació de quàdriques complexes afins

Considerem el cas complex, $\mathbf{k} = \mathbb{C}$. Per la classificació de les quàdriques projectives complexes, Teorema **??**, podem escollir els coeficients $d_i = 1$.

Denotem per r el rang de $\overline{\mathcal{Q}}$ i per r_∞ el rang de $\overline{\mathcal{Q}}_\infty$. Aleshores, un càlcul immediat prova que

Tipus I	rang $\overline{\mathcal{Q}} = r$	rang $\overline{\mathcal{Q}}_\infty = r$
Tipus II	rang $\overline{\mathcal{Q}} = r + 1$	rang $\overline{\mathcal{Q}}_\infty = r$
Tipus III	rang $\overline{\mathcal{Q}} = r + 2$	rang $\overline{\mathcal{Q}}_\infty = r$

Així, la diferència $r - r_\infty$ és 0, 1 o 2 segons que la quàdrica sigui de tipus I, II o III, respectivament. Atès que per 6.4.4 r i r_∞ són invariants afins, les quàdriques de diferent tipus no són afinment equivalents. En definitiva, en coordenades afins podem concloure:

6.4.12 Teorema. Tota quàdrica afí complexa és equivalent a una única quàdrica de

$$\begin{array}{lr} \text{Tipus I} & x_1^2+\cdots+x_r^2=0 \\ \text{Tipus II} & x_1^2+\cdots+x_r^2+1=0 \\ \text{Tipus III} & x_1^2+\cdots+x_r^2-2x_n=0 \end{array}$$

on $r = \operatorname{rang} \overline{\mathcal{Q}}_\infty$. ◇

Classificació de quàdriques reals afins

En el cas real, $\mathbf{k} = \mathbb{R}$ podem raonar de forma anàloga a com ho hem fet en el cas complex, tenint en compte ara que els invariants d'una forma quadràtica real són el rang i l'índex, i concloure:

6.4.13 Teorema. Tota quàdrica afí real és equivalent a una única quàdrica de

$$\begin{array}{lll} \text{Tipus I} & x_1^2+\cdots+x_k-x_{k+1}-\cdots-x_r^2=0 & k\geq r-k, 1\leq r\leq n, \\ \text{Tipus II} & x_1^2+\cdots+x_k-x_{k+1}-\cdots-x_r^2+1=0 & 0\leq k\leq r, 0\leq r<n, \\ \text{Tipus III} & x_1^2+\cdots+x_k^2-x_{k+1}^2-\cdots-x_r^2-2x_n=0, & k\geq r-k, 0\leq r>n. \end{array}$$

◇

◇

En ambdós casos podem enunciar el resultat en la forma següent:

6.4.14 Teorema. Siguin $\mathcal{Q}, \mathcal{Q}'$ dues quàdriques afins, $\mathbf{k} = \mathbb{R}$ o $\mathbf{k} = \mathbb{C}$. Aleshores,

$$\mathcal{Q} \sim \mathcal{Q}' \iff \overline{\mathcal{Q}} \sim \overline{\mathcal{Q}'} \text{ i } \overline{\mathcal{Q}}_\infty \sim \overline{\mathcal{Q}'}_\infty.$$ ◇

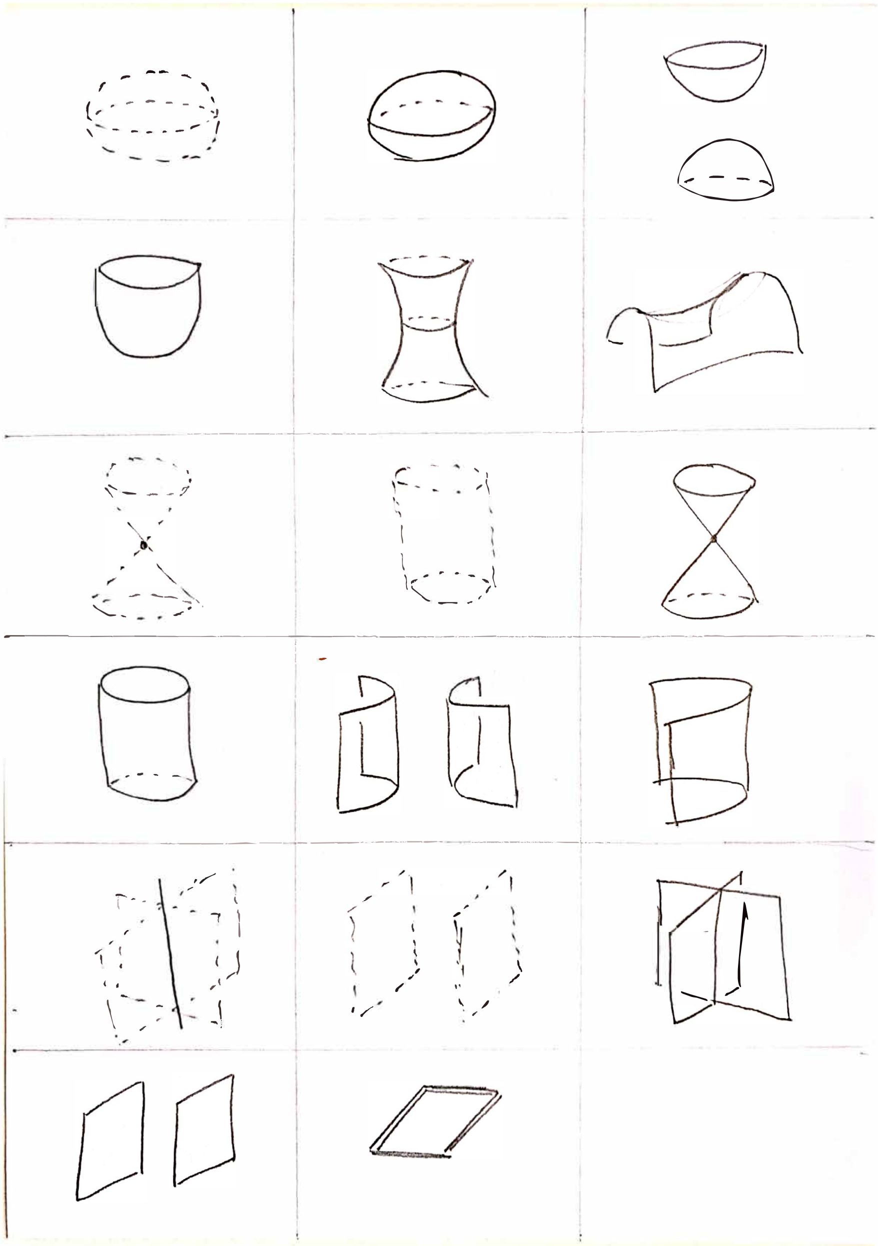
Per tant, els nombres r, i, r_∞, i_∞ formen un sistema d'invariants complet de les quàdriques afins reals. En els quadres següents fem un llistat complet de les còniques de $\mathbb{R}^2$ i les quàdriques de $\mathbb{R}^3$.

6.4.15 En el cas de les còniques del pla $\mathbb{R}^2$, retrobem les còniques analitzades a l'assignatura de Geometria Afí i Euclidiana:

r	i	r_∞	i_∞	Equació	Nom
3	0	2	0	$x^2 + y^2 + 1 = 0$	Imaginària
3	1	2	0	$x^2 + y^2 - 1 = 0$	El·lipse
3	1	2	1	$x^2 - y^2 - 1 = 0$	Hipèrbola
3	1	1	0	$x^2 + 2y = 0$	Paràbola
2	0	2	0	$x^2 + y^2 = 0$	Dues rectes imaginàries, punt real
2	0	1	0	$x^2 + 1 = 0$	Imaginària
2	1	2	1	$x^2 - y^2 = 0$	Dues rectes concurrents
2	1	1	0	$x^2 - 1 = 0$	Dues rectes paral·leles
1	0	1	0	$x^2 = 0$	Recta doble

6.4.16 Pel que fa a les quàdriques afins de $\mathbb{R}^3$:

r	i	r_∞	i_∞	Equació	Nom
4	0	3	0	$x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$	Imaginària
4	1	3	0	$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$	El·lipsoide
4	1	3	1	$x^2 + y^2 - z^2 + 1 = 0$	Hiperboloide de dos full
4	1	2	0	$x^2 + y^2 + 2z = 0$	Paraboloide el·líptic
4	2	3	1	$x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0$	Hiperboloide d'un fulls
4	2	2	1	$x^2 + y^2 + 2z = 0$	Paraboloide hiperbòlic
3	0	3	0	$x^2 + y^2 + z^2 = 0$	Con imaginari de vèrtex real
3	0	2	0	$x^2 + y^2 + 1 = 0$	Cilindre imaginari
3	1	3	1	$x^2 + y^2 - z^2 = 0$	Con
3	1	2	0	$x^2 + y^2 - 1 = 0$	Cilindre el·líptic
3	1	2	1	$x^2 - y^2 + 1 = 0$	Cilindre hiperbòlic
3	1	1	0	$x^2 + 2y = 0$	Cilindre parabòlic
2	0	2	0	$x^2 + y^2 = 0$	Plans imaginaris amb eix real
2	0	1	0	$x^2 + 1 = 0$	Plans imaginaris paral·lels
2	1	2	1	$x^2 - y^2 = 0$	Dos plans concurrents
2	1	1	0	$x^2 - 1 = 0$	Dos plans paral·lels
1	0	1	0	$x^2 = 0$	Pla doble



Bibliografia

Aquesta assignatura té dues parts ben diferenciades, una algebraica i l'altra geomètrica, cosa que es reflecteix també en una bibliografia que he dividit en diversos blocs.

En primer lloc, fem referència als apunts i notes de classe dels professors que han impartit l'assignatura, que cobreixen tot el programa de l'assignatura llevat de la Forma de Jordan, que anteriorment s'havia introduït a l'assignatura d'Àlgebra Lineal de primer curs.

[B] M. A. Barja. Álgebra Multilineal y Geometría Proyectiva. Notas de clase de O. Benedito, E. Lanchares y M. Ortega. 2018.
https://dafme.upc.edu/ca/apunts/apunts-gm

[Pl] F. Planas, Àlgebra Multilineal i Geometria. Apunts de classe. 2014.
https://web.mat.upc.edu/francesc.planas/

Pel que fa a l'Àlgebra Lineal i Multilineal, dues referències estàndard del nostre entorn són:

[CL] M. Castellet, I. Llerena. Àlgebra i Geometria. Manuals de la UAB. 4t ed. 2009. (Hi ha traducció al castellà de la 1a edició, Ed. Reverté, 1991).

[Pu] F. Puerta. Àlgebra Lineal. Edicions UPC, 2005.

I per profunditzar en els tensors i les seves aplicacions:

[J] N. Jeevanjee. An introduction to Tensors and Group Theory for Physicists. Birkhäuser. 2015.

[L] J. M. Landsberg. Tensors. Geometry and Applications. Graduate Studies in Mathematics. American Math. Society. 2012.

Si ens referim a la Geometria Projectiva, podeu consultar un tractament similar al que hem fet (amb molts més resutats en alguns casos) als textos:

[C] E. Casas. Analytic Projective Geometry. EMS Textbooks in Mathematics. European Math. Soc. 2014.

[R] A. Reventós. Geometria Projectiva, Servei de Publ. de la UAB. 2000.

[X] S. Xambó. Geometria. Edicions UPC. 1997.

Hi ha diversos llibres que presenten una versió sintètica de la Geometria Projectiva, com ara:

[B] A. Seidenberg. Lectures on Projective Geometry. Dover edition. 2005.

[Ca] R. Case. Projective Geometry. An introduction. Oxford U. P. 2006.

Finalment, assenyalem un text que ha esdevingut l'estàndard de les aplicacions dels mètodes de geometria projectiva a la visió per computador:

[HZ] R. Hartley, A. Zisserman. Multiple View Geometry in Computer Vision. Cambridge U.P. 2000.