ÀLGEBRA MULTILINEAL i GEOMETRIA

1. JORDAN

Definició: un VEP generalitzat de f de VAP λ i alçada s és un vector $u \in E$ t.q

$(f-\lambda Id)^s u = 0$; $(f-\lambda Id)^{s-1} u \neq 0$

Proposició:

1) Sigui u un VEP generalitzat d'alçada s, alehores $\{u, (f-\lambda Id)u, \dots, (f-\lambda Id)^{s-1}u\}^B$ és una base de F.

Podem veure que són L.I aplicant f_λ^{s-1} a una combinació lineal dels vectors ($f_\lambda^{s-1} = (f-\lambda Id)^{s-1}$)

$\mu_0 f_\lambda^{s-1}(u) + \dots + \mu_{s-1} f_\lambda^{2s-1}(u) = 0 \Rightarrow \mu_0 f_\lambda^{s-1}(u) = 0 \Rightarrow \mu_0 = 0$; així successivament

2) Si F és el subespai que generen, F és f-inv ; $M_B(f|_F) = \begin{pmatrix} \lambda & & & \\ 1 & \lambda & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda \end{pmatrix}$

$u_0 = u$ $\quad u_1 = f_\lambda(u_0)$ $\quad \dots \quad u_{s-1} = f_\lambda^{s-1}(u_{s-2})$ $\quad f(u_i) \in F$? $\quad f_\lambda(u_i) = u_{i+1} \Rightarrow f(u_i) - \lambda u_i = u_{i+1} \Rightarrow$

$f(u_i) = u_{i+1} + \lambda u_i \in F$ per $i \neq s-2$ $\quad f(u_{s-1}) = \lambda u_{s-1}$

Calcular potències de Matrius: Sigui $A = S^{-1} J S \Rightarrow A^k = S^{-1} J^k S$.

$J^k = (D+N)^k = \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} D^p N^{k-p}$ $\quad$ Sabem que N és nilpotent $\Rightarrow N^n = 0$ ($n = \#$ 1's seguits $+1$)

$D^p = diag(\lambda_i^p)$. Per tant si J_λ és un bloc de Jordan de VAP λ $\quad J_\lambda(n)^k = \begin{pmatrix} \lambda^k & & & \\ k\cdot\lambda^{k-1} & \lambda^k & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \binom{k}{n}\lambda^{k-n} & \dots & & \lambda^k \end{pmatrix}$

2. TENSORS

Definició: $A: T_p(E) \longrightarrow T_p(E)$ el morfisme d'antisimetrització de tensors t.q

$A(f) = \frac{1}{p!} \sum_{s \in S_p} \varepsilon(s) s(f)$ $\quad$ on $s(f)(v_1, \dots, v_p) = (w_1 \otimes \dots \otimes w_p)(v_{s(1)}, \dots, v_{s(p)}) = (w_{s^{-1}(1)} \otimes \dots \otimes w_{s^{-1}(p)})(v_1, \dots, v_n)$

↳ **Propietats:**

1) lineal
2) $Im(A) = A_p(E)$
3) $f \in A_p(E) \Rightarrow A(f) = f$ $\quad (A^2 = A)$

Definició: $f \in A_p(E)$ $g \in A_q(E)$ el **producte exterior** $\wedge$:

$$f \wedge g = \frac{(p+q)!}{p!\,q!} A(f \otimes g)$$

Càlcul del p.e de p elements del dual: $w_1, \dots, w_p \in T_1(E) = E^*$, $w_1 \wedge \dots \wedge w_p = p!\, A(w_1 \otimes \dots \otimes w_p) =$

$$= p! \frac{1}{p!} \sum_{s \in S_p} \varepsilon(s)\, w_{s^{-1}(1)} \otimes \dots \otimes w_{s^{-1}(p)}$$

Acció sobre p vectors: $(w_1 \wedge \dots \wedge w_p)(u_1, \dots, u_p) = \det(w_j(u_i)) = \begin{pmatrix} w_1(u_1) & \cdots & w_n(u_1) \\ \vdots & & \vdots \\ w_1(u_n) & \cdots & w_n(u_n) \end{pmatrix}$

Teorema: Si E ev, $B = \{e_i\}$: base d'E, $\{e^i\}$: base d'E^*. Tenim que

1) $\dim A_p(E) = \binom{n}{p}$

2) $\{e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_p}\}$ amb i_k estr. creix. formen una base de $A_p(E)$

3) Les coordenades de $w \in A_p$ venen donades per $(w(e_{i_1}, \dots, e_{i_p})) = \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_p \le n} \lambda_{i_1, \dots, i_p} e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_p}$

$2 \Rightarrow 1)$ Trivial ja que agafat un subconjunt de $\{1, \dots, n\}$ imposem directament un ordre

2) observació: Sigui $I = \{i_1, \dots, i_p\}$ i $J = \{j_1, \dots, j_p\}$ i_k, j_k estr. creix

$$\varepsilon_{IJ} = (e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_p})(e_{j_1}, \dots, e_{j_p}) = \begin{cases} 1 & I = J \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$$

(LI) Sigui $w = \sum_{\substack{I = \{i_1, \dots, i_p\} \\ i_k \text{ estr. creix}}} \lambda_I e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_p} = 0$. Sigui $I^0 = \{i_1^0, \dots, i_p^0\}$ i_k^0 estr. creix qualsevol. Llavors

$$0 = w(e_{i_1}^0, \dots, e_{i_p}^0) = \sum_{\substack{I = \{i_1, \dots, i_p\} \\ i_k \text{ estr. creix}}} \lambda_I e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_p}(e_{i_1}^0, \dots, e_{i_p}^0) \overset{\text{obs.}}{=} \lambda_{I^0} \Rightarrow \lambda_{I^0} = 0 \Rightarrow LI$$

observació: $w_1 \wedge \dots \wedge (\alpha_i \bar{w}_i + \beta_i \bar{\bar{w}}_i) \wedge \dots \wedge w_p = \alpha_i (w_1 \wedge \dots \wedge \bar{w}_i \wedge \dots \wedge w_p) + \beta_i (w_1 \wedge \dots \wedge \bar{\bar{w}}_i \wedge \dots \wedge w_p)$

(Generadors) $A_p(E) = A(T_p(E)) = A_p([e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_p}]_I) = [\{e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p}\}_I] \overset{\text{obs}}{=} [\{e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p}\}_{I \text{ ordenat}}]$

3) Sigui $w \in A_p(E)$. Considerem

$$\tilde{w} = \sum_{\substack{I = \{i_1, \dots, i_p\} \\ i_k \text{ estr. creix}}} (w(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}))\, e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_p} \quad \text{Veurem } \tilde{w} = w$$

Com tensors, n'hi ha prou en veure que coincideixen sobre vectors $(e_{j_1}, \dots, e_{j_p})$. Com que els dos són alternats, podem suposar $1 \le j_1 < \dots < j_p \le n$. Llavors,

$$\tilde{w}(e_{j_1}, \dots, e_{j_p}) = w(e_{j_1}, \dots, e_{j_p})$$

③ RAÓ DOBLE

Definició: Siguin $p_1, \dots, p_4 \in \mathbb{P}^1$ (com a mínim 3 d'ells diferents) R una referència a $\mathbb{P}^1$ i $(p_i)_R = (x_i : y_i)$

La **raó doble** (cross ratio) de $p_1, \dots, p_n$ és:

$$(p_1, p_2, p_3, p_4) = \frac{\begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_3 & x_2 \\ y_3 & y_2 \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} x_4 & x_1 \\ y_4 & y_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_4 & x_2 \\ y_4 & y_2 \end{vmatrix}}$$

Observació: La raó doble no depen del sistema de coordenades

Sigui R' una altra referència $(p_i)_{R'} = (z_i : t_i)$

$$S\begin{pmatrix} z_i \\ t_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} \Longrightarrow S\begin{pmatrix} z_i & z_j \\ t_i & t_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_i & x_j \\ y_i & y_j \end{pmatrix} \Longrightarrow \det S \cdot \begin{vmatrix} z_i & z_j \\ t_i & t_j \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_i & x_j \\ y_i & y_j \end{vmatrix} \Longrightarrow$$

matriu de canvi de base

$$\frac{\begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_3 & x_2 \\ y_3 & y_2 \end{vmatrix}} = \frac{\det S \cdot \begin{vmatrix} z_3 & z_1 \\ t_3 & t_1 \end{vmatrix}}{\det S \cdot \begin{vmatrix} z_3 & z_2 \\ t_3 & t_2 \end{vmatrix}}$$

Definició: La **coordenada absoluta** de $x = (x_0 : x_1)$ és $\alpha_x = \frac{x_0}{x_1}$.

posem un 1

Observació: • $(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{\alpha_3 - \alpha_1}{\alpha_3 - \alpha_2} : \frac{\alpha_4 - \alpha_1}{\alpha_4 - \alpha_2}$

• En la referència $\{p_1, p_2, p_3\}$, $(p_1, p_2, p_3, p) = \alpha_p$

Teorema: Sigui $f : \mathbb{P} \to \mathbb{P}'$ espais projectius de dimensió 1. f inj i conserva raons dobles $\Longrightarrow$ f projectivitat

Sigui $R = \{p_1, p_2, p_4\}$ referència de $\mathbb{P}$. Per ser f injectiva tenim que $R' = \{f(p_1), f(p_2), f(p_4)\}$ és referència de $\mathbb{P}'$.

Definim $g : \mathbb{P} \to \mathbb{P}'$ l'única projectivitat t.q. $g(R) = R'$, veiem $f = g$

Com que f manté raons dobles i per ser g projectivitat, tenim

$\forall q \in \mathbb{P}$ $\quad (p_1, p_2, p_4, q) = (f(p_1), f(p_2), f(p_4), f(q)) = (g(p_1), g(p_2), g(p_4), g(q)) \Longrightarrow$

coordenada absoluta de $f(q) = g(q) \Rightarrow f(q) = g(q) \Rightarrow f = g$.

4. PONCELET

Definició: Una **projectivitat** és una aplicació f entre dos espais projectius bijectiva si:
$\exists \varphi : E \to \bar{E}$ t.q. $f = [\varphi]$ $\quad (f : \mathbb{P}(E) \to \mathbb{P}(\bar{E}))$

Definició: Siguin V_1, V_2 varietats projectives de $\mathbb{P}^n$ de dimensió d i W és complementària a V_1 i V_2 t.q. $W \cap V_1 = \emptyset$ i $W \cap V_2 = \emptyset$ $(\dim W = n-d-1)$. Una **perspectivitat d'eix W** és

$$\pi_W : V_1 \longrightarrow V_2$$
$$p \longmapsto \pi_W(p) = (W \vee p) \cap V_2$$

Teorema (Poncelet): Siguin $V_1, V_2 \subseteq \mathbb{P}^n$ de dimensió d. Qualsevol projectivitat $f : V_1 \to V_2$ pot ser escrita com a composició de perspectivitats.

Lema 1: r, s rectes a $\mathbb{P}^2$ $f : r \to s$ projectivitat. Sigui $O = r \cap s$, f perspectivitat $\Leftrightarrow f(O) = O$

Lema 2: r, s rectes a $\mathbb{P}^2$. $f : r \to s$ projectivitat. Sigui $O = r \cap s$, $f(O) \neq O \Rightarrow f$ és composició de dues perspectivitats

Lema 3: ℓ_1, ℓ_2 rectes disjuntes a $\mathbb{P}^3$ i $p \notin \ell_1 \cup \ell_2 \Rightarrow \exists!\, s$ recta que passa per p i talla ℓ_1 i ℓ_2.
I $s = (p \vee \ell_1) \cap (p \vee \ell_2)$

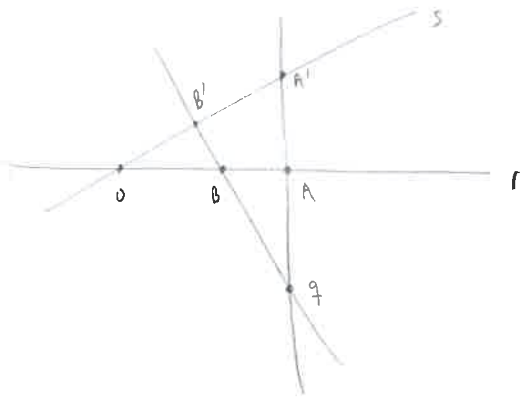
Lema 1:

$\Rightarrow)$ Sigui $W = q$ el centre de f. Llavors $f : r \to s$, $p \mapsto pq \cap s$. Llavors, $f(O) = Oq \cap s = O$

$\Leftarrow)$ Siguin $A, B \in r \setminus \{O\}$ diferents. Siguin $A' = f(A)$ i $B' = f(B)$. Llavors, $\mathcal{R} = \{A, A'; O\}$, $\mathcal{R}' = \{B, B'; O\}$ són referències de r i s respectivament. La segona ho és per ser f inj i $A', B' \neq O$ i $A' \neq B'$ per la mateixa raó.

Sigui $q = AA' \cap BB'$ que existeix p.q en el pla dues rectes es tallen. Sigui $g : r \to s$ perspectivitat d'eix $W = \{q\}$. Per construcció:

$g(O) = O = f(O)$; $g(A) = A' = f(A)$; $g(B) = B' = f'(B) \Rightarrow g(\mathcal{R}) = f(\mathcal{R}) \Rightarrow g = f$ per ser projectivitats.



Lema 2!

Siguin $A, B, C \in r$ (diferents dos a dos i $\neq O$). En conseqüència $R=\{A,B;C\}$ són referència de r.

Sigui $f(A)=A'$, $f(B)=B'$ i $f(C)=C'$. Podem assegurar que $A', B', C' \neq O$ si prenem A, B, C adequats.

Prenem una recta a que passi per A' i per cap altre punt. Prenem $P \in AA'$.

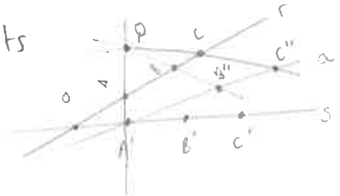
Sigui $B''=PB\cap a$, $C''=PC\cap a$. Llavors per construcció, $g: r\to a$ és una perspectivitat d'eix O

i $\tilde{g}: a \to s$ és una perspectivitat pel lema 1.

És a dir,

$$\begin{array}{ccccc} r & \xrightarrow{g} & a & \xrightarrow{\tilde{g}} & s \\ A & & A' & & A' \\ B & & B'' & & B' \\ C & & C'' & & C' \end{array}$$

Llavors $G=\tilde{g}\circ g$ és composició de dues perspectivitats. A més, $G(A)=A'=f(A)$, $G(B)=B'=f(B)$ i $G(C)=C'=f(C)$. Per tant, f és composició de dues perspectivitats.



Lema 3!

Anem a veure que s és una recta:

$\dim(\ell_1 \vee \ell_2) = \dim \ell_1 + \dim \ell_2 - \dim \ell_1\cap\ell_2 = 1+1-(-1) = 3$

$\dim((\ell_1\vee P)\cap(\ell_2\vee P)) = \dim(\ell_1\vee P) + \dim(\ell_2\vee P) - \dim((\ell_1\vee P)\vee(\ell_2\vee P)) = 2+2-3 = 1 \Rightarrow s$ és una recta

Anem a veure que s satisfà les propietats necessàries:

- $\to p\in(\ell_1\vee P)$, $p\in(\ell_2\vee P) \Rightarrow p\in s$
- $\to \ell_1, s \subseteq (\ell_1\vee p) \Rightarrow \ell_1$ i s estan al mateix pla i s'intersequen
- $\to$ Anàlogament $s\cap\ell_2\neq\emptyset$

Suposem que $\exists r$ que satisfà les mateixes propietats. Si $r\neq s$, això voldria dir que ℓ_1 i ℓ_2 són coplanàries i per tant $\ell_1\cap\ell_2\neq\emptyset$ que no passa p.q. ℓ_1 i ℓ_2 són disjuntes. Per tant, $\exists! s$ que satisfà les propietats.

Poncelet $n=3$

"$L_1, L_2 \subseteq \mathbb{P}^3$ rectes disjuntes i $f: L_1\to L_2$ projectivitat $\Rightarrow f$ perspectivitat"

Prenem $A, B, C\in L_1$ t.q. $R=\{A,B;C\}$ és referència de L_1, $R'=\{A',B',C'\}$ les imatges per f d'A, B, C.

Prenem $\ell_1=AA'$, $\ell_2=BB'$, $\ell_3=CC'$.

Veiem que $\ell_1\cap\ell_2=\emptyset$ i anàlogament per totes les parelles d'índexos. Suposem $\ell_1\cap\ell_2\neq\emptyset \Rightarrow \ell_1\vee\ell_2=\pi \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} A,B\in\pi \Rightarrow L_1=A\vee B\subseteq\pi \\ A',B'\in\pi \Rightarrow L_2=A'\vee B'\subseteq\pi \end{array}\right\} \Rightarrow L_1\cap L_2\neq\emptyset \text{ contradicció!}$$

Prenem $P\in\ell_1$ diferent d'A i A'. Aleshores pel lema 3, $\exists! s$ recta t.q. $P\in s$, $s\cap\ell_2=\{Q\}$ i $s\cap\ell_3=\{R\}$.

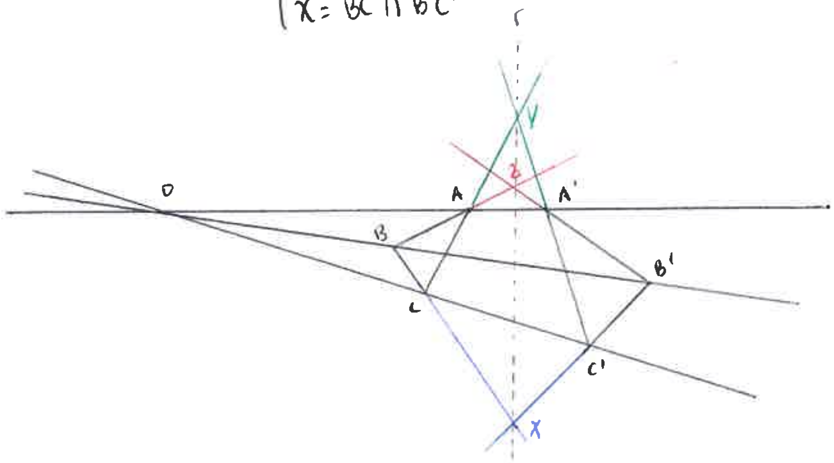
Veiem que $s\cap L_1=\emptyset=L_2\cap s$. Suposem $s\cap L_1\neq\emptyset \Rightarrow s\vee L_1=\pi' \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} A,B,C\in\pi' \\ P,Q,R\in\pi' \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \ell_1=AP\in\pi' \\ \ell_2=BQ\in\pi' \end{array}\right. \Rightarrow \ell_1\cap\ell_2\neq\emptyset$ contradicció.

Aleshores, considerem $g: L_1\to L_2$ perspectivitat d'eix s. Com que $g(A)=A'=f(A)$, $g(B)=B'=f(B)$ i $g(C)=C'=f(C)$ i f i g són projectivitats $\Rightarrow f=g \Rightarrow f$ perspectivitat.

5. DESARGUES

Teorema (Desargues): Siguin ABC i $A'B'C'$ triangles disjunts a $\mathbb{P}^2$. Llavors,

$$AA' \cap BB' \cap CC' \neq \emptyset \iff \begin{cases} Z = AB \cap A'B' \\ Y = AC \cap A'C' \\ X = BC \cap B'C' \end{cases} \text{ estan alineats}$$



$\Rightarrow$) Prenem $R = \{A, B, C; O\}$ un sistema de referència pq tots els punts són L.I.: ABC són un triangle, ABO també (sinó $AO = AB'$ (contradicció)) i anàlogament per la resta

Llavors, $A = (1\ 0\ 0)$ $B = (0\ 1\ 0)$ $C = (0\ 0\ 1)$, $O = (1\ 1\ 1)$

$A' \in OA$

$$\begin{vmatrix} x_0 & 1 & 1 \\ x_1 & 1 & 0 \\ x_2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \iff x_2 - x_1 = 0 \Rightarrow A' = (x_0 : x_1 : x_1) \quad x_1 = 0? \text{ No pq sinó } A = A' \text{ contradicció} \Rightarrow A = (a : 1 : 1)$$

Fem el mateix amb B' i C' $\Rightarrow$ $B' = (1 : b : 1)$ i $C' = (1 : 1 : c)$

Ara calculem X, Y, Z:

$X \in BC$

$$\begin{vmatrix} x_0 & 0 & 0 \\ x_1 & 1 & 0 \\ x_2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \iff x_0 = 0$$

$X \in B'C'$

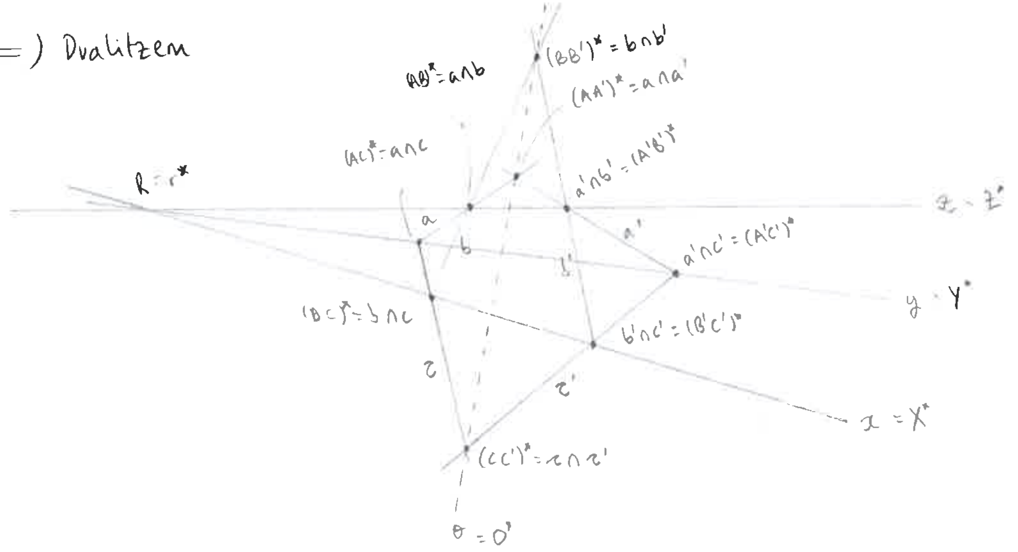
$$\begin{vmatrix} x_0 & 1 & 1 \\ x_1 & 1 & b \\ x_2 & c & 1 \end{vmatrix} = 0 \iff (bc-1)x_0 - (c-1)x_1 + (1-b)x_2 = 0$$

$X = (0 : 1-b : c-1)$

Fem el mateix amb Y i Z $\Rightarrow$ $Y = (a-1 : 0 : 1-c)$ i $Z = (a-1 : 1-b : 0)$

Observem que $Z - X = Y$ $\Rightarrow$ X, Y, Z estan alineats

$\Leftarrow$) Dualitzem



Volem veure que en efecte $(BB')^*$, $(AA')^*$ i $(CC')^*$ estan alineats. Per la primera implicació

$\exists s \subset \mathbb{P}^2$ recta t.q.

$$s = \left[[(AB)^* \vee (AC)^*] \cap [(A'B')^* \vee (A'C')^*] \right] \vee [\dots] \vee [\dots] =$$

$$= \left[(AB\cap AC)^* \cap (A'B'\cap A'C')^* \right] \vee [\dots] \vee [\dots] =$$

$$= (A\cap (A')^*) \vee (B\cap (B')^*) \vee (C\cap (C')^*) = (AA')^* \vee (BB')^* \vee (CC')^*$$

$s = (AA'\cap BB'\cap CC')^* \Rightarrow AA'\cap BB'\cap CC'$ és un punt (R)

6. POLARITAT i TANGÈNCIA

Definició: Una **quàdrica** (projectiva) és una classe d'equivalència de formes quadràtiques:

$q \sim q' \Leftrightarrow \exists \lambda \neq 0 \quad q = \lambda q'$ És **degenerada** si $\det q = 0$ $\varphi(v,v)$

Definició: Els **punts d'una quàdrica** són $Q = \{p = [v] \in \mathbb{P}^n : q(v) = 0\} \subseteq \mathbb{P}^n$. Sigui $p_R = (x_0 : \dots : x_n)$

$$p \in Q \Leftrightarrow (x_0 : \dots : x_n) A \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j = 0$$

Proposició: Sigui $V \subset \mathbb{P}^n$ $V = \mathbb{P}(F)$ FCE subespai. Q quàdrica $[q]$. $q_{|F}$ defineix una quàdrica Q_F.

1) Si $q_{|F} = 0 \Rightarrow V \subset Q$
2) Si $q_{|F} \neq 0 \Rightarrow Q_F = Q \cap V$

Definició: L és **tangent a Q** si $q_{|L}$ és degenerada, és a dir, $L \subset Q$ o $L \cap Q = 1$ punt

Lema: Si $L = p \vee q$, $p = [v]$ $q = [u]$. L tg a $Q \Leftrightarrow \varphi(v,u)^2 = \varphi(u,u)\varphi(v,v) \Leftrightarrow \det B = 0$

$q_{|L}$ té matriu $B = \begin{pmatrix} \varphi(u,u) & \varphi(v,u) \\ \varphi(u,v) & \varphi(v,v) \end{pmatrix}$. L tg a Q $(x\ y) B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^2\varphi(u,u) + 2xy\,\varphi(u,v) + y^2\varphi(v,v) = 0$

Si prenem x com a variable tenim que $\det B = 0 \Leftrightarrow \varphi(v,u)^2 = \varphi(u,u)\varphi(v,v)$

Definició: $p=[u]\in Q$ és **singular** si $\varphi(u,-)=0 \iff Au=0 \iff u\in \operatorname{Nuc} A \iff u\in \operatorname{rad}\varphi$

és **regular** en cas contrari

Proposició:

1) Si $p\in Q$ és singular, tota recta de $\mathbb{P}^n$ per p és tg a p.

2) Si $p\in Q$ és regular, $T_pQ=\{p'\in\mathbb{P}^n : p\vee p' \text{ tg a } Q\}$ és un hiperplà

T_pQ: $\underset{\text{fixat}}{p=[u]}$ $\quad p'[v]$ t.q. $\det B=0$ $\quad \varphi(u,v)^2=0 \Rightarrow \varphi(u,v)=0 \Rightarrow v\in \operatorname{Nuc}\overset{\text{fix}}{\varphi(u,-)}$ $\begin{cases} =0 & \text{tot } E \\ \neq 0 & \text{hiperplà}\end{cases}$

Definició: $\underset{[u]}{p}$ i $\underset{[v]}{q}$ són **Q-conjugats (polars respecte Q)** $(p \overset{Q}{\sim} q)$ si $\varphi(u,v)=0$

Definició: Sigui $p=[u]\in\mathbb{P}^n$. La **polar per p respecte Q** és $H_p(Q)=\{q\in\mathbb{P}^n : p\overset{Q}{\sim} q\}=[\operatorname{Nuc}\varphi(u,-)]$

Propietats: Sigui $p,q\in\mathbb{P}^n$ i $Q\subset\mathbb{P}^n$ una quàdrica t.q. $B=M_R(Q\cap L)=\begin{pmatrix}\varphi(p,p) & \varphi(q,p)\\ \varphi(p,q) & \varphi(q,q)\end{pmatrix}$

1) $p\overset{Q}{\sim} p \iff p\in Q$

$p\overset{Q}{\sim} p \iff \varphi(p,p)=0 \iff p\in Q$

2) Si $p,q\in Q$. $p\overset{Q}{\sim} q \iff p\vee q\subset Q$

$L: p\vee q$ Sabem que $\varphi(p,p)=\varphi(q,q)=0$ $\quad p\overset{Q}{\sim} q \iff \varphi(p,q)=0 \iff B=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} \iff L\subset Q$

3) Si $p\in Q, q\notin Q$. $p\overset{Q}{\sim} q \iff p\vee q\in T_p(Q)$

Sabem que $\varphi(p,p)=0$ $\quad p\overset{Q}{\sim} q \iff \varphi(p,q)=0 \iff B:\begin{pmatrix}0&0\\0&c\neq 0\end{pmatrix} \iff L$ tg a Q en $p \iff L\subset T_p(Q)$

4) Si $p,q\notin Q$, $L=p\vee q$ i $L\cap Q\neq\emptyset$. $p\overset{Q}{\sim} q \iff L$ secant a Q (dos punts de tall diferent, $L\cap Q=\{i_1,i_2\}$)

i $(p,q,i_1,i_2)=-1$

$p\overset{Q}{\sim} q \iff \varphi(p,q)=0 \iff B:\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}$ $\quad a,b\neq 0$

Prenem referència t.q. $p=(1:0)$ i $q=(0:1)$. Llavors $L\cap Q=(\alpha\ \beta)\begin{pmatrix}a&\\&b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}=0 \iff \alpha^2a+\beta^2b=0$

$\beta\neq 0$ ja que $p\notin Q$. Sigui $z=\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)$ tenim $a\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2+b=0 \iff az^2+b=0 \iff z=\pm\sqrt{-b/a}$ que té dues solucions ja que $L\cap Q\neq\emptyset$ per hipòtesi

Llavors $i_1=\left(\sqrt{-b/a}:1\right)$ i $i_2=\left(-\sqrt{\frac{-b}{a}}:1\right)$ Fàcilment podem comprovar que $(p,q,i_1,i_2)=-1$

5) Fixat $p=[v]$, llavors $H_p(Q)=\{p'\in\mathbb{P}^n : p'\overset{Q}{\sim} p\}$ és un hiperplà (l'hiperplà polar a p) d'equació

$vA\begin{pmatrix}x_0\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=0.$

$p\overset{Q}{\sim} p' \iff \varphi(p,p')=0 \iff vA\begin{pmatrix}x_0\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=0$ i com $vA\neq 0$ $H_p(Q)$ és un hiperplà

Observacions:

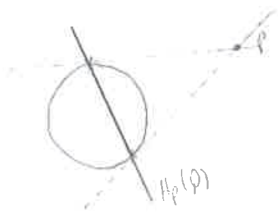
1) Si $p \in \mathcal{Q}$ llavors $H_p(\mathcal{Q}) = T_p(\mathcal{Q})$ per la propietat 3

2) Com que $p \,\mathcal{Q}\, q \Leftrightarrow q \,\mathcal{Q}\, p$, tenim que $H_p(\mathcal{Q}) = H_q(\mathcal{Q})$ per simetria.

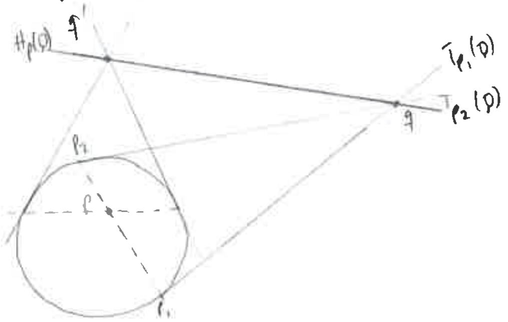
Construcció geomètrica de la polar a un punt respecte una cònica: Utilitzarem els resultats de les observacions 1 i 2.

→ $p \in \mathcal{Q}$, llavors $H_p(\mathcal{Q})$ és $T_p(\mathcal{Q})$

→ p és exterior a $\mathcal{Q}$. Trobem les dues rectes tg a $\mathcal{Q}$ i els punts d'intersecció ens defineixen $H_p(\mathcal{Q})$ que és una recta.



→ p és interior a $\mathcal{Q}$. Tracem una recta que passi per p, diguem-li r, i als punts interseccions p_1 i p_2. Trobem $T_{p_1}(\mathcal{Q})$ i $T_{p_2}(\mathcal{Q})$ i la seva intersecció ens determina un punt polar (q) a p pel resultat anterior. Fem el mateix amb una recta r' i trobem q'. Llavors, la recta definida per q i q' és $H_p(\mathcal{Q})$



7. QUÀDRIQUES

Definició: Q i Q' quàdriques de $\mathbb{P}^n$ són **equivalents** si $\exists S$ invertible t.q. $B = \rho S^t A S$ on $A = M_Q$, $B = M_{Q'}$

Tenim $\xrightarrow{e^t} A \xleftarrow{e}$, $\xleftarrow{e} S \xleftarrow{b}$, $\xrightarrow{b^t} S^t \xrightarrow{e^t}$ llavors $\xrightarrow{b^t} B \xleftarrow{b} = \xrightarrow{b^t} S^t \xrightarrow{e^t} A \xleftarrow{e} S \xleftarrow{b}$

Definició: En $\mathbb{R}$, $Q \sim Q' \iff rg(Q) = rg(Q')$ i $r^+(q) = r^+(q') \iff Q' = S^t Q S$

Llavors, les quàdriques estan classificades per les equacions reduïdes:

$$x_0^2 + \cdots + x_s^2 - x_{s-1}^2 - \cdots - x_r^2 = 0 \qquad r \geq n \quad i \quad r \geq s$$

Notació: $i(q) = \min(r^+, r^-)$ és l'índex de q.

Quàdriques a $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$

r	i	equació	nom
4	2	$x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0$	quàdrica reglada
	1	$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$	quàdrica no reglada
	0	$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$	quàdrica imaginària
3	1	$x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0$	con
	0	$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$	con imaginari amb vèrtex real
2	1	$x_0^2 - x_1^2 = 0$	dos plans
	0	$x_0^2 + x_1^2 = 0$	dos plans imag. secants en recta real
1	0	$x_0^2 = 0$	pla "doble"

depenen del pla de l'infinit

p.e.