Exercício mestrado 6

Augusto Calado Bueno (9779134) e Fernando Chiu Hsieh (9436743)

September 2020

1 Problema

Deseja-se calcular a fórmula fechada de:

$$T(1) = 5 \tag{1}$$

$$T(n) = 3T(n/2) + 3n \tag{2}$$

com $n \in \{1, 2, 4, ..., 2^i\}$

2 Método da iteração

Demonstração :

Iteração 1: $T(n) = 3T(n/2) + 3n$
Iteração 2: $T(n) = 3 * [3T(n/4) + 3n/2] + 3n = 3^2T(n/4) + 9n/2 + 3n$
Iteração 3:
$T(n) = 3 * [3 * [3T(n/8) + 3n/4] + 3n/2] + 3n = 3^3T(n/8) + 27n/4 + 9n/2 + 3n$
...
Iteração i: $T(n) = 3^iT(n/2^i) + \sum_{j=1}^{i} 3^j n/2^{j-1}$

As iterações vão acabar quando $T(n/2^i) = T(1)$, ou seja:

$$n/2^i = 1 \implies n = 2^i \implies i = log_2n$$

Substituindo $i = log_2n$ na equação da iteração i:

$$T(n) = 3^{log_2n}T(1) + 6n * ((3/2)^{log_2n} - 1)$$
$$T(n) = 5 * 3^{log_2n} + 6n * ((3/2)^{log_2n} - 1)$$

3 Método da Árvore

Nível	Numero de folhas	Somatória
0	1	3n
1	3	9n/2
2	9	27n/4
3	27	81n/8
$i-1$	3^{i-1}	$3^i n/2^{i-1}$
i	3^i	$3^i * 5$

Realizando o somatório de todos os níveis da árvore temos:

$$T(n) = 3n + 9n/2 + 27n/4 + ... + 3^i n/2^{i-1} + 3^i * 5$$
$$T(n) = \sum_{x=0}^{i-1} 3^{x+1}/2^x + 3^i * 5$$

As iterações vão acabar quando $T(n/2^i) = T(1)$, ou seja:

$$n/2^i = 1 \implies n = 2^i \implies i = log_2 n$$

Substituindo $i = log_2 n$ na equação da iteração i:

$$T(n) = 5 * 3^{log_2 n} + 6n * ((3/2)^{log_2 n} - 1)$$

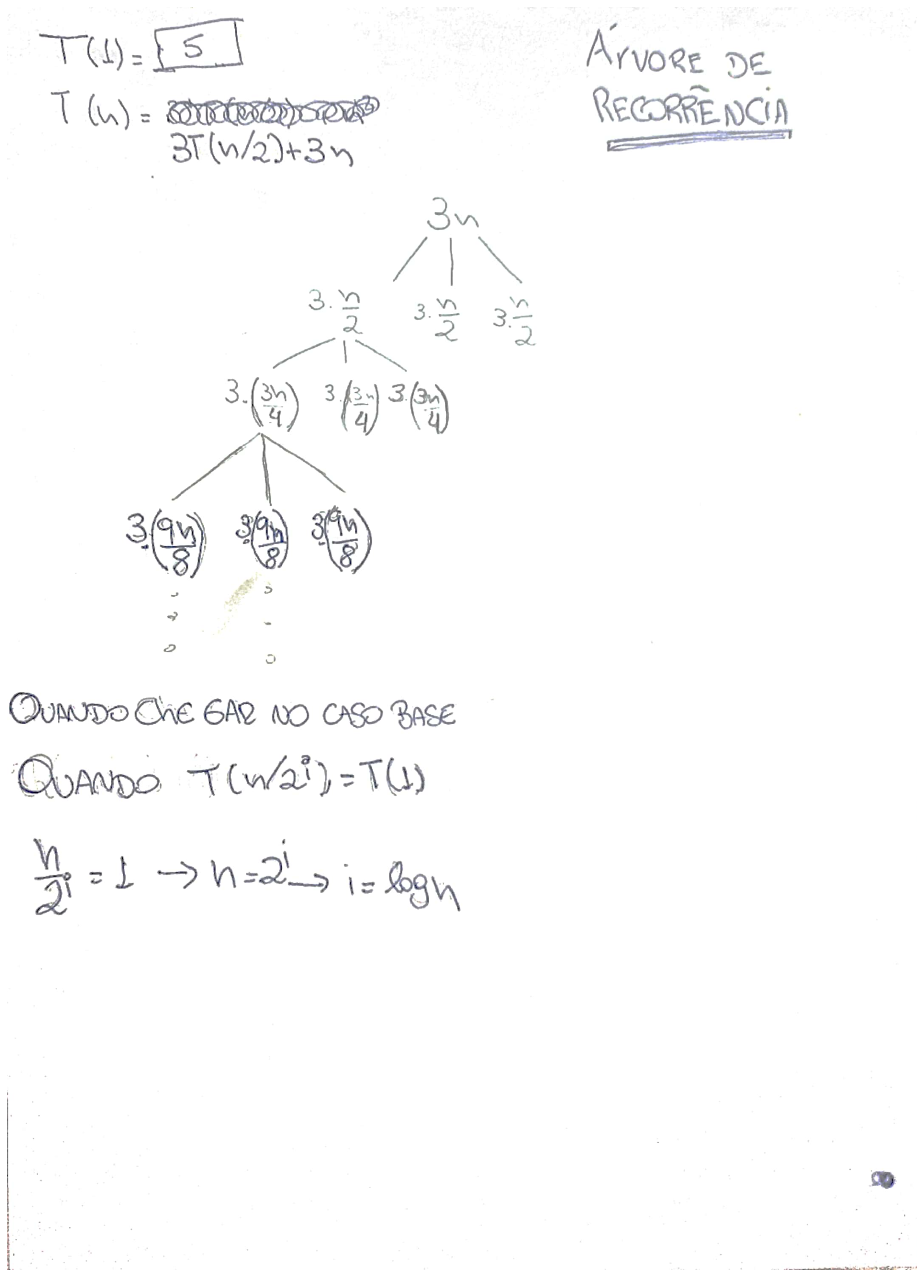

Figure 1: Árvore de recorrência

4 Método da substituição

Considerando que a fórmula encontrada acima é verdadeira:

4.1 Caso base

$$n = 1$$
$$T(1) = 3^{log_2 1} * 5 + 6n * ((3/2)^{log_2 1} - 1)$$
$$T(1) = 3^0 * 5 + 6 * (1 - 1)$$
$$T(1) = 5$$

4.2 Passo indutivo

Assumimos por hipótese de indução que a fórmula é correta para $n/2$. Assim:

$$n \geq 2$$
$$T(n) = 3T(n/2) + 3n$$
$$T(n) = 3[5 * 3^{log_2(n/2)} + 6(n/2) * ((3/2)^{log_2(n/2)} - 1)] + 3n$$
$$T(n) = 3 * 5 * 3^{log_2 n - log_2 2} + (3/2) * 6n * ((3/2)^{log_2 n - log_2 2} - 1) + 3n$$
$$T(n) = 5 * 3^{log_2 n - 1 + 1} + 6n * ((3/2)^{log_2 n - 1 + 1} - 3/2) + 3n$$
$$T(n) = 5 * 3^{log_2 n} + 6n * ((3/2)^{log_2 n} - 3/2) + 3n$$
$$T(n) = 5 * 3^{log_2 n} + 6n * (3/2)^{log_2 n} - 9n + 3n$$
$$T(n) = 5 * 3^{log_2 n} + 6n * (3/2)^{log_2 n} - 6n$$
$$T(n) = 5 * 3^{log_2 n} + 6n * ((3/2)^{log_2 n} - 1)$$