第 3 章　确定性推理方法

任课老师：董一琳

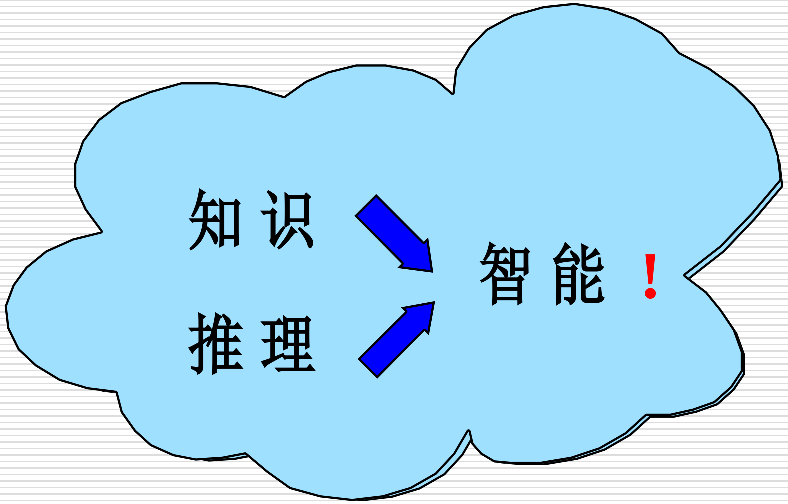
邮箱：yldong@shmtu.edu.cn

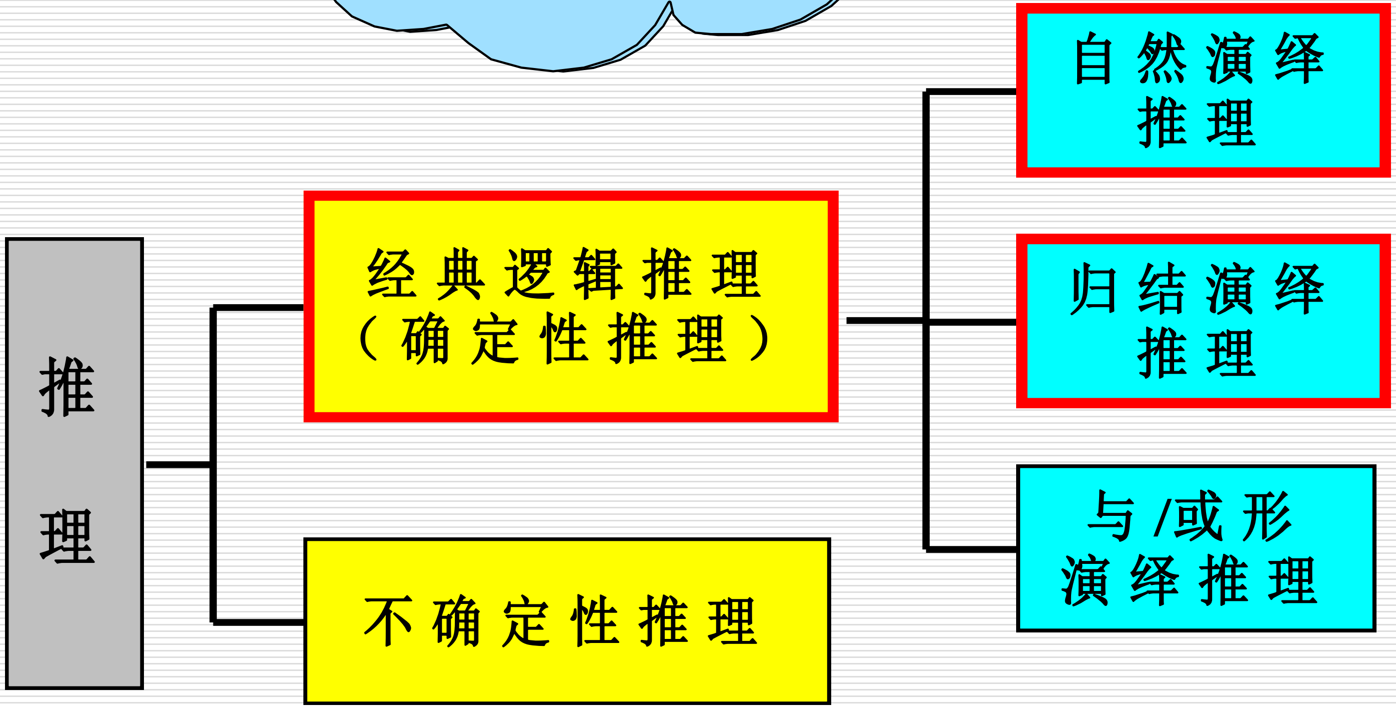
第3章 确定性推理方法

- 前面讨论了把知识用某种模式表示出来存储到计算机中去。但是，为使计算机具有智能，还必须使它具有思维能力。推理是求解问题的一种重要方法。因此，推理方法成为人工智能的一个重要研究课题。

- 下面首先讨论关于推理的基本概念，然后着重介绍几种归结原理及其在问题求解中的应用。

第3章 确定性推理方法





第3章 确定性推理方法

- 3.1 推理的基本概念
- 3.2 自然演绎推理
- 3.3 谓词公式化为子句集的方法
- 3.4 海伯伦定理
- 3.5 鲁宾逊归结原理
- 3.6 归结反演
- 3.7 应用归结反演求解问题

归结演绎推理

- ✓ 3.1 推理的基本概念
- □ 3.2 自然演绎推理
- □ 3.3 谓词公式化为子句集的方法
- □ 3.4 海伯伦定理
- □ 3.5 鲁宾逊归结原理
- □ 3.6 归结反演
- □ 3.7 应用归结反演求解问题

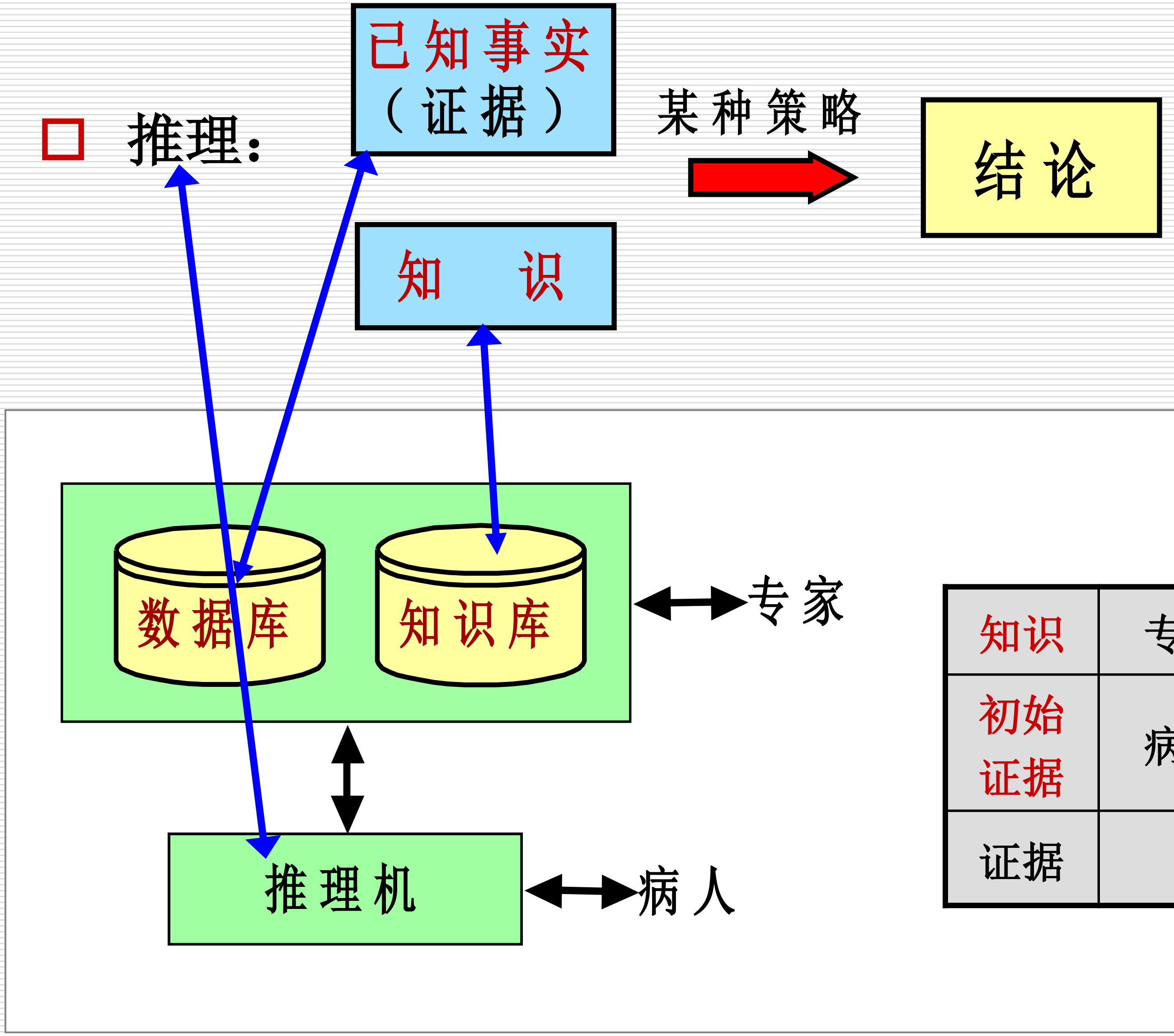
归结演绎推理

3.1 推理的基本概念

- 3.1.1 推理的定义
- 3.1.2 推理方式及其分类
- 3.1.3 推理的方向
- 3.1.4 冲突消解策略

3.1.1 推理的定义

- 推理：



医疗专家系统

知识	专家的经验、医学常识
初始证据	病人的症状、化验结果
证据	中间结论

3.1 推理的基本概念

- 3.1.1 推理的定义
- 3.1.2 推理方式及其分类
- 3.1.3 推理的方向
- 3.1.4 冲突消解策略

3.1.2 推理方式及其分类

1. 演绎推理、归纳推理、默认推理

（1）演绎推理 (deductive reasoning)：一般 → 个别

- 三段论式（三段论法）

① 足球运动员的身体都是强壮的； （大前提）

② 高波是一名足球运动员； （小前提）

---

③ 所以，高波的身体是强壮的。 （结　论）

3.1.2 推理方式及其分类

1. 演绎推理、归纳推理、默认推理

（2）归纳推理 (inductive reasoning): 个别 → 一般

- 完全归纳推理（必然性推理）
- 不完全归纳推理（非必然性推理）

检查全部产品合格 —完全归纳推理→ 该厂产品合格

检查全部样品合格 —不完全归纳推理→ 该厂产品合格

上海海事大学 SHANGHAI MARITIME UNIVERSITY

3.1.2 推理方式及其分类

1. 演绎推理、归纳推理、默认推理

（3）默认推理（default reasoning，缺省推理）

- 知识不完全的情况下假设某些条件已经具备所进行的推理。

A 成立

B 成立？ ⟹ 结 论

（默认*B*成立）

制造鸟笼

鸟会飞？ ⟹ 鸟笼要有盖子

（默认成立）

上海海事大学 SHANGHAI MARITIME UNIVERSITY

3.1.2 推理方式及其分类

2. 确定性推理、不确定性推理

（1）**确定性推理**：推理时所用的知识与证据都是确定的，推出的结论也是确定的，其真值或者为真或者为假。

（2）**不确定性推理**：推理时所用的知识与证据不都是确定的，推出的结论也是不确定的。

- 不确定性推理
  - 似然推理 （概率论）
  - 近似推理或模糊推理 （模糊逻辑）

上海海事大學 SHANGHAI MARITIME UNIVERSITY

3.1.2 推理方式及其分类

3. 单调推理、非单调推理

（1）单调推理：随着推理向前推进及新知识的加入，推出的结论越来越接近最终目标。

（2）非单调推理：[illegible]没有加强已推出的结论，反而要否定它，使推理退回到前面的某一步，重新开始。

基于经典逻辑的演绎推理

默认推理是非单调推理

***X*：鸟**	**→**	**X：不会飞**	**→**
		↑	**↗**
		X：企鹅	

3.1.2 推理方式及其分类

4. 启发式推理、非启发式推理

- **启发性知识**：与问题有关且能加快推理过程、提高搜索效率的知识。

- **目标：在脑膜炎、肺炎、流感中选择一个**
- **产生式规则**

  r_1： **脑膜炎**

  r_2： **肺 炎**

  r_3： **流 感**

- **启发式知识：“脑膜炎危险”、“目前正在盛行流感”。**

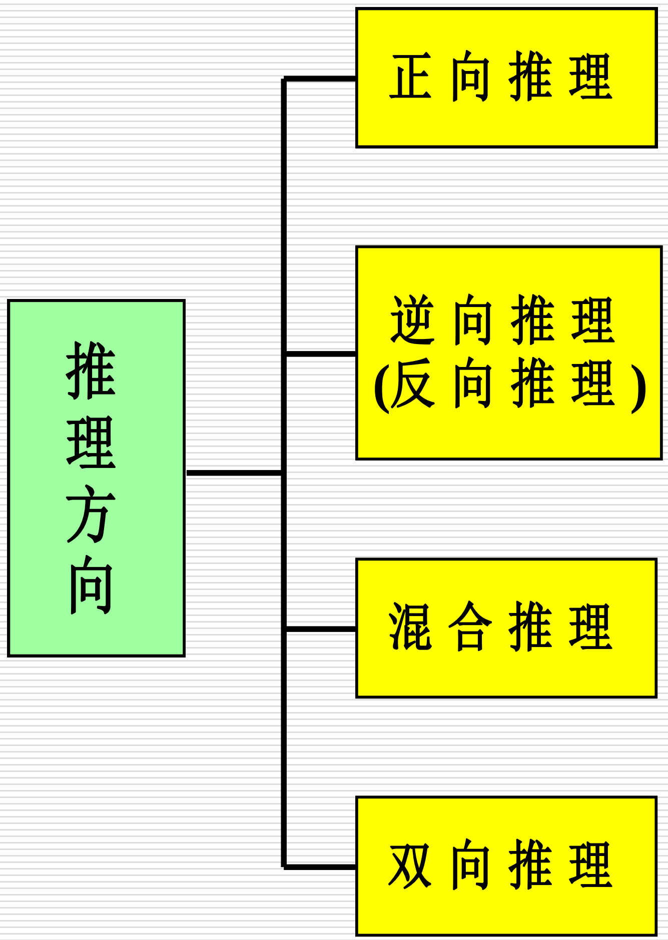
上海海事大學 Shanghai Maritime University

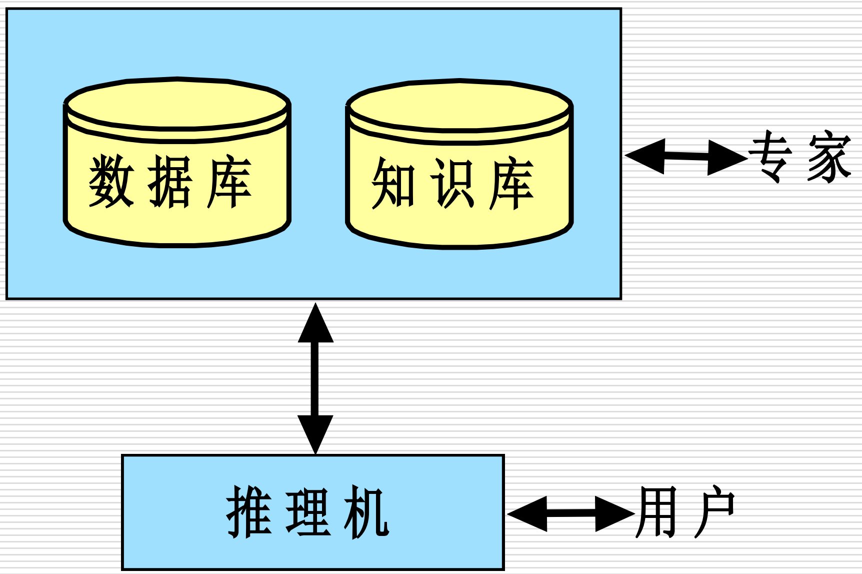
3.1 推理的基本概念

- 3.1.1 推理的定义
- 3.1.2 推理方式及其分类
- 3.1.3 推理的方向
- 3.1.4 冲突消解策略

上海海事大學 SHANGHAI MARITIME UNIVERSITY

3.1.3 推理的方向





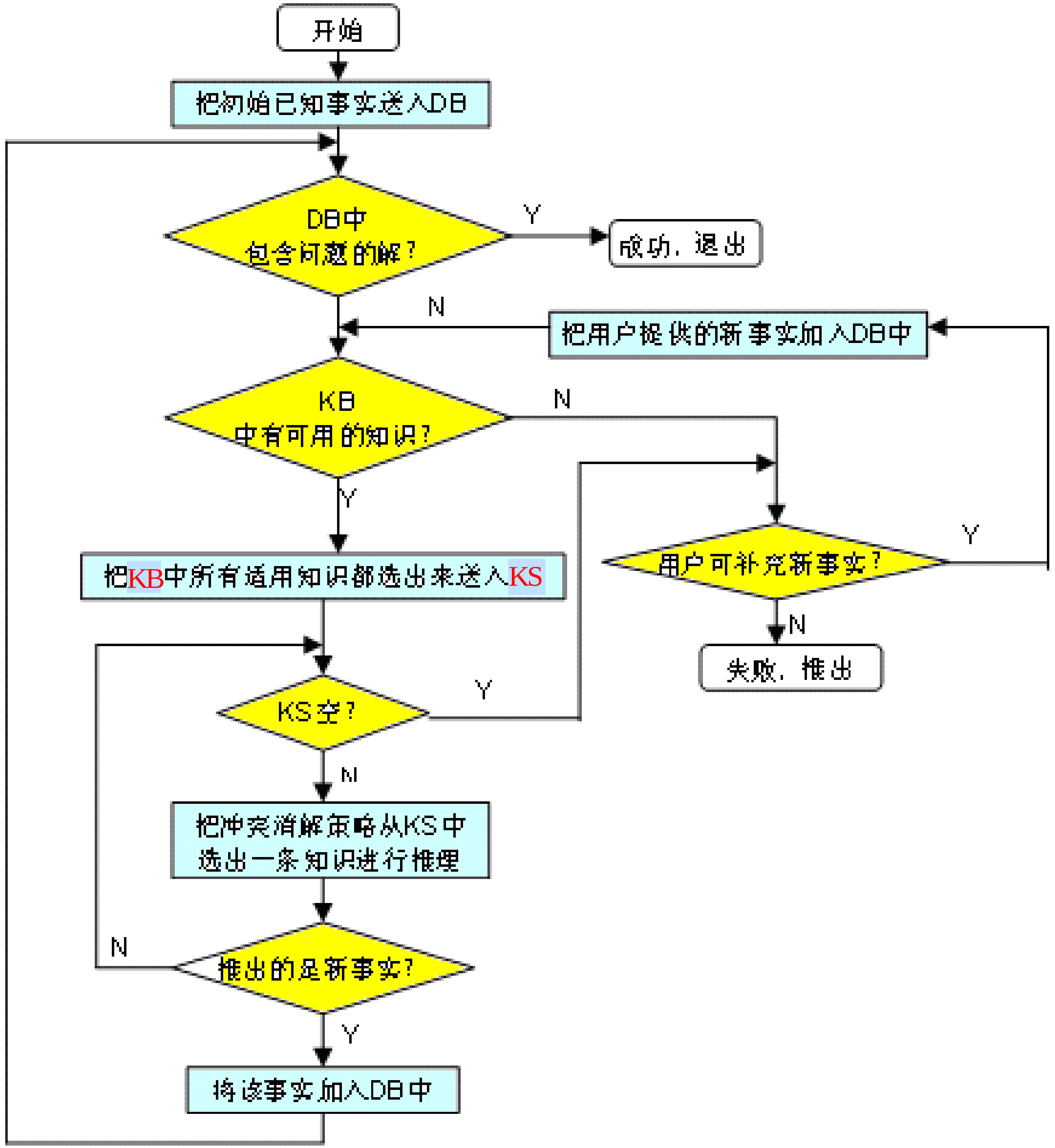
1. 正向推理

- **正向推理（事实驱动推理）：**已知事实 → 结论
- **基本思想**

（1）从初始已知事实出发，在知识库*KB*中找出当前可适用的知识，构成可适用知识集*KS*。

（2）按某种冲突消解策略从*KS*中选出一条知识进行推理，并将推出的新事实加入到数据库*DB*中作为下一步推理的已知事实，再在*KB*中选取可适用知识构成*KS* 。

（3）重复（2），直到求得问题的解或*KB*中再无可适用的知识。


开始
把初始已知事实送入DB
DB中
包含问题的解？
Y
成功，退出
N
把用户提供的新事实加入DB中
KB
中有可用的知识？
N
Y
用户可补充新事实？
Y
N
失败，推出
把KB中所有适用知识都选出来送入KS
KS空？
Y
N
把冲突消解策略从KS中
选出一条知识进行推理
推出的是新事实？
N
Y
将该事实加入DB中

3.1.3 推理的方向

1. 正向推理

- 实现正向推理需要解决的问题：
  - 确定匹配（知识与已知事实）的方法。
  - 按什么策略搜索知识库。
  - 冲突消解策略。
- 正向推理简单，易实现，但目的性不强，效率低。

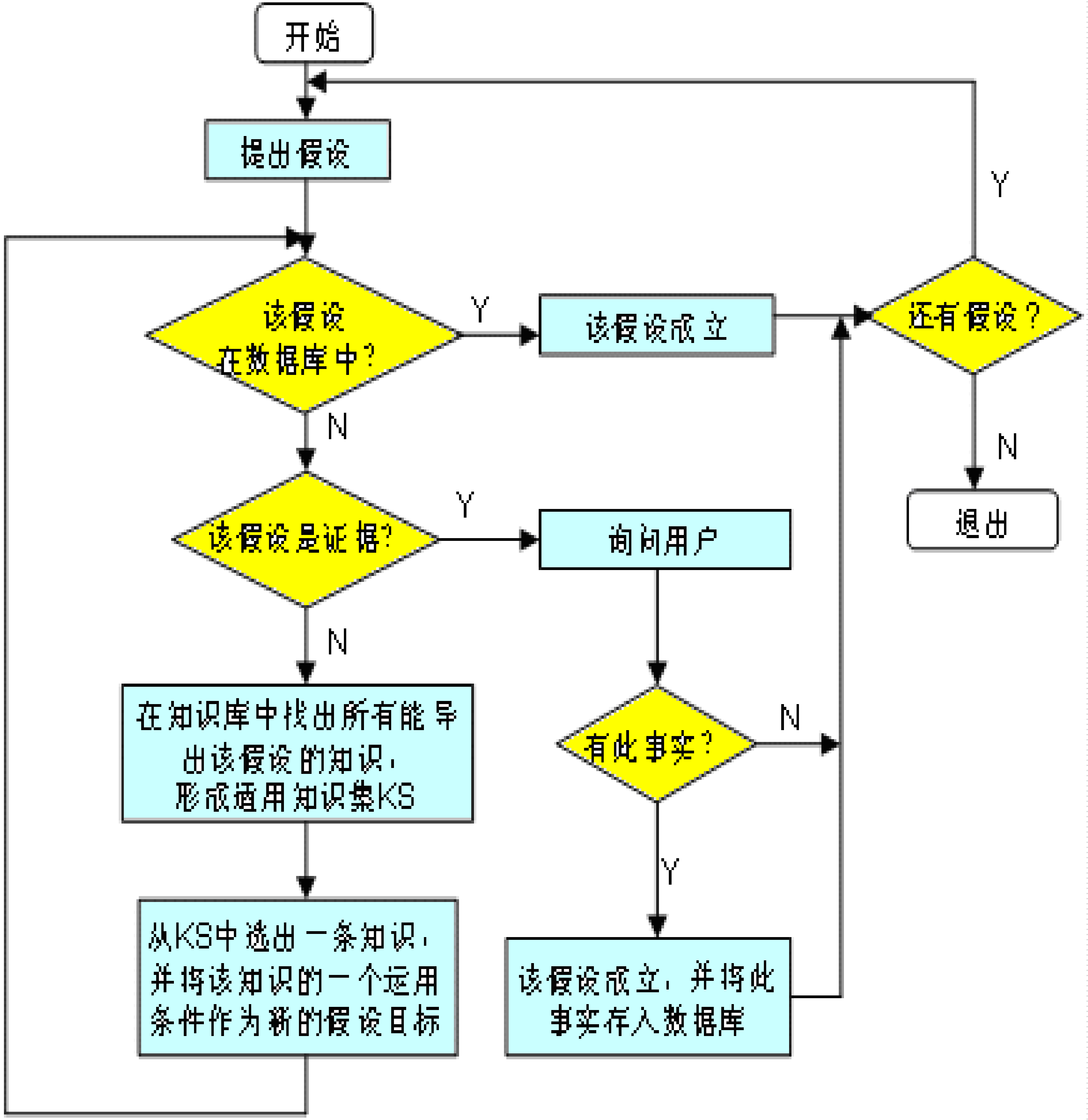
2. 逆向推理

- **逆向推理（目标驱动推理）：** 以某个假设目标作为出发点。
- **基本思想：**

➢ 选定一个假设目标。

➢ 寻找支持该假设的证据，若所需的证据都能找到，则原假设成立；若无论如何都找不到所需要的证据，说明原假设不成立的；为此需要另作新的假设。

- **主要优点：** 不必使用与目标无关的知识，目的性强，同时它还有利于向用户提供解释。
- **主要缺点：** 起始目标的选择有盲目性。



上海海事大學 SHANGHAI MARITIME UNIVERSITY

3.1.3 推理的方向

2. 逆向推理

- 逆向推理需要解决的问题：
    - 如何判断一个假设是否是证据？
    - 当导出假设的知识有多条时，如何确定先选哪一条？
    - 一条知识的运用条件一般都有多个，当其中的一个经验证成立后，如何自动地换为对另一个的验证？
    - ……..
- 逆向推理：目的性强，利于向用户提供解释，但选择初始目标时具有盲目性，比正向推理复杂。

3.1.3 推理的方向

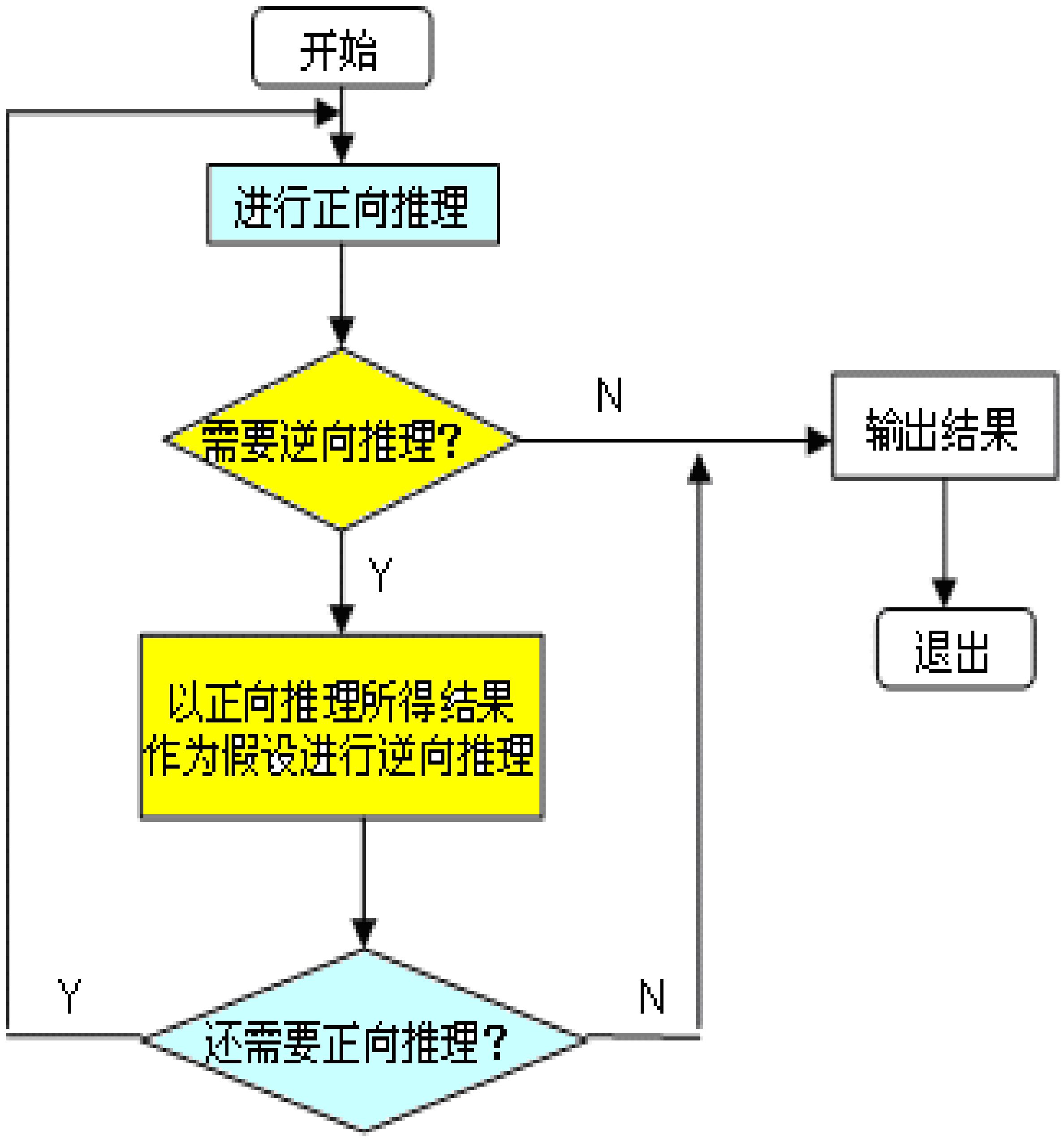
3. 混合推理

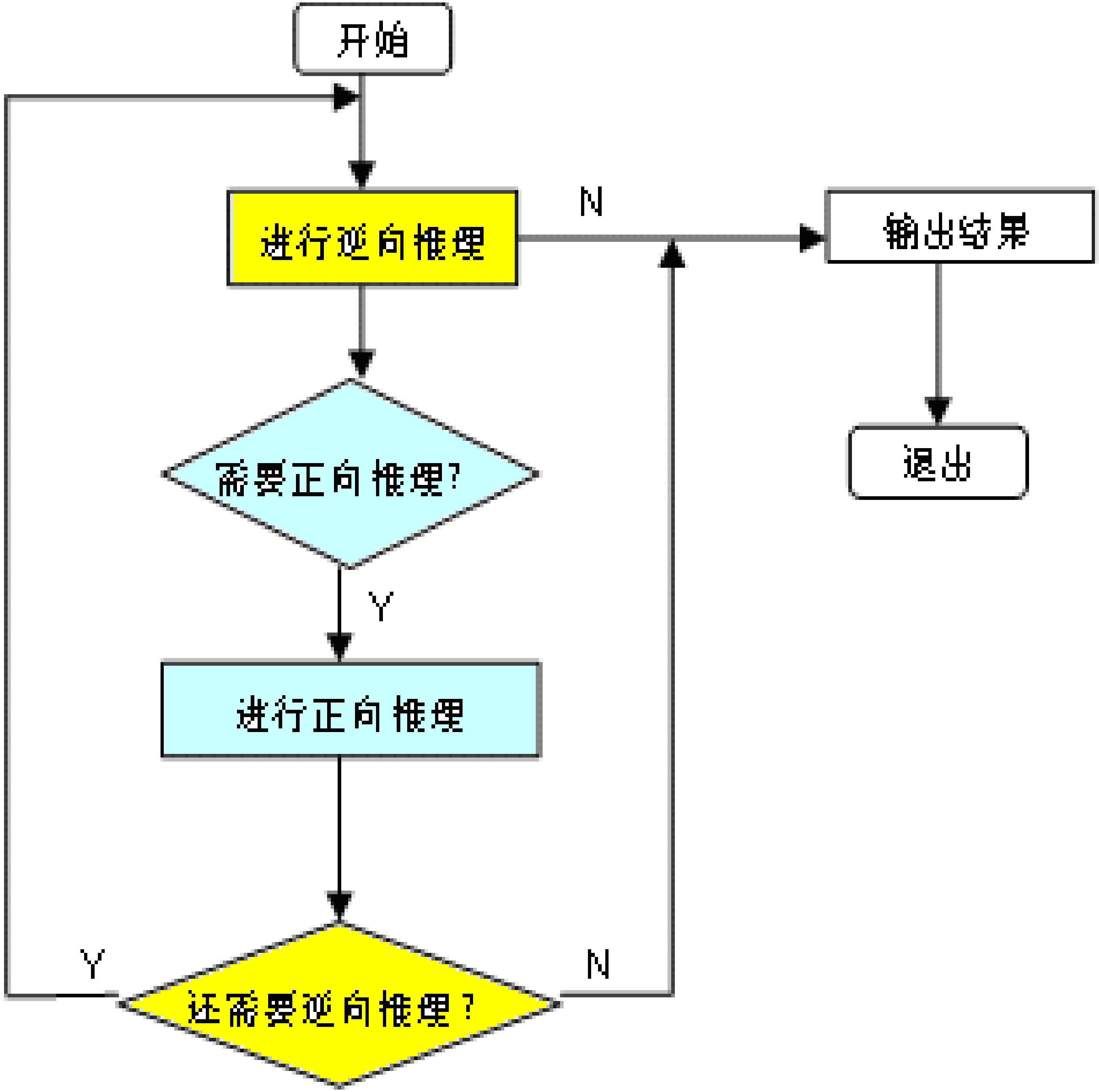
- **正向推理：** 盲目、效率低。
- **逆向推理:** 若提出的假设目标不符合实际，会降低效率。
- **正反向混合推理：**

（1）**先正向后逆向：**先进行正向推理，帮助选择某个目标，即从已知事实演绎出部分结果，然后再用逆向推理证实该目标或提高其可信度；

（2）**先逆向后正向：**先假设一个目标进行逆向推理，然后再利用逆向推理中得到的信息进行正向推理，以推出更多的结论。

上海海事大学
SHANGHAI MARITIME UNIVERSITY

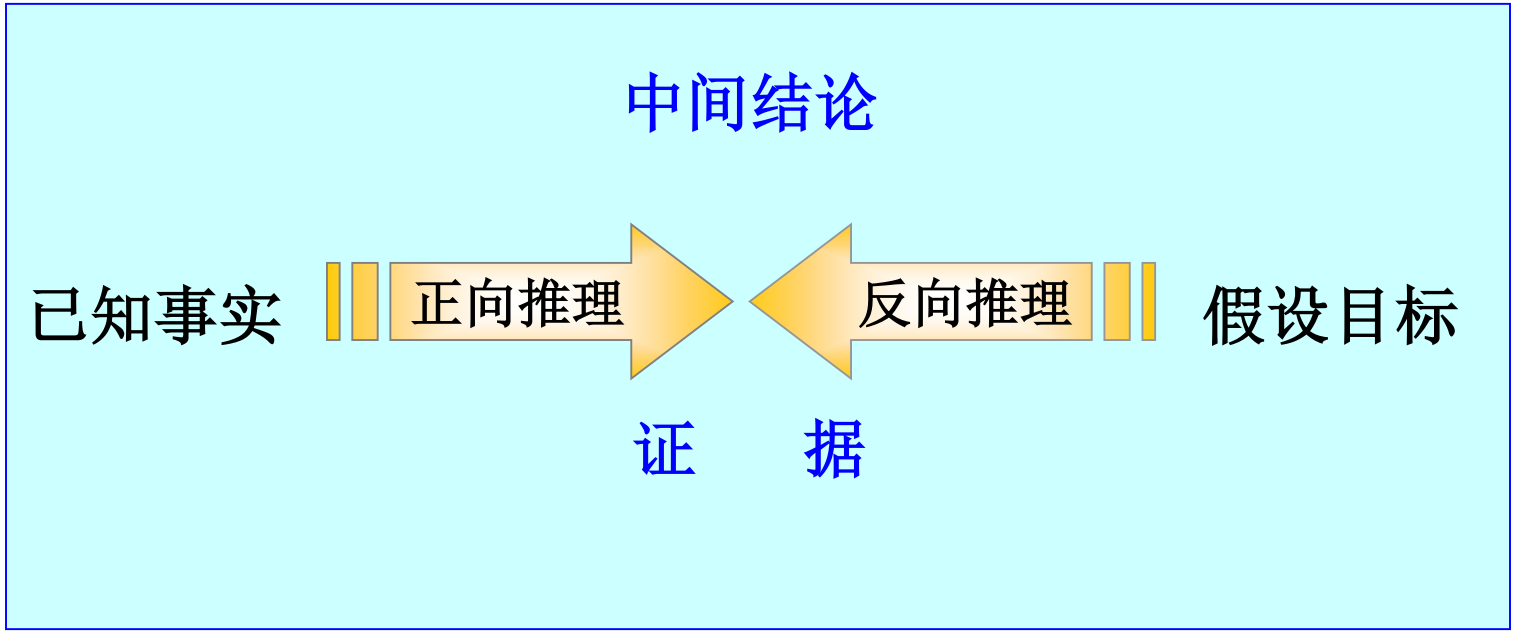

开始
进行正向推理
需要逆向推理?
N
输出结果
退出
Y
以正向推理所得结果作为假设进行逆向推理
Y
还需要正向推理?
N


开始
进行逆向推理
N
输出结果
退出
需要正向推理?
Y
进行正向推理
Y
还需要逆向推理？
N

3.1.3 推理的方向

4. 双向推理

- **双向推理：** 正向推理与逆向推理同时进行，且在推理过程中的某一步骤上“**碰头**”的一种推理。



上海海事大學 SHANGHAI MARITIME UNIVERSITY

3.1 推理的基本概念

- 3.1.1 推理的定义
- 3.1.2 推理方式及其分类
- 3.1.3 推理的方向
- 3.1.4 冲突消解策略

3.1.4 冲突消解策略

- 已知事实与知识的三种匹配情况：

（1）恰好匹配成功（一对一）；

（2）不能匹配成功；

（3）多种匹配成功（一对多、多对一、多对多）

上海海事大學 SHANGHAI MARITIME UNIVERSITY

3.1.4 冲突消解策略

- 多种冲突消解策略：

（1）按针对性排序

（2）按已知事实的新鲜性排序

（3）按匹配度排序

（4）根据领域问题的特点排序

（5）按上下文限制排序

（6）按冗余限制排序

（7）按条件个数排序

*r*1: IF *A*1 AND *A*2 THEN *H*1
*r*2: IF *A*1 AND *A*2 AND *A*3 AND *A*4 THEN *H*2

第3章 确定性推理方法

上海海事大學
SHANGHAI MARITIME UNIVERSITY

3.2 自然演绎推理

- 自然演绎推理：从一组已知为真的事实出发，运用经典逻辑的推理规则推出结论的过程。
- 推理规则：*P*规则、*T*规则、假言推理、拒取式推理

- 假言推理： $P,\ P\rightarrow Q \ \Rightarrow Q$
- “如果x是金属，则x能导电”，“铜是金属”推出“铜能导电”

- 拒取式推理： $P\rightarrow Q,\ \neg Q \ \Rightarrow \ \neg P$
- “如果下雨，则地下就湿”，“地上不湿”推出“没有下雨”

上海海事大學 SHANGHAI MARITIME UNIVERSITY

3.2 自然演绎推理

- **错误1**——否定前件：$P \to Q$，$\neg P$ $\not\Rightarrow$ $\neg Q$

（1） 如果下雨，则地上是湿的（ $P \to Q$ ）；

（2）没有下雨（$\neg P$ ）；

（3）所以，地上不湿（$\neg Q$ ）。

- **错误2**——肯定后件：$P \to Q$，Q $\not\Rightarrow$ P

（1）如果行星系统是以太阳为中心的，则金星会显示出位相变化（ $P \to Q$ ）；

（2）金星显示出位相变化（ Q ）；

（3） 所以，行星系统是以太阳为中心（ P ）。

- 例3. 1 已知事实：

  （1）凡是容易的课程小王(Wang)都喜欢；

  （2）C 班的课程都是容易的；

  （3）ds 是 C 班的一门课程。

- 求证：小王喜欢 ds 这门课程。

- 证明：
- 定义谓词：

$EASY(x)$：x 是容易的

$LIKE(x, y)$：x 喜欢 y

$C(x)$：x 是 C 班的一门课程

- 已知事实和结论用谓词公式表示：

$(\forall x)(EASY(x) \rightarrow LIKE(Wang, x))$

$(\forall x)(C(x) \rightarrow EASY(x))$

$C(ds)$

$LIKE(Wang, ds)$

3.2 自然演绎推理

- 应用推理规则进行推理：

$(\forall x)(EASY(x) \rightarrow LIKE(Wang, x))$

$EASY(z) \rightarrow LIKE(Wang, z)$　　全称固化

$(\forall x)(C(x) \rightarrow EASY(x))$

$C(y) \rightarrow EASY(y)$　　全称固化

所以 $C(ds), C(y) \rightarrow EASY(y)$

$\Rightarrow EASY(ds)$　　*P*规则及假言推理

所以 $EASY(ds), EASY(z) \rightarrow LIKE(Wang, z)$

$\Rightarrow LIKE(Wang, ds)$　　*T*规则及假言推理

3.2 自然演绎推理

优点：

- 表达定理证明过程自然，易理解。
- 拥有丰富的推理规则，推理过程灵活。
- 便于嵌入领域启发式知识。

缺点：易产生组合爆炸，得到的中间结论一般呈指数形式递增。

第3章 确定性推理方法

- 3.1 推理的基本概念
- 3.2 自然演绎推理
- 3.3 谓词公式化为子句集的方法
- 3.4 海伯伦定理
- 3.5 鲁宾逊归结原理
- 3.6 归结反演
- 3.7 应用归结反演求解问题

→ 归结演绎推理

上海海事大學 SHANGHAI MARITIME UNIVERSITY

归 结 演 绎 推 理

- **反证法：** $P \Rightarrow Q$，当且仅当 $P \wedge \neg Q \Leftrightarrow F$

  即 Q为 P 的逻辑结论，当且仅当 $P \wedge \neg Q$是不可满足的。

- **定理：Q 为 $P_1, P_2, \cdots, P_n$的逻辑结论，当且仅当**

  $(P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge P_n) \wedge \neg Q$**是不可满足的。**

归 结 演 绎 推 理

- **思路：定理** $P \Rightarrow Q$ $\longrightarrow$ $P \wedge \neg Q$不可满足

$\longrightarrow$ 子句集不可满足 $\longrightarrow$ **海伯伦定理**

$\downarrow$

鲁宾逊归结原理

3.3 谓词公式化为子句集的方法

- **原子（atom）谓词公式：** 一个不能再分解的命题。
- **文字（literal）**：原子谓词公式及其否定。
- P：正文字， $\neg P$：负文字。
- **子句（clause）**：任何文字的析取式。任何文字本身也都是子句。

$$P(x) \vee Q(x), \qquad \neg P(x, f(x)) \vee Q(x, g(x))$$

- **空子句**
- **子句集：** 由子句构成的集合。

空子句是永假的，不可满足的。

- 例3.2 将下列谓词公式化为子句集。

$$(\forall x)((\forall y)P(x,y) \rightarrow \neg(\forall y)(Q(x,y) \rightarrow R(x,y)))$$

- 解： （1）消去谓词公式中的“ $\rightarrow$ ”和“ $\leftrightarrow$ ”符号

$P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q, \quad P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$

$$\Leftrightarrow (\forall x)(\neg(\forall y)P(x,y) \vee \neg(\forall y)(\neg Q(x,y) \vee R(x,y)))$$

（2）把否定符号 $\neg$ 移到紧靠谓词的位置上

双重否定律 $\neg(\neg P) \Leftrightarrow P$

德.摩根律 $\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q, \neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$

量词转换律 $\neg(\exists x)P \Leftrightarrow (\forall x)\neg P, \quad \neg(\forall x)P \Leftrightarrow (\exists x)\neg P$

$$\Leftrightarrow (\forall x)((\exists y)\neg P(x,y) \vee (\exists y)(Q(x,y) \wedge \neg R(x,y)))$$

（3）变量标准化

$(\exists x)P(x) \equiv (\exists y)P(y), \quad (\forall x)P(x) \equiv (\forall y)P(y)$

$$\Leftrightarrow (\forall x)((\exists y)\neg P(x,y) \vee (\exists z)(Q(x,z) \wedge \neg R(x,z)))$$

$\Leftrightarrow$ $(\forall x)((\exists y)\neg P(x,y) \vee (\exists z)(Q(x,z) \wedge \neg R(x,z)))$

（4）消去存在量词

a. 存在量词不出现在全称量词的辖域内。

b. 存在量词出现在一个或者多个全称量词的辖域内。

对于一般情况

$$(\forall x_1)((\forall x_2)\cdots((\forall x_n)((\exists y)P(x_1,x_2,\cdots,x_n,y)))\ldots)$$

存在量词y的Skolem函数为 $y = f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$

Skolem化：用Skolem函数代替每个存在量词量化的变量的过程。

（5）化为前束形

前束形=（前缀）{母式}

（前缀）：全称量词串。

{母式}：不含量词的谓词公式。

（6）化为 **Skolem 标准形**

$(\forall x_1)(\forall x_2)\cdots(\forall x_n)M$，称为Skolem标准形的母式。

$P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$

$P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$

$\Leftrightarrow (\forall x)((\neg P(x, f(x)) \vee Q(x, g(x))) \wedge (\neg P(x, f(x)) \vee \neg R(x, g(x))))$

（7）略去全称量词

$\Leftrightarrow (\neg P(x, f(x)) \vee Q(x, g(x))) \wedge (\neg P(x, f(x)) \vee \neg R(x, g(x)))$

（8）消去合取词

$\Leftrightarrow \{\neg P(x, f(x)) \vee Q(x, g(x)), \quad \neg P(x, f(x)) \vee \neg R(x, g(x))\}$

（9）子句变量标准化

$\Leftrightarrow \{\neg P(x, f(x)) \vee Q(x, g(x)), \quad \neg P(y, f(y)) \vee \neg R(y, g(y))\}$

上海海事大学 Shanghai Maritime Universi

例3.3 将下列谓词公式化为子句集。

$$(\forall x)\{[\neg P(x) \vee \neg Q(x)] \to (\exists y)[S(x,y) \wedge Q(x)]\} \wedge (\forall x)[P(x) \vee B(x)]$$

- **（1）消去蕴含符号**

$$(\forall x)\{\neg[\neg P(x) \vee \neg Q(x)] \vee (\exists y)[S(x,y) \wedge Q(x)]\} \wedge (\forall x)[P(x) \vee B(x)]$$

- **（2）把否定符号移到每个谓词前面**

$$(\forall x)\{[P(x) \wedge Q(x)] \vee (\exists y)[S(x,y) \wedge Q(x)]\} \wedge (\forall x)[P(x) \vee B(x)]$$

- **（3）变量标准化**

$$(\forall x)\{[P(x) \wedge Q(x)] \vee (\exists y)[S(x,y) \wedge Q(x)]\} \wedge (\forall w)[P(w) \vee B(w)]$$

- **（4）消去存在量词，设y的函数是*f(x)*，则**

$$(\forall x)\{[P(x) \wedge Q(x)] \vee [S(x,f(x)) \wedge Q(x)]\} \wedge (\forall w)[P(w) \vee B(w)]$$

上海海事大學 Shanghai Maritime University

- 例3.3 将下列谓词公式化为子句集。（续）

（5）化为前束形

$$(\forall x)(\forall w)\{\{[P(x)\wedge Q(x)]\vee[S(x,f(x))\wedge Q(x)]\}\wedge[P(w)\vee B(w)]\}$$

（6）化为标准形

$$(\forall x)(\forall w)\{\{[Q(x)\wedge P(x)]\vee[Q(x)\wedge S(x,f(x))]\}\wedge[P(w)\vee B(w)]\}$$

$$(\forall x)(\forall w)\{Q(x)\wedge[P(x)\vee S(x,f(x))]\wedge[P(w)\vee B(w)]\}$$

（7）略去全称量词

$$Q(x)\wedge[P(x)\vee S(x,f(x))]\wedge[P(w)\vee B(w)]$$

（8）消去合取词，把母式用子句集表示

$$\{Q(x),\ P(x)\vee S(x,f(x)),\ P(w)\vee B(w)\}$$

（9）子句变量标准化 $\{Q(x),\ P(y)\vee S(y,f(y)),\ P(w)\vee B(w)\}$

上海海事大學 Shanghai Maritime University

例3.5 将下列谓词公式化为不含存在量词的前束形。

$$(\exists x)(\forall y)((\forall z)(P(z) \wedge \neg Q(x,z)) \rightarrow R(x,y,f(a)))$$

- **（1）消去存在量词**

$$(\forall y)((\forall z)(P(z) \wedge \neg Q(b,z)) \rightarrow R(b,y,f(a)))$$

- **（2）消去蕴含符号**

$$(\forall y)(\neg(\forall z)(P(z) \wedge \neg Q(b,z)) \vee R(b,y,f(a)))$$

$$(\forall y)((\exists z)(\neg P(z) \vee Q(b,z)) \vee R(b,y,f(a)))$$

- **（3）设*z*的函数是*g*(*y*)，则**

$$(\forall y)(\neg P(g(y)) \vee Q(b,g(y)) \vee R(b,y,f(a)))$$

3.3 谓词公式化为子句集的方法

谓词公式不可满足性 ⟷ 子句集不可满足性 ？

定理 3.1:

谓词公式不可满足的充要条件是其子句集不可满足。

第3章 确定性推理方法

- 3.1 推理的基本概念
- 3.2 自然演绎推理
- 3.3 谓词公式化为子句集的方法
- 3.4 海伯伦定理
- 3.5 鲁宾逊归结原理
- 3.6 归结反演
- 3.7 应用归结反演求解问题

（3.3–3.7）→ 归结演绎推理

上海海事大學 SHANGHAI MARITIME UNIVERSITY

3.4 海伯伦（Herbrand）定理

定义3.1（*H*域）

- 设 S 为子句集，则按下述方法构造的域 H_∞ 称为海伯伦域，简记为 H 域。

（1）令 H_0 是 S 中所有个体常量的集合，若 S 中不包含个体常量，则令 $H_0=\{\alpha\}$，其中 α 为任意指定的一个个体常量。

（2）令 $H_{i+1}=H_i \cup \{S$ 中所有 n 元函数 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 是 H 中的元素$\}$，其中 $i=0,1,2,\cdots$。

上海海事大学 SHANGHAI MARITIME UNIVERSITY

3.4 海伯伦（Herbrand）定理

- **例5** 求子句集 $S=\{P(x)\vee Q(x), R(f(y))\}$ 的 H 域。

解：指定一个常量 a 作为个体常量，则得：

$$H_0=\{\alpha\}$$

$$H_1=H_0\cup\{f(\alpha)\}=\{\alpha\}\cup\{f(\alpha)\}=\{\alpha, f(\alpha)\}$$

$$H_2=H_1\cup\{f(\alpha), f(f(\alpha))\}=\{\alpha, f(\alpha), f(f(\alpha))\}$$

$$H_3=\{\alpha, f(\alpha), f(f(\alpha)), f(f(f(\alpha)))\}$$

$$\vdots$$

$$H_\infty=\{\alpha, f(\alpha), f(f(\alpha)), f(f(f(\alpha))), \cdots\}$$

3.4 海伯伦（Herbrand）定理

- 例6 求子句集 $S=\{P(a)\vee Q(b), R(f(y))\}$ 的 H 域。

解：根据 H 域的定义得：

$$H_0=\{a,b\}$$

$$H_1=H_0\cup\{f(a),f(b)\}=\{a,b,f(a),f(b)\}$$

$$H_2=H_1\cup\{f(a),f(b),f(f(a)),f(f(b))\}$$

$$=\{a,b,f(a),f(b),f(f(a)),f(f(b))\}$$

$$\vdots$$

3.4 海伯伦（Herbrand）定理

- 例7 求子句集 $S=\{P(a),Q(f(x)),R(g(y))\}$的 H 域。

解：根据 H 域的定义得：

$$H_0=\{a\}$$

$$H_1=H_0\cup\{f(a),g(a)\}=\{a,f(a),g(a)\}$$

$$H_2=H_1 * \ \{f(a),f(f(\alpha)),f(g(a)),g(a),g(f(a)),g(g(a))\}$$
$$=\{\alpha,f(a),g(a),f(f(a)),f(g(a)),g(f(a)),g(g(a))\}$$

- 例8 求子句集 $S=\{P(x),Q(y)\vee R(y)\}$ 的 H 域。

解：根据 H 域的定义得：

$$H_0=H_1=\cdots=H_\infty=\{\alpha\}$$

上海海事大學 SHANGHAI MARITIME UNIVERSITY

3.4 海伯伦（Herbrand）定理

- **基子句：**用*H*域中的元素代换子句中的变元后所得的子句，其中的谓词称为**基原子**。
- **原子集：**子句集中所有基原子构成的集合。
- **子句集在*H*域上的解释：**对子句集中出现的常量、函数及谓词取值，一次取值就是一个解释。

- **定理 3.2（海伯伦定理）：**

  子句集不可满足的充要条件是存在一个有限的不可满足的基子句集 。

第3章 确定性推理方法

- 3.1 推理的基本概念
- 3.2 自然演绎推理
- 3.3 谓词公式化为子句集的方法
- 3.4 海伯伦定理
- 3.5 鲁宾逊归结原理
- 3.6 归结反演
- 3.7 应用归结反演求解问题

归结演绎推理

3.5 鲁宾逊归结原理

◆ 子句集中子句之间是合取关系，只要有一个子句不可满足，则子句集就不可满足。

◆ 鲁宾逊归结原理（消解原理）的基本思想：

- 检查子句集 *S* 中是否包含空子句，若包含，则 *S* 不可满足。
- 若不包含，在 *S* 中选择合适的子句进行归结，一旦归结出空子句，就说明 *S* 是不可满足的。

上海海事大學 SHANGHAI MARITIME UNIVERSITY

1. 命题逻辑中的归结原理（基子句的归结）

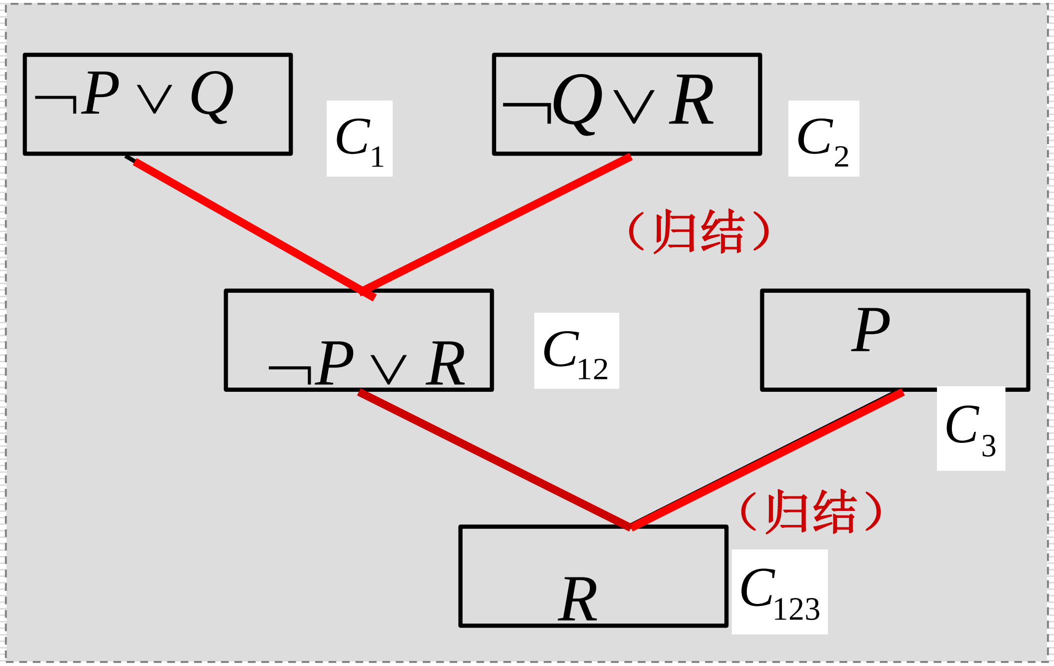
定义3.1（归结）： 设C_1与C_2是子句集中的任意两个子句，如果 C_1 中的文字L_1与 C_2中的文字L_2互补，那么从C_1和 C_2中分别消去L_1和L_2，并将二个子句中余下的部分析取，构成一个新子句C_{12} 。

C_{12}：C_1和C_2的归结式

C_1、C_2：C_{12}的亲本子句

例，设$C_1 = \neg P \vee Q$，

$C_2 = \neg Q \vee R$，$C_3 = P$



3.5 鲁宾逊归结原理

◆ **定理3.2：** 归结式C_{12}是其亲本子句C_1与C_2的逻辑结论。即如果 C_1与C_2为真，则C_{12}为真。

◆ **推论1：** 设C_1与C_2是子句集S中的两个子句，C_{12}是它们的归结式，若用C_{12}代替C_1与C_2后得到新子句集S_1，则由S_1不可满足性可推出原子句集S的不可满足性，即：

$$S_1 \text{ 的不可满足性} \Rightarrow S \text{ 的不可满足性}$$

◆ **推论2：** 设C_1与C_2是子句集S中的两个子句，C_{12}是它们的归结式，若C_{12} 加入原子句集S，得到新子句集S_1，则S与S_1在不可满足的意义上是等价的，即：

$$S_1\text{的不可满足性} \Leftrightarrow S\text{的不可满足性}$$

上海海事大学 SHANGHAI MARITIME UNIVERSITY

2. 谓词逻辑中的归结原理（含有变量的子句的归结）

例：

$C_1 = P(x) \vee Q(x)$

$C_2 = \neg P(a) \vee R(y)$

?

最一般合一

$\sigma = \{a/x\}$

$C_1\sigma = P(a) \vee Q(a)$

$C_2\sigma = \neg P(a) \vee R(y)$

$C_{12} = Q(a) \vee R(y)$

定义 3.2： 设是 C_1与C_2 两个没有相同变元的子句，L_1 和 L_2 分别是C_1和C_2 中的文字，若 σ 是L_1和$\neg L_2$ 的最一般合一，则称

$$C_{12} = (C_1\sigma - \{L_1\sigma\}) \vee (C_2\sigma - \{L_2\sigma\})$$

为C_1和C_2的二元归结式。

上海海事大学 SHANGHAI MARITIME UNIVERSITY

3.5 鲁宾逊归结原理

- **例3.7 设：**

$$C_1 = P(x) \vee Q(a), \quad C_2 = \neg P(b) \vee R(x)$$

求其二元归结式。

- **解：令** $C_2 = \neg P(b) \vee R(y)$

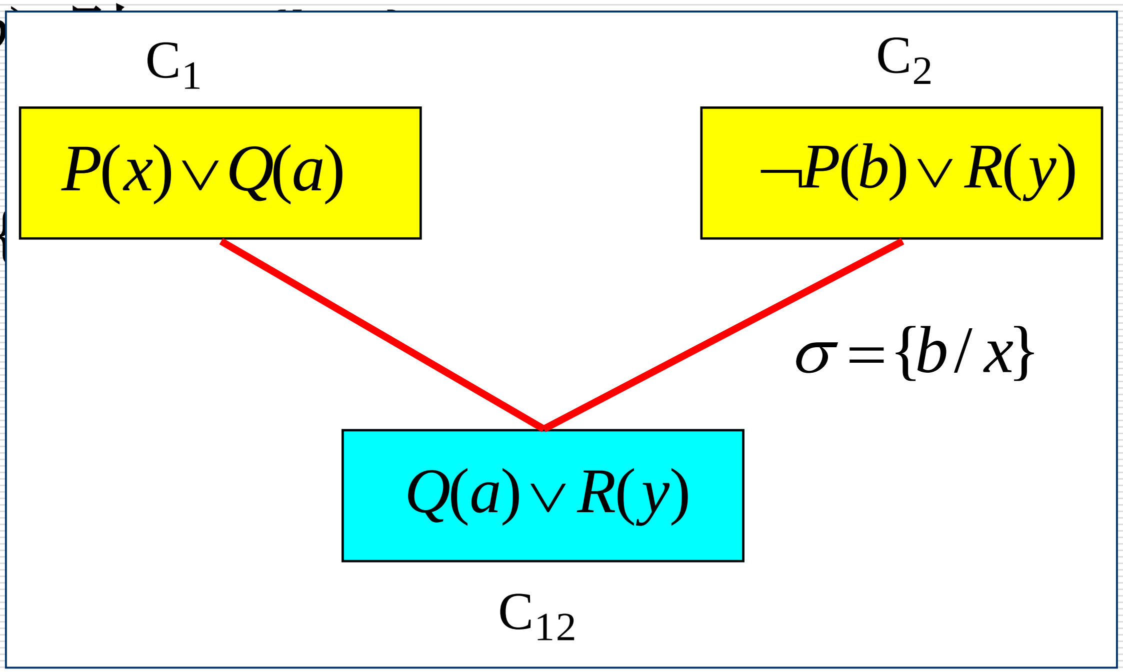
选 $L_1 = P(x), L_2 = \neg P(b$

得：

$$C_{12} = (\{P(b), Q(a)\} - \{$$

$$= \{Q(a), R(y)\}$$

$$= Q(a) \vee R(y)$$



- **例3.8 设：**

$$C_1 = P(x) \vee P(f(a)) \vee Q(x), \quad C_2 = \neg P(y) \vee R(b)$$

求其二元归结式。

- **解：** $\sigma = \{f(a)/x\}$ $\quad C_1\sigma = P(f(a)) \vee Q(f(a)),$

选 $L_1 = P(f(a)), L_2 = \neg P(y)$ $\quad \sigma = \{f(a)/y\}$

则得：$C_{12} = R(b) \vee Q(f(a))$

3.5 鲁宾逊归结原理

- 对于谓词逻辑，归结式是其亲本子句的逻辑结论。
- 对于一阶谓词逻辑，即若子句集是不可满足的，则必存在一个从该子句集到空子句的归结演绎；若从子句集存在一个到空子句的演绎，则该子句集是不可满足的。
- 如果没有归结出空子句，则既不能说 *S* 不可满足，也不能说 *S* 是可满足的。

- 3.1 推理的基本概念
- 3.2 自然演绎推理
- 3.3 谓词公式化为子句集的方法
- 3.4 海伯伦定理
- 3.5 鲁宾逊归结原理
- 3.6 归结反演
- 3.7 应用归结反演求解问题

归结演绎推理

3.6 归结反演

- 应用归结原理证明定理的过程称为归结反演。
- 用归结反演证明的步骤是：

（1）将已知前提表示为谓词公式F。

（2）将待证明的结论表示为谓词公式Q，并否定得到$\neg Q$。

（3）把谓词公式集$\{F, \neg Q\}$化为子句集S。

（4）应用归结原理对子句集S中的子句进行归结，并把每次归结得到的归结式都并入到S中。如此反复进行，若出现了空子句，则停止归结，此时就证明了Q为真。

3.6 归结反演

□ 例3.9 某公司招聘工作人员，*A*，*B*，*C* 三人应试，经面试后公司表示如下想法：

（1） 三人中至少录取一人。

（2） 如果录取 *A* 而不录取 *B*，则一定录取 *C*。

（3） 如果录取 *B*，则一定录取 *C*。

- **求证：公司一定录取 *C*。**

3.6 归结反演

- 证明：公司的想法用谓词公式表示：

$P(x)$：录取x

（1） $P(A) \vee P(B) \vee P(C)$

（2） $P(A) \wedge \neg P(B) \to P(C)$

（3） $P(B) \to P(C)$

- 把要求证的结论用谓词公式表示出来并否定，得：

（4）$\neg P(C)$

- 把上述公式化成子句集：

（1） $P(A) \vee P(B) \vee P(C)$

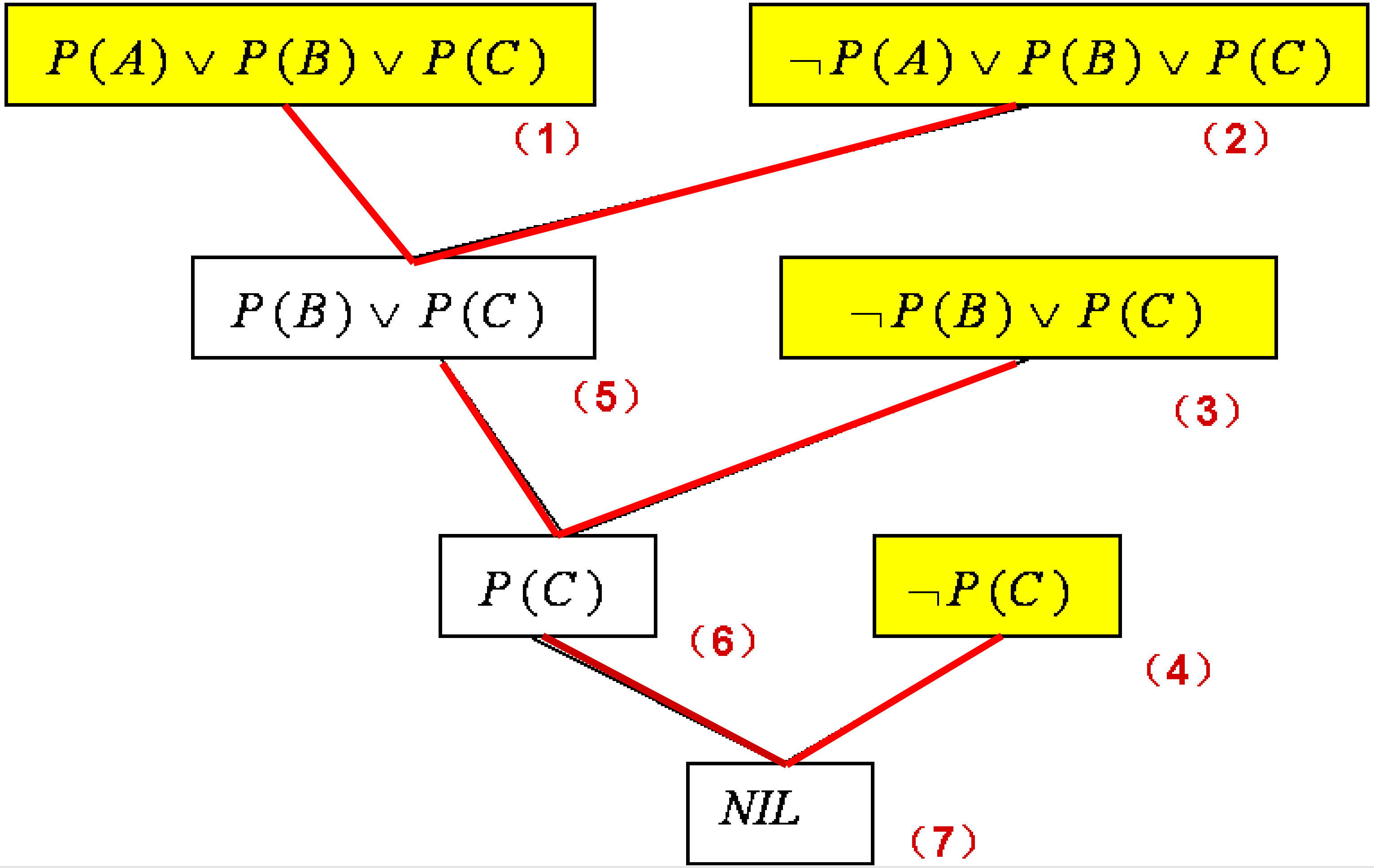
（2） $\neg P(A) \vee P(B) \vee P(C)$

（3） $\neg P(B) \vee P(C)$

（4） $\neg P(C)$

上海海事大學 SHANGHAI MARITIME UNIVERSITY

- 应用归结原理进行归结：



上海海事大學 Shanghai Maritime University

- 例3.10 已知：

  规则1：任何人的兄弟不是女性；

  规则2：任何人的姐妹必是女性。

  事 实：***Mary*** 是 ***Bill*** 的姐妹。

  求证：***Mary*** 不是 ***Tom*** 的兄弟。

- 证明：定义谓词

  brother (*x*, *y*)：*x* 是 *y* 的兄弟

  sister (*x*, *y*)：*x* 是 *y* 的姐妹

  woman (*x*)：*x* 是女性

上海海事大學 Shanghai Maritime University

- 证明：将规则与事实用谓词公式表示：

（1）$(\forall x)(\forall y)(brother(x,y) \to \neg woman(x))$

（2）$(\forall x)(\forall y)(sister(x,y) \to woman(x))$

（3）$sister(Mary, Bill)$

- 把要求证的结论用谓词公式表示出来并否定，得：

（4）$brother(Mary, Tom)$

- 把上述公式化成子句集：

$C_1 = \neg brother(x,y) \vee \neg woman(x)$

$C_2 = \neg sister(x,y) \vee woman(x)$

$C_3 = sister(Mary, Bill)$

$C_4 = brother(Mary, Tom)$

- 将子句集进行归结：

$C_{23} = woman(Mary)$

$C_{123} = \neg brother(Mary, y)$

$C_{1234} = NIL$

第3章 确定性推理方法

- □ 3.1 推理的基本概念
- □ 3.2 自然演绎推理
- □ 3.3 谓词公式化为子句集的方法
- □ 3.4 海伯伦定理
- □ 3.5 鲁宾逊归结原理
- □ 3.6 归结反演
- □ 3.7 应用归结反演求解问题

归结演绎推理

上海海事大學 SHANGHAI MARITIME UNIVERSITY

3.7 应用归结原理求解问题

- 应用归结原理求解问题的步骤：

（1）已知前提 ***F*** 用谓词公式表示，并化为子句集 ***S***；

（2）把待求解的问题 ***Q*** 用谓词公式表示，并否定 ***Q***，再与 ***ANSWER*** 构成析取式（$\neg Q \vee ANSWER$）；

（3）把（$\neg Q \vee ANSWER$）化为子句集，并入到子句集 ***S***中，得到子句集 S'；

（4）对 S' 应用归结原理进行归结；

（5）若得到归结式 ***ANSWER***，则答案就在 ***ANSWER*** 中。

上海海事大學 SHANGHAI MARITIME UNIVERSITY

- **例3. 11** 已知：

F_1：王（Wang）先生是小李（Li）的老师。

F_2：小李与小张（Zhang）是同班同学。

F_3：如果x与y是同班同学，则x的老师也是 y 的老师。

求：小张的老师是谁？

◆ **解：**

- 定义谓词：

  $T(x,y)$： x 是

  $C(x,y)$： x 与

F_1：王（Wang）先生是小李（Li）的老师。

F_2：小李与小张（Zhang）是同班同学。

F_3：如果 x 与 y 是同班同学，则 x 的老师也是 y 的老师。

求：小张的老师是谁？

- 把已知前提表示成谓词公式：

  F_1： $T(Wang, Li)$

  F_2： $C(Li, Zhang)$

  F_3： $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(C(x,y) \wedge T(z,x) \rightarrow T(z,y))$

- 把目标表示成谓词公式，并把它否定后与 ***ANSWER*** 析取：

  G： $\neg$（$\exists x)T(x, Zhang) \vee ANSWER(x)$）

3.7 应用归结原理求解问题

- 把上述公式化为子句集：

（1） $T(Wang, Li)$

（2） $C(Li, Zhang)$

（3） $\neg C(x, y) \vee \neg T(z, x) \vee T(z, y)$

（4） $\neg T(u, Zhang) \vee ANSWER(u)$

- 应用归结原理进行归结：

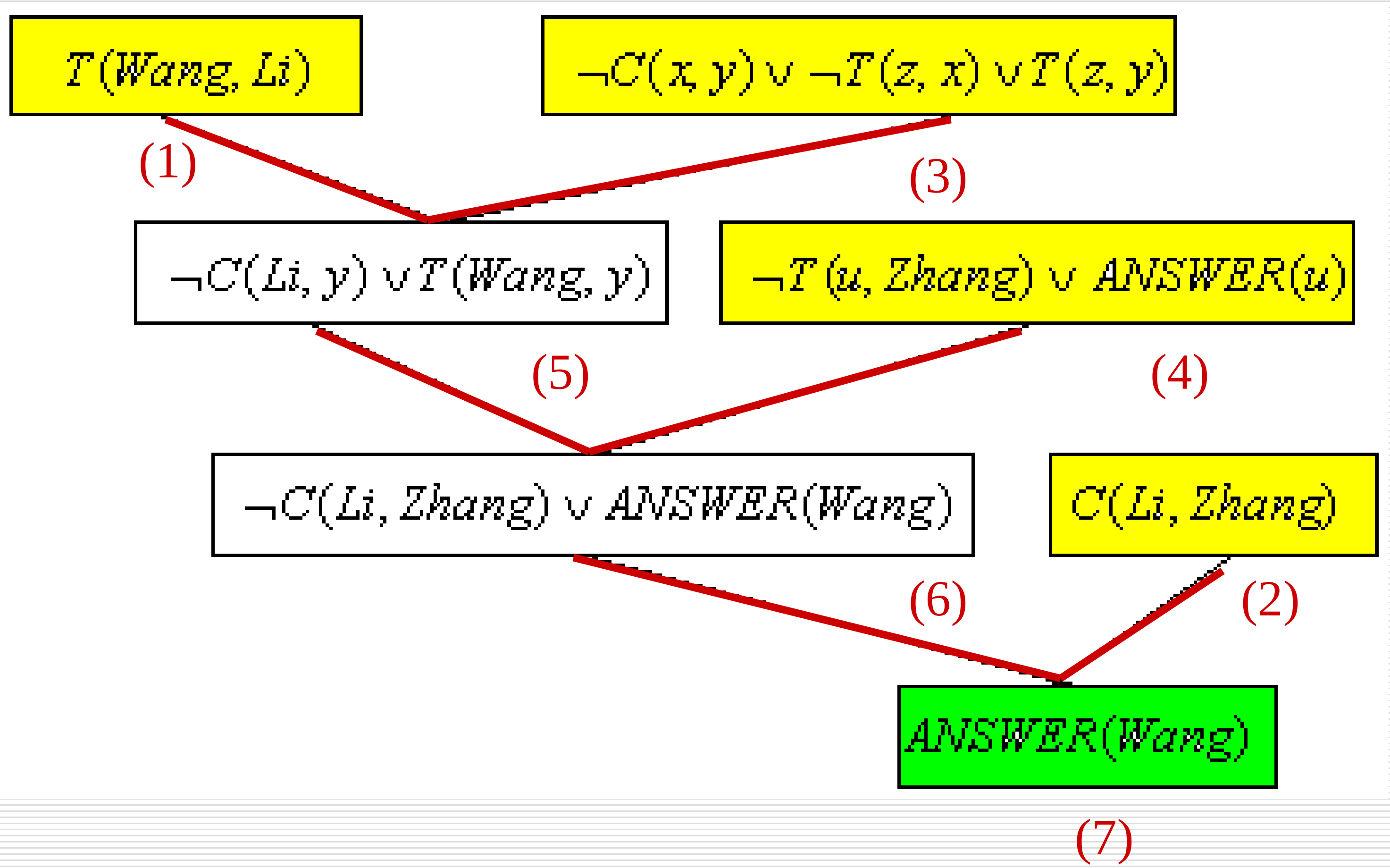
（5） $\neg C(Li, y) \vee T(Wang, y)$ （1）与（3）归结

（6） $\neg C(Li, Zhang) \vee ANSWER(Wang)$ （4）与（5）归结

（7） $ANSWER(Wang)$ （2）与（6）归结

上海海事大學 Shanghai Maritime University

3.7 应用归结原理求解问题



上海海事大學 SHANGHAI MARITIME UNIVERSITY