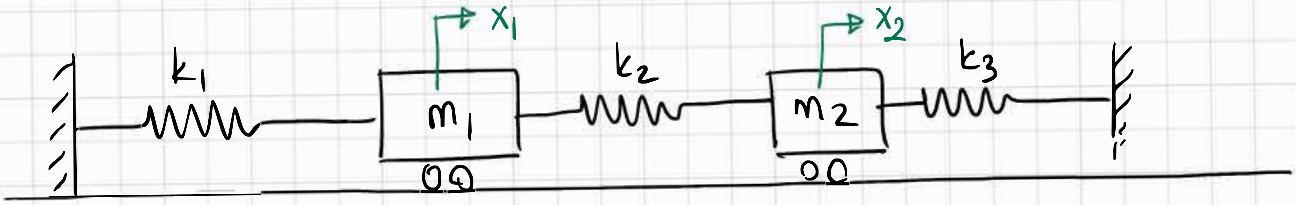
LAB 5 : Finding Natural Frequencies of 2 DOF System



$$[m][\ddot{x}] + [c][\dot{x}] + [k][x] = [f] \quad \text{General Form}$$

$$\rightarrow [m][\ddot{x}] + [k][x] = [0]$$

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2+k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\omega: \text{freq.})$$

(1) : $m_1 \ddot{x}_1 + (k_1+k_2) x_1 - k_2 x_2 = 0$

(2) : $m_2 \ddot{x}_2 + (k_2+k_3) x_2 - k_2 x_1 = 0$

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} \cos(\omega t - \phi)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} \omega \sin(\omega t - \phi)$$

$$\begin{bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} \omega^2 \cos(\omega t - \phi)$$

$$\begin{bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \end{bmatrix} = -\omega^2 \underbrace{\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} \cos(\omega t - \phi)} \Rightarrow \begin{bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \end{bmatrix} = -\omega^2 \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2+k_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

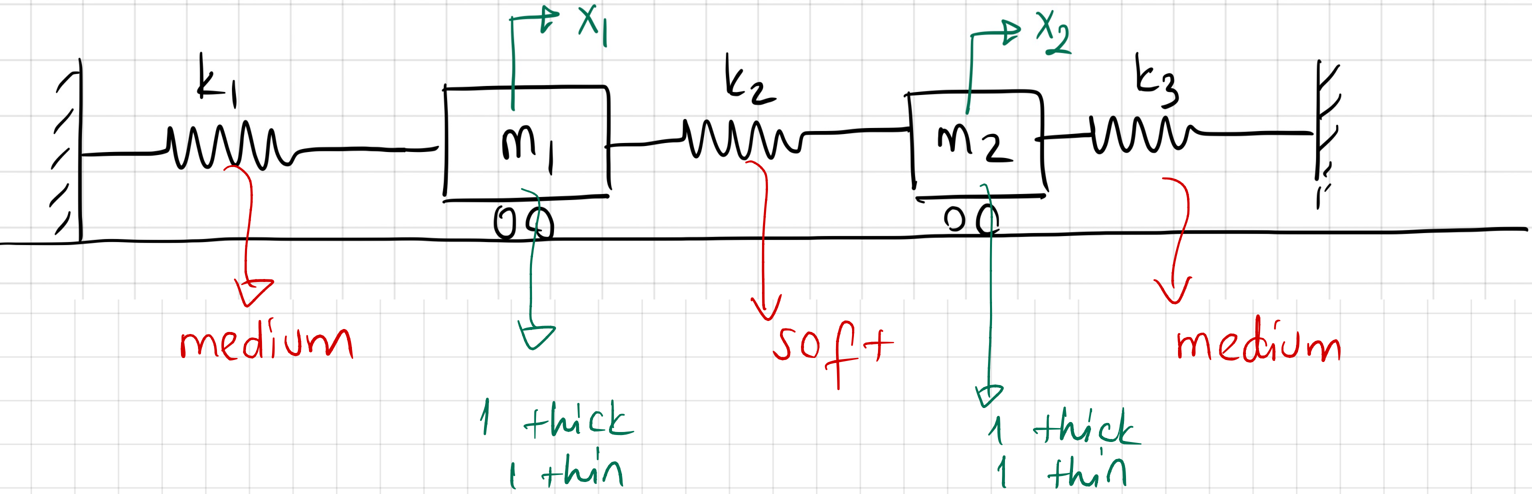
$$\begin{bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \end{bmatrix} = -\omega^2 \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}(-\omega^2)\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2+k_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -m_1\omega^2 & 0 \\ 0 & -m_2\omega^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2+k_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} k_1+k_2-m_1\omega^2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2+k_3-m_2\omega^2 \end{bmatrix}}_{=0}\underbrace{\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}}_{\neq 0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left|\begin{bmatrix} k_1+k_2-m_1\omega^2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2+k_3-m_2\omega^2 \end{bmatrix}\right| = 0$$



Using Matlab :

$\omega_1 = 17.28$ rd/sec $\Rightarrow f_1 = 2.75$ Hz

$\omega_2 = 24.43$ rd/sec $\Rightarrow f_2 = 3.89$ Hz

Mode Ratios

① If $\omega = \omega_1$ then:

$$\begin{bmatrix} 200 & -200 \\ -200 & 200 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} \cos(\omega t - \phi) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$200 A_1 - 200 A_2 = 0 \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = 1$$

Mode I Ratio.

② If $\omega = \omega_2$ then

$$\begin{bmatrix} -200 & -200 \\ -200 & -200 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} \cos(\omega t - \phi) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-200 A_1 - 200 A_2 = 0 \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = -1$$

Mode II Ratio.