

CORRIGE du TD N°4 : ORDONNANCEMENT DE PROJET

EXERCICE 1 : corrigé

a) Tracé du graphe potentiels-tâches associé au projet

Le graphe potentiels-tâches ou graphe MPM de la méthode dite MPM (*méthode des potentiels Métra*) développée par le mathématicien Bernard ROY en France ou graphe AON (*Activities On Nodes*) ou graphe d'ordonnancement est un graphe représentant l'enchaînement des tâches d'un projet.

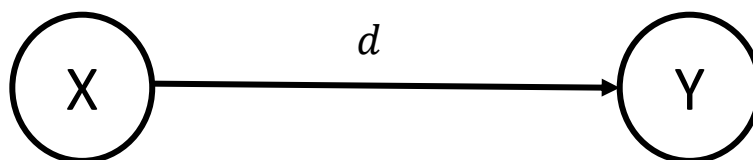
Les tâches ou activités sont représentées par des sommets et les contraintes d'antériorité entre les tâches sont représentées par des arcs (flèches).

Ainsi la contrainte consistant à dire que la tâche X doit s'exécuter avant la tâche Y sera représentée par le schéma :



D'autre part le graphe sera valué, c'est-à-dire que les arcs porteront une valeur numérique correspondant aux durées des tâches.

On affectera à chaque arc la durée de la tâche située à l'extrémité initiale. Si la tâche X a une durée d , on représentera la contrainte : X précède Y par le schéma suivant :



Après représentation des données du projets (tâches, contraintes d'antériorité et durées des tâches selon la démarche ci-dessus), on introduira deux autres sommets fictifs dans le graphe obtenu :

- Un sommet **Début** correspondant au lancement ou démarrage du projet auquel on rattachera toutes les tâches n'ayant aucun prédécesseur.
- Un sommet **Fin** indiquant la fin du projet auquel on rattachera toutes les tâches n'ayant aucun successeur.

Le graphe potentiels-tâches est un graphe sans circuit (sauf cas particuliers qui ne seront pas traités ici).

Par conséquent et pour faciliter le tracé du graphe, on peut procéder au classement des tâches par niveaux.

Le classement des tâches par niveau revient à identifier au fur et mesure de l'avancement du projet les tâches n'ayant pas de prédécesseur ou ayant un prédécesseur d'un niveau plus faible. Les tâches n'ayant aucun prédécesseur seront automatiquement de niveau 0.

Il existe un algorithme simple qui permet de déterminer le niveau des tâches d'un projet comme suit :

- **Etape 1** : à partir du dictionnaire des prédécesseurs du projet, tableau précisant les prédécesseurs de chaque tâche, identifier les tâches n'ayant aucun prédécesseur. Ces tâches sont de niveau 0. Rayer ces tâches du tableau.
- **Etape 2** : Les tâches du nouveau niveau sont les tâches non rayées et n'ayant plus de prédécesseurs, ces tâches sont rayées à leur tour.
- **Etape 3** : S'il reste des tâches non rayées alors retour à l'étape 1, sinon le classement est terminé.

Après ces petits rappels du cours, construisons le graphe potentiels-tâches associé au projet de l'organisation d'une semaine de ski par les étudiants de l'exercice 1.

Pour cela, classons d'abord les tâches par niveaux croissants selon l'algorithme en haut à partir du dictionnaire des prédécesseurs.

Tâches	Tâches antérieures	N ₀	N ₁	N ₂	N ₃	N ₄	N ₅
A	C		A				
B	C		B				
C	-	C					
D	A			D			
E	D, J				E		
F	E, G, I, H, B						F
G	J				G		
H	D, E, J					H	
I	J				I		
J	A			J			

Le tracé du graphe potentiels-tâches se fait en plaçant les sommets dans l'ordre croissant de leurs niveaux, en ajoutant des arcs pour chaque antériorité entre sommets

et en introduisant deux sommets fictifs, un au début du graphe et un autre à la fin du graphe. **La figure 1** représente le graphe potentiels-tâches associé à notre cas.

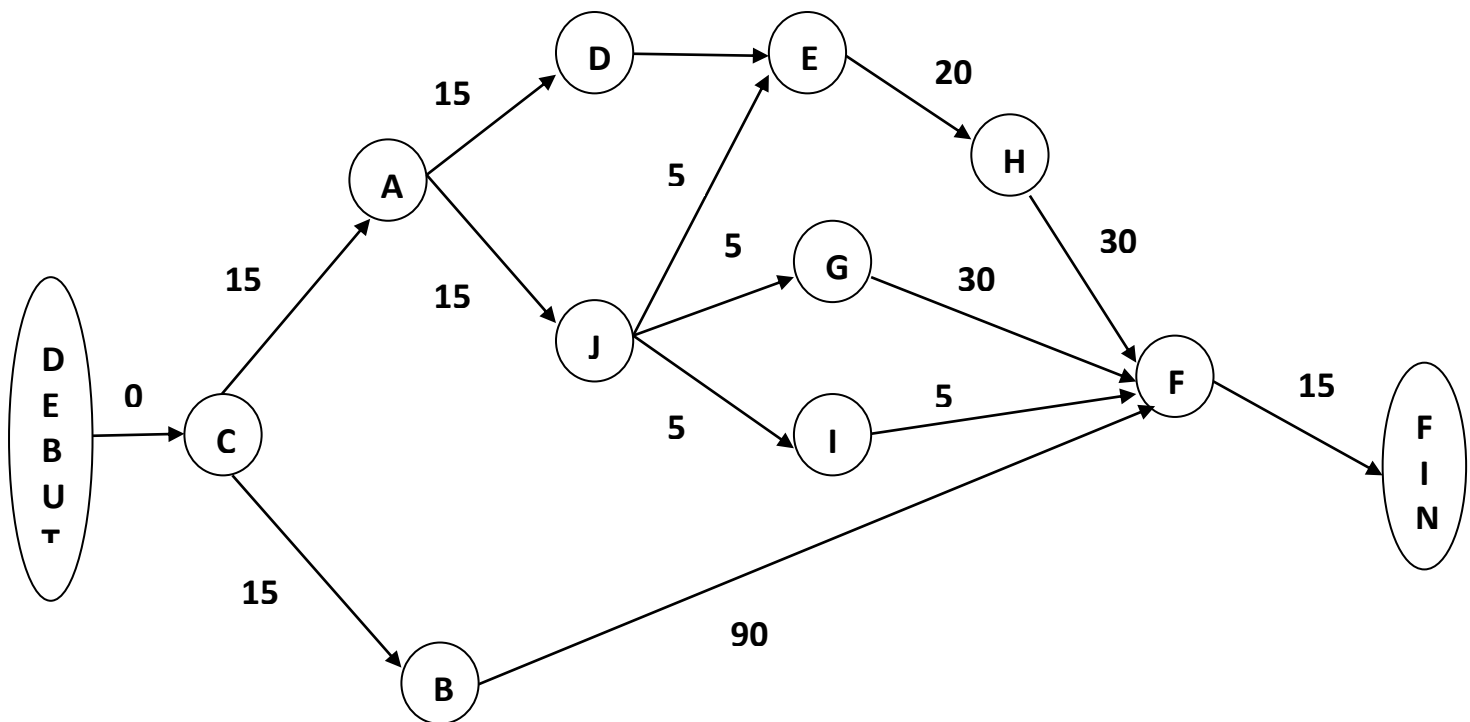


Figure 1: graphe potentiels-tâches

a) Calcul du calendrier au plus tôt

Il faut déterminer un planning d'activation des tâches permettant de réaliser le projet en un temps minimal tout en respectant les contraintes. Cette durée minimale du projet correspond au chemin le plus long dans le graphe. Cela peut paraître paradoxal au premier abord, mais il faut avoir le temps d'effectuer toutes les tâches avec tous les enchaînements possibles en particulier le plus long.

Pour chaque tâche, on va déterminer la date de début « au plus tôt » d'exécution. Pour qu'une tâche puisse commencer, il est nécessaire que toutes les tâches qui la relie à la tâche du début du projet soient réalisées. Il faut donc évaluer le plus long chemin entre le sommet initial du graphe et le sommet correspondant à cette tâche.

On utilise un algorithme de recherche de plus long chemin dans un graphe. Cet algorithme utilise un principe très simple mais extrêmement puissant et utilisé pour de nombreux problèmes : le principe d'optimalité de **Bellman**. Il dit simplement que

pour trouver le plus long chemin dans le graphe, à partir d'un sommet de départ, jusqu'à un sommet quelconque S du graphe, il suffit de prendre la plus grande parmi toutes les longueurs maximales des chemins qui arrivent aux sommets prédécesseurs, additionnée des longueurs des arcs reliant ces sommets à S.

Dans notre cas, il s'agit d'appliquer ce principe en partant du sommet début et de proche en proche en évaluant le plus long chemin du début à chaque sommet, évaluation correspondant à la date de début « au plus tôt » de la tâche associée à ce sommet.

Le sommet début sera marqué de la valeur 0, valeur choisie pour la commodité des calculs ici mais concrètement on utilisera une date calendaire correspondant à la date de démarrage du projet. **La figure 2** résume le calcul des date de début « au plus tôt » des différentes tâches en utilisant le principe de **Bellman** ci-dessus et selon la légende suivante : une tâche *i* sera représentée par le cadrant ci-après avec en haut sa date de début au plus tôt notée $EST(i)$ (*EST pour Earliest Start Time*) et en bas sa date de début au plus tard notée $LST(i)$ (*LST pour Latest Start Time*).

$EST(i)$
<i>i</i>
$LST(i)$

Ainsi par exemple la date de début au plus tôt de la tâche E est 35 car cette tâche a deux antécédents la tâche D de date de début au plus tôt 30 et la tâche J de date de début au plus tôt 30 aussi. La tâche E ne peut s'exécuter que si ces deux tâches sont entièrement réalisées. Autrement dit la date de début au plus tôt de la tâche E est la plus grande entre les deux dates de fin au plus tôt des tâches D et J qui sont $30+3=33$ pour la tâche D et $30+5=35$ pour la tâche J, soit $EST(E) = 35$.

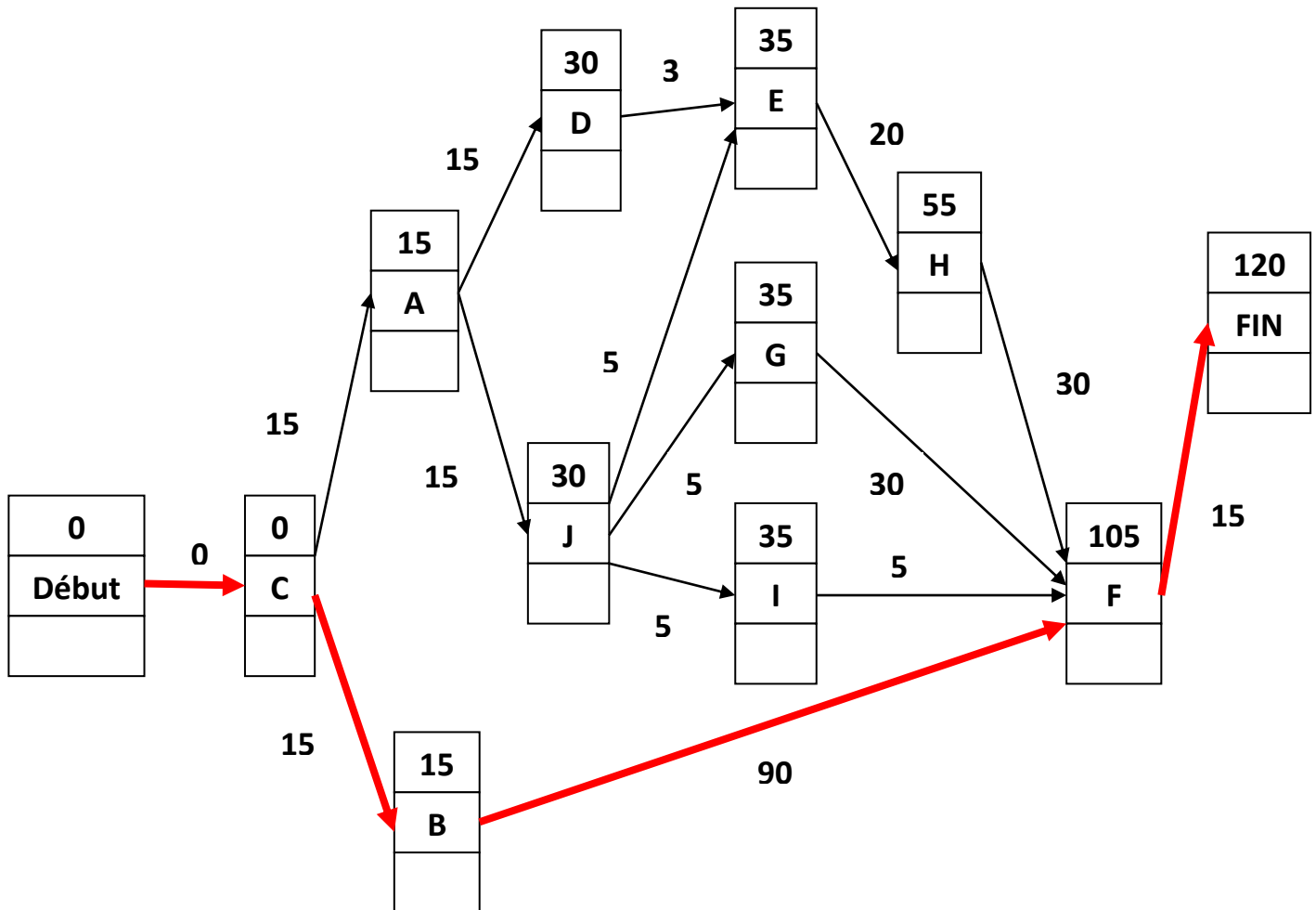


Figure 2: calendrier au plus tôt

a) Chemin critique et durée optimale du projet

Par définition le chemin critique est le plus long chemin entre le sommet début et le sommet fin du graphe.

Dans notre cas, il s'agit du chemin constitué successivement des tâches **C**, **B** et **F** de longueur **120**. Les tâches C, B, F du chemin critique sont aussi appelées tâches critiques.

Comme mentionné précédemment, cette longueur correspond à la durée minimale de réalisation de l'ensemble du projet, soit donc **120 jours**.

b) Calcul des marges

La marge totale d'une tâche est le délai maximal par rapport à la date au plus tôt pour le démarrage d'une tâche tel que la date d'achèvement du projet ne soit pas modifié. Elle se calcule comme la différence entre sa date de début au plus tard et sa date de début au plus tôt. La marge totale d'une tâche critique est nulle.

La marge libre d'une tâche est le délai maximal par rapport à la date au plus tôt pour le démarrage d'une tâche tel que le calendrier des tâches qui suivent ne soit pas modifié. Pour une tâche i qui a une date de début au plus tôt $EST(i)$ et une durée d_i , elle est égale à la différence entre la plus petite des dates de début au plus tôt des tâches qui suivent et $(EST(i) + d_i)$.

Pour pouvoir calculer les marges totales, il nous faut d'abord déterminer le calendrier au plus tard. Il s'agit de calculer la date de début « au plus tard » d'exécution. Cette fois-ci, il faut partir de la fin du graphe, donc du sommet final une fois qu'on lui a affecté une date au plus tard qui sera prise identique à la date au plus tôt de ce sommet lors du premier parcours du graphe pour le calcul du calendrier au plus tôt.

Pour trouver la date de début au plus tard d'une tâche i de durée d_i , il faut avoir déjà calculé les dates de début au plus tard de toutes les tâches S_i qui suivent la tâche i . la date de début au plus tard de la tâche i sera égale à la plus petite valeur des différences $(LST(S_i) - d_i)$.

La figure 3 ci-dessous reprend le graphe précédent avec le calcul du calendrier au plus tard.

Remarquons au passage que pour les tâches critiques C, B et F, le calendrier au plus tôt est identique au calendrier au plus tard ce qui donne une marge totale nulle à ces tâches.

Une marge totale nulle pour une tâche signifie que tout retard sur le démarrage de cette tâche par rapport à sa date de début se répercutera automatiquement sur le projet tout entier.

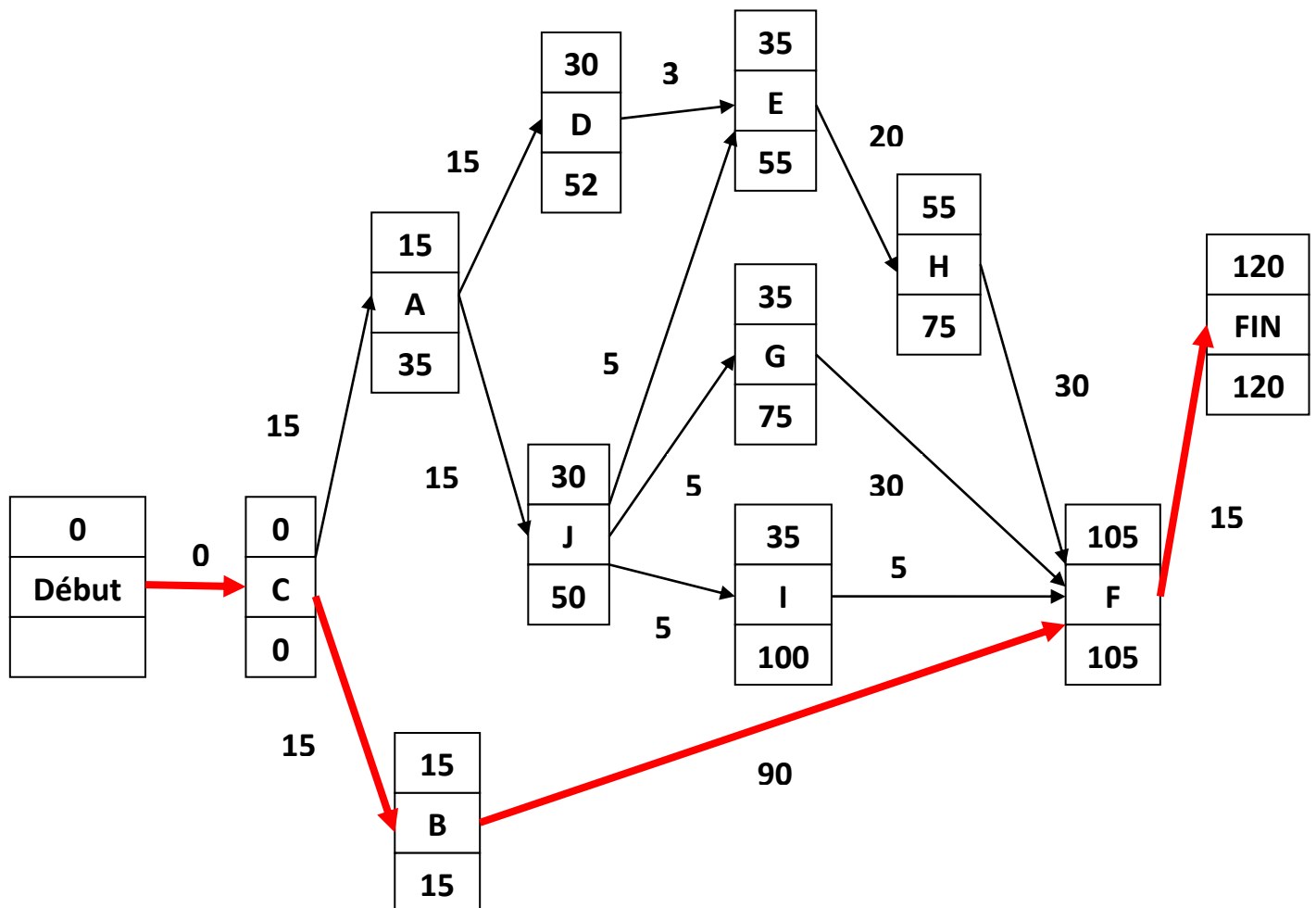


Figure 3: calendriers au plus tôt et au plus tard

En utilisant les règles de calcul des marges citées précédemment, on peut résumer les marges totales et les marges libres des tâches non critiques dans le tableau suivant :

Tâche	A	D	E	G	H	I	J
Marge totale (en jours)	20	22	20	40	20	65	20
Marge libre (en jours)	0	2	0	40	20	65	0

a) Graphe mis à jour

Le nouveau graphe est identique à celui de la question (a) avec l'ajout de la nouvelle tâche notée K qui ne pourra commencer que sept jours après la tâche F et durera cinq jours. **La figure 4** représente la modification apportée au graphe.

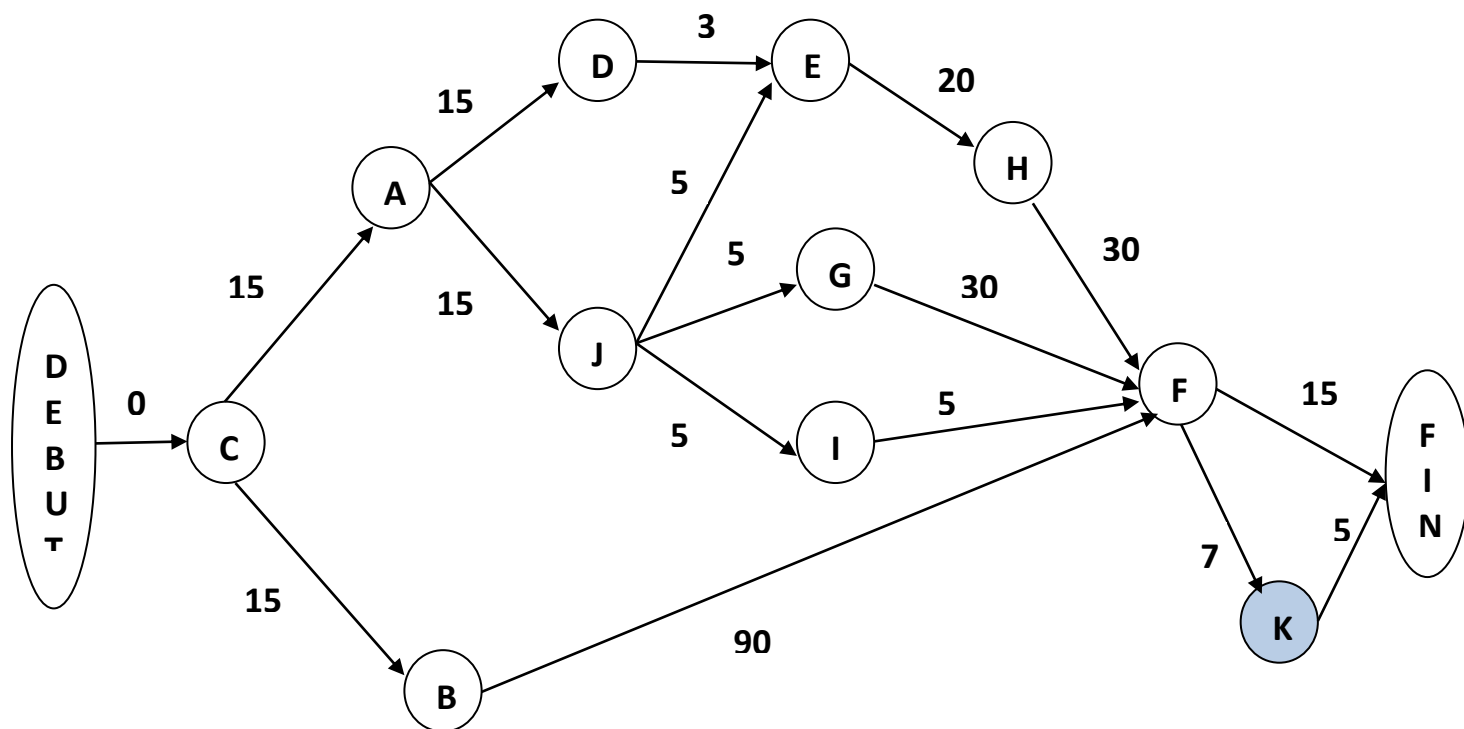


Figure 4: graphe MPM modifié

EXERCICE 2 : corrigé

a) Tracé du graphe MPM et calcul des calendriers au plus tôt et au plus tard

Pour modéliser ce problème d'ordonnancement sous forme d'un graphe potentiels-tâches, on procédera au classement des tâches en niveaux croissants pour faciliter le tracé et obtenir une disposition des tâches permettant d'appliquer l'algorithme de calcul des calendriers.

Le classement des tâches se fait à partir du tableau descriptif du projet en utilisant la colonne des opérations et celle des opérations précédentes comme suit :

Opérations	Opérations précédentes	N ₀	N ₁	N ₂	N ₃	N ₄	N ₅
A	-	A					
B	A		B				
C	B			C			
D	B			D			
E	B			E			
F	B			F			
G	C, D				G		
H	E, F, G					H	
I	H, J						I
J	E, F, G					J	
K	H, J						K
L	H, J						L

Dans le graphe potentiels-tâches, les tâches sont représentées par des sommets et les arcs représentent les contraintes de précédence. Ainsi la contrainte *i* précède *j* est elle symbolisée par un arc entre les sommets *i* et *j* et de longueur la durée de la tâche associée au sommet *i*. **La figure 1** représente le graphe potentiels-tâches associé au projet.

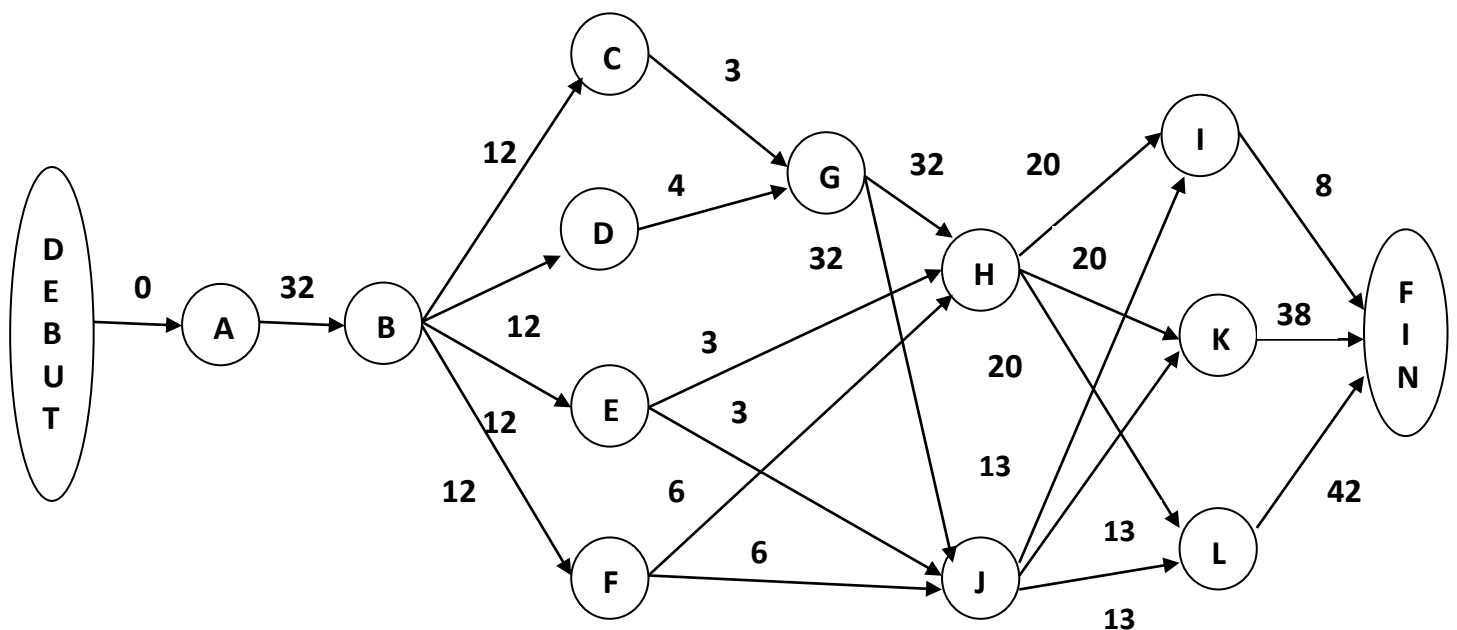


Figure 1: graphe MPM

Le calcul des calendriers au plus tôt et au plus tard peut se faire sur le graphe potentiels-tâches selon la même démarche expliquée dans les exercices précédents. Les calculs sont reportés sur le graphe MPM de la **figure 2**. Les date de début au plus tôt et de début au plus tard sont placées respectivement au dessus et en dessous de chaque sommet ou tâche.

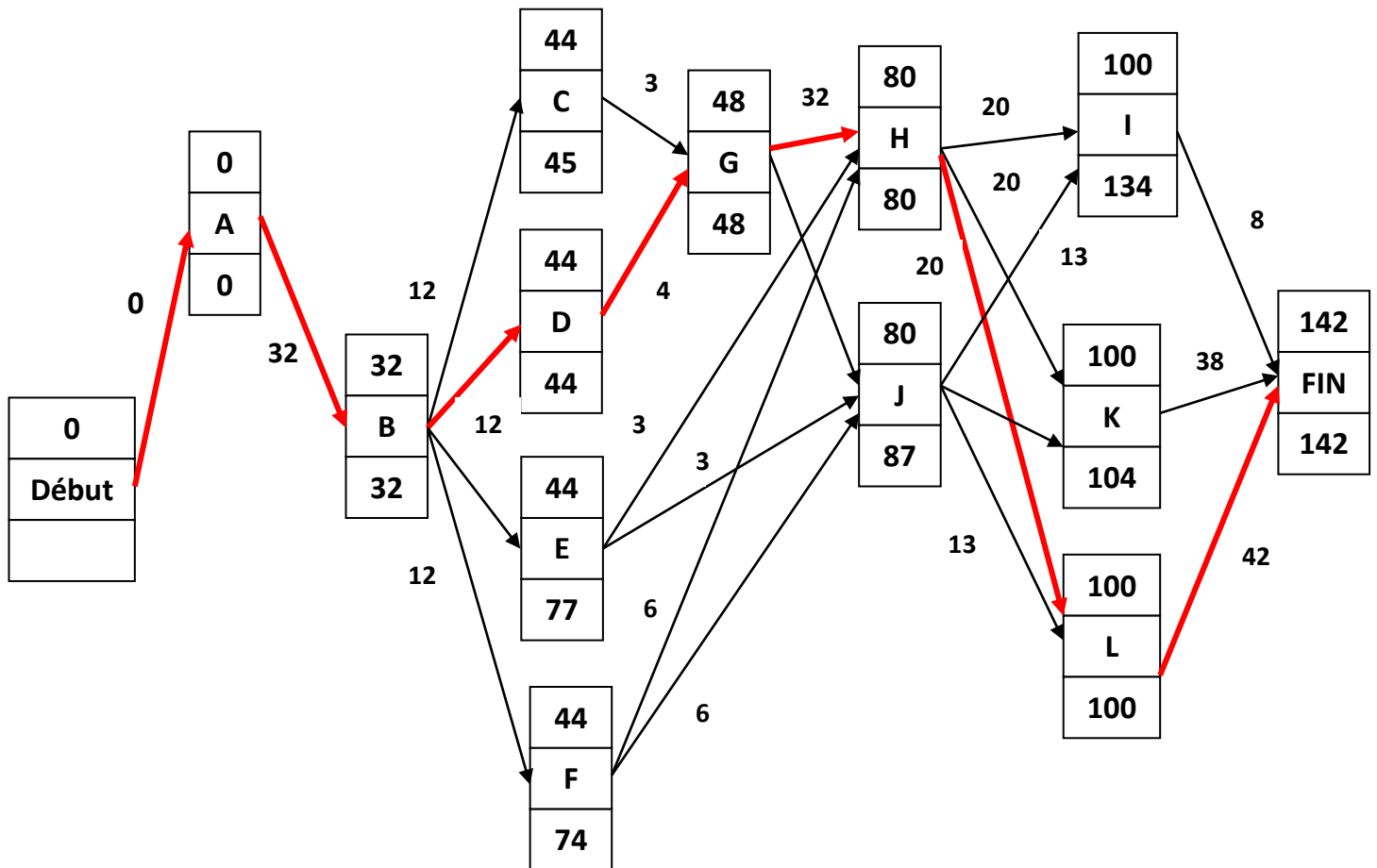


Figure 2: calendriers au plus tôt et au plus tard

a) Chemin critique et durée minimale de mise en exploitation du gisement

Le chemin critique est représentée en trait gras dans le graphe d'ordonnancement de la figure précédente. C'est le chemin de longueur maximale du sommet début au sommet fin.

Dans notre cas, il s'agit du chemin constitué successivement des tâches **A, B, D, G, H, L** de longueur **142**. La longueur du chemin critique correspond à la durée minimale de réalisation de l'ensemble du projet, soit donc **142 semaines** ou **35,5 mois**.

b) Calcul des marges

En utilisant les règles de calcul des marges citées précédemment, on peut résumer les marges totales et les marges libres des opérations non critiques dans le tableau suivant :

Tâche	C	E	F	I	J	K
Marge totale (en semaines)	1	33	30	34	7	4
Marge libre (en semaines)	1	33	30	34	7	4