@GradiusTwinbee

1 凸集与凸函数

与凸集和凸函数定义相关的证明

14. 设 f 是定义在$\mathbb{R}^n$上的函数，如果对每一点 $x\in\mathbb{R}^n$及正数 t 均有 $f(tx)=tf(x)$，则称 f 为正齐次函数. 证明$\mathbb{R}^n$上的正齐次函数 f 为凸函数的充要条件是，对任何 $x^{(1)}$，$x^{(2)}\in\mathbb{R}^n$，有

$$f(x^{(1)}+x^{(2)})\leqslant f(x^{(1)})+f(x^{(2)}).$$

2 单纯形法与对偶单纯形法

单纯形法

对偶单纯形法

单纯形法解的情况

非可行解：右端列有<0的

唯一最优解：最后一行非基均<0且满足可行

无穷多最优解：最后一行非基都不大于零且至少一个为零且满足可行且不满足无界

退化基本可行解：右端存在0或有两个基变量均可出基

无界解：至少一个非基变量检验数为正数且其对应的系数列向量中的元素都不大于0且满足可行

只有x进基，只有y出基：x检验数>0，其他非基检验数小于等于0，y能出基且那个比例最小，且满足可行

1. 某一最小线性规划问题在单纯形法计算时得到下表：

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_3	2	c	1	0	e	0	f
x_4	-1	-5	0	1	-1	0	2
x_3	a	-3	0	0	-4	1	3
	b	d	0	0	-3	0	

其中 a, b, c, d, e, f 是未知数，原问题中要求各变量均为非负。问 a, b, c, d, e, f 应满足什么条件，有下面各解成立？

（1）是非可行解；

（2）是唯一最优解；

（3）有无穷多最优解；

（4）无界解；

（5）是可行解但非最优解，只有 x1 可以进基且出基变量必为第三个基变量。

(1) f<0

(2) f≥0，b<0，d<0

(3) f≥0，b≤0，d≤0，bd=0，且d=0时c>0

(4) f≥0，d≥0，c≤0

(5) f≥0，b > 0，d≤0，3/a<f/2，a>0

四、（选做题）

某一最大化线性规划问题在单纯形法计算时，某一次迭代结果如表1所示。其中a, b, c,

		Cj→						
C_B	X_B	$B^{-1}b$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
	x_3	f	2	c	1	0	e	0
	x_4	2	-1	-5	0	1	-1	0
	x_6	3	a	-3	0	0	-4	1
$\sigma_j=C_j-z_j$			b	d	0	0	-3	0

d, e, f 是未知数，原问题中要求各变量均非负。问a, b, c, d, e, f 应满足什么条件，有下面各解成立？（假定无人工变量）

(1)表中解是非可行基解；(2)表中解是唯一最优解；(3)表中解为无穷多最优解；(4)表中解是退化的基可行解；(5)表中解为无界解；(6)表中解为可行解但非最优解，只有x 1进基且x 6出基。写出初等变换后目标函数值总变化。(7)一个约束条件有矛盾。 解：

（1）基解非负时就是基可行解。故当f<0时表中是非可行基解。

（2）唯一最优解要求非基变量检验数都小于零。所以f ≥0，b<0，d<0。

（3）无穷多最优解要求非基变量检验数都不大于零且其中至少一个为零，所以 f ≥0，b ≤0，d ≤0，但b 和d 中至少有一个为0，c>0。 （4）f=0或者f>0，b>0且f/2＝3/a 。

（5）无界解对应至少一个非基变量检验数为正数（可以找到进基变量）但其对应的系数列向量中的元素都不大于0（无法求θ，无法确定出基变量），所以f ≥0，d>0，c ≤0； （6）非基变量中检验数为正的变量都可作为进基变量，θ值最小的为出基变量。所以 f ≥0，b>0，f/2>3/a ，a>0。目标函数值的总变化b ×3/a 。 （7）当f<0,c ≥0, e ≥0时，约束方程1明显矛盾。 五、（选做题）已知线性规划问题的初始单纯形表（如表1）和用单纯形法迭代过程中得到的表（不一定是最优表，如表2）如下，其中x 4和x 5是松弛变量，试求括号中a~l 的值。

上一页 下一页

3 对偶问题与互补松弛定理

写出原问题的对偶问题

对偶原理

	min	max	
变量	≥ 0	$\leq$	约束方程
	≤ 0	$\geq$	
	无限制	$=$	
约束方程	$\geq$	≥ 0	变量
	$\leq$	≤ 0	
	$=$	无限制	

利用互补松弛定理求解

2. 给定原问题

$$\begin{aligned}\min\quad & 4x_1+3x_2+x_3\\ \text{s.t.}\quad & x_1-x_2+x_3\geqslant 1,\\ & x_1+2x_2-3x_3\geqslant 2,\\ & x_1,x_2,x_3\geqslant 0.\end{aligned}$$

已知对偶问题的最优解$(w_1,w_2)=\left(\frac{5}{3},\frac{7}{3}\right)$,利用对偶性质求原问题的最优解.

解 对偶问题:

$$\begin{aligned}\max\quad & w_1+2w_2\\ \text{s.t.}\quad & w_1+w_2\leqslant 4,\\ & -w_1+2w_2\leqslant 3,\\ & w_1-3w_2\leqslant 1,\\ & w_1\geqslant 0,\\ & w_2\geqslant 0.\end{aligned}$$

由于对偶问题的最优解 $w_1=\frac{5}{3}>0,w_2=\frac{7}{3}>0$,因此原问题的前两个约束在最优解处是紧约束.又知对偶问题的第 3 个约束在最优解处是松约束,因此原问题在最优解处$x_3=0$.从而得下列线性方程组:

$$\begin{cases}x_1-x_2+x_3=1,\\ x_1+2x_2-3x_3=2,\\ x_3=0.\end{cases}$$

解得原问题的最优解 $x_1=\frac{4}{3},x_2=\frac{1}{3},x_3=0$,最优值为$\frac{19}{3}$.

4 灵敏度分析

变b

变c

9. 给定下列线性规划问题:

$$\begin{aligned}\min\quad & -2x_1-x_2+x_3\\ \text{s.t.}\quad & x_1+x_2+2x_3\leqslant 6,\\ & x_1+4x_2-x_3\leqslant 4,\\ & x_1,x_2,x_3\geqslant 0.\end{aligned}$$

它的最优单纯形表如下表:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	0	-1	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
x_1	1	3	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{14}{3}$
	0	-6	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{26}{3}$

(1) 若右端向量 $\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}6\\4\end{bmatrix}$改为 $\boldsymbol{b}'=\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}$,原来的最优基是否还为最优基？利用原来的最优表求新问题的最优解.

(2) 若目标函数中 x_1 的系数由 $c_1=-2$ 改为 c_1',那么 c_1'在什么范围内时原来的最优解也是新问题的最优解？

解 (1) 先计算改变后的右端列向量

$$\overline{\boldsymbol{b}'}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}'=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{2}{3}\\ \frac{10}{3}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{c}_B\overline{\boldsymbol{b}'}=(1,-2)\begin{bmatrix}-\frac{2}{3}\\ \frac{10}{3}\end{bmatrix}=-\frac{22}{3}.$$

右端向量 $\boldsymbol{b}$ 改为 $\boldsymbol{b}'$后,原来的最优基已不是可行基,对应各变量的判别数不变.下面用对偶单纯形法求最优解：

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	0	-1	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$
x_1	1	3	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{10}{3}$
	0	-6	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{22}{3}$
x_5	0	3	-3	-1	1	2
x_1	1	1	2	1	0	2
	0	-1	-5	-2	0	-4

新问题的最优解 $(x_1,x_2,x_3)=(2,0,0)$,最优值 $f_{\min}=-4$.

(2) c_1 改为 c_1'后,令对应各变量的判别数

$$\begin{cases}z_1'-c_1'=0,\\ z_2'-c_2'=-6+3(c_1'+2)\quad\leqslant 0,\\ z_3'-c_3'=0+0(c_1'+2)\qquad\leqslant 0,\\ z_4'-c_4'=-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}(c_1'+2)\leqslant 0,\\ z_5'-c_5'=-\frac{5}{3}+\frac{2}{3}(c_1'+2)\leqslant 0.\end{cases}$$

解得 $c_1'\leqslant -1$. 因此,当 $c_1'\leqslant -1$ 时原来的最优解也是新问题的最优解.

10. 考虑下列线性规划问题：

$$\begin{aligned}\max\quad & -5x_1+5x_2+13x_3\\ \text{s.t.}\quad & -x_1+x_2+3x_3\leqslant 20,\\ & 12x_1+4x_2+10x_3\leqslant 90,\\ & x_1,x_2,x_3\geqslant 0.\end{aligned}$$

先用单纯形方法求出上述问题的最优解,然后对原来问题分别进行下列改变,试用原来问题的最优表求新问题的最优解：

(1) 目标函数中 x_3 的系数 c_3 由 13 改变为 8.

解 先引入松弛变量 x_4, x_5，化成标准形式：

$$
\begin{aligned}
\max \quad & -5x_1 + 5x_2 + 13x_3 \\
\text{s. t.} \quad & -x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 20, \\
& 12x_1 + 4x_2 + 10x_3 + x_5 = 90, \\
& x_j \geqslant 0, \quad j = 1,2,\cdots,5.
\end{aligned}
$$

用单纯形方法求最优解，过程如下：

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_4	-1	1	3	1	0	20
x_5	12	4	10	0	1	90
	5	-5	-13	0	0	0
x_2	-1	1	3	1	0	20
x_5	16	0	-2	-4	1	10
	0	0	2	5	0	100

最优解 $(x_1, x_2, x_3) = (0,20,0)$，最优值 $f_{\max} = 100$.

(1) 非基变量 x_3 的目标系数 c_3 由 13 改变为 8 后，对应 x_3 的判别数

$$z_3' - c_3' = (z_3 - c_3) + (c_3 - c_3') = 2 + (13 - 8) = 7 > 0.$$

最优解不变，仍为 $(x_1, x_2, x_3) = (0,20,0)$，$f_{\max} = 100$.

5 凸集分离定理

凸集分离定理定理、Farkas定理、Gorden定理的证明

用以上三个定理做证明题

img

img

Gordan定理： 设A为$m \times n$矩阵，那么$Ax < 0$有解的充要条件是不存在非零向量$y \geq 0$，使得$A^T y = 0$。

6. 设 A 是 $m\times n$ 矩阵，$c\in\mathbb{R}^n$，则下列两个系统恰有一个有解：

系统 1　$Ax\leqslant 0, x\geqslant 0, c^{T}x>0$，对某些 $x\in\mathbb{R}^n$.

系统 2　$A^{T}y\geqslant c, y\geqslant 0$，对某些 $y\in\mathbb{R}^m$.

证　若系统 1 有解，即

$$\begin{bmatrix} A \\ -I \end{bmatrix} x\leqslant 0,\quad c^{T}x>0$$

有解，则根据 Farkas 定理，有

$$(A^{T}\ -I)\begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix}=c,\quad \begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix}\geqslant 0$$

无解，即 $A^{T}y-u=c, y\geqslant 0, u\geqslant 0$ 无解，亦即

$$A^{T}y\geqslant c,\quad y\geqslant 0$$

无解.

反之，若 $A^{T}y\geqslant c,\quad y\geqslant 0$ 有解，即

$$A^{T}y-u=c,\quad y\geqslant 0,\ u\geqslant 0$$

有解，亦即

$$(A^{T}\ -I)\begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix}=c,\quad \begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix}\geqslant 0$$

有解. 根据 Farkas 定理，有

$$\begin{bmatrix} A \\ -I \end{bmatrix} x\leqslant 0,\quad c^{T}x>0$$

无解，即

$$Ax\leqslant 0,\quad x\geqslant 0,\quad c^{T}x>0$$

无解.

6 最优性条件

一阶条件与凸规划

二阶条件

$$G=\left\{d\neq 0\left|\begin{array}{l}\nabla g_i(\bar{x})^{T}d=0, i\in I \text{且} \bar{w}_i>0 \\ \nabla g_i(\bar{x})^{T}d\geq 0, i\in I \text{且} \bar{w}_i=0 \\ \nabla h_j(\bar{x})^{T}d=0, j=1,2,\cdots,l\end{array}\right.\right\}.$$

5. 用 K-T 条件求解下列问题

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1^2 - x_2 - 3x_3 \\ \text{s. t.} \quad & -x_1 - x_2 - x_3 \geqslant 0, \\ & x_1^2 + 2x_2 - x_3 = 0. \end{aligned}$$

解 记作 $f(\boldsymbol{x})=x_1^2-x_2-3x_3$，$g_1(\boldsymbol{x})=-x_1-x_2-x_3$，$h(\boldsymbol{x})=x_1^2+2x_2-x_3$. 目标函数和约束函数的梯度分别为

$$\nabla f(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \nabla g_1(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \nabla h(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

最优解的一阶必要条件如下：

$$\begin{cases} 2x_1 + w - 2wx_1 = 0, \\ -1 + w - 2v = 0, \\ -3 + w + v = 0, \\ w(-x_1 - x_2 - x_3) = 0, \\ w \geqslant 0, \\ -x_1 - x_2 - x_3 \geqslant 0, \\ x_1^2 + 2x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

解得 K-T 点 $\bar{\boldsymbol{x}}=\left(-\frac{7}{2},-\frac{35}{12},\frac{77}{12}\right)$，$w=\frac{7}{3}$，$v=\frac{2}{3}$，Lagrange 函数为

$$L(\boldsymbol{x},w,v) = x_1^2 - x_2 - 3x_3 - w(-x_1 - x_2 - x_3) - v(x_1^2 + 2x_2 - x_3),$$

Hesse 矩阵为

$$\nabla_x^2 L(\boldsymbol{x},w,v) = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

在点 $\bar{\boldsymbol{x}}$，两个约束均是起作用约束，梯度

$$\nabla g(\bar{\boldsymbol{x}}) = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \nabla h(\bar{\boldsymbol{x}}) = \begin{bmatrix} -7 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

解方程组

$$\begin{cases} \nabla g(\bar{\boldsymbol{x}})^{\mathrm{T}} \boldsymbol{d} = 0, \\ \nabla h(\bar{\boldsymbol{x}})^{\mathrm{T}} \boldsymbol{d} = 0, \end{cases} \quad \text{即} \begin{cases} -d_1 - d_2 - d_3 = 0, \\ -7d_1 + 2d_2 - d_3 = 0. \end{cases}$$

得解 $\boldsymbol{d}=(d_1,2d_1,-3d_1)^{\mathrm{T}}$. 由于 $\boldsymbol{d}^{\mathrm{T}}\nabla_x^2 L(\bar{\boldsymbol{x}},w,v)\boldsymbol{d}=\frac{2}{3}d_1^2>0$，因此最优解 $\bar{\boldsymbol{x}}=\left(-\frac{7}{2},-\frac{35}{12},\frac{77}{12}\right)$，

最优值 $f(\bar{\boldsymbol{x}})=-\frac{49}{12}$.

7 算法

最速下降方向、牛顿方向、共轭方向、下降可行方向

- **最速下降方向的定义：**

$$d^{(k)} = -\nabla f(x^{(k)})$$

- **牛顿方向：**

$$d^{(k)} = -\nabla^2 f(x^{(k)})^{-1} \nabla f(x^{(k)})$$

共轭方向

定义： 设A是$n \times n$对称正定矩阵，若E^n中的两个方向$d^{(1)}$和$d^{(2)}$满足

$$(d^{(1)})^T A d^{(2)} = 0$$

则称这两个方向关于A共轭，或称它们关于A正交。

性质

设A是n阶对称正定矩阵，$d^{(1)}, d^{(2)}, \cdots, d^{(k)}$是$k$个$A$共轭的非零向量，则这$k$个向量线性无关。

$$\begin{cases} \min \ f(x) \\ s.t. \quad Ax \ge b \\ \qquad\quad Ex = e \end{cases} \qquad (1)$$

定理： 设$\bar{x}$是问题(1)的可行解，在$\bar{x}$点处，有

$$A_1 \bar{x} = b_1, A_2 \bar{x} > b_2$$

其中$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$，则非零向量$d$是$\bar{x}$处的可行方向的充要条件是$A_1 d \ge 0, Ed = 0$.

设目标函数$f(x)$具有一阶偏导数，$x^{(k+1)}$由下列规则产生：

$$\begin{cases} f(x^{(k)} + \lambda_k d^k) = \min\limits_{\lambda} f(x^{(k)} + \lambda d^k) \\ x^{(k+1)} = x^{(k)} + \lambda_k d^k \end{cases}$$

则有$\nabla f(x^{(k+1)})^T d^k = 0$。

二次终止性

牛顿方向法，共轭方向法

- 二次终止性的定义：若某个算法对于任意的正定二次函数，从任意的初始点出发，都能经有限步迭代达到其极小点，则称该算法具有二次终止性。

算法过程模拟

算法证明（下降可行方向类，KKT类）

3. 用最速下降法求解下列问题：

$$\min \quad x_1^2-2x_1x_2+4x_2^2+x_1-3x_2.$$

取初点 $\boldsymbol{x}^{(1)}=(1,1)^{\mathrm{T}}$，迭代两次.

解　第 1 次迭代，从 $\boldsymbol{x}^{(1)}$ 出发沿最速下降方向搜索.

设 $f(\boldsymbol{x})=x_1^2-2x_1x_2+4x_2^2+x_1-3x_2$，则

$$\nabla f(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix}2x_1-2x_2+1\\-2x_1+8x_2-3\end{bmatrix},$$

故

$$\nabla f(\boldsymbol{x}^{(1)})=\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{d}^{(1)}=\begin{bmatrix}-1\\-3\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{x}^{(1)}+\lambda\boldsymbol{d}^{(1)}=\begin{bmatrix}1-\lambda\\1-3\lambda\end{bmatrix}.$$

取

$$\varphi(\lambda)=f(\boldsymbol{x}^{(1)}+\lambda\boldsymbol{d}^{(1)})=(1-\lambda)^2-2(1-\lambda)(1-3\lambda)+4(1-3\lambda)^2+(1-\lambda)-3(1-3\lambda),$$

令

$$\varphi'(\lambda)=-2(1-\lambda)+2(1-3\lambda)+6(1-\lambda)-24(1-3\lambda)-1+9=0,$$

解得

$$\lambda_1=\frac{5}{31},\quad \boldsymbol{x}^{(2)}=\boldsymbol{x}^{(1)}+\lambda_1\boldsymbol{d}^{(1)}=\begin{bmatrix}\frac{26}{31}\\[4pt]\frac{16}{31}\end{bmatrix}.$$

第 2 次迭代，从 $\boldsymbol{x}^{(2)}$ 出发，沿最速下降方向搜索.

$$\boldsymbol{d}^{(2)}=-\nabla f(\boldsymbol{x}^{(2)})=\begin{bmatrix}-\frac{51}{31}\\[4pt]\frac{17}{31}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{x}^{(2)}+\lambda\boldsymbol{d}^{(2)}=\begin{bmatrix}\frac{1}{31}(26-51\lambda)\\[4pt]\frac{1}{31}(16+17\lambda)\end{bmatrix},$$

取

$$\varphi(\lambda)=f(\boldsymbol{x}^{(2)}+\lambda\boldsymbol{d}^{(2)})=\frac{1}{31^2}(26-51\lambda)^2-\frac{2}{31^2}(26-51\lambda)(16+17\lambda)$$
$$+\frac{4}{31^2}(16+17\lambda)^2+\frac{1}{31}(26-51\lambda)-\frac{3}{31}(16+17\lambda),$$

令

$$\varphi'(\lambda)=-\frac{2\times 51}{31^2}(26-51\lambda)+\frac{2\times 51}{31^2}(16+17\lambda)$$
$$-\frac{2\times 17}{31^2}(26-51\lambda)+\frac{8\times 17}{31^2}(16+17\lambda)-\frac{51}{31}-\frac{3\times 17}{31}=0,$$

得到

$$\lambda_2=\frac{5}{19},\quad \boldsymbol{x}^{(3)}=\boldsymbol{x}^{(2)}+\lambda_2\boldsymbol{d}^{(2)}=\begin{bmatrix}\frac{239}{589}\\[4pt]\frac{389}{589}\end{bmatrix}.$$

5. 设有函数

$$f(x)=\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}Ax+b^{\mathrm{T}}x+c,$$

其中 A 为对称正定矩阵. 又设 $x^{(1)}(\neq\bar{x})$ 可表示为

$$x^{(1)}=\bar{x}+\mu p,$$

其中 $\bar{x}$ 是 $f(x)$ 的极小点, p 是 A 的属于特征值 λ 的特征向量. 证明:

(1) $\nabla f(x^{(1)})=\mu\lambda p$.

(2) 如果从 $x^{(1)}$ 出发,沿最速下降方向作精确的一维搜索,则一步达到极小点 $\bar{x}$.

证 (1) 先证第 1 个等式. 易知

$$\nabla f(x^{(1)})=Ax^{(1)}+b=A(\bar{x}+\mu p)+b=(A\bar{x}+b)+\mu Ap.$$

由于 $\bar{x}$ 是 $f(x)$ 的极小点, 故 $\nabla f(\bar{x})=A\bar{x}+b=0$, 而 $Ap=\lambda p$, 因此

$$\nabla f(x^{(1)})=\mu\lambda p.$$

(2) 从 $x^{(1)}$ 出发,用最速下降法搜索,并考虑(1)中结论,则有

$$x^{(2)}=x^{(1)}-\beta\nabla f(x^{(1)})=\bar{x}+\mu p-\beta(\mu\lambda p)=\bar{x}+(1-\beta\lambda)\mu p.$$

由于 A 是对称正定矩阵,因此特征值 $\lambda\neq 0$. 令 $\beta=\frac{1}{\lambda}$, 则 $x^{(2)}=\bar{x}$.

2. 考虑下列问题:

$$\begin{aligned}\min\quad & x_1^2+x_1x_2+2x_2^2-6x_1-2x_2-12x_3\\ \text{s.t.}\quad & x_1+x_2+x_3=2,\\ & -x_1+2x_2\leqslant 3,\\ & x_1,x_2,x_3\geqslant 0.\end{aligned}$$

求出在点 $\hat{x}=(1,1,0)^{\mathrm{T}}$ 处的一个下降可行方向.

解 目标函数 $f(x)=x_1^2+x_1x_2+2x_2^2-6x_1-2x_2-12x_3$ 的梯度是

$$\nabla f(x)=\begin{bmatrix}2x_1+x_2-6\\ x_1+4x_2-2\\ -12\end{bmatrix},\quad 故\nabla f(\hat{x})=\begin{bmatrix}-3\\ 3\\ -12\end{bmatrix}.$$

在 $\hat{x}=(1,1,0)^{\mathrm{T}}$ 处起作用约束有

$$x_1+x_2+x_3=2,$$
$$x_3\geqslant 0.$$

在 $\hat{x}$ 处可行方向满足下列条件:

$$\begin{cases}d_1+d_2+d_3=0, & (1)\\ d_3\geqslant 0. & (2)\end{cases}$$

下降方向满足 $\nabla f(\hat{x})^{\mathrm{T}}d<0$, 即

$$-3d_1+3d_2-12d_3<0. \tag{3}$$

同时满足上述 3 个条件的方向是 $\hat{x}$ 处下降可行方向. 如 $d=(0,-1,1)^{\mathrm{T}}$.