北京航空航天大学

2019－2020 学年 第二学期期末

《试题》

A卷（B卷/C卷）

班　级＿＿＿＿＿＿＿＿学 号 ＿＿＿＿＿＿

姓　名＿＿＿＿＿＿＿＿成 绩 ＿＿＿＿＿＿

2020 年 6 月 20 日

班号__________　　学号_________　　姓名________　　成绩________

《 最优化方法 》期末考试卷

注意事项：1、考试时间：2020年6月16日9：00-12：00

题目：

一、已知线性规划原问题：(20分)

$$
\begin{aligned}
\min\ & 8x_1+6x_2+3x_3+6x_4\\
s.t.\ & x_1+2x_2\quad +x_4\ge 3\\
& 3x_1+x_2+x_3+x_4\ge 6\\
& \qquad\qquad x_3+x_4\ge 2\\
& x_1\qquad\quad +x_3\quad \ge 2\\
& x_1,x_2,x_3,x_4\ge 0
\end{aligned}
$$

（1）写出对偶问题的模型；

（2）已知原问题的最优解为 $x^*=(1,1,2,0)$，试通过互补松弛条件求解对偶问题的最优解。

二、考虑以下的二次规划问题: （ 20分）

$$
\begin{aligned}
\min\ & \frac{1}{2}x_1^2+\frac{1}{2}x_2^2-x_1-2x_2\\
s.t.\ & x_1+x_2-\kappa\ge 0\\
& x_1,x_2\ge 0
\end{aligned}
$$

其中，$\kappa\in R$ 是一个常数。(用KKT条件)回答以下问题：

（1）证明：当 $\kappa=4$ 时，$x^*=(1.5,2.5)^T$ 是该二次规划问题的最优解。

（2）当 κ 在什么范围内变化时，该二次规划问题的最优解是可行域的内点？给出此时的最优解及目标函数最优值。

（3）当 κ 在什么范围内变化时，该二次规划问题的最优解是可行域的边界点？给出此时的最优解及目标函数最优值。

（4）写出该二次规划问题的对偶问题，其中集约束 $D=\left\{(x_1,x_2)^T \mid x_1\ge 0,x_2\ge 0\right\}$。

三、给定线性规划问题：（20分）

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1 + x_2 - 3x_3 \\ s.t. \quad & x_1 - 2x_2 + x_3 \le 11 \\ & 2x_1 + x_2 - 4x_3 \ge 3 \\ & x_1 \qquad - 2x_3 = 1 \\ & x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

（1） 运用单纯形法求最优解。

（2） 若右端向量$(11,3,1)^T$改为$(-2,3,1)^T$，求新问题的最优解。

四、考虑下列非线性规划问题：（ 20 分）

$$\begin{aligned} \min \quad & (x_1-1)^2 + x_2^2 \\ s.t. \quad & x_1 - \frac{x_2^2}{\beta} = 0 \end{aligned}$$

其中$\beta > 0$为参数，讨论$\overline{x} = (0,0)^T$是否是局部最优解？

五、考虑下列约束问题：（20 分）

$$\begin{aligned} \min \ & f(x) \\ s.t. \quad & Ax = b \end{aligned}$$

令$A = (B, N), x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}$,其中，$B$是$m \times m$阶可逆矩阵，$x$是问题的一个可行解，$x_B$和$x_N$分别是由基变量和非基变量构成的向量，则

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$$

带入原问题的目标函数，得到仅以x_N为自变量的函数$F(x_N) = f(x_B(x_N), x_N)$。令

$$r(x_N) = \nabla F(x_N) = \nabla_{x_N} f(x_B(x_N), x_N) - (B^{-1}N)^T \nabla_{x_B} f(x_B(x_N), x_N).$$

定义 $d = \begin{bmatrix} d_B \\ d_N \end{bmatrix}$，其中

$$d_{N_j} = -r_{N_j}, \quad d_B = -B^{-1}Nd_N \text{。}$$

证明：（1）若$d \ne 0$，则d为x处的下降可行方向；

（2）$d = 0$的充分必要条件是x为约束问题的 KKT 点。