Projet MONOPALME : variables de post-traitement

Responsables : L. Monier, F. Razafimahery

1 Modélisation du problème

Le repère de calcul sera celui lié au mouvement de la cheville (rotation et translation). Pour les visualisations des résultats dynamiques, il faut revenir dans le repère absolu, qui est celui de l'entraîneur situé sur le bord de la piscine et qui voit le nageur en train de défiler devant lui.
• Pour la modélisation du liquide, on utilise l'approximation acoustique où le paramètre pertinent est le champ de pression p.
• Pour la palme, on utilise le modèle élastique classique, où les deux paramètres importants sont les coefficients de Lamé λ et μ, ou de façon équivalente, le module d'Young E (rigidité) et le coefficient de Poisson ν (coefficient de contraction). Le problème associé est décrit par le champ de déplacement $\mathbf{u} = (u, v)$ (en 2D).
Le problème aux limites à résoudre est donc la recherche du couple $(\mathbf{u}, p)$ solution de

$$\left\{\begin{array}{ccccc} \rho_s \dfrac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} & = & \mathbf{div}\sigma(\mathbf{u}) + \rho_s \mathbf{f}_e & (\Omega_s) \\ \mathbf{u} & = & \mathbf{0} & (\Gamma_0) \\ \sigma(\mathbf{u})\mathbf{n} & = & -p\mathbf{n} & (\Gamma) \\ \dfrac{1}{c_0^2}\dfrac{\partial^2 p}{\partial t^2} + div\,[-(\nabla p - \mathbf{q})] & = & div(\mathbf{Q}) & (\Omega_f) \\ \dfrac{\partial p}{\partial n} & = & -\rho_0 \dfrac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}\cdot \mathbf{n} & (\Gamma_1) \\ \dfrac{\partial p}{\partial n} & = & 0 & (\Gamma_h) \\ p & = & 0 & (\Gamma_g \cup \Gamma_s \cup \Gamma_e) \end{array}\right. \tag{1}$$

où c_0 est la célérité du son dans le fluide, ρ la masse volumique de la palme et ρ_0 celle du fluide. Le vecteur normal $\mathbf{n}$ est orientée vers l'extérieur du fluide. Les quantités $\mathbf{q}$ et $div(\mathbf{Q})$ sont appelées respectivement le dipôle et le monopôle associées au problème acoustique. La loi de comportement de la palme est définie par la loi de Hooke

$$\sigma(\mathbf{u}) = \lambda(div\mathbf{u})\mathbb{I} + 2\mu\varepsilon(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} \lambda(div\mathbf{u}) + 2\mu\dfrac{\partial u}{\partial x} & \mu\left(\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x}\right) \\ \mu\left(\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x}\right) & \lambda(div\mathbf{u}) + 2\mu\dfrac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} \tag{2}$$

La résolution du problème aux limites (1) peut se faire de deux manières :

1. **résolution par utilisation des modèles existants :** dans ce cas, le modèle **Multiphysics** est activé, et on utilise les modules pré-existants sous **COMSOL**, à savoir **Structural Mechanics** associé à **Acoustics**. Cette modélisation conduit à la génération automatique des variables de post-traitement.
2. **résolution par PDE :** dans ce cas, le modèle **Multiphysics** est activé, et on utilise le modèle **PDE General Form**. Cette technique, qui est de loin la plus puissante, car paramétrable, ne génère pas forcément les variables utiles au post-traitement, sauf celles liées aux différentes dérivées spatiales et temporelles.

2 Les principales variables de post-traitement

On se place dans le cadre de l'approche par **PDE General Form**. La modélisation du problème conduit à la déclaration pour chaque modèle des variables qui lui soient associées, ainsi que le dégré des éléments finis utilisé et le nom du modèle. Par exemple
• **Pour la palme :** `u v`; `Lagrange-Quadratic`; `fin`
• **Pour le fluide :** p ; Lagrange-Quadratic ; fluid

2.1 Variables pour la palme

Voici une liste non exhaustive des variables utiles pour le post-traitement

1. **les composantes du tenseur de déformation, la divergence et le déplacement total :** c'est-à-dire

$$\varepsilon(\mathbf{u}) = \left[\begin{array}{cc} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial x}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial x}\right) & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{array}\right] \;;\; \varepsilon_{kk} = div\mathbf{u} = \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y} \;;\; \mathtt{disp} = ||\mathbf{u}|| \tag{3}$$

   Les visualisation de ces quantités permettent de voir par exemple les zones de déformation maximale.

2. **les composantes du tenseur des contraintes et la contrainte équivalente de Von Misès :** c'est-à-dire

$$\sigma(\mathbf{u}) = \lambda(div\mathbf{u})\mathbb{I} + 2\mu\varepsilon(\mathbf{u}) = \left[\begin{array}{cc} \lambda\varepsilon_{\mathtt{kk}}+2\mu\mathtt{exx} & 2\mu\mathtt{exy} \\ 2\mu\mathtt{eyx} & \lambda\varepsilon_{\mathtt{kk}}+2\mu\mathtt{eyy} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} \mathtt{sxx} & \mathtt{sxy} \\ \mathtt{syx} & \mathtt{syy} \end{array}\right] \tag{4}$$

   La contrainte équivalente de Von Misès est définie par

$$\sigma_e = \sqrt{\frac{3}{2}\mathtt{tr}\left[\left(\sigma(\mathbf{u}) - \frac{\mathtt{sxx}+\mathtt{syy}}{3}\mathbb{I}\right)\cdot\left(\sigma(\mathbf{u}) - \frac{\mathtt{sxx}+\mathtt{syy}}{3}\mathbb{I}\right)\right]} \tag{5}$$

   où $\mathbb{I}$ est la matrice unité. C'est cette quantité qui permet de mesurer l'intensité des efforts locaux en chaque point de la palme.

3. **les composantes du vecteur contrainte normale** c'est-à-dire

$$\mathbf{T} = \sigma(\mathbf{u})\mathbf{n} = \left[\begin{array}{cc} \mathtt{sxx} & \mathtt{sxy} \\ \mathtt{syx} & \mathtt{syy} \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} \mathtt{nx} \\ \mathtt{ny} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \mathtt{sxx}*\mathtt{nx}+\mathtt{ny}*\mathtt{sxy} \\ \mathtt{syx}*\mathtt{nx}+\mathtt{ny}*\mathtt{syy} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \mathtt{Tax} \\ \mathtt{Tay} \end{array}\right] \tag{6}$$

   où $\mathbf{n}$=(`nx, ny`) est la normale extérieure à la frontière de la palme. C'est cette quantité qui permet, après intégration sur la surface de la palme, de calculer les efforts globaux subit par celle-ci. En effet,

$$\mathtt{L} = \int_\Gamma \mathtt{Tax}\mathtt{d}\Gamma \qquad ; \qquad \mathtt{P} = -\mathtt{D} = -\int_\Gamma \mathtt{Tay}\mathtt{d}\Gamma \tag{7}$$

   où `L` (Lift) est la portance, `D` (Drag) la traînée et `P` la force propulsive.

2.2 Variables pour le fluide

La formulation en p ne permet pas toujours d'obtenir les variables spatiales associées au domaine fluide. Voici une liste non exhaustive des variables utiles pour le post-traitement

1. **le gradient de pression :** c'est-à-dire

$$(\mathtt{px},\mathtt{py}) = \nabla\mathtt{p} = \left(\frac{\partial\mathtt{p}}{\partial\mathtt{x}}, \frac{\partial\mathtt{p}}{\partial\mathtt{y}}\right) \tag{8}$$

   Cette quantité permet en première approximation de visualiser les champs de vitesse des particules fluide, ainsi que les lignes de courant. En effet, l'équation d'équilibre du fluide s'écrit

$$\rho_0\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial\mathtt{t}} = -\nabla\mathtt{p} \tag{9}$$

   où $\mathbf{v}$ est le champ de vitesse du fluide.

2. **la portance et la force propulsive à partir du champ de pression :** en effet, la continuité de la contrainte à la surface permet d'avoir

$$\mathtt{L} = -\int_\Gamma \mathtt{p}*\mathtt{nx}\mathtt{d}\Gamma \qquad ; \qquad \mathtt{P} = -\mathtt{D} = -\int_\Gamma \mathtt{p}*\mathtt{ny}\mathtt{d}\Gamma \tag{10}$$

   où $\mathbf{n}$=(`nx, ny`) est la normale extérieure à la frontière de la palme.