Lektion 2: Laplacetransformation

Modellering af elektromekaniske systemer
Multivariable Mathematics in Robotics

Christoffer Sloth

chsl@mmmi.sdu.dk

SDU Robotics
Mærsk Mc-Kinney Møller Instituttet
Syddansk Universitet

Dagsorden

Introduktion

Lineære tidsinvariante systemer
- Egenskaber
- Respons af lineære systemer

Laplacetransformation
- Overføringsfunktion
- Frekvensrespons
- Egenskaber

Invers Laplacetransformation

Introduktion

Pensum for Modellering af elektromekaniske systemer

Viden[1]

Den studerende skal kunne:

- forklare den grundlæggende fysiks love og begreber
- beskrive et elektromekanisk system ved hjælp af systemets parametre
- redegøre for virkemåden af børstede og børsteløse DC motorer
- opstille overføringsfunktioner for lineære systemer

Færdigheder

Den studerende skal kunne:

- udføre fritlegemeanalyse på et mekanisk system
- anvende Newtons 3 love til modellering af mekaniske systemer
- anvende Lagrange D'Alemberts princip til modellering af mekaniske systemer
- opstille differentialligninger, der beskriver et elektromekanisk systems bevægelse
- fortolke lineære systemers bevægelse i frekvensdomæne
- modellere og simulere simple serielle manipulatorer

Kompetencer

Den studerende skal kunne:

- simulere elektromekaniske systemer og fortolke deres bevægelse

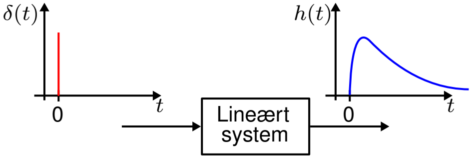
[1] Basseret på https://odin.sdu.dk/sitecore/index.php?a=fagbesk&id=46418&listid=5027&lang=da

Introduktion

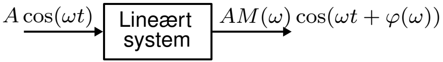
Oversigt over lektioner

- **Lektion 1**: Fourierrækker og Fouriertransformation
- **Lektion 2**: Laplace transformation
- **Lektion 3**: Kræfter og bevægelse
- **Lektion 4**: Arbejde og energi
- **Lektion 5**: Impulsmoment og stød
- **Lektion 6**: Relativ bevægelse og fiktive kræfter
- **Lektion 7**: Plan bevægelse af stive legemer
- **Lektion 8**: Almen bevægelse af stive legemer
- **Lektion 9**: Svingninger
- **Lektion 10**: DC motoren
- **Lektion 11**: Modellering af robotarm
- **Lektion 12**: Simulering af mekaniske systemer

Impulsrespons



Frekvensrespons



Egenskaber

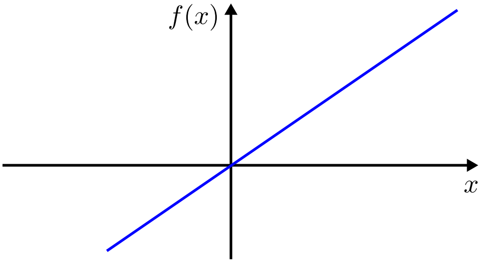
Afbildningen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ siges at være ***lineær*** hvis følgende betingelser er opfyldt for enhver $x, y \in \mathbb{R}^n$ og $\alpha \in \mathbb{R}$

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \qquad \text{Superposition}$$

$$f(\alpha x) = \alpha f(x) \qquad \text{Homogenitet}$$

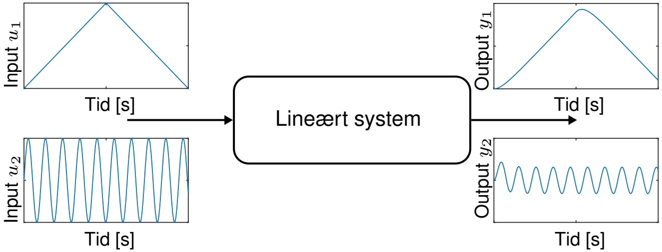
Afbildningen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ siges at være ***lineær*** hvis følgende betingelser er opfyldt for enhver $x, y \in \mathbb{R}^n$ og $\alpha \in \mathbb{R}$

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \qquad \text{Superposition}$$
$$f(\alpha x) = \alpha f(x) \qquad \text{Homogenitet}$$



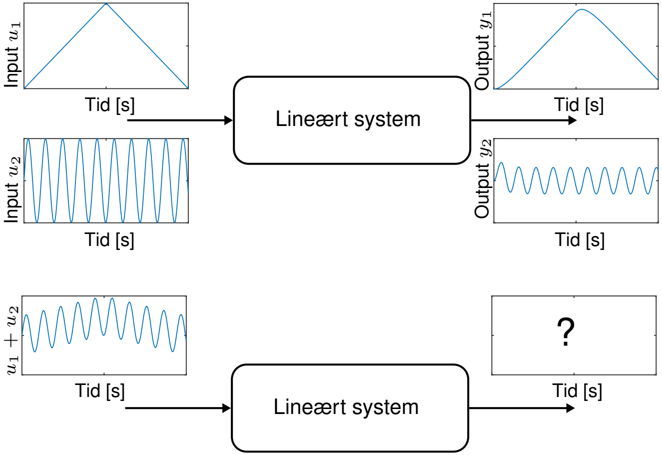
Lineære tidsinvariante systemer

Lineært system



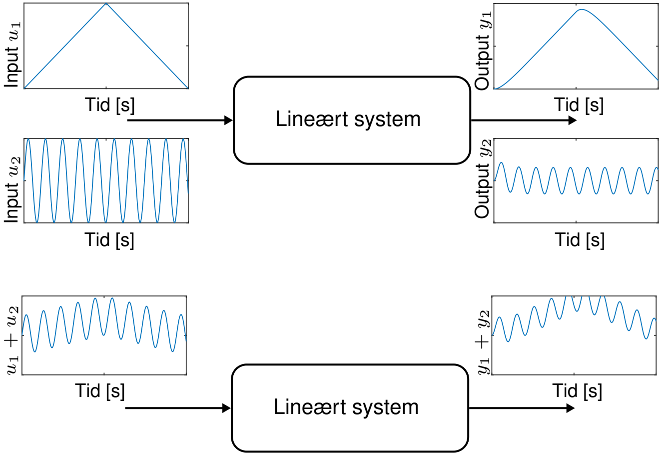
Lineære tidsinvariante systemer

Lineært system



Lineære tidsinvariante systemer

Lineært system



Lad $\sigma : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ definere input-output opførslen af en system model Σ. Systemet Σ er ***tids-invariant*** hvis følgende betingelser er opfyldt for ethvert indgangssignal $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ og enhver forsinkelse $\tau \in \mathbb{R}$

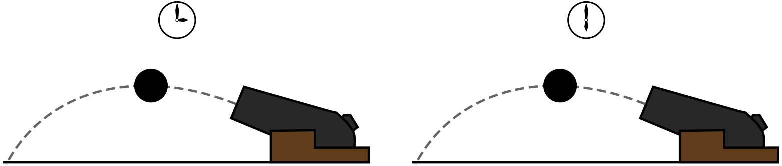
$$y(t-\tau) = \sigma(t, u(t-\tau))$$

for alle tider $t \in \mathbb{R}$, hvor y betegner udgangssignal for systemet.

Lad $\sigma : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ definere input-output opførslen af en system model Σ. Systemet Σ er ***tids-invariant*** hvis følgende betingelser er opfyldt for ethvert indgangssignal $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ og enhver forsinkelse $\tau \in \mathbb{R}$

$$y(t-\tau) = \sigma(t, u(t-\tau))$$

for alle tider $t \in \mathbb{R}$, hvor y betegner udgangssignal for systemet.



Betragt følgende masse-fjeder-dæmper system

$$\ddot{p} = -\frac{k}{m} \cdot p - \frac{b}{m} \cdot \dot{p} + \frac{1}{m} F$$

Betragt følgende masse-fjeder-dæmper system

$$\ddot{p} = -\frac{k}{m} \cdot p - \frac{b}{m} \cdot \dot{p} + \frac{1}{m} F$$

Linearitet af løsning

- Lad $p_1(t)$ være løsningen til differentialligningen for begyndelsesbetingelsen $(p_1(t_0), \dot{p}_1(t_0)) = (p_{1,0}, \dot{p}_{1,0})$ og indgangssignal $F_1(t)$.
- Lad $p_2(t)$ være løsningen til differentialligningen for begyndelsesbetingelsen $(p_2(t_0), \dot{p}_2(t_0)) = (p_{2,0}, \dot{p}_{2,0})$ og indgangssignal $F_2(t)$.

Betragt følgende masse-fjeder-dæmper system

$$\ddot{p} = -\frac{k}{m} \cdot p - \frac{b}{m} \cdot \dot{p} + \frac{1}{m} F$$

Linearitet af løsning

- Lad $p_1(t)$ være løsningen til differentialligningen for begyndelsesbetingelsen $(p_1(t_0), \dot{p}_1(t_0)) = (p_{1,0}, \dot{p}_{1,0})$ og indgangssignal $F_1(t)$.
- Lad $p_2(t)$ være løsningen til differentialligningen for begyndelsesbetingelsen $(p_2(t_0), \dot{p}_2(t_0)) = (p_{2,0}, \dot{p}_{2,0})$ og indgangssignal $F_2(t)$.

Systemet er lineært hvis $\alpha p_1(t) + \beta p_2(t)$ er løsningen til differentialligningen for begyndelsesbetingelsen $(\alpha p_{1,0} + \beta p_{2,0}, \alpha \dot{p}_{1,0} + \beta \dot{p}_{2,0})$ og indgangssignal $\alpha F_1(t) + \beta F_2(t)$.

Betragt følgende masse-fjeder-dæmper system

$$\ddot{p} = -\frac{k}{m} \cdot p - \frac{b}{m} \cdot \dot{p} + \frac{1}{m} F$$

Linearitet af løsning

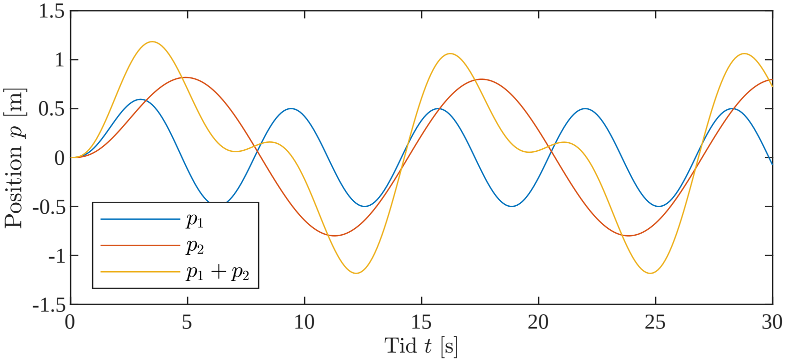
- Lad $p_1(t)$ være løsningen til differentialligningen for begyndelsesbetingelsen $(p_1(t_0), \dot{p}_1(t_0)) = (p_{1,0}, \dot{p}_{1,0})$ og indgangssignal $F_1(t)$.
- Lad $p_2(t)$ være løsningen til differentialligningen for begyndelsesbetingelsen $(p_2(t_0), \dot{p}_2(t_0)) = (p_{2,0}, \dot{p}_{2,0})$ og indgangssignal $F_2(t)$.

Systemet er lineært hvis $\alpha p_1(t) + \beta p_2(t)$ er løsningen til differentialligningen for begyndelsesbetingelsen $(\alpha p_{1,0} + \beta p_{2,0}, \alpha \dot{p}_{1,0} + \beta \dot{p}_{2,0})$ og indgangssignal $\alpha F_1(t) + \beta F_2(t)$.

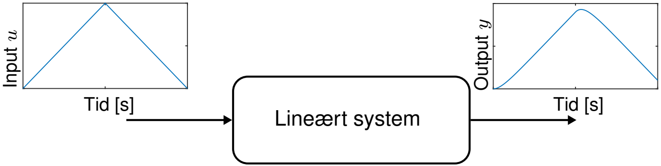
Dette kaldes **superpositionsprincippet**.

Betragt følgende masse-fjeder-dæmper system

$$\ddot{p} = -\frac{k}{m} \cdot p - \frac{b}{m} \cdot \dot{p} + \frac{1}{m} F$$



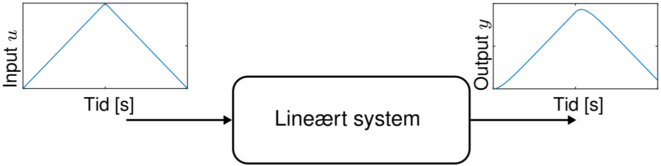
Det ønskes at finde en metode til bestemmelse af et lineært systems input-output opførsel.



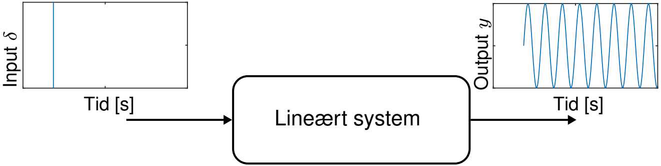
Respons af lineære systemer

Introduktion

Det ønskes at finde en metode til bestemmelse af et lineært systems input-output opførsel.



Det er muligt at bestemme et lineært systems respons til ethvert input u ud fra kendskab til systemets impulsrespons.



Vi introducerer konceptet af en **impuls** $\delta(t)$, som er et meget kort og kraftigt signal, der har følgende egenskab

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = u(t)$$

hvor u er en kontinuerlig funktion og δ er en Dirac delta-funktion.

Vi introducerer konceptet af en **impuls** $\delta(t)$, som er et meget kort og kraftigt signal, der har følgende egenskab

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = u(t)$$

hvor u er en kontinuerlig funktion og δ er en Dirac delta-funktion.

Udtrykket kan tolkes som en vægtet sum af impulser, der giver funktionen $u(t)$, dvs. hvis systemets respons til en impuls kendes, så kan systemets respons til $u(t)$ findes som en sum af impulser, grundet superpositionsprincippet.

Impulsresponset $h(t, \tau)$ for et lineært system defineres som responset (outputtet) til tiden t når en impuls er tilføjet som input til tiden τ.

Hvis et system er tidsinvariant kan impulsresponset defineres ud fra $t - \tau$. I dette tilfælde skrives $h(t - \tau)$.

Da superpositionsprincippet gælder for lineære systemer kan det samlede respons udtrykkes

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)h(t,\tau)d\tau$$

Dette kaldes **superpositionsintegralet**.

Respons af lineære systemer
Impulsrespons (II)

Da superpositionsprincippet gælder for lineære systemer kan det samlede respons udtrykkes

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)h(t,\tau)d\tau$$

Dette kaldes **superpositionsintegralet**.

For lineære tidsinvariante systemer gælder det at

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)h(t-\tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} u(t-\tau)h(\tau)d\tau \end{aligned}$$

Den sidste ligning kaldes **foldningsintegralet**.

Vi bestemmer impulsresponset for differentialligningen

$$\dot{y} + ky = u = \delta(t)$$

med begyndelsesbetingelse $y(0) = 0$.

Vi bestemmer impulsresponset for differentialligningen

$$\dot{y} + ky = u = \delta(t)$$

med begyndelsesbetingelse $y(0) = 0$.

Funktionen $\delta(t)$ har kun betydning omkring tid $t = 0$ s. Derfor udregnes integralet

$$\int_{0^-}^{0^+} \dot{y} dt + k \int_{0^-}^{0^+} y dt = \int_{0^-}^{0^+} \delta(t) dt$$

Vi bestemmer impulsresponset for differentialligningen

$$\dot{y} + ky = u = \delta(t)$$

med begyndelsesbetingelse $y(0) = 0$.

Funktionen $\delta(t)$ har kun betydning omkring tid $t = 0$ s. Derfor udregnes integralet

$$\int_{0^-}^{0^+} \dot{y} dt + k \int_{0^-}^{0^+} y dt = \int_{0^-}^{0^+} \delta(t) dt$$

Da værdien for integralet af y er nul i et lille tidsinterval fås

$$y(0^+) - y(0^-) = 1 \qquad \Rightarrow \qquad y(0^+) = 1$$

Funktionen $\delta(t)$ har kun betydning omkring tid $t = 0$ s. Derfor udregnes integralet

$$\int_{0^-}^{0^+} \dot{y}dt + k\int_{0^-}^{0^+} ydt = \int_{0^-}^{0^+} \delta(t)dt$$

Da værdien for integralet af y er nul i et lille tidsinterval fås

$$y(0^+) - y(0^-) = 1 \qquad \Rightarrow \qquad y(0^+) = 1$$

Antag at løsningen til differentialligningen (for $t > 0$)

$$\dot{y} + ky = 0 \qquad y(0^+) = 1$$

er

$$y(t) = Ae^{st}$$

Da værdien for integralet af y er nul i et lille tidsinterval fås

$$y(0^+) - y(0^-) = 1 \qquad \Rightarrow \qquad y(0^+) = 1$$

Antag at løsningen til differentialligningen (for $t > 0$)

$$\dot{y} + ky = 0 \qquad y(0^+) = 1$$

er

$$y(t) = Ae^{st}$$

Så gælder det at

$$\begin{aligned} sAe^{st} + kAe^{st} &= 0 \\ (s+k)Ae^{st} &= 0 \end{aligned}$$

og dermed er $s = -k$ og $A = 1$.

Antag at løsningen til differentialligningen (for $t > 0$)

$$\dot{y} + ky = 0 \qquad y(0^+) = 1$$

er

$$y(t) = Ae^{st}$$

Så gælder det at

$$\begin{aligned} sAe^{st} + kAe^{st} &= 0 \\ (s+k)Ae^{st} &= 0 \end{aligned}$$

og dermed er $s = -k$ og $A = 1$.

Impulsresponset er således

$$y(t) = h(t) = e^{-kt}$$

for $t > 0$.

Enheds step funktionen er defineret som

$$1(t) = \begin{cases} 0, \ t < 0 \\ 1, \ t \geq 0 \end{cases}$$

Enheds step funktionen er defineret som

$$1(t) = \begin{cases} 0, \; t < 0 \\ 1, \; t \geq 0 \end{cases}$$

Ved brug af enheds step funktionen bliver impulsresponset for første ordens systemet

$$h(t) = e^{-kt} 1(t)$$

Enheds step funktionen er defineret som

$$1(t) = \begin{cases} 0, \; t < 0 \\ 1, \; t \geq 0 \end{cases}$$

Ved brug af enheds step funktionen bliver impulsresponset for første ordens systemet

$$h(t) = e^{-kt} 1(t)$$

Systemets respons til et generelt input u er

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) u(t-\tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-kt} 1(t) u(t-\tau) d\tau \\ &= \int_{0}^{\infty} e^{-kt} u(t-\tau) d\tau \end{aligned}$$

Respons af lineære systemer
Respons ved input e^{st}

Betragt et systems respons ved input $u(t) = e^{st}$, hvor $s = \sigma + j\omega$. Dette er givet af foldningsintegralet som

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)u(t-\tau)d\tau$$

Betragt et systems respons ved input $u(t) = e^{st}$, hvor $s = \sigma + j\omega$. Dette er givet af foldningsintegralet som

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)u(t-\tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{s(t-\tau)}d\tau \end{aligned}$$

Betragt et systems respons ved input $u(t) = e^{st}$, hvor $s = \sigma + j\omega$. Dette er givet af foldningsintegralet som

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)u(t-\tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{s(t-\tau)}d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{st}e^{-s\tau}d\tau \end{aligned}$$

Betragt et systems respons ved input $u(t) = e^{st}$, hvor $s = \sigma + j\omega$. Dette er givet af foldningsintegralet som

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)u(t-\tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{s(t-\tau)}d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{st}e^{-s\tau}d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau e^{st} \end{aligned}$$

Betragt et systems respons ved input $u(t) = e^{st}$, hvor $s = \sigma + j\omega$. Dette er givet af foldningsintegralet som

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)u(t-\tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{s(t-\tau)}d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{st}e^{-s\tau}d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau e^{st} \\ &= H(s)e^{st} \end{aligned}$$

hvor

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau$$

Laplacetransformation er en generalisering af Fouriertransformation og er defineret som

$$H(s) = \mathcal{L}\{h(t)\} = \int_{0^-}^{\infty} h(t)e^{-st}dt$$

hvor $s \in \mathbb{C}$.

Bemærk at s er et kompleks tal $s = \sigma + j\omega$, og at Laplacetransform er identisk med Fouriertransform, hvis s vælges til $j\omega$.

Overføringsfunktion
Definition

Funktionen $H(s)$ defineret som

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau$$

hvor $h(t)$ er impulsresponset for systemet Σ er **overføringsfunktionen** for Σ.

Overføringsfunktion
Definition

Funktionen $H(s)$ defineret som

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau$$

hvor $h(t)$ er impulsresponset for systemet Σ er **overføringsfunktionen** for Σ.

En overføringsfunktion er forholdet mellem det Laplacetransformerede input u og det Laplacetransformerede output y

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = H(s)$$

hvor det antages at systemets begyndelsesbetingelser er nul.

Betragt systemet

$$\dot{y} + ky = u$$

hvor u er input og y er output. Find $y(t)$ når $u(t) = e^{st}$.

Betragt systemet

$$\dot{y} + ky = u$$

hvor u er input og y er output. Find $y(t)$ når $u(t) = e^{st}$.

Antag at y kan udtrykkes som $H(s)e^{st}$, så er $\dot{y} = sH(s)e^{st}$ og

$$sH(s)e^{st} + kH(s)e^{st} = e^{st}$$

Betragt systemet

$$\dot{y} + ky = u$$

hvor u er input og y er output. Find $y(t)$ når $u(t) = e^{st}$.

Antag at y kan udtrykkes som $H(s)e^{st}$, så er $\dot{y} = sH(s)e^{st}$ og

$$sH(s)e^{st} + kH(s)e^{st} = e^{st}$$

Udtrykkes omskrives til

$$(s + k)H(s)e^{st} = e^{st}$$

Betragt systemet

$$\dot{y} + ky = u$$

hvor u er input og y er output. Find $y(t)$ når $u(t) = e^{st}$.

Antag at y kan udtrykkes som $H(s)e^{st}$, så er $\dot{y} = sH(s)e^{st}$ og

$$sH(s)e^{st} + kH(s)e^{st} = e^{st}$$

Udtrykkes omskrives til

$$(s + k)H(s)e^{st} = e^{st}$$

og overføringsfunktionen bliver

$$H(s) = \frac{1}{s + k}$$

Betragt systemet

$$\dot{y} + ky = u$$

hvor u er input og y er output. Find $y(t)$ når $u(t) = e^{st}$.

Antag at y kan udtrykkes som $H(s)e^{st}$, så er $\dot{y} = sH(s)e^{st}$ og

$$sH(s)e^{st} + kH(s)e^{st} = e^{st}$$

Udtrykkes omskrives til

$$(s+k)H(s)e^{st} = e^{st}$$

og overføringsfunktionen bliver

$$H(s) = \frac{1}{s+k}$$

Da $y(t) = H(s)e^{st}$ fås

$$y(t) = \frac{e^{st}}{s+k}$$

Overføringsfunktion

Poler og nulpunkter

En overføringsfunktion for et system med et input og et output er givet som

$$G(s) = \frac{Q(s)}{P(s)}$$

hvor tællleren $Q(s)$ og nævneren $P(s)$ er polynomier i variablen s.

En overføringsfunktion for et system med et input og et output er givet som

$$G(s) = \frac{Q(s)}{P(s)}$$

hvor tællleren $Q(s)$ og nævneren $P(s)$ er polynomier i variablen s.

- Rødderne af $Q(s)$ kaldes for **nulpunkterne af** $G(s)$.
- Rødderne af $P(s)$ kaldes for **polerne af** $G(s)$.

En overføringsfunktion for et system med et input og et output er givet som

$$G(s) = \frac{Q(s)}{P(s)}$$

hvor tællleren $Q(s)$ og nævneren $P(s)$ er polynomier i variablen s.

- Rødderne af $Q(s)$ kaldes for **nulpunkterne af** $G(s)$.
- Rødderne af $P(s)$ kaldes for **polerne af** $G(s)$.

Det antages at graden af $P(s)$ er højere end graden af $Q(s)$.

Frekvensrespons
Definition

Et systems **frekvensrespons** er responset (outputtet) når et sinudialt input påtrykkes et system.

Et systems **frekvensrespons** er responset (outputtet) når et sinudialt input påtrykkes et system.

Fra tidligere har vi udtrykt outputtet af et system med input e^{st} ved brug af overføringsfunktionen $H(s)$ som

$$y(t) = H(s)e^{st}$$

Et systems **frekvensrespons** er responset (outputtet) når et sinudialt input påtrykkes et system.

Fra tidligere har vi udtrykt outputtet af et system med input e^{st} ved brug af overføringsfunktionen $H(s)$ som

$$y(t) = H(s)e^{st}$$

Da

$$A\cos(\omega t) = \frac{A}{2}(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t})$$

kan responset skrives (grundet superposition)

$$y(t) = \frac{A}{2}\left(H(j\omega)e^{j\omega t} + H(-j\omega)e^{-j\omega t}\right)$$

Da

$$A\cos(\omega t) = \frac{A}{2}(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t})$$

kan responset skrives (grundet superposition)

$$y(t) = \frac{A}{2}\left(H(j\omega)e^{j\omega t} + H(-j\omega)e^{-j\omega t}\right)$$

På polær form er $H(j\omega) = M(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$, så

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{A}{2}M(\omega)\left(e^{j(\omega t+\varphi(\omega))} + e^{-(j\omega t+\varphi(\omega))}\right) \\ &= AM(\omega)\cos(\omega t+\varphi(\omega)) \end{aligned}$$

hvor

$$M(\omega) = |H(j\omega)| \qquad \text{og} \qquad \varphi(\omega) = \angle H(j\omega)$$

I det tidligere eksempel blev overføringsfunktionen bestemt til

$$H(s) = \frac{1}{s+k}$$

I det tidligere eksempel blev overføringsfunktionen bestemt til

$$H(s) = \frac{1}{s+k}$$

For at bestemme frekvensresponest findes amplituden og fasen

$$M(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + k^2}} \qquad \text{og} \qquad \varphi(\omega) = -\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{k}\right)$$

I det tidligere eksempel blev overføringsfunktionen bestemt til

$$H(s) = \frac{1}{s+k}$$

For at bestemme frekvensresponest findes amplituden og fasen

$$M(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + k^2}} \qquad \text{og} \qquad \varphi(\omega) = -\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{k}\right)$$

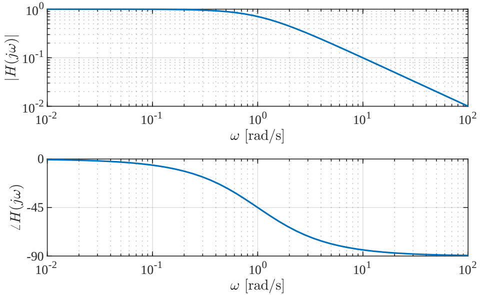
Dermed er systemets respons til et sinudialt input

$$y(t) = AM(\omega)\cos(\omega t + \varphi(\omega))$$

Et **Bode plot** benyttes til at visualisere frekvensresponset. For dette eksempel er amplituden og fasen

$$M(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + k^2}} \qquad \text{og} \qquad \varphi(\omega) = -\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{k}\right)$$

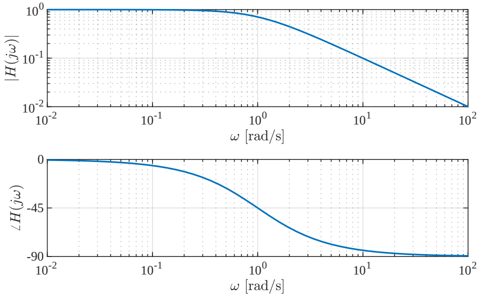
Bode plottet tegnes normalt i logaritmisk skala.



Vi betragter forskellige værdier for ω ($k = 1$)

$$M(1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad M(10) = \frac{1}{\sqrt{101}} \approx \frac{1}{10}$$

$$\varphi(1) = -\tan^{-1}(1) = -45^\circ \qquad \varphi(10) = -\tan^{-1}(10) \approx -84^\circ$$



Egenskaber

Laplacetransformation

Egenskaber (I)

Lad $f(t)$ og $df(t)/dt$ være kontinuerlige funktioner. Så gælder det at

$$\mathcal{L}\left(\frac{df}{dt}\right) = sF(s) - f(0)$$

hvor $F(s) = \mathcal{L}\left(f\right)$.

Lad $f(t)$ og $df(t)/dt$ være kontinuerlige funktioner. Så gælder det at

$$\mathcal{L}\left(\frac{df}{dt}\right) = sF(s) - f(0)$$

hvor $F(s) = \mathcal{L}(f)$.

Lad $f(t)$ være en kontinuerlig funktion og $F(s) = \mathcal{L}(f)$. Så gælder det at

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(\tau)d\tau\right) = \frac{F(s)}{s}$$

Signal $h(t)$	Fouriertransform $H(s)$
1	$\frac{1}{s}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$\sin(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$
$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$

Den simple harmoniske bevægelse kan Laplacetransformeres på baggrund af differentialligningen

$$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x} + F$$

Dermed fås (begyndelsbetingelser antages at være nul)

$$s^2 X(s) = -\frac{k}{m}X(s) - s\frac{b}{m}X(s) + \frac{1}{m}F(s)$$

Den simple harmoniske bevægelse kan Laplacetransformeres på baggrund af differentialligningen

$$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x} + F$$

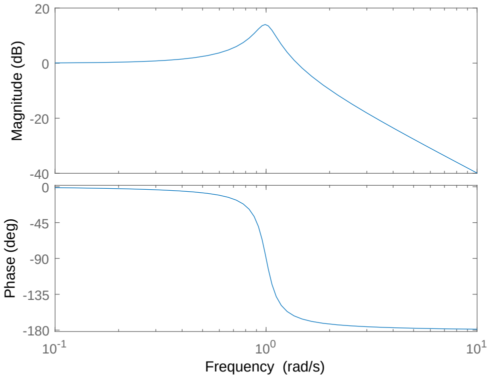
Dermed fås (begyndelsesbetingelser antages at være nul)

$$s^2X(s) = -\frac{k}{m}X(s) - s\frac{b}{m}X(s) + \frac{1}{m}F(s)$$

Overføringsfunktionen fra $F(s)$ til $X(s)$ bliver dermed

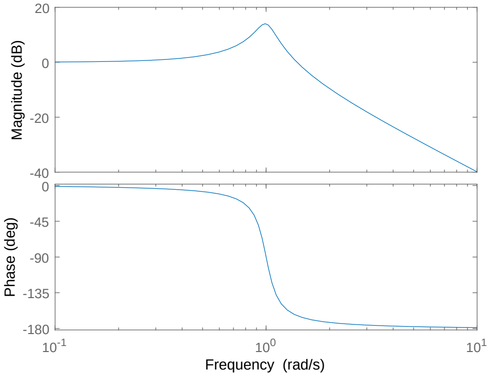
$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1/m}{s^2 + b/ms + k/m}$$

Lad $m = 1$ kg, $b = 0.2$ N/(m/s) og $k = 1$ N/m, så er følgende Bode diagrammet for systemet.

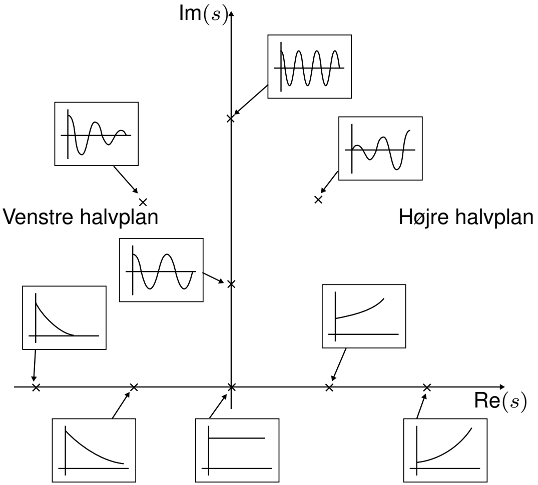


Laplacetransformation

Eksempel: Tvunget harmonisk bevægelse (II)



Den største amplitude af svingningen opnås når ω_t er tæt på ω_0, hvor ω_t er frekvensen af den eksterne kraft og ω_0 er systemets naturlige vinkelfrekvens.



Im(s)
Venstre halvplan
Højre halvplan
Re(s)

Ud fra overføringsfunktionen

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = H(s)$$

er det muligt at udregne det Laplacetransformerede output

$$Y(s) = H(s)U(s)$$

Ud fra overføringsfunktionen

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = H(s)$$

er det muligt at udregne det Laplacetransformerede output

$$Y(s) = H(s)U(s)$$

Det er derfor relevant at lave invers Laplacetransformation for at finde $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$.

Invers Laplacetransformation
Definition

Den inverse Laplacetransformation er defineret som

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma_c - j\infty}^{\sigma_c + j\infty} F(s)e^{st}ds$$

Den inverse Laplacetransformation er defineret som

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_c - j\infty}^{\sigma_c + j\infty} F(s) e^{st} ds$$

Denne relation benyttes sjældent - tabeller benyttes i stedet. I denne lektion benyttes at $\mathcal{L}\{\alpha e^{-at} 1(t)\} = \frac{\alpha}{s+a}$.