Lektion 1: Fourierrækker og Fouriertransformation

Modellering af elektromekaniske systemer
Multivariable Mathematics in Robotics

Christoffer Sloth

chsl@mmmi.sdu.dk

SDU Robotics
Mærsk Mc-Kinney Møller Instituttet
Syddansk Universitet

SDU

Dagsorden

Introduktion
- Kursusoverblik

Motivation

Fourierrækker
- Introduktion til Fourierrækker
- Kompleks form af Fourierrækker

Fouriertransformation

Opsummering

Viden[1]

Den studerende skal kunne:

- forklare den grundlæggende fysiks love og begreber
- beskrive et elektromekanisk system ved hjælp af systemets parametre
- redegøre for virkemåden af børstede og børsteløse DC motorer
- opstille overføringsfunktioner for lineære systemer

Færdigheder

Den studerende skal kunne:

- udføre fritlegemeanalyse på et mekanisk system
- anvende Newtons 3 love til modellering af mekaniske systemer
- anvende Lagrange D'Alemberts princip til modellering af mekaniske systemer
- opstille differentialligninger, der beskriver et elektromekanisk systems bevægelse
- fortolke lineære systemers bevægelse i frekvensdomæne
- modellere og simulere simple serielle manipulatorer

Kompetencer

Den studerende skal kunne:

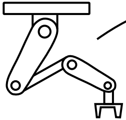
- simulere elektromekaniske systemer og fortolke deres bevægelse

[1] Basseret på https://odin.sdu.dk/sitecore/index.php?a=fagbesk&id=46418&listid=5027&lang=da

Introduktion
Lektionsplan

- **Lektion 1**: Bevægelse i flere dimensioner
- **Lektion 2**: Analyse i frekvensdomæne
- **Lektion 3**: Kræfter og bevægelse
- **Lektion 4**: Arbejde og energi
- **Lektion 5**: Impulsmoment og stød
- **Lektion 6**: Relativ bevægelse og fiktive kræfter
- **Lektion 7**: Plan bevægelse af stive legemer
- **Lektion 8**: Almen bevægelse af stive legemer
- **Lektion 9**: Svingninger
- **Lektion 10**: DC motoren
- **Lektion 11**: Modellering af robotarm
- **Lektion 12**: Simulering af mekaniske systemer

Elektromekanisk system



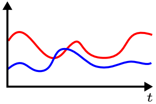
Differentialligninger

$$\ddot{z} = a_1 \dot{z} + a_0 z + bu$$

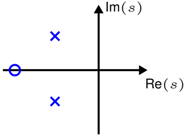
(hvis lineær)

$$G(s) = \frac{Q(s)}{P(s)}$$

Simulering



Frekvensdomæneanalyse



LECTURE PLAN

Lecture 1: Periodic Signal Analysis

Lecture 2: Signal Transformation Method

Lecture 3: Functions of Several Variables

Lecture 4: Double Integrals

Lecture 5: Tripple Integrals

Lecture 6: Vector fields, Curve Integrals

Lecture 7: Surface Integrals

Lecture 8: Div and Curl, Greens, Gauss' and Stokes' theorems

Lecture 9: Partial Differential Equations (PDE)-Part 1

Lecture 10: Partial Differential Equations (PDE)-Part 2

Lecture 11: Partial Differential Equations (PDE)-Part 3

Lecture 12: Summary and Discussion

Prerequisite

A solid foundation in mathematics is crucial for understanding of subject. Specifically, students should be comfortable with:

- **Trigonometry**: Knowledge of trigonometric functions (sine, cosine, tangent, etc.) and their properties is essential.
- **Single Variable Calculus**: Students should have a thorough understanding of single-variable calculus, including concepts such as limits, derivatives, definite and indefinite integrals and properties of definite and indefinite integrals .
- **Coordinate Systems**: Atleast minimum understanding of Cartesian coordinate systems, polar coordinate systems etc.
- **Multivariable Functions**: Familiarity with multivariable functions, including the concept of a function of two variables $f(x,y)$, is essential. Students should be comfortable graphing, manipulating, and analyzing functions of multiple variable.
- **Vector Notation**: Familiarity with vector notation and vector operations, including dot products and cross products, can be helpful when working with double integrals and surface integrals.

Mathematical Interpretation and transformation of Periodic signals

$f(x), L\{f(t)\}$

Multivariable Integration

$\iiint f(x, y, z)dV$

Vector Analysis

$\mathbf{F}(x,y,z)$

Partial Differential Equations

$F\left(x,y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{yy}\right)$

Mathematics for Modelling and Design

$f(x_1,x_2, x_3,\ldots, x_n)$

Der findes mange metoder til approksimering af funktioner. Herunder er *Taylor-approksimation* som I har mødt tidligere.

Definition (Taylorrække)
Lad $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være en funktion, der kan differentieres uendelig mange gange. Så er Taylorrækken for funktionen f ved punktet a defineret som

$$\hat{f}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

hvor $f^{(n)}(a)$ er den n-te afledte af f evalueret i punktet a og $n!$ er n-fakultet.

Hvis der kun benyttes et endeligt antal led fra Taylorrækken til approksimation af en funktion kan dette være et behjælpeligt værktøj

En N-te ordens Taylor-approksimation af funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (der kan differentieres uendelig mange gange) i punktet a er defineret som

$$P_N(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Motivation

Eksempel 1 (Taylor-approksimation)

Vi betragter eksponential funktionen $f = e^x$ og udregner første- og sjette-ordens approksimationer P_1 og P_6 i punktet $x = 1$.

Motivation

Eksempel 1 (Taylor-approksimation)

Vi betragter eksponential funktionen $f = e^x$ og udregner første- og sjette-ordens approksimationer P_1 og P_6 i punktet $x = 1$.
Her er

$$\begin{aligned} P_1(x) &= f(1) + \frac{f^{(1)}(1)}{1!}(x-1) \\ &= e^1 + e^1(x-1) \end{aligned}$$

Vi betragter eksponential funktionen $f = e^x$ og udregner første- og sjette-ordens approksimationer P_1 og P_6 i punktet $x = 1$.
Her er

$$\begin{aligned} P_1(x) &= f(1) + \frac{f^{(1)}(1)}{1!}(x-1) \\ &= e^1 + e^1(x-1) \end{aligned}$$

Bemærk at $P_1(x)$ er en affine approksimation af f.

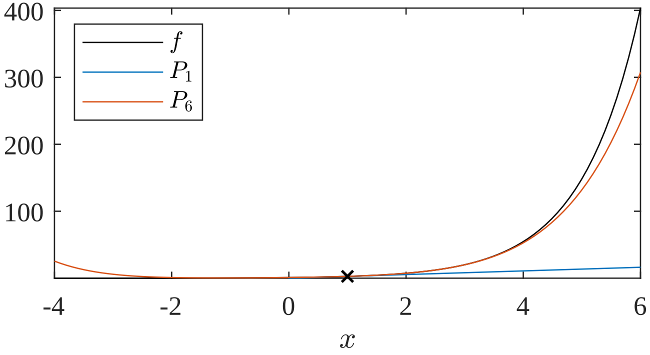
Vi betragter eksponential funktionen $f = e^x$ og udregner første- og sjette-ordens approksimationer P_1 og P_6 i punktet $x = 1$.
Her er

$$\begin{aligned} P_1(x) &= f(1) + \frac{f^{(1)}(1)}{1!}(x-1) \\ &= e^1 + e^1(x-1) \end{aligned}$$

Bemærk at $P_1(x)$ er en affine approksimation af f.
En højere ordens approksimation giver en bedre approksimation

$$P_6(x) = e^1 + e^1(x-1) + \frac{e^1}{2}(x-1)^2 + \frac{e^1}{6}(x-1)^3 + \frac{e^1}{24}(x-1)^4 + \frac{e^1}{120}(x-1)^5 + \frac{e^1}{720}(x-1)^6$$

Vi betragter eksponential funktionen $f = e^x$ og udregner første- og sjette-ordens approksimationer P_1 og P_6 i punktet $x = 1$.



Vi betragter funktionen $f = \sin(x)$ og udregner første- og sjette-ordens approksimationer P_1 og P_6 i punktet $x = 1$.

Vi betragter funktionen $f = \sin(x)$ og udregner første- og sjette-ordens approksimationer P_1 og P_6 i punktet $x = 1$.
Her er

$$\begin{aligned} P_1(x) &= f(1) + \frac{f^{(1)}(1)}{1!}(x-1) \\ &= \sin(1) + \cos(1)(x-1) \end{aligned}$$

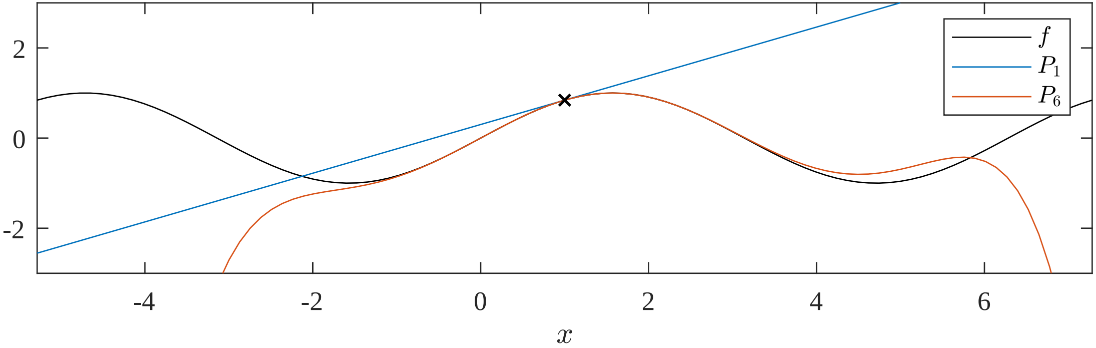
Vi betragter funktionen $f = \sin(x)$ og udregner første- og sjette-ordens approksimationer P_1 og P_6 i punktet $x = 1$.
Her er

$$\begin{aligned} P_1(x) &= f(1) + \frac{f^{(1)}(1)}{1!}(x-1) \\ &= \sin(1) + \cos(1)(x-1) \end{aligned}$$

En sjette-ordens approksimation giver

$$\begin{aligned} P_6(x) = \sin(1) + \cos(1)(x-1) \quad &- \frac{\sin(1)}{2}(x-1)^2 - \frac{\cos(1)}{6}(x-1)^3 + \frac{\sin(1)}{24}(x-1)^4 \\ &+ \frac{\cos(1)}{120}(x-1)^5 - \frac{\sin(1)}{720}(x-1)^6 \end{aligned}$$

Vi betragter funktionen $f = \sin(x)$ og udregner første- og sjette-ordens approksimationer P_1 og P_6 i punktet $x = 1$.



En *Fourierrække* er en uendelig række på følgende form

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right)$$

hvor L er et positivt tal.

En *Fourierrække* er en uendelig række på følgende form

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right)$$

hvor L er et positivt tal.

Fourierrækker benyttes i forbindelse med periodiske funktioner, i.e., f er periodisk med periode $2L$, dvs. $f(x + 2L) = f(x)$.

Vi betragter igen den periodiske funktion $f = \sin(x)$ med periode $2L = 2\pi$.

Vi betragter igen den periodiske funktion $f = \sin(x)$ med periode $2L = 2\pi$. En *Fourierrække*, der beskriver f er dermed

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right)$$

hvor $a_n = 0$ for $n = 0, 1, \ldots$ og $b_n = 0$ for $n \neq 1$ og $b_1 = 1$.

Vi betragter igen den periodiske funktion $f = \sin(x)$ med periode $2L = 2\pi$. En *Fourierrække*, der beskriver f er dermed

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right)$$

hvor $a_n = 0$ for $n = 0, 1, \ldots$ og $b_n = 0$ for $n \neq 1$ og $b_1 = 1$.

Dette kan reduceres til

$$f(x) = b_1 \sin\left(\frac{\pi x}{\pi}\right) = \sin(x)$$

På samme vis som Taylor-approksimationen kunne benyttes til approksimation af funktioner kan Fourierrækker benyttes på samme form. Her er en Fourierrække af orden N givet som

$$S_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right)$$

På samme vis som Taylor-approksimationen kunne benyttes til approksimation af funktioner kan Fourierrækker benyttes på samme form. Her er en Fourierrække af orden N givet som

$$S_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right)$$

Vi siger at Fourierrækken konvergerer hvis

$$\lim_{N\to\infty} S_N(x) = f(x)$$

På samme vis som Taylor-approksimationen kunne benyttes til approksimation af funktioner kan Fourierrækker benyttes på samme form. Her er en Fourierrække af orden N givet som

$$S_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right)$$

Vi siger at Fourierrækken konvergerer hvis

$$\lim_{N \to \infty} S_N(x) = f(x)$$

Denne konvergens benyttes til at approksimere en funktion bedre og bedre ved at forøge ordenen N.

Lad f være en periodisk funktion med periode $2L$ og lad $f(x)$ og $f'(x)$ være stykvis kontinuerlige på intervallet $-L < x < L$. Så vil f have en konvergerende Fourierrække med koefficienter a_n og b_n givet som

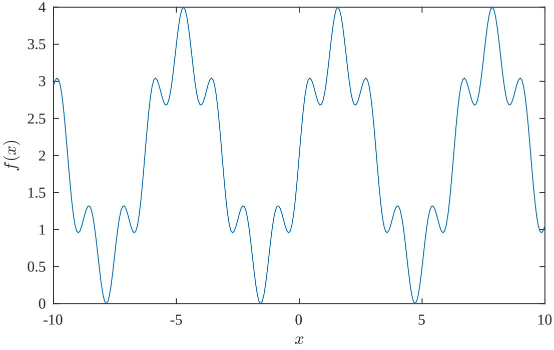
$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx, \qquad n \geq 0$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx, \qquad n > 0$$

Betragt grafen for funktionen

$$f(x) = \sin(3x)\cos(2x) + \sin(x) + 2$$

Det ses at $f(x) = f(x + 2\pi)$.

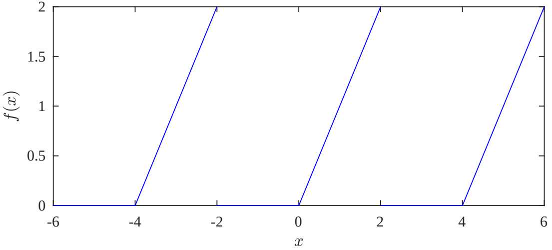


Betragt den periodiske funktion $f(x)$ defineret fra

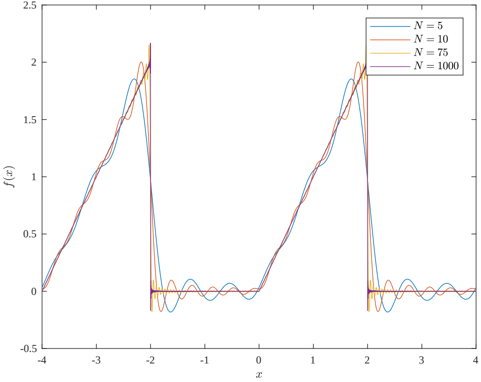
$$f(x) = \begin{cases} 0, & -2 < x < 0 \\ x, & 0 \leq x < 2 \end{cases} \tag{1}$$

$$f(x+4) = f(x) \tag{2}$$

Følgende viser grafen af funktionen $f(x)$.



Den periodiske funktion kan approksimeres tættere og tættere jo flere harmoniske, der inkluderes ($n = 1, 2, \ldots, N$).



Fourier koefficienterne har en vigtig fortolkning i forhold til frekvensindholdet i et signal, hvilket kaldes et signals *spektrum*.

Fourier koefficienterne har en vigtig fortolkning i forhold til frekvensindholdet i et signal, hvilket kaldes et signals *spektrum*.
Vi benytter følgende trigonometriske identitet

$$a\cos(\omega x) + b\sin(\omega x) = A\cos(\omega x - \phi)$$

hvor

$$A = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad \text{og} \qquad \phi = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$$

Her er ϕ fasevinklen og A er amplituden.

Fourier koefficienterne har en vigtig fortolkning i forhold til frekvensindholdet i et signal, hvilket kaldes et signals *spektrum*.
Vi benytter følgende trigonometriske identitet

$$a\cos(\omega x) + b\sin(\omega x) = A\cos(\omega x - \phi)$$

hvor

$$A = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad \text{og} \qquad \phi = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$$

Her er ϕ fasevinklen og A er amplituden.

Vi benytter ovenstående trigonometriske identitet på det $n$te led i Fourierrækken

$$a_n\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = A_n\cos\left(\frac{n\pi x}{L} - \phi_n\right)$$

hvor

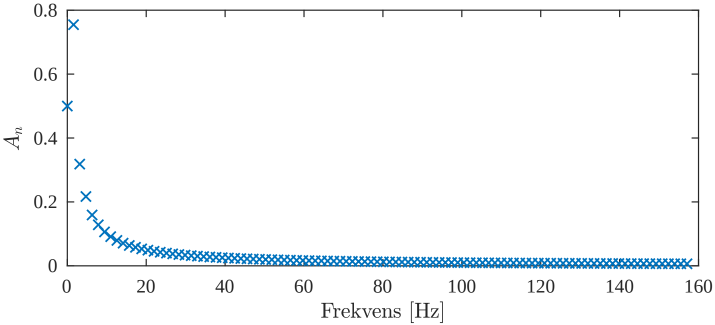
$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \qquad \text{og} \qquad \phi_n = \tan^{-1}\left(\frac{b_n}{a_n}\right)$$

Med den tidligere omskrivning kan en Fourierrække skrives som ($A_0 = a_0/2$)

$$f(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L} - \phi_n\right)$$

Det ses at f er en sum af sinudiale funktioner og A_n beskemmer amplituden af det $n$te frekvens bidrag. Samtidig er A_n^2 relateret til energien i signalet ved en bestemt frekvens.

Et spektrum for trekantsignalet i Eksempel 4 kan tegnes ud fra Fourierkoefficienterne. Herunder er spektrum for signalet.



Kompleks form af Fourierrækker

Fourierrækker kan udtrykkes med komplekse variable ved brug af Euler's identitet

$$e^{jx} = \cos(x) + j\sin(x)$$

hvor $j = \sqrt{-1}$ samt følgende relationer

$$\cos(x) = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2} \qquad \text{og} \qquad \sin(x) = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}$$

Fourierrækker kan udtrykkes med komplekse variable ved brug af Euler's identitet

$$e^{jx} = \cos(x) + j\sin(x)$$

hvor $j = \sqrt{-1}$ samt følgende relationer

$$\cos(x) = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2} \qquad \text{og} \qquad \sin(x) = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}$$

En Fourierrække kan således skrives som

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\pi x/L}$$

hvor c_n er komplekse tal.

Koefficienterne for Fourierrækken

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right)$$

og den ækvivalente Fourierrække

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\pi x/L}$$

er relateret ved

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n) \qquad \text{for } n > 0$$

Koefficienterne for Fourierrækken

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right)$$

og den ækvivalente Fourierrække

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\pi x/L}$$

er relateret ved

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n) \qquad \text{for } n > 0$$

Dermed er

$$|c_n| = \frac{1}{2}A_n$$

$$\arg(c_n) = -\tan^{-1}\left(\frac{b_n}{a_n}\right) = -\phi_n$$

Lad $y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{jn\pi t/L}$ og $z(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \beta_n e^{jn\pi t/L}$ så gælder følgende egenskaber

1. **Linearitet**. Fourierrækken for $Ay(t) + Bz(t)$ er givet ved

$$\mathcal{F}[y(t) + z(t)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\alpha_n + \beta_n) e^{jn\pi t/L}$$

2. **Tidsforskydning**. Fourierrækken for $Ay(t - t_0)$ er givet ved

$$\mathcal{F}[y(t - t_0)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\alpha_n e^{-jn\pi t_0/L}\right) e^{jn\pi t/L}$$

Recall that complex numbers can be represented as follows

$$
\begin{aligned}
z &= a + jb \\
&= r\left(\cos(\phi) + j\sin(\phi)\right) \\
&= re^{j\phi} \\
&= r\angle\phi
\end{aligned}
$$

Fourierrækker kan benyttes til approksimation af periodiske funktioner, men hvad kan gøres hvis en aperiodisk funktion skal approksimeres?

Hovedideen bag Fouriertransformation er at approksimere en aperiodisk funktion $h(x)$ ved at introducere en ny funktion $\tilde{h}(x)$ som har følgende egenskaber

1. $\tilde{h}(x)$ er periodisk med periode $2L$
2. L er "stor"
3. $h(x) = \tilde{h}(x)$ for $-L < x < L$

Fourierrækker kan benyttes til approksimation af periodiske funktioner, men hvad kan gøres hvis en aperiodisk funktion skal approksimeres?

Hovedideen bag Fouriertransformation er at approksimere en aperiodisk funktion $h(x)$ ved at introducere en ny funktion $\tilde{h}(x)$ som har følgende egenskaber

1. $\tilde{h}(x)$ er periodisk med periode $2L$
2. L er "stor"
3. $h(x) = \tilde{h}(x)$ for $-L < x < L$

Vi lader $L \to \infty$ i det følgende.

Da $\tilde{h}(x)$ er periodisk kan den skrives som Fourierrækken

$$\tilde{h}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\pi x/L}$$

hvor

$$c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} \tilde{h}(x) e^{-jn\pi x/L} dx = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} h(x) e^{-jn\pi x/L} dx$$

Da $\tilde{h}(x)$ er periodisk kan den skrives som Fourierrækken

$$\tilde{h}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\pi x/L}$$

hvor

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} \tilde{h}(x) e^{-jn\pi x/L} dx = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} h(x) e^{-jn\pi x/L} dx$$

Dermed kan funktionen $\tilde{h}(x)$ skrives som

$$\tilde{h}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2L} \left(\int_{-L}^{L} h(u) e^{-jn\pi u/L} du \right) e^{jn\pi x/L}$$

Dermed kan funktionen $\tilde{h}(x)$ skrives som

$$\tilde{h}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2L} \left(\int_{-L}^{L} h(u) e^{-jn\pi u/L} du \right) e^{jn\pi x/L}$$

Vi definerer følgende variable

$$\Delta\omega = \frac{\pi}{L} \text{ and } \omega_n = \frac{n\pi}{L}$$

og omskriver

$$\tilde{h}(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\int_{-L}^{L} h(u) e^{-j\omega_n u} du \right) e^{j\omega_n x} \Delta\omega$$

Formlen

$$\tilde{h}(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\int_{-L}^{L} h(u) e^{-j\omega_n u} du \right) e^{j\omega_n x} \Delta\omega$$

omskrives som

$$\tilde{h}(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega_n) \Delta\omega$$

hvor

$$F(\omega_n) = \left(\int_{-L}^{L} h(u) e^{-j\omega_n u} du \right) e^{j\omega_n x}$$

For at lade $\tilde{h}(x)$ approksimere $h(x)$ lader vi L gå imod uendelig, dvs

$$L \to \infty \qquad \text{eller } \Delta\omega \to 0$$

og får

$$h(x) = \lim_{L\to\infty} \tilde{h}(x) = \frac{1}{2\pi} \lim_{L\to\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega_n)\Delta\omega$$

For at lade $\tilde{h}(x)$ approksimere $h(x)$ lader vi L gå imod uendelig, dvs

$$L \to \infty \qquad \text{eller } \Delta\omega \to 0$$

og får

$$h(x) = \lim_{L\to\infty} \tilde{h}(x) = \frac{1}{2\pi} \lim_{L\to\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega_n)\Delta\omega$$

Dette ligner vores konstruktion af Riemann integralet.

For at lade $\tilde{h}(x)$ approksimere $h(x)$ lader vi L gå imod uendelig, dvs

$$L \to \infty \qquad \text{eller } \Delta\omega \to 0$$

og får

$$h(x) = \lim_{L\to\infty} \tilde{h}(x) = \frac{1}{2\pi} \lim_{L\to\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega_n)\Delta\omega$$

Dette ligner vores konstruktion af Riemann integralet.

Slutteligt kan $h(x)$ skrives som

$$h(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} h(u) e^{-j\omega u} du \right) e^{j\omega x} d\omega$$

Fouriertransform og invers Fouriertransform defineres ud fra

$$h(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} h(u) e^{-j\omega u} du \right) e^{j\omega x} d\omega$$

Fouriertransform og invers Fouriertransform defineres ud fra

$$h(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} h(u) e^{-j\omega u} du \right) e^{j\omega x} d\omega$$

Fouriertransformen af $h(t)$ er

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt$$

Invers Fouriertransformen af $H(\omega)$ er

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

En Dirac delta-funktion $\delta(t)$, som er et meget kort og kraftigt signal, defineres som følger

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt = f(t_0)$$

hvor f er en kontinuerlig funktion.

Egenskab	Tidsdomæne $x(t)$	Fouriertransform $X(\omega)$
Linearitet	$ax_1(t) + bx_2(t)$	$aX_1(j\omega) + bX_2(\omega)$
Tidsforsinkelse	$x(t - t_0)$	$e^{-j\omega t_0} X(\omega)$
Differentiering i tid	$\frac{d^n x(t)}{dt^n}$	$(j\omega)^n X(\omega)$
Differentiering i frekvens	$-jtx(t)$	$\frac{dX(\omega)}{d\omega}$
Tidsintegrering	$\int_{-\infty}^{t} x(\tau) d\tau$	$\frac{1}{j\omega} X(\omega) + \pi x(0)\delta(\omega)$

Fouriertransformation

Transformations par

Signal	Fouriertransform
$\delta(t)$	1
$u(t)$	$\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$
$\delta(t - t_0)$	$e^{-j\omega t_0}$
$\sin(\omega_0 t)$	$-j\pi(\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0))$
$\cos(\omega_0 t)$	$\pi(\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0))$
1	$2\pi\delta(\omega)$

Opsummering

Fourierrækker benyttes i forbindelse med ***periodiske funktioner***, dvs. $f(x+2L)=f(x)$.

Lad f være en periodisk funktion med periode $2L$ og lad $f(x)$ og $f'(x)$ være stykvis kontinuerlige på intervallet $-L<x<L$. Så vil f have en konvergerende Fourierrække

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)+b_n\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{jn\pi x/L}$$

med koefficienter a_n, b_n og c_n givet som

$$a_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx,\qquad n\geq 0$$

$$b_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx,\qquad n>0$$

$$c_n=\frac{1}{2}(a_n-jb_n)\qquad \text{for } n>0$$

Fouriertransformation

Fouriertransformen af $h(t)$ er

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt$$

Invers Fouriertransformation

Invers Fouriertransformen af $H(\omega)$ er

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$