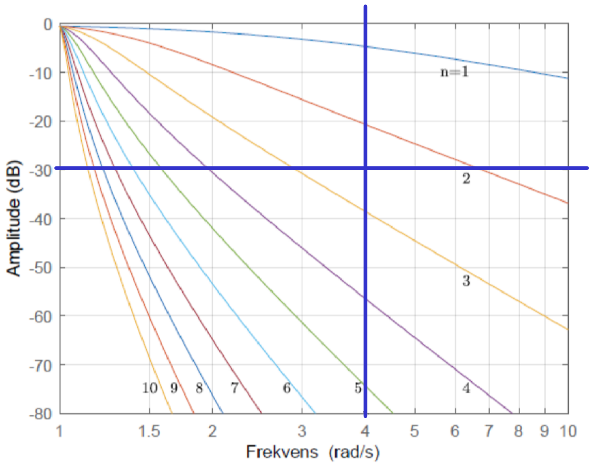
1. (3 point) Et anti-aliaseringsfilter ønskes designet med mindst mulig filterorden, så en stopbåndsdæmpning på 50 dB opnås. Hvilket af følgende filtre opfylder dette ønske?

- [ ] Bessel lavpasfilter
- [x] Chebyshev lavpasfilter
- [ ] Bessel højpasfilter
- [ ] Chebyshev højpasfilter

2. (3 point) Benyt Figur 1 til at bestemme filterordenen for et analog højpasfilter med afskæringsfrekvens 1000 Hz og stopbåndsfrekvens 250 Hz med stopbåndsdæmpning større end 30 dB.

- Filterordenen skal være:



$$\frac{1000}{250} = 4$$

$N = 3$

Figure 1: Amplitudekarakteristik for frekvensnormeret 0,5 dB Chebyshev lavpasfilter.

3. (3 point) Er følgende diskrete overføringsfunktion stabil?

$$G(z) = \frac{(z+0{,}2)(z-0{,}2)}{(z+0{,}5)(z-1{,}1)}$$

- [ ] Ja
- [x] Nej

4. (3 point) Hvor mange poler og nulpunkter har følgende diskrete overføringsfunktion

$$G(z) = \frac{z^2 - 3}{z^3 + 2z}$$

- Antal poler: 3
- Antal nulpunkter: 2

5. (3 point) Hvilke af følgende samplefrekvenser kan benyttes til fuldstændig rekonstruktion af signalet $x(t)$?

$$x(t) = \cos(\underbrace{6\pi}_{3\,\text{Hz}} \cdot t + 2) + \sin(\underbrace{5\pi}_{\frac{5}{2}\,\text{Hz}} \cdot t + 4)$$

- [ ] $f_s = 1$ Hz
- [ ] $f_s = 2$ Hz
- [ ] $f_s = 3$ Hz
- [x] $f_s = 10$ Hz

6. (3 point) Betragt følgende differensligning

$$2y(n) + 3y(n-2) = 3x(n) + 2x(n-2)$$

Hvilken af følgende overføringsfunktioner er en z-transformation af (1)?

- ○ $G_1(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{2+3z^{-2}}{3+2z^{-2}}$
- ○ $G_2(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{3+2z^{-1}}{2+3z^{-1}}$
- X $G_3(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{3z^2+2}{2z^2+3}$

$$2 \cdot Y(z) + 3Y(z) \cdot z^{-2} = 3 \cdot X(z) + 2 \cdot X(z) \cdot z^{-2}$$

$$\Rightarrow Y(z) \cdot (2 + 3z^{-2}) = X(z) \cdot (3 + 2 \cdot z^{-2})$$

$$\Rightarrow \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{3+2z^{-2}}{2+3z^{-2}} = \frac{3z^2+2}{2z^2+3}$$

7. (3 point) Betragt følgende diskrete overføringsfunktion

$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z^2-1}{(z-0{,}2)(z+0{,}9)}$$

- Hvor ligger nulpunktet/nulpunkterne for $G(z)$? $z = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases}$
- Hvor ligger polen/polerne for $G(z)$? $z = \begin{cases} 0{,}2 \\ -0{,}9 \end{cases}$

8. (3 point) Betragt følgende diskrete overføringsfunktion

$$G(z) = \frac{z}{(z-0{,}5)(z+0{,}5)}$$

- Hvad er $\overbrace{\text{DC-forstærkningen}}^{w=0,\ z=1}$ for $G(z)$?

$$G(1) = \frac{1}{(1-0{,}5)(1+0{,}5)} = \frac{1}{(0{,}5)(1{,}5)} = \frac{1}{0{,}75} = 1{,}\overline{33}$$

9. (3 point) Betragt følgende diskrete overføringsfunktion

$$G(z) = \frac{z}{(z-0{,}5)(z+0{,}5)}$$

- Hvad er filtrets forstærkning $|G(z)|$ ved en frekvens på 1 Hz, når samplefrekvensen for filtret er 2 Hz?

$$z = e^{j\omega T}, \quad T = \frac{1}{2}, \quad w = 2\pi f = 2\pi$$

$$z = e^{j \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{2}} = e^{j\pi}$$

$$G(e^{j\pi}) = \frac{e^{j\pi}}{(e^{j\pi}-0{,}5)(e^{j\pi}+0{,}5)} = \frac{e^{j\pi}}{e^{2j\pi}-0{,}25} = \frac{-1}{1-0{,}25} = \frac{-1}{\frac{3}{4}} = \underline{\underline{\frac{-4}{3}}}$$

10. (3 point) Et FIR lavpasfilter ønskes designet med en stopbåndsdæmpning på 45 dB. Hvilken af følgende vinduesfunktioner kan anvendes?

- ◯ Rektangulært vindue
- ◯ Bartlett vindue
- ☒ Hamming vindue

Vindue	B_n	$M_{\min}$	Min. stopbåndsdæmpning	Max. pasbåndsripple
Rektangulær	2	f_s/Δ_f	20 dB	1,5 dB
Bartlett	4	$2f_s/\Delta_f$	25 dB	0,1 dB
Hamming	4	$2f_s/\Delta_f$	50 dB	0,05 dB
Hanning	4	$2f_s/\Delta_f$	45 dB	0,1 dB
Kaiser ($\beta = \pi$)	2,8	$1,4f_s/\Delta_f$	40 dB	0,2 dB
Kaiser ($\beta = 2\pi$)	4,4	$2,2f_s/\Delta_f$	65 dB	0,01 dB

11. (10 point) Betragt sekvensen

$$x(n) = \begin{cases} 10 & \text{for } n = 0 \\ 5 & \text{for } n = 1 \\ 7 & \text{for } n = 2 \\ -10 & \text{for } n = 3 \end{cases} \tag{2}$$

Udregn en 4-punkts diskret Fourier transformation (DFT) af sekvensen $x(n)$. Bestem kun $X(1)$ og $X(2)$.

$$X(m) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(nT)W_N^{mn}$$

$$W_N = e^{-j2\pi/N}$$

$N=4$

$W_N = e^{-j2\pi/N} \Rightarrow W_4 = e^{-j2\pi/4} = e^{-j\pi/2}$

$$X(m) = \frac{1}{4}\cdot\left(10\cdot e^0 + 5\cdot e^{-j\cdot\frac{\pi m}{2}} + 7\cdot e^{-j\pi m} - 10\cdot e^{-j\frac{3\pi m}{2}}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\left(10 + 5\cdot e^{-j\cdot\frac{\pi m}{2}} + 7\cdot e^{-j\pi m} - 10\cdot e^{-j\frac{3\pi m}{2}}\right)$$

$$X(1) = \frac{1}{4}\cdot\left(10 + 5\cdot e^{-j\cdot\frac{\pi}{2}} + 7\cdot e^{-j\pi} - 10\cdot e^{-j\frac{3\pi}{2}}\right) = 3 - 15i$$

$$X(2) = \frac{1}{4}\cdot\left(10 + 5\cdot e^{-j\pi} + 7\cdot e^{-j2\pi} - 10\cdot e^{-j3\pi}\right) = 22$$

12. (10 point) Betragt følgende differensligning

$$5y(n) + 4y(n-1) - y(n-2) = 6x(n) - 6x(n-2) \tag{3}$$

(a) (6 point) Bestem en overføringsfunktion for differensligningen (3). Overføringsfunktionen skal have positive eksponenter.

a)

$$5Y(z) + 4Y(z)\cdot z^{-1} - Y(z)\cdot z^{-2} = 6\cdot X(z) - 6\cdot X(z)\cdot z^{-2}$$

$$\Rightarrow Y(z)\cdot(5 + 4z^{-1} - z^{-2}) = X(z)\cdot(6 - 6z^{-2})$$

$$\Rightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{6 - 6z^{-2}}{5 + 4z^{-1} - z^{-2}} = \frac{6z^2 - 6}{5z^2 - 4z - 1}$$

(b) (4 point) Bestem værdierne for $y(0)$ og $y(1)$, når $y(-1) = y(-2) = 0$ og

$$x(n) = \begin{cases} 0 & \text{for } n < 0 \\ 5 & \text{for } n = 0 \\ 4 & \text{for } n = 1 \\ 7 & \text{for } n \geq 2 \end{cases}$$

$$5y(n) + 4y(n-1) - y(n-2) = 6x(n) - 6x(n-2)$$

$$\Rightarrow 5y(n) = 6x(n) - 6x(n-2) - 4y(n-1) + y(n-2)$$

$$\Rightarrow y(n) = \frac{6x(n) - 6x(n-2) - 4y(n-1) + y(n-2)}{5}$$

n	x	y
-2	0	0
-1	0	0
0	5	6
1	4	0
2	7	
3	7	
⋮	⋮	

$$y(0) = \frac{6x(0) - 6x(-2) - 4y(-1) + y(-2)}{5}$$

$$= \frac{6\cdot(5) - 6\cdot(0) - 4\cdot 0 + 0}{5} = \frac{30}{5} = \underline{\underline{6}}$$

$$y(1) = \frac{6x(1) - 6x(-1) - 4y(0) + y(-1)}{5}$$

$$= \frac{6\cdot 4 - 6\cdot 0 - 4\cdot 6 + 0}{5} = \frac{24 - 24}{5} = \underline{\underline{0}}$$

13. (15 point) Benyt invers z-transformation til at finde udgangssekvensen $y(n)$ for følgende diskrete overføringsfunktion, når indgangsstimulus $x(n)$ er enhedssamplen $\delta(n)$.

$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{(0{,}2 - 0{,}02z^{-1})(1 - 0{,}5z^{-1})}$$

$$\Rightarrow G(z) = \frac{1}{(0{,}2z - 0{,}02)(z - 0{,}5)}$$

Partialbrøkopløs

$$\frac{G(z)}{z} = \frac{1}{(0{,}2z - 0{,}02)(z - 0{,}5)} = \frac{A}{0{,}2z - 0{,}02} + \frac{B}{z - 0{,}5}$$

$$\Rightarrow 1 = A(z - 0{,}5) + B(0{,}2z - 0{,}02)$$

$$z = 0{,}5 \Rightarrow 1 = B(0{,}2\cdot 0{,}5 - 0{,}02) \Rightarrow 1 = 0{,}08B \Rightarrow B = 12{,}5$$

$$z = 0{,}1 \Rightarrow 1 = A(0{,}1 - 0{,}5) \Rightarrow 1 = -0{,}4A \Rightarrow A = -2{,}5$$

Ganger z på igen

$$\Rightarrow G(z) = \frac{-2{,}5z}{0{,}2z - 0{,}02} + \frac{12{,}5z}{z - 0{,}5} = \frac{-2{,}5}{0{,}2}\cdot\frac{z}{z - 0{,}1} + 12{,}5\,\frac{z}{z - 0{,}5}$$

$$= -12{,}5\cdot 0{,}1^n + 12{,}5\cdot 0{,}5^n = \underline{\underline{12{,}5(0{,}5^n - 0{,}1^n)}}$$

14. (20 point) Betragt følgende 2. ordens Bessel lavpasfilter (frekvensnormeret filter)

$$H(s) = \frac{1{,}6}{s^2 + 2{,}2s + 1{,}6}$$

(a) (5 point) Transformer Bessel lavpasfiltret til et højpasfilter (frekvensnormeret filter).

(b) (15 point) Design et digitalt højpasfilter $H(z)$ ved brug af bilineær z-transformation. Det digitale højpasfilter skal have afskæringsfrekvens på 1 kHz og samplefrekvens på 5 kHz.

$$H_{hp}(s) = H_{lp}(\bar{s})|_{\bar{s}=\frac{1}{s}}$$

a) $$H_{hp}(s) = \frac{1{,}6}{\left(\frac{1}{s}\right)^2 + 2{,}2\left(\frac{1}{s}\right) + 1{,}6} = \frac{1{,}6}{s^{-2} + 2{,}2s^{-1} + 1{,}6} = \frac{1{,}6s^2}{1 + 2{,}2s + 1{,}6s^2}$$

b) $f_a = 1000$, $f_s = 5000 \Rightarrow T = \frac{1}{5000}$

$\Rightarrow \omega_a = 2000\pi$

Finder prewarping-konstanten

$$C = \cot\left(\frac{\omega_a T}{2}\right) = \cot\left(\frac{2000\pi \cdot \frac{1}{5000}}{2}\right) = \cot\left(\frac{1}{5}\pi\right) = 1{,}376$$

Transformerer

$$H(z) = H(s)\Big|_{s = C\cdot\frac{z-1}{z+1}} = \underline{\underline{\frac{1{,}6C^2\cdot\frac{(z-1)^2}{(z+1)^2}}{1 + 2{,}2\cdot C\cdot\frac{z-1}{z+1} + 1{,}6C^2\cdot\frac{(z-1)^2}{(z+1)^2}}}}$$

15. (15 point) Bestem filterkoefficienterne for et FIR båndstopfilter uden et vindue. Båndstopfiltret skal have en afskæringsfrekvenser $f_{a_1} = 1$ kHz og $f_{a_2} = 2$ kHz samt samplefrekvens 10 kHz. Filtret skal have 5 samples.

$M = 2$, $T = 10000^{-1}$

$$C_0 = 1 - 2T(f_{a2} - f_{a1}) = 1 - 5000^{-1} \cdot 1000 = 1 - \frac{1}{5} = 0,8$$

$$C_m = C_{-m} = \frac{1}{m\pi}\left(\sin(m\pi) + \sin(2\pi m T f_{a1}) - \sin(2\pi m T f_{a2})\right)$$

$$C_1 = C_{-1} = \frac{1}{\pi}\left(\sin(\pi) + \sin(2\pi \cdot 10000^{-1} \cdot 1000) - \sin(2\pi \cdot 10000^{-1} \cdot 2000)\right) = -0,116$$

$$C_2 = C_{-2} = \frac{1}{\pi}\left(\sin(2\pi) + \sin(2\pi \cdot 2 \cdot 10000^{-1} \cdot 1000) - \sin(2\pi \cdot 2 \cdot 10000^{-1} \cdot 2000)\right) = 0,058$$

$$\left.\begin{aligned}
a_i &= C_{M-i} = C_{2-i} \\
a_0 &= C_2 = 0,058 \\
a_1 &= C_1 = -0,116 \\
a_2 &= C_0 = 0,8 \\
a_3 &= C_{-3} = -0,116 \\
a_4 &= C_{-2} = 0,058
\end{aligned}\right\}
\quad H(z) = \sum_{i=0}^{2M} a_i \cdot z^{-i} = \sum_{i=0}^{4} a_i \cdot z^{-i}$$

$$\underline{\underline{H(z) = 0,058 - 0,116 z^{-1} + 0,8 z^{-2} - 0,116 z^{-3} + 0,058 z^{-4}}}$$

15. (15 point) Bestem filterkoefficienterne for et FIR båndstopfilter uden et vindue. Båndstopfiltret skal have en afskæringsfrekvenser $f_{a_1} = 1$ kHz og $f_{a_2} = 2$ kHz samt samplefrekvens 10 kHz. Filtret skal have 5 samples.