Opgave 1 1/10/2022

Maj 2021 Opg 3

a) Bregn argumentet og modulus for Z. 75%

$i^2 = -1$

$Z = (2+i)\cdot(5+i)\cdot(8+i)$

$\Leftrightarrow Z = (10+7i-1)(8+i)$

$\Leftrightarrow Z = (9+7i)(8+i)$

$i^2 = -1$

$\Leftrightarrow Z = (72+9i+56i-7)$

$\Leftrightarrow Z = 65+65i$

Beregner Modulus

$|Z| = \sqrt{65^2+65^2} = \sqrt{8450} = \sqrt{2}\cdot\sqrt{4225} = \underline{\underline{65\sqrt{2}}}$

Beregner Argumentet

$\arg(Z) = \tan^{-1}\left(\frac{65}{65}\right) = \underline{\underline{\frac{\pi}{4}}}$

b) Bestem $|W^4|$ og $\arg(W^4)$ 75%

$W^4 = -256i$

Bestemmer Modulus

$|W^4| = \sqrt{0^2+(-256)^2} = \underline{\underline{256}}$

Bestemmer Argumentet

$\arg(W^4) = \lim_{h\to 0}\left(\tan^{-1}\left(\frac{-256}{h}\right)\right) = \underline{\underline{\frac{-\pi}{2}}}$

Opgave 1 1/10/2022

Maj 2021 Opg 3

c) Bestem den komplekse ligning 100%

$w^4 = -256i$

Skriver w^4 på polar

$w^4 = 256 \cdot \left(\cos\left(\frac{-\pi}{2} + 2\pi p\right) + i \cdot \sin\left(\frac{-\pi}{2} + 2\pi p\right)\right), \quad p \in \mathbb{Z}$

de Moivre's formel

$z^4 = r^4 \left(\cos(4\theta) + i \cdot \sin(4\theta)\right)$

$\Downarrow$

$r^4 = 256 \Leftrightarrow r^2 = 16 \Leftrightarrow r = 4$

$4\theta = \frac{-\pi}{2} + 2\pi p \Leftrightarrow \theta = \frac{-\pi}{8} + \frac{4\pi p}{8}, \quad p \in \mathbb{Z}$

$p = 0: \quad \theta = \frac{-\pi}{8}$

$p = 1: \quad \theta = \frac{-\pi}{8} + \frac{4\pi}{8} = \frac{3\pi}{8}$

$p = -1: \quad \theta = \frac{-\pi}{8} - \frac{4\pi}{8} = \frac{-5\pi}{8}$

$p = 2: \quad \theta = \frac{-\pi}{8} + \frac{8\pi}{8} = \frac{7\pi}{8}$

Dette er altså løsningerne på polar form.

$$\boxed{\begin{aligned} W_1 &= 4 \cdot e^{\frac{-\pi}{8} i} \\ W_2 &= 4 \cdot e^{\frac{3\pi}{8} i} \\ W_3 &= 4 \cdot e^{\frac{-5\pi}{8} i} \\ W_4 &= 4 \cdot e^{\frac{7\pi}{8} i} \end{aligned}}$$

Opgave 1

1/10/2021

Maj 2021 Opg 3

100%

d) Tegn de komplekse tal i det komplekse plan.

$W_1 = 2 \cdot e^{i \cdot \frac{3\pi}{8}}$

dette er polær form ⟶

polær form.
$Z = \lvert Z \rvert \cdot e^{i\theta}$

$r = \lvert Z \rvert$: længde fra origo

θ = Vinkel fra den reelle akse

altså må dette være modulus og argumentet

$r_1 = \lvert W_1 \rvert = 2$

$\theta_1 = \frac{3\pi}{8}$

de samme værdier aflæses fra W_2.

$W_2 = 2 \cdot e^{-i \cdot \frac{5\pi}{8}}$

$r_2 = \lvert W_2 \rvert = 2$

$\theta_2 = \frac{-5\pi}{8}$

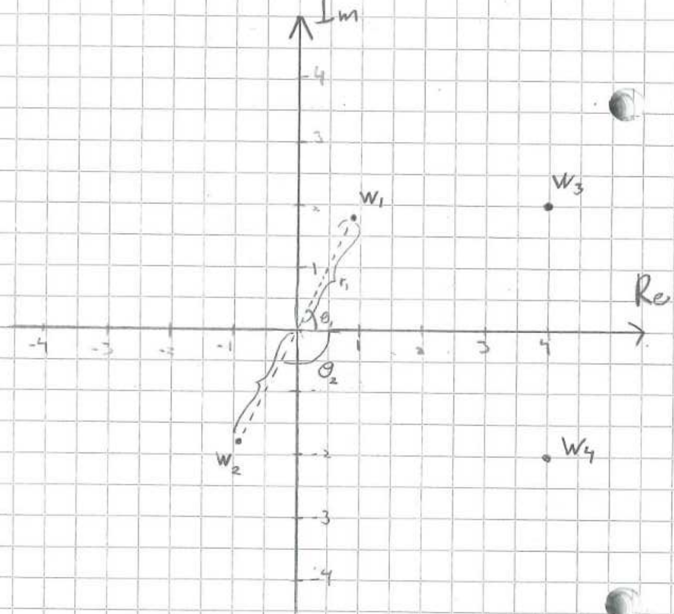
W_3 og W_4 er på rektangulær form. Deres reelle del kan der aflæses og plottes direkte.

$W_3 = 4 + 2i$

$Re(W_3) = 4, \ Im(W_3) = 2$

$W_4 = 4 - 2i$

$Re(W_4) = 4, \ Im(W_4) = -2$



Opgave 1

1/10/2022

Januar 2021 Opg 3

a) Beregn $|Z|$ og $\arg(Z)$

75%

$Z = 2e^{i\cdot\frac{\pi}{2}}\cdot(1+i) \longrightarrow W = 1+i$

Omskriver W til polær form

$|W| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

$\arg(W) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\pi}{4}$

$W = \sqrt{2}\cdot e^{\frac{\pi}{4}i}$

$\Updownarrow$ $Z = 2e^{i\cdot\frac{\pi}{2}}\cdot\sqrt{2}\cdot e^{\frac{\pi}{4}i}$

$\Updownarrow$ $Z = 2\sqrt{2}\cdot e^{\frac{3\pi}{4}i}$

Dette er z på polær form. Vi kan nu aflæse $|Z|$ og $\arg(Z)$.

$$\underline{\underline{|Z| = 2\sqrt{2}}}$$

$$\underline{\underline{\arg(Z) = \frac{3\pi}{4}}}$$

b) Bestem $|W^3|$ og $\arg(W^3)$.

75%

$W^3 = 8i$

$|W^3| = \sqrt{0^2+8^2} = \underline{8}$

$\arg(W^3) = \lim_{h\to 0}\left(\tan^{-1}\left(\frac{8}{h}\right)\right) = \underline{\underline{\frac{\pi}{2}}}$

c) Løs den komplekse ligning.

$W^3 = 8i$

polær form (Bruger følgende værdier)

$W^3 = 8\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}+2\pi p\right) + i\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\pi p\right)\right)$

Bruger de Moivres formel til at finde r og θ.

$r^3 = 8 \Leftrightarrow r = 2$

$3\theta = \frac{\pi}{2} + 2\pi p \Leftrightarrow \frac{\pi}{6} + \frac{4\pi p}{6}$

$p = 0 : \theta_1 = \frac{\pi}{6}$

$p = 1 : \theta_2 = \frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$

$p = -1 : \theta_3 = \frac{\pi}{6} - \frac{4\pi}{6} = \frac{-3\pi}{6} = -\frac{\pi}{2}$

$$\underline{\underline{W_1 = 2\cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{6}}}}$$

$$\underline{\underline{W_2 = 2\cdot e^{i\cdot\frac{5\pi}{6}}}}$$

$$\underline{\underline{W_3 = 2\cdot e^{-i\frac{\pi}{2}}}}$$

75%

Opgave 1

1/10/2022

Januar 2021 Opg 3

d) Tegn løsningerne

$z_1 = 2 \cdot e^{i \cdot \frac{2\pi}{6}}$, $z_2 = 2 e^{i \cdot \frac{5\pi}{6}}$, $z_3 = 2 \cdot e^{-i \cdot \frac{\pi}{6}}$, $z_4 = 2 \cdot e^{-i \cdot \frac{4\pi}{6}}$

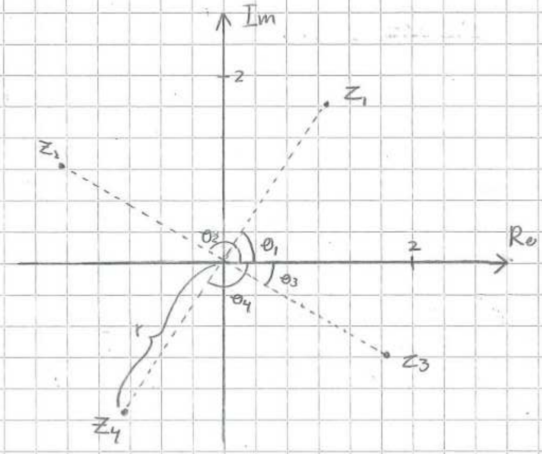
$\theta_1 = \frac{2\pi}{6}$

$\theta_2 = \frac{5\pi}{6}$

$\theta_3 = \frac{-\pi}{6}$

$\theta_4 = \frac{-4\pi}{6}$

$r = 2$



100%

Opgave 1 1/10/2022

Januar 2017 Opg 3

a) Opskriv et reduceret udtryk for $\arg(-1+i\cdot\alpha)$ 25%

$$\arg(-1+i\cdot\alpha) = \tan^{-1}\left(\frac{\alpha}{-1}\right) = \underline{\underline{\tan^{-1}(-\alpha)}}$$

b) Opskriv et reduceret udtryk for $|-1+i\cdot\alpha|$ 100%

$$|-1+i\cdot\alpha| = \sqrt{(-1)^2+\alpha^2} = \underline{\underline{\sqrt{\alpha^2+1}}}$$

c) Opskriv $\arg(z)$ på reduceret form. 100%

$$\arg(z) = \arg\left((-1+i\alpha)\cdot e^{i\cdot\beta}\right)$$

Omskriver $-1+i\cdot\alpha$ til polar form.

$$= \arg\left(\left(\sqrt{\alpha+1}\cdot e^{i\cdot\tan^{-1}(-\alpha)}\right)\cdot e^{i\cdot\beta}\right)$$

ganger de komplekse tal sammen.

$$= \arg\left(\sqrt{\alpha+1}\cdot e^{i\cdot(\tan^{-1}(-\alpha)+\beta)}\right)$$

aflæser θ. Lægger π til da vi tager $\tan^{-1}$ af noget negativt.

$$\underline{\underline{\arg(z) = \tan^{-1}(-\alpha)+\beta+\pi}}$$

d) Beregn z på regtangulær form. 100%

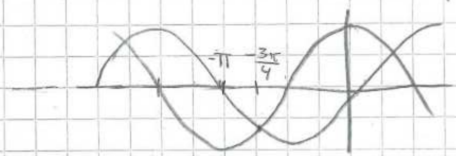
$\alpha = 1$

$\beta = \frac{\pi}{2}$

$|z| = \sqrt{\alpha+1}\cdot 1 = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$\arg(z) = \tan^{-1}(-1) + \frac{\pi}{2} + \pi = \frac{-\pi}{4} + \frac{\pi}{2} + \pi = \frac{5\pi}{4}$ trækker 2π fra da $\frac{5\pi}{4} > \pi$

$\arg(z) = \frac{5\pi}{4} - \frac{8\pi}{4} = \frac{-3\pi}{4}$



Omskriver til regtangulær form.

$$z = \sqrt{2}\cdot\cos\left(\frac{-3\pi}{4}\right) + i\cdot\sqrt{2}\cdot\sin\left(\frac{-3\pi}{4}\right)$$

$$= \sqrt{2}\cdot\frac{-\sqrt{2}}{2} + i\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{-\sqrt{2}}{2}$$

$$= -\frac{2}{2} + i\cdot\frac{-2}{2}$$

$$\underline{\underline{z = -1-i}}$$