Fysik 1 – lektion 10

Dagens emne:
Pendulbevægelsen og rulning.

- Repetition
- (Det matematiske pendul)
- Det fysiske pendul
- Fysisk versus matematisk pendul
- Pendul - store udsving
- Rulning

Repetition

Stift legemes rotation

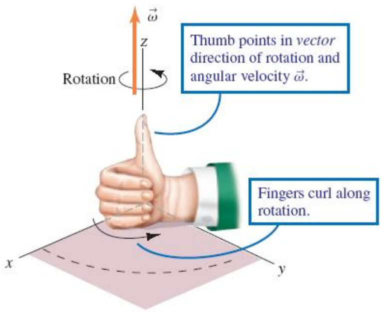
Rotationsvinkel: $\vec{\theta}(t) = \theta(t)\,\hat{\theta} \quad [\text{radianer}]$

Vinkelhastighed: $\vec{\omega} = \dfrac{d\theta(t)}{dt}\,\hat{\omega} \quad [s^{-1}]$

Vinkelacceleration: $\vec{\alpha} = \dfrac{d\omega(t)}{dt}\,\hat{\alpha} = \dfrac{d^2\theta}{dt^2}\,\hat{\alpha} \quad [s^{-2}]$

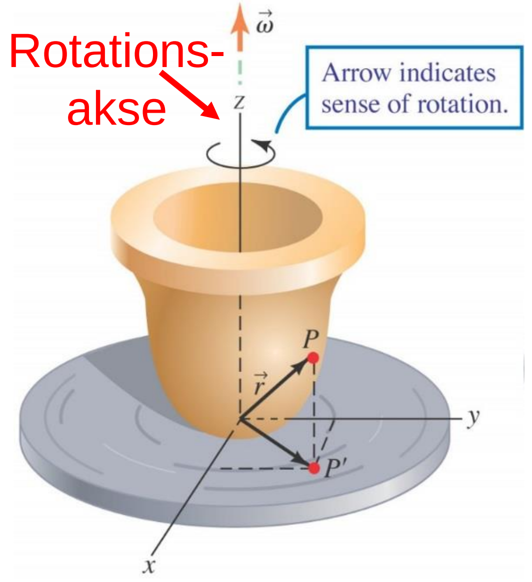
Enhedsvektorerne:

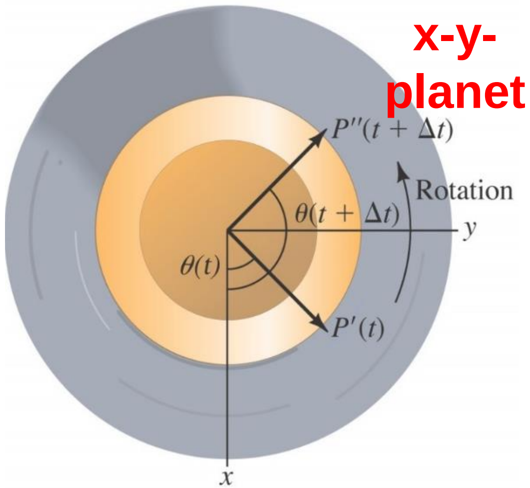
$\hat{\theta}$, $\hat{\omega}$ og $\hat{\alpha}$ er defineret således at:



Rotation mod urets retning: Positiv

Rotation med urets retning: Negativ





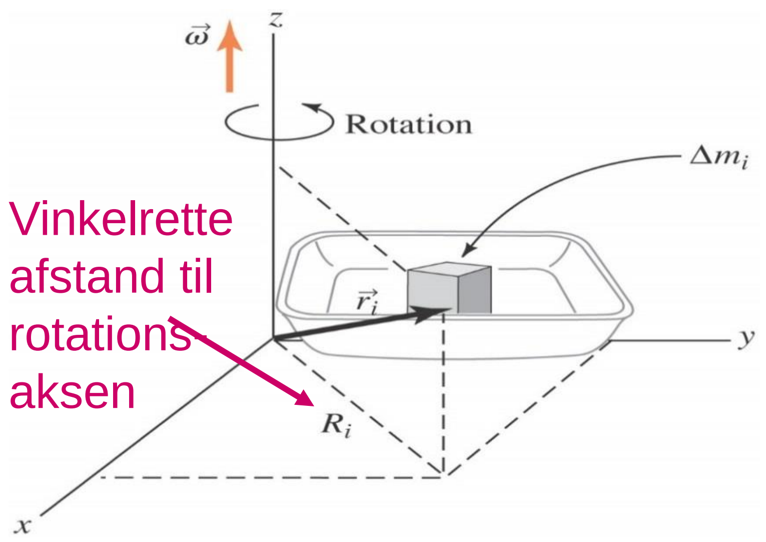
Repetition

Analogi mellem translation og rotation ved konstant acceleration og konstant veinkelacceleration

Linear Equation	Missing Variable		Angular Equation
$v = v_0 + at$	$x - x_0$	$\theta - \theta_0$	$\omega = \omega_0 + \alpha t$
$x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$	v	ω	$\theta - \theta_0 = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$
$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$	t	t	$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$
$x - x_0 = \frac{1}{2}(v_0 + v)t$	a	α	$\theta - \theta_0 = \frac{1}{2}(\omega_0 + \omega)t$
$x - x_0 = vt - \frac{1}{2}at^2$	v_0	ω_0	$\theta - \theta_0 = \omega t - \frac{1}{2}\alpha t^2$

Masseinertimoment

$$I \equiv \sum_i \Delta m_i R_i^2 \quad \left[\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2\right]$$



Repetition

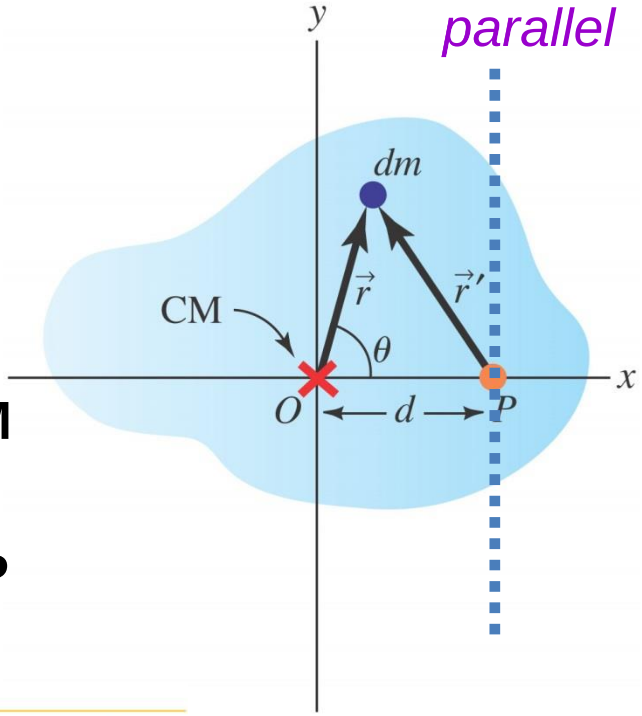
Flytningsformlen

$$I_p = I_{CM} + Md^2$$

I_{CM} = Inertimoment ifht. rotationsakseigennem CM

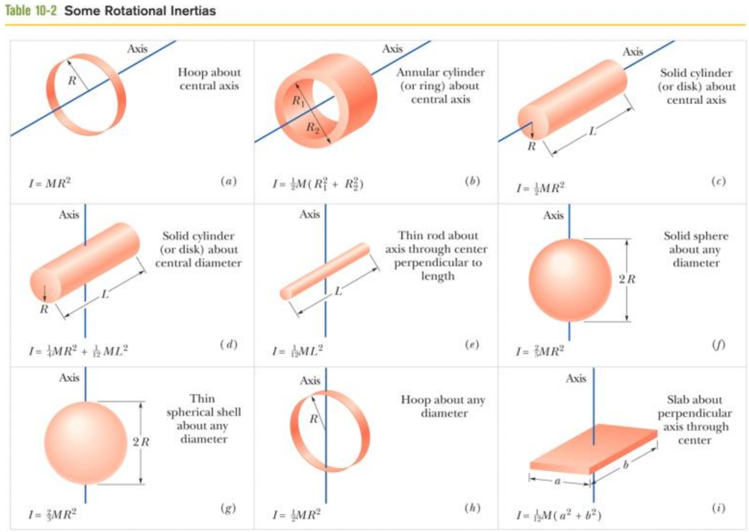
M = legemets totale masse

d = afstanden mellem de to rotationsakser O og P



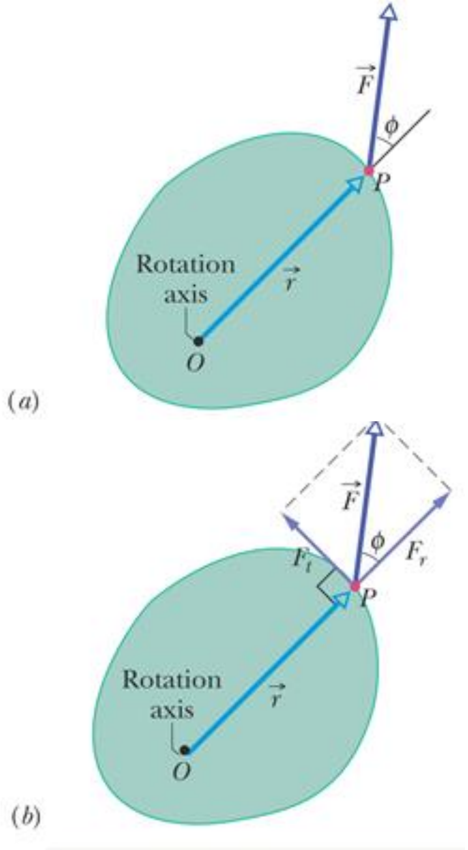
Rotationsenergi

$$K_{rot} = \frac{1}{2} I\omega^2$$



Kraftmoment

Årsagen til et legemes rotation er, at det bliver påvirket af et kraftmoment, $\vec{\tau}$.

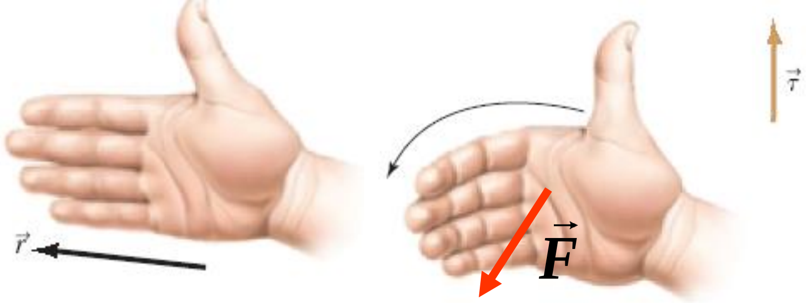


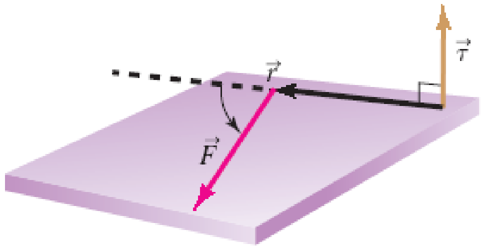
Størrelsen af et kraftmoment er bestemt af en kraft, en 'momentarm' og vinklen mellem disse to:

$$\tau = rF_t = r(F\sin\phi) = rF\sin\phi$$

Eller som vektorligning, hvor retningen af kraftmomentet er givet ved højrehåndsreglen:

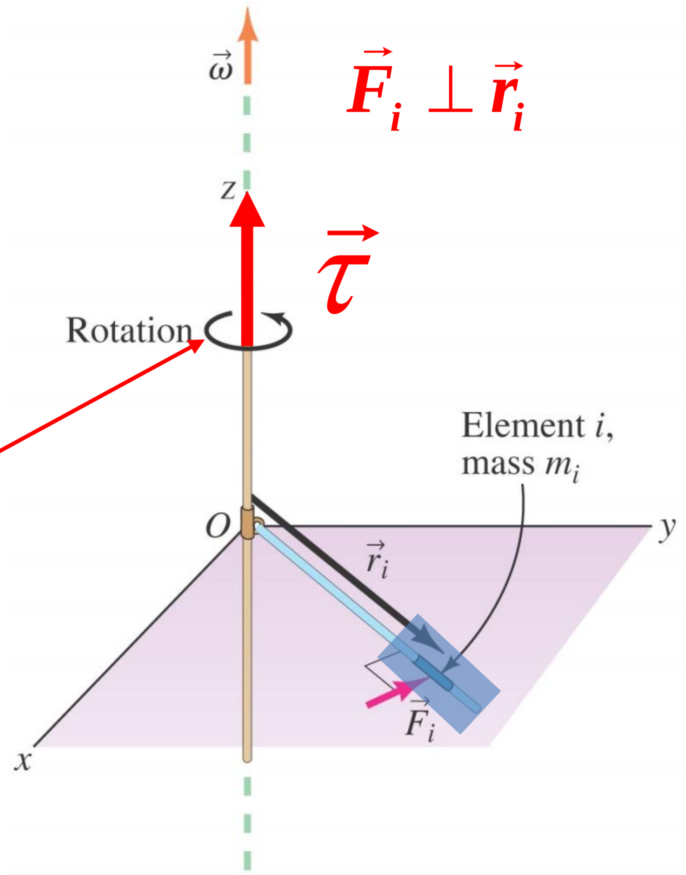
$$\boxed{\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}}$$





Kraftmoment - bevægelsesligninger

En ekstern kraft, $\vec{F}_i$, virker på et element, i, af en stang. Vi antager at: $\vec{F}_i \perp \vec{r}_i$



Opskrives Newton’s 2. lov for det i’te element, som får tagentialaccelerationen, $\vec{a}_i$:

$$F_i = m_i a_i = m_i(\alpha r_i) \Rightarrow$$

$$\tau_i = r_i F_i = m_i r_i^2 \alpha \Rightarrow$$

$$\tau = \sum_i \tau_i = \left(\sum_i m_i r_i^2\right)\alpha$$

$$\boxed{\vec{\tau} = I\vec{\alpha}}$$

Newton’s 2-lov for roterende systemer

$$I = \sum_i m_i r_i^2$$

Vektorsummen af alle kraftmomenter = masseinertimoment gange vinkelaccelerationen

Repetition

Arbejde-energi teorem

$$\Delta K = K_f - K_i = \tfrac{1}{2} I\omega_f^2 - \tfrac{1}{2} I\omega_i^2 = W$$

$$W = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \vec{\tau} \cdot d\vec{\theta}$$

Mekanisk effekt i rotationsbevægelse

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{\tau} \cdot d\vec{\theta}}{dt} = \vec{\tau} \cdot \vec{\omega}$$

Matematisk pendul

Positionen på cirkelbuen:

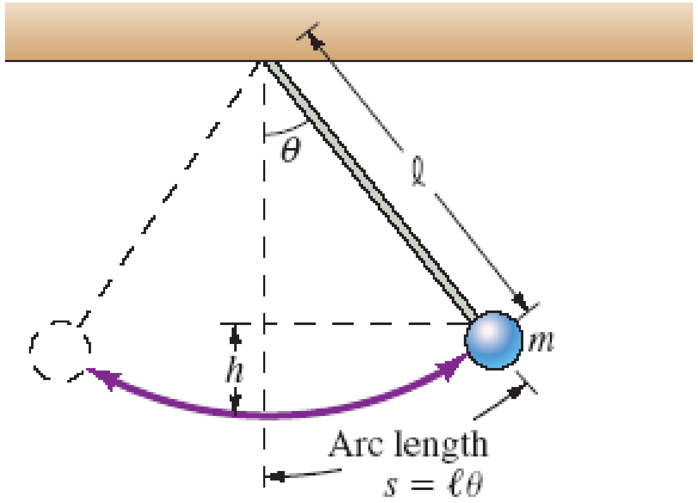
$$s = \ell\theta$$

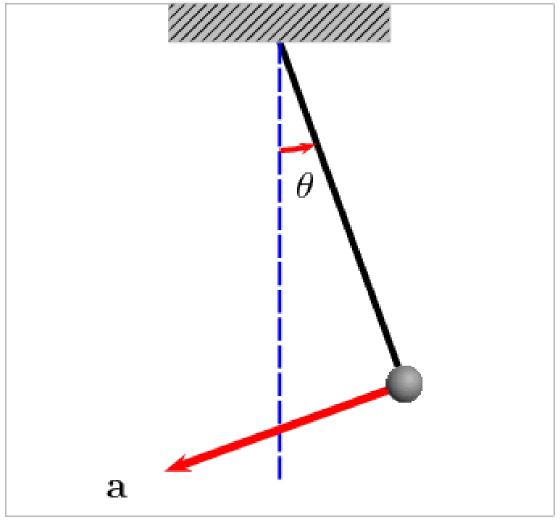
Hastigheden langs cirkelbuen:

$$v = \frac{ds}{dt} = \ell\frac{d\theta}{dt}$$

Tangential accelerationen:

$$a = \frac{dv}{dt} = \ell\frac{d^2\theta}{dt^2}$$





Kan også findes ved at se på kræfterne, som påvirk-er pendulet.

Matematisk pendul

Tangential-accelerationen:

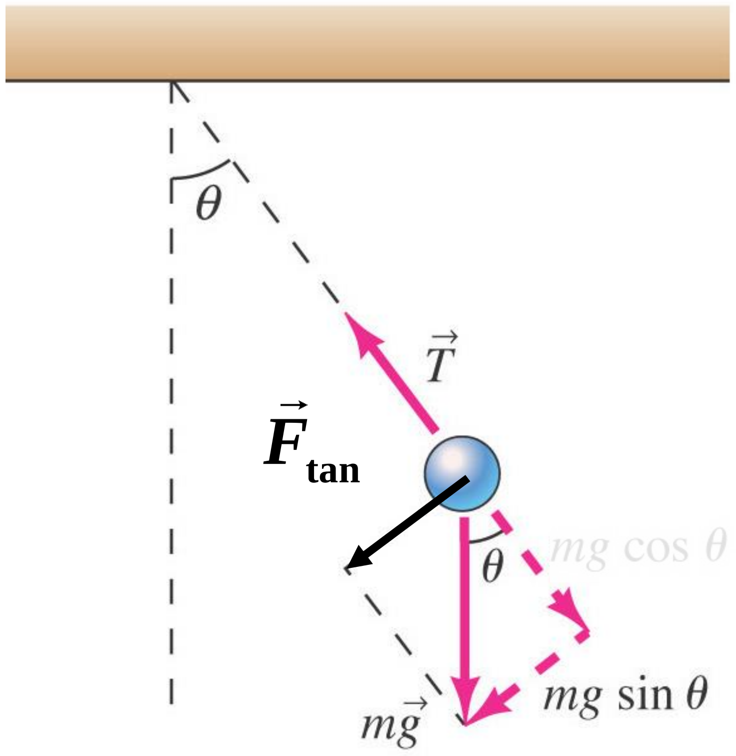
$$a = \frac{dv}{dt} = \ell \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Af fritlegeme-diagrammet fås:

$$\boldsymbol{F}_{\mathbf{tan}} = -\boldsymbol{mg}\,\mathbf{sin}\,\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{ma}$$

Hvorved:

$$\boldsymbol{l}\frac{\boldsymbol{d}^2\boldsymbol{\theta}}{\boldsymbol{dt}^2} = -\boldsymbol{g}\,\mathbf{sin}\,\boldsymbol{\theta}$$



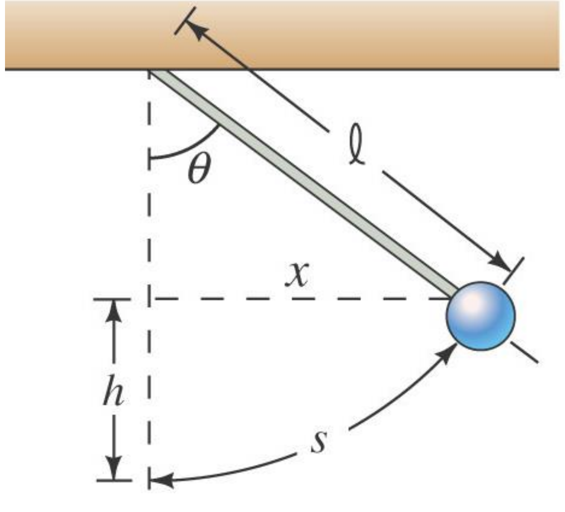
Hvis der på højre side havde stået $-g\theta$ havde vi "opskriften" på en harmonisk svingning.

Hvornår gælder: $\sin\theta \cong \theta$?

Matematisk pendul

$$\sin\theta = \frac{x}{l} \qquad \text{og} \qquad \theta = \frac{s}{l}$$

$$\sin\theta \cong \theta \Rightarrow x \cong s$$



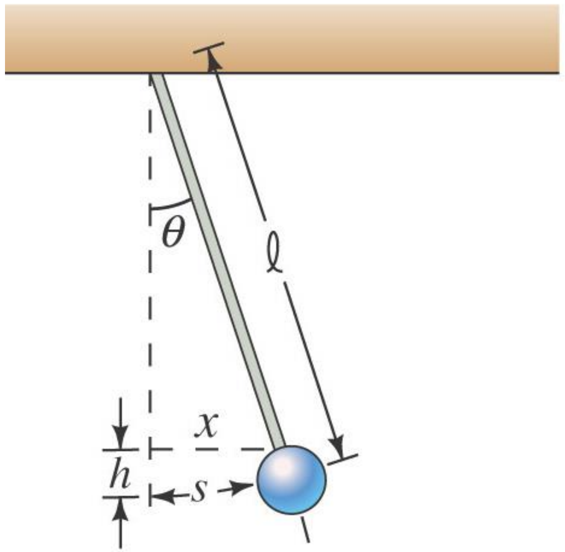
Sidstnævnte kan ses, at gælde for små vinkler, *θ*, hvilket også ses af Taylorrække-udviklingen for sin*θ*:

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots$$

Hermed fås:

$$l\frac{d^2\theta}{dt^2} = -g\sin\theta \cong -g\theta \Leftrightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\overbrace{\frac{g}{l}}^{\omega^2}\theta \Rightarrow$$

$$\boxed{\theta = \theta_0 \sin(\omega t + \delta)}$$

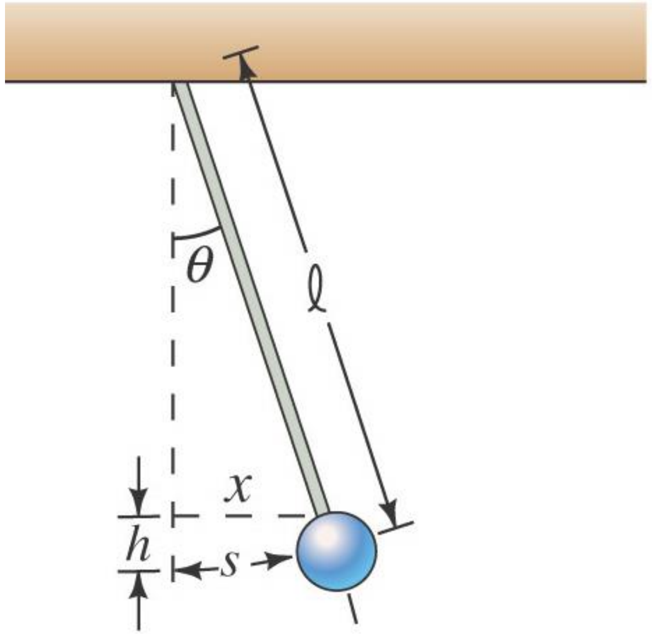


$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}, \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}, \qquad f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}$$

Matematisk pendul - energiforhold

Kinetisk energi:

$$K(\theta) = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(l\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \boxed{\frac{1}{2}ml^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2}$$



Potentiel energi

$$U(\theta) = mgh = mgl(1-\cos\theta)$$

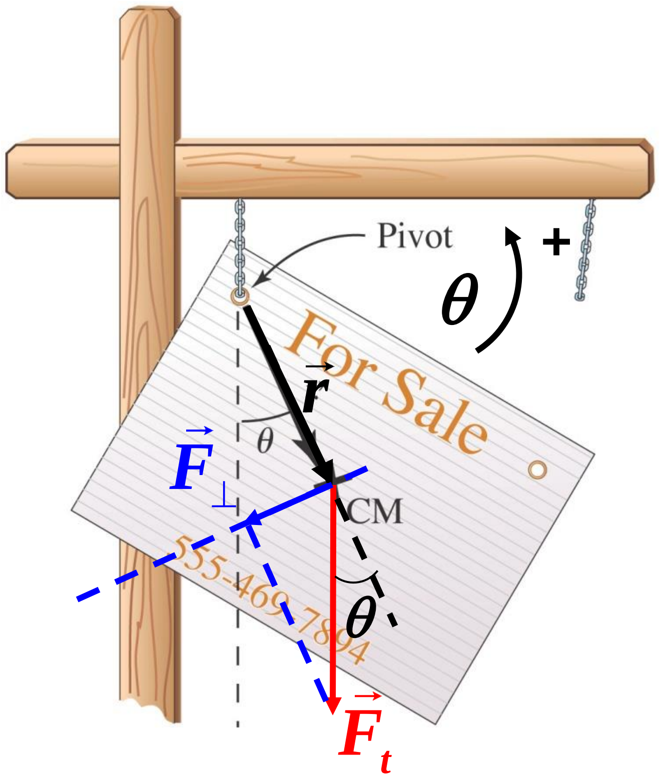
Benyttes de første led i Taylorrække-udviklingen for cosinus:

$$\cos(\theta) \cong 1 - \frac{\theta^2}{2} \Rightarrow$$

$$U(\theta) = mgh = mgl(1-1+\frac{1}{2}\theta^2) = \boxed{\frac{1}{2}mgl\theta^2}$$

Fysisk pendul

Ethvert legeme som er ophængt i et punkt, som er forskudt i forhold til massemidtpunktet, kan svinge pga. kraftmomentet: $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}_t \Rightarrow$



$$\tau = rF_\perp = rF_t \sin\theta = rMg\sin\theta$$

Endvidere gælder for rotationen:

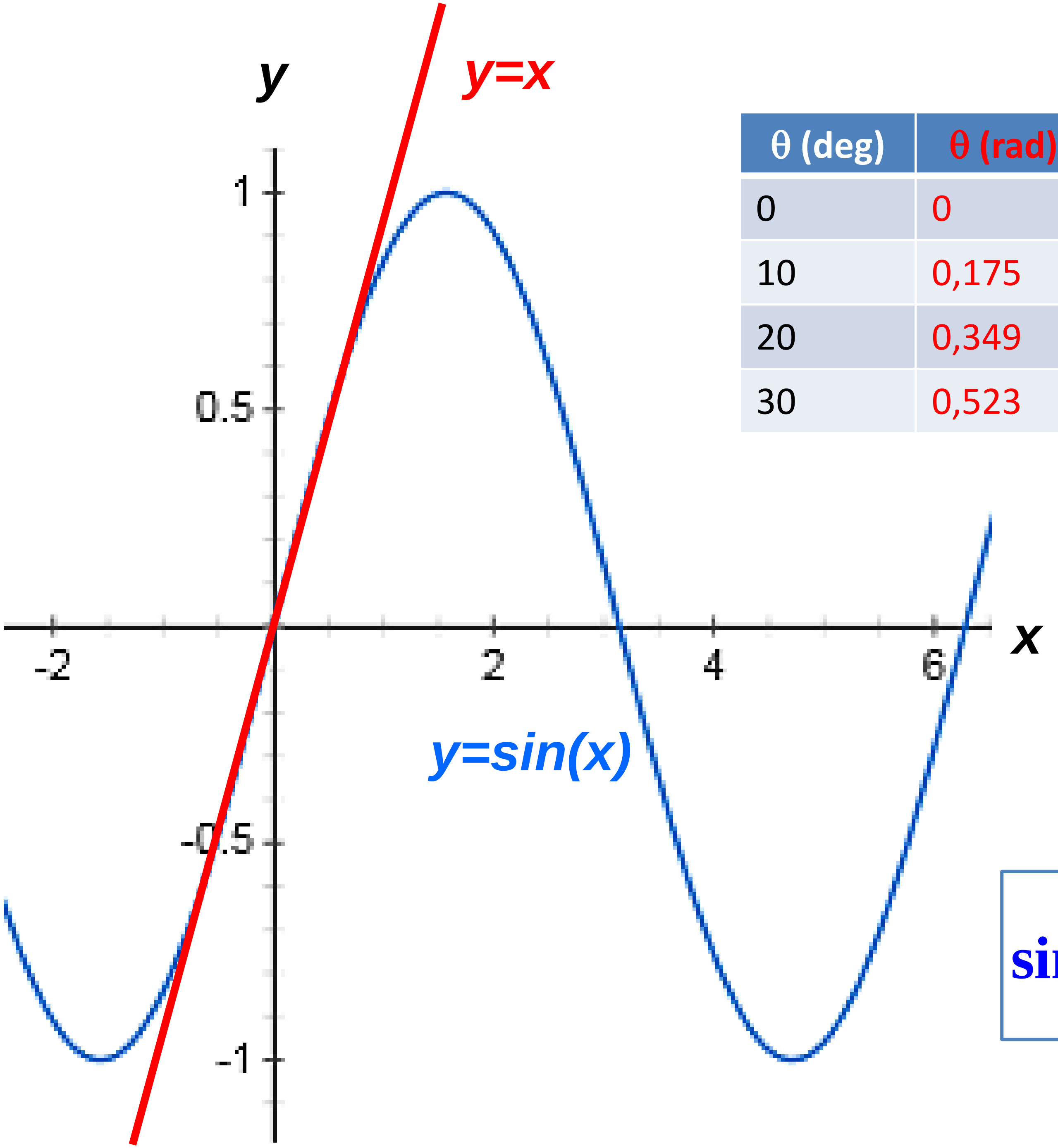
$$\tau = -I\alpha \quad \begin{cases} I = \text{masseinertimomentet} \\ \alpha = \dfrac{d^2\theta}{dt^2} = \text{vinkelaccelerationen} \end{cases}$$

For små vinkler, θ, fås: $\sin\theta \cong \theta$

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = -\frac{Mgr}{I}\theta(t) \Rightarrow$$

$$\boxed{\theta(t) = \theta_0 \sin(\omega t + \delta)}$$

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{Mgr}{I}}, \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgr}}}$$



θ (deg)	θ (rad)	sin(θ)	Fejl %
0	0	0	0
10	0,175	0,174	0,5
20	0,349	0,342	2
30	0,523	0,500	5

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots$$

Fysisk vs. matematisk pendul

Fysisk pendul:

$$T_{Fys} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgr}}$$

Matematisk pendul:

$$I_{Mat} \cong Ml^2$$

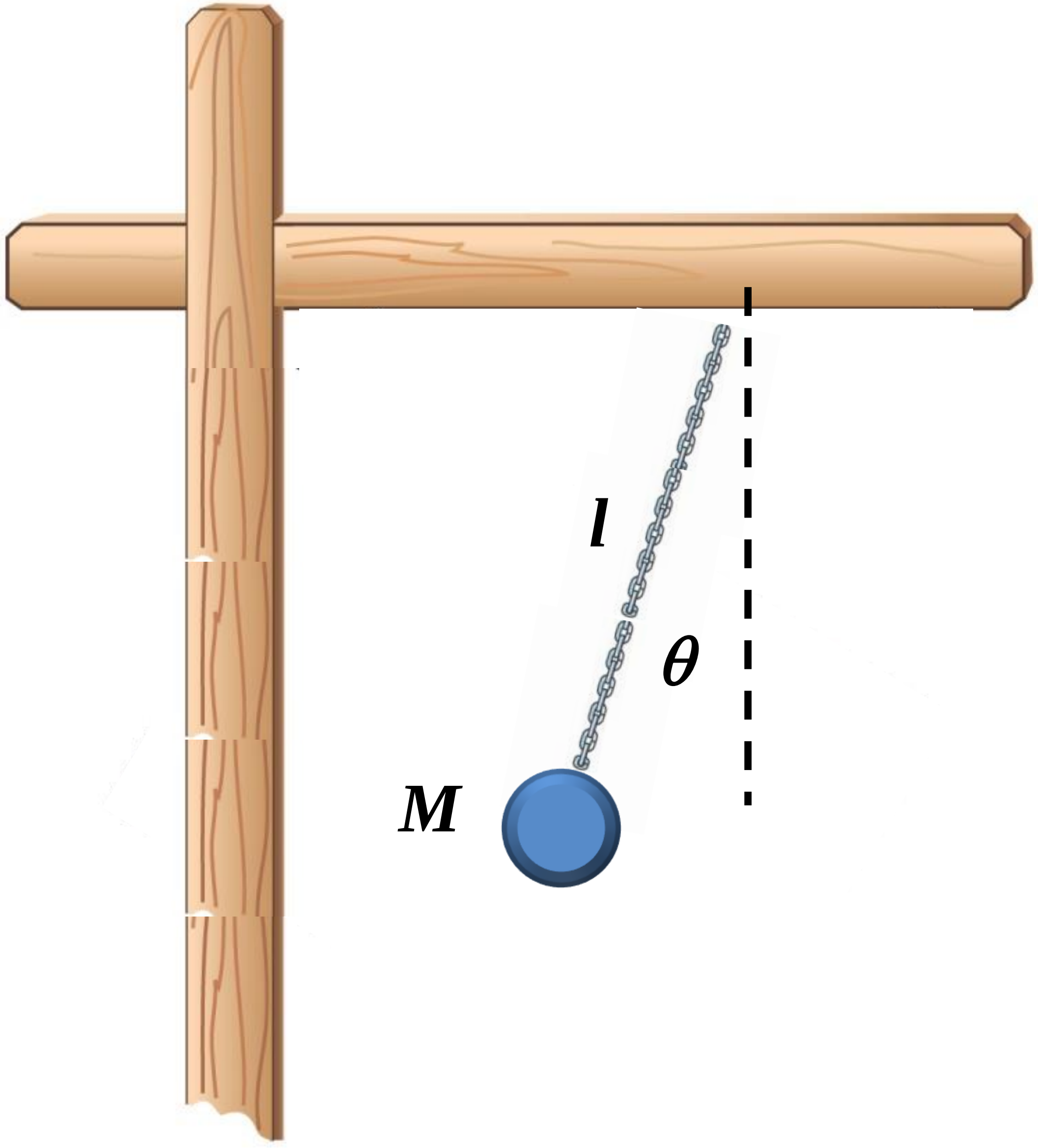
$$r \cong l$$

$$T_{Mat} = 2\pi\sqrt{\frac{Ml^2}{Mgl}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

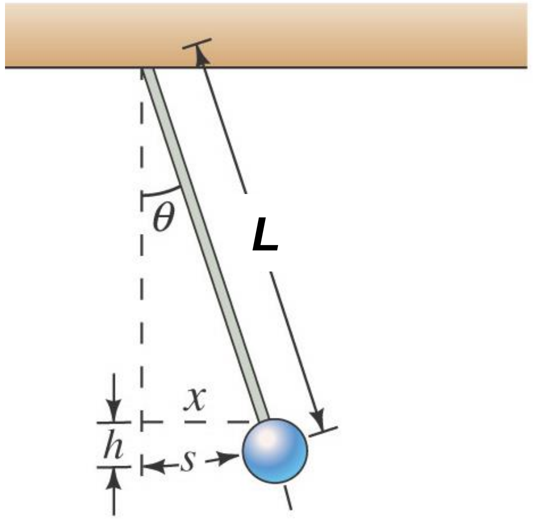
Reduceret pendullængde

$$l_{RP} = \frac{I}{mr}$$

$$T_{Fys} = 2\pi\sqrt{\frac{l_{RP}}{g}}$$



Pendul, store udsving



Opskriv den samlede mekaniske energi for systemet

$$E_{Mek} = E_{Rot} + E_{Pot} = \tfrac{1}{2} I\omega^2 + mgL\left(1-\cos\theta\right)$$

$$= \frac{1}{2} m\left(L\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + mgL\left(1-\cos\theta\right)$$

Til $t=0$ er massen løftet op til en vinkel θ_0 i forhold til lodret

$$E_{Mek,start} = E_{Pot,start} = E_{Mek,efter} = E_{Rot,efter} + E_{Pot,efter}$$

$$mgL\left(1-\cos\theta_0\right) = \frac{1}{2} m\left(L\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + mgL\left(1-\cos\theta\right)$$

$$-g\cos\theta_0 = \frac{1}{2} L\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - g\cos\theta \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{2g}{L}\left(\cos\theta - \cos\theta_0\right)}$$

Pendul, store udsving

Benyt:

$$\cos\theta = 1 - 2\sin^2\left(\tfrac{\theta}{2}\right) \quad og \quad \cos\theta_0 = 1 - 2\sin^2\left(\tfrac{\theta_0}{2}\right)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{2g}{L}\left(\cos\theta - \cos\theta_0\right)} = \sqrt{\frac{4g}{L}}\sqrt{\left(\sin^2\left(\tfrac{\theta_0}{2}\right) - \sin^2\left(\tfrac{\theta}{2}\right)\right)}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = 2\omega_0\sqrt{\left(\sin^2\left(\tfrac{\theta_0}{2}\right) - \sin^2\left(\tfrac{\theta}{2}\right)\right)}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

Denne lign. integreres fra *θ=0* til *θ=θ_0* *, en kvart periode*

$$\int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\left(\sin^2\left(\tfrac{\theta_0}{2}\right) - \sin^2\left(\tfrac{\theta}{2}\right)\right)}} = 2\omega_0 \int_0^{T/4} dt = \frac{\omega_0 T}{2} = \pi\frac{T}{T_0}$$

Pendul, store udsving

$$T = \frac{T_0}{\pi}\int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\left(\sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)}} = T_0\,\frac{2}{\pi}\,F_{Ellip}\left[\sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right)\right]$$

Hvor F_{Ellip} er et elliptisk integrale af 1. type, der kun kan løses numerisk.

I Matlab hedder F_{Ellip}[ ]: *ellipke( ), i Mathematica: EllipticK[]*

Alternativt række udvikling….

$$\frac{T}{T_0} = \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right) + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 \sin^4\left(\frac{\theta_0}{2}\right) + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 \sin^6\left(\frac{\theta_0}{2}\right) + \ldots\right]$$

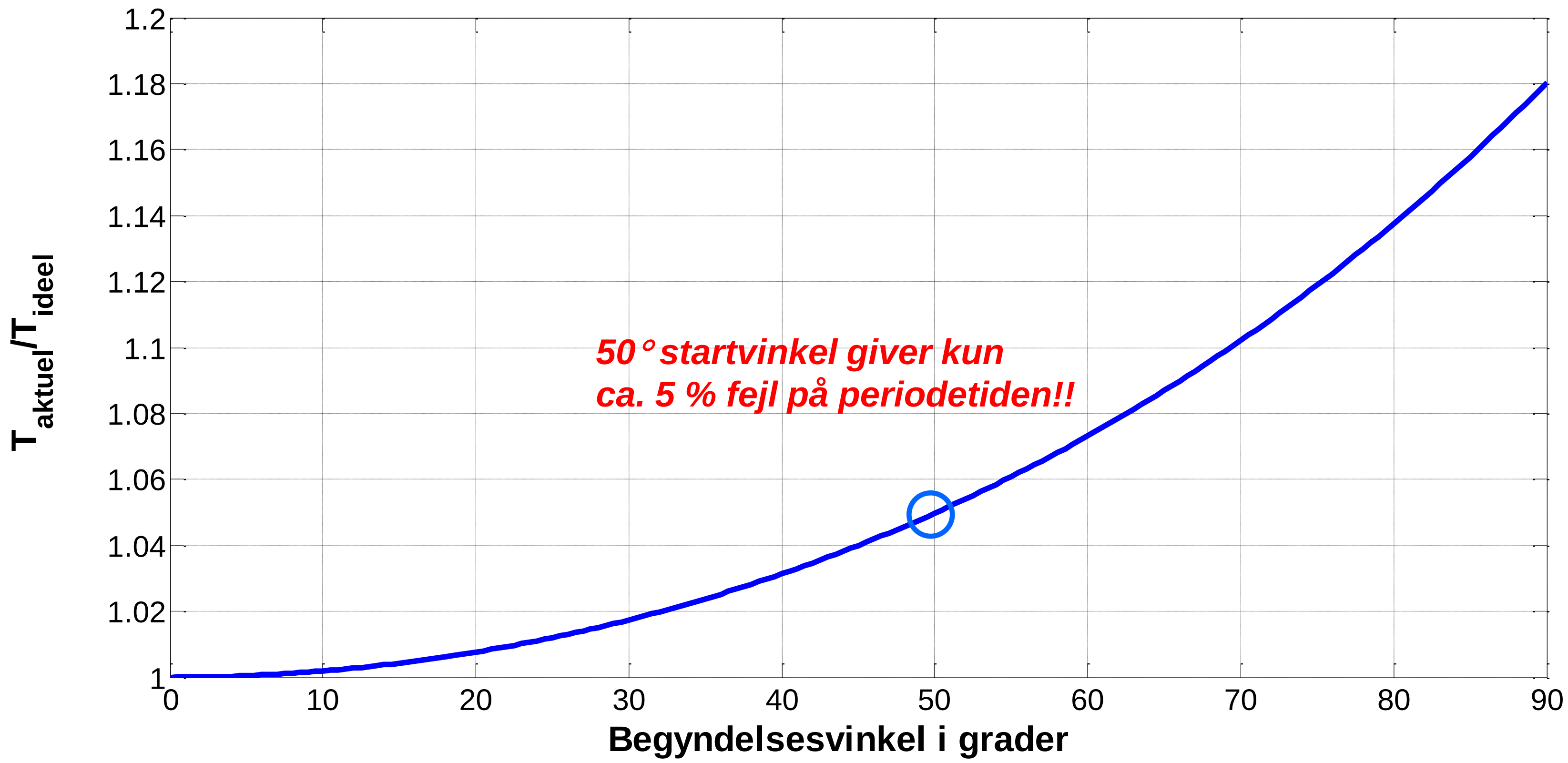
$$\boxed{\frac{T}{T_0} \cong \left[1 + \frac{1}{4}\sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right)\right]}$$

Eller:

$$\boxed{\frac{T}{T_0} \cong \frac{1}{\sqrt{\cos(\theta_0/2)}}}$$

Pendul, store udsving

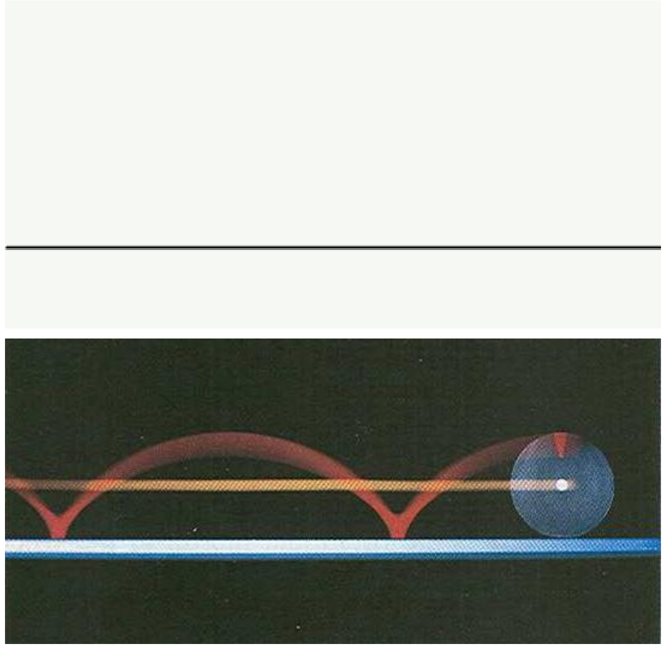
```
>> th=0:0.5:90;                          % begyndelsesvinkel
>> k=sind(th/2);                         % def. af k
>> M=(2/pi)*ellipke(k.^2);               % beregning af elliptisk integrale
>> plot(th, M, 'LineWidth',2)
>> xlabel('Begyndelsesvinkel i grader')
>> ylabel('T_aktuel/T_ideel‘)
>> grid on
```

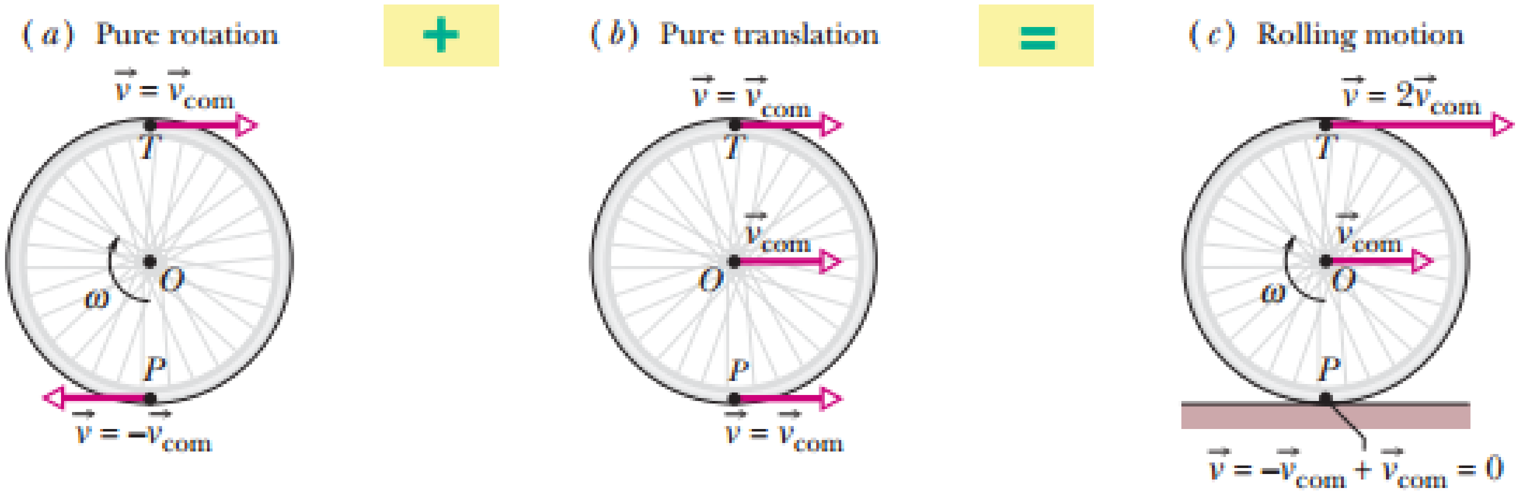


Rulning

Rulning er en kombination af rotation og lineær bevægelse.

Hjulet roterer om sin akse (rød lysdiode) og aksen bevæger sig retliniet (hvid lysdiode).





Rulning

Rulning kan betragtes som rotation om kontaktpunktet P.

P kaldes også det øjeblikkelige omdrej-ningspunkt.

Er hjulnarvets hastighed v, så er hjulnar-vets vinkelhastighed omkring P:

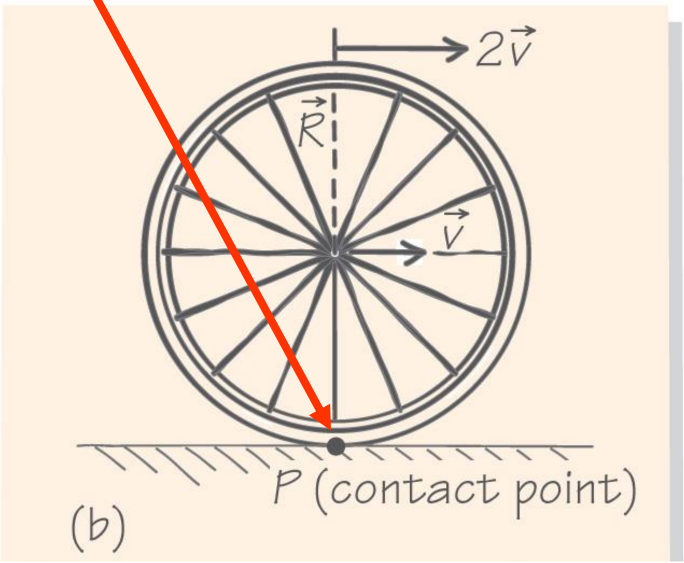
$$\omega = \frac{v}{R}\ ;\quad R = \text{hjulets radius}$$

Ethvert punkt på hjulet har samme vinkel-hastighed omkring P.

Derved får hjulets toppunkt hastigheden:

$$v_{top} = 2R\omega = 2R\frac{v}{R} = 2v$$

(a)



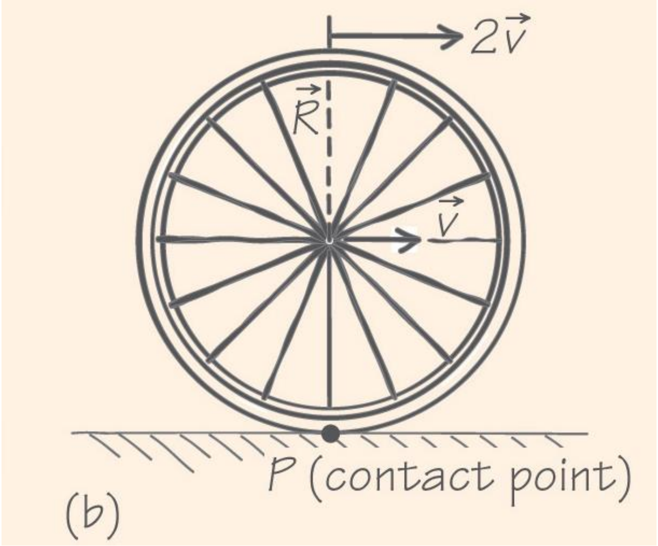
(b)

Energien i rulning

I forhold til det øjeblikkelige omdrejnings-punkt, udfører hjulet en ren rotation, hvorved den totale kinetiske energi bliver:

$$K = \frac{1}{2} I_{contact} \omega^2$$

hvor $I_{contact}$ er hjulets masseinertimoment mht. en akse som går igennem P.



Ud fra flytningsformlen fås:

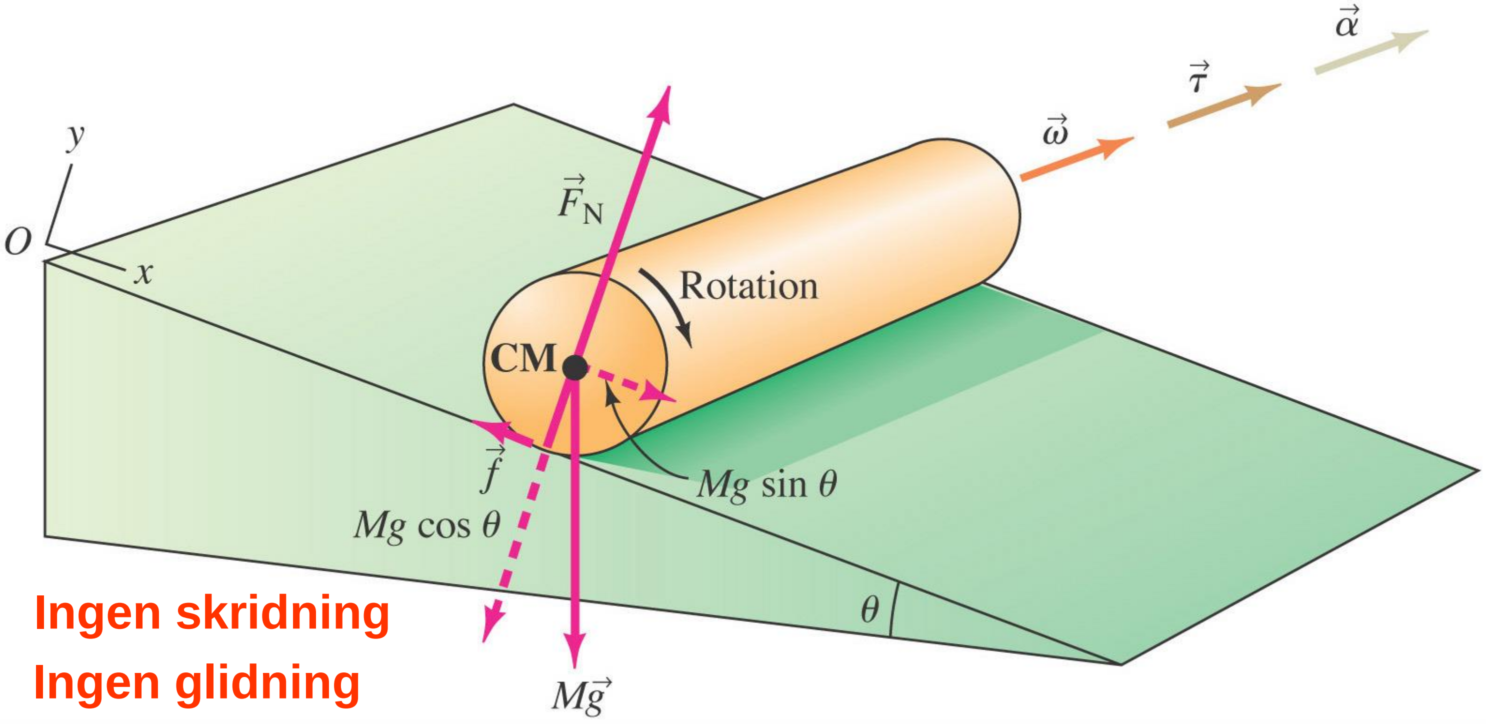
$$I_{contact} = I_{CM} + MR^2 \Rightarrow$$

$$K = \frac{1}{2}\left(I_{CM} + MR^2\right)\omega^2 \Leftrightarrow \boxed{K = \frac{1}{2} I_{CM}\omega^2 + \frac{1}{2} Mv^2} \qquad \boxed{K_{rul} = K_{rot} + K_{trans}}$$

Rotationsenergi

Translationsenergi

Rulning, bevægelsesligninger



Ingen skridning

Ingen glidning

Er der friktion mellem cylinderen og underlaget, vil den statiske friktions-kraft være årsagen til cylinderens rulning.

Newton's 2. lov på den translatoriske bevægelse: $Ma = Mg\sin\theta - f$

Kraftmomentet hidrørende fra friktionskraften: $\tau = fR = I\alpha$

Sammenhæng mellem rotation og translation: $a = R\alpha$

Rulning, bevægelsesligninger

Fra forrige slide: → $\tau = fR = I\alpha \Leftrightarrow f = \dfrac{I\alpha}{R}$ og $a = R\alpha$

$$Ma = Mg\sin\theta - f \quad \Leftrightarrow \quad M\alpha R = Mg\sin\theta - \frac{I\alpha}{R} \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\alpha = \frac{MgR\sin\theta}{MR^2 + I}}$$

hvorved

$$\boxed{\omega = \omega_0 + \alpha t = \omega_0 + \frac{MgR\sin\theta}{MR^2 + I}t}$$

Endvidere er:

$$\boxed{v = R\omega = v_0 + g\sin\theta\frac{MR^2}{MR^2 + I}t} \quad \boxed{v^2 = v_0^2 + 2al = v_0^2 + 2g\sin\theta\frac{MR^2}{MR^2 + I}l}$$

Disse ligninger gælder for cylinderen, som ruller ned af et hældende underlag. Lad os undersøge situationen mere generelt for andre legemer, som kan rulle nedad på et hældende underlag.

Rulning, bevægelsesligninger

Fra forrige slide haves for cylinderen: $\omega = \omega_0 + \frac{MgR\sin\theta}{MR^2 + I} t$

For et homogent legeme med masse M og radius R, og som er symmetrisk omkring en akse (lig eller parallel med rotationsaksen) gælder: $I = CMR^2$
hvor C>0, er bestemt af legemets geometri (se tabel 10.2).

Benyttes denne sammenhæng fås at:

$$\omega = \omega_0 + \frac{(g/R)\sin\theta}{1+C} t \qquad v = v_0 + \frac{g\sin\theta}{1+C} t \qquad v^2 = v_0^2 + 2\frac{g\sin\theta}{1+C} l$$

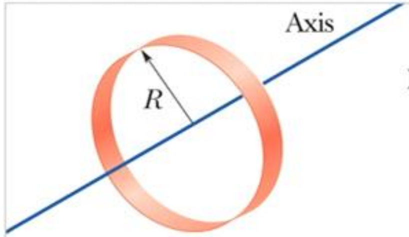
Sammenlignes sidste udtryk med hastigheden for et legeme, som bevæg-er sig ned af en rampe uden friktion (glider): $v^2 = v_0^2 + 2g\sin\theta\, l$
så ses det at:

Det rullende legeme bevæger sig langsommere, da noget af den poten-tielle energi bliver omsat til rotationsenergi.
Bemærk, at ren glidning svarer til *C=0* (ingen rotation)

Masseinertimoment for simple legemer

Tabel 10.2

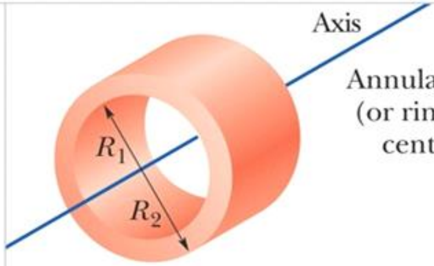
Table 10-2 Some Rotational Inertias



Hoop about central axis

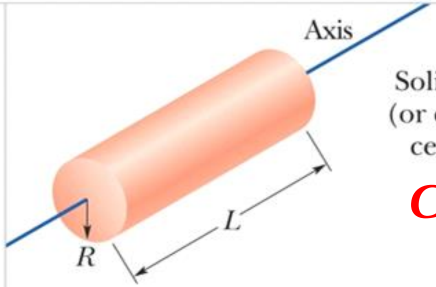
$C = 1$

$I = MR^2$ **(a)**



Annular cylinder (or ring) about central axis

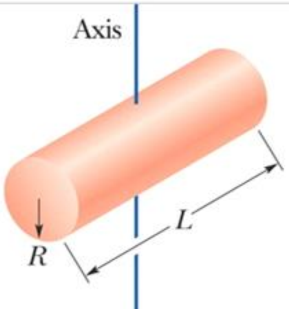
$I = \frac{1}{2} M \left(R_1^{\,2} + R_2^{\,2} \right)$ **(b)**



Solid cylinder (or disk) about central axis

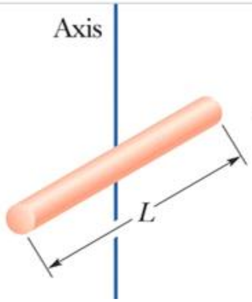
$C = \frac{1}{2}$

$I = \frac{1}{2} MR^2$ **(c)**



Solid cylinder (or disk) about central diameter

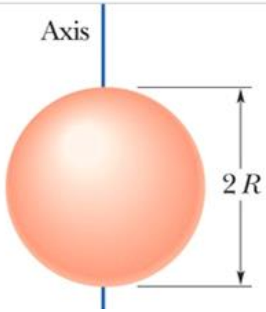
$I = \frac{1}{4} MR^2 + \frac{1}{12} ML^2$ **(d)**



Thin rod about axis through center perpendicular to length

$C = \frac{1}{12}$

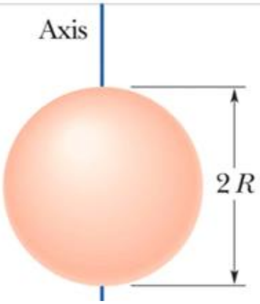
$I = \frac{1}{12} ML^2$ **(e)**



Solid sphere about any diameter

$C = \frac{2}{5}$

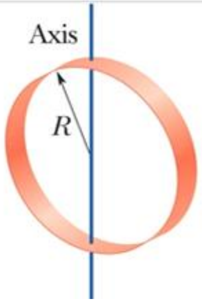
$I = \frac{2}{5} MR^2$ **(f)**



Thin spherical shell about any diameter

$C = \frac{2}{3}$

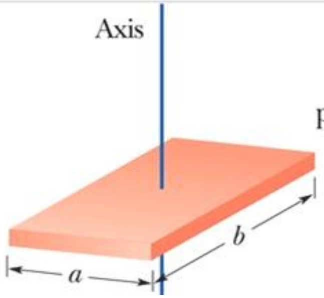
$I = \frac{2}{3} MR^2$ **(g)**



Hoop about any diameter

$C = \frac{1}{2}$

$I = \frac{1}{2} MR^2$ **(h)**



Slab about perpendicular axis through center

$I = \frac{1}{12} M \left(a^2 + b^2 \right)$ **(i)**

Rulning Forsøg og forklaring

Tre legemer, en kugle, en cylinderskive og en cylinderring, med samme radius slippes samtidig på toppen af rampen.

Hvilket legeme når først ned?

Udgangspunktet er ligningen for accelerationen:

$$\boxed{a = \alpha R = \frac{MgR^2 \sin\theta}{MR^2 + I} = \frac{g\sin\theta}{1 + I/(MR^2)}}$$

For cylinderringen:

$$\begin{cases} I_{CR} = MR^2 \Rightarrow \\ a_{CR} = \dfrac{g\sin\theta}{1+1} = \dfrac{1}{2} g\sin\theta = 0.5 g\sin\theta \end{cases}$$

For cylinderskiven:

$$\begin{cases} I_{CS} = ½MR^2 \Rightarrow \\ a_{CS} = \dfrac{g\sin\theta}{1+½} = \dfrac{2}{3} g\sin\theta = 0{,}67 g\sin\theta \end{cases}$$

For kuglen:

(hurtigst)

$$\begin{cases} I_K = ⅖ MR^2 \Rightarrow \\ a_K = \dfrac{g\sin\theta}{1+⅖} = \dfrac{5}{7} g\sin\theta = 0{,}71 g\sin\theta \end{cases}$$

Næste gange, lektion 11 og 12

Lektion 11:

- Fysikøvelse i to omgange kl. 8-10 og kl. 10-12;
5 hold a 3-4 personer. I alt 10 grp.

Lektion 12:

- Kraftmoment (igen)
- Bevægelsesmængdemoment
- Generalisering af bevægelsesmængdemoment
- Bevarelse af bevægelsesmængdemoment

Opgaver

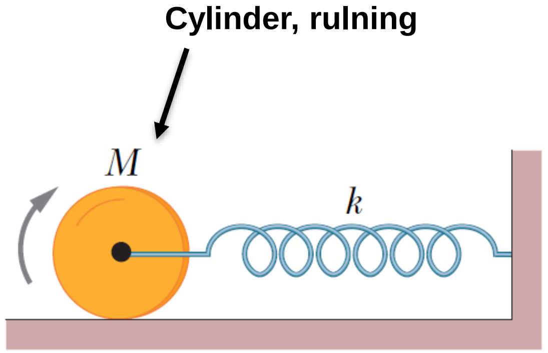


Fig. 15-57 Problem 100.

15P100. (ekstra)

Vis at periodetiden T er:

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{3M}{2k}}}$$

$$E = K + U \quad ; \qquad \frac{dE}{dt} = 0$$

$$E = \tfrac{1}{2} I_{ø}\omega^2 + \tfrac{1}{2} kx^2 \qquad = \tfrac{1}{2} I_{ø}\left(\tfrac{v}{R}\right)^2 + \tfrac{1}{2} kx^2$$

$$\frac{dE}{dt} = \tfrac{1}{2}\frac{I_{ø}}{R^2} 2 \cdot v \cdot \frac{dv}{dt} + \tfrac{1}{2} k \cdot 2 \cdot x \frac{dx}{dt} \quad = \frac{I_{ø}}{R^2} \cdot v \cdot a + k \cdot x \cdot v = 0$$

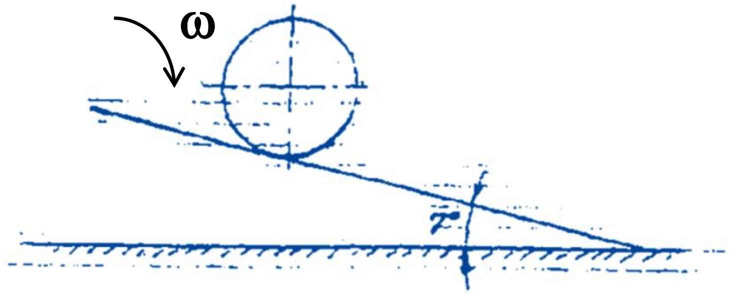
$$a = -\left(k\frac{R^2}{I_{ø}}\right) \cdot x = -\omega^2 x \qquad T = \frac{2\pi}{\omega} \quad = 2\pi\sqrt{\frac{I_{ø}}{R^2 \cdot k}} \quad = 2\pi\sqrt{\frac{3M}{2k}}$$

$$I_{ø} = I_{CM} + MR^2 \; = \tfrac{1}{2} MR^2 + MR^2 = \tfrac{3}{2} MR^2$$

Opgaver

OPGAVE 15.

Opgave 15 *(IOT-xxx)*



En kugle fastholdes på et skråplan, der hælder 7° med vandret. Til tiden t_0 =0 slippes kuglen, som derefter - uden at glide - ruller ned ad skråplanet. Kuglens masse er m = 12 g, og dens diameter D= 30 mm.

a) Beregn den mindste værdi, som den statiske friktionskoefficient må antage, for at forsøget kan gennemføres?

b) Beregn kuglens vinkelacceleration.

Når kuglens centrum har flyttet sig vejen s_1-s_0 = 2,0 m parallelt med skråplanet, ønskes følgende beregnet:

a) Den tid t_1-t_0. som kuglen har brugt, for at tilbagelægge de 2,0 m.

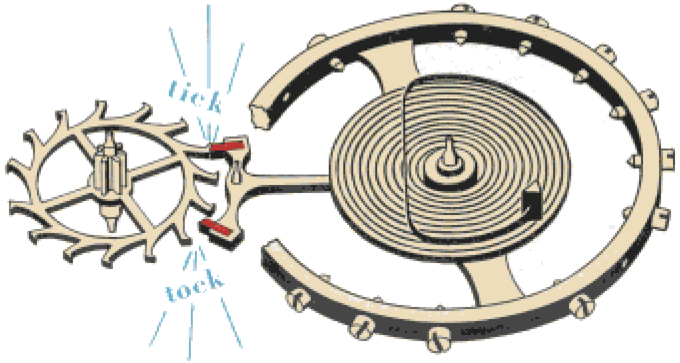
b) Den hastighed, hvormed kuglens centrum bevæger sig til tiden t_1

c) Kuglens kinetiske energi.

d) Den potentielle energi, som kuglen har mistet ved bevægelsen.

Opgaver

15P59.



59 The balance wheel of an old-fashioned watch oscillates with angular amplitude π rad and period 0.600 s. Find (a) the maximum angular speed of the wheel, (b) the angular speed at displacement $\pi/2$ rad, and (c) the magnitude of the angular acceleration at displacement $\pi/4$ rad.

a): 32,9 rad/s
b): -28,5 rad/s
c): 86 rad/s^2