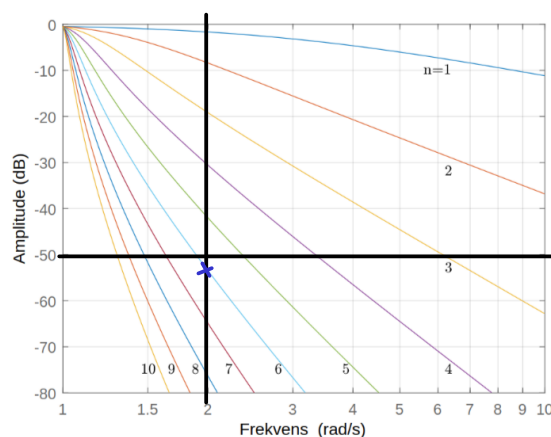


1. (3 point) Et anti-aliaseringsfilter ønskes designet med fladest mulig pasbånd. Hvilket af følgende filtre opfylder bedst dette ønske?

- ☒ Butterworth lavpasfilter
- ☐ Chebyshev lavpasfilter
- ☐ Butterworth højpasfilter
- ☐ Chebyshev højpasfilter

2. (3 point) Benyt Figur 1 til at bestemme filterordenen for et analog højpasfilter med afskæringsfrekvens på 2000 Hz og stopbåndsfrekvens på 1000 Hz med stopbåndsdæmpning større end 50 dB.

- Filterordenen skal være:



$$F = 2$$

$$N = \underline{\underline{6}}$$

Figur 1: Amplitudekarakteristik for frekvensnormeret 0,5 dB Chebyshev lavpasfilter.

3. (3 point) Er følgende diskrete overføringsfunktion stabil?

$$G(z) = \frac{z + 2}{z^2 + 0,5}$$

- ☒ Ja
- ☐ Nej

4. (3 point) Hvor ligger poler og nulpunkter for følgende diskrete overføringsfunktion

$$G(z) = \frac{z^2 + 1}{(z + 2)(z - 0,5)}$$

- Poler: $z = -2$, $z = 0,5$
- Nulpunkter: $z = 1$ og $z = -1$

5. (3 point) Betragt følgende diskrete overføringsfunktion

$$G(z) = \frac{z - 0,75}{(z - 0,5)(z + 0,5)}$$

- Hvad er DC-forstærkningen for $G(z)$?

$$z=1 \Rightarrow G(1) = \frac{0,25}{0,5 \cdot 1,5} = \frac{0,25}{0,75} = \underline{\underline{0,33}}$$

6. (3 point) Hvilke af følgende signaler kan blive fuldstændigt rekonstrueret ved en sampling af signalet med en samplefrekvens på 5 Hz?

- ☐ $x_1(t) = \cos(2\pi \cdot 3 \cdot t + 2) + \sin(2\pi \cdot 5 \cdot t + 4)$
☒ $x_2(t) = \cos(2\pi \cdot 2 \cdot t + 3) + \sin(2\pi \cdot 2 \cdot t + 5)$
☒ $x_3(t) = \sin(2\pi \cdot 1 \cdot t)$
☐ $x_4(t) = \cos(2\pi \cdot 5 \cdot t)$

7. (3 point) Betragt følgende overføringsfunktion

$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{3z^2 + 2}{2z^2 + 3}$$

Hvilken af følgende differensligninger er en invers z -transformation af (1)?

- ☒ $3y(n) + 2y(n+2) = 2x(n) + 3x(n+2)$
☐ $3y(n) + 2y(n-2) = 2x(n) + 3x(n-2)$
☐ $2y(n) + 3y(n+2) = 3x(n) + 2x(n+2)$
☐ $2y(n) + 3y(n-2) = 3x(n) + 2x(n-2)$

$$\Rightarrow Y(z) \cdot (2z^3 + 3) = X(3z^2 + 2)$$

$$\Rightarrow 2y(n+2) + 3y(n) = 3x(n+2) + 2x(n)$$

8. (3 point) Hvad er den z -transformerede af enhedssamplen $\delta(n)$?

- ☐ $G_1(z) = \frac{z}{z-1}$
☐ $G_2(z) = \frac{z}{(z-1)^2}$
☒ $G_3(z) = 1$

9. (3 point) Et FIR højpasfilter ønskes designet med en maximal pasbåndsripple på mindre end 0,1 dB. Hvilken af følgende vinduesfunktioner kan anvendes?

- ☐ Rektangulært vindue
☐ Bartlett vindue
☒ Hamming vindue

10. (3 point) Hvilket pol-nulpunkts plot i Figur 2 stemmer overens med Bode plottet vist i Figur 3. Sam-
pleintervallet for den diskrete overføringsfunktion er $T = 1$ s.

- ☒ a)
☐ b)
☐ c)

$$T=1 \Rightarrow f_0 = 0,5$$

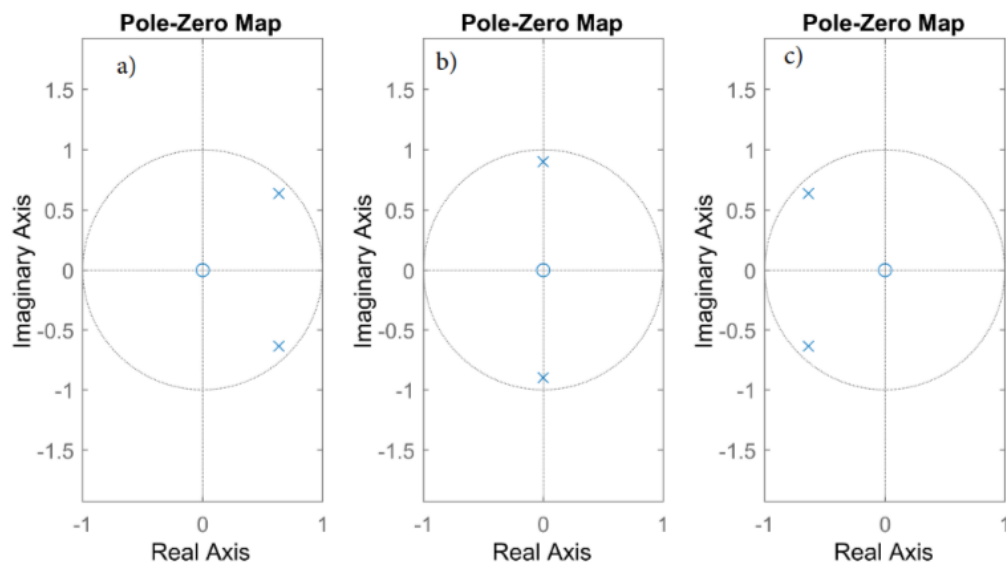


Figure 2: Pol-nulpunkts plot for diskrete overføringsfunktioner.

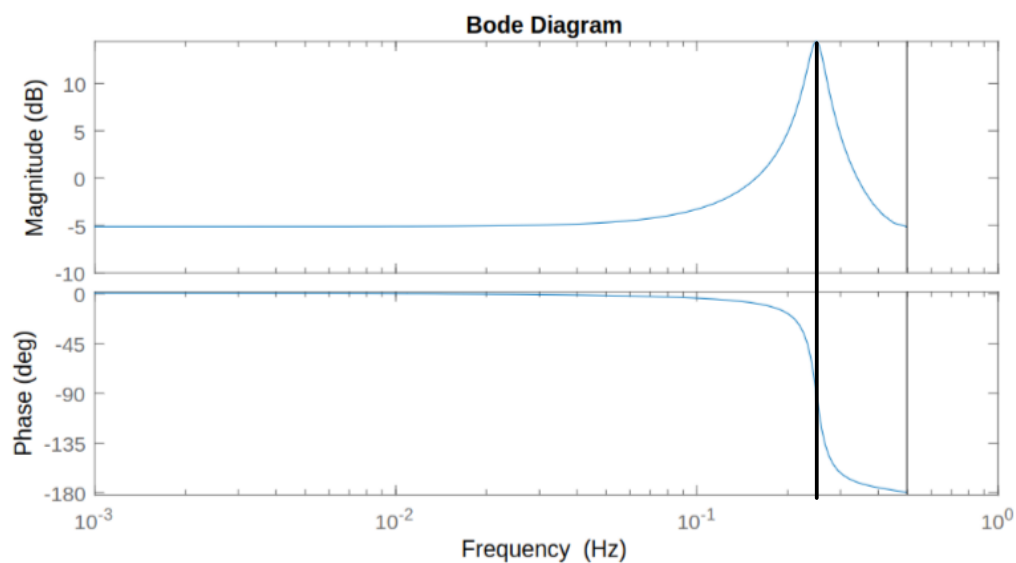


Figure 3: Bode plot for diskret overføringsfunktion med sampleinterval $T = 1$ s.

11. (10 point) Betragt sekvensen

$$x(n) = \begin{cases} 1 & \text{for } n = 0 \\ 0 & \text{for } n = 1 \\ 2 & \text{for } n = 2 \\ 0 & \text{for } n = 3 \\ 3 & \text{for } n = 4 \\ 0 & \text{for } n = 5 \\ 4 & \text{for } n = 6 \\ 0 & \text{for } n = 7 \end{cases} \quad (2)$$

Udregn en 8-punkts diskret Fourier transformation (DFT) af sekvensen $x(n)$. Bestem kun $X(1)$ og $X(4)$.

$$W_8 = e^{-j2\pi/8} = e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

$$X(m) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cdot W_N^{mn} = \frac{1}{8} \sum_{n=0}^7 x_n \cdot e^{-j\frac{n\pi}{4} \cdot m}$$

$$= \frac{1}{8} \cdot (1 \cdot \cancel{e^0} + 0 \cdot \cancel{e^{-j\frac{\pi}{4} \cdot m}} + 2 \cdot e^{-j\frac{2\pi}{4} \cdot m} + 0 \cdot \cancel{e^{-j\frac{3\pi}{4} \cdot m}} + 3 \cdot e^{-j\frac{4\pi}{4} \cdot m} + 0 \cdot \cancel{e^{-j\frac{5\pi}{4} \cdot m}} + 4 \cdot \cancel{e^{-j\frac{6\pi}{4} \cdot m}} + 0 \cdot \cancel{e^{-j\frac{7\pi}{4} \cdot m}})$$

$$= \frac{1}{8} \cdot (1 + 2 \cdot e^{-j\frac{2\pi}{4} \cdot m} + 3 \cdot e^{-j\frac{4\pi}{4} \cdot m} + 4 \cdot e^{-j\frac{6\pi}{4} \cdot m})$$

$$= \frac{1}{8} (1 + 2e^{-j\frac{\pi}{2} \cdot m} + 3e^{-j\pi m} + 4e^{-j\frac{3}{2}\pi m})$$

$$X(1) = \frac{1}{8} (1 + 2e^{-j\frac{\pi}{2}} + 3e^{-j\pi} + 4e^{-j\frac{3}{2}\pi})$$

$$= \frac{1}{8} (1 - 2i - 3 + 4i) = \frac{1}{8} (-2 + 2i) = \underline{\underline{-\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i}}$$

$$X(4) = \frac{1}{8} (1 + 2e^{-j\frac{\pi}{2} \cdot 4} + 3e^{-j\pi \cdot 4} + 4e^{-j\frac{3}{2}\pi \cdot 4})$$

$$= \frac{1}{8} (1 + 2e^{-j2\pi} + 3e^{-j4\pi} + 4e^{-j6\pi})$$

$$= \frac{1}{8} (1 + 2 + 3 + 4) = \frac{1}{8} (10) = \frac{10}{8} = \underline{\underline{\frac{5}{4}}}$$

12. (10 point) Betragt følgende differensligning

$$3y(n+1) - 5y(n-1) = 3x(n) + 5x(n-3) - 5x(n-5) \quad (3)$$

(a) (6 point) Bestem en overføringsfunktion for differensligningen (3). Overføringsfunktionen skal have positive eksponenter.

$$\Rightarrow 3 \cdot Y(z) \cdot z^1 - 5 Y(z) \cdot z^{-1} = 3 \cdot X(z) + 5 \cdot X(z) \cdot z^{-3} - 5 X(z) \cdot z^{-5}$$

$$\Rightarrow Y(z) \cdot (3z - 5z^{-1}) = X(z) \cdot (3 + 5z^{-3} - 5z^{-5})$$

$$\Rightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{3 + 5z^{-3} - 5z^{-5}}{3z - 5z^{-1}} \cdot \frac{z^5}{z^5} = \frac{3z^5 + 5z^2 - 5}{3z^6 - 5z^4}$$

(b) (4 point) Bestem om overføringsfunktionen er stabil.

Overføringsfunktionen er stabil hvis alle polerne ligger inden for den imaginære enheds cirkel. Altså må nævneren KUN være 0 inden for enhedscirklen. Dette tjækker vi:

$$3z^6 - 5z^4 = 0$$

Fire nulpunkter i $z = 0$

$$\Rightarrow z^4(3z^2 - 5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} z^4 = 0 \\ 3z^2 - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow z = \pm \sqrt{\frac{5}{3}} \approx \pm 1,3$$

Nulpunkterne i ca. 1.3 og -1.3 er uden for den imaginære enhedscirkel og overføringsfunktionen er derfor USTABIL.

13. (15 point) Benyt invers z -transformation til at finde udgangssekvensen $y(n)$ for følgende diskrete overføringsfunktion, når indgangsstimulus $x(n)$ er enhedssamplen $\delta(n)$.

$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z^2 - 0,2z}{z^2 - 0,7z + 0,06}$$

Partialbrøkopløs (brøken skal være ægte, så jeg dividerer med z først).

$$\frac{G(z)}{z} = \frac{z - 0,2}{z^2 - 0,7z + 0,06} = \frac{z - 0,2}{(z - 0,6)(z - 0,1)} = \frac{A}{z - 0,6} + \frac{B}{z - 0,1}$$

Ganger med venste nævner

$$\Rightarrow z - 0,2 = A(z - 0,1) + B(z - 0,6)$$

Indsætter interessante z -værdier

$$z = 0,6 \Rightarrow 0,6 - 0,2 = A(0,6 - 0,1) \Rightarrow 0,4 = 0,5A \Rightarrow A = 0,8$$

$$z = 0,1 \Rightarrow 0,1 - 0,2 = B(0,1 - 0,6) \Rightarrow -0,1 = -0,5B \Rightarrow B = 0,2$$

$$\Rightarrow \frac{G(z)}{z} = \frac{0,8}{z - 0,6} + \frac{0,2}{z - 0,1} \Rightarrow G(z) = \frac{0,8z}{z - 0,6} + \frac{0,2z}{z - 0,1}$$

Invers z -transformation på led

$$\boxed{\frac{z}{z - a} \rightarrow a^n}$$

$$y(n) = 0,8 \cdot 0,6^n + 0,2 \cdot 0,1^n$$

Dette er også det diskrete impulsrespons for systemet. Dette er fordi:

$$\mathcal{Z}[\delta(n)] = 1 \Rightarrow G(z) = \frac{Y(z)}{1} \Rightarrow G(z) = Y(z) \Rightarrow y(n) = \mathcal{Z}^{-1}[G(z)]$$

Altså er dette svaret den diskrete impuls respons:

$$\underline{\underline{y(n) = 0,8 \cdot 0,6^n + 0,2 \cdot 0,1^n}}$$

14. (20 point) Betragt følgende 1. ordens Bessel lavpasfilter (frekvensnormeret filter)

$$H(s) = \frac{1}{s+1}. \quad (4)$$

(a) (5 point) Transformer Bessel lavpasfiltret til et frekvensnormeret båndpasfilter med frekvensnormeret pasbåndsbredde $W_a = 0,1$.

$$H_{bp}(s) = H_p(\tilde{s}) \Big|_{\tilde{s} = \frac{1}{W_a} \left(\frac{s+1}{s} \right)} = \frac{1}{\frac{1}{0,1} \cdot \left(\frac{s+1}{s} \right) + 1} = \frac{1}{10 \cdot \frac{s+1}{s} + 1} = \frac{1}{10 + 10s + 1} = \frac{1}{11 + 10s}$$

(b) (15 point) Benyt $H(s)$ fra (4) til at designe et digitalt lavpasfilter $H(z)$ ved brug af bilinear z -transformation. Det digitale lavpasfilter skal have en afskæringsfrekvens på 2 kHz og samplefrekvensen er 20 kHz.

$$f_a = 2000 \quad f_s = 20000 \quad H(s) = \frac{1}{s+1}$$

$$W_a = 4000\pi \quad T = 20000^{-1}$$

Finder prewarping konstanten

$$C = \cot\left(\frac{W_a T}{2}\right) = \cot\left(\frac{4000\pi \cdot 20000^{-1}}{2}\right) = \cot\left(\frac{\pi}{10}\right) \approx 3,078$$

Transformer

$$\begin{aligned} H(z) &= H(s) \Big|_{s = C \cdot \frac{z-1}{z+1}} = \frac{1}{C \cdot \frac{z-1}{z+1} + 1} = \frac{z+1}{C \cdot (z-1) + (z+1)} = \frac{z+1}{Cz - C + z + 1} \\ &= \frac{z+1}{Cz + z + 1 - C} = \frac{z+1}{3,078z + z + 1 + 3,078} = \frac{z+1}{4,078z + 4,078} \end{aligned}$$

15. (15 point) Bestem filterkoefficienterne for et FIR båndpasfilter med et rektangulært-vindue. Båndstopfiltret skal have en afskæringsfrekvenser $f_{a1} = 1$ kHz og $f_{a2} = 5$ kHz samt samplefrekvens 50 kHz. Filtret skal have 3 samples.

$$T = \frac{1}{50000}, M = 1$$

$$C_0 = 2T(f_{a2} - f_{a1}) = 25000^{-1} \cdot (5000 - 1000) = 25000^{-1} \cdot 4000 = \frac{4}{25} = 0,16$$

$$C_m = C_{-m} = \frac{1}{m\pi} (\sin(2\pi m T f_{a2}) - \sin(2\pi m T f_{a1}))$$

$$\begin{aligned} C_1 = C_{-1} &= \frac{1}{\pi} \cdot (\sin(2\pi \cdot 50000^{-1} \cdot 5000) - \sin(2\pi \cdot 50000^{-1} \cdot 1000)) \\ &= \frac{1}{\pi} \cdot \left(\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{25}\right) \right) \approx 0,147 \end{aligned}$$

Med et rektangulært vindue behøver vi ikke gange noget på konstanterne

$$C'_m = C_m$$

Filterkonstanter

$$a_i = C'_{M-i}$$

$$a_0 = C_1 = 0,147$$

$$a_1 = C_0 = 0,16$$

$$a_2 = C_{-1} = 0,147$$

Opskriver overføringsfunktion

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{i=0}^{2M} a_i \cdot z^{-i} = \sum_{i=0}^2 a_i \cdot z^{-i} \\ &= a_0 \cdot z^0 + a_1 \cdot z^{-1} + a_2 \cdot z^{-2} \\ &= 0,147 + 0,16z^{-1} + 0,147z^{-2} \end{aligned}$$
