

Signalbehandling: Eksamen Test

1. (3 point) Er følgende diskrete overføringsfunktion stabil?

$$G(z) = \frac{z + 2}{(z - 0.9)(z + 0.2)}$$

- ☒ Ja
☐ Nej

Begge poler er ingen for enhedscirklen

2. (3 point) Hvilket af følgende signaler kan rekonstrueres fuldstændigt ud fra sampling ved 10 Hz?

- ☐ $x(t) = \cos(2\pi \cdot \underline{6}t + 2) + \sin(2\pi \cdot 2t + 4)$
☐ $x(t) = \cos(2\pi \cdot \underline{6}t + 6) + \cos(2\pi \cdot 4t)$
☒ $x(t) = \cos(2\pi \cdot \underline{4}t + 8) + \cos(2\pi \cdot 2t + 10)$
☐ $x(t) = \sin(2\pi \cdot \underline{7}t)$

$$\sin(\omega t) = \sin(2\pi f t)$$

Sampling frekvensen skal være mindst dobbelt så høj som den højeste frekvens-komponent.

3. (3 point) Et IIR-filter med lineær fase ønskes designet. Hvilken af følgende filterfunktioner opfylder bedst dette ønske

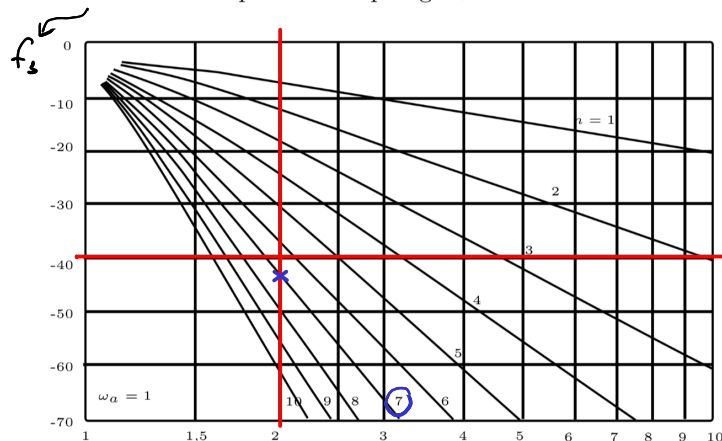
- ☒ Bessel
☐ Butterworth
☐ Chebyshev

4. (3 point) Hvor mange poler og nulpunkter har følgende diskrete overføringsfunktion

$$G(z) = \frac{z^3 + 5z + 1}{z^6 + 3z^5 + 7z^3 + 2z + 9}$$

- Antal poler: **6**
- Antal nulpunkter: **3**

5. (3 point) Benyt Figur 1 til at bestemme filterordenen for et lavpasfilter med afskæringsfrekvens 2 kHz og stopbåndsfrekvens 4 kHz med stopbåndsdæmpning større end 40 dB.



$$\frac{f_s}{f_a} = 2$$

Figure 1: Amplitudekarakteristik for frekvensnormeret Butterworth lavpasfilter.

- Filterordenen skal være: **7**

6. (3 point) Betragt følgende differensligning

$$y_n - \frac{1}{2}y_{n-1} = x_n + x_{n-1}$$

Hvilken af følgende overføringsfunktioner er en z -transformation af (1)?

☒ Overføringsfunktion $G_1(z)$

$$G_1(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z+1}{z-0.5}$$

☐ Overføringsfunktion $G_2(z)$

$$G_2(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z+1}{-0.5z+1}$$

$$\Rightarrow Y(z) - \frac{1}{2} Y(z) \cdot z^{-1} = X(z) + X(z) \cdot z^{-1} \Rightarrow Y(z) \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \cdot z^{-1}\right) = X(z) \cdot (1 + z^{-1})$$

$$\Rightarrow \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1+z^{-1}}{1-\frac{1}{2} \cdot z^{-1}} = \frac{z+1}{z-0.5}$$

7. (3 point) Betragt følgende diskrete overføringsfunktion

$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z}{z^2 + 2z + 3}$$

Hvilken af følgende differensligninger svarer til $G(z)$

☐ $y_k + 2y_{k-1} + 3y_{k-2} = x_{k+1}$

☒ $y_k + 2y_{k-1} + 3y_{k-2} = x_{k-1}$

☐ $3y_k + 2y_{k-1} + y_{k-2} = x_{k-1}$

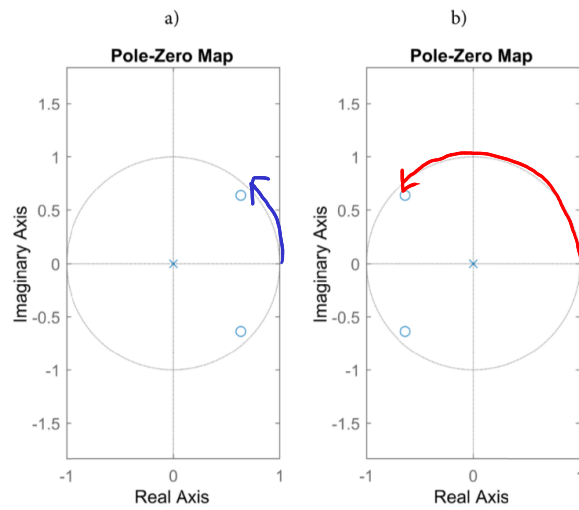
$$Y(z) + 2 Y(z) \cdot z^{-1} + 3 Y(z) \cdot z^{-2} = X(z) \cdot z^{-1}$$

$$\Rightarrow Y(z) \cdot (1 + 2 \cdot z^{-1} + 3 \cdot z^{-2}) = X(z) \cdot z^{-1}$$

$$\Rightarrow \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z}{z^2 + 2z + 3}$$

8. (3 point) Hvilket pol-nulpunkts plot i Figur 2 stemmer overens med Bode vist i Figur 3. Sampleintervallet for den diskrete overføringsfunktion er $T = 1$ s.

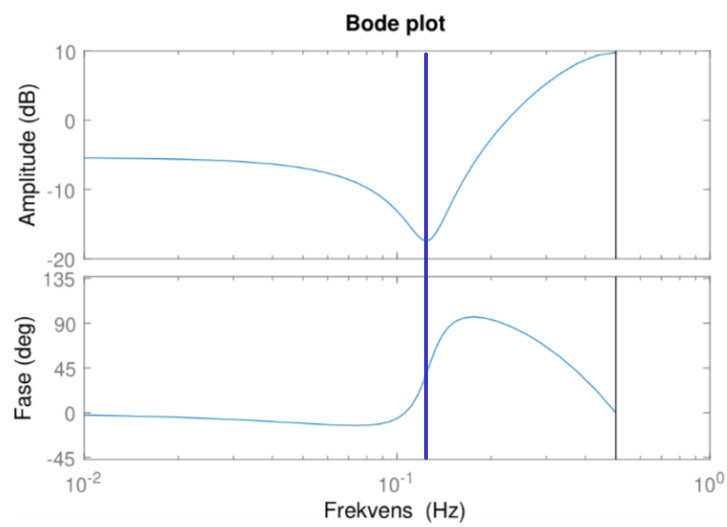
- ☒ a)
☐ b)



$$\frac{3}{4} \cdot f_0$$

$$\frac{1}{4} \cdot f_0$$

Figure 2: Pol-nulpunkts plot for diskrete overføringsfunktioner.



log scale??

Figure 3: Bode plot for diskret overføringsfunktion med sampleinterval $T = 1$ s.

9. (3 point) Et filter har impulsresponssekvensen vist i Figur 4. Hvilken af følgende klasser tilhører filtret?

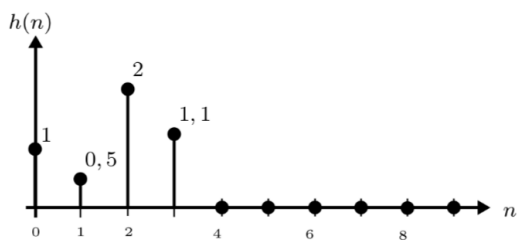


Figure 4: Impulsresponssekvens for filter.

☐ IIR-filter

☒ FIR-filter

10. (3 point) Har en diskret overføringsfunktion $G(z)$ med poler og nulpunkter som vist i Figur 5 lineær fase?

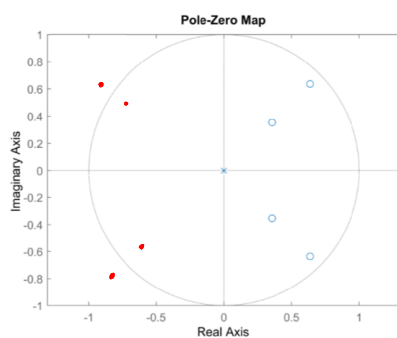


Figure 5: Pol-nulpunkts plot for overføringsfunktionen $G(z)$.

☐ Ja

☒ Nej

De skal være symmetriske omkring enhedscirklen

11. (10 point) Bestem en overføringsfunktion fra følgende differensligning. Overføringsfunktionen skal have positive eksponenter.

$$y_k + 5y_{k-1} + 2y_{k-2} = x_k - x_{k-1}$$

z-transformation

$$Y(z) + 5Y(z) \cdot z^{-1} + 2Y(z) \cdot z^{-2} = X(z) - X(z) \cdot z^{-1}$$

Isoler overføringsfunktion

$$\Rightarrow Y(z) \cdot (1 + 5z^{-1} + 2z^{-2}) = X(z) \cdot (1 - z^{-1})$$

$$\Rightarrow \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 - z^{-1}}{1 + 5z^{-1} + 2z^{-2}} \stackrel{\cdot z^2}{=} \frac{z^2 - z}{z^2 + 5z + 2}$$

$$\Rightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z^2 - z}{z^2 + 5z + 2}$$

12. (20 point) Find impulsresponssekvensen for følgende diskrete overføringsfunktion

$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - 0,75z^{-1} + 0,125z^{-2}}$$

$$G(z) = \frac{z^2}{z^2 - 0,75z + 0,125}$$

Factor

$$= \frac{z^2}{(z - 0,25)(z - 0,5)} = \overset{G_1}{\frac{z}{z - 0,25}} \cdot \overset{G_2}{\frac{z}{z - 0,5}}$$

Inverse z-transformation

$$Z^{-1}\{G(z)\} = Z^{-1}\left\{\frac{z}{z - 0,25}\right\} \cdot Z^{-1}\left\{\frac{z}{z - 0,5}\right\} \quad \begin{array}{l} \nearrow \text{table lookup!} \\ \frac{z}{z-a} \Rightarrow a^n \end{array}$$

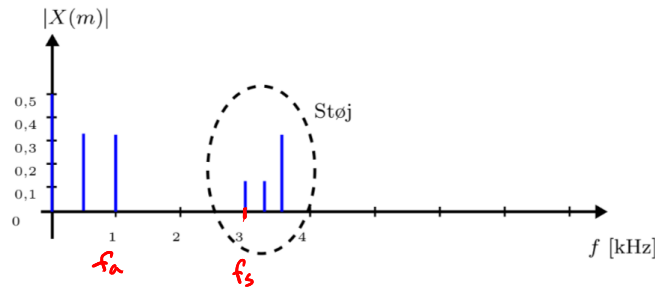
$$\underline{\underline{g(n) = 0,25^n \cdot 0,5^n}}$$

Butterworth

13. (15 point) I følgende spørgsmål ønskes et IIR-filter designet med fladest mulig pasbånd.

- (a) (3 point) Betragt frekvenskarakteristikken i Figur 6 og bestem hvilken filtertype der skal benyttes til at fjerne støjen.

Lar pas!

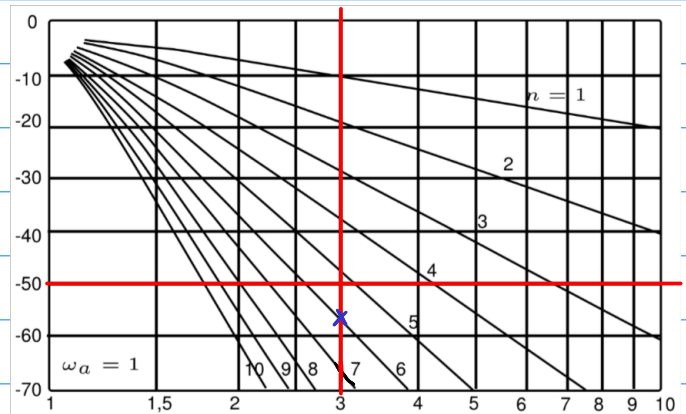


- (b) (12 point) Bestem filterordenen for det identificerede filter samt afskæringsfrekvens og stopbåndsfrekvens.

$$f_s = 3 \text{ kHz}, f_a = 1 \text{ kHz}$$

$$\frac{f_s}{f_a} = 3$$

Vi antages en ønsket dæmpning på -50 dB



$$\Rightarrow N = 6$$

14. (25 point) Bestem filterkoefficienterne for et FIR lavpasfilter med Hamming-vindue. Besvar følgende underspørgsmål.

(a) (15 point) Bestem filterkoefficienterne for et FIR lavpasfilter med afskæringsfrekvens $f_a = 1$ kHz og samplefrekvens 5 kHz. Filtret skal have 5 samples.

(b) (10 point) Bestem filtrets koefficienter når et Hamming-vindue anvendes.

Specifikation

$$f_a = 1 \text{ kHz}, f_s = 5 \text{ kHz} \Rightarrow T = \frac{1}{5000}, N = 5 \Rightarrow M = 2$$

1. Bestem Vinduesfunktion: Hamming

2. Bestem ordenstal: 5

3. Beregn filterkoefficienter

$$C_0 = 2Tf_a = 2 \cdot \frac{1}{5000} \cdot 1000 = 2 \cdot \frac{1}{5} = \frac{2}{5} = 0,4$$

$$C_1 = C_{-1} = \frac{1}{M\pi} \cdot \sin(2\pi M T f_a) = \frac{1}{1 \cdot \pi} \cdot \sin\left(2\pi \cdot 1 \cdot \frac{1}{5000} \cdot 1000\right) = \frac{1}{\pi} \cdot \sin\left(2\pi \cdot \frac{1}{5}\right) \approx 0,3027$$

$$C_2 = C_{-2} = \frac{1}{M\pi} \cdot \sin(2\pi M T f_a) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sin\left(2\pi \cdot 2 \cdot \frac{1}{5000} \cdot 1000\right) = \frac{1}{2\pi} \cdot \sin\left(2\pi \cdot \frac{2}{5}\right) \approx 0,0935$$

$$a_0 = C_{-2} = 0,0935$$

$$a_1 = C_{-1} = 0,3027$$

$$a_2 = C_0 = 0,4$$

$$a_3 = C_1 = 0,3027$$

$$a_4 = C_2 = 0,0935$$

Hamming window function

$$\alpha = 0,54$$

$$W(n) = \alpha \cdot (1 - \alpha) \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{M}\right)$$

$$w_0 = W(0) = \alpha \cdot (1 - \alpha) \cdot \cos(0) = \alpha \cdot (1 - \alpha) \cdot 1 \approx 0,2484$$

$$w_1 = W(1) = \alpha \cdot (1 - \alpha) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \alpha \cdot (1 - \alpha) \cdot 0 = 0$$

$$w_2 = W(2) = \alpha \cdot (1 - \alpha) \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{2}\right) = \alpha \cdot (1 - \alpha) \cdot (-1) \approx -0,2484$$

Windowing constants

$$C'_0 = C_0 \cdot w_0 = 0,4 \cdot 0,2484 \approx 0,9936$$

$$C'_1 = C'_1 = C_1 \cdot w_1 = 0,3027 \cdot 0 = 0$$

$$C'_2 = C'_2 = C_2 \cdot w_2 = 0,0935 \cdot (-0,2484) \approx -0,0232$$

$$a_0 = C'_2 = -0,0232$$

$$a_1 = C'_{-1} = 0$$

$$a_2 = C'_0 = 0,9936$$

$$a_3 = C'_1 = 0$$

$$a_4 = C'_2 = -0,0232$$
