Lektion 3: Introduktion til FFT

Signalbehandling

Christoffer Sloth

chsl@mmmi.sdu.dk

SDU Robotics
The Maersk Mc-Kinney Moller Institute
University of Southern Denmark

Agenda

Introduktion

Diskret Fouriertransformation

Fast Fourier Transformation

Opsummering

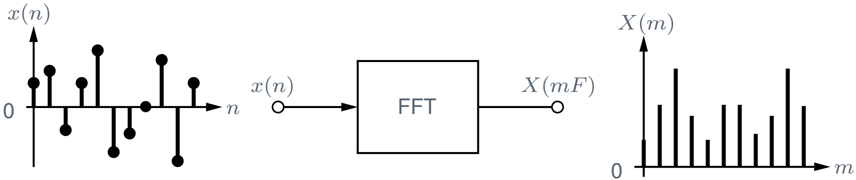
Datakonvertering og digital signalbehandling herunder:[1]

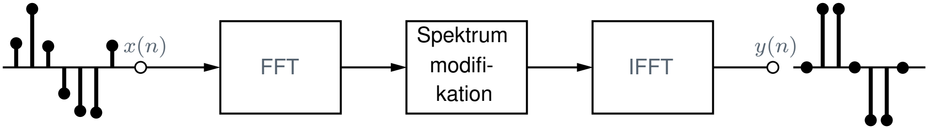
- ideel og praktisk sampling og rekonstruktion
- aliasing
- kvantisering og dynamikområde
- konverteringsprincipper (A/D og D/A)
- implementationsprincipper (Sample & Hold, A/D, D/A)
- multirate sampling
- diskret-tid signaler og systemer i tids- og frekvensdomænet
- Z-transformationen
- overføringsfunktion for lineære tidsinvariante systemer
- systemanalyse
- frekvensanalyse
- lineær fase systemer
- realisationsstrukturer for diskret-tid systemer
- hovedanvendelse af digital signalbehandling herunder digitale IIR-filtre og transformation af analoge filtre samt digitale FIR-filtre og vindues-funktioner

[1] Baseret på https://odin.sdu.dk/sitecore/index.php?a=fagbesk&id=65003&listid=9093&lang=da

- **Lektion 1**: Filterfunktioner
- **Lektion 2**: Sampling og rekonstruktion
- **Lektion 3**: Fast Fourier transformation (I)
- **Lektion 4**: Fast Fourier transformation (II)
- **Lektion 5**: Introduktion til z-transformation
- **Lektion 6**: Systemanalyse i z-domæne
- **Lektion 7**: Digitale realisationsstrukturer
- **Lektion 8**: Introduktion til IIR-filtre
- **Lektion 9**: Design af IIR-filtre
- **Lektion 10**: Introduktion til FIR-filtre
- **Lektion 11**: Design af FIR-filtre
- **Lektion 12**: Anvendelse af digital signalbehandling

Før et filter designes skal signaler analyseres for at opstille en filterspecifikation.





Introduktion

Diskret Fouriertransformation

Fast Fourier Transformation

Opsummering

Givet et signal $x(t)$, så er den *Fouriertransformerede* af $x(t)$ givet som

$$X(f) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

Givet et signal $x(t)$, så er den *Fouriertransformerede* af $x(t)$ givet som

$$X(f) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt$$

Signalet $x(t)$ kan ligeledes findes ud fra spektrumfunktionen $X(f)$ ved *invers Fouriertransformation*

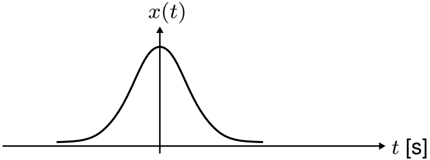
$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(f)\} = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft}df$$

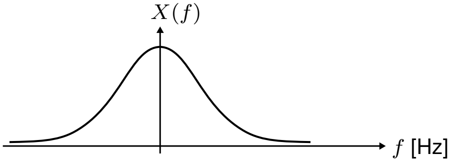
Givet et signal $x(t)$, så er den *Fouriertransformerede* af $x(t)$ givet som

$$X(f) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi f t}dt$$

Signalet $x(t)$ kan ligeledes findes ud fra spektrumfunktionen $X(f)$ ved *invers Fouriertransformation*

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(f)\} = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi f t}df$$





For at udregne spektrumfunktionen $X(f)$ ved brug af

$$X(f) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt$$

skal der gøres følgende

- Udregne ovenstående ligning kontinuert for værdier af f fra $f = -\infty$ til $f = \infty$
- Integreres over t fra $t = -\infty$ til $t = \infty$

Diskret Fouriertransformation

Udregning af spektrumfunktion (II)

For at løse udfordringerne ved udregning af spektrumfunktionen $X(f)$, så diskretiseres frekvensområdet, dvs.

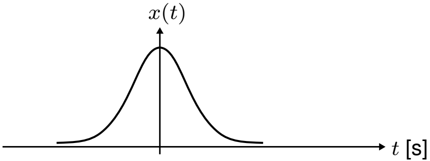
$$X(mF) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi mFt} dt$$

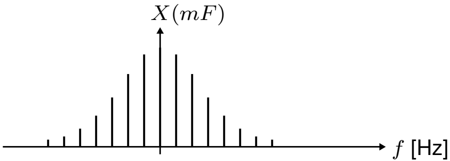
hvor m er et heltal og F er afstanden mellem frekvenser [Hz].

For at løse udfordringerne ved udregning af spektrumfunktionen $X(f)$, så diskretiseres frekvensområdet, dvs.

$$X(mF) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi mFt} dt$$

hvor m er et heltal og F er afstanden mellem frekvenser [Hz].





Diskret Fouriertransformation
Udregning af spektrumfunktion (III)

For at eliminere integrationen over tid, så samples signalet $x(t)e^{-j2\pi mFt}$ med sampleintervallet T og integralet bestemmes numerisk som

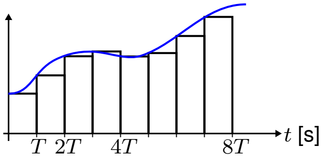
$$X(mF) = T \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)e^{-j2\pi mFnT}$$

hvor m er et heltal og F er afstanden mellem frekvenser [Hz].

For at eliminere integrationen over tid, så samples signalet $x(t)e^{-j2\pi mFt}$ med sampleintervallet T og integralet bestemmes numerisk som

$$X(mF) = T \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)e^{-j2\pi mFnT}$$

hvor m er et heltal og F er afstanden mellem frekvenser [Hz].

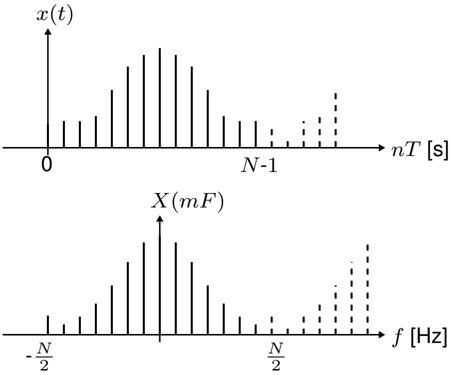


Fra tidligere lektioner vides det at spektrumfunktionen af et samplet signal er periodisk. Vi udregner derfor N frekvenser i det periodiske spektrum $X(mF)$.

Diskret Fouriertransformation

Periodicitet af frekvens spektrum

Fra tidligere lektioner vides det at spektrumfunktionen af et samplet signal er periodisk. Vi udregner derfor N frekvenser i det periodiske spektrum $X(mF)$.



Perioden for $X(mF)$ er $P = f_s = NF$.

Sekvensen $x(nT)$ afskæres til at have N samples. Dermed haves for $0 \leq m < N$

$$X(mF) = T \sum_{n=0}^{N-1} x(nT) e^{-j2\pi mFnT}$$

Sekvensen $x(nT)$ afskæres til at have N samples. Dermed haves for $0 \leq m < N$

$$X(mF) = T\sum_{n=0}^{N-1} x(nT)e^{-j2\pi mFnT}$$

som kan forkortes til ($FT = 1/N$)

$$X(mF) = T\sum_{n=0}^{N-1} x(nT)e^{-j2\pi mn/N}$$

Fra

$$X(mF) = T \sum_{n=0}^{N-1} x(nT) e^{-j2\pi mn/N}$$

findes det endelige DFT udtryk, hvor T fjernes da det kun er en skalering

$$X(m) := \sum_{n=0}^{N-1} x(nT) e^{-j2\pi mn/N}$$

Fra

$$X(mF) = T \sum_{n=0}^{N-1} x(nT) e^{-j2\pi mn/N}$$

findes det endelige DFT udtryk, hvor T fjernes da det kun er en skalering

$$X(m) := \sum_{n=0}^{N-1} x(nT) e^{-j2\pi mn/N}$$

Da $X(m)$ er et komplekst tal kan det skrives

$$X(m) := \sum_{n=0}^{N-1} x(nT) \cos(2\pi mn/N) - j \sum_{n=0}^{N-1} x(nT) \sin(2\pi mn/N)$$

Det er også interessant at udregne sekvensen $x(n)$ på baggrund af spektrumfunktionen $X(f)$. Dette kan gøres med invers diskret Fouriertransformation (IDFT) som (for $n = 0, 1, \ldots, N-1$)

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X(m) e^{j2\pi mn/N}$$

Det skal bemærkes at både $X(m)$ og $x(n)$ er periodiske, dvs.

$$x(n) = x(n + kN)$$
$$X(m) = X(m + kN)$$

Det skal bemærkes at både $X(m)$ og $x(n)$ er periodiske, dvs.

$$x(n) = x(n + kN)$$
$$X(m) = X(m + kN)$$

Notation

(Invers) diskret Fouriertransformation noteres ofte som

$$X(m) = \mathcal{D}\{x(n)\}$$
$$x(n) = \mathcal{D}^{-1}\{X(m)\}$$

Følgende transformationspar for en N-punkts DFT kan anvendes.

Lad $x(n)$ være en sekvens samplet med sampleintervallet T, så er en N-punkts DFT af $x(n)$ givet som

$$X(m) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{mn}$$

for $m = 0, 1, \ldots, N-1$ og $W_N = e^{-j2\pi/N}$.
Sekvensen $x(n)$ kan findes fra spektrumfunktionen $X(m)$ som

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X(m) W_N^{-mn}$$

for $n = 0, 1, \ldots, N-1$.

Alternativt kan følgende transformationspar for en N-punkts DFT kan anvendes.

Lad $x(n)$ være en sekvens samplet med sampleintervallet T, så er en N-punkts DFT af $x(n)$ givet som

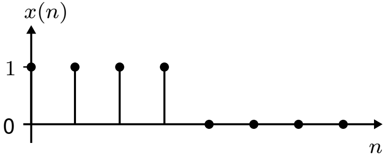
$$X(m) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{mn}$$

for $m = 0, 1, \ldots, N-1$ og $W_N = e^{-j2\pi/N}$.
Sekvensen $x(n)$ kan findes fra spektrumfunktionen $X(m)$ som

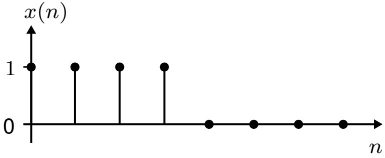
$$x(n) = \sum_{m=0}^{N-1} X(m) W_N^{-mn}$$

for $n = 0, 1, \ldots, N-1$.

Betragt følgende firkantsekvens $x(n)$.



Betragt følgende firkantsekvens $x(n)$.



I det følgende udregnes spektrumfunktionen fra

$$X(m) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{mn}$$

Diskret Fouriertransformation
Eksempel (II)

Da $N = 8$ fås

$$X(m) = \frac{1}{8}\sum_{n=0}^{7} x(n)W_8^{mn}$$

hvor

$$W_8 = e^{-j2\pi/8} = \cos(\pi/4) - j\sin(\pi/4)$$

Da $N = 8$ fås

$$X(m) = \frac{1}{8}\sum_{n=0}^{7} x(n) W_8^{mn}$$

hvor

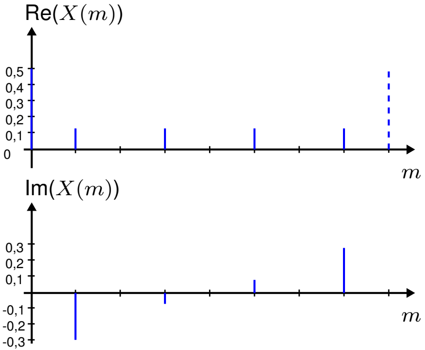
$$W_8 = e^{-j2\pi/8} = \cos(\pi/4) - j\sin(\pi/4)$$

Dermed bliver spektrumfunktionen

$$X(m) = \frac{1}{8}\sum_{n=0}^{7} x(n)\left(\cos(mn\pi/4) - j\sin(mn\pi/4)\right)$$

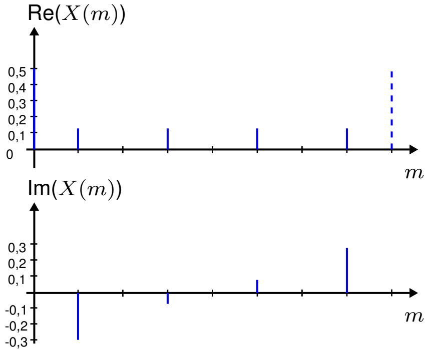
for $m = 0, 1, \ldots, 7$.

Ved udregning af spektrumfunktionen $X(m)$ fås følgende.



Diskret Fouriertransformation
Eksempel (III)

Ved udregning af spektrumfunktionen $X(m)$ fås følgende.



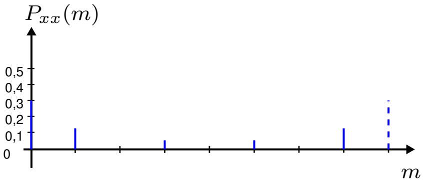
Nu kan amplitude og fase udregnes fra

$$|X(m)| = \sqrt{[\mathtt{Re}(X(m))]^2 + [\mathtt{Im}(X(m))]^2} \qquad \text{og} \qquad \angle X(m) = \tan^{-1}\left(\frac{\mathtt{Im}(X(m))}{\mathtt{Re}(X(m))}\right)$$

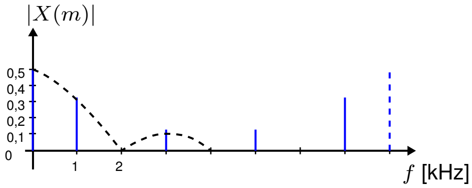
Ofte er vi kun interesserede i power spektrum for et signal

$$P_{xx}(m) = [\mathtt{Re}(X(m))]^2 + [\mathtt{Im}(X(m))]^2$$

da der kun ønskes information om hvilke frekvenser der indgår i $x(n)$.

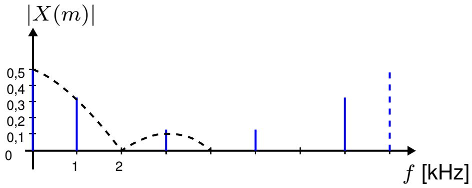


Hvis sekvensen $x(n)$ er opnået ved en samplefrekvens på 8 kHz, så er $F = 1$ kHz.



Diskret Fouriertransformation
Eksempel (V)

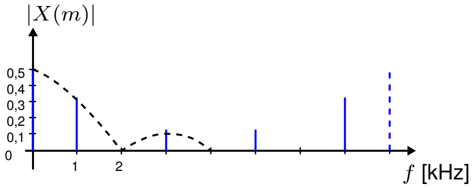
Hvis sekvensen $x(n)$ er opnået ved en samplefrekvens på 8 kHz, så er $F = 1$ kHz.



Det ses at det kontinuerte spektrum og det diskrete spektrum er forskellige ved $f = 3$ kHz. Dette skyldes aliaseringsfejl, da signalet $x(t)$ ikke er blevet filtreret inden sampling.

Diskret Fouriertransformation
Eksempel (V)

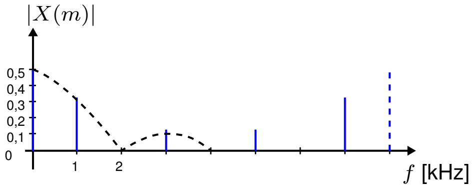
Hvis sekvensen $x(n)$ er opnået ved en samplefrekvens på 8 kHz, så er $F = 1$ kHz.



Det ses at det kontinuerte spektrum og det diskrete spektrum er forskellige ved $f = 3$ kHz.
Dette skyldes aliaseringsfejl, da signalet $x(t)$ ikke er blevet filtreret inden sampling.

For at undgå aliasering skal $x(t)$ lavpasfiltreres inden sampling.

Hvis sekvensen $x(n)$ er opnået ved en samplefrekvens på 8 kHz, så er $F = 1$ kHz.



Det ses at det kontinuerte spektrum og det diskrete spektrum er forskellige ved $f = 3$ kHz. Dette skyldes aliaseringsfejl, da signalet $x(t)$ ikke er blevet filtreret inden sampling.

For at undgå aliasering skal $x(t)$ lavpasfiltreres inden sampling.

Aliaseringsfejlen kan desuden reduceres ved at sample signalet ved en højere frekvens.

Fast Fourier Transformation
Motivation

Udregnes en diskret Fouriertransformation ved direkte brug af formlerne fra tidligere slides, så skal der anvendes N^2 komplekse multiplikationer og additioner.

Ved brug af Fast Fourier Transformation (FFT) algoritmen, så skal der kun anvendes $N/2\log_2(N)$ komplekse multiplikationer og additioner.

Udregnes en diskret Fouriertransformation ved direkte brug af formlerne fra tidligere slides, så skal der anvendes N^2 komplekse multiplikationer og additioner.

Ved brug af Fast Fourier Transformation (FFT) algoritmen, så skal der kun anvendes $N/2\log_2(N)$ komplekse multiplikationer og additioner.

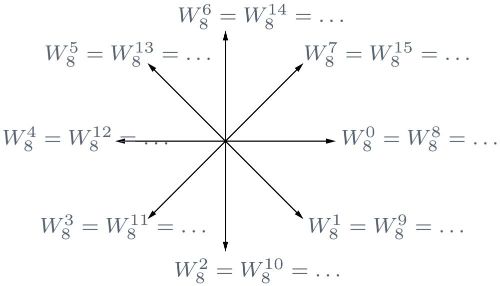
Der er to hovedkategorier af FFT algoritmer

- **Decimation In Time**: Tidsdecimering forkortet DIT
- **Decimation In Frequency**: frekvensdecimering forkortet DIF

Vi kigger kun på Radix 2 DIT-algoritmen.

Fast Fourier Transformation
Periodicitet af koefficienter

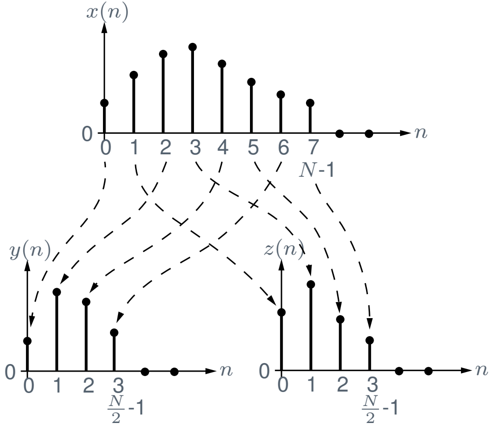
Hovedårsagen til at FFT algoritmen har lavere beregningskompleksitet er at periodiciteten af den komplekse eksponentialfunktion udnyttes til beregning af W-koefficienterne. I følgende figure er $N = 8$.



Koefficienterne er givet som

$$W_N = e^{-j2\pi/N}$$

Først opsplittes N-punkts DFTen i to $N/2$-punkts DFTer - en med lige samples og en med de ulige samples.



Efter opsplitning kan DFTen skrives

$$X(m) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{mn} = \sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n) W_N^{m2n} + \sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n+1) W_N^{m(2n+1)}$$

Efter opsplitning kan DFTen skrives

$$X(m) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{mn} = \sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n)W_N^{m2n} + \sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n+1)W_N^{m(2n+1)}$$

Dette kan omskrives til

$$X(m) = \sum_{n=0}^{N/2-1} y(n)W_{N/2}^{mn} + W_N^m \sum_{n=0}^{N/2-1} z(n)W_{N/2}^{mn}$$

hvor

$$y(n) = x(2n) \qquad \text{og} \qquad z(n) = x(2n+1)$$

Efter opsplitning kan DFTen skrives

$$X(m) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{mn} = \sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n)W_N^{m2n} + \sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n+1)W_N^{m(2n+1)}$$

Dette kan omskrives til

$$X(m) = \sum_{n=0}^{N/2-1} y(n)W_{N/2}^{mn} + W_N^m \sum_{n=0}^{N/2-1} z(n)W_{N/2}^{mn}$$

hvor

$$y(n) = x(2n) \qquad \text{og} \qquad z(n) = x(2n+1)$$

Samtidig ses det at

$$W_N^2 = e^{2(-j2\pi/N)} = e^{-j2\pi/(N/2)} = W_{N/2}$$

Dette medfører at

$$W_N^{m2n+1} = W_N^{m2n+m} = W_N^m W_{N/2}^{mn}$$

Fra spektrumfunktionen

$$X(m) = \sum_{n=0}^{N/2-1} y(n) W_{N/2}^{mn} + W_N^m \sum_{n=0}^{N/2-1} z(n) W_{N/2}^{mn}$$

ses det at

$$X(m) = Y(m) + W_N^m Z(m)$$

hvor

$$Y(m) = \mathcal{D}(y(n)) \qquad \text{og} \qquad Z(m) = \mathcal{D}(z(n))$$

Fra spektrumfunktionen

$$X(m) = \sum_{n=0}^{N/2-1} y(n) W_{N/2}^{mn} + W_N^m \sum_{n=0}^{N/2-1} z(n) W_{N/2}^{mn}$$

ses det at

$$X(m) = Y(m) + W_N^m Z(m)$$

hvor

$$Y(m) = \mathcal{D}(y(n)) \qquad \text{og} \qquad Z(m) = \mathcal{D}(z(n))$$

Dette reducerer antallet af komplekse multiplikationer til

$$\left(\frac{N}{2}\right)^2 + N$$

hvilket er lavere end de oprindelige N^2 komplekse multiplikationer.

De to $N/2$-punkts DFTer er også periodiske, dvs.

$$Y(m) = Y(m + N/2) \qquad \text{og} \qquad Z(m) = Z(m + N/2)$$

De to $N/2$-punkts DFTer er også periodiske, dvs.

$$Y(m) = Y(m + N/2) \qquad \text{og} \qquad Z(m) = Z(m + N/2)$$

Ved at udnytte periodiciteten kan vi udregne spektrumværdier for $m = N/2, N/2 + 1, \ldots, N - 1$ som

$$X(m + N/2) = Y(m + N/2) + W_N^{m+N/2} Z(m + N/2)$$

hvilket kan reduceres til

$$X(m + N/2) = Y(m + N/2) - W_N^{m} Z(m + N/2)$$

da $W_N^{N/2} = -1$.

Ved brug af de præsenterede forkortelser fås

$$\begin{cases} X(m) = Y(m) + W_N^m Z(m + N/2) \\ X(m + N/2) = Y(m) - W_N^m Z(m + N/2) \end{cases}$$

for $m = 0, 1, \ldots, N/2 - 1$.

Ovenstående ligninger løses i en såkaldt FFT butterfly.

Opsummering

Lad $x(n)$ være en sekvens samplet med sampleintervallet T, så er en N-punkts DFT af $x(n)$ givet som

$$X(m) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{mn}$$

for $m = 0, 1, \ldots, N-1$ og $W_N = e^{-j2\pi/N}$.
Sekvensen $x(n)$ kan findes fra spektrumfunktionen $X(m)$ som

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X(m) W_N^{-mn}$$

for $n = 0, 1, \ldots, N-1$.

Lad $x(n)$ være en sekvens samplet med sampleintervallet T, så er en N-punkts DFT af $x(n)$ givet som

$$X(m) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{mn}$$

for $m = 0, 1, \ldots, N-1$ og $W_N = e^{-j2\pi/N}$.
Sekvensen $x(n)$ kan findes fra spektrumfunktionen $X(m)$ som

$$x(n) = \sum_{m=0}^{N-1} X(m) W_N^{-mn}$$

for $n = 0, 1, \ldots, N-1$.

Fast Fourier Transformation (FFT) er en algoritme til udregning af en diskret Fouriertransformation (DFT). Algoritmen reducerer antallet af komplekse multiplikationer og additioner fra cirka N^2 til cirka $N/2\log_2(N)$.

Fast Fourier Transformation (FFT) er en algoritme til udregning af en diskret Fouriertransformation (DFT). Algoritmen reducerer antallet af komplekse multiplikationer og additioner fra cirka N^2 til cirka $N/2\log_2(N)$.

Der er to hovedkategorier af FFT algoritmer

- **Decimation In Time**: Tidsdecimering forkortet DIT
- **Decimation In Frequency**: frekvensdecimering forkortet DIF