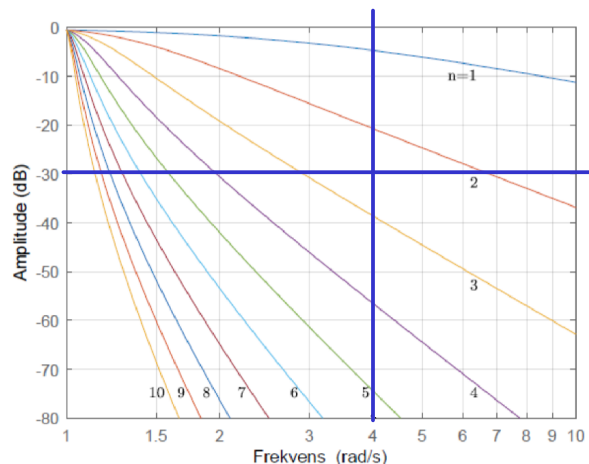


1. (3 point) Et anti-aliaseringsfilter ønskes designet med mindst mulig filterorden, så en stopbåndsdæmpning på 50 dB opnås. Hvilket af følgende filtre opfylder dette ønske?

- ☐ Bessel lavpasfilter
☒ Chebyshev lavpasfilter
☐ Bessel højpasfilter
☐ Chebyshev højpasfilter

2. (3 point) Benyt Figur 1 til at bestemme filterordenen for et analog højpasfilter med afskæringsfrekvens 1000 Hz og stopbåndsfrekvens 250 Hz med stopbåndsdæmpning større end 30 dB.

- Filterordenen skal være:



$$\frac{1000}{250} = 4$$

$$N=3$$

Figure 1: Amplitudekarakteristik for frekvensnormeret 0,5 dB Chebyshev lavpasfilter.

3. (3 point) Er følgende diskrete overføringsfunktion stabil?

$$G(z) = \frac{(z + 0,2)(z - 0,2)}{(z + 0,5)(z - 1,1)}$$

- ☐ Ja
☒ Nej

4. (3 point) Hvor mange poler og nulpunkter har følgende diskrete overføringsfunktion

$$G(z) = \frac{z^2 - 3}{z^3 + 2z}$$

- Antal poler: 3
- Antal nulpunkter: 2

5. (3 point) Hvilke af følgende samplefrekvenser kan benyttes til fuldstændig rekonstruktion af signalet $x(t)$?

$$x(t) = \cos(6\pi \cdot t + 2) + \sin(5\pi \cdot t + 4)$$

$$\downarrow$$

$$3\text{ Hz}$$

$$\frac{5}{2}\text{ Hz}$$

- ☐ $f_s = 1\text{ Hz}$
☐ $f_s = 2\text{ Hz}$
☐ $f_s = 3\text{ Hz}$
☒ $f_s = 10\text{ Hz}$

6. (3 point) Betragt følgende differensligning

$$2y(n) + 3y(n-2) = 3x(n) + 2x(n-2)$$

Hvilken af følgende overføringsfunktioner er en z -transformation af (1)?

☐ $G_1(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{2+3z^{-2}}{3+2z^{-2}}$

☐ $G_2(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{3+2z^{-1}}{2+3z^{-1}}$

☒ $G_3(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{3z^2+2}{2z^2+3}$

$$2 \cdot Y(z) + 3 Y(z) \cdot z^{-2} = 3 \cdot X(z) + 2 \cdot X(z) \cdot z^{-2}$$

$$\Rightarrow Y(z) \cdot (2 + 3z^{-2}) = X(z) \cdot (3 + 2z^{-2})$$

$$\Rightarrow \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{3 + 2z^{-2}}{2 + 3z^{-2}} = \frac{3z^2 + 2}{2z^2 + 3}$$

7. (3 point) Betragt følgende diskrete overføringsfunktion

$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z^2 - 1}{(z - 0,2)(z + 0,9)}$$

- Hvor ligger nulpunktet/nulpunkterne for $G(z)$? $z = \{-1, 1\}$
- Hvor ligger polen/polerne for $G(z)$? $z = \{0,2, -0,9\}$

$$z = \{0,2, -0,9\}$$

8. (3 point) Betragt følgende diskrete overføringsfunktion

$$\omega = 0, \quad z = 1$$

$$G(z) = \frac{z}{(z - 0,5)(z + 0,5)}$$

- Hvad er DC-forstærkningen for $G(z)$?

$$G(1) = \frac{1}{(1-0,5)(1+0,5)} = \frac{1}{(0,5)(1,5)} = \frac{1}{0,75} = 1,3\overline{3}$$

9. (3 point) Betragt følgende diskrete overføringsfunktion

$$G(z) = \frac{z}{(z - 0,5)(z + 0,5)}$$

- Hvad er filtrets forstærkning $|G(z)|$ ved en frekvens på 1 Hz, når samplefrekvensen for filtret er 2 Hz?

$$z = e^{j\omega T}, \quad T = \frac{1}{2}, \quad \omega = 2\pi f = 2\pi$$

$$z = e^{j \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{2}} = e^{j\pi}$$

$$G(e^{j\pi}) = \frac{e^{j\pi}}{(e^{j\pi} - 0,5)(e^{j\pi} + 0,5)} = \frac{e^{j\pi}}{e^{2j\pi} - 0,25} = \frac{-1}{1 - 0,25} = \frac{-1}{\frac{3}{4}} = \underline{\underline{\frac{-4}{3}}}$$

10. (3 point) Et FIR lavpasfilter ønskes designet med en stopbåndsdæmpning på 45 dB. Hvilken af følgende vinduesfunktioner kan anvendes?

- ☐ Rektangulært vindue
☐ Bartlett vindue
☒ Hamming vindue

Vindue	B_n	M_{\min}	Min. stopbåndsdæmpning	Max. pasbåndsripple
Rektangulær	2	f_s/Δ_f	20 dB	1,5 dB
Bartlett	4	$2f_s/\Delta_f$	25 dB	0,1 dB
Hamming	4	$2f_s/\Delta_f$	50 dB	0,05 dB
Hanning	4	$2f_s/\Delta_f$	45 dB	0,1 dB
Kaiser ($\beta = \pi$)	2,8	$1,4f_s/\Delta_f$	40 dB	0,2 dB
Kaiser ($\beta = 2\pi$)	4,4	$2,2f_s/\Delta_f$	65 dB	0,01 dB

11. (10 point) Betragt sekvensen

$$x(n) = \begin{cases} 10 & \text{for } n = 0 \\ 5 & \text{for } n = 1 \\ 7 & \text{for } n = 2 \\ -10 & \text{for } n = 3 \end{cases} \quad (2)$$

Udregn en 4-punkts diskret Fourier transformation (DFT) af sekvensen $x(n)$. Bestem kun $X(1)$ og $X(2)$.

$$X(m) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(nT) W_N^{mn} \quad W_N = e^{-j2\pi/N}$$

$$N = 4$$

$$W_N = e^{-j2\pi/N} \Rightarrow W_4 = e^{-j2\pi/4} = e^{-j\pi/2}$$

$$\begin{aligned}
 X(m) &= \frac{1}{4} \cdot \left(10 \cdot e^0 + 5 \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}} + 7 \cdot e^{-j\pi m} - 10 \cdot e^{-j\frac{3\pi}{2}} \right) \\
 &= \frac{1}{4} \cdot \left(10 + 5 \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}} + 7 \cdot e^{-j\pi m} - 10 \cdot e^{-j\frac{3\pi}{2}} \right)
 \end{aligned}$$

$$X(1) = \frac{1}{4} \cdot \left(10 + 5 \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}} + 7 \cdot e^{-j\pi} - 10 \cdot e^{-j\frac{3\pi}{2}} \right) = 3 - 15i$$

$$X(2) = \frac{1}{4} \cdot \left(10 + 5 \cdot e^{-j\pi} + 7 \cdot e^{-j2\pi} - 10 \cdot e^{-j3\pi} \right) = 22$$

12. (10 point) Betragt følgende differensligning

$$5y(n) + 4y(n-1) - y(n-2) = 6x(n) - 6x(n-2) \quad (3)$$

(a) (6 point) Bestem en overføringsfunktion for differensligningen (3). Overføringsfunktionen skal have positive eksponenter.

a)

$$5Y(z) + 4Y(z) \cdot z^{-1} - Y(z) \cdot z^{-2} = 6X(z) - 6X(z) \cdot z^{-2}$$

$$\Rightarrow Y(z) \cdot (5 + 4z^{-1} - z^{-2}) = X(z) \cdot (6 - 6z^{-2})$$

$$\Rightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{6 - 6z^{-2}}{5 + 4z^{-1} - z^{-2}} = \frac{6z^2 - 6}{5z^2 - 4z - 1}$$

(b) (4 point) Bestem værdierne for $y(0)$ og $y(1)$, når $y(-1) = y(-2) = 0$ og

$$x(n) = \begin{cases} 0 & \text{for } n < 0 \\ 5 & \text{for } n = 0 \\ 4 & \text{for } n = 1 \\ 7 & \text{for } n \geq 2 \end{cases}$$

$$5y(n) + 4y(n-1) - y(n-2) = 6x(n) - 6x(n-2)$$

$$\Rightarrow 5y(n) = 6x(n) - 6x(n-2) - 4y(n-1) + y(n-2)$$

$$\Rightarrow y(n) = \frac{6x(n) - 6x(n-2) - 4y(n-1) + y(n-2)}{5}$$

n	x	y
-2	0	0
-1	0	0
0	5	6
1	4	0
2	7	
3	7	
⋮	⋮	

$$y(0) = \frac{6x(0) - 6x(-2) - 4y(-1) + y(-2)}{5}$$

$$= \frac{6 \cdot (5) - 6 \cdot (0) - 4 \cdot 0 + 0}{5} = \frac{30}{5} = \underline{\underline{6}}$$

$$y(1) = \frac{6x(1) - 6x(-1) - 4y(0) + y(-1)}{5}$$

$$= \frac{6 \cdot 4 - 6 \cdot 0 - 4 \cdot 6 + 0}{5} = \frac{24 - 24}{5} = \underline{\underline{0}}$$

13. (15 point) Benyt invers z -transformation til at finde udgangssekvensen $y(n)$ for følgende diskrete overføringsfunktion, når indgangsstimulus $x(n)$ er enhedssampen $\delta(n)$.

$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{(0,2z - 0,02)(z - 0,5)}$$

$$\Rightarrow G(z) = \frac{1}{(0,2z - 0,02)(z - 0,5)}$$

Partialbrøkopløs

$$\frac{G(z)}{z} = \frac{1}{(0,2z - 0,02)(z - 0,5)} = \frac{A}{0,2z - 0,02} + \frac{B}{z - 0,5}$$

$$\Rightarrow 1 = A(z - 0,5) + B(0,2z - 0,02)$$

$$z = 0,6 \Rightarrow 1 = B(0,2 \cdot 0,6 - 0,02) \Rightarrow 1 = 0,08B \Rightarrow B = 12,5$$

$$z = 0,1 \Rightarrow 1 = A(0,1 - 0,5) \Rightarrow 1 = -0,4A \Rightarrow A = -2,5$$

Ganger z på igen

$$\Rightarrow G(z) = \frac{-2,5z}{0,2z - 0,02} + \frac{12,5z}{z - 0,5} = \frac{-2,5}{0,2} \cdot \frac{z}{z - 0,1} + 12,5 \frac{z}{z - 0,5}$$

$$= -12,5 \cdot 0,1^n + 12,5 \cdot 0,5^n = \underline{\underline{12,5(0,5^n - 0,1^n)}}$$

14. (20 point) Betragt følgende 2. ordens Bessel lavpasfilter (frekvensnormeret filter)

$$H(s) = \frac{1,6}{s^2 + 2,2s + 1,6}$$

- (a) (5 point) Transformer Bessel lavpasfiltret til et højpasfilter (frekvensnormeret filter).
 (b) (15 point) Design et digitalt højpasfilter $H(z)$ ved brug af bilinear z -transformation. Det digitale højpasfilter skal have afskæringsfrekvens på 1 kHz og samplefrekvens på 5 kHz.

$$H_{hp}(s) = H_{lp}(\bar{s}) \Big|_{\bar{s} = \frac{1}{s}}$$

$$a) H_{hp}(s) = \frac{1,6}{\left(\frac{1}{s}\right)^2 + 2,2\left(\frac{1}{s}\right) + 1,6} = \frac{1,6}{s^{-2} + 2,2s^{-1} + 1,6} = \frac{1,6s^2}{1 + 2,2s + 1,6s^2}$$

$$b) f_a = 1000, \quad f_s = 5000 \Rightarrow T = \frac{1}{5000}$$

$$\Rightarrow \omega_a = 2000\pi$$

Finder prewarping-konstanten

$$C = \cot\left(\frac{\omega_a T}{2}\right) = \cot\left(\frac{2000\pi \cdot \frac{1}{5000}}{2}\right) = \cot\left(\frac{1}{5}\pi\right) = 1,376$$

Transformerer

$$H(z) = H(s) \Big|_{s = C \cdot \frac{z-1}{z+1}} = \frac{1,6C^2 \cdot \frac{(z-1)^2}{(z+1)^2}}{1 + 2,2 \cdot C \cdot \frac{z-1}{z+1} + 1,6C^2 \cdot \frac{(z-1)^2}{(z+1)^2}}$$

15. (15 point) Bestem filterkoefficienterne for et FIR båndstopfilter uden et vindue. Båndstopfiltret skal have en afskæringsfrekvenser $f_{a1} = 1$ kHz og $f_{a2} = 2$ kHz samt samplefrekvens 10 kHz. Filtret skal have 5 samples.

$$M = 2, T = 10000^{-1}$$

$$C_0 = 1 - 2T(f_{a2} - f_{a1}) = 1 - 5000^{-1} \cdot 1000 = 1 - \frac{1}{5} = 0,8$$

$$C_m = C_{-m} = \frac{1}{m\pi} (\sin(m\pi) + \sin(2\pi mT f_{a1}) - \sin(2\pi mT f_{a2}))$$

$$C_1 = C_{-1} = \frac{1}{\pi} (\sin(\pi) + \sin(2\pi \cdot 10000^{-1} \cdot 1000) - \sin(2\pi \cdot 10000^{-1} \cdot 2000)) = -0,116$$

$$C_2 = C_{-2} = \frac{1}{2\pi} (\sin(2\pi) + \sin(2\pi \cdot 2 \cdot 10000^{-1} \cdot 1000) - \sin(2\pi \cdot 2 \cdot 10000^{-1} \cdot 2000)) = 0,058$$

$$a_i = C_{M-i} = C_{2-i}$$

$$a_0 = C_2 = 0,058$$

$$a_1 = C_1 = -0,116$$

$$a_2 = C_0 = 0,8$$

$$a_3 = C_{-1} = -0,116$$

$$a_4 = C_{-2} = 0,058$$

$$H(z) = \sum_{l=0}^{2M} a_l \cdot z^{-l} = \sum_{i=0}^4 a_i \cdot z^{-i}$$

$$\underline{\underline{H(z) = 0,058 - 0,116z^{-1} + 0,8z^{-2} - 0,116z^{-3} + 0,058z^{-4}}}$$

15. (15 point) Bestem filterkoefficienterne for et FIR båndstopfilter uden et vindue. Båndstopfiltret skal have en afskæringsfrekvenser $f_{a_1} = 1$ kHz og $f_{a_2} = 2$ kHz samt samplefrekvens 10 kHz. Filtret skal have 5 samples.

