Signalbehandling: Eksamen Test

1. (3 point) Er følgende diskrete overføringsfunktion stabil?

$$G(z) = \frac{z+2}{(z-0.9)(z+0.2)}$$

- [x] Ja
- [ ] Nej

Begge poler er ingen for enhedscirklen

2. (3 point) Hvilket af følgende signaler kan rekonstrueres fuldstændigt ud fra sampling ved 10 Hz?

- [ ] $x(t) = \cos(2\pi \cdot 6t + 2) + \sin(2\pi \cdot 2t + 4)$
- [ ] $x(t) = \cos(2\pi \cdot 6t + 6) + \cos(2\pi \cdot 4t)$
- [x] $x(t) = \cos(2\pi \cdot 4t + 8) + \cos(2\pi \cdot 2t + 10)$
- [ ] $x(t) = \sin(2\pi \cdot 7t)$

$\sin(\omega t) = \sin(2\pi f t)$

Sampling frekvensen skal være mindst dobelt så høj som den højeste frekvens-komposant.

3. (3 point) Et IIR-filter med lineær fase ønskes designet. Hvilken af følgende filterfunktioner opfylder bedst dette ønske

- [x] Bessel
- [ ] Butterworth
- [ ] Chebyshev

4. (3 point) Hvor mange poler og nulpunkter har følgende diskrete overføringsfunktion

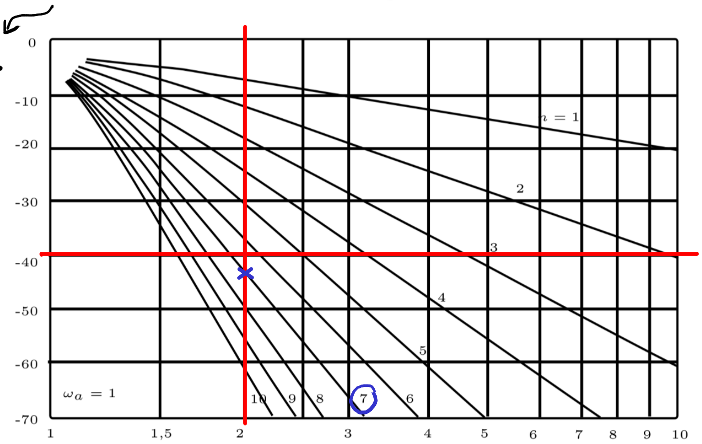
$$G(z) = \frac{z^3 + 5z + 1}{z^6 + 3z^5 + 7z^3 + 2z + 9}$$

- Antal poler: 6
- Antal nulpunkter: 3

5. (3 point) Benyt Figur 1 til at bestemme filterordenen for et lavpasfilter med afskæringsfrekvens 2 kHz og stopbåndsfrekvens 4 kHz med stopbåndsdæmpning større end 40 dB.

f_a

f_s



$\frac{f_s}{f_a} = 2$

Figure 1: Amplitudekarakteristik for frekvensnormeret Butterworth lavpasfilter.

- Filterordenen skal være: 7

6. (3 point) Betragt følgende differensligning

$$y_n - \frac{1}{2}y_{n-1} = x_n + x_{n-1}$$

Hvilken af følgende overføringsfunktioner er en z-transformation af (1)?

- [x] Overføringsfunktion $G_1(z)$

$$G_1(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z+1}{z-0.5}$$

- [ ] Overføringsfunktion $G_2(z)$

$$G_2(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z+1}{-0.5z+1}$$

$$\Rightarrow \quad Y(z) - \tfrac{1}{2} Y(z)\cdot z^{-1} = X(z) + X(z)\cdot z^{-1} \Rightarrow Y(z)\cdot\left(1-\tfrac{1}{2}\cdot z^{-1}\right) = X(z)\cdot\left(1+z^{-1}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1+z^{-1}}{1-\frac{1}{2}\cdot z^{-1}} = \frac{z+1}{z-0{,}5}$$

7. (3 point) Betragt følgende diskrete overføringsfunktion

$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z}{z^2+2z+3}$$

Hvilken af følgende differensligninger svarer til $G(z)$

- [ ] $y_k + 2y_{k-1} + 3y_{k-2} = x_{k+1}$
- [x] $y_k + 2y_{k-1} + 3y_{k-2} = x_{k-1}$
- [ ] $3y_k + 2y_{k-1} + y_{k-2} = x_{k-1}$

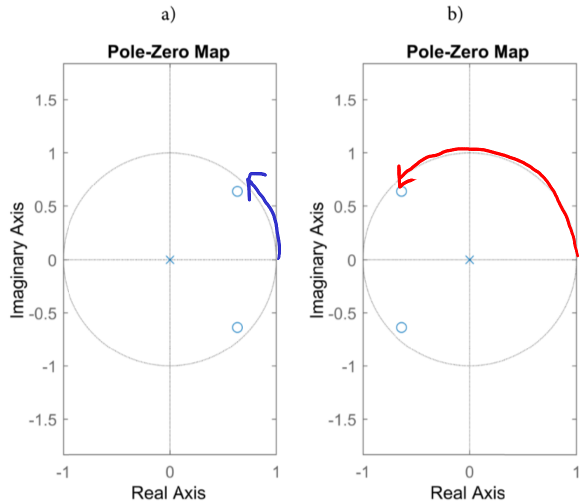
$$Y(z) + 2\,Y(z)\cdot z^{-1} + 3\,Y(z)\cdot z^{-2} = X(z)\cdot z^{-1}$$

$$\Rightarrow Y(z)\cdot\left(1+2\cdot z^{-1}+3\cdot z^{-2}\right) = X(z)\cdot z^{-1}$$

$$\Rightarrow \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z}{z^2+2z+3}$$

8. (3 point) Hvilket pol-nulpunkts plot i Figur 2 stemmer overens med Bode vist i Figur 3. Sampleintervallet for den diskrete overføringsfunktion er $T = 1$ s.

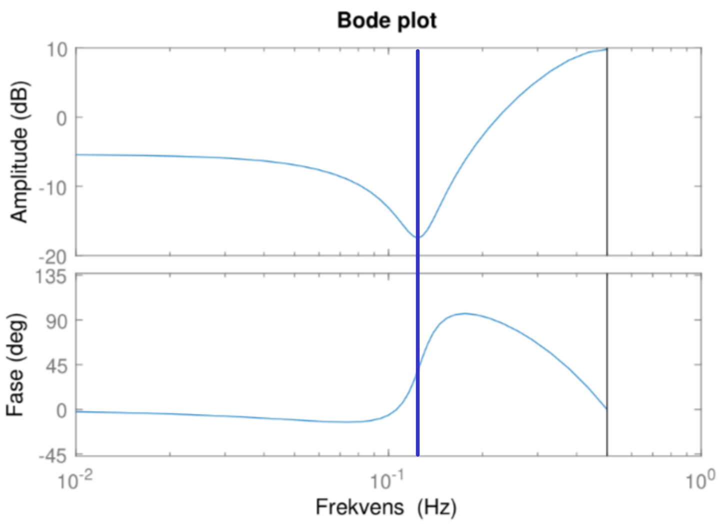
- [x] a)
- [ ] b)



$\frac{3}{4} \cdot f_0$

$\frac{1}{4} \cdot f_0$

Figure 2: Pol-nulpunkts plot for diskrete overføringsfunktioner.



log scale??

Figure 3: Bode plot for diskret overføringsfunktion med sampleinterval $T = 1$ s.

9. (3 point) Et filter har impulsresponssekvensen vist i Figur 4. Hvilken af følgende klasser tilhører filtret?

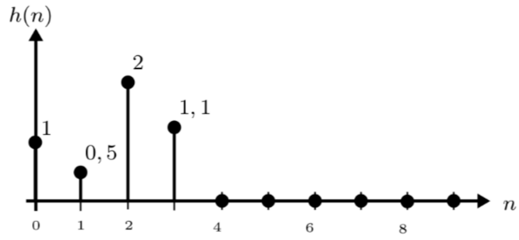


Figure 4: Impulsresponssekvens for filter.

- ◯ IIR-filter
- ☒ FIR-filter

10. (3 point) Har en diskret overføringsfunktion $G(z)$ med poler og nulpunkter som vist i Figur 5 lineær fase?

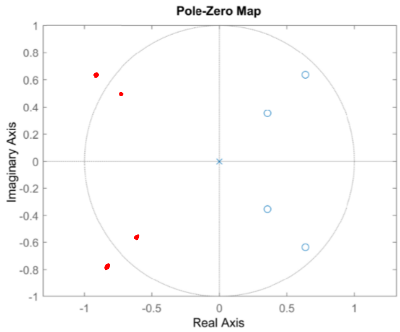


Figure 5: Pol-nulpunkts plot for overføringsfunktionen $G(z)$.

- ◯ Ja
- ☒ Nej

De skal være symetriske omkring enhedscirklen

11. (10 point) Bestem en overføringsfunktion fra følgende differensligning. Overføringsfunktionen skal have positive eksponenter.

$$y_k + 5y_{k-1} + 2y_{k-2} = x_k - x_{k-1}$$

z-transformation

$$Y(z) + 5\,Y(z)\cdot z^{-1} + 2\,Y(z)\cdot z^{-2} = X(z) - X(z)\cdot z^{-1}$$

Isoler overføringsfunktion

$$\Rightarrow Y(z)\cdot\left(1 + 5z^{-1} + 2z^{-2}\right) = X(z)\cdot\left(1 - z^{-1}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 - z^{-1}}{1 + 5z^{-1} + 2z^{-2}} \begin{matrix}\cdot z^2 \\ \cdot z^2\end{matrix} = \frac{z^2 - z}{z^2 + 5z + 2}$$

$$\Rightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z^2 - z}{z^2 + 5z + 2}$$

12. (20 point) Find impulsresponssekvensen for følgende diskrete overføringsfunktion

$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - 0,75z^{-1} + 0,125z^{-2}}$$

$$G(z) = \frac{z^2}{z^2 - 0,75z + 0,125}$$

Factor

$$= \frac{z^2}{(z-0,25)(z-0,5)} = \underbrace{\frac{z}{z-0,25}}_{G_1} \cdot \underbrace{\frac{z}{z-0,5}}_{G_2}$$

Inverse z-transformation

table looking!

$$\frac{z}{z-a} \Rightarrow a^n$$

$$Z^{-1}\{G(z)\} = Z^{-1}\left\{\frac{z}{z-0,25}\right\} \cdot Z^{-1}\left\{\frac{z}{z-0,5}\right\}$$

$$\underline{\underline{g(n) = 0,25^n \cdot 0,5^n}}$$

Butterworth

13. (15 point) I følgende spørgsmål ønskes et IIR-filter designet med fladest mulig pasbånd.

(a) (3 point) Betragt frekvenskarakteristikken i Figur 6 og bestem hvilken filtertype der skal benyttes til at fjerne støjen.

Lavpas!

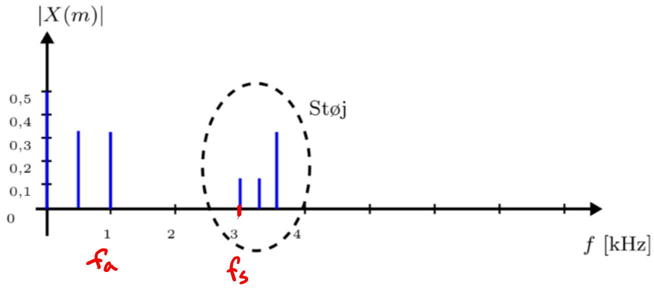
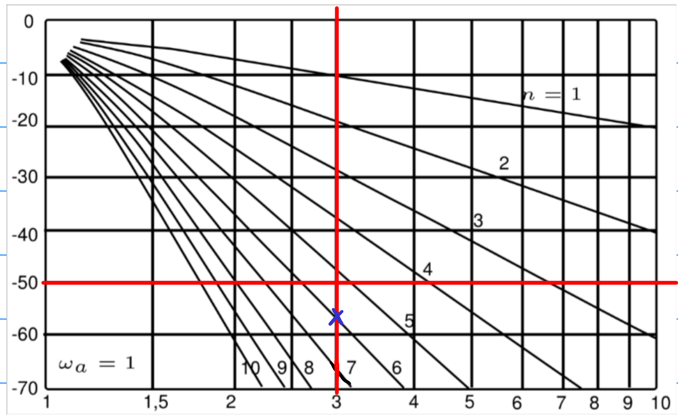


Figure 6: Impulsresponssekvens for filter.

(b) (12 point) Bestem filterordenen for det identificerede filter samt afskæringsfrekvens og stopbåndsfrekvens.

$f_s = 3\,kHz,\ f_a = 1\,kHz$

$$\frac{f_s}{f_a} = 3$$



Vi antager en ønsket dæmpning på -50db

$\Rightarrow N = 6$

14. (25 point) Bestem filterkoefficienterne for et FIR lavpasfilter med Hamming-vindue. Besvar følgende underspørgsmål.

(a) (15 point) Bestem filterkoefficienterne for et FIR lavpasfilter med afskæringsfrekvens $f_a = 1$ kHz og samplefrekvens 5 kHz. Filtret skal have 5 samples.

(b) (10 point) Bestem filtrets koefficienter når et Hamming-vindue anvendes.

Specifikation

$f_a = 1\,kHz, \quad f_s = 5\,kHz \Rightarrow T = \frac{1}{5000}, \quad N = 5 \Rightarrow M = 2$

1. Bestem Vinduesfunktion: Hamming

2. Bestem ordenstal: 5

3. Beregn filterkoefficienter

$$C_0 = 2Tf_a = 2 \cdot \frac{1}{5000} \cdot 1000 = 2 \cdot \frac{1}{5} = \frac{2}{5} = 0,4$$

$$C_1 = C_{-1} = \frac{1}{n\pi} \cdot \sin(2\pi n T f_a) = \frac{1}{1 \cdot \pi} \cdot \sin\left(2\pi \cdot 1 \cdot \frac{1}{5000} \cdot 1000\right) = \frac{1}{\pi} \cdot \sin\left(2\pi \cdot \frac{1}{5}\right) \approx 0,3027$$

$$C_2 = C_{-2} = \frac{1}{n\pi} \cdot \sin(2\pi n T f_a) = \frac{1}{2\pi} \cdot \sin\left(2\pi \cdot 2 \cdot \frac{1}{5000} \cdot 1000\right) = \frac{1}{2\pi} \cdot \sin\left(2\pi \cdot \frac{2}{5}\right) \approx 0,0935$$

$$\begin{aligned} a_0 &= C_{-2} = 0,0935 \\ a_1 &= C_{-1} = 0,3027 \\ a_2 &= C_0 = 0,4 \\ a_3 &= C_1 = 0,3027 \\ a_4 &= C_2 = 0,0935 \end{aligned}$$

Hamming window function

$\alpha = 0{,}54$

$W(n) = \alpha \cdot (1-\alpha) \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{M}\right)$

$w_0 = W(0) = \alpha \cdot (1-\alpha) \cdot \cos(0) = \alpha \cdot (1-\alpha) \cdot 1 \approx 0{,}2484$

$w_1 = W(1) = \alpha \cdot (1-\alpha) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \alpha \cdot (1-\alpha) \cdot 0 = 0$

$w_2 = W(2) = \alpha \cdot (1-\alpha) \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{2}\right) = \alpha \cdot (1-\alpha) \cdot (-1) \approx -0{,}2484$

Windowing constants

$c_0' = c_0 \cdot w_0 = 0{,}4 \cdot 0{,}2484 \approx 0{,}4936$

$c_1' = c_{-1}' = c_1 \cdot w_1 = 0{,}3027 \cdot 0 = 0$

$c_2' = c_{-2}' = c_2 \cdot w_2 = 0{,}0935 \cdot (-0{,}2484) \approx -0{,}0232$

$a_0 = c_{-2}' = -0{,}0232$

$a_1 = c_{-1}' = 0$

$a_2 = c_0' = 0{,}4936$

$a_3 = c_1' = 0$

$a_4 = c_2' = -0{,}0232$