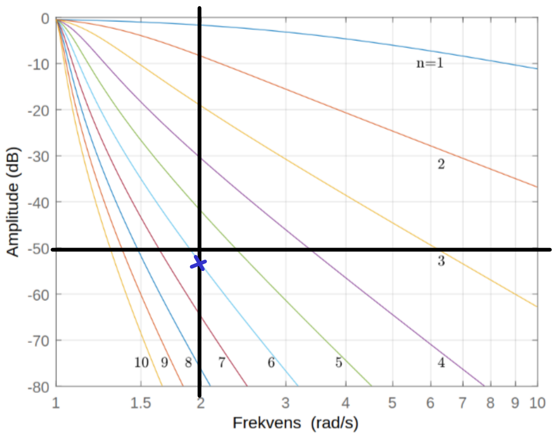
1. (3 point) Et anti-aliaseringsfilter ønskes designet med fladest mulig pasbånd. Hvilket af følgende filtre opfylder bedst dette ønske?

- [x] Butterworth lavpasfilter
- [ ] Chebyshev lavpasfilter
- [ ] Butterworth højpasfilter
- [ ] Chebyshev højpasfilter

2. (3 point) Benyt Figur 1 til at bestemme filterordenen for et analog højpasfilter med afskæringsfrekvens på 2000 Hz og stopbåndsfrekvens på 1000 Hz med stopbåndsdæmpning større end 50 dB.

- Filterordenen skal være:



F = 2

N = 6

Figur 1: Amplitudekarakteristik for frekvensnormeret 0,5 dB Chebyshev lavpasfilter.

3. (3 point) Er følgende diskrete overføringsfunktion stabil?

$$G(z) = \frac{z+2}{z^2+0{,}5}$$

- [x] Ja
- [ ] Nej

4. (3 point) Hvor ligger poler og nulpunkter for følgende diskrete overføringsfunktion

$$G(z) = \frac{z^2+1}{(z+2)(z-0{,}5)}$$

- Poler: $z = -2$, $z = 0{,}5$
- Nulpunkter: $z = 1$ og $z = -1$

5. (3 point) Betragt følgende diskrete overføringsfunktion

$$G(z) = \frac{z-0{,}75}{(z-0{,}5)(z+0{,}5)}$$

- Hvad er DC-forstærkningen for $G(z)$?

$$z = 1 \Rightarrow G(1) = \frac{0{,}25}{0{,}5 \cdot 1{,}5} = \frac{0{,}25}{0{,}75} = \underline{\underline{0{,}\overline{33}}}$$

6. (3 point) Hvilke af følgende signaler kan blive fuldstændigt rekonstrueret ved en sampling af signalet med en samplefrekvens på 5 Hz?

- ○ $x_1(t) = \cos(2\pi \cdot 3 \cdot t + 2) + \sin(2\pi \cdot 5 \cdot t + 4)$
- ☒ $x_2(t) = \cos(2\pi \cdot 2 \cdot t + 3) + \sin(2\pi \cdot 2 \cdot t + 5)$
- ☒ $x_3(t) = \sin(2\pi \cdot 1 \cdot t)$
- ○ $x_4(t) = \cos(2\pi \cdot 5 \cdot t)$

7. (3 point) Betragt følgende overføringsfunktion

$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{3z^2+2}{2z^2+3}$$

Hvilken af følgende differensligninger er en invers z-transformation af (1)?

- ☒ $3y(n) + 2y(n+2) = 2x(n) + 3x(n+2)$
- ○ $3y(n) + 2y(n-2) = 2x(n) + 3x(n-2)$
- ○ $2y(n) + 3y(n+2) = 3x(n) + 2x(n+2)$
- ○ $2y(n) + 3y(n-2) = 3x(n) + 2x(n-2)$

$\Rightarrow Y(z)\cdot(2z^3+3) = X(3z^2+2)$

$\Rightarrow 2y(n+2) + 3y(n) = 3x(n+2) + 2x(n)$

8. (3 point) Hvad er den z-transformerede af enhedssamplen $\delta(n)$?

- ○ $G_1(z) = \frac{z}{z-1}$
- ○ $G_2(z) = \frac{z}{(z-1)^2}$
- ☒ $G_3(z) = 1$

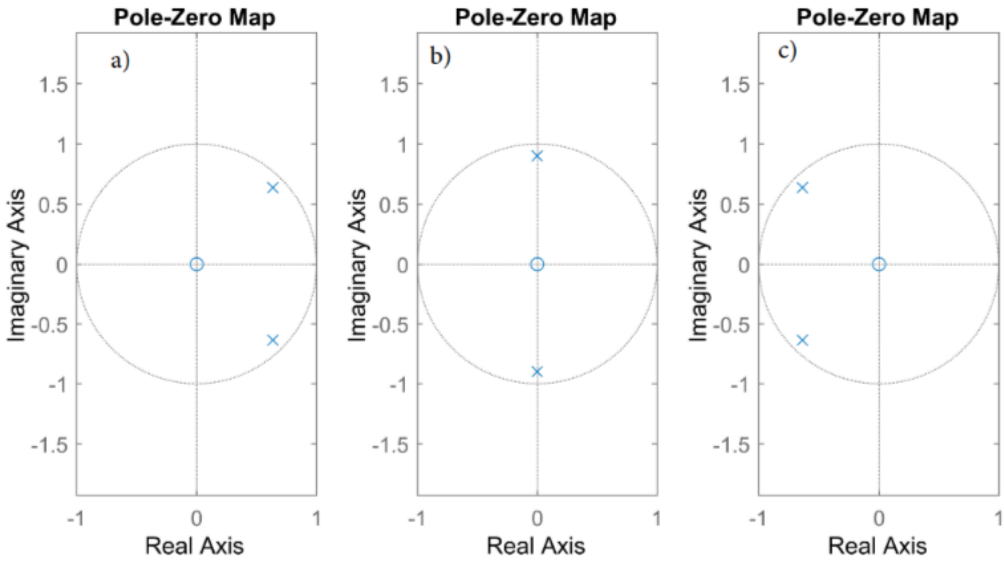
9. (3 point) Et FIR højpasfilter ønskes designet med en maximal pasbåndsripple på mindre end 0,1 dB. Hvilken af følgende vinduesfunktioner kan anvendes?

- ○ Rektangulært vindue
- ○ Bartlett vindue
- ☒ Hamming vindue

10. (3 point) Hvilket pol-nulpunkts plot i Figur 2 stemmer overens med Bode plottet vist i Figur 3. Sampleintervallet for den diskrete overføringsfunktion er $T = 1$ s.

- [x] a)
- [ ] b)
- [ ] c)

$T=1 \Rightarrow f_0 = 0{,}5$



Figur 2: Pol-nulpunkts plot for diskrete overføringsfunktioner.

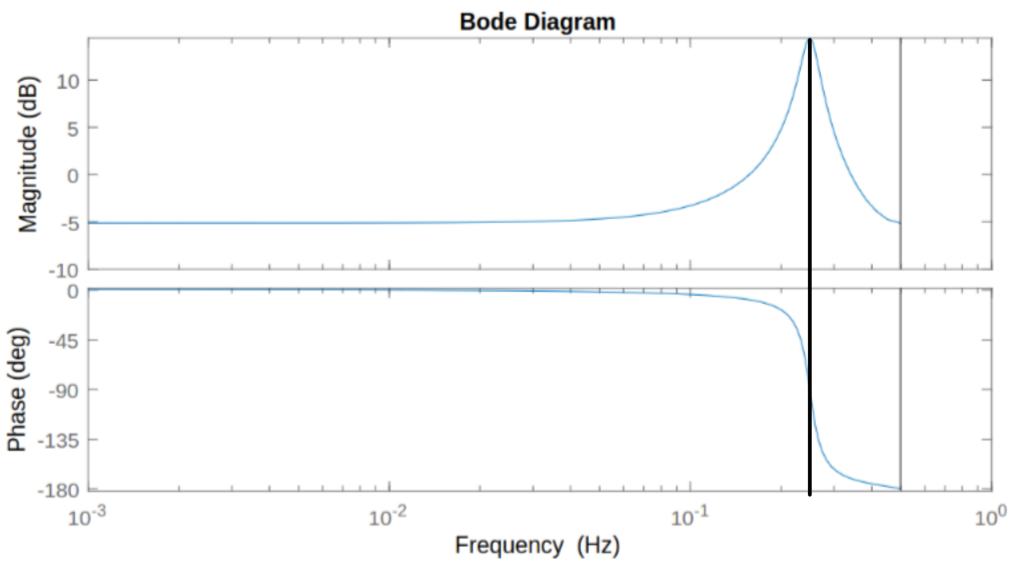


Figure 3: Bode plot for diskret overføringsfunktion med sampleinterval $T = 1$ s.

11. (10 point) Betragt sekvensen

$$x(n) = \begin{cases} 1 & \text{for } n = 0 \\ 0 & \text{for } n = 1 \\ 2 & \text{for } n = 2 \\ 0 & \text{for } n = 3 \\ 3 & \text{for } n = 4 \\ 0 & \text{for } n = 5 \\ 4 & \text{for } n = 6 \\ 0 & \text{for } n = 7 \end{cases} \tag{2}$$

Udregn en 8-punkts diskret Fourier transformation (DFT) af sekvensen $x(n)$. Bestem kun $X(1)$ og $X(4)$.

$$W_8 = e^{-j\,2\pi/8} = e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

$$X(m) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cdot W_N^{mn} = \frac{1}{8} \sum_{n=0}^{7} x_n \cdot e^{-j \cdot \frac{n\pi}{4} \cdot m}$$

$$= \frac{1}{8} \cdot \left(1 \cdot \cancel{e^0} + \cancel{0 \cdot e^{-j\frac{\pi}{4} \cdot m}} + 2 \cdot e^{-j \cdot \frac{2\pi}{4} \cdot m} + \cancel{0 \cdot e^{-j \cdot \frac{3\pi}{4} \cdot m}} + 3 \cdot e^{-j\frac{4\pi}{4} \cdot m} + \cancel{0} + 4 \cdot e^{-j \cdot \frac{6\pi}{4}} + \cancel{0}\right.$$

$$= \frac{1}{8} \cdot \left(1 + 2 \cdot e^{-j \cdot \frac{2\pi}{4} \cdot m} + 3 \cdot e^{-j\frac{4\pi}{4} \cdot m} + 4 \cdot e^{-j \cdot \frac{6\pi}{4}}\right)$$

$$= \frac{1}{8}\left(1 + 2e^{-j\frac{\pi}{2} \cdot m} + 3 \cdot e^{-j\pi m} + 4 \cdot e^{-j\frac{3}{2}\pi m}\right)$$

$$X(1) = \frac{1}{8}\left(1 + 2e^{-j\frac{\pi}{2}} + 3 \cdot e^{-j\pi} + 4 \cdot e^{-j\frac{3}{2}\pi}\right)$$

$$= \frac{1}{8}\left(1 - 2i - 3 + 4i\right) = \frac{1}{8}\left(-2 + 2i\right) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i$$

$$X(4) = \frac{1}{8}\left(1 + 2e^{-j\frac{\pi}{2} \cdot 4} + 3 \cdot e^{-j\pi \cdot 4} + 4 \cdot e^{-j\frac{3}{2}\pi \cdot 4}\right)$$

$$= \frac{1}{8}\left(1 + 2e^{-j2\pi} + 3 \cdot e^{-j4\pi} + 4 \cdot e^{-j6\pi}\right)$$

$$= \frac{1}{8}\left(1 + 2 + 3 + 4\right) = \frac{1}{8}(10) = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$$

12. (10 point) Betragt følgende differensligning

$$3y(n+1) - 5y(n-1) = 3x(n) + 5x(n-3) - 5x(n-5) \qquad (3)$$

(a) (6 point) Bestem en overføringsfunktion for differensligningen (3). Overføringsfunktionen skal have positive eksponenter.

$$\Rightarrow 3 \cdot Y(z) \cdot z^{1} - 5\, Y(z) \cdot z^{-1} = 3 \cdot X(z) + 5 \cdot X(z) \cdot z^{-3} - 5 X(z) \cdot z^{-5}$$

$$\Rightarrow Y(z) \cdot (3z - 5z^{-1}) = X(z) \cdot (3 + 5z^{-3} - 5z^{-5})$$

$$\Rightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{3 + 5z^{-3} - 5z^{-5}}{3z - 5z^{-1}} \begin{matrix} \cdot z^{5} \\ \cdot z^{5} \end{matrix} = \underline{\underline{\frac{3z^{5} + 5z^{2} - 5}{3z^{6} - 5z^{4}}}}$$

(b) (4 point) Bestem om overføringsfunktionen er stabil.

Overføringsfunktionen er stabil hvis alle polerne ligger inden for den imaginære enheds cirkel. Altså må nævneren KUN være 0 inden for enkedscirklen.
Dette tjækker vi:

Fire nulpunkter i z = 0

$$3z^{6} - 5z^{4} = 0$$

$$\Rightarrow z^{4}(3z^{2} - 5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} z^{4} = 0 \\ 3z^{2} - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow z = \pm\sqrt{\tfrac{5}{3}} \approx \pm 1{,}3$$

Nulpunkterne i ca. 1.3 og -1.3 er uden for den imaginære enhedscirkel og overføringsfunktionen er derfor USTABIL.

13. (15 point) Benyt invers z-transformation til at finde udgangssekvensen $y(n)$ for følgende diskrete overføringsfunktion, når indgangsstimulus $x(n)$ er enhedssamplen $\delta(n)$.

$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z^2 - 0{,}2z}{z^2 - 0{,}7z + 0{,}06}$$

Partialbrøkopløs (brøken skal være ægte, så jeg dividerer med z først).

$$\frac{G(z)}{z} = \frac{z-0{,}2}{z^2-0{,}7z+0{,}06} = \frac{z-0{,}2}{(z-0{,}6)(z-0{,}1)} = \frac{A}{z-0{,}6} + \frac{B}{z-0{,}1}$$

Ganger med venste nævner

$$\Rightarrow z-0{,}2 = A(z-0{,}1) + B(z-0{,}6)$$

Indsætter interessante z-værdier

$$z=0{,}6 \Rightarrow 0{,}6-0{,}2 = A(0{,}6-0{,}1) \Rightarrow 0{,}4 = 0{,}5A \Rightarrow A = 0{,}8$$

$$z=0{,}1 \Rightarrow 0{,}1-0{,}2 = B(0{,}1-0{,}6) \Rightarrow -0{,}1 = -0{,}5B \Rightarrow B = 0{,}2$$

$$\Rightarrow \frac{G(z)}{z} = \frac{0{,}8}{z-0{,}6} + \frac{0{,}2}{z-0{,}1} \Rightarrow G(z) = \frac{0{,}8z}{z-0{,}6} + \frac{0{,}2z}{z-0{,}1}$$

Invers z-tranformation på led

$$\boxed{\frac{z}{z-a} \rightarrow a^n}$$

$$y(n) = 0{,}8 \cdot 0{,}6^n + 0{,}2 \cdot 0{,}1^n$$

Dette er også det diskrete impulsrespons for systemet. Dette er fordi:

$$\mathcal{Z}[\delta(n)] = 1 \Rightarrow G(z) = \frac{Y(z)}{1} \Rightarrow G(z) = Y(z) \Rightarrow y(n) = \mathcal{Z}^{-1}[G(z)]$$

Altså er dette svaret den diskrete impuls respons:

$$\underline{\underline{y(n) = 0{,}8 \cdot 0{,}6^n + 0{,}2 \cdot 0{,}1^n}}$$

14. (20 point) Betragt følgende 1. ordens Bessel lavpasfilter (frekvensnormeret filter)

$$H(s) = \frac{1}{s+1}. \tag{4}$$

(a) (5 point) Transformer Bessel lavpasfiltret til et frekvensnormeret båndpasfilter med frekvensnormeret pasbåndsbredde $W_a = 0{,}1$.

$$H_{bp}(s) = H_{lp}(s)\Big|_{s=\frac{1}{W_a}\left(\frac{s+1}{s}\right)} = \frac{1}{\frac{1}{0{,}1}\cdot\left(\frac{s+1}{s}\right)+1} = \frac{1}{10\cdot\frac{s+1}{s}+1} = \frac{1}{10+10s^{-1}+1} = \frac{1}{11+10s^{-1}}$$

(b) (15 point) Benyt $H(s)$ fra (4) til at designe et digitalt lavpasfilter $H(z)$ ved brug af bilineær z-transformation. Det digitale lavpasfilter skal have en afskæringsfrekvens på 2 kHz og samplefrekvensen er 20 kHz.

$f_a = 2000 \qquad f_s = 20\,000 \qquad H(s) = \frac{1}{s+1}$

$W_a = 4000\pi \qquad T = 20000^{-1}$

Finder prewarping konstanten

$$C = \cot\left(\frac{W_a T}{2}\right) = \cot\left(\frac{4000\pi\cdot 20000^{-1}}{2}\right) = \cot\left(\frac{\pi}{10}\right) \approx 3{,}078$$

Transformer

$$H(z) = H(s)\Big|_{s=C\cdot\frac{z-1}{z+1}} = \frac{1 \quad \cdot z+1}{C\cdot\frac{z-1}{z+1}+1 \quad \cdot z+1} = \frac{z+1}{C\cdot(z-1)+(z+1)} = \frac{z+1}{Cz-C+z+1}$$

$$= \frac{z+1}{Cz+z+1-C} = \frac{z+1}{3{,}078z+z+1+3{,}078} = \underline{\underline{\frac{z+1}{4{,}078z+4{,}078}}}$$

15. (15 point) Bestem filterkoefficienterne for et FIR båndpasfilter med et rektangulært-vindue. Båndstopfiltret skal have en afskæringsfrekvenser $f_{a_1} = 1$ kHz og $f_{a_2} = 5$ kHz samt samplefrekvens 50 kHz. Filtret skal have 3 samples.

$$T = \frac{1}{50000}, \quad M = 1$$

$$C_0 = 2T(f_{a2} - f_{a1}) = 25000^{-1} \cdot (5000 - 1000) = 25000^{-1} \cdot 4000 = \frac{4}{25} = 0{,}16$$

$$C_m = C_{-m} = \frac{1}{m\pi}\left(\sin(2\pi m T f_{a2}) - \sin(2\pi m T f_{a1})\right)$$

$$C_1 = C_{-1} = \frac{1}{\pi} \cdot \left(\sin(2\pi \cdot 50000^{-1} \cdot 5000) - \sin(2\pi \cdot 50000^{-1} \cdot 1000)\right)$$

$$= \frac{1}{\pi} \cdot \left(\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{25}\right)\right) \approx 0{,}147$$

Med et rektangulært vindue behøver vi ikke gange noget på konstanterne

$$C'_m = C_m$$

Filterkonstaner

$$a_i = C'_{M-i}$$

$$a_0 = C_1 = 0{,}147$$

$$a_1 = C_0 = 0{,}16$$

$$a_2 = C_{-1} = 0{,}147$$

Opskriver overføringsfunktion

$$H(z) = \sum_{i=0}^{2M} a_i \cdot z^{-1} = \sum_{i=0}^{2} a_i \cdot z^{-i}$$

$$= a_0 \cdot z^0 + a_1 \cdot z^{-1} + a_2 \cdot z^{-2}$$

$$= 0{,}147 + 0{,}16z^{-1} + 0{,}147z^{-2}$$