Домашнее задание к ЛР №2

1. Работа с фазовыми портретами двумерных систем

Данное задание состоит из трех пунктов:

1) Построить фазовый портрет системы в соответствии с вашим вариантом:
   a. Определить фазовые переменные естественным образом ($x_1 = x;\ x_2 = \dot{x};\ \ldots$);
   b. Построить фазовый портрет с помощью кода;
   c. Построить фазовый портрет с помощью Simulink модели;
   d. Найти особые точки (любым способом) и определить их тип;
   e. Получить локальные фазовые портреты в окрестности каждой особой точки (так, чтобы по нему можно было определить тип особой точки);
2) Построить фазовый портрет системы с вырожденной особой точкой (строка А таблицы 1) и попытаться проанализировать его;
3) Построить фазовый портрет системы с континуумом особых точек (строка Б таблицы 1) и попытаться проанализировать его.

Вариант определить по формуле:

$$K = mod((i+3), 6) + 1,$$

где i – ваш номер в списке группы.

Таблица 1. – Задание по вариантам

1	$\ddot{x} + 0.5\dot{x}^3 + 2x + x^2 = 0$
2	$\ddot{x} - 5\dot{x}^2 - x(x-1) = 0$
3	$\ddot{x} + 5\dot{x} - (\dot{x} - x)^2 - e^x + 5 = 0$
4	$\ddot{x} - \dot{x}x - 2x^3 + 5x - 1 = 0$
5	$\ddot{x} - \dot{x} - x^2 + 5\sin(0.3x^2) = 0$
6	$\ddot{x} - (\dot{x} - x - 1)^3 = 0$
А	$\ddot{x}^2 - \sin(x)\,\dot{x} - \ln(1 + x^2) = 0$
Б	$\ddot{x}^2 - \dot{x}^4 x - \dot{x} = 0$

2. Необязательная часть. Построение фазовых траекторий трехмерных систем

В рамках этого задания Вам предлагается поработать с фазовым представлением автономной системы дифференциальных уравнений третьего порядка. Таким образом, соответствующее ему фазовое пространство совпадает с пространством $\mathbb{R}^3$.

Итак, система имеет вид (представьте, что слева нарисованы фигурные скобки):

$$\dot{x} = y(z - 1 + x^2) + \gamma x$$

$$\dot{y} = x(3z + 1 - x^2) + \gamma y$$

$$\dot{z} = -2z(\alpha + xy)$$

Эта система называется уравнениями Рабиновича-Фабриканта. Вам предлагается построить трехмерные фазовые траектории, приведенные в статье, а именно:

1. Принять за фазовое пространство множество $X \times Y \times Z$, где X, Y, Z – соответствующие переменным координатные оси;
2. Написать MATLAB-код, способный построить фазовую траекторию для фиксированных параметров γ и α. Данный код должен быть способен нарисовать траекторию для любых вышеуказанных параметров и начальных условий. В остальном, реализация не ограничивается;
3. Построить трехмерные фазовые траектории для:
   a. $\alpha = 0.05; \gamma = 0.1; x_0 = 0.1; y_0 = -0.1; z_0 = 0.1;$
   b. $\alpha = 1.1; \gamma = 0.87; x_0 = -1; y_0 = -0; z_0 = 0.5;$
4. Повторить построения обоих траекторий при изменениях параметров солвера и убедиться в замечательности свойств данной системы.

3. Необязательная часть. Построение фазовых траекторий нестационарных систем

В этом задании всё еще рассматриваются системы, у которых на вход не подано ничего. Однако некоторым из них соответствует уже неавтономная система дифференциальных уравнений (в ней явно присутствует время как переменная). Это является определением нестационарной системы. Нестационарность системы проявляется в изменении её параметров во времени.

Напомним, что фазовые портреты, что мы строили, держались на допущении об автономности системы. Поэтому для неавтономных систем подобную конструкцию получить невозможно.

Однако можно попробовать оценить степень хаоса в нашей системе. При этом под степенью хаотичности мы понимаем способность системы воспроизводить одно и то же (или близкое) решение в фазовом пространстве при малых изменениях начальных условий.

Более формально, введем следующие определения. Пусть x_0 (вектор) – некоторые зафиксированные начальные условия системы уравнений

$$\dot{x} = F(x, t),$$

а также $x = f_0(t)$ – это решение, которое им соответствует (тоже вектор). Аналогично обозначим произвольные начальные условия x_0^* и соответствующее им решение $f(t)$. Нам необходимо ввести меру расстояния между решениями, чтобы говорить об их близости. Пусть она определяется так

$$\rho(f_1, f_2) = max|f_1(t) - f_2(t)|,$$

где максимум берется по всем $t \in [t_0; t_0 + T]$, где t_0 – начальное время, а T – время наблюдения за функциями. Мы говорим, что система *не является хаотической в точке* x_0, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0: \ \forall x: |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow \rho(f, f_0) < \varepsilon,$$

где $|x| = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} x_i^2}$ - длина вектора x.

То есть, система не является хаотической, если мы всегда можем подобрать такую точность выбора начальных условий, что новое решение всегда будет отстоять от исходного на любое сколь угодно малое заданное положительное значение.

Если же это не выполняется, то на практике это означает, что наши начальные условия при малых отклонениях от них вызывают совершенно непредсказуемое поведение фазовой траектории, что, естественно, неприятно при управлении системами.

Под *хаотичностью системы в* δ*-шаре* мы будем понимать:

$$H(\mathrm{x}_0, \delta) = max\big(\rho(f_1, f_0)\big),$$

где максимум берется по всем $x_0^* \in B(x_0, \delta)$ – точкам в шаре

$$B(x_0, \delta) \coloneqq \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| \leq \delta\}.$$

То есть хаотичность оценивает степень отклонения решения при начальных условиях, заключенных в некоторой малой окрестности от исходных.

Таким образом, очевидно, что если предел

$$\lim_{\delta \to 0} H\,(\mathrm{x}_0, \delta) = 0,$$

то система не является хаотической в точке x_0.

Если получается, что заданный предел конечен, то систему мы назовем *ограниченно хаотической* в точке x_0 со степенью хаотичности в этой точке, равной значению этого предела.

Если предел бесконечный, то систему назовем *хаотической* (в любой точке).

Итак, мы построили функцию, по которой мы можем оценивать степень хаотичности некоторой системы. Теперь перейдем к заданию.

Во-первых, исходя из результатов предыдущей задачи, сделайте вывод о хаотичности уравнений Рабиновича-Фабриканта.

Далее, введем уравнения нестационарной системы следующего вида:

$$\ddot{x} + \dot{x} + x = g(t)$$

Во-вторых, для приведенной системы с естественно заданными фазовыми координатами, необходимо:

1) Построить фазовую траекторию для нулевых начальных условий.
2) Нарисовать в окрестности данной фазовой траектории *локальные направления градиента фазового вектора*, то есть для каждой точки фазовой траектории в малой окрестности построить quiver в тот момент времени, когда система достигла этой точки. Это является графической мерой хаотичности;

3) Рассчитать хаотичность системы при помощи построения сходящейся последовательности:
   a. Построить сходящуюся к нулю последовательность δ_n положительных чисел;
   b. Построить из неё новую последовательность $H(0, \delta_n)$;
   c. Найти предел новой последовательности. (Замечание. Найденный предел, вообще говоря, может не являться искомой хаотичностью в случае, когда она равна бесконечности);
   d. Сделать вывод о хаотичности системы в нуле.

Для расчетов взять несколько вариантов $g(t)$:

1. Противоположные импульсы:
   $g(t)$ =1, если $t \in [2k, 2k+1), k \in \mathbb{Z}$, иначе $g(t) = -1$
2. Противоположные линейные кусочки:
   $g(t) = t$, если $t \in [2k, 2k+1), k \in \mathbb{Z}$, иначе $g(t) = -t$
3. Веселый синус: $g(t) = sin\left(\frac{1}{t+10^{-7}}\right)$

Формат отчетности необязательных заданий:

В отчете поясняете все свои действия, а любые утверждения сопровождаете соответствующими графическими или аналитическими доказательствами.

Для успешной сдачи необязательных заданий достаточно сделать ЛИБО первое задание, но очень хорошо (~ идеально), ЛИБО сделать второе. Если сделаете два, то возможно предоставление двух А, – это будет решаться в частном порядке по качеству проделанной работы и рассуждений.