Постановка задачи наблюдения состояния

Предположим, что дана стационарная линейная система, представленная в модели переменных состояния:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

И для построения управления, или же для иных целей, нам необходимо знать состояние в системе в любой момент времени. При этом отметим, что для измерения считаются данными только управление системы и её выход.

Пусть оценка состояния системы, то есть состояние системы, которое мы предполагаем равным настоящему состоянию системы, обозначается $\hat{x}$. Тогда формально задачу наблюдения можно поставить следующим образом: необходимо найти такое преобразование, принимающее на вход управление и выход системы, а также выдающее оценку состояния системы, что в установившемся режиме оценка состояния будет сколь угодно мало отличаться от реального состояния, то есть:

$$\hat{x} = \mathfrak{F}(u, y) - ?: \ \lim_{t \to \infty} |x - \hat{x}| = 0$$

Как можно заметить, в данной постановке задача наблюдения не является особо применимой, потому что здесь не уточняется время сходимости оценки наблюдения (то есть оценки состояния) к реальному состоянию системы. Поэтому её часто модифицируют, дополняя условиями по скорости сходимости наблюдения, или же добавляют дополнительные требования по фильтрации помех, которые являются неотъемлемой частью реальной системы.

Наблюдатель Люенбергера

Одним из простейших решений задачи наблюдения является так называемый наблюдатель Люенбергера. Он не принимает во внимание возможность наличия помех в системе, а также опирается на точность динамической модели, которая была построена, но тем не менее, достаточно хорошо решает свою задачу.

Итак, данный наблюдатель описывается следующим дифференциальным уравнением:

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x}),$$

где L - это некоторая матрица констант.

Обратите внимание, что от исходной динамики системы данное уравнение отличает наличие третьего слагаемого, которое представляет собой умноженную на матрицу ошибку выхода системы (разность между выходом, полученным при подставленной оценке состояния, и реальным выходом системы).

Давайте докажем, что данный наблюдатель решает свою задачу. Для этого нужно вычесть из уравнения наблюдения уравнение динамики системы. Тогда получим уравнение:

$$\frac{de}{dt} = (A - LC)e;\ e = x - \hat{x}$$

То есть ошибка наблюдения ***e*** описывается линейным однородным уравнением. Для того, чтобы наблюдение сходилось, требуется, чтобы собственные числа матрицы этого уравнения были в левой комплексной полуплоскости. Скорость сходимости регулируется выбором этих собственных чисел.

Таким образом, наблюдаемая система может быть описана следующей структурной схемой