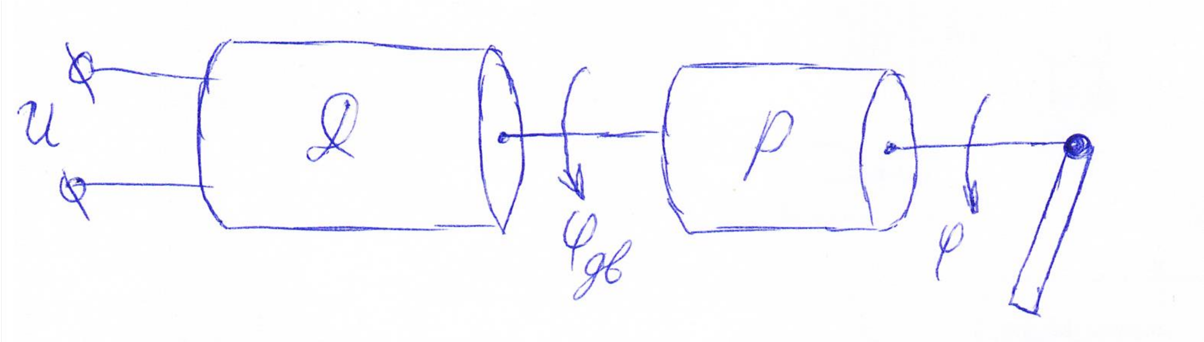
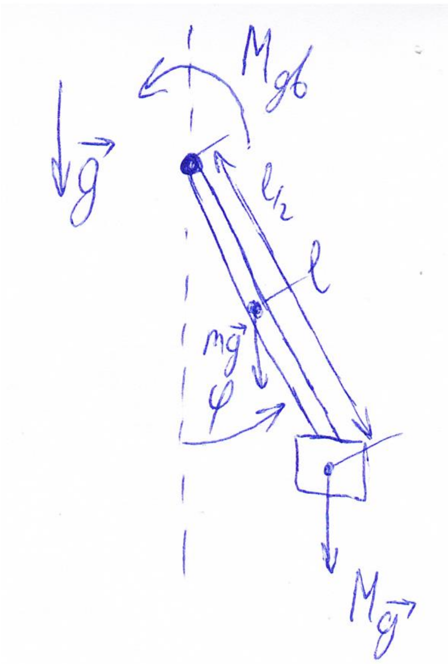
Представление маятника в переменных состояния

Расчетная схема для системы имеет вид:





Динамику маятника можно описать уравнением:

$$J\ddot{\varphi} = M_{\text{м}} - Mgl\,sin\,\varphi - mgl/2\,sin\,\varphi$$

где $J = Ml^2 + ml^2/4$

Динамику и кинематику редуктора системой:

$$\begin{cases} \varphi_{\text{дв}} = i\varphi \\ J_{\text{ред}}\ddot{\varphi} + M_{\text{м}} = M_{\text{дв}}i \end{cases}$$

а динамику двигателя:

$$\begin{cases} M_{дв} = J_{дв}\ddot{\varphi}_{дв} + M_{эл} \\ M_{эл} = k_M i_{дв} \\ U = k_\omega \omega_{дв} + R i_{дв} + L\dfrac{di_{дв}}{dt} \\ \omega_{дв} = \dot{\varphi}_{дв} \end{cases}$$

Определим переменные состояния следующим образом:

$x_1 = \varphi, \quad x_2 = \dot{\varphi}, \quad x_3 = i_{дв}, \quad U = U$, тогда

$$\begin{cases} J\dot{x}_2 = M_{дв} i - J_{ред}\dot{x}_2 - Mgl\,sin\,x_1 - mgl/2\,sin\,x_1 \\ M_{дв} = J_{дв} i \dot{x}_2 + M_{эл} \\ M_{эл} = k_M x_3 \\ U = k_\omega i x_2 + R x_3 + L\dot{x}_3 \end{cases}$$

Откуда

$$\begin{cases} \left(J + J_{ред} + J_{дв} i^2\right)\dot{x}_2 = k_M i x_3 - Mgl\,sin\,x_1 - mgl/2\,sin\,x_1 \\ U = k_\omega i x_2 + R x_3 + L\dot{x}_3 \end{cases}$$

Итого,

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \dfrac{k_M i}{J_{общ}} x_3 - \dfrac{gl(M + m/2)}{J_{общ}} sin\,x_1 \\ \dot{x}_3 = \dfrac{U}{L} - \dfrac{k_\omega i}{L} x_2 - \dfrac{R}{L} x_3 \end{cases}$$

где $\quad J_{общ} = J + J_{ред} + J_{дв} i^2 = Ml^2 + ml^2/4 + J_{ред} + J_{дв} i^2$

В итоге имеем следующую модель:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + f(x) \\ y = Cx \end{cases}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{k_M i}{J_{общ}} \\ 0 & -\dfrac{k_\omega i}{L} & -\dfrac{R}{L} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dfrac{1}{L} \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$f(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\dfrac{gl(M + m/2)}{J_{\text{общ}}} sin\, x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Проведем линеаризацию

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\dfrac{gl(M + m/2)}{J_{\text{общ}}} cos\, x_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Целевое состояние $x_0 = (\pi \quad 0 \quad 0)$

$$f(x) \approx f(x_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=x_0} (x - x_0), \qquad f(x_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f(x) \approx \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{gl(M + m/2)}{J_{\text{общ}}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - \pi \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$
$$\approx \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{gl(M + m/2)}{J_{\text{общ}}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Delta x, \qquad \Delta x = x - x_0$$

Итого, линеаризованная система имеет вид:

$$\begin{cases} \Delta\dot{x} = \tilde{A}\Delta x + Bu \\ \Delta y = C\Delta x \end{cases}$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{gl(M + m/2)}{J_{\text{общ}}} & 0 & \dfrac{k_M i}{J_{\text{общ}}} \\ 0 & -\dfrac{k_\omega i}{L} & -\dfrac{R}{L} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dfrac{1}{L} \end{pmatrix}, C = (1 \quad 0 \quad 0)$$