Постановка задачи линейно-квадратичного управления

Линейно-квадратичный регулятор (Linear Quadratic Regulator, LQR) – один из видов оптимальных регуляторов, показатель которого представляется в виде квадратичного функционала специального вида.

В простейшем случае постановка задачи о линейно-квадратичном регуляторе выглядит следующим образом: имеется система, которую можно описать уравнениями:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}, \qquad x(0) = x_0 \tag{1}$$

с состояниями $x \epsilon \mathbb{R}^n$, управлением $u \epsilon \mathbb{R}^m$ и наблюдением $y \epsilon \mathbb{R}^k$, где $A \epsilon \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \epsilon \mathbb{R}^{n\times m}$ и $C \epsilon \mathbb{R}^{n\times k}$, при этом пара (A, B) управляема, а начальное условие x_0 произвольно, но фиксировано.

Управление строится в виде линейных обратных связей по состоянию

$$u = -Kx, \qquad K \epsilon \mathbb{R}^{m\times n} \tag{2}$$

и минимизирует следующий квадратичный критерий качества:

$$J_{LQR} = \int_0^\infty [x(t)^T Q x(t) + u(t)^T R u(t) + 2x(t)^T N u(t)]\, dt \tag{3}$$

где $Q \epsilon \mathbb{R}^{n\times n}$, $R \epsilon \mathbb{R}^{m\times m}$, $N \epsilon \mathbb{R}^{n\times m}$ – заданные положительно определенные весовые матрицы, при этом часто матрицу N принимают нулевой и тогда (3) будет иметь следующий вид:

$$J = \int_0^\infty [x(t)^T Q x(t) + u(t)^T R u(t)]\, dt \tag{4}$$

Для того, чтобы функционал (3) (или 4) был конечен, необходимо и достаточно, чтобы система (1), замкнутая обратной связью (2), была устойчива. Управляемость пары (A, B) гарантирует существование стабилизирующих обратных связей.

Задавать матрицы Q и R можно разными способами, одним из используемых способов представлен ниже:

$$Q = aC^T C, \qquad R = E \tag{5}$$

где a – положительное число, а E – единичная матрица.

Классический метод решения описанной выше задачи – рассмотрение алгебраического уравнения Риккати:

$$A^T P + PA + Q - (PB + N)R^{-1}(B^T P + N^T) = 0 \tag{6}$$

При N=0 (6) принимает вид

$$A^T P + PA + Q - PBR^{-1}B^T P = 0 \tag{7}$$

В процессе решения определяется матрица P и оптимальный регулятор задается выражением

$$K = R^{-1}(B^T P + N^T) \tag{8}$$

или

$$K = R^{-1}B^T P \tag{9}$$

при N=0.

Для решения описанной выше задачи в Matlab имеется встроенная функция lqr, которая по известным матрицам A, B, Q, R и N (опционально) рассчитывает матрицу K. Подробное описание функции можно найти в документации.