

NAAM :

1. Los op $(2x^2 + 2y^2 - y)dx + (x^2y + y^3 + x)dy = 0$.
2. Los op $xp^2 = 2y(p + 2)$ met $p = y'$.
3. We hebben een watertank met 150 gallons water. Hier word aan een snelheid van 2 gallons per minuut een zoutoplossing aan toe gevoegd van 2 lb zout per gallon. De oplossing word op elk moment goed gemixt en loopt uit de watertank aan een snelheid van 4 gallons per minuut. Hoeveel zout is er op elk moment in de watertank?

Ben LAUWENS
Lt Kol, Dr Ir
Militair hoogleraar MWMW

Addie NEYT
Repetitor MWMW

NOM :

1. Résoudre $(2x^2 + 2y^2 - y)dx + (x^2y + y^3 + x)dy = 0$.
2. Résoudre $xp^2 = 2y(p + 2)$ avec $p = y'$.
3. Nous avons un réservoir de 150 gallons d'eau. Nous y ajoutons une solution saline de 2 lb de sel par gallon avec un rythme de 2 gallons par minute. La solution est toujours bien mélangée et s'écoule du réservoir à un rythme de 4 gallons par minute. Déterminez la quantité de sel dans le réservoir à chaque instant?

Ben LAUWENS
Lt Col, Dr Ir
Professeur militaire MWMW

Addie NEYT
Répétiteur MWMW

1. Solve $(2x^2 + 2y^2 - y)dx + (x^2y + y^3 + x)dy = 0$.

$$\frac{\partial(2x^2 + 2y^2 - y)}{\partial y} = 4y - 1 \neq 2xy + 1 = \frac{\partial(x^2y + y^3 + x)}{\partial x}$$

$R(x)$ or $R^*(y)$ doesn't exist only depending on x or y

But, dividing by $x^2 + y^2$ gives us :

$$2dx + ydy + \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = 0$$

$$d(2x) + d\left(\frac{y^2}{2}\right) + d\left(\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)\right) = 0$$

$$2x + \frac{y^2}{2} + \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = c$$

2. Solve $xp^2 = 2y(p+2)$ with $p = y'$.

$$y = \frac{xp^2}{2(p+2)} \Leftrightarrow p = \frac{dy}{dx} = \frac{2(p+2)\frac{d(xp^2)}{dx} - xp^2 \cdot 2\frac{dp}{dx}}{4(p+2)^2}$$

$$\Leftrightarrow 2p(p+4)((p+2) - x\frac{dp}{dx}) = 0$$

Case 1 : $p = 0 \rightarrow y = 0$ (singular solution)

Case 2 : $p + 4 = 0 \rightarrow p = -4 \rightarrow y = \frac{x(-4)^2}{2(-4+2)} = -4x$ (singular solution)

Case 3 : $(p+2) - x\frac{dp}{dx} = 0$

$$\rightarrow \frac{1}{p+2}dp = \frac{1}{x}dx \Leftrightarrow \ln(p+2) = \ln x + c$$

$$\Leftrightarrow p = cx - 2 \rightarrow x(cx - 2)^2 = 2y(cx)$$

$$\Leftrightarrow (cx - 2)^2 = 2cy$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{c^2}(cx - 2)^2 = \frac{1}{c^2}(2cy)$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{2}{c}\right)^2 = \frac{2}{c}y$$

$$\Leftrightarrow (x - c)^2 = cy$$

(general solution)

3. Nous avons un réservoir de 150 gallons d'eau. Nous y ajoutons une solution saline de 2 lb de sel par gallon avec un rythme de 2 gallons par minute. La solution est toujours bien mélangée et s'écoule du réservoir à un rythme de 4 gallons par minute. Déterminez la quantité de sel dans le réservoir à chaque instant?

We hebben een watertank met 150 gallons water. Hier word aan een snelheid van 2 gallons per minuut een zoutoplossing aan toe gevoegd van 2 lb zout per gallon. De oplossing word op elk moment goed gemixt en loopt uit de watertank aan een snelheid van 4 gallons per minuut. Hoeveel zout is er op elk moment in de watertank?

$A(t)$ = #lb salt at time t minutes

$$\frac{dA}{dt} = 2\frac{\text{lb}}{\text{gal}} \cdot 2\frac{\text{gal}}{\text{min}} - \frac{A}{150-2t}\frac{\text{lb}}{\text{gal}} \cdot 4\frac{\text{gal}}{\text{min}}$$

$$\frac{dA}{dt} = 4 - \frac{4A}{150-2t} \Leftrightarrow \frac{dA}{dt} + \frac{4}{150-2t}A = 4, \mu(t) = e^{\int \frac{4}{150-2t}} = e^{\int \frac{-2}{t-75}} = e^{-2\ln(t-75)} = (t-75)^{-2}$$

$$\mu(t) \cdot A(t) = \int 4(t-75)^{-2}dt + c \Leftrightarrow -4(t-75)^{-1} + c$$

$$\Leftrightarrow A(t) = -4(t-75) + c(t-75)^2$$

with $A(t=0) = 0 \rightarrow 0 = 300 + 75^2c \Leftrightarrow c = -\frac{4}{75}$

$$A(t) = -4(t-75) + \frac{4}{75}(t-75)^2 = 4t - \frac{4}{75}t^2$$