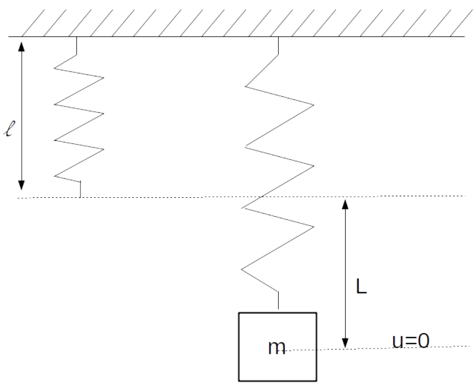
PW/TP 9-10: Linear Differential Equations - Mass-spring system

Klassieke massaveersysteem

Set-up We gaan kijken naar de beweging van een massa die aan een veer hangt. Hiervoor hebben we een veer die in rust (zonder massa) een lengte l heeft. Als we vervolgens aan deze veer een massa m hangen, dan zal de veer met een lengte L worden uitgerokken. De positie waarvoor de massa in rust hangt, noemen we het evenwichtspunt.



We stellen $u(t) =$ de verplaatsing van onze massa in de tijd. Hierbij is dus $u = 0$ in het evenwichtspunt, en zal de verplaatsing positief zijn naar beneden, en negatief naar boven toe. Uit de mechanica weten jullie dat de totale kracht als volgt kan geschreven worden: $F = m \cdot a$. Hierbij hebben we dus $F(t, u, u') = m \cdot u''(t)$.

Opstellen differentiaalvergelijking In het klassieke systeem gaan we kijken naar twee krachten die op de massa werken, namelijk:

- de zwaartekracht: $F_g = m \cdot g$
- de veerkracht: $F_s = -k \cdot (L + u(t))$ (met $k =$veerconstante)

In het evenwichtspunt $u = 0$, zijn de krachten op de massa gelijk en dus $m \cdot g = k \cdot L$. Als we dit alles invullen in onze vergelijking, dan vinden we:

$$F(t, u, u') = m \cdot u''(t)$$

$$F_g + F_s = m \cdot u''(t)$$

$$mg - k(L + u) = mu''$$

$$-ku = mu''$$

$$0 = mu'' + ku$$

Oefening 1. Los de gevonden differentiaalvergelijking $0 = m \cdot u''(t) + k \cdot u(t)$ op. Stel hierbij $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, en neem als beginvoorwaarden $u(0) = u_0$ de initiële verplaatsing t.o.v. het evenwichtspunt en $u'(0) = v_0$ de initiële snelheid.

$m\lambda^2 + k = 0$

$\lambda^2 = -\frac{k}{m} \leftrightarrow \lambda = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}i = \pm\omega_0 i$

$\Rightarrow u(t) = c_1\cos(\omega_0 t) + c_2\sin(\omega_0 t)$

Using $u(0) = u_0 \leftrightarrow c_1 = u_0$ and $u^{'}(t) = -\omega_0 c_1\sin(\omega_0 t) + c_2\omega_0\cos(\omega_0 t), u'(0) = v_0 \leftrightarrow v_0 = c_2\omega_0$

$\Rightarrow u(t) = u_0\cos\omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t$

De amplitude en fasehoek We hebben gevonden dat onze verplaatsing kan geschreven worden als $u(t) = u_0\cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)$, dit kan ook geschreven worden als $u(t) = R\cos(\omega_0 t - \delta)$. Hierbij is R de amplitude en δ de fasehoek van de verplaatsing.

Oefening 2. Ga na dat de vergelijkingen $u(t) = u_0\cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)$ en $u(t) = R\cos(\omega_0 t - \delta)$ weldegelijk gelijk zijn. Zoek ook de formules om R en δ te vinden in functie van u_0, v_0 en ω_0.

$u(t) = R\cos(\omega_0 t - \delta) = R\cos(\omega_0 t)\cos\delta + R\sin(\omega_0 t)\sin\delta$

$u(t) = (R\cos\delta)\cos\omega_0 t + (R\sin\delta)\sin\omega_0 t$

$$\Rightarrow \begin{cases} u_0 = R\cos\delta \\ \frac{v_0}{\omega_0} = R\sin\delta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} R^2\cos^2\delta + R^2\sin^2\delta = R^2 = u_0^2 + (\frac{v_0}{\omega_0})^2 \\ \frac{R\cos\delta}{R\sin\delta} = \tan\delta = \frac{u_0\omega_0}{v_0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} R = \sqrt{u_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}} \\ \tan^{-1}\frac{\omega_0 u_0}{v_0} \end{cases}$$

De gedempte trilling

Bij de gedempte trilling gaan we nog een stap verder, en nemen we nog een derde kracht in rekening:

- de demping van de veer, die een negatief effect op de snelheid heeft: $F_d = -c \cdot u'(t)$

We vinden zo een nieuwe differentiaalvergelijking:

$F(t, u, u') = m \cdot u''(t)$

$F_g + F_s + F_d = m \cdot u''(t)$

$mg - k(L + u) - cu' = mu''$

$-ku - cu' = mu''$

$0 = mu'' + cu' + ku$

Oefening 3. Los de gevonden differentiaalvergelijking $0 = mu''(t) + cu'(t) + ku(t)$ op. Identificieer drie verschillende gevallen afhankelijk van de waarden voor c, m en k. Kijk voor elk van de drie gevallen wat er gebeurt met de verplaatsing, wordt de trilling weldegelijk gedemp? Tip: kijk hiervoor naar de limiet van $u(t)$ voor $t \to \infty$.

$$m\lambda^2 + c\lambda + k = 0 \leftrightarrow D = c^2 - 4mk \leftrightarrow \begin{cases} 1) \quad c^2 - 4mk > 0 \\ 2) \quad c^2 - 4mk = 0 \\ 3) \quad c^2 - 4mk < 0 \end{cases}$$

$1) \quad c^2 - 4mk > 0$

$\lambda_{1,2} = \dfrac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} = -\dfrac{c}{2m}(1 \pm \sqrt{1 - \dfrac{4mk}{c^2}})$ with $c^2 - 4mk > 0 \leftrightarrow \dfrac{4mk}{c^2} < 1$

using this we known that $1 - \dfrac{4mk}{c^2} < 1 \leftrightarrow 1 \pm \sqrt{1 - \dfrac{4mk}{c^2}} > 0$, thus $\lambda_1, \lambda_2 < 0$

$u(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$

$\lim\limits_{t \to \infty} u(t) = 0$, because $\lambda_1, \lambda_2 < 0$

$2) \quad c^2 - 4mk = 0$

$\lambda_1 = \lambda_2 = -\dfrac{c}{2m}$

$u(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-t \cdot \frac{c}{2m}}$

$$\lim_{t \to +\infty} u(t)(= 0 + 0 \cdot \infty) = 0 + \lim_{t \to +\infty} c_2 \frac{t}{e^{t \cdot \frac{c}{2m}}} \overset{H}{=} \lim_{t \to +\infty} c_2 \frac{1}{\frac{c}{2m} \cdot e^{t \cdot \frac{c}{2m}}} = 0$$

$3) \quad c^2 - 4mk < 0$

$\lambda_{1,2} = \dfrac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} = \lambda \pm \mu i$

$u(t) = e^{\lambda t}(c_1 \cos \mu t + c_2 \sin \mu t)$ using $\begin{cases} c_1 = R \cos \delta \\ c_2 = R \sin \delta \end{cases}$, we find $u(t) = Re^{\lambda t} \cos(\mu t - \delta)$

$\lim\limits_{t \to +\infty} u(t) = 0 \cdot \cos(\mu t - \delta) = 0$ because $\lambda < 0$ and $\cos(\mu t - \delta) \in [-1, 1]$.

De geforceerde trilling

Voor de geforceerde trilling zullen we starten vanaf het klassieke massa-veersysteem zonder demping, maar dit keer is de massa ook onderhevig aan een externe, periodieke kracht. We krijgen dan als differentiaalvergelijking:

$$F(t,u,u') = m \cdot u''(t)$$

$$F_g + F_s + F(t) = m \cdot u''(t)$$

$$mg - k(L+u) + F(t) = mu''$$

$$-ku + F(t) = mu''$$

$$\frac{1}{m}F(t) = u'' + \frac{k}{m}u$$

$$\frac{1}{m}F(t) = u'' + \omega_0^2 u$$

We nemen als externe kracht $F(t) = F_0 \cos(\omega t)$, en vinden dan : $u''(t) + \omega_0^2 u(t) = \frac{1}{m}F(t)$.

Oefening 4. Los deze niet-homogene differentiaalvergelijking op. Hou er mee rekening dat je twee verschillende gevallen kan onderscheiden, namelijk $\omega_0 = \omega$ en $\omega_0 \neq \omega$.

$$u''(t) + \omega_0^2 u(t) = \frac{1}{m}F_0 \cos(\omega t)$$

$$\lambda^2 + \omega_0^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm \omega_0 i$$

We find $u_H(t) = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t$

Case 1) $\omega \neq \omega_0$

$$u_P(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

$$u_P{}'(t) = -A\omega \sin \omega t + B\omega \cos \omega t$$

$$u_P{}''(t) = -A\omega^2 \cos \omega t - B\omega^2 \sin \omega t$$

$$u''(t) + \omega_0^2 u(t) = (-\omega^2 + \omega_0^2)A \cos \omega t + (-\omega^2 + \omega_0^2)B \sin \omega t = \frac{1}{m}F_0 \cos(\omega t) \qquad \begin{cases} A = \dfrac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \\ B = 0 \end{cases}$$

$$u(t) = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t + \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos \omega t$$

Case 2) $\omega = \omega_0$

$$u_P(t) = At\cos\omega_0 t + Bt\sin\omega_0 t$$

$$u_P{}'(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t - A\omega_0 t\sin\omega_0 t + B\omega_0 t\cos\omega_0 t$$

$$u_P{}''(t) = -A\omega_0\sin\omega_0 t + B\omega_0\cos\omega_0 t - A\omega_0\sin\omega_0 t + B\omega_0\cos\omega_0 t - A\omega_0^2 t\cos\omega_0 t - B\omega_0^2 t\sin\omega_0 t$$

$$u''(t) + \omega_0^2 u(t) = (-A\omega_0 - A\omega_0 - B\omega_0^2 t + B\omega_0^2 t)\sin\omega_0 t + (B\omega_0 + B\omega_0 - A\omega_0^2 t + A\omega_0^2 t)\cos\omega_0 t = \frac{1}{m}F_0\cos(\omega_0 t)$$

$$\begin{cases} A = 0 \\ B = \dfrac{F_0}{2m\omega_0} \end{cases}$$

$$u(t) = c_1\cos\omega_0 t + c_2\sin\omega_0 t + \frac{F_0}{2m\omega_0}t\sin\omega_0 t$$

Interpretation:

Case 1) $\omega \neq \omega_0$

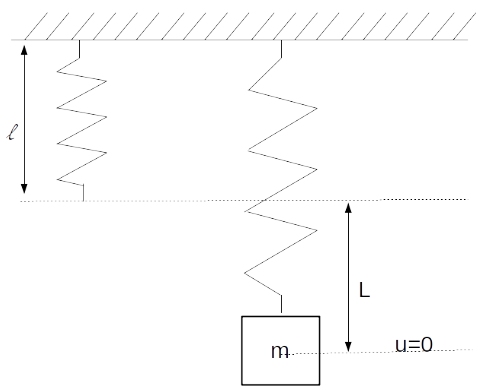
We get a som of two cosinus: $u(t) = R\cos(\omega_0 t - \delta) + \dfrac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}\cos\omega t$ which will act normally.

Case 2) $\omega = \omega_0$

When t becomes bigger, the amplitude will magnify and we get resonance.

Système masse-ressort classique

Setup Nous allons examiner le mouvement d'une masse suspendue à un ressort. Pour cela, nous disposons d'un ressort qui a une longueur l au repos (sans mass). Si nous accrochons ensuite une masse m à ce ressort, alors le ressort sera étiré d'une longueur L. La position pour laquelle la masse pend au repos est appelée le point d'équilibre.



Nous posons $u(t) =$ le déplacement de notre masse dans le temps. Ici, $u = 0$ est au point d'équilibre, et le déplacement sera positif vers le bas, et négatif vers le haut. D'après la mécanique, vous savez que la force totale peut s'écrire comme suit: $F = m \cdot a$. Donc ici nous avons $F(t, u, u') = m \cdot u''(t)$.

Formuler l'équation différentielle Dans le système classique, nous considérons deux forces qui agissent sur la masse, à savoir:

- la force gravitationelle: $F_g = m \cdot g$
- la force de rappel: $F_s = -k \cdot (L + u(t))$ (avec $k =$constante de ressort/constante de raideur du ressort)

Au point d'équilibre $u = 0$, les forces sur la masse sont égales $m \cdot g = k \cdot L$. Si nous intégrons tout cela dans notre équation, alors nous trouvons:

$$F(t, u, u') = m \cdot u''(t)$$

$$F_g + F_s = m \cdot u''(t)$$

$$mg - k(L + u) = mu''$$

$$-ku = mu''$$

$$0 = mu'' + ku$$

Exercice 1. Résoudre l'équation différentielle trouvée $0 = m \cdot u''(t) + k \cdot u(t)$. Supposons que $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, et prenons comme conditions initiales $u(0) = u_0$ le déplacement initial par rapport au point d'équilibre et $u'(0) = v_0$ la vitesse initiale.

$$m\lambda^2 + k = 0$$

$$\lambda^2 = -\frac{k}{m} \leftrightarrow \lambda = \pm \sqrt{\frac{k}{m}}\, i = \pm\omega_0 i$$

$$\Rightarrow u(t) = c_1 \cos(\omega_0 t) + c_2 \sin(\omega_0 t)$$

Using $u(0) = u_0 \leftrightarrow c_1 = u_0$ and $u'(t) = -\omega_0 c_1 \sin(\omega_0 t) + c_2 \omega_0 \cos(\omega_0 t), u'(0) = v_0 \leftrightarrow v_0 = c_2 \omega_0$

$$\Rightarrow u(t) = u_0 \cos \omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t$$

L'amplitude et l'angle de phase Nous avons constaté que notre déplacement peut s'écrire $u(t) = u_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)$, il peut également s'écrire comme $u(t) = R \cos(\omega_0 t - \delta)$. R est appelée l'amplitude et δ l'angle de phase du déplacement.

Exercice 2. Vérifiez que les équations $u(t) = u_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)$ et $u(t) = R\cos(\omega_0 t - \delta)$ sont identiques.

Trouvez également les formules pour trouver R et δ en fonction de u_0, v_0 et ω_0.

$$u(t) = R\cos(\omega_0 t - \delta) = R\cos(\omega_0 t)\cos\delta + R\sin(\omega_0 t)\sin\delta$$

$$u(t) = (R\cos\delta)\cos\omega_0 t + (R\sin\delta)\sin\omega_0 t$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u_0 = R\cos\delta \\ \frac{v_0}{\omega_0} = R\sin\delta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} R^2\cos^2\delta + R^2\sin^2\delta = R^2 = u_0^2 + (\frac{v_0}{\omega_0})^2 \\ \frac{R\cos\delta}{R\sin\delta} = \tan\delta = \frac{u_0\omega_0}{v_0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} R = \sqrt{u_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}} \\ \tan^{-1}\frac{\omega_0 u_0}{v_0} \end{cases}$$

Le système masse-ressort-amortisseur

Pour le système masse-ressort-amortisseur nous prenons en compte une troisième force:

- l'amortissement du ressort, qui a un effet négatif sur la vitesse: $F_d = -c \cdot u'(t)$

Nous trouvons donc une nouvelle équation différentielle:

$$F(t, u, u') = m \cdot u''(t)$$

$$F_g + F_s + F_d = m \cdot u''(t)$$

$$mg - k(L+u) - cu' = mu''$$

$$-ku - cu' = mu''$$

$$0 = mu'' + cu' + ku$$

Exercice 3. Résoudre l'équation différentielle trouvée $0 = mu''(t) + cu'(t) + ku(t)$. Identifiez trois cas différents en fonction des valeurs de c, m et k. Pour chacun des trois cas, voyez également ce qui arrive au déplacement, l'oscillation est-elle atténuée? Conseil: regardez la limite $u(t)$ pour $t \to \infty$.

$$m\lambda^2 + c\lambda + k = 0 \leftrightarrow D = c^2 - 4mk \leftrightarrow \begin{cases} 1) \quad c^2 - 4mk > 0 \\ 2) \quad c^2 - 4mk = 0 \\ 3) \quad c^2 - 4mk < 0 \end{cases}$$

$$1) \quad c^2 - 4mk > 0$$

$\lambda_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} = -\frac{c}{2m}(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4mk}{c^2}})$ with $c^2 - 4mk > 0 \leftrightarrow \frac{4mk}{c^2} < 1$

using this we known that $1 - \frac{4mk}{c^2} < 1 \leftrightarrow 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4mk}{c^2}} > 0$, thus $\lambda_1, \lambda_2 < 0$

$u(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$

$\lim_{t\to\infty} u(t) = 0$, because $\lambda_1, \lambda_2 < 0$

2) $\quad c^2 - 4mk = 0$

$\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{c}{2m}$

$u(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-t\cdot\frac{c}{2m}}$

$\lim_{t\to+\infty} u(t)(= 0 + 0\cdot\infty) = 0 + \lim_{t\to+\infty} c_2 \frac{t}{e^{t\cdot\frac{c}{2m}}} \overset{H}{=} \lim_{t\to+\infty} c_2 \frac{1}{\frac{c}{2m}\cdot e^{t\cdot\frac{c}{2m}}} = 0$

3) $\quad c^2 - 4mk < 0$

$\lambda_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} = \lambda \pm \mu i$

$u(t) = e^{\lambda t}(c_1 \cos\mu t + c_2 \sin\mu t)$ using $\begin{cases} c_1 = R\cos\delta \\ c_2 = R\sin\delta \end{cases}$, we find $u(t) = Re^{\lambda t}\cos(\mu t - \delta)$

$\lim_{t\to+\infty} u(t) = 0\cdot\cos(\mu t - \delta) = 0$ because $\lambda < 0$ and $\cos(\mu t - \delta) \in [-1, 1]$.

Oscillation forcée

Pour l'oscillation forcée, nous partirons du système classique de masse-ressort sans amortissement, mais cette fois, la masse est également soumise à une force externe et périodique. On obtient alors une équation différentielle:

$F(t, u, u') = m\cdot u''(t)$

$F_g + F_s + F(t) = m\cdot u''(t)$

$mg - k(L + u) + F(t) = mu''$

$-ku + F(t) = mu''$

$\frac{1}{m}F(t) = u'' + \frac{k}{m}u$

$\frac{1}{m}F(t) = u'' + \omega_0^2 u$

Nous prenons comme force extérieure $F(t) = F_0\cos(\omega t)$, et nous trouvons ensuite: $u''(t) + \omega_0^2 u(t) = \frac{1}{m}F(t)$.

Exercice 4. Résoudre cette équation différentielle non homogène. N'oubliez pas que vous pouvez distinguer deux cas différents, à savoir $\omega_0 = \omega$ et $\omega_0 \neq \omega$.

$$u''(t) + \omega_0^2 u(t) = \frac{1}{m} F_0 \cos(\omega t)$$

$$\lambda^2 + \omega_0^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm \omega_0 i$$

We find $u_H(t) = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t$

Case 1) $\omega \neq \omega_0$

$$u_P(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

$$u_P'(t) = -A\omega \sin \omega t + B\omega \cos \omega t$$

$$u_P''(t) = -A\omega^2 \cos \omega t - B\omega^2 \sin \omega t$$

$$u''(t) + \omega_0^2 u(t) = (-\omega^2 + \omega_0^2) A \cos \omega t + (-\omega^2 + \omega_0^2) B \sin \omega t = \frac{1}{m} F_0 \cos(\omega t) \quad \begin{cases} A = \dfrac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \\ B = 0 \end{cases}$$

$$u(t) = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t + \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos \omega t$$

Case 2) $\omega = \omega_0$

$$u_P(t) = At \cos \omega_0 t + Bt \sin \omega_0 t$$

$$u_P'(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t - A\omega_0 t \sin \omega_0 t + B\omega_0 t \cos \omega_0 t$$

$$u_P''(t) = -A\omega_0 \sin \omega_0 t + B\omega_0 \cos \omega_0 t - A\omega_0 \sin \omega_0 t + B\omega_0 \cos \omega_0 t - A\omega_0^2 t \cos \omega_0 t - B\omega_0^2 t \sin \omega_0 t$$

$$u''(t) + \omega_0^2 u(t) = (-A\omega_0 - A\omega_0 - B\omega_0^2 t + B\omega_0^2 t) \sin \omega_0 t + (B\omega_0 + B\omega_0 - A\omega_0^2 t + A\omega_0^2 t) \cos \omega_0 t = \frac{1}{m} F_0 \cos(\omega_0 t)$$

$$\begin{cases} A = 0 \\ B = \dfrac{F_0}{2m\omega_0} \end{cases}$$

$$u(t) = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t + \frac{F_0}{2m\omega_0} t \sin \omega_0 t$$

Interpretation:

Case 1) $\omega \neq \omega_0$

We get a som of two cosinus: $u(t) = R\cos(\omega_0 t - \delta) + \dfrac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}\cos\omega t$ which will act normally.

Case 2) $\omega = \omega_0$

When t becomes bigger, the amplitude will magnify and we get resonance.