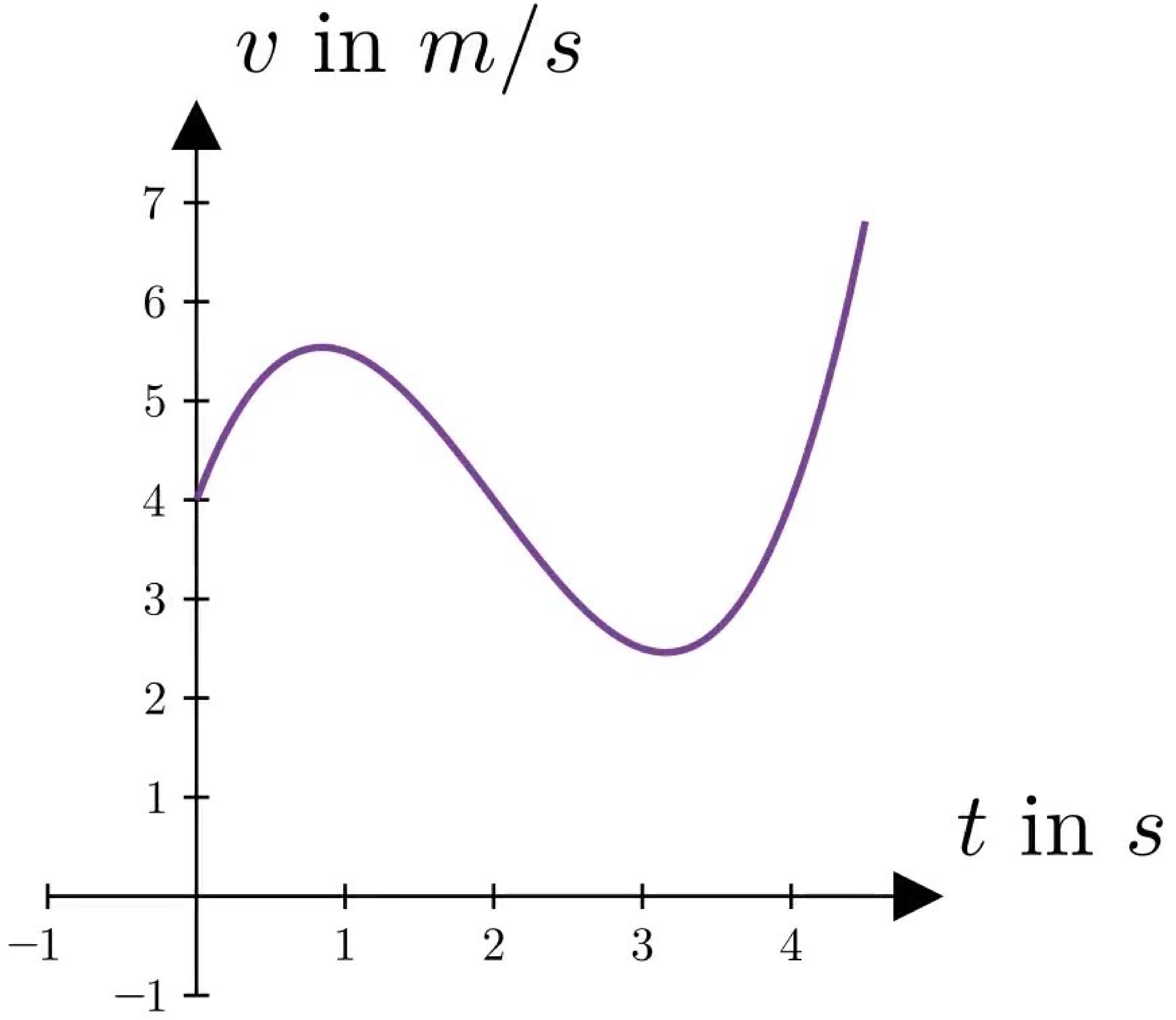
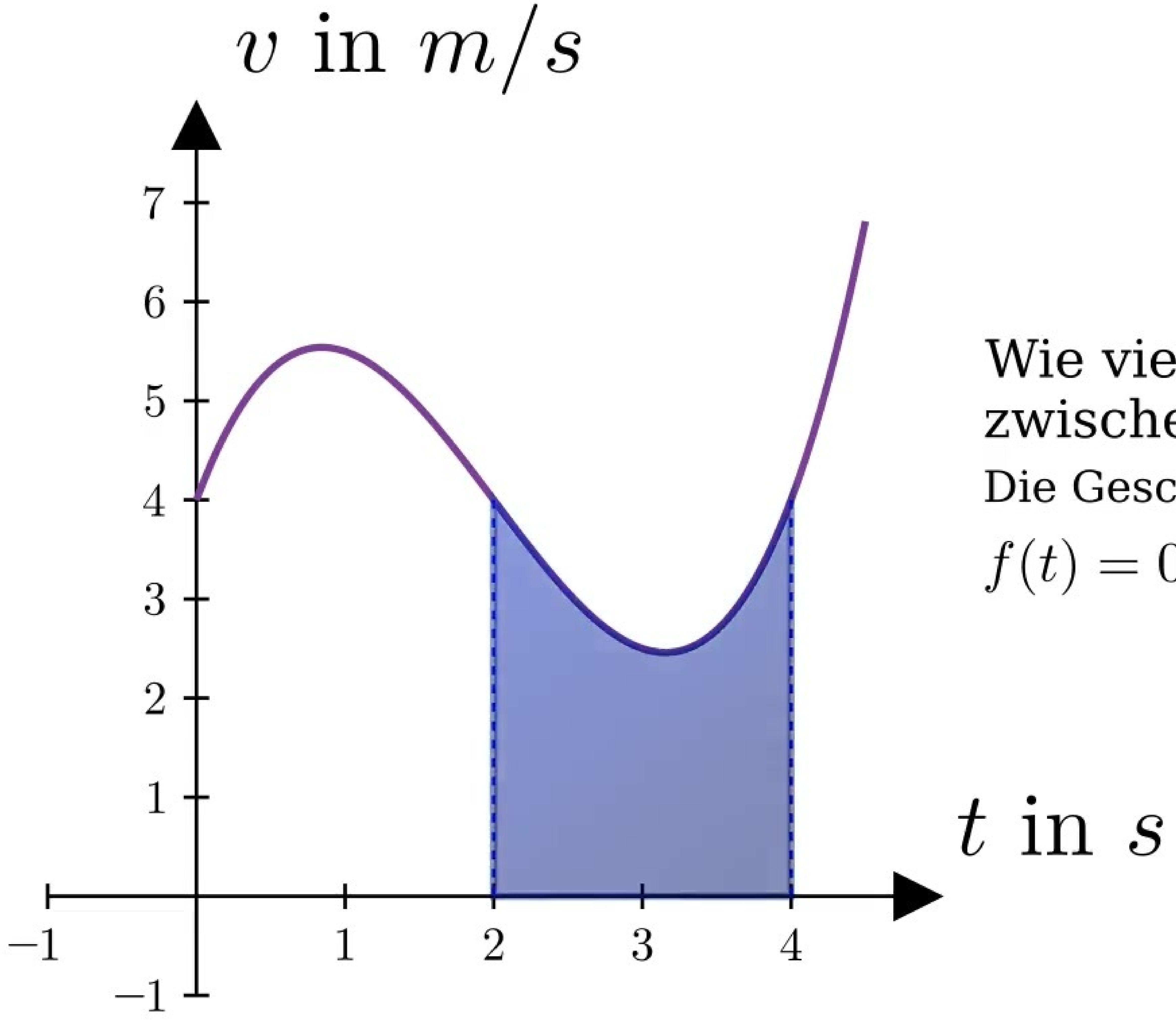
Herleitung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung zur Ermittlung der Maßzahl krummlinig begrenzter Flächen mit Hilfe des bestimmten Integrals

Inhaltsverzeichnis:

1. Themeneinführung



1. Themeneinführung

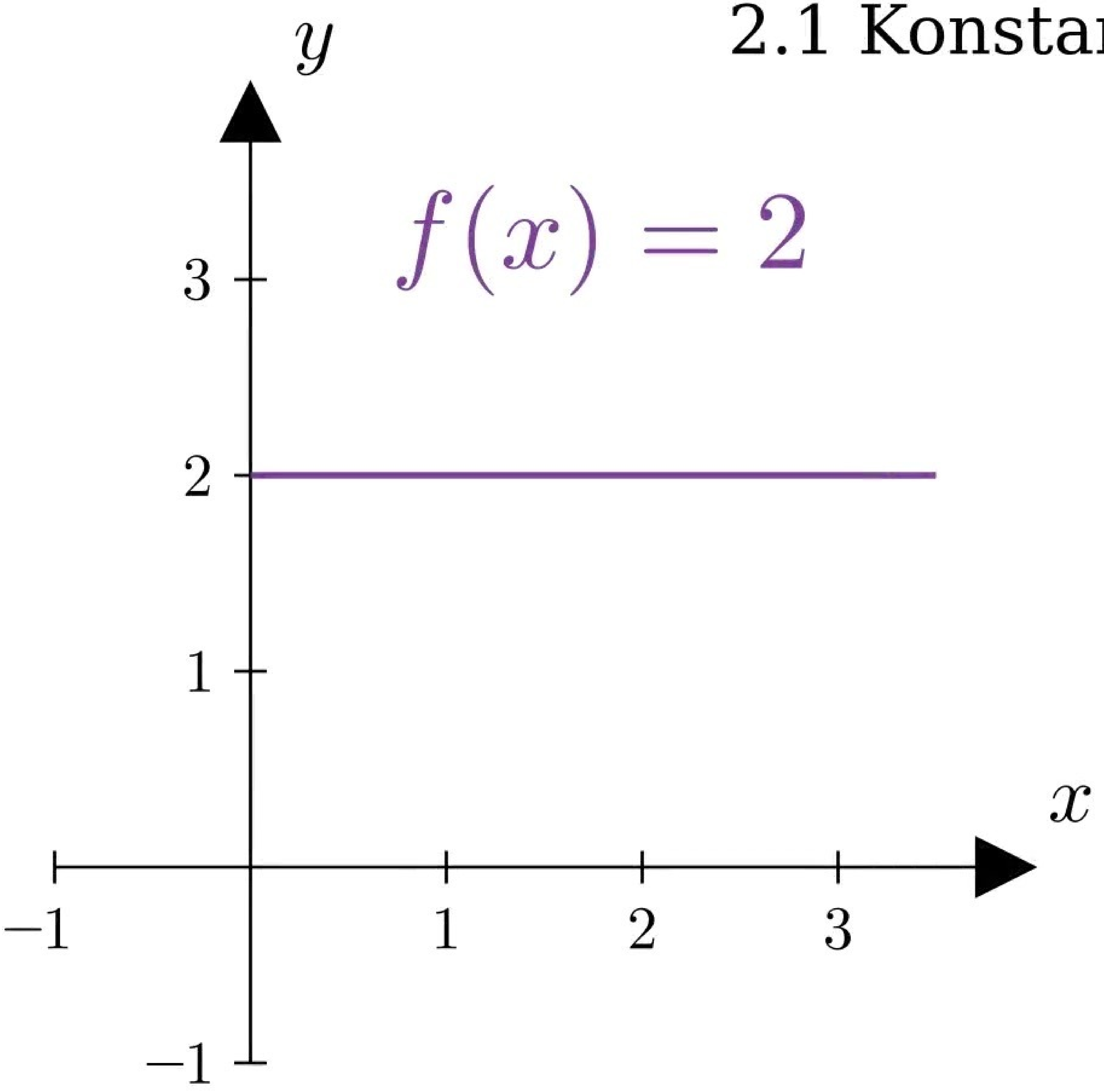


Wie viel Meter hat der Fahrer zwischen Sekunde 2 und 4 zurückgelegt?

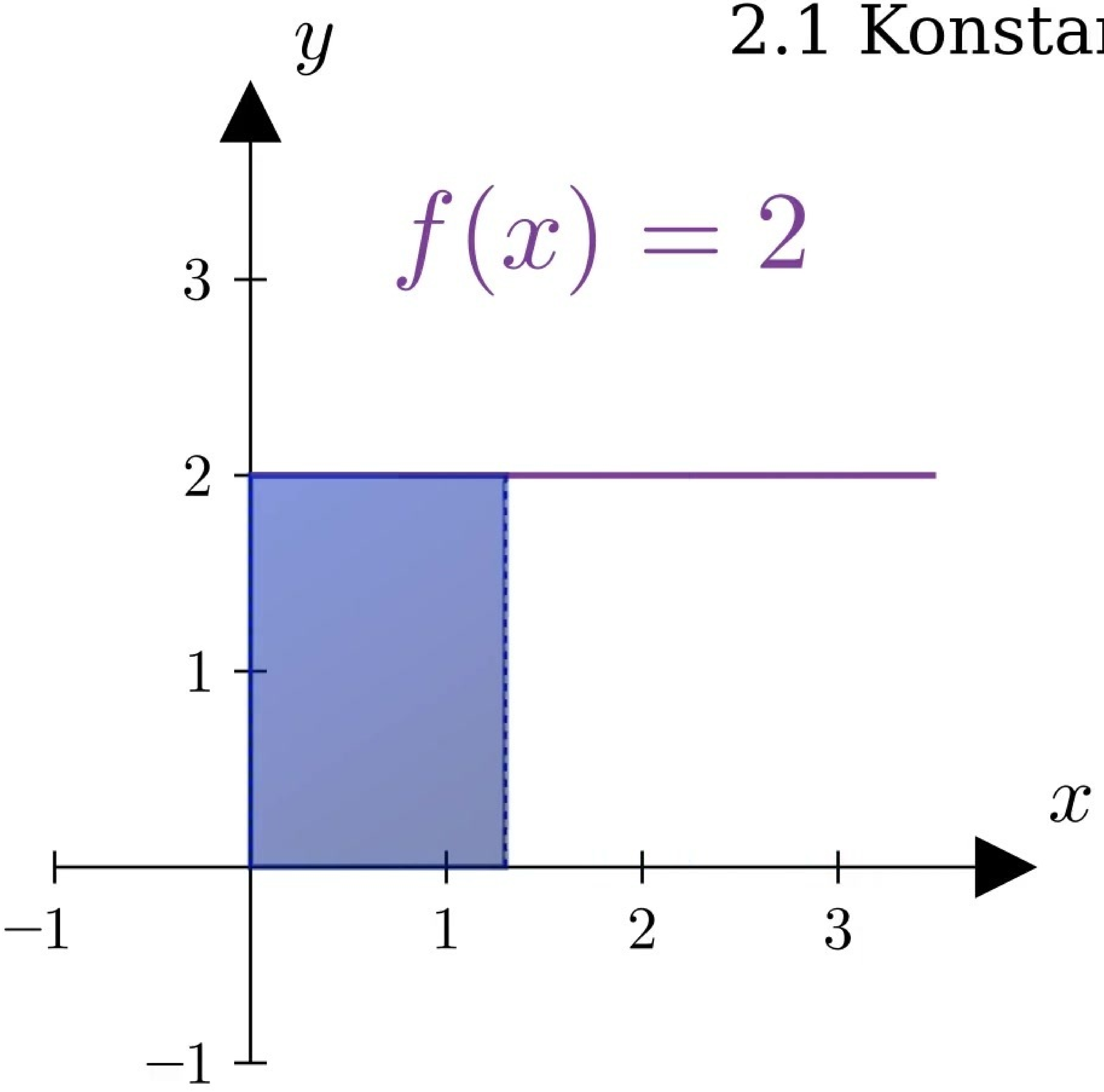
Die Geschwindigkeit verläuft nach der Funktion:

$f(t) = 0,5t^3 - 3t^2 + 4t + 4$

2.1 Konstante Funktion

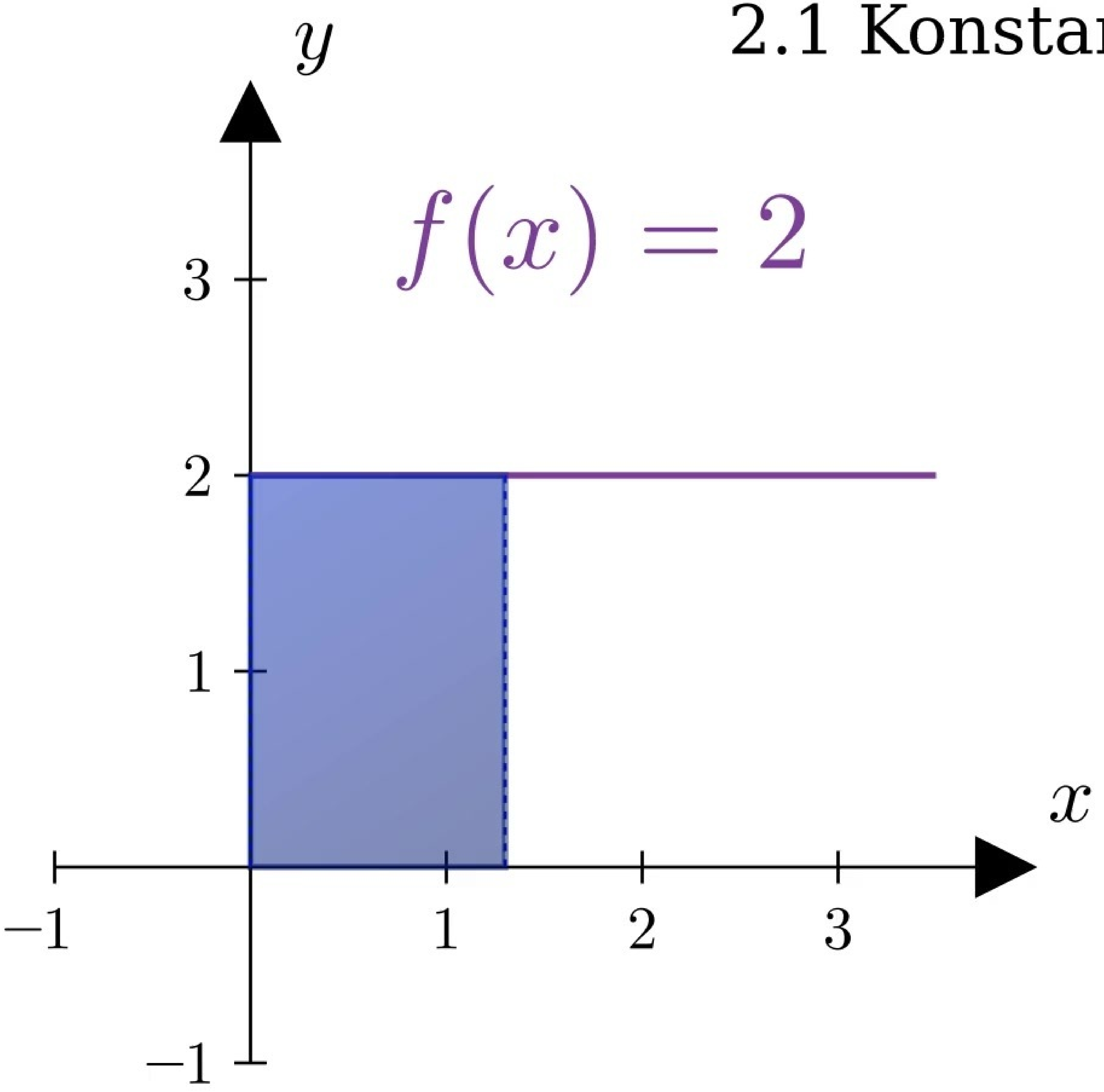


2.1 Konstante Funktion



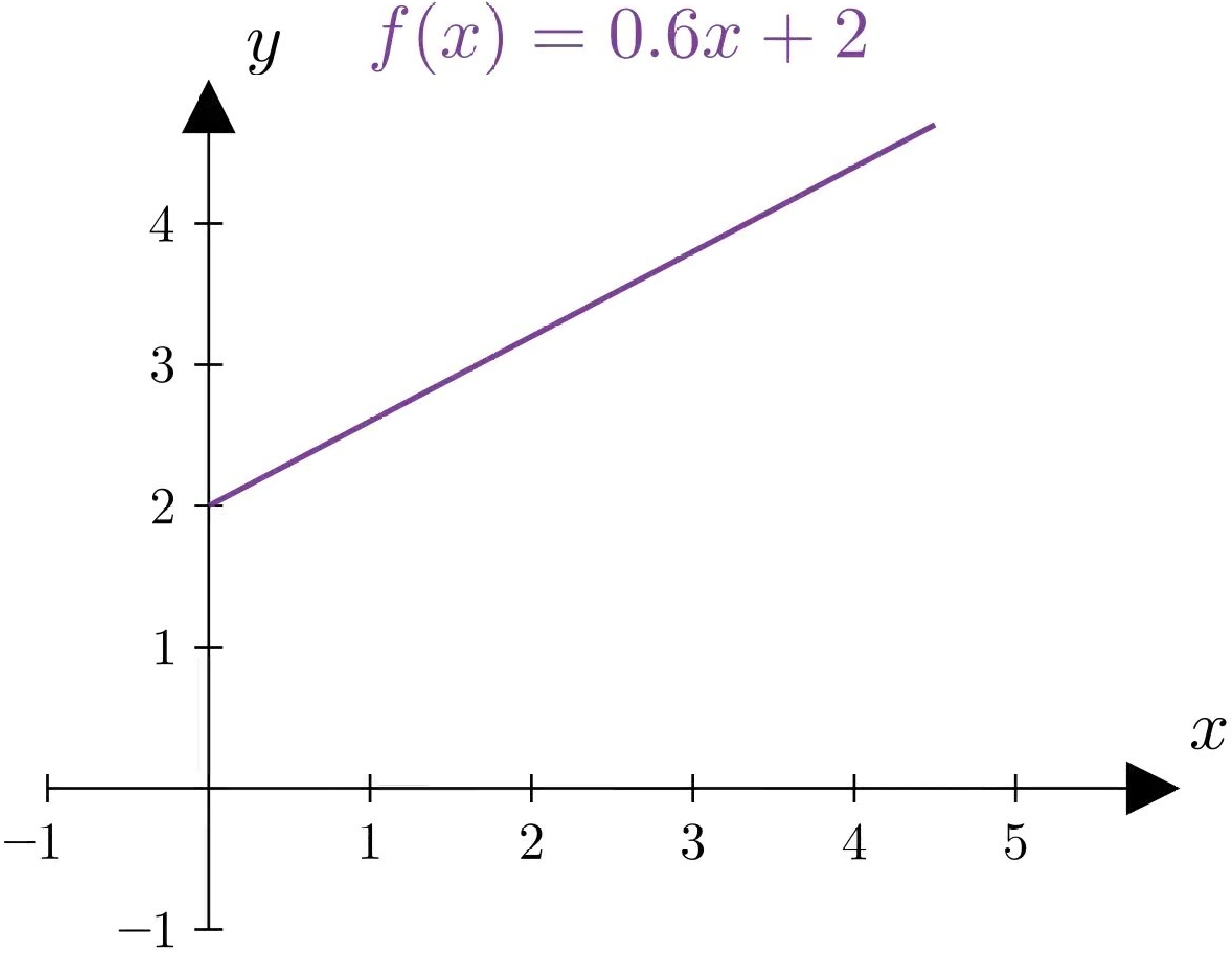
Fläche im Intervall $[0; x]$?

2.1 Konstante Funktion



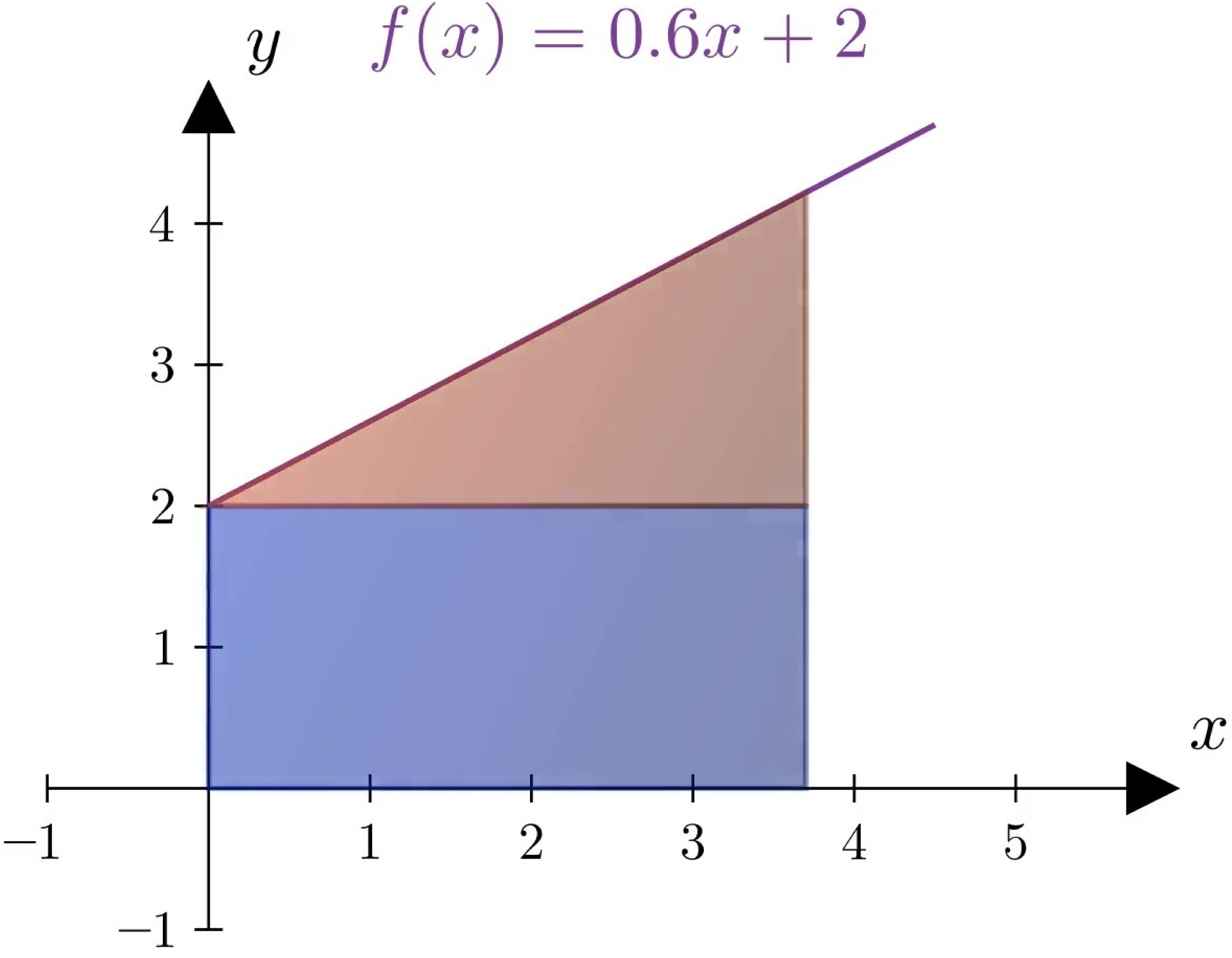
Fläche im Intervall $[0; x]$?

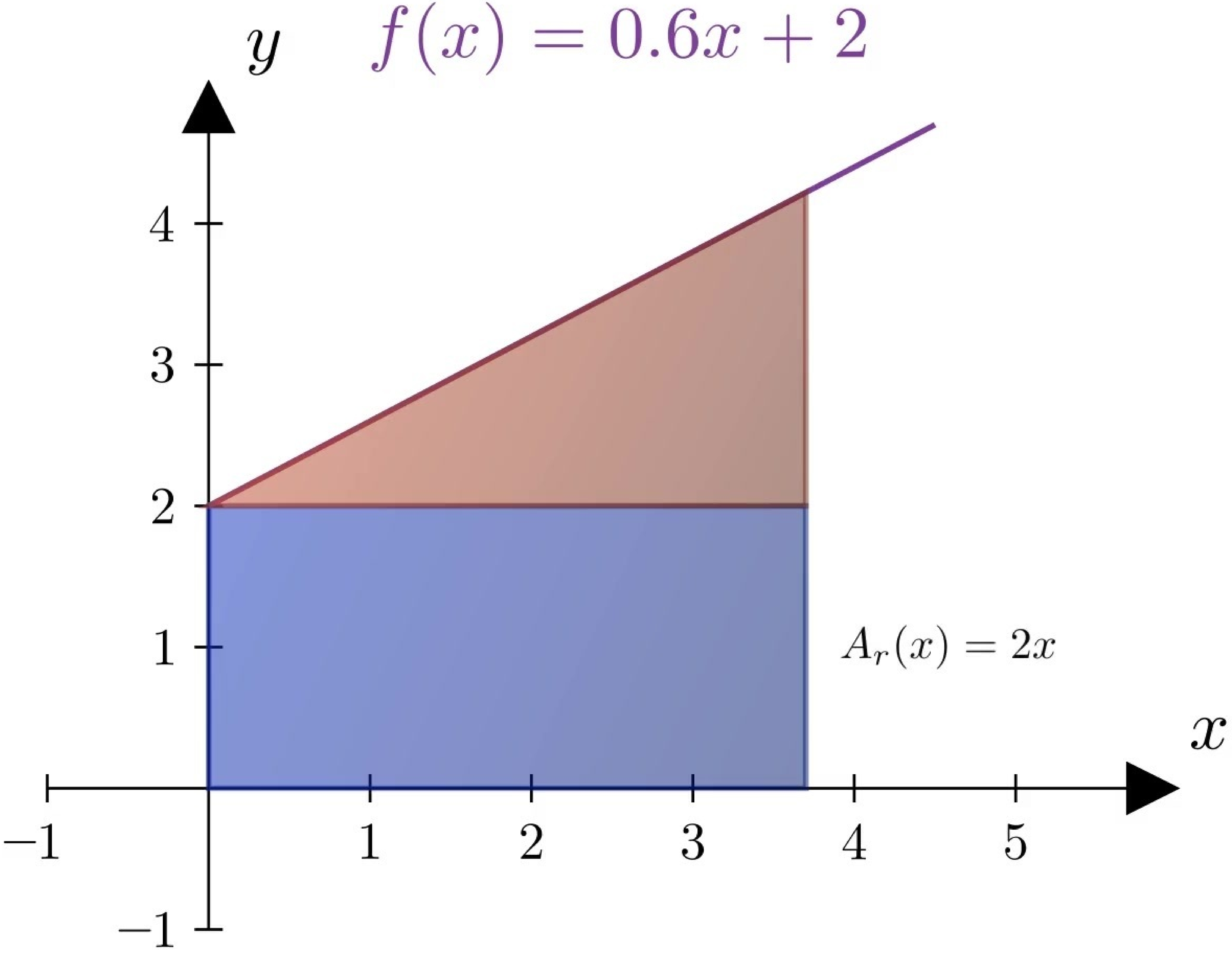
$$A(x) = 2x$$



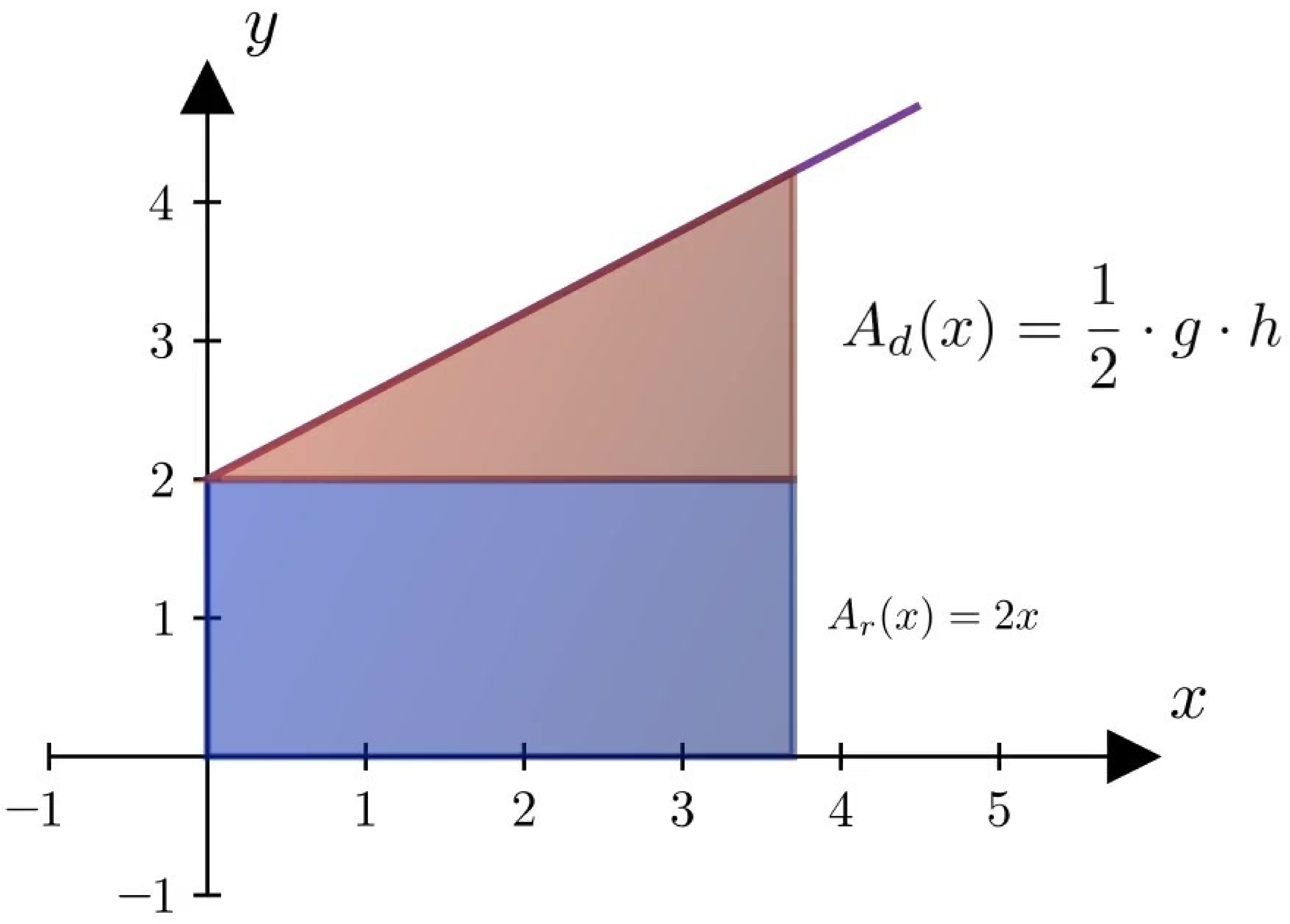
$f(x) = 0.6x + 2$
y
x
4
3
2
1
−1
−1
1
2
3
4
5

$f(x) = 0.6x + 2$

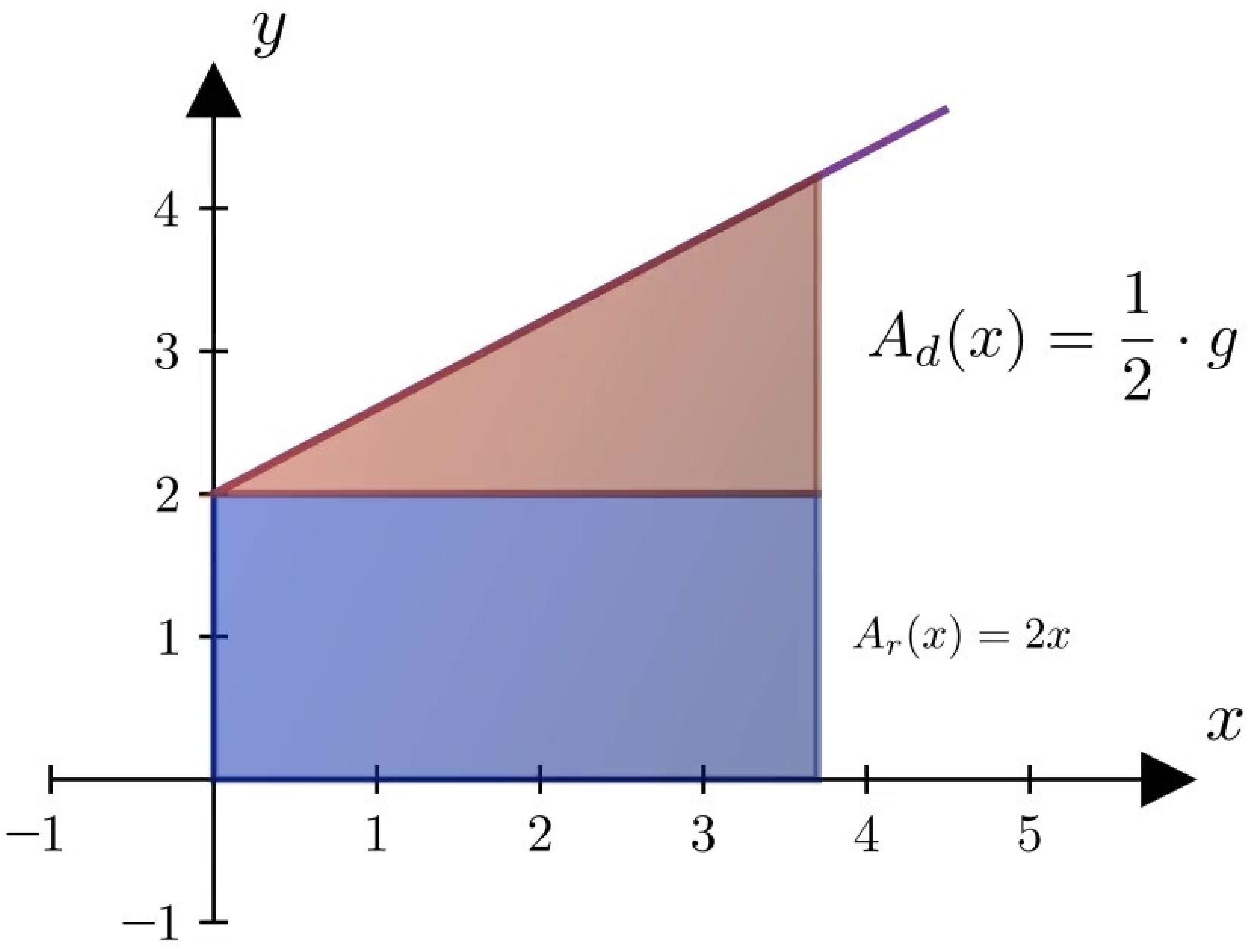



$f(x) = 0.6x + 2$
y
x
$A_r(x) = 2x$
4
3
2
1
−1
−1
1
2
3
4
5

$$f(x) = 0.6x + 2$$



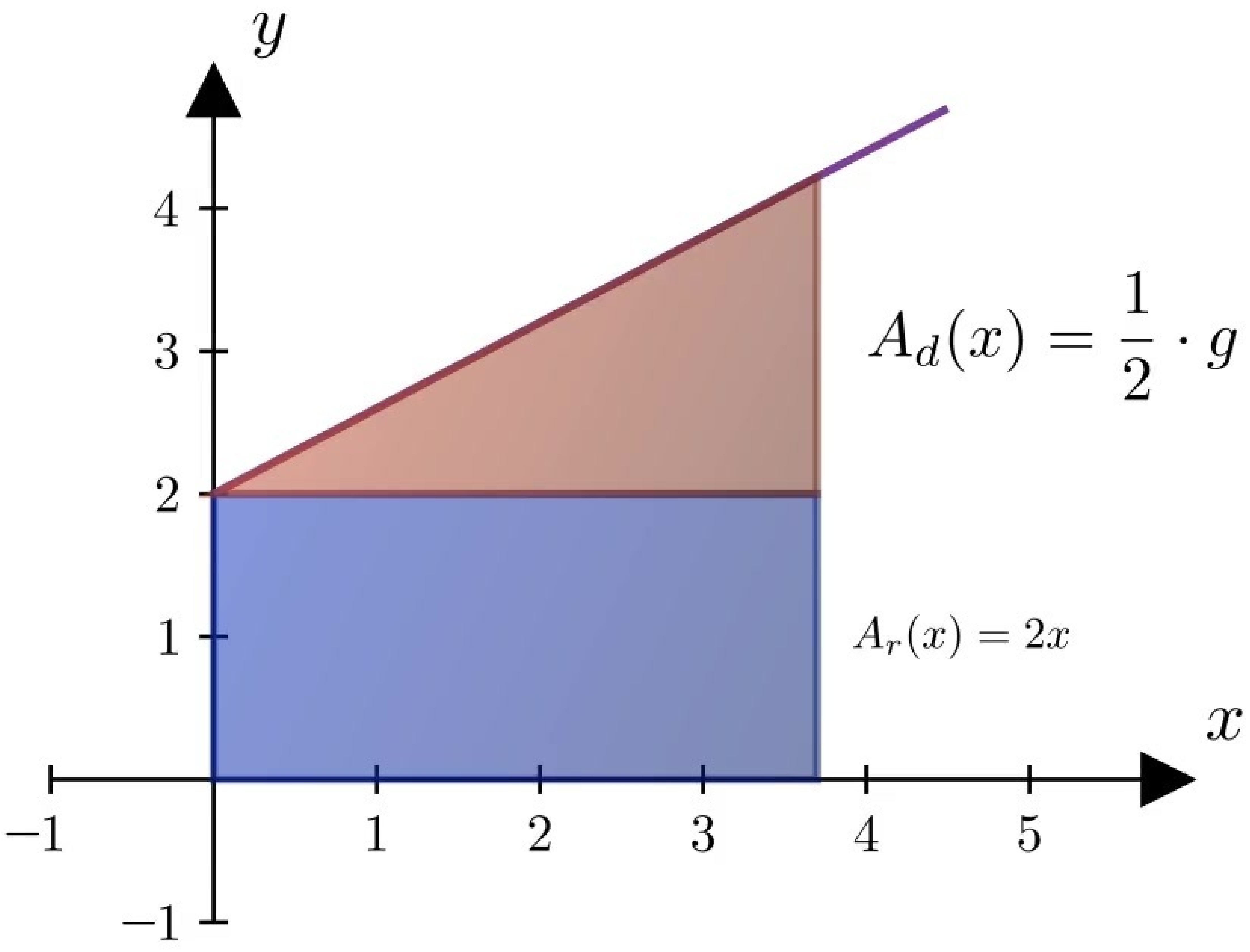
$$f(x) = 0.6x + 2$$



$$A_d(x) = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h \quad = \frac{1}{2} \cdot x \cdot f(x) - 2$$

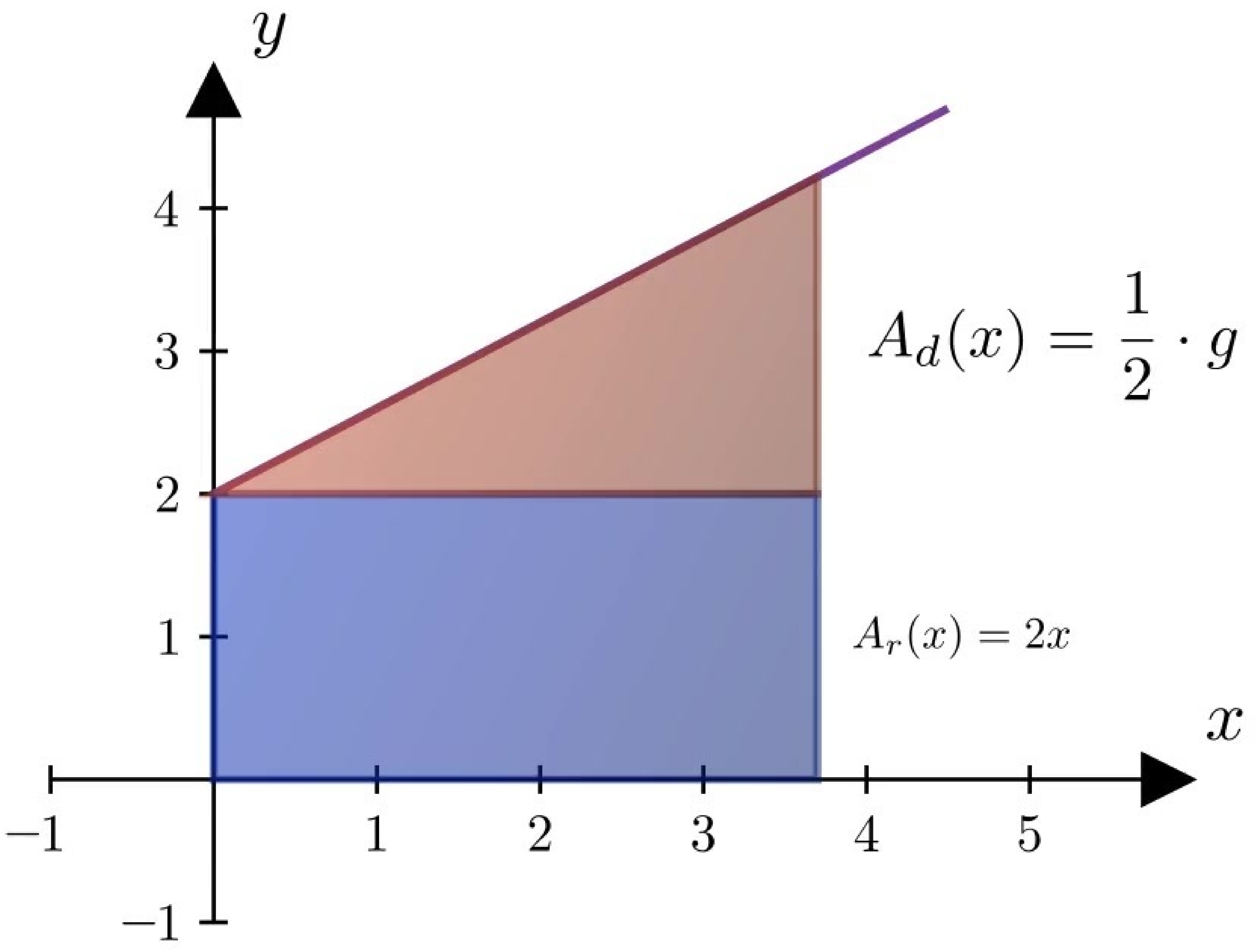
$$A_r(x) = 2x$$

$$f(x) = 0.6x + 2$$



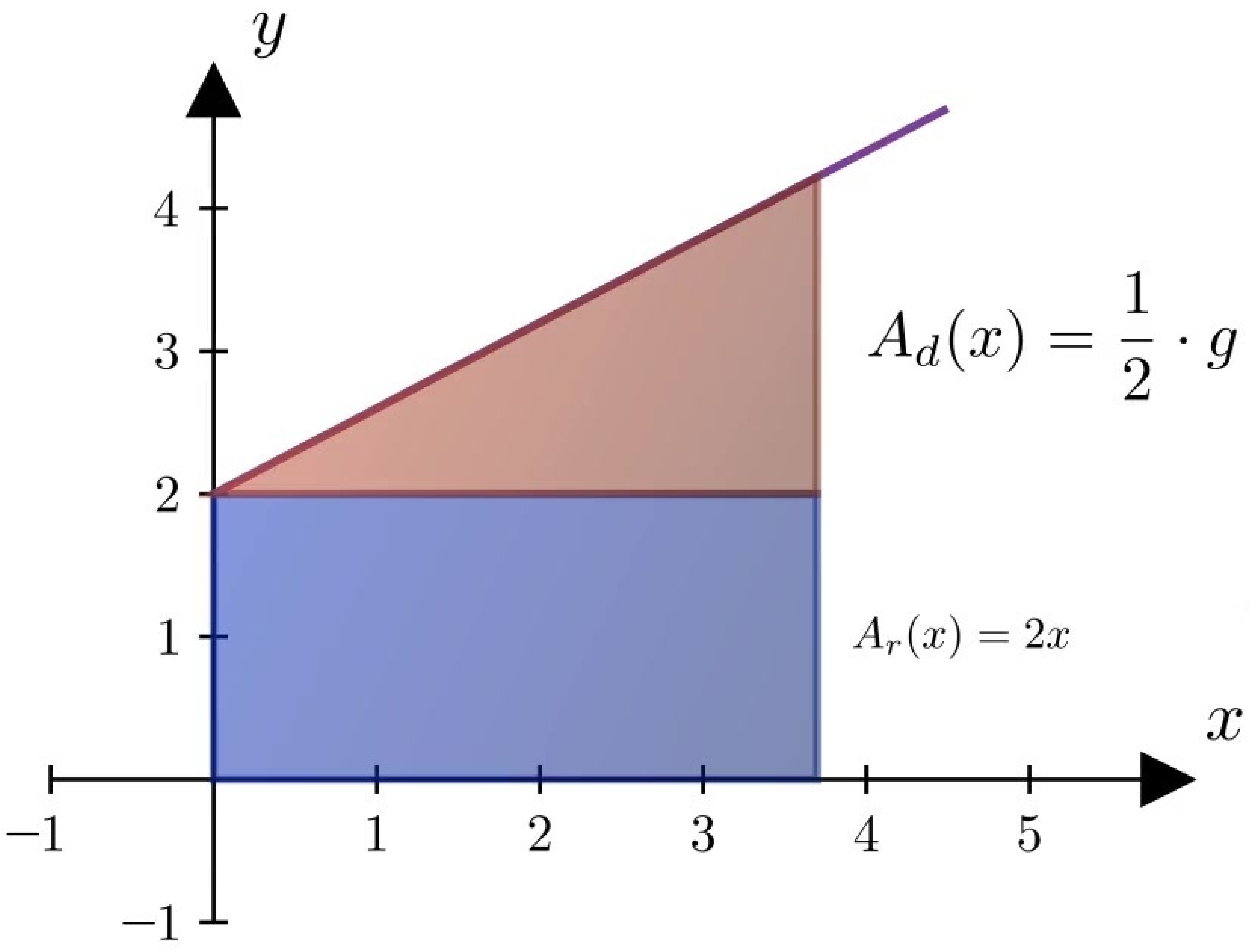
$$A_d(x) = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h \;\; = \frac{1}{2} \cdot x \cdot f(x) - 2 \;\; = \frac{1}{2} \cdot x \cdot 0{,}6x + 2 - 2$$

$$f(x) = 0.6x + 2$$



$$A_d(x) = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h \quad = \frac{1}{2} \cdot x \cdot f(x) - 2 \quad = \frac{1}{2} \cdot x \cdot 0,6x + 2 - 2 \quad = 0,3x^2$$

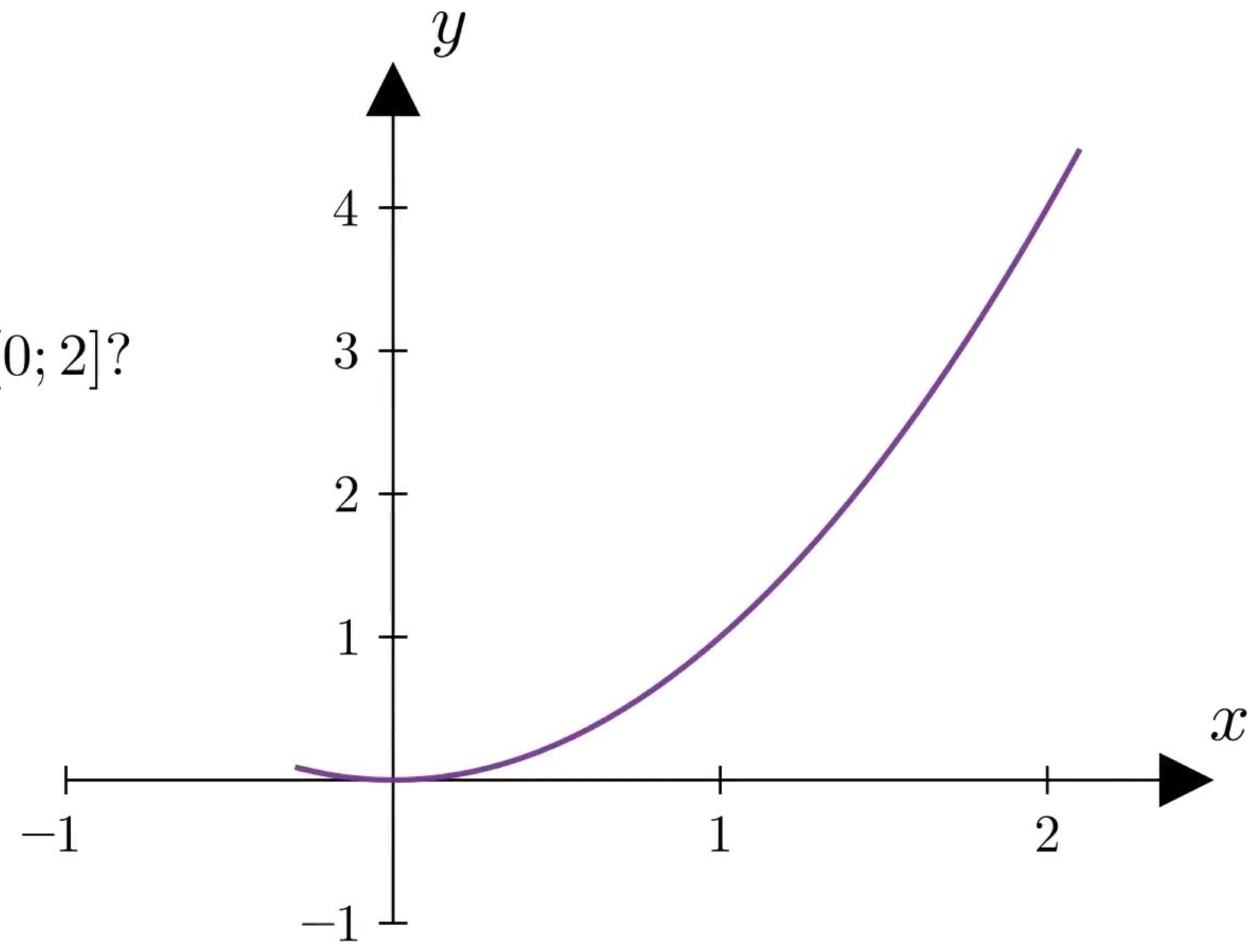
$$f(x) = 0.6x + 2$$



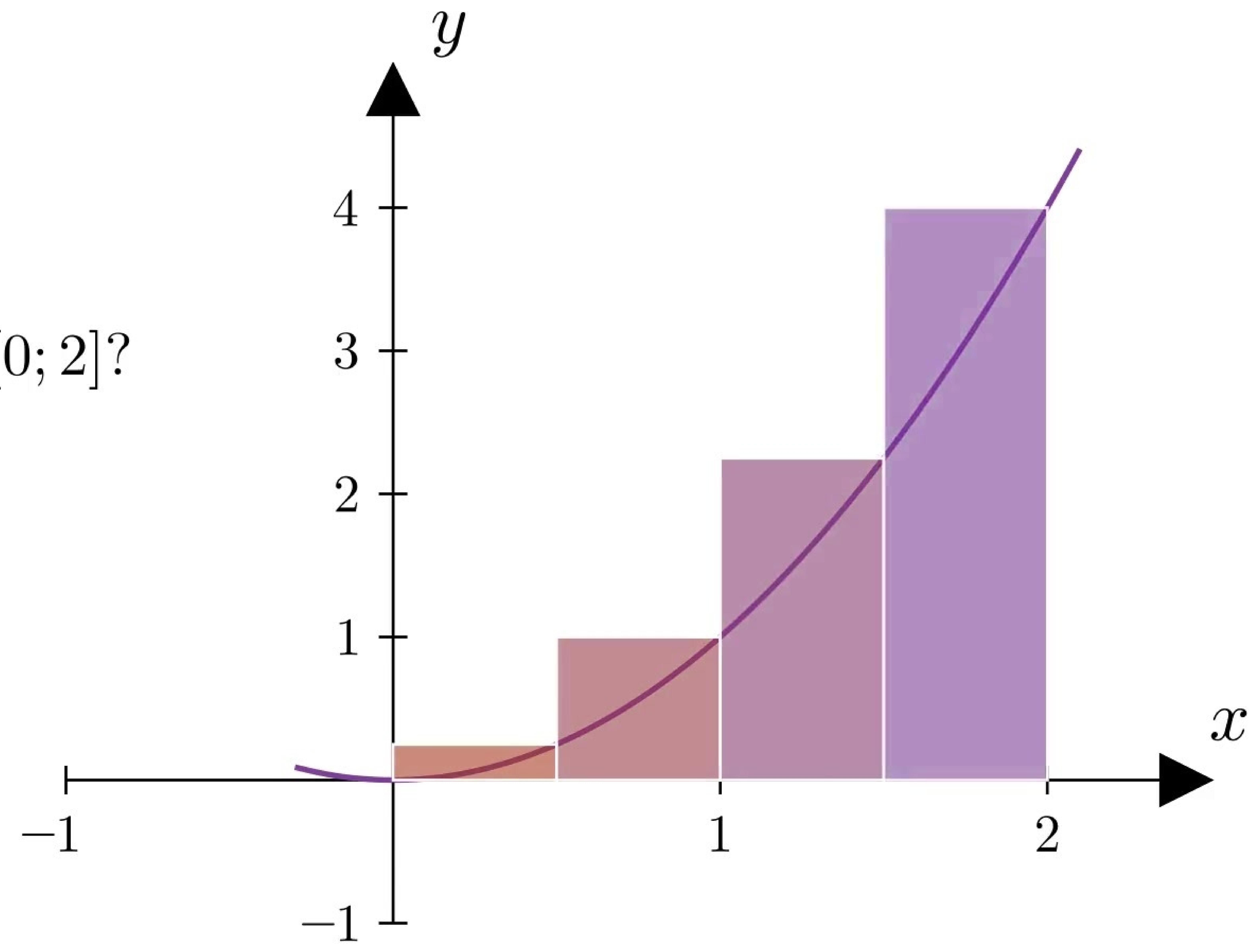
$$A_d(x) = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h \;= \frac{1}{2} \cdot x \cdot f(x) - 2 \;= \frac{1}{2} \cdot x \cdot 0,6x + 2 - 2 \;= 0,3x^2$$

$$A(x) = A_r + A_d = 0,3x^2 + 2x$$

Fläche im Intervall $[0; 2]$?

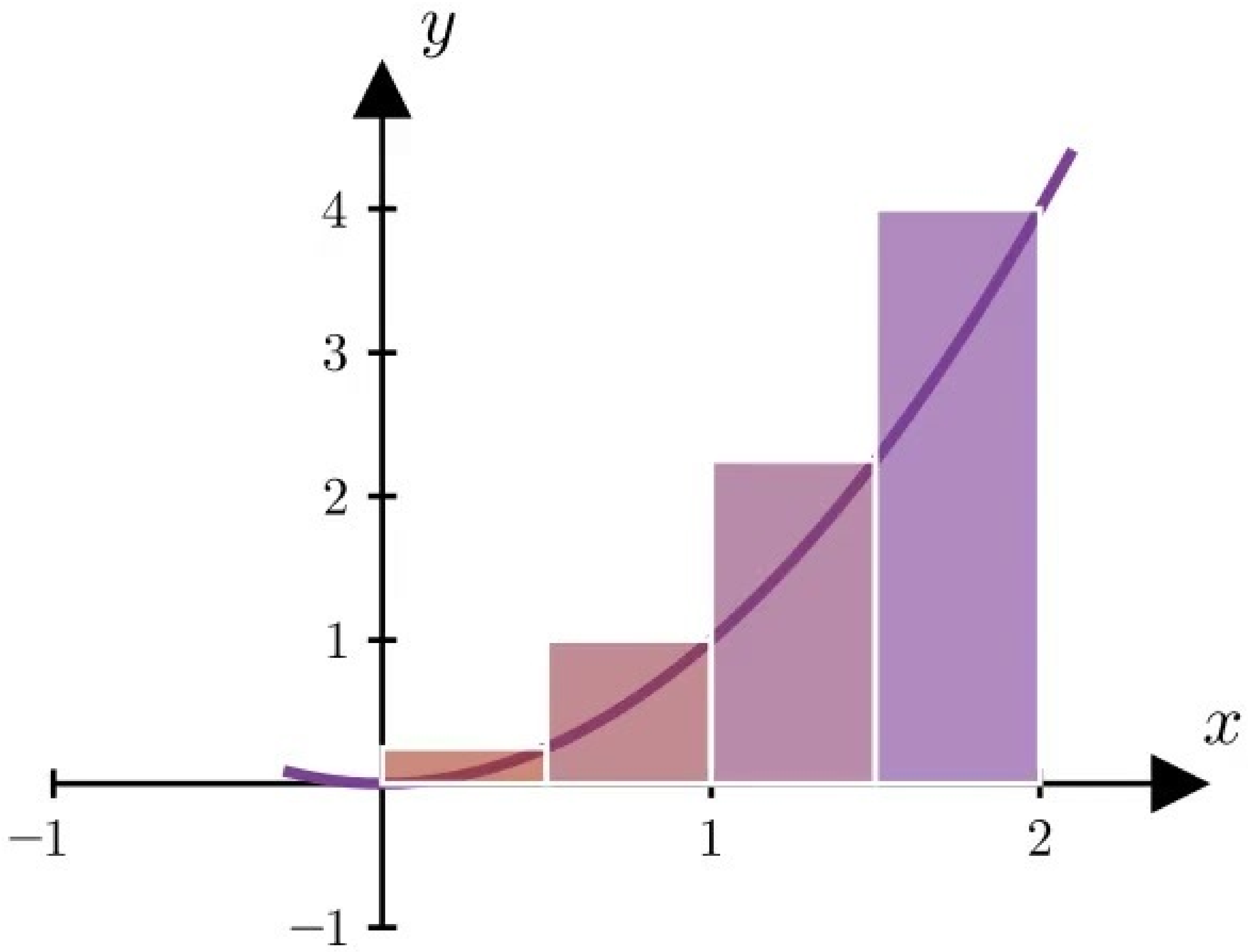


Fläche im Intervall $[0;2]$?

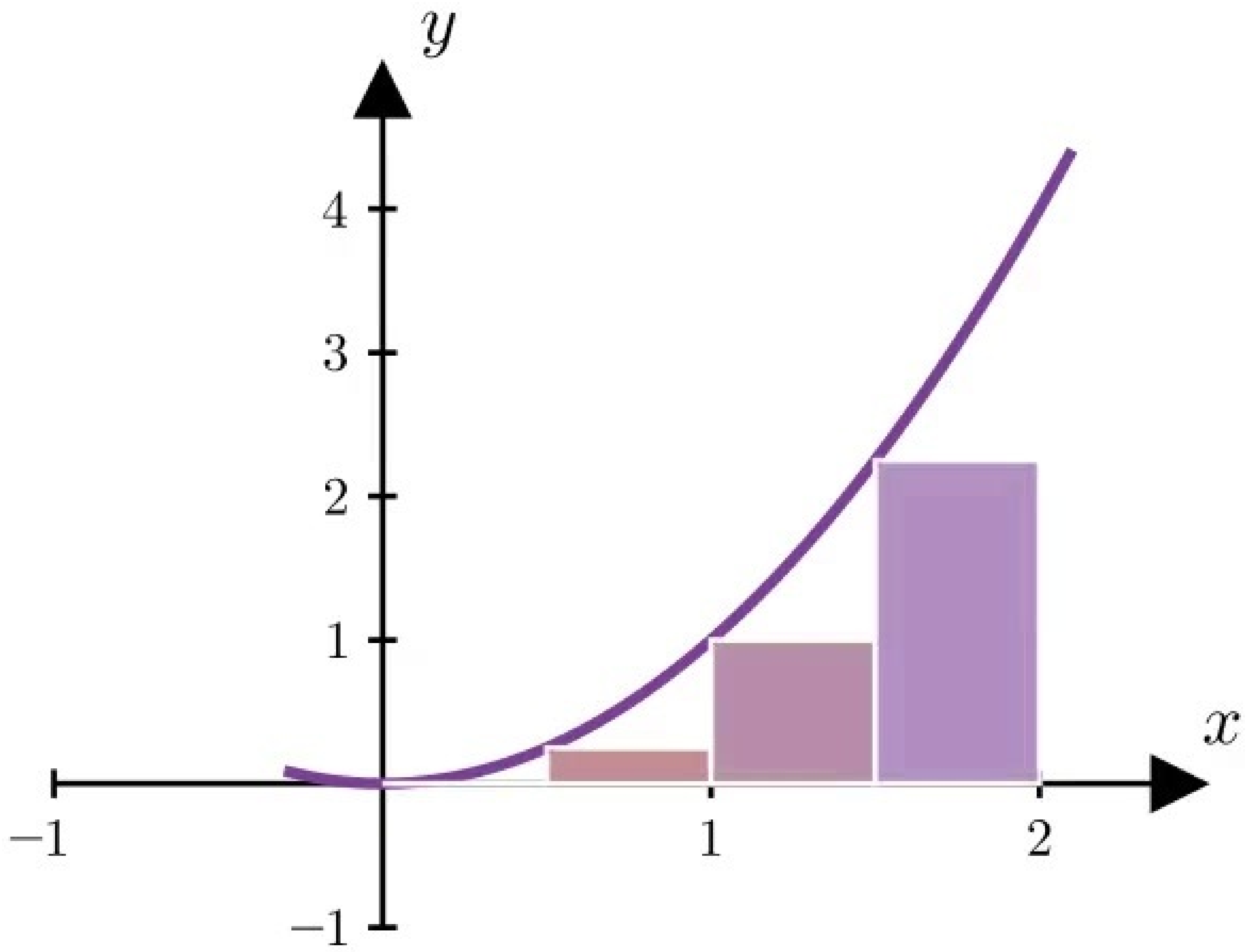


3.1 Approximation des Flächeninhalts mit wenigen Rechtecken

Obersumme O_n

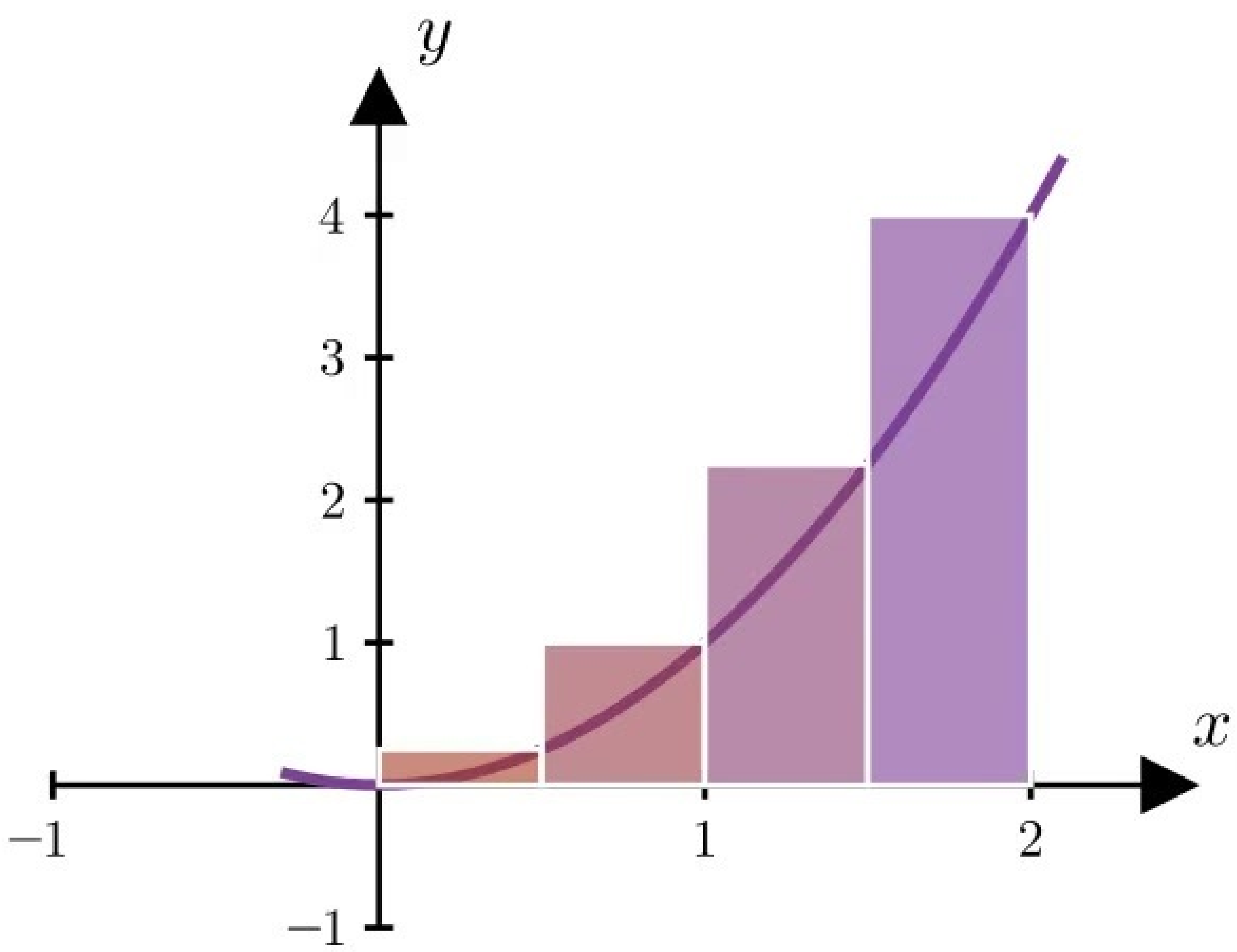


Untersumme U_n

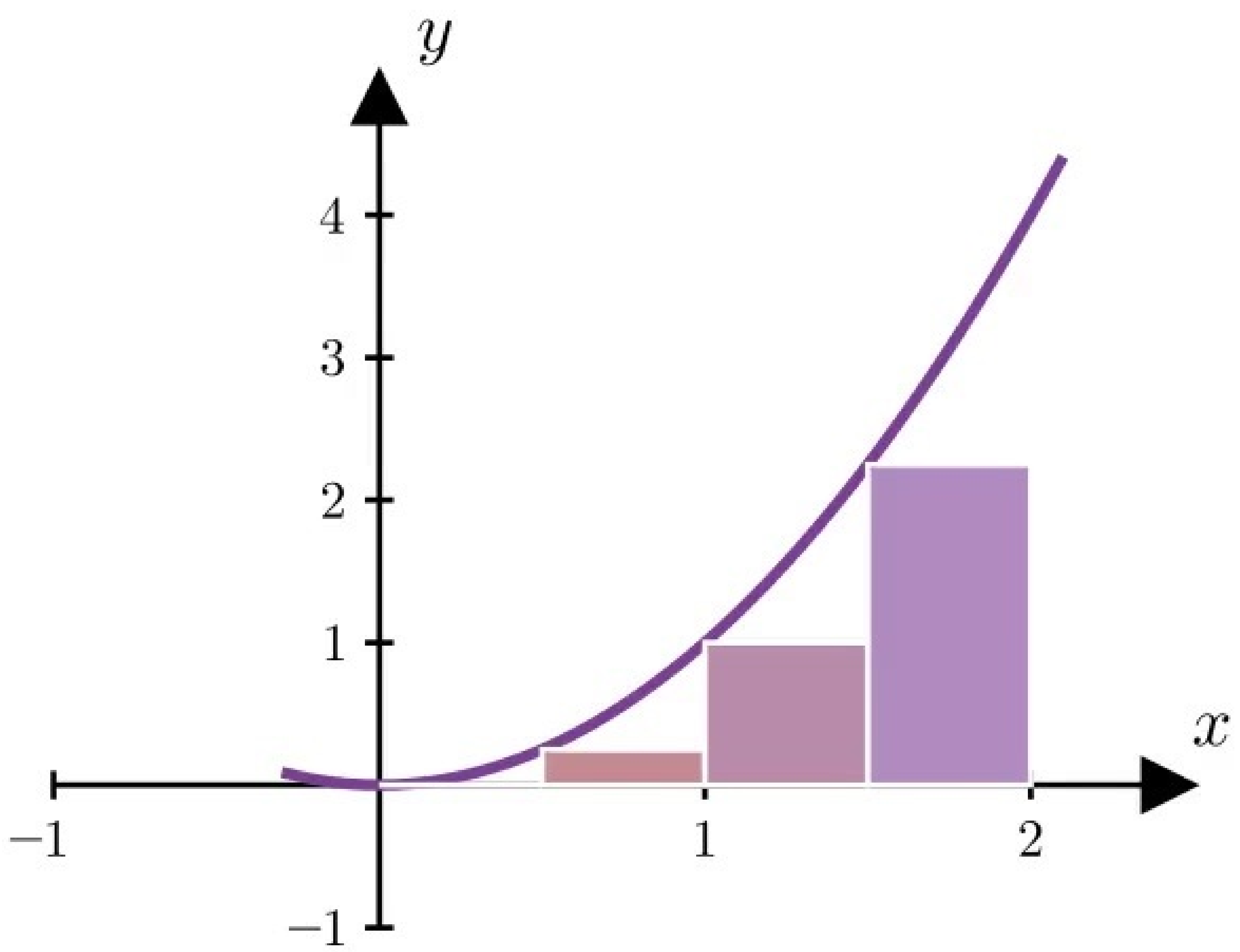


3.1 Approximation des Flächeninhalts mit wenigen Rechtecken

Obersumme O_n



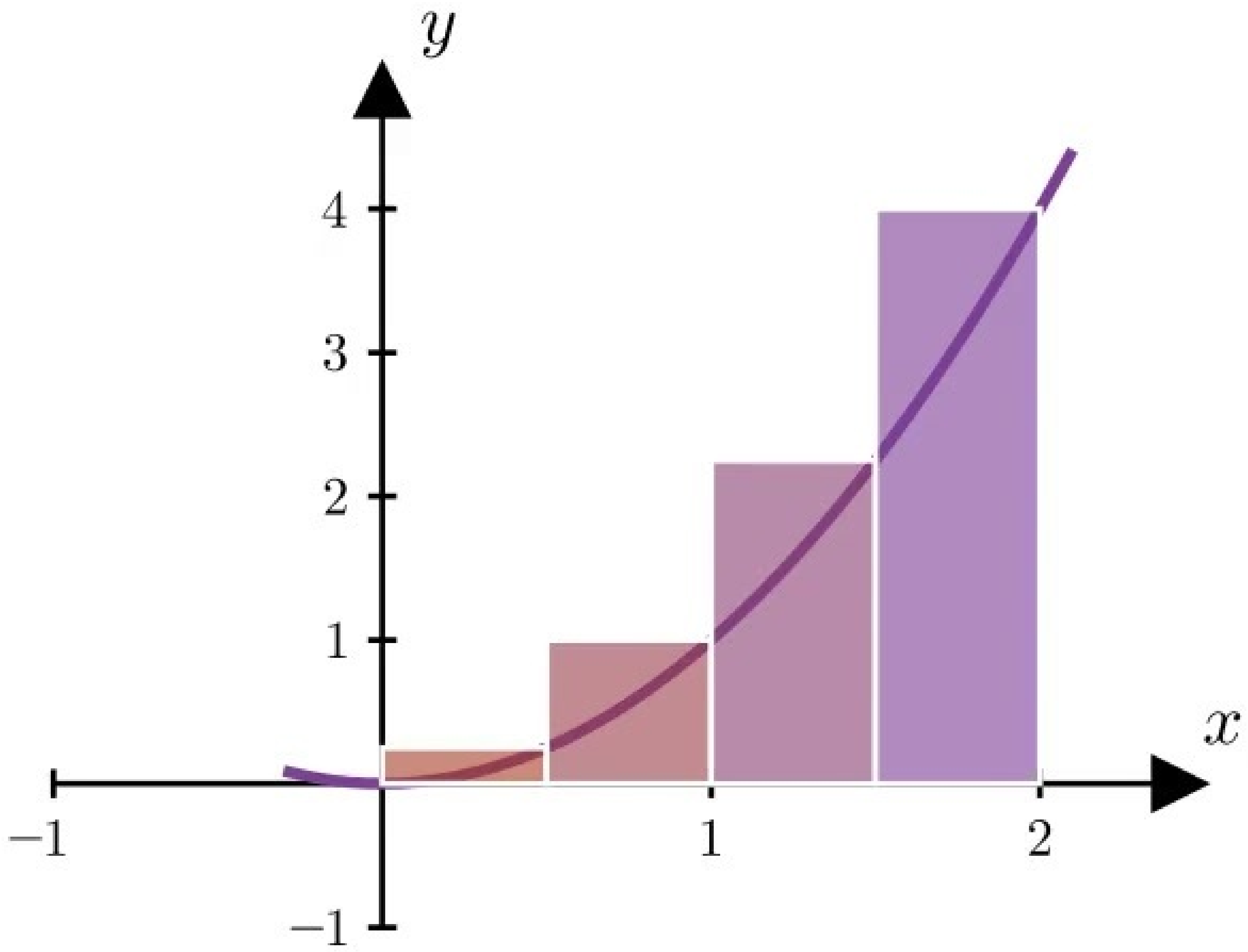
Untersumme U_n



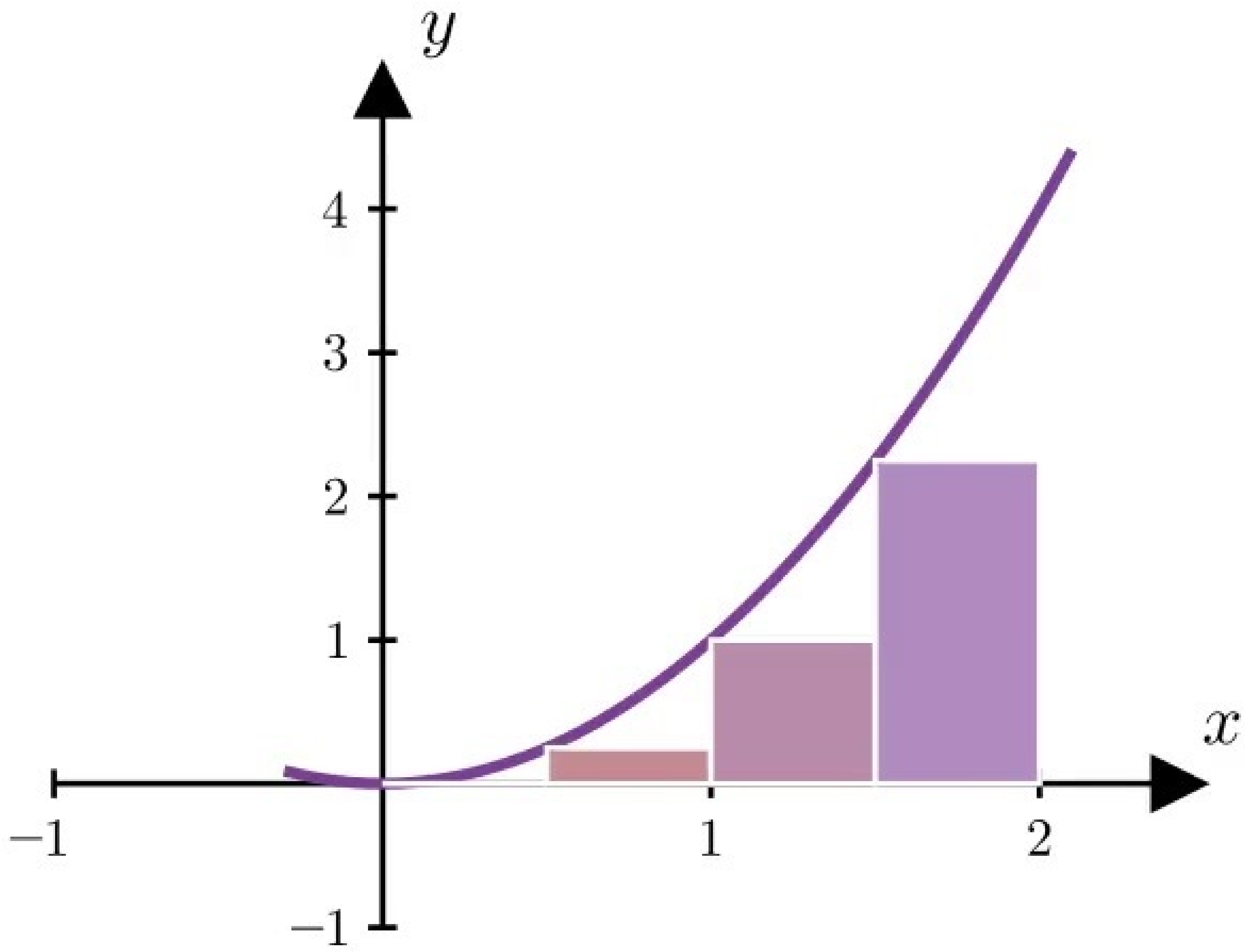
$$O_4 = 0,5 \cdot f(0,5) + 0,5 \cdot f(1) + 0,5 \cdot f(1,5) + 0,5 \cdot f(2)$$

3.1 Approximation des Flächeninhalts mit wenigen Rechtecken

Obersumme O_n



Untersumme U_n

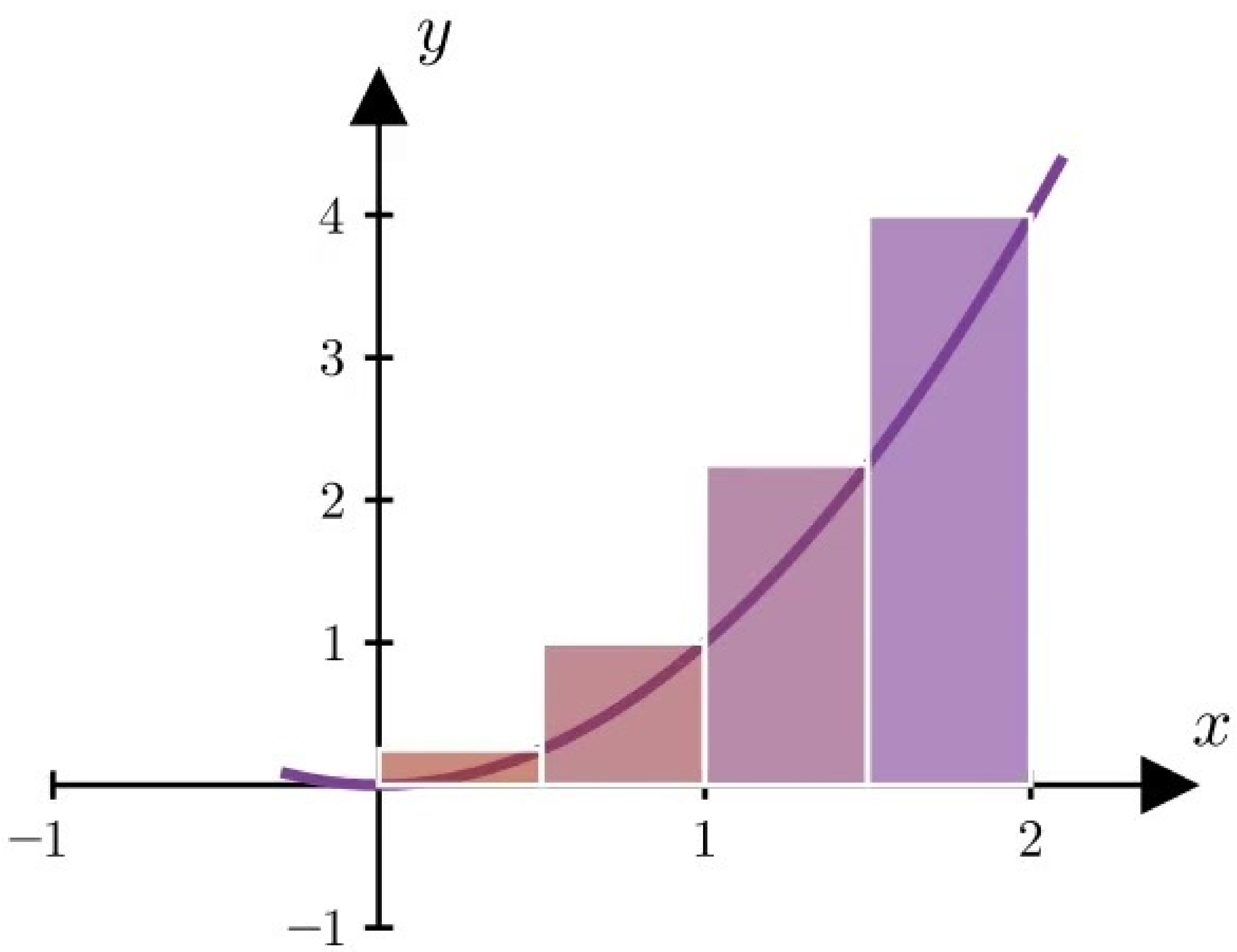


$$O_4 = 0,5 \cdot f(0,5) + 0,5 \cdot f(1) + 0,5 \cdot f(1,5) + 0,5 \cdot f(2)$$

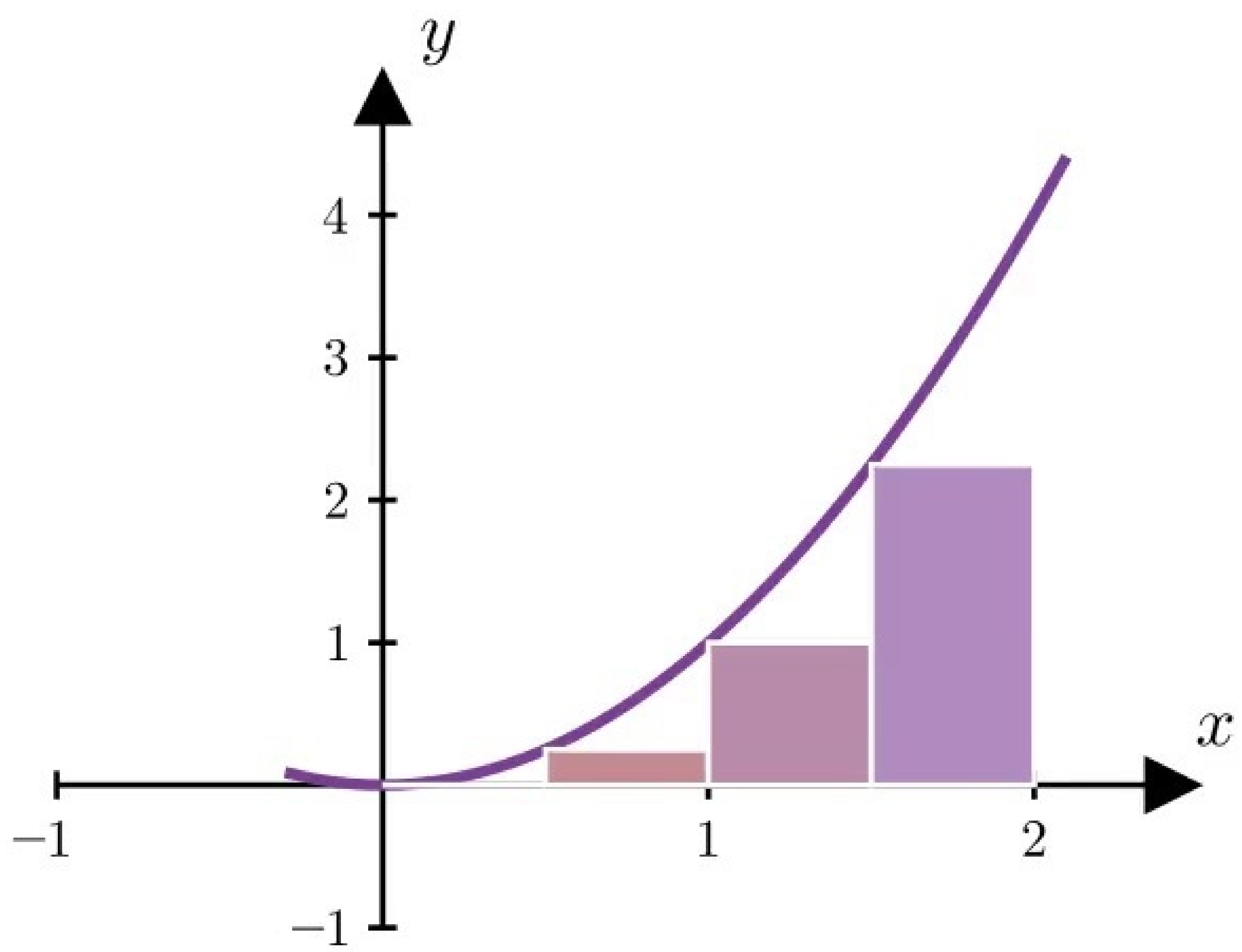
$$O_4 = 0,5 \cdot (0,5^2 + 1^2 + 1,5^1 + 2^2)$$

3.1 Approximation des Flächeninhalts mit wenigen Rechtecken

Obersumme O_n



Untersumme U_n

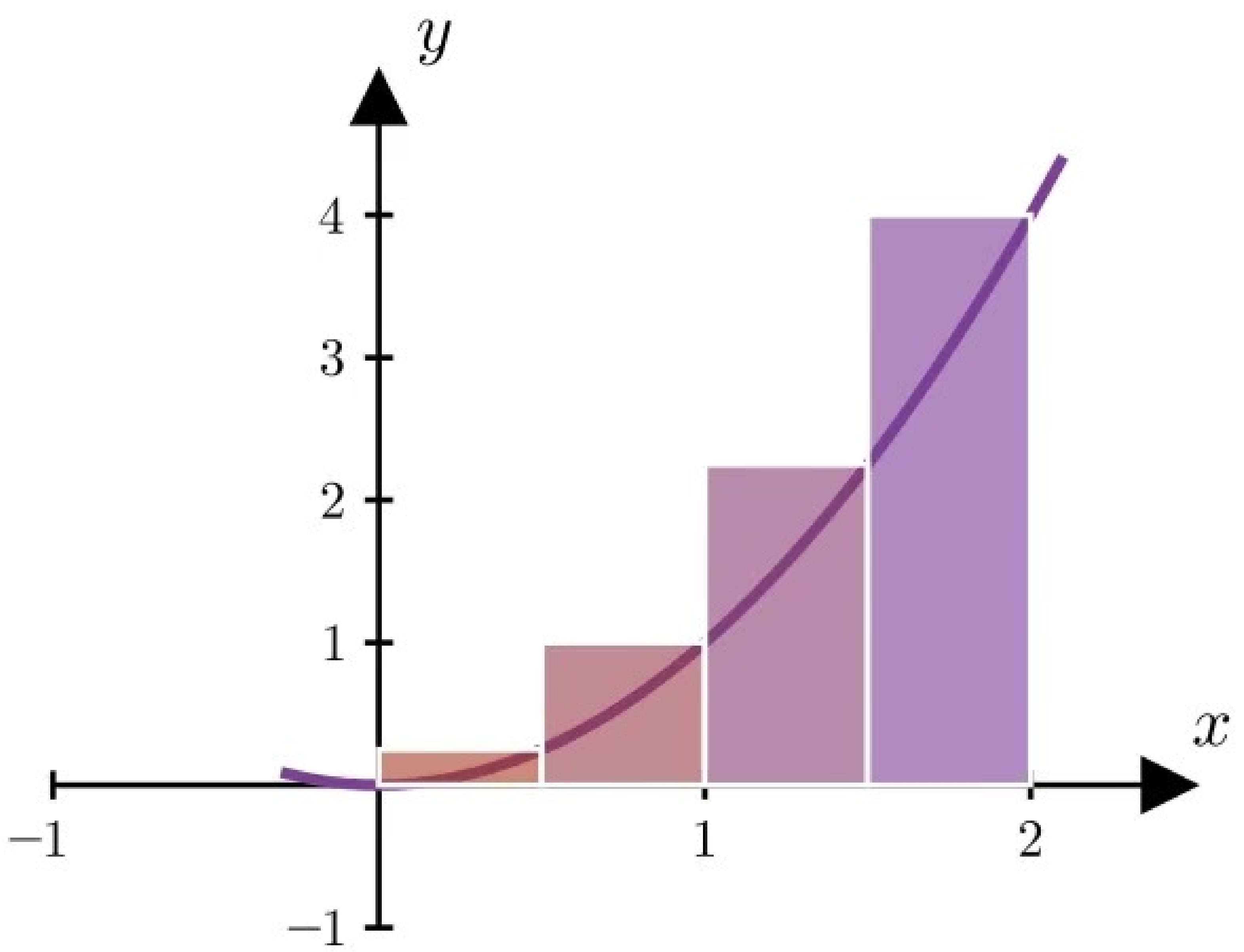


$$O_4 = 0,5 \cdot f(0,5) + 0,5 \cdot f(1) + 0,5 \cdot f(1,5) + 0,5 \cdot f(2)$$

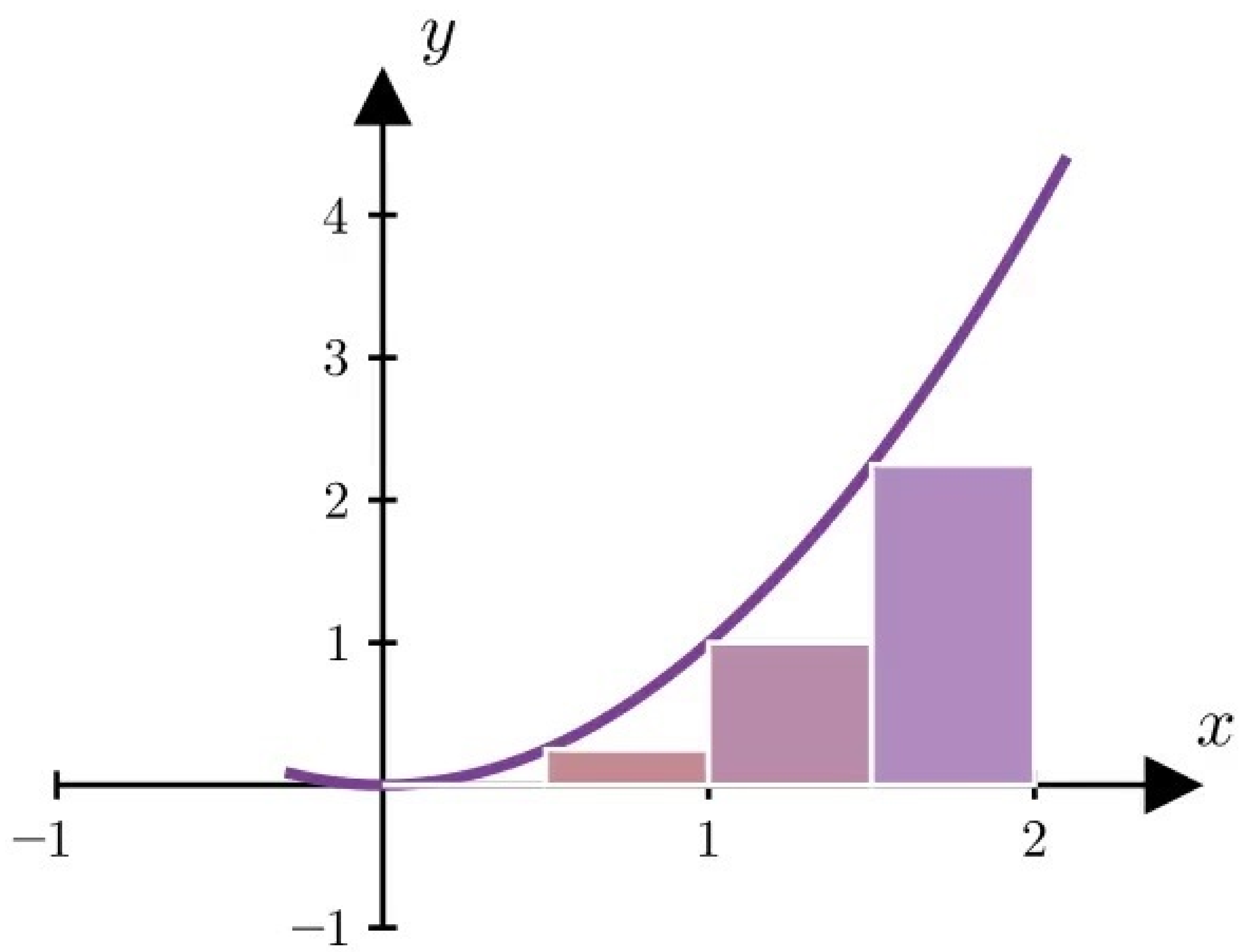
$$O_4 = 0,5 \cdot (0,5^2 + 1^2 + 1,5^1 + 2^2) = 3,75\,FE$$

3.1 Approximation des Flächeninhalts mit wenigen Rechtecken

Obersumme O_n



Untersumme U_n

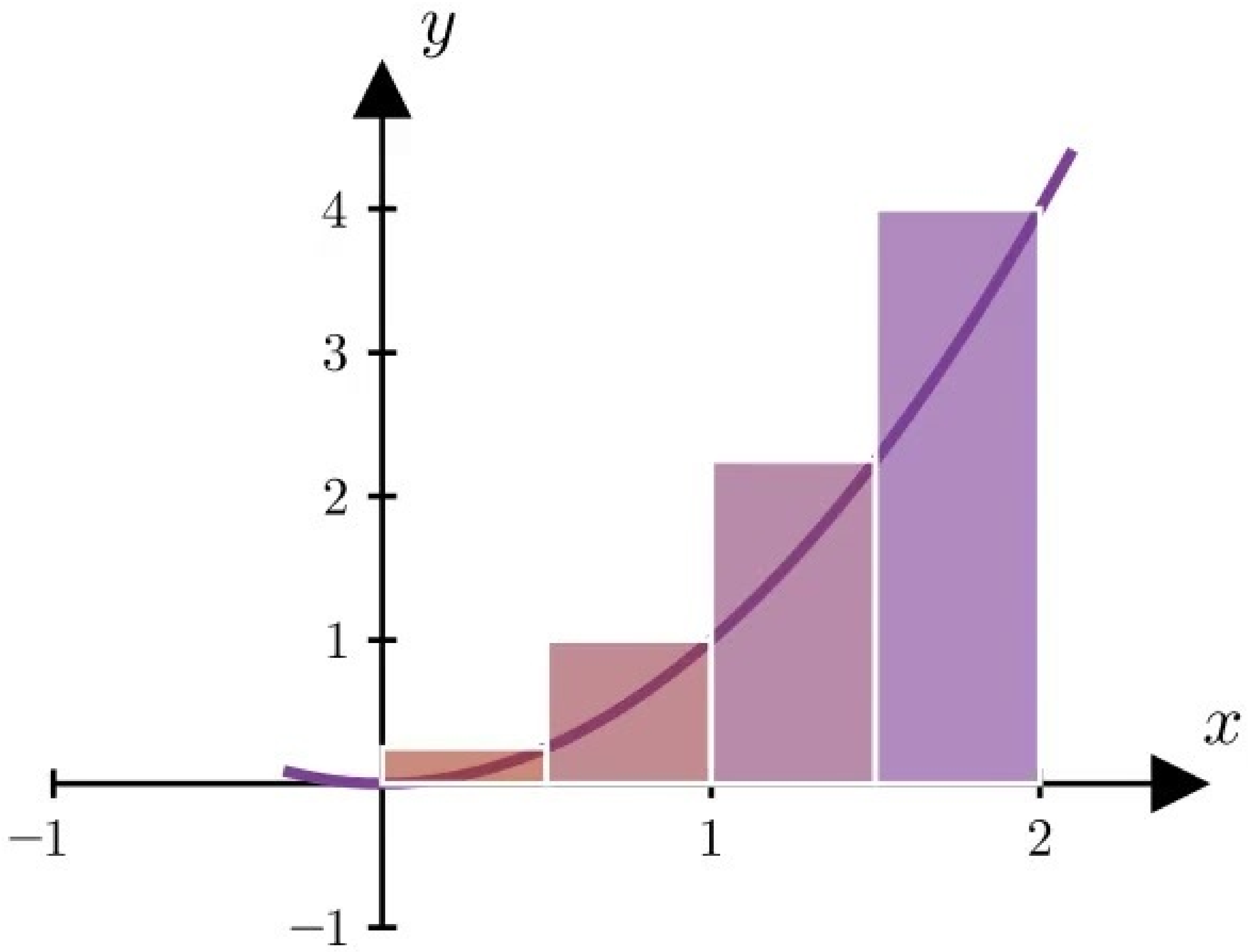


$$U_4 = 0,5 \cdot f(0) + 0,5 \cdot f(0.5) + 0,5 \cdot f(1) + 0,5 \cdot f(1,5)$$

$$U_4 = 0,5 \cdot (0^2 + 0,5^2 + 1^1 + 1,5^2) = 1,75\,FE$$

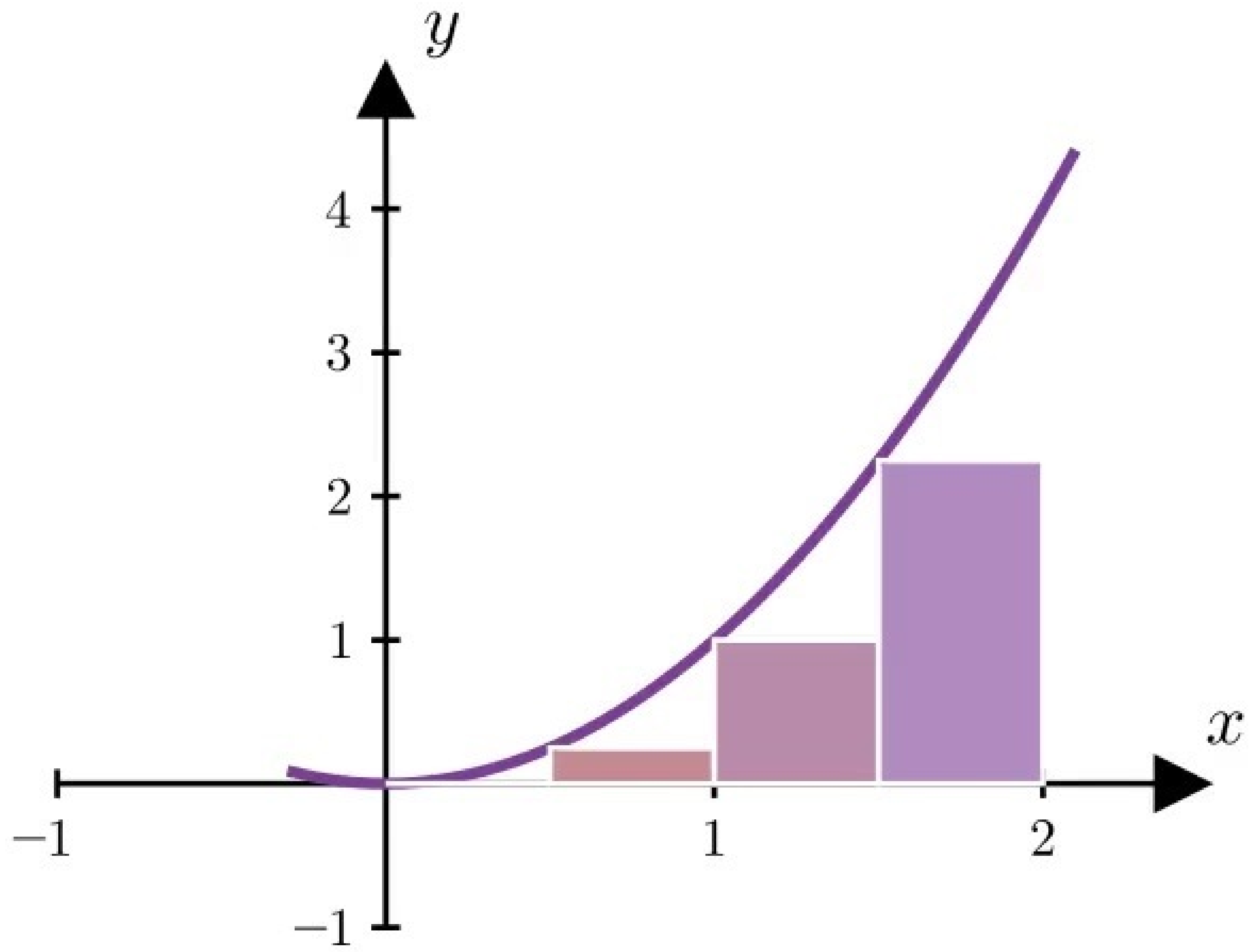
3.1 Approximation des Flächeninhalts mit wenigen Rechtecken

Obersumme O_n



$$O_4 = 3,75\,FE$$

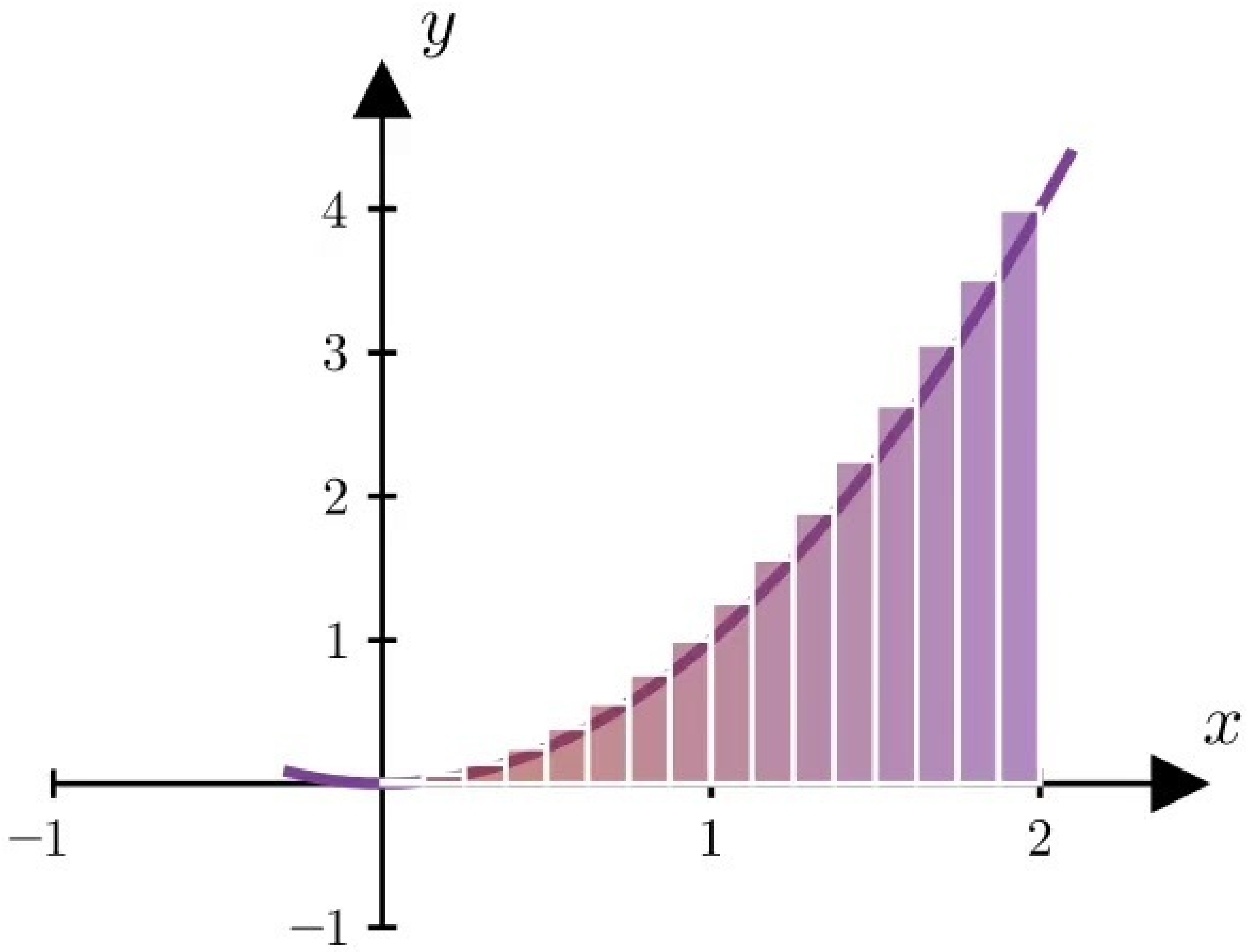
Untersumme U_n



$$U_4 = 1,75\,FE$$

3.1 Approximation des Flächeninhalts mit wenigen Rechtecken

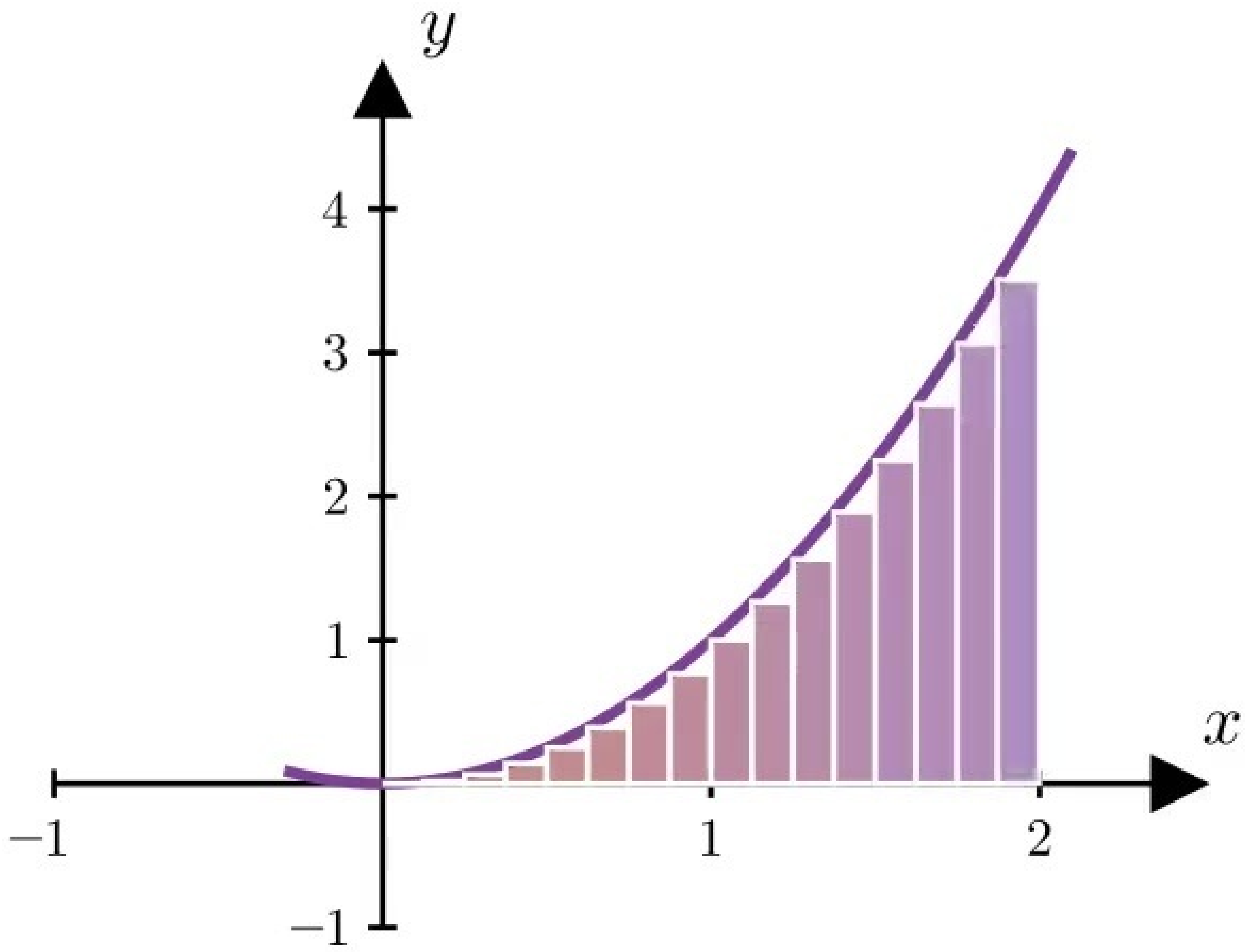
Obersumme O_n



$$O_4 = 3,75\,FE$$

$$O_{16} = 2,92\,FE$$

Untersumme U_n

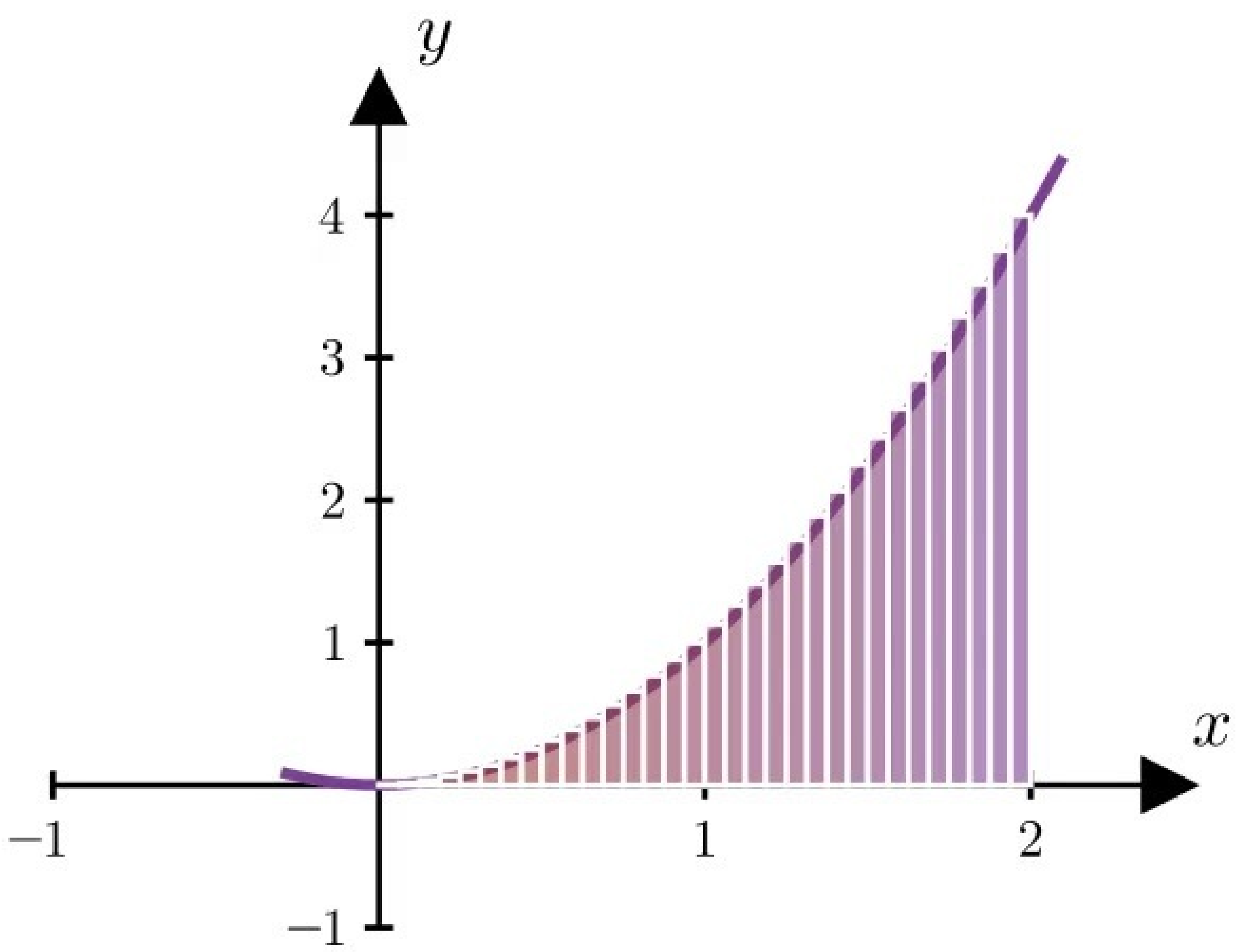


$$U_4 = 1,75\,FE$$

$$U_{16} = 2,42\,FE$$

3.1 Approximation des Flächeninhalts mit wenigen Rechtecken

Obersumme O_n

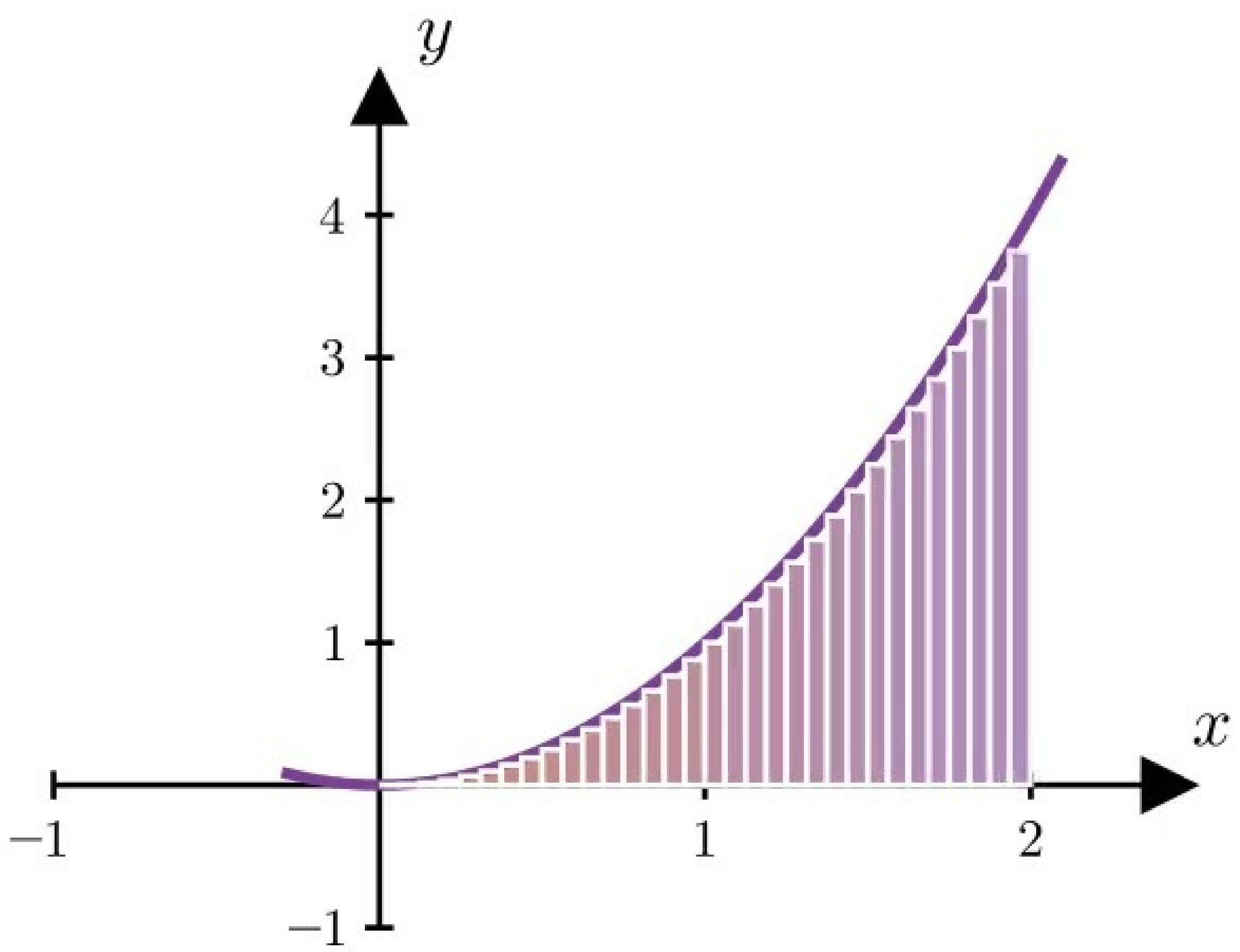


$$O_4 = 3,75\,FE$$

$$O_{16} = 2,92\,FE$$

$$O_{32} = 2,79\,FE$$

Untersumme U_n



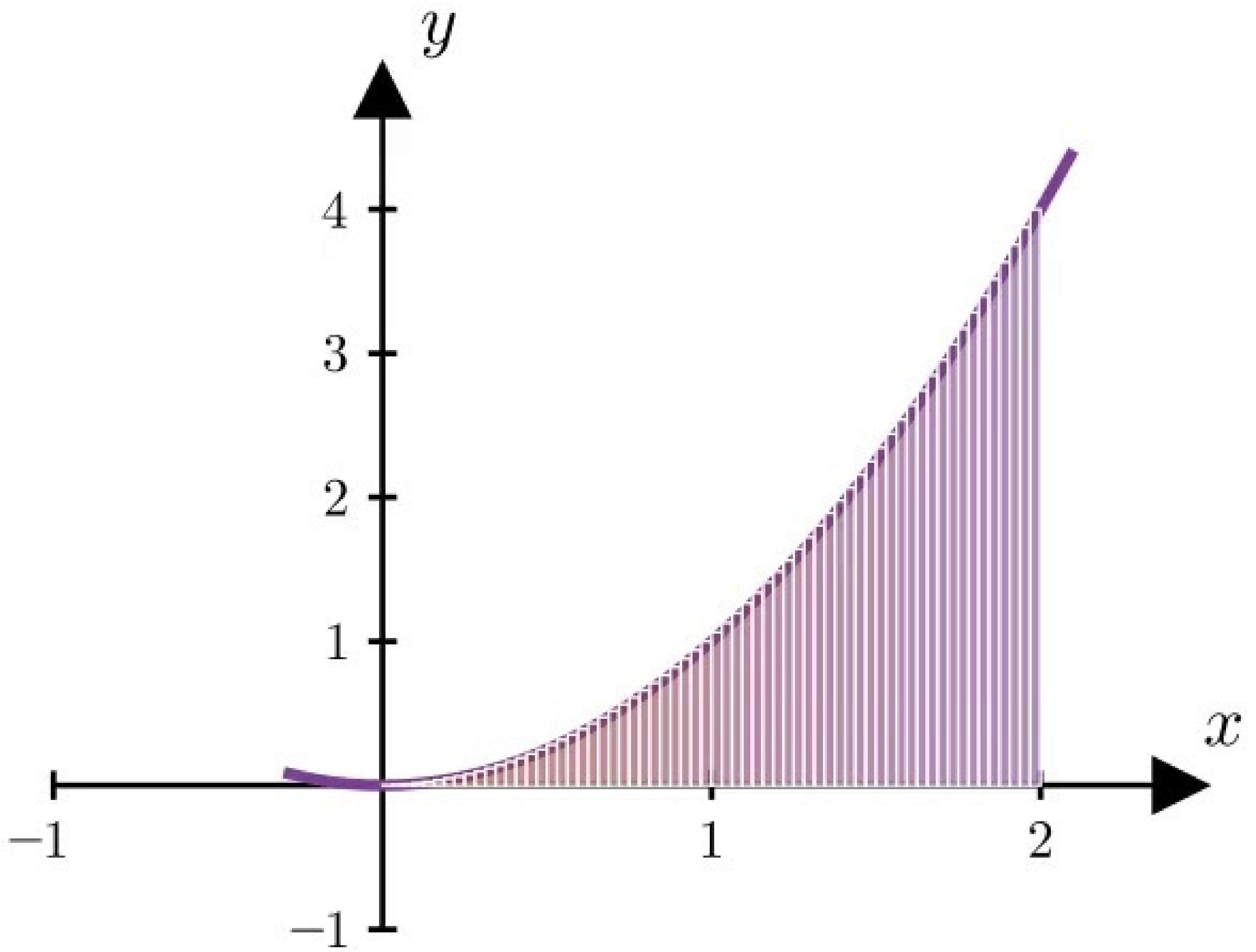
$$U_4 = 1,75\,FE$$

$$U_{16} = 2,42\,FE$$

$$U_{32} = 2,54\,FE$$

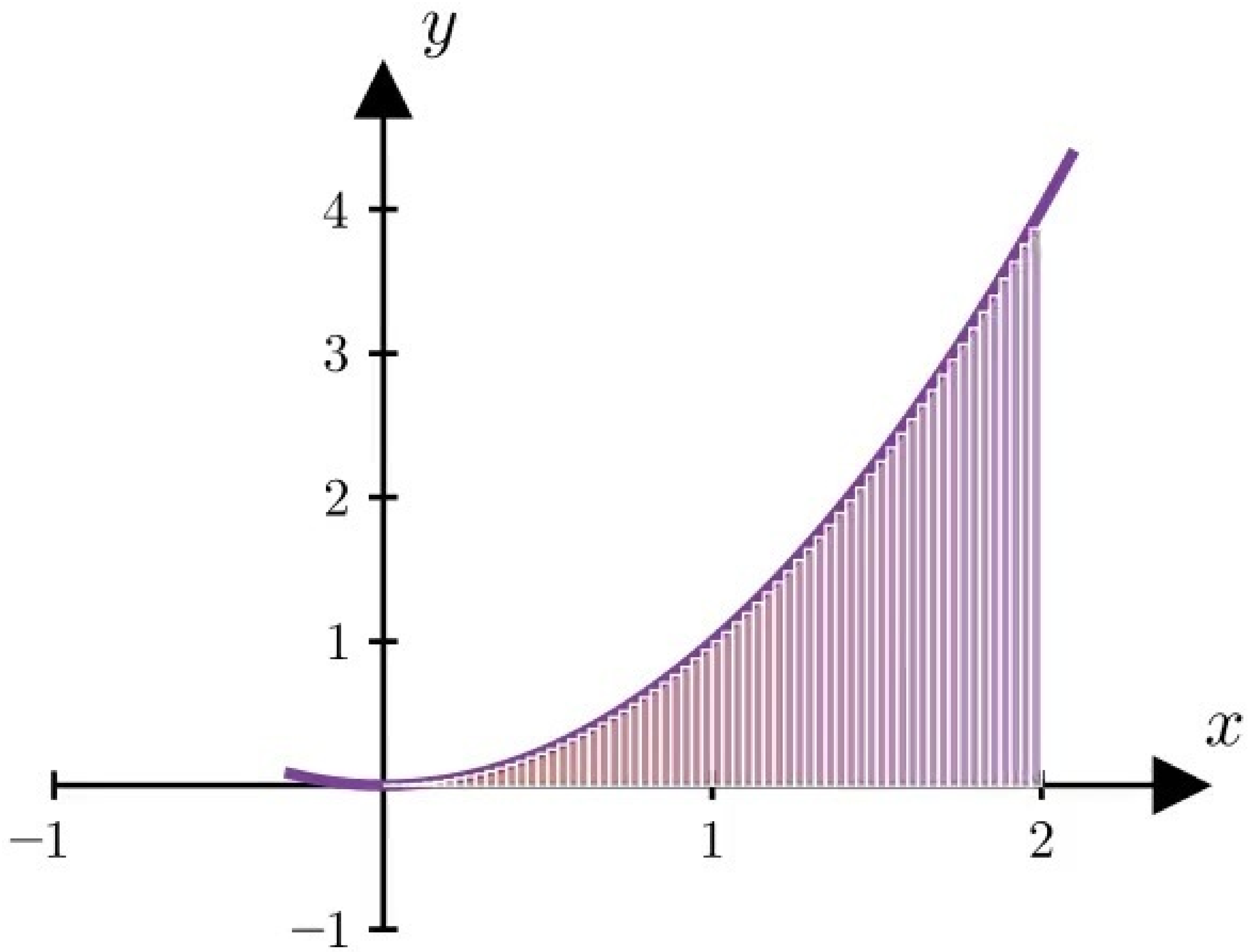
3.1 Approximation des Flächeninhalts mit wenigen Rechtecken

Obersumme O_n



$$O_4 = 3,75\,FE$$
$$O_{16} = 2,92\,FE$$
$$O_{32} = 2,79\,FE$$
$$O_{64} = 2,73\,FE$$

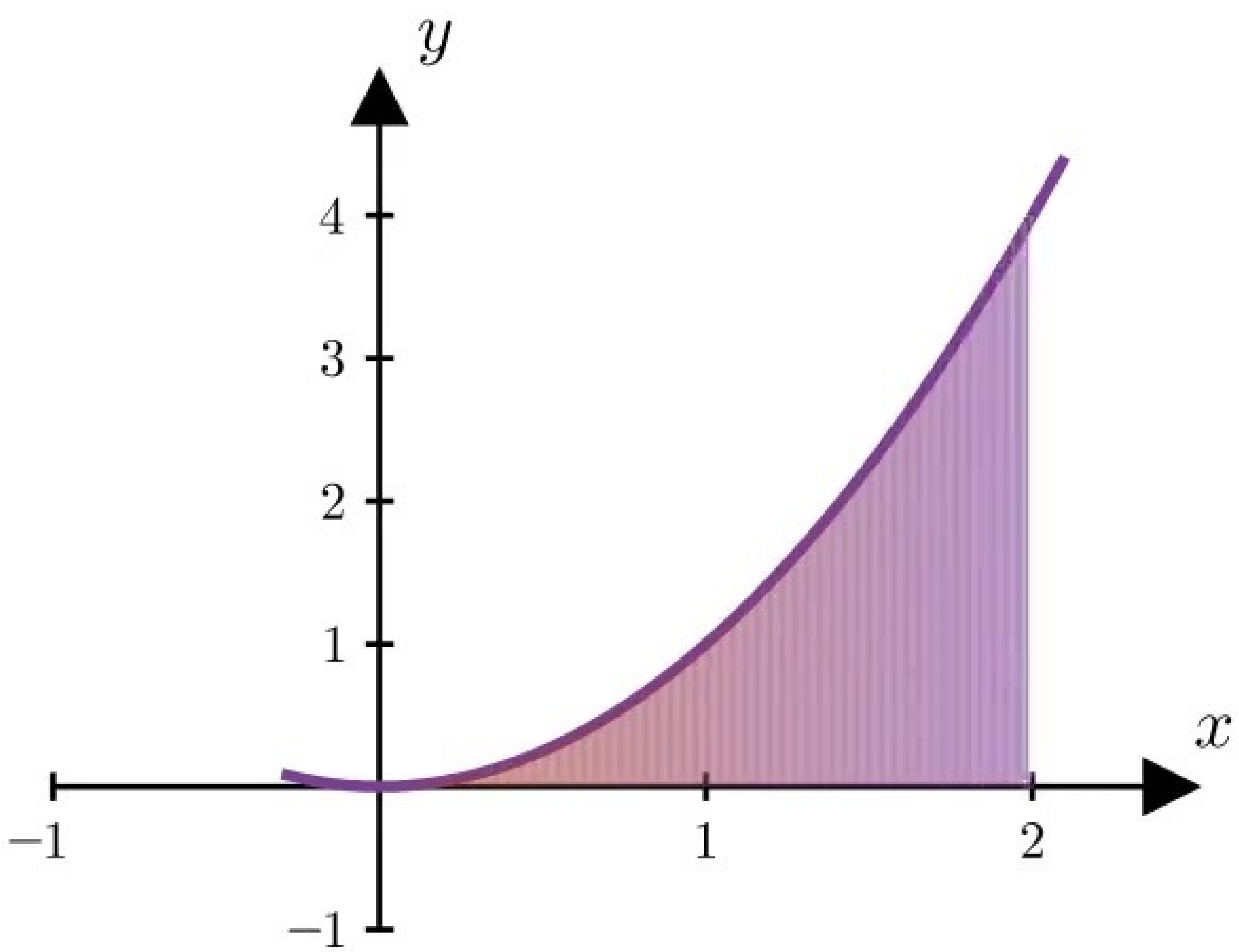
Untersumme U_n



$$U_4 = 1,75\,FE$$
$$U_{16} = 2,42\,FE$$
$$U_{32} = 2,54\,FE$$
$$U_{64} = 2,60\,FE$$

3.1 Approximation des Flächeninhalts mit wenigen Rechtecken

Obersumme O_n



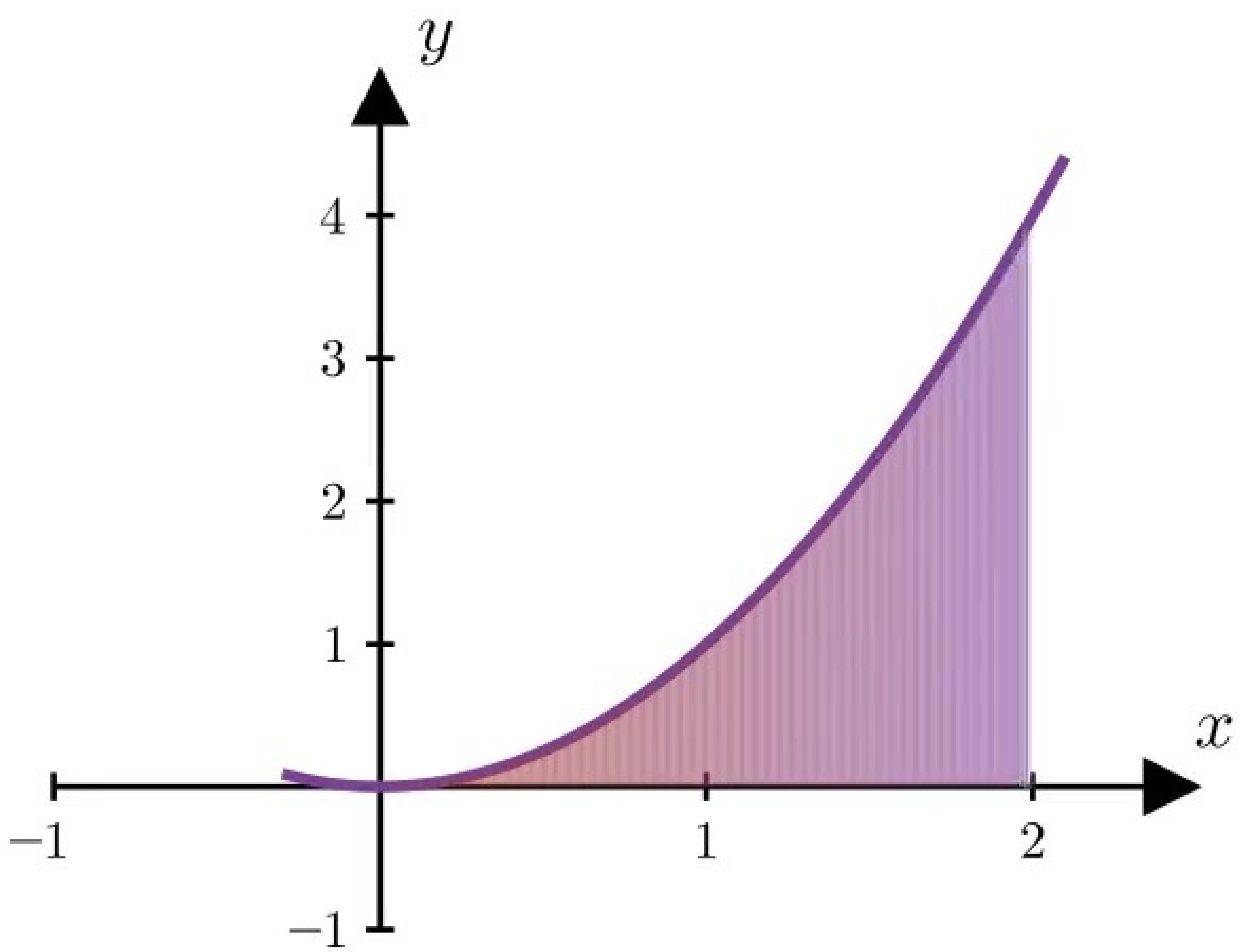
$$O_4 = 3,75\,FE$$

$$O_{16} = 2,92\,FE$$

$$O_{32} = 2,79\,FE$$

$$O_{64} = 2,73\,FE$$

Untersumme U_n



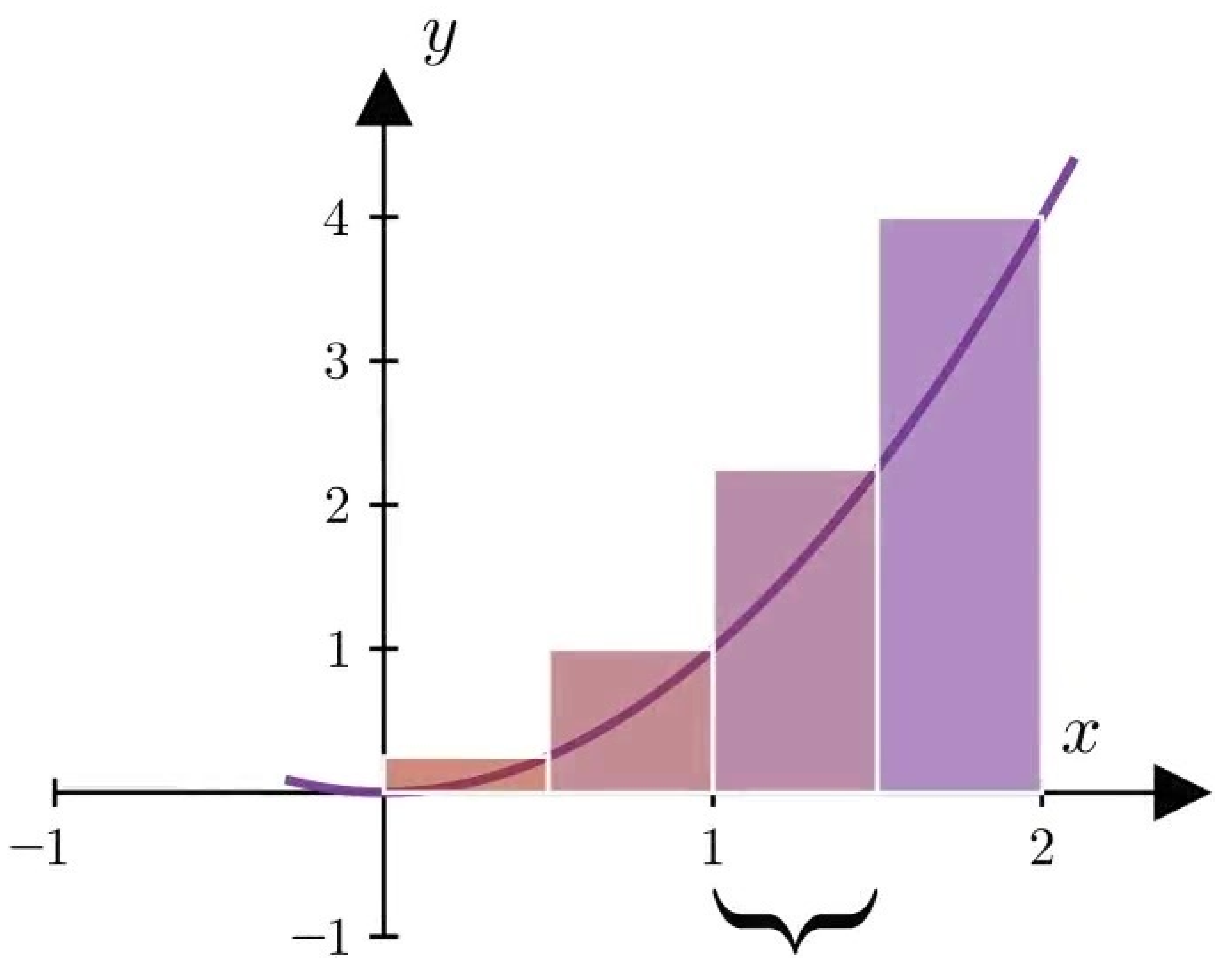
$$U_4 = 1,75\,FE$$

$$U_{16} = 2,42\,FE$$

$$U_{32} = 2,54\,FE$$

$$U_{64} = 2,60\,FE$$

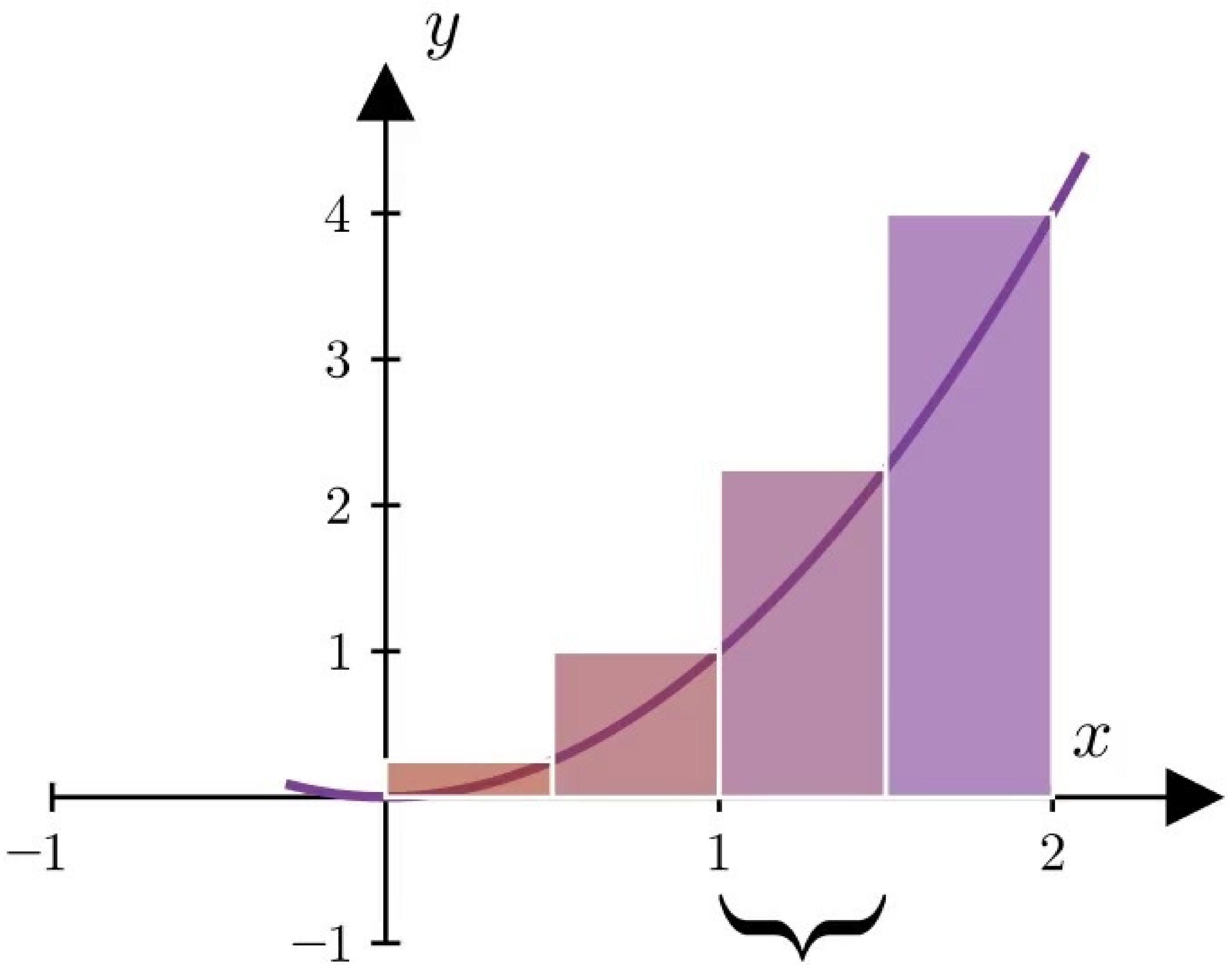
3.2 Ober- und Untersumme unter dem Graphen mit unendlich vielen Rechtecken



$$\Delta x = \frac{x}{n}$$

3.2 Ober- und Untersumme unter dem Graphen mit unendlich vielen Rechtecken

$$O_n = \frac{x}{n} \cdot f(1 \cdot \frac{x}{n}) + \frac{x}{n} \cdot f(2 \cdot \frac{x}{n}) + ... + \frac{x}{n} \cdot f(n \cdot \frac{x}{n})$$

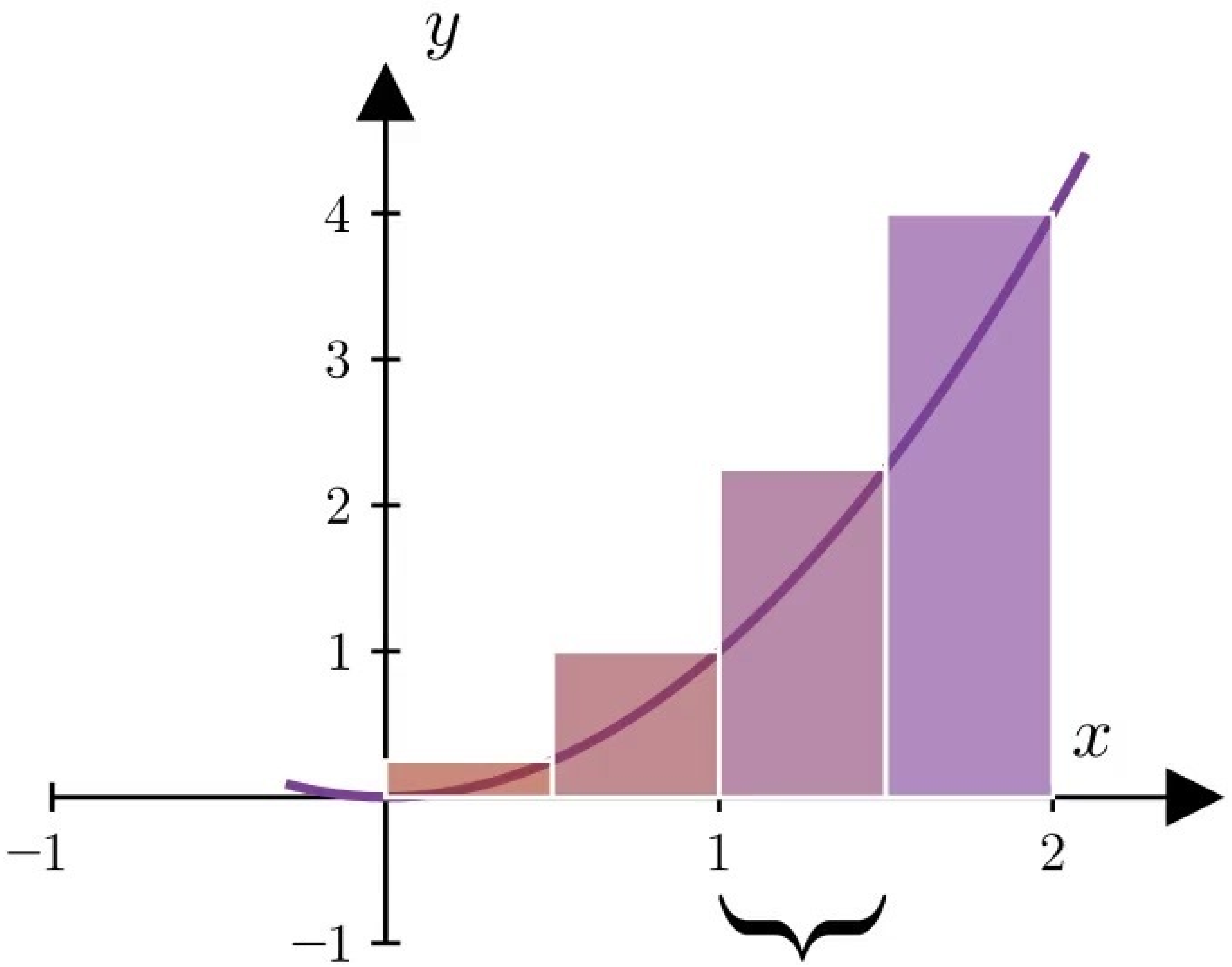


$$\Delta x = \frac{x}{n}$$

3.2 Ober- und Untersumme unter dem Graphen mit unendlich vielen Rechtecken

$$O_n = \frac{x}{n} \cdot f(1 \cdot \frac{x}{n}) + \frac{x}{n} \cdot f(2 \cdot \frac{x}{n}) + ... + \frac{x}{n} \cdot f(n \cdot \frac{x}{n})$$

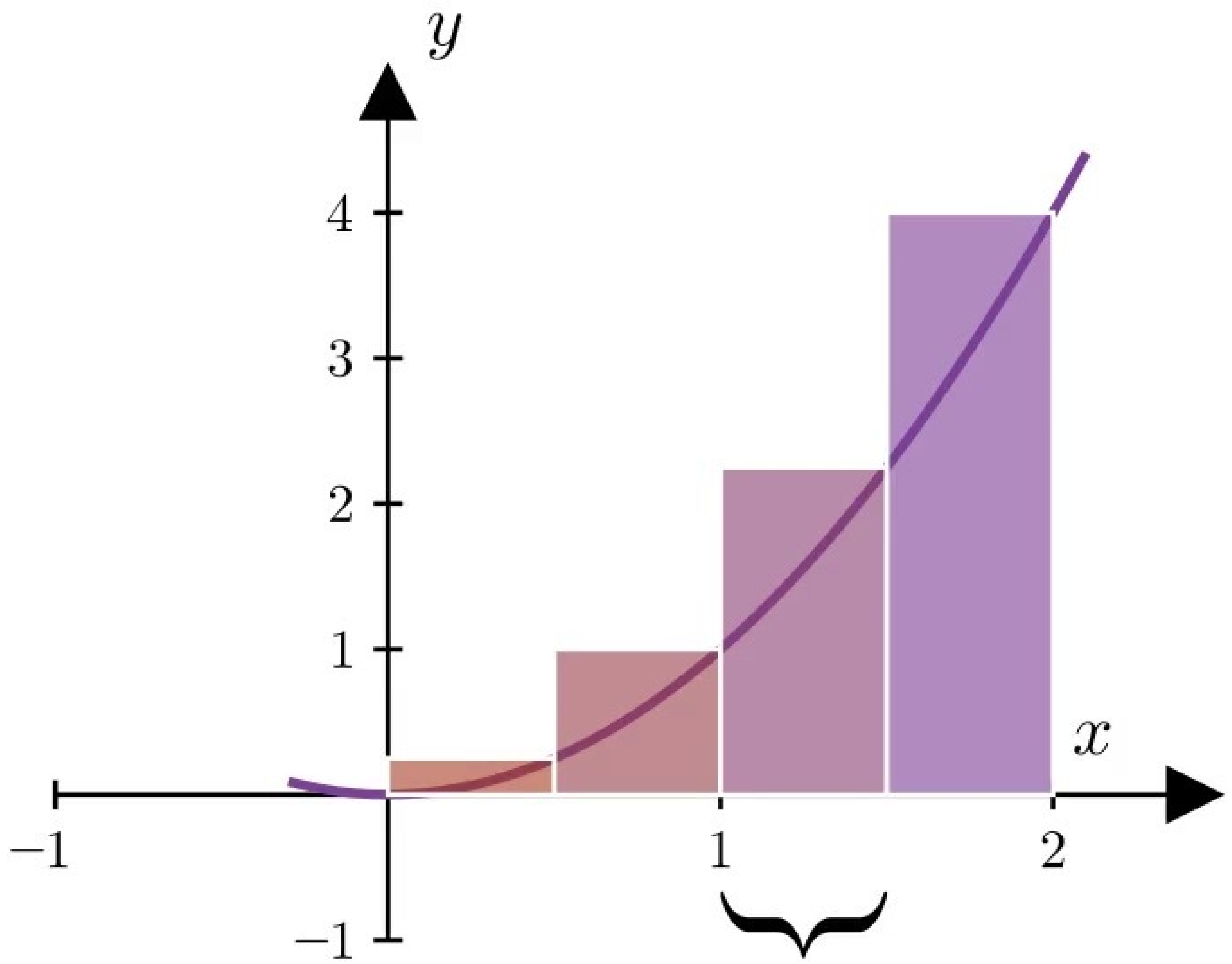
$$= \frac{x}{n} \cdot \left[f(1 \cdot \frac{x}{n}) + f(2 \cdot \frac{x}{n}) + ... + f(n \cdot \frac{x}{n}) \right]$$



$$\Delta x = \frac{x}{n}$$

3.2 Ober- und Untersumme unter dem Graphen mit unendlich vielen Rechtecken

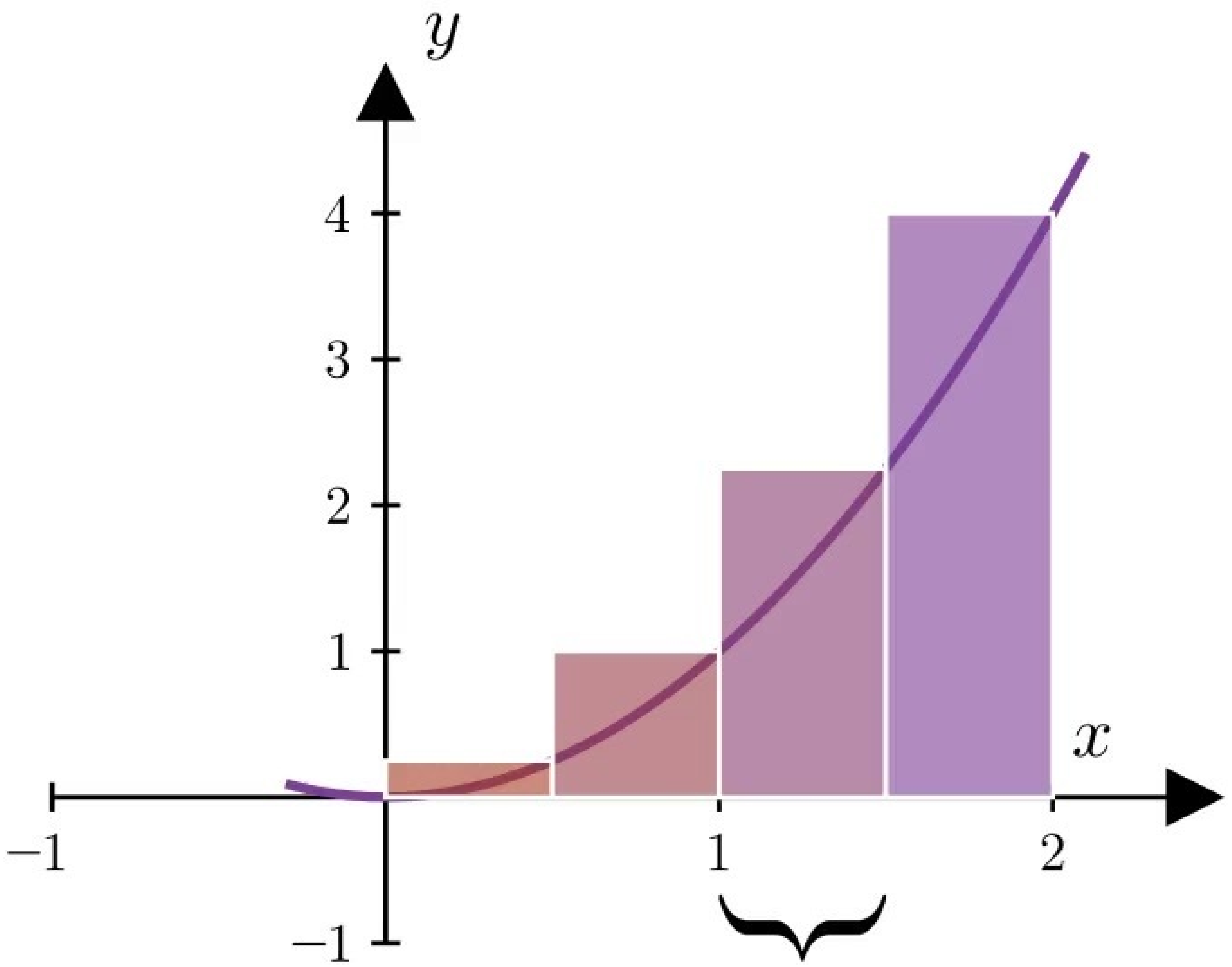
$$
\begin{aligned}
O_n &= \frac{x}{n} \cdot f(1 \cdot \frac{x}{n}) + \frac{x}{n} \cdot f(2 \cdot \frac{x}{n}) + ... + \frac{x}{n} \cdot f(n \cdot \frac{x}{n}) \\
&= \frac{x}{n} \cdot \left[f(1 \cdot \frac{x}{n}) + f(2 \cdot \frac{x}{n}) + ... + f(n \cdot \frac{x}{n}) \right] \\
&= \frac{x}{n} \cdot \left[1^2 \cdot \frac{x^2}{n^2} + 2^2 \cdot \frac{x^2}{n^2} + ... + n^2 \cdot \frac{x^2}{n^2} \right]
\end{aligned}
$$



$$\Delta x = \frac{x}{n}$$

3.2 Ober- und Untersumme unter dem Graphen mit unendlich vielen Rechtecken

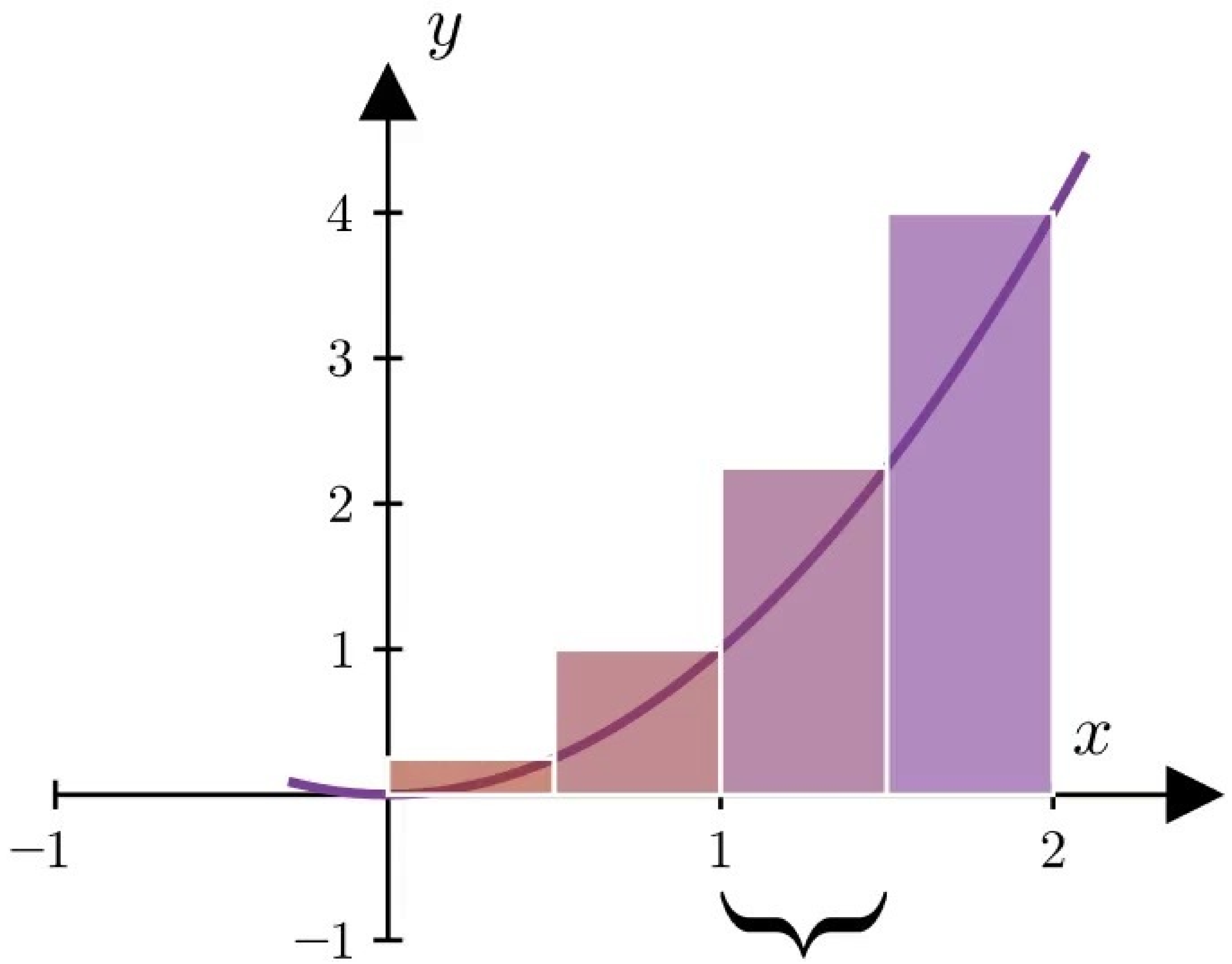
$$
\begin{aligned}
O_n &= \frac{x}{n} \cdot f(1 \cdot \frac{x}{n}) + \frac{x}{n} \cdot f(2 \cdot \frac{x}{n}) + ... + \frac{x}{n} \cdot f(n \cdot \frac{x}{n}) \\
&= \frac{x}{n} \cdot \left[f(1 \cdot \frac{x}{n}) + f(2 \cdot \frac{x}{n}) + ... + f(n \cdot \frac{x}{n}) \right] \\
&= \frac{x}{n} \cdot \left[1^2 \cdot \frac{x^2}{n^2} + 2^2 \cdot \frac{x^2}{n^2} + ... + n^2 \cdot \frac{x^2}{n^2} \right] \\
&= \frac{x^3}{n^3} \cdot \left[1^2 + 2^2 + ... + n^2 \right]
\end{aligned}
$$



$$\Delta x = \frac{x}{n}$$

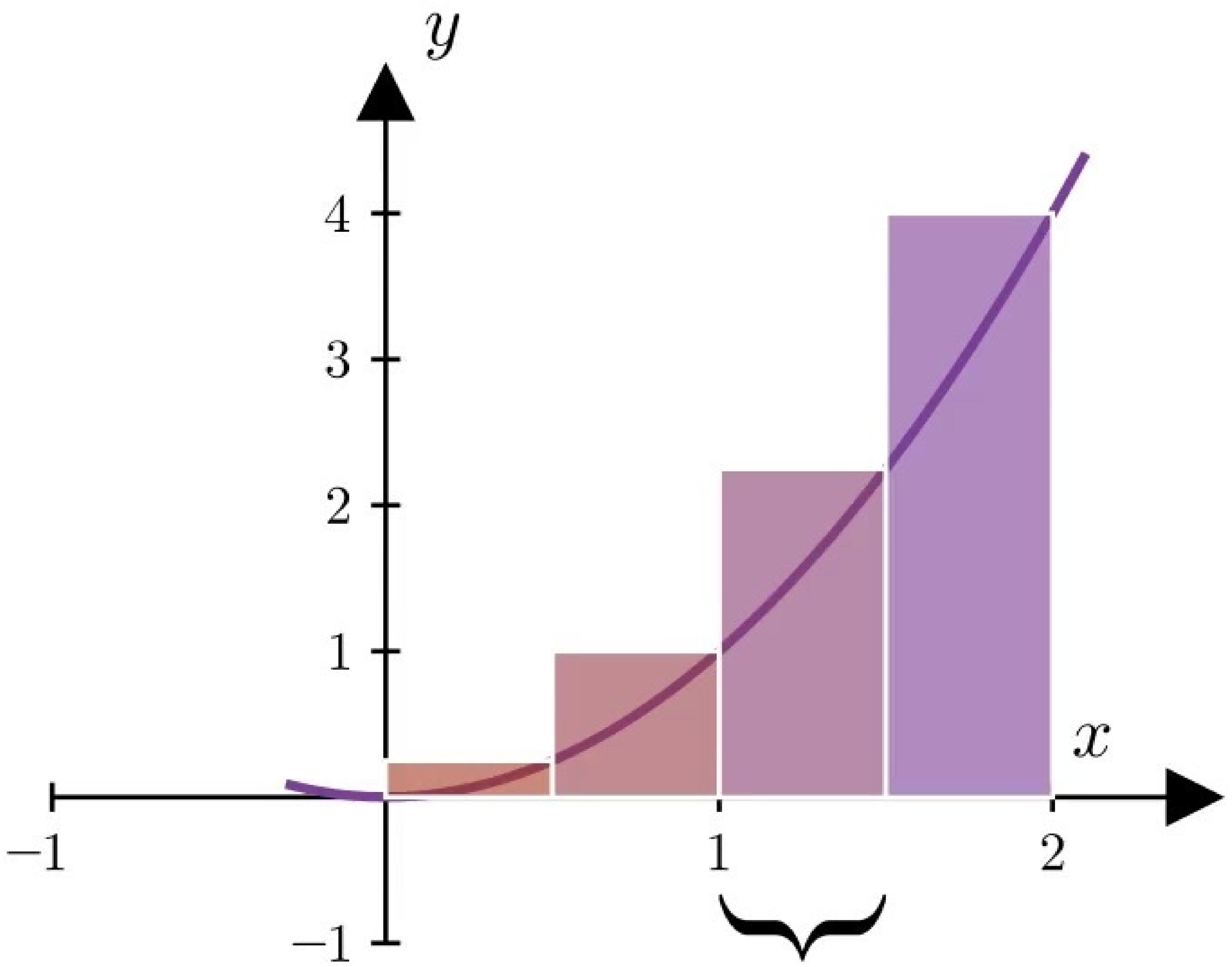
3.2 Ober- und Untersumme unter dem Graphen mit unendlich vielen Rechtecken

$$
\begin{aligned}
O_n &= \frac{x}{n} \cdot f(1 \cdot \frac{x}{n}) + \frac{x}{n} \cdot f(2 \cdot \frac{x}{n}) + ... + \frac{x}{n} \cdot f(n \cdot \frac{x}{n}) \\
&= \frac{x}{n} \cdot \left[f(1 \cdot \frac{x}{n}) + f(2 \cdot \frac{x}{n}) + ... + f(n \cdot \frac{x}{n}) \right] \\
&= \frac{x}{n} \cdot \left[1^2 \cdot \frac{x^2}{n^2} + 2^2 \cdot \frac{x^2}{n^2} + ... + n^2 \cdot \frac{x^2}{n^2} \right] \\
&= \frac{x^3}{n^3} \cdot \left[1^2 + 2^2 + ... + n^2 \right] \\
&= \frac{x^3}{n^3} \cdot \left[\frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) \right]
\end{aligned}
$$



$$\Delta x = \frac{x}{n}$$

$$= \frac{x^3}{n^3} \cdot \left[\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\right]$$

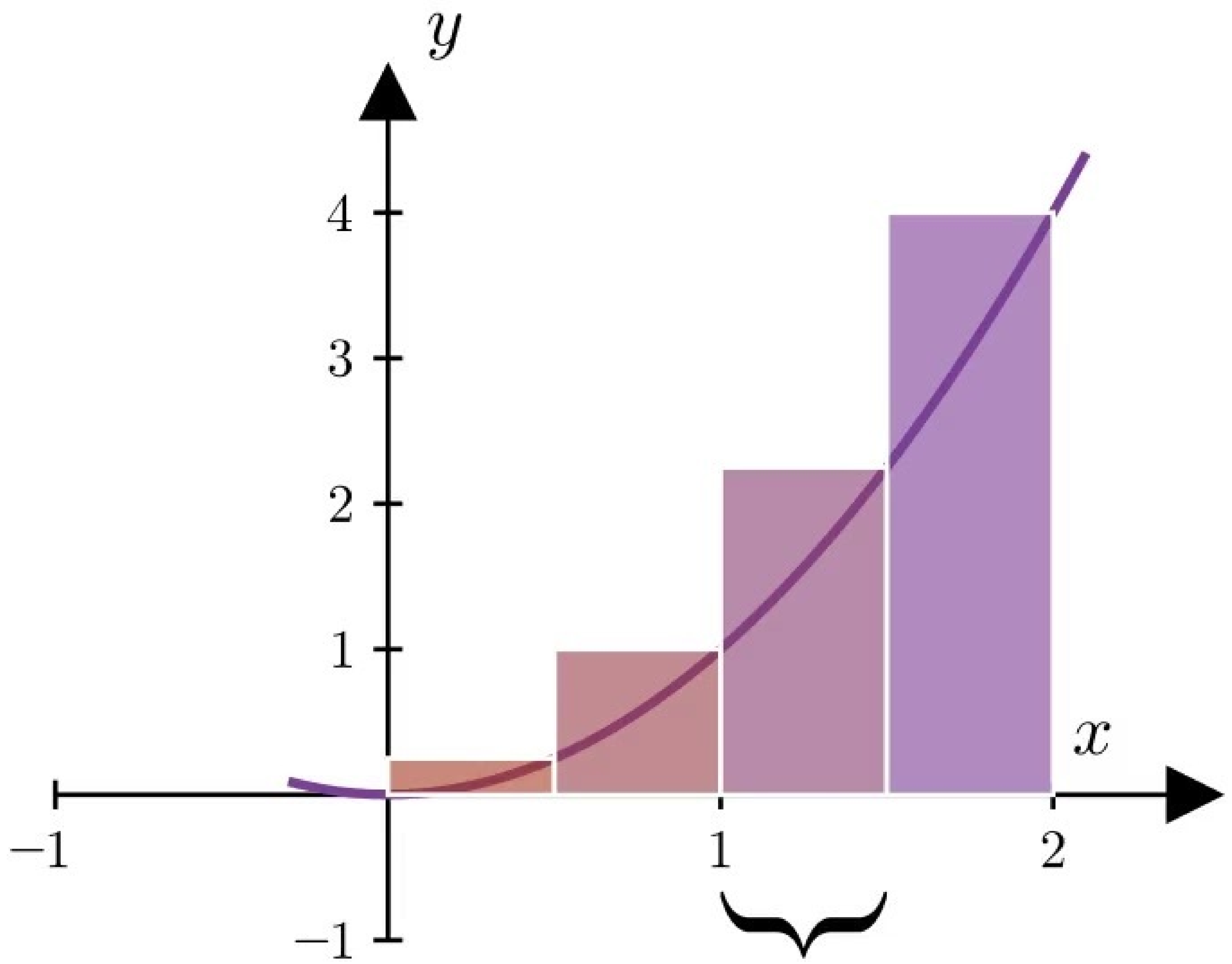


$$\Delta x = \frac{x}{n}$$

3.2 Ober- und Untersumme unter dem Graphen mit unendlich vielen Rechtecken

$$= \frac{x^3}{n^3} \cdot \left[\frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)\right]$$

$$= \frac{x^3}{6n^2} \cdot \left[(n+1)(2n+1)\right]$$

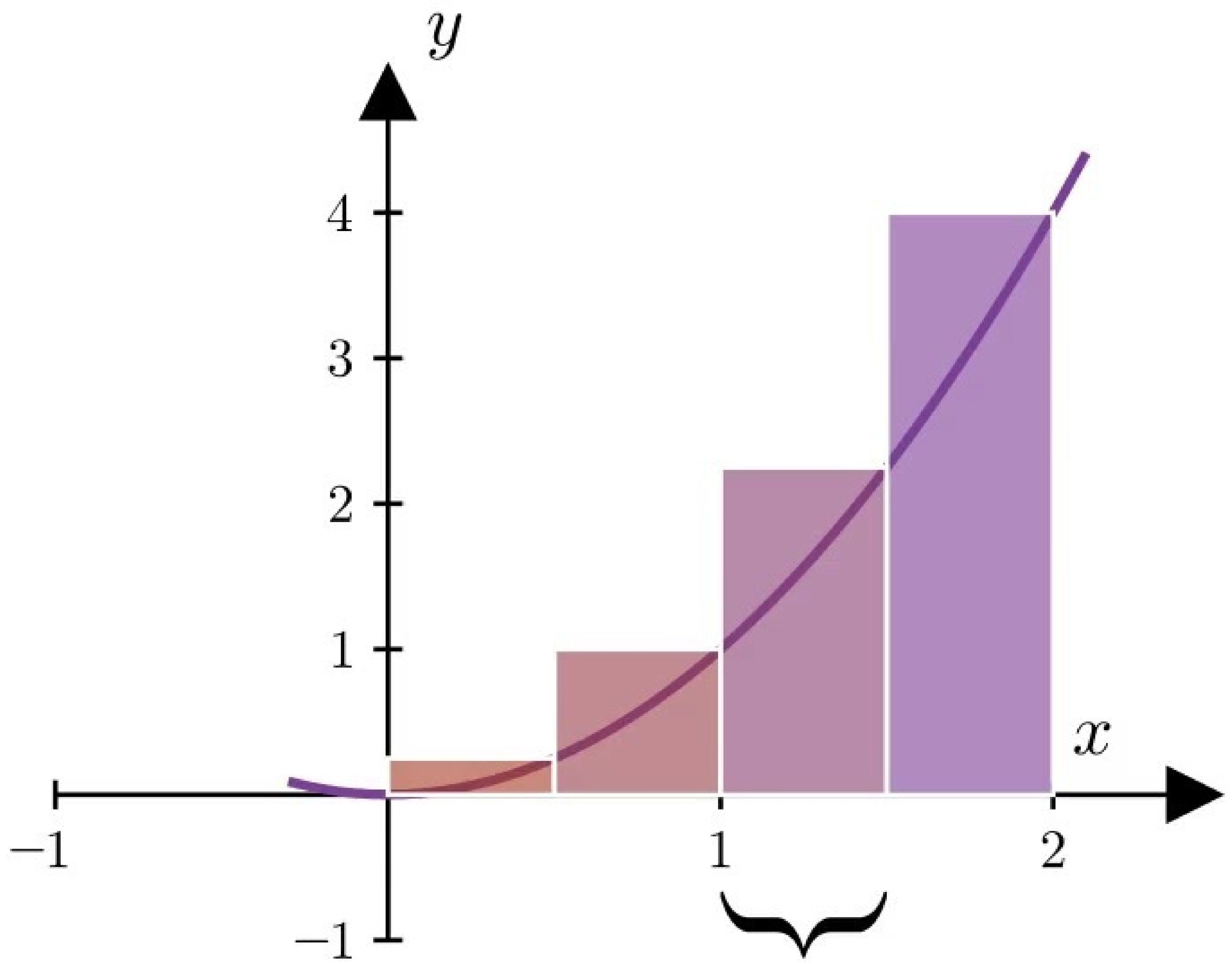


$$\Delta x = \frac{x}{n}$$

$$= \frac{x^3}{n^3} \cdot \left[\frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)\right]$$

$$= \frac{x^3}{6n^2} \cdot \left[(n+1)(2n+1)\right]$$

$$= \frac{x^3}{6n^2} \cdot \left[2n^2 + 3n + 1\right]$$



$$\Delta x = \frac{x}{n}$$

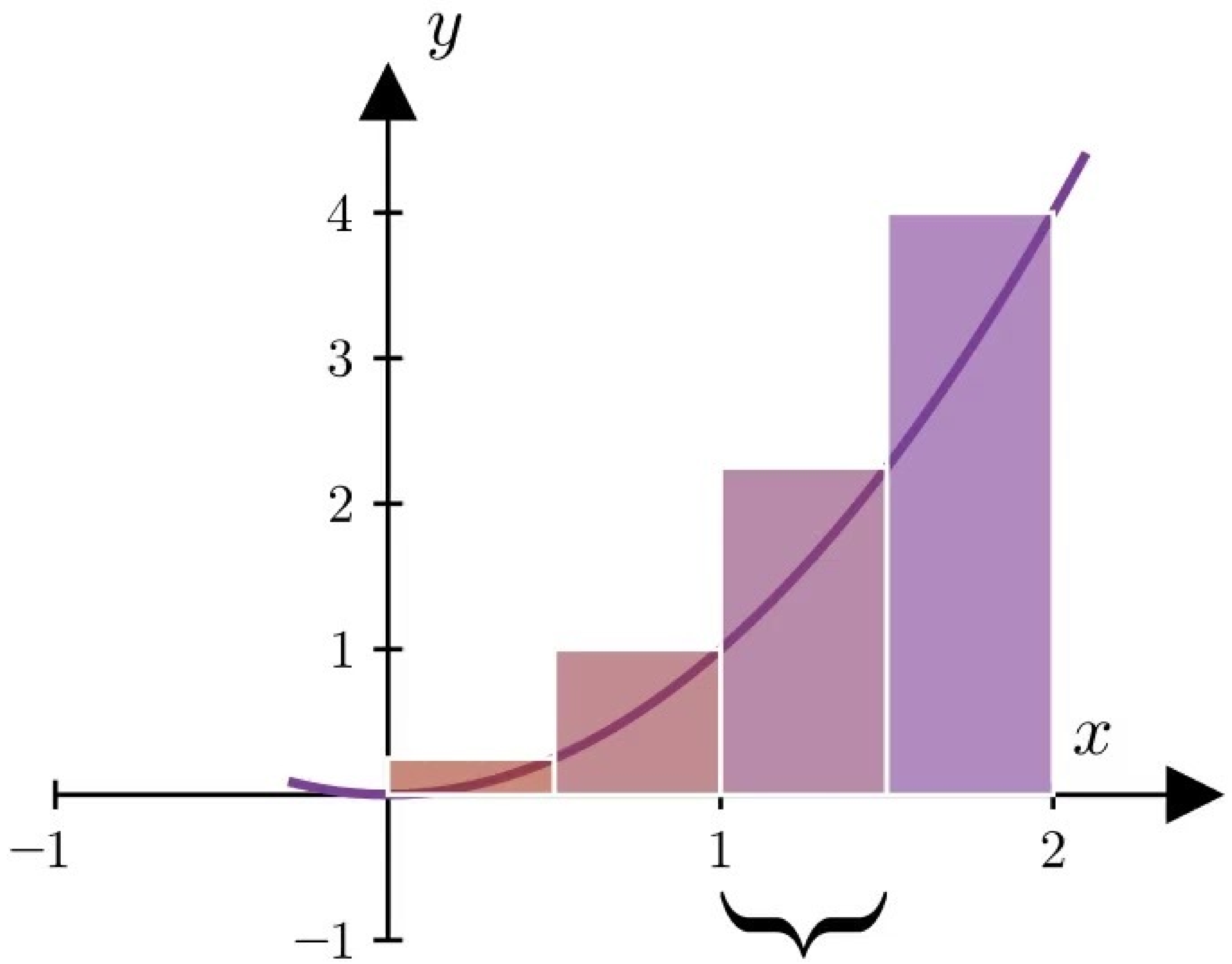
3.2 Ober- und Untersumme unter dem Graphen mit unendlich vielen Rechtecken

$$= \frac{x^3}{n^3} \cdot \left[\frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)\right]$$

$$= \frac{x^3}{6n^2} \cdot \left[(n+1)(2n+1)\right]$$

$$= \frac{x^3}{6n^2} \cdot \left[2n^2 + 3n + 1\right]$$

$$= \frac{2x^3n^2}{6n^2} + \frac{3x^3n}{6n^2} + \frac{x^3}{6n^3}$$



$$\Delta x = \frac{x}{n}$$

3.2 Ober- und Untersumme unter dem Graphen mit unendlich vielen Rechtecken

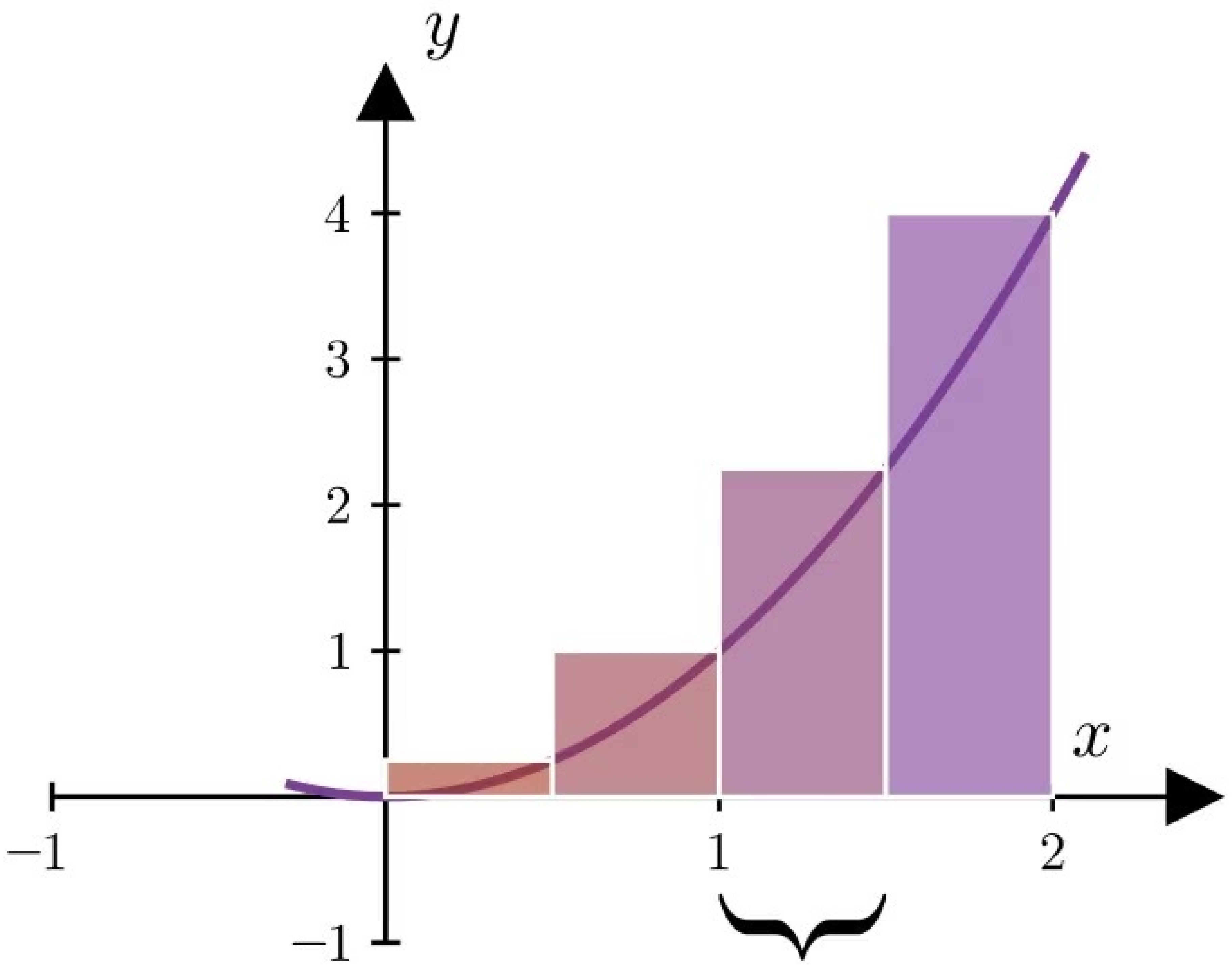
$$= \frac{x^3}{n^3} \cdot \left[\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\right]$$

$$= \frac{x^3}{6n^2} \cdot \left[(n+1)(2n+1)\right]$$

$$= \frac{x^3}{6n^2} \cdot \left[2n^2+3n+1\right]$$

$$= \frac{2x^3n^2}{6n^2} + \frac{3x^3n}{6n^2} + \frac{x^3}{6n^3}$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^3}{3n} + \frac{x^3}{6n^3}$$



$$\Delta x = \frac{x}{n}$$

3.2 Ober- und Untersumme unter dem Graphen mit unendlich vielen Rechtecken

$$= \frac{x^3}{n^3} \cdot \left[\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\right]$$

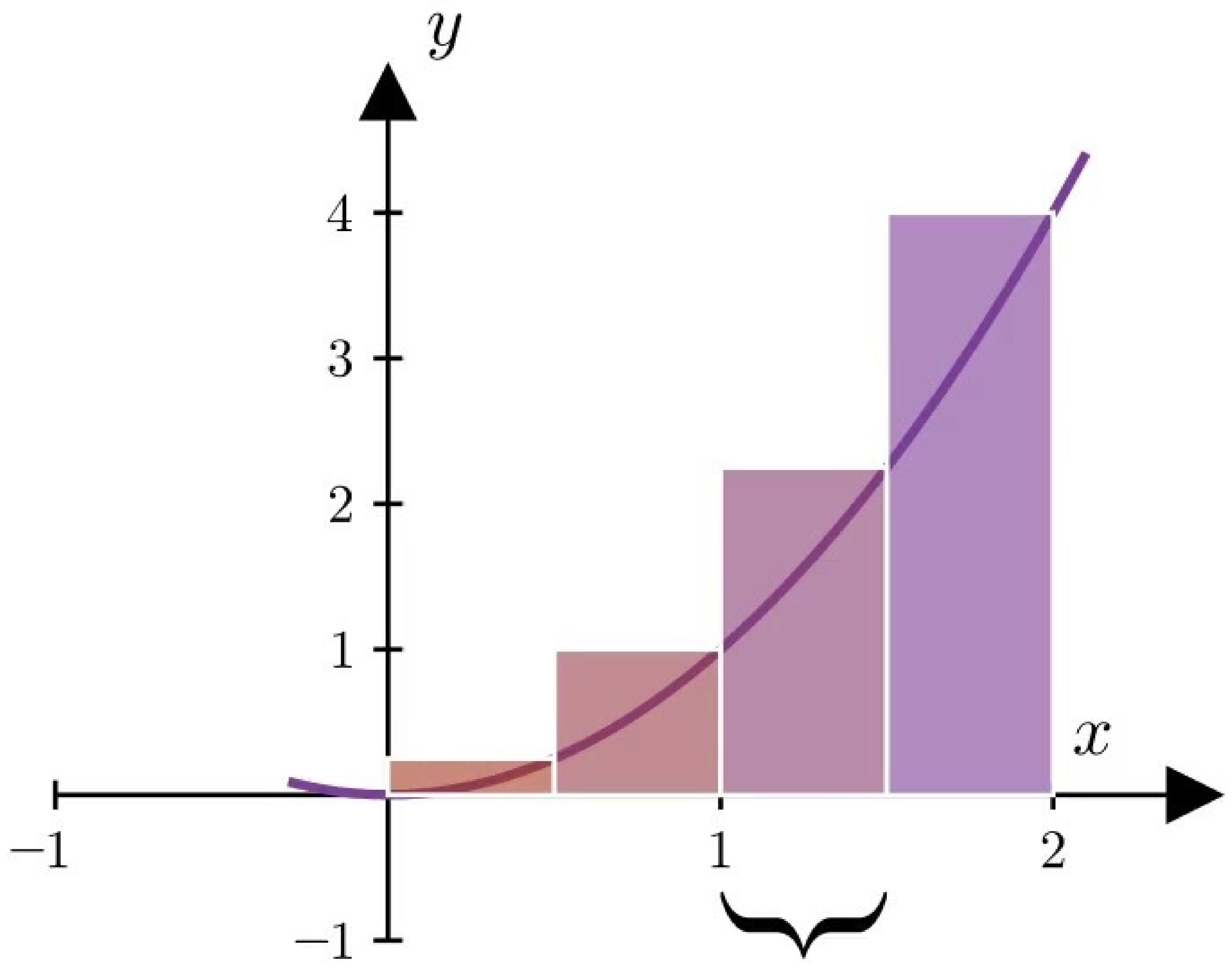
$$= \frac{x^3}{6n^2} \cdot \left[(n+1)(2n+1)\right]$$

$$= \frac{x^3}{6n^2} \cdot \left[2n^2+3n+1\right]$$

$$= \frac{2x^3n^2}{6n^2} + \frac{3x^3n}{6n^2} + \frac{x^3}{6n^3}$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^3}{3n} + \frac{x^3}{6n^3}$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} O_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^3}{3n} + \frac{x^3}{6n^3}\right)$$



$$\Delta x = \frac{x}{n}$$

3.2 Ober- und Untersumme unter dem Graphen mit unendlich vielen Rechtecken

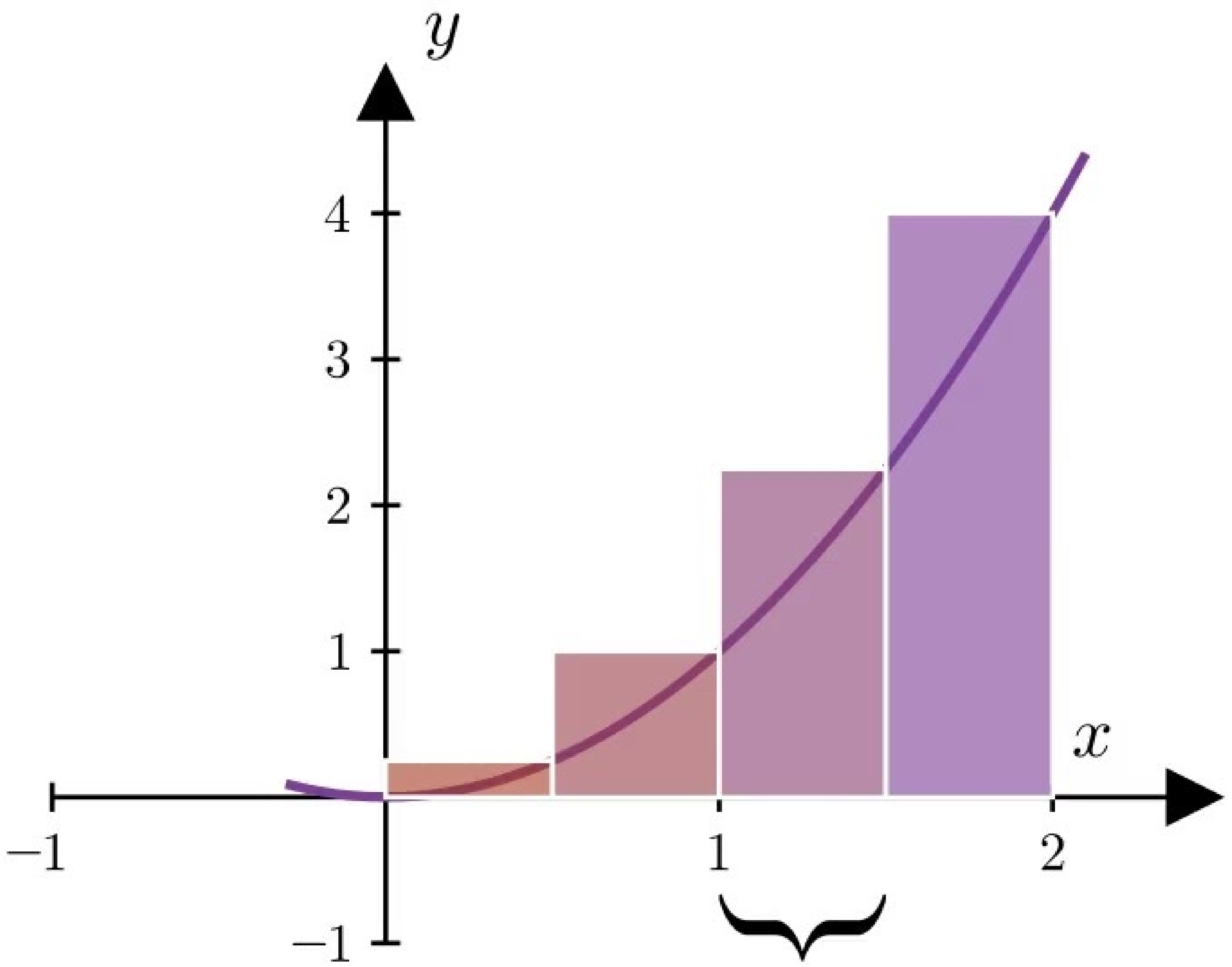
$$= \frac{x^3}{n^3} \cdot \left[\frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)\right]$$

$$= \frac{x^3}{6n^2} \cdot \left[(n+1)(2n+1)\right]$$

$$= \frac{x^3}{6n^2} \cdot \left[2n^2 + 3n + 1\right]$$

$$= \frac{2x^3n^2}{6n^2} + \frac{3x^3n}{6n^2} + \frac{x^3}{6n^3}$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^3}{3n} + \frac{x^3}{6n^3}$$

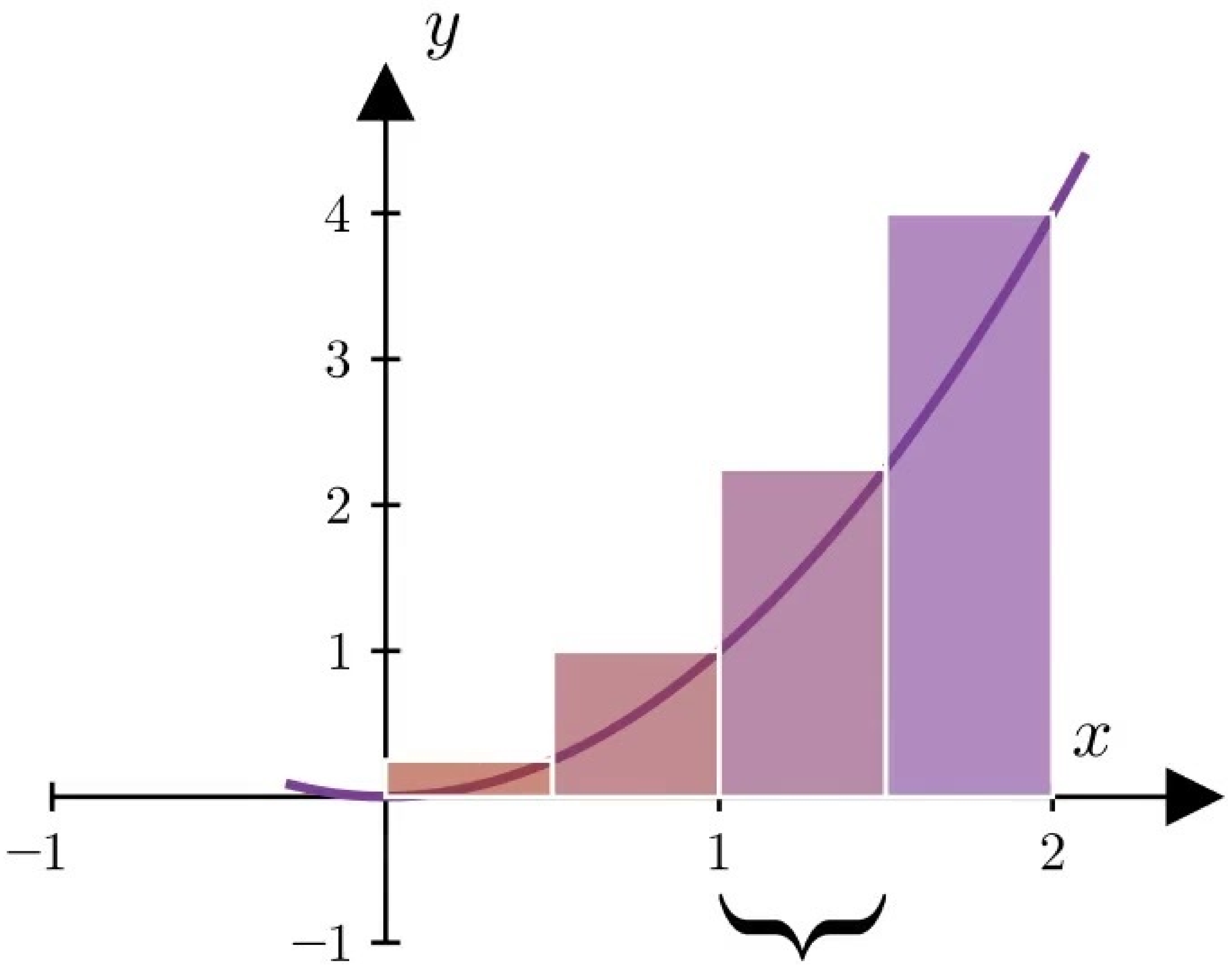


$$\Delta x = \frac{x}{n}$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} O_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^3}{3n} + \frac{x^3}{6n^3}\right) = \frac{x^3}{3} = \frac{1}{3} \cdot x^3$$

3.2 Ober- und Untersumme unter dem Graphen mit unendlich vielen Rechtecken

$$A(x) = \frac{1}{3} \cdot x^3$$

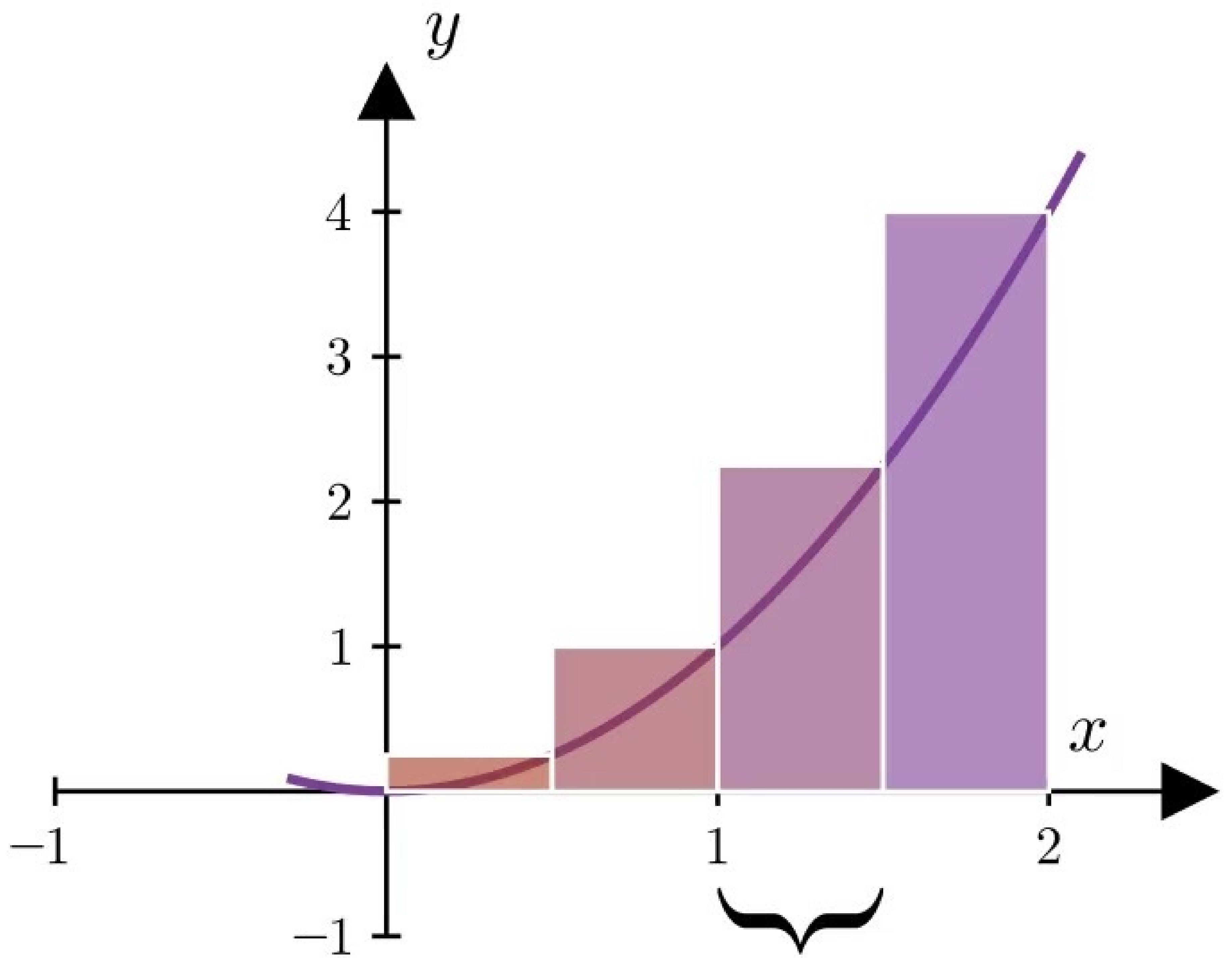


$$\Delta x = \frac{x}{n}$$

3.2 Ober- und Untersumme unter dem Graphen mit unendlich vielen Rechtecken

$$A(x) = \frac{1}{3} \cdot x^3$$

$$A(2) = \frac{1}{3} \cdot 2^3 = \frac{8}{3}\, FE$$

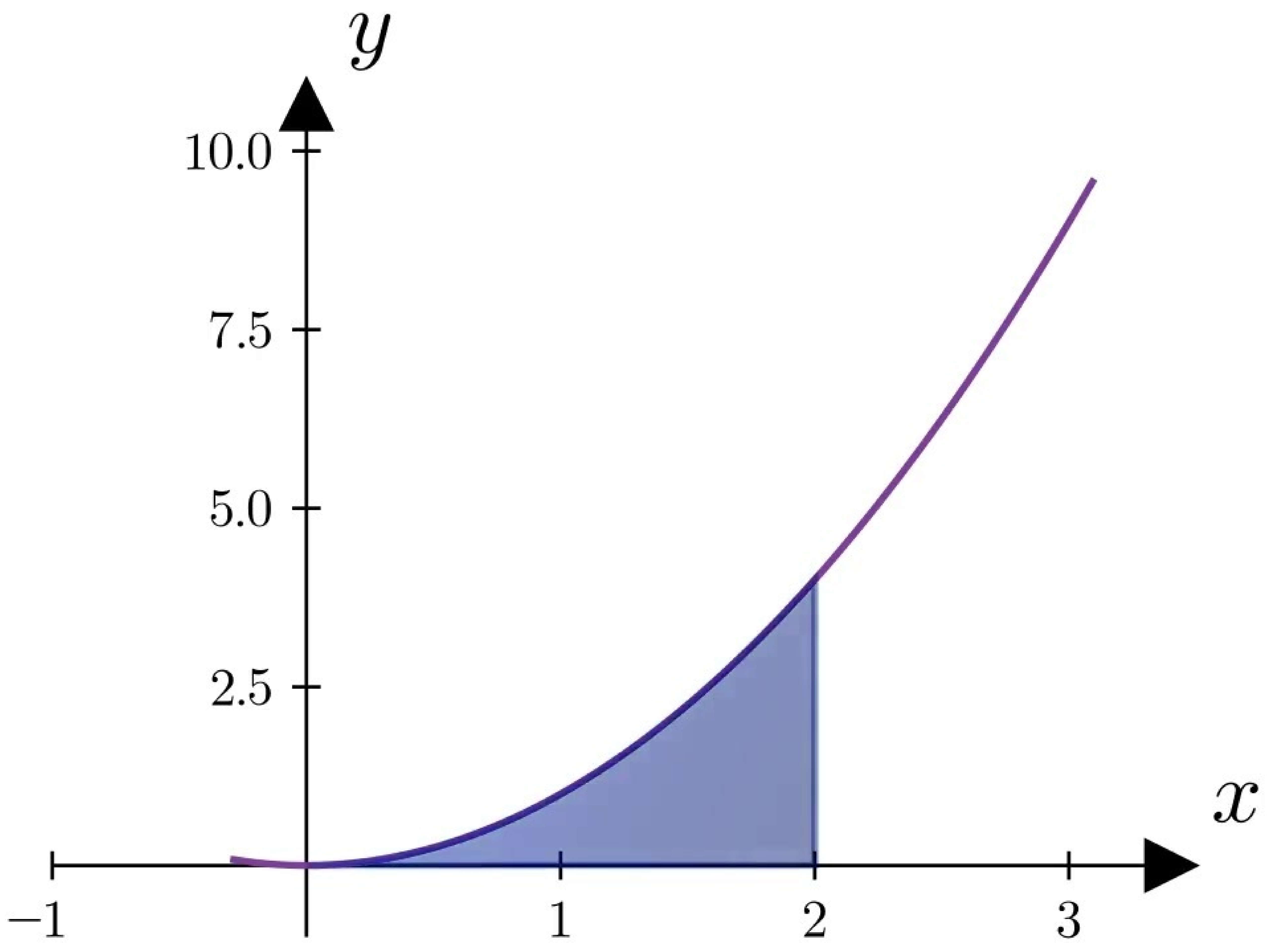


$$\Delta x = \frac{x}{n}$$

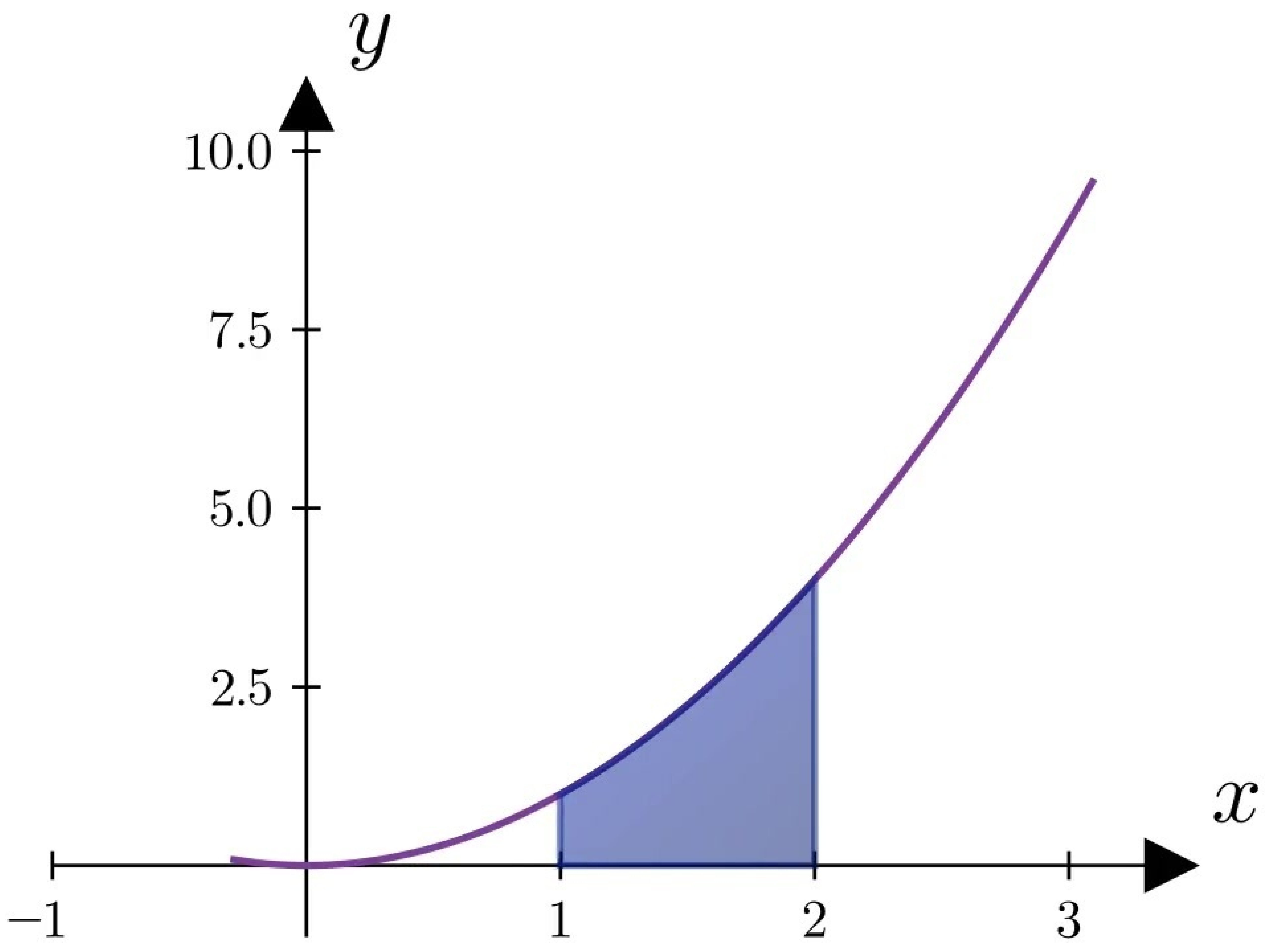
4.0 Zusammenhang von Randfunktion und Flächeninhaltsfunktion

Randfunktion	Flächeninhaltsfunktion
$f(x) = 2$	$A(x) = 2x$
$f(x) = 0,6x + 2$	$A(x) = 0,3x^2 + 2x$
$f(x) = x^2$	$A(x) = \frac{1}{3} \cdot x^3$

5. Fläche über einem Intervall $[a; b]$

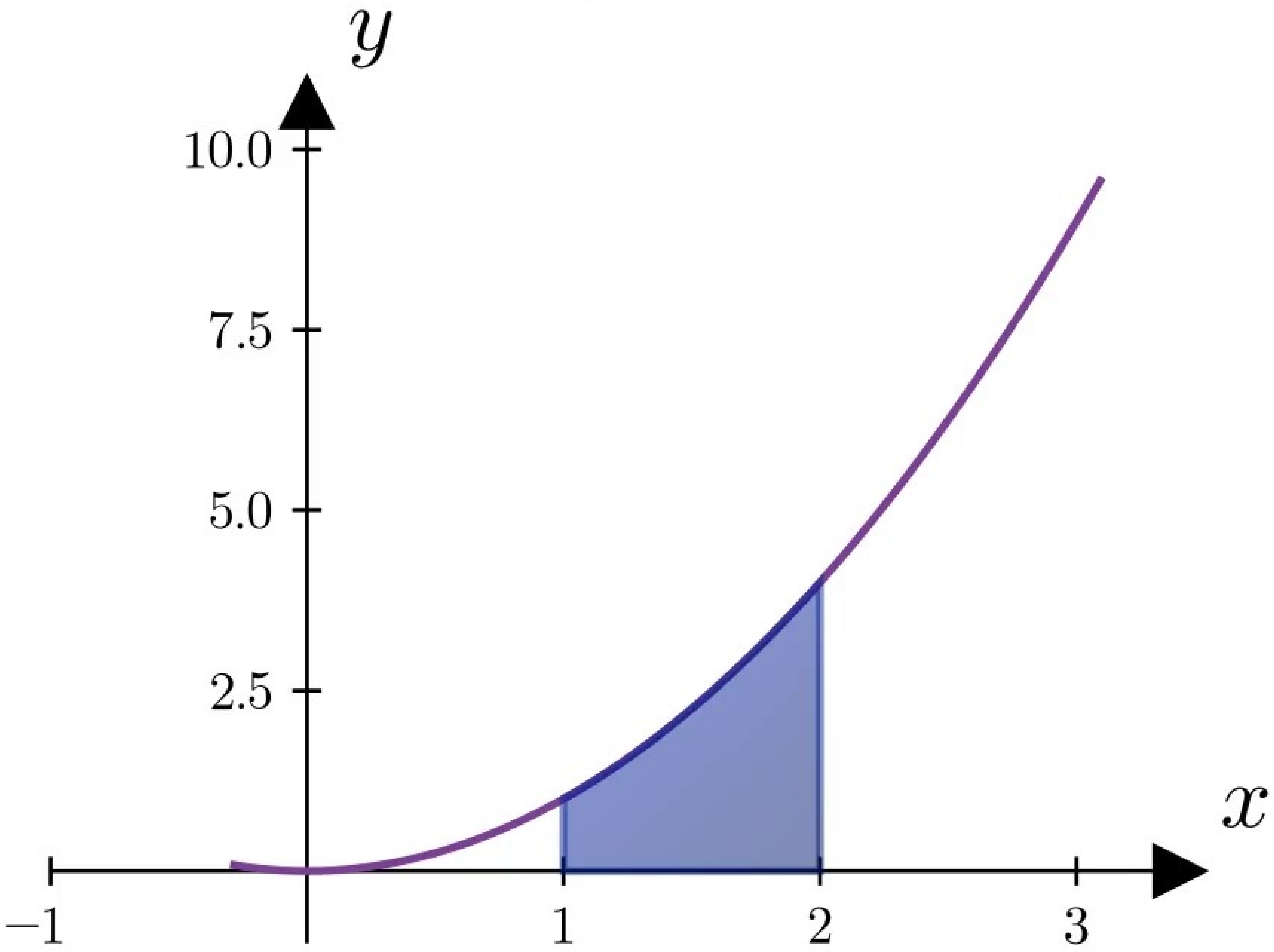


5. Fläche über einem Intervall $[a; b]$



5. Fläche über einem Intervall $[a; b]$

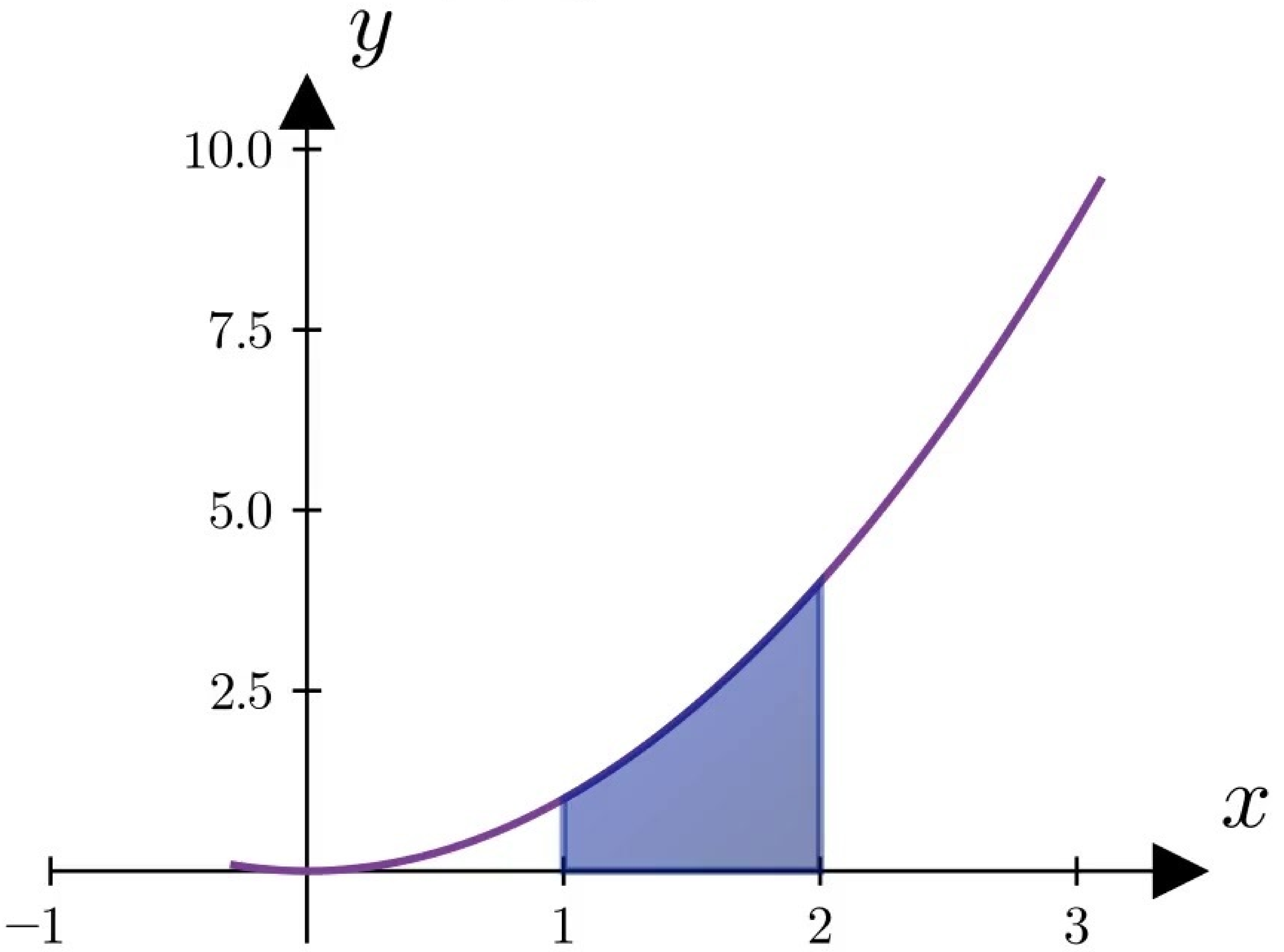
$$f(x) = x^2$$



5. Fläche über einem Intervall $[a; b]$

$$f(x) = x^2$$

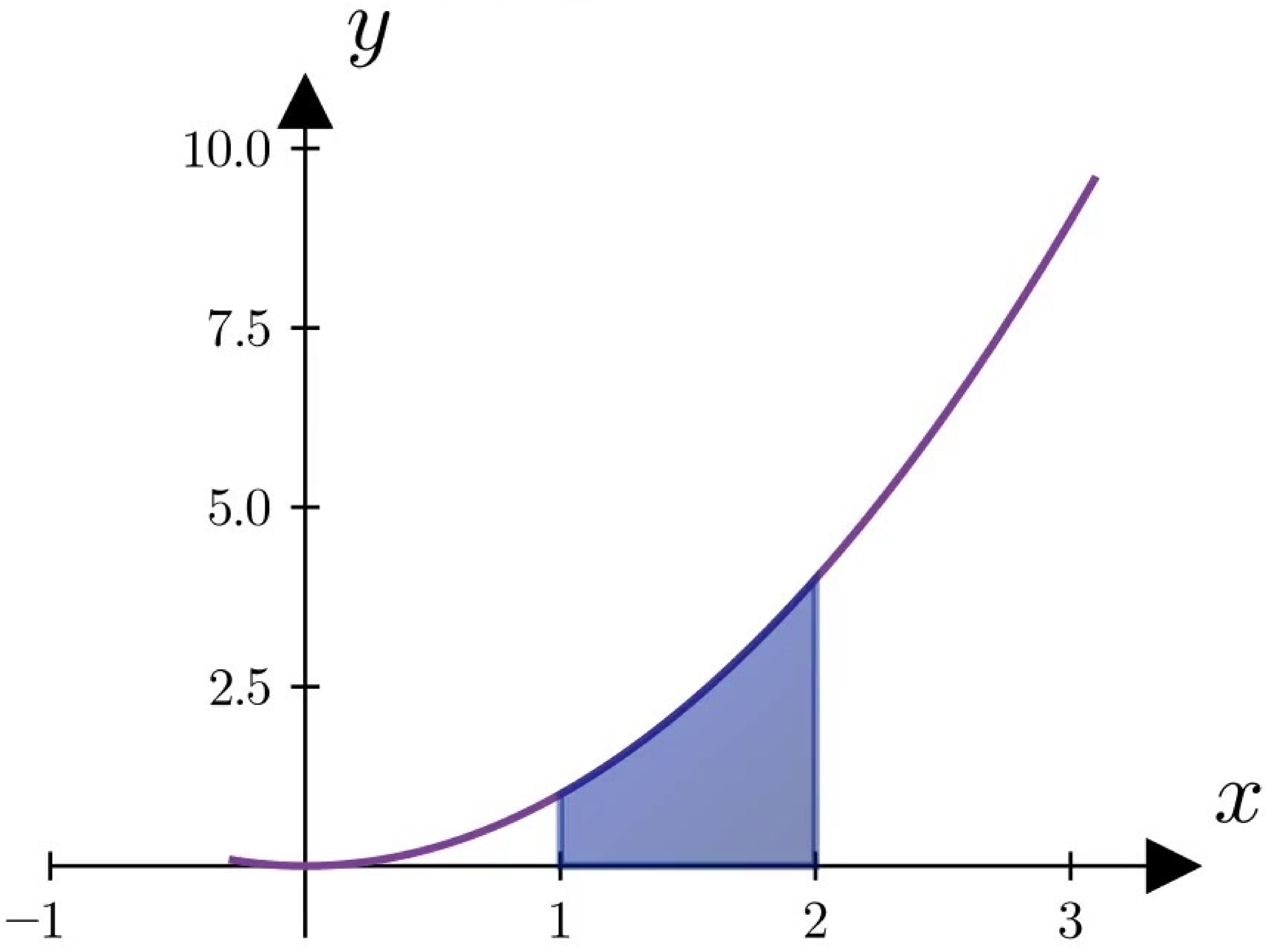
$$F(x) = \frac{1}{3} \cdot x^3 + C$$



5. Fläche über einem Intervall $[a;b]$

$$f(x) = x^2$$

$$F(x) = \frac{1}{3} \cdot x^3 + C$$

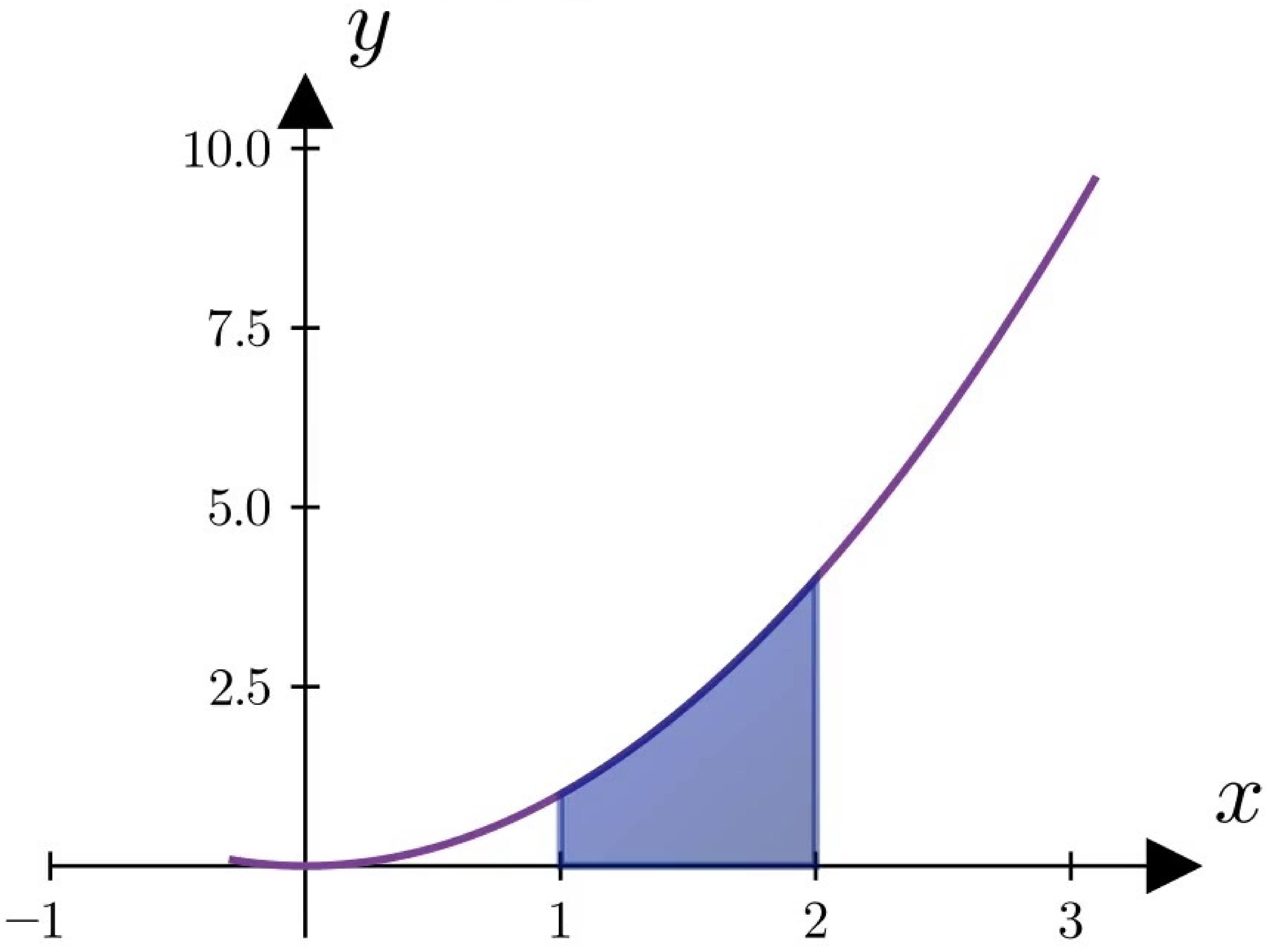


$$A = F(2) - F(1)$$

5. Fläche über einem Intervall $[a;b]$

$$f(x) = x^2$$

$$F(x) = \frac{1}{3} \cdot x^3 + C$$

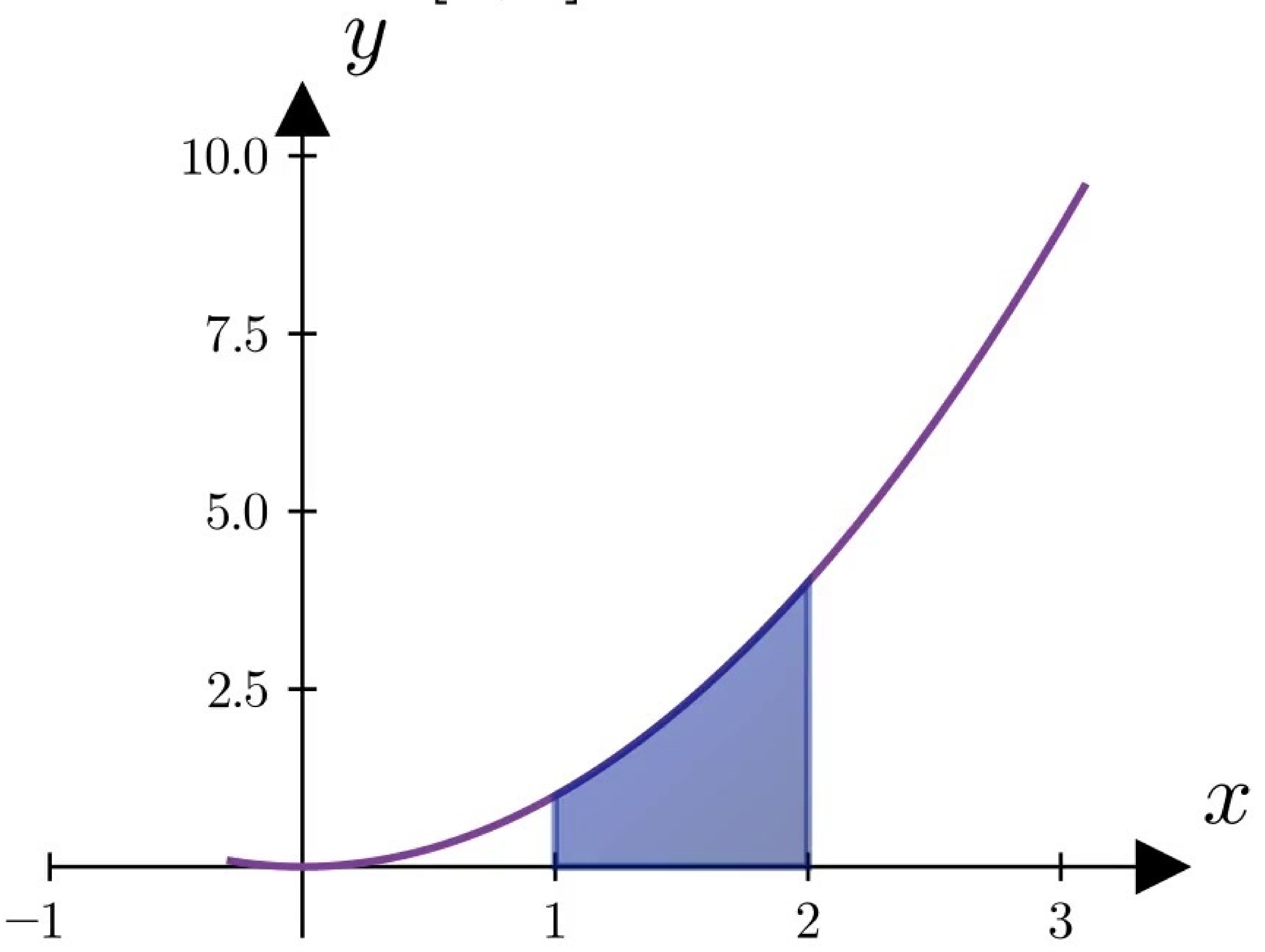


$$A = F(2) - F(1) = \frac{8}{3} + C - (\frac{1}{3} + C)$$

5. Fläche über einem Intervall $[a;b]$

$$f(x) = x^2$$

$$F(x) = \frac{1}{3} \cdot x^3 + C$$

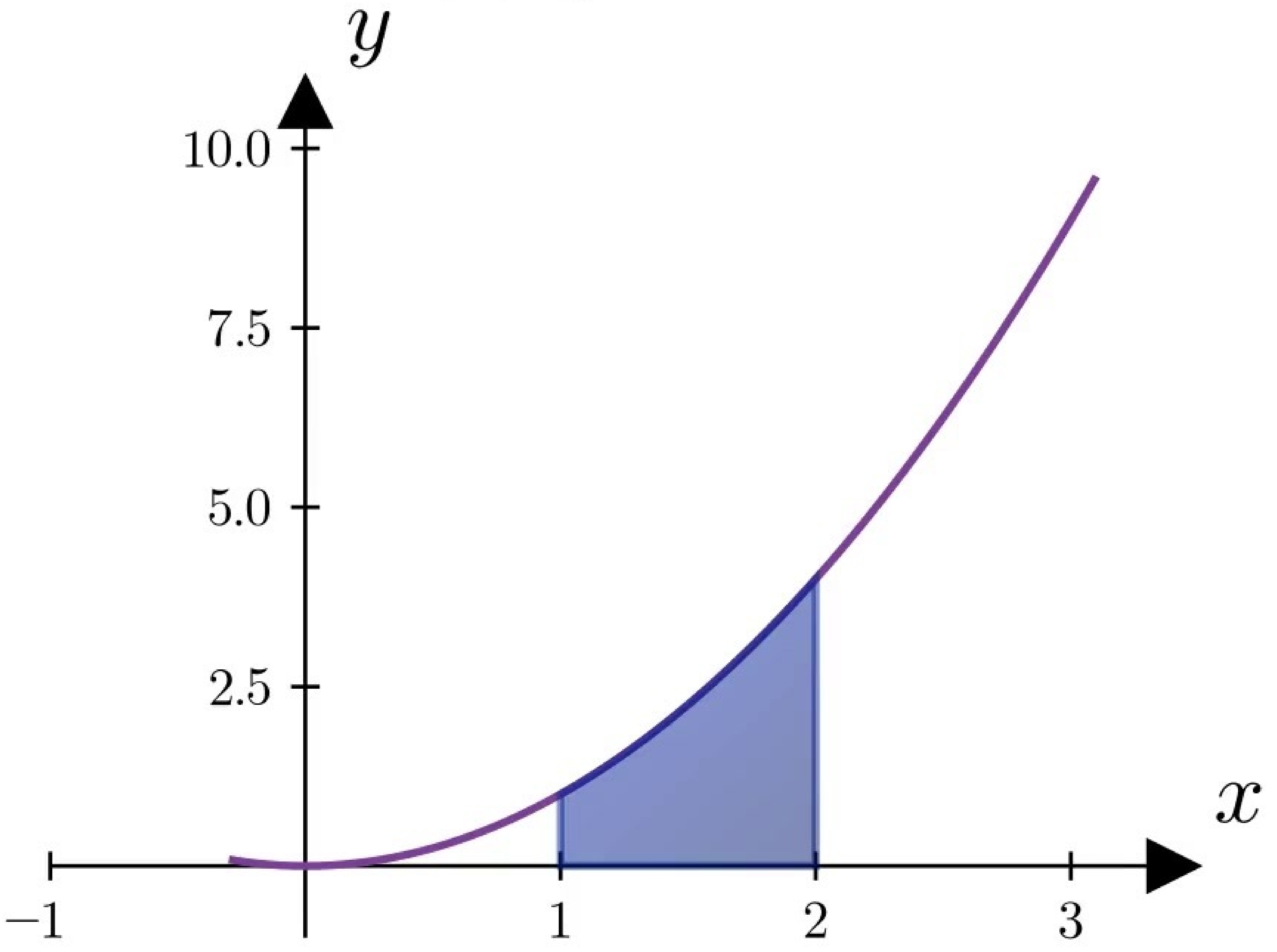


$$A = F(2) - F(1) = \frac{8}{3} + C - \frac{1}{3} - C)$$

5. Fläche über einem Intervall $[a;b]$

$$f(x) = x^2$$

$$F(x) = \frac{1}{3} \cdot x^3 + C$$



$$A = F(2) - F(1) = \frac{8}{3} + C - \frac{1}{3} - C) = \frac{7}{3} FE$$

Unbestimmtes Integral:

Bestimmtes Integral:

6. Schreibweise und Begriffsdefinitionen

Unbestimmtes Integral:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

Bestimmtes Integral:

6. Schreibweise und Begriffsdefinitionen

Unbestimmtes Integral:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

Bestimmtes Integral:

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

6. Schreibweise und Begriffsdefinitionen

Unbestimmtes Integral:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

Bestimmtes Integral:

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Flächenberechnung mit bestimmten Integral:

6. Schreibweise und Begriffsdefinitionen

Unbestimmtes Integral:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

Bestimmtes Integral:

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Flächenberechnung mit bestimmten Integral:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

6. Schreibweise und Begriffsdefinitionen

Unbestimmtes Integral:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

Bestimmtes Integral:

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Flächenberechnung mit bestimmten Integral:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \quad = [F(x)]_a^b$$

6. Schreibweise und Begriffsdefinitionen

Unbestimmtes Integral:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

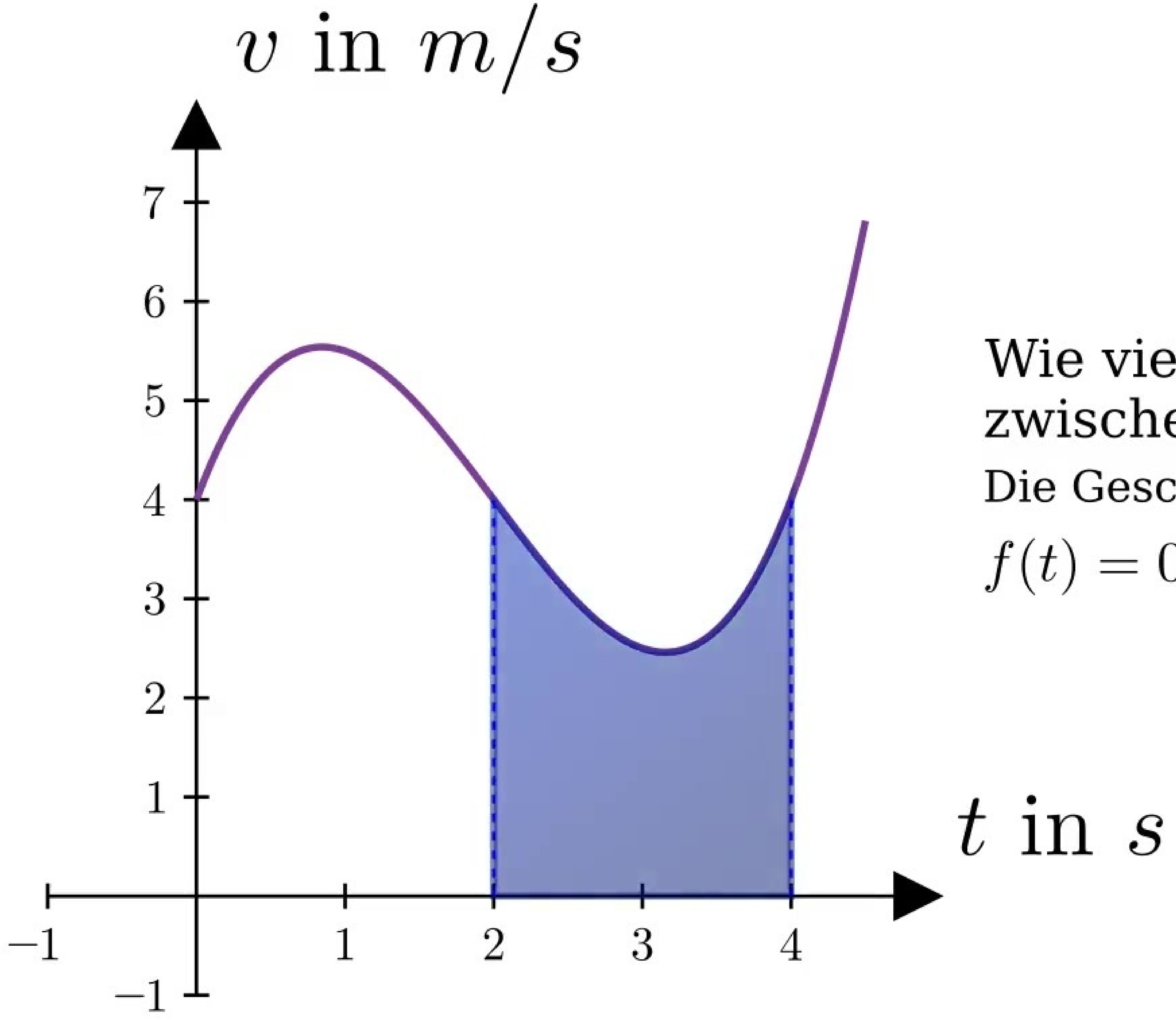
Bestimmtes Integral:

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Flächenberechnung mit bestimmten Integral:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \quad = [F(x)]_a^b \quad = w, w \in \mathbb{R}$$

7. Lösen des Ausgangsproblems

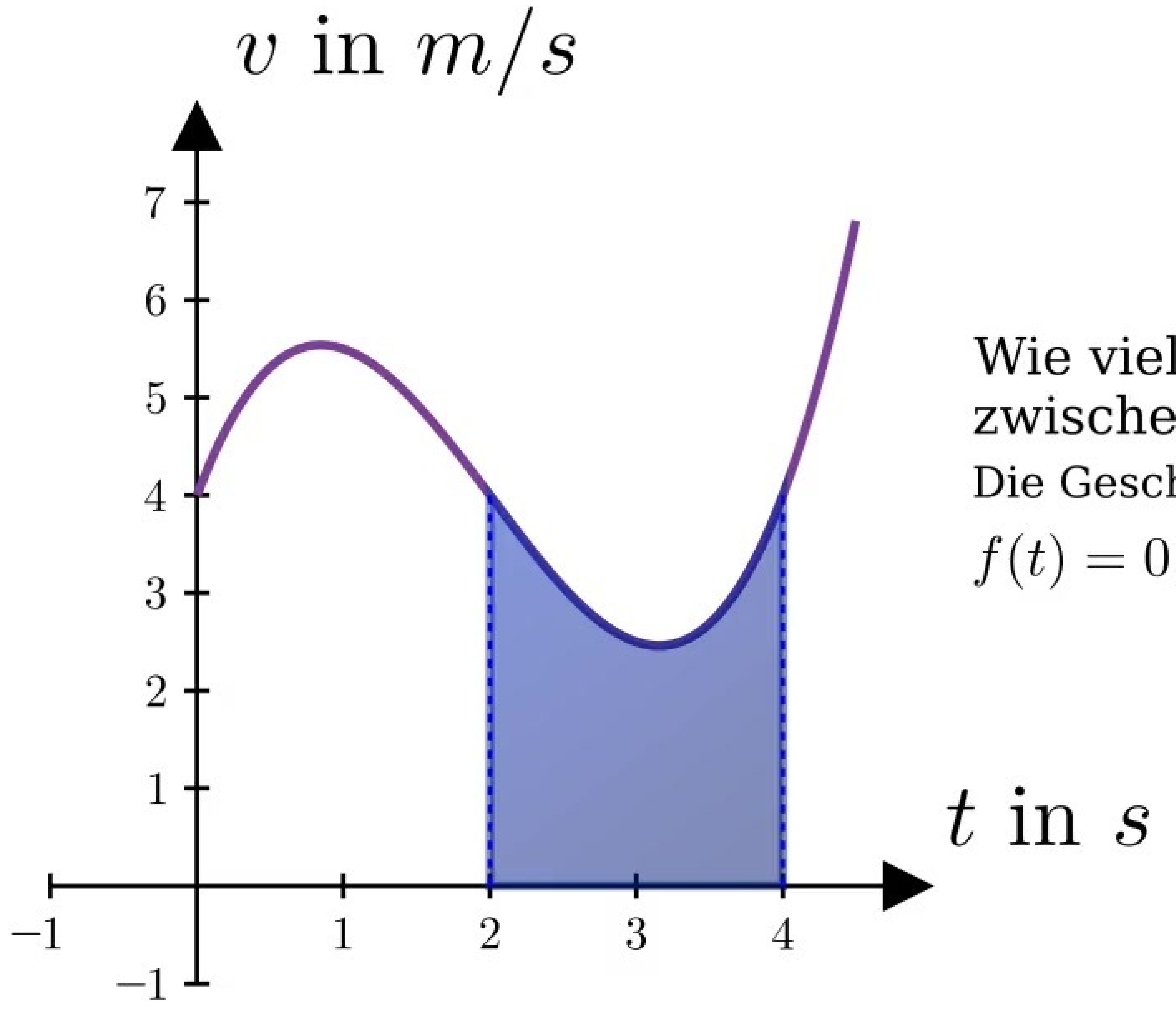


Wie viel Meter hat der Fahrer zwischen Sekunde 2 und 4 zurückgelegt?

Die Geschwindigkeit verläuft nach der Funktion:

$$f(t) = 0,5t^3 - 3t^2 + 4t + 4$$

7. Lösen des Ausgangsproblems



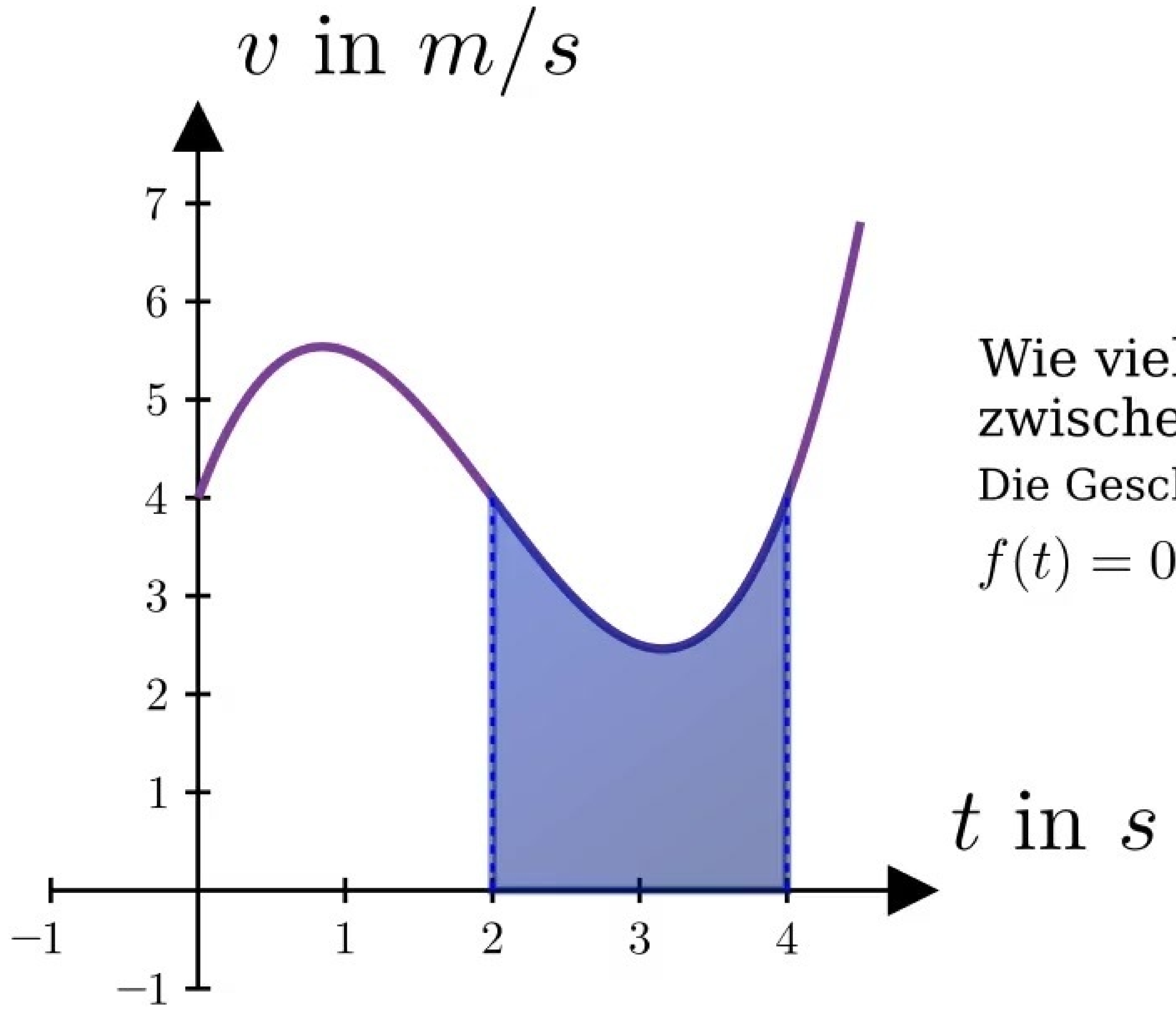
Wie viel Meter hat der Fahrer zwischen Sekunde 2 und 4 zurückgelegt?

Die Geschwindigkeit verläuft nach der Funktion:

$f(t) = 0,5t^3 - 3t^2 + 4t + 4$

$$\int_2^4 (0,5t^3 - 3t^2 + 4t + 4)\,dt$$

7. Lösen des Ausgangsproblems



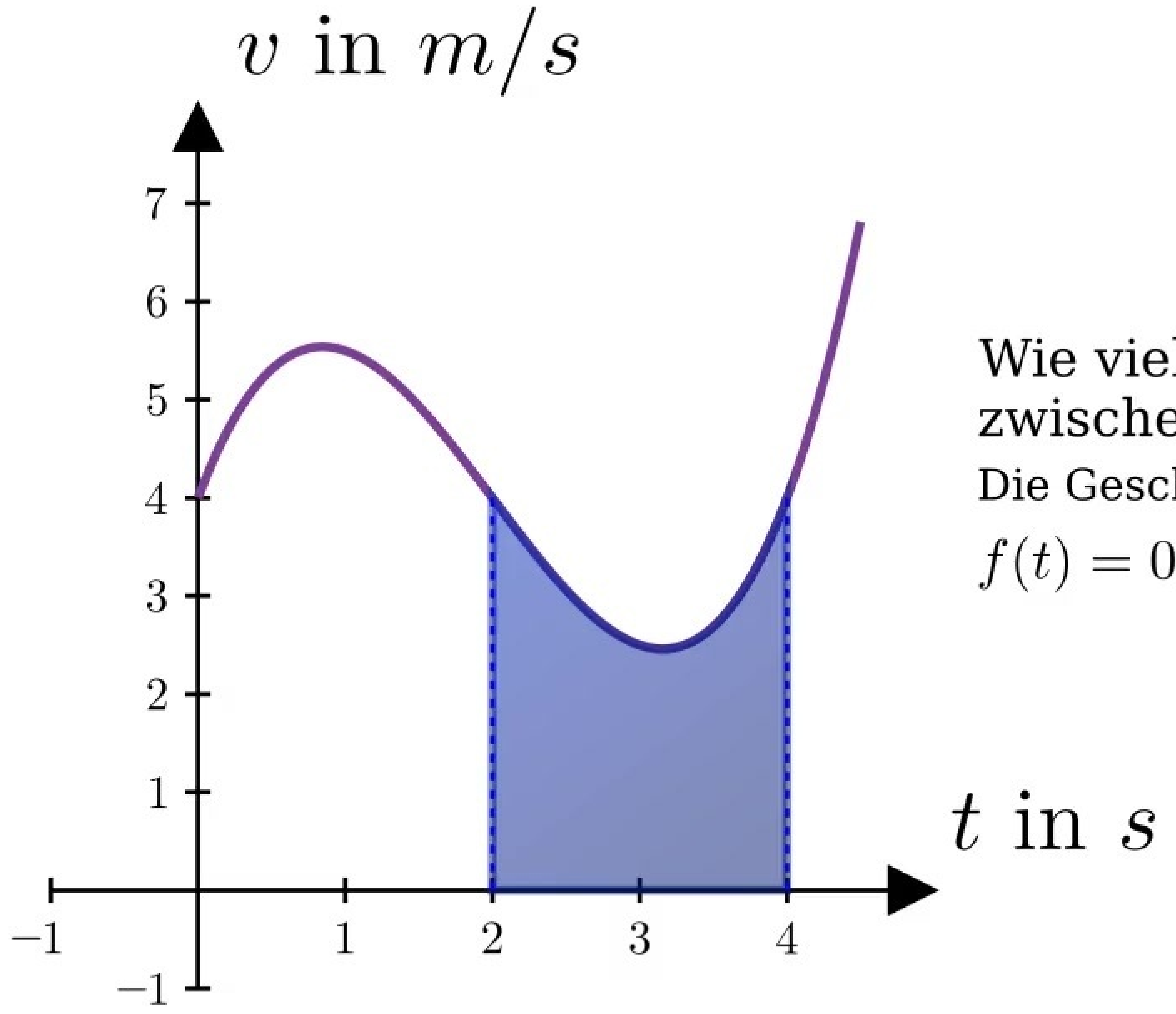
Wie viel Meter hat der Fahrer
zwischen Sekunde 2 und 4 zurückgelegt?

Die Geschwindigkeit verläuft nach der Funktion:

$f(t) = 0,5t^3 - 3t^2 + 4t + 4$

$$\int_2^4 (0,5t^3 - 3t^2 + 4t + 4)\,dt \;= \left[\frac{0,5}{4}t^4 - t^3 + 2t^2 + 4t\right]_2^4$$

7. Lösen des Ausgangsproblems



Wie viel Meter hat der Fahrer
zwischen Sekunde 2 und 4 zurückgelegt?

Die Geschwindigkeit verläuft nach der Funktion:

$f(t) = 0,5t^3 - 3t^2 + 4t + 4$

$$\int_2^4 (0,5t^3 - 3t^2 + 4t + 4)\,dt \;= \left[\frac{0,5}{4}t^4 - t^3 + 2t^2 + 4t\right]_2^4 \;= 16 - 10 = 6\,m$$

Literaturverzeichnis

Internetquellen:

- Hemmerich, Wanja (o. D.): Integral, MatheGuru, [online] https://matheguru.com/integralrechnung/integral.html [abgerufen am 30.04.2022].
- Serlo Education e.V. (o. D.): Bestimmtes und unbestimmtes Integral, Serlo, [online] https://de.serlo.org/mathe/1829/bestimmtes-und-unbestimmtes-integral [abgerufen am 30.04.2022].

Literaturquellen:

- Altrichter, Volker/Werner Fielk/Mikhail Ioffe/Stefan Konstandin/Daniel Körner/Peter Meier/Georg Ott (2018): *Mathematik - Berufliche Oberschule Bayern - Technik - Band 2 (FOS/BOS 12): Schülerbuch*, Berlin, Deutschland: Cornelsen Verlag.
- Altrichter, Volker/Werner Fielk/Mikhail Ioffe/Stefan Konstandin/Daniel Körner/Peter Meier/Georg Ott/Franz Roßmann (2019): *Mathematik - Berufliche Oberschule Bayern - Technik - Band 3 (FOS/BOS 13): Schülerbuch*, Berlin, Deutschland: Cornelsen Verlag.