

# Esercizio facoltativo\* sulla FFT

B. Tomelleri (\*)

20 maggio 2020

## 1 INTRODUZIONE

Si è rivisitato nel dominio delle frequenze lo studio di sistemi elettronici e meccanici, finora analizzati solamente nel dominio del tempo, attraverso l'uso di due strumenti fondamentali: la trasformata di Fourier Discreta (DFT) e la detezione sincrona o Lock In Detection/Amplification (LIA).

## 2 CENNI TEORICI

La Trasformata di Fourier Discreta (o DFT) estende la trasformata di Fourier tradizionale a sistemi con variabile dinamica discreta. In particolare approfitteremo della velocità dell'algoritmo Cooley-Tukey [1] o FFT per calcolare un ciclo della DFT nella nostra analisi.

L'utilità della detezione sincrona risiede nella capacità di isolare componenti ad una fissata frequenza e fase di un segnale da -idealmente- tutte le fonti di rumore asincrone e fuori fase rispetto alla modulazione di riferimento, in ambienti dove  $\text{SNR} \ll 1$ ). Poiché l'operazione di media temporale è svolta alla  $f_{\text{ref}}$  sia le fluttuazioni termiche ad alta frequenza o di  $jitter \propto 1/\sqrt{T_{\text{mis}}}$  che quelle di *flicker*  $\propto 1/f^{\gamma}$  sono mitigate dal metodo di lock-in detection. Al livello di implementazione digitale un secondo pregio del LIA risulta meno evidente, vista la possibilità di costruire filtri BPF numerici con banda regolabile di qualità arbitraria: ma, nel caso reale costruire filtri mobili di alta qualità  $Q \gg 10$  è tutto fuorché banale, dunque la possibilità di traslare in frequenza le componenti di un segnale all'interno della banda di un buon filtro "fisso" costituisce un enorme vantaggio.

### 2.1 Circuiti forzati e smorzati RLC

In un circuito costituito da almeno una resistenza, un induttore ed un condensatore (nel nostro caso collegati in serie) è possibile individuare una frequenza caratteristica  $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$ , detta propria o di risonanza, per cui il sistema è percorso da una corrente elettrica oscillante nel tempo. Infatti, quando il sistema è perturbato da una tensione alla frequenza  $f_0 := \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$  le impedenze del condensatore e dell'induttore si annullano a vicenda, dunque l'impedenza del circuito si trova al proprio valor minimo, cioè la sola componente resistiva  $R$  rimasta. Possiamo quindi descrivere il trasporto di carica nel circuito con l'equazione di un oscillatore smorzato:

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} + \frac{R}{L} \frac{\partial Q}{\partial t} + \omega_0^2 Q = 0 \quad (1)$$

La cui soluzione, in termini della frequenza di oscillazione smorzata o pseudo-frequenza angolare  $\omega$ , dello pseudo periodo  $T$  e del tempo caratteristico di smorzamento  $\tau$ :

$$\begin{aligned} \omega &= \sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{\tau^2}} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{\tau^2}} \\ T &= \frac{2\pi}{\omega} \\ \tau &= \frac{2L}{R} \end{aligned}$$

---

\*Dipartimento di Fisica E. Fermi, Università di Pisa - Pisa, Italy.

si può scrivere come:

$$Q(t) = Ae^{-t/\tau} \cos(\omega t + \varphi) \quad (2)$$

$$A = \sqrt{c_1 c_2} \quad (3)$$

$$\tan \varphi = j \frac{c_1 + c_2}{c_1 - c_2} \quad (4)$$

dove i coefficienti  $c_1$  e  $c_2$  dipendono dalle condizioni iniziali del sistema. Secondo il nostro modello, la d.d.p. sulle armature del condensatore è determinata dalla relazione costitutiva di  $C$  e le condizioni iniziali sono fissate dalla carica presente sulle armature  $Q_0$  e dall'intensità di corrente  $I_0$  che circola nel circuito all'inizio dell'oscillazione:

$$V_C(t) = \frac{Q(t)}{C} = \frac{A}{C} e^{-t/\tau} \cos(\omega t + \varphi) \quad (5)$$

$$Q(t=0) = A \cos \varphi := Q_0 \implies A = Q_0 \sqrt{1 + \tan^2 \varphi} \quad (6)$$

$$I(t) = \frac{\partial Q}{\partial t} = Ae^{-t/\tau} \left[ \frac{\cos(\omega t + \varphi)}{\tau} + \omega \sin(\omega t + \varphi) \right] \quad (7)$$

$$I(t=0) = A \left[ \frac{\cos \varphi}{\tau} + \omega \sin \varphi \right] \implies \varphi = \arctan \left( \frac{1}{\omega} \left[ \frac{I_0}{Q_0} - \frac{1}{\tau} \right] \right) \quad (8)$$

## 2.2 Quality Factor

Per descrivere la dissipazione media di energia da parte di sistemi oscillanti nel tempo si è introdotta la quantità adimensionale *Quality factor*:

$$Q_f := 2\pi \frac{E_{\text{stored}}}{E_{\text{lost/cycle}}} \quad (9)$$

Per un circuito RLC il trasferimento reciproco di energia elettrostatica e magnetostatica, immagazzinate nel condensatore e nell'induttore rispettivamente, è massimo sotto l'effetto di una forzante alla stessa  $f_0$  di risonanza. Possiamo esprimere l'energia interna all'induttore come  $U_M = \frac{1}{2}LI^2$  e quella accumulata dal condensatore come  $U_E = \frac{1}{2C}Q^2$ . Assumendo che all'inizio dell'oscillazione  $t = 0 := t_0$  tutta l'energia del circuito sia contenuta all'interno dell'induttore, possiamo identificare  $E_{\text{stored}}$  con  $U_M(t_0) := U_{M_0}$  e caratterizzare l'energia dissipata in ogni periodo con la relazione di Joule per gli effetti termico-dissipativi:

$$E_{\text{stored}} = U_{M_0} = \frac{1}{2}LI_0^2 \quad (10)$$

$$E_{\text{lost/cycle}} = \langle P_{\text{Joule}} \rangle_t \cdot T = \frac{1}{2}RI_0^2 \cdot T \quad (11)$$

Supponendo che il circuito sia perturbato da un segnale sinusoidale monocromatico, il metodo simbolico ci permette di legare la larghezza di riga della risposta in frequenza del circuito al tempo caratteristico di smorzamento, dunque al fattore di qualità dell'oscillazione. Nell'approssimazione di oscillazione sottosmorzata  $\omega_0 \gg \frac{1}{\tau} \implies \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{\tau^2}} \approx \omega_0$  possiamo approssimare la larghezza a metà altezza della curva di risonanza con

$$\Delta\omega_{\text{FWHM}} \approx \sqrt{3}RC\omega_0^2 = \sqrt{3}\frac{R}{L} = \frac{2\sqrt{3}}{\tau} \quad (12)$$

Per cui ci si aspetta che la larghezza della campana di risonanza sia proporzionale alla severità dello smorzamento/perdita di energia dell'oscillazione. In altre parole, per un circuito RLC il fattore di qualità atteso è:

$$Q_f \approx 2\pi \frac{\frac{1}{2}LI_0^2}{\frac{1}{2}RI_0^2 \cdot T_0} = \omega_0 \frac{L}{R} = \omega_0 \frac{\tau}{2} = \sqrt{3} \frac{\omega_0}{\Delta\omega_{\text{FWHM}}} \quad (13)$$

### 2.3 Oscillatore a reazione con BJT

Il secondo tipo di sistema oscillante studiato è un circuito dotato di un amplificatore invertente, un transistor a giunzione bipolare (BJT) montato ad emettitore comune (emitter-follower) ed un anello di feedback. Secondo il criterio di stabilità di Barkhausen, affinché un circuito elettrico lineare possa sostenere la propria auto-oscillazione è necessaria la presenza di un feedback positivo, i.e. lo sfasamento totale dovuto all'anello di feedback dev'essere un multiplo di  $2\pi$ . Nel nostro caso la condizione è soddisfatta interponendo una rete di sfasamento, costituita da 3 filtri RC passa-alto passivi, che inverte nuovamente segno  $\Delta\varphi = \pi$  al segnale in uscita dall'amplificatore. Vale la pena ricordare un modo equivalente per ottenere un sistema auto-oscillante, in cui lo stesso sfasamento (seppur opposto in segno) è dato dalla serie di un induttore ed un condensatore, quello che va sotto il nome di oscillatore di Colpitts.

### 2.4 Detezione sincrona

Supponiamo di voler misurare un segnale coerente, i.e. con fase costante nel tempo  $V(t)$ , che per semplicità assumiamo sinusoidale -monocromatico- a frequenza  $f$ , e di generare con oscillatori locali due segnali di riferimento  $V_{ri}(t)$  e  $V_{rq}(t)$  anch'essi coerenti e sinusoidali ad una frequenza nota  $f_{ref}$ , ma sfasati tra loro di  $\Delta\theta = \frac{\pi}{2}$ . Moltiplicando il segnale di riferimento  $V_{ri}(t)$  per quello d'interesse  $V(t)$  con un miscelatore (PSD) si ottiene un segnale proporzionale al prodotto delle loro ampiezze e con due componenti in frequenza, uno alla somma  $f + f_{ref}$  ed uno alla differenza  $f - f_{ref}$ .

$$\begin{aligned} V(t) &:= V_{sig} \sin(\omega t + \varphi) \\ V_{ri}(t) &:= V_{ref} \sin(\omega_{ref} t + \varphi_{ref}) \\ V_{rq}(t) &:= V_{ref} \cos(\omega_{ref} t + \varphi_{ref}) \\ V_{PSD}(t) &:= V(t) \cdot V_{ri}(t) = V_{sig} \sin(\omega t + \varphi) V_{ref} \sin(\omega_{ref} t + \varphi_{ref}) = \\ &= \frac{1}{2} V_{sig} V_{ref} (\cos([\omega - \omega_{ref}] + \varphi - \varphi_{ref}) + \cos([\omega + \omega_{ref}] + \varphi + \varphi_{ref})) \end{aligned}$$

Nel caso in cui anche la frequenza  $f$  del segnale di nostro interesse sia nota possiamo impostare  $f_{ref} = f$ , in questa configurazione "omodina" il segnale in uscita dal detector non ha più media nulla, ma ha una componente DC a frequenza 0 Hz proporzionale all'ampiezza di  $V(t)$ . Con un filtro passa basso possiamo allora "tagliare" il contributo dovuto alla componente restante a  $2f$ , ovvero mediando sul tempo per  $t \gg T = 1/f$ , abbiamo una misura di  $V_{sig}$  dipendente dallo sfasamento  $\Delta\varphi = \varphi - \varphi_{ref}$ :

$$V_{out} := \langle V_{PSD} \rangle_t = \frac{1}{2} V_{sig} V_{ref} \cos(\varphi - \varphi_{ref}) \implies V_{sig} \cos \Delta\varphi = 2 \frac{V_{out}}{V_{ref}} \quad (14)$$

Per eliminare la dipendenza da  $\Delta\varphi$  dalla misura possiamo ripetere lo stesso procedimento, però usando il segnale di riferimento in quadratura  $V_{rq}(t)$

$$V_{outq} := \langle V(t) \cdot V_{rq}(t) \rangle_t = \frac{1}{2} V_{sig} V_{ref} \sin \Delta\varphi \quad (15)$$

Un cambio di coordinate da cartesiane a polari ci permette di esprimere in maniera elegante il modulo e la fase del segnale da misurare  $V(t)$

$$X := 2 \frac{V_{out}}{V_{ref}} \cos \Delta\varphi = V_{sig} \cos \Delta\varphi; \quad Y := 2 \frac{V_{out}}{V_{ref}} \sin \Delta\varphi = V_{sig} \sin \Delta\varphi \quad (16)$$

$$V_{sig} = \sqrt{X^2 + Y^2} \quad (17)$$

$$\varphi = \arctan \frac{Y}{X} \quad (18)$$

## 3 METODO E APPARATO Sperimentale

Non si è monitorata la temperatura dei componenti dei circuiti studiati, tutti i collegamenti tra i componenti sono stati realizzati con cavi terminanti in connettori a banana. L'uso di Arduino[2] come

sistema di acquisizione dati non permette di apprezzare le perturbazioni dovute alla temperatura o ai collegamenti dei componenti nelle nostre condizioni di lavoro.

### 3.1 Apparato

L'apparato sperimentale consiste di diversi circuiti elettrici, realizzati con componenti pre-assemblati in laboratorio ed un generatore di funzioni (GFG-8200A). Per monitorare la risposta dei circuiti si utilizzano i canali di un oscilloscopio analogico (50 MHz) e uno digitale (200 MHz), mentre per l'acquisizione dei segnali di d.d.p. compresi tra 0 e 5 V si fa uso del convertitore ADC del MCU Arduino UNO.

#### 3.1.1 Circuito RC

Si è costruito un circuito integratore RC o filtro passa-basso (LPF), prendendo il valore nominale come riferimento per la capacità e misurando con un multimetro digitale la resistenza in serie, le caratteristiche del circuito risultano:

$$R = 6.72 \pm 0.05 \text{ k}\Omega$$

$$C = 2.2 \pm 10\% \mu\text{F}$$

$$f_T = \frac{1}{2\pi RC} = 11 \pm 1 \text{ Hz}$$

Lo stesso circuito è utilizzato per i campionamenti delle forme d'onda in uscita dal generatore di funzioni con il primo canale dell'oscilloscopio digitale (CH1).

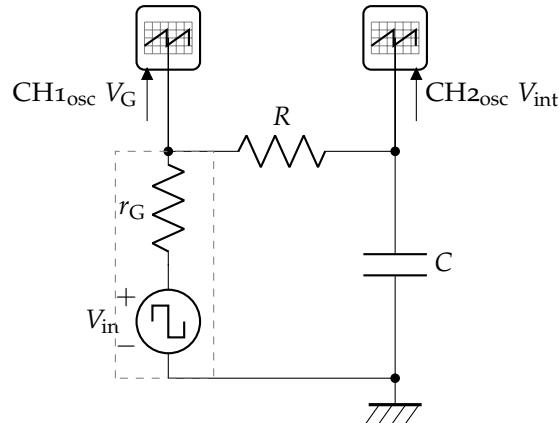


Figura 1: Schema circuitale dell'integratore RC realizzato in laboratorio.

#### 3.1.2 Circuiti RLC

Nel nostro caso l'induttore è costituito da due avvolgimenti concentrici e coassiali, ciascuno dotato di 1500 spire, che montati in serie hanno un fattore di auto-induzione  $L \sim 0.5 \text{ H}$  e i condensatori hanno capacità dai valori nominali:  $C = \{0.1, 0.22, 0.47\} \pm 10\% \mu\text{F}$ . La componente resistiva  $R$  del circuito è data dalle resistenze interne del generatore di tensione ( $r_G = 50 \Omega$  nominali) e dell'induttore, che indichiamo con:  $r \approx 40 \Omega$ . Le 3000 spire totali di filo di rame negli avvolgimenti infatti influiscono apprezzabilmente e in maniera non banale sul trasferimento di energia all'interno del circuito.

#### 3.1.3 Oscillatore a reazione con BJT

Il potenziometro  $R_p$  permette di variare la corrente di base  $I_b$  del transistor, mentre per regolare la corrente di collettore  $I_c$  si variano le resistenze  $R_c$  tra i valori nominali di  $1 - 2.2 \pm 10\% \text{ k}\Omega$ .

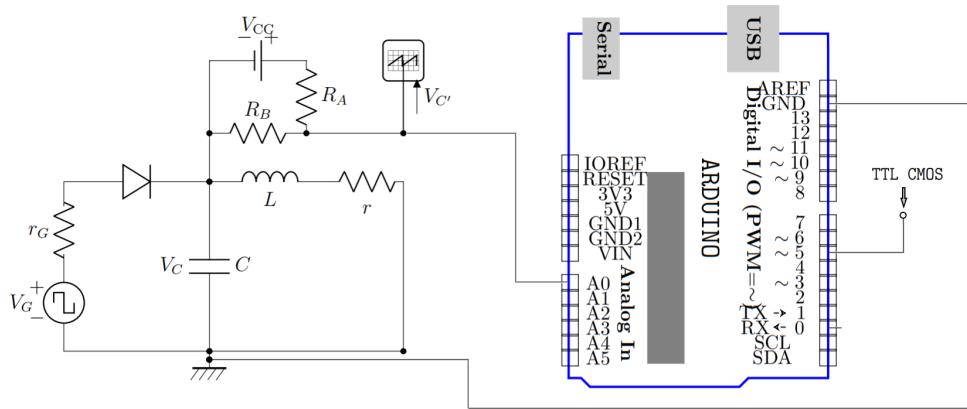


Figura 2: Diagramma del circuito RLC studiato

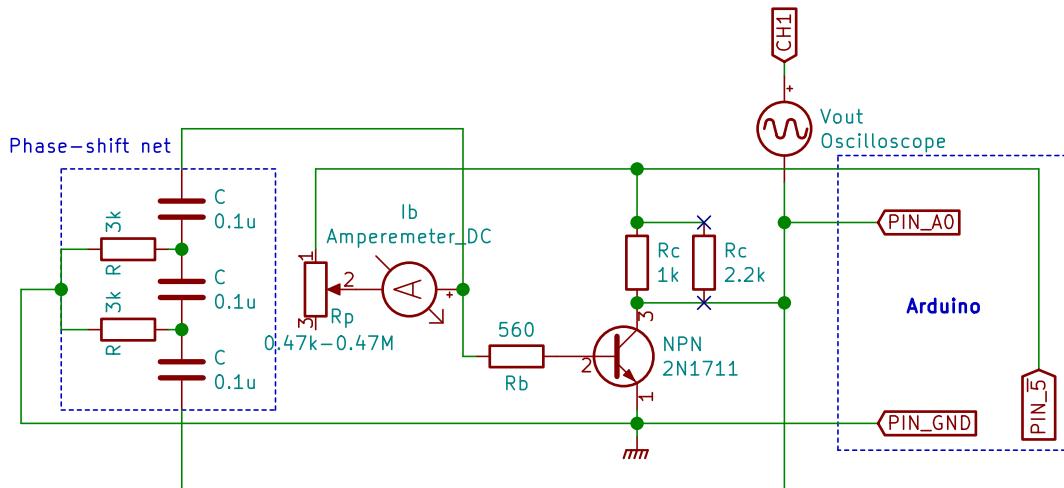


Figura 3: Schema circuitale dell'oscillatore a reazione con BJT studiato

## 4 ANALISI DATI E RISULTATI

Inizialmente si sono convertite le acquisizioni e le incertezze associate in d.d.p. tramite i fattori di conversione per l'ADC di Arduino per  $V_{ref} = 5V$  standard TTL e  $V_{ref} = 1.1V$  interno, determinati con un semplice fit lineare.

$$V_{ref} = 1.1 \text{ V}$$

$$m_1 = 1.040 \pm 0.006 \text{ mV/digit}$$

$$q_1 = 1.5 \pm 1.6 \text{ mV}$$

$$\text{Corr}(m_1, q_1) = -0.28$$

$$\chi^2/\text{ndof} = 2.6/11$$

$$\text{abs\_sigma} = \text{True}$$

$$V_{ref} = 5 \text{ V}$$

$$m_5 = 4.70 \pm 0.06 \text{ mV/digit}$$

$$q_5 = 16 \pm 8 \text{ mV}$$

$$\text{Corr}(m_5, q_5) = -0.24$$

$$\chi^2/\text{ndof} = 0.7/11$$

$$\text{abs\_sigma} = \text{True}$$

## 4.1 Circuito RC

## 4.2 Circuiti RLC

Alla fine del segnale oscillante<sup>1</sup> si riesce ad apprezzare un picco positivo di circa 100 digit  $\approx 104 \text{ mV}$ , questo coincide esattamente con il fronte di salita dell'onda quadra in ingresso al circuito RLC. Quando

<sup>1</sup> alla fine del semiperiodo negativo dell'onda quadra in uscita dal generatore di funzioni

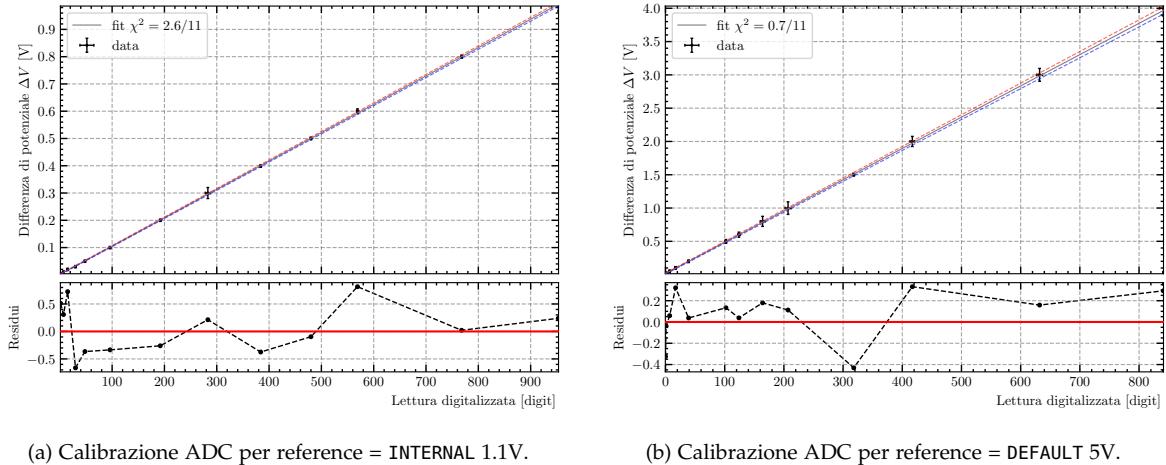


Figura 4: Risultato delle misure di calibrazione il pannello superiore mostra dati, retta ottenuta dal best-fit e "curve di confidenza", quello inferiore il grafico dei residui normalizzati.

l'onda passa da LOW a HIGH, la corrente che scorre negli avvolgimenti dell'induttore passa da un intensità di circa  $-100$  a  $100\mu\text{A}$ . Dunque, secondo la legge degli induttori la bobina genera una tensione proporzionale alla variazione dell'intensità di corrente:  $\Delta V(t) = L \frac{dI}{dt}$  il picco finale allora si deve alla stessa tensione che dà inizio all'oscillazione, però di segno opposto; però ora il circuito non inizia ad oscillare perché il diodo è in conduzione. Un secondo possibile contributo al picco di tensione alla fine del segnale oscillante è dato dalla capacità parassita della giunzione PN, che possiamo modellare come un condensatore in parallelo al diodo. Quando il fronte d'onda sale rapidamente, parte dell'onda quadra viene "lasciata passare" dal condensatore, ma da una simulazione con LTSpice ed una capacità (zero bias) nominale per il diodo a giunzione 1N194:  $C_{j0} = 4\text{pF}$  il contributo al picco finale risulta dell'ordine di qualche nV. Dunque l'effetto dell'accoppiamento capacitivo risulta decisamente trascurabile rispetto alla risoluzione del sistema di acquisizione.

Nucleo	$C \pm 10\%[\mu\text{F}]$	$f_0[\text{Hz}]$	$\tau[\text{ms}]$	$L \pm 10\%[\text{H}]$	$Q_f$
Aria	0.1	$659.73 \pm 0.02$	$12.52 \pm 0.02$	0.53	28
	0.22	$431.69 \pm 0.03$	$16.55 \pm 0.03$	0.52	23
	0.47	$325.41 \pm 0.01$	$21.98 \pm 0.03$	0.51	18
Alluminio	0.1	$790.25 \pm 0.07$	$5.19 \pm 0.01$	0.41	13
	0.22	$517.60 \pm 0.09$	$6.54 \pm 0.02$	0.43	10
	0.47	$353.51 \pm 0.06$	$7.88 \pm 0.02$	0.44	8

Tabella 1: Risultati trovati, dall'analisi di spettro e nel dominio del tempo, degli effetti sulla qualità dell'oscillazione dovuti a nuclei di materiale diverso nel cuore dell'induttore.

#### 4.3 Oscillatore a reazione con BJT

#### 4.4 Nota sull'implementazione

Per determinare i parametri ottimali e le rispettive covarianze si è implementato in Python un algoritmo di fit basato sui minimi quadrati mediante la funzione `curve_fit` della libreria SciPy[3]. Per tutti i fit su campionamenti digitali di Arduino si è imposto `abs_sigma = True`, avendo preso come incertezza associata il valore convenzionale  $\sigma = 1$  digit, per cui effettivamente si sta eseguendo un fit dei minimi quadrati. Per tutti gli altri campionamenti, in cui la sorgente principale di incertezza abbia natura non statistica o non meglio determinata si è posto `abs_sigma = False`. Il modulo `signal` della stessa

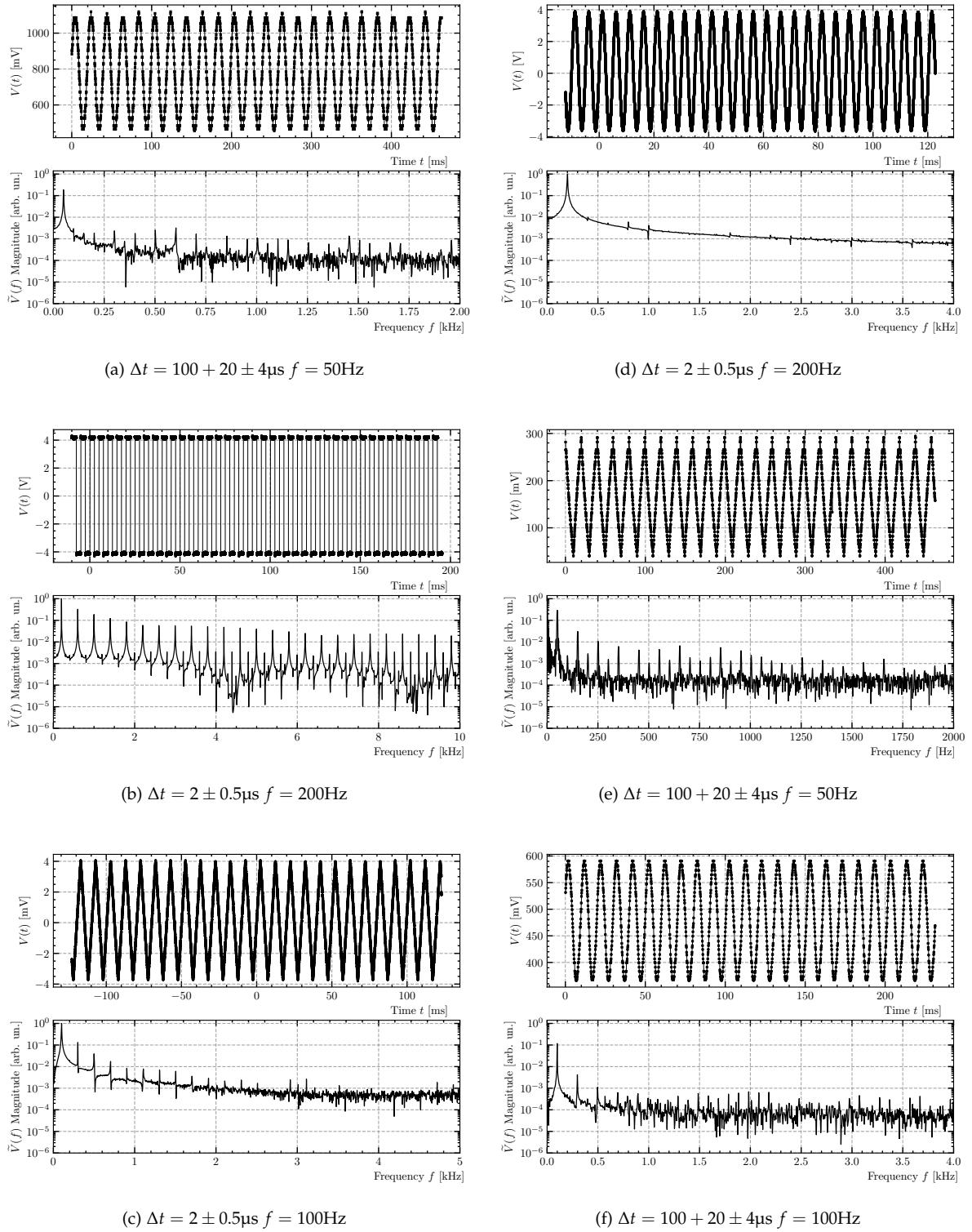


Figura 5: Risultati trovati sull'effetto dell'integratore RC sui segnali nel tempo e sulla loro trasformata di Fourier. A sinistra le onde in ingresso seno, quadra e triangolare e a destra i corrispondenti segnali filtrati.

libreria è stato usato per la realizzazione dei filtri numerici e delle finestre, mentre l'implementazione dell'algoritmo per il calcolo della FFT è lo stesso definito dalla libreria NumPy[4]. Si rimanda ai [sorgenti](#) per ulteriori informazioni sugli script utilizzati, dove `lab.py` funge da libreria di funzioni di appoggio e `data.py` definisce i parametri fondamentali in ingresso per l'analisi dei dati.

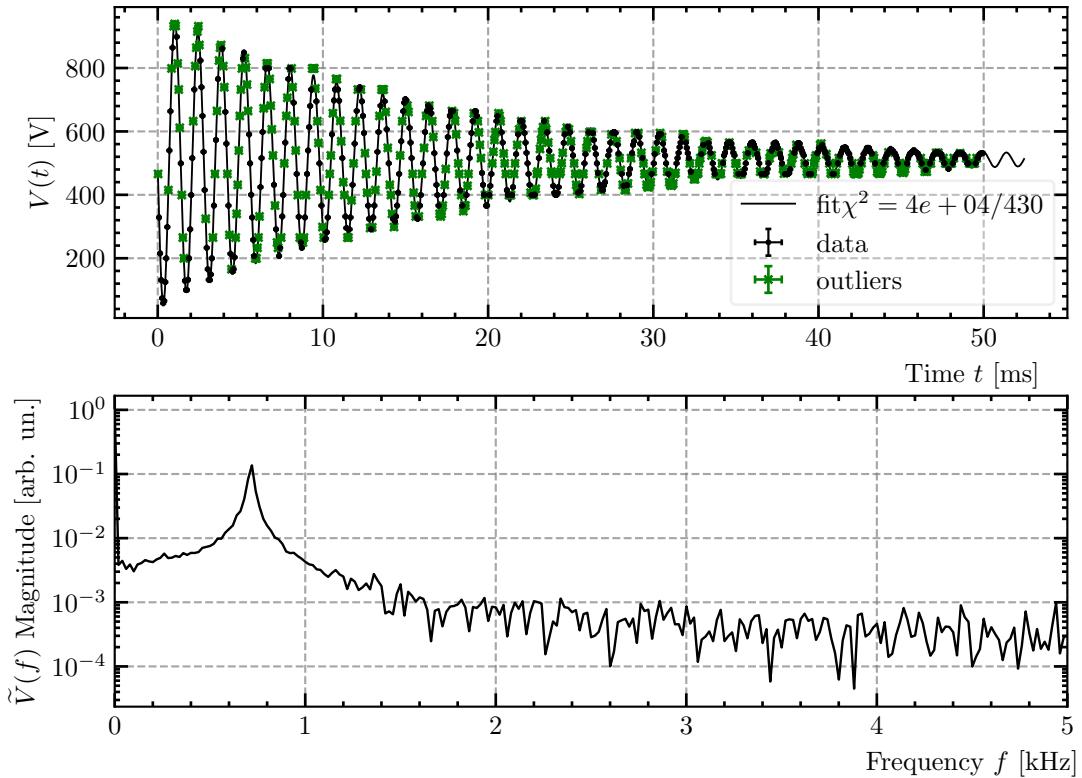


Figura 6: Illustrazione del picco che si trova nei dati campionati in fondo all’oscillazione smorzata del circuito, ovviamente non prevista dal modello di best fit.  $\Delta t = 40 + 22 \pm 3$  [ $\mu\text{s}$ ]  $C = 0.1 \pm 10\%$  [ $\mu\text{F}$ ]  $L = 0.5 \pm 10\%$  [ $\text{H}$ ]  $r = 58 \pm 10\%$  [ $\Omega$ ].

#### 4.4.1 Filtro outliers

La parte più semplice nel filtraggio dati consiste nello scartare tutti quei punti che distano da  $\mu_y$  più di una soglia arbitraria  $k$  di deviazioni standard  $\sigma_y$  (nel nostro caso è stato scelto  $k = 5$ ).

## 5 CONCLUSIONI

### RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- [1] J. W. Cooley and J. W. Tukey, “An algorithm for the machine calculation of complex fourier series,” *Mathematics of Computation*, vol. 19, no. 90, pp. 297–301, 1965. [Online]. Available: <http://www.jstor.org/stable/2003354>
- [2] I. D. I. Ivrea *et al.* Arduino: Open-source electronic prototyping platform. Ivrea, Italy. [Online]. Available: <https://www.arduino.cc/>
- [3] P. Virtanen, R. Gommers, T. E. Oliphant, M. Haberland, T. Reddy, D. Cournapeau, E. Burovski, P. Peterson, W. Weckesser, J. Bright, S. J. van der Walt, M. Brett, J. Wilson, K. Jarrod Millman, N. Mayorov, A. R. J. Nelson, E. Jones, R. Kern, E. Larson, C. Carey, İ. Polat, Y. Feng, E. W. Moore, J. Vand erPlas, D. Laxalde, J. Perktold, R. Cimrman, I. Henriksen, E. A. Quintero, C. R. Harris, A. M. Archibald, A. H. Ribeiro, F. Pedregosa, P. van Mulbregt, and S. . . Contributors, “SciPy 1.0—Fundamental Algorithms for Scientific Computing in Python,” *arXiv e-prints*, p. arXiv:1907.10121, Jul 2019.
- [4] T. E. Oliphant, *A guide to NumPy*, o1 2006–. [Online]. Available: <http://www.numpy.org/>

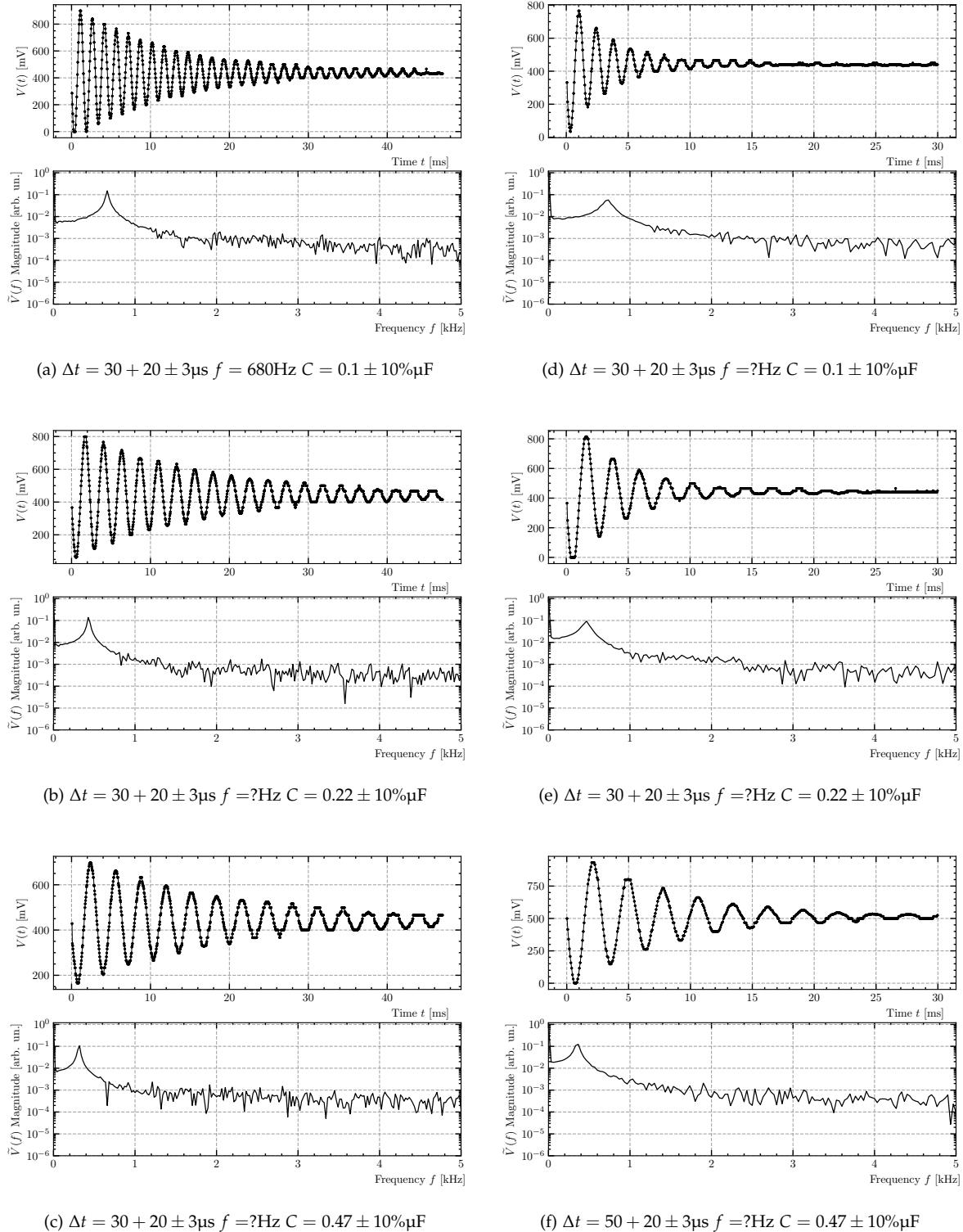


Figura 7: Risultati sugli effetti dovuti ai diversi nuclei inseriti all'interno dell'induttore sulla larghezza di riga della trasformata e sul segnale in uscita dall'oscillatore RLC. Nella colonna sinistra lasciato vuoto, a destra con un blocco pieno di alluminio.

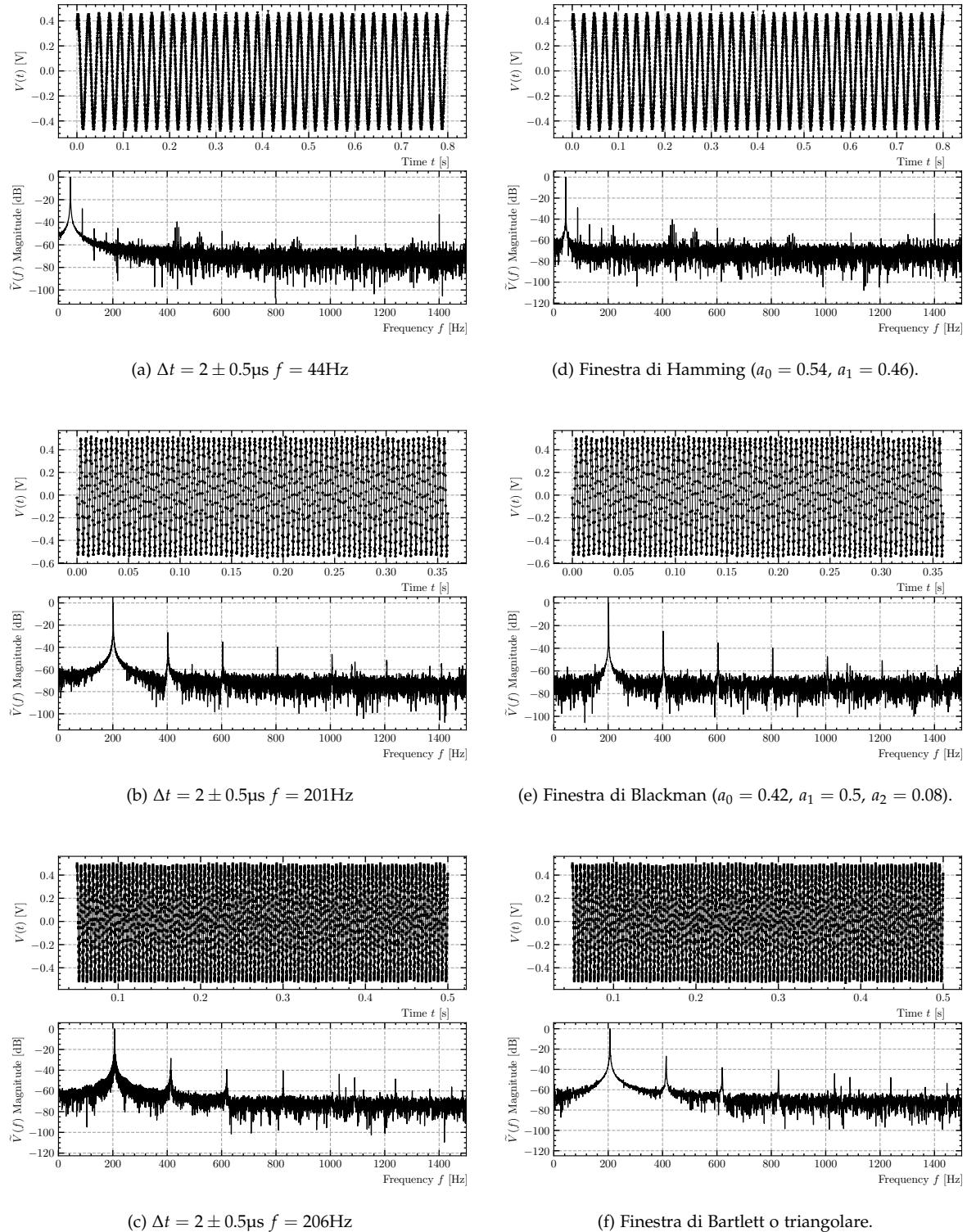


Figura 8: Risultati trovati sull'effetto di diverse finestre sulle perdite di spettro nella trasformata del segnale in uscita dall'oscillatore a reazione. Nella colonna sinistra prima, a destra dopo aver applicato le funzioni finestra al segnale.