# 计算方法习题课 3
# 配套 《计算方法》 李大明

助教：马泽涛

邮箱: ztma2021@163.com

上海交通大学 数学科学学院

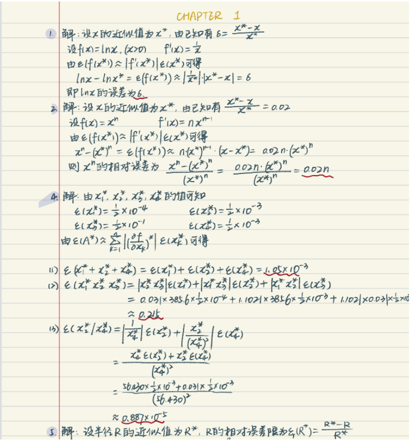
2021 年 11 月 23 日

# 内容提要

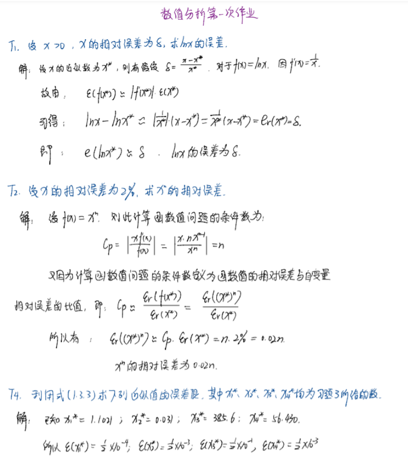
# 作业规范

- 作业提交
  - 图片，pdf 上传清晰;
  - 纸质作业推荐扫描全能王;
  - 使用latex;
  - · · · · · ·
- 答题规范
  - 标注题号;
  - 关键步骤，如使用的定理名称等;
  - 解答过程详细、合理;
- 沟通，联系请发送邮件至 ztma2021@163.com(备注姓名、学号、并描述问题)
  - 没有按时提交作业至 canvas;
  - 作业最终得分不满意;
  - 作业批改错误;
  - · · · · · ·

# 作业示范




(a) 同学 1




(b) 同学 2

# 作业 1

1. 设 $x > 0$, $x$ 的相对误差为 $\delta$, 求 $\ln x$ 的误差.

解: 因为 $x$ 的相对误差为 $\delta$, 所以有

$$\frac{x - x*}{x*} = \delta,$$

从而, 当 $\delta$ 充分小时,

$$\begin{aligned} \ln x - \ln x^* =& \ln(\frac{x - x^* + x^*}{x^*}) \\ =& \ln(1 + \delta) \\ \approx& \delta. \end{aligned}$$

# 作业 1

2. 设 $x$ 的相对误差为 $2\%$, 求 $x^n$ 的相对误差.

解: 令 $f(x) = x^n$, 则 $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = nx^{n-1}$.
注意到, 由泰勒展开

$$f(x) = f(x^*) + f'(x^*)(x - x^*) + o(x - x^*).$$

于是,

$$x^n \approx (x^*)^n + n(x^*)^{(n-1)}(x - x^*),$$

进而,

$$\begin{aligned}
\frac{x^n - (x^*)^n}{(x^*)^n} &\approx \frac{n(x^*)^{(n-1)}(x - x^*)}{(x^*)^n} \\
&= n \cdot \frac{x - x^*}{x^*} \\
&= 0.02n.
\end{aligned}$$

# 作业 1

5. 计算球体积要使相对误差限为 $1\%$, 问度量半径为 $R$ 时允许的相对误差限是多少.

解: 令 $f(R)=\frac{4}{3}\pi R^3$, 则 $f'(R)=4\pi R^2$.
同样地, 利用泰勒展开, 有

$$f(R)=f(R^*)+f'(R^*)(R-R^*)+o(R-R^*).$$

要使得

$$3\cdot\left|\frac{R^*-R}{R^*}\right|\approx\left|\frac{f(R^*)-f(R)}{f(R^*)}\right|\leqslant 0.01,$$

则要求 $R$ 的相对误差限为 $1/300\approx 0.33\%$.

# 作业 1

13. $f(x) = \ln(x - \sqrt{x^2-1})$, 求 $f(30)$ 的值. 若开平方用 6 位函数表, 问求对数式时误差有多大? 若改用另一等价公式

$$\ln(x - \sqrt{x^2-1}) = -\ln(x + \sqrt{x^2-1})$$

计算, 求对数时误差有多大?

解: $f(30) = \ln(30 - \sqrt{899})$.
令 $u = \sqrt{899}$, 则 $u \approx 29.9833$, 即 $u^* = 29.9833$. 则由书本 P6, (1.3.2) 式可知,

$$|u - u^*| \leqslant \frac{1}{2} \times 10^{-4},$$

其中取 $m = 1, n = 6$.

# 作业 1

13. 又令 $g(u)=\ln(30-u)$, 则 $g'(u)=\frac{1}{u-30}$. 从而,

$$\begin{aligned} |g(u)-g(u^*)| &\approx |g'(u^*)(u-u^*)| \\ &\leqslant 2.99401\times 10^{-4}. \end{aligned} \tag{1}$$

再令 $h(u)=-\ln(30+u)$, $g'(u)=-\frac{1}{u+30}$.
同理,

$$\begin{aligned} |h(u)-h(u^*)| &\approx |h'(u^*)(u-u^*)| \\ &= \frac{1}{u^*+30}\cdot |u-u^*| \\ &\leqslant 8.33565\times 10^{-7}. \end{aligned} \tag{2}$$

注意到上述几题都用到了一元泰勒展开的近似.

# 作业 1

4. 利用式 (1.3.3) 求下列近似值的误差限:

- $x_1^* + x_2^* + x_4^*$
- $x_1^* x_2^* x_3^*$
- $x_2^* / x_4^*$

提示: 利用多元函数泰勒展开的近似.

# 作业 2

6. 已知 $x=\varphi(x)$ 在区间 $(a,b)$ 内只有一根, 且当 $a<x<b$ 时, $|\varphi'(x)|\geqslant k>1$,
(1) 如何将 $x=\varphi(x)$ 化为适于迭代的形式?
(2) 将 $x=\tan x$ 化为适于迭代的形式, 并求 $x=4.5\ \mathrm{rad}$ 附近的根.
解: (1) 原先要求

$$\begin{cases} y=x \\ y=\varphi(x) \end{cases}$$

在区间内的交点. 由条件可知 $\varphi(x)$ 在区间内严格单调, 因此其反函数存在. 于是, 可转化为考虑

$$\begin{cases} x=y \\ x=\varphi^{-1}(y)+C \end{cases}$$

在 $(a,b)$ 内的交点. 且因 $\left|\frac{1}{\varphi'(y)}\right|\leqslant\frac{1}{k}<1$, 故迭代公式

$$y_{k+1}=\varphi^{-1}(y_k)+C$$

收敛.

# 作业 2

6. (2) 原先要求

$$\begin{cases} y = x \\ y = \tan x \end{cases}$$

在 $x = 4.5$ 附近的交点, 现在由 (1) 转化为

$$\begin{cases} x = y \\ x = \arctan y + \pi \end{cases}$$

在 $(\pi, 3\pi/2)$ 内的交点.
令 $\varphi(y) = \arctan y + \pi$, 则 $\varphi'(y) < 1$. 取 $y_0$ 及迭代公式

$$y_{k+1} = \varphi(y_k) = \arctan y_k + \pi,$$

可得上式收敛到 $4.493409457909064$.

# 作业 2

10. 对于 $f(x)=0$ 的 Newton 公式 $x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$，证明

$$R_k=\frac{x_k-x_{k-1}}{(x_{k-1}-x_{k-2})^2}$$

收敛到 $-\frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)}$.

证明:

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} R_k &= \lim_{k\to\infty}\frac{x_k-x_{k-1}}{(x_{k-1}-x_{k-2})^2} \\
&= \lim_{k\to\infty} -\frac{\frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})}}{\left(-\frac{f(x_{k-2})}{f'(x_{k-2})}\right)^2} \\
&= \lim_{k\to\infty} -\frac{\frac{f(x_{k-1})-f(x^*)}{f'(x_{k-1})}}{\left(-\frac{f(x_{k-2})-f(x^*)}{f'(x_{k-2})}\right)^2}
\end{aligned}$$

# 作业 2

10.

$$
= \lim_{k\to\infty} - \frac{\frac{f'(\xi_{k-1})(x_{k-1}-x^*)}{f'(x_{k-1})}}{\left(\frac{f'(\xi_{k-2})(x_{k-2}-x^*)}{f'(x_{k-2})}\right)^2}
$$

$$
= - \lim_{k\to\infty} \frac{x_{k-1}-x^*}{(x_{k-2}-x^*)^2} \cdot \lim_{k\to\infty} \frac{f'(\xi_{k-1})\,[f'(x_{k-2})]^2}{f'(x_{k-1})\,[f'(\xi_{k-2})]^2}
$$

$$
= - \frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)}.
$$

其中 $\xi_{k-1}$ 介于 $x_{k-1}$ 与 $x^*$ 之间, $\xi_{k-1}$ 介于 $x_{k-2}$ 与 $x^*$ 之间. 并且在倒数第二个等号当中运用了牛顿法的二阶收敛, 即

$$
\boxed{\lim_{k\to\infty} \frac{x_k-x^*}{(x_{k-1}-x^*)^2} = \lim_{k\to\infty} \frac{x_{k-1}-x^*}{(x_{k-2}-x^*)^2} = \frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)}.}
$$

此外, 在 14. 15. 中也是运用该公式及其证明思路.

# 作业 2

回顾 Newton 公式

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

的收敛阶证明.

证法 1: 考虑 $x = \varphi(x)$, 其中 $\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$.
将 $\varphi(x)$ 在 $x^*$ 处泰勒展开. 见书本 P151.

证法 2: 设 $x_k \to x^*$ 直接对 $f(x)$ 在 $x_k$ 处泰勒展开.

$$f(x) = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k) + \frac{1}{2} f''(x_k)(x - x_k)^2 + o\left((x - x_k)^2\right),$$

将 $x^*$ 带替 $x$ 得

$$0 = f(x^*) = f(x_k) + f'(x_k)(x^* - x_k) + \frac{1}{2} f''(x_k)(x^* - x_k)^2 + o\left((x^* - x_k)^2\right),$$

# 作业 2

接上证明 2

记 $e_k = x_k - x^*$, 利用 $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$, 得到

$$\frac{e_{k+1}}{(e_k)^2} = \frac{f''(x_k)}{2f'(x_k)} + \frac{o\left((x^* - x_k)^2\right)}{(x^* - x_k)^2},$$

令 $k \to \infty$, 即为所求.

# 作业 3

6. 设 $A$ 为 n 阶严格对角占优矩阵, 则经过 Gauss 消去法一步后,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_1^T \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

证明: $A_2$ 是严格对角占优矩阵.
令

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_1^T \\ b_1 & A_1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_{11} & a_1^T \\ 0 & A_1 - \frac{1}{a_{11}} b_1 a_1^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_1^T \\ 0 & A_2. \end{pmatrix}$$

分析: 只要证明

$$\left| a_{ii} - \frac{1}{a_{11}} a_{i1} a_{1i} \right| = \left| a_{ii}^{(2)} \right| > \sum_{j=2, j\neq i}^{n} \left| a_{ij}^{(2)} \right| = \sum_{j=2, j\neq i}^{n} \left| a_{ij} - \frac{1}{a_{11}} a_{i1} a_{1j} \right|,$$

对于 $i = 2, \cdots, n$ 都成立.

# 作业 3

6. 证明:

$$
\begin{aligned}
\left|a_{ii}^{(2)}\right| = \left|a_{ii} - \frac{1}{a_{11}} a_{i1} a_{1i}\right| &\geqslant |a_{ii}| - \left|\frac{1}{a_{11}} a_{i1} a_{1i}\right| \\
&> \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}| - \left|\frac{1}{a_{11}} a_{i1} a_{1i}\right| \\
&= \sum_{j=2, j\neq i}^{n} |a_{ij}| + |a_{i1}| - \left|\frac{1}{a_{11}} a_{i1} a_{1i}\right| \\
&= \sum_{j=2, j\neq i}^{n} |a_{ij}| + \left|\frac{a_{i1}}{a_{11}}\right| (|a_{11}| - |a_{1i}|) \\
&> \sum_{j=2, j\neq i}^{n} |a_{ij}| + \left|\frac{a_{i1}}{a_{11}}\right| \sum_{j=2, j\neq i}^{n} |a_{1j}| \\
&\geqslant \sum_{j=2, j\neq i}^{n} \left|a_{ij} - \frac{1}{a_{11}} a_{i1} a_{1j}\right| = \sum_{j=2, j\neq i}^{n} \left|a_{ij}^{(2)}\right|
\end{aligned}
$$

# 作业 3

7. 设 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 为对称正定矩阵, 经过 Gauss 消去法一步后, $A$ 约化为 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_1^T \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$., 其中

$$A = (a_{ij})_n \,, A_2 = \left(a_{ij}^{(2)}\right)_{n-1}$$

证明: (1) $A$ 的对角元素 $a_{ii} > 0 (i = 1, 2, \cdots, n)$;
(2) $A_2$ 是对称正定矩阵;
(3) $a_{ii}^{(2)} < a_{ii} \; (i = 2, 3, \cdots, n)$;
(4) $A$ 的绝对值最大的元素必在对角线上;
(5) $\max\limits_{2\leqslant i,j\leqslant n} \left|a_{ij}^{(2)}\right| \leqslant \max\limits_{2\leqslant i,j\leqslant n} |a_{ij}|$;
(6) 从 (2)、(3)、(5) 推出, 如果 $|a_{ij}| < 1$, 则对于所有 $k$, $\left|a_{ij}^{(k)}\right| < 1$.

# 作业 3

7. (1) 由于 $A$ 对称正定矩阵, 所以对一切非零 $x \in \mathbb{R}^n$, 有

$$x^T A x > 0,$$

特别地, 取 $x = e_i\ (i = 1, 2, \cdots, n)$, 则有 $a_{ii} > 0$.

(2) 设 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_1^T \\ a_1 & A_1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_{11} & a_1^T \\ 0 & A_1 - \frac{1}{a_{11}} a_1 a_1^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_1^T \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$ 及 $P^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{a_{11}} a_1 & I_{n-1} \end{pmatrix}$, 则有

$$P^T A P = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}.$$

由上可知 $A_2$ 对称, 取非零的 $x = \begin{bmatrix} 0 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & x_0 \end{bmatrix}^T$, 因 $P$ 可逆, 从而 $y = Px$ 为非零向量, 有

$$y^T A y = x^T P^T A P x = x_0^T A_2 x_0 > 0.$$

# 作业 3

7. (3) 由上可知 $A_2 = A_1 - \frac{1}{a_{11}} a_1 a_1^T$, 易知.
(4) 由于 $A$ 正定从而 $A$ 的 2 级主子式大于 $0$, 从而有

$$a_{ij}^2 < a_{ii} a_{jj} \leqslant (\max(a_{ii}, a_{jj}))^2 \leqslant \left( \max_{1 \leqslant i \leqslant n} a_{ii} \right)^2 .$$

(5) 由 (2) 可知, $A_2$ 是 $n-1$ 级对称正定矩阵, 从而也满足 (1),(3). 于是有

$$\max_{2 \leqslant i,j \leqslant n} \left| a_{ij}^{(2)} \right| \leqslant \max_{2 \leqslant i \leqslant n} \left| a_{ii}^{(2)} \right| \leqslant \max_{2 \leqslant i \leqslant n} |a_{ii}| \leqslant \max_{2 \leqslant i,j \leqslant n} |a_{ij}| .$$

(6) 类似地, 经过有限步 Gauss 消去后得到的 $A_3, A_4, \cdots$, 也满足上述的性质, 从而 (6) 成立.

# 作业 3

8.

注意到左乘 $I_{ij}$ 是做初等行变换, 即交换第 $i, j$ 两行;

右乘 $I_{ij}$ 是做初等列变换, 即交换第 $i, j$ 两列.

# 作业 3

11. 证明: (1) 如果 $A$ 是对称正定矩阵, 则 $A^{-1}$ 也是对称正定矩阵;
(2) 如果 $A$ 是对称正定矩阵, 则 $A$ 可唯一的写成 $A = L^T L$, 其中 $L$ 是具有正对角元的下三角阵.

(1) $A$ 对称正定 $\Leftrightarrow$ 特征值 $\lambda_i > 0, i = 1, 2, \cdots, n$;

(2) 回忆 $A = LU$ 是从上往下利用初等行变换来证明, 这里利用从下往上;

# 作业 3

15. 能否 $LU$ 分解的判断.
(1) 不能直接分解, 但是经过选主元 $PA = LU$;
(2) 可分解, 但不唯一;
(3) 对称正定, 可以分解，分解唯一;

# 作业 3

19. 证明:

$$(1)\ \|x\|_\infty \leqslant \|x\|_1 \leqslant n\|x\|_\infty ;$$

$$(2)\ \frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_F \leqslant \|A\|_2 \leqslant \|A\|_F .$$

解: (1) 略
(2) 提示: 利用

$$\|A\|_F^2 = \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij})^2 = tr\left(A^{\mathrm{T}}A\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \ ,$$

$$\|A\|_2^2 = \lambda_{\max}\left(A^{\mathrm{T}}A\right).$$

# 作业 3

21. 设 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 为对称正定矩阵, 定义 $\|x\|_A = (Ax, x)^{\frac{1}{2}}$. 试证明 $\|x\|_A$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上向量的一种范数.

此处用到这样的结论:

若 $A$ 为 $n$ 级对称正定矩阵, 则存在 n 级可逆矩阵 $P$, 使得

$$A = P^T P.$$

利用作业 20.

# 作业 3

22. 证明: $\|x+y\|_2 = \|x\|_2 + \|y\|_2 \Longleftrightarrow x, y$ 线性相关且 $x^{\mathrm{T}} y \geqslant 0$.
证明: $\Leftarrow$ 容易证明.
$\Rightarrow$ 两边平方可得,

$$\|x+y\|_2^2 = (\|x\|_2 + \|y\|_2)^2,$$

注意到 $x^T x = \|x\|_2^2$ 以及 $x^T y = y^T x$, 得到

$$x^T y = \|x\|_2 \|y\|_2 .$$

于是, $x^T y \geqslant 0$ 且由上式可知

$$\|x\|_2 \|y\|_2 \cos(\theta) = \|x\|_2 \|y\|_2$$

从而 $x, y$ 线性相关.

# 作业 3

24. 令 $\|\cdot\|$ 是 $\mathbb{R}^n$(或 $\mathbb{C}^n$) 上的任意一种范数, 而 $P$ 是任一非奇异实 (或复) 矩阵, 定义范数

$$\|x\|' = \|Px\| ,$$

证明 $\|A\|' = \|PAP^{-1}\|$.

证明:

$$\begin{aligned}
\|A\|' &= \sup_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|'}{\|x\|'} \\
&= \sup_{x\neq 0}\frac{\|PAx\|}{\|Px\|} \\
&= \sup_{x\neq 0}\frac{\|\left(PAP^{-1}\right)\ Px\|}{\|Px\|} \\
&= \sup_{y=Px\neq 0}\frac{\|\left(PAP^{-1}\right)\ y\|}{\|y\|} \\
&= \|PAP^{-1}\| .
\end{aligned}$$

# 作业 3

26. 设 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, 求证: $A^TA$ 与 $AA^T$ 的特征值相等, 即 $\lambda(A^TA) = \lambda(AA^T)$.
证明:
先证: $A, B$ 分别为 $n \times m$ 和 $m \times n$ 矩阵, 则有

$$\begin{vmatrix} E_m & B \\ A & E_n \end{vmatrix} = |E_n - AB| = |E_m - BA|,$$

进一步, 当 $\lambda \neq 0$ 时,

$$|\lambda E_n - AB| = \lambda^{n-m} |\lambda E_m - BA|.$$

最后, 令 $B = A^T$ 即可.
回忆到: 矩阵 $A$ 的特征值是由下式得到

$$\boxed{f_A(\lambda) = |\lambda E - A|.}$$

# 作业 3

27. 设 $A$ 为非奇异矩阵, 求证: $\frac{1}{\| A^{-1}\|} = \min\limits_{y\neq 0}\frac{\| Ay\|}{\| y\|}$.

证明:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\| A^{-1}\|} &= \frac{1}{\sup\limits_{x\neq 0}\frac{\| A^{-1}x\|}{\| x\|}} \\ &= \frac{1}{\sup\limits_{y\neq 0}\frac{\| y\|}{\| Ay\|}} \\ &= \min_{y\neq 0}\frac{1}{\frac{\| y\|}{\| Ay\|}} \\ &= \min_{y\neq 0}\frac{\| Ay\|}{\| y\|}.\end{aligned}$$

# 作业 3

28. 设 $A$ 为非奇异矩阵, 且 $\| A^{-1}\| \, \|\delta A\| < 1$ 求证: $(A+\delta A)^{-1}$ 存在, 且有估计

$$\frac{\| A^{-1} - (A+\delta A)^{-1}\|}{\| A^{-1}\|} \leqslant \frac{\operatorname{cond}(A) \frac{\|\delta A\|}{\| A\|}}{1 - \operatorname{cond}(A) \frac{\|\delta A\|}{\| A\|}}.$$

证明: 因 $\| A^{-1}\delta A\| \leqslant \| A^{-1}\| \, \|\delta A\| < 1$, 由定理 7.18 可知, $I + A^{-1}\delta A$ 非奇异, 且 $\left\| \left(I + A^{-1}\delta A\right)^{-1} \right\| \leqslant \frac{1}{1 - \| A^{-1}\delta A\|}$. 因此,

$$A + \delta A = A(I + A^{-1}\delta A)$$

非奇异.
下证:

$$\frac{\| A^{-1} - (A+\delta A)^{-1}\|}{\| A^{-1}\|} \leqslant \frac{\| A^{-1}\| \, \|\delta A\|}{1 - \| A^{-1}\| \, \|\delta A\|}.$$

# 作业 3

28. 接上页
注意到

$$(A+\delta A)^{-1} = \left[A\left(I+A^{-1}\delta A\right)\right]^{-1} = \left(I+A^{-1}\delta A\right)^{-1} A^{-1},$$

从而

$$\begin{aligned}
\|A^{-1}-(A+\delta A)^{-1}\| &= \|A^{-1}-\left(I+A^{-1}\delta A\right)^{-1} A^{-1}\| \\
&\leqslant \|I-\left(I+A^{-1}\delta A\right)^{-1}\| \cdot \|A^{-1}\| \\
&= \|\left(I+A^{-1}\delta A\right)^{-1}\left(I+A^{-1}\delta A-I\right)\| \cdot \|A^{-1}\| \\
&\leqslant \|\left(I+A^{-1}\delta A\right)^{-1}\| \cdot \|A^{-1}\delta A\| \cdot \|A^{-1}\| \\
&\leqslant \frac{1}{1-\|A^{-1}\delta A\|}\|A^{-1}\| \cdot \|\delta A\| \cdot \|A^{-1}\| \\
&\leqslant \frac{1}{1-\|A^{-1}\|\,\|\delta A\|}\|A^{-1}\| \cdot \|\delta A\| \cdot \|A^{-1}\| .
\end{aligned}$$

# 作业 3

30. 设 $A$ 为对称正定矩阵, 其分解为 $A = LDL^T = W^T W$, 其中 $W = D^{1/2}L^T$, 求证:
(1) $\operatorname{cond}(A)_2 = [\operatorname{cond}(W)_2]^2$;
(2) $\operatorname{cond}(A)_2 = \operatorname{cond}\left(W^T\right)_2 \cdot \operatorname{cond}(W)_2$.
证明:

$$\operatorname{cond}(A)_2 = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}\left(A^TA\right)}{\lambda_{\min}\left(A^TA\right)}},$$

特别地, 当 $A$ 为对称矩阵时,

$$\operatorname{cond}(A)_2 = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}\left(A^TA\right)}{\lambda_{\min}\left(A^TA\right)}} = \frac{\lambda_{\max}(A)}{\lambda_{\min}(A)}.$$

# 作业 3

32. 证明: 如果 $A$ 是正交矩阵, 则 $\mathrm{cond}(A)_2 = 1$.

证明: 由于 $A$ 为正交矩阵, 从而有 $A'A = AA' = I$. 且对任意 $x \in \mathbb{R}^n$ 且 $\|x\|_2 = 1$, 有

$$\|Ax\|_2^2 = x'A'Ax = x'x = \|x\|_2^2 = 1,$$

于是,

$$\|Ax\|_2 = 1.$$

由范数的等价定义, 有

$$\|A\|_2 = \sup_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2 = 1.$$

从而,

$$\begin{aligned}\mathrm{cond}(A)_2 &= \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 \\ &= \|A\|_2 \|A'\|_2 \\ &= 1.\end{aligned}$$

# 作业 4

2. 设 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, 证明即使 $\| A\|_1 = \| A\|_\infty > 1$, 级数 $I + A + A^2 + \cdots + A^k + \cdots$ 也收敛.
解: 容易计算 $A$ 的特征多项式为 $f(x) = x^2$, 由 $Hamilton - Caylay$ 定理可知, $f(A) = A^2 = 0$.

于是, 级数 $I + A + A^2 + \cdots + A^k + \cdots$ 也收敛, 收敛于 $I + A$.

# 作业 4

思考：已知矩阵 $A$ 为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

计算 $A^{100}$.

# 作业 4

思考：已知矩阵 $A$ 为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

计算 $A^{100}$.
解：容易计算矩阵 $A$ 的特征多项式为 $f(x) = (x+1)(x-1)^2$, 将 $x^{100}$ 与 $f(x)$ 做带余除法，则有

$$x^{100} = f(x)q(x) + ax^2 + bx + c,$$

根据 $f(-1) = f(1) = f'(1) = 0$, 可得 $a = 50, b = 0, c = -49$, 于是
$$A^{100} = 50A^2 - 49E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 50 & 1 & 0 \\ 50 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

# 作业 4

3. 证明对于任意选择的 $A$, 序列 $I, A, \frac{1}{2}A^2, \frac{1}{3!}A^3, \frac{1}{4!}A^4, \cdots$ 收敛于零矩阵.

证明: 下证: $\|\frac{1}{n!}A^n\| \to 0$. 由于

$$\|\frac{1}{n!}A^n\| \leqslant \frac{1}{n!}\|A\|^n,$$

由于数项级数 $e^{\|A\|} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\|A\|^n$ 收敛, 从而其通项的极限为 $0$.

# 作业 4

7. 设 $Ax=b$, 其中 $A$ 为对称正定矩阵, 问解此方程组的 $Jacobi$ 迭代法是否一定收敛. 试考察习题 5 中方程组 (1).
解: 不一定收敛.
习题 5 中

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0.4 & 0.4\\ 0.4 & 1 & 0.8\\ 0.4 & 0.8 & 1\end{pmatrix},$$

从而

$$J=\begin{pmatrix}0 & -0.4 & -0.4\\ -0.4 & 0 & -0.8\\ -0.4 & -0.8 & 0\end{pmatrix},$$

由迭代收敛的充要条件可知 $\rho(J)=1.092820323027551>1$, 从而不收敛.

# 作业 4

11. 设有方程组 $Ax=b$, 其中 $A$ 为对称正定矩阵, 迭代公式 $x^{(k+1)}=x^{(k)}+\omega\left(b-Ax^{(k)}\right)(k=0,1,2,\cdots)$, 试证明当 $0<\omega<\frac{2}{\beta}$ 时上述迭代法收敛. (其中 $0<\alpha\leqslant\lambda(A)\leqslant\beta$).
解: 由于

$$x^{(k+1)}=(I-wA)\,x^{(k)}+\omega b,$$

注意到 $B=I-\omega A$ 的特征值为 $1-\omega\lambda_i, i=1,\cdots,n.$
由迭代收敛的充要条件可知, 只要使得 $\rho(B)<1$, 即

$$|1-w\lambda_i|<1\ ,$$

对任意 $i=1,2,\cdots,n$ 都成立.
解之得

$$0<\omega<\frac{2}{\beta}.$$

# 作业 4

12. 用 $Gauss-Seidel$ 方法解 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$, 用 $x_i^{(k+1)}$ 记 $\boldsymbol{x}^{(k+1)}$ 的第 $i$ 个分量, 且

$$r_i^{(k+1)}=b_i-\Sigma_{j=1}^{i-1}a_{ij}x_j^{(k+1)}-\Sigma_{j=1}^{n}a_{ij}x_i^{(k)}. \tag{3}$$

证明: (1)$x_i^{(k+1)}=x_i^{(k)}+\frac{r_i^{(k+1)}}{a_{ii}}$;
(2) 如果 $\boldsymbol{\varepsilon}^{(k)}=\boldsymbol{x}^{(k)}-\boldsymbol{x}^*$, 其中 $\boldsymbol{x}^*$ 是方程组的精确解, 求
证:$\varepsilon_i^{(k+1)}=\varepsilon_i^{(k)}-\frac{r_i^{k+1}}{a_{ii}}$, 其中

$$r_i^{(k+1)}=\Sigma_{j=1}^{i-1}a_{ij}\varepsilon_j^{(k+1)}+\Sigma_{j=i}^{n}a_{ij}\varepsilon_j^{(k)};$$

(3) 设 $A$ 是对称的, 二次型 $Q(\varepsilon^{(k)})=(A\varepsilon^{(k)},\varepsilon^{(k)})$, 证明

$$Q(\varepsilon^{(k+1)})-Q(\varepsilon^{(k)})=-\Sigma_{j=1}^{n}\frac{(r_j^{(k+1)})^2}{a_{jj}}.$$

# 作业 4

12. (4) 由此推出, 如果 $A$ 是具有正对角元素的非奇异矩阵, 且 $Gauss-Seidel$ 方法对于任意初始向量 $x^{(0)}$ 是收敛的, 则 $A$ 是正定矩阵.

解: (1) 由 $Gauss-Seidel$ 迭代公式可知,

$$a_{ii}x_i^{(k+1)} = -\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k+1)} + b_i, \tag{4}$$

将(3)带入(4)可以得到

$$a_{ii}x_i^{(k+1)} = (r_i^{(k+1)} - b_i + a_{ii}x_i^{(k)}) + b_i,$$

约简后即为所证.

(2) 由题意可知

$$\begin{aligned}\varepsilon_i^{(k+1)} &= x_i^{(k+1)} - x_i^* \\ &= \frac{1}{a_{ii}}\left[-\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)} + b_i\right] - x_i^*\end{aligned}$$

# 作业 4

12. (2)

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{a_{ii}}\left[-\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i}^{n} a_{ij}x_j^{(k)} + b_i\right] + x_i^{(k)} - x_i^* \\
&= \frac{1}{a_{ii}}\left[-\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\left(x_j^{(k+1)} - x_j^*\right) - \sum_{j=i}^{n} a_{ij}\left(x_j^{(k)} - x_j^*\right) + b_i\right] + x_i^{(k)} - x_i^* \\
&\quad - \frac{1}{a_{ii}}\left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^*\right] \\
&= -\frac{1}{a_{ii}}r_i^{(k+1)} + \varepsilon_i^{(k)},
\end{aligned}
$$

注意到由于 $Ax^* = b$, 于是有 $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j^* = b_i, i = 1, 2, \cdots, n.$

# 作业 4

12. (3) 解: 注意到

$$Q(\varepsilon^{(k)}) = (A\varepsilon^{(k)}, \varepsilon^{(k)}) = (\varepsilon^{(k)})^T A\varepsilon^{(k)},$$

于是,

$$\begin{aligned}
& Q(\varepsilon^{(k+1)}) - Q(\varepsilon^{(k)}) \\
=& (\varepsilon^{(k+1)})^T A\varepsilon^{(k+1)} - (\varepsilon^{(k)})^T A\varepsilon^{(k)} \\
=& \left(\varepsilon^{(k+1)} - \varepsilon^{(k)} + \varepsilon^{(k)}\right)^T A \left(\varepsilon^{(k+1)} - \varepsilon^{(k)} + \varepsilon^{(k)}\right) - \left(\varepsilon^{(k)}\right)^T A\varepsilon^{(k)} \\
=& \left(\varepsilon^{(k+1)} - \varepsilon^{(k)}\right)^T A \left(\varepsilon^{(k+1)} - \varepsilon^{(k)}\right) + \left(\varepsilon^{(k+1)} - \varepsilon^{(k)}\right)^T A\varepsilon^{(k)} \\
& + \left(\varepsilon^{(k)}\right)^T A \left(\varepsilon^{(k+1)} - \varepsilon^{(k)}\right) \\
=& \left(\varepsilon^{(k+1)} - \varepsilon^{(k)}\right)^T A \left(\varepsilon^{(k+1)} - \varepsilon^{(k)}\right) + 2\left(\varepsilon^{(k+1)} - \varepsilon^{(k)}\right)^T A\varepsilon^{(k)}
\end{aligned}$$

# 作业 4

12. (3)

$$
\begin{aligned}
&= \left(\boldsymbol{\varepsilon}^{(k+1)} - \boldsymbol{\varepsilon}^{(k)}\right)^T A \left(\boldsymbol{\varepsilon}^{(k+1)} - \boldsymbol{\varepsilon}^{(k)}\right) + 2\left(\boldsymbol{\varepsilon}^{(k+1)} - \boldsymbol{\varepsilon}^{(k)}\right)^T A \left(\boldsymbol{\varepsilon}^{(k)} - \boldsymbol{\varepsilon}^{(k+1)}\right) \\
&\quad + 2\left(\boldsymbol{\varepsilon}^{(k+1)} - \boldsymbol{\varepsilon}^{(k)}\right)^T A\boldsymbol{\varepsilon}^{(k+1)} \\
&= -\left(\boldsymbol{\varepsilon}^{(k+1)} - \boldsymbol{\varepsilon}^{(k)}\right)^T A \left(\boldsymbol{\varepsilon}^{(k+1)} - \boldsymbol{\varepsilon}^{(k)}\right) + 2\left(\boldsymbol{\varepsilon}^{(k+1)} - \boldsymbol{\varepsilon}^{(k)}\right)^T A\boldsymbol{\varepsilon}^{(k+1)},
\end{aligned}
\tag{5}
$$

由于 $A$ 是对称矩阵, 则 $A$ 可以写成 $A = D - L - U = D - L - L^T$, 且其迭代形式为

$$(D - L)\, x^{(k+1)} = Ux^{(k)} + b = L^T x^{(k)} + b,$$

又其精确解满足

$$(D - L)\, x^{*} = Ux^{(k)} + b = L^T x^{*} + b,$$

于是, 其误差满足

$$(D - L)\, \boldsymbol{\varepsilon}^{(k+1)} = L^T \boldsymbol{\varepsilon}^{(k)}.$$

# 作业 4

12. 从而, (5)式又可以写成

$$
\begin{aligned}
&= -\left(\varepsilon^{(k+1)}-\varepsilon^{(k)}\right)^T D\left(\varepsilon^{(k+1)}-\varepsilon^{(k)}\right)+2\left(\varepsilon^{(k+1)}-\varepsilon^{(k)}\right)L^T\left(\varepsilon^{(k+1)}-\varepsilon^{(k)}\right)\\
&\quad +2\left(\varepsilon^{(k+1)}-\varepsilon^{(k)}\right)^T (D-L)\varepsilon^{(k+1)}-2\left(\varepsilon^{(k+1)}-\varepsilon^{(k)}\right)^T L^T\varepsilon^{(k+1)}\\
&= -\left(\varepsilon^{(k+1)}-\varepsilon^{(k)}\right)^T D\left(\varepsilon^{(k+1)}-\varepsilon^{(k)}\right)+2\left(\varepsilon^{(k+1)}-\varepsilon^{(k)}\right)L^T\left(\varepsilon^{(k+1)}-\varepsilon^{(k)}\right)\\
&\quad +2\left(\varepsilon^{(k+1)}-\varepsilon^{(k)}\right)^T L^T\varepsilon^{(k)}-2\left(\varepsilon^{(k+1)}-\varepsilon^{(k)}\right)^T L^T\varepsilon^{(k+1)}\\
&= -\left(\varepsilon^{(k+1)}-\varepsilon^{(k)}\right)^T D\left(\varepsilon^{(k+1)}-\varepsilon^{(k)}\right)\\
&= -\left(\boldsymbol{x}^{(k+1)}-\boldsymbol{x}^{(k)}\right)^T D\left(\boldsymbol{x}^{(k+1)}-\boldsymbol{x}^{(k)}\right)\\
&= -\Sigma_{j=1}^n (x_j^{(k+1)}-x_j^{(k)})a_{jj}(x_j^{(k+1)}-x_j^{(k)})\\
&= -\Sigma_{j=1}^n \frac{(r_j^{(k+1)})^2}{a_{jj}}.
\end{aligned}
$$

(4) 略

# 作业 4

13. 设 $A$ 与 $B$ 为 $n$ 阶矩阵, $A$ 为非奇异矩阵, 考虑 $Az_1 + Bz_2 = b_1$, $Bz_1 + Az_2 = b_2$, 其中 $z_1, z_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}^n$.
(1) 找出下述迭代方法收敛的充要条件

$$Az_1^{(m+1)} = b_1 - Bz_2^{(m)}, Az_2^{(m+1)} = b_2 - Bz_1^{(m)}\ (m \geqslant 0);$$

(2) 找出下述迭代方法收敛的充要条件

$$Az_1^{(m+1)} = b_1 - Bz_2^{(m)}, Az_2^{(m+1)} = b_2 - Bz_1^{(m+1)}\ (m \geqslant 0);$$

比较两个方法的收敛速度.
解: (1) 写成矩阵的形式, 有

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1^{(m+1)} \\ z_2^{(m+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & B \\ B & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1^{(m)} \\ z_1^{(m)} \end{bmatrix},$$

# 作业 4

13.

$$\begin{bmatrix} z_1^{(m+1)} \\ z_2^{(m+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & A^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & A^{-1}B \\ A^{-1}B & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1^{(m)} \\ z_1^{(m)} \end{bmatrix},$$

由迭代收敛的充要条件有 $\rho\left(\begin{bmatrix} 0 & A^{-1}B \\ A^{-1}B & 0 \end{bmatrix}\right) < 1,$

(2) 写成矩阵的形式, 有

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ B & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1^{(m+1)} \\ z_2^{(m+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1^{(m)} \\ z_1^{(m)} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} z_1^{(m+1)} \\ z_2^{(m+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ -A^{-1}BA^{-1} & A^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -A^{-1}B \\ 0 & \left(A^{-1}B\right)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1^{(m)} \\ z_1^{(m)} \end{bmatrix},$$

由迭代收敛的充要条件有 $\rho\left(\begin{bmatrix} 0 & -A^{-1}B \\ 0 & \left(A^{-1}B\right)^2 \end{bmatrix}\right) < 1.$

# 作业 4

13. 比较两个迭代方法的收敛速度.
由定义 8.3 可知, $R(T) = -\ln\rho(T)$ 为迭代法的收敛速度. 并且, $\rho(T) < 1$ 越小, 收敛速度越快.
由于

$$\rho\left(\begin{bmatrix} 0 & A^{-1}B \\ A^{-1}B & 0 \end{bmatrix}\right) = \rho(A^{-1}B) > \rho(A^{-1}BA^{-1}B),$$

从而第二种方法的收敛速度更快.

# 作业 4

15. $A=\begin{bmatrix}5 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 2 & 0 & 4\\ 3 & -1 & 2 & -1\\ 0 & 3 & 0 & 7\end{bmatrix}$，试说明 $A$ 为可约矩阵.

解: 取 $P=I_{23}$ 即可.

# 作业 4

16. 给定迭代过程 $x^{(k+1)} = Cx^{(k)} + g$, 其中 $C \in \mathbb{R}^{n\times n}(k=0,1,2,\cdots)$, 试证明: 如果 $C$ 的特征值 $\lambda_i(C)=0,(i=1,2,\cdots,n)$, 则此迭代过程最多迭代 $n$ 次收敛于方程组的解.
证明: 由题意可知, $0$ 是 $n$ 阶方阵 $C$ 的 n 重特征值, 从而 $C$ 相似于一个 $n$ 阶若尔当矩阵,

$$P^{-1}CP = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}_{n\times n} = J.$$

于是, $C^n = PJ^nP^{-1} = 0$. 考虑

$$x^{(k+1)} = Cx^{(k)} + g, \tag{6}$$

$$x^* = Cx^* + g, \tag{7}$$

# 作业 4

16. (6) -(7)可以得到

$$x^{(k+1)} - x^* = C(x^{(k)} - x^*) = \cdots = C^{k+1}(x^{(0)} - x^*),$$

这里 $k = 0, 1, \cdots$ .
从而, 取 $k = n - 1$ 时, 此时迭代了 $n$ 次, 有

$$x^{(n)} - x^* = 0.$$

# 作业 4

18. 设 $A$ 为不可约弱对角占优阵且 $0 < \omega \leqslant 1$, 求证, 解 $Ax = b$ 的 $SOR$ 方法收敛.

证明: 由题意可知, $L_\omega = (D - \omega L)[(1-\omega)D + \omega U]$. 下证: $\rho(L_\omega) < 1$.

$$
\begin{aligned}
0 &= |\lambda E - L_\omega| \\
&= \left|\lambda E - (D - \omega L)^{-1}\left[(1-\omega)\,D + \omega U\right]\right| \\
&= \left|(D - \omega L)^{-1}\right| \left|\lambda\left(D - \omega L\right) - \left[(1-\omega)\,D + \omega U\right]\right|,
\end{aligned}
$$

令 $G = \lambda\,(D - \omega L) - [(1-\omega)\,D + \omega U] = (g_{ij})$, 则当 $A$ 不可约时, $G$ 也不可约, 对于 $|\lambda| \geqslant 1$ 及 $0 < \omega \leqslant 1$. 下证: $det(G) \neq 0$.

$$
\begin{aligned}
|g_{ii}| = |\lambda - (1-\omega)| \cdot |a_{ii}| &\geqslant |\lambda - (1-\omega)| \cdot \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \\
&\geqslant |\lambda\omega| \sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}| + \omega \sum_{j=i+1}^{n} |a_{ij}|
\end{aligned}
$$

# 作业 4

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^{i-1} |g_{ij}| + \sum_{j=i+1}^{n} |g_{ij}| \\
&= \sum_{j\neq i}^{n} |g_{ij}| .
\end{aligned}
$$

注意到上式的不等号是由于

$$
|\lambda| \left(1 - \frac{1-\omega}{|\lambda|}\right) > |\lambda\omega| \geqslant \omega,
$$

于是，由定理 8.6 可知 $det(G) \neq 0$. 从而，$L_\omega$ 的特征值均小于 1，$SOR$ 方法收敛.

**谢　谢!**

**Thank you!**