# 计算方法习题课 1
# 配套 《计算方法》 李大明

助教：马泽涛

邮箱: ztma2021@163.com

上海交通大学 数学科学学院

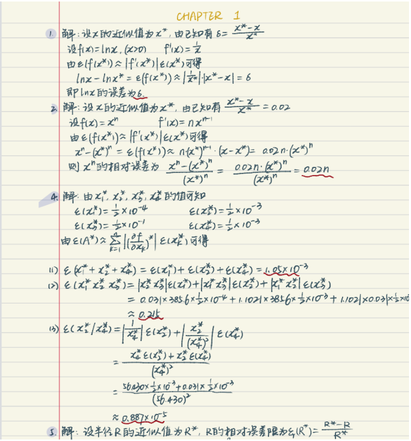
2021 年 10 月 26 日

# 内容提要

# 作业规范

- 作业提交
  - 图片，pdf 上传清晰;
  - 纸质作业推荐扫描全能王;
  - 使用latex;
  - · · · · · ·
- 答题规范
  - 标注题号;
  - 关键步骤，如使用的定理名称等;
  - 解答过程详细、合理;
- 沟通，联系请发送邮件至 ztma2021@163.com(备注姓名、学号、并描述问题)
  - 没有按时提交作业至 canvas;
  - 作业最终得分不满意;
  - 作业批改错误;
  - · · · · · ·

# 作业示范



CHAPTER 1

1. 解：设 $x$ 的近似值为 $x^*$，由已知有 $\delta = \frac{x^*-x}{x^*}$

设 $f(x)=\ln x, (x>0)$ $\quad f'(x)=\frac{1}{x}$

由 $\varepsilon(f(x^*)) \approx |f'(x^*)|\varepsilon(x^*)$ 可得

$\ln x - \ln x^* = \varepsilon(f(x^*)) \approx |\frac{1}{x^*}| \cdot |x^*-x| = \delta$

即 $\ln x$ 的误差为 $\delta$.

2. 解：设 $x$ 的近似值为 $x^*$，由已知有 $\frac{x^*-x}{x^*}=0.02$

设 $f(x)=x^n$ $\quad f'(x)=nx^{n-1}$

由 $\varepsilon(f(x^*)) \approx |f'(x^*)|\varepsilon(x^*)$ 可得

$x^n-(x^*)^n = \varepsilon(f(x^*)) \approx n(x^*)^{n-1}\cdot(x-x^*) = 0.02n\cdot(x^*)^n$

则 $x^n$ 的相对误差为 $\frac{x^n-(x^*)^n}{(x^*)^n} = \frac{0.02n\cdot(x^*)^n}{(x^*)^n} = 0.02n$

4. 解：由 $x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*$ 的值可知

$\varepsilon(x_1^*)=\frac{1}{2}\times10^{-4}$ $\quad \varepsilon(x_2^*)=\frac{1}{2}\times10^{-3}$

$\varepsilon(x_3^*)=\frac{1}{2}\times10^{-1}$ $\quad \varepsilon(x_4^*)=\frac{1}{2}\times10^{-3}$

由 $\varepsilon(A^*) \approx \sum_{k=1}^{n} \left|\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)^*\right| \varepsilon(x_k^*)$ 可得

(1) $\varepsilon(x_1^*+x_2^*+x_4^*) = \varepsilon(x_1^*)+\varepsilon(x_2^*)+\varepsilon(x_4^*) = 1.05\times10^{-3}$

(2) $\varepsilon(x_1^* x_2^* x_3^*) = |x_2^* x_3^*|\varepsilon(x_1^*)+|x_1^* x_3^*|\varepsilon(x_2^*)+|x_1^* x_2^*|\varepsilon(x_3^*)$

$= 0.031\times385.6\times\frac{1}{2}\times10^{-4}+1.1021\times385.6\times\frac{1}{2}\times10^{-3}+1.1021\times0.031\times\frac{1}{2}\times10$

$\approx 0.215$

(3) $\varepsilon(x_2^*/x_4^*) = \left|\frac{1}{x_4^*}\right|\varepsilon(x_2^*)+\left|\frac{x_2^*}{(x_4^*)^2}\right|\varepsilon(x_4^*)$

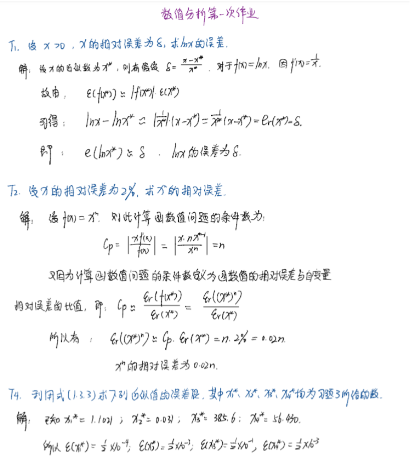
$= \frac{x_4^*\varepsilon(x_2^*)+x_2^*\varepsilon(x_4^*)}{(x_4^*)^2}$

$= \frac{56.430\times\frac{1}{2}\times10^{-3}+0.031\times\frac{1}{2}\times10^{-3}}{(56.430)^2}$

$\approx 0.887\times10^{-5}$

5. 解：设半径 $R$ 的近似值为 $R^*$，$R$ 的相对误差限为 $\varepsilon_r(R^*)=\frac{R^*-R}{R^*}$

(a) 同学 1



数值分析第一次作业

T1. 设 $x>0$，$x$ 的相对误差为 $\delta$，求 $\ln x$ 的误差.

解：设 $x$ 的近似数为 $x^*$，则有假设 $\delta=\frac{x-x^*}{x^*}$. 对于 $f(x)=\ln x$. 因 $f'(x)=\frac{1}{x}$.

故由：$\varepsilon(f(x^*)) \doteq |f'(x^*)|\cdot\varepsilon(x^*)$

可得：$\ln x-\ln x^* \doteq |\frac{1}{x^*}|\cdot(x-x^*) = \frac{1}{x^*}(x-x^*) = e_r(x^*) = \delta$.

即：$e(\ln x^*) \doteq \delta$. $\ln x$ 的误差为 $\delta$.

T2. 设 $x$ 的相对误差为 $2\%$，求 $x^n$ 的相对误差.

解：设 $f(x)=x^n$. 则此计算函数值问题的条件数为：

$$C_p = \left|\frac{xf'(x)}{f(x)}\right| = \left|\frac{x\cdot nx^{n-1}}{x^n}\right| = n$$

又因为计算函数值问题的条件数定义为函数值的相对误差与自变量

相对误差的比值，即：$C_p \doteq \frac{\varepsilon_r(f(x^*))}{\varepsilon_r(x^*)} = \frac{\varepsilon_r((x^*)^n)}{\varepsilon_r(x^*)}$

所以有：$\varepsilon_r((x^*)^n) \doteq C_p\cdot\varepsilon_r(x^*) = n\cdot2\% = 0.02n$.

$x^n$ 的相对误差为 $0.02n$.

T4. 利用式 (1.3.3) 求下列近似值的误差限，其中 $x_1^*$、$x_2^*$、$x_3^*$、$x_4^*$ 均为习题 3 所给的数.

解：已知 $x_1^*=1.1021$；$x_2^*=0.031$；$x_3^*=385.6$；$x_4^*=56.430$.

所以 $\varepsilon(x_1^*)=\frac{1}{2}\times10^{-4}$；$\varepsilon(x_2^*)=\frac{1}{2}\times10^{-3}$；$\varepsilon(x_3^*)=\frac{1}{2}\times10^{-1}$，$\varepsilon(x_4^*)=\frac{1}{2}\times10^{-3}$

(b) 同学 2

# 作业 1

1. 设 $x>0$, $x$ 的相对误差为 $\delta$, 求 $\ln x$ 的误差.

解: 因为 $x$ 的相对误差为 $\delta$, 所以有

$$\frac{x-x*}{x*}=\delta,$$

从而, 当 $\delta$ 充分小时,

$$\begin{aligned}\ln x-\ln x^* =&\ln(\frac{x-x^*+x^*}{x^*})\\ =&\ln(1+\delta)\\ \approx&\delta.\end{aligned}$$

# 作业 1

2. 设 $x$ 的相对误差为 $2\%$, 求 $x^n$ 的相对误差.

解: 令 $f(x) = x^n$, 则 $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = nx^{n-1}$.
注意到, 由泰勒展开

$$f(x) = f(x^*) + f'(x^*)(x - x^*) + o(x - x^*).$$

于是,

$$x^n \approx (x^*)^n + n(x^*)^{(n-1)}(x - x^*),$$

进而,

$$\begin{aligned}\frac{x^n - (x^*)^n}{(x^*)^n} &\approx \frac{n(x^*)^{(n-1)}(x - x^*)}{(x^*)^n} \\ &= n \cdot \frac{x - x^*}{x^*} \\ &= 0.02n.\end{aligned}$$

# 作业 1

5. 计算球体积要使相对误差限为 $1\%$, 问度量半径为 $R$ 时允许的相对误差限是多少.

解: 令 $f(R)=\frac{4}{3}\pi R^3$, 则 $f'(R)=4\pi R^2$.
同样地, 利用泰勒展开, 有

$$f(R)=f(R^*)+f'(R^*)(R-R^*)+o(R-R^*).$$

要使得

$$3\cdot\left|\frac{R^*-R}{R^*}\right|\approx\left|\frac{f(R^*)-f(R)}{f(R^*)}\right|\leqslant 0.01,$$

则要求 $R$ 的相对误差限为 $1/300\approx 0.33\%$.

# 作业 1

13. $f(x) = \ln(x - \sqrt{x^2 - 1})$, 求 $f(30)$ 的值. 若开平方用 6 位函数表, 问求对数式时误差有多大? 若改用另一等价公式

$$\ln(x - \sqrt{x^2 - 1}) = -\ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

计算, 求对数时误差有多大?

解: $f(30) = \ln(30 - \sqrt{899})$.
令 $u = \sqrt{899}$, 则 $u \approx 29.9833$, 即 $u^* = 29.9833$. 则由书本 P6, (1.3.2) 式可知,

$$|u - u^*| \leqslant \frac{1}{2} \times 10^{-4},$$

其中取 $m = 1, n = 6$.

# 作业 1

13. 又令 $g(u)=\ln(30-u)$, 则 $g'(u)=\frac{1}{u-30}$. 从而,

$$\begin{aligned}|g(u)-g(u^*)| \approx & |g'(u^*)(u-u^*)| \\ & \leqslant 2.99401\times 10^{-4}.\end{aligned} \tag{1}$$

再令 $h(u)=-\ln(30+u)$, $g'(u)=-\frac{1}{u+30}$.
同理,

$$\begin{aligned}|h(u)-h(u^*)| \approx & |h'(u^*)(u-u^*)| \\ = & \frac{1}{u^*+30}\cdot|u-u^*| \\ \leqslant & 8.33565\times 10^{-7}.\end{aligned} \tag{2}$$

注意到上述几题都用到了一元泰勒展开的近似.

# 作业 1

4. 利用式 (1.3.3) 求下列近似值的误差限:

- $x_1^* + x_2^* + x_4^*$
- $x_1^* x_2^* x_3^*$
- $x_2^* / x_4^*$

提示: 利用多元函数泰勒展开的近似.

# 作业 2

6. 已知 $x=\varphi(x)$ 在区间 $(a,b)$ 内只有一根, 且当 $a<x<b$ 时,
$|\varphi'(x)|\geqslant k>1$,
(1) 如何将 $x=\varphi(x)$ 化为适于迭代的形式?
(2) 将 $x=\tan x$ 化为适于迭代的形式, 并求 $x=4.5\ \mathrm{rad}$ 附近的根.
解: (1) 原先要求

$$\begin{cases} y=x \\ y=\varphi(x) \end{cases}$$

在区间内的交点. 由条件可知 $\varphi(x)$ 在区间内严格单调, 因此其反函数存在. 于是, 可转化为考虑

$$\begin{cases} x=y \\ x=\varphi^{-1}(y)+C \end{cases}$$

在 $(a,b)$ 内的交点. 且因 $\left|\frac{1}{\varphi'(y)}\right|\leqslant\frac{1}{k}<1$, 故迭代公式

$$y_{k+1}=\varphi^{-1}(y_k)+C$$

收敛.

# 作业 2

6. (2) 原先要求

$$\begin{cases} y = x \\ y = \tan x \end{cases}$$

在 $x = 4.5$ 附近的交点, 现在由 (1) 转化为

$$\begin{cases} x = y \\ x = \arctan y + \pi \end{cases}$$

在 $(\pi, 3\pi/2)$ 内的交点.
令 $\varphi(y) = \arctan y + \pi$, 则 $\varphi'(y) < 1$. 取 $y_0$ 及迭代公式

$$y_{k+1} = \varphi(y_k) = \arctan y_k + \pi,$$

可得上式收敛到 $4.493409457909064$.

# 作业 2

10. 对于 $f(x)=0$ 的 Newton 公式 $x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$，证明

$$R_k=\frac{x_k-x_{k-1}}{(x_{k-1}-x_{k-2})^2}$$

收敛到 $-\frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)}$.

证明:

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}R_k&=\lim_{k\to\infty}\frac{x_k-x_{k-1}}{(x_{k-1}-x_{k-2})^2}\\&=\lim_{k\to\infty}-\frac{\frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})}}{\left(-\frac{f(x_{k-2})}{f'(x_{k-2})}\right)^2}\\&=\lim_{k\to\infty}-\frac{\frac{f(x_{k-1})-f(x^*)}{f'(x_{k-1})}}{\left(-\frac{f(x_{k-2})-f(x^*)}{f'(x_{k-2})}\right)^2}\end{aligned}$$

# 作业 2

10.

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{k\to\infty} -\frac{\dfrac{f'(\xi_{k-1})(x_{k-1}-x^*)}{f'(x_{k-1})}}{\left(\dfrac{f'(\xi_{k-2})(x_{k-2}-x^*)}{f'(x_{k-2})}\right)^2} \\
&= -\lim_{k\to\infty} \frac{x_{k-1}-x^*}{(x_{k-2}-x^*)^2} \cdot \lim_{k\to\infty} \frac{f'(\xi_{k-1})\left[f'(x_{k-2})\right]^2}{f'(x_{k-1})\left[f'(\xi_{k-2})\right]^2} \\
&= -\frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)}.
\end{aligned}
$$

其中 $\xi_{k-1}$ 介于 $x_{k-1}$ 与 $x^*$ 之间, $\xi_{k-1}$ 介于 $x_{k-2}$ 与 $x^*$ 之间. 并且在倒数第二个等号当中运用了牛顿法的二阶收敛, 即

$$
\boxed{\lim_{k\to\infty} \frac{x_k-x^*}{(x_{k-1}-x^*)^2} = \lim_{k\to\infty} \frac{x_{k-1}-x^*}{(x_{k-2}-x^*)^2} = \frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)}.}
$$

此外, 在 14. 15. 中也是运用该公式及其证明思路.

# 作业 2

回顾 Newton 公式

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

的收敛阶证明.

证法 1: 考虑 $x = \varphi(x)$, 其中 $\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$.
将 $\varphi(x)$ 在 $x^*$ 处泰勒展开. 见书本 P151.

证法 2: 设 $x_k \to x^*$ 直接对 $f(x)$ 在 $x_k$ 处泰勒展开.

$$f(x) = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k) + \frac{1}{2}f''(x_k)(x - x_k)^2 + o\left((x - x_k)^2\right),$$

将 $x^*$ 带替 $x$ 得

$$0 = f(x^*) = f(x_k) + f'(x_k)(x^* - x_k) + \frac{1}{2}f''(x_k)(x^* - x_k)^2 + o\left((x^* - x_k)^2\right),$$

# 作业 2

接上证明 2

记 $e_k = x_k - x^*$, 利用 $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$, 得到

$$\frac{e_{k+1}}{(e_k)^2} = \frac{f''(x_k)}{2f'(x_k)} + \frac{o\left((x^* - x_k)^2\right)}{(x^* - x_k)^2},$$

令 $k \to \infty$, 即为所求.

**谢　谢!**

**Thank you!**