

# 3 断裂物理



3.1 解理断裂

3.2 沿晶断裂

3.3 孔聚断裂

3.4 韧/脆判据及韧/脆转变

3.5 裂纹尖端过程区

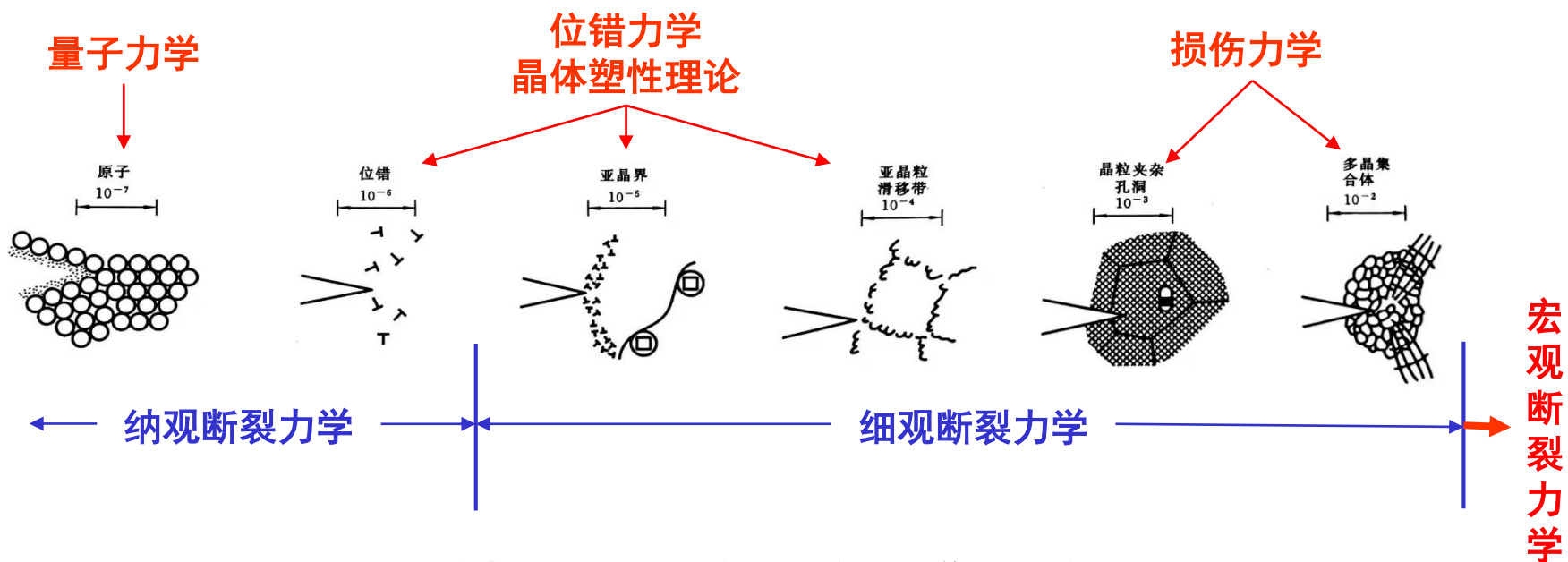
3.6 裂纹的位错模拟

3.7 断裂与分形

# 3.5 裂纹尖端过程区



从断裂物理的角度分析断裂机制时，必然要涉及到裂纹尖端地区的结构问题，要考虑裂纹尖端与多尺度结构的交互作用。



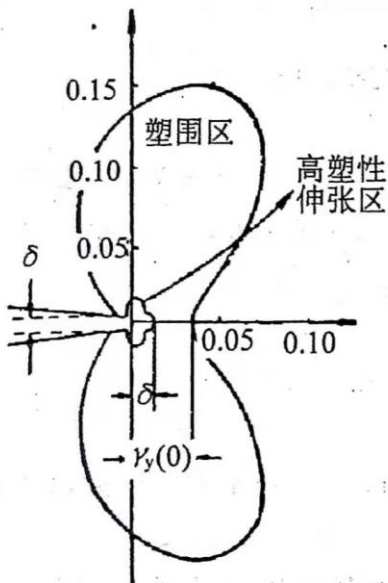
裂纹尖端与不同尺度微结构相互作用示意图

(尺度单位: cm)

## 3.5.1 裂纹尖端塑性区



从断裂力学的角度分析裂纹尖端塑性区对应力强度因子的影响时，是假定裂纹尖端前沿的材料为均匀各向同性弹塑性体，可用线弹性断裂力学（小范围屈服）、弹塑性断裂力学、有限元计算、实验法等求得裂纹尖端塑性区大小及形状。



Levy等FEM计算的塑性区



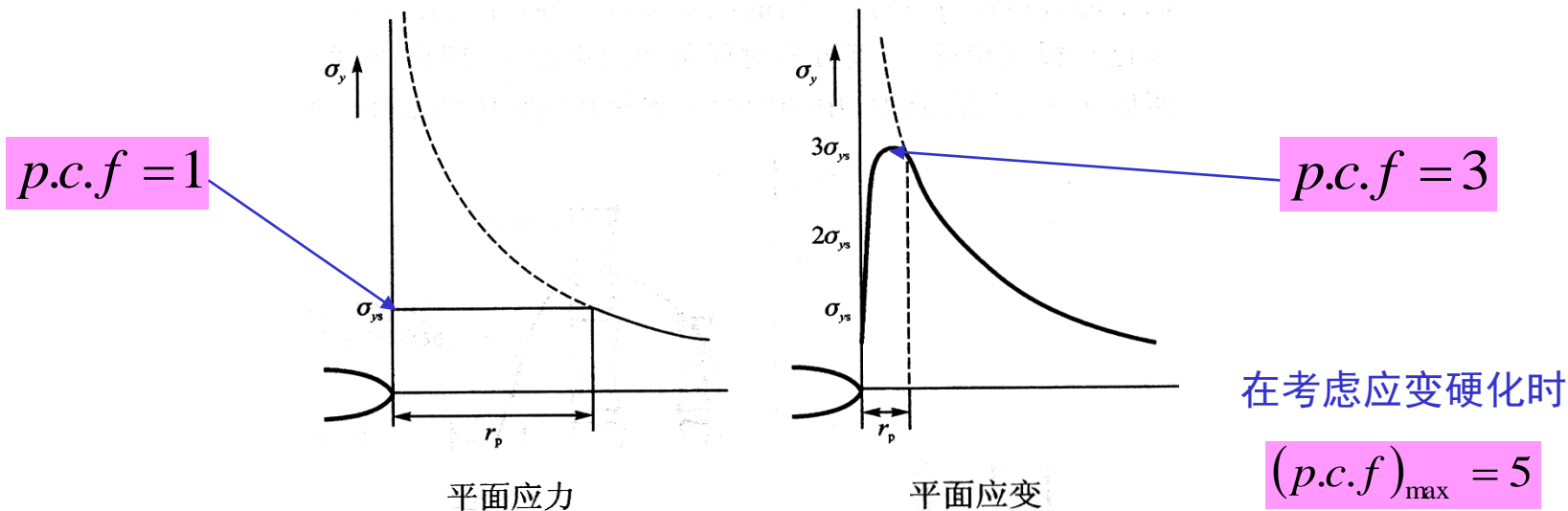
在Fe-3%Si合金中的裂尖蚀斑花样  
(Hann-Rosenfield)

### 3.5.1.1 裂纹尖端塑性约束系数



**定义：** 塑性区内最大应力与单轴屈服应力的比值为**塑性约束系数  $p.c.f.$**

$$p.c.f. = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{ys}}$$



裂纹尖端处近似应力分布（理想塑性， $\nu = 0.33$ ）

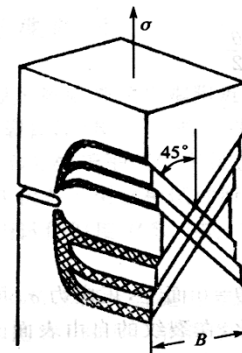
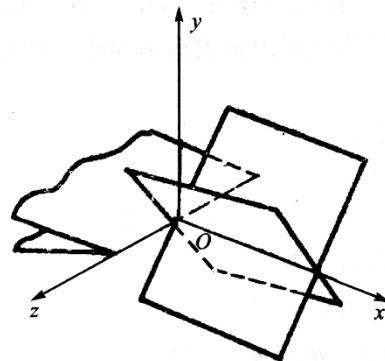
## 3.5.1.2 最大剪应力及方位



### 平面应力

$$\sigma_y > \sigma_x > \sigma_z = 0$$

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_y - \sigma_z}{2} = \frac{\sigma_y}{2}$$

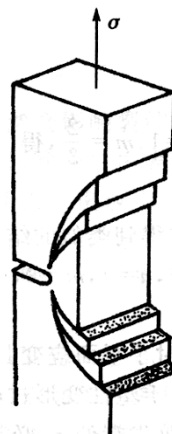
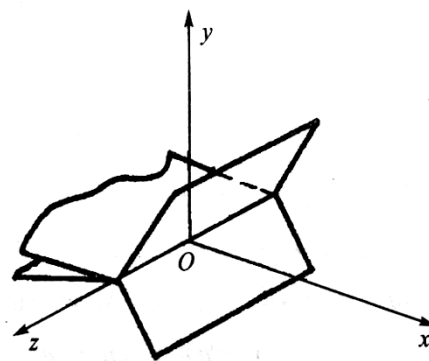


最大剪应力处于通过  $x$  轴，并于  $yoz$  面成  $45^\circ$  角的平面内

### 平面应变

$$\sigma_y > \sigma_z > \sigma_x \neq 0$$

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2}$$

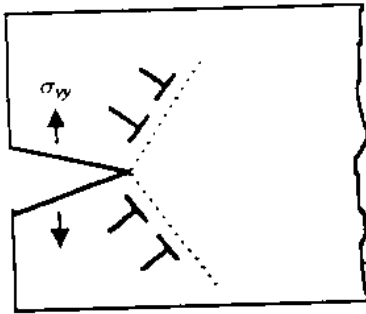


最大剪应力处于通过  $z$  轴，并于  $yoz$  面成  $45^\circ$  角的平面内

### 3.5.1.3 裂纹尖端塑性区滑移位错的类型



I型、II型、III型裂纹激活位错的类型并不相同

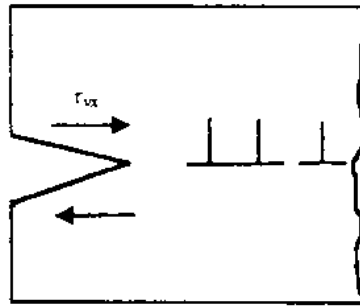


I 型裂纹

裂纹面与滑移面不重合

激活非共面刃型位错

裂纹尖端钝化

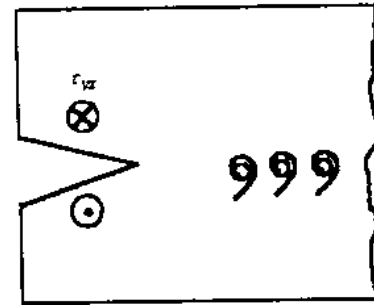


II 型裂纹

裂纹面与滑移面重合

激活共面刃型位错

裂纹尖端不钝化

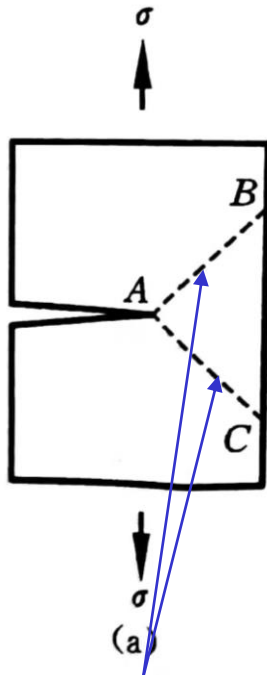


III 型裂纹

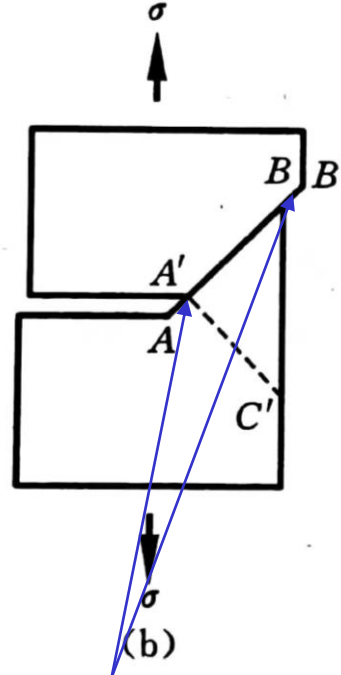
激活共面螺型位错



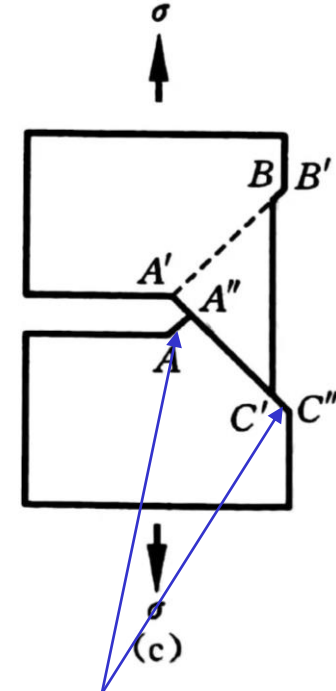
# I 型裂纹尖端钝化的滑移机制



对称双滑移系，与裂  
尖最大切应力方向大  
致平行



$AB$ 滑移系首先开动，  
产生台阶 $AA'$ 和 $BB'$



在应力集中较高的 $A'$ 处，另  
一滑移系开动，同时产生新  
台阶 $A'A''$ 和 $C'C''$

在两个滑移系交替作用下，裂纹尖端发生塑性钝化和开口

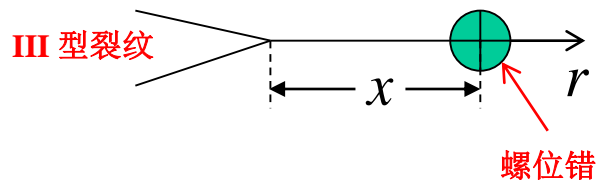
## 3.5.2 裂纹与位错的相互作用 (III型裂纹为例)



### 3.5.2.1 裂尖位错的应力场

当裂纹前方存在一个位错时，该位错的应力场与无裂纹时不同。设离裂尖  $x$  处有一个螺位错，利用弹性力学复变函数解法，可得其应力场：

$$\tau_{yz}(r) = \left[ -\frac{\mu b}{2\pi(x-r)} \right] \left( \frac{x}{r} \right)^{\frac{1}{2}}$$



- 当  $r < x$  时， $\tau_{yz} < 0$ ，裂尖自由表面吸引位错
- 当  $r > x$  时， $\tau_{yz} > 0$ ，裂纹的影响变小



### 3.5.2.2 裂尖位错引起的应力强度因子 $K_D$



处在裂纹前方的位错本身有应力场，它会产生一个附加应力强度因子 $K_D$ 。

III型裂纹的应力强度因子为：

$$K_{\text{III}} = \lim_{r \rightarrow 0} (2\pi r)^{\frac{1}{2}} \cdot \tau_{yz}$$

螺位错相当于一个III型裂纹，则螺位错引起的应力强度因子为：

$$K_{\text{IIID}} = \lim_{r \rightarrow 0} \left\{ \left[ -\frac{\mu b}{2\pi(x-r)} \right] \left( \frac{x}{r} \right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{2\pi r} \right\} = -\frac{\mu b}{\sqrt{2\pi x}}$$

负值

### 3.5.2.3 位错对裂纹的屏蔽



由于每个位错应力场引起的  $K$  值是负值，故使裂纹尖端  $K$  值下降，称为位错对裂纹的屏蔽。

以Ⅲ型裂纹为例，若裂纹延长线上  $L$  长度区段内分布有  $n$  个螺位错，其分布密度函数为  $f(x)$ ，则总的附加应力强度因子可由对每个螺位错引起的应力强度因子求和（或积分）得到：

$$K_{\text{ⅢD}} = -\sum_{i=1}^n \frac{\mu b}{\sqrt{2\pi x_i}} = -\int_0^L \frac{\mu b}{\sqrt{2\pi x}} f(x) dx$$

有效应力强度因子  $K_{\text{Ⅲf}}$  是外力引起的  $K_{\text{Ⅲa}}$  和位错引起的  $K_{\text{ⅢD}}$  之和，即：

$$K_{\text{Ⅲf}} = K_{\text{Ⅲa}} + K_{\text{ⅢD}}$$

由于  $K_{\text{ⅢD}}$  是负值，故  $K_{\text{Ⅲf}} < K_{\text{Ⅲa}}$ ，即裂尖发射的位错对裂纹尖端起屏蔽作用，使裂纹尖端有效应力强度因子下降。

### 3.5.2.4 裂尖发射位错的临界应力强度因子



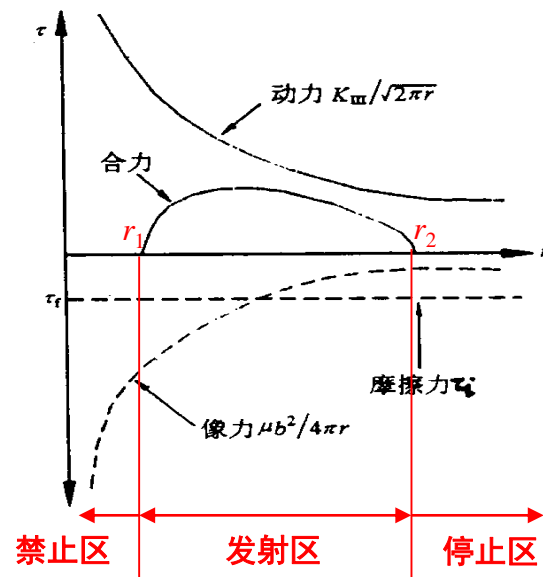
作用在位错上的力共有三种：

① 裂尖应力场的作用力：
$$F_G = b\tau_{yz} = \frac{bK_{III}}{\sqrt{2\pi r}}$$

② 裂尖自由表面像力：
$$F_S = -\frac{\mu b^2}{4\pi r}$$

③ 晶格摩擦力：
$$F_i = -\tau_i b$$

合力：
$$F_T(r) = \frac{bK_{III}}{\sqrt{2\pi}} r^{-\frac{1}{2}} - \frac{\mu b^2}{4\pi} r^{-1} - \tau_i b$$



令 $F_T=0$ ，解得两个根 $r_1$ 和 $r_2$ ，当 $r \leq r_1$ 、或 $r \geq r_2$ 时，位错不能发射。

随 $K_{III}$ 增加， $F_T$ 增加， $r_1$ 减小、 $r_2$ 增大。当 $r_1 = r_0$ （位错芯半径）时，若 $F_T(r_0) > 0$ ，则位错即可发射并离开裂尖。故发射临界条件为：

$$K_{IIIe} = \sqrt{2\pi r_0} \left( \frac{\mu b}{4\pi r_0} + \tau_i \right)$$

### 3.5.2.5 裂纹尖端的位错分布



裂尖发射一组位错后，作用在其中某一个位错上的力除了前述三项以外，还有其它位错的合力 $F_d$ ：

$$F_d = \sum_{i=1}^{n-1} - \left[ \frac{\mu b^2}{2\pi(x_i - r)} \right] \left( \frac{x_i}{r} \right)^{\frac{1}{2}}$$

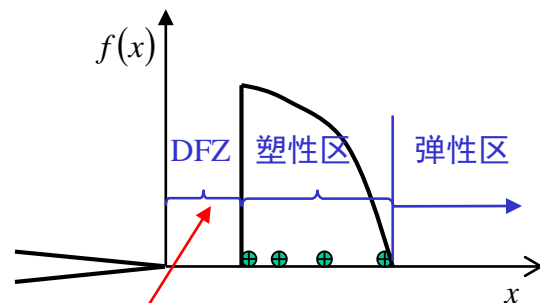
总力平衡时应有：

$$\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} - \frac{\mu b^2}{4\pi r} - \tau_i - \sum \left[ \frac{\mu b}{2\pi(x_i - r)} \right] \left( \frac{x_i}{r} \right)^{\frac{1}{2}} = 0$$

假设位错连续分布，密度分布函数为 $f(x)$ ，则可用积分代替求和，并略去像力，有：

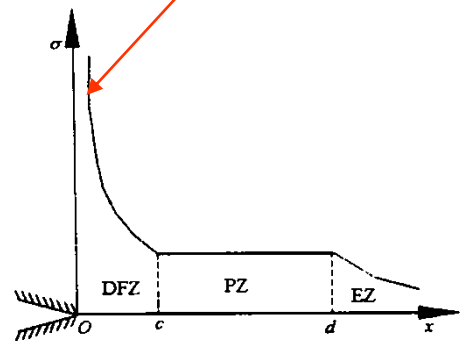
$$\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} - \int \left[ \frac{\mu b}{2\pi(x - r)} \right] \left( \frac{x}{r} \right)^{\frac{1}{2}} f(x) dx = \tau_i$$

DFZ只能在恒位移或恒载荷条件下观察到。随 $K_I \uparrow$ 、或 $(\tau_i/\mu) \uparrow$ 或裂尖发射位错数 $\uparrow$ 、或加载速率 $\uparrow$ ，DFZ尺寸 $\downarrow$



位错分布

无位错区，范围约 $10^{-7}\text{cm}$ ，极高的弹性应变（ $\epsilon_e \geq 0.1$ ）和张应力。金属的断裂首先取决于这一区内的原子键特点



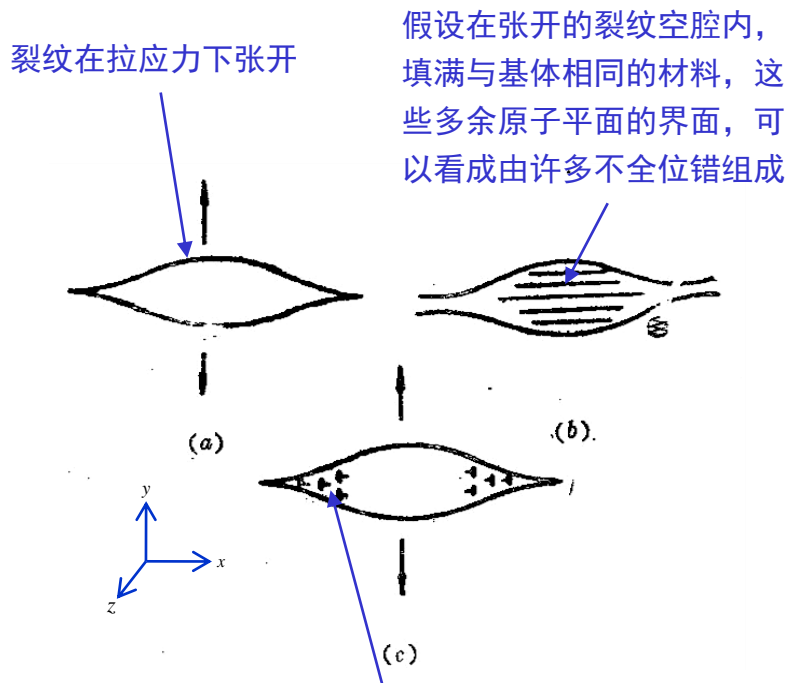
应力分布



## 3.6 裂纹的位错模拟

**中心思想：**用一组**虚拟平行位错**模拟裂纹，用位错力学代替断裂力学

### 3.6.1 裂纹位错的概念



设想这些不全位错被裂纹面上连续分布的位错所代替，且其分布密度函数为  $D_I(x)$

**I 型裂纹位错的形成**

则整个裂纹面上位错数为  $\int_{-c}^c D_I(x) dx$

裂纹上、下面相对位移为  $V = b \int_{-c}^c D_I(x) dx$

位错在裂纹面上造成的应力为：

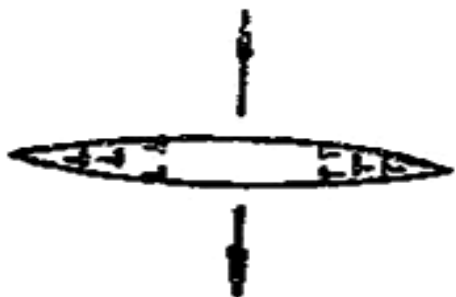
$$\sigma_D = A \int_{-c}^c \frac{D_I(x') dx'}{(x - x')}$$

式中，  $A = \frac{\mu b}{2\pi(1-\nu)}$

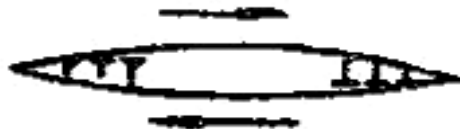
在裂纹自由表面上不受力： $\sigma_A + \sigma_D = 0$

解此方程，便可求得  $D(x)$

# 三种裂纹类型的裂纹位错



I 型：张开型



II 型：滑开型



III 型：撕开型

三种加载方式的裂纹位错模拟

## ● 可用位错沿 $x$ 方向的运动来代替裂纹扩展：

- I型：刃位错攀移
- II型：刃位错滑移
- III型：螺位错滑移

● 最关键的是求裂纹位错密度分布  $D(x)$ 。有了  $D(x)$ ，便可求出应力、应变、位移、应变能、应力强度因子，因而可用来计算断裂力学问题。

## 3.6.2 弹性断裂的裂纹位错 (II型裂纹位错为例)



$x'$  处位错在  $x$  处的应力为:  $A_{II} \frac{D_{II}(x')dx'}{(x-x')}$

则连续位错在  $x$  处的应力为:

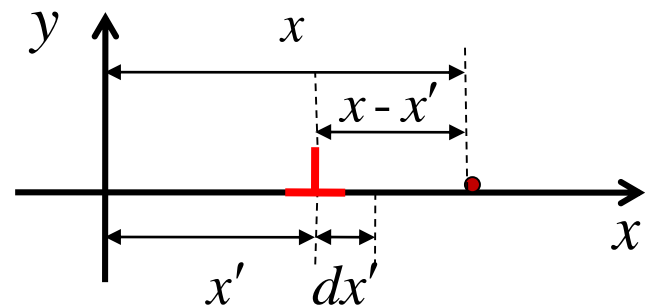
$$\sigma_D = A_{II} \int_{-c}^c \frac{D_{II}(x')dx'}{(x-x')}$$

根据裂纹表面应力为零的条件, 有

$$\sigma + A_{II} \int_{-c}^c \frac{D_{II}(x')dx'}{(x-x')} = 0$$

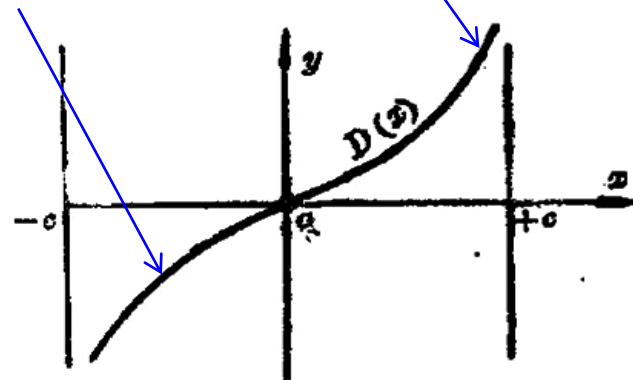
利用希尔伯特变换解此奇异方程, 可得到:

$$D_{II}(x) = \frac{\sigma}{\pi A_{II}} \cdot \frac{x}{\sqrt{c^2 - x^2}}$$



随  $x$  增大,  $D(x)$  也增大。  
当  $x \rightarrow c$  时,  $D(x) \rightarrow \infty$

在  $x$  增负方向上,  $D(x)$  呈  
反向分布



位错密度分布函数

$D(x)$  随外加应力  $\sigma$  增大而增大, 当  $\sigma$  增加到某一临界值时, 裂纹就扩展



# 利用 $D(x)$ 求各种断裂力学参量

位移: 
$$u_y = b \int_{-c}^c D(x) dx = \frac{b\sigma}{\pi A} \sqrt{c^2 - x^2}$$

应变: 
$$\varepsilon = \frac{du_y}{dx} = bD(x) = \frac{b\sigma}{\pi A} \frac{x}{\sqrt{c^2 - x^2}}$$

应变能: 
$$W = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon = \frac{1}{2} \int_{-c}^c x D(x) dx = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{\pi A} \int_{-c}^c \frac{x^2}{\sqrt{c^2 - x^2}} = \frac{\pi(1-\nu)c^2 \sigma^2}{2\mu}$$

断裂条件: 
$$\frac{\partial W}{\partial(2c)} = 2\gamma_s$$

断裂强度: 
$$\sigma_c = \sqrt{\frac{2\mu \cdot 2\gamma_s}{\pi(1-\nu)c}} = \sqrt{\frac{2E\gamma_s}{\pi(1-\nu^2)c}} \quad \leftarrow \text{Griffith方程}$$

**应力:** 求解较困难, 要用到复变函数上的围道积分, 求出的应力场和应力强度因子与用断裂力学方法求出的相同。



在裂尖前方塑性区 ( $c < x < a$ ) 内连续分布的实际螺位错

### 真实位错与虚拟位错在裂纹尖端呈“反向塞积”

为使计算仍能用线弹性力学，把裂纹长度从  $2c$  延长到  $2a$ ，包括塑性区，但塑性区内位错运动多了一项阻力  $\sigma_s$ ，即：

$$A \int \frac{D(x') dx'}{x - x'} + \sigma = 0 \quad -c < x < c$$

$$A \int \frac{D(x') dx'}{x-x'} + \sigma + \sigma_s = 0 \quad c < |x| < a$$

(1)



# 裂纹位错分布密度函数 $D(x)$

在  $x = \pm a$  处,  $D(x')$  应该是有界的, 则 (1) 式有解的条件为:

$$\int_{-a}^a \frac{\sigma^A(x') dx'}{\sqrt{(x' - a)(x' + a)}} = 0$$

上式也可写为:

$$\int_{-c}^c \frac{\sigma dx'}{\sqrt{a^2 - x'^2}} + \int_{-a}^c \frac{(\sigma - \sigma_s) dx'}{\sqrt{a^2 - x'^2}} + \int_c^a \frac{(\sigma - \sigma_s) dx'}{\sqrt{a^2 - x'^2}} = 0$$

即:

$$\frac{c}{a} = \cos\left(\frac{\pi\sigma}{2\sigma_s}\right)$$

在假设  $D(\pm a) = 0$  的条件下, 上式的解为

$$D(x) = \frac{\sigma_s}{\pi^2 A} \left[ \cosh^{-1} \left( \left| \frac{m}{c-x} + n \right| \right) - \cosh^{-1} \left( \left| \frac{m}{c+x} + n \right| \right) \right] \quad (2)$$

$$m = \frac{a^2 - c^2}{a}$$

$$n = \frac{c}{a}$$

# 裂纹尖端张开位移CTOD



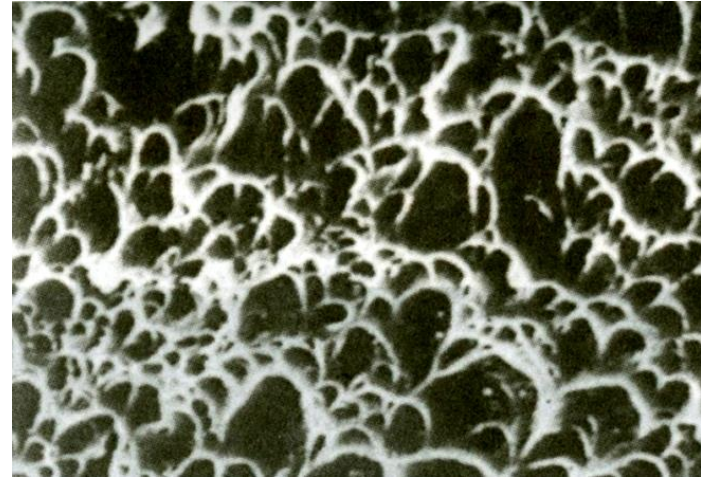
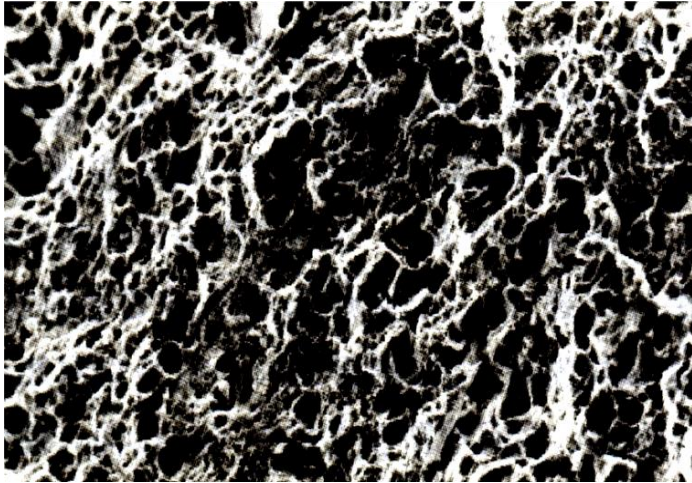
$$\begin{aligned}\Phi(c) &= b \left[ \int_0^a D(x') dx' - \int_0^c D(x') dx' \right] \\ &= \frac{2bc\sigma_s}{\pi^2 A} \cosh^{-1} \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{c}{a} + \frac{c}{c} \right) \\ &= \frac{2bc\sigma_s}{\pi^2 A} \ln \left( \frac{a}{c} \right)\end{aligned}\quad (3)$$

因为  $\frac{c}{a} = \cos \left( \frac{\pi\sigma}{2\sigma_s} \right)$ , 代入 (3) 式可得:

$$\Phi(c) = \frac{2bc\sigma_s}{\pi^2 A} \ln \left[ \sec \left( \frac{\pi\sigma}{2\sigma_s} \right) \right] \quad (4)$$

对于 I 型裂纹, 按同样的方法也可求出裂尖张开位移  $\Phi_I(c)$ , 它与 Dugdale 模型求出的 CTOD 相同

## 3.7 断裂与分形



- 哪一个塑性好？
  - 哪一个断裂韧性好？
  - 两个材料的断裂韧度究竟是多少？ → 断口定量分析之一：分形理论
- 断口定性分析：观察

# 3.7.1 分形理论简介



挪威的海岸线究竟有多长？



$$L(\varepsilon) = A\varepsilon^{1-D}$$

$$D = 1.52$$

$\varepsilon$  为码尺（比例尺）

“ $\varepsilon$  越小， $L$  越大。  $\varepsilon \rightarrow 0$  时，  $L \rightarrow \infty$ ”

---- Science, 1967

欧氏几何

I  $L_I = ?$

$$y = kx$$

II  $L_{II} = ?$

$$y = f(x)$$

III  $L_{III} = ?$

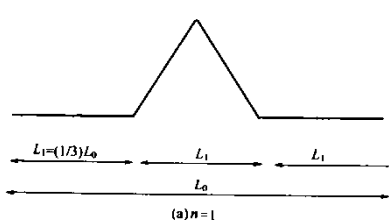
自相似曲线

分形几何 (Mandelbrot, 1975)

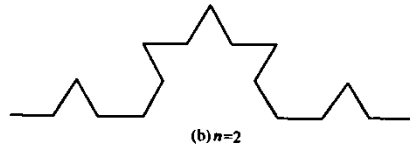


# 3.7.1.1 分形的概念

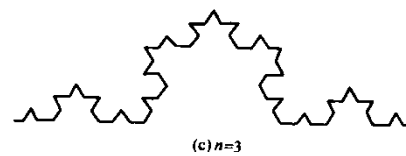
$$L_1 = 4l_1 = \frac{4}{3}L_0$$



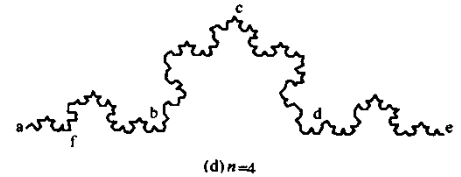
$$L_2 = 4^2 l_1 = \left(\frac{4}{3}\right)^2 L_0$$



$$L_2 = 4^3 l_1 = \left(\frac{4}{3}\right)^3 L_0$$



$$L_2 = 4^4 l_1 = \left(\frac{4}{3}\right)^4 L_0$$



具有分形结构的 Kock 曲线

$$l_1 = \frac{1}{3}L_0$$

$$l_2 = \frac{1}{3}l_1 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 L_0$$

$$l_3 = \frac{1}{3}l_2 = \left(\frac{1}{3}\right)^3 L_0$$

$$l_4 = \frac{1}{3}l_3 = \left(\frac{1}{3}\right)^4 L_0$$

$n$  次迭代后:

$$l_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n L_0$$

$$L_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n L_0$$

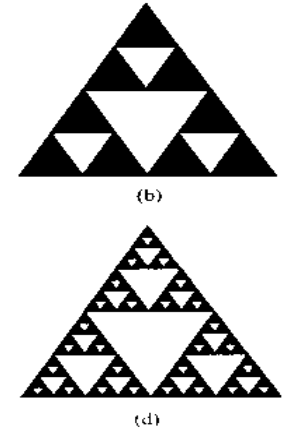
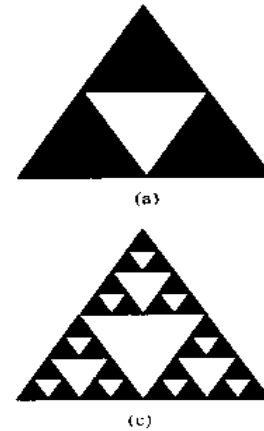
**分形**: 组成部分以**自相似**的方式与整体相似的形体

- 局部是整体成比例缩小
- 无标度性或标度不变性 (**全息性**)

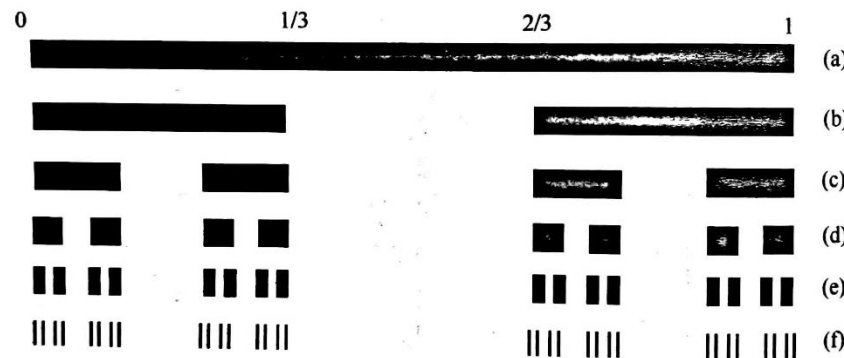
# 自相似分形示例



分形树



Sierpinski 垫

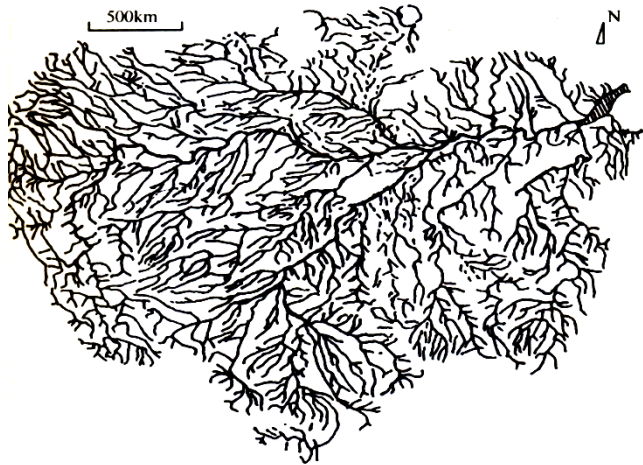


Canter 集

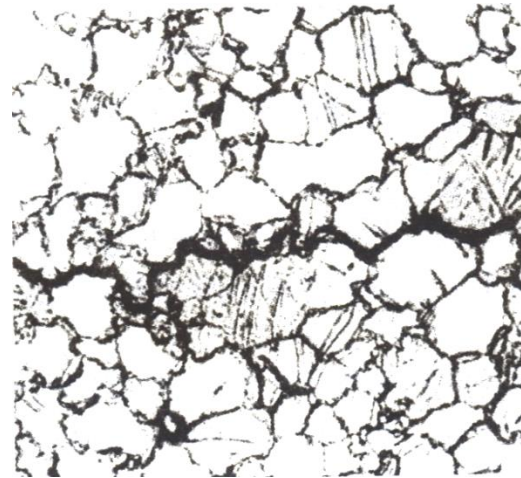




# 无规分形（近似自相似分形）



亚马逊河流域分布<sup>1</sup>



裂纹沿晶粒边界形核和扩展

## 自然界中的分形

- 连绵起伏的山脉轮廓
- 蜿蜒曲折的江川河流
- 眼花缭乱的繁星、浮云
- 空气中的灰尘颗粒

## 材料中的分形

- 薄膜和表面
- 高分子结构
- 非晶晶化和晶粒
- 马氏体形貌
- 准晶体形貌
- 断口



## 3.7.1.2 分维



### (1) 欧氏维数

把单位长度的线段  $N$  等分，每小段长  $r$ ，则  $Nr = 1$   $N = 1/r$

把单位面积的正方形  $N$  等分，每个小正方形的边长  $r$ ，则  $Nr^2 = 1$   $N = (1/r)^2$

把单位体积的正方体  $N$  等分，每个小正方体的边长  $r$ ，则  $Nr^3 = 1$   $N = (1/r)^3$

$$Nr^d = 1$$

$$N = (1/r)^d$$

$$d = \frac{\ln N}{\ln \left( \frac{1}{r} \right)}$$

式中， $N$  为等分的小几何体数目； $r$  为小几何体线尺度（ $1/r$  为缩小的倍数）， $d$  为欧氏空间维数（欧维）：

- 曲线：  $d=1$
- 曲面：  $d=2$
- 立体：  $d=3$

对欧氏几何图形， $d$  为整数。



## (2) 分形维数

对于一个自相似图形，可划分为  $N$  个大小和形状完全相同的小图形，每个小图形的线尺度是原图形尺度的  $1/r$ （即缩小  $r$  倍），该分形结构的维数  $D$ （**分维**）可定义为：

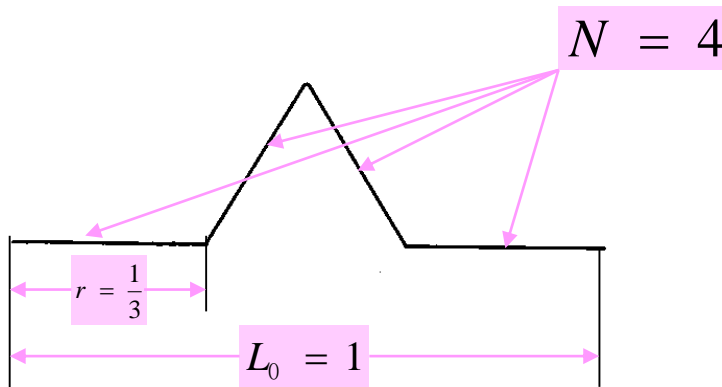
$$D = \frac{\ln N}{\ln \left( \frac{1}{r} \right)}$$

生成元中小几何体的个数

$Nr \neq 1$        $N \neq \frac{1}{r}$

小几何体的线尺度（ $1/r$ 为缩小的倍数）

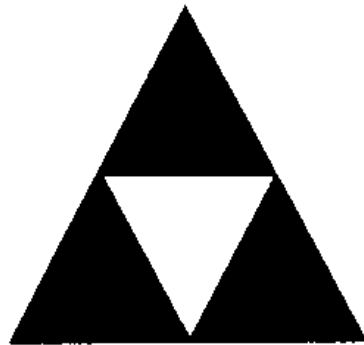
例：Kock曲线分维计算：



$$D = \frac{\ln 4}{\ln 3} = 1.2618$$

# 分维计算示例

$$D = \frac{\ln N}{\ln \left( \frac{1}{r} \right)}$$



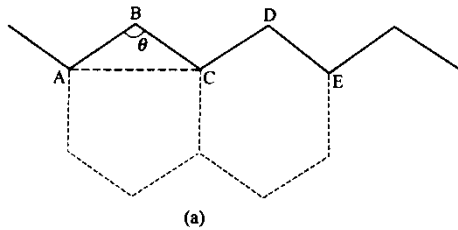
分形树

$$D = \frac{\ln 3}{\ln 2} = 1.585$$

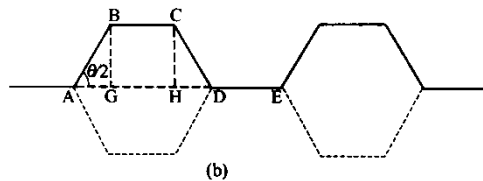


分形树

$$D = \frac{\ln 5}{\ln 3} = 1.465$$

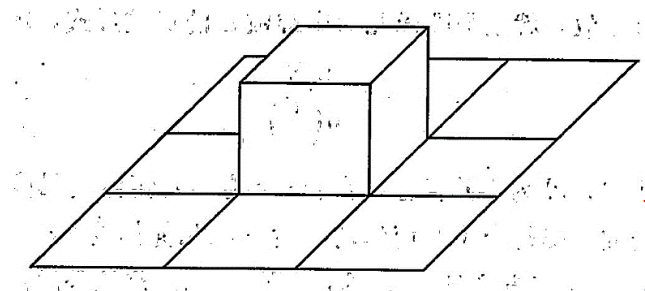


$D=?$



$D=?$

Z字形分形折线



$D=?$

二维分形曲面正方形迭代元

# 分维的幂律形式



分维的定义也可写成:

$$N(r) = \left(\frac{1}{r}\right)^D = r^{-D}$$

常数

自相似性表现为:

$$N(\alpha r) = \alpha^{-D} N(r)$$

不论  $r$  增大或缩小多少倍,  $N(\alpha r)$  与  $N(r)$  相似, 仅差一个因子  $\alpha^{-D}$ 。

更一般的形式是:

$$N(r) \propto r^{-D}$$

如果对某一几何图形, 上式成立, 则该几何体必然是一个自相似的分形图形, 且  $D$  就是其分维。

# 分维的截面约定



在欧式几何中， $d$  维物体在截面上的交线为  $d-1$  维。

将欧式几何中的概念移植到分形几何中来。用一截面与分形体相交，它们与截面相交形成的图形要减少一维。因此有：

$$D_V = D_S + 1 = D_L + 2$$

$$D_S = D_L + 1$$

截面约定把从不同角度对分形进行测量的结果定量地联系起来了。

对一个分形曲面，其分维为  $D_S$ ，用一平面沿  $x$  方向或  $y$  方向交割，所得曲线的分维  $D_L$  并不相同，因此要推算曲面分维  $D_S$  时，必须采用平均的  $D_L$  值。即

$$D_L^* = \frac{D_{Lx} + D_{Ly}}{2}$$

$$D_S = D_L^* + 1$$



### 3.7.1.3 分形的度量

#### (1) 分形曲线的长度

对一条分形曲线，经过  $n$  次迭代后，其长度为：

$$L_n = L_0 (Nr)^n \quad (1)$$

将 (1) 式取对数得：

$$\ln \left( \frac{L_n}{L_0} \right) = n \ln r + n \ln N \quad (2)$$

由分维的定义，有：

$$\ln N = D \ln(1/r) = -D \ln r \quad (3)$$

将 (3) 式代入 (2) 式得到：

$$\ln \left( \frac{L_n}{L_0} \right) = n \ln r - nD \ln r \quad (4)$$

# (1) 分形曲线的长度（续）



将（4）式改写成指数形式：

$$\frac{L}{L_0} = r^{n(1-D)} \quad (5)$$

令  $\varepsilon = r^n$ ，则分形曲线的长度为

$$L(\varepsilon) = L_0 \varepsilon^{(1-D)} \quad (6)$$

$\varepsilon$  为无量纲量。实际测量  $L(\varepsilon)$  或分维  $D$  时， $\varepsilon$  就是所用的放大倍数或者分辨率； $\varepsilon$  也可以是测量码尺的相对长度。



## (2) 分形周长和面积

对欧氏几何图形，其面积  $A_0$  与周长  $L_0$  的关系为：

$$L_0 = \alpha A_0^{1/2} \quad A_0 = \frac{1}{\alpha} L_0^2 \quad \alpha = \frac{L_0}{A_0^{1/2}}$$

对分形几何图形，其面积  $A$ 、周长  $L$  均与码尺  $\varepsilon$  有关，且  $L$  还与分维  $D$  有关：

$$L(\varepsilon) = L_0 \varepsilon^{1-D}$$

可以证明，其面积  $A$  与周长  $L$  有下列关系：

$$A(\varepsilon) = \frac{1}{\alpha^2(\varepsilon)} L^{2/D}(\varepsilon)$$

将上式取双对数得：

$$\ln A(\varepsilon) = -2 \ln \alpha(\varepsilon) + \frac{2}{D} \ln L(\varepsilon)$$





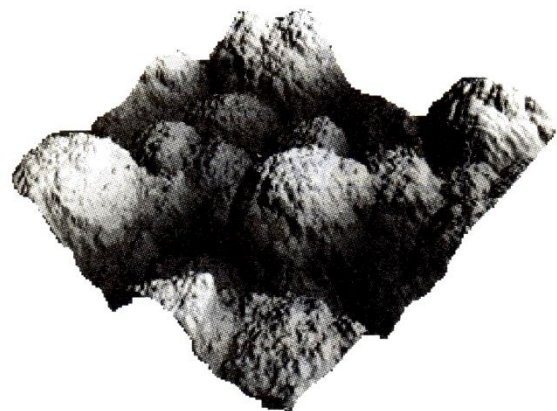
### 3.7.1.4 分维的测量

- 盒子计数法
- 变码尺测长度法
- 小岛法
- 垂直截面法
- 功率谱法
- 质点分形体分维测量法
  - 密度相关函数法
  - 沙盒法
  - 回转半径法
- 物理法
  - 散射强度法
  - 汞浸入法

# (1) 小岛法

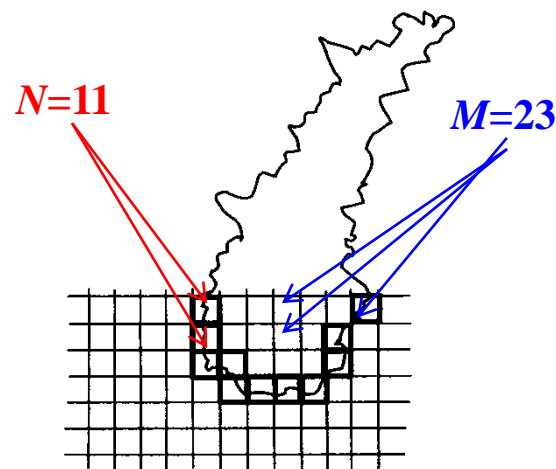


右上图为薄膜的AFM形貌图，其大小不同的凸起具有近似的自相似性。断口形貌也具有如此特征。如果把断口表面磨平，在SEM下就会出现一个个小岛和湖。照相后把照片放入图像处理仪中，固定放大倍数，可测出每个小岛的面积  $A_i$  以及小岛的周长  $L_i$ 。



表面碳膜的形貌（AFM 扫描像）

基本原理（右下图）：用一个长为  $\varepsilon$  的正方网格去覆盖小岛，小岛周界通过的网格（图中已加粗）总数为  $N$ ，则周长  $L=N\varepsilon$ 。覆盖小岛的网格总数（包括和边界相交的网格）为  $M$ ，则小岛面积为  $A=M\varepsilon^2$ 。根据很多自相似小岛的  $A_i$  及  $L_i$  数据，就可求出其分维  $D$ 。



网格法测量小岛的面积和周长

$$A \propto L^{2/D}$$

# 小岛法测分维实例

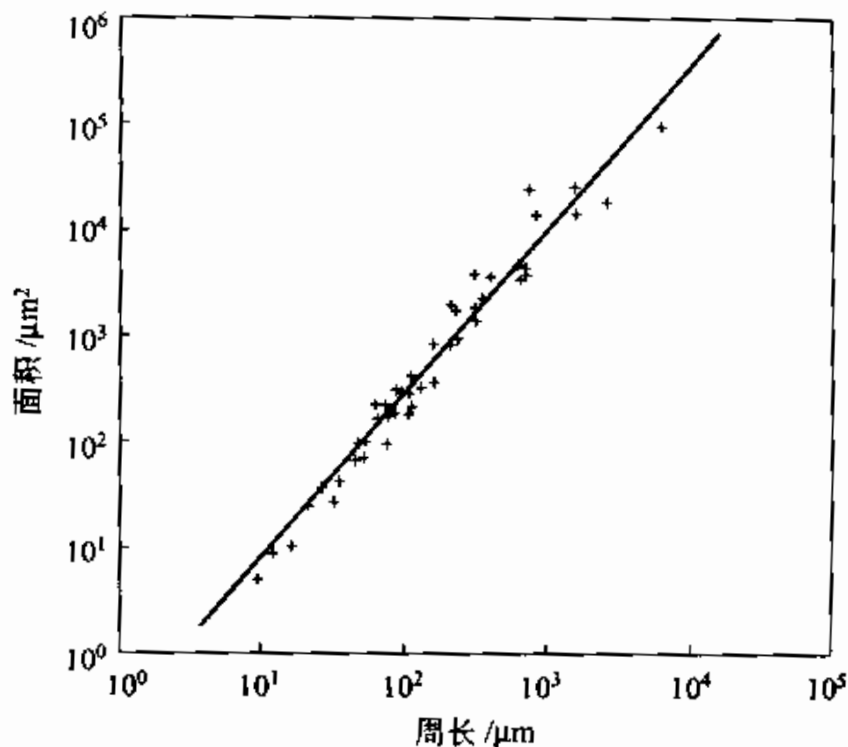


图 6.1 马氏体时效钢断口磨平后小岛面积随周长的变化，码尺为  $0.156\mu\text{m}^{[43]}$

$$A \propto L^{2/D}$$

$$\text{斜率 } \beta = \frac{2}{D}$$

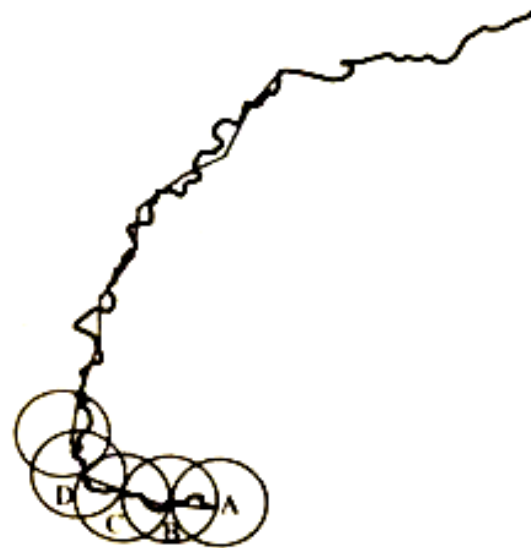
$$\beta = 1.56$$

$$D = 1.28$$

## (2) 垂直截面法



该法的原理是改变观测尺度，即用单位长度去近似分形复杂曲线（见右图）。先把曲线一端作为起点，然后以此点位中心画一个半径为 $\eta$ 的圆，与曲线相交于一点，用直线把该点与曲线的起点连接起来后再把该点作为新的起点画圆与曲线相交，反复进行上述过程，把测得的线段总数记为 $N(\eta)$ 。



用折线近似曲线

若改变码尺长度（ $\eta$ ），则曲线总长也会变化，关系为： $L \propto \eta^{1-D}$

$$\ln L = \ln \alpha + (1-D) \ln \eta$$

# 垂直截面法测分维实例



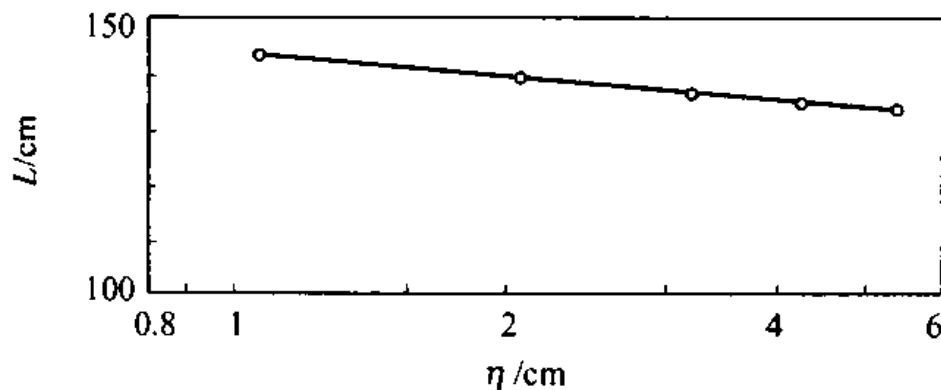
(a) 脆性断口轮廓线

$$L(\eta) = \eta^{1-D}$$

斜率  $\beta = 1 - D$

$$\beta = -0.05$$

$$D = 1.05$$



(b) 曲线长度随码尺的变化

垂直剖面法测断口分维<sup>[1]</sup>

## 3.7.2 分形在材料断裂分析中的应用



### ● 研究的内容

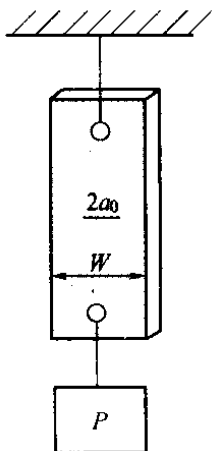
- 如何把断裂问题中具有统计意义的自相似结构或体系找出来，并用分形的语言加以描述
- 如何找出该分形体的分维表达式，并通过实验测出分维
- 如何建立分维与断裂性能（断裂韧度、延伸率等）的定量关系

### ● 研究的范围

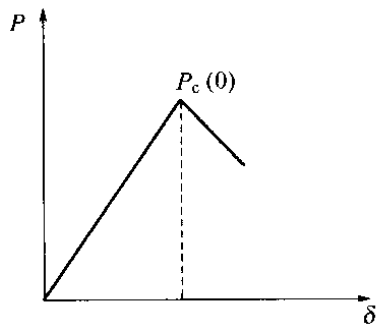
- 断口的分维
- 断裂韧性与断口分维
- 延性断裂与分维
- 环境断裂与分维
- 裂纹形核、扩展的分形特征

### 3.7.2.1 $K_{Ic}$ 与断口分维

$$K_{Ic} = \frac{P_c}{BW} \sqrt{\pi a_0 \sec\left(\frac{\pi a_0}{W}\right)}$$



(a) 裂纹平直扩展

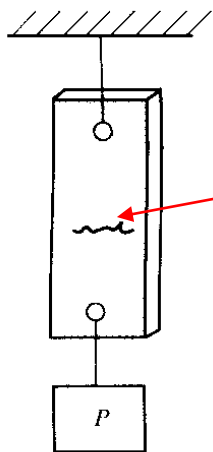


(b) 图(a)对应的载荷 - 位移曲线

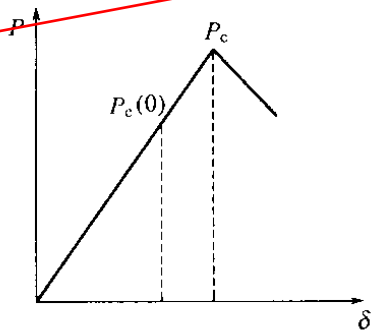
**韧度**  $K_{Ic}(0) = \frac{P_c(0)}{BW} \sqrt{\pi a_0 \sec\left(\frac{\pi a_0}{W}\right)}$

**动力**  $U_T(0) = \int_0^{P_c(0)} \frac{l_0 P}{2EA_0} = \frac{l_0 P_c^2(0)}{4EA_0}$

**阻力**  $R_T(0) = 2\gamma A_0 = 2\gamma L_0 B$



(c) 裂纹分形扩展



(d) 图(c)对应的载荷 - 位移曲线

$$L = L_0 \varepsilon^{1-D}$$

**韧度**  $K_{Ic} = \frac{P_c}{BW} \sqrt{\pi a_0 \sec\left(\frac{\pi a_0}{W}\right)}$

**动力**  $U_T = \frac{l_0 P_c^2}{4EA_0}$

$$P_c^2 = P_c^2(0) \varepsilon^{1-D}$$

**阻力**  $R_T = 2\gamma L_0 B \varepsilon^{1-D}$

图 6.7 裂纹平直扩展所对应的载荷-位移曲线以及裂纹分形扩展所对应的载荷-位移曲线

$$K_{Ic} = K_{Ic}(0) \varepsilon^{(1-D)/2}$$

# $K_{IC}$ 与分维关系的试验研究



表 6.2 各种材料断口的分维  $D$ <sup>[45]</sup>

合金钢	1.1~1.28    1.04~1.26	岩石	1.18~1.53
铝合金	1.11~1.30	水灰石	1.2~1.24
陶瓷	1.16~1.33    1.09~1.33	沙石	1.27~1.33
水泥	1.04~1.26    1.07~1.17	地壳	1.29~1.33

根据  $K_{IC} = K_{IC}(0)\varepsilon^{(1-D)/2}$

$K_{IC}$  应当随  $D$  的升高而升高, 而且  $\lg K_{IC}$  随  $(D-1)$  的升高而线性升高, 如右图所示, 这是对高强钢和陶瓷的实验结果。

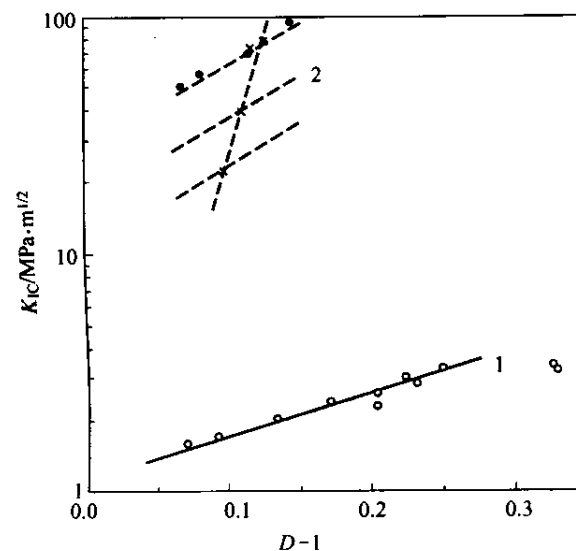


图 6.8  $K_{IC}$  随断口分维  $D$  的变化<sup>[1]</sup>

1—陶瓷; 2—高强钢



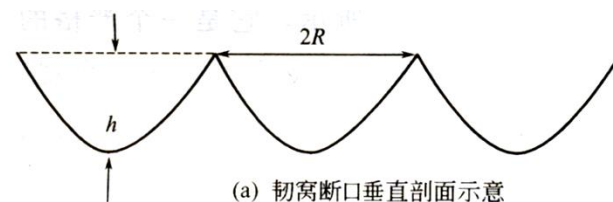
### 3.7.2.2 $J_{IC}$ 与断口分维



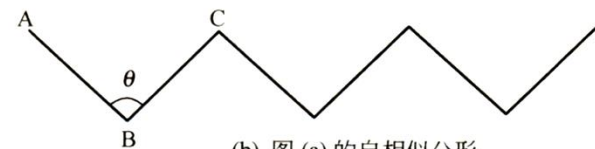
当用小试样测量  $J_{IC}$  时所得断口一般是韧窝断口。韧窝断口的垂直剖面可以用一条两边相等的折线来近似，它是一个严格的自相似分形曲线，可用它来近似韧窝断口轮廓线。



J 积分试样断口SEM



(a) 韧窝断口垂直剖面示意



(b) 图 (a) 的自相似分形

韧窝断口垂直剖面示意及相应的自相似分形

定义韧窝的形状比：

$$M = \frac{h}{2R}$$

韧窝深度

韧窝直径

Thompson 得出临界  $J$  积分与  $M$  的关系为：

$$J_{IC} = \frac{\sigma_{ys}}{3} \ln \left( \frac{M^2}{3f} \right) l^*$$

### 3.7.2.2 $J_{IC}$ 与断口分维（续）



按自相似分维定义有： $D = \ln N / \ln(1/r)$

式中， $N = 2$ ； $r = AB/AC$ ，即  $\frac{1}{r} = \frac{AC}{AB} = 2 \sin \frac{\theta}{2}$

则有：
$$D = \frac{\ln 2}{\ln \left( 2 \sin \frac{\theta}{2} \right)} \quad (1)$$

根据几何关系有 
$$M = \frac{h}{2R} = \frac{BQ}{AC} = \frac{BQ}{2AQ} = \frac{1}{2} \cot \frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\theta}{2}}}{2 \sin \frac{\theta}{2}} \quad (2)$$

根据（1）式，可得  $2 \sin \frac{\theta}{2} = 2^{(1/D)-1}$  代入（2）式，得到

$$M = \frac{\sqrt{1 - 4^{(1/D)-1}}}{2 \times 2^{(1/D)-1}} = \sqrt{4^{-1/D} - \frac{1}{4}} \quad (3)$$