

计算方法习题课 2

配套 《计算方法》 李大明

助教：马泽涛

邮箱: ztma2021@163.com

上海交通大学 数学科学学院

2021 年 11 月 9 日

内容提要

- 1 作业规范
- 2 作业 1
- 3 作业 2
- 4 作业 3

作业规范

- 作业提交
 - 图片, pdf 上传清晰;
 - 纸质作业推荐扫描全能王;
 - 使用latex;
 -
- 答题规范
 - 标注题号;
 - 关键步骤, 如使用的定理名称等;
 - 解答过程详细、合理;
- 沟通, 联系请发送邮件至 ztma2021@163.com(备注姓名、学号、并描述问题)
 - 没有按时提交作业至 canvas;
 - 作业最终得分不满意;
 - 作业批改错误;
 -

作业示范

CHAPTER 1

1. 解: 设 x 的近似值为 x^* , 由已知有 $\delta = \frac{x^* - x}{x}$

设 $f(x) = \ln x$, $(x > 0)$, $f'(x) = \frac{1}{x}$

由 $e(f(x^*)) \approx |f'(x^*)| \delta(x^*)$ 可得

$$|\ln x - \ln x^*| \approx e(f(x^*)) \approx \frac{1}{x^*} |x^* - x| = \delta$$

则 $\ln x$ 的误差为 δ

2. 解: 设 x 的近似值为 x^* , 由已知有 $\frac{x^* - x}{x^*} = 0.02$

设 $f(x) = x^n$, $f'(x) = nx^{n-1}$

由 $e(f(x^*)) \approx |f'(x^*)| \delta(x^*)$ 可得

$$x^n - (x^*)^n \approx e(f(x^*)) \approx n(x^*)^{n-1} \cdot (x - x^*) = 0.02n \cdot (x^*)^n$$

$$\text{则 } x^n \text{ 的相对误差为 } \frac{x^n - (x^*)^n}{(x^*)^n} = \frac{0.02n \cdot (x^*)^n}{(x^*)^n} = 0.02n$$

4. 解: 由 x_1^* , x_2^* , x_3^* , x_4^* 的值可知

$$e(x_1^*) = \frac{1}{2} \times 10^{-4}, \quad e(x_2^*) = \frac{1}{2} \times 10^{-3}$$

$$e(x_3^*) = \frac{1}{2} \times 10^{-1}, \quad e(x_4^*) = \frac{1}{2} \times 10^{-3}$$

由 $e(A^*) \approx \sum_{i=1}^4 \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| e(x_i^*)$ 可得

$$1) \quad e(x_1^* + x_2^* + x_3^*) = e(x_1^*) + e(x_2^*) + e(x_3^*) = 1.05 \times 10^{-3}$$

$$2) \quad e(x_1^* x_2^* x_3^*) = |x_2^* x_3^*| e(x_1^*) + |x_1^* x_3^*| e(x_2^*) + |x_1^* x_2^*| e(x_3^*) \\ = 0.031 \times 385.6 \times \frac{1}{2} \times 10^{-3} + 1.1021 \times 385.6 \times \frac{1}{2} \times 10^{-3} + 1.1021 \times 0.031 \times \frac{1}{2} \times 10^{-3} \\ \approx 0.22$$

$$3) \quad e(x_1^* / x_2^*) = \left| \frac{x_1^*}{x_2^*} \right| e(x_2^*) + \left| \frac{x_2^*}{x_1^*} \right| e(x_1^*) \\ = \frac{x_1^*}{x_2^*} e(x_2^*) + \frac{x_2^*}{x_1^*} e(x_1^*) \\ = \frac{385.6 \times \frac{1}{2} \times 10^{-3} + 0.031 \times \frac{1}{2} \times 10^{-3}}{\left(\frac{385.6}{0.031} \right)^2} \\ \approx 0.001 \times 10^{-3}$$

5. 解: 设半径 R 的近似值为 R^* , R 的相对误差限为 $\delta(R^*) = \frac{R^* - R}{R^*}$

(a) 同学 1

数值分析第一次作业

T1. 设 $x > 0$, x 的相对误差为 δ , 求 $\ln x$ 的误差.

解: 设 x 的真值为 x^* , 则有误差 $\delta = \frac{x^* - x}{x}$, 则 $f(x) = \ln x$, 因 $f'(x) = \frac{1}{x}$.

$$\text{故有 } e(f(x)) \approx |f'(x)| \delta(x)$$

$$\text{可得: } |\ln x - \ln x^*| \approx \left| \frac{1}{x^*} \right| (x - x^*) = \frac{1}{x^*} (x - x^*) = e(x) = \delta$$

$$\text{即: } e(\ln x^*) \approx \delta, \quad \ln x \text{ 的误差为 } \delta.$$

T2. 设 x 的相对误差为 2% , 求 x^n 的相对误差.

解: 设 $f(x) = x^n$, 则此等函数值问题的条件数为:

$$C_p = \left| \frac{x f'(x)}{f(x)} \right| = \left| \frac{x \cdot n x^{n-1}}{x^n} \right| = n$$

又因为计算函数值问题的条件数 C_p 为函数值的相对误差与自变量

$$\text{相对误差的比值, 即: } C_p = \frac{e(f(x^*))}{e(x^*)} = \frac{e(x^n^*)}{e(x^*)}$$

$$\text{所以有: } e(x^n^*) \approx C_p \cdot e(x^*) = n \cdot 2\% = 1.02n$$

$$x^n \text{ 的相对误差为 } 0.02n.$$

T4. 利用式(1.3.3)求下列近似值的误差限, 其中 x_1^* , x_2^* , x_3^* , x_4^* 均为习题3所得的值.

解: 已知 $x_1^* = 1.102$; $x_2^* = 0.031$; $x_3^* = 385.6$; $x_4^* = 56.490$.

$$\text{所以 } e(x_1^*) = \frac{1}{2} \times 10^{-4}, \quad e(x_2^*) = \frac{1}{2} \times 10^{-1}, \quad e(x_3^*) = \frac{1}{2} \times 10^{-3}, \quad e(x_4^*) = \frac{1}{2} \times 10^{-3}$$

(b) 同学 2

作业 1

1. 设 $x > 0$, x 的相对误差为 δ , 求 $\ln x$ 的误差.

解: 因为 x 的相对误差为 δ , 所以有

$$\frac{x - x^*}{x^*} = \delta,$$

从而, 当 δ 充分小时,

$$\begin{aligned}\ln x - \ln x^* &= \ln\left(\frac{x - x^* + x^*}{x^*}\right) \\ &= \ln(1 + \delta) \\ &\approx \delta.\end{aligned}$$

作业 1

2. 设 x 的相对误差为 2%, 求 x^n 的相对误差.

解: 令 $f(x) = x^n$, 则 $\frac{df}{dx} = nx^{n-1}$.

注意到, 由泰勒展开

$$f(x) = f(x^*) + f'(x^*)(x - x^*) + o(x - x^*).$$

于是,

$$x^n \approx (x^*)^n + n(x^*)^{(n-1)}(x - x^*),$$

进而,

$$\begin{aligned} \frac{x^n - (x^*)^n}{(x^*)^n} &\approx \frac{n(x^*)^{(n-1)}(x - x^*)}{(x^*)^n} \\ &= n \cdot \frac{x - x^*}{x^*} \\ &= 0.02n. \end{aligned}$$

作业 1

5. 计算球体积要使相对误差限为 1%, 问度量半径为 R 时允许的相对误差限是多少.

解: 令 $f(R) = \frac{4}{3}\pi R^3$, 则 $f'(R) = 4\pi R^2$.
同样地, 利用泰勒展开, 有

$$f(R) = f(R^*) + f'(R^*)(R - R^*) + o(R - R^*).$$

要使得

$$3 \cdot \left| \frac{R^* - R}{R^*} \right| \approx \left| \frac{f(R^*) - f(R)}{f(R^*)} \right| \leq 0.01,$$

则要求 R 的相对误差限为 $1/300 \approx 0.33\%$.

作业 1

13. $f(x) = \ln(x - \sqrt{x^2 - 1})$, 求 $f(30)$ 的值. 若开平方用 6 位函数表, 问求对数式时误差有多大? 若改用另一等价公式

$$\ln(x - \sqrt{x^2 - 1}) = -\ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

计算, 求对数时误差有多大?

解: $f(30) = \ln(30 - \sqrt{899})$.

令 $u = \sqrt{899}$, 则 $u \approx 29.9833$, 即 $u^* = 29.9833$. 则由书本 P6, (1.3.2) 式可知,

$$|u - u^*| \leq \frac{1}{2} \times 10^{-4},$$

其中取 $m = 1, n = 6$.

作业 1

13. 又令 $g(u) = \ln(30 - u)$, 则 $g'(u) = \frac{1}{u-30}$. 从而,

$$\begin{aligned} |g(u) - g(u^*)| &\approx |g'(u^*)(u - u^*)| \\ &\leq 2.99401 \times 10^{-4}. \end{aligned} \quad (1)$$

再令 $h(u) = -\ln(30 + u)$, $g'(u) = -\frac{1}{u+30}$.

同理,

$$\begin{aligned} |h(u) - h(u^*)| &\approx |h'(u^*)(u - u^*)| \\ &= \frac{1}{u^* + 30} \cdot |u - u^*| \\ &\leq 8.33565 \times 10^{-7}. \end{aligned} \quad (2)$$

注意到上述几题都用到了一元泰勒展开的近似.

作业 1

4. 利用式 (1.3.3) 求下列近似值的误差限:

- $x_1^* + x_2^* + x_4^*$
- $x_1^* x_2^* x_3^*$
- x_2^* / x_4^*

提示: 利用多元函数泰勒展开的近似.

1 作业规范

2 作业 1

3 作业 2

4 作业 3

作业 2

6. 已知 $x = \varphi(x)$ 在区间 (a, b) 内只有一根, 且当 $a < x < b$ 时,
 $|\varphi'(x)| \geq k > 1$,

(1) 如何将 $x = \varphi(x)$ 化为适于迭代的形式?

(2) 将 $x = \tan x$ 化为适于迭代的形式, 并求 $x = 4.5 \text{ rad}$ 附近的根.

解: (1) 原先要求

$$\begin{cases} y = x \\ y = \varphi(x) \end{cases}$$

在区间内的交点. 由条件可知 $\varphi(x)$ 在区间内严格单调, 因此其反函数存在. 于是, 可转化为考虑

$$\begin{cases} x = y \\ x = \varphi^{-1}(y) + C \end{cases}$$

在 (a, b) 内的交点. 且因 $\left| \frac{1}{\varphi'(y)} \right| \leq \frac{1}{k} < 1$, 故迭代公式

$$y_{k+1} = \varphi^{-1}(y_k) + C$$

收敛.

作业 2

6. (2) 原先要求

$$\begin{cases} y = x \\ y = \tan x \end{cases}$$

在 $x = 4.5$ 附近的交点, 现在由 (1) 转化为

$$\begin{cases} x = y \\ x = \arctan y + \pi \end{cases}$$

在 $(\pi, 3\pi/2)$ 内的交点.

令 $\varphi(y) = \arctan y + \pi$, 则 $\varphi'(y) < 1$. 取 y_0 及迭代公式

$$y_{k+1} = \varphi(y_k) = \arctan y_k + \pi,$$

得上式收敛到 4.493409457909064.

作业 2

10. 对于 $f(x) = 0$ 的 Newton 公式 $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$, 证明

$$R_k = \frac{x_k - x_{k-1}}{(x_{k-1} - x_{k-2})^2}$$

收敛到 $-\frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)}$.

证明:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} R_k &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x_k - x_{k-1}}{(x_{k-1} - x_{k-2})^2} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} - \frac{\frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})}}{\left(-\frac{f(x_{k-2})}{f'(x_{k-2})}\right)^2} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} - \frac{\frac{f(x_{k-1}) - f(x^*)}{f'(x_{k-1})}}{\left(-\frac{f(x_{k-2}) - f(x^*)}{f'(x_{k-2})}\right)^2} \end{aligned}$$

作业 2

10.

$$\begin{aligned}
&= \lim_{k \rightarrow \infty} - \frac{\frac{f'(\xi_{k-1})(x_{k-1} - x^*)}{f'(x_{k-1})}}{\left(\frac{f'(\xi_{k-2})(x_{k-2} - x^*)}{f'(x_{k-2})} \right)^2} \\
&= - \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x_{k-1} - x^*}{(x_{k-2} - x^*)^2} \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f'(\xi_{k-1}) [f'(x_{k-2})]^2}{f'(x_{k-1}) [f'(\xi_{k-2})]^2} \\
&= - \frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)}.
\end{aligned}$$

其中 ξ_{k-1} 介于 x_{k-1} 与 x^* 之间, ξ_{k-2} 介于 x_{k-2} 与 x^* 之间. 并且在倒数第二个等号当中运用了牛顿法的二阶收敛, 即

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x_k - x^*}{(x_{k-1} - x^*)^2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x_{k-1} - x^*}{(x_{k-2} - x^*)^2} = \frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)}.$$

此外, 在 14. 15. 中也是运用该公式及其证明思路.

作业 2

回顾 Newton 公式

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

的收敛阶证明.

证法 1: 考虑 $x = \varphi(x)$, 其中 $\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$.

将 $\varphi(x)$ 在 x^* 处泰勒展开. 见书本 P151.

证法 2: 设 $x_k \rightarrow x^*$ 直接对 $f(x)$ 在 x_k 处泰勒展开.

$$f(x) = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k) + \frac{1}{2}f''(x_k)(x - x_k)^2 + o\left((x - x_k)^2\right),$$

将 x^* 带替 x 得

$$0 = f(x^*) = f(x_k) + f'(x_k)(x^* - x_k) + \frac{1}{2}f''(x_k)(x^* - x_k)^2 + o\left((x^* - x_k)^2\right),$$

作业 2

接上证明 2

记 $e_k = x_k - x^*$, 利用 $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$, 得到

$$\frac{e_{k+1}}{(e_k)^2} = \frac{f''(x_k)}{2f'(x_k)} + \frac{o((x^* - x_k)^2)}{(x^* - x_k)^2},$$

令 $k \rightarrow \infty$, 即为所求.

1 作业规范

2 作业 1

3 作业 2

4 作业 3

作业 3

6. 设 A 为 n 阶严格对角占优矩阵, 则经过 Gauss 消去法一步后,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_1^T \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

证明: A_2 是严格对角占优矩阵.

令

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_1^T \\ b_1 & A_1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_1^T \\ 0 & A_1 - \frac{a_1^T}{a_{11}} b_1 a_1^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_1^T \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

分析: 只要证明

$$\left| a_{ii} - \frac{1}{a_{11}} a_{i1} a_{1i} \right| = \left| a_{ii}^{(2)} \right| > \sum_{j=2, j \neq i}^n \left| a_{ij}^{(2)} \right| = \sum_{j=2, j \neq i}^n \left| a_{ij} - \frac{1}{a_{11}} a_{i1} a_{1j} \right|,$$

对于 $i = 2, \dots, n$ 都成立.

作业 3

6. 证明:

$$\begin{aligned}
 \left| a_{ii}^{(2)} \right| &= \left| a_{ii} - \frac{1}{a_{11}} a_{i1} a_{1i} \right| \geq \left| a_{ii} \right| - \left| \frac{1}{a_{11}} a_{i1} a_{1i} \right| \\
 &> \sum_{j=1, j \neq i}^n \left| a_{ij} \right| - \left| \frac{1}{a_{11}} a_{i1} a_{1i} \right| \\
 &= \sum_{j=2, j \neq i}^n \left| a_{ij} \right| + \left| a_{i1} \right| - \left| \frac{1}{a_{11}} a_{i1} a_{1i} \right| \\
 &= \sum_{j=2, j \neq i}^n \left| a_{ij} \right| + \left| \frac{a_{i1}}{a_{11}} \right| (|a_{11}| - |a_{1i}|) \\
 &> \sum_{j=2, j \neq i}^n \left| a_{ij} \right| + \left| \frac{a_{i1}}{a_{11}} \right| \sum_{j=2, j \neq i}^n |a_{1j}| \\
 &\geq \sum_{j=2, j \neq i}^n \left| a_{ij} - \frac{1}{a_{11}} a_{i1} a_{1j} \right| = \sum_{j=2, j \neq i}^n \left| a_{ij}^{(2)} \right|
 \end{aligned}$$

作业 3

7. 设 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 为对称正定矩阵, 经过 Gauss 消去法一步后, A 约化为

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_1^T \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}, \text{ 其中}$$

$$A = (a_{ij})_n, A_2 = (a_{ij}^{(2)})_{n-1}$$

证明: (1) A 的对角元素 $a_{ii} > 0 (i = 1, 2, \dots, n)$;

(2) A_2 是对称正定矩阵;

(3) $a_{ii}^{(2)} < a_{ii} (i = 2, 3, \dots, n)$;

(4) A 的绝对值最大的元素必在对角线上;

(5) $\max_{2 \leq i, j \leq n} |a_{ij}^{(2)}| \leq \max_{2 \leq i, j \leq n} |a_{ij}|$;

(6) 从 (2)、(3)、(5) 推出, 如果 $|a_{ij}| < 1$, 则对于所有 k , $|a_{ij}^{(k)}| < 1$.

作业 3

7. (1) 由于 A 对称正定矩阵, 所以对一切非零 $x \in \mathbb{R}^n$, 有

$$x^T A x > 0,$$

特别地, 取 $x = e_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$), 则有 $a_{ii} > 0$.

(2) 设 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_1^T \\ a_1 & A_1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_1^T \\ 0 & A_1 - \frac{1}{a_{11}} a_1 a_1^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_1^T \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \rightarrow$
 $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$ 及 $P^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{a_{11}} a_1 & I_{n-1} \end{pmatrix}$, 则有

$$P^T A P = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}.$$

由上可知 A_2 对称, 取非零的 $x = [0 \ x_2 \ \cdots \ x_n]^T = [0 \ x_0]^T$, 因 P 可逆, 从而 $y = Px$ 为非零向量, 有

$$y^T A y = x^T P^T A P x = x_0^T A_2 x_0 > 0.$$

作业 3

7. (3) 由上可知 $A_2 = A_1 - \frac{1}{a_{11}} a_1 a_1^T$, 易知.

(4) 由于 A 正定从而 A 的 2 级主子式大于 0, 从而有

$$a_{ij}^2 < a_{ii}a_{jj} \leq (\max(a_{ii}, a_{jj}))^2 \leq \left(\max_{1 \leq i \leq n} a_{ii}\right)^2.$$

(5) 由 (2) 可知, A_2 是 $n-1$ 级对称正定矩阵, 从而也满足 (1),(3). 于是有

$$\max_{2 \leq i, j \leq n} |a_{ij}^{(2)}| \leq \max_{2 \leq i \leq n} |a_{ii}^{(2)}| \leq \max_{2 \leq i \leq n} |a_{ii}| \leq \max_{2 \leq i, j \leq n} |a_{ij}|.$$

(6) 类似地, 经过有限步 Gauss 消去后得到的 A_3, A_4, \dots , 也满足上述的性质, 从而 (6) 成立.

作业 3

8.

注意到左乘 I_{ij} 是做初等行变换, 即交换第 i, j 两行;

右乘 I_{ij} 是做初等列变换, 即交换第 i, j 两列.

作业 3

11. 证明: (1) 如果 A 是对称正定矩阵, 则 A^{-1} 也是对称正定矩阵;
(2) 如果 A 是对称正定矩阵, 则 A 可唯一的写成 $A = L^T L$, 其中 L 是具有正对角元的下三角阵.
- (1) A 对称正定 \Leftrightarrow 特征值 $\lambda_i > 0, i = 1, 2, \dots, n$;
(2) 回忆 $A = LU$ 是从上往下利用初等行变换来证明, 这里利用从下往上;

作业 3

15. 能否 LU 分解的判断.

- (1) 不能直接分解, 但是经过选主元 $PA = LU$;
- (2) 可分解, 但不唯一;
- (3) 对称正定, 可以分解, 分解唯一;

作业 3

19. 证明:

$$(1) \|x\|_{\infty} \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_{\infty};$$

$$(2) \frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_F \leq \|A\|_2 \leq \|A\|_F.$$

解: (1) 略

(2) 提示: 利用

$$\|A\|_F^2 = \sum_{i,j=1}^n (a_{ij})^2 = \text{tr}(A^T A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i,$$

$$\|A\|_2^2 = \lambda_{\max}(A^T A).$$

作业 3

21. 设 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 为对称正定矩阵, 定义 $\|x\|_A = (Ax, x)^{\frac{1}{2}}$. 试证明 $\|x\|_A$ 是 \mathbb{R}^n 上向量的一种范数.

此处用到这样的结论:

若 A 为 n 级对称正定矩阵, 则存在 n 级可逆矩阵 P , 使得

$$A = P^T P.$$

利用作业 20.

作业 3

22. 证明: $\|x + y\|_2 = \|x\|_2 + \|y\|_2 \iff x, y$ 线性相关且 $x^T y \geq 0$.

证明: \Leftarrow 容易证明.

\Rightarrow 两边平方可得,

$$\|x + y\|_2^2 = (\|x\|_2 + \|y\|_2)^2,$$

注意到 $x^T x = \|x\|_2^2$ 以及 $x^T y = y^T x$, 得到

$$x^T y = \|x\|_2 \|y\|_2.$$

于是, $x^T y \geq 0$ 且由上式可知

$$\|x\|_2 \|y\|_2 \cos(\theta) = \|x\|_2 \|y\|_2$$

从而 x, y 线性相关.

作业 3

24. 令 $\|\cdot\|$ 是 \mathbb{R}^n (或 \mathbb{C}^n) 上的任意一种范数, 而 P 是任一非奇异实 (或复) 矩阵, 定义范数

$$\|x\|' = \|Px\|,$$

证明 $\|A\|' = \|PAP^{-1}\|$.

证明:

$$\begin{aligned}\|A\|' &= \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|'}{\|x\|'} \\ &= \sup_{x \neq 0} \frac{\|PAx\|}{\|Px\|} \\ &= \sup_{x \neq 0} \frac{\|(PAP^{-1}) Px\|}{\|Px\|} \\ &= \sup_{y = Px \neq 0} \frac{\|(PAP^{-1}) y\|}{\|y\|} \\ &= \|PAP^{-1}\|.\end{aligned}$$

作业 3

26. 设 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 求证: $A^T A$ 与 AA^T 的特征值相等, 即 $\lambda(A^T A) = \lambda(AA^T)$.

证明:

先证: A, B 分别为 $n \times m$ 和 $m \times n$ 矩阵, 则有

$$\begin{vmatrix} E_m & B \\ A & E_n \end{vmatrix} = |E_n - AB| = |E_m - BA|,$$

进一步, 当 $\lambda \neq 0$ 时,

$$|\lambda E_n - AB| = \lambda^{n-m} |\lambda E_m - BA|.$$

最后, 令 $B = A^T$ 即可.

回忆到: 矩阵 A 的特征值是由下式得到

$$f_A(\lambda) = |\lambda E - A|.$$

作业 3

27. 设 A 为非奇异矩阵, 求证: $\frac{1}{\|A^{-1}\|} = \min_{y \neq 0} \frac{\|Ay\|}{\|y\|}$.

证明:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\|A^{-1}\|} &= \frac{1}{\sup_{x \neq 0} \frac{\|A^{-1}x\|}{\|x\|}} \\
 &= \frac{1}{\sup_{y \neq 0} \frac{\|y\|}{\|Ay\|}} \\
 &= \min_{y \neq 0} \frac{1}{\frac{\|y\|}{\|Ay\|}} \\
 &= \min_{y \neq 0} \frac{\|Ay\|}{\|y\|}.
 \end{aligned}$$

作业 3

28. 设 A 为非奇异矩阵, 且 $\|A^{-1}\| \|\delta A\| < 1$ 求证: $(A + \delta A)^{-1}$ 存在, 且有估计

$$\frac{\|A^{-1} - (A + \delta A)^{-1}\|}{\|A^{-1}\|} \leq \frac{\text{cond}(A) \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}}{1 - \text{cond}(A) \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}}.$$

证明: 因 $\|A^{-1}\delta A\| \leq \|A^{-1}\| \|\delta A\| < 1$, 由定理 7.18 可知, $I + A^{-1}\delta A$ 非奇异, 且 $\|(I + A^{-1}\delta A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A^{-1}\delta A\|}$. 因此,

$$A + \delta A = A(I + A^{-1}\delta A)$$

非奇异.

下证:

$$\frac{\|A^{-1} - (A + \delta A)^{-1}\|}{\|A^{-1}\|} \leq \frac{\|A^{-1}\| \|\delta A\|}{1 - \|A^{-1}\| \|\delta A\|}.$$

作业 3

28. 接上页 注意到

$$(A + \delta A)^{-1} = [A(I + A^{-1}\delta A)]^{-1} = (I + A^{-1}\delta A)^{-1} A^{-1},$$

从而

$$\begin{aligned} \|A^{-1} - (A + \delta A)^{-1}\| &= \|A^{-1} - (I + A^{-1}\delta A)^{-1} A^{-1}\| \\ &\leq \|I - (I + A^{-1}\delta A)^{-1}\| \cdot \|A^{-1}\| \\ &= \|(I + A^{-1}\delta A)^{-1} (I + A^{-1}\delta A - I)\| \cdot \|A^{-1}\| \\ &\leq \|(I + A^{-1}\delta A)^{-1}\| \cdot \|A^{-1}\delta A\| \cdot \|A^{-1}\| \\ &\leq \frac{1}{1 - \|A^{-1}\delta A\|} \|A^{-1}\| \cdot \|\delta A\| \cdot \|A^{-1}\| \\ &\leq \frac{1}{1 - \|A^{-1}\| \|\delta A\|} \|A^{-1}\| \cdot \|\delta A\| \cdot \|A^{-1}\|. \end{aligned}$$

作业 3

30. 设 A 为对称正定矩阵, 其分解为 $A = LDL^T = W^T W$, 其中 $W = D^{1/2} L^T$, 求证:

(1) $\text{cond}(A)_2 = [\text{cond}(W)_2]^2$;

(2) $\text{cond}(A)_2 = \text{cond}(W^T)_2 \cdot \text{cond}(W)_2$.

证明:

$$\text{cond}(A)_2 = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(A^T A)}{\lambda_{\min}(A^T A)}},$$

特别地, 当 A 为对称矩阵时,

$$\text{cond}(A)_2 = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(A^T A)}{\lambda_{\min}(A^T A)}} = \frac{\lambda_{\max}(A)}{\lambda_{\min}(A)}.$$

作业 3

32. 证明: 如果 A 是正交矩阵, 则 $\text{cond}(A)_2 = 1$.

证明: 由于 A 为正交矩阵, 从而有 $A'A = AA' = I$. 且对任意 $x \in \mathbb{R}^n$ 且 $\|x\|_2 = 1$, 有

$$\|Ax\|_2^2 = x'A'Ax = x'x = \|x\|_2^2 = 1,$$

于是,

$$\|Ax\|_2 = 1.$$

由范数的等价定义, 有

$$\|A\|_2 = \sup_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2 = 1.$$

从而,

$$\begin{aligned} \text{cond}(A)_2 &= \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 \\ &= \|A\|_2 \|A'\|_2 \\ &= 1. \end{aligned}$$

谢 谢!
Thank you!