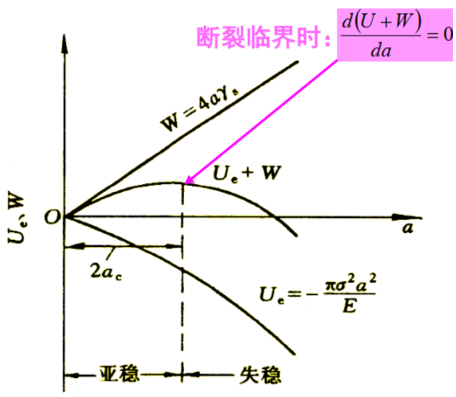
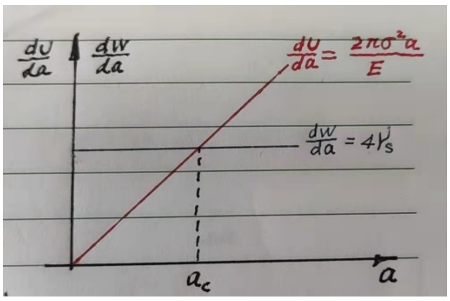
断裂力学　第一次作业答案

1. 答：作U~a及W~a关系曲线如图所示，在裂纹扩展中，裂纹表面能$W=4a\gamma_s$，弹性应变能释放$U=-\frac{\pi a^2\sigma^2}{E}$，总能量$W+U=4a\gamma_s-\frac{\pi a^2\sigma^2}{E}$。因此可见总能量随着裂纹长度增加而先升高后降低，令$\frac{d(W+U)}{da}=0$，可以求得临界裂纹长度$a_c=\frac{2E\gamma}{\pi\sigma^2}$。当$a<a_c$时，裂纹扩展为亚稳扩展（又称稳态扩展或亚临界扩展）；当$a>a_c$时，裂纹扩展为失稳扩展即发生快速断裂。则a_c为断裂临界点，对应的载荷为 Griffith 断裂应力：$\sigma_{Griffith}=\sqrt{\frac{2E\gamma_s}{\pi a}}\approx\sqrt{\frac{E\gamma_s}{a}}$



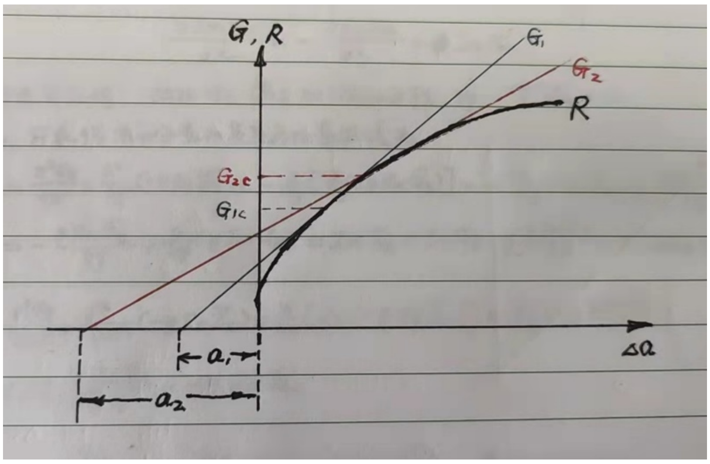
裂纹尺寸与能量的关系

作$\frac{dU}{da}$~a以及$\frac{dW}{da}$~a关系曲线如图所示，裂纹表面能变化率为水平线，应变能释放率与a成正比。两条线相交点为断裂临界点。当$a<a_c$时，$\frac{dU}{da}<\frac{dW}{da}$裂纹扩展为亚稳扩展；当$a>a_c$时，$\frac{dU}{da}>\frac{dW}{da}$裂纹扩展为失稳扩展。



2. 答：由于裂纹扩展能量释放率 G 与裂纹长度 a 为线性关系，而裂纹扩展阻力 R 与裂纹长度为非线性关系。作裂纹扩展的动力曲线和阻力曲线如下图所示，动力曲线与阻力曲线相切的点为失稳扩展临界点，此时有$\frac{\partial G}{\partial a}=\frac{\partial R}{\partial a}$对应的 G 为

断裂韧度。当薄板（平面应力）中初始裂纹长度不同时，有$(\frac{\partial G}{\partial a})_{a_1} \neq (\frac{\partial G}{\partial a})_{a_2}$但是裂纹扩展的阻力曲线是不变的，即两种初始裂纹长度试样的切点位置不相同，当$a_2 > a_1$，$G_{2c} > G_{1c}$



3. 答：对于复变应力函数：$Z = \frac{\tau z}{\sqrt{z^2-a^2}}$，其一阶导数为$Z = -\frac{\tau a^2}{\sqrt{(z^2-a^2)^3}}$。

由此可以求得应力分量的复变函数表达式为：

$$\sigma_x = \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 2ImZ + yReZ'$$
$$\sigma_y = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = -yReZ'$$
$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} = ReZ - ImZ'$$

考察边界条件：

当$z \to \infty$时，$Z = \tau,\ Z' = 0$，因此$\tau_{xy} = \tau, \sigma_x = \sigma_y = 0$

当$y = 0$时，在$|x| < a$时，$\tau_{xy} = \sigma_x = \sigma_y = 0$；在$|x| = \pm a$时，$z \to \infty, \tau_{xy} \to \infty$有奇异性。即该复变应力函数满足边界条件，是本问题的函数解。

以裂纹尖端为新坐标系原点且采用极坐标，即$z = a + re^{i\theta}$，则有

$$Z(r,\theta) = \frac{\tau(a + re^{i\theta})}{\sqrt{(2a + re^{i\theta})re^{i\theta}}}$$

当$\frac{r}{a} \ll 1$时，进行化简可得$Z(r,\theta) = \frac{\tau\sqrt{a}}{\sqrt{2r}}e^{-i\theta/2}$

代入应力分量表达式并令$K_{\mathrm{II}} = \tau\sqrt{\pi a}$，则得到

$$\sigma_x = -\frac{K_{\mathrm{II}}}{\sqrt{2\pi r}} sin\frac{\theta}{2}(2 + cos\frac{\theta}{2}cos\frac{3\theta}{2})$$
$$\sigma_y = \frac{K_{\mathrm{II}}}{\sqrt{2\pi r}} sin\frac{\theta}{2}cos\frac{\theta}{2}cos\frac{3\theta}{2}$$
$$\tau_{xy} = \frac{K_{\mathrm{II}}}{\sqrt{2\pi r}} cos\frac{\theta}{2}(1 - sin\frac{\theta}{2}sin\frac{3\theta}{2})$$

4. 答：将 Von Mises 准则写为应力分量的形式：

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6\left(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2\right) = 6\tau_s^2$$

在 III 型裂纹中，应力场的特点为：

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 0$$
$$\tau_{xy} = 0$$
$$\tau_{yz} = \frac{K_{\mathrm{III}}}{\sqrt{2\pi r}} cos\frac{\theta}{2}$$
$$\tau_{xz} = -\frac{K_{\mathrm{III}}}{\sqrt{2\pi r}} sin\frac{\theta}{2}$$

代入可得

$$\frac{{K_{\mathrm{III}}}^2}{2\pi r} = \tau_s^2$$

因此

$$r = \frac{{K_{\mathrm{III}}}^2}{2\pi\tau_s^2}$$

即半径为$\frac{{K_{\mathrm{III}}}^2}{2\pi\tau_s^2}$的一个圆，其圆心在裂纹尖端。

5. 答：应变能密度因子 S 的表达式为$S = a_{11}K_{\mathrm{I}}^2 + 2a_{12}K_{\mathrm{I}}K_{\mathrm{II}} + a_{22}K_{\mathrm{II}}^2$

其中

$$a_{11} = \frac{1}{16\mu}[(1 + cos\theta)(k - cos\theta)]$$
$$a_{12} = \frac{1}{16\mu}[sin\theta(2cos\theta - k + 1)]$$
$$a_{22} = \frac{1}{16\mu}[(1 - cos\theta)(k + 1) + (1 + cos\theta)(3cos\theta - 1)]$$
$$\mathrm{k} = 3 - 4\mathrm{\nu}$$

对于 I 型纯裂纹情况，$K_{\mathrm{I}} = \sigma\sqrt{\pi a}\ \ K_{\mathrm{II}} = 0$

因此$S = a_{11}K_{\mathrm{I}}^2 = \frac{K_{\mathrm{I}}^2}{16\mu}[(1 + cos\theta)(3 - 4\mathrm{\nu} - cos\theta)]$

分别对θ求一次导和两次导可得

$$\frac{\partial S}{\partial \theta}=\frac{K_{\mathrm{I}}^{2}}{8\mu}[sin\theta(cos\theta-1+2\nu)]$$

$$\frac{\partial^{2} S}{\partial \theta^{2}}=\frac{K_{\mathrm{I}}^{2}}{8\mu}[cos2\theta-(1-2\nu)cos\theta]$$

令$\frac{\partial S}{\partial \theta}=0$可得在$\theta_1=0$和$\theta_2=\arccos(1-2\nu)$两个方向上 S 有极值:

在$\theta_1=0$方向上$\frac{\partial^2 S}{\partial \theta^2}>0$，S 为极小值

在$\theta_2=\arccos(1-2\nu)$方向上$\frac{\partial^2 S}{\partial \theta^2}<0$，S 为极大值

因此裂纹沿着θ_1方向扩展，对应的最小应变能密度因子$S_{min}=\frac{(1-2\nu)K_{\mathrm{I}}^2}{4\mu}$。当裂纹开始扩展时，应变能密度因子达到临界值$S_C=\frac{(1-2\nu)K_{\mathrm{I}\,\mathrm{C}}^2}{4\mu}$

使用同样的方法对纯 II 型裂纹求解可以得到临界值为$S_C=\frac{(2-2\nu-\nu^2)K_{\mathrm{II}\,\mathrm{C}}^2}{12\mu}$

因此可知$\frac{K_{\mathrm{II}\,\mathrm{C}}^2}{K_{\mathrm{I}\,\mathrm{C}}^2}=\frac{3(1-2\nu)}{2(1-\nu)-\nu^2}$，当$\nu$取 0.3 时，已知$K_{\mathrm{I}\,\mathrm{C}}$为 80MPa.m$^{1/2}$，故可求得$K_{\mathrm{II}\,\mathrm{C}}$=76.8 MPa.m$^{1/2}$