弹性力学概述

沈耀
上海交通大学材料学院

2021年9月29日

变形协调方程

$$\begin{cases}\varepsilon_{11}=\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1}\\ \varepsilon_{22}=\dfrac{\partial u_2}{\partial x_2}\\ \gamma_{12}=\dfrac{\partial u_1}{\partial x_2}+\dfrac{\partial u_2}{\partial x_1}\end{cases}$$

若位移单值连续，且存在三阶导数，则偏导与求导顺序无关。

$$\frac{\partial^2\varepsilon_{11}}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_{22}}{\partial x_1^2}=\frac{\partial^3 u_1}{\partial x_1\partial x_2^2}+\frac{\partial^3 u_2}{\partial x_1^2\partial x_2}=\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)=\frac{\partial^2\gamma_{12}}{\partial x_1\partial x_2}$$

$$2\frac{\partial^2\varepsilon_{11}}{\partial x_2\partial x_3}=\frac{2\partial^3 u_1}{\partial x_1\partial x_2\partial x_3}=\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3}+\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)-\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3}+\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right)\right)$$

$$=\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial\gamma_{31}}{\partial x_2}+\frac{\partial\gamma_{12}}{\partial x_3}-\frac{\partial\gamma_{23}}{\partial x_1}\right)$$

变形协调方程

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2\varepsilon_{11}}{\partial x_2^2}+\dfrac{\partial^2\varepsilon_{22}}{\partial x_1^2}=\dfrac{\partial^2\gamma_{12}}{\partial x_1\partial x_2}\\ \dfrac{\partial^2\varepsilon_{22}}{\partial x_3^2}+\dfrac{\partial^2\varepsilon_{33}}{\partial x_2^2}=\dfrac{\partial^2\gamma_{23}}{\partial x_2\partial x_3}\\ \dfrac{\partial^2\varepsilon_{33}}{\partial x_1^2}+\dfrac{\partial^2\varepsilon_{11}}{\partial x_3^2}=\dfrac{\partial^2\gamma_{31}}{\partial x_1\partial x_3}\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases}2\dfrac{\partial^2\varepsilon_{11}}{\partial x_2\partial x_3}=\dfrac{\partial}{\partial x_1}\left(\dfrac{\partial\gamma_{31}}{\partial x_2}+\dfrac{\partial\gamma_{12}}{\partial x_3}-\dfrac{\partial\gamma_{23}}{\partial x_1}\right)\\ 2\dfrac{\partial^2\varepsilon_{22}}{\partial x_3\partial x_1}=\dfrac{\partial}{\partial x_2}\left(\dfrac{\partial\gamma_{12}}{\partial x_3}+\dfrac{\partial\gamma_{23}}{\partial x_1}-\dfrac{\partial\gamma_{13}}{\partial x_2}\right)\\ 2\dfrac{\partial^2\varepsilon_{33}}{\partial x_1\partial x_2}=\dfrac{\partial}{\partial x_3}\left(\dfrac{\partial\gamma_{23}}{\partial x_1}+\dfrac{\partial\gamma_{31}}{\partial x_2}-\dfrac{\partial\gamma_{12}}{\partial x_3}\right)\end{cases}$$

$$\varepsilon_{ij,kl}+\varepsilon_{kl,ij}=\varepsilon_{ik,jl}+\varepsilon_{jl,ik}$$

仅3个独立方程！

应力与应变关系

$$\sigma_{ij} \xleftrightarrow[\text{本构关系}]{?} \varepsilon_{ij}$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}$$

对各向同性材料：

$$\begin{cases} \sigma_{11} = 2G\varepsilon_{11} + \lambda\varepsilon_{v} \\ \sigma_{22} = 2G\varepsilon_{22} + \lambda\varepsilon_{v} \\ \sigma_{33} = 2G\varepsilon_{33} + \lambda\varepsilon_{v} \\ \sigma_{12} = G\gamma_{12} \\ \sigma_{23} = G\gamma_{23} \\ \sigma_{31} = G\gamma_{31} \end{cases}$$

上海交通大学 SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

已有弹性力学方程

平衡微分方程（3个）

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + F_j = 0$$

几何方程（6个）

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} \\ \varepsilon_{22} = \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2} \\ \varepsilon_{33} = \dfrac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{cases}, \quad \begin{cases} \gamma_{12} = \dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} + \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1} \\ \gamma_{23} = \dfrac{\partial u_2}{\partial x_3} + \dfrac{\partial u_3}{\partial x_2} \\ \gamma_{31} = \dfrac{\partial u_1}{\partial x_3} + \dfrac{\partial u_3}{\partial x_1} \end{cases}$$

本构关系（6个）

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}$$

变形协调方程（3个）

$$\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} = \varepsilon_{ik,jl} + \varepsilon_{jl,ik}$$

共计18大方程！

定解条件（边界条件）

力边界： 力边界S_σ上给定了表面力，边界条件可以表示为：

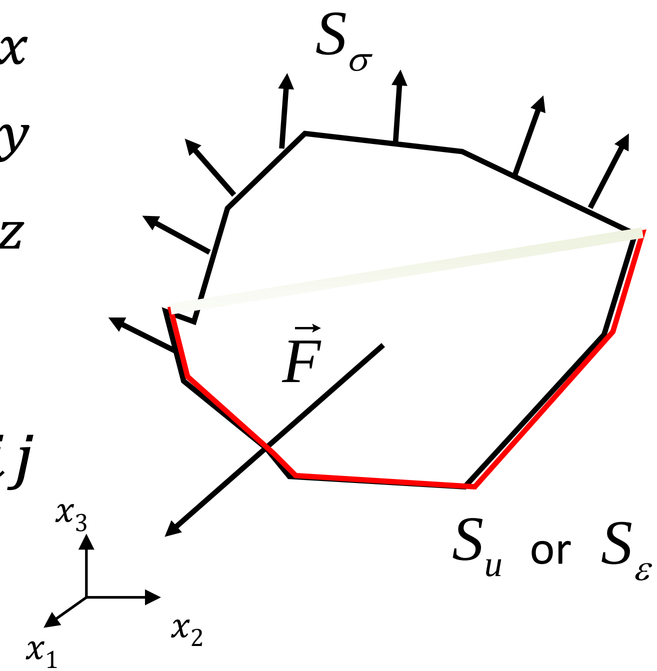
$$\begin{cases} \sigma_{11}n_1 + \sigma_{21}n_2 + \sigma_{31}n_3 = T_1 \\ \sigma_{12}n_1 + \sigma_{22}n_2 + \sigma_{32}n_3 = T_2 \\ \sigma_{13}n_1 + \sigma_{23}n_2 + \sigma_{33}n_3 = T_3 \end{cases}$$

位移边界： 位移边界S_u上给定了位移约束，边界条件可以表示为：

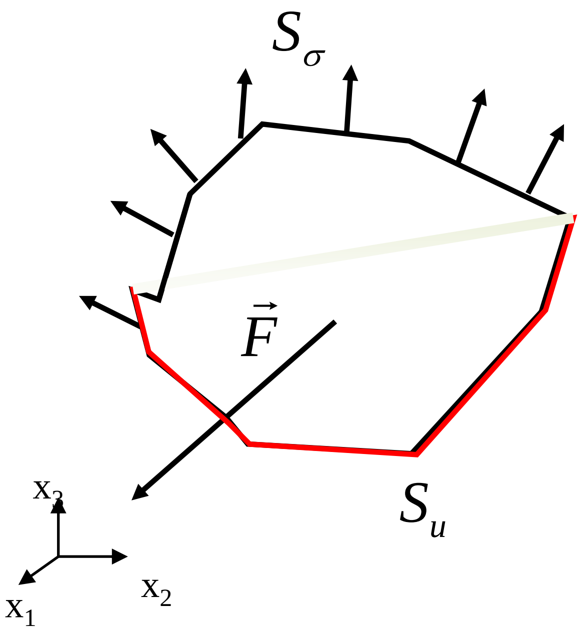
$$\begin{cases} u_x = \bar{u}_x \\ u_y = \bar{u}_y \\ u_z = \bar{u}_z \end{cases}$$

应变边界： 位移边界S_ε上给定了应变约束：

$$\varepsilon_{ij} = \bar{\varepsilon}_{ij}$$



不同条件下弹性问题的解法



变量中包含位移

协调方程自动满足　　解得

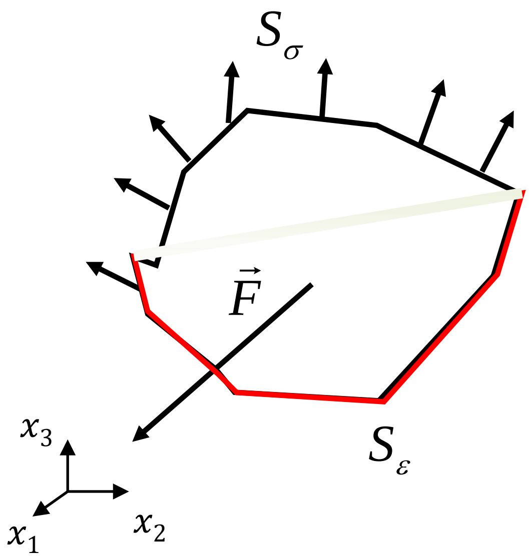
- 6个应力分量
- 6个应变分量
- 3个位移分量

联立

- 平衡微分方程（3个）
- 几何方程（6个）
- 本构关系（6个）

共15个方程

不同条件下弹性问题的解法



→ 变量中不包含位移 →

6个应力分量

6个应变分量

↓ 联立

- 协调方程（3个）
- 平衡方程（3个）
- 本构关系（6个）

共12个方程 →

解得

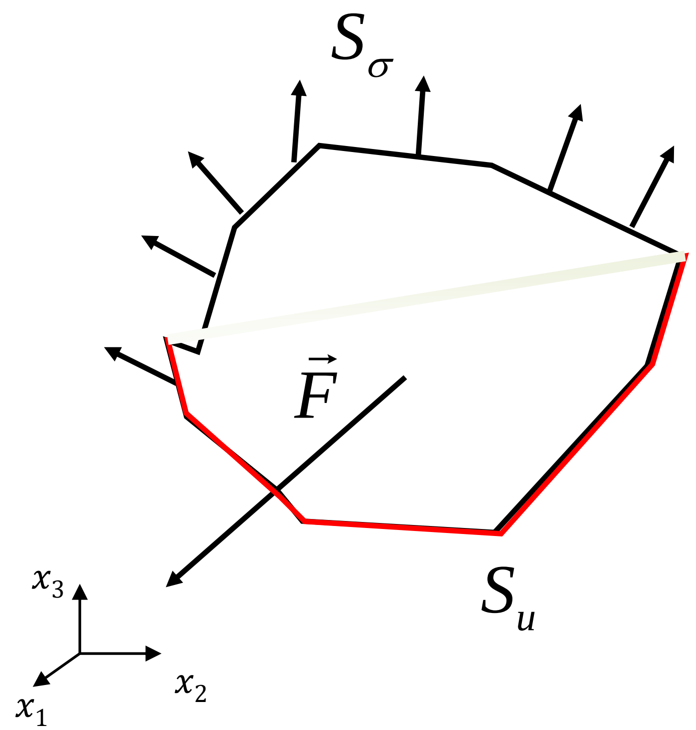
- 6个应力分量
- 6个应变分量

↓

位移：可通过几何方程积分得到

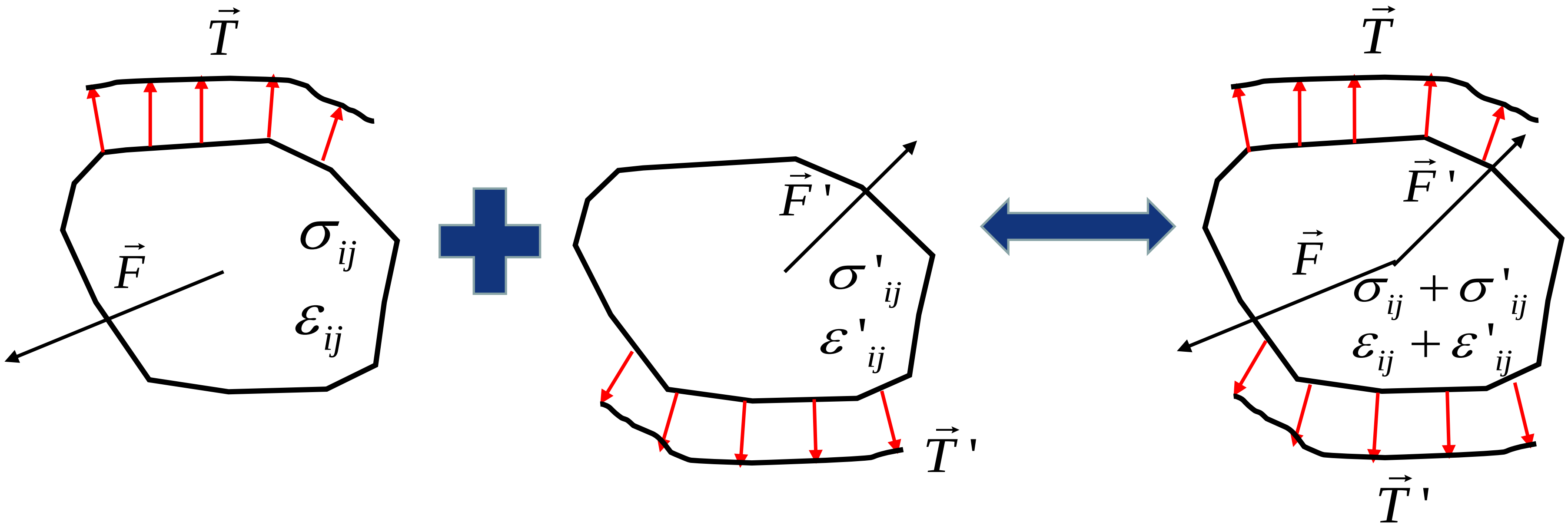
弹性力学问题实际上是求解偏微分方程组的边值问题。

具体来说，对于已知几何形状和材料性质的弹性体，在其内部受体积力F作用，在力边界上S_σ受表面力T作用，在位移边界S_u上给定位移，求偏微分方程组【平衡微分方程+几何方程（或协调方程）+本构关系】在满足边界条件下的解。



解的性质

叠加原理



解一 + 解二 ⟺ 解一+解二

解的性质

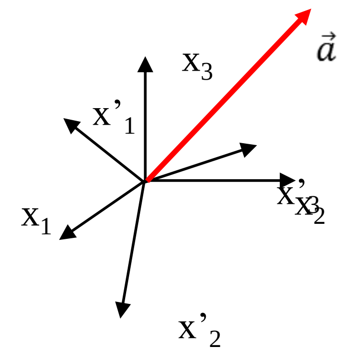
唯一性原理　同一线弹性问题的解是唯一的！

如何证明？　无论用何种方法，只要能得到一个满足基本方程和边界条件的解，它便是唯一正解！

反证法：（依据叠加原理）　假设同一弹性问题有2个解，他们的位移场和应力场分别为$(\varepsilon_{ij},\ \sigma_{ij})$，$(\varepsilon'_{ij},\ \sigma'_{ij})$，根据叠加原理，将2个状态相减相减后的物体不受任何外力作用，故内部无应力应变，则$(\varepsilon_{ij},\ \sigma_{ij})$和$(\varepsilon'_{ij},\ \sigma'_{ij})$等价，故这一问题的解唯一。

坐标变换（旋转）

矢量的坐标变换 $\vec{a} = a_i \vec{e}_i = a_j' \vec{e}_j'$，$a_j' = a_i \left(\vec{e}_j' \cdot \vec{e}_i\right)$



$$\begin{pmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ a'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(e'_1, e_1) & \cos(e'_1, e_2) & \cos(e'_1, e_3) \\ \cos(e'_2, e_1) & \cos(e'_2, e_2) & \cos(e'_2, e_3) \\ \cos(e'_3, e_1) & \cos(e'_3, e_2) & \cos(e'_3, e_3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

令 $\cos(e'_i, e_j) = \lambda_{ij}$，则 $a'_i = \lambda_{ij} a_j$

$$\begin{pmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ a'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$，其中 $\begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccc} i & j & k \end{array} \\ \begin{array}{c} i' \\ j' \\ k' \end{array} & \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{pmatrix} \end{array} = \mathbf{Q}$

称Q为坐标转换矩阵

坐标变换

二阶张量的坐标变换：

$$\vec{t} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{n} \qquad \vec{n}' = \boldsymbol{Q} \cdot \vec{n}$$
$$\vec{t}' = \boldsymbol{\sigma}' \cdot \vec{n}' \quad + \quad \vec{t}' = \boldsymbol{Q} \cdot \vec{t} \quad \longrightarrow \quad \boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{Q}^T$$

矢量与张量关系　矢量的坐标变换　　张量的坐标变换

分量表示?

本构关系

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \longrightarrow \text{四阶张量}$$

四阶张量C中有多少个分量?

$$N = \underbrace{\overset{\text{阶数}}{3^{4}}}_{\text{维数}} = 81!$$

本构关系

考虑应力、应变张量的对称性，应力应变张量的九个分量中只有六个独立分量，可以采用Kinetic Voigt Rule (Voigt notation)：

ij	a
11	1
22	2
33	3
23	4
13	5
12	6

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow \{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow \{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix}$$

本构关系

对于$\sigma_{ij}=C_{ijkl}\varepsilon_{kl}$，应力和应变张量都是对称张量，即：

$$\sigma_{ij}=\sigma_{ji}=C_{ijkl}\varepsilon_{kl}=C_{jikl}\varepsilon_{kl}$$

$$C_{ijkl}=C_{jikl}$$

同理可证：

$$C_{ijlk}=C_{ijkl}$$

$$C_{ijkl}=C_{jikl}=C_{ijlk}=C_{jilk}$$

- 四阶张量C_{ijlk}中，下标i,j空间坐标系中有9种组合方式（$i,j\ =1,2,3$），只有6种组合独立。下标k,l也是如此。因此四阶张量C_{ijlk}最多有$6\times 6=36$个分量可能独立。
- 对四阶张量C_{ijlk} 采用Voigt记法，写成6×6的矩阵形式。

本构关系

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}$$

$$\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\}$$

$$ij \Rightarrow m$$
$$kl \Rightarrow n$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix}$$

$$\sigma_m = C_{mn}\varepsilon_n$$

当张量采用Voigt记法时，如何进行坐标变换？

本构关系

弹性体应变能：$W=\int_0^{\varepsilon_{ij}}\sigma_{ij}d\varepsilon_{ij}=\int_0^{\varepsilon_{ij}}dW$，与路径无关

$$dW=\sigma_{ij}d\varepsilon_{ij},\quad \sigma_{ij}=\frac{\partial W}{\partial\varepsilon_{ij}}$$

二次偏导可交换顺序 $C_{ijkl}=\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial\varepsilon_{kl}}=\frac{\partial}{\partial\varepsilon_{kl}}\left(\frac{\partial W}{\partial\varepsilon_{ij}}\right)$

$$=\frac{\partial}{\partial\varepsilon_{ij}}\left(\frac{\partial W}{\partial\varepsilon_{kl}}\right)=\frac{\partial\sigma_{kl}}{\partial\varepsilon_{ij}}=C_{klij}$$

本构关系

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{jilk}$$

$$C_{ijkl} = C_{klij} \Longrightarrow C_{mn} = C_{nm}$$

$$C_{ijkl} \longrightarrow [C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ & \text{sym.} & & & C_{55} & C_{56} \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix}$$

四阶张量 $\longrightarrow$ $\boxed{6 \times 6\text{矩阵(}\mathbf{21}\text{个独立变量)}}$

本构关系

四阶张量C_{ijkl}有$3^4 = 81$个分量

应力、应变张量的对称性

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{jilk}$$

四阶张量C_{ijkl}最多有$6 \times 6 = 36$个独立分量

弹性应变能　与路径无关

$$C_{ijkl} = C_{klij}$$

四阶张量C_{ijkl}的6×6矩阵对称，最多有**21**个独立分量

- 以上适用于线弹性本构关系，各向异性材料中的弹性常数有21个独立分量。
- 当晶体中存在其他对称元素时，弹性常数中的独立分量个数会进一步减少。

谢　谢！