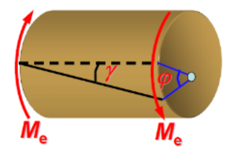
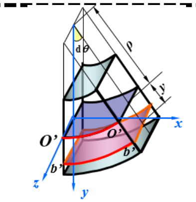
弹性力学概述

沈耀
上海交通大学材料学院
yaoshen@sjtu.edu.cn

上海交通大学 SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

材料力学回顾

材料力学应力与变形分析思路

	拉（压）	扭转	弯曲
变形观察——获知应变的分布方式	 $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$	 $\gamma = \rho\frac{d\varphi}{dx}$	 $\varepsilon = \frac{y}{\rho}$
胡克定律（本构关系）	$\sigma = E\varepsilon$	$\tau = G\gamma$	$\sigma = E\varepsilon;\ \tau = G\gamma$
确定应力的分布方式	$\sigma = E\frac{\Delta l}{l}$ 截面内均匀分布	$\tau_\rho = G\rho\frac{d\varphi}{dx}$ 同一圆周各点切应力相同，与半径垂直，矩形截面最大切应力在长边中点	$\sigma = E\frac{y}{\rho}$ 正应力与到中性轴距离y成正比，截面中点剪应力最大,上下边缘为0
应力的合力是内力（平衡方程）	$F_N = \sigma A$	$T = \int \rho\,\tau_\rho dA = GI_p\frac{d\varphi}{dx}$	$M = \int y\sigma\, d = \frac{EI_z}{\rho}$ $\frac{dM}{I_z}S_z^* = \tau b dx$
由内力计算应力的公式	$\sigma = \frac{F_N}{A}$	$\tau_\rho = \frac{T\rho}{I_p}$	$\sigma = \frac{My}{I_z};\tau = \frac{F_S S_z^*}{I_z b}$
局部变形计算公式（微分方程）	$\varepsilon(x) = \frac{\sigma(x)}{E} = \frac{F(x)}{EA}$	$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{T(x)}{GI_p}$	$\frac{1}{\rho(x)} = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI_z}$
总体变形公式	$\Delta l = \int\frac{\sigma(x)}{E}dx = \frac{F_N l}{EA}$	$\Delta\varphi = \int\frac{T}{GI_p}dx = \frac{Tl}{GI_p}$	$y(x) = \iint M(x)dxdx + C_1x + C_2$

学习目标

- 理解弹性力学的基本理论框架及重要定理
  - 18个基本方程
  - 晶体弹性本构张量的对称性
  - 解弹性力学问题的基本思路
- 熟悉弹性力学的经典应用例子
- 理解弹性问题的求解过程
- 会设计简单弹性问题的分析方案

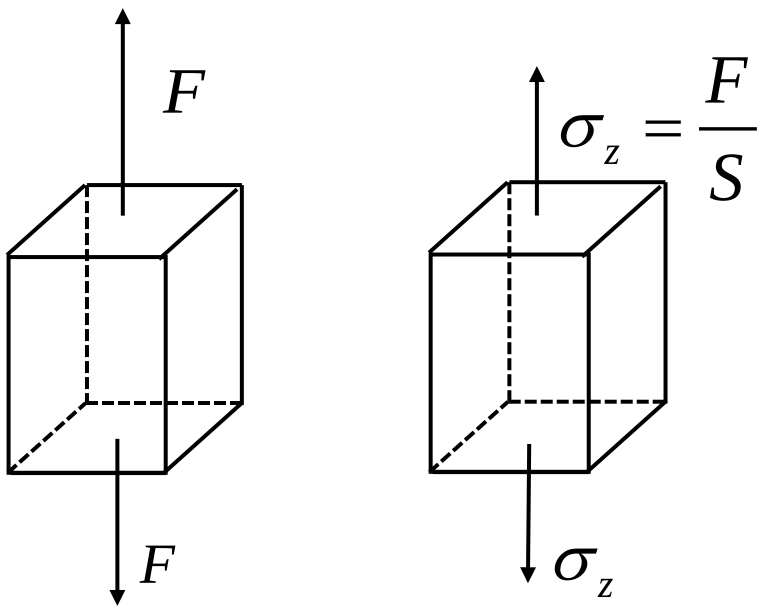
上海交通大学 SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

内容安排

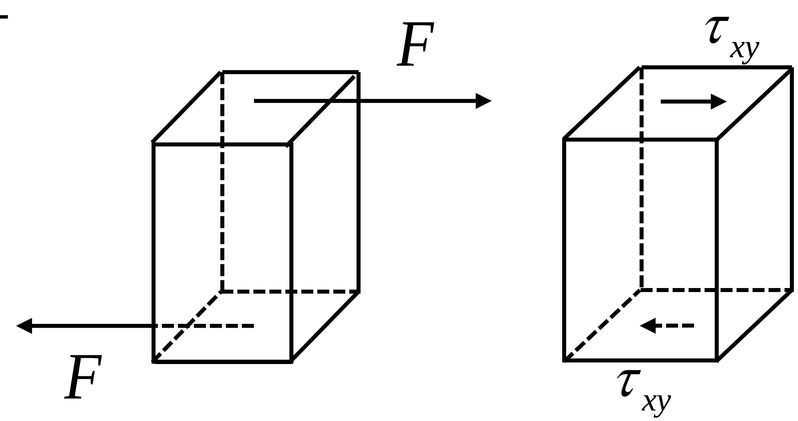
- 应力分析
  - 应力张量，应力矢量
  - 平衡方程
- 应变分析
  - 几何方程
  - 应变协调方程
- 平衡方程
- 本构关系
- 弹性问题求解思路及解的性质
- 重要补充内容
  - 坐标变换
  - 本构矩阵的对称性
- 几个弹性力学问题例子

应力

单向拉伸

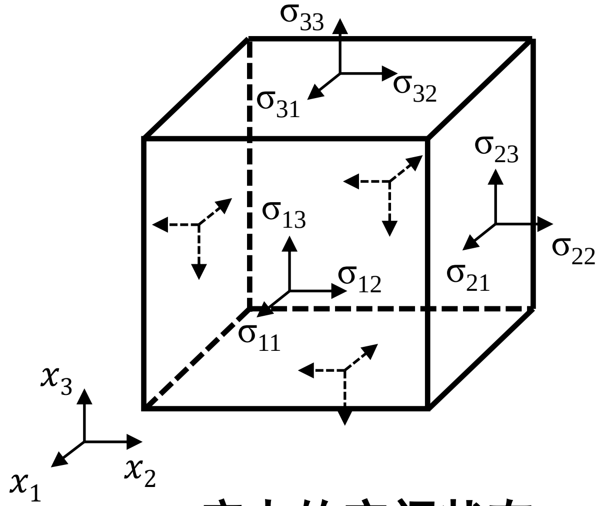


剪切

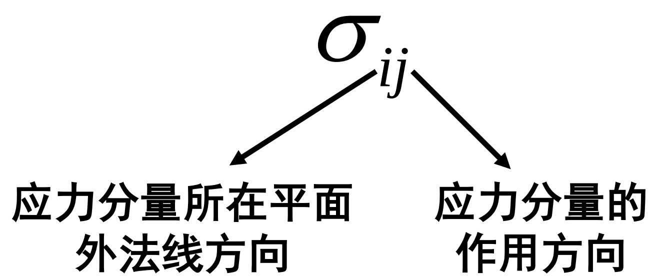


应力张量

- 应力的空间状态可以用平行六面体表示为：



应力的空间状态



- 对于一点应力的空间状态，可以用二阶张量$\boldsymbol{\sigma}$表示。其中σ_{ij}表示张量的一个分量：

$$\sigma = \sigma_{ij}\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = [\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

Tensor notation & Matrix notation

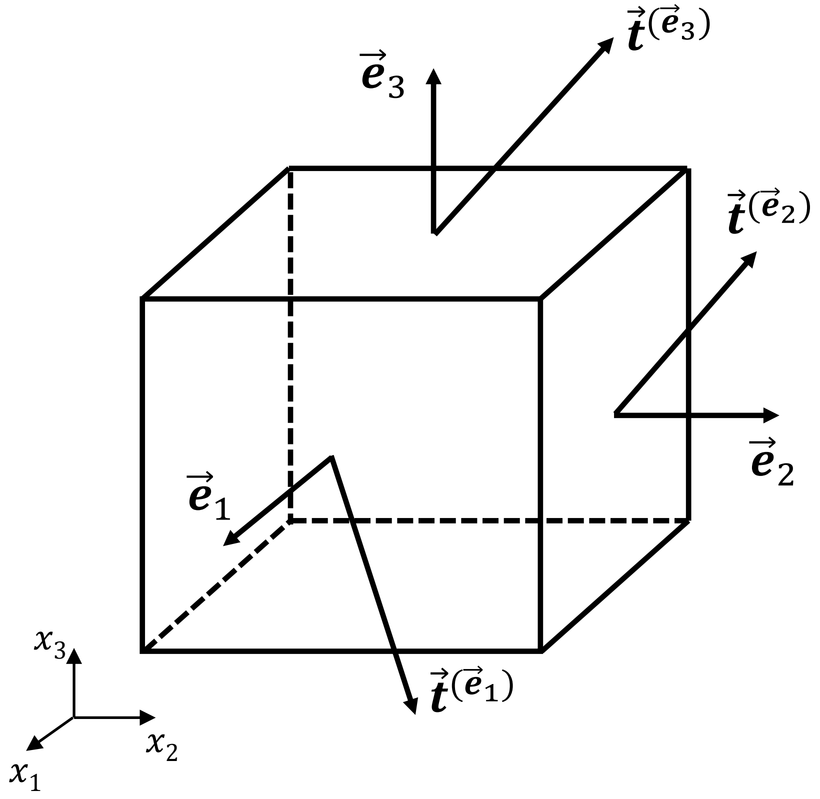
应力矢量

- 三个互相垂直平面上的应力矢量

$$\vec{t}^{(\vec{e}_1)} = \sigma_{11}\vec{e}_1 + \sigma_{12}\vec{e}_2 + \sigma_{13}\vec{e}_3$$

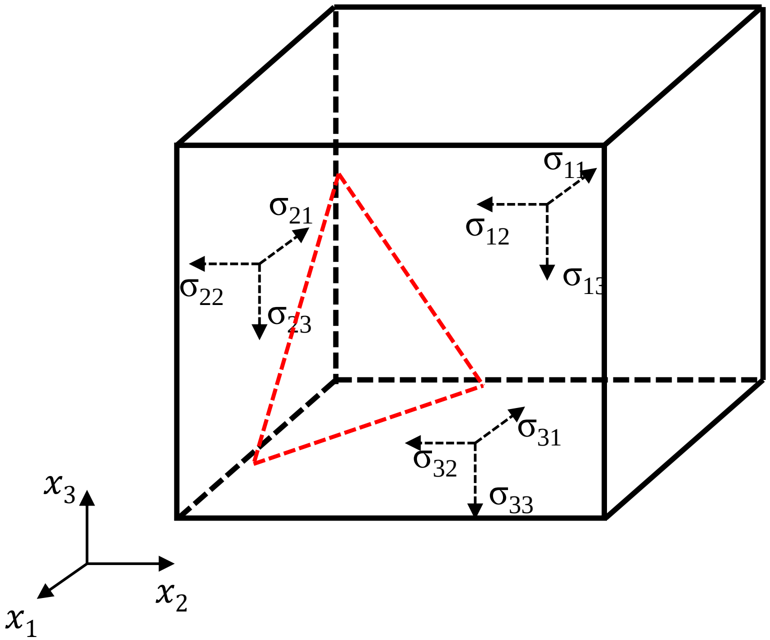
$$\vec{t}^{(\vec{e}_2)} = \sigma_{21}\vec{e}_1 + \sigma_{22}\vec{e}_2 + \sigma_{23}\vec{e}_3$$

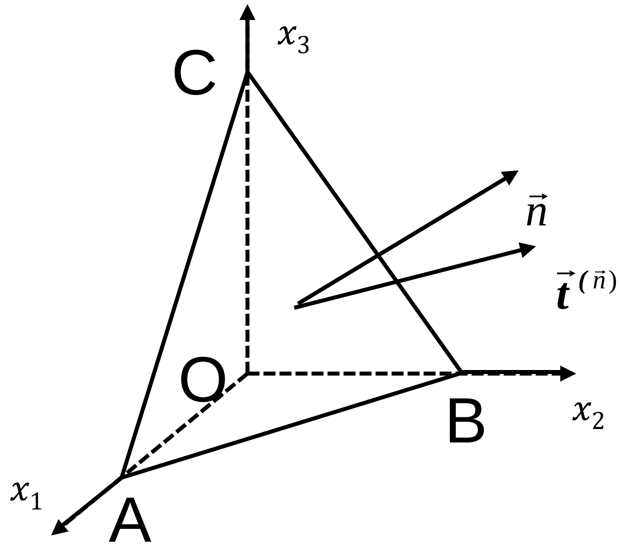
$$\vec{t}^{(\vec{e}_3)} = \sigma_{31}\vec{e}_1 + \sigma_{32}\vec{e}_2 + \sigma_{33}\vec{e}_3$$



斜截面上的应力矢量

- 在单元体中任意一个方向切一个截面，如何通过一点的应力状态求得该截面上的应力矢量？





应力张量与应力矢量的关系

对斜截面建立力平衡方程：

$$\vec{\boldsymbol{t}}^{(-\vec{e}_1)} \cdot S_{\Delta OCB} + \vec{\boldsymbol{t}}^{(-\vec{e}_2)} \cdot S_{\Delta OAC} + \vec{\boldsymbol{t}}^{(-\vec{e}_3)} \cdot S_{\Delta OAB} + \vec{\boldsymbol{t}}^{(\vec{n})} \cdot S_{\Delta ABC} = 0$$

各个面存在几何关系：

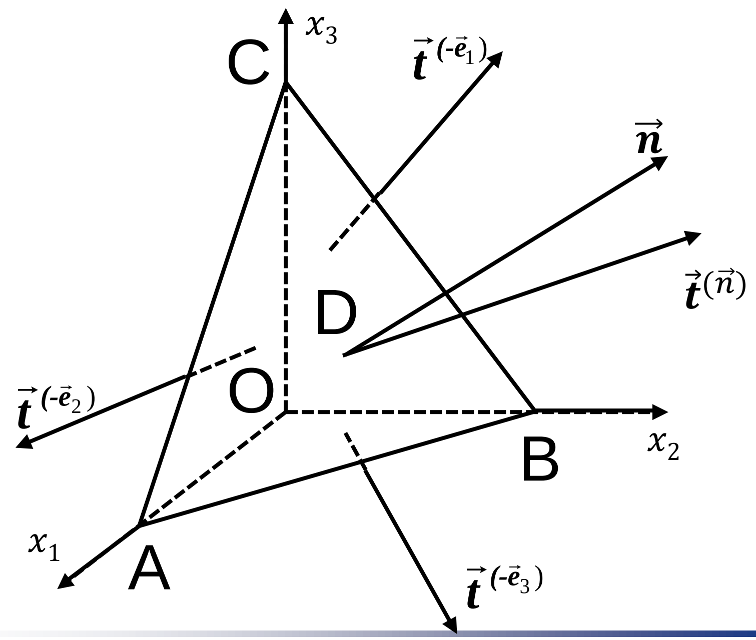
$$\frac{S_{\Delta OCB}}{S_{\Delta ACB}} = \frac{h}{OA} = n_1 \qquad \frac{S_{\Delta OAC}}{S_{\Delta ACB}} = \frac{h}{OB} = n_2 \qquad \frac{S_{\Delta OAB}}{S_{\Delta ACB}} = \frac{h}{OC} = n_3$$

$$h = OD$$

代入可得：

$$\vec{\boldsymbol{t}}^{(\vec{n})} = \vec{\boldsymbol{t}}^{(\vec{e}_1)} \cdot n_1 + \vec{\boldsymbol{t}}^{(\vec{e}_2)} \cdot n_2 + \vec{\boldsymbol{t}}^{(\vec{e}_3)} \cdot n_3$$

$$\boxed{\vec{\boldsymbol{t}}^{(\vec{n})} = \vec{\boldsymbol{n}} \cdot \begin{bmatrix} \vec{\boldsymbol{t}}^{(e_1)} \\ \vec{\boldsymbol{t}}^{(e_2)} \\ \vec{\boldsymbol{t}}^{(e_3)} \end{bmatrix} = \vec{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma} \qquad t_i^{(\vec{n})} = \sigma_{ji} \cdot n_j}$$



张量的下标规定

$$t_i = \sigma_{ji} \cdot n_j$$

- 张量的下标分为自由指标和哑指标两类，在空间坐标系中指标值可以取1，2，3；
- **自由指标：** 在一项中仅出现一次的下标称为自由指标（上式中为下标i），也就是说取该指标范围内任何值，关系式始终成立。上式实际上表示了关于t_1, t_2, t_3的3个式子；
- **哑指标：** 在一项中重复出现的下标称为哑指标（上式中为下标j），表示该项要在该指标的取值范围内遍历求和。同一项中，一个哑指标只能重复一次；
- 爱因斯坦求和约定：通过哑指标而省略求和号的写法，如下式所示：

$$t_i = \sigma_{ji} \cdot n_j = \sum_{j=1}^{3} \sigma_{ji} \cdot n_j = \sigma_{1i} \cdot n_1 + \sigma_{2i} \cdot n_2 + \sigma_{3i} \cdot n_3$$

$$\sigma_{ii} = ?$$

张量的物理意义

$$t_i = \sigma_{ji} \cdot n_j$$

$$t_i \xleftrightarrow{\sigma_{ji}} n_j$$

二阶张量表示了两个一阶张量之间的线性关系

力平衡微分方程

x_1方向力平衡:

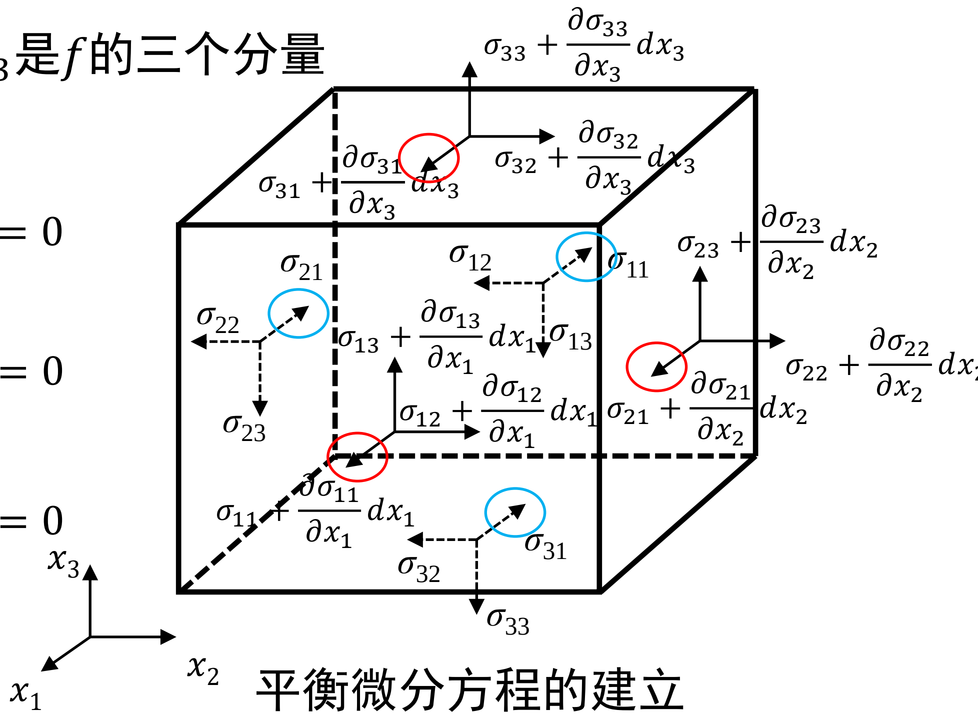
$$\left(\sigma_{11}+\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1}dx_1\right)dx_2dx_3+\left(\sigma_{21}+\frac{\partial\sigma_{21}}{\partial x_2}dx_2\right)dx_1dx_3+\left(\sigma_{31}+\frac{\partial\sigma_{31}}{\partial x_3}dx_3\right)dx_1dx_2$$
$$+f_1dx_1dx_2dx_3=\sigma_{11}dx_2dx_3+\sigma_{21}dx_1dx_3+\sigma_{31}dx_1dx_2$$

f为单元体中的均布体力，f_1、f_2和f_3是f的三个分量

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1}+\dfrac{\partial\sigma_{21}}{\partial x_2}+\dfrac{\partial\sigma_{31}}{\partial x_3}+f_1=0\\[2ex]\dfrac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_1}+\dfrac{\partial\sigma_{22}}{\partial x_2}+\dfrac{\partial\sigma_{32}}{\partial x_3}+f_2=0\\[2ex]\dfrac{\partial\sigma_{13}}{\partial x_1}+\dfrac{\partial\sigma_{23}}{\partial x_2}+\dfrac{\partial\sigma_{33}}{\partial x_3}+f_3=0\end{cases}$$

x_2方向力平衡:

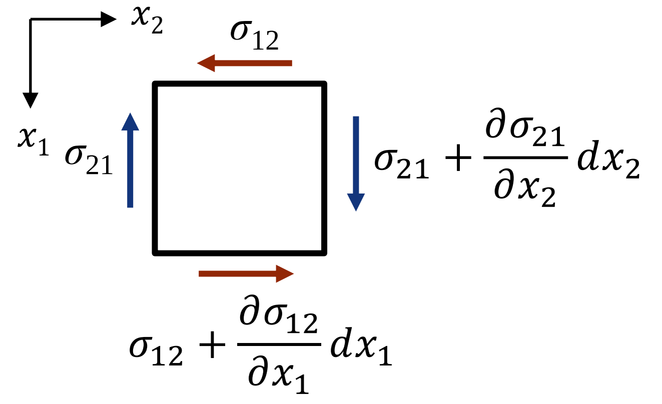
x_3方向力平衡:



平衡微分方程的建立

$$\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_i}+f_j=0 \longrightarrow$$ 平衡微分方程!

力矩平衡条件



形心x_3轴力矩平衡:

$$\left(\sigma_{12}+\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_1}dx_1\right)dx_2dx_3\frac{dx_1}{2}+\sigma_{12}dx_2dx_3\frac{dx_1}{2}$$
$$=\left(\sigma_{21}+\frac{\partial\sigma_{21}}{\partial x_2}dx_2\right)dx_1dx_3\frac{dx_2}{2}+\sigma_{21}dx_1dx_3\frac{dx_2}{2}$$

$\Rightarrow$ $\sigma_{12}=\sigma_{21}$

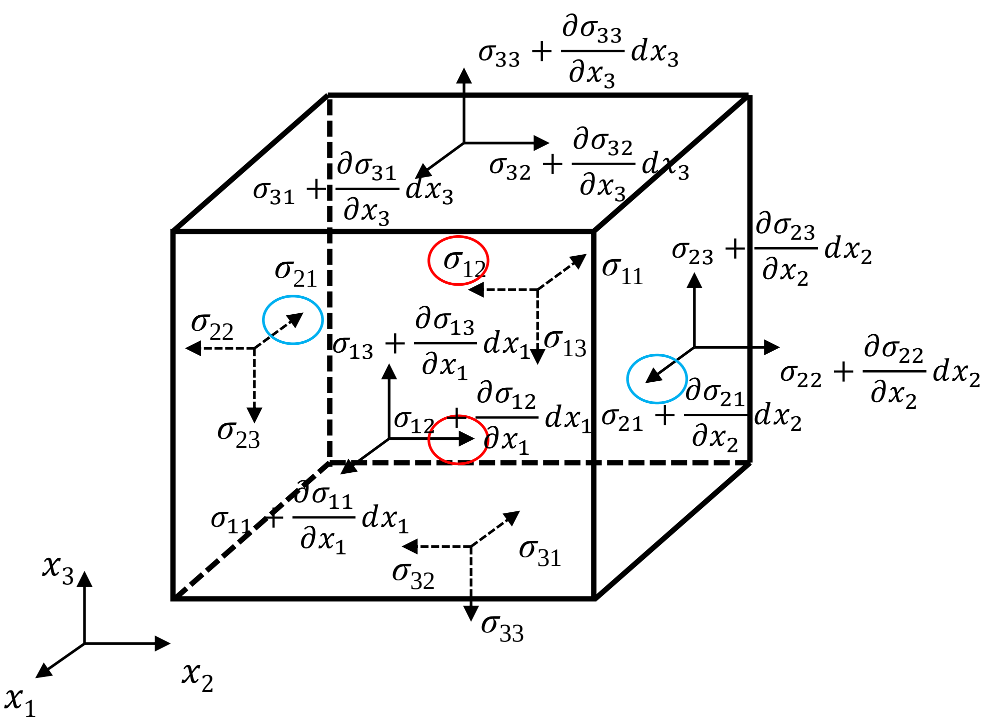
形心x_1, x_2轴力矩平衡: $\begin{cases}\sigma_{13}=\sigma_{31}\\ \sigma_{23}=\sigma_{32}\end{cases}$

$$\sigma_{ij}=\sigma_{ji}$$

$\Downarrow$

切应力互等定理

（说明应力张量是对称张量）

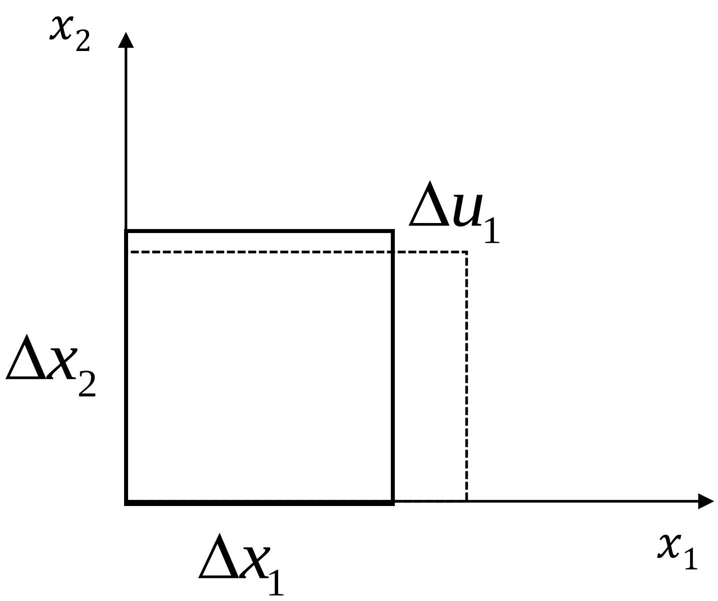


正应变

$$\varepsilon_{11} = \frac{\Delta u_1}{\Delta x_1} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{\Delta u_2}{\Delta x_2} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{\Delta u_3}{\Delta x_3} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3}$$

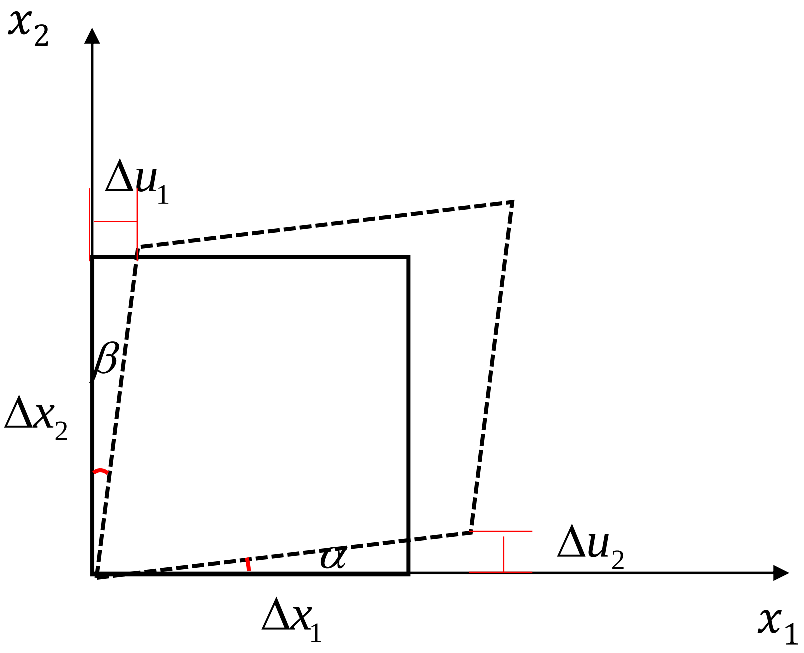


切应变

$$\gamma_{12} = \gamma_{21} = \alpha + \beta = \frac{\Delta u_1}{\Delta x_2} + \frac{\Delta u_2}{\Delta x_1} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}$$

$$\gamma_{13} = \gamma_{31} = \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}$$

$$\gamma_{23} = \gamma_{32} = \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}$$



应变张量

令 $\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i})$

$$\varepsilon_{ij}=\begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2}(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}) & \frac{1}{2}(\frac{\partial u_1}{\partial x_3}+\frac{\partial u_3}{\partial x_1}) \\ \frac{1}{2}(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}+\frac{\partial u_1}{\partial x_2}) & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{1}{2}(\frac{\partial u_2}{\partial x_3}+\frac{\partial u_3}{\partial x_2}) \\ \frac{1}{2}(\frac{\partial u_3}{\partial x_1}+\frac{\partial u_1}{x_3}) & \frac{1}{2}(\frac{\partial u_3}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{x_3}) & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \frac{1}{2}\gamma_{12} & \frac{1}{2}\gamma_{13} \\ \frac{1}{2}\gamma_{21} & \varepsilon_{22} & \frac{1}{2}\gamma_{23} \\ \frac{1}{2}\gamma_{31} & \frac{1}{2}\gamma_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}$$

几何方程!

变形协调方程

几何方程 $\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$

6个量 3个量

说明6个应变分量不独立！
应变分量之间存在一定约束

谢 谢！