1. 各向同性弹性介质中常用的弹性常数有三个，但只有两个是独立的，三者之间存在约束方程$G=\frac{E}{2(1+\nu)}$，请证明。

答：本题可简化为 xy 平面内的二维问题，图 1 是在两个坐标系下的变形示意图。

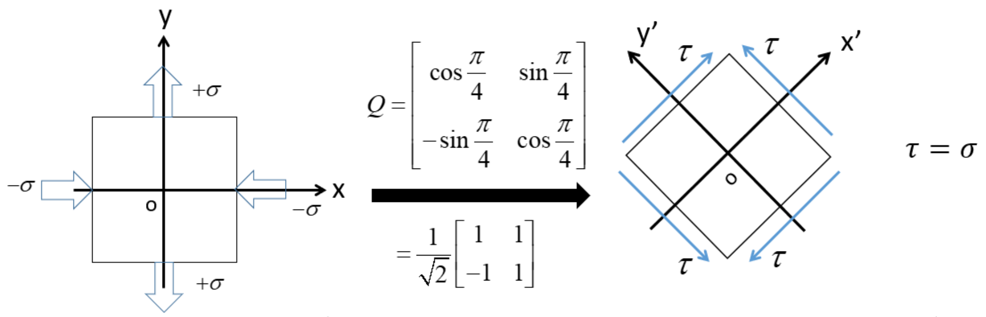


图1 a)　xyz坐标系下的应力图　　　　图1 b)　x′ y′ z′ 坐标系下的应力图

应力状态：$s=\begin{bmatrix}-\sigma & 0\\ 0 & \sigma\end{bmatrix}$　　　　$s'=QsQ'=\begin{bmatrix}0 & \sigma\\ \sigma & 0\end{bmatrix}$

在（a）坐标系下，应变状态为$\varepsilon=\begin{bmatrix}-\frac{\sigma}{E}-\nu\frac{\sigma}{E} & 0\\ 0 & \frac{\sigma}{E}+\nu\frac{\sigma}{E}\end{bmatrix}$

在（b）坐标系下，应变状态为$\varepsilon'=\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{2}\frac{\sigma}{G}\\ \frac{1}{2}\frac{\sigma}{G} & 0\end{bmatrix}$

在这两个坐标系下的变形是等价的，所以两种应变状态也应满足坐标转换关系，即：

$$\varepsilon'=Q\varepsilon Q'$$

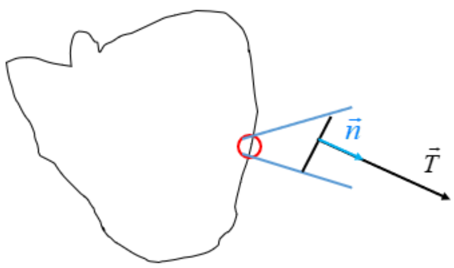
$$\to\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{2}\frac{\sigma}{G}\\ \frac{1}{2}\frac{\sigma}{G} & 0\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-\frac{\sigma}{E}-\nu\frac{\sigma}{E} & 0\\ 0 & \frac{\sigma}{E}+\nu\frac{\sigma}{E}\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$\to\frac{1}{2}\frac{\sigma}{G}=\frac{(1+\nu)\sigma}{E}$$

$$\to G=\frac{E}{2(1+\nu)}$$

2. 一任意形状弹性体处于周围气体压强为 P 的环境中，忽略重力，请推导出或猜出弹性体内各处的应力场并利用唯一性原理验证其为正解。并请讨论弹性体的弹性性质如弹性模量的空间均匀性或各向异性是否影响所求结果。

答：考虑表面任意一个小面



边界上的应力矢量可以写成$\vec{T} = P\vec{n}$（P 为标量）

边界条件可以写作$\vec{T} = \sigma \cdot \vec{n}$

因此$\sigma \cdot \vec{n} = P\vec{n} = \begin{pmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & P \end{pmatrix}\vec{n}$

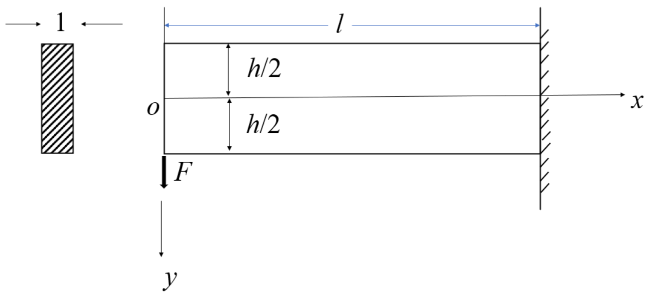
在边界上应力状态若为$\sigma = \begin{pmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & P \end{pmatrix}$则满足边界条件。

若任意点满足$\sigma = \begin{pmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & P \end{pmatrix}$则满足平衡条件。

根据唯一性原理，这个解就是该问题的正解。

弹性体的弹性性质如弹性模量的空间均匀性或各向异性不影响所求结果。因为平衡条件方程为力平衡或者力矩平衡，不涉及材料属性。可以考虑一个平衡状态下的非均匀体，当其边界上的某点应力状态存在剪应力，则在剪应力方向上必定会继续发生变形，不满足平衡条件。若其主应力大小不为 P，则会继续发生压缩或者膨胀，也不满足平衡条件。因此上述解不受到材料属性的影响。

3. 设有矩形截面的悬臂梁，在自由端受到集中载荷 F，如下图所示，体力可以不计。(a) 请使用材料力学的方法计算弯曲应力σ_x和切应力τ_{xy}随坐标变化的表达式（假设挤压应力$\sigma_y = 0$），并计算梁的挠度。(b) 请使用弹性力学的方法计算梁的位移分量，并与 (a) 的计算结果进行比较。



答：(a) 矩形悬臂梁发生弯曲变形时，任意横截面上的弯矩方程为$M(x) = -Fx$，横截面对 z 轴（中性轴）的惯性矩为$I_z = \frac{h^3}{12}$，弯应力$\sigma_x = \frac{M(x)y}{I_z} = -\frac{12F}{h^3}xy$；该截面上的剪力为$F_s(x) = -F$，剪应力$\tau_{xy} = \frac{3}{2}\frac{F_s(x)}{h}\left(1 - \frac{4y^2}{h^2}\right) = \frac{6F}{h^3}\left(y^2 - \frac{h^2}{4}\right)$。

（b）取梁上位于 x 处的横截面进行分析，该截面上的弯矩为$M(x) = -Fx$，因此可得挠曲线微分方程为：

$$EIy'' = Fx$$

对其进行一次积分可得：

$$EIy' = \frac{1}{2}Fx^2 + A$$

再次积分可得：

$$EIy=\frac{1}{6}Fx^3+Ax+B$$

其中 A、B 均为待定常数。

由边界条件可知，在固定端即 x=l 处，$y'=0, y=0$，因此可知$A=-\frac{1}{2}Fl^2$，$B=\frac{1}{3}Fl^3$

求得梁的挠度为：

$$y=\frac{1}{EI}(\frac{1}{6}Fx^3-\frac{1}{2}Fl^2x+\frac{1}{3}Fl^3)$$

（c）取梁上位于 x 处的横截面进行分析，已知在该截面上任意一点的应力状态为：

$$\sigma_x=-\frac{Fxy}{I},\sigma_y=0,\tau_{xy}=\frac{F}{I}\left(\frac{y^2}{2}-\frac{h^2}{8}\right)$$

由本构关系有：

$$\varepsilon_x=\frac{1}{E}(\sigma_x-\nu\sigma_y)=-\frac{Fxy}{EI},\varepsilon_y=\frac{1}{E}(\sigma_y-\nu\sigma_x)=\frac{\nu Fxy}{EI},\gamma_{xy}=\frac{F}{GI}\left(\frac{y^2}{2}-\frac{h^2}{8}\right)$$

对$\varepsilon_x,\varepsilon_y$分别求积分可以得到：

$$u_x=-\frac{Fx^2y}{2EI}+f(y)+A$$

$$u_y=\frac{\nu Fxy^2}{2EI}+f(x)+B$$

其中A、B为待定常数，$f(x)$、$f(y)$为分别仅包含关于x、y的函数且不带有常数项。

代入协调方程$\frac{\partial u_x}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial x}=\gamma_{xy}$可以得到：

$$-\frac{Fx^2}{2EI}+\frac{\partial f(y)}{\partial y}+\frac{\nu Fy^2}{2EI}+\frac{\partial f(x)}{\partial x}=\frac{F}{GI}\left(\frac{y^2}{2}-\frac{h^2}{8}\right)$$

对上式进行整理：

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x}-\frac{Fx^2}{2EI}+\frac{\nu Fy^2}{2EI}+\frac{\partial f(y)}{\partial y}-\frac{Fy^2}{2GI}+\frac{Fh^2}{8GI}=0$$

由于$f(x)$、$f(y)$为分别仅包含关于x、y的函数且不带有常数项，因此可以得到：

$$f(x)=\frac{Fx^3}{6EI}+Cx$$

$$f(y)=\frac{Fy^3}{6GI}-\frac{\nu Fy^3}{6EI}-\left(\frac{Fh^2}{8GI}+C\right)y$$

其中 C 为待定常数。

由此得到位移表达式为：

$$u_x=-\frac{Fx^2y}{2EI}+\frac{Fy^3}{6GI}-\frac{\nu Fy^3}{6EI}-\left(\frac{Fh^2}{8GI}+C\right)y+A$$

$$u_y=\frac{\nu Fxy^2}{2EI}+\frac{Fx^3}{6EI}+Cx+B$$

现在考虑边界条件，在固定端 x=l，y=0 处有：

$$\frac{\partial u_x}{\partial y}=0,\ u_x=0,\ u_y=0$$

因此由三个边界条件可以解出三个常数分别为：

$$A = 0$$

$$B = \frac{Fl^3}{3EI} + \frac{Fh^2 l}{8GI}$$

$$C = -\frac{Fh^2}{8GI} - \frac{Fl^2}{2EI}$$

带回位移表达式可以得到：

$$u_x = \frac{FL^2 y}{2EI}\left(1 - \frac{x^2}{L^2}\right) + \frac{(2+\nu)Fy^3}{6EI}$$

$$u_y = \frac{FL^3}{6EI}\left(2 - 3\frac{x}{L} + \frac{x^3}{L^3}\right) + \frac{Fh^2 L}{8GI}\left(1 - \frac{x}{L}\right) + \frac{\nu Fxy^2}{2EI}$$

4. 请利用各向异性弹性体的广义胡克定律进行分析：(a）在什么条件下，弹性体中的主应力方向和主应变方向重合。(b）若该各向异性弹性体的材料性能对称于 Oxy 平面，则应满足什么条件。(c）若该弹性体为各向同性，又应满足什么条件。

答：(a）各向异性弹性体的广义胡克定律为：

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = c_{11}\varepsilon_{xx} + c_{12}\varepsilon_{yy} + c_{13}\varepsilon_{zz} + c_{14}\gamma_{xy} + c_{15}\gamma_{yz} + c_{16}\gamma_{xz} \\ \sigma_{yy} = c_{21}\varepsilon_{xx} + c_{22}\varepsilon_{yy} + c_{23}\varepsilon_{zz} + c_{24}\gamma_{xy} + c_{25}\gamma_{yz} + c_{26}\gamma_{xz} \\ \sigma_{zz} = c_{31}\varepsilon_{xx} + c_{32}\varepsilon_{yy} + c_{33}\varepsilon_{zz} + c_{34}\gamma_{xy} + c_{35}\gamma_{yz} + c_{36}\gamma_{xz} \\ \tau_{xy} = c_{41}\varepsilon_{xx} + c_{42}\varepsilon_{yy} + c_{43}\varepsilon_{zz} + c_{44}\gamma_{xy} + c_{45}\gamma_{yz} + c_{46}\gamma_{xz} \\ \tau_{yz} = c_{51}\varepsilon_{xx} + c_{52}\varepsilon_{yy} + c_{53}\varepsilon_{zz} + c_{54}\gamma_{xy} + c_{55}\gamma_{yz} + c_{56}\gamma_{xz} \\ \tau_{zx} = c_{61}\varepsilon_{xx} + c_{62}\varepsilon_{yy} + c_{63}\varepsilon_{zz} + c_{64}\gamma_{xy} + c_{65}\gamma_{yz} + c_{66}\gamma_{xz} \end{cases}$$

对主应变方向进行考察：

当$\gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{xz} = 0$时，三个相互垂直的应变方向为主应变方向。

在主应变方向上，由胡克定律知剪应力分量为

$$\tau_{xy} = c_{41}\varepsilon_{xx} + c_{42}\varepsilon_{yy} + c_{43}\varepsilon_{zz}$$

$$\tau_{yz} = c_{51}\varepsilon_{xx} + c_{52}\varepsilon_{yy} + c_{53}\varepsilon_{zz}$$

$$\tau_{zx} = c_{61}\varepsilon_{xx} + c_{62}\varepsilon_{yy} + c_{63}\varepsilon_{zz}$$

因为主应变方向同时为主应力方向，因此$\tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$也必须满足，即：

$$c_{41}\varepsilon_{xx} + c_{42}\varepsilon_{yy} + c_{43}\varepsilon_{zz} = 0$$

$$c_{51}\varepsilon_{xx} + c_{52}\varepsilon_{yy} + c_{53}\varepsilon_{zz} = 0$$

$$c_{61}\varepsilon_{xx} + c_{62}\varepsilon_{yy} + c_{63}\varepsilon_{zz} = 0$$

式中$\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}$应具有非零解，因此条件为$\begin{vmatrix} c_{41} & c_{42} & c_{43} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} \end{vmatrix} = 0$

(b）若对称于 Oxy 平面则$c_{15} = c_{16} = c_{25} = c_{26} = c_{35} = c_{36} = c_{45} = c_{46} = 0$且$c_{ij} = c_{ji}$

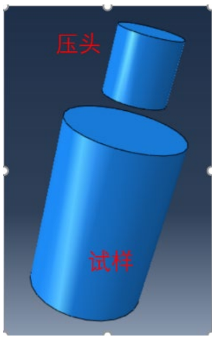
此时$\tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$，因此只需要满足

$$\tau_{xy} = c_{41}\varepsilon_{xx} + c_{42}\varepsilon_{yy} + c_{43}\varepsilon_{zz} = 0$$

(c）若为各向同性，不需要任何条件，主应力方向和主应变方向总是重合。

5. 问题描述：在一单向局部压缩试验中，圆柱形试样高为 30mm，直径为 20mm，试样的上下底面润滑良好。圆柱形压头直径为 10mm，可以视为刚体。压头与试样的对称轴重合且两者初始距离为 5mm。试验中压头向下移动距离为 7mm。已知试样的弹性模量 E=210000N/mm^2，泊松比 μ=0.3。

现使用有限元软件对以上单向局部压缩试验过程进行模拟，同学们可以使用 Abaqus 或 Ansys 或其它有限元软件进行模拟。Abaqus 模拟操作可以按如下过程进行：



模型示意图　　　　　　轴对称模型

(1) 启动 ABAQUS/CAE，点击 Create Model Database。进入 Part 功能模块，点击，在 Name 后面输入 Specimen，将 Modeling Space 设为 Axisymmetric，保持默认的参数 Type：Deformable；Base Feature：Shell，然后点击 Continue。点击左侧工具区中的绘制顶点坐标为（0,30）和（10,0）的矩形。在视图区中连续点击鼠标中键完成操作。

(2) 再次点击，在 Name 后面输入 Head，参数 Modeling Space 设为 Axisymmetric，参数 Type 改为 Analytical rigid，点击 Continue。点击左侧工具栏中的绘制一条顶点为（0,35）和（5,35）的直线来代表压头的底面。在视图区中连续点击鼠标中键完成操作。

(3) 在主菜单中选择 Tools→Reference Point，点击压头中点。参考点在视图区中显示为一个黄色的叉子，旁边标以 RP。

(4) 进入 Property 功能模块，点击，点击 Mechanical→Elasticity→Elastic 设置 Young’s Modulus 为 210000，Poisson’s Ratio 为 0.3。点击 OK

(5) 点击，点击 Continue，然后点击 OK。

(6) 将视图区上方 Part：更换为 Specimen，点击，选择 Specimen 部件，点击 OK。

(7) 进入 Assembly 功能模块，点击，在弹出的 Creat Instance 对话框中选中全部部件，然后点击 OK。

(8) 进入 Mesh 功能模块，在窗口顶部的环境栏中将 Object 选项设为 Part：Specimen。点击，把 Approximate global size 设为 1.5。点击，选择 Incompatible modes，即单元类型为 CAX4I（4 节点四边形双线性非协调轴对称单元）。点击得到网格。

(9) 进入 Step 功能模块，点击，在 Name 后边输入 InContact，点击 Continue，在弹出的 Edit step 对话框里把 Nlgeom 设为 On，点击 OK。再次点击，在 Name 后边输入 Press，在 Edit step 对话框中点击 Incrementation 标签，把 Initial 和

Maximum 都改为 0.06667，点击 OK。

（10） 进入 Interaction 功能模块，在主菜单中选择 Tools→Surface→Manager，点击 Creat，在 Name 后面输入 Surf-Specimen，点击 Continue。点击试样的顶面，在视图区中点击鼠标中键确认。重复上述操作定义压头与试样相接触的面为 Surf-Head。由于压头是解析刚体部件，窗口底部会提示根据视图区中的颜色选择刚体的外侧。

（11） 点击，点击 Continue，再点击 OK。

（12） 在主菜单中选择 Interaction→Manager，点击 Create，设置 Step 为 initial，然后点击 Continue。选择 Surf-Head 作为主面，Surf-Specimen 作为从面，在弹出的 Edit Interaction 对话框中，保持各项默认参数不变，点击 OK。

（13） 进入 Load 模块，在主菜单选择 Tools→Set→Manager，点击 Creat，依次定义以下集合：①集合 Set-Y-Fix：试样的底边。②集合 Set-X-Fix：试样位于对称轴上的边。③集合 Set-Head-Ref：压头的参考点。

（14） 在主菜单选择 BC→Manager，点击 Creat，在 Name 后边输入 BC-Fix-Y，将 Step 设为 Initial，将 Types for Selected Step 设为 Displacement/Rotation，点击 Continue。选中集合 Set-Y-Fix，点击 Continue，选中轴向位移 U2，点击 OK。重复上述操作，创建 BC-Fix-X 边界条件，选中集合 Set-X-Fix，约束径向位移 U1

（15） 在 Boundary Condition Manager 对话框中点击 Creat，在 Name 后输入 BC-Move，将 Step 设为 InContact，将 Types for Selected Step 设为 Displacement/Rotation，点击 Continue。选中集合 Set-Head-Ref，点击 Continue，选中 U1,U2 和 UR3，并将 U2 的位移值改为-5.001，点击 OK。

（16） 在 Boundary Condition Manager 对话框中，点击边界条件 BC-Move 在第二个分析步 Press 下边的 Propagated，点击 Edit 按钮，把 U2 的位移改为-7，点击 OK。

（17） 进入 Job 功能模块，点击创建名为 Specimen 的分析作业，然后保持默认参数不变，点击 OK，点击窗口顶部工具栏中的保存模型，点击右侧的，点击 Submit 提交分析。

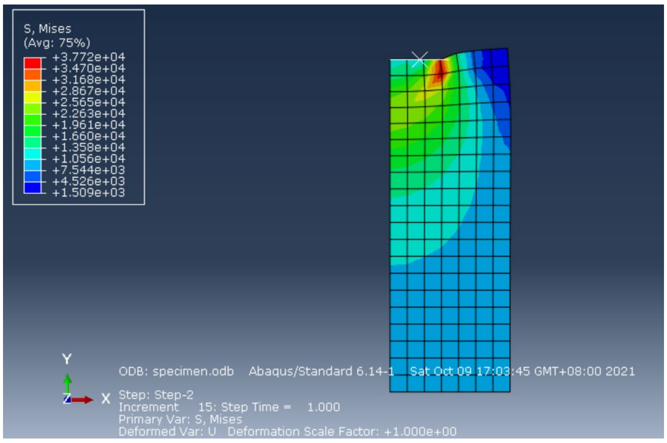
（18） 分析完成后，点击 Results，进入 Visualization 功能模块。长按后选择，可以看到变形后的 Mises 应力云图。

（a） 请使用 ABAQUS cae 按照以上操作步骤进行操作并提交计算结果中 Mises 应力云图的截图。

（b） 请结合以上操作，对 ABAQUS cae 操作界面的使用步骤进行归纳总结，并说明每一步的作用。

Note：如果同学们自己课题组没有会安装这些软件的同学帮着安装软件而且自己以后不做模拟的话，这道题也可以不做。

答：计算结果如下



总结：ABAQUS cae 操作过程主要有以下几个步骤：

① 根据实际问题，在 Part 界面通过拉伸、旋转等方式建立合适模型。如果模型过于复杂，可以分块建立多个模型并在 Assemble 界面通过坐标定位等方法对模型进行组装。

② 在 Property 界面对模型赋予材料属性，根据需要输入弹性模量、泊松比、热传导系数等参数。

③ 在 Step 界面对模拟过程进行分步，并设置每一步的时间、步长等参数。

④ 在 Interaction 界面对模型与模型之间的接触进行设置，例如绑定、镶嵌等。同时还可以进行摩擦系数、刚性接触、有限滑移等特殊设置。

⑤ 在 Load 界面对拟解决问题的边界条件进行设置，可以对模型进行力载荷、位移载荷、热通量等输入参数的设置

⑥ 在 Mesh 界面对模型进行网格划分，对于二维简单模型可以使用四边形（三维情况下六面体）进行划分，对于复杂模型可以使用三角形（三位情况下四面体）进行划分。同时还可以对局部关注区域进行网格加密等操作。对于复杂问题，选择合适的网格形式和网格数量会对计算结果产生明显影响。

⑦ 在 Job 界面提交作业并在 Visualization 界面查看计算结果，可以根据拟解决问题调取应力、应变、温度等数据。