弹性力学概述

沈耀

上海交通大学材料学院

2021年10月13日

本构关系

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}$$

$$\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ & \text{sym.} & & & C_{55} & C_{56} \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix}$$

适用条件：线弹性

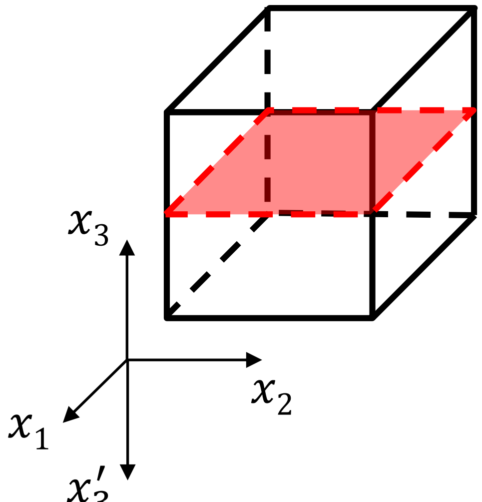
弹性对称性

弹性对称面：是指过物体中的每一个点都有这样一种平面，和该平面对称的两个方向上弹性性质相同。垂直于弹性对称面的轴称为弹性主轴。

弹性性质相同：当物体旋转到弹性性质相同的另一方向上时，弹性常数不变。

令x_3为弹性主轴，x_1x_2所在平面为弹性对称面。

将x_3轴倒置，考察应变张量中与3有关的分量。其中，关于对称面反对称的分量互为相反数。



$$\varepsilon'_{13} = \frac{1}{2}\left(-\frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) = -\varepsilon_{13}$$

$$\varepsilon'_{23} = \frac{1}{2}\left(-\frac{\partial u_2}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right) = -\varepsilon_{23}$$

$$\tau_{31} = -\tau'_{31} \qquad \tau_{32} = -\tau'_{32}$$

弹性对称性——坐标系变换推导

$$\varepsilon'_{13} = -\varepsilon_{13} \qquad \tau_{31} = -\tau'_{31}$$

$$\varepsilon'_{23} = -\varepsilon_{23} \qquad \tau_{32} = -\tau'_{32}$$

对于对称面以上的部分：

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ & \text{sym.} & & & C_{55} & C_{56} \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix}$$

$$\sigma_{11} = C_{11}\varepsilon_{11} + C_{12}\varepsilon_{22} + C_{13}\varepsilon_{33} \underline{+ 2C_{14}\varepsilon_{23} + 2C_{15}\varepsilon_{13}} + 2C_{16}\varepsilon_{12}$$

对于对称面以下的部分：

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ -\tau_{23} \\ -\tau_{13} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ & \text{sym.} & & & C_{55} & C_{56} \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ -2\varepsilon_{23} \\ -2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix}$$

$$\sigma_{11} = C_{11}\varepsilon_{11} + C_{12}\varepsilon_{22} + C_{13}\varepsilon_{33} \underline{- 2C_{14}\varepsilon_{23} - 2C_{15}\varepsilon_{13}} + 2C_{16}\varepsilon_{12}$$

弹性对称性——应变能推导

$$W=\frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}C_{11}\varepsilon_{11}^2 &+ C_{12}\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + C_{13}\varepsilon_{11}\varepsilon_{33} + C_{14}\varepsilon_{11}\varepsilon_{23} + C_{15}\varepsilon_{11}\varepsilon_{13} + C_{16}\varepsilon_{11}\varepsilon_{12}\\
&+\frac{1}{2}C_{22}\varepsilon_{22}^2 + C_{23}\varepsilon_{22}\varepsilon_{33} + C_{24}\varepsilon_{22}\varepsilon_{23} + C_{25}\varepsilon_{22}\varepsilon_{13} + C_{26}\varepsilon_{22}\varepsilon_{12}\\
&+\frac{1}{2}C_{33}\varepsilon_{33}^2 + C_{34}\varepsilon_{33}\varepsilon_{23} + C_{35}\varepsilon_{33}\varepsilon_{13} + C_{36}\varepsilon_{33}\varepsilon_{12}\\
&+\frac{1}{2}C_{44}\varepsilon_{23}^2 + C_{45}\varepsilon_{23}\varepsilon_{13} + C_{46}\varepsilon_{23}\varepsilon_{12}\\
&+\frac{1}{2}C_{55}\varepsilon_{13}^2 + C_{56}\varepsilon_{13}\varepsilon_{12}\\
&+\frac{1}{2}C_{66}\varepsilon_{12}^2
\end{aligned}$$

弹性对称性

x_3倒置后，应变能W值不变，故ε_{23}, ε_{13}之前的C系数为零。21个弹性常数分量缩减到13个。

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ & & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & 0 \\ & \text{sym.} & & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix}$$

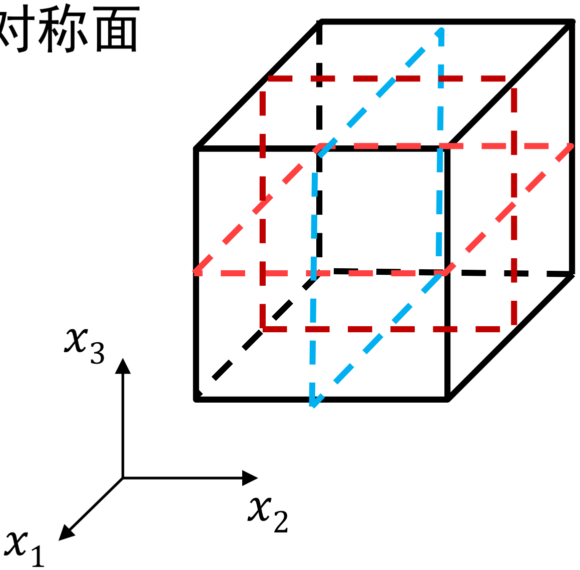
正交各向异性

正交各向异性　具有三个互相垂直的弹性对称面

取$x_1x_2x_3$为三个弹性主轴方向。

类似于x_3弹性主轴的推导过程，倒置x_2轴，可以得到与ε_{12}，ε_{23}一次项相关的C系数为零，即$C_{16}=C_{26}=C_{36}=C_{45}=0$。

再将x_1轴倒置，不增加新的零系数。



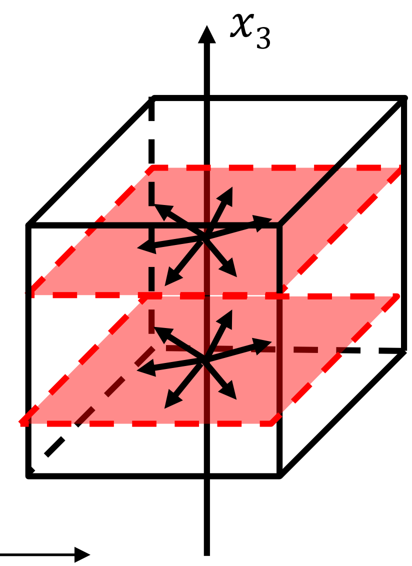
故在正交各向异性状态下，弹性常数只有9个，弹性矩阵可以表示为：

$$[C]=\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & \text{sym.} & & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix}$$

横观各向同性

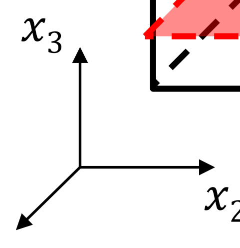
横观各向同性　具有一个弹性对称轴，该对称轴对应的弹性对称面上各向同性。

取x_3为弹性主轴方向，x_1x_2构成弹性同性面。



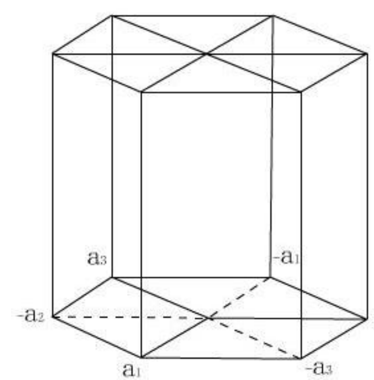
将x_1x_2互换，则有：

$$
\begin{aligned}
\sigma_{11} &= \sigma'_{22} & \qquad \varepsilon_{11} &= \varepsilon'_{22} \\
\sigma_{22} &= \sigma'_{11} & \varepsilon_{22} &= \varepsilon'_{11} \\
\tau_{12} &= \tau'_{21} & \varepsilon_{12} &= \varepsilon'_{21} \\
\tau_{13} &= \tau'_{23} & \varepsilon_{13} &= \varepsilon'_{23} \\
\tau_{23} &= \tau'_{13} & \varepsilon_{23} &= \varepsilon'_{13}
\end{aligned}
$$



对于原坐标系，有弹性关系：

$$
\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} =
\begin{bmatrix}
C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\
 & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\
 & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\
 & & & C_{44} & 0 & 0 \\
 & \text{sym.} & & & C_{55} & 0 \\
 & & & & & C_{66}
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix}
$$



$$\sigma_{11} = C_{11}\varepsilon_{11} + C_{12}\varepsilon_{22} + C_{13}\varepsilon_{33}$$

横观各向同性

$$\sigma_{11} = \underline{C_{11}\varepsilon_{11}} + C_{12}\varepsilon_{22} + \underline{C_{13}\varepsilon_{33}}$$

对于坐标轴交换后的坐标系，有弹性关系：

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{22} \\ \sigma_{11} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{13} \\ \tau_{23} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & \text{sym.} & & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix}$$

$$\sigma_{11} = \underline{C_{22}\varepsilon_{11}} + C_{12}\varepsilon_{22} + \underline{C_{23}\varepsilon_{33}}$$

对比两式可得： $C_{11} = C_{22}$ $C_{13} = C_{23}$ 同理可得 $C_{44} = C_{55}$

再将x_1x_2轴绕x_3旋转45度，剪应力-应变关系不变，有$C_{66} = \frac{1}{2(C_{11}-C_{12})}$

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & \text{sym.} & & C_{55} & 0 & 0 \\ & & & & C_{55} & 0 \\ & & & & & \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12}) \end{bmatrix}$$

5个独立常数

各向同性

各向同性　任意方向弹性关系相同

利用和横观各向同性中类似的推导方法处理x_1x_3构成的弹性同性面，有$C_{11}=C_{33}$，$C_{12}=C_{13}$，$C_{55}=C_{66}$

弹性矩阵可以表示为：

$$[C]=\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1}{2}(C_{11}-C_{12}) & 0 & 0 \\ & \text{sym.} & & & \frac{1}{2}(C_{11}-C_{12}) & 0 \\ & & & & & \frac{1}{2}(C_{11}-C_{12}) \end{bmatrix}$$

2个独立常数

各向同性

各向同性弹性矩阵
可以表示为：

令$C_{12} = \lambda$， $C_{44} = G$

$$[C] = \begin{bmatrix} \lambda+2G & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & \lambda+2G & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & & \lambda+2G & 0 & 0 & 0 \\ & & & G & 0 & 0 \\ & \text{sym.} & & & G & 0 \\ & & & & & G \end{bmatrix}$$

弹性本构关系
可以表示为：

$$\sigma_{11} = 2G\varepsilon_{11} + \lambda\varepsilon_v$$

$$\sigma_{22} = 2G\varepsilon_{22} + \lambda\varepsilon_v$$

$$\sigma_{33} = 2G\varepsilon_{33} + \lambda\varepsilon_v$$

$$\sigma_{23} = G\gamma_{23}$$

$$\sigma_{13} = G\gamma_{13}$$

$$\sigma_{12} = G\gamma_{12}$$

各向同性线弹性体的广义胡克定律

立方晶系的弹性常数

立方晶系：有三个弹性对称面，在弹性对称面上，互成90°的方向弹性性质相同。

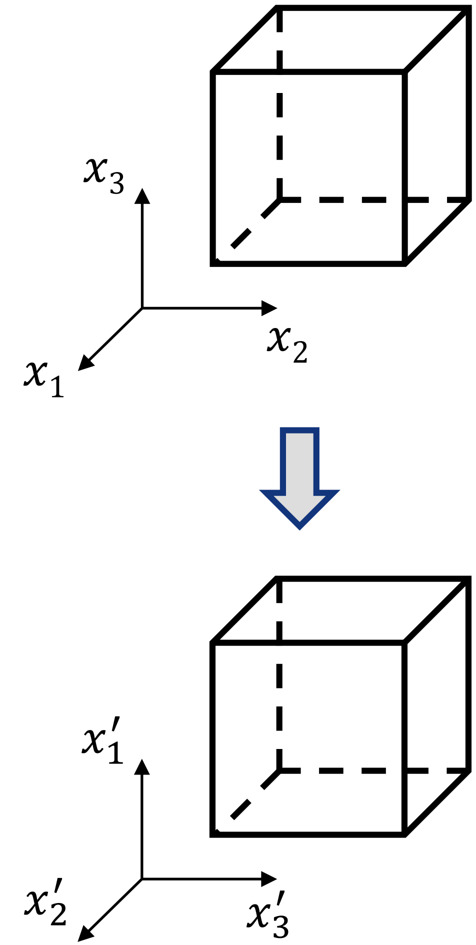
利用轮换对称性求立方晶系中独立分量的个数。

坐标轮换之前，有：

$$\begin{Bmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{33}\\ \sigma_{23}\\ \sigma_{13}\\ \sigma_{12}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16}\\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26}\\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36}\\ & & & C_{44} & C_{45} & C_{46}\\ & \text{sym.} & & & C_{55} & C_{56}\\ & & & & & C_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_{11}\\ \varepsilon_{22}\\ \varepsilon_{33}\\ 2\varepsilon_{23}\\ 2\varepsilon_{13}\\ 2\varepsilon_{12}\end{Bmatrix}$$

坐标轮换之后，有：

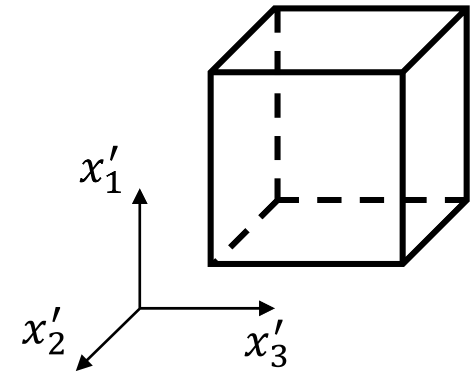
$$\begin{Bmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{33}\\ \sigma_{23}\\ \sigma_{13}\\ \sigma_{12}\end{Bmatrix}\Leftrightarrow\begin{Bmatrix}\sigma'_{22}\\ \sigma'_{33}\\ \sigma'_{11}\\ \sigma'_{31}\\ \sigma'_{21}\\ \sigma'_{23}\end{Bmatrix}\qquad\begin{Bmatrix}\varepsilon_{11}\\ \varepsilon_{22}\\ \varepsilon_{33}\\ \varepsilon_{23}\\ \varepsilon_{13}\\ \varepsilon_{12}\end{Bmatrix}\Leftrightarrow\begin{Bmatrix}\varepsilon'_{22}\\ \varepsilon'_{33}\\ \varepsilon'_{11}\\ \varepsilon'_{31}\\ \varepsilon'_{21}\\ \varepsilon'_{23}\end{Bmatrix}$$



立方晶系的弹性常数

坐标轮换之后，本构关系为：

$$
\begin{Bmatrix} \sigma'_{11} \\ \sigma'_{22} \\ \sigma'_{33} \\ \sigma'_{23} \\ \sigma'_{13} \\ \sigma'_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C'_{11} & C'_{12} & C'_{13} & C'_{14} & C'_{15} & C'_{16} \\ & C'_{22} & C'_{23} & C'_{24} & C'_{25} & C'_{26} \\ & & C'_{33} & C'_{34} & C'_{35} & C'_{36} \\ & \text{sym.} & & C'_{44} & C'_{45} & C'_{46} \\ & & & & C'_{55} & C'_{56} \\ & & & & & C'_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon'_{11} \\ \varepsilon'_{22} \\ \varepsilon'_{33} \\ 2\varepsilon'_{23} \\ 2\varepsilon'_{13} \\ 2\varepsilon'_{12} \end{Bmatrix}
$$



用原坐标中的分量替代新坐标中的分量

$C'_{mn} = C_{mn}$

$$
\begin{Bmatrix} \sigma_{33} \\ \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ & \text{sym.} & & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ & & & & C_{55} & C_{56} \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \end{Bmatrix}
$$

立方晶系的弹性常数

在原坐标系中，有：

$$\sigma_{11} = C_{11}\varepsilon_{11} + C_{12}\varepsilon_{22} + C_{13}\varepsilon_{33} + 2C_{14}\varepsilon_{23} + 2C_{15}\varepsilon_{13} + 2C_{16}\varepsilon_{12}$$

在新坐标系中，有：

$$\sigma_{11} = C_{21}\varepsilon_{33} + C_{22}\varepsilon_{11} + C_{23}\varepsilon_{22} + 2C_{24}\varepsilon_{12} + 2C_{25}\varepsilon_{23} + 2C_{26}\varepsilon_{13}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_{11} = C_{22} = C_{33} \\ C_{12} = C_{13} = C_{23} \\ C_{44} = C_{55} = C_{66} \\ C_{14} = C_{15} = C_{16} = C_{24} = C_{25} = C_{26} = C_{34} = C_{35} = C_{36} \\ C_{45} = C_{46} = C_{56} \end{cases}$$

在坐标轮换后的坐标系中转置x_2轴，可得（具体推导参考P4）：

$$C_{14} = C_{15} = C_{16} = C_{24} = C_{25} = C_{26} = C_{34} = C_{35} = C_{36} = 0$$
$$C_{45} = C_{46} = C_{56} = 0$$

立方晶系的弹性常数

因此有：
$$\begin{cases} C_{11} = C_{22} = C_{33} \\ C_{12} = C_{13} = C_{23} \\ C_{44} = C_{55} = C_{66} \\ C_{14} = C_{15} = C_{16} = C_{24} = C_{25} = C_{26} = C_{34} = C_{35} = C_{36} = 0 \\ C_{45} = C_{46} = C_{56} = 0 \end{cases}$$

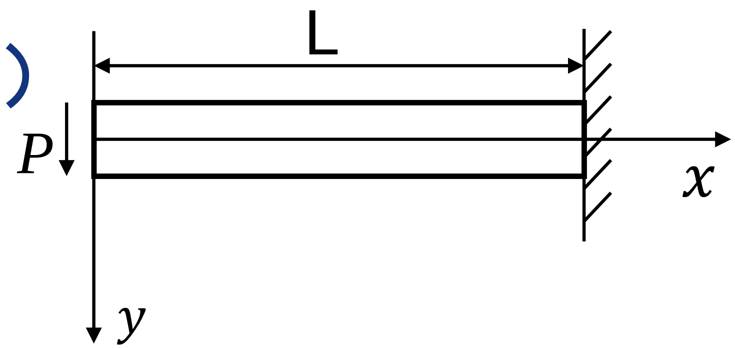
整理可得立方晶系的弹性常数为：

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ & \text{sym.} & & C_{44} & 0 & 0 \\ & & & & C_{44} & 0 \\ & & & & & C_{44} \end{bmatrix}$$

仅有C_{11}，C_{12}和C_{44}三个独立分量。

弹性力学问题例子

悬臂梁受集中力问题（解析解）



应力场

$$\sigma_x = \frac{-Px}{I}y,\ \ \sigma_y = 0,\ \ \tau_{xy} = -\frac{P}{I}(\frac{h^2}{8} - \frac{y^2}{2})$$

与材料力学结果一致

位移场

$$u_x = \frac{PL^2y}{2EI}\left(1 - \frac{x^2}{L^2}\right) + \frac{(2+\nu)Py^3}{6EI}$$ 弹性力学专属

$$u_y = \frac{PL^3}{6EI}\left(2 - 3\frac{x}{L} + \frac{x^3}{L^3}\right) + \frac{Ph^2L}{8GI}\left(1 - \frac{x}{L}\right) + \frac{\nu Pxy^2}{2EI}$$

对于简单问题
材料力学
靠谱！

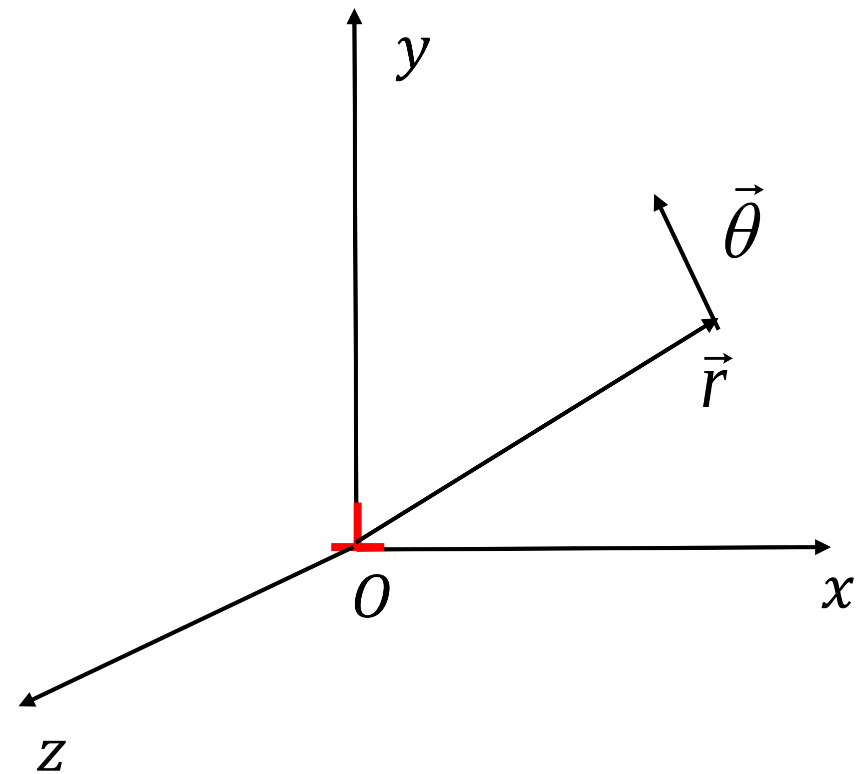
材料力学挠度　**弹性力学专属项(小量）**

弹性力学问题例子

位错应力场

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = -A\dfrac{\sin\theta}{r} \\ \sigma_{zz} = -v(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}) \\ \sigma_{r\theta} = \sigma_{\theta r} = A\dfrac{\cos\theta}{r} \end{cases}$$

$$A = \frac{Gb}{2\pi(1-v)}$$



$r \to 0$

$\sigma_{rr} \to \infty$

奇异解 $\propto 1/r$

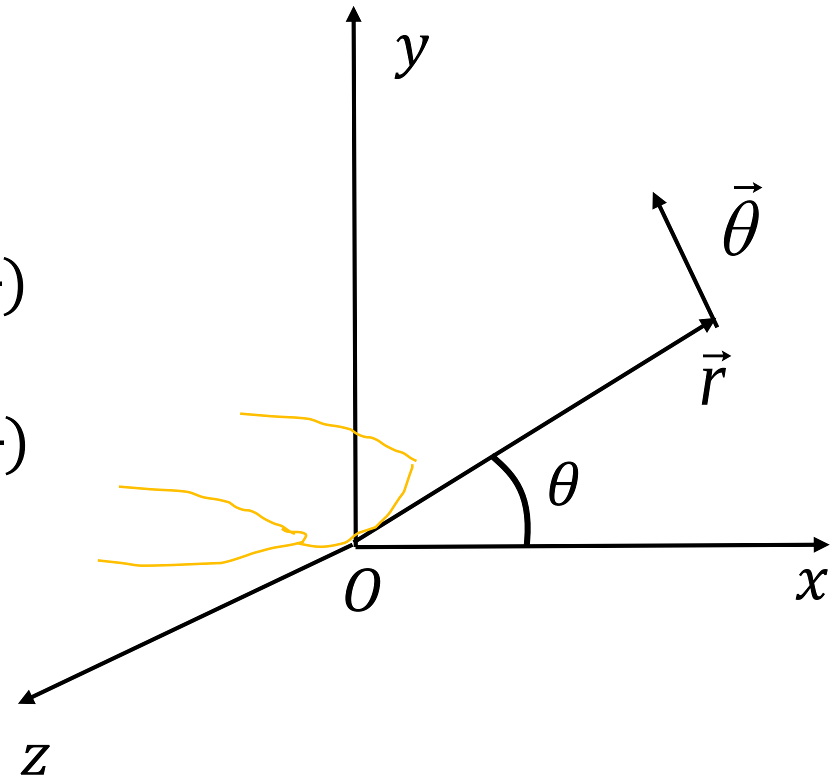
弹性力学问题例子

裂纹尖端应力场

$$\sigma_x = \frac{K_1}{\sqrt{2\pi r}} \cos\frac{\theta}{2}\left(1 - \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right)$$

$$\sigma_y = \frac{K_1}{\sqrt{2\pi r}} \cos\frac{\theta}{2}\left(1 + \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right)$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_1}{\sqrt{2\pi r}} \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2}$$



$r \to 0$

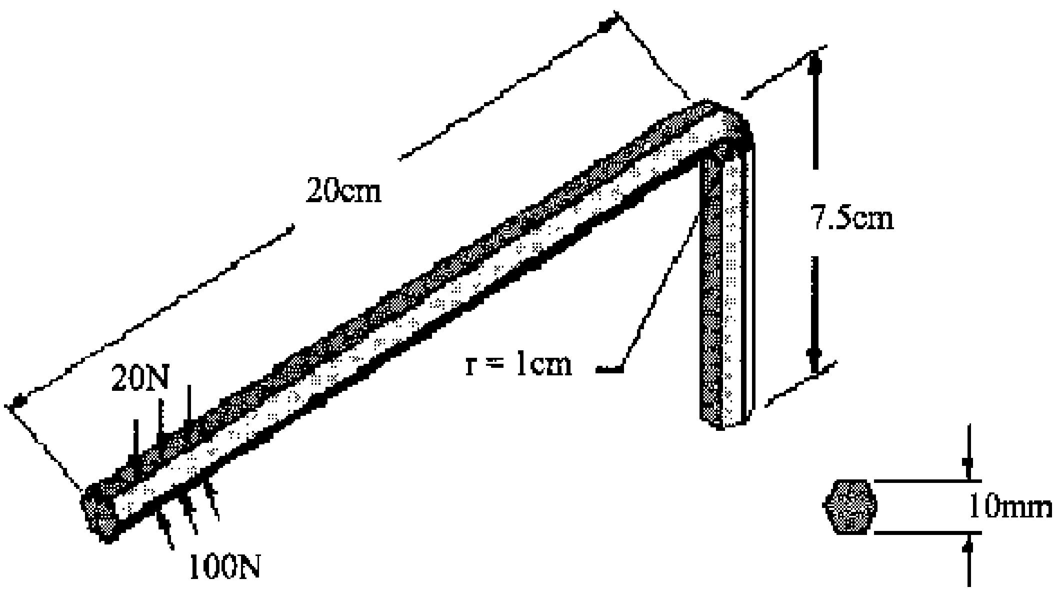
$\sigma \to \infty$ 奇异解 $\propto 1/\sqrt{r}$

材料力学

无能为力！

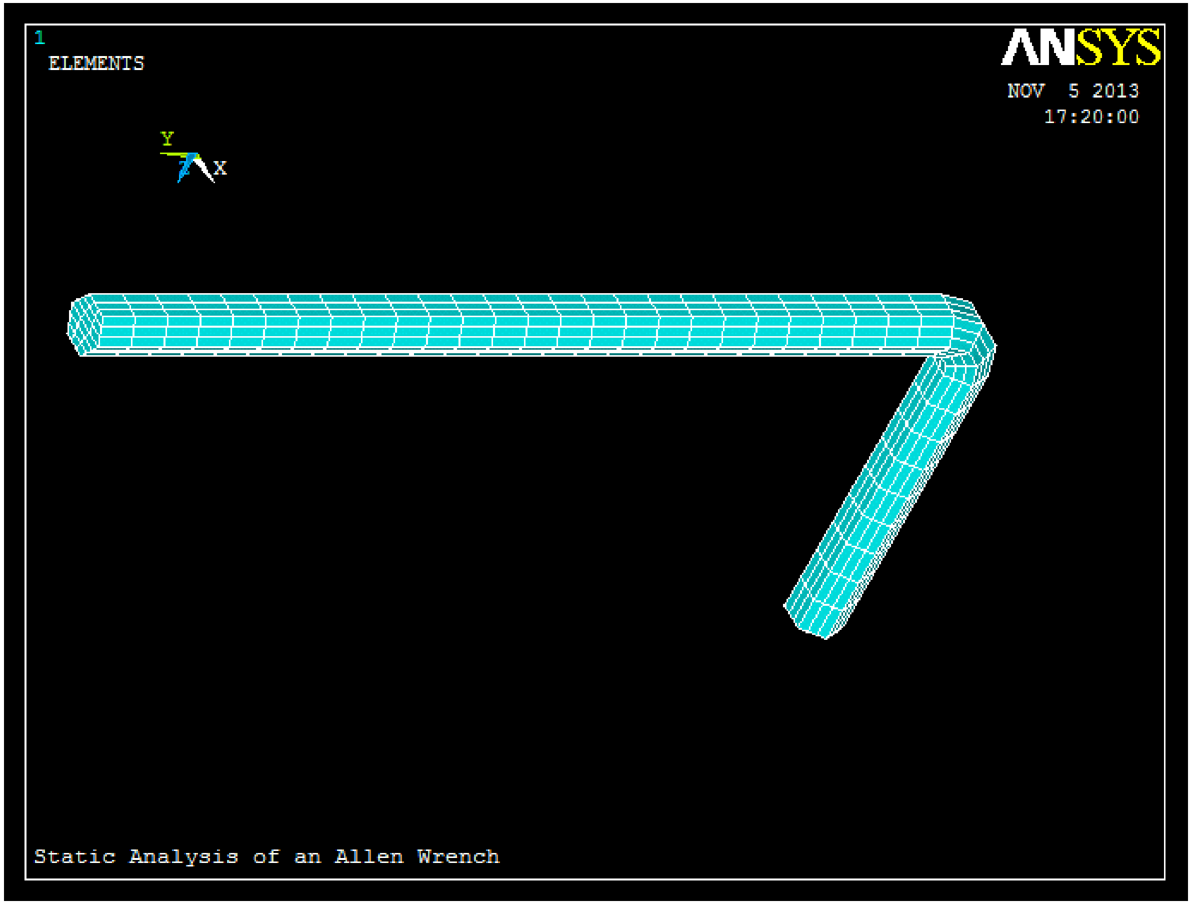
弹性力学问题例子

为一个截面宽度为10mm的内六角扳手，在手柄的端部施加扭转力100N，然后在相同的部位施加垂直向下的力20N，分析在这两种载荷作用下扳手的应力分布。在问题中使用的尺寸参数如下所示。截面宽度为10 mm、截面形状为正六边形、手柄长度：20cm、杆长：7.5cm、倒角半径：1cm、弹性模量：2.07×1011Pa，泊松比为0.3。



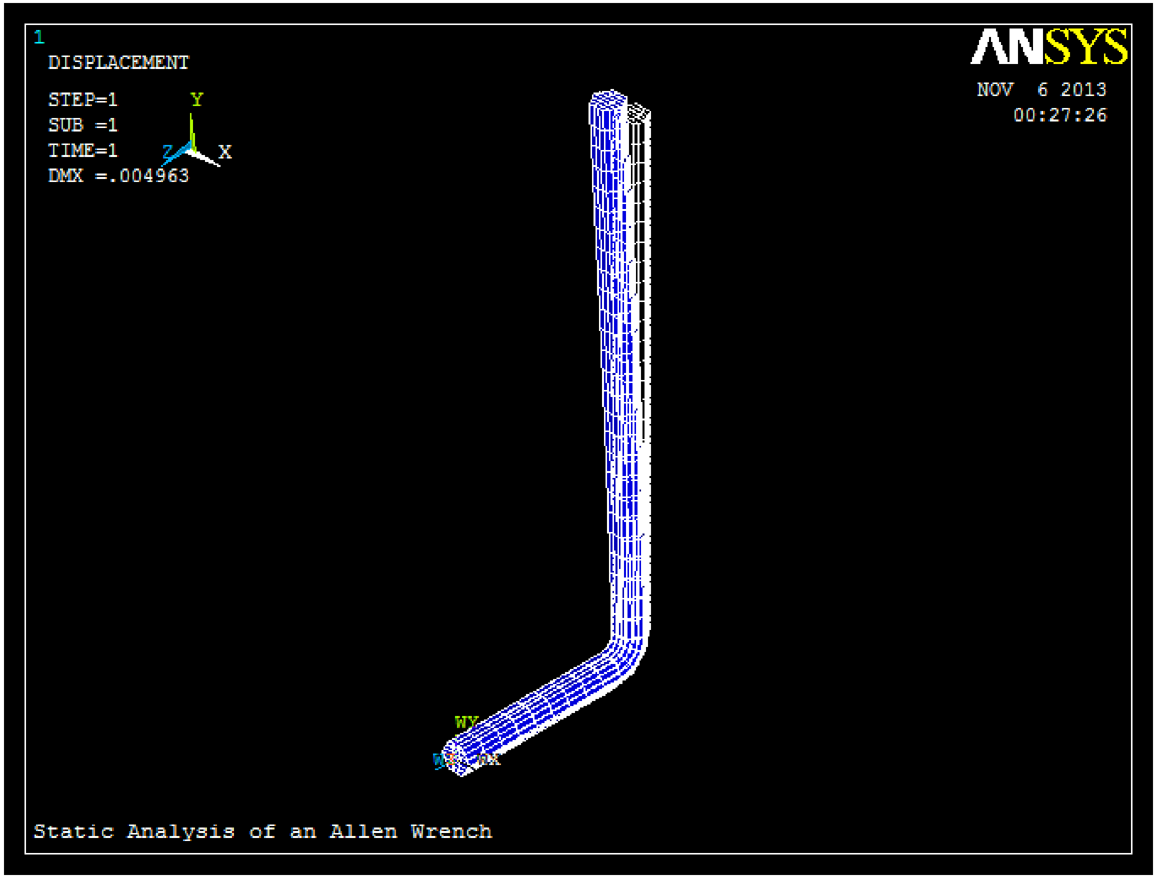
解析解法过于复杂，可采用数值解法

弹性力学问题例子



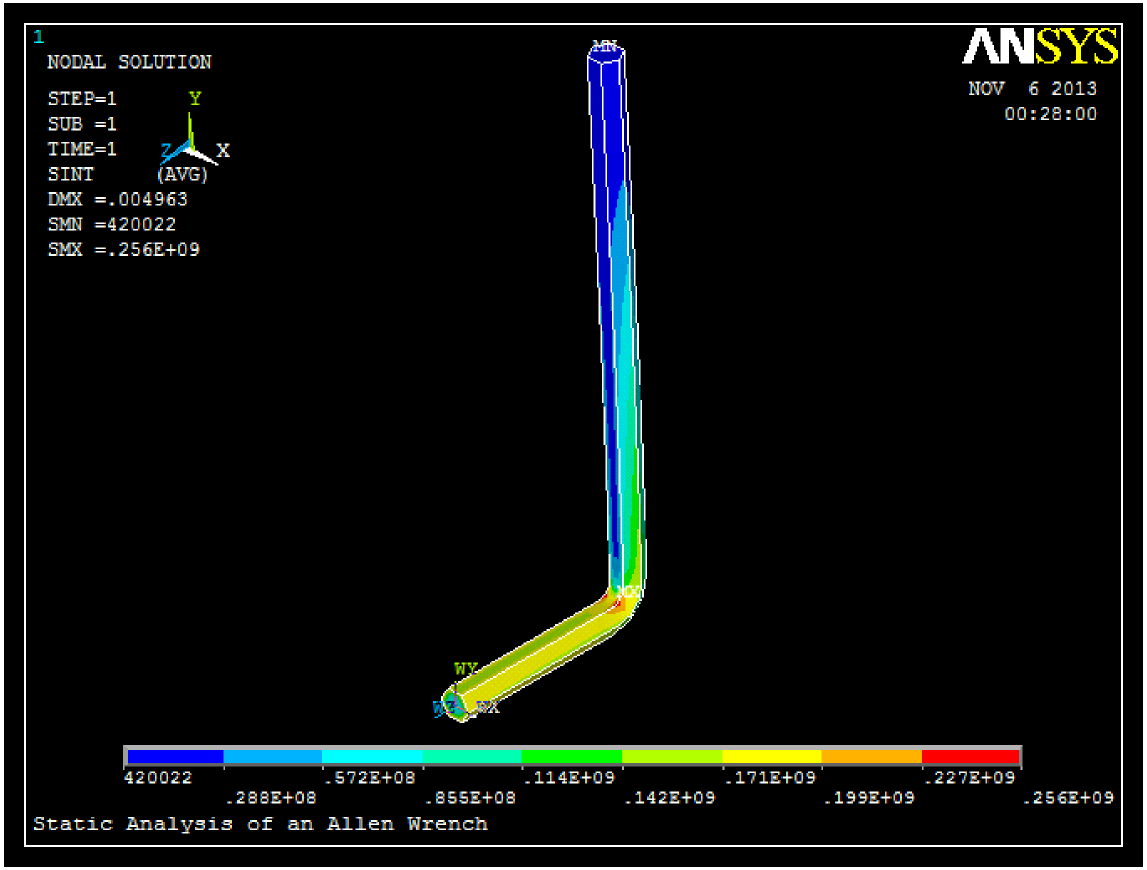
模型建立与网格划分

弹性力学问题例子



位移场结果

弹性力学问题例子



应力场结果

本章小结

应力平衡方程	应力、应力矢量和应力张量
	斜截面公式
	剪应力互等定理、应力平衡方程
几何方程	应变张量
	应变与位移的关系
应变协调方程	位移连续性导出的协调方程
本构方程	各向同性体的本构方程
	弹性常数的独立分量
	弹性对称性下的弹性常数
弹性问题的一般解法	弹性力学的基本方程
	边界条件
	位移解法、应力解法
	数值解法

本章小结

- **弹性力学**
  - **应力平衡方程**
    - 应力、应力矢量与应力张量
    - 斜截面公式
    - 剪应力互等定理与应力平衡方程
  - **几何方程**
    - 应变张量
      - 正应变
      - 切应变
    - 应变与位移的关系
  - **应变协调方程**
    - 位移连续性导出的协调方程

本章小结

- **弹性力学**
  - **本构关系**
    - 各向同性体的本构方程
    - 各向异性下的弹性常数
    - 弹性对称性下的弹性常数
      - 弹性对称面
      - 横观各向同性
      - 各向同性
  - **弹性力学问题的解法**
    - 弹性力学的基本方程
      - 应力平衡方程、几何方程、应变协调方程和本构方程组成的18个方程
    - 力边界条件与位移边界条件
    - 应力解法
      - 以6个应力分量为求解量
    - 位移解法
      - 以3个位移分量为求解量，自动满足协调方程
    - 数值解法

谢 谢！