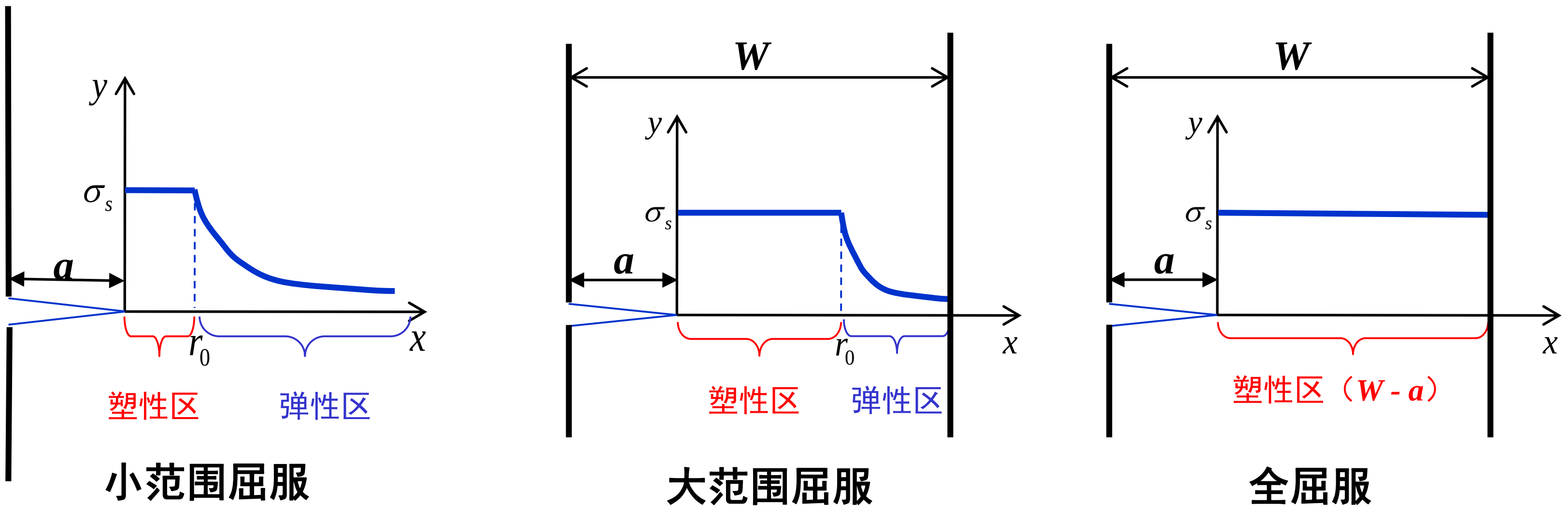
2.2 弹塑性断裂力学



等效裂纹修正！

修正 *K* 参量失效！！！ 怎么办？

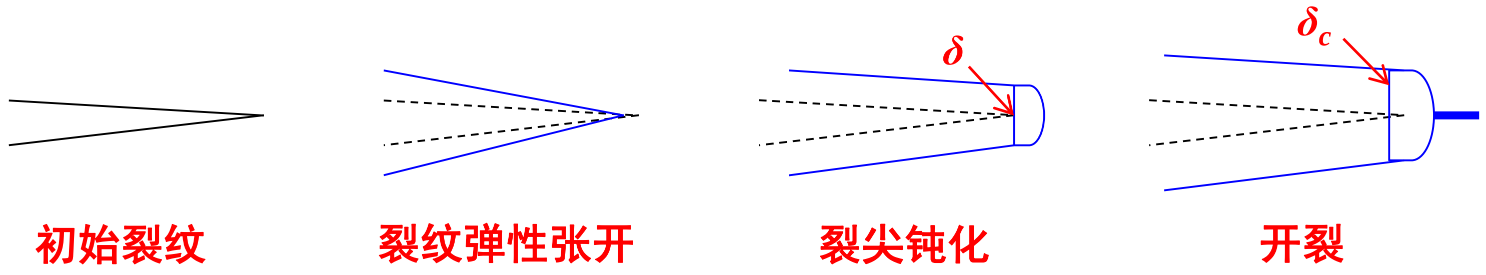
采用弹塑性力学方法，寻找其他场参量

- 裂纹尖端张开位移（Crack Tip Opening Dispalcement - CTOD）
- J 积分

2.2.1 CTOD

大型中、低强度钢构件发生不少低应力脆断的微观机制：

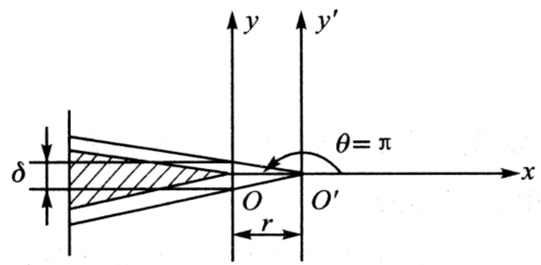
- 裂纹开裂过程为：弹性张开→钝化→开裂



- 开裂前， CTOD 能反映裂尖形变场强度
- 存在一个临界 δ（δ_c）， 当满足 $\delta > \delta_c$ 时,材料开裂

- **CTOD定义**
- **CTOD数学表达式**
- **CTOD工程测量**
- **CTOD准则**

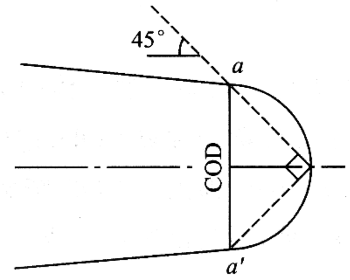
2.2.1.1 CTOD的定义



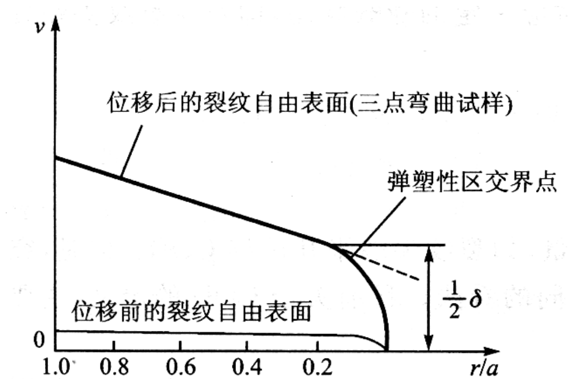
$\delta=2v$

$r=r_y=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{K_{\mathrm{I}}}{\sigma_s}\right)^2$

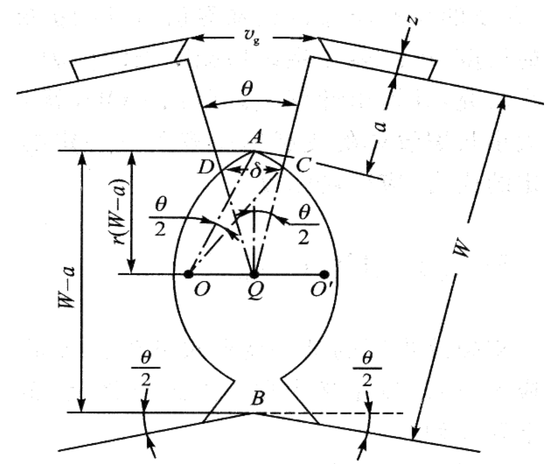
CTOD定义1：小范围屈服修正裂纹时，真实裂纹顶端的张开位移



CTOD定义2：以变形后裂尖为顶点，对称于原裂纹作一个直角三角形，直角边与上、下裂纹表面的交点*a*、*a’*之间的距离



CTOD定义3：将变形后裂纹表面上弹性和塑性区交界点处的张开位移



CTOD定义4：三点弯曲试样裂纹嘴张开位移外推到裂纹尖端的位移

2.2.1.2 CTOD的数学表达式

（1）小范围屈服时的 CTOD（平面应变条件）

可采用等效裂纹修正的方法。裂纹尖端的纵向位移为：

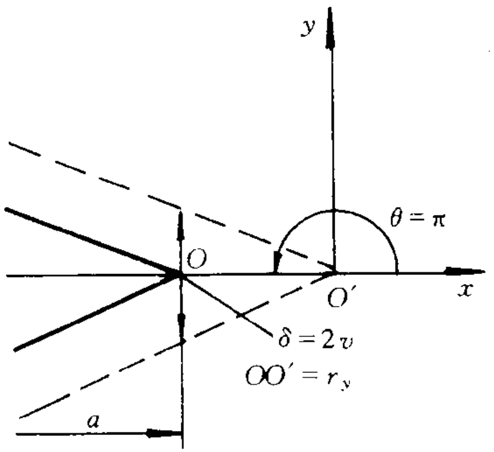
$$v = \frac{1+\nu}{E} K_{\mathrm{I}} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \sin\frac{\theta}{2}\left[2 - 2\nu - \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] \qquad (1)$$

裂纹尖端的CTOD为：

$$\delta = 2v = 2 \times \left\{ \frac{1+\nu}{E} K_{\mathrm{I}} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \sin\frac{\theta}{2}\left[2 - 2\nu - \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] \right\} \qquad (2)$$

真实裂纹尖端的坐标为：

$$\left.\begin{aligned} &\theta = \pi \\ &r = r_y = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{K_{\mathrm{I}}}{\sigma_s}\right)^2 (1-2\nu)^2 \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$



（1）小范围屈服时的 CTOD（续）

将（3）式代入（2）式，可得到：

$$\delta=\frac{4K_{\mathrm{I}}^{2}}{\pi E\sigma_{s}}(1-2\nu)(1-\nu^{2}) \quad （4）$$

因： $K_{\mathrm{I}}=\sigma\sqrt{\pi a}$ ，则有：

$$\delta=\frac{4\sigma^{2}a}{E\sigma_{s}}(1-2\nu)(1-\nu^{2}) \quad （5）$$

又因： $G_{\mathrm{I}}=\frac{1-\nu^{2}}{E}K_{\mathrm{I}}^{2}$ ，则有：

$$\delta=\frac{4(1-2\nu)}{\pi}\frac{G_{\mathrm{I}}}{\sigma_{s}}\approx\frac{G_{\mathrm{I}}}{\sigma_{s}} \quad （6）$$

（4）–（6）：力学参量

在临界条件下：

材料性能

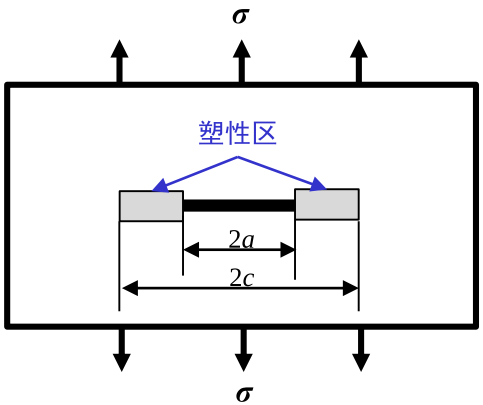
$$\delta_{c}=\frac{4\sigma_{C}^{2}a}{\pi E\sigma_{s}}(1-2\nu)(1-\nu^{2})=\frac{4K_{\mathrm{IC}}^{2}}{E\sigma_{s}}(1-2\nu)(1-\nu^{2})=\frac{4G_{\mathrm{IC}}}{\pi\sigma_{s}}(1-2\nu) \quad （7）$$

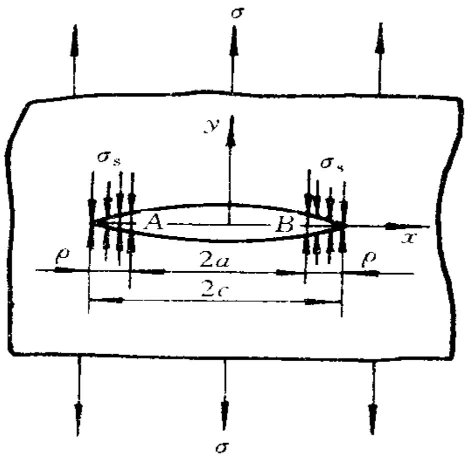
（2）大范围屈服时的CTOD（平面应力条件）

1960年，Dugdale针对中低强度材料、薄板构件、长穿透裂纹的平面应力情况，采用Muskhelishvili方法进行了断裂分析

D-M 模型：

- 裂纹两端的塑性区呈带状（窄条状）沿裂纹平面向两侧伸展，外部是广大的弹性区
- 塑性区无硬化（理想塑性）
- 设想将屈服区切开，在切开面上施加数值等于σ_s的压力，则裂纹切开面仍然闭合，这样就把一个 $2a$ 长裂纹弹塑性转化为一个 $2c$ 虚拟裂纹的线弹性问题。





带状屈服模型

D-M模型处理及结果

虚拟裂纹尖端应力强度因子 K^* 由两个作用力结果的叠加而确定：

（1） 由无限远处平均应力 σ 引起：

$$K_{\mathrm{I}}^{(1)} = \sigma\sqrt{\pi c} \qquad (1)$$

（2） 由裂纹两端 ρ 段上的 $-\sigma_s$ 引起：

$$K_{\mathrm{I}}^{(2)} = -\int_a^c \frac{2\sigma dx}{\sqrt{c^2-x^2}}\frac{c}{\pi} = -2\sigma_s\sqrt{\frac{c}{\pi}}\arccos\left(\frac{a}{c}\right) \qquad (2)$$

由虚拟裂纹尖端应力无奇异性得：

$$K_{\mathrm{I}}^{(1)} + K_{\mathrm{I}}^{(2)} = 0 \qquad (3)$$

即：

$$\sigma\sqrt{\pi c} - 2\sigma_s\sqrt{\frac{c}{\pi}}\arccos\left(\frac{a}{c}\right) = 0 \qquad (4)$$

由此可得：

$$c = a\left[\sec\left(\frac{\pi}{2}\frac{\sigma}{\sigma_s}\right)\right] \qquad (5)$$

塑性区尺寸

因 $c=a+\rho$，得塑性区尺寸为：

$$\rho=c-a=a\left[\sec\left(\frac{\pi}{2}\frac{\sigma}{\sigma_s}\right)-1\right] \qquad (6)$$

在 $|x|<\frac{\pi}{2}$ 时，sec*x* 可以展开为幂级数：

$$\sec x=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{24}x^4+\frac{61}{720}x^6+\cdots$$

因 $\frac{\pi}{2}\frac{\sigma}{\sigma_s}<\frac{\pi}{2}$，所以（6）式中的正割函数可展开为幂级数。

若 $\frac{\sigma}{\sigma_s}$ 较小，可忽略“四次方及以上项”，即有：

$$\rho\approx\frac{\pi^2}{8}\left(\frac{\sigma}{\sigma_s}\right)^2 a \qquad (7)$$

再将 $K_\mathrm{I}=\sigma\sqrt{\pi a}$ 代入（7）式，得：

$$\rho\approx\frac{\pi}{8}\left(\frac{K_\mathrm{I}}{\sigma_s}\right)^2 \qquad (8)$$

D-M模型的CTOD

真实裂纹尖端张开位移：
$$\delta = \frac{8a\sigma}{\pi E}\ln\left[\sec\left(\frac{\pi\sigma}{2\sigma_s}\right)\right] \quad (9)$$

将上式展开为级数：
$$\delta = \frac{8a\sigma}{\pi E}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\pi\sigma}{2\sigma_s}\right)^2 + \frac{1}{12}\left(\frac{\pi\sigma}{2\sigma_s}\right)^4 + \frac{1}{45}\left(\frac{\pi\sigma}{2\sigma_s}\right)^6 + \cdots\right] \quad (10)$$

σ 较小时，可只考虑第一项，得到：
$$\delta = \frac{\pi}{E}\frac{\sigma^2 a}{\sigma_s} \quad (11)$$

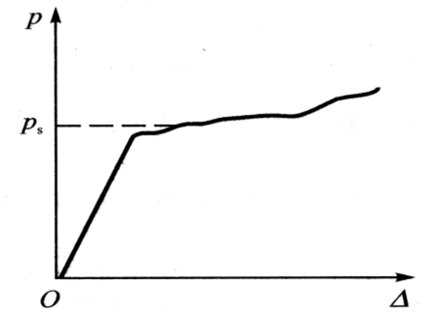
由于 $K_{\mathrm{I}} = \sigma\sqrt{\pi a}$ 及 $G_{\mathrm{I}} = \frac{K_{\mathrm{I}}^2}{E}$

则有：
$$\delta = \frac{K_{\mathrm{I}}^2}{E\sigma_s} = \frac{G_{\mathrm{I}}}{\sigma_s} \quad (12)$$

- **$\sigma/\sigma_s \to 1$ 时，$\delta \to \infty$，模型失效**
- **$\sigma/\sigma_s \le 0.8$ 时，计算与实验相符**

（3）全面屈服下的CTOD

由于全面屈服后，应力增加很少，而变形大大增加，因而不再以应力作为计算 CTOD 的参量，而改用应变 e 来计算 CTOD。



拉伸图

Wells假定：塑性区应变 e 与塑性区尺寸 r_y 之间有：

$$\frac{e}{e_s}=\frac{r_y}{a} \quad \text{或} \quad \frac{e}{r_y}=\frac{e_s}{a} \qquad (1)$$

CTOD ~ e 的关系？

- 在小范围屈服时，由 $r_y=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{K_I}{\sigma_s}\right)^2$、$\delta=\frac{K_I^2}{E\sigma_s}$ 和 $\sigma_s=Ee_s$ 三式可得：

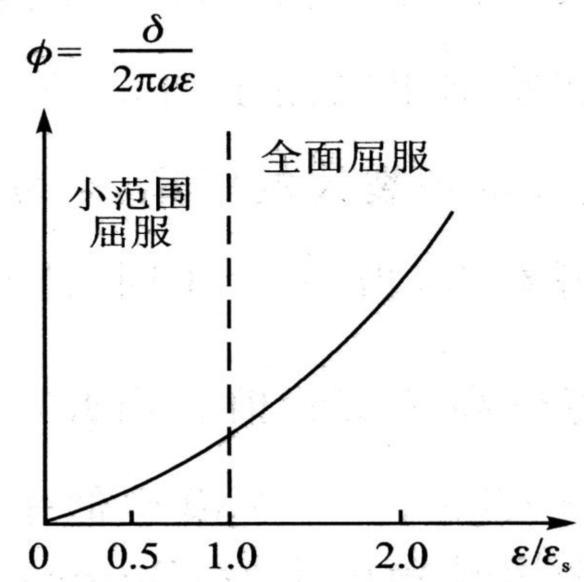
$$r_y=\frac{\delta}{2\pi e_s} \quad \text{或} \quad \delta=2\pi e_s r_y \qquad (2)$$

（3）全面屈服下的CTOD（续）

Wells经过大量的宽板试验，将上述关系进一步推广到全面屈服的情况。

将（1）式代入（2）式，有

$$\frac{\delta}{2\pi e_s a} = \frac{e}{e_s} \qquad (3)$$



COD设计曲线

或： $$\boxed{\delta = 2\pi a e} \qquad (4)$$

此即全面屈服情况下的**Wells**经验公式。

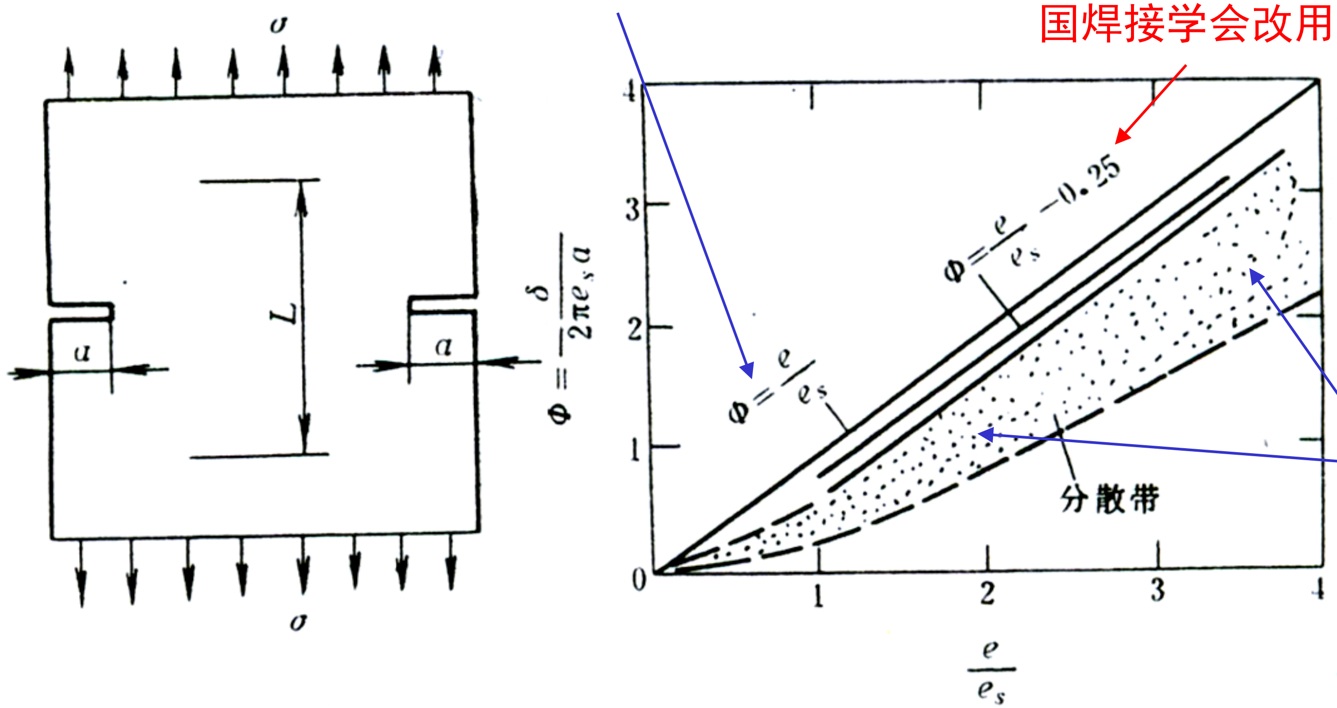
Wells公式可写成无量纲 **CTOD** 表达式: $\boxed{\Phi = \dfrac{\delta}{2\pi a e_s}}$

Burdekin公式

$$\delta = 2\pi e_s a \cdot \left(\frac{e}{e_s} - 0.25\right)$$

Wells公式，处在分散带上方，用于设计过于保守

Burdekin公式，1971年，英国焊接学会改用 作为设计线

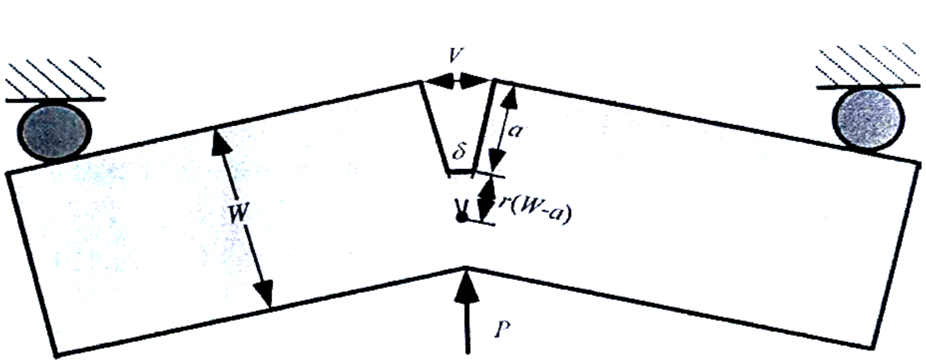


试验数据

英国焊接学会进行的宽板双边裂纹拉伸试验

在一定的标距 L 上测量伸长量 ΔL，计算实际名义应变 $e = (\Delta L/L)$，同时测定裂纹尖端张开位移 δ 。将试验结果绘制在以 e/e_s 为横坐标、以 $\Phi = \delta/(2\pi e_s a)$ 为纵坐标的图中。

2.2.1.3 CTOD的工程测定（三点弯曲试样为例）



The hinge model for estimating CTOD from three-point bend specimens.

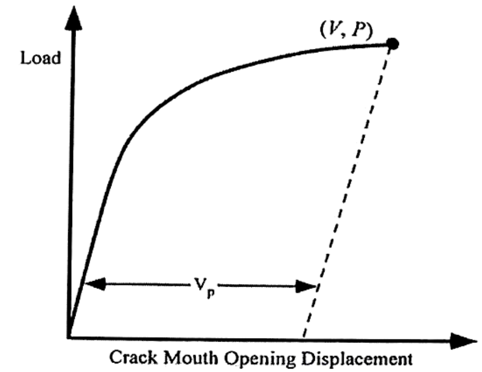
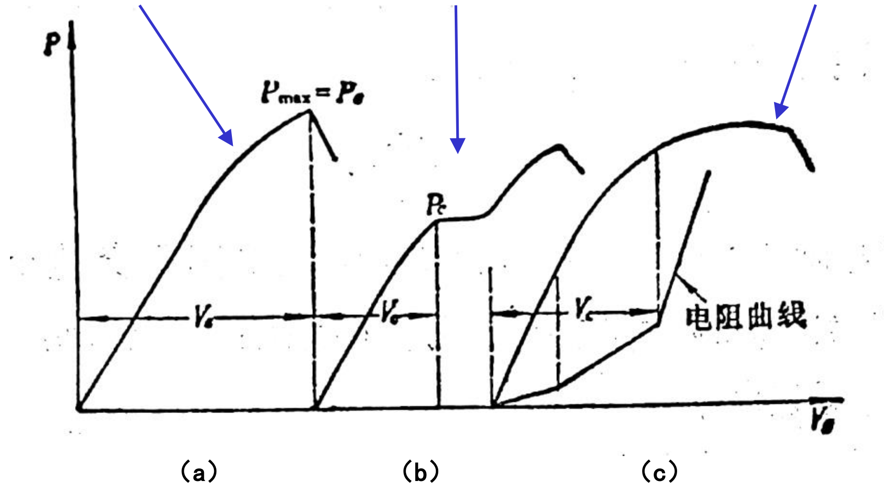


FIGURE 3.6 Determination of the plastic component of the crack-mouth-opening displacement.

$$\frac{\delta}{r(W-a)} = \frac{V}{r(W-a)+a}$$

$$\delta = \left[\frac{r(W-a)}{rW+(1-r)a}\right]V$$

曲线连续、光滑　　曲线有“突进”平台　　曲线超过 P_{max} 后下降



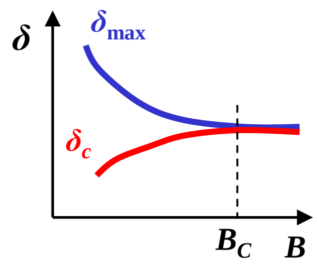
三种 P-V_g 曲线示意图

2.2.1.4 CTOD准则

场参量，是 σ 和 a 的函数，通常由FEM计算求得，或实验测定 → $\delta = \delta_c$ ← 材料常数，相当于裂纹扩展阻力，是材料弹塑性断裂韧性指标

必须注意，δ_c 是裂纹开裂临界值，而非失稳断裂临界值 δ_{max}。试验表明，δ_c 是材料常数，δ_{max} 则受试样几何（特别是厚度）影响。

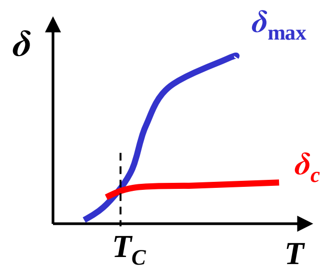
- δ_c 不随厚度变化，而 δ_{max} 则随厚度变化



δ 与厚度的关系

平面应力/平面应变转变

- δ_c 与温度基本无关；而 δ_{max} 随温度升高而升高



δ 与温度的关系

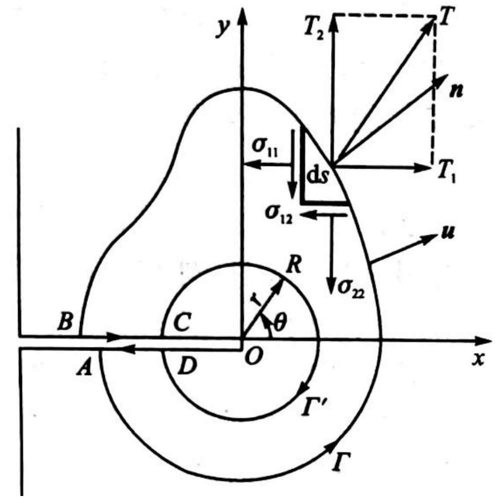
冷脆转变

2.2.2 *J* 积分

- *J* 积分定义
- *J* 积分与裂纹尖端弹塑性应力场的关系
- *J* 积分标定
- *J* 积分与 CTOD 的关系
- *J* 控制断裂力曲线
- *J* 积分准则

2.2.2.1 *J* 积分定义

（1）回路积分



设：有一单位厚度（***B*** = 1）的 I 型裂纹体，自裂纹下表面逆时针取一任一回路 ***Γ*** 达到裂纹上表面，其所包围体积内的应变能密度为 ***w***，回路 ***Γ*** 上任一点的作用力为 ***T***，位移为 ***u***。

裂纹扩展的能量释放率为：$G_{\mathrm{I}} = -\dfrac{\partial \Pi}{\partial a} = -\dfrac{\partial (U-W)}{\partial a}$

应变能：$U = \int_{\Gamma} dU = \int w dV = \iint w dx dy$

外力功：$W = \int_{\Gamma} dW = \int_{\Gamma} (\vec{T} ds)\vec{u} = \int_{\Gamma} \vec{u}\vec{T} ds$

势　能：$\Pi = U - W = \iint w dx dy - \int_{\Gamma} \vec{u}\vec{T} ds$

G_{I}的能量线积分：$G_{\mathrm{I}} = -\dfrac{\partial \Pi}{\partial a} = \int_{\Gamma} \left(w dy - \dfrac{\partial \vec{u}}{\partial x} \vec{T} dS \right)$

弹塑性裂纹尖端的回路积分- *J* 积分

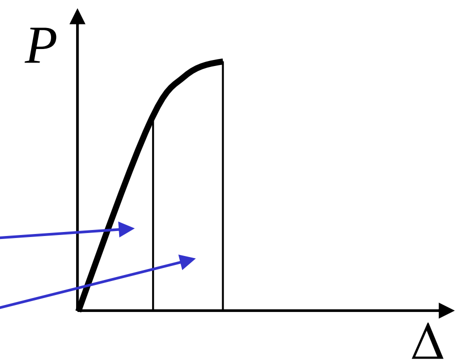
在弹塑性条件下，将 *w* 定义为“弹塑性应变能密度”，也存在前式等号右边的能量线积分，Rice将其定义为 *J* 积分：

$$J_{\mathrm{I}} = \int_{\Gamma} \left(w\,dy - \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} \vec{T} dS \right)$$

形变功密度

弹性变形功

塑性变形功



在线弹性条件下：

$$J_{\mathrm{I}} = G_{\mathrm{I}} = \frac{K_{\mathrm{I}}^2}{E'}$$

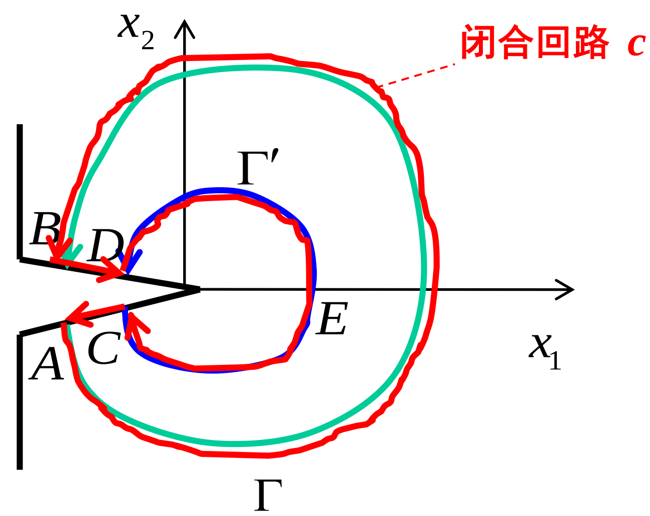
J 积分的重要应用之一：**用小试样的J_{IC}来换算大构件的K_{IC}**

- 低强度材料断裂韧度测定
- 大型不均匀结构局部断裂韧度测定

J 积分守恒性 （详细证明参见讲义）

设分别有两个积分回路 Γ 和 Γ'（右图），J 积分的守恒性就意味着有下列恒等式：

$$\int_{\Gamma}\left(wdx_2 - T_i\frac{\partial u_i}{\partial x_i}ds\right) = \int_{\Gamma'}\left(wdx_2 - T_i\frac{\partial u_i}{\partial x_i}ds\right)$$



如果取任一闭合回路 c，它由 Γ 和 Γ' 以及裂纹自由表面组成（即回路 ***ABDECA***）

- 在裂纹面 ***BD*** 和 ***CA*** 上，$T_i=0$ 和 $dx_2=0$，对回路积分无贡献；
- ***DEC*** 路径与 Γ' 的方向相反，回路积分值符号相反；
- 闭合回路内无裂纹，整个回路积分 = 0。

则上式可改写为：

$$\oint_{c}\left(wdx_2 - T_i\frac{\partial u_i}{\partial x_i}ds\right) = \int_{\Gamma}\left(wdx_2 - T_i\frac{\partial u_i}{\partial x_i}ds\right) - \int_{\Gamma'}\left(wdx_2 - T_i\frac{\partial u_i}{\partial x_i}ds\right) = 0$$

J 积分守恒性的前提条件

在 J 积分守恒性的严格证明中，利用了以下几个关系：

① $\sigma_{ij} = \dfrac{\partial w}{\partial \varepsilon_{ij}}$

要求应变由应力唯一地确定，即与加载过程（历史）无关。在真实情况下，它意味着不允许卸载。对于弹塑性体，应用全量理论和单调加载，才符合该关系。因此，J 积分的守恒性只有在比例单调加载情况下才能成立。

② $\partial \varepsilon_{ij} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j} + \dfrac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$

要求结构在裂纹附近为小变形。实际上，在裂纹尖端不可避免地出现大变形，J 积分的守恒性是近似的。但是大量有限元计算结果证明，大变形对 J 积分的影响很小。

③ $\sigma_{ij,\,j} = 0$

无体力条件下的平衡方程

④ $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$

剪应力互等关系

（2）非线性能量释放率

在线弹性范围内，$J_{\mathrm{I}}=G_{\mathrm{I}}$，即：

$$J_{\mathrm{I}} = G_{\mathrm{I}} = \left(\frac{\partial U}{\partial a}\right)_P = -\left(\frac{\partial U}{\partial a}\right)_\Delta = -\left(\frac{\partial \Pi}{\partial a}\right)$$

单位厚度试样应变能

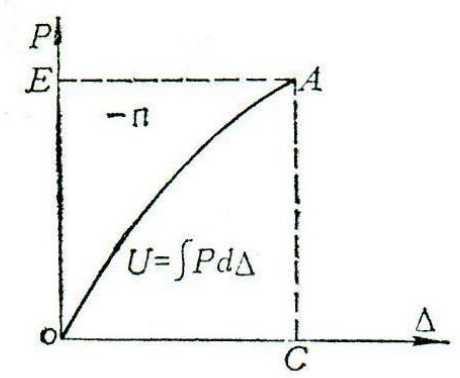
单位厚度试样势能

表明 J 积分与试样加载过程中具有的势能变化率有关，这直接把 J 积分与外加载荷及施力点位移联系起来。

在弹塑性范围内，对于二维试样：

$$J_{\mathrm{I}} = -\left(\frac{\partial U}{\partial a}\right)_\Delta = -\left(\frac{\partial \Pi}{\partial a}\right)_P$$

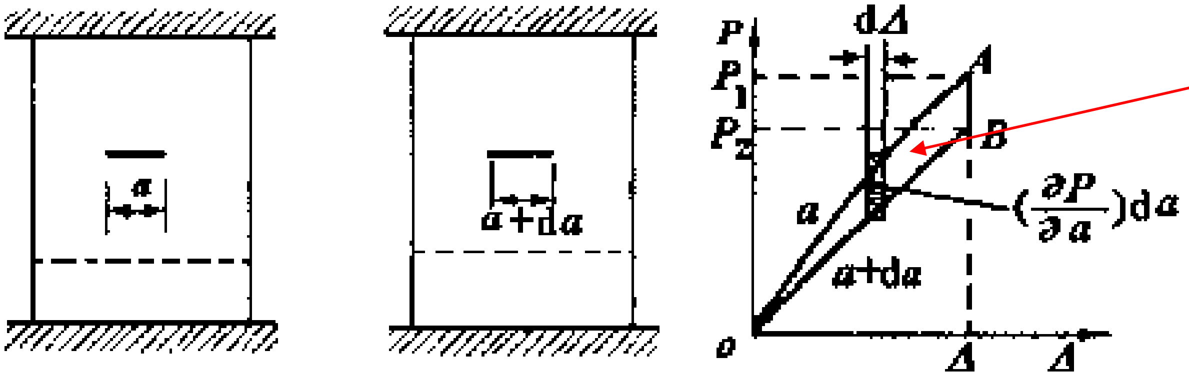
单位厚度试样形变功（弹性应变能+塑性功）



- 限于单调加载和小应变条件。
- 具有相同几何外形，在相同外载和边界约束下，具有裂纹长度为 a 和（a＋△a）的两个试样单位厚度的势能差率。

恒位移及恒载荷条件下的 J 积分

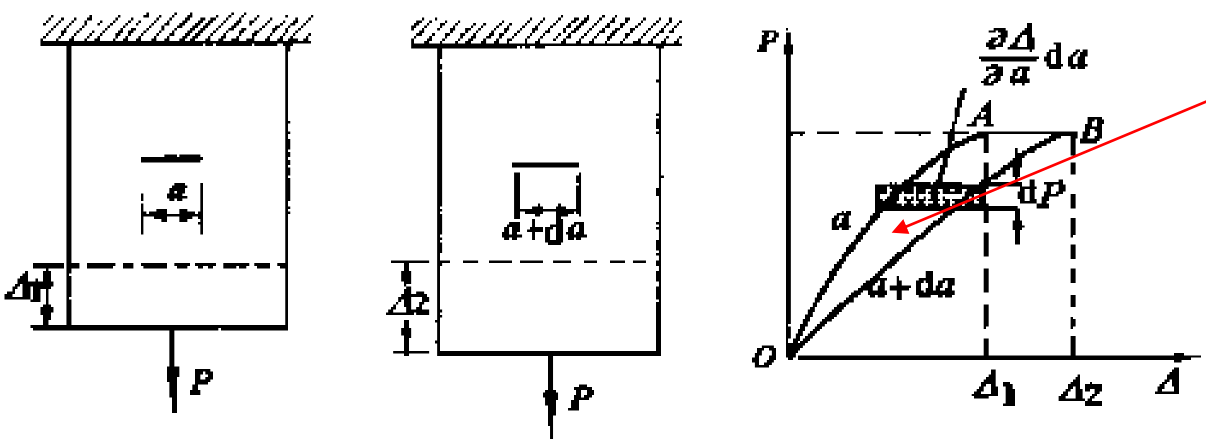
恒位移



$$J = -\frac{1}{B}\left(\frac{\partial U}{\partial a}\right)_{\Delta}$$

$$J = -\frac{1}{B}\int_0^{\Delta_1}\left(\frac{\partial P}{\partial a}\right)_{\Delta} d\Delta$$

恒载荷



$$J = -\frac{1}{B}\left(\frac{\partial \Pi}{\partial a}\right)_{P}$$

$$J = \frac{1}{B}\int_0^{P_1}\left(\frac{\partial \Delta}{\partial a}\right)_{P} dP$$

2.2.2.2 裂尖弹塑性应力场-HRR场

1968年，Hutchinson-Rice和Rosengren利用**塑性全量理论**分别独立得到了具有**Ramberg-Osgood 硬化规律**（$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_s}=\frac{\sigma}{\sigma_s}+\alpha\left(\frac{\sigma}{\sigma_s}\right)^n$）材料的裂尖应力场的渐进解：

与 n 有关的函数

$$\sigma_{ij}=\underbrace{J^{\frac{1}{1+n}}}_{\text{场强参数}}\cdot\underbrace{(\alpha I)^{-\frac{1}{1+n}}}_{\text{材料参数}}\cdot\underbrace{\underbrace{r^{-\frac{1}{1+n}}}_{\text{距离函数}}\cdot\underbrace{\tilde{\sigma}_{ij}(\theta)}_{\text{角度函数}}}_{\text{位置参数}}$$

- 裂纹尖端有奇异性：$r^{-\frac{1}{1+n}}$ 当 $n=1$ 时（弹性材料），与线弹性相同
- 裂纹尖端应力、应变场的强度由 J 确定
- 只适用于单调加载的情况
- HRR场为渐进解

2.2.2.3 *J* 积分标定

（1）多试样法

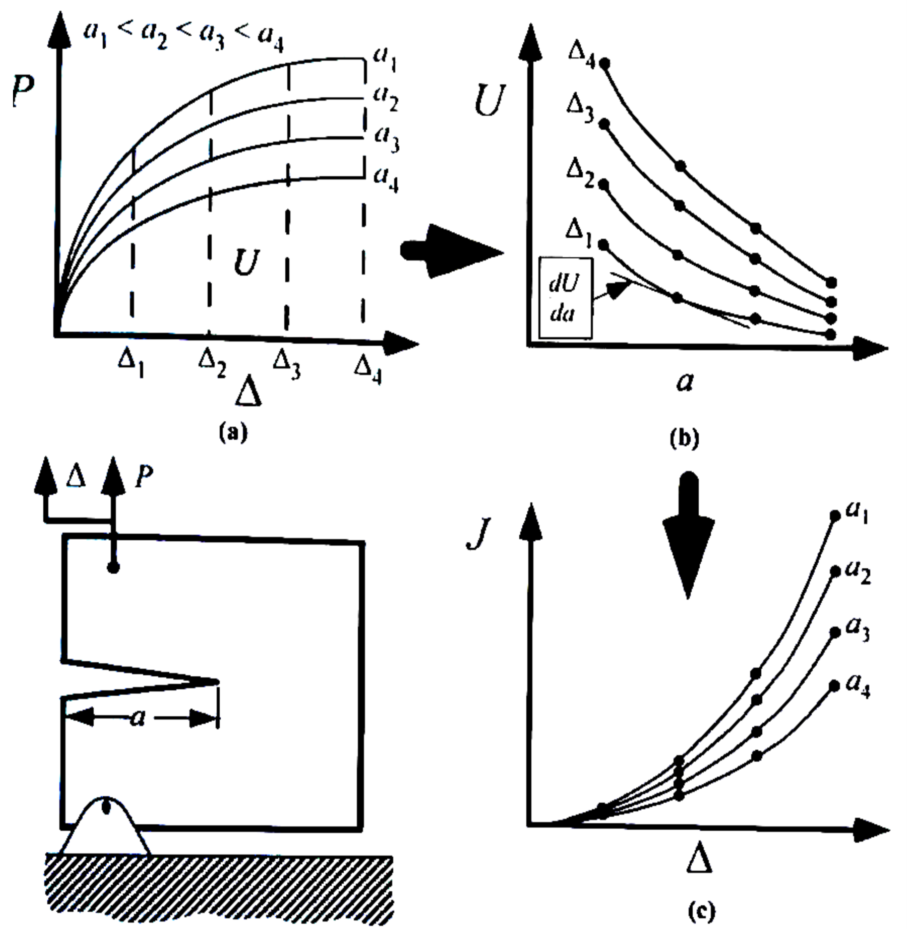
原理： 形变功率差法

计算：

$$J=-\frac{1}{B}\left(\frac{\partial U}{\partial a}\right)_{\Delta}$$

步骤：

- 取多个相同形状、尺寸、但裂纹尺寸不同的试样，测定 ***P*-Δ** 曲线；
- 计算 ***U***，绘制 ***U-a*** 曲线；
- 求 ***dU/da***，然后计算 ***J***；
- 绘制 ***J*-Δ**曲线，进行校正。

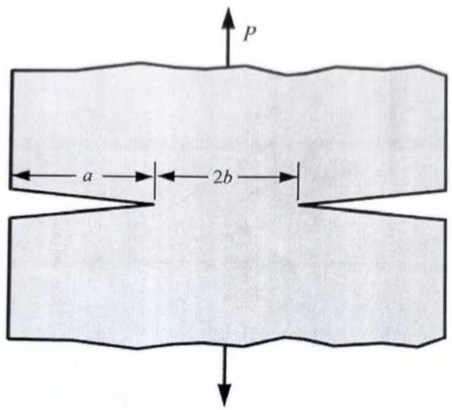


Schematic of early experimental measurements of *J*.

（2）单试样法- 双边裂纹拉伸

在特定条件下，可采用单试样的载荷-位移曲线来确定 J 积分。

对单位厚度双边裂纹板材拉伸试样，J 积分为：



$$J = \frac{1}{2}\int_0^P \left(\frac{\partial \Delta}{\partial a}\right)_P dP = -\frac{1}{2}\int_0^P \left(\frac{\partial \Delta}{\partial b}\right)_P dP \quad (1)$$

假设材料服从幂律硬化，由量纲分析得到：

$$\Delta = b\Phi\left(\frac{P}{\sigma_0 b};\frac{a}{b};\frac{\sigma_0}{E};\nu;\alpha;n\right) \quad (2)$$

令：$\Delta = \Delta_e + \Delta_p$ ，代入（1）式，得：

$$J = -\frac{1}{2}\int_0^P \left[\left(\frac{\partial \Delta_e}{\partial b}\right)_P + \left(\frac{\partial \Delta_p}{\partial b}\right)_P\right] dP = \frac{K_{\mathrm{I}}^2}{E'} - \frac{1}{2}\int_0^P \left(\frac{\partial \Delta_p}{\partial b}\right)_P dP \quad (3)$$

对于深裂纹的情况，可以得到：

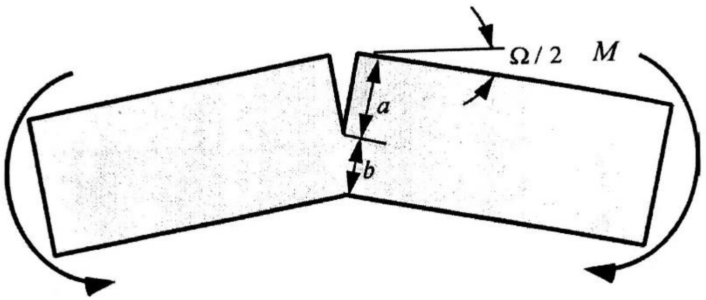
$$\boxed{J = \frac{K_{\mathrm{I}}^2}{E'} - \frac{1}{2b}\left[2\int_0^{\Delta_p} P d\Delta_p - P\Delta_p\right]} \quad (4)$$

（2）单试样法- 单边裂纹三点弯曲 – Rice方法

分析中采用倾转角来代替位移

无裂纹试样倾转角　　有裂纹试样倾转角附加量

$$\Omega = \Omega_{nc} + \Omega_c \qquad (1)$$



Edge-cracked plate in pure bending.

对深裂纹试样： $\Omega_c >> \Omega_{nc}$

试样吸收能量： $U = \int_0^{\Omega} M d\Omega \qquad (2)$

根据 Ω_{nc} 的定义，其值与裂纹尺度无关，因此：

$$J = \int_0^M \left(\frac{\partial \Omega_c}{\partial a}\right)_M dM = -\int_0^M \left(\frac{\partial \Omega_c}{\partial b}\right)_M dM \qquad (3)$$

由量纲分析，有：

$$\Omega_c = F\left(\frac{M}{b^2}\right) \qquad (4)$$

（2）单试样法-单边裂纹三点弯曲 - Rice方法（续）

对深裂纹试样，可假设只有 ***b*** 与尺度相关，则有（3）式可得：

$$J = \frac{2}{b}\int_0^{\Omega_c} M d\Omega_c \qquad (5)$$

将角位移 Ω_c 的分解成弹性位移和塑性位移两部分，则上式改写为：

$$J = \frac{2}{b}\left[\int_0^{\Omega_{c(e)}} M d\Omega_{c(e)} + \int_0^{\Omega_{c(p)}} M d\Omega_{c(p)}\right] \qquad (6)$$

或：

$$J = \frac{K_{\mathrm{I}}^2}{E'} \frac{2}{b}\int_0^{\Omega_p} M d\Omega_p \qquad (7)$$

一般来说，对多种几何形状的试样，***J*** 积分都可以写为如下能量形式：

$$J = \frac{\eta U_c}{Bb} \qquad (8)$$

$$J = \frac{\eta_e U_{c(e)}}{Bb} + \frac{\eta_p U_{c(p)}}{Bb} = \frac{K_{\mathrm{I}}^2}{E'} + \frac{\eta_p U_{c(p)}}{Bb} \qquad (9)$$

（2）单试样法 - 单边裂纹三点弯曲 - 陈篪方法

陈篪研究了深裂纹、短跨距的三点弯曲试样，通过弹塑性理论分析发现，在加载到给定位移（Δ）或者载荷（***P***）时，***J*** 积分与试样加载过程中所接受的变形功（***U***）、裂纹尺寸（***a***）、韧带尺寸（***W−a***）三者之间存在下列关系：

$$J = \frac{2U}{B\left(W - a\right)}$$

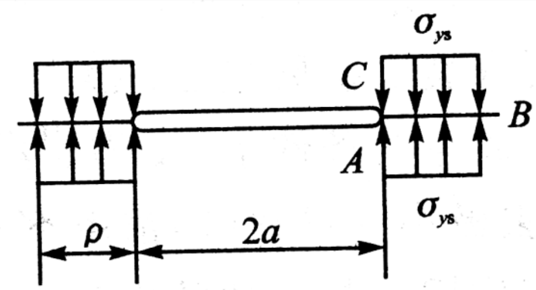
式中，***B*** －试样厚度；***a*** −裂纹长度；***W*** −试样宽度；***U*** −变形功。

$$U = \int_0^\Delta P d\Delta$$

2.2.2.4 *J* 与 CTOD 的关系

在裂纹尖端塑性区取回路*ABC*，*J* 积分为：

$$J = \int_{ABC}\left(wdy - \frac{\partial u_i}{\partial x}T_i dS\right) \qquad (1)$$



围绕Dugdale塑性区的 *J* 积分

沿*AB*、*BC*段，*dy*=0，*dS*=0，$T_i = -\sigma_{ys}$，所以：

$$J = -\int_{ABC}\left(-\sigma_{ys}\right)\frac{\partial u_y}{\partial x}dx = 2\int_B^C \sigma_{ys}\frac{\partial u_y}{\partial x}dx = 2\sigma_{ys}\left[\left(u_y\right)_C - \left(u_y\right)_B\right] \qquad (2)$$

但 $(u_y)_B$ =0，则（2）式变为： $J = 2\sigma_{ys}\left(u_y\right)_C = \sigma_{ys}\delta$ （3）

将Dugdale模型的CTOD值代入（3）式，可得：

$$J = \sigma_{ys}\delta = \frac{8\sigma_{ys}^2 a}{\pi E}\ln\sec\left(\frac{\pi\sigma}{2\sigma_{ys}}\right) \qquad (4)$$

实验及FEM分析表明： $J = k\sigma_{ys}\delta$

k **=1.1～2.0 之间，与试样几何、约束条件、材料硬化特性有关**

2.2.2.5 *J* 控制断裂 – *J* 主导区

强烈变形区 R_f　　*J* 主导区r_j　　*K* 主导区r_s

（a）小范围屈服

$r_f < r_j < r_s$

J 主导

K 主导　$\frac{r}{a} \le \frac{1}{20}$

（b）大范围屈服

$r_f < r_j \ge r_s$

J 主导　$3\delta \le r \le r_j$

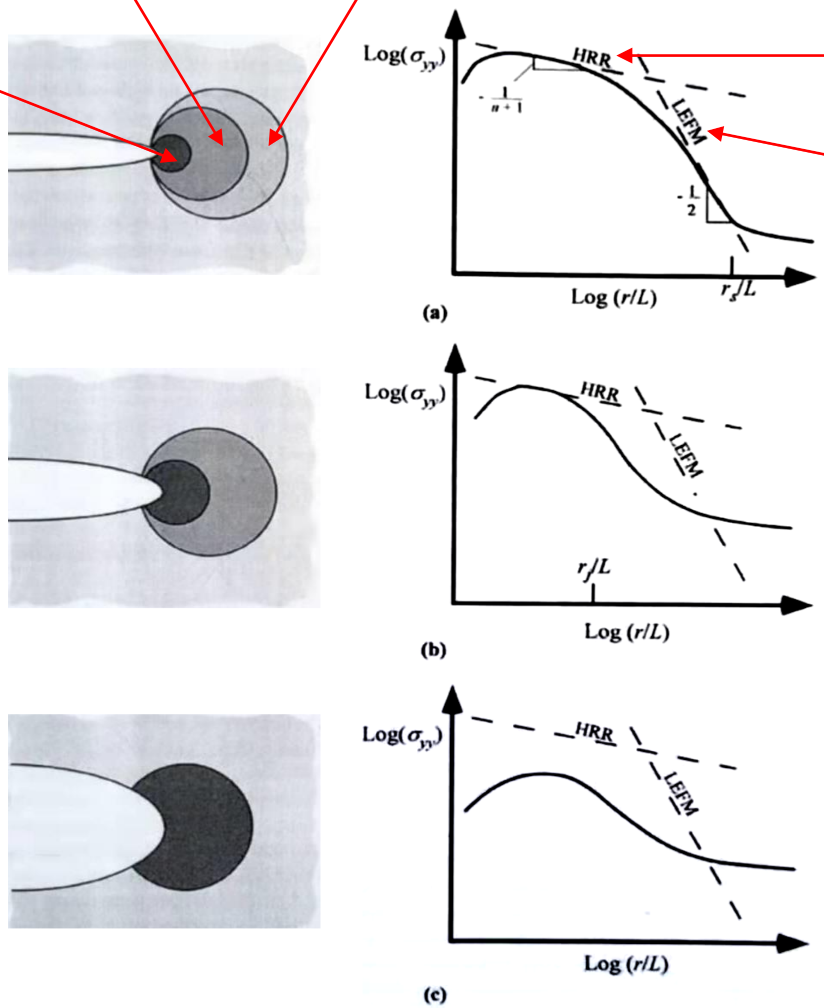
K 失效

（c）全屈服

$r_f \ge r_j = r_s$

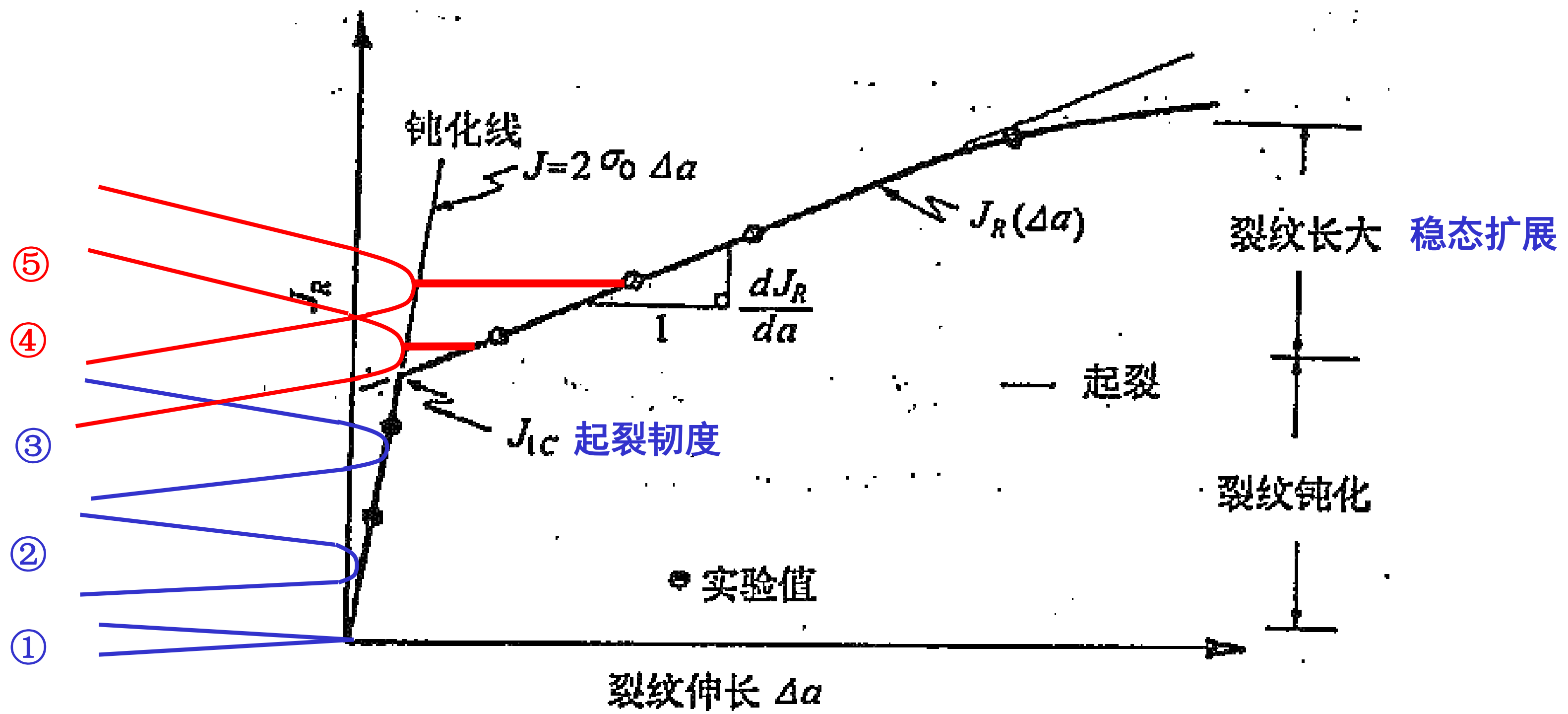
J 失效

K 失效



塑性对裂尖应力场的影响

2.2.2.5 *J* 控制断裂 – *J* 阻力曲线



撕裂模量：

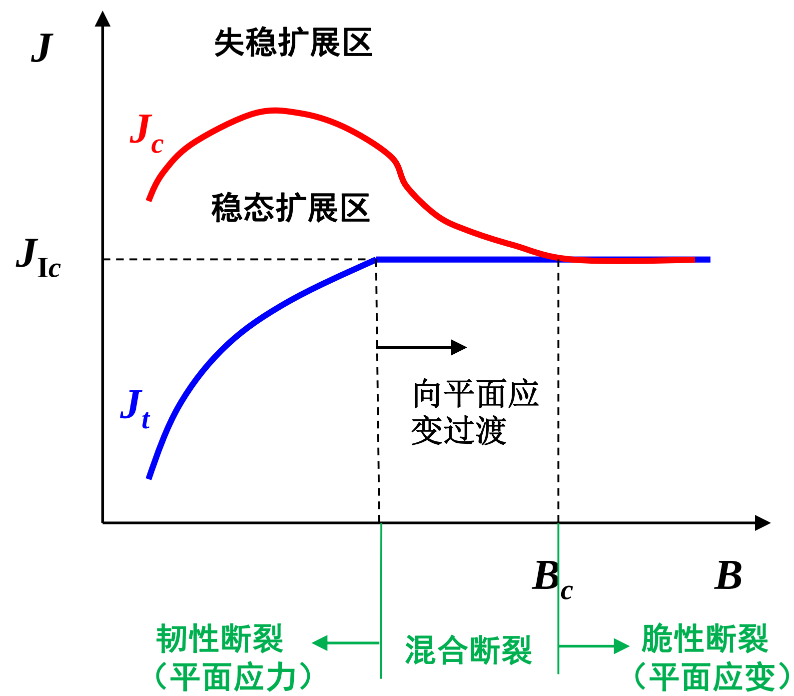
$$T_R = \frac{E}{\sigma_0^2}\frac{dJ_R}{da}$$

2.2.2.6 *J* 积分准则

$$J_{\mathrm{I}} = J_{\mathrm{IC}}$$

弹塑性裂纹扩展过程可分为稳态扩展和失稳扩展两部分。利用 *J* 积分可求出稳态扩展开始值J_t（门槛值）以及失稳扩展临界值 J_c。

- 若取开裂点确定 *J* 积分，为开裂判据
- 若取失稳点确定 *J* 积分，为断裂判据
- J_t和 J_c 随厚度的变化有不同的变化趋势



J 积分优缺点

优点：

- 与CTOD相比较，理论根据严格，定义明确
- 用FEM能够计算不同受力情况与各种形状结构的 *J* 积分，而CTOD准则的计算公式仅限于简单的几何形状和受力情况
- 实验测定方便

缺点：

- 限于二维情况，对表面裂纹尚待研究
- *J* 积分准则一般用于裂纹开裂点，不适用于失稳扩展，故用于确定结构承载能力时，则过于保守

断裂力学方法及参量

基本步骤	线弹性断裂：局部参数法	线弹性断裂：能量法	弹塑性断裂：局部参数法	弹塑性断裂：能量法
裂纹尖端应力场	$\sigma_{i,j}$	$\sigma_{i,j}$	$u_{i,j}$	$\sigma_{i,j}$
断裂力学场参量	K	G	δ	J
场参量临界值	K_C	G_C（R_C）	δ_C	J_C
断裂判据	$K \geq K_C$	$G \geq G_C$	$\delta \geq \delta_C$	$J \geq J_C$

应用： 结构设计、材料选择、安全校核