



2.1 线弹性断裂力学

2.1.1 断裂强度

2.1.2 断裂的能量分析

2.1.3 裂纹尖端应力场

2.1.4 应力场强度因子

2.1.5 裂纹尖端塑性区及等效裂纹修正

2.1.6 临界应力场强度因子（断裂韧度）

2.1.7 断裂判据

2.1.8 断裂控制设计准则

2.1.9 断裂力学在工程断裂分析中的应用

2.1.1 断裂强度



2.1.1.1 理论断裂强度

同时拉开单位面积上下原子键合所需的平均应力

- 原子间结合力随原子间距离变化为函数关系

$$\sigma = \sigma_m \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) \doteq \sigma_m \frac{2\pi x}{\lambda} \quad (1)$$

- 断裂时满足能量平衡：

$$\underbrace{W}_{\text{结合能}} = \int_0^{\frac{\lambda}{2}} \sigma_m \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) dx = \underbrace{2\gamma_s}_{\text{表面能}} \quad (2)$$

- 小位移情况下，Hooke定律也适用：

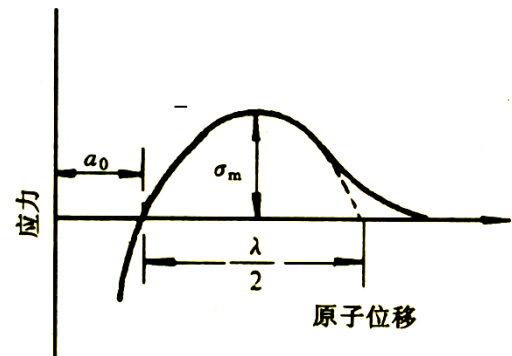
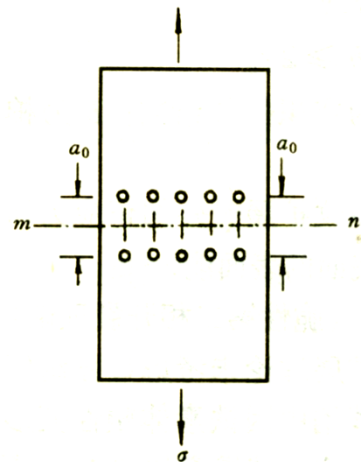
$$\sigma = E\varepsilon = \frac{Ex}{a_0} \quad (3)$$

理论强度：

$$\sigma_m = \left(\frac{E\gamma_s}{a_0}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (4)$$

近似值：

$$\sigma_m \approx \frac{E}{10} \quad (5)$$

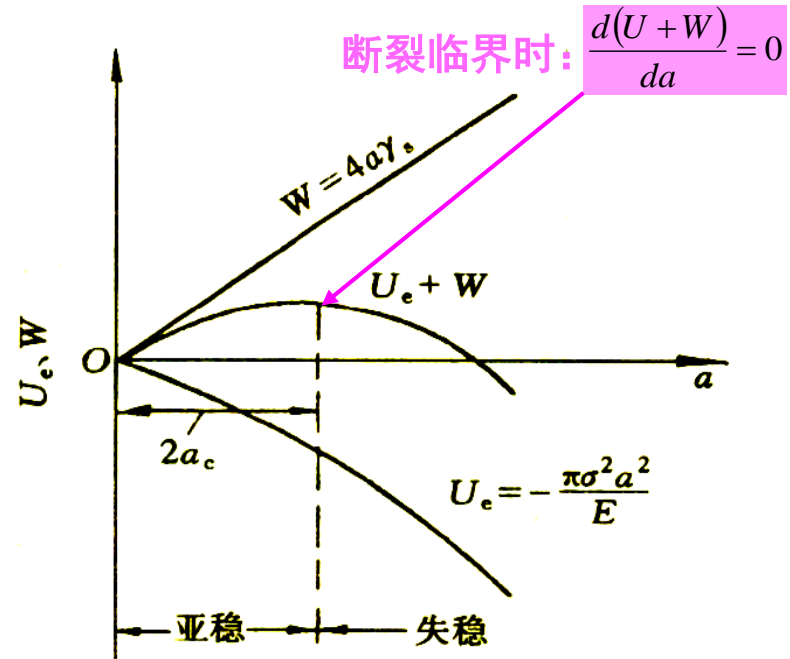
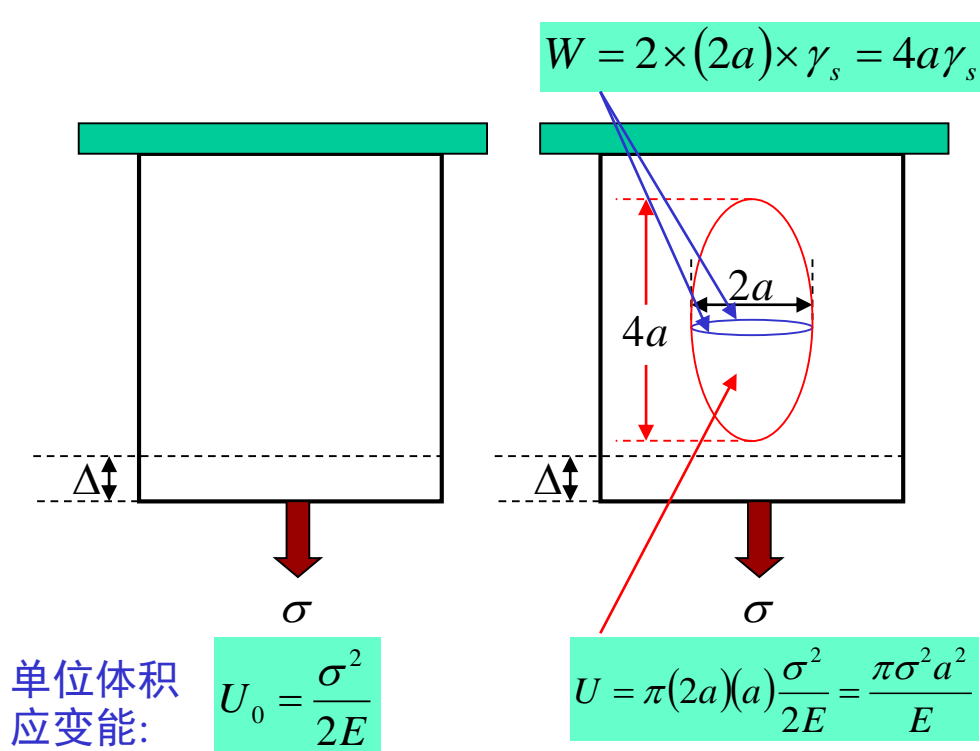


双原子模型估算理论强度示意图



2.1.1.2 实际断裂强度-Griffith方程 (1921)

能量平衡原理：断裂条件是弹性释放能足以补偿新表面能的产生。



裂纹尺寸与能量的关系

Griffith应力:

$$\sigma_c = \left(\frac{2E\gamma_s}{\pi a} \right)^{\frac{1}{2}} \approx \left(\frac{E\gamma_s}{a} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Griffith强度与理论强度对比:

$$\frac{\sigma_m}{\sigma_c} = \left(\frac{a}{a_0} \right)^{\frac{1}{2}}$$

2.1.1.3 韧性固体的断裂强度-Orowan方程



对于常用工程金属材料:

$$\sigma_c = \sqrt{\frac{2E(\gamma_s + \gamma_p)}{\pi a}}$$

$$\sigma_c \doteq \sqrt{\frac{2E\gamma_p}{\pi a}}$$

形成单位裂纹表面所耗塑性变形功

对于不同断裂机制的料:

$$\sigma_c \doteq \sqrt{\frac{2Ew_f}{\pi a}}$$

断裂能

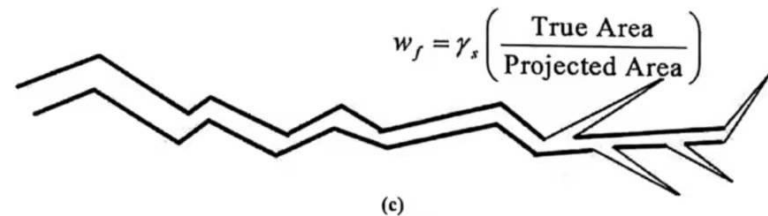
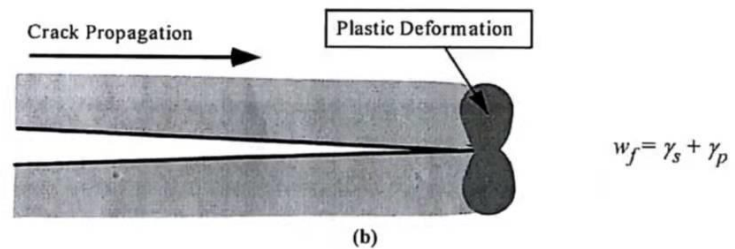
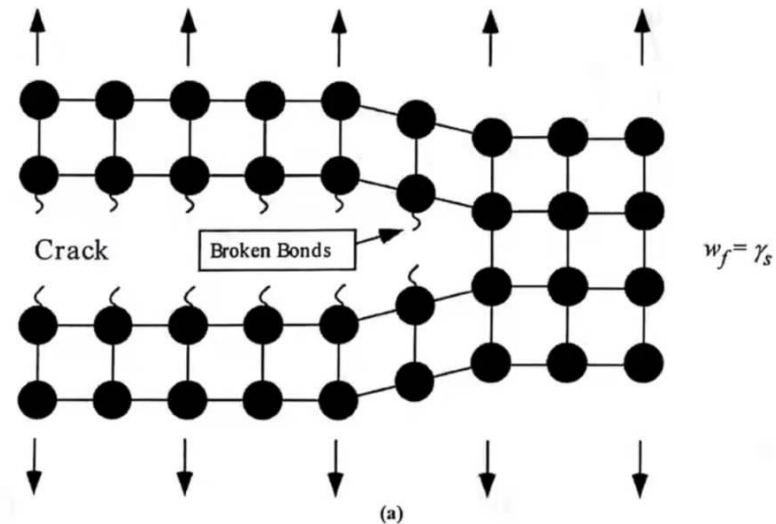


FIGURE 2.6 Crack propagation in various types of materials, with the corresponding fracture energy. (a) ideally brittle material, (b) quasi-brittle elastic-plastic material and, (c) brittle material with crack meandering and branching.



2.1.2 断裂的能量分析

2.1.2.1 裂纹扩展过程中的能量变化

设有一裂纹体，裂纹面积为 A ($=a \times B$, B 为板厚)，在外力 P 增加 dP 时，板施力点位移增加 $d\Delta$ ，裂纹扩展 dA 面积（裂纹长度增加 da ）。

四种能量发生变化：

- 外力做功 dW
- 系统弹性应变能释放 ($-dU$)
- 裂纹表面能增加 $d\Gamma_s$
- 裂尖塑性变形功耗散 $d\Gamma_p$

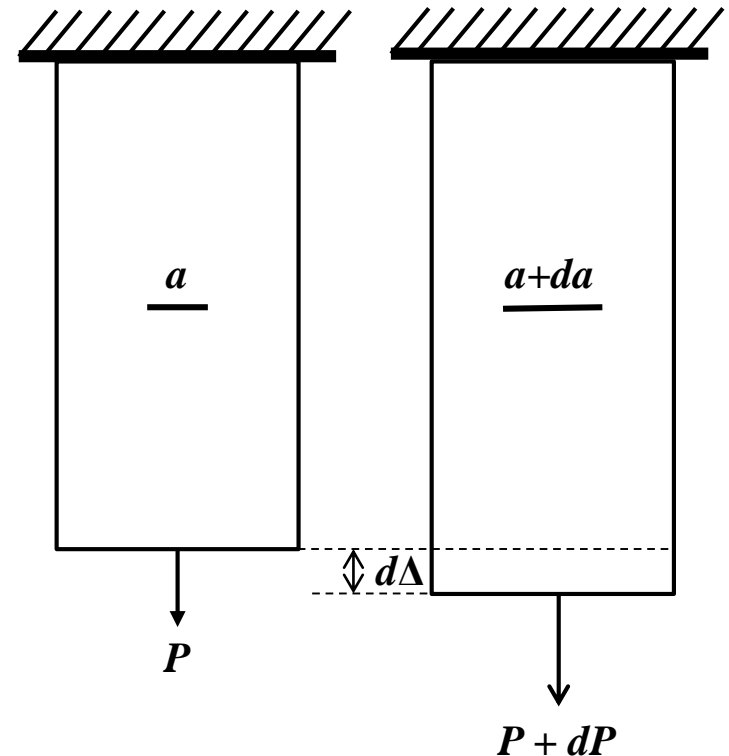
根据能量守恒和转换定律,有:

$$dW - dU = d\Gamma_s + d\Gamma_p \quad (1)$$

裂纹扩展动力 $-d\Pi$

裂纹扩展阻力

(裂纹体释放的势能)



2.1.2.2 裂纹扩展能量释放率 G



Irwin定义：裂纹扩展单位面积时，系统释放的能量称为裂纹扩展能量释放率，用 G 表示：

$$G = -\left(\frac{\partial \Pi}{\partial A}\right) = -\frac{\partial(U - W)}{\partial A} \quad (2)$$

或：

$$G = \frac{\partial W}{\partial A} - \frac{\partial U}{\partial A} \quad (3)$$

在裂纹扩展 dA 面积时，有：

$$GdA = \left(\frac{\partial W}{\partial A}\right)dA - \left(\frac{\partial U}{\partial A}\right)dA = dW - dU \quad (4)$$

或：

$$dW = dU + GdA \quad (5)$$

外力所作的功 dW 除了提供应变能增量 dU 之外，其余部分用于推动裂纹向前扩展 dA 面积所消耗的能量 GdA 。

$$dW = Pd\Delta$$



(2) 恒位移条件

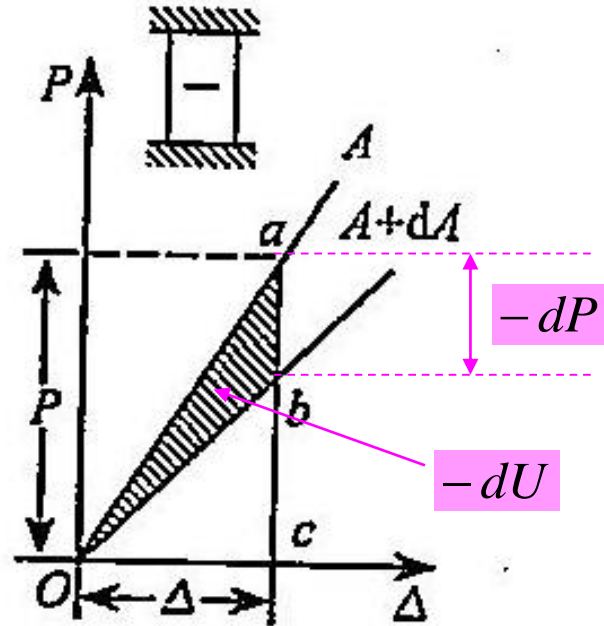
- $d\Delta = 0$
 - 取 $\Delta = 0$
- } $dW = 0$

代入 (4) 式, 有:

$$G = -\left(\frac{\partial U}{\partial A}\right)_{\Delta} \quad (7)$$

表明在恒位移条件下, 使裂纹扩展的能量只能由构件释放出的应变能来提供。即:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial a}\right)_P = -\left(\frac{\partial U}{\partial a}\right)_{\Delta} \quad (8)$$



2.1.2.5 裂纹扩展阻力 R

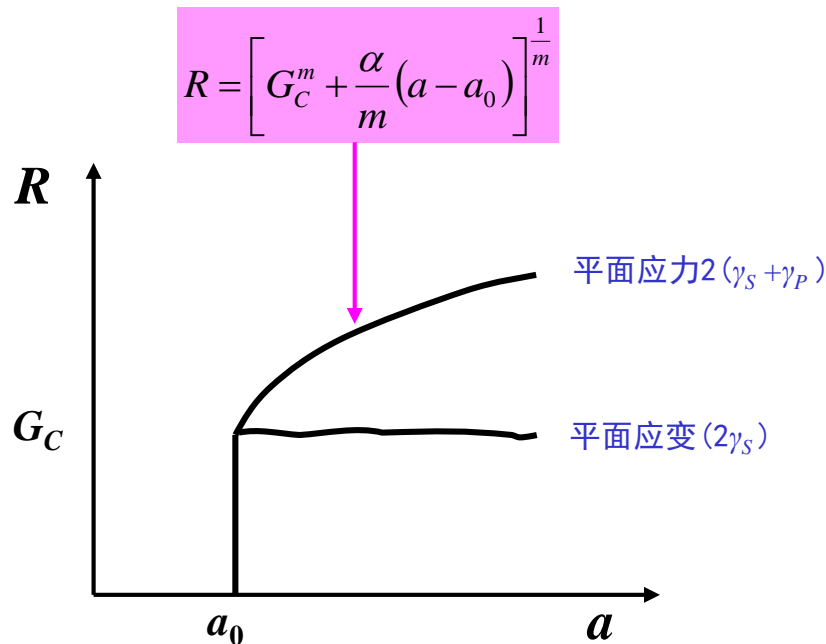


裂纹扩展单位面积所需消耗的能量为裂纹扩展阻力，用 R 表示：

$$R = \frac{\partial \Gamma_S}{\partial A} + \frac{\partial \Gamma_P}{\partial A}$$

$$R = 2(\gamma_S + \gamma_P)$$

仅当 $G > R$ 时，裂纹才能扩展。而 R 是随裂纹尺寸而变化的，当 $a \rightarrow a_C$ 时， $R \rightarrow R_C$ ，即达到临界扩展阻力，此时 R_C 也称为断裂韧度，记为 G_C 。

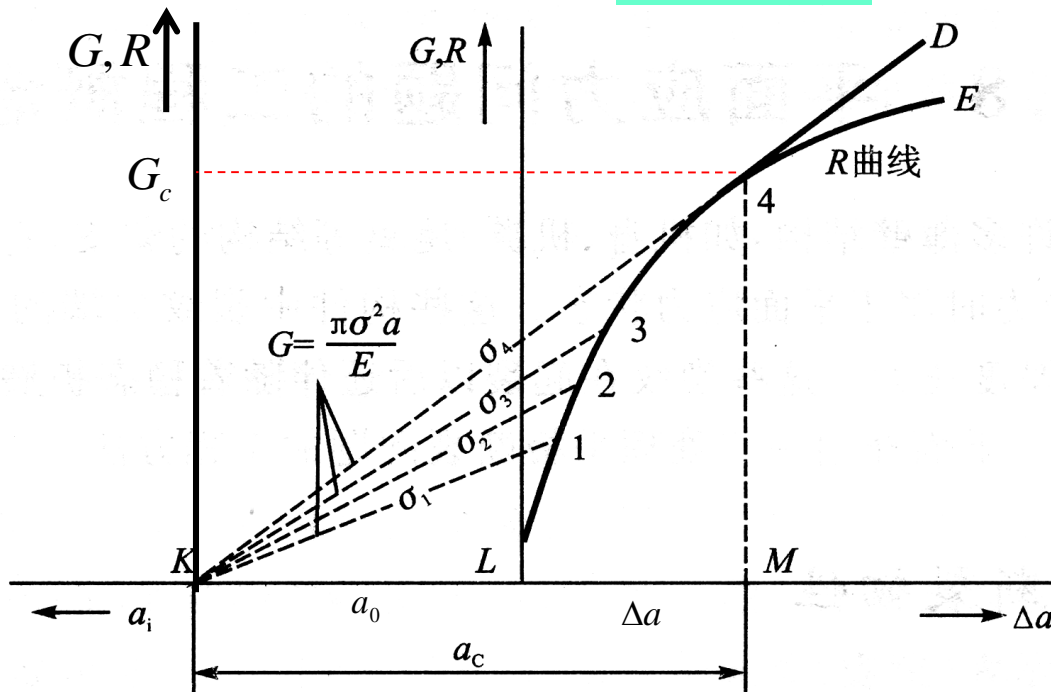


平面应力和平面应变状态的 R 曲线

2.1.2.6 断裂能量判据



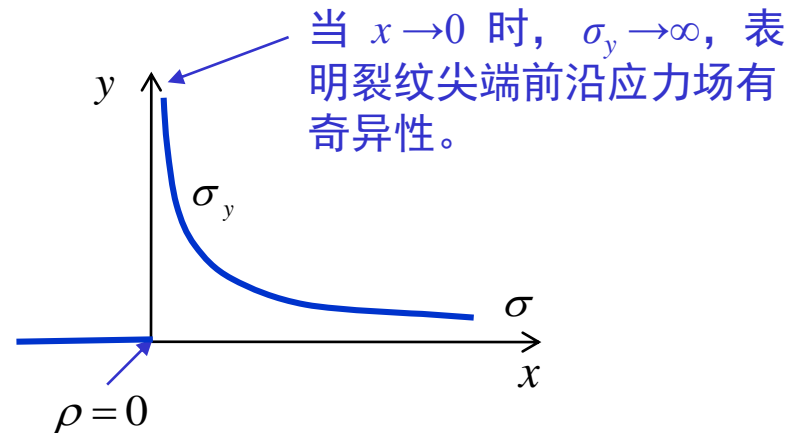
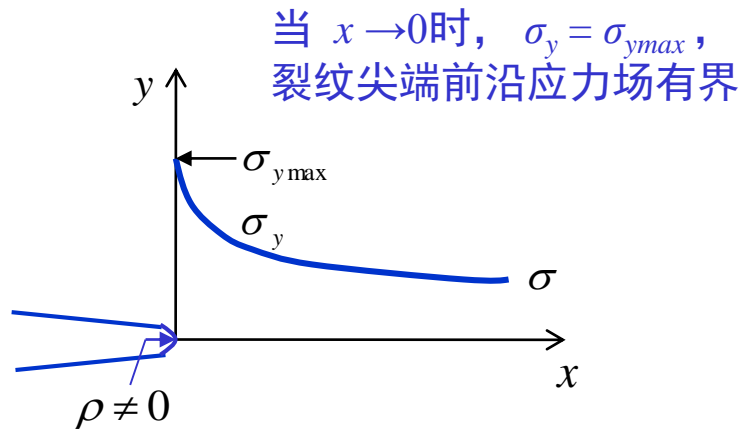
$$G \geq G_c$$



$$\left\{ \begin{array}{l} G = G_c(R_c) \quad \text{必要条件} \\ \frac{\partial G}{\partial a} = \frac{\partial R}{\partial a} \quad \text{充分条件} \end{array} \right.$$

裂纹稳定扩展和失稳扩展时 G 与 R 的关系

2.1.3 裂纹尖端应力场



缺口顶端最大应力

$$\sigma_{y\max} = \sigma \left(1 + 2\sqrt{\frac{a}{\rho}} \right)$$

当 $\rho \rightarrow a_0$ 时:

$$\sigma_{y\max} = 2\sigma \sqrt{\frac{a}{a_0}}$$

裂纹顶端应力场

沿裂纹延长面上

$$\sigma_y \propto x^{-\frac{1}{2}}$$

$$\sigma_y = Kx^{-\frac{1}{2}}$$

或

$$K = x^{\frac{1}{2}} \cdot \sigma_y$$

?

弹性力学平面问题的基本方程



平衡方程：

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} &= 0\end{aligned}$$

几何方程：

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\end{aligned}$$

平面应力状态

物理方程：

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy}\end{aligned}$$

平面应变状态

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E}[(1-\nu^2)\sigma_x - \nu(1+\nu)\sigma_y] \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}[(1-\nu^2)\sigma_y - \nu(1+\nu)\sigma_x] \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy}\end{aligned}$$

相容方程：

应变表示

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}$$

应力表示

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} = 0$$

或

$$\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = 0$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$



平面问题的应力函数解法

根据弹性力学，应力分量可由**Airy应力函数** ϕ 给出：

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}$$

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y) \quad (\text{平面应变})$$

$$\sigma_z = 0 \quad (\text{平面应力})$$

ϕ 函数本身满足**双调和方程**：

$$\nabla^4 \Phi = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} = 0$$

应力**边界条件**：

$$\tau_{xy}l + \sigma_y m = \bar{Y}$$

$$\sigma_x l + \tau_{xy} m = \bar{X}$$

用直接求导法可证明，双调和函数 ϕ 可以用三个调和函数 ϕ_1 、 ϕ_2 、 ϕ_3 以如下组合的形式表示：

$$\Phi = \Phi_1 + x\Phi_2 + y\Phi_3$$

复变解析函数的基本定理



在 $z = x+iy$ 平面的 D 域中, 若复变函数 $f(z)$ 满足以下两条件, 则为**解析函数**:

- D 域内任一点, 可用极限的方法决定其导数;
- 且导数是唯一的, 与 dz 趋近于零的路径无关。

定理① $f(z)$ 是解析函数的必要与充分条件是满足**Cauchy-Riemann条件**:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \operatorname{Re} f(z)}{\partial x} = \frac{\partial \operatorname{Im} f(z)}{\partial y} \\ \frac{\partial \operatorname{Re} f(z)}{\partial y} = -\frac{\partial \operatorname{Im} f(z)}{\partial x} \end{array} \right.$$

定理② 若 $f(z)$ 是解析函数, 则其实部和虚部均为**调和函数**:

$$\nabla^2 \operatorname{Re} f(z) = 0$$

$$\nabla^2 \operatorname{Im} f(z) = 0$$

$$\nabla^2 () = 0$$

定理③ 若 $f(z)$ 是解析函数, 则其一阶导数 $f'(z)$ 、二阶导数 $f''(z)$ 及一次积分 $\bar{f}(z)$ 、二次积分 $\bar{\bar{f}}(z)$ 均为解析函数。推论它们的实部和虚部均为调和函数。

定理④ 若 $f(z)$ 是解析函数, 则函数 $\Phi = \operatorname{Re} \bar{f}(z) + y \operatorname{Im} \bar{f}(z)$ 必为双调和函数

$$\nabla^4 \Phi = 0$$

应力函数的复变函数表示



根据平面问题的复变函数解法，应力函数总可以由两个复变解析函数 $\phi(z)$ 和 $\chi(z)$ 表示为：

$$\Phi = \operatorname{Re} \chi(z) + x \operatorname{Re} \phi(z) + y \operatorname{Im} \phi(z)$$

式中， $z = x + iy$ ， $\bar{z} = x - iy$ 为共轭复数

或：

$$\Phi = \operatorname{Re}[\bar{z}\phi(z) + \chi(z)]$$

2个复变函数组成

或：

$$\Phi = \operatorname{Re} \bar{f}(z) + y \operatorname{Im} \bar{f}(z)$$

1个复变函数组成

2.1.3.1 I 型裂纹的应力场 (Westergaard复变函数解法)



Westergaard假设应力函数 ϕ 可由复变解析函数 $Z_I(z)$ 表示为:

$$\Phi_I(x, y) = \operatorname{Re} \bar{\bar{Z}}_I(z) + y \operatorname{Im} \bar{\bar{Z}}_I(z) \quad (1)$$

则应力分量可表示为:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi_I}{\partial y^2} = \operatorname{Re} Z_I(z) - y \operatorname{Im} Z_I'(z)$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi_I}{\partial x^2} = \operatorname{Re} Z_I(z) + y \operatorname{Im} Z_I'(z)$$

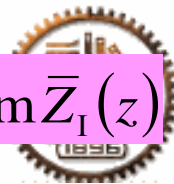
$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi_I}{\partial x \partial y} = -y \operatorname{Re} Z_I'(z)$$

(2) 由 1 个复变解析函数及其导数的组合表示

由Westergaard复变函数法求解应力场时, 关键是应力函数 $Z_I(z)$ 的选取, 这取决于边界条件。若能选取满足边界条件的合适的应力函数, 则可由 (2) 式求得应力分量, 再由物理方程求出应变分量, 进而再由几何方程对应变分量积分得到位移分量。

应力分量的复变函数表达式推导

$$\Phi_I(x, y) = \operatorname{Re} \bar{\bar{Z}}_I(z) + y \operatorname{Im} \bar{Z}_I(z)$$



$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi_I}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \operatorname{Re} \bar{\bar{Z}}_I(z) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} [y \operatorname{Im} \bar{Z}_I(z)]$$

由Cauchy-Riemann条件，有：

$$\begin{aligned} \frac{\partial \operatorname{Re} Z_I(z)}{\partial x} &= \frac{\partial \operatorname{Im} Z_I(z)}{\partial y} = \operatorname{Re} Z'_I(z) \\ \frac{\partial \operatorname{Im} Z_I(z)}{\partial x} &= -\frac{\partial \operatorname{Re} Z_I(z)}{\partial y} = \operatorname{Im} Z'_I(z) \end{aligned}$$

则有：

$$\frac{\partial^2 \operatorname{Re} \bar{\bar{Z}}_I(z)}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial \operatorname{Re} \bar{\bar{Z}}_I(z)}{\partial y} \right] = \frac{\partial}{\partial y} [-\operatorname{Im} \bar{Z}_I(z)] = -\operatorname{Re} Z_I(z)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} [y \operatorname{Im} \bar{Z}_I(z)] = \frac{\partial}{\partial y} [\operatorname{Im} \bar{Z}_I(z) + y \operatorname{Re} Z_I(z)] = \operatorname{Re} Z_I(z) + \operatorname{Re} Z_I(z) - y \operatorname{Im} Z'_I(z) = 2\operatorname{Re} Z_I(z) - y \operatorname{Im} Z'_I(z)$$

将此两式相加，得： $\sigma_x = \operatorname{Re} Z_I(z) - y \operatorname{Im} Z'_I(z)$

按同样方法可求得 $\sigma_y = \frac{\partial \Phi_I}{\partial x^2}$ 和 $\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi_I}{\partial x \partial y}$ 的表达式



位移分量的复变函数表达式

将所求得的应力分量 (σ_x 、 σ_y 、 τ_{xy}) 代入弹性力学平面问题的物理方程和几何方程，经积分后，可得 x 方向位移 u 和 y 方向位移 v 。

平面应力状态：

$$u = \frac{1}{E} [(1 - \nu)\text{Re}\bar{Z}_I - (1 + \nu)y\text{Im}Z_I]$$

$$v = \frac{1}{E} [2\text{Im}\bar{Z}_I - (1 + \nu)y\text{Re}Z_I]$$

平面应力状态：

$$u = \frac{1 + \nu}{E} [(1 - 2\nu)\text{Re}\bar{Z}_I - y\text{Im}Z_I]$$

$$v = \frac{1 + \nu}{E} [2(1 - \nu)\text{Im}\bar{Z}_I - y\text{Re}Z_I]$$

(3)

受双向拉伸应力的情况（边界条件）



逆解法：

假设应力函数：

$$Z_I(z) = \frac{\sigma z}{\sqrt{z^2 - a^2}} \quad (4)$$

一阶导数为：

$$Z_I'(z) = -\frac{\sigma a^2}{(z^2 - a^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (5)$$

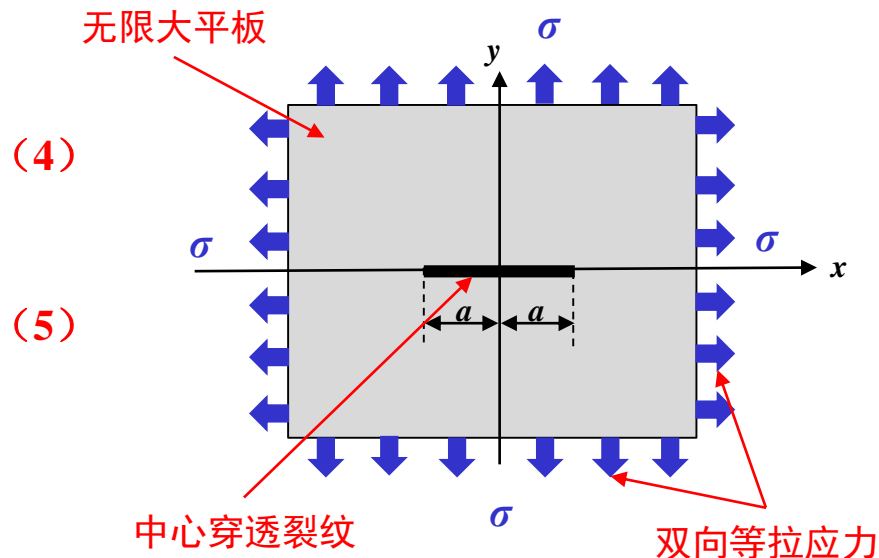
考察边界条件：

在 $z \rightarrow \infty$ 处： $Z_I(z) = \sigma$ $Z_I'(z) = 0$ $\sigma_x = \sigma_y$ $\tau_{xy} = 0$

在 $y = 0$ 处： $\tau_{xy} = 0$ $\sigma_x = \sigma_y = \operatorname{Re} Z_I(z)$

- 在 $|x| < a$ 处， $\sqrt{z^2 - a^2}$ 为一虚数，此时 $\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0$
- 在 $x = \pm a$ 处， $Z_I(z) = \infty$ 时，裂纹尖端应力场存在奇异性

函数 $Z_I(z)$ 满足此问题全部边界条件，因而它是本问题的应力函数的解！



极坐标表示法



极坐标 r 、 θ 与 z 坐标的关系为: $z = a + re^{i\theta}$

极坐标表示的应力函数为: $Z_1(r, \theta) = \frac{\sigma(a + re^{i\theta})}{\sqrt{(2a + re^{i\theta})} re^{i\theta}}$ (6)

当 $\theta = 0$ (即 $y = 0$) 时, 在裂纹延长线上有 $Z_1(r, \theta)_{y=0} = \frac{\sigma(a + r)}{\sqrt{(2a + r)r}}$ (7)

当 θ 为任何值时: $Z_1(r, \theta) = \frac{\sigma a \left(1 + \frac{r}{a} e^{i\theta}\right)}{a \sqrt{\left[2 \frac{r}{a} + \left(\frac{r}{a}\right)^2 e^{i\theta}\right]} e^{i\theta}}$ (8)

当 $(r/a) \ll 1$ 时, 分子可略去 (r/a) 项, 分母可略去 $(r/a)^2$ 项, 得到:

$$Z_1(r, \theta) = \frac{\sigma \sqrt{a}}{\sqrt{2r}} e^{-i\frac{\theta}{2}} = \frac{\sigma \sqrt{a}}{\sqrt{2r}} \left(\cos \frac{\theta}{2} - i \sin \frac{\theta}{2} \right) \quad (9)$$

$$Z_1'(r, \theta) = -\frac{\sigma}{2r} \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2r}} \cos \frac{3\theta}{2} + i \frac{\sigma}{2r} \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2r}} \sin \frac{3\theta}{2} \quad (10)$$

裂纹尖端应力场



如直角坐标原点亦置于裂纹尖端，则有 $y=r\sin\theta$ ，将以上各式代入（2）式

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\sigma\sqrt{a}}{\sqrt{2r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right) \\ \sigma_y &= \frac{\sigma\sqrt{a}}{\sqrt{2r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right) \\ \tau_{xy} &= \frac{\sigma\sqrt{a}}{\sqrt{2r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

令：

$$K_I = \sigma\sqrt{\pi a} \quad (12)$$

得到：

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right) \\ \sigma_y &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right) \\ \tau_{xy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

位置函数

$$\sigma_{ij} = K_I f_{(i,j)}(r, \theta)$$

应力场强度参数



裂纹尖端位移场

复变函数表示

平面应力状态

$$\begin{cases} u = \frac{1}{E} [(1-\nu)\text{Re}\bar{Z}_I - (1+\nu)y\text{Im}Z_I] \\ v = \frac{1}{E} [2\text{Im}\bar{Z}_I - (1+\nu)y\text{Re}Z_I] \end{cases}$$

平面应变状态

$$\begin{cases} u = \frac{1+\nu}{E} [(1-2\nu)\text{Re}\bar{Z}_I - y\text{Im}Z_I] \\ v = \frac{1+\nu}{E} [2(1-\nu)\text{Im}\bar{Z}_I - y\text{Re}Z_I] \end{cases}$$

位移场

平面应变状态

$$\begin{cases} u = \frac{1+\nu}{E} K_I \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 - 2\nu + \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right] \\ v = \frac{1+\nu}{E} K_I \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left[2 - 2\nu - \cos^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right] \end{cases}$$

统一表达式

$$\begin{cases} u = \frac{K_I}{4\mu} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \left[(2k-1) \cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{3\theta}{2} \right] \\ v = \frac{K_I}{4\mu} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \left[(2k+1) \sin \frac{\theta}{2} - \sin \frac{3\theta}{2} \right] \end{cases}$$

应力场强度参数

位置函数 位置函数

$$u_{ij} = \left(\frac{1+\nu}{E} \right) K_I h_{(i,j)}(r, \theta)$$

平面应力: $k = (3-\nu)/(1+\nu)$

平面应变: $k = 3 - 4\nu$

2.1.3.4 II 型裂纹的应力场



应力函数

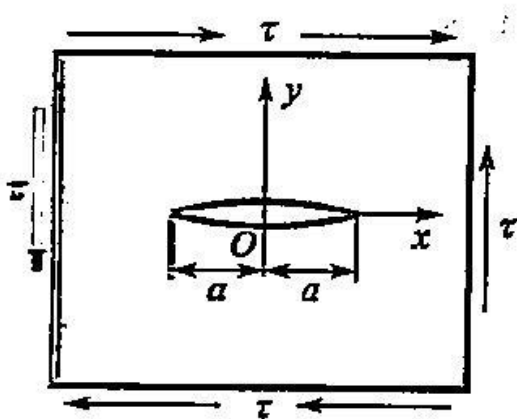
$$\Phi_{II}(x, y) = -y \operatorname{Re} \bar{Z}_{II}(z) \quad Z_{II}(z) = \frac{\tau z}{\sqrt{z^2 - a^2}}$$

应力分量表达式

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi_{II}}{\partial y^2} = 2 \operatorname{Im} Z_{II}(z) + y \operatorname{Re} Z'_{II}(z)$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi_{II}}{\partial x^2} = -y \operatorname{Re} Z'_{II}(z)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi_{II}}{\partial x \partial y} = \operatorname{Re} Z_{II}(z) - y \operatorname{Im} Z'_{II}(z)$$



裂尖应力场

$$\sigma_x = -\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \left(2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right)$$

$$\sigma_y = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right)$$

$$K_{II} = \tau \sqrt{\pi a}$$

2.1.3.5 III 型裂纹的应力场



协调方程

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$$

应力函数

$$w(x, y) = \frac{1}{\mu} \text{Im} \bar{Z}_{\text{III}}(z)$$

$$Z_{\text{III}} = \frac{\tau z}{z^2 - a^2}$$

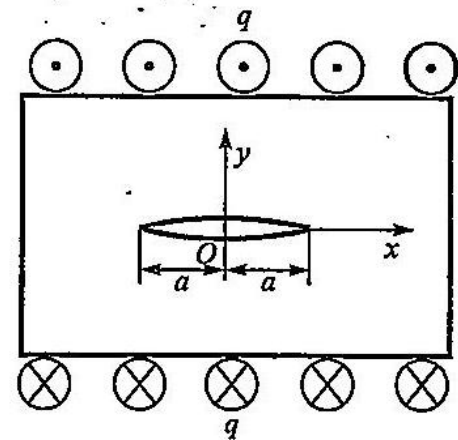
应力分量表达式

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_{zx} = \mu \frac{\partial w}{\partial x} = \text{Im} Z_{\text{III}}(z) \\ \tau_{yz} = \mu \frac{\partial w}{\partial y} = \text{Re} Z_{\text{III}}(z) \end{array} \right.$$

裂尖应力场

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_{zx} = -\frac{K_{\text{III}}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \\ \tau_{yz} = \frac{K_{\text{III}}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \end{array} \right.$$

$$K_{\text{III}} = \tau \sqrt{\pi a}$$





2.1.4 应力强度因子

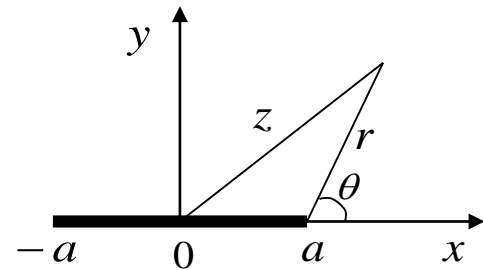
2.1.4.1 应力场强度因子的定义

所有情况下，裂纹尖端的应力分量都可以表示为：

$$\sigma_{ij} = \frac{K_M}{\sqrt{2\pi r}} g(\theta) \quad M = \text{I, II, III}$$

或：

$$K_M = \sqrt{2\pi r} \cdot \sigma_{ij} \cdot \frac{1}{g(\theta)}$$



定义：

由应力分量求 K

由应力函数求 K

直角坐标（原点在裂纹中心）

极坐标（原点在裂纹端点）

复坐标（原点在裂纹中心）

$$K_{\text{I}} = \lim_{x \rightarrow a} \sqrt{2\pi(x-a)} \cdot \sigma_y(x,0)$$

$$K_{\text{I}} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \cdot \sigma_y(r,0)$$

$$K_{\text{I}} = \sqrt{2\pi} \lim_{z \rightarrow z_1} \sqrt{z - z_1} \cdot Z_{\text{I}}(z)$$

$$K_{\text{II}} = \lim_{x \rightarrow a} \sqrt{2\pi(x-a)} \cdot \tau_{xy}(x,0)$$

$$K_{\text{II}} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \cdot \tau_{xy}(r,0)$$

$$K_{\text{II}} = \sqrt{2\pi} \lim_{z \rightarrow z_1} \sqrt{z - z_1} \cdot Z_{\text{II}}(z)$$

$$K_{\text{III}} = \lim_{x \rightarrow a} \sqrt{2\pi(x-a)} \cdot \tau_{zx}(x,0)$$

$$K_{\text{III}} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \cdot \tau_{zx}(r,0)$$

$$K_{\text{III}} = \sqrt{2\pi} \lim_{z \rightarrow z_1} \sqrt{z - z_1} \cdot Z_{\text{III}}(z)$$

裂纹尖端的复坐标

例：由复变应力函数直接求应力强度因子



无限大板、中心穿透裂纹、双向拉伸

复变应力函数：
$$Z_I(z) = \frac{\sigma z}{\sqrt{z^2 - a^2}} \quad (1)$$

K 的应力函数定义：
$$K_I = \sqrt{2\pi} \lim_{z \rightarrow z_1} \sqrt{z - z_1} \cdot Z_I(z) \quad (2)$$

将（1）式代入（2）试，且注意到 $z_1 = a$

则可得：
$$K_I = \sqrt{2\pi} \lim_{z \rightarrow a} \frac{\sigma z}{\sqrt{z^2 - a^2}} \sqrt{z - a} = \sigma \sqrt{\pi a}$$



K 主导区

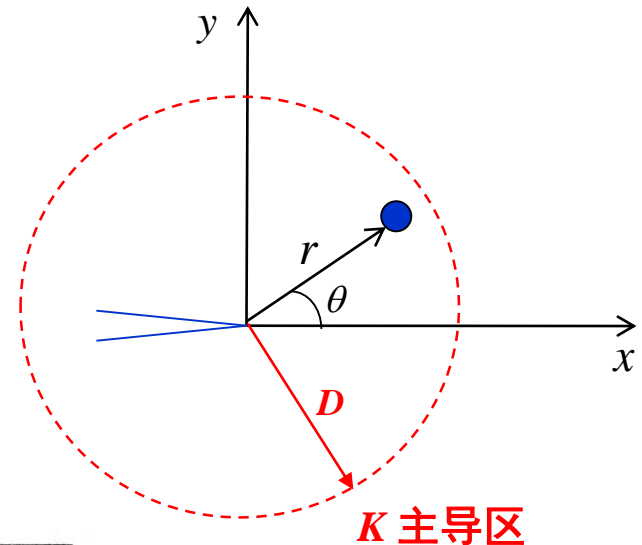
由于应力场各分量表达式实际是在 $r \ll a$ 处的主项（渐进解），所以 K 参量只能表征裂纹尖端附近一个区域的场强，这个区域称为 **K 主导区**（即 r/a 足够小，渐进解有足够精度的区）。

精确解

$$\sigma_y(r,0) = \frac{\sigma \left(1 + \frac{r}{a}\right)}{\sqrt{2 \frac{r}{a} + \left(\frac{r}{a}\right)^2}}$$

渐进解

$$\sigma_y(r,0) = \frac{\sigma}{\sqrt{2 \frac{r}{a}}}$$

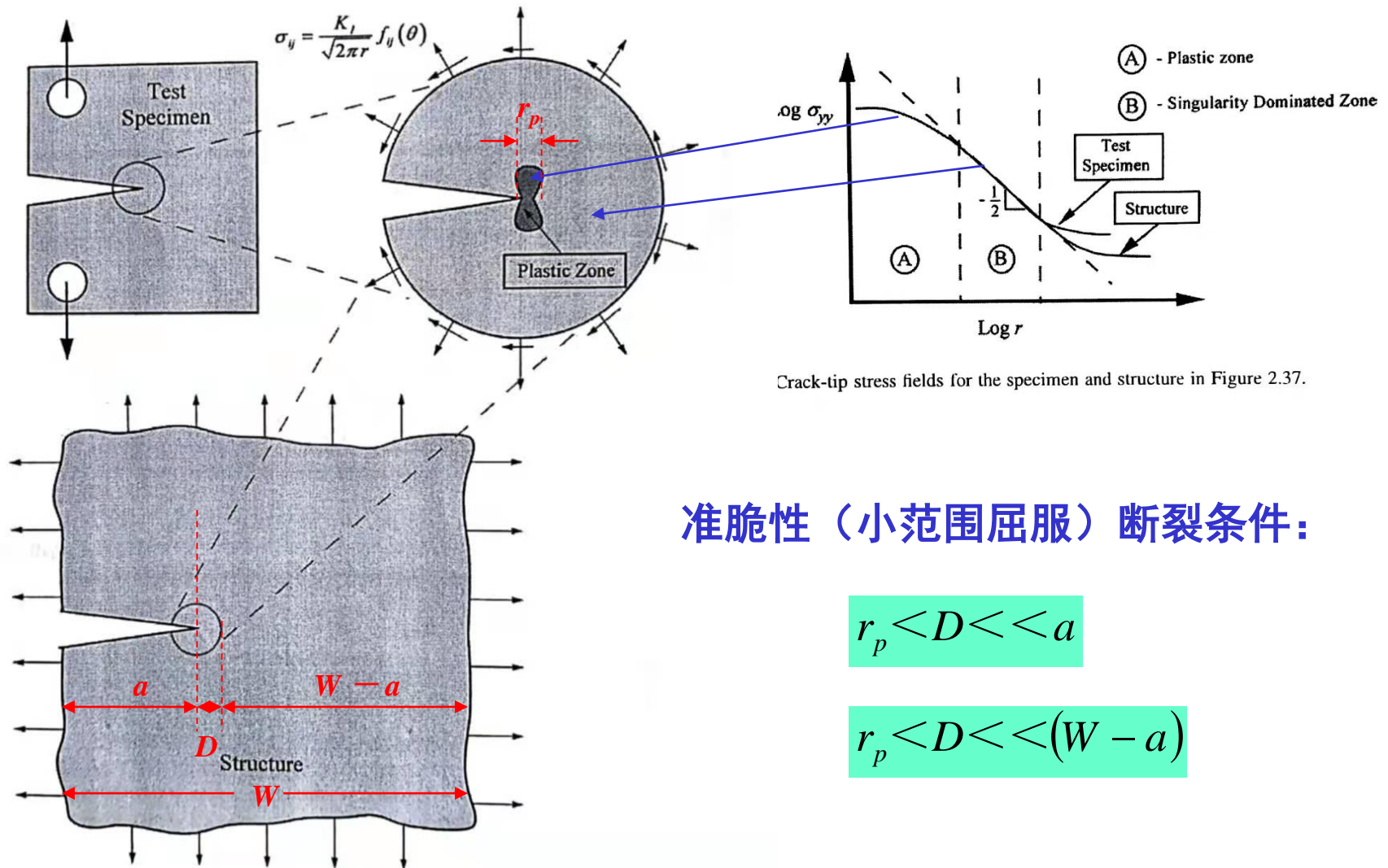


精确解与渐进解的差异

$\sigma_y \backslash r/a$	$\frac{1}{50}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$
精确解	5.07σ	3.28σ	2.40σ	1.80σ
渐近解	5.00σ	3.16σ	2.24σ	1.58σ
相对误差/%	0.13	3.6	6.7	12.2

相对误差 < 4%

K 控制断裂



准脆性（小范围屈服）断裂条件：

$$r_p < D \ll a$$

$$r_p < D \ll (W - a)$$

FIGURE 2.37 Schematic test specimen and structure loaded to the same stress intensity. The crack-tip conditions should be identical in both configurations as long as the plastic zone is small compared to the relevant dimensions. Thus, both will fail at the same critical K value.

2.1.4.2 应力强度因子的普遍表达式



- 解析法
- 普遍形式的复变函数法（二维）（Kolosov-Muskhelishvili法）
 - 积分变换法（二维；三维轴对称）
 - 权函数法（二维；三维）
- 近似计算法
- 边界配置法（二维、有限宽板；裂纹分布复杂）
 - 有限元法（复杂裂纹问题）
 - 应力集中系数法（应力集中系数取 $\rho \rightarrow 0$ 的极限）
 - 连续位错模拟法（位错塞积群模拟裂纹）
- 实验法
- 柔度法（应力强度因子与柔度的关系）

$$K_I = Y\sigma\sqrt{\pi a}$$

式中， Y —裂纹形状系数，取决于裂纹类型，可查表。

典型裂纹的应力强度因子-Griffith裂纹



比双向拉应力条件多出一项常数

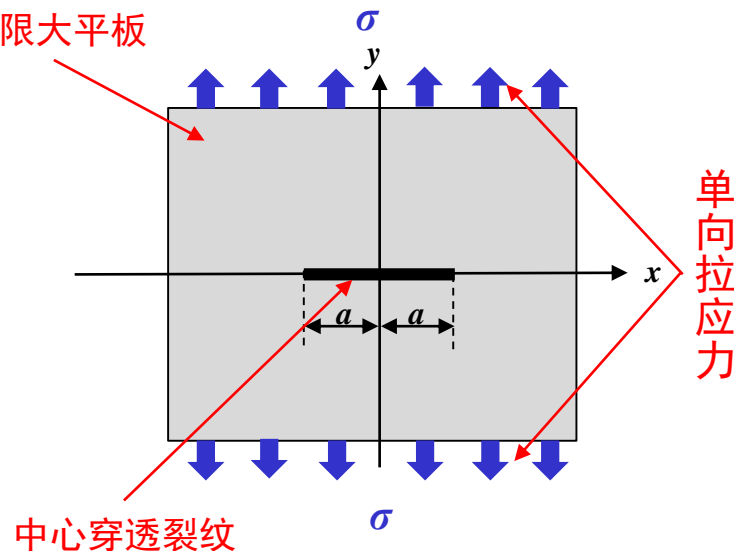
$$\sigma_x = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) - \sigma$$

与双向拉应力
条件完全相同

$$\sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right)$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}$$

无限大平板



$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a}$$

- I 型裂纹沿横向的拉应力不影响纵向应力分量！
- 受单向拉伸应力和受双向等拉应力的应力强度因子完全相同！

典型裂纹的应力强度因子- 共线裂纹

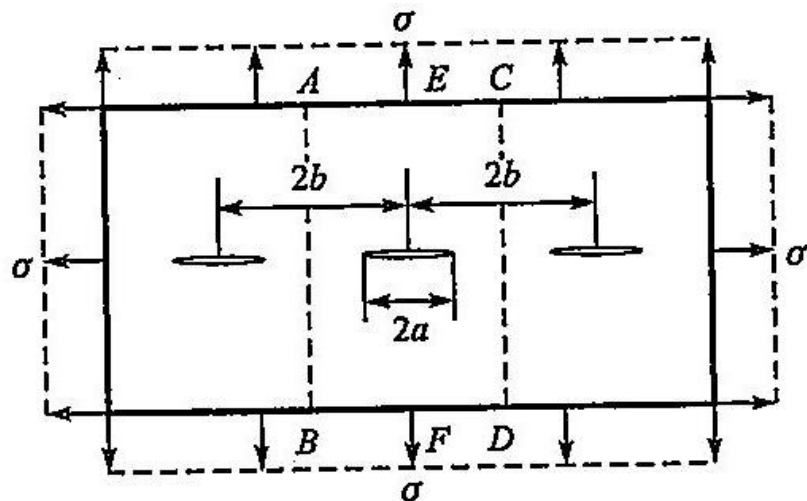


复变应力函数：

$$Z_I(z) = \frac{\sigma \sin \frac{\pi z}{2b}}{\sqrt{\sin^2 \frac{\pi z}{2b} - \sin^2 \frac{\pi a}{2b}}}$$

由复变应力函数直接求 K ：

$$K_I = \sqrt{2\pi} \lim_{z \rightarrow z_1} \sqrt{z - z_1} \cdot Z_I(z)$$



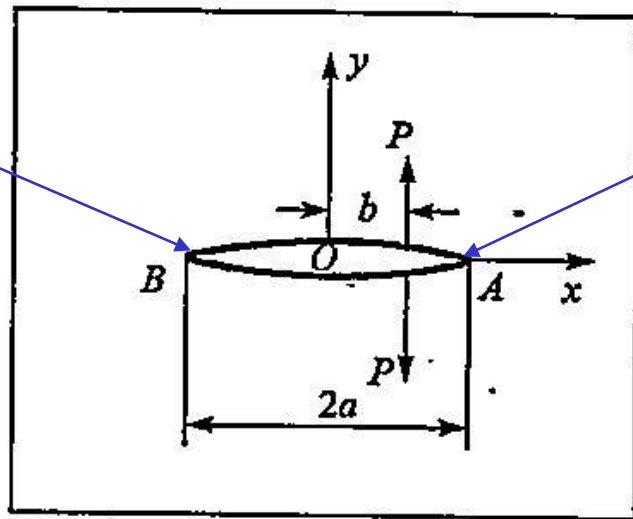
$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} \cdot \sqrt{\frac{2b}{\pi a} \tan \frac{\pi a}{2b}}$$

裂纹形状因子，永远 >1

典型裂纹的应力强度因子-裂纹面集中力



$$K_{IB} = \frac{P}{\sqrt{\pi a}} \left(\frac{a-b}{a+b} \right)^{\frac{1}{2}}$$

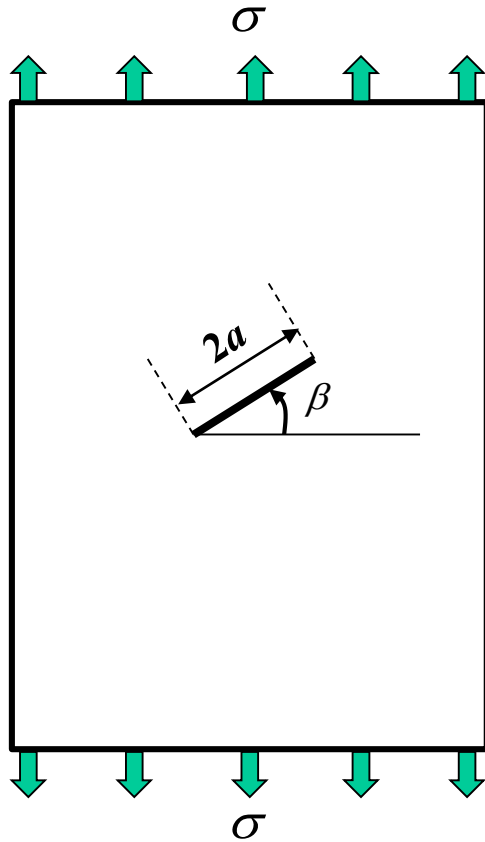


$$K_{IA} = \frac{P}{\sqrt{\pi a}} \left(\frac{a+b}{a-b} \right)^{\frac{1}{2}}$$

含中心穿透裂纹无限大板受楔形力

- 在裂纹两个顶端（A、B）处的应力强度因子不同 $K_{IA} > K_{IB}$
- $b = 0$ 时（裂纹面中心集中力）： $K_{IA} = K_{IB} = \frac{P}{\sqrt{\pi a}}$
- 随 b 增大， K_{IA} 增大； K_{IB} 减小。当 $b \rightarrow a$ 时， $K_{IA} \rightarrow \infty$ ； $K_{IB} \rightarrow 0$

典型裂纹的应力强度因子- 倾斜裂纹



$$K = K_{\text{I}} - iK_{\text{II}}$$

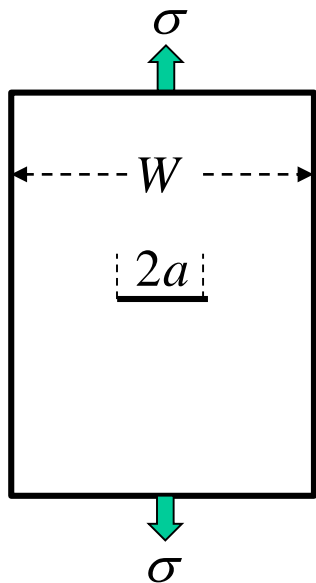
$$K_{\text{I}} = \sigma \cos^2 \beta \sqrt{\pi a}$$

$$K_{\text{II}} = \sigma \sin \beta \cos \beta \sqrt{\pi a}$$

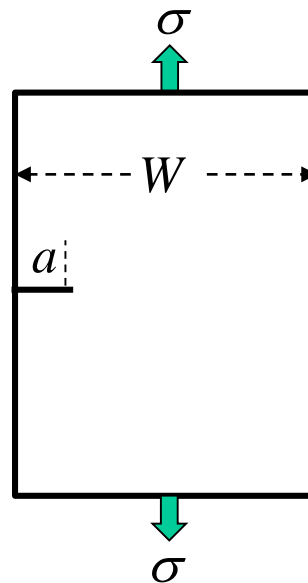
典型裂纹的应力强度因子- 有限宽板



中心裂纹



单边裂纹



当 $(a/W) < 0.8$ 时,
两式计算结果相同

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} \cdot \sqrt{\frac{W}{\pi a} \tan \frac{\pi a}{W}}$$

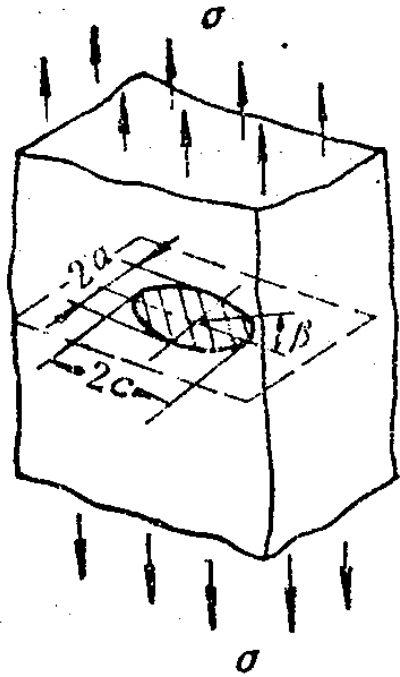
$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} \cdot \sqrt{\sec \frac{\pi a}{W}}$$

当 $W \gg a$ 时:

$$K_I = 1.12 \sigma \sqrt{\pi a}$$



典型裂纹的应力强度因子-无限大体内椭圆裂纹



无限大弹性体内埋椭圆形片状裂纹，受垂直于裂纹面的单向拉伸应力

$$K_I = \frac{\sigma \sqrt{\pi a}}{\Phi} \left(\sin^2 \beta + \frac{a^2}{c^2} \cos^2 \beta \right)^{\frac{1}{4}}$$

在短轴顶端 ($\beta=90^\circ$) :

$$K_{I\max} = \frac{\sigma \sqrt{\pi a}}{\Phi}$$

在长轴顶端 ($\beta=0^\circ$) :

$$K_{I\min} = \frac{\sigma \sqrt{\pi \left(\frac{a^2}{c^2} \right)}}{\Phi}$$

$$\Phi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin^2 \beta + \frac{a^2}{c^2} \cos^2 \beta \right)^{\frac{1}{2}} d\beta \quad \text{已知 } a/c \text{ 时, 可查数学用表}$$

$$\Phi = \frac{\pi}{2} \left[1 - \frac{1}{4} \frac{c^2 - a^2}{c^2} - \frac{3}{64} \left(\frac{c^2 - a^2}{c^2} \right)^2 - \dots \right] \quad \text{当 } a/c \text{ 很小时: } \Phi = \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi}{8} \frac{a^2}{c^2}$$

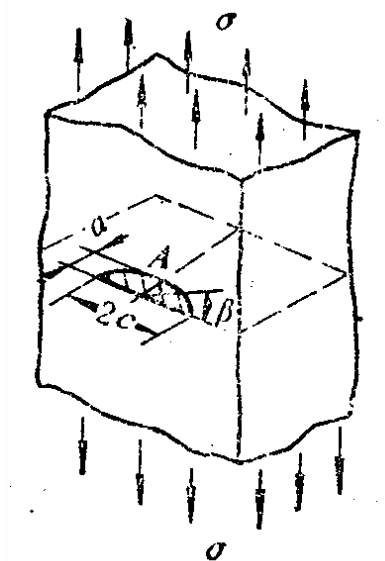
当 $a = c$ 时 (圆盘裂纹), $\Phi = \frac{\pi}{2}$

$$K_I = \frac{2}{\pi} \sigma \sqrt{\pi a}$$

典型裂纹的应力强度因子-表面半椭圆裂纹



Irwin (1962)：表面裂纹可以近似地简化为半椭圆裂纹位于半无限大板的前表面。当 $a/B \ll 1$ 时，可用“有限宽版含中心穿透裂纹的 K ”与“有限宽版对称双边裂纹的 K ”的比值，得到半椭圆表面裂纹的表面修正系数为 1.1。



A点的应力强度因子为：

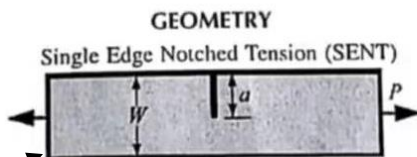
$$K_I = \frac{1.1\sigma\sqrt{\pi a}}{\Phi}$$

$$\Phi = \frac{\pi}{2} \left[1 - \frac{1}{4} \frac{c^2 - a^2}{c^2} - \frac{3}{64} \left(\frac{c^2 - a^2}{c^2} \right)^2 - \dots \right]$$

无限大弹性体表面有一个半椭圆形片状裂纹，受垂直于裂纹面的单向拉伸应力

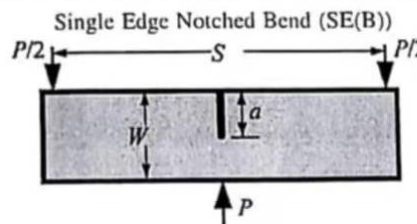
断裂韧性测试典型试样

单边裂纹拉伸



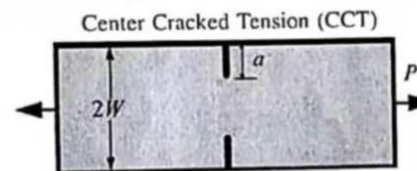
$$f\left(\frac{a}{W}\right)^* \\ \sqrt{\frac{2 \tan \frac{\pi a}{2W}}{\cos \frac{\pi a}{2W}}} \left[0.752 + 2.02 \left(\frac{a}{W} \right) \right] \\ + 0.37 \left(1 - \sin \frac{\pi a}{2W} \right)^3 \Bigg]$$

单边裂纹弯曲



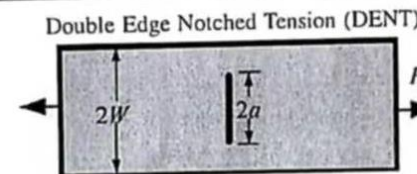
$$\frac{3 \frac{S}{W} \sqrt{\frac{a}{W}}}{2 \left(1 + 2 \frac{a}{W} \right) \left(1 - \frac{a}{W} \right)^{3/2}} \left[1.99 - \frac{a}{W} \right. \\ \left. \left(1 - \frac{a}{W} \right) \left\{ 2.15 - 3.93 \left(\frac{a}{W} \right) + 2.7 \left(\frac{a}{W} \right)^2 \right\} \right]$$

双边裂纹拉伸



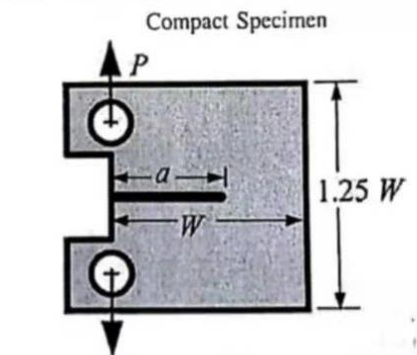
$$\sqrt{\frac{\pi a}{4W}} \sec\left(\frac{\pi a}{2W}\right) \left[1 - 0.025 \left(\frac{a}{W} \right)^2 \right. \\ \left. + 0.06 \left(\frac{a}{W} \right)^4 \right]$$

中心裂纹拉伸



$$\sqrt{\frac{\pi a}{2W}} \left[1.122 - 0.561 \left(\frac{a}{W} \right) - 0.205 \left(\frac{a}{W} \right)^2 \right. \\ \left. + 0.471 \left(\frac{a}{W} \right)^3 + 0.190 \left(\frac{a}{W} \right)^4 \right]$$

紧凑拉伸



$$\frac{2 + \frac{a}{W}}{\left(1 - \frac{a}{W} \right)^{3/2}} \left[0.886 + 4.64 \left(\frac{a}{W} \right) - 13.32 \left(\frac{a}{W} \right)^2 \right. \\ \left. + 14.72 \left(\frac{a}{W} \right)^3 - 5.60 \left(\frac{a}{W} \right)^4 \right]$$

外加载荷

形状因子

$$K_I = \frac{P}{B\sqrt{W}} \cdot f\left(\frac{a}{W}\right)$$

试样厚度

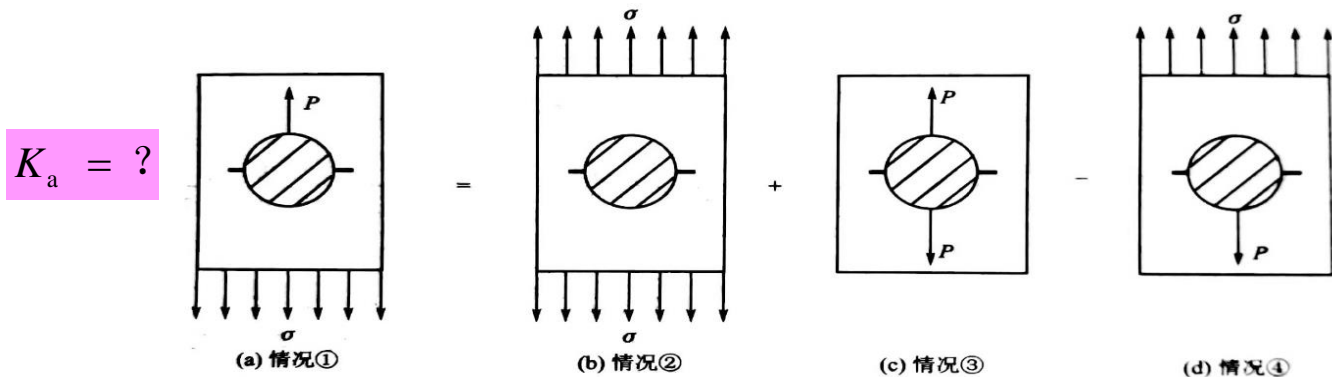
试样宽度

2.1.4.3 应力强度因子的叠加原理



当裂纹体受几种载荷联合作用时，其裂纹尖端应力场可以通过对每种载荷单独作用下的应力场进行线性叠加而求得，即应力强度因子具有叠加性。

例1：由几种简单载荷条件下的 K 求多种载荷联合作用下的 K



$$K_a = K_b + K_c - K_d$$

因为：

$$K_a = K_d$$

则有：

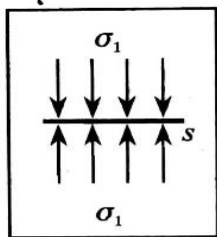
$$K_a = \frac{1}{2} (K_b + K_c)$$

2.1.4.3 应力强度因子的叠加原理（续）



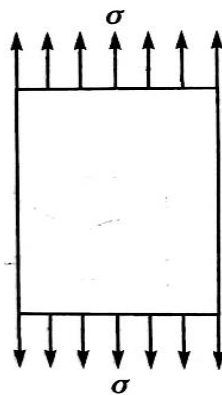
例2：用简单边界条件的裂纹问题来等效地取代体内和边界上受复杂载荷条件的裂纹问题

$$K_a = ?$$



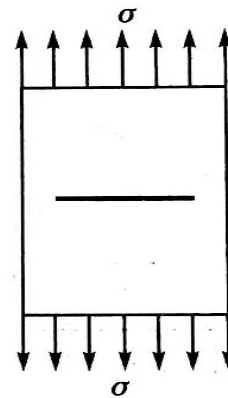
(a) 裂纹面受压应力 σ

=



(b) 无裂纹体受拉应力 σ

—



(c) 裂纹体受拉应力 σ

$$K_a = K_b - K_c$$

因 (b) 为无裂纹体，即： $K_b = 0$

则有： $K_a = -K_c$

2.1.4.4 $G \sim K$ 关系



G 为裂纹扩展过程中弹性应变能释放率应与闭合一段已有裂纹的能量率相等，这时闭合裂纹所作的功都转化成了应变能。

假设有 σ_y 分布力 作用在一小段裂纹 Δa 上，使裂纹闭合。取 $\theta = 0$ ， $r = x$ ， 则有：

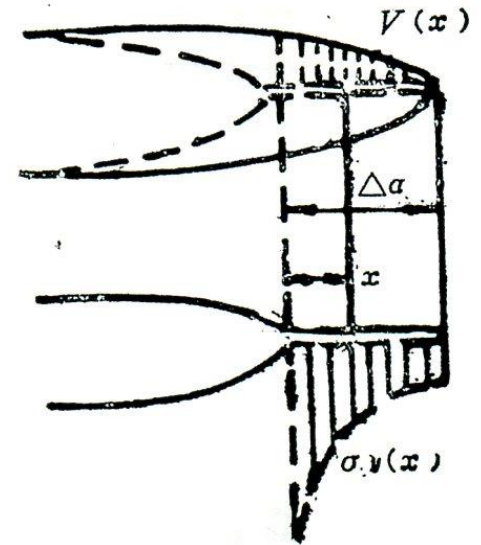
$$\sigma_y(x) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi x}} \quad (1)$$

I 型裂纹尖端前沿的纵向位移为：

$$V(r, \theta) = \frac{K_I}{4\mu} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \left[(2k+1) \sin \frac{\theta}{2} - \sin \frac{3\theta}{2} \right] \quad (2)$$

取坐标原点在原裂纹尖端处 ($\theta = \pi$, $r = \Delta a - x$)， 则 x 点处裂纹闭合的纵向位移为：

$$V(x) = \frac{K_I}{4\mu} \left(\frac{\Delta a - x}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}} [(2k+1) + 1] = \frac{K_I}{4\mu} \left(\frac{\Delta a - x}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot 2(k+1) \quad (3)$$



闭合裂纹分析模型



平面应力状态下的 $G \sim K$ 关系

在平面应力时， $k = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ ，则有：

$$V(x) = \frac{K_I}{4\mu} \left(\frac{\Delta a - x}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{8}{1 + \nu} \right) \quad (4)$$

又有 $\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}$ ，代入上式得：

$$V(x) = \frac{K_I}{E} \cdot 4 \left(\frac{\Delta a - x}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (5)$$

在闭合过程中， dx 上的应力由零增至 $\sigma_y(x)$ 时，位移也从零增至 $V(x)$ ，若取板材厚度为 1，相应的闭合功为 $\frac{1}{2} \sigma_y(x) V(x) dx$

考虑到上、下两面，则 Δa 段闭合总功为 $\Delta U = 2 \times \int_0^{\Delta a} \frac{1}{2} \sigma_y(x) V(x) dx$ ，则有：

$$G_I = \frac{\Delta U}{\Delta a} = \frac{2}{\Delta a} \times \int_0^{\Delta a} \frac{1}{2} \frac{K_I}{\sqrt{2\pi x}} \cdot \frac{K_I}{E} 4 \left(\frac{\Delta a - x}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2K_I^2}{\pi E} \cdot \frac{1}{\Delta a} \cdot \frac{\pi}{2} \Delta a$$

即：

$$G_I = \frac{K_I^2}{E} \quad (6)$$

平面应变状态下的 $G \sim K$ 关系



在平面应变时， $k = 3 - 4\nu$

按前述同样的方法，可得：

$$G_I = \frac{1 - \nu^2}{E} K_I^2 \quad (7)$$

综合两种状态：

$$G_I = \frac{1}{E'} K_I^2 \quad (8)$$

平面应力状态： $E' = E$

平面应变状态： $E' = \frac{E}{1 - \nu^2}$

$K \sim c$ 关系



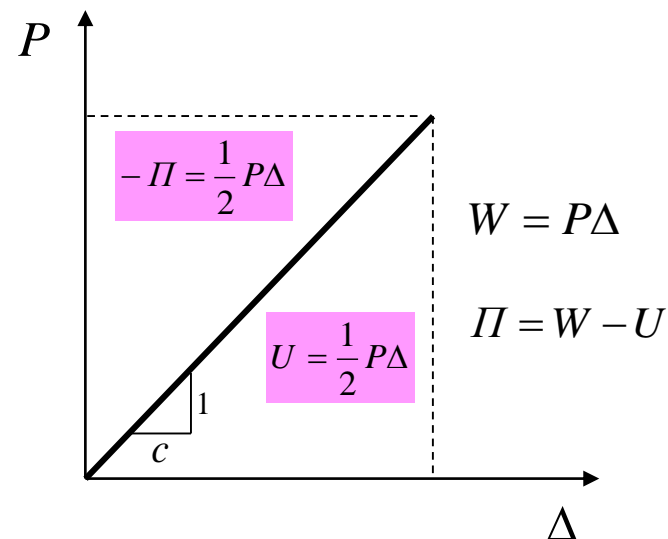
裂纹加载点位移 Δ 与载荷 P 之间为线性关系: $\Delta = cP$ (1)

- 在恒载荷条件下: $\Pi = -U$

$$G = \frac{1}{B} \left(\frac{dU}{da} \right)_P = \frac{P}{2B} \left(\frac{d\Delta}{da} \right)_P \quad (2)$$

- 在恒位移条件下: $\Pi = U$

$$G = -\frac{1}{B} \left(\frac{dU}{da} \right)_\Delta = -\frac{\Delta}{2B} \left(\frac{dP}{da} \right)_\Delta \quad (3)$$

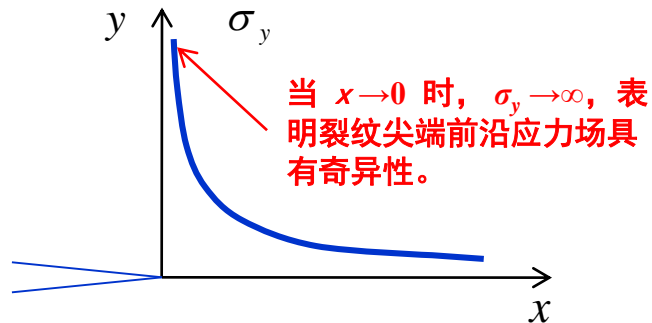


将 (1) 式代入 (2) 式和 (3) 式, 可得: $G = \frac{P^2}{2B} \left(\frac{dc}{da} \right)$ (4)

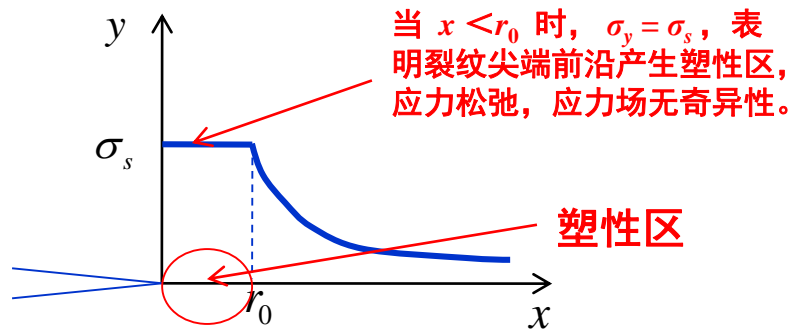
因为 $G = \frac{K^2}{E'}$, 代入 (4) 式, 有: $K_I = P \left[\frac{E'}{2B} \left(\frac{dc}{da} \right) \right]^{\frac{1}{2}}$ (5)

只要通过实验得到 c 随 a 的变化规律 $c = f(a)$, 将其导数代入 (5) 式即可求得应力强度因子 K

2.1.5 裂纹尖端塑性区及等效裂纹修正



理想线弹性情况



实际金属情况

线弹性力学 K 参量失效!!! 怎么办?

- 当塑性区尺寸较小时, 进行适当修正, 继续采用线弹性力学 K 参量
 - 塑性区尺寸和形状
 - 有效裂纹修正
- 当塑性区尺寸较大时, 采用弹塑性力学方法, 寻找其他场参量
 - 裂纹尖端张开位移 (CTOD)
 - J 积分

2.1.5.1 裂纹尖端塑性区（I型裂纹为例）



Von Mises屈服判据： $(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\sigma_{ys}^2$

Tresca屈服判据： $\sigma_i - \sigma_j = \sigma_{ys} \quad i=1,2,3$ 等式左边取最大值

由材料力学原理可知一点的三个主应力为：

$$\sigma_1 = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \quad \sigma_2 = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \quad \sigma_3 = \nu(\sigma_1 + \sigma_2)$$

将裂尖各应力分量带入上式可得：

$$\sigma_1 = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \right) \quad \sigma_2 = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \right) \quad \sigma_3 = \nu(\sigma_1 + \sigma_2)$$

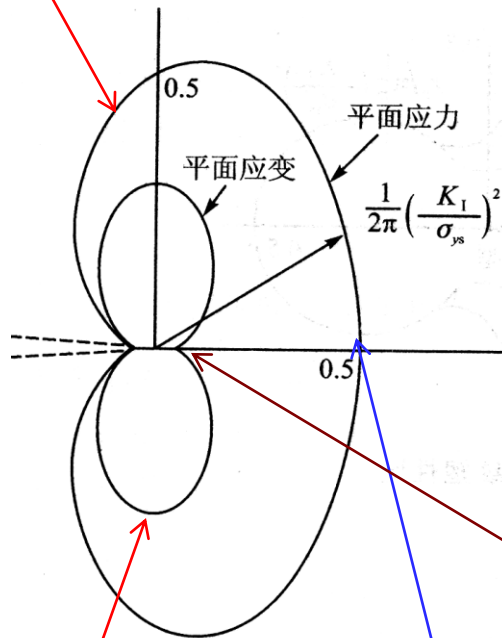
再将裂尖各主应力带入上边的**Von Mises**屈服判据或者**Tresca**屈服判据，便可得到裂纹尖端前沿塑性区的形状及尺寸。

塑性区形状及尺寸

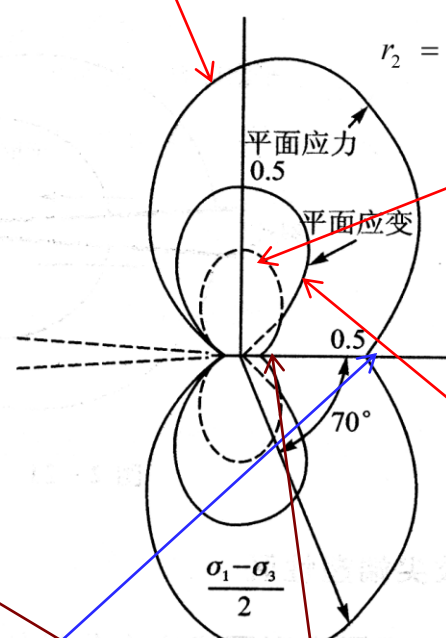


$$r_1 = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_s} \right)^2 \cos^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \left[1 + 3 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right]$$

$$r_1 = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_s} \right)^2 \left[\cos \left(\frac{\theta}{2} \right) \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \right) \right]^2$$



(a) von Mises



(b) Tresca

$$r_2 = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_s} \right)^2 \cos^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \left[(1 - 2\nu) + \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right]^2$$

$$r_2 = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_s} \right)^2 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right)$$

若取 $\nu=0.3$, 则:

$$r_{02} \approx \frac{1}{6} r_{01}$$

Irwin修正为:

$$r_{02} = \frac{1}{4\sqrt{2}\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_s} \right)^2$$

$$r_2 = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_s} \right)^2 \cos^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \left[(1 - 2\nu)^2 + 3 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right]$$

$$r_{01} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_s} \right)^2$$

(平面应力)

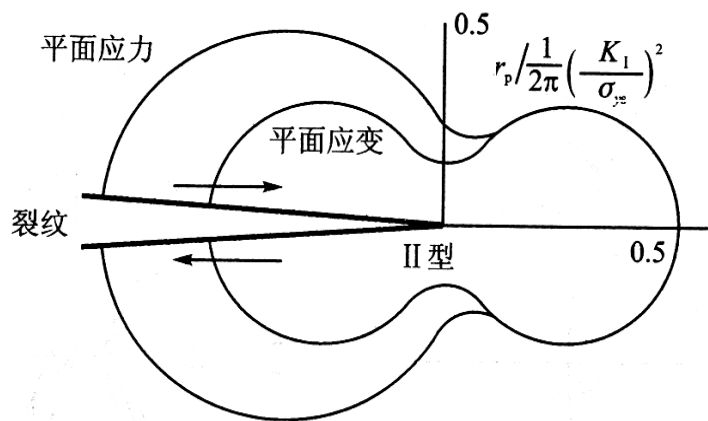
$$r_{02} = \frac{1 - 2\nu^2}{2\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_s} \right)^2$$

(平面应变)

剪切型裂纹尖端塑性区

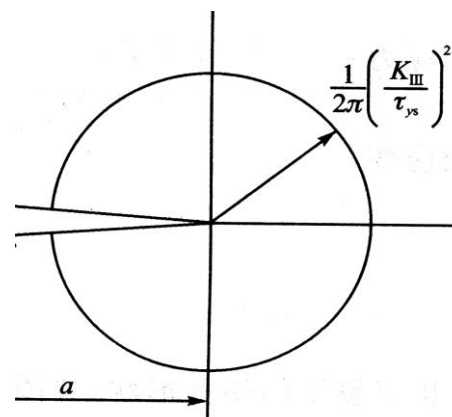


应用与上面类似的方法，按Von Mises准则可求得 II 型及 III 裂纹尖端的塑形区形状。



II 型裂纹尖端塑性区

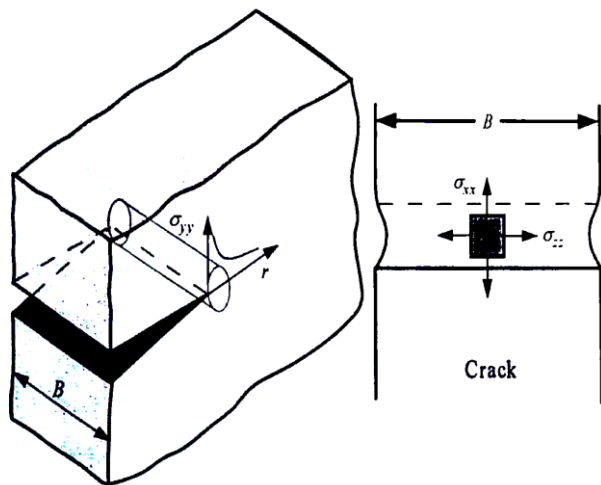
自证！



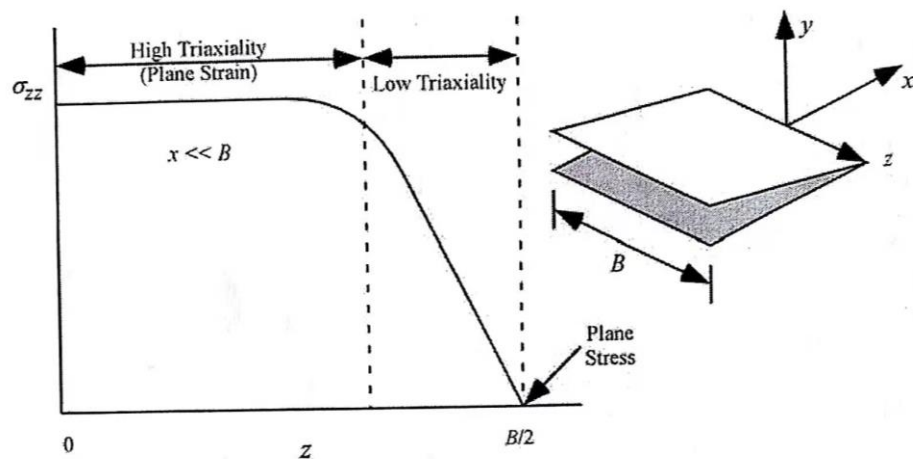
III 型裂纹尖端塑性区

作业！

塑性区的立体形状（I 型裂纹为例）

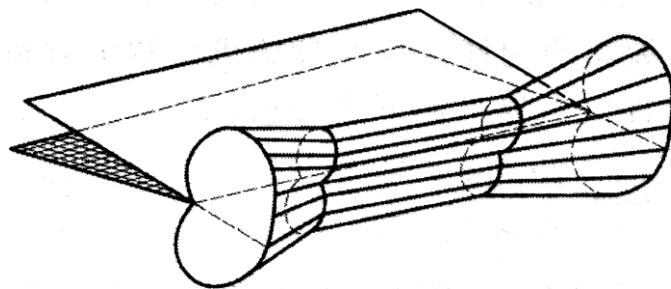


裂纹顶端一点的多向应力



裂纹顶端 σ_{zz} 的分布

厚度对裂尖应力三轴性的影响



厚板裂纹尖端塑性区立体形状

应力松弛后的塑性区 (理想塑性条件下)



局部塑性变形会造成应力松弛，这样还会使塑性区尺寸进一步增大为 R 。

设应力平衡后的塑性区宽度为 $R = \alpha r_p^*$ ，考虑能量平衡后，有：

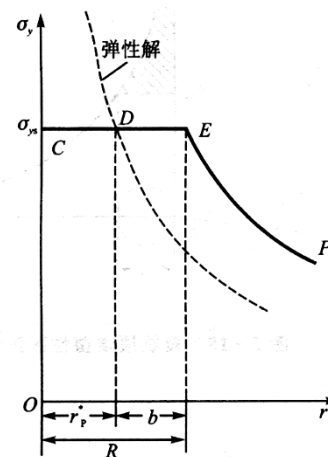
$$R\sigma_{ys} = \alpha r_p^* \sigma_{ys} = \int_0^{r_p^*} \sigma_y dr$$

$$\text{或 } \sigma_{ys} r_p^* = \int_0^b \sigma_y dr - \sigma_{ys} b$$

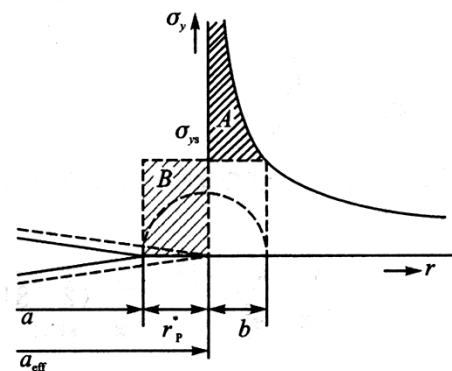
将 $\sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}$ 代入上式，

积分后得到： $\alpha = 2$

$$\text{即： } R = 2r_p^*$$



(a) 塑性区为 R 时的应力分布



(b) 塑性区为第二近似值时的应力分布

2.1.5.2 K_I 的修正（等效裂纹）



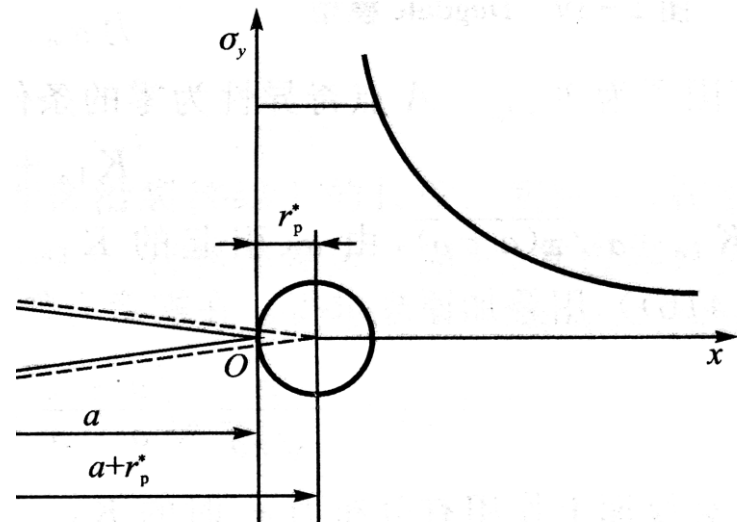
等效裂纹修正后的应力强度因子:

$$K_I = Y\sigma\sqrt{\pi(a + r_p^*)}$$

r_p^* 恰好为应力松弛后塑性区半宽，即:

$$r_{p1}^* = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_{ys}} \right)^2 \approx 0.16 \left(\frac{K_I}{\sigma_{ys}} \right)^2 \quad (\text{平面应力})$$

$$r_{p2}^* = \frac{1}{4\sqrt{2}\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_{ys}} \right)^2 \approx 0.056 \left(\frac{K_I}{\sigma_{ys}} \right)^2 \quad (\text{平面应变})$$



则修正后的应力强度因子为:

$$K_{I1} = \frac{Y\sigma\sqrt{\pi a}}{\sqrt{1 - 0.16Y^2 \left(\frac{\sigma}{\sigma_{ys}} \right)^2}}$$

(平面应力)

$$K_{I2} = \frac{Y\sigma\sqrt{\pi a}}{\sqrt{1 - 0.056Y^2 \left(\frac{\sigma}{\sigma_{ys}} \right)^2}}$$

(平面应变)

修正条件:

$$\frac{\sigma}{\sigma_{ys}} \geq 0.6 \sim 0.7$$

2.1.6 断裂韧度



Griffith试验

试样： 薄壁玻璃圆管和球形玻璃灯泡，预制长度为 4-23mm不等的裂纹

试验： 向中空的玻璃圆管或球形玻璃灯泡泵入液体使之爆裂，并根据内部液体的压力确定临界应力。

试验结果： $\sigma_c \sqrt{a} = 0.26(\text{MPa} \cdot \sqrt{\text{m}})$ 数据的离散系数为 5%

$$\sigma_c \sqrt{a} = 0.26 = \sqrt{\frac{2E\gamma_s}{\pi}}$$

Griffith 测得玻璃的模量 $E=62\text{GPa}$ ，则由上式计算得到 γ_s 约为 1.75J/m^2 。

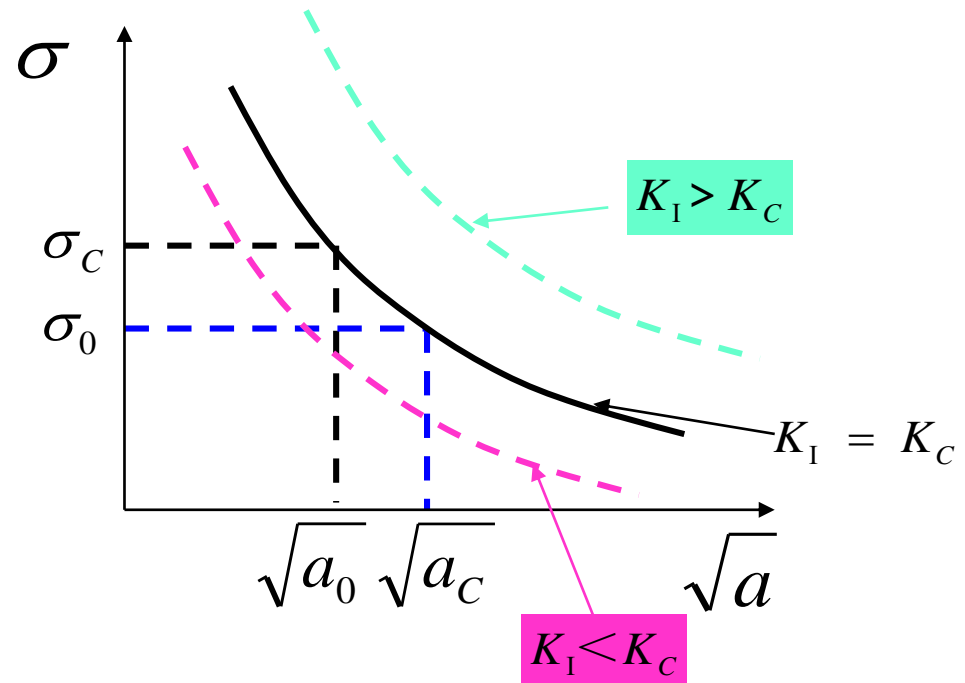


临界应力强度因子

当名义应力和裂纹尺寸**单独**或者**共同**增大时， K_I 和裂纹尖端各应力也随之增大，当名义应力增加到临界值 σ_c 或裂纹尺寸增大到临界值 a_c 时，裂纹便失稳扩展而导致材料断裂。对应于这个临界或者失稳状态的 K_I 值记做 K_C ，称为**临界应力强度因子**。

$$K_C = Y\sigma_c\sqrt{a_0}$$

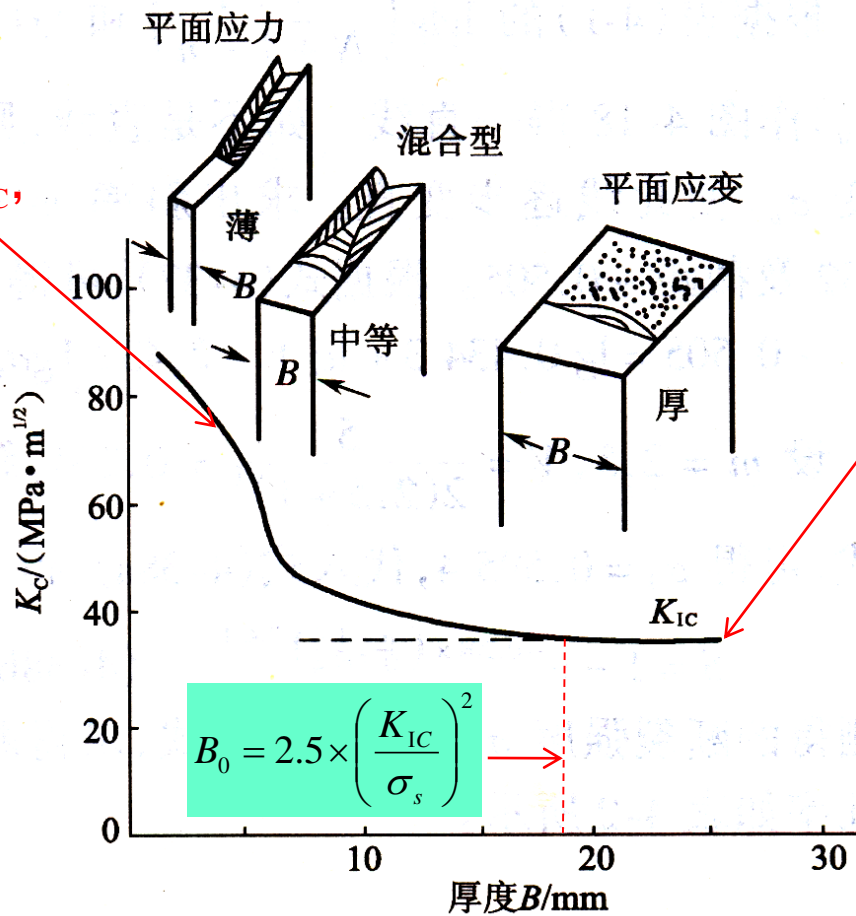
$$K_C = Y\sigma_0\sqrt{a_c}$$



临界应力强度因子与板厚度的关系

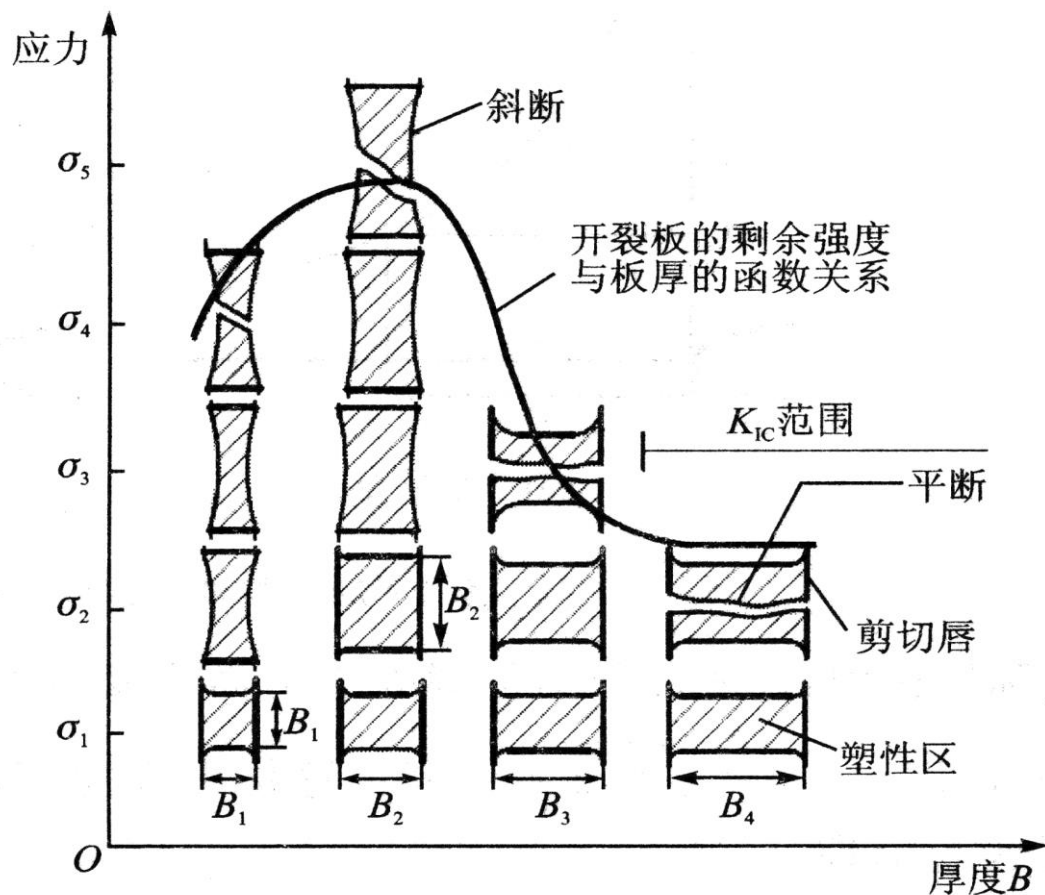


平面应力断裂韧度 K_C ，
与板厚度有关



平面应变断裂韧度 K_{IC} ，
与板厚度无关，是材料
常数，简称断裂韧度

厚度对板材剩余强度的影响



剩余强度与试件厚度的关系



2.1.7 断裂判据

2.1.7.1 简单裂纹的断裂判据

$$K_I = Y\sigma\sqrt{\pi a} \quad \text{---} \quad K_{I\max} \geq K_{IC}$$

$K_{IC} = Y\sigma_c\sqrt{\pi a_0}$
 $K_{IC} = Y\sigma_0\sqrt{\pi a_c}$

- **结构设计：** 根据可能出现（或已探测到）的裂纹类型以及选定材料的断裂韧度，计算**结构许用应力**，针对要求的承载量，设计结构的形状

$$\sigma = \frac{K_{IC}}{Y\sqrt{\pi a}}$$

- **材料选择：** 根据结构的承载要求以及可能出现的裂纹类型，计算**可能的最大应力场强度因子**，选择能满足断裂韧度要求的材料

$$K_{I\max} = Y\sigma\sqrt{\pi a}$$

- **安全校核：** 根据结构承载要求以及材料断裂韧度，计算**材料的临界裂纹尺寸**，与实测裂纹尺寸相比较，校核结构的安全性，判断材料脆断倾向

$$a_c = \frac{1}{\pi Y^2} \left(\frac{K_{IC}}{\sigma} \right)^2$$

2.1.7.2 复合型裂纹断裂判据



研究复合型裂纹脆性断裂问题，主要应解决两个问题：

- 裂纹在复合型载荷作用下，起裂后向什么方向扩展？
- 复合型载荷满足什么条件时，裂纹开始起裂扩展？

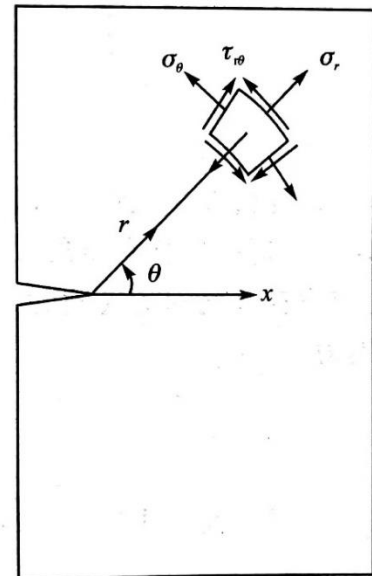
复合型裂纹断裂问题比较复杂，目前研究工作偏重于脆性断裂范围，仍采用LEFM方法。而目前所提出的各种理论与实验结果还有一定差别，复合型断裂判据还未被一致接受。本节介绍两个判据以及工程常用的经验判据。

- 应变能密度判据
- 最大周向正应力判据
- 工程判据

(1) 应变能密度判据 (S判据)

复合型裂纹在其**最小应变能密度因子** S_{\min} 等于某一临界值 S_{cr} 时, 沿 S_{\min} 方向扩展

$$S_{\min} = S_{cr} \quad (1)$$



以I+II型复合裂纹为例, 根据弹性力学, 应变能密度为:

$$\frac{dU}{dV} = \frac{1-\nu^2}{2E} (\sigma_r^2 + \sigma_\theta^2) - \frac{(1+\nu)\nu}{E} \sigma_r \sigma_\theta + \frac{1}{2\mu} \tau_{r\theta}^2 \quad (2)$$

复合型裂纹尖端处的应力, 可通过I和II型应力场叠加得到:

$$\begin{bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \tau_{r\theta} \end{bmatrix} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \begin{bmatrix} \frac{5}{4} \cos \frac{\theta}{2} - \frac{1}{4} \cos \frac{3\theta}{2} \\ \frac{3}{4} \cos \frac{\theta}{2} + \frac{1}{4} \cos \frac{3\theta}{2} \\ \frac{1}{4} \sin \frac{\theta}{2} + \frac{1}{4} \sin \frac{3\theta}{2} \end{bmatrix} + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \begin{bmatrix} -\frac{5}{4} \sin \frac{\theta}{2} + \frac{3}{4} \sin \frac{3\theta}{2} \\ -\frac{3}{4} \sin \frac{\theta}{2} - \frac{3}{4} \sin \frac{3\theta}{2} \\ \frac{1}{4} \cos \frac{\theta}{2} + \frac{3}{4} \cos \frac{3\theta}{2} \end{bmatrix} \quad (3)$$



(1) 应变能密度判据 (续1)

将 (3) 式代入 (2) 式, 得到裂纹尖端处应变能密度:

$$\frac{dU}{dV} = \frac{1}{r} (a_{11}K_I^2 + 2a_{12}K_I K_{II} + a_{22}K_{II}^2) \quad (4)$$

$$a_{11} = \frac{1}{16\mu} (1 + \cos \theta) (k - \cos \theta)$$

$$a_{12} = \frac{1}{16\mu} \sin \theta \cdot (2 \cos \theta - k + 1)$$

$$a_{22} = \frac{1}{16\mu} [(k + 1)(1 - \cos \theta) + (1 + \cos \theta)(3 \cos \theta - 1)]$$

$$k = 3 - 4\nu \quad (\text{平面应变})$$

$$k = \frac{3 - \nu}{1 + \nu} \quad (\text{平面应力})$$

式中, μ —切变模量; ν —泊松比。



(1) 应变能密度判据 (续2)

令：

$$S(\theta) = (a_{11}K_I^2 + 2a_{12}K_I K_{II} + a_{22}K_{II}^2) \quad (5)$$

裂纹扩展时应沿最小 S 方向 (θ_m)，即满足： $\frac{dS}{d\theta} = 0$ 且 $\frac{d^2S}{d\theta^2} > 0$ (6)

而失效临界条件为：

$$S(\theta) = (a_{11}K_I^2 + 2a_{12}K_I K_{II} + a_{22}K_{II}^2) = S_{cr} \quad (7)$$

在纯 I 型加载条件下，有： $[S_I(\theta)]_{\min} = S_I(\theta = 0) = a_{11}K_I^2$ (8)

临界时，有： $S_{cr} = a_{11}K_{Ic}^2 = \frac{2(k-1)}{16\mu} K_{Ic}^2$ (9)

将 (9) 式代入 (7) 式得：

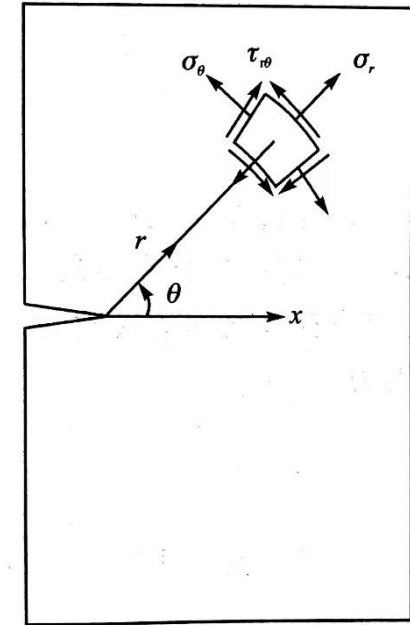
$$\left[\frac{16\mu}{2(k-1)} (a_{11}K_I^2 + 2a_{12}K_I K_{II} + a_{22}K_{II}^2)_{\theta=\theta_m} \right]^{\frac{1}{2}} = K_{Ic}$$



(2) 最大正应力判据 ($\sigma_{\theta\max}$ 判据)

两个假设:

- 裂纹开始扩展沿着周向正应力达到最大的方向
- 当这个方向的应力强度因子达到临界值 K_{IC} 时, 裂纹开始失稳扩展



$$K_{\theta\max} \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} (\sigma_{\theta})_{\max} = K_{IC} \quad (1)$$

I+II复合型裂纹尖端应力场为:

$$\begin{bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_{\theta} \\ \tau_{r\theta} \end{bmatrix} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \begin{bmatrix} \frac{5}{4} \cos \frac{\theta}{2} - \frac{1}{4} \cos \frac{3\theta}{2} \\ \frac{3}{4} \cos \frac{\theta}{2} + \frac{1}{4} \cos \frac{3\theta}{2} \\ \frac{1}{4} \sin \frac{\theta}{2} + \frac{1}{4} \sin \frac{3\theta}{2} \end{bmatrix} + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \begin{bmatrix} -\frac{5}{4} \sin \frac{\theta}{2} + \frac{3}{4} \sin \frac{3\theta}{2} \\ -\frac{3}{4} \sin \frac{\theta}{2} - \frac{3}{4} \sin \frac{3\theta}{2} \\ \frac{1}{4} \cos \frac{\theta}{2} + \frac{3}{4} \cos \frac{3\theta}{2} \end{bmatrix} \quad (2)$$

裂纹扩展方向



根据假设（1），裂纹扩展方向应满足： $\frac{d\sigma_\theta}{d\theta} = 0$ ，则有：

$$\cos \frac{\theta}{2} [K_I \sin \theta + K_{II} (3 \cos \theta - 1)] = 0 \quad (3)$$

由 $\cos \frac{\theta}{2} = 0$ 解得： $\theta = \pm\pi$ ，此解在物理上不存在（裂纹不能反向扩展）

故（3）式简化为：

$$K_I \sin \theta + K_{II} (3 \cos \theta - 1) = 0 \quad (4)$$

由（4）式解得：

$$\theta_m = 2 \arctan \left[\frac{K_I}{K_{II}} - \frac{\sqrt{\left(\frac{K_I}{K_{II}}\right)^2 + 8}}{4} \right] \quad (5)$$

断裂判据



由于在 θ_m 方向上, σ_θ 达到最大值 $\sigma_{\theta\max}$, 则 $\tau_{r\theta}(\theta_m) = 0$, 即 $\sigma_{\theta\max}$ 为主应力, 且满足:

$$\sigma_{\theta_m} = \sigma_{\theta\max} = \frac{\cos \frac{\theta_m}{2} \left[K_I \cos^2 \left(\frac{\theta_m}{2} \right) - \frac{3}{2} K_{II} \sin \theta_m \right]}{\sqrt{2\pi r}} = \frac{K_{\theta\max}}{\sqrt{2\pi r}} \quad (6)$$

由于 $K_{\theta\max}$ 实际上相当于 I 型裂纹应力强度因子, 则断裂判据为:

$$K_{\theta\max} = \cos \frac{\theta_m}{2} \left[K_I \cos^2 \left(\frac{\theta_m}{2} \right) - \frac{3}{2} K_{II} \sin \theta_m \right] = K_{IC} \quad (7)$$

(3) 工程判据



在断裂力学中，对每一种单独的裂纹类型，都有相应的应力强度因子 K_I 、 K_{II} 、 K_{III} ，以及相应的临界应力强度因子 K_{IC} 、 K_{IIC} 、 K_{IIIC} 。

为了便于处理工程实际问题，工程上往往针对常用材料的实验数据拟合成经验公式。

① 直线型判据

$$aK_I + bK_{II} = K_{IC}$$

或

$$\frac{K_I}{K_{IC}} + \frac{K_{II}}{K_{IIC}} = 1$$

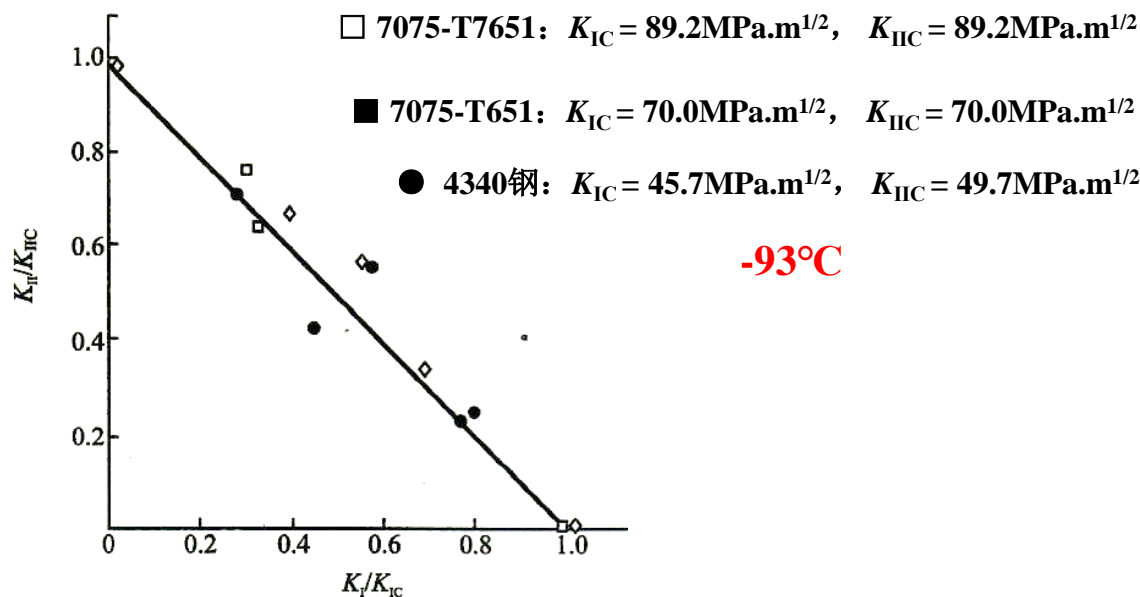


图 4-12 断裂时 $K_I - K_{II}$ 轨迹图



② 二次曲线（椭圆）型判据

$$\left(\frac{K_I}{K_{IC}}\right)^2 + \left(\frac{K_{II}}{K_{IIc}}\right)^2 = 1 \quad \text{或} \quad \left(\frac{K_I}{K_{IC}}\right)^2 + \left(\frac{K_{III}}{K_{IIIc}}\right)^2 = 1$$

③ 高次曲线型判据

$$\left(\frac{K_I}{K_{IC}}\right)^\alpha + \left(\frac{K_{II}}{K_{IIc}}\right)^\beta = 1 \quad \text{或} \quad \left(\frac{K_I}{K_{IC}}\right)^{\alpha_1} + \left(\frac{K_{III}}{K_{IIIc}}\right)^{\beta_1} = 1$$

式中， α ， β 为大于2的正数。

④ 椭球型判据

对三维复合型裂纹，可采用“**椭球法则**”来确定裂纹失稳扩展临界条件：

$$\left(\frac{K_I}{K_{IC}}\right)^2 + \left(\frac{K_{II}}{K_{IIc}}\right)^2 + \left(\frac{K_{III}}{K_{IIIc}}\right)^2 = 1$$

例：4340钢在I- III 复合型载荷作用下的断裂

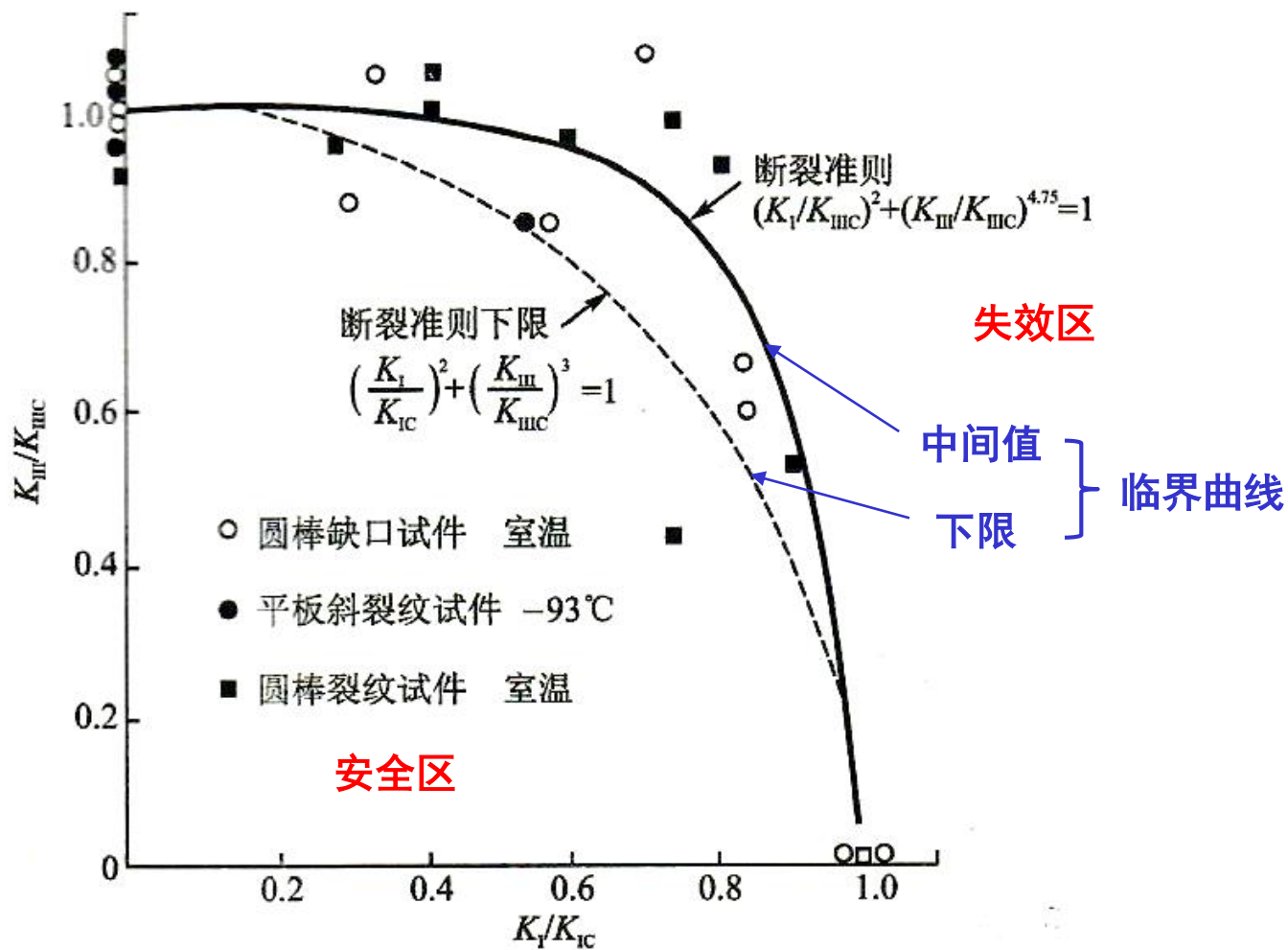


图 4-13 4340 钢复合型断裂 $K_I - K_{III}$ 曲线

2.1.8 断裂控制设计原则



- **强度与韧度的平衡**
 - 断裂韧度与屈服强度比值
 - 裂纹容限
- **厚度确定原则**
 - 全厚度屈服准则
 - 破裂前渗漏原则



2.1.8.1 强度与韧度的平衡

- 从承载角度：尽量选择高屈服强度材料（材料力学设计方法）
 - 从安全角度：尽量选择高断裂韧度材料（断裂力学设计方法）
- } 此消彼长

对以脆性断裂为主要失效形式的结构，断裂韧度与屈服强度的比值是选择材料的主要依据。根据断裂韧度的定义，有：

$$a_c = \frac{K_{IC}^2}{\pi (\alpha \sigma_s)^2}$$

工作应力与屈服应力之比

- (K_{IC}/σ_s) 愈大， a_c 也愈大，即裂纹容限大
- (K_{IC}/σ_s) 愈大，裂尖塑性区也愈大，裂纹扩展将消耗更多的能量

裂纹容限-不同强度等级材料的脆断倾向评价



根据断裂力学原理，来分析材料断裂韧度和屈服强度对临界裂纹尺寸的影响，从而评价材料的脆性倾向。

一般构件中，较常见的是表面半椭圆裂纹，从安全角度如果不考虑塑性区的影响，则裂纹临界尺寸可由下式估算：

$$a_c = 0.25 \left(\frac{K_{IC}}{\sigma} \right)^2$$

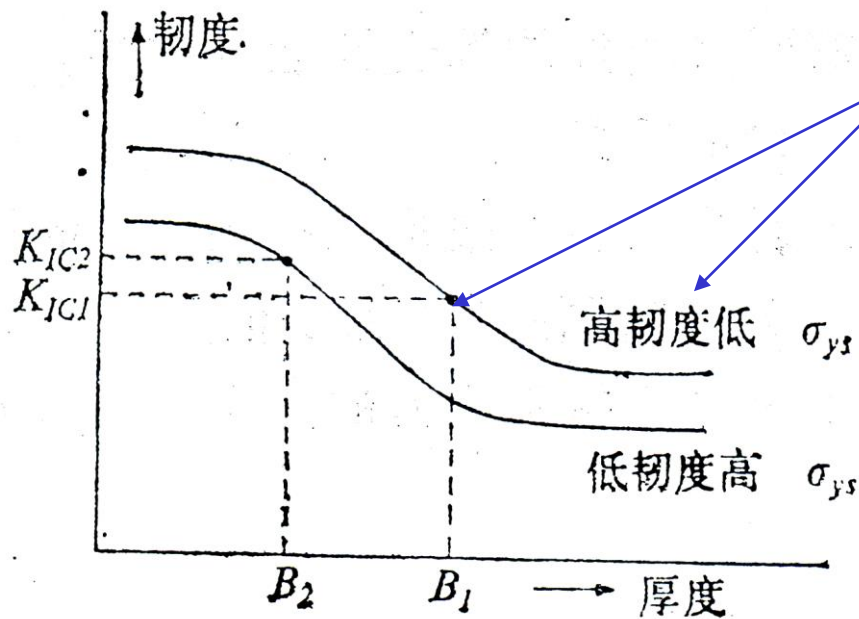
三种不同强度级别钢铁材料脆断倾向估算举例

材料		σ_s (MPa)	K_{IC} (MPa.m ^{1/2})	σ (MPa)	a_c (mm)
超高强度钢		1700 ~ 1800	75	1500	0.625
中、低强度钢	韧性态	300~500	150	200	140
	冷脆态		30		5.6
球墨铸铁		250~400	25	10~50	40~1000

2.1.8.2 厚度确定原则



在选择材料时，厚度的影响不能忽视。



若选择高 K_{IC} 、低 σ_s 的材料，
若 σ_s 太低，则必须增加厚度来
满足承载要求，但导致断裂韧
度 K_{IC} 下降，甚至低于高强度
（低韧性）材料的断裂韧性。

图5.1 韧性随厚度的变化

(1) 全厚度屈服准则



所谓**全厚度屈服**，是指裂纹构件始终处于平面应力状态，在断裂前可发生大量塑性变形。该准则提供了使构件免于灾难性平面应变断裂的条件。

按ASTM标准，为保证平面应变断裂条件，厚度需满足：

$$B \geq 0.0635 \times \left(\frac{K_{IC}}{\sigma_s} \right)^2 = B_0$$

保证平面应变断裂条件的最小厚度

该式表明， B_0 越大，即选择高断裂韧度或低屈服强度（高 K_{IC}/σ_s ）的材料，越容易满足全厚度屈服。

上式可改写为：

$$K_{IC} \leq 3.97 \sigma_s \sqrt{B} = K_{IC0}$$

保证平面应变断裂条件的最大断裂韧度

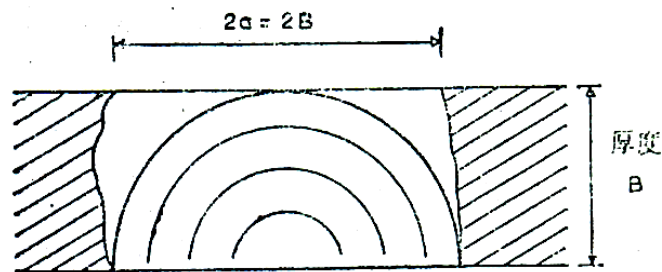
该式表明， K_{IC0} 越小，即 σ_s 或 B 越小，越容易满足全厚度屈服条件。换句话说，选择高屈服强度的材料，使得满足发生平面应变断裂的厚度减小，越不容易满足全厚度屈服条件。

(2) 破裂前渗漏原则



压力容器在应力腐蚀或交变载荷作用下，在内表面可能产生不穿透裂纹。如果裂纹在造成灾难性破坏以前，总是先穿透壁厚，使容器内流体渗漏，则可能被检测出来，及时采取措施，避免事故发生。这种设计思想称为**破裂前渗漏原则**。

假定表面裂纹为半圆状，当裂纹穿透外表面时，就成了长度为壁厚两倍的穿透裂纹。



半圆形穿透裂纹

若长度为 $2B$ 裂纹的失稳应力等于屈服应力 σ_s ，则压力容器可近似为平面应力状态。因此，若该种材料的平面应力断裂韧度 K_{IC} 不小于长为 $2B$ 裂纹的有效应力强度因子，即可能防止灾难性破裂。

准则：

$$K_{IC} \geq \sigma_s \sqrt{\pi(B + r_p)} \quad (1)$$



(2) 破裂前渗漏原则 (续)

若取
$$r_p = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_s} \right)^2 = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\sigma \sqrt{\pi a}}{\sigma_s} \right)^2 \quad (2)$$

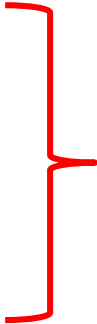
且当 $a = B$ 时, $\sigma = \sigma_s$, 则将 (2) 式代入 (1) 式, 得:

$$\frac{K_{IC}^2}{B\sigma_s^2} \geq \pi + \frac{1}{2} \quad (3)$$

- 当压力容器厚度 B 确定时, 选择 (K_{IC}/σ_s) 比值大的材料, 容易满足破裂前渗漏原则
- 当压力容器材料确定后 (即 K_{IC}/σ_s 比值已知), 则厚度 B 越小, 越容易满足破裂前渗漏原则

2.1.9 断裂力学在工程断裂分析中的应用

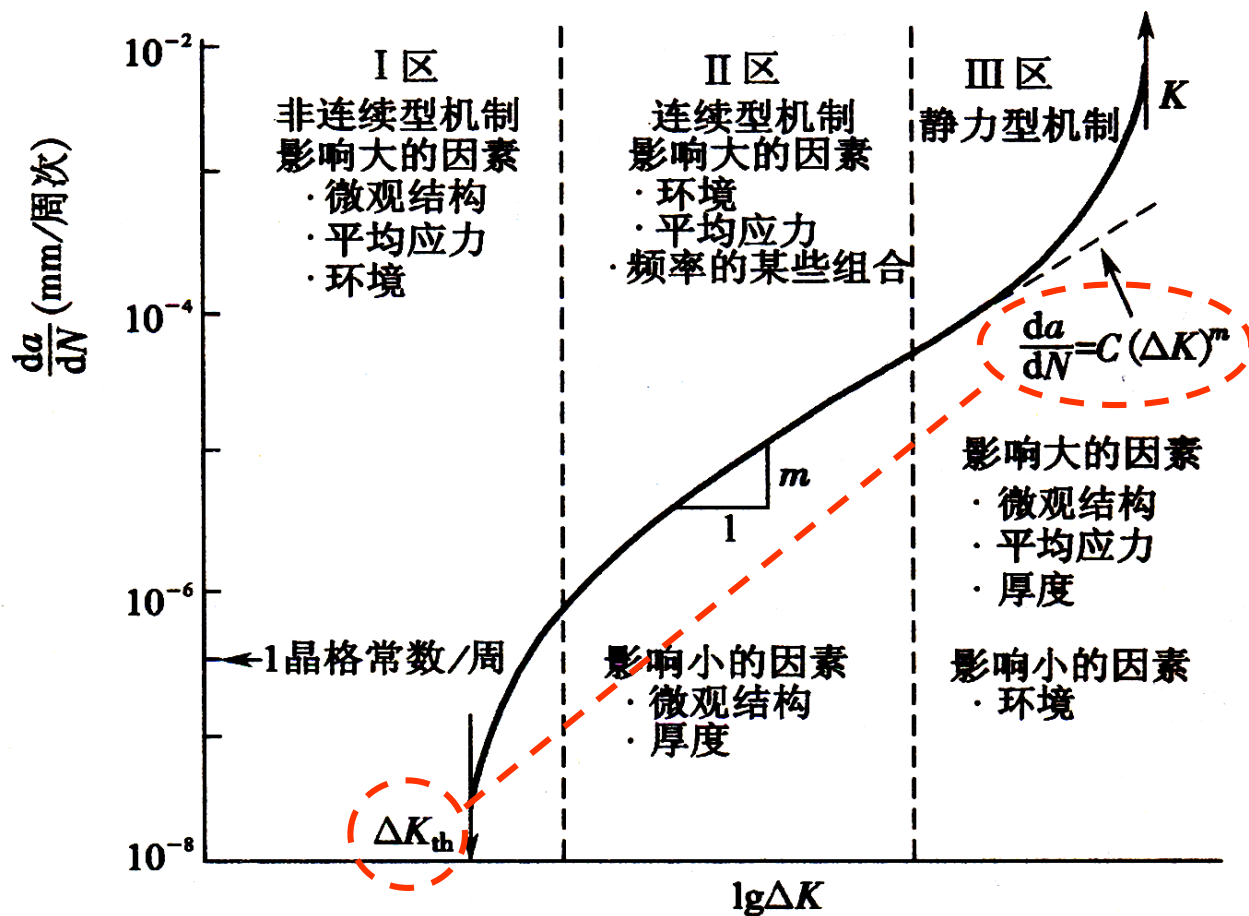


- 在疲劳断裂中的应用
 - 在环境断裂中的应用
 - 在蠕变断裂中的应用
- 
 - 裂纹扩展速率表征
 - 裂纹体无限寿命强度设计
 - 裂纹体有限寿命估算

2.1.9.1 断裂力学疲劳断裂中的应用



(1) 疲劳裂纹扩展速率曲线 (裂纹扩展速率表征)



(2) 疲劳裂纹扩展门槛值 (无限寿命强度设计)



疲劳裂纹扩展门槛值表征了带裂纹体不疲劳断裂（无限寿命）的性能。
因此可建立裂纹件无限寿命校核公式：

$$\Delta K = Y\Delta\sigma\sqrt{a} \leq \Delta K_{th}$$

- 已知材料的 ΔK_{th} 及实际裂纹尺寸 a ，则可求得该裂纹件具有无限疲劳寿命的承载能力：

$$\Delta\sigma_{th} = \frac{\Delta K_{th}}{Y\sqrt{a}}$$

- 已知材料的 ΔK_{th} 及工作载荷 $\Delta\sigma$ ，则可求得该构件所能允许的最大（临界）裂纹尺寸：

$$a_c \leq \frac{1}{Y^2} \left(\frac{\Delta K_{th}}{\Delta\sigma} \right)^2$$



(3) 剩余疲劳寿命估算 (有限寿命估算)

- 无损探伤法检查裂纹（初始长度 a_0 、形状、位置、取向等）；
- 根据探测到的裂纹参数以确定 ΔK 值；
- 根据材料 K_{IC} 以及名义工作应力 $\Delta\sigma$ ，确定临界裂纹长度 a_c ；
- 选择疲劳裂纹速率扩展公式，从 a_0 积分到 a_c ，得到剩余疲劳寿命。

若选择**Paris公式**: $\frac{da}{dN} = C(\Delta K)^n$

则有:
$$N_c = \int_0^{N_c} dN = \int_{a_0}^{a_c} \frac{da}{C(Y\Delta\sigma\sqrt{a})^n}$$

当 $n=2$ 时:

$$N_c = \frac{\ln\left(\frac{a_c}{a_0}\right)}{CY^2(\Delta\sigma)^2}$$

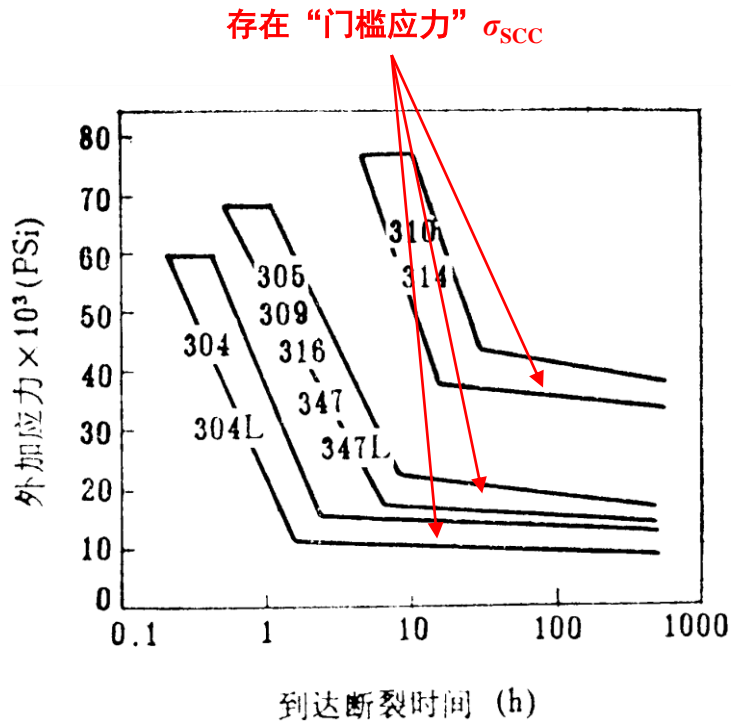
当 $n \neq 2$ 时:

$$N_c = \frac{a_c^{\left(1-\frac{n}{2}\right)} - a_0^{\left(1-\frac{n}{2}\right)}}{\left(1-\frac{n}{2}\right)CY^n(\Delta\sigma)^n}$$
$$N_c = \frac{2}{CY^n(\Delta\sigma)^n(n-2)} \left[\frac{1}{a_0^{\left(\frac{n-2}{2}\right)}} - \frac{1}{a_c^{\left(\frac{n-2}{2}\right)}} \right]$$

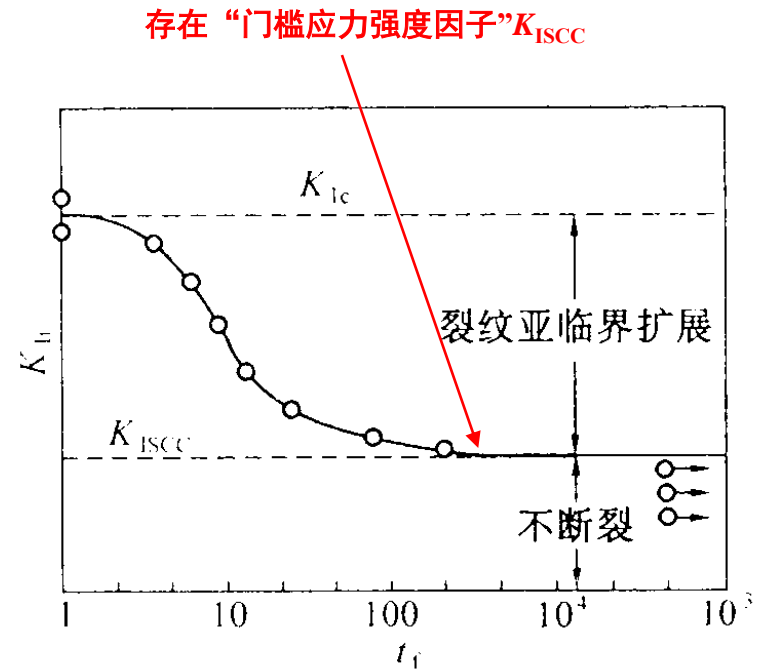
2.1.9.2 断裂力学在SCC中的应用



(1) SCC临界应力强度因子 K_{ISCC} (无限寿命强度设计)



无裂纹光滑试样在沸腾42% $MgCl_2$ 溶液中的
应力-寿命曲线



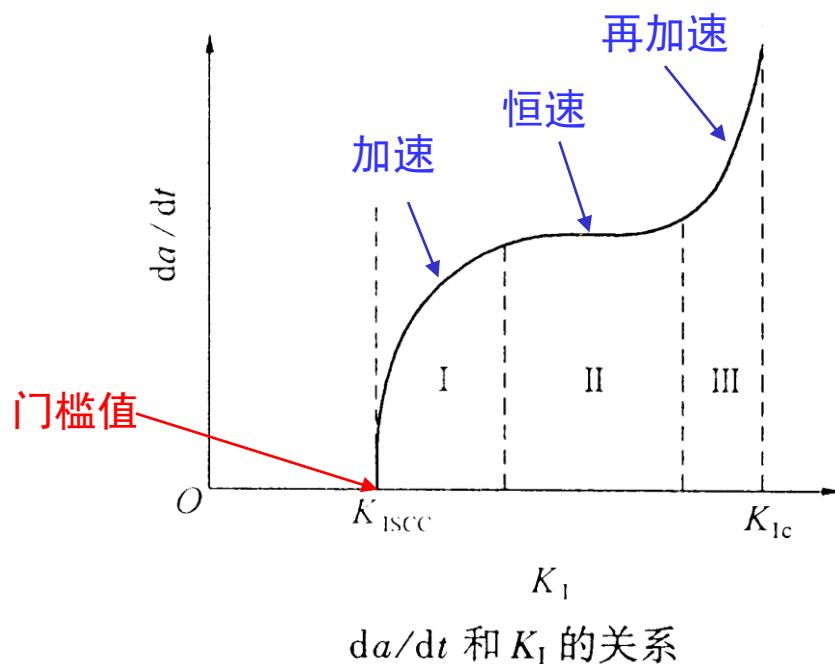
带裂纹试样在应力腐蚀溶液中的
应力强度因子-寿命曲线

(2) SCC裂纹扩展速率 (裂纹扩展速率表征)



SCC裂纹扩展速率是应力强度因子的函数:

$$\frac{da}{dt} = f(K_I)$$



在恒定的工作应力下，由于应力和腐蚀的联合作用，裂纹经历加速—恒速—再加速三个扩展阶段，致使 K_I 达到 K_{IC} ，发生SCC。



(3) SCC寿命估算 (有限寿命估算)

- $K_I < K_{ISCC}$ 时, 构件是安全的, 故根据 K_{ISCC} 计算出临界裂纹尺寸 a_0^* 。
- 如果 $a_0 < a_0^*$, 则不发生SCC。
- 如果 $a_0 > a_0^*$, 此时可根据 (da/dt) 来预测构件的使用寿命 (断裂时间)。

裂纹扩展第二阶段的 (da/dt) 近似为常数, 即:

$$\frac{da}{dt} = A$$

裂纹由 a_0 扩展到第二阶段终了时 (a_2) 所需时间为:

$$t_f = \frac{a_2 - a_0}{A}$$

$$a_2 = \left(\frac{K_{I2}}{Y\sigma} \right)^2$$

第二阶段终了时的应力强度因子

由于未考虑第一、第三阶段, 这样估算的寿命偏于保守。