3 断裂物理

3.1 解理断裂

3.2 沿晶断裂

3.3 孔聚断裂

3.4 韧/脆判据及韧/脆转变

3.5 裂纹尖端过程区

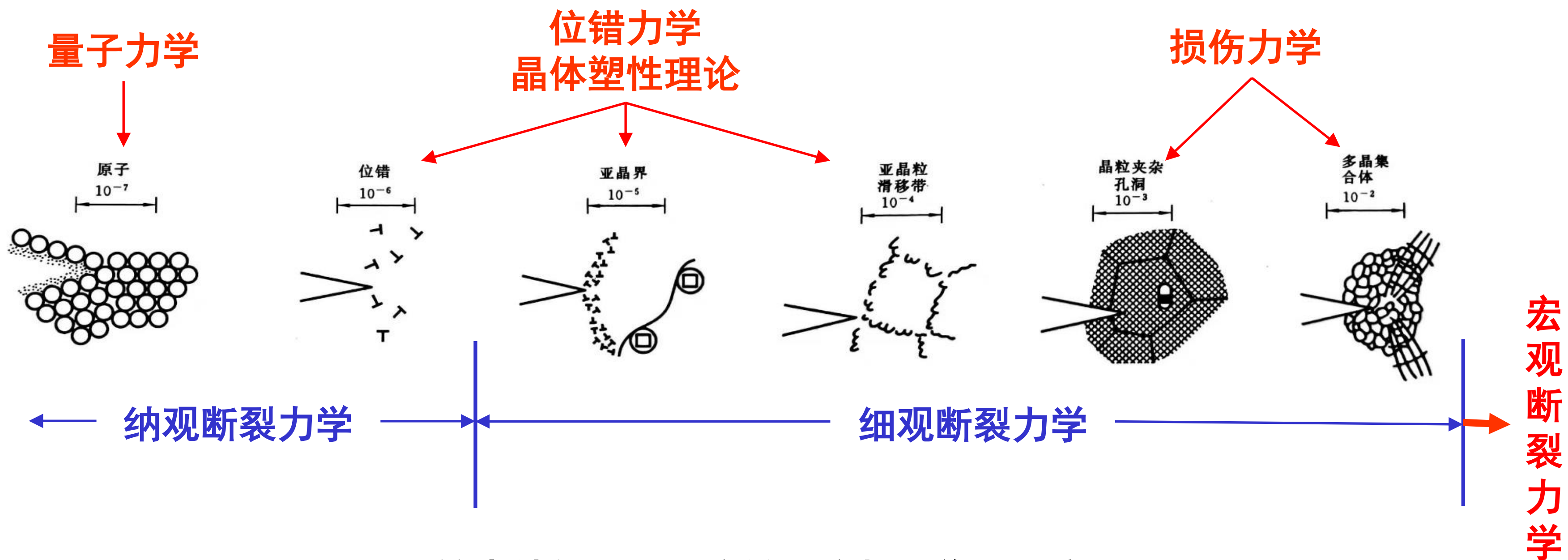
3.6 裂纹的位错模拟

3.7 断裂与分形

3.8 断裂的损伤理论

3.5 裂纹尖端过程区

从断裂物理的角度分析断裂机制时，必然要涉及到裂纹尖端地区的结构问题，要考虑裂纹尖端与多尺度结构的交互作用。

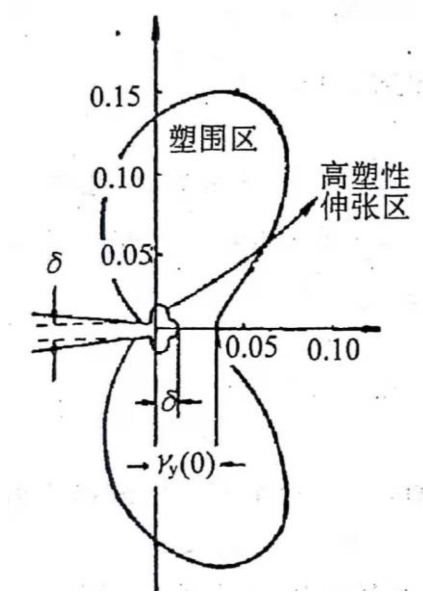


裂纹尖端与不同尺度微结构相互作用示意图

（尺度单位：cm）

3.5.1 裂纹尖端塑性区

从断裂力学的角度分析裂纹尖端塑性区对应力强度因子的影响时，是假定裂纹尖端前沿的材料为均匀各向同性弹塑性体，可用线弹性断裂力学（小范围屈服）、弹塑性断裂力学、有限元计算、实验法等求得裂纹尖端塑性区大小及形状。



Levy等FEM计算的塑性区

在Fe-3%Si合金中的裂尖蚀斑花样

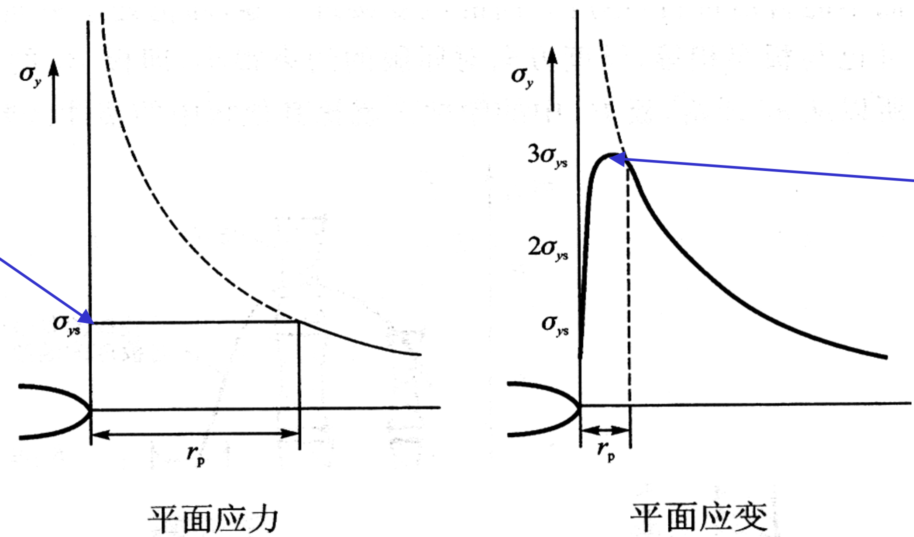
(Hann-Rosenfield)

3.5.1.1 裂纹尖端塑性约束系数

定义： 塑形区内最大应力与单轴屈服应力的比值为**塑形约束系数** ***p.c.f.***

$$p.c.f=\frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{ys}}$$

$p.c.f=1$



$p.c.f=3$

在考虑应变硬化时

$(p.c.f)_{\max}=5$

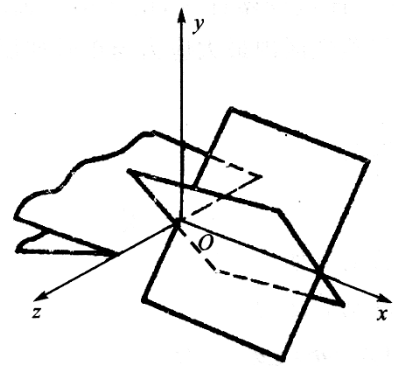
裂纹尖端处近似应力分布（理想塑性，ν= 0.33）

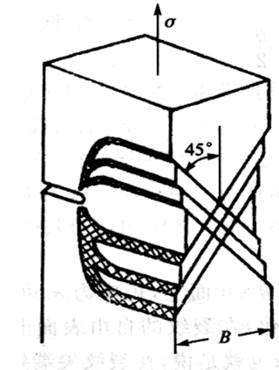
3.5.1.2 最大剪应力及方位

平面应力状态

$$\sigma_y > \sigma_x > \sigma_z = 0$$

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_y - \sigma_z}{2} = \frac{\sigma_y}{2}$$



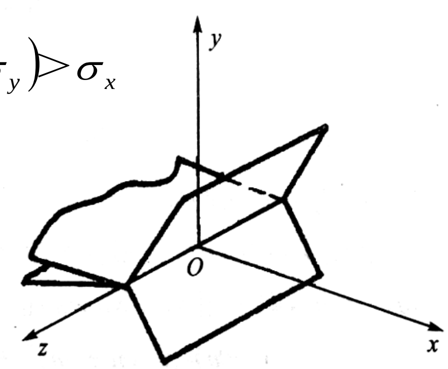


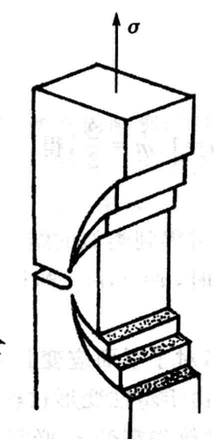
最大剪应力处于通过 ***x*** 轴，并于 ***yox*** 面成45°角的平面内

平面应变状态

$$\sigma_y > \sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y) = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) > \sigma_x$$

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2}$$

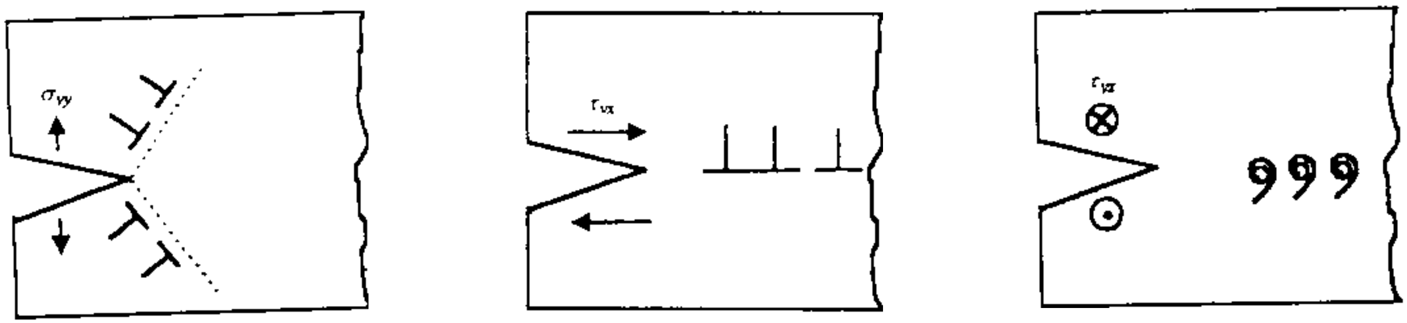




最大剪应力处于通过 ***z*** 轴，并于 ***yoz*** 面成45°角的平面内

3.5.1.3 裂纹尖端塑性区滑移位错的类型

I型、II型、III型裂纹激活位错的情况并不相同



I 型裂纹 **II 型裂纹** **III 型裂纹**

裂纹面与滑移面不重合

激活非共面刃型位错

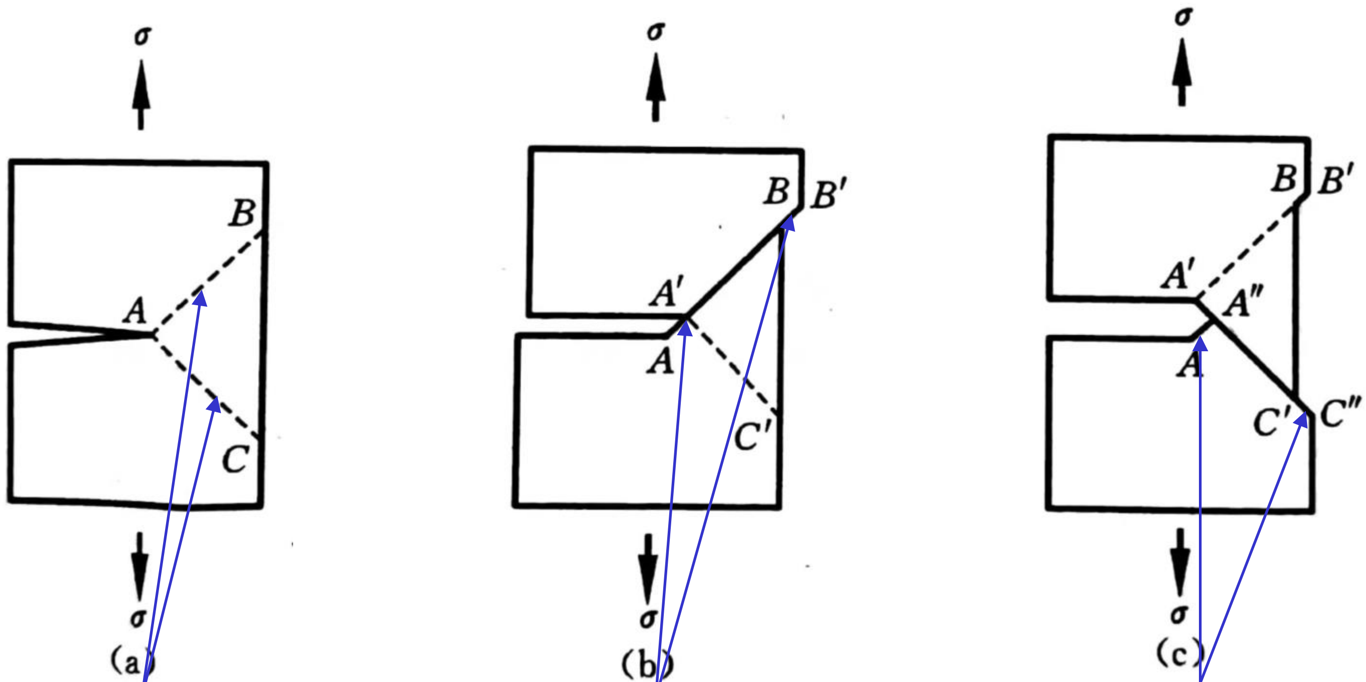
裂纹尖端钝化

裂纹面与滑移面重合

激活共面刃型位错 激活共面螺型位错

裂纹尖端不钝化

3.5.1.4 裂纹尖端钝化的滑移机制



对称双滑移系，与裂尖最大切应力方向大致平行

*AB*滑移系首先开动，产生新生面*AA′*和*BB′*

在应力集中较高的*A′*处，另一滑移系开动，同时产生新生面*A′A″*和*C′C″*

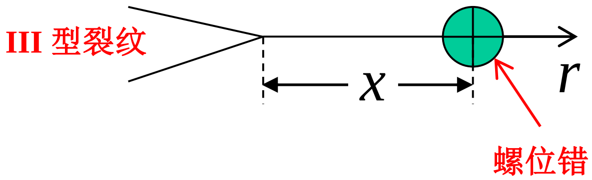
在两个滑移系交替作用下，裂纹尖端发生塑性钝化和开口

3.5.2 裂纹与位错的相互作用

3.5.2.1 裂尖位错的应力场

当裂纹前方存在一个位错时，该位错的应力场与无裂纹时不同。设离裂尖 x 处有一个螺位错，则其应力场为

$$\tau_{yz}(r)=\left[-\frac{\mu b}{2\pi(x-r)}\right]\left(\frac{x}{r}\right)^{\frac{1}{2}}$$



- 当 $r < x$ 时， $\tau_{yz} < 0$，裂尖自由表面吸引位错
- 当 $r > x$ 时，$\tau_{yz} > 0$，裂纹的影响变小

3.5.2.2 裂尖位错引起的应力强度因子K_D

处在裂纹前方的位错本身有应力场，它会产生一个附加应力强度因子K_D。

III型裂纹的应力强度因子为：

$$K_{\mathrm{III}} = \lim_{r \to 0} (2\pi r)^{\frac{1}{2}} \cdot \tau_{yz}$$

螺位错相当于一个**III**型裂纹，则螺位错引起的应力强度因子为：

$$K_{\mathrm{III}D} = \lim_{r \to 0} \left\{ \left[-\frac{\mu b}{2\pi (x-r)} \right] \left(\frac{x}{r} \right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{2\pi r} \right\} = -\frac{\mu b}{\sqrt{2\pi x}}$$

负值

3.5.2.3 位错对裂纹的屏蔽

由于每个位错应力场引起的 ***K*** 值是负值，故使裂纹尖端 ***K*** 值下降，称为位错对裂纹的屏蔽。

以**III**型裂纹为例，若裂纹延长线上有 ***n*** 个螺位错，对每个螺位错引起的应力强度因子求和，可得到总的附加应力强度因子为：

$$K_{\mathrm{III}D}=-\sum_{i=1}^{n}\frac{\mu b}{\sqrt{2\pi x_i}}=-\int_0^L\frac{\mu b}{\sqrt{2\pi x}}f(x)dx$$

裂纹尖端有效应力强度因子$K_{\mathrm{III}f}$是外力引起的 $K_{\mathrm{III}a}$ 和位错引起的 $K_{\mathrm{III}D}$ 之和，即

$$K_{\mathrm{III}f}=K_{\mathrm{III}a}+K_{\mathrm{III}D}$$

由于$K_{\mathrm{III}D}$是负值，故$K_{\mathrm{III}f}<K_{\mathrm{III}a}$，即裂尖发射的位错对裂纹尖端起屏蔽作用，使裂纹尖端有效应力强度因子下降。

同样，**I**型裂纹和**II**裂纹发射的位错对裂纹尖端也有屏蔽作用。

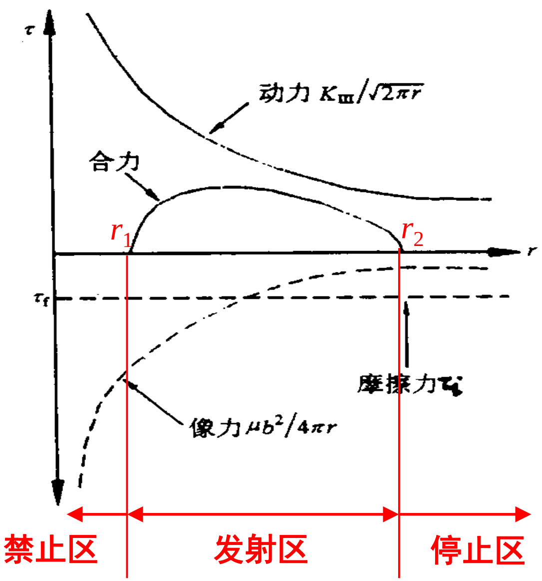
3.5.2.4 裂尖发射位错的临界应力强度因子

作用在位错上的力共有三种：

① 裂尖应力场的作用力：$F_G = b\tau_{yz} = \dfrac{bK_{\text{III}}}{\sqrt{2\pi r}}$

② 裂尖自由表面像力：$F_S = -\dfrac{\mu b^2}{4\pi r}$

③ 晶格摩擦力：$F_i = -\tau_i b$



合力： $$F_T(r) = \frac{bK_{\text{III}}}{\sqrt{2\pi}} r^{-\frac{1}{2}} - \frac{\mu b^2}{4\pi} r^{-1} - \tau_i b$$

令$F_T=0$，解得两个根 r_1和 r_2，当$r \le r_1$、或 $r \ge r_2$时，位错不能发射。

随K_{III}增加，F_T增加，r_1减小、r_2增大。当 $r_1 = r_0$（位错芯半径）时，若 $F_T(r_0)>0$，则位错即可发射并离开裂尖。故发射临界条件为：

$$K_{\text{III}e} = \sqrt{2\pi r_0}\left(\frac{\mu b}{4\pi r_0} + \tau_i\right)$$

3.5.2.5 裂纹尖端的位错分布

裂尖发射一组位错后，作用在其中某一个位错（如*A*位错）上的力除了前述三项以外，还有其它位错的合力F_d：

$$F_d=\sum_{i=1}^{n-1}-\left[\frac{\mu b^2}{2\pi\left(x_i-r\right)}\right]\left(\frac{x_i}{r}\right)^{\frac{1}{2}}$$

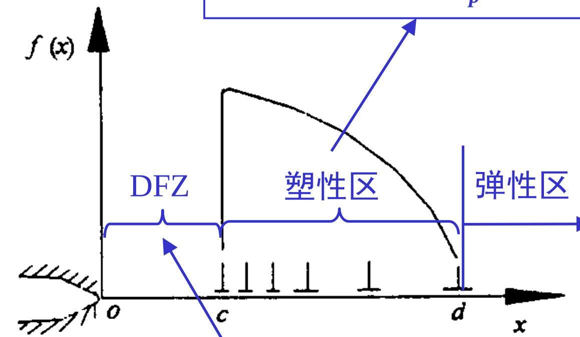
总力平衡时应有：$$\frac{K_{\mathrm{III}}}{\sqrt{2\pi r}}-\frac{\mu b}{4\pi r}-\tau_i-\sum\left[\frac{\mu b}{2\pi\left(x_i-r\right)}\right]\left(\frac{x_i}{r}\right)^{\frac{1}{2}}=0$$

假设位错连续分布，密度分布函数为*f*(*x*)，则可用积分代替求和，并略去像力一项（二阶小量），则有：

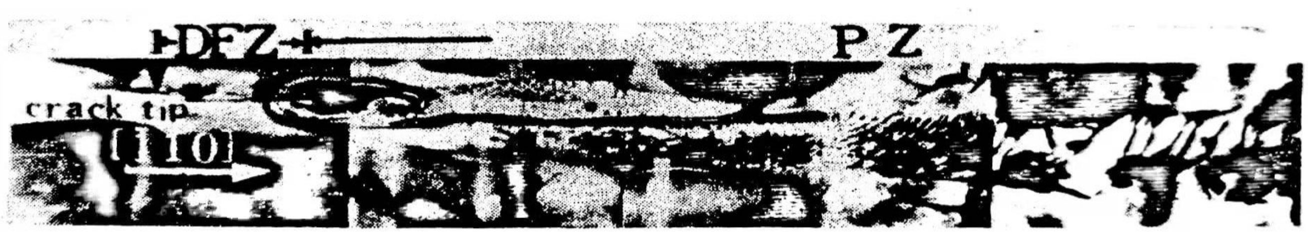
$$\frac{K_{\mathrm{III}}}{\sqrt{2\pi r}}-\int\left[\frac{\mu b}{2\pi\left(x-r\right)}\right]\left(\frac{x}{r}\right)^{\frac{1}{2}}f\left(x\right)dx=\tau_i$$

① 高塑性伸张区：裂尖前10^{-2}-10^{-3}cm，$1>\varepsilon_p\geq 0.1$

② 塑性区：比高塑性伸张区大一个量级，$\varepsilon_p\leq 0.1$



范围约10^{-7}cm，$\varepsilon_e\geq 0.1$。金属的韧性首先取决于这一区内的原子键特点



镍基合金单晶中裂纹尖端的无位错区（DFZ）和塑形区（PZ）

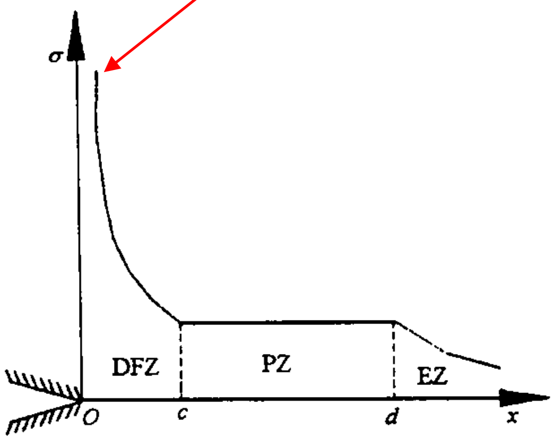
DFZ只能在恒位移或恒载荷条件下观察到。随K_I↑、或（τ_i/μ）↑ 或裂尖发射位错数↑、或加载速率↑，**DFZ**尺寸↓

DFZ中的应力分布

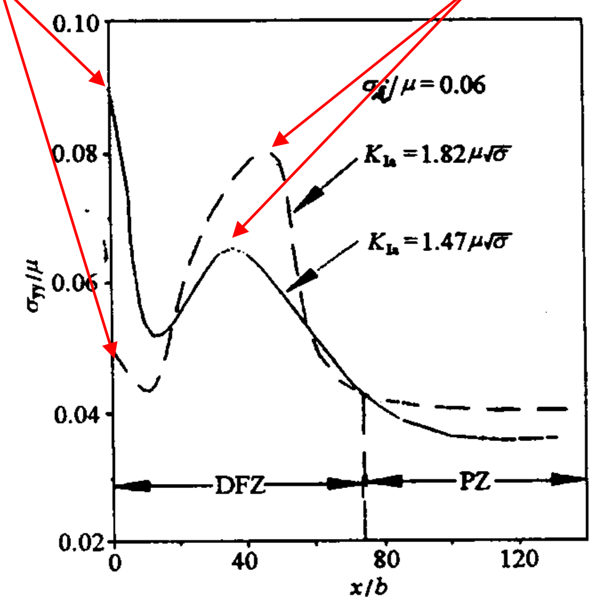
只有一个应力峰值，
在裂纹顶端处

第一应力峰值
在裂纹顶端处

第二应力峰值
在DFZ中



III 型裂纹



I 型裂纹

- 随 K_I 升高，顶端应力峰降低，而DFZ应力峰增高
- 随（τ_i/μ）升高，此两应力峰均升高

3.5.3 断裂原子过程的分子动力学模拟

3.5.3.1 分子动力学简介

纳观计算力学的主要手段是分子动力学（**Molecular Dynamics-MD**）模拟，它是直接建立在原子尺度上的，晶格中每个原子在不同外界条件下的行为可以得到充分的体现。

MD是一套模拟方法，主要是依靠**Newton**经典力学理论来模拟分子体系的运动。**MD**方法将 N 个经典粒子系统的运动方程组进行数值积分，得到相轨道，并进而研究该系统的平衡热力学性质、结构动力学性质和非平衡输运性质。

（1）基本方程

简单球形分子系统的Lagrange函数为

$$L\left(r^N, v^N\right) = \frac{1}{2}\sum_i m_i v_i \cdot v_i - U\left(r^N\right)$$

系统的Hamilton量可表示为

$$H\left(r^N, v^N\right) = \sum_i P_i v_i \cdot v_i - L\left(r^N, v^N\right) = \frac{1}{2}\sum_i \frac{P_i \cdot P_i}{m_i} + U\left(r^N\right)$$

r^N　v^N　P^N　分别为*N*个粒子系统的坐标、速度、动量集合

m_i　r_i　v_i　P_i　分别为第*i*个粒子的质量、位置、速度和动量

$U\left(r^N\right)$　为系统总势能

（1）基本方程（续）

对上述经典Newton力学体系可写出系统的正则Hamilton方程：

$$\frac{dr_i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial P_i}=\frac{P_i}{m_i} \qquad i=1,2,\cdots,N$$

$$\frac{dP_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial r_i}=-\nabla_i U\left(r^N\right) \qquad i=1,2,\cdots,N$$

对坐标的梯度算子　系统中其他粒子对*i*粒子的总作用力

计算采用蛙跳算法：

$$v_i\left(t+\frac{\Delta t}{2}\right)=v_i\left(t-\frac{\Delta t}{2}\right)+\frac{\Delta t}{m_i}F_i(t)$$

$$r_i(t+\Delta t)=r_i(t)+\Delta t\cdot v_i\left(t+\frac{\Delta t}{2}\right)$$

由粒子某一时刻位置 $v^N(t)$，可求出作用力 $F^N(t)$

进而求出粒子的速度 $v^N\left(t+\frac{\Delta t}{2}\right)$ 和更新的位置 $r^N(t+\Delta t)$

（2）边界条件

用MD模拟材料的力学行为，其结果的可靠性除了取决于势函数选取的优劣，还取决于边界条件的合理配置。早期MD计算采用二维晶格模型，仅对一层原子面进行模拟。随后又发展了准三维晶格模型，即在厚度z方向等于原子在z方向排列一个周期的长度。采用周期性边界条件后，可以认为晶体在z方向无限长，位移为0，从而可用平面应变状态断裂力学求解边界上原子在面内的位移。

对固体断裂的MD模拟，边界条件有两类：第一类是位移固定边界条件，即在Δ*t*时刻加载条件下，由断裂力学方法计算的边界上每个原子的位移在Δt时间内保持恒定；第二类是应力固定边界条件，即由断裂力学方法计算的边界上的应力或载荷分布在Δt时间内保持恒定。

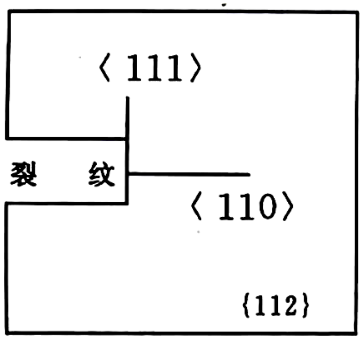
受计算能力的限制，MD模拟的晶体尺寸不能太大，一般约为几十个纳米。若针对某些问题需要模拟较大尺度范围，MD方法就力不从心了。这时就需要把离散的晶体嵌入连续介质中，采用两层或三层镶嵌模型，在连续介质中采用连续介质力学计算方法（如有限元法）进行模拟，而这就属于多（跨）尺度模拟范畴了。

3.5.3.2 裂纹尖端原子过程MD模拟

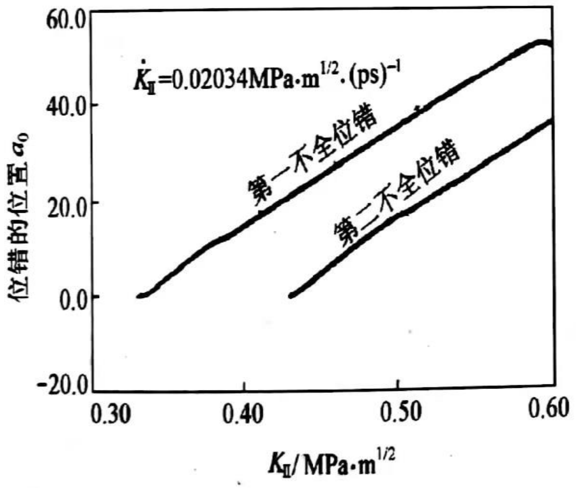
（1）裂尖位错发射形式

MD分析表明，位错都是以不全位错的形式发射和运动的，两个不全位错间夹着一片层错。对 fcc 晶体，一全位错可分解为两个Shockley不全位错：

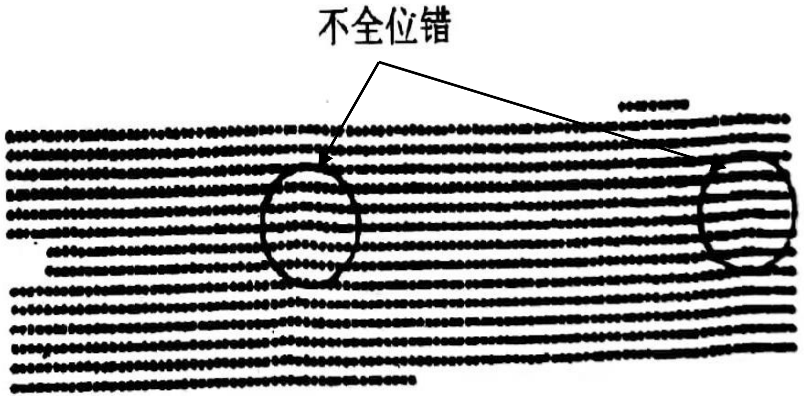
$$\frac{1}{2}[\bar{1}10] \rightarrow \frac{1}{6}[\bar{2}11] + \frac{1}{6}[\bar{1}2\bar{1}]$$



II型加载条件下MD模拟采用的几何构形



位错位置与加载水平的关系曲线



$K_I = 0.48\text{MPa}\cdot\sqrt{\text{m}}$ 时裂尖的原子图像

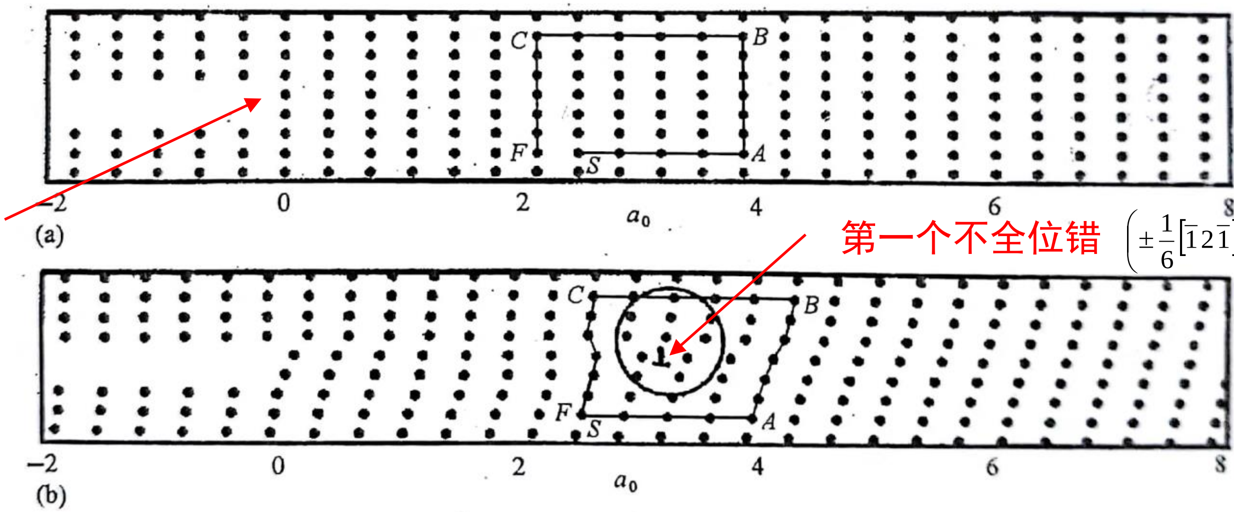
II 型裂纹位错发射MD模拟实例

x 轴：$[\bar{1}10]$

y 轴：$[111]$

z 轴：$[11\bar{2}]$

裂纹面：(111)



裂尖

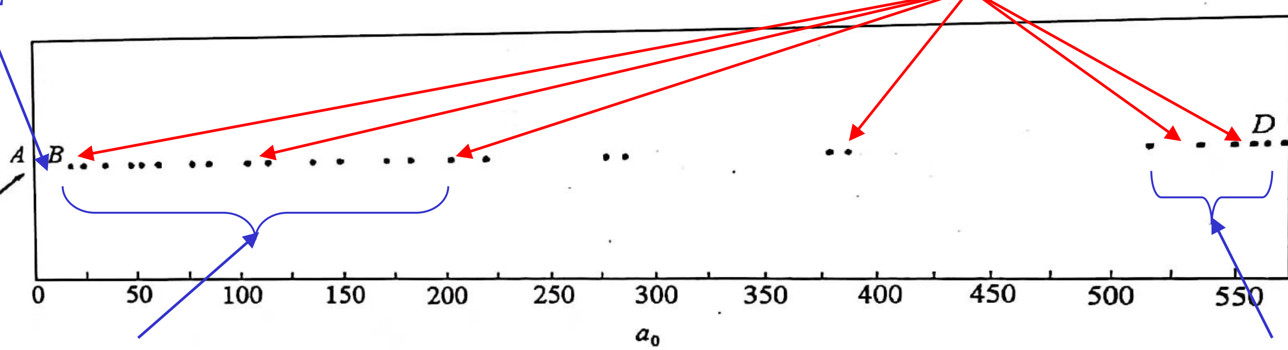
加载前

第一个不全位错 $\left(\pm\frac{1}{6}[\bar{1}2\bar{1}]\text{的刃型分量}\frac{1}{4}[\bar{1}10]\right)$

$$K_{\mathrm{II}} = 0.521 MPa \cdot \sqrt{m}$$

26个不全位错（13个全位错），达到平衡

DFZ



裂纹尖端

构形边界

$$K_{\mathrm{II}} = 1.6 MPa \cdot \sqrt{m}$$

弛豫6×10³时间步后

在裂尖前反向塞积

在强障碍前的正向双塞积

fcc点阵裂纹尖端位错发射的MD模拟

（2）位错发射后的裂纹尖端应力分布

弹性力学解：

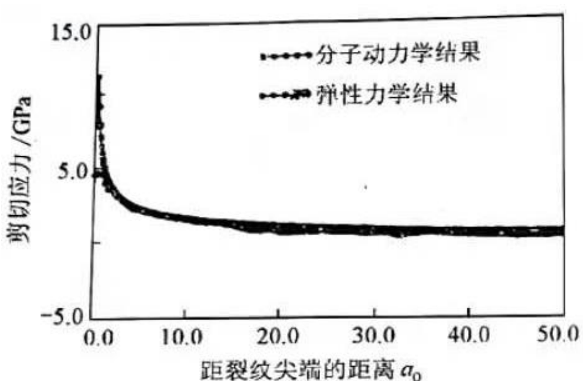
$$\tau = \frac{K_{\mathrm{II}}}{\sqrt{2\pi\pi}} + \sum_i \frac{\mu}{2\pi(1-\nu)}\sqrt{\frac{x_i}{x}}\frac{b}{x-x_i}$$

MD计算公式：

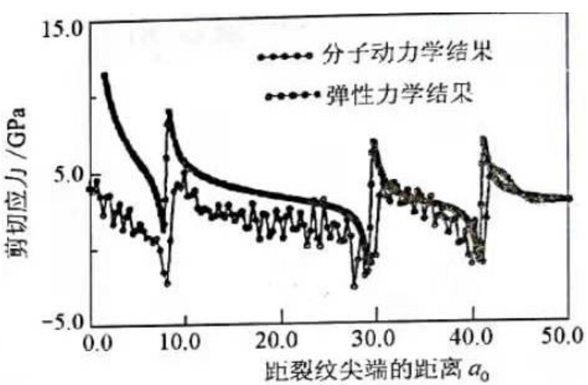
$$\tau = \frac{\mu b}{2\pi(1-\nu)} \cdot \frac{x^2}{x^2+\xi^2}$$

（Peierls位错应力场修正，ξ-位错宽度）

弹性解与MD模拟结果吻合



（a）位错发射前

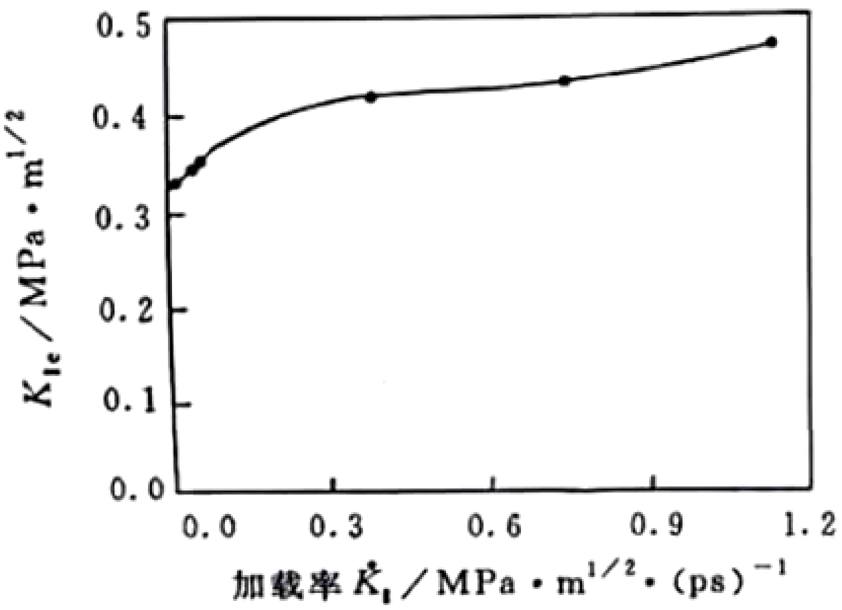


（b）位错发射后

弹性解高于MD模拟结果。主要原因与高应力部位（如裂尖和位错核心）的原子松弛有关

裂尖应力MD模拟结果与弹性解的比较

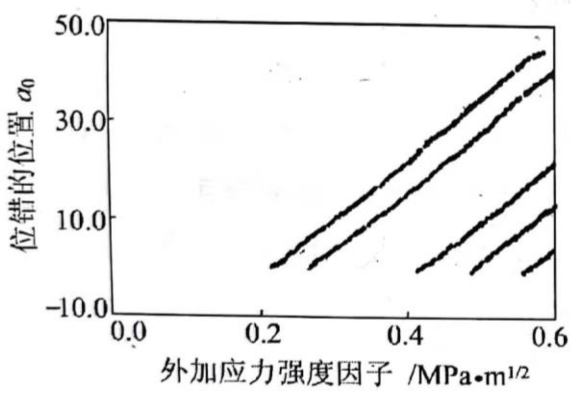
（3）加载速率对位错发射临界应力强度因子的影响



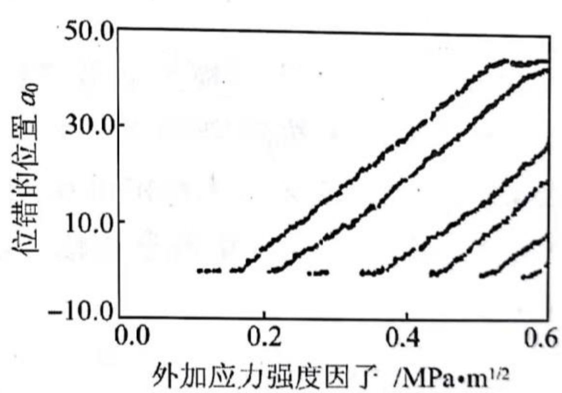
位错发射临界应力强度因子与加载速率的关系

随着加载速率的提高，位错发射的临界 *K* 值升高。这一结果可以解释韧脆转变的应变速率效应。

（4）温度的影响



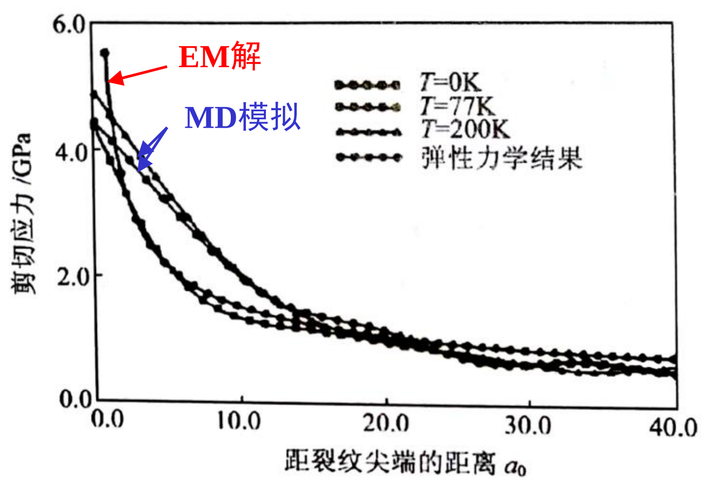
(a) T=100K



(b) T=300K

温度对位错发射的影响

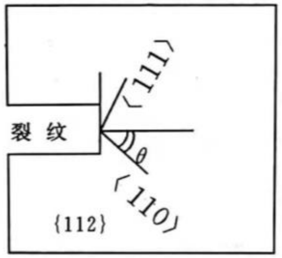
随温度上升，发射位错的临界 *K* 值下降。在相同的载荷水平下，更多地位错被发射出来。温度较高时，位错的运动速度不均匀，在某一瞬时，位错在局部可能发生反向运动



温度对裂尖应力分布的影响

在T=0K时，$r>5a_0$区域内，MD模拟与弹性力学解一致；而$r<5a_0$区域内，有较大偏差。这说明，由于实际晶体的离散性，线弹性解不适用于裂尖附近的应力场。要计算裂尖附近的应力场，只能采用MD方法。

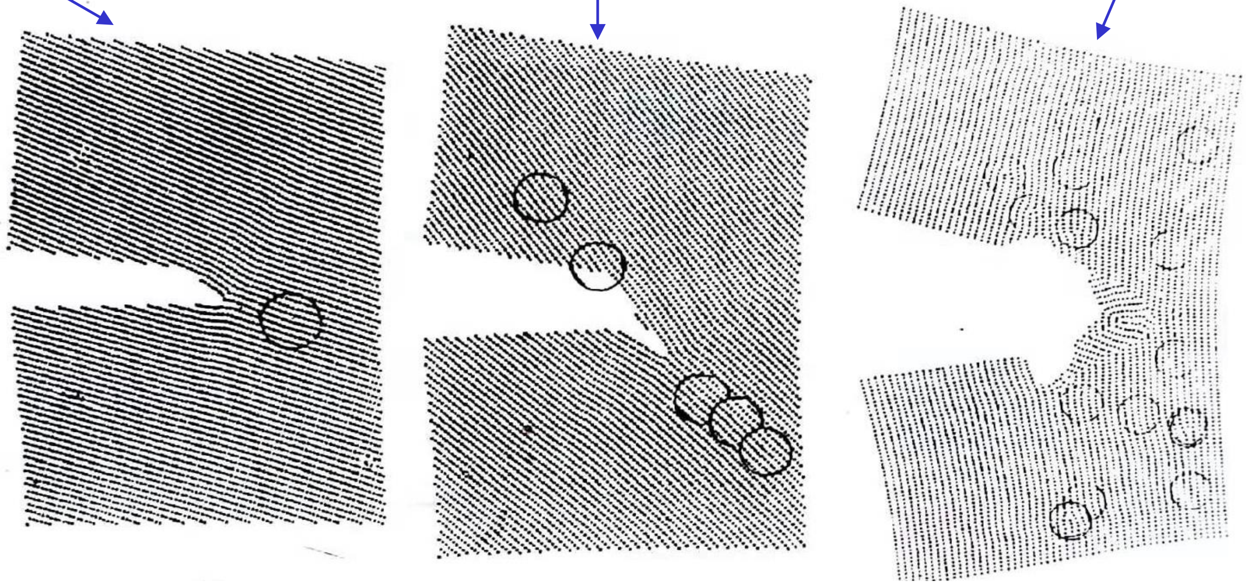
（5）裂纹取向对位错发射的影响



当0≤θ≤16°时，裂尖沿滑移面解理开裂，无位错活动。当16°≤θ≤25°时，尽管有位错发射，但裂纹还是沿发射位错的滑移面开裂。

当25°≤θ≤60°时，裂尖发射了许多位错，并且在位移边界产生塞积，但当塞积达到一定程度后，裂纹仍然沿发射位错的滑移面开裂。

当60°≤θ≤90°时，大量位错从裂尖发射出来，并且次滑移系位错也从裂尖发射出来，导致裂纹尖端钝化。



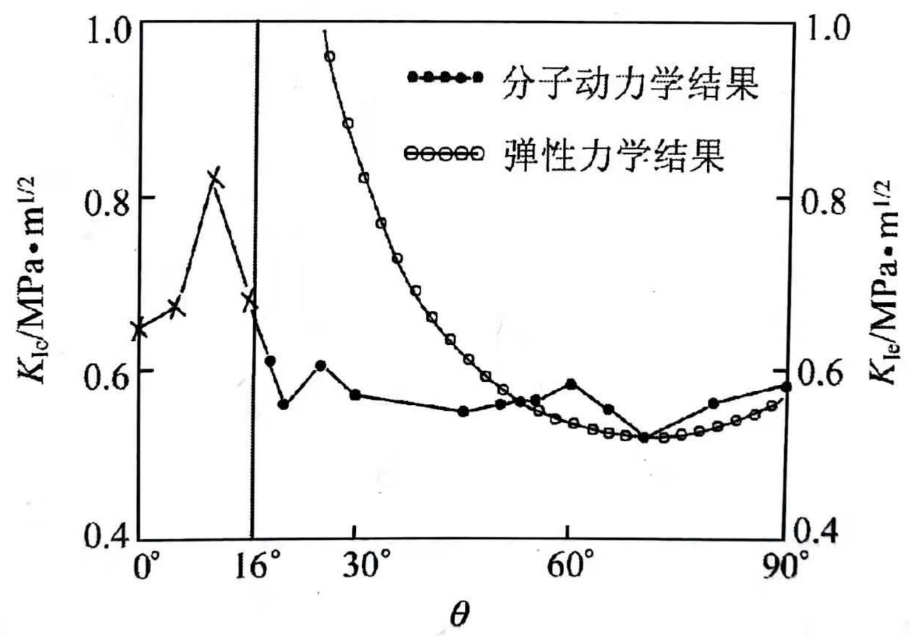
$K_{\mathrm{I}} = 0.96 MPa \cdot \sqrt{m}$
$\theta = 18^{\circ}$

$K_{\mathrm{I}} = 1.6 MPa \cdot \sqrt{m}$
$\theta = 45^{\circ}$

$K_{\mathrm{I}} = 3.5 MPa \cdot \sqrt{m}$
$\theta = 90^{\circ}$

取向角对裂尖断裂方式的影响

（5）裂纹取向对位错发射的影响（续）



取向角对裂尖位错发射临界应力强度因子的影响

虽然临界**K**值的最小值都在$\theta\approx70°$时，但弹性解与**MD**模拟值相差较大。这是因为裂尖原子的排列对裂纹尖端变形的影响比较敏感，并随着外载的变化，裂尖的原子发生弛豫，但弹性解却不能反映这一过程。另外，临界发射的位错在裂尖前方受阻时，将抑制裂尖发射位错，使裂纹易产生解理。在I型加载下，裂尖发射位错后将产生如下三种影响：①产生屏蔽效应；②裂纹尖端钝化；③裂尖形状改变导致象力的改变。因此，要想建立准确的裂纹破坏准则，必须考虑位错发射后裂纹尖端形状改变带来的附加作用。

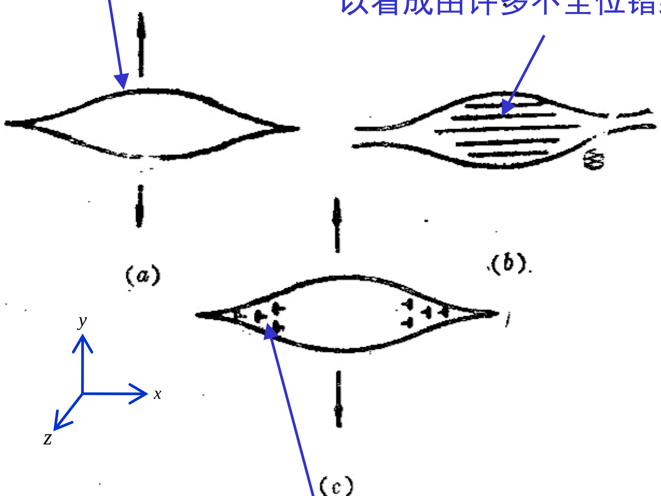
3.6 裂纹的位错模拟

中心思想：用一组虚拟平行位错模拟裂纹，用位错力学代替断裂力学

3.6.1 裂纹位错的概念

裂纹在拉应力下张开

假设在张开的裂纹空腔内，填满与基体相同的材料，这些多余原子平面的界面，可以看成由许多不全位错组成



设想这些不全位错被裂纹面上连续分布的位错所代替，且其分布密度函数为 $D_{\mathrm{I}}(x)$

I 型裂纹位错的形成

则整个裂纹面上位错数为 $\int_{-c}^{c} D_{\mathrm{I}}(x)dx$

裂纹上、下面相对位移为 $V = b\int_{-c}^{c} D_{\mathrm{I}}(x)dx$

位错在裂纹面上造成的应力为：

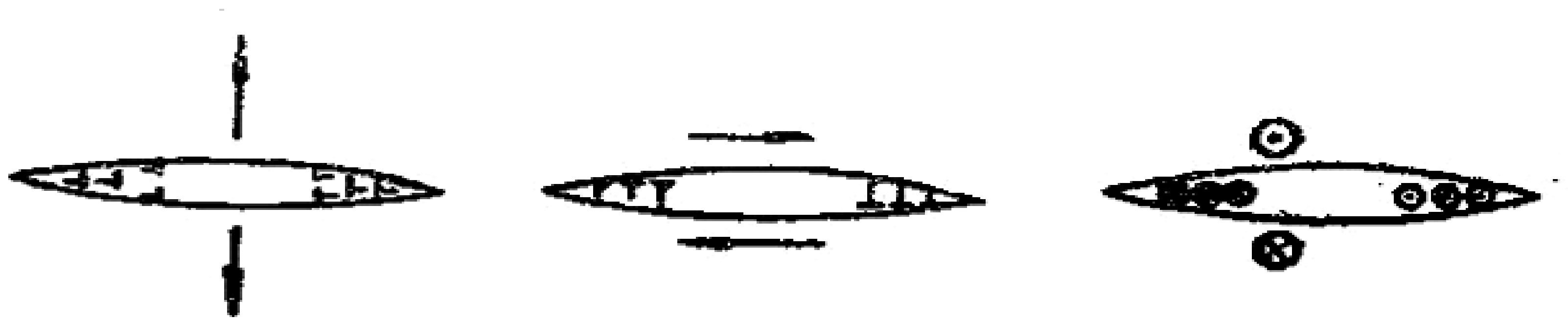
$$\sigma_D = A\int_{-c}^{c} \frac{D_{\mathrm{I}}(x')dx'}{(x-x')}$$

式中， $A = \dfrac{\mu b}{2\pi(1-\nu)}$

在裂纹自由表面上不受力： $\sigma_A + \sigma_D = 0$

解此方程，便可求得 $D(x)$

三种裂纹类型的裂纹位错



Ⅰ型：张开型　　Ⅱ型：滑开型　　Ⅲ型：撕开型

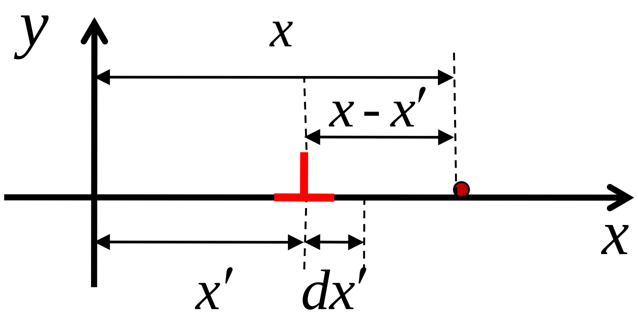
三种加载方式的裂纹位错模拟

- **可用位错沿 x 方向的运动来代替裂纹扩展：**
  - **I**型：刃位错攀移
  - **II**型：刃位错滑移
  - **III**型：螺位错滑移

- **最关键的是求裂纹位错密度分布 $D(x)$** 。有了$D(x)$，便可求出应力、应变、位移、应变能、应力强度因子，因而可用来计算断裂力学问题。

3.6.2 弹性断裂的裂纹位错（II型裂纹位错为例）

x' 处位错在 x 处的应力为：$A_{\mathrm{II}}\dfrac{D_{\mathrm{II}}(x')dx'}{(x-x')}$



则连续位错在 x 处的应力为：

$$\sigma_D = A_{\mathrm{II}}\int_{-c}^{c}\frac{D_{\mathrm{II}}(x')dx'}{(x-x')}$$

根据裂纹表面应力为零的条件，有

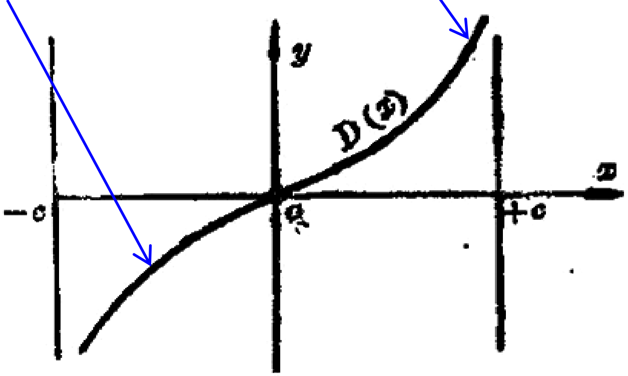
$$\sigma + A_{\mathrm{II}}\int_{-c}^{c}\frac{D_{\mathrm{II}}(x')dx'}{(x-x')} = 0$$

利用希尔伯特变换解此奇异方程，可得到：

$$D_{\mathrm{II}}(x) = \frac{\sigma}{\pi A_{\mathrm{II}}}\cdot\frac{x}{\sqrt{c^2-x^2}}$$

随x增大，D(x)也增大。
当x→c时， D(x) →∞

在x增负方向上，D(x)呈
反向分布



位错密度分布函数

D(x)随外加应力σ 增大而增大，当σ 增加到某一临界值时，裂纹就扩展

利用 $D(x)$ 求各种断裂力学参量

位移： $$u_y = b\int_{-c}^{c} D(x)dx = \frac{b\sigma}{\pi A}\sqrt{c^2 - x^2}$$

应变： $$\varepsilon = \frac{du_y}{dx} = bD(x) = \frac{b\sigma}{\pi A}\frac{x}{\sqrt{c^2 - x^2}}$$

应变能： $$W = \frac{1}{2}\sigma\varepsilon = \frac{1}{2}\int_{-c}^{c} xD(x)dx = \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{\pi A}\int_{-c}^{c}\frac{x^2}{\sqrt{c^2 - x^2}} = \frac{\pi(1-\nu)c^2\sigma^2}{2\mu}$$

断裂条件： $$\frac{\partial W}{\partial(2c)} = 2\gamma_s$$

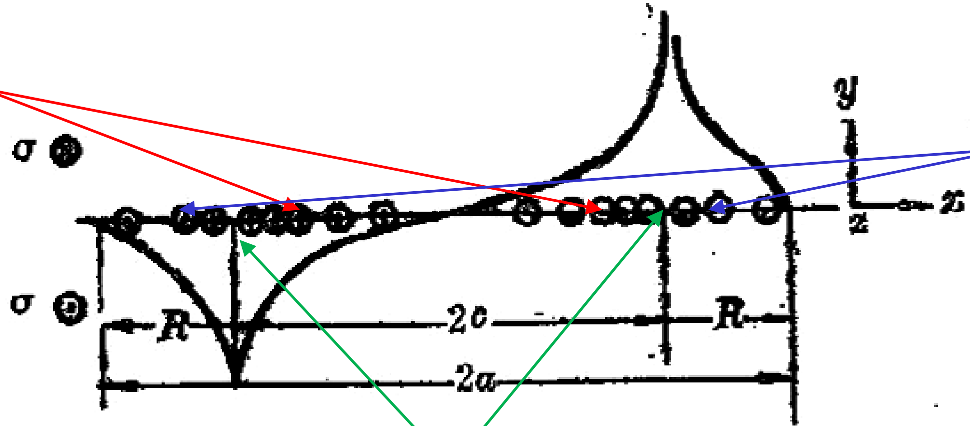
断裂强度： $$\sigma_c = \sqrt{\frac{2\mu \cdot 2\gamma_s}{\pi(1-\nu)c}} = \sqrt{\frac{2E\gamma_s}{\pi(1-\nu^2)c}}$$ ← **Griffith方程**

应力： 求解较困难，要用到复变函数上的围道积分，求出的应力场和应力强度因子与用断裂力学方法求出的相同。

3.6.3 弹塑性断裂的裂纹位错（III型裂纹位错为例）

螺位错连续分布在裂纹内（$-c<x<c$）内连续分布的虚拟螺位错

在裂尖前方塑性区（ $c<x<a$ ）内连续分布的实际螺位错



真实位错与虚拟位错在裂纹尖端呈“反向塞积”

为使计算仍能用线弹性力学，把裂纹长度从 **2*c*** 延长到 **2*a***，包括塑性区，但塑性区内位错运动多了一项阻力 σ_s，即：

$$A\int\frac{D(x')dx'}{x-x'}+\sigma=0 \qquad -c<x<c$$

$$A\int\frac{D(x')dx'}{x-x'}+\sigma+\sigma_s=0 \qquad c<|x|<a \qquad (1)$$

裂纹位错分布密度函数 $D(x)$

在 $x=\pm a$ 处，$D(x')$ 应该是有界的，则（1）式有解的条件为：

$$\int_{-a}^{a}\frac{\sigma^{A}(x')dx'}{\sqrt{(x'-a)(x'+a)}}=0$$

上式也可写为：

$$\int_{-c}^{c}\frac{\sigma dx'}{\sqrt{a^2-x'^2}}+\int_{-a}^{c}\frac{(\sigma-\sigma_s)dx'}{\sqrt{a^2-x'^2}}+\int_{c}^{a}\frac{(\sigma-\sigma_s)dx'}{\sqrt{a^2-x'^2}}=0$$

即：

$$\frac{c}{a}=\cos\left(\frac{\pi\sigma}{2\sigma_s}\right)$$

在假设 $D(\pm a)=0$ 的条件下，上式的解为

$$D(x)=\frac{\sigma_s}{\pi^2 A}\left[\cosh^{-1}\left(\left|\frac{m}{c-x}+n\right|\right)-\cosh^{-1}\left(\left|\frac{m}{c+x}+n\right|\right)\right] \qquad (2)$$

$$m=\frac{a^2-c^2}{a} \qquad n=\frac{c}{a}$$

裂纹尖端张开位移CTOD

$$\Phi(c) = b\left[\int_0^a D(x')dx' - \int_0^c D(x')dx'\right]$$

$$= \frac{2bc\sigma_s}{\pi^2 A}\cosh^{-1}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{c}{a}+\frac{c}{c}\right)$$

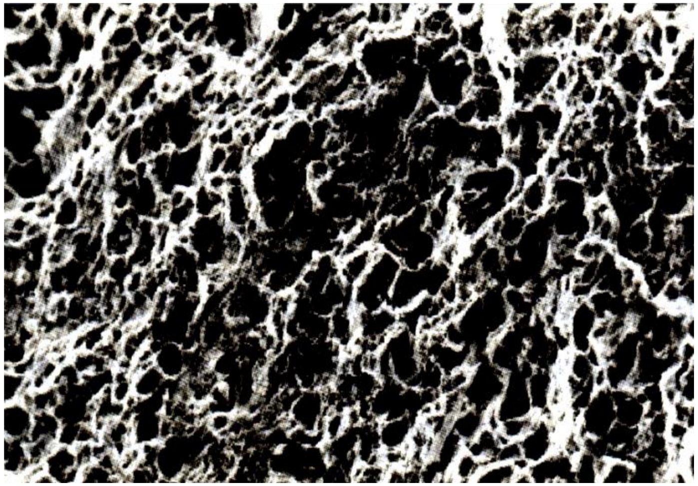
$$= \frac{2bc\sigma_s}{\pi^2 A}\ln\left(\frac{a}{c}\right) \qquad (3)$$

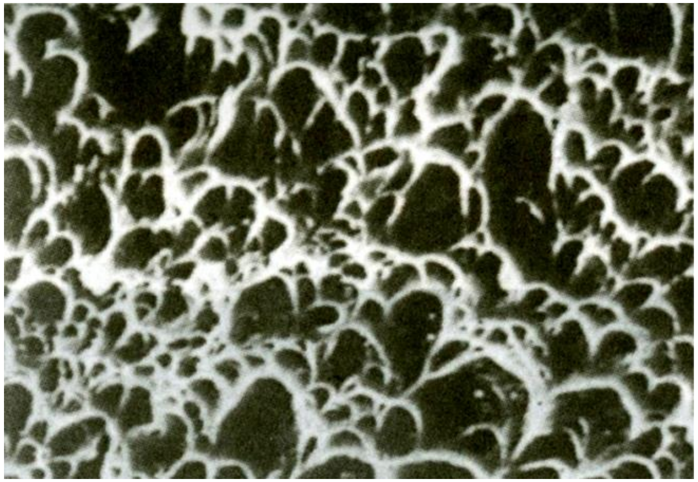
因为 $\frac{c}{a} = \cos\left(\frac{\pi\sigma}{2\sigma_s}\right)$，代入（3）式可得：

$$\Phi(c) = \frac{2bc\sigma_s}{\pi^2 A}\ln\left[\sec\left(\frac{\pi\sigma}{2\sigma_s}\right)\right] \qquad (4)$$

对于 I 型裂纹，按同样的方法也可求出裂尖张开位移 $\Phi_{\mathrm{I}}(c)$，它与Dugdale模型求出的CTOD相同

3.7 断裂与分形





- 哪一个塑性好？
- 哪一个断裂韧性好？

断口定性分析：观察

- 两个材料的断裂韧度究竟是多少？ → 断口定量分析之一：分形理论

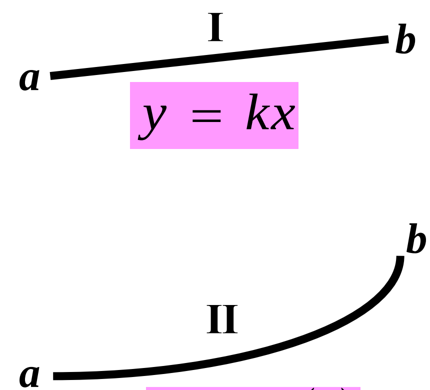
↑

Mandelbrot, 1975

3.7.1 分形理论简介

挪威的海岸线究竟有多长?

欧氏几何



$y = kx$ L_{I}=?

$y = f(x)$ L_{II}=?

L_{III}=?

自相似曲线

分形几何

$$L(\varepsilon) = A\varepsilon^{1-D}$$ $$D = 1.52$$

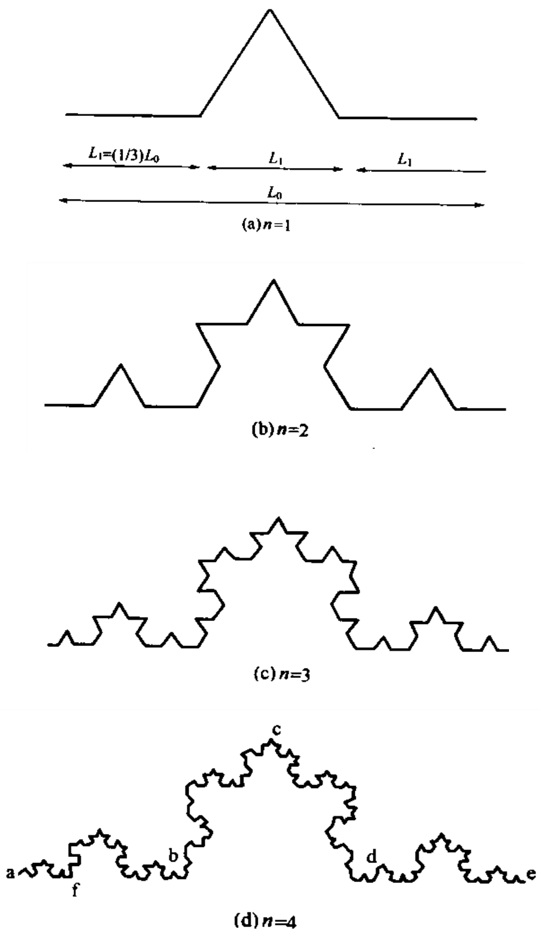
ε 为码尺（比例尺）

“ε 越小，L 越大。 $\varepsilon \to 0$ 时， $L \to \infty$”

---- Science, 1967

3.7.1.1 分形的概念

组成部分以自相似的方式与整体相似的形体称为分形。



具有分形结构的 Kock 曲线

$$l_1=\frac{1}{3}L_0 \qquad L_1=4l_1=\frac{4}{3}L_0$$

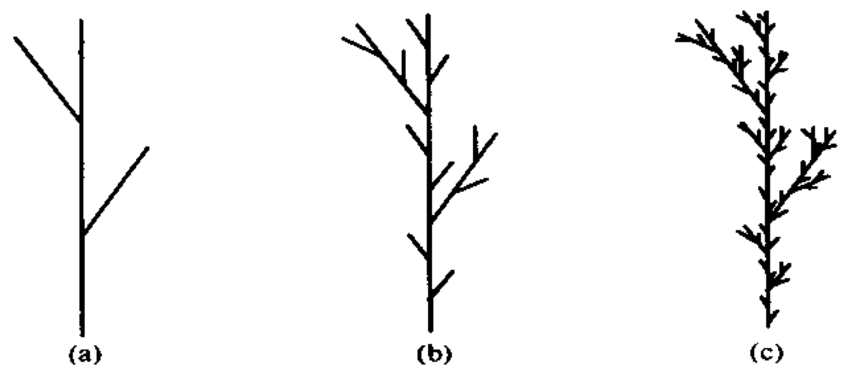
$$l_2=\frac{1}{3}l_1=\left(\frac{1}{3}\right)^2L_0 \qquad L_2=4^2l_2=\left(\frac{4}{3}\right)^2L_0$$

n **次迭代后：**

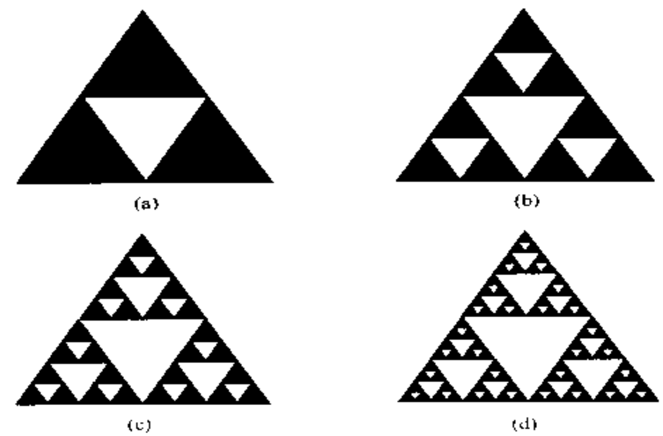
$$\boxed{l_n=\left(\frac{1}{3}\right)^nL_0} \qquad \boxed{L_n=\left(\frac{4}{3}\right)^nL_0}$$

- **局部是整体成比例缩小**
- **无标度性或标度不变性（全息性）**

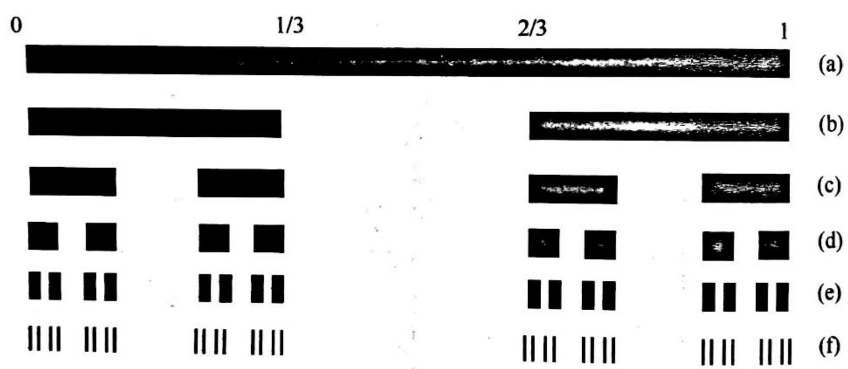
自相似分形示例



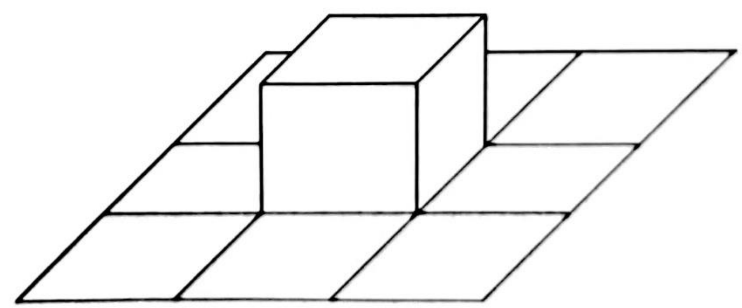
分形树



Sierpinski垫

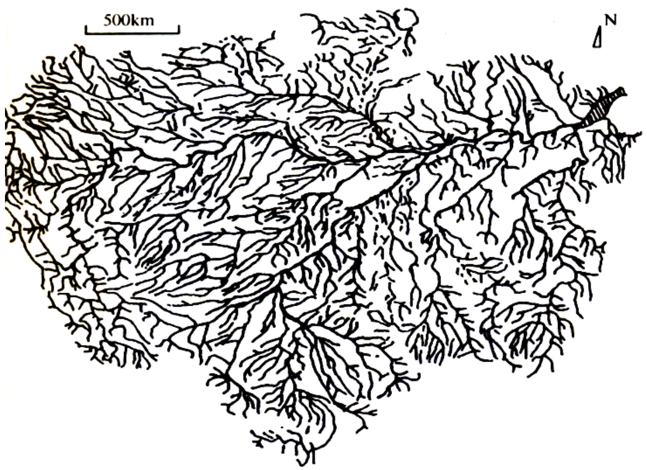


Canter集

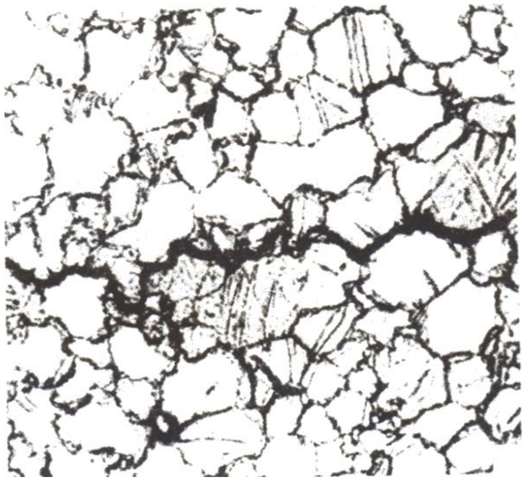


二维分形曲面正方形迭代元

无规分形（近似自相似分形）



亚马逊河流域分布



裂纹沿晶粒边界形核和扩展

自然界中的分形

- 连绵起伏的山脉轮廓
- 蜿蜒曲折的江川河流
- 眼花缭乱的繁星、浮云
- 空气中的灰尘颗粒

材料中的分形

- 薄膜和表面
- 高分子结构
- 非晶晶化和晶粒
- 马氏体形貌
- 准晶体形貌
- 断口

3.7.1.2 分维

（1）欧氏维数

把单位长度的线段 **N** 等分，每小段长 ***r*** ，则 $Nr=1$ $N=1/r$

把单位面积的正方形 **N** 等分，每个小正方形的边长 ***r*** ，则 $Nr^2=1$ $N=(1/r)^2$

把单位体积的正方体 **N** 等分，每个小正方体的边长 ***r*** ，则 $Nr^3=1$ $N=(1/r)^3$

$$Nr^d=1 \qquad N=(1/r)^d \qquad d=\frac{\ln N}{\ln\left(\frac{1}{r}\right)}$$

式中，***N*** 为等分的小几何体数目；***r*** 为小几何体线尺度（ **1/*r*** 为缩小的倍数），***d*** 为欧氏空间维数（欧维）：

- 曲线：***d*=1**
- 曲面：***d*=2**
- 立体：***d*=3**

对欧氏几何图形，***d*** 为整数。

（2）分形维数

对于一个自相似图形，可划分为 N 个大小和形状完全相同的小图形，每个小图形的线尺度是原图形尺度的 $1/r$（即缩小 r 倍），该分形结构的维数 D（分维）可定义为：

$$D = \frac{\ln N}{\ln\left(\frac{1}{r}\right)}$$

生成元中小几何体的个数

$Nr \neq 1$ $N \neq \frac{1}{r}$

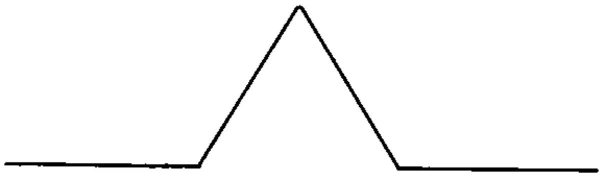
小几何体的线尺度（$1/r$为缩小的倍数）

反过来，若一个小几何体的线尺度放大 k 倍后，就变成一个由 M 个小几何体构成的大相似体，则这个大相似体就是一个分形，该分形的相似分维定义为：

$$D = \frac{\ln M}{\ln k}$$

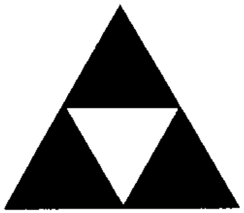
分维计算示例

$$D = \frac{\ln N}{\ln\left(\frac{1}{r}\right)}$$



Kock 曲线

$$D = \frac{\ln 4}{\ln 3} = 1.2618$$

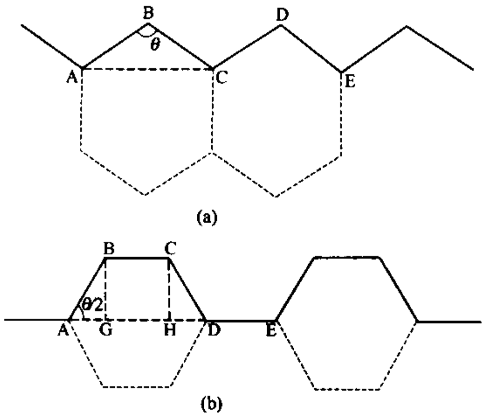


Sierpinski 垫

$$D = \frac{\ln 3}{\ln 2} = 1.585$$

分形树

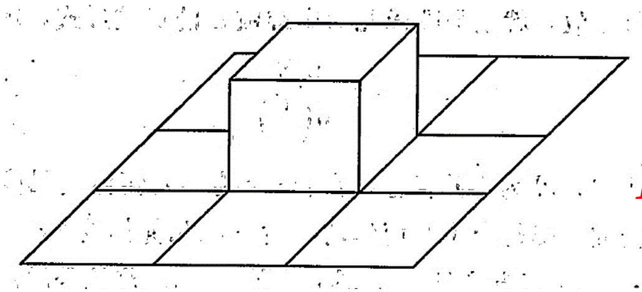
$$D = \frac{\ln 5}{\ln 3} = 1.465$$



D=?

D=?

Z 字形分形折线



D=?

二维分形曲面正方形迭代元

分维的幂律形式

分维的定义也可写成： $N(r)=\left(\frac{1}{r}\right)^{D}=r^{-D}$

常数

自相似性表现为： $N(\alpha r)=\alpha^{-D}N(r)$

不论 r 增大或缩小多少倍，$N(\alpha r)$ 与 $N(r)$ 相似，仅差一个因子 α^{-D}。

更一般的形式是： $N(r)\propto r^{-D}$

如果对某一几何图形，上式成立，则该几何体必然是一个自相似的分形图形，且 D 就是其分维。

分维的截面约定

在欧式几何中，***d*** 维物体在截面上的交线为 ***d*-1**维。

将欧式几何中的概念移植到分形几何中来。用一截面与分形体相交，它们与截面相交形成的图形要减少一维。因此有：

$$D_V = D_S + 1 = D_L + 2 \qquad D_S = D_L + 1$$

截面约定把从不同角度对分形进行测量的结果定量地联系起来了。

对一个分形曲面，其分维为 D_S，用一平面沿 ***x*** 方向或 ***y*** 方向交割，所得曲线的分维 D_L 并不相同，因此要推算曲面分维 D_S 时，必须采用平均的 D_L 值。即

$$D_L^* = \frac{D_{Lx} + D_{Ly}}{2} \qquad D_S = D_L^* + 1$$

3.7.1.3 分形的度量

（1）分形曲线的长度

对一条分形曲线，经过 **n** 次迭代后，其长度为：

$$L_n = L_0 (Nr)^n \qquad (1)$$

将（1）式取对数得：

$$\ln\left(\frac{L_n}{L_0}\right) = n\ln r + n\ln N \qquad (2)$$

由分维的定义，有：

$$\ln N = D\ln(1/r) = -D\ln r \qquad (3)$$

将（3）式代入（2）式得到：

$$\ln\left(\frac{L_n}{L_0}\right) = n\ln r - nD\ln r \qquad (4)$$

（1）分形曲线的长度（续）

将（4）式改写成指数形式：

$$\frac{L}{L_0}=r^{n(1-D)} \qquad (5)$$

令 $\varepsilon=r^n$，则分形曲线的长度为

$$\boxed{L(\varepsilon)=L_0\varepsilon^{(1-D)}} \qquad (6)$$

ε 为无量纲量。实际测量 $L(\varepsilon)$ 或分维 D 时，ε 就是所用的放大倍数或者分辨率；ε 也可以是测量码尺的相对长度。

（2）分形周长和面积

对欧氏几何图形，其面积 A_0 与周长 L_0 的关系为：

$$L_0 = \alpha A_0^{1/2} \qquad A_0 = \frac{1}{\alpha} L_0^2 \qquad \alpha = \frac{L_0}{A_0^{1/2}}$$

对分形几何图形，其面积 A 、周长 L 均与码尺 ε 有关，且 L 还与分维 D 有关：

$$L(\varepsilon) = L_0 \varepsilon^{1-D}$$

可以证明，其面积 A 与周长 L 有下列关系：

$$A(\varepsilon) = \frac{1}{\alpha^2(\varepsilon)} L^{2/D}(\varepsilon)$$

将上式取双对数得：

$$\ln A(\varepsilon) = -2\ln \alpha(\varepsilon) + \frac{2}{D} \ln L(\varepsilon)$$

3.7.1.4 分维的测量

- 盒子计数法
- 变码尺测长度法
- 小岛法
- 垂直截面法
- 功率谱法
- 质点分形体分维测量法
  — 密度相关函数法
  — 沙盒法
  — 回转半径法
- 物理法
  — 散射强度法
  — 汞浸入法

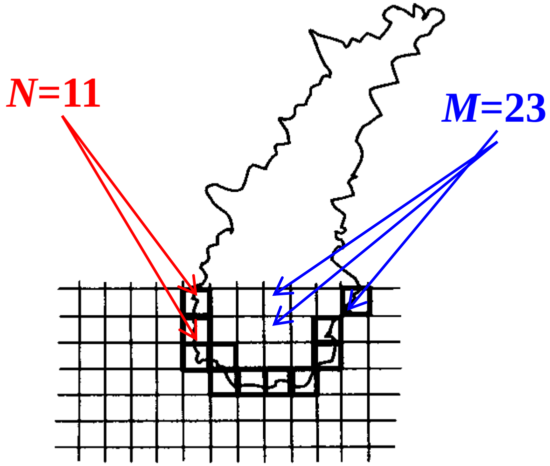
（1）小岛法

右上图为薄膜的AFM形貌图，其大小不同的凸起具有近似的自相似性。断口形貌也具有如此特征。如果把断口表面磨平，在SEM下就会出现一个个小岛和湖。照相后把照片放入图像处理仪中，固定放大倍数，可测出每个小岛的面积 A_i 以及小岛的周长 L_i 。

表面碳膜的形貌（AFM 扫描像）

基本原理（右下图）：用一个长为 ε 的正方网格去覆盖小岛，小岛周界通过的网格（图中已加粗）总数为 N，则周长 $L=N\varepsilon$。覆盖小岛的网格总数（包括和边界相交的网格）为 M，则小岛面积为 $A = M\varepsilon^2$。根据很多自相似小岛的 A_i 及 L_i 数据，就可求出其分维 D 。

$$A \propto L^{2/D}$$



网格法测量小岛的面积和周长

小岛法测分维实例

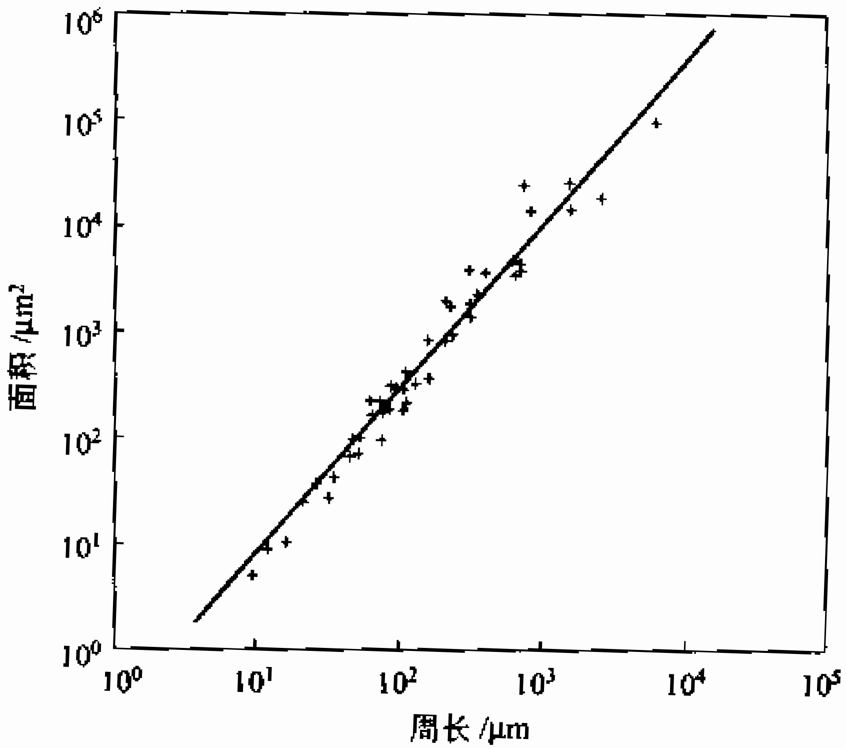


图 6.1　马氏体时效钢断口磨平后小岛面积随周长的变化，码尺为 0.156μm[43]

$$A \propto L^{2/D}$$

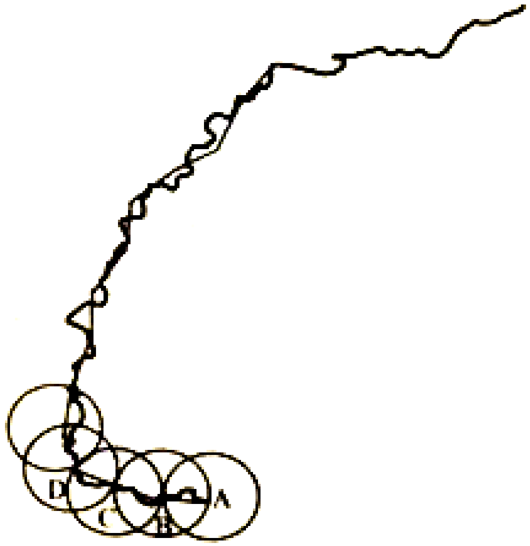
$$斜率\beta = \frac{2}{D}$$

$$\beta = 1.56$$

$$D = 1.28$$

（2）垂直截面法

该法的原理是改变观测尺度，即用单位长度去近似分形复杂曲线（见右图）。先把曲线一端作为起点，然后以此点位中心画一个半径为η的圆，与曲线相交于一点，用直线把该点与曲线的起点连接起来后再把该点作为新的起点画圆与曲线相交，反复进行上述过程，把测得的线段总数记为$N(\eta)$。

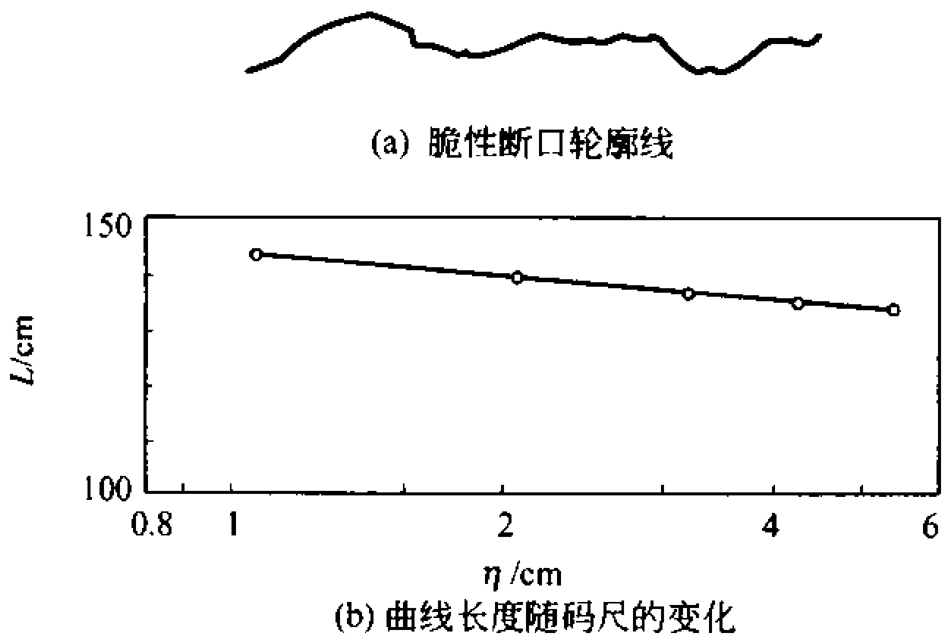


用折线近似曲线

若改变码尺长度（η），则曲线总长也会变化，关系为：$L \propto \eta^{1-D}$

$$\ln L = \ln \alpha + (1-D)\ln \eta$$

垂直截面法测分维实例



垂直剖面法测断口分维[i

$$L(\eta)=\eta^{1-D}$$

斜率$\beta=1-D$

$$\beta=-0.05$$

$$D=1.05$$

3.7.2 分形在材料断裂分析中的应用

- 研究的内容
  - 如何把断裂问题中具有统计意义的自相似结构或体系找出来，并用分形的语言加以描述
  - 如何找出该分形体的分维表达式，并通过实验测出分维
  - 如何建立分维与断裂性能（断裂韧度、延伸率等）的定量关系

- 研究的范围
  - 断口的分维
  - 断裂韧性与断口分维
  - 延性断裂与分维
  - 环境断裂与分维
  - 裂纹形核、扩展的分形特征

3.7.2.1 K_{IC} 与断口分维

$$K_{\mathrm{Ic}} = \frac{P_c}{BW}\sqrt{\pi a_0 \sec\left(\frac{\pi a_0}{W}\right)}$$

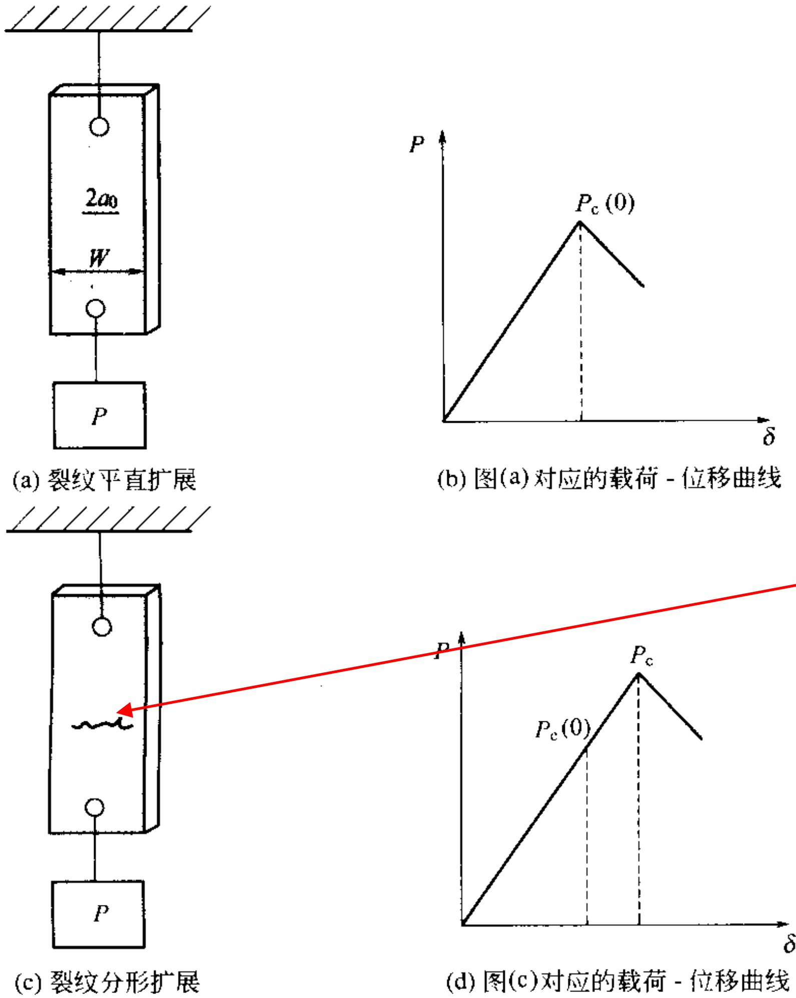


图 6.7 裂纹平直扩展所对应的载荷-位移曲线以及裂纹分形扩展所对应的载荷-位移曲线

韧度 $K_{\mathrm{Ic}}(0) = \dfrac{P_c(0)}{BW}\sqrt{\pi a_0 \sec\left(\dfrac{\pi a_0}{W}\right)}$

动力 $U_T(0) = \displaystyle\int_0^{P_c(0)} \frac{l_0 P}{2EA_0} = \frac{l_0 P_c^2(0)}{4EA_0}$

阻力 $R_T(0) = 2\gamma A_0 = 2\gamma L_0 B$

$L = L_0 \varepsilon^{1-D}$

韧度 $K_{\mathrm{Ic}} = \dfrac{P_c}{BW}\sqrt{\pi a_0 \sec\left(\dfrac{\pi a_0}{W}\right)}$

动力 $U_T = \dfrac{l_0 P_c^2}{4EA_0}$

$P_c^2 = P_c^2(0)\varepsilon^{1-D}$

阻力 $R_T = 2\gamma L_0 B \varepsilon^{1\text{-}D}$

$$K_{\mathrm{Ic}} = K_{\mathrm{Ic}}(0)\varepsilon^{(1-D)/2}$$

K_{IC} 与分维关系的试验研究

表 6.2 各种材料断口的分维 D[45]

合金钢	1.1～1.28　1.04～1.26	岩石	1.18～1.53
铝合金	1.11～1.30	水灰石	1.2～1.24
陶瓷	1.16～1.33　1.09～1.33	沙石	1.27～1.33
水泥	1.04～1.26　1.07～1.17	地壳	1.29～1.33

根据 $$K_{Ic} = K_{Ic}(0)\varepsilon^{(1-D)/2}$$

K_{Ic} 应当随 D 的升高而升高，而且 $\lg K_{Ic}$ 随（D-1）的升高而线性升高，如右图所示，这是对高强钢和陶瓷的实验结果。

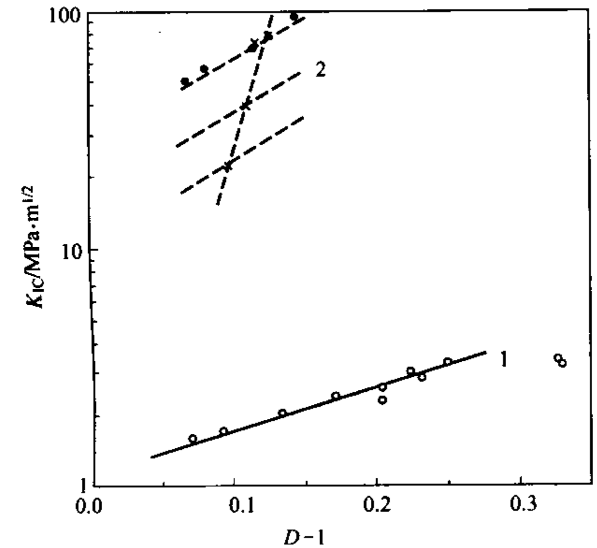
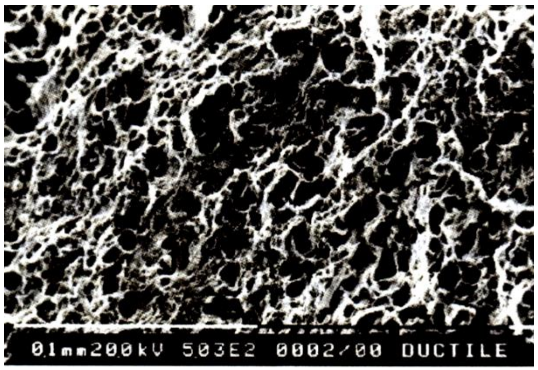


图 6.8 K_{IC}随断口分维 D 的变化[1]

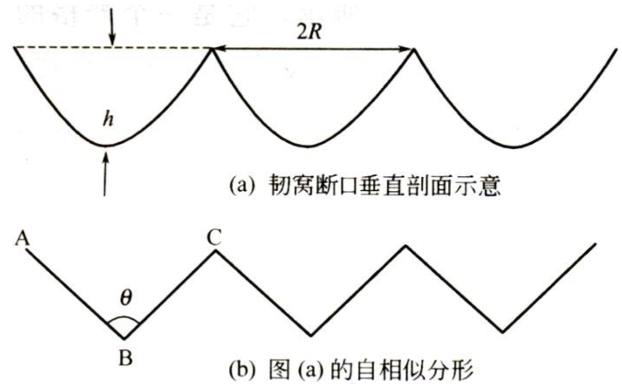
1—陶瓷；2—高强钢

3.7.2.2 J_{IC}与断口分维

当用小试样测量J_{Ic}时所得断口一般是韧窝断口。韧窝断口的垂直剖面可以用一条两边相等的折线来近似，它是一个严格的自相似分形曲线，可用它来近似韧窝断口轮廓线。



J 积分试样断口SEM



韧窝断口垂直剖面示意及相应的自相似分形

定义韧窝的形状比：

$$M = \frac{h}{2R}$$

韧窝深度

韧窝直径

Thompson得出临界 *J* 积分与 *M* 的关系为：

$$J_{Ic} = \frac{\sigma_{ys}}{3} \ln\left(\frac{M^2}{3f}\right) l^*$$

3.7.2.2 J_{IC}与断口分维（续）

按自相似分维定义有： $D = \ln N / \ln(1/r)$

式中，$N = 2$；$r = AB/AC$，即 $\dfrac{1}{r} = \dfrac{AC}{AB} = 2\sin\dfrac{\theta}{2}$

则有： $D = \dfrac{\ln 2}{\ln\left(2\sin\dfrac{\theta}{2}\right)}$ （1）

根据几何关系有 $M = \dfrac{h}{2R} = \dfrac{BQ}{AC} = \dfrac{BQ}{2AQ} = \dfrac{1}{2}\cot\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{\sqrt{1-\sin^2\dfrac{\theta}{2}}}{2\sin\dfrac{\theta}{2}}$ （2）

根据（1）式，可得 $2\sin\dfrac{\theta}{2} = 2^{(1/D)-1}$ 代入（2）式，得到

$$M = \frac{\sqrt{1-4^{(1/D)-1}}}{2\times 2^{(1/D)-1}} = \sqrt{4^{-1/D}-\frac{1}{4}}$$ （3）

3.8 孔聚断裂的损伤理论

在不考虑具体微观机制的前提下，采用**损伤力学**方法，研究孔洞尺寸、数量、长大速率等与宏观应力或应变的关系。

3.8.1 损伤力学简介

3.8.1.1 损伤的概念

在外载或环境作用下，由细观结构缺陷（如微裂纹、微孔洞等） 萌生、扩展等不可逆变化引起的材料或结构宏观力学性能劣化的现象。

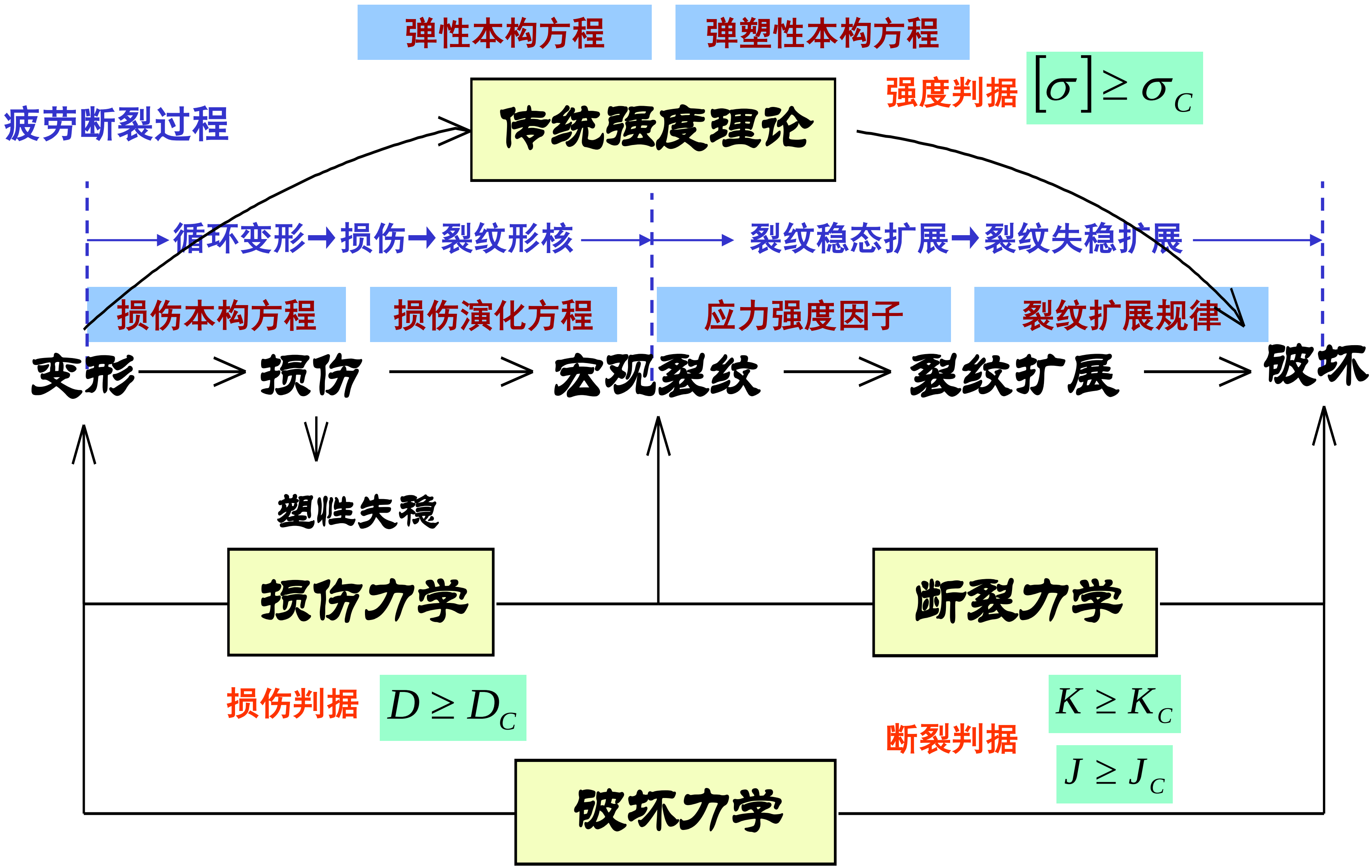
- **微　观角度：** 随机分布的微缺陷及其演化
- **宏　观角度：** 性能蜕化（劣化）
- **热力学角度：** 不可逆的耗散过程。

损伤类型及微观本质

损伤类型	载荷形式	损伤微观形态	适应材料
脆性损伤	准静态加载	气孔、微裂纹、纤维断裂	陶瓷、混凝土、复合材料、低温金属、热固性聚合物
韧性损伤		滑移带、微孔洞、银纹、界面脱粘	金属、复合材料、热塑性聚合物
剥落损伤	高速冲击加载	微孔洞、微裂纹、绝热带	所有材料
疲劳损伤	循环应力或应变	驻留滑移带（PSB）、微裂纹	
蠕变损伤	高温 + 低应力	空位团、微孔洞、晶界楔形裂纹	
环境损伤	侵蚀性介质 + 低应力	晶间裂纹	
磨蚀损伤	腐蚀 + 磨损	点蚀、晶间腐蚀	
辐照损伤	中子、射线的辐射	孔洞、成泡、肿胀	

- 微裂纹（micro-crack）
- 微孔洞（micro-void）
- 剪切带（shear band）
- 界面脱粘（interface debond）

不同力学理论的研究路线



3.8.1.2 损伤变量

- **概念**
  - 描述不可逆损伤状态的场变量（标量、矢量或张量）
  - 表征材料劣化程度的量度，实际上起着“劣化算子”的作用
- **选取**
  - 微观方面（直接表征）：缺陷数目、长度、面积和体积等
  - 宏观方面（间接表征、唯象表征）：弹性模量、屈服应力、密度、电阻、超声波、声辐射等
- **特点**
  - 对损伤的描述有足够精度
  - 独立的材料参数尽可能少，便于数学运算和实验测定
  - 有一定的几何意义或物理意义

连续度和损伤度

Kachanov（1958）认为，材料性能劣化的主要机制是由于缺陷导致有效承载面积的减少，提出用连续度来描述材料的损伤程度：

$$\varphi = \frac{\tilde{A}}{A}$$

无损部分的有效承载面积

总面积

Rabotnov（1963）定义损伤度

$$D = 1 - \varphi = 1 - \frac{\tilde{A}}{A} = \frac{A - \tilde{A}}{A}$$

$$0 < D < 1$$

显然，***D*** 越大，损伤面积越大，有效承载面积越小。

- ***D*** = 0，对应无损状态；
- ***D*** = 1，对应理论极限损伤状态（完全损伤）。实际材料在 ***D*** 达到 1 之前就已经破坏。实验表明，金属在 ***D*** 达到 0.2 - 0.8 之间就可能破坏。

有效应力与Cauchy应力

有效应力 $\tilde{\sigma} = \dfrac{P}{\tilde{A}}$ 损伤状态下的真应力

Cauchy应力 $\sigma = \dfrac{P}{A}$ 无损状态下的真应力

两者关系

$$\tilde{\sigma} = \frac{P}{\tilde{A}} = \frac{P}{A}\frac{A}{\tilde{A}} = \frac{\sigma}{\varphi} = \frac{\sigma}{1-D}$$

剩余强度

$$\sigma_{Rb} = \varphi\sigma_b = (1-D)\sigma_b$$

断裂条件

- $\tilde{\sigma} = \sigma_b$ 有效应力达到抗拉强度
- $\sigma = \sigma_{Rb}$ Cauchy应力达到剩余强度

临界损伤度 D_c

当材料损伤到一定程度时，即使受力状态未达到理论上的破坏条件，考虑到不可预期载荷的作用及结构的稳定性，也会出现不能满足安全使用的情况。因此，损伤力学中一般规定一个临界损伤度 D_c 来表示失效条件：

$$D = D_c$$

$D_c = 1$ 意味着全面损伤，截面完全失去承载能力。实际上，一般 $D_c \leq 0.5$。

损伤变量的其他定义方式（唯象定义）

- **大弹脆性损伤、弹塑性损伤：**损伤后，弹性模量降低，且易于测量，故可用来定义损伤度：

$$D = 1 - \frac{\tilde{E}}{E} = \frac{E - \tilde{E}}{E}$$

- **大塑性变形：**可选用材料密度的改变或空洞体积分数来定义 ***D***

  - 用材料密度的改变定义 ***D***：

$$D = 1 - \frac{\tilde{\rho}}{\rho} = \frac{\rho - \tilde{\rho}}{\rho}$$

  - 用空洞体积分数改变来定义 ***D***：

$$D = 1 - \frac{\tilde{f}}{f} = \frac{f - \tilde{f}}{f}$$

- **疲劳损伤：**可定义 ***D*** 为：

$$D = \frac{N_i}{N_f}$$

实际循环周次

极限循环周次（寿命）

3.8.1.3 损伤本构方程

损伤本构方程： 引入损伤变量作为内变量的连续介质力学本构方程。

- **基于不可逆热力学理论建立材料的损伤本构方程**

- **基于等效性假设建立材料的损伤本构方程**
  - 应变等效性假设
  - 应力等效性假设
  - 能量等效性假设

（1）应变等效性假设（Lemaitre，1971）

损伤状态下真实应力对应的应变 = **虚构无损状态下有效应力对应的应变**

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{\tilde{E}} = \frac{\tilde{\sigma}}{E}$$

受损材料的应变　　无损材料的应变

受损结构的本构关系与无损时的形式相同，只需将式中的真实应力换成有效应力。

因为 $\tilde{\sigma} = \dfrac{\sigma}{1-D}$

一维弹脆性损伤本构方程：

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E(1-D)}$$

（2）应力等效性假设

损伤状态下真实应变对应的应力=虚构无损状态下有效应变对应的应力

损伤材料的本构关系可采用无损时的形式，只需将式中的无损应变换成有效应变。

定义有效应变为： $\tilde{\varepsilon}=\varepsilon(1-D)$

则有：

$$\sigma=E\tilde{\varepsilon}=E\varepsilon(1-D)$$

$$\varepsilon=\frac{\sigma}{E(1-D)}$$

在各向同性损伤情况下，应变等效假设等价于应力等效性假设。

3.8.1.4 损伤演化方程（损伤律 ）

损伤变量随时间或循环次数的变化关系称为损伤演化方程（也称损伤演化律，简称损伤律），一般是与当前损伤状态、受力情况等因素有关，可表示为：

$$\frac{dD}{dt} = f(D, \sigma)$$

或

$$\frac{dD}{dN} = g(D, \sigma)$$

如果能够建立一个符合实际情况的损伤律，就可以随时确定材料的损伤状态及其剩余强度和寿命。

（1）静态脆性损伤律

Kachanov（1958）提出了由连续度表示的一维损伤演化方程：

材料常数
$A>0$
$n\geqslant 1$

$$\frac{d\varphi}{dt}=-A\tilde{\sigma}^n=-A\left(\frac{\sigma}{\varphi}\right)^n \qquad \sigma>\sigma_{th}$$

$$\frac{d\varphi}{dt}=0 \qquad \sigma\leq\sigma_{th}$$

应力表示的损伤门槛值，材料常数

对应的由损伤度表示的一维损伤演方程：

$$\frac{dD}{dt}=A\tilde{\sigma}^n=A\left(\frac{\sigma}{1-D}\right)^n \qquad \sigma>\sigma_{th}$$

$$\frac{dD}{dt}=0 \qquad \sigma\leq\sigma_{th}$$

在某些情况下，材料损伤并不直接与时间相关，而仅是应变的函数。

Lemaitre等人建议采用如下形式简单的损伤演化方程：

材料常数（$\geqslant 1$）

$$\frac{dD}{d\varepsilon}=\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^n \qquad \text{当}\ \varepsilon>\varepsilon_{th}\ \text{和}\ d\varepsilon>0\ \text{时}$$

$$\frac{dD}{d\varepsilon}=0 \qquad \text{当}\ \varepsilon\leq\varepsilon_{th}\ \text{和}\ d\varepsilon<0\ \text{时}$$

应变表示的损伤门槛值，材料常数

（2）疲劳损伤演化律（Chaboche,1988）

疲劳问题以应力循环次数 N 为广义时间变量。Chaboche（1988）提出了高周疲劳的损伤演化方程：

循环应力半幅

材料参数

$$\frac{dD}{dN}=\left[\frac{\sigma_a}{b(1-D)}\right]^m f(D)$$

损伤度函数

与平均应力有关的材料参数

Chaboche给出了两种损伤度函数的形式：

① $f(D)=(1-D)^{-m_1}$

材料参数

② $f(D)=\left[1-(1-D)^{1+m}\right]^{\alpha}$

3.8.2 蠕变损伤寿命预测

对于高温下的金属，在载荷较大和较小的情况下，其断裂行为是不同的。

- **当载荷较大时：**

试样伸长较显著，横截面面积减小，从而引起真应力单调增加，直至发生延性断裂（**微孔聚集穿晶断裂**）。

- **当载荷较小时：**

试样伸长很小（可忽略），横截面积基本不变，但内部晶界上仍然产生微裂纹或微孔洞，并随时间延长而长大，最终汇合成宏观裂纹，导致脆性断裂（**延晶蠕变断裂**）。

基本假设及方程

- 试样初始截面积为 A_0，承载后真实截面积为 A，损伤后有效承载面积为 $\tilde{A}$，名义应力为 σ_0

$$\tilde{A} = A(1-D) \qquad \sigma_0 = \frac{F}{A_0} \qquad \sigma = \frac{F}{A} \qquad \tilde{\sigma} = \frac{F}{\tilde{A}} = \frac{\sigma}{1-D} \qquad (1)$$

- 忽略弹性变形的蠕变损伤本构方程： $\dfrac{d\varepsilon}{dt} = B\tilde{\sigma}^n$ (2)

- 蠕变损伤演化方程： $\dfrac{dD}{dt} = C\tilde{\sigma}^m = C\left(\dfrac{\sigma}{1-D}\right)^m$ (3)

- 恒载荷加载（名义应力σ_0保持不变），根据体积不变条件 $AL = A_0 L_0$

$$\tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{1-D} = \frac{\sigma_0 A_0}{A(1-D)} = \frac{\sigma_0 L}{L_0(1-D)} = \frac{\sigma_0}{1-D}\exp(\varepsilon) \qquad (4)$$

式中，$\varepsilon = \ln\left(\dfrac{L}{L_0}\right)$

（1）高应力下的无损延性断裂

$$\tilde{\sigma} = \frac{\sigma_0}{1-D}\exp(\varepsilon)$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = B\tilde{\sigma}^n$$

在 $D = 0$条件下，（4）式简化为 $\tilde{\sigma} = \sigma_0\exp(\varepsilon)$ ，代入（2）式，得：

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = B\sigma_0^n\exp(n\varepsilon) \qquad (5)$$

对（5）式积分，并利用初始条件 $\varepsilon(0)=0$，得：

$$\varepsilon(t) = -\frac{1}{n}\ln\left(1 - nB\sigma_0^n t\right) \qquad (6)$$

延性断裂的条件为 $\varepsilon\to\infty$，于是延性蠕变断裂寿命为：

$$t_{RH} = \frac{1}{nB\sigma_0^n} \qquad (7)$$

（2）低应力下的沿晶蠕变脆性断裂

$$\tilde{\sigma} = \frac{\sigma_0}{1-D}\exp(\varepsilon)$$

在 不考虑变形的情况下，$\varepsilon \equiv 0$、$A \equiv A_0$，则（4）式简化为

$$\tilde{\sigma} = \frac{\sigma_0}{1-D} \qquad (8)$$

$$\frac{dD}{dt} = C\left(\frac{\sigma}{1-D}\right)^m$$

将（8）代入损伤演化方程（3）式，得：

$$\frac{dD}{dt} = C\sigma_0^m(1-D)^{-m} \qquad (9)$$

对（9）式积分，并利用初始条件 **$D(0)=0$**，得：

$$D = 1-\left[1-(1+m)C\sigma_0^m t\right]^{\frac{1}{m+1}} \qquad (10)$$

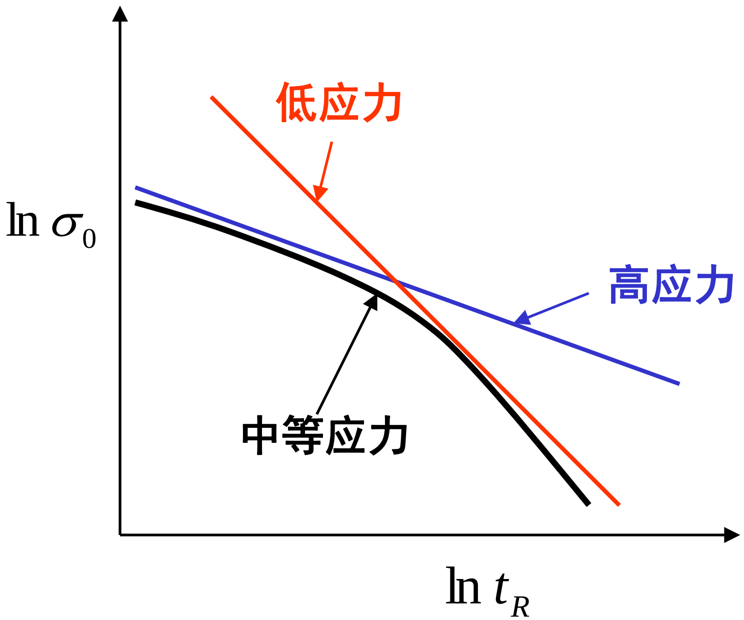
设损伤蠕变脆性断裂条件为 **$D = D_C = 1$**，则沿晶蠕变断裂寿命为：

$$t_{RK} = \frac{1}{(1+m)C\sigma_0^m} \qquad (11)$$

（3）中等应力下的蠕变断裂

在中等应力下，应同时考虑损伤、蠕变变形以及其交互作用，情况较复杂。

在不考虑交互作用的情况下，可以近似地认为是高应力和低应力两种情况的叠加。



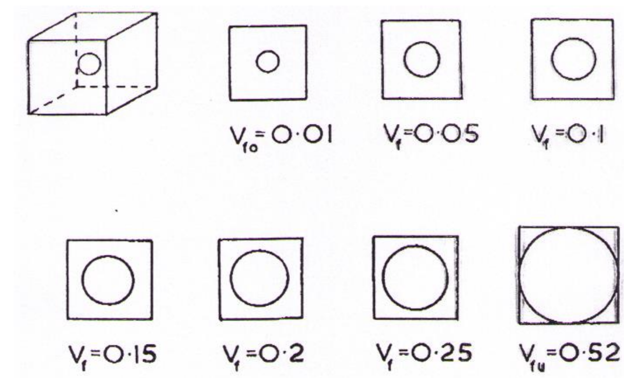
3.8.3 孔聚断裂的唯象理论

（1）Rice球形孔洞长大模型

对孤立孔洞，根据应力平衡条件及应变协调要求，其应力、应变速率分量应分别满足：

$$\frac{d\sigma_r}{dr}=\frac{2}{r}(\sigma_t-\sigma_r) \qquad (1)$$

$$\frac{d\varepsilon_r}{dt}=\frac{d(r\cdot\dot{\varepsilon}_t)}{dr} \qquad (2)$$

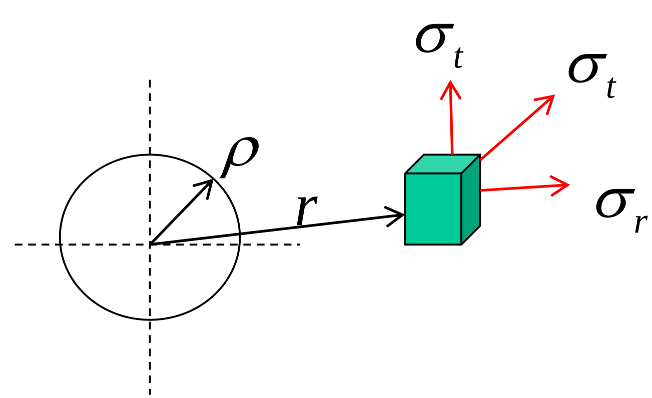


- 对非硬化固体，可导出：

$$\frac{\Delta\rho}{\rho}=\frac{1}{2}\Delta\varepsilon\exp\left(\frac{\sqrt{3}\sigma}{\sigma_s}\right) \qquad (3)$$

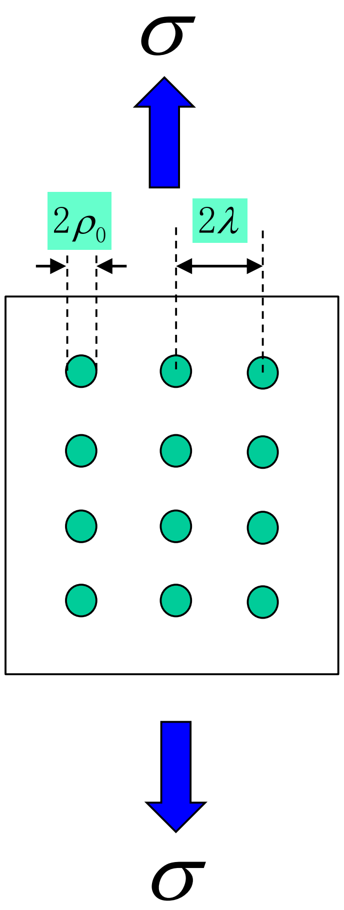
- 对硬化固体，可导出：

$$\frac{\Delta\rho}{\rho}=\frac{1}{2}\Delta\varepsilon\sinh\left(\frac{3\sigma}{\sigma_s}\right) \qquad (4)$$



（1）Rice球形孔洞长大模型（续）

韧性断裂是孔洞长大汇合的结果，假设球形孔洞是均匀分布的，可以导出断裂应变ε_f与颗粒体积分数 f 的关系。



设：颗粒半径为 ρ_0；颗粒间距之半为 λ，则有：

$$f=\frac{4}{3}\pi\rho_0^3\Big/(2\lambda)^3=\frac{\pi\rho_0^3}{6\lambda} \qquad (5)$$

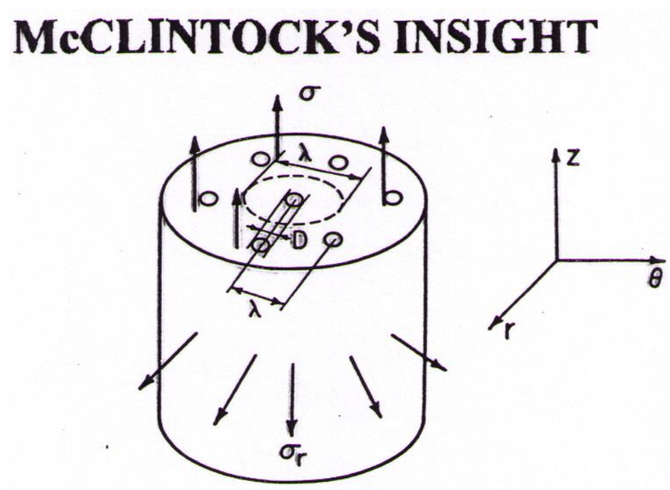
孔洞汇合条件对应于孔洞从 ρ_0 扩张到 λ，则由（3）式积分得：

$$\varepsilon_f=\frac{\ln\left(\frac{6}{\pi}f\right)^{-\frac{1}{3}}}{0.283\exp\left(\frac{3\sigma}{\sigma_s}\right)}$$

（2）McClintock圆柱孔洞长大模型

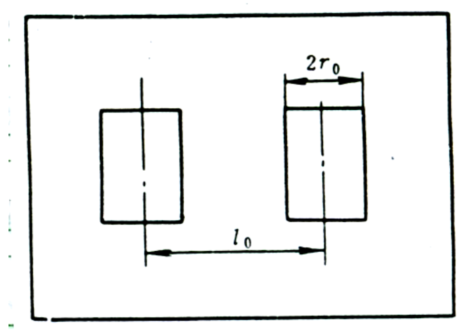
设：

- 孔洞原始直径为 $2r_0$；
- 原始中心间距为 l_0；
- 孔洞纵轴平行于 z 方向；
- 受双向正交应力 σ_{11}、σ_{22}；
- 变形硬化服从幂乘律：$\sigma = \sigma_0 \varepsilon^n$。



定义"**相对扩展系数**"： $F = \left(\dfrac{2r}{l}\right) \Big/ \left(\dfrac{2r_0}{l_0}\right)$

$$\left|(\sigma_{11}+\sigma_{22})/\left(2\bar{\sigma}/\sqrt{3}\right)\right|$$



当孔洞连接时： $F_f = \dfrac{2r_0}{l_0}$

定义"**损伤参量**"： $dD = d\ln\left(\dfrac{2r}{l}\right) \Big/ \ln\left(\dfrac{2r_0}{l_0}\right)$

3.8.2 McClintock圆柱孔洞长大模型（续）

假定变形过程为粘滞流动，对给定的宏观等效应变 $\bar{\varepsilon}$ ，则损伤率为：

$$\frac{dD}{d\bar{\varepsilon}} = \frac{\sinh\left[(1-n)(\sigma_{11}+\sigma_{22})/\left(2\bar{\sigma}/\sqrt{3}\right)\right]}{(1-n)\ln\left(l_0/2r_0\right)}$$

对于加载时双向应力分量比值保持不变的特定情况下（即比例加载），根据损伤力学原理可求得名义断裂应变为：

$$\varepsilon_f = \frac{(1-n)\ln\left[l_0/(2r_0)\right]}{\sinh\left[(1-n)(\sigma_{11}+\sigma_{22})/\left(2\bar{\sigma}/\sqrt{3}\right)\right]}$$

可见，夹杂颗粒（$\boldsymbol{r_0}$）越大、颗粒间距（$\boldsymbol{l_0}$）越小，则断裂应变就越小。

- 若取 ***n*** **=0.5,** $\left[(\sigma_{11}+\sigma_{22})/\left(2\bar{\sigma}/\sqrt{3}\right)\right]$ 分别为 **1** 和 **2**，即正交应力分量增加一倍，则断裂应变就降低到 **1/2.25**；
- 在 $\left[(\sigma_{11}+\sigma_{22})/\left(2\bar{\sigma}/\sqrt{3}\right)\right]$ **= 2** 时，若 ***n*** 从**0.5**降低到**0.2**，则断裂应变还要减小**17%**。