

上海交通大学试卷 (B 卷)

(2021 至 2022 学年第 2 学期 2022 年 6 月 16 日, 16:00–18:00)

班级号 _____ 学号 _____ 姓名 _____

课程名称 _____ 最优化方法 _____ 成绩 _____

一、选择题 (共20分, 每题4分)

1 以下哪个函数不是凸函数?

(A) $f(\mathbf{x}) = \max\{x_1, x_2, \dots, x_n\}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$

(B) $f(\mathbf{x}) = 3x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + x_1 + 1, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$

(C) $f(\mathbf{x}) = -\log(e^{x_1} + e^{x_2} + e^{x_3}), \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$

(D) $f(x) = x \log(x), x > 0$

2 给定约束优化问题 (P):

$$\min \left(x_1 - \frac{9}{4} \right)^2 + \left(x_2 - 2 \right)^2$$

$$\text{s.t. } -x_1^2 + x_2 \geq 0,$$

$$x_1 + x_2 \leq 6,$$

$$x_1, x_2 \geq 0,$$

该问题的最优解为

(A) $\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4} \right)$

(B) $\left(\frac{9}{4}, 2 \right)$

(C) $(0, 2)$

(D) $(0, 0)$

3 无约束优化问题 (P): $\min f(\mathbf{x}) = x_1^3 + x_2^3 - 3x_2^2 - 3x_1$ 的局部极小点为

(A) $(1, 0)$

(B) $(1, 2)$

(C) $(-1, 0)$

(D) $(-1, 2)$

我承诺，我将严格遵守考试纪律。

承诺人：_____

题号	一	二	三	四	五	六	七
得分							
评阅人							

4 下列使用导数的最优化方法中，不具有二次终止性的是:

- (A) BFGS法
- (B) 共轭梯度法
- (C) 最速下降法
- (D) DFP法

5 图解法求解线性规划问 (P):

$$\min \quad -6x_1 - 2x_2$$

$$\text{s.t.} \quad x_1 + 2x_2 \leq 10$$

$$2x_1 - x_2 \leq 4$$

$$x_1 - 4x_2 \leq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

的解为 $(x_1, x_2) =$

- (A) (0,0)
- (B) (4,3)
- (C) (0,5)
- (D) (0,2)

二、填空题（共30分，每空3分）

- 1 无约束优化问题的牛顿法的迭代公式为_____。该方法是否具有二次终止性？_____（填是或否）。用此方法求解 $\min (x_1 - 1)^3 + x_2^2$ 取初始点 $\mathbf{x}^{(1)} = (0, 1)^\top$ 时，第1次的迭代结果为 $\mathbf{x}^{(2)} =$ _____。

- 2 线性规划问题 (P):

$$\max 20x_1 + 14x_2 + 60x_3 + 4x_4$$

$$\text{s.t. } x_1 - 6x_3 + x_4 \leq -2,$$

$$x_1 + x_2 + 5x_3 - x_4 \leq -7,$$

$$x_2, x_3, x_4 \leq 0,$$

的对偶问题为_____，该对偶问题的最优解为_____。

利用对偶问题的最优解及互补松弛性质，得原问题的最优解为_____，目标函数的最优解为_____。

- 3 约束优化问题 (P):

$$\min x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 - 4x_2$$

$$\text{s.t. } x_1^2 \leq x_2,$$

$$x_1 + x_2 \leq 2$$

的K-T条件为_____，K-T点为_____，该点是否为(P)的最优解_____（填是或不是）。

三、 (10 分) 给定线性规划问题 (P):

$$\min 2x_1 + x_2 - x_3$$

$$\text{s.t. } x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 11,$$

$$2x_1 + x_2 - 4x_3 \geq 3,$$

$$x_1 - 2x_3 = 1,$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

(a) 写出 (P) 的标准形式;

(b) 用大M法求解该问题。

四、 (10 分) 考虑如下约束优化问题 (P):

$$\begin{aligned} \min \quad & (x_1 - 1)^2 + x_2^2 \\ \text{s.t.} \quad & -x_1 + \frac{1}{2}\beta x_2^2 = 0 \end{aligned}$$

讨论 β 取何值时 $\mathbf{x} = (0, 0)$ 是局部最优解。

五、 (10 分) 用Fletcher-Reeves共轭梯度法 (FR法) 求解下列无约束优化问题

$$\min x_1^2 + x_2^2 + \frac{1}{2}x_3^2.$$

(a) 考虑初始点和初始搜索方向分别为

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{和} \quad d^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

判断 $d^{(1)}$ 是否为最速下降方向。

(b) 以 $x^{(1)}, d^{(1)}$ 为初始点和初始搜索方向, 用FR法计算1次迭代的结果。

六、 (10 分) 用Zoutendijk可行方向法求解以下约束优化问题

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 - 4x_2 + 1 \\ \text{s.t.} \quad & -2x_1 + x_2 + 1 \geq 0 \\ & -x_1 - x_2 + 2 \geq 0 \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

设初始点为 $x^{(1)} = (0, 0)^\top$.

- (a) 在 $x^{(1)}$ 处, 写出起作用约束和不起作用约束的系数矩阵。
- (b) 计算3次迭代的结果。
- (c) 设第3次迭代结果为 $x^{(3)}$, 判断 $x^{(3)}$ 是否为最优解。

七、 (10 分) 用内点罚函数法求解以下约束优化问题

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{6}(x_1 + 1)^3 + x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 - 1 \geq 0 \\ & x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

- (a) 定义出障碍函数。
- (b) 设 r_k 为障碍因子, 求出内点法的解析解 \bar{x}_{r_k} .
- (c) 当 $r_k \rightarrow 0$ 时, 判断内点法的解 \bar{x}_{r_k} 是否趋于最优解。