计算方法习题课 4
配套 《计算方法》 李大明

助教：马泽涛

邮箱: ztma2021@163.com

上海交通大学 数学科学学院

2021 年 12 月 7 日

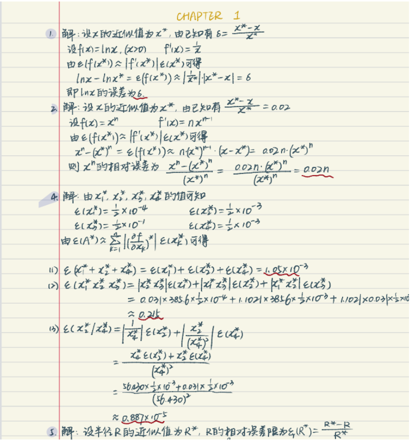
内容提要

1. 作业规范
2. 作业 1
3. 作业 2
4. 作业 3
5. 作业 4
6. 作业 5
7. 作业 6

作业规范

- 作业提交
  - 图片, pdf 上传清晰;
  - 纸质作业推荐扫描全能王;
  - 使用latex;
  - · · · · · ·
- 答题规范
  - 标注题号;
  - 关键步骤, 如使用的定理名称等;
  - 解答过程详细、合理;
- 沟通, 联系请发送邮件至 ztma2021@163.com(备注姓名、学号、并描述问题)
  - 没有按时提交作业至 canvas;
  - 作业最终得分不满意;
  - 作业批改错误;
  - · · · · · ·

作业示范



CHAPTER 1

1. 解：设 x 的近似值为 x^*，由已知有 $\delta=\frac{x^*-x}{x^*}$

设 $f(x)=\ln x,\ (x>0)$ $\quad f'(x)=\frac{1}{x}$

由 $\varepsilon(f(x^*))\approx|f'(x^*)|\varepsilon(x^*)$ 可得

$\ln x-\ln x^*=\varepsilon(f(x^*))\approx\left|\frac{1}{x^*}\right|\cdot|x^*-x|=\delta$

即 $\ln x$ 的误差为 δ.

2. 解：设 x 的近似值为 x^*，由已知有 $\frac{x^*-x}{x^*}=0.02$

设 $f(x)=x^n$ $\quad f'(x)=nx^{n-1}$

由 $\varepsilon(f(x^*))\approx|f'(x^*)|\varepsilon(x^*)$ 可得

$x^n-(x^*)^n=\varepsilon(f(x^*))\approx n(x^*)^{n-1}\cdot(x-x^*)=0.02n\cdot(x^*)^n$

则 x^n 的相对误差为 $\frac{x^n-(x^*)^n}{(x^*)^n}=\frac{0.02n\cdot(x^*)^n}{(x^*)^n}=0.02n$

4. 解：由 $x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*$ 的值可知

$\varepsilon(x_1^*)=\frac{1}{2}\times10^{-4}$ $\quad\varepsilon(x_2^*)=\frac{1}{2}\times10^{-3}$

$\varepsilon(x_3^*)=\frac{1}{2}\times10^{-1}$ $\quad\varepsilon(x_4^*)=\frac{1}{2}\times10^{-3}$

由 $\varepsilon(A^*)\approx\sum_{k=1}^{n}\left|\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)^*\right|\varepsilon(x_k^*)$ 可得

(1) $\varepsilon(x_1^*+x_2^*+x_4^*)=\varepsilon(x_1^*)+\varepsilon(x_2^*)+\varepsilon(x_4^*)=1.05\times10^{-3}$

(2) $\varepsilon(x_1^*x_2^*x_3^*)=|x_2^*x_3^*|\varepsilon(x_1^*)+|x_1^*x_3^*|\varepsilon(x_2^*)+|x_1^*x_2^*|\varepsilon(x_3^*)$

$=0.031\times385.6\times\frac{1}{2}\times10^{-4}+1.1021\times385.6\times\frac{1}{2}\times10^{-3}+1.1021\times0.031\times\frac{1}{2}\times10$

≈0.215

(3) $\varepsilon(x_2^*/x_4^*)=\left|\frac{1}{x_4^*}\right|\varepsilon(x_2^*)+\left|\frac{x_2^*}{(x_4^*)^2}\right|\varepsilon(x_4^*)$

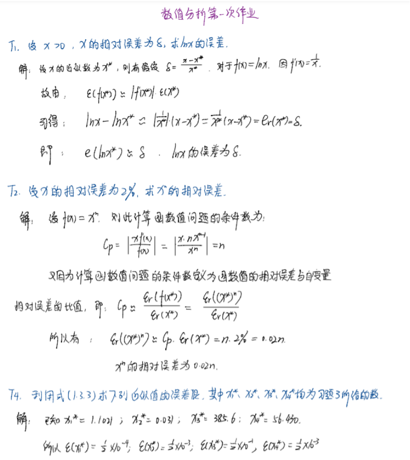
$=\frac{x_4^*\varepsilon(x_2^*)+x_2^*\varepsilon(x_4^*)}{(x_4^*)^2}$

$=\frac{56.430\times\frac{1}{2}\times10^{-3}+0.031\times\frac{1}{2}\times10^{-3}}{(56.430)^2}$

$\approx0.887\times10^{-5}$

5. 解：设半径 R 的近似值为 R^*，R 的相对误差限为 $\varepsilon_r(R^*)=\frac{R^*-R}{R^*}$

(a) 同学 1



数值分析第一次作业

T1. 设 $x>0$，x 的相对误差为 δ，求 $\ln x$ 的误差.

解：设 x 的近似数为 x^*，则有假设 $\delta=\frac{x-x^*}{x^*}$. 对于 $f(x)=\ln x$. 因 $f'(x)=\frac{1}{x}$.

故由：$\varepsilon(f(x^*))\approx|f'(x^*)|\cdot\varepsilon(x^*)$

可得：$\ln x-\ln x^*\approx\left|\frac{1}{x^*}\right|\cdot(x-x^*)=\frac{1}{x^*}(x-x^*)=e_r(x^*)=\delta$.

即：$e(\ln x^*)\approx\delta$. $\ln x$ 的误差为 δ.

T2. 设 x 的相对误差为 2%，求 x^n 的相对误差.

解：设 $f(x)=x^n$. 则此计算函数值问题的条件数为：

$$C_p=\left|\frac{xf'(x)}{f(x)}\right|=\left|\frac{x\cdot nx^{n-1}}{x^n}\right|=n$$

又因为计算函数值问题的条件数定义为函数值的相对误差与自变量

相对误差的比值，即：$C_p\approx\frac{\varepsilon_r(f(x^*))}{\varepsilon_r(x^*)}=\frac{\varepsilon_r((x^*)^n)}{\varepsilon_r(x^*)}$

所以有：$\varepsilon_r((x^*)^n)\approx C_p\cdot\varepsilon_r(x^*)=n\cdot2\%=0.02n$.

x^n 的相对误差为 $0.02n$.

T4. 利用式(1.3.3)求下列近似值的误差限，其中 x_1^*、x_2^*、x_3^*、x_4^* 均为习题3所给的数.

解：已知 $x_1^*=1.1021$；$x_2^*=0.031$；$x_3^*=385.6$；$x_4^*=56.430$.

所以 $\varepsilon(x_1^*)=\frac{1}{2}\times10^{-4}$；$\varepsilon(x_2^*)=\frac{1}{2}\times10^{-3}$；$\varepsilon(x_3^*)=\frac{1}{2}\times10^{-1}$，$\varepsilon(x_4^*)=\frac{1}{2}\times10^{-3}$

(b) 同学 2

作业 1

1. 设 $x > 0$, x 的相对误差为 δ, 求 $\ln x$ 的误差.

解: 因为 x 的相对误差为 δ, 所以有

$$\frac{x - x*}{x*} = \delta,$$

从而, 当 δ 充分小时,

$$\begin{aligned}\ln x - \ln x^* =& \ln(\frac{x - x^* + x^*}{x^*}) \\ =& \ln(1 + \delta) \\ \approx& \delta.\end{aligned}$$

作业 1

2. 设 x 的相对误差为 2%, 求 x^n 的相对误差.

解: 令 $f(x) = x^n$, 则 $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = nx^{n-1}$.
注意到, 由泰勒展开

$$f(x) = f(x^*) + f'(x^*)(x - x^*) + o(x - x^*).$$

于是,

$$x^n \approx (x^*)^n + n(x^*)^{(n-1)}(x - x^*),$$

进而,

$$\begin{aligned}\frac{x^n - (x^*)^n}{(x^*)^n} &\approx \frac{n(x^*)^{(n-1)}(x - x^*)}{(x^*)^n} \\ &= n \cdot \frac{x - x^*}{x^*} \\ &= 0.02n.\end{aligned}$$

作业 1

5. 计算球体积要使相对误差限为 1%, 问度量半径为 R 时允许的相对误差限是多少.

解: 令 $f(R) = \frac{4}{3}\pi R^3$, 则 $f'(R) = 4\pi R^2$.
同样地, 利用泰勒展开, 有

$$f(R) = f(R^*) + f'(R^*)(R - R^*) + o(R - R^*).$$

要使得

$$3 \cdot \left| \frac{R^* - R}{R^*} \right| \approx \left| \frac{f(R^*) - f(R)}{f(R^*)} \right| \leqslant 0.01,$$

则要求 R 的相对误差限为 $1/300 \approx 0.33\%$.

作业 1

13. $f(x)=\ln(x-\sqrt{x^2-1})$, 求 $f(30)$ 的值. 若开平方用 6 位函数表, 问求对数式时误差有多大? 若改用另一等价公式

$$\ln(x-\sqrt{x^2-1})=-\ln(x+\sqrt{x^2-1})$$

计算, 求对数时误差有多大?

解: $f(30)=\ln(30-\sqrt{899})$.
令 $u=\sqrt{899}$, 则 $u\approx 29.9833$, 即 $u^*=29.9833$. 则由书本 P6, (1.3.2) 式可知,

$$|u-u^*|\leqslant \frac{1}{2}\times 10^{-4},$$

其中取 $m=1, n=6$.

作业 1

13. 又令 $g(u)=\ln(30-u)$, 则 $g'(u)=\frac{1}{u-30}$. 从而,

$$\begin{aligned}|g(u)-g(u^*)| &\approx |g'(u^*)(u-u^*)| \\ &\leqslant 2.99401\times 10^{-4}.\end{aligned} \tag{1}$$

再令 $h(u)=-\ln(30+u)$, $g'(u)=-\frac{1}{u+30}$.
同理,

$$\begin{aligned}|h(u)-h(u^*)| &\approx |h'(u^*)(u-u^*)| \\ &=\frac{1}{u^*+30}\cdot|u-u^*| \\ &\leqslant 8.33565\times 10^{-7}.\end{aligned} \tag{2}$$

注意到上述几题都用到了一元泰勒展开的近似.

作业 1

4. 利用式 (1.3.3) 求下列近似值的误差限:

- $x_1^* + x_2^* + x_4^*$
- $x_1^* x_2^* x_3^*$
- x_2^* / x_4^*

提示: 利用多元函数泰勒展开的近似.

1 作业规范

2 作业 1

3 作业 2

4 作业 3

5 作业 4

6 作业 5

7 作业 6

作业 2

6. 已知 $x=\varphi(x)$ 在区间 (a,b) 内只有一根, 且当 $a<x<b$ 时, $|\varphi'(x)| \geqslant k > 1$,
(1) 如何将 $x=\varphi(x)$ 化为适于迭代的形式?
(2) 将 $x=\tan x$ 化为适于迭代的形式, 并求 $x=4.5$ rad 附近的根.
解: (1) 原先要求

$$\begin{cases} y = x \\ y = \varphi(x) \end{cases}$$

在区间内的交点. 由条件可知 $\varphi(x)$ 在区间内严格单调, 因此其反函数存在. 于是, 可转化为考虑

$$\begin{cases} x = y \\ x = \varphi^{-1}(y) + C \end{cases}$$

在 (a,b) 内的交点. 且因 $\left|\frac{1}{\varphi'(y)}\right| \leqslant \frac{1}{k} < 1$, 故迭代公式

$$y_{k+1} = \varphi^{-1}(y_k) + C$$

收敛.

作业 2

6. (2) 原先要求

$$\begin{cases} y = x \\ y = \tan x \end{cases}$$

在 $x = 4.5$ 附近的交点, 现在由 (1) 转化为

$$\begin{cases} x = y \\ x = \arctan y + \pi \end{cases}$$

在 $(\pi, 3\pi/2)$ 内的交点.
令 $\varphi(y) = \arctan y + \pi$, 则 $\varphi'(y) < 1$. 取 y_0 及迭代公式

$$y_{k+1} = \varphi(y_k) = \arctan y_k + \pi,$$

可得上式收敛到 4.493409457909064.

作业 2

10. 对于 $f(x)=0$ 的 Newton 公式 $x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$，证明

$$R_k=\frac{x_k-x_{k-1}}{(x_{k-1}-x_{k-2})^2}$$

收敛到 $-\frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)}$.

证明:

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty}R_k &= \lim_{k\to\infty}\frac{x_k-x_{k-1}}{(x_{k-1}-x_{k-2})^2} \\
&= \lim_{k\to\infty}-\frac{\frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})}}{\left(-\frac{f(x_{k-2})}{f'(x_{k-2})}\right)^2} \\
&= \lim_{k\to\infty}-\frac{\frac{f(x_{k-1})-f(x^*)}{f'(x_{k-1})}}{\left(-\frac{f(x_{k-2})-f(x^*)}{f'(x_{k-2})}\right)^2}
\end{aligned}$$

作业 2

10.

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{k\to\infty} - \frac{\dfrac{f'(\xi_{k-1})(x_{k-1}-x^*)}{f'(x_{k-1})}}{\left(\dfrac{f'(\xi_{k-2})(x_{k-2}-x^*)}{f'(x_{k-2})}\right)^2} \\
&= -\lim_{k\to\infty} \frac{x_{k-1}-x^*}{(x_{k-2}-x^*)^2} \cdot \lim_{k\to\infty} \frac{f'(\xi_{k-1})\left[f'(x_{k-2})\right]^2}{f'(x_{k-1})\left[f'(\xi_{k-2})\right]^2} \\
&= -\frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)}.
\end{aligned}
$$

其中 ξ_{k-1} 介于 x_{k-1} 与 x^* 之间, ξ_{k-1} 介于 x_{k-2} 与 x^* 之间. 并且在倒数第二个等号当中运用了牛顿法的二阶收敛, 即

$$
\boxed{\lim_{k\to\infty} \frac{x_k-x^*}{(x_{k-1}-x^*)^2} = \lim_{k\to\infty} \frac{x_{k-1}-x^*}{(x_{k-2}-x^*)^2} = \frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)}.}
$$

此外, 在 14. 15. 中也是运用该公式及其证明思路.

作业 2

回顾 Newton 公式

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

的收敛阶证明.

证法 1: 考虑 $x = \varphi(x)$, 其中 $\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$.
将 $\varphi(x)$ 在 x^* 处泰勒展开. 见书本 P151.

证法 2: 设 $x_k \to x^*$ 直接对 $f(x)$ 在 x_k 处泰勒展开.

$$f(x) = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k) + \frac{1}{2} f''(x_k)(x - x_k)^2 + o\left((x - x_k)^2\right),$$

将 x^* 带替 x 得

$$0 = f(x^*) = f(x_k) + f'(x_k)(x^* - x_k) + \frac{1}{2} f''(x_k)(x^* - x_k)^2 + o\left((x^* - x_k)^2\right),$$

作业 2

接上证明 2

记 $e_k = x_k - x^*$, 利用 $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$, 得到

$$\frac{e_{k+1}}{(e_k)^2} = \frac{f''(x_k)}{2f'(x_k)} + \frac{o\left((x^* - x_k)^2\right)}{(x^* - x_k)^2},$$

令 $k \to \infty$, 即为所求.

1 作业规范

2 作业 1

3 作业 2

4 作业 3

5 作业 4

6 作业 5

7 作业 6

作业 3

6. 设 A 为 n 阶严格对角占优矩阵, 则经过 Gauss 消去法一步后,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_1^T \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

证明: A_2 是严格对角占优矩阵.
令

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_1^T \\ b_1 & A_1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_1^T \\ 0 & A_1 - \frac{1}{a_{11}} b_1 a_1^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_1^T \\ 0 & A_2. \end{pmatrix}$$

分析: 只要证明

$$\left| a_{ii} - \frac{1}{a_{11}} a_{i1} a_{1i} \right| = \left| a_{ii}^{(2)} \right| > \sum_{j=2, j\neq i}^{n} \left| a_{ij}^{(2)} \right| = \sum_{j=2, j\neq i}^{n} \left| a_{ij} - \frac{1}{a_{11}} a_{i1} a_{1j} \right|,$$

对于 $i = 2, \cdots, n$ 都成立.

作业 3

6. 证明:

$$
\begin{aligned}
\left|a_{ii}^{(2)}\right| = \left|a_{ii} - \frac{1}{a_{11}} a_{i1} a_{1i}\right| &\geqslant |a_{ii}| - \left|\frac{1}{a_{11}} a_{i1} a_{1i}\right| \\
&> \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}| - \left|\frac{1}{a_{11}} a_{i1} a_{1i}\right| \\
&= \sum_{j=2, j\neq i}^{n} |a_{ij}| + |a_{i1}| - \left|\frac{1}{a_{11}} a_{i1} a_{1i}\right| \\
&= \sum_{j=2, j\neq i}^{n} |a_{ij}| + \left|\frac{a_{i1}}{a_{11}}\right| (|a_{11}| - |a_{1i}|) \\
&> \sum_{j=2, j\neq i}^{n} |a_{ij}| + \left|\frac{a_{i1}}{a_{11}}\right| \sum_{j=2, j\neq i}^{n} |a_{1j}| \\
&\geqslant \sum_{j=2, j\neq i}^{n} \left|a_{ij} - \frac{1}{a_{11}} a_{i1} a_{1j}\right| = \sum_{j=2, j\neq i}^{n} \left|a_{ij}^{(2)}\right|
\end{aligned}
$$

作业 3

7. 设 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 为对称正定矩阵, 经过 Gauss 消去法一步后, A 约化为 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_1^T \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$., 其中

$$A = (a_{ij})_n \, , A_2 = \left(a_{ij}^{(2)}\right)_{n-1}$$

证明: (1) A 的对角元素 $a_{ii} > 0 (i = 1, 2, \cdots, n)$;
(2) A_2 是对称正定矩阵;
(3) $a_{ii}^{(2)} < a_{ii} \; (i = 2, 3, \cdots, n)$;
(4) A 的绝对值最大的元素必在对角线上;
(5) $\max\limits_{2\leqslant i,j\leqslant n} \left| a_{ij}^{(2)} \right| \leqslant \max\limits_{2\leqslant i,j\leqslant n} |a_{ij}|$;
(6) 从 (2)、(3)、(5) 推出, 如果 $|a_{ij}| < 1$, 则对于所有 k, $\left| a_{ij}^{(k)} \right| < 1$.

作业 3

7. (1) 由于 A 对称正定矩阵, 所以对一切非零 $x \in \mathbb{R}^n$, 有

$$x^T A x > 0,$$

特别地, 取 $x = e_i$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$, 则有 $a_{ii} > 0$.

(2) 设 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_1^T \\ a_1 & A_1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_{11} & a_1^T \\ 0 & A_1 - \frac{1}{a_{11}} a_1 a_1^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_1^T \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$ 及 $P^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{a_{11}} a_1 & I_{n-1} \end{pmatrix}$, 则有

$$P^T A P = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}.$$

由上可知 A_2 对称, 取非零的 $x = \begin{bmatrix} 0 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & x_0 \end{bmatrix}^T$, 因 P 可逆, 从而 $y = Px$ 为非零向量, 有

$$y^T A y = x^T P^T A P x = x_0^T A_2 x_0 > 0.$$

作业 3

7. (3) 由上可知 $A_2 = A_1 - \frac{1}{a_{11}} a_1 a_1^T$, 易知.
(4) 由于 A 正定从而 A 的 2 级主子式大于 0, 从而有

$$a_{ij}^2 < a_{ii} a_{jj} \leqslant \left(\max\left(a_{ii}, a_{jj}\right)\right)^2 \leqslant \left(\max_{1\leqslant i\leqslant n} a_{ii}\right)^2 .$$

(5) 由 (2) 可知, A_2 是 $n-1$ 级对称正定矩阵, 从而也满足 (1),(3). 于是有

$$\max_{2\leqslant i,j\leqslant n} \left|a_{ij}^{(2)}\right| \leqslant \max_{2\leqslant i\leqslant n} \left|a_{ii}^{(2)}\right| \leqslant \max_{2\leqslant i\leqslant n} \left|a_{ii}\right| \leqslant \max_{2\leqslant i,j\leqslant n} \left|a_{ij}\right| .$$

(6) 类似地, 经过有限步 Gauss 消去后得到的 $A_3, A_4, \cdots$, 也满足上述的性质, 从而 (6) 成立.

作业 3

8.

注意到左乘 I_{ij} 是做初等行变换, 即交换第 i, j 两行;

右乘 I_{ij} 是做初等列变换, 即交换第 i, j 两列.

作业 3

11. 证明: (1) 如果 A 是对称正定矩阵, 则 A^{-1} 也是对称正定矩阵;
(2) 如果 A 是对称正定矩阵, 则 A 可唯一的写成 $A = L^TL$, 其中 L 是具有正对角元的下三角阵.
(1) A 对称正定 $\Leftrightarrow$ 特征值 $\lambda_i > 0, i = 1, 2, \cdots, n$;
(2) 回忆 $A = LU$ 是从上往下利用初等行变换来证明, 这里利用从下往上;

作业 3

15. 能否 LU 分解的判断.
(1) 不能直接分解, 但是经过选主元 $PA = LU$;
(2) 可分解, 但不唯一;
(3) 对称正定, 可以分解，分解唯一;

作业 3

19. 证明:

$$(1)\ \|x\|_\infty \leqslant \|x\|_1 \leqslant n\|x\|_\infty;$$

$$(2)\ \frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_F \leqslant \|A\|_2 \leqslant \|A\|_F.$$

解: (1) 略

(2) 提示: 利用

$$\|A\|_F^2 = \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij})^2 = tr\left(A^{\mathrm{T}}A\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\ ,$$

$$\|A\|_2^2 = \lambda_{\max}\left(A^{\mathrm{T}}A\right).$$

作业 3

21. 设 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 为对称正定矩阵, 定义 $\|x\|_A = (Ax, x)^{\frac{1}{2}}$. 试证明 $\|x\|_A$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上向量的一种范数.

此处用到这样的结论:

若 A 为 n 级对称正定矩阵, 则存在 n 级可逆矩阵 P, 使得

$$A = P^T P.$$

利用作业 20.

作业 3

22. 证明: $\|x+y\|_2 = \|x\|_2 + \|y\|_2 \Longleftrightarrow x, y$ 线性相关且 $x^{\mathrm{T}} y \geqslant 0$.
证明: $\Leftarrow$ 容易证明.
$\Rightarrow$ 两边平方可得,

$$\|x+y\|_2^2 = (\|x\|_2 + \|y\|_2)^2,$$

注意到 $x^T x = \|x\|_2^2$ 以及 $x^T y = y^T x$, 得到

$$x^T y = \|x\|_2 \|y\|_2 .$$

于是, $x^T y \geqslant 0$ 且由上式可知

$$\|x\|_2 \|y\|_2 \cos(\theta) = \|x\|_2 \|y\|_2$$

从而 x, y 线性相关.

作业 3

24. 令 $\|\cdot\|$ 是 $\mathbb{R}^n$(或 $\mathbb{C}^n$) 上的任意一种范数, 而 P 是任一非奇异实 (或复) 矩阵, 定义范数

$$\|x\|' = \|Px\| \ ,$$

证明 $\|A\|' = \|PAP^{-1}\|$.

证明:

$$\begin{aligned}
\|A\|' &= \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|'}{\|x\|'} \\
&= \sup_{x\neq 0} \frac{\|PAx\|}{\|P\,x\|} \\
&= \sup_{x\neq 0} \frac{\|\left(PAP^{-1}\right)\ Px\|}{\|P\,x\|} \\
&= \sup_{y=Px\neq 0} \frac{\|\left(PAP^{-1}\right)\ y\|}{\|y\|} \\
&= \|PAP^{-1}\| \ .
\end{aligned}$$

作业 3

26. 设 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, 求证: A^TA 与 AA^T 的特征值相等, 即 $\lambda(A^TA) = \lambda(AA^T)$.
证明:
先证: A, B 分别为 $n \times m$ 和 $m \times n$ 矩阵, 则有

$$\begin{vmatrix} E_m & B \\ A & E_n \end{vmatrix} = |E_n - AB| = |E_m - BA|,$$

进一步, 当 $\lambda \neq 0$ 时,

$$|\lambda E_n - AB| = \lambda^{n-m} |\lambda E_m - BA|.$$

最后, 令 $B = A^T$ 即可.
回忆到: 矩阵 A 的特征值是由下式得到

$$\boxed{f_A(\lambda) = |\lambda E - A|.}$$

作业 3

27. 设 A 为非奇异矩阵, 求证: $\frac{1}{\| A^{-1}\|} = \min_{y\neq 0} \frac{\| Ay\|}{\| y\|}$.

证明:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\| A^{-1}\|} &= \frac{1}{\sup\limits_{x\neq 0} \frac{\| A^{-1}x\|}{\| x\|}} \\
&= \frac{1}{\sup\limits_{y\neq 0} \frac{\| y\|}{\| Ay\|}} \\
&= \min_{y\neq 0} \frac{1}{\frac{\| y\|}{\| Ay\|}} \\
&= \min_{y\neq 0} \frac{\| Ay\|}{\| y\|}.
\end{aligned}
$$

作业 3

28. 设 A 为非奇异矩阵, 且 $\|A^{-1}\|\,\|\delta A\| < 1$ 求证: $(A+\delta A)^{-1}$ 存在, 且有估计

$$\frac{\|A^{-1}-(A+\delta A)^{-1}\|}{\|A^{-1}\|} \leqslant \frac{\operatorname{cond}(A)\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}}{1-\operatorname{cond}(A)\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}}.$$

证明: 因 $\|A^{-1}\delta A\| \leqslant \|A^{-1}\|\,\|\delta A\| < 1$, 由定理 7.18 可知, $I+A^{-1}\delta A$ 非奇异, 且 $\|\left(I+A^{-1}\delta A\right)^{-1}\| \leqslant \frac{1}{1-\|A^{-1}\delta A\|}$. 因此,

$$A+\delta A = A(I+A^{-1}\delta A)$$

非奇异.
下证:

$$\frac{\|A^{-1}-(A+\delta A)^{-1}\|}{\|A^{-1}\|} \leqslant \frac{\|A^{-1}\|\,\|\delta A\|}{1-\|A^{-1}\|\,\|\delta A\|}.$$

作业 3

28. 接上页
注意到

$$(A+\delta A)^{-1} = \left[A\left(I+A^{-1}\delta A\right)\right]^{-1} = \left(I+A^{-1}\delta A\right)^{-1}A^{-1},$$

从而

$$\begin{aligned}
\|A^{-1}-(A+\delta A)^{-1}\| &= \|A^{-1}-\left(I+A^{-1}\delta A\right)^{-1}A^{-1}\| \\
&\leqslant \|I-\left(I+A^{-1}\delta A\right)^{-1}\|\cdot\|A^{-1}\| \\
&= \|\left(I+A^{-1}\delta A\right)^{-1}\left(I+A^{-1}\delta A-I\right)\|\cdot\|A^{-1}\| \\
&\leqslant \|\left(I+A^{-1}\delta A\right)^{-1}\|\cdot\|A^{-1}\delta A\|\cdot\|A^{-1}\| \\
&\leqslant \frac{1}{1-\|A^{-1}\delta A\|}\|A^{-1}\|\cdot\|\delta A\|\cdot\|A^{-1}\| \\
&\leqslant \frac{1}{1-\|A^{-1}\|\,\|\delta A\|}\|A^{-1}\|\cdot\|\delta A\|\cdot\|A^{-1}\|.
\end{aligned}$$

作业 3

30. 设 A 为对称正定矩阵, 其分解为 $A = LDL^T = W^T W$, 其中 $W = D^{1/2}L^T$, 求证:
(1) $\operatorname{cond}(A)_2 = [\operatorname{cond}(W)_2]^2$;
(2) $\operatorname{cond}(A)_2 = \operatorname{cond}\left(W^T\right)_2 \cdot \operatorname{cond}(W)_2$.
证明:

$$\operatorname{cond}(A)_2 = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}\left(A^T A\right)}{\lambda_{\min}\left(A^T A\right)}},$$

特别地, 当 A 为对称矩阵时,

$$\operatorname{cond}(A)_2 = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}\left(A^T A\right)}{\lambda_{\min}\left(A^T A\right)}} = \frac{\lambda_{\max}(A)}{\lambda_{\min}(A)}.$$

作业 3

32. 证明: 如果 A 是正交矩阵, 则 $\mathrm{cond}(A)_2 = 1$.
证明: 由于 A 为正交矩阵, 从而有 $A'A = AA' = I$. 且对任意 $x \in \mathbb{R}^n$ 且 $\|x\|_2 = 1$, 有

$$\|Ax\|_2^2 = x'A'Ax = x'x = \|x\|_2^2 = 1,$$

于是,

$$\|Ax\|_2 = 1.$$

由范数的等价定义, 有

$$\|A\|_2 = \sup_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2 = 1.$$

从而,

$$\begin{aligned}\mathrm{cond}(A)_2 &= \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 \\ &= \|A\|_2 \|A'\|_2 \\ &= 1.\end{aligned}$$

1 作业规范
2 作业 1
3 作业 2
4 作业 3
5 作业 4
6 作业 5
7 作业 6

作业 4

2. 设 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, 证明即使 $\|A\|_1 = \|A\|_\infty > 1$, 级数 $I + A + A^2 + \cdots + A^k + \cdots$ 也收敛.

解: 容易计算 A 的特征多项式为 $f(x) = x^2$, 由 $Hamilton - Caylay$ 定理可知, $f(A) = A^2 = 0$.

于是, 级数 $I + A + A^2 + \cdots + A^k + \cdots$ 也收敛, 收敛于 $I + A$.

作业 4

思考：已知矩阵 A 为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

计算 A^{100}.

作业 4

思考: 已知矩阵 A 为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

计算 A^{100}.
解: 容易计算矩阵 A 的特征多项式为 $f(x) = (x+1)(x-1)^2$, 将 x^{100} 与 $f(x)$ 做带余除法, 则有

$$x^{100} = f(x)q(x) + ax^2 + bx + c,$$

根据 $f(-1) = f(1) = f'(1) = 0$, 可得 $a = 50, b = 0, c = -49$, 于是
$A^{100} = 50A^2 - 49E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 50 & 1 & 0 \\ 50 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

作业 4

3. 证明对于任意选择的 A, 序列 $I, A, \frac{1}{2}A^2, \frac{1}{3!}A^3, \frac{1}{4!}A^4, \cdots$ 收敛于零矩阵.

证明: 下证: $\|\frac{1}{n!}A^n\| \to 0$. 由于

$$\|\frac{1}{n!}A^n\| \leqslant \frac{1}{n!}\|A\|^n,$$

由于数项级数 $e^{\|A\|} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\|A\|^n$ 收敛, 从而其通项的极限为 0.

作业 4

7. 设 $Ax = b$, 其中 A 为对称正定矩阵, 问解此方程组的 $Jacobi$ 迭代法是否一定收敛. 试考察习题 5 中方程组 (1).
解: 不一定收敛.
习题 5 中

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0.4 & 0.4 \\ 0.4 & 1 & 0.8 \\ 0.4 & 0.8 & 1 \end{pmatrix},$$

从而

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -0.4 & -0.4 \\ -0.4 & 0 & -0.8 \\ -0.4 & -0.8 & 0 \end{pmatrix},$$

由迭代收敛的充要条件可知 $\rho(J) = 1.092820323027551 > 1$, 从而不收敛.

作业 4

11. 设有方程组 $Ax=b$, 其中 A 为对称正定矩阵, 迭代公式 $x^{(k+1)}=x^{(k)}+\omega\left(b-Ax^{(k)}\right)(k=0,1,2,\cdots)$, 试证明当 $0<\omega<\frac{2}{\beta}$ 时上述迭代法收敛. (其中 $0<\alpha\leqslant\lambda(A)\leqslant\beta$).

解: 由于

$$x^{(k+1)}=(I-wA)\,x^{(k)}+\omega b,$$

注意到 $B=I-\omega A$ 的特征值为 $1-\omega\lambda_i, i=1,\cdots,n$.
由迭代收敛的充要条件可知, 只要使得 $\rho(B)<1$, 即

$$|1-w\lambda_i|<1\ ,$$

对任意 $i=1,2,\cdots,n$ 都成立.
解之得

$$0<\omega<\frac{2}{\beta}.$$

作业 4

12. 用 $Gauss-Seidel$ 方法解 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$, 用 $x_i^{(k+1)}$ 记 $\boldsymbol{x}^{(k+1)}$ 的第 i 个分量, 且

$$r_i^{(k+1)}=b_i-\Sigma_{j=1}^{i-1}a_{ij}x_j^{(k+1)}-\Sigma_{j=1}^{n}a_{ij}x_i^{(k)}. \tag{3}$$

证明: (1)$x_i^{(k+1)}=x_i^{(k)}+\frac{r_i^{(k+1)}}{a_{ii}}$;

(2) 如果 $\boldsymbol{\varepsilon}^{(k)}=\boldsymbol{x}^{(k)}-\boldsymbol{x}^*$, 其中 $\boldsymbol{x}^*$ 是方程组的精确解, 求

证:$\varepsilon_i^{(k+1)}=\varepsilon_i^{(k)}-\frac{r_i^{k+1}}{a_{ii}}$, 其中

$$r_i^{(k+1)}=\Sigma_{j=1}^{i-1}a_{ij}\varepsilon_j^{(k+1)}+\Sigma_{j=i}^{n}a_{ij}\varepsilon_j^{(k)};$$

(3) 设 A 是对称的, 二次型 $Q(\varepsilon^{(k)})=(A\varepsilon^{(k)},\varepsilon^{(k)})$, 证明

$$Q(\varepsilon^{(k+1)})-Q(\varepsilon^{(k)})=-\Sigma_{j=1}^{n}\frac{(r_j^{(k+1)})^2}{a_{jj}}.$$

作业 4

12. (4) 由此推出, 如果 A 是具有正对角元素的非奇异矩阵, 且 $Gauss-Seidel$ 方法对于任意初始向量 $x^{(0)}$ 是收敛的, 则 A 是正定矩阵.

解: (1) 由 $Gauss-Seidel$ 迭代公式可知,

$$a_{ii}x_i^{(k+1)} = -\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k+1)} + b_i, \tag{4}$$

将(3)带入(4)可以得到

$$a_{ii}x_i^{(k+1)} = (r_i^{(k+1)} - b_i + a_{ii}x_i^{(k)}) + b_i,$$

约简后即为所证.

(2) 由题意可知

$$\begin{aligned} \varepsilon_i^{(k+1)} &= x_i^{(k+1)} - x_i^* \\ &= \frac{1}{a_{ii}}\left[-\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)} + b_i\right] - x_i^* \end{aligned}$$

作业 4

12. (2)

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{a_{ii}}\left[-\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i}^{n} a_{ij}x_j^{(k)} + b_i\right] + x_i^{(k)} - x_i^* \\
&= \frac{1}{a_{ii}}\left[-\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\left(x_j^{(k+1)} - x_j^*\right) - \sum_{j=i}^{n} a_{ij}\left(x_j^{(k)} - x_j^*\right) + b_i\right] + x_i^{(k)} - x_i^* \\
&\quad - \frac{1}{a_{ii}}\left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^*\right] \\
&= -\frac{1}{a_{ii}} r_i^{(k+1)} + \varepsilon_i^{(k)},
\end{aligned}
$$

注意到由于 $Ax^* = b$, 于是有 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^* = b_i, i = 1, 2, \cdots, n.$

作业 4

12. (3) 解: 注意到

$$Q(\varepsilon^{(k)}) = (A\varepsilon^{(k)}, \varepsilon^{(k)}) = (\varepsilon^{(k)})^T A\varepsilon^{(k)},$$

于是,

$$\begin{aligned}
&Q(\varepsilon^{(k+1)}) - Q(\varepsilon^{(k)}) \\
=&(\varepsilon^{(k+1)})^T A\varepsilon^{(k+1)} - (\varepsilon^{(k)})^T A\varepsilon^{(k)} \\
=&\left(\varepsilon^{(k+1)} - \varepsilon^{(k)} + \varepsilon^{(k)}\right)^T A\left(\varepsilon^{(k+1)} - \varepsilon^{(k)} + \varepsilon^{(k)}\right) - \left(\varepsilon^{(k)}\right)^T A\varepsilon^{(k)} \\
=&\left(\varepsilon^{(k+1)} - \varepsilon^{(k)}\right)^T A\left(\varepsilon^{(k+1)} - \varepsilon^{(k)}\right) + \left(\varepsilon^{(k+1)} - \varepsilon^{(k)}\right)^T A\varepsilon^{(k)} \\
&+ \left(\varepsilon^{(k)}\right)^T A\left(\varepsilon^{(k+1)} - \varepsilon^{(k)}\right) \\
=&\left(\varepsilon^{(k+1)} - \varepsilon^{(k)}\right)^T A\left(\varepsilon^{(k+1)} - \varepsilon^{(k)}\right) + 2\left(\varepsilon^{(k+1)} - \varepsilon^{(k)}\right)^T A\varepsilon^{(k)}
\end{aligned}$$

作业 4

12. (3)

$$
\begin{aligned}
&= \left(\varepsilon^{(k+1)} - \varepsilon^{(k)}\right)^T A \left(\varepsilon^{(k+1)} - \varepsilon^{(k)}\right) + 2\left(\varepsilon^{(k+1)} - \varepsilon^{(k)}\right)^T A \left(\varepsilon^{(k)} - \varepsilon^{(k+1)}\right) \\
&\quad + 2\left(\varepsilon^{(k+1)} - \varepsilon^{(k)}\right)^T A\varepsilon^{(k+1)} \\
&= -\left(\varepsilon^{(k+1)} - \varepsilon^{(k)}\right)^T A \left(\varepsilon^{(k+1)} - \varepsilon^{(k)}\right) + 2\left(\varepsilon^{(k+1)} - \varepsilon^{(k)}\right)^T A\varepsilon^{(k+1)},
\end{aligned}
\tag{5}
$$

由于 A 是对称矩阵, 则 A 可以写成 $A = D - L - U = D - L - L^T$, 且其迭代形式为

$$
(D - L)\, x^{(k+1)} = Ux^{(k)} + b = L^T x^{(k)} + b,
$$

又其精确解满足

$$
(D - L)\, x^{*} = Ux^{(k)} + b = L^T x^{*} + b,
$$

于是, 其误差满足

$$
(D - L)\, \varepsilon^{(k+1)} = L^T \varepsilon^{(k)}.
$$

作业 4

12. 从而, (5)式又可以写成

$$
\begin{aligned}
&= -\left(\varepsilon^{(k+1)}-\varepsilon^{(k)}\right)^T D\left(\varepsilon^{(k+1)}-\varepsilon^{(k)}\right)+2\left(\varepsilon^{(k+1)}-\varepsilon^{(k)}\right)L^T\left(\varepsilon^{(k+1)}-\varepsilon^{(k)}\right)\\
&\quad +2\left(\varepsilon^{(k+1)}-\varepsilon^{(k)}\right)^T (D-L)\varepsilon^{(k+1)}-2\left(\varepsilon^{(k+1)}-\varepsilon^{(k)}\right)^T L^T\varepsilon^{(k+1)}\\
&= -\left(\varepsilon^{(k+1)}-\varepsilon^{(k)}\right)^T D\left(\varepsilon^{(k+1)}-\varepsilon^{(k)}\right)+2\left(\varepsilon^{(k+1)}-\varepsilon^{(k)}\right)L^T\left(\varepsilon^{(k+1)}-\varepsilon^{(k)}\right)\\
&\quad +2\left(\varepsilon^{(k+1)}-\varepsilon^{(k)}\right)^T L^T\varepsilon^{(k)}-2\left(\varepsilon^{(k+1)}-\varepsilon^{(k)}\right)^T L^T\varepsilon^{(k+1)}\\
&= -\left(\varepsilon^{(k+1)}-\varepsilon^{(k)}\right)^T D\left(\varepsilon^{(k+1)}-\varepsilon^{(k)}\right)\\
&= -\left(\boldsymbol{x}^{(k+1)}-\boldsymbol{x}^{(k)}\right)^T D\left(\boldsymbol{x}^{(k+1)}-\boldsymbol{x}^{(k)}\right)\\
&= -\Sigma_{j=1}^n (x_j^{(k+1)}-x_j^{(k)})a_{jj}(x_j^{(k+1)}-x_j^{(k)})\\
&= -\Sigma_{j=1}^n \frac{(r_j^{(k+1)})^2}{a_{jj}}.
\end{aligned}
$$

(4) 略

作业 4

13. 设 A 与 B 为 n 阶矩阵, A 为非奇异矩阵, 考虑 $Az_1 + Bz_2 = b_1$, $Bz_1 + Az_2 = b_2$, 其中 $z_1, z_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}^n$.
(1) 找出下述迭代方法收敛的充要条件

$$Az_1^{(m+1)} = b_1 - Bz_1^{(m)}, Az_2^{(m+1)} = b_2 - Bz_1^{(m)} \, (m \geqslant 0);$$

(2) 找出下述迭代方法收敛的充要条件

$$Az_1^{(m+1)} = b_1 - Bz_1^{(m)}, Az_2^{(m+1)} = b_2 - Bz_1^{(m+1)} \, (m \geqslant 0);$$

比较两个方法的收敛速度.
解: (1) 写成矩阵的形式, 有

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1^{(m+1)} \\ z_2^{(m+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & B \\ B & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1^{(m)} \\ z_1^{(m)} \end{bmatrix},$$

作业 4

13.

$$\begin{bmatrix} z_1^{(m+1)} \\ z_2^{(m+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & A^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & A^{-1}B \\ A^{-1}B & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1^{(m)} \\ z_1^{(m)} \end{bmatrix},$$

由迭代收敛的充要条件有 $\rho\left(\begin{bmatrix} 0 & A^{-1}B \\ A^{-1}B & 0 \end{bmatrix}\right) < 1,$

(2) 写成矩阵的形式, 有

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ B & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1^{(m+1)} \\ z_2^{(m+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1^{(m)} \\ z_1^{(m)} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} z_1^{(m+1)} \\ z_2^{(m+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ -A^{-1}BA^{-1} & A^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -A^{-1}B \\ 0 & \left(A^{-1}B\right)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1^{(m)} \\ z_1^{(m)} \end{bmatrix},$$

由迭代收敛的充要条件有 $\rho\left(\begin{bmatrix} 0 & -A^{-1}B \\ 0 & \left(A^{-1}B\right)^2 \end{bmatrix}\right) < 1.$

作业 4

13. 比较两个迭代方法的收敛速度.
由定义 8.3 可知, $R(T) = -\ln\rho(T)$ 为迭代法的收敛速度. 并且, $\rho(T) < 1$ 越小, 收敛速度越快.
由于

$$\rho\left(\begin{bmatrix} 0 & A^{-1}B \\ A^{-1}B & 0 \end{bmatrix}\right) = \rho(A^{-1}B) > \rho(A^{-1}BA^{-1}B),$$

从而第二种方法的收敛速度更快.

作业 4

15. $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 3 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 7 \end{bmatrix}$，试说明 A 为可约矩阵.

解: 取 $P = I_{23}$ 即可.

作业 4

16. 给定迭代过程 $x^{(k+1)} = Cx^{(k)} + g$, 其中 $C \in \mathbb{R}^{n\times n}(k=0,1,2,\cdots)$, 试证明: 如果 C 的特征值 $\lambda_i(C) = 0, (i=1,2,\cdots,n)$, 则此迭代过程最多迭代 n 次收敛于方程组的解.
证明: 由题意可知, 0 是 n 阶方阵 C 的 n 重特征值, 从而 C 相似于一个 n 阶若尔当矩阵,

$$P^{-1}CP = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}_{n\times n} = J.$$

于是, $C^n = PJ^nP^{-1} = 0$. 考虑

$$x^{(k+1)} = Cx^{(k)} + g, \tag{6}$$

$$x^* = Cx^* + g, \tag{7}$$

作业 4

16. (6) -(7)可以得到

$$x^{(k+1)} - x^* = C(x^{(k)} - x^*) = \cdots = C^{k+1}(x^{(0)} - x^*),$$

这里 $k = 0, 1, \cdots$.
从而, 取 $k = n - 1$ 时, 此时迭代了 n 次, 有

$$x^{(n)} - x^* = 0.$$

作业 4

18. 设 A 为不可约弱对角占优阵且 $0<\omega\leqslant 1$, 求证, 解 $Ax=b$ 的 SOR 方法收敛.

证明: 由题意可知, $L_\omega=(D-\omega L)[(1-\omega)D+\omega U]$. 下证: $\rho(L_\omega)<1$.

$$\begin{aligned} 0 &= |\lambda E-L_\omega| \\ &= \left|\lambda E-(D-\omega L)^{-1}\left[(1-\omega)D+\omega U\right]\right| \\ &= \left|(D-\omega L)^{-1}\right| \left|\lambda(D-\omega L)-\left[(1-\omega)D+\omega U\right]\right|, \end{aligned}$$

令 $G=\lambda(D-\omega L)-[(1-\omega)D+\omega U]=(g_{ij})$, 则当 A 不可约时, G 也不可约, 对于 $|\lambda|\geqslant 1$ 及 $0<\omega\leqslant 1$. 下证: $det(G)\neq 0$.

$$\begin{aligned} |g_{ii}| = |\lambda-(1-\omega)|\cdot|a_{ii}| &\geqslant |\lambda-(1-\omega)|\cdot\sum_{j\neq i}|a_{ij}| \\ &\geqslant |\lambda\omega|\sum_{j=1}^{i-1}|a_{ij}|+\omega\sum_{j=i+1}^{n}|a_{ij}| \end{aligned}$$

作业 4

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^{i-1} |g_{ij}| + \sum_{j=i+1}^{n} |g_{ij}| \\
&= \sum_{j \neq i}^{n} |g_{ij}| .
\end{aligned}
$$

注意到上式的不等号是由于

$$
|\lambda| \left(1 - \frac{1-\omega}{|\lambda|}\right) > |\lambda\omega| \geqslant \omega,
$$

于是，由定理 8.6 可知 $det(G) \neq 0$. 从而，L_ω 的特征值均小于 1，SOR 方法收敛.

1 作业规范
2 作业 1
3 作业 2
4 作业 3
5 作业 4
6 作业 5
7 作业 6

作业 5

6. 设 $x_j(j=0,1,\cdots,n)$ 为互异节点, 求证:
(1)$\sum_{j=0}^{n} x_j^k l_j(x) = x^k \quad (k=0,1,\cdots,n)$;
(2)$\sum_{j=0}^{n} (x_j - x)^k l_j(x) = 0 \quad (k=1,2,\cdots,n)$.
解: (1) 利用拉格朗日插值余项公式;
(2)

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{n} (x_j - x)^k l_j(x) \\
=&\sum_{j=0}^{n} \sum_{t=0}^{n} C_k^t x_j^t (-x)^{k-t} l_j(x) \\
=&\sum_{t=0}^{n} C_k^t (-x)^{k-t} \sum_{j=0}^{n} x_j^t l_j(x) \\
=&\sum_{t=0}^{n} C_k^t (-x)^{k-t} x^t \\
=&(x-x)^k = 0.
\end{aligned}
$$

作业 5

14. $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$ 有 n 个不同实根 $x_1, x_2, \cdots, x_n$, 证明:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{x_j^k}{f'(x_j)} = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant k \leqslant n-2, \\ a_n^{-1}, & k = n-1. \end{cases}$$

解: 由课本 P22 页差商的性质 (2.4.3) 及 (2.4.5) 可知:

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_n] = \sum_{j=0}^{k} \frac{f(x_j)}{(x_j - x_0) \cdots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \cdots (x_j - x_n)}, \tag{8}$$

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}, \quad \xi \in [a, b], \tag{9}$$

进一步地, 在式子(9)中, 令 $x_1 = \cdots = x_n = x_0$ 时, 有

$$f[x_0, x_0, \cdots, x_0] = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

作业 5

14. 解: 由于 $f(x)$ 有 n 个不同实根且首项系数为 a_n, 令

$$f(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n),$$

且 $f'(x_j) = a_n\left(x_j - x_1\right)\cdots\left(x_j - x_{j-1}\right)\left(x_j - x_{j+1}\right)\cdots\left(x_j - x_n\right)$.
首先, 由(8)及(9)可知

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j^k}{f'\left(x_j\right)} &= \sum_{j=1}^{n}\frac{x_j^k}{a_n\left(x_j - x_1\right)\cdots\left(x_j - x_j\right)\left(x_j - x_{j+1}\right)\cdots\left(x_j - x_n\right)}\\
&= \frac{1}{a_n}\cdot f[x_1, \cdots, x_n]\\
&= \frac{1}{a_n}\cdot\frac{f^{(n-1)}(\xi)}{(n-1)!}\\
&= \begin{cases} 0, & 0 \leqslant k \leqslant n-2,\\ a_n^{-1}, & k = n-1.\end{cases}
\end{aligned}$$

作业 5

15. 证明两点三次 $Hermite$ 插值的余项是

$$R_3(x) = f^{(4)}(\xi)(x - x_k)^2 (x - x_{k+1})^2 / 4!, \quad \xi \in (x_k, x_{k+1}),$$

并由此求出分段三次 $Hermite$ 插值的误差限.
证明: 由 x_k 和 x_{k+1} 是 $f(x) - H_3(x) = 0$ 的 2 重根, 于是, 可令

$$f(x) - H_3(x) = K(x)(x - x_k)^2 (x - x_{k+1})^2. \tag{10}$$

现在把 x 看作是一个固定点, 作函数

$$\varphi(t) = f(t) - H_3(t) - K(x)(t - x_k)^2 (t - x_{k+1})^2,$$

可知 $\varphi(t)$ 有 5 个零点, 使用四次罗尔定理, 存在 $\xi \in (x_k, x_{k+1})$, 使得

$$\varphi^{(4)}(\xi) = f^{(4)}(\xi) - 4! K(x) = 0,$$

带入(10)得到

$$R_3(x) = f^{(4)}(\xi)(x - x_k)^2 (x - x_{k+1})^2 / 4!, \quad \xi \in (x_k, x_{k+1}).$$

误差限略.

作业 5

19. 求一个次数不高于四次的多项式 $P(x)$, 使它满足 $P(0) = P'(0) = 0$, $P(1) = P'(1) = 1,\ P(2) = 1$
提示: 利用(9)及牛顿插值.
问: 如何用来求解 18?

作业 5

21. 设 $f(x) = 1/(1+x^2)$, 在 $-5 \leqslant x \leqslant 5$ 上取 $n = 10$, 按等距节点求分段线性插值函数 $I_h(x)$, 计算各节点间中点处的 $I_h(x)$ 与 $f(x)$ 的值, 并估计误差.

解: $I_h(x)$ 计算公式见课本 P33-34, 略.

由线性插值的误差余项可知, 在区间 $[x_k, x_{k+1}]$ 上误差估计为

$$
\begin{aligned}
|f(x) - I_h(x)| &= |f''(\xi)(x - x_k)(x - x_{k+1})/2!| \\
&\leqslant \max |f''(\xi)| \cdot \frac{h_k^2}{8} \\
&\leqslant 2 \cdot \frac{h_k^2}{8} \\
&\leqslant \frac{h^2}{4} = \frac{1}{4},
\end{aligned}
$$

这里 $h_k = x_{k+1} - x_k$, 且 $h = \max_k h_k$.

作业 5

23. 求 $f(x) = x^4$ 在 $[a, b]$ 上的分段 $Hermite$ 插值, 并估计误差.
解: 分段 $Hermite$ 插值见课本 P34-35.
由题 15 可知, 在区间 $[x_k, x_{k+1}]$ 上误差估计为

$$\begin{aligned}|f(x) - I_h(x)| &= \left|f^{(4)}(\xi)(x - x_k)^2 (x - x_{k+1})^2 / 4!\right| \\ &\leqslant \left(\frac{h_k}{2}\right)^4 \\ &\leqslant \left(\frac{h}{2}\right)^4,\end{aligned}$$

这里 $h_k = x_{k+1} - x_k$, 且 $h = \max_k h_k$.

作业 5

25. 若 $f(x) \in C^2[a,b]$, $S(x)$ 是三次样条函数, 证明

(1)

$$\int_a^b \left[f''(x)\right]^2 dx - \int_a^b \left[S''(x)\right]^2 dx$$
$$= \int_a^b \left[f''(x) - S''(x)\right]^2 dx + 2\int_a^b S''(x)\left[f''(x) - S''(x)\right] dx;$$

(2)

$$\int_a^b S''(x)\left[f''(x) - S''(x)\right] dx = S''(b)\left[f'(b) - S'(b)\right] - S''(a)\left[f'(a) - S'(a)\right].$$

解: (1) 略;
(2) 注意到 $S(x)$ 是三次样条函数, 从而其三阶导数在每个小区间都不同但都为常数.

作业 5

25. (2)

$$
\begin{aligned}
&\int_a^b S''(x)\left[f''(x)-S''(x)\right]dx\\
=&\int_a^b S''(x)\,d\left[f'(x)-S'(x)\right]\\
=&S''(x)\cdot\left[f'(x)-S'(x)\right]\Big|_a^b-\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} S'''(x)\left[f'(x)-S'(x)\right]dx\\
=&S''(x)\cdot\left[f'(x)-S'(x)\right]\Big|_a^b-\sum_{k=0}^{n-1}C_k\int_{x_k}^{x_{k+1}}\left[f'(x)-S'(x)\right]dx\\
=&S''(x)\cdot\left[f'(x)-S'(x)\right]\Big|_a^b-\sum_{k=0}^{n-1}C_k\left(f(x)-S(x)\right)\Big|_{x_k}^{x_{k+1}}\\
=&S''(b)\cdot\left[f'(b)-S'(b)\right]-S''(a)\cdot\left[f'(a)-S'(a)\right].
\end{aligned}
$$

1 作业规范

2 作业 1

3 作业 2

4 作业 3

5 作业 4

6 作业 5

7 作业 6

作业 6

14. $f(x)$, $g(x) \in C^1[a, b]$, 定义

$$(1)\ (f, g) = \int_a^b f'(x)\, g'(x)\, dx;\ (2)\ (f, g) = \int_a^b f'(x)\, g'(x)\, dx + f(a)\, g(a)\, ;$$

它们是否构成内积?

解: 注意验证 $(f, f) = 0 \Longleftrightarrow f = 0$.

作业 6

16. 选择 a, 使积分 $\int_{-1}^{1}(x-ax^2)^2\,dx$, $\int_{-1}^{1}\left|x-ax^2\right|\,dx$ 取得最小值.
解: (1) 注意积分上下限是 $[-1,1]$, $a=0$.
(2) 思路: 考虑去掉绝对值.

作业 6

20. 将 $f(x) = \sin(\frac{1}{2}x)$ 在 $[-1, 1]$ 上按 *Legendre* 多项式及 *Chebyshev* 多项式展开, 求三次最佳平方逼近多项式并画出误差图形, 再计算均方误差.

解: (1) 首先, *Legendre* 多项式得基为 $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$, $P_2(x) = (3x^2 - 1)/2$, $P_3(x) = (5x^3 - 3x)/2$, 原问题等价于求解

$$\min_{a_i} \int_{-1}^{1} \left(\sin\left(\frac{x}{2}\right) - a_0 P_0 - a_1 P_1 - a_2 P_2 - a_3 P_3\right)^2 dx,$$

其中

$$a_i = \frac{2i+1}{2} \int_{-1}^{1} \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cdot P_i(x) dx.$$

经过计算可以得到, $a_0 = a_2 = 0$,
$a_1 = 12\sin(\frac{1}{2}) - 6\cos(\frac{1}{2}) \approx 0.4876110919$,
$a_3 = 805\cos(\frac{1}{2}) - 1512\sin(\frac{1}{2}) \approx -0.008218248$. 于是, 按 *Legendre* 多项式最佳平方逼近多项式为

$$a_1 P_1(x) + a_3 P_3(x),$$

带入化简即可.

作业 6

20. (2) 同理, $Chebyshev$ 多项式得基为 $T_0(x) = 1,\ T_1(x) = x,$
$T_2(x) = 2x^2 - 1,\ T_3(x) = 4x^3 - 3x$, 权函数 $\rho = 1/\sqrt{1-x^2}$, 则原问题等价于求解

$$\min_{a_i} \int_{-1}^{1} \rho(x) \left(\sin\left(\frac{x}{2}\right) - a_0 T_0 - a_1 T_1 - a_2 T_2 - a_3 T_3\right)^2 dx,$$

只需要求解如下线性方程组:

$$\begin{pmatrix} \pi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pi/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pi/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pi/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (f, T_0) \\ (f, T_1) \\ (f, T_2) \\ (f, T_3) \end{pmatrix},$$

上式中内积 $(f, T_i) = \int_{-1}^{1} \rho(x) \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cdot T_i(x)\, dx.$
经过计算可以得到, $a_0 = a_2 = 0,\ a_1 \approx 0.30847405,\ a_3 \approx -0.003255945.$

作业 6

20. (2) 于是, 按 $Chebyshev$ 多项式最佳平方逼近多项式为

$$a_1 T_1(x) + a_3 T_3(x),$$

带入化简即可.
两种多项式的均方误差分别为 $\|\delta_1\|_2 = 0.000013965573$, $\|\delta_2\|_2 = 0.000452734747$.

误差图略.

作业 6

22. 用最小二乘法求一个形如 $y = a + bx^2$ 的经验公式, 使它与表 3.6 的所示的数据相拟合, 并求均方误差.
解: 原问题等价于求解

$$\min_{a,b} \Sigma_{i=1}^{5} \left(a + bx_i^2 - y_i\right)^2 .$$

关于 a, b 分别求偏导后, 可得

$$\begin{cases} 5a + b\sum_{i=1}^{5} x_i^2 = \sum_{i=1}^{5} y_i \\ a\sum_{i=1}^{5} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{5} x_i^4 = \sum_{i=1}^{5} y_i x_i^2, \end{cases}$$

解之得, $a = 0.9725786569$, $b = 0.0500351242$, 其均方误差 $\|\delta\|_2 = 0.1225692$.

谢　谢!

Thank you!