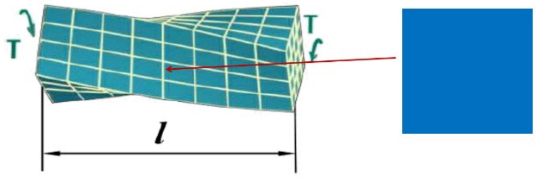
1， 一截面为正方形的均匀长方体两端受到大小相等，方向相反的扭矩 T。其$\frac{L}{2}$处的截面如下所示，为一正方形，请对该截面上的剪应力分布进行分析。请给出该截面上四个顶点处的剪应力大小并说明原因。



答：剪应力互等定理可知四个顶点剪应力为 0。

2， 请对弹性问题的解法进行概述。
答：若变量中包含位移，协调方程自动满足，则需列出平衡微分方程（3 个）、几何方程（6 个）、本构关系（6 个）共计 15 个方程，解得应力分量（6 个）、应变分量（6 个）、位移分量（3 个）；若变量中不包含位移则应联立协调方程（3 个）、平衡方程（3 个）、本构关系（6 个）共计 12 个方程解得应力分量（6 个）、应变分量（6 个），通过几何方程积分得到位移。

3， 某应力张量在任意坐标旋转下保持不变，请给出这一张量的形式，并作证明。
答：张量的的坐标变化：$\sigma' = Q\sigma Q^T$，在任意坐标旋转下保持不变，则：$\sigma'=\sigma$，由于 Q 是正交矩阵，即：$Q^T=Q^{-1}$，故：$\sigma'\cdot Q=Q\sigma Q^T Q \Longrightarrow \sigma\cdot Q=Q\cdot\sigma$。由于 Q 为任意的旋转矩阵，因此应力张量可为数量矩阵，即：

$$\sigma = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$$

4， 设 P 点的应力张量如下

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 0 \\ 3 & 7 & 4 \\ 0 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

求该处主应力及主方向，并验证主方向相互正交。

答：$\lambda I - P = 0$即$\begin{bmatrix} \lambda-7 & -3 & 0 \\ -3 & \lambda-7 & -4 \\ 0 & -4 & \lambda-7 \end{bmatrix} = 0 \rightarrow (\lambda-2)(\lambda-7)(\lambda-12) = 0$

解得三个主应力分别为 2,7,12。再分别带回$(\lambda I - P)\vec{n} = 0$可得主方向分别为

$$\overrightarrow{n_1} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}, \overrightarrow{n_2} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \overrightarrow{n_3} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

由于$\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2} = 0, \overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{n_3} = 0, \overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_3} = 0$，故主方向相互正交。

5， 实验课上，小明对一块处于平衡状态下的薄板应变状态归纳如下：$\varepsilon_x = A_1 xy$, $\varepsilon_y = B_1 y^3$, $\gamma_{xy} = C_1 - D_1 x^2$，小红对同一薄板应变状态归纳如下：$\varepsilon_x = A_2 xy^2$, $\varepsilon_y =$

$B_2y^3, \gamma_{xy} = C_2 - D_2x^2$，已知边界条件：$x = 0$时，$u_x = 0; y = 0$时，$u_y = 0$并且式中 A,B,C,D 皆为不等于 0 的常数。提交作业后老师判断两位同学的实验记录均存在错误。

（a） 请分别依据小明和小红归纳的应变状态列出该薄板的应力分量及位移分量。

（b） 请从平衡状态及参数关系两方面分析，说明两位同学归纳的应变状态中存在的错误。

答：

（a）小明应力分量：

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2}\left(\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y\right) = \frac{E}{1-\mu^2}(A_1xy + \mu B_1y^3)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\mu^2}\left(\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x\right) = \frac{E}{1-\mu^2}(\mu A_1xy + B_1y^3)$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} = G(C_1 - D_1x^2)$$

位移分量：

$$u_x = \frac{1}{2}A_1x^2y + E_1y + F_1$$

$$u_y = \frac{1}{4}B_1y^4 + G_1x + H_1$$

其中参数应满足：

$$A_1 = -4D_1; \frac{E_1 + G_1}{2} = C_1$$

边界条件确定参数：$E_1 = F_1 = G_1 = H_1 = 0$

小红应力分量：

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2}\left(\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y\right) = \frac{E}{1-\mu^2}(A_2xy^2 + \mu B_2y^3)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\mu^2}\left(\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x\right) = \frac{E}{1-\mu^2}(\mu A_2xy^2 + B_2y^3)$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} = G(C_2 - D_2x^2)$$

位移分量：

$$u_x = \frac{1}{2}A_2x^2y^2 + E_2y + F_2$$

$$u_y = \frac{1}{4}B_2y^4 + G_2x + H_2$$

其中参数应满足：

$$A_2y = -2D_2; \frac{E_2 + G_2}{2} = C_2$$

边界条件确定参数：$E_2 = F_2 = G_2 = H_2 = 0$

(b)小红不符合形变协调方程；由平衡方程以及参数关系可以知小明和小红均不满足参数不为 0.