مریم سعیدمهر ۹۶۲۹۳۷۳

سوال اول)

← الف)

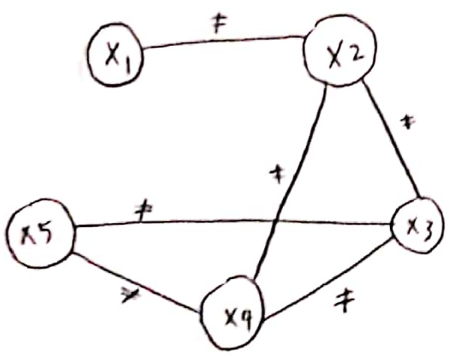
$CSP = (X, D, C)$

X : { $x_1 =$ کلاس ۱ ، $x_2 =$ کلاس ۲ ، $x_3 =$ کلاس ۳ ، $x_4 =$ کلاس ۴ ، $x_5 =$ کلاس ۵ }

$D_{x_1} = \{C\}$, $D_{x_2} = \{B, C\}$, $D_{x_3} = \{A, B, C\}$, $D_{x_4} = \{A, B, C\}$, $D_{x_5} = \{B, C\}$

$C : \{ \langle (x_1, x_2), x_1 \neq x_2 \rangle , \langle (x_2, x_3), x_2 \neq x_3 \rangle , \langle (x_2, x_4), x_2 \neq x_4 \rangle ,$
$\langle (x_3, x_4), x_3 \neq x_4 \rangle , \langle (x_3, x_5), x_3 \neq x_5 \rangle , \langle (x_4, x_5), x_4 \neq x_5 \rangle \}$

← ب)



← پ) arc-Consistency :

$x_2 = C \Rightarrow x_1 = ?$ so that $D_{x_2} = \{B\}$, $D_{x_1} = \{C\}$

$x_4 = B \Rightarrow x_2 = ?$ so that $D_{x_4} = \{A, C\}$

$x_3 = B \Rightarrow x_2 = ?$ so that $D_{x_3} = \{A, C\}$

$x_5 = C \Rightarrow \begin{cases} x_4 = ? \\ x_3 = ? \end{cases}$ so that $D_{x_5} = \{B\}$

← ت) یک راه حل :

$(x_1 = C , x_2 = B , x_3 = A , x_4 = C , x_5 = B)$

← ث) اگر Primal Graph یک مسئله‌ی csp به شکل درخت باشد ← می‌توان آن را در زمان polynomial حل کرد.

(مراحل حل یک Tree-CSP : ۱- topological sort از اوردر $O(n+m)$ (n تعداد راس و m تعداد یال)

۲- برقراری DAC از اوردر $O(nd^2)$ (n تعداد راس‌های درخت = تعداد متغیرهای مسئله csp و d کران بالای اندازه‌ی دامنه‌ی هر متغیر)

۳. Assignment از اوردر $O(nd^2)$. در نهایت این ۳ مرحله، مسئله با زمان polynomial حل می‌شود.) همچنین در این شیوه نیازی به Backtrack هم نداریم. :)

← ج) ?

← چ) کد در پاسخنامه ضمیمه شده است.

سوال دوم)

الف) فقط یک مقدار دهی ارضا کننده دارد.

$$(x_1=1 < x_2=2 < x_3=3 < x_4=4 < x_5=5 < x_6=6 < x_7=7 < x_8=8 < x_9=9 < x_{10}=10)$$

ب) x_1 را x_2 نسبت به Arc consistent گوییم اگر x_1 هر مقداری بگیرد، برای x_2 باز هم مقدار دهی معتبری در دامنه‌اش باقی می‌ماند.

if $x_1=10 \Rightarrow x_2=?$ so that $D_{x_1}=\{1,2,\dots,9\}$, $D_{x_2}=\{1,2,\dots,10\}$

(* توجه داریم که AC در این قسمت فقط یک طرفه است. اگر بخواهد دو طرفه باشد باید مقدار 1 را از دامنه x_2 حذف کنیم)

پ) برای برقراری AC بین x_3 نسبت به x_4 : $D_{x_4}=\{1,2,\dots,10\}$ و $D_{x_3}=\{1,2,\dots,9\}$

برای برقراری AC بین x_2 نسبت به x_3 : $D_{x_3}=\{1,2,\dots,9\}$, $D_{x_2}=\{1,2,\dots,8\}$

حالا برای برقراری AC بین x_1 نسبت به x_2 : $D_{x_2}=\{1,2,\dots,8\}$, $D_{x_1}=\{1,2,\dots,7\}$

در مجموع : $D_{x_4}=\{1,2,\dots,10\}$, $D_{x_3}=\{1,2,\dots,9\}$, $D_{x_2}=\{1,2,\dots,8\}$, $D_{x_1}=\{1,2,\dots,7\}$

ت) چون در واقع هر x_i نسبت به x_{i+1} ، AC است یعنی (x_9 نسبت به x_{10}) و (x_8 نسبت به x_9) و ... و (x_2 نسبت به x_3) AC هستند پس یعنی :

$D_{x10}=\{1,2,\dots,10\}$, $D_{x9}=\{1,2,\dots,9\}$, $D_{x8}=\{1,2,\dots,8\}$, $D_{x7}=\{1,2,\dots,7\}$

$D_{x6}=\{1,2,\dots,6\}$, $D_{x5}=\{1,2,\dots,5\}$, $D_{x4}=\{1,2,3,4\}$, $D_{x3}=\{1,2,3\}$

$D_{x2}=\{1,2\} \Longrightarrow \boxed{D_{x_1}=\{1\}}$: x_1 نسبت به x_2 را AC گوییم اگر :

ث) الگوریتم AC-3 به ازای هر قید حداقل یک بار AC بودن را چک می‌کند، پس حداقل به تعداد $(n-1)$ یال را بررسی می‌کند.

ج) دنباله‌ای که یا صعودی یا نزولی باشد مثل $\{1,2,3\}$ یا $\{3,2,1\}$ کافیست قید زیر را داشته باشیم :

$(x_i - x_{i+1})(x_{i+1} - x_{i+2}) > 0$ for $i \in [1, n-2]$

یعنی در مجموع، csp به شکل زیر است:

$csp = (X, D, C)$

$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

$D_{x_i} = \{1,2,\dots,m\}$ For $i \in [1,n]$

$C = \{ \langle (x_1,x_2,x_3), (x_1-x_2)(x_2-x_3)>0 \rangle , \langle (x_2,x_3,x_4), (x_2-x_3)(x_3-x_4)>0 \rangle ,$
$\langle (x_3,x_4,x_5), (x_3-x_4)(x_4-x_5)>0 \rangle , \dots , \langle (x_{n-2},x_{n-1},x_n), (x_{n-2}-x_{n-1})(x_{n-1}-x_n)>0 \rangle \}$

سوال سوم)

مسئله را به شکل زیر در قالب csp بیان می‌کنیم:

```
  C3 C2 C1
   S  E  N  D
+  M  O  R  E
-------------
M  O  N  E  Y
```

$csp = (X, D, C)$

$X = \{C_3, C_2, C_1, S, E, N, D, M, O, R, Y\}$

$D_{C_1} = D_{C_2} = D_{C_3} = \{0,1\}$, $D_E = D_N = D_D = D_O = D_R = D_Y = \{0,1,\dots,9\}$

$D_S = \{1,2,\dots,9\}$, $D_M = \{1\}$

در این مثال M یک carry هست که نمی‌تواند صفر باشد.

ادامه‌ی سوال سوم)

Constraints :

$\text{Alldifferent}([S, E, N, D, M, O, R, Y])$

$D + E = 10 \times C_1 + Y$

$C_1 + N + R = 10 \times C_2 + E$

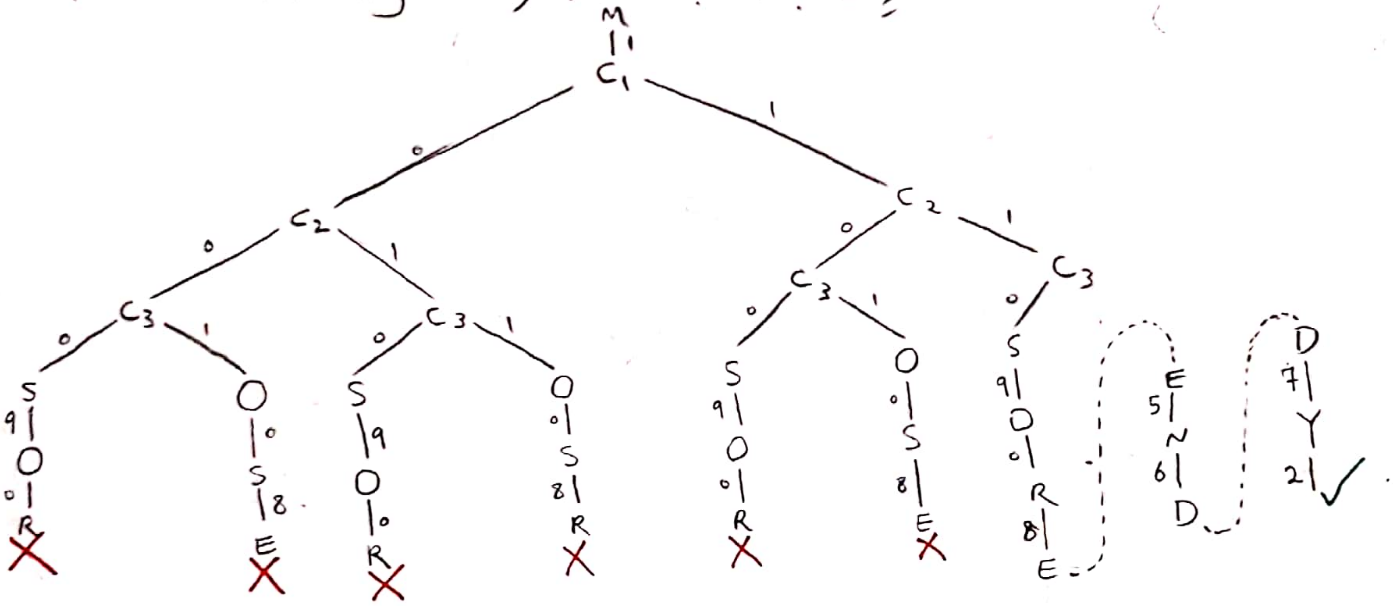
$C_2 + E + O = 10 \times C_3 + N$

$C_3 + S + M = 10 \times M + O$

[* نکته carry ها حتماً صفر و یک هستند
زیرا حتی اگر $9 + 8 \leftarrow C_1 = 1$ یا
اگر $C_1(=1) + 8 + 9 \leftarrow C_2 = 1$
پس $D_{C_i} = \{0, 1\}$, $C_4 = M$ که صفر
نمی‌تواند باشد.]

با هیوریستیک MRV ← چه متغیری برای مقداردهی انتخاب شود (min remaining values)

با هیوریستیک LCV ← چه مقداری به متغیر انتخاب شده، نسبت داده شود. (least constrainting value)



سوال چهارم)

الف ←

$CSP = (X, D, C)$

$X = \{A, B, C, D, E, F, G\}$

$D_A = \{1, 4\}$, $D_B = \{4\}$, $D_C = \{3\}$, $D_D = \{2, 3, 4\}$, $D_E = \{2\}$, $D_F = \{3, 4\}$, $D_G = \{2\}$

Constraints :

Alldifferent ([A, B]);
Alldifferent ([A, C, D, G]);
Alldifferent ([B, F]);
Alldifferent ([D, E, F]);

ب ←

متغیر	A	B	C	D	E	F	G
مقدار باقی‌مانده	1,4	4	3	2,3,4	2	3,4	2
# دارای محدودیت با متغیر دیگر	4	2	3	5	2	3	3

ادامه‌ی سوال چهارم)

ب) هیوریستیک minimum remaing value (MRV) در مرحله بعد سه متغیر C، E، G را می‌تواند انتخاب کند. که در نهایت از این بین با استفاده از درجه‌ی متغیر در primal Graph تعداد انتخاب ها را به ۲ می‌رساند یعنی C و G انتخاب خواهد کرد که اینجا دیگر به صورت تصادفی یکی را انتخاب می‌کند.

ت) اگر صرفاً از هیوریستیک درجه استفاده کنیم، متغیر D انتخاب می‌شود.

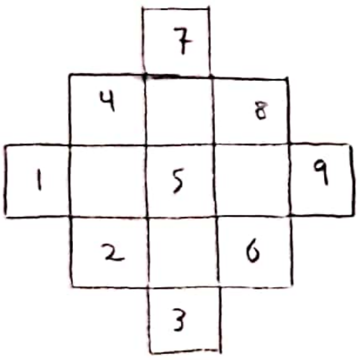
ث)

انتشار محدودیت	A	B	C	D	E	F	G
مقادیر ممکن	1,4	4	3	2,3,4	2	3,4	2
محدودیت بین A,B	1	4	3	2,3,4	2	3,4	2
محدودیت بین A,C D,G	1	4	3	4	2	3,4	2
محدودیت بین: B,F	1	4	3	4	2	3	2
محدودیت بین:							

← جواب ☑

سوال پنجم)

الف) $\frac{n(n^2+1)}{2}$ ، برای 5x5 درست بود برای 3x3 هم امتحان می‌کنیم:



$\Rightarrow$

4	3	8
9	5	1
2	7	6

جمع = عدد ثابت = 15 = $\frac{3(9+1)}{2} = 15$ ☑

ب)

$CSP = (X, D, C)$

$$X = \{x_{11}, x_{12}, \cdots, x_{1n}, \; x_{21}, x_{22}, \cdots, x_{2n}, \; \vdots \; x_{n1}, x_{n2}, \cdots, x_{nn}\} \quad , \quad |X| = n^2$$

اندازه

$$D_{x_{ij}} = \{1, 2, \cdots, n^2\} \quad \text{for} \quad i,j \in [1,n]$$

Constraints:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \frac{n(n^2+1)}{2} \quad \text{for} \quad i \in [1,n]$$ ⇒ جمع هر سطر = عدد ثابت.

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = \frac{n(n^2+1)}{2} \quad \text{for} \quad j \in [1,n]$$ ⇒ جمع هر ستون = عدد ثابت.

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ii} = \frac{n(n^2+1)}{2} \quad , \quad \sum_{i=1}^{n} x_{i(n-i+1)} = \frac{n(n^2+1)}{2}$$ ⇒ جمع قطرهای اصلی و فرعی = عدد ثابت.

سوال ششم)

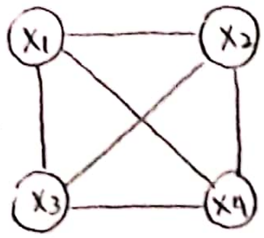
ABCD — BCDE — CDEF — DEFG — EFGH — FGHI

عرض درخت فوق برابر 3 است.

* اگر یک gride m*n داشته باشیم عرض درخت کمینه برابر با min (m,n) است.

سوال هفتم)

K4 :



الف) ← * بررسی AC : هست. زیرا برای هر دو راس اگر به یکی رنگ بدهیم، برای راس دیگر، انتخاب‌هایی باقی می‌ماند.

* بررسی PC : هست. زیرا اگر برای هر سه راس، اگر به دو راس رنگ‌دهی متناظر را محدودیت نشان بدهیم، برای راس سوم بازهم یک انتخاب داریم (چون گراف کامل است، هر سه راسی که انتخاب شود، همگی مجاور هستند ولی ما ۳ رنگ متفاوت داریم برای رنگ دهی هر سه راسی که انتخاب کنیم.)

* بررسی 4C : ندارد. گراف کامل هست و تمام رئوس باهم مجاور هستند و ما تنها ۳ رنگ داریم. اگر به ۳ راس (که حتماً همگی مجاور هستند) رنگ‌دهی معتبر کنیم (قطعا باید ۳ رنگ متفاوت به ۳ راس مذکور بدهیم) برای راس چهارم، هیچ انتخابی نداریم.

** آیا می‌توان با در نظر گرفتن یک قید باینری مسئله را 4-Consistent کرد؟ بله، باید یک قید را به نحوی اضافه کرد که یکی از رئوس گراف با یکی دیگر از رئوس مجاور نشود.

ب) اگر R یک مسئله‌ی 3-Coloring باشد

← 2-Consistent و 3-Consistent هست قطعاً چون ۳ رنگ داریم و اگر گراف کامل هم باشد باز در مورد AC و PC مشکلی پیش نمی‌آید.

← 4-Consistent : باید بررسی شود. مثلاً اگر مثل قسمت (الف) گراف کامل باشد، به مشکل می‌خوریم ولی اگر تنها دو راس باهم مجاور نباشند، مشکل برطرف می‌شود و 4-Consistency هم خواهیم داشت.

سوال هشتم)

کد در پاسخنامه ضمیمه شده است.

مریم سعیدفر
۹۴۲۹۱۷۳