تکلیف سری اول

مریم سعیدمهر
شماره دانشجویی : ۹۶۲۹۳۷۳

فهرست مطالب

۱ سوال اول ۲
۱.۱ a ۲
۲.۱ b ۲
۳.۱ c ۲

۲ سوال دوم ۲
۱.۲ a ۲
۲.۲ b ۲

۳ سوال سوم ۳

۴ سوال چهارم ۳

۵ سوال پنجم ۳
۱.۵ a ۳
۲.۵ b ۳

۶ سوال ششم ۴
۱.۶ a ۴
۲.۶ b ۵

۷ سوال هفتم ۵
۱.۷ a ۵
۲.۷ b ۵
۳.۷ c ۵
۴.۷ d ۶

۸ سوال هشتم ۶

۱.۸ a ۶
۲.۸ b ۷
۳.۸ c ۷

۱ سوال اول

۱.۱ a

$$\vec{V} = 2\vec{S_2} - \vec{S_1} \implies \vec{V} \in Span(S)$$

۲.۱ b

$$\vec{V} \in Span(S) \iff \exists C_1, C_2 \in \mathbb{C} \quad C_1(\vec{S_1}) + C_2(\vec{S_2}) = \vec{V}$$

$$\left.\begin{array}{l} C_1 = \alpha_1 + \beta_1 i \\ C_2 = \alpha_2 + \beta_2 i \end{array}\right\} \implies \left\{\begin{array}{l} \alpha_1 i - \beta_1 - \alpha_2 i + \beta_2 = 1 \\ \alpha_1 + \beta_1 i + \alpha_2 + \beta_2 i = 0 \end{array}\right.$$

$$\implies \left\{\begin{array}{l} \alpha_1 = \alpha_2 = 0 \\ \beta_1 = \frac{-1}{2}, \quad \beta_2 = \frac{1}{2}, \end{array}\right. \qquad \implies \vec{V} \in Span(S)$$

۳.۱ c

$$\vec{V} \in Span(S) \iff \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \alpha\vec{S_1} + \beta\vec{S_2} = \vec{V}$$

$$\left.\begin{array}{l} S_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \\ S_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \\ V = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}\right\} \implies \left\{\begin{array}{l} \alpha = 1 \\ \beta = -2 \\ 2\alpha + \beta = 0 \\ 2\alpha + 3\beta = 0 \end{array}\right.$$

$$\implies impossible \quad \therefore \vec{V} \notin Span(S)$$

۲ سوال دوم

۱.۲ a

طبق صورت سوال چون $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ وابسته خطی هستند پس هرکدام را میتوان بر حسب دوتای دیگر نوشت و لذا هر دسته بردار که از ترکیب این سه بردار به دست آیند ، در فضای برداری این سه قرار میگیرند و لذا آنها نیز وابسته خطی هستند.

۲.۲ b

۱. چون مجموعه $\vec{x}, \vec{x}+\vec{y}, \vec{x}+\vec{y}+\vec{z}$ یک مجموعه پایه برای فضای برداری V است لذا

$$|\vec{x}, \vec{x}+\vec{y}, \vec{x}+\vec{y}+\vec{z}| = 3 = dim(V) \implies |\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}| = 3 \quad \checkmark$$

۲. با علم به صحت قسمت اول بخش (a) شرط لازم و کافی برای پایه بودن مجموعه $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ استقلال خطی است. برای اثبات درستی این بخش نیز داریم :
برهان خلف : اگر $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ مستقل خطی نباشد پس وابسته خطی است و طبق قسمت (a) همین سوال $\vec{x}, \vec{x}+\vec{y}, \vec{x}+\vec{y}+\vec{z}$ نیز وابسته خطی خواهد شد که با فرض سوال یعنی پایه بودن این مجموعه در تناقض است پس فرض خلف باطل است و $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ مستقل خطی است ✓

با درست بودن دو قسمت بخش (a) میتوان نتیجه گرفت که $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ نیز یک پایه برای فضای برداری V است. ■

۳ سوال سوم

برای اینکه سه بردار داده شده وابسته خطی باشند باید :

$$\exists \alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R} \quad at\, least\, one\, non\, zero \quad \alpha \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ -8 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} -2\alpha + 4\beta + \gamma = 0 \\ \alpha - 2\beta = 0 \\ 4\alpha - 8\beta + \gamma h = 0 \end{cases} \Longrightarrow \gamma = 0, \alpha = 2\beta$$

ضریب γ صفر شد پس مقدار بردار سوم اهمیتی ندارد و اگر $\alpha, \beta \neq 0$ را طوری انتخاب کنیم که $\alpha = 2\beta$ آنگاه به ازای هر مقدار $h \in \mathbb{R}$ مجموعه برداری فوق وابسته خطی خواهد بود.

۴ سوال چهارم

در حالت کلی برای پیدا کردن بعد یک فضای برداری و تعیین کردن یک پایه برای آن میتوان از الگوریتم گرام‌اشمیت استفاده کرد اما در این مورد با توجه به سایز مسئله میتوان گفت :

$$V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, V_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix}, V_3 = \begin{bmatrix} -7 \\ 2 \\ -14 \end{bmatrix}, V_4 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ -6 \end{bmatrix}, V_5 = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \vec{V}_2 = -2\vec{V}_1 \\ -\vec{V}_4 - \vec{V}_5 = \vec{V}_2 \\ \frac{1}{2}(\vec{V}_4 + \vec{V}_5) = \vec{V}_1 \\ \frac{-3}{2}\vec{V}_4 + \frac{1}{2}\vec{V}_5 = \vec{V}_3 \end{cases}$$

در نتیجه بردارهای $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3$ توسط دو بردار $\vec{V}_4, \vec{V}_5$ ساخته میشوند اما خود این دو بردار مستقل خطی هستند درنتیجه $\{\vec{V}_4, \vec{V}_5\}$ یک پایه برای فضای span بردارهای $\{\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3, \vec{V}_4, \vec{V}_5\}$ میباشد.

۵ سوال پنجم

۱.۵ a

$$U = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, V = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, W = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow \vec{W} = \frac{3}{2}\vec{U} - \frac{1}{2}\vec{V}$$

لذا بردار سوم وابسته به دو بردار اول میباشد و با دو بردار نمیتوان فضای $\mathbb{R}^3$ را span کرد، زیرای بُعد فضای $\mathbb{R}^3$ برابر با ۳ است.

۲.۵ b

فرض میکنیم A یک ماتریس به صورت $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -8 & -7 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3\times5}$ باشد و ماتریس متغیرها نیز به صورت $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}_{5\times1}$ باشد پس معادله ی $AX = 0$ به صورت دستگاه معادلات به فرم زیر خواهد شد :

$$\begin{cases} x_1 - 8x_3 - 7x_4 + x_5 = 0 \\ x_2 + 4x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 = 8x_3 + 7x_4 - x_5 \\ x_2 = -4x_3 - 3x_4 + 2x_5 \\ x_3 = x_3 \\ x_4 = x_4 \\ x_5 = x_5 \end{cases}$$

$$\implies X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 8 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 7 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

در این حالت اگر :

$$U = \begin{bmatrix} 8 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, V = \begin{bmatrix} 7 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, W = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

پس جواب این دستگاه $Span\{\vec{U}, \vec{V}, \vec{W}\}$ خواهد بود.

۶ سوال ششم

۱.۶ a

$$A_{n\times m} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,m} \end{pmatrix}, \quad \forall i \in [1,n] \ \sum_{j=1}^{m} a_{ij} = 0 \implies A \in W$$

$$B_{n\times m} = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,m} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \cdots & b_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n,1} & b_{n,2} & \cdots & b_{n,m} \end{pmatrix}, \quad \forall i \in [1,n] \ \sum_{j=1}^{m} b_{ij} = 0 \implies B \in W$$

۱. بررسی بسته بودن نسبت به جمع برداری :

$$\forall \vec{A}, \vec{B} \in W \quad \vec{A} + \vec{B} = \begin{pmatrix} a_{1,1}+b_{1,1} & a_{1,2}+b_{1,2} & \cdots & a_{1,m}+b_{1,m} \\ a_{2,1}+b_{2,1} & a_{2,2}+b_{2,2} & \cdots & a_{2,m}+b_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1}+b_{n,1} & a_{n,2}+b_{n,2} & \cdots & a_{n,m}+b_{n,m} \end{pmatrix} = \forall i \in [1,n] \sum_{j=1}^{m} a_{ij} + b_{ij}$$

$$= \forall i \in [1,n] \sum_{j=1}^{m} a_{ij} + \forall i \in [1,n] \sum_{j=1}^{m} b_{ij} = 0 + 0 = 0$$

$$\implies \vec{A} + \vec{B} \in W \qquad \checkmark$$

۲. بررسی بسته بودن نسبت به ضرب اسکالر :

$$\forall \vec{A} \in W, \gamma \in \mathbb{R} \quad \gamma\vec{A} = \begin{pmatrix} \gamma a_{1,1} & \gamma a_{1,2} & \cdots & \gamma a_{1,m} \\ \gamma a_{2,1} & \gamma a_{2,2} & \cdots & \gamma a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma a_{n,1} & \gamma a_{n,2} & \cdots & \gamma a_{n,m} \end{pmatrix} = \forall i \in [1,n] \sum_{j=1}^{m} \gamma a_{ij}$$
$$= \forall i \in [1,n]\, \gamma \sum_{j=1}^{m} a_{ij} = \gamma 0 = 0$$
$$\Longrightarrow \gamma\vec{A} \in W \qquad \checkmark$$

با توجه به ۱.۶ اثبات شد که W یک زیرفضا برای $\mathbb{R}^{n\times m}$ است. ■

۲.۶ b

مجموعه پایه ای که بتواند W را تولید کند و مستقل خطی نیز باشد باید شامل ماتریس هایی باشد که تمام درایه هایشان صفر بوده به جز در یک سطر که دو درایه غیرصفر ۱ و ۱- دارد. مثلا ماتریس $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{n\times m}$ یکی از اعضای مجموعه پایه است. حال اینکه چه تعداد از این ماتریس ها نیاز داریم ؟ $\begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m \\ 2 \end{pmatrix} 2! = n \times m \times (m-1)$

۷ سوال هفتم

۱.۷ a

غلط است.
مثلا اگر $\vec{V}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ و $\vec{V}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ و $\vec{V}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ آنگاه درست است که به هیچ وجه نمیتوان $\vec{V}_3$ را بر حسب دو بردار دیگر نوشت اما $\vec{V}_1$ و $\vec{V}_2$ خود وابسته خطی هستند ($\vec{V}_2 = 2\vec{V}_1$) پس به هر حال این مجموعه $\{\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3\}$ هیچگاه مستقل خطی نمیشود.

۲.۷ b

درست است.
فرض خلف : مجموعه $\{\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3\}$ وابسته خطی است. در نتیجه :

$$\exists \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \qquad \textit{at least one non zero} \quad \alpha\vec{V}_1 + \beta\vec{V}_2 + \gamma\vec{V}_3 = 0$$
$$\Longrightarrow \alpha\vec{V}_1 + \beta\vec{V}_2 + \gamma\vec{V}_3 + 0 = 0$$
$$\Longrightarrow \alpha\vec{V}_1 + \beta\vec{V}_2 + \gamma\vec{V}_3 + 0 \times \vec{V}_4 = 0$$

که این در تناقض با فرض مسئله یعنی مستقل خطی بودن مجموعه $\{\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3, \vec{V}_4\}$ است. لذا فرض خلف باطل است و مجموعه $\{\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3\}$ مستقل خطی است. ■

۳.۷ c

غلط است.
غیرموازی بودن برای استقلال خطی کافی نیست. مثلا :

$$V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, V_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, V_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, V_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\vec{V}_4 = 2\vec{V}_1 + 3\vec{V}_2 + 4\vec{V}_3$$

که چهار بردار $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3, \vec{V}_4$ ناصفر و غیرموازی هستند ولی میتوان یکی را برحسب دیگری نوشت و درنتیجه این بردارها وابسته خطی هستند.

۴.۷ d

غلط است.

در مورد فضای $\mathbb{R}^4$ فرض میکنیم از محورهای x،y،z،m تشکیل شده باشد حال W_1 همان صفحه xy میباشد مثلا $[a, b, 0, 0]$ و W_2 همان صفحه zm میباشد مثلا $[0, 0, c, d]$ که هر دو زیرفضای $\mathbb{R}^4$ هستند اما اشتراک آنها تنها شامل نقطه مبدأ است که بُعد آن صفر است.

۸ سوال هشتم

۱.۸ a

۱. بررسی بسته بودن نسبت به جمع برداری :

$$\forall \vec{M}_1 \in W_A \implies AM_1 = M_1 A \tag{۱}$$

$$\forall \vec{M}_2 \in W_A \implies AM_2 = M_2 A \tag{۲}$$

پس خواهیم داشت :

$$A\left(\vec{M}_1 + \vec{M}_2\right) = \left(\vec{M}_1 + \vec{M}_2\right) A \implies \vec{M}_1 + \vec{M}_2 \in W_A$$

بررسی صحت درستی گزاره فوق :

$$\begin{aligned} A\left(\vec{(}M_1) + \vec{(}M_2)\right) &= A\vec{M}_1 + A\vec{M}_2 \\ &= \vec{M}_1 A + A\vec{M}_2 && \because 1 \\ &= \vec{M}_1 A + \vec{M}_2 A && \because 2 \\ &= \left(\vec{M}_1 + \vec{M}_2\right) A \end{aligned}$$

پس در نتیجه نسبت به جمع برداری بسته است. $\therefore$

۲. بررسی بسته بودن نسبت به ضرب اسکالر :

$$\forall \vec{M} \in W_A \implies AM = MA \tag{۳}$$

پس به ازای $\forall \gamma \in \mathbb{R}$ خواهیم داشت :

$$A\left(\gamma \vec{M}\right) = \left(\gamma \vec{M}\right) A \implies \gamma \vec{M} \in W_A$$

بررسی صحت درستی گزاره فوق :

$$\begin{aligned} A\left(\gamma \vec{M}\right) &= \gamma\left(A\vec{M}\right) \\ &= \gamma\left(MA\right) && \because 3 \\ &= \left(\gamma M\right) A \end{aligned}$$

پس در نتیجه نسبت به ضرب اسکالر بسته است. $\therefore$

با توجه به ۱.۸ اثبات شد که W_A یک زیرفضا برای $\mathbb{R}^{3\times 3}$ است. ■

b ۲.۸

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

ضرب را انجام داده و به نتیجه زیر میرسیم :

$$\begin{pmatrix} aa_{1,1} & aa_{1,2} & aa_{1,3} \\ ba_{2,1} & ba_{2,2} & ba_{2,3} \\ ca_{3,1} & ca_{3,2} & ca_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa_{1,1} & ba_{1,2} & ca_{1,3} \\ aa_{2,1} & ba_{2,2} & ca_{2,3} \\ aa_{3,1} & ba_{3,2} & ca_{3,3} \end{pmatrix}$$

حال باید درایه های نظیر را مساوی قرار دهیم. پس معادله فوق فقط در صورتی برقرار خواهد بود که :

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & a_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & a_{3,3} \end{pmatrix}$$

یعنی درایه های روی قطر اصلی آزاد هستند و مابقی لاجرم باید صفر باشند. پس زیرفضای W_A فقط شامل ماتریس هایی مشابه فوق است.

بدیهی است که پایه مناسب برای این زیرفضا مجموعه $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ میباشد و لذا

■ $dim(W_A) = 3$

c ۳.۸

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

ضرب را انجام داده و به نتیجه زیر میرسیم :

$$\begin{pmatrix} aa_{1,1} & aa_{1,2} & aa_{1,3} \\ aa_{2,1} & aa_{2,2} & aa_{2,3} \\ ba_{3,1} & ba_{3,2} & ba_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa_{1,1} & aa_{1,2} & ba_{1,3} \\ aa_{2,1} & aa_{2,2} & ba_{2,3} \\ aa_{3,1} & aa_{3,2} & ba_{3,3} \end{pmatrix}$$

حال باید درایه های نظیر را مساوی قرار دهیم. پس معادله فوق فقط در صورتی برقرار خواهد بود که :

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & a_{3,3} \end{pmatrix}$$

یعنی درایه های $a_{1,1}, a_{1,2}, a_{2,1}, a_{2,2}, a_{3,3}$ آزاد هستند و مابقی لاجرم باید صفر باشند. پس زیرفضای W_A فقط شامل ماتریس هایی مشابه فوق است.

بدیهی است که پایه مناسب برای این زیرفضا مجموعه

$\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$ میباشد و لذا ■ $dim(W_A) = 5$