دانشگاه صنعتی اصفهان
جبرخطی کاربردی (نیمسال دوم ۱۳۹۹)

تکلیف سری چهارم

مریم سعیدمهر
شماره دانشجویی : ۹۶۲۹۳۷۳

فهرست مطالب

۱ سوال اول

$$
\left.\begin{array}{l} A,B,C\in\mathbb{R}^{n\times n} \\ B\ \ is\ \ invertible \end{array}\right\} \Longrightarrow \det(A)=\det(BCB^{-1})
$$

$$
\begin{aligned}
&= \det(B)\det(C)\det(B^{-1}) && \because B,C,B^{-1}\ \ are\ \ square \\
&= \det(B)\det(C)\frac{1}{\det(B)} && \because proved\ \ in\ \ class \\
&= \det(C) \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

۲ سوال دوم

$$
A\ \ is\ \ a\ \ 3\times 5\ \ matrix \Longrightarrow \begin{cases} rank(A^T)\le 5 \\ rank(A)\le 3 \end{cases}
$$

$$
\begin{aligned}
&\Longrightarrow rank(A^TA)\le min\{rank(A^T),rank(A)\} \\
&\Longrightarrow rank(A^TA)\le rank(A)\le 3 \\
&\left.\begin{array}{l}(A^TA)_{5\times5} \\ rank(A^TA)\le 3\end{array}\right\}\Longrightarrow A^TA\ \ is\ \ NOT\ \ fullrank \\
&\Longrightarrow A^TA\ \ is\ \ NOT\ \ invertible \\
&\Longrightarrow \det(A^TA)=0 \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

۳ سوال سوم

$$
Ax=b\equiv\begin{bmatrix}k&1&1\\1&k&1\\1&1&k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}
$$

$$
\left[\begin{array}{ccc|c}k&1&1&1\\1&k&1&1\\1&1&k&1\end{array}\right]\Longrightarrow\left[\begin{array}{ccc|c}1&\frac{1}{k}&\frac{1}{k}&\frac{1}{k}\\1&k&1&1\\1&1&k&1\end{array}\right]\Longrightarrow\left[\begin{array}{ccc|c}1&\frac{1}{k}&\frac{1}{k}&\frac{1}{k}\\0&\frac{k^2-1}{k}&\frac{k-1}{k}&\frac{k-1}{k}\\0&\frac{k-1}{k}&\frac{k^2-1}{k}&\frac{k-1}{k}\end{array}\right]\xrightarrow{k\neq1}
$$

$$
\left[\begin{array}{ccc|c}1&\frac{1}{k}&\frac{1}{k}&\frac{1}{k}\\0&1+\frac{1}{k}&\frac{1}{k}&\frac{1}{k}\\0&\frac{1}{k}&1+\frac{1}{k}&\frac{1}{k}\end{array}\right]\Longrightarrow\left[\begin{array}{ccc|c}1&\frac{1}{k}&\frac{1}{k}&\frac{1}{k}\\0&1&-1&0\\0&\frac{1}{k}&1+\frac{1}{k}&\frac{1}{k}\end{array}\right]\Longrightarrow\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&\frac{2}{k}&\frac{1}{k}\\0&1&-1&0\\0&0&1+\frac{2}{k}&\frac{1}{k}\end{array}\right]\xrightarrow{k\neq-2}
$$

$$
\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&\frac{1}{k+2}\\0&1&0&\frac{1}{k+2}\\0&0&1&\frac{1}{k+2}\end{array}\right]
$$

براساس محاسبات فوق :

- به ازای $k\neq-2,1$ دستگاه جواب یکتای $x=y=z=\frac{1}{k+2}$ دارد.
- به ازای $k=-2$ دستگاه جواب ندارد.
- به ازای $k=1$ دستگاه بینهایت جواب دارد.

۴ سوال چهارم

(a)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A+B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\det(A) = 0, \det(B) = 1, \det(A+B) = 2 \implies \det(A+B) \neq \det(A) + \det(B) \qquad \blacksquare$$

(b) The determinant of any orthogonal matrix is either +1 or −1.

۵ سوال پنجم

$$\begin{aligned} A(A+B)^{-1}B + B(A+B)^{-1}B &= (A+B)(A+B)^{-1}B \\ &= B \qquad \because (A+B) \ \ is \ \ invertible \\ &= B(A+B)^{-1}(A+B) \\ &= B(A+B)^{-1}A + B(A+B)^{-1}B \\ \implies A(A+B)^{-1}B + B(A+B)^{-1}B &= B(A+B)^{-1}A + B(A+B)^{-1}B \\ \implies A(A+B)^{-1}B = B(A+B)^{-1}A & \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

۶ سوال ششم

If we say that A_i is the ith column of $A = (a_{ij})$ and $A^{(j)}$ is the jth row and e_i is the $n \times 1$ unit column vector with 1 in the ith row (and consequently 0 everywhere else), then for $B = e_i e_j^t$, which is 1 at (i, j) and 0 elsewhere, we find that $AB = Ae_i e_j^t = A_i e_j^t$ and $BA = e_i e_j^t A = e_i A^{(j)}$ are both $n \times n$ matrices, the first with the ith column of A in its jth column, the second with the jth row of A in its ith row. For these to be equal, we must have $a_{ij} = 0$ whenever $i \neq j$. Furthermore, the single nonzero entry in the products above is again at (i, j), where we find $a_{ii} = (AB)_{ij} = (BA)_{ij} = a_{jj}$. thus $A = cI$ must be a scalar (multiple of the identity) matrix.

۷ سوال هفتم

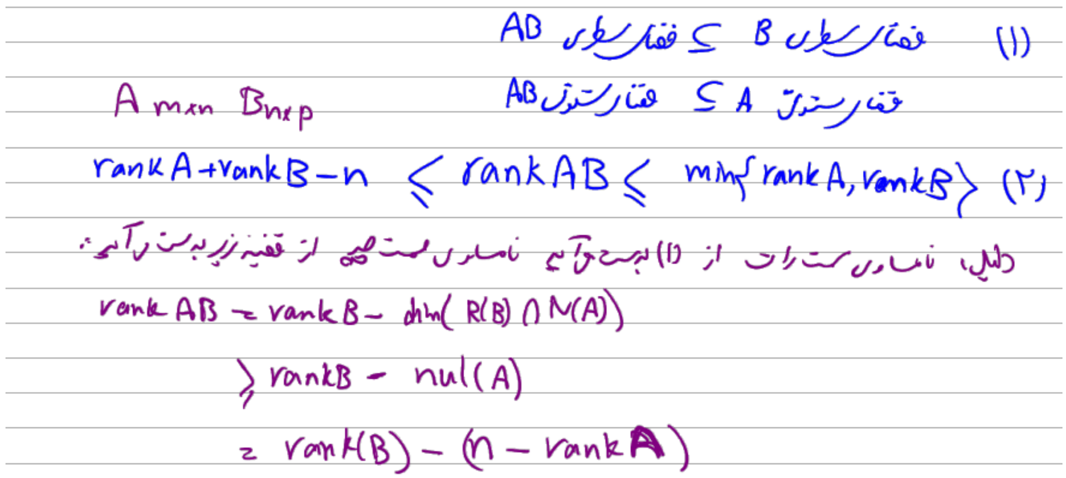
(a)

$$\begin{aligned} trace(AB) &= \sum_{i=1}^{m} (AB)_{ii} \\ &= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} A_{ij} B_{ji} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} B_{ji} A_{ij} \\ &= \sum_{j=1}^{n} (BA)_{jj} = trace(BA) \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

(b)

$$\left.\begin{aligned} trace(AX - XA) \quad &= trace(AX) - trace(XA) \\ &= trace(AX) - trace(AX) \\ &= 0 \\ trace(I_{n\times n}) \quad &\geq 2 \end{aligned}\right\} \implies AX - XA = I_{n \times n} \ \ has \ \ no \ \ solution$$

۸ سوال هشتم



(۱) فضای سطری AB $\subseteq$ فضای سطری B

فضای ستونی AB $\subseteq$ فضای ستونی A

$A_{m\times n}$ $B_{n\times p}$

$$\text{rank}A+\text{rank}B-n \leqslant \text{rank}AB \leqslant \min\{\text{rank}A, \text{rank}B\} \quad (۲)$$

دلیل: نامساوی سمت راست از (۱) بدست می‌آید. نامساوی سمت چپ از قضیه زیر بدست می‌آید:

$$\text{rank}AB = \text{rank}B - \dim(R(B)\cap N(A))$$

$$\geqslant \text{rank}B - \text{nul}(A)$$

$$= \text{rank}(B) - (n - \text{rank}A)$$

شکل ۱: جزوه جلسه شانزدهم