مریم سعیدپور ۹۶۲۹۲۷۴

تکلیف سری سوم تجزیه و تحلیل سیگنال

۱-

$T = 3$, $DC = -2$, $a_2 = a_{-2}^* = e^{-j\frac{\pi}{2}}$, $a_1 = a_{-1} = -1$

$$x(t) = \sum_{K=0}^{+\infty} A_K \cos(K\omega_0 t) - B_K \sin(K\omega_0 t)$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{3} \quad , \quad a_0 = -2 \, , \; a_1 = a_{-1} = -1 \, , \; a_2 = e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j \, , \; a_{-2} = (-j)^* = j$$

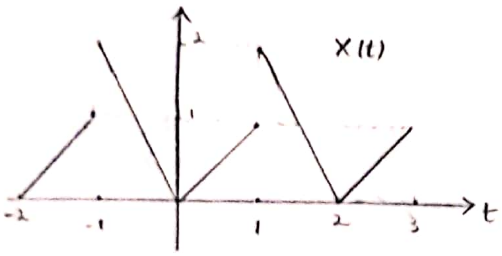
$$\Rightarrow x(t) = \sum_{K=-\infty}^{+\infty} a_K e^{jK\omega_0 t} = -2 - e^{j\frac{2\pi}{3}t} - e^{-j\frac{2\pi}{3}t} - je^{j\frac{4\pi}{3}t} + je^{-j\frac{4\pi}{3}t}$$

$$\Rightarrow x(t) = -2 - 2\cos\left(\frac{2\pi}{3}t\right) - j \times 2j \sin\left(\frac{4\pi}{3}t\right) = -2\cos(0) - 2\cos\left(\frac{2}{3}\pi t\right) + 2\sin\left(\frac{4\pi}{3}t\right)$$

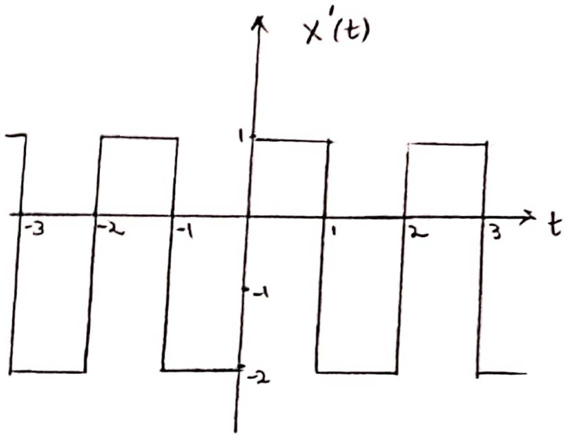
$\Rightarrow A_0 = -2$, $A_1 = -2$, $B_2 = -2$, $\omega_0 = \frac{2\pi}{3}$, سایر A_K و B_K ها صفر می‌باشند.

۲- الف)

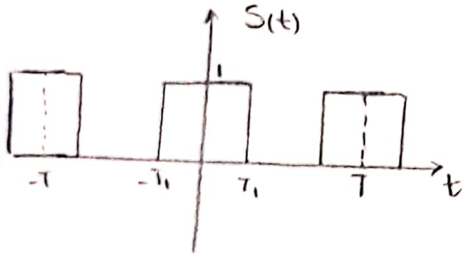
$$x(t) = \begin{cases} t & 0 < t < 1 \\ -2t & -1 \le t < 0 \end{cases} \quad , T = 2$$



مشتق $\longrightarrow$



حول را سیم:



$$S(t) \xrightarrow{F.S.} c_k = d\,\mathrm{Sinc}(kd)$$

$$d = \text{dutycycle} = \frac{2T_1}{T} \;, \lim_{x \to 0} \mathrm{Sinc}(x) = 1$$

$$x'(t) = 3S(t + \tfrac{1}{2}) - 2 \xrightarrow{F.S.} b_k = 3e^{\frac{1}{2}jk\omega_0} c_k \;, \quad b_0 = 3C_0 - 2 = \frac{\text{سطح زیر یک دوره ت}}{\text{دوره ت}} = \frac{-1}{2}$$

$$\Rightarrow \left\{ b_k = \frac{3e^{jk\frac{\pi}{2}}}{2} \mathrm{Sinc}(k/2) \;, \quad b_0 = \frac{-1}{2} \right\}$$

$d = \frac{1}{2}, \omega_0 = \pi$

$$x(t) \xrightarrow{F.S.} a_k \Rightarrow jk\omega_0 a_k = b_k \longrightarrow a_k = \frac{b_k}{jk\pi} = \begin{cases} \dfrac{3e^{jk\frac{\pi}{2}} \mathrm{Sinc}(k/2)}{2jk\pi} & k \neq 0 \\ \dfrac{\text{سطح زیر یک دوره ت}}{\text{دوره ت}} = \dfrac{3}{4} & k = 0 \end{cases}$$

ب) $x(t) = \cos(\frac{\pi}{2}t) \quad -1 \le t < 1 \quad , \quad T=2$

$$x(t)=\cos(\frac{\pi}{2}t) = \frac{1}{2} e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2} e^{-j\omega_0 t} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = \frac{1}{2} \\ a_{-1}=\frac{1}{2} \\ a_k = 0 \quad ; k\neq 1,-1\end{cases}$$

فرکانس هم $\frac{\pi}{2}$ است.

پس از هارمونیک اول فرکانس $\omega_0=\frac{\pi}{2}$، به اندازه‌ی $\frac{1}{2}$ و از هارمونیک -1 اُم با فرکانس $\frac{\pi}{2}=\omega_0$ به اندازه‌ی $\frac{1}{2}$ داریم و بقیه‌ی هارمونیک‌ها را نداریم.

۴- الف)

$$a_k = \begin{cases} \frac{(-j)^k \sin(\frac{k\pi}{4})}{k\pi} & k\neq0 \\ 0 & k=0\end{cases} \quad , \quad T=6$$

عامل شیفت

dutycycle = 25%

$$a_k = \begin{cases} (e^{-j\frac{\pi}{2}})^k \times \frac{\sin(\frac{k\pi}{4})}{4\times\frac{k\pi}{4}} & k\neq0\\ 0 & k=0\end{cases} \rightarrow a_k = \begin{cases}(e^{-j\frac{\pi}{2}})^k \times \frac{1}{4} \text{Sinc}(\frac{k}{4}) & k\neq 0 \\ 0 & k=0\end{cases}$$

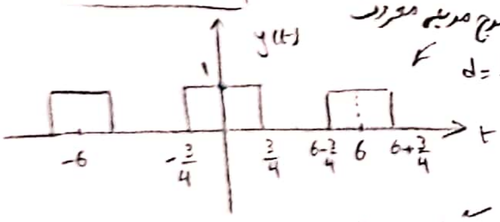
می‌دانیم: b_k = ضرایب سری فوریه موج مربعی متقارن $= \begin{cases} d\,\text{sinc}(kd) & k\neq0 \\ d = \frac{2T_1}{T} & k=0\end{cases}$

dutycycle

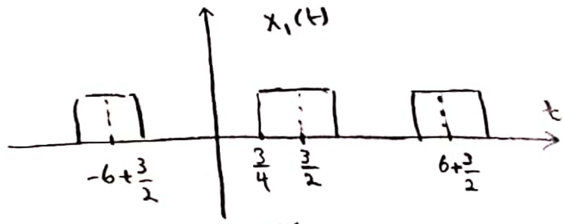
* عامل شیفت: $\begin{cases} x(t+t_0) \xrightarrow{F.S.} e^{jk\omega_0 t_0} a_k \\ x(t) \xrightarrow{F.S.} a_k\end{cases}$ ، $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow e^{-jk\frac{\pi}{2}} = e^{-jk\omega_0 t_0} = e^{-jk\frac{2\pi}{6}t_0}$

$\Rightarrow \boxed{t_0 = -\frac{3}{2}} \rightarrow x_1(t) = y(t-\frac{3}{2})$ ← هنوز سیگنال مطلوب نیست!

موج مربعی معروف با $d=\frac{1}{4}$

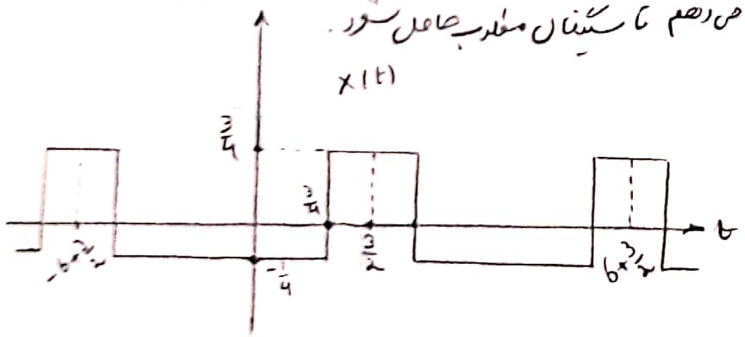


شیفت به راست به اندازه‌ی $\frac{3}{2}$ ⟶



مقدار DC سیگنال $x_1(t)$، برابر است با d یعنی $\frac{2\times\frac{3}{4}}{6}=\frac{1}{4}$ درحالیکه سیگنال مطلوب باید DC=0 داشته باشد

پس سیگنال $x_1(t)$ را $\frac{1}{4}$ به پایین شیفت می‌دهیم تا سیگنال مطلوب حاصل شود.

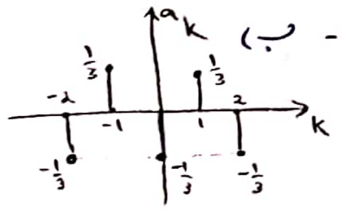


سیگنال مطلوب $\Rightarrow x(t) \xrightarrow{F.S.} a_k$

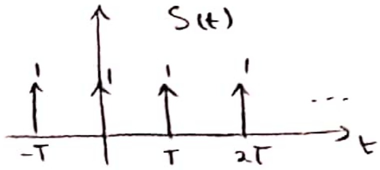
با توجه به اینکه: $a_k = a_{-k}^*$ ⟹ $x(t)$ حقیقی است.

با توجه به اینکه: a_k نه زوج و نه فرد ⟹ $x(t)$ نه زوج و نه فرد

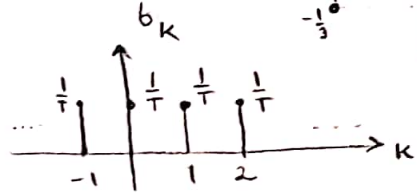
۳- ب)



$$a_k = \begin{cases} \frac{1}{3} & k = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 7, \dots \\ \frac{-1}{3} & k = 0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots \end{cases} \quad , T = 4$$



$\xrightarrow{F.S.}$



$$a_k = (-1)^{k+1}\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3} e^{jk\pi} = \underbrace{\frac{1}{4}}_{=\frac{1}{T}} \times \underbrace{\left(-\frac{4}{3}\right)}_{\text{ضرب}} \times \underbrace{\left(e^{jk\frac{2\pi}{4}\times 2}\right)}_{\text{شیفت 2 واحد به چپ}}$$

$$\Rightarrow x(t) = -\frac{4}{3}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT + 2) = -\frac{4}{3}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - 4k + 2)$$

از شکل a_k پیداست که حقیقی و زوج است $\Leftarrow$ $x(t)$ نیز حقیقی و زوج است.

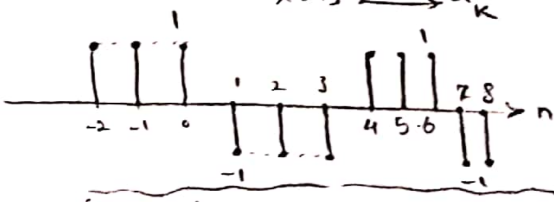
لذا نسبت به محور y ها متقارن است.

---

۴. الف)

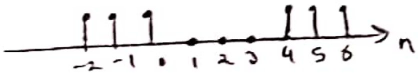
$$x[n] = \begin{cases} 1 & -2 \leq n \leq 0 \\ -1 & 1 \leq n \leq 3 \end{cases} \quad , T = 6$$

$x[n] \xrightarrow{F.S.} a_k$



$x_1[n] \xrightarrow{F.S.} b_k$

★



می‌دانیم ضرایب سری فوریه پالس مستطیلی:

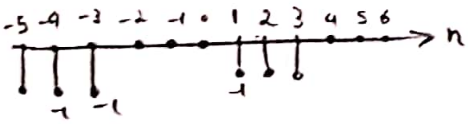
$$y[n] \xrightarrow{F.S.} d_k = \begin{cases} \frac{2N_1+1}{N} & k = 0, \pm N, \pm 2N, \dots \\ \frac{1}{N}\frac{\sin\left(\frac{k\omega_0(2N_1+1)}{2}\right)}{\sin\left(\frac{k\omega_0}{2}\right)} & o.w \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1[n] = y[n+1] \\ N_1 = 1,\ N = 6 \end{cases} \Rightarrow b_k = e^{jk\omega_0 n_0} d_k \ , \omega_0 = \frac{2\pi}{N} = \frac{2\pi}{6} \ , n_0 = 1$$

$$\Rightarrow b_k = \begin{cases} \frac{1}{6} e^{jk\frac{\pi}{3}} \frac{\sin\left(\frac{k\pi}{3}\left(\frac{3}{2}\right)\right)}{\sin\left(\frac{\frac{k\pi}{3}}{2}\right)} & o.w \\ \frac{3}{6} = \frac{1}{2} & k = 0, \pm N, \pm 2N, \dots \end{cases}$$

$x_2[n] \xrightarrow{F.S.} c_k$

★



$$\begin{cases} x_2[n] = -y[n-2] \\ N_1 = 1, N = 6 \end{cases} \Rightarrow c_k = -e^{jk\omega_0 n_0} d_k \Rightarrow c_k = \begin{cases} \frac{-e^{-j\frac{2k\pi}{3}}}{6} \times \frac{\sin\left(\frac{k\pi}{3}\times\frac{3}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\frac{k\pi}{3}}{2}\right)} & o.w \\ -\frac{3}{6} = \frac{-1}{2} & k = 0, \pm N, \pm 2N, \dots \end{cases}$$

$\omega_0 = \frac{\pi}{3}\ , n_0 = -2$

$$\Rightarrow x[n] = x_1[n] + x_2[n] \xrightarrow{F.S.} a_k = b_k + c_k = \begin{cases} \frac{\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)}{6\sin\left(\frac{k\pi}{6}\right)}\left(e^{jk\frac{\pi}{3}} - e^{-2jk\frac{\pi}{3}}\right) & o.w \\ 0 & k = 0, \pm N, \pm 2N, \dots \end{cases}$$

۴. ب)

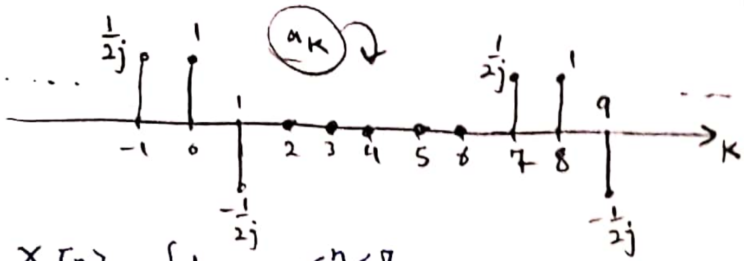
$x[n] = 1 - \sin\left(\frac{n\pi}{8}\right) \quad 0 \leq n \leq 7 \quad , T = 8$

$x[n] = 1 - \left(\frac{e^{j\omega_0 n} - e^{-j\omega_0 n}}{2j}\right) \quad , \omega_0 = \frac{\pi}{8}$

$= 1 - \frac{1}{2j} e^{j\omega_0 n} + \frac{1}{2j} e^{-j\omega_0 n} \longrightarrow \begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = \frac{-1}{2j} \\ a_{-1} = \frac{1}{2j} \end{cases} \quad , \quad a_k = 0$

در یک تناوب ۰ برای بقیه نقاط

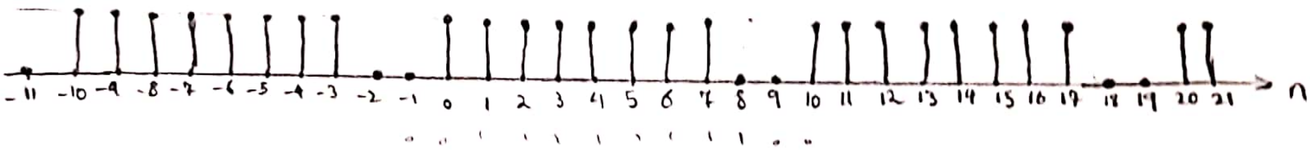
a_k



پ)

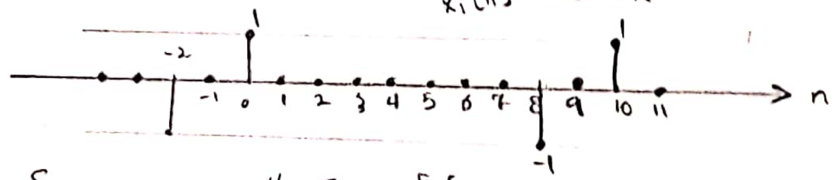
$x[n] = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq 7 \\ 0 & n = 8, 9 \end{cases} \quad , T = 10$

$x[n] \xrightarrow{F.S.} a_k$



$x_1[n] = x[n] - x[n-1]$

$x_1[n] \xrightarrow{F.S.} b_k$



$x_1[n] = \delta[n] - \delta[n-2] \quad // \quad \delta[n] \xrightarrow{F.S.} c_k = \frac{1}{N}$ مثلا ضربه

$x_1[n] = \delta[n] - \delta[n-1] \xrightarrow{F.S.} b_k = (1 - e^{-jk\omega_0}) c_k = (1 - e^{-jk\frac{\pi}{5}}) \frac{1}{10}$

$N = 10$

$\omega_0 = \frac{2\pi}{N} = \frac{\pi}{5}$

F.S.

$b_k = (1 - e^{-jk\omega_0}) a_k \Longrightarrow a_k = \frac{b_k}{1 - e^{-jk\frac{\pi}{5}}}$

$\Longrightarrow \boxed{a_k = \frac{1}{10}}$

۵. الف)

$a_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{5}\right) \quad , T = 5$

$a_k = \frac{1}{2} e^{j\frac{2k\pi}{5}} - \frac{1}{2} e^{-j\frac{2k\pi}{5}} = \frac{1}{2} \underbrace{e^{jk\left(\frac{2\pi}{5}\right)(n_0)}}_{\text{شیفت}} - \frac{1}{2} \underbrace{e^{jk\left(\frac{2\pi}{5}\right)(-n_0)}}_{\text{شیفت}}$

$\frac{1}{N} = c$ ، ضریب ، $\left(\frac{1}{5}\right) \times \left(\frac{5}{2}\right)$ ، ω_0 ، (1) ، (-1)

خطی

می‌دانیم : $\delta[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[n - kN] \xrightarrow{F.S.} \frac{1}{N}$

$\Rightarrow x[n] = \frac{5}{2}\delta[n+1] - \frac{5}{2}\delta[n-1] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{5}{2}\delta[n-5k+1] - \frac{5}{2}\delta[n-5k-1]\right)$

آزمایش کرد : $a_k = a_{-k}^* \longrightarrow x[n]$ سیگنال حقیقی ، (۴) زوج $a_k \Longrightarrow$ زوج $x[n] \Longrightarrow x[n]$ حقیقی و زوج است

$$a_k = \begin{cases} (1-e^{jk\frac{\pi}{2}})\, 2^{-|k|} & -3 \leq k \leq 3 \\ 0 & k=4 \end{cases} \quad , T = 8$$

$$b_k = \begin{cases} 2^{-|k|} & -3 \leq k \leq 3 \\ 0 & \end{cases} \quad , T = 8 \Longrightarrow x_1[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} b_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$$

$$\rightarrow x_1[n] = \sum_{k=-3}^{3} 2^{-|k|} e^{jk\frac{2\pi}{8}n} = 1 + 2^{-1}(e^{jn\frac{\pi}{4}} + e^{-jn\frac{\pi}{4}}) + 2^{-2}(e^{jn\frac{\pi}{2}} + e^{-jn\frac{\pi}{2}}) + 2^{-3}(e^{jn\frac{3\pi}{4}} + e^{-jn\frac{3\pi}{4}})$$

$$= 1 + \cos(\frac{n\pi}{4}) + \frac{1}{2}\cos(\frac{n\pi}{2}) + \frac{1}{4}\cos(n\frac{3\pi}{4})$$

$x[n] \xrightarrow{F.S.} a_k$

$x_1[n] \xrightarrow{F.S.} b_k$

$$a_k = b_k - \underbrace{e^{jk\frac{2\pi}{8}\times 2}}_{n \text{ شیفت 2 واحدی به چپ}} b_k \Rightarrow x[n] = x_1[n] - x_1[n+2]$$

رابطه ی خطی

$$\Rightarrow x[n] = 1 + \cos(\frac{n\pi}{4}) + \frac{1}{2}\cos(\frac{n\pi}{2}) + \frac{1}{4}\cos(\frac{n3\pi}{4}) - \left(1 + \cos(\frac{n\pi}{4} + \frac{\pi}{2}) + \frac{1}{2}\cos(\frac{n\pi}{2} + \pi) + \frac{1}{4}\cos(\frac{n3\pi}{4} + \frac{3\pi}{2})\right)$$

$$= \cos(\frac{n\pi}{4}) + \frac{1}{2}\cos(\frac{n\pi}{2}) + \frac{1}{4}\cos(\frac{n3\pi}{4}) + \sin(\frac{n\pi}{4}) + \frac{1}{2}\cos(\frac{n\pi}{2}) - \frac{1}{4}\sin(\frac{n3\pi}{4})$$

$$= \cos(\frac{n\pi}{4}) + \cos(\frac{n\pi}{2}) + \frac{1}{4}\cos(\frac{3n\pi}{4}) + \sin(\frac{n\pi}{4}) - \frac{1}{4}\sin(\frac{3n\pi}{4})$$

a_k حقیقی $\Rightarrow$ $x[n]$ حقیقی

a_k نه زوج نه فرد $\Rightarrow$ $x[n]$ نه زوج نه فرد

۴- ضرایب سری فوریه $y(t)$؟

$$2y'(t) + 5y(t) = x(t)$$

$$x(t) = \sin(3\pi t) + \cos(5\pi t + \frac{\pi}{3}) \Rightarrow \cos(\frac{\pi}{3})\cos(5\pi t) - \sin(\frac{\pi}{3})\sin(5\pi t)$$

$$\left.\begin{array}{l} y(t) \xrightarrow{F.S.} b_k \\ x(t) \xrightarrow{F.S.} a_k \end{array}\right\} \Rightarrow 2(jk\omega_0) b_k + 5b_k = a_k \Rightarrow (2jk\omega_0 + 5) b_k = a_k$$

$$x(t) = \frac{1}{2j} e^{j3\pi t} - \frac{1}{2j} e^{-j3\pi t} + (\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4j}) e^{j5\pi t} + (\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4j}) e^{-j5\pi t} \longrightarrow \omega_0 = \pi$$

$$\Rightarrow a_3 = \frac{1}{2j}, \quad a_{-3} = \frac{-1}{2j}, \quad a_5 = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4j} = \frac{1}{4}(1 + \sqrt{3}j), \quad a_{-5} = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4j} = \frac{1}{4}(1 - \sqrt{3}j)$$

$$b_k = \frac{a_k}{2jk\pi + 5} \Rightarrow b_3 = \frac{1}{10j - 12\pi}, \quad b_{-3} = \frac{-1}{10j - 12\pi}, \quad b_5 = \frac{\frac{1}{4}(1+\sqrt{3}j)}{10j\pi + 5}, \quad b_{-5} = \frac{\frac{1}{4}(1-\sqrt{3}j)}{-10j\pi + 5}$$

(5)

$, b_k = 0$ o.w.

$$x(t) \rightarrow \boxed{H} \rightarrow y(t)$$

.V

$$\left.\begin{array}{l} x(t) \xrightarrow{F.S.} a_k \\ y(t) \xrightarrow{F.S.} b_k \end{array}\right\} \rightarrow, \quad b_k = a_k H(jk\omega_0) \Rightarrow \{a_{-1}, a_0, a_1\}$$

$$= \begin{cases} j/2 & k=\pm 1 \\ 2 & k=0 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

ضرایب سری فوریه خروجی $\Longleftarrow$

فرم سینوسی خروجی

$$\Rightarrow y(t) = j/_2\, e^{-j2000\pi t} + 2 + j/_2\, e^{j2000\pi t} = \boxed{j\cos(2000\pi t) + 2}$$

.A

$$y[n] - 2y[n-1] = x[n]$$

$$x[n] = \cos(\tfrac{\pi}{3}n) + 2\cos(\tfrac{\pi}{2}n + \tfrac{\pi}{4}) = \cos(\tfrac{\pi}{3}n) + \sqrt{2}\cos(\tfrac{\pi}{2}n) - \sqrt{2}\sin(\tfrac{\pi}{2}n)$$

$$\left.\begin{array}{l} y[n] \xrightarrow{F.S} b_k \\ x[n] \xrightarrow{F.S} a_k \end{array}\right\} \rightarrow b_k - 2e^{-jk\omega_0} b_k = a_k \Rightarrow b_k = \frac{a_k}{(1 - 2e^{-jk\omega_0})}$$

$$x[n] = \frac{1}{2}e^{\frac{\pi n}{3}j} + \frac{1}{2}e^{-\frac{\pi n}{3}j} + \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{n\pi}{2}j} + \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi n}{2}j} - \frac{\sqrt{2}}{2j}e^{\frac{n\pi}{2}j} + \frac{\sqrt{2}}{2j}e^{-\frac{n\pi}{2}j}$$

$$= \frac{1}{2}e^{2\frac{n\pi}{6}j} + \frac{1}{2}e^{-2\frac{n\pi}{6}j} + \frac{\sqrt{2}}{2}(1+j)e^{3\frac{n\pi}{6}j} + \frac{\sqrt{2}}{2}(1-j)e^{-3\frac{n\pi}{6}j}$$

$$\Rightarrow a_k = \begin{cases} \frac{1}{2} & k=\pm 2 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}(1+j) & k=3 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}(1-j) & k=-3 \\ 0 & o.w \end{cases} \Longrightarrow b_k = \begin{cases} \frac{1}{2(1-2e^{-\pi j/3})} & k=2 \\ \frac{1}{2(1-2e^{\pi j/3})} & k=-2 \\ \frac{\sqrt{2}(1+j)}{2(1-2e^{-j\pi/2})} & k=3 \\ \frac{\sqrt{2}(1-j)}{2(1-2e^{j\pi/2})} & k=-3 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

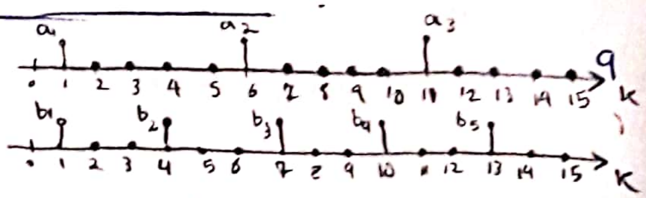
در یک سیکل $(N=12)$

$$\omega_0 = \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{N} \Rightarrow N=12$$

در یک سیکل $N=12$

$$x[n] \xrightarrow{F.S} a_1, a_2, a_3 \Rightarrow T=3$$

$$y[n] \xrightarrow{F.S} b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 \Rightarrow T=5$$



$$z[n] = x[n] + y[n] \xrightarrow{F.S.} ?\ c_k, \ T=15$$

ک.م.م $(3,5) = 15$

$c_1 = a_1 + b_1$, $c_2 = 0+0=0$, $c_3 = 0$, $c_4 = b_2$

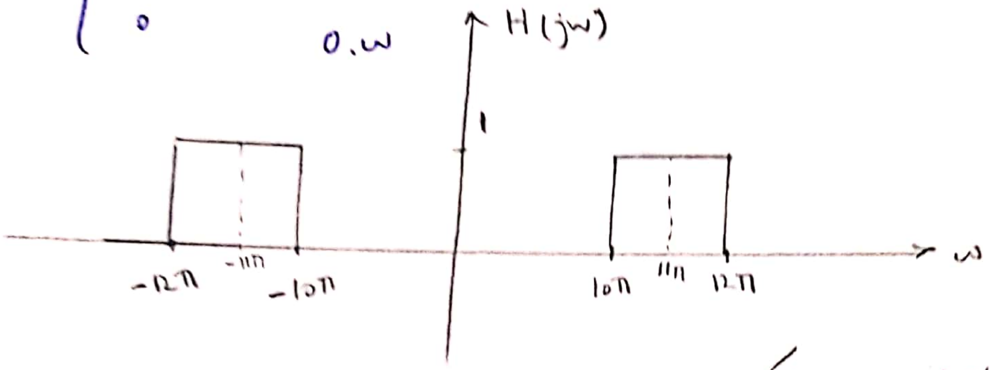
$c_5 = 0$, $c_6 = a_2$, $c_7 = b_3$, $c_8 = 0$

$c_9 = 0$, $c_{10} = b_4$, $c_{11} = a_3$, $c_{12} = 0$

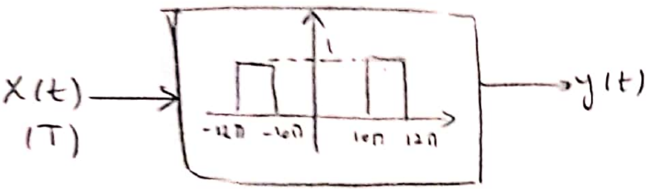
$c_{13} = b_5$, $c_{14} = 0$, $c_{15} = 0$

۱۰.

$$H(j\omega) = \begin{cases} 1 & 10\pi \le |\omega| \le 12\pi \\ 0 & o.w \end{cases}$$



الف) هارمونیک اصلی ≡ هارمونیک اول



$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$ —هارمونیک اصلی→ $\equiv a_1 e^{j\omega_0 t}$ ⟶ می‌خواهیم فیلتر شود.

$a_1 e^{j\omega_0 t} \xrightarrow{H(j\omega_0)} 0 \Longrightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \longrightarrow 0 \le \frac{2\pi}{T_0} < 10\pi$ یا $12\pi < \frac{2\pi}{T_0}$

$\Longrightarrow \{0 \le \frac{1}{T_0} < 5\} \cup \{6 < \frac{1}{T_0}\} \Longrightarrow \boxed{T \in (0, 1/5) \cup (1/6, +\infty)}$

ب) کلا صفر شود:

$12\pi < |\omega_0| \longrightarrow 12\pi < \omega_0 \;\cup\; \omega_0 < -12\pi$

$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$

$\Longrightarrow 6 < \frac{1}{T} \;\cup\; \frac{1}{T} < -6$

$\Longrightarrow \boxed{T \in (-\frac{1}{6}, \frac{1}{6})}$

11. مسئله ی 3.48 .

(a)

$$\hat{a}_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n-n_0]\, e^{-jk(\frac{2\pi}{N})n}$$

$$= \frac{1}{N} e^{-jk(\frac{2\pi}{N})n_0}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-jk(\frac{2\pi}{N})n} = e^{-jk(\frac{2\pi}{N})n} a_k$$

(b) با کمک قسمت (a) :

$$\hat{a}_k = a_k - e^{-jk(\frac{2\pi}{N})n} a_k = \left[1 - e^{-jk(\frac{2\pi}{N})n}\right] a_k$$

(c) با کمک قسمت (a) :

$$\hat{a}_k = a_k\left[1 - e^{-jk\pi}\right] = \begin{cases} 0 & k \text{ زوج} \\ 2a_k & k \text{ فرد} \end{cases}$$

(d) با توجه به اینکه $x[n] + x[n+\frac{N}{2}]$ پریودیک است با پریود $\frac{N}{2}$:

$$\hat{a}_k = \frac{2}{N}\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}\left[x[n] + x[n+\tfrac{N}{2}]\right] e^{-jk(\frac{2\pi}{N/2})n} = 2a_{2k} \;;\; 0 \le k \le (\tfrac{N}{2}-1)$$

(e)

$$x^*[-n] \xrightarrow{F.S.} \hat{a}_k$$

$$\hat{a}_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x^*[-n]\, e^{-jk(\frac{2\pi}{N})n} = a_k^*$$

(f) برای N زوج ، ضرایب سری فوریه ی $(-1)^n x[n]$:

$$(-1)^n x[n] \xrightarrow{F.S.} \hat{a}_k$$

$$\hat{a}_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-j(k-\frac{N}{2})(\frac{2\pi}{N})n} = a_{k-\frac{N}{2}}$$

(g) برای N فرد ، دوره ی تناوب سیگنال $(-1)^n x[n]$ برابر با 2N است در نتیجه :

$$(-1)^n x[n] \xrightarrow{F.S.} \hat{a}_k \quad , N \text{ is odd.}$$

$$\hat{a}_k = \frac{1}{2N}\left[\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-j(\frac{k-N}{2})(\frac{2\pi}{N})n} + \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-j(\frac{k-N}{2})(\frac{2\pi}{N})n} e^{-j\pi(k-N)}\right]$$

با توجه به اینکه برای k فرد ، $\frac{k-N}{2} \in \mathbb{Z}$ و در نتیجه k−N یک عدد صحیح زوج است و همچنین
k زوج ، k−N یک عدد صحیح فرد است و در نتیجه $e^{-j(k-N)\pi} = -1$

در نهایت داریم :

$$\hat{a}_k = \begin{cases} a_{\frac{k-N}{2}} & , k \text{ فرد} \\ 0 & , k \text{ زوج} \end{cases}$$

$$\Rightarrow y[n] = \frac{1}{2}\left[x[n] + (-1)^n x[n]\right] \xrightarrow{(8)}$$

N زوج : $\hat{a}_k = \frac{1}{2}\left[a_k + a_{k-\frac{N}{2}}\right]$

N فرد : $\hat{a}_k = \begin{cases} \frac{1}{2}\left[a_k + a_{\frac{k-N}{2}}\right] & ; k \text{ زوج} \\ \frac{1}{2} a_k & ; k \text{ فرد} \end{cases}$