a) فرض کنید داریم $Au_i = v$ ، می‌دانیم $\{u_1, \dots, u_r\}$ پایه‌ای برای $R(A)$ است، پس خواهیم داشت:

$$v \in Span(u_1, \dots, u_r) \Rightarrow v = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_r v_r$$

$$Au_i = v \Rightarrow A^2 u_i = Av \Rightarrow Au_i = Av = A(\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_i u_i + \dots + \alpha_r u_r) \Rightarrow$$

$$A\left[(u_i - \alpha_i u_i) + (\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_{i-1} u_{i-1} + \alpha_{i+1} u_{i+1} + \dots + \alpha_r u_r)\right] = 0 \Rightarrow$$

$$\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_{i-1} u_{i-1} + (1-\alpha_i) u_i + \alpha_{i+1} u_{i+1} + \dots + \alpha_r u_r = 0 \xRightarrow{u_i \text{ ها مستقل خطی‌اند}} \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = (1-\alpha_i) = \alpha_r = 0$$

$\Rightarrow 1 - \alpha_i = 0 \Rightarrow \alpha_i = 1$ و $0 = \alpha_j$ بقیه $\Rightarrow v = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_r u_r \Rightarrow v = 1 \times u_i = u_i$

b) u_i ها نسبت به هم مستقل خطی‌اند. v_i ها هم نسبت به هم مستقل خطی‌اند پس برای اینکه $B_1 \cup B_2$ یک پایه برای R^n باشد کافیست نشان دهیم که u_i ها و v_j ها هم نسبت به هم مستقل خطی‌اند (تعداد اعضا $B_1 \cup B_2$ ، n است.) پس فرض کنید داریم

$$\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_r u_r + \beta_1 v_1 + \dots + \beta_{n-r} v_{n-r} = 0 \Rightarrow \alpha_1 Au_1 + \dots + \alpha_r Au_r + \beta_1 Av_1 + \dots + \beta_{n-r} Av_{n-r} = 0$$

$$\xRightarrow{v_i \in N(A)} \alpha_1 Au_1 + \dots + \alpha_r Au_r = 0 \Rightarrow A(\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_r u_r) = 0 \Rightarrow \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_r u_r = 0 \xRightarrow{u_i \text{ ها مستقل خطی}}$$

$$\alpha_1 = \dots = \alpha_r = 0 \Rightarrow \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_r u_r + \beta_1 v_1 + \dots + \beta_{n-r} v_{n-r} = 0 \Rightarrow \beta_1 v_1 + \dots + \beta_{n-r} v_{n-r} = 0 \xRightarrow{v_i \text{ ها مستقل خطی}}$$

$$\beta_1 = \dots = \beta_{n-r} = 0$$

پس از فرض $\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_r u_r + \beta_1 v_1 + \dots + \beta_{n-r} v_{n-r} = 0$ به صفر بودن ضرایب رسیدیم که یعنی $B_1 \cup B_2$ مستقل خطی است و حکم ثابت می‌شود.

c) با توجه به a و b واضح است.