مریم سعیدی‌فر ۹۴۲۹۴۷۳ «تکلیف سری پنجم درس تجزیه و تحلیل سیگنال‌ها و سیستم‌ها»

« به نام خدا »

۱) تبدیل فوریه $f(t)=e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$ ؟ (رابطه بین f و f')

$$f(t)=e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$$

$$f'(t)=\frac{-t}{\sigma^2}e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}=\frac{-t}{\sigma^2}f(t)\Longrightarrow f'(t)=\frac{-t}{\sigma^2}f(t)$$

از طرفین تبدیل فوریه می‌گیریم (توجه : $f(t)\xrightarrow{F.T.}F(\omega)$)

$$j\omega F(\omega)=\frac{-j}{\sigma^2}F'(\omega)\to\frac{1}{\sigma^2}F'(\omega)+\omega F(\omega)=0$$

معادله‌ی دیفرانسیل فوق را حل می‌کنیم :

$$F(\omega)=F_h(\omega)+\cancel{F_p(\omega)}$$

$$\Rightarrow F_h(\omega)=Ae^{s\omega}\xrightarrow[\text{معادله}]{\text{جایگذاری در}}\frac{As}{\sigma^2}e^{s\omega}+\omega Ae^{s\omega}=0\longrightarrow\frac{s}{\sigma^2}+\omega=0\Rightarrow s=-\omega\sigma^2$$

$$\Rightarrow F(\omega)=Ae^{-\omega^2\sigma^2}$$

$$\xrightarrow{\omega=0}A=F(0)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,dt=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}dt$$

$$A^2=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}dt\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}dt=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}dy$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x^2+y^2)}dx\,dy\underset{\substack{\uparrow\\ x^2+y^2\triangleq r^2\Rightarrow dxdy=rdrd\theta}}{=}\int_0^{2\pi}\int_0^{+\infty}e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}r\,dr\,d\theta\underset{\substack{\uparrow\\ \frac{r^2}{2\sigma^2}\triangleq u\Rightarrow\frac{rdr}{\sigma^2}=du}}{=}\int_0^{2\pi}\int_0^{+\infty}e^{-u}\sigma^2\,du\,d\theta$$

$$=\sigma^2\int_0^{2\pi}\int_0^{+\infty}e^{-u}du\,d\theta=\sigma^2\int_0^{2\pi}d\theta=2\sigma^2\pi$$

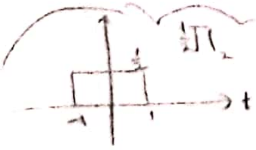
$$\longrightarrow\boxed{A=\sigma\sqrt{2\pi}}\Longrightarrow\boxed{\underbrace{F(\omega)}_{f(t)\text{ تبدیل فوریه}}=Ae^{-\omega^2\sigma^2}=\sigma\sqrt{2\pi}\,e^{-\omega^2\sigma^2}}$$

---

۲)

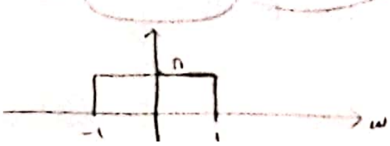
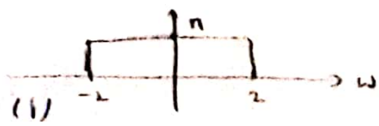
$$\frac{\sin t}{t}\longrightarrow\boxed{LTI\,?}\longrightarrow\frac{\sin 2t}{t}\qquad\frac{\sin(\frac{t}{\pi}\pi)}{\frac{t}{\pi}\pi}*h(t)\overset{?}{=}2\frac{\sin(\frac{2t}{\pi}\pi)}{\frac{2t}{\pi}\pi}$$

$$\Rightarrow\text{sinc}\left(\frac{t}{\pi}\right)*h(t)\overset{?}{=}2\,\text{sinc}\left(\frac{2t}{\pi}\right)\xrightarrow{\text{تبدیل فوریه }(*)}\pi\Pi_2\times H(\omega)\overset{?}{=}\pi\Pi_4$$



$$\tfrac{1}{2}\Pi_2\xrightarrow{F.T.}\text{sinc}\left(\frac{\omega}{\pi}\right)\ \xrightarrow{\text{خاصیت دوگانی}}\ \text{sinc}\left(\frac{t}{\pi}\right)\xrightarrow{F.T.}2\pi.\tfrac{1}{2}\Pi_2$$

مطلوب: $\text{sinc}\left(\frac{t}{\pi}\right)\xrightarrow{F.T.}\pi\Pi_2=$  , $2\,\text{sinc}\left(\frac{2t}{\pi}\right)\xrightarrow{F.T.}$ به طریق مشابه

 $\times\ H(\omega)\overset{?}{=}$  (1)

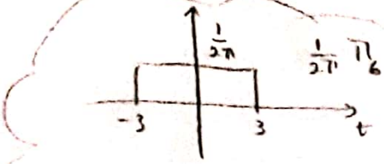
این تساوی امکان ندارد. لذا نمی‌توان سیستم LTI با ورودی و خروجی داده شده داشت!

مریم سعیدپور ۹۶۲۹۴۷۳ « تکلیف سری پنجم درس تجزیه و تحلیل سیگنال‌ها و سیستم‌ها »

۳)

$$\frac{\sin 3t}{\pi t} \longrightarrow \boxed{LTI} \longrightarrow \frac{\sin 2t}{\pi t} \qquad \frac{\sin 3t}{\pi t} * h(t) = \frac{\sin 2t}{\pi t}$$

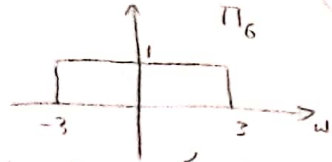
$$\Rightarrow \frac{3}{\pi}\,\mathrm{Sinc}\left(\frac{3t}{\pi}\right) * h(t) = \frac{2}{\pi}\,\mathrm{Sinc}\left(\frac{2t}{\pi}\right) \xrightarrow{F.T.} \Pi_6 \times H(\omega) = \Pi_4$$



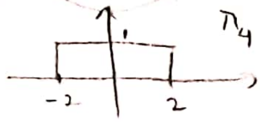
$$\xrightarrow{F.T.} \frac{1}{2\pi}\, 6\,\mathrm{Sinc}\left(\frac{\omega}{2\pi}\times 6\right) = \frac{3}{\pi}\,\mathrm{Sinc}\left(\frac{3\omega}{\pi}\right)$$

خاصیت دوگانی : $\frac{3}{\pi}\,\mathrm{Sinc}\left(\frac{3t}{\pi}\right) \xrightarrow{F.T.} 2\pi \times \frac{1}{2\pi}\Pi_6 = \Pi_6$

و محاسبه‌ی تبدیل فوریه‌ی $\frac{\sin 2t}{\pi t}$ به طریق مشابه است



$\Rightarrow$ $\times \quad H(\omega) \quad =$



$\Rightarrow \boxed{H(\omega) = \Pi_4}$

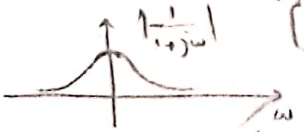
اما توجه داریم که ما فقط به ازای $\omega \in (-3,3)$ پاسخ فرکانسی سیستم را داریم و برای ωهای دیگر از آن هیچ اطلاعی نداریم یعنی ما نمی‌توانیم پاسخ ضربه سیستم (یا پاسخ فرکانسی سیستم به ازای تمام فرکانس‌ها) را پیدا کنیم. حالا بررسی گزینه‌ها:

الف) ☑ $\frac{\sin 2t}{\pi t}$ می‌دانیم تبدیل فوریه‌ی این سیگنال برابر با Π_4 است و $\omega \in (-2,2)$ مقدار دارد و این محدوده در بازه‌ای که پاسخ فرکانسی را داریم $(-3,3)$ می‌گنجد پس می‌توانیم پاسخ سیستم به این سیگنال ورودی را حساب کنیم

ب) ☑ در مورد سیگنال پریودیک $\cos\left(\frac{5}{2}t + \frac{\pi}{17}\right)$ که تبدیل فوریه‌اش $\pi\left(e^{j\frac{\pi}{17}}\delta(\omega - \frac{5}{2}) + e^{-j\frac{\pi}{17}}\delta(\omega + \frac{5}{2})\right)$ است یعنی فقط دو ضربه در فرکانس‌های $\omega = \frac{5}{2}$ و $\omega = -\frac{5}{2}$ دارد و این فرکانس‌ها در حوزه‌ای است که پاسخ فرکانسی سیستم را می‌دانیم پس می‌توان خروجی را یافت

ج) ☒ در مورد $\delta(t)$ که تبدیل فوریه‌ی آن 1 است و در واقع تمام فرکانس‌ها را در بر دارد ولی ما فقط پاسخ به فرکانس‌های حوزه‌ی $(-3,3)$ را داریم و این یعنی پاسخ ضربه‌ی سیستم را هم نمی‌توانیم محاسبه کنیم

د) ☒ در مورد سیگنال $e^{-t}u(t)$ که تبدیل فوریه‌اش $\frac{1}{1+j\omega}$ است یعنی



یعنی تمام محدوده‌ی فرکانس‌ها لازم است ولی ما $(-3,3)$ را داریم و نمی‌توانیم پاسخ به آن را پیدا کنیم.

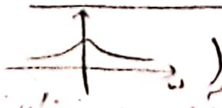
---

۴)

$$e^{-2t}u(t) \longrightarrow \boxed{LTI} \longrightarrow e^{-t}u(t) \qquad e^{-2t}u(t) * h(t) = e^{-t}u(t)$$

$$\xrightarrow{F.T.} \frac{1}{2+j\omega} \times H(\omega) = \frac{1}{1+j\omega} \longrightarrow H(\omega) = \frac{2+j\omega}{1+j\omega} = 1 + \frac{1}{j\omega+1} \longrightarrow \boxed{h(t) = \delta(t) + e^{-t}u(t)}$$

از آنجایی که تبدیل فوریه‌ی سیگنال ورودی یعنی $\frac{1}{2+j\omega}$ (



) هیچگاه صفر نمی‌شود (به صورت مجانبی به صفر می‌رسد ولی صفر نمی‌شود) پس همه‌ی فرکانس‌ها را در بر دارد و در نتیجه می‌توان با کمک آن، پاسخ فرکانسی سیستم و طبیعتاً پاسخ ضربه‌ی سیستم را به دست آورد و این یعنی سیستم LTI کاملاً مشخص است و پاسخ به هر ورودی دیگری را هم داریم!

الف) $\text{input} = \cos\left(2t + \frac{\pi}{7}\right)$

$$\cos\left(2t + \frac{\pi}{7}\right) = \frac{e^{(2t+\frac{\pi}{7})j} + e^{-(2t+\frac{\pi}{7})j}}{2}$$

مریم سعیدیفر ۹۴۲۹۳۰۷۳

«تکلیف سری پنجم درس تجزیه و تحلیل سیگنال‌ها و سیستم‌ها»

ادامه‌ی سوال (۴):

می‌دانیم: $e^{st} \xrightarrow{LTI} H(s)e^{st}$, $H(s) = 1 + \frac{1}{s+1}$

$$\cos(2t) = \frac{e^{2t} + e^{-2t}}{2} \xrightarrow{LTI} \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2+1}\right)e^{2t} + \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{-2+1}\right)e^{-2t} = \frac{2}{3}e^{2t}$$

$$\boxed{\cos\left(2t+\frac{\pi}{7}\right) \xrightarrow{LTI} \frac{2}{3}e^{2t+\frac{\pi}{7}}}$$

ب) input: $e^{-t}u(t)$

$$e^{-t}u(t) * h(t) = y(t) \xrightarrow{F.T.} \frac{1}{1+j\omega} \times H(\omega) = Y(\omega)$$

$$\rightarrow \frac{1}{1+j\omega} \times \left(1+\frac{1}{1+j\omega}\right) = \frac{1}{1+j\omega} + \underbrace{\frac{1}{(1+j\omega)^2}}_{\text{خاصیت مشتق}} = Y(\omega) \xrightarrow{F.T.^{-1}} e^{-t}u(t) + te^{-t}u(t)$$

$$\Rightarrow \boxed{y(t) = (1+t)e^{-t}u(t)}$$

ج) معکوس‌پذیر؟ چرا؟

اگر معکوس‌پذیر باشد پس: $h(t) * \underbrace{h_i(t)}_{\text{پاسخ ضربه سیستم معکوس}} = \delta(t)$ یا در حوزه‌ی فرکانس: $H(\omega) \times \underbrace{H_i(\omega)}_{\text{پاسخ فرکانسی سیستم معکوس}} = 1$

$$\rightarrow \frac{j\omega+2}{j\omega+1} \times H_i(\omega) = 1 \Rightarrow H_i(\omega) = \frac{j\omega+1}{j\omega+2} = 1 - \frac{1}{j\omega+2} \Rightarrow h_i(t) = \delta(t) - e^{-2t}u(t)$$

که پس معکوس‌پذیر است.

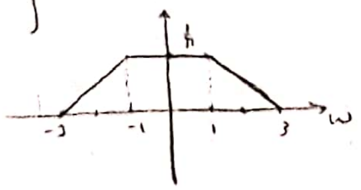
(5) F.T. , $g(0)$?

* با استفاده از $F.T\{\frac{\sin t}{\pi t}\}$, $F.T\{\frac{\sin 2t}{\pi t}\}$ در سوال ۲،۳ انجام شده.

$$w(t) = \left(\frac{\sin 2t}{\pi t} * \frac{\sin t}{\pi t}\right) \times \frac{\sin 2t}{\pi t}$$

$\downarrow$ F.T.

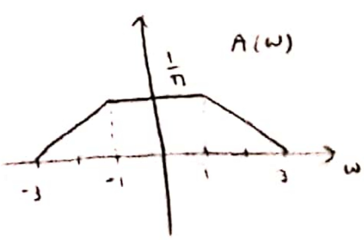
$$W(\omega) = \frac{1}{2\pi}\left[\Pi_4 \times \Pi_2\right] * \Pi_4 = \frac{1}{2\pi}\Pi_2 * \Pi_4 =$$



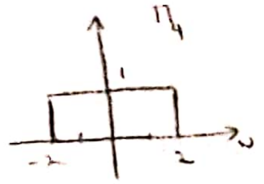
$$z(t) = \left(\frac{\sin(2t)}{\pi t} \times \frac{\sin t}{\pi t}\right) * \frac{\sin 2t}{\pi t}$$

$\downarrow$ F.T.

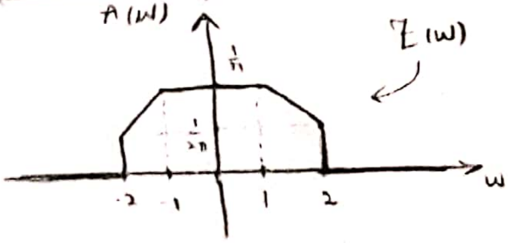
$$Z(\omega) = \underbrace{\left[\frac{1}{2\pi}(\Pi_4 * \Pi_2)\right]}_{A(\omega)} \times \Pi_4 =$$



×



=



"تکلیف سری پنجم درس تجزیه و تحلیل سیگنال‌ها و سیستم‌ها"   ۹۴۲۹۲۷۳   مریم سعیدفر

ادامه‌ی سوال (5) :

$$g(t) = \left(\left[\frac{\sin 2t}{\pi t} \times \cos t\right] * \frac{\sin 2t}{\pi t}\right) \times \cos t$$

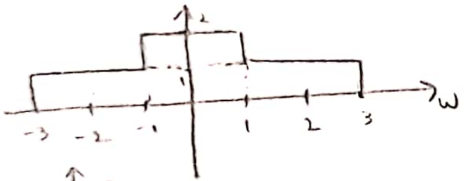
$\Big\downarrow$ F.T.

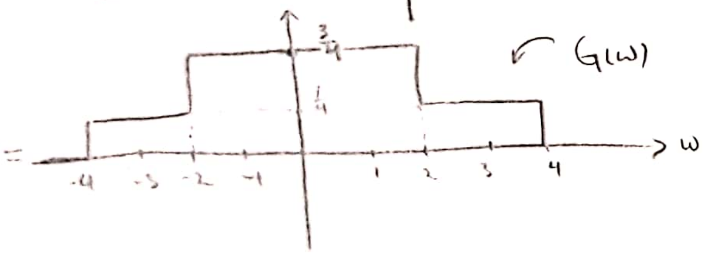
* توجه ! $F.T.\{\cos(t)\} = \pi\delta(\omega-1)+\pi\delta(\omega+1)$

$$G(\omega) = \frac{1}{2\pi}\left[\left(\frac{1}{2\pi}\Pi_4 * \left(\pi(\delta(\omega-1)+\delta(\omega+1))\right)\right)\times \Pi_4\right] * \left(\pi\left(\delta(\omega-1)+\delta(\omega+1)\right)\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left[\left[\Pi_4(\omega) * \left(\delta(\omega-1)+\delta(\omega+1)\right)\right]\times \Pi_4(\omega)\right] * \left(\delta(\omega-1)+\delta(\omega+1)\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left[\left[\Pi_4(\omega-1)+\Pi_4(\omega+1)\right]\times \Pi_4(\omega)\right] * \left(\delta(\omega-1)+\delta(\omega+1)\right)$$

$= \frac{1}{4}\Big[$  $\Big] * \left(\delta(\omega-1)+\delta(\omega+1)\right)$

$=$ 

$g(0) = ?$

$$g(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} G(\omega)e^{j\omega t}\,d\omega \xrightarrow{t=0} g(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} G(\omega)\,d\omega = \frac{1}{2\pi}(\text{سطح زیر نمودار } G(\omega))$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\left(\frac{1}{4}\times 2\right)\times 2 + 4\times\frac{3}{4}\right) = \boxed{\frac{2}{\pi}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{X(\omega) \underbrace{\frac{2\sin(\omega)}{\omega}}_{Y(\omega)}}_{Z(\omega)} e^{j2\omega} \, d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} Z(\omega) e^{j2\omega} \, d\omega = 2\pi Z(t=2) \quad \text{d)} \leftarrow$$

$$Z(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} Z(\omega) e^{j\omega t} \, d\omega$$

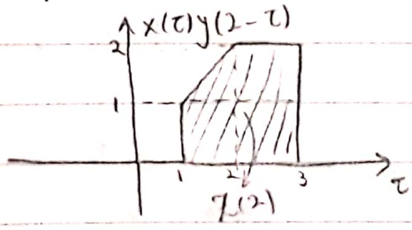
$$Z(\omega) = X(\omega) Y(\omega) \Rightarrow Z(t) = x(t) * y(t) \quad (1)$$

$$Y(\omega) = \frac{2\sin(\omega)}{\omega} = \frac{2 \cdot \sin(\pi \frac{\omega}{\pi})}{\pi \frac{\omega}{\pi}} = 2\,\mathrm{Sinc}\left(\frac{\omega}{\pi}\right) = 2\,\mathrm{Sinc}\left(\frac{2\omega}{2\pi}\right) \;::\; \tau = 2$$

$$\Rightarrow y(t) = \Pi_2(t) \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow Z(t) = x(t) * \Pi_2(t) \rightarrow Z(2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) y(2-\tau) \, d\tau = 3.5$$

مطلوب : $Z(2) = ?$



$$\Rightarrow 1 \times 2 + \frac{(1+2) \times 1}{2} = 3.5$$

$\rightarrow$ مطلوب قسمت (۱) $= 2\pi Z(2) = \boxed{7\pi}$

e) رابطه‌ی پارسوال : $\leftarrow$

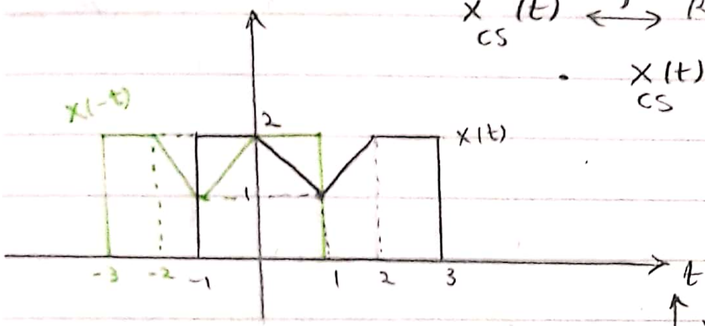
$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\omega)|^2 \, d\omega$$

محاسبه‌ی انتگرال راحت است ولی زمان بر (شکستن به بازه‌های مختلف) (محاسبه‌ی معادله‌ی خطا و توان ۲)

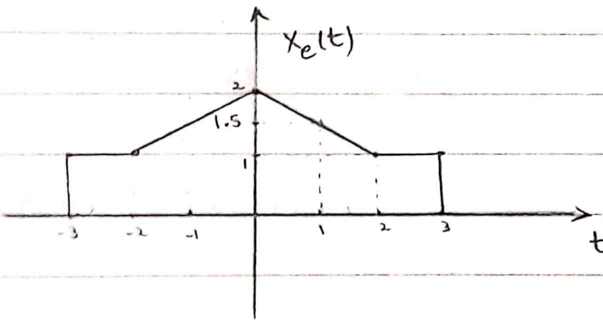
← ۴) جزئی از خواص گفتیم : $x_{cs}(t) \xleftrightarrow{F} Re\{X(\omega)\}$

که در مورد سیگنال های حقیقی ، $x_{cs}(t) = x_e(t)$.

پس کافیست قسمت زوج $x(t)$ را رسم کنیم.



$$x_e(t) = \frac{x(t) + x(-t)}{2}$$



: (iii) (a) (4.26)

$x(t) = e^{-t}u(t) \xrightarrow{F.T.} \frac{1}{1+j\omega}$

$h(t) = e^{t}u(-t) \xrightarrow{F.T.} \frac{-1}{-1+j\omega}$

$x(t) * h(t) = ?\, y(t) \xrightarrow{F.T.} X(\omega) \times H(\omega) = Y(\omega)$

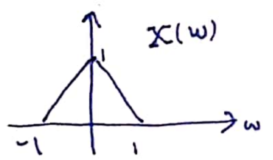
$\Rightarrow Y(\omega) = \frac{1}{1+j\omega} \cdot \frac{-1}{-1+j\omega} = \frac{-1}{(1+j\omega)(-1+j\omega)}$

$\Rightarrow Y(\omega) = \frac{\frac{1}{2}}{j\omega+1} + \frac{-\frac{1}{2}}{j\omega-1} \xrightarrow{(F.T.)^{-1}} \boxed{y(t) = \frac{1}{2}e^{-t}u(t) + \frac{1}{2}e^{t}u(-t)}$

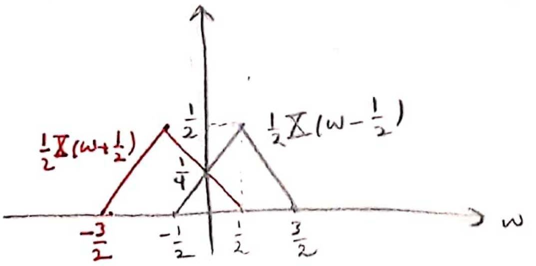
(i) (b) (4.28)

$p(t) = \cos(\frac{t}{2}) = \pi\delta(\omega - \frac{1}{2}) + \pi\delta(\omega + \frac{1}{2})$

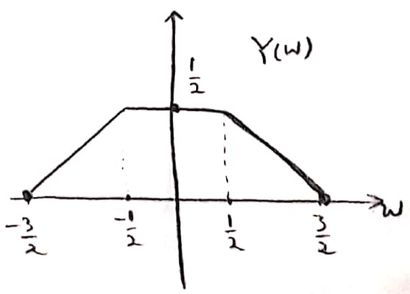
$y(t) = x(t)p(t) \xrightarrow{F.T.} Y(\omega) = \frac{1}{2\pi}[X(\omega) * P(\omega)] \Rightarrow \frac{1}{2}X(\omega) * [\delta(\omega - \frac{1}{2}) + \delta(\omega + \frac{1}{2})]$



$\Rightarrow Y(\omega) = \frac{1}{2}[X(\omega - \frac{1}{2}) + X(\omega + \frac{1}{2})]$



$\Rightarrow$

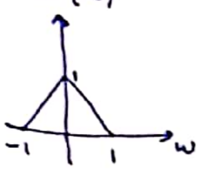


(۱۴)

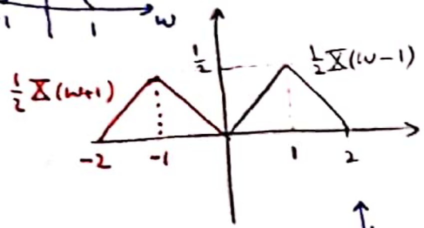
: (ii)(b) . (4.28)

$p = \cos t \quad , \quad y(t) = x(t)\,p(t)$

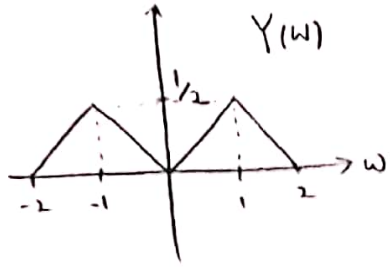
$X(\omega)$



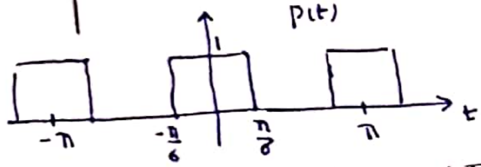
$$\left.\begin{aligned} & p(t) \xrightarrow{F.T.} \pi\delta(\omega-1) + \pi\delta(\omega+1) \\ & Y(\omega) = \frac{1}{2\pi}\left[X(\omega) * P(\omega)\right] \end{aligned}\right\} \rightarrow Y(\omega) = \frac{1}{2}\left[X(\omega-1) + X(\omega+1)\right]$$



$\Rightarrow$



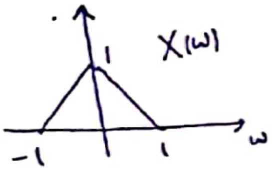
(X) (b) (4.28)

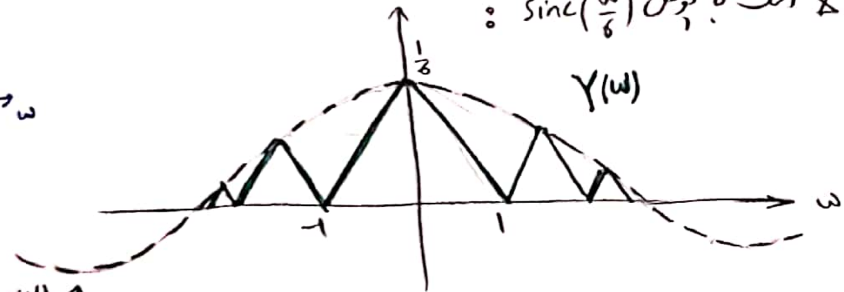


$p(t) =$

$$\left.\begin{aligned} & \xrightarrow{F.T.} P(\omega) = \frac{\pi}{3}\,\mathrm{Sinc}\left(\frac{\omega}{6}\right) \\ & y(t) = x(t)\,p(t) \xrightarrow{F.T.} Y(\omega) = \frac{1}{2\pi} X(\omega) * P(\omega) \end{aligned}\right\} \Rightarrow Y(\omega) = \frac{1}{6} X(\omega) * \mathrm{Sinc}\left(\frac{\omega}{6}\right)$$

$Y(\omega)$ ، دیراک‌های ضربه‌ای $X(\omega)$ است با پوشش $\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega}{6}\right)$:





$\frac{1}{6}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega}{6}\right)$

(4.31) (a)

LTI

$h_1(t) = u(t) \xrightarrow{F.T.} H_1(\omega) = \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$ (خاصیت انتگرال)

$h_2(t) = -2\delta(t) + 5e^{-2t}u(t) \xrightarrow{F.T.} H_2(\omega) = -2 + \frac{5}{2+j\omega}$

$h_3(t) = 2te^{-t}u(t) \xrightarrow{F.T.} H_3(\omega) = 2 \times \frac{1}{(1+j\omega)^2}$ (خاصیت مشتق)

input $\Rightarrow x(t) = \cos(t) \xrightarrow{F.T.} X(\omega) = \pi\delta(\omega-1) + \pi\delta(\omega+1)$

output $\Rightarrow y(t) = ?$

$$Y_1(\omega) = X(\omega)\,H_1(\omega) = \frac{\pi}{j}\delta(\omega-1) - \frac{\pi}{j}\delta(\omega+1) = 2\pi\left(\frac{\delta(\omega-1)}{2j} - \frac{\delta(\omega+1)}{2j}\right)$$

$$\xrightarrow{(F.T)^{-1}} \boxed{y_1(t) = \sin(t)}$$

$$Y_2(\omega) = X(\omega)\,H_2(\omega) = \pi\left(-2 + \frac{5}{2+j}\right)\delta(\omega-1) + \pi\left(-2 + \frac{5}{2-j}\right)\delta(\omega+1)$$

$$= \pi\left(\frac{1-2j}{2+j}\right)\delta(\omega-1) + \pi\left(\frac{1+2j}{2-j}\right)\delta(\omega+1) = \pi(-j)\,\delta(\omega-1) + \pi(j)\,\delta(\omega+1)$$

$\times \frac{2-j}{2-j} \qquad \times \frac{2+j}{2+j}$

$$= \frac{\pi}{j}\delta(\omega-1) - \frac{\pi}{j}\delta(\omega+1) = 2\pi\left(\frac{\delta(\omega-1)}{2j} - \frac{\delta(\omega+1)}{2j}\right)$$

$$\xrightarrow{(F.T)^{-1}} \boxed{y_2(t) = \sin(t)}$$

" تکلیف سری پنجم درس تجزیه و تحلیل سیگنال ها و سیستم ها " مریم سعیدمهر ۹۴۲۹۴۷۳

$$Y_3(\omega) = X(\omega)H_3(\omega) = \frac{2\pi}{(1+j)^2}\delta(\omega-1) + \frac{2\pi}{(1-j)^2}\delta(\omega+1)$$

$$= 2\pi\left[\frac{1}{2j+1+j^2}\delta(\omega-1) + \frac{1}{1-2j+j^2}\delta(\omega+1)\right] = 2\pi\left(\frac{1}{2j}\delta(\omega-1) - \frac{1}{2j}\delta(\omega+1)\right)$$

$$\xrightarrow{(F.T)^{-1}} \boxed{y_3(t) = \sin(t)} \longrightarrow \boxed{y_1(t) = y_2(t) = y_3(t) = \sin(t)}$$ (a

(b) (4.31)

$h_4(t) = \frac{1}{2}[h_1(t) + h_2(t)] \longrightarrow$ یا کلا هر ترکیب خطی از h_1, h_2, h_3

در نتیجه با داشتن پاسخ یک سیستم LTI به $\cos(t)$ نمی‌توان پاسخ به هر ورودی را مشخص کرد (یا به عبارتی تنها سیستم LTI یکتا یافت) ← چون تبدیل فوریه اش فقط شامل ۲ فرکانس است و بقیه ی فرکانس ها را نداریم.

(b) (4.32)

$$h(t) = \frac{\sin(4(t-1))}{\pi(t-1)}$$

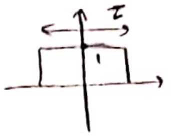
$$x_2(t) = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k \sin(3kt)$$

$y_2(t) = x_2(t) * h(t) = ?$

$\rightarrow$ LTI System

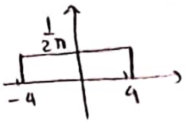
$h(t) \triangleq h_1(t-1)$

$$\Rightarrow h_1(t) = \frac{\sin(4t)}{\pi t} = \frac{4}{\pi}\times\frac{\sin(\frac{4t}{\pi}\pi)}{\frac{4t}{\pi}\pi} = \frac{4}{\pi}\operatorname{sinc}\left(\frac{4t}{\pi}\right)$$



$\xrightarrow{F.T} \tau\operatorname{sinc}\left(\frac{\omega}{2\pi}\tau\right)$

$\Rightarrow \tau = 8 \Rightarrow$

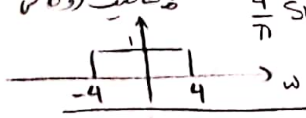


$\xrightarrow{F.T} \frac{4}{\pi}\operatorname{sinc}\left(\frac{4\omega}{\pi}\right)$

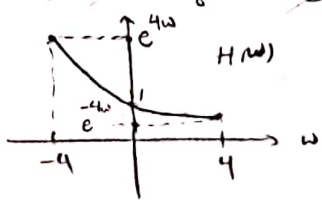
خاصیت دوگانی

$\frac{4}{\pi}\operatorname{sinc}\left(\frac{4t}{\pi}\right) \xrightarrow{F.T} 2\pi\,\Pi_8(\omega)\times\frac{1}{2\pi}$

$\Rightarrow H_1(\omega) = \Pi_8(\omega) =$



$$\Rightarrow \boxed{H(\omega) = e^{-j\omega}\Pi_8(\omega) = \begin{cases} e^{-j\omega} & |\omega|<4 \\ 0 & o.w \end{cases}} \equiv$$



$$X_2(\omega) = \frac{\pi}{j}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^k\left[\delta(\omega-3k) + \delta(\omega+3k)\right]\right)$$

$$Y_2(\omega) = H(\omega)X_2(\omega)$$

$$\Rightarrow Y_2(\omega) = \frac{\pi}{2j}e^{-j\omega}(\delta(\omega-1)+\delta(\omega+1))$$

$\boxed{k=1}$

$$\Rightarrow Y_2(\omega) = \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)}_{\text{ضریب}}\underbrace{(2\pi)}_{\text{دوگانی}}\underbrace{\left(e^{-j\omega}\right)}_{\text{شیفت}}\underbrace{\left(\frac{\delta(\omega-3)}{2j} - \frac{\delta(\omega+3)}{2j}\right)}_{F.T\{\sin(3t)\}} \xrightarrow{(F.T)^{-1}} \boxed{\frac{1}{2}\sin(3t-1) = y_2(t)}$$

(c) (4.32)

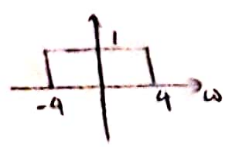
$$h(t) = \frac{\sin(4(t-1))}{\pi(t-1)} \xrightarrow[\text{قسمت (b)}]{F.T.} H(\omega) = e^{-j\omega}\Pi_8(\omega) = \begin{cases} e^{-j\omega} & |\omega|<4 \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

$$x_3(t) = \frac{\sin(4(t+1))}{\pi(t+1)} \xrightarrow[\text{مشابه قسمت (b)}]{F.T} X_3(\omega) = e^{j\omega}\Pi_8(\omega) = \begin{cases} e^{j\omega} & |\omega|<4 \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

$y_3(t) = x_3(t) * h(t) = ?$ $\xrightarrow{F.T.}$ $Y_3(\omega) = H(\omega)X_3(\omega) = \Pi_8(\omega)$

LTI System.

$Y_3(\omega) = \Pi_8(\omega) =$



$$\xrightarrow{(F.T)^{-1}} \boxed{y_3(t) = \frac{4}{\pi}\operatorname{sinc}\left(\frac{4t}{\pi}\right) = \frac{\sin(4t)}{\pi t}}$$

(4.34)

LTI پایدار و علّی

(a) معادله ی دیفرانسیل (ورودی) و (خروجی) ؟

$$H(j\omega) = \frac{j\omega + 4}{6 - \omega^2 + 5j\omega} = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)}$$

$$\Rightarrow j\omega X(\omega) + 4X(\omega) = 6Y(\omega) - \omega^2 Y(\omega) + 5j\omega Y(\omega)$$

از معادله ی فوق، عکس تبدیل فوریه می‌گیریم:

$$\boxed{\frac{d}{dt}x(t) + 4x(t) = 6y(t) - \frac{d^2}{dt^2}y(t) + 5\frac{d}{dt}y(t)}$$

(b) $? = h(t)$

$$H(j\omega) = \frac{j\omega + 4}{(j\omega+2)(j\omega+3)} \underset{s \triangleq j\omega}{=} \frac{s+4}{(s+2)(s+3)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+3} \Rightarrow \begin{cases} A + B = 1 \\ 3A + 2B = 4 \end{cases}$$

$$\boxed{A = 2, B = -1} \longrightarrow H(j\omega) = \frac{2}{j\omega+2} - \frac{1}{j\omega+3} \xrightarrow{(F.T)^{-1}} 2e^{-2t}u(t) - e^{-3t}u(t)$$

$$\rightarrow \boxed{h(t) = \left(2e^{-2t} - e^{-3t}\right)u(t)}$$

(C) $y(t) = ? \longleftarrow x(t) = e^{-4t}u(t) - te^{-4t}u(t)$

خاصیت مشتق

$$X(j\omega) = \frac{1}{j\omega+4} - \frac{1}{(j\omega+4)^2}$$

$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega) = \frac{1}{(j\omega+2)(j\omega+3)} - \frac{1}{(j\omega+2)(j\omega+3)(j\omega+4)} = \frac{1}{(j\omega+2)(j\omega+4)}$$

$$\underset{s \triangleq j\omega}{=} \frac{1}{(s+2)(s+4)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+4} \longrightarrow \begin{cases} A + B = 0 \\ 4A + 2B = 1 \end{cases} \longrightarrow \boxed{\begin{aligned} A &= \tfrac{1}{2} \\ B &= -\tfrac{1}{2} \end{aligned}}$$

$$\Rightarrow Y(j\omega) = \frac{\frac{1}{2}}{j\omega+2} + \frac{-\frac{1}{2}}{j\omega+4} \xrightarrow{(F.T)^{-1}} \boxed{\begin{aligned} y(t) &= \tfrac{1}{2}e^{-2t}u(t) - \tfrac{1}{2}e^{-4t}u(t) \\ &= \tfrac{1}{2}\left(e^{-2t} - e^{-4t}\right)u(t) \end{aligned}}$$

(4.43)

$$g(t) = x(t)\cos^2(t) * \frac{\sin t}{\pi t} \xrightarrow{F.T.} G(\omega) = \frac{1}{2}X(\omega)$$ (اثبات در ادامه...)

$x(t)$ سیگنال حقیقی $\xrightarrow{F.T.} X(j\omega) = 0 \;;\; |\omega| \geq 1$

$\exists S :$ LTI $\Longrightarrow x(t) \longrightarrow \boxed{S} \longrightarrow g(t)$

می‌دانیم : $\cos^2(t) = \dfrac{1 + \cos(2t)}{2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4}e^{2tj} + \dfrac{1}{4}e^{-2tj} \xrightarrow{F.T.} \pi\delta(\omega) + \dfrac{\pi}{2}\left(\delta(\omega-2) + \delta(\omega+2)\right)$

$$\Rightarrow y_2(t) = x(t)\underbrace{\cos^2(t)}_{y_1(t)} \xrightarrow{(F.T)} \frac{1}{2\pi}\left[X(\omega) * Y_1(\omega)\right] = \frac{1}{2}X(\omega) + \frac{1}{4}X(\omega-2) + \frac{1}{4}X(\omega+2) = Y_2(\omega)$$

$$\frac{\sin t}{\pi t} \xrightarrow[\text{[illegible] (3) و (2)}]{F.T} \Pi_2(\omega)$$

مریم سعیدفر ۹۴۲۹۳۷۴ ۷- تکلیف سری پنجم درس تجزیه و تحلیل سیگنال‌ها و سیستم‌ها

$\Rightarrow g(t) = x(t)\cos^2(t) * \frac{\sin t}{\pi t} \xrightarrow{F.T.} Y_2(\omega)\,\underbrace{\Pi_2(\omega)}_{LPF} = G(\omega)$

$\Rightarrow \boxed{G(\omega) = \frac{1}{2}X(\omega)} \xrightarrow{(F.T)^{-1}} \boxed{g(t) = \frac{1}{2}x(t)} \longrightarrow$ LTI system : $h(t) = \frac{1}{2}\delta(t)$

← از آنجایی که یک پاسخ ضربه جستیم پس حداقل یک سیستم LTI وجود دارد که به ورودی $x(t)$، پاسخی معادل $g(t)$ دهد

(4.44) :

علّی و LTI

$$\frac{d}{dt}y(t) + 10y(t) = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)z(t-\tau)d\tau\right) - x(t) = x(t) * z(t) - x(t)$$

$$z(t) = e^{-t}u(t) + 3\delta(t) \xrightarrow{F.T} Z(\omega) = \frac{1}{1+j\omega} + 3$$

?= $H(j\omega)$ (a)

$$\xrightarrow{F.T.} j\omega Y(\omega) + 10Y(\omega) = X(\omega)Z(\omega) - X(\omega) \longrightarrow \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{Z(\omega)-1}{10+j\omega} = H(j\omega)$$

$$\Rightarrow H(j\omega) = \frac{2 + \frac{1}{1+j\omega}}{10+j\omega} = \frac{3+2j\omega}{(10+j\omega)(1+j\omega)} \underset{s \triangleq j\omega}{=} \frac{3+2s}{(s+10)(s+1)} = \frac{A}{s+10} + \frac{B}{s+1} \Rightarrow \begin{cases} A+B=2 \\ A+10B=3 \end{cases}$$

$$\boxed{B = \frac{1}{9},\ A = \frac{17}{9}} \longrightarrow \boxed{H(\omega) = \frac{\frac{17}{9}}{j\omega+10} + \frac{\frac{1}{9}}{j\omega+1}} \xrightarrow{(F.T)^{-1}} h(t) = \frac{17}{9}e^{-10t}u(t) + \frac{1}{9}e^{-t}u(t)$$

?= $h(t)$ (b)

$$\Rightarrow \boxed{h(t) = \left(\frac{17}{9}e^{-10t} + \frac{1}{9}e^{-t}\right)u(t)}$$