

نظریه بازی ها

پاییز ۱۴۰۰

بازی‌های استراتژیک با اولویت‌های ترتیبی
(بازی‌های با حرکات همزمان با اولویت‌های ترتیبی)

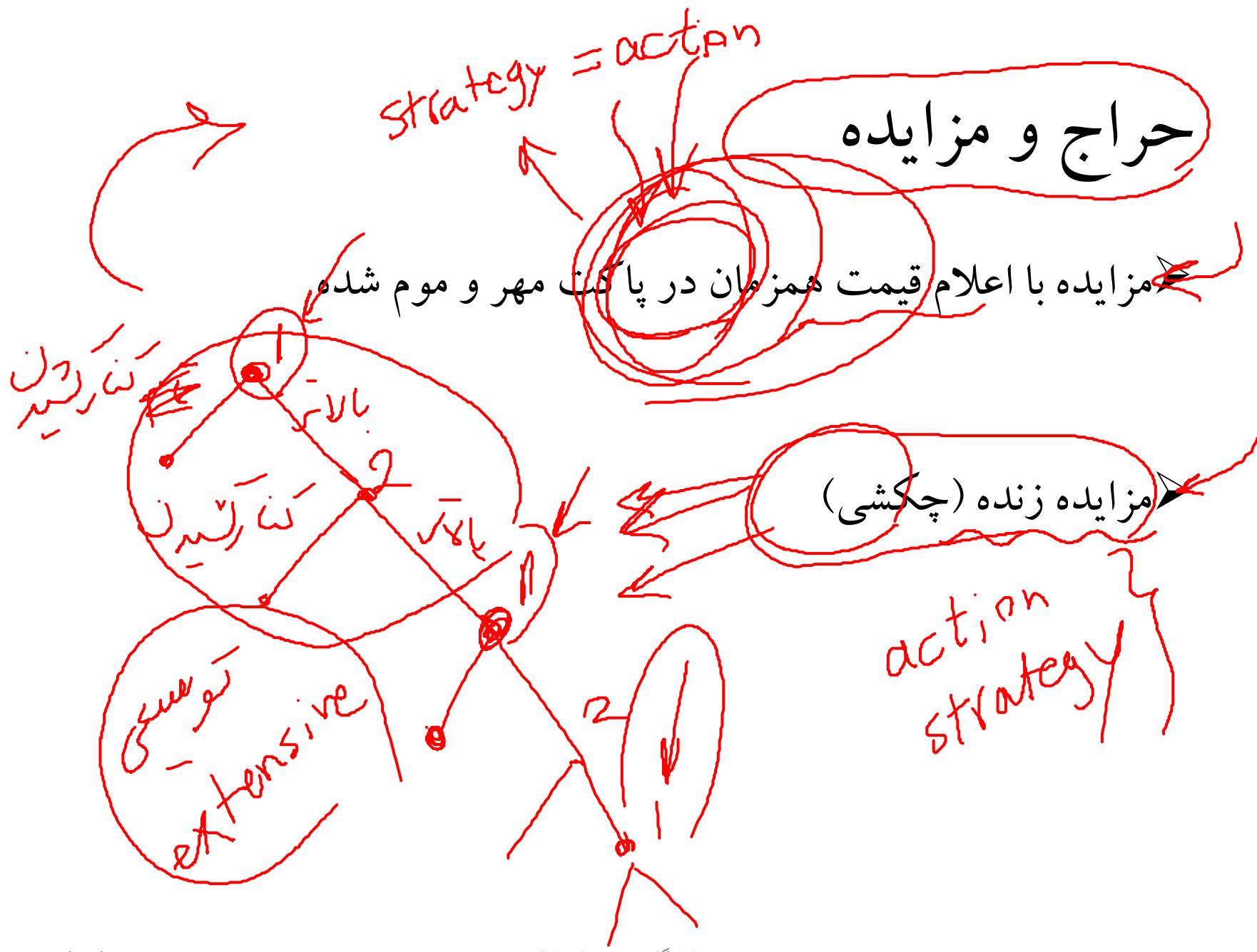
Strategic games with ordinal preferences
(simultaneous games with ordinal preferences)

فصل ۲ از کتاب An introduction to game theory
با عنوان Nash Equilibrium: Theory

بازی‌های استراتژیک با اولویت‌های ترتیبی
(بازی‌های با حرکات همزمان با اولویت‌های ترتیبی)

Strategic games with ordinal preferences
simultaneous games with ordinal preferences

فصل ۲ از کتاب An introduction to game theory
با عنوان Nash Equilibrium: Theory



بازی های استراتژیک با اولویت های ترتیبی

مثال:

معماز زندانی Prisoner's dilemma

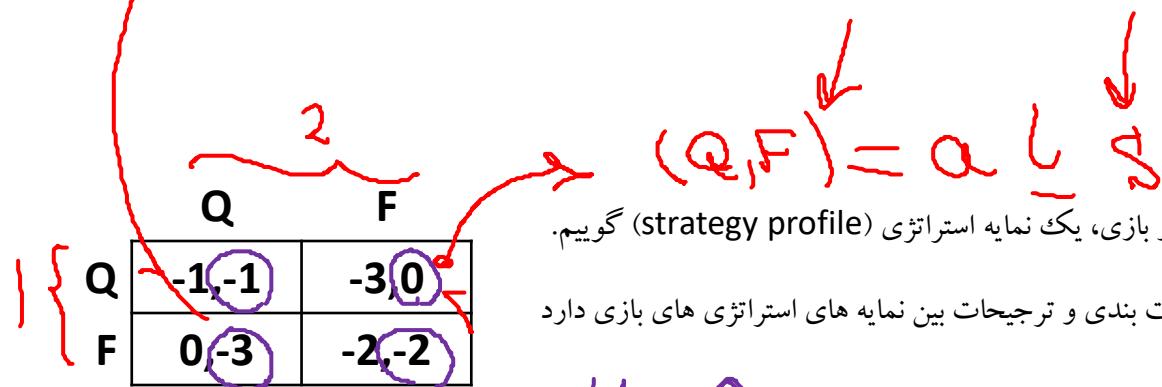
- دو متهم به علت جرم کوچکی بازداشت شده اند و برای خبرچینی گرفتن در مورد جرم بزرگتری تحت بازجویی هستند.
- بازجویی ها جداگانه و بدون اطلاع متهمین از یکدیگر انجام می شود و پس از تکمیل پرونده ها، جداگانه بررسی می شوند.
- مجازات جرم کوچک ۱ ماه زندان؛ مجازات جرم بزرگتر ۲ ماه زندان؛ و پاداش خبرچینی، ۱ ماه کاهش زندان است.

- افراد باید تصمیم گیری کنند و سود هر کدام، علاوه بر تصمیم خود، تحت تاثیر تصمیم دیگری نیز هست.
- به این وضعیت و شرایط، یک بازی (game) می گوییم؛ و به هر تصمیم گیرنده، یک بازیکن (player) می گوییم.
- تصمیمات هر بازیکن از بین یک مجموعه از حرکات (set of actions) انتخاب می شود.
- به تصمیم (اکشن) هایی که یک بازیکن برای موقعیت های مختلف در یک بازی در نظر می گیرد و انجام می دهد، استراتژی (strategy) آن بازیکن گوییم.

بازی های استراتژیک با اولویت های ترتیبی

مثال:
معماي زنداني

- دو مهم به علت جرم کوچکی بازداشت شده اند و برای خبر چینی گرفتن در مورد جرم بزرگتر تحت بازجویی هستند.
- بازجویی ها جداگانه و بدون اطلاع متهابی از یکدیگر انجام نمایند و پس از تکمیل پرونده ها، جداگانه بررسی می شوند.
- مجازات جرم کوچک ۱ ماه زندان؛ مجازات جرم بزرگتر ۲ ماه زندان؛ و پاداش خبر چینی، ۱ ماه کاهش زندان است.



به بردار استراتژی های همه بازیکنان در یک رخداد از بازی، یک نمایه استراتژی (strategy profile) گوییم.

هر بازیکن با توجه به سود و زیان خودش، یک اولویت بندی و ترجیحات بین نمایه های استراتژی های بازی دارد که با a_i نمایش می دهیم. مثلاً اینجا

$$u_i: A \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{(utility function/payoff function)}$$

$$a_1 = Q \quad u_1(Q, Q) = -1 \quad u_1(Q, F) = -3$$

$$a_2 = F \quad u_1(F, Q) = 0 \quad u_1(F, F) = -2$$

بازی های استراتژیک با اولویت های ترتیبی

مثال: معماه زندانی

- دو متهم به علت جرم کوچکی بازداشت شده اند و برای خبرچینی گرفتن در مورد جرم بزرگتری تحت بازجویی هستند.
- بازجویی ها جداگانه و بدون اطلاع متهمین از یکدیگر انجام می شود و پس از تکمیل پرونده ها، جداگانه بررسی می شوند.
- مجازات جرم کوچک ۱ ماه زندان؛ مجازات جرم بزرگتر ۲ ماه زندان؛ و پاداش خبرچینی، ۱ ماه کاهش زندان است.

نتیجه: برای توصیف دقیق بازی بالا، باید موارد زیر را مشخص کرد:

- 1. مجموعه بازیکنان:
- 2. برای هر بازیکن، یک مجموعه از اکشن ها؛
- 3. برای هر بازیکن، مجموعه اولویت ها روی نمایه های استراتژیها، یا برای هر بازیکن، یک قابع سود.

بازی های استراتژیک با اولویت های ترتیبی

تعريف: یک بازی استراتژیک با اولویت های ترتیبی عبارت از یک سه تایی $(N, \{A_i\}_{i \in N}, \{\prec_i\}_{i \in N})$ که در آن، N مجموعه بازیکنان است،

- A_i مجموعه اکشن های بازیکن i است،
- \prec_i ترتیب ترجیحات (ordinal preferences) بازیکن i بر روی نمایه های استراتژی های بازیکنان است.

تعريف: یک بازی استراتژیک با اولویت های ترتیبی عبارت از یک سه تایی $(N, \{A_i\}_{i \in N}, \{u_i\}_{i \in N})$ که در آن،

- N مجموعه بازیکنان است،
- A_i مجموعه اکشن های بازیکن i است،
- u_i تابع سود (utility function – payoff function) بازیکن i از نمایه های استراتژی های بازیکنان به اعداد حقیقی است.

$$u_i(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}$$

بازی

بازی های استراتژیک با اولویت های ترتیبی

		2	
	B	2,1	0,0
1	→ B	0,0	1,2

↑ ↑

مثال: باخ یا استراوینسکی؟
Bach or Stravinsky?

$$A_2 = \{B, M\}$$

$$\rightarrow N = \{1, 2\}$$

$$A_1 = \cancel{\{B, S\}} = \{B, S\} \quad \leftarrow$$

$$\begin{cases} u_1(B, B) = 2 = u_2(S, S) & u_1(B, M) = u_1(S, B) = 0 = \\ u_1(S, M) = 1 = u_2(B, B) & u_2(B, M) = u_2(S, B) \end{cases}$$

بازی های استراتژیک با اولویت های ترتیبی

	1	2	
H	H	1, -1	-1, 1
T	T	-1, 1	1, -1

$$N = \{1, 2\}$$

مثال: پنجه باز سکه
Matching Pennies

$$A_1 = A_2 = \{H, T\}$$

$$\left. \begin{array}{l} u_1(H, H) = u_1(T, T) = 1 = u_2(H, T) \\ \quad \quad \quad = u_2(T, H) \\ u_1(H, T) = u_1(T, H) = -1 = u_2(H, H) \end{array} \right\}$$

$$= u_2(T, T)$$

بازی های استراتژیک با اولویت های ترتیبی

	1	S	H
	S	2,2	0,1
	H	1,0	1,1

$N = \{1, 2\}$

$$A_1 = \{S, H\} = A_2$$

$$u_2(H, S) = 0$$

$$\begin{cases} u_1(S, S) = 2 & u_1(S, H) = 0 & u_1(H, S) = 1 \\ u_2(S, S) = 2 & u_2(S, H) = 1 \end{cases}$$

$$u_1(H, H) = 1$$

$$u_2(H, H) = 0$$

مثال: شکار گوزن
Stag Hunt

$$N = \{1, 2, \dots, 6\}$$

$$a_{-3} = (a_1, a_2, a_4, a_5, a_6)$$

$$a_{-1} = (a_2, \dots, a_6)$$

- جمع بندی نمادها:
- ✓ بازیکن $n, m, j \in \{1, 2, 3, \dots, N\}$

$$A_2 \quad i \in \{1, 2, 3, \dots, N\} = N \quad a_i$$

$$(a_2, a_{-2}) = a \quad \left. \begin{array}{l} s_i \text{ و } a_i \\ s_{-i} < a_{-i} \\ \text{نمايه استراتژي و نهايه اکشن} \end{array} \right\}$$

$$(a_1, a_3, a_4, \dots) \in S \quad a \quad \left. \begin{array}{l} \text{مجموعه اکشن های یک بازیکن} \\ \text{تابع سود یک بازیکن} \end{array} \right\}$$

$$u_i(a_{ij}, a_{-j}) = u_i(a) \quad u_i \quad \left. \begin{array}{l} \text{اولويت ترتيبی یک بازیکن} \end{array} \right\}$$



تعادل در وضعیت رقابتی؟

مثال: نظم در رانندگی:

- عبور دو راننده از یک چهارراه

تعادل در وضعیت رقابتی؟

□ در بازیهای با حرکات همزمان (استراتژیک) با اولویت‌های ترتیبی، بازیکنان به سمت انتخاب چه اکشن‌هایی تمايل دارند؟

□ در وضعیت تعادل چه اتفاقی می‌افتد؟

□ مفهوم تعادل در این مسایل چیست؟



تعادل نش

Nash Equilibrium (N.E.)

تعادل نش

a^* NE

تعریف تعادل نش: در یک بازی استراتژیک با ترجیحات ترتیبی، نمایه

استراتژی a_i یک تعادل نش گوییم اگر برای هر بازیکن i و هر اکشن a_i

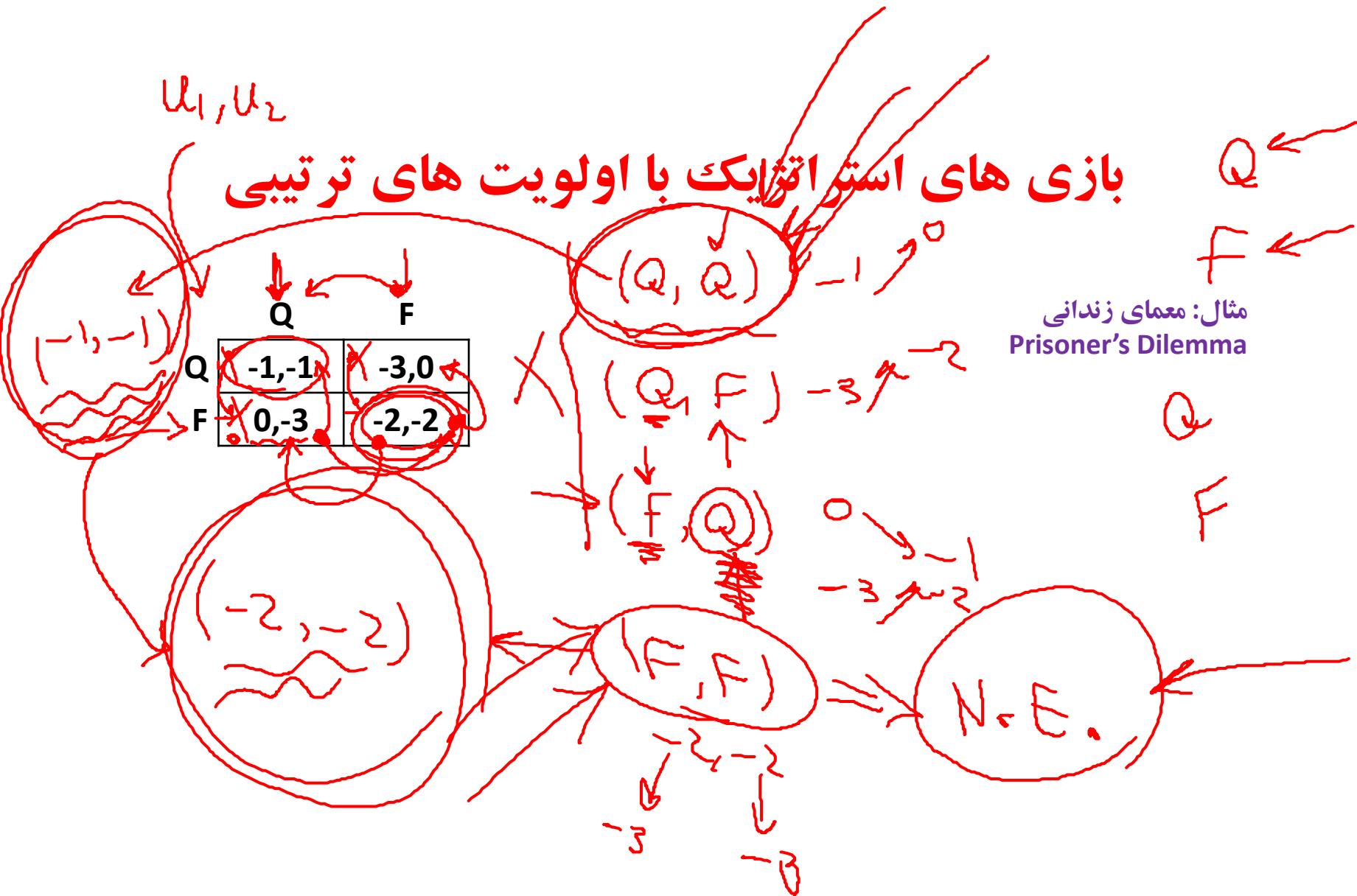
$$u_i(a^*) \geq u_i(a_i) \quad a_{-i}^*$$

داشته باشیم

هیچ بازیکنی از تغییر استراتژی به تنها یعنی سود بیشتری نبرد

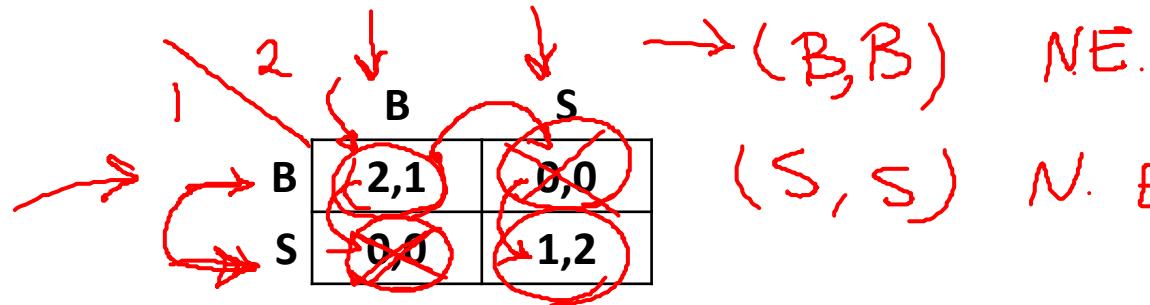
u_1, u_2

بازی های استراتژیک با اولویت های ترتیبی

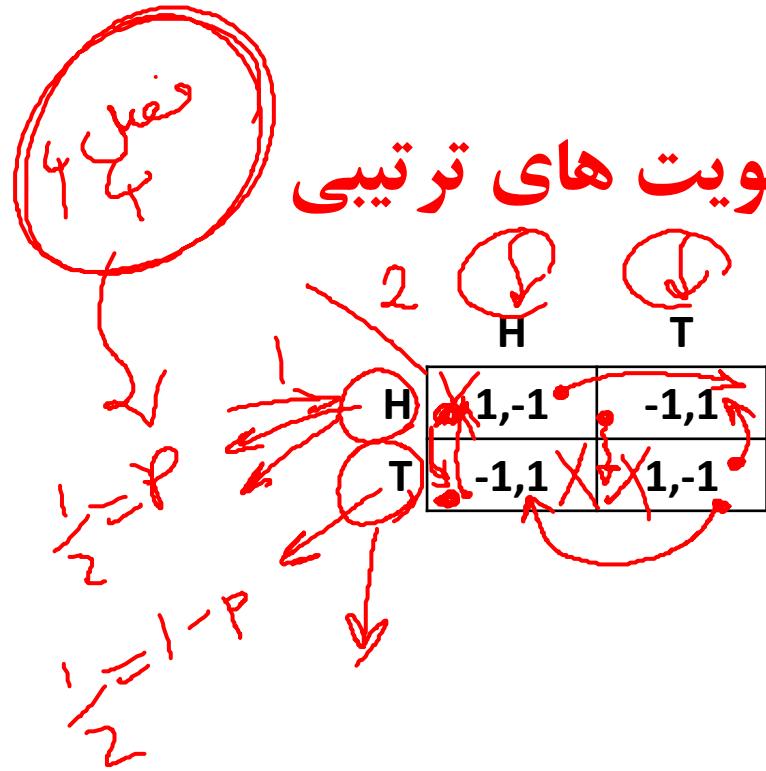


مثال: معماه زندانی
Prisoner's Dilemma

بازی های استراتژیک با اولویت های ترتیبی



مثال: باخ یا استراوینسکی؟
Bach or Stravinsky?
BoS



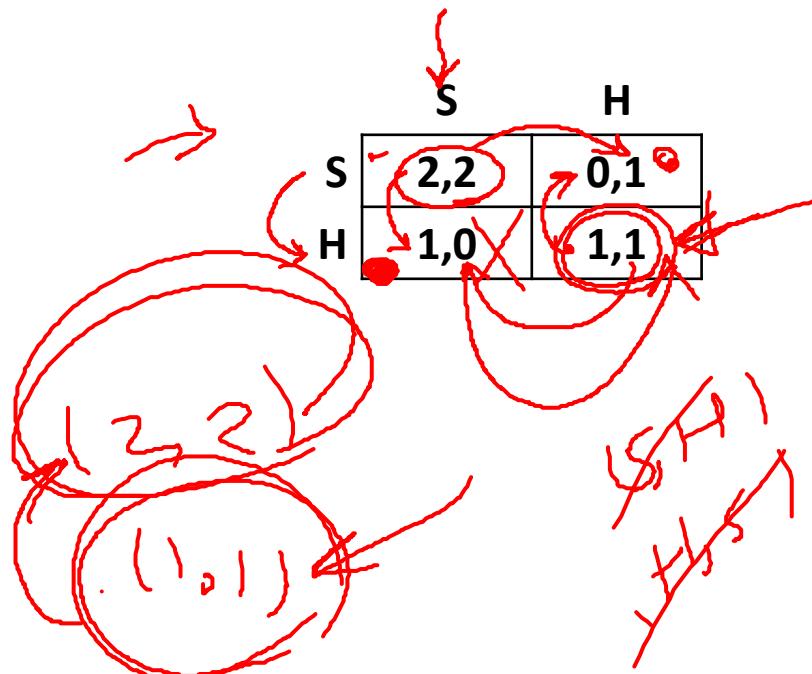
بازی های استراتژیک با اولویت های ترتیبی

HH	X
HT	X
TH	X
TT	X

نمونه
مثال: پرتاب سکه
Matching Pennies



بازی های استراتژیک با اولویت های ترتیبی



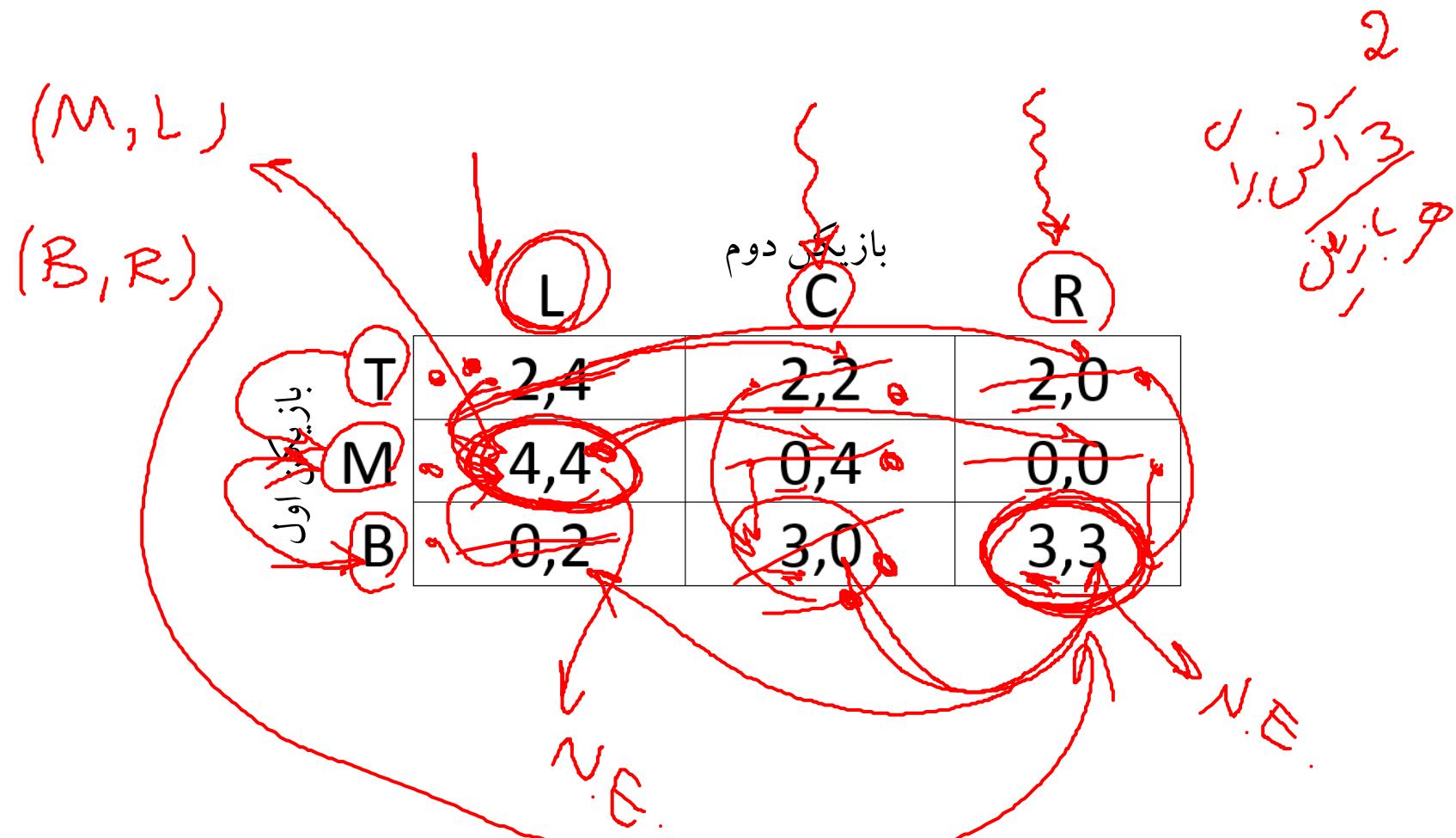
stag

hare

مثال: شکار گوزن
Stag Hunt

$\{(S, S)\}$ N.E.
 $\{(H, H)\}$ N.E.

مثال. لطفا شما تعادل های نش را مشخص کنید



بازی های استراتژیک با اولویت های ترتیبی

توجه:

- بازی ها ممکن است هر تعداد تعادل نش داشته باشند؛ صفر، یک، دو یا
- تعادل نش الزاماً یک استراتژی پروفایل خوب برای بازیکنان نیست، حتی ممکن است بدترین انتخاب باشد.

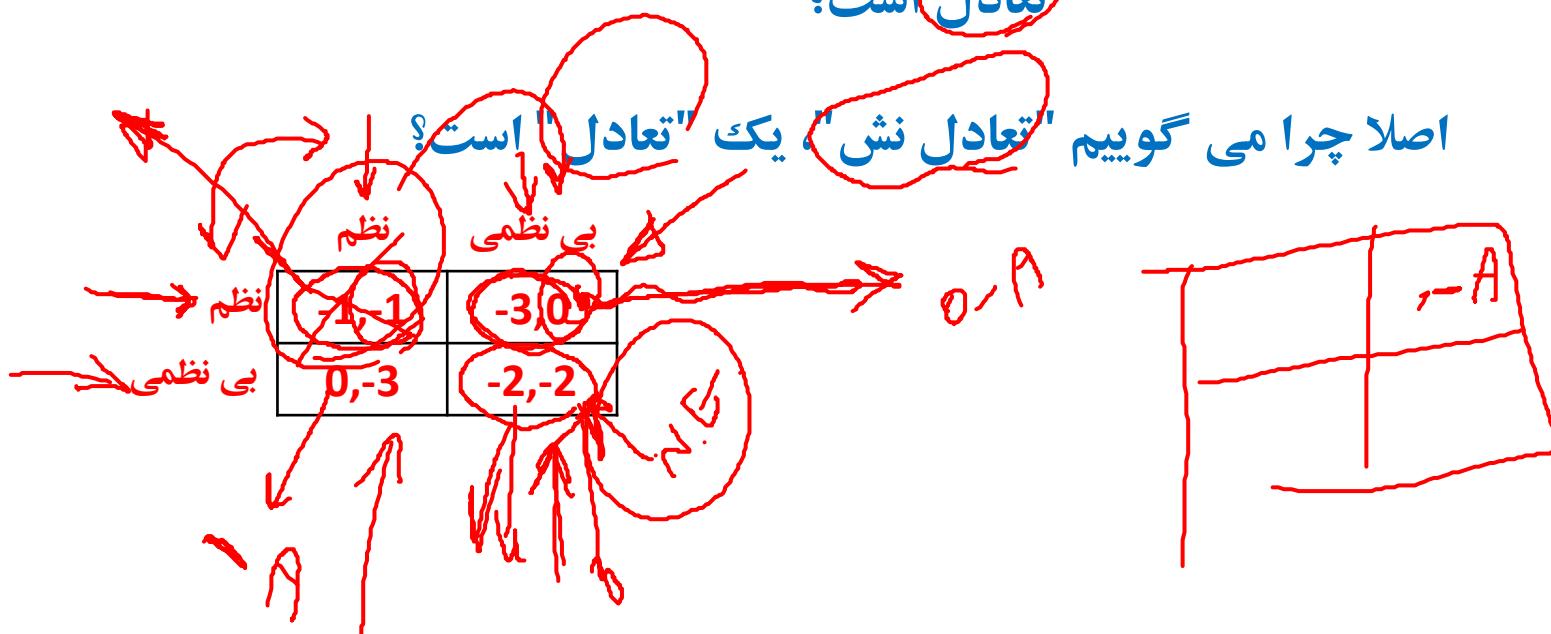
0,0	2,0
0,2	1,3

- تعیین پروفایل های تعادل نش می تواند بسیار مشکل و عملاً غیرممکن باشد (به دلیل تعداد زیاد بازیکنان یا ...).

بازی های استراتژیک با اولویت های ترتیبی

اما یک سوال مهم:

از نظر کاربردی، تحت چه شرایطی "تعادل نش" نشان دهنده مفهوم تعادل است؟



بازی های استراتژیک با اولویت های ترتیبی

- در بازی (رقابت و تعامل) هر بازیکن با هدف افزایش سود شخصی اش، بهترین اکشن خود را با توجه به اکشن سایر بازیکنان انتخاب می کند.
- ✓ سوال: اطلاعات بازیکن از رفتار و حرکات سایرین چگونه شکل می گیرد؟

بازی های استراتژیک با اولویت های ترتیبی

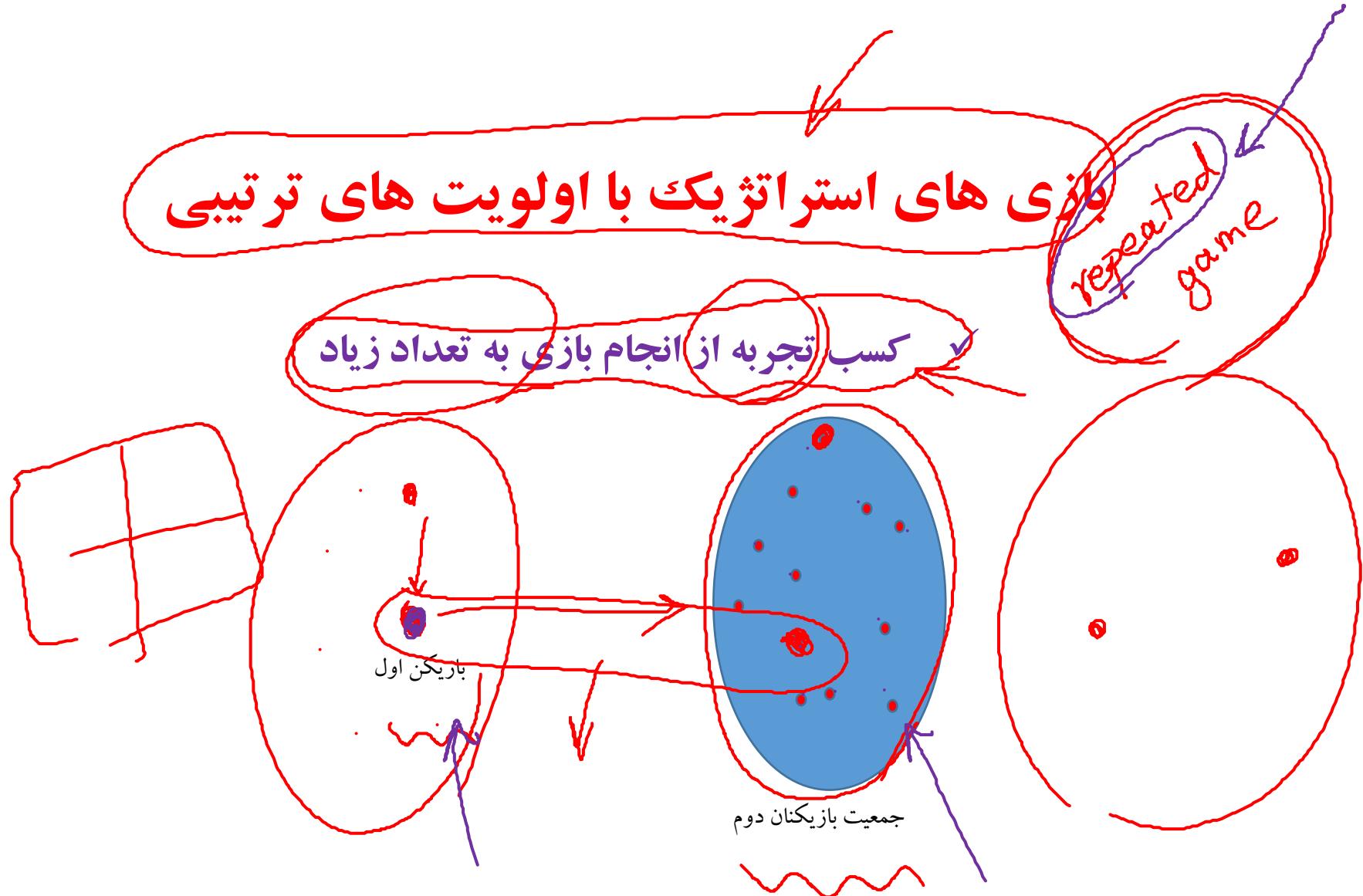
پس لازم است در مورد این مساله فکر کنیم که:

دانش (belief) یک بازیکن نسبت به اطلاعات بازی (حرکات و ترجیحات سایر بازیکنان) چگونه شکل می گیرد؟

✓ کسب تجربه از انجام بازی به تعداد زیاد

✓ علم قبل از انجام بازی بر اساس مدلسازی و تحلیل

بازی های استراتژیک با اولویت های ترتیبی



بازی های استراتژیک با اولویت های ترتیبی

□ کسب تجربه و حرکت به سمت تعادل در یک بازی (به فرض وجود) باید هوشمندانه و با دید کافی باشد، نه

صرفا بر اساس دیدگاه محلی.

بازیکن دوم

		L	C	R
		2,4	2,5	4,0
بازیکن یک	T	4,4	0,4	0,0
	M	0,2	3,0	3,3
	B			

```
graph TD; 40((4,0)) --> 33((3,3)); 33 --> 30((3,0)); 30 --> 04((0,4)); 04 --> 25((2,5)); 25 --> 40;
```

بازی های استراتژیک با اولویت های ترتیبی

پس لازم است در مورد این مساله فکر کنیم که:
دانش (belief) یک بازیکن نسبت به اطلاعات بازی (حرکات و ترجیحات سایر
بازیکنان) چگونه شکل می گیرد؟

- ✓ کسب تجربه از انجام بازی به تعداد زیاد ➔
- ✓ سخاهم قبل از انجام بازی بر اساس مدل سازی و تحلیل ➔

بازی های استراتژیک با اولویت های ترتیبی

اما یک سوال مهم:

از نظر کاربردی، تحت چه شرایطی تعریف "تعادل نش"， نشان دهنده مفهوم تعادل است؟

اصلًا چرا می گوییم "تعادل نش"， یک "تعادل" است؟

حال جواب شما چیست؟ (یعنی، اگر یک مساله واقعی به شما داده شود و بخواهید بدانید که آیا مفهوم تعادل نش می تواند تعادل آن مساله را به ما بدهد، چه نکاتی را در نظر می گیرید؟

یادآوری: تعادل نش Nash Equilibrium (N.E.)

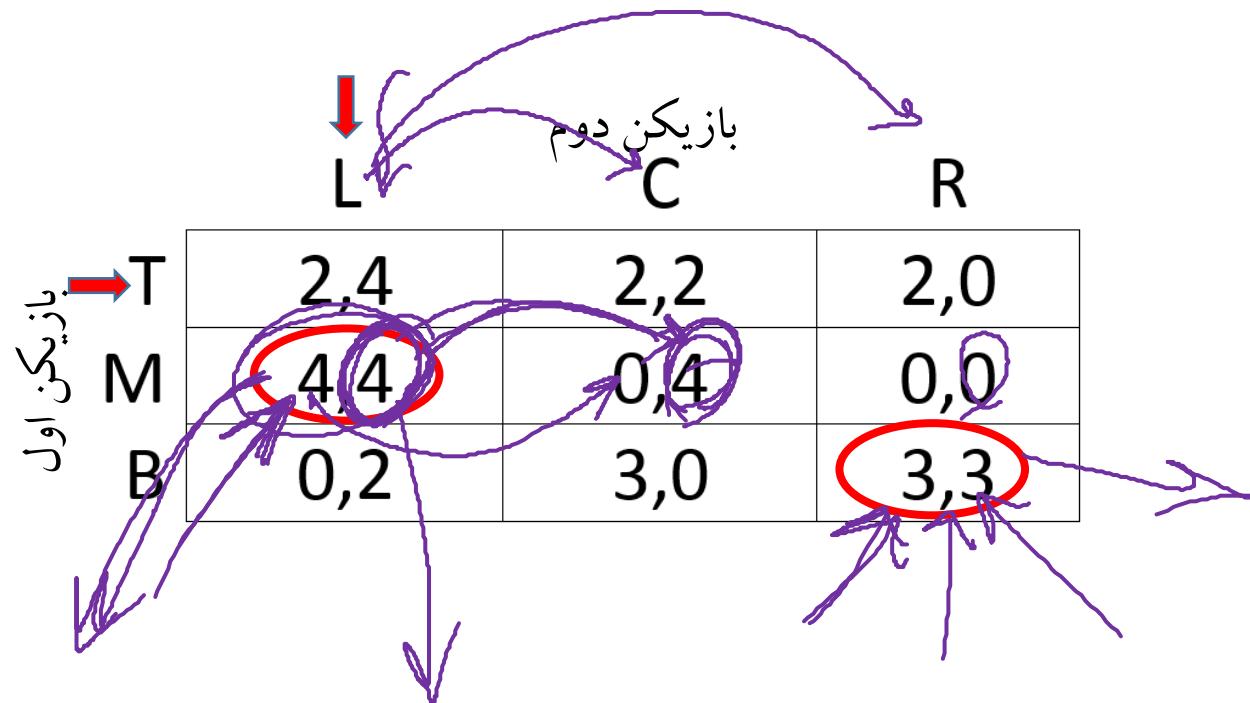
تعریف تعادل نش: در یک بازی استراتژیک با ترجیحات ترتیبی، نمایه

استراتژی a_i^* را یک تعادل نش گوییم اگر برای هر بازیکن i و هر اکشن

$$u_i(a^*) \geq u_i(a_i, a_{-i}^*)$$

هیچ بازیکنی از تغییر استراتژی به تنها یی، سود بیشتری نبرد

مثال



تعادل نش اکید و غیر اکید strict N.E.

تعریف تعادل نش اکید: در یک بازی استراتژیک با ترجیحات ترتیبی، نمایه استراتژی a^* را یک تعادل نش گوییم اگر برای هر بازیکن i و هر اکشن a_i

$$u_i(a^*) > u_i(a_i, a_{-i}^*)$$

هر بازیکن از تغییر استراتژی به تنها یی، سود کمتری برد



مثال

بازیکن دوم

		L	C	R
		2,4	2,2	2,0
بازیکن اول	T	4,4	0,4	0,0
	M	0,2	3,0	3,3
	B			

The diagram illustrates a cycle of payoffs between two players. It shows a clockwise cycle of payoffs starting from the top-left cell (T, L) with a value of 2,4. The cycle continues through the cells (C, L) with 2,2, (R, L) with 2,0, (R, C) with 0,0, (B, C) with 0,4, (B, R) with 3,3, and finally back to (T, L) with 4,4. The cells (4,4), (0,4), and (3,3) are circled in red, while the other cells are white.

مثال

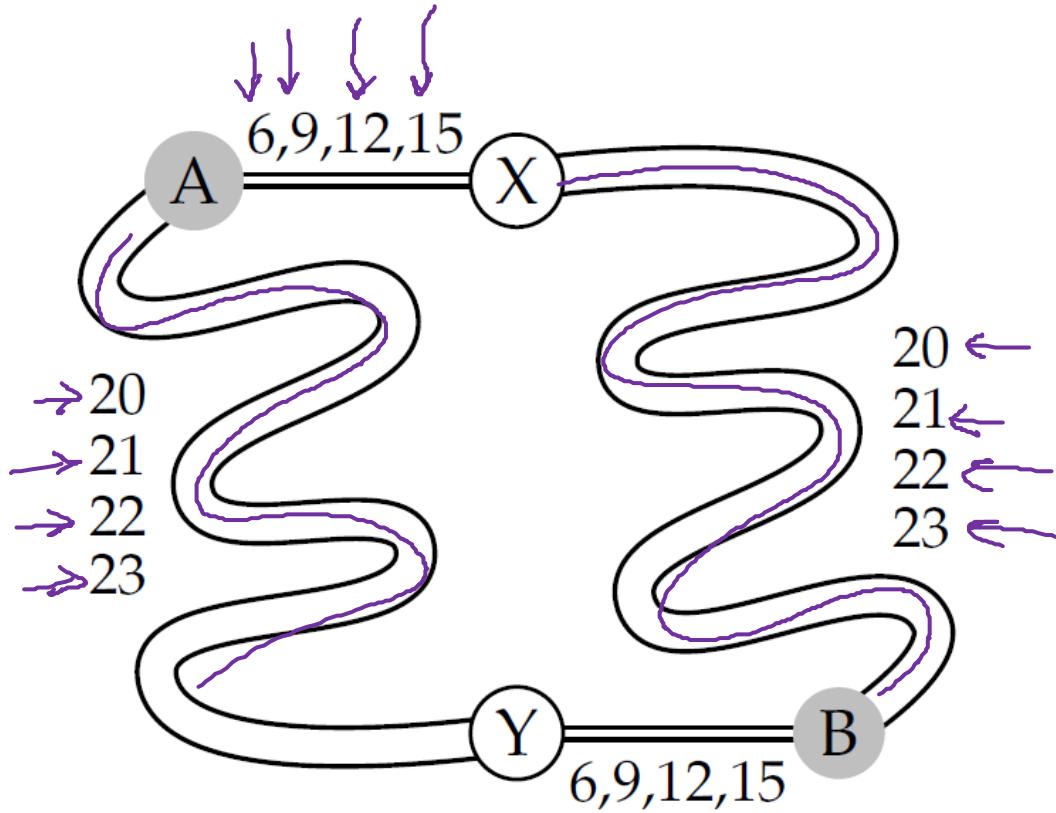
بازیکن دوم

		L	C	R
		2,4	2,5	4,0
بازیکن اول	T	4,4	0,4	0,0
	M	0,2	3,0	3,3
	B			

The diagram illustrates a cycle of arrows connecting the payoffs of the two players. Blue arrows point from (4,4) to (2,5), from (2,5) to (0,4), from (0,4) to (3,0), and from (3,0) back to (4,4).

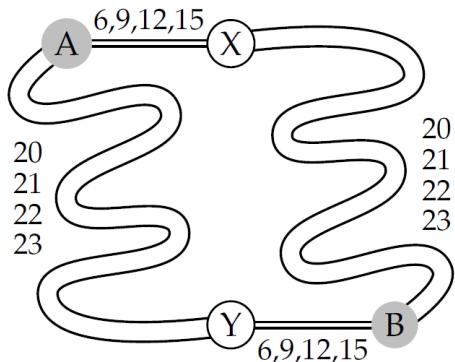
پایان تعادل نش اکید و غیراکید

مثال: تناقض نمای جاده میان بر Braess's Paradox



- ۴ ماشین قصد مسافرات از شهر A به شهر B را دارند.
- مسیرهای قابل انتخاب برای هر ماشین AXB یا AYB است.
- هدف (ترجیح) ماشین‌ها: کمترین زمان سفر زمان عبور از جاده به طول مسیر، عرض مسیر و میزان ترافیک مسیر بستگی دارد.
- سوال: در وضعیتی که ماشین‌ها بدون هماهنگی و خودخواهانه تصمیم بگیرند چه اتفاقی می‌افتد؟

مثال: تناقض نمای جاده میان بر Braess's Paradox

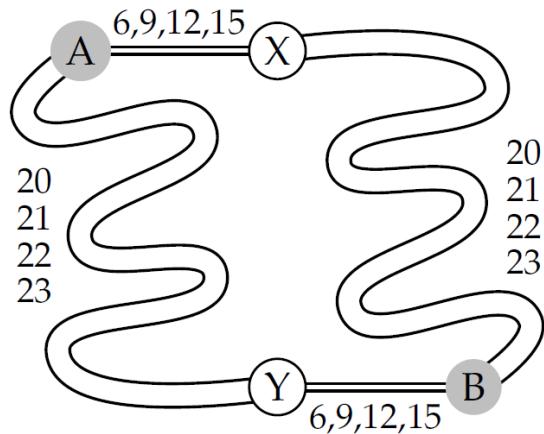


مدل بازی:

- مجموعه بازیکنان: $N = \{1, 2, 3, 4\}$
- مجموعه اکشن‌های بازیکنان: $A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = \{AXB, AYB\}$
- ترجیحات بازیکنان روی نمایه استراتژی‌ها: هر بازیکن بین هر دو نمایه استراتژی ممکن، مسیر کوتاه‌تر (از نظر زمانی) را ترجیح می‌دهد

نمایه استراتژی	زمان اولی	زمان دومی	زمان سومی	زمان چهارمی
(AXB, AYB, AXB, AXB)	34	26	34	34
(AXB, AYB, AYB, AYB)	26	34	34	34
...
(AYB, AYB, AYB, AYB)	38	38	38	38

مثال: تناقض نمای جاده میان بر Braess's Paradox

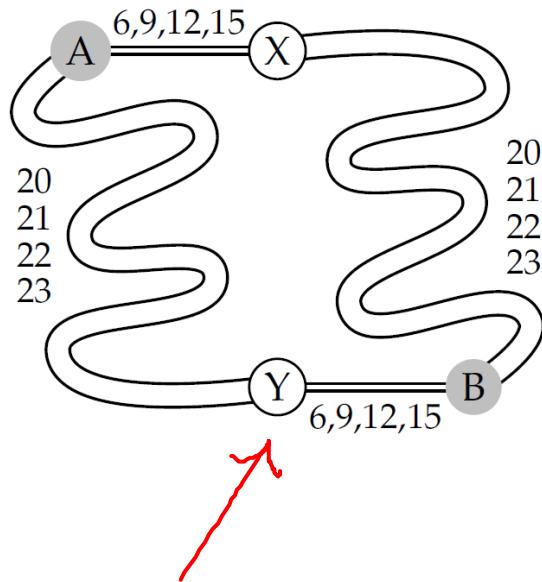


زمان مسافت در مسیر AXB

زمان مسافت در مسیر AYB

ردیف	تعداد ماشین‌ها در مسیر AXB	زمان مسافت در مسیر AXB	تعداد ماشین‌ها در مسیر AYB	زمان مسافت در مسیر AYB
1	• 4	38	• 0	-
2	• 3	34	• 1	26
3	• 2	30	• 2	30
4	• 1	26	• 3	34
5	X 0	-	• 4	38

مثال: تناقض نمای جاده میان بر Braess's Paradox

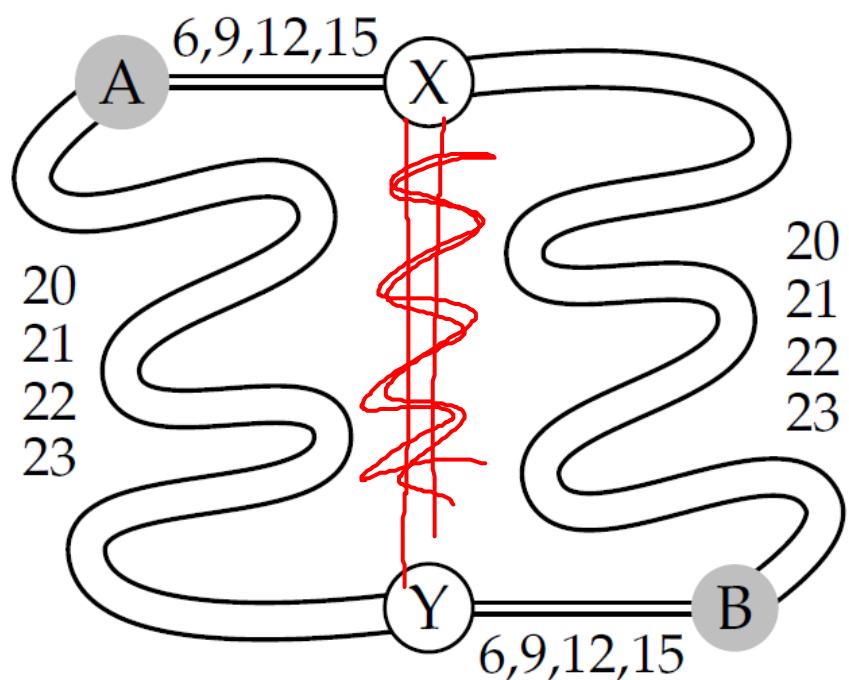


ردیف	تعداد ماشین‌ها در مسیر AXB	زمان مسافت در مسیر AXB	تعداد ماشین‌ها در مسیر AYB	زمان مسافت در مسیر AYB
	AXB	AXB	AYB	AYB
1	4	38	0	-
2	3	34	1	26
3	2	30	2	30
4	1	26	3	34
5	0	-	4	38

نتیجه:

- حالتایی که در آن از هر مسیر دو ماشین عبور می‌کند، تعادل نش هستند (شش تعادل نش)
- با جستجوی سایر سطرهای مشاهده می‌شود که تعادل نش دیگری نداریم
- در وضعیت تعادل، هر ماشین به مدت ۳۰ دقیقه در راه است

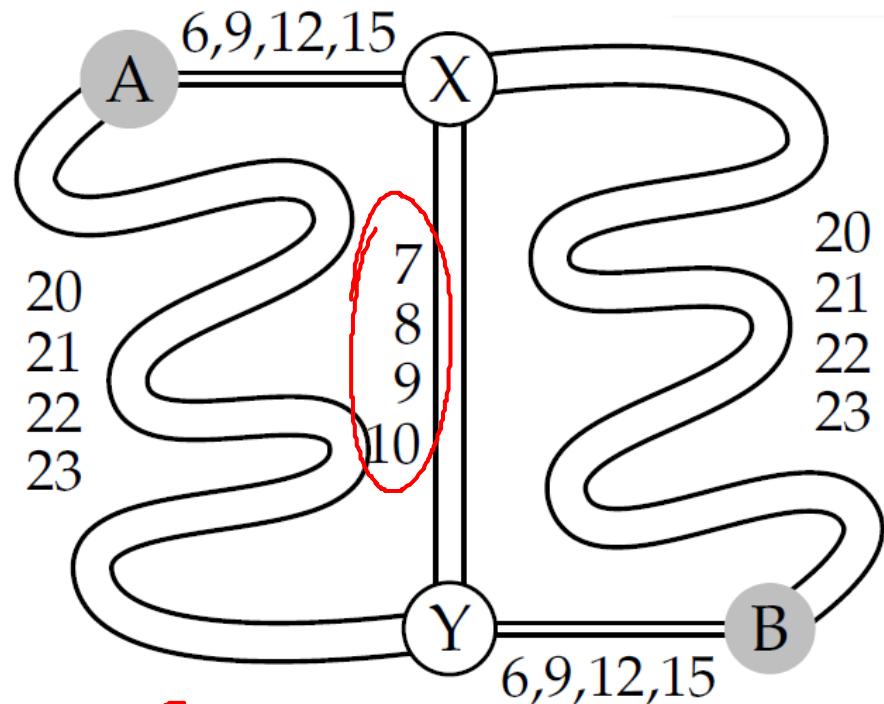
مثال: تناقض نمای جاده میان بر Braess's Paradox



30

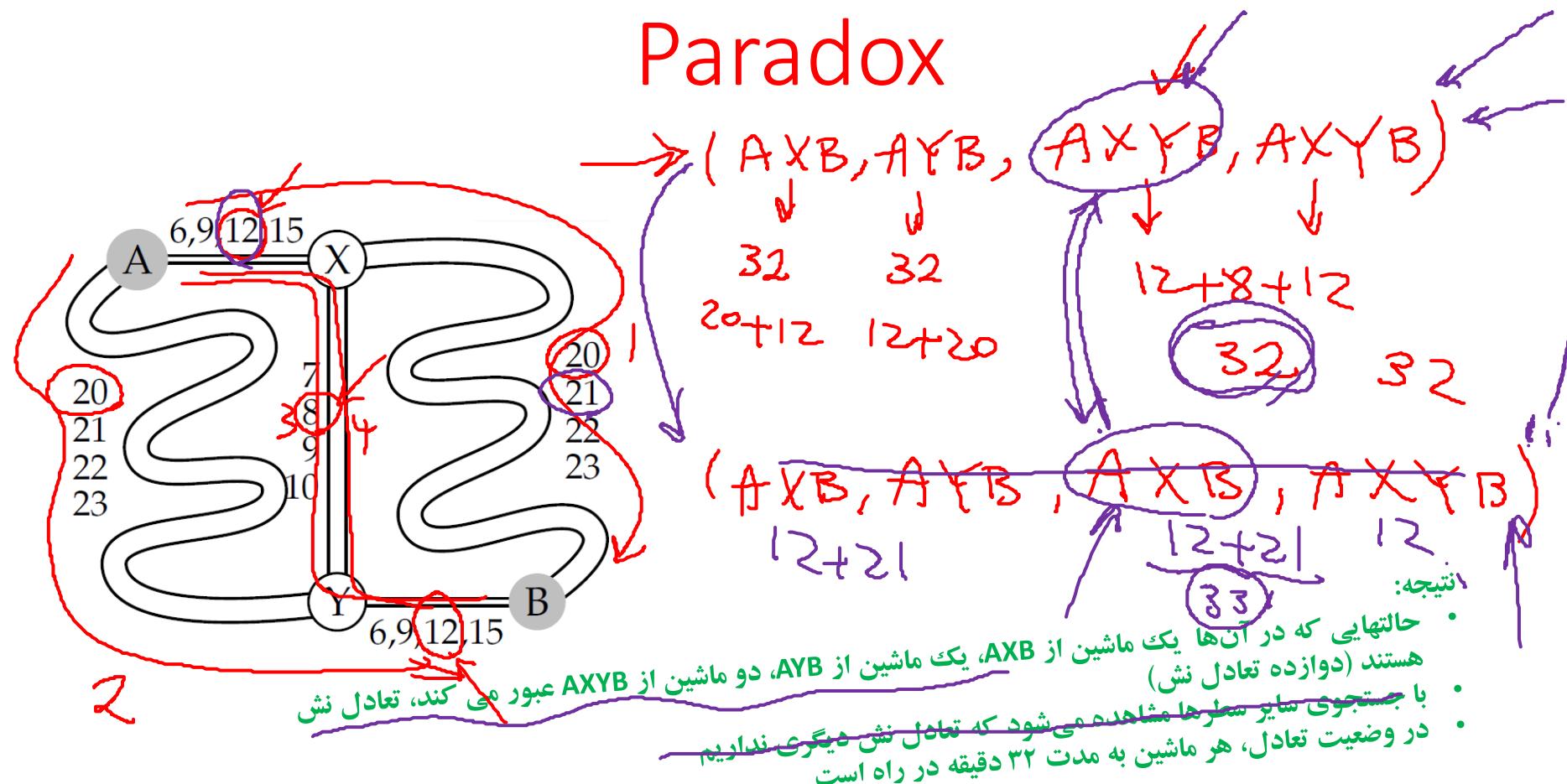
Rea

< 30

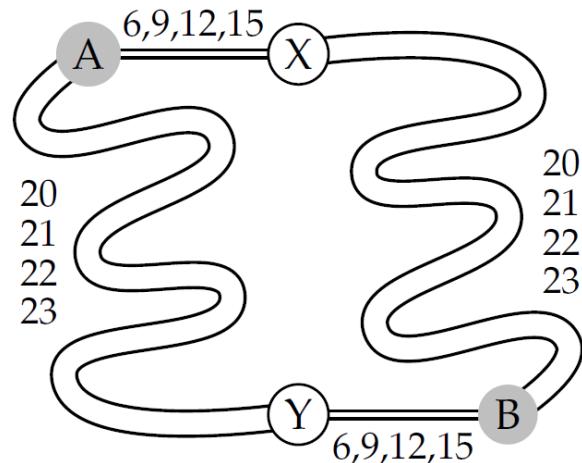


مثال: تناقض نمای جاده میان بر

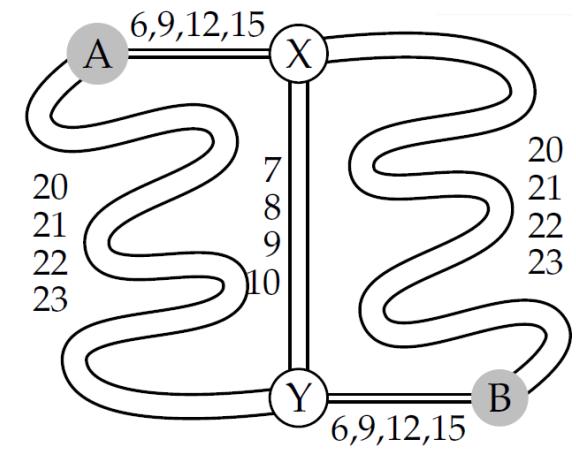
Paradox



مثال: تناقض نمای جاده میان بر Braess's Paradox



۳۰ دقیقه



۳۲ دقیقه

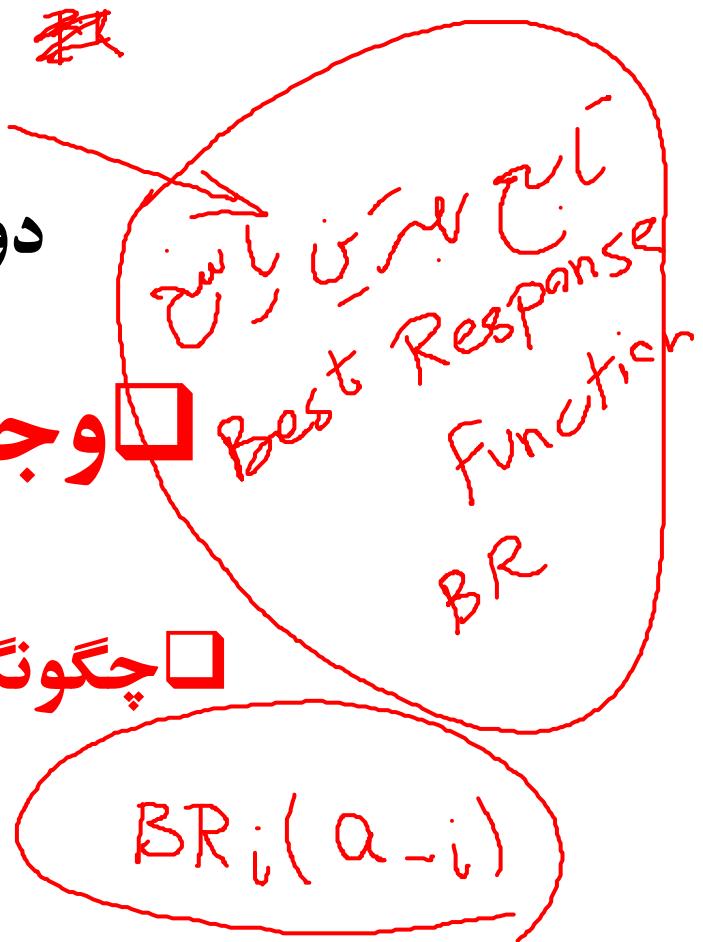
پایان مثال تناقض نمای جاده میان بر



دو سوال اساسی:

وجود تعادل نش?

چگونگی یافتن تعادل نش?



تابع بهترین پاسخ

$$BR \quad \begin{matrix} B_i(a_{-i}) \\ \text{تابع بهترین پاسخ} \end{matrix}$$

- تعریف: تابع بهترین پاسخ بازیکن i ام به نمایه استراتژی سایر بازیکنان، یعنی a_{-i} ، عبارت است از مجموعه اکشن‌هایی از بازیکن i ام که تابع سود این بازیکن را با فرض a_{-i} حداکثر کند. به بیان ریاضی:

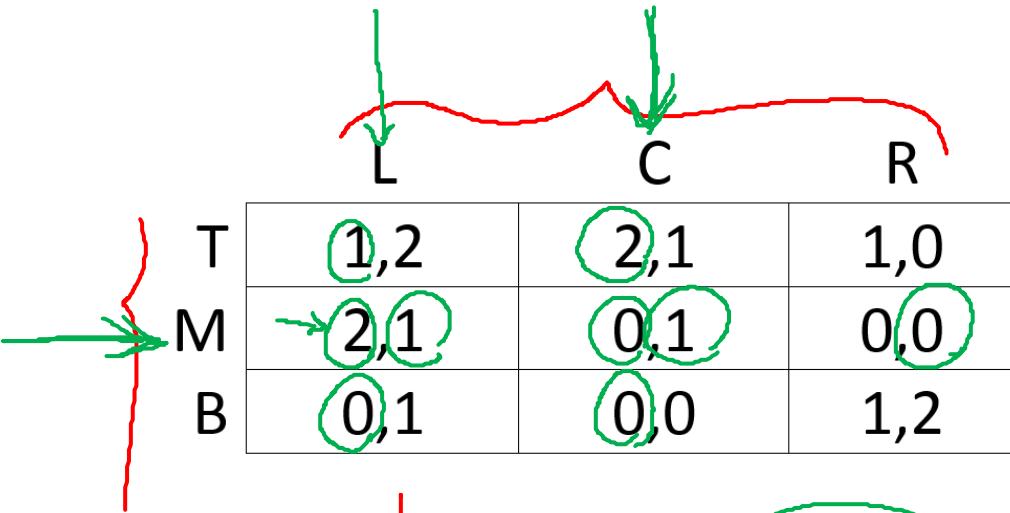
$$B_i(a_{-i}) \triangleq \{a_i \in A_i \mid u_i(a_i, a_{-i}) \geq u_i(a'_i, a_{-i}) \quad \text{for all } a'_i \in A_i\}$$

توجه:

- در حالت کلی $B_i(a_{-i})$ یک مجموعه است که می‌تواند تهی یا یک یا بیش از یک عضوی باشد.
- در حالتی که نه عضوی باشد آن را بانماد $b_i(a_{-i})$ نمایش می‌دهیم.

Best Response Function

تابع بهترین پاسخ



$$B_1(L) = \{M\},$$

$$B_1(C) = \{T\},$$

$$B_2(T) = \{L\},$$

$$B_2(M) = \{L, C\},$$

$$B_1(R) = \{T, B\},$$

$$B_2(B) = \{R\},$$

$$B_2(M) = \{L, C\}$$

• مثال:

$$a_{-1} = a_2$$

$$a_{-2} = a_1$$

تابع بهترین پاسخ Best Response Function

$$(a_1^*, a_2^*, \dots, a_n^*)$$

بازی‌شن

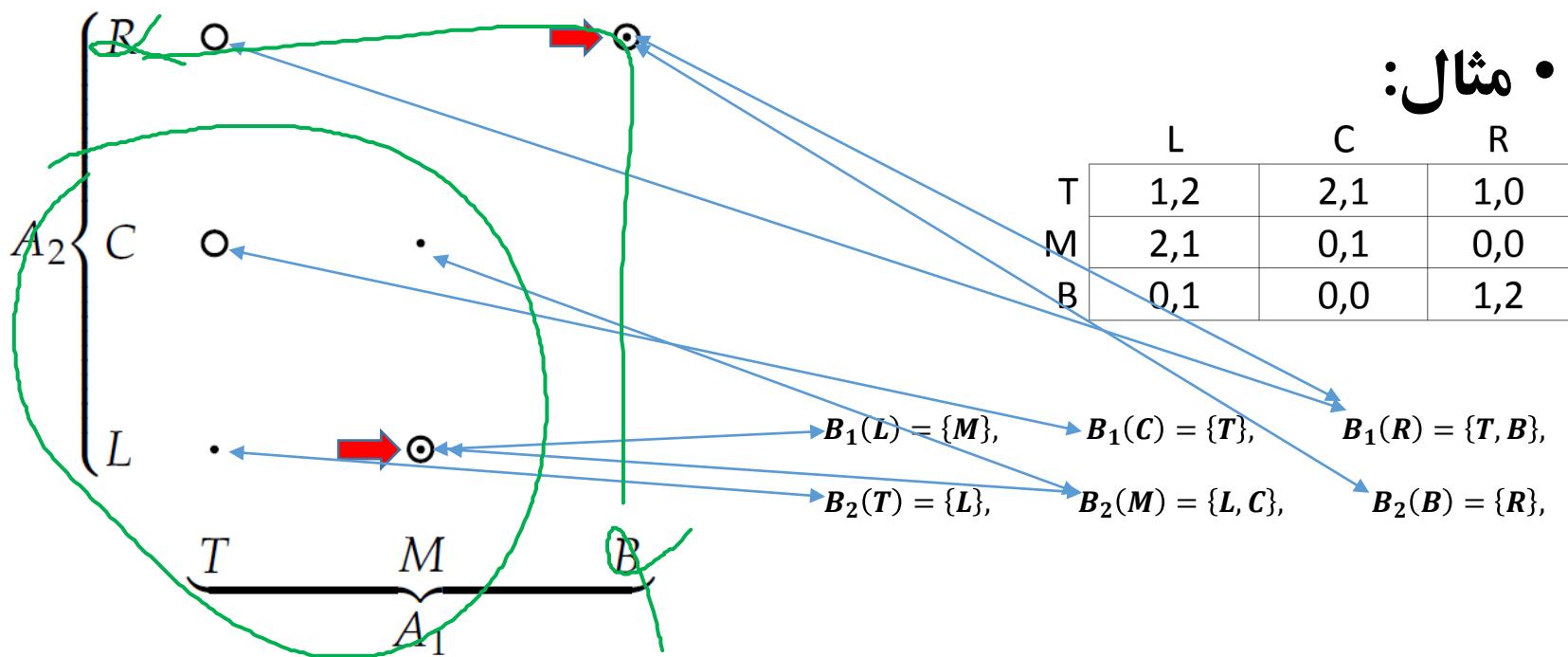
- قضیه: یک نمایه استراژی a^* یک تعادل نش است اگر و تنها اگر برای هر بازیکن i داشته باشیم $a_i^* \in B_i(a_{-i}^*)$

- به بیان دیگر، همه نقاط تعادل نش از حل دستگاه $a_i = B_i(a_{-i})$ به دست می‌آیند.

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 = B_1(a_{-1}) \\ \vdots \\ a_N = B_N(a_{-N}) \end{array} \right.$$

$B_i \rightarrow b_i$

تابع بهترین پاسخ Best Response Function



تابع بهترین پاسخ Best Response Function

به عنوان تمرین با کمک تابع بهترین پاسخ، تعادل نش را برای مثال های قبلی (معماه زندانی، پرتاب سکه، شکار گوزن-خرگوش و ...) بیابید.

• به عنوان تمرین، قضیه اسلامید ۶۴ را اثبات کنید.

تابع بهترین پاسخ Best Response Function

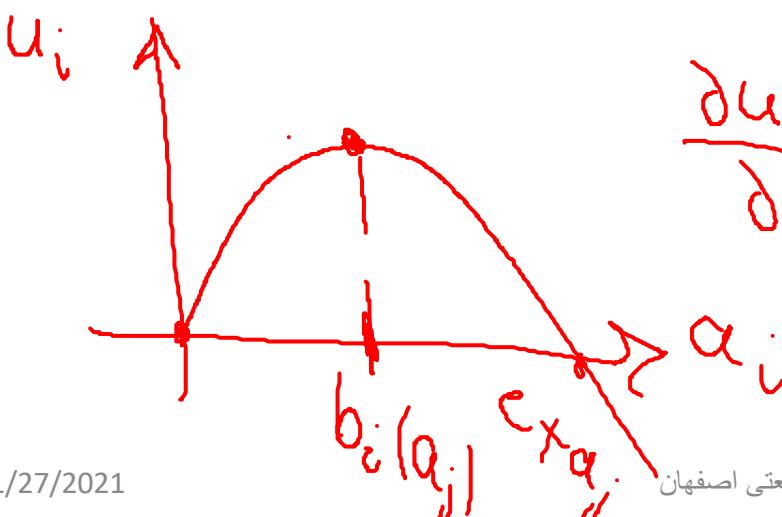
$$a_i, a_j \in \mathbb{R}^+ \quad a_i \in A_i$$

$\downarrow \quad \downarrow$

- یک مثال از بازی با مجموعه اکشن های پیوسته:

- تعامل هم افزای:

(دو نفر در حال تلاش برای انجام یک کار مشترک هستند. برای هر فرد، هر چه طرف مقابل بیشتر تلاش کند منفعت بیشتری حاصل می شود، اما تلاش خود فرد تا حدی باعث افزایش منفعت می شود و پس از آن حد، تلاش بیشتر باعث کاهش منفعت می شود. به طور خاص، فرض کنید تابع سود نفر i ام برابر است با $u_i(a_i, a_j) = a_i(c + a_j - a_i)$ که در آن a_i مقدار تلاش نفر i است و c یک ثابت مثبت است.



$$\frac{\partial u_i}{\partial a_i} = 0$$

- تعادل؟

تابع بهترین پاسخ / Best Response Function

$$\frac{\partial u_i}{\partial a_i} = c + a_j - a_i + (-1)a_i = c + a_j - 2a_i = 0 \rightarrow a_i = \frac{c + a_j}{2}$$

یک مثال از بازی با مجموعه اکشن‌های پیوسته:

$$u_i(a_i, a_j) = a_i(c + a_j - a_i)$$

• تعامل هم افزای •

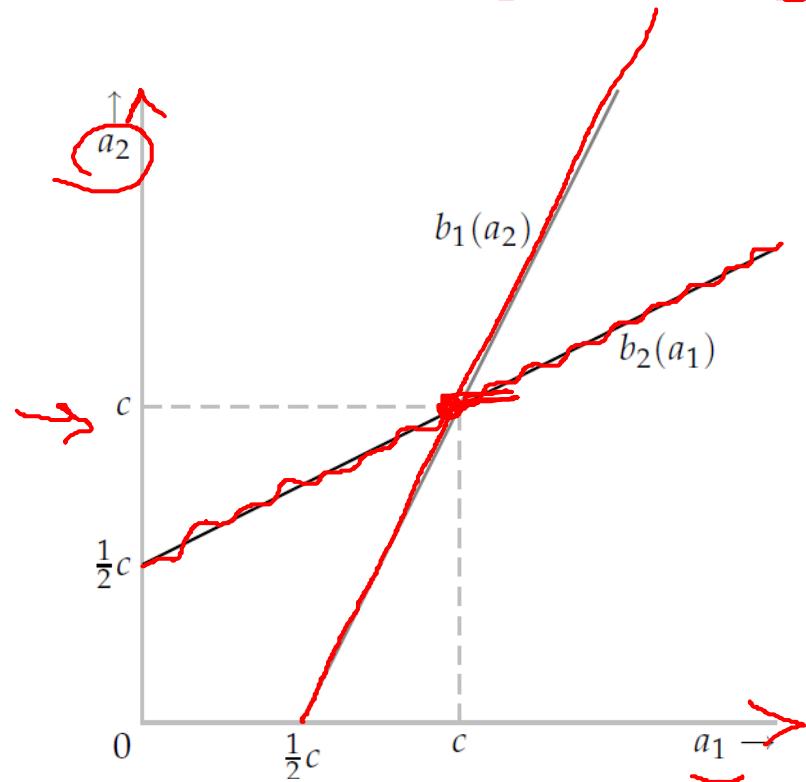
$$a^* = (a_1^*, a_2^*) \quad \frac{\partial u_i(a_i, a_j)}{\partial a_i} = 0 \Rightarrow b_i(a_j) = \frac{1}{2}(c + a_j) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a_1^* = b_1(a_2^*) \\ a_2^* = b_2(a_1^*) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a_1^* = \frac{1}{2}(c + a_2^*) \\ a_2^* = \frac{1}{2}(c + a_1^*) \end{cases} \Rightarrow$$

$$a_1^* = a_2^* = c$$

تابع بهترین پاسخ

$$\underline{a}_1^* = b_1(\underline{a}_2^*) \quad \underline{a}_2^* = b_2(\underline{a}_1^*)$$



- یک مثال از بازی با مجموعه اکشن های پیوسته:
- تعامل هم افزای:

$$b_i(a_j) = \frac{1}{2}(c + a_j)$$

تابع بهترین پاسخ - مثال

$$c_1 \in [0, w_1]$$

$$c_2 \in [0, w_2]$$

$$w_1 \quad w_2$$

• مشارکت در امور علم المنفعه

• بازیکنان: دو فرد ذینفع در استفاده از یک امر مشترک، $i = 1, 2$

• مجموعه اکشن ها: برای هر بازیکن، میزان سرمایه گزاری c_i در توسعه

-

مجموع سرمایه گزاری

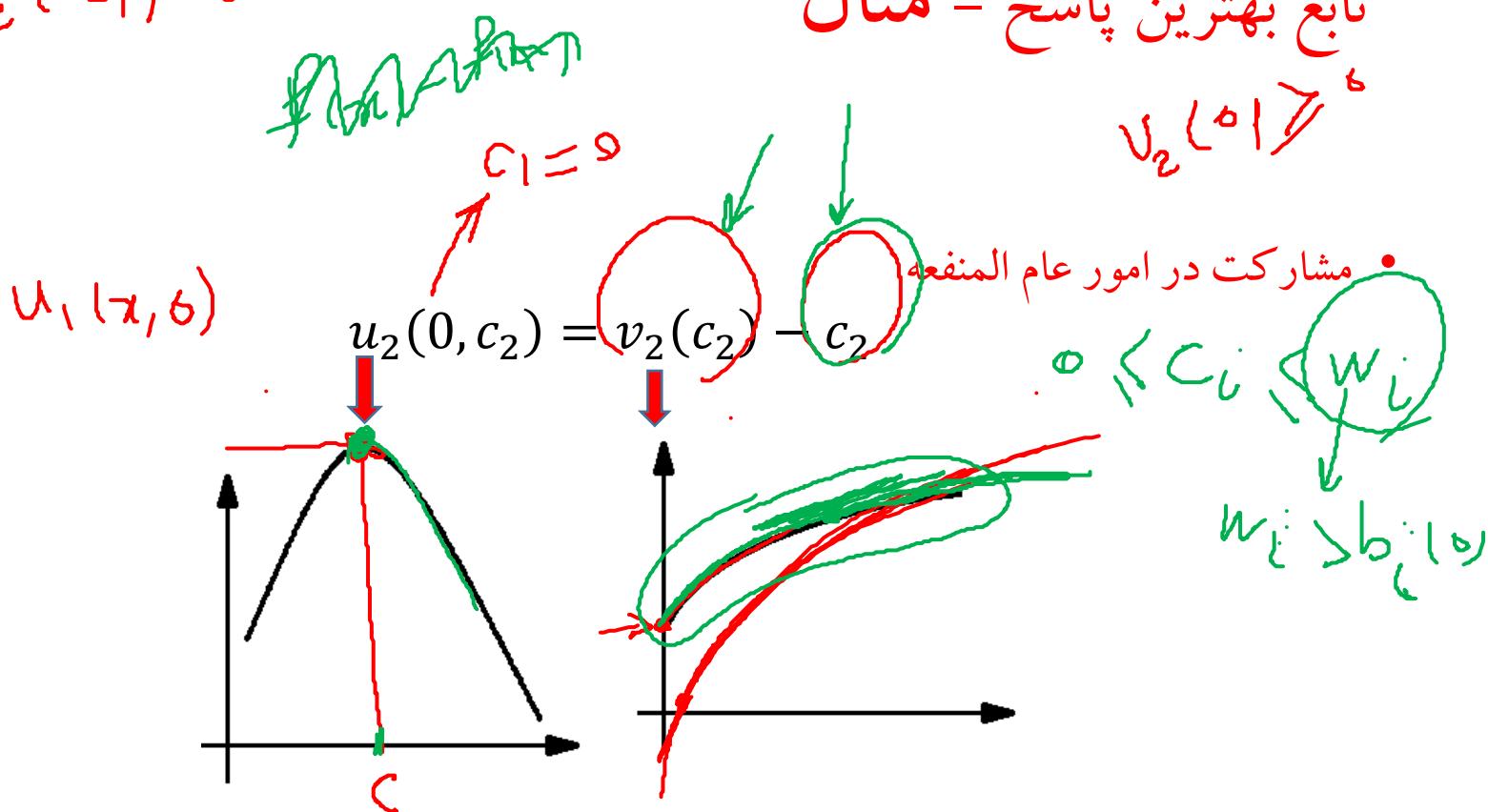
• اولویت بازیکنان، بر اساس تابع سود

$$u_i(c_1, c_2) = v_i(\underbrace{c_1 + c_2}_{منفعت بازیکن}) - \underbrace{c_i}_{از نتیجه کار}$$

منفعت بازیکن از نتیجه کار

تابع بهترین پاسخ - مثال

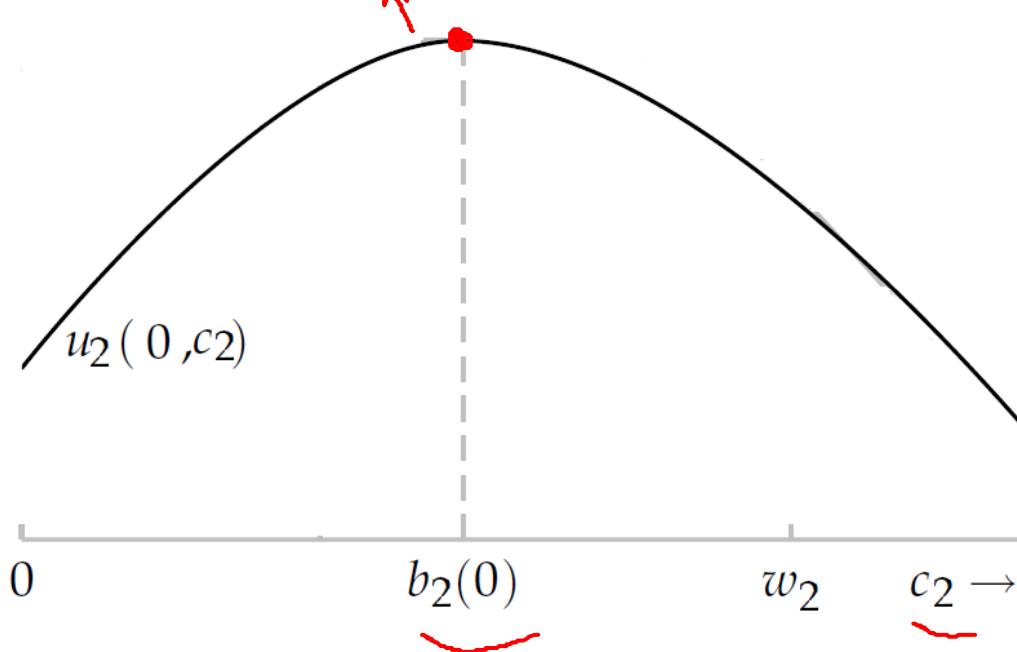
$$u_2(c_1, c_2) = v_2(c_1 + c_2) - c_2$$



تابع بهترین پاسخ - مثال

• مشارکت در امور عام المنفعه

$$u_2(0, c_2) = v_2(c_2) - c_2$$



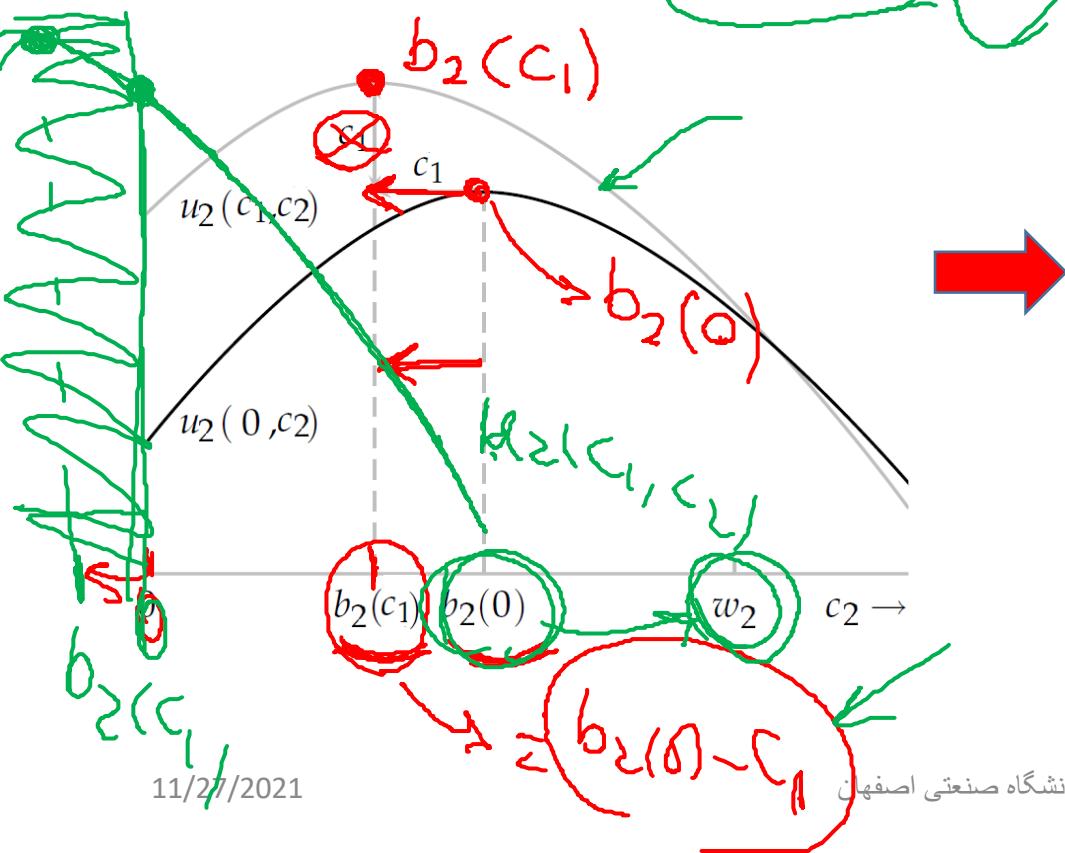
تابع بهترین پاسخ - مثال

$$0 \leq c_i \leq w_i$$

$$u_2(c_1, c_2) = v_2(c_1 + c_2) - c_2$$

- مشارکت در امور عام المنفعه

$$= u_2(0, c_1 + c_2) + c_1$$



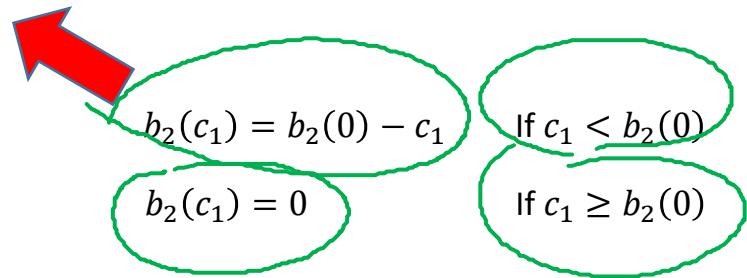
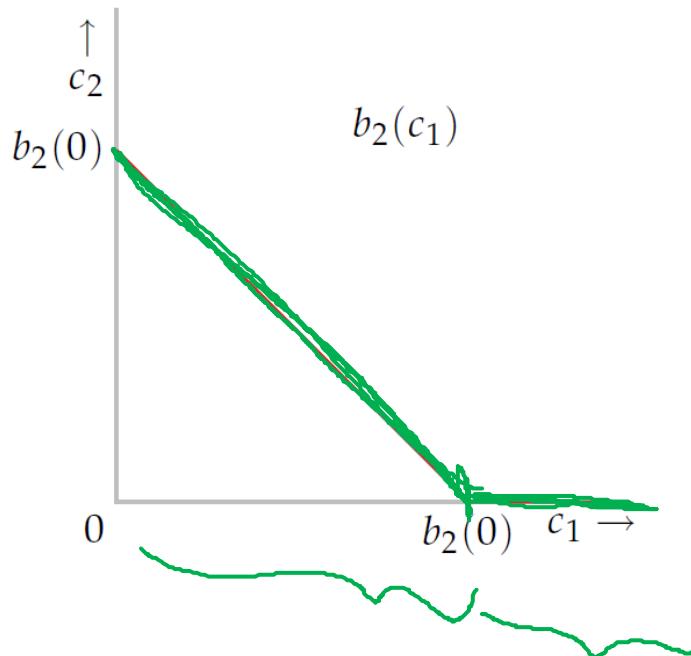
$$\begin{cases} b_2(c_1) = b_2(0) - c_1 \\ b_2(c_1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{If } c_1 < b_2(0) \\ \text{If } c_1 \geq b_2(0) \end{cases}$$

تابع بهترین پاسخ - مثال

- مشارکت در امور عام المنفعه

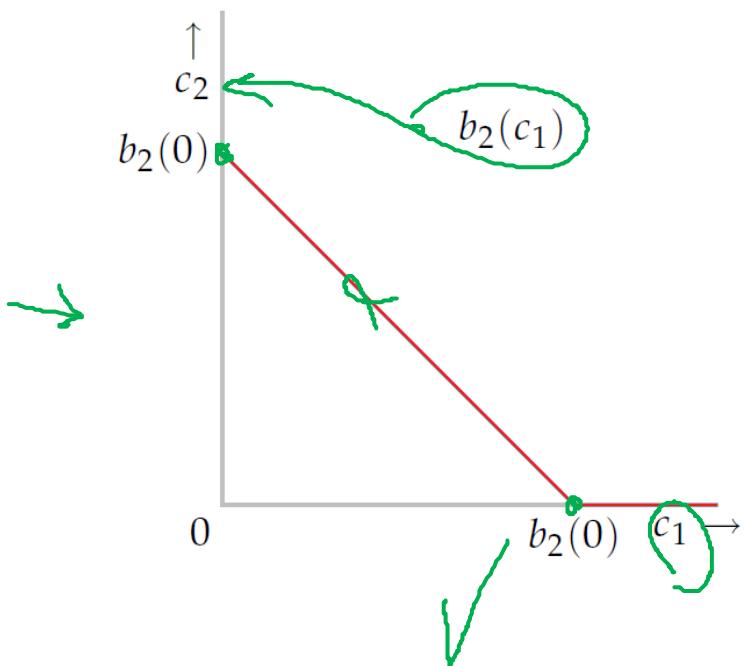
$$b_2(c_1) = \begin{cases} b_2(0) - c_1 & c_1 < b_2(0) \\ 0 & c_1 \geq b_2(0) \end{cases}$$



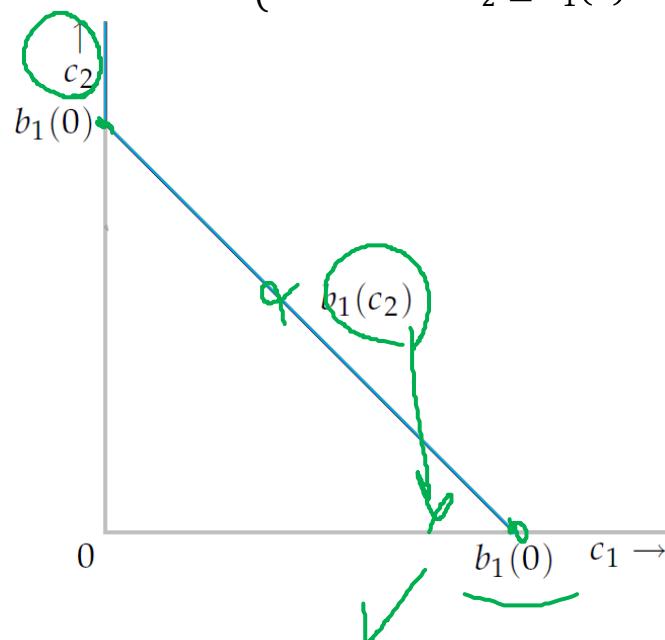
تابع بهترین پاسخ - مثال

$a_1 \quad a_2$
 (c_1^*, c_2^*)

$$b_2(c_1) = \begin{cases} b_2(0) - c_1 & c_1 < b_2(0) \\ 0 & c_1 \geq b_2(0) \end{cases}$$

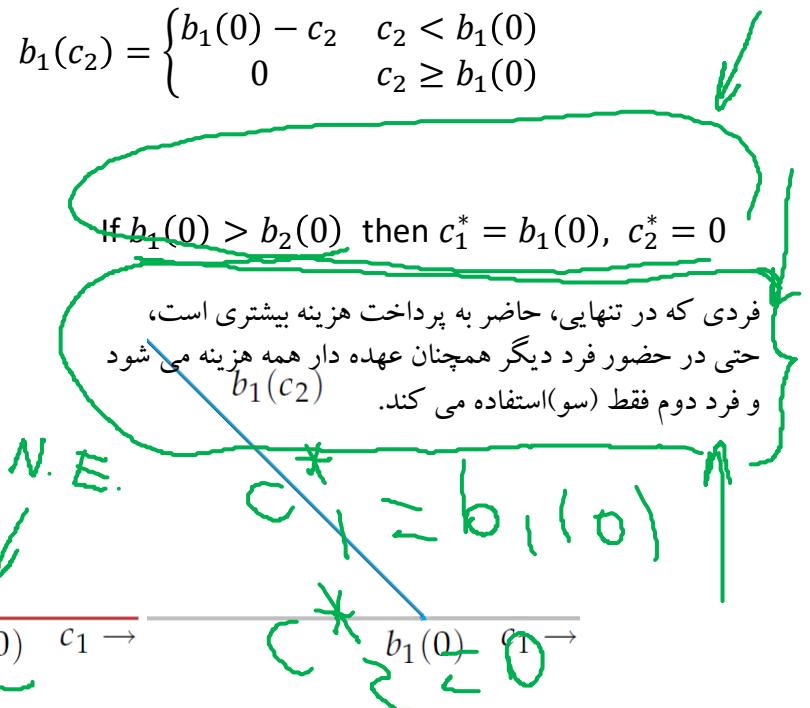
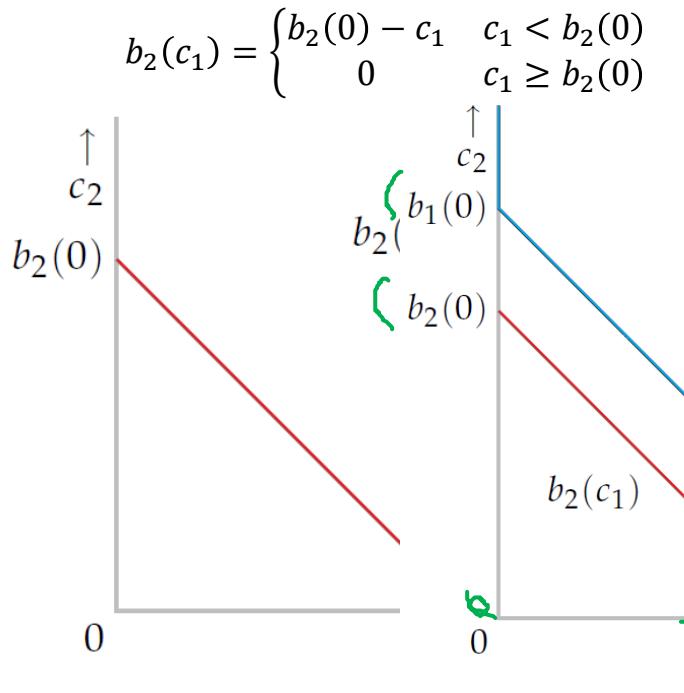


$$b_1(c_2) = \begin{cases} b_1(0) - c_2 & c_2 < b_1(0) \\ 0 & c_2 \geq b_1(0) \end{cases}$$



تابع بهترین پاسخ - مثال

- مشارکت در امور عام المنفعه



1000 $(1000 \rightarrow \infty)$
min $\not> 100^{\circ}$

پایان مثال

لکچر

حرکت های غالب و مغلوب

\geq

- تعریف غلبه ای اکید Strict Domination: در یک بازی استراتژیک با اولویت های ترتیبی، گوییم برای بازیکن i ، اکشن a_i'' بر اکشن a_i' غلبه ای اکید دارد اگر $u_i(a_i'', a_{-i}) > u_i(a_i', a_{-i})$

$$a_i'' > a_i'$$

F>Q

	Q	F
Q	2,2	0,3
F	3,0	1,1

برای هر نمایه استراتژی i از دیگر بازیکنان.

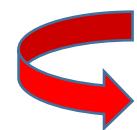
	X	Y	Z
A	3,2	2,4	3,1
B	6,0	0,1	2,2
C	2,3	0,2	0,2

$X > Z$

حرکت های غالب و مغلوب

قضیه: یک اکشن اکیدا مغلوب، در هیچ تعادل نشی ظاهر نمی شود

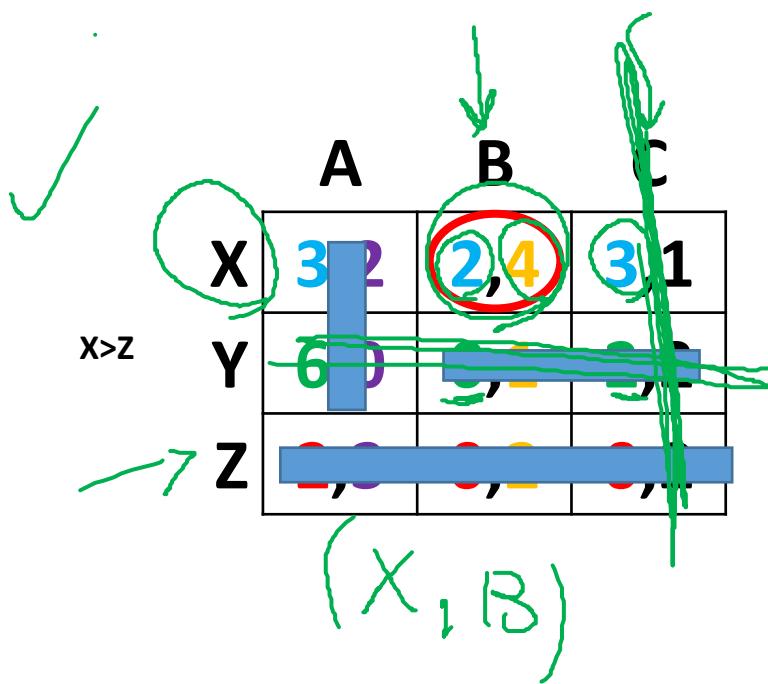
نکته: یافتن تعادل نش با کمک حذف اکشن های اکیدا مغلوب



$F > Q$

	Q	F
Q	3,0	0,0
F	1,1	

$F > Q$



حرکت های غالب و مغلوب

- تعریف غلبه ای اکید Strict Domination: در یک بازی استراتژیک با اولویت های ترتیبی، گوییم برای بازیکن i ، اکشن a_i'' بر اکشن a_i' غلبه ای اکید دارد اگر $u_i(a_i'', a_{-i}) > u_i(a_i', a_{-i})$

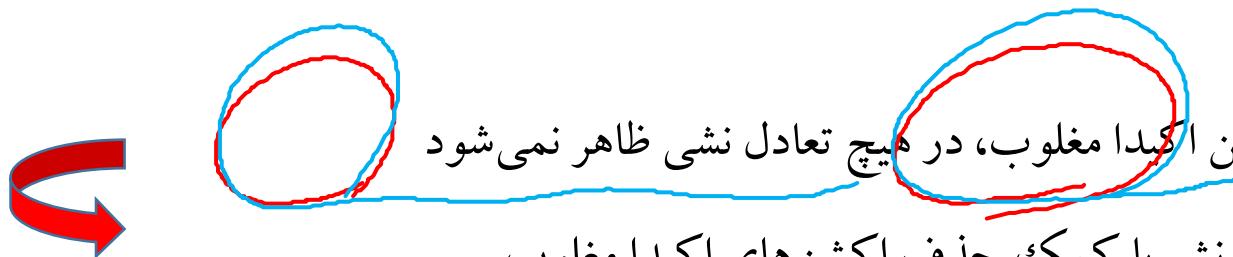
$$a_i'' > a_i'$$

برای هر نمایه استراتژی a_{-i} از دیگر بازیکنان.

		Q	F
		Q	F
F>Q	Q	2,2	0,3
	F	3,0	1,1

		A	B	C
		X	Y	Z
x>z	X	3,2	2,4	3,1
	Y	6,0	0,1	2,2

حرکت های غالب و مغلوب



- قضیه: یک اکشن اگیدا مغلوب، در هیچ تعادل نشی ظاهر نمی شود

نکته: یافتن تعادل نش با کمک حذف اکشن های اگیدا مغلوب

$F > Q$

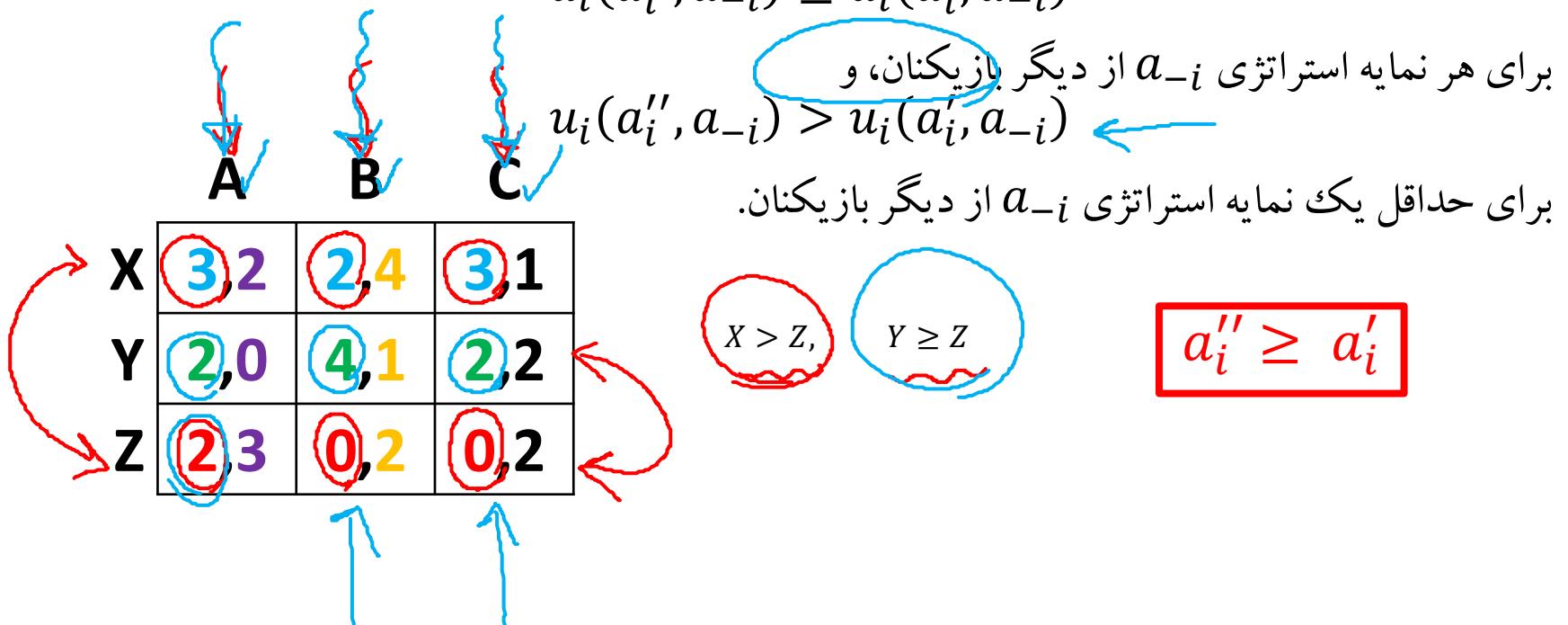
	Q	F									
$F > Q$	<table border="1"><tr><td></td><td style="text-align: center;">Q</td><td style="text-align: center;">F</td></tr><tr><td style="text-align: center;">$F > Q$</td><td style="text-align: center;">3,0</td><td style="text-align: center;">1,1</td></tr><tr><td style="text-align: center;">$F > Q$</td><td style="text-align: center;">Q</td><td style="text-align: center;">2,0</td></tr></table>		Q	F	$F > Q$	3,0	1,1	$F > Q$	Q	2,0	0,0
	Q	F									
$F > Q$	3,0	1,1									
$F > Q$	Q	2,0									
	F	1,1									

$X > Z$

	A	B	C
X	3,2	2,4	3,1
Y	6,0	1,1	1,1
Z	0,0	0,0	0,0

حرکت های غالب و مغلوب

- تعریف غلبهٔ ضعیف: در یک بازی استراتژیک با اولویت‌های ترتیبی، گوییم برای بازیکن i ، اکشن a_i'' بر اکشن a_i' غلبهٔ ضعیف دارد اگر $u_i(a_i'', a_{-i}) \geq u_i(a_i', a_{-i})$



حرکت های غالب و مغلوب

لئے ایں زن کم

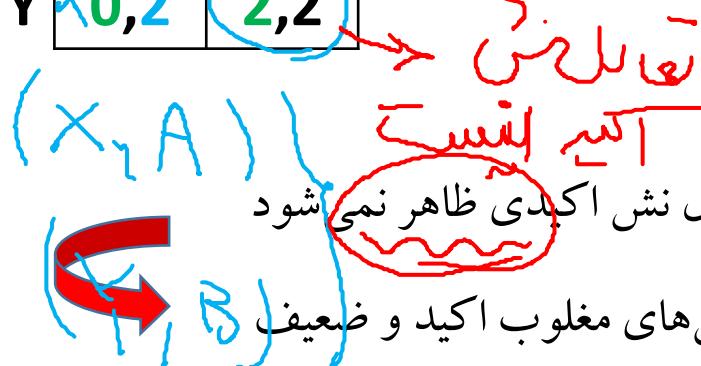
	A	B
X	1,1	2,0
Y	0,2	2,2

$X \geq Y$

$A \geq B$

نکته: $a_i'' \geq a_i' \Leftarrow a_i'' > a_i'$

نکته: اکشن های مغلوب ضعیف می توانند در یک تعادل نش ظاهر شوند



نه ای

پایان حرکات غالب و مغلوب

تعادل در یک جمیعت همگن: بازی متقارن و تعادل نش متقارن

- بازی بین بازیکنان با خصوصیات یکسان
 - ✓ مجموعه اکشن های بازیکنان یکسان است
 - ✓ تابع سود هر بازیکن، مستقل از شماره و هویت بازیکن بوده و فقط تابعی از اکشن آن بازیکن و اکشن سایرین است

تعريف بازی دو نفره متقارن: یک بازی دو نفره استراتژیک با اولویت های ترتیبی را متقارن گوییم اگر $A_1 = A_2$ و برای هر $x, y \in A_1$ داشته باشیم $u_1(a_1, a_2)|_{a_1=x, a_2=y} = u_2(a_1, a_2)|_{a_1=y, a_2=x}$

	A	B
A	q,q	w,e
B	e,w	r,r

	A	B	C
A	q,q	w,e	r,t
B	e,w	y,y	s,d
C	t,r	d,s	f,f

تعادل در یک جمیعت همگن: بازی متقارن و تعادل نش متقارن

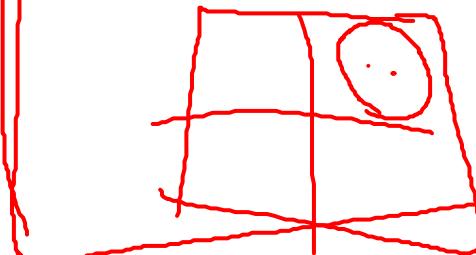
	B	S
B	(2, 2)	0, 0
S	0, 0	(1, 2)

	A	B	C
A	(1, 1)	2, 1	(4, 1)
B	1, 2	5, 5	3, 6
C	(1, 4)	6, 3	0, 0

$A_1 A$ $A_1 C$ C_A

• تعریف تعادل نش متقارن: یک بازی استراتژیک با اولویت های ترجیحی که در آن مجموعه اکشن بازیکنان

یکسان است را در نظر بگیرید. در چنین بازی ای، یک نمایه استراتژی a^* را یک تعادل نش متقارن گوییم اگر اولاً تعادل نش باشد و ثانیاً a_i^* برای همه بازیکنان i یکسان باشد، یعنی $a_1^* = a_2^* = \dots = a_N^*$.



پایان بازی و تعادل نش تقارن

پایان فصل دوم

فصل سوم: تعادل نش - مثال‌ها

- مدل کورنات (Cournot) برای بازار با انحصار چندجانبه }
- مدل برتراند (Bertrand) برای بازار با انحصار چندجانبه }
- رقابت الکترونی
- جنگ فرسایشی
- حراج‌ها (Auctions)
- قاعده تصادف

➤ An Introduction to Game Theory, by: Martin J. Osborne

فصل سوم: تعادل نش- مثال‌ها

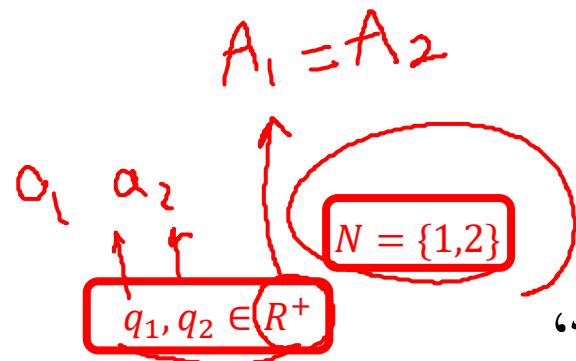
- مدل کورنات (Cournot) برای بازار با انحصار چندجانبه

❖ مثال ساده شده:

- ✓ دو تولید کننده کالای یکسانی تولید می‌کنند،
- ✓ هر یک تصمیم می‌گیرند که چه میزانی از کالا را تولید کنند،
- ✓ قیمت کالا را میزان فراوانی در بازار تعیین می‌کند،
- ✓ هزینه تولید برای هر تولید کننده تابعی از میزان تولید او است،
- ✓ سود هر تولید کننده برابر است با تفاضل فروش و هزینه تولید.

❑ سوال: هر تولید کننده چه میزان کالا تولید خواهد کرد و با چه قیمتی؟

فصل سوم: تعادل نش- مثال‌ها



- مدل کورنات (Cournot) برای بازار با انحصار چندجانبه

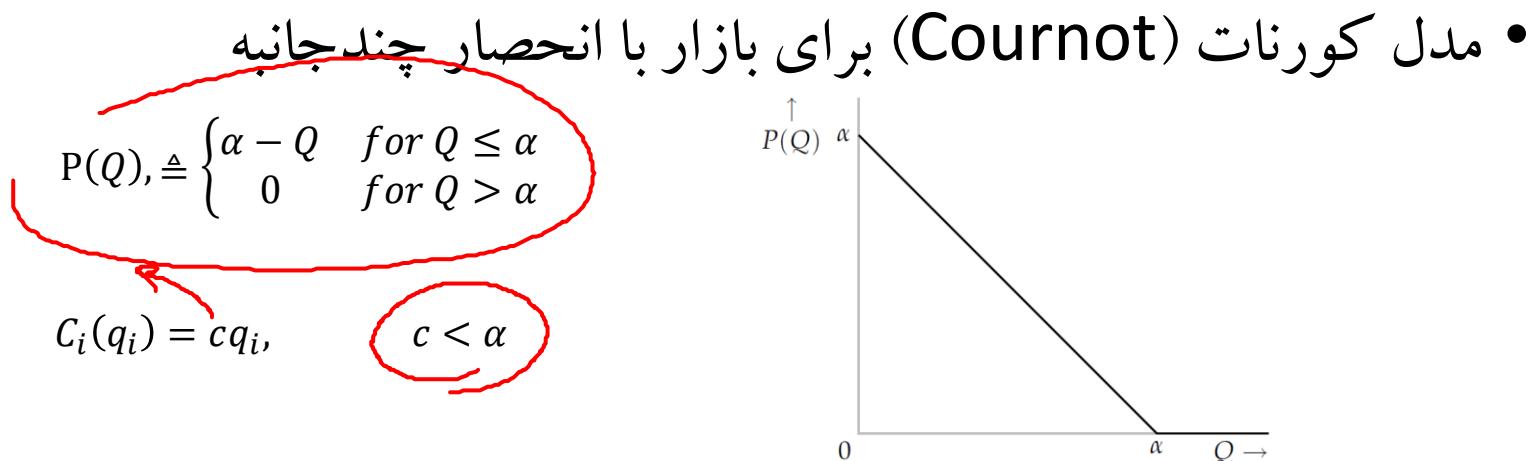
❖ مثال ساده شده:

- ✓ دو تولید کننده کالای یکسانی تولید می کنند،
- ✓ هر یک تصمیم می گیرند که چه میزانی از کالا را تولید کنند،
- ✓ قیمت کالا را میزان فراوانی در بازار تعیین می کند،
- ✓ هزینه تولید برای هر تولید کننده تابعی از میزان تولید او است،
- ✓ سود هر تولید کننده برابر است با تفاضل فروش و هزینه تولید.

$$\pi_i(q_1, q_2) = q_i P(q_1 + q_2) - C_i(q_i)$$

❑ سوال: هر تولید کننده چه میزان کالا تولید خواهد کرد و با چه قیمتی؟

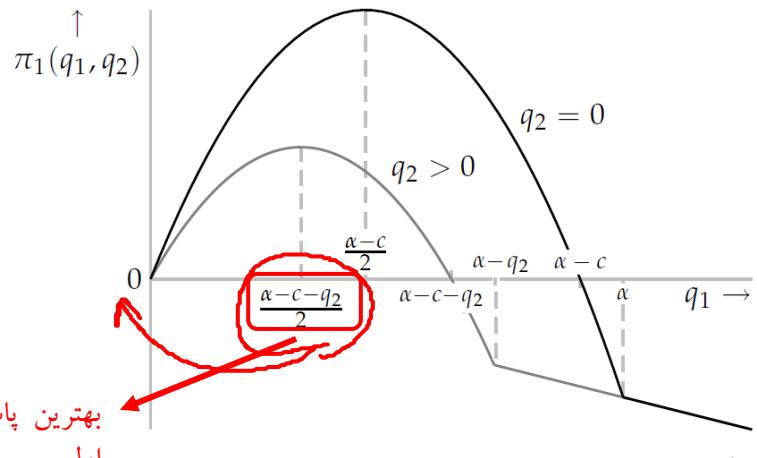
فصل سوم: تعادل نش - مثال‌ها



$$\underline{\pi}_i(q_1, q_2) = \underline{q}_i(\underline{P}(q_1 + q_2) - \underline{c}) = \begin{cases} q_i(\alpha - q_1 - q_2 - c) & \text{for } q_1 + q_2 \leq \alpha \\ -cq_i & \text{for } q_1 + q_2 > \alpha \end{cases}$$

فصل سوم: تعادل نش- مثال‌ها

- مدل کورنات (Cournot) برای بازار، با انحصار، حندخانه



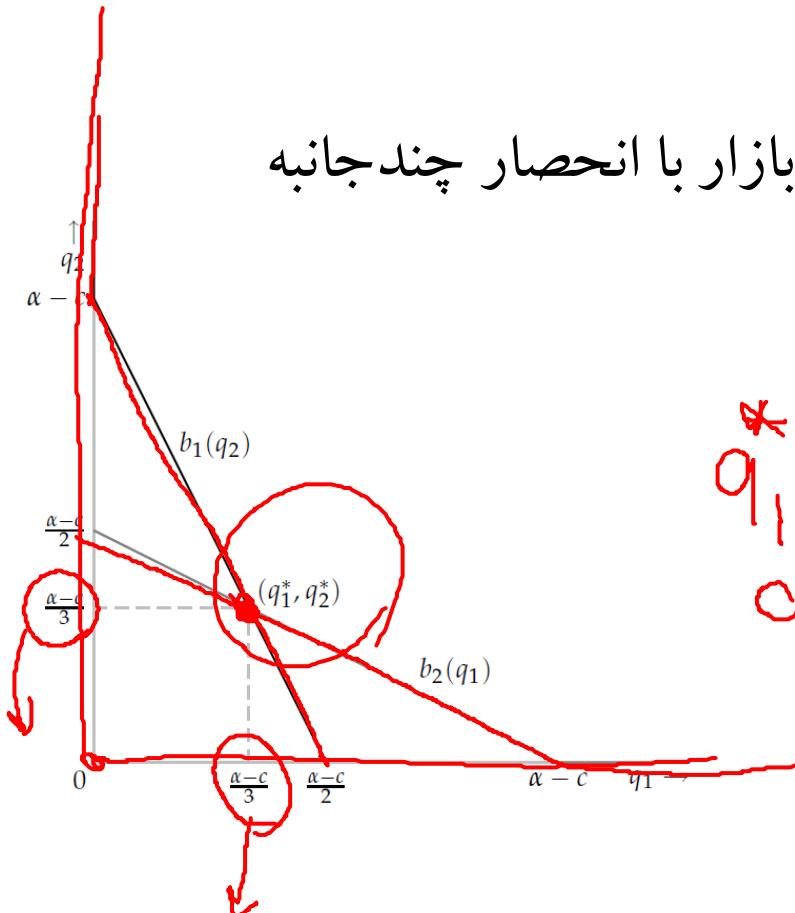
$$\pi_i(q_1, q_2) = q_i(P(q_1 + q_2) - c) = \begin{cases} q_i(\alpha - q_1 - q_2 - c) & \text{for } q_1 + q_2 \leq \alpha \\ -cq_i & \text{for } q_1 + q_2 > \alpha \end{cases}$$

→ $b_i(q_j) = \begin{cases} \frac{1}{2}(\alpha - c - q_j) & \text{for } 0 \leq \alpha - c - q_j \\ 0 & \text{for } 0 > \alpha - c - q_j \end{cases}$

فصل سوم: تعادل نش - مثال‌ها

$$c < \alpha$$

- مدل کورنات (Cournot) برای بازار با انحصار چندجانبه



$$b_i(q_j) = \begin{cases} \frac{1}{2}(\alpha - c - q_j) & \text{for } q_j \leq \alpha - c \\ 0 & \text{for } q_j > \alpha - c \end{cases}$$

$$q_1^* = b_1(q_2^*)$$

$$q_2^* = b_2(q_1^*)$$

$$\begin{aligned} P(Q) &= P(q_1^* + q_2^*) \\ &= P\left(2\frac{\alpha-c}{3}\right) \end{aligned}$$

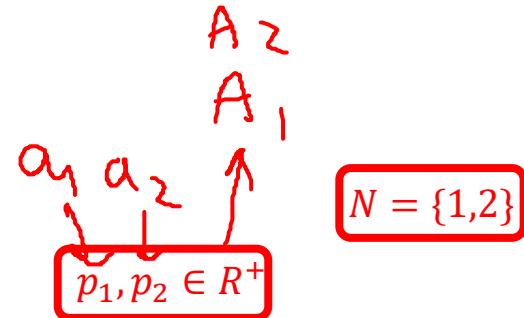
فصل سوم: تعادل نش - مثال‌ها

- مدل کورنات (Cournot) برای بازار با انحصار چندجانبه ✓
- مدل برتراند (Bertrand) برای بازار با انحصار چندجانبه ←
- رقابت الکترونیک
- جنگ فرسایشی
- حراج‌ها
- قاعده تصادف

فصل سوم: تعادل نش- مثال‌ها

- مدل برتراند (Bertrand) برای بازار با انحصار چندجانبه

فصل سوم: تعادل نش- مثال‌ها



$$p_i < p_j \Rightarrow q_j = 0, \quad q_i = D(p_i)$$

$$C_i(q_i)$$

$$\pi_i(p_1, p_2) = p_i q_i - C_i(q_i)$$

π_i

- مدل برتراند (Bertrand) برای بازار با انحصار چندجانبه
 - ❖ مثال ساده شده:
 - ✓ دو تولید کننده کالای یکسانی تولید می کنند،
 - ✓ هر یک تصمیم می گیرند که با چه قیمتی کالا را عرضه کنند،
 - ✓ میزان تقاضا برای کالا، تابعی از قیمت آن است و مشتریان صرفا از تولید کننده با کمترین قیمت خرید می کنند،
 - ✓ هزینه تولید برای هر تولید کننده تابعی از میزان تولید است،
 - ✓ سود هر تولید کننده برابر است با تفاضل فروش و هزینه تولید.

□ سوال: هر تولید کننده چه میزان کالا تولید خواهد کرد و با چه قیمتی؟

فصل سوم: تعادل نش - مثال‌ها

- مدل برتراند (Bertrand) برای بازار با انحصار چندجانبه

$$D(p) \triangleq \begin{cases} \alpha - p & \text{for } p \leq \alpha \\ 0 & \text{for } p > \alpha \end{cases}$$
$$C_i(q_i) = cq_i, \quad c < \alpha$$

↓

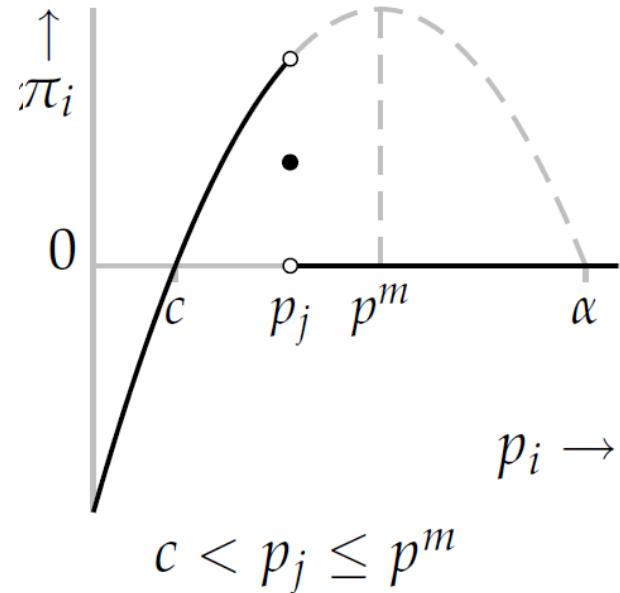
$$\pi_i(p_1, p_2) = \begin{cases} 0 & \text{if } p_i > p_j \\ (p_i - c)(\alpha - p_i) & \text{if } p_i < p_j \\ \frac{1}{2}(p_i - c)(\alpha - p_i) & \text{if } p_i = p_j \end{cases}$$

فصل سوم: تعادل نش-مثال‌ها

- مدل برتراند (Bertrand) برای بازار با انحصار چندجانبه

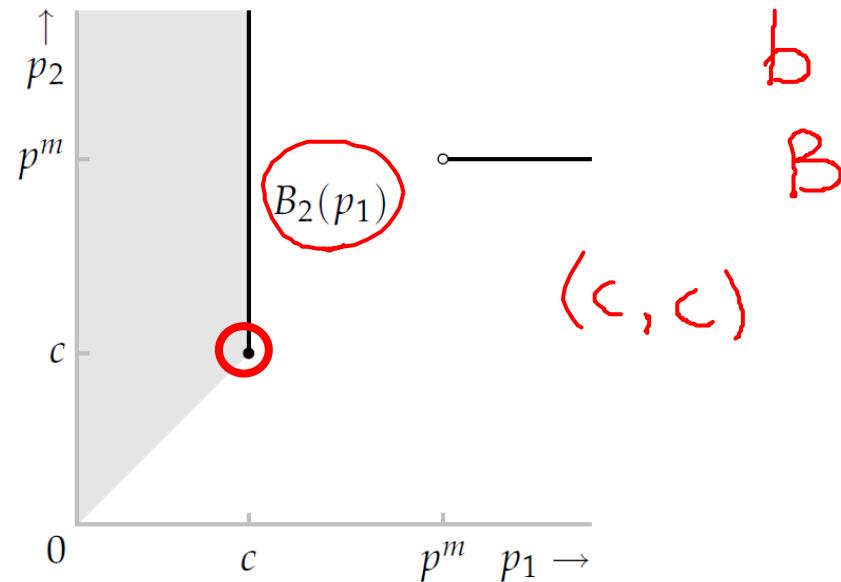
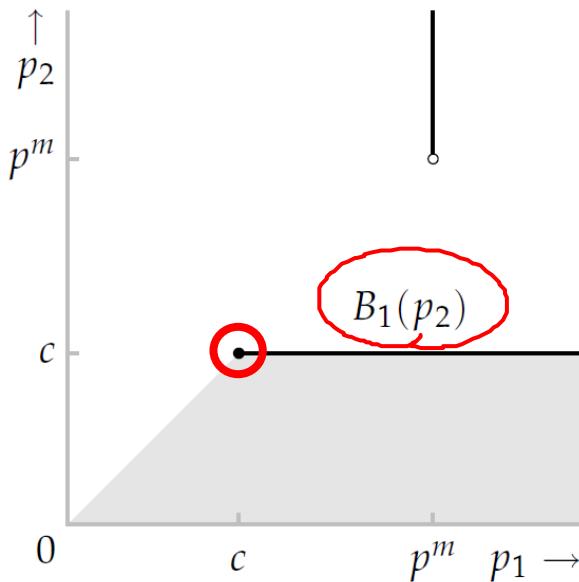
$$\pi_i(p_1, p_2) = \begin{cases} 0 & \text{if } p_i > p_j \\ (p_i - c)(\alpha - p_i) & \text{if } p_i < p_j \\ \frac{1}{2}(p_i - c)(\alpha - p_i) & \text{if } p_i = p_j \end{cases}$$

$$B_i(p_j) = \begin{cases} \{p_i : p_i > p_j\} & \text{if } p_j < c \\ \{p_i : p_i \geq p_j\} & \text{if } p_j = c \\ \{p^m\} & \text{if } p_j > p^m \\ \{\} & \text{if } c < p_j \leq p^m \end{cases}$$



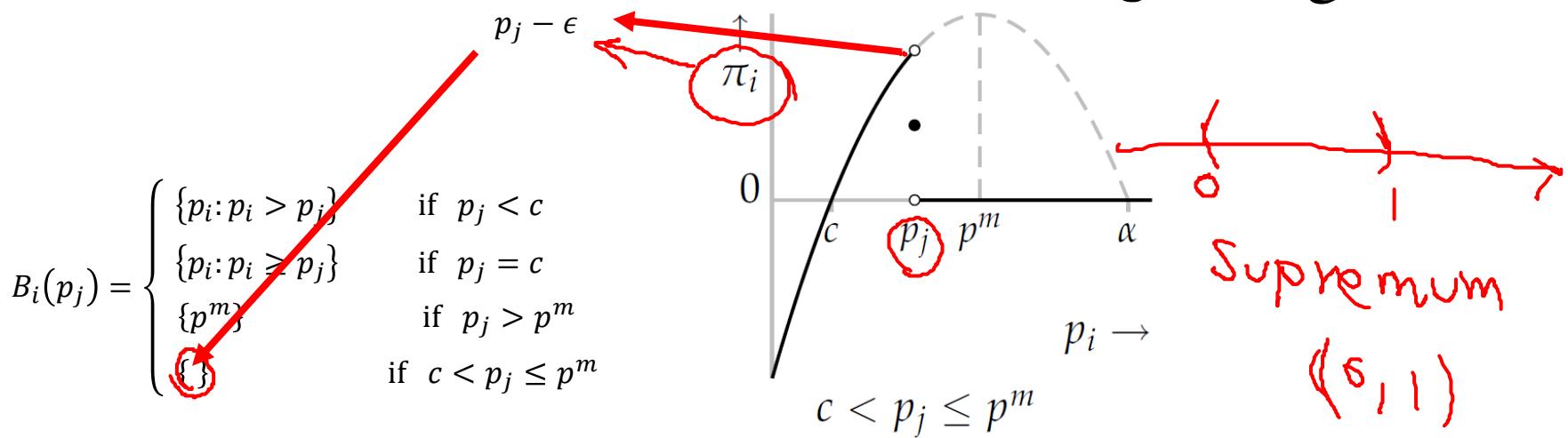
فصل سوم: تعادل نش-مثال‌ها

- مدل برتراند (Bertrand) برای بازار با انحصار چندجانبه



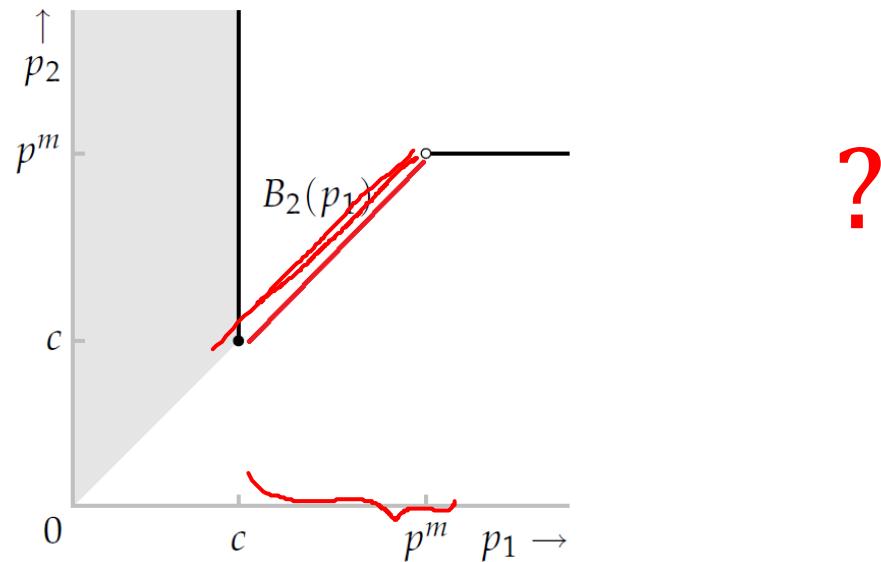
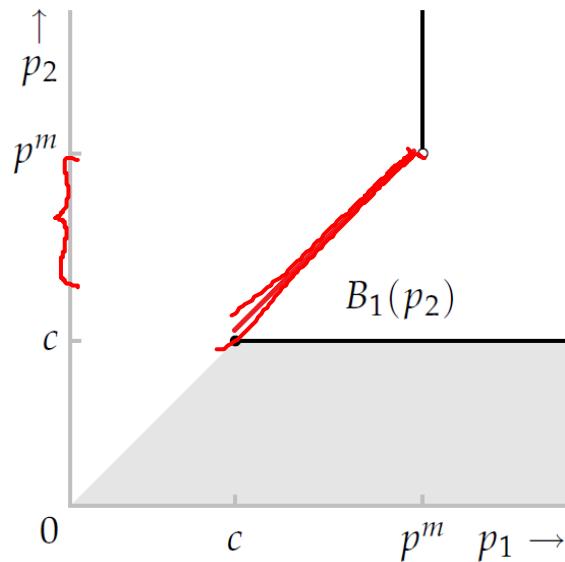
فصل سوم: تعادل نش- مثال‌ها

- مدل برتراند (Bertrand) برای بازار با انحصار چندجانبه
 - ✓ تنها تعادل نش، نمایه استراتژی (C, C) است!
 - ✓ تابع بهترین پاسخ برابر تهی؟



فصل سوم: تعادل نش-مثال‌ها

- مدل برتراند (Bertrand) برای بازار با انحصار چندجانبه



تمرین ها در سامانه درس حل شوند

بازیهای همزمان با استراتژی‌های آمیخته

mixed strategy

استراتژی آمیخته

وقتی بازیکنان حرکات خود را تصادفی (Random) انتخاب می کنند!!

بازیهای همزمان با استراتژی‌های آمیخته

	Q	F
Q	2,2	0,3
F	3,0	1,1

□ مثال:

► تصمیم‌گیری بازیکن: پس از شروع بازی یا حرکت F را انجام می‌دهم یا حرکت Q را. کدام حرکت را انتخاب کنم؟

استراتژی‌های ممکن: انتخاب حرکت F. انتخاب حرکت Q.

► تصمیم‌گیری بازیکن: پس از شروع بازی به تصادف، با احتمال مثلا p ، حرکت F را انجام می‌دهم و با احتمال $p - 1$ ، حرکت Q را.

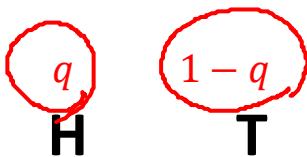
p را چه مقدار انتخاب کنم؟

استراتژی‌های ممکن: انتخاب احتمالات مختلف بر روی حرکات $\{F, Q\}$ ، یعنی بردارهای $(p, 1 - p)$ به ازاء مقادیر مختلف $0 \leq p \leq 1$.

استراتژی آمیخته (Mixed)

بازیهای همزمان با استراتژی‌های آمیخته

- چرا ممکن است یک بازیکن منطقی (Rational)，به صورت تصادفی تصمیم گیری کند؟ (چرا مدل قبلی برای مدل سازی رفتار بازیکنان کفايت نمی کند؟)



A diagram showing a hand holding a red card with the letter p and a blue card with the expression 1 - p.

H	1, -1	-1, 1
T	-1, 1	1, -1

► توجیه اول: بازی های بدون تعادل

► مثال. بازی pennies

بازیهای همزمان با استراتژی‌های آمیخته

	H	T	
p	H	$1, -1$	$-1, 1$
$1-p$	T	$-1, 1$	$1, -1$

- ✓ میانگین گیری از تابع سود
 - ✓ بهترین پاسخ در استراتژی آمیخته
 - ✓ تعادل نش آمیخته
- برای

$$pq \times 1 + (1-p)q \times (-1) + p(1-q) \times (-1) + (1-p)(1-q) \times 1 = (2p-1)(2q-1)$$

↓
HH ↓
TH ↓
HT

↓
TT

❖ به طریق مشابه، انتخاب بهترین مقدار q برای بازیکن دوم

$.q = 0 > p$, باید

$.q = 1 < p$, باید

✓ اگر $p = 0.5$, آنگاه مقدار q دلخواه است.

❖ انتخاب بهترین مقدار p برای بازیکن اول

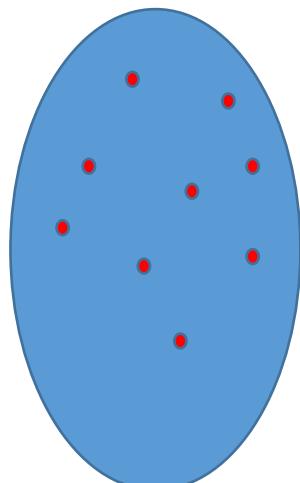
✓ اگر $p = 1, q > 0.5$

✓ اگر $p = 0, q < 0.5$

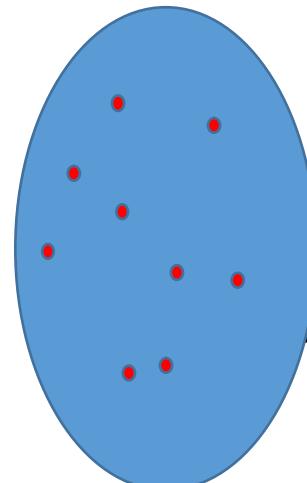
✓ اگر $p = 0.5, q = 0.5$ تعادل: دلخواه است.

بازیهای همزمان با استراتژی‌های آمیخته

- چرا ممکن است یک بازیکن منطقی (Rational)، به صورت تصادفی تصمیم گیری کند؟ (چرا مدل قبلی برای مدل سازی رفتار بازیکنان کفايت نمی کند؟)



جمعیت بازیکنان اول

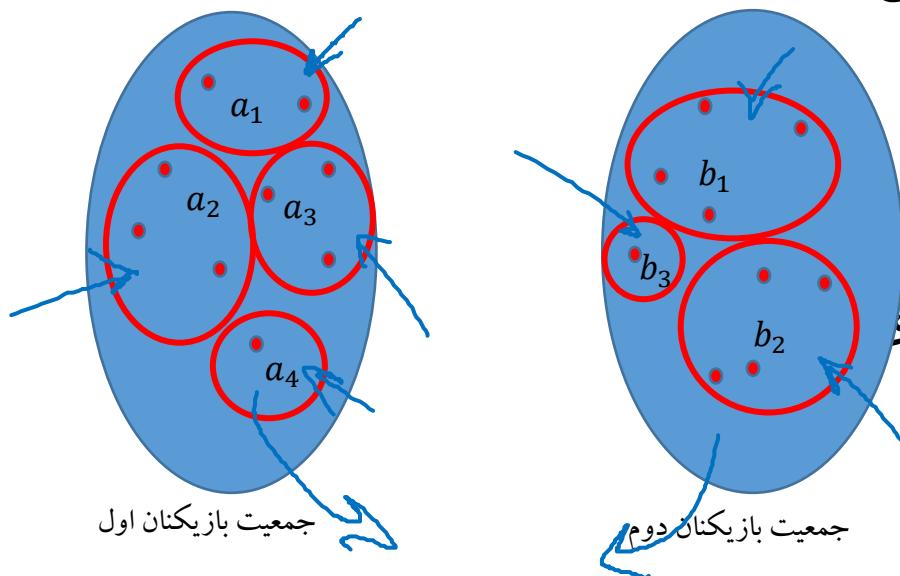


جمعیت بازیکنان دوم

- توجیه اول: بازی های بدون تعادل
- توجیه دوم: یادگیری در جمعیتها

بازیهای همزمان با استراتژی‌های آمیخته

- چرا ممکن است یک بازیکن منطقی (Rational)، به صورت تصادفی تصمیم گیری کند؟ (چرا مدل قبلی برای مدل سازی رفتار بازیکنان کفايت نمی کند؟)



- ▶ توجیه اول: بازی های بدون تعادل
- ▶ توجیه دوم: یادگیری در جمعیتها

بازیهای همزمان با استراتژی‌های آمیخته

- چرا ممکن است یک بازیکن منطقی (Rational)، به صورت تصادفی تصمیم گیری کند؟ (چرا مدل قبلی برای مدل سازی رفتار بازیکنان کفايت نمی کند؟)

► توجیه اول: بازی های بدون تعادل

► توجیه دوم: یادگیری در جمیعتهای بازیکنان

► توجیه سوم: ابهام در مورد خصوصیات بازی و رفتار بازیکنان

	A	B
S	1 or -3	-1
T	-1, 2	1, -1

بازیهای همزمان با استراتژی‌های آمیخته

	q	$1 - q$
H	$1, -1$	$-1, 1$
T	$-1, 1$	$1, -1$
p	H	T
$1 - p$	T	H

نمادها، تعاریف و قراردادها:

✓ مجموعه بازیکنان ۱ و ۲

✓ مجموعه حرکات بازیکنان: $A_2 = \{H, T\}$ و $A_1 = \{H, T\}$

✓ استراتژی آمیخته بازیکنان: توزیع احتمال‌های

$$\alpha_2 = (q, 1 - q) \quad \text{و} \quad \alpha_1 = (p, 1 - p)$$

$$\alpha_2(T) = 1 - q \quad \text{و} \quad \alpha_2(H) = q \quad \text{و} \quad \alpha_1(T) = 1 - p \quad \text{و} \quad \alpha_1(H) = p$$

✓ نمایه استراتژی‌های آمیخته بازیکنان (لتاچی Lottery)

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) = ((p, 1 - p), (q, 1 - q))$$

بازیهای همزمان با استراتژی‌های آمیخته

	X	Y
A	(2, 2)	3, 0
B	1, 4	0, 0

$q \quad 1-q$

A B
 $\times \quad \times$
 $(1, 0), (1, 0)$

$$u_i(a_1, a_2, \dots, a_N)$$

نمادها، تعاریف و قراردادها:

✓ توابع سود برنولی:
 برای بازیکن اول $u_1(H, T) = u_1(T, H) = -1$ و $u_1(H, H) = u_1(T, T) = 1$
 و برای بازیکن دوم $u_2(H, T) = u_2(T, H) = 1$ و $u_2(H, H) = u_2(T, T) = -1$

	H	T
p	1, -1	-1, 1
$1-p$	-1, 1	1, -1

$$u_1(H, T) = u_1(T, H) = -1 \quad u_1(H, H) = u_1(T, T) = 1$$

$$u_2(H, T) = u_2(T, H) = 1 \quad u_2(H, H) = u_2(T, T) = -1$$

U_i

میانگین توابع سود (توابع سود میانگین):
 برای بازیکن اول $U_1(\alpha_1, \alpha_2) = E_{\alpha_1, \alpha_2}[u_1(\alpha_1, \alpha_2)] = \sum_{a_1 \in A_1} \sum_{a_2 \in A_2} \alpha_1(a_1) \alpha_2(a_2) u_1(a_1, a_2) =$

و برای بازیکن دوم $U_2(\alpha_1, \alpha_2) = E_{\alpha_1, \alpha_2}[u_2(\alpha_1, \alpha_2)] = \sum_{a_1 \in A_1} \sum_{a_2 \in A_2} \alpha_1(a_1) \alpha_2(a_2) u_2(a_1, a_2) = \dots$

$$U_1(\alpha_1, \alpha_2) = E_{\alpha_1, \alpha_2}[u_1(\alpha_1, \alpha_2)] = \sum_{a_1 \in A_1} \sum_{a_2 \in A_2} \alpha_1(a_1) \alpha_2(a_2) u_1(a_1, a_2) =$$

$$pq \times 1 + (1-p)q \times (-1) + p(1-q) \times (-1) + (1-p)(1-q) \times 1$$

بازیهای همزمان با استراتژی‌های آمیخته

	q	$1 - q$
H	H	T
p	1, -1	-1, 1

	$1 - p$	T
T	-1, 1	1, -1
	$-1 - p$	

نمادها، تعاریف و قراردادها:

- ✓ ترجیحات (von Neumann-Morgenstern) vNM: اولویت ترجیحی هر بازیکن بین لاتاری‌ها، بر اساس میانگین توابع سود آن بازیکن تعیین می‌شود

بازیهای همزمان با استراتژی‌های آمیخته

تعريف:

یک بازی استراتژیک با اولویت‌های NM7 مشتمل است بر

- یک مجموعه بازیکنان،
- برای هر بازیکن، یک مجموعه حرکت‌ها،
- برای هر بازیکن، اولویت‌های بین لاتاری‌ها که می‌تواند بر اساس امید ریاضی تابع سود برنولی روی نمایه اکشن‌ها نمایش داده شود.

در مقایسه با بازی استراتژیک با استراتژی‌های خالص،

- استراتژی به جای آن که یک اکشن باشد یک توزیع احتمال روی اکشن‌ها است،
- اولویت‌ها به جای آن که روی تابع سود برنولی تعریف شوند، روی امید ریاضی آن تعریف می‌شود.

بازیهای همزمان با استراتژی‌های آمیخته

تعریف:

در یک بازی استراتژیک با اولویت‌های NM ، نمایه استراتژی آمیخته $(\alpha_1^*, \alpha_2^*, \dots, \alpha_n^*)$ را یک تعادل نش گوییم اگر برای هر بازیکن i و هر استراتژی آمیخته α_i از این بازیکن داشته باشیم

$$U_i(\alpha^*) \geq U_i(\alpha_i, \alpha_{-i}^*),$$

به عبارت دیگر هیچ بازیکنی به تنها از ~~تعییر~~ استراتژی آمیخته خود، (میانگین) سود بیشتری کسب نکند.

بازیهای همزمان با استراتژی‌های آمیخته

$$\alpha_{-i} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \alpha_{i+2}, \dots, \alpha_n)$$

تعریف:

تابع بهترین پاسخ بازیکن i ام به نمایه استراتژی آمیخته سایر بازیکنان، یعنی α_{-i} ، عبارت است از مجموعه استراتژی‌های آمیخته از بازیکن i ام که میانگین تابع سود این بازیکن را با فرض α_{-i} حداقل کند. به بیان ریاضی:

$$B_i(\alpha_{-i}) = \{\alpha'_i \mid \alpha'_i \text{ is a probability distribution over } A_i \text{ and } U_i(\alpha'_i, \alpha_{-i}) \geq U_i(\alpha_i, \alpha_{-i}) \text{ for all probability distribution } \alpha'_i \text{ over } A_i\}$$

بازیهای همزمان با استراتژی‌های آمیخته

- قضیه: نمایه استراتژی آمیخته α^* یک تعادل نش آمیخته است اگر و تنها اگر برای هر بازیکن i داشته باشیم $\alpha_i^* \in B_i(\alpha_{-i}^*)$
- به بیان دیگر، همه نقاط تعادل نش آمیخته از حل دستگاه $\alpha_i = B_i(\alpha_{-i}), i = 1, 2, \dots, N$ به دست می‌آیند.

بازیهای همزمان با استراتژی‌های آمیخته

• مثال: نقاط تعادل نش آمیخته؟

	q	$1 - q$
p	B 2, 1	S 0, 0
$1 - p$	S 0, 0	B 1, 2

	B	S
B	pq	$p(1 - q)$
S	$(1 - p)q$	$(1 - p)(1 - q)$

$$U_1(p, q) = 2pq + (1 - p)(1 - q) = 1 - q + p(3q - 1)$$

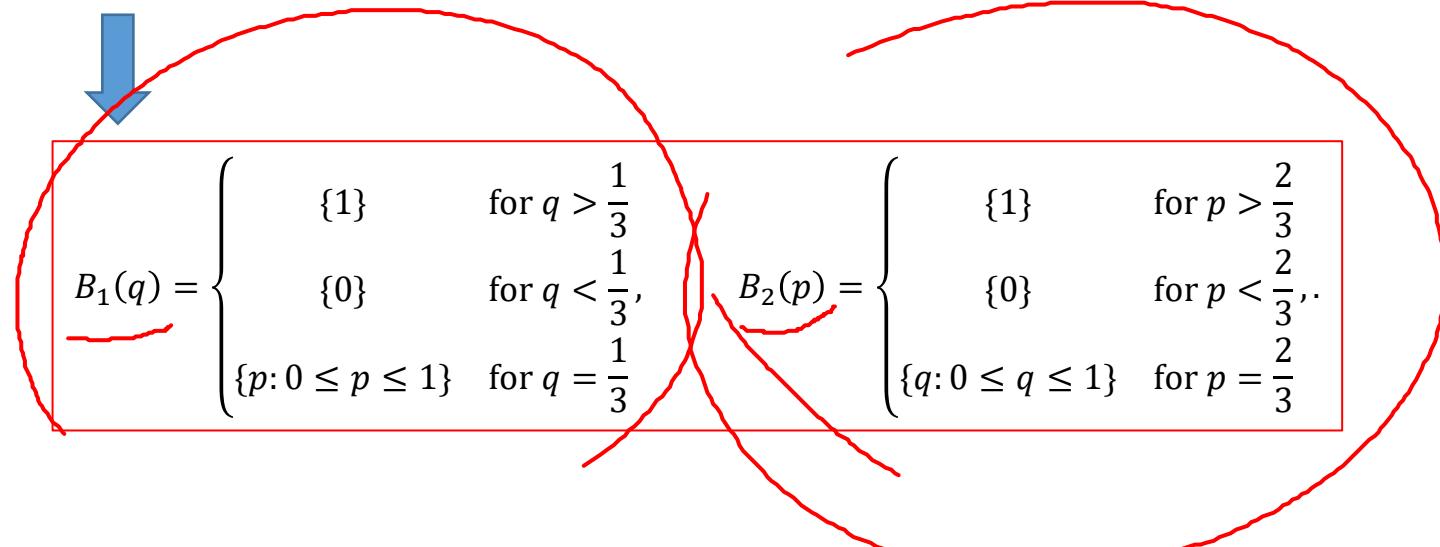
$$U_2(p, q) = pq + 2(1 - p)(1 - q) \\ = 2(1 - p) + q(3p - 2)$$

بازیهای همزمان با استراتژی‌های آمیخته

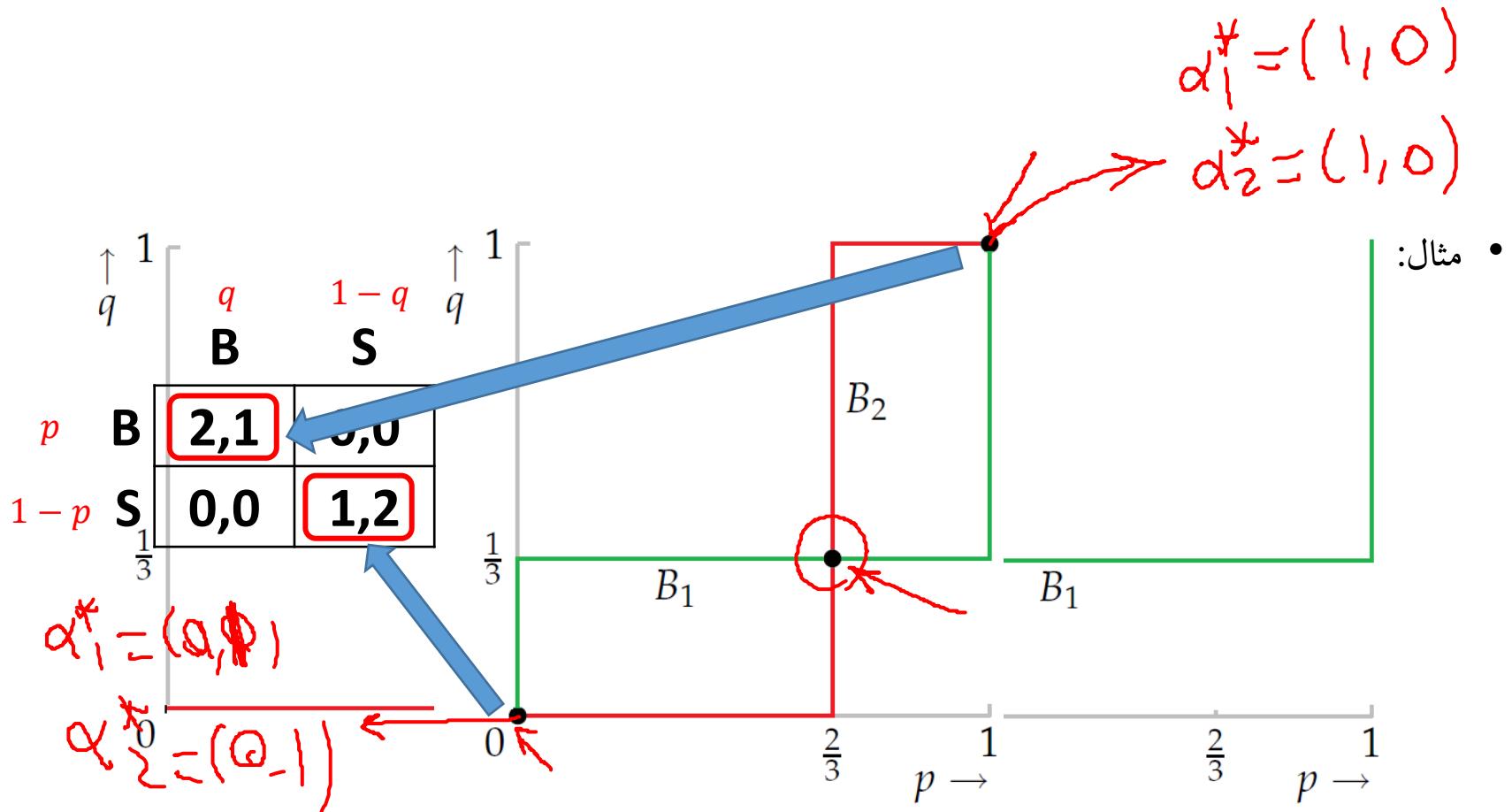
$$U_1(p, q) = 2pq + (1 - p)(1 - q) = 1 - q + p(3q - 1)$$

$$U_2(p, q) = pq + 2(1 - p)(1 - q) - 2(1 - p) + q(3p - 2)$$

- مثال: نقاط تعادل نش آمیخته؟



بازیهای همزمان با استراتژی‌های آمیخته



بازیهای همزمان با استراتژی‌های آمیخته

- نکته: یک مجموعه بازیکنان و مجموعه حرکات آنها را در دو حالت زیر در نظر بگیرید:

الف) بازیکنان به صورت قطعی حرکات خود را انتخاب کنند (استراتژی خالص)،

ب) بازیکنان به صورت تصادفی حرکات خود را انتخاب کنند (استراتژی آمیخته).

نمایه استراتژی $a^* = (a_1^*, a_2^*, \dots, a_n^*)$ یک تعادل نش برای بازی در حالت اول است اگر و تنها اگر در بازی حالت دوم، نمایه استراتژی آمیخته $\alpha^* = (\alpha_1^*, \alpha_2^*, \dots, \alpha_n^*)$ یک تعادل نش باشد که در آن برای هر بازیکن i ، توزیع احتمال α_i^* در محل مربوط به a_i^* برابر یک باشد (و طبعتاً در بقیه محل ها برابر صفر باشد).

بازیهای همزمان با استراتژی‌های آمیخته

□ تذکر: برای پرهیز از پیچیدگی محاسبات، و تمرکز بر روی مفاهیم اصلی درس، در تقریباً همه مثال‌های درس فقط از بازی دو نفره و مجموعه حرکات دوتایی استفاده شده است؛ بنابراین استراتژی آمیخته با یک متغیر قابل نمایش است و در نتیجه تابع بهترین پاسخ، تک متغیره است.

$$\begin{array}{cc} q & 1-q \\ \text{B} & \text{S} \end{array} \quad ((p, 1-p), (q, 1-q)) \Rightarrow (p, q) \\ p = B_1(q), \quad q = B_2(p)$$

p	B	2,1	0,0
$1-p$	S	0,0	1,2

اما در حالتی که تعداد حرکات بیش از دو باشد تابع بهترین پاسخ، چند متغیره خواهد و حل مساله بسیار دشوارتر می‌شود. مثلاً در یک بازی دو نفره که هر بازیکن، سه حرکت داشته باشد،



p_1	A	-1,1	2,1	4,1
p_2	B	3,2	5,3	4,4
$1 - p_1 - p_2$	C	1,4	6,3	0,0

$$((p_1, p_2, 1 - p_1 - p_2), (q_1, q_2, 1 - q_1 - q_2)) \Rightarrow ((p_1, p_2), (q_1, q_2)) \\ (p_1, p_2) = B_1(q_1, q_2), \quad (q_1, q_2) = B_2(p_1, p_2)$$

بازیهای همزمان با استراتژی‌های آمیخته

- ✓ چگونه می‌توان در یک بازی با استراتژی‌های آمیخته، نمایه‌های تعادل نش را یافت؟
- ◻ تعیین شرایط لازم و کافی برای تعادل نش بودن یک نمایه استراتژی (خواص معادل با تعریف تعادل نش)

- ❖ قضیه: یک نمایه استراتژی آمیخته α^* ، یک تعادل نش است اگر و تنها اگر برای هر بازیکن i ، به شرط آن که سایر بازیکنان نمایه استراتژی α_i^* را اتخاذ کرده باشند، دو خاصیت زیر برقرار باشد:
 1. به ازاء انتخاب هر اکشنی که در α_i^* با احتمال غیر صفر انتخاب می‌شود، میانگین سود بازیکن i یکسان باشد.
 2. به ازاء انتخاب هر اکشنی که در α_i^* با احتمال صفر انتخاب می‌شود، میانگین سود بازیکن i حداکثر برابر زمانی باشد که یک اکشن با احتمال غیر صفر انتخاب کند.

بازیهای همزمان با استراتژی‌های آمیخته

✓ تابع میانگین سود برای بازیکن i ام در یک بازی n نفره با نمایه استراتژی مختلط $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$

$$U_i(\alpha) = E_{\alpha}[u_i(a)] = \sum_{a_1 \in A_1} \sum_{a_2 \in A_2} \dots \sum_{a_n \in A_n} \alpha_1(a_1) \alpha_2(a_2) \dots \alpha_n(a_n) \times u_i(a)$$

$$= \sum_{a_i \in A_i} \alpha_i(a_i) \sum_{a_1 \in A_1} \dots \sum_{a_{i-1} \in A_{i-1}} \sum_{a_{i+1} \in A_{i+1}} \dots \sum_{a_n \in A_n} \alpha_1(a_1) \dots \alpha_{i-1}(a_{i-1}) \alpha_{i+1}(a_{i+1}) \dots \alpha_n(a_n) \times u_i(a)$$

$$= \sum_{a_i \in A_i} \alpha_i(a_i) U_i(a_i, \alpha_{-i})$$



$$U_i(a_i, \alpha_{-i})$$

بازیهای همزمان با استراتژی‌های آمیخته

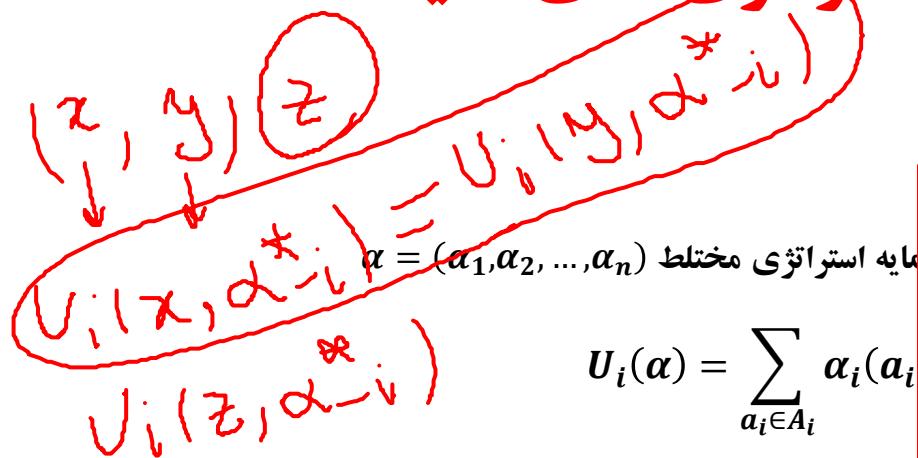
✓ تابع سود میانگین برای بازیکن i ام در یک بازی n نفره با نمایه استراتژی مختلط $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$

$$U_i(\alpha) = \sum_{a_i \in A_i} \alpha_i(a_i) U_i(a_i, \alpha_{-i})$$

بحث: فرض کنید $\alpha^* = (\alpha_1^*, \alpha_2^*, \dots, \alpha_n^*)$ یک تعادل نش آمیخته باشد و a'_i یک اکشن از بازیکن i ام باشد که در α_i^* با احتمال غیر صفر استفاده می‌شود. حال برای هر اکشن a''_i از بازیکن i ام:

$$\begin{array}{ccc} a''_i & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & U_i(a''_i, \alpha_{-i}) \\ & \cancel{\quad\quad\quad} & U_i(a'_i, \alpha_{-i}^*) \\ & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & U_i(a''_i, \alpha_{-i}^*) < U_i(a'_i, \alpha_{-i}^*) \quad \Rightarrow \alpha_i^*(a''_i) = 0 \end{array}$$

بازیهای همزمان با استراتژی‌های آمیخته



د و a'_i یک اکشن از بازیکن i ام باشد که در α^*_i با احتمال غیر

در نمایه استراتژی تعادل نش آمیخته، برای هر بازیکن،

- ۱- اکشن‌های با احتمال غیر صفر، به یک اندازه میانگین سود می‌دهند؛
- ۲- هیچ اکشنی بیشتر از اکشن‌های با احتمال غیر صفر سود نمی‌دهد.

صفر اسعاده می‌سود. حال برای هر اسسن i از پریس ۴۰٪.

$$U_i(a''_i, \alpha_{-i}) > U_i(a'_i, \alpha_{-i}^*) \quad U_i(a''_i, \alpha_{-i}^*) \leq U_i(a'_i, \alpha_{-i}^*)$$

a''_i

$$U_i(a''_i, \alpha_{-i}^*) < U_i(a'_i, \alpha_{-i}^*) \quad \Rightarrow a_i^*(a''_i) = 0$$

بازیهای همزمان با استراتژی‌های آمیخته

در نمایه استراتژی تعادل نش آمیخته، برای هر بازیکن،

۱- اکشن‌های با احتمال غیر صفر، به یک اندازه میانگین سود می‌دهند؛

۲- هیچ اکشنی بیشتر از اکشن‌های با احتمال غیرصفر سود نمی‌دهد.

صغر استعداده می‌سود. حال برای هر اسسن i از پاریس ۴۰٪.

بازیهای همزمان با استراتژی‌های آمیخته

- قضیه: نمایه استراتژی آمیخته‌ی α^* یک تعادل نش آمیخته است اگر و تنها اگر برای هر بازیکن i داشته باشیم $\alpha_i^* \in B_i(\alpha_{-i}^*)$

- به بیان دیگر، همه نقاط تعادل نش آمیخته از حل دستگاه $\alpha_i = B_i(\alpha_{-i})$, $i = 1, 2, \dots, N$ به دست می‌آیند.

$$U_i(a''_i, \alpha_{-i}^*) \leq U_i(a'_i, \alpha_{-i}^*)$$

$$i) \implies \alpha_i^*(a''_i) = 0$$

Activate Windows
Go to Settings to activate Windows.

بازیهای همزمان با استراتژی‌های آمیخته

✓ چگونه می‌توان در یک بازی با استراتژی‌های آمیخته، نمایه‌های تعادل نش را یافت؟

◻ تعیین شرایط لازم و کافی برای تعادل نش بودن یک نمایه استراتژی (خواص معادل با تعریف تعادل نش)

❖ قضیه: یک نمایه استراتژی آمیخته α^* ، یک تعادل نش است اگر و تنها اگر برای هر بازیکن i ، به شرط آن که سایر بازیکنان نمایه استراتژی α_{-i}^* را اتخاذ کرده باشند، دو خاصیت زیربرقرار باشد:

1. به ازاء انتخاب هر اکشنی که در α_i^* با احتمال غیر صفر انتخاب می‌شود، میانگین سود بازیکن i یکسان باشد.

2. به ازاء انتخاب هر اکشنی که در α_i^* با احتمال صفر انتخاب می‌شود، میانگین سود بازیکن i حداکثر برابر زمانی باشد که یک اکشن با احتمال غیر صفر انتخاب کند.

$$U_i(\alpha^*) = \sum_{a_i \in A_i} \alpha_i^*(a_i) U_i(a_i, \alpha_{-i}^*)$$

بازیهای همزمان با استراتژی‌های آمیخته

$$\alpha^* = (\alpha_1^*, \dots, \alpha_n^*)$$

$$\alpha_i^* = \text{حالت } i$$

✓ چگونه می‌توان در یک بازی با استراتژی‌های آمیخته، نمایه‌های تعادل نش را یافت؟

◻ تعیین شرایط لازم و کافی برای تعادل نش بودن یک نمایه استراتژی (خواص معادل با تعریف تعادل نش)

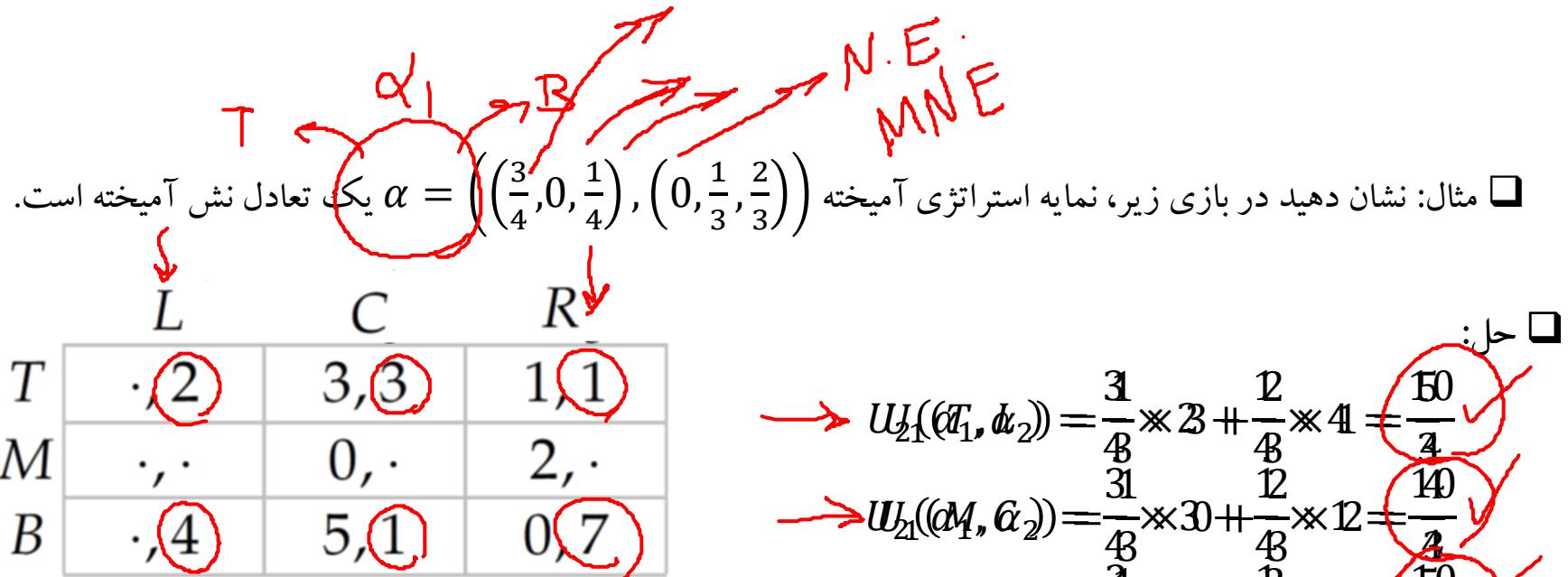
❖ قضیه: یک نمایه استراتژی آمیخته α^* ، یک تعادل نش است اگر و تنها اگر برای هر بازیکن i ، به شرط آن که سایر بازیکنان نمایه استراتژی i - α_i^* را اتخاذ کرده باشند، دو خاصیت زیربرقرار باشد:

1. به ازاء انتخاب هر اکشنی که در i - α_i^* با احتمال غیر صفر انتخاب می‌شود، میانگین سود بازیکن i یکسان باشد.

2. به ازاء انتخاب هر اکشنی که در i - α_i^* با احتمال صفر انتخاب می‌شود، میانگین سود بازیکن i حداکثر برابر زمانی باشد که یک اکشن با احتمال غیر صفر انتخاب کند.

نتیجه: تعادل نش آمیخته‌ی nondegenerate هیچ‌گاه تعادل نش اکید نیستند

بازیهای همزمان با استراتژی‌های آمیخته



بازیهای همزمان با استراتژی‌های آمیخته

قضیه: هر بازی با اولویت‌های vNM که در آن هر بازیکن، تعداد متناهی اکشن داشته باشد، حداقل یک تعادل نش استراتژی آمیخته دارد.

اثبات:

تذکر: برای تضمین وجود تعادل نش آمیخته، متناهی بودن تعداد اکشن‌ها شرط کافی است نه لازم

بازیهای همزمان با استراتژی‌های آمیخته

▶ تعریف حرکات مغلوب (مغلوب شده توسط یک استراتژی آمیخته).

در یک بازی استراتژیک با اولویت‌های vNM ، می‌گوییم استراتژی آمیخته α_i از بازیکن i بر حرکت a_i از این بازیکن، غلبه‌ی اکید دارد اگر برای هر نمایه استراتژی آمیخته $U_i(\alpha_i, a_{-i})$ از سایر بازیکنان داشته باشیم $U_i(\alpha_i, a_{-i}) > u_i(a_i, a_{-i})$.



	A	B
C	6,3	2,6
D	2,0	3,3
E	1,2	7,5

مثال: نشان دهید برای بازیکن اول، نمایه استراتژی آمیخته D غلبه دارد

$$U_1\left(\left(\frac{2}{3}, 0, \frac{1}{3}\right), A\right) = \frac{13}{3} > 2 = u_1(D, A)$$

$$U_1\left(\left(\frac{2}{3}, 0, \frac{1}{3}\right), B\right) = \frac{11}{3} > 3 = u_1(D, B)$$

❖ توجه: در مثال فوق، استراتژی D توسط هیچ حرکت خالصی مغلوب نبوده است!

بازیهای همزمان با استراتژی‌های آمیخته

▶ لم: حرکات اکیدا مغلوب، در هیچ تعادل نشی آمیخته‌ای، با احتمال مثبت ظاهر نمی‌شوند (و از جمله، در هیچ تعادل نش خالصی نیز ظاهر نمی‌شوند)

مثال:

	A	B
C	6,3	2,6
D		
E	1,2	7,5

$$U_1 \left(\left(\frac{2}{3}, 0, \frac{1}{3} \right), A \right) = \frac{13}{3} > 2 = u_1(D, A)$$

$$U_1 \left(\left(\frac{2}{3}, 0, \frac{1}{3} \right), B \right) = \frac{11}{3} > 3 = u_1(D, B)$$

پس برای بازیکن اول، نمایه استراتژی آمیخته $\left(\frac{2}{3}, 0, \frac{1}{3} \right)$ بر اکشن D غلبه دارد.

بازیهای همزمان با استراتژی‌های آمیخته

لم: حرکات اکیدا مغلوب، در هیچ تعادل نش آمیخته‌ای، با احتمال مثبت ظاهر نمی‌شوند (و از جمله، در هیچ تعادل نش خالصی نیز ظاهر نمی‌شوند)

اثبات؟

تعريف حرکات مغلوب (مغلوب شده توسط یک استراتژی آمیخته).
در یک بازی استراتژیک با اولویت‌های vNM، می‌گوییم استراتژی آمیخته α_i از بازیکن i بر حرکت a_i از این بازیکن غلبه‌ی اکید دارد اگر برای هر نمایه حرکات a_{-i} از سایر بازیکنان داشته باشیم $U_i(\alpha_i, a_{-i}) > u_i(a_i, a_{-i})$.

$$U_i(\alpha_i, \alpha_{-i}^*) > U_i(a_i, \alpha_{-i}^*) \quad \forall \alpha_{-i}^*$$



$$\exists a'_i \in A_i \text{ such that } \alpha_i(a'_i) \neq 0 \quad \text{and} \\ U_i(a'_i, \alpha_{-i}^*) > U_i(a_i, \alpha_{-i}^*)$$



پس a_i نمی‌تواند در هیچ تعادل نش آمیخته‌ای ظاهر شود

بازیهای همزمان با استراتژی‌های آمیخته

▶ لم: حرکات اکیدا مغلوب، در هیچ تعادل نشی آمیخته‌ای، با احتمال مثبت ظاهر نمی‌شوند (و از جمله، در هیچ تعادل نش خالصی نیز ظاهر نمی‌شوند)

به عنوان تمرین، اثبات را به صورت دقیق ریاضی و با
جزییات کامل بنویسید

بازیهای همزمان با استراتژی‌های آمیخته

▶ تعریف حرکات مغلوب ضعیف (مغلوب شده توسط یک استراتژی آمیخته).
در یک بازی استراتژیک با اولویت‌های vNM، می‌گوییم استراتژی آمیخته α_i از بازیکن i ام بر حرفت a_i از این بازیکن، قابلیت ضعیف دارد اگر برای هر نمایه حرکات a_{-i} از سایر بازیکنان، $U_i(\alpha_i, a_{-i}) \geq u_i(a_i, a_{-i})$.

نکته: تعادل نش آمیخته اکشن مغلوب ضعیف داشته باشد (نتیجه‌ی مستقیم از همین خاصیت در بازیهای با استراتژی خالص)

▶ قضیه: هر بازی با اولویت‌های vNM که در آن هر بازیکن، تعداد متناهی اکشن داشته باشد، حداقل یک تعادل نش استراتژی آمیخته دارد که در آن هیچ بازیکنی، استراتژی مغلوب ضعیف ندارد.

حرکت

بازیهای همزمان با استراتژی‌های آمیخته

□ تعادل در جم

تعادل در یک جمعیت همگن: بازی متقارن و تعادل نش متقارن

• بازی بین بازیکنان با خصوصیات یکسان

✓ مجموعه اکشن‌های بازیکنان یکسان است

✓ تابع سود هر بازیکن، مستقل از شماره و هویت بازیکن بوده و فقط تابعی از اکشن آن بازیکن و اکشن سایرین است

• تعریف بازی دو نفره متقارن: یک بازی دو نفره استراتژیک با اولویت‌های ترتیبی را متقارن گوییم اگر $A_1 = A_2$ و برای هر $x, y \in A_1$ داشته باشیم $u_1(a_1, a_2)|_{a_1=x, a_2=y} = u_2(a_1, a_2)|_{a_1=y, a_2=x}$

	A	B
A	q,q w,e	
B	e,w r,r	

	A	B	C
A	q,q w,e	r,t	
B	e,w y,y	s,d	
C	t,r d,s	f,f	

4/20/2020

دانشگاه صنعتی اصفهان

Activate Windows
Go to Settings to activate Windows.

39

بازیهای همزمان با استراتژی‌های آمیخته

□ تعادل در جمعیتهای همگن و بازی‌های متقارن

تعريف بازی دو نفره متقارن: یک بازی دو نفره استراتژیک با اولویت‌های ترتیبی را متن A_1 و A_2 برای هر $x, y \in A_1 = A_2$ داشته باشیم

تعريف تعادل نش متقارن: یک بازی استراتژیک با اولویت‌های ترجیحی ک vNM مجموعه اکشن بازیکنان یکسان است را در نظر بگیرید. در چنین بازی‌ای، یک نمایه استراتژی a^* را یک تعادل نش متقارن مگر اولاً تعادل نش باشد و ثانیاً a^* برای همه بازیکنان یکسان باشد، یعنی $a_1^* = a_2^* = \dots = a_N^*$.

$$a_1^* = a_2^* = \dots = a_N^*$$

بازیهای همزمان با استراتژی‌های آمیخته

□ تعادل در جمعیتهای همگن و بازی‌های متقارن

☞ قضیه: هر بازی با اولویت‌های NM متقارن که در آن هر بازیکن، تعداد متناهی اکشن داشته باشد، حداقل یک تعادل نش استراتژی آمیخته متقارن دارد.

بازیهای همزمان با استراتژی‌های آمیخته

□ تعادل در جمعیتهای همگن و بازی‌های متقارن

► **مثال.** گزارش یک جرم به پلیس: n نفر شاهد یک جرم هستند و همه ترجیح می‌دهند که پلیس از وقوع جرم مطلع شود. هر کس می‌تواند خود به پلیس تلفن کند یا این که صرفاً امیدوار باشد شاهد دیگری به پلیس تلفن کند.

❖ c : هزینه تماس به پلیس برای هر فرد.

❖ v : ارزش مطلع شدن پلیس، از دید هر فرد.

❖ فرض کنیم $c > v$

□ **سوال:** در وضعیت تعادل، انتظار داریم چه رفتاری از این جامعه رخ دهد؟ مثلاً اگر تعداد شاهدین زیاد شود، پلیس زودتر خبر می‌شود؟

Asa دیده بان کلاسیک - Wikipedia Murder of Kitty Genovese - Wikipedia Bystander effect - Wikipedia

en.wikipedia.org/wiki/Murder_of_Kitty_Genovese

Not logged in Talk Contributions Create account Log in

Article Talk Read Edit View history Search Wikipedia

Murder of Kitty Genovese

From Wikipedia, the free encyclopedia

Coordinates: 40°42'33.98"N 73°49'48.76"W

In the early hours of March 13, 1964, 28-year-old **Kitty Genovese** was stabbed outside the apartment building across the street from where she lived, in an apartment above a row of shops on Austin Street, in the **Kew Gardens neighborhood of Queens in New York City**.^{[2][3][4]} Two weeks after the murder, *The New York Times* published an article claiming that 38 witnesses saw or heard the attack, but none of them called the police or came to her aid.^[5]

The incident prompted inquiries into what became known as the **bystander effect** or "Genovese syndrome",^[6] and the murder became a staple of American psychology textbooks for the next four decades. However, researchers have since uncovered major inaccuracies in the *New York Times* article.

Reporters at a competing news organization discovered in 1964 that the article was inconsistent with the facts, but they were unwilling at the time to challenge *New York Times* editor Abe Rosenthal. In 2007, an article in the *American Psychologist* found "no evidence for the presence of 38 witnesses, or that witnesses observed the murder, or that witnesses remained inactive".^[7] In 2016, *The New York Times* called its own reporting "flawed", stating that the original story "grossly exaggerated the number of witnesses and what they had perceived".^[8]

Winston Moseley, a 29-year-old Manhattan native, was arrested during a house burglary six days after the murder. While in custody, he confessed to killing Genovese. At his trial, Moseley was found guilty of murder and sentenced to death; this sentence was later commuted to life imprisonment. Moseley died in prison on March 28, 2016, at the age of 81, having served 52 years.^[8]

Murder of Kitty Genovese	
Date	March 13, 1964
Location	Kew Gardens, Queens, New York City, US
Type	Homicide
Burial	March 16, 1964 Lakeview Cemetery New Canaan, Connecticut, US ^[1]
Convicted	Winston Moseley
Trial	June 8–11, 1964
Verdict	Guilty
Convictions	Murder
Sentence	Death (commuted to life imprisonment)

Contents [hide]

- 1 [Kitty Genovese](#)
- 2 [Attack](#)
- 3 [Police investigation](#)
- 4 [Winston Moseley](#)

Activate Windows
Go to Settings to activate Windows.

3:07 PM 4/22/2020

Asa دیده بان کلاسیک - Wikipedia Murder of Kitty Genovese - Wikipedia Bystander effect - Wikipedia

en.wikipedia.org/wiki/Bystander_effect Not logged in Talk Contributions Create account Log in

Article Talk Read Edit View history Search Wikipedia

Bystander effect

From Wikipedia, the free encyclopedia

This article is about the psychological phenomenon. For the bystander effect in radiobiology, see [Bystander effect \(radiobiology\)](#).

The **bystander effect**, or **bystander apathy**, is a social psychological claim that individuals are less likely to offer help to a victim when other people are present; the greater the number of bystanders, the less likely it is that one of them will help.

Several factors contribute to the bystander effect, including ambiguity, group cohesiveness, and diffusion of responsibility that reinforces mutual denial of a situation's severity.^[1]

Contents [hide]

- 1 Social psychology research
 - 1.1 Variables affecting bystanders
 - 1.1.1 Emergency versus non-emergency situations
 - 1.1.2 Ambiguity and consequences
 - 1.1.3 Understanding of environment
 - 1.1.4 Priming the bystander effect
 - 1.1.5 Cohesiveness and group membership
 - 1.1.6 Cultural differences
 - 1.1.7 Diffusion of responsibility
 - 1.2 Organizational ombuds practitioners' research
 - 1.3 What Would You Do?
 - 1.4 Non-computer versus computers: computer mediated intervention
 - 1.5 Children as bystanders- 2 Implications of research

A cartoon illustrating the effect. Four people ignore a person lying on the floor, each with their own reason for deciding that no help is required.

Activate Windows
Go to Settings to activate Windows.

3:09 PM 4/22/2020

بازیهای همزمان با استراتژی‌های آمیخته

□ تعادل در جمعیتهای همگن و بازی‌های متقارن

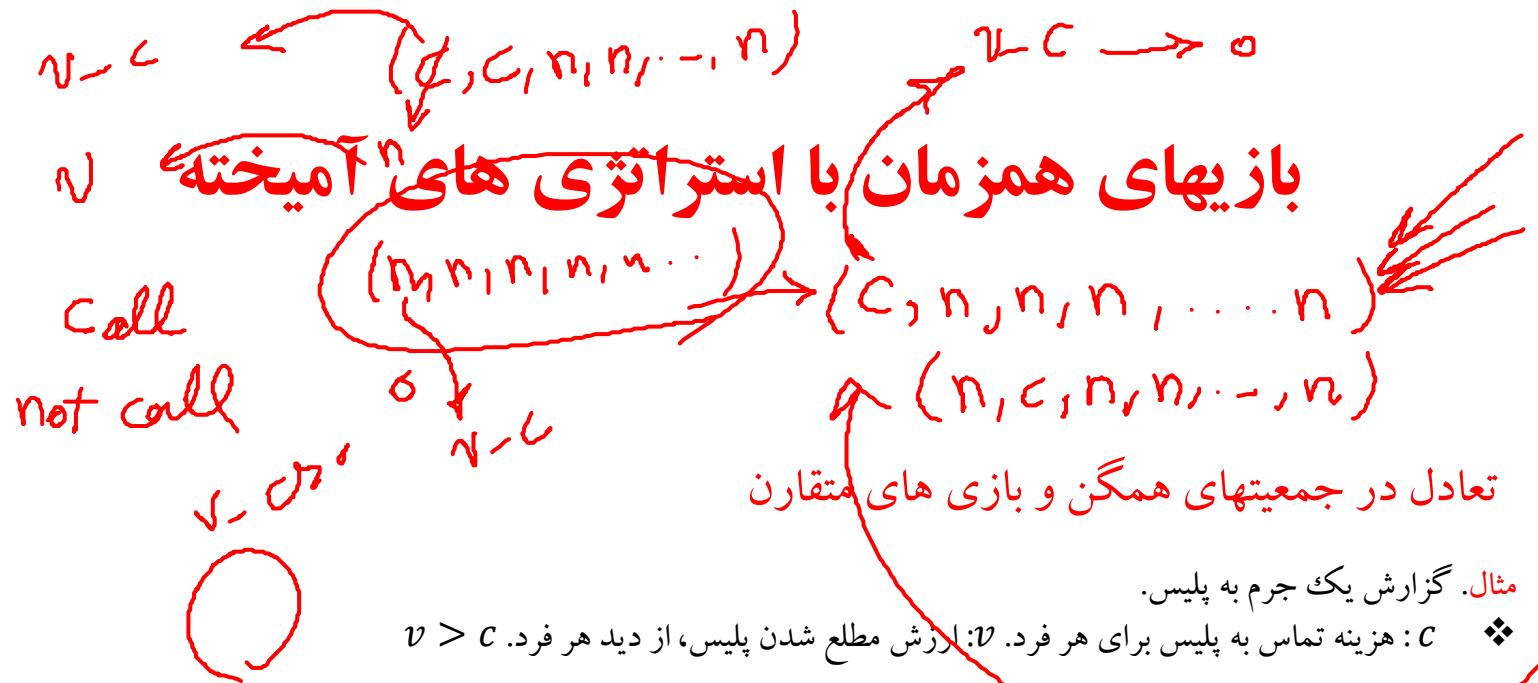
► **مثال.** گزارش یک جرم به پلیس: n نفر شاهد یک جرم هستند و همه ترجیح می‌دهند که پلیس از وقوع جرم مطلع شود. هر کس می‌تواند خود به پلیس تلفن کند یا این که صرفاً امیدوار باشد شاهد دیگری به پلیس تلفن کند.

❖ c : هزینه تماس به پلیس برای هر فرد.

❖ v : ارزش مطلع شدن پلیس، از دید هر فرد.

❖ فرض کنیم $c > v$

□ **سوال:** در وضعیت تعادل، انتظار داریم چه رفتاری از این جامعه رخ دهد؟ مثلاً اگر تعداد شاهدین زیاد شود، پلیس زودتر خبر می‌شود؟



□ تعادل در جمعیتهای همگن و بازی‌های متقارن

مثال. گزارش یک جرم به پلیس.

c : هزینه تماس به پلیس برای هر فرد. v : ارزش مطلع شدن پلیس، از دید هر فرد. $c > v$

در بازی با استراتژی خالص، تعادل نش برابر است با کلیه نمایه اکشن‌هایی که در آن، فقط و فقط یک نفر به پلیس زنگ می‌زند.

در بازی با استراتژی آمیخته؟

چون بازی متقارن است، پس حتماً یک تعادل نش متقارن دارد

Call

بازیهای همزمان با استراتژی‌های آمیخته

$$\left(\underbrace{(p_0, 1-p)}_{\text{Call}}, \underbrace{(p_1, 1-p) \dots}_{\text{no Call}} \right) \rightarrow \underbrace{(p, p, p \dots)}_{\text{Call}}$$

□ تعادل در جمعیتهای همگن و بازی‌های متقارن

➤ مثال. گزارش یک جرم به پلیس.

❖ c : هزینه تماس به پلیس برای هر فرد. v : ارزش مطلع شدن پلیس، از دید هر فرد. $v > c$

➤ در بازی با استراتژی آمیخته؟

چون بازی متقارن است، پس حتماً یک تعادل نش متقارن دارد

فرض کنید در این تعادل نش متقارن، احتمال تماس از طرف یک نفر برابر p باشد (و احتمال عدم تماس برابر $p - 1$)

✓ ادعا ۱: $p \neq 0$

✓ ادعا ۲: $p \neq 1$

۱،۰ بازیهای همزمان با استراتژی‌های آمیخته (Call / call)

بازیهای همزمان با استراتژی‌های آمیخته

چگونه می‌توان در یک بازی با استراتژی‌های آمیخته، نمایه‌های تعادل نش را یافت؟

تعیین شرایط لازم و کافی برای تعادل نش بودن یک نمایه استراتژی (خواص معادل با تعریف تعادل نش)

- ❖ قضیه: یک نمایه استراتژی آمیخته α^* ، یک تعادل نش است اگر و تنها اگر برای هر بازیکن i ، به شرط آن که سایر بازیکنان نمایه استراتژی α_i^* را اتخاذ کرده باشند، دو خاصیت زیر برقرار باشد:
 ۱. به ازاء انتخاب هر اکشنی که در α_i^* با احتمال غیر صفر انتخاب می‌شود، میانگین سود بازیکن i یکسان باشد
 ۲. به ازاء انتخاب هر اکشنی که در α_i^* با احتمال صفر انتخاب می‌شود، میانگین سود بازیکن i حداقل برابر زمانی باشد که یک اکشن با احتمال غیر صفر انتخاب کند.

نتیجه: تعادل‌های نش آمیخته‌ی nondegenerate هیچ گاه تعادل نش اکید نیستند

Activate Windows
Go to Settings to activate Windows.

بازیهای همزمان با استراتژی‌های آمیخته

$$v_c = v(1 - (1-p)^{n-1})$$

P

□ تعادل در جمعیتهای همگن و بازی‌های متقارن

مثال. گزارش یک جرم به پلیس.

❖ v : ارزش مطلع شدن پلیس، از دید هر فرد. $c > v$: هزینه تماس به پلیس برای هر فرد.

➢ پس یک تعادل نش آمیخته وجود دارد که در آن هر بازیکن با احتمال p بین صفر و یک، با پلیس تماس می‌گیرد.

➢ طبق قضیه‌ی گفته شده، در این تعادل، میانگین سود هر بازیکن به ازاء اکشن‌های تماس نا عدم تماس یکسان است.

$$U_i(\text{call}, (p, p, \dots, p)) = v - c$$

$$\begin{aligned} U_i(\text{not call}, (p, p, \dots, p)) &= 0 \times \Pr\{\text{no one else calls}\} + v \times \Pr\{\text{someone else call}\} \\ &= 0 + v \times (1 - \Pr\{\text{no one else calls}\}) = v(1 - (1-p)^{n-1}) \end{aligned}$$

$$(1-p)^{n-1}$$

بازیهای همزمان با استراتژی‌های آمیخته



□ تعادل در جمعیتهای همگن و بازی‌های متقارن

مثال. گزارش یک جرم به پلیس.

❖ v : هزینه تماس به پلیس برای هر فرد. c : ارزش مطلع شدن پلیس، از دید هر فرد. $c > v$

➢ پس یک تعادل نش آمیخته وجود دارد که در آن هر بازیکن با احتمال p بین صفر و یک، با پلیس تماس می‌گیرد.

➢ طبق قضیه‌ی گفته شده، در این تعادل، میانگین سود هر بازیکن به ازاء اکشن‌های تماس یا عدم تماس یکسان

$$v - c = v(1 - (1 - p)^{n-1}) \Rightarrow p = 1 - \sqrt[n-1]{\frac{c}{v}}$$

$$\Pr\{\text{no one calls}\} = (1 - p)^n = \left(\frac{c}{v}\right)^{\frac{n}{n-1}}$$

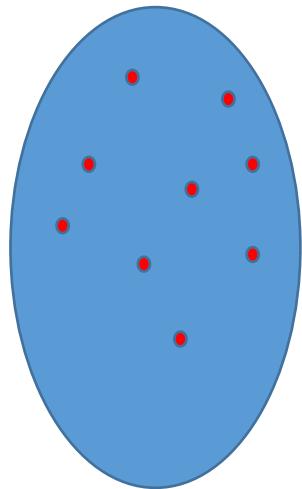
$$\begin{aligned} & \Pr\{\text{one call}\} = 1 - \Pr\{\text{no one calls}\} \\ & = 1 - \left(\frac{c}{v}\right)^{\frac{n}{n-1}} \end{aligned}$$



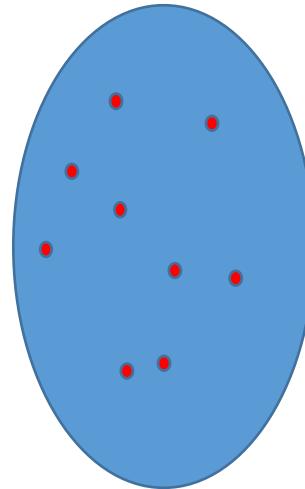
بازیهای همزمان با استراتژی‌های آمیخته

□ شکل گیری اطلاعات بازی در بازیکنان و حرکت به سمت تعادل نش?

➤ کسب تجربه از بازی‌های انجام شده



جمعیت بازیکنان اول

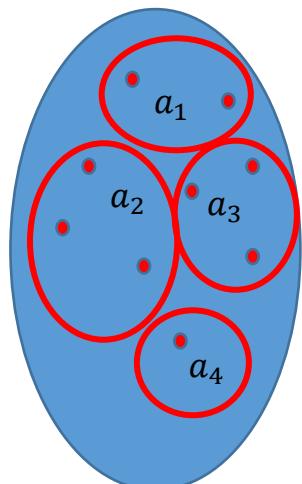


جمعیت بازیکنان دوم

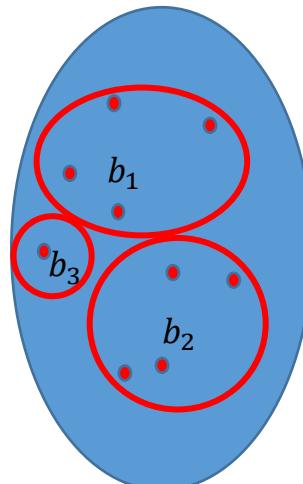
بازیهای همزمان با استراتژی‌های آمیخته

□ شکل گیری اطلاعات بازی در بازیکنان و حرکت به سمت تعادل نش?

➤ کسب تجربه از بازی‌های انجام شده



جمعیت بازیکنان اول



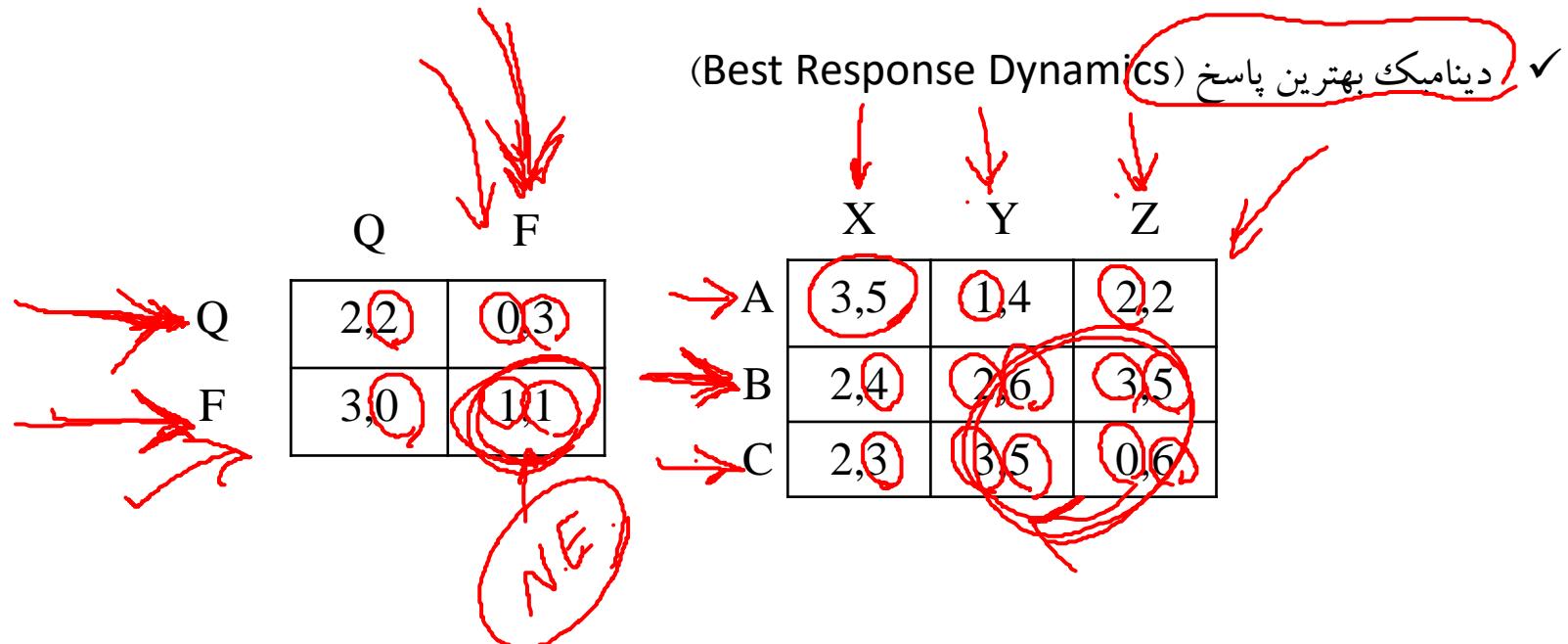
جمعیت بازیکنان دوم

بازیهای همزمان با استراتژی‌های آمیخته

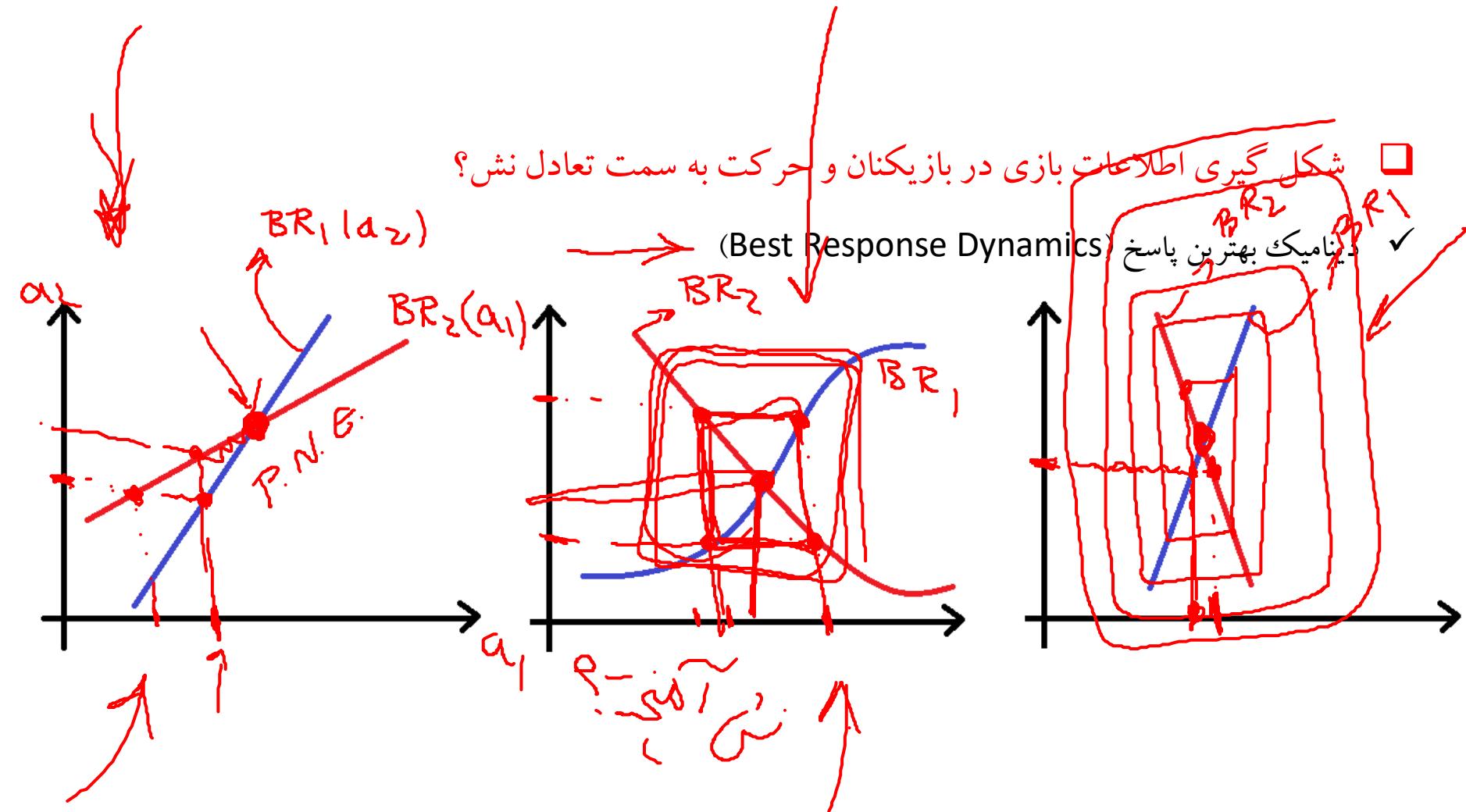
- شکل گیری اطلاعات بازی در بازیکنان و حرکت به سمت تعادل نش?
- کسب تجربه از بازی‌های انجام شده
 - حذف اکشن‌های مغلوب
 - یادگیری (Learning)
 - دینامیک بهترین پاسخ (Best Response Dynamics)
 - بازی ساختگی (Fictitious Play)
- {

بازیهای همزمان با استراتژی‌های آمیخته

□ شکل گیری اطلاعات بازی در بازیکنان و حرکت به سمت تعادل نش?



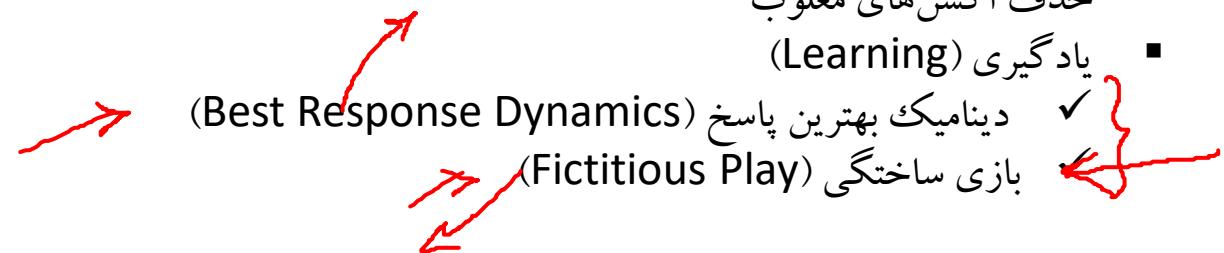
بازیهای همزمان با استراتژی‌های آمیخته



بازیهای همزمان با استراتژی‌های آمیخته

□ شکل گیری اطلاعات بازی در بازیکنان و حرکت به سمت تعادل نش?

- کسب تجربه از بازی‌های انجام شده
- حذف اکشن‌های مغلوب
- یادگیری (Learning)

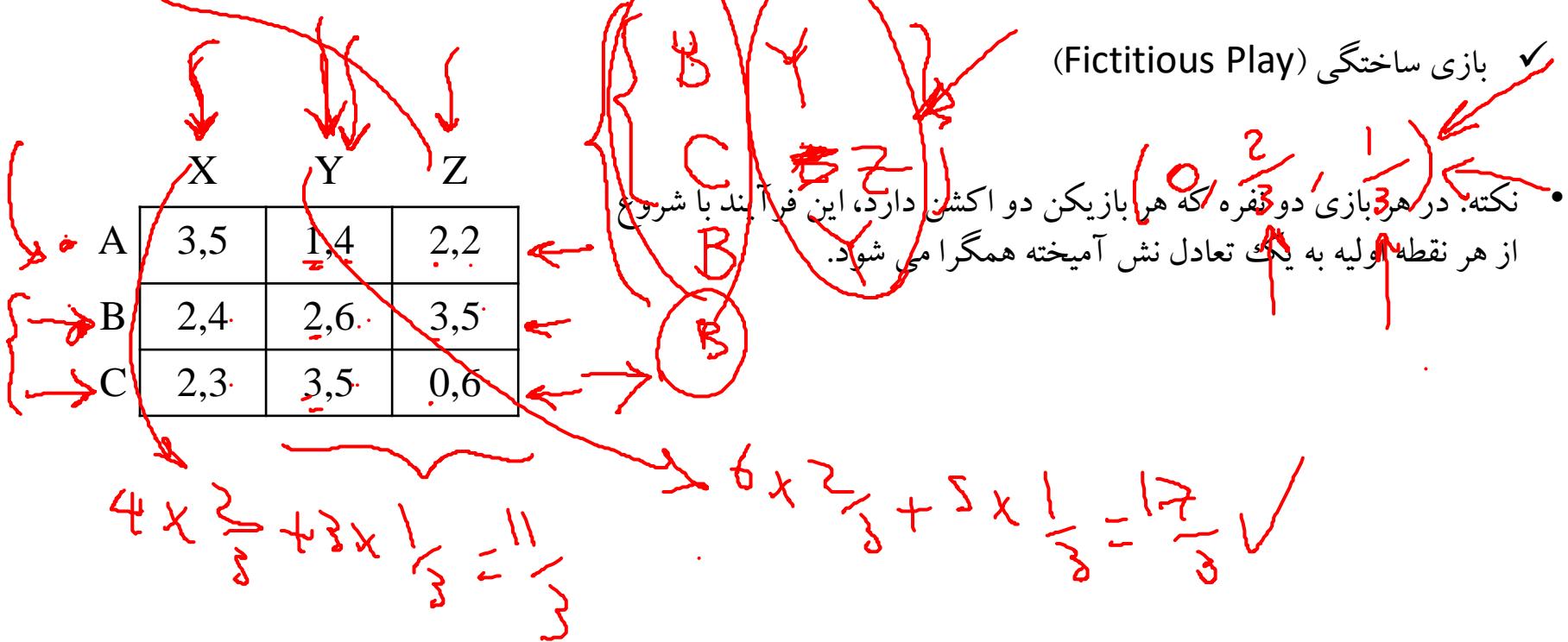


بازیهای همزمان با استراتژی‌های آمیخته

$$5 \times \frac{2}{3} + 6 \times \frac{1}{3} = \frac{16}{3}$$

$$(0, \cancel{\frac{2}{3}}, \cancel{\frac{1}{3}})$$

□ شکل گیری اطلاعات بازی در بازیکنان و حرکت به سمت تعادل نش؟



بازیهای همزمان با استراتژی‌های آمیخته

- روش سیستماتیک برای یافتن همه استراتژی‌های آمیخته تعادل نش.

بازیهای همزمان با استراتژی‌های آمیخته

- ✓ چگونه می‌توان در یک بازی با استراتژی‌های آمیخته، نمایه‌های تعادل نش را یافت؟
- تعیین شرایط لازم و کافی برای تعادل نش بودن یک نمایه استراتژی (خواص معادل با تعریف تعادل نش)

- ❖ قضیه: یک نمایه استراتژی آمیخته α^* ، یک تعادل نش است اگر و تنها اگر برای هر بازیکن π_i ، به شرط آن که سایر بازیکنان نمایه استراتژی α_i^* را اتخاذ کرده باشند، دو خاصیت زیر برقرار باشد:
 1. به ازاء انتخاب هر اکشنی که در α_i^* با احتمال غیر صفر انتخاب می‌شود، میانگین سود بازیکن π_i یکسان باشد.
 2. به ازاء انتخاب هر اکشنی که در α_i^* با احتمال صفر انتخاب می‌شود، میانگین سود بازیکن π_i حداقل برابر زمانی باشد که یک اکشن با احتمال غیر صفر انتخاب کند.

نتیجه: تعادل های نش آمیخته‌ی nondegenerate هیچ گاه تعادل نش اکید نیستند

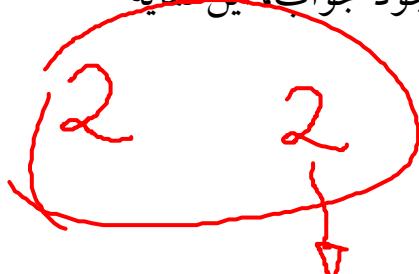
Activate Windows
Go to Settings to activate Windows.

بازیهای همزمان با استراتژی‌های آمیخته

$$A_i = \{ \quad \}$$

□ روش سیستماتیک برای یافتن همه استراتژی‌های آمیخته تعادل نش.

- ✓ برای هر بازیکن i یک زیرمجموعه S_i از اکشن‌های آن بازیکن A_i انتخاب کن
- ✓ به دنبال نمایه‌های استراتژی‌های آمیخته ای بگرد که برای هر بازیکن i به اکشن‌های داخل S_i احتمال مثبت و به سایر اکشن‌ها احتمال صفر نسبت دهد و دو شرط قضیه مذبور را برآورده کند. در صورت وجود جواب، این نمایه استراتژی، تعادل نش آمیخته است.
- ✓ روای بالا را برای هر زیرمجموعه S_i از هر i تکرار کن.



$$\begin{matrix} 3 \times 3 \\ 9 \end{matrix} \quad 2 - 1 = 3$$

زیرفصل ۴.۱۰ کتاب مرجع

$$\begin{matrix} 2 & 3 \\ 7 \times 7 < 49 \end{matrix} \quad 2 - 1 = 7$$

بازیهای همزمان با استراتژی‌های آمیخته

□ تعادل نش آمیخته در بازی‌های با مجموعه اکشن پیوسته مقدار

$$U_i(\alpha) =$$

بازیهای همزمان با استراتژی‌های آمیخته

$$U_i(\alpha) =$$

- ✓ چگونه می‌توان در یک بازی با استراتژی‌های آمیخته، نمایه‌های تعادل نش را یافت؟
◻ تعیین شرایط لازم و کافی برای تعادل نش بودن یک نمایه استراتژی (خواص معادل با تعریف تعادل نش)

$$da_n \dots da_2 da_1$$

❖ قضیه: یک نمایه استراتژی آمیخته α^* ، یک تعادل نش است اگر و تنها اگر برای هر بازیکن i ، به شرط آن که سایر بازیکنان نمایه استراتژی α_{-i}^* را اتخاذ کرده باشند، دو خاصیت زیر برقرار باشد:

1. به ازاء انتخاب هر اکشنی که در α_i^* با احتمال غیر صفر انتخاب می‌شود، میانگین سود بازیکن i یکسان باشد.
2. به ازاء انتخاب هر اکشنی که در α_i^* با احتمال صفر انتخاب می‌شود، میانگین سود بازیکن i حداقل برابر زمانی باشد که یک اکشن با احتمال غیر صفر انتخاب کند.

نتیجه: تعادل‌های نش آمیخته‌ی nondegenerate هیچ گاه تعادل نش اکید نیستند

Activate Windows
Go to Settings to activate Windows.

بازیهای همزمان با استراتژی‌های آمیخته

□ تعادل نش آمیخته در بازی‌های با مجموعه اکشن پیوسته مقدار

❖ قضیه: یک نمایه استراتژی آمیخته α^* ، یک تعادل نش است اگر و تنها اگر برای هر بازیکن i ، به شرط آن که سایر بازیکنان نمایه استراتژی α_{-i}^* را اتخاذ کرده باشند، دو خاصیت زیربرقرار باشد:

۱. α_i^* به هر مجموعه اکشن‌های a_i که به ازاء آنها $U_i(a_i, \alpha_{-i}^*) < U_i(\alpha_i^*, \alpha_{-i}^*)$ باشد، مقدار چگالی احتمال صفر نسبت دهد.

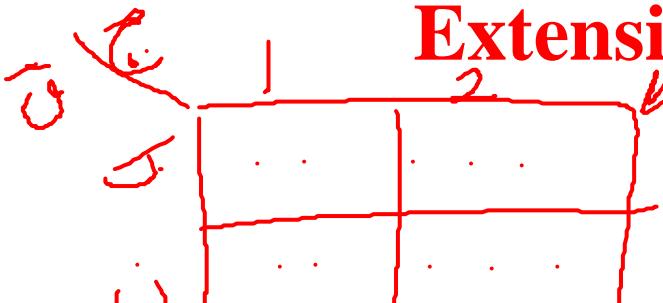
۲. برای هیچ اکشن a_i ، نداشته باشیم $U_i(a_i, \alpha_{-i}^*) > U_i(\alpha_i^*, \alpha_{-i}^*)$.

زیرفصل ۴.۱۱ کتاب مرجع

بازیهای توسعی Extensive Games

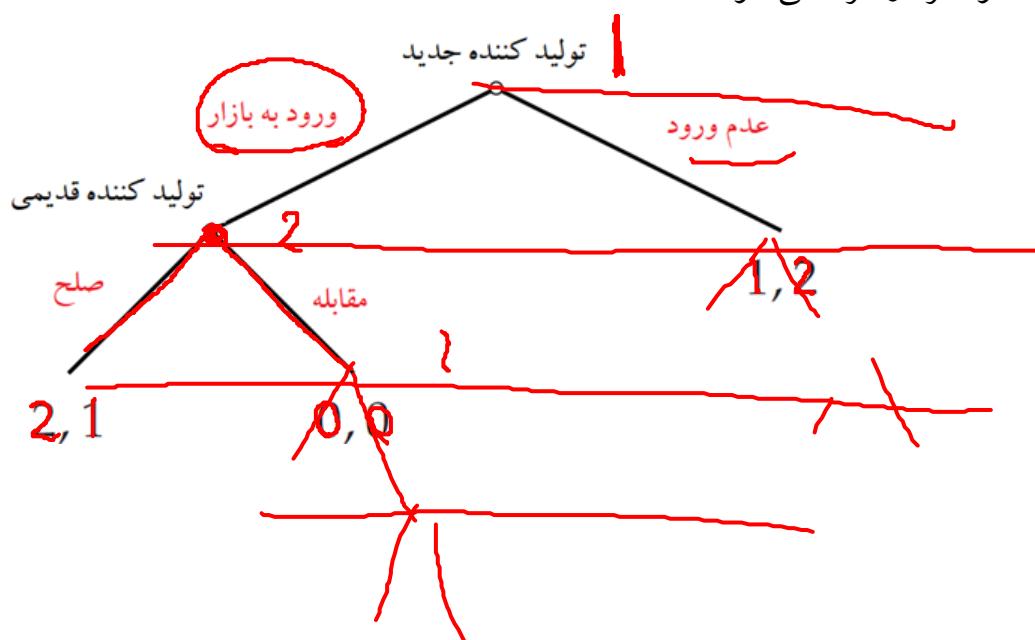
بازی توسعی

فصل ۵
بازار



فرم نزدیک
بازار اسکرین

مثال: تولید کننده ای قدیمی به تنها یک محصول در حال تولید یک محصول در بازار است و در انحصار بازار، سود ۲ را کسب می کند. یک تولید کننده جدید، می تواند محصول دیگری تولید کند و سود ۱ به دست آورد. اما تولید کننده جدید می تواند خط تولید را تغییر دهد و همان محصول تولید کننده قدیمی را عرضه کند؛ در این صورت تولید کننده قدیمی می تواند به او اجازه فعالیت دهد اما به دلیل فرسودگی تجهیزات، سودش به ۱ کاهش می یابد و تولید کننده جدید سود ۲ خواهد داشت. در طرف مقابل تولید کننده قدیمی می تواند وارد یک نزاع با تولید کننده جدید شود که در نتیجه آن، سود هر دو نفر ۰ می شود.



حرکات غیرهمزان

بازی استراتژیک؟

روش تحلیل و مدل کردن؟

نمایش در فرم استراتژیک (جدول)

\checkmark B
 \checkmark A
 \checkmark AX
 \checkmark AY

Extensive Games توسيعی بازیها

ورود بازار A

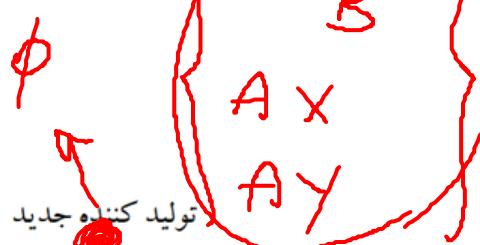
تولید کننده قدیمی

2 1

0 0

تولید کننده جدید

عدم تولد



$AX > B > AY$

$B > AX > AY$

بازی

players

Terminal histories

Subhistories

Proper subhistories

Player Function

$$P(\emptyset) = \underline{\underline{m}}$$

$$P(A) = \underline{\underline{m}}$$

Action sets

Preferences

Pay-off functions

$$u_1(B) = 1$$

$$u_2(AX) = 2$$

$$u_2(AY) = 0$$

$$P(\emptyset) = 1$$

$$\rightarrow A_1 = \{A, B, C, D\} \quad A_2 = \{X, Y\}$$

Extensive Games بازیهای توسعی

$$P(A) = 1$$

$(0, 0)$

$BX \rightarrow$

AXA

$\{1, 2, 3\}$

$$P(B) = r$$

بازیکن ۲

A

$AXC \rightarrow$

$$P(AX) = 1$$

بازیکن ۱

B

$AYF \rightarrow$

بازیکن ۴

X

$AYGB \rightarrow$

بازیکن ۳

Y

$AYGD \rightarrow$

بازیکن ۱

X

$BYB \rightarrow$

بازیکن ۲

Y

$BYA \rightarrow$

بازیکن ۱

A

$(1, 0, 2)$

$(1, 2, -1)$

$(0, 0, 0)$

$(3, 0, 0)$

$(1, 2, -1)$

$(1, 0, 1)$

$P(AY) = 1$

$(1, 0, 2)$

$(3, 0, 0)$

$P(AYG)$

≥ 1

$P(B) = 2$

$(1, 0, 2)$

$(3, 0, 0)$

$P(BY)$

≥ 1

Pay-off functions as functions of terminal histories

$$A_1 = \{\emptyset : A, B, C, D\}$$

$$A_2 = \{X, Y\}$$

$$A_3 = \{F, G\}$$

players

Terminal histories

Subhistories

Proper subhistories

Player Function

Action sets

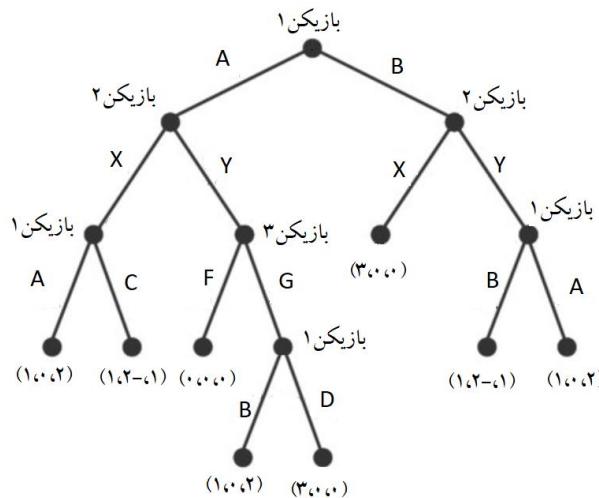
Preferences

بازیهای توسعی

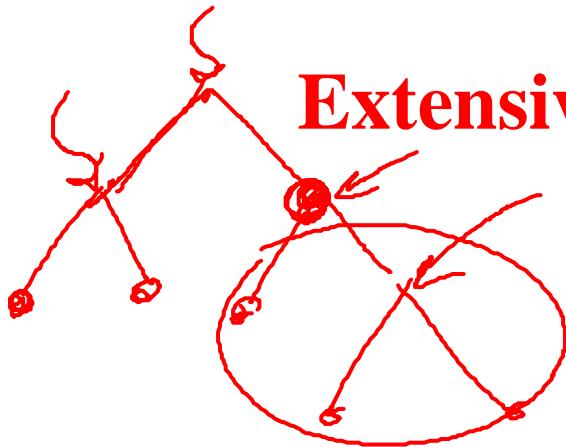
Extensive Games

بازیهای توسعی با اطلاعات کامل

Extensive Games with perfect information



بازیهای توسعی Extensive Games

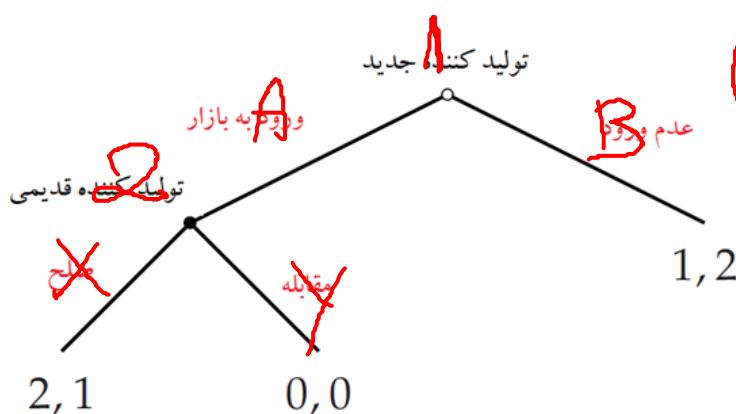


تعریف: یک بازی توسعی با اطلاعات کامل، عبارت است از یک مجموعه از بازیکنان؛

یک مجموعه از دنباله های اکشن ها (terminal history) به طوری که هیچ زیر دنباله ای بک زیر دنباله اکید (proper)،

یک تابع که به هر proper subhistory، یک بازیکن نسبت دهد (player function)؛

برای هر بازیکن، اولویت های بین terminal history ها.



$$(\{\{1, 2\}, \{AX, AY, BX, BY\}\}$$

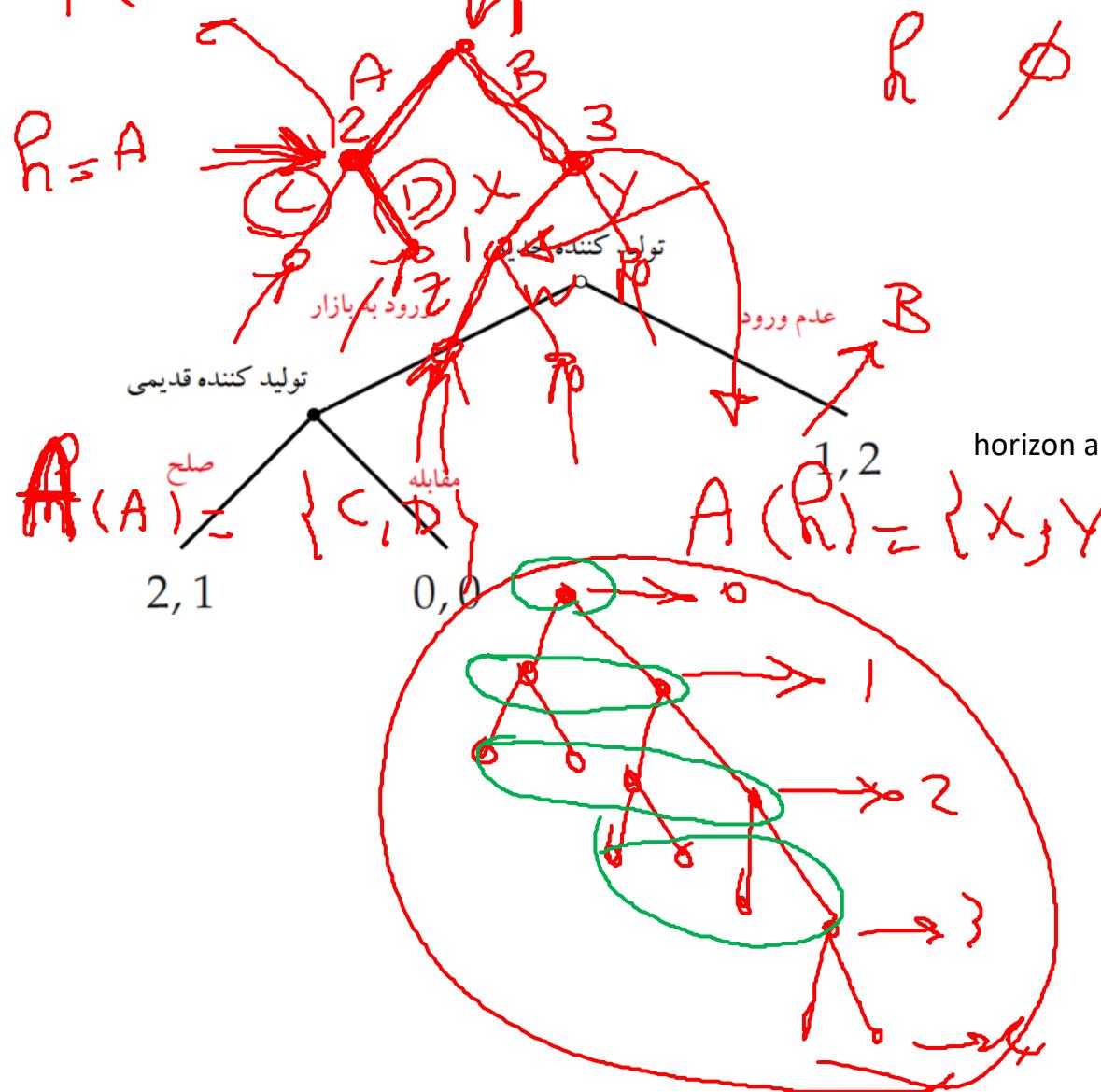
$$(P(\emptyset)=1, P(A)=2)$$

$$\text{و } AX > B > AY, \\ B > AX > AY)$$

$$u_1(AX) = 2, u_1(AY) = 0, \dots$$

$$B > AX > AY)$$

بازیهای توسعی Extensive Games



§(.)

بازیهای توسعی

Extensive Games

$$S(\phi) = B$$

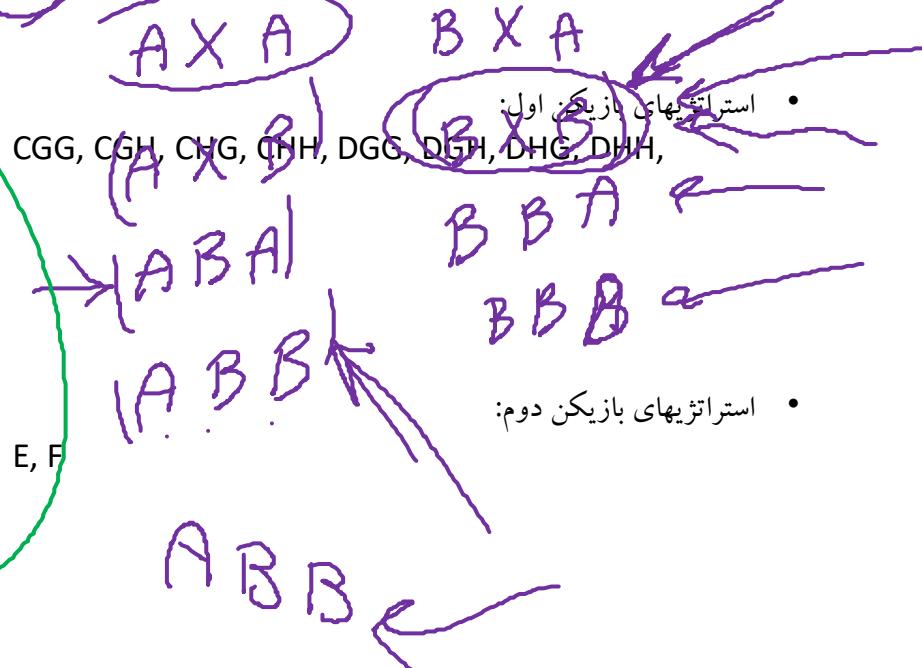
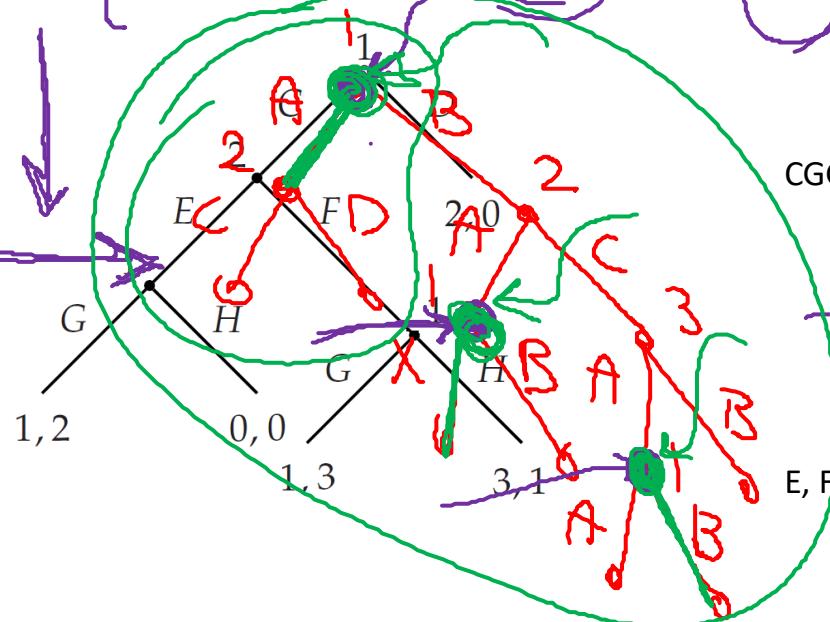
$$S(BCA) = B$$

$$S(BA) = X$$

ساختار اطلاعاتی

تعریف استراتژی:

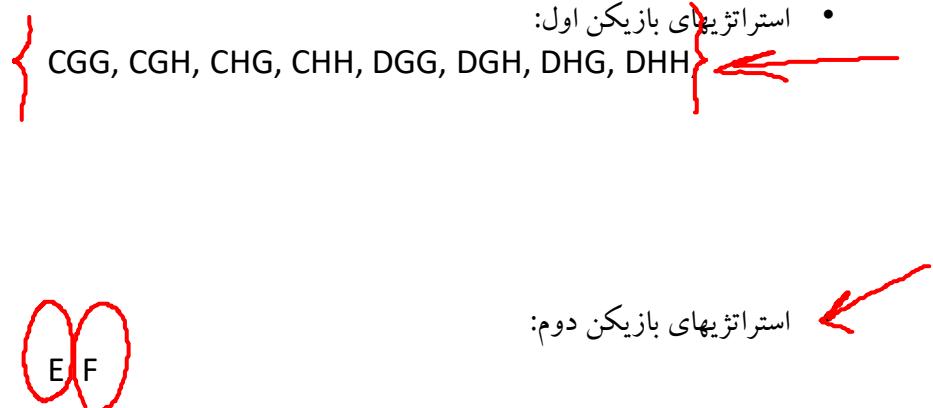
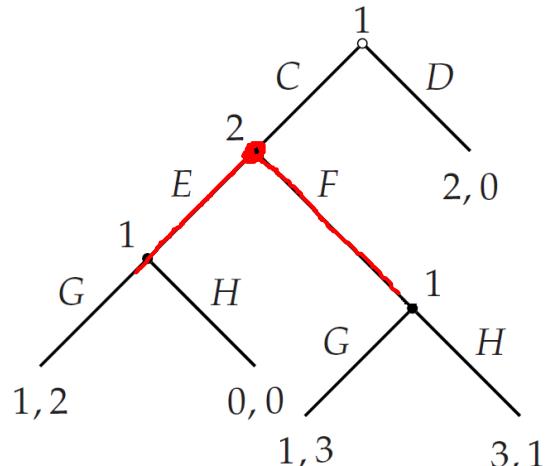
در یک بازی توسعی، یک استراتژی برای بازیکن i است، عبارت است از یک تابع که به هر h که پاس از آن نویت حرکت بازیکن i است (یعنی $P(h) = i$) یک اکشن از $A(h)$ نسبت دهد.



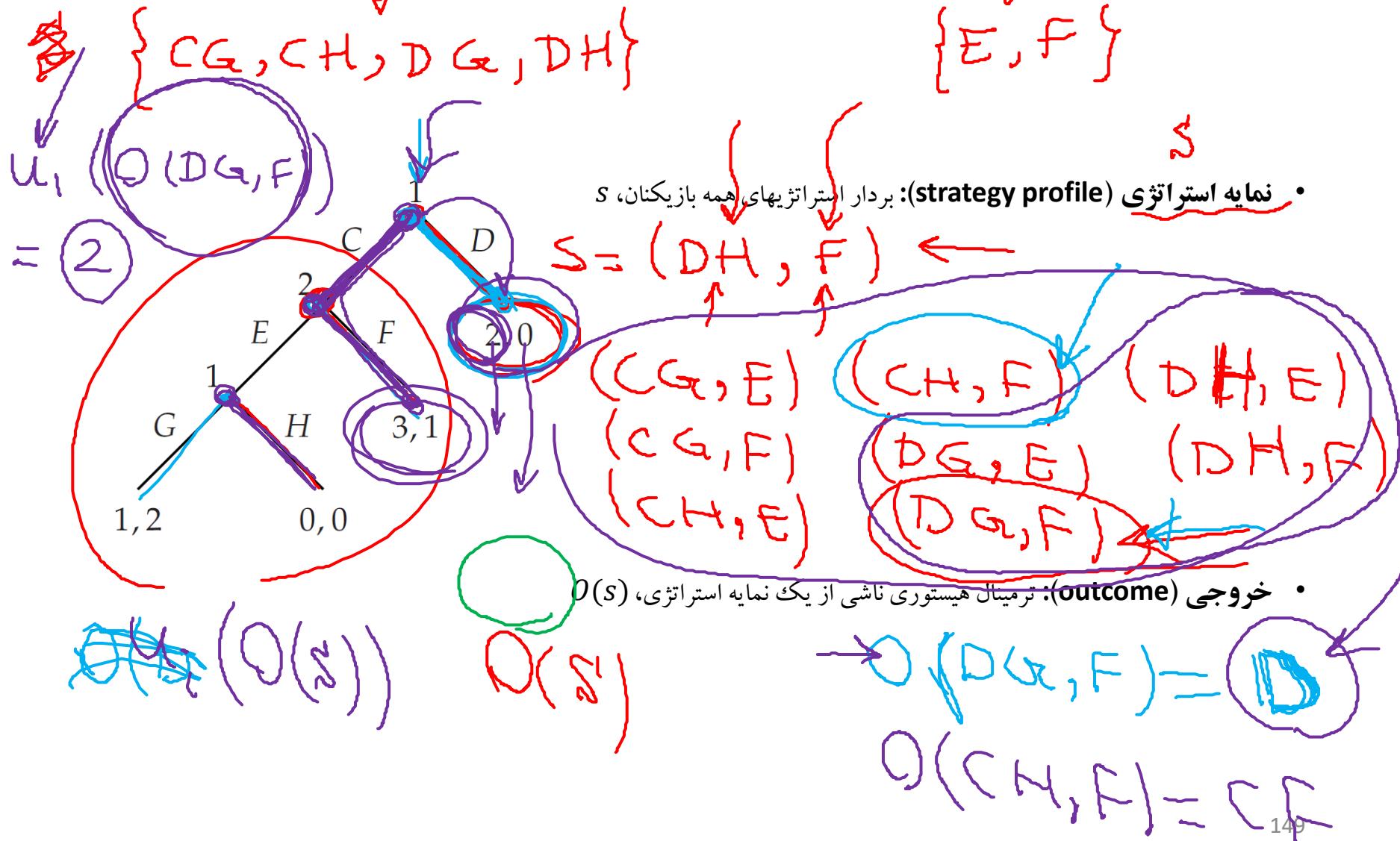
بازیهای توسعی Extensive Games

- تعريف. استراتژی:

□ در یک بازی توسعی، یک استراتژی برای بازیکن i ام، عبارت است از یک تابع که به هر h که پس از آن، نوبت حرکت بازیکن i است (یعنی $P(h) = i$) یک اکشن از $A(h)$ نسبت دهد.



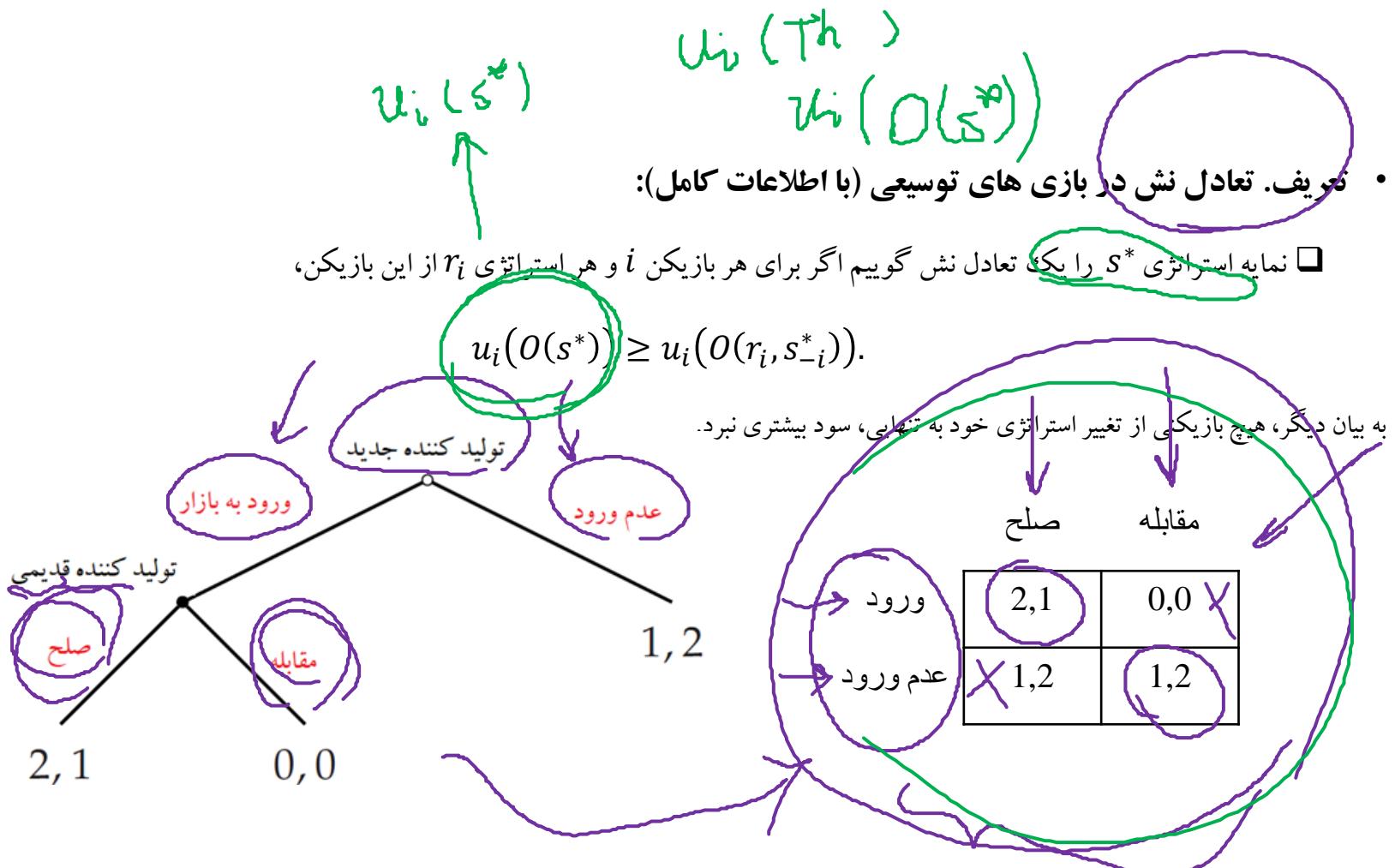
بازیهای توسعی Extensive Games



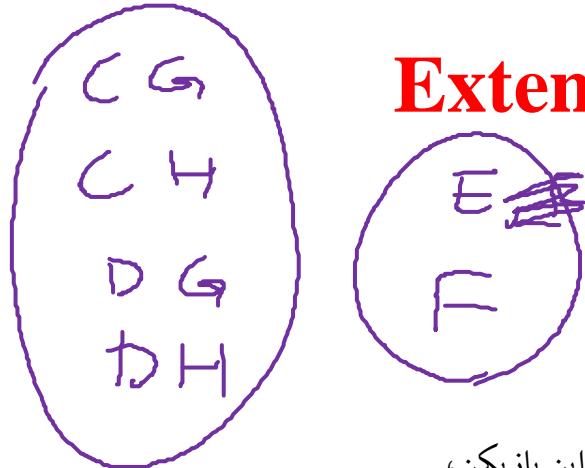
بازیهای توسعی Extensive Games

- تعادل در بازیهای توسعی
 - ❖ تعادل نش
 - ❖ تعادل کامل زیربازی (subgame perfect equilibrium)

بازیهای توسعی Extensive Games



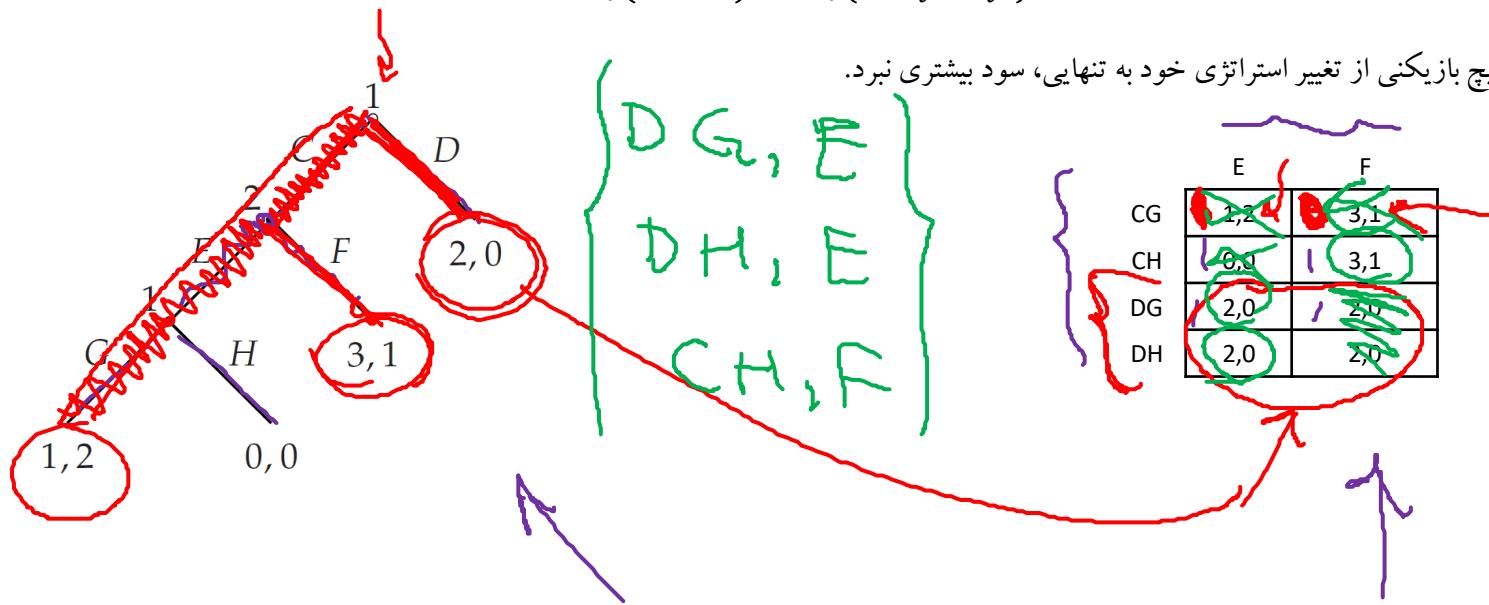
بازیهای توسعی



- تعریف: تعادل نش در بازی های توسعی (با اطلاعات کامل):

□ نمایه استراتژی s^* را یک تعادل نش گوییم اگر برای هر بازیکن i و هر استراتژی r_i از این بازیکن،

$$u_i(O(s^*)) \geq u_i(O(r_i, s_{-i}^*)).$$



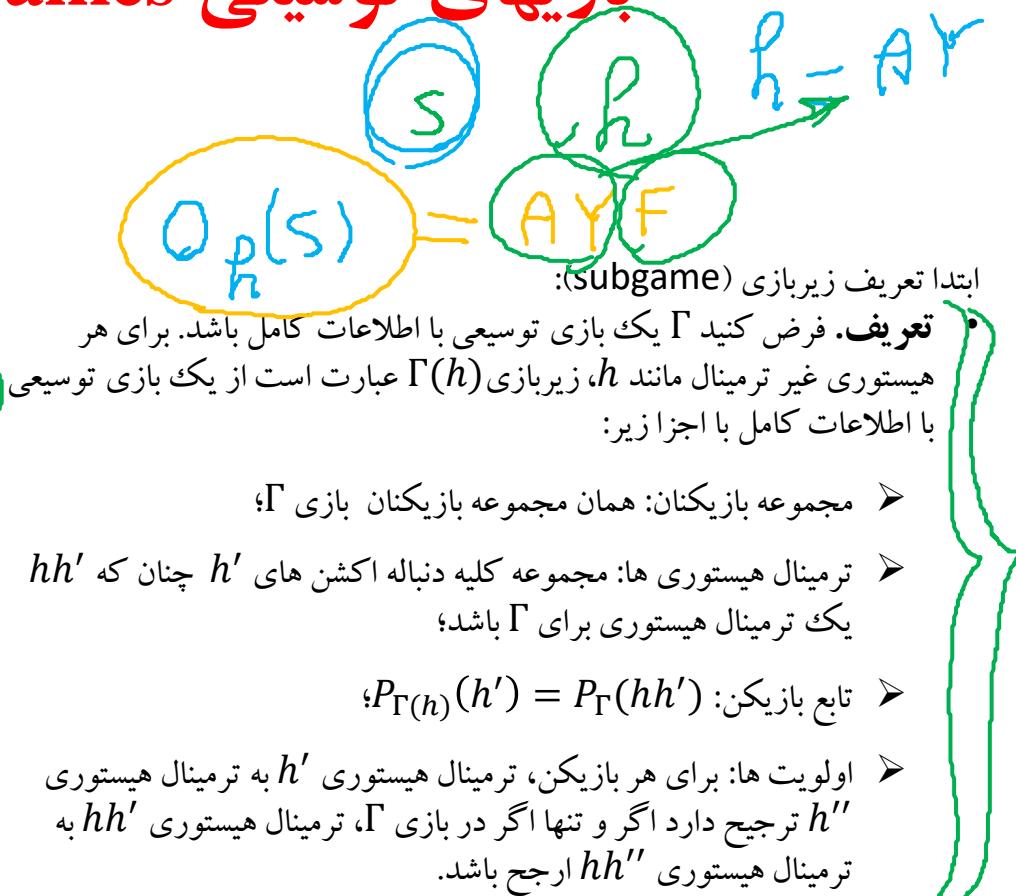
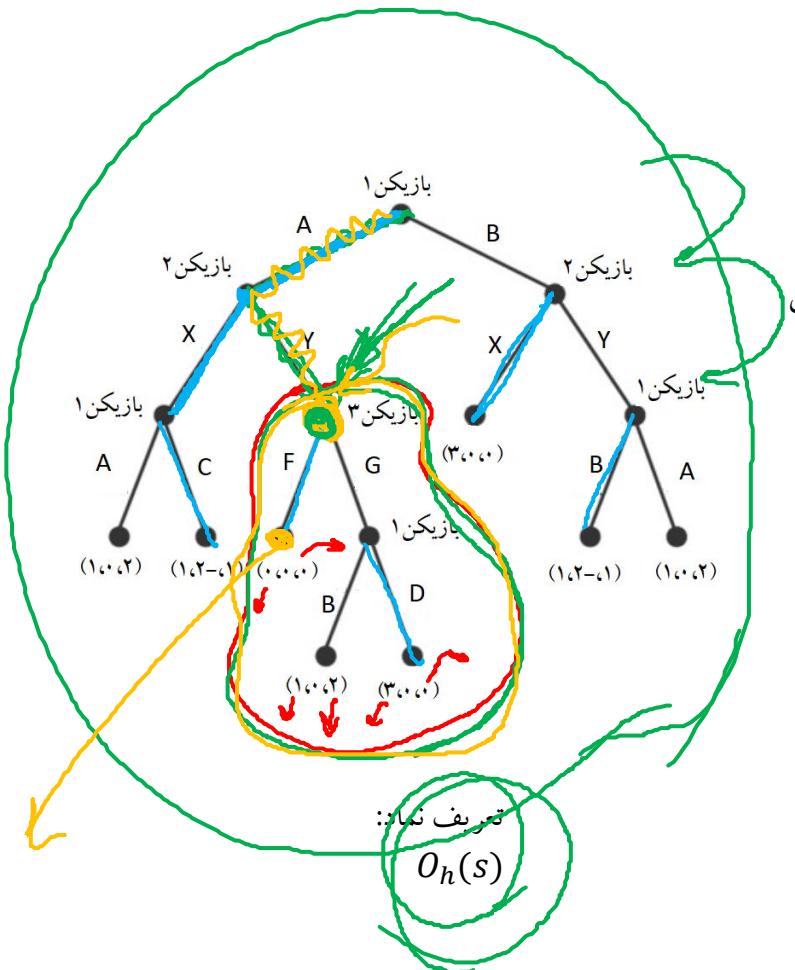
به بیان دیگر، هیچ بازیکنی از تغییر استراتژی خود به تنها یی، سود بیشتری نبرد.

بازیهای توسعی Extensive Games

- تعادل در بازیهای توسعی
 - ❖ تعادل نش
 - ❖ تعادل کامل زیربازی (subgame perfect equilibrium)

$$S \models \{ A \circ C B D, \bar{x}x, F \}$$

بازیهای توسعی



ابتدا تعریف زیربازی (subgame):
تعریف. فرض کنید Γ یک بازی توسعی با اطلاعات کامل باشد. برای هر هیستوری غیر ترمینال مانند h ، زیربازی (h) Γ عبارت است از یک بازی توسعی با اطلاعات کامل با اجزا زیر:

- مجموعه بازیکنان: همان مجموعه بازیکنان بازی Γ ؛
- ترمینال هیستوری ها: مجموعه کلیه دنباله اکشن های h' چنان که ' hh' یک ترمینال هیستوری برای Γ باشد؛
- تابع بازیکن: $P_{\Gamma(h)}(h') = P_{\Gamma}(hh')$ ؛
- اولویت ها: برای هر بازیکن، ترمینال هیستوری h' به ترمینال هیستوری h'' ترجیح دارد اگر و تنها اگر در بازی Γ ، ترمینال هیستوری h' به ترمینال هیستوری h'' ارجح باشد.

بازیهای توسعی Extensive Games

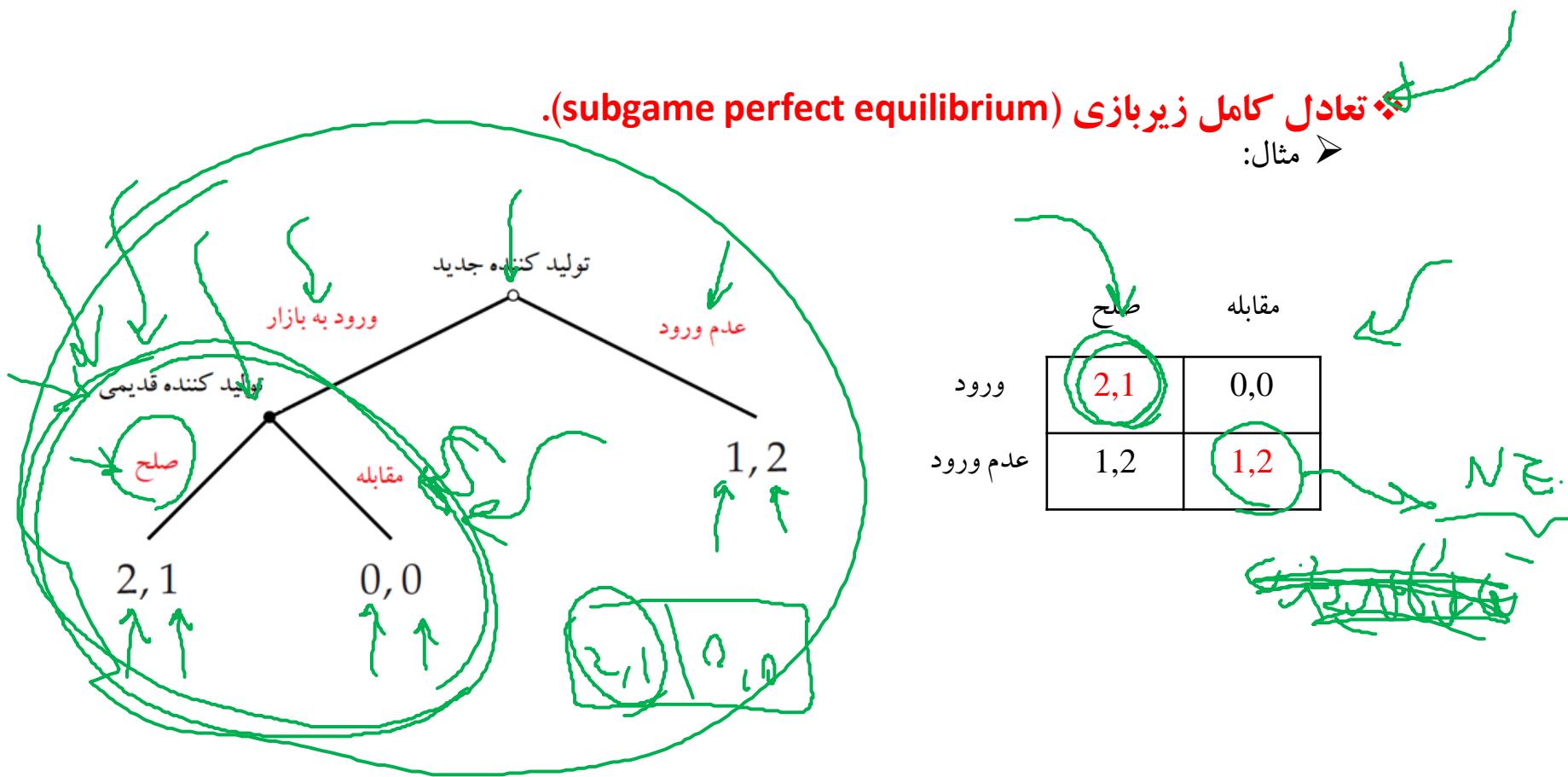
❖ تعادل کامل زیربازی (subgame perfect equilibrium)

- تعریف: در یک بازی توسعی با اطلاعات کامل، یک نمایه استراتژی s^* را یک تعادل کامل زیربازی گوییم اگر برای هر بازیکن i ، و هر استراتژی r_i از این بازیکن، و هر هیستوری h که پس از آن نوبت بازیکن i است (یعنی $i = P(h)$) داشته باشیم
- $$u_i(O_h(s^*)) \geq u_i(O_h(r_i, s_{-i}^*))$$

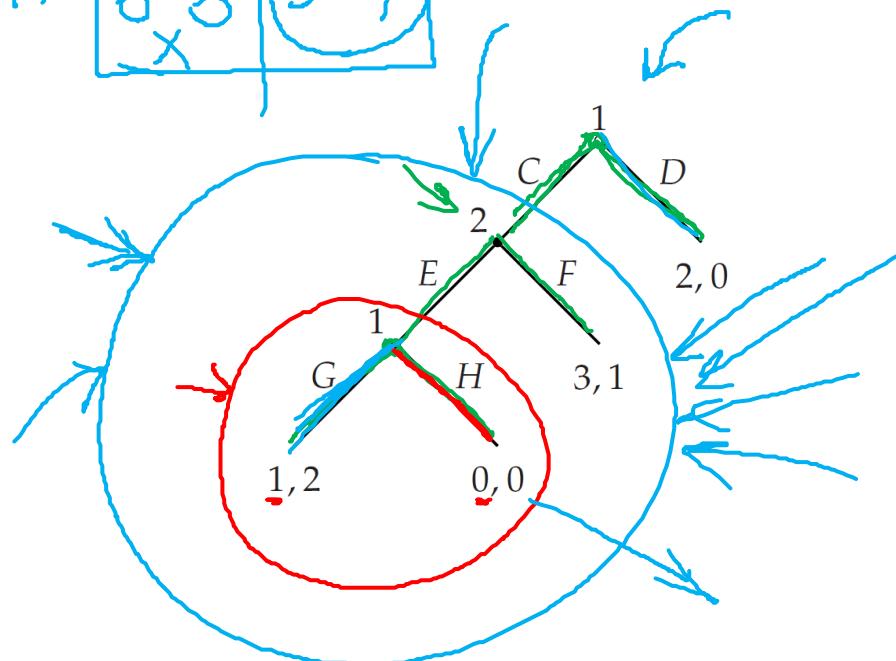
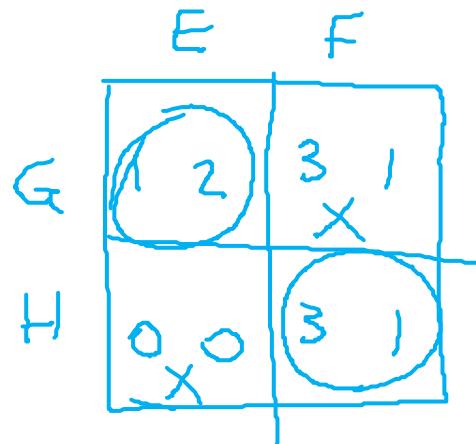
- یک تعادل کامل زیربازی عبارت است از یک نمایه استراتژی s^* با این خاصیت که در هیچ زیربازی، هیچ بازیکن i با تغییر استراتژی خود از s_i^* نتواند به سود بیشتری دست یابد (زمانی که سایر بازیکنان در s_{-i}^* باقی مانده اند).

- یک تعادل کامل زیربازی عبارت است از یک نمایه استراتژی که در هر زیربازی، تعادل نش ایجاد کند. (نتیجه: هر تعادل کامل زیربازی یک تعادل نش است)

بازیهای توسعی Extensive Games



بازیهای توسعی



❖ تعادل کامل زیربازی (subgame perfect equilibrium)

مثال:

	E	F
CG	1, 2	3, 1
CH	0, 0	3, 1
DG	2, 0	2, 0
DH	2, 0	2, 0



بازیهای توسعی Extensive Games

S P E

❖ تعادل کامل زیربازی (subgame perfect equilibrium)

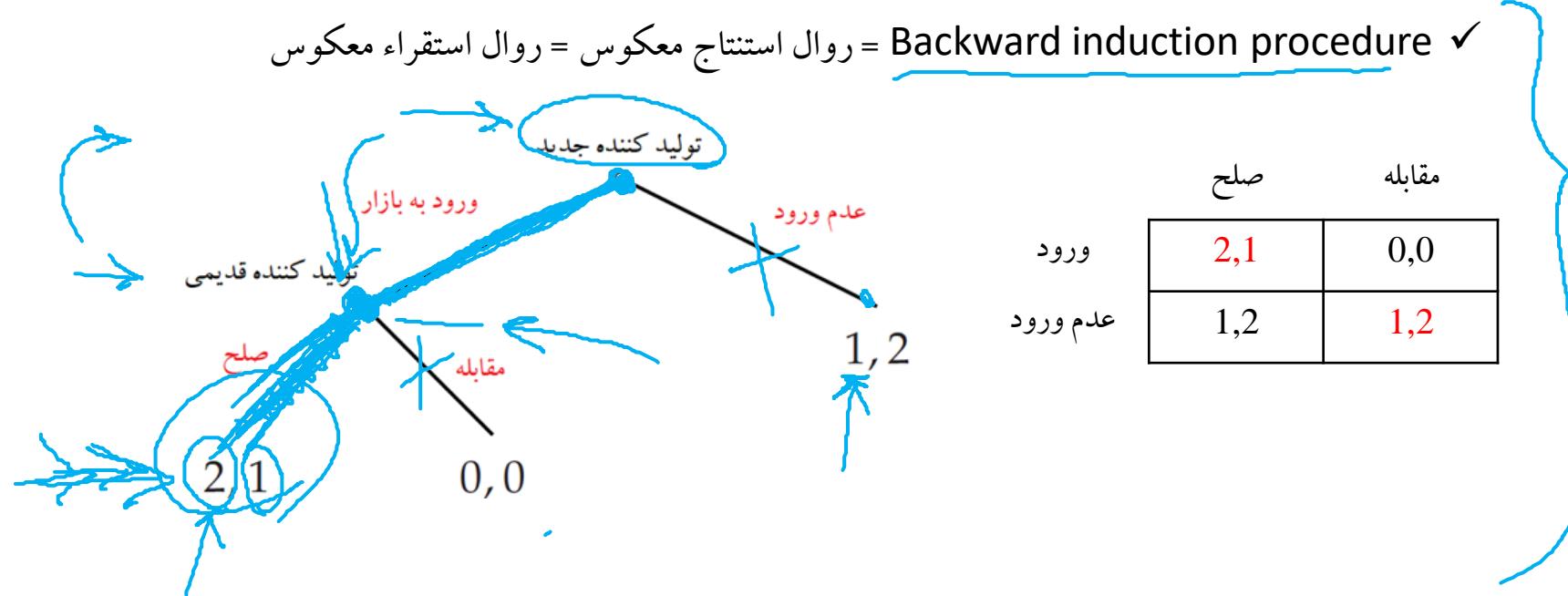
= روال استنتاج معکوس = Backward induction procedure ✓

قضیه: در هر بازی توسعی با اطلاعات کامل و افق محدود، مجموعه تعادل های کامل زیربازی برابر است با مجموعه نمایه استراتژی های جدا شده توسط روال backward induction

بازیهای توسعی Extensive Games

❖ تعادل کامل زیربازی (subgame perfect equilibrium)

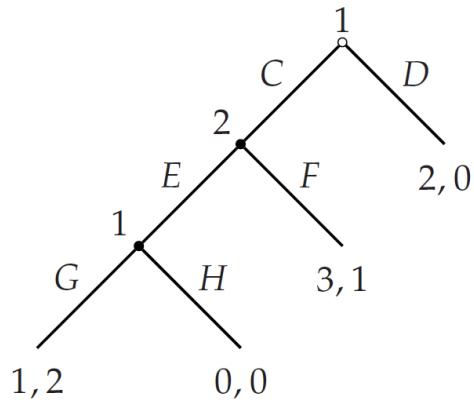
= روال استنتاج معکوس = Backward induction procedure ✓



بازیهای توسعی Extensive Games

❖ تعادل کامل زیربازی (subgame perfect equilibrium)

= روال استنتاج معکوس = روال استقراء معکوس = Backward induction procedure ✓

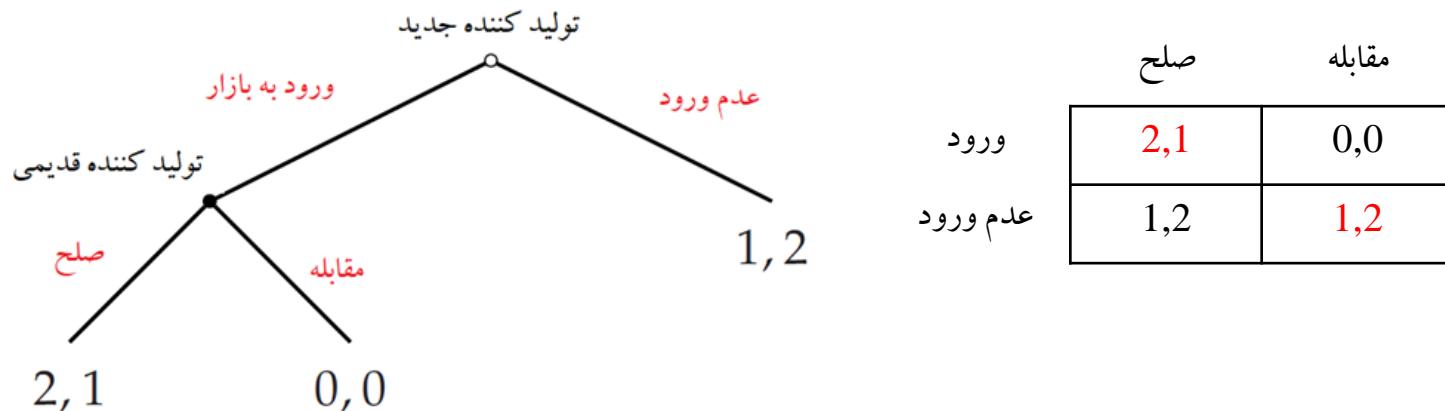


	E	F
CG	1,2	3,1
CH	0,0	3,1
DG	2,0	2,0
DH	2,0	2,0

بازیهای توسعی Extensive Games

❖ تعادل کامل زیربازی (subgame perfect equilibrium)

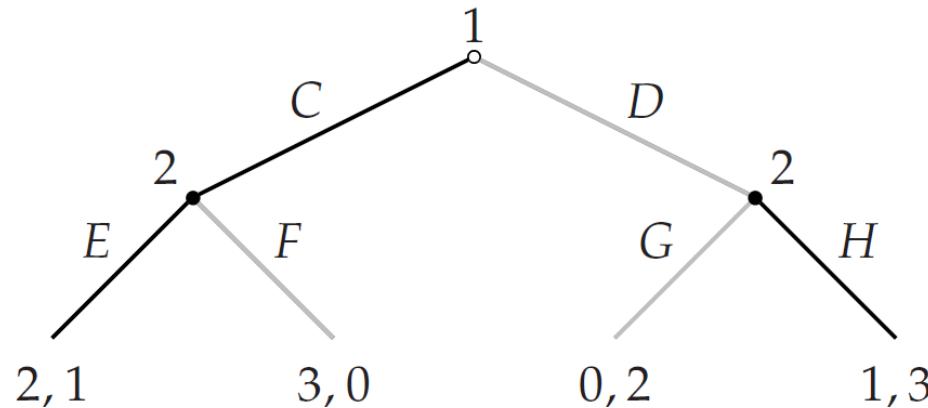
تفاوت تعادل نش و تعادل کامل زیر بازی: تفسیر



بازیهای توسعی Extensive Games

❖ تعادل کامل زیربازی (subgame perfect equilibrium)

= روال استنتاج معکوس = Backward induction procedure ✓



بازیهای توسعی Extensive Games

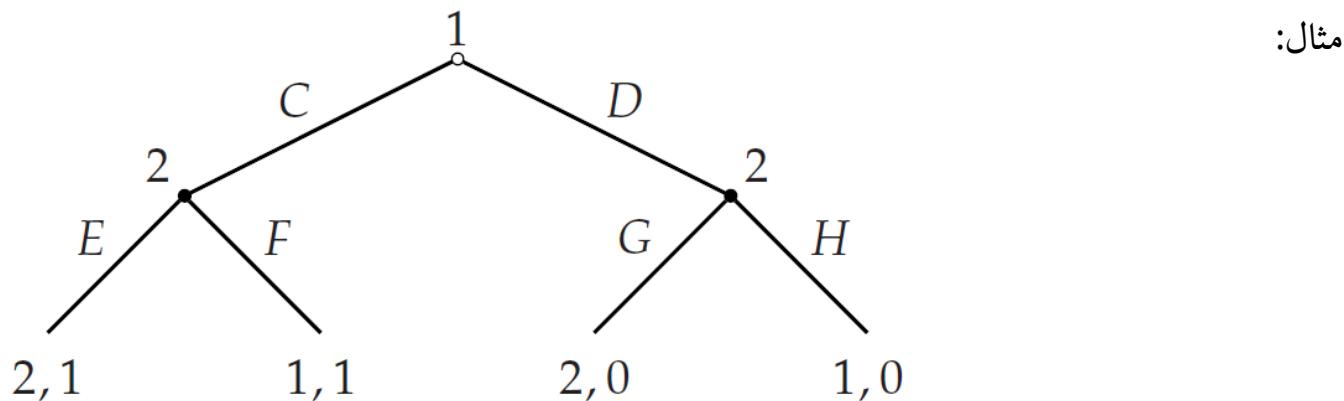
❖ تعادل کامل زیربازی (subgame perfect equilibrium)

قضیه: هر بازی توسعی با اطلاعات کامل و متناهی (افق متناهی - مجموعه اکشن‌ها متناهی)، حداقل یک تعادل کامل زیربازی دارد.

(اثبات ناشی از این نکته است که برای یک بازی متناهی، روال استنتاج معکوس، خوش تعریف است و حتما جواب دارد)

بازیهای توسعی Extensive Games

❖ تعادل کامل زیربازی (subgame perfect equilibrium)



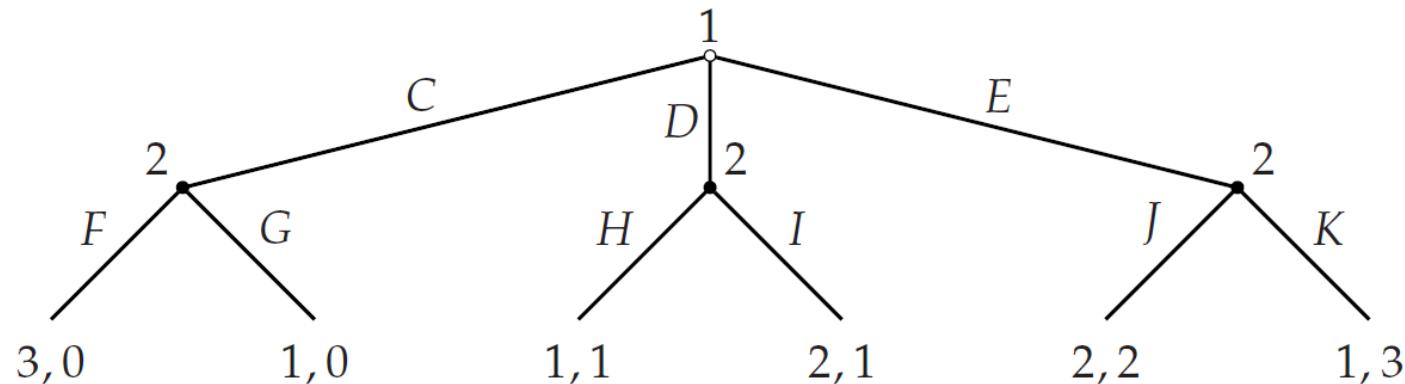
EG, EH, FG, FH

(C,EG), (D,EG), (C,EH), (D,FG), (C,FH), (D,FH)

بازیهای توسعی Extensive Games

❖ تعادل کامل زیربازی (subgame perfect equilibrium)

مثال:



FHK, FIK, GHK,
GIK

(C,FHK), (C,FIK), (C,GHK), (D,GHK), (E,GIK), (D,GIK)

بازیهای توسعی Extensive Games

❖ چند مثال ساده (اما مهم):

۱. بازی اولتیماتوم (اتمام حجت).

الف. بازیکنان: دو نفر ۱ و ۲؛

ب. ترمینال هیستوری ها: مجموعه دنباله های (x, Z) که در آن، x عددی حقیقی در بازه $[0, c]$ است و Z یکی از دو مقدار Y یا N (به معنی قبول یا رد پیشنهاد نفر اول) است؛

ج.تابع بازیکنان: $1 = P(\emptyset)$ و $2 = P(x)$ برای هر x ؛

د. ترجیحات (اولویت‌ها): با تابع سود زیر نشان داده می شوند:

$$u_1(x, N) = u_2(x, N) = 0, \\ u_1(x, Y) = c - x, \quad u_2(x, Y) = x,$$

بازیهای توسعی Extensive Games

❖ چند مثال ساده (اما مهم):

1. بازی اولتیماتوم (اتمام حجت).

- ✓ بازی افق محدود است و در نتیجه برای یافتن نقاط تعادل کامل زیربازی، الگوریتم استنتاج معکوس قابل استفاده است.
- ✓ چون در مرحله اول، تعداد اکشنهای ممکن برای بازیکن نامحدود است، پس بازی نامحدود است و ممکن است تعادل کامل زیر بازی وجود نداشته باشد.
- ✓ چون در مرحله اول، تعداد اکشنهای ممکن برای بازیکن نامحدود است، نمایش درختی برای بازی ممکن نیست

بازیهای توسعی Extensive Games

❖ چند مثال ساده (اما مهم):

1. بازی اولتیماتوم (اتمام حجت).
حل:

بازیهای توسعی Extensive Games

❖ چند مثال ساده (اما مهم) :

2. مدل استکلبرگ (Stackelberg) برای بازار دو جانبه.

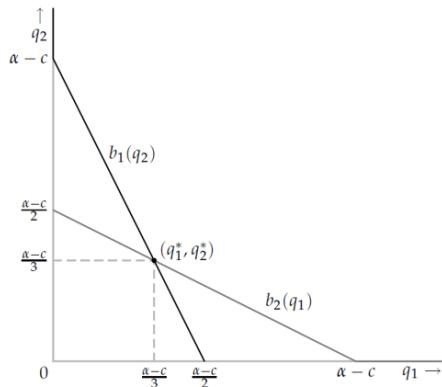
بازیهای توسعی Extensive Games

❖ چند مذکور

۲. بازی

فصل سوم: تعادل نش- مثال‌ها

- مدل کورنات (Cournot) برای بازار با انحصار چندجانبه



$$b_i(q_j) = \begin{cases} \frac{1}{2}(\alpha - c - q_j) & \text{for } q_j \leq \alpha - c \\ 0 & \text{for } q_j > \alpha - c \end{cases}$$

بازیهای توسعی Extensive Games

❖ چند مثال ساده (اما مهم) :

2. مدل استکلبرگ (Stackelberg) برای بازار دوقطبی.
- الف. بازیکنان: دو تولیدکننده 1 و 2؛
- ب. ترمینال هیستوری ها: مجموعه دنباله های (q_1, q_2) که در آنها، q_i عددی نامنفی و نشان دهنده میزان تولید هر تولید کننده است؛
- ج. تابع بازیکنان: $P(q_1) = 2$ و $P(\emptyset) = 1$ برای هر q_1 ؛
۵. ترجیحات (اولویت ها): با توابع سود $\pi_i(q_1, q_2) = q_i(P(q_1 + q_2) - c)$ نشان داده می شوند.

بازیهای توسعی Extensive Games

❖ چند مثال ساده (اما مهم) :

2. مدل استکلبرگ

فصل سوم: تعادل نش - مثال‌ها

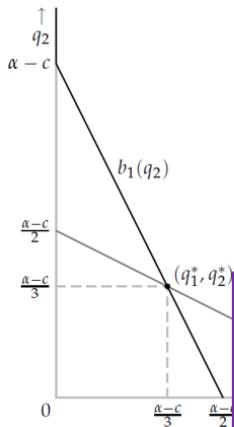
- مدل کورنات (Cournot) برای بازار با انحصار چندجانبه

$$b_i(q_j) = \begin{cases} \frac{1}{2}(\alpha - c - q_j) & \text{for } q_j \leq \alpha - c \\ 0 & \text{for } q_j > \alpha - c \end{cases}$$

Activate Windows
Go to Settings to activate Windows.

فصل سوم: تعادل نش- مثال‌ها

- مدل کورنات (Cournot) برای بازار با انحصار چندجانبه



5/29/2020

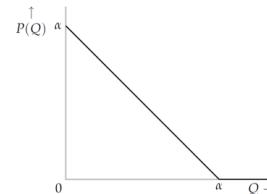
$$b_i(q_j) = \begin{cases} \frac{1}{2}(\alpha - c - q_j) & \text{for } q_j \leq \alpha - c \\ 0 & \text{for } q_j > \alpha - c \end{cases}$$

فصل سوم: تعادل نش- مثال‌ها

- مدل کورنات (Cournot) برای بازار با انحصار چندجانبه

$$P(Q) = \begin{cases} \alpha - Q & \text{for } Q \leq \alpha \\ 0 & \text{for } Q > \alpha \end{cases}$$

$$C_i(q_i) = cq_i, \quad c < \alpha$$



$$\pi_i(q_1, q_2) = q_i(P(q_1 + q_2) - c) = \begin{cases} q_i(\alpha - q_1 - q_2 - c) & \text{for } q_1 + q_2 \leq \alpha \\ -cq_i & \text{for } q_1 + q_2 > \alpha \end{cases}$$

Else $\Rightarrow u_1$

5/29/2020

دانشگاه صنعتی اصفهان

Activate Windows
Go to Settings to activate Windows.

45

❖ چند مثال

2. مدل

)²,

بازیهای توسعی Extensive Games

❖ چند مثال ساده (اما مهم):

3. چانه زنی دوطرفه.

فروشنده ای کالایی در اختیار دارد که از نظرش ۱۰۰ تومان ارزش دارد و خریداری به او مراجعه نموده است که آن کالا برای او ۱۵۰ تومان ارزش دارد. فرض کنید به طور معمول فرآیند زیر برای معامله رخ می دهد: فروشنده از خریدار می خواهد که قیمت پیشنهادی خود را اعلام کند. اگر مورد پذیرش فروشنده بود، معامله با همان قیمت انجام می شود؛ اما اگر فروشنده نپذیرفت، آنگاه فروشنده قیمت خود را اعلام می کند. اگر خریدار پذیرفت معامله با این قیمت انجام می شود و اگر نپذیرفت، معامله ای انجام نمی شود.
(برای سادگی فرض کنید در شرایط تساوی منفعت، افراد معامله را انجام می دهند)
استراتژی پایدار فروشنده و خریدار چیست؟

بازیهای توسعی Extensive Games

❖ چند مثال ساده (اما مهم) :

3. چانه زنی دوطرفه.

الف. بازیکنان: خریدار 1 و فروشنده 2؛

ب. ترمینال هیستوری‌ها: مجموعه دنباله‌های $(x, \text{No}, y, \text{No})$ و $(x, \text{No}, y, \text{Yes})$ ، (x, Yes) که در آن، x و y اعداد حقیقی هستند؛

ج. تابع بازیکنان: خریدار $P(x, \text{No}, y)$ ، فروشنده $P(x, \text{Yes}) = P(\emptyset)$ برای هر x ، فروشنده برای هر

خریدار = برای هر x و y ؛

۵. ترجیحات (اولویت‌ها): با توابع سود

$$u_1(x, \text{Yes}) = 150 - x, \quad u_2(x, \text{Yes}) = x - 100$$

$$u_1(x, \text{No}, y, \text{No}) = u_2(x, \text{No}, y, \text{No}) = 0$$

$$u_1(x, \text{No}, y, \text{Yes}) = 150 - y, \quad u_2(x, \text{No}, y, \text{Yes}) = y - 100$$

بازیهای توسعی Extensive Games

❖ چند مثال ساده (اما مهم):

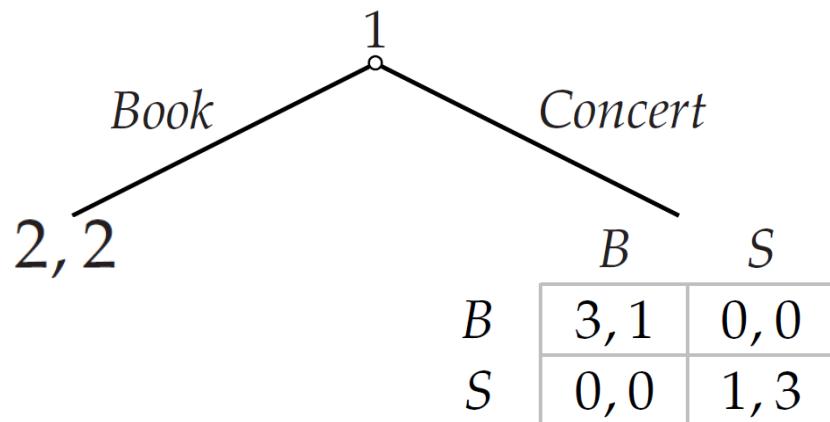
3. چانه زنی دوطرفه.

تعمیم و توسعه بازیهای توسعی

تعمیم و توسعه‌ی بازیهای توسعی

مثال: دو نفر باید تفریح روز خود را با روال زیر تعیین کنند:

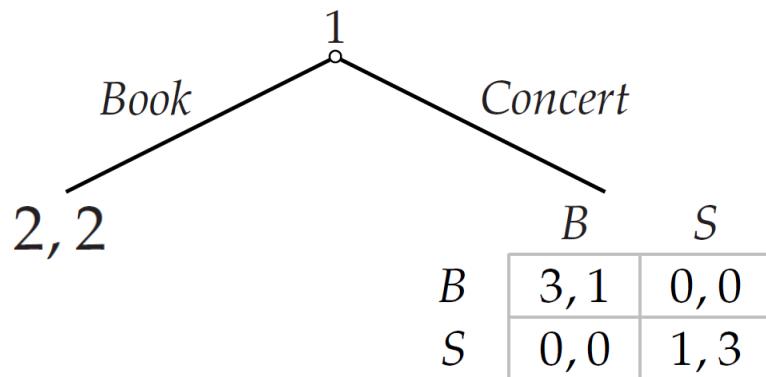
ابتدا نفر اول تعیین می‌کند که در خانه کتاب بخوانند یا به کنسرت بروند. در صورت کتابخوانی، منفعت هر نفر برابر ۲ است. اما اگر بخواهند به کنسرت بروند، دو انتخاب باخ یا استراوینسکی را دارند که به صورت همزمان رخ می‌دهد و ترجیحات این دو نفر روی انتخاب نوع کنسرتها، مشابه بازی BOS است.
تعادل چنین بازی چگونه تعریف و تعیین می‌شود؟



تعمیم و توسعه‌ی بازیهای توسعی

تعریف. بازی توسعی با اطلاعات کامل و حرکات همزمان عبارت است از

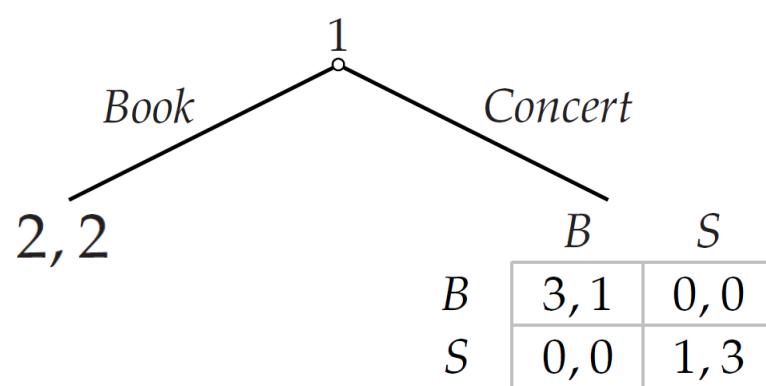
- یک مجموعه از بازیکنان؛
- یک مجموعه از دنباله‌های اکشن‌ها (terminal history) به طوری که هیچ زیردنباله‌ای یک زیردنباله اکید (proper subhistory) از terminal history نباشد؛
- یک تابع که به هر proper subhistory، یک مجموعه از بازیکن‌ها نسبت دهد (player function)؛
- برای هر بازیکن، اولویت‌های بین terminal history‌ها.
- برای هر proper subhistory h ، و هر بازیکن مانند i که در h نوبت حرکت دارد، یک مجموعه از اکشن‌های ممکن که با $A_i(h)$ نمایش می‌دهیم.



تعمیم و توسعه‌ی بازیهای توسعی

تعریف. استراتژی:

- در یک بازی توسعی با اطلاعات کامل و حرکات همزمان، یک استراتژی برای بازیکن i ام، عبارت است از یک تابع که به هر h که پس از آن، نوبت حرکت بازیکن i است (یعنی $i \in P(h)$) یک اکشن از $A_i(h)$ نسبت دهد.



For player 1:

- Book, B
- Book, S
- Concert, B
- Concert, S

For player 2:

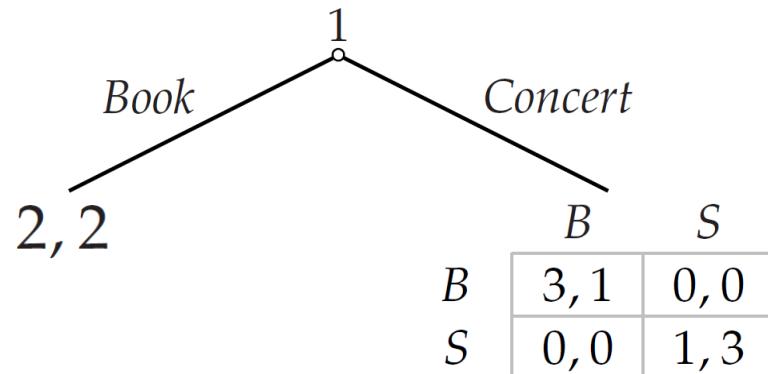
- B
- S

تعمیم و توسعه‌ی بازیهای توسعی

- تعريف. تعادل نش در بازی های توسعی با اطلاعات کامل و حرکات همزمان:
- نمایه استراتژی^{*} s^* را یک تعادل نش گوییم اگر برای هر بازیکن i و هر استراتژی r_i از این بازیکن،

$$u_i(O(s^*)) \geq u_i(O(r_i, s_{-i}^*)).$$

به بیان دیگر، هیچ بازیکنی از تغییر استراتژی خود به تنها یی، سود بیشتری نبرد.

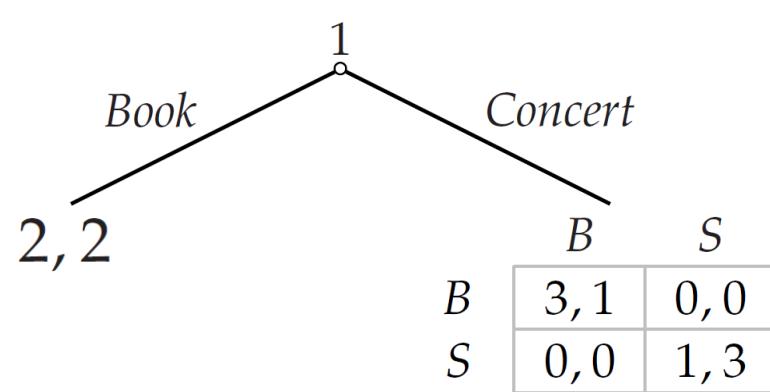


	B	S
(Concert,B)	3,1	0,0
(Concert,S)	0,0	1,3
(Book,B)	2,2	2,2
(Book,S)	2,2	2,2

تعمیم و توسعه‌ی بازیهای توسعی

- تعریف. تعادل کامل زیربازی در بازی‌های توسعی با اطلاعات کامل و حرکات همزمان:
 - یک نمایه استراتژی S^* را یک تعادل کامل زیربازی گوییم اگر برای هر بازیکن i ، و هر استراتژی r_i از این بازیکن، و هر هیستوری h که پس از آن نوبت بازیکن i است (یعنی $h \in P(h)$) داشته باشیم
$$u_i(O_h(r_i, s_{-i}^*)) \geq u_i(O_h(r_i, s_{-i}))$$
 - یک تعادل کامل زیربازی عبارت است از یک نمایه استراتژی S^* با این خاصیت که در هیچ زیربازی، هیچ بازیکن i با تغییر استراتژی خود از s_i^* نتواند به سود بیشتری دست یابد (زمانی که سایر بازیکنان در S^- باقی مانده‌اند).
 - یک تعادل کامل زیربازی عبارت است از یک نمایه استراتژی که در هر زیربازی، تعادل نش ایجاد کند. (نتیجه: هر تعادل کامل زیربازی یک تعادل نش است)

تعمیم و توسعه‌ی بازی‌های توسعی



• تعادل کامل زیربازی و روال استنتاج معکوس

• وجود تعادل کامل زیربازی در هر بازی متناهی؟

تممیم و توسعه‌ی بازیهای توسعی

- تمرین تحویلی. دو بازیکن هر یک سکه‌ای در اختیار دارند و به طور هم‌زمان باید یک روی سکه (شیر یا خط) را نشان دهند. در مرحله دوم، بسته به آن که سکه‌ها شیر یا خط شده‌اند به صورت زیر، حرکت بعدی (مرحله دوم) انجام می‌شود و بازی خاتمه می‌یابد:
- اگر هر دو یک رو را نشان دهند، بازی معمای زندانی بین دو نفر انجام می‌شود با تابع سود جدول ۱۳.۱ کتاب مرجع
 - اگر نفر اول شیر و نفر دوم خط را نشان دهد، بازی باخ-استراوینسکی بین دو نفر انجام می‌شود با تابع سود جدول ۱۶.۱ کتاب مرجع
 - اگر نفر اول خط و نفر دوم شیر را نشان دهد، بازی شکار گوزن بین دو نفر انجام می‌شود با تابع سود جدول ۱۸.۱ کتاب مرجع

مطلوب است یافتن کلیه نمایه استراتژی‌های تعادل کامل زیر بازی.

بازی های ائتلافی

Coalitional Games

بازی های ائتلافی

□ وضعیتی در فضای رقابتی که در آن چند بازیکن با یکدیگر برای رسیدن به سود بیشتر، همکاری کرده و تشکیل یک ائتلاف می‌دهند.

❖ بازی غیرهمکارانه Non-cooperative و بازی همکارانه Cooperative

► در صورت امکان تعامل و تماس بین بازیکنان، به چه شرطی یک همکاری (ائتلاف) پایدار شکل می‌گیرد؟

► در حالت کلی، پایداری یک ائتلاف به سایر ائتلاف‌ها هم بستگی دارد، اما در این درس فرض می‌کنیم که منفعت بازیکنان در هر ائتلاف فقط به خود آن ائتلاف وابسته است.

بازی های ائتلافی Coalitional Games

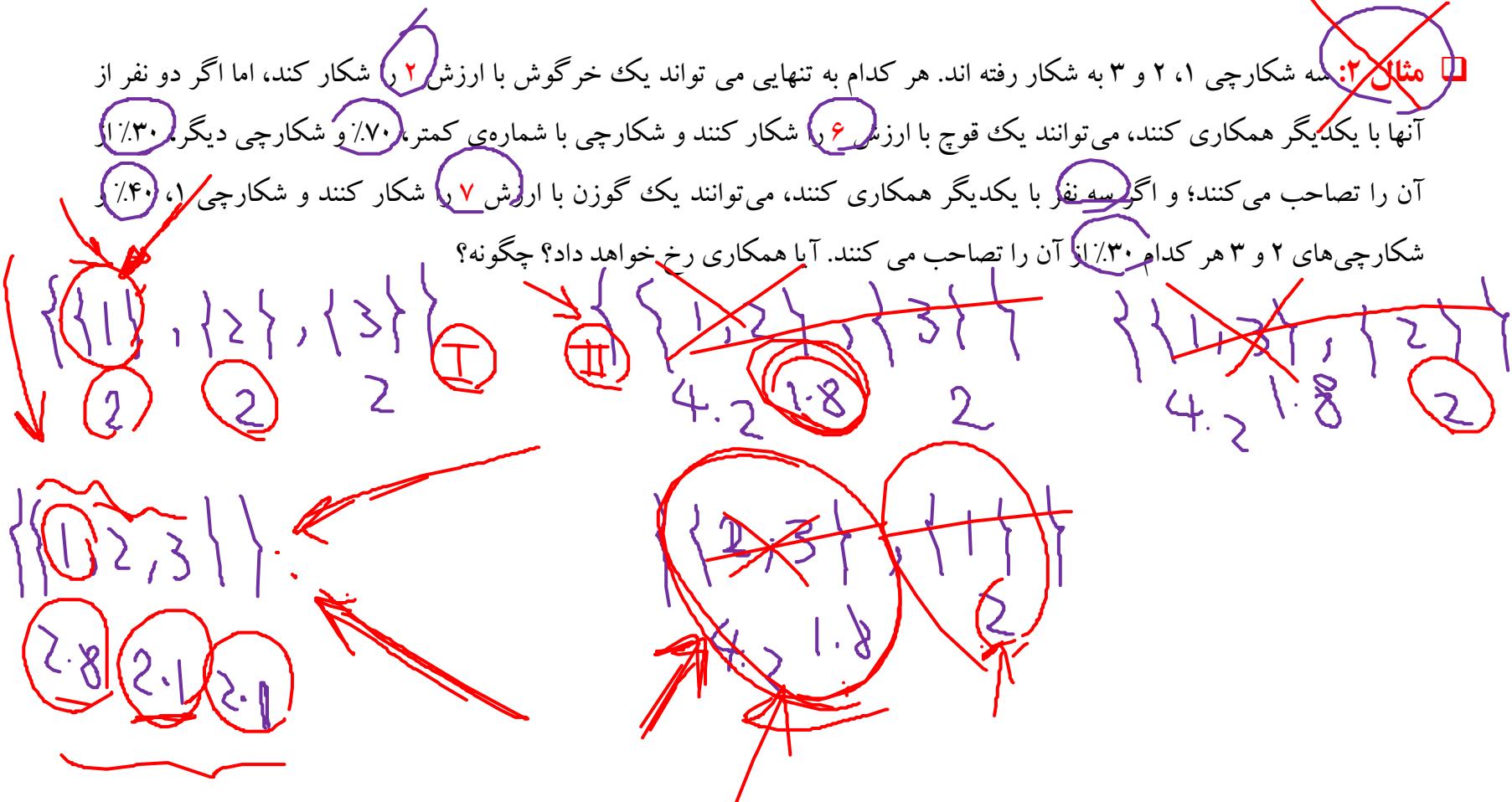
مثال ۱: سه شکارچی ۱، ۲ و ۳ به شکار رفته اند. هر کدام به تنها یک خرگوش با ارزش $\underline{2}$ را شکار کند، اما اگر دو نفر از آنها با یکدیگر همکاری کنند، می توانند یک قوچ با ارزش $\underline{6}$ را شکار کنند و به هر صورت توافقی تقسیم کنند؛ و اگر سه نفر با یکدیگر همکاری کنند، می توانند یک گوزن با ارزش $\underline{7}$ را شکار کنند. آبا همکار $\underline{1}$ خواهد داد؟ حگه نه؟



□ اگر در مثال فوق ارزش گوزن، به جای $\underline{7}$ ، برابر با $\underline{12}$ باشد، چه طور؟

بازی های ائتلافی Coalitional Games

مثال ۲: سه شکارچی ۱، ۲ و ۳ به شکار رفته اند. هر کدام به تنها یک خرگوش با ارزش ۲ را شکار کند، اما اگر دو نفر از آنها با یکدیگر همکاری کنند، می توانند یک قوچ با ارزش ۶ را شکار کنند و شکارچی با شماره ۱ کمتر، ۷۰٪ و شکارچی دیگر ۳۰٪ از آن را تصاحب می کنند؛ و اگر سه نفر با یکدیگر همکاری کنند، می توانند یک گوزن با ارزش ۷ را شکار کنند و شکارچی ۱، ۴۰٪ و شکارچی های ۲ و ۳ هر کدام ۳۰٪ از آن را تصاحب می کنند. آیا همکاری رخ خواهد داد؟ چگونه؟



بازی های ائتلافی Coalitional Games

- تعریف بازیهای ائتلافی **با سود قابل انتقال**: یک بازی ائتلافی با سود قابل انتقال مشتمل است بر:
 - یک مجموعه از بازیکنان (معمولاً با نماد N نمایش می‌دهیم)،
 - یکتابع که به هر زیر مجموعه غیرتنهی از بازیکنان (که به آن ائتلاف گوییم و معمولاً یا نماد S نمایش می‌دهیم)، یک مقدار حقیقی نسبت می‌دهد (که به آن، ارزش/ثروت ائتلاف گوییم و به این تابع، تابع ارزش/ثروت ائتلافها گوییم).

$$v: \mathcal{P}^N \rightarrow \mathbb{R}$$

نمایش می‌گردید

بازی های ائتلافی Coalitional Games

□ تعریف. یک بازی ائتلافی با سود قابل انتقال را چسبنده (cohesive) گوییم اگر برای هر افزار

$\{S_1, \dots, S_K\}$

بازی های ائتلافی Coalitional Games

مثال: سه شکارچی ۱، ۲ و ۳ به شکار رفته اند. هر کدام به تنها یعنی می تواند یک خرگوش با ارزش ۲ را شکار کند، اما اگر دو نفر از آنها با یکدیگر همکاری کنند، می توانند یک قوچ با ارزش ۶ را شکار کنند و به هر صورت توافقی تقسیم کنند؛ و اگر سه نفر با یکدیگر همکاری کنند، می توانند یک گوزن با ارزش ۷ را شکار کنند و به هر صورت توافقی تقسیم کنند. آیا همکاری رخ خواهد داد؟ چگونه؟

✓ اگر بازی چسبنده نباشد، ائتلاف بزرگ قابل شکل گیری نیست (اثبات به عنوان تمرین)

پ در بازی ائتلافی با سود قابل انتقال و چسبنده، چه زمانی (با چه تقسیم سودی) یک ائتلاف بزرگ شکل می گیرد؟

□ لگو ادغام شال آفوق ارزش گوزن، به جای ۷، برابر با ۱۲ باشد، چه طور؟
Go to Settings to activate Windows.

بازی های ائتلافی Coalitional Games

- اگر ائتلاف S شامل اعضاء $\{a_1, a_2, \dots, a_M\}$ باشد آنگاه سود بازیکنان داخل ائتلاف، برداری از اعداد حقیقی نامنفی به صورت $(x_{a_1}, x_{a_2}, \dots, x_{a_M})$ است چنان که $\sum_{a_k \in S} x_{a_k} = v(S)$. لذا چنین بردارهایی را بدل سود شدنی برای S (S-feasible payoff vector) می‌نامیم.
- برای ائتلاف بزرگ به چنین برداری، یک نمایه سود شدنی (feasible payoff profile) گوییم.

- تعریف هسته (Core) در یک بازی ائتلافی با سود قابل انتقال: هسته عبارت است از مجموعه نمایه سود شدنی های $(x_a)_{a \in N}$ با این خاصیت که هیچ ائتلاف S و بردار سود شدنی برای S مانند $(y_a)_{a \in S}$ وجود نداشته باشد چنان که $y_a \geq x_a$ برای هر $a \in S$.
- (به طور معادل، برای هر ائتلاف غیرفرآگیر S و بردار سود شدنی برای S مانند $(y_a)_{a \in S}$ ، برای حداقل یک عضو S داشته باشیم $y_a < x_a$)
- به طور معادل، هیچ مجموعه ای از بازیکنان برای خروج از ائتلاف توافق نداشته باشند

حسنه ای

بازی های ائتلافی Coalitional Games

$$\{3\} \rightarrow \omega$$

□ مثال: سه شکارچی ۱، ۲ و ۳ به شکار رفته اند. هر کدام به تنها بی می تواند یک خرگوش با ارزش ۲ را شکار کند، اما اگر دو نفر از آنها با یکدیگر همکاری کنند، می توانند یک قوچ با ارزش ۳ را شکار کنند و به هر صورت توافقی تقسیم کنند؛ و اگر سه نفر با یکدیگر همکاری کنند، می توانند یک گوزن با ارزش ۶ را شکار کنند و به هر صورت توافقی تقسیم کنند. آیا همکاری رخ خواهد داد؟ چگونه؟

$$\begin{array}{c}
 \xrightarrow{\quad} \{\{1,2,3\}\} \quad \xrightarrow{\quad} (x_1, x_2, x_3) \quad \xrightarrow{\quad} x_1 > 0 \\
 \left\{ \begin{array}{l} S = \{1,2\} \quad v(S) = 6 \quad \xrightarrow{\quad} (3,3) \\ S' = \{1,3\} \quad \xrightarrow{\quad} (3,3) \quad \xrightarrow{\quad} x_1 > 3 \text{ یا } x_2 > 3 \\ S'' = \{2,3\} \quad \xrightarrow{\quad} (3,3) \quad \xrightarrow{\quad} x_1 > 3 \quad x_3 > 3 \\ \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 7 \\ - \\ - \\ \end{array} \right. \\
 \text{حبل را} \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 > 3 \quad x_2 > 3 \\ x_1 > 3 \quad x_3 > 3 \\ x_2 > 3 \quad x_3 > 3 \end{array} \right. \quad 3 \neq 1
 \end{array}$$

□ اگر در مثال فوق ارزش گوزن، به جای ۷، برابر با ۱۲ باشد، چه طور؟

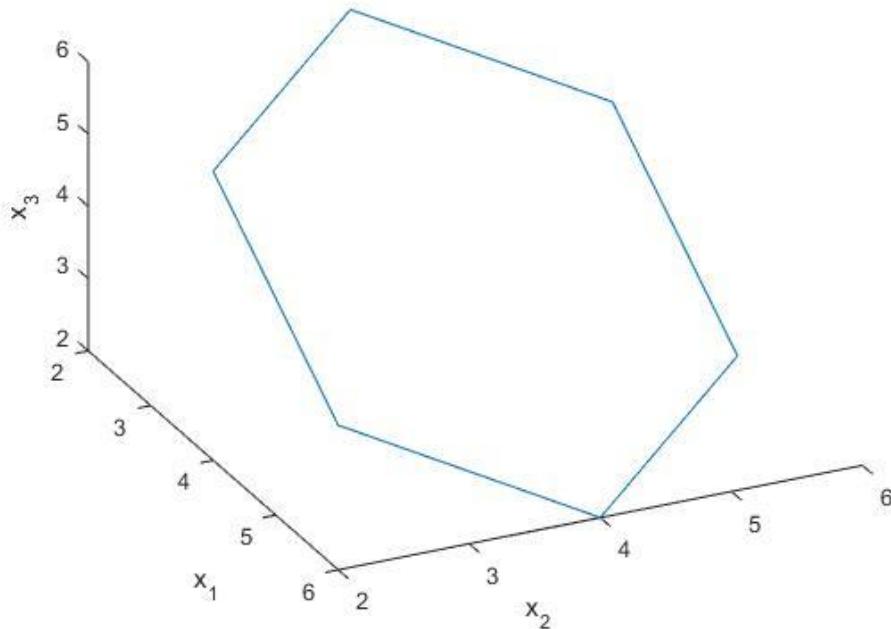
بازی های ائتلافی Coalitional Games

- ❑ مثال: سه شکارچی ۱، ۲ و ۳ به شکار رفته اند. هر کدام به تنها یی می تواند یک خرگوش با ارزش ۲ را شکار کند، اما اگر دو نفر از آنها با یکدیگر همکاری کنند، می توانند یک قوچ با ارزش ۶ را شکار کنند و به هر صورت توافقی تقسیم کنند؛ و اگر سه نفر با یکدیگر همکاری کنند، می توانند یک گوزن با ارزش ۷ را شکار کنند و به هر صورت توافقی تقسیم کنند. آیا همکاری رخ خواهد داد؟ چگونه؟
- ❑ اگر در مثال فوق ارزش گوزن، به جای ۷، برابر با ۱۲ باشد، چه طور؟

بازی های ائتلافی Coalitional Games

❑ مثال: سه شکارچی ۱، ۲ و ۳ به شکار رفته اند.

❑ اگر در مثال فوق ارزش گوزن، به جای ۷، برابر با ۱۲ باشد، چه طور؟



بازی های ائتلافی Coalitional Games

❖ نکته: در یک بازی ائتلافی با سود قابل انتقال، یک ائتلاف S می تواند برابر دار تخصیص سود (x_1, x_2, \dots, x_N) از ائتلاف بزرگ غلبه کند (یعنی ائتلاف بزرگ با آن تخصیص سود را بشکند) اگر و تنها اگر ارزش آن ائتلاف (یعنی $v(S)$) بیشتر از مجموع سود بازیکنان عضو آن ائتلاف در ائتلاف بزرگ باشد؛ به عبارت دیگر

$$v(S) \geq \sum_{j \in S} x_j$$

❖ به طور معادل، نمایه سود شدنی (x_1, x_2, \dots, x_N) در هسته است اگر و تنها اگر برای هر ائتلاف S ، مجموع سود بازیکنان S در زمان ائتلاف بزرگ، حداقل به اندازه ارزش ائتلاف باشد؛ به عبارت دیگر

$$v(S) < \sum_{j \in S} x_j \quad \text{for all } S$$

بازی های ائتلافی Coalitional Games

□ مثال ۲: سه شکارچی ۱، ۲ و ۳ به شکار رفته اند. هر کدام به تنها یی می تواند یک خرگوش با ارزش ۲ را شکار کند، اما اگر دو نفر از آنها با یکدیگر همکاری کنند، می توانند یک قوچ با ارزش ۶ را شکار کنند و شکارچی با شماره ۱ کمتر، ۷۰٪ و شکارچی دیگر، ۳۰٪ از آن را تصاحب می کنند؛ و اگر سه نفر با یکدیگر همکاری کنند، می توانند یک گوزن با ارزش ۷ را شکار کنند و شکارچی ۱، ۴۰٪ و شکارچی های ۲ و ۳ هر کدام ۳۰٪ از آن را تصاحب می کنند. آیا همکاری سه نفره رخ خواهد داد؟ چگونه؟

بازی های ائتلافی Coalitional Games

□ مثال ۲: سه شکارچی ۱، ۲ و ۳ به شکار رفته اند. هر کدام به تنها یی می تواند یک خرگوش با ارزش ۲ را شکار کند، اما اگر دو نفر از آنها با یکدیگر همکاری کنند، می توانند یک قوچ با ارزش ۶ را شکار کنند و شکارچی با شماره ۱ کمتر، ۷۰٪ و شکارچی دیگر، ۳۰٪ از آن را تصاحب می کنند؛ و اگر سه نفر با یکدیگر همکاری کنند، می توانند یک گوزن با ارزش ۷ را شکار کنند و شکارچی ۱، ۴۰٪ و شکارچی های ۲ و ۳ هر کدام ۳۰٪ از آن را تصاحب می کنند. آیا همکاری سه نفره رخ خواهد داد؟ چگونه؟

بازی های ائتلافی Coalitional Games

□ تعریف بازیهای ائتلافی (شاید با سود غیر قابل انتقال). یک بازی ائتلافی مشتمل است بر:

► یک مجموعه از بازیکنان (که معمولاً با نماد N نمایش می‌دهیم)،

► برای هر زیر مجموعه غیر تهی از بازیکنان (که ائتلاف گفته می‌شود و با معمولاً با نماد \mathcal{S} نشان داده می‌شود)، یک مجموعه از حرکت‌ها (actions) (که معمولاً با نماد $a_{\mathcal{S}}$ نشان داده می‌شود).

► برای هر بازیکن، اولویت‌ها بین همه اکشن‌های همه ائتلاف‌هایی که آن بازیکن در آن ائتلاف هست. (معمولًا یا مقادیر عددی سود بازیکنان نشان داده می‌شود)

- اکشن‌ها در بند دوم می‌توانند با چگونگی تقسیم دست‌آورده ائتلاف بین اعضای جایگزین شوند (به آن S -allocation گوییم)؛ و در این صورت بند آخر قابل حذف است (در واقع بند دوم و سوم با هم بیان شده‌اند).

بازی های ائتلافی Coalitional Games

$N = \{1,2,3\}$ مثال. \square

$\{1,2,3\} \Rightarrow (5,4,3)$, $\{1,2,3\} \Rightarrow (2,1,5)$, $\{1,2,3\} \Rightarrow (2,5,6)$,

$\{1,2\} \Rightarrow (2,2)$,

$\{1,3\} \Rightarrow (4,2)$, $\{1,3\} \Rightarrow (1,4)$,

$\{2,3\} \Rightarrow (4,1)$, $\{2,3\} \Rightarrow (4,5)$,

$\{1\} \Rightarrow (1)$,

$\{2\} \Rightarrow (1)$,

$\{3\} \Rightarrow (0)$

بازی های ائتلافی Coalitional Games

- در بازی ائتلافی، در بسیاری اوقات به دنبال شرایطی هستیم که ائتلاف بزرگ شکل گیرد؛ یعنی همه بازیکنان با یکدیگر همکاری کنند.
- **تعريف بازی ائتلافی چسبنده**. یک بازی ائتلافی را چسبنده گوییم اگر برای هر افزار $\{S_1, S_2, \dots, S_K\}$ از کلیه بازیکنان و هر ترکیب از اکشن ها $(a_{S_1}, a_{S_2}, \dots, a_{S_K})$ ، برای ائتلاف بزرگ یک اکشن a_N داشته باشیم با این خاصیت که این اکشن برای هر بازیکن حداقل به خوبی اکشن متناظر آن بازیکن در $(a_{S_1}, a_{S_2}, \dots, a_{S_K})$ باشد.
- اثبات کنید که برای بازی با سود قابل انتقال، این تعريف با تعريف چسبنده‌گی در آن بازیها یکسان است

بازی های ائتلافی Coalitional Games

$N = \{1,2,3\}$. \square مثال.

$\{1,2,3\} \Rightarrow (5,4,3) , \quad \{1,2,3\} \Rightarrow (2,1,5) , \quad \{1,2,3\} \Rightarrow (2,5,6) ,$

$\{1,2\} \Rightarrow (2,2) ,$

$\{1,3\} \Rightarrow (4,2) , \quad \{1,3\} \Rightarrow (1,4) ,$

$\{2,3\} \Rightarrow (4,1) , \quad \{2,3\} \Rightarrow (4,5) ,$

$\{1\} \Rightarrow (1) ,$

$\{2\} \Rightarrow (1) ,$

$\{3\} \Rightarrow (0)$

بازی های ائتلافی Coalitional Games

□ **تعریف هسته.** هسته‌ی یک بازی ائتلافی عبارت است از مجموعه اکشن‌های a_N از ائتلاف بزرگ با این خاصیت که برای هیچ ائتلافی هیچ اکشنی وجود نداشته باشد که همه بازیکنان آن ائتلاف، آن اکشن را به a_N ترجیح دهند.

- نکته ۱: ممکن است برای یک بازی، چنین اکشنی وجود نداشته باشد. در این حالت **نمی‌گوییم** که هسته وجود ندارد، بلکه **می‌گوییم** هسته مجموعه تهی است
- نکته ۲: اگر یک بازی چسبنده نباشد آنگاه هسته‌ی آن تهی است.
► آیا می توانید مثالی بزنید که یک بازی چسبنده باشد اما هسته‌ی آن تهی باشد؟

بازی های ائتلافی Coalitional Games

$N = \{1,2,3\}$. \square مثال.

$\{1,2,3\} \Rightarrow (5,4,3)$, $\{1,2,3\} \Rightarrow (2,1,5)$, $\{1,2,3\} \Rightarrow (2,5,6)$,

$\{1,2\} \Rightarrow (2,2)$,

$\{1,3\} \Rightarrow (4,2)$, $\{1,3\} \Rightarrow (1,4)$,

$\{2,3\} \Rightarrow (4,1)$, $\{2,3\} \Rightarrow (4,5)$,

$\{1\} \Rightarrow (1)$,

$\{2\} \Rightarrow (1)$,

$\{3\} \Rightarrow (0)$

بازی های ائتلافی Coalitional Games

□ مثال. یک کارفرما می خواهد کارگاه خود را با تعدادی کارگر راه اندازی کند. تعداد کارگران در منطقه، $m = 2$ نفر است. سود حاصل از کارگاه به صورت $f(k + 1) - f(k)$ است که در آن، k تعداد کارگرانی است که در کارگاه کار می کنند و $f(\cdot)$ تابعی صعودی است و $0 = f(0)$. کارفرما می تواند سود را به هر شکل دلخواه بین کارگران توزیع کند. چگونه دستمزد بدهد که هر دو کارگر برای او کار کنند؟

► مجموعه بازیکنان: کارفرما، کارگر ۱، کارگر ۲

► هر ائتلاف که شامل کارفرما نباشد، منجر به سود صفر برای هر کارگر می شود.
ائتلاف فقط شامل کارفرما، منجر به سود $f(1) - f(0)$ برای کارفرما می شود.
در هر ائتلاف شامل کارفرما و فقط یک کارگر، کلیه تخصیص سودهای به فرم $(x_1, f(x_1))$ ممکن
هستند که در آنها، $x_1 \leq 0$ و $x_1 + f(x_1) \leq f(1)$ سود کارگر است.

در ائتلاف بزرگ (کارفرما و هر دو کارگر)، کلیه تخصیص سودهای به فرم $(x_1, x_2, f(x_1 + x_2))$ ممکن هستند که در آنها، $x_1 + x_2 \leq 1$ و $x_1, x_2 \geq 0$ سود کارگر نام است.

بازی های ائتلافی Coalitional Games

بازی های ائتلافی Coalitional Games

پیان