تکلیف سری سوم

مریم سعیدمهر
شماره دانشجویی : ۹۶۲۹۳۷۳

فهرست مطالب

۱ سوال اول

$$A=\begin{bmatrix}2&1&-5&-1&0\\-1&-1&4&1&2\\0&-1&3&2&9\\-1&0&1&1&4\end{bmatrix}\xrightarrow{\frac{R_1}{2}}\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{-5}{2}&\frac{-1}{2}&0\\-1&-1&4&1&2\\0&-1&3&2&9\\-1&0&1&1&4\end{bmatrix}\xrightarrow{R_2+R_1}\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{-5}{2}&\frac{-1}{2}&0\\0&\frac{-1}{2}&\frac{3}{2}&\frac{1}{2}&2\\0&-1&3&2&9\\-1&0&1&1&4\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1+R_4}\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{-5}{2}&\frac{-1}{2}&0\\0&\frac{-1}{2}&\frac{3}{2}&\frac{1}{2}&2\\0&-1&3&2&9\\0&\frac{1}{2}&\frac{-3}{2}&\frac{1}{2}&3\end{bmatrix}\xrightarrow{-2R_2}\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{-5}{2}&\frac{-1}{2}&0\\0&1&-3&-1&-4\\0&-1&3&2&9\\0&\frac{1}{2}&\frac{-3}{2}&\frac{1}{2}&3\end{bmatrix}\xrightarrow{R_2+R_3}\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{-5}{2}&\frac{-1}{2}&0\\0&1&-3&-1&-4\\0&0&0&1&5\\0&\frac{1}{2}&\frac{-3}{2}&\frac{1}{2}&3\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_4-\frac{1}{2}R_2}\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{-5}{2}&\frac{-1}{2}&0\\0&1&-3&-1&-4\\0&0&0&1&5\\0&0&0&1&\frac{7}{2}\end{bmatrix}\xrightarrow{R_1-\frac{1}{2}R_2}\begin{bmatrix}1&0&-1&0&2\\0&1&-3&-1&-4\\0&0&0&1&5\\0&0&0&1&\frac{7}{2}\end{bmatrix}\xrightarrow{R_4-R_3}\begin{bmatrix}1&0&-1&0&2\\0&1&-3&-1&-4\\0&0&0&1&5\\0&0&0&0&\frac{-3}{2}\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2+R_3}\begin{bmatrix}1&0&-1&0&2\\0&1&-3&0&1\\0&0&0&1&5\\0&0&0&0&\frac{-3}{2}\end{bmatrix}\xrightarrow{R_1+\frac{4}{3}R_4}\begin{bmatrix}1&0&-1&0&0\\0&1&-3&0&1\\0&0&0&1&5\\0&0&0&0&\frac{-3}{2}\end{bmatrix}\xrightarrow{R_2+\frac{2}{3}R_4}\begin{bmatrix}1&0&-1&0&0\\0&1&-3&0&0\\0&0&0&1&5\\0&0&0&0&\frac{-3}{2}\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3+\frac{10}{3}R_4}\begin{bmatrix}1&0&-1&0&0\\0&1&-3&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&\frac{-3}{2}\end{bmatrix}\xrightarrow{\frac{-2}{3}R_4}\begin{bmatrix}1&0&-1&0&0\\0&1&-3&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}\Longrightarrow\begin{cases}x_1-x_3=0\\x_2-3x_3=0\\x_4=0\\x_5=0\end{cases}$$

$$\Longrightarrow x_3\ is\ a\ free\ variable\Longrightarrow B=\begin{bmatrix}1\\3\\1\\0\\0\end{bmatrix}\ is\ basis\ for\ null\ space\ of\ A$$

$$main\ columns\ of\ A\ are\ basis\ for\ column\ space\ of\ A=\left\{\begin{bmatrix}2\\-1\\0\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\1\\2\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\2\\9\\3\end{bmatrix}\right\}$$

۲ سوال دوم

A یک ماتریس 3x5 است ⇐ (a $k=5$

(b $p=3$

* فرم سطری پلکانی تقلیل یافته A

$$\begin{bmatrix}\textcircled{1}&0&-1&0&2\\0&\textcircled{1}&3&0&-3\\0&0&0&\textcircled{1}&-1\end{bmatrix}\Longrightarrow\begin{cases}x_1-x_3+2x_5=0\\x_2+3x_3-3x_5=0\\x_4-x_5=0\end{cases}$$

x_3 ، x_5 آزاد هستند

(c $\left\{\begin{bmatrix}-2\\2\\0\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\-3\\1\\0\\0\end{bmatrix}\right\}\in N(A)$

(d $\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\-1\\0\end{bmatrix}\right\}\in R(A)$

۳ سوال سوم

$$\left(Ax=0 \iff x=\vec{0}\right) \Rightarrow \text{nullity}(A) = \langle(0,0,0)\rangle$$

a) $\text{Rank}_{col}(A) = 3$

$$\left.\begin{array}{l} \text{بعد فضای ستونی} = \text{بعد فضای سطری} = 3 \\ \text{فضای سطری} \subseteq \mathbb{R}^3 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{فضای سطری} = \mathbb{R}^3$$

b) $\text{nullity}_{left}(A) = \{x \mid x^tA = 0\}$

$$x^tA = 0 \iff A^tx = 0 \iff A^tAx = 0$$

$$\underbrace{\text{nullity}(A)}_{n} = \text{nullity}(A^t) + n - m \Rightarrow \text{nullity}(A^t) = 0$$

$$\Rightarrow N(A^t) = \{x \mid A^tAx = 0\} = \langle(0,0,0)\rangle$$

۴ سوال چهارم

a)
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

b) A و B متقارن هستند $\iff AB = BA$ (⟸)

$$\left.\begin{array}{l} A \text{ متقارن} \Rightarrow A^t = A \\ B \text{ متقارن} \Rightarrow B^t = B \end{array}\right\} \Rightarrow (AB)^t = B^tA^t \overset{A^t=A}{\underset{B^t=B}{=}} BA \overset{\text{فرض اولیه}}{=} AB$$

$\Rightarrow AB$ متقارن است. ■

* A و B متقارن هستند، AB نیز متقارن است: (⟹)

AB متقارن $\Rightarrow (AB)^t = AB$ (1)

A متقارن $\Rightarrow A^t = A$ (2)

B متقارن $\Rightarrow B^t = B$ (3)

$$AB = (AB)^t \quad (1)$$
$$= B^tA^t$$
$$= B^tA \quad (2)$$
$$= BA \quad (3) \Rightarrow AB = BA$$ ■

۵ سوال پنجم

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -\frac{3}{2} & 9/2 & -3 \\ 2 & -6 & 4 \end{bmatrix}$$

$$T(5,1,-1) = A\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{T(5,1,-1) = (0,0,0)}$$

$$A\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - 3y + 2z = 0 \\ -3/2\,x + 9/2\,y - 3z = 0 \\ 2x - 6y + 4z = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} a = -3 \\ b = 2 \end{matrix}}$$

فرم سطری پلکانی تقلیل یافته A :

$$\begin{bmatrix} \textcircled{1} & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

پس پایه برای فضای ستونی A است $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -3/2 \\ 2 \end{bmatrix}\right\}$

که پایه برای برد T نیز است.

$$\forall (x,y,z) \in \text{Range}(T) \quad \exists \alpha : \begin{cases} x = \alpha \\ y = -3/2\,\alpha \\ z = 2\alpha \end{cases} \Rightarrow \alpha = x = -\frac{2}{3}y = \frac{1}{2}z$$

$$\Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z}{4} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} c = -3 \\ d = 4 \end{matrix}}$$

۶ سوال ششم

* بردارهای خطی: $Tx_1, Tx_2, \dots, Tx_n$ وابسته هستند $\Leftarrow$

$$\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \quad (\exists i \quad \alpha_i \neq 0) \quad \alpha_1 Tx_1 + \alpha_2 Tx_2 + \dots + \alpha_n Tx_n = 0$$

T خطی است $\Rightarrow T(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n) = 0$

T یک به یک است $\Rightarrow T(0) = 0 \Rightarrow \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = 0$

$\Rightarrow$ مستقل خطی نیستند $\{x_1, \dots, x_n\}$

* مثال:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3/2 & 9/2 & -3 \\ 2 & -6 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{پلکانی تقلیل}]{\text{فرم سطری}} \begin{bmatrix} \textcircled{1} & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

پس x_2, x_3 آزاد هستند $\Leftarrow$

$$B = \left\{\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

B پایه برای $\text{nullity}(A)$ است $\Leftarrow$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = B_1, \quad \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = B_2$$ مستقل خطی هستند

$$TB_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = TB_2 \Rightarrow \boxed{B_1, B_2 \text{ وابسته}}$$

۷ سوال هفتم

(a

$$\left.\begin{array}{l} T(1,0,0) = (1,0,1) \\ T(0,1,0) = (2,-1,0) \\ T(0,0,1) = (-1,0,7) \end{array}\right\} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

(b

$$T(1,0,0) = (1,0,1) = (1,-1,1)_B$$

$$T(0,1,0) = (2,-1,0) = (4,-2,1)_B$$

$$T(0,0,1) = (-1,0,7) = (3,-9,8)_B$$

$$\Rightarrow \quad A' = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -1 & -2 & -9 \\ 1 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$