

## تمرین‌های مقدماتی

۱- دو نفر هر یک سرمایه‌ای به میزان یک تومان در اختیار دارند و می‌توانند هر مقدار از آن ( $0 \leq x_1, x_2 \leq 1$ ) را برای انجام یک کار عام المنفعه به اشتراک بگذارند. منفعت حاصل به میزان  $2.5\sqrt{x_1 + x_2}$  به هر دو خواهد رسید. به این ترتیب، تابع سود بازیکنان به صورت  $u_i(x_1, x_2) = 2.5\sqrt{x_1 + x_2} - x_i$  است. با فرض این که دو نفر مقادیر  $x_1$  و  $x_2$  را هم‌زمان انتخاب کنند، تابع بهترین پاسخ بازیکنان و تعادل‌های نش را بیابید.

۲- سه حزب A، B و C در مجلس دارای به ترتیب ۲۰، ۳۰ و ۴۰ نماینده (حق رای) هستند. رئیس مجلس با رای‌گیری روی برگه انتخاب می‌شود و هر حزب یک کاندیدا با نام‌های  $N_A$ ،  $N_B$  و  $N_C$  را معرفی کرده است. هر حزب همه نمایندگان خود را موظف می‌کند تا به کاندیدایی که حزب در جلسه‌ی درون حزبی خود مشخص می‌کند رای دهند. فرض کنید اولویت‌های کاندیداها از نظر احزاب به صورت جدول زیر باشد و این جدول را همه احزاب می‌دانند. اگر این وضعیت را با یک بازی استراتژیک با اولویت‌های ترتیبی مدل کنیم (که احزاب، بازیکنان هستند و کاندیدای انتخابی هر حزب برای رای دادن، استراتژی آن حزب است)، مطلوب است محاسبه همه‌ی تعادل‌های نش؛ مشخص کنید که در هر وضعیت تعادل، کدام کاندید برنده می‌شود.

حزب A	$N_A > N_B > N_C$
حزب B	$N_B > N_A > N_C$
حزب C	$N_C > N_A > N_B$

۳- در این مثال می‌خواهیم تعامل احتیاط/بی‌احتیاطی بین خودرو و عابران پیاده را بررسی کنیم و در مورد مقدار بهینه جریمه و پرداخت خسارت به عابر بحث کنیم. البته مساله را بسیار ساده کرده‌ایم تا به راحتی قابل تحلیل باشد. فرض کنید در یک خیابان فرعی عابرین و ماشین‌ها با سرعت اندک در حال عبور هستند. هر کدام اگر احتیاط کنند تصادفی رخ نمی‌دهد اما با تاخیر به مقصد می‌رسند که منجر به هزینه ۱- برای فرد می‌شود؛ اما اگر هر دو بی‌احتیاطی کنند تصادف کوچکی خواهند داشت که منجر به خسارت ۵- به عابر می‌شود اما خسارتی به خودرو نمی‌زند. پلیس برای حمایت از عابرین، در صورت تصادف خسارت C را از خودرو گرفته و به عابر پرداخت می‌کند. طبیعتاً باید  $C < 5$  باشد تا عابر از تصادف سود نبرد. به طور خلاصه، جدول زیر را داریم:

		عابر	
		محتاط	بی احتیاط
خودرو	محتاط	-1, -1	-1, 0
	بی احتیاط	0, -1	-C, C - 5

دقت کنید که فقط در خانه‌ی پایین-راست تصادف رخ داده است.

الف- فرض کنید تعامل فوق را به صورت یک بازی استراتژیک با اولویت‌های ترتیبی مدل کرده‌ایم. در مورد تعادل‌های نش برحسب مقادیر مختلف C بحث کنید.

ب- تعبیر شما از نتایج بند الف چیست؟

۴-  $n$  کشاورز در یک مزرعه شریک هستند و کار می کنند. هر کشاورز  $i$ ، به میزان  $x_i \geq 0$  در مزرعه تلاش می کند و میزان کل محصول برابر  $g(\sum_{k=1}^n x_k)$  است که به طور برابر بین افراد توزیع می شود و در آن، تابع  $g(\cdot)$  دوبارمشتق پذیر و  $g'(\cdot) > 0$  و  $g''(\cdot) \leq 0$  است. همچنین، میزان تلاش  $x_i$  منجر به هزینه  $\frac{1}{2}x_i^2$  برای کشاورز  $i$ ام می شود. به این ترتیب، تابع سود کشاورز  $i$ ام به صورت

$$u_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{n}g\left(\sum_{k=1}^n x_k\right) - \frac{1}{2}x_i^2$$

است. هر کشاورز می خواهد با تنظیم میزان تلاش خود، یعنی  $x_k$ ، سود خود را بیشینه کند. نشان دهید این بازی تنها یک تعادل نش دارد که آن هم متقارن است، یعنی،  $x_1^* = x_2^* = \dots = x_n^* = x^*$ ، و مقدار  $x^*$  را بر حسب  $g(\cdot)$  به دست آورید. (تا جای ممکن در استدلال ها دقت کنید. مثلاً شرایط  $g'(\cdot) > 0$  و  $g''(\cdot) \leq 0$  چه تاثیری روی جواب دارند؟)

۵- دو نفر در یک بازی به صورت زیر شرکت می کنند:

هر شرکت کننده یک عدد صحیح از ۱ تا ۴ روی یک کاغذ نوشته و به داور می دهد. هر کس عددش به  $\frac{2}{3}$  مجموع دو عدد نزدیکتر باشد، مبلغ دو دلار برنده می شود (فرد دیگر هیچ مقداری نمی برد) اما در صورت تساوی، هر کس یک دلار می برد. اگر بازی را به صورت بازی استراتژیک با اولویت های ترتیبی مدل نماییم، ابتدا اکشن های مغلوب را مشخص کرده و سپس نمایه های تعادل نش را به دست آورید.

۶- جدول زیر، جدول سود یک بازی استراتژیک است. الف) با کمک حذف مکرر اکشن های مغلوب اکید، جدول را ساده کرده و نقاط تعادل نش را بیابید. ب) با کمک حذف مکرر اکشن های مغلوب ضعیف، جدول را ساده کرده و نقاط تعادل نش اکید را بیابید.

3,1	2,2	1,1	2,3
2,2	1,3	1,1	1,0
2,3	0,2	0,4	-1,3
4,0	-1,1	0,6	0,4

تمرین های اندکی پیشرفته!

۷- مساله ی ۵ را برای حالتی که عدد انتخابی یک عدد حقیقی (نه الزاماً صحیح) بین ۱ تا ۴ باشد تکرار کنید.

۸- قیمت گذاری دسته جمعی با محاسبه میانگین: یک کمیته با ۳ عضو، مسوول قیمت گذاری بر روی یک کالا هستند. فرض کنید از نظر اعضای اول تا سوم، ارزش واقعی کالا به ترتیب برابر است با  $v_1 = 3$ ،  $v_2 = 9$  و  $v_3 = 9$ ، ارزش واقعی کالا برابر  $i$  باشد. مکانیزم تعیین قیمت به این صورت تعیین شده است که هر عضو  $i$  ( $i = 1, 2, 3$ )، قیمت پیشنهادی خود  $x_i$ ، که می تواند هر مقداری بین صفر تا ده باشد، را بر روی یک برگه نوشته و در یک صندوق می اندازد. سپس میانگین این قیمت ها به عنوان قیمت کارشناسی اعلام می شود، یعنی

$$x = (x_1 + x_2 + x_3)/3.$$

فرض کنید که میزان رضایت عضو  $i$  از نتیجه، برابر با

$$u_i(x_1, x_2, x_3) = -|x - v_i|$$

باشد (هر چه قیمت نهایی به ارزش واقعی مد نظر او نزدیکتر باشد بهتر است). مطلوب است:  
(الف) تابع بهترین پاسخ، (ب) نقاط تعادل نش، و (ج) اکشن‌های غالب-مغلوب اکید و ضعیف.

۹- قیمت گذاری دسته جمعی با محاسبه میانه: سوال بالا را با این تغییر مجدداً حل نمایید که به جای میانگین، میانه (median) قیمت‌ها به عنوان قیمت کارشناسی اعلام می‌شود، یعنی

$$x = \text{median}(x_1, x_2, x_3).$$

- یادآوری: میانه‌ی یک مجموعه از اعداد، برابر است با عددی از آن مجموعه که پس از مرتب کردن، عدد میانی مجموعه باشد.

۱۰- حراج با پاکت در بسته: در یک مزایده برای خرید یک شی عتیقه،  $n$  متقاضی شرکت کرده‌اند و هر نفر، قیمت پیشنهادی خود  $x_i$  را در پاکت مهر و موم شده تحویل می‌دهد و فردی که بالاترین قیمت را پیشنهاد بدهد برنده مزایده خواهد شد. از نظر نفر  $i$  ام (که  $i = 1, 2, \dots, n$ )، ارزش کالا حداکثر برابر  $v_i$  است و فرد به هیچ عنوان حاضر نیست مبلغی بیشتر برای کالا بپردازد. همچنین، از نظر نفر  $i$  ام، تصاحب کالا با هر قیمتی کمتر از  $v_i$  بهتر از عدم تصاحب آن است. و نیز واضح است که هر فرد ترجیح می‌دهد با قیمت پایین‌تری کالا را تصاحب نماید. در دو حالت زیر، تابع بهترین پاسخ و تعادل نش‌های سیستم را بیابید.

الف) حراج با قیمت اول (First-price sealed-bid auctions): در این حالت برنده مزایده باید مبلغ پیشنهادی خود (که بالاترین مبلغ پیشنهادی بوده است) را بپردازد.

ب) حراج با قیمت دوم (Second-price sealed-bid auctions): در این حالت برنده مزایده باید دومین مبلغ پیشنهاد شده را بپردازد.

- برای ساده سازی از حالت‌هایی که چند قیمت پیشنهادی، حداکثر شده اند صرف نظر کنید و نیز فرض کنید  $v_i$  ها نابرابر هستند.
- پیشنهاد: ابتدا مساله را برای  $n = 2$  حل نمایید و سپس جواب را به حالت کلی بسط دهید.

پیشنهاد برای مطالعه بیشتر: در مورد مفهوم بازی‌های پتانسیل (Potential Games) و خواص اصلی و مهم آنها، جستجوی کوتاهی انجام دهید.

موفق باشید