مریم سعیدپور ۹۴۲۹۴۷۴ — « به نام خدا » — بخش ۱ تکلیف سری چهارم تجزیه و تحلیل سیگنال

۲۱. محاسبه‌ی تبدیل فوریه:

(a) $[e^{-\alpha t}\cos\omega_0 t]u(t), \quad \alpha>0$

$$e^{-\alpha t}\cos(\omega_0 t)u(t) = \frac{1}{2}e^{-\alpha t}e^{j\omega_0 t}u(t) + \frac{1}{2}e^{-\alpha t}e^{-j\omega_0 t}u(t)$$

$$\Rightarrow X(j\omega) = \frac{1}{2(\alpha - j\omega_0 + j\omega)} - \frac{1}{2(\alpha + j\omega_0 + j\omega)}$$

(b) $e^{-3|t|}\sin(2t)$

$$e^{-3|t|}\sin(2t) = \underbrace{e^{-3t}\sin(2t)u(t)}_{x_1(t)} + \underbrace{e^{3t}\sin(2t)u(-t)}_{x_2(t)}$$

$$= x_1(t) + x_2(t)$$

$$\to x_1(t) = e^{-3t}\sin(2t)u(t) = (e^{-3t}u(t))\frac{e^{2tj}}{2j} - (e^{-3t}u(t))\frac{e^{-2tj}}{2j}$$

$$x_1(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X_1(j\omega) = \frac{1}{2j}\times\frac{1}{(3+j\omega+2j)} - \frac{1}{2j}\times\frac{1}{(3+j\omega-2j)} = \frac{\frac{1}{2}j}{3+j\omega-2j} - \frac{\frac{1}{2}j}{3+j\omega+2j}$$

$$\to x_2(t) = e^{2t}\sin(2t)u(-t) = -x_1(-t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X_2(j\omega) = -X_1(-j\omega) = \frac{\frac{1}{2}j}{3-j\omega+2j} - \frac{\frac{1}{2}j}{3-j\omega-2j}$$

$$\Rightarrow X(j\omega) = X_1(j\omega) + X_2(j\omega) = \frac{j}{2}\left[\frac{6}{9+(\omega-2)^2} - \frac{6}{9+(\omega+2)^2}\right] = \frac{3j}{9+(\omega-2)^2} - \frac{3j}{9+(\omega+2)^2}$$

← مثال: مطلوب است تبدیل فوریه ی سیگنال زیر:

$$x(t)=\begin{cases} 1+\cos \pi t & |t|\leq 1 \\ 0 & |t|>1 \end{cases}$$

← * روش اول (خاصیت ضرب):

حل: سیگنال را تفکیک می‌کنم:

$$x(t)=\underbrace{(1+\cos\pi t)}_{z(t)}\ \underbrace{\Pi_2(t)}_{y(t)} = z(t)\,y(t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2\pi}\left[Z(\omega) * Y(\omega)\right]$$

$$\begin{cases} 1+\frac{1}{2}e^{j\pi t}+\frac{1}{2}e^{-j\pi t} \xleftrightarrow{F} 2\pi\delta(\omega)+\pi\delta(\omega-\pi)+\pi\delta(\omega+\pi)=Z(\omega) \\ \Pi_2(t) \xleftrightarrow{F} 2\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega}{\pi}\right)=Y(\omega) \end{cases}$$

$$X(\omega)=\frac{1}{2\pi}\left[Z(\omega)*Y(\omega)\right]$$

توجه! کانولوشن هرچیزی در δ می‌شود خودش.

$$=\frac{1}{2\pi}\left[2\pi Y(\omega)+\pi Y(\omega-\pi)+\pi Y(\omega+\pi)\right]$$

$$=2\,\mathrm{Sinc}\left(\frac{\omega}{\pi}\right)+\mathrm{Sinc}\left(\frac{\omega-\pi}{\pi}\right)+\mathrm{Sinc}\left(\frac{\omega+\pi}{\pi}\right)$$

← * روش دوم (استفاده از خاصیت شیفت):

حل:

$$x(t)=\left(1+\frac{1}{2}e^{j\pi t}+\frac{1}{2}e^{-j\pi t}\right)y(t)=y(t)+\frac{1}{2}e^{j\pi t}y(t)+\frac{1}{2}e^{-j\pi t}y(t)$$

$$\Rightarrow X(\omega)=Y(\omega)+\frac{1}{2}Y(\omega-\pi)+\frac{1}{2}Y(\omega+\pi) \quad , \quad Y(\omega)=2\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega}{\pi}\right)$$

$$\{te^{-2t}\sin(4t)\}u(t) = te^{-2t} \times \frac{1}{2j} e^{4tj} \times u(t) - te^{-2t} \times \frac{1}{2j} e^{-4tj} \times u(t) \qquad \{te^{-2t}\sin(4t)\}u(t) \xleftrightarrow{\quad} x(t) \quad (e)$$

$$= \frac{t}{2j}\left(e^{-2t}u(t)\right)e^{4tj} - \frac{t}{2j}\left(e^{-2t}u(t)\right)e^{-4tj}$$

مشتق در تبدیل فوریه

شیفت

* می دانیم :

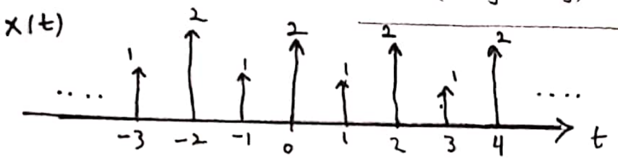
$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\omega)$$

$$-jt\,x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{d}{d\omega}X(\omega)$$

با خاصیت خطی :

$$t\,x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} j\frac{d}{d\omega}X(\omega)$$

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\omega) = \frac{\frac{1}{2}j}{(2+j\omega-4j)^2} - \frac{\frac{1}{2}j}{(2+j\omega+4j)^2}$$



$$x_1(t) = \sum_{K=-\infty}^{+\infty} \delta(t-2K) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \sum_{K=-\infty}^{+\infty} e^{-2jK\omega} = X_1(j\omega) \quad (h)$$

$$x(t) = 2x_1(t) + x_1(t-1)$$

$$\Rightarrow X(j\omega) = 2X_1(j\omega) + e^{-j\omega}X_1(j\omega) = X_1(j\omega)\left[2+e^{-j\omega}\right] = \boxed{\sum_{K=-\infty}^{+\infty} e^{-2jK\omega} \times \left[2+e^{-j\omega}\right]}$$

Scanned by CamScanner

4.22 کتاب :

(a) مثال جزوه

(a) $X(j\omega) = \frac{2\sin[3(\omega-2\pi)]}{(\omega-2\pi)}$

$$X(j\omega) = 2\,\frac{\sin(\pi(3(\omega-2\pi))\times\frac{1}{\pi})}{\pi(3(\omega-2\pi))\times\frac{1}{3\pi}} = 6\pi\, \mathrm{Sinc}(3(\omega-2\pi))$$

$$= 6\pi\,\mathrm{Sinc}\left(\frac{6\pi}{2\pi}(\omega-2\pi)\right) \equiv \tau\,\mathrm{Sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2\pi}\right) \Rightarrow \begin{cases}\tau = 6\pi \\ \omega_0 = -2\pi\end{cases}$$

$$\rightarrow x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 6\pi\,\mathrm{Sinc}\left(\frac{6\pi}{2\pi}(\omega-2\pi)\right)$$

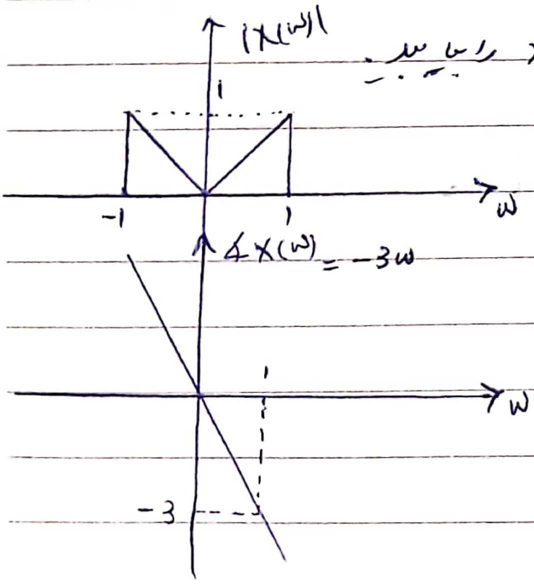
$$\rightarrow x(t) = e^{2\pi j t}\,\Pi_{6\pi}(t) = \begin{cases} e^{2\pi j t} & |t| \leq 3\pi \\ 0 & \text{o.w.}\end{cases}$$

(b) $X(j\omega) = \cos(4\omega + \frac{\pi}{3})$ شیفت در حوزه فرکانس

$$X_1(j\omega) = \cos(4\omega) = \frac{1}{2}e^{4j\omega t} + \frac{1}{2}e^{-4j\omega t} \xrightarrow{\mathcal{F}} X_1(j\omega) = \pi\delta(t-4) + \pi\delta(t+4)$$

$$x(t) = e^{-j\frac{\pi}{3}t}\left(\pi\delta(t-4) + \pi\delta(t+4)\right)$$

← مثال (مسئله ی 4.22(a) کتاب) : $X(\omega)$ به صورت زیر است ، $x(t)$ را بیابید.



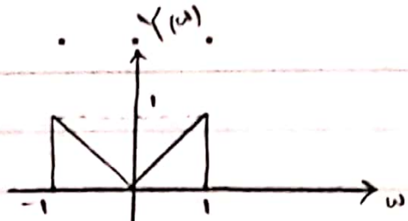
$$X(\omega) = |X(\omega)| e^{j \measuredangle X(\omega)}$$

$$Y(\omega) \triangleq |X(\omega)|$$

$$\Rightarrow X(\omega) = Y(\omega) e^{-3j\omega}$$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = y(t-3)}$$

* حالا مسئله به "یافتن $y(t)$" تقلیل پیدا می‌کند.

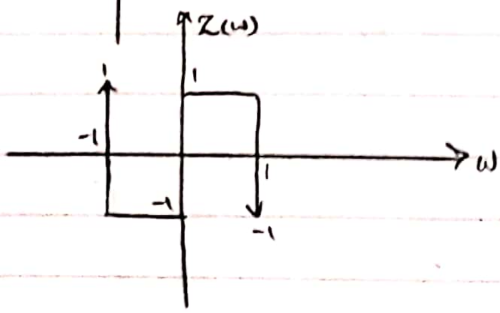


* فرم جدید مسئله : $Y(\omega)$ به صورت روبه‌رو است، $y(t)$ را بیابید.

روش اول (استفاده از مشتق) B

حل :

$$Z(\omega) = Y'(\omega)$$



* می‌دانیم : $\Pi_1(t) \xleftrightarrow{F} H(\omega) = \text{Sinc}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$

* طبق خاصیت دوگانی داریم: $\text{Sinc}\left(\frac{t}{2\pi}\right) \xleftrightarrow{F} 2\pi \cdot \Pi_1(-\omega) = 2\pi\Pi_1(\omega)$

* طبق خاصیت خطی بودن داریم : $\frac{1}{2\pi}\text{Sinc}\left(\frac{t}{2\pi}\right) \xleftrightarrow{F} \Pi_1(\omega)$

$$\Rightarrow Z(\omega) = \Pi_1\left(\omega - \tfrac{1}{2}\right) - \Pi_1\left(\omega + \tfrac{1}{2}\right) + \delta(\omega+1) - \delta(\omega-1)$$

* می‌دانیم : $\delta(t) \xleftrightarrow{F} 1$

* طبق خاصیت دوگانی داریم: $1 \xleftrightarrow{F} 2\pi\delta(-\omega) = 2\pi\delta(\omega)$

* 〃 〃 خطی 〃 : $\frac{1}{2\pi} \xleftrightarrow{F} \delta(\omega)$

$$\Rightarrow z(t) = \frac{e^{j\frac{t}{2}}}{2\pi}\text{Sinc}\left(\frac{t}{2\pi}\right) - \frac{e^{-j\frac{t}{2}}}{2\pi}\text{Sinc}\left(\frac{t}{2\pi}\right) + \frac{e^{-jt}}{2\pi} - \frac{e^{jt}}{2\pi}$$

$$= \frac{\text{Sinc}\left(\frac{t}{2\pi}\right)}{2\pi}\left(e^{j\frac{t}{2}} - e^{-j\frac{t}{2}}\right) - \frac{1}{2\pi}\left(e^{jt} - e^{-jt}\right)$$

$$= \frac{\text{Sinc}\left(\frac{t}{2\pi}\right)}{2\pi}\left(2j\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right) - \frac{1}{2\pi}\left(2j\sin(t)\right)$$

$$= \frac{j}{\pi}\left[\text{Sinc}\left(\frac{t}{2\pi}\right)\sin\left(\frac{t}{2}\right) - \sin(t)\right]$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\omega} Z(\eta)\,d\eta = Y(\omega)$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{-1}{jt}z(t) + \pi \cancel{z(0)}\delta(t) = \frac{-1}{\pi t}\left[\text{Sinc}\left(\frac{t}{2\pi}\right)\sin\left(\frac{t}{2}\right) - \sin(t)\right]$$

$$= \frac{\sin\left(\pi \cdot \frac{t}{\pi}\right)}{\pi \cdot \pi\frac{t}{\pi}} - \text{Sinc}\left(\frac{t}{2\pi}\right)\frac{\sin\left(\pi\frac{t}{2\pi}\right)}{2\pi \cdot \pi\frac{t}{2\pi}}$$

$$= \frac{\text{Sinc}\left(\frac{t}{\pi}\right)}{\pi} - \frac{\text{Sinc}\left(\frac{t}{2\pi}\right)\text{Sinc}\left(\frac{t}{2\pi}\right)}{2\pi} = \frac{1}{\pi}\left[\text{Sinc}\left(\frac{t}{\pi}\right) - \frac{1}{2}\left(\text{Sinc}\left(\frac{t}{2\pi}\right)\right)^2\right]$$

* حالا یافتن $x(t)$:

$$\Rightarrow x(t) = y(t-3) = \frac{1}{\pi}\left[\text{Sinc}\left(\frac{t-3}{\pi}\right) - \frac{1}{2}\left(\text{Sinc}\left(\frac{t-3}{2\pi}\right)\right)^2\right]$$

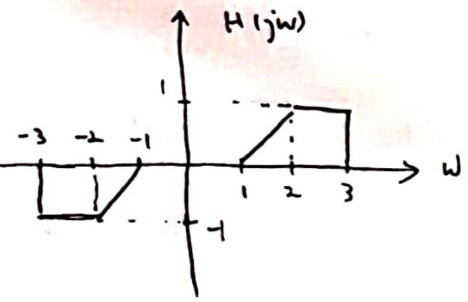
(d)

$$H(j\omega) = 2[\delta(\omega-1) - \delta(\omega+1)] + 3[\delta(\omega-2\pi) + \delta(\omega+2\pi)]$$

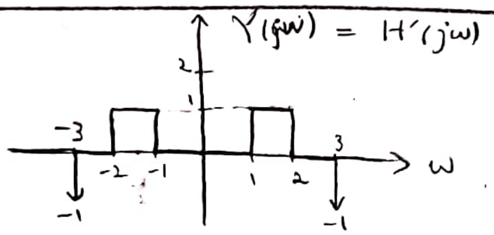
$$h(t) = \frac{1}{\pi}e^{jt} - \frac{1}{\pi}e^{-jt} + \frac{3}{2\pi}e^{2\pi jt} + \frac{3}{2\pi}e^{-2\pi jt}$$

$$= \boxed{\frac{2j}{\pi}\sin(t) + \frac{3}{\pi}\cos(2\pi t)}$$

(e)



$\xrightarrow{\text{مشتق}}$



$$Y(\omega) = \frac{d}{d\omega}H(\omega) \longrightarrow Y(j\omega) = \Pi_1\left(\omega+\frac{3}{2}\right) + \Pi_1\left(\omega-\frac{3}{2}\right) - \delta(\omega-3) - \delta(\omega+3)$$

* می‌دانیم : $\delta(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} 1 \xleftarrow{\text{دوگانی}} 1 \overset{F}{\longleftrightarrow} 2\pi\delta(\omega) \xleftarrow{\text{خطی}} \frac{1}{2\pi} \overset{F}{\longleftrightarrow} \delta(\omega)$

* می‌دانیم : $\Pi_1(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} \mathrm{Sinc}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) \xleftarrow{\text{دوگانی}} \mathrm{Sinc}\left(\frac{t}{2\pi}\right) \overset{F}{\longleftrightarrow} 2\pi\Pi_1(\omega) \xleftarrow{\text{خطی}} \frac{1}{2\pi}\mathrm{Sinc}\left(\frac{t}{2\pi}\right) \overset{F}{\longleftrightarrow} \Pi_1(\omega)$

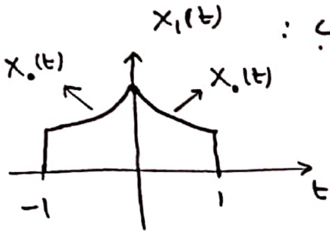
$$y(t) = \frac{e^{-\frac{3}{2}jt}}{2\pi}\mathrm{Sinc}\left(\frac{t}{2\pi}\right) + \frac{e^{\frac{3}{2}jt}}{2\pi}\mathrm{Sinc}\left(\frac{t}{2\pi}\right) - \frac{e^{3jt}}{2\pi} - \frac{e^{-3jt}}{2\pi}$$

$$= \frac{\mathrm{Sinc}\left(\frac{t}{2\pi}\right)}{\pi} \times \frac{e^{\frac{3}{2}jt} + e^{-\frac{3}{2}jt}}{2} - \frac{1}{\pi}\left(\frac{e^{3jt} + e^{-3jt}}{2}\right)$$

$$= \frac{\mathrm{Sinc}\left(\frac{t}{2\pi}\right)}{\pi} \times \cos\left(\frac{3}{2}t\right) - \frac{1}{\pi}\cos(3t)$$

4.23 : کتاب

$$X_0(t) = \begin{cases} e^{-t} & 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$



(a)

$x_1(t) = X_0(t) + X_0(-t)$

$$X_0(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-jwt}\, dw = \frac{1 - e^{-(1+jw)}}{1+jw}$$

$$\Rightarrow X_1(w) = X_0(w) + X_0(-w) = \frac{2 - 2e^{-1}\cos w - 2we^{-1}\sin w}{1+w^2}$$

(b)

$X_2(t) = X_0(t) - X_0(-t)$

$$\Rightarrow X_2(w) = X_0(w) - X_0(-w) = j\left[\frac{-2w + 2e^{-1}\sin w + 2we^{-1}\cos w}{1+w^2}\right]$$

(c)

$X_3(t) = X_0(t) + X_0(t-1)$

$$\Rightarrow X_3(w) = X_0(w) + e^{jw} X_0(w) = \frac{1 + e^{jw} - e^{-1}(1 + e^{-jw})}{1+jw}$$

(d)

$X_4(t) = t\, X_0(t)$

$$\Rightarrow X_4(w) = j \frac{d}{dw} X_0(w) = \frac{1 - 2e^{-1} e^{-jw} - jw\, e^{-1} e^{-jw}}{(1+jw)^2}$$

.24

(a)

(I) اگر $Re\{X(\omega)\}=0$ آنگاه $x(t)$ باید حقیقی و فرد باشد ⟸ سیگنال (a) و (c) این ویژگی را دارند.

(II) اگر $Im\{X(\omega)\}=0$ آنگاه $x(t)$ باید حقیقی و زوج باشد ⟸ سیگنال (e) و (f) " " " " .

(III) برای اینکه $e^{j\alpha\omega}X(j\omega)$ حقیقی باشد (α عددی حقیقی) باید $x(t+\alpha)$ حقیقی و زوج باشد ⟸ سیگنال ها (a)، (b)، (f) و (e) این ویژگی را دارند.

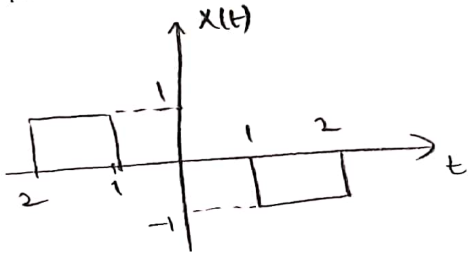
(IV) $\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)\,d\omega=0$ آنگاه باید $x(0)=0$ ⟸ سیگنال های (a)، (b)، (c)، (d)، (f) " "

(V) $\int_{-\infty}^{+\infty} \omega X(j\omega)\,d\omega=0$ آنگاه باید $\frac{d}{dt}x(t)\Big|_{t=0}=0$ ⟸ سیگنال های (b)، (c)، (e)، (f) " "

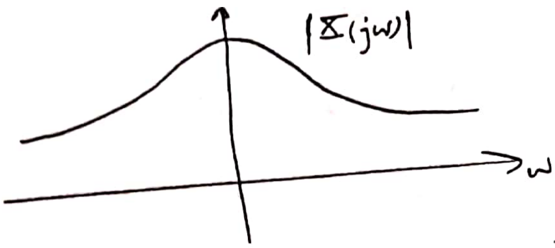
(VI) $X(j\omega)$ پریودیک است. در این صورت حتماً باید $x(t)$ پریودیک باشد ⟸ سیگنال (a) این خاصیت را دارد.

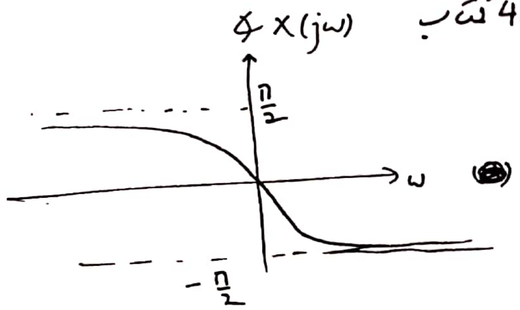
(b) برای اینکه سیگنالی فقط خصوصیات (I)، (IV) و (V) را داشته باشد باید حقیقی و فرد باشد و $x(0)=0$ ، $x'(0)=0$

مثلاً:



4.29 کتاب





(a)

$$X_a(j\omega) = |X(j\omega)|\, e^{j\measuredangle X(j\omega) - ja\omega}$$

$$= X(j\omega)\, e^{-ja\omega} \rightarrow \text{شیفت}$$

$$\Rightarrow \boxed{x_a(t) = x(t-a)}$$

(b)

$$X_b(j\omega) = |X(j\omega)|\, e^{j\measuredangle X(j\omega) + bj\omega} = X(j\omega)\, e^{jb\omega} \rightarrow \text{شیفت}$$

$$\Rightarrow x_b(t) = x(t+b)$$

(c)

$$X_c(j\omega) = |X(j\omega)|\, e^{-j\measuredangle X(j\omega)} = X^*(j\omega)$$

$\Rightarrow x_c(t) = x^*(-t)$ و (x(t) حقیقی است)

چون x(t) حقیقی است $\Rightarrow \boxed{x_c(t) = x(-t)}$

(d)

$$X_d(j\omega) = |X(j\omega)|\, e^{-j\measuredangle X(j\omega) + jd\omega} = X^*(j\omega)\, e^{jd\omega}$$

$$\Rightarrow x_d(t) = x^*(-t-d) \xrightarrow{x(t)\ \text{حقیقی است}} \boxed{x_d(t) = x(-t-d)}$$

Scanned by CamScanner

کتاب 4.39 :

(a) از رابطه‌ی آنالیز داریم :

$$G(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} X(jt) e^{-j\omega t} dt \quad (1)$$

از رابطه‌ی سنتز داریم :

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

اگر در رابطه‌ی سنتز $t \rightarrow \omega$:

$$x(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(jt) e^{j\omega t} dt \Longrightarrow 2\pi x(-\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(jt) e^{-j\omega t} dt \quad (2)$$

از روابط (1) و (2) داریم :

$$G(j\omega) = 2\pi x(-\omega)$$

(b) اگر در قسمت (a) ; $x(t) = \delta(t+B) \Longrightarrow g(t) = X(jt) = e^{jBt}$

$$\Rightarrow G(j\omega) = 2\pi x(-\omega) = 2\pi \delta(-\omega + B) = 2\pi \delta(\omega - B)$$