باسمه تعالی

تاریخ: ۲ اردیبهشت ۱۴۰۰

امتحان میان‌ترم درس جبر خطی کاربردی

مدت امتحان: ۳ ساعت

---

۱. فرض کنید

$$Q = \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۳ \\ ۲ & ۴ & ۶ & ۹ \\ ۱ & ۴ & ۴ & ۰ \\ ۲ & ۶ & ۷ & ۶ \end{pmatrix}.$$

رتبه (رنک) و پوچی ماتریس Q و یک پایه برای فضای سطری Q و یک پایه برای هسته Q پیدا کنید. (کلیه جزییات محاسبات را بنویسید.)

۲. تبدیل خطی $T : \mathbb{R}_۲[x] \to \mathbb{R}_۳[x]$ را بصورت $T(f) = \int_۰^x f(t)\, dt$ در نظر بگیرید. هم‌چنین پایه $\mathcal{B}_۱ = (۱, ۱+x, ۱+x+x^۲)$ برای $\mathbb{R}_۲[x]$ و $\mathcal{B}_۲ = (۱, x, x^۲, x^۳)$ برای $\mathbb{R}_۳[x]$ را در نظر بگیرید. ($\mathbb{R}_k[x]$ فضای برداری همه چندجمله‌ای‌های از درجه حداکثر k است.)

الف) ماتریس نمایش T در این پایه‌ها یعنی $[T]_{\mathcal{B}_۱,\mathcal{B}_۲}$ را بدست آورید.

ب) رتبه (رنک) و پوچی T را بدست آورید.

۳. الف) فرض کنید $\mathbf{v} = [a,b,c]^t \in \mathbb{R}^۳$ یک بردار دلخواه باشد که $b \neq ۰$. ثابت کنید $\mathcal{B}' = (\mathbf{k}, \mathbf{i}, \mathbf{v})$ یک پایه برای $\mathbb{R}^۳$ است.

ب) فرض کنید $\mathcal{B} = (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ پایه استاندارد $\mathbb{R}^۳$ باشد. ماتریس تبدیل پایه از پایه قدیمی $\mathcal{B}$ به پایه جدید $\mathcal{B}'$ و برعکس را بدست آورید.

ج) می‌دانیم که مختصات دوران نقطه $u = [u_۱, u_۲, u_۳]^t$ حول محور z (بردار $\mathbf{k}$) به اندازه زاویه θ در جهت مثلثاتی از رابطه $u' = Ru$ بدست می‌آید که

$$R = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & ۰ \\ \sin\theta & \cos\theta & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{pmatrix}.$$

با کمک (ب) ماتریس دوران حول بردار $v = [a,b,c]^t \in \mathbb{R}^۳$ (که $b \neq ۰$) به اندازه زاویه θ را بدست آورید.

۴. فرض کنید V فضای برداری همه توابع حقیقی پیوسته روی بازه $[-۱,۱]$ باشد که با ضرب داخلی زیر مجهز شده است،

$$\langle f, g\rangle = \int_{-۱}^{۱} f(x)g(x)\, dx.$$

W را زیرفضای تولید شده توسط توابع $v_۱ = ۱$، $v_۲ = x$ و $v_۳ = x^۲$ در نظر بگیرید. با کمک الگوریتم گرام-اشمیت یک پایه اورتونرمال برای W بدست آورید.

۵. فرض کنید $\mathbb{R}^n = W_۱ \oplus W_۲$. ماتریس P را ماتریس تصویر روی $W_۱$ در راستای $W_۲$ در نظر بگیرید (یعنی برای هر $x \in \mathbb{R}^n$، داریم Px تصویر x روی $W_۱$ در راستای $W_۲$ است). ثابت کنید

$$R(P) = N(I-P) = W_۱ \quad \text{و} \quad R(I-P) = N(P) = W_۲.$$