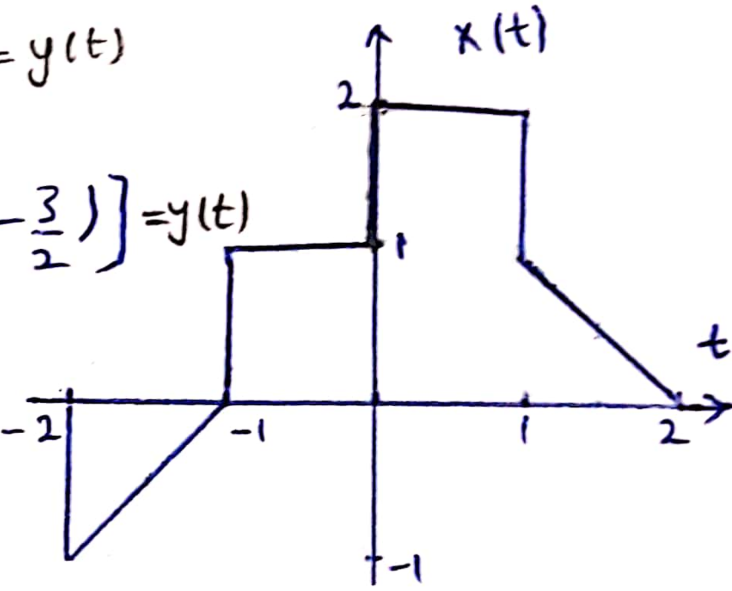
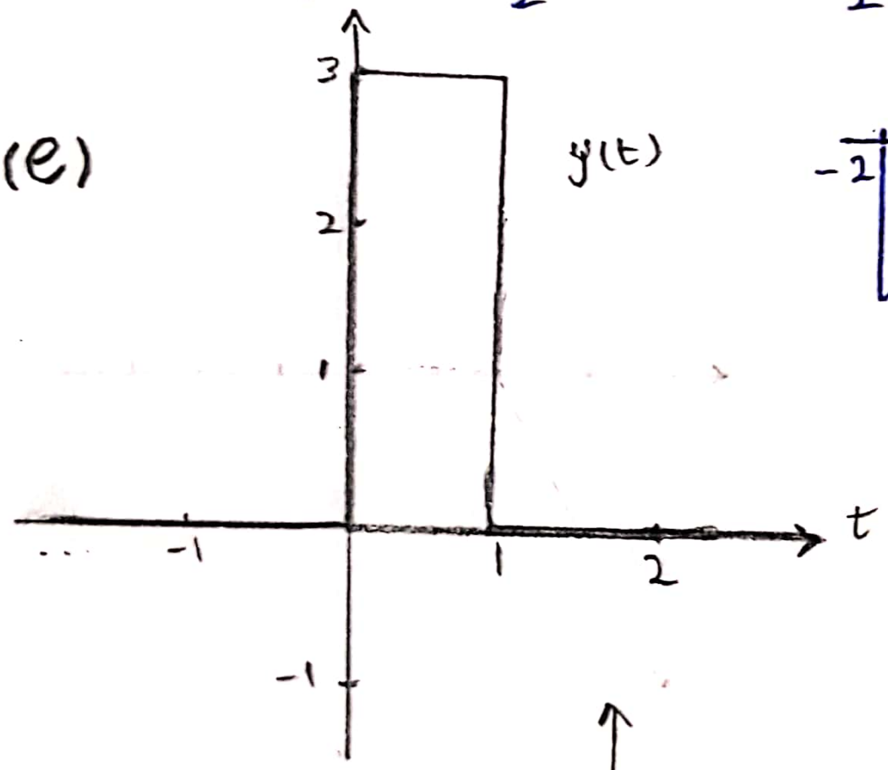
21- Sketch and label each signal:

(e) $[x(t) + x(-t)]u(t) = y(t)$

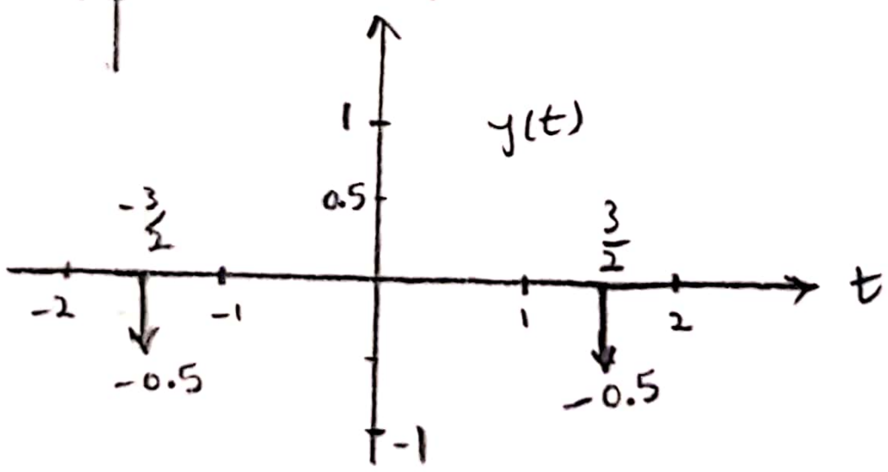
(f) $x(t)\left[\delta\left(t+\frac{3}{2}\right) - \delta\left(t-\frac{3}{2}\right)\right] = y(t)$



(e)



(f)



25- Is periodic? If yes, what is fundamental period?

(b) $x(t) = e^{j(\pi t - 1)}$

if $x(t)$ is periodic then: $x(t+T) = x(t)$

$$\Rightarrow e^{j(\pi(t+T)+1)} \overset{?}{=} e^{j(\pi t+1)}$$

$$\Rightarrow \cancel{e^{j(\pi t+1)}} \cdot e^{j\pi T} \overset{?}{=} \cancel{e^{j(\pi t+1)}} \Rightarrow e^{j\pi T} = 1$$

$$\Rightarrow T = \frac{2\pi}{\pi} = 2 \Rightarrow \boxed{x(t) \text{ is periodic }, T=2}$$

(c) $x(t) = \left[\cos\left(2t - \frac{\pi}{3}\right)\right]^2 = \left[1 + \cos\left(4t - \frac{2\pi}{3}\right)\right] / 2$

x(t) در فرم سینوسی است و متناوب است و دوره تناوب اصلی آن

برابر با $T = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ می‌باشد.

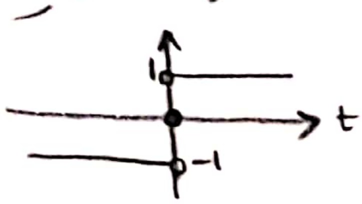
$$\boxed{x(t) \text{ is periodic }, T = \frac{\pi}{2}}$$

(e) $x(t) = Ev\{\sin(4\pi t)u(t)\}$

$$x(t) = \frac{\sin(4\pi t)u(t) + \sin(-4\pi t)u(-t)}{2}$$

$$= \sin(4\pi t)\left[\frac{u(t) - u(-t)}{2}\right]$$

متناوب نیست!



در نتیجه در مجموع، x(t) متناوب نیست...

$$\boxed{x(t) \text{ is not periodic}}$$

26- Is periodic ? If yes, fundamental period?

(e) $x[n] = 2\cos\left(\frac{\pi}{4}n\right) + \sin\left(\frac{\pi}{8}n\right) - 2\cos\left(\frac{\pi}{2}n + \frac{\pi}{6}\right)$

$$\left.\begin{array}{l} T_{\cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)} = \dfrac{2\pi}{\frac{\pi}{4}} = 8 \\ T_{\sin\left(\frac{\pi}{8}n\right)} = \dfrac{2\pi}{\pi/8} = 16 \\ T_{\cos\left(\frac{\pi}{2}n + \frac{\pi}{6}\right)} = \dfrac{2\pi}{\pi/2} = 4 \end{array}\right\} \rightarrow T_{x[n]} = \text{ک.م.م}(4,8,16) = 16$$

$\boxed{x[n] \text{ is periodic and } T = 16}$

Scanned by CamScanner

17 - which of "Memoryless, TI, Linear, causal stable" hold in each system?

(C) $y(t) = \int_{-\infty}^{2t} x(\tau)d\tau$

* Memoryless :

خیر، سیستم فوق حافظه‌دار است زیرا (مثال نقض برای بدون حافظه بودن) داریم:

$t=1 \rightarrow y(1) = \int_{-\infty}^{2} x(\tau)d\tau$

$y(1)$ به tهای غیر از $t=1$ هم وابسته است پس سیستم حافظه‌دار است.

---

* Time Invariant :

$x_1(t) \longrightarrow \boxed{y(t) = \int_{-\infty}^{2t} x(\tau)d\tau} \longrightarrow y_1(t) = \int_{-\infty}^{2t} x_1(\tau)d\tau$

$x_2(t) = x_1(t+t_0) \longrightarrow \boxed{y(t) = \int_{-\infty}^{2t} x(\tau)d\tau} \longrightarrow y_2(t) \overset{?}{=} y_1(t+t_0)$

$$y_2(t) = \int_{-\infty}^{2t} x_2(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{2t} x_1(\underbrace{\tau+t_0}_{\triangleq u})d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{2t+t_0} x_1(u)du$$

$$y_1(t+t_0) = \int_{-\infty}^{2(t+t_0)} x_1(\tau)d\tau$$

$\Longrightarrow y_2(t) \neq y_1(t+t_0)$

سیستم Time Variant (TV) است.

---

* Linear :

$x_1(t) \longrightarrow y_1(t)$

$x_2(t) \longrightarrow y_2(t)$

$\longrightarrow x_3(t) = ax_1(t) + bx_2(t)$

$x_3(t) \longrightarrow y_3(t) \overset{?}{=} ay_1(t) + by_2(t)$

$$y_3(t) = \int_{-\infty}^{2t} x_3(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{2t} [ax_1(\tau) + bx_2(\tau)]d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{2t} ax_1(\tau)d\tau + \int_{-\infty}^{2t} bx_2(\tau)d\tau = ay_1(t) + by_2(t)$$

پس در مجموع چون $y_3(t) = ay_1(t) + by_2(t)$ ، سیستم خطی است.

---

* causal : (در سیستم آینده نگری نداشته باشیم !)

این سیستم علّی نیست زیرا مثلاً در لحظه‌ی $t=1$ داریم :

$$y(1) = \int_{-\infty}^{2} x(\tau)\,d\tau$$

کاملاً بدیهی است که به زمان‌های $t>1$ هم برای حل انتگرال و به دست آوردن $y(1)$ نیاز داریم پس عملاً سیستم آینده نگری دارد و علّی نیست. (non-causal)

---

* Stable (اگر سیستم BIBO باشد ، یک سیستم پایدار است)

$$x(t) \triangleq 1 \Longrightarrow \lim_{t\to\infty} \int_{-\infty}^{2t} d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau = \infty$$

$$\Rightarrow \lim_{t\to\infty} y(t) = \infty$$

پس سیستم BIBO نیست و در نتیجه پایدار (Stable) هم نیست.

(e) $y(t)=\begin{cases}0 & x(t)<0\\ x(t)+x(t-2) & x(t)\geq 0\end{cases}$

* Memory less :

سیستم حافظه‌دار است مثلاً اگر $t=0$ و $x(-2), x(0)\geq 0$ آنگاه :

$$y(0)=x(-2)+x(0)$$

و واضح است که به $t=-2<0$ وابسته است پس حافظه‌دار است.

---

* Time Invariant :

$x_1(t)\longrightarrow y_1(t)$

$x_2(t)=x_1(t+t_0)\longrightarrow y_2(t)\overset{?}{=}y_1(t+t_0)$

$$y_2(t)=\begin{cases}0 & x_2(t)<0\\ x_2(t)+x_2(t-2) & x_2(t)\geq 0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}0 & x_1(t+t_0)<0\\ x_1(t+t_0)+x_1(t+t_0-2) & x_1(t+t_0)\geq 0\end{cases}$$

$$=y(t+t_0)\Longrightarrow \text{System is TI}$$

---

* linear :

$x_1(t)\longrightarrow y_1(t)$

$x_2(t)\longrightarrow y_2(t)$

$x_3(t)=ax_1(t)+bx_2(t)\longrightarrow y_3(t)\overset{?}{=}ay_1(t)+by_2(t)$

$$y_3(t)=\begin{cases}0 & x_3(t)<0\\ x_3(t)+x_3(t-2) & x_3(t)\geq 0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}0 & ax_1(t)+bx_2(t)<0\\ ax_1(t)+bx_2(t)+ax_1(t-2)+bx_2(t-2) & ax_1(t)+bx_2(t)\geq 0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}0=a\times 0+b\times 0 & ax_1(t)+bx_2(t)<0\\ a(x_1(t)+x_1(t-2))+b(x_2(t)+x_2(t-2)) & ax_1(t)+bx_2(t)\geq 0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}0 & ax_1(t)<0\\ a(x_1(t)+x_1(t-2)) & ax_1(t)\geq 0\end{cases}+\begin{cases}0 & x_2(t)<0\\ b(x_2(t)+x_2(t-2)) & x_2(t)\geq 0\end{cases}$$

$\Rightarrow y_3(t) = a y_1(t) + b y_2(t) \Rightarrow$ System is Linear

---

* Causal:

از ظاهر و فرم سیگنال $y(t)$ پیداست که هیچ گاه به t های آینده وابسته نیست و علاقه آینده نگری نداریم. پس سیستم علی (Causal) است.

---

* Stable (BIBO)

$$\forall t \quad |x(t)| \leq M$$

$$|y(t)| = \begin{cases} 0 & x(t) < 0 \\ |x(t) + x(t-2)| & x(t) \geq 0 \end{cases}$$

$$< \begin{cases} 0 & x(t) < 0 \\ |x(t)| + |x(t-2)| & x(t) \geq 0 \end{cases}$$

$$< \begin{cases} 0 & x(t) < 0 \\ 2M & x(t) \geq 0 \end{cases}$$

$$< \mathrm{Max}\{0, 2M\} = 2M \Rightarrow$$ سیستم BIBO است و در نتیجه stable می‌باشد.

(g) $y(t)=\frac{d}{dt}x(t)=x'(t)$

* Memoryless :

سیستم مشتق‌گیر حافظه دار است به دلیل تعریف مشتق که به یک همسایگی نیاز داره پس حافظه دار.

$$y(0)=\frac{d}{dt}x(0)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{x(0+\Delta t)-x(0)}{\Delta t}$$

که $0^+=\Delta t$ یا $0^-=\Delta t$ در نتیجه سیستم حافظه دار است.

* Time Invariant :

$x_1(t)\to y_1(t)$

$x_2(t)=x_1(t+t_0)\to y_2(t)\overset{?}{=}y_1(t+t_0)$

$$y_2(t)=\frac{d}{dt}x_2(t)=\frac{d}{dt}\underset{\text{عدد ثابت}}{x_1(t+t_0)}\underset{dt=d(t+t_0)}{=\!=}\frac{d}{d(t+t_0)}x_1(t+t_0)$$

$=y_1(t+t_0)\Rightarrow$ سیستم TI است.

* linear :

$x_1(t)\to y_1(t)$

$x_2(t)\to y_2(t)$

$x_3(t)=ax_1(t)+bx_2(t)\to y_3(t)\overset{?}{=}ay_1(t)+by_2(t)$

$$y_3(t)=\frac{d}{dt}x_3(t)=\frac{d}{dt}(ax_1(t)+bx_2(t))$$

$$=\frac{d}{dt}ax_1(t)+\frac{d}{dt}bx_2(t)=ay_1(t)+by_2(t)$$

سیستم خطی (linear است.)

* causal :

سیستم علّی نیست، چون مشتق عبارت است حدگیری در یک همسایگی از t، که همسایگی هم شامل t^+ و هم t^- است، پس در سیستم پیش‌گویی و آینده‌نگری داریم ⇐ علّی نیست.

اما اگر صرفاً منظور از مشتق‌گیری، مشتق چپ باشد ← علّی است

اما مشتق راست ← علّی نیست.

* Stable (BIBO)

سیستم پایدار نیست زیرا اگر $x(t)$ ناپیوسته باشد، در $y(t)$، ضربه ($\delta(t)$) خواهیم داشت و $y(t)$ کراندار نخواهد شد.

ادامه ی سوال 27 :

جمع بندی پاسخ های قسمت c, e, g :

c: linear

e: Time Invariant, linear, Causal, Stable

g: Time Invariant, linear, Causal

28: like Question 27 but for discrete-times.

(C) $y[n] = n\,x[n]$

* Memory less :

سیستم بی حافظه است زیرا برای هر n خروجی فقط به مقدار ورودی در لحظه ی n وابسته است.

* Time Invariant :

$x_1[n] \to y_1[n]$

$x_2[n] = x_1[n+n_0] \to y_2[n] \stackrel{?}{=} y_1[n+n_0]$

$$\left.\begin{aligned} y_2[n] &= n\,x_2[n] = n\,x_1[n+n_0] \\ y_1[n+n_0] &= (n+n_0)\,x_1[n+n_0] \end{aligned}\right\} \Rightarrow y_2[n] \neq y_1[n+n_0]$$

پس سیستم TV (Time variant) است.

* Linear :

$x_1[n] \to y_1[n]$

$x_2[n] \to y_2[n]$

$x_3[n] = a x_1[n] + b x_2[n] \to y_3[n] \stackrel{?}{=} a y_1[n] + b y_2[n]$

$y_3[n] = n\,x_3[n] = n(a x_1[n] + b x_2[n])$

$= a n\,x_1[n] + b n\,x_2[n] = a y_1[n] + b y_2[n]$

در نتیجه سیستم خطی است.

* Causal :

از فرم سیستم پیداست که برای n_0 ها به $n > n_0$ نیاز نداریم و در حقیقت آینده نگری نداریم و سیستم علّی است.

* Stable (BIBO) :

$\forall n \quad |x[n]| \leq M$

$|y[n]| = |n\,x[n]| = |n|\,x[n] \leq M|n|$

$\lim_{n\to\infty} |y[n]| = \lim_{n\to\infty} M|n| = \infty$ پس سیستم بیکران است و ناپایدار

عدد ثابت

(f) $y[n] = \begin{cases} x[n] & n \geq 1 \\ 0 & n = 0 \\ x[n] & n \leq -1 \end{cases} = \begin{cases} x[n] & n \neq 0 \\ 0 & n = 0 \end{cases}$

* Memoryless:

بله سیستم بی حافظه است زیرا برای هر n، خروجی فقط به متغیر ورودی در لحظه n وابسته است.

* Time Invariant :

سیستم TV (Time variable) است زیرا:

$$n=-1 \rightarrow y_1[-1] = x_1[-1]$$

حال اگر تا خیر 1 واحدی داشته باشیم، داریم:

$$n_0 = 1 \rightarrow y_2[-1] = x[0] \neq 0$$

---

* linear :

$$x_1[n] \rightarrow y_1[n]$$

$$x_2[n] \rightarrow y_2[n]$$

$$x_3[n] = ax_1[n] + bx_2[n] \rightarrow y_3[n] \overset{?}{=} ay_1[n] + by_2[n]$$

$$y_3[n] = \begin{cases} x_3[n] & n \neq 0 \\ 0 & n = 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} ax_1[n] + bx_2[n] & n \neq 0 \\ 0 & n = 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} ax_1[n] & n \neq 0 \\ 0 & n = 0 \end{cases} + \begin{cases} bx_2[n] & n \neq 0 \\ 0 & n = 0 \end{cases}$$

$$= ay_1[n] + by_2[n] \rightarrow$$ سیستم خطی است

---

* Causal :

از فرم سیستم پیداست که برای هر n_0 به مقدار ورودی برای $\forall n > n_0$ نیاز نداریم و در حقیقت آینده نگر نداریم و سیستم علّی است.

---

* Stable (BIBO) :

$$\forall n \quad |x[n]| \leq M$$

$$|y[n]| = \begin{cases} |x[n]| & n \neq 0 \\ |0| & n = 0 \end{cases} \leq \begin{cases} M & n \neq 0 \\ 0 & n = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} y[n] = M \Rightarrow$$ سیستم کراندار و پایدار است

(g) $y[n]=x[4n+1]$

* Memory less :

خیر سیستم حافظه دار است زیرا :

$n=1 \Rightarrow y[1]=x[5]$

از آنجایی که خروجی در لحظه ی $n=1$ به ورودی در لحظه ای غیر از لحظه ی $n=1$ نیاز داشته است پس سیستم حافظه دار است .

* Time Invariant :

$x_1[n] \rightarrow y_1[n]$

$x_2[n]=x_1[n+n_0] \longrightarrow y_2[n] \stackrel{?}{=} y_1[n+n_0]$

$$\left.\begin{aligned} y_2[n] &= x_2[4n+1]=x_1[4n+1+n_0] \\ y_1[n+n_0] &= x_1[4n+4n_0+1] \end{aligned}\right\}$$

$\Rightarrow y_2[n] \neq y_1[n+n_0] \Rightarrow$ سیستم TV

است (Time Variant) .

ادامه‌ی حل سوال 28 :

* Linear :

$x_1[n] \to y_1[n]$

$x_2[n] \to y_2[n]$

$x_3[n] = ax_1[n] + bx_2[n] \to y_3[n] \overset{?}{=} ay_1[n] + by_2[n]$

$y_3[n] = x_3[4n+1] = ax_1[4n+1] + b\,x_2[4n+1]$

$= ay_1[n] + b\,y_2[n] \Rightarrow$ سیستم خطی است.

---

* Causal :

سیستم غیرعلّی است زیرا :

$n=1 \to y[1] = x[5]$

سیستم برای محاسبه خروجی به ورودی در مقداری بیشتر از مقدار آن در همان لحظه نیاز دارد (آینده‌نگر) پس سیستم علّی نیست.

---

* Stable (BIBO):

$\forall n \quad |x[n]| \leq M$

$|y[n]| = |x[4n+1]| \overset{4n+1 \triangleq u}{=\!=} |x[u]| \leq M$

$\Rightarrow |y[n]| \leq M$ for all n

پس سیستم کراندار و پایدار است.

☐ جمع بندی :

C: Memory less, linear, causal

f: Memory less, linear, causal, stable

g: linear, stable.

30- Is it Invertible? if yes, Inverse structure? if no, give example ....

(c) $y[n] = n\,x[n]$

$y_1[n] = y_2[n] \longrightarrow x_1[n] \stackrel{?}{=} x_2[n]$

$y_1[n] = y_2[n] \Rightarrow n\,x_1[n] = n\,x_2[n] \longrightarrow$ if $n=0$ ....

وارون پذیر نیست ، مثال نقض :

$\delta[n]$ و $2\delta[n]$ خروجی یکسان می دهند...

(d) $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau$

$y_1(t) = y_2(t) \longrightarrow x_1(t) \stackrel{?}{=} x_2(t)$

$y_1(t) = y_2(t) \Rightarrow \int_{-\infty}^{t} x_1(\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{t} x_2(\tau)\,d\tau$

$\Rightarrow \int_{-\infty}^{t} \underbrace{(x_1(\tau) - x_2(\tau))}_{0}\,d\tau = 0 \Rightarrow x_1(t) = x_2(t)$

وارون پذیر است .

همچنین وارون آن :

$$y(t) = \frac{d}{dt} x(t)$$

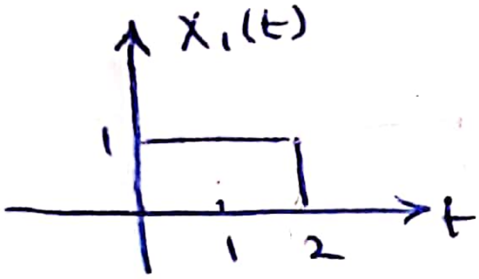
(K) $$y[n] = \begin{cases} x[n+1] & n \geq 0 \\ x[n] & n \leq -1 \end{cases}$$

وارون پذیر نیست ؛ زیرا :

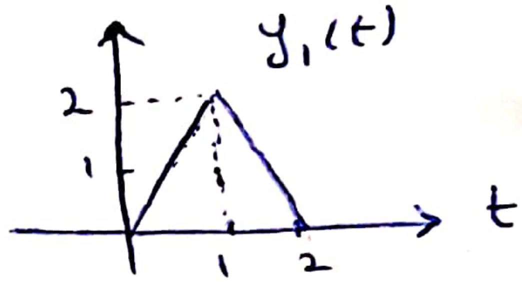
$\delta[n]$ و $2\delta[n]$ هردو خروجی یکسان ($=0$) می‌دهند.

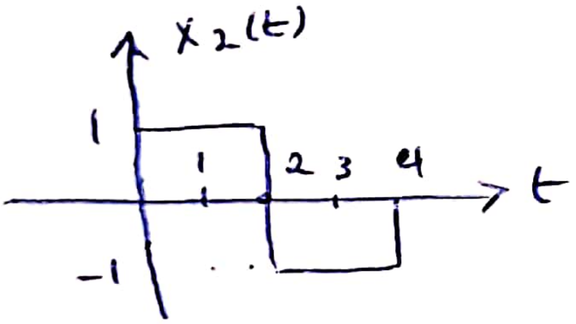
---

31 – (a)

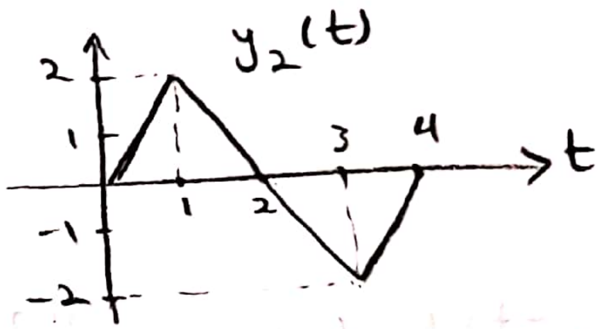


$\xrightarrow{LTI}$



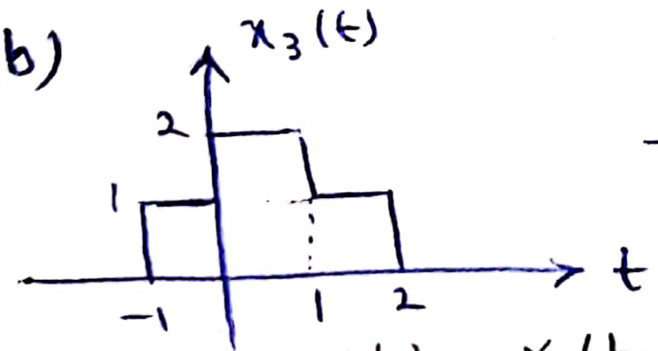


$\xrightarrow{LTI}$

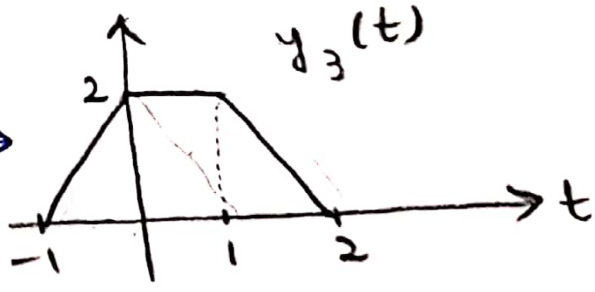


$$x_2(t) = x_1(t) - x_1(t-2) \xrightarrow{LTI} y_1(t) - y_1(t-2)$$

(b)



$\xrightarrow{LTI}$



$$x_3(t) = x_1(t) + x(t+1) \xrightarrow{LTI} y_1(t) + y_1(t+1)$$

42- True/false

(a) $\rightarrow \boxed{LTI_1} \rightarrow \boxed{LTI_2} \rightarrow \overset{?}{\equiv} \rightarrow \boxed{LTI} \rightarrow$

صحیح است؛ زیرا: (S_1 و S_2 دو سیستم LTI هستند)

$x_1(t) \xrightarrow{S_1} y_1(t) \quad , \quad y_1(t) \xrightarrow{S_2} z_1(t)$

$x_2(t) \xrightarrow{S_1} y_2(t) \quad , \quad y_2(t) \xrightarrow{S_2} z_2(t)$

$a x_1(t) + b x_2(t) \xrightarrow{S_1} a y_1(t) + b y_2(t)$: S_1 is linear

$a y_2(t) + b y_2(t) \xrightarrow{S_2} a z_1(t) + b z_2(t)$: S_2 is linear

$a x_1(t) + b x_2(t) \xrightarrow{S_1, S_2} a z_1(t) + b z_2(t)$

(۱) پس سیستم معادل، سری بستن دو سیستم S_1 و S_2، خطی است.

$x_1(t+t_0) \xrightarrow{S_1} y_1(t+t_0)$: S_1 is TI

$y_1(t+t_0) \xrightarrow{S_2} z_1(t+t_0)$: S_2 is TI

$x_1(t+t_0) \xrightarrow{S_1, S_2} z_1(t+t_0)$

(۲) پس سیستم معادل سری بستن S_1 و S_2، تغییرناپذیر با زمان است.

$\Leftarrow$ درمجموع از دو رابطه‌ی (۱) و (۲) $\Leftarrow$ سیستم معادل سری کردن دو سیستم LTI، خودش LTI است.

(b) $\rightarrow \boxed{\text{non-linear}} \rightarrow \boxed{\text{non-linear}} \rightarrow \overset{?}{\equiv} \rightarrow \boxed{\text{non-linear}} \rightarrow$

غلط است زیرا؛

$x(t) \rightarrow \boxed{y(t) = x(t) + 1} \xrightarrow{y(t)} \boxed{z(t) = y(t) - 1} \rightarrow z(t)$

غیرخطی   غیرخطی

$\equiv \; x(t) \rightarrow \boxed{z(t) = x(t)} \rightarrow z(t)$ خطی است.

(c) $y[n] = y_2[2n] = y_1[2n] + \frac{1}{2} y_1[2n-1] + \frac{1}{4} y_1[2n-2]$

$= x[n] + \frac{1}{2} x[n-1] + \frac{1}{4} x[n-2]$

مشابه قبل هم اثبات می‌شود که سیستم خطی و تغییرناپذیر با زمان است. (LTI)

[$y_2(t)$ خروجی سیستم دوم و $y_1(t)$ خروجی سیستم اول است.]