



۱. فرض کنید

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(الف) ماتریس قطری  $D$  و ماتریس وارون‌پذیر  $P$  را به گونه‌ای بیابید که  $P^{-1}MP = D$ .

(ب) تجزیه طیفی  $M$  را بنویسید.

(۲۰ نمره)

۲. فرض کنید

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & -\sqrt{3} & 2 \end{pmatrix}.$$

(الف) تجزیه مقادیر تکین ماتریس  $A$  را بنویسید.

(ب) فرض کنید  $W$  بهترین زیرفضای دوبعدی در  $\mathbb{R}^4$  است که می‌توانیم سطرهای این ماتریس را در آن تصویر کنیم.

یک پایه برای  $W$  بدست آورید. با این تصویر چند درصد داده‌ها حفظ می‌شود؟

(۲۵ نمره)

۳. فرض کنید  $A$  یک ماتریس  $n \times n$  با درایه‌های حقیقی باشد. ثابت کنید حداقل یک و حداکثر  $n$  عدد  $c$  وجود دارد

که  $A + cI$  وارون‌ناپذیر است.

(۱۰ نمره)

۴. فرض کنید  $A$  یک ماتریس متقارن حقیقی است و  $D$  یک ماتریس قطری حقیقی است که برای هر  $i$  داریم

$|D_{ii}| \leq \epsilon$ . همچنین فرض کنید  $\lambda$  و  $\mu$  به ترتیب بزرگترین مقدار ویژه ماتریس  $A$  و ماتریس  $A + D$  باشد. ثابت کنید

$$|\mu - \lambda| \leq \epsilon.$$

(۱۰ نمره)

راهنمایی: از قضیه کورانت-فیشرا استفاده کنید.

۵. (الف) فرض کنید  $U$  یک ماتریس حقیقی  $n \times n$  یکه باشد یعنی  $U^t U = I$ . ثابت کنید برای هر مقدار ویژه  $\lambda$  از

ماتریس  $U$  داریم  $|\lambda| = 1$ . (توجه کنید که  $\lambda$  ممکن است عدد مختلط باشد).

(ب) بدون استفاده از بسط دترمینان، مقدار دترمینان زیر را بدست آورید (با اثبات).

$$\left| \det \begin{bmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{bmatrix} \right|$$

(۱۵ نمره)

راهنمایی: از الف استفاده کنید.