۱-

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 9 \\ 1 & 4 & 4 & 0 \\ 2 & 6 & 7 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4-2R_1]{R_2-2R_1,\ R_3-R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

جابجایی

$$\xrightarrow{R_3-R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4-R_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

رتبه Q = تعداد ستون اصلی = ۳

پوچی Q = تعداد ستون غیر اصلی = ۱

پایه برای فضای سطری: $\langle (1,2,3,3), (0,2,1,-3), (0,0,0,3) \rangle$

$Ax = 0 \Longrightarrow 3x_4 = 0 \Longrightarrow x_4 = 0$

$R_2: 2x_2 + x_3 - \cancel{3x_4} = 0 \Longrightarrow x_2 = -\frac{x_3}{2}$

$$R_1: \; x_1 + \cancel{2x_2} + 3x_3 + \cancel{3x_4} = 0 \Rightarrow x_1 + 2x_3 = 0$$
$$-x_3$$
$$\Rightarrow x_1 = -2x_3$$

۲۰

$$\Rightarrow \text{Kernel}\,Q \text{ پایه } = \langle (-2, -\tfrac{1}{2}, 1, 0) \rangle$$

۲ـ الف)

$$A_j = [Tv_j]_{B'} \Rightarrow Tv_1 = T1 = \int_0^x 1\,dx = x$$

$$Tv_2 = T(1+x) = \int_0^x 1+x\,dx = x + \tfrac{1}{2}x^2$$

$$Tv_3 = T(1+x+x^2) = \int_0^x 1+x+x^2\,dx = x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3$$

$$\Rightarrow [Tv_1]_{B'} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad [Tv_2]_{B'} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$[Tv_3]_{B'} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = [T]_{B_1,B_2}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ج) رتبه A = تعداد ستون های اصلی = ۳

$\Rightarrow$ پوچی A = تعداد ستون های غیر اصلی = ۰

۱۵

الف) ۳-

$B' = \langle (0,0,1), (1,0,0), (a,b,c) \rangle$

$\forall u \quad u = (x,y,z) \Rightarrow (x,y,z) = \alpha(0,0,1) + \beta(1,0,0) + \theta(a,b,c)$

$\Rightarrow x = \beta + a\theta \Rightarrow \boxed{\beta = x - \frac{ya}{b}}$

$y = \theta b \Rightarrow \boxed{\theta = \frac{y}{b}} \quad b \neq 0$

$z = \alpha + \theta c \Rightarrow \boxed{\alpha = z - \frac{yc}{b}}$

$\Rightarrow B'$ فراگیر است. ①

$\alpha(0,0,1) + \beta(1,0,0) + \theta(a,b,c) = 0$

$\left.\begin{array}{l} \beta + \theta a = 0 \Rightarrow \beta = 0 \\ \theta b = 0 \xRightarrow{b \neq 0} \theta = 0 \\ \alpha + \theta c = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ B' مستقل خطی است ②

①,② $\Rightarrow$ B' یک پایه برای $\mathbb{R}^3$

۵ ✓

ب) تبدیل B به B' : بردار قدیمی را برحسب بردار جدید می‌نویسیم :

$$B' = \langle (0,0,1), (1,0,0), (a,b,c) \rangle$$

$$B = \langle (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1) \rangle$$

$$(1,0,0) = (1,0,0)$$

$$(0,1,0) = \frac{1}{b}(a,b,c) - \frac{a}{b}(1,0,0) - \frac{c}{b}(0,0,1)$$

$$(0,0,1) = (0,0,1)$$

$$\Rightarrow P = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{c}{b} & 1 \\ 1 & -\frac{a}{b} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} & 0 \end{pmatrix}$$

تبدیل B' به B : بردار جدید را برحسب بردار قدیمی می‌نویسیم :

$$\left.\begin{array}{l} (0,0,1) = (0,0,1) \\ (1,0,0) = (1,0,0) \\ (a,b,c) = a(1,0,0) + b(0,1,0) + c(0,0,1) \end{array}\right\} \Rightarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & b \\ 1 & 0 & c \end{pmatrix}$$

ج) ابتدا باید نقطه را از فضای تولید شده توسط B ببریم به فضای تولید شده توسط B' سپس توسط ماتریس دوران حول محور z محل آن را بر اساس B' پیدا کنیم و سپس به فضای B برگردیم.

$$\Rightarrow [T]_B = P^{-1} R P$$

چون که ماتریس ها از چپ ضرب می شوند ابتدا در P ضرب می شوند که به فضای B' بروند و سپس ماتریس دوران و سپس P^{-1} که دوباره به فضای B برگردند.

$$\Rightarrow [T]_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & b \\ 1 & 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

15

$$\times \begin{pmatrix} 0 & -\frac{c}{b} & 1 \\ 1 & -\frac{a}{b} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} & 0 \end{pmatrix}$$

۴-

$$v_1 = 1 \Rightarrow u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{\int_{-1}^{1} 1\,dx}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$w_2 = v_2 - \operatorname{proj}_{u_1}^{v_2} = x - \left\langle x, \frac{\sqrt{2}}{2} \right\rangle \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= x - \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{2}}{2} x\,dx = x - \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} x\,dx$$

$$= x - \frac{1}{2} \, \frac{1}{2} x^2 \Big|_{-1}^{1}$$

$$= x - \frac{1}{4}(1-1) = x$$

$$\Rightarrow u_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|} = \frac{x}{\sqrt{\int_{-1}^{1} x^2\,dx}} = \frac{x}{\sqrt{\frac{2}{3}}} = \boxed{\sqrt{\frac{3}{2}}\, x}$$

$$w_3 = v_3 - \operatorname{proj}_{\langle u_1, u_2 \rangle}^{v_3} = x^2 - \left\langle x^2, \frac{\sqrt{2}}{2} \right\rangle \frac{\sqrt{2}}{2} - \left\langle x^2, \frac{\sqrt{3}}{2} x \right\rangle \frac{\sqrt{3}}{2} x$$

$$= x^2 - \frac{1}{2} \underbrace{\cancel{\int_{-1}^{1} x^2\,dx}}_{\frac{2}{3}} - \frac{3}{4} x \underbrace{\cancel{\int_{-1}^{1} x^3\,dx}}_{0}$$

$$= x^2 - \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow u_3 = \frac{w_3}{\|w_3\|} = \frac{x^2 - \frac{1}{3}}{\sqrt{\int_{-1}^{1} (x^2 - \frac{1}{3})^2 dx}} = \frac{x^2 - \frac{1}{3}}{\sqrt{\underbrace{\int_{-1}^{1} x^4 - \frac{2x^2}{3} + \frac{1}{9} dx}_{\frac{8}{45}}}}$$

15

$$= \sqrt{\frac{45}{8}} \left(x^2 - \frac{1}{3}\right)$$

$$\Rightarrow B = \left\langle \frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{\frac{3}{2}}\, x, \sqrt{\frac{45}{8}} \left(x^2 - \frac{1}{3}\right) \right\rangle$$

ه-

$$\underset{W_1}{\underset{\in}{V = v_1}} + \underset{W_2}{\underset{\in}{v_2}} \Rightarrow P = \mathrm{Proj}^{V}_{W_1, W_2} = v_1$$

(1)

$R(P) = W_1$

$$x \in R(P) \Rightarrow x \in W_1$$

بدیهی چون برد تبدیل P زیرمجموعه W_1 است .

---

(2)

$$x \in W_1 \Rightarrow \mathrm{Proj}^{x}_{W_1, W_2} = x \Rightarrow x \in R(P)$$

$$(1),(2) \Rightarrow \boxed{R(P) = W_1}$$

$N(I-P) = W_1$

$m \in N(I-P)$ ۱

$\Longrightarrow (I-P)m = 0 \Longrightarrow Im = Pm \Longrightarrow m = \underbrace{Pm}_{\in W_1}$

$\Longrightarrow m \in W_1$

۲

$m \in W_1 \Longrightarrow Pm = m \Longrightarrow m - Pm = 0 \Rightarrow (I-P)m = 0$

$\Longleftarrow m \in N(I-P)$

$\overset{1,2}{\Longrightarrow} N(I-P) = W_1$

$m \in R(I-P)$ ۱

$(I-P)m = m - \underbrace{Pm}_{\in W_1} \Longrightarrow m - Pm \in W_2$

چون از m تمام قسمت های w_1 را حذف کرده $\Leftarrow$ چون w_1 و w_2 مکمل هستند

باقی مانده عضو w_2 است.

$m \in W_2 \Longrightarrow Pm = 0 \Longrightarrow m = m - \overset{\text{صفر}}{Pm} = (I-P)m$ ۲

$\Longrightarrow m \in R(I-P)$

$\overset{1,2}{\Longrightarrow} m \in R(I-P)$

۲۵

$N(P) = W_2$

$\Longrightarrow \quad x \in N(P) \Longrightarrow Px = 0 \Longrightarrow x \in W_2$ (1)

$x \in W_2 \Longrightarrow P(x) = 0 \Longrightarrow x \in N(P)$ (2)

$\overset{(1),(2)}{\Longrightarrow} N(P) = W_2$