دانشگاه صنعتی اصفهان
جبرخطی کاربردی (نیمسال دوم ۱۳۹۹)

تکلیف سری دوم

مریم سعیدمهر
شماره دانشجویی : ۹۶۲۹۳۷۳

فهرست مطالب

۱ سوال اول

۱.۱ a

برای پیدا کردن پایه متعامد از الگوریتم گرام-اشمیت کمک میگیریم :

$$w_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad w_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} u_1 = \frac{w_1}{||w_1||} = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T}{\sqrt{4}} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} \\ u_2 = \frac{w_2 - <w_2, u_1> u_1}{||w_2 - <w_2, u_1> u_1||} = \frac{\begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 & -2 \end{bmatrix}^T}{\sqrt{16}} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ -0.5 \\ -0.5 \end{bmatrix} \end{cases}$$

پس به این ترتیب $\{u_1, u_2\}$ یک پایه یکه متعامد برای $W = span\{w_1, w_2\}$ است.

۲.۱ b

$$\begin{aligned} proj_W^y &= \langle y, u_1 \rangle u_1 + \langle y, u_2 \rangle u_2 \\ &= (0.5 \times 6 + 0.5 \times 2) \times \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} + (0.5 \times 6 - 0.5 \times 2) \times \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ -0.5 \\ -0.5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{a} = proj_W^y = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in W \\ \vec{b} = y - proj_W^y = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \in W^{\perp} \end{array}\right\} \Longrightarrow \vec{y} = \vec{a} + \vec{b}$$

۲ سوال دوم

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Longrightarrow \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle = 0 \tag{۱}$$

$$\begin{aligned} \vec{u} + \vec{v} \perp \vec{u} - \vec{v} &\Longrightarrow \langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{u} - \vec{v} \rangle = 0 \\ &\Longrightarrow \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle - \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle - \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = 0 \\ &\Longrightarrow \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle - \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = 0 \qquad \because Equation\ 1 \\ &\Longrightarrow ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2 = 0 \\ &\Longrightarrow ||\vec{u}||^2 = ||\vec{v}||^2 \\ &\Longrightarrow ||\vec{u}|| = ||\vec{v}|| \qquad \because \forall \vec{a} \quad ||\vec{a}|| \geq 0 \end{aligned}$$

۳ سوال سوم

$$W=\{f(x)\subset\mathbb{R}_2[x]\,|\,f(0)=0\}\implies Basis=\{x^2,x\}$$

اعضای مجموعه Basis مستقل هستند $(\alpha x^2+\beta x=0\implies\alpha=\beta=0\quad\therefore\ linear\ independent)$ ولی متعامد نیستند $(\langle x,x^2\rangle=\int_0^1x^3dx=\frac{1}{4}\neq 0)$ پس با الگوریتم گرام-اشمیت از Basis یک پایه متعامد یکه (orthonormal) میسازیم :

$$\left.\begin{aligned}u_1&=\tfrac{x}{\|x\|}=\tfrac{x}{\sqrt{\langle x,x\rangle}}=\tfrac{x}{\sqrt{\int_0^1x^2dx}}=\tfrac{x}{\sqrt{\frac{1}{3}}}=\sqrt{3}x\\u_2&=\tfrac{x^2-\langle x^2,\sqrt{3}x\rangle\sqrt{3}x}{\|x^2-\langle x^2,\sqrt{3}x\rangle\sqrt{3}x\|}=\tfrac{x^2-\sqrt{3}x\int_0^1\sqrt{3}x^3}{\|x^2-\sqrt{3}x\int_0^1\sqrt{3}x^3\|}=\tfrac{x^2-\sqrt{3}x\frac{\sqrt{3}}{4}}{\|x^2-\sqrt{3}x\frac{\sqrt{3}}{4}\|}=\tfrac{x^2-\frac{3}{4}x}{\sqrt{\langle x^2-\frac{3}{4}x,x^2-\frac{3}{4}x\rangle}}\\&=\tfrac{x^2-\frac{3}{4}x}{\sqrt{\int_0^1(x^2-\frac{3}{4}x)(x^2-\frac{3}{4}x)dx}}=\tfrac{x^2-\frac{3}{4}x}{\sqrt{\frac{1}{80}}}=\sqrt{80}\left(x^2-\tfrac{3}{4}x\right)=4\sqrt{5}\left(x^2-\tfrac{3}{4}x\right)\end{aligned}\right\}$$

در نتیجه مجموعه $B=\{u_1,u_2\}$ یک orthonormal برای W هست.
حال باید تصویر متعامد چندجمله ای $x+2$ را بر زیرفضای W با مجموعه پایه یکه متعامد B بیابیم. برای این منظور داریم :

$$\begin{aligned}proj_W^{x+2}=&\ \langle x+2,u_1\rangle u_1 &&+\ \langle x+2,u_2\rangle u_2\\=&\ \langle x+2,\sqrt{3}x\rangle\sqrt{3}x &&+\ \langle x+2,4\sqrt{5}\left(x^2-\frac{3}{4}x\right)\rangle 4\sqrt{5}\left(x^2-\frac{3}{4}x\right)\\=&\ \sqrt{3}x\int_0^1(x+2)\sqrt{3}x\,dx &&+\ 4\sqrt{5}\left(x^2-\frac{3}{4}x\right)\int_0^1(x+2)\left(4\sqrt{5}\left(x^2-\frac{3}{4}x\right)\right)dx\\=&\ \sqrt{3}x\int_0^1\left(\sqrt{3}x^2+2\sqrt{3}x\right)dx &&+\ 4\sqrt{5}\left(x^2-\frac{3}{4}x\right)\int_0^1\left(4\sqrt{5}x^3+5\sqrt{5}x^2-6\sqrt{5}x\right)dx\\=&\ \sqrt{3}x\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right) &&+\ 4\sqrt{5}\left(x^2-\frac{3}{4}x\right)\left(\frac{-\sqrt{5}}{3}\right)\\=&\ 4x &&+\ \left(\frac{-20}{3}x^2+5x\right)\\=&\ \frac{-20}{3}x^2+9x\quad\blacksquare\end{aligned}$$

۴ سوال چهارم

a ۱.۴

یک عملگر ضرب داخلی روی فضای برداری V به این شکل تعریف میشود :

1. $\langle x,x\rangle\in\mathbb{R},\langle x,x\rangle\geq 0,\langle x,x\rangle=0\iff x=0$
2. $\langle x,y+z\rangle=\langle x,y\rangle+\langle x,z\rangle$
3. $\langle x,\gamma y\rangle=\gamma\langle x,y\rangle$
4. $\langle x,y\rangle=\langle x,y\rangle\qquad\because V\in\mathbb{R}^3$

پس به این ترتیب میبایست برقرار بودن تمام ۴ مورد فوق را چک کنیم :

$$\langle(a,b,c),(d,e,f)\rangle=\begin{bmatrix}a&b&c\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1&0\\1&2&1\\0&1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}d\\e\\f\end{bmatrix}\tag{۲}$$

$$=\begin{bmatrix}2a+b&a+2b+c&b+2c\end{bmatrix}\begin{bmatrix}d\\e\\f\end{bmatrix}\tag{۳}$$

$$=(2a+b)d+(a+2b+c)e+(b+2c)f$$

۱. بررسی $x = 0 \iff \langle x,x\rangle \in \mathbb{R}, \langle x,x\rangle \geq 0, \langle x,x\rangle = 0$:

$$\langle (a,b,c),(a,b,c)\rangle = 2a^2+ab+ab+2b^2+bc+bc+2c^2 = a^2+b^2+c^2+(a+b)^2+(b+c)^2 \geq 0$$
$$a^2+b^2+c^2+(a+b)^2+(b+c)^2=0 \iff a=b=c=0 \quad \checkmark$$

۲. بررسی $\langle x,y+z\rangle = \langle x,y\rangle + \langle x,z\rangle$:

$$\begin{aligned}\langle (a,b,c),\left(d+x,e+y,f+z\right)\rangle &= (2a+b)(d+x)+(a+2b+c)\left(e+y\right)+(b+2c)\left(f+z\right) \because \ Equation\ 3\\ &= (2a+b)\,d+(a+2b+c)\,e+(b+2c)\,f\\ &\quad +(2a+b)\,x+(a+2b+c)\,y+(b+2c)\,z\\ &= \langle (a,b,c),\left(d,e,f\right)\rangle + \langle (a,b,c),\left(x,y,z\right)\rangle \quad \checkmark\end{aligned}$$

۳. بررسی $\langle x,\gamma y\rangle = \gamma\langle x,y\rangle$:

$$\begin{aligned}\langle (a,b,c),\left(\gamma d,\gamma e,\gamma f\right)\rangle &= (2a+b)\,\gamma d+(a+2b+c)\,\gamma e+(b+2c)\,\gamma f \quad \because \ Equation\ 3\\ &= \gamma\Big((2a+b)\,d+(a+2b+c)\,e+(b+2c)\,f\Big)\\ &= \gamma\langle (a,b,c),\left(d,e,f\right)\rangle \quad \checkmark\end{aligned}$$

۴. بررسی $\because V \in \mathbb{R}^3 \qquad \langle x,y\rangle = \langle x,y\rangle$:

$$\begin{aligned}\langle (a,b,c),\left(d,e,f\right)\rangle &= (2a+b)\,d+(a+2b+c)\,e+(b+2c)\,f\\ &= 2ad+ea+db+2eb+fb+ec+2fc\\ &= (2d+e)\,a+\left(d+2e+f\right)b+\left(e+2f\right)c\\ &= \langle \left(d,e,f\right),(a,b,c)\rangle \quad \checkmark\end{aligned}$$

طبق قسمت ۱.۴ ثابت شد که رابطه ۲ نوعی ضرب داخلی است . ■

۲.۴ b

$$\left.\begin{aligned}&\vec{a} = (1,0,0)\\ &W = span\{u_1 = (0,1,0)\,,u_2 = (0,0,1)\}\end{aligned}\right\} \implies proj_W^a = \langle a,u_1\rangle u_1 + \langle a,u_2\rangle u_2$$

$$\begin{aligned}proj_W^a &= \Big((2\times 1+0)\times 0+(1+2\times 0+0)\times 1+(0+2\times 0)\times 0\Big)(0,1,0) \quad \because \ Equation\ 3,\ 2\\ &\quad +\Big((2\times 1+0)\times 0+(1+2\times 0+0)\times 0+(0+2\times 0)\times 1\Big)(0,0,1) \quad \because \ Equation\ 3,\ 2\\ &= 1\times \vec{u}_1 + 0\times \vec{u}_2\\ &= \vec{u}_1 = (0,1,0)\end{aligned}$$

۵ سوال پنجم

- مدل اول :

$$X = \begin{bmatrix} 1 & -5\\ 1 & -4\\ \vdots & \vdots\\ 1 & 5\end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 2\\ 7\\ \vdots\\ 4\end{bmatrix}$$

ابتدا X^TY و X^TX را باید محاسبه کنیم :

$$X^TX = \begin{bmatrix} 11 & 0\\ 0 & 110\end{bmatrix}, \quad X^TY = \begin{bmatrix} 106\\ 20\end{bmatrix}$$

حال جواب مسئله کمترین مربعات به صورت $\left(X^TX\right)^{-1}X^TY$ میباشد :

$$\Longrightarrow \left(X^TX\right)^{-1}X^TY = \begin{bmatrix} 9.63 \\ 0.18 \end{bmatrix} \Longrightarrow Y = 9.63 + 0.18X$$

- مدل دوم :

$$X = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 25 \\ 1 & -4 & 16 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 5 & 25 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ \vdots \\ 4 \end{bmatrix}$$

ابتدا X^TY و X^TX را باید محاسبه کنیم :

$$X^TX = \begin{bmatrix} 11 & 0 & 110 \\ 0 & 110 & 0 \\ 110 & 0 & 1958 \end{bmatrix}, \quad X^TY = \begin{bmatrix} 106 \\ 20 \\ 688 \end{bmatrix}$$

حال جواب مسئله کمترین مربعات به صورت $\left(X^TX\right)^{-1}X^TY$ میباشد :

$$\Longrightarrow \left(X^TX\right)^{-1}X^TY = \begin{bmatrix} 13.97 \\ 0.18 \\ -0.4336 \end{bmatrix} \Longrightarrow Y = 13.97 + 0.18X - 0.4336X^2$$

حال برای مقایسه مدل ها جدول زیر را رسم میکنیم :

	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
Y	2	7	9	12	13	14	14	13	10	8	9
θ_1	8.73	8.91	9.09	9.27	9.45	9.63	9.81	9.99	10.17	10.35	10.53
θ_2	2.23	6.3124	9.5276	11.8756	13.3564	13.97	13.7164	12.5956	10.6076	7.7524	4.03

با مقایسه نتایج به دست آمده کاملاً واضح است که مدل دوم مدل بهتری است و بیشتر به داده ها منطبق است و با محاسبه ی مقدار MSE نیز میتوان به همین نتیجه رسید.

۶ سوال ششم

۱.۶ a

یک عملگر ضرب داخلی روی فضای برداری S^3 به این شکل تعریف میشود :

1. $\langle x,x\rangle \in \mathbb{R}, \langle x,x\rangle \geq 0, \langle x,x\rangle = 0 \iff x=0$
2. $\langle x,y+z\rangle = \langle x,y\rangle + \langle x,z\rangle$
3. $\langle x,\gamma y\rangle = \gamma\langle x,y\rangle$
4. $\langle x,y\rangle = \langle x,y\rangle \qquad \because V \in \mathbb{R}^3$

پس به این ترتیب میبایست برقرار بودن تمام ۴ مورد فوق را چک کنیم :

۱. بررسی $\langle x,x\rangle \in \mathbb{R}, \langle x,x\rangle \geq 0, \langle x,x\rangle = 0 \iff x=0$:

$$\begin{aligned}\langle S,S\rangle &= tr\,(SS) \\ &= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} s_{ji}s_{ij} \qquad \because S\ \ is\ \ a\ \ symmetric\ \ matrice \\ &= \sum_{i,j}^{3} s_{ji}^2 \geq 0, \quad \langle S,S\rangle = 0 \iff S=0 \quad \checkmark\end{aligned}$$

۲. بررسی $\langle x, y+z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$:

$$\begin{aligned}\langle S, T+M\rangle &= tr\,(S\,(T+M))\\ &= tr\,(ST+SM)\\ &= tr\,(ST)+tr\,(SM)\\ &= \langle S, T\rangle + \langle S, M\rangle \quad \checkmark\end{aligned}$$

۳. بررسی $\langle x, \gamma y\rangle = \gamma\langle x, y\rangle$:

$$\begin{aligned}\langle S, \gamma T\rangle &= tr\left(S\left(\gamma T\right)\right)\\ &= tr\left(\gamma\,(ST)\right)\\ &= \gamma\, tr\,(ST)\\ &= \gamma\langle S, T\rangle \quad \checkmark\end{aligned}$$

۴. بررسی $\because V \in \mathbb{R}^3 \qquad \langle x, y\rangle = \langle x, y\rangle$:

$$\begin{aligned}\langle S, T\rangle &= tr\,(ST)\\ &= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} S_{ij}T_{ij}\\ &= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} T_{ij}S_{ij} \quad \because S,\ T\ \ are\ \ symmetric\ \ matrices\\ &= \langle T, S\rangle \quad \checkmark\end{aligned}$$

طبق قسمت ۱.۶ ثابت شد که رابطه $\langle S, T\rangle = tr\,(ST)$ نوعی ضرب داخلی است . ■

۲.۶ b

$$S_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}, S_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1\\ 0 & -3 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix} \implies \langle S_1, S_2\rangle = tr\,(S_1S_2) = tr\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1\\ 0 & -3 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix} = 0 \implies S_1 \perp S_2$$

حال باید یک ماتریس پیدا کنیم که نسبت به S_1 و S_2 مستقل خطی باشد.

مثلاً به صورت رندوم ، ماتریس $S_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ را انتخاب میکنم و بررسی میکنم نسبت به S_1 و S_2 مستقل خطی باشد :

$$\begin{aligned}&\alpha S_1 + \beta S_2 + \gamma S_3 = 0\\ &\implies \alpha\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1\\ 0 & -3 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix} + \gamma\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} = 0\\ &\left.\begin{aligned}&\alpha+\beta+\gamma = 0\\ &\gamma = 0\\ &\alpha+\beta = 0\\ &\alpha - 3\beta + \gamma = 0\end{aligned}\right\} \implies \alpha = \beta = \gamma = 0\\ &\implies \{S_1, S_2, S_3\}\ \ are\ \ linearly\ \ independent\end{aligned}$$

اما متاسفانه S_3 به S_1 و S_2 عمود نیست :

$$\left.\begin{aligned}\langle S_3, S_1\rangle &= tr\begin{bmatrix} 1 & * & *\\ * & 1 & *\\ * & * & 0\end{bmatrix} = 2\\ \langle S_3, S_2\rangle &= tr\begin{bmatrix} 1 & * & *\\ * & -3 & *\\ * & * & 0\end{bmatrix} = -2\end{aligned}\right\} \implies \begin{aligned}S_3 \not\perp S_1\\ S_3 \not\perp S_2\end{aligned}$$

حالا با استفاده از الگوریتم گرام-اشمیت این مشکل را رفع میکنیم :

$$\begin{aligned}
\hat{S_3} &= S_3 - \frac{\langle S_3, S_1\rangle}{\langle S_1, S_1\rangle} S_1 - \frac{\langle S_3, S_2\rangle}{\langle S_2, S_2\rangle} S_2 \\
&= S_3 - \frac{2}{4} S_1 - \frac{-2}{12} S_2 \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 1 & \frac{-1}{3} \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{3} & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

پس به این ترتیب ، مطلوب این قسمت از سوال : $\hat{S_3} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 1 & \frac{-1}{3} \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{3} & 0 & 0 \end{bmatrix}$ است.

۳.۶ c

متناسب با قسمت قبل ، مجموعه‌ی $S_1, S_2, \hat{S_3}$ یک پایه متعامد برای S^3 هست و برای یافتن orthonormal basis برای این فضا کافیست این سه بردار را به بردارهایی یکه تبدیل کنیم یعنی :

$$\begin{aligned}
&orthonormal \;\; basis = \left\{ \frac{S_1}{\langle S_1, S_1\rangle}, \frac{S_2}{\langle S_2, S_2\rangle}, \frac{\hat{S_3}}{\langle \hat{S_3}, \hat{S_3}\rangle} \right\} \\
\implies \;\; &orthonormal \;\; basis = \left\{ \frac{1}{2} S_1, \frac{1}{2\sqrt{3}} S_2, \frac{2\sqrt{5}}{3} \hat{S_3} \right\} \quad \checkmark
\end{aligned}$$

۴.۶ d

$$\begin{aligned}
proj^{T}_{\langle S_1, S_2\rangle} &= \frac{\langle T, S_1\rangle}{\langle S_1, S_1\rangle} S_1 + \frac{\langle T, S_2\rangle}{\langle S_2, S_2\rangle} S_2 \\
&= \left(\frac{1}{2} tr T S_1 \right) S_1 + \left(\frac{1}{2\sqrt{3}} tr T S_2 \right) S_2 \\
&= \left(\frac{1}{2} 4 \right) S_1 + \left(\frac{1}{2\sqrt{3}} 0 \right) S_2 \\
&= 2 S_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$