مریم سعیدمهر ۹۶۲۹۳۷۴ "هوالعلیم" تکلیف سری دوم سیگنال‌ها و سیستم‌ها

۱- درستی یا نادرستی با استدلال یا مثال نقض:

(a) رابطه‌ی $h_\tau(t)=h(t-\tau)$ در یک سیستم LTI تقریبی است. تقریبی نیست!
این یک نوتیشن خلاصه تر می‌باشد. (طبق بخش 2.1.2 کتاب):
$h[n]=h_0[n] \Rightarrow h_k[n]=h_0[n-k]$

(b) در سیستم وارون‌پذیر، خروجی‌های متناظر با دو ورودی متمایز در هیچ لحظه‌ی زمانی برابر نیستند. نادرست است:
مثال نقض:

$y(t)=2x(t)$

$$\begin{cases} x_1(t)=u(t) \\ x_2(t)\equiv 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} y_1(t)=2u(t) \\ y_2(t)=2 \end{cases} \longrightarrow$$ در $t>0$ خروجی‌ها با هم برابرند

(c) سیگنال خروجی یک سیستم LTI (پایدار) با ورودی سیگنال متناوب، متناوب است. درست است:

$x(t) \longrightarrow \boxed{LTI} \longrightarrow y(t)$

$x(t+T) \longrightarrow \boxed{LTI} \longrightarrow y(t+T)$

مطابق اشکال روبه‌رو، چون سیستم TI است پس خروجی سیستم برای ورودی $x(t+T)$ برابر با $y(t+T)$ است. اگر T همان دوره‌ی تناوب سیگنال ورودی باشد پس $x(t+T)=x(t)$ در نتیجه خروجی‌هم باید $y(t+T)=y(t)$ پس سیگنال خروجی متناوب است.

(d) $x(t)$ یک سیگنال متناوب با فرکانس اصلی $\omega_0>0$ ورودی یک سیستم LTI (پایدار) با پاسخ ضربه $h(t)$ است. اگر فرکانس اصلی $y(t)$، خروجی سیستم، را $\omega_0'>0$ بنامیم، رابطه‌ی $\omega_0<\omega_0'$ را می‌توان با انتخاب مناسب $h(t)$ برقرار کرد.
نادرست است:

اگر ω_0 فرکانس اصلی باشد ← T_0 هم دوره تناوب اصلی سیگنال است. داریم:

$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$

$x(t+T_0) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t+T_0)$

سیستم TI است

از آنجایی که $x(t+T_0)=x(t)$ پس $y(t+T_0)=y(t) \Longrightarrow$
در نتیجه $y(t)$ متناوب با دوره‌ی تناوب اصلی T_0 و فرکانس ω_0 است.

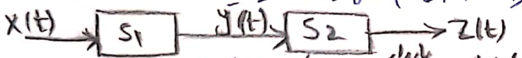
(e) سیستم LTI با پاسخ ضربه $h[n]$ متناوب، ناپایدار است. درست است:
شرط لازم و کافی برای پایداری یک سیستم LTI این است که پاسخ ضربه‌ی آن مطلقاً جمع (انتگرال) پذیر باشد.
هرچند که پاسخ ضربه‌ی $h[n]$ متناوب، در یک پریود مطلقاً جمع‌پذیر است ولی در $(-\infty,+\infty)$ نامحدود است.
پس سیستم ناپایدار می‌باشد.

Scanned by CamScanner

(f) اگر سیستم LTI زمان گسسته با پاسخ ضربه‌ی $h_1[n]$ پایدار باشد، سیستم دارای پاسخ ضربه‌ی $h_2[n] = 2^n h_1[n]$ الزاما پایدار است. نادرست است:

شرط پایداری، مطلقاً جمع (انتگرال) پذیری پاسخ ضربه است، در حالی که $\sum_{K=-\infty}^{+\infty} |2^n h_1[n]| = \infty$ پس سیستم پایدار نیست.

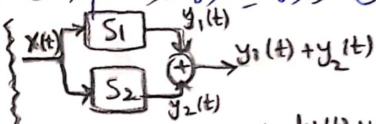
(g) سیستم معادل بر هم بستن موازی یا سری دو سیستم زمان پیوسته پایدار (نه الزاما LTI) می‌تواند ناپایدار باشد. نادرست است:



$S_1: \quad |x(t)| < M \quad \forall t \xrightarrow{\text{پایدار}} |y(t)| < M' \quad \forall t$

$S_2: \quad |y(t)| < M' \quad \forall t \xrightarrow{\text{پایدار}} |z(t)| < M'' \quad \forall t$

$\Longrightarrow$ کل سیستم پایدار است.



$|x(t)| < M \quad \forall t \Rightarrow |y_1(t)| < M' \quad \forall t$

$|x(t)| < M \quad \forall t \Rightarrow |y_2(t)| < M' \quad \forall t$

$\Longrightarrow |y_1(t) + y_2(t)| \leq |y_1(t)| + |y_2(t)| \leq M + M'$

(h) انرژی پاسخ ضربه‌ی یک سیستم زمان گسسته پایدار محدود است. درست است:

پایدار : $\sum_{K=-\infty}^{+\infty} |h[K]| < \infty \rightsquigarrow \sum_{K=-\infty}^{+\infty} |h[n]| = M$

$$E_h = \sum_{K=-\infty}^{+\infty} |h[n]|^2 < \left(\sum_{K=-\infty}^{+\infty} |h[n]| \right)^2 = (M)^2 < \infty$$

$x[n] = A \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$

$h[n] = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right] u[n]$

$y[1] = -4$

$A = ?$

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

$$= A\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) * \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right] u[n]$$

$$= \sum_{K=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^K \cos\left(\frac{K\pi}{2}\right) u(K) \cdot A\sin\left(\frac{n-K}{2}\pi\right)$$

$$= \sum_{K=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^K \cos\left(\frac{K\pi}{2}\right) . A\sin\left(\frac{n-K}{2}\pi\right)$$

$$\Rightarrow y[1] = \sum_{K=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^K \cos\left(\frac{K\pi}{2}\right) A \sin\left(\frac{1-K}{2}\pi\right)$$

$$= A \sum_{K=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^K \left[\frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{K\pi}{2} + \frac{(1-K)\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{K\pi}{2} - \frac{(1-K)\pi}{2}\right)\right)\right]$$

$$= A \sum_{K=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{K+1} \left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - (-1)^K \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$= A \sum_{K=0}^{+\infty} \left(\frac{-1}{2}\right)^{K+1} = \frac{A}{2} \sum_{K=0}^{+\infty} \left(\frac{-1}{2}\right)^K = \frac{A}{2} \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{A}{3} = -4$$

$$\Rightarrow \boxed{A = -12}$$

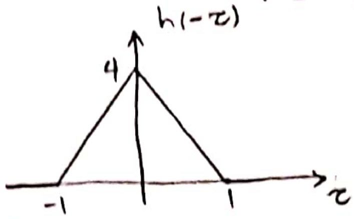
3. سیستم LTI

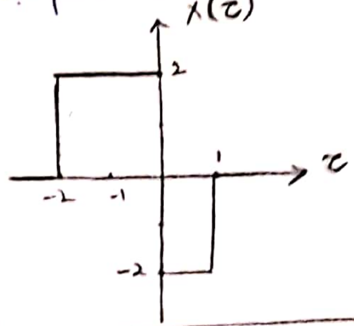
$$h(t) = \begin{cases} 4(1-|t|) & |t| \leq 1 \\ 0 & \text{other} \end{cases}$$

$$x(t) = \begin{cases} 2 & -2 \leq t \leq 0 \\ -2 & 0 < t \leq 1 \\ 0 & \text{other} \end{cases}$$

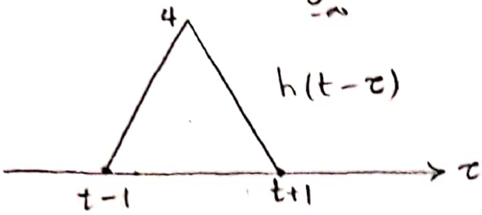
الف) بدون محاسبه ی انتگرال کانولوشن:

1- $y(t)$ در کدام بازه‌ها صفر است؟





$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau$$



$$\rightarrow \begin{cases} t+1 < -2 \rightarrow t < -3 \\ t-1 > 1 \rightarrow t > 2 \end{cases} \rightarrow \boxed{(-\infty, -3) \cup (2, +\infty)}$$

که در این بازه $y(t)$ برابر صفر می‌شود.

2- $y(t)$ در کدام بازه‌ها بیشینه است؟

$$t+1 = 0 \rightarrow \boxed{t = -1} \rightarrow y(-1) = \frac{1}{2} \times 2 \times (2 \times 4) = 8$$

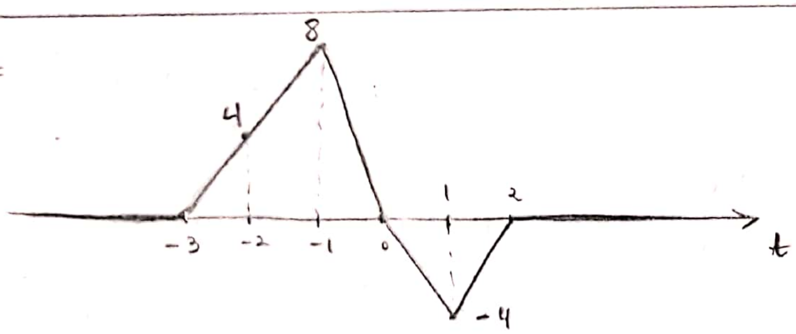
$y(t)$ بیشینه در لحظه‌ی $t=-1$ رخ می‌دهد و مقدار بیشینه هم برابر با 8 است.

ب) محاسبه‌ی کامل انتگرال کانولوشن:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) x(t-\tau) d\tau$$

$$= \int_{-1}^{1} 4(1-|\tau|) x(t-\tau) d\tau = \int_{-1}^{0} 4(1+\tau) x(t-\tau) d\tau + \int_{0}^{1} 4(1-\tau) x(t-\tau) d\tau$$

$y(t) =$

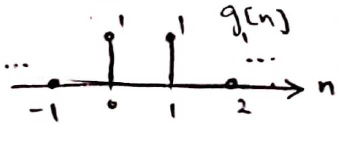


$S_1 \Rightarrow \quad y[n] = \{x[n] + x[n-1]\}^2$

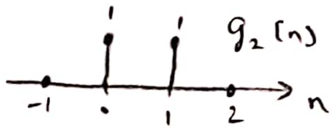
$S_2 \Rightarrow \quad y[n] = \mathrm{Max}\{x[n], x[n-1]\}$

۴. الف) پاسخ ضربه‌ی S_1 و S_2؟

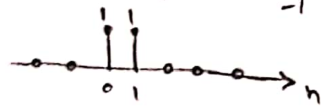
$$g_1[n] = \{\delta[n] + \delta[n-1]\}^2 =$$



$$g_2[n] = \mathrm{Max}\{\delta[n], \delta[n-1]\} =$$

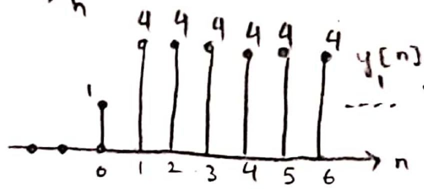


$$\Rightarrow g_1[n] = g_2[n] =$$

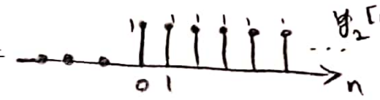


ب) اگر $x[n]=u[n]$ ← خروجی؟

$$y_1[n] = \{u[n] + u[n-1]\}^2 =$$



$$y_2[n] = \mathrm{Max}\{u[n], u[n-1]\} = u[n] =$$

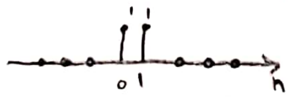


$y_2[n] = u[n]$

ج) سیستم‌ها را با توجه به بند (الف) توجیه کنید.

هدف این سوال این است که بگویند اگر پاسخ ضربه‌ی یک سیستم را داشته باشیم، چنانچه آن سیستم LTI باشد، می‌توان از روی پاسخ ضربه، سیستم مربوطه را به صورت یکتا به دست بیاوریم ولی اگر LTI نباشد، هزاران سیستم با همان پاسخ ضربه می‌توان به دست آورد.

پس برای این پاسخ ضربه



تنها یک سیستم LTI یکتا وجود دارد و هزاران سیستم غیر LTI متفاوت را (که دو نمونه از این هزاران سیستم غیر LTI متناظر با این پاسخ ضربه در قسمت (ب) معرفی شوند.)

.5

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\,h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]\,x[n-k]$$

شرط کافی برقراری $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]| \le 1$ است. در آن صورت برای هر ورودی $x[n]$ با $|x[n]| = C$ داریم:

$$|y[n]| \le \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]|\,|x[n-k]| \le C \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]| \underset{\text{اگر } \sum_{k=-\infty}^{+\infty}|h[k]| \le 1}{\le} C \Longrightarrow |y[n]_{max}| \le |x[n]_{max}|$$

شرط $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]| \le 1$ ، شرط لازم نیز است؛ زیرا اگر فرض کنیم $x[n] \equiv C > 0$ و در نتیجه $|x[n]_{max}| = C$ انتخاب شود به طوری که علامت $x[n]$ و علامت $h[n]$ در هر n یکسان باشد، آنگاه

$$|y[0]| = \left| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]\,|C| \right| = C \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]| \underset{\text{اگر } \sum_{k=-\infty}^{+\infty}|h[k]| > 1}{>} C \Longrightarrow |y[n]_{max}| > |x[n]_{max}| \quad \times$$

تناقض

در نتیجه شرط $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]| < 1$ شرط لازم و کافی است.

6. سیستم زمان گسسته ی LTI و پایدار

الف) $x[n] \equiv 1$ و پاسخ ضربه $h[n]$ ؛ مفروضه.

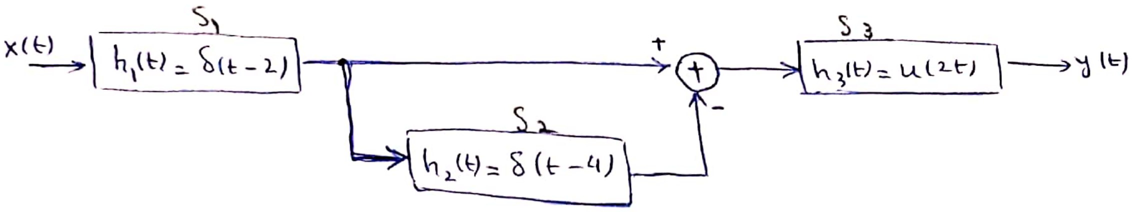
$$y[n] = h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k] \, \overset{1}{\cancel{x[n-k]}}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k] \longrightarrow \boxed{y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]}$$

? ب) $x(t)$ متناوب با پریود T و بخواهیم $y(t)$ تنها مولفه ی DC سیگنال ورودی باشد، $h(t)$ را بیابید. یکتاست؟

اصلاً صورت سوالو نمی فهمم :(

۷.



پاسخ ضربه معادل :

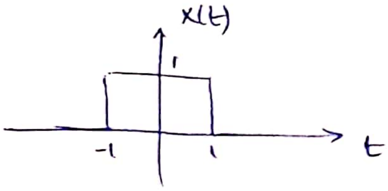
$x(t) \equiv \delta(t) \Longrightarrow y_1(t) = \delta(t) * \delta(t-2) = \delta(t-2)$

$y_2(t) = \delta(t-2) * \delta(t-4) = \delta(t-6)$

$y_3(t) = (\delta(t-2) - \delta(t-6)) * u(2t) = \delta(t-2) * u(2t) - \delta(t-6) * u(2t)$

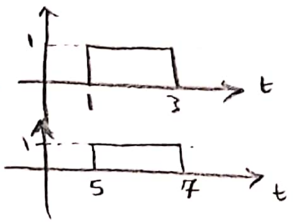
$= u(2(t-2)) - u(2(t-6))$

ب) خروجی را برای سیگنال ورودی زیر رسم کنید.

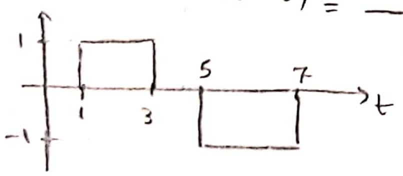


$y_1(t) = x(t) * \delta(t-2) = x(t-2) =$

$y_2(t) = x(t-2) * \delta(t-4) = x(t-6) =$

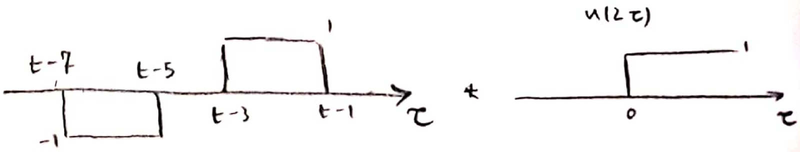


$y_1(t) - y_2(t) =$

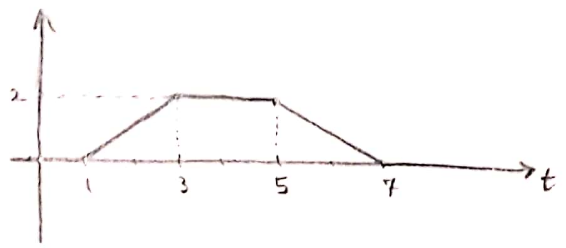


$y_3(t) = (y_1(t) - y_2(t)) * u(2t)$

$= \int_{-\infty}^{+\infty} u(2\tau)\,(y_1(t-\tau) - y_2(t-\tau))\,d\tau$



$\Rightarrow \quad y(t) =$



.8 $y(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-2(t-\tau)} x(\tau-1)\, d\tau$

الف) LTI ؟

* اثبات خطی بودن :

$x_1(t) \longrightarrow y_1(t)$

$x_2(t) \longrightarrow y_2(t)$

$x_3(t) \triangleq a x_1(t) + b x_2(t) \longrightarrow y_3(t)$

$$y_3(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-2(t-\tau)} x_3(\tau-1)\, d\tau = \int_{-\infty}^{t} e^{-2(t-\tau)} (a x_1(\tau-1) + b x_2(\tau-1))\, d\tau$$

$$= a\int_{-\infty}^{t} e^{-2(t-\tau)} x_1(\tau-1)\, d\tau + b\int_{-\infty}^{t} e^{-2(t-\tau)} x_2(\tau-1)\, d\tau$$

$$= a y_1(t) + b y_2(t)$$ اثبات شد $\boxtimes$

* اثبات TI :

$x_1(t) \longrightarrow y_1(t)$

$x_2(t) \triangleq x_1(t-t_0) \longrightarrow y_2(t) \overset{?}{=} y_1(t-t_0)$

$$y_2(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-2(t-\tau)} x_2(\tau-1)\, d\tau = \int_{-\infty}^{t} e^{-2(t-\tau)} x_1(\tau-t_0-1)\, d\tau$$

$$y_1(t-t_0) = \int_{-\infty}^{t-t_0} e^{-2(t-t_0-\tau)} x_1(\tau-1)\, d\tau \xrightarrow{u \triangleq t_0+\tau} y_1(t-t_0) = \int_{-\infty}^{t} e^{-2(t-u)} x_1(u-t_0-1)\, du$$

$\rightarrow y_2(t) = y_1(t-t_0)$ اثبات شد $\boxtimes$

۹. با استفاده از $\delta(t) \triangleq \frac{d}{dt} u(t)$:

$$\delta(t^2-1) = \frac{1}{2}\delta(t+1) + \frac{1}{2}\delta(t-1)$$

$$\boxed{\delta(t^2-1)} = \frac{d}{d(t^2-1)} u(t^2-1) = \frac{d(u(t-1)+u(t+1))}{d(t^2-1)} = \frac{du(t-1) + du(t+1)}{2d(t)}$$

$$\underset{\uparrow}{=} \frac{du(t-1)}{2d(t-1)} + \frac{du(t+1)}{2d(t+1)} = \boxed{\frac{1}{2}\delta(t-1) + \frac{1}{2}\delta(t+1)}$$

$dt = d(t-1) = d(t+1)$

---

۱۰. (a)

$$y[n] = \alpha y[n-1] + \beta w[n] \longrightarrow w[n] = \frac{1}{\beta} y[n] - \frac{\alpha}{\beta} y[n-1]$$

$$\longrightarrow w[n-1] = \frac{1}{\beta} y[n-1] - \frac{\alpha}{\beta} y[n-2]$$

در ادامه :

$$w[n] - \frac{1}{2} w[n-1] = \frac{1}{\beta} y[n] - \frac{\alpha}{\beta} y[n-1] - \frac{1}{2\beta} y[n-1] + \frac{\alpha}{2\beta} y[n-2]$$

جاگذاری در S_1 :

$$\frac{1}{\beta} y[n] - \frac{\alpha}{\beta} y[n-1] - \frac{1}{2\beta} y[n-1] + \frac{\alpha}{2\beta} y[n-2] = x[n]$$

$$\Longrightarrow y[n] = \left(\alpha + \frac{1}{2}\right) y[n-1] - \frac{\alpha}{2} y[n-2] + \beta x[n]$$

طبق صورت سوال $\Longrightarrow y[n] = -\frac{1}{8} y[n-2] + \frac{3}{4} y[n-1] + x[n]$

$$\Bigg\} \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{1}{4}, \quad \beta = 1}$$

Scanned by CamScanner

(b)

$$\left.\begin{array}{l} S_1:\ w[n]=\frac{1}{2}w[n-1]+x[n] \\ S_2:\ y[n]=\frac{1}{4}y[n-1]+w[n] \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} h_1[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \\ h_2[n]=\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] \end{array}$$

پاسخ ضربه سیستم کل : (اتصال سری S_1 , S_2)

$$h[n]=h_1[n]*h_2[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_1[k]h_2[n-k]$$

$$=\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{4}\right)^{n-k}u[n-k]$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{4}\right)^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2(n-k)}$$

$$=\left(2\left(\frac{1}{2}\right)^n-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right)u[n]$$

Scanned by CamScanner

11. 2.28 (c, d)

(c) ضدعلّی : $h[n] = 0 \quad \forall n > 0$

ناپایدار : $\sum_{n=-\infty}^{0} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \infty$

(d) غیرعلّی : $h[n] \neq 0 \quad \forall n < 0$

پایدار : $\sum_{n=-\infty}^{3} 5^n < \infty$

(c,b) 2.43 .12

(b)

(i) $w[n] = u[n] * h_1[n]$

$$= \sum_{k=0}^{n} \left(-\frac{1}{2}\right)^k = \frac{2}{3}\left[1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right] u[n]$$

$\Rightarrow y[n] = w[n] * h_2[n] = (n+1)u[n]$ رابطه (1)

(ii) $g[n] = h_1[n] * h_2[n] = \sum_{k=0}^{n} \left(-\frac{1}{2}\right)^k + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} \left(-\frac{1}{2}\right)^k = u[n]$

$\Rightarrow y[n] = u[n] * g[n] = u[n] * u[n] = (n+1)\,u[n]$ رابطه (2)

$\Rightarrow$ رابطه (1) = رابطه (2)

(c)

$$\left.\begin{array}{l} x[n] * (h_2[n] * h_1[n]) = (x[n] * h_2[n]) * h_1[n] \\ x[n] * h_2[n] = \alpha^n u[n] - \alpha^n u[n-1] = \delta[n] \end{array}\right\} \Rightarrow x[n] * h_1[n] * h_2[n] = \delta[n] * \sin(8n) = \sin(8n)$$

(2.47). 13

(a) $y(t) = 2x_0(t) * h_0(t) = 2y_0(t)$

(b) $y(t) = (x_0(t) - x_0(t-2)) * h_0(t) = x_0(t) * h_0(t) - x_0(t-2) * h_0(t) = y_0(t) - y_0(t-2)$

(c) $y(t) = x_0(t-2) * h_0(t+1) = (x_0(t) * \delta(t-2)) * (h_0(t) * \delta(t+1)) = (x_0(t) * h_0(t)) * (\delta(t-2) * \delta(t+1))$

$= y_0(t) * \delta(t-1) = y_0(t-1)$

(d) اطلاعات کافی نیست

(e) $y(t) = x_0(-t) * h_0(-t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_0(-\tau)\, h_0(-t+\tau)\, d\tau \overset{-\tau \triangleq u}{=\!=} \int_{-\infty}^{+\infty} x_0(u)\, h_0(-t-u)\, du$

$= x_0(t) * h_0(t) \Big|_{t \to -t} = y_0(-t)$

$-t \triangleq t'$

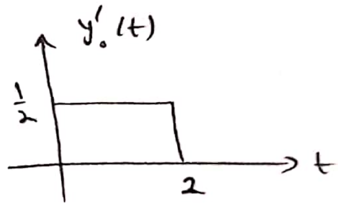
$: y(t') = y(-t)$

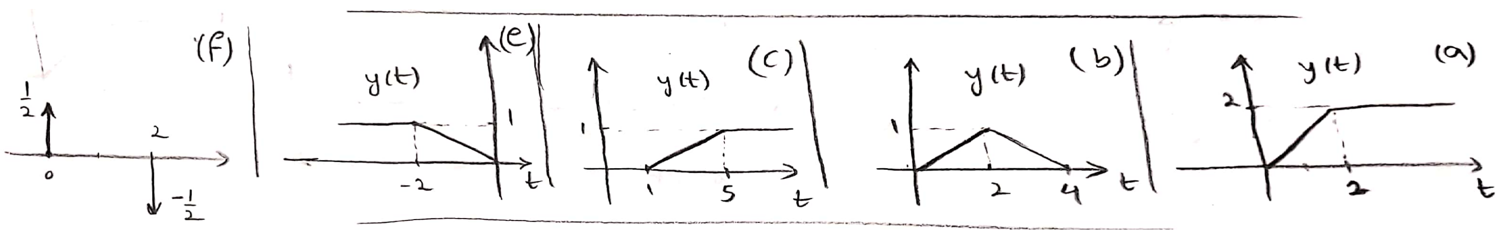
(f) $y(t) = x_0'(t) * h_0'(t) = x_0(t) * \delta'(t) * h_0(t) * \delta'(t)$

$= x_0(t) * h_0(t) * \delta'(t) * \delta'(t)$

$= (y_0(t) * \delta'(t)) * \delta'(t)$

$= y_0''(t)$




(f)
1/2
2
0
-1/2
(e)
y(t)
1
-2
t
(c)
y(t)
1
1
5
t
(b)
y(t)
1
2
4
t
(a)
y(t)
2
2
t