

به نام خدا



دانشگاه صنعتی اصفهان

تجزیه و تحلیل سیگنال‌ها و سیستم‌ها

تمرین سری سوم

ترم ۹۸-۹۹ (گروه‌های ۴-۱)

موعد تحویل: ۹۹/۰۲/۱۵

۱- ضرایب سری فوریه سیگنال متناوب زمان پیوسته حقیقی $x(t)$ با دوره تناوب $T = 3$ و مقدار DC مساوی ۲- به شرح

$$a_2 = a_{-2}^* = e^{-j\frac{\pi}{2}}, \quad a_1 = a_{-1} = -1$$

و سایر ضرایب صفر هستند. سیگنال را به صورت زیر بنویسید.

$$x(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} A_k \cos(k\omega_0 t) - B_k \sin(k\omega_0 t)$$

۲- ضرایب سری فوریه سیگنال‌های زمان پیوسته زیر را، حتی المقدور با استفاده از خواص سری فوریه، محاسبه کنید.

$$T = 2 \text{ با دوره تناوب } x(t) = \begin{cases} t & 0 \leq t < 1 \\ -2t & -1 \leq t < 0 \end{cases} \quad (\text{الف})$$

$$T = 2 \text{ با دوره تناوب } x(t) = \cos \frac{\pi}{2} t, \quad -1 \leq t < 1 \quad (\text{ب})$$

۳- در بند های (الف) و (ب) ضرایب سری فوریه سیگنال‌هایی زمان پیوسته داده شده است. با استفاده از خواص سری فوریه، فرم بسته

ریاضی هر کدام از این سیگنال‌ها را مشخص و حقیقی / مختلط و زوج / فرد بودن سیگنال را بر اساس ضرایب توضیح دهید.

$$T = 6 \text{ با دوره تناوب } a_k = \begin{cases} \frac{(-j)^k \sin(\frac{k\pi}{4})}{k\pi} & k \neq 0 \\ 0 & k = 0 \end{cases} \quad (\text{الف})$$

$$T = 4 \text{ با دوره تناوب } a_k = \begin{cases} \frac{1}{3} & k = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots \\ -\frac{1}{3} & k = 0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots \end{cases} \quad (\text{ب})$$

۴- ضرایب سری فوریه سیگنال‌های زمان گسسته زیر را، حتی المقدور با استفاده از خواص سری فوریه، محاسبه کنید.

$$x[n] = \begin{cases} 1 & -2 \leq n \leq 0 \\ -1 & 1 \leq n \leq 3 \end{cases} \quad (\text{الف})$$

$$x[n] = 1 - \sin\left(\frac{\pi n}{8}\right) \quad 0 \leq n \leq 7 \quad (\text{ب})$$

پ) $x[n] = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq 7 \\ 0 & n = 8, 9 \end{cases}$ با دوره تناوب اصلی ۱۰ (راهنمایی: ابتدا ضرائب $z[n] \triangleq x[n] - x[n-1]$ را حساب کنید).

۵- ضرایب سری فوریه دوسیگنال زمان گسسته به همراه دوره تناوب آنها در زیر داده شده است. فرم بسته ریاضی سیگنال ها را، در صورت امکان با استفاده از خواص سری فوریه، مشخص و حقیقی / مختلط و زوج / فرد بودن هر سیگنال را بر اساس ضرائب توضیح دهید:

الف) $a_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{5}\right)$ با دوره تناوب ۵

پ) $a_k = \begin{cases} (1 - e^{jk\frac{\pi}{2}})2^{-|k|} & -3 \leq k \leq 3 \\ 0 & k = +4 \end{cases}$ با دوره تناوب ۸

۶- یک سیستم پیوسته علی خطی تغییر ناپذیر با زمان با معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید که در آن $x(t)$ ورودی و $y(t)$ خروجی سیستم است:

$$2 \frac{d}{dt} y(t) + 5y(t) = x(t)$$

مطلوب است محاسبه ضرایب سری فوریه سیگنال متناوب خروجی این سیستم برای سیگنال ورودی زیر:

$$x(t) = \sin(3\pi t) + \cos(8\pi t + \frac{\pi}{3})$$

۷- یک فیلتر پایین گذر ایده ال زمان پیوسته با پاسخ فرکانسی زیر در نظر بگیرید:

$$H(j\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < 2500\pi \\ 0 & 2500\pi < |\omega| \end{cases}$$

اگر ورودی این فیلتر، یک سیگنال پیوسته زمان متناوب با دوره تناوب اصلی 1 msec و ضرایب سری فوریه زیر باشد، مطلوب است محاسبه ضرایب سری فوریه خروجی فیلتر.

$$a_k = \begin{cases} 2 & k = 0 \\ j\left(\frac{1}{2}\right)^{|k|} & \text{otherwise} \end{cases}$$

فرم بسته خروجی سیستم را نیز مشخص نمایید.

۸- سیستم زمان گسسته LTI با معادله تفاضلی (دیفرنس) زیر را در نظر بگیرید:

$$y[n] - 2y[n-1] = x[n]$$

در صورتی که ورودی این سیستم به صورت زیر باشد، ضرایب سری فوریه خروجی سیستم را مشخص نمایید.

$$x[n] = \cos\left(\frac{\pi}{3}n\right) + 2\cos\left(\frac{\pi}{2}n + \frac{\pi}{4}\right)$$

۹- $x[n]$ و $y[n]$ سیگنال های متناوب با پریود های اصلی، به ترتیب، ۳ و ۵ و ضرایب سری فوریه a_1, \dots, a_3 و b_1, \dots, b_5

می باشند. ضرایب سری فوریه $z[n] = x[n] + y[n]$ را بدست بیاورید.

۱۰- فیلتر زمان پیوسته با پاسخ فرکانسی روبرو را در نظر بگیرید.

$$H(j\omega) = \begin{cases} 1 & 10\pi \leq |\omega| \leq 12\pi \left(\frac{rad}{sec}\right) \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

(الف) فرض کنید $x(t)$ یک سیگنال متناوب با دوره تناوب اصلی T باشد. حدود T را طوری تعیین کنید که هارمونیک اصلی

$x(t)$ در خروجی فیلتر ظاهر نشود.

(ب) حدود T را طوری تعیین کنید که خروجی فیلتر صفر شود.

۱۱- سوال ۴۸ فصل سوم کتاب درسی

سوالات توصیه شده و غیر تحویلی:

۱- گر انرژی سیگنال های $x_1(t)$ و $x_2(t)$ در بازه $[a, b]$ محدود باشد؛ یعنی برای $i = 1, 2$ داشته باشیم:

$$\int_a^b |x_i(t)|^2 dt < \infty, \text{ در آن صورت طبق نامساوی کوشی - شوارتز همواره}$$

$$\left| \int_a^b x_1(t) x_2^*(t) dt \right|^2 \leq \int_a^b |x_1(t)|^2 dt \int_a^b |x_2(t)|^2 dt$$

که تساوی صرفاً در صورت $x_1(t) = \lambda x_2^*(t)$ برقرار است (λ یک ثابت حقیقی دلخواه).

(الف) نشان دهید که هیچیک از ضرایب سری فوریه سیگنال متناوب $x(t)$ با انرژی پررود محدود مقدار نامحدود نیستند.

(ب) بر اساس بند (الف)، نشان دهید نمایش سری فوریه $x(t)$ واگرا نیست.

۲- ۸ : فصل سوم کتاب درسی، سوال‌های ۶، ۱۳، ۱۴، ۱۸، ۲۲(a)، ۴۱ و ۶۳

موفق باشید