مریم سعیدپور ۹۴۲۹۴۷۳ « به نام خدا » تکلیف سری ششم درس تجزیه و تحلیل سیگنال‌ها و سیستم‌ها

---

۱) الف) درستی رابطه‌ی سنتز را با جایگذاری $\mathfrak{X}(\omega)$ از رابطه‌ی آنالیز نشان دهید.

رابطه‌ی سنتز : $x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{\langle 2\pi\rangle} \mathfrak{X}(\omega) e^{j\omega n} d\omega$

رابطه‌ی آنالیز : $\mathfrak{X}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\omega n}$

$$\Rightarrow x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{\langle 2\pi\rangle} \Big(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\omega n}\Big) e^{j\omega n} d\omega$$

$$\Rightarrow x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{\langle 2\pi\rangle} \Big(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\omega n} e^{j\omega n}\Big) d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{\langle 2\pi\rangle} x[n]\, d\omega = \frac{x[n]}{2\pi}\int_{\langle 2\pi\rangle} d\omega$$

$$= \frac{x[n]}{2\pi} \times 2\pi = x[n] \Longrightarrow x[n] = x[n]$$ تمام ☑

ب)

$$\hat{x}[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-W}^{W} \mathfrak{X}(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \quad \Big\} \rightarrow \text{حکم} : \lim_{W\to\pi} E = 0$$

$$e[n] \triangleq x[n] - \hat{x}[n] = E$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{\langle 2\pi\rangle} \mathfrak{X}(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \longrightarrow E = e[n] = \frac{1}{2\pi}\Big[\int_{\langle 2\pi\rangle} \mathfrak{X}(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega - \int_{-W}^{W} \mathfrak{X}(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega\Big]$$

$$\Rightarrow \lim_{W\to\pi}\Big\{\frac{1}{2\pi}\Big[\int_{-\pi}^{+\pi} \mathfrak{X}(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega - \int_{-W}^{W} \mathfrak{X}(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega\Big]\Big\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} 0 \times d\omega = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{W\to\pi} E = 0$$ ☑

همچنین داریم :

$$\hat{x}[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-W}^{W} \mathfrak{X}(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \xrightarrow{W\to\pi} \hat{x}[n] = x[n]$$ تمام ☑

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathfrak{X}(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

---

۲) محاسبه‌ی تبدیل فوریه :

(a) $x_1[n] = (\frac{-1}{2})^{-n} u[n-3]$

$(-\frac{1}{2})^n u[n] \xrightarrow{F.T.} \frac{1}{1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}}$

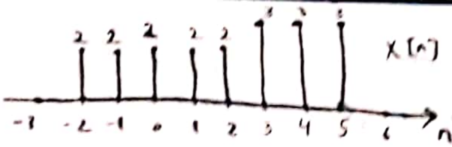
$(-\frac{1}{2})^{n-3} u[n-3] \xrightarrow{F.T.} e^{-3j\omega} \times \frac{1}{1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}}$

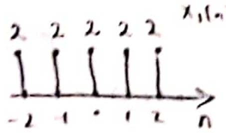
$(-\frac{1}{2})^{-n-3} u[-n-3] \xrightarrow{F.T.} e^{3j\omega} \times \frac{1}{1+\frac{1}{2}e^{j\omega}}$ (۱)

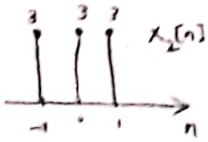
نتیجه $\rightarrow (-\frac{1}{2})^{-3}\Big[(-\frac{1}{2})^{-n} u[n-3]\Big] \xrightarrow{F.T.} e^{3j\omega} \times \frac{1}{1+\frac{1}{2}e^{j\omega}}$

در آخر $\Rightarrow (-\frac{1}{2})^{-n} u[-n-3] \xrightarrow{F.T.} \boxed{\frac{-e^{3j\omega}}{8} \times \frac{1}{1+\frac{1}{2}e^{j\omega}}}$

(b) $x_2[n] = \begin{cases} 2 & , |n| \leq 2 \\ 3 & , 3 \leq n \leq 5 \\ 0 & , o.w. \end{cases}$







$$x_1[n] \xrightarrow{F.T.} 2\frac{\sin(\frac{5w}{2})}{\sin(\frac{w}{2})}$$

$$x_2[n-4] \xrightarrow{F.T.} 3e^{-j4w}\frac{\sin(\frac{3w}{2})}{\sin(\frac{w}{2})}$$

$$x[n] = x_1[n] + x_2[n-4]$$

$$\xrightarrow[\text{تبدیل فوریه}]{\text{خطی بودن}} \quad x[n] \xrightarrow{F.T.} \boxed{\frac{2\sin(\frac{5}{2}w)}{\sin(\frac{w}{2})} + 3e^{-j4w}\frac{\sin(\frac{3}{2}w)}{\sin(\frac{w}{2})}}$$

(c) $x_3[n] = (\frac{-1}{2})^n \cos(4n)u(n) = (\frac{-1}{2})^n \frac{e^{4nj}}{2}u(n) + (\frac{-1}{2})^n \frac{e^{-4nj}}{2}u(n)$

$$(\tfrac{-1}{2})^n u[n] \xrightarrow{F.T} \frac{1}{1+\frac{1}{2}e^{-jw}}$$

$$\overset{\text{شیفت در فرکانس}}{\longleftrightarrow} e^{4nj}(\tfrac{-1}{2})^n u[n] \xrightarrow{F.T.} \frac{1}{1+\frac{1}{2}e^{-j(w-4)}} \xrightarrow{\text{نتیجه میگیریم}} (\tfrac{-1}{2})^n \frac{e^{4nj}}{2}u[n] \xrightarrow{F.T.} \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j(w-4)}} = \frac{1}{2-e^{-j(w-4)}}$$

در نهایت : $\boxed{X_3(e^{jw}) = \frac{1}{2-e^{-j(w-4)}} + \frac{1}{2-e^{-j(w+4)}}}$

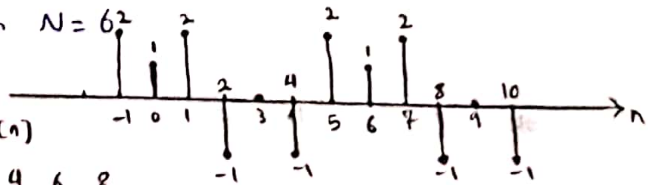
(d) $x_4[n] = (1-\cos(\frac{\pi}{3}n+\frac{\pi}{3})) \cdot \sin(\frac{\pi}{3}n+\frac{\pi}{6}) = \sin(\frac{\pi}{3}n+\frac{\pi}{6}) - \sin(\frac{\pi}{3}n+\frac{\pi}{6})\cos(\frac{\pi}{3}n+\frac{\pi}{3})$

$$= \sin(\tfrac{\pi}{3}n+\tfrac{\pi}{6}) - \frac{\sin(\frac{2\pi}{3}n+\frac{\pi}{2}) + \sin(-\frac{\pi}{6})}{2} = \sin(\tfrac{\pi}{3}n+\tfrac{\pi}{6}) - \frac{\cos(\frac{2\pi}{3}n)}{2} + \frac{1}{4}$$

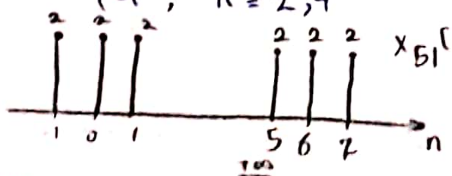
$$= \frac{e^{\frac{\pi}{3}nj}e^{\frac{\pi}{6}j}}{2j} - \frac{e^{-\frac{\pi}{3}nj}e^{-\frac{\pi}{6}j}}{2j} - \frac{e^{\frac{2\pi}{3}nj}}{4} - \frac{e^{-\frac{2\pi}{3}nj}}{4} + \frac{1}{4}$$

$$\boxed{X_4(e^{jw}) = \frac{\pi e^{\frac{\pi}{6}j}}{j}\delta(w-\tfrac{\pi}{3}) - \frac{\pi e^{-\frac{\pi}{6}j}}{j}\delta(w+\tfrac{\pi}{3}) - \frac{\pi}{2}\delta(w-\tfrac{2\pi}{3}) - \frac{\pi}{2}\delta(w+\tfrac{2\pi}{3}) + \frac{\pi}{2}\delta(w)}$$

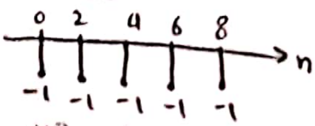
(e) $x_5[n] = \begin{cases} 2 & , n=-1,1 \\ 1 & , n=0,3 \\ -1 & , n=2,4 \end{cases}$, periodic with $N=6$



$x_5[n] =$



$+$



$$x_{51}[n] \xrightarrow{F.T.} X_{51}(w) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi \times \underbrace{\frac{1}{6} \times \frac{\sin(\frac{k\pi}{6}(3))}{\sin(\frac{k\pi}{6})}}_{\text{ضرایب سری فوریه } a_k} \times \delta(w-k\tfrac{2\pi}{6})$$

$$x_{52}[n] \xrightarrow{F.T.} X_{52}(w) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2\pi}{2}\delta(w-k\tfrac{2\pi}{2})$$

$$X(w) = F.T\{x_5[n]\} = X_{51}(w) + X_{52}(w) = \boxed{\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left[\frac{\pi}{3}\frac{\sin(\frac{k\pi}{2})}{\sin(\frac{k\pi}{6})}\delta(w-k\tfrac{\pi}{3}) + \pi\delta(w-k\pi)\right]}$$

۳) سیگنال زمانی را از روی تبدیل فوریه بیابید.

(a) $X_1(e^{jw}) = 2\cos^2(w) + 4\sin^2(3w) = 2\,\dfrac{1+\cos(2w)}{2} + 4\,\dfrac{1-\cos(6w)}{2}$

$= 3 + \cos(2w) - 2\cos(6w) = 3 + \dfrac{e^{2wj}}{2} + \dfrac{e^{-2wj}}{2} - e^{6wj} - e^{-6wj}$

$\Rightarrow \boxed{x_1[n] = 3\delta[n] + \frac{1}{2}\delta[n+2] + \frac{1}{2}\delta[n-2] - \delta[n+6] - \delta[n-6]}$

(b) $X_2(e^{jw}) = \dfrac{1 - \frac{e^{-jw}}{3}}{1 - \frac{e^{-jw}}{4} - \frac{e^{-2jw}}{8}} = \dfrac{1 - \frac{e^{-jw}}{3}}{(1-\frac{1}{2}e^{-jw})(1+\frac{1}{4}e^{-jw})} = \dfrac{}{1-\frac{1}{2}e^{-jw}} + \dfrac{}{1+\frac{1}{4}e^{-jw}}$

$= \dfrac{\frac{2}{9}}{1-\frac{1}{2}e^{-jw}} + \dfrac{\frac{7}{9}}{1+\frac{1}{4}e^{-jw}}$

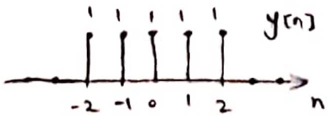
$\Rightarrow \boxed{x_2[n] = \frac{2}{9}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \frac{7}{9}\left(\frac{-1}{4}\right)^n u[n]}$

(c) $X_3(e^{jw}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k \delta\left(w - \frac{k\pi}{2}\right)$

می‌دانیم: $x_3[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n} \xrightarrow{F.T.} X_3(w) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k \delta\left(w - k\frac{2\pi}{N}\right)$ $\boxed{N=4}$

$\Rightarrow \boxed{x_3[n] = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{3} (-1)^k e^{jk\left(\frac{2\pi}{4}\right)n} = \frac{1}{2\pi} - \frac{1}{2\pi}e^{j\frac{\pi}{2}n} + \frac{1}{2\pi}e^{j\pi n} - \frac{1}{2\pi}e^{j\frac{3\pi}{2}n}}$

(d) $X_4(e^{jw}) = \dfrac{1}{1-e^{-jw}}\left(\dfrac{\sin(\frac{5}{2}w)}{\sin(\frac{w}{2})}\right)$

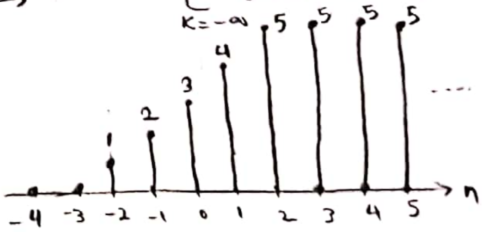


$\xrightarrow{F.T.} \dfrac{\sin(\frac{5}{2}w)}{\sin(\frac{w}{2})}$ (در سوال ۲ قسمت b)

$(1)^n u[n] \xrightarrow{F.T.} \dfrac{1}{1-e^{-jw}}$

$x[n] * y[n] \xrightarrow{F.T.} X(w)\,Y(w)$

$\Rightarrow x_4[n] = y[n] * u[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} y[k]\,u[n-k]$



$\Rightarrow \boxed{x_4[n] = \begin{cases} 0 & n \leq -3 \\ n+3 & -2 \leq n \leq 2 \\ 5 & o.w \end{cases}}$

---

۴) ضرایب سری فوریه را بدست آورید:

$x[n] \xrightarrow{F.S.} a_k$

(a) $y_1[n] = x^*[-n]$

$x[n] \xrightarrow{F.T.} X(e^{jw}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k \delta\left(w - k\frac{2\pi}{N}\right)$

$x^*[-n] \xrightarrow{F.T.} X^*(e^{jw}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k^* \delta\left(w - k\frac{2\pi}{N}\right) \Longrightarrow \boxed{y_1[n] \xrightarrow{F.S.} a_k^*}$

(b) $y_3[n] = (-1)^n x[n]$, N odd

$$x[n] \xrightarrow{F.T.} X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\tfrac{2\pi}{N})$$

$$y_3[n] = (-1)^n x[n] = e^{-j\pi n} x\, x[n] \xrightarrow{F.T.} X(\omega+\pi) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\tfrac{2\pi}{N} + \pi)$$

$$\rightarrow \boxed{y_3[n] \xrightarrow{F.S.} a_k}$$

(C) $y_2[n] = x[n] - x^*[n - \frac{N}{2}]$, N even

$$y_2[n] \xrightarrow{F.T.} X(\omega) - X^*(-\omega) e^{-j\omega\frac{N}{2}} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\tfrac{2\pi}{N}) - e^{-j\omega\frac{N}{2}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k^* \delta(-\omega - k\tfrac{2\pi}{N})$$

$$\Rightarrow Y_2(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_0) - \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega\frac{N}{2}} \times 2\pi \times a_{-k}^* \delta(\omega - k\omega_0)}_{k \leftarrow (-k)\ ,\ \delta[n]\ \text{تابع زوج است}}$$

$$\Rightarrow Y_2(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi (a_k - e^{-j\omega\frac{N}{2}} a_{-k}^*) \delta(\omega - k\omega_0)$$

$$\Rightarrow y_2[n] \xrightarrow{F.S.} \boxed{a_k - e^{-j\omega\frac{N}{2}} a_{-k}^* \quad ; \quad \omega = k\omega_0}$$

---

(۵) (الف) برقراری رابطه‌ی (5-70) را با رابطه‌ی (3-95) اثبات کنید.

$$\sum_{r=\langle N\rangle} x[r]y[n-r] \xleftrightarrow{F.S.} N a_k b_k \qquad (5-70)$$

$$(1)\ a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N\rangle} x[n] e^{-jk\omega_0 n} \quad , \omega_0 = \frac{2\pi}{N} \qquad (3-95)$$

حکم: $c_k = N a_k b_k$

$$x[n] \circledast y[n] = \sum_{r=\langle N\rangle} x[r]y[n-r] \xleftrightarrow{F.S.} c_k \quad ; \ x[n] \xrightarrow{F.S.} a_k \ ; \ y[n] \xrightarrow{F.S.} b_k$$

طبق رابطه‌ی (1) : $c_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N\rangle} \left(\sum_{r=\langle N\rangle} x[r]y[n-r] \right) e^{-jk\omega_0 n}$

$$= \frac{1}{N} \sum_{r=\langle N\rangle} x[r] \cdot N \cdot \underbrace{\frac{1}{N} \sum_{n=\langle N\rangle} y[n-r] e^{-jk\omega_0 n}}_{\substack{y[n] \xleftrightarrow{F.S} b_k \\ y[n-r] \xleftrightarrow{F.S.} e^{-jk\omega_0 r} b_k}}$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{r=\langle N\rangle} x[r] \cdot N \cdot b_k e^{-jk\omega_0 r} = N b_k \underbrace{\left[\frac{1}{N} \sum_{k=\langle N\rangle} x[r] e^{-jk\omega_0 r} \right]}_{x[n] \xleftrightarrow{F.S.} a_k}$$

$$= N a_k b_k$$ حکم

۵) ب) مراحل رسیدن از رابطه‌ی (5-70) به رابطه‌ی (5-71) را با خاصیت دوگانی به طور کامل بیان کنید.

$$\sum_{r=\langle N\rangle} x[r]y[n-r] \xleftrightarrow{F.S.} N a_k b_k \qquad (5.70)$$

$$x[n]y[n] \xleftrightarrow{F.S.} \sum_{l=\langle N\rangle} a_l b_{k-l} \qquad (5.71)$$

* خاصیت دوگانی :

$$g[n] \xleftrightarrow{F.S.} f[k]$$

$$f[n] \xleftrightarrow{F.S.} \frac{1}{N} g[-k]$$

$$g[n] = \sum_{r=\langle N\rangle} x[r]y[n-r] \xleftrightarrow{F.S.} f[k] = N a_k b_k$$

$$f[n] = N x[n] y[n] \xleftrightarrow{F.S.} \frac{1}{N} \sum_{r=\langle N\rangle} N a[r] b[k-r] = \sum_{l=\langle N\rangle} a_l b_{k-l}$$

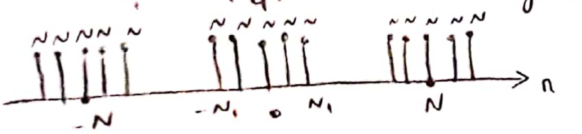
پ) .

$$x(t) = \frac{\sin(\frac{5}{4}t)}{\sin\frac{t}{4}} \xleftrightarrow{F.S.} ?$$

اولاً استفاده صورت غلط است و شکل درست به فرم زیر است :

$$x[n] = \frac{\sin(\frac{5}{4}\pi n)}{\sin(\frac{\pi n}{4})}$$

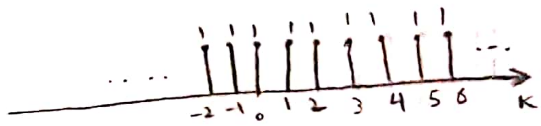
در این صورت ؛ داریم:



$$\xleftrightarrow{F.S.} a_k = \frac{\sin\left(\frac{k\pi}{N}(2N_1+1)\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{N}\right)}$$

حالا با قیاس $a[k]$ ؛ $x[n]$ ، داریم : $\boxed{N=4}$, $\boxed{N_1=2}$ لذا براساس دوگانی در سری فوریه :

$$a[n] = \frac{\sin(\frac{5\pi}{4}n)}{\sin(\frac{\pi n}{4})} \xleftrightarrow{F.S.} \frac{1}{N} g[-k] \equiv$$



$\therefore$ $\Rightarrow \boxed{1 \equiv \text{ضرایب سری فوریه}}$

---

۶) الف) برقراری خاصیت کانولوشن (رابطه‌ی 5-48) را نشان دهید.

$$Y(e^{jw}) = X(e^{jw}) H(e^{jw})$$

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

داریم: $F.T\{x[n]\} = X(e^{jw}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-jwn}$

$$Y(e^{jw}) = F.T.\{x[n]*h[n]\} = F.T.\left\{\sum_{u=-\infty}^{+\infty} x[u]h[n-u]\right\}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left\{\sum_{u=-\infty}^{+\infty} x[u]h[n-u]\right\} e^{-jwn}$$

$$= \sum_{u=-\infty}^{+\infty} x[u]\left\{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n-u]e^{-jwn}\right\} \Rightarrow \equiv H(e^{jw}) e^{-jwu}$$

$$= H(e^{jw}) \sum_{u=-\infty}^{+\infty} x[u] e^{-jwu} \overset{(۵)}{=} H(e^{jw}) X(e^{jw})$$

ثابت

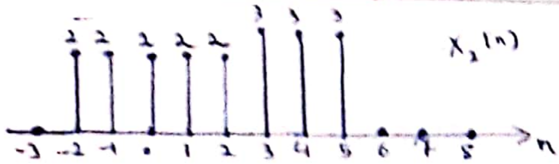
$$x[n] = \sum_{k=-\infty} \delta[n-6k] \longrightarrow \boxed{h[n] = (\tfrac{1}{2})^{|n|}} \longrightarrow y[n]$$ (۶ - ب)

$$y[n] \xleftrightarrow{F.S.} b_k = ?$$

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})\,H(e^{j\omega}) = \left\{ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi \times \frac{1}{6} \times \delta(\omega - k\frac{2\pi}{6}) \right\} \cdot \left\{ \frac{1-a^2}{1-2a\cos(\omega)+a^2} \right\}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi \left\{ \frac{1}{6} \cdot \frac{1-a^2}{1-2a\cos(\omega)+a^2} \right\} \delta(\omega - k\frac{2\pi}{6})$$

$$\rightarrow \boxed{b_k = \frac{1}{6} \times \frac{1-a^2}{1-2a\cos(\omega)+a^2}}$$

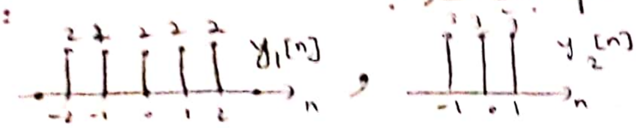


(۷)

(a) $X_2(e^{j0}) = ? \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_2[n] = \boxed{19}$

چون طور نادرست (b) سوال دوم بیان شد :

(b) $\measuredangle X_2(e^{j\omega})$:



$$x_2[n] = y_1[n] + y_2[n-4]$$

* چون $y_1(n)$ و $y_2(n)$ سیگنال‌های حقیقی و زوج هستند لذا : $\measuredangle Y_1(\omega) = 0$, $\measuredangle Y_2(\omega) = 0$. اما $x_2(n)$ حاصل یک شیفت از $y_2(n)$ و سپس جمع با $y_1(n)$ است

لذا: $\measuredangle X_2(\omega) = \measuredangle Y_1(\omega) + e^{-4j\omega} \measuredangle Y_2(\omega)$ $\Longleftarrow$ در نتیجه : $\measuredangle X_2(e^{j\omega}) = \boxed{e^{-4j\omega}}$

(c) $\int_{-\pi}^{\pi} X_2(e^{j\omega})\,d\omega$

$$2\pi\, x_2(0) = \int_{-\pi}^{\pi} X_2(e^{j\omega})\,d\omega \Longrightarrow \int_{-\pi}^{\pi} X_2(e^{j\omega})\,d\omega = \boxed{4\pi}$$

(d) $\int_{-\pi}^{\pi} \left|\frac{d}{d\omega} X_2(e^{j\omega})\right|^2 d\omega$

خاصیت مشتق‌گیری $n\,x[n] \xleftrightarrow{F.T.} j\frac{d}{d\omega} X_2(e^{j\omega})$ $\xrightarrow{\text{رابطه پارسوال}}$ $\int_{-\pi}^{+\pi} \left|\frac{d}{d\omega} X_2(e^{j\omega})\right|^2 d\omega = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |n|^2 |x(n)|^2$

$$\rightarrow \int_{-\pi}^{+\pi} \left|\frac{d}{d\omega} X_2(e^{j\omega})\right|^2 d\omega = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |n|^2 |x(n)|^2 = \boxed{980\pi}$$

(e) $F^{-1}\{Re\{X_2(e^{j\omega})\}\}$ می‌دانیم : $Even\{x_2[n]\} \xleftrightarrow{F.T.} Re\{X_2(e^{j\omega})\}$

$$\Rightarrow F^{-1}\{Re\{X_2(e^{j\omega})\}\} = Even\{x_2[n]\} = \frac{x_2[n] + x_2[-n]}{2}$$

a) $H(z) = \dfrac{A}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1+\frac{1}{3}z^{-1})}$; $|z| > \frac{1}{2}$ $h[n]$ حل **(5.28)**

$H(1) = 6 \Longrightarrow A = 4$

b)

$H(z) = \dfrac{4}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1+\frac{1}{3}z^{-1})}$; $|z| > \frac{1}{2}$

$H(z) = \dfrac{12/5}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \dfrac{8/5}{1+\frac{1}{3}z^{-1}}$

$\Longrightarrow h[n] = \frac{12}{15}(\frac{1}{2})^n u[n] + \frac{8}{5}(-\frac{1}{3})^n u[n]$

c)

i) $x[n] = u[n] - \frac{1}{2}u[n-1] \Longleftrightarrow X(z) = \dfrac{1-\frac{1}{2}z^{-1}}{1-z^{-1}}$; $|z| > 1$

$Y(z) = X(z)H(z) = \dfrac{1-\frac{1}{2}z^{-1}}{1-z^{-1}} \times \dfrac{4}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1+\frac{1}{3}z^{-1})}$; $|z| > 1$

$= \dfrac{4}{(1-z^{-1})(1+\frac{1}{3}z^{-1})} = \dfrac{3}{1-z^{-1}} + \dfrac{1}{1+\frac{1}{3}z^{-1}}$

$y[n] = 3u[n] + (-\frac{1}{3})^n u[n]$

ii)

$x(t) = 50 + 10\cos(20\pi t) + 30\cos(40\pi t)$

$T = \frac{1}{40}$, $t = nT$

$x[n] = 50 + 10\cos\frac{\pi}{2}n + 30\cos\pi n =$

$= 50 + 5e^{j(\frac{n\pi}{2})} + 5e^{-j\frac{n\pi}{2}} + 15e^{jn\pi} + 15e^{-jn\pi}$

با استفاده از خاصیت eigenfunction $\Longrightarrow$ $y[n] = 50H(e^{j0}) + 5e^{jn\frac{\pi}{2}}H(e^{j\frac{\pi}{2}}) + 5e^{-jn\frac{\pi}{2}}H(e^{-j\frac{\pi}{2}}) + 15e^{jn\pi}H(e^{j\pi}) + 15e^{-jn\pi}H(e^{-j\pi})$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{4}{1-\frac{1}{6}e^{-j\omega}-\frac{1}{6}e^{-2j\omega}}$$

$$H(e^{j0}) = 6, \quad H(e^{j\frac{\pi}{2}}) = 7\left(\frac{12}{25}\right) - j\frac{12}{25}$$

$$H(e^{-j\frac{\pi}{2}}) = 7\left(\frac{12}{25}\right) + j\frac{12}{25}$$

$$H(e^{j\pi}) = H(e^{-j\pi}) = 4$$

$$\Longrightarrow y[n] = 300 + 24\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}n - \tan^{-1}\left(\frac{1}{7}\right)\right) + 120\cos n\pi$$

(5.31)

a) $H(z) = \dfrac{z^{-2}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-3z^{-1})}$ پایدار $\Longrightarrow$ ROC: $\frac{1}{2}<|z|<3$

$$x[n] = u[n] \Longrightarrow X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} \quad |z|>1$$

$$Y(z) = X(z)H(z) = \frac{4/5}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{1/5}{1-3z^{-1}} - \frac{1}{1-z^{-1}} \quad 1<|z|<3$$

$$\Longrightarrow y[n] = \frac{4}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \frac{1}{5}(3)^n u[-n-1] - u[n]$$

b)

ROC شامل $z=\infty$ نمی‌شود بنابراین $h[n]$ علّی نیست. از آنجایی که هم $x[n]$ و هم $h[n]$ برابر

$n<0$ برابر صفر می باشند. در این $y[n]$ نیز برای $n<0$ برابر صفر می باشد.

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{z^{-2}}{1-\frac{7}{2}z^{-1}+\frac{3}{2}z^{-2}}$$

$$\Rightarrow Y(z)-\frac{7}{2}z^{-1}Y(z)+\frac{3}{2}z^{-2}Y(z)=z^{-2}X(z)$$

$$\Rightarrow y[n]=x[n-2]+\frac{7}{2}y[n-1]-\frac{3}{2}y[n-2]$$

$$\xrightarrow{y[n]=0,\ n<0} y[0]=0\ ,\ y[1]=0\ ,\ y[2]=1$$

c)

$$H_i(z)=\frac{1}{H(z)}=z^{2}-\frac{7}{2}z+\frac{3}{2}\qquad ROC:\ \text{کل صفحه‌ی } z$$

$$h_i[n]=\delta[n+2]-\frac{7}{2}\delta[n+1]+\frac{3}{2}\delta[n]$$

(5.40)

a) قطب‌ها مزدوج معکوس نیستند، بنابراین فاز خطی تعمیم یافته یا فاز صفر نمی باشد.

$H_i(z)$ در $z=0$ و احتمالاً $z=\infty$ دارای قطب می باشد بنابراین ROC، $0<|z|<\infty$ می باشد که به معنای پایدار بودن $H_i(z)$ می باشد. اگر ROC شامل $z=\infty$ باشد، معکوس علی نیز می باشد.

b) قطب‌ها مزدوج معکوس نیستند، بنابراین فاز صفر یا فاز خطی تعمیم یافته نیست.

$H_i(z)$ درون دایره‌ی واحد دارای قطب می باشد. بنابراین ROC، $|z|>\frac{2}{3}$ است (برای تابع Reciprocal

بنابراین $H_1(z)$ هم پایدار و هم علی می باشد.

c) صفرها مزدوج معکوس هم هستند، بنابراین این سیستم فاز صفر است.

$H_2(z)$ دارای قطب در درون و بیرون دایره‌ی واحد است بنابراین $H_2(z)$ سیستم معکوس پایدار و غیر علی می باشد.

d) صفرها مزدوج معکوس هستند، بنابراین سیستم فاز صفر است. قطب های $H_2(z)$ روی دایره‌ی واحد هستند بنابراین سیستم معکوس پایدار نمی باشد.

Scanned by CamScanner