تکلیف سری سوم تجزیه و تحلیل سیگنال

مریم سعیدپور ۹۴۲۹۳۷۴

۱-

$T = 3 \quad , DC = -2 \quad , a_2 = a_{-2}^{*} = e^{-j\frac{\pi}{2}} \quad , a_1 = a_{-1} = -1$

$$x(t) = \sum_{K=0}^{+\infty} A_K \cos(K\omega_0 t) - B_K \sin(K\omega_0 t)$$

$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{3} \quad , a_0 = -2 , \ a_1 = a_{-1} = -1 \ , \ a_2 = e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j \ , \ a_{-2} = (-j)^{*} = j$

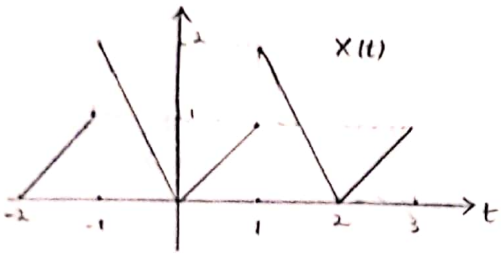
$$\Rightarrow x(t) = \sum_{K=-\infty}^{+\infty} a_K e^{jK\omega_0 t} = -2 - e^{j\frac{2\pi}{3}t} - e^{-j\frac{2\pi}{3}t} - je^{j\frac{4\pi}{3}t} + je^{-j\frac{4\pi}{3}t}$$

$$\Rightarrow x(t) = -2 - 2\cos(\tfrac{2\pi}{3}t) - j \times 2j \sin(\tfrac{4\pi}{3}t) = -2\cos(0) - 2\cos(\tfrac{2}{3}\pi t) + 2\sin(\tfrac{4\pi}{3}t)$$

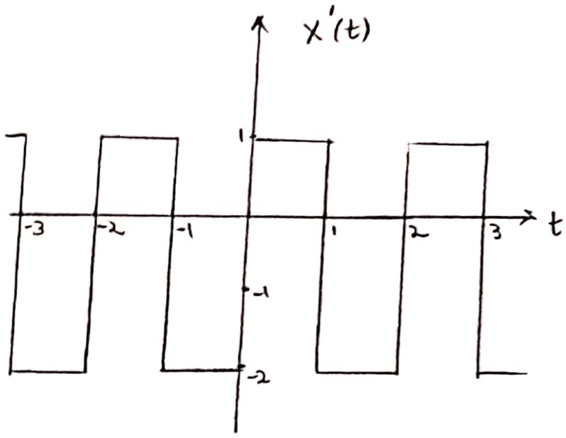
$\Rightarrow A_0 = -2 \ , A_1 = -2 \ , \ B_2 = -2 \ , \ \omega_0 = \frac{2\pi}{3}$ ، سایر A_K ، B_K ها صفر می‌باشند.

۲- الف)

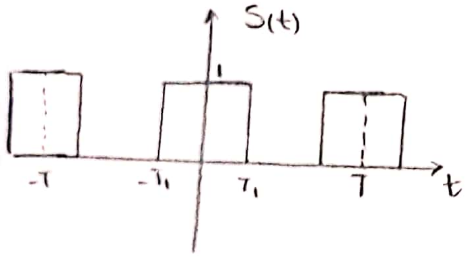
$$X(t)=\begin{cases} t & 0<t<1 \\ -2t & -1\le t<0 \end{cases}\quad , T=2$$



$\xrightarrow{\text{مشتق}}$



فرض را اسم :



$$S(t)\xrightarrow{F.S.} c_k = d\,\mathrm{Sinc}(kd)$$

$$d=\text{dutycycle}=\frac{2T_1}{T}\ ,\ \lim_{x\to 0}\mathrm{Sinc}(x)=1$$

$$x'(t)=3S(t+\tfrac{1}{2})-2 \xrightarrow{F.S.} b_k = 3e^{\frac{1}{2}jk\omega_0}c_k\ ,\ b_0=3c_0-2=\frac{\text{سطح زیر یک پریود}}{\text{پریود}}=\frac{-1}{2}$$

$$\Rightarrow \left\{ b_k=\frac{3e^{jk\frac{\pi}{2}}}{2}\mathrm{Sinc}(k/2)\ ,\ b_0=\frac{-1}{2}\right\}$$

$d=\frac{1}{2}$, $\omega_0=\pi$

$$x(t)\xrightarrow{F.S.} a_k \Rightarrow jk\omega_0 a_k = b_k \longrightarrow a_k=\frac{b_k}{jk\pi} = \begin{cases} \dfrac{3e^{jk\frac{\pi}{2}}\,\mathrm{Sinc}(k/2)}{2jk\pi} & k\neq 0 \\ \dfrac{\text{سطح زیر یک پریود}}{\text{پریود}}=\dfrac{3}{4} & k=0 \end{cases}$$

ب)

$$x(t) = \cos(\tfrac{\pi}{2}t) \qquad -1 \le t < 1 \qquad , \; T=2$$

$$x(t) = \cos(\tfrac{\pi}{2}t) = \frac{1}{2}e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2}e^{-j\omega_0 t} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = \frac{1}{2} \\ a_{-1} = \frac{1}{2} \\ a_k = 0 \quad ; k \neq 1, -1 \end{cases}$$

فرکانس هم $\frac{\pi}{2}$ است.

پس از هارمونیک اول فرکانس $\omega_0=\frac{\pi}{2}$ ، به اندازه‌ی $\frac{1}{2}$ و از هارمونیک -1 اُم با فرکانس $\frac{\pi}{2}=-\omega_0$ به اندازه‌ی $\frac{1}{2}$ داریم و بقیه‌ی هارمونیک‌ها را نداریم.

۲- الف)

$$a_k = \begin{cases} \dfrac{(-j)^k \sin(\frac{k\pi}{4})}{k\pi} & k \neq 0 \\ 0 & k=0 \end{cases} \quad , \; T=6$$

$$a_k = \begin{cases} (e^{-j\frac{\pi}{2}})^k \times \dfrac{\sin(\frac{k\pi}{4})}{4 \times \frac{k\pi}{4}} & k\neq 0 \\ 0 & k=0 \end{cases} \rightarrow a_k = \begin{cases} \underbrace{(e^{-j\frac{\pi}{2}})^k}_{\text{عامل شیفت}} \times \underbrace{\tfrac{1}{4}}_{\text{dutycycle} = 25\%} \mathrm{Sinc}(\frac{k}{4}) & k \neq 0 \\ 0 & k=0 \end{cases}$$

می‌دانیم: b_k = ضرایب سری فوریه موج مربعی متقارن $= \begin{cases} d\,\mathrm{sinc}(kd) & k\neq 0 \\ d = \frac{2T_1}{T} & k=0 \end{cases}$

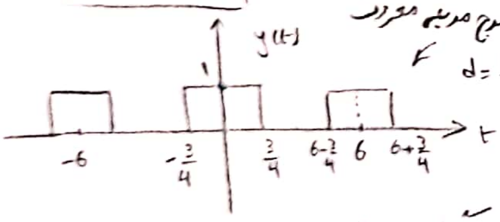
d : dutycycle

* عامل شیفت: $\begin{cases} x(t+t_0) \xrightarrow{F.S.} e^{jk\omega_0 t_0} a_k \\ x(t) \xrightarrow{F.S.} a_k \end{cases}$ ، $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$

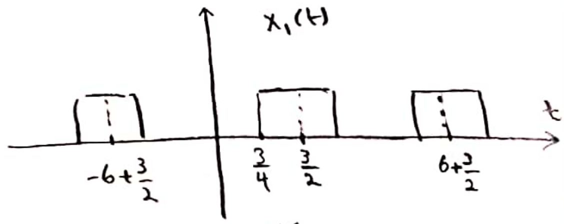
$$e^{-jk\frac{\pi}{2}} = e^{-jk\omega_0 t_0} = e^{-jk\frac{2\pi}{T}t_0}$$

$$\Rightarrow \boxed{t_0 = -\tfrac{3}{2}} \rightsquigarrow x_1(t) = y(t-\tfrac{3}{2})$$

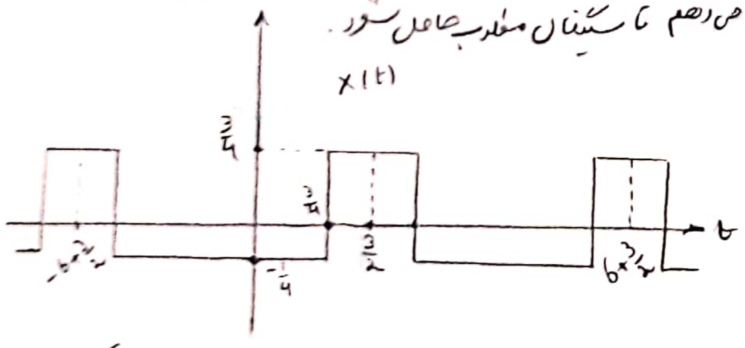
هنوز سیگنال مطلوب نیست!



شیفت به راست به اندازه‌ی $\frac{3}{2}$ $\longrightarrow$



مقدار DC سیگنال $x_1(t)$ ، برابر است با d یعنی $\frac{2\times\frac{3}{4}}{6}=\frac{1}{4}$ درحالیکه سیگنال مطلوب باید $DC=0$ داشته باشد. پس سیگنال $x_1(t)$ را $\frac{1}{4}$ به پایین شیفت می‌دهیم تا سیگنال مطلوب حاصل شود.



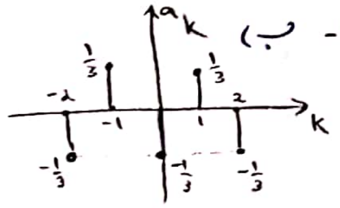
سیگنال مطلوب $\Rightarrow x(t) \xrightarrow{F.S.} a_k$

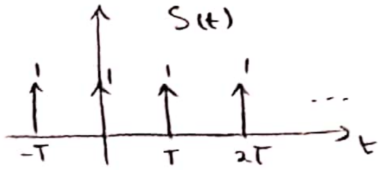
با توجه به اینکه: $a_k = a_{-k}^*$ $\Longrightarrow$ $x(t)$ حقیقی است.

با توجه به اینکه: a_k نه زوج و نه فرد $\Longrightarrow$ $x(t)$ نه زوج و نه فرد

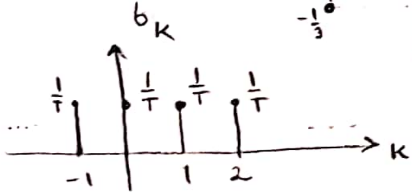
۳- ب)

$$a_k=\begin{cases}\frac{1}{3} & k=\pm1,\pm3,\pm5,\pm7,\dots \\ \frac{-1}{3} & k=0,\pm2,\pm4,\pm6,\dots\end{cases}\quad , T=4$$





$\xrightarrow{F.S.}$



$$a_k=(-1)^{k+1}\left(\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{3}e^{jk\pi}=\underbrace{\frac{1}{4}}_{=\frac{1}{T}}\times\underbrace{\left(-\frac{4}{3}\right)}_{\text{ضرب}}\times\underbrace{\left(e^{jk\frac{2\pi}{4}\times 2}\right)}_{\text{شیفت 2 واحد به چپ}}$$

$$\Rightarrow x(t)=-\frac{4}{3}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-kT+2)=-\frac{4}{3}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-4k+2)$$

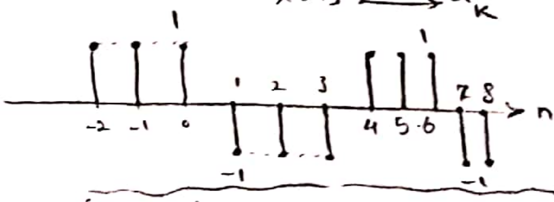
از شکل a_k پیداست که حقیقی و زوج است ⇐ $x(t)$ نیز حقیقی و زوج است.
پس نسبت به محور yها متقارن است.

---

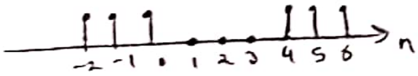
۴. الف)

$$x[n]=\begin{cases}1 & -2\leqslant n\leqslant 0 \\ -1 & 1\leqslant n\leqslant 3\end{cases}\quad , T=6$$

$x[n]\xrightarrow{F.S.}a_k$



$x_1[n]\xrightarrow{F.S.}b_k$

★ 

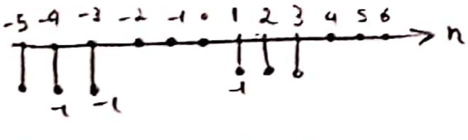
می‌دانیم ضرایب سری فوریه پالس مستطیلی:

$$y[n]\xrightarrow{F.S.}d_k=\begin{cases}\frac{2N_1+1}{N} & k=0,\pm N,\pm 2N,\dots \\ \frac{1}{N}\frac{\sin\left(\frac{k\omega_0(2N_1+1)}{2}\right)}{\sin\left(\frac{k\omega_0}{2}\right)} & o.w\end{cases}$$

$$\begin{cases}x_1[n]=y[n+1] \\ N_1=1,\ N=6\end{cases}\Rightarrow b_k=e^{jk\omega_0 n_0}d_k\ ,\ \omega_0=\frac{2\pi}{N}=\frac{2\pi}{6}\ ,\ n_0=1$$

$$\Rightarrow b_k=\begin{cases}\frac{1}{6}e^{jk\frac{\pi}{3}}\frac{\sin\left(\frac{k\pi}{3}\left(\frac{3}{2}\right)\right)}{\sin\left(\frac{k\frac{\pi}{3}}{2}\right)} & o.w \\ \frac{3}{6}=\frac{1}{2} & k=0,\pm N,\pm 2N,\dots\end{cases}$$

$x_2[n]\xrightarrow{F.S.}c_k$

★ 

$$\begin{cases}x_2[n]=-y[n-2] \\ N_1=1,\ N=6\end{cases}\Rightarrow c_k=-e^{jk\omega_0 n_0}d_k\Rightarrow c_k=\begin{cases}\frac{-e^{-j\frac{2k\pi}{3}}}{6}\times\frac{\sin\left(\frac{k\pi}{3}\times\frac{3}{2}\right)}{\sin\left(\frac{k\frac{\pi}{3}}{2}\right)} & o.w \\ -\frac{3}{6}=\frac{-1}{2} & k=0,\pm N,\pm 2N,\dots\end{cases}$$

$\omega_0=\frac{\pi}{3}\ ,\ n_0=-2$

$$\Rightarrow x[n]=x_1[n]+x_2[n]\xrightarrow{F.S.}a_k=b_k+c_k=\begin{cases}\frac{\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)}{6\sin\left(\frac{k\pi}{6}\right)}\left(e^{jk\frac{\pi}{3}}-e^{-2jk\frac{\pi}{3}}\right) & o.w \\ 0 & k=0,\pm N,\pm 2N,\dots\end{cases}$$

۴. ب)

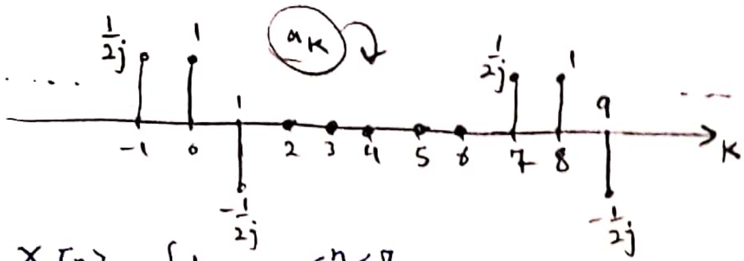
$x[n] = 1 - \sin\left(\frac{n\pi}{8}\right) \quad 0 \le n \le 7 \quad , T = 8$

$x[n] = 1 - \left(\frac{e^{j\omega_0 n} - e^{-j\omega_0 n}}{2j}\right) \quad , \omega_0 = \frac{\pi}{8}$

$= 1 - \frac{1}{2j} e^{j\omega_0 n} + \frac{1}{2j} e^{-j\omega_0 n} \longrightarrow \begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = \frac{-1}{2j} \\ a_{-1} = \frac{1}{2j} \end{cases} \quad , a_k = 0$

در یک تناوب، برابر بقیه نقاط

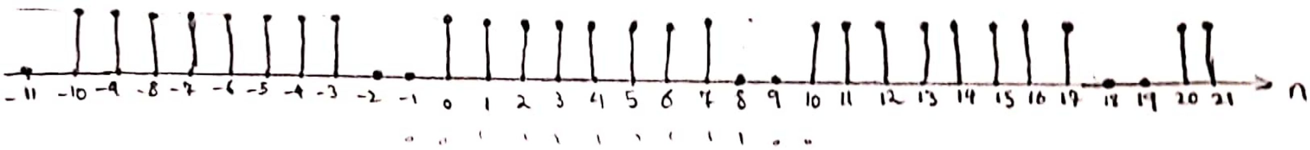
a_k



پ)

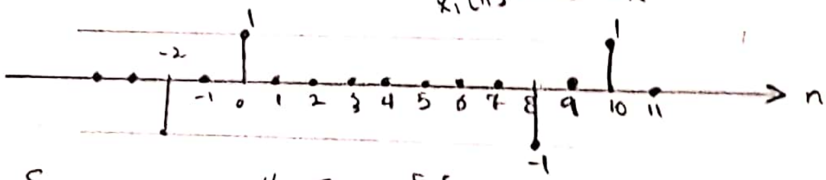
$x[n] = \begin{cases} 1 & 0 \le n \le 7 \\ 0 & n = 8,9 \end{cases} \quad , T = 10$

$x[n] \xrightarrow{F.S.} a_k$



$x_1[n] = x[n] - x[n-1]$

$x_1[n] \xrightarrow{F.S.} b_k$



$x_1[n] = S[n] - S[n-2] \quad // \quad S[n] \xrightarrow{F.S.} C_k = \frac{1}{N}$ قطار ضربه

$x_1[n] = S[n] - S[n-1] \xrightarrow{F.S.} b_k = (1 - e^{-jk\omega_0}) C_k = (1 - e^{-jk\frac{\pi}{5}}) \frac{1}{10}$

$N = 10$

$\omega_0 = \frac{2\pi}{N} = \frac{\pi}{5}$

F.S.

$\to b_k = (1 - e^{-jk\omega_0}) a_k \longrightarrow a_k = \frac{b_k}{1 - e^{-jk\frac{\pi}{5}}}$

$\longrightarrow \boxed{a_k = \frac{1}{10}}$

۵. الف)

$a_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{5}\right) \quad , T = 5$

$\frac{1}{N} = c$ ضریب $\left(\frac{1}{5}\right) \times \left(\frac{5}{2}\right)$ $\quad \omega_0 \quad (1) \quad (-1)$

$a_k = \frac{1}{2} e^{j\frac{2k\pi}{5}} - \frac{1}{2} e^{-j\frac{2k\pi}{5}} = \left(\frac{1}{2}\right) \underbrace{e^{jk\left(\frac{2\pi}{5}\right)(n_0)}}_{\text{شیفت}} - \frac{1}{2} \underbrace{e^{jk\left(\frac{2\pi}{5}\right)(-n_0)}}_{\text{شیفت}}$

خطی

می‌دانیم : $S[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[n - kN] \xrightarrow{F.S.} \frac{1}{N}$

$\Rightarrow x[n] = \frac{5}{2} S[n+1] - \frac{5}{2} S[n-1] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{5}{2}\delta[n-5k+1] - \frac{5}{2}\delta[n-5k-1]\right)$

آزمایش یک : $a_k = a^*_{-k} \longrightarrow x[n]$ سیگنال حقیقی , (۴) زوج $a_k \Longrightarrow$ زوج $x[n] \Rightarrow$ حقیقی و زوج $x[n]$

$$a_k = \begin{cases} (1-e^{jk\frac{\pi}{2}})\,2^{-|k|} & -3 \leq k \leq 3 \\ 0 & k=4 \end{cases} \quad , T = 8$$

$$b_k = \begin{cases} 2^{-|k|} & -3 \leq k \leq 3 \\ 0 & \end{cases} \quad , T = 8 \Longrightarrow x_1[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} b_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$$

$$\rightarrow x_1[n] = \sum_{k=-3}^{3} 2^{-|k|} e^{jk\frac{2\pi}{8}n} = 1 + 2^{-1}(e^{jn\frac{\pi}{4}} + e^{-jn\frac{\pi}{4}}) + 2^{-2}(e^{jn\frac{\pi}{2}} + e^{-jn\frac{\pi}{2}}) + 2^{-3}(e^{jn\frac{3\pi}{4}} + e^{-jn\frac{3\pi}{4}})$$

$$= 1 + \cos(\tfrac{n\pi}{4}) + \tfrac{1}{2}\cos(\tfrac{n\pi}{2}) + \tfrac{1}{4}\cos(n\tfrac{3\pi}{4})$$

$x[n] \xrightarrow{F.S.} a_k$

$x_1[n] \xrightarrow{F.S.} b_k$

$$a_k = b_k - \underbrace{e^{jk\frac{2\pi}{8}\times 2}}_{\text{شیفت ۲ واحد به چپ}} b_k \Rightarrow x[n] = x_1[n] - x_1[n+2]$$

ارتباط خطی

$$\Rightarrow x[n] = 1 + \cos(\tfrac{n\pi}{4}) + \tfrac{1}{2}\cos(\tfrac{n\pi}{2}) + \tfrac{1}{4}\cos(\tfrac{n3\pi}{4}) - \left(1 + \cos(\tfrac{n\pi}{4} + \tfrac{\pi}{2}) + \tfrac{1}{2}\cos(\tfrac{n\pi}{2} + \pi) + \tfrac{1}{4}\cos(\tfrac{n3\pi}{4} + \tfrac{3\pi}{2})\right)$$

$$= \cos(\tfrac{n\pi}{4}) + \tfrac{1}{2}\cos(\tfrac{n\pi}{2}) + \tfrac{1}{4}\cos(\tfrac{n3\pi}{4}) + \sin(\tfrac{n\pi}{4}) + \tfrac{1}{2}\cos(\tfrac{n\pi}{2}) - \tfrac{1}{4}\sin(\tfrac{n3\pi}{4})$$

$$= \cos(\tfrac{n\pi}{4}) + \cos(\tfrac{n\pi}{2}) + \tfrac{1}{4}\cos(\tfrac{3n\pi}{4}) + \sin(\tfrac{n\pi}{4}) - \tfrac{1}{4}\sin(\tfrac{3n\pi}{4})$$

a_k حقیقی $\Longrightarrow$ $x[n]$ حقیقی

a_k نازوج در فرد $\Longrightarrow$ $x[n]$ نازوج در فرد

۴- ضرایب سری فوریه $y(t)$ ؟

$$2y'(t) + 5y(t) = x(t) \quad \Rightarrow \cos(\tfrac{\pi}{3})\cos(5\pi t) - \sin(\tfrac{\pi}{3})\sin(5\pi t)$$

$$x(t) = \sin(3\pi t) + \cos(5\pi t + \tfrac{\pi}{3})$$

$$\left.\begin{array}{l} y(t) \xrightarrow{F.S.} b_k \\ x(t) \xrightarrow{F.S.} a_k \end{array}\right\} \Rightarrow 2(jk\omega_0)b_k + 5b_k = a_k \Rightarrow (2jk\omega_0 + 5)b_k = a_k$$

$$x(t) = \frac{1}{2j}e^{j3\pi t} - \frac{1}{2j}e^{-j3\pi t} + (\tfrac{1}{4} - \tfrac{\sqrt{3}}{4j})e^{j5\pi t} + (\tfrac{1}{4} + \tfrac{\sqrt{3}}{4j})e^{-j5\pi t} \longrightarrow \omega_0 = \pi$$

$$\Rightarrow a_3 = \frac{1}{2j}, \quad a_{-3} = \frac{-1}{2j}, \quad a_5 = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4j} = \frac{1}{4}(1+\sqrt{3}j), \quad a_{-5} = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4j} = \frac{1}{4}(1-\sqrt{3}j)$$

$$b_k = \frac{a_k}{2jk\pi + 5} \Rightarrow b_3 = \frac{1}{10j - 12\pi}, \quad b_{-3} = \frac{-1}{10j - 12\pi}, \quad b_5 = \frac{\frac{1}{4}(1+\sqrt{3}j)}{10j\pi + 5}, \quad b_{-5} = \frac{\frac{1}{4}(1-\sqrt{3}j)}{-10j\pi + 5}$$

(5)

$, b_k = 0$ o.w.

.7

$x(t) \rightarrow \boxed{H} \rightarrow y(t)$

$$\left.\begin{array}{l} x(t) \xrightarrow{F.S.} a_k \\ y(t) \xrightarrow{F.S.} b_k \end{array}\right\} \Rightarrow \quad b_k = a_k H(jk\omega_0) \Rightarrow \{a_{-1}, a_0, a_1\}$$

$$= \begin{cases} j/2 & k = \pm 1 \\ 2 & k = 0 \\ 0 & o.w \end{cases}$$ ⟸ ضرایب سری فوریه خروجی

فرم سیگنال خروجی

$$\Rightarrow y(t) = \frac{j}{2} e^{-j2000\pi t} + 2 + \frac{j}{2} e^{j2000\pi t} = \boxed{j\cos(2000\pi t) + 2}$$

.8

$$y[n] - 2y[n-1] = x[n]$$

$$x[n] = \cos\left(\frac{\pi}{3}n\right) + 2\cos\left(\frac{\pi}{2}n + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}n\right) + \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) - \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} y[n] \xrightarrow{F.S.} b_k \\ x[n] \xrightarrow{F.S.} a_k \end{array}\right\} \Rightarrow b_k - 2e^{-jk\omega_0} b_k = a_k \Rightarrow b_k = \frac{a_k}{(1 - 2e^{-jk\omega_0})}$$

$$x[n] = \frac{1}{2} e^{\frac{\pi n}{3} j} + \frac{1}{2} e^{-\frac{\pi n}{3} j} + \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{\pi n}{2} j} + \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{\pi n}{2} j} - \frac{\sqrt{2}}{2j} e^{\frac{n\pi}{2} j} + \frac{\sqrt{2}}{2j} e^{-\frac{n\pi}{2} j}$$

$$= \frac{1}{2} e^{2\frac{n\pi}{6} j} + \frac{1}{2} e^{-2\frac{n\pi}{6} j} + \frac{\sqrt{2}}{2}(1+j) e^{3\frac{n\pi}{6} j} + \frac{\sqrt{2}}{2}(1-j) e^{-3\frac{n\pi}{6} j}$$

$$\Rightarrow a_k = \begin{cases} \frac{1}{2} & k = \pm 2 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}(1+j) & k = 3 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}(1-j) & k = -3 \\ 0 & o.w \end{cases} \Longrightarrow b_k = \begin{cases} \frac{1}{2(1-2e^{-\pi j/3})} & k = 2 \\ \frac{1}{2(1-2e^{\pi j/3})} & k = -2 \\ \frac{\sqrt{2}(1+j)}{2(1-2e^{-j\pi/2})} & k = 3 \\ \frac{\sqrt{2}(1-j)}{2(1-2e^{j\pi/2})} & k = -3 \\ 0 & \text{Otherwise} \end{cases}$$

در یک سیکل (N=12)

$\omega_0 = \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{N} \Rightarrow N = 12$

در یک سیکل N=12

.9

$$\left.\begin{array}{ll} x[n] \xrightarrow{F.S} a_1, a_2, a_3 & \Rightarrow T = 3 \\ y[n] \xrightarrow{F.S} b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 & \Rightarrow T = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow$$ ک.م.م $(3, 5) = 15$

$$z[n] = x[n] + y[n] \xrightarrow{F.S.} ?\ C_k, \quad T = 15$$

$C_1 = a_1 + b_1$, $C_2 = a_2 + b_2$, $C_3 = a_3 + b_3$, $C_4 = a_1 + b_4$

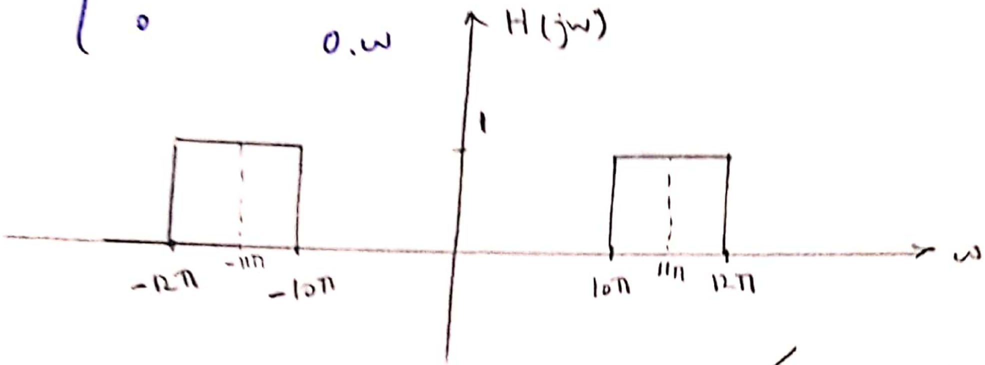
$C_5 = a_2 + b_5$, $C_6 = a_3 + b_1$, $C_7 = a_1 + b_2$, $C_8 = a_2 + b_3$

$C_9 = a_3 + b_4$, $C_{10} = a_1 + b_5$, $C_{11} = a_2 + b_1$, $C_{12} = a_3 + b_2$

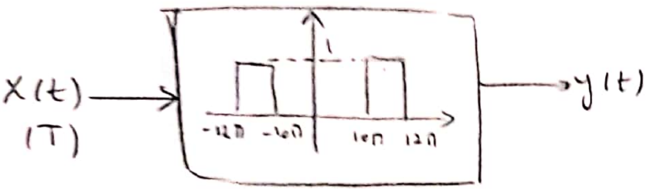
$C_{13} = a_1 + b_3$, $C_{14} = a_2 + b_4$, $C_{15} = a_3 + b_5$

۱۰.

$$H(j\omega) = \begin{cases} 1 & 10\pi \leq |\omega| \leq 12\pi \\ 0 & \text{o.w} \end{cases}$$



الف) هارمونیک اصلی ≡ هارمونیک اول



$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$ ⟶ هارمونیک اصلی $\equiv a_1 e^{j\omega_0 t}$ ⟶ می‌خواهیم فیلتر شود.

$$a_1 e^{j\omega_0 t} \xrightarrow{H(j\omega_0)} 0 \Rightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \rightsquigarrow 0 \leq \frac{2\pi}{T_0} < 10\pi \ \text{یا}\ 12\pi < \frac{2\pi}{T_0}$$

$$\Rightarrow \left\{0 \leq \frac{1}{T_0} < 5\right\} \cup \left\{6 < \frac{1}{T_0}\right\} \Rightarrow \boxed{T \in (0, 1/5) \cup (1/6, +\infty)}$$

ب) کلا صفر شه:

$$12\pi < |\omega_0| \rightarrow 12\pi < \omega_0 \ \cup \ \omega_0 < -12\pi$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

$$\Rightarrow 6 < \frac{1}{T} \ \cup \ \frac{1}{T} < -6$$

$$\Rightarrow \boxed{T \in \left(-\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)}$$

11. مسئله‌ی 3.48 .

(a)

$$\hat{a}_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n-n_0]\, e^{-jk(\frac{2\pi}{N})n}$$

$$= \frac{1}{N} e^{-jk(\frac{2\pi}{N})n_0} \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-jk(\frac{2\pi}{N})n} = e^{-jk(\frac{2\pi}{N})n} a_k$$

(b) با کمک قسمت (a) :

$$\hat{a}_k = a_k - e^{-jk(\frac{2\pi}{N})n} a_k = \left[1 - e^{-jk(\frac{2\pi}{N})n}\right] a_k$$

(c) با کمک قسمت (a) :

$$\hat{a}_k = a_k\left[1 - e^{-jk\pi}\right] = \begin{cases} 0 & k \text{ زوج} \\ 2a_k & k \text{ فرد} \end{cases}$$

(d) با توجه به اینکه $x[n] + x[n+\frac{N}{2}]$ پریودیک است با پریود $\frac{N}{2}$:

$$\hat{a}_k = \frac{2}{N}\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}\left[x[n] + x[n+\tfrac{N}{2}]\right] e^{-jk(\frac{2\pi}{N/2})n} = 2a_{2k} \;;\; 0 \leq k \leq (\tfrac{N}{2}-1)$$

(e)

$$x^*[-n] \xrightarrow{F.S.} \hat{a}_k$$

$$\hat{a}_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x^*[-n]\, e^{-jk(\frac{2\pi}{N})n} = a_k^*$$

(f) برای N زوج ، ضرایب سری فوریه‌ی $(-1)^n x[n]$:

$$(-1)^n x[n] \xrightarrow{F.S.} \hat{a}_k$$

$$\hat{a}_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-j(k-\frac{N}{2})(\frac{2\pi}{N})n} = a_{k-\frac{N}{2}}$$

(g) برای N فرد ، دوره‌ی تناوب سیگنال $(-1)^n x[n]$ برابر با 2N است در نتیجه :

$$(-1)^n x[n] \xrightarrow{F.S.} \hat{a}_k \quad , \quad N \text{ is odd.}$$

$$\hat{a}_k = \frac{1}{2N}\left[\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-j(\frac{k-N}{2})(\frac{2\pi}{N})n} + \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-j(\frac{k-N}{2})(\frac{2\pi}{N})n} e^{-j\pi(k-N)}\right]$$

با توجه به اینکه برای: k فرد ، $\frac{k-N}{2} \in \mathbb{Z}$ و در نتیجه $k-N$ یک عدد صحیح زوج است و همچنین

k زوج ، $k-N$ یک عدد صحیح فرد است و در نتیجه $e^{-j(k-N)\pi} = -1$

در نهایت داریم :

$$\hat{a}_k = \begin{cases} a_{\frac{k-N}{2}} & , k \text{ فرد} \\ 0 & , k \text{ زوج} \end{cases}$$

$$\Rightarrow y[n] = \frac{1}{2}\left[x[n] + (-1)^n x[n]\right] \xrightarrow{(8)}$$

N زوج : $\hat{a}_k = \frac{1}{2}\left[a_k + a_{k-\frac{N}{2}}\right]$

N فرد : $\hat{a}_k = \begin{cases} \frac{1}{2}\left[a_k + a_{\frac{k-N}{2}}\right] & ; k \text{ زوج} \\ \frac{1}{2} a_k & ; k \text{ فرد} \end{cases}$