МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Физтех-школа аэрокосмических технологий

Отчёт о выполнении лабораторной работы 1.4.5

Изучение колебаний струны

Соболевский Фёдор Александрович
Б03-109

Октябрь 2021

1 Аннотация

В работе изучены поперечные стоячие волны на тонкой натянутой струне. Измерены собственные частоты колебаний струны, проверено условие образования стоячих волн. Также измерена скорость распространения поперечных волн на струне и исследована её зависимость от натяжения струны. По результатам измерений вычислена погонная плотность струны.

2 Теоретические сведения

Струной в акустике называют однородную тонкую гибкую упругую нить. В данной работе изучаются поперечные колебания стальной гитарной струны, натянутой горизонтально и закрепленной между двумя неподвижными зажимами. Основное свойство струны — гибкость — обусловлено тем, что её поперечные размеры малы по сравнению с длиной. Это означает, что напряжение в струне может быть направлено только вдоль неё, и позволяет не учитывать изгибные напряжения, которые могли бы возникать при поперечных деформациях (изгибе струны).

В натянутой струне возникает поперечная упругость, т.е. способность сопротивляться всякому изменению формы, происходящему без изменения объема. При вертикальном смещении произвольного элемента струны, возникают силы, действующие на соседние элементы, и в результате вся струна приходит в движение в вертикальной плоскости. Передача возбуждения представляет собой поперечные бегущие волны, распространяющиеся с некоторой скоростью в обе стороны от места возбуждения.

Рассмотрим гибкую однородную струну, в которой создано натяжение T, и получим дифференциальное уравнение, описывающее её малые поперечные свободные колебания. Направим ось x вдоль струны в положении равновесия. Форму струны будем описывать функцией $y(x,t)$. Угол α наклона касательной к струне в точке относительно горизонтального направления в любой момент совпадает с углом наклона касательной к графику функции, то есть $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\delta y}{\delta x}$

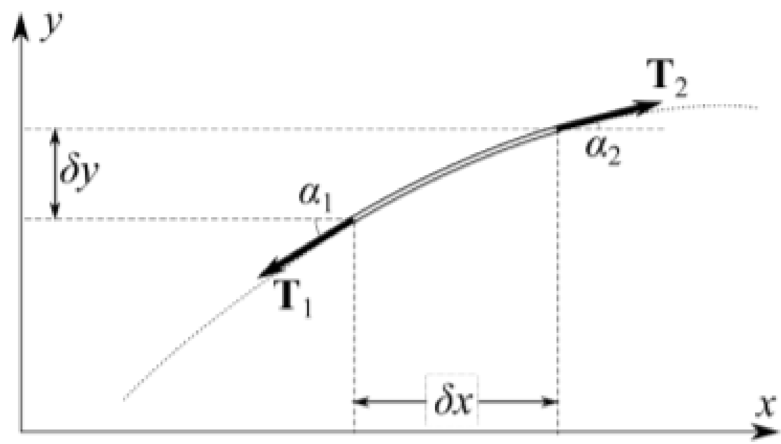

Рис. 1: Схема колебаний струны на промежутке малой длины

Рассмотрим элементарный участок струны, находящийся в точке x, имеющий длину δx и массу $\delta m = \rho_l \delta x$ (см. рисунок 1), где ρ_l [кг/м] — погонная плотность струны. При отклонении от равновесия на выделенный элемент действуют силы натяжения T_1 и T_2, направленные по касательной к струне. Их вертикальная составляющая будет стремиться вернуть рассматриваемый участок струны к положению равновесия, придавая элементу некоторое вертикальное ускорение $\frac{\delta^2 x}{\delta y^2}$. Угол α зависит от координаты вдоль струны и различен в точках приложения сил T_1 и T_2. Таким образом, второй закон Ньютона для вертикального движения элемента струны запишется в следующем виде:

$$\delta m \frac{\delta^2 y}{\delta x^2} = -T_1 \sin \alpha_1 + T_2 \sin \alpha_2 \tag{1}$$

Учитывая, что рассматриваемые отклонения струны от положения равновесия малы, можем сделать ряд упрощений:

1. Длина участка струны в смещенном состоянии практически равна длине участка в положении равновесия, поэтому добавочным напряжением вследствие удлинения струны при деформации можно пренебречь. Следовательно, силы T_1 и T_2 по модулю равны силе натяжения струны: $T_1 \approx T_2 \approx T$.

2. Углы наклона α малы, поэтому $\operatorname{tg}\alpha \approx \sin\alpha \approx \alpha$, и, следовательно, можно положить $\alpha \approx \frac{\delta y}{\delta x}$.

Разделим обе части уравнения движения (1) на устремим размер элемента к нулю, $\delta x \to 0$. Тогда уравнение (1) примет вид

$$\rho_l \frac{\delta^2 y}{\delta t^2} = \frac{T_2 \sin \alpha_2 - T_1 \sin \alpha_1}{\delta x} \approx T \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\delta x} \longrightarrow T \frac{\delta \alpha}{\delta x}$$

Подставляя $\alpha = \frac{\delta y}{\delta x}$ и величину с размерностью скорости

$$u = \sqrt{\frac{T}{\rho_l}}, \tag{2}$$

получаем уравнение свободных малых поперечных колебаний струны, или волновое уравнение:

$$\frac{\delta^2 y}{\delta x^2} = u^2 \frac{\delta^2 y}{\delta t^2} \tag{3}$$

Покажем, что введённая величина u - скорость распространения волны на струне. Рассмотрим произвольную функцию вида $f(x - ut)$, описывающую возмущение струны произвольной формы, движущееся по струне поступательно со скоростью u вдоль оси x, не меняя своей формы. При подстановке её в уравнение (3) получается верное равенство:

$$\frac{\delta^2 f}{\delta x^2} = (-u)^2 f'' = u^2 \frac{\delta^2 f}{\delta t^2},$$

где f'' - производная функции по аргументу $(x - ut)$.

Общее решение уравнения (3) представимо в виде суммы двух волн произвольной формы, бегущих в противоположные стороны со скоростями $\pm u$:

$$y(x,t) = y_1(x - ut) + y_2(x + ut),$$

где y_1 и y_2 - произвольные функции, вид которых в конкретной задаче определяется из начальных и граничных условий. В случае гармонических волн решение представляется в виде

$$y(x,t) = a \cos(\omega t - kx) + b \cos(\omega t + kx). \tag{4}$$

Выражение (4) представляет собой линейную комбинацию (суперпозицию) двух гармонических волн с амплитудами a и b, бегущих навстречу друг другу со скоростью

$$u = \frac{\omega}{k} = \lambda \nu,$$

где λ - длина волны, ν - частота, k - волновое число (пространственная частота). При возбуждении струны периодической гармонической силой её колебания будут описываться формулой (4).

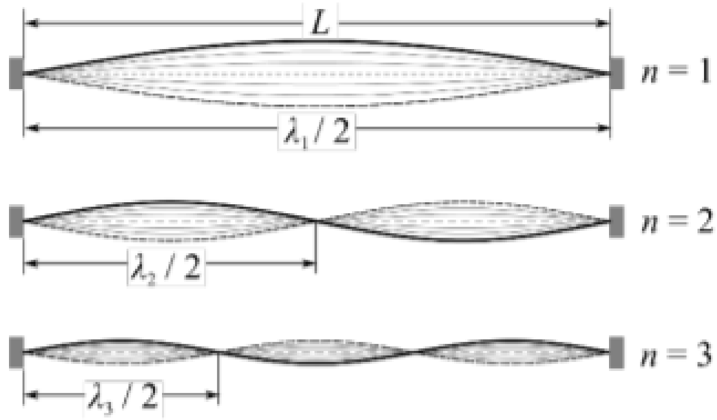

Рис. 2: Стоячие волны для $n = 1, 2, 3$

Найдем вид свободных колебаний струны с закрепленными концами. Пусть струна закреплена в точках $x = 0$ и $x = l$. Концы струны не колеблются, поэтому $y(0, t) = 0$ и $y(L, t) = 0$ при любых t. Используя формулу (4), находим

$$y(0, t) = a \cos \omega t + b \cos \omega t = 0,$$

откуда следует, что $a = -b$. После тригонометрических преобразований выражение (4) примет вид

$$y(x, t) = 2a \sin kx \cdot \sin \omega t \tag{5}$$

Колебания струны, описываемые данной функцией, называются стоячими волнами. Из выражения (5) видно, что стоячая волна может быть получена как суперпозиция двух гармонических бегущих навстречу друг другу волн с равными амплитудами.

Точки струны, в которых $\sin kx = 0$, в любой момент времени неподвижны. Такие точки называются узлами стоячей волны. Остальные участки струны совершают в вертикальной плоскости гармонические колебания с частотой $\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{u}{\lambda}$. Амплитуда колебаний распределена вдоль струны по гармоническому закону: $y_0(x) = 2a \sin kx$. В точках, где $\sin kx = 1$, амплитуда колебаний максимальна, такие точки называются пучностями.

Используя второе граничное условие $y(L, t) = 0$, найдём условие образования на струне стоячих волн: $y(x, t) = 2a \sin kL \cdot \sin \omega t$, откуда

$$\sin kL = 0 \longrightarrow kL = \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{N}$$

Таким образом, стоячие волны на струне с закреплёнными концами образуются, только если на длине струны укладывается целое число полуволн:

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}.$$

На рисунке 2 показана картина стоячих волн для $n = 1, 2, 3$. Число n показывает число пучностей колеблющейся струны (при этом число узлов - $n+1$. Поскольку длина волны однозначно связана с её частотой, струна может колебаться только с определёнными частотами:

$$\nu_n = \frac{u}{\lambda_n} = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{T}{\rho_l}} \tag{6}$$

Разрешённые частоты ν_n называют собственными частотами колебаний струны. Таким образом, спектр собственных частот тонкой струны определён её погонной плотностью ρ_l, внешней силой натяжения T и длиной струны L и не зависит от модуля Юнга материала струны.

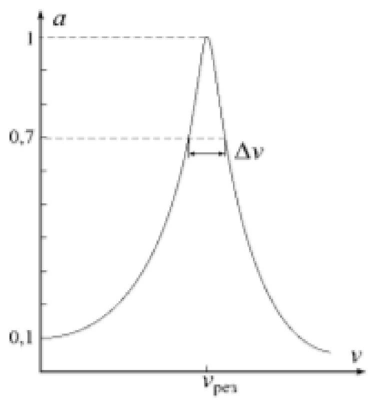

Рис. 3: АЧХ вынужденных колебаний

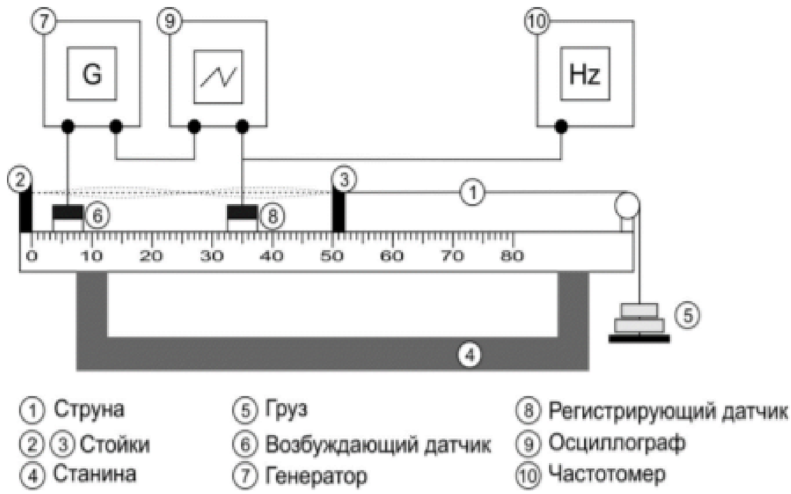

Рис. 4: Схема экспериментальной установки

При колебаниях реальной струны всегда имеет место потеря энергии (часть теряется вследствие трения о воздух; другая часть уходит через неидеально закрепленные концы струны и т.д.). Поддержание незатухающих колебаний в струне может осуществляться точечным источником, в качестве которого в данной работе используется электромагнитный вибратор. Для эффективной раскачки колебаний используется явление резонанса — вынуждающая частота ν должна совпадать с одной из собственных частот струны ν_n. Когда потери энергии в точности компенсируются энергией, поступающей от вибратора, колебания струны становятся стационарными и на ней можно наблюдать стоячие волны. Оценить затухание колебаний можно через добротность колебательной системы. В случае вынужденных колебаний расчёт добротности производится по амплитудно-частотной характеристике (АЧХ) колебаний (см. рисунок 3). Для расчётов в данном опыте воспользуемся известным из теории колебаний результатом: добротность колебательной системы связана с резонансной частотой $\nu_{\text{рез}}$ и шириной резонансной кривой $\Delta\nu$ соотношением

$$Q = \frac{\nu_{\text{рез}}}{\Delta\nu}$$

где ширина резонансной кривой $\Delta\nu$ измеряется на уровне амплитуды, составляющей 0,7 от амплитуды в резонансе.

Схема экспериментальной установки приведена на рисунке 4. Стальная гитарная струна **1** закрепляется в горизонтальном положении между двумя стойками с зажимами **2** и **3**, расположенными на массивной станине **4**. Один конец струны закреплен в зажиме **2** неподвижно. К противоположному концу струны, перекинутому через блок, прикреплена платформа с грузами **5**, создающими натяжение струны. Зажим **3** можно передвигать по станине, устанавливая требуемую длину струны. Возбуждение и регистрация колебаний струны осуществляются с помощью электромагнитных датчиков (вибраторов), расположенных на станине под струной. Электромагнитный датчик **6** подключен к звуковому генератору **7** и служит для возбуждения колебаний струны, частота которых измеряется с помощью частотомера **10** (в некоторых установках частотомер встроен в генератор). Колебания струны регистрируются с помощью электромагнитного датчика **8**, сигнал с которого передается на вход осциллографа **9**. Разъёмы, через которые датчики с помощью кабелей соединяются с генератором и осциллографом, расположены на корпусе станины.

3 Оборудование и инстументальные погрешности

Оборудование: струна, закреплённая на станине с помощью подвижной и неподвижной стоек, набор грузов; подвес для грузов, подвешенный через неподвижный блок к струне; возбуждающий и регистрирующий электромагнитные датчики, звуковой генератор, осциллограф, частотометр.
Измерительные приборы, используемые в данной работе (осциллограф, частотометр), достаточно точные и имеют небольшие систематические погрешности по сравнению со случайной ошибкой измерений, поэтому ими в данной работе можно пренебречь.

4 Результаты измерений и обработка экспериментальных данных

4.1 Предварительные расчёты

Перед началом работы были проведены предварительные расчёты, чтобы оценить первую собственную частоту колебаний струны. Масса подвеса и грузов в первом опыте $m_1 = 919{,}4$ г, сила натяжения струны $T_1 = m_1 g = 9{,}01$ Н. Указанное на установке значение погонной плотности струны $\rho_l = 568{,}4$ мг/м. Из формулы (6) первая собственная частота колебаний струны

$$\nu_{\text{пред}} = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\rho_l}} \approx 125{,}9 \text{ Гц}.$$

Экспериментальное значение $\nu_1 = 124{,}4$ Гц достаточно близко к вычисленному. Отсюда видно, что описанные теоретические закономерности в данном опыте применимы.

4.2 Измерение собственных частот струны

Измерение собственных частот было проведено для 5 различных значений натяжения T и проводилось с помощью осциллографа. При нахождении подходящей частоты колебания струны были визуально самыми большими. Это говорит о достаточной для проведения эксперимента точности данного прибора. Результаты измерений представлены в таблице 1.

№ опыта	m подвеса с грузом, г	T, Н	ν_1, Гц	ν_2, Гц	ν_3, Гц	ν_4, Гц	ν_5, Гц
1	919,4	9,01	124,4	260,4	376,2	503,0	632,6
2	1420,8	13,92	157,7	317,3	477,5	632,4	793,7
3	1915,9	18,78	181,4	363,7	546,5	728,6	910,2
4	2407,0	23,59	203,4	407,5	611,7	816,7	1020,7
5	2863,2	28,06	220,9	443,4	668,1	889,4	1116,0

Таблица 1: Собственные частоты струны для разных натяжений

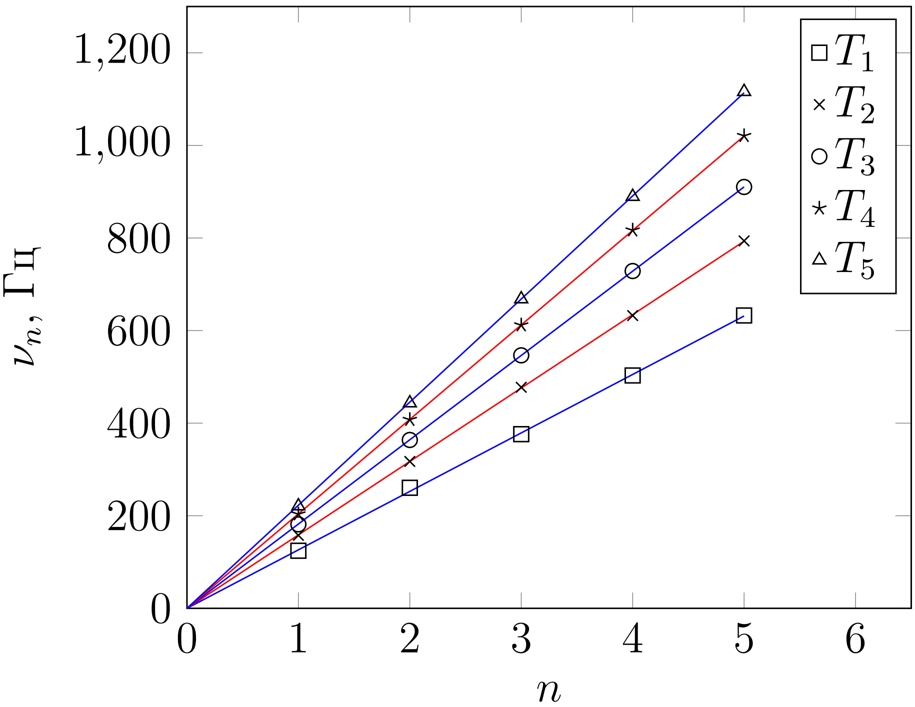

Рис. 5: Зависимость ν_n от n

4.3 Вычисление скоростей распространения волн

Для нахождения скоростей u распространения волн на струне был использован метод построения наилучших прямых. Зависимость ν_n от n можно найти из выражений (2) и (6):

$$\nu_n = \frac{u}{2L} n$$

Данная зависимость линейная. Пусть $k = \frac{u}{2L}$. Построим прямые, проходящие через начало координат (см. рисунок 5), и найдём для каждого значения натяжения T коэффицент k методом наименьших квадратов:

$$k = \frac{\langle n\nu_n \rangle}{\langle n^2 \rangle}$$

Погрешность вычисления k найдём как

$$\sigma_k = \sqrt{\frac{1}{N-1}\left(\frac{\langle \nu_n^2 \rangle}{\langle n^2 \rangle} - k^2\right)}$$

Найденные значения k, u и их погрешности при разных T представлены в таблице 2.

№ опыта	T, Н	k, Гц	σ_k, Гц	u, м/с	σ_u, м/с
1	9,01	126,3	0,6	126,3	0,6
2	13,92	158,60	0,19	158,60	0,19
3	18,78	182,07	0.06	182.07	0.06
4	23,59	204,06	0.08	204.06	0.08
5	28,06	222,72	0,26	222,72	0,26

Таблица 2: Скорость распространения волн на струне при разных натяжениях

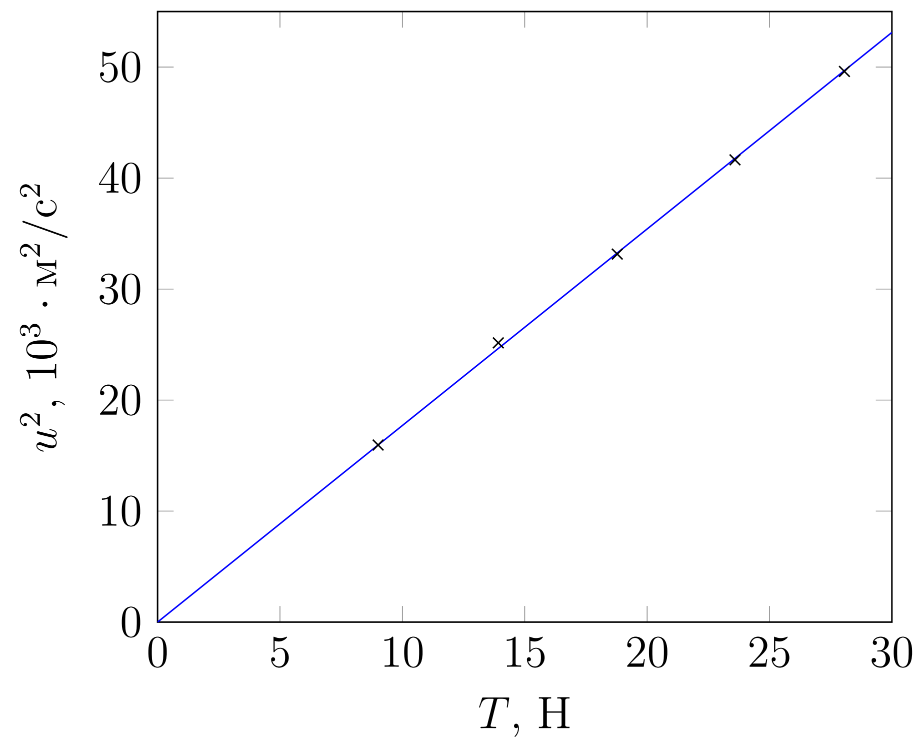

Рис. 6: Зависимость u^2 от T

4.4 Вычисление погонной плотности

По найденным значениям скоростей u можно вычислить погонную плотность стали, снова применяя метод построения наилучших прямых. Зависимость u^2 от T можно найти из выражения (2):

$$u^2 = \frac{1}{\rho_l} T.$$

Данная зависимость также линейная. Пусть $k = \frac{1}{\rho_l}$. Построим прямую, проходящую через начало координат (см. рисунок 6), и найдём для неё коэффицент k и σ_k методом наименьших квадратов:

$$k = \frac{\langle T u^2 \rangle}{\langle T^2 \rangle} = 1770{,}6 \text{ м/кг},$$

$$\sigma_k = \sqrt{\frac{1}{N-1} \left(\frac{\langle u^4 \rangle}{\langle T^2 \rangle} - k^2\right)} = 6{,}0 \text{ м/кг}.$$

Отсюда значение $\rho_l = \frac{1}{k} = 564{,}7 \cdot 10^{-6}$кг/м. Погрешность определения погонной плотности σ_ρ связана с σ_k соотношением

$$\left(\frac{\sigma_\rho}{\rho_l}\right)^2 = (-1)^2 \left(\frac{\sigma_k}{k}\right)^2, \sigma_\rho = \frac{\rho_l}{k} \sigma_k = 1{,}9 \cdot 10^{-6} \text{ кг/м}.$$

Окончательный результат:

- $\rho_l = (564{,}7 \pm 1{,}9) \cdot 10^{-6}$ кг/м.

4.5 Вычисление добротности системы

В пятом опыте ($T = 28{,}632$ Н) первая резонансная частота составила ≈ 222 Гц. Ширина резонансной кривой для данного значения составила 0,28 Гц. Отсюда добротность струны как колебательной системы

$$Q = \frac{\nu_{\text{рез}}}{\Delta\nu} \approx 792{,}86$$

Данное значение достаточно высокое для колебательной системы, исследуемой в учебных целях, что говорит об отсутствии необходимости делать поправку на потери энергии в системе.

5 Обсуждение результатов и вывод

Полученный результат $\rho_l = 564{,}7 \cdot 10^{-6}$ кг/м отличается от указанного на установке (измеренного непосредственным взвешиванием, $\rho_l = 568{,}4 \cdot 10^{-6}$ кг/м) меньше, чем на $2\sigma_\rho$. Относительная погрешность измерений ($\epsilon_\rho = 0{,}65\%$) также невелика. Это говорит о применимости данного метода при измерении погонной плотности наравне с прямым взвешиванием. Все рассмотренные теоретические закономерности выполнились в пределах точности эксперимента.