

# Измерение модуля Юнга стержней методом акустического резонанса. (1.4.8)

Балдин Виктор Б01-303

20 ноября 2023

## 1 Введение

**Цель работы:** исследовать явление акустического резонанса в тонком стержне; измерить скорость распространения продольных звуковых колебаний в тонких стержнях из различных материалов и различных размеров; измерить модули Юнга различных материалов.

**В работе используются:** генератор звуковых частот, частотомер, осциллограф, электромагнитные излучатель и приёмник колебаний, набор стержней из различных материалов.

## 2 Теоретическая часть

Основной характеристикой упругих свойств твёрдого тела является его модуль Юнга  $E$ . Согласно закону Гука, если к элементу среды приложено некоторое механическое напряжение  $\sigma$ , действующее вдоль некоторой оси  $x$  (напряжения по другим осям при этом отсутствуют), то в этом элементе возникнет относительная деформация вдоль этой же оси  $\varepsilon = \Delta x/x_0$ , определяемая соотношением

$$\sigma = \varepsilon E$$

Если с помощью кратковременного воздействия в некотором элементе твёрдого тела создать малую деформацию, она будет далее распространяться в среде в форме волны, которую называют акустической или звуковой. Распространение акустических волн обеспечивается за счёт упругости и инерции среды. Волны сжатия/растяжения, распространяющиеся вдоль оси, по которой происходит деформация, называются продольными. Как будет строго показано далее, скорость  $u$  распространения продольной акустической волны в простейшем случае длинного тонкого стержня определяется соотношением

$$u = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

где  $\rho$  — плотность среды. Заметим, что размерность модуля Юнга  $E$  равна  $[H/m^2]$  и совпадает с размерностью механического напряжения (или давления). Характерные значения модуля Юнга металлов лежат в диапазоне  $E \sim 10^{10} \div 10^{12}$  Па, так что при плотности  $\rho \sim 10^4$  кг/м<sup>3</sup> характерные значения скорости звука в твёрдых телах составляют  $u \sim 10^3 - 10^4$  м/с. В общем случае звуковые волны в твёрдых телах могут быть не только продольными, но и поперечными — при этом возникает деформация сдвига перпендикулярно распространению волны. Кроме того, описание распространения волн в неограниченных средах осложняется тем обстоятельством, что при отличном от нуля коэффициенте Пуассона 1 напряжение вдоль одной из осей вызывает деформацию не только в продольном, но и в поперечном направлении к этой оси. Таким образом, общее описание звуковых волн в твёрдых телах — относительно непростая задача. В данной работе мы ограничимся исследованием наиболее простого случая упругих волн,

распространяющихся в длинных тонких стержнях. Рассмотрим стержень постоянного круглого сечения, радиус  $R$  которого много меньше его длины  $L$ . С точки зрения распространения волн стержень можно считать тонким, если длина  $\lambda$  звуковых волн в нём велика по сравнению с его радиусом:  $\lambda R$ . Такая волна может свободно распространяться только вдоль стержня, поэтому можно считать, что стержень испытывает деформации растяжения и сжатия только вдоль своей оси (заметим, что в обратном пределе коротких волн  $\lambda R$  стержень следует рассматривать как безграничную сплошную среду). Если боковые стенки тонкого стержня свободны (т.е. стержень не сжат с боков), то его деформации описывается законом Гука в форме (1), и, следовательно, его упругие свойства определяются исключительно модулем Юнга среды. Акустическая волна, распространяющаяся в стержне конечной длины  $L$ , испытывает отражение от торцов стержня. Если при этом на длине стержня укладывается целое число полуволн, то отражённые волны будут складываться в фазе с падающими, что приведёт к резкому усилению амплитуды их колебаний и возникновению акустического резонанса в стержне. Изменяя соответствующие резонансные частоты, можно определить скорость звуковой волны в стержне и, таким образом, измерить модуль Юнга материала стержня. Акустический метод является одним из наиболее точных методов определения упругих характеристик твёрдых тел. Получим дифференциальное уравнение, описывающее распространение упругих волн в тонком стержне. Направим ось  $x$  вдоль геометрической оси стержня (рис. 1). Разобьём исходно недеформированный стержень на тонкие слои толщиной  $\Delta x$ . При продольной деформации среды границы слоёв сместятся в некоторые новые положения. Пусть плоскость среды, находящаяся исходно в точке  $x$

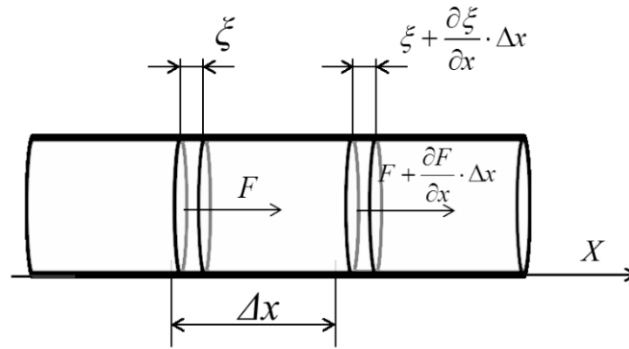


Рис. 1:

сместилась к моменту  $t$  на расстояние  $\xi(x, t)$ . Тогда слой, занимавший исходно отрезок  $[x, x + \Delta x]$ , изменил свой продольный размер на величину

$$\Delta \xi = \frac{\partial \xi}{\partial x} \Delta x$$

### 3 Методика измерений

#### Экспериментальная установка

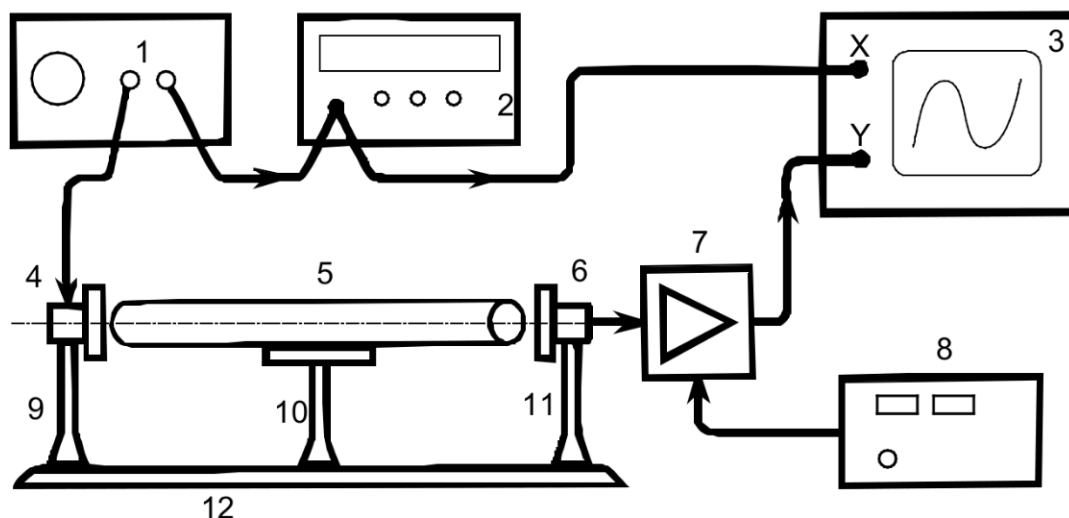


Рис. 3. Схема установки: 1 – генератор звуковой частоты, 2 – частотомер, 3 – осциллограф, 4 – электромагнит-возбудитель, 5 – образец, 6 – электромагнит-приёмник, 7 – усилитель звуковой частоты, 8 – блок питания усилителя, 9, 11 – стойки крепления электромагнитов, 10 – стойка крепления образца, 12 – направляющая

Схема экспериментальной установки приведена на рис. 3. Исследуемый стержень 5 размещается на стойке 10. Возбуждение и приём колебаний в стержне осуществляются электромагнитными преобразователями 4 и 6, расположенными рядом с торцами стержня. Крепления 9, 11 электромагнитов дают возможность регулировать их расположение по высоте, а также перемещать вправо-влево по столу 12.

Электромагнит 4 служит для возбуждения упругих механических продольных колебаний в стержне. На него с генератора звуковой частоты 1 подаётся сигнал синусоидальной формы: протекающий в катушке электромагнита ток создаёт пропорциональное ему магнитное поле, вызывающее периодическое воздействие заданной частоты на торец стержня (к торцам стержней из немагнитных материалов прикреплены тонкие стальные шайбы). Рядом с другим торцом стержня находится аналогичный электромагнитный датчик 6, который служит для преобразования механических колебаний в электрические. Принцип работы электромагнитных датчиков описан подробнее ниже. Сигнал с выхода генератора поступает на частотомер 2 и на вход канала X осциллографа 3. ЭДС, возбуждаемая в регистрирующем электромагните 6, пропорциональная амплитуде колебаний торца стержня, усиливается усилителем 7 и подаётся на вход канала Y осциллографа. Изменяя частоту генератора и наблюдая за амплитудой сигнала с регистрирующего датчика, можно определить частоту акустического резонанса в стержне. Наблюдения в режиме X–Y позволяют сравнить сигналы генератора и датчика, а также облегчает поиск резонанса при слабом сигнале.

Как следует из формулы (2), модуль Юнга материала  $E$  может быть найден по скорости распространения акустических волн в стержне  $u$  и его плотности  $\rho$ . Для определения скорости  $u$  в данной работе используется метод акустического резонанса. Это явление состоит в том, что при частотах гармонического возбуждения, совпадающих с собственными частотами колебаний стержня  $f \approx f_{\text{рез}}/Q$ , резко увеличивается амплитуда колебаний, при этом в стержне образуется стоячая волна. Возбуждение продольных колебаний в стержне происходит посредством воздействия на торец стержня периодической силой, направленной вдоль его оси. Зная

номер гармоники  $n$  и соответствующую резонансную частоту  $f_n$ , на которой наблюдается усиление амплитуды колебаний, можно вычислить скорость распространения продольных волн в стержне:

$$u = 2L \frac{f_n}{n}$$

Таким образом, для измерения скорости  $u$  необходимо измерить длину стержня  $L$  и получить зависимость резонансной частоты от номера резонанса  $n$ . Если все теоретические предположения справедливы, эта зависимость будет прямой пропорциональностью. Следует отметить, что в реальном металлическом стержне могут возбуждаться не только продольные, но и поперечные (в частности, изгибные) колебания стержня. При этом каждому типу колебаний соответствует не одна, а целый спектр частот. Таким образом, стержень «резонирует» не только на частотах, определяемых формулой (15), но и на множестве других частот. Для того чтобы отличить нужные нам резонансные частоты от «паразитных», следует провести предварительные расчёты и не принимать во внимание резонансы, не описываемые зависимостью (15). Скажем также несколько слов о точности измерения резонансной частоты. В первую очередь отметим, что в идеальном случае резонанс достигался бы при строгом совпадении частот  $f = f_n$  (а амплитуда в резонансе стремилась бы к бесконечности). Однако в реальности возбуждение стоячей волны возможно при относительно малом отклонении частоты от резонансной — амплитуда колебаний как функция частоты  $A(f)$  имеет резкий максимум при  $f = f_n$ .

Именно конечная ширина резонанса  $\Delta f$  определяет в основном погрешность измерения частоты в нашем опыте. Используемые в работе металлические стержни являются весьма высокодобротными системами: их добротность оказывается порядка  $Q \sim 102 \div 103$ . Поэтому ширина резонанса оказывается довольно малой, что приводит к необходимости тонкой настройки частоты генератора (при  $f \sim 5$  кГц ширина резонанса  $\Delta f$  оказывается порядка нескольких герц). Кроме того, время установления резонансных колебаний, которое можно оценить как

$$\tau_{\text{уст}} \sim \frac{1}{\Delta f} \sim \frac{Q}{f},$$

оказывается весьма велико, из-за чего поиск резонанса нужно проводить, меняя частоту генератора очень медленно.

## 4 Оборудование

Генератор звуковых частот, частотомер, осциллограф, электромагнитный излучатель и приёмник колебаний, набор стержней из различных материалов.