

# Исследование прецессии уравновешенного гироскопа (1.2.5)

Павлушкин Вячеслав

December 2021

## 1 Введение

**Цель работы:** исследовать вынужденную прецессию гироскопа, установить зависимость скорости вынужденной прецессии от величины момента сил, действующий на ось гироскопа и сравнить ее со скоростью, рассчитанной по скорости прецессии.

**Оборудование:** гироскоп в кардановом подвесе, секундомер, набор грузов, отдельный ротор гироскопа, цилиндр известной массы, крутильный маятник, штангенциркуль, линейка.

## 2 Теоретические сведения

В этой работе исследуется зависимость скорости прецессии гироскопа от момента силы, приложенной к его оси. Для этого к оси гироскопа подвешиваются грузы. Скорость прецессии определяется по числу оборотов рычага вокруг вертикальной оси и времени, которое на это ушло, определяемому секундомером. В процессе измерений рычаг не только поворачивается в результате прецессии гироскопа, но и опускается. Поэтому его в начале опыта следует преподнять на 5-6 градусов. Опять надо закончить, когда рычаг опустится на такой же угол.

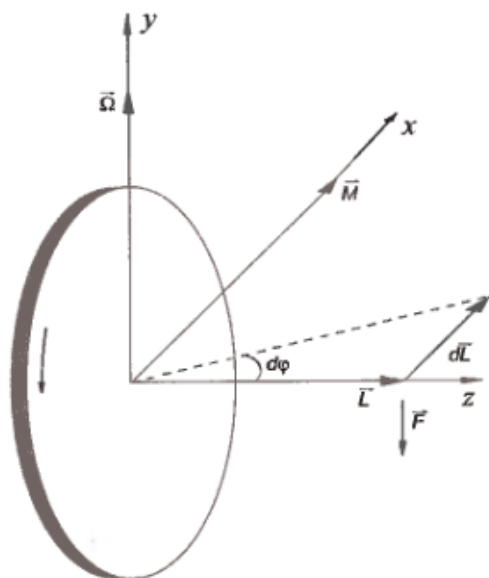


Рис. 1. Маховик

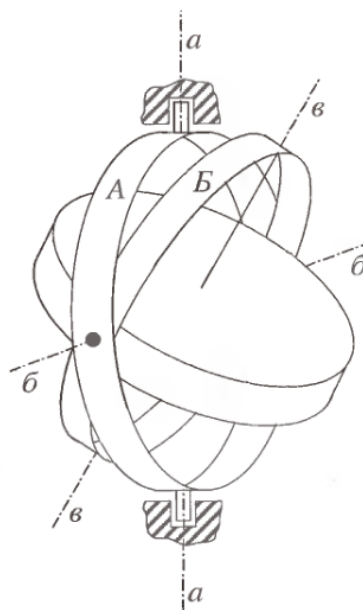


Рис. 2. Гироскоп в кардановом подвесе

Измерение скорости прецессии гироскопа позволяет вычислить угловую скорость вращения его ротора. Расчет производится по формуле:

$$\Omega = \frac{mgl}{I_z \omega_0},$$

где  $m$  – масса груза,  $l$  – расстояние от центра карданова подвеса до точки крепления груза на оси гироскопа,  $I_z$  – момент инерции гироскопа по его главной оси вращения.  $\omega_0$  – частота его вращения относительно главной оси,  $\Omega$  – частота прецессии.

Момент инерции ротора относительно оси симметрии  $I_0$  измеряется по крутильным колебаниям точной копии ротора, подвешиваемой вдоль оси симметрии на десткой проволоке. Период крутильных колебаний  $T_0$  зависит от момента инерции  $I_0$  и модуля кручения проволоки  $f$ :

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I_0}{f}}.$$

Чтобы исключить модуль кручения проволоки, вместо ротора гироскопа к той же проволоке подвешивают цилиндр правильной формы с известными размерами и массой, для которого легко можно вычислить момент инерции  $I_{\text{ц}}$ . Для определения момента инерции ротора гироскопа имеем:

$$I_0 = I_{\text{ц}} \frac{T_0^2}{T_{\text{ц}}^2}, \quad (1)$$

Здесь  $T_{\text{ц}}$  – период крутильных колебаний цилиндра.

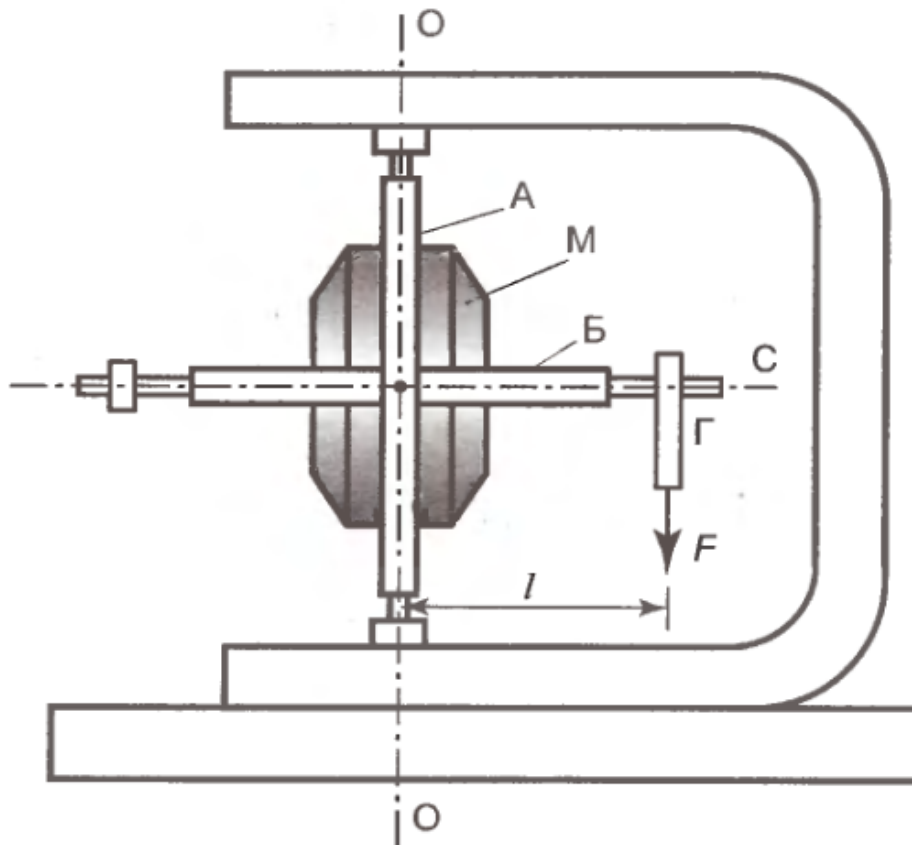


Рис. 3. Схема экспериментальной установки

Скорость вращения ротора гироскопа можно определить и не прибегая к исследованию прецессии. У используемых в работе гироскопов статор имеет две обмотки, необходимые для быстрой раскрутки гироскопа. В данной работе одну обмотку используют для раскрутки гироскопа,

а вторую – для измерения числа оборотов ротора. Ротор электромотора всегда немного намагничен. Вращаясь, он наводит во второй обмотке переменную ЭДС индукции, частота которой равна частоте вращения ротора. Частоту этой ЭДС можно, в частности, измерить по фигурам Лиссажу, получаемым на экране осциллографа, если на один вход подать исследуемую ЭДС, а на другой – переменное напряжение с хорошо прокалиброванного генератора. При совпадении частот на экране получаем эллипс.

### 3 Ход работы

Данные для частоты прецессии и опускания гироскопа:  $\Omega = \frac{2\pi N}{t}$

Масса	$T$ , с	$N$	$\Omega$ , $\text{с}^{-1}$
$m = 336$ г	178,52	6	$21,12 \cdot 10^{-2}$
	179,23	6	$21,03 \cdot 10^{-2}$

Масса	$T$ , с	$N$	$\Omega$ , $\text{с}^{-1}$
$m = 269$ г	186,41	5	$16,85 \cdot 10^{-2}$
	187,02	5	$16,80 \cdot 10^{-2}$

Масса	$T$ , с	$N$	$\Omega$ , $\text{с}^{-1}$
$m = 215$ г	188,31	4	$13,35 \cdot 10^{-2}$
	188,01	4	$13,38 \cdot 10^{-2}$

Масса	$T$ , с	$N$	$\Omega$ , $\text{с}^{-1}$
$m = 174$ г	232,43	4	$10,81 \cdot 10^{-2}$
	231,07	4	$10,88 \cdot 10^{-2}$

Масса	$T$ , с	$N$	$\Omega$ , $\text{с}^{-1}$
$m = 138$ г	219,81	3	$8,58 \cdot 10^{-2}$
	218,99	3	$8,61 \cdot 10^{-2}$

Каждый раз рычаг опускался на  $12^\circ$ , что равняется  $\frac{\pi}{15}$ . Для каждой массы посчитаем угловую скорость опускания рычага по формуле:  $\omega = \frac{\pi/15}{T}$ , и момент  $M = mgl$ , где  $l = 121$  мм:

- $m = 336$  г,  $\omega = 11,71 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}$ ,  $M = 39,88 \cdot 10^{-2} \text{ Н}\cdot\text{м}$
- $m = 269$  г,  $\omega = 11,22 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}$ ,  $M = 31,93 \cdot 10^{-2} \text{ Н}\cdot\text{м}$
- $m = 215$  г,  $\omega = 11,13 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}$ ,  $M = 25,52 \cdot 10^{-2} \text{ Н}\cdot\text{м}$
- $m = 174$  г,  $\omega = 9,04 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}$ ,  $M = 20,65 \cdot 10^{-2} \text{ Н}\cdot\text{м}$
- $m = 138$  г,  $\omega = 9,55 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}$ ,  $M = 16,38 \cdot 10^{-2} \text{ Н}\cdot\text{м}$

Построим график зависимости  $\Omega(M)$ :

Далее найдем момент инерции ротора гироскопа по формуле (1), для этого посчитаем момент инерции цилиндра, с известной нам массой и диаметром:  $I_{\text{ц}} = \frac{1}{2}mr^2 \approx 1,23 \cdot 10^{-3} \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ , а периоды:  $T_0 = 3,933$  с и  $T_{\text{ц}} = 3,19$  с. Тогда  $I_0 \approx 0,8 \cdot 10^{-3} \text{ кг}\cdot\text{м}^2$

### 4 Погрешности $\Omega$ и $I_0$

$$\sigma_{\Omega} = \sqrt{\sigma_{\text{случ}}^2 + \sigma_{\text{сист}}^2} \quad \sigma_{\Omega}^{\text{сист}} = \Omega \varepsilon_T \quad \sigma_{\Omega}^{\text{случ}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (\Omega_i - \bar{\Omega})^2}$$

Каждая частота  $\Omega$  с учетом погрешностей:

- $\Omega = (21,08 \pm 0,03) \cdot 10^{-2} \text{ с}^{-1}$

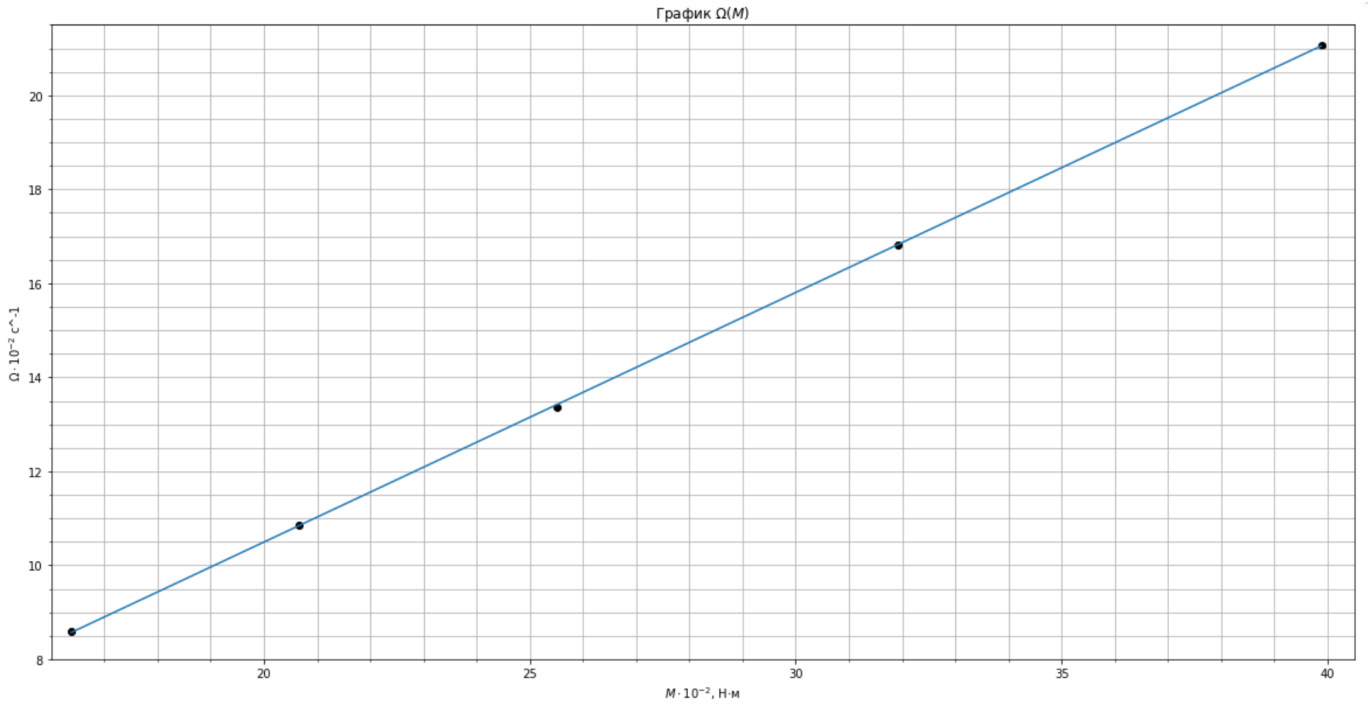


Рис. 1: Зависимость  $\Omega$  от  $M$

- $\Omega = (16,83 \pm 0,04) \cdot 10^{-2} \text{ с}^{-1}$
- $\Omega = (13,37 \pm 0,05) \cdot 10^{-2} \text{ с}^{-1}$
- $\Omega = (10,85 \pm 0,05) \cdot 10^{-2} \text{ с}^{-1}$
- $\Omega = (8,60 \pm 0,03) \cdot 10^{-2} \text{ с}^{-1}$

Погрешность  $\sigma_{I_0} = I_0 \cdot \sqrt{\varepsilon_{I_{\text{ц}}}^2 + 4\varepsilon_{T_0}^2 + 4\varepsilon_{T_{\text{ц}}}^2} \approx 0,03 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ , значит  $I_0 = (0,80 \pm 0,03) \text{ кг} \cdot \text{м}^2$

## 5 Определение частоты вращения ротора гироскопа

Определить частоту вращения ротора можно по формуле  $\omega_0 = \frac{1}{kI_0}$ , где  $k$  – коэффициент наклона графика зависимости  $\Omega(M)$ .

График построен по МНК, а значит:

$$k = \frac{\langle xy \rangle - \langle x \rangle \langle y \rangle}{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} \approx 0,531 \frac{1}{\text{Дж} \cdot \text{с}}$$

$$\sigma_k^{\text{сл}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{\langle y^2 \rangle - \langle y \rangle^2}{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} - k^2} \approx 0,002 \frac{1}{\text{Дж} \cdot \text{с}}$$

Тогда  $\omega_0 = 2354,05 \text{ с}^{-1}$ , а  $\sigma_{\omega_0} = \omega_0 \cdot \sqrt{\varepsilon_{I_0}^2 + \varepsilon_k^2} \approx 88,72 \text{ с}^{-1}$

Используя полученную угловую скорость можно определить частоту вращения ротора гироскопа:  $\nu = \frac{\omega_0}{2\pi} \approx 374,7 \text{ Гц}$ , а  $\sigma_\nu = \nu \varepsilon_{\omega_0} \approx 14,1 \text{ Гц}$

Таким образом получаем:  $\nu = (374,7 \pm 14,1) \text{ Гц}$ , что с учетом сигмы попадает в значение полученное с помощью осциллографа  $\nu_0 = 387,2 \text{ Гц}$

## 6 Момент силы трения

Оценить момент силы трения мы можем по формуле:  $M = \omega I_0 \omega_0$ , а  $\sigma_M = M \cdot \sqrt{\varepsilon_M^2 + \varepsilon_k^2}$ . Для каждой массы момент силы трения будет свой:

- $m = 336$  г,  $\omega = 11,71 \cdot 10^{-4}$  с<sup>-1</sup>,  $M = (2,21 \pm 0,02) \cdot 10^{-3}$  Н·м
- $m = 269$  г,  $\omega = 11,22 \cdot 10^{-4}$  с<sup>-1</sup>,  $M = (2,11 \pm 0,02) \cdot 10^{-3}$  Н·м
- $m = 215$  г,  $\omega = 11,13 \cdot 10^{-4}$  с<sup>-1</sup>,  $M = (2,09 \pm 0,02) \cdot 10^{-3}$  Н·м
- $m = 174$  г,  $\omega = 9,04 \cdot 10^{-4}$  с<sup>-1</sup>,  $M = (1,70 \pm 0,02) \cdot 10^{-3}$  Н·м
- $m = 138$  г,  $\omega = 9,55 \cdot 10^{-4}$  с<sup>-1</sup>,  $M = (1,80 \pm 0,02) \cdot 10^{-3}$  Н·м