

Работа 1.2.4

Определение главных моментов инерции твердых тел с помощью крутильных колебаний

Балдин Виктор

23 октября 2023 г.

1 Аннотация

Цель работы: измерить периоды крутильных колебаний рамки при различных положениях закрепленного в ней тела, проверить теоретическую зависимость между периодами крутильных колебаний тела относительно различных осей, определить моменты инерции относительно нескольких осей для каждого тела, по ним найти главные моменты инерции тела и построить эллипсоид инерции.

Оборудование: установка для получения крутильных колебаний, набор исследуемых твердых тел, секундомер.

2 Теоретические сведения

Инерционные свойства твердого тела при вращении определяется пространственным распределением. Оно характеризуется тензором инерции тела. Тензор инерции твердого тела является симметричным тензором 2-ого ранга $J \in T_2^0(V)$ и имеет 6 независимых компонент, которые в прямоугольной декартовой системе координат выражаются как:

$$I_{ij} = \int (\delta_{ij} r^2 - r_i r_j) dm = I_{ji}, \quad (1)$$

где r — расстояния от точек до центра, относительно которого вычисляется тензор инерции, а r_i — координатные компоненты соответствующих отрезков, i и j — номера координат (от 1 до 3).

Если для какой либо системы координат все 6 компонент известны, то момент инерции тела относительно произвольной оси l , проходящей через начало координат может быть вычислен по формуле:

$$I_l = n^j n^i I_{ij} = \vec{n}^T I \vec{n} \quad (2)$$

где \vec{n} — единичный вектор-столбец который задает направление оси, I — тензор инерции. А момент импульса \vec{L} и вращательная энергия тела $E_{\text{вращ}}$ тогда будут выражаться как:

$$E_{\text{вращ}} = \frac{1}{2} \vec{\omega}^T I \vec{\omega} = \frac{1}{2} \sum_{ij} \omega^i J_{ij} \omega^j \quad (3)$$

$$\vec{L} = I \vec{\omega}, \quad L_i = \sum_j I_{ij} \omega^j \quad (4)$$

Отложим вдоль оси l из начала координат радиус-вектор r равный по длине $1/\sqrt{I_l}$. Проведем множество таких отрезков, соответствующих различным направлениям оси l . Геометрическое место концов указанных отрезков, является поверхность второго порядка - эллипсоид. Этот эллипсоид принято называть эллипсоидом инерции. Он жестко связан с телом для которого он построен. Знание эллипсоида инерции позволяет найти момент инерции тела относительно любой оси, проходящей через центр эллипсоида. Длина отрезка r будет определять момент инерции тела относительно оси l :

$$I_l = \frac{1}{r^2} \quad (5)$$

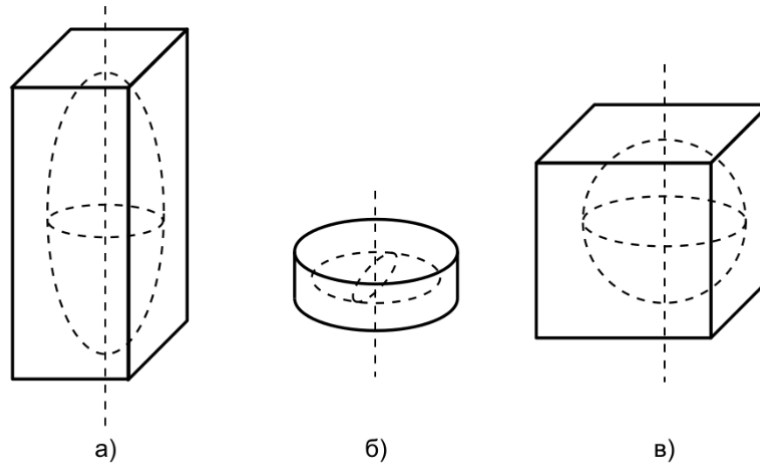


Рис. 1: Эллипсоиды вращения для разных тел

Как и всякий симметричный тензор второго ранга может быть диагонализирован некоторой заменой координат. Пусть система координат, в которой он диагонализирован имеет оси Ox, Oy, Oz , тогда эти оси совпадают с главными осями тела. Полученные диагональные элементы I_x, I_y, I_z называются главными моментами инерции тела, а уравнение эллипсоида инерции в этих координатах примет вид:

$$I_x r_x^2 + I_y r_y^2 + I_z r_z^2 = 1 \quad (6)$$

Крутильные колебания рамки с телом описываются уравнением:

$$(I + I_p)\ddot{\varphi} + f\varphi = 0 \quad (7)$$

Здесь I и I_p - моменты инерции тела и рамки относительно оси вращения, φ - угол поворота рамки, меняющийся со временем t , f - модуль кручения проволоки. Отсюда период этих колебаний:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I + I_p}{f}} \quad (8)$$

На рисунке показано, как проходят оси вращения в параллелепипеде. Оси AA', BB' и CC' являются главными. Моменты инерции относительно этих осей обозначим соответственно I_x, I_y, I_z .

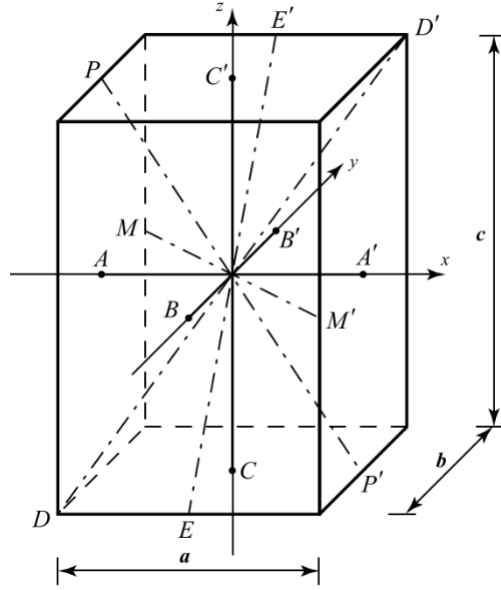


Рис. 2: Оси вращения прямоугольного параллелепипеда

Момент инерции I_D при вращении относительно диагонали DD' выражается через главные моменты с помощью формулы:

$$I_d = I_x \frac{a^2}{d^2} + I_y \frac{b^2}{d^2} + I_z \frac{c^2}{d^2} \quad (9)$$

Используя связь момента инерции с периодом крутильных колебаний получаем соотношение между периодами колебаний относительно осей DD' , EE' , MM' и PP' с периодами крутильных колебаний относительно главных осей.

$$\begin{cases} (b^2 + c^2)T_E^2 = b^2T_y^2 + c^2T_z^2 \\ (a^2 + c^2)T_P^2 = a^2T_x^2 + c^2T_z^2 \\ (a^2 + b^2)T_M^2 = a^2T_x^2 + b^2T_y^2 \end{cases} \quad (10)$$

Эти соотношения также необходимо проверить экспериментально.

3 Методика измерений

В данной работе используется установка для измерения крутильных колебаний, приведенная на рисунке 3. Рамка 1 жестко соединена с проволокой 2, закрепленной вертикально в специальных зажимах 3, позволяющих сообщить начальное закручивание для возбуждения крутильных колебаний вокруг вертикальной оси.

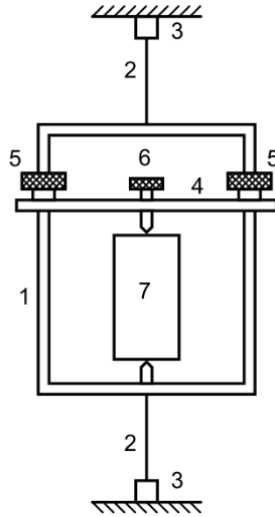


Рис. 3: Схема установки

4 Используемое оборудование

Установка для получения крутильных колебаний, набор исследуемых твердых тел, секундомер.

5 Результаты измерений и обработка данных

1. Измерим период сначала для ненагруженной рамки (здесь и далее период измеряем $N = 15$ раз, погрешность секундомера считаем приблизительно равной $\sigma_t^{\text{сист}} = 0.20$ с):

Таблица 1: Колебания рамки

t , с	38.4	38.6	38.6	38.6	38.5
T , с	2.56	2.57	2.57	2.57	2.57

Отсюда средний период

$$\bar{T}_p = \frac{1}{N} \sum_i T_i = 2.57 \text{ с},$$

Среднеквадратичное отклонение

$$\sigma_T^{\text{случ}} = \sqrt{\frac{\sum_i (T_i - \bar{T})^2}{N}} = 0.01 \text{ с}$$

Общая погрешность таким образом равна:

$$\sigma_T = \frac{\sigma_t^{\text{сист}}}{N} + \sigma_T^{\text{случ}} = 0.03 \text{ с}$$

2. Измерим размеры и массу цилиндра:

Таблица 2: Измерения размеров цилиндра

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Среднее	σ
h , мм	49.1	49.5	49.3	49.3	49.2	49.2	49.2	49.4	49.2	49.2	49.3	0.2
d , мм	88.3	88.1	88.1	88.1	88.1	88.1	88.1	88.1	88.1	88.0	88.1	0.2

Масса $m_{\text{цил}} = 2.264 \pm 0.001$ кг. Отсюда момент инерции

$$I_{\text{цил}} = \frac{1}{8}md^2 = 2197 \text{ кг} \cdot \text{мм}^2,$$

$$\sigma_I = I \sqrt{\left(\frac{\sigma_m}{m}\right)^2 + 2 \left(\frac{\sigma_d}{d}\right)^2} = 8 \text{ кг} \cdot \text{мм}^2$$

3. Измерим период колебаний цилиндра

Таблица 3: Колебания цилиндра

Главная ось					
t , с	47.9	47.6	47.2	47.4	47.6
T , с	3.19	3.17	3.15	3.16	3.17
Боковая ось					
t , с	45.1	45.0	45.3	45.0	44.9
T , с	3.01	3.00	3.02	3.00	2.99

$$\overline{T}_z^{\text{цил}} = 3.17 \text{ с}, \quad \overline{T}_x^{\text{цил}} = 3.00 \text{ с}$$

4. Найдем момент инерции рамки через формулу (8):

$$\frac{T_p}{T_z^{\text{цил}}} = \sqrt{\frac{I_p}{I_p + I_{\text{цил}}}},$$

$$I_p = I_{\text{цил}} \frac{T_p^2}{(T_z^{\text{цил}})^2 - T_p^2} = 4213 \text{ кг} \cdot \text{мм}^2$$

$$\varepsilon_{I_p} = \frac{\sigma_I}{I} + 4\varepsilon_T = 0.06$$

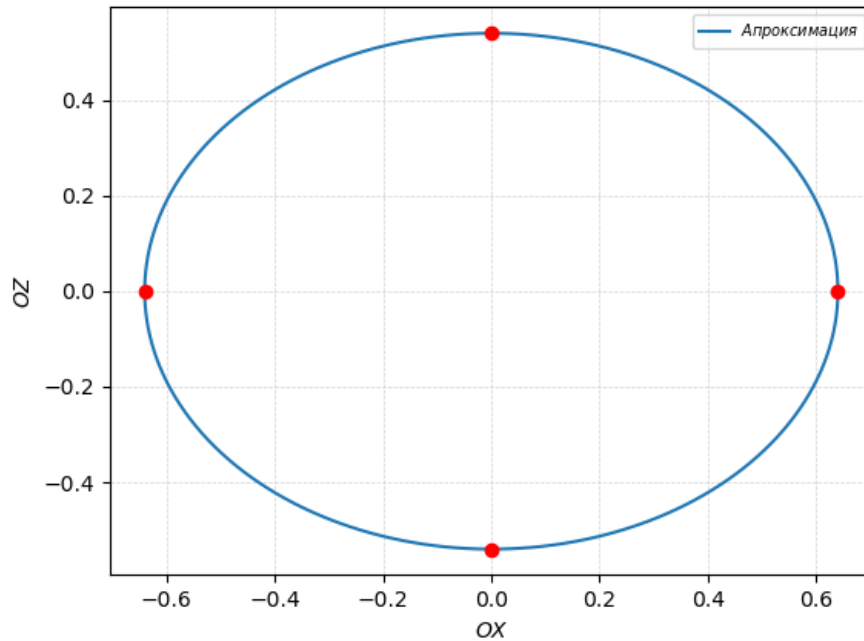
5. Вычислим величины $1/\sqrt{T^2 - T_p^2}$ для осей x и z .

$$\frac{1}{\sqrt{T_x^2 - T_p^2}} = 0.64 \text{ с}^{-2}$$

$$\frac{2}{\sqrt{T_z^2 - T_p^2}} = 0.54 \text{ с}^{-2}$$

6. Нарисуем сечения эллипсоида инерции плоскостью XOZ для цилиндра:

Рис. 4: Сечение плоскостью $AA'M$



7. Повторим все те же действия теперь для куба:

Таблица 4: Измерения для куба

Измерения длины												
№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	\bar{a}	σ_a
a , мм	92.7	92.8	92.8	92.6	92.6	92.6	92.6	92.6	92.7	92.8	92.7	0.1
Ось AA'												
№	1	2	3	4	5	Среднее						
t , с	45.4	45.4	45.3	45.3	45.2	45.3						
T , с	3.03	3.03	3.02	3.02	3.01	3.02						
Ось MM'												
№	1	2	3	4	5	Среднее						
t , с	45.6	45.6	45.5	45.3	45.5	45.5						
T , с	3.04	3.04	3.03	3.02	3.03	3.03						
Ось DD'												
№	1	2	3	4	5	Среднее						
t , с	45.5	45.7	45.4	45.5	45.5	45.5						
T , с	3.03	3.05	3.03	3.03	3.03	3.03						

Вычислим моменты инерции:

$$I_{AA'} = I_p \frac{T_{AA'}^2 - T_p^2}{T_p^2} = 1605 \text{ кг} \cdot \text{мм}^2,$$

$$I_{MM'} = I_p \frac{T_{MM'}^2 - T_p^2}{T_p^2} = 1643 \text{ кг} \cdot \text{мм}^2,$$

$$I_{DD'} = I_p \frac{T_{DD'}^2 - T_p^2}{T_p^2} = 1643 \text{ кг} \cdot \text{мм}^2$$

Так как они примерно одинаковые, можно рассчитать погрешность лишь для одного случая:

$$\varepsilon_I = \varepsilon_{I_p} + 4\varepsilon_T = 0.12$$

6 Обсуждение результатов

В результате этой работы мы убедились в выполнении теоретических соотношений. Построили эллипсоид инерции для цилиндра, а также убедились в равенстве главных моментов инерции для куба, то есть его эллипсоидом инерции действительно является сфера.

7 Вывод

Использование установки дает некоторую погрешность, но ее точности вполне достаточно для получения результатов. По виду эллипсоида инерции были вычислены соотношения между моментами инерции тела относительно главных осей, которые совпадают с теоретическим расчетом в пределах погрешности.