Работа 3.6.1

Спектральный анализ электрических сигналов.

Балдин Виктор

Цель работы: исследование спектра колебаний электрических сигналов.
В работе используются: персональный компьютер; USB-осциллограф АКИП-4107; функциональный генератор WaveStation2012; соединительные кабели.

Идея

Разложение сложных сигналов на периодические колебания

Используется разложение в сумму синусов и косинусов с различными аргументами или, как чаще его называют, *разложение в ряд Фурье.*

Пусть задана функция $f(t)$, которая периодически повторяется с частотой $\Omega_1 = \dfrac{2\pi}{T}$, где T — период повторения импульсов. Её разложение в ряд Фурье имеет вид

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(n\Omega_1 t\right) + b_n \sin\left(n\Omega_1 t\right)\right] \tag{1}$$

или

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(n\Omega_1 t - \psi_n\right). \tag{2}$$

Если сигнал чётен относительно $t = 0$, в тригонометрической записи остаются только члены с косинусами. Для нечетной наоборот.

Коэффициенты определяются по формуле

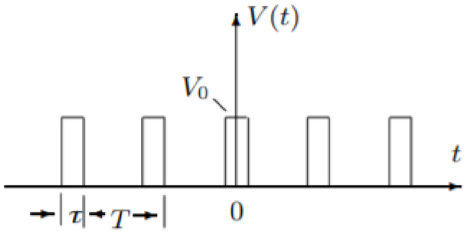
$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int\limits_{t_1}^{t_1+T} f(t) \cos\left(n\Omega_1 t\right) dt, \\ b_n &= \frac{2}{T} \int\limits_{t_1}^{t_1+T} f(t) \sin\left(n\Omega_1 t\right) dt. \end{aligned} \tag{3}$$

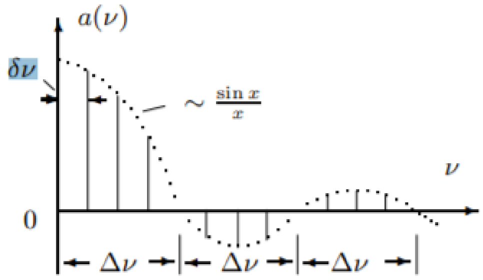
Здесь t_1 — время, с которого мы начинаем отсчет.

Сравнив формулы (1) и (2) можно получить выражения для A_n и ψ_n:

$$\begin{aligned} &A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \\ &\psi_n = \arctan\frac{b_n}{a_n}. \end{aligned} \tag{4}$$

Периодическая последовательность прямоугольных импульсов





Введем величину: $\Omega_1 = \dfrac{2\pi}{T}$, где T — период повторения импульсов.

Коэффициенты при косинусных составляющих будут равны

$$a_n = \frac{2}{T}\int\limits_{-\tau/2}^{\tau/2} V_0 \cos\left(n\Omega_1 t\right) dt = 2V_0 \frac{\tau}{T}\frac{\sin\left(n\Omega_1 \tau/2\right)}{n\Omega_1\tau/2} \sim \frac{\sin x}{x}. \tag{5}$$

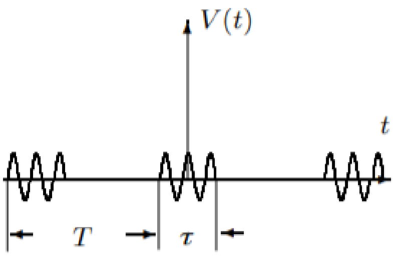
Здесь V_0 - амплитуда сигнала.

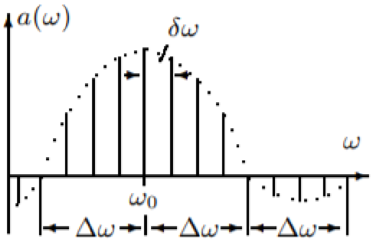
Поскольку наша функция четная, то $b_n = 0$.

Пусть T кратно τ. Тогда введем ширину спектра, равную $\Delta\omega$ — расстояние от главного максимума до первого нуля огибающей, возникающего, как нетрудно убедиться при $n = \dfrac{2\pi}{\tau\Omega_1}$. При этом

$$\Delta\omega\tau \simeq 2\pi \Rightarrow \Delta\nu\Delta t \simeq 1. \tag{6}$$

Периодическая последовательность цугов



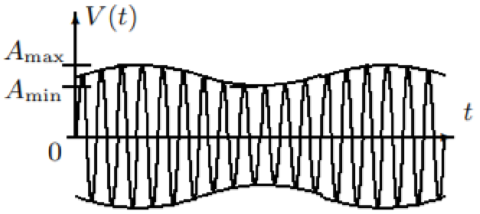


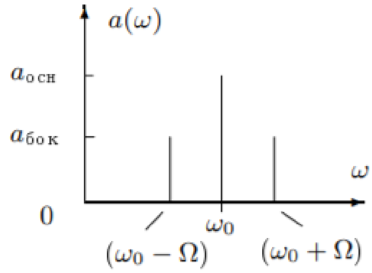
Возьмём цуги колебания $V_0\cos(\omega_0 t)$ с длительностью цуга τ и периодом повторений T. Функция $f(t)$ снова является четной относительно $t = 0$. Коэффициент при n-ой гармонике согласно формуле (3) равен

$$a_n = \frac{2}{T}\int\limits_{-\tau/2}^{\tau/2} V_0\cos\left(\omega_0 t\right)\cdot\cos\left(n\Omega_1 t\right) dt = V_0\frac{\tau}{T}\left(\frac{\sin\left[\left(\omega_0 - n\Omega_1\right)\frac{\tau}{2}\right]}{\left(\omega_0 - n\Omega_1\right)\frac{\tau}{2}} + \frac{\sin\left[\left(\omega_0 + n\Omega_1\right)\frac{\tau}{2}\right]}{\left(\omega_0 + n\Omega_1\right)\frac{\tau}{2}}\right). \tag{7}$$

Пусть T кратно τ. Тогда спектры последовательности прямоугильных сигналов и цугов аналогичны, но максимумы сдвинуты на ω_0.

Амплитудно-модулированные колебания





Рассмотрим гармонические колебания высокой частоты ω_0, амплитуда которых медленно меняется по гармоническому закону с частотой $\Omega \ll \omega_0$.

$$f(t) = A_0 \left[1 + m \cos \Omega t\right] \cos \omega_0 t. \tag{8}$$

Коэффициент m называется *глубиной модуляции*. При $m < 1$ амплитуда меняется от минимальной $A_{min} = A_0(1 - m)$ до максимальной $A_{max} = A_0(1 + m)$. Глубина модуляции может быть представлена в виде

$$m = \frac{A_{max} - A_{min}}{A_{max} + A_{min}}. \tag{9}$$

Простым тригонометрическим преобразованием уравнения (8) можно найти спектр колебаний

$$f(t) = A_0 \cos \omega_0 t + \frac{A_0 m}{2} \cos\left(\omega_0 + \Omega\right) t + \frac{A_0 m}{2} \cos\left(\omega_0 - \Omega\right) t. \tag{10}$$