

Исследование прецессии уравновешенного гироскопа (1.2.5)

Балдин Виктор

20 ноября 2023

1 Аннотация

Цель работы: исследовать вынужденную прецессию гироскопа, установить зависимость скорости вынужденной прецессии от величины момента сил, действующий на ось гироскопа и сравнить ее со скоростью, рассчитанной по скорости прецессии.

Оборудование: гироскоп в кардановом подвесе, секундомер, набор грузов, отдельный ротор гироскопа, цилиндр известной массы, крутильный маятник, штангенциркуль, линейка.

2 Теоретические сведения

В этой работе исследуется зависимость скорости прецессии гироскопа от момента силы, приложенной к его оси. Для этого к оси гироскопа подвешиваются грузы. Скорость прецессии определяется по числу оборотов рычага вокруг вертикальной оси и времени, которое на это ушло, определяемому секундомером. В процессе измерений рычаг не только поворачивается в результате прецессии гироскопа, но и опускается. Поэтому его в начале опыта следует преподнять на 5-6 градусов. Опять надо закончить, когда рычаг опустится на такой же угол.

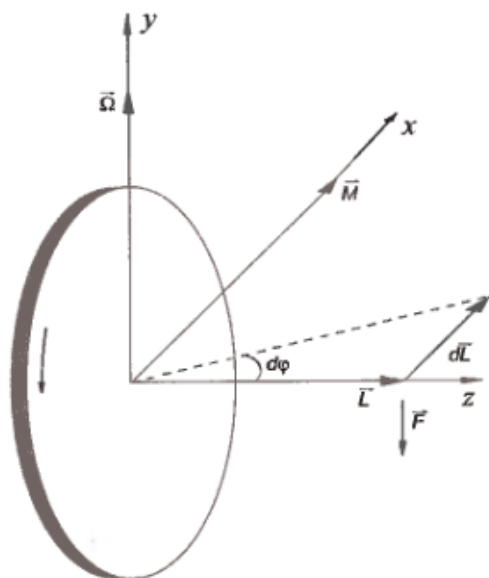


Рис. 1. Маховик

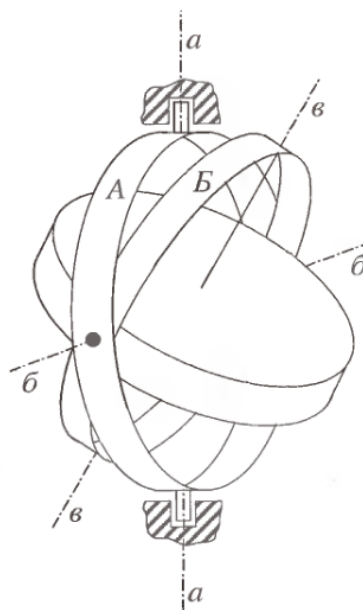


Рис. 2. Гироскоп в кардановом подвесе

Измерение скорости прецессии гироскопа позволяет вычислить угловую скорость вращения его ротора. Расчет производится по формуле:

$$\Omega = \frac{mgl}{I_z \omega_0},$$

где m – масса груза, l – расстояние от центра карданова подвеса до точки крепления груза на оси гироскопа, I_z – момент инерции гироскопа по его главной оси вращения. ω_0 – частота его вращения относительно главной оси, Ω – частота прецессии.

Момент инерции ротора относительно оси симметрии I_0 измеряется по крутильным колебаниям точной копии ротора, подвешиваемой вдоль оси симметрии на десткой проволоке. Период крутильных колебаний T_0 зависит от момента инерции I_0 и модуля кручения проволоки f :

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I_0}{f}}.$$

Чтобы исключить модуль кручения проволоки, вместо ротора гироскопа к той же проволоке подвешивают цилиндр правильной формы с известными размерами и массой, для которого легко можно вычислить момент инерции $I_{\text{ц}}$. Для определения момента инерции ротора гироскопа имеем:

$$I_0 = I_{\text{ц}} \frac{T_0^2}{T_{\text{ц}}^2}, \quad (1)$$

Здесь $T_{\text{ц}}$ – период крутильных колебаний цилиндра.

3 Методика измерений

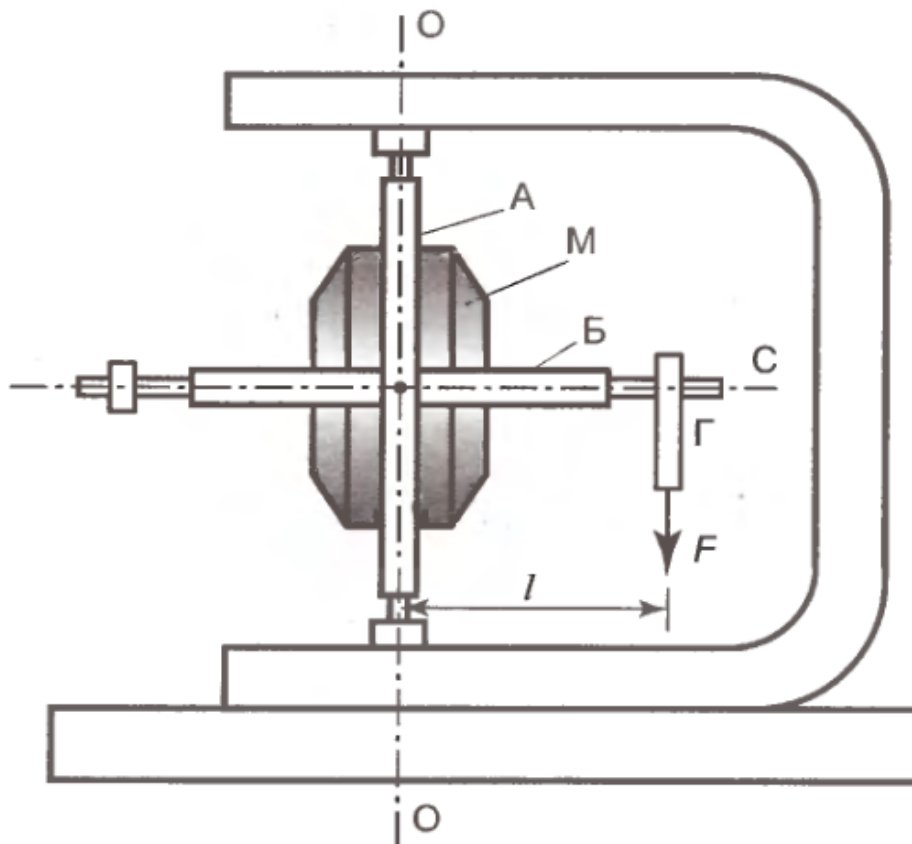


Рис. 3. Схема экспериментальной установки

Скорость вращения ротора гироскопа можно определить и не прибегая к исследованию прецессии. У используемых в работе гироскопов статор имеет две обмотки, необходимые для быстрой раскрутки гироскопа. В данной работе одну обмотку использовать для раскрутки гироскопа, а вторую – для измерения числа оборотов ротора. Ротор электромотора всегда немного намагничен. Вращаясь, он наводит во второй обмотке переменную ЭДС индукции, частота которой равна частоте вращения ротора. Частоту этой ЭДС можно, в частности, измерить по фигурам Лиссажу, получаемым на экране осциллографа, если на один вход подать исследуемую ЭДС, а на другой – переменное напряжение с хорошо прокалиброванного генератора. При совпадении частот на экране получаем эллипс.

4 Используемое оборудование

Гироскоп в кардановом подвесе, секундомер, набор грузов, отдельный ротор гироскопа, цилиндр известной массы, крутильный маятник, штангенциркуль, линейка.

5 Результаты измерений и обработка измерений

5.1 Измерения

Данные для частоты прецессии и опускания гироскопа: $\Omega = \frac{2\pi N}{t}$

Масса	T , с	N	Ω , с^{-1}
$m = 336$ г	178,52	6	$21,12 \cdot 10^{-2}$
	179,23	6	$21,03 \cdot 10^{-2}$

Масса	T , с	N	Ω , с^{-1}
$m = 269$ г	186,41	5	$16,85 \cdot 10^{-2}$
	187,02	5	$16,80 \cdot 10^{-2}$

Масса	T , с	N	Ω , с^{-1}
$m = 215$ г	188,31	4	$13,35 \cdot 10^{-2}$
	188,01	4	$13,38 \cdot 10^{-2}$

Масса	T , с	N	Ω , с^{-1}
$m = 174$ г	232,43	4	$10,81 \cdot 10^{-2}$
	231,07	4	$10,88 \cdot 10^{-2}$

Масса	T , с	N	Ω , с^{-1}
$m = 138$ г	219,81	3	$8,58 \cdot 10^{-2}$
	218,99	3	$8,61 \cdot 10^{-2}$

Каждый раз рычаг опускался на 12° , что равняется $\frac{\pi}{15}$. Для каждой массы посчитаем угловую скорость опускания рычага по формуле: $\omega = \frac{\pi/15}{T}$, и момент $M = mgl$, где $l = 121$ мм:

- $m = 336$ г, $\omega = 11,71 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}$, $M = 39,88 \cdot 10^{-2} \text{ Н}\cdot\text{м}$
- $m = 269$ г, $\omega = 11,22 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}$, $M = 31,93 \cdot 10^{-2} \text{ Н}\cdot\text{м}$
- $m = 215$ г, $\omega = 11,13 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}$, $M = 25,52 \cdot 10^{-2} \text{ Н}\cdot\text{м}$
- $m = 174$ г, $\omega = 9,04 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}$, $M = 20,65 \cdot 10^{-2} \text{ Н}\cdot\text{м}$
- $m = 138$ г, $\omega = 9,55 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}$, $M = 16,38 \cdot 10^{-2} \text{ Н}\cdot\text{м}$

Построим график зависимости $\Omega(M)$:

Далее найдем момент инерции ротора гироскопа по формуле (1), для этого посчитаем момент инерции цилиндра, с известной нам массой и диаметром: $I_{\text{ц}} = \frac{1}{2}mr^2 \approx 1,23 \cdot 10^{-3} \text{ кг}\cdot\text{м}^2$, а периоды: $T_0 = 3,933$ с и $T_{\text{ц}} = 3,19$ с. Тогда $I_0 \approx 0,8 \cdot 10^{-3} \text{ кг}\cdot\text{м}^2$

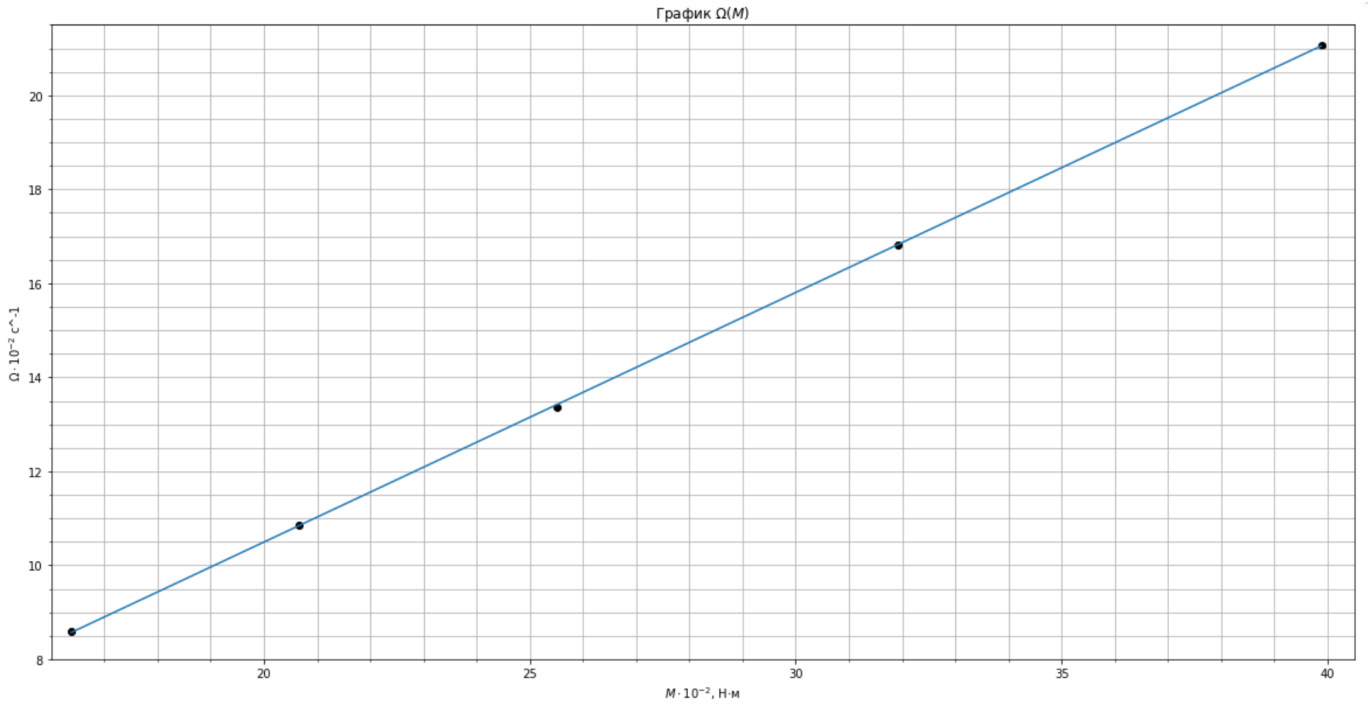


Рис. 1: Зависимость Ω от M

$$\sigma_{\Omega} = \sqrt{\sigma_{\text{случ}}^2 + \sigma_{\text{сист}}^2} \quad \sigma_{\Omega}^{\text{сист}} = \Omega \varepsilon_T \quad \sigma_{\Omega}^{\text{случ}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (\Omega_i - \bar{\Omega})^2}$$

Каждая частота Ω с учетом погрешностей:

- $\Omega = (21,08 \pm 0,03) \cdot 10^{-2} \text{ с}^{-1}$
- $\Omega = (16,83 \pm 0,04) \cdot 10^{-2} \text{ с}^{-1}$
- $\Omega = (13,37 \pm 0,05) \cdot 10^{-2} \text{ с}^{-1}$
- $\Omega = (10,85 \pm 0,05) \cdot 10^{-2} \text{ с}^{-1}$
- $\Omega = (8,60 \pm 0,03) \cdot 10^{-2} \text{ с}^{-1}$

Погрешность $\sigma_{I_0} = I_0 \cdot \sqrt{\varepsilon_{I_{\text{н}}}^2 + 4\varepsilon_{T_0}^2 + 4\varepsilon_{T_{\text{н}}}^2} \approx 0,03 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$, значит $I_0 = (0,80 \pm 0,03) \text{ кг}\cdot\text{м}^2$

5.2 Частота вращения ротора

Определить частоту вращения ротора можно по формуле $\omega_0 = \frac{1}{kI_0}$, где k – коэффициент наклона графика зависимости $\Omega(M)$.

График построен по МНК, а значит:

$$k = \frac{\langle xy \rangle - \langle x \rangle \langle y \rangle}{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} \approx 0,531 \frac{1}{\text{Дж} \cdot \text{с}}$$

$$\sigma_k^{\text{сл}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{\langle y^2 \rangle - \langle y \rangle^2}{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} - k^2} \approx 0,002 \frac{1}{\text{Дж} \cdot \text{с}}$$

Тогда $\omega_0 = 2354,05 \text{ с}^{-1}$, а $\sigma_{\omega_0} = \omega_0 \cdot \sqrt{\varepsilon_{I_0}^2 + \varepsilon_k^2} \approx 88,72 \text{ с}^{-1}$

Используя полученную угловую скорость можно определить частоту вращения ротора гироскопа: $\nu = \frac{\omega_0}{2\pi} \approx 374,7$ Гц, а $\sigma_\nu = \nu \varepsilon_{\omega_0} \approx 14,1$ Гц

Таким образом получаем: $\nu = (374,7 \pm 14,1)$ Гц, что с учетом сигмы попадает в значение полученное с помощью осциллографа $\nu_0 = 387,2$ Гц

5.3 Момент силы трения

Оценить момент силы трения мы можем по формуле: $M = \omega I_0 \omega_0$, а $\sigma_M = M \cdot \sqrt{\varepsilon_M^2 + \varepsilon_k^2}$. Для каждой массы момент силы трения будет свой:

- $m = 336$ г, $\omega = 11,71 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}$, $M = (2,21 \pm 0,02) \cdot 10^{-3} \text{ Н} \cdot \text{м}$
- $m = 269$ г, $\omega = 11,22 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}$, $M = (2,11 \pm 0,02) \cdot 10^{-3} \text{ Н} \cdot \text{м}$
- $m = 215$ г, $\omega = 11,13 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}$, $M = (2,09 \pm 0,02) \cdot 10^{-3} \text{ Н} \cdot \text{м}$
- $m = 174$ г, $\omega = 9,04 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}$, $M = (1,70 \pm 0,02) \cdot 10^{-3} \text{ Н} \cdot \text{м}$
- $m = 138$ г, $\omega = 9,55 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}$, $M = (1,80 \pm 0,02) \cdot 10^{-3} \text{ Н} \cdot \text{м}$

6 Обсуждение результатов

В результате данной работы мы:

1. Измерили момент инерции ротора гироскопа относительно оси симметрии.
2. Оценили погрешность в определении I_0 , Ω .
3. Рассчитали частоту вращения ротора гироскопа.
4. По скорости опускания рычага во время прецессии определили момент сил трения.
5. Определили частоту вращения ротора гироскопа по фигурам Лиссажу.
6. Оценили погрешность полученных результатов. Сравнили угловые скорости вращения ротора гироскопа.
7. Убедились в применимости соотношения (5) в данной работе.

7 Вывод

Полученная частота совпадает со значением частоты, измеренным с помощью осциллографа ($\nu_{\text{осц}} = 387,2$) в пределах погрешности.

Также был оценен момент силы трения, действующий на ось гироскопа $M \approx 10^{-3} \text{ Н} \cdot \text{м}$. Он оказался достаточно мал по сравнению с моментом силы тяжести груза, подвешенного на ось гироскопа, но достаточным для поворота гироскопа в сторону направления силы тяжести груза. Для его более точной оценки необходима более точная шкала определения отклонения гироскопа от начального уровня, которой, к сожалению, не было.