

Измерение модуля Юнга стержней методом акустического резонанса. (1.4.8)

Дудаков Семён Б01-303

20 ноября 2023

1 Введение

Цель работы: исследовать явление акустического резонанса в тонком стержне; измерить скорость распространения продольных звуковых колебаний в тонких стержнях из различных материалов и различных размеров; измерить модули Юнга различных материалов.

В работе используются: генератор звуковых частот, частотомер, осциллограф, электромагнитные излучатель и приёмник колебаний, набор стержней из различных материалов.

2 Теоретическая часть

Основной характеристикой упругих свойств твёрдого тела является его модуль Юнга E . Согласно закону Гука, если к элементу среды приложено некоторое механическое напряжение σ , действующее вдоль некоторой оси x (напряжения по другим осям при этом отсутствуют), то в этом элементе возникнет относительная деформация вдоль этой же оси $\varepsilon = \Delta x/x_0$, определяемая соотношением

$$\sigma = \varepsilon E$$

Если с помощью кратковременного воздействия в некотором элементе твёрдого тела создать малую деформацию, она будет далее распространяться в среде в форме волны, которую называют акустической или звуковой. Распространение акустических волн обеспечивается за счёт упругости и инерции среды. Волны сжатия/растяжения, распространяющиеся вдоль оси, по которой происходит деформация, называются продольными. Как будет строго показано далее, скорость u распространения продольной акустической волны в простейшем случае длинного тонкого стержня определяется соотношением

$$u = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

где ρ — плотность среды. Заметим, что размерность модуля Юнга E равна $[H/m^2]$ и совпадает с размерностью механического напряжения (или давления). Характерные значения модуля Юнга металлов лежат в диапазоне $E \sim 10^{10} \div 10^{12}$ Па, так что при плотности $\rho \sim 10^4$ кг/м³ характерные значения скорости звука в твёрдых телах составляют $u \sim 10^3 - 10^4$ м/с. В общем случае звуковые волны в твёрдых телах могут быть не только продольными, но и поперечными — при этом возникает деформация сдвига перпендикулярно распространению волны. Кроме того, описание распространения волн в неограниченных средах осложняется тем обстоятельством, что при отличном от нуля коэффициенте Пуассона 1 напряжение вдоль одной из осей вызывает деформацию не только в продольном, но и в поперечном направлении к этой оси. Таким образом, общее описание звуковых волн в твёрдых телах — относительно непростая задача. В данной работе мы ограничимся исследованием наиболее простого случая упругих волн,

распространяющихся в длинных тонких стержнях. Рассмотрим стержень постоянного круглого сечения, радиус R которого много меньше его длины L . С точки зрения распространения волн стержень можно считать тонким, если длина λ звуковых волн в нём велика по сравнению с его радиусом: λR . Такая волна может свободно распространяться только вдоль стержня, поэтому можно считать, что стержень испытывает деформации растяжения и сжатия только вдоль своей оси (заметим, что в обратном пределе коротких волн λR стержень следует рассматривать как безграничную сплошную среду). Если боковые стенки тонкого стержня свободны (т.е. стержень не сжат с боков), то его деформации описывается законом Гука в форме (1), и, следовательно, его упругие свойства определяются исключительно модулем Юнга среды. Акустическая волна, распространяющаяся в стержне конечной длины L , испытывает отражение от торцов стержня. Если при этом на длине стержня укладывается целое число полуволн, то отражённые волны будут складываться в фазе с падающими, что приведёт к резкому усилению амплитуды их колебаний и возникновению акустического резонанса в стержне. Изменяя соответствующие резонансные частоты, можно определить скорость звуковой волны в стержне и, таким образом, измерить модуль Юнга материала стержня. Акустический метод является одним из наиболее точных методов определения упругих характеристик твёрдых тел. Получим дифференциальное уравнение, описывающее распространение упругих волн в тонком стержне. Направим ось x вдоль геометрической оси стержня (рис. 1). Разобьём исходно недеформированный стержень на тонкие слои толщиной Δx . При продольной деформации среды границы слоёв сместятся в некоторые новые положения. Пусть плоскость среды, находящаяся исходно в точке x

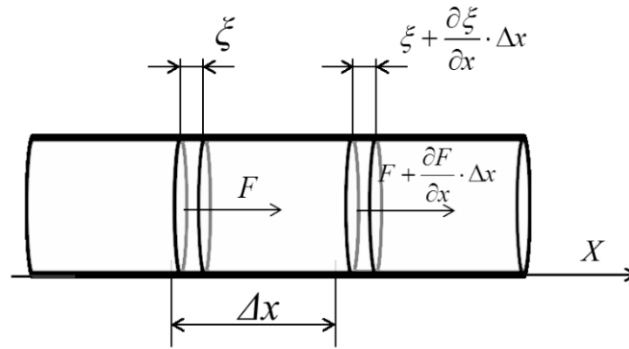


Рис. 1:

сместилась к моменту t на расстояние $\xi(x, t)$. Тогда слой, занимавший исходно отрезок $[x, x + \Delta x]$, изменил свой продольный размер на величину

$$\Delta \xi = \frac{\partial \xi}{\partial x} \Delta x$$

3 Методика измерений

Экспериментальная установка

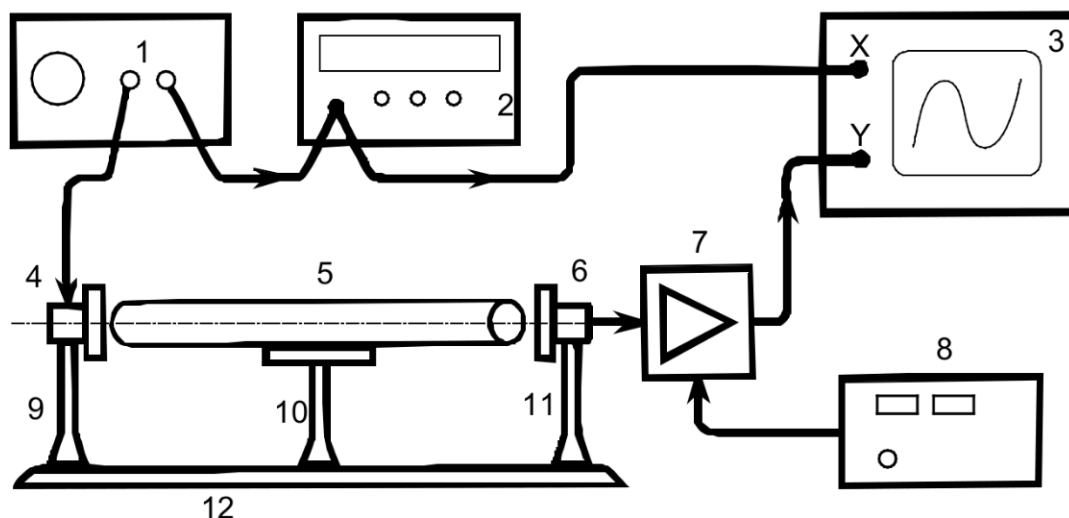


Рис. 3. Схема установки: 1 – генератор звуковой частоты, 2 – частотомер, 3 – осциллограф, 4 – электромагнит-возбудитель, 5 – образец, 6 – электромагнит-приёмник, 7 – усилитель звуковой частоты, 8 – блок питания усилителя, 9, 11 – стойки крепления электромагнитов, 10 – стойка крепления образца, 12 – направляющая

Схема экспериментальной установки приведена на рис. 3. Исследуемый стержень 5 размещается на стойке 10. Возбуждение и приём колебаний в стержне осуществляются электромагнитными преобразователями 4 и 6, расположенными рядом с торцами стержня. Крепления 9, 11 электромагнитов дают возможность регулировать их расположение по высоте, а также перемещать вправо-влево по столу 12.

Электромагнит 4 служит для возбуждения упругих механических продольных колебаний в стержне. На него с генератора звуковой частоты 1 подаётся сигнал синусоидальной формы: протекающий в катушке электромагнита ток создаёт пропорциональное ему магнитное поле, вызывающее периодическое воздействие заданной частоты на торец стержня (к торцам стержней из немагнитных материалов прикреплены тонкие стальные шайбы). Рядом с другим торцом стержня находится аналогичный электромагнитный датчик 6, который служит для преобразования механических колебаний в электрические. Принцип работы электромагнитных датчиков описан подробнее ниже. Сигнал с выхода генератора поступает на частотомер 2 и на вход канала X осциллографа 3. ЭДС, возбуждаемая в регистрирующем электромагните 6, пропорциональная амплитуде колебаний торца стержня, усиливается усилителем 7 и подаётся на вход канала Y осциллографа. Изменяя частоту генератора и наблюдая за амплитудой сигнала с регистрирующего датчика, можно определить частоту акустического резонанса в стержне. Наблюдения в режиме X–Y позволяют сравнить сигналы генератора и датчика, а также облегчает поиск резонанса при слабом сигнале.

Как следует из формулы (2), модуль Юнга материала E может быть найден по скорости распространения акустических волн в стержне u и его плотности ρ . Для определения скорости u в данной работе используется метод акустического резонанса. Это явление состоит в том, что при частотах гармонического возбуждения, совпадающих с собственными частотами колебаний стержня $f \approx f_{\text{рез}}/Q$, резко увеличивается амплитуда колебаний, при этом в стержне образуется стоячая волна. Возбуждение продольных колебаний в стержне происходит посредством воздействия на торец стержня периодической силой, направленной вдоль его оси. Зная

номер гармоники n и соответствующую резонансную частоту f_n , на которой наблюдается усиление амплитуды колебаний, можно вычислить скорость распространения продольных волн в стержне:

$$u = 2L \frac{f_n}{n}$$

Таким образом, для измерения скорости u необходимо измерить длину стержня L и получить зависимость резонансной частоты от номера резонанса n . Если все теоретические предположения справедливы, эта зависимость будет прямой пропорциональностью. Следует отметить, что в реальном металлическом стержне могут возбуждаться не только продольные, но и поперечные (в частности, изгибные) колебания стержня. При этом каждому типу колебаний соответствует не одна, а целый спектр частот. Таким образом, стержень «резонирует» не только на частотах, определяемых формулой (15), но и на множестве других частот. Для того чтобы отличить нужные нам резонансные частоты от «паразитных», следует провести предварительные расчёты и не принимать во внимание резонансы, не описываемые зависимостью (15). Скажем также несколько слов о точности измерения резонансной частоты. В первую очередь отметим, что в идеальном случае резонанс достигался бы при строгом совпадении частот $f = f_n$ (а амплитуда в резонансе стремилась бы к бесконечности). Однако в реальности возбуждение стоячей волны возможно при относительно малом отклонении частоты от резонансной — амплитуда колебаний как функция частоты $A(f)$ имеет резкий максимум при $f = f_n$.

Именно конечная ширина резонанса Δf определяет в основном погрешность измерения частоты в нашем опыте. Используемые в работе металлические стержни являются весьма высокодобротными системами: их добротность оказывается порядка $Q \sim 102 \div 103$. Поэтому ширина резонанса оказывается довольно малой, что приводит к необходимости тонкой настройки частоты генератора (при $f \sim 5$ кГц ширина резонанса Δf оказывается порядка нескольких герц). Кроме того, время установления резонансных колебаний, которое можно оценить как

$$\tau_{\text{уст}} \sim \frac{1}{\Delta f} \sim \frac{Q}{f},$$

оказывается весьма велико, из-за чего поиск резонанса нужно проводить, меняя частоту генератора очень медленно.

4 Оборудование

Генератор звуковых частот, частотомер, осциллограф, электромагнитный излучатель и приёмник колебаний, набор стержней из различных материалов.

5 Результаты измерений и обработка данных

5.1 Медь

Теоретическое значение первого резонанса равно

$$f_1 = 3083.33 \text{ Гц}$$

Путем перестройки звукового генератора был найден первый резонанс $f_1 = 3158.35 \text{ Гц}$. На экране наблюдается эллипс. Найдем частоты, на кратных гармониках:

Измерения (Гц)	1	2	3	4	5
	3158.35	6315.38	9478.32	12678.43	15821.73

Найдем плотность медного стержня $d = (1.20 \pm 0.01) \text{ см}$, $l = (4.00 \pm 0.01) \text{ см}$, $m = (39.39 \pm 0.01) \text{ г}$.

$$\rho = (8.70 \pm 0.08) \text{ г/см}^3. \frac{d/2}{l} = 9.9 * 10^{-3} \ll 1 - \text{стержень тонкий.}$$

Повторим опыты и для других стержней.

5.2 Дюраль

Частоты кратных гармоник:

Измерения (Гц)	1	2	3	4	5
	4256.30	8568.28	12788.85	17085.65	21197.84

Найдем плотность стержня из дюрала $d = (1.20 \pm 0.01) \text{ см}$, $l = (4.00 \pm 0.01) \text{ см}$, $m = (12.44 \pm 0.01) \text{ г}$.

$$\rho = (2.75 \pm 0.06) \text{ г/см}^3. \frac{d/2}{l} = 9.6 * 10^{-3} \ll 1 - \text{стержень тонкий.}$$

5.3 Сталь

Частоты кратных гармоник:

Измерения (Гц)	1	2	3	4	5
	4123.34	8250.22	12378.02	16505.05	20650.72

Найдем плотность стержня из дюрала $d = (1.20 \pm 0.01) \text{ см}$, $l = (4.00 \pm 0.01) \text{ см}$, $m = (35.15 \pm 0.01) \text{ г}$.

$$\rho = (7.77 \pm 0.08) \text{ г/см}^3. \frac{d/2}{l} = 10^{-4} \ll 1 - \text{стержень тонкий.}$$

5.4 Добротность медного стержня

Напряжение при первом резонансе: $U = 13.5 \text{ В}$.

$$\frac{U}{\sqrt{2}} = 9.5 \text{ В.}$$

Частоты при таком напряжении: $\nu = 3163 \text{ Гц}$, $\nu = 3158 \text{ Гц}$

$$\Delta f = 10 \text{ Гц. } Q = \frac{f}{\Delta f} = 315.8$$

5.5 Скорость звука

Для вычисления скорости звука воспользуемся следующей формулой:

$$u = 2L \frac{f_n}{n}$$

Для меди: $u = (3797.2 \pm 8.1) \text{ м/с}^2$ (0.21%)

Для дюрала: $u = (5087.4 \pm 6.1) \text{ м/с}^2$ (0.11%)

Для стали: $u = (4956.1 \pm 3.1) \text{ м/с}^2$ (0.06%)

(погрешность измерения длины стержня пренебрежительно мала, по сравнению с погрешностью $\frac{f_n}{n}$)

5.6 Определение модуля Юнга

Для вычисления модуля Юнга и его погрешности воспользуемся следующими формулами:

$$E = c_{\text{ст}}^2 \rho$$

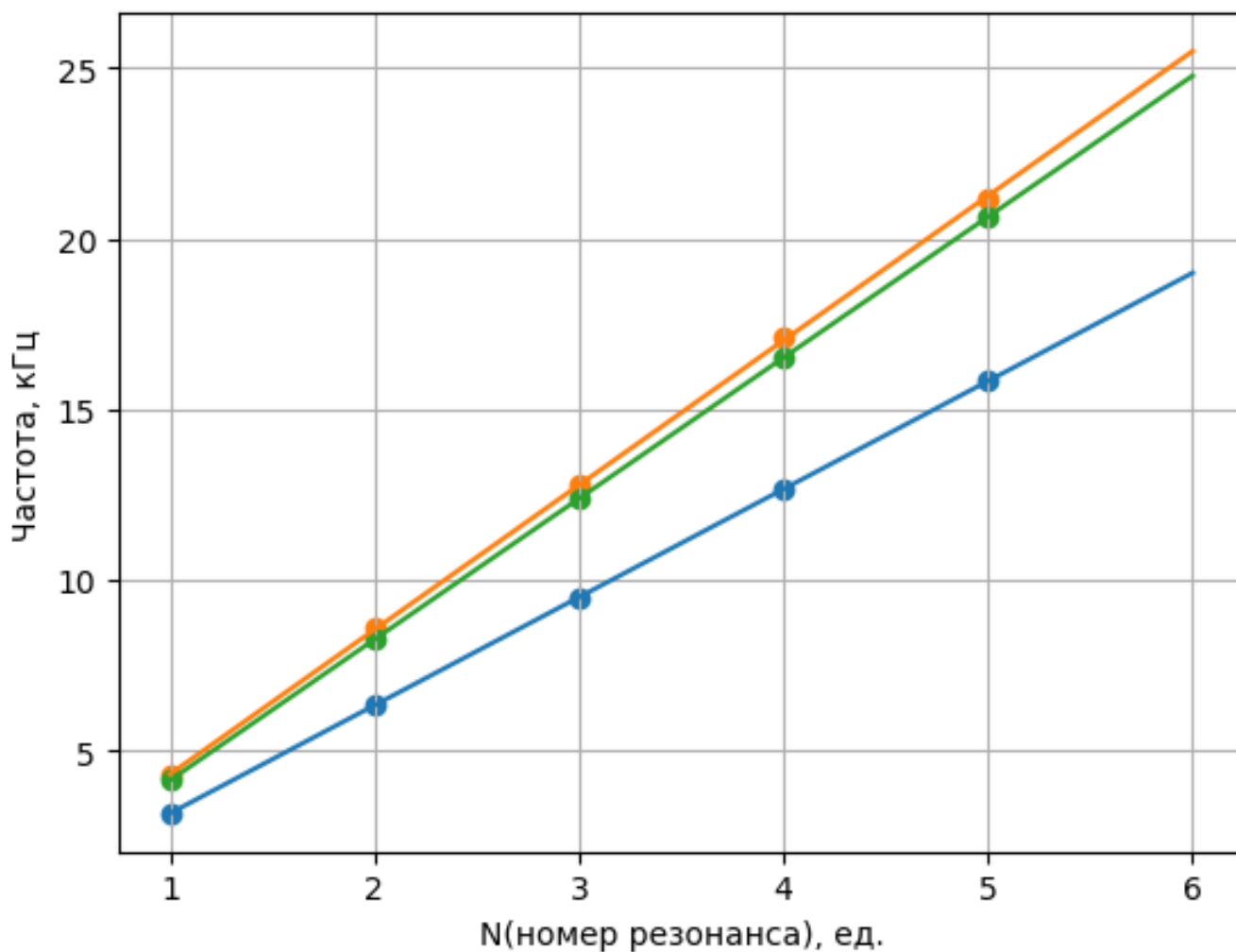
$$\Delta E = E \sqrt{4 \left(\frac{\delta c_{\text{ст}}}{c_{\text{ст}}} \right)^2 + \left(\frac{\delta \rho}{\rho} \right)^2}$$

Для меди: $E = (125.4 \pm 7)$ ГПа (5.5%)

Для дюралю: $E = (71.2 \pm 3)$ ГПа (4.2%)

Для стали: $E = (190.8 \pm 7)$ ГПа (4.8%)

5.7 График частоты



Самая "крутая" прямая - дюраль

Средняя - сталь

Нижняя - медь

6 Обсуждение результатов

В ходе проделанной работы:

1. Была найдена добротность медного стержня при колебаниях

2. Получили зависимость $f(n)$. Все полученные точки очень хорошо ложатся на прямые, что видно по представленному графику
3. Была измерена скорость звука и найдены модули Юнга в предложенных для измерения материалах.
4. В работе 1.3.1 мы измеряли модуль Юнга методом прогиба, и относительная погрешность получалась порядка 10%. В данной же работе погрешность составляет 4-5%, что в два раза точнее чем в 1.3.1, причем основной вклад в погрешность вносит именно измерение плотности.

7 Вывод

Подводя итоги, хотелось бы сказать, что с помощью метода акустического резонанса можно определить модуль Юнга в 2-2,5% точнее(в данной работе). Погрешность получилась существенно меньше. Причем если очень аккуратно измерять плотность данных материалов ошибку можно уменьшить ещё в несколько раз.