

Определение моментов инерции твердых тел с помощью трифилярного подвеса. (1.2.3)

Балдин Виктор Б01-303

30 октября 2023

1 Введение

Цели работы: измерение момента инерции тел и сравнение результатов с расчетами по теоретическим формулам; проверка аддитивности моментов инерции и справедливости формулы Гюйгенса-Штейнера.

Оборудование: трифилярный подвес, секундомер, счетчик числа колебаний, набор тел, момент инерции которых надлежит измерить (диск, стержень, полный цилиндр и другие).

2 Теоретические сведения

Инерционность при вращении тела относительно оси определяется моментом инерции тела относительно этой оси. Момент инерции твердого тела относительно неподвижной оси вращения вычисляется по формуле:

$$I = \int r^2 dm$$

Здесь r – расстояние элемента массы тела dm от оси вращения. Интегрирование проводится по всей массе тела m .

Если пренебречь потерями энергии на трение о воздух и крепление нитей, то уравнение сохранения энергии при колебаниях можно записать следующим образом:

$$\frac{I\dot{\varphi}^2}{2} + mg(z_0 - z) = E \quad (1)$$

Здесь I – момент инерции платформы вместе с исследуемым телом, m – масса платформы с телом, φ – угол поворота платформы от положения равновесия системы, z_0 – координата по вертикали центра нижней платформы O' при равновесии ($\varphi = 0$), z – координата той же точки при некотором угле поворота φ . Правый член в левой части уравнения – кинетическая энергия вращения, второй член – потенциальная энергия в поле тяжести, E – полная энергия системы (платформы с телом).

Воспользуемся системой координат x, y, z , связанной с верхней платформой, как показано на Рис. 1. Координаты верхнего конца одной из нитей подвеса точки C в этой системе – $(r, 0, 0)$. Нижний конец данной нити C' , находящийся на нижней платформе, при равновесии имеет координаты $(R, 0, z_0)$, а при повороте платформы на угол φ эта точка переходит в C'' с координатами $(R\cos\varphi, R\sin\varphi, z)$. расстояние между точками C и C'' равно длине нити, поэтому, после некоторых преобразований, получаем:

$$(R\cos\phi - r)^2 + R^2\sin^2\phi + z^2 = L^2$$

$$z^2 = L^2 - R^2 - r^2 + 2Rr \cos \phi \approx z_0^2 - 2Rr(1 - \cos \phi) \approx z_0^2 - Rr\phi^2$$

$$z = \sqrt{z_0^2 - Rr\phi^2} \approx z_0 - \frac{Rr\phi^2}{2z_0}$$

Подставляя z в уравнение (1), получаем:

$$\frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2 + mg\frac{Rr}{2z_0}\varphi^2 = E$$

Дифференцируя по времени и сокращая на $\dot{\varphi}$, находим уравнение крутильных колебаний системы:

$$I\ddot{\varphi} + mg\frac{Rr}{2z_0}\varphi = 0$$

Производная по времени от E равна нулю, так как потерями на трение, как уже было сказано выше, пренебрегаем.

Решение этого уравнения имеет вид:

$$\varphi = \varphi_0 \sin \left(\sqrt{\frac{mgRr}{Iz_0}} t + \theta \right)$$

Здесь амплитуда φ_0 и фаза θ колебаний определяются начальными условиями. Период крутильных колебаний нашей системы равен:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{Iz_0}{mgRr}}$$

Из формулы для периода получаем:

$$I = \frac{mgRrT^2}{4\pi^2 z_0} = k m T^2$$

3 Методика измерений

Для наших целей удобно использовать устройство, показанное на Рис. 1 и называемое трифилярным подвесом. Оно состоит из укрепленной на некоторой высоте неподвижной платформы P и подвешенной к ней на трех симметрично расположенных нитях AA' , BB' и CC' , вращающейся платформы P' .

Чтобы не вызывать дополнительных раскачиваний, лучше поворачивать верхнюю платформу, укрепленную на неподвижной оси. После поворота верхняя платформа остается неподвижной в течение всего процесса колебаний. После того, как нижняя платформа P' оказывается повернутой на угол φ относительно верхней платформы P возникает момент сил, стремящийся вернуть нижнюю платформу в положение равновесия, при котором относительный поворот платформ отсутствует. В результате платформа совершает крутильные колебания.

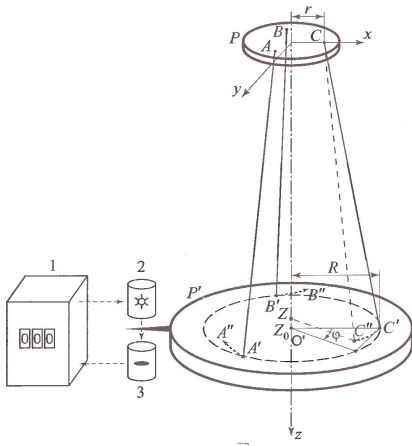


Рис. 1: Физический маятник

где $k = \frac{gRr}{4\pi^2 z_0}$ – величина, постоянная для данной установки.

4 Оборудование

Трифилярный подвес, секундомер, счетчик числа колебаний, набор тел, момент инерции которых надлежит измерить (диск, стержень, полный цилиндр и другие).

5 Результаты измерений и обработка данных

1. Проверим исправность установки.
2. Измерим параметры установки:

$$z_0 = (213.6 \pm 0.5) \text{ см}$$

$$R = (114.6 \pm 0.5) \text{ мм}$$

$$r = (30.2 \pm 0.3) \text{ мм}$$

$$m = (1066.8 \pm 0.5) \text{ г}$$

3. Вычислим k :

$$k = \frac{gRr}{4\pi^2 z_0} = 4.43 \cdot 10^{-4} \text{ кг} \cdot \text{м}$$

$$\varepsilon_k = \varepsilon_R + \varepsilon_r + \varepsilon_{z_0} = 0.02$$

$$k = (4.43 \pm 0.09) \cdot 10^{-4} \text{ кг} \cdot \text{м}$$

4. Вычислим момент инерции пустой платформы.

$$I = \frac{mR^2}{2} = 7.264 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

$$\varepsilon_I = 2\varepsilon_R + \varepsilon_m = 0.01$$

$$I = (7.264 \pm 0.073) \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

5. Перейдем к измерению моментов инерции данных нам тел. Для кольца получим:

$t, \text{ с}$	$T, \text{ с}$	$I_t + I, 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$	$I_t, 10^{-3}, \text{ кг} \cdot \text{м}^2$
126.08	4.203	12.97	5.15
125.94	4.198	12.94	5.12
126.55	4.218	13.06	5.25

По итогу получим $I_{\text{кол}} = (5.17 \pm 0.08) \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$.

6. Сделаем все то же самое для диска с параметрами

$$m = (580.6 \pm 0.5) \text{ г}$$

$$r = (5.75 \pm 0.01) \text{ см}$$

Из этих данных получаем

Теоретически получаем

$$I = mr^2 = (1.920 \pm 0.007) \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

Как видим в пределах погрешности теория соответствует эксперименту.

No	N	t, c	T, c
1	10	39.254	3.9254
2	10	39.221	3.9221
3	10	39.203	3.9203
4	10	39.189	3.9189

No	N	t, c	T, c
1	10	39.750	3.9750
2	10	39.873	3.9873
3	10	39.964	3.9964
4	10	39.773	3.9773

Когда оба тела на платформе.

$$T = (3.984 \pm 0.006) \text{ c}$$

$$I_{\text{пф+общ}} = (16.4 \pm 0.3) \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

$$I_{\text{общ}} = (8.7 \pm 0.4) \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

$$I_{\text{диск}} + I_{\text{кол}} = (8.8 \pm 0.6) \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

7. Теперь исследуем зависимость момента инерции двух полуцирков от расстояния между ними:

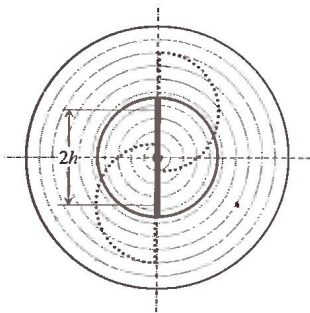


Рис. 2: Схема расположения грузов на платформе трифилярного подвеса.

Перейдем к определению зависимости момента инерции системы двух тел от их взаимного расположения. Для этого, располагая грузы как показано на рис. 2, получим зависимость периода от расстояния. Затем, определим зависимость $I(h^2)$

Полученные результаты измерений занесем в таблицы 1,2 соответственно. Основываясь на результатах таблицы 2, построим график зависимости $I(h^2)$. (Рис. 3)

№ изм.	T, с	h, см	№ изм.	T, с	h, см
1	3,122	0	8	3,399	3,5
2	3,127	0,5	9	3,472	4,0
3	3,146	1,0	10	3,568	4,5
4	3,167	1,5	11	3,662	5,0
5	3,207	2,0	12	3,753	5,5
6	3,255	2,5	13	3,886	6,0
7	3,325	3,0	14	4,002	6,5

Таблица 1: Зависимость Периода колебаний от расстояния между дисками.

№ изм.	I, $kgm^2 * 10^{-3}$	h, см	№ изм.	I, $kgm^2 * 10^{-3}$	h, см
1	1,678	0	8	1,827	3,5
2	1,681	0,5	9	1,866	4,0
3	1,691	1,0	10	1,918	4,5
4	1,702	1,5	11	1,968	5,0
5	1,724	2,0	12	2,017	5,5
6	1,750	2,5	13	2,089	6,0
7	1,787	3,0	14	2,151	6,5

Таблица 2: Зависимость Моменты инерции от расстояния между дисками.

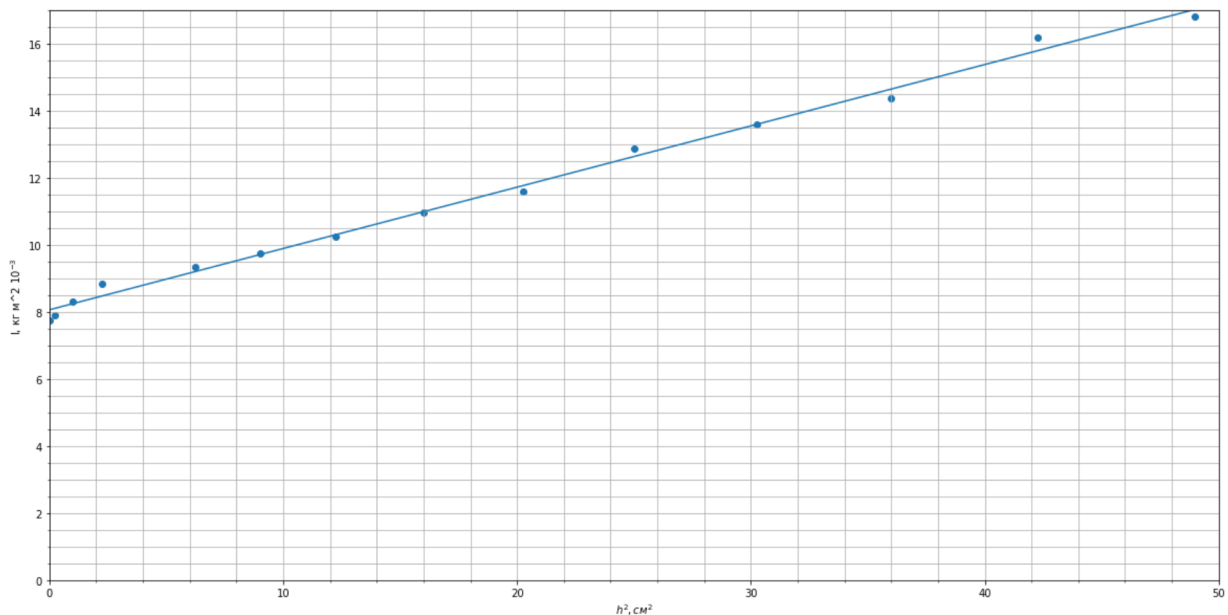


Рис. 3: График зависимости $I(h^2)$

Видно, что данная зависимость весьма хорошо аппроксимируется прямой, что согласуется с теоретическими данными.

6 Обсуждение результатов

1. В результате работы были измерены моменты инерции предоставленных тел.

2. Были посчитаны теоретические моменты инерции и проведено сравнение их с экспериментальными результатами. Обнаружено совпадение в пределах погрешности. Таким образом, доказана состоятельность метода трифилярного подвеса для экспериментального определения моментов инерции различных тел.
3. Получена экспериментальная зависимость момента инерции системы из двух полукругов от расстояния между их центрами инерции. Линеаризованная зависимость $I(h^2)$ действительно неплохо аппроксимируется прямой, что очень хорошо согласуется с теорией.
4. Проверена аддитивность момента инерции системы нескольких тел.

7 Вывод

Их проделанной работы можно заключить, что установка на основе трифилярного подвеса хорошо подходит для определения моментов инерции тел. Зачастую аналитическое вычисление моментов инерции может представлять определенные трудности, особенно в случае сложной и неправильной формы тела. В таких случаях приходится прибегать к экспериментальным способам, а значит, и считаться с их погрешностями. Как показала практика, опробованный в данной работе метод имеет неплохую точность, следовательно, его можно рекомендовать для использования в этих целях.