

Работа 3.6.1

Спектральный анализ электрических сигналов.

Балдин Виктор

Цель работы: исследование спектра колебаний электрических сигналов.

В работе используются: персональный компьютер; USB-осциллограф АКИП-4107; функциональный генератор WaveStation2012; соединительные кабели.

Идея

Разложение сложных сигналов на периодические колебания

Используется разложение в сумму синусов и косинусов с различными аргументами или, как чаще его называют, *разложение в ряд Фурье*.

Пусть задана функция $f(t)$, которая периодически повторяется с частотой $\Omega_1 = \frac{2\pi}{T}$, где T — период повторения импульсов. Её разложение в ряд Фурье имеет вид

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\Omega_1 t) + b_n \sin(n\Omega_1 t)] \quad (1)$$

или

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\Omega_1 t - \psi_n). \quad (2)$$

Если сигнал чётен относительно $t = 0$, в тригонометрической записи остаются только члены с косинусами. Для нечетной наоборот.

Коэффициенты определяются по формуле

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t) \cos(n\Omega_1 t) dt, \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t) \sin(n\Omega_1 t) dt. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь t_1 — время, с которого мы начинаем отсчет.

Сравнив формулы (1) и (2) можно получить выражения для A_n и ψ_n :

$$\begin{aligned} A_n &= \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \\ \psi_n &= \arctan \frac{b_n}{a_n}. \end{aligned} \quad (4)$$

А. Исследование спектра периодической последовательности прямоугольных импульсов и проверка соотношений неопределённости

1. Настраиваем генератор на прямоугольные импульсы с частотой повторения $\nu_{\text{повт}} = 1$ кГц (период $T = 1$ мс) и длительностью импульса $\tau = T/20 = 50$ мкс.

2. Получаем на экране спектр (Преобразование Фурье) сигнала.

а. Изменяем $\nu_{\text{повт}}$ при фиксированном $\tau = 50$ мкс и получаем:

Как видно из графиков, при увеличении частоты повторения сигнала увеличивается расстояние между компонентами спектра.

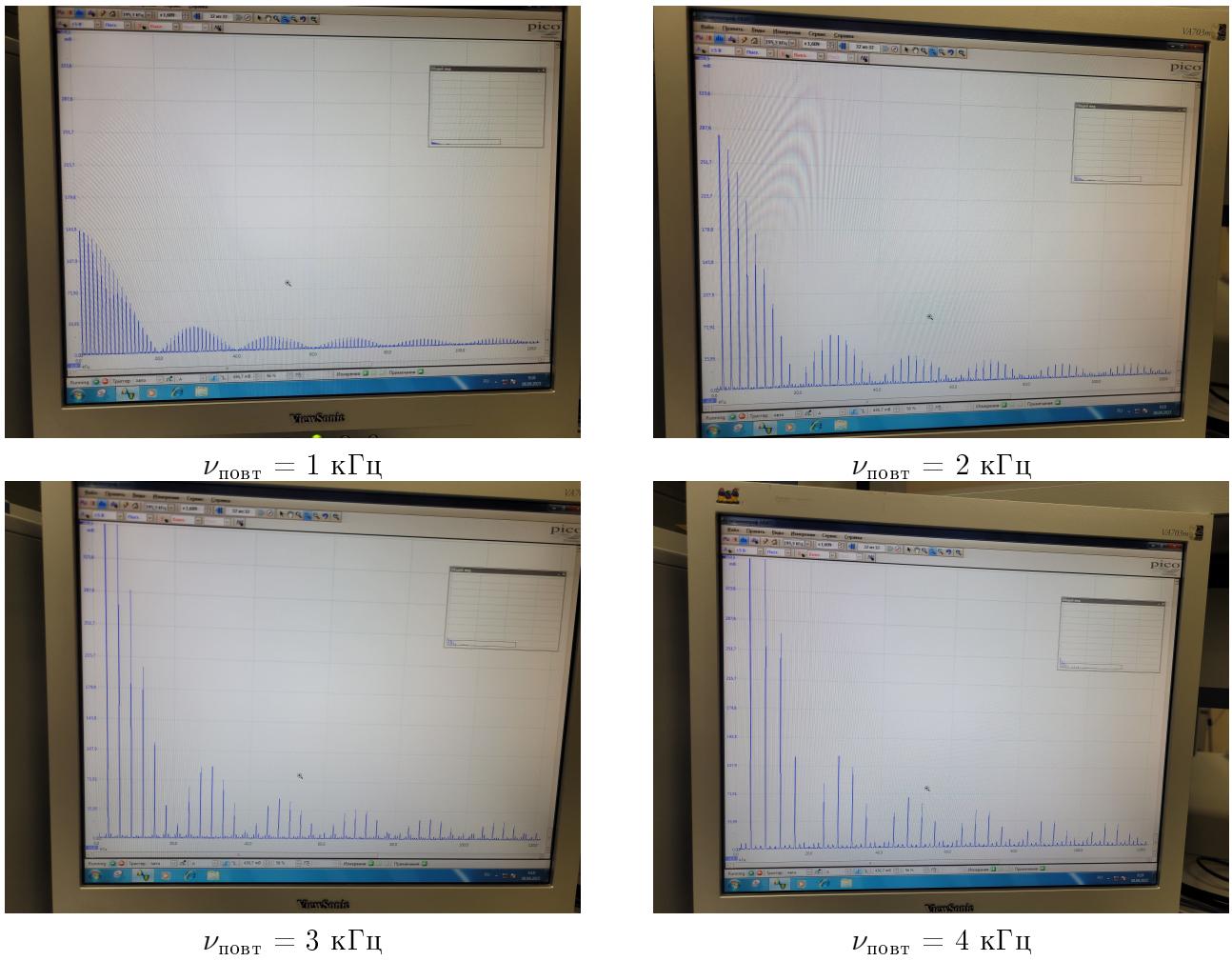


Рис. 1

6. Изменяем τ при фиксированном $\nu_{\text{повт}} = 1 \text{ кГц}$ и получаем:

Как видно из графиков, при увеличении длительности сигнала уменьшается ширина спектра.

3. Измерим амплитуды a_n и частоты ν_n спектральных гармоник при фиксированных $\nu_{\text{повт}}$ и τ .

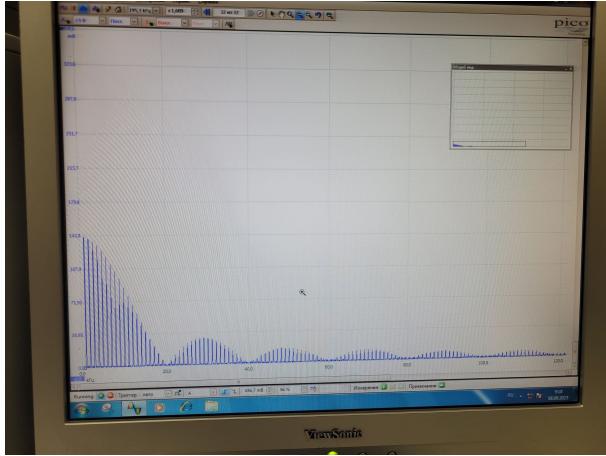
n гармоники	5	7	9	11	13	15	17	19
$\nu_n^{\text{эксп}}, \text{ кГц}$	5.078	7.092	8.904	11.12	13.03	15.15	16.76	19.17
$\nu_n^{\text{теор}}, \text{ кГц}$	5	7	9	11	13	15	17	19
$ a_n ^{\text{эксп}}, \text{ мВ}$	125.9	112.3	94.73	73.98	54.58	37.44	20.75	4.962
$ a_n/a_1 _{\text{эксп}}$	0.876	0.781	0.659	0.515	0.380	0.261	0.144	0.034
$ a_n/a_1 _{\text{теор}}$	0.904	0.814	0.702	0.574	0.438	0.301	0.171	0.052

Здесь $a_1 = 143.8 \text{ мВ}$.

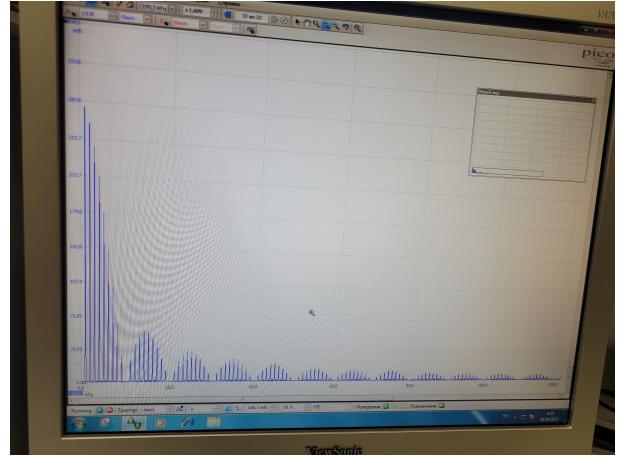
$$\nu_n^{\text{теор}} = \frac{n}{T}$$

$$|a_n|_{\text{теор}} = \frac{|\sin \frac{\pi n \tau}{T}|}{\pi n}$$

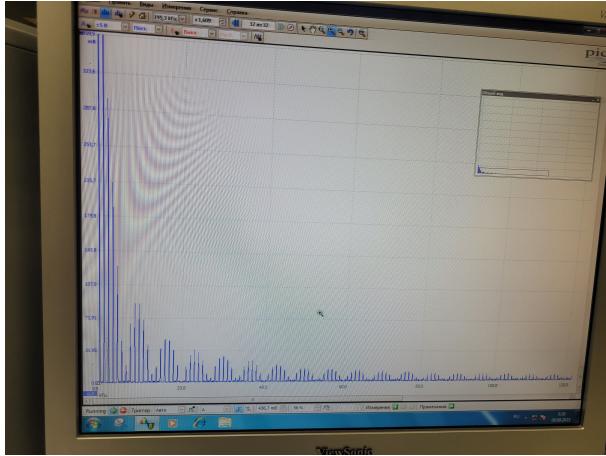
4. Зафиксируем период повторения прямоугольного сигнала $T = 1\text{мс}$, $\nu_{\text{повт}} = 1\text{кГц}$. Изменяя длительность импульса τ в диапазоне от $\tau = T/50$ до $\tau = T/5$, измерим



$\tau = 50 \text{ мкс}$



$\tau = 100 \text{ мкс}$



$\tau = 150 \text{ мкс}$

Рис. 2

полную ширину спектра сигнала $\Delta\nu$ — от центра спектра ($\nu = 0$) до гармоники с нулевой амплитудой $a_n \approx 0$ и установим зависимость между $\Delta\nu$ и τ , полученную из формулы ??.

$\tau, \text{ мкс}$	20	25	40	50	100	150	200
$\Delta\nu, \text{ кГц}$	49.68	39.71	24.61	19.98	9.91	6.84	4.93
$1/\tau \cdot 10^3, \text{ с}^{-1}$	50	40	25	20	10	7	5

Таблица 1: Исследование зависимости $\Delta\nu$ и τ

Построим график $\Delta\nu \left(\frac{1}{\tau} \right)$. Используя МНК, получим $k = 0.994 \pm 0.002$, откуда с хорошей точностью можем заключить, что $\Delta\nu \frac{1}{\tau} = 1$, что экспериментально доказывает соотношение неопределённостей. График приведён на рис.12

- Зафиксируем длительность импульса прямоугольного сигнала $\tau = 100 \text{ мкс}$. Изменяя период повторения T в диапазоне от 2τ до 50τ измерим расстояния $\delta\nu = \nu_{n+1} - \nu_n$ между соседними гармониками спектра.

$\nu, \text{ кГц}$	5	2	1	0.5	0.25	0.1
$\delta\nu, \text{ кГц}$	5.036	1.927	1.008	0.510	0.253	0.206

Таблица 2: Зависимость $\delta\nu$ от $1/T$

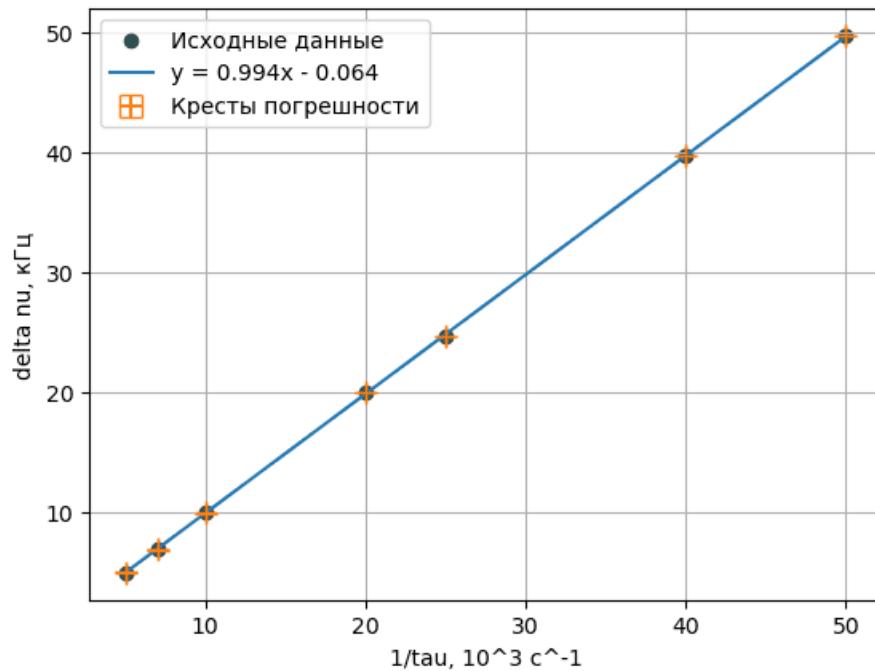


Рис. 3: Зависимость $\Delta\nu$ от $1/\tau$

Построим график $\delta\nu\left(\frac{1}{T}\right)$. Используя МНК, получим $k = 0.996 \pm 0,013$, что экспериментально доказывает соотношение неопределённостей. График приведён на рис.13.

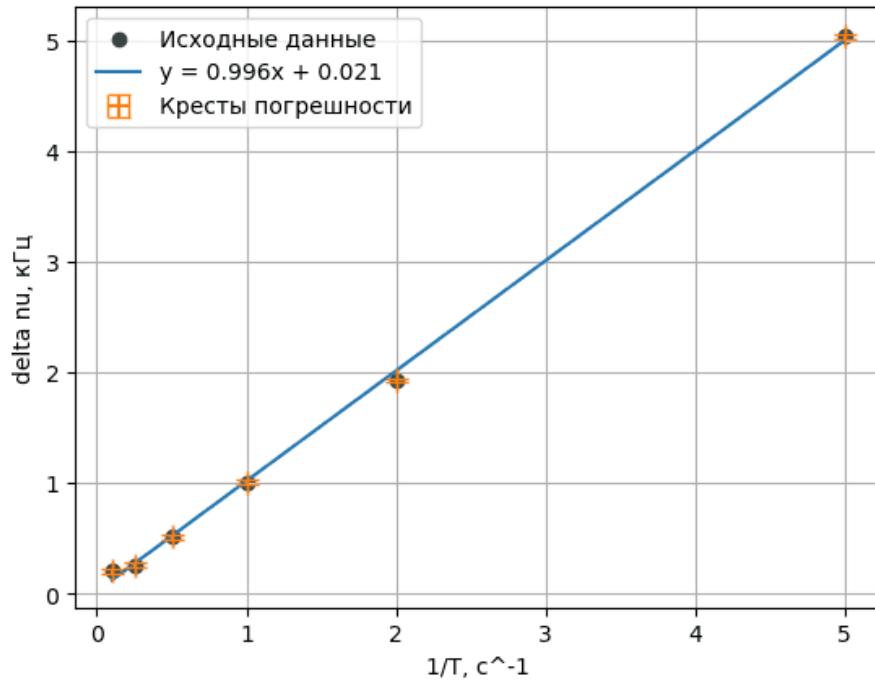


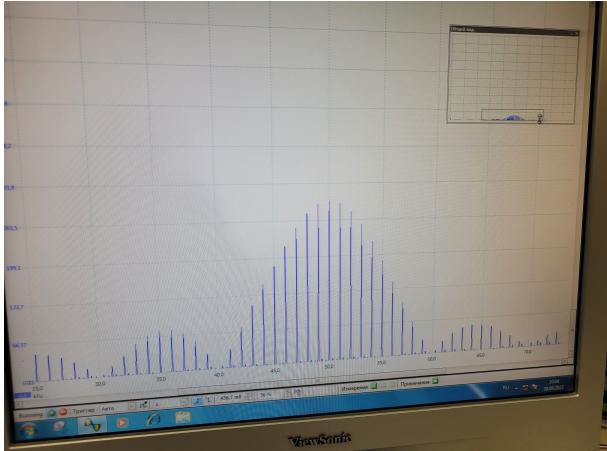
Рис. 4: Зависимость $\delta\nu$ от $1/T$

Б. Наблюдение спектра периодической последовательности цугов

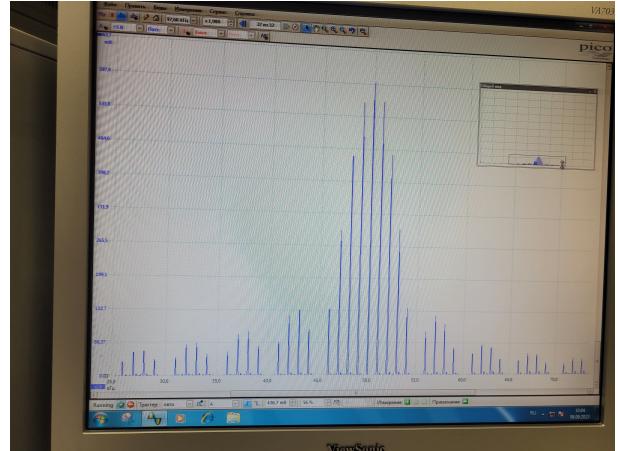
1. Настраиваем генератор на периодичные импульсы синусоидальной формы (цугов) с несущей частотой $\nu_0 = 50$ кГц, частотой повторения $\nu_{\text{повт}} = 1$ кГц, число периодов синусоиды в одном импульсе $N = 5$ (что соответствует длительности импульса $\tau = N/\nu_0 = 100$ мкс).
2. Получаем на экране спектр (Преобразование Фурье) сигнала.
 - a. Изменяем N при фиксированных $\nu_0 = 50$ кГц и $\nu_{\text{повт}} = 1$ кГц:
Соотношение неопределённостей:

$$\Delta\nu \cdot \tau = 10 \cdot 10^3 \frac{5}{50 \cdot 10^3} = 5 \cdot 10^3 \frac{10}{50 \cdot 10^3} = 2.5 \cdot 10^3 \frac{20}{50 \cdot 10^3} \approx 3 \cdot 10^3 \frac{15}{50 \cdot 10^3} \approx 1$$

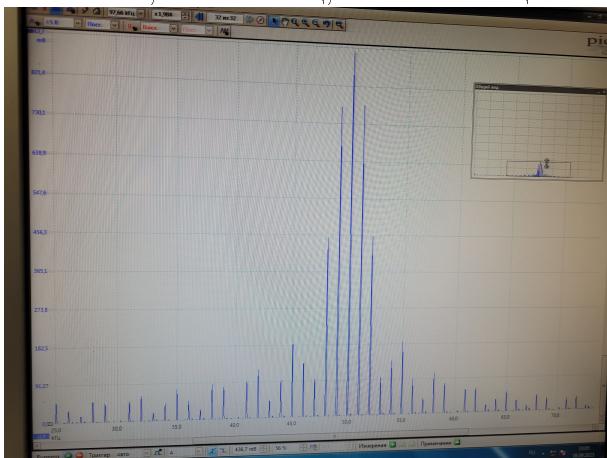
Видим, что спектр остаётся симметричным относительно одной и той же точки, однако "сжимается" к ней при увеличении N .



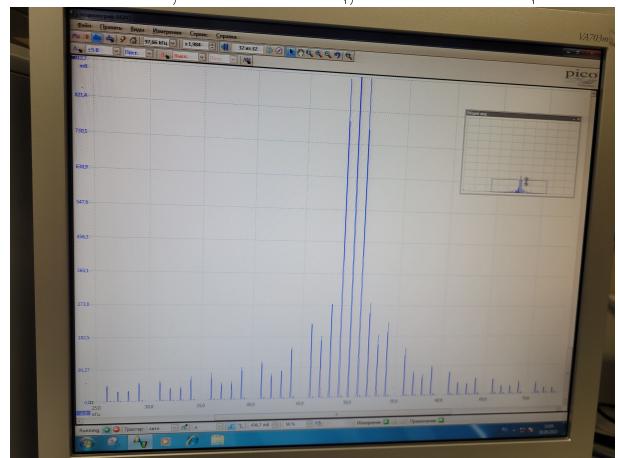
$N=5, \delta\nu = 1 \text{ кГц}, \Delta\nu = 10 \text{ кГц}$



$N=10, \delta\nu = 1 \text{ кГц}, \Delta\nu = 5 \text{ кГц}$



$N=15, \delta\nu = 1 \text{ кГц}, \Delta\nu \approx 3 \text{ кГц}$



$N=20, \delta\nu = 1 \text{ кГц}, \Delta\nu \approx 2.5 \text{ кГц}$

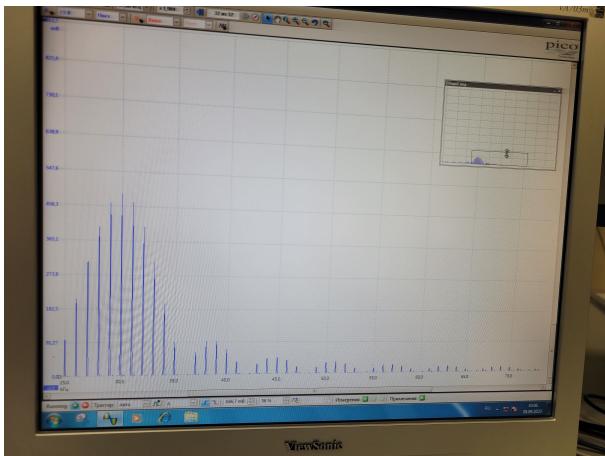
Рис. 5

6. Изменяем ν_0 при фиксированных $N = 5$ и $\nu_{\text{новт}} = 1 \text{ кГц}$:

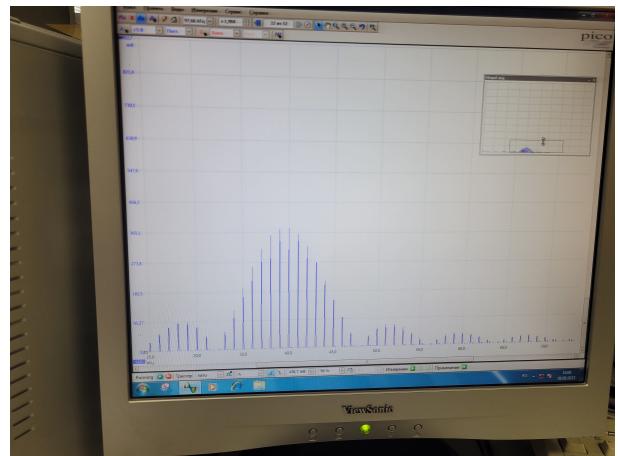
Соотношение неопределённостей:

$$\Delta\nu \cdot \tau = 6 \cdot 10^3 \frac{5}{30 \cdot 10^3} = 8 \cdot 10^3 \frac{5}{40 \cdot 10^3} = 10 \cdot 10^3 \frac{5}{50 \cdot 10^3} = 1$$

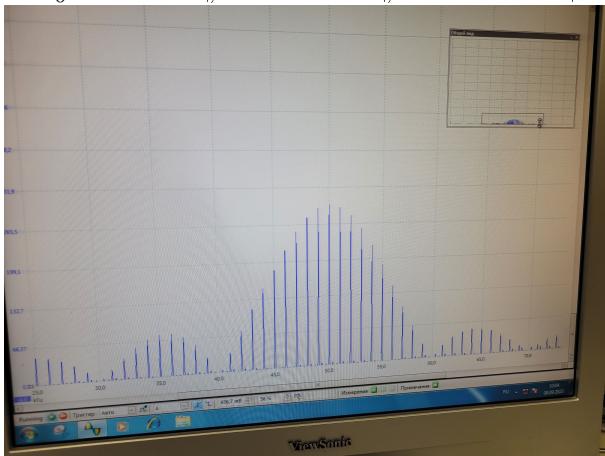
Видим, что в этом случае спектр не меняет свою форму, однако его центр смещается в соответствии с изменением частоты несущей.



$$\nu_0 = 30 \text{ кГц}, \delta\nu = 1 \text{ кГц}, \Delta\nu = 6 \text{ кГц}$$



$$\nu_0 = 40 \text{ кГц}, \delta\nu = 1 \text{ кГц}, \Delta\nu = 8 \text{ кГц}$$



$$\nu_0 = 50 \text{ кГц}, \delta\nu = 1 \text{ кГц}, \Delta\nu = 10 \text{ кГц}$$

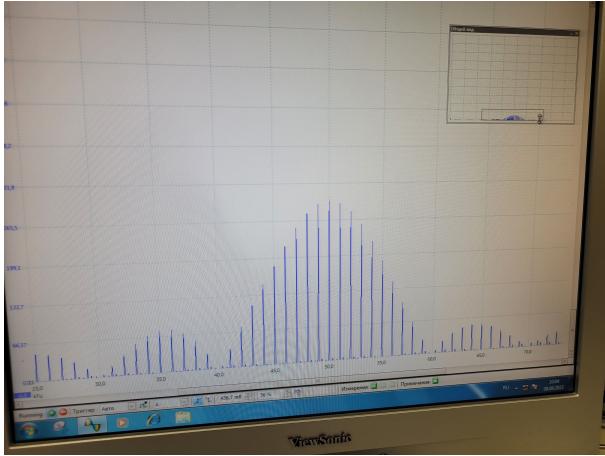
Рис. 6

в. Изменяем $\nu_{\text{повт}}$ при фиксированных $N = 5$ и $\nu_0 = 50 \text{ кГц}$:

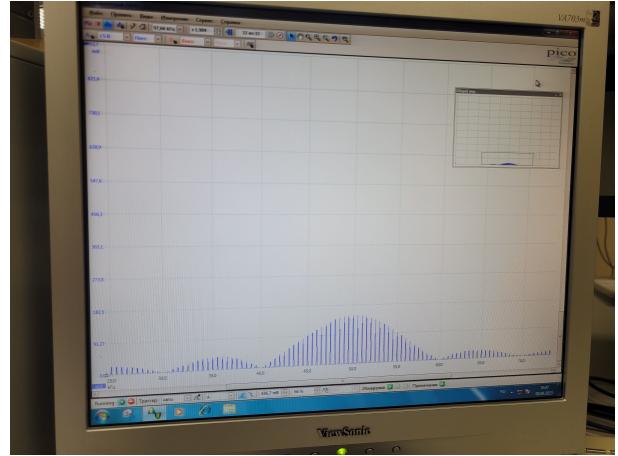
Видно, что соотношение неопределённости выполняется:

$$\frac{\delta\nu}{\nu_{\text{повт}}} = \frac{1 \cdot 10^3}{1 \cdot 10^3} = \frac{0.5 \cdot 10^3}{0.5 \cdot 10^3} = \frac{0.25 \cdot 10^3}{0.25 \cdot 10^3} = 1$$

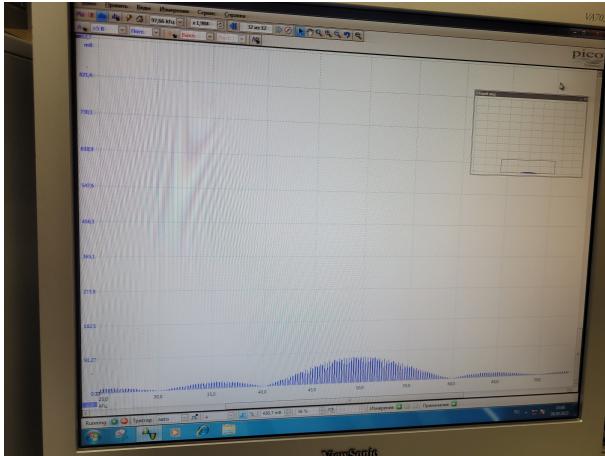
Также видно, что при стремлении частоты повторения к нулю, стремится к нулю и расстояние между компонентами спектра.



$\nu_{\text{пovт}} = 1 \text{ кГц}$, $\delta\nu = 1 \text{ кГц}$, $\Delta\nu = 10 \text{ кГц}$



$\nu_{\text{пovт}} = 0.5 \text{ кГц}$, $\delta\nu = 0.5 \text{ кГц}$, $\Delta\nu = 10 \text{ кГц}$



$\nu_{\text{пovт}} = 0.25 \text{ кГц}$, $\delta\nu = 0.25 \text{ кГц}$, $\Delta\nu = 10 \text{ кГц}$

Рис. 7

Г. Наблюдение спектра амплитудно-модулированного сигнала

- Настраиваем генератор в режим модулированного по амплитуде синусоидального сигнала с несущей частотой $\nu_0 = 50 \text{ кГц}$, частотой модуляции $\nu_{\text{мод}} = 2 \text{ кГц}$ и глубиной модуляции $m = 0.5$.
- Получаем на экране спектр (Преобразование Фурье) сигнала. Из графика получим $A_{\max} = 3.057 \text{ мВ}$ и $A_{\min} = 1.027 \text{ мВ}$ и убедимся в справедливости соотношения

$$m = \frac{A_{\max} - A_{\min}}{A_{\max} + A_{\min}} = \frac{2.03}{4.084} \approx 0.5$$

Поскольку мы установили глубину модуляции на 0,5, а из теории у нас получилась 0,497, то мы видим, что формула ?? верна.

- Изменяя на генераторе глубину модуляции m в диапазоне от 10 % до 100 % (всего 6-8 точек), измерим отношение амплитуд боковой и основной спектральных линий $a_{\text{бок}}/a_{\text{осн}}$. Построим график зависимости $a_{\text{бок}}/a_{\text{осн}}$ от m и проверим, совпадает ли результат с теоретическим.

$m, \%$	10	20	30	40	50	80	100
$a_{\text{бок}}, \text{ мВ}$	69.02	136.3	207.1	283.2	352.2	559.2	669.0
$a_{\text{осн}} = 1318 \text{ мВ}$							
$a_{\text{бок}}/a_{\text{осн}}$	0.05	0.10	0.16	0.21	0.27	0.42	0.51

Таблица 3. Исследование зависимости $a_{бок}/a_{осн}$ от m .

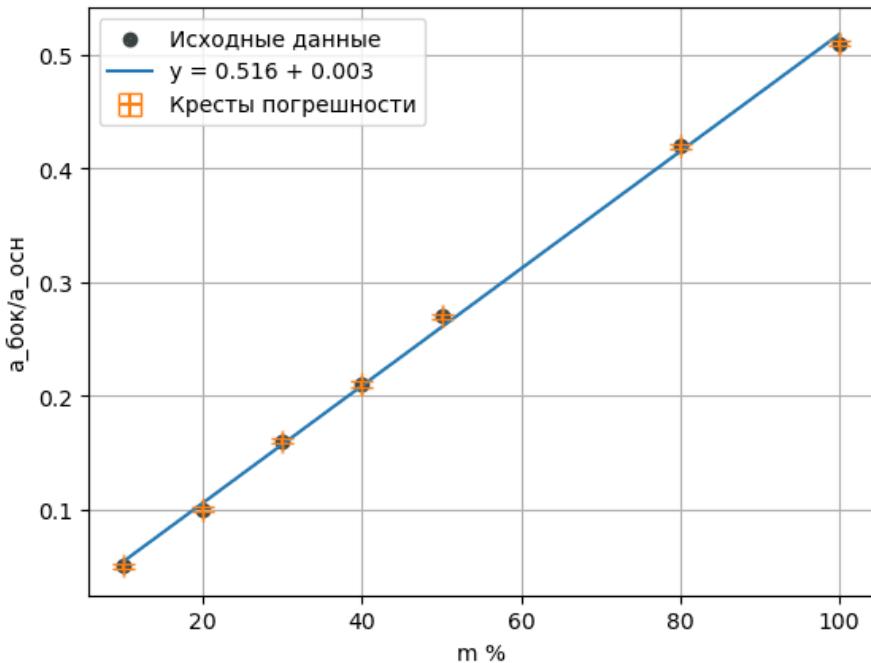
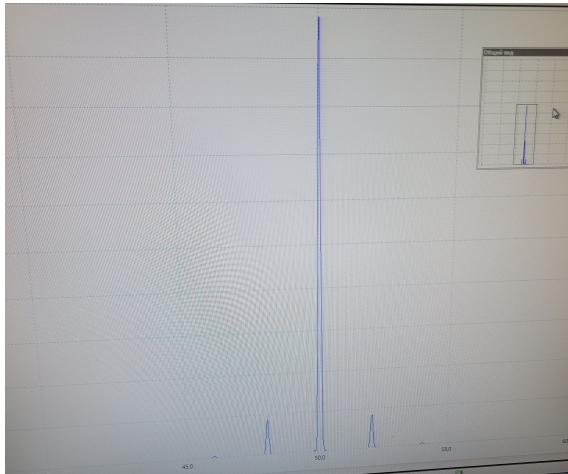


Рис. 8: Зависимость $a_{бок}/a_{осн}$ от m

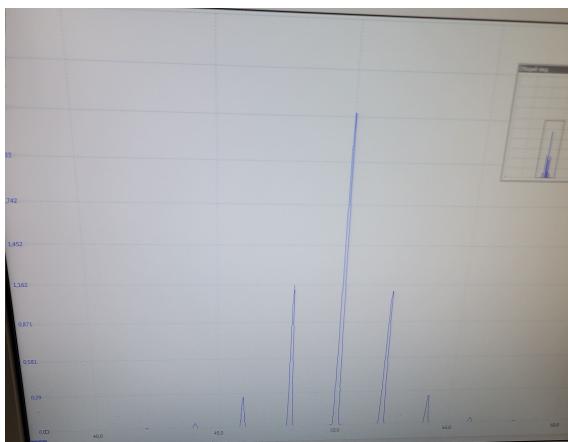
Построим график $\frac{a_{бок}}{a_{осн}}(m)$. Используя МНК, получим $k = 0.516x \pm 0,00007$, что подтверждает $\frac{a_{бок}}{a_{осн}} = \frac{m}{2}$, т.е. совпадает с теоретическим предсказанием. График приведён на рис.11.

Д. Наблюдение спектра сигнала, модулированного по фазе

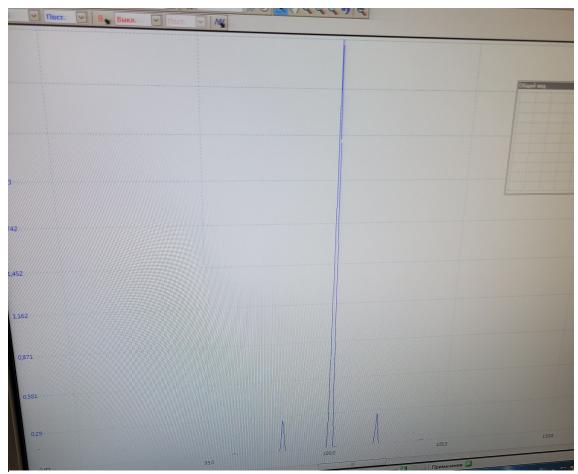
1. Настраиваем генератор в режим модулированного по фазе синусоидального сигнала с несущей частотой $\nu_0 = 50$ кГц, частотой модуляции $\nu_{\text{мод}} = 2$ кГц и максимальным отклонением (глубиной модуляции) $\varphi = 10^\circ$.
2. Получаем на экране спектр (Преобразование Фурье) сигнала.



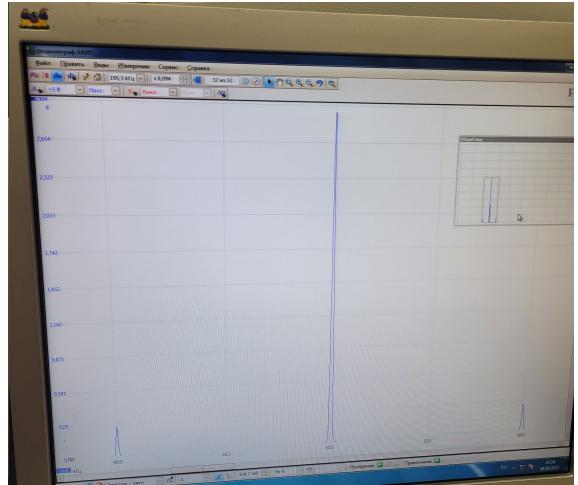
$$\nu_0 = 50 \text{ кГц}, \nu_{\text{мод}} = 2 \text{ кГц}, \varphi = 10^\circ$$



$$\nu_0 = 50 \text{ кГц}, \nu_{\text{мод}} = 2 \text{ кГц}, \varphi = 50^\circ$$

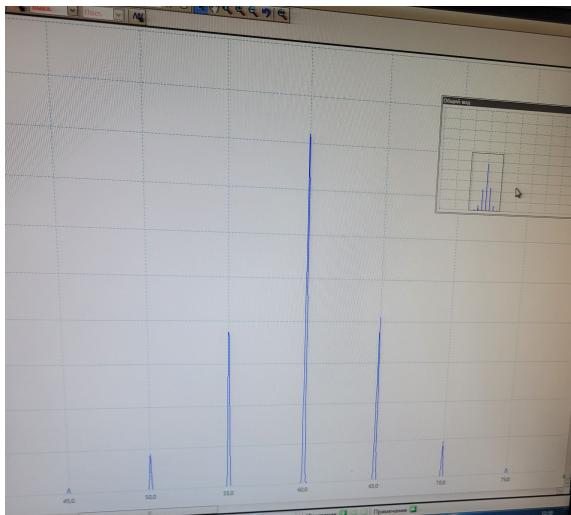


$$\nu_0 = 100 \text{ кГц}, \nu_{\text{мод}} = 2 \text{ кГц}, \varphi = 10^\circ$$



$$\nu_0 = 50 \text{ кГц}, \nu_{\text{мод}} = 10 \text{ кГц}, \varphi = 10^\circ$$

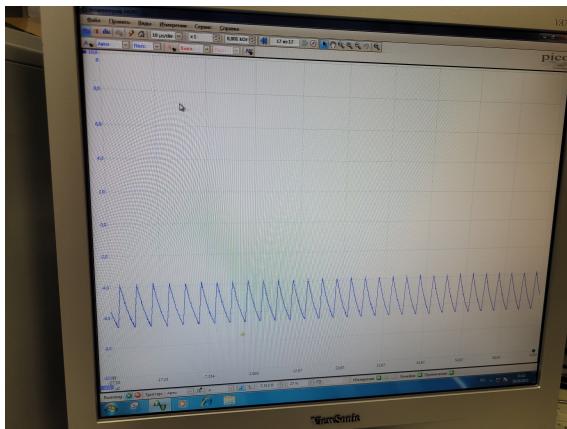
Рис. 9



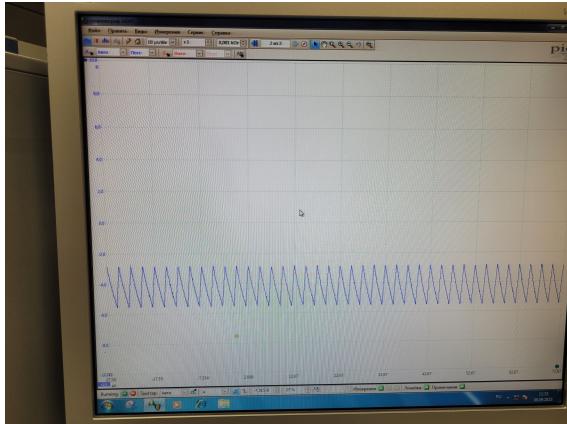
$$\nu_0 = 60 \text{ кГц}, \nu_{\text{мод}} = 5 \text{ кГц}, \varphi = 50^\circ$$

Е. Изучение фильтрации сигналов

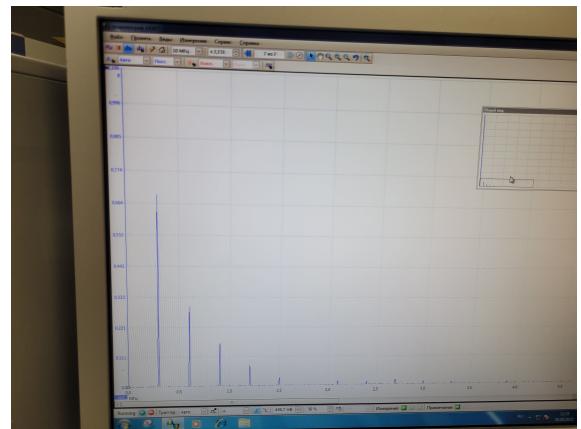
1. Подключаем RC цепочку с сопротивлением $R = 3$ кОм и ёмкостью $C = 1000$ пФ. Получаем характерное время $\tau_{RC} = RC = 3$ мкс. Подаём на вход RC -цепочки последовательность прямоугольных импульсов с периодом повторения $T \sim \tau_{RC}$.
 2. Получаем на экране спектр (Преобразование Фурье) сигнала.



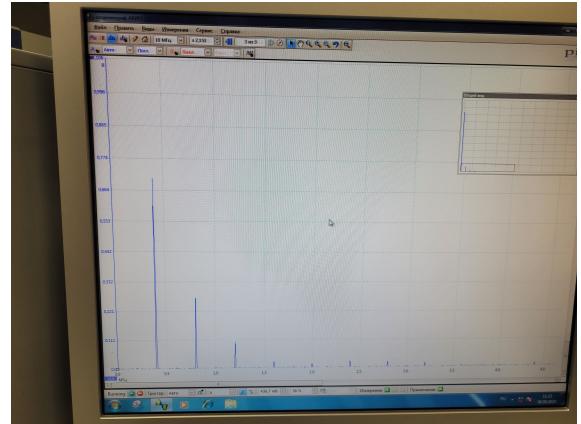
Сигнал при $\nu_0 = 300$ кГц и $\tau = 510$ нс.



Сигнал при $\nu_0 = 400$ кГц и $\tau = 510$ нс.



Спектр при $\nu_0 = 300$ кГц и $\tau = 510$ нс.



Спектр при $\nu_0 = 400$ кГц и $\tau = 510$ нс.

Рис. 10

3. При фиксированной частоте $\nu = 300$ кГц проведем измерения отношений амплитуд соответствующих спектральных гармоник (для 7–9 гармоник) фильтрованного и исходного сигналов: $K_n = |a_n^\Phi|/|a_n^0|$. Для измерения амплитуд a_n^0 спектра исходного сигнала переподключим генератор к осциллографу напрямую.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$a_n^\Phi, \text{ MB}$	695.0	295.4	166.6	82.17	27.76	0	15.55	12.28	19.15
$a_n^0, \text{ MB}$	4452	3768	3151	1991	891	0	647	897	1008
$K_n = a_n^\Phi / a_n^0 $	0.156	0.078	0.0529	0.041	0.031	?	0.024	0.014	0.019

Таблица 3

Построим график зависимости амплитудного коэффициента фильтрации $K(\nu)$ от частоты $\nu = n\nu_0$.

Проверим, что экспериментальная зависимость совпадает с теоретической $K = \frac{1}{\tau_{RC}} \int_0^t f(t')dt'$. Т.к. мы подаём последовательность прямоугольных импульсов, то правая часть зави-

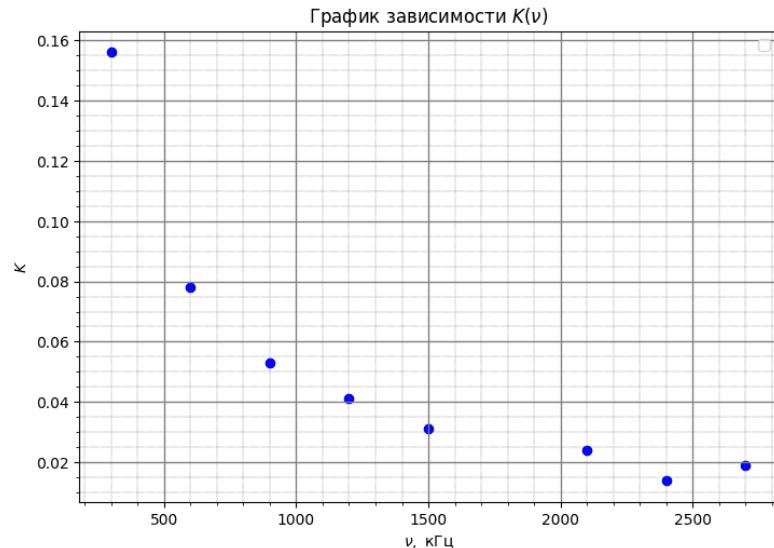


Рис. 11: Зависимость $K(\nu)$

сит линейно от t , т.е. обратно пропорционально ν . График соответствует этой зависимости

Вывод

В данной работе мы изучили понятие спектра и спектрального анализа, а также исследовали спектральный состав периодических электрических сигналов.

А именно, мы посмотрели на прямоугольные импульсы, цуги гармонических колебаний, а также гармонические сигналы, модулированные по амплитуде. Кроме того, нами был экспериментально проверен частный случай выполнения соотношения неопределённости.