

Работа 3.1.3

Измерение магнитного поля Земли

Балдин Виктор

1 Аннотация

В работе исследуются свойства постоянных неодимовых магнитов и с их помощью находится горизонтальная и вертикальная составляющие индукции магнитного поля Земли, а так же магнитное наклонение.

2 Теоретические сведения

Простейший магнитный диполь может быть образован витком с током или постоянным магнитом. По определению, магнитный момент m тонкого витка площадью S с током I равен $\mathbf{m} = \frac{IS}{c}$, где $\mathbf{S} = S\mathbf{n}$ - вектор площади контура, образующий с направлением тока правовинтовую систему, \mathbf{n} - единичный вектор нормали к площадке. Если размеры контура с током или магнитной стрелки малы по сравнению с расстоянием до диполя, то соответствующий магнитный диполь называют *элементарным*, или *точечным*.

Магнитное поле точечного диполя определяется по формуле, аналогичной формуле для поля элементарного электрического диполя:

$$\mathbf{B} = \frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})}{r^5} - \frac{\mathbf{m}}{r^3}$$

Во внешнем магнитном поле с индукцией \mathbf{B} на точечный магнитный диполь \mathbf{m} действует механический момент сил $\mathbf{M} = [\mathbf{m}, \mathbf{B}]$. При этом потенциальная энергия которой обладает диполь с постоянным \mathbf{m} , равна $W = -(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B})$. Когда диполь ориентирован вдоль внешнего поля, он находится в состоянии *равновесия*.

В *неоднородном* внешнем поле выражение для энергии постоянного диполя сохраняется. При этом кроме момента сил на диполь действует ещё и сила

$$\mathbf{F} = -\nabla W = (\mathbf{m} \cdot \nabla)\mathbf{B}$$

Таким образом из вышесказанного следует, что *свободный* магнитный диполь в неоднородном магнитном поле ориентируется вдоль силовых линий магнитного поля и втягивается в область более сильного поля, поскольку это ведёт к уменьшению энергии диполя.

Выражения выше, позволяют рассчитать силу взаимодействия магнитов с моментами \mathbf{m}_1 и \mathbf{m}_2 . Когда моменты двух небольших магнитов направлены вдоль соединяющей их прямой: $\mathbf{m}_{1,2} \parallel \mathbf{r}$, где \mathbf{r} - радиус-вектор между ними, они взаимодействуют с силой

$$F_{12} = \mathbf{m}_1 \frac{\partial B_2}{\partial r} = \mathbf{m}_1 \frac{\partial (2\mathbf{m}_2/r^3)}{\partial r} = -\frac{6\mathbf{m}_1\mathbf{m}_2}{r^4} \text{ (ед. СГС)}$$

Если магнитные моменты направлены перпендикулярно соединяющей их прямой: $\mathbf{m}_{1,2} \perp \mathbf{r}$, то нетрудно показать, что сила их взаимодействия окажется в два раза меньшей и будет иметь противоположный знак:

$$F_{12} = \frac{3\mathbf{m}_1\mathbf{m}_2}{r^4} \text{ (ед. СГС)}$$

3 Оборудование и инструментальные погрешности

В работе используются: неодимовые магниты; тонкая нить для изготовления крутильного маятника; медная проволока; электронные весы; секундомер; измеритель магнитной индукции; штангенциркуль; брусок, линейка и штатив из немагнитных материалов; набор гирь и разновесов.

1. Весы – 0.005 г
2. Секундомер – 0.2 с
3. Штангенциркуль – 0.01 см
4. Измеритель магнитной индукции – 5% ед. СГС

3.1 Экспериментальная установка

В работе используются неодимовые магниты шарообразной формы. Важно, чтобы вещество из которого они изготовлены, было *магнитожёстким* материалом и чтобы шары были намагничены однородно.

Магнитное поле однородного намагниченного шара радиусом R может быть вычислено точно. На расстояниях $r \geq R$ от центра шара оно совпадает с полем *точечного* магнитного диполя, расположенного в центре, магнитный момент \mathbf{m} которого совпадает с полным моментом шара. Внутри шара магнитное поле однородно. Нетрудно получить, что при $r < R$

$$\mathbf{B}_0 = \frac{2\mathbf{m}}{R^3}$$

В качестве ещё одной характеристики материала магнита используют остаточную *намагниченность* \mathbf{M} . По определению, намагниченность равна *объёмной плотности магнитного момента*, поэтому для однородного намагниченного шара $\mathbf{m} = \mathbf{M}V$, где $V = \frac{4\pi}{3}R^3$ - объём магнита. Величину $B_r = 4\pi\mathbf{M}$ называют остаточной индукцией материала.

Из сказанного выше нетрудно видеть, что индукция \mathbf{B}_p на *полюсах* однородно намагниченного шара направлена по нормали к поверхности и совпадает поэтому с индукцией внутри шара $\mathbf{B}_p = \mathbf{B}_0$. Величина B_p связана с остаточной индукцией B_r соотношением

$$B_p = B_o = \frac{2}{3}B_r$$

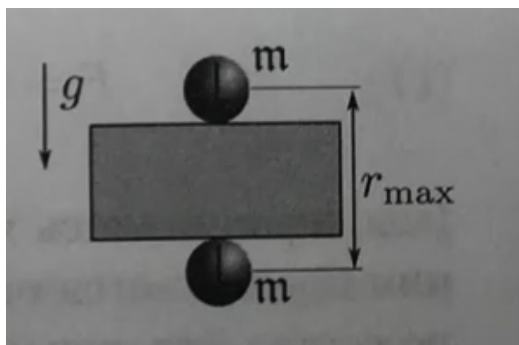
4 Результаты измерений и обработка данных

4.1 Определение магнитного момента, намагниченности и остаточной магнитной индукции вещества магнитных шариков

Диаметр шариков измеряется с помощью микрометра: $d = 0,630 \pm 0,001$ см.

Масса шариков измеряется на весах, но для того, чтобы магнитное поле шариков не влияло на показания весов, сделаем толстую подложку из легкого материала – бумаги. $m = 0,82 \pm 0,01$ г.

Магнитометр показал значение $B_p = 260 \pm 5$ мТл на полюсах шарика.



Проложим между двумя магнитными шариками брусок из немагнитного материала как на рисунке сверху и, подкладывая между бруском и верхним магнитиком листы бумаги, определим, на каком максимальном расстоянии r_{max} шарики удерживают друг друга в поле тяжести Земли.

$$r_{max} = 1.7 \pm 0.4 \text{ см}$$

Величина магнитного момента магнитика \mathbf{m} :

$$\mathbf{m} = \sqrt{\frac{mgr_{max}^4}{6}}$$

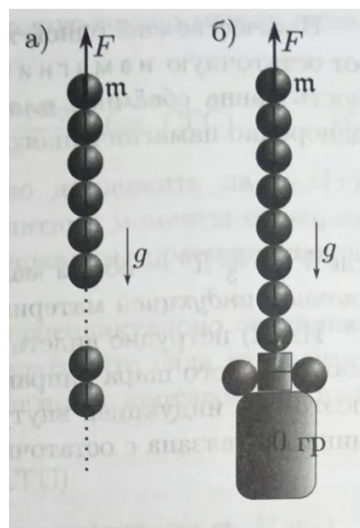
$$\mathbf{m} = 34 \pm 3 \text{ (ед. СГС)}$$

Полученные значения магнитных моментов отличаются. Это может быть связано с большой погрешностью методики эксперимента, а так же неточным взаимным расположением магнитных моментов из-за силы трения.

Величину намагниченности материала шариков рассчитаем для метода А (левая колонка) по формуле $M = \frac{\mathbf{m}}{\frac{\pi}{6}d^3}$, остаточную индукцию магнитного поля $B_r = 4\pi M$.

$$M_A = 260 \pm 18 \text{ (ед. СГС)}, M_B = 750 \pm 45 \text{ ед. СГС}, B_r = 330 \pm 30 \text{ мТл},$$

Табличное значение B_r для соединения $Nd_2Fe_{14}B$: $B_{r_{табл}} = 1220 \text{ мТл}$. К табличной величине ближе результат второго эксперимента, хотя оба не попадают. Расчетное значение



Составим цепочку из 25 шариков, с помощью неодимовых магнитов в форме параллелепипедов, подсоединим цепочку к гире и разовесим так, чтобы общая масса системы составила приблизительно 500 г. Далее подберём минимальный вес системы цепочки с гирей, при котором она отрывается от верхнего шарика. Взвесим оторвавшуюся цепочку с гирей.

$$m_{min} = 350 \pm 1 \text{ г}$$

Рассчитаем силу сцепления двух шаров и по ней определим магнитный момент шарика \mathbf{m} .

$$F_0 = \frac{6\mathbf{m}^2}{d^4}$$

$$F = m_{min}g = F_0(1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \dots) \approx 1.08F_0$$

$$\mathbf{m} = \sqrt{\frac{d^4 m_{min} g}{6 \cdot 1.08}}$$

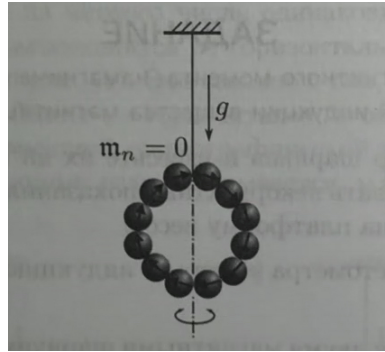
$$\mathbf{m} = 98 \pm 6 \text{ (ед. СГС)}.$$

по методу А: $B_{p1} = 220 \pm 20$ мТл, по методу Б: $B_{p2} = 360 \pm 40$ мТл. Порядок расчетных значений совпадает с порядком измеренного B_p .

4.2 Горизонтальная составляющая магнитного поля Земли

Оценим влияние упругости нити на период колебаний, возбудив крутильные колебания свёрнутой в кольцо "стрелки" (магнитный момент такого кольцеобразного маятника равен 0).

Соберём крутильный маятник в виде кольца из 12 магнитных шариков и подвесим его на немагнитном штативе. Используя Λ -образный подвес, установим "магнитную стрелку" в горизонтальное положение, далее свернем её в кольцо и измерим коэффициент упругости нити



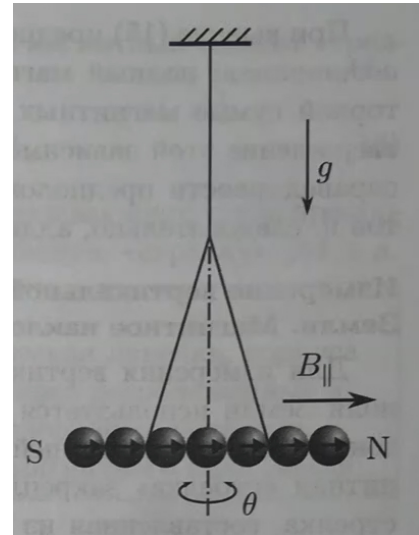
Из эксперимента получа-

ем, что для кольца $T = 4.8$ с. Запишем уравнение вращательного движения и формулу для периода колебаний:

$$I\ddot{\alpha} + f\alpha = 0, \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{f}}, \quad f = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 I.$$

Момент инерции относительно нити колечка можно оценить как $I = \frac{12mR^2}{2} = (2,5 \pm 0,1) \cdot 10^{-6} \text{ кг} \cdot \text{м}^2 \Rightarrow f = (4,3 \pm 0,2) \cdot 10^{-6} \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^2}$.

Соберём крутильный маятник из 12 магнитных шариков и подвесим его на немагнитном штативе. Используя Λ -образный подвес, установим "магнитную стрелку" в горизонтальное положение. Возбудим крутильные колебания маятника вокруг вертикальной оси и определим их период. Исследуем зависимость периода T крутильных колебаний "стрелки" от количества магнитных шариков n , составляющих "стрелку". При этом число колебаний всегда будем брать $N = 10$. Погрешность измерения периода соответственно $\Delta T = 0,04$ с (время человеческой реакции $\sim 0,4$ с).



n	12	11	10	9	8	7	6	5	4
$t, \text{с}$	37.8	35.3	33.7	30	27.3	24.3	20.6	17.5	14.1
$T, \text{с}$	3.78	3.53	3.37	3	2.73	2.43	2.06	1.75	1.41

График экспериментальной зависимости $T(n)$:

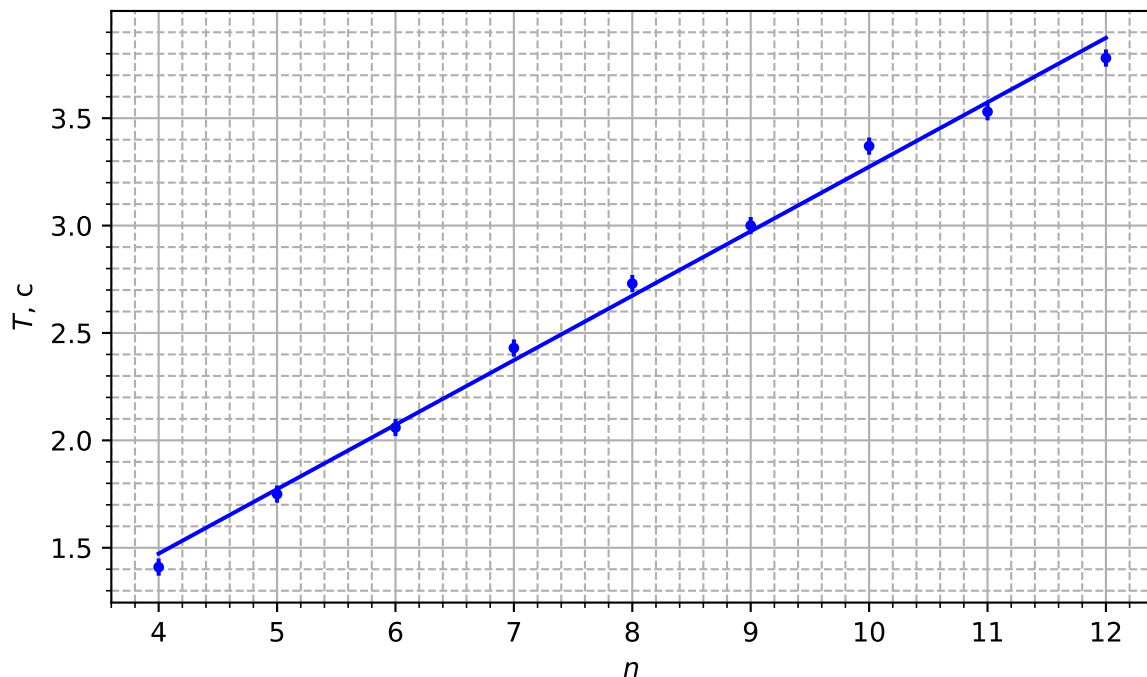


Рис. 1: Зависимость периода колебаний от числа числа магнитов магнитной стрелки.

$$J_n \ddot{\theta} + (m_n B_{||} + f) \theta = 0, J_n \approx \frac{1}{12} n^2 m d^2 \Rightarrow T_n = 2\pi \sqrt{\frac{m d^2 n^2}{12(m B_{||} + f)}}$$

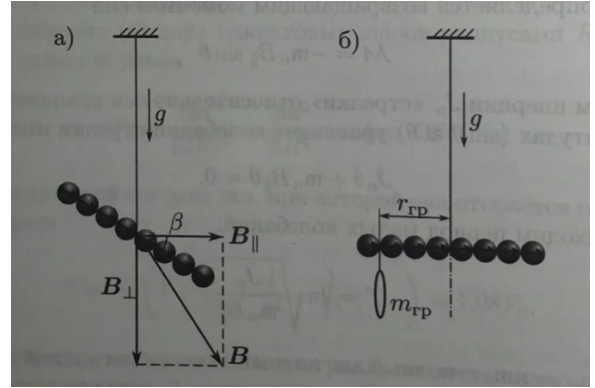
По значению углового коэффициента рассчитаем величину горизонтальной составляющей

магнитного поля Земли.

$$k = 2\pi \sqrt{\frac{md^2n^2}{12(mB_{\parallel} + f)}} = 0,30 \pm 0,02 \text{ с}, B_{\parallel} = \frac{\pi^2 md^2}{3mk^2} - \frac{f}{m} \approx 0,012 \pm 0,001 \text{ мТл}$$

При это оказалось $f \ll \frac{\pi^2 md^2}{3k^2}$, то есть упругость можно было не учитывать.

Изготовим магнитную "стрелку" из 10 шариков и подвесим её за середину с помощью нити на штативе. Определим механический момент сил, действующий со стороны магнитного поля Земли на *горизонтально* расположенную магнитную "стрелку". Для этого с помощью одного или нескольких кусочков проволоки, уравновесим "стрелку" в горизонтальном положении. С помощью весов определим массу уравнивающего груза m . Из условия равновесия рассчитаем механический момент сил $M = mgx$, действующих на горизонтальную "стрелку" со стороны поля Земли. Измерения сил проведём для чётных значений $n = 4, 6, 8, 10, 12$.



N	d, шар	m, г	M, ед. СГС
10	3	0.284	526.6
12	4	0.284	702.1
8	2	0.255	315.2
6	2	0.189	233.6
4	1	0.237	146.5

Коэффициент наклона $a = 70 \pm 7 \text{ г} \frac{\text{см}^2}{\text{с}^2}$. Из линейности видно, что приближение аддитивности магнитных моментов для используемых в работе магнитов применимо. По значению углового коэффициента аппроксимирующей прямой рассчитаем величину вертикальной составляющей B_{\perp} магнитного поля Земли.

$$M_n = nmB_{\perp} \Rightarrow B_{\perp} = \frac{a}{m} \approx 0.07 \pm 0.01 \text{ мТл}$$

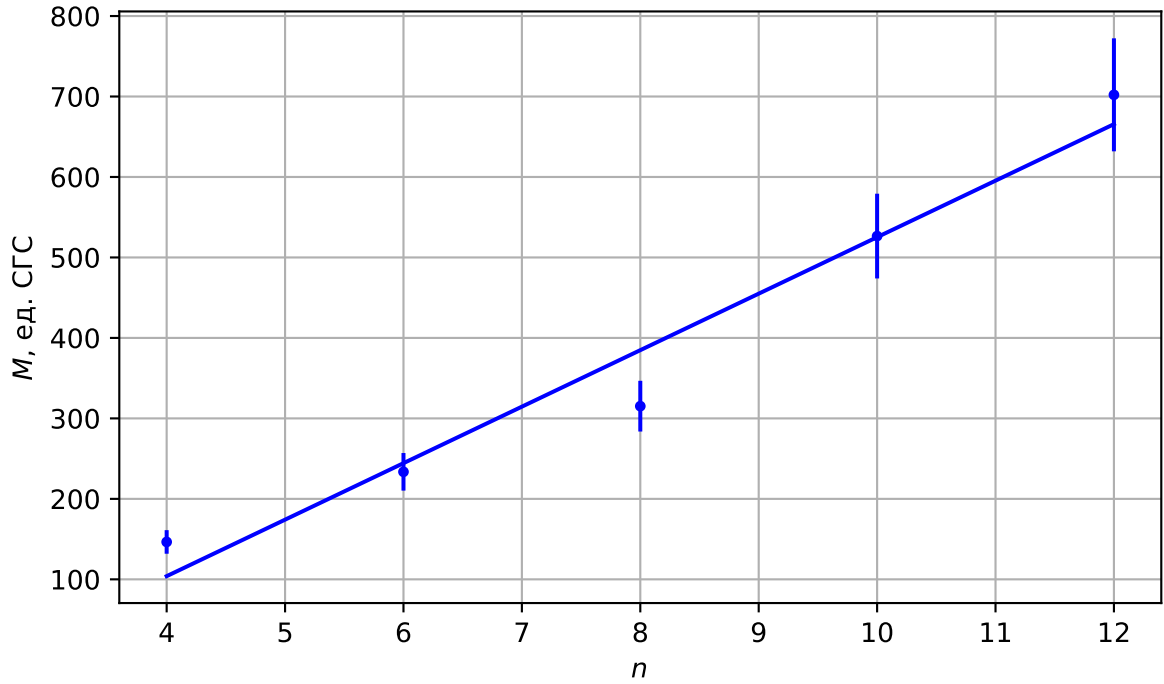


Рис. 2: Зависимость момента сил, уравнивающего стрелку от числа магнитов в ней.

5 Выводы и расчет погрешностей

5.1 Погрешности

$$\varepsilon_{m_1} = \sqrt{\left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 + 4\left(\frac{\Delta r_{max}}{r_{max}}\right)^2} \approx 6\%$$

$$\varepsilon_{m_2} = \sqrt{\left(\frac{\Delta d}{d}\right)^2 + 4\left(\frac{\Delta r_{min}}{r_{min}}\right)^2} \approx 2\%$$

$$\varepsilon_{B_{\parallel}} = \sqrt{\left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\Delta d}{d}\right)^2 + \left(\frac{\Delta \mathbf{m}}{\mathbf{m}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta \frac{T_n}{n}}{\frac{T_n}{n}}\right)^2} \approx 7\%$$

$$\varepsilon_{B_{\perp}} = \sqrt{\left(\frac{\Delta a}{a}\right)^2 + \left(\frac{\Delta \mathbf{m}}{\mathbf{m}}\right)^2} \approx 12\%$$

5.2 Вывод

Поскольку установка находится в железобетонном здании, магнитное поле в нём сильно отличается от поля Земли. Так же на показания влияет наличие электронных приспособлений связи. Магнитное поле Земли в нашем районе около 0.05 - 0.1 ед. СГС. Полученное значение не сильно отличается действительного.

Используя результаты измерений B_{\perp} и B_{\parallel} , магнитное наклонение β и полная величина индукции магнитного поля Земли в кабинете выполнения лабораторной работы равны:

$$\beta = \arctan \frac{B_{\perp}}{B_{\parallel}} \approx 80^\circ$$

Теоретически (α - угол наклона Земли, ϕ - широта Москвы),

$$\beta = \frac{B_{\perp}}{B_{\parallel}} = \arctan \frac{\frac{-2\mathfrak{m}_3 \sin(\phi - \alpha)}{r^3}}{\frac{-\mathfrak{m}_3 \cos(\phi - \alpha)}{r^3}} = \arctan(2 \operatorname{tg}(\phi - \alpha)) \approx 53^{\circ}$$