

Измерение модуля Юнга стержней методом акустического резонанса. (1.4.8)

Балдин Виктор Б01-303

20 ноября 2023

1 Введение

Цель работы: исследовать явление акустического резонанса в тонком стержне; измерить скорость распространения продольных звуковых колебаний в тонких стержнях из различных материалов и различных размеров; измерить модули Юнга различных материалов.

В работе используются: генератор звуковых частот, частотомер, осциллограф, электромагнитные излучатель и приёмник колебаний, набор стержней из различных материалов.

2 Теоретическая часть

Основной характеристикой упругих свойств твёрдого тела является его модуль Юнга E . Согласно закону Гука, если к элементу среды приложено некоторое механическое напряжение σ , действующее вдоль некоторой оси x (напряжения по другим осям при этом отсутствуют), то в этом элементе возникнет относительная деформация вдоль этой же оси $\varepsilon = \Delta x/x_0$, определяемая соотношением

$$\sigma = \varepsilon E$$

Если с помощью кратковременного воздействия в некотором элементе твёрдого тела создать малую деформацию, она будет далее распространяться в среде в форме волны, которую называют акустической или звуковой. Распространение акустических волн обеспечивается за счёт упругости и инерции среды. Волны сжатия/растяжения, распространяющиеся вдоль оси, по которой происходит деформация, называются продольными. Как будет строго показано далее, скорость u распространения продольной акустической волны в простейшем случае длинного тонкого стержня определяется соотношением

$$u = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

где ρ — плотность среды. Заметим, что размерность модуля Юнга E равна $[\text{Н/м}^2]$ и совпадает с размерностью механического напряжения (или давления). Характерные значения модуля Юнга металлов лежат в диапазоне $E \sim 10^{10} \div 10^{12}$ Па, так что при плотности $\rho \sim 10^4$ кг/м³ характерные значения скорости звука в твёрдых телах составляют $u \sim 10^3 - 10^4$ м/с. В общем случае звуковые волны в твёрдых телах могут быть не только продольными, но и поперечными — при этом возникает деформация сдвига перпендикулярно распространению волны. Кроме того, описание распространения волн в неограниченных средах осложняется тем обстоятельством, что при отличном от нуля коэффициенте Пуассона 1 напряжение вдоль одной из осей вызывает деформацию не только в продольном, но и в поперечном направлении к этой оси. Таким образом, общее описание звуковых волн в твёрдых телах — относительно непростая задача. В данной работе мы ограничимся исследованием наиболее простого случая упругих волн,

распространяющихся в длинных тонких стержнях. Рассмотрим стержень постоянного круглого сечения, радиус R которого много меньше его длины L . С точки зрения распространения волн стержень можно считать тонким, если длина λ звуковых волн в нём велика по сравнению с его радиусом: λR . Такая волна может свободно распространяться только вдоль стержня, поэтому можно считать, что стержень испытывает деформации растяжения и сжатия только вдоль своей оси (заметим, что в обратном пределе коротких волн λR стержень следует рассматривать как безграничную сплошную среду). Если боковые стенки тонкого стержня свободны (т.е. стержень не сжат с боков), то его деформации описывается законом Гука в форме (1), и, следовательно, его упругие свойства определяются исключительно модулем Юнга среды. Акустическая волна, распространяющаяся в стержне конечной длины L , испытывает отражение от торцов стержня. Если при этом на длине стержня укладывается целое число полуволн, то отражённые волны будут складываться в фазе с падающими, что приведёт к резкому усилению амплитуды их колебаний и возникновению акустического резонанса в стержне. Изменяя соответствующие резонансные частоты, можно определить скорость звуковой волны в стержне и, таким образом, измерить модуль Юнга материала стержня. Акустический метод является одним из наиболее точных методов определения упругих характеристик твёрдых тел. Получим дифференциальное уравнение, описывающее распространение упругих волн в тонком стержне. Направим ось x вдоль геометрической оси стержня (рис. 1). Разобьём исходно недеформированный стержень на тонкие слои толщиной Δx . При продольной деформации среды границы слоёв сместятся в некоторые новые положения. Пусть плоскость среды, находящаяся исходно в точке x

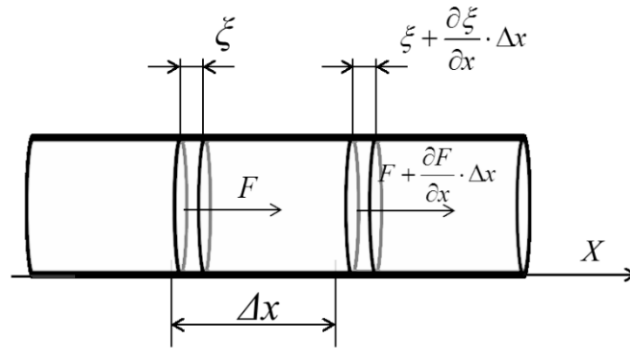


Рис. 1:

сместилась к моменту t на расстояние $\xi(x, t)$. Тогда слой, занимавший исходно отрезок $[x, x + \Delta x]$, изменил свой продольный размер на величину

$$\Delta \xi = \frac{\partial \xi}{\partial x} \Delta x$$

3 Методика измерений

Экспериментальная установка

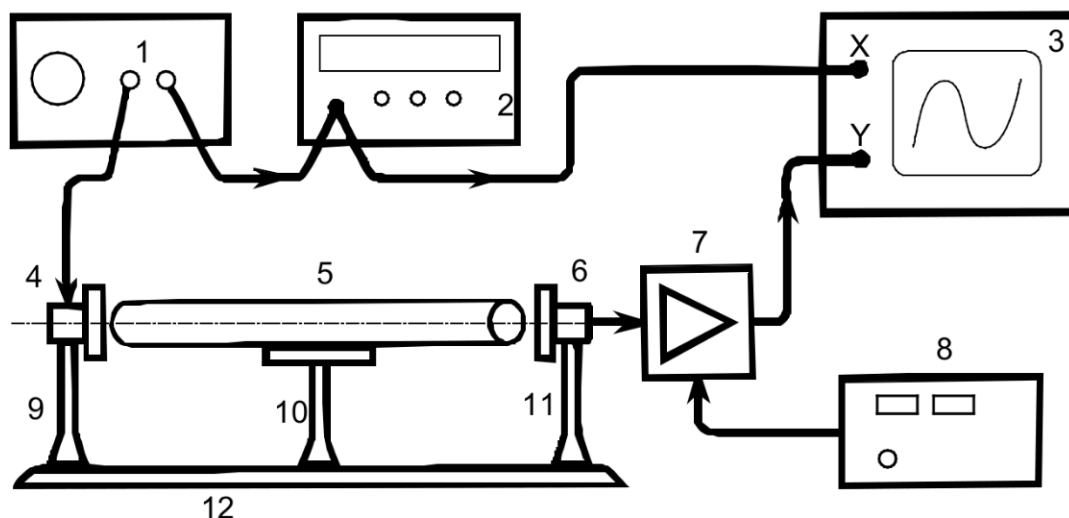


Рис. 3. Схема установки: 1 – генератор звуковой частоты, 2 – частотомер, 3 – осциллограф, 4 – электромагнит-возбудитель, 5 – образец, 6 – электромагнит-приёмник, 7 – усилитель звуковой частоты, 8 – блок питания усилителя, 9, 11 – стойки крепления электромагнитов, 10 – стойка крепления образца, 12 – направляющая

Схема экспериментальной установки приведена на рис. 3. Исследуемый стержень 5 размещается на стойке 10. Возбуждение и приём колебаний в стержне осуществляются электромагнитными преобразователями 4 и 6, расположенными рядом с торцами стержня. Крепления 9, 11 электромагнитов дают возможность регулировать их расположение по высоте, а также перемещать вправо-влево по столу 12.

Электромагнит 4 служит для возбуждения упругих механических продольных колебаний в стержне. На него с генератора звуковой частоты 1 подаётся сигнал синусоидальной формы: протекающий в катушке электромагнита ток создаёт пропорциональное ему магнитное поле, вызывающее периодическое воздействие заданной частоты на торец стержня (к торцам стержней из немагнитных материалов прикреплены тонкие стальные шайбы). Рядом с другим торцом стержня находится аналогичный электромагнитный датчик 6, который служит для преобразования механических колебаний в электрические. Принцип работы электромагнитных датчиков описан подробнее ниже. Сигнал с выхода генератора поступает на частотомер 2 и на вход канала X осциллографа 3. ЭДС, возбуждаемая в регистрирующем электромагните 6, пропорциональная амплитуде колебаний торца стержня, усиливается усилителем 7 и подаётся на вход канала Y осциллографа. Изменяя частоту генератора и наблюдая за амплитудой сигнала с регистрирующего датчика, можно определить частоту акустического резонанса в стержне. Наблюдения в режиме X–Y позволяют сравнить сигналы генератора и датчика, а также облегчает поиск резонанса при слабом сигнале.

Как следует из формулы (2), модуль Юнга материала E может быть найден по скорости распространения акустических волн в стержне u и его плотности ρ . Для определения скорости u в данной работе используется метод акустического резонанса. Это явление состоит в том, что при частотах гармонического возбуждения, совпадающих с собственными частотами колебаний стержня $f \approx f_{\text{рез}}/Q$, резко увеличивается амплитуда колебаний, при этом в стержне образуется стоячая волна. Возбуждение продольных колебаний в стержне происходит посредством воздействия на торец стержня периодической силой, направленной вдоль его оси. Зная

номер гармоники n и соответствующую резонансную частоту f_n , на которой наблюдается усиление амплитуды колебаний, можно вычислить скорость распространения продольных волн в стержне:

$$u = 2L \frac{f_n}{n}$$

Таким образом, для измерения скорости u необходимо измерить длину стержня L и получить зависимость резонансной частоты от номера резонанса n . Если все теоретические предположения справедливы, эта зависимость будет прямой пропорциональностью. Следует отметить, что в реальном металлическом стержне могут возбуждаться не только продольные, но и поперечные (в частности, изгибные) колебания стержня. При этом каждому типу колебаний соответствует не одна, а целый спектр частот. Таким образом, стержень «резонирует» не только на частотах, определяемых формулой (15), но и на множестве других частот. Для того чтобы отличить нужные нам резонансные частоты от «паразитных», следует провести предварительные расчёты и не принимать во внимание резонансы, не описываемые зависимостью (15). Скажем также несколько слов о точности измерения резонансной частоты. В первую очередь отметим, что в идеальном случае резонанс достигался бы при строгом совпадении частот $f = f_n$ (а амплитуда в резонансе стремилась бы к бесконечности). Однако в реальности возбуждение стоячей волны возможно при относительно малом отклонении частоты от резонансной — амплитуда колебаний как функция частоты $A(f)$ имеет резкий максимум при $f = f_n$.

Именно конечная ширина резонанса Δf определяет в основном погрешность измерения частоты в нашем опыте. Используемые в работе металлические стержни являются весьма высокодобротными системами: их добротность оказывается порядка $Q \sim 102 \div 103$. Поэтому ширина резонанса оказывается довольно малой, что приводит к необходимости тонкой настройки частоты генератора (при $f \sim 5$ кГц ширина резонанса Δf оказывается порядка нескольких герц). Кроме того, время установления резонансных колебаний, которое можно оценить как

$$\tau_{\text{уст}} \sim \frac{1}{\Delta f} \sim \frac{Q}{f},$$

оказывается весьма велико, из-за чего поиск резонанса нужно проводить, меняя частоту генератора очень медленно.

4 Оборудование

Генератор звуковых частот, частотомер, осциллограф, электромагнитные излучатель и приёмник колебаний, набор стержней из различных материалов.

5 Измерения и обработка результатов

1. Измерим плотность всех предоставленных нам материалов:

Таблица 1: Плотности			
	Медь	Дюралюминий	Сталь
ρ , г/см ³	8.68 ± 0.08	2.71 ± 0.03	7.73 ± 0.05

2. Включим генератор.

3. Длина всех исследуемых стержней дана: $L = (600 \pm 0.5)$ мм.

4. Исследуем по порядку медный, дюралюминиевый и стальной стержни на резонанс.

Таблица 2: Найденные частоты резонансов в зависимости от номера резонанса

	n	1	2	3	4	5
Медь	f , кГц	3.25329	6.49893	9.6742	12.8739	16.0952
Дюраллюминий	f , кГц	4.23494	8.46810	12.7060	16.0010	20.4800
Сталь	f , КГц	4.13418	8.42034	12.5202	16.7948	20.9340

5. Приведем графики зависимости частоты от номера резонанса:

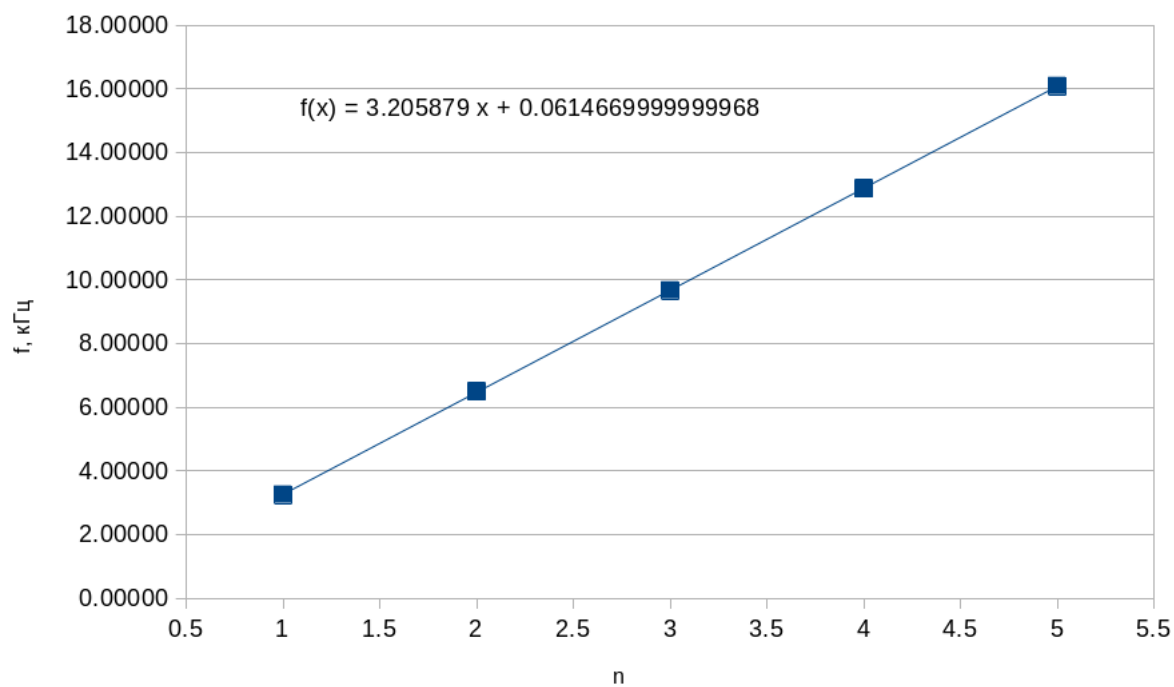


Рис. 2: Резонансы медного стержня

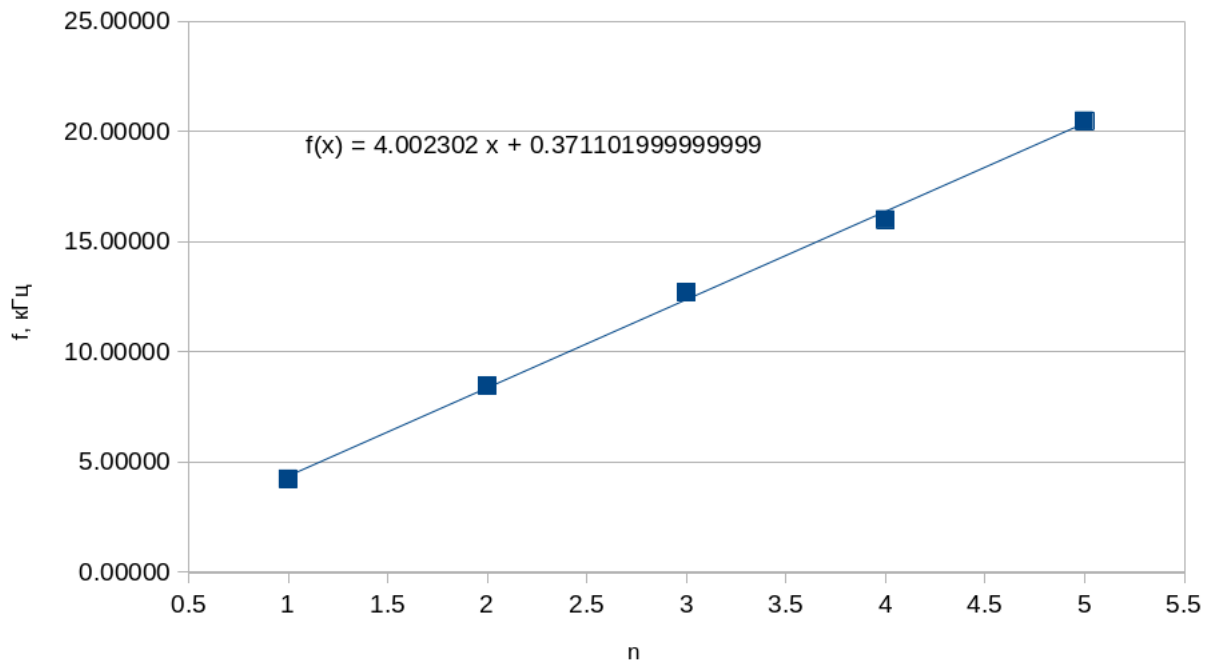


Рис. 3: Резонансы дюралюминиевого стержня

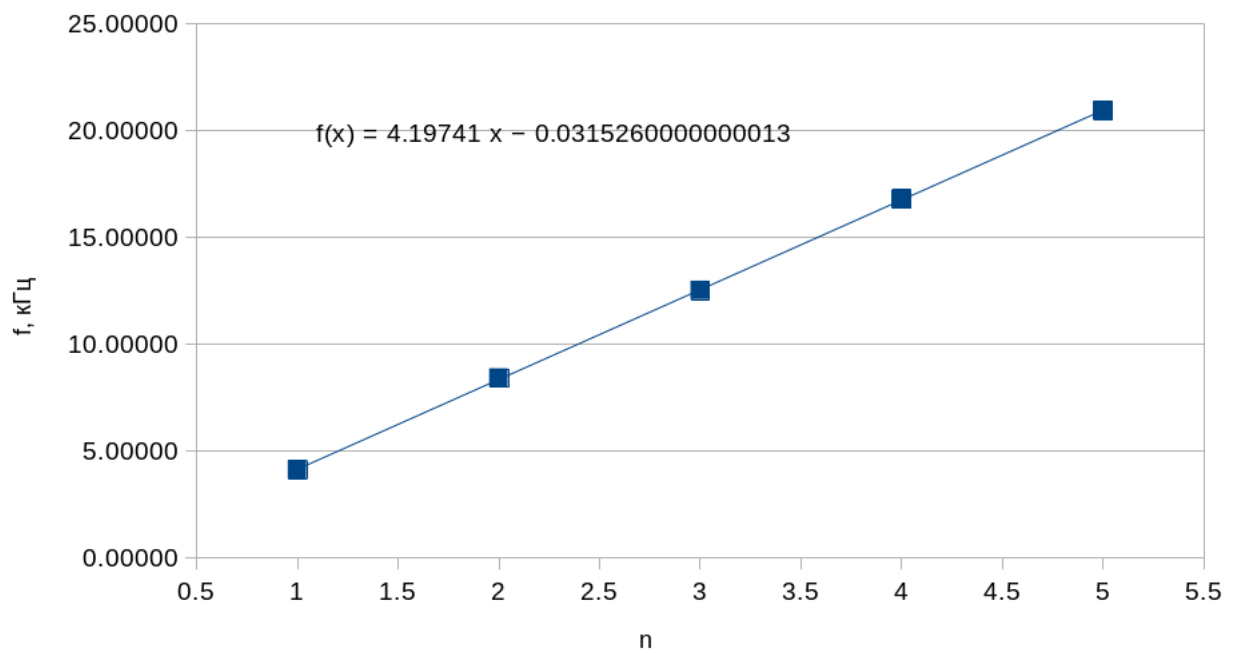


Рис. 4: Резонансы стального стержня

6. По полученным угловым коэффициентам вычислим скорость распространения звуковой волны в стержнях, по которой найдем модуль Юнга.

Таблица 3: Рассчитанные угловые коэффициенты

	Медь	Дюралюминий	Сталь
k , кГц	3.20588	4.00230	4.19741
v , м/с	3847	4803	5037
E , ГПа	128	63	196
ϵ_k	0.0010	0.0008	0.0005
ϵ_v	0.0011	0.0009	0.0006
ϵ_E	0.02	0.02	0.02

Таким образом, получаем итоговый результат:

$$E_{\text{меди}} = (128 \pm 3) \text{ ГПа},$$

$$E_{\text{дюр}} = (63 \pm 2) \text{ ГПа},$$

$$E_{\text{ст}} = (196 \pm 4) \text{ ГПа}$$

7. Проведем дополнительные измерения в окрестности 1-го резонанса для меди, чтобы получить добротность:

$$f_1 = (3.25178 \pm 0.00003) \text{ кГц}, \quad f_2 = (3.26688 \pm 0.00003) \text{ кГц},$$

$$\Delta f = 10.01 \pm 0.06 \text{ Гц},$$

$$Q = \frac{f}{\Delta f} = 325 \pm 3$$

6 Обсуждение результатов

В результате работы мы:

1. Нашли добротность медного стержня как колебательной системы.
2. Получили зависимость $f(n)$. Как нетрудно убедиться по рис. 2 – 4, во всех случаях аппроксимация прямой действительно применима, причем с очень хорошей точностью.
3. Так как наше теоретическое предположение выполнилось, на его основе вычислили скорость звуковой волны во всех данных материалах.
4. Нашли модули Юнга для меди, дюралюминия и стали.
5. Если сравнить результаты с работой 1.3.1, где проводилось измерения методом прогиба, окажется, что точность опыта в данной работе существенно выше (в 1.3.1 мы получали погрешность порядка 10%, тут около 2%, причем наиболее существенный вклад в погрешность внесло измерение плотности). Такое расхождение можно объяснить высокой точностью измерения частоты по сравнению с точностью измерения деформаций в 1.3.1.

7 Вывод

Таким образом, их всего вышесказанного можно заключить, что использованный метод акустического резонанса куда лучше подходит для определения модуля Юнга, нежели метод прямых макродеформаций, использованный в работе 1.3.1. Точность получилось существенно выше. Кроме того, достаточно сделать точнее измерение плотности, чтобы снизить погрешность еще на несколько порядков.