

Работа 1.2.4

Определении главных моментов инерции твердых тел с помощью крутильных колебаний

Балдин Виктор

15 октября 2023 г.

1 Аннотация

Цель работы: измерить периоды крутильных колебаний рамки при различных положениях закрепленного в ней тела, проверить теоретическую зависимость между периодами крутильных колебаний тела относительно различных осей, определить моменты инерции относительно нескольких осей для каждого тела, по ним найти главные моменты инерции тела и построить эллипсоид инерции.

Оборудование: установка для получения крутильных колебаний, набор исследуемых твердых тел, секундомер.

2 Теоретические сведения

Инерционные свойства твердого тела при вращении определяется пространственным распределением. Оно характеризуется тензором инерции тела. Тензор инерции твердого тела является симметричным тензором 2-ого ранга $J \in T_2^0(V)$ и имеет 6 независимых компонент, которые в прямоугольной декартовой системе координат выражаются как:

$$I_{ij} = \int (\delta_{ij} r^2 - r_i r_j) dm = I_{ji}, \quad (1)$$

где r — расстояния от точек до центра, относительно которого вычисляется тензор инерции, а r_i — координатные компоненты соответствующих отрезков, i и j — номера координат (от 1 до 3).

Если для какой либо системы координат все 6 компонент известны, то момент инерции тела относительно произвольной оси l , проходящей через начало координат может быть вычислен по формуле:

$$I_l = n^j n^i I_{ij} = \vec{n}^T I \vec{n} \quad (2)$$

где \vec{n} - единичный вектор-столбец который задает направление оси, I - тензор инерции. А момент импульса \vec{L} и вращательная энергия тела $E_{\text{вращ}}$ тогда будут выражаться как:

$$E_{\text{вращ}} = \frac{1}{2} \vec{\omega}^T I \vec{\omega} = \frac{1}{2} \sum_{ij} \omega^i J_{ij} \omega^j \quad (3)$$

$$\vec{L} = I \vec{\omega}, \quad L_i = \sum_j I_{ij} \omega^j \quad (4)$$

Отложим вдоль оси l из начала координат радиус-вектор r равный по длине $1/\sqrt{I_l}$. Проведем множество таких отрезков, соответствующих различным направлениям оси l . Геометрическое место концов указанных отрезков, является поверхность второго порядка - эллипсоид. Этот эллипсоид принято называть эллипсоидом инерции. Он жестко связан с телом для которого он построен. Знание эллипсоида инерции позволяет найти момент инерции тела относительно любой оси, проходящей через центр эллипсоида. Длина отрезка r будет определять момент инерции тела относительно оси l :

$$I_l = \frac{1}{r^2} \quad (5)$$

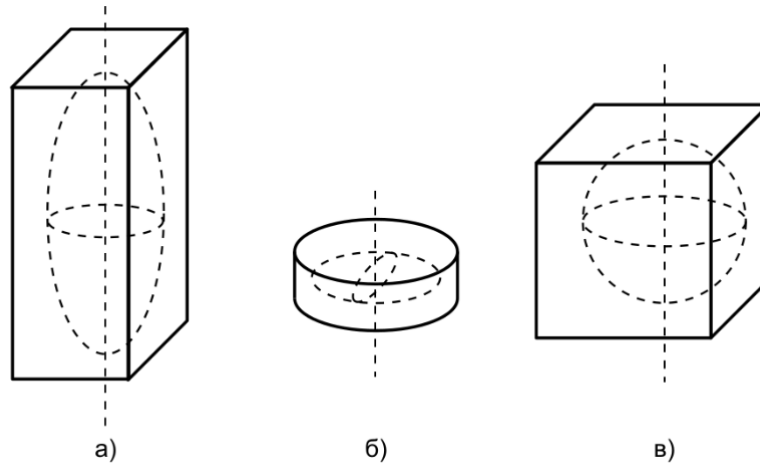


Рис. 1: Эллипсоиды вращения для разных тел

Как и всякий симметричный тензор второго ранга может быть диагонализирован некоторой заменой координат. Пусть система координат, в которой он диагонализирован имеет оси Ox, Oy, Oz , тогда эти оси совпадают с главными осями тела. Полученные диагональные элементы I_x, I_y, I_z называются главными моментами инерции тела, а уравнение эллипсоида инерции в этих координатах примет вид:

$$I_x r_x^2 + I_y r_y^2 + I_z r_z^2 = 1 \quad (6)$$

Крутильные колебания рамки с телом описываются уравнением:

$$(I + I_p)\ddot{\varphi} + f\varphi = 0 \quad (7)$$

Здесь I и I_p - моменты инерции тела и рамки относительно оси вращения, φ - угол поворота рамки, меняющийся со временем t , f - модуль кручения проволоки. Отсюда период этих колебаний:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I + I_p}{f}} \quad (8)$$

На рисунке показано, как проходят оси вращения в параллелепипеде. Оси AA', BB' и CC' являются главными. Моменты инерции относительно этих осей обозначим соответственно I_x, I_y, I_z .

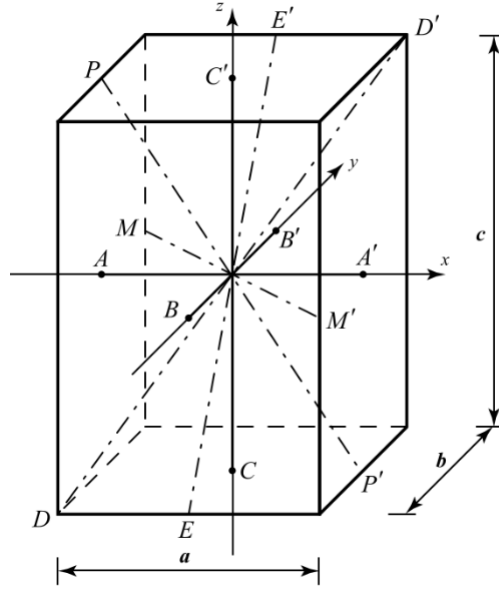


Рис. 2: Оси вращения прямоугольного параллелепипеда

Момент инерции I_D при вращении относительно диагонали DD' выражается через главные моменты с помощью формулы:

$$I_d = I_x \frac{a^2}{d^2} + I_y \frac{b^2}{d^2} + I_z \frac{c^2}{d^2} \quad (9)$$

Используя связь момента инерции с периодом крутильных колебаний получаем соотношение между периодами колебаний относительно осей DD' , EE' , MM' и PP' с периодами крутильных колебаний относительно главных осей.

$$\begin{cases} (b^2 + c^2)T_E^2 = b^2T_y^2 + c^2T_z^2 \\ (a^2 + c^2)T_P^2 = a^2T_x^2 + c^2T_z^2 \\ (a^2 + b^2)T_M^2 = a^2T_x^2 + b^2T_y^2 \end{cases} \quad (10)$$

Эти соотношения также необходимо проверить экспериментально.

3 Методика измерений

В данной работе используется установка для измерения крутильных колебаний, приведенная на рисунке 3. Рамка 1 жестко соединена с проволокой 2, закрепленной вертикально в специальных зажимах 3, позволяющих сообщить начальное закручивание для возбуждения крутильных колебаний вокруг вертикальной оси.

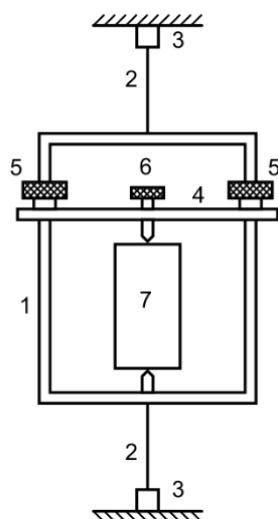


Рис. 3: Схема установки

4 Используемое оборудование

Установка для получения крутильных колебаний, набор исследуемых твердых тел, секундомер.