

# Лабораторная работа 3.2.5 (4.6)

## Свободные и вынужденные колебания в Электрическом контуре

Толочко Константин Б03-205

9 сентября 2023 г.

**Цель работы:** исследование свободных и вынужденных колебаний в колебательном контуре.

**В работе используются:** осциллограф АКТАКОМ ADS-6142Н, генератор сигналов специальной формы АКИП-3409/4, магазин сопротивления MCP-60, магазин емкости Р5025, магазин индуктивности Р567 типа МИСП, соединительная коробка с щунтирующей емкостью, соединительные одножильные и коаксиальные провода.

## 1 Теоретическое введение

Условие реализации режима затухающих колебаний в  $LCR$ -контуре имеет вид

$$0 < R < 2\sqrt{\frac{L}{C}} = R_{kp},$$

где  $R_{kp}$  – критическое сопротивление.

При выполнении этого условия напряжение  $U_C(t)$  на конденсаторе зависит от времени как

$$U_C(t) = U_0 e^{-\gamma t} \cos(\omega_1 t + \varphi_0).$$

Здесь  $\gamma = \frac{R}{2L}$  – коэф. зауходания, а  $\omega_1 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$  – круговая частота св. колебаний, где  $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ , а  $\omega_0$  – собственная круговая частота кол-ий.

Несложно заметить, что выражения для напряжения  $U_C(t)$  и тока  $I(t)$  можно при должном подборе начальной фазы записать в виде

$$U_C(t) = U_{C0} e^{-\gamma t} \left( \cos \omega_1 t + \frac{\gamma}{\omega_1} \sin \omega_1 t \right),$$
$$I(t) = C \dot{U}_C = -\frac{2U_{C0}}{R_{kp}} \frac{\omega_0}{\omega_1} e^{-\gamma t} \sin \omega_1 t.$$

С помощью этих формул можно параметрически представить траектории системы на фазовой плоскости переменных ( $U_C, I$ ).

Период затухающих колебаний равен

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} > T_0,$$

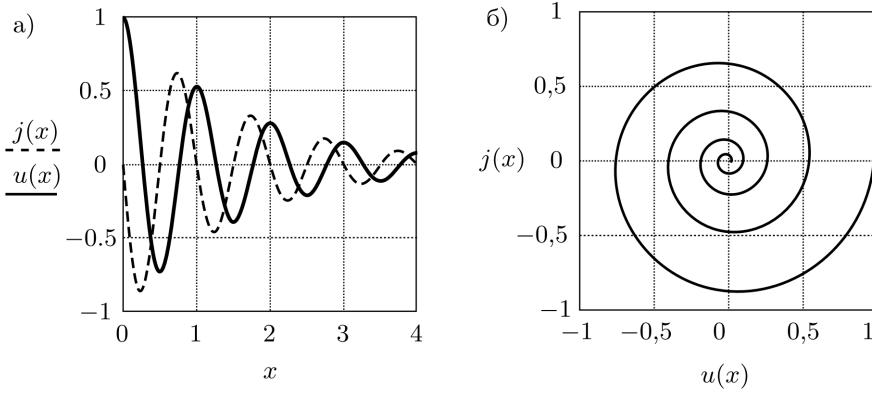


Рис. 1: Затухающие колебания: а) ток в контуре  $j(x)$  и напряжение на конденсаторе  $u(x)$ , б) траектория системы на фазовой плоскости  $(u, j)$

т.е. наличие потерь в контуре приводит к увеличению периода колебаний.

Другими характеристиками процесса затухания являются *время затухания*

$$\tau = \frac{2L}{R},$$

за которое амплитуда колебаний убывает в  $e$  раз, и *логарифмический декремент затухания*

$$\Theta = \ln \frac{U_k}{U_{k+1}} = \gamma T_1,$$

где  $U_k$  и  $U_{k+1}$  – два последовательных максимума рассматриваемой величины.

С логарифмическим декрементом связана ещё одна важнейшая характеристика колебательного контура – его *добротность*  $Q$ :

$$Q \equiv \frac{\pi}{\Theta} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{R_{kp}^2}{R^2} - 1}.$$

При  $Q \gg 1$  можно с хорошей точностью заменить  $\omega_1$  на  $\omega_0$  в уравнениях для зависимости напряжения и тока в контуре от времени, что позволяет рассчитать теоретически добротность через параметры контура по формуле:

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (1)$$

Вынужденные колебания в RLC-контуре представляют собой суперпозицию двух синусоид:

$$I = B e^{-\gamma t} \sin(\omega t - \Theta) + \frac{\mathcal{E}_0 \Omega}{L \rho_0} \sin(\Omega t - \psi), \quad (2)$$

При подключении контура к синусоидальной ЭДС собственные колебания с частотой  $\omega$  со временем затухают. Однако при совпадении внешней частоты  $\Omega$  и собственной  $\omega$  возникает резонанс, при котором амплитуда вынужденных колебаний достигает максимального значения. Зависимость амплитуды установившихся колебаний от внешней частоты называется *резонансной кривой*.

Для достоверного исследования резонансной кривой необходимо, чтобы импеданс исследуемого участка цепи не зависел от импеданса источника питания даже на резонансе.

Рис. 2: Схема параллельного колебательного контура

С этой целью в работе используется параллельный колебательный контур (рис. 2) Зависимость напряжения для конденсатора С  $U(\Omega)$  будет практически такой же, как в последовательном контуре при условии, что импедансы возбуждающей и измеряющей цепей существенно больше, чем импеданс исследуемой цепи. Таким образом,

$$\frac{1}{\omega C_1} \gg \frac{L}{RC}, \quad R_O \gg \frac{L}{RC}, \quad (3)$$

где  $R_O \simeq 1$  – сопротивление на входе осциллографа.

По ширине резонансной кривой определяется добротность контура из формулы:

$$Q = \frac{\omega_0}{2\Delta\Omega} = \frac{\nu_0}{\Delta\nu}, \quad (4)$$

где  $\omega_0 = 2\pi\nu_0$  – резонансная циклическая частота.

Добротность контура также можно определить по скорости возрастания амплитуды вынужденных колебаний, а также по скорости затухания свободных при резонансном значении частоты (что немаловажно). Обоими этими способами можно воспользоваться, если подавать колебания в контур цугами, то есть отрезками синусоиды в несколько периодов.

Теоретическое определение резонансной частоты проводится по формуле:

$$\nu_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (5)$$

Для определения добротности применим формулы:

$$\Theta = \frac{1}{n} \ln \frac{U_0 - U_k}{U_0 - U_{k+n}}, \quad (6)$$

## 1.1 Экспериментальная установка:

Схема установки для исследования колебаний приведена на рисунке 2.

Колебательный контур состоит из постоянной индуктивности L с активным сопротивлением  $R_L$ , переменной емкости С и сопротивления R. Картина колебаний напряжения на емкости наблюдается на экране осциллографа. Для возбуждения затухающих колебаний используется генератор сигналов специальной формы. Сигнал с генератора поступает через конденсатор  $C_1$  на вход колебательного контура. Данная емкость необходима чтобы выходной импеданс генератора был много меньше импеданса колебательного контура и не влиял на процессы, проходящие в контуре.

Установка предназначена для исследования не только вынужденных, но и свободных колебаний в электрической цепи. При изучении свободно затухающий колебаний генератор специальных сигналов на вход колебательного контура подает периодические короткие импульсы, которые заряжают конденсатор С. За время между последовательными импульсами происходит разрядка конденсатора через резистор и катушку индуктивности. Напряжение на конденсаторе  $U_C$  поступает на вход канала 1(X) электронного осциллографа. Для наблюдения фазовой картины затухающих колебаний на канал 2(Y) подается напряжение с резистора R (пунктирная линия на схеме установки), которое пропорционально току I ( $I \propto \frac{dU_C}{dt}$ ).

При изучении вынужденных колебаний на вход колебательного контура подается синусоидальный сигнал. С помощью осциллографа возможно измерить зависимость амплитуды вынужденных в зависимости от частоты внешнего сигнала, из которого возможно

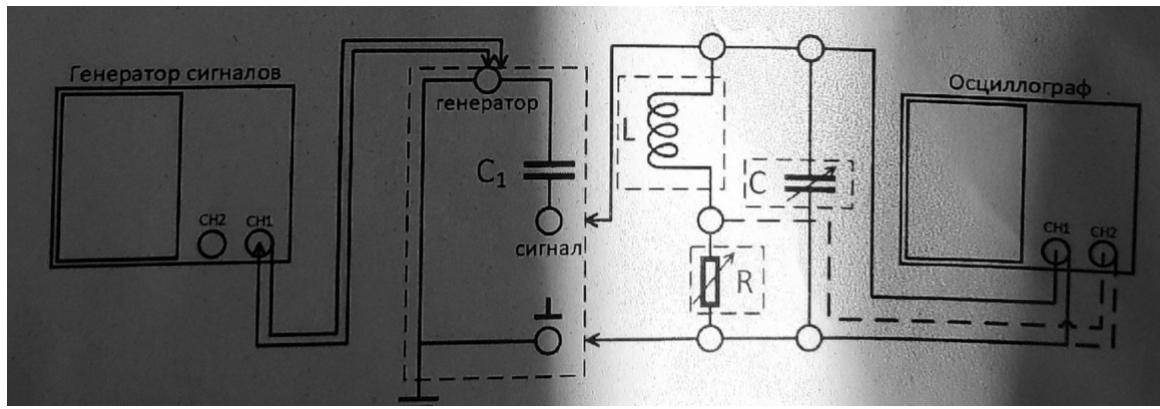


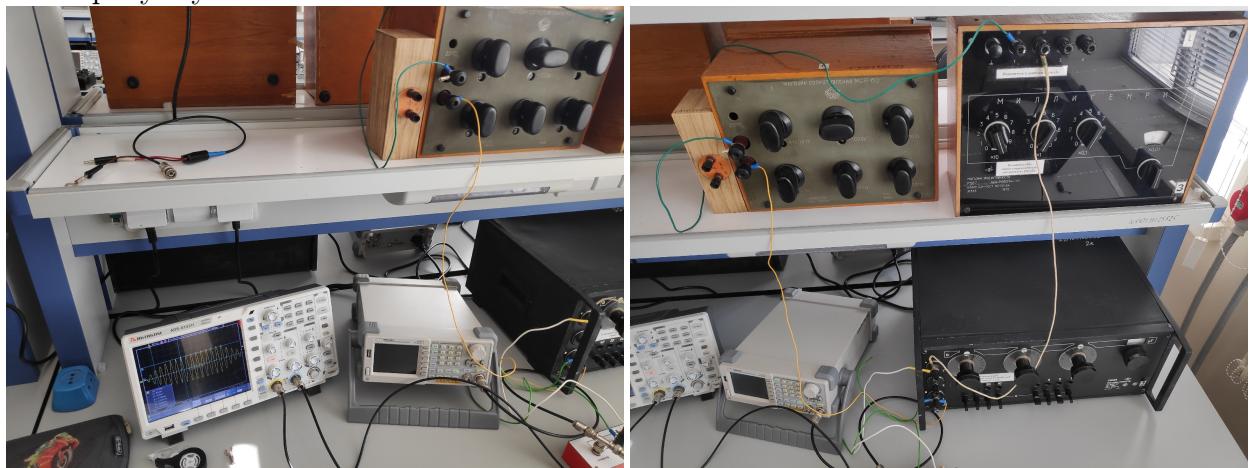
Рис. 3: Схема установки для исследования свободных колебаний

определить добротность колебательного контура. Альтернативным способом расчёта добротности контура является определение декремента затухания по картине установления возбуждённых колебаний. В этом случае генератор сигналов используется для подачи цугов синусоидальной формы.

## 2 Ход работы

### 2.1 Подготовка приборов к работе:

Подключив генератор специальных сигналов ко входу 1( $X$ ) осциллографа и установив на нём последовательность импульсов, мы убедились, что на осциллографе отображаются периодические импульсы, добившись статичной картины сигнала мы собрали схему согласно рисунку 2.



## 2.2 Измерение периодов свободных колебаний:

- Установив все необходимые значения величин на установке:  $R = 0 \text{ Ом}$ ,  $L = 100 \text{ мГн}$  и  $C = 0 \text{ мкФ}$ , мы получили картину свободно затухающих колебаний.



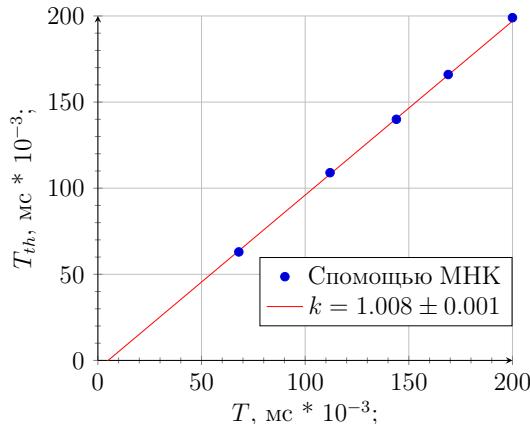
- По периоду колебаний для  $C = 0 \text{ мкФ}$  мы определили нулевую ёмкость используя формулы:  $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}$  и  $\omega_1 = \sqrt{\frac{1}{LC_o} - \frac{R^2}{4L^4}}$ , где получили  $C_o = 0.001 \text{ мкФ}$
- Изменяя ёмкость по курбелям с учётом нулевой ёмкости получаем таблицу значений и занесём в таблицу также значения периода, рассчитанные по теоретической формуле  $T = 2\pi\sqrt{LC}$ :

$C, \text{мкФ}$	0,001	0,003	0,005	0,007	0,010
$n$	6	12	9	8	12
$t, \text{мс}$	0,41	1,344	1,292	1,348	2,208
$T, \text{мс}$	0,068	0,112	0,144	0,169	0,200
$T_{th}, \text{мс}$	0,063	0,109	0,140	0,166	0,199

Таблица 1: Зависимость периода  $T$  затухающих колебаний от ёмкости  $C$

Видим, что значения  $T$  и  $T_{th}$  очень точно совпадают в пределах погрешностей, что говорит о точности исходных измерений.

- Построим График зависимости  $T(T_{th})$ .



## 2.3 Критическое сопротивление и декремент затухания:

- Приняв  $L = 100$  мГн, рассчитаем ёмкость  $C*$ , при которой собственная частота колебаний контура  $\nu_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$  составит 6.5 кГц. Получим значение  $C* = \frac{1}{4\pi^2\nu_0^2L} = 0,00599$  мкФ. Учитывая расчитанную ранее нулевую емкость получаем, что выставленное значение на магазине будет равно 5 мкФ. Рассчитаем также критическое сопротивление контура с такими параметрами, оно равно  $R_{kp} = 4\pi\nu_0 L = 8168 \Omega$ .
- Установим на магазине ёмкость  $C = 0,005$  мкФ. Будем увеличивать сопротивление  $R$  от нуля до  $R_{kp}$ , наблюдая картину затухающих колебаний на экране ЭО. Колебательный режим переходит в апериодический примерно при  $R_{kp} = 8168 \Omega$ , будем в дальнейшем использовать его.
- Приступим к измерению логарифмического декремента затухания. Установим сопротивление  $R = 0,05R_{kp} = 408 \Omega$ . Получим на экране ЭО картину колебаний. Проведём измерения для 5 различных значений  $R$  в диапазоне от  $0,05R_{kp}$  до  $0,25R_{kp} = 2042 \Omega$ . Логарифмический декремент затухания находится по формуле

$$\Theta = \frac{1}{n} \ln \frac{U_m}{U_{m+n}}.$$

Занесём все результаты в таблицу 2.

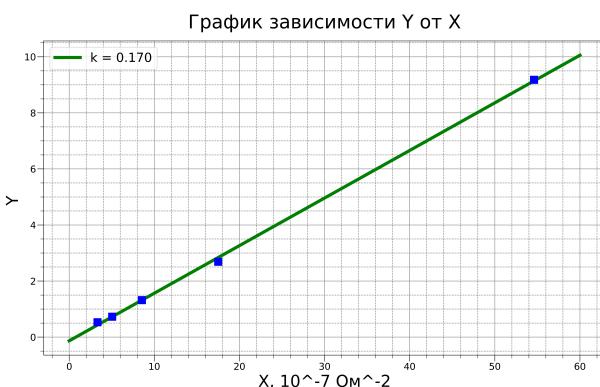
$\frac{R}{R_{kp}}$	0,05	0,09	0,13	0,17	0,21
$R, \Omega$	408	735	1062	1388	1715
$U_m, \text{ мВ}$	784	652	544	456	760
$U_{m+n}, \text{ мВ}$	76	56	40	44	48
$n$	7	4	3	2	2
$\Theta$	0,33	0,61	0,87	1,17	1,38
$X, 10^{-7} \Omega^{-2}$	54.6	17.5	8.54	5.05	3.32
$Y$	9.18	2.69	1.32	0,73	0,53

Таблица 2: Зависимость логарифмического декремента затухания  $\Theta$  от сопротивления контура  $R$

- В дальнейшем нам подсказал лаборант, что в работе активное омическое сопротивление витков катушки при 5 кГц, равно около  $R_L = 20\Omega$ . Видим, что тогда при вычислении  $R_\Sigma = R + R_L$ .

Приняв обозначения  $X = \frac{1}{R_\Sigma^2}$  и  $Y = \frac{1}{\Theta^2}$ , можно показать, что  $R_{kp} = 2\pi\sqrt{\frac{\Delta Y}{\Delta X}}$ . Вычислим величины  $X$  и  $Y$  тоже занесём в таблицу.

Построим график  $Y(X)$ :



Непосредственно из графика находим  $\frac{\Delta Y}{\Delta X} = (1,70 \pm 0,002) \cdot 10^6 \Omega^2$ , откуда находим  $R_{kp} = (8192 \pm 48) \Omega$ . Видим, что при этом определить критическое сопротивление по точке пересечения графика с осью абсцисс в какой бы то ни было вменяемой точностью практически невозможно.

Теоретическое значение критического сопротивления  $R_{kp} = 2\sqrt{\frac{L}{C}} = (8168) \Omega$ , т.е. в пределах погрешности оно совпадает с полученным в эксперименте.

5. Мы зафиксировали два значения сопротивления:  $R_1 = 0,05R_{kp} = 408 \Omega$  и  $R_2 = 0,09R_{kp} = 735 \Omega$ . Однако 2-ое значение сопротивления мы взяли слишком маленькое по невнимательности.

## 2.4 Свободные колебания на фазовой плоскости:

1. Переключим ЭО на двухканальный режим для одновременного наблюдения осциллографом тока и напряжения. Подберём масштабы и частоту развёртки так, чтобы оба сигнала были представлены на временном интервале, слегка превышающем период повторения импульсов с генератора. Полученная картина будет качественно совпадать с показанной на рисунке.
2. Для наблюдения затухающих колебаний на фазовой плоскости переключим развёртку ЭО в положение  $X - Y$ . На магазине сопротивлений выберем значение  $R = 0,5R_{kp}$ . Подберём масштаб спирали и частоту импульсов генератора ( $400 \text{Гц}$ ), удобный для измерений. Спираль качественно совпадает с теоретической.
3. При том же значении  $C$ , что и в части II Хода работы, пронаходим за изменением спирали при увеличении сопротивления от  $0,05$  до  $0,25R_{kp}$ . Видим, что спираль закручивается слабее и становится менее плотной с ростом  $R$ .

Для определения  $\Theta$  измерить координаты пересечения витков спирали с осью координат не удалось, в следствии низкой точности измерения координат по шкале осциллографа. Поэтому мы внесём в таблицу значения добротности контура, рассчитанное теоретически из величин его параметров по формуле приближения:

$$Q = \frac{1}{R} \cdot \sqrt{\frac{L}{C}},$$

а также значения минимальной и максимальной добротности, вычисленные по формуле

$$Q = \frac{\pi}{\Theta},$$

$\frac{R}{R_{kp}}$	$\Theta$	$Q_{th}$	$Q$
0.05	0.33	10	9.51
0.09	0.61	5.55	5.15
0.13	0.87	3.84	3.61
0.17	1.17	2.94	2.69
0.21	1.38	2.38	2.28

Таблица 3: Зависимость добротности контура  $Q$  от сопротивления  $R$

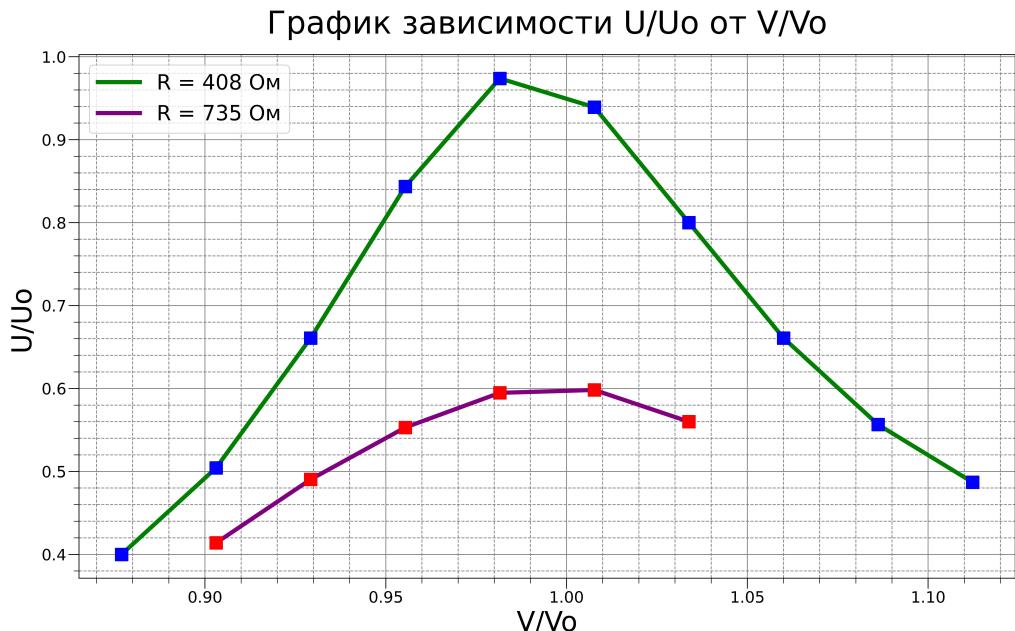
## 2.5 Исследование резонансных кривых:

Теоретическое определение резонансной частоты проводится по формуле:  $\nu_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 6.5 \text{ кГц}$  а экспериментально  $\nu_0* = 6.41 \text{ кГц}$  и  $U_c = 11.5 \text{ В}$

Результаты исследования резонансных кривых отображены в таблице 4, по которым был построен график на рис. ?? в безразмерных координатах:

R=408 Ом			R=735 Ом		
Частота, Гц	Напряжение, В	Сдвиг, мкс	Частота, Гц	Напряжение, В	Сдвиг, мс
5700	4.6	72	5870	4.76	57.2
5870	5.8	68	6040	5.64	50.4
6040	7.6	60	6210	6.36	43.2
6210	9.7	50	6380	6.84	35.6
6380	11.2	37.2	6550	6.88	29.2
6550	10.8	26.8	6720	6.44	22.4
6720	9.2	18.8			
6890	7.6	13.6			
7060	6.4	10			
7230	5.6	8			

Таблица 4: Исходные данные для резонансных кривых

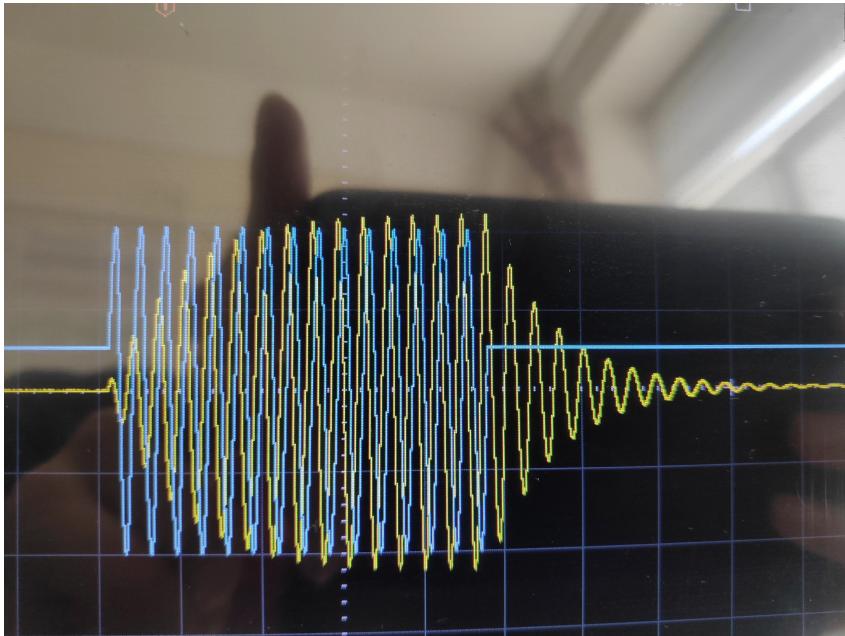


Из графика мы находим ширину резонансной кривой равную:  $2\Delta\Omega = 0.115$  Для  $R = 408 \Omega$ , и  $\Delta\Omega = 0.1$  Для  $R = 735 \Omega$ . Добротности в таком случае равны:

$$Q_{R=408} = 55, Q_{R=735} = 63$$

## 2.6 Процессы установления и затухания:

Выставляем на генераторе цугов эту частоту, и подбираем длительность и период цегов так, чтобы колебания успели установится и затухнуть соответственно. Мы успели снять только одно значение:  $\Theta = \frac{1}{n} \ln \frac{U_0 - U_k}{U_0 - U_{k+n}} = \frac{1}{5} \ln \frac{11 - 5.8}{11 - 10.3} = 0.4$



## 3 Вывод:

R	$f(LRC)$	$f(\Theta)$	АЧХ	Нарастание
408 ОМ	10	9.51	55	0.4
735 Ом	5.55	5.15	63	-

Таблица 5: Результаты измерения добротности

В данной работе были исследованы свободные и вынужденные колебания в электрическом колебательном контуре.

В первой части работы был измерен период свободных затухающих колебаний, и экспериментально с высокой точностью была подтверждена соответствующая теоретическая зависимость.

Также был измерен декремент затухания контура. С его помощью было найдено критическое сопротивление контура  $R_{kp} = (8192 \pm 48) \Omega$ , в пределах погрешности совпадающее с теоретически предсказанным  $R_{kp} = (8168) \Omega$ , что говорит о точности используемого метода.

Однако не все методы оказались споставимы по точности, большое разхождение в значениях произошло в АЧХ методе из-за малого кол-ва точек собранных нами при эксперименте. Ещё одна из ключевых ошибок, взятие небольшого диапазона частот в методах с вынужденными колебаниями, мы взяли  $R_2 = 735\text{Ома}$ , а не  $2000\text{Ом}$ .

В данной работе хотелось бы улучшить точность измерения добротности с помощью метода измерения координат на фазовой плоскости, чтобы пересечение спирали с осями можно было фиксировать теми же курсорами в осциллографе.