

# **Работа 1.2.2**

## **Резонанс напряжений в последовательном контуре**

Валеев Рауф Раушанович  
группа 825

17 октября 2019 г.

# Цель работы

Исследование резонанса напряжений в последовательном контуре с изменяемой ёмкостью, включающее получение АЧХ и ФЧХ, а так же определение основных параметров контура.

## В работе используются

Генератор сигналов, источник напряжения, нагруженный на последовательный колебательный контур с переменной емкостью, двухлучевой осциллограф, цифровые вольтметры.

## Описание установки

Схема экспериментального стенда для изучения резонанса напряжений в последовательном колебательном контуре показана на рис. 1а. Синусоидальный сигнал от генератора GFG8255A поступает через согласующую RC-цепочку на вход источника напряжения, собранного на операционном усилителе ОУ. Питание операционного усилителя осуществляется встроенным блоком-выпрямителем от сети переменного тока 220 Вольт (цепь питания на схеме не показана). Источник напряжения, обладающий по определению нулевым внутренним сопротивлением, фактически обеспечивает с высокой точностью постоянство амплитуды сигнала  $E = E_0 \cos(\omega t + \varphi_0)$  на меняющейся по величине нагрузке – последовательном колебательном контуре, изображенном на рис. 1а в виде эквивалентной схемы.

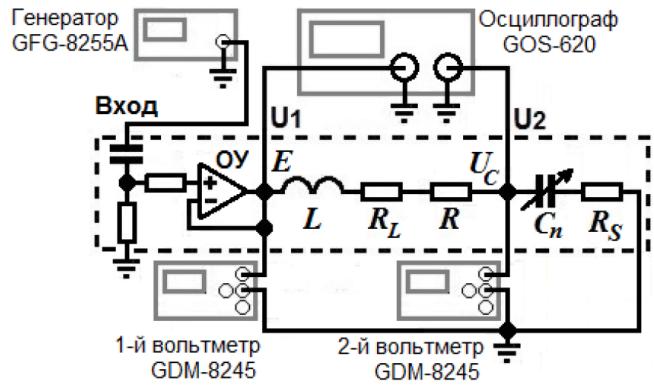


Рис. 1: Схема установки.

## Теория

Пусть

$$R_{\Sigma} = R + R_S + R_L, \quad (1)$$

Здесь  $R_L$  — активное сопротивление катушки, а  $R_S$  — так называемое эквивалентное последовательное сопротивление. Если принять, что величины  $R_L$ ,  $C_L$  и  $L$  в контуре сосредоточены в различных элементах, то можно записать следующую формулу

$$f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC_L}} \quad (2)$$

Очевидно из схемы, что активные потери в конденсаторе пропорциональны  $\cos \varphi$  — сдвигу фаз между током и напряжением на емкости, убывают с ростом  $\varphi$  и, соответственно, с уменьшением угла  $\delta = \frac{\pi}{2} - \varphi$ . Потери в конденсаторе принято характеризовать величиной

$\operatorname{tg} \delta$ . Из схемы установки и закона Ома мы получаем, что

$$R_S = \frac{U_{R_S}}{I} = \frac{U_{R_S}}{\omega C U_{C_S}} = \frac{1}{\omega C} \operatorname{tg} \delta \quad (3)$$

Далее будем пользоваться методом комплексных амплитуд

$$Z_L = R_L + i\omega L, Z_C = R_S - \frac{i}{\omega C}, Z = R_\Sigma + i \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \quad (4)$$

Комплексные амплитуды тока в контуре и напряжений на индуктивности и емкости при нулевой начальной фазе удобно представить в виде

$$\begin{aligned} \vec{I} &= \frac{E}{R_\Sigma} \frac{1}{1 + iQ \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)} \\ \vec{U}_L &= iEQ \frac{\omega}{\omega_0} \frac{1 - iR_L/\rho}{1 + iQ \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)} \\ \vec{U}_C &= -iEQ \frac{\omega_0}{\omega} \frac{1 + i \operatorname{tg} \delta}{1 + iQ \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)} \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь использованы стандартные обозначения  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  — собственная частота, и  $\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$  — реактивное сопротивление,  $Q$  — добротность, связанная с его параметрами соотношением

$$Q = \frac{\rho}{R_\Sigma} = \frac{\omega_0 L}{R_\Sigma} = \frac{1}{\omega_0 C R_\Sigma} \gg 1 \quad (6)$$

При резонансе, когда  $\omega = \omega_0$ , выражение для модулей комплексных амплитуд принимают вид

$$\begin{aligned} I(\omega_0) &= \frac{E}{R_\Sigma}, \varphi_I(\omega_0) = 0 \\ U_L(\omega_0) &= QE, \varphi_L(\omega_0) = \frac{\pi}{2} - \frac{R_L}{\rho} \\ U_C(\omega_0) &= QE, \varphi_C(\omega_0) = -\frac{\pi}{2} + \delta \end{aligned} \quad (7)$$

$$Q = \left( \frac{\Delta f}{f_0} \right)^{-1}, \quad (8)$$

где  $\Delta f$  - разность частот на  $U_C(f) = \frac{U_C(f)}{\sqrt{2}}$ , аналогично можно определить и по разности фаз между точками, где фаза  $\varphi_C$  меняется от  $-\frac{\pi}{4}$  до  $-\frac{3\pi}{4}$

## Ход работы

Измеряем резонансные частоты и напряжения. Резонанс отслеживаем по фигурам Лиссажу, так как на них главные оси эллипса будут направлены вдоль осей X, Y.

$n$	1	2	3	4	5	6	7
$C_n, \text{ пФ}$	25,0	33,2	47,5	57,2	67,4	82,1	99,6
$\sigma_{C_n}, \text{ пФ}$	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1
$f_{\text{резонанс}}, \text{ кГц}$	32,0	28,0	23,3	21,2	19,6	17,7	16,2
$\sigma_{f_{\text{резонанс}}}, \text{ кГц}$	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1
$U, \text{ В}$	2,57	2,14	1,98	1,831	1,700	1,571	1,441
$\sigma_U, \text{ В}$	0,02	0,02	0,02	0,018	0,017	0,016	0,015

**Таблица 1.** Значения резонансных частот и напряжений.

Далее следует из формул (1) – (8) в более явном виде записать формулы необходимых нам величин:

$$\begin{aligned}
 L &= \frac{1}{4\pi^2 f_{0n}^2 C} \\
 Q &= \frac{f_{0n}}{\Delta f} \\
 \rho &= \sqrt{\frac{L}{C}} \\
 R_{\Sigma} &= \rho \operatorname{tg} \delta \\
 R_{S_{\max}} &= 10^{-3} \rho \\
 R_S &= \frac{1}{\omega C} \operatorname{tg} \delta \\
 R_L &= R_{\Sigma} - R - R_S \\
 I &= \frac{E}{R_{\Sigma}}
 \end{aligned} \tag{9}$$

Далее считаем АЧХ для двух конденсаторов  $C_1$  и  $C_2$ .  
 В данном опыте приборные погрешности равны  $\sigma_f = 0,1$  Гц и  $\sigma_A = 0,01$  В.

$C_1 = (25,0 \pm 0,1)$ нФ			$C_4 = (57,2 \pm 0,1)$ нФ		
$n$	$f$ , кГц	$A$ , В	$n$	$f$ , кГц	$A$ , В
1	29,8	0,40	1	17	0,13
2	27,3	0,20	2	17,6	0,18
3	28	0,22	3	18,4	0,22
4	28,5	0,25	4	18,7	0,24
5	29	0,28	5	19	0,26
6	29,5	0,32	6	19,3	0,30
7	30,5	0,48	7	19,5	0,32
8	30,9	0,60	8	19,7	0,34
9	31,3	0,90	9	20	0,4
10	31,5	1,00	10	20,2	0,48
11	31,7	1,10	11	20,3	0,52
12	31,9	1,30	12	20,5	0,6
13	32	1,40	13	20,7	0,78
14	32,2	1,35	14	20,8	0,83
15	32,4	1,25	15	21,1	1,00
16	32,8	0,90	16	21,2	1,00
17	33,1	0,75	17	21,4	1,00
18	33,6	0,60	18	21,6	0,80
19	34,1	0,40	19	21,8	0,72
20	34,6	0,35	20	21,9	0,64
21	35,1	0,24	21	22,1	0,54
22	35,4	0,24	22	22,6	0,4
23	36,6	0,18	23	22,9	0,32
24	37,3	0,16	24	23,2	0,28
25	32,5	1,30	25	23,6	0,24
26	32,9	0,85	26	23,8	0,22
27	33	0,80	27	24,3	0,18
			28	24,6	0,16
			29	24,9	0,15

Таблица 2. АЧХ для двух конденсаторов  $C_1$  и  $C_2$ .

Строим графики по полученным данным, один из которых строим в безразмерных осях. Из последнего мы получим  $Q$ .

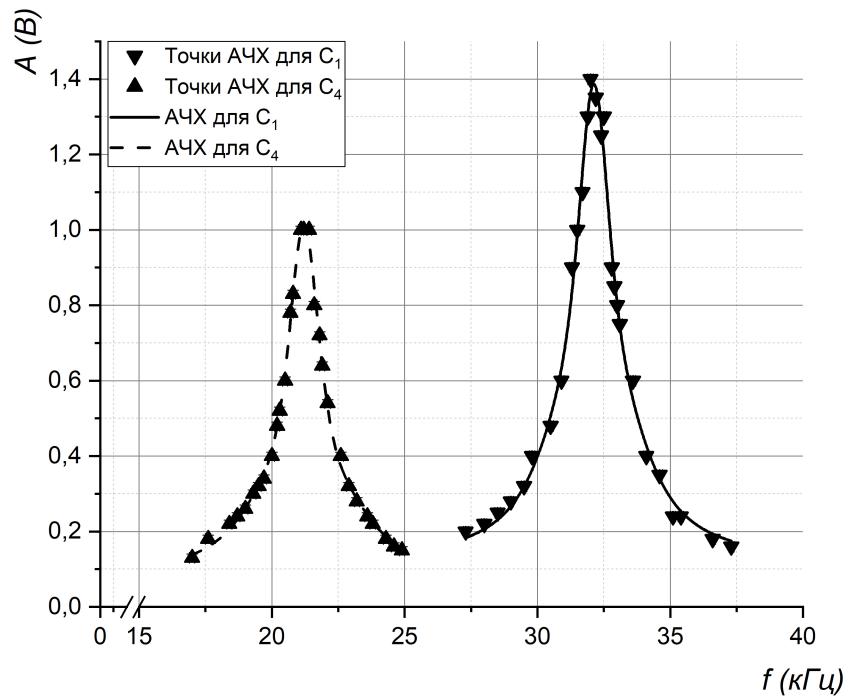


График 1. АЧХ в координатах с размерностями.

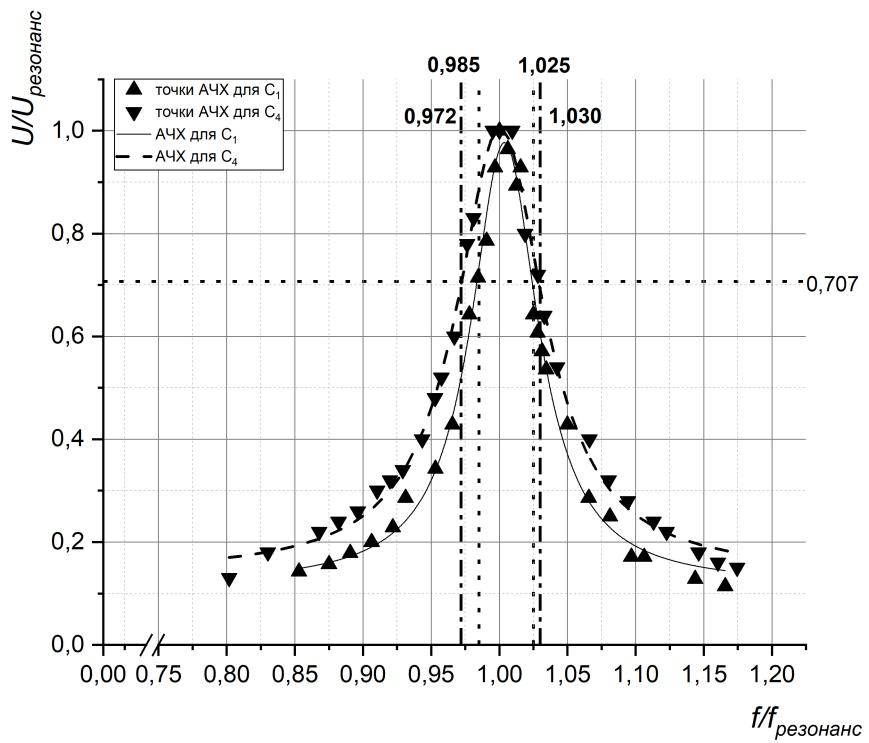


График 2. АЧХ в безразмерных координатах.

Из этих графиков мы находим  $Q \approx 25 \pm 5$ .

Теперь заполним таблицу, состоящую из величин, из формулы (9)

$n$	$C_n, \text{ нФ}$	$f_{0n}, \text{ кГц}$	$U_C, \text{ В}$	$E, \text{ В}$	$L, \text{ мкГн}$	$Q$	$\rho, \text{ Ом}$	$R_{\Sigma}, \text{ Ом}$	$R_{S_{\max}}, \text{ Ом}$	$R_L, \text{ Ом}$	$I, \text{ mA}$
1	25,0	32,0	2,57	0,1	991	25	199	12,6	0,201	8,9	8,01
2	33,2	28,0	2,14	0,1	975	25	171	10,8	0,173	7,2	9,30
3	47,5	23,3	1,98	0,1	984	25	144	9,1	0,141	5,5	11,03
4	57,2	21,2	1,83	0,1	987	25	131	8,3	0,137	4,7	12,11
5	67,4	19,6	1,70	0,1	980	25	121	7,6	0,124	4	13,22
6	82,1	17,7	1,57	0,1	986	25	110	6,9	0,112	3,4	14,53
7	99,6	16,2	1,44	0,1	971	25	99	6,2	0,100	2,7	16,12
Среднее значение					982			—		5	—
Среднеквадратичная погрешность среднего значения					3			—		1	—
Коэффициент Стьюденса $t_{n\alpha}$ для $n = 7, \alpha = 0,95$					2,34			—		2,34	—
Случайная погрешность					6			—		2	—

Таблица 3. Данные об основных величинах установки.

Теперь построим график ФЧХ.

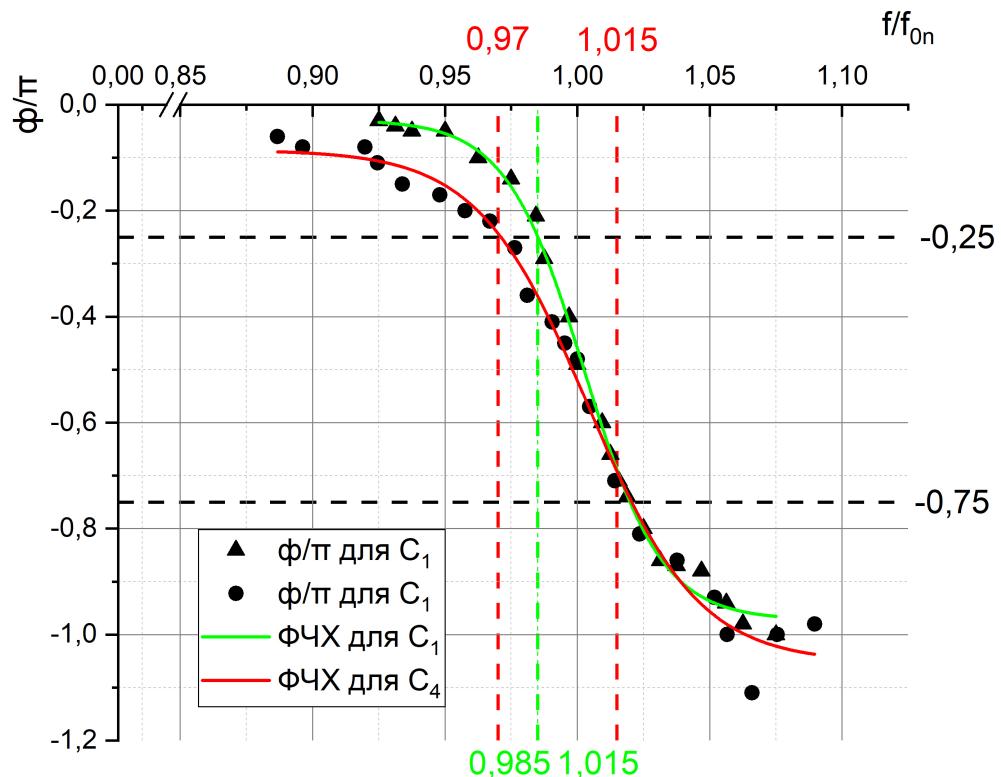


График 3. ФЧХ для двух конденсаторов  $C_1, C_4$

Поскольку мы меряем  $\varphi$  по осциллографу считая относительно исходного пи, так же померяно по осциллографу, которое по значению порядка 3 клеток, а на осциллографе у клеток погрешность  $\sigma_{osc} = 0,1$ , то мы можем считать погрешность  $\sigma_{\varphi \cdot \pi} \approx 0,03$ , а  $\sigma_f = 0,1$ .

$C_4 = (25,0 \pm 0,1) \text{ нФ}$			$C_4 = (57,2 \pm 0,1) \text{ нФ}$		
$n$	$f, \text{ кГц}$	$-\varphi \cdot \pi$	$n$	$f, \text{ кГц}$	$-\varphi \cdot \pi$
1	29,6	0,03	1	18,8	0,06
2	29,8	0,04	2	19,0	0,08
3	30,0	0,05	3	19,5	0,08
4	30,4	0,05	4	19,6	0,11
5	30,8	0,10	5	19,8	0,15
6	31,2	0,14	6	20,1	0,17
7	31,5	0,21	7	20,3	0,20
8	31,6	0,29	8	20,5	0,22
9	31,9	0,40	9	20,7	0,27
10	32,0	0,49	10	20,8	0,36
11	32,3	0,60	11	21,0	0,41
12	32,5	0,71	12	21,1	0,45
13	32,8	0,80	13	21,2	0,48
14	33,0	0,86	14	21,3	0,57
15	33,2	0,87	15	21,5	0,71
16	33,5	0,88	16	21,7	0,81
17	33,8	0,94	17	22,0	0,86
18	34,0	0,98	18	22,3	0,93
19	34,4	1,00	19	22,4	1,00
20	32,6	0,74	20	22,6	1,11
21	32,4	0,66	21	22,8	1,00
			22	23,1	0,98

Таблица 4. Данные ФЧХ.

По всем вышеперечисленным характеристикам мы можем определить добротность, запишем в таблицу.

Измерение	$n$ к-ра	$Q$
АЧХ	1	25
	2	18
ФЧХ	1	25
	2	33
Ср. знач.	25	
Ср-кв. откл.	3	

Таблица 5. Добротность

Построим по данным таблицы 3 зависимость  $R_L(f_{0n})$ , на этом же графике построим  $\langle R_L \rangle$

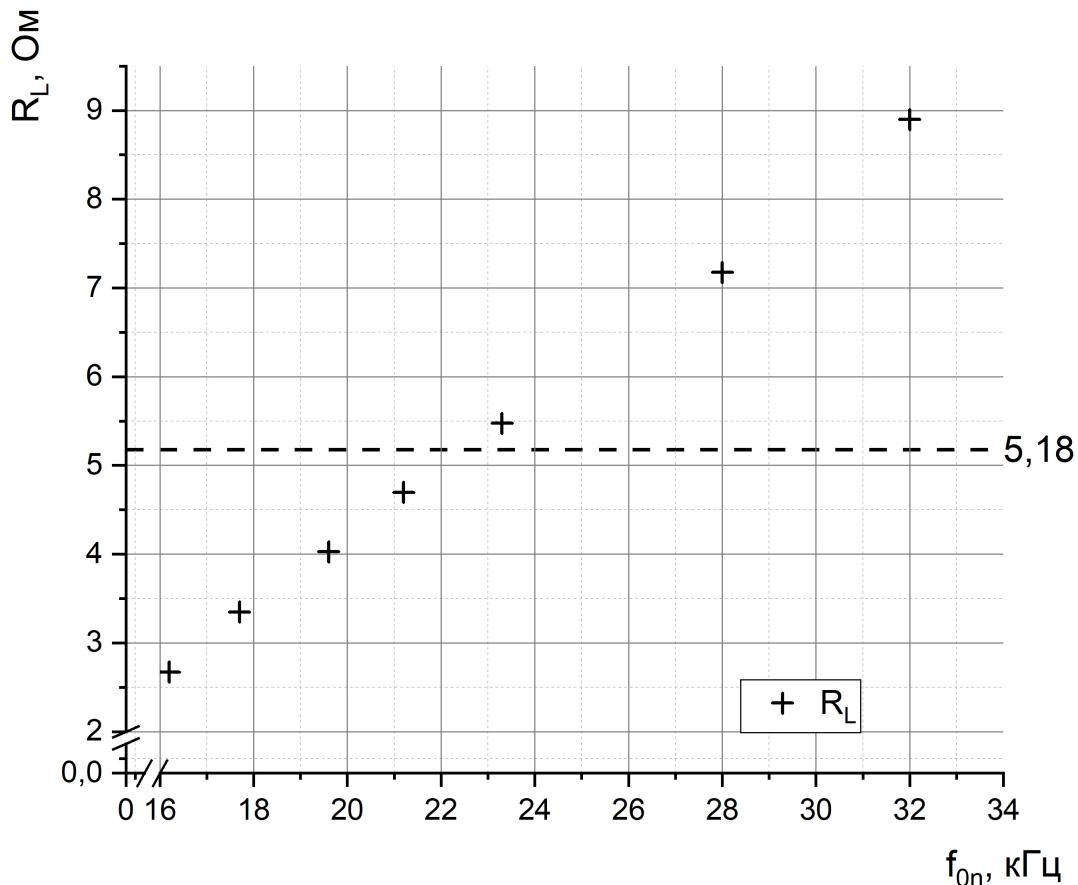


График 4. Зависимость  $R_L(f_{0n})$

Из графика видно, что  $R_L$  линейно растет с частотой резонансной. Эту зависимость можно связать с линейной зависимостью

$$Z_L = \omega \cdot L$$

## Литература

1. **Лабораторный практикум по общей физике:** Учебное пособие. В трех томах. Т. 2. Электричество и магнетизм /Гладун А.Д., Александров Д.А., Берулёва Н.С. и др.; Под ред. А.Д. Гладуна - М.: МФТИ, 2007. - 280 с.
2. **Дополнительное описание лабораторной работы 1.2.2: Резонанс напряжений;** Под ред. МФТИ, 2017. - 10 с.