

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Физтех-школа физики и исследований им. Ландау

Отчёт о выполнении лабораторной работы №3.7.1

Скин-эффект в полом цилиндре

Автор:
Стависский Георгий Леонидович
Б02-103

Долгопрудный
13 октября 2022 г.

1 Введение

Цель работы: исследование проникновения переменного магнитного поля в полый медный цилиндр.

В работе используются: генератор звуковой частоты, соленоид, намотанный на полый цилиндрический каркас из диэлектрика, медный экран в виде трубки, измерительная катушка, амперметр, вольтметр, осциллограф.

2 Теоретические сведения

В работе изучается явление скин-эффекта в длинном медном тонкостенном цилиндре, помещенном в соленоид. Будем считать цилиндр достаточно длинным и пренебрегать краевыми эффектами, в этом приближении H всюду направлено по оси симметрии системы, а E - перпендикулярно радиусу. Будем считать, что эти поля колеблются по гармоническому закону с частотой задаваемой током в соленоиде:

$$H_z = H(r)e^{i\omega t} \quad (1)$$

$$E = E(r)e^{i\omega t} \quad (2)$$

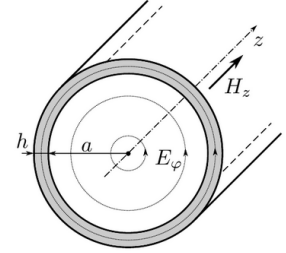


Рис. 1. Электрическое и магнитное в тонкостенном цилиндре

Пусть радиус цилиндра a , толщина стенки $h \ll a$, тогда можно ограничиться одномерным решением задачи о скин-эффекте. Внутри цилиндра токи отсутствуют, поэтому поле однородно и $H(r) = H_1 = const$. Воспользуемся интегральным законом электромагнитной индукции и получим связь электрического и магнитных полей на внутренней границе цилиндра:

$$E \cdot 2\pi r = -\mu_0 \pi r^2 \cdot \frac{dH_z}{dt} \quad (3)$$

$$E_1 = -\frac{1}{2}i\omega a \mu_0 H_1 \quad (4)$$

Поле внутри стенки цилиндра будет описываться одномерным уравнением диффузии поля:

$$\frac{d^2 H}{dx^2} = i\omega \sigma \mu_0 H \quad (5)$$

Данное уравнение вместе с краевыми условиями H_0 и H_1 полностью определяет поля в стенке. Стоит отметить, что H_0 зависит только от тока в обмотке соленоида. Тогда:

$$H(x) = Ae^{\alpha x} + Be^{-\alpha x} \quad (6)$$

$$\alpha = \sqrt{i\omega \sigma \mu_0} = \frac{1+i}{\delta} = \frac{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{\delta} \quad (7)$$

δ здесь - толщина скин слоя, на которой амплитуды полей спадают в e раз. Первое граничное условие дает $A + B = H_0$, используя это можно преобразовать выражение(6):

$$H(x) = H_0 e^{-\alpha x} + 2Bsh(\alpha x) \quad (8)$$

Далее, воспользовавшись законом Ампера в одномерном варианте $E(x) = \frac{1}{\sigma} \frac{\partial H}{\partial x}$, мы можем используя соотношения на E_1 и H_1 , полученное ранее, исключить константу и в итоге получить:

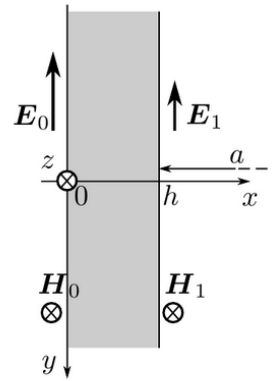


Рис. 2. Поле в стенке цилиндра

$$H_1 = \frac{H_0}{ch(\alpha h) + \frac{1}{2}\alpha ash(\alpha h)} \quad (9)$$

Далее следует рассмотреть предельные случаи:

1. Частота тока в соленоиде мала, $\delta \gg h$, тогда:

$$\frac{|H_1|}{|H_0|} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{4}(ah\sigma\mu_0 w)^2}} \quad (10)$$

$$tg(\psi) = \frac{ah}{\sigma^2} \quad (11)$$

ψ - разность фаз H_1 и H_0 .

2. Частота тока в соленоиде высока, $\delta \ll h$, тогда:

$$\frac{H_1}{H_0} = \frac{2\sqrt{2}\delta}{a} e^{-\frac{h}{\delta}} e^{-i(\frac{\pi}{4} + \frac{h}{\delta})} \quad (12)$$

$$\psi = \frac{\pi}{4} + h\sqrt{\frac{w\sigma\mu_0}{2}} \quad (13)$$

Скин эффект также оказывает влияние на индуктивность катушки:

$$\Phi = \Phi_{out} + \Phi_{in} = H_0 S_0 + H_1 S_1 = LI \quad (14)$$

Учитывая независимость внешнего потока от частоты, можем записать:

$$L_{min} = \frac{\Phi_{out}}{I} \quad (15)$$

Найдем соотношение потоков:

$$\Phi_{in} = H_1 S_1 = \Phi_{out} \frac{S_1}{nS_0} \quad (16)$$

Где n - отношение напряженности поля снаружи и внутри цилиндра. Максимальное поле достигается при $H_0 = H_1$, поэтому:

$$\Phi_{max} = H_0(S_0 + S_1) = L_{max}I \quad (17)$$

и тогда:

$$\frac{S_1}{S_0} = \frac{L_{max} - L_{min}}{L_{min}} \quad (18)$$

Используя (14) и (18), а также соотношения ранее:

$$\frac{L_{max} - L}{L - L_{min}} = \pi^2 a^2 h^2 \mu_0^2 \sigma^2 \nu^2 \quad (19)$$

3 Экспериментальная установка

Схема экспериментальной установки для исследования проникновения переменного магнитного поля в медный полый цилиндр изображена на рис. 4. Переменное магнитное поле создаётся с помощью соленоида, намотанного на полый цилиндрический каркас 1 из поливинилхлорида, который подключается к генератору звуковой частоты. Внутри соленоида расположен медный цилиндрический экран 2. Для измерения магнитного поля внутри экрана используется измерительная катушка 3. Необходимые параметры соленоида, экрана и измерительной катушки указаны на установке. Действующее значение переменного тока в цепи соленоида измеряется амперметром А, а действующее значение напряжения на измерительной катушке измеряет вольтметр V. Для измерения сдвига фаз между током в цепи соленоида и напряжением на измерительной катушке используется двухканальный осциллограф. На вход одного канала подаётся напряжение с резистора R, которое пропорционально току, а на вход второго канала - напряжение с измерительной катушки.

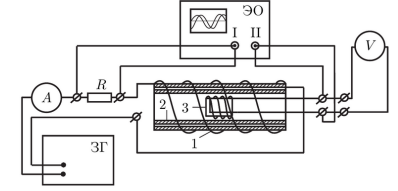


Рис. 4. Экспериментальная установка для изучения скин-эффекта

Заметим некоторые соотношения, которые будет удобно измерять в ходе эксперимента:
Для напряжения на измерительной катушке, справедливо:

$$U = -SN \frac{dB_1}{dt} = -i\omega\mu_0 SN H_1 e^{i\omega t} \quad (20)$$

Тогда измеряемая вольтметром величина (усреднение по времени переменного напряжения):

$$U = \frac{SN\omega}{\sqrt{2}} \mu_0 |H_1| \quad (21)$$

То есть:

$$|H_1| \propto \frac{U}{\nu} \quad (22)$$

При этом:

$$|H_0| \propto I \quad (23)$$

Тогда очевидно:

$$\frac{|H_1|}{|H_0|} = const \cdot \frac{U}{\nu I} \quad (24)$$

Константу из соотношения выше далее будем обозначать ξ_0 .

Разность фаз магнитных полей на границе и в полости цилиндра в ходе эксперимента определяется с помощью осциллографа. Деления, за которые ток в обмотках, фиксирующийся через амперметр, проходит половину фазы, обозначается далее за X , а минимальное расстояние между нулями тока и напряжения в измерительной катушке внутри соленоида за X_0 . Тогда очевидно:

$$\psi = \frac{X_0}{X} \cdot \pi - \pi/2 \quad (25)$$

Вычитание $\pi/2$ связано с тем, что напряжение на катушке - это производная по времени поля внутри, что дает дополнительную прибавку к фазе $\pi/2$.

4 Ход работы

4.1 Определение ξ_0 и σ по низким частотам

Сначала оценим частоту, на которой $\delta = h$, полагая $\sigma = 5 \cdot 10^7$ См/м, используя формулу (7):

$$\nu = \frac{1}{\pi h^2 \sigma \mu_0} \approx 2250 \text{ Гц} \quad (26)$$

Так как все вычисления в обработке сводятся к использованию одних и тех же данных, представленных в различных частотных диапазонах, будет удобно свести все наблюдения в серию таблиц:

Далее

| | | | | | | | | | | |
|------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| ν , Гц | 22.5 | 32.5 | 42.5 | 50 | 60 | 70 | 80 | 90 | 100 | 110 |
| U , В | 0.1555 | 0.2207 | 0.2817 | 0.3246 | 0.3776 | 0.4255 | 0.4686 | 0.5069 | 0.5409 | 0.5708 |
| I , мА | 435.4 | 432.5 | 427.9 | 424.0 | 418.2 | 412.0 | 405.8 | 399.5 | 393.4 | 387.4 |
| X | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| X_0 | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - |

Таблица 1: Результаты измерений до $0.5 \nu_h - 1$

| | | | | | | | | | | | |
|------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| ν , Гц | 130 | 153 | 176 | 200 | 225 | 300 | 400 | 500 | 600 | 700 | 800 |
| U , В | 0.6202 | 0.6634 | 0.6957 | 0.7208 | 0.7402 | 0.7725 | 0.7870 | 0.7871 | 0.7801 | 0.7720 | 0.7581 |
| I , мА | 376.0 | 364.9 | 355.8 | 347.8 | 341.0 | 326.4 | 314.3 | 305.7 | 298.3 | 292.5 | 285.5 |
| X | 1.4 | 2.4 | 2.2 | 2.1 | 1.8 | 3.9 | 2.8 | 1.9 | 4.4 | 3.7 | 3.2 |
| X_0 | 1.8 | 3.2 | 2.8 | 2.5 | 2.2 | 3.3 | 2.4 | 2 | 4.2 | 3.6 | 3.1 |

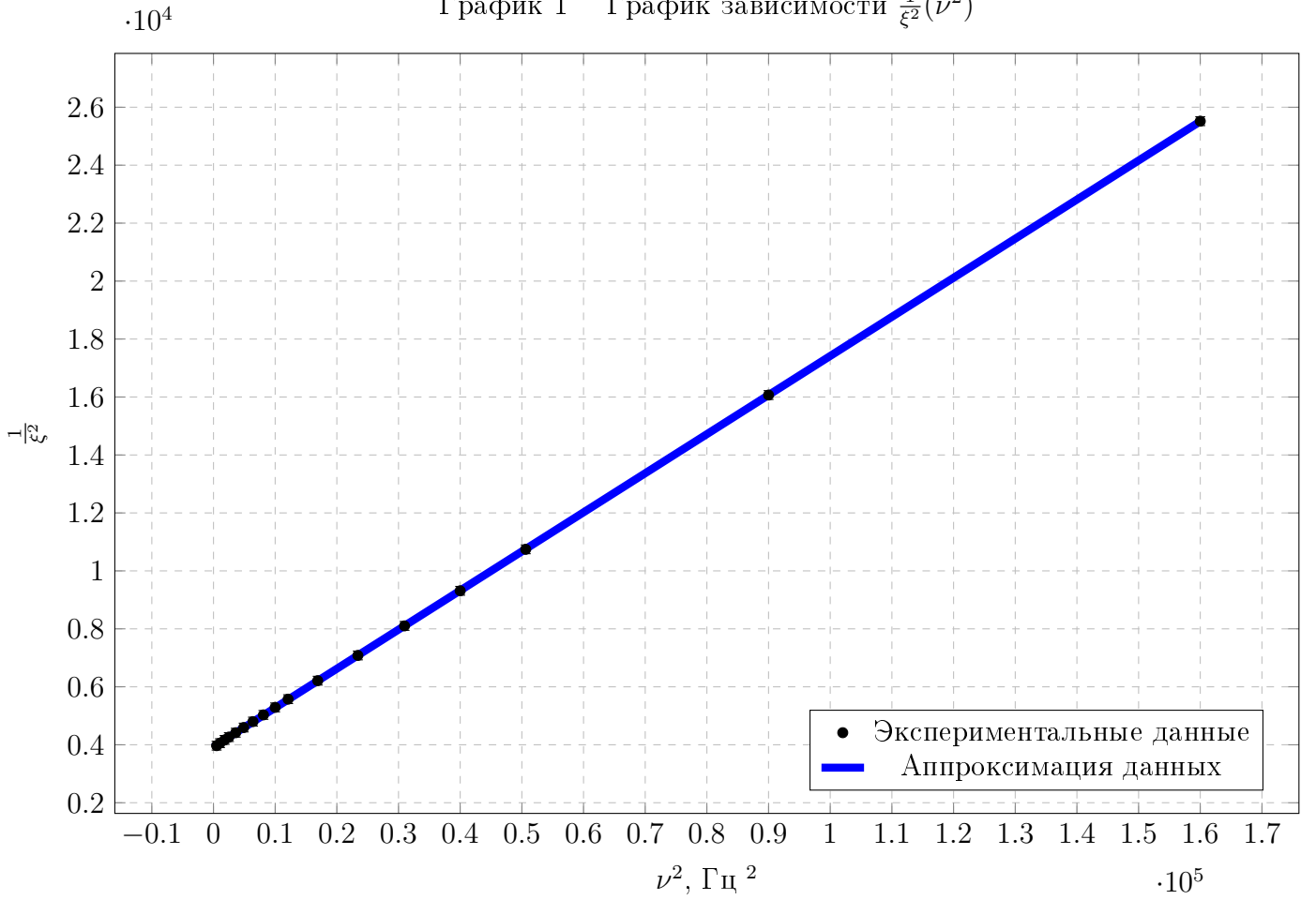
Таблица 2: Результаты измерений до $0.5 \nu_h - 2$

| | | | | |
|------------|--------|-------|--------|-------|
| ν , Гц | 900 | 950 | 1000 | 1120 |
| U , В | 0.7439 | 0.735 | 0.7271 | 0.706 |
| I , мА | 278.5 | 275.0 | 271.5 | 263.0 |
| X | 2.8 | 2.6 | 2.5 | 4.4 |
| X_0 | 2.7 | 2.6 | 2.4 | 4.4 |

Таблица 3: Результаты измерений до $0.5 \nu_h - 3$

Построим по данным первых двух таблиц график $\frac{1}{\xi^2}$ от ν^2 и используем точки от 22.5 до 400 Гц для линейной аппроксимации (далее наблюдаются серьезные отклонения от линейности зависимости). Погрешность для значений была взята как их супремум:

График 1 График зависимости $\frac{1}{\xi^2}(\nu^2)$



:

$$k = (0.1349 \pm 0.001).$$

$$b = (3926.4 \pm 152).$$

По полученному значению элементарно рассчитаем ξ_0 :

$$\xi_0 = \sqrt{b} = 62.7 \pm 1.2 \quad (27)$$

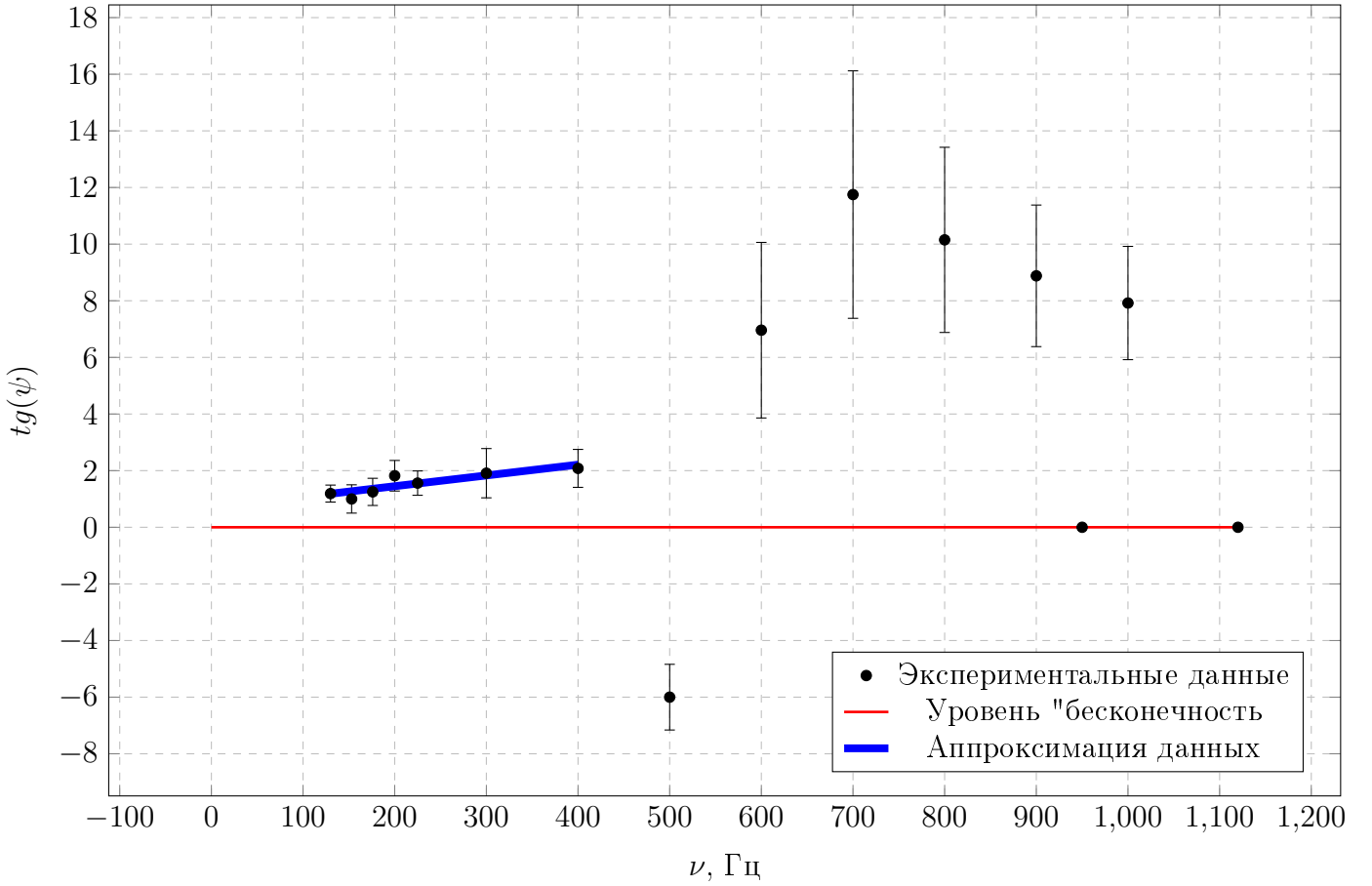
и используя полученный коэффициент k и соотношение (10), получаем для σ :

$$\sigma = \frac{\sqrt{k}}{\xi_0} \cdot \frac{1}{\pi a h \mu_0} \approx 4.71 \pm 0.3 \cdot 10^7 \text{ См/м} \quad (28)$$

4.2 Определение σ фазовым методом, средние частоты

Получим график зависимости $tg(\psi)$ от ν для частот от $0.05\nu_h$ до $0.5\nu_h$:

График 2 График зависимости $tg(\psi)(\nu)$



По разбросу и общему качеству данных можно заключить, что линейная аппроксимация здесь неуместна, но если все же для оценки допустить ее для первых 7 точек, больше всего напоминающих линейную зависимость, получим:

$$k = 0.0038 \pm 0.0031 \quad (29)$$

И тогда из соотношений (7) и (11) получаем σ :

$$\sigma = \frac{k}{ah\pi\mu_0} \approx 3.06 \pm 2.49 \cdot 10^7 \text{См/м} \quad (30)$$

4.3 Определение σ фазовым методом, высокие частоты

Для данного метода используется диапазон частот от $0.5 \nu_h$ до $15 \nu_h$, данные перечислены в серии таблиц ниже:

| ν , Гц | 1405 | 1760 | 2210 | 2775 | 3480 | 4365 | 5477 | 6870 | 8620 | 10813 |
|------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| U , В | 0.6537 | 0.5901 | 0.5175 | 0.4415 | 0.3676 | 0.2991 | 0.2380 | 0.1857 | 0.1417 | 0.1060 |
| I , мА | 243.1 | 219.6 | 193.2 | 166.0 | 139.7 | 115.6 | 94.32 | 76.2 | 60.85 | 47.96 |
| X | 3.4 | 2.7 | 4.3 | 3.3 | 2.5 | 1.9 | 3.5 | 2.6 | 1.9 | 2.7 |
| X_0 | 3.5 | 2.8 | 4.6 | 3.6 | 2.9 | 2.3 | 4.5 | 3.6 | 2.8 | 4.6 |

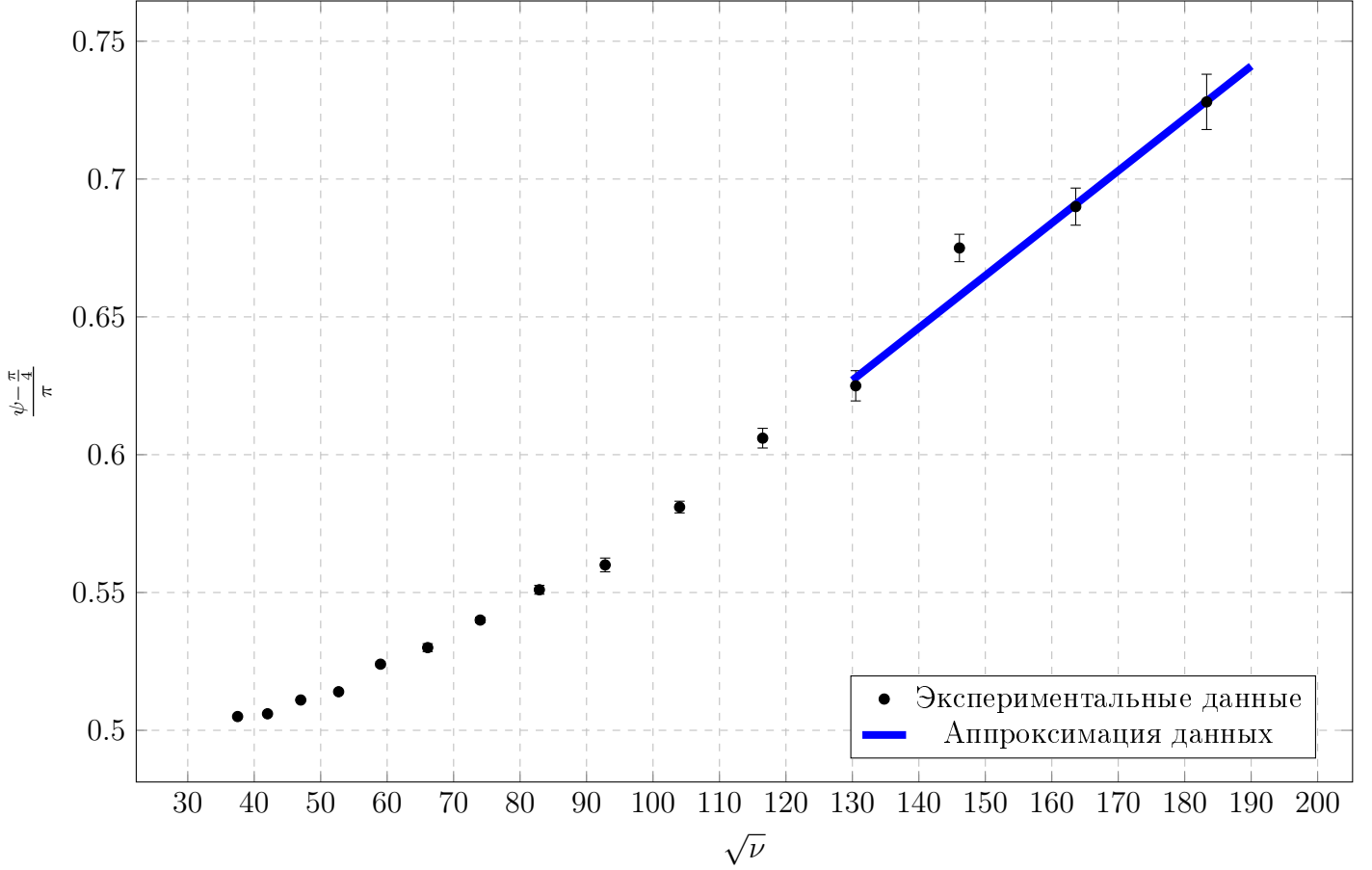
Таблица 4: Результаты измерений от $0.5 \nu_h$ до $15 \nu_h$ - 1

| | | | | | |
|------------|--------|-------|--------|--------|--------|
| ν , Гц | 13565 | 17020 | 21350 | 26780 | 33600 |
| U , В | 0.0780 | 0.057 | 0.0427 | 0.0334 | 0.0280 |
| I , мА | 37.05 | 27.63 | 19.25 | 11.4 | 4.02 |
| X | 1.8 | 1.2 | 1.1 | 0.7 | 0.2 |
| X_0 | 3.7 | 2.9 | 4.6 | 3.7 | 2.9 |

Таблица 5: Результаты измерений от $0.5 \nu_h$ до $15 \nu_h - 2$

Построим график $\psi - \frac{\pi}{4}$ от $\sqrt{\nu}$:

График 2 График зависимости $\psi(\sqrt{\nu})$



Взяв последние 4 точки для линейной аппроксимации, получим:

$$k = 0.0019 \pm 0.001 \quad (31)$$

Тогда σ (из соотношения (13)):

$$\sigma = \left(\frac{k\pi}{h\sqrt{\pi\mu_0}} \right)^2 \approx 3.61 \pm 0.44 \cdot 10^7 \text{ См/м} \quad (32)$$

4.4 Получение итоговой σ и проверка теории об ослаблении полей

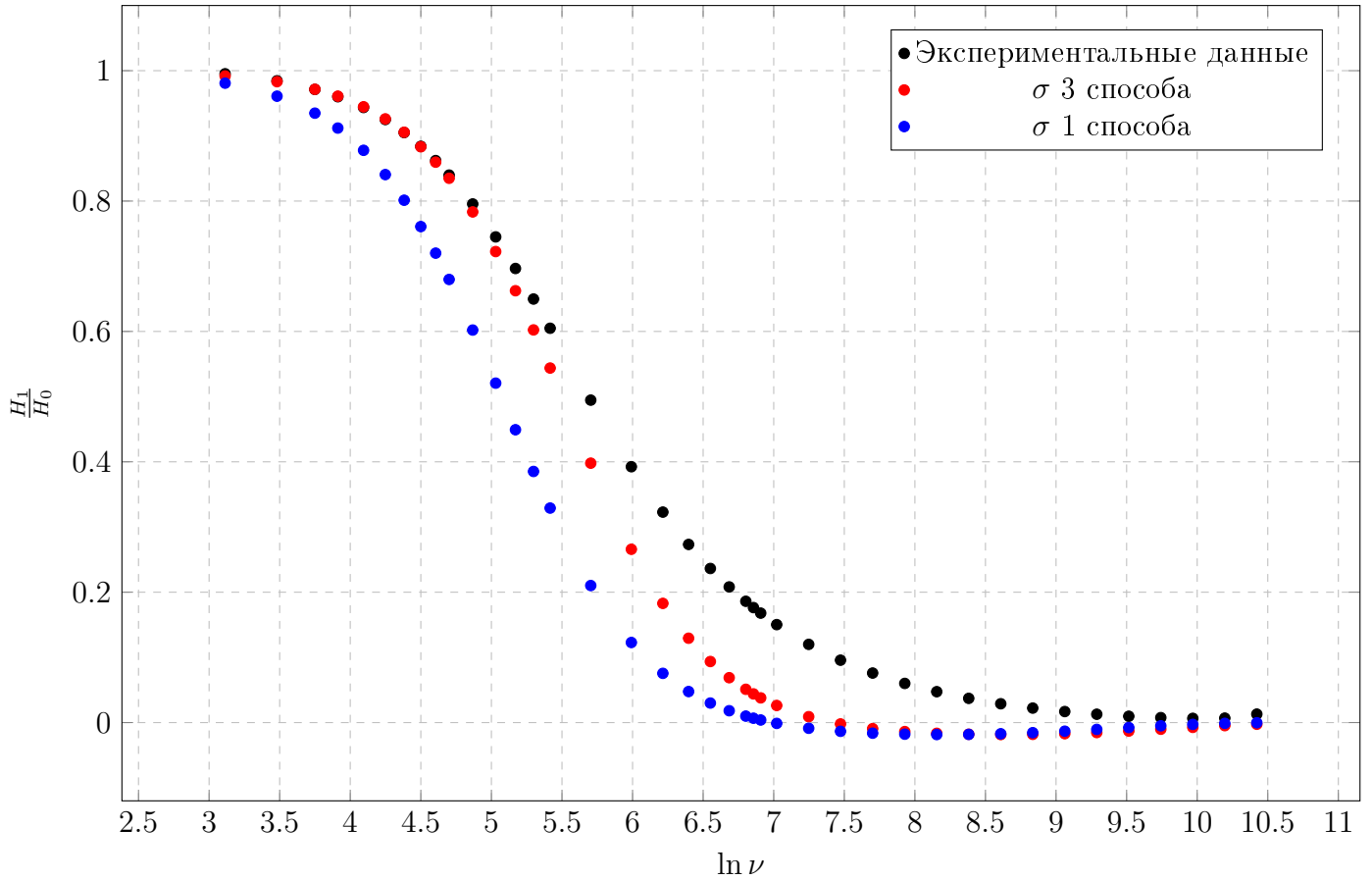
Занесем в таблицу полученные коэффициенты проводимости:

| | | | |
|------------------------|----------------|-----------------|-----------------|
| σ , 10^7 См/м | 4.71 ± 0.3 | 3.06 ± 2.49 | 3.61 ± 0.44 |
| №, способ | 1 | 2 | 3 |

Таблица 6: Результаты расчета σ

Первый результат, если судить по погрешности и качеству аппроксимации теоретических положений, сразу выделяется на фоне двух других. Используя полученное в первом способе ξ_0 , рассчитаем коэффициент ослабления поля для всех измерений и получим график $\frac{H_1}{H_0}$ от ν :

График 2 График зависимости $\frac{H_1}{H_0}(\ln \nu)$



5 Обсуждение результатов и выводы

В ходе работы нами было использовано три метода для определения проводимости меди по скин-эффекту, косвенно в ней наблюдающемуся: по соотношению амплитуд полей на низких частотах и по фазам на средних и высоких частотах. Первый и третий методы показывали в ходе эксперимента хорошее качественное совпадение с теорией, в отличие от второго, в котором ситуация кардинально противоположная. Проводимость, полученная в первом методе, хорошо совпадает с табличными значениями проводимости меди, учитывая примеси в ней, но построение графиков $\frac{H_1}{H_0}$ показало, что теория описала данные качественно, но не количественно. Результаты опытов, по нашему мнению, могут быть объяснены следующими положениями:

1. Использование в качестве теоретической основы упрощенного решения скин-эффекта для одномерного случая - это ведет к переоценке второй производной на высоких частотах и вследствие к занижению поля внутри цилиндра.

2. Предположение о стационарности полей может быть некорректно на высоких частотах, когда характерные размеры системы уже не соответствуют характерной скорости распространения колебаний в системе.

3. Неточность определения фаз по нулям напряжений на изм. катушке и резисторе, особенно проявляющуюся при приближении разности фаз к $\pi/2$ и следственно совпадению фаз на осциллографе.

4. Качественное расхождение на средних частотах может быть связано с "переходом" решения между областями аппроксимации. Учитывая, что "опорная частота" была вычислена по оценке проводимости, границы перехода могли быть определены неточно.

В таких условиях, мы можем утверждать следующее: теория в одномерном приближении описывает наблюдения качественно, о качестве количественного описания судить сложно.

6 Рекомендации по установке

Мы считаем нелишними следующие корректировки по данной работе:

1. Использовать альтернативный метод определения разности фаз, оправдавший себя в ранних работах - по фазовым диаграммам (используя осциллограф в режиме одного из сигналов поданного на временную развертку) для более высокой точности, либо использовать электронный осциллограф, на котором можно крайне точно определять нужные величины.

2. По первым расчетам σ корректировать "опорную частоту"