

# Работа 3.6.1

## Спектральный анализ электрических сигналов.

Балдин Виктор

**Цель работы:** исследование спектра колебаний электрических сигналов.

**В работе используются:** персональный компьютер; USB-осциллограф АКИП-4107; функциональный генератор WaveStation2012; соединительные кабели.

### Идея

#### Разложение сложных сигналов на периодические колебания

Используется разложение в сумму синусов и косинусов с различными аргументами или, как чаще его называют, *разложение в ряд Фурье*.

Пусть задана функция  $f(t)$ , которая периодически повторяется с частотой  $\Omega_1 = \frac{2\pi}{T}$ , где  $T$  — период повторения импульсов. Её разложение в ряд Фурье имеет вид

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\Omega_1 t) + b_n \sin(n\Omega_1 t)] \quad (1)$$

или

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\Omega_1 t - \psi_n). \quad (2)$$

Если сигнал чётен относительно  $t = 0$ , в тригонометрической записи остаются только члены с косинусами. Для нечетной наоборот.

Коэффициенты определяются по формуле

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t) \cos(n\Omega_1 t) dt, \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t) \sin(n\Omega_1 t) dt. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь  $t_1$  — время, с которого мы начинаем отсчет.

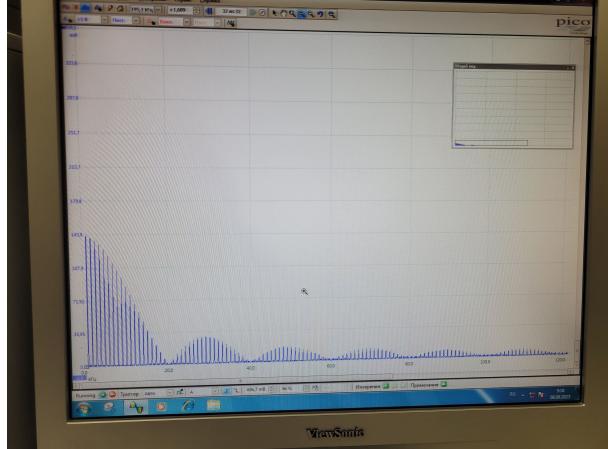
Сравнив формулы (1) и (2) можно получить выражения для  $A_n$  и  $\psi_n$ :

$$\begin{aligned} A_n &= \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \\ \psi_n &= \arctan \frac{b_n}{a_n}. \end{aligned} \quad (4)$$

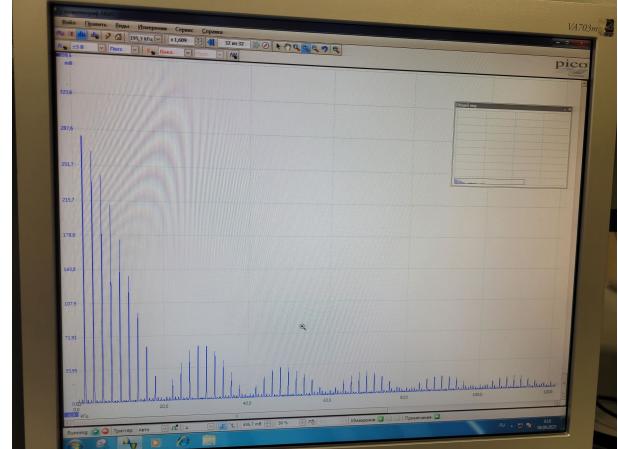
## Ход работы

### А. Исследование спектра периодической последовательности прямоугольных импульсов и проверка соотношений неопределённости

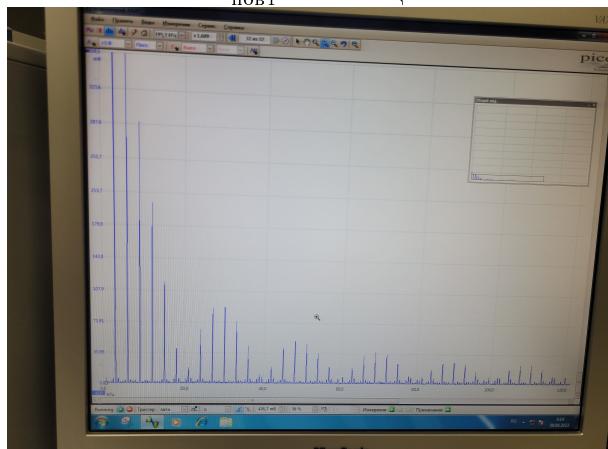
1. Настраиваем генератор на прямоугольные импульсы с частотой повторения  $\nu_{\text{повт}} = 1 \text{ кГц}$  (период  $T = 1 \text{ мс}$ ) и длительностью импульса  $\tau = T/20 = 50 \text{ мкс}$ .
2. Получаем на экране спектр (Преобразование Фурье) сигнала.
  - а. Изменяем  $\nu_{\text{повт}}$  при фиксированном  $\tau = 50 \text{ мкс}$  и получаем:



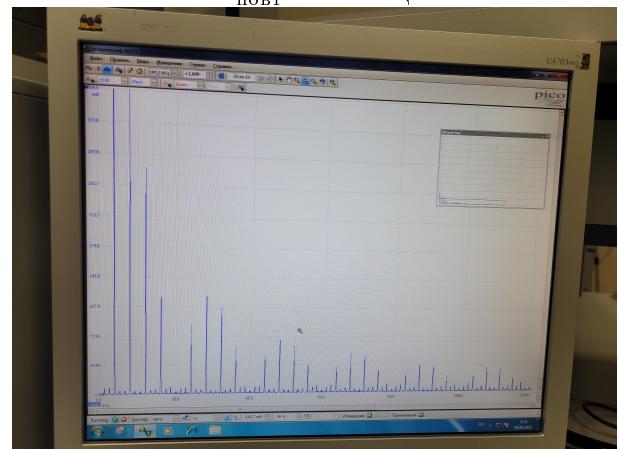
$$\nu_{\text{повт}} = 1 \text{ кГц}$$



$$\nu_{\text{повт}} = 2 \text{ кГц}$$



$$\nu_{\text{повт}} = 3 \text{ кГц}$$

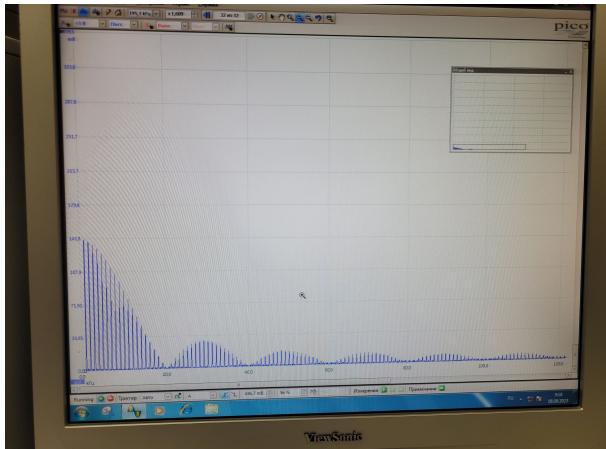


$$\nu_{\text{повт}} = 4 \text{ кГц}$$

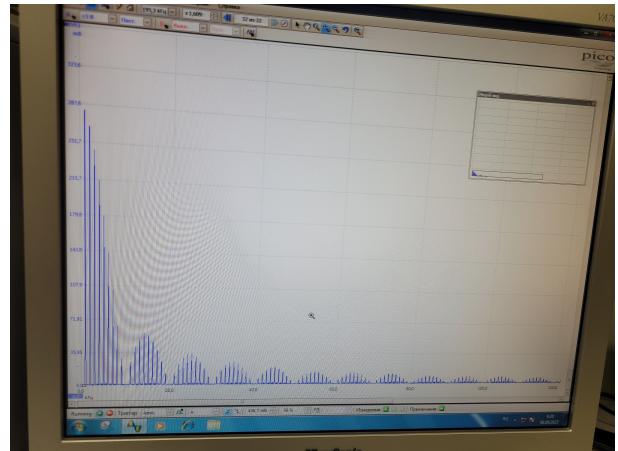
Рис. 1

Как видно из графиков, при увеличении частоты повторения сигнала увеличивается расстояние между компонентами спектра.

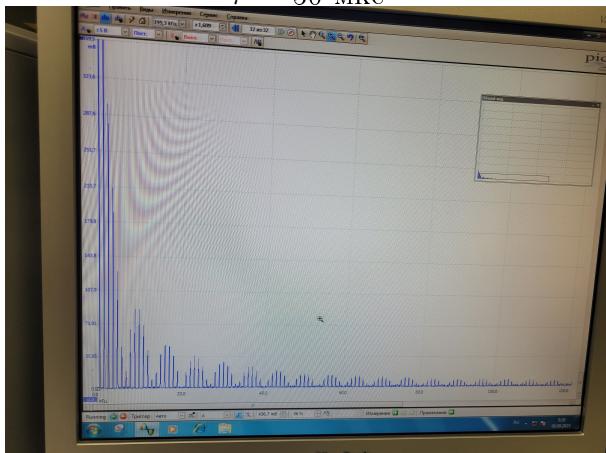
6. Изменяем  $\tau$  при фиксированном  $\nu_{\text{повт}} = 1 \text{ кГц}$  и получаем:



$$\tau = 50 \text{ мкс}$$



$$\tau = 100 \text{ мкс}$$



$$\tau = 150 \text{ мкс}$$

Рис. 2

Как видно из графиков, при увеличении длительности сигнала уменьшается ширина спектра.

3. Измерим амплитуды  $a_n$  и частоты  $\nu_n$  спектральных гармоник при фиксированных  $\nu_{\text{повт}}$  и  $\tau$ .

$n$ гармоники	5	7	9	11	13	15	17	19
$\nu_n^{\text{эксп}}, \text{ кГц}$	5.078	7.092	8.904	11.12	13.03	15.15	16.76	19.17
$\nu_n^{\text{теор}}, \text{ кГц}$	5	7	9	11	13	15	17	19
$ a_n ^{\text{эксп}}, \text{ мВ}$	125.9	112.3	94.73	73.98	54.58	37.44	20.75	4.962
$ a_n/a_1 _{\text{эксп}}$	0.876	0.781	0.659	0.515	0.380	0.261	0.144	0.034
$ a_n/a_1 _{\text{теор}}$	0.904	0.814	0.702	0.574	0.438	0.301	0.171	0.052

Здесь  $a_1 = 143.8 \text{ мВ}$ .

$$\nu_n^{\text{теор}} = \frac{n}{T}$$

$$|a_n|_{\text{теор}} = \frac{|\sin \frac{\pi n \tau}{T}|}{\pi n}$$

4. Зафиксируем период повторения прямоугольного сигнала  $T = 1\text{мс}$ ,  $\nu_{\text{повт}} = 1\text{кГц}$ . Изменяя длительность импульса  $\tau$  в диапазоне от  $\tau = T/50$  до  $\tau = T/5$ , измерим

полную ширину спектра сигнала  $\Delta\nu$  — от центра спектра ( $\nu = 0$ ) до гармоники с нулевой амплитудой  $a_n \approx 0$  и установим зависимость между  $\Delta\nu$  и  $\tau$ , полученную из формулы ??.

$\tau$ , мкс	20	25	40	50	100	150	200
$\Delta\nu$ , кГц	49.68	39.71	24.61	19.98	9.91	6.84	4.93
$1/\tau \cdot 10^3$ , с <sup>-1</sup>	50	40	25	20	10	7	5

Таблица 1: Исследование зависимости  $\Delta\nu$  и  $\tau$

Построим график  $\Delta\nu \left( \frac{1}{\tau} \right)$ . Используя МНК, получим  $k = 0.994 \pm 0.002$ , откуда с хорошей точностью можем заключить, что  $\Delta\nu \frac{1}{\tau} = 1$ , что экспериментально доказывает соотношение неопределённостей. График приведён на рис.12

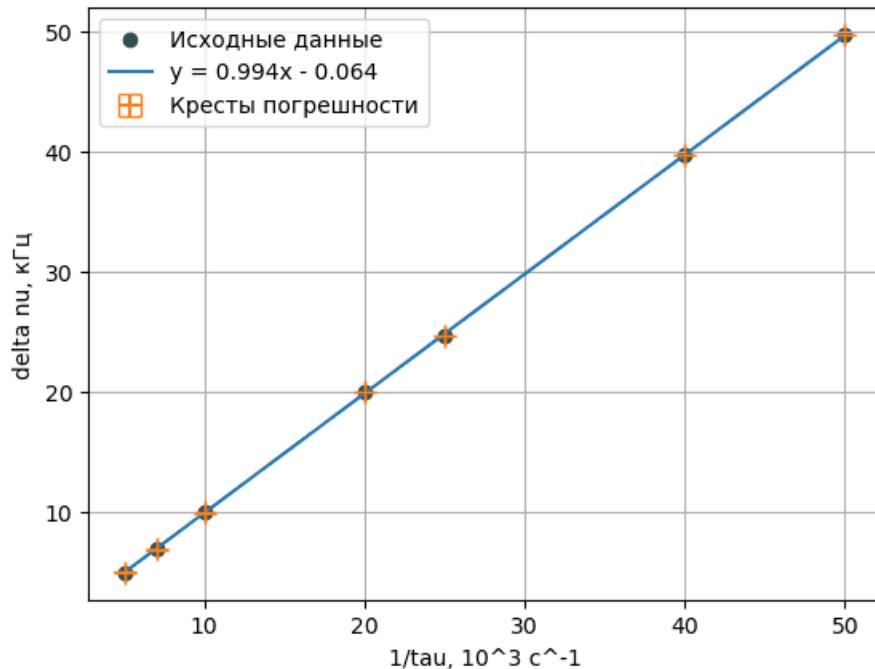


Рис. 3: Зависимость  $\Delta\nu$  от  $1/\tau$

- Зафиксируем длительность импульса прямоугольного сигнала  $\tau = 100$  мкс. Изменяя период повторения  $T$  в диапазоне от  $2\tau$  до  $50\tau$  измерим расстояния  $\delta\nu = \nu_{n+1} - \nu_n$  между соседними гармониками спектра.

$\nu$ , кГц	5	2	1	0.5	0.25	0.1
$\delta\nu$ , кГц	5.036	1.927	1.008	0.510	0.253	0.206

Таблица 2: Зависимость  $\delta\nu$  от  $1/T$

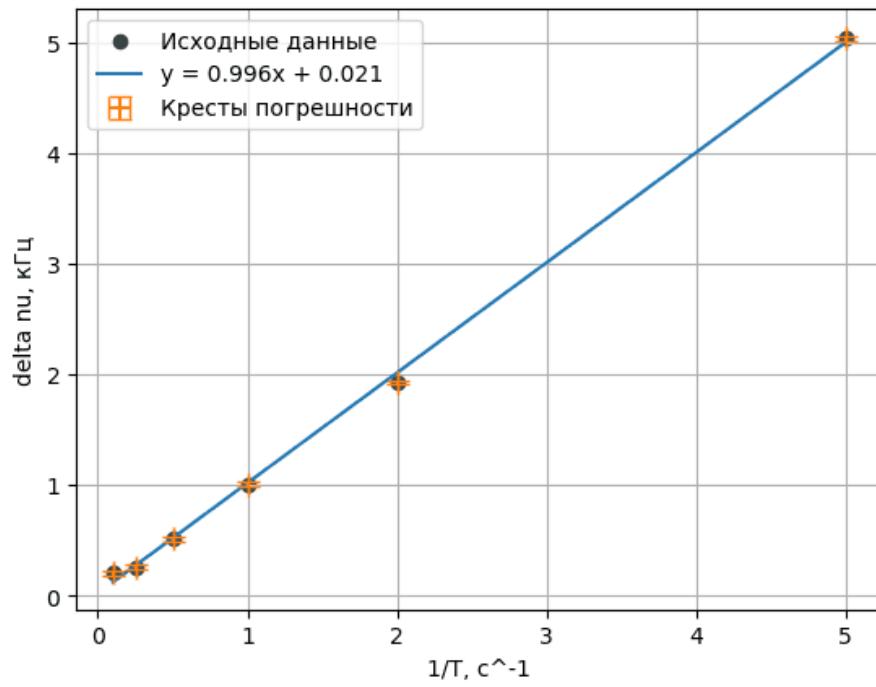
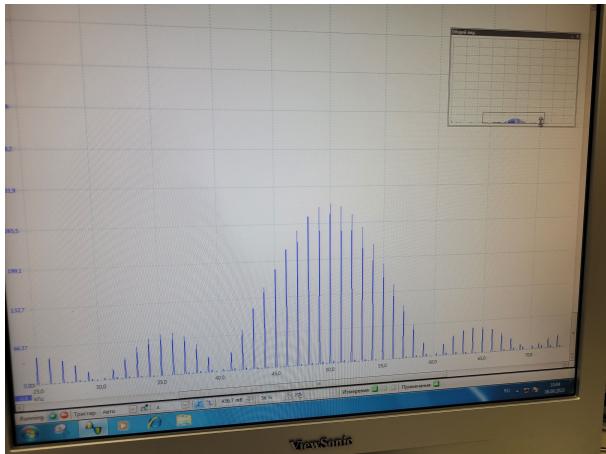


Рис. 4: Зависимость  $\delta\nu$  от  $1/T$

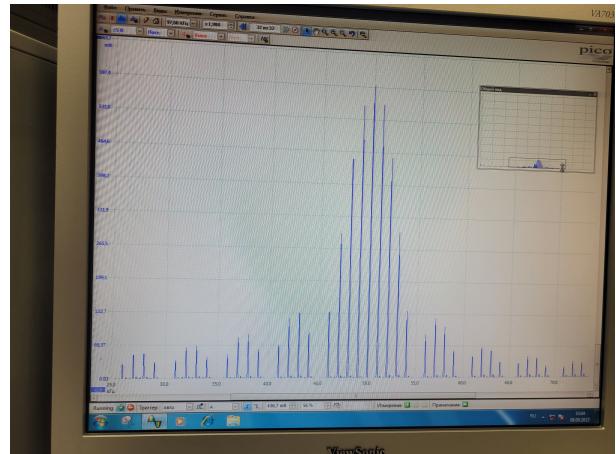
Построим график  $\delta\nu\left(\frac{1}{T}\right)$ . Используя МНК, получим  $k = 0.996 \pm 0,013$ , что экспериментально доказывает соотношение неопределённостей. График приведён на рис.13.

## Б. Наблюдение спектра периодической последовательности щугов

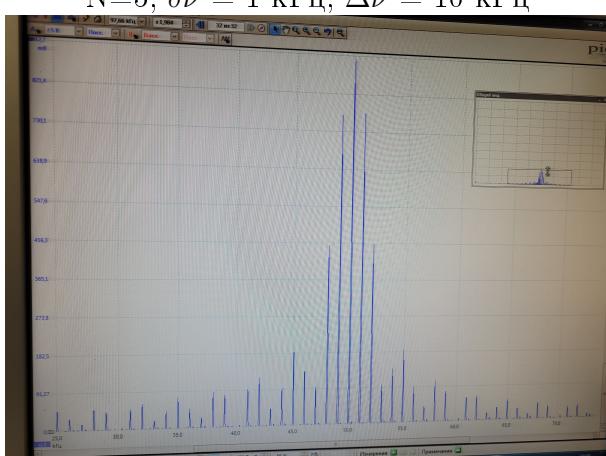
1. Настраиваем генератор на периодические импульсы синусоидальной формы (щугов) с несущей частотой  $\nu_0 = 50$  кГц, частотой повторения  $\nu_{\text{повт}} = 1$  кГц, число периодов синусоиды в одном импульсе  $N = 5$  (что соответствует длительности импульса  $\tau = N/\nu_0 = 100$  мкс).
2. Получаем на экране спектр (Преобразование Фурье) сигнала.
- a. Изменяем  $N$  при фиксированных  $\nu_0 = 50$  кГц и  $\nu_{\text{повт}} = 1$  кГц:



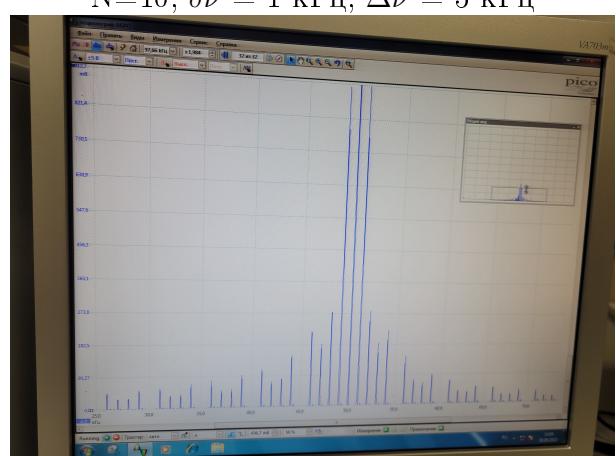
$N=5, \delta\nu = 1$  кГц,  $\Delta\nu = 10$  кГц



$N=10, \delta\nu = 1$  кГц,  $\Delta\nu = 5$  кГц



$N=15, \delta\nu = 1$  кГц,  $\Delta\nu \approx 3$  кГц



$N=20, \delta\nu = 1$  кГц,  $\Delta\nu \approx 2.5$  кГц

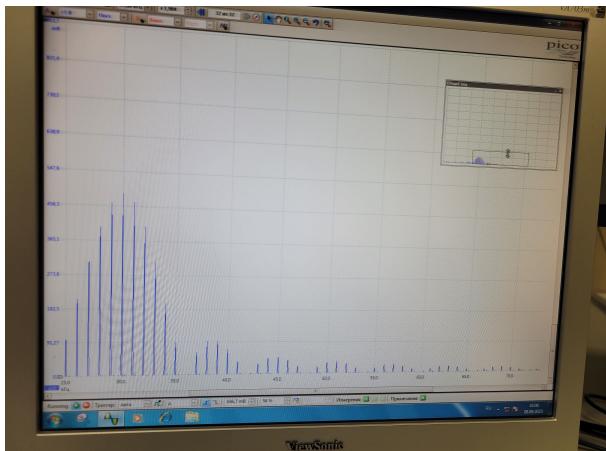
Рис. 5

Соотношение неопределённостей:

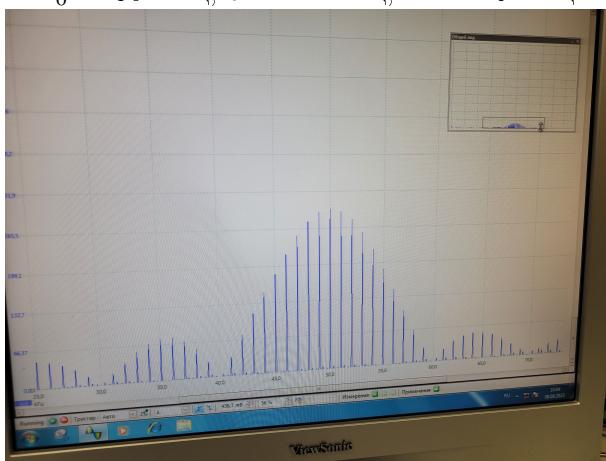
$$\Delta\nu \cdot \tau = 10 \cdot 10^3 \frac{5}{50 \cdot 10^3} = 5 \cdot 10^3 \frac{10}{50 \cdot 10^3} = 2.5 \cdot 10^3 \frac{20}{50 \cdot 10^3} \approx 3 \cdot 10^3 \frac{15}{50 \cdot 10^3} \approx 1$$

Видим, что спектр остаётся симметричным относительно одной и той же точки, однако "сжимается" к ней при увеличении  $N$ .

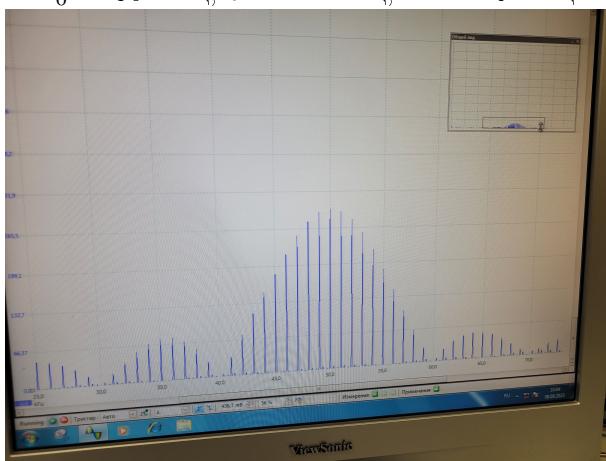
6. Изменяем  $\nu_0$  при фиксированных  $N = 5$  и  $\nu_{\text{повт}} = 1 \text{ кГц}$ :



$$\nu_0 = 30 \text{ кГц}, \delta\nu = 1 \text{ кГц}, \Delta\nu = 6 \text{ кГц}$$



$$\nu_0 = 40 \text{ кГц}, \delta\nu = 1 \text{ кГц}, \Delta\nu = 8 \text{ кГц}$$



$$\nu_0 = 50 \text{ кГц}, \delta\nu = 1 \text{ кГц}, \Delta\nu = 10 \text{ кГц}$$

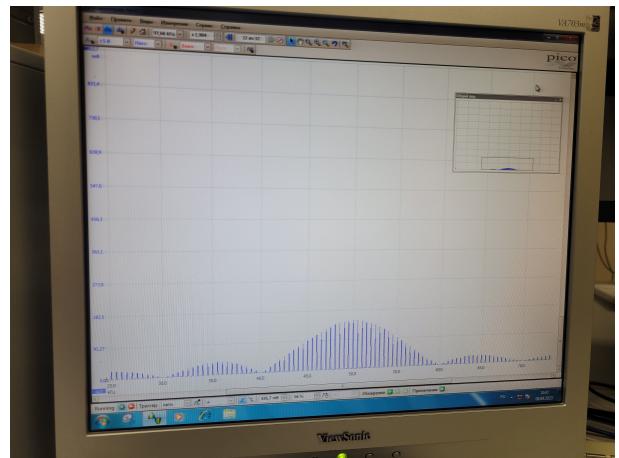
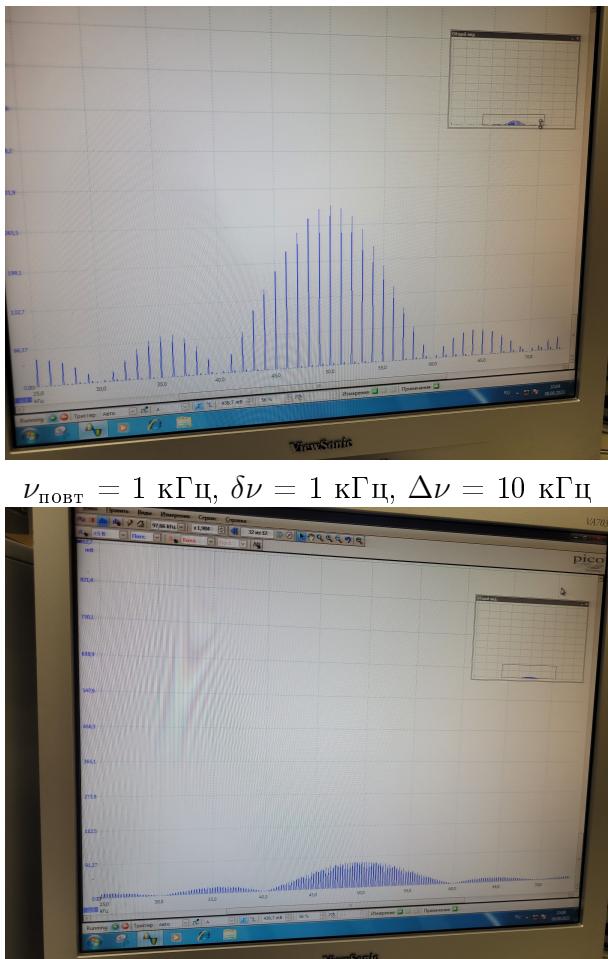
Рис. 6

Соотношение неопределённостей:

$$\Delta\nu \cdot \tau = 6 \cdot 10^3 \frac{5}{30 \cdot 10^3} = 8 \cdot 10^3 \frac{5}{40 \cdot 10^3} = 10 \cdot 10^3 \frac{5}{50 \cdot 10^3} = 1$$

Видим, что в этом случае спектр не меняет свою форму, однако его центр смещается в соответствии с изменением частоты несущей.

в. Изменяем  $\nu_{\text{повт}}$  при фиксированных  $N = 5$  и  $\nu_0 = 50$  кГц:



$$\nu_{\text{повт}} = 0.5 \text{ кГц}, \delta\nu = 0.5 \text{ кГц}, \Delta\nu = 10 \text{ кГц}$$

$$\nu_{\text{побт}} = 0.25 \text{ кГц}, \delta\nu = 0.25 \text{ кГц}, \Delta\nu = 10 \text{ кГц}$$

Рис. 7

Видно, что соотношение неопределённости выполняется:

$$\frac{\delta\nu}{\nu_{\text{позвт}}} = \frac{1 \cdot 10^3}{1 \cdot 10^3} = \frac{0.5 \cdot 10^3}{0.5 \cdot 10^3} = \frac{0.25 \cdot 10^3}{0.25 \cdot 10^3} = 1$$

Также видно, что при стремлении частоты повторения к нулю, стремится к нулю и расстояние между компонентами спектра.

## Г. Наблюдение спектра амплитудно-модулированного сигнала

- Настраиваем генератор в режим модулированного по амплитуде синусоидального сигнала с несущей частотой  $\nu_0 = 50$  кГц, частотой модуляции  $\nu_{\text{мод}} = 2$  кГц и глубиной модуляции  $m = 0.5$ .
- Получаем на экране спектр (Преобразование Фурье) сигнала. Из графика получим  $A_{\max} = 3.057$  мВ и  $A_{\min} = 1.027$  мВ и убедимся в справедливости соотношения

$$m = \frac{A_{\max} - A_{\min}}{A_{\max} + A_{\min}} = \frac{2.03}{4.084} \approx 0.5$$

Поскольку мы установили глубину модуляции на 0,5, а из теории у нас получилась 0,497, то мы видим, что формула ?? верна.

- Изменяя на генераторе глубину модуляции  $m$  в диапазоне от 10 % до 100 % (всего 6-8 точек), измерим отношение амплитуд боковой и основной спектральных линий  $a_{\text{бок}}/a_{\text{осн}}$ . Построим график зависимости  $a_{\text{бок}}/a_{\text{осн}}$  от  $m$  и проверим, совпадает ли результат с теоретическим.

$m, \%$	10	20	30	40	50	80	100
$a_{\text{бок}}, \text{мВ}$	69.02	136.3	207.1	283.2	352.2	559.2	669.0
$a_{\text{осн}} = 1318$ мВ							
$a_{\text{бок}}/a_{\text{осн}}$	0.05	0.10	0.16	0.21	0.27	0.42	0.51

Таблица 3. Исследование зависимости  $a_{\text{бок}}/a_{\text{осн}}$  от  $m$ .

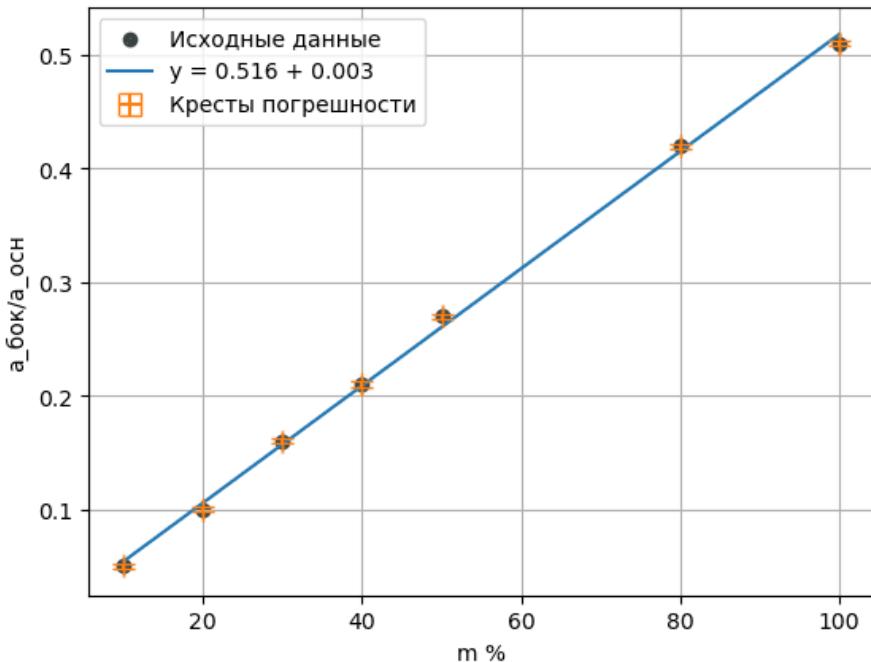
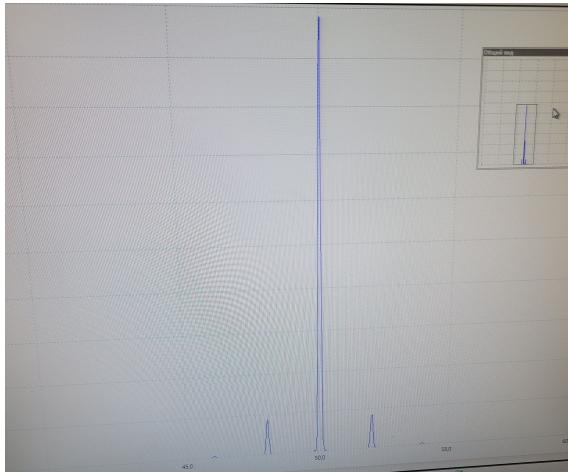


Рис. 8: Зависимость  $a_{\text{бок}}/a_{\text{осн}}$  от  $m$

Построим график  $\frac{a_{\text{бок}}}{a_{\text{осн}}} (m)$ . Используя МНК, получим  $k = 0.516x \pm 0.00007$ , что подтверждает  $\frac{a_{\text{бок}}}{a_{\text{осн}}} = \frac{m}{2}$ , т.е. совпадает с теоретическим предсказанием. График приведён на рис.11.

## Д. Наблюдение спектра сигнала, модулированного по фазе

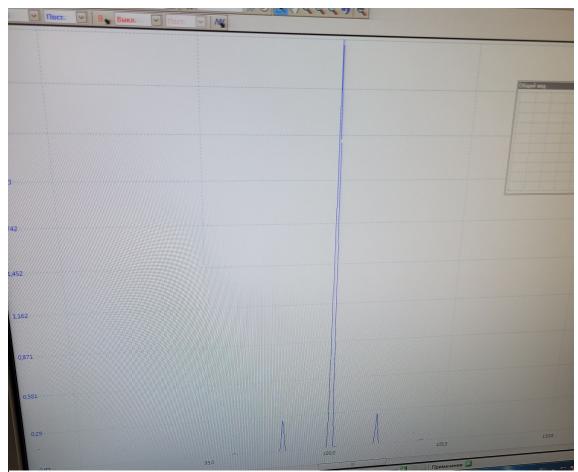
1. Настраиваем генератор в режим модулированного по фазе синусоидального сигнала с несущей частотой  $\nu_0 = 50$  кГц, частотой модуляции  $\nu_{\text{мод}} = 2$  кГц и максимальным отклонением (глубиной модуляции)  $\varphi = 10^\circ$ .
2. Получаем на экране спектр (Преобразование Фурье) сигнала.



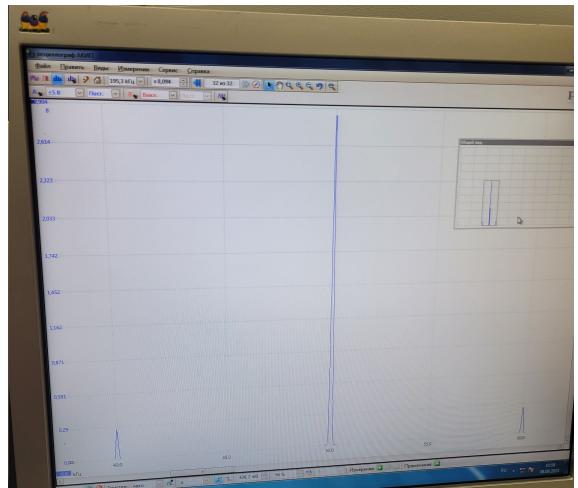
$$\nu_0 = 50 \text{ кГц}, \nu_{\text{мод}} = 2 \text{ кГц}, \varphi = 10^\circ$$



$$\nu_0 = 50 \text{ кГц}, \nu_{\text{мод}} = 2 \text{ кГц}, \varphi = 50^\circ$$

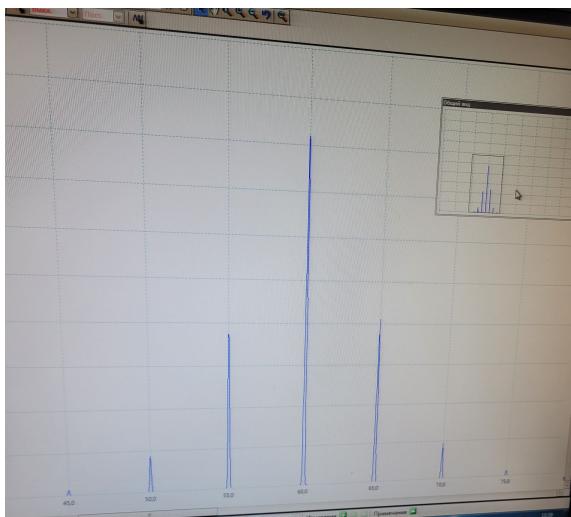


$$\nu_0 = 100 \text{ кГц}, \nu_{\text{мод}} = 2 \text{ кГц}, \varphi = 10^\circ$$



$$\nu_0 = 50 \text{ кГц}, \nu_{\text{мод}} = 10 \text{ кГц}, \varphi = 10^\circ$$

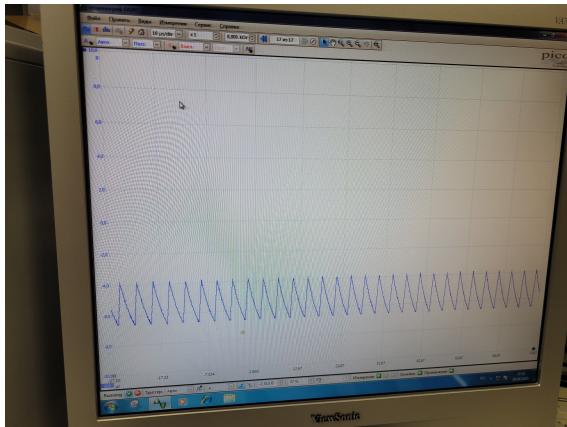
Рис. 9



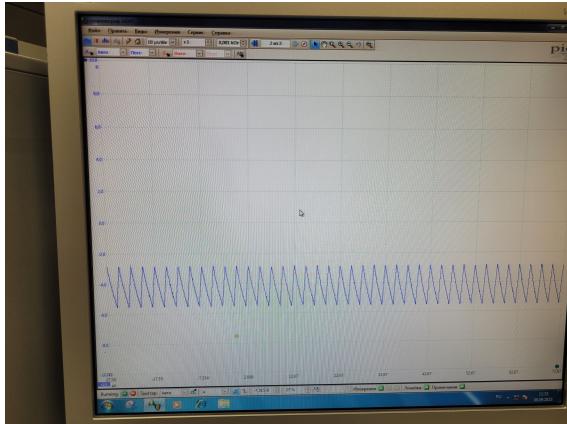
$$\nu_0 = 60 \text{ кГц}, \nu_{\text{мод}} = 5 \text{ кГц}, \varphi = 50^\circ$$

## Е. Изучение фильтрации сигналов

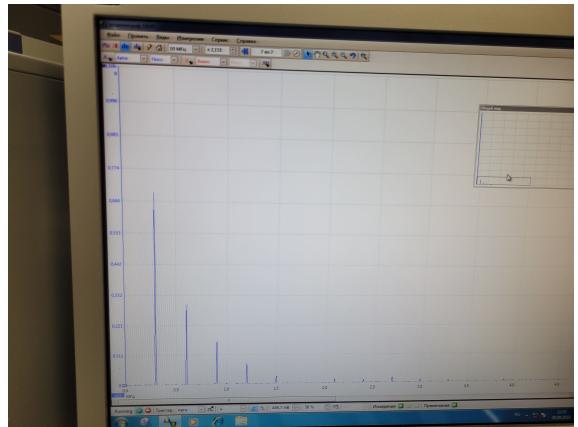
- Подключаем  $RC$  цепочку с сопротивлением  $R = 3$  кОм и ёмкостью  $C = 1000$  пФ. Получаем характерное время  $\tau_{RC} = RC = 3$  мкс. Подаём на вход  $RC$ -цепочки последовательность прямоугольных импульсов с периодом повторения  $T \sim \tau_{RC}$ .
- Получаем на экране спектр (Преобразование Фурье) сигнала.



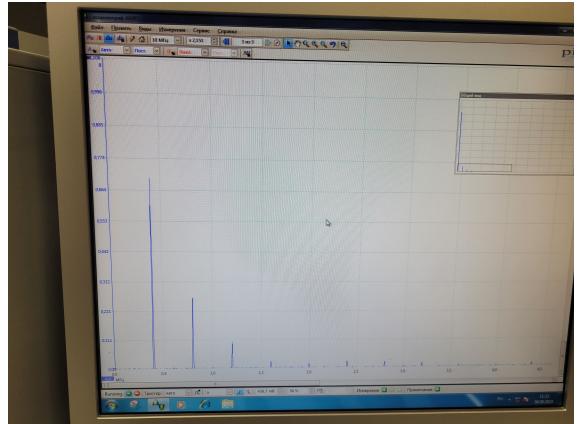
Сигнал при  $\nu_0 = 300$  кГц и  $\tau = 510$  нс.



Сигнал при  $\nu_0 = 400$  кГц и  $\tau = 510$  нс.



Спектр при  $\nu_0 = 300$  кГц и  $\tau = 510$  нс.



Спектр при  $\nu_0 = 400$  кГц и  $\tau = 510$  нс.

Рис. 10

- При фиксированной частоте  $\nu = 300$  кГц проведем измерения отношений амплитуд соответствующих спектральных гармоник (для 7–9 гармоник) фильтрованного и исходного сигналов:  $K_n = |a_n^\Phi|/|a_n^0|$ . Для измерения амплитуд  $a_n^0$  спектра исходного сигнала переподключим генератор к осциллографу напрямую.

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$a_n^\Phi$ , мВ	695.0	295.4	166.6	82.17	27.76	0	15.55	12.28	19.15
$a_n^0$ , мВ	4452	3768	3151	1991	891	0	647	897	1008
$K_n =  a_n^\Phi / a_n^0 $	0.156	0.078	0.0529	0.041	0.031	?	0.024	0.014	0.019

Таблица 3

Построим график зависимости амплитудного коэффициента фильтрации  $K(\nu)$  от частоты  $\nu = n\nu_0$ .

Проверим, что экспериментальная зависимость совпадает с теоретической  $K = \frac{1}{\tau_{RC}} \int_0^t f(t')dt'$ . Т.к. мы подаём последовательность прямоугольных импульсов, то правая часть зави-

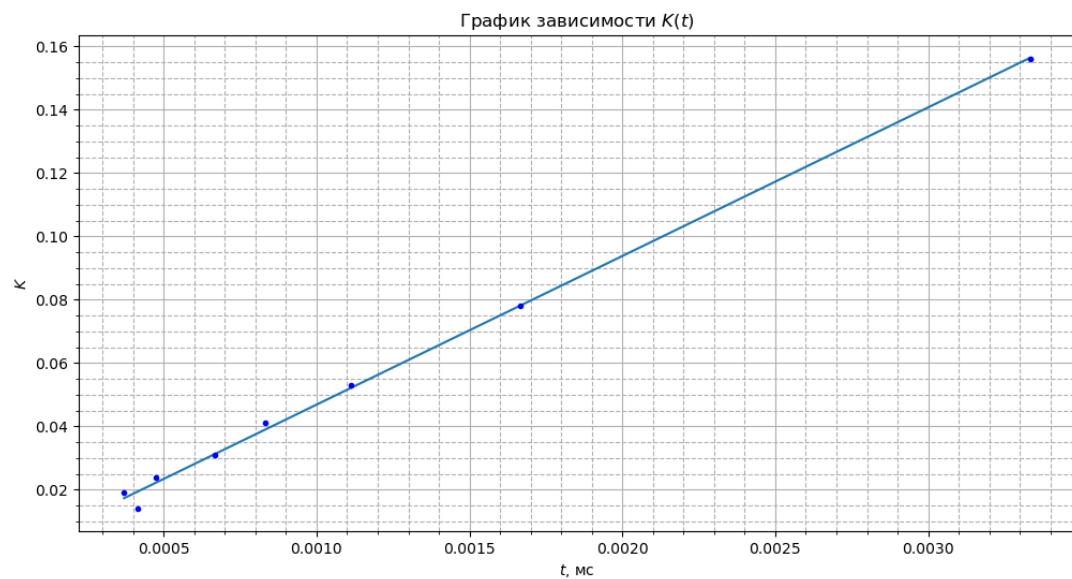


Рис. 11: Зависимость  $K(\nu)$

сит линейно от  $t$ , т.е. обратно пропорционально  $\nu$ . График соответствует этой зависимости

## **Вывод**

В данной работе мы изучили понятие спектра и спектрального анализа, а также исследовали спектральный состав периодических электрических сигналов.

А именно, мы посмотрели на прямоугольные импульсы, цуги гармонических колебаний, а также гармонические сигналы, модулированные по амплитуде. Кроме того, нами был экспериментально проверен частный случай выполнения соотношения неопределённости.