

Спектральный анализ электрических сигналов (3.6.1)

Стеценко Георгий, Б02-312

1 Цель работы

Изучение спектрального состава периодических электрических сигналов.

2 Теоретические сведения

Ряд Фурье и спектральный анализ. Согласно теореме Фурье, любая периодическая функция может быть представлена в виде ряда (конечного или бесконечного) гармонических функций с разными частотами:

$$f(t) = A_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(2\pi\nu_n t) + B_n \sin(2\pi\nu_n t) \quad (1)$$

Коэффициенты разложения (A_n, B_n) можно найти как:

$$A_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cdot \cos(2\pi\nu_n t) dt, \quad B_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cdot \sin(2\pi\nu_n t) dt \quad (2)$$

Более удобно представление (1) можно переписать как:

$$f(t) = a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2\pi\nu_n t + \varphi_n) \quad (3)$$

Кроме того, есть достаточно простая взаимосвязь между сигналом и его спектром. Если в сигнале встречается некоторое характерное время Δt , то в спектре встретится характерный масштаб $\Delta\nu$. При этом выполнено т.н. соотношение неопределённостей:

$$\Delta\nu \cdot \Delta t \sim 1 \quad (4)$$

Для последовательности прямоугольных импульсов длиной τ с периодом T также известны коэффициенты разложения:

$$a_n = \frac{2\tau \sin \pi n \tau / T}{T \pi n \tau / T} \quad (5)$$

Для амплитудно-модулированного синусоидального сигнала $f(t) = A \cdot \cos(\omega t) \cdot (1 + \eta \cdot \cos(\Omega t))$ просто находится спектр в следующем виде:

$$f(t) = a_0 \cos \omega_0 t + \frac{\eta a_0}{2} \cos(\omega_0 + \Omega)t + \frac{\eta a_0}{2} \cos(\omega_0 - \Omega)t \quad (6)$$

3 Методика измерений и результаты

В работе используются: анализатор спектра (цифровой), генератор прямоугольных импульсов и сигналов специальной формы, осциллограф.

3.1 Часть А. Прямоугольные импульсы.

Подадим на осциллограф прямоугольные импульсы. Показания спектров прямоугольных импульсов приведены на рисунке 1.

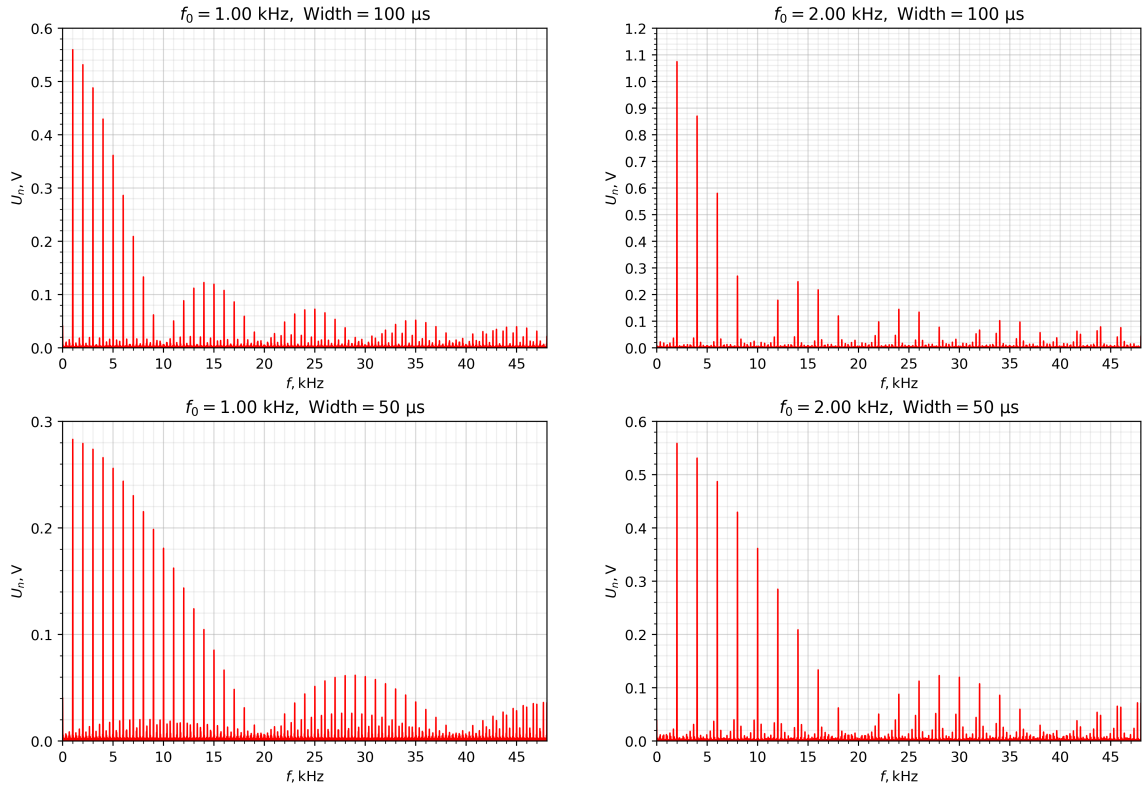


Рис. 1: Спектры при различных параметрах прямоугольного сигнала

По спектрам видно, что уменьшение ширины прямоугольного импульса (*duty*) при неизменной частоте их подачи приводит к увеличению полной ширины спектра в соответствующее число раз. При этом увеличение частоты подачи импульсов (обратного времени между началами ближайших импульсов) приводит к увеличению расстояния между ближайшими пиками в соответствующее число раз.

Проведем сравнение экспериментального спектра (таблица 1) с параметрами 2.00 kHz, 100 μ s с теоретическим (см. (5)).

Таблица 1: Сравнение теоретического и экспериментального спектров.

n	1	2	3	4	5	6	7
ν_n^{exp} , Hz	2.00	4.00	6.00	8.00	—	12.00	14.00
ν_n^{th} , Hz	2.00	4.00	6.00	8.00	10.00	12.00	14.00
$ a_n ^{\text{exp}}$, a.u.	1.074	0.870	0.580	0.269	0.000	0.179	0.248
$ a_n/a_1 ^{\text{exp}}$	1.000	0.810	0.540	0.250	0.000	0.167	0.231
$ a_n/a_1 ^{\text{th}}$	1.000	0.809	0.539	0.250	0.000	0.167	0.231

Теперь будем поочередно менять период T и ширину сигнала τ и смотреть на изменение расстояния между гармониками $\delta\nu$ и полной ширины спектра $\Delta\nu$ соответственно.

Таблица 2: Результаты измерений для проверки соотношений неопределённости

$T, \mu s$	100	200	500	1000	2000	2500	$\tau = 50 \mu s$
$1/T, kHz$	10.00	5.00	2.00	1.00	0.50	0.40	
$\delta\nu, kHz$	10.00	5.00	2.00	1.00	0.50	0.40	
$\tau, \mu s$	50	60	70	80	90	100	$T = 1000 \mu s$
$1/\tau, kHz$	20.0	16.7	14.3	12.5	11.1	10.0	
$\Delta\nu, kHz$	20.0	16.7	14.1	12.4	11.2	10.0	

Так как τ и T могут быть не кратными друг другу, полная ширина спектра $\Delta\nu$ искалась экстраполяцией пиков, близких к корню их огибающей.

Характерная погрешность измерения не превышает погрешность, обусловленную дискретизацией ($< 2\%$ для любой из приведённых точек). Использование метода рядов (например, определение $\delta\nu$ по пикам под номерами n и $n + m$) делает эту погрешность ещё меньше, и грубо её можно оценить сверху как 1% .

Можно было бы построить графики по результатам из таблицы 2, но это не требуется: в данном случае по данным отлично видно, что в большинстве случаев проверяемые величины совпадают вплоть до значащей цифры включительно. То есть соотношения неопределённостей (соотв. (4) для $(T, \delta\nu)$, $(t, \Delta\nu)$) в пределах погрешности выполняются со знаком «=»:

$$T \cdot \delta\nu = 1, \quad t \cdot \Delta\nu = 1$$

3.2 Часть В. Наблюдение спектра периодической последовательности цугов

Установим на источник режим подачи периодических импульсов синусоидальной формы (цугов) (рис. 2) с частотой несущей $f_0 = 50 kHz$, периодом повторения $T = 1 ms$, длительностью импульса $\tau = 100 \mu s$.

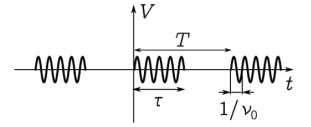


Рис. 2: Форма цуга

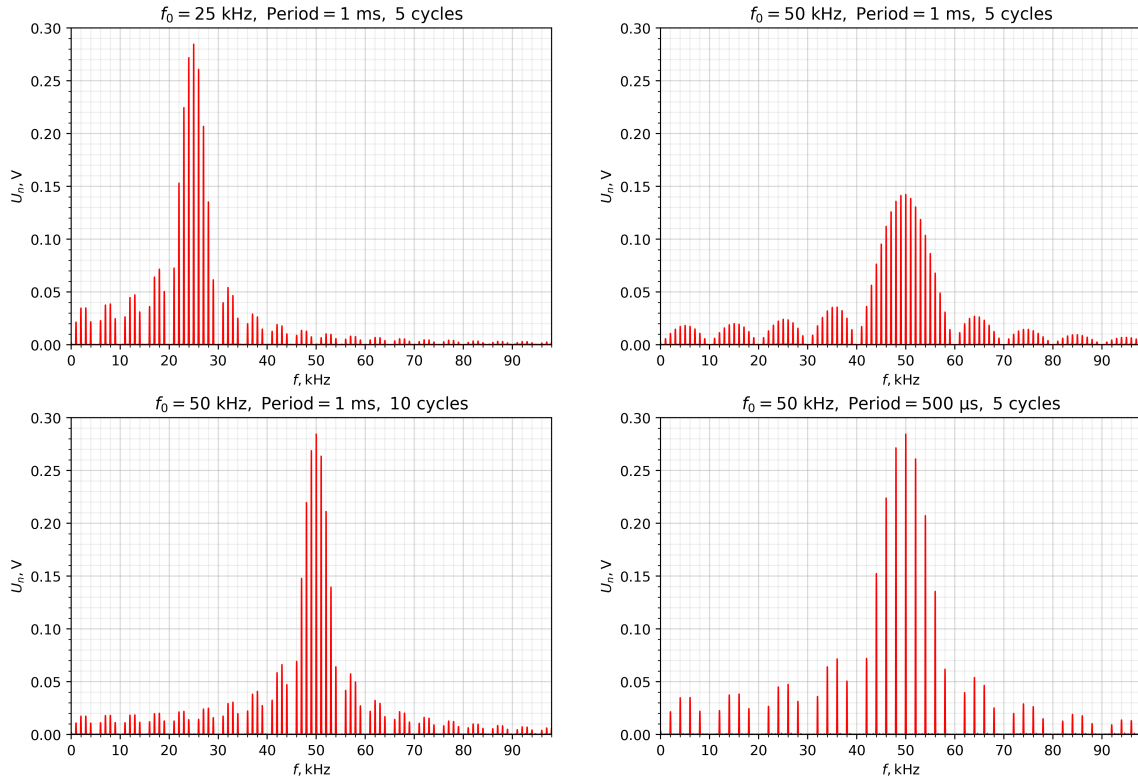


Рис. 3: Спектры при различных параметрах цугов

Видно, что соотношения неопределённостей выполнены (причём со знаком «=»): ширина спектра

$\Delta f = f_0/N$, расстояние между пиками $\delta f = \frac{1}{T}$.

3.3 Часть D. Исследование спектра амплитудно-модулированного сигнала

Установим на источнике режим модулированной синусоиды с несущей частотой $f_0 = 50\text{ kHz}$, частотой модуляции $f_m = 2\text{ kHz}$, глубиной модуляции $\eta = 50\%$. Полученный спектр изображён на рис. 4.

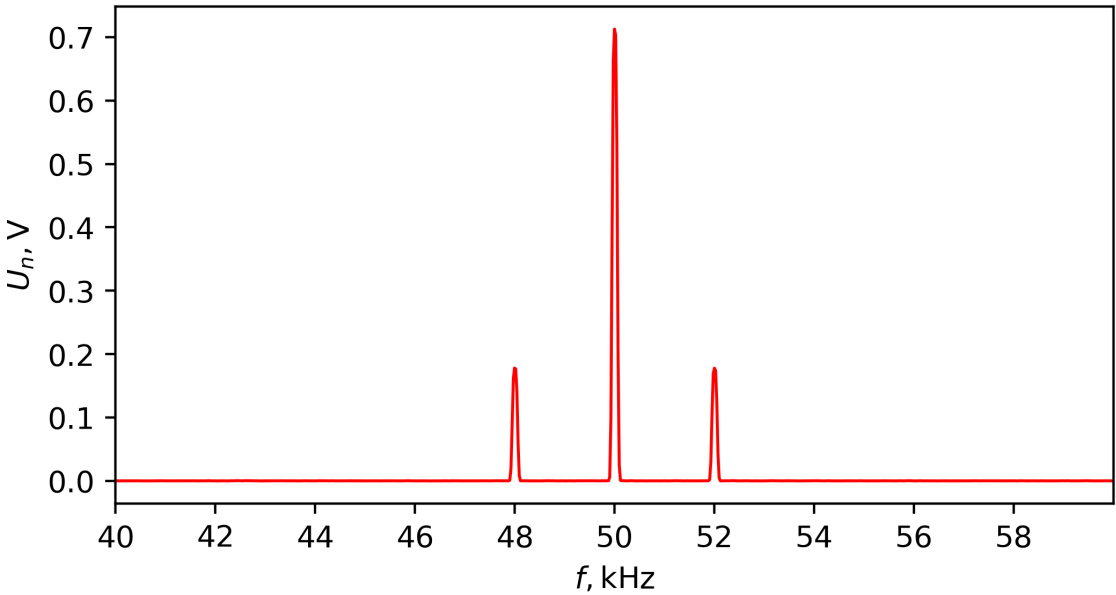


Рис. 4: Спектр амплитудно-модулированного сигнала

m, %	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
$a_{side}, \text{ mV}$	28.1	64.6	106.7	142.6	177.9	213.6	249.5	285.1	320.9	356.8
$a_0, \text{ mV}$	712.8	712.7	712.8	712.7	712.7	712.5	712.2	712.2	712.2	709.3
$(a_{side}/a_0)^{\text{exp}}$	0.039	0.091	0.150	0.200	0.250	0.300	0.350	0.400	0.451	0.503
$(a_{side}/a_0)^{\text{th}}$	0.050	0.100	0.150	0.200	0.250	0.300	0.350	0.400	0.450	0.500

По полученным данным построим график 7:

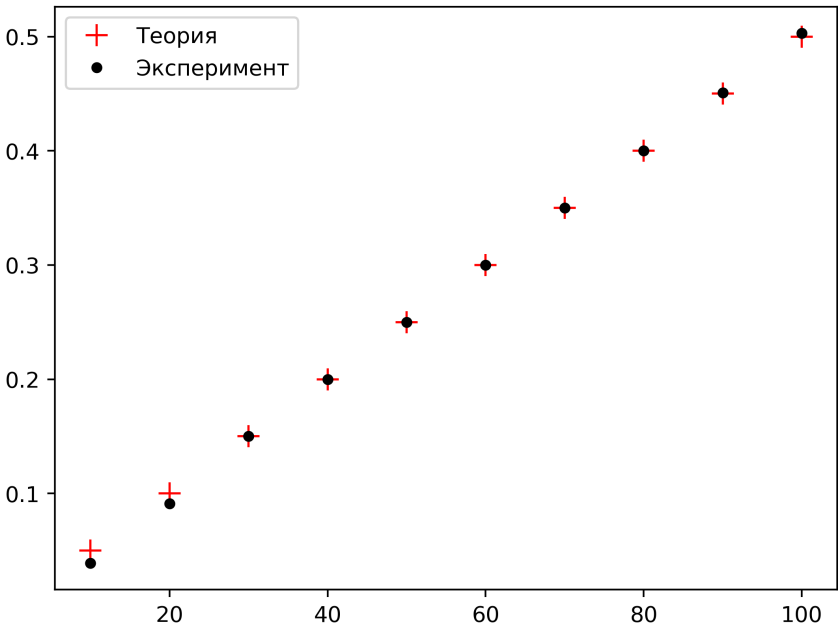


Рис. 5:

Видно, что за исключением критических значений ($\eta \sim 0\%$, $\eta \sim 100\%$) практический результат хорошо сходится с теоретическим.

3.4 Часть F. Изучение фильтрации сигналов

Подадим на RC-фильтр последовательность прямоугольных импульсов, с базовым уровнем 0V. Картина отклика представлена на рис. 6:

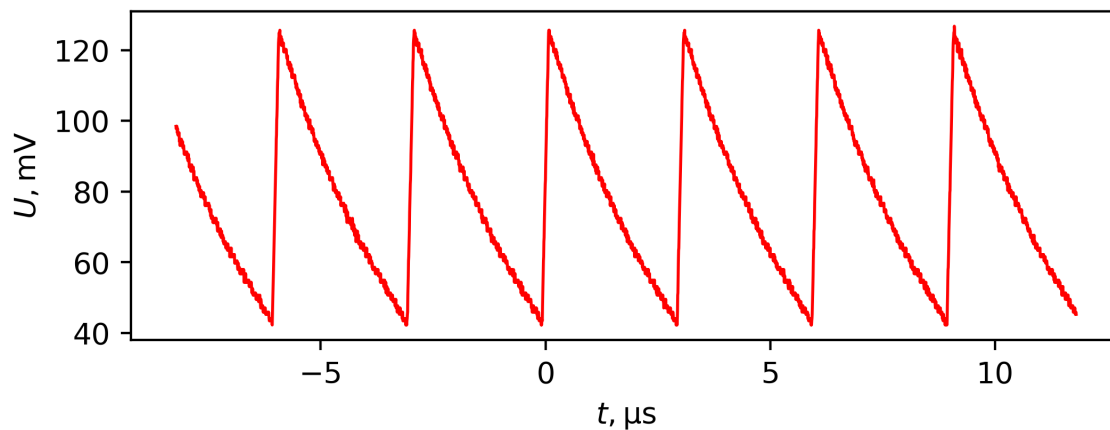


Рис. 6: Картина сигнала после фильтрации

Рассмотрим спектры исходного и обработанного сигналов:

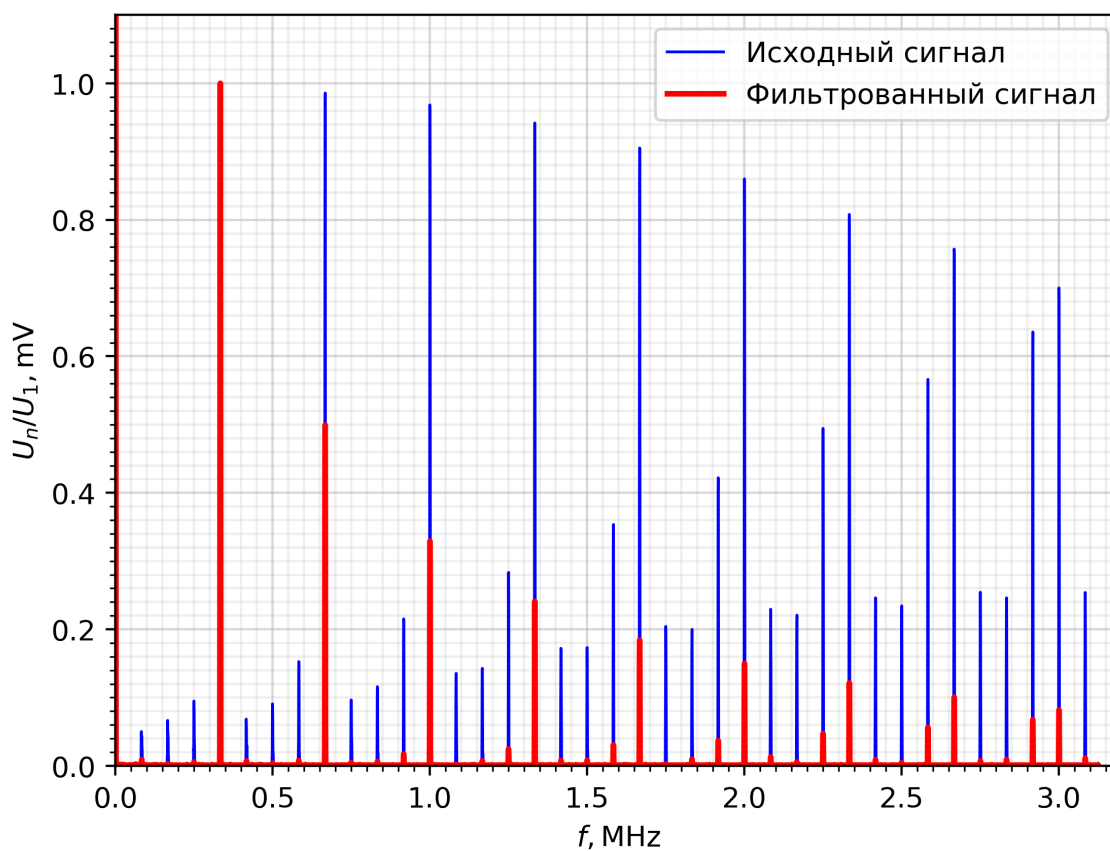


Рис. 7: Сравнение спектров исходного и отфильтрованного сигналов

4 Обсуждение результатов и выводы

В ходе работы было снято достаточно много высококачественных спектров периодических сигналов разной формы (меандр, цуги, АМ), получена передаточная характеристика дифференцирующей RC-цепочки. Показана простота сравнения спектров подобных сигналов с различными параметрами с помощью соотношений неопределённости. Полученные спектры хорошо совпали с теоретическими ожиданиями.