

Лабораторная работа №3.2.5
Вынужденные колебания в электрическом контуре

Гёлецян А.Г.

5 декабря 2022 г.

Цель работы: Исследовать вынужденные колебания, возникающие в электрическом колебательном контуре под воздействием внешней э.д.с., гармонически изменяющейся во времени.

1 Теоретическая часть

1.1 Резонансная кривая

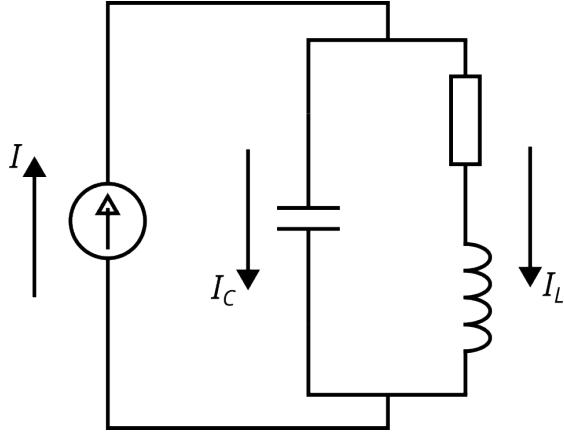


Рис. 1: Параллельный контур

Пусть имеется источник тока, который генерирует ток с частотой ω и комплексной амплитудой I . Тогда, имеем следующие уравнения

$$I = I_C + I_L$$

$$\frac{I_C}{i\omega C} = (i\omega L + R)I_L$$

Введем обозначения $\rho = \sqrt{L/C}$ и $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$. Тогда, преобразуя уравнения выше получим

$$I_C = \left(-\frac{\omega^2}{\omega_0^2} + i\frac{\omega R}{\omega_0 \rho} \right) I_L$$

$$I_L = I \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + i\frac{\omega R}{\omega_0 \rho}} = I \frac{-i\frac{\rho \omega_0}{R \omega}}{1 + i\frac{\rho}{R} \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$

Напряжение на контуре равно $U = (i\omega L + R)I_L$. Приняв обозначение $Q = \rho/R$ распишем выражение для U

$$U = (i\omega L + R)I_L = I \frac{\rho^2}{R} \frac{1 - i\frac{\omega_0/\omega}{Q}}{1 + iQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)} \quad (1)$$

При $Q \geq 5$ максимум $|U|$ достигается при $\omega = \omega_0$ с точностью до 0.04%, поэтому в дальнейшем будем считать, что резонансная частота совпадает с ω_0 . Так же, с хорошей точностью, ширина кривой $|U(\omega)|$ на высоте $|U(\omega_0)|/\sqrt{2}$ равна ω_0/Q . Благодаря этому факту можно измерить добротность Q изучая резонансную кривую контура.

1.2 Процессы установления и затухания колебаний в контуре

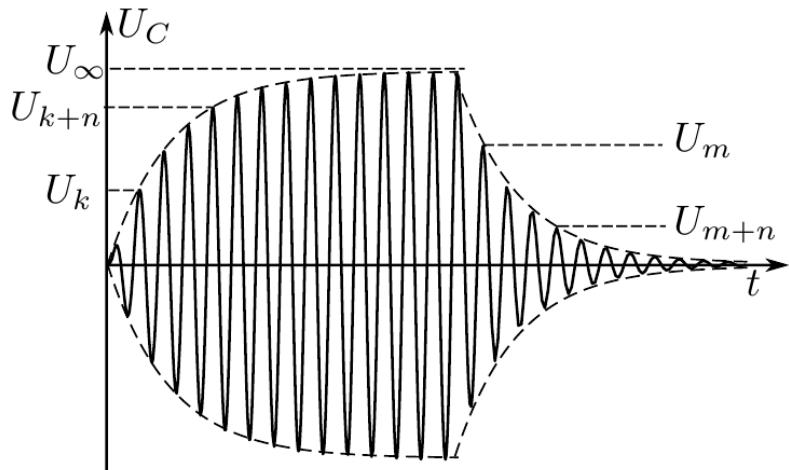


Рис. 2: Нарастание и затухание вынужденных колебаний

Общее решение уравнения, описывающей контур, является суммой экспоненциально затухающих колебаний и стабильных вынужденных колебаний. Если на разряженный контур начать подавать внешнее напряжение с резонансной частотой, то амплитуда колебаний будет меняться по закону

$$U(t) = U_\infty(1 - e^{-\gamma t}) \quad (2)$$

где $\gamma = R/(2L) = \omega_0/(2Q)$. Аналогично, если выключить внешнее напряжение, то останутся только затухающие колебания, и амплитуда будет меняться по закону

$$U(t) = U_0 e^{-\gamma t} \quad (3)$$

Таким образом, измеряя зависимость амплитуды от времени можно получить γ , и, как следствие, добротность.

2 Ход работы

2.1 Измерение резонансной кривой

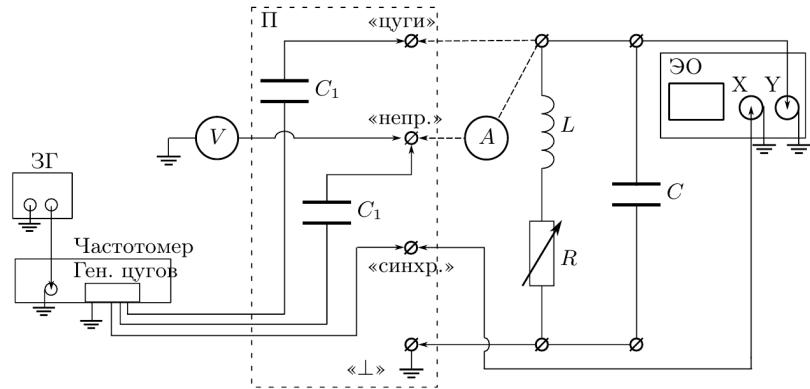


Рис. 3: Установка

При изучении резонансной кривой в 1.1 мы предполагали, что источник выдает постоянный ток. Чтобы получить похожее состояние, генератор сигналов подключается к контуру через маленькую емкость C_1 , благодаря которому импеданс "нагрузки" определяется почти полностью импедансом этой емкости $Z_{C_1} = \frac{1}{i\omega C_1}$.

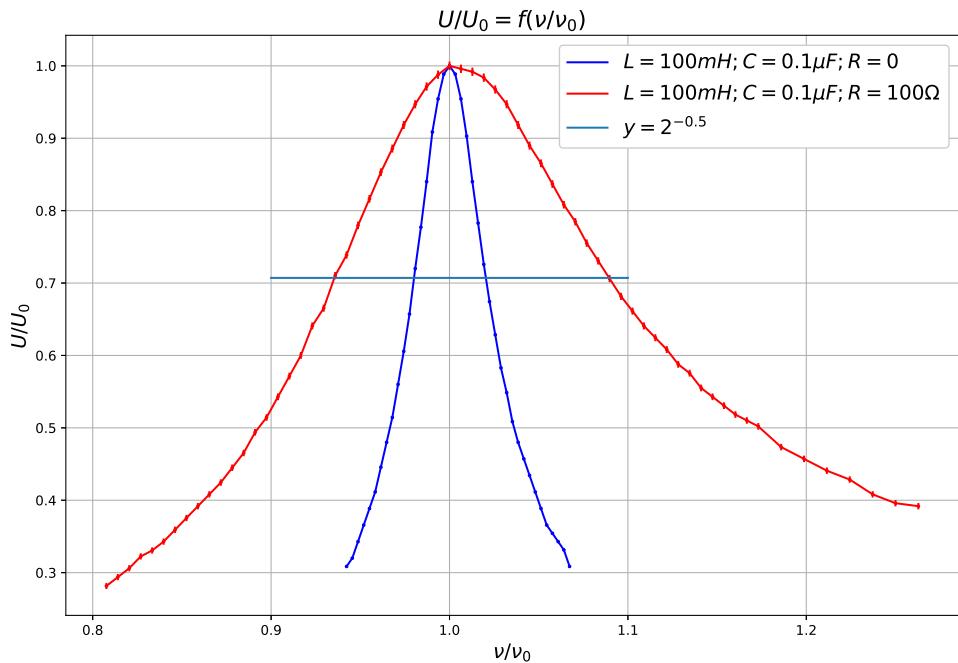


Рис. 4: Резонансные кривые для двух значениях R

Измерения ширины резонансных кривых на высоте $U/U_0 = 1/\sqrt{2}$ дают следующие значения добротностей

$$\begin{aligned} Q_{R=0}^{\text{АЧХ}} &= 24.8 \\ Q_{R=100\Omega}^{\text{АЧХ}} &= 6.49 \end{aligned} \quad (4)$$

2.2 Измерение добротности при помощи процесса установления

Во время измерения резонансных кривых мы нашли резонансные частоты контуров. Они оказались равны в пределах погрешности $\nu_0^{R=0} = \nu_0^{R=100\Omega} = \nu_0 = (1560 \pm 2.5)\text{Гц}$. Выставляем на генераторе цугов эту частоту, и подбираем длительность и период цугов так, чтобы колебания успели установится и затухнуть соответственно. Результаты измерений можно увидеть на графиках

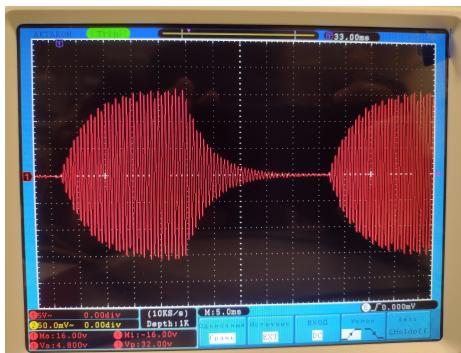


Рис. 5: Осциллографмма переходного процесса

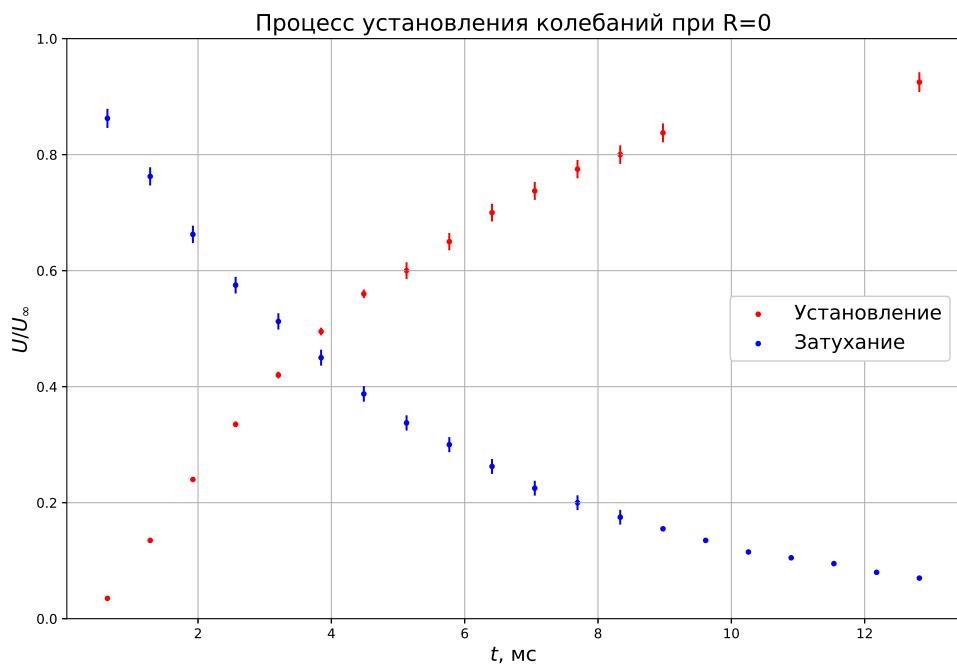


Рис. 6: Переходные процессы для контура с $R = 0$

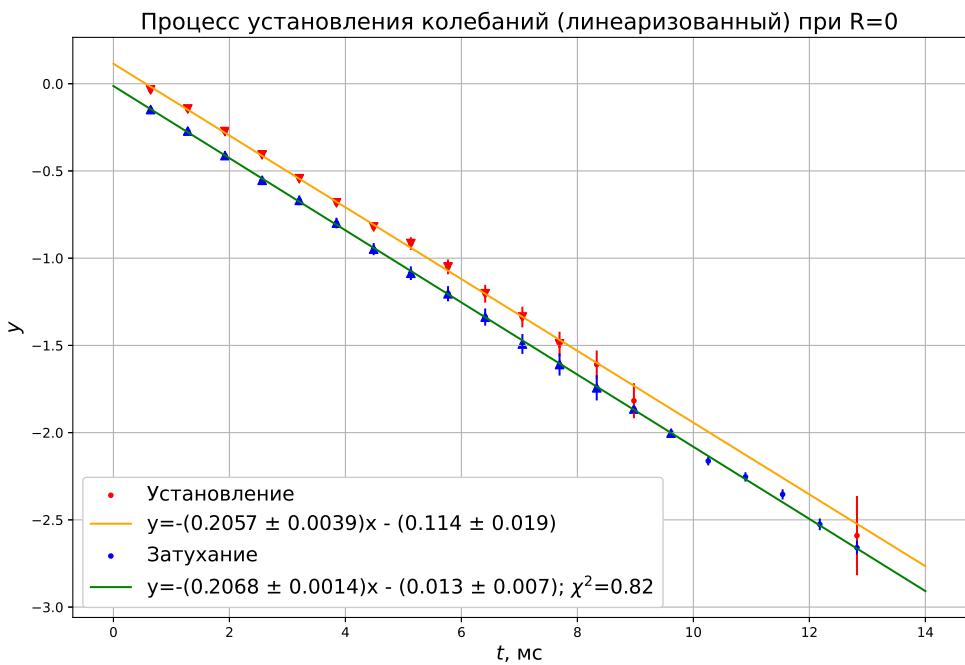


Рис. 7: Линеаризованные графики процессов для контура с $R = 0$

Из параметров грайика получаем следующие значения

$$\begin{aligned} Q_{R=0}^{\text{уст}} &= 23.8 \pm 0.5 \\ Q_{R=0}^{\text{затух}} &= 23.70 \pm 0.16 \end{aligned} \quad (5)$$

Повторим эксперимент для контура с $R = 100\Omega$. Получаем значения

$$\begin{aligned} Q_{R=100\Omega}^{\text{уст}} &= 6.8 \pm 0.7 \\ Q_{R=100\Omega}^{\text{затух}} &= 6.79 \pm 0.09 \end{aligned} \quad (6)$$

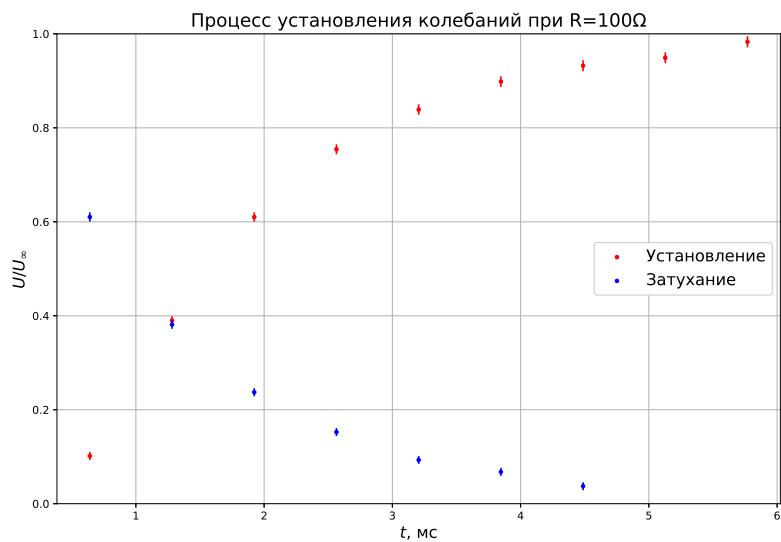


Рис. 8: Переходные процессы для контура с $R = 100\Omega$

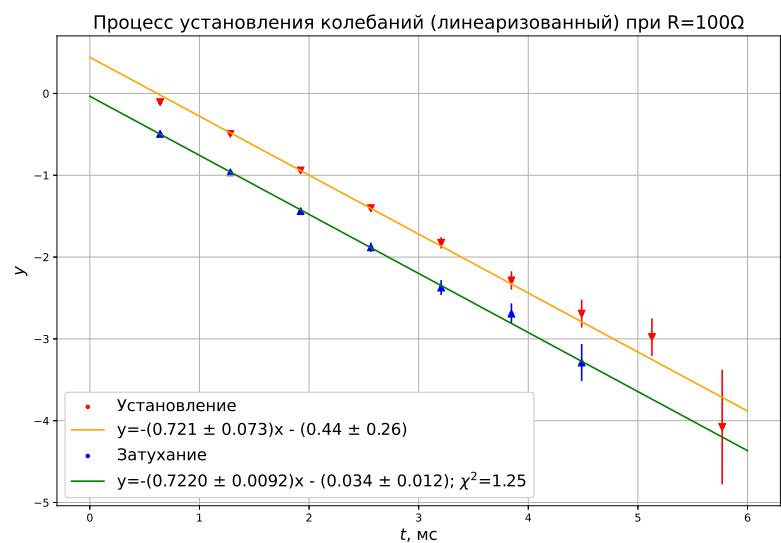


Рис. 9: Линеризованные графики процессов для контура с $R = 100\Omega$

Если на вход контура подать цуги частоты, близкой к резонансной, то получится сумма двух синусов с близкими частотами, один из которых затухает во времени. В результате увидим биения, скважность которых уменьшается со временем.

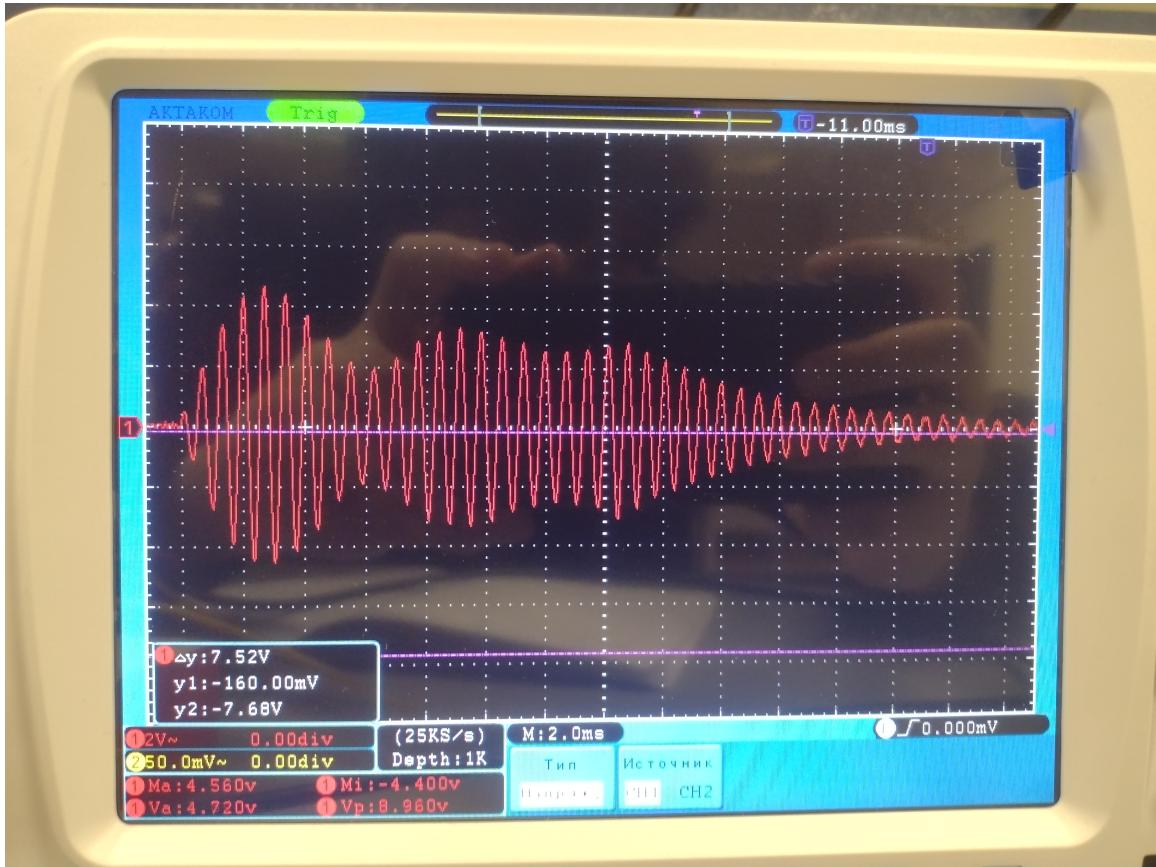


Рис. 10: Биения при $\nu = 1400\text{Гц}$, $R = 0$

2.3 Подведение результатов

При помощи RLC-метра измерим индуктивность и сопротивление индуктивности

$$L_{\nu=5\text{kГц}} = 99.631\text{мГн}$$

$$R_{\nu=5\text{kГц}} = 42.7\Omega$$

$$L_{\nu=1.5\text{kГц}} = 98.978\text{мГн}$$

$$R_{\nu=1.5\text{kГц}} = 29.7\Omega$$

Как видим, индуктивность слабо зависит от частоты, но сопротивление меняется значительно из за скин-эффекта. Наши измерения проводились около резонансной частоты $\nu_0 = 1560\text{Гц}$, поэтому сопротивление катушки будем брать $R_L = 29.7\Omega$, $L = 98.978\text{мГн}$, $C = 0.1\mu\Phi \pm 3\%$. Получаем следующие результаты

R, Ω	$R_{\text{контур}}, \Omega$	$Q^{\text{АЧХ}}$	$Q^{\text{уст}}$	$Q^{\text{затух}}$	$Q^{\text{теор}}$
0	29.7	24.8	23.8 ± 0.5	23.70 ± 0.16	33.5
100	129.7	6.49	6.8 ± 0.7	6.79 ± 0.09	7.67

3 Выводы

Судя по результатам, самый точный метод измерения добротности это измерение по скорости затухания. Как видим теоретические значения не совпадают с реальностью. Это может быть обусловлена неточностью измерения сопротивления контура - скин-эффект, сопротивления проводов, сопротивление конденсатора. Факторов много, учесть все не получиться, но можно проверить гипотезу, зная что разница сопротивлений в контурах 100Ω . Из уравнения для Q имеем

$$R = \frac{1}{Q} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (7)$$

Подставляем наши значения, взяв за Q значения, измеренные при помощи скорости затухания

$$\begin{aligned} R_{\text{контур}}^{R=0} &= (42.0 \pm 0.7)\Omega \\ R_{\text{контур}}^{R=100\Omega} &= (146 \pm 3)\Omega \end{aligned} \quad (8)$$

Как видим, эти значения отличаются на 102Ω , что достаточно близко к ожидаемому значению. Отсюда делаем вывод, что несоответствия с теорией нет, просто мы не смогли измерить сопротивление контура так как надо.