

Определение моментов инерции твердых тел с помощью трифилярного подвеса. (1.2.3)

Дудаков Семён Б01-303

30 октября 2023

1 Введение

Цели работы: измерение момента инерции тел и сравнение результатов с расчетами по теоретическим формулам; проверка аддитивности моментов инерции и справедливости формулы Гюйгенса-Штейнера.

Оборудование: трифилярный подвес, секундомер, счетчик числа колебаний, набор тел, момент инерции которых надлежит измерить (диск, стержень, полный цилиндр и другие).

2 Теоретические сведения

Инерционность при вращении тела относительно оси определяется моментом инерции тела относительно этой оси. Момент инерции твердого тела относительно неподвижной оси вращения вычисляется по формуле:

$$I = \int r^2 dm$$

Здесь r – расстояние элемента массы тела dm от оси вращения. Интегрирование проводится по всей массе тела m .

Если пренебречь потерями энергии на трение о воздух и крепление нитей, то уравнение сохранения энергии при колебаниях можно записать следующим образом:

$$\frac{I\dot{\varphi}^2}{2} + mg(z_0 - z) = E \quad (1)$$

Здесь I – момент инерции платформы вместе с исследуемым телом, m – масса платформы с телом, φ – угол поворота платформы от положения равновесия системы, z_0 – координата по вертикали центра нижней платформы O' при равновесии ($\varphi = 0$), z – координата той же точки при некотором угле поворота φ . Правый член в левой части уравнения – кинетическая энергия вращения, второй член – потенциальная энергия в поле тяжести, E – полная энергия системы (платформы с телом).

Воспользуемся системой координат x, y, z , связанной с верхней платформой, как показано на Рис. 1. Координаты верхнего конца одной из нитей подвеса точки C в этой системе – $(r, 0, 0)$. Нижний конец данной нити C' , находящийся на нижней платформе, при равновесии имеет координаты $(R, 0, z_0)$, а при повороте платформы на угол φ эта точка переходит в C'' с координатами $(R\cos\varphi, R\sin\varphi, z)$. расстояние между точками C и C'' равно длине нити, поэтому, после некоторых преобразований, получаем:

$$(R\cos\phi - r)^2 + R^2\sin^2\phi + z^2 = L^2$$

$$z^2 = L^2 - R^2 - r^2 + 2Rr \cos \phi \approx z_0^2 - 2Rr(1 - \cos \phi) \approx z_0^2 - Rr\phi^2$$

$$z = \sqrt{z_0^2 - Rr\phi^2} \approx z_0 - \frac{Rr\phi^2}{2z_0}$$

Подставляя z в уравнение (1), получаем:

$$\frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2 + mg\frac{Rr}{2z_0}\varphi^2 = E$$

Дифференцируя по времени и сокращая на $\dot{\varphi}$, находим уравнение крутильных колебаний системы:

$$I\ddot{\varphi} + mg\frac{Rr}{2z_0}\varphi = 0$$

Производная по времени от E равна нулю, так как потерями на трение, как уже было сказано выше, пренебрегаем.

Решение этого уравнения имеет вид:

$$\varphi = \varphi_0 \sin \left(\sqrt{\frac{mgRr}{Iz_0}} t + \theta \right)$$

Здесь амплитуда φ_0 и фаза θ колебаний определяются начальными условиями. Период крутильных колебаний нашей системы равен:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{Iz_0}{mgRr}}$$

Из формулы для периода получаем:

$$I = \frac{mgRrT^2}{4\pi^2 z_0} = k m T^2$$

3 Методика измерений

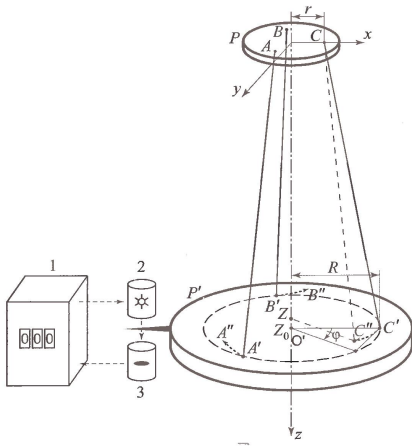


Рис. 1: Физический маятник

Для наших целей удобно использовать устройство, показанное на Рис. 1 и называемое трифилярным подвесом. Оно состоит из укрепленной на некоторой высоте неподвижной платформы P и подвешенной к ней на трех симметрично расположенных нитях AA' , BB' и CC' , вращающейся платформы P' .

Чтобы не вызывать дополнительных раскачиваний, лучше поворачивать верхнюю платформу, укрепленную на неподвижной оси. После поворота верхняя платформа остается неподвижной в течение всего процесса колебаний. После того, как нижняя платформа P' оказывается повернутой на угол φ относительно верхней платформы P возникает момент сил, стремящийся вернуть нижнюю платформу в положение равновесия, при котором относительный поворот платформ отсутствует. В результате платформа совершает крутильные колебания.

где $k = \frac{gRr}{4\pi^2 z_0}$ – величина, постоянная для данной установки.

4 Оборудование

Трифилярный подвес, секундомер, счетчик числа колебаний, набор тел, момент инерции которых надлежит измерить (диск, стержень, полный цилиндр и другие).

Таблица 1: Геометрические параметры установки

z_0 , мм	R , мм	r , мм	k , $\text{м}^2/\text{с}^2$	σ_k , $\text{м}^2/\text{с}^2$
2166.93 ± 0.018	114.6 ± 0.5	30.5 ± 0.3	$0.40 \cdot 10^{-3}$	$0.02 \cdot 10^{-3}$

Таблица 2: Измерения момента инерции пустой платформы

N	$m_{\text{груза}}/\text{с}^2$, Г	t, с	T, с	$k \cdot 10^{-3} \text{м}^2/\text{с}^2$	$m_{\text{плат}}$	$I_{\text{тела}}$, Г · М ²
10	0	44	4.425	0.404	983	7.852
10	0	44	4.422	0.404	983	7.841
10	0	44	4.417	0.404	983	7.822
11	0	48	4.423	0.404	983	7.846
10	0	44	4.415	0.404	983	7.815
10	0	44	4.411	0.404	983	7.801
10	0	44	4.406	0.404	983	7.785
10	0	44	4.402	0.404	983	7.772

5 Измерения и обработка данных

5.1 Измерения параметров установки

Геометрические параметры установки представлены в таблице 1, момент инерции пустой платформы (согласно таблице 5.1) равен:

$$I_{\text{платформы}} = 7.85 \pm 0.17 \text{ Г} \cdot \text{М}^2$$

5.2 Измерения моментов инерции разных тел

Измерения момента инерции диска представлены в таблице 5.2, согласно теоретическому расчету из геометрических размеров диска: $I_{\text{диск}} = 2.11 \text{ Г} \cdot \text{М}^2$. Из полученных данных: $I_{\text{диск}} = 2.17 \pm 0.07 \text{ Г} \cdot \text{М}^2$. Это подтверждает правильность метода измерения.

Измерения момента инерции цилиндра представлены в таблице 5.2, согласно теоретическому расчету из геометрических размеров цилиндра: $I_{\text{цилиндр}} = 4.64 \text{ Г} \cdot \text{М}^2$. Из полученных данных: $I_{\text{цилиндр}} = 4.79 \pm 0.09 \text{ Г} \cdot \text{М}^2$. Это подтверждает правильность метода измерения.

Измерения момента инерции параллелепипеда представлены в таблице 5.2, согласно теоретическому расчету из геометрических размеров параллелепипеда: $I_{\text{кубоид}} = 4.02 \text{ Г} \cdot \text{М}^2$. Из полученных данных: $I_{\text{кубоид}} = 4.14 \pm 0.04 \text{ Г} \cdot \text{М}^2$. Это подтверждает правильность метода измерения.

5.3 Проверка закона аддитивности момента инерции

Согласно таблице 5.3: $I_{\text{диск+цилиндр}} = 6.92 \pm 0.03 \text{ Г} \cdot \text{М}^2$. Согласно измерениям моментов инерции тел по отдельности: $I_{\text{диск+цилиндр}} = 6.97 \pm 0.11 \text{ Г} \cdot \text{М}^2$. Из чего следует справедливость закона

Таблица 3: Измерение момента инерции диска

N	$m_{\text{груза}}$, Г	t, с	T, с	$k \cdot 10^{-3} \text{м}^2/\text{с}^2$	$m_{\text{плат}}$	$I_{\text{системы}}$, Г · М ²	$I_{\text{платформы}}$, Г · М ²	$I_{\text{тела}}$, Г · М ²
10	590	39	3.958	0.404	993	10.013	7.817	2.197
10	590	39	3.952	0.404	993	9.985	7.817	2.168
10	590	39	3.95	0.404	993	9.975	7.817	2.159
10	590	39	3.949	0.404	993	9.97	7.817	2.153
10	590	39	3.948	0.404	993	9.963	7.817	2.146
10	590	39	3.947	0.404	993	9.96	7.817	2.143

Таблица 4: Измерение момента инерции цилиндра

N	$m_{\text{груза}}, \text{Г}$	t, с	T, с	$k, \cdot 10^{-3} \text{М}^2/\text{с}^2$	$m_{\text{плат}},$	$I_{\text{системы}}, \text{Г} \cdot \text{М}^2$	$I_{\text{платформы}}, \text{Г} \cdot \text{М}^2$	$I_{\text{тела}}, \text{Г} \cdot \text{М}^2$
10	772	42	4.208	0.404	993	12.622	7.817	4.805
11	772	46	4.205	0.404	993	12.6	7.817	4.783
11	772	46	4.202	0.404	993	12.584	7.817	4.767
10	772	41	4.2	0.404	993	12.568	7.817	4.752
10	772	41	4.2	0.404	993	12.57	7.817	4.753
10	772	41	4.195	0.404	993	12.542	7.817	4.725

Таблица 5: Измерение момента инерции параллелепипеда

N	$m_{\text{груза}}, \text{Г}$	t, с	T, с	$k, \cdot 10^{-3} \text{М}^2/\text{с}^2$	$m_{\text{плат}},$	$I_{\text{системы}}, \text{Г} \cdot \text{М}^2$	$I_{\text{платформы}}, \text{Г} \cdot \text{М}^2$	$I_{\text{тела}}, \text{Г} \cdot \text{М}^2$
13	1077	49	3.782	0.404	993	11.957	7.817	4.14
13	1077	49	3.776	0.404	993	11.92	7.817	4.103
10	1077	37	3.78	0.404	993	11.945	7.817	4.128
10	1077	37	3.777	0.404	993	11.925	7.817	4.108
19	1077	72	3.794	0.404	993	12.031	7.817	4.214
10	1077	37	3.791	0.404	993	12.012	7.817	4.195

Таблица 6: Измерение момента инерции диска и цилиндра

N	$m_{\text{груза}}, \text{Г}$	t, с	T, с	$k, \cdot 10^{-3} \text{М}^2/\text{с}^2$	$m_{\text{плат}},$	$I_{\text{системы}}, \text{Г} \cdot \text{М}^2$	$I_{\text{платформы}}, \text{Г} \cdot \text{М}^2$	$I_{\text{тела}}, \text{Г} \cdot \text{М}^2$
21	1362	83	3.953	0.404	993	14.86	7.817	7.043
11	1362	43	3.91	0.404	993	14.813	7.817	6.996
11	1362	43	3.943	0.404	993	14.786	7.817	6.969
11	1362	43	3.91	0.404	993	14.76	7.817	6.944
16	1362	62	3.936	0.404	993	14.734	7.817	6.917
12	1362	47	3.91	0.404	993	14.678	7.817	6.861
10	1362	39	3.928	0.404	993	14.672	7.817	6.855

Таблица 7: Измерение момента инерции диска при движении половинок

N	$m_{\text{груза}}, \text{г}$	$t, \text{с}$	$T, \text{с}$	$k, \cdot 10^{-3} \text{М}^2$	$m_{\text{плат}},$	$I_{\text{системы}}, \text{г} \cdot \text{М}^2$	$I_{\text{платформы}}, \text{г} \cdot \text{М}^2$	$I_{\text{тела}}, \text{г} \cdot \text{М}^2$	$h, \text{см}$
30	1528	91	3.061	0.404	993	9.536	7.817	1.72	0
32	1528	98	3.067	0.404	993	9.575	7.817	1.758	0
31	1528	95	3.074	0.404	993	9.616	7.817	1.8	1
30	1528	93	3.12	0.404	993	9.907	7.817	2.09	1
30	1528	94	3.157	0.404	993	10.147	7.817	2.33	2
34	1528	109	3.21	0.404	993	10.486	7.817	2.669	2
35	1528	114	3.275	0.404	993	10.916	7.817	3.099	3
30	1528	100	3.338	0.404	993	11.338	7.817	3.521	3
31	1528	106	3.429	0.404	993	11.97	7.817	4.154	4

аддитивности момента инерции.

5.4 Измерение зависимости момента инерции диска от раздвижения его половинок

По данным из таблицы 5.4 построим график зависимости момента инерции диска от расстояния от каждой из половинок до центра платформы. График на рисунке 2

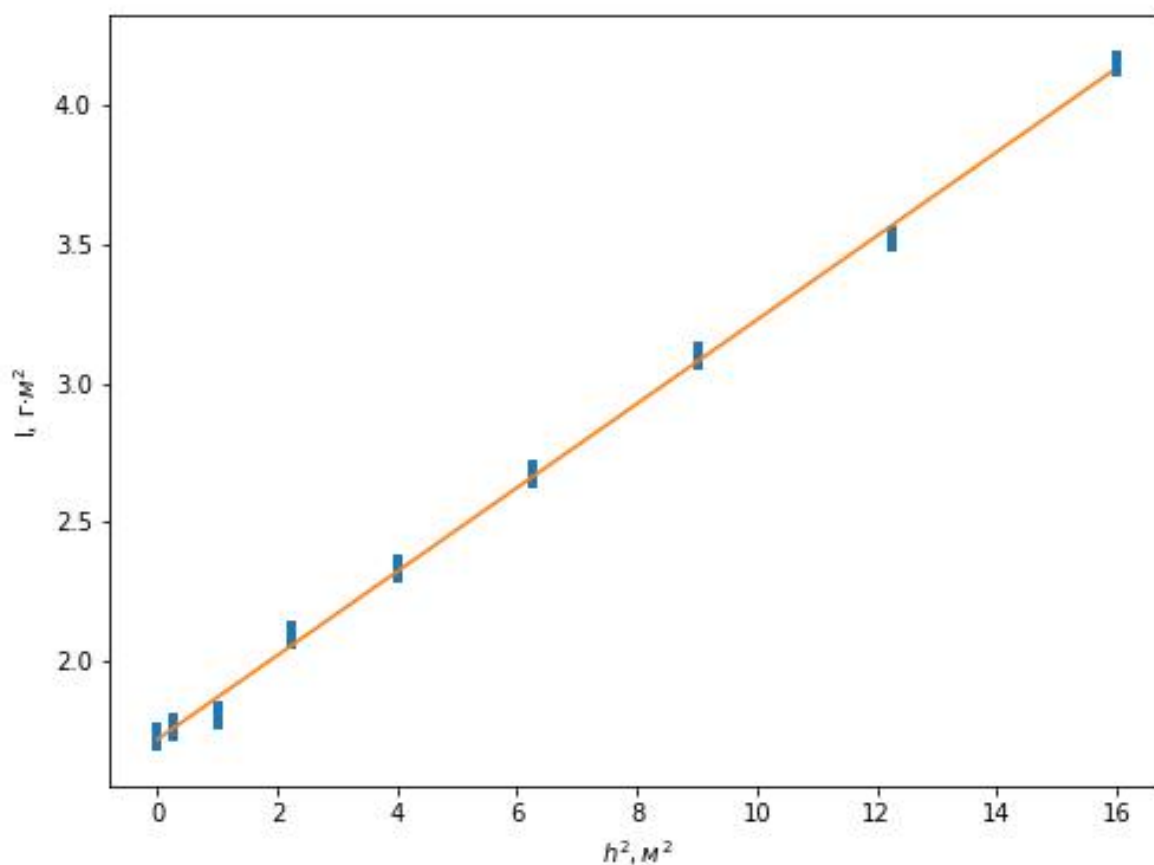


Рис. 2: График зависимости момента инерции диска от квадрата расстояния от каждой из половинок до центра платформы

По наклону графика можно определить массу диска (в соответствии в теоремой Гюйгенса-Штейнера): $m = 1.52 \pm 0.02 \text{ кг}$, по отклонению найти момент инерции диска: $I = 1.69 \pm 0.02 \text{ г} \cdot \text{м}^2$. Что согласуется с измеренной массой ($m = 1.53 \pm 0.02 \text{ кг}$), теоретическим расчетом момента инерции: $I = 1.53 \pm 0.02 \text{ г} \cdot \text{м}^2$

6 Обсуждение результатов

Величина момента инерции, определенная с помощью трифилярного подвеса с довольно большой точностью совпадает с теоретическими предсказаниями. Большая точность обеспечивается малой погрешностью измерения времени, а также выбором условий, при которых крутильные колебания подвеса можно считать слабозатухающими. Основной вклад в погрешность измерения момента инерции внесла погрешность косвенного измерения. Данную погрешность можно уменьшить, если более точно определить параметры установки. Была получена зависимость $I(h^2)$, аппроксимируемая прямой, что подтверждает теоретические данные.

7 Вывод

Мы экспериментально доказали аддитивность моментов инерции с помощью различных тел.

Полученная зависимость $I(h^2)$ аппроксимируется линейной зависимостью, что подтверждает формулу Гюйгенса-Штейнера ($I = I_c + Mh^2$, где I – момент инерции тела, I_c – момент инерции тела относительно центра, M – масса тела, а h – расстояние между двумя осями, в нашем случае – между осью вращения и половинками диска).