

Лабораторная работа № 3.6.1  
Спектральный анализ электрических сигналов

Илья Прамский

Сентябрь 2023

# Введение

**В работе используются:** генератор сигналов произвольной формы, цифровой осциллограф с функцией быстрого преобразования Фурье или цифровой USB-осциллограф, подключённый к персональному компьютеру.

**Цель работы:** изучить спектры сигналов различной формы и влияние параметров сигнала на вид соответствующих спектров; проверить справедливость соотношений неопределённостей; познакомиться с работой спектральных фильтров на примере RC-цепочки.

## Ряд Фурье и спектральный анализ.

Согласно теореме Фурье, любая периодическая функция может быть представлена в виде ряда (конечного или бесконечного) гармонических функций с кратными частотами — ряда Фурье. Одно из представлений ряда Фурье для функции с периодом  $T$  имеет вид

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot \nu_n \cdot t) + B_n \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot \nu_n \cdot t),$$

где  $\nu_n = n \cdot \nu_0$ ,  $\nu_0 = \frac{1}{T}$ ,  $n = 1, 2, \dots$  — частоты фурье-гармоник,  $A_n$  и  $B_n$  — коэффициенты разложения в ряд Фурье. Коэффициенты находятся как

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{T} \cdot \int_0^T f(t) \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot \nu_n \cdot t) dt, \\ B_n &= \frac{2}{T} \cdot \int_0^T f(t) \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot \nu_n \cdot t) dt, \end{aligned}$$

На практике зачастую удобнее использовать эквивалентную форму записи ряда Фурье в «представлении амплитуд и фаз»:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot \nu_n \cdot t + \varphi_n)$$

где по известной тригонометрической формуле амплитуда гармоники равна  $a_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}$ , а фаза определяется соотношением  $\tan(\varphi_n) = \frac{B_n}{A_n}$ .

Отметим, что если функция  $f$  чётная, то  $B_n \equiv 0$  ( $\varphi_n \equiv 0$ , разложение по косинусам), а если нечётная, то  $A_n \equiv 0$  ( $\varphi \equiv \frac{\pi}{2}$ , разложение по синусам).

Совокупность всех частот  $\nu_n$  и соответствующих им амплитуд  $a_n$  (а также фаз  $\varphi_n$ ) часто называют спектром функции  $f(t)$ . Если речь идёт об изменяющемся во времени напряжении, то говорят о спектре электрического сигнала.

Спектральный анализ электрических сигналов играет важную роль в технике. Особенно важен он для линейных систем, подчиняющихся принципу суперпозиции. Если известно, как

некоторая система реагирует на гармонический сигнал, с помощью разложения Фурье можно определить, как система будет реагировать на произвольную функцию  $f(t)$ .

Заметим, что спектр периодической функции дискретен (число гармоник счётно). Если функция не периодическая (но ограниченная во времени, например, отдельный «импульс»), её можно представить как предел периодической функции с очень большим периодом  $T \rightarrow \infty$ . Тогда частотное расстояние между соседними гармониками  $\delta\nu = \frac{1}{T}$  стремится к нулю. Говорят, что спектр становится непрерывным. Разложение в ряд Фурье при этом переходит в интеграл Фурье.

Операцию, при которой функции  $f(t)$  ставится в соответствие её ряд (или интеграл) Фурье называют преобразованием Фурье. Это преобразование является взаимно-однозначным, а восстановление исходной функции по её спектру называется обратным преобразованием Фурье. Однако при спектральном анализе электрических сигналов, как правило, измеряются именно амплитуды  $|a_n|$  (или интенсивности  $|a_n|^2$ ) спектральных компонент, а информация об их фазах  $\varphi_n$  теряется. Это приводит к тому, что пропадает взаимно-однозначное соответствие между сигналом и спектром, и весьма разные сигналы могут иметь один и тот же амплитудный спектр (пример: амплитудная и фазовая модуляции).

## Соотношения неопределённостей.

Между сигналом как функцией времени  $f(t)$  и его спектром как функции частоты  $a(\nu)$  имеется простая и универсальная взаимосвязь. А именно, если у сигнала  $f(t)$  есть какое характерное время  $\Delta t$  (например, период повторения, длительность импульса, время нарастания и т.п.), то в спектре  $a(\nu)$  в том или ином виде будет наблюдаться характерный масштаб  $\Delta\nu \sim \frac{1}{\Delta t}$  (расстояния между пиками, ширина спектра, ширина пиков и т.п.).

Соотношения вида

$$\Delta\nu \cdot \Delta t \sim 1$$

принято называть соотношениями неопределённостей. Конкретный вид соотношения неопределённостей зависит от обстоятельств, в которых оно применяется.

## Методы спектрального анализа.

Современные методы спектрального анализа электрических сигналов можно разделить на два типа: цифровые (математические) и аналоговые (физические).

Простейшим физическим анализатором частот является высокодобротный колебательный контур (RLC-цепочка). Такой контур, как известно, хорошо откликается на частоты, близкие к его резонансной, и почти не реагирует на частоты, находящиеся за пределами его узкой (т.к. контур высокодобротный) амплитудно-частотной характеристики. Подстраивая параметры контура и изменяя его резонансную частоту, можно «просканировать» весь частотный спектр поступающего на него сигнала. В современной лаборатории спектральные приборы, основанные на физических методах (как правило, довольно дорогостоящие), применяются для анализа

высоких частот (сотни мегагерц и более).

Если же частота исследуемого сигнала не слишком велика (заведомо меньше тактовой частоты процессоров), современная цифровая техника позволяет проводить частотный анализ сигналов в реальном времени непосредственно по математическим формулам. Входящий сигнал при этом оцифровывается (дискретизуется) и, с помощью так называемого алгоритма «быстрого преобразования Фурье», осуществляется вычисление частот и амплитуд его гармоник. Цифровой спектральный анализ имеет две отличительные особенности, о которых стоит упомянуть.

Во-первых, при цифровом анализе возникает частота дискретизации  $\nu_{\text{дискр}}$ , то есть частота, с которой считаются значения напряжения, подаваемого на входной канал анализатора. Ясно, что дискретизация не позволит исследовать спектр частот, превышающих частоту  $\nu_{\text{дискр}}$ , и исказит спектр вблизи неё. Поэтому надёжно получать спектр можно лишь на достаточно низких частотах  $\nu \ll \nu_{\text{дискр}}$ , когда влияние дискретности минимально (точнее, как следует из теоремы Котельникова, необходимо выполнение условия  $\nu < \frac{\nu_{\text{дискр}}}{2}$ ).

Во-вторых, интервал времени  $\Delta t$ , в течение которого регистрируется сигнал, всегда ограничен. Для анализа сигнала вырезается его участок — «окно»  $t \in [t_0; t_0 + \Delta t]$ . Такое преобразование Фурье часто называют «оконным». Изза ограниченности размеров «окна» неизбежно возникают дополнительные искажения спектра (их можно назвать «краевыми эффектами»). Чтобы компенсировать эти искажения, значениям регистрируемой функции в пределах «окна» придают разный вес. В таком случае говорят об «оконной» (или «весовой») функции преобразования Фурье. На практике применяются различные оконные функции, каждая из которых обладает своими достоинствами и недостатками (одни уменьшают шумы, другие уменьшают ширину пиков и погрешность частоты, третьи погрешность измерения амплитуд и т.д.). В нашей работе используется окно Блэкмана.

## Ход работы

### Исследование спектра периодической последовательности прямоугольных импульсов и проверка соотношений неопределённостей

Сначала подадим прямоугольные импульсы с фиксированными рекомендуемыми параметрами ( $\tau$  - длительность импульса):

$$\nu_{\text{повт}} = 1 \text{ кГц}, \tau = \frac{T}{20} = 50 \text{ мкс.}$$

Полученное изображение сигнала и его спектра (преобразование Фурье)

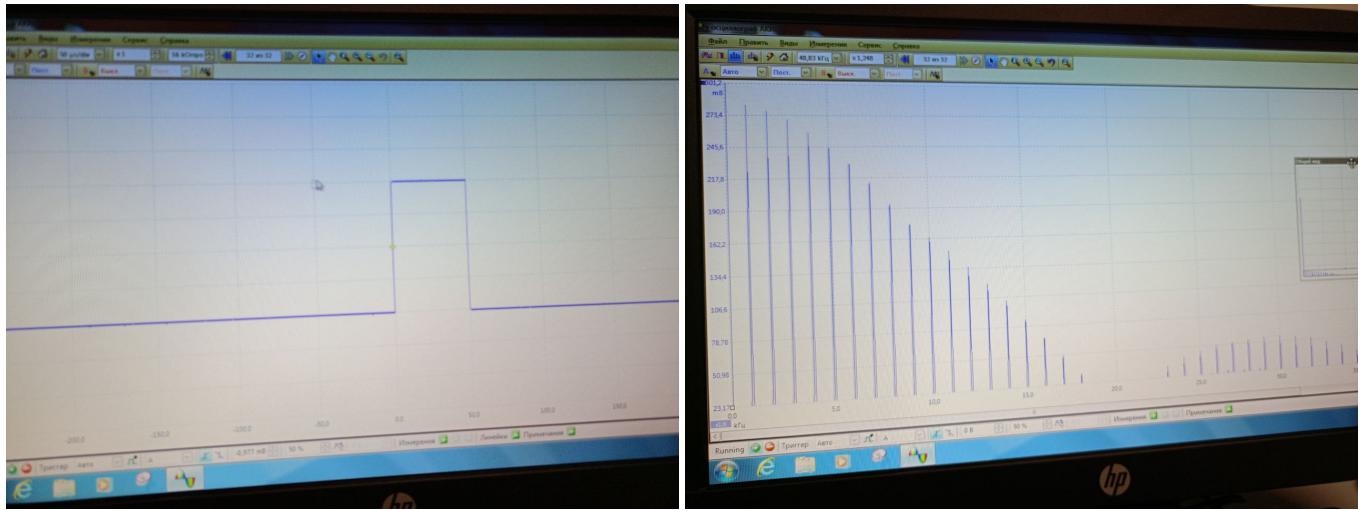


Рис. 1: Сигнал и его спектр при параметрах, указанных выше

Теперь изменим по очереди каждый из указанных параметром и рассмотрим поведение сигнала и спектра

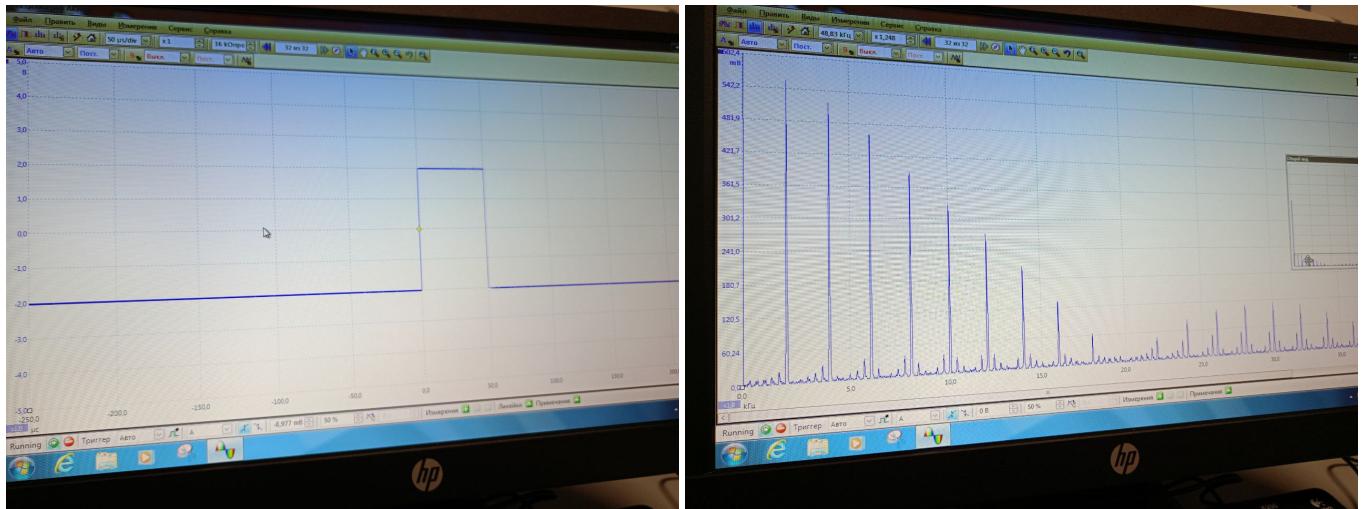


Рис. 2: Сигнал и его спектр при  $\nu_{\text{повт}} = 2 \text{ кГц}$ ,  $\tau = 50 \text{ мкс}$ .

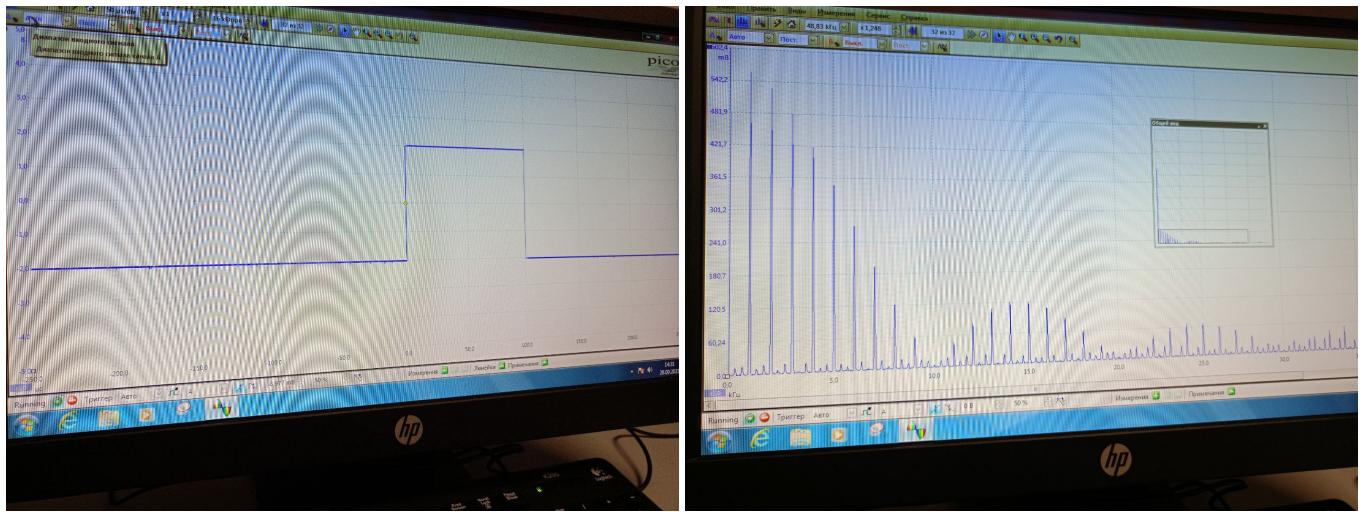


Рис. 3: Сигнал и его спектр при  $\nu_{\text{пovт}} = 1 \text{ кГц}$ ,  $\tau = 100 \text{ мкс}$ .

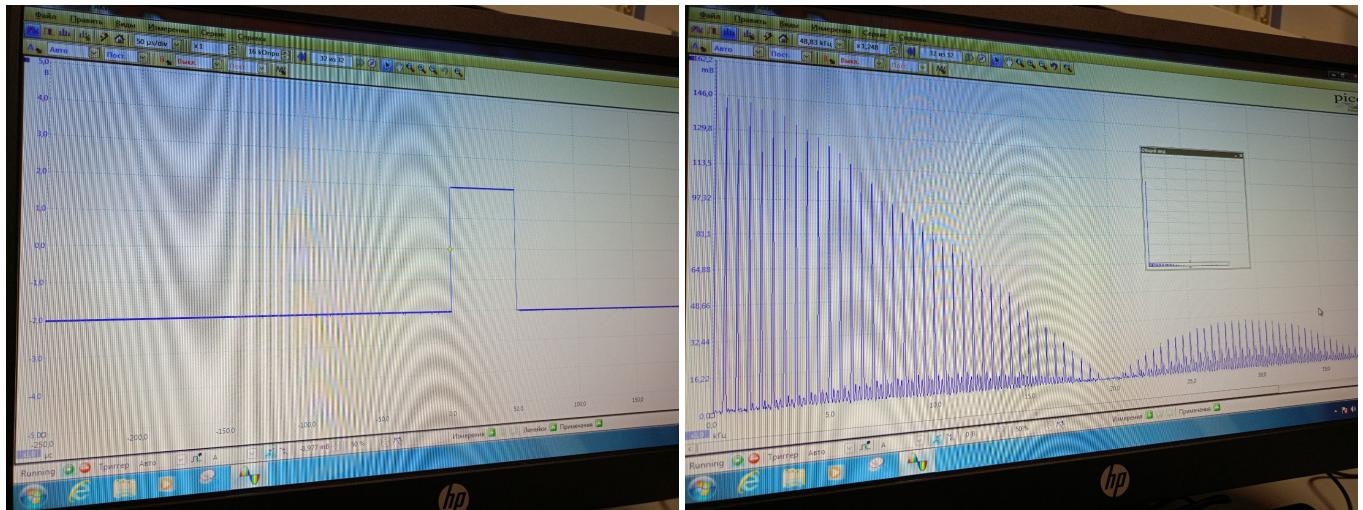


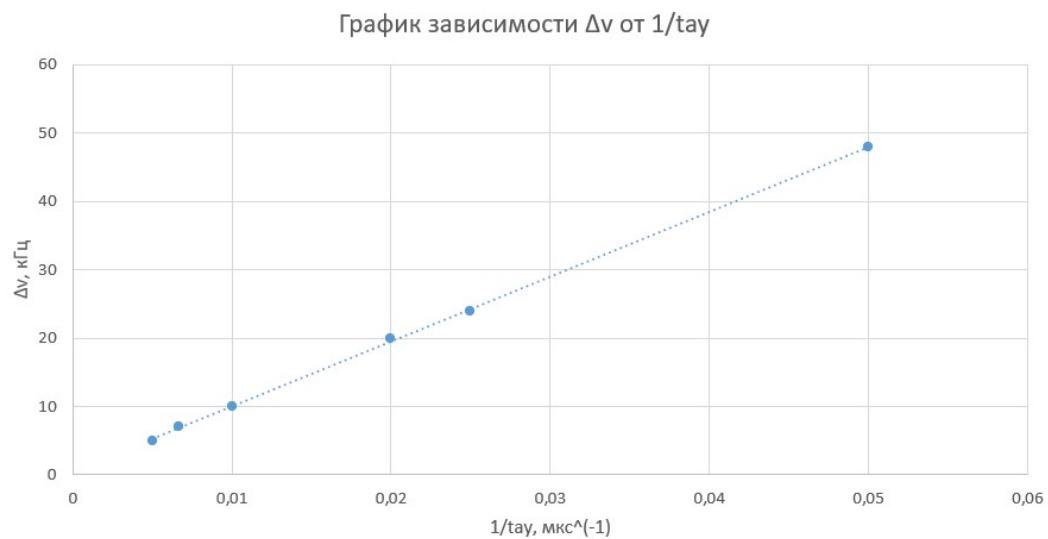
Рис. 4: Сигнал и его спектр при  $\nu_{\text{пovт}} = 0,5 \text{ кГц}$ ,  $\tau = 500 \text{ мкс}$ .

Теперь измерим величины амплитуд и частот спектральных гармоник и сравним их с теоретическими. Начальные параметры изображены на картинке.

$t_{\text{ay}}$ , мкс	50							
$v_0$ , кГц	1							
$n$	1	2	3	4	5	6	7	8
$\nu_{\text{пэксп}}$ , кГц	1	2	3	4	5,01	6,01	7,01	8,01
$\nu_{\text{птеор}}$ , кГц	1	2	3	4	5	6	7	8
апэксп, усл.ед	284,6	280	273	261	248	232	214	196
ан/а1, эксп	1	0,984	0,959	0,917	0,871	0,815	0,752	0,689
ан/а1, теор	1	0,988	0,968	0,940	0,905	0,863	0,815	0,762

Далее зафиксируем период повторения  $T$  прямоугольного сигнала (начальные параметры  $T = 1\text{мс}$ ) и будем менять длительность импульса  $\tau$ . Получим полную ширину спектра сигнала  $\Delta\nu$ , значение которой занесем в таблицу и по этим данным построим график зависимости  $\Delta\nu(\frac{1}{\tau})$ .

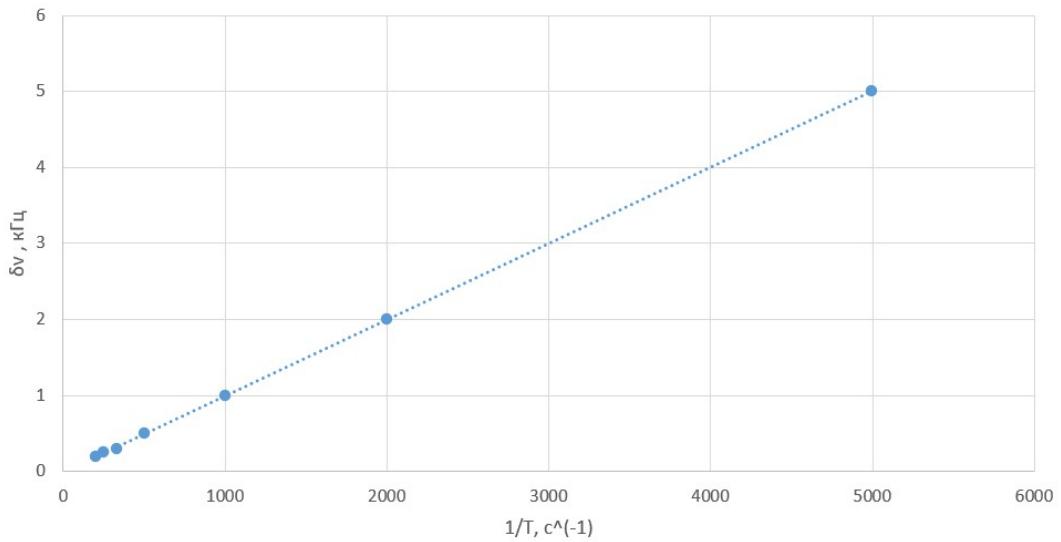
$t_{\text{ay}}, \text{мкс}$	$1/t_{\text{ay}}, \text{мкс}^{-1}$	$\Delta\nu, \text{кГц}$
50	0,02	20
20	0,05	48
40	0,025	24
100	0,01	10
150	0,007	7
200	0,005	5



Теперь же фиксируя длительность импульса прямоугольного сигнала ( $\tau = 100 \text{ мкс}$ ) и изменяя период повторения  $T$ , измерим расстояния  $\delta\nu = \nu_{n+1} - \nu_n$  между соседними гармониками спектра. Эти значения также занесем в таблицу и построим график зависимости  $\delta\nu(\frac{1}{T})$ .

$T, \text{мкс}$	$1/T, \text{с}^{-1}$	$\delta\nu, \text{кГц}$
200	5000	5
500	2000	2
1000	1000	1
2000	500	0,5
3000	333,3	0,3
4000	250	0,25
5000	200	0,2

График зависимости  $\delta\nu$  от  $1/T_{\text{п}}$



Коэффициент наклона у первой прямой равен  $k_1 = 0,95$ , у второй же  $k_2 = 1,002$ . Оба этих значения лежат очень близко к числу 1, а это значит, что соотношение неопределенности выполняется(в обоих случаях характерное время получилось обратно пропорционально с коэффициентом 1 характерному масштабу).

## Наблюдение спектра периодической последовательности цугов

Теперь будем передавать периодические импульсы синусоидальной формы. Сначала подадим импульс при рекомендованных параметрах, а затем изменим каждый из параметров поочереди, чтобы исследовать как зависит спектр от данных величин. Рекомендуемые параметры  $\nu_0 = 50 \text{ кГц}$ ,  $T = 1 \text{ мс}$ , ( $\nu_{\text{повт}} = 1 \text{ кГц}$ ),  $N = 5$ (число периодов в синусоиде одного импульса),  $\tau = \frac{N}{\nu_0} = 100 \text{ мкс.}$

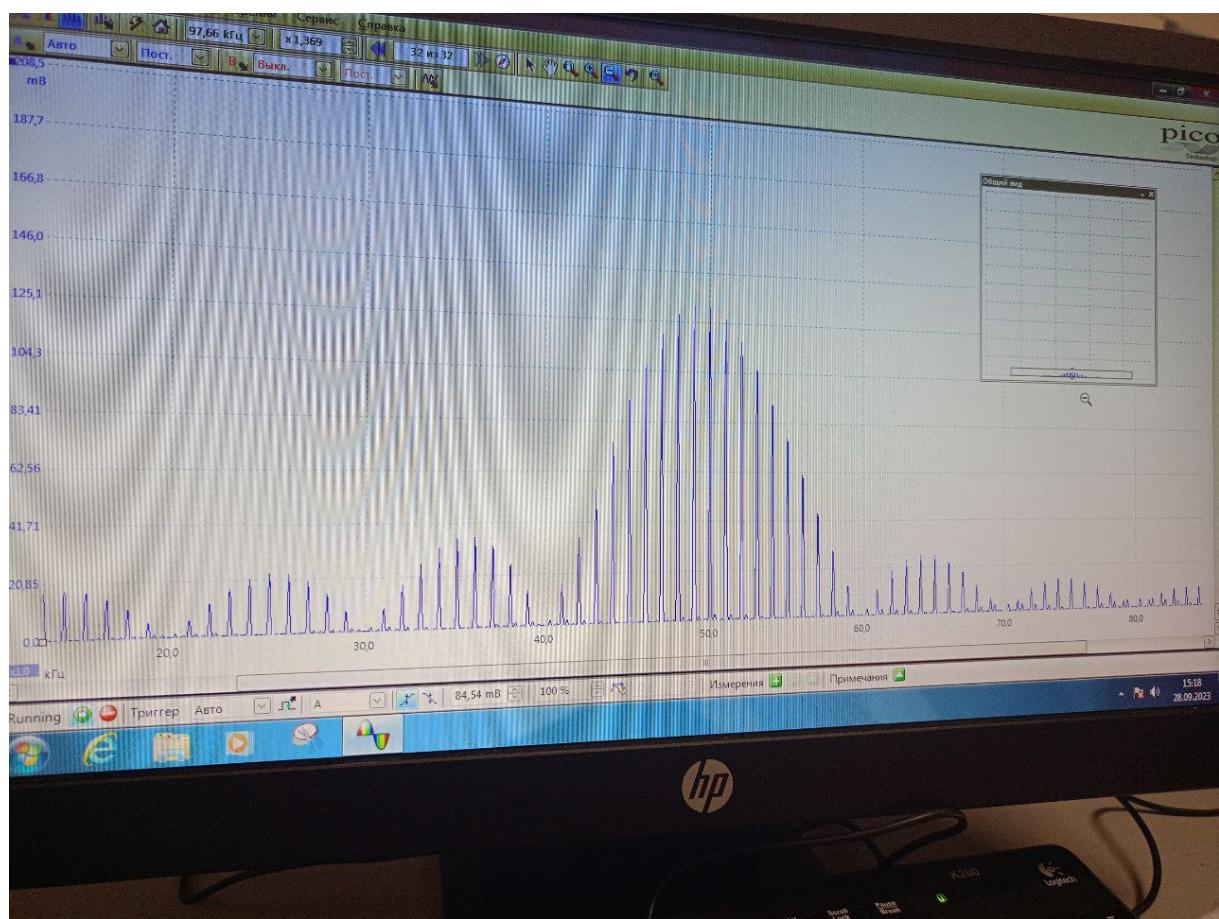
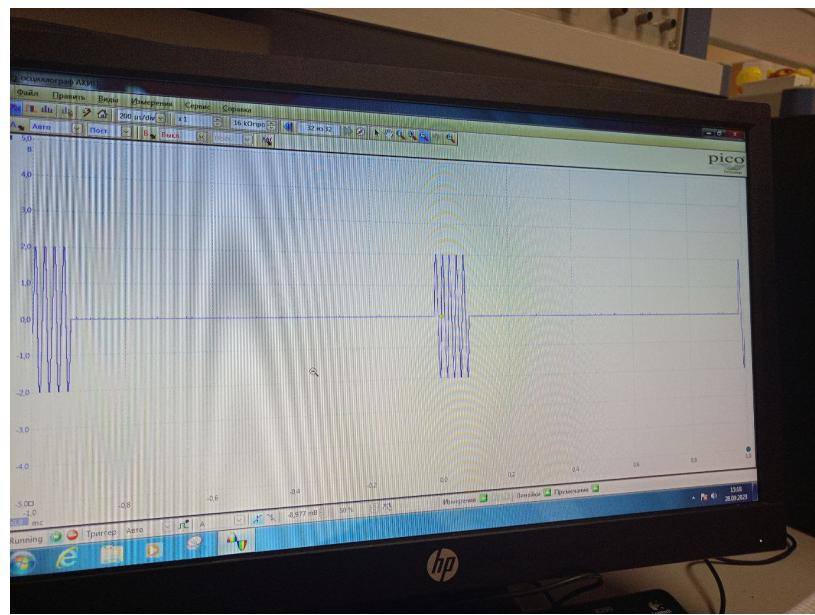


Рис. 5: Сигнал и его спектр при параметрах, указанных выше

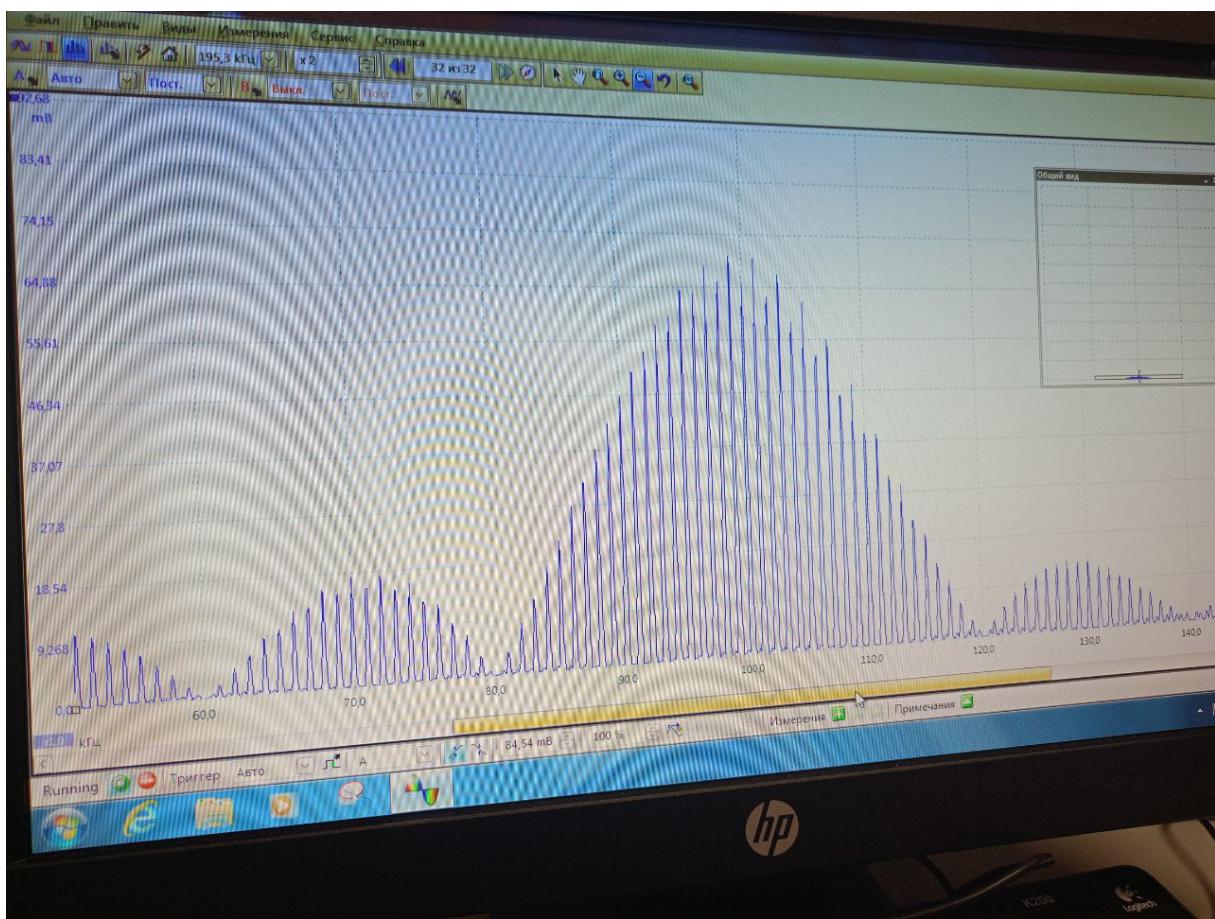
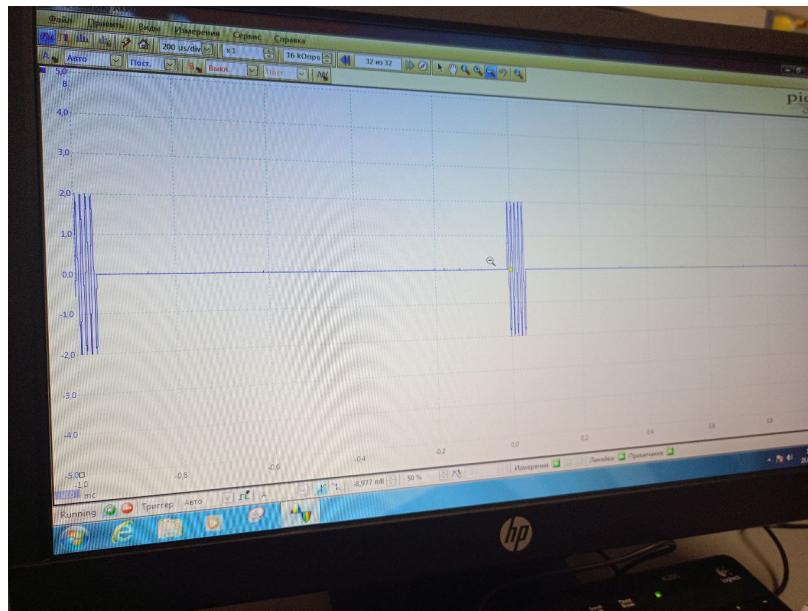


Рис. 6: Сигнал и его спектр при  $\nu_0 = 100\text{кГц}$ ,  $T = 1\text{мс}$ ,  $N = 5$ .

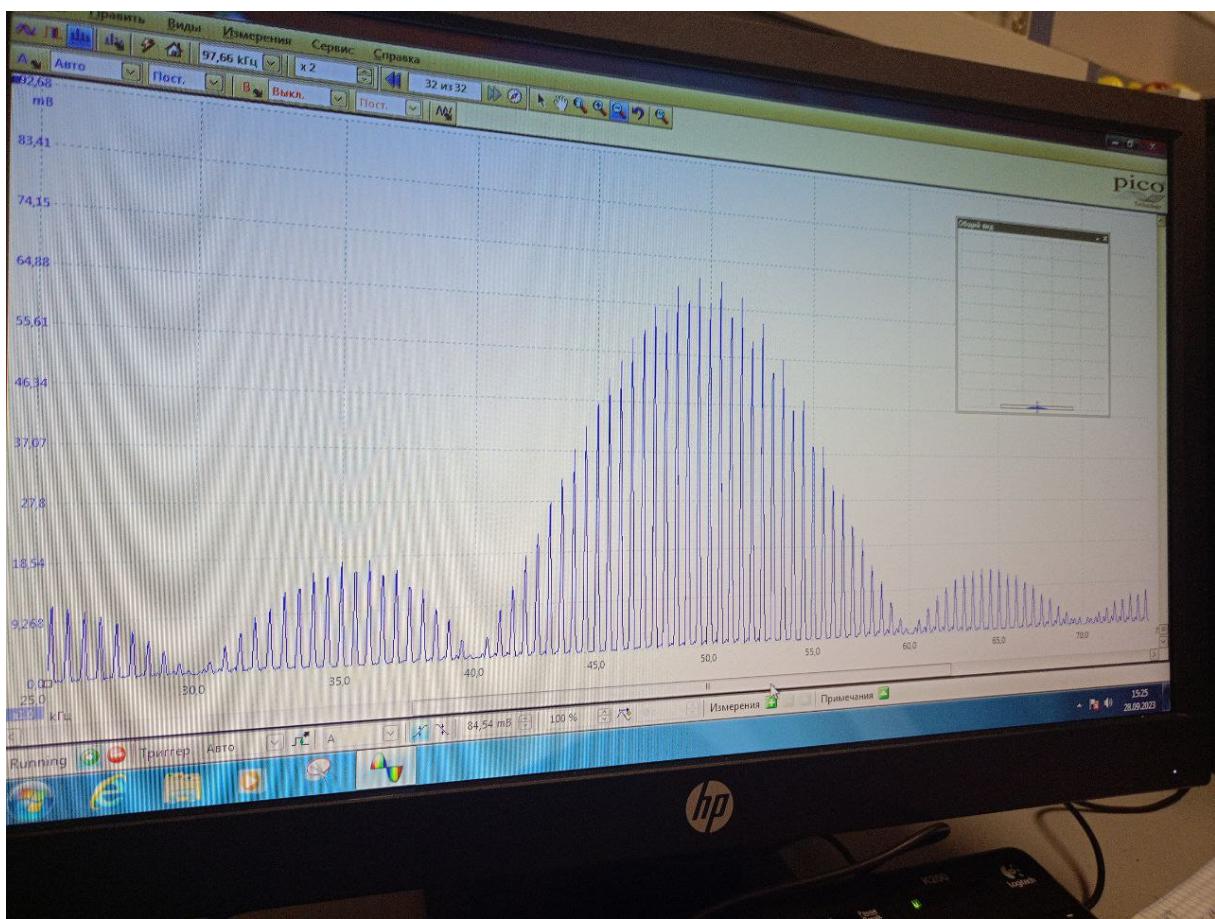
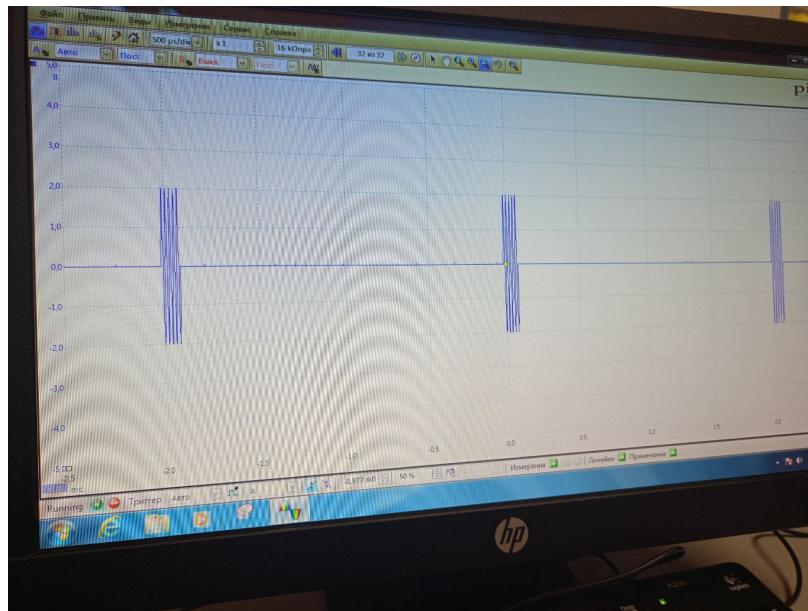


Рис. 7: Сигнал и его спектр при  $\nu_0 = 50\text{кГц}$ ,  $T = 2\text{мс}$ ,  $N = 5$ .

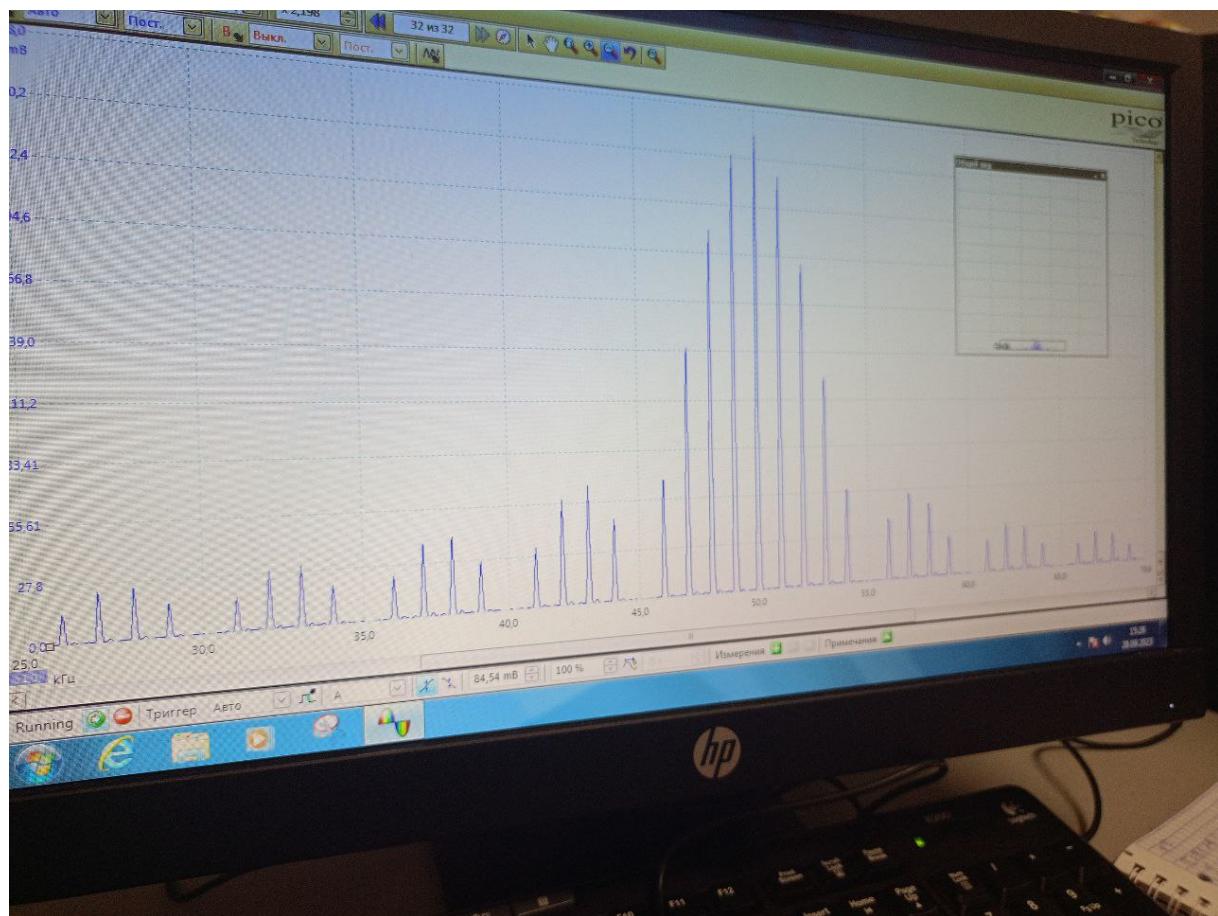
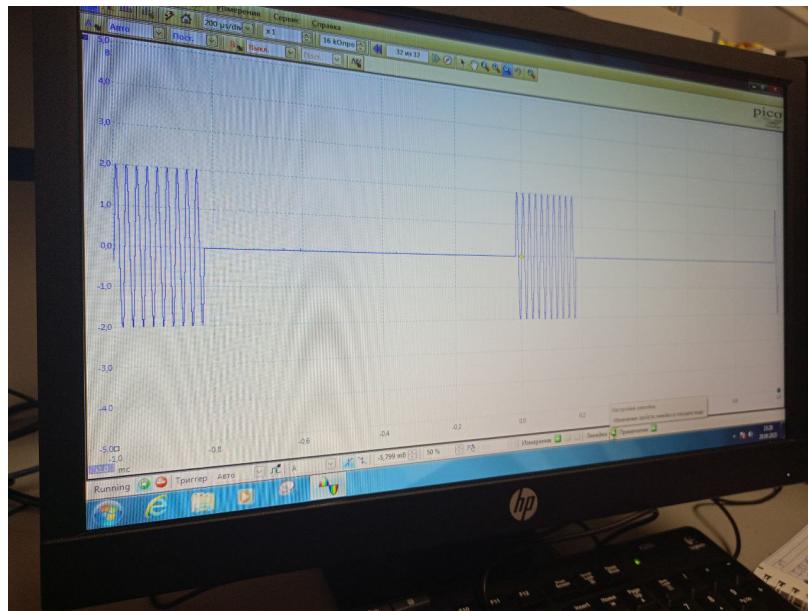
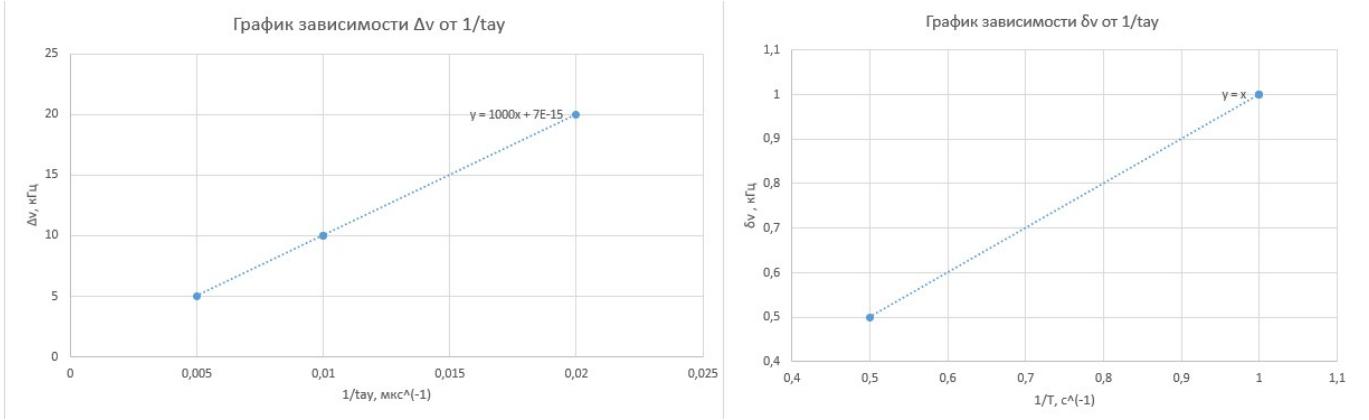


Рис. 8: Сигнал и его спектр при  $\nu_0 = 50\text{кГц}$ ,  $T = 1\text{мс}$ ,  $N = 10$ .

Теперь измерим при каждом из данных рассмотренных импульсах расстояние между гармо-

никами спектра  $\delta\nu$  и ширину спектра  $\Delta\nu$ . Построим таблицы и графики зависимостей  $\delta\nu(\frac{1}{\tau})$  и  $\Delta\nu(\frac{1}{T})$

$\nu_0, \text{ кГц}$	$N$	$t_{\text{ay}}, \text{ мкс}$	$1/t_{\text{ay}}, \text{ мкс}^{-1}$	$\Delta\nu, \text{ кГц}$	$T, \text{ мс}$	$1/T, \text{ мс}^{-1}$	$\delta\nu, \text{ кГц}$
100	5	50	0,02	20	1	1	1
50	5	100	0,01	10	2	0,5	0,5
50	10	200	0,005	5	1	1	1
50	5	100	0,01	10	1	1	1



Из графиков видно, что соотношения неопределенностей выполняются.

## Исследование спектра амплитудно-модулированного сигнала

Установим рекомендуемые параметры нашего сигнала.  $\nu_0 = 50 \text{ кГц}$ ,  $\nu_{\text{мод}} = 2 \text{ кГц}$ ,  $m = 0,5(50\%)$ .

Теперь измерим максимальную и минимальную амплитуды сигнала. Получается  $A_{\max} = 1,511 \text{ В}$ ,  $A_{\min} = 0,507 \text{ В}$ . Равенство  $m = \frac{A_{\max}-A_{\min}}{A_{\max}+A_{\min}}$  выполняется.

Далее, изменяя частоты, рассмотрим изменение спектра сигнала.

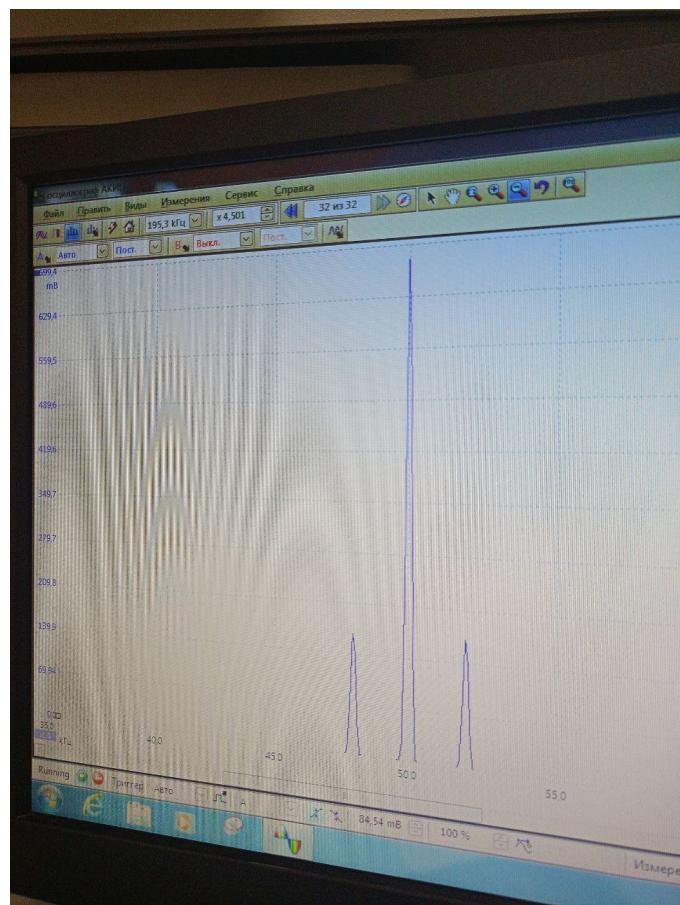
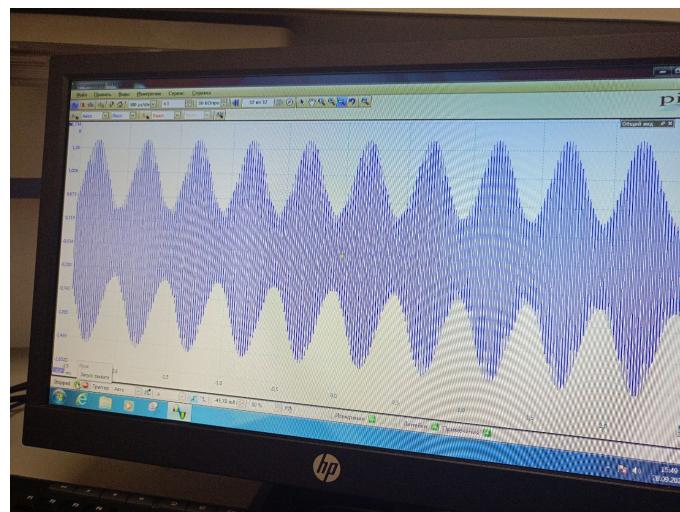


Рис. 9: Сигнал и его спектр при параметрах, указанных выше

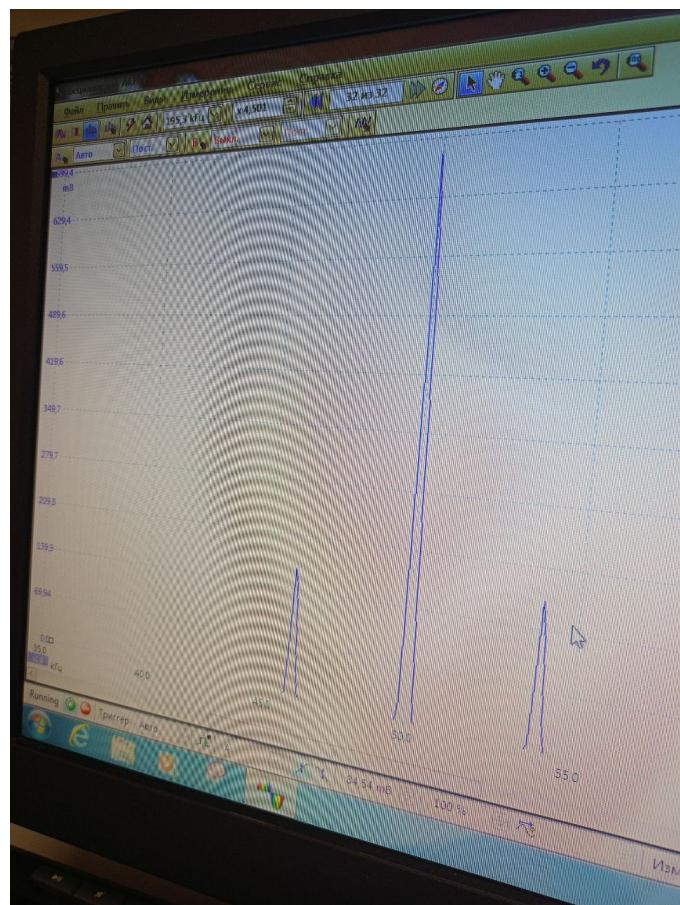
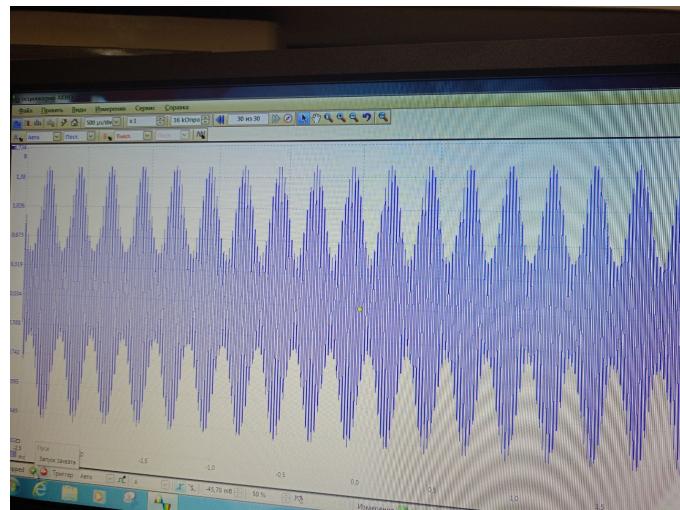


Рис. 10: Сигнал и его спектр при  $\nu_{\text{мод}} = 2 \text{ кГц}$ ,  $\nu_0 = 100 \text{ кГц}$ .

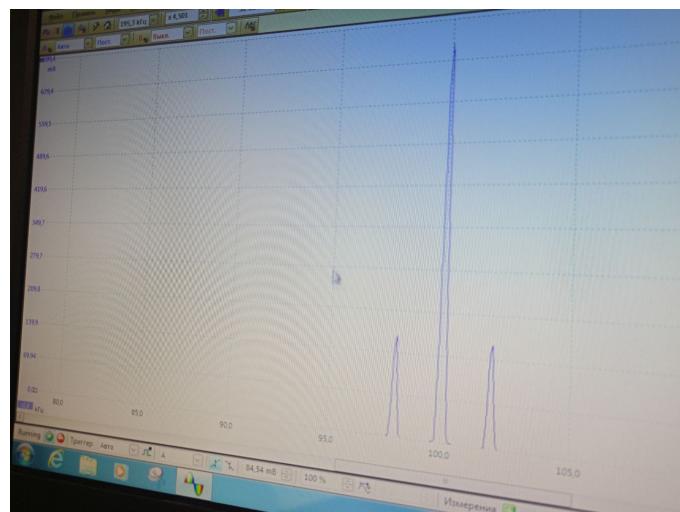
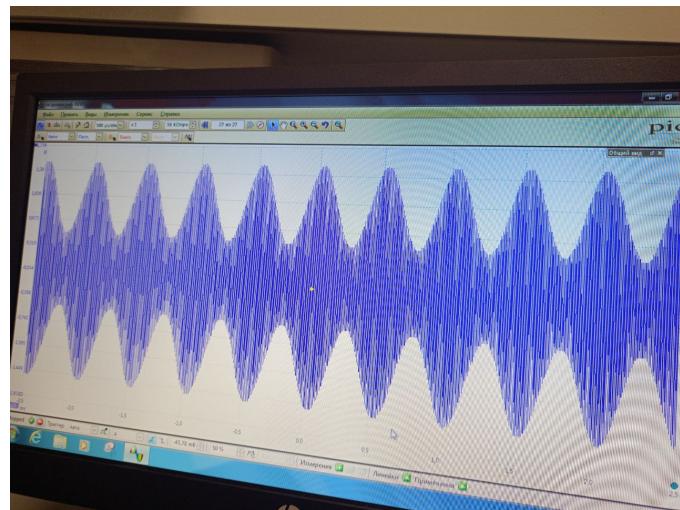
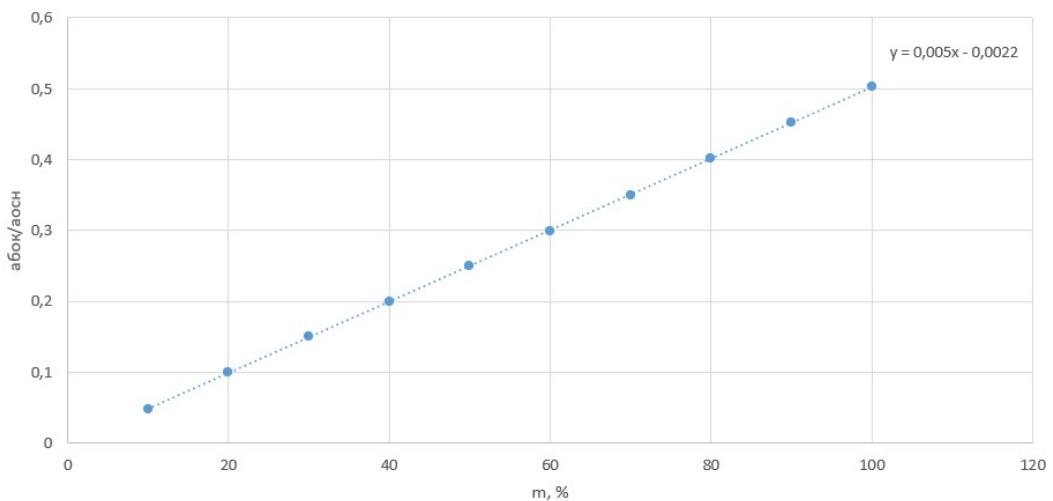


Рис. 11: Сигнал и его спектр при  $\nu_{\text{мод}} = 4\text{kГц}$ ,  $\nu_0 = 50\text{kГц}$ .

Теперь, изменения глубину модуляции, запишем в таблицу  $a_{\text{бок}}$  и  $a_{\text{осн}}$  и построим график зависимости  $\frac{a_{\text{бок}}}{a_{\text{осн}}} (m)$

m, %	абок	аосн	абок/аосн
10	32	681	0,04699
20	68	681	0,09985
30	102	681	0,14978
40	136	681	0,19971
50	170	681	0,24963
60	204	681	0,29956
70	238	681	0,34949
80	273	680	0,40147
90	307	680	0,45147
100	340	677	0,50222

График зависимости абок/аосн от m



Из графика найдем коэффициент пропорциональности  $k = 0,5$ , что значит, что  $\frac{a_{бок}}{a_{осн}} = \frac{m}{2}$ , что соответствует теории(если взять амплитуды несущего колебания и боковой гармоники, то по формуле получится тот же самый результат).

## Изучение фильтрации сигнала

Для начала возьмем RC цепочку с сопротивлением  $R = 3$  кОм, емкостью конденсатора  $C = 1000$  пФ. Тогда  $\tau = 3$  мкс. Подадим последовательность прямоугольных импульсов при различных значениях периода повторения  $T$  и рассмотрим форму фильтрованного сигнала и его спектра.

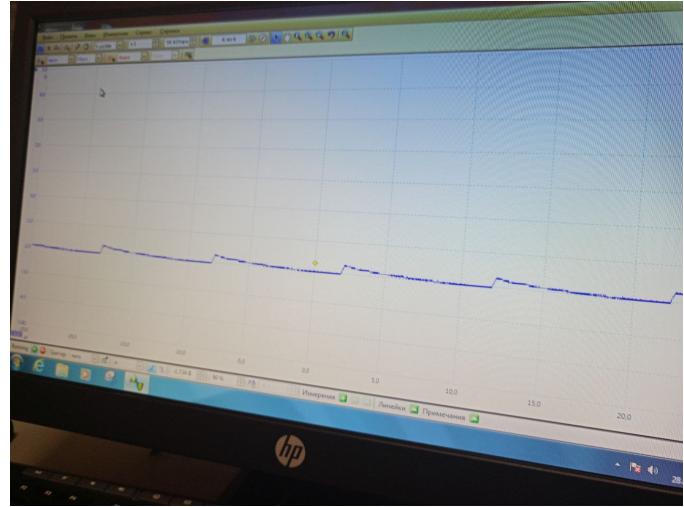


Рис. 12: Сигнал при  $\tau = 250\text{нс}$ ,  $T = 10\text{мкс}$ .

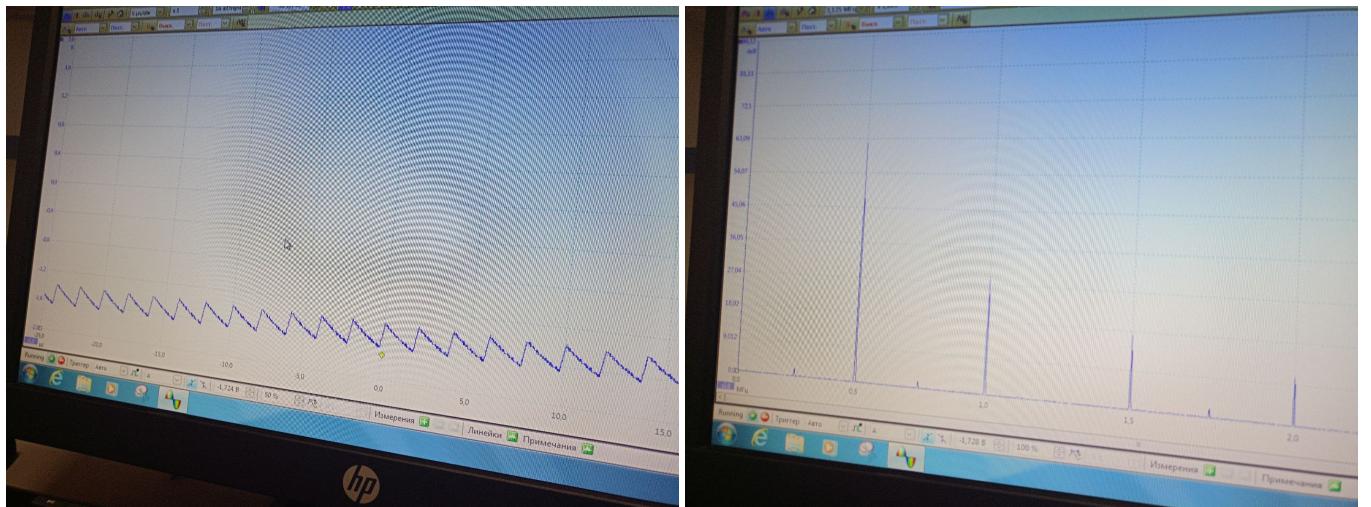


Рис. 13: Сигнал и его спектр при  $\tau = 250\text{нс}$ ,  $T = 2\text{мкс}$ .

Теперь зафиксируем период  $T$  и рассмотрим изменение отношения амплитуд спектральных гармоник при фильтрованном сигнале(подключенном через RC цепь) и исходном сигнале. Данные занесем в таблицу и по ней построим график зависимости  $\frac{a_n^\Phi}{a_n}$  от  $\nu_n = \nu_0 \cdot n$ .

$v_0$ , Гц	n	anФ	an	$v_n$ , кГц	anФ/an
200000	1	65	283	200	0,229682
	2	30	267	400	0,11236
	3	19	248	600	0,076613
	4	16	252	800	0,063492
	5	13,69	254	1000	0,053898
	6	9	250	1200	0,036
	7	6	242	1400	0,024793

График зависимости  $a\Phi/a_n$  от  $v_n$

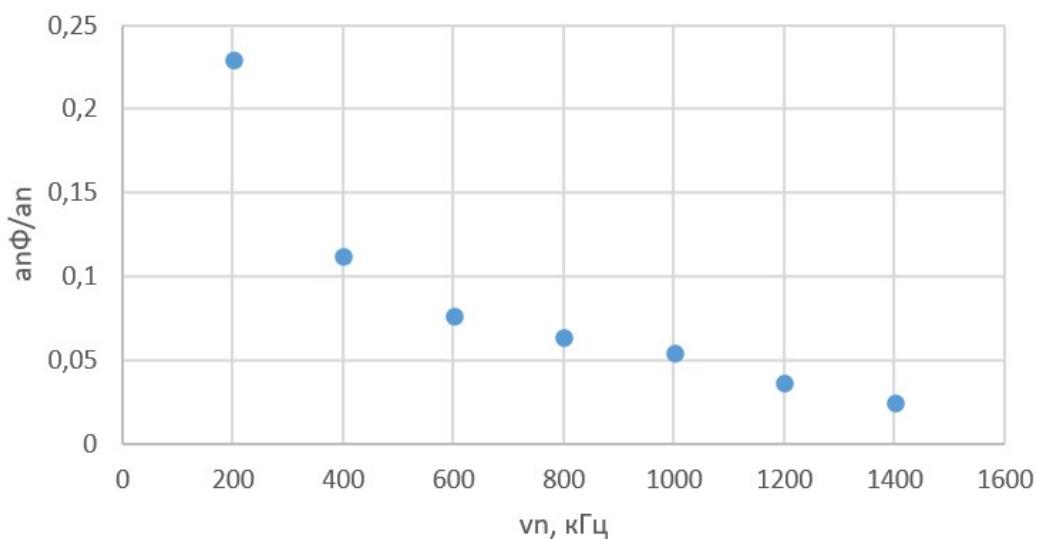


График напоминает гиперболу, что совпадает с теоретическими данными, т.к. характеристическая функция RC цепи имеет гиперболическую зависимость.

## Вывод

В ходе данной работы были рассмотрены преобразования Фурье, изучены понятия спектра и спектрального анализа, также был исследован спектральный состав периодических электрических сигналов.

Мы изучили прямоугольные импульсы, цуги синусоидальных колебаний, амплитудно-модулированные сигналы, а также фильтрованные сигналы. Неоднократно экспериментальным путем было проверено и подтверждено соотношение неопределенности.