

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Физтех-школа аэрокосмических технологий

# Отчёт о выполнении лабораторной работы

## 1.2.2

Экспериментальная проверка закона  
вращательного движения на крестообразном  
маятнике

Соболевский Фёдор Александрович  
Б03-109

Октябрь 2021

# 1 Аннотация

В данной работе исследован крестообразный маятник и его вращательное движение при приложении к нему постоянного момента сил тяжести. Экспериментально получена зависимость углового ускорения от момента прикладываемых сил и момента инерции вращательной системы. Определён момент инерции маятника. Проанализировано влияние сил трения, действующих на ось вращения, на движение системы.

## 2 Теоретические сведения и экспериментальная установка

В данной работе экспериментально проверяется уравнение вращательного движения:

$$I\ddot{\varphi} = M. \quad (1)$$

Здесь  $\ddot{\varphi} \equiv \dot{\omega} \equiv \beta$  - угловое ускорение системы,  $I$  — полный момент инерции тела относительно оси вращения,  $M$  — суммарный момент внешних сил относительно этой оси. Для экспериментального исследования закона вращательного движения (1) в работе использован крестообразный маятник, схематично изображённый на рисунке 1.

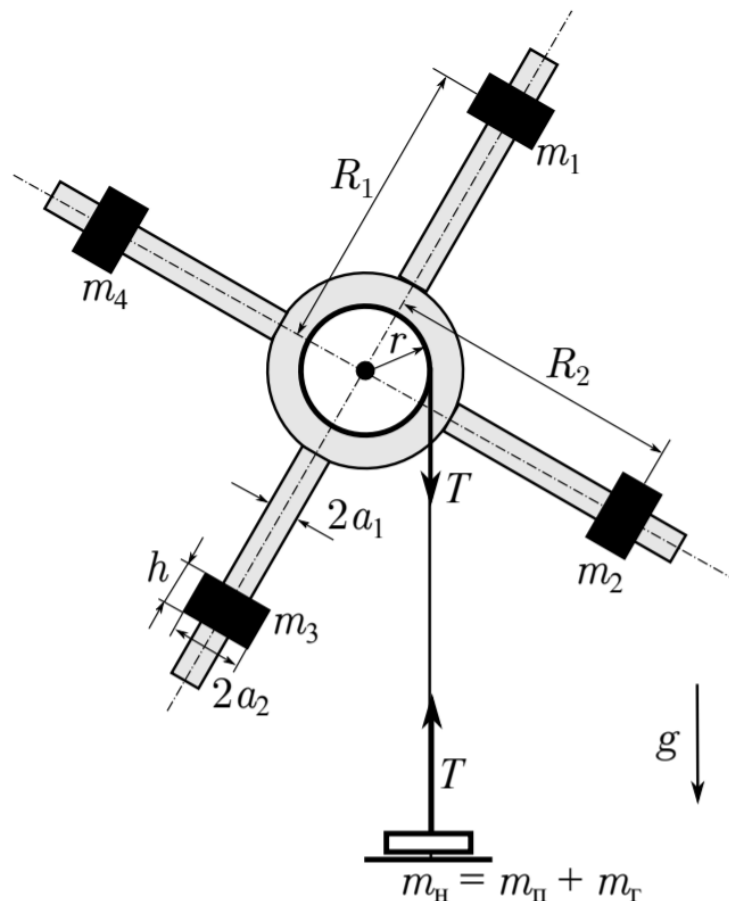


Рис. 1: Устройство крестообразного маятника

Маятник состоит из четырёх тонких стержней радиуса  $a$ , закреплённых на втулке под прямым углом друг к другу. Втулка и шкив насажены на общую ось. Ось закреплена в игольчатых подшипниках, так что вся система может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси. Передвигая грузы  $m_1 \dots m_4$  вдоль стержней, можно менять момент инерции маятника. На шкив намотана тонкая нить, к которой привязана лёгкая платформа массы  $m_{\text{п}}$ , служащая для размещения перегрузков  $m_{\text{т}}$ . Установка также оснащена датчиком, фиксирующим моменты времени

прохождения концов стержней через него. Данные с датчика передаются на компьютер для последующей обработки и получения значения углового значения, а также зависимостей  $\varphi$  и его производных от времени.

Основной вращающий момент создаётся подвешенным на нити перегрузком вместе с платформой. Непосредственно на маятник действует момент силы натяжения нити  $M = rT$ , где  $r$  - радиус шкива. Силу  $T$  можно найти из второго закона Ньютона для платформы с перегрузком:

$$m\ddot{y} = mg - T,$$

где  $m = m_{\text{п}} + m_{\text{г}}$  - масса платформы с перегрузком. Ускорение платформы связано с угловым ускорением маятника соотношением  $\ddot{y} = \beta r$ . Отсюда момент силы натяжения нити

$$M = mr(g - \beta r). \quad (2)$$

К оси вращения также приложен некоторый момент силы трения  $M_{\text{тр}}$ . Таким образом, с учётом (2) уравнение (1) приобретает вид

$$(I + mr^2)\beta = mgr - M_{\text{тр}}.$$

В проведённых опытах  $mr^2 \ll I$ , поэтому можно считать, что маятник раскручивается с постоянным угловым ускорением

$$\beta_0 = \frac{1}{I}mgr - \frac{M_{\text{тр}}}{I} \quad (3)$$

Момент инерции системы  $I$  вычисляется с помощью теоремы Гюйгенса-Штейнера (грузы имеют форму полых цилиндров с внутренним и внешним радиусами  $a_1$  и  $a_2$  соответственно и образующей  $h$ ):

$$I = I_0 + \sum_{i=1}^4 \left( \frac{1}{12}m_i h^2 + \frac{1}{4}m_i(a_1^2 + a_2^2) + m_i R_i^2 \right). \quad (4)$$

### 3 Оборудование и инструментальные погрешности

**Оборудование:** крестообразный маятник, набор перегрузков, платформа для перегрузков, компьютер с измерительной программой, штангенциркуль, весы.

**Инструментальные погрешности:**

- Штангенциркуль:  $\Delta_l^{\text{сист}} = 0,1$  мм;
- Весы:  $\Delta_m^{\text{сист}} = 0,1$  г;

Погрешность вычисления программой углового ускорения вычисляется и автоматически выводится вместе с измеренным значением.

## 4 Результаты измерений и обработка экспериментальных данных

### 4.1 Оценка момента силы трения в подшипниках

Для оценки момента силы трения в подшипниках проверялось наличие движения в системе при отсутствии перегрузков на платформе, т.е. момент силы натяжения нити создавался исключительно платформой. Массы платформы оказалось достаточно, чтобы привести систему в движение, значит, момент силы трения мал ( $M_{\text{тр}} < m_{\text{п}}gr$ ) и его следует оценивать другим методом.

## 4.2 Измерение углового ускорения и момента силы трения

Измерения углового ускорения проводились для трёх разных положений  $R$  грузов на маятнике при 5 различных значениях массы перегрузков. Радиус шкива  $r = 17,5$  мм, масса подвеса  $m_{\Pi} = 25,4$  г. Результаты измерений представлены в таблицах

| № | $m_{\Gamma}$ , г | $M$ , $10^{-4}$ Н · м | $R = 50$ мм                  |                                       | $R = 100$ мм |                  | $R = 150$ мм |                  |
|---|------------------|-----------------------|------------------------------|---------------------------------------|--------------|------------------|--------------|------------------|
|   |                  |                       | $\beta$ , рад/с <sup>2</sup> | $\sigma_{\beta}$ , рад/с <sup>2</sup> | $\beta$      | $\sigma_{\beta}$ | $\beta$      | $\sigma_{\beta}$ |
| 1 | 27,1             | 90,13                 | 1,117                        | 0,012                                 | 0,674        | 0,004            | 0,4206       | 0,0017           |
| 2 | 44,6             | 120,17                | 1,552                        | 0,010                                 | 0,928        | 0,003            | 0,5590       | 0,0024           |
| 3 | 62,9             | 151,59                | 2,007                        | 0,008                                 | 1,165        | 0,006            | 0,727        | 0,003            |
| 4 | 74,1             | 170,82                | 2,247                        | 0,004                                 | 1,351        | 0,004            | 0,8234       | 0,0015           |
| 5 | 101,2            | 217,34                | 2,901                        | 0,010                                 | 1,743        | 0,005            | 1,073        | 0,0021           |

Таблица 1: Значения углового ускорения при разных параметрах системы

По результатам измерений можно построить график зависимости  $\beta$  от  $M$ :  $\beta = kM - b$ , где  $k = \frac{1}{I}$ ,  $b = \frac{M_{\text{тр}}}{I}$  (из уравнения (3)). Коэффициенты  $k$  и  $b$  и погрешности их вычисления определим методом наименьших квадратов:

$$k = \frac{\langle \beta M \rangle - \langle \beta \rangle \langle M \rangle}{\langle M^2 \rangle - \langle M \rangle^2}$$

$$-b = \langle \beta \rangle - k \langle M \rangle;$$

$$\sigma_k = \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{\langle \beta^2 \rangle - \langle \beta \rangle^2}{\langle M^2 \rangle - \langle M \rangle^2} - k^2},$$

$$\sigma_b = \sigma_k \sqrt{\langle M^2 \rangle - \langle M \rangle^2}.$$

Отсюда можно найти значения момента инерции установки  $I$  и момента силы трения  $M_{\text{тр}}$  и их погрешности:

$$I = \frac{1}{k}, \quad \sigma_I = I \frac{\sigma_k}{k};$$

$$M_{\text{тр}} = Ib, \quad \sigma_{M_{\text{тр}}} = M_{\text{тр}} \sqrt{\left(\frac{\sigma_b}{b}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_I}{I}\right)^2};$$

| $R$ , мм | $k$ , $\frac{1}{\text{кг} \cdot \text{м}^2}$ | $\sigma_k$ , $\frac{1}{\text{кг} \cdot \text{м}^2}$ | $b$ , $\frac{\text{Н}}{\text{кг} \cdot \text{м}}$ | $\sigma_b$ , $\frac{\text{Н}}{\text{кг} \cdot \text{м}}$ | $I$ , $\text{кг} \cdot \text{м}^2$ | $\sigma_I$ , $\text{кг} \cdot \text{м}^2$ | $M_{\text{тр}}$ , Н · м | $\sigma_{M_{\text{тр}}}$ , Н · м |
|----------|--|---|---|--|------------------------------------|---|-------------------------|----------------------------------|
| 50       | 139,8  | 1,2   | 0,132   | 0,005  | 0,00715                            | 0,00006                                   | 0,00094                 | 0,00004                          |
| 100      | 83,9   | 1,1   | 0,087   | 0,005  | 0,01192                            | 0,00015                                   | 0,00103                 | 0,00006                          |
| 150      | 51,5   | 0,6   | 0,0523  | 0,0027   | 0,01941                            | 0,00024                                   | 0,00101                 | 0,00006                          |

Таблица 2: Значения коэффициентов наилучших прямых, моментов инерции и момента силы трения

Полученные значения представлены в таблице 2. Графики зависимости  $\beta$  от  $M$  изображены на рисунке 2.

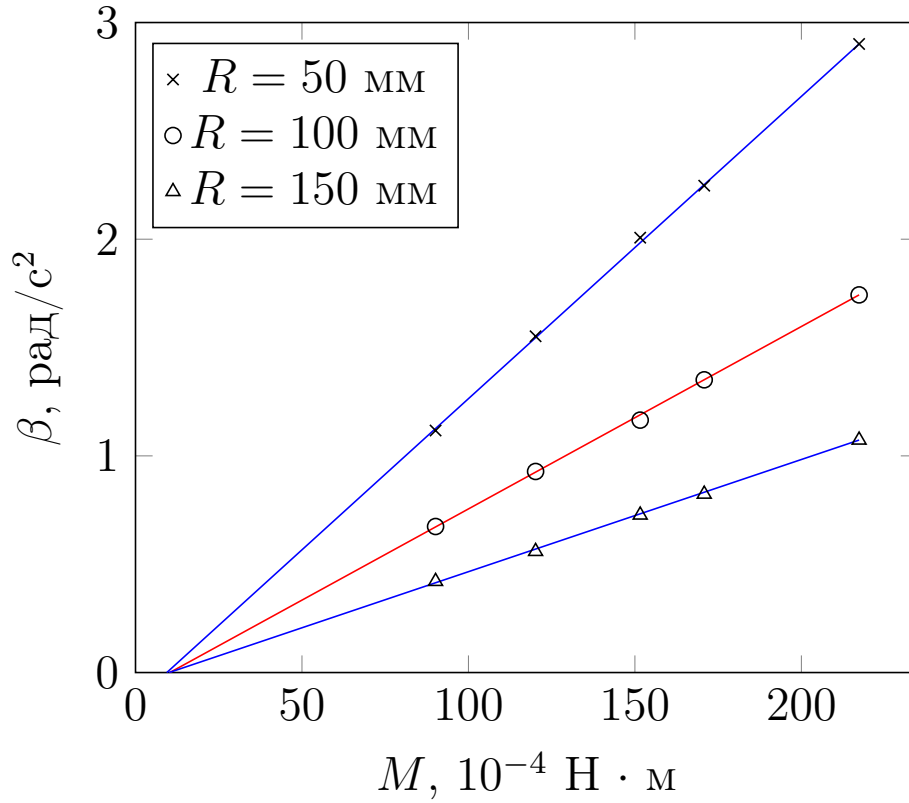


Рис. 2: Зависимость углового ускорения маятника от момента сил тяжести

### 4.3 Измерение момента инерции маятника

По вычисленному в пункте 4.2 значению момента инерции системы  $I$  при различных  $R$  можем найти момент инерции маятника без грузов. Для этого можно использовать формулу (4).

Параметры маятника:

- $m_1 = 151,7$  г;
- $m_2 = 158,2$  г;
- $m_3 = 152,6$  г;
- $m_4 = 157,0$  г;
- $R_1 \approx \dots \approx R_4$ ;
- $h = 25$  мм;
- $a_1 = 3,8$  мм;
- $a_2 = 17,5$  мм;

Выразим из формулы (4) момент инерции  $I_0$ :

$$I_0 = I - \sum_{i=1}^4 \left( \frac{1}{12} m_i h^2 + \frac{1}{4} m_i (a_1^2 + a_2^2) + m_i R_i^2 \right)$$

Погрешность вычисления  $I_0$  по данной формуле

$$\sigma_{I_0} = \sqrt{\sigma_I^2 + (I - I_0)^2 \left( \left( \frac{2\Delta_m^{\text{сист}}}{\sum m_i} \right)^2 + \left( \frac{\frac{19}{6}\Delta_l^{\text{сист}}}{\frac{1}{12}h^2 + \frac{1}{4}(a_1^2 + a_2^2) + R^2} \right)^2 \right)}$$

|  |      |       |       |
|--|------|-------|-------|
| $R, \text{ мм}$                                      | 50   | 100   | 150   |
| $I, 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{ м}^2$            | 7,15 | 11,92 | 19,41 |
| $I_0, 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{ м}^2$          | 5,52 | 5,64  | 5,39  |
| $\sigma_{I_0}, 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{ м}^2$ | 0,20 | 0,21  | 0,21  |

Таблица 3: Результаты вычисления собственного момента инерции маятника

В таблице 3 представлены найденные при разных  $R$  значения момента инерции маятника  $I_0$ . Они не отличаются друг от друга больше, чем на  $\approx \sigma_{I_0}$ . Для проверки применимости формулы (4) было измерено угловое ускорение маятника без грузов при  $m_{\text{г}} = 27,1 \text{ г}$ :  $\beta = 1,63 \text{ рад/с}^2$ , откуда из (3)  $I_0 = \frac{M - M_{\text{тр}}}{\beta} \approx 5,3 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{ м}^2$ . Это значение близко к вычисленным по формуле (4), поэтому её можно считать применимой.

## 5 Обсуждение результатов и вывод

Полученные в ходе работы экспериментальные и теоретические значения собственного момента инерции маятника приблизительно равны и различаются в пределах погрешности измерений. Для разных моментов инерции маятника вычисленные моменты силы трения в оси оказались приблизительно равными, что соответствует действительности и подтверждает справедливость используемых формул и допустимых приближений. Точности эксперимента достаточно, чтобы проверить все рассмотренные в работе теоретические закономерности, однако для измерения моментов инерции предпочтительнее другие методы, так как ошибка в данном опыте может оказаться слишком большой для более точных измерений.