

# Определение главных моментов инерции твердых тел с помощью крутильных колебаний

Дудаков Семён Б01-303

## 1 Аннотация

**Цель работы:** измерить периоды крутильных колебаний рамки при различных положениях закрепленного в ней тела, проверить теоретическую зависимость между периодами крутильных колебаний тела относительно различных осей, определить моменты инерции относительно нескольких осей для каждого тела, по ним найти главные моменты инерции тел и построить эллипсоид инерции.

**В работе используется:** установка для получения крутильных колебаний, набор исследуемых твердых тел, секундомер.

## 2 Теоретические сведения

Инерционные свойства твердого тела при вращении определяет не только величина его массы, но и ее пространственное распределение, которое характеризует тензор инерции. Тензор инерции твердого тела может быть представлен симметричной матрицей, которая полностью определяется заданием шести элементов. Если для какой либо системы координат все 6 компонент известны, то момент инерции тела относительно произвольной оси  $l$ , проходящей через начало координат может быть вычислен по формуле:

$$I_l = n^j n^i I_{ij} = \vec{n}^T I \vec{n} \quad (1)$$

где  $\vec{n}$  - единичный вектор-столбец который задает направление оси,  $I$  - тензор инерции.

Как и всякая симметричная матрица, матрица тензора инерции может быть приведена к диагональному виду, диагональные элементы  $I_x, I_y, I_z$  которой называются главными моментами инерции тела. Геометрическим образом тензора инерции является эллипсоид, уравнение которого в главных осях имеет вид:

$$I_x r_x^2 + I_y r_y^2 + I_z r_z^2 = 1 \quad (2)$$

Эллипсоид инерции жестко связан с телом, для которого построен. Координатные оси  $Ox, Oy, Oz$  совпадают с главными осями тела. Если начало координат  $O$  совпадает с центром масс тела, то эллипсоид инерции называется центральным.

Знание эллипсоида инерции позволяет найти момент инерции тела относительно любой оси, проходящей через центр эллипсоида. Длина отрезка  $r$  будет определять момент инерции тела относительно оси  $l$ :

$$I = \frac{1}{r^2} \quad (3)$$

Крутильные колебания рамки с телом описываются уравнением:

$$(I + I_p) \frac{d^2 \phi}{dt^2} = -f \phi \quad (4)$$

Здесь  $I$  и  $I_p$  - моменты инерции тела и рамки относительно оси вращения,  $\phi$  - угол поворота рамки, меняющийся со временем  $t$ ,  $f$  - модуль кручения проволоки. Период крутильных колебаний рамки с телом определяется формулой:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I + I_p}{f}} \quad (5)$$

На рис. 1 показано, как проходят оси вращения в параллелепипеде. Оси  $AA', BB'$  и  $CC'$  являются главными. Моменты инерции относительно этих осей обозначим соответственно  $I_x, I_y, I_z$ .

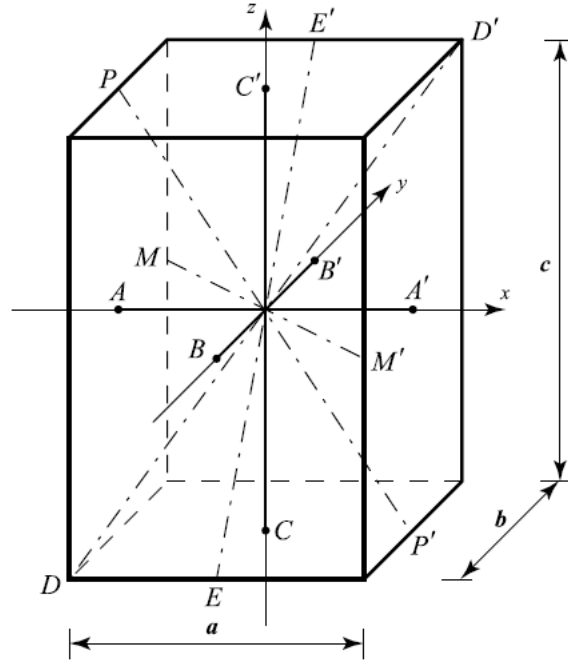


Рис. 1: Оси вращения прямоугольного параллелепипеда

Момент инерции  $I_d$  при вращении относительно диагонали  $DD'$  выражается через главные моменты с помощью формулы:

$$I_d = I_x \frac{a^2}{d^2} + I_y \frac{b^2}{d^2} + I_z \frac{c^2}{d^2} \quad (6)$$

Отсюда получаем соотношение

$$(a^2 + b^2 + c^2)I_d^2 = a^2 I_x + b^2 I_y + c^2 I_z \quad (7)$$

Используя связь момента инерции с периодом крутильных колебаний, получаем соотношение между периодами колебаний

$$(a^2 + b^2 + c^2)T_d^2 = a^2 T_x^2 + b^2 T_y^2 + c^2 T_z^2 \quad (8)$$

Соотношения между периодами колебаний относительно осей  $EE'$ ,  $MM'$  и  $PP'$  с периодами крутильных колебаний относительно главных осей

$$(b^2 + c^2)T_E^2 = b^2 T_y^2 + c^2 T_z^2$$

$$(a^2 + c^2)T_P^2 = a^2 T_x^2 + c^2 T_z^2$$

$$(a^2 + b^2)T_M^2 = a^2 T_x^2 + b^2 T_y^2$$

### 3 Методика измерений

В данной работе используется устройство для получения крутильных колебаний, изображенное на рис. 2. Рамка 1 жестко соединена с проволокой 2, закрепленной вертикально в специальных зажимах 3, позволяющих сообщить начальное закручивание для возбуждения крутильных колебаний вокруг вертикальной оси. В рамке с помощью планки 4, гаек 5 и винта 6 закрепляется твердое тело 7. На теле имеются специальные выемки, позволяющие его закрепить так, чтобы ось вращения проходила в теле под различными углами через центр масс.

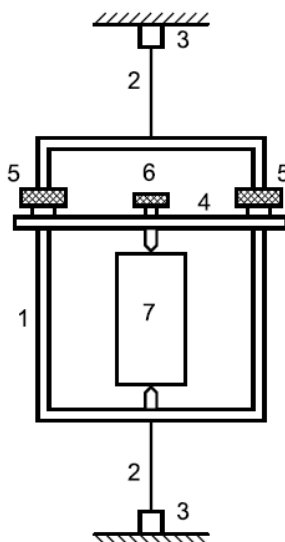


Рис. 2: Схема установки

## 4 Используемое оборудование

Установка для получения крутильных колебаний (жесткая рама, имеющая винты для закрепления в ней твердых тел, подвешенная на натянутой вертикально проволоке), набор исследуемых твердых тел, секундомер.

## 5 Результаты измерений и обработка данных

- Для начала установим геометрические параметры исследуемых тел. Штангенциркулем измеряем размеры и заносим в табличку. Для каждого тела по две таблицы: одна с измерениями, другая с полученными средними значениями:

	м, гр	а, см
Куб	1084.9	9.27

Таблица 1: Измерения для куба

a	9.27	9.27	9.27	9.26	9.26	9.27	9.27	9.26	9.27	9.27
b	9.26	9.27	9.27	9.26	9.27	9.26	9.26	9.27	9.26	9.27
c	9.27	9.27	9.27	9.26	9.26	9.27	9.27	9.26	9.27	9.27

Таблица 2: Измерения сторон куба

	м, гр	d, см	h, см
Цилиндр	2264	8.81	4.92

Таблица 3: Измерения для цилиндра

d	8.82	8.81	8.81	8.81	8.82	8.81	8.81	8.81	8.82	8.81
h	4.92	4.92	4.93	4.92	4.93	4.92	4.93	4.92	4.92	4.92

Таблица 4: Измерения сторон цилиндра

	m, гр	d, см	h, см
Блин	1569.5	12.44	1.68

Таблица 5: Измерения для блина

d	12.44	12.45	12.44	12.44	12.44	12.44	12.44	12.45	12.44	12.45
h	1.68	1.68	1.68	1.69	1.69	1.68	1.68	1.69	1.68	1.69

Таблица 6: Измерения сторон блина

- Теперь по этим данным вычислим главные моменты инерции и их погрешность:

$$\varepsilon \approx \sqrt{\varepsilon_a^2 + \varepsilon_b^2} \approx 0.1\%$$

Поскольку

$$\varepsilon_a^2 \approx 0.1\%$$

**Куб** Для куба момент инерции относительно любой оси равны.

$$I_z = 9.32 \pm 0.01 \text{ гр} \cdot \text{м}^2$$

**Цилиндр** Моменты инерции относительно главных осей:  $I_z$ -относительно вертикальной оси,  $I_x$ -относительно горизонтальной оси.

$$I_z = 2.2 \pm 0.01 \text{ гр} \cdot \text{м}^2, \quad I_x = 2.65 \pm 0.01 \text{ гр} \cdot \text{м}^2$$

**Блин**

$$I_z = 3.04 \pm 0.01 \text{ гр} \cdot \text{м}^2, \quad I_x = 3.07 \pm 0.01 \text{ гр} \cdot \text{м}^2$$

**Цилиндр + блин**

$$I_z = 5.24 \pm 0.02 \text{ гр} \cdot \text{м}^2, \quad I_x = 5.72 \pm 0.02 \text{ гр} \cdot \text{м}^2$$

- Далее определим периоды колебаний для пустой рамки, и всех остальных тел при различном положении относительно оси колебаний. Отсчитываем 10-15 колебаний, проводя каждое измерение 3 раза. Также перед каждой серией измерений убеждаемся в правильности выборе амплитуды: амплитуда выбрана правильно, если при уменьшении ее в два раза период колебаний, определяемый по 10-15 колебаниям, остается тем же. Заносим данные для разных фигур в табличку. Погрешность измерения времени обусловлена ошибкой округления и равна:  $\varepsilon_T \approx 0.5\%$  при 10 измерениях и  $\varepsilon_T \approx 0.3\%$  при 15 измерениях.

**Рамка** Измерения для рамки:

Рамка	N	$t_{N1,c}$	$t_{N2,c}$	$t_{N3,c}$	$t_{N4,c}$	$t_{N5,c}$	T,с
$T_{OZ}$	10	44.82	44.71	44.7	44.4	44.65	4.47

**Цилиндр** Измерения для цилиндра:

Цилиндр	N	$t_{N1,c}$	$t_{N2,c}$	$t_{N3,c}$	T,с	$1/\sqrt{T^2 - T_p^2}, 10^{-2}c^{-1}$
$T_{OZ}$	10	56	56.2	56.2	5.61	29.5
$T_{OX}$	10	53	53.2	53.3	5.32	34.67

**Куб** Измерения для куба:

куб	N	$t_{N1,c}$	$t_{N2,c}$	$t_{N3,c}$	T,с	$1/\sqrt{T^2 - T_p^2}, 10^{-2}c^{-1}$
$T_{EE'}$	10	53.9	54	54.1	5.4	33.01
$T_{DD'}$	10	53.6	53.2	53.3	5.34	34.23
$T_{OZ(CC')}$	10	53.6	53.63	53.5	5.36	33.81

**Блин** Измерения для блина:

Блин	$N$	$t_{N1,c}$	$t_{N2,c}$	$t_{N3,c}$	$T,c$	$1/\sqrt{T^2 - T_p^2}, 10^{-2}c^{-1}$
$T_{OZ}$	10	53.68	53.86	54.16	5.39	33.2
$T_{OX}$	10	53.19	53.34	53.15	5.32	34.67

**Цилиндр + блин** Измерения для цилиндра и блина:

Цилиндр + блин	$N$	$t_{N1,c}$	$t_{N2,c}$	$t_{N3,c}$	$T,c$	$1/\sqrt{T^2 - T_p^2}, 10^{-2}c^{-1}$
$T_{OZ}$	10	71.5	71.2	70.9	7.12	18.04

- Теперь по полученным ранее данным построим эллипсоид инерции для параллелограмма и куба. За длину радиус вектора примим  $r = 100/\sqrt{T^2 - T_p^2}$ . Строить эллипсы будем методом наименьших квадратов. Т.к параметрическое ур-ие эллипса выглядит как:  
 $y = b \cdot \sin(\varphi), x = a \cdot \cos(\varphi)$  То зависимость координаты  $x, y$  от соответственно  $\sin(\varphi), \cos(\varphi)$  линейная и проходит через начало координат. Тогда зная длину радиус вектора и углы под которыми направлены побочные оси к главным осям, проводим аппроксимацию методом наименьших квадратов и строим эллипс с полученными параметрами.

$$a = \frac{\langle x \cdot \cos(\varphi) \rangle}{\langle \cos(\varphi)^2 \rangle}, \quad b = \frac{\langle y \cdot \sin(\varphi) \rangle}{\langle \sin(\varphi)^2 \rangle}$$

**Цилиндры** Блин:  $a = 34.67 \cdot 10^{-2}c^{-1}, b = 33.2 \cdot 10^{-2}c^{-1}$

Цилиндр:  $a = 34.67 \cdot 10^{-2}c^{-1}, b = 29.5 \cdot 10^{-2}c^{-1}$

**Куб** Для куба эллипсоид инерции - шар. Примем за его радиус средний по всем сериям измерений.  
 $r = 33.68 \cdot 10^{-2}c^{-1}$

- Проверим насколько теоретически предсказанные моменты инерции для цилиндров относительно главных осей с полученным экспериментальным результатом, пользуясь тензором инерции. Вычислим отношения моментов инерции вдоль главных осей. Погрешность экспериментального значения оценим как:

$$\varepsilon_{J_i/J_j} = 2\sqrt{\varepsilon_{ri}^2 + \varepsilon_{rj}^2} \approx 10\%$$

Погрешность теоретического пренебрежимо мала и порядка 1%.

Теоретическое значение для цилиндра:  $I_x/I_z = 1.4$ , экспериментальное  $I_x/I_z = c^2/a^2 = 1.38 \pm 0.1$

Теоретическое значение для блина:  $I_x/I_z = 1$ , экспериментальное  $I_x/I_z = c^2/a^2 = 1.08 \pm 0.1$

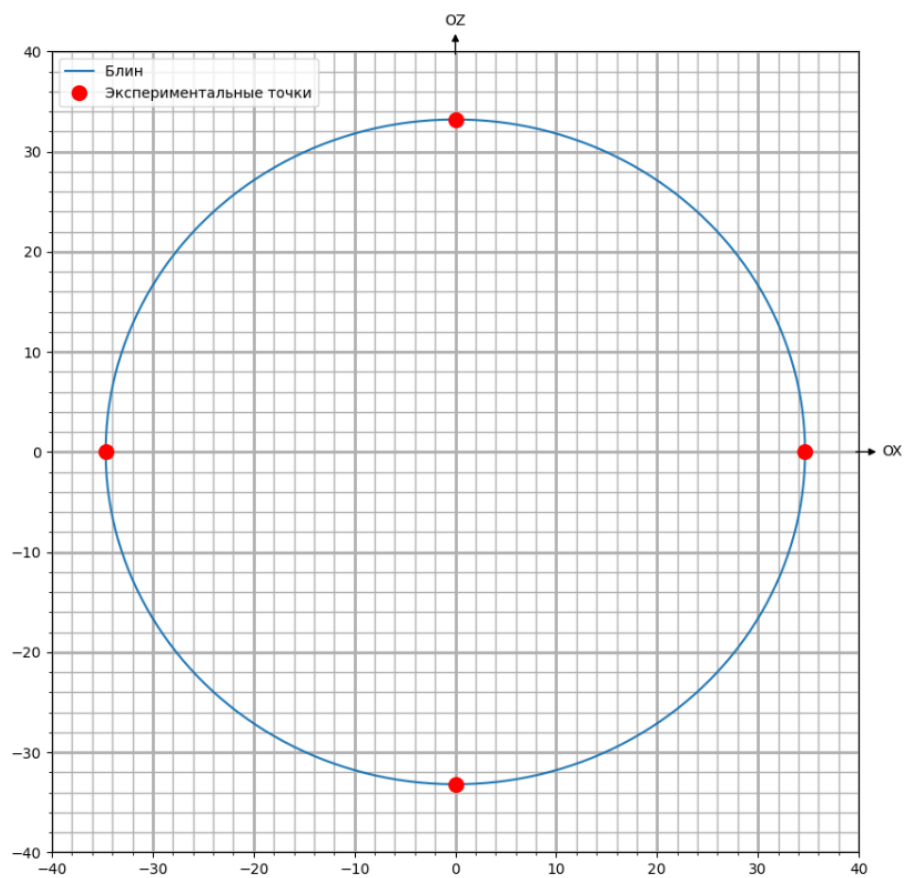


Рис. 3: Эпсилоид инерции для блина

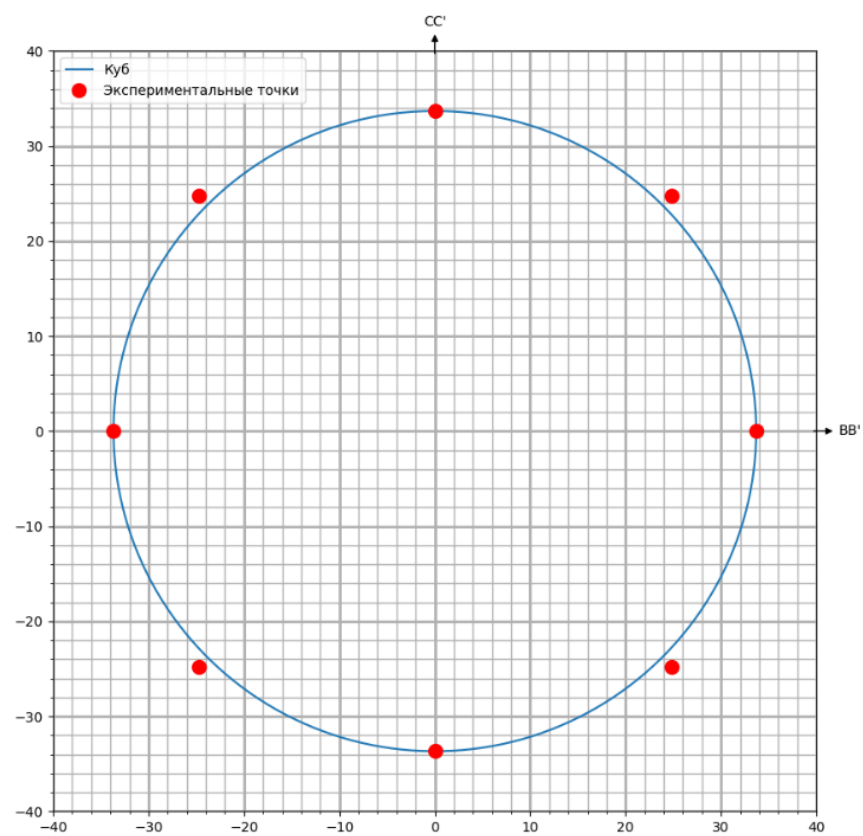


Рис. 4: Эпсилоид инерции для куба

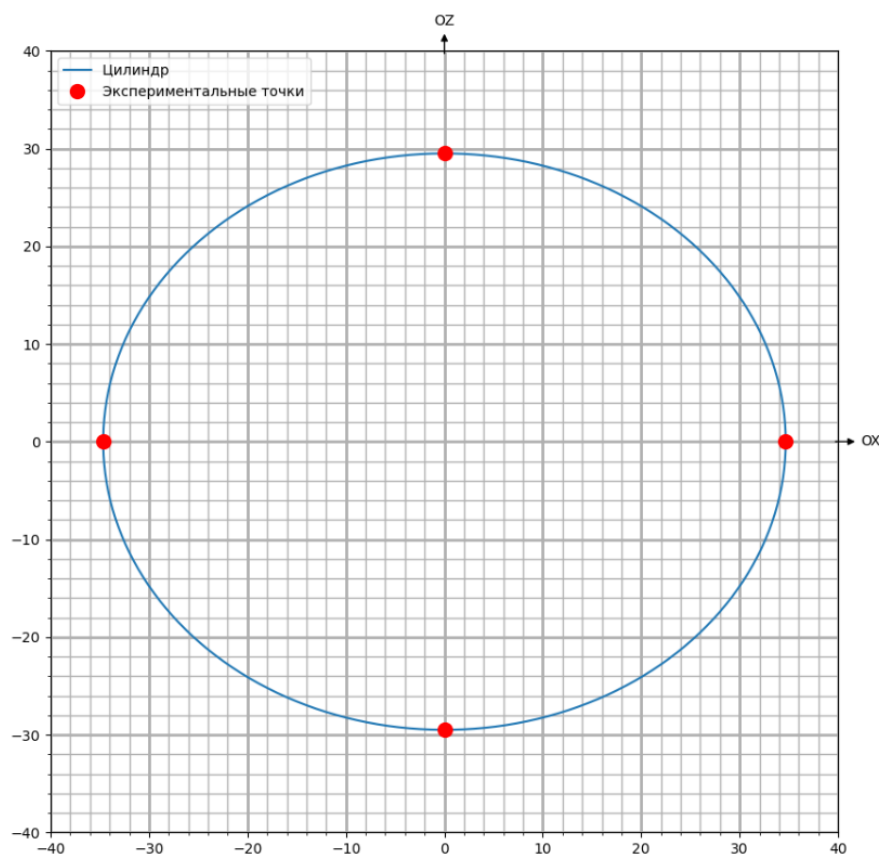


Рис. 5: Эпсоид инерции для цилиндра

## 6 Обсуждение результатов

Можем заметить, что точки не идеально ложатся на построенную кривую, что вероятно обусловлено особенностями установки (затуханием, провисанием или возникающими эффектами) и случайной погрешностью, связанной со скоростью реакции человека. Таким образом использование нашей установки дает некоторую приличную погрешность, но ее точности вполне достаточно для получения интересных нас выводов. Поэтому, так как точки хорошо ложатся на эллипс, мы можем сделать вывод о справедливости теоретических формул.

## 7 Вывод

В ходе работы были измерены периоды колебаний относительно различных осей. Была подтверждена теоретическая зависимость между периодами крутильных колебаний тела относительно различных осей. По ним были установлены положения главных осей тела и вычислены моменты инерции относительно этих осей. По этим данным был построен вид эллипсоида инерции. По виду эллипсоида инерции были вычислены соотношения между моментами инерции тела относительно главных осей, которые совпадают с теоретическим расчетом в пределах погрешности.