# Note de cours de Mathématiques discrètes

19 octobre 2012

## 1 Rappels sur les récurrences

### 1.1 récurrences linéaires

**Définition 1.** *1. récurrences linéaires homogènes à coefficients constants : $\forall n, n \geqslant k \geqslant 0$, $u_n = a_1 u_{n-1} + \ldots + a_k u_{n-k}$ ;*

*2. récurrences linéaires non homogènes à coefficients constants : $\forall n, n \geqslant k \geqslant 0$, $u_n = a_1 u_{n-1} + \ldots + a_k u_{n-k} + b(n)$ ;*

*3. récurrences linéaires à coefficients variables : $\forall n, n \geqslant k \geqslant 0$, $u_n = a_1(n) u_{n-1} + \ldots + a_k(n) u_{n-k} + b(n)$ ;*

Pour résoudre ce type de récurrence, on a à notre disposition plusieurs méthodes, qui ne marchent pas toutes dans tous les cas :
- résolution intuitive et démonstration par récurrence ;
- résolution par sommation ;
- résolution par polynôme caractéristique dans les cas suivants : la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ vérifie une équation linéaire : $u_n = a_1 u_{n-1} + \ldots + a_k u_{n-k} + \sum_{i=1}^{l} b_i(n) P_i(n)$ avec $P_i(n)$ polynôme en $n$ et on peut déterminer les $k$ racines du polynôme caractéristique associé $x^n - a_1 x^{n-1} - \ldots - a_k x^{n-k} - \sum_{i=1}^{l} b_i(n) P_i(n)$ ; par exemple si $u_n = a u_{n-1} + b u_{n-2}$, cette suite a pour polynôme caractéristique $x^2 - ax - b$, de racines $x_1$ et $x_2$. Ce qui donne $u_n = l x_1^n + m x_2^n$ si les deux racines sont distinctes et $u_n = (l + mn) x_1^n$ sinon.
- résolution par série génératrice.

**Exemple 1.** 1. Nombre de comparaison dans une recherche dichotomique pour un tableau trié de longueur $n = 2^m$ : $t_n = t_{n/2} + 1$ et $t_1 = 1$.
résolution inuitive et démonstration par récurrence : $t_n = t_1 + m = 1 + m = 1 + \log_2(n)$.

2. Nombre minimal de sommets dans un arbre AVL de hauteur $h$ : $s_h = s_{h-1} + s_{h-2} + 1$ avec $s_0 = 1$ et $s_1 = 3$. Si on pose $f_h = s_h + 1$, la suite $(f_h)_{h \geqslant 0}$ est la suite de Fibonnacci, $f_h = f_{h-1} + f_{h-2}$, avec ici $f_0 = 2$ et $f_1 = 4$.
Résolution par polynôme caractéristique.

3. Complexité en temps (nombre de déplacements) de l'agorithme récursif des tours de Hanoï : $h_n = 2h_{n-1} + 1$ et $h_1 = 1$.
Le problème : déplacer `nb` disques de diamètres différents d'une tour de départ `A` à une tour d'arrivée `B` en passant par une tour intermédiaire `I` et ceci en un minimum de coups, tout en respectant les règles suivantes :
   - on ne peut déplacer plus d'un disque à la fois,
   - on ne peut placer un disque que sur un autre disque plus grand que lui ou sur un emplacement vide.

   On suppose que cette dernière règle est également respectée dans la configuration de départ.
L'algorithme :

```
Hanoi(nb, A, B, I)
    si nb > 0 alors
                Hanoi(nb - 1, A, I, B);
                Deplacer un disque de A vers B;
                Hanoi(nb - 1, I, B, A);
    finSi
```

Résolution intuitive et par récurrence.

4. Complexité la pire du quicksort en nombre de comparaisons : $p_n = p_{n-1} + n - 1$ et $p_2 = 1$. L'algorithme : La méthode consiste à placer un élément du tableau (appelé pivot) à sa place définitive, en permutant tous les éléments de telle sorte que tous ceux qui lui sont inférieurs soient à sa gauche et que tous ceux qui lui sont supérieurs soient à sa droite. Cette opération s'appelle le partitionnement. Pour chacun des sous-tableaux, on définit un nouveau pivot et on répète l'opération de partitionnement. Ce processus est répété récursivement, jusqu'à ce que l'ensemble des éléments soit trié.
   – résolution par sommation : $p_n = \sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{n(n-1)}{2}$.
   – résolution par la méthode du polynôme caractéristique.
5. Complexité en moyenne du quicksort en nombre de comparaisons : supposons que le choix du pivot se porte de façon aléatoire sur chacun des éléments du tableau de taille n ; alors le coût moyen en nombre de comparaisons $c_n$ est : $c_n = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(c_i + c_{n-1-i}) + n - 1$ et $c_1 = c_0 = 0$.
   Le terme générique $c_n$ peut s'écrire :

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{2}{n}\sum_{i=0}^{n-1} c_i + n - 1 \\ &= \frac{2}{n}c_{n-1} + \frac{2}{n}\sum_{i=0}^{n-2} c_i + n - 1 \\ &= \frac{2}{n}c_{n-1} + \frac{n-1}{n}\left(\frac{2}{n-1}\sum_{i=0}^{n-2} c_{i-1} + n - 2\right) - \frac{n-1}{n}(n-2) + n - 1 \end{aligned}$$

   Le terme entre parenthèses est exactement $c_{n-1}$, donc $c_n = \frac{n+1}{n}c_{n-1} + 2\frac{n-1}{n}$. Posons $d_n = \frac{c_n}{n+1}$, alors $d_n = \frac{c_{n-1}}{n} + \frac{2}{n+1} - \frac{2}{n(n+1)} = d_{n-1} + \frac{2}{n+1} - \frac{2}{n(n+1)}$. Cela donne

$$d_n = 2\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i+1} - \frac{1}{i(i+1)} = 2(H_{n+1} - 1 - \sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i(i+1)}).$$

   $H_n$ est le nombre harmonique au rang $n$ et $H_n \sim \log(n)$. Comme $\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i(i+1)}$ est négligeable devant $H_{n+1}$, on a que $c_n \sim 2(n+1)\log(n+1)$.

Tous ces exemples peuvent également être résolus par la méthode des séries génératrices.

## 1.2 récurrences non linéaires

Ce sont tous les autres types de récurrence.

**Exemple 2.** Nombre d'arbres binaires à $n$ noeuds internes : $b_n = \sum_{k=0}^{n-1} b_k b_{n-1-k}$ et $b_0 = 1$, $b_1 = 1$.

Résolution par séries génératrices.

# 2 Enumération et classes combinatoires

## 2.1 Enumération

Enumérer, c'est déterminer le nombre de configurations combinatoires décrites par un ensemble fini de règles. On souhaite les compter en fonction de leur(s) taille(s).

**Définition 2.** *On appelle atome d'une configuration combinatoire, un élément de cette configuration de taille 1.*

**Exemple 3.** Nombre d'écritures binaires :
- si la taille est la longueur du mot binaire : $1, 2, 4, \cdots$.
- si les tailles sont la longueur et le nombre de 1 : $1, 1, 1, 1, 2, 1, \cdots$
- si les tailles sont la longueur et le nombre de passage de 0 à 1 : $1, 2, 3, 1, \cdots$

Un atome est ici un chiffre du mot binaire.

## 2.2 Classes combinatoires

Une classe combinatoire est un ensemble fini ou dénombrable d'objets définis par une taille tel que :
- la taille soit un entier positif ou nul ;
- l'ensemble des éléments d'une taille donnée $n$ est fini.

A une classe combinatoire $\mathcal{A}$ correspond une suite d'énumération $(c_0, c_1, \dots)$, avec $c_i$ le nombre d'objets de $\mathcal{A}$ de taille $i$.

**Exemple 4.** Les nombres binaires comptés suivant leur longueur forment une classe combinatoire. A une longueur $l$ donnée correspond un ensemble fini de nombres binaires (de taille $2^l$).

**Notations 1.** Soit $\mathcal{A}$ un ensemble dénombrable.
- soit $a \in \mathcal{A}$, on note $|a|$ la taille de l'élément $a$ de $\mathcal{A}$.
- $\mathcal{A} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_n$, où $\mathcal{A}_n$ est l'ensemble des éléments de $\mathcal{A}$ de taille $n$.
- On note $(\mathcal{A}, |.|)$ une classe combinatoire avec $|.| : \mathcal{A} \to \mathbb{N}$, tel qu'à tout entier $n \in \mathbb{N}$ correspond par la fonction inverse de $|.|$ un ensemble fini d'éléments de $\mathcal{A}$. S'il n'y a pas d'ambigüité, on note $\mathcal{A}$ pour $(\mathcal{A}, |.|)$.

**Exemple 5.**
- La classe $(\mathcal{A}, |.|)$ des arbres binaires comptés suivant leur nombre $n$ de noeuds internes est une classe combinatoire : $|\mathcal{A}_n| = C_{n+1} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ (preuve par récurrence ou SG).
- La classe $(\mathfrak{S}, |.|)$ des permutations comptées suivant leur longueur $n$ est une classe combinatoire : $|\mathfrak{S}_n| = n!$ (preuve par récurrence).
- La classe $(\mathbb{Q}, |.|)$ des rationnels comptés suivant le nombre de chiffres de leur partie entière n'est pas une classe combinatoire, car il y a une infinité d'éléments d'une taille donnée.

**Définition 3.** *Deux classes combinatoires $(\mathcal{A}, |.|_{\mathcal{A}})$ et $(\mathcal{B}, |.|_{\mathcal{B}})$ sont dites isomorphes, et on le note $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$, si et seulement si leur suite d'énumération des objets par taille est la même.*

**Remarque 1.** $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B} \Leftrightarrow \mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont en bijection, ie. il existe une fonction $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ bijective.

**Exemple 6.** Soit $(\mathcal{A}, |.|_{\mathcal{A}})$ la classe des nombres binaires comptés suivant leur longueur : $|\mathcal{A}_n| = 2^n$ et soit $(\mathcal{B}, |.|_{\mathcal{B}})$ la classe des parties des ensembles $\{1, \dots, n\}$, comptés suivant $n$. Alors $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$ et

$$\begin{array}{rcl} f : & \mathcal{A} & \to \mathcal{B} \\ & a = b_n \dots b_1 b_0 & \to E \end{array}$$

où $\forall i \geqslant 0, i \in E$ si et seulement si $b_i = 1$.

# 3 Séries génératrices

## 3.1 Séries formelles à une variable à valeurs dans $\mathbb{C}$

**Définition 4.** *Une série formelle $f$ à une indeterminée $z$ sur $\mathbb{C}$, est une expression formelle du type : $f(z) = \sum_{i \geqslant 0} a_i z^i$, où les $a_i$, appelés coefficients de $f$, sont à valeurs dans $\mathbb{C}$. On note $\mathbb{C}[[z]]$ l'ensemble des séries formelles à valeur dans $\mathbb{C}$. Le coefficient $a_0$ de $f$ est appelé le terme constant.*

**Remarque 2.** Si tous les $a_i$ sont nuls sauf un nombre fini de $a_i$, alors $f$ est un polynôme.

Soient $f$ et $g$ deux séries formelles de $\mathbb{C}[[z]]$, $f(z) = \sum_{i \geqslant 0} a_i z^i$ et $g(z) = \sum_{i \geqslant 0} b_i z^i$. On munit $\mathbb{C}[[z]]$ de :

- l'addition : $f(z) + g(z) = \sum_{i \geqslant 0} c_i z^i$ avec $c_i = a_i + b_i$. L'élément neutre pour l'addition est la série formelle dont tous les coefficients sont nuls ; il est noté 0.
- la multiplication : $f(z)g(z) = \sum_{i \geqslant 0} d_i z^i$ avec $d_i = \sum_{k=0}^{i} a_k b_{i-k}$. L'élément neutre pour la multiplication est la série formelle dont tous les coefficients sont nuls, sauf son terme constant égal à 1 ; il est noté 1.

L'addition est commutative et associative. La multiplication est commutative, associative et distributive par rapport à l'addition. Par ailleurs toute série formelle $f$ admet un opposé égal à $\sum_{i \geqslant 0} -a_i z^i = -\sum_{i \geqslant 0} a_i z^i = -f(z)$. On dit alors que $(\mathbb{C}[[z]], +, \times)$ forme une algèbre.

**Définition 5.** *Soit la série formelle $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n \in \mathbb{C}[[z]]$. On appelle ordre (valuation) de $f$, noté $\mathsf{ord}(f)$, l'entier défini comme suit :*

$$\mathsf{ord}(f) = \min\{n \in \mathbb{N} \;/\; a_n \neq 0\} \; \textit{et} \; \mathsf{ord}(0) = +\infty$$

**Lemme 1.** *Soient $f$ et $g$ deux séries formelles. Alors :*

$$\mathsf{ord}(f+g) \geqslant \min(\mathsf{ord}(f), \mathsf{ord}(g)) \; \textit{et} \; \mathsf{ord}(fg) = \mathsf{ord}(f) + \mathsf{ord}(g)$$

$\mathsf{ord}(f+g) = \min(\mathsf{ord}(f), \mathsf{ord}(g))$ *si les coefficients d'indice* $\mathsf{ord}(f+g)$ *n'ont pas des valeurs opposées.*

*Démonstration.* Posons $\mathsf{ord}(f) = p$ et $\mathsf{ord}(g) = q$. Alors $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n = \sum_{n \geqslant p} a_n z^n$ et $g(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} b_n z^n = \sum_{n \geqslant q} b_n z^n$. D'où

$$f(z) + g(z) = \sum_{n \geqslant \min(p,q)} (a_n + b_n) z^n$$

$$f(z)g(z) = \sum_{n \geqslant 0} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} z^n$$

Or on sait que $a_k = 0$ si $k < p$ et $b_{n-k} = 0$ si $n - k < q$.
Donc $\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = 0$ si $k < p$ et $n - k < q$, soit si $n < q + k < q + p$.
Ce qui signifie que $\mathsf{ord}(fg) \geqslant \mathsf{ord}(g) + \mathsf{ord}(f)$.
Par ailleurs le coefficient de $z^{p+q}$ dans la série $f(z)g(z)$ est $\sum_{k=0}^{p+q} a_k b_{p+q-k} = a_p b_q \neq 0$. Donc $\mathsf{ord}(fg) = \mathsf{ord}(g) + \mathsf{ord}(f)$. □

**Lemme 2.** *L'algèbre $(\mathbb{C}[[z]], +, \times)$ est intègre (ie. $\forall f, g \in \mathbb{C}[[z]]$, $f(z)g(z) = 0 \Rightarrow f(z) = 0$ ou $g(z) = 0$).*

*Démonstration.* $\mathsf{ord}(fg) = \infty$ car $fg = 0$. Or d'après le lemme 1, $\mathsf{ord}(fg) = \mathsf{ord}(f) + \mathsf{ord}(g)$. Donc $\mathsf{ord}(f) + \mathsf{ord}(g) = \infty \Leftrightarrow \mathsf{ord}(f) = \infty$ ou $\mathsf{ord}(g) = \infty \Leftrightarrow f = 0$ ou $g = 0$.

□

## 3.2 Séries génératrices

**Définition 6.** *La série génératrice d'une suite d'énumération $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ d'une classe combinatoire $\mathcal{A}$ est la série formelle $A(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n = \sum_{e\in\mathcal{A}} z^{|e|}$.*

**Remarque 3.** La puissance $n$ de $z$ donne la taille et son coefficient $a_n$, le nombre d'objets de $\mathcal{A}$ de taille $n$.
Pour les coefficients de $A(z)$, on utilise la notation $[z^n]A(z) = [z^n] \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n = a_n$.
On ne s'occupe pas de la convergence de la série $A$ car $z$ est un paramètre formel, il ne prend pas de valeur. Seule sa puissance nous intéresse, indiquant la taille des objets énumérés.

**Exemple 7.**
- $A(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} 2^n z^n$ est la série génératrice des nombres binaires comptés suivant leur longueur.
- $\sum_{n\in\mathbb{N}} n!\, z^n$ est la série génératrice des permutations comptées suivant leur nombre d'éléments.

## 3.3 Substitution

**Définition 7.** *Soit $(A_i)_{i\in I}$, $I \subset \mathbb{N}$, une famille de séries formelles. On pose $\forall i \in I, A_i = \sum_{n\geqslant 0} a_{i,n} z^n$. La famille $(A_i)_{i\in I}$ est dite sommable si pour tout $n$, la famille $(a_{i,n})_{i\in I}$, n'a qu'un nombre fini de termes non nuls. Posons $\forall n \in \mathbb{N}, c_n = \sum_{i\in I} a_{i,n}$, alors la série formelle $\sum_{i\in I} A_i(z) = \sum_{n\geqslant 0} c_n z^n$ est appelée somme de la famille $(A_i)_{i\in I}$.*

**Exemple 8.**
- Soit la famille de séries formelles $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $i$, $\mathsf{ord}(A_i) = i$. Alors cette famille est sommable car posons $A_i(z) = \sum_{n\geqslant 0} a_{i,n} z^n$. On a que $A_i(z) = \sum_{n\geqslant i} a_{i,n} z^n$ et la suite $(a_{i,n})_{i\in\mathbb{N}}$ n'a que des termes nuls sauf les termes tels que $i \leqslant n$, soit les termes $a_{i,n}$ avec $0 \leqslant i \leqslant n$ en nombre fini $(n+1)$ pour $n$ fixé.
  La somme $\sum_{i\geqslant 0} A_i(z)$ a un sens.
- La famille $(a_i z^i)_{i\in\mathbb{N}}$ est sommable et donc $\sum_{i\geqslant 0} a_i z^i$ a bien un sens.
- Soit la famille de séries formelles $(A_i)_{i\in I}$, avec $I$ un ensemble fini d'indices. Alors la famille $(A_i)_{i\in I}$ est sommable et $\sum_{i\geqslant 0} A_i(z)$ a un sens.

**Définition 8.** *Soient $A(z) = \sum_{i\in\mathbb{N}} a_i z^i$ et $B = \sum_{i\in\mathbb{N}} b_i z^i$ deux séries formelles avec $\mathsf{ord}(B) \geqslant 1$. Alors on peut substituer $B$ à $z$ dans $A$ et obtenir ainsi la série formelle $A \circ B$, composée de $A$ par $B$ :*

$$A \circ B(z) = \sum_{i\in\mathbb{N}} a_i (B(z))^i$$

Pour que la substitution soit possible, il est essentiel que $\mathsf{ord}(B) \geqslant 1$. Ainsi $\mathsf{ord}(a_i B^i) \geqslant i$ et la famille $(a_i B^i)_{i\in\mathbb{N}}$ est sommable car si on pose $a_i B^i = \sum_{n\geqslant i} c_{i,n} z^n$, alors la suite $(c_{i,n})_{i\in\mathbb{N}}$ n'a qu'un nombre fini de termes non nuls : $c_{0,n}, c_{1,n}, \ldots, c_{j,n}$, $j = \mathsf{ord}(a_i B^i) \geqslant i$.

**Exemple 9.** Soient $A(z) = 2z$ et $B(z) = \sum_{n\geqslant 0} z^n$. Comme $\mathsf{ord}(A) = 1$, on peut composer $B$ par $A$ et $B \circ A(z) = \sum_{n\geqslant 0}(A(z))^n = \sum_{n\geqslant 0} 2^n z^n$.

**Propriété 1.** *Soient $A, B, C$ trois séries formelles telles que $ord(A) \geqslant 1$. Alors on a les propriétés suivantes :*

- $(B + C) \circ A = B \circ A + C \circ A$,
- $(BC) \circ A = (B \circ A)(C \circ A)$,
- $\forall\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \circ A = \lambda$,
- *si de plus* $\mathsf{ord}(B) \geqslant 1$, $(C \circ B) \circ A = C \circ (B \circ A)$.

## 3.4 Inverse d'une série formelle

L'identité $(1 - z) \sum_{n\in\mathbb{N}} z^n = 1 + \sum_{n\geqslant 1} z^n - \sum_{n\geqslant 0} z^{n+1} = 1$ entraîne que la série formelle $1 - z$ est inversible et on a $\frac{1}{1-z} = \sum_{n\geqslant 0} z^n$.

**Théoreme 1.** *Soit $A(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n \in \mathbb{C}[[z]]$. $A$ est inversible si et seulement si $a_0 \neq 0$.*

*Démonstration.* $A(z) = a_0(1 - B(z))$ avec $B(z) = 1 - \frac{1}{a_0}A(z) = -\frac{1}{a_0}\sum_{n\geqslant 1} a_n z^n$. Donc $\mathsf{ord}(B) \geqslant 1$ et on peut composer la série formelle $\frac{1}{1-z}$ par $B$ : $\frac{1}{(1-z)} \circ B(z) = \frac{1}{1-B(z)} = \sum_{n\geqslant 0} B(z)^n$. La famille $(B^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable. Ce qui entraîne que $A$ est inversible : $A(z)^{-1} = \frac{1}{a_0}\sum_{n\geqslant 0} B(z)^n$. □

**Exemple 10.** La série formelle $1 + z$ est inversible car son coefficient constant est non nul.
$1 + z = 1 - (-z) = (1 - z) \circ (-z)$ car $\mathsf{ord}(-z) = 1$ et la substitution est possible. Comme $1 - z$ est inversible, $(1 - z) \circ (-z)$ l'est également et $\frac{1}{1+z} = \frac{1}{(1-z)\circ(-z)} = \sum_{n\geqslant 0}(-z)^n = \sum_{n\geqslant 0}(-1)^n z^n$.

## 3.5 Dérivées et primitives de séries formelles

**Définition 9.** *Soit $f(z) = \sum_{n\geqslant 0} a_n z^n \in \mathbb{C}[[z]]$.*

*La dérivée de $f$ en la variable $z$, notée $f'(z)$, est une série formelle de $\mathbb{C}[[z]]$ et*

$$f'(z) = \sum_{n\geqslant 1} n a_n z^{n-1} = \sum_{n\geqslant 0} (n + 1)a_{n+1} z^n$$

.

*La primitive de $f$ en la variable $z$ est une série formelle de $\mathbb{C}[[z]]$ et*

$$\int_0^z f(t)dt = \sum_{n\geqslant 0} a_n \frac{z^{n+1}}{n + 1} = \sum_{n>0} a_{n-1} \frac{z^n}{n}$$

.

**Exemple 11.**

- $\sum_{n\geqslant 0} nz^n = z \sum_{n\geqslant 1} nz^{n-1} = z \sum_{n\geqslant 1} [z^n]' = z[\sum_{n\geqslant 1} z^n]' = z[\frac{1}{1-z} - 1]' = \frac{z}{(1-z)^2}$.
- $\sum_{n\geqslant 1} (-1)^{n-1}\frac{z^n}{n} = \sum_{n\geqslant 1} (-1)^{n-1}\int_0^z t^{n-1}dt = \int_0^z \sum_{n\geqslant 1}(-t)^{n-1}dt = \int_0^z \frac{1}{1+t}dt = \ln(1+z)$. Alors comme $\mathsf{ord}(-z) = 1 > 0$, $\sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{n} = \sum_{n\geqslant 1} (-1)^n \frac{z^n}{n} \circ (-z) = -\ln(1 + z) \circ (z) = -\ln(1 - z) = \ln\left(\frac{1}{1-z}\right)$.

### 3.6 Séries formelles usuelles

| | |
|---|---|
| $\sum_{n\geqslant 0} z^n$ | $\frac{1}{1-z}$ |
| $\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n z^n$ | $\frac{1}{1+z}$ |
| $\sum_{n\geqslant 0} (n+1) z^n$ | $\frac{1}{(1-z)^2}$ |
| $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n} z^n$ | $\ln(\frac{1}{1-z})$ |
| $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n$ | $\ln(1+z)$ |
| $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n!} z^n$ | $e^z$ |
| $\sum_{n\geqslant 0} \binom{k}{n} z^n$ | $(1+z)^k$ |
| $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$ | $\sin(z)$ |
| $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$ | $\cos(z)$ |
| $1+\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n!} \prod_{i=0}^{n-1} (\frac{1}{k}-i) z^n$ | $\sqrt[k]{1+z}$ |

### 3.7 Exemples de résolution d'une récurrence par série génératrice

#### 3.7.1 Résolution de la récurrence $s_n = s_{n-1} + s_{n-2} + 1$ avec $s_0 = 1$ et $s_1 = 3$

Posons $S(z) = \sum_{n\geqslant 0} s_n z^n$. Alors

$$\begin{aligned}
S(z) &= \sum_{n\geqslant 1} s_n z^n = s_0 + s_1 z + \sum_{n\geqslant 2} (s_{n-1} + s_{n-2} + 1) z^n \\
&= 1 + 3z + z \sum_{n\geqslant 1} s_n z^n + z^2 \sum_{n\geqslant 0} s_n z^n + \frac{1}{1-z} - 1 - z \\
&= zS(z) + z^2 S(z) + \frac{1}{1-z} + z
\end{aligned}$$

Alors en rassemblant les termes en $S(z)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
S(z) &= \frac{1+z-z^2}{(1-z)(1-z-z^2)} = \frac{1+z-z^2}{(z+\frac{1-\sqrt{5}}{2})(z+\frac{1+\sqrt{5}}{2})(1-z)} \\
&= (1+z-z^2)\left(-\frac{3\sqrt{5}+5}{10}\frac{1}{z+\frac{1-\sqrt{5}}{2}} + \frac{3\sqrt{5}-5}{10}\frac{1}{z+\frac{1+\sqrt{5}}{2}} - \frac{1}{1-z}\right) \\
&= (1+z-z^2)\left(-\frac{3\sqrt{5}+5}{10}\frac{2}{1-\sqrt{5}}\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{-2}{1-\sqrt{5}}\right)^n z^n + \frac{3\sqrt{5}-5}{10}\frac{2}{1+\sqrt{5}}\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{-2}{1+\sqrt{5}}\right)^n z^n - \sum_{n\geqslant 0} z^n\right) \\
&= (1+z-z^2)\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{5+2\sqrt{5}}{5}\left(\frac{-2}{1-\sqrt{5}}\right)^n + \frac{5-2\sqrt{5}}{5}\left(\frac{-2}{1+\sqrt{5}}\right)^n - 1\right) z^n
\end{aligned}$$

Si on pose $h_n = \frac{5+2\sqrt{5}}{5}\left(\frac{-2}{1-\sqrt{5}}\right)^n + \frac{5-2\sqrt{5}}{5}\left(\frac{-2}{1+\sqrt{5}}\right)^n - 1$, alors
$S(z) = (1+z-z^2)\sum_{n\geqslant 1} h_n z^n = \sum_{n\geqslant 1} h_n (z^n + z^{n+1} - z^{n+2}) = \sum_{n\geqslant 1} h_n z^n + \sum_{n\geqslant 2} h_{n-1} z^n - \sum_{n\geqslant 3} h_{n-2} z^n$. D'où

$$
\begin{aligned}
s_0 &= h_0 = 1\\
s_1 &= h_1 + h_0 = \tfrac{5+2\sqrt{5}}{5}\tfrac{-2}{1-\sqrt{5}} + \tfrac{5-2\sqrt{5}}{5}\tfrac{-2}{1+\sqrt{5}} - 1 + h_0 = \tfrac{-2\left((5+2\sqrt{5})(1+\sqrt{5})+(5-2\sqrt{5})(1-\sqrt{5})\right)}{5(-4)} = 3\\
s_n &= h_n + h_{n-1} - h_{n-2},\ \forall n \geqslant 2\\
&= \tfrac{5+2\sqrt{5}}{5}\left(\tfrac{-2}{1-\sqrt{5}}\right)^{n-2}\left(\left(\tfrac{-2}{1-\sqrt{5}}\right)^2 + \tfrac{-2}{1-\sqrt{5}} - 1\right) + \tfrac{5-2\sqrt{5}}{5}\left(\tfrac{-2}{1+\sqrt{5}}\right)^{n-2}\left(\left(\tfrac{-2}{1+\sqrt{5}}\right)^2 + \tfrac{-2}{1+\sqrt{5}} - 1\right) - 1 + 1 - 1\\
&= \tfrac{5+2\sqrt{5}}{5}\left(\tfrac{-2}{1-\sqrt{5}}\right)^{n-2}(1+\sqrt{5}) + \tfrac{5-2\sqrt{5}}{5}\left(\tfrac{-2}{1+\sqrt{5}}\right)^{n-2}(1-\sqrt{5}) - 1\\
&= \tfrac{15+7\sqrt{5}}{5}\left(\tfrac{-2}{1-\sqrt{5}}\right)^{n-2} + \tfrac{15-7\sqrt{5}}{5}\left(\tfrac{-2}{1+\sqrt{5}}\right)^{n-2} - 1
\end{aligned}
$$

### 3.7.2 Résolution de la récurrence $a_n = 3a_{n-4} + a_{n-5}$ avec $a_0 = 1$, $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, $a_4 = 3$

Posons $A(z) = \sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$. Alors

$$
\begin{aligned}
A(z) &= a_0 + a_4 z^4 + \sum_{n\geqslant 5} a_n z^n = 1 + 3z^4 + \sum_{n\geqslant 5}(3a_{n-4} + a_{n-5})z^n\\
&= 1 + 3z^4 + \sum_{n\geqslant 5} 3a_{n-4}z^n + \sum_{n\geqslant 5} a_{n-5}z^n = 1 + 3z^4 + 3z^4\sum_{n\geqslant 1} a_n z^n + z^5 \sum_{n\geqslant 0} a_n z^n\\
&= 1 + 3z^4 \sum_{n\geqslant 0} a_n z^n + z^5 \sum_{n\geqslant 0} a_n z^n\\
(1 - 3z^4 - z^5)A(z) &= 1\\
A(z) &= \frac{1}{1 - 3z^4 - z^5}
\end{aligned}
$$

Comme $ord(3z^4 + z^5) = 4$, on peut substituer $3z^4 + z^5$ à $z$ dans $\frac{1}{1-z}$. On obtient alors :

$$
\begin{aligned}
A(z) &= \frac{1}{1-z} \circ (3z^4 + z^5) = \sum_{n\geqslant 0}(3z^4 + z^5)^n = \sum_{n\geqslant 0}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(3z^4)^k (z^5)^{n-k}\\
&= \sum_{n\geqslant 0}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}3^k z^{5n-k}
\end{aligned}
$$

On a alors $[z^m]A(z) = \sum_{n\geqslant 0}\sum_{\substack{k=0\\5n-k=m}}^{n}\binom{n}{k}3^k$.

### 3.7.3 Résolution de la récurrence sur les arbres binaires

Soit $B(z) = \sum_{n\geqslant 0} b_n z^n$ la série génératrice des arbres binaires comptés suivants leur nombre de noeuds. On rappelle que la récurrence vérifiée par les $b_n$ est : $\forall n \geqslant 1, b_n = \sum_{k=0}^{n-1} b_k b_{n-1-k}$ et $b_0 = 1$.

$$
\begin{aligned}
B(z) &= \sum_{n\geqslant 0} b_n z^n = 1 + \sum_{n\geqslant 1} b_n z^n = 1 + \sum_{n\geqslant 1}\sum_{k=0}^{n-1} b_k b_{n-1-k} z^n\\
&= 1 + \sum_{n\geqslant 1}\sum_{k=0}^{n-1} b_k b_{n-1-k} z^k z^{n-1-k} z = 1 + z\sum_{k\geqslant 0}\sum_{n\geqslant k+1} b_k b_{n-1-k} z^k z^{n-1-k}\\
&= 1 + z\sum_{k\geqslant 0}\left(\sum_{n\geqslant k+1} b_{n-1-k} z^{n-1-k}\right) b_k z^k = 1 + z\sum_{k\geqslant 0}\left(\sum_{m\geqslant 0} b_m z^m\right) b_k z^k\\
&= 1 + z\sum_{k\geqslant 0} B(z) b_k z^k = 1 + zB(z)\sum_{k\geqslant 0} b_k z^k = 1 + zB^2(z)
\end{aligned}
$$

Cette équation admet deux racines : $B_0(z) = \frac{1-\sqrt{1-4z}}{2z}$ et $B_1(z) = \frac{1+\sqrt{1-4z}}{2z}$. Une des deux racines est la solution recherchée. C'est celle dont le premier terme est tel que $b_0 = 1$.

$\sqrt{1-4z} = \sqrt{1+z} \circ (-4z)$ et $\mathsf{ord}(-4z) = 1$. On peut donc substituer $-4z$ à $z$ dans la série formelle $1 + \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n!} \prod_{i=0}^{n-1} (\frac{1}{2} - i) z^n = \sqrt{1+z}$. Alors

$$
\begin{aligned}
\sqrt{1-4z} &= 1 + \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n!} \prod_{i=0}^{n-1} (\frac{1}{2} - i)(-4z)^n = 1 + \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n!} \left( \frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2}) \dots (-\frac{2n-3}{2}) \right) (-4z)^n \\
&= 1 + \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n!} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n} \frac{(2n-3)!}{2^{n-2}(n-2)!} (-1)^n 4^n z^n = 1 + \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n!} \frac{(-1)^{2n-1} 4^n}{2^{2n-2}} \frac{(2n-3)!}{(n-2)!} z^n \\
&= 1 + \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n!} (-4) \frac{(2n-3)!}{(n-2)!} z^n = 1 - \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n!} \frac{(2n)!}{n!} 4 \frac{(n-1)n}{(2n-2)(2n-1)(2n)} z^n \\
&= 1 - \sum_{n \geqslant 1} \binom{2n}{n} \frac{1}{2n-1} z^n
\end{aligned}
$$

$B_0$ est donc la solution car :

$$
\begin{aligned}
B_0(z) &= \frac{1 - 1 + \sum_{n \geqslant 1} \binom{2n}{n} \frac{1}{2n-1} z^n}{2z} = \sum_{n \geqslant 1} \binom{2n}{n} \frac{1}{2(2n-1)} z^{n-1} \\
&= \sum_{m \geqslant 0} \binom{2(m+1)}{m+1} \frac{1}{2(2m+1)} z^m = \sum_{m \geqslant 0} \binom{2m}{m} \frac{1}{m+1} z^m
\end{aligned}
$$

Le nombre $\frac{\binom{2m}{m}}{m+1}$ est appelé le $m^{\text{ième}}$ nombre de Catalan.