概率论与数理统计提高

Table of Contents

知识点回顾

1 小概率原理

1.1 小概率事件

统计学上一般把 $P \leq 0.05$ 或 $P \leq 0.01$ 的事件称为小概率事件。

1.2 小概率原理

小概率事件在一次试验中几乎不可能发生. 利用该原理可对科研资料进行假设检验。

2 大数定律与中心极限定理

研究大量的随机现象，常常采用极限形式， 由此导致对极限定理进行研究。

极限定理最重要的有两种:

- 大数定理
- 中心极限定理

2.1 大数定理

大量重复试验的平均结果的稳定性

> 平均结果: 期望

- 定理1:当样本无限地增大，事件发生的频率将与概率趋于一致。
- 定理2:无穷多个独立地随机变量(样本值),如果具有相同的数学期望时,则这些变量(来自同一总体)的平均数将趋近于它们的数学期望。

> 作用：建立了频率与概率之间的统计关系，使得我们能够把概率论的原理应用于统计学的基础。

2.1.1 切比雪夫不等式

对于 $\mathrm{r.v.}\ X, EX$ 和 DX 存在, 则 $\forall \varepsilon > 0$ 都有:

$$P(|X-EX| \geq \varepsilon) \leq \frac{DX}{\varepsilon^2}$$

> ε是任意正数
> $|X-EX|$ 是变量到期望的距离
>
> 不等式左边是随机变量落在{期望附近区域(由 ε 划分)}的概率
> 右边表示方差与这个区域相对大的比值
> 也就是说, 这个区域越大, 落在区域外的概率绝对会越小(小于 $\frac{DX}{\varepsilon^2}$)
>
> *不等式右边分子是 ε^2 的原因是为了保证量纲和谐, 因为方差的量纲也有平方

2.1.2 切比雪夫大数定律

关于收敛与依概率收敛:

收敛: $a_n \to a, \forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, \text{when } n > N, |a_n - a| < \varepsilon$

> 存在某一项其后的**全部项**落在以 ε 为半径的区域内

依概率收敛: $x_n \xrightarrow{P} a$

$$\lim_{n\to\infty} P\{|X_n - a| < \varepsilon\} = 1$$

> 依概率收敛允许有不落在范围内的
> 收敛比依概率收敛更严格

设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ **相互独立, 服从同一分布**(独立同分布), 设 $X_i = \begin{cases} 1 & \text{发生} \\ 0 & \text{不发生} \end{cases}$, 则:

$$\begin{aligned}
&\text{期望}: EX_i = P \\
&\text{方差}: DX_i = P(1-P) \\
&\text{发生次数}: m_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \\
&\text{频率}: \frac{m_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \\
&\text{概率}: P = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \\
&\qquad\quad = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} EX_i \\
\\
&\text{有}: \\
&\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} EX_i\right| < \varepsilon\right\} = 1
\end{aligned}$$

> **频率依概率收敛于概率**

2.1.2.1 定义

对于 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 这 n 个**不相关的变量**, EX_i (每个变量的期望)和 DX_i (每个变量的方差)都存在, 方差有界, $DX_i \le M, \forall\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} EX_i\right| < \varepsilon\right\} = 1$$

> 注意: 切比雪夫大数定律没有要求这些变量独立同分布
>
> 均值: $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$
>
> 期望的均值: $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} EX_i$
>
> **均值依概率收敛于期望的均值**

2.1.3 切比雪夫($Chebyshev$)定理的特殊情况 (推论)

设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 独立同分布, 且具有相同的数学期望和方差 $E(X_k) = \mu, D(X_k) = \sigma^2, (k = 1, 2, \cdots)$, 做前 n 个随机变量的算数平均 $Y_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} X_k$, 则对于任意整数 ε, 有:

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} P\{|Y_n-\mu|<\varepsilon\} \\
=&\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k-\mu\right|<\varepsilon\right\} \\
=&1
\end{aligned}
$$

2.1.4 伯努利大数定理

设 μ_n 是 n 重伯努利试验中事件 A 发生的次数, 每次试验中 A 发生的概率为 $p(0<p<1)$, 则对任意 $\varepsilon>0$, 有:

> 伯努利试验服从二项分布

$$
\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{\mu_n}{n}-p\right|>\varepsilon\right\}=0
$$

即:

$$
\frac{\mu_n}{n}\xrightarrow{P}p
$$

> 注:当 n 很大时,事件发生的频率会「靠近」其概率.
> 当 n 趋于 无穷 时, 事件的频率 会 依概率收敛 于 事件的概率
>
> 「靠近」指的是依概率收敛

2.1.5 辛钦大数定理

> 独立同分布 $independently\ identically\ distribution \quad i.i.d.$

设随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ **相互独立, 服从同一分布**(独立同分布), 且具有相同的数学期望 (对方差无要求) $E(X_k)=\mu(k=1,2,\cdots)$,则对于任意 $\varepsilon>0$ 有:

$$
\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k-\mu\right|<\varepsilon\right\}=1
$$

> 说明: 伯努利大数定理是辛钦定理的特殊情况. n 个随机变量的算术平均值以概率收敛于算术平均值的数学期望.
>
> **均值依概率收敛于期望**
>
> 多次测量取平均值可以减小误差(接近真实值(期望))

以上三个大数定律条件越来越弱, 证明越来越困难

3 中心极限定理

现象是受大量相互独立的因素影响的

大量独立同分布的变量和的极限分布是正态分布

3.1 独立同分布情形的中心极限定理

设随机变量序列 $\{X_n,n\geq 1\}$ 满足:

- 相互独立
- 同分布
- 期望 $EX_n=\mu$ 和方差 $DX_n=\sigma^2(0<\sigma^2<+\infty)$ 都存在

对于任意的 $x\in R$,有

$$\lim_{x \to \infty} P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} -n\mu}{\sqrt{n}\,\sigma} \le x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t = \Phi(x)$$

设$\xi \sim N(0,1)$,则上式可重新写成

$$\lim_{n \to \infty} P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \le x\right) = P(\xi \le x)$$

也就是说,当 $n \to \infty$ 时, $\mathbf{r.\,v.}\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}$ 与标准正态 $\mathrm{r.\,v.}\ \xi$ 所起的作用越来越相当, 于是我们称 $\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}$ **渐进标准正态**

3.2 正态分布

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad -\infty < x < +\infty$$

消去 σ, μ 时就是标准正态分布, 也就是 $\sigma = 1, \mu = 0$, σ 是期望, μ 是标准差

$$\varphi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

正态分布标准化:

概率密度函数:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma} \varphi_0\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

概率分布:

$$\Phi(x) = \Phi_0\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

3.3 均匀分布

$X \sim U(a,b)$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leqslant x \leqslant b \\ 0 & \text{Other} \end{cases}$$

> 区间上的积分为1

$$EX = \frac{b+a}{2} \quad DX = \frac{(b-a)^2}{12}$$

3.4 指数分布

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\leqslant 0\end{cases}$$

> $\lambda>0\quad X\sim \mathrm{Exp}(\lambda)$

$$EX=\frac{1}{\lambda}\quad DX=\frac{1}{\lambda^2}$$

> 无记忆性 寿命
> 自身的每一部分都与自身相似

3.5 泊松分布

$$P\{x=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\quad k=0,1,2,3\cdots$$

电话台呼叫次数,公共设施(等车,收银台...)使用次数

$$EX=\lambda\quad DX=\lambda$$

> 二项分布可以使用泊松分布近似
>
> $\lambda=np$

3.5.1 独立同分布中心极限定理的应用

每日有顾客 100 人, 消费金额 $[0,60]$, 每个人的购买金额之间相互独立, 求日销售额超过 3500 元的概率

解:

$$\begin{gathered}\text{设第 } i \text{ 人购买金额为 } X_i\\ EX_i=30\quad DX_i=\frac{60^2}{12}=300\\ \text{即求}\sum_{i=1}^{100}X_i>3500\\ \frac{\sum X_i-3000}{100\sqrt{3}}\sim N(0,1)\end{gathered}$$

$$\begin{aligned}P\left(\sum X_i>3500\right)&=1-P\left(\sum X_i\le 3500\right)\\&=1-P\left(\frac{\sum X_i-3000}{100\sqrt{3}}\le\frac{3500-3000}{100\sqrt{3}}\right)\\&=1-\Phi_0(2.887)\\&=0.002\end{aligned}$$

> - 一般解题步骤
>   - 求期望与方差
>   - 标准化
>   - 求正态分布

3.6 De Moivre - Laplace 中心极限定理

是独立同分布中心极限定理的特例

随机变量 $Y \sim B(n,p)$ (服从二项分布)

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{Y_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leqslant x\right) = \Phi_0(x)$$

> $$Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \quad X_i = \begin{cases} 1, & \text{发生} \\ 0, & \text{未发生} \end{cases}$$

> $EX_i = p \quad DX_i = p(1-p)$

用正态分布近似二项分布, 因为二项分布计算麻烦

应用:

保险, 每人死亡概率为 0.005, 共 10000 人投保, 求死亡人数不超过 70 人的概率

$$\begin{aligned} &\text{解：设死亡人数为} X \\ P(X \leq 70) &= \sum_{k=0}^{70} C_{10000}^{k} \cdot 0.005^k \cdot 0.995^{10000-k} \\ &\text{使用正态分布近似：} \\ P(X \leq 70) &= P\left(\frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq \frac{70-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \\ &= \Phi_0(2.84) \\ &= 0.9977 \end{aligned}$$

如果需要计算死亡 k 人概率:

$$\begin{aligned} P(X=k) &= P(k - \frac{1}{2} < X < k + \frac{1}{2}) \\ &= P\left(\frac{k-\frac{1}{2}-np}{\sqrt{np(1-p)}} < \frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}} < \frac{k+\frac{1}{2}-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \\ &= \Phi_0\left(\frac{k+\frac{1}{2}-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi_0\left(\frac{k-\frac{1}{2}-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \end{aligned}$$

> 关于二项分布的近似
>
> - n 大, np 大小适中(小于 10)　　使用泊松分布近似
> - n 大, np 也很大　　使用正态分布近似

样本及抽样分布

1 总体

研究对象的全体

> 总体是一个带有确定概率分布的随机变量

2 样本

抽自总体的若干个体

2.1 样本容量

样本中个体的个数

3 简单随机样本

样本 $X_1, \cdots, X_n$ 满足:

- 它们相互独立
- 它们与总体具有相同分布

则称 $X_1, \cdots, X_n$ 为简单随机样本. 它们的观测值记为 $x_1, \cdots, x_n$, 称为样本值

3.1 特点

独立, 同分布(具有代表性, 代表总体)

3.2 获取方式

有放回抽样

> 统计是从手中已有的资料(样本观察值), 去推断总体的情况(总体分布)

4 样本的联合分布

样本 $X_1, \cdots, X_n$ 是一个 n 维随机变量

- 离散总体 X 的概率分布为 $P(X=x_i)=p(x_i)$ 则样本联合分布为:

$$P\left\{X_1=x_1, X_2=x_2, \cdots, X_n=x_n\right\}=p(x_1)p(x_2)\cdots p(x_n)$$

- 连续总体 X 的概率分布为 $f(x)$, 则样本联合密度为:

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)=f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)$$

例题

总体 $X \sim B(1,p)$, 求样本联合分布.

总体 $X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$, 求样本联合密度.

总体 $X \sim U[a,b]$ 呢?

5 统计量

不含**未知参数**的样本的函数

5.1 常用统计量

5.1.1 样本均值

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$$

5.1.2 未修正的样本方差

$$S_0^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2$$

5.1.3 样本方差

$$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2$$

5.1.4 样本标准差

$$S=\sqrt{S^2}=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2}$$

5.1.5 样本 k 阶原点矩

$$A_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k$$

> 1 阶原点矩就是均值

5.1.6 样本 k 阶中心距

$$B_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^k$$

> 2 阶中心距就是未修正的样本方差
>
> $$S^2=\frac{n}{n-1}B_2$$

5.1.7 协方差

$$S_{12}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})(Y_i-\overline{Y})$$

5.1.8 相关系数

$$R=\frac{S_{12}}{S_1S_2}$$

设总体 X 的均值为 $EX=\mu$, 方差为 $DX=\sigma^2$, 样本 $(X_1,X_2,\dots,X_n)$ 来自总体 X, 则

- $E\overline{X}=\mu$
- $D\overline{X}=\frac{1}{n}\sigma^2$
- $ES^2=\sigma^2$

6 抽样分布

统计量的分布

6.1 χ^2 分布

定义：n 个独立的标准正态变量平方和的分布称为自由度为 n 的 χ^2 分布
自由度：独立变量的个数 n

6.1.1 性质

- 单峰曲线, $n-2$ 处取最大值, 不对称
- n 越大越对称, n 很大的时候可以近似为正态分布

6.1.2 定理 ★

- 卡方分布的定义 $X_1, \cdots, X_n$ 独立, 且服从 $N(0,1)$, 则:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \sim \chi^2(n)$$

> **标准正态分布**取平方后的和是卡方分布
> 自由度 n 取决于求和变量的个数

- ★若 $X \sim \chi^2(n)$, 则 $EX = n. DX = 2n$

由中心极限定理, $X \sim \chi^2(n), n$ 充分大时:

$$\frac{X-n}{\sqrt{2n}} \sim N(0,1)$$

- χ^2 具有可加性

$X \sim \chi^2(n), Y \sim \chi^2(m), X, Y$独立, $X+Y \sim \chi^2(m+n)$

> 具有可加性的分布: 二项分布, 泊松分布, 正态分布

6.2 t 分布

学生分布 $\longleftrightarrow$ **小样本**分布
定义：若 $X \sim N(0,1), Y \sim \chi^2(n)$, 且 X 与 Y 相互独立，则 $T = \frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}} \sim t(n)$

n 是自由度

> 分布函数是偶函数
>
> $n \geq 30$ 时与正态分布区别很小

性质：

- $E(T) = 0, D(T) = \frac{n-2}{n}$
- t 分布的极限分布是标准正态分布
- t 分布的分布密度具有对称性

6.3 F 分布

定义：若 $U \sim \chi^2(n_1), V \sim \chi^2(n_2)$ 且 U, V 独立, 则 $\frac{X/n_1}{Y/n_2} \sim F(n_1, n_2)$

> 由定义有:
>
> $$F \sim F(n_1, n_2) \quad \to \quad \frac{1}{F} \sim F(n_2, n_1)$$
>
> 即 F 分布的倒数也服从 F 分布

- F 分布的上 α 分位数

$$F_{1-\alpha}(n_1, n_2) = \frac{1}{F_\alpha(n_2, n_1)}$$

> 应试中无需关心以上几种分布的概率密度函数, 记住这些分布的基本定义和性质即可

7 常用分布的分位数

若随机变量 X 的分布密度为 $f(x), P\{X > x_\alpha\} = \alpha$, 则称 x_α 为该分布的上 α 分位数

> 大于这个数的概率为 α

若随机变量 X 的分布密度为 $f(x), P\{X \le x_\alpha\} = \alpha$, 则称 x_α 为该分布的下 α 分位数

若随机变量 X 的分布密度为 $f(x), P\{X \le \lambda_1\} = \frac{\alpha}{2}, P\{X > \lambda_1\} = \frac{\alpha}{2}$, 则称 x_α 为该分布的下 α 分位数

8 正态总体下的抽样分布

以下出现的 S 均为修正样本方差

8.1 一个正态总体的抽样分布

总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 样本$\{X_1, \cdots, X_n\}, \overline{X} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$, $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$ 有:

$$\begin{aligned} &(1) \quad \overline{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n}) \\ &\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0,1) \end{aligned}$$

$$(2) \quad \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 \sim \chi^2(n-1)$$

$$(3) \quad \overline{X} \text{ 与 } S^2 \text{ 独立}$$

$$(4) \quad \frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

8.2 两个正态总体的抽样分布

总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2), Y \sim N(\mu, \sigma^2)$, 样本$\{X_1, \cdots, X_n\}, \{Y_1, \cdots, Y_n\}$

$$(1) \quad \frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\sigma_1/n_1+\sigma_2/n_2}} \sim N(0,1)$$

$$(2) \quad \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \sim F(n_1-1, n_2-1)$$

$$(3) \quad \text{when } \sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$$

$$T=\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_1}}} \sim t(n_1+n_2-2)$$

8.3 非正态总体的样本均值分布

由独立同分布的中心极限定理, 当 n 充分大时, 非正态总体的样本均值 $\overline{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ (近似服从)

参数估计

分布	参数
$N(\mu,\sigma^2)$	μ,σ
$p(\lambda)$	λ
$U(a,b)$	a,b

知道总体服从的分布, 取总体中的样本, 通过构造函数, 求总体服从的分布的参数

参数空间: 参数的取值范围.

1 点估计

1.1 矩估计

(原点矩)

总体的矩	$\leftarrow$	样本的矩
一阶: EX	$\leftarrow$	一阶: $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum X_i$
二阶: EX^2	$\leftarrow$	二阶: $A_2=\frac{1}{n}\sum X_i^2$

(1) 总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2),(X_1,\cdots,X_n)$ 为样本, 求 μ,σ^2 的矩估计

解: $EX=\mu,\quad \overline{X}=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$

用样本的一阶矩代替总体的一阶矩

$\hat{\mu}=\overline{X}$

> 加 hat 表示不是真实的 μ, 是估计的

$DX=EX^2-(EX)^2\quad EX^2=DX+(EX)^2=\mu^2+\sigma^2$

$A_2=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2$

$\hat{\sigma}^2=A_2-\hat{\mu}^2=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2-\overline{X}=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2=B_2$

> B_2 : 二阶中心矩

(2) 总体 $X\sim p(\lambda),(X_1,\cdots,X_n)$ 为样本, 求 λ 的矩估计

解: $EX=\lambda,\hat{\lambda}=\overline{X}\quad \hat{\lambda}=B_2$

> 只有一个变量, 用一阶原点矩估计

1.2 极大似然估计

常见分布的分布函数

- 写出总体的 概率(离散)/密度(连续) 函数
- 写出似然函数 $L(\lambda)$ 参数不一定是 λ
- 两边取 $\ln$
  $\ln L(\lambda)$
- 两边对 λ 求导, 令导数等于 0

总体 $X \sim p(\lambda), (X_1, \cdots, X_n)$ 为样本, 求 λ 的极大似然估计

$$
\begin{aligned}
&\text{总体的概率函数为：} \\
P(X=k) &= \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \\
&\text{则 } \lambda \text{ 的似然函数为：} \\
L(\lambda) &= \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}e^{-\lambda} \\
&= \frac{\lambda^{x_1+x_2+\cdots+x_n}}{\prod\limits_{i=1}^{n} x_i!}e^{-n\lambda} \\
&\text{两边取 } \ln \\
\ln L(\lambda) &= -\ln\prod_{i=1}^{n}x_i! + (x_1+\cdots+x_n)\ln\lambda - n\lambda \\
&\text{两边对 } \lambda \text{ 求导} \\
\frac{\mathrm{d}\ln L(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda} &= \frac{x_1+\cdots+x_n}{\lambda} - n = 0 \\
\lambda &= \frac{x_1+\cdots+x_n}{n} = \overline{X}
\end{aligned}
$$

> 如果是两个参数 就分别求偏导

$X \sim U(\theta_1, \theta_2), (X_1, \cdots, X_n)$ **为样本, 求 θ_1, θ_2 的极大似然估计**

$$
\begin{gathered}
\text{密度函数：} f(x) \begin{cases} \frac{1}{\theta_2-\theta_1} & x \in [\theta_1, \theta_2] \\ 0 & \text{other} \end{cases} \\
\text{似然函数：} L(\theta_1, \theta_2) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\theta_2-\theta_1} = \frac{1}{(\theta_2-\theta_1)^n} \\
\text{求似然函数的最大值, 就是求}(\theta_2-\theta_1)^n\text{的最小值} \\
\text{就是让区间}[\theta_1, \theta_2]\text{最小} \\
\theta_1 = min\{X_1, \cdots, X_n\} \\
\theta_2 = max\{X_1, \cdots, X_n\}
\end{gathered}
$$

1.3 点估计的优良性准则

1.3.1 无偏性

$E\hat{\theta}=\theta$

参数估计值的期望等于真实值

以下结论与总体服从的分布无关

1. 总体 $X, EX=\mu, DX=\sigma^2, (X_1,\cdots,X_2)$ 为样本
   - $\overline{X}$ 是 μ 的无偏估计 $E\overline{X}=\mu$
   - 样本方差 S^2 是 σ^2 的无偏估计 $ES^2=\sigma^2$
     - 这里的方差是修正样本方差 $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$
   - 未修正样本方差 S_0^2 是 σ^2 的有偏估计
2. $\hat{\theta}$ 是 θ 的无偏估计, $g(\hat{\theta})$ 不一定是 $g(\theta)$ 的无偏估计
   - S^2 是 σ^2 的无偏估计, S 不是 σ 无偏估计
   - $$\begin{aligned} DS&=ES^2-(ES)^2\\ &=\sigma^2-(ES)^2\\ ES&=\sqrt{\sigma^2-DS}\leq\sigma \end{aligned}$$
3. $$\begin{aligned} &\mu=EX\quad(X_1,\cdots,X_n)\\ &\hat{\mu}=C_1X_1+\cdots+C_nX_n\\ &\text{如果 } C_1+\cdots+C_n=1\\ &\text{则 } \hat{\mu} \text{ 是 } \mu \text{ 的无偏估计} \end{aligned}$$

1.3.2 有效性

估计值的方差越小越有效

$$D(\hat{\theta}_1)\leq D(\hat{\theta}_2)$$

1.3.3 相合性 (一致性)

$$\lim_{n\to+\infty}P(|\hat{\theta}-\theta|<\varepsilon)=1$$

> 相合性一般不考

2 区间估计

区间估计中, 区间越小越好

- 区间的长度
- 落在区间内的概率
  $[\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2]$ 能套住 θ 的概率

  > θ 是未知的, 但是确定的
  > 所以一般不说 θ 落在区间内, 而是说区间能套住 θ

$$P(\hat{\theta}_1\leq\theta\leq\hat{\theta}_2)=1-\alpha$$

> $1-\alpha$: 置信度
>
> $[\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2]$: 需要估计的区间

做题时, 会给出置信度, 求置信区间

2.1 枢轴变量

$$I = I(T, \theta)$$

> I 服从已知分布 F, 且该分布与 θ 无关
> T 是已知的, θ 是未知参数

给定 $1-\alpha$, 确定 F 的上 $\frac{\alpha}{2}$ 分位数 $U_{\frac{\alpha}{2}}$, 上 $(1-\frac{\alpha}{2})$ 分位数 $U_{1-\frac{\alpha}{2}}$

$$P(U_{1-\frac{\alpha}{2}} \le I(T,\theta) \le U_{\frac{\alpha}{2}}) = 1-\alpha$$

给出置信度, 求上下界

2.2 一个正态总体均值和方差的区间估计

- σ^2 已知, 估计 μ

构造枢轴变量:

$$U = \frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{\sigma} \sim N(0,1)$$

> μ 是未知参数
> n 是样本数, 已知
> $\overline{X}$ 是样本均值, 已知
> σ 总体方差, 已知

给定 $1-\alpha$, 令 $P(U > U_{\frac{\alpha}{2}}) = \frac{\alpha}{2}, \Phi_0(U_{\frac{\alpha}{2}}) = 1-\frac{\alpha}{2}$

查表 $U_{\frac{\alpha}{2}}$, 得到:

$$P\left(-U_{\frac{\alpha}{2}} \le \frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{\sigma} \le U_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

然后把 μ 拿出来:

$$\overline{X} - \frac{\sigma U_{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}} \le \mu \le \overline{X} + \frac{\sigma U_{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}$$

---

(1) 5 **个样本:** $1650, 1700, 1680, 1820, 1800, X \sim N(\mu, 9)$

> $n=5, \quad \overline{X}=1730, \quad \sigma^2=9, \quad \sigma=3, \quad \alpha=0.05$

$$\text{查表}: U_{0.025} = 1.96$$
$$-1.96 \le \frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{\sigma} \le 1.96$$
$$-1.96 \le \frac{\sqrt{5}(1730-\mu)}{3} \le 1.96$$
$$\mu \in [1727.37, 1732.63]$$

- σ^2 未知, 估计 μ

> 未知 σ^2, 不可用

构造枢轴变量:

$$T = \frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{S} \sim t(n-1)$$

> μ 是未知参数
> n 是样本数, 已知
> $\overline{X}$ 是样本均值, 已知
> S 样本标准差, 已知
>
> $$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$$
>
> S 是样本修正标准差

给定 $1-\alpha$, 上 $\frac{\alpha}{2}$ 分位数, 查表: $t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$

$$P\left(-t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \le \frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{S} \le t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right) = 1-\alpha$$

然后把 μ 拿出来:

$$\overline{X} - \frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \le \mu \le \overline{X} + \frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$$

- μ 已知, 对 σ^2 估计

构造枢轴变量:

$$\chi^2 = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 \sim \chi^2(n)$$

给定 $1-\alpha$, 查表: $\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n), \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)$

$$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n) \le \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 \le \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)$$

把 σ^2 拿出来:

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)} \le \sigma^2 \le \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)}$$

- μ 未知, 估计 σ^2

构造枢轴变量:

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

对给定的 $1-\alpha$ 查表: $\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1), \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$

$$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) \le \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \le \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$$

把 σ^2 拿出来

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)} \le \sigma^2 \le \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}$$

估计参数	其他条件	枢轴变量	置信区间
μ	σ^2 已知	$U=\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{\sigma}\sim N(0,1)$	$\left[\overline{X}-\frac{\sigma U_{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}},\overline{X}+\frac{\sigma U_{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}\right]$
μ	σ^2 未知	$T=\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{S}\sim t(n-1)$	$\left[\overline{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1),\overline{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right]$
σ^2	μ 已知	$\chi^2=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\sim\chi^2(n)$	$\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)},\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)}\right]$
σ^2	μ 未知	$\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$	$\left[\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\le\sigma^2\le\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right]$

2.3 两个正态总体均值差和方差比的区间估计

估计两个正态总体均值差 $\mu_1-\mu_2$, 方差比 $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的置信区间

某个性质的变化范围和波动幅度

- $\mu_1-\mu_2$
  - 置信区间下限大于 $0\rightarrow\mu_1>\mu_2$
    - 认为 μ 发生显著变化
  - 置信区间包含 0
    - 认为 μ 无显著变化
- $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$
  - 置信区间包含 1
    - σ_1^2,σ_2^2 无显著差别

> 两个正态总体的抽样分布:
>
> $$(1)\quad \frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\sigma_1/n_1+\sigma_2/n_2}}\sim N(0,1)$$
>
> $$(2)\quad \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)$$
>
> $$(3)\quad \text{when } \sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$$
> $$T=\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_1}}}\sim t(n_1+n_2-2)$$

2.3.1 两个总体均值差 $\mu_1-\mu_2$ 的置信区间

- 已知 σ_1^2,σ_2^2 , 估计 $\mu_1-\mu_2$

枢轴变量: $E\overline{X}=\mu_1,E\overline{Y}=\mu_2\quad E(\overline{X}-\overline{Y})=\mu_1-\mu_2$

$\overline{X}-\overline{Y}$ 是 $\mu_1-\mu_2$ 的无偏估计,
$\overline{X}\sim N(\mu_1,\frac{\sigma_1^2}{n_1}),\overline{Y}\sim N(\mu_2,\frac{\sigma_2^2}{n_2}),\overline{X}-\overline{Y}\sim N(\mu_1-\mu_2,\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2})$

$$\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}\sim N(0,1)$$

$$P\left(-\Phi_0\left(\frac{\alpha}{2}\right)\leq\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}\leq\Phi_0\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)=1-\alpha$$

$$\overline{X}-\overline{Y}-\Phi_0\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\leq\mu_1-\mu_2\leq\overline{X}-\overline{Y}+\Phi_0\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

- $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$, σ^2 未知, 估计 $\mu_1-\mu_2$

$$\text{when } \sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$$

$$T=\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_1}}}\sim t(n_1+n_2-2)$$

$$P\left\{-t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)<\frac{\overline{X}-\overline{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}<t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)\right\}=1-\alpha$$

$$\overline{X}-\overline{Y}-t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)\cdot\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\leq$$
$$\mu_1-\mu_2$$
$$\leq\overline{X}-\overline{Y}+t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)\cdot\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}$$

为比较 I,II 两种型号步枪子弹的枪口速度, 随机地取 I 型子弹 10 发, 得到枪口速度的平均值为 $\overline{x}_1=500(m/s)$, 标准差 $s_1=1.10(m/s)$, 随机地取 II 型子弹 20 发, 得到枪口速度的平均值为 $\overline{x}_2=496(m/s)$, 标准差 $s_2=1.20(m/s)$. 假设两总体都可认为近似地服从正态分布. 且生产过程可认为方差相等. 求两总体均值差 $\mu_1-\mu_2$ 的置信水平为 0.95 的置信区间.

> $\sigma_1=\sigma_2$ 未知

$$\text{枢轴变量：}\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\sim t\left(n_1+n_2-2\right)$$

$$\text{带入置信区间：}$$

$$\overline{X}-\overline{Y}-t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)\cdot\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\leq$$

$$\mu_1-\mu_2$$

$$\leq\overline{X}-\overline{Y}+t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)\cdot\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}$$

$$1-\alpha=0.95\quad\alpha=0.05\quad\frac{\alpha}{2}=0.05$$

$$n_1=10\quad n_2=20\quad n_1+n_2-2=28$$

$$t_{0.025}(28)=2.0484$$

$$\text{带入计算得：}[3.07,4.93]$$

2.3.2 两个总体方差比 $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的置信区间

枢轴变量:

$$\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)$$

$$P\left\{F_{1-\frac{\alpha}{2}}\left(n_1-1,n_2-1\right)<\frac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2}<F_{\frac{\alpha}{2}}\left(n_1-1,n_2-1\right)\right\}=1-\alpha$$

$$\frac{s_1^2}{s_2^2}\cdot\frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}}\left(n_1-1,n_2-1\right)}<\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}<\frac{s_1^2}{s_2^2}\cdot\frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}\left(n_1-1,n_2-1\right)}$$

假设检验

1 基本概念

1.1 假设检验问题

- 数理统计中, 总体分布通常是未知的
    - 类型未知
    - 类型已知, 但参数未知
- 对总体分布的「某种描述」称为「假设」
    - 假设分为
        - 参数假设
        - 非参数假设
    - 假设检验分为
        - 参数假设检验
        - 非参数假设检验

1.1.1 如何提出假设

- **例1 : 某化工厂用包装机自动包装洗衣粉, 已知洗衣粉重量(克) $X \sim N(\mu, 2^2)$, 机器正常工作时, $\mu = 500\ g$. 某日开工后, 随机取 9 袋, 其重量: $505, 499, 502, 506, 498, 498, 497, 510, 503$, 假定 $\sigma = 2$ 不变, 问包装机工作是否正常?**

$$\text{引起误差的原因}\begin{cases}\text{随机误差(电压不稳等原因, 正常)}\\ \text{条件误差(机器出现故障, 不正常)}\end{cases}$$

    - 假设:
        - 不能轻易推翻的 设为原假设 $H_0 : \mu = 500$
        - 对立面 设为备择假设: $H_1 : \mu \neq 500$
        - > 不能轻易说设备故障
- **例2 : 某厂生产灯管, 寿命 $X \sim N(\mu, 40000)$, 平均寿命 $\mu = 1500$ 小时, 采用新工艺后对其进行抽样检测, 测得平均寿命 $\overline{x} = 1675$ 小时, 问采用新工艺后, 寿命是否显著提高?**
    - 如何提出假设?
        - 原假设(零假设): H_0: $\mu = 1500$ 采用新工艺后寿命没有变化
        - 备择假设(对立假设): $H_1 : \mu > 1500$ 采用新工艺后寿命显著提高
    - 结论:
        - 接受 H_0, 拒绝 H_1 : 采用新工艺后寿命没有变化
        - 接受 H_1, 拒绝 H_0 : 采用新工艺后寿命显著提高
        - > 不能轻易说「**显著**」**提高**
- **例3 : 某牌洗涤剂在其产品说明书上声称: 平均净含量不少于 500 克. 从消费者利益出发, 有关质检人员抽检一批产品来验证其说明是否属实**
    - 原假设: $H_0 : \mu \geq 500$
    - 备择假设: $H_1 : \mu < 500$
    - > 「从消费者角度出发」不希望**虚标**

- **例4 : 要考察温服对针织品断裂强力的影响, 为了比较 70 ℃ 与 80 ℃ 的影响有无差别, 分别做 5 次试验: 70 ℃ 强力: $20.5, 18.8, 19.8, 20.9, 21.5;\quad 80$ ℃ 强力: $17.7, 20.3, 20.0, 18.1, 19.0$ 假定强力分别服从正态分布 $N(\mu_1, \sigma^2), N(\mu_2, \sigma^2)$, 问两种温度下的强力是否有显著性差异**
  - 原假设: $H_0 : \mu_1 = \mu_2$
  - 备择假设: $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$
  - > 不能轻易说有「**显著**」差异

1.2 假设检验基本概念

- 用样本信息对提出的假设进行检验并判断假设成立与否
- **例5 掷一枚骰子 100次, 1 点, $\cdots$, 6 点出现次数依次为 $16, 19, 18, 17, 16, 14$, 问骰子是否均匀?**
  - 原假设 $H_0 : P(X = k) = \frac{1}{6}, (k = 1, 2, \cdots, 6)$
  - 备择假设 $H_1 : P(X = k) \neq \frac{1}{6}, (k = 1, 2, \cdots, 6)$
  - 以上假设不属于参数假设, 因为假设的是总体服从的分布

1.2.1 假设

- 对总体未知分布的某种论断
- 分为参数假设和非参数假设

1.2.2 假设检验

- 检验假设是否成立的过程
- 分为参数假设检验和非参数假设检验

1.2.3 假设检验问题

- 前面的例 1 到例 5 都是假设检验问题
- 显著性假设检验问题
  - 唯一假设 H_0
- H_0 对 H_1 假设假设检验问题

1.3 假设检验的思想与步骤

- 例1 : 某化工厂用包装机自动包装洗衣粉, 已知洗衣粉重量(克) $X \sim N(\mu, 2^2)$, 机器正常工作时, $\mu = 500\ g$. 某日开工后, 随机取 9 袋, 其重量: 505, 499, 502, 506, 498, 498, 497, 510, 503, 假定 $\sigma = 2$ 不变, 问包装机工作是否正常?
- 解 : 提出 $H_0 : \mu = 500, H_1 : \mu \neq 500$, 假定 H_0 成立, $X \sim N(500, 4)$

$$\overline{X} \sim N(500, \frac{4}{9})$$

$$\text{标准化} : U = \frac{\overline{X} - 500}{\frac{2}{3}} \sim N(0, 1)$$

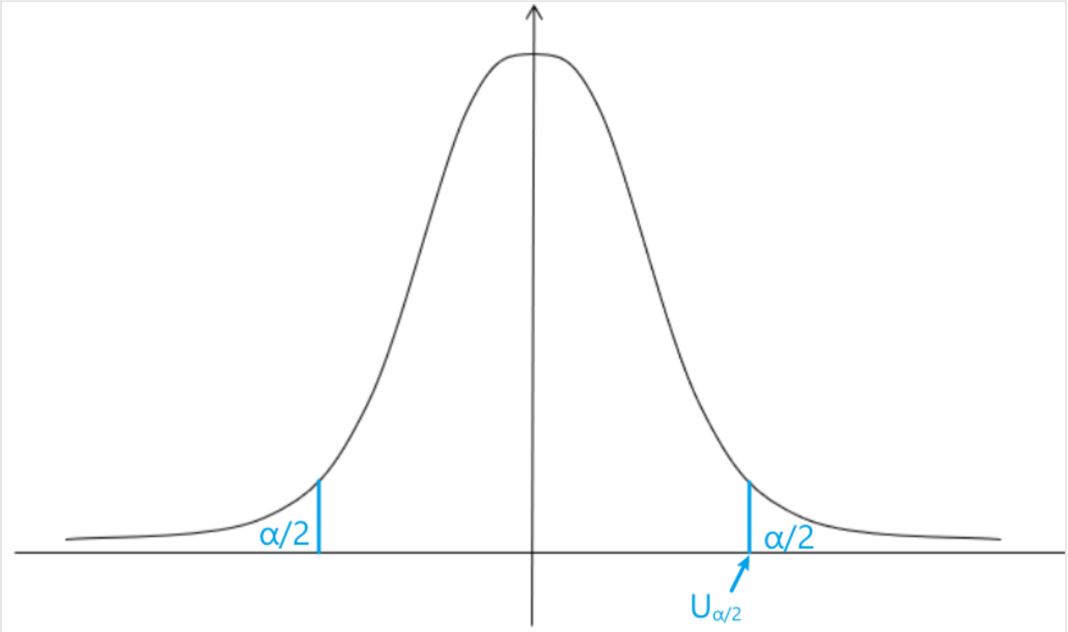
$$\text{计算}\overline{X} : \overline{X} = \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9} X_i = 502$$

$$\text{小概率事件}, \alpha = 0.05, U_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$$

$$|U| = \frac{|502 - 500|}{\frac{2}{3}} = 3 > U_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$$

$$\text{一次抽样是小概率事件, 而理论上小概率事件不发生}$$

$$\text{所以拒绝}H_0, \text{接受}H_1, \text{机器工作不正常}$$

- 关注小概率事件是否发生
- 

- 思想:
  - 构造统计量 T, 假设 H_0 成立, T 的分布已知(在例 1 中, 检验统计量为 U)
  - 构造检验法则, 找到小概率事件 $P(T \in I) = \alpha$
  - $P((x_1, \cdots, x_n) \in W) = \alpha$, 样本落在 W 中, 使小概率事件发生, 与小概率事件不发生原理矛盾, 称 W 为 H_0 的拒绝域
  - $P((x_1, \cdots, x_n) \in \overline{W}) = 1 - \alpha$, 样本落在 W 中, 大概率事件发生, 称 $\overline{W}$ 为 H_0 的接受域
  - 计算统计量 T 的值, 看落在拒绝域内还是接受域内
- 步骤:
  1. 提出原假设 H_0, 与备择假设 H_1
  2. 假定 H_0 成立, 取统计量 T, T 分布已知
  3. 对给定的 α, 找到拒绝域和接受域
  4. 由样本 $(x_1, \cdots, x_n)$, 求出统计量 T, 看样本值落在拒绝域还是接受域内

1.4 两类错误

做出的推断不一定正确

1.4.1 弃真错误

H_0 为真, 通过样本做出的推断是拒绝 H_0, 小概率事件发生了

$$P\{\text{拒绝}H_0|H_0\text{为真}\} = \alpha$$

1.4.2 纳伪错误

H_0 为假, 通过样本做出的推断是接受 H_0,

$$P\{\text{接受}H_0|H_0\text{为假}\} = \beta$$

决策\总体情况	H_0 为真	H_0为假
接受 H_0	正确决策 $(1-\alpha)$	纳伪错误 (β)
拒绝 H_0	弃真错误 (α)	正确决策 $(1-\beta)$

2 一个正态总体的参数假设检验

$X \sim N(\mu, \sigma^2), (X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是取自 X 的样本, 检验水平为 α

2.1 μ 的假设检验

2.1.1 提出假设

1. $H_0: \mu = \mu_0, H_1: \mu \neq \mu_0$ 双侧假设
2. $H_0: \mu \leq \mu_0, H_1: \mu > \mu_0$ 单侧假设检验 (右侧)
3. $H_0: \mu \geq \mu_0, H_1: \mu < \mu_0$ 单侧假设检验 (左侧)

> 2,3 情况在得到统计量的分布时, 假设 $\mu = \mu_0$, 然后再看是左侧还是右侧

2.1.2 $\sigma^2 = \sigma_0^2$ 已知, 检验 $H_0: \mu = \mu_0$ (U 检验)

1. $H_0: \mu = \mu_0, H_1: \mu \neq \mu_0$
2. 假定 H_0 成立, $X \sim N(\mu_0, \sigma_0^2)$
   取统计量 U

$$U = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

3. 给定 α 由 $P\{|U| > U_{\frac{\alpha}{2}}\} = \alpha$, 查表 得到 $U_{\frac{\alpha}{2}}$
4. 利用样本数据, 计算 U 的值, 比较 $|U|$ 和 $U_{\frac{\alpha}{2}}$

> 单侧检验 改变第三步即可

例1 某面粉厂用包装机包装面粉, 每袋面粉的标准重量为 10 千克, 现任取 5 袋: $10.1, 10, 9.8, 9.9, 9.9$ 假设袋装面粉中 $X \sim N(\mu, 0.1^2)$, 问包装机是否正常工作?

提出 $H_0: \mu = 10$, $H_1: \mu \neq 10$.
假定 H_0 成立, $X \sim N(10, 0.1^2)$
$U = \frac{\overline{X} - 10}{0.1/\sqrt{5}} \sim N(0,1)$
拒绝域: $W = \{(x_1, \cdots, x_n) \mid |U| > 1.96\}$
$\bar{x} = 9.94$, $|U| = 1.34 < U_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$
接受 H_0, 认为包装机正常工作.

例2 规定灯泡的平均寿命不低于 1200 小时, 现任取 5 只灯泡, 测寿命: $1170, 1210, 1220, 1180, 1190$ 设灯泡寿命 $X \sim N(\mu, 20^2)$, 问这批灯泡是否合格?

> 单侧检验, 左侧拒绝域

2.1.3 σ^2 未知 检验 $H_0: \mu = \mu_0$ (T 检验) ★

σ^2 总体方差未知, 使用样本方差代替, 构造的检验量服从 t 分布

1. $H_0: \mu = \mu_0, H_1: \mu \neq \mu_0$
2. 假定 H_0 成立,
   取统计量 T

$$T = \frac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

3. 给定 α 由 $P\{|T| > t_{\frac{\alpha}{2}}\} = \alpha$, 查表 得到 $t_{\frac{\alpha}{2}}$
4. 利用样本数据, 计算 T 的值, 比较 $|T|$ 和 $t_{\frac{\alpha}{2}}$

> 单侧检验 改变第三步即可

例1 从一批灯泡中取 50 只测寿命, $\overline{x} = 1900$ 小时, $S = 490$ 小时, 以 $\alpha = 1$ % 的水平检验这批灯泡平均寿命是否是 2000 小时(假设灯泡寿命 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$)

提出 $H_0: \mu=2000$, $H_1: \mu \neq 2000$.

假定 H_0 成立. 取 $T = \dfrac{\overline{X}-2000}{S/\sqrt{n}} \sim t(49)$

$\alpha = 0.01$. 查表: $t_{\frac{\alpha}{2}}(49) = 2.68$.

拒绝域: $W = \{(x_1, \cdots, x_{50}) \mid |T| > 2.68\}$

$|T| = \left|\dfrac{1900-2000}{490/\sqrt{50}}\right| = 1.44 < 2.68$

接受 H_0, ∴ 寿命是2000小时.

2.2 σ^2 的假设检验

2.2.1 提出假设

1. $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2, H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$ 双侧假设
2. $H_0: \sigma^2 \leq \sigma_0^2, H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$ 单侧假设检验 (右侧)
3. $H_0: \sigma^2 \geq \sigma_0^2, H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$ 单侧假设检验 (左侧)

解题步骤

2.2.2 $\mu = \mu_0$ 已知, 检验 $\sigma^2 = \sigma_0^2$

1. $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2, H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$
2. 假定 H_0 成立, $X \sim N(\mu_0, \sigma_0^2)$
   取统计量 χ^2

$$\chi^2=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2}{\sigma_0^2}\sim\chi^2(n)$$

3. 对于给定的 α 由 $P\left(\chi^2>\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)\right)=P\left(\chi^2<\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)\right)=\frac{\alpha}{2}$
4. 计算 χ^2 值, 比较 下结论

> 单侧思路类似

2.2.3 μ 未知, 检验 $\sigma^2=\sigma_0^2$ ★

使用 $\overline{X}$ 代替 μ

$$\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$$

1. $H_0:\sigma^2=\sigma_0^2, H_1:\sigma^2\neq\sigma_0^2$
2. 假定 H_0 成立, $X\sim N(\mu_0,\sigma_0^2)$
   取统计量 χ^2

$$\chi^2=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{\sigma_0^2}=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$$

3. 对于给定的 α 由 $P\left(\chi^2>\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right)=P\left(\chi^2<\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right)=\frac{\alpha}{2}$
4. 计算 χ^2 值, 比较 下结论

例1 设成年男子身高 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$, 现从某团体随机抽 20 名: $\overline{x}=1.702$ (米), $S=0.007$ 试检验总体方差是否是 0.006 (米) ?($\alpha=0.05$)

提出 $H_0: \sigma^2=0.006$, $H_1: \sigma^2\neq 0.006$.
假定 H_0 成立. 取 $\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(19)$
$\alpha=0.05$. 查表: $\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(19)=32.9$, $\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(19)=8.91$
$\chi^2=\frac{19\times0.07^2}{0.006}=15.571$
$8.91<15.571<32.9$
接受 H_0, 认为……是 0.006.

3 两个正态总体的参数假设检验

$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2), (X_1,\cdots,X_{n_1})$ 为样本, $\overline{X}, S_1^2$
$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2), (Y_1,\cdots,Y_{n_2})$ 为样本, $\overline{Y}, S_2^2$

3.1 两个正态总体均值 μ_1, μ_2 差异性检验

3.1.1 提出假设

1. $H_0: \mu_1 = \mu_2, H_1: \mu_1 \neq \mu_2$ 双侧假设
2. $H_0: \mu_1 \leq \mu_2, H_1: \mu_1 \geq \mu_2$ 单侧假设 (右侧)
3. $H_0: \mu_1 \geq \mu_2, H_1: \mu_1 \leq \mu_2$ 单侧假设 (左侧)

3.1.2 σ_1^2, σ_2^2 已知, 检验 $H_0: \mu_1 = \mu_2$ (U 检验)

$$\overline{X} - \overline{Y} \sim N(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2})$$

$$U = \frac{\overline{X} - \overline{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

1. 提出: $H_0: \mu_1 = \mu_2, H_1: \mu_1 \neq \mu_2$
2. 假定 H_0 成立
   取统计量 U

$$U = \frac{\overline{X} - \overline{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

3. 给定 α 由 $P(|U| > U_{\frac{\alpha}{2}}) = \alpha$
4. 计算 $|U|$ 与 $\frac{\alpha}{2}$ 比较 ,下结论

3.1.3 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ 未知, 检验 $H_0: \mu_1 = \mu_2$ (T 检验)

1. 提出: $H_0: \mu_1 = \mu_2, H_1: \mu_1 \neq \mu_2$
2. 假定 H_0 成立
   取统计量 T

$$T = \frac{(\overline{X} - \overline{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_1}}} \sim t(n_1 + n_2 - 2)$$

3. 给定 α 由 $P(|T| > T_{\frac{\alpha}{2}}) = \alpha$
4. 计算 $|T|$ 与 $\frac{\alpha}{2}$ 比较 ,下结论

例1 卷烟厂向化验室送去 A, B 两种烟草化验尼古丁含量是否相同, 从 A, B 中各取 5 例化验: $A: 24, 27, 26, 21, 24; B: 27, 28, 23, 31, 26$ 设 A 的尼古丁含量 $X \sim B(\mu_1, 5)$, B 的尼古丁含量 $Y \sim N(\mu_2, 8)$ 问两种烟草尼古丁平均含量是否有差异 ($\alpha = 0.05$)

提出: $H_0: \mu_1 = \mu_2$, $H_1: \mu \neq \mu_2$.

假定H_0成立, $\sigma_1^2 = 5$, $\sigma_2^2 = 8$

取$U = \dfrac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$

$\alpha = 0.05$, $U_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$.

拒绝域: $W = \left\{ \begin{matrix} (x_1, \cdots x_5) \\ (y_1, \cdots y_5) \end{matrix} \middle| \, |U| > 1.96 \right\}$

$\bar{x} = 24.4$, $\bar{y} = 27$. $|U| = 1.612 < U_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$

接受H_0. 认为……无差异.

例2 : 要考察温服对针织品断裂强力的影响, 为了比较 70 °C 与 80 °C 的影响有无差别, 分别做 5 次试验: 70 °C 强力: $20.5, 18.8, 19.8, 20.9, 21.5$; 80 °C 强力: $17.7, 20.3, 20.0, 18.1, 19.0$ 假定强力分别服从正态分布 $N(\mu_1, \sigma^2), N(\mu_2, \sigma^2)$, 问两种温度下的强力是否有显著性差异 ($\alpha = 0.05$)

提出H_0: $\mu_1 = \mu_2$, H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$.

假定H_0成立, $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$

统计量 $T = \dfrac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}} \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1+n_2-2)$

$W = \left\{ \begin{matrix} (x_1, \cdots x_5) \\ (y_1, \cdots y_5) \end{matrix} \middle| \, |t| > t_{\frac{\alpha}{2}}(8) \right\}$

$\bar{x} = 20.3$, $\bar{y} = 19.02$, $|t| = \dfrac{|20.3 - 19.02|}{\sqrt{\frac{4.34 + 5.188}{8}} \sqrt{\frac{2}{5}}} = 1.855$.

$|t| = 1.855 < t_{\frac{\alpha}{2}}(8) = 2.306$

接受H_0. 认为……没有显著……

3.2 两个正态总体方差 σ_1^2, σ_2^2 差异性检验

3.2.1 提出假设

1. $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2, H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ 双侧假设
2. $H_0: \sigma_1^2 \leq \sigma_2^2, H_1: \sigma_1^2 > \sigma_2^2$ 单侧假设检验 (右侧)
3. $H_0: \sigma_1^2 \geq \sigma_2^2, H_1: \sigma_1^2 < \sigma_2^2$ 单侧假设检验 (左侧)

3.2.2 μ_1, μ_2 都未知, 检验 $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$

1. 提出 $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2, H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$
2. 假定 H_0 成立, 取统计量 F

$$
\begin{aligned}
F &= \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \sim F(n_1-1, n_2-2) \\
&= \frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F(n_1-1, n_2-2)
\end{aligned}
$$

3. 给定 α 由 $P(F > F_{\frac{\alpha}{2}}) = P(F < F_{\frac{\alpha}{2}}) = \frac{\alpha}{2}$
4. 计算 F 的值, 比较 下结论

例1 从两处煤矿各抽样数次, 分析其含灰率(%). 设各煤矿含灰率都服从正态分布, $n_1 = 5, n_2 = 4$, $S_1^2 = 7.505$,$S_2^2 = 2.593$, **问两处煤矿含灰率的方差有无显著差异? ($\alpha = 0.05$)**

提出 $H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2$, $H_1:\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$

假定 H_0 成立.

取统计量 $F=\frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F(4,3)$

$\alpha=0.05$, $F_{\frac{\alpha}{2}}(4,3)=15.10$, $F_{1-\frac{\alpha}{2}}(4,3)=\frac{1}{9.98}$

$f=\frac{7.505}{2.593}=2.894$. $0.1<f<15.1$

接受 H_0, 认为……无差异

#