数学建模

浙江大学数学系　谈之奕

tanzy@zju.edu.cn

伪币辨识

伪币辨识

- **12枚外观相同的硬币中有一枚是伪币，能否用天平称量三次找出伪币**
  - 已知伪币数恰为一枚
  - 天平只能比较，不能称重
  - 伪币轻重未知
  - 找出伪币且需说明轻重

伪币辨识

5 6 7 8 = 9 10 11 12

1 2 3 = 5 6 7

4 $>$ $<$ 9

1	2	3	重/轻
5	6	7	8
9	10	11	12

浙江大学
ZheJiang University
数学建模

伪币辨识

5 6 7 8 = 9 10 11 12

1 2 3 > 5 6 7

1 > = < 2

> < = 4

5 6 7 8

9 10 11 12

重

伪币辨识

5 6 7 8 $>$ 9 10 11 12

5 6 9 $=$ 7 8 10

11 $>$ $<$ 12

1 2 3 4

5 6 7 8

9 10 $<$ $>$

轻

伪币辨识

5 6
7 8
>
9 10
11 12

5 6
9
>
7 8
10

5
>
=
<
6

1 2 3 4

> < 7 8
9 = 11 12

轻 10

重 5 6

自适应

浙江大学 ZheJiang University

数学建模

- 自适应
  - 硬币真伪的可能性共有$12\times 2=24$种，三次称量可以给出$3^3=27$种结果
  - 三种称量结果不会出现，其余每一种称量结果对应一种可能性。不同称量结果对应的可能性各不相同，根据称量结果可辨别伪币并确定轻重
  - 后一次称量依赖于之前称量结果的方案为自适应（**adaptive**）的

伪币辨识

1	4			2	5
		>			
9	10			7	11
1	6			2	4
		=			
7	12			8	10
3	4			1	5
		>			
7	11			8	12

	1	4	9	10
重	3	5	9	11
	3	4	7	11
	2	5	7	11
轻	3	5	9	11
	1	5	8	12

非自适应

- 非自适应
  - 三种称量结果不会出现，其余每一种称量结果对应一种可能性。不同称量结果对应的可能性各不相同，根据称量结果可辨别伪币并确定轻重
  - 后一次称量不依赖于之前称量结果的方案为非自适应（**non-adaptive**）的。非自适应的试验可同时进行

一般结论

数学建模

- 对任意整数 $w \geq 2$
  - 若 $3 \leq n \leq (3^w - 3)/2$，存在一非适应的称量方案，使用 w 次称量可从 n 枚硬币中辨别伪币并确定轻重
  - 若 $n > (3^w - 3)/2$，不存在自适应的称量方案，用 w 次称量即可从 n 枚硬币中辨别伪币并确定轻重

Dyson FJ. 1931 The Problem of the Pennies. *The Mathematical Gazette*, 30, 231-234, 1946.
Born A, Hurkens CA, Woeginger GJ. How to detect a counterfeit coin: Adaptive versus non-adaptive solutions. *Information Processing Letters*, 86, 137-141, 2003.

Freeman John Dyson
(1923-)
英裔美籍物理学家、数学家
英国皇家学会会员
1981年Wolf奖得主

Dyson集

浙江大学 ZheJiang University

数学建模

- 满足条件 (i) $\sum_{\mathbf{v}\in S}\mathbf{v}=\mathbf{0}$ (ii)若 $\mathbf{v}\in S$，则 $-\mathbf{v}\notin S$ 的向量子集 $S\subseteq\{-1,0,1\}^w$ 称为**Dyson集**
- 若存在**Dyson集** $S=\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\cdots,\mathbf{v}_n\}$，则用无砝码的天平可用非自适应称量方案经 w次称量从 n 枚硬币中辨别伪币并确定轻重
  - 若 $\mathbf{v}_j$ 第 i 个分量为 $-1/1/0$，则在第 i 次称量中将第 j 枚硬币放在左盘/放在右盘/不作称量
  - 记 $\mathbf{z}\in\{-1,0,1\}^w$。若第 i 次称量结果为左盘偏重/右盘偏重/天平平衡，则 $\mathbf{z}$的第 i 个分量为 $-1/1/0$
  - 若 $\mathbf{z}=\mathbf{v}_j$，则第 j 枚硬币是伪币且偏重；若 $\mathbf{z}=-\mathbf{v}_j$，则第 j 枚硬币是伪币且偏轻

天平左右硬币数相同　　$\mathbf{z}=\mathbf{v}_j$ 和 $\mathbf{z}=-\mathbf{v}_j$不会同时出现

$$
\begin{array}{l}
(\ \ 1,\ \ 1,\ -1)\\
(-1,-1,\ \ 0)\\
(\ \ 0,\ \ 0,\ \ 1)\\
(\ \ 1,-1,\ \ 1)\\
(-1,\ \ 0,-1)\\
(\ \ 0,\ \ 1,\ \ 0)\\
(-1,\ \ 1,\ \ 1)\\
(\ \ 0,-1,-1)\\
(\ \ 1,\ \ 0,\ \ 0)\\
(\ \ 1,-1,\ \ 0)\\
(-1,\ \ 0,\ \ 1)\\
(\ \ 0,\ \ 1,-1)
\end{array}
$$

Dyson集

数学建模

- 函数 $f:\{-1,0,1\}\to\{-1,0,1\}$
- 函数 $\mathbf{f}:\{-1,0,1\}^w\to\{-1,0,1\}^w$，若 $\mathbf{x}=(x_1,\cdots,x_w)\in\{-1,0,1\}^w$，则 $\mathbf{f}(\mathbf{x})=(f(x_1),\cdots,f(x_w))$
- 对任意 $\mathbf{x}\in\{-1,0,1\}^w$，$\mathbf{x}\neq(-1,-1,\cdots,-1),(1,1,\cdots,1),(0,0,\cdots,0)$，定义 $S(\mathbf{x})=\{\mathbf{x},\mathbf{f}(\mathbf{x}),\mathbf{f}(\mathbf{f}(\mathbf{x})),-\mathbf{x},-\mathbf{f}(\mathbf{x}),-\mathbf{f}(\mathbf{f}(\mathbf{x}))\}$
  - $S(\mathbf{x})$ 中向量两两不同
  - 对任意 $\mathbf{v}\in S(\mathbf{x})$，$\mathbf{f}(\mathbf{v})\in S(\mathbf{x})$

$$\begin{array}{rrrr}
x & -1 & 0 & 1\\
f(x) & 0 & 1 & -1\\
f(f(x)) & 1 & -1 & 0\\
f(f(f(x))) & -1 & 0 & 1
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rrrr}
-x & 1 & 0 & -1\\
-f(x) & 0 & -1 & 1\\
-f(f(x)) & -1 & 1 & 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rrrr}
f(-x) & -1 & 1 & 0\\
f(-f(x)) & 1 & 0 & -1\\
f(-f(f(x))) & 0 & -1 & 1
\end{array}$$

$$\mathbf{f}(-\mathbf{x})=-\mathbf{f}(\mathbf{f}(\mathbf{x})),\mathbf{f}(-\mathbf{f}(\mathbf{x}))=\mathbf{f}(-\mathbf{x}),\mathbf{f}(-\mathbf{f}(\mathbf{f}(\mathbf{x})))=-\mathbf{x}$$

Dyson集

- 记 $W=\frac{1}{6}(3^w-3)$ 。存在 $\{-1,0,1\}^w$ 中 W 个向量 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\cdots,\mathbf{v}_W$，使得

$$\{-1,0,1\}^w=S(\mathbf{v}_1)\cup S(\mathbf{v}_2)\cup\cdots\cup S(\mathbf{v}_W)$$
$$\cup\{(-1,\cdots,-1),(1,\cdots,1),(0,\cdots,0)\}$$

x	-1	0	1
$f(x)$	0	1	-1
$f(f(x))$	1	-1	0
$-x$	1	0	-1
$-f(x)$	0	-1	1
$-f(f(x))$	-1	1	0

$$x+f(x)+f(f(x))=0$$
$$S^+(\mathbf{x})=\{\mathbf{x},\mathbf{f}(\mathbf{x}),\mathbf{f}(\mathbf{f}(\mathbf{x}))\}$$

- **Dyson集的构造**
  - $n=3k,1\le k\le W$ ： $S^+(\mathbf{v}_1)\cup S^+(\mathbf{v}_2)\cup\cdots\cup S^+(\mathbf{v}_k)$
  - $n=3k+2,1\le k<W$

$$\begin{array}{l}
(\ \ 1,\ \ 1,\ \ 1,\ \ 1,\cdots,\ \ 1)\\
(\ \ 1,-1,\ \ 0,\ \ 0,\cdots,\ \ 0)\quad \mathbf{v}_1\\
(\ \ 0,-1,\ \ 1,\ \ 1,\cdots,\ \ 1)\quad -\mathbf{f}(\mathbf{f}(\mathbf{v}_1))\\
(-1,\ \ 1,-1,-1,\cdots,-1)\quad \mathbf{v}_2\\
(-1,\ \ 0,-1,-1,\cdots,-1)\quad -\mathbf{f}(\mathbf{f}(\mathbf{v}_2))
\end{array}$$

$S^+(\mathbf{v}_3),S^+(\mathbf{v}_4),\cdots,S^+(\mathbf{v}_{k+1})$

$n=3k+1,2\le k<W$

$$\begin{array}{l}
(\ \ 1,\ \ 1,\ \ 1,\ \ 1,\cdots,\ \ 1)\\
(-1,-1,\ \ 1,\ \ 1,\cdots,\ \ 1)\quad \mathbf{v}_1\\
(-1,-1,\ \ 0,\ \ 0,\cdots,\ \ 0)\quad -\mathbf{f}(\mathbf{f}(\mathbf{v}_1))\\
(\ \ 0,\ \ 0,-1,-1,\cdots,-1)\quad \mathbf{f}(\mathbf{v}_1)\\
(-1,\ \ 1,\ \ 0,\ \ 0,\cdots,\ \ 0)\quad \mathbf{v}_2\\
(\ \ 1,\ \ 0,-1,-1,\cdots,-1)\quad \mathbf{f}(\mathbf{f}(\mathbf{v}_2))\\
(\ \ 1,\ \ 0,\ \ 0,\ \ 0,\cdots,\ \ 0)\quad \mathbf{v}_3
\end{array}$$

$S^+(\mathbf{v}_4),S^+(\mathbf{v}_5),\cdots,S^+(\mathbf{v}_{k+1})$

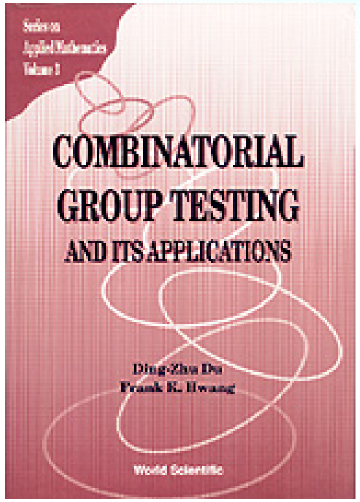
$n=4$

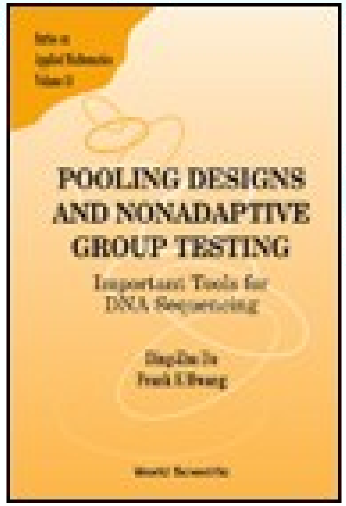
$$\begin{array}{l}
(\ \ 1,\ \ 1,\ \ 1,\cdots,\ \ 1)\\
(-1,\ \ 0,\ \ 0,\cdots,\ \ 0)\\
(\ \ 0,-1,\ \ 0,\cdots,\ \ 0)\\
(\ \ 0,\ \ 0,-1,\cdots,-1)
\end{array}$$

群试

数学建模

- 群试（**group testing**）技术产生于二十世纪四十年代，在医学检验、可靠性测试、编码、分子生物学等领域发挥了重要的作用
  - 概率群试
  - 组合群试





D.-Z. Du, F. K. Hwang, *Combinatorial Group Testing and Its Applications*, World Scientific, 2000.

D.-Z. Du, F. K. Hwang, *Pooling Designs and Nonadaptive Group Testing: Important Tools For DNA Sequencing*. World Scientific, 2006.


浙江大学
ZheJiang University
谢　谢