数学建模

浙江大学数学系　谈之奕

tanzy@zju.edu.cn

生物数学模型

传染病模型

传染病

数学建模

- 传染病（infectious diseases）
  - 由各种病原体引起的，能在人与人、动物与动物、人与动物之间互相传播的一种疾病
  - 传染病得以在某一人群中发生和传播，必须具备传染源、传播途径和易感人群三个基本环节
- Kermack- McKendrick模型
  - 自1927年起， Kermack和McKendrick先后发表三篇论文，提出了揭示传染病传播规律的仓室（compartment）模型
    - A Contribution to the Mathematical Theory of Epidemics, 115, 700-721, 1927
    - II. The Problem of Endemicity, 138, 55-83, 1932
    - III. Further Studies of the Problem of Endemicity, 141, 94-122, 1933

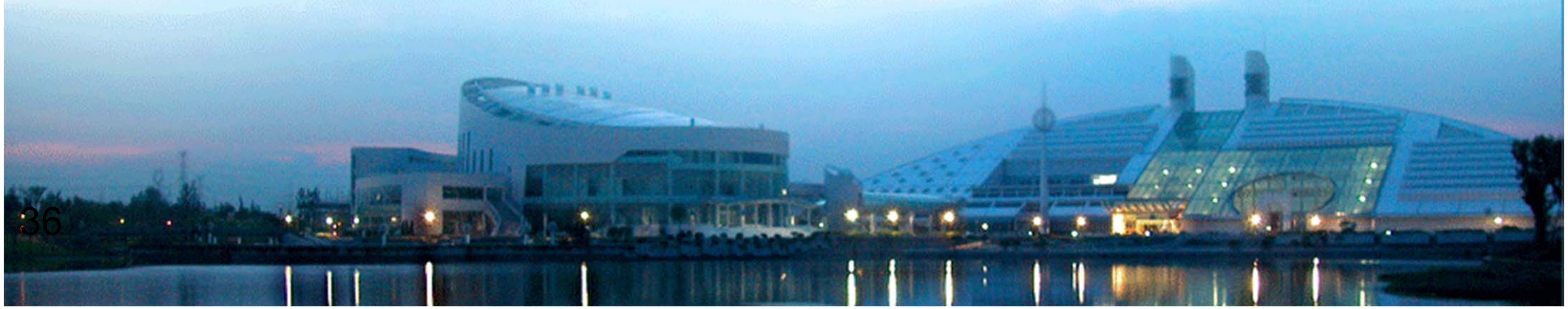
William Ogilvy Kermack（1898–1970）
Anderson Gray McKendrick（1876–1943）
英国数学家、流行病学家

Proceedings of the Royal Society of London A
创刊于1800年，1854年改用现名。Maxwell 电磁场理论，DNA双螺旋结构等重要论文均发表在该刊上

SIR模型

浙江大学 ZheJiang University
数学建模

- 模型假设
  - 疾病传播期内所考察地区总人数 N 保持不变，没有新增人口和因疾病以外的原因造成的死亡
  - 人群分类
    - 易感者（**Susceptible**）：易受疾病感染但尚未发病
    - 感染者（**Infective**）：已感染且可通过接触传染易感者
    - 移出者（**Removed**）：曾被感染，但不会再被感染或传染他人
      - 感染后与人群有效隔离
      - 感染后死亡
      - 感染后获得终身免疫
  - 记 t 时刻易感者、感染者和移出者人数分别为 $S(t)$，$I(t)$ 和 $R(t)$



SIR模型

浙江大学 ZheJiang University
数学建模

- 接触与移出
  - 单位时间内每人与 βN 人接触，并使其中的易感者受到感染
    - 单位时间内新增感染者数量为 $I\cdot\beta N\cdot\dfrac{S}{N}=\beta SI$
  - 单位时间内 αI 个感染者移出系统
    - 每个感染者处于感染期的时间 X 服从参数为 α 的指数分布
      - $P(X\le t)=1-\mathrm{e}^{-\alpha t}$，$E(X)=\dfrac{1}{\alpha}$
      - 感染者经过长度至多为 t 的感染期后已被移出的概率为 $1-\mathrm{e}^{-\alpha t}$
      - 若不计新增感染者，$\dfrac{I(t)}{I(0)}=e^{-\alpha t}$
      - 若不计新增感染者，$\dfrac{dI(t)}{dt}=-\alpha I(t)$

$$S \xrightarrow{\beta SI} I \xrightarrow{\alpha I} R$$

SIR模型

- **SIR模型**

$$\begin{cases}\dfrac{dS}{dt}=-\beta SI\\ \dfrac{dI}{dt}=\beta SI-\alpha I\\ \dfrac{dR}{dt}=\alpha I\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\dfrac{dS}{dt}=-\beta SI\\ \dfrac{dI}{dt}=(\beta S-\alpha)I\end{cases} \Rightarrow \frac{dI}{dS}=\frac{1}{\sigma S}-1 \qquad \sigma=\frac{\beta}{\alpha}$$

$$I(t)=S_0+I_0-S(t)+\frac{1}{\sigma}\ln\frac{S(t)}{S_0}$$

$$S(0)=S_0>0$$

$$I(0)=I_0>0$$

$$R(0)=R_0\ge 0$$

$$S(t)+I(t)+R(t)=N$$

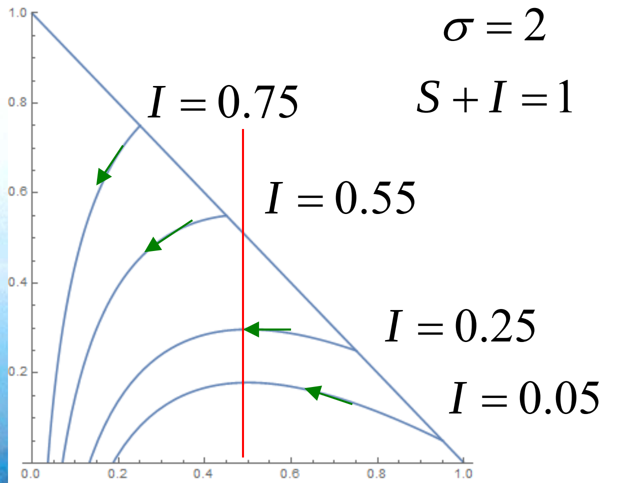
$S(t)$ 单调递减

$I(t)$ 趋于0

对部分 S_0，$I(t)$先增后减，对部分 S_0，$I(t)$单调递减

$\sigma=2$

$S+I=1$



SIR模型

浙江大学 ZheJiang University

数学建模

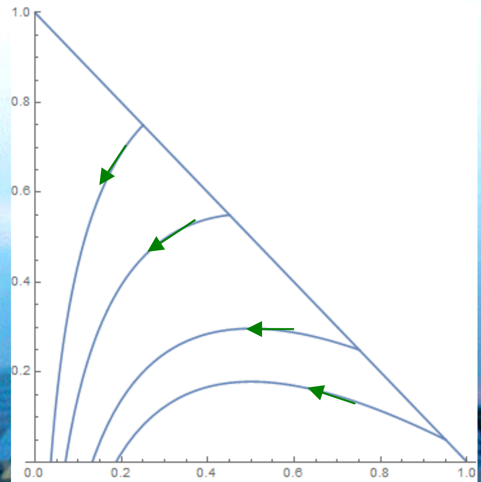
$$\begin{cases} \dfrac{dS}{dt} = -\beta SI \\ \dfrac{dI}{dt} = \beta\left(S - \dfrac{1}{\sigma}\right)I \\ \dfrac{dR}{dt} = \alpha I \end{cases}$$

- $\lim\limits_{t\to\infty} I(t) = 0$
  - 由 $S(t) \geq 0, \dfrac{dS}{dt} \leq 0, \lim\limits_{t\to\infty} S(t)$ 存在，记为 S_∞
  - 由 $R(t) \leq N, \dfrac{dR}{dt} \geq 0, \lim\limits_{t\to\infty} R(t)$ 存在
  - 由 $S(t) + I(t) + R(t) \equiv N, \lim\limits_{t\to\infty} I(t)$存在，记为 I_∞
  - 若 $I_\infty = \varepsilon > 0$ ，则对充分大的 t，$\dfrac{dR}{dt} > \alpha\dfrac{\varepsilon}{2}, \lim\limits_{t\to\infty} R(t) = \infty$

矛盾

- 最终未被感染的人数 S_∞
  - S_∞ 为方程 $S_0 + I_0 - S_\infty + \dfrac{1}{\sigma}\ln\dfrac{S_\infty}{S_0} = 0$的根
  - 可用 $\sigma \approx \dfrac{\ln S_0 - \ln S_\infty}{S_0 - S_\infty}$ 估计 σ

$$\boxed{I(t) = S_0 + I_0 - S(t) + \frac{1}{\sigma}\ln\frac{S(t)}{S_0}}$$



SIR模型

浙江大学 ZheJiang University

数学建模

$$\begin{cases}\dfrac{dS}{dt}=-\beta SI\\ \dfrac{dI}{dt}=\beta\left(S-\dfrac{1}{\sigma}\right)I\\ \dfrac{dR}{dt}=\alpha I\end{cases}$$

- $I(t)$的增减性
  - 若 $S_0>\frac{1}{\sigma}$
    - $\frac{1}{\sigma}<S(t)<S_0$ 时，$I(t)$ 单调增加，在 $S(t)=\frac{1}{\sigma}$ 时达到最大值 $S_0+I_0-\frac{1}{\sigma}(1+\ln\sigma S_0)$
    - $S(t)<\frac{1}{\sigma}$ 时，$I(t)$ 单调减小至 0
  - 若 $S_0\le\frac{1}{\sigma}$，$I(t)$ 单调减小至 0，传染病没有蔓延
- 基本再生数（**Basic reproduction number**）$\mathcal{R}_0$
  - $\mathcal{R}_0=S_0\sigma=S_0\frac{\beta}{\alpha}=\frac{1}{\alpha}\cdot\beta N\cdot\frac{S_0}{N}$，可解释为初期每个感染者在感染期内感染的易感者平均数
  - 若 $\mathcal{R}_0>1$，传染病会流行；若 $\mathcal{R}_0<1$，传染病不会蔓延

$$\boxed{I(t)=S_0+I_0-S(t)+\frac{1}{\sigma}\ln\frac{S(t)}{S_0}}$$

传染病	$\mathcal{R}_0$
麻疹	16
水痘	11
腮腺炎	12
脊髓灰质炎	5
天花	5

SIS模型

数学建模

- 模型假设
  - 疾病传播期内总人数保持不变，人群分为易感者和感染者
  - 单位时间内每人与 βN人接触，并使其中的易感者受到感染
  - 单位时间内 γI 个感染者治愈，重新成为易感者
- SIS模型

$$S \xrightarrow{\beta SI} I, \qquad I \xrightarrow{\gamma I} S$$

$$\begin{cases} \dfrac{dS}{dt} = -\beta SI + \gamma I \\ \dfrac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I \end{cases} \qquad \begin{array}{l} S(0) = S_0 > 0 \\ I(0) = I_0 > 0 \\ S(t) + I(t) = N \end{array}$$

$$\Rightarrow \frac{dI}{dt} = (\beta N - \gamma - \beta I)I = (\beta N - \gamma)I\left(1 - \frac{\beta}{\beta N - \gamma} I\right)$$

Logistic模型

$$\mathcal{R}_0 = N\frac{\beta}{\gamma}$$

  - 若 $\beta N - \gamma > 0$，对任意 $0 < I_0 < N$，$I(t)$单调递增趋于 $N - \frac{\gamma}{\beta}$
  - 若 $\beta N - \gamma < 0$，对任意 $0 < I_0 < N$，$I(t)$单调递减趋于 0
    - $\dfrac{dI}{dt} \le (\beta N - \gamma)I$，$\dfrac{dI}{dt} = (\beta N - \gamma)I$ 的解 $I(t) = I(0)e^{(\beta N - \gamma)t} \to 0 (t \to \infty)$

SIS模型

- **SIS模型**
  - 自治系统有两个可能平衡点 $P_1=(N,0)$，$P_2=\left(\dfrac{\gamma}{\beta},N-\dfrac{\gamma}{\beta}\right)$
    - 当 $\mathcal{R}_0<1$ 时，$(S(t),I(t))$ 趋向于 P_1，人群中不再存在感染者
    - 当 $\mathcal{R}_0>1$ 时，$(S(t),I(t))$ 趋向于 P_2，传染病成为一种地方病（**endemic**）
- 防控传染病对策
  - 减少人群接触，减小 β 值
  - 提高治疗水平，使感染者尽早治愈，即增大 γ 值
  - 在存在移出者情况下，通过预防免疫办法提高初始移出者 R_0 至 $N-\dfrac{\alpha}{\beta}$

$$\boxed{\begin{cases}\dfrac{dS}{dt}=-\beta SI+\gamma I\\[2mm]\dfrac{dI}{dt}=\beta SI-\gamma I\end{cases}}$$

$$\mathcal{R}_0=S_0\frac{\beta}{\alpha}\approx(N-R_0)\frac{\beta}{\alpha}$$

$$\mathcal{R}_0=N\frac{\beta}{\gamma}$$

Ross疟疾传播模型

数学建模

- 模型假设
  - 某区域在一段时间内人的数量 H 与（雌性）蚊子的数量 V 保持不变
  - 记 t 时刻人群中易感者和感染者数量分别为 $S_h(t)$ 和 $I_h(t)$，蚊子中易感者和感染者数量分别为 $S_v(t)$ 和 $I_v(t)$
  - 单位时间内每只蚊子会叮咬 a 个（不同的）人，每个人被 $\tilde{a}$ 只（不同的）蚊子叮咬，$aV=\tilde{a}H$
  - 发生叮咬时，从已感染疟疾的人传染给未感染疟疾的蚊子的概率为 b_h ，从已感染疟疾的蚊子传染给未感染疟疾的人的概率为 b_v
  - 单位时间内，有数量为 $\gamma_h I_h(t)$ 的已感染疟疾的人康复，数量为 $\gamma_v I_v(t)$ 的已感染疟疾的蚊子康复

Ronald Ross
（1857–1932）
英国医学家
1902年**Nobel**生理与医学奖得主

Ross R. Some quantitative studies in epidemiology. *Nature*, 87, 466–467, 1911.

Ross疟疾传播模型

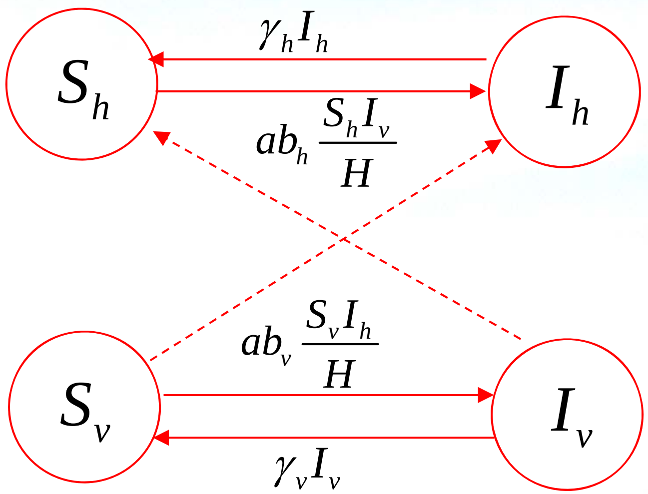
- **Ross模型**

$$\begin{cases} \dfrac{dS_h}{dt} = -ab_h\dfrac{S_hI_v}{H}+\gamma_hI_h \\ \dfrac{dI_h}{dt}=ab_h\dfrac{S_hI_v}{H}-\gamma_hI_h \\ \dfrac{dS_v}{dt}=-ab_v\dfrac{S_vI_h}{H}+\gamma_vI_v \\ \dfrac{dI_v}{dt}=ab_v\dfrac{S_vI_h}{H}-\gamma_vI_v\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=ab_h(1-x)my-\gamma_hx \\ \dfrac{dy}{dt}=ab_vx(1-y)-\gamma_vy\end{cases}$$

$$m=\frac{V}{H}$$

$$x(t)=\frac{I_h(t)}{H}=1-\frac{S_h(t)}{H}$$

$$y(t)=\frac{I_v(t)}{V}=1-\frac{S_v(t)}{V}$$



$$a\cdot I_v\cdot\frac{S_h}{H}\cdot b_h \qquad \tilde{a}\cdot I_h\cdot\frac{S_v}{V}\cdot b_v=ab_v\frac{S_vI_h}{H}$$

感染蚊子叮咬总数

被叮咬者是易感者且被感染

感染人被叮咬总数

叮咬感染人的是易感蚊子且被感染

Ross疟疾传播模型

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ab_h(1-x)my - \gamma_h x \\ \dfrac{dy}{dt} = ab_v x(1-y) - \gamma_v y \end{cases}$$

- 平衡点和稳定性
  - 系统有两个可能平衡点 $P_1=(0,0)$ 和
  $$P_2=\left(\frac{a^2mb_hb_v-\gamma_h\gamma_v}{ab_v(amb_h+\gamma_h)},\frac{a^2mb_hb_v-\gamma_h\gamma_v}{amb_h(ab_v+\gamma_v)}\right)$$
  - 定义 $\mathcal{R}_0=\dfrac{a^2mb_hb_v}{\gamma_h\gamma_v}=\dfrac{ab_v}{\gamma_h}\cdot\dfrac{amb_h}{\gamma_v}$
    - 当 $\mathcal{R}_0\le 1$ 时，P_1 为唯一的平衡点
    - 当 $\mathcal{R}_0>1$ 时，P_2 为稳定的平衡点，P_1 为平衡点但不稳定

$$\begin{cases} y = \dfrac{\gamma_h x}{ab_h m(1-x)} \\ y = \dfrac{ab_v x}{ab_v x+\gamma_v} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{\gamma_v y}{ab_v(1-y)} \\ x = \dfrac{amb_h y}{amb_h y+\gamma_h} \end{cases}$$

谢　谢