数学建模

浙江大学数学系　谈之奕

tanzy@zju.edu.cn

基本数学模型

招聘问题

幸运之门

- 舞台上有三扇道具门，其中一扇门后置有一辆汽车，另两扇门后各置有一套汽车杂志
- 节目主持人知道汽车所在位置，门后物品在节目进行过程中不可移动
- 竞猜者可任选其中一扇门并获赠门后物品
- 竞猜者选择了其中一扇门后，主持人打开了另两扇门中的一扇，后面是一套杂志
- 主持人允许竞猜者改变之前的选择，竞猜者为增加获得汽车的可能性，是否应该改变当前的选择

改变 or 不变

浙江大学 ZheJiang University

数学建模

- 假设汽车位于1号门后，竞猜者以相同的概率选择1、2、3号门
- 主持人打开的门既不是竞猜者选择的，也不是后置汽车的。若有两扇门符合以上要求，主持人以相同概率选择其中一扇
- 若竞猜者改变选择，他将选择既不是初次选择，也不是主持人打开过的门

汽车	杂志	杂志
1	2	3

竞猜者 —?→ 主持人

选择不变

- 若竞猜者不改变选择，则获得汽车的概率为 $\frac{1}{3}$

汽车位置	竞猜者初次选择		主持人打开		竞猜者再次选择的门	获赠物品
	门	概率	门	概率		
1	1	1/3	2	1/6	1	汽车
			3	1/6		
	2	1/3	3	1/3	2	杂志
	3	1/3	2	1/3	3	杂志

选择改变

数学建模

- 若竞猜者改变选择，则获得汽车的概率为 $\frac{2}{3}$

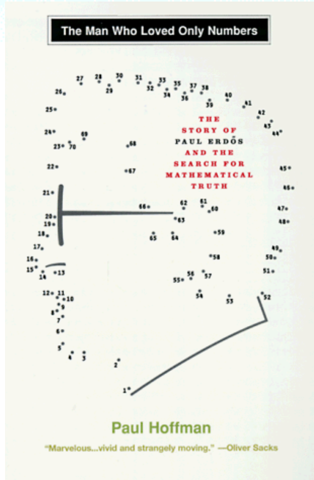
汽车位置	竞猜者初次选择		主持人打开		竞猜者再次选择的门	获赠物品
	门	概率	门	概率		
1	1	1/3	2	1/6	3	杂志
			3	1/6	2	杂志
	2	1/3	3	1/3	1	汽车
	3	1/3	2	1/3	1	汽车

改变 or 不变

浙江大学
ZheJiang University
数学建模

Vázsonyi told Erdős about the Monty Hall dilemma. "I told Erdős that the answer was to switch," said Vázsonyi, "and fully expected to move to the next subject. But Erdős, to my surprise, said, 'No, that is impossible. It should make no difference.' At this point I was sorry I brought up the problem, because it was my experience that people get excited and emotional about the answer, and I end up with an unpleasant situation. But there was no way to bow out, course." Vázsonyi wrote out a "decision tree," not unlike the table of possible outcomes that vos Savant had written out, but this did not convince him. "It was hopeless," Váz-

On his PC Vázsonyi ran a Monte Carlo simulation of the Monty Hall dilemma. Erdős, who never had much use for computers, watched the PC randomly choose whether to switch or stick. The outcome of hundreds of trials favored switching two to one, and Erdős conceded that he was wrong. But the simulation was no more satisfying than



Paul Hoffman: The Man Who Loved Only Numbers: The Story of Paul Erdos and the Search for Mathematical Truth, Hyperion,1999

浙江大学
ZheJiang University
数学建模

Secretary Problem

- n 位求职者应聘某一职位，招聘方通过逐个面试予以考察
  - 应聘者的综合能力各不相同，通过面试可给出已面试的应聘者的综合能力大小顺序
- 应聘者以某一顺序接受面试，某个应聘者是否被录用必须在他面试结束后立即决定
  - 若录用，招聘即告结束，不再面试其他应聘者
  - 若不录用，招聘方继续面试下一位应聘者
  - 招聘方不得录用曾作出过不录用决定的应聘者
- 招聘方采用何种策略可使招聘到综合能力最强（第一名）的应聘者的概率最大

可行策略

- 由于目标为招聘到第一名的概率，因此除最后一位应聘者外，招聘方只会录用比之前所有应聘者均优的那位应聘者，称这样的应聘者为备选者
- 策略 k
  - 从第 k位应聘者开始，录用首次出现的一名备选者
  - 若至最后一名应聘者面试时仍未有备选者出现，录用最后一名应聘者

浙江大学 ZheJiang University

数学建模

数学描述

- 用 i 表示所有应聘者中综合能力居于第 i 名的应聘者，i 称为绝对名次，$i=1,\cdots,n$
- 记 A_i 为第 i 位接受面试的应聘者，$i=1,\cdots,n$
- 用 y_i 表示 A_i 在前 i 位接受面试的应聘者 $A_1,\cdots,A_i$ 中综合能力名次，称为相对名次
- 对 $1,2,\cdots,n$ 的任一排列，应聘者以该顺序面试的概率均为 $\frac{1}{n!}$

$n=4$ 实例

- 策略 2 在 24种可能顺序中有 11次可录用到第一名，为最优策略

策略1	策略2		策略3		策略4
1234	2134	3124	2314	3241	2341
1243	2143	3142	2341	3412	2431
1324	2314	3412	2413	4213	3241
1342	2341	4123	2431	4312	3421
1423	2413	4132	3214	4231	4321
1432	2431				4231

古典概型

数学建模

- $p_n(s)$：采用策略 s 录用到第一名的概率
  - 采用策略1，必录用 A_1，$p_n(1)=P(A_1=1)=\dfrac{1}{n}$
- $p_n^k(s)$：采用策略 s 录用 $A_k(k\geq s)$，且为第一名 $(A_k=1)$ 的概率
  - $A_s,\cdots,A_{k-1}$ 均不是备选者
  - 前 $k-1$ 位应聘者中的最佳者出现在前 $s-1$ 位应聘者中，否则他将先于 A_k 被录用

古典概型

$$p_n^k(s) = \frac{1}{n} \cdot \frac{s-1}{k-1}$$

			s				k		

前 $k-1$ 位中的最佳者

第一名

第一名出现在第 k 位

前 $k-1$ 位中的最佳者只能选择在前 $s-1$ 位

选 $k-1$ 位应聘者

前 $k-1$ 位中最佳者的可能位置数

其余 $k-2$ 位的可能排列数

其余 $n-k$ 位的可能排列数

$$p_n^k(s) = \frac{\binom{n-1}{k-1}(s-1)(k-2)!(n-k)!}{n!} = \frac{(n-1)!(s-1)(k-2)!(n-k)!}{n!(k-1)!(n-k)!} = \frac{s-1}{n(k-1)}$$

概率计算

$$p_n^k(s) = \frac{s-1}{n(k-1)}$$

$$p_n(s) = \sum_{k=s}^{n} p_n^k(s)$$

$$= \sum_{k=s}^{n} \frac{s-1}{n(k-1)} = \frac{s-1}{n}\sum_{k=s}^{n}\frac{1}{k-1} = \frac{s-1}{n}\sum_{k=s-1}^{n-1}\frac{1}{k}$$

$$p_n(s) - p_n(s-1) = \frac{s-1}{n}\sum_{k=s-1}^{n-1}\frac{1}{k} - \frac{s-2}{n}\sum_{k=s-2}^{n-1}\frac{1}{k} = \frac{1}{n}\sum_{k=s-1}^{n-1}\frac{1}{k} - \frac{1}{n}$$

$$p_n(s) - p_n(s+1) = \frac{s-1}{n}\sum_{k=s-1}^{n-1}\frac{1}{k} - \frac{s}{n}\sum_{k=s}^{n-1}\frac{1}{k} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n}\sum_{k=s}^{n-1}\frac{1}{k}$$

阈值

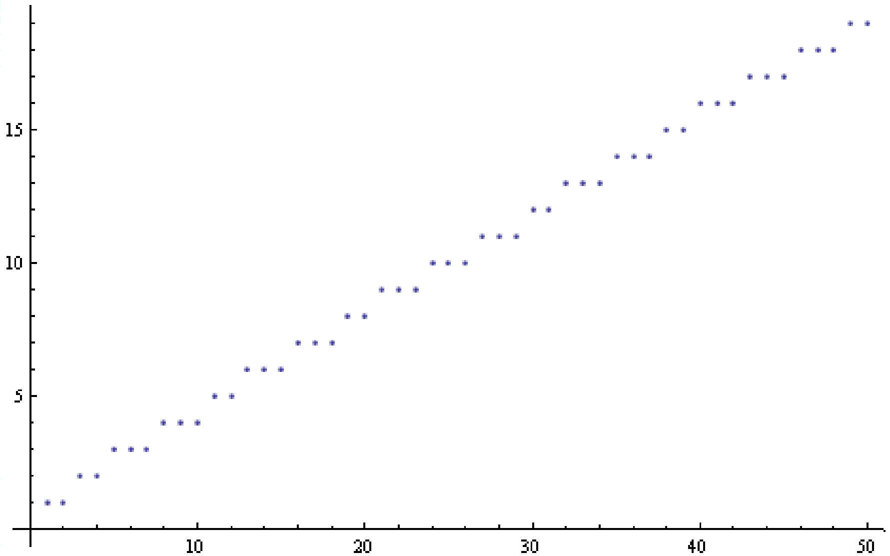
- 令 $s^* = \min\left\{ s \mid \sum_{k=s}^{n-1} \frac{1}{k} < 1 \right\}$
  - 当 $s \geq s^*$ 时，$\sum_{k=s}^{n-1} \frac{1}{k} < 1, p_n(s) > p_n(s+1)$
  - 当 $s \leq s^*$ 时，$\sum_{k=s-1}^{n-1} \frac{1}{k} \geq 1, p_n(s) \geq p_n(s-1)$
- 当 $s = s^*$ 时，$p_n(s)$达到最大值 $p_n(s^*)$

$$p_n(s) - p_n(s-1) = \frac{1}{n}\sum_{k=s-1}^{n-1}\frac{1}{k} - \frac{1}{n}$$

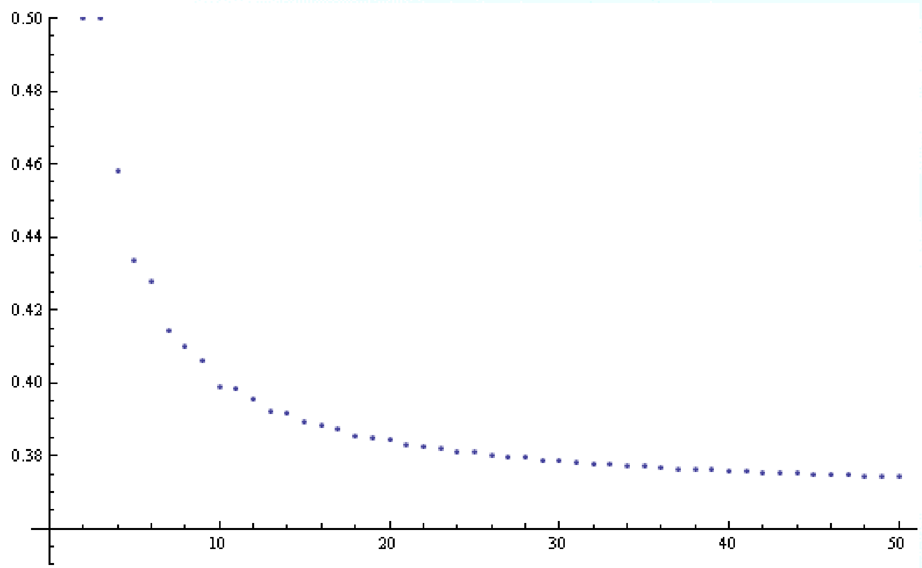
$$p_n(s) - p_n(s+1) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n}\sum_{k=s}^{n-1}\frac{1}{k}$$

浙江大学
ZheJiang University
数学建模

函数图像



s^* 图像



$p_n(s^*)$ 图像

浙江大学 ZheJiang University

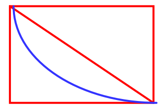
数学建模

s^* 的估计

$$1 \le \sum_{k=s^*-1}^{n-1} \frac{1}{k} < \int_{s^*-\frac{3}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \frac{1}{x}dx = \ln\frac{2n-1}{2s^*-3}$$

$$\boxed{s^* = \min\left\{ s \,\middle|\, \sum_{k=s}^{n-1}\frac{1}{k} < 1 \right\}}$$

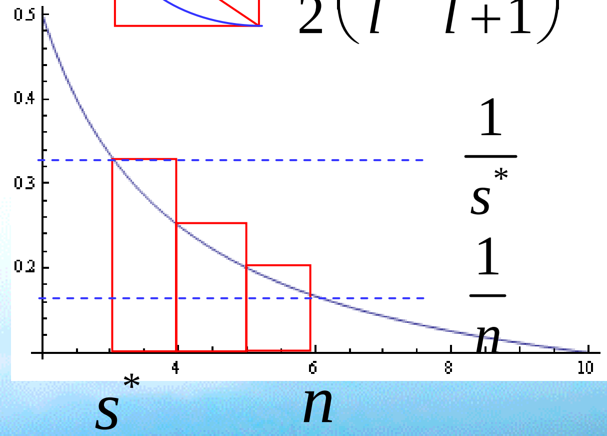
$$\Leftrightarrow e \le \frac{2n-1}{2s^*-3} \Leftrightarrow s^* \le \frac{1}{e}\left(n-\frac{1}{2}\right)+\frac{3}{2}$$



$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{l}-\frac{1}{l+1}\right)$$

$$1 > \sum_{k=s^*}^{n-1}\frac{1}{k} > \int_{s^*}^{n}\frac{1}{x}dx + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s^*}-\frac{1}{n}\right)$$

$$\Leftrightarrow e > \frac{n}{s^*}e^{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s^*}-\frac{1}{n}\right)} > \frac{n}{s^*}\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s^*}-\frac{1}{n}\right)\right)$$



浙江大学 ZheJiang University

数学建模

s^*的估计

$$e > \frac{n}{s^*} e^{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s^*}-\frac{1}{n}\right)} > \frac{n}{s^*}\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s^*}-\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$\geq \frac{n}{s^*}\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\frac{1}{e}\left(n-\frac{1}{2}\right)+\frac{3}{2}}-\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow s^* \geq \frac{1}{e}\left(n-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}-\frac{3e-1}{2(2n+3e-1)}$$

$$p_n(s^*) = \frac{s^*-1}{n}\sum_{k=s^*-1}^{n-1}\frac{1}{k} \approx \frac{s^*-1}{n}\ln\frac{n-2}{s^*-2} \approx \frac{1}{e}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} s^* \leq \frac{1}{e}\left(n-\frac{1}{2}\right)+\frac{3}{2} \\ p_n(s) = \frac{s-1}{n}\sum_{k=s-1}^{n-1}\frac{1}{k} \end{array}}$$

s^*的上下界差距不超过

$$1+\frac{3e-1}{2(2n+3e-1)} \approx 1+\frac{1.79}{n+1.79}$$

$$\lim_{n\to\infty} s^* = \frac{n}{e}$$

两次选择

- 招聘方可录用两名应聘者，但对每位应聘者聘用与否的决定仍需在该应聘者面试结束时给出
- 招聘方采用何种策略可使录用的两位应聘者中其中一位为第一名的概率尽可能大
- 策略 $(r,s)(s>r)$：
    - 录用自 A_r 起首次出现的一名备选者，称为第一次录用
    - 若已录用一人，录用不早于 A_s 的一名备选者，称为第二次录用

实例演示

	(1,3)	(2,3)
1234	1	
1243	1	
1324	1	
1342	1	
1423	1	
1432	1	

	(1,3)	(2,3)
2134	2	1
2143	2	1
2314	2 1	1
2341	2 1	1
2413	2 1	1
2431	2 1	1

	(1,3)	(2,3)
3124	3	1
3142	3	1
3214	3 1	2 1
3241	3 1	2 1
3412	3 1	1
3421	3 2	2 1

	(1,3)	(2,3)
4123	4	1
4132	4	1
4213	4 1	2 1
4231	4 1	2 1
4312	4 1	3 1
4321	4 2	3 2

(1,3) 共**16**次

(2,3) 共**17**次

浙江大学 ZheJiang University

数学建模

实例分析

- 策略 (2,3)
  - **2143**：第一次录用在 A_s之前，录用到第一名
  - **2341**：第一次录用在 A_s之后（含），录用到到第一名
  - **3241**：第一次录用在 A_s之前，未录用到第一名，第二次录用到第一名
  - **3421**：第一次录用在 A_s之后（含），未录用到第一名，第二次录用到第一名
  - **4321**：两次录用都未录用到第一名

事件分解

- 采用策略 (r,s) 录用到第一名
  - **1.** 第一名是第一次被录用者
  - **2.** 第一名是第二次被录用者，且第一次被录用者为 $A_u, u \geq s$
  - **3.** 第一名是第二次被录用者，且第一次被录用者为 $A_u, r \leq u \leq s-1$
- 按情形 j 录用到第一名，且他为A_k的概率为 $p_n^{j,k}(r,s)$

概率计算

数学建模

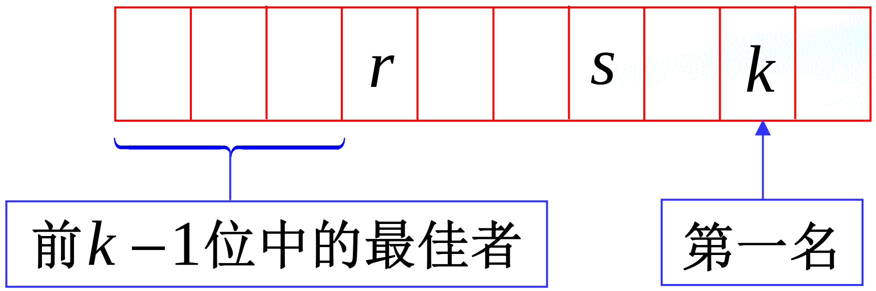
$$p_n^{1,k}(r,s)=\frac{1}{n}\cdot\frac{r-1}{k-1}$$

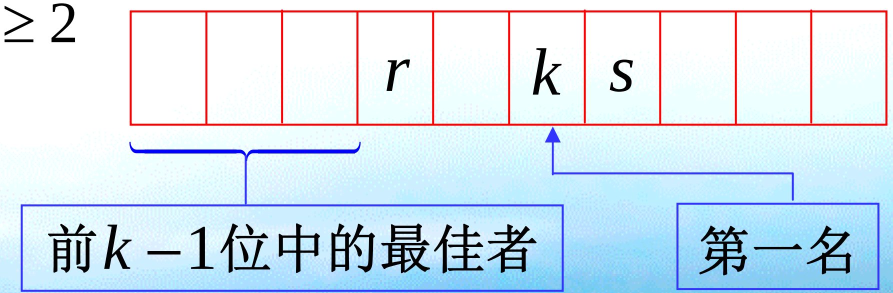
$$=\frac{\binom{n-1}{k-1}(r-1)(k-2)!(n-k)!}{n!}$$

$$p_n^1(r,s)=\sum_{k=r}^{n}\frac{r-1}{n(k-1)}=\frac{r-1}{n}\sum_{k=r-1}^{n}\frac{1}{k},r\ge 2$$

$$p_n^1(1,s)=\frac{1}{n}$$

情形1：第一名是第一次被录用者





概率计算

浙江大学 ZheJiang University

数学建模

- 情形3：第一名 $A_k\,(k \ge s)$是第二次被录用者，且第一次被录用者为 $A_u, r \le u \le s-1$
- 设前 $k-1$位应聘者中的最佳者为A_Δ，则 $r \le \Delta \le s-1$
  - 若 $\Delta < r$，不会录用A_u，A_k 是第一次被录用者
  - 若 $\Delta \ge s$，A_Δ将先于A_k 被第二次录用

概率计算

			r	u	Δ	s		k	

前$k-1$位中的最佳者

第一名

$$p_n^{3,k}(r,s)=\frac{1}{n}\cdot\frac{s-r}{k-1}$$

$$=\frac{\binom{n-1}{k-1}(s-r)(k-2)!(n-k)!}{n!}$$

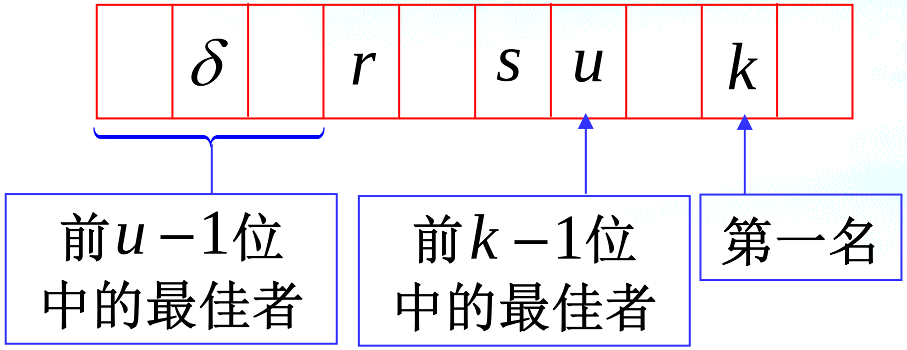
$$p_n^{3}(r,s)=\sum_{k=s}^{n}\frac{s-r}{n(k-1)}=\frac{s-r}{n}\sum_{k=s}^{n}\frac{1}{k-1}$$

概率计算

数学建模

- 情形2：第一名 $A_k\,(k \ge s)$是第二次被录用者，且第一次被录用者为 $A_u, u \ge s$
- 设前 $k-1$位应聘者中的最佳者为A_Δ，则 $\Delta = u \le k-1$
  - 若 $\Delta < r$，A_u不会被第一次录用
  - 若 $r \le \Delta \le s-1$，A_Δ被第一次录用，属情形 **3**
  - 若 $s \le \Delta < u$，第一次被录用的是 A_Δ 而非 A_u
  - 若 $u < \Delta \le k-1$，第二次被录用的是 A_Δ 而非 A_k
- 设前$u-1$位应聘者中的最佳者为A_δ，则$\delta \le r-1$
  - 若 $r \le \delta \le s-1$，A_δ被第一次录用，属情形 **3**
  - 若 $s \le \delta \le u-1$，第一次被录用的是 A_δ而非 A_u

概率计算

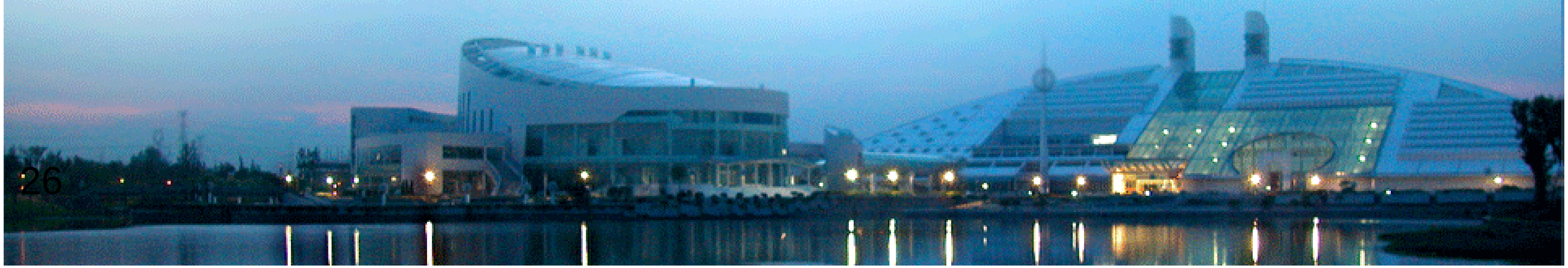


$$p_n^2(r,s)=\frac{r-1}{n}\sum_{k=s}^{n}\sum_{u=s}^{k-1}\frac{1}{(u-1)(k-1)}$$

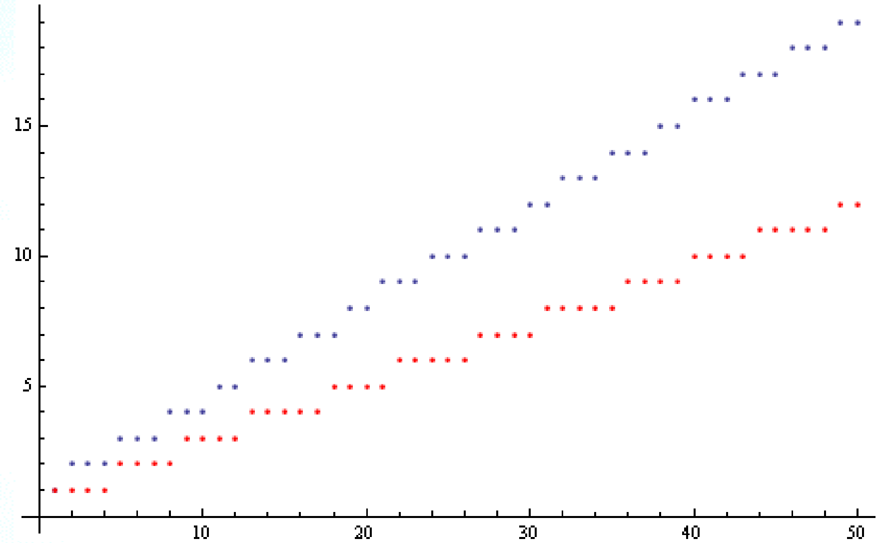
$$p_n^{2,k,u}(r,s)=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{k-1}\cdot\frac{r-1}{u-1}$$

$$=\frac{\binom{n-1}{k-1}\binom{k-2}{u-1}(r-1)(u-2)!(k-u-1)!(n-k)!}{n!}$$

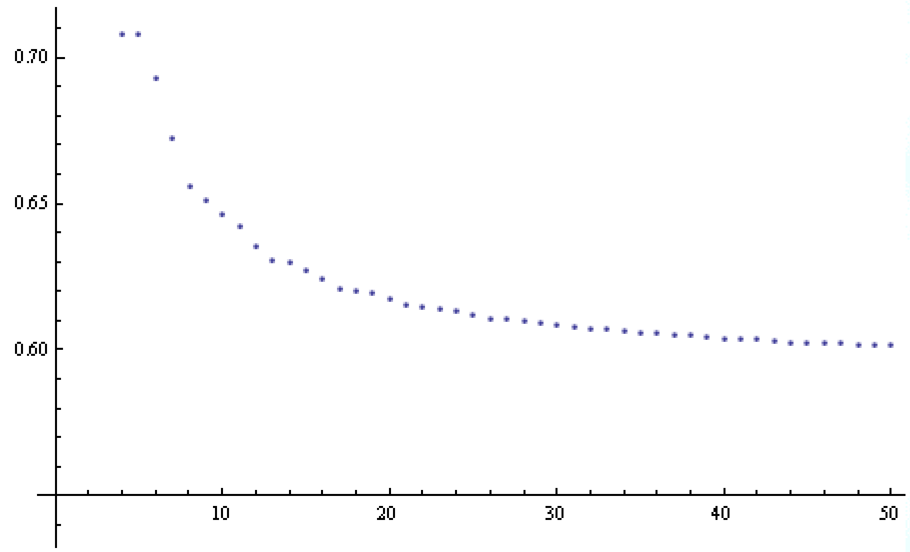
$$p_n(r,s)=p_n^1(r,s)+p_n^2(r,s)+p_n^3(r,s)$$



函数图像



r^*, s^* 图像



$p_n(r^*, s^*)$图像

渐近估计

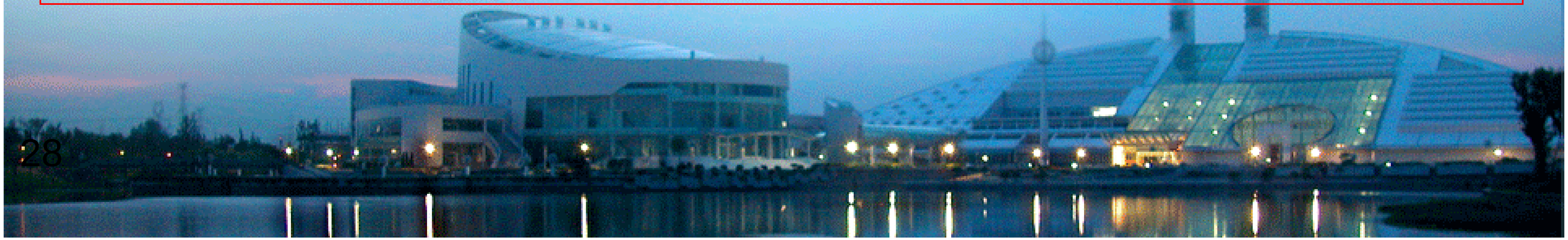
- $$p_n^1(r,s) \approx \frac{r-1}{n}\ln\left(\frac{n-1}{r-2}\right) \approx \frac{r}{n}\ln\frac{n}{r}$$

$$p_n^2(r,s) \approx \frac{r-1}{n}\sum_{k=s}^{n}\frac{1}{k-1}\ln\left(\frac{k-2}{s-2}\right) \approx \frac{r}{n}\int_s^n \frac{1}{k}\ln\frac{k}{s}\,dk \approx \frac{r}{2n}\ln^2\frac{n}{s}$$

$$\int_s^n \frac{1}{k}\ln\frac{k}{s}\,dk = \ln^2\frac{k}{s}\Big|_s^n - \int_s^n \frac{1}{k}\ln\frac{k}{s}\,dk$$

$$p_n^3(r,s) \approx \frac{s-r}{n}\ln\frac{n-1}{s-2} \approx \frac{s-r}{n}\ln\frac{n}{s}$$

$$\boxed{p_n^1(r,s) = \frac{r-1}{n}\sum_{k=r-1}^{n}\frac{1}{k} \quad p_n^2(r,s) = \frac{r-1}{n}\sum_{k=s}^{n}\sum_{u=s}^{k-1}\frac{1}{(u-1)(k-1)} \quad p_n^3(r,s) = \frac{s-r}{n}\sum_{k=s}^{n}\frac{1}{k-1}}$$



极值

- 令 $\alpha = \dfrac{r}{n}, \beta = \dfrac{s}{n}$

$$p_n(\alpha,\beta) \approx -\alpha \ln \alpha + \frac{\alpha}{2}\ln^2 \beta - (\beta-\alpha)\ln \beta$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p_n}{\partial \alpha} = -\ln \alpha - 1 + \dfrac{1}{2}\ln^2 \beta + \ln \beta = 0 \\ \dfrac{\partial p_n}{\partial \beta} = \dfrac{\alpha}{\beta}\ln \beta - \ln \beta - \dfrac{\beta-\alpha}{\beta} = 0 \Rightarrow \dfrac{\beta-\alpha}{\beta}(1+\ln \beta) = 0 \end{cases}$$

$$\alpha = \beta \text{或} \beta = \frac{1}{e} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = e^{-\sqrt{2}} \\ \beta = e^{-\sqrt{2}} \end{cases} \text{或} \begin{cases} \alpha = e^{-\frac{3}{2}} \\ \beta = e^{-1} \end{cases}$$

$$p_n^1(r,s) \approx \frac{r}{n}\ln\frac{n}{r}$$

$$p_n^2(r,s) \approx \frac{r}{2n}\ln^2\frac{n}{s}$$

$$p_n^3(r,s) \approx \frac{s-r}{n}\ln\frac{n}{s}$$

极值

$$p_n(e^{-\sqrt{2}},e^{-\sqrt{2}})\approx e^{-\sqrt{2}}\left(\sqrt{2}+1\right)\approx 0.5869$$

$$p_n(e^{-\frac{3}{2}},e^{-1})\approx e^{-1}+e^{-\frac{3}{2}}\approx 0.5910$$

- 当 n 充分大时，最优策略为 $(e^{-\frac{3}{2}}n,e^{-1}n)$，录用到第一名的概率约为 0.5910，比仅录用一名应聘者时有较大增加

$$p_n(\alpha,\beta)\approx -\alpha\ln\alpha+\frac{\alpha}{2}\ln^2\beta-(\beta-\alpha)\ln\beta \qquad \begin{cases}\alpha=e^{-\sqrt{2}}\\ \beta=e^{-\sqrt{2}}\end{cases} \text{或} \begin{cases}\alpha=e^{-\frac{3}{2}}\\ \beta=e^{-1}\end{cases}$$

问题推广

浙江大学 ZheJiang University 数学建模

- 招聘方录用 k 位应聘者，采用何种策略可使其中包含第一名的概率尽可能大
- 招聘方录用一位应聘者，采用何种策略可使他为前 k 名的概率尽可能大
- 招聘方录用一位应聘者，采用何种策略可使录用者绝对名次期望值尽可能小

期望

- 招聘方依据 $y_1, y_2, \cdots, y_i$ 值决定是否录用应聘者 A_i 。由于每位应聘者录用与否的决定需在面试结束时给出，决策仅与 y_i 有关
  - 招聘方可以录用 $y_i > 1$ 的非备选者
- 在录用相对名次为 y_i 的应聘者 A_i 情况下，被录用者绝对名次的期望值为

$$E(A_i \mid y_i = j) = \sum_{k=1}^{n} kP(A_i = k \mid y_i = j)$$

条件概率

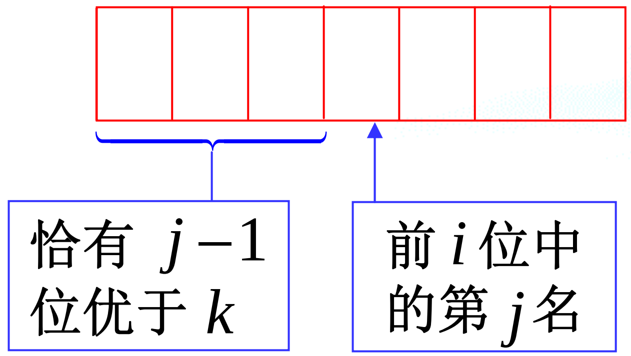
数学建模

$$P(A_i = k \mid y_i = j) = \frac{P(A_i = k, y_i = j)}{P(y_i = j)}$$

$$P(y_i = 1) = P(y_i = 2) = \cdots = P(y_i = i)$$

$$P(y_i = j) = \frac{\binom{n}{i}(i-1)!(n-i)!}{n!} = \frac{1}{i}$$

$$A_i = k, y_i = j$$



$$(k \ge j, n-k \ge i-j)$$

$$P(A_i = k, y_i = j) = \frac{\binom{k-1}{j-1}\binom{n-k}{i-j}(i-1)!(n-i)!}{n!} = \frac{\binom{k-1}{j-1}\binom{n-k}{i-j}}{i \cdot \binom{n}{i}}$$

期望

$$E(A_i \mid y_i = j) = \sum_{k=1}^{n} kP(A_i = k \mid y_i = j) = \sum_{k=1}^{n} k \frac{P(A_i = k, y_i = j)}{P(y_i = j)}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{k\binom{k-1}{j-1}\binom{n-k}{i-j}}{\binom{n}{i}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{j\binom{k}{j}\binom{n-k}{i-j}}{\binom{n}{i}} = \frac{j}{\binom{n}{i}} \sum_{k=1}^{n} \binom{k}{j}\binom{n-k}{i-j}$$

$$\boxed{P(y_i = j) = \frac{1}{i} \qquad P(A_i = k, y_i = j) = \frac{\binom{k-1}{j-1}\binom{n-k}{i-j}}{i \cdot \binom{n}{i}}}$$

组合恒等式

浙江大学 ZheJiang University

数学建模

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots=\sum_{l=0}^{\infty}x^l$$

$$\frac{1}{(1-x)^{p+1}}=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(l+p)(l+p-1)\cdots(l+1)}{p\cdot(p-1)\cdots 1}x^l=\sum_{l=0}^{\infty}\binom{l+p}{p}x^l$$

$$\sum_{l=0}^{\infty}\binom{l+i+1}{i+1}x^l=\frac{1}{(1-x)^{i+2}}=\frac{1}{(1-x)^{j+1}}\frac{1}{(1-x)^{i-j+1}}=\sum_{l=0}^{\infty}\binom{l+j}{j}x^l\cdot\sum_{l=0}^{\infty}\binom{l+i-j}{i-j}x^l$$

- 比较两端 x^{n-i} 系数

$$\binom{n+1}{i+1}=\sum_{k=0}^{n-i}\binom{k+j}{j}\binom{n-k-j}{i-j}=\sum_{k=1}^{n}\binom{k}{j}\binom{n-k}{i-j}$$

浙江大学 ZheJiang University

数学建模

期望

- 在录用相对名次为 y_i 的应聘者 A_i 情况下，录用者绝对名次的期望值为

$$\binom{n+1}{i+1}=\sum_{k=1}^{n}\binom{k}{j}\binom{n-k}{i-j}$$

$$E(A_i \mid y_i = j) = \sum_{k=1}^{n} kP(A_i = k \mid y_i = j)$$

$$= \frac{j}{\binom{n}{i}}\sum_{k=1}^{n}\binom{k}{j}\binom{n-k}{i-j} = \frac{j}{\binom{n}{i}}\binom{n+1}{i+1} = \frac{n+1}{i+1}j$$

- A_i 面试后招聘方可作录用和不录用两种决策

决策

- 令$U(j,i)$为面试相对名次$y_i=j$的A_i时可能取得的最优绝对名次期望值
  - 录用A_i：$U(j,i)=\dfrac{n+1}{i+1}j$
  - 继续面试A_{i+1}：$U(j,i)=\dfrac{1}{i+1}\sum_{k=1}^{i+1}U(k,i+1)$

$$U(j,i)=\min\left\{\frac{n+1}{i+1}j,\frac{1}{i+1}\sum_{k=1}^{i+1}U(k,i+1)\right\}$$

- 面试A_n时，相对名次即为绝对名次，招聘方必定录用，$U(j,n)=j,\ j=1,\cdots,n$

递推

- 自首位应聘者面试起，招聘方采用正确决策所能得到的最优绝对名次期望值为$U(1,1)$
- 令$C_{i-1}=\dfrac{1}{i}\sum_{k=1}^{i}U(k,i)$，则$U(j,i)=\min\left\{\dfrac{n+1}{i+1}j, C_i\right\}$

$$C_{i-1}=\frac{1}{i}\sum_{j=1}^{i}U(j,i)=\frac{1}{i}\sum_{j=1}^{i}\min\left\{\frac{n+1}{i+1}j, C_i\right\}$$

$$C_{n-1}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}U(k,n)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}j=\frac{n+1}{2} \qquad U(1,1)=C_0=c_n$$

$$\boxed{U(j,i)=\min\left\{\frac{n+1}{i+1}j, \frac{1}{i+1}\sum_{k=1}^{i+1}U(k,i+1)\right\} \qquad U(j,n)=j,\ j=1,\cdots,n}$$

递推

$$C_{i-1}=\frac{1}{i}\sum_{j=1}^{i}\min\left\{\frac{n+1}{i+1}j,C_i\right\}$$

- 令 $s_i=\left\lfloor\frac{C_i(i+1)}{n+1}\right\rfloor, i=n-1,\cdots,1$

$$C_{i-1}=\frac{1}{i}\sum_{j=1}^{i}\min\left\{\frac{n+1}{i+1}j,C_i\right\}=\frac{1}{i}\left(\frac{n+1}{i+1}(1+\cdots+s_i)+(i-s_i)C_i\right)$$

$$=\frac{1}{i}\left(\frac{n+1}{i+1}\cdot\frac{s_i(1+s_i)}{2}+(i-s_i)C_i\right)$$

- 最优策略
  - 面试 A_i时，若 $y_i\le s_i$，则录用 A_i，否则继续面试 A_{i+1}

$$(s_n=n)$$

实例

浙江大学 ZheJiang University

数学建模

- $n=4 \qquad c_4=1.875$

  $$C_3=\frac{5}{2}, C_2=\frac{25}{12}, C_1=\frac{15}{8}, C_0=\frac{15}{8}$$

  $$s_3=2, s_2=1, s_1=0\ (s_4=4)$$

- $c_{10}=2.56, c_{100}=3.60, c_{1000}=3.83$

- $$\lim_{n\to\infty} c_n=\prod_{j=1}^{\infty}\left(\frac{j+2}{j}\right)^{\frac{1}{j}+1}\approx 3.8695$$

OPTIMAL SELECTION BASED ON RELATIVE RANK*
(the "Secretary Problem")

BY

Y. S. CHOW, S. MORIGUTI, H. ROBBINS AND S. M. SAMUELS

ABSTRACT

n rankable persons appear sequentially in random order. At the ith stage we observe the relative ranks of the first i persons to appear, and must either select the ith person, in which case the process stops, or pass on to the next stage. For that stopping rule which minimizes the expectation of the absolute rank of the person selected, it is shown that as $n\to\infty$ this tends to the value

$$\prod_{j=1}^{\infty}\left(\frac{j+2}{j}\right)^{1/j+1}\cong 3.8695.$$

1. **Introduction.** n girls apply for a certain position. If we could observe them all we could rank them absolutely with no ties, from best (rank 1) to worst (rank n). However, the girls present themselves one by one, in random order, and when the ith girl appears we can observe only her rank relative to her $i-1$ predecessors, that is, $1+$ the number of her predecessors who are better than she. We may either select the ith girl to appear, in which case the process ends, or reject her and go on to the $(i+1)$th girl; in the latter case the ith girl cannot be recalled. We must select one of the n girls. Let X denote the absolute rank of the girl selected. The values of X are $1,\cdots,n$, with probabilities determined by our selection strategy. What selection strategy (*i.e.* stopping rule) will minimize the expectation $EX=$ expected absolute rank of the girl selected?

Y. S. Chow, S. Moriguti, H. Robbins, S. M. Samuels, Optimal selection based on relative rank (the "secretary problem"), *Israel Journal of Mathematics*, 2, 81-90, 1964

问题推广 II

数学建模

- 招聘方拟录用某应聘者时，应聘者以 $p(0 < p < 1)$ 的概率接受聘用
- 招聘方可以录用在当前面试者之前第 r 个接受面试的应聘者，应聘者仍然接受聘用的概率为 $q(r)$，$q(r)$ 为 r 的非增函数
- 应聘者数目为一随机变量


浙江大学
ZheJiang University
谢 谢