数学建模

浙江大学数学系　谈之奕

tanzy@zju.edu.cn

浙江大学
ZheJiang University

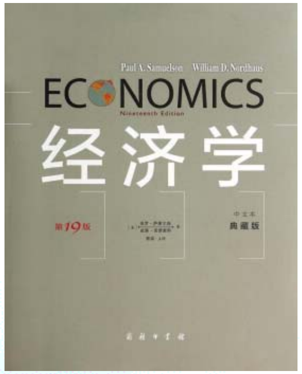
Nobel经济学奖中的数学模型

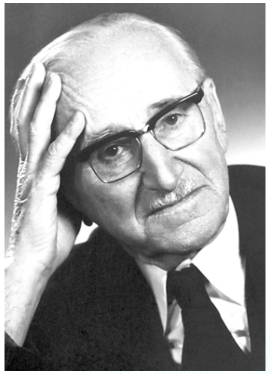
Nobel经济学奖

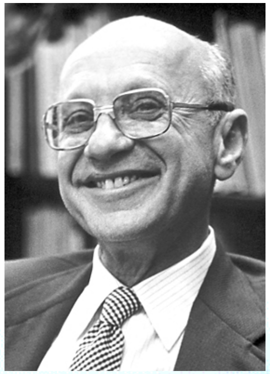
- **The Sveriges Riksbank Prize in Economic Sciences in Memory of Alfred Nobel**

（瑞典国家银行纪念阿尔弗雷德·诺贝尔经济学奖）

  - **自1969至2017年共颁发49次，79人获奖**







1978年Nobel经济学奖
1986年美国科学奖章
1975年ACM图灵奖
1993年APA终身成就奖
1988年INFORMS von Neumann 理论奖

Paul A. Samuelson
(1915-2009)
美国经济学家
(1970年)

Friedrich August von Hayek
(1899-1992)
奥地利经济学家
(1974年)

Milton Friedman
(1912-2006)
美国经济学家
(1976年)

Herbert A. Simon
(1916-2001)
美国经济学家、心理学家、计算机科学家

浙江大学 ZheJiang University

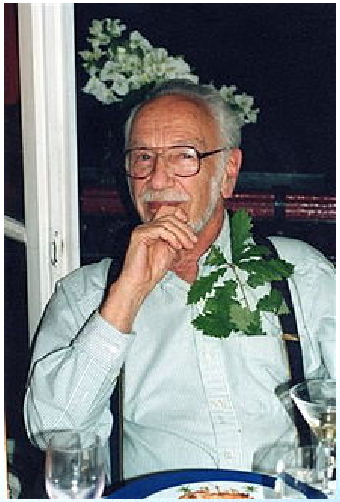
数学建模

Nobel Prize 2012

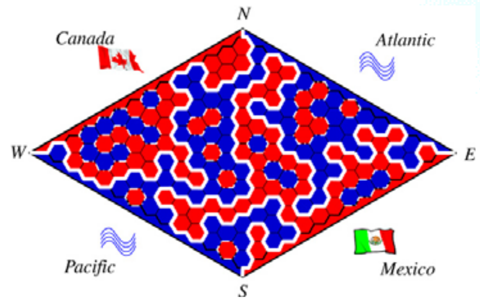
- **Prize motivation: for the theory of stable allocations and the practice of market design**

Lloyd Stowell Shapley
（1923 -2016）
美国数学家、经济学家

Alvin Elliot Roth
（1951 - ）
美国经济学家



David Gale
（1921 - 2008）
美国数学家、经济学家

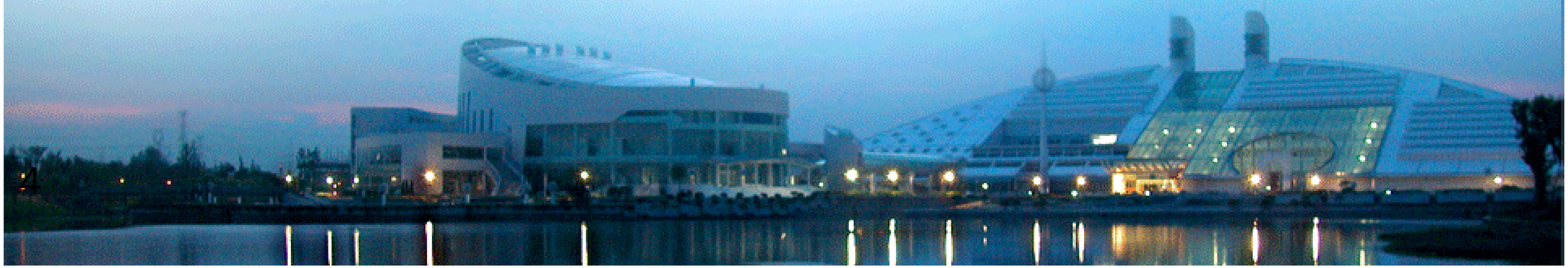


Gale D. Topological games at Princeton, a mathematical memoir. *Games and Economic Behavior*, 66(2): 647-656, 2009.

稳定婚姻问题

数学建模

- 现有 n 名男士 $m_1, m_2, \cdots, m_n$ 和 n 名女士 $w_1, w_2, \cdots, w_n$。每位男士有一偏好顺序可对所有女士按其满意度进行排序，每位女士有一偏好顺序可对所有男士按其满意度进行排序
  - $w \succ_m w'$ 表示在男士 m 的偏好顺序中，w 优于 w'
- n 个配对 $(m_{i_1}, w_{j_1}), (m_{i_2}, w_{j_2}), \cdots, (m_{i_n}, w_{j_n})$ 组成的集合称为一组婚姻（**marriage**），其中 $i_1, i_2, \cdots, i_n$ 和 $j_1, j_2, \cdots, j_n$ 是 $1, 2, \cdots, n$ 的两个排列
- 婚姻 $\mathcal{M}$ 称为不稳定（**unstable**）的，若存在不稳定组合 $\langle m_i, w_l \rangle$，$(m_i, w_j), (m_k, w_l) \in \mathcal{M}$，但 $w_l \succ_{m_i} w_j$，$m_i \succ_{w_l} m_k$
- 若一组婚姻不存在不稳定组合，则称为稳定（**stable**）的



浙江大学
ZheJiang University
数学建模

稳定婚姻问题

$$m_1 : w_2\ w_1\ w_3 \mid w_1 : m_1\ m_3\ m_2$$

$$m_2 : w_1\ w_2\ w_3 \mid w_2 : m_3\ m_1\ m_2$$

$$m_3 : w_1\ w_2\ w_3 \mid w_3 : m_1\ m_2\ m_3$$

稳定婚姻　不稳定婚姻

稳定婚姻	不稳定婚姻	
$(m_1,\ w_1)$	$(m_1,\ w_1)$	$m_1 \succ_{w_2} m_2$
$(m_2,\ w_3)$	$(m_2,\ w_2)$	$w_2 \succ_{m_1} w_1$
$(m_3,\ w_2)$	$(m_3,\ w_3)$	

THE AMERICAN
MATHEMATICAL MONTHLY

THE OFFICIAL JOURNAL OF
THE MATHEMATICAL ASSOCIATION OF AMERICA, INC.

VOLUME 69　NUMBER 1

CONTENTS

JANUARY　1962

COLLEGE ADMISSIONS AND THE STABILITY OF MARRIAGE

D. GALE* AND L. S. SHAPLEY, Brown University and the RAND Corporation

1. Introduction. The problem with which we shall be concerned relates to the following typical situation: A college is considering a set of n applicants of which it can admit a quota of only q. Having evaluated their qualifications, the admissions office must decide which ones to admit. The procedure of offering admission only to the q best-qualified applicants will not generally be satisfactory, for it cannot be assumed that all who are offered admission will accept. Accordingly, in order for a college to receive q acceptances, it will generally have to offer to admit more than q applicants. The problem of determining how many and which ones to admit requires some rather involved guesswork. It may not be known (a) whether a given applicant has also applied elsewhere; if this is known it may not be known (b) how he ranks the colleges to which he has applied; even if this is known it will not be known (c) which of the other colleges will offer to admit him. A result of all this uncertainty is that colleges can expect only that the entering class will come reasonably close in numbers to the desired quota, and be reasonably close to the attainable optimum in quality.

The usual admissions procedure presents problems for the applicants as well as the colleges. An applicant who is asked to list in his application all other colleges applied for in order of preference may feel, perhaps not without reason, that by telling a college it is, say, his third choice he will be hurting his chances of being admitted.

Gale, D., Shapley, L. S., College Admissions and the Stability of Marriage, *The American Mathematical Monthly*, 69, 9-15, 1962

MAA MATHEMATICAL ASSOCIATION OF AMERICA

算法

数学建模

- "男士选择，女士决定"（**deferred acceptance algorithm**）
  - 每位男士都选择他最钟爱的女士
  - 如果有女士被两位或者以上的男士选择，则这几位男士中除了她最喜欢的之外，对其他男士都表示拒绝
  - 被拒绝的那些男士转而考虑他（们）的除被拒绝之外的最满意女士。如果存在冲突（包括和之前选择某女士的男士发生冲突），则再由相应的女士决定拒绝哪些男士
  - 以上过程持续进行，直至不再出现冲突为止

$$m_1 : w_2\ w_1\ w_3 \mid w_1 : m_1\ m_3\ m_2$$

$$m_2 : \cancel{w_1}\ \cancel{w_2}\ w_3 \mid w_2 : m_3\ m_1\ m_2$$

$$m_3 : w_1\ w_2\ w_3 \mid w_3 : m_1\ m_2\ m_3$$

$$m_1 : w_2$$

$$m_2 : \cancel{w_1}\ \cancel{w_2}\ w_3$$

$$m_3 : w_1$$

浙江大学 ZheJiang University

数学建模

算法

- 算法终止时给出一组婚姻。既不会出现冲突，也不会出现有女士未被男士选择情形
  - m和m'同时选择w，m'被拒绝；w'未被任意男士选择
  - 由于算法终止，m'已被所有女士，包括 w'拒绝
  - w'曾被优于m'的男士选择，算法终止时不会未被任意男士选择 矛盾

由于男士女士人数相等，两者必同时发生

- 算法给出的婚姻$\mathcal{M}$是稳定的
  - $\langle m, w'\rangle$ 是不稳定配对，$(m,w),(m',w')\in\mathcal{M}, w'\succ_m w, m\succ_{w'} m'$
  - m曾选择w'，但被w'拒绝
  - 存在男士m''，$m''\succ_{w'} m$，由于$(m',w')\in\mathcal{M}$，故$m'\succ_{w'} m''$

$\Rightarrow m'\succ_{w'} m$ 矛盾

- 算法时间复杂性为$O(n^2)$
  - 任一男士不会多次选择同一女士

稳定婚姻数量

浙江大学 ZheJiang University

数学建模

$m_1: w_1 \quad w_2 \cdots$	$w_1: \cdots m_1$	(m_1, w_1)	(m_1, w_2)
$m_2: w_2 \quad w_1 \cdots$	$w_2: \cdots m_2$	(m_2, w_2)	(m_2, w_1)
$m_3: w_3 \quad w_4 \cdots$	$w_3: \cdots m_3$	(m_3, w_3)	(m_3, w_3)
$m_4: w_4 \quad w_3 \cdots$	$w_4: \cdots m_4$	(m_4, w_4)	(m_4, w_4)
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$m_{2k-1}: w_{2k-1} w_{2k} \cdots$	$w_{2k-1}: \cdots m_{2k-1}$	(m_{2k-1}, w_{2k-1})	(m_{2k-1}, w_{2k-1})
$m_{2k}: w_{2k} w_{2k-1} \cdots$	$w_{2k}: \cdots m_{2k}$	(m_{2k}, w_{2k})	(m_{2k}, w_{2k})

所有稳定婚姻数量至少为 2^k

浙江大学 ZheJiang University

数学建模

最优性

- 称一组稳定婚姻是男方最优（**man-optimal**）的，如果在该组婚姻中，每位男士都认为其配偶不比任何一组稳定婚姻中他的配偶来的差
  - 男方最优的稳定婚姻若存在，必是唯一的
- “男士选择，女士决定”算法给出的婚姻是男方最优的

归纳法

  - 由于每位男士按照偏好从优到劣的顺序选择，只需证明任一被拒绝的配对不会出现在任何一组稳定婚姻中

最优性

数学建模

- 男士 m 被女士 w 拒绝是算法运行过程中首次出现的男士被女士拒绝的情况
  - 存在男士 m', $m' \succ_w m$，且 w 位于 m 和 m' 偏好顺序的首位
  - 若 $(m,w),(m',w') \in \mathcal{M}$，则 $\langle m',w \rangle$ 为不稳定组合，$\mathcal{M}$ 不稳定
- 男士 m 被女士 w 拒绝。在此之前所有被拒绝的配对不会出现在任一组稳定婚姻中
  - 存在男士 m' 选择 w，$m' \succ_w m$
  - 若 $(m,w),(m',w') \in \mathcal{M}$
    - $w' \succ_{m'} w$，则 m' 在之前必被 w' 拒绝。由归纳假设，(m',w') 不会出现在稳定婚姻中，$\mathcal{M}$ 不稳定
    - $w \succ_{m'} w'$，则 $\langle m',w \rangle$ 为不稳定组合，$\mathcal{M}$ 不稳定

最劣性

- 男方最优的稳定婚姻必是女方最劣的，即在该组婚姻中，每位女士都认为其配偶不比任何一组稳定婚姻中她的配偶来的好
  - $\mathcal{M}$为男方最优稳定婚姻，$(m,w)\in\mathcal{M}$，若 $m \succ_w m'$，(m',w) 不会出现在任一组稳定婚姻中
  - 设$\mathcal{M}'$为另一组稳定婚姻，$(m',w)\in\mathcal{M}',(m,w'')\in\mathcal{M}'$
    - 若 $w'' \succ_m w$，$\mathcal{M}$不为男方最优稳定婚姻
    - 若 $w \succ_m w''$，则$\langle m,w\rangle$为不稳定组合，$\mathcal{M}'$不稳定
- “女士选择，男士决定”算法给出的婚姻是女方最优、男方最劣的

稳定室友问题

- 稳定室友问题（**Stable roommate problem**）
  - 某培训班有 $2n$ 名男性学员，两人合住一间标准间。每名学员有一偏好顺序可对其它 $2n-1$ 名学员进行排序。是否存在一组稳定的房间安排方案

$c_1: c_2\ c_3\ c_4$

$c_2: c_3\ c_1\ c_4$

$c_3: c_1\ c_2\ c_4$

$c_4:$ 任意

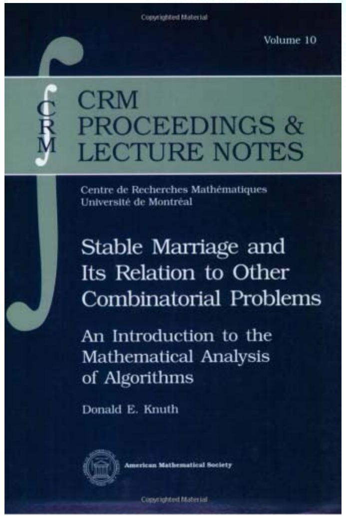
$$\begin{matrix}(c_1, c_2) \\ (c_3, c_4)\end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix}(c_3, c_2) \\ (c_1, c_4)\end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix}(c_2, c_4) \\ (c_1, c_3)\end{matrix}$$

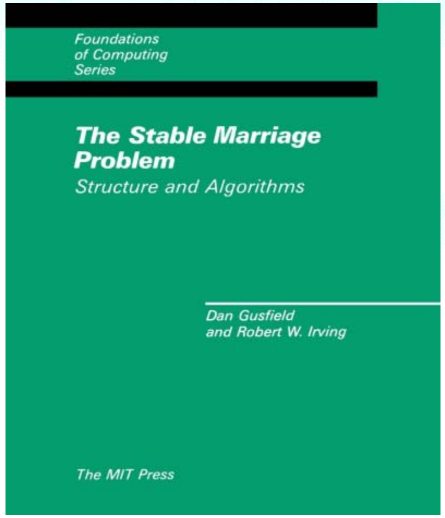
稳定的安排方案未必存在

稳定室友问题

- 存在一时间复杂性为 $O(n^2)$ 的算法判断稳定的安排方案是否存在，并在存在时给出一组稳定的安排方案

男士和女士数目不同，存在不可接受组合，或出现对多人的满意度相同（tie）的情形





Gusfield, D. M., Irving, R. W., *The Stable Marriage Problem: Structure and Algorithms*, The MIT Press, 2003

Knuth, D. R., *Stable Marriage and Its Relation to Other Combinatorial Problems: An Introduction to the Mathematical Analysis of Algorithms*, The American Mathematical Society, 1996.

三维稳定婚姻问题

数学建模

- 现有分别由 n 名男士、n 名女士、n 件礼物组成的集合 M,W,D。任一集合中的每个元素对由另两个集合中元素两两组合而成的 n^2 个配对有给定的偏好顺序
- 一组三维婚姻为三元组的集合

$$\mathcal{M}=\{(m_i,w_i,d_i)\,|\,i=1,\cdots,n,\ \bigcup_{i=1}^{n} m_i=M,\ \bigcup_{i=1}^{n} w_i=W,\ \bigcup_{i=1}^{n} d_i=D\}$$

- 三维婚姻稳定，若对任一三元组 $(m,w,d)\notin\mathcal{M}$，若 $(m,w_1,d_1),(m_2,w,d_2),(m_3,w_3,d)\in\mathcal{M}$，则必有

$$(w_1,d_1)\succ_m (w,d),\ (m_2,d_2)\succ_w (m,d),\ (m_3,w_3)\succ_d (m,w)$$

三维稳定婚姻问题

浙江大学 ZheJiang University

数学建模

- 三维稳定婚姻未必存在。判断是否存在一组三维稳定婚姻是$\mathcal{NP}$-完全的

$m_1:(w_1d_2)(w_1d_1)(w_2d_2)(w_2d_1)$

$m_2:(w_2d_2)(w_1d_1)(w_2d_1)(w_1d_2)$

$w_1:(m_2d_1)(m_1d_2)(m_1d_1)(m_2d_2)$

$w_2:(m_2d_1)(m_1d_1)(m_2d_2)(m_1d_2)$

$d_1:(m_1w_2)(m_1w_1)(m_2w_1)(m_2w_2)$

$d_2:(m_1w_1)(m_2w_2)(m_1w_2)(m_2w_1)$

所有可能的婚姻	不稳定组合
$(m_1,w_1,d_1)\ (m_2,w_2,d_2)$	$\langle m_1,w_1,d_2\rangle$
$(m_1,w_1,d_2)\ (m_2,w_2,d_1)$	$\langle m_2,w_1,d_1\rangle$
$(m_1,w_2,d_1)\ (m_2,w_1,d_2)$	$\langle m_1,w_1,d_2\rangle$
$(m_1,w_2,d_2)\ (m_2,w_1,d_1)$	$\langle m_2,w_2,d_2\rangle$

NRMP

- 根据美国医生培养制度，医学院毕业生取得学位后需作为医院的住院医生（**Resident,** 旧称**Intern**）经过为期三年的实习期
- 二十世纪初期，医院和毕业生之间的双向选择呈无序状态
  - 医院为争夺毕业生，竞相提前开展招聘计划
  - 医院在给予毕业生职位时仅留极短时间供其考虑，以避免被毕业生拒绝后无法找到其它人选
- 通过**NRMP**计划实现双向选择的医院和毕业生曾达到**95%**。**Roth**研究后发现该计划使用的算法本质上与**Gale-Shapley**算法等价，能给出稳定分配方案是其成功的主要原因

NRMP
National Resident Matching Program

The National Resident Matching Program (NRMP) is a private, not-for-profit corporation established in 1952 to provide a uniform date of appointment to positions in graduate medical education (GME) in the United States.

浙江大学 ZheJiang University

数学建模

稳定分配问题

- “医院－毕业生”分配是多对一分配，每所医院存在招收毕业生数量的上界　　稳定的定义？
- 毕业生中的配偶对医院存在联合的偏好顺序，稳定分配未必存在

H_1	H_2	H_3	H_4
s_4	s_4	s_2	s_2
s_2	s_3	s_3	s_4
s_1	s_2	s_1	s_1
s_3	s_1	s_4	s_3

(H_1, s_1) (H_2, s_2)

(H_3, s_3) (H_4, s_4)

$\langle H_2, s_4 \rangle$

$\{s_1, s_2\}$	$\{s_3, s_4\}$
H_1H_2	H_4H_2
H_4H_1	H_4H_3
H_4H_3	H_4H_1
H_4H_2	H_3H_1
H_1H_4	H_3H_2
H_1H_3	H_3H_4
H_3H_4	H_2H_4
H_3H_1	H_2H_1
H_3H_2	H_2H_3
H_2H_3	H_1H_2
H_2H_4	H_1H_4
H_2H_1	H_1H_3

欺骗

数学建模

- 对稳定婚姻问题，若使用男方最优算法，女方可以通过提供虚假偏好获得更好的一组稳定婚姻。

$$m_1 : \cancel{w_2}\ w_1\ w_3 \mid w_1 : m_1\ m_2\ m_3$$
$$m_2 : \cancel{w_1}\ \cancel{w_2}\ w_3 \mid w_2 : m_3\ m_1\ m_2$$
$$m_3 : \cancel{w_1}\ w_2\ w_3 \mid w_3 : m_1\ m_2\ m_3$$

稳定婚姻

$(m_1,\ w_2)$

$(m_2,\ w_3)$

$(m_3,\ w_1)$

w_1 的配偶在其偏好顺序中居第二位

$$m_1 : \cancel{w_2}\ w_1$$
$$m_2 : \cancel{w_1}\ \cancel{w_2}\ w_3$$
$$m_3 : \cancel{w_1}\ w_2$$

$(m_1,\ w_1)$

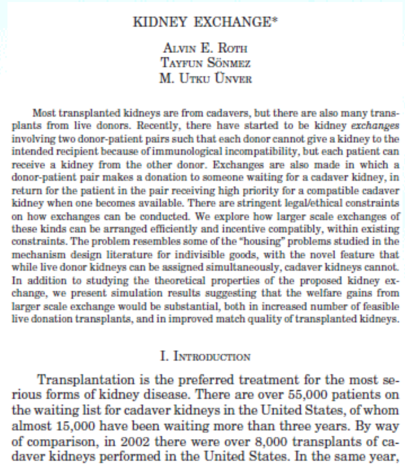
$(m_2,\ w_3)$

$(m_3,\ w_2)$

w_1 的配偶在其偏好顺序中居第一位

欺骗

- 是否存在一种算法，能使参与者真实表达意愿，即参与者不会因为虚假表达意愿而获益
- 对任一稳定婚姻问题的算法，都存在部分参与者可通过提供虚假偏好顺序而获得更好的一组稳定婚姻
- 对给出男（女）方最优稳定婚姻的算法，男（女）方不可能通过提供虚假偏好顺序获得更好的一组稳定婚姻



KIDNEY EXCHANGE*

Alvin E. Roth
Tayfun Sönmez
M. Utku Ünver

Most transplanted kidneys are from cadavers, but there are also many transplants from live donors. Recently, there have started to be kidney *exchanges* involving two donor-patient pairs such that each donor cannot give a kidney to the intended recipient because of immunological incompatibility, but each patient can receive a kidney from the other donor. Exchanges are also made in which a donor-patient pair makes a donation to someone waiting for a cadaver kidney, in return for the patient in the pair receiving high priority for a compatible cadaver kidney when one becomes available. There are stringent legal/ethical constraints on how exchanges can be conducted. We explore how larger scale exchanges of these kinds can be arranged efficiently and incentive compatibly, within existing constraints. The problem resembles some of the "housing" problems studied in the mechanism design literature for indivisible goods, with the novel feature that while live donor kidneys can be assigned simultaneously, cadaver kidneys cannot. In addition to studying the theoretical properties of the proposed kidney exchange, we present simulation results suggesting that the welfare gains from larger scale exchange would be substantial, both in increased number of feasible live donation transplants, and in improved match quality of transplanted kidneys.

I. Introduction

Transplantation is the preferred treatment for the most serious forms of kidney disease. There are over 55,000 patients on the waiting list for cadaver kidneys in the United States, of whom almost 15,000 have been waiting more than three years. By way of comparison, in 2002 there were over 8,000 transplants of cadaver kidneys performed in the United States. In the same year,

Roth, A. E., The Economics of Matching: Stability and Incentives. *Mathematics of Operations Research*, 7, 617-628, 1982.

Roth, A.E., Sonmez, T., Unver, M.U., Kidney exchange, *Quarterly Journal of Economics*, 119, 457–488, 2004.

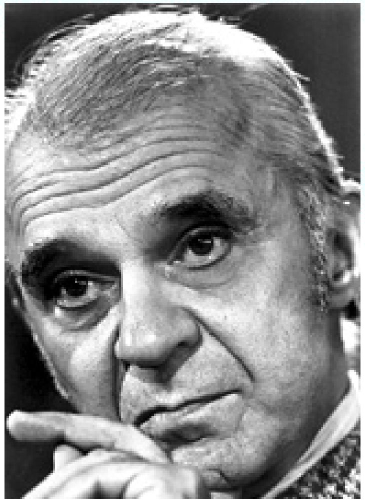
Nobel Prize 1973

浙江大学 ZheJiang University

数学建模

- **Prize motivation: for the development of the input-output method and for its application to important economic problems**
  - **Input-output model gives economic science an important tool of analysis for studying the complicated interdependence within the production system in a modern economy.**
  - **Not only constructed the theoretical foundations of the input-output method, also developed the empirical data that are necessary to utilize the method on important economic problems as well as to test empirically various economic theories.**

——selected from Nobel Prize Award Ceremony Speech by Assar Lindbeck



Wassily Leontief
（1905－1999）
美籍俄裔经济学家
1973年诺贝尔经济学奖得主

投入产出表

浙江大学 ZheJiang University 数学建模

	农业	工业	服务业	最终需求	总产出
农业	15	20	30	35	100
工业	30	10	45	115	200
服务业	20	60	0	70	150

为实现100亿农业产值需投入农业产值15亿，工业产值30亿，服务业产值20亿

100亿农业产值中，15亿用于农业，20亿用于工业，30亿元用于服务业，35亿用于满足最终需求

投入产出模型

浙江大学 ZheJiang University
数学建模

- x_i：部门 i 的总产出
- d_i：部门 i 的最终需求
- a_{ij}：部门 i 的产出中用于部门 j的产值

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} + d_i = x_i \quad \Longrightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} t_{ij} x_j + d_i = x_i$$

- $t_{ij} = \dfrac{a_{ij}}{x_j}$ ：部门 j 生产单位产值的产品需投入部门 i 的 t_{ij}个单位的产值（直接消耗系数）

投入产出模型

数学建模

- 令 $\mathbf{T}=(t_{ij})_{n\times n}$, $\mathbf{d}=(d_1,\cdots,d_n)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{x}=(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$,
  投入产出模型可表示为

$$(\mathbf{I}-\mathbf{T})\mathbf{x}=\mathbf{d}$$

$$\boxed{\sum_{j=1}^{n} t_{ij}x_j + d_i = x_i}$$

- 若 $\mathbf{d}\neq\mathbf{0}$，模型称为开放（**open**）的；
  若 $\mathbf{d}=\mathbf{0}$，模型称为封闭（**closed**）的
- 封闭投入产出模型和**PageRank**模型形式相同

投入产出模型

- 直接消耗系数短期内变化不大，其值可通过统计获得
- 若对任何最终需求，方程总有非负解，则经济系统可行（**feasible**）
- 给定直接消耗系数，如何判断经济系统是否可行，如何求出一定最终需求下各部门的产值

国家统计局 国家发展和改革委员会 财政部关于认真做好2012年全国投入产出调查工作的通知

字体：[大 中 小] 日期：2012-06-27 16:53:10 访问次数：142 信息来源：浙江省统计局

国家统计局 国家发展和改革委员会 财政部

关于认真做好2012年全国投入产出调查工作的通知

国统字〔2012〕16号

各省、自治区、直辖市统计局、发展改革委、财政厅（局）及国务院有关部门：

按照《国务院办公厅关于进行全国投入产出调查的通知》（国办发〔1987〕18号）的要求，2012年将开展全国投入产出调查和编制投入产出表。为认真做好2012年全国投入产出调查和编制投入产出表工作，现将有关事项通知如下：

一、调查目的和意义

投入产出调查是编制国家和地区投入产出表的重要基础。投入产出表是国民经济核算体系的重要组成部分，是开展政策模拟和定量分析的有力工具，对宏观经济管理和决策具有重要意义。

二、调查对象和范围

这次投入产出调查的对象是我国的重点法人单位，涉及除农林牧渔业外的所有国民经济行业。具体范围包括：采矿业，制造业，电力、热力、燃气及水的生产和供应业，建筑业，批发和零售业，交通运输、仓储和邮

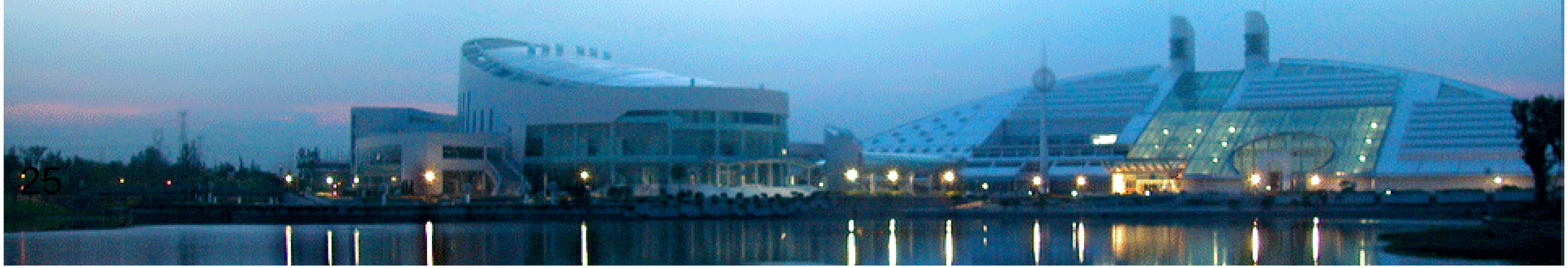
投入产出表

浙江大学 ZheJiang University

数学建模

	农业	工业	服务业	最终需求	总产出
农业	15	20	30	35	100
工业	30	10	45	115	200
服务业	20	60	0	70	150

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0.15 & 0.10 & 0.20 \\ 0.30 & 0.05 & 0.30 \\ 0.20 & 0.30 & 0.00 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{A} = \mathbf{I} - \mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0.85 & -0.10 & -0.20 \\ -0.30 & 0.95 & -0.30 \\ -0.20 & -0.30 & 1.00 \end{pmatrix}$$



投入产出表

- $\mathbf{A}=\mathbf{I}-\mathbf{T}$ 的非主对角元素非正（Z-矩阵）

$$\mathbf{A}^{-1}=\begin{pmatrix} 1.3459 & 0.2504 & 0.3443 \\ 0.5634 & 1.2676 & 0.4930 \\ 0.4382 & 0.4304 & 1.2167 \end{pmatrix}\geq \mathbf{0}$$

$$\boxed{(\mathbf{I}-\mathbf{T})\mathbf{x}=\mathbf{d}}$$

$$\mathbf{d}=\begin{pmatrix} 100 \\ 200 \\ 300 \end{pmatrix}, \mathbf{x}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{d}=\begin{pmatrix} 287.96 \\ 457.76 \\ 494.91 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{d}=\begin{pmatrix} 300 \\ 200 \\ 300 \end{pmatrix}, \mathbf{x}=\begin{pmatrix} 557.14 \\ 570.44 \\ 582.55 \end{pmatrix}$$

M-矩阵

- 开放投入产出模型可行，当且仅当$A^{-1} \geq 0$，满足上述条件的矩阵也称为 **M-矩阵**
- 若 **A** 为**Z-**矩阵，则 **A** 为**M-**矩阵当且仅当 **A** 的所有主子式为正
  - **1949**年，**David Hawkins**和**Herbert Alexander Simon**证明了上述开放投入产出模型可行的条件。事实上，条件的等价性早在**1937**年已由**Alexander Ostrowski**证明

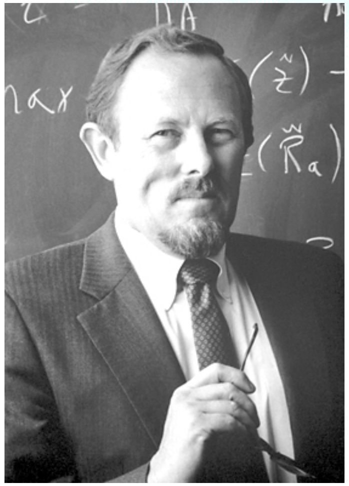
Hawkins D, Simon HA, Note: Some conditions of macroeconomic stability, *Econometrica* 17, 245-248, 1949.

Ostrowski AM. Uber die Determinanten mit iiberwiegender Hauptdiagonale, *Commentarii Mathematici Helvetici.* 10, 69-96, 1937.

Nobel Prize 1990

浙江大学
ZheJiang University
数学建模

- **Prize motivation: for their pioneering work in the theory of financial economics**
- **Contribution**
  - **Constructed a micro theory of portfolio management for individual wealth holders**
  - **Developed a general theory for the pricing of financial assets**



William F. Sharpe
(1934-)
美国经济学家

Harry Markowitz
(1927-)
美国经济学家

收益与风险

浙江大学 ZheJiang University

数学建模

- 现有 n 种股票，股票 S_j 的收益率为 r_j
  - 某一时段内股票的收益率由该时段初和该时段末股票价格变化决定
  - 由于市场的不确定性，r_j 为一随机变量，其期望 $Er_j = \mu_j, j = 1, \cdots, n$
- 风险（**risk**）：可能发生的危险
  - 股票 S_j 的风险为其收益率的标准差，反映了收益率围绕其均值波动的幅度
- 随机变量 r_i 和 r_j 的协方差

$$\sigma_{ij} = \mathrm{Cov}(r_i, r_j) = E(r_i - Er_i)(r_j - Er_j), i, j = 1, \cdots, n$$

金融市场中，人们为获得更多的利益愿意承担更大的风险，风险本身体现一定的价值

协方差矩阵

- 随机变量向量 $\mathbf{r}=(r_1,r_2,\cdots,r_n)^{\mathrm{T}}$ 的协方差矩阵 $\mathbf{V}=(\sigma_{ij})_{n\times n}$
  - 协方差矩阵为半正定矩阵
    - $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{V}\mathbf{x}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}x_ix_j=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_ix_jE(r_i-Er_i)(r_j-Er_j)=E\left(\sum_{i=1}^{n}x_i(r_i-Er_i)\right)^2\geq 0$
  - 若 $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{V}\mathbf{x}=E\left(\sum_{i=1}^{n}x_i(r_i-Er_i)\right)^2=0$，则 $P\left(\sum_{i=1}^{n}x_i(r_i-Er_i)=0\right)=1$，随机变量 $\sum_{i=1}^{n}x_ir_i$ 退化为 $\sum_{i=1}^{n}x_i\mu_i$
    - 证券中可能存在无风险组合，或存在某种证券的收益率可表示为其他证券收益率的线性组合
- 假设V正定，$\mu_j, j=1,\cdots,n$不全相同，记 $\boldsymbol{\mu}=(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n)^{\mathrm{T}}$

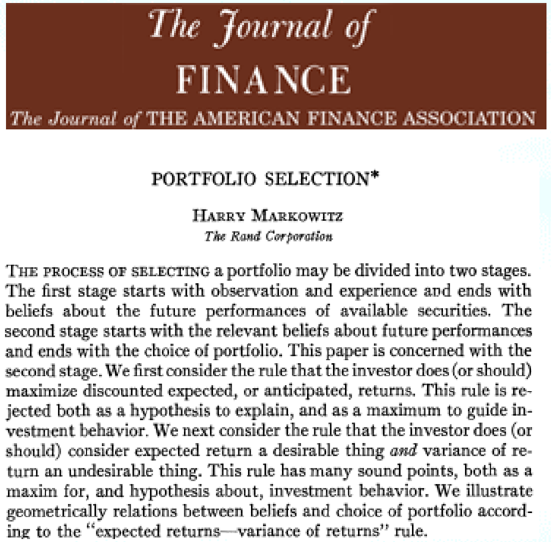
投资组合

浙江大学 ZheJiang University

数学建模

- 将总投资额单位化为1，投资于股票 S_j 的份额为 $x_j, j=1,\cdots,n$，该组合（**portfolio**）可用 $\mathbf{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$ 表示
- 在该组合下收益为 $\mathrm{E}(\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{r})=\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\mu}$，风险的平方为 $\mathrm{Var}(\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{r})=\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{V}\mathbf{x}$
- 如何选择股票进行投资，使得收益最大而风险最小

如何变多目标为单目标?



The Journal of FINANCE

The Journal of THE AMERICAN FINANCE ASSOCIATION

PORTFOLIO SELECTION*

HARRY MARKOWITZ

The Rand Corporation

THE PROCESS OF SELECTING a portfolio may be divided into two stages. The first stage starts with observation and experience and ends with beliefs about the future performances of available securities. The second stage starts with the relevant beliefs about future performances and ends with the choice of portfolio. This paper is concerned with the second stage. We first consider the rule that the investor does (or should) maximize discounted expected, or anticipated, returns. This rule is rejected both as a hypothesis to explain, and as a maximum to guide investment behavior. We next consider the rule that the investor does (or should) consider expected return a desirable thing *and* variance of return an undesirable thing. This rule has many sound points, both as a maxim for, and hypothesis about, investment behavior. We illustrate geometrically relations between beliefs and choice of portfolio according to the "expected returns—variance of returns" rule.

Markowitz, H., Portfolio Selection, *The Journal of Finance*, 7, 77-91, 1952

Markowitz模型

- **Markowitz模型**
  - 选择投资组合 $\mathbf{x}^*(\mu)$，在收益达到给定值 μ 的前提下，组合的风险最小

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{V}\mathbf{x} \\
\text{s.t.} \quad & \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\mu} = \mu \\
& \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{e} = 1
\end{aligned}
$$

仅含等式约束的二次凸规划

Largrange函数的驻点为极小值点

- **Largrange函数** $L(\mathbf{x},\lambda_1,\lambda_2) = \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{V}\mathbf{x} - \lambda_1(\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\mu} - \mu) - \lambda_2(\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{e} - 1)$

Largrange乘子法

浙江大学 ZheJiang University

数学建模

- **对Largrange函数求偏导，并求驻点**

对应于 μ 的极小风险组合

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L(\mathbf{x},\lambda_1,\lambda_2)}{\partial \mathbf{x}} = 2\mathbf{V}\mathbf{x}-\lambda_1\boldsymbol{\mu}-\lambda_2\mathbf{e}=0 \Rightarrow \mathbf{x}=\dfrac{1}{2}\mathbf{V}^{-1}(\boldsymbol{\mu}\quad \mathbf{e})\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{x}^*(\mu)=\mathbf{V}^{-1}(\boldsymbol{\mu}\quad \mathbf{e})\mathbf{A}^{-1}\begin{pmatrix}\mu\\ 1\end{pmatrix}\\ \dfrac{\partial L(\mathbf{x},\lambda_1,\lambda_2)}{\partial \lambda_1} = -(\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\mu}-\mu)=0 \\ \dfrac{\partial L(\mathbf{x},\lambda_1,\lambda_2)}{\partial \lambda_2} = -(\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{e}-1)=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}\boldsymbol{\mu}^{\mathrm{T}}\\ \mathbf{e}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}\mathbf{x} \overset{\text{代入}}{=} \begin{pmatrix}\mu\\ 1\end{pmatrix} \Rightarrow \frac{1}{2}\underbrace{\begin{pmatrix}\boldsymbol{\mu}^{\mathrm{T}}\\ \mathbf{e}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}\mathbf{V}^{-1}(\boldsymbol{\mu}\quad \mathbf{e})}_{\mathbf{A}}\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mu\\ 1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{pmatrix}=2\mathbf{A}^{-1}\begin{pmatrix}\mu\\ 1\end{pmatrix}$$

A 为二阶正定矩阵

$$\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{ac-b^2}\begin{pmatrix}c & -b\\ -b & a\end{pmatrix}$$

- 记 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\mu}^{\mathrm{T}}\\ \mathbf{e}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}\mathbf{V}^{-1}(\boldsymbol{\mu}\quad \mathbf{e})=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\mu}^{\mathrm{T}}\mathbf{V}^{-1}\boldsymbol{\mu} & \boldsymbol{\mu}^{\mathrm{T}}\mathbf{V}^{-1}\mathbf{e}\\ \mathbf{e}^{\mathrm{T}}\mathbf{V}^{-1}\boldsymbol{\mu} & \mathbf{e}^{\mathrm{T}}\mathbf{V}^{-1}\mathbf{e}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\ b & c\end{pmatrix}$
- $\sigma^*(\mu)^2=\mathbf{x}^*(\mu)^{\mathrm{T}}\mathbf{V}\mathbf{x}^*(\mu)=(\mu\quad 1)\mathbf{A}^{-1}\underbrace{\begin{pmatrix}\boldsymbol{\mu}^{\mathrm{T}}\\ \mathbf{e}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}\mathbf{V}^{-1}\mathbf{V}\mathbf{V}^{-1}(\boldsymbol{\mu}\quad \mathbf{e})}_{\mathbf{A}}\mathbf{A}^{-1}\begin{pmatrix}\mu\\ 1\end{pmatrix}$

$$=(\mu\quad 1)\mathbf{A}^{-1}\begin{pmatrix}\mu\\ 1\end{pmatrix}=\frac{1}{ac-b^2}(\mu\quad 1)\begin{pmatrix}c & -b\\ -b & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mu\\ 1\end{pmatrix}=\frac{a-2b\mu+c\mu^2}{ac-b^2}$$

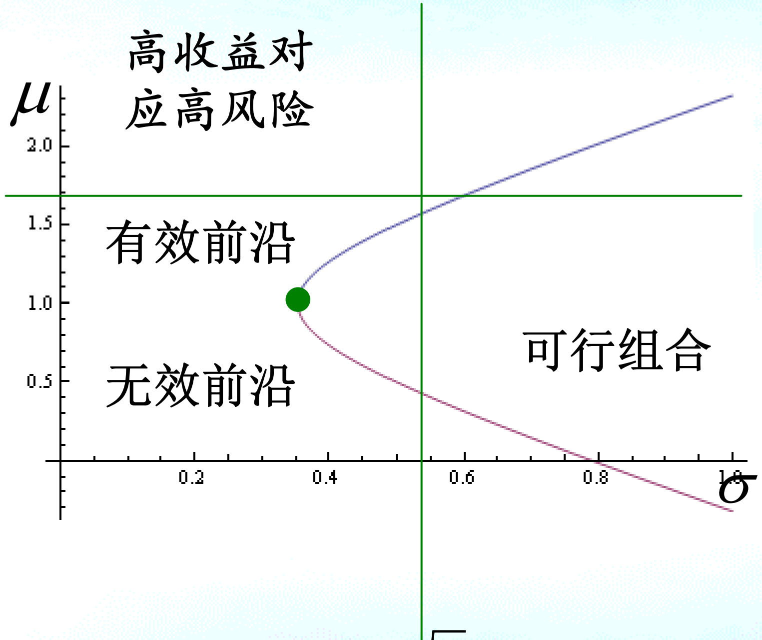
对应于 μ 的极小风险组合的风险

$$\boxed{\min\left\{\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{V}\mathbf{x}\,|\,\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\mu}=\mu,\ \ \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{e}=1\right\}\quad L(\mathbf{x},\lambda_1,\lambda_2)=\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{V}\mathbf{x}-\lambda_1(\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\mu}-\mu)-\lambda_2(\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{e}-1)}$$

有效前沿

数学建模

- 在 (σ,μ) 平面上，极小风险组合的收益 μ 与风险 $\sigma^*(\mu)$ 的轨迹为一条双曲线的右支
  - 双曲线上半部称为有效前沿（**efficient frontier**）。其上每一点对应的组合为有效组合，即收益固定时风险最小的组合或风险固定时收益最大的组合
  - 双曲线下半部为无效前沿（**inefficient frontier**）
  - 双曲线顶点 (σ_G,μ_G) 为总体最小风险组合（**global minimum variance portfolio**）



$$\mu_G=\frac{b}{c}\qquad \sigma_G=\sqrt{\frac{1}{c}}$$

$$\boxed{\sigma^*(\mu)^2=\frac{a-2b\mu+c\mu^2}{ac-b^2}}$$

$$\frac{\sigma^*(\mu)^2}{\frac{1}{c}}-\frac{\left(\mu-\frac{b}{c}\right)^2}{\frac{ac-b^2}{c^2}}=1$$

$$\mathbf{x}^*(\mu_G)=\mathbf{V}^{-1}(\boldsymbol{\mu}\quad \mathbf{e})\mathbf{A}^{-1}\begin{pmatrix}\mu_G\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{c}\mathbf{V}^{-1}\mathbf{e}$$

投资组合理论

浙江大学
ZheJiang University
数学建模

Finally, I would like to add a comment concerning portfolio theory as a part of the microeconomics of action under uncertainty. It has not always been considered so. For example, when I defended my dissertation as a student in the Economics Department of the University of Chicago, Professor Milton Friedman argued that portfolio theory was not Economics, and that they could not award me a Ph.D. degree in Economics for a dissertation which was not in Economics. I assume that he was only half serious, since they did award me the degree without long debate. As to the merits of his arguments, at this point I am quite willing to concede: at the time I defended my dissertation, portfolio theory was not part of Economics. But now it is.

Foundations of Portfolio Theory

——Nobel Prize Lecture by Harry Markowitz

无风险资产

- 设市场上另有无风险资产，收益率为固定常数 r_f，投资份额为 x_0，$\sum_{j=0}^{n} x_j = 1$
- 投资组合的收益为

$$x_0 r_f + \sum_{j=1}^{n} x_j \mu_j = \left(1 - \sum_{j=1}^{n} x_j\right) r_f + \sum_{j=1}^{n} x_j \mu_j = \sum_{j=1}^{n} x_j (\mu_j - r_f) + r_f$$

风险仍为 $\mathbf{x}^{\mathrm{T}} \mathbf{V} \mathbf{x}$，其中 $\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$

- 记 $\mu_j ' = \mu_j - r_f, \boldsymbol{\mu}' = \{\mu_1 ', \cdots, \mu_n '\}^{\mathrm{T}}$，则 $\boldsymbol{\mu}' = \boldsymbol{\mu}' - r_f \mathbf{e}$，投资组合的收益为 $r_f + \mathbf{x}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\mu}'$

无风险资产

数学建模

- 有无风险资产的Markowitz模型

$$\min \quad \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{V}\mathbf{x}$$
$$\text{s.t.} \quad \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\mu}' = \mu'$$

模型中不显含变量 x_0

  - $L(\mathbf{x},\lambda) = \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{V}\mathbf{x} - \lambda(\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\mu}' - \mu')$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(\mathbf{x},\lambda)}{\partial \mathbf{x}} = 2\mathbf{V}\mathbf{x} - \lambda\boldsymbol{\mu}' = 0 \;\Rightarrow \mathbf{x}^* = \dfrac{\lambda}{2}\mathbf{V}^{-1}\boldsymbol{\mu}' \;\Rightarrow \mathbf{x}^*(\mu') = \dfrac{\mu'}{\boldsymbol{\mu}'^{\mathrm{T}}\mathbf{V}^{-1}\boldsymbol{\mu}'}\mathbf{V}^{-1}\boldsymbol{\mu}' \\ \dfrac{\partial L(\mathbf{x},\lambda)}{\partial \lambda} = -(\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\mu}' - \mu') = 0 \;\Rightarrow \boldsymbol{\mu}'^{\mathrm{T}}\mathbf{x}^* = \mu' \;\Rightarrow \dfrac{\lambda}{2}\boldsymbol{\mu}'^{\mathrm{T}}\mathbf{V}^{-1}\boldsymbol{\mu}' = \mu' \end{cases}$$

$$\sigma^*(\mu')^2 = \mathbf{x}^*(\mu')^{\mathrm{T}}\mathbf{V}\mathbf{x}^*(\mu') = \left(\frac{\mu'}{\boldsymbol{\mu}'^{\mathrm{T}}\mathbf{V}^{-1}\boldsymbol{\mu}'}\right)^2 \boldsymbol{\mu}'^{\mathrm{T}}\mathbf{V}^{-1}\mathbf{V}\mathbf{V}^{-1}\boldsymbol{\mu}' = \frac{\mu'^2}{\boldsymbol{\mu}'^{\mathrm{T}}\mathbf{V}^{-1}\boldsymbol{\mu}'}$$

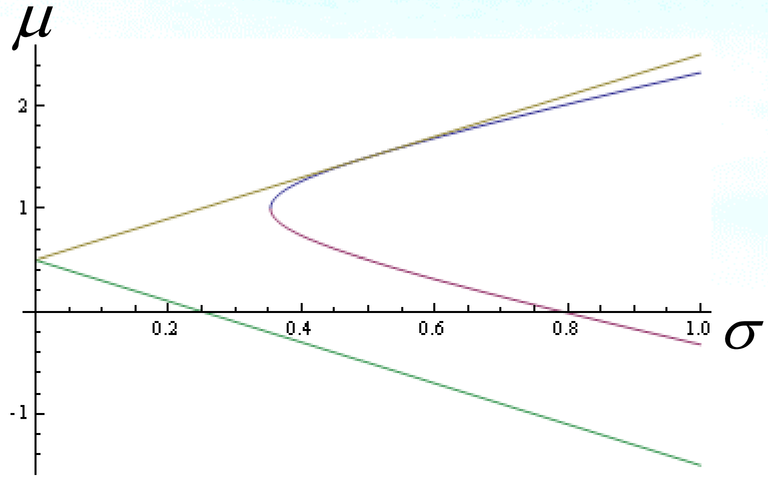
$$\sigma^*(\mu') = \pm\frac{\mu'}{\sqrt{a - 2r_f b + r_f^{\,2}c}} = \pm\frac{\mu - r_f}{\sqrt{a - 2r_f b + r_f^{\,2}c}}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu}^{\mathrm{T}}\mathbf{V}^{-1}\boldsymbol{\mu} & \boldsymbol{\mu}^{\mathrm{T}}\mathbf{V}^{-1}\mathbf{e} \\ \mathbf{e}^{\mathrm{T}}\mathbf{V}^{-1}\boldsymbol{\mu} & \mathbf{e}^{\mathrm{T}}\mathbf{V}^{-1}\mathbf{e} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}}$$

$$\boldsymbol{\mu}'^{\mathrm{T}}\mathbf{V}^{-1}\boldsymbol{\mu}' = (\boldsymbol{\mu} - r_f\mathbf{e})^{\mathrm{T}}\mathbf{V}^{-1}(\boldsymbol{\mu} - r_f\mathbf{e}) = a - 2r_f b + r_f^{\,2}c$$

有效前沿

- 存在无风险资产时，在 (σ,μ)平面上，极小风险组合的收益 μ与风险 $\sigma^*(\mu')$ 的轨迹为两条射线
- 两条射线相交于点 $(0,r_f)$，为总体最小风险组合。斜率为正的射线为有效前沿，斜率为负的射线为无效前沿
- 射线与双曲线相交时，极小风险组合中无风险资产份额为0 ，风险资产份额为1



$$\sigma^*(\mu') = \pm\frac{\mu'}{\sqrt{a-2r_f b + r_f{}^2 c}}$$

$$\sigma^*(\mu)^2 = \frac{a-2b\mu+c\mu^2}{ac-b^2}$$

交点

- 当 $\mu'=\frac{\boldsymbol{\mu}'^{\mathrm{T}}\mathbf{V}^{-1}\boldsymbol{\mu}'}{\mathbf{e}^{\mathrm{T}}\mathbf{V}^{-1}\boldsymbol{\mu}'}=\frac{a-2r_fb+r_f^2c}{b-r_fc}$ 时，射线与双曲线切于点

$$M\left(\frac{\sqrt{a-2r_fb+r_f^2c}}{b-r_fc},\, r_f+\frac{a-2r_fb+r_f^2c}{b-r_fc}\right)=M\left(\frac{\sqrt{a-2r_fb+r_f^2c}}{b-r_fc},\,\frac{a-r_fb}{b-r_fc}\right)$$

  - 双曲线切线的斜率 $\frac{d\mu}{d\sigma}=\frac{\sigma\frac{ac-b^2}{c}}{\mu-\frac{b}{c}}$
    - 在 $M(\sigma_M,\mu_M)$处的斜率为 $\frac{\sigma_M\frac{ac-b^2}{c}}{\mu_M-\frac{b}{c}}=\frac{\sigma_M\frac{ac-b^2}{c}}{\frac{a-r_fb}{b-r_fc}-\frac{b}{c}}=\frac{\sigma_M\frac{ac-b^2}{c}}{\frac{ac-b^2}{c(b-r_fc)}}=\sigma_M(b-r_fc)=\sqrt{a-2r_fb+r_f^2c}$

$$\boxed{\mathbf{x}^*(\mu')=\frac{\mu'}{\boldsymbol{\mu}'^{\mathrm{T}}\mathbf{V}^{-1}\boldsymbol{\mu}'}\mathbf{V}^{-1}\boldsymbol{\mu}'}$$

$$\boxed{\boldsymbol{\mu}'^{\mathrm{T}}\mathbf{V}^{-1}\boldsymbol{\mu}'=a-2r_fb+r_f^2c}$$

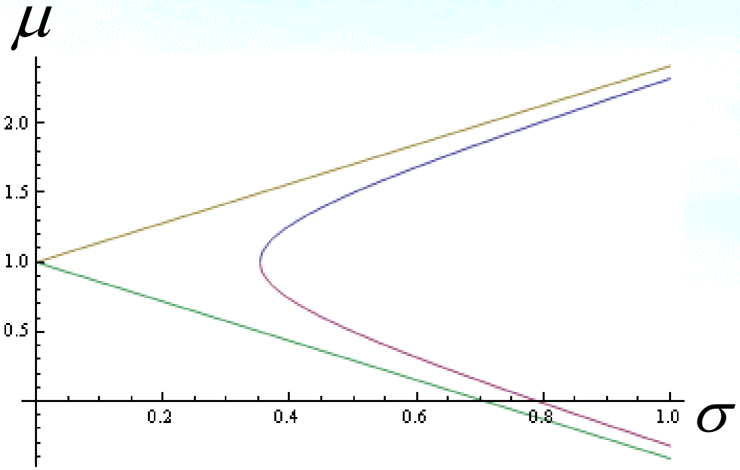
$$\boxed{\begin{aligned}\sigma^*(\mu')&=\pm\frac{\mu'}{\sqrt{a-2r_fb+r_f^2c}}\\ \sigma^*(\mu)^2&=\frac{a-2b\mu+c\mu^2}{ac-b^2}\end{aligned}}$$

$$\mathbf{e}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}^*(\mu')=\frac{\mu'}{\boldsymbol{\mu}'^{\mathrm{T}}\mathbf{V}^{-1}\boldsymbol{\mu}'}\mathbf{e}^{\mathrm{T}}\mathbf{V}^{-1}\boldsymbol{\mu}' \quad \mathbf{e}^{\mathrm{T}}\mathbf{V}^{-1}\boldsymbol{\mu}'=\mathbf{e}^{\mathrm{T}}\mathbf{V}^{-1}(\boldsymbol{\mu}-r_f\mathbf{e})^{\mathrm{T}}=b-r_fc$$

有效前沿

数学建模

- 不含无风险资产和含无风险资产两种情形的有效前沿
  - 当 $r_f < \frac{b}{c}$ 时，切点位于斜率为正的射线上
  - 当 $r_f > \frac{b}{c}$ 时，切线位于斜率为负的射线上
  - 当 $r_f = \frac{b}{c}$ 时，不含无风险资产的极小风险组合不存在，射线为双曲线渐近线



$$\sigma^*(\mu') = \pm\frac{\mu'}{\sqrt{a - 2r_f b + r_f^{\ 2} c}}$$

$$\sigma^*(\mu)^2 = \frac{a - 2b\mu + c\mu^2}{ac - b^2}$$

资本市场线

浙江大学 ZheJiang University
数学建模

- 含无风险资产的有效前沿称为资本市场线（**Capital Market Line，CML**）
  - 投资者在投资时，应在这条射线上选择一个适合他的组合
- 定义投资组合的**Sharpe**比（**Sharpe ratio**）为 $\frac{\mu - r_f}{\sigma^*(\mu)}$，表示承担单位风险所获得的超额收益
  - 有效前沿上每一组合**Sharpe**比均为 $\sqrt{a - 2r_f b + r_f^2 c}$

$$\boxed{\sigma^*(\mu') = \frac{\mu'}{\sqrt{a - 2r_f b + r_f^2 c}}} \qquad \frac{\mu - r_f}{\sigma^*(\mu)} = \sqrt{a - 2r_f b + r_f^2 c}$$

Sharpe W F. Mutual fund performance. *The Journal of business*, 39(1): 119-138, 1966

两基金分离定理

浙江大学 ZheJiang University

数学建模

- 两基金分离定理（**two-fund separation theorem**）
  - 设 $\mathbf{x}^*(\mu_1)$ 和 $\mathbf{x}^*(\mu_2)$ 为两个极小风险组合，其中 $\mu_1 \neq \mu_2$，则 $\mathbf{x}^*$ 是极小风险组合的充要条件是存在 λ 使得
    $$\mathbf{x}^* = \lambda \mathbf{x}^*(\mu_1) + (1-\lambda) x^*(\mu_2)$$
    - 若 $\mathbf{x}^*(\mu_1)$ 和 $\mathbf{x}^*(\mu_2)$ 均为有效组合，且 $0 \le \lambda \le 1$，则 $\mathbf{x}^* = \lambda \mathbf{x}^*(\mu_1) + (1-\lambda) x^*(\mu_2)$ 也是有效组合
  - 两种极小风险组合可以生成整个组合前沿。考虑所有组合和两种组合的组合具有相同的效果

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{x}^{\mathrm{T}} \mathbf{V} \mathbf{x} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{x}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\mu} = \mu \\ & \mathbf{x}^{\mathrm{T}} \mathbf{e} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{x}^{\mathrm{T}} \mathbf{V} \mathbf{x} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{x}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\mu}' = \mu' \end{aligned}$$

投资基金（共同基金）：通过发行基金权益凭证，将各个投资者彼此分散的资金集中起来，交由投资专家集中进行资产组合运作和管理，主要投资于证券等金融产品或其他产业部门，最终实现预定的投资目的，并将收益按比例向投资者进行分配。

——《中国大百科全书》

资产定价模型

- 资产定价模型（**Capital asset pricing model**）
  - 设两种证券 S_1 和 S_2 的期望收益率 $\mu_1 \neq \mu_2$，证券 S_0 不改变 S_1和 S_2生成的组合前沿的充要条件为：存在 $\lambda \in \mathbb{R}$，使得
    - $\mu_0 = (1-\lambda)\mu_1 + \lambda\mu_2$
    - $\sigma_{01} = (1-\lambda)\sigma_1^2 + \lambda\sigma_{12}$ ， $\sigma_{02} = (1-\lambda)\sigma_{12} + \lambda\sigma_2^2$
  - 设证券（组合）S_1 和 S_2 满足 $\mu_1 \neq \mu_2$ ， $\sigma_{12} = 0$
    - 若 S_2是风险证券，证券 S_0不改变 S_1和 S_2生成的组合前沿的充要条件为 $\mu_0 - \mu_2 = \dfrac{\sigma_{01}}{\sigma_1^2}(\mu_1 - \mu_2)$
    - 若 S_2是无风险证券，证券 S_0不改变 S_1和 S_2生成的组合前沿的充要条件为 $\mu_0 - r_f = \dfrac{\sigma_{01}}{\sigma_1^2}(\mu_1 - r_f)$

卖空

- 卖空（**short selling**）：允许投资者在交易时卖出他并不持有的证券
- 若不允许卖空，则在模型中需增加约束 $x \geq 0$
  - 规划为带不等式约束的二次凸规划，无法求出解析解
  - 无无风险资产时有效前沿不再是双曲线的一支
  - 两基金分离定理不再成立

Nobel Prize 1972

ZheJiang University

数学建模

- **Prize motivation: for their pioneering contributions to general economic equilibrium theory and welfare theory**
- **Contribution**
  - **Made fundamental contributions to the renewal of the general equilibrium theory.**
  - **Work with welfare theory**
    - **Introduced new welfare concepts in microeconomics**
    - **Work in the theory of social choice**

John Richard Hicks (1904-1989)
英国经济学家

Kenneth Joseph Arrow （1921 -2017）
美国经济学家

选举制度

- m 位候选人参加选举，n 位选民通过投票（**ballot**）表达自身意愿。选举制度（**voting system**）规定选民投票的形式，以及如何根据所有选民的投票情况确定选举结果
  - 投票形式可以是某位或某几位候选人，也可以是候选人的一个（完全或部分）偏好顺序（**preference list**）
  - 选举结果可以是某位或某几位候选人当选，也可以是候选人的一个排名

公平选举

浙江大学
ZheJiang University
数学建模

- 公平选举制度应有的性质
  - 中立性（**neutral**）：候选人当选与否或其排名由投票情况决定，与候选人自身无关
  - 平等性（**anonymous**）：所有选民的投票具有同等效力
  - 单调性（**monotonicity**）：某位选民投票情况作出有利于某候选人的改变不会不利于该候选人的选举结果
- 显失公平的选举制度
  - 存在被指定的候选人，其选举结果不依赖于投票情况
  - 存在独裁选民（**dictatorship**），候选人的选举结果完全由他的投票情况决定

两候选人选举

- A, B两候选人参加选举， n 位选民 $v_1, v_2, \cdots, v_n$ 每位选择其中一人，选举系统 V 根据 n 位选民的投票情况判定其中一位候选人当选
- 多数规则（**majority rule**）：若某候选人有超过半数的选民选择，则该候选人当选
- （**May定理**）若选民数为奇数，唯一满足中立性、平等性、单调性，且能避免平局（同时当选或同时不当选）出现的选举制度为多数规则

Kenneth O. May Prize in the History of Mathematics

Kenneth O. May
（1915 - 1977）
美国数学家

多人选举

- 若有至少三个候选人参加选举，每位选民给出候选人的偏好顺序，选举制度判定一位候选人当选

未必存在

  - 多数规则：若有超过半数的选民将某位候选人置于偏好顺序的首位，则该候选人当选
  - 简单多数规则（**plurality**）：若某位候选人被最多的选民置于偏好顺序的首位，则该候选人当选

简单多数

人数	2	1	1	$\cdots$	1
偏好顺序	A	B_1	B_2	$\cdots$	B_M
	B_1	B_2	B_3	$\cdots$	B_1
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	B_{M-1}	B_M	B_1	$\cdots$	B_{M-1}
	B_M	A	A	$\cdots$	A

占选民比例 $\dfrac{2}{M+2}$ 的选民将其置于首位，占选民比例 $\dfrac{M}{M+2}$ 的选民将其置于末位

A 在简单多数规则下当选

Borda记分法

数学建模

- **Borda记分法（Borda count）**
  - 若某选民对m位候选人$B_1, B_2, \cdots, B_m$的偏好顺序为$B_1 \succ B_2 \succ \cdots \succ B_m$，则对$B_i$赋分 $m-i$
  - 候选人的得分为所有选民对其赋分之和。按候选人得分从大到小的顺序确定候选人的排名

古罗马元老院的选举曾采用过**Borda**记分法，斯洛文尼亚下议院的个别议席，瑙鲁国会议员选举以及很多社会团体的选举目前仍采用**Borda**记分法或其变形

Jean-Charles de Borda（1733 - 1799）

法国数学家、物理学家

多数原则

数学建模

- 多数原则（**majority criterion**）：若有超过半数的选民将某位候选人置于偏好顺序的首位，则该候选人当选
- **Borda**记分法不满足多数原则

$$
\begin{array}{c|cc}
\text{人数} & 2 & 1 \\
\hline
 & A & B_1 \\
 & B_1 & B_2 \\
\text{偏好顺序} & \vdots & \vdots \\
 & B_{M-1} & B_M \\
 & B_M & A
\end{array}
\left.\vphantom{\begin{array}{c}A\\B_1\\\vdots\\B_{M-1}\\B_M\end{array}}\right\} M
$$

按**Borda**记分法 B_1 当选

按多数规则 A 当选

A 得分为 $2(M-1)$

B_1 得分为 $2(M-2)+M-1=3M-5$

对决

浙江大学 ZheJiang University

数学建模

- 若在偏好顺序中，将 A 置于 B 之前的选民超过一半，则称 A 在 A 和 B 的对决中获胜
- 按简单多数原则当选的候选人可能在与任何人对决中失败

人数	35	28	20	17
偏好顺序	A	B	C	C
	B	A	A	B
	C	C	B	A

$A : C$

$B : C$

$63:37$

Condorcet规则

数学建模

- 可在和任何人对决中获胜的候选人称为**Condorcet 胜利者**（**Condorcet Winner**）
- **Condorcet规则**：**Condorcet胜利者当选**
- **Condorcet 胜利者未必存在**

人数	1	1	1
偏好顺序	A	B	C
	B	C	A
	C	A	B

$$A \succ B$$

$$B \succ C$$

$$C \succ A$$

Condorcet悖论

Marquis de Condorcet （1743 - 1794）

法国哲学家、数学家

序列两两对决

数学建模

- 序列两两对决（**Sequential Pairwise Voting**）
  - 给定候选人的一个序列 $B_{(1)}, B_{(2)}, \cdots, B_{(m-1)}, B_{(m)}$
  - $B_{(1)}$ 与 $B_{(2)}$ 对决的胜者与 $B_{(3)}$ 对决，胜者再与 $B_{(4)}$ 对决，直至有 $B_{(m)}$ 参与的对决的胜者当选
- 序列两两对决的结果与序列选择有关，不满足中立性

12	7	5	3
F	G	H	I
G	H	I	H
H	I	F	G
I	F	G	F

$\xrightarrow{\text{交换}\, I, H\, \text{后}}$

G, H, F, I

$G\ F\ I$

12	7	5	3
F	G	I	H
G	I	H	I
I	H	F	G
H	F	G	F

Instant Runoff

- **Instant Runoff（IRV）**
  - 若某位候选人被最少的选民置于偏好顺序的首位，则该候选人必不能当选
  - 在所有选民的偏好顺序中删去该候选人，重复上述过程直至仅剩一个候选人为止，该候选人即为当选者
- 若在某一阶段，有超过半数的选民将某位候选人置于当前偏好顺序的首位，则该候选人必当选
- **Instant Runoff**不满足单调性

Instant Runoff

6	5	4	2
G	M	D	S
M	G	S	D
D	D	M	G
S	S	G	M

$\xrightarrow{\text{删去}S}$

6	5	4	2
G	M	D	D
M	G	M	G
D	D	G	M

$\xrightarrow{\text{删去}M}$

6	5	4	2
G	G	D	D
D	D	G	G

删去 D，G 当选

6	5	4	2
G	M	D	S
M	G	S	G
D	D	M	D
S	S	G	M

$\xrightarrow{\text{删去}S}$

6	5	4	2
G	M	D	G
M	G	M	D
D	D	G	M

$\xrightarrow{\text{删去}D}$

6	5	4	2
G	M	M	G
M	G	G	M

删去 G，M 当选

单人当选制度

- **Exhaustive Ballot**
  - 选民每轮选择一位候选人，每轮删除被最少选民选择的候选人。持续上述过程直至剩下一位候选人为止，该候选人即为当选者
- **Two-round system**
  - 在第一轮投票中，选民选择一位候选人，被最多选民选择的两位候选人进入第二轮。第二轮选举遵循多数规则

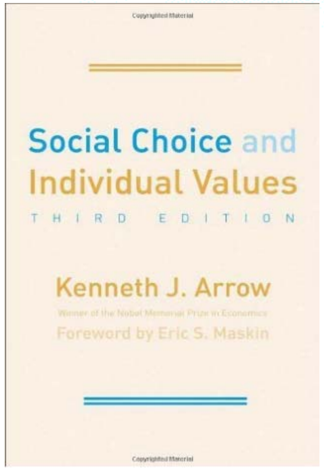
北京	32	37	40	43
悉尼	30	30	37	45
曼彻斯特	11	13	11	
柏林	9	9		
伊斯坦布尔	7			

北京	44	56		
多伦多	20	22		
伊斯坦布尔	17	18		
巴黎	15	9		
大阪	6			

社会选择和社会福利函数

数学建模

- 社会选择函数（**social choice function**）：对 n 位选民给出的候选人的满足完全性和传递性的偏好顺序集 $\mathbb{P}$，有一个候选人的子集与之对应
- 社会福利函数（**social welfare function**）：对 n 位选民给出的候选人的满足完全性和传递性的偏好顺序集 $\mathbb{P}$，有一个候选人的满足完全性和传递性的社会偏好顺序 $\Phi(\mathbb{P})$ 与之对应



Arrow. K., *Social Choice and Individual Values*，1951年初版，2012年三版

Social Choice and Welfare

社会福利函数

数学建模

- 社会福利函数应有的性质
  - **Pareto性**：若存在候选人 A和 B，所有选民的偏好顺序均将 A置于B 之前，则社会偏好顺序中 A也置于B之前
  - 无关选择独立性（**independence of irrelevant alternative，IIA**）：若在所有选民的偏好顺序中，候选人A 和B 的相对位置没有变化，则在社会偏好顺序中，A和 B 的相对位置也没有变化
  - 一般性（**Universality，unrestricted domain**）：不得对选民的偏好顺序作出比完全性和传递性更强的限制

Arrow不可能定理

浙江大学 ZheJiang University

数学建模

- **Arrow不可能定理（Arrow’s Impossible Theorem）：**
  - （强形式）若候选人多于两名，任意满足一般性、无关选择独立性、**Pareto**性的社会福利函数必为独裁的
    - 独裁：社会偏好顺序完全由某个独裁选民的偏好顺序决定，而与其它选民的偏好顺序无关
  - （弱形式）若候选人多于两名，不存在同时满足一般性、单调性、中立性、无关选择独立性、非独裁的社会福利函数


浙江大学
ZheJiang University
谢 谢