数学建模

浙江大学数学系　谈之奕

tanzy@zju.edu.cn

伪币辨识

伪币辨识

- **12枚外观相同的硬币中有一枚是伪币，能否用天平称量三次找出伪币**
  - 已知伪币数恰为一枚
  - 天平只能比较，不能称重
  - 伪币轻重未知
  - 找出伪币且需说明轻重

伪币辨识

5 6 7 8 = 9 10 11 12

1 2 3 = 5 6 7

4 > < 9

1	2	3	重/轻
5	6	7	8
9	10	11	12

伪币辨识

5 6 7 8 = 9 10 11 12

1 2 3 > 5 6 7

1 > = < 2

> < = 4

5 6 7 8

9 10 11 12

重

伪币辨识

5 6 7 8 > 9 10 11 12

5 6 9 = 7 8 10

11 > < 12

1 2 3 4

5 6 7 8

9 10 < >

轻

浙江大学 ZheJiang University

数学建模

伪币辨识

5 6 7 8 > 9 10 11 12

5 6 9 > 7 8 10

5 > = < 6

1 2 3 4

>	<	7	8
9	＝	11	12

轻 10

重 5 6

自适应

- 自适应
  - 硬币真伪的可能性共有$12 \times 2 = 24$种，三次称量可以给出$3^3 = 27$种结果
  - 三种称量结果不会出现，其余每一种称量结果对应一种可能性。不同称量结果对应的可能性各不相同，根据称量结果可辨别伪币并确定轻重
  - 后一次称量依赖于之前称量结果的方案为自适应（**adaptive**）的

伪币辨识

1 4 9 10 > 2 5 7 11

1 6 7 12 = 2 4 8 10

3 4 7 11 > 1 5 8 12

重	1	4	9	10
	3	5	9	11
	3	4	7	11
轻	2	$\boxed{5}$	7	11
	3	$\boxed{5}$	9	11
	1	$\boxed{5}$	8	12

非自适应

- 非自适应
  - 三种称量结果不会出现，其余每一种称量结果对应一种可能性。不同称量结果对应的可能性各不相同，根据称量结果可辨别伪币并确定轻重
  - 后一次称量不依赖于之前称量结果的方案为非自适应（**non-adaptive**）的。非自适应的试验可同时进行

一般结论

- 对任意整数 $w \geq 2$
  - 若 $3 \leq n \leq (3^w - 3)/2$，存在一非适应的称量方案，使用 w 次称量可从 n 枚硬币中辨别伪币并确定轻重
  - 若 $n > (3^w - 3)/2$，不存在自适应的称量方案，用 w 次称量即可从 n 枚硬币中辨别伪币并确定轻重

Freeman John Dyson
(1923-2020)
英裔美籍物理学家、数学家
英国皇家学会会员
1981年Wolf奖得主

Dyson FJ. The Problem of the Pennies. *The Mathematical Gazette*, 30, 231-234, 1946.
Born A, Hurkens CA, Woeginger GJ. How to detect a counterfeit coin: Adaptive versus non-adaptive solutions. *Information Processing Letters*, 86, 137-141, 2003.

科学家与作家

浙江大学
ZheJiang University
数学建模

Dyson FJ, *Disturbing the Universe*, Basic Books, 1979.（中译本：宇宙波澜，邱显正译，三联书店**1998**年版，王一操、左立华译，重庆大学出版社**2015**年版）

Dyson FJ, *The Scientist as Rebel*, New York Review Books, 2006.（中译本：反叛的科学家，肖明波、杨光松译，浙江大学出版社，**2013**）

1996年第4届Lewis Thomas 奖得主

The Lewis Thomas Prize for Writing about Science is an international award that honors the "scientist as poet" and recognizes "the rare individual who bridges the worlds of science and the humanities, whose voice and vision can tell us about science's aesthetic and philosophical dimensions."

林开亮. 弗里曼· 戴森: 科学家与作家的一生. 科学文化评论, **10(3), 82-101, 2013.**

飞鸟与青蛙

浙江大学
ZheJiang University
数学建模

- 有些数学家是鸟，其他的则是青蛙
  - 鸟翱翔在高高的天空，俯瞰延伸至遥远地平线的广袤的数学远景。他们喜欢那些统一我们思想、并将不同领域的诸多问题整合起来的概念
  - 青蛙生活在天空下的泥地里，只看到周围生长的花儿。他们乐于探索特定问题的细节，一次只解决一个问题

Birds and Frogs

Freeman Dyson

Dyson FJ. Birds and frogs. ***Notices of the AMS*****, 56(2), 212-223, 2009.**
（王丹红译稿）

René Descartes
(1596-1650)
法国哲学家、数学家

David Hilbert
(1862-1943)
德国数学家

Bourbaki group

Francis Bacon
(1561-1626)
英国哲学家

飞鸟与青蛙

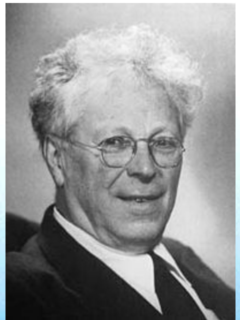
- 数学的世界既辽阔又深刻，需要鸟们和青蛙们协同努力来探索
  - 数学丰富又美丽，因为鸟赋予它辽阔壮观的远景，青蛙则澄清了它错综复杂的细节。
  - 数学既是伟大的艺术，也是重要的科学，因为它将普遍的概念与深邃的结构融合在一起。
  - 如果声称鸟比青蛙更好，因为它们看得更遥远，或者青蛙比鸟更好，因为它们更加深刻，那么这些都是愚蠢的见解

Erwin Rudolf Josef Alexander Schrödinger (1887-1961)
奥地利物理学家

Hermann Klaus Hugo Weyl (1885-1955)
德国数学家、物理学家

杨振宁 **(1922-)**
中国物理学家

Yuri Ivanovitch Manin (1937-)
俄罗斯数学家



Abram Samoilovitch Besicovitch (1891-1970)
俄罗斯数学家

Dyson集

ZheJiang University 浙江大学

数学建模

- 满足条件 (i) $\sum_{\mathbf{v}\in S}\mathbf{v}=\mathbf{0}$ (ii)若 $\mathbf{v}\in S$，则 $-\mathbf{v}\notin S$ 的向量子集$S\subseteq\{-1,0,1\}^w$称为**Dyson集**

$$\begin{array}{l}
(\ \ 1,\ \ 1,-1)\\
(-1,-1,\ \ 0)\\
(\ \ 0,\ \ 0,\ \ 1)\\
(\ \ 1,-1,\ \ 1)\\
\boxed{(-1,\ \ 0,-1)}\\
(\ \ 0,\ \ 1,\ \ 0)\\
(-1,\ \ 1,\ \ 1)\\
(\ \ 0,-1,-1)\\
(\ \ 1,\ \ 0,\ \ 0)\\
(\ \ 1,-1,\ \ 0)\\
(-1,\ \ 0,\ \ 1)\\
(\ \ 0,\ \ 1,-1)\\
(\ \ 1,\ \ 0,\ \ 1)
\end{array}$$

1	左	左	右
2	右	右	
3			左
4	左	右	左
5	右		右
6		左	
7	右	左	左
8		右	右
9	左		
10	左	右	
11	右		左
12		左	右
	重	平	重

1 4 9 10 > 2 5 7 11

1 6 7 12 = 2 4 8 10

3 4 7 11 > 1 5 8 12

5

轻

Dyson集

浙江大学 ZheJiang University

数学建模

- 若存在Dyson集 $S=\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\cdots,\mathbf{v}_n\}$，则用无砝码的天平可用非自适应称量方案经 w 次称量从 n 枚硬币中辨别伪币并确定轻重
  - 若 $\mathbf{v}_j$ 第 i 个分量为 $-1/1/0$，则在第 i 次称量中将第 j 枚硬币放在右盘/放在左盘/不作称量
  - 记 $\mathbf{z}\in\{-1,0,1\}^w$。若第 i 次称量结果为右盘偏重/左盘偏重/天平平衡，则 $\mathbf{z}$ 的第 i 个分量为 $-1/1/0$
  - 若伪币在左盘/右盘且偏重，则天平左盘/右盘偏重，若伪币在左盘/右盘且偏轻，则天平左盘/右盘偏轻，若伪币不作称量，则天平平衡
  - 若 $\mathbf{z}=\mathbf{v}_j$，则第 j 枚硬币是伪币且偏重；若 $\mathbf{z}=-\mathbf{v}_j$，则第 j 枚硬币是伪币且偏轻

天平左右硬币数相同

$\mathbf{z}=\mathbf{v}_j$ 和 $\mathbf{z}=-\mathbf{v}_j$ 不会同时出现

$$
\begin{array}{c}
(\ \ 1,\ \ 1,-1)\\
(-1,-1,\ \ 0)\\
(\ \ 0,\ \ 0,\ \ 1)\\
(\ \ 1,-1,\ \ 1)\\
(-1,\ \ 0,-1)\\
(\ \ 0,\ \ 1,\ \ 0)\\
(-1,\ \ 1,\ \ 1)\\
(\ \ 0,-1,-1)\\
(\ \ 1,\ \ 0,\ \ 0)\\
(\ \ 1,-1,\ \ 0)\\
(-1,\ \ 0,\ \ 1)\\
(\ \ 0,\ \ 1,-1)
\end{array}
$$

构造

浙江大学 ZheJiang University

数学建模

- 函数 $f:\{-1,0,1\}\to\{-1,0,1\}$
- 函数 $\mathbf{f}:\{-1,0,1\}^w\to\{-1,0,1\}^w$，若 $\mathbf{x}=(x_1,\cdots,x_w)\in\{-1,0,1\}^w$，则 $\mathbf{f}(\mathbf{x})=(f(x_1),\cdots,f(x_w))$
- 对任意 $\mathbf{x}\in\{-1,0,1\}^w$，$\mathbf{x}\neq(-1,-1,\cdots,-1),(1,1,\cdots,1),(0,0,\cdots,0)$，定义 $S(\mathbf{x})=\{\mathbf{x},\mathbf{f}(\mathbf{x}),\mathbf{f}(\mathbf{f}(\mathbf{x})),-\mathbf{x},-\mathbf{f}(\mathbf{x}),-\mathbf{f}(\mathbf{f}(\mathbf{x}))\}$
  - $S(\mathbf{x})$ 中向量两两不同
  - 对任意 $\mathbf{v}\in S(\mathbf{x})$，$\mathbf{f}(\mathbf{v})\in S(\mathbf{x})$

x	-1	0	1
$f(x)$	0	1	-1
$f(f(x))$	1	-1	0
$f(f(f(x)))$	-1	0	1

$-x$	1	0	-1
$-f(x)$	0	-1	1
$-f(f(x))$	-1	1	0

$f(-x)$	-1	1	0
$f(-f(x))$	1	0	-1
$f(-f(f(x)))$	0	-1	1

$$\mathbf{f}(-\mathbf{x})=-\mathbf{f}(\mathbf{f}(\mathbf{x})),\ \mathbf{f}(-\mathbf{f}(\mathbf{x}))=-\mathbf{x},\ \mathbf{f}(-\mathbf{f}(\mathbf{f}(\mathbf{x})))=-\mathbf{f}(\mathbf{x})$$

浙江大学 ZheJiang University

数学建模

构造

x	-1	0	1
$f(x)$	0	1	-1
$f(f(x))$	1	-1	0
$-x$	1	0	-1
$-f(x)$	0	-1	1
$-f(f(x))$	-1	1	0

$x+f(x)+f(f(x))=0$

$S^+(\mathbf{x})=\{\mathbf{x},\mathbf{f}(\mathbf{x}),\mathbf{f}(\mathbf{f}(\mathbf{x}))\}$

- 记 $W=\frac{1}{6}(3^w-3)$。存在 $\{-1,0,1\}^w$中 W个向量 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\cdots,\mathbf{v}_W$，使得

$$\{-1,0,1\}^w=S(\mathbf{v}_1)\cup S(\mathbf{v}_2)\cup\cdots\cup S(\mathbf{v}_W)$$
$$\cup\{(-1,\cdots,-1),(1,\cdots,1),(0,\cdots,0)\}$$

- **Dyson集的构造**
  - $n=3k,1\le k\le W$：$S^+(\mathbf{v}_1)\cup S^+(\mathbf{v}_2)\cup\cdots\cup S^+(\mathbf{v}_k)$
  - $n=3k+2,1\le k<W$

$$\begin{array}{ll}
(\ \ 1,\ \ 1,\ \ 1,\ \ 1,\cdots,\ \ 1) & \\
(\ \ 1,-1,\ \ 0,\ \ 0,\cdots,\ \ 0) & \mathbf{v}_1 \\
(\ \ 0,-1,\ \ 1,\ \ 1,\cdots,\ \ 1) & -\mathbf{f}(\mathbf{f}(\mathbf{v}_1)) \\
(-1,\ \ 1,-1,-1,\cdots,-1) & \mathbf{v}_2 \\
(-1,\ \ 0,-1,-1,\cdots,-1) & -\mathbf{f}(\mathbf{f}(\mathbf{v}_2))
\end{array}$$

$S^+(\mathbf{v}_3),S^+(\mathbf{v}_4),\cdots,S^+(\mathbf{v}_{k+1})$

$n=3k+1,2\le k<W$

$$\begin{array}{ll}
(\ \ 1,\ \ 1,\ \ 1,\ \ 1,\cdots,\ \ 1) & \\
(-1,-1,\ \ 1,\ \ 1,\cdots,\ \ 1) & \mathbf{v}_1 \\
(-1,-1,\ \ 0,\ \ 0,\cdots,\ \ 0) & -\mathbf{f}(\mathbf{f}(\mathbf{v}_1)) \\
(\ \ 0,\ \ 0,-1,-1,\cdots,-1) & \mathbf{f}(\mathbf{v}_1) \\
(-1,\ \ 1,\ \ 0,\ \ 0,\cdots,\ \ 0) & \mathbf{v}_2 \\
(\ \ 1,\ \ 0,-1,-1,\cdots,-1) & \mathbf{f}(\mathbf{f}(\mathbf{v}_2)) \\
(\ \ 1,\ \ 0,\ \ 0,\ \ 0,\cdots,\ \ 0) & \mathbf{v}_3
\end{array}$$

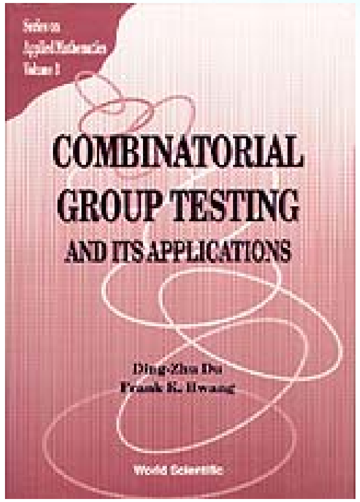
$S^+(\mathbf{v}_4),S^+(\mathbf{v}_5),\cdots,S^+(\mathbf{v}_{k+1})$

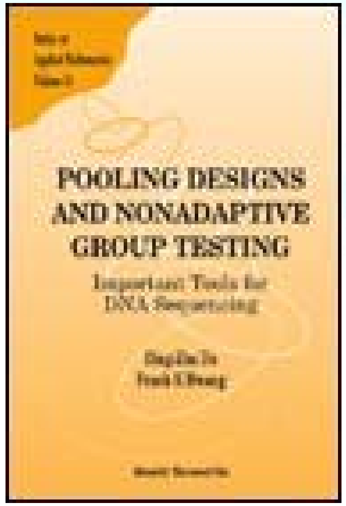
$n=4$

$$\begin{array}{l}
(\ \ 1,\ \ 1,\ \ 1,\cdots,\ \ 1) \\
(-1,\ \ 0,\ \ 0,\cdots,\ \ 0) \\
(\ \ 0,-1,\ \ 0,\cdots,\ \ 0) \\
(\ \ 0,\ \ 0,-1,\cdots,-1)
\end{array}$$

群试

- 群试（**group testing**）技术产生于二十世纪四十年代，在医学检验、可靠性测试、编码、分子生物学等领域发挥了重要的作用
  - 概率群试
  - 组合群试





D.-Z. Du, F. K. Hwang, *Combinatorial Group Testing and Its Applications*, World Scientific, 2000.

D.-Z. Du, F. K. Hwang, *Pooling Designs and Nonadaptive Group Testing: Important Tools For DNA Sequencing*. World Scientific, 2006.


浙江大学
ZheJiang University
谢　谢