数学建模

浙江大学数学系　谈之奕

tanzy@zju.edu.cn

浙江大学 ZheJiang University

生物数学模型

种群数量变化模型

种群

浙江大学
ZheJiang University
数学建模

- 生态学（**ecology**）
  - 研究生物与环境及生物与生物之间相互关系的生物学分支学科
- 种群（**population**）
  - 同种生物在一定空间范围内同时生活着所有个体的集群
- 单种群连续模型
  - 记 $x(t)$ 为 t 时刻一种群个体数量
    - 假设 $x(t)$ 连续可微
    - 初始种群有一定规模，种群数量变化不受随机因素影响

个体（**individual**）
↓
种群（ **population**）
↓
群落（**community**）
↓
生态系统（**ecosystem**）

指数增长模型

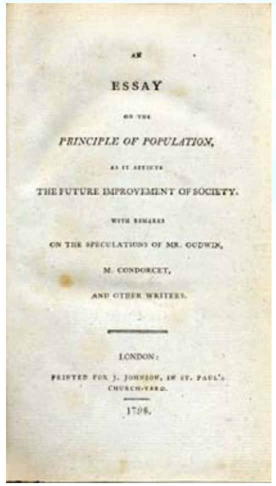
浙江大学
ZheJiang University
数学建模

- 指数增长模型
  - 假设
    - 环境承载容量无限，所有个体独立生活，彼此间不存在竞争
    - 种群处于封闭（**closed**）状态，不存在迁入（**immigration**）和迁出（**emigration**）
    - 存在常数 b 和 μ，对任意 t，在自 t 至 $t+\Delta t$ 时间内，出生的个体数量和死亡的个体数量分别为 $bx(t)\Delta t$ 和 $\mu x(t)\Delta t$
      - 人均出生/ 死亡/ 增长率（**per capita birth / death / growth rate**）：$b, \mu, r = b - \mu$
  - $x(t+\Delta t) - x(t) = (b-\mu)x(t)\Delta t \Rightarrow \dfrac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = rx(t) \Rightarrow \dfrac{dx}{dt} = rx$

指数增长模型

浙江大学
ZheJiang University
数学建模

- 指数增长模型
  - $\dfrac{dx}{dt} = rx \;\Rightarrow\; x(t) = x_0 e^{rt}$
    - 当 $r > 0$ 时，$x(t) \to \infty (t \to \infty)$，
      当 $r < 0$ 时，$x(t) \to 0 (t \to \infty)$
  - 指数增长模型不适于描述较长时期的人口演变过程，但某地一个较短时间内的人口统计数据可能符合指数增长模型



Thomas Robert Malthus
（1766－1834）
英国人口学家、经济学家
Malthus TR，***An Essay on the Principle of Population*****，*1798***

Malthus认为：在社会发展中，人口是以几何比率增加，而生活资料却以算术比例增加，自然规律要求这两个增加保持平衡，于是就出现了饥馑、战争、疫病、贫困。而社会改革和济贫法将助长人口增长，制造失业与贫困

Logistic模型

数学建模

- **Logistic模型**
  - 种群人均增长率仅与种群数量有关，且是种群数量的递减函数

$$\frac{1}{x}\frac{dx}{dt}=r \Rightarrow \frac{1}{x}\frac{dx}{dt}=r-ax \Rightarrow \frac{dx}{dt}=rx\left(1-\frac{x}{K}\right)$$

$$\Rightarrow x(t)=\frac{Kx_0}{x_0+\left(K-x_0\right)e^{-rt}}$$

  - 内禀增长率（**innate rate of increase**）**：** r
  - 环境承载量（**carrying capacity**）**：** K

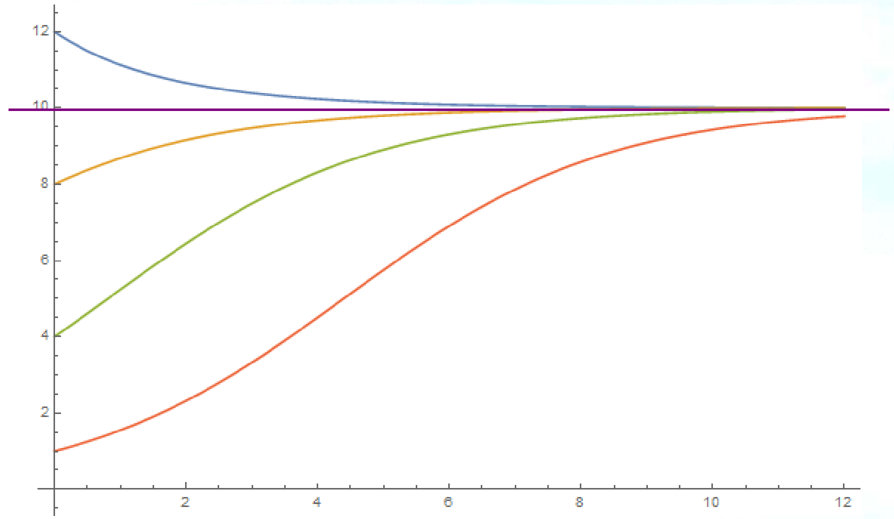
Verhulst PF, Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement. ***Correspondance Mathématique et Physique*****. 10: 113–121, 1838.**

Pierre François Verhulst
（1804－1849）
比利时数学家

Logistic模型

浙江大学
ZheJiang University
数学建模

- **Logistic模型的性质**
  - 当 $0 < x(0) < K$ 时，$x(t)$ 单调递增；当 $x(0) > K$ 时，$x(t)$ 单调递减
  - $x(t)$ 在 $t = \dfrac{K}{2}$ 处有一拐点
- 模型应用
  - 多数情况下，指数模型与**Logistic**模型并不是基于生物学机理，而是一种经验模型
  - 模型及其参数应根据实际数据进行估计和检验



$$\frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = r\left(1 - \frac{2x}{K}\right)\frac{dx}{dt} = r^2x\left(1 - \frac{2x}{K}\right)\left(1 - \frac{x}{K}\right)$$

自治系统

浙江大学 ZheJiang University

数学建模

- 自治系统
  - 对一阶常微分方程 $x'(t)=f(x)$，若 $f(x)$ 不显含变量 t，则称为自治系统（**autonomous**）
  - 满足 $f(x_\infty)=0$ 的点 x_∞ 称为微分方程的平衡点（**equilibrium**）
    - 对一阶常微分方程 $x'(t)=f(x)$，或者 $x(t)$ 无界，或者 $\lim\limits_{t\to\infty} x(t)=x_\infty$。但不是所有平衡点均为某个非零解的极限
  - 可用线性化（**linearization**）方法研究平衡点附近解的性态

$$\frac{dx}{dt}=rx\ln\frac{K}{x}$$

$$\frac{dx}{dt}=rx\frac{K-x}{K+ax}$$

$$\frac{dx}{dt}=rx\left(1-\left(\frac{x}{K}\right)^{\theta}\right)$$

$$\frac{dx}{dt}=\left(re^{1-\left(\frac{x}{K}\right)}-d\right)x$$

离散种群模型

- 离散种群模型
  - 对存在明显代际特征的物种，可用数列$\{x_n\}$表示种群数量，其中 x_n 为第 n 代个体数量
- 带迁移（**migration**）的线性增长模型
  - 出生率和死亡率分别为 b 和 μ，每一代迁移的个体数量为 $\beta \in \mathbb{Z}$
  - $x_{n+1} - x_n = (b-\mu)x_n + \beta \Rightarrow x_{n+1} = rx_n + \beta$ $\qquad r = 1 + b - \mu$

$$\Rightarrow x_n = \left(x_0 - \frac{\beta}{1-r}\right) r^n + \frac{\beta}{1-r}$$

浙江大学 ZheJiang University

数学建模

线性增长模型

$$x_{n+1} = rx_n + \beta$$

$$x_n = \left(x_0 - \frac{\beta}{1-r} \right) r^n + \frac{\beta}{1-r}$$

$$x_{n+1} = \begin{cases} \max\{rx_n + \beta, 0\} & x_n > 0 \\ \max\{\beta, 0\} & x_n = 0 \end{cases}$$

- 线性增长模型的性质
  - 不含迁移（$\beta = 0$）
    - 若 $0 \le r < 1$，x_n 单调递减趋于 0
    - 若 $-1 < r < 0$，x_n 正负交错趋于 0
    - 若 $r > 1$，x_n 单调递增趋于 $+\infty$
    - 若 $r < -1$，x_n 正负交错且无界
  - 含迁移
    - 若 $r > 1, \beta > -(r-1)x_0$，x_n 单调递增趋于 $+\infty$
    - 若 $r > 1, \beta < -(r-1)x_0$，x_n 单调递减趋于 0
    - 若 $0 < r < 1$，$\beta > 0$，x_n 趋于 $\frac{\beta}{1-r}$
    - 若 $0 < r < 1$，$\beta < 0$，x_n 趋于 0

平衡点分析

数学建模

- 差分方程 $x_{n+1} = f(x_n)$
  - 满足 $f(x_\infty) = x_\infty$ 的点 x_∞ 称为平衡点（**equilibrium**）
  - 在平衡点附近线性化
    - 令 $u_n = x_n - x_\infty$

$$x_\infty + u_{n+1} = x_{n+1} = f(x_n) = f(x_\infty + u_n)$$
$$= f(x_\infty) + f'(x_\infty)u_n + \frac{f''(c_n)}{2}u_n^2$$

    - 记 $h(u_n) = \frac{f''(c_n)}{2}u_n^2$，其中 $x_\infty \le c_n \le x_\infty + u_n$，则对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，当 $|u| \le \delta$ 时，$|h(u)| \le \varepsilon |u|$
    - 在 $u_{n+1} = f'(x_\infty)u_n + h(u_n)$ 中舍去 $h(u_n)$ 项得线性齐次差分方程 $v_{n+1} = f'(x_\infty)v_n$

线性化

数学建模

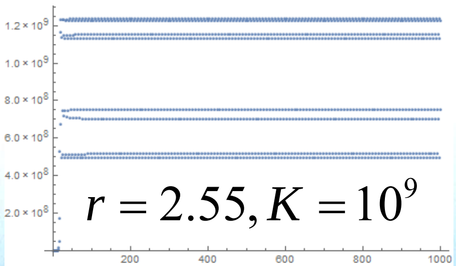
$$\boxed{u_{n+1}=f'(x_\infty)u_n+h(u_n)}$$

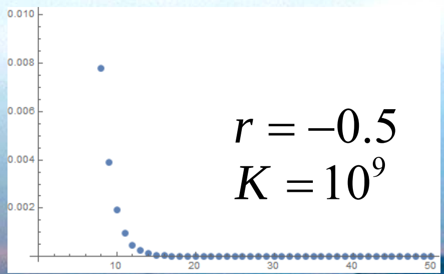
- **线性化**
  - 若 $x_{n+1}=f(x_n)$ 在平衡点 x_∞ 的线性化差分方程 $v_{n+1}=f'(x_\infty)v_n$ 的所有解$\{v_n\}$满足 $\lim\limits_{n\to\infty}v_n=0$，则只要 x_0 与 x_∞ 充分接近，差分方程 $x_{n+1}=f(x_n)$ 的所有解 $\{x_n\}$满足 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_\infty$
    - 记 $\rho=|f'(x_\infty)|$，由 $\lim\limits_{n\to\infty}v_n=0$，$\rho<1$。故存在 $\varepsilon>0$，使得 $\rho+\varepsilon<1$
    - 只要 $|u_n|\le\delta$，则有 $|u_{n+1}|\le|f'(x_\infty)||u_n|+|h(u_n)|<\rho|u_n|+\varepsilon|u_n|=(\rho+\varepsilon)|u_n|$
    - 只要 $|u_0|\le\delta$，用归纳法证明 $|u_{n+1}|\le\delta$，从而 $|u_{n+1}|\le(\rho+\varepsilon)|u_n|$
    - $|u_n|\le(\rho+\varepsilon)^n|u_0|$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_\infty$

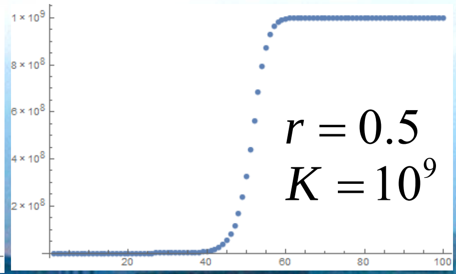
稳定性

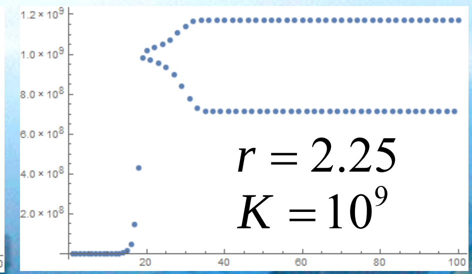
数学建模

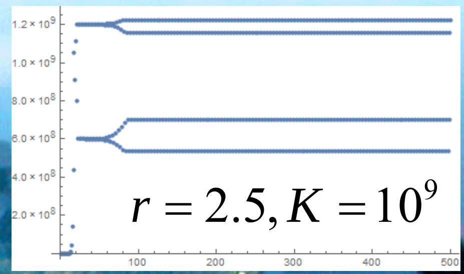
- 渐近稳定
  - 若只要初始点 x_0 与平衡点 x_∞ 充分接近，差分方程 $x_{n+1}=f(x_n)$ 的解 $\{x_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_\infty$，$x_\infty$ 称为渐近稳定（**asymptotic stable**）
  - 若 $|f'(x_\infty)|<1$，x_∞ 是渐近稳定的；若 $|f'(x_\infty)|>1$，x_∞ 不稳定
- **Logistic**差分方程 $x_{n+1}=x_n+rx_n\left(1-\dfrac{x_n}{K}\right)$
  - $f(x)=(1+r)x-\dfrac{rx^2}{K},\ f'(x)=(1+r)-\dfrac{2rx}{K}$
  - 平衡点 $x_\infty^1=0, x_\infty^2=K$，$f'(0)=1+r,\ f'(K)=1-r$
    - 当 $-2<r<0$ 时，平衡点 $x_\infty^1=0$ 稳定
    - 当 $0<r<2$ 时，平衡点 $x_\infty^2=K$ 稳定，$x_\infty^1=0$ 不稳定











2-周期解

- **Logistic方程** $x_{n+1} = f(x_n)$ ，$f(x) = (1+r)x - \dfrac{rx^2}{K}$
  - $f_2(x) = f(f(x)) = (1+r)^2 x - \dfrac{r(1+r)(2+r)}{K}x^2 + \dfrac{2r^2}{K^2}(1+r)x^3 - \dfrac{r^3}{K^3}x^4$
  - 二阶差分方程 $x_{n+2} = f_2(x_n)$ 的平衡点

$$x = (1+r)^2 x - \frac{r(1+r)(2+r)}{K}x^2 + \frac{2r^2}{K^2}(1+r)x^3 - \frac{r^3}{K^3}x^4$$

$$\Rightarrow x\left(\frac{x}{K}-1\right)\left(r^2\left(\frac{x}{K}\right)^2 - r(r+2)\frac{x}{K} + (r+2)\right) = 0$$

$$\Rightarrow x_+ = \frac{(r+2)+\sqrt{r^2-4}}{2r}K, x_- = \frac{(r+2)-\sqrt{r^2-4}}{2r}K$$

  - **2-周期性：** $f(x_+) = x_-, f(x_-) = x_+$ ，$x_{2k-1} = x_+, x_{2k} = x_-$
  - **稳定性：** $f_2'(x_+) = f_2'(x_-) = 5 - r^2$ ，当 $2 < r < \sqrt{6}$ 时，**2-周期解稳定**

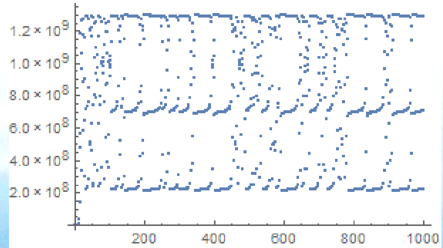
混沌

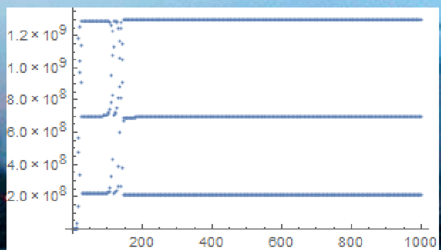
- **Li-Yorke定理的直观描述**
  - 若实数轴一区间到其自身的连续函数 f 有一个周期为 3 的点
    - 任意正整数 n，f 有一周期为 n 的点
    - 存在不可数个的初始点， 函数从这些点出发的迭代点序列之最终走向将是杂乱无章， 无规律可循

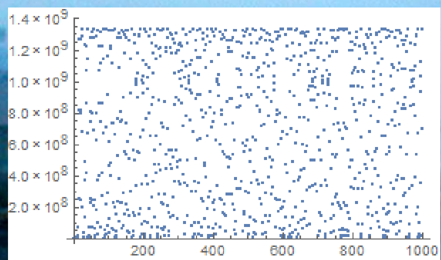
下：$r=\sqrt{8}$

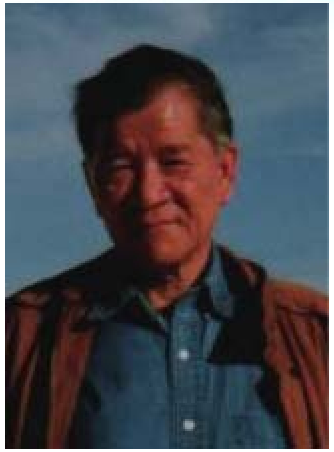
右：$r=2.828$

右下：$r=3$

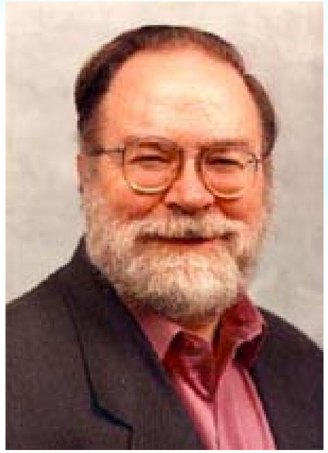








李天岩
（1945－）
华裔数学家



James Alan Yorke
（1941－）
美国数学家、物理学家

Li TY, Yorke JA. Period three implies chaos. *The American Mathematical Monthly*, 82(10): 985-992, 1975.

Li-Yorke定理

数学建模

- **Lorenz**教授用一台简陋计算机计算与天气预报有关的三个简单非线性微分方程初值问题。他十分吃惊地看到与旧初始值仅仅相差约万分之一的新计算结果和原先预期的计算结果大相径庭， 面貌全非
- **1972** 年， 美国马里兰大学气象学教授**Allen Feller**将**Lorenz**关于气象预测模型的那些在气象学家眼里理论性太强、 数学味太浓的论文递给了**Yorke**教授， 认为数学家们也许会感兴趣
- **1973** 年 **3** 月， 当李天岩来到**Yorke**的办公室时，**Yorke**对他说，**I have a good idea for you**，李天岩听完后说， “这将是《美国数学月刊》一个完美的工作。” 因为它所牵涉的语言非常基本。 两周后，运用他得心应手的微积分技巧，李天岩完全证明了定理

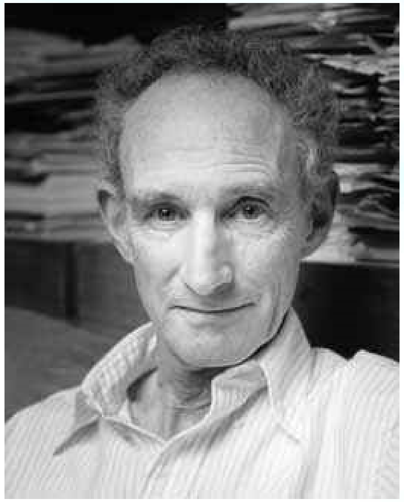
Edward Norton Lorenz
（1917－2008）
美国数学家、气象学家

Lorenz EN. Deterministic nonperiodic flow. Journal of the atmospheric sciences, 20(2): 130-141, 1963.

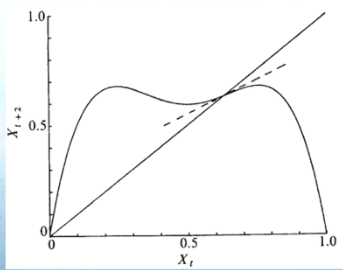
Li-Yorke定理

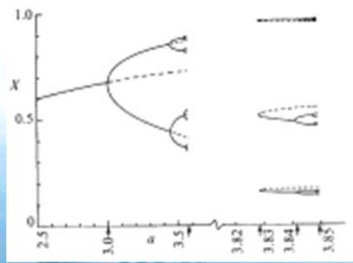
数学建模

- 文章写好后， 按照**Yorke**的意图，寄给了《美国数学月刊》。 但不久文章被退回， 理由是该文过于研究性， 但编辑同意若作者能改写文章到一般学生都能看懂的地步，可以投回《美国数学月刊》
- 在**1974**年普林斯顿大学的**May**教授最后一天在马里兰大学的演讲中，讲了**Logistic**模型的迭代：当参数从小到大变化时其迭代点序列之性态将变得愈来愈复杂。他十分困惑于对这一现象的解释，想像中也许是计算上的误差所造成的



Robert McCredie May
（1936－ ）
澳大利亚生物学家
英国政府首席科学顾问（**UK GCSA**）
（**1995-2000**）

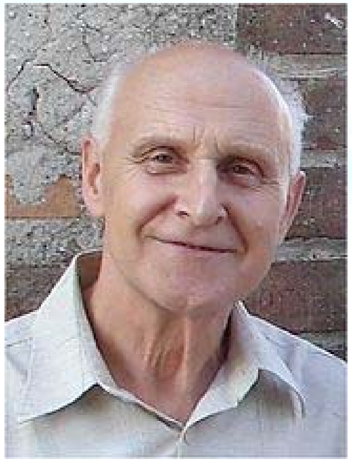




May RM. Simple mathematical models with very complicated dynamics. *Nature*, 261: 459-467, 1976.

Li-Yorke定理

- **Yorke**听完**May**的演讲后， 在送他上飞机时， 把李天岩桌上躺了将近一年的文章给他看。 **May**看了文章的结果之后，极为吃惊，并认定此定理大大解释了他的疑问
- **Yorke**从机场回来后立即找到李天岩说，应该马上改写这篇文章。文章在两个星期内改写完毕，三个月后被《美国数学月刊》接受，并刊登在 **1975** 年 **12**月份的那一期上
- 几年后的一天，在东柏林一个国际会议上做完报告后，**Yorke**和同行去逛市容。在一条游艇上，一个从未谋面、不期而至的苏联人突然走近了他，急于想与他交谈一下。这位**Sharkovsky**教授早十来年就证明了较**Li-Yorke**定理第一部分似乎更为一般的结果



Oleksandr Mykolayovych Sharkovsky
（**1936－** ）
乌克兰数学家

以上关于**Li-Yorke**定理的历史部分摘自丁玖《智者的困惑——混沌分形漫谈》，高等教育出版社，**2013**

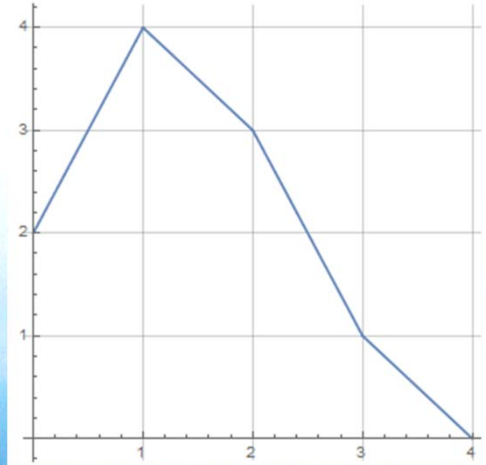
浙江大学 ZheJiang University

数学建模

Sharkovsky定理

- 任意正整数 n 可唯一表示成 $n=2^s(2p+1)$，其中 $s,p\in\mathbb{N}$。所有正整数可据此排成一列，称为**S**型排序
- 设 I 是任一区间，函数 $f:I\to I$。记 $f_1(x)=f(x)$，$f_n(x)=f(f_{n-1}(x))$。若对 $x\in I$，存在 $m\in\mathbb{Z}^+$ 使得 $f_m(x)=x$，则称 m 为 x 的一个周期，x 为 f 的一个 m 周期点
- **Sharkovsky定理**
  - 设函数 $f:I\to I$ 连续且具有 m 周期点。若在正整数**S**型排序中，m 先于 n，则 f 必有 n 周期点

$$
\begin{array}{l}
3,5,7,9,\cdots,\\
2\cdot3,2\cdot5,2\cdot7,2\cdot9,\cdots,\\
2^2\cdot3,2^2\cdot5,2^2\cdot7,2^2\cdot9,\cdots,\\
\cdots\cdots,\\
\cdots,2^5,2^4,2^3,2^2,2^1,1
\end{array}
$$



有**5**周期点但无**3**周期点

Sharkovskii AN. Co-existence of cycles of a continuous mapping of the line into itself. *Ukrainian Mathematics Journal*, 16: 61–71, 1964.

谢　谢