网页重要度

- 网页重要度由Internet中网页之间的链接关系决定

  若有重要的网页链接到某网页A，则网页A也是重要的

  - （叠加性）链接到网页A的网页越多，则网页A越重要
  - （传递性）重要度大的网页链接到网页A时对A重要度的贡献比重要度小的网页链接到A时对A重要度的贡献更大

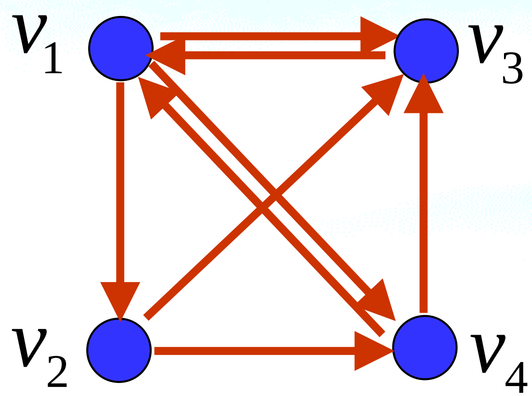
    对其它网页的贡献与自身的重要度成正比
  - （平等性）网页链接较多时对它所链接的网页的重要度的贡献比链接较少时对它所链接的网页的重要度的贡献小

    任一网页对其它网页重要度贡献之和与链接的网页数量无关
  - （无关性）网页链接其它网页的多少，与其本身的重要度无关

网络链接图

数学建模

- 由**Internet**上网页链接关系构造网络链接图 $G=(V,A)$
  - 顶点（网页）与顶点集：$V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$
  - 弧（链接）(v_i,v_j)：从网页 v_i有链接指向网页 v_j，A为弧的集合
  - 出度 q_i：以 v_i为起点的弧的总数（网页 v_i 上的链接数目）
- G为一有向图（**digraph**）

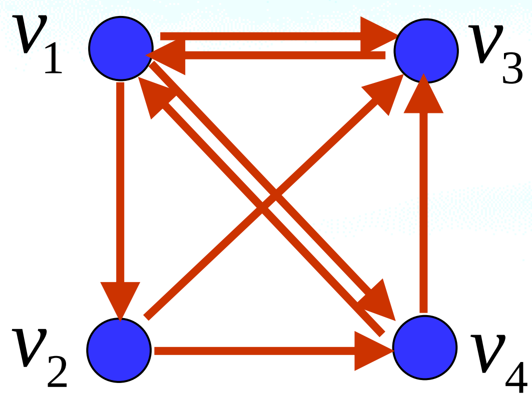


链接矩阵

- 定义

$$p_{ij}=\begin{cases}\dfrac{1}{q_j}, & 若有链接自v_j链向v_i\\ 0, & 其他\end{cases}$$

则 $\mathbf{P}=(p_{ij})_{n\times n}$ 为一 n 阶方阵，称为链接矩阵，n 为网页数目



$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 1/2\\ 1/3 & 0 & 0 & 0\\ 1/3 & 1/2 & 0 & 1/2\\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

重要度向量

- 记 x_i 为网页 v_i 的重要度。称 $\mathbf{X}=(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$ 为网页重要度向量
- 若链接到网页 v_i 的网页有 $v_{j_1},v_{j_2},\cdots,v_{j_k}$，则

$$x_i=\frac{x_{j_1}}{q_{j_1}}+\frac{x_{j_2}}{q_{j_2}}+\cdots+\frac{x_{j_k}}{q_{j_k}}=p_{ij_1}x_{j_1}+\cdots+p_{ij_k}x_{j_k}$$
$$=p_{i1}x_1+p_{i2}x_2\cdots+p_{in}x_n$$
$$=\sum_{j=1}^{n}p_{ij}x_j,\qquad i=1,\cdots,n$$

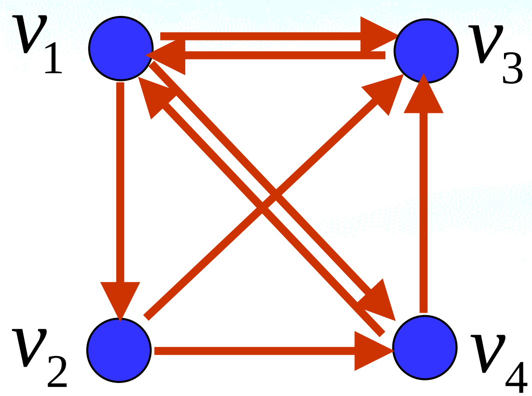
$$p_{ij}=\begin{cases}\dfrac{1}{q_j}, & (v_j,v_i)\in A\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

- $\mathbf{X}$ 为线性方程组 $\mathbf{X}=\mathbf{PX}$ 的解

v_j

重要度向量

$$\mathbf{X}=\mathbf{P}\mathbf{X} \qquad (\mathbf{I}-\mathbf{P})\mathbf{X}=\mathbf{0}$$



$$\begin{cases} x_1 = x_3+\frac{1}{2}x_4 \\ x_2=\frac{1}{3}x_1 \\ x_3=\frac{1}{3}x_1+\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{2}x_4 \\ x_4=\frac{1}{3}x_1+\frac{1}{2}x_2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\frac{12}{31},\frac{4}{31},\frac{9}{31},\frac{6}{31}\right)^{\mathrm{T}} \Longleftarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$v_1 \succ v_3 \succ v_4 \succ v_2$$

非零解

- 对任意矩阵 $\mathbf{P}$ ， $\mathbf{X}=\mathbf{PX}$ 是否总有非零解
  - $\mathrm{rank}(\mathbf{I}-\mathbf{P})<n$
  - $\mathbf{P}$ 是否总有特征值 1
  - $\mathbf{P}^{\mathrm{T}}$ 是否总有特征值 1
  - $\mathbf{P}^{\mathrm{T}}\mathbf{e}=1\,\mathbf{e},\ \mathbf{e}=(1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$

$$|\lambda\mathbf{I}-\mathbf{P}|=|\lambda\mathbf{I}-\mathbf{P}^{\mathrm{T}}|$$

$$\mathbf{P}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

随机矩阵

- 行（列）元素之和为 **1** 的非负方阵称为行（列）随机矩阵（**stochastic matrix**）
- 任一随机矩阵均有特征值 **1**
- 链接矩阵为一随机矩阵，该矩阵属于特征值 **1** 的特征向量即为重要度向量
- **1** 是任一随机矩阵的模最大特征值

随机矩阵

- 设 λ 是（行）随机矩阵 $\mathbf{P}=(p_{ij})_{n\times n}$ 的特征值，则 $|\lambda|\le 1$
  - 设 $\mathbf{x}=(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$ 为属于特征值 λ 的特征向量，$|x_i|=\max\limits_{1\le j\le n}|x_j|>0$
  - $\lambda x_i=\sum\limits_{j=1}^{n}p_{ij}x_j$

$$|\lambda||x_i|=\left|\lambda x_i\right|=\left|\sum_{j=1}^{n}p_{ij}x_j\right|\le\sum_{j=1}^{n}|p_{ij}||x_j|\le|x_i|\sum_{j=1}^{n}|p_{ij}|=|x_i|$$

悬挂网页

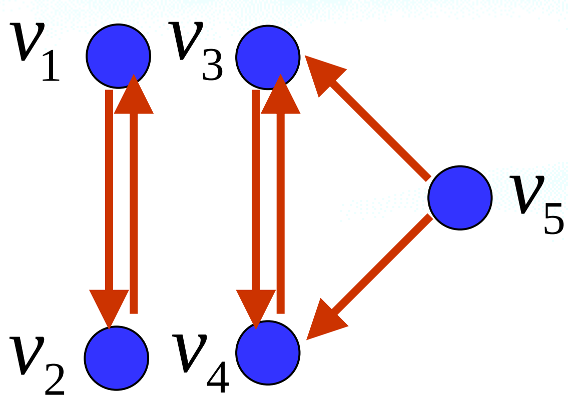
数学建模

- 若某网页不链接任意其它网页
  - 网络链接图中对应顶点的出度为 **0**
  - 链接矩阵中对应列元素全为 **0**
- 将该列所有元素修改为 $\frac{1}{n}$，链接矩阵成为随机矩阵

唯一性

数学建模

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\1&0&0&0&0\\0&0&0&1&1/2\\0&0&1&0&1/2\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\\0\end{pmatrix}$$



- 若 **P** 有两个属于特征值 **1** 的线性无关的特征向量（属于特征值 **1** 的特征子空间维数大于**1**），则用上述方法可能得到相互矛盾的网页重要度比较结果

Google矩阵

- 修改链接矩阵为 $\overline{\mathbf{P}} = \alpha\mathbf{P} + (1-\alpha)\dfrac{1}{n}\mathbf{J}$，其中参数 $\alpha = 0.85$，$\mathbf{J} = \mathbf{e}\mathbf{e}^{\mathrm{T}}$
- $\overline{\mathbf{P}}$ 所有元素均为正，每列元素之和仍为 1

$$\overline{\mathbf{P}} = 0.85\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 0.03\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.03 & 0.88 & 0.03 & 0.03 & 0.03 \\ 0.88 & 0.03 & 0.03 & 0.03 & 0.03 \\ 0.03 & 0.03 & 0.03 & 0.88 & 0.455 \\ 0.03 & 0.03 & 0.88 & 0.03 & 0.455 \\ 0.03 & 0.03 & 0.03 & 0.03 & 0.03 \end{pmatrix}$$

唯一性的初等证明

- 设 $\mathbf{x}=(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$ 为 $\overline{\mathbf{P}}$ 的属于特征值 **1** 的特征向量
  - $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 要么恒非负，要么恒非正
    - 反证法 $x_i=\sum_{j=1}^{n}p_{ij}x_j, i=1,\cdots,n$

$$\left|x_i\right|=\left|\sum_{j=1}^{n}p_{ij}x_j\right|<\sum_{j=1}^{n}p_{ij}\left|x_j\right|, i=1,\cdots,n$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left|x_i\right|<\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}p_{ij}\left|x_j\right|=\sum_{j=1}^{n}\left|x_j\right|\left(\sum_{i=1}^{n}p_{ij}\right)=\sum_{j=1}^{n}\left|x_j\right|$$ 矛盾

唯一性的初等证明

浙江大学
ZheJiang University
数学建模

- 若 $\mathbf{v}=(v_1,\cdots,v_n)^{\mathrm{T}}$ 和 $\mathbf{w}=(w_1,\cdots,w_n)^{\mathrm{T}}$ 是 $\overline{\mathbf{P}}$ 的两个属于特征值 **1** 的特征向量
  - $\sum_{j=1}^{n} p_{ij}v_j = v_i, \sum_{j=1}^{n} p_{ij}w_j = w_i, i=1,\cdots,n$
  - 记 $W=\sum_{k=1}^{n} w_k$，$V=\sum_{k=1}^{n} v_k \neq 0$ （特征向量非零）
  - 令 $x_i = -\frac{W}{V}v_i + w_i, i=1,\cdots,n$

唯一性的初等证明

数学建模

$$x_i = -\frac{W}{V}v_i + w_i, i = 1,\cdots,n$$

$$\sum_{j=1}^{n} p_{ij}v_j = v_i, \sum_{j=1}^{n} p_{ij}w_j = w_i$$

- $$\sum_{j=1}^{n} p_{ij}x_j = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}\left(-\frac{W}{V}v_j + w_j\right)$$

$$= -\frac{W}{V}\sum_{j=1}^{n} p_{ij}v_j + \sum_{j=1}^{n} p_{ij}w_j = -\frac{W}{V}v_i + w_i = x_i$$

  - $\mathbf{x} = (x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$是 $\overline{\mathbf{P}}$ 的属于特征值 **1** 的特征向量

- $$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{W}{V}v_i + w_i\right) = -\frac{W}{V}\sum_{i=1}^{n} v_i + \sum_{i=1}^{n} w_i = 0$$

  - 与 $x_1, x_2,\cdots, x_n$ 要么恒非负，要么恒非正矛盾

Perron定理

浙江大学 ZheJiang University

数学建模

- 若矩阵 **A**的所有元素均为正，则
  - **A**的模最大特征值唯一，且为正实数
  - 该特征值代数重数为 **1**
  - 存在该特征值的一个特征向量，其分量全为正
- **Google**矩阵为元素全为正的随机矩阵，**1** 为模最大特征值，重要度向量唯一且分量全为正

Oskar Perron

（**1880－1975**）

德国数学家

Perron—Frobenius定理

数学建模

- 若矩阵 **A** 为非负不可约（**irreducible**）矩阵，则
  - **A**的模最大特征值为正实数
  - 该特征值代数重数为 **1**
  - 存在该特征值的一个特征向量，其分量全为正

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda = 0 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \lambda_1 = \lambda_2 = 1 \\ \xi = (0,1)^{\mathrm{T}} \end{array} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Georg Frobenius
（**1849－1917**）
德国数学家

不可约矩阵

- 若干个初等对换矩阵的乘积称为置换矩阵（**permutation matrix**）。置换矩阵每行和每列都恰有一个元素为 **1**，其余元素都为 **0**
- 若存在置换矩阵 **Q**，使得 $\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{Q}=\begin{pmatrix}\mathbf{X} & \mathbf{0}\\ \mathbf{Y} & \mathbf{Z}\end{pmatrix}$，

这里 **X**和 **Z**均为方阵，则称 **A**为可约矩阵（**reducible matrix**）；否则 **A**为不可约矩阵

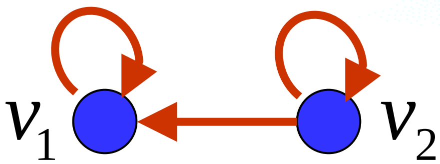
A

不可约矩阵

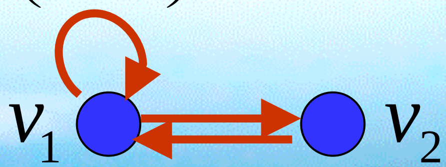
数学建模

- 若对有向图中任意有序顶点对 v_i, v_j，存在一条从 v_i 到 v_j 的有向路，则称有向图是强联通（**strongly connected**）的
- 给定非负矩阵 $\mathbf{A}=(a_{ij})_{n\times n}$，构造有向图 $G(\mathbf{A})=(V,A)$，其中 $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$，弧 $(v_i,v_j)\in A$ 当且仅当 $a_{ij}>0$
- $\mathbf{A}$ 是不可约矩阵当且仅当 $G(\mathbf{A})$ 是强联通的

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 可约



$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 不可约



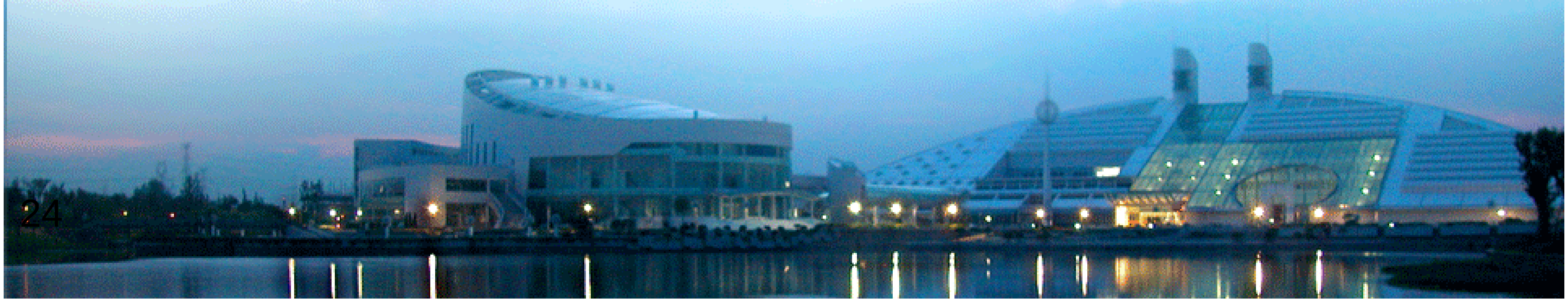
幂法

数学建模

- **The World's Largest Matrix Computation**
  - **Google’s PageRank is an eigenvector of a matrix of order 2.7 billion**

——Cleve Moler（Matlab创始人），2002.10

- 幂法（**power method**）是计算矩阵模最大特征值和对应的特征向量的一种迭代算法



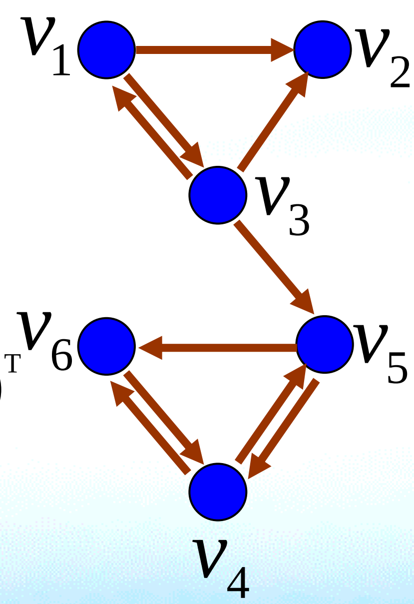
幂法

- 任取初始向量 $\mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{x}^{(0)} > 0$ 且 $\mathbf{x}^{(0)^{\mathrm{T}}}\mathbf{e} = 1$
- 计算 $\mathbf{x}^{(k)} = \overline{\mathbf{P}}\,\mathbf{x}^{(k-1)}$
- $\lim\limits_{k\to\infty} \mathbf{x}^{(k)}$ 存在，极限即为重要度向量 $\mathbf{X}$

von Mises, R., Pollaczek-Geiringer, H. Praktische verfahren der gleichungsauflosung. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik (Journal of Applied Mathematics and Mechanics*), *9*, 58–77 (1929), 152–164.

幂法

$$\overline{\mathbf{P}}=\begin{pmatrix} 0.025 & 0.1667 & 0.3083 & 0.025 & 0.025 & 0.025 \\ 0.45 & 0.1667 & 0.3083 & 0.025 & 0.025 & 0.025 \\ 0.45 & 0.1667 & 0.025 & 0.025 & 0.025 & 0.025 \\ 0.025 & 0.1667 & 0.025 & 0.025 & 0.45 & 0.875 \\ 0.025 & 0.1667 & 0.3083 & 0.45 & 0.025 & 0.025 \\ 0.025 & 0.1667 & 0.025 & 0.45 & 0.45 & 0.025 \end{pmatrix}$$



$$\mathbf{x}^{(0)}=\left(0.166667, 0.166667, 0.166667, 0.166667, 0.166667, 0.166667\right)^{\mathrm{T}}$$

$$\mathbf{x}^{(5)}=\left(0.057165, 0.083312, 0.063942, 0.338898, 0.196007, 0.260676\right)^{\mathrm{T}}$$

$$\mathbf{x}^{(10)}=\left(0.052057, 0.074290, 0.057821, 0.347973, 0.199759, 0.268101\right)^{\mathrm{T}}$$

$$\mathbf{x}^{(20)}=\left(0.051706, 0.073681, 0.057414, 0.348701, 0.199903, 0.268594\right)^{\mathrm{T}}$$

$$\mathbf{x}^{(25)}=\left(0.051705, 0.073679, 0.057412, 0.348704, 0.199904, 0.268596\right)^{\mathrm{T}}$$

收敛性

数学建模

- 记 $\mathbf{V}$ 为所有满足 $\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{e}=0$ 的 n 维列向量 $\mathbf{v}$ 组成的空间。定义 $\|\mathbf{v}\|_1=\sum_{i=1}^{n}|v_i|$
- 对任意的 $\mathbf{v}\in\mathbf{V}$，$\mathbf{w}=\overline{\mathbf{P}}\mathbf{v}\in\mathbf{V}$， 且 $\|\mathbf{w}\|_1\le c\|\mathbf{v}\|_1$，

  其中 $c<1$
  - $$\sum_{i=1}^{n}w_i=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}p_{ij}v_j\right)=\sum_{j=1}^{n}v_j\left(\sum_{i=1}^{n}p_{ij}\right)=\sum_{j=1}^{n}v_j=0$$
  - 若 $\mathbf{w}=\mathbf{0}$ ，结论显然成立；若 $\mathbf{w}\neq\mathbf{0}$ ，$\mathbf{w}$ 的分量有正有负

收敛性

浙江大学 ZheJiang University
数学建模

- 记 $e_i = \operatorname{sgn} w_i, i = 1, \cdots, n$， 存在 $e_{i_1} = 1, e_{i_2} = -1$
- $$\sum_{i=1}^{n} p_{ij} e_i = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_1}}^{n} p_{ij} e_i + p_{i_1 j} e_{i_1} \geq -\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_1}}^{n} p_{ij} + p_{i_1 j} = -\sum_{i=1}^{n} p_{ij} + 2 p_{i_1 j} > -1$$
  $$\sum_{i=1}^{n} p_{ij} e_i = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_2}}^{n} p_{ij} e_i + p_{i_2 j} e_{i_2} \leq \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_2}}^{n} p_{ij} - p_{i_2 j} = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} - 2 p_{i_2 j} < 1$$
- $$\|\mathbf{w}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |w_i| = \sum_{i=1}^{n} e_i w_i = \sum_{i=1}^{n} e_i \left(\sum_{j=1}^{n} p_{ij} v_j \right) = \sum_{j=1}^{n} v_j \left(\sum_{i=1}^{n} p_{ij} e_i \right)$$
  $$\leq \sum_{j=1}^{n} |v_j| \left| \sum_{i=1}^{n} p_{ij} e_i \right| \leq c \sum_{j=1}^{n} |v_j| = c \|\mathbf{v}\|_1$$

收敛性

- 记 $\mathbf{v}_0 = \mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{X} \in \mathbf{V}$，则

$$\mathbf{x}^{(k)} = \overline{\mathbf{P}}^k \mathbf{x}^{(0)} = \overline{\mathbf{P}}^k (\mathbf{X} + \mathbf{v}_0) = \overline{\mathbf{P}}^k \mathbf{X} + \overline{\mathbf{P}}^k \mathbf{v}_0 = \mathbf{X} + \overline{\mathbf{P}}^k \mathbf{v}_0$$

- 由 $\left\| \overline{\mathbf{P}}^k \mathbf{v}_0 \right\|_1 \le c^k \left\| \mathbf{v}_0 \right\|_1$，即得 $\lim\limits_{k \to \infty} \mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{X}$
- 幂法收敛速度较慢，但实现简单，存储量小，对稀疏矩阵运算量显著减小，适于**Google**矩阵重要度向量计算

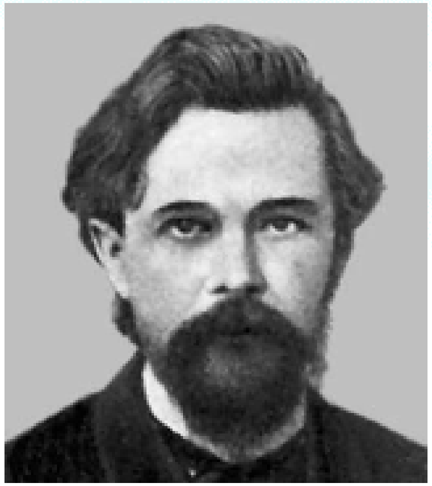
链接矩阵 ⟶ 悬挂网页修改 ⟶ **Google**矩阵

随机浏览

- 链接矩阵：从当前网页的所有链接中以相同概率随机打开一个新网页
- 悬挂网页：在地址栏中输入网址新建一个窗口
- 参数α：通过链接打开网页与输入网址新建窗口的比例约为 5:1
- 从某网页开始按上述模式浏览，在各网页上停留的概率为何

Markov链

- 设$\{X_m, m=0,1,2,\cdots\}$为一随机过程，状态空间有限，若 $P\{X_m=i\}$ 只与 X_{m-1} 有关，而与$X_{m-2}, X_{m-3},\cdots$无关，则称$\{X_m\}$为**Markov链（Markov chain）**
- 记 $P\{X_m=i \mid X_{m-1}=j\}=p_{ij}(m)$，若 $p_{ij}(m)$ 与 m 无关，则称**Markov**链为齐次（**homogeneous**）的。$\mathbf{P}=(p_{ij})_{n\times n}$ 为一随机矩阵，称为$\{X_m\}$的转移矩阵（**transition matrix**）



Andrei Markov
（1856－1922）
俄罗斯数学家

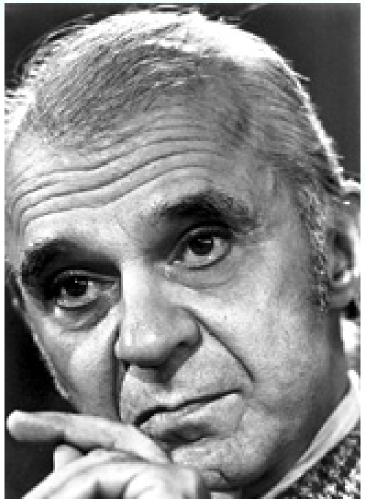
Markov链

- 若 $P\{X_{m-1}=j\}=x_j, j=1,\cdots,n$ ，则
$$P\{X_m=i\}=\sum_{j=1}^{n}P\{X_m=i\,|\,X_{m-1}=j\}P\{X_{m-1}=j\}=\sum_{j=1}^{n}p_{ij}x_j$$
- 记 $\mathbf{x}^{(m)}=(P\{X_m=1\},P\{X_m=2\},\cdots,P\{X_m=n\})^{\mathrm{T}}$ ，则 $\mathbf{x}^{(m)}=\mathbf{P}\mathbf{x}^{(m-1)}$
- 不论从何网页开始随机浏览，经过充分长时间，停留在各网页上的概率组成的向量即为重要度向量

投入产出模型

- 投入产出模型由**Leontief**于**1936**年创立并逐步发展完善的
  - **Input-output model gives economic science an important tool of analysis for studying the complicated interdependence within the production system in a modern economy.**
  - **Not only constructed the theoretical foundations of the input-output method, also developed the empirical data that are necessary to utilize the method on important economic problems as well as to test empirically various economic theories.**

——selected from Nobel Prize Award Ceremony Speech by Assar Lindbeck



Wassily Leontief
（**1905－1999**）
美籍俄裔经济学家
1973年诺贝尔经济学奖得主

浙江大学
Zhejiang University
数学建模

投入产出表

	农业	工业	服务业	最终需求	总产出
农业	15	20	30	35	100
工业	30	10	45	115	200
服务业	20	60	0	70	150

为实现100亿农业产值
需投入农业产值15亿，
工业产值30亿，
服务业产值20亿

100亿农业产值中，15亿用
于农业，20亿用于工业，30
亿元用于服务业，35亿用于
满足最终需求

投入产出模型

- x_i：部门 i 的总产出
- d_i：部门 i 的最终需求
- a_{ij}：部门 i 的产出中用于部门 j的产值

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} + d_i = x_i \quad \Longrightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} t_{ij} x_j + d_i = x_i$$

- $t_{ij} = \dfrac{a_{ij}}{x_j}$：部门 j 生产单位产值的产品需投入部门 i 的 t_{ij}个单位的产值（直接消耗系数）

投入产出模型

- 令 $\mathbf{T}=(t_{ij})_{n\times n}$, $\mathbf{d}=(d_1,\cdots,d_n)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{x}=(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$,
投入产出模型可表示为

$$\boxed{\sum_{j=1}^{n} t_{ij}x_j + d_i = x_i}$$

$$(\mathbf{I}-\mathbf{T})\mathbf{x}=\mathbf{d}$$

- 若 $\mathbf{d}\neq\mathbf{0}$，模型称为开放（**open**）的；
若 $\mathbf{d}=\mathbf{0}$，模型称为封闭（**closed**）的
- 封闭投入产出模型和**PageRank**模型形式相同

投入产出模型

数学建模

- 直接消耗系数短期内变化不大，其值可通过统计获得
- 若对任何最终需求，方程总有非负解，则经济系统可行（**feasible**）
- 给定直接消耗系数，如何判断经济系统是否可行，如何求出一定最终需求下各部门的产值

国家统计局 国家发展和改革委员会 财政部关于认真做好2012年全国投入产出调查工作的通知

字体：[大 中 小]　日期：2012-06-27 16:53:10　访问次数：142　信息来源：浙江省统计局

国家统计局 国家发展和改革委员会 财政部

关于认真做好2012年全国投入产出调查工作的通知

国统字〔2012〕16号

各省、自治区、直辖市统计局、发展改革委、财政厅（局）及国务院有关部门：

按照《国务院办公厅关于进行全国投入产出调查的通知》（国办发〔1987〕18号）的要求，2012年将开展全国投入产出调查和编制投入产出表。为认真做好2012年全国投入产出调查和编制投入产出表工作，现将有关事项通知如下：

一、调查目的和意义

投入产出调查是编制国家和地区投入产出表的重要基础。投入产出表是国民经济核算体系的重要组成部分，是开展政策模拟和定量分析的有力工具，对宏观经济管理和决策具有重要意义。

二、调查对象和范围

这次投入产出调查的对象是我国的重点法人单位，涉及除农林牧渔业外的所有国民经济行业。具体范围包括：采矿业，制造业，电力、热力、燃气及水的生产和供应业，建筑业，批发和零售业，交通运输、仓储和邮

浙江大学 ZheJiang University

数学建模

投入产出表

	农业	工业	服务业	最终需求	总产出
农业	15	20	30	35	100
工业	30	10	45	115	200
服务业	20	60	0	70	150

$$\mathbf{T}=\begin{pmatrix}0.15 & 0.10 & 0.20\\ 0.30 & 0.05 & 0.30\\ 0.20 & 0.30 & 0.00\end{pmatrix}\qquad \mathbf{A}=\mathbf{I}-\mathbf{T}=\begin{pmatrix}0.85 & -0.10 & -0.20\\ -0.30 & 0.95 & -0.30\\ -0.20 & -0.30 & 1.00\end{pmatrix}$$

投入产出表

- $\mathbf{A}=\mathbf{I}-\mathbf{T}$ 的非主对角元素非正（Z-矩阵）

$$\mathbf{A}^{-1}=\begin{pmatrix} 1.3459 & 0.2504 & 0.3443 \\ 0.5634 & 1.2676 & 0.4930 \\ 0.4382 & 0.4304 & 1.2167 \end{pmatrix} \geq \mathbf{0}$$

$$\boxed{(\mathbf{I}-\mathbf{T})\mathbf{x}=\mathbf{d}}$$

$$\mathbf{d}=\begin{pmatrix} 100 \\ 200 \\ 300 \end{pmatrix}, \mathbf{x}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{d}=\begin{pmatrix} 287.96 \\ 457.76 \\ 494.91 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{d}=\begin{pmatrix} 300 \\ 200 \\ 300 \end{pmatrix}, \mathbf{x}=\begin{pmatrix} 557.14 \\ 570.44 \\ 582.55 \end{pmatrix}$$

M-矩阵

- 开放投入产出模型可行，当且仅当$\mathbf{A}^{-1} \geq \mathbf{0}$，满足上述条件的矩阵也称为 **M-矩阵**
- 若 **A** 为**Z-**矩阵，则 **A** 为**M-**矩阵当且仅当 **A** 的所有主子式为正
  - **1949**年，**David Hawkins**和**Herbert Alexander Simon**（**1975**年**Turing**奖、**1978**年**Nobel**经济学奖得主）证明了上述开放投入产出模型可行的条件。事实上，条件的等价性早在**1937**年已由**Alexander Ostrowski**证明

多目标规划

数学建模

- 多目标规划研究变量在满足给定约束条件下，如何使多个目标函数同时极小化的问题

$$
\begin{aligned}
& \min\ \ \mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \cdots, f_p(\mathbf{x}))^{\mathrm{T}} \\
(\text{MOP})\ \ & s.t.\ \ \mathbf{g}_i(\mathbf{x}) \ge \mathbf{0}, i = 1, \cdots, s, \\
& \qquad\ \mathbf{h}_j(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, j = 1, \cdots, t.
\end{aligned}
$$

Vilfredo Federico Damaso Pareto
（1848－1923）
意大利经济学家

解的类型

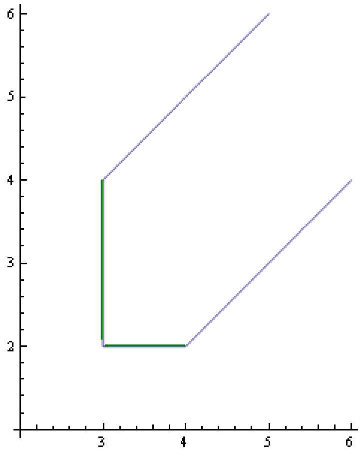
- 设 $\mathbf{x}^* \in S$
  - 若对任意 $\mathbf{x} \in S, f_k(\mathbf{x}^*) \le f_k(\mathbf{x}), k = 1, \cdots, p$，则称 $\mathbf{x}^*$为（MOP）的绝对最优解
  - 若不存在 $\mathbf{x} \in S$，使得 $f_k(\mathbf{x}) \le f_k(\mathbf{x}^*), k = 1, \cdots, p$，且至少存在某个 $k, f_k(\mathbf{x}) < f_k(\mathbf{x}^*)$，则称 $\mathbf{x}^*$为（MOP）的Pareto最优解
  - 若不存在 $\mathbf{x} \in S$，使得 $f_k(\mathbf{x}) < f_k(\mathbf{x}^*), k = 1, \cdots, p$，则称 $\mathbf{x}^*$为（MOP）的弱Pareto最优解
- （MOP）的所有绝对最优解，Pareto最优解，弱Pareto最优解的集合分别记作 S_a, S_p和 S_{wp}

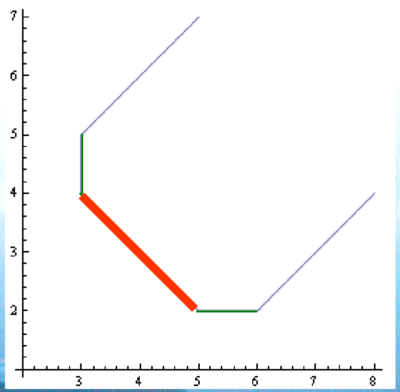
解的关系

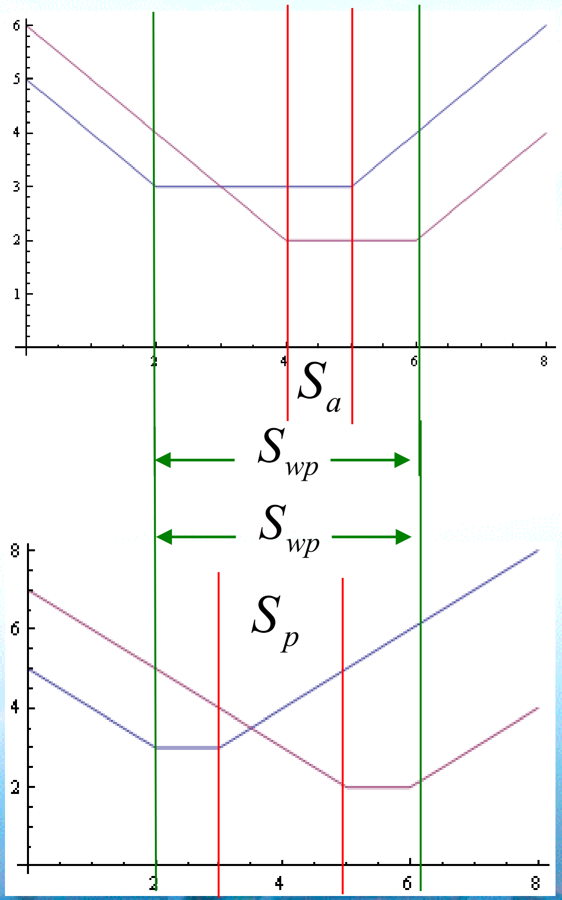
- 记 S^i 为单目标规划 $\min\limits_{\mathbf{x}\in S} \; f_i(\mathbf{x})$ 的最优解，则

$$S_a = \bigcap_{i=1}^{p} S^i$$

$$S^i \subseteq S_{wp}$$







解的关系

- $S_a \subseteq S_p \subseteq S_{wp} \subseteq S$
  - 若 $\mathbf{x}^* \in S_a$，但 $\mathbf{x}^* \notin S_p$，则存在 $\bar{\mathbf{x}} \in S$ 和某个 k，使得 $f_k(\bar{\mathbf{x}}) < f_k(\mathbf{x}^*), f_l(\bar{\mathbf{x}}) \le f_l(\mathbf{x}^*), l \ne k$，与 $\mathbf{x}^* \in S_a$ 矛盾
  - 若 $\mathbf{x}^* \in S_p$，但 $\mathbf{x}^* \notin S_{wp}$，则存在 $\bar{\mathbf{x}} \in S$，使得 $f_k(\bar{\mathbf{x}}) < f_k(\mathbf{x}^*), k = 1, \cdots, p$，与 $\mathbf{x}^* \in S_p$ 矛盾
- 若 $S_a \ne \varnothing$，则 $S_a = S_p$
  - 若 $\mathbf{x}^* \in S_p$，但 $\mathbf{x}^* \notin S_a$，由于 $S_a \ne \varnothing$，存在 $\bar{\mathbf{x}} \in S_a$，使得 $f_k(\bar{\mathbf{x}}) \le f_k(\mathbf{x}^*), k = 1, \cdots, p$，由于 $\mathbf{x}^* \ne \bar{\mathbf{x}}$，存在某个 $k, f_k(\bar{\mathbf{x}}) \ne f_k(\mathbf{x}^*)$，$f_k(\bar{\mathbf{x}}) < f_k(\mathbf{x}^*)$，与 $\mathbf{x}^* \in S_p$ 矛盾

多目标问题解法

- **求(MOP)所有的Pareto最优解或弱Pareto最优解**
- 加权法
  - 令 $\Lambda = \{\boldsymbol{\lambda} \mid \boldsymbol{\lambda} > \mathbf{0}, \sum_{k=1}^{p} \lambda_k = 1\}$
  - 线性加权和法 $(SP_{\boldsymbol{\lambda}})$ $\min_{\mathbf{x}\in S} \sum_{k=1}^{p} \lambda_k f_k(\mathbf{x})$
  - 极小化极大法 $(P_{\boldsymbol{\lambda}})$ $\min_{\mathbf{x}\in S} \max_{1\le k\le p} \lambda_k f_k(\mathbf{x})$
  - 对任意 $\boldsymbol{\lambda} \in \Lambda, (SP_{\boldsymbol{\lambda}})$的最优解必是（**MOP**）的**Pareto**最优解, $(P_{\boldsymbol{\lambda}})$ 的最优解必是（**MOP**）的弱**Pareto**最优解

多目标问题解法

- 分层排序法
  - 将目标按重要程度排序，在前一个目标的最优解集中，寻找后一个目标的最优解集，并把最后一个目标的最优解作为（MOP）的解
  - 分层排序法得到的解必为（MOP）的Pareto最优解
- 带宽容值的分层排序法

多目标问题解法

- 主要目标法
  - 确定一个目标函数，如$f_1(x)$，为主要目标，对其余 $p-1$个目标函数 $f_k(x)$，选定一定的界限值 $u_k, k=2,\cdots,p$，求解单目标规划

$$\begin{aligned} & \min \quad f_1(\mathbf{x}) \\ (SP) \quad & s.t. \quad f_k(\mathbf{x}) \le u_k, k=2,\cdots,p, \\ & \qquad\quad \mathbf{x} \in S \end{aligned}$$

  - (SP) 的最优解都是（**MOP**）的弱**Pareto**最优解

浙江大学
ZheJiang University

谢　谢

浙江大学
ZheJiang University

伪币辨识

伪币辨识

- **12枚外观相同的硬币中有一枚是伪币，能否用天平称量三次找出伪币**
  - 已知伪币数恰为一枚
  - 天平只能比较，不能称重
  - 伪币轻重未知
  - 找出伪币且需说明轻重

浙江大学 ZheJiang University

数学建模

伪币辨识

5 6 7 8 = 9 10 11 12

1 2 3 = 5 6 7

4 > < 9

1	2	3	重/轻
5	6	7	8
9	10	11	12

浙江大学 ZheJiang University

数学建模

伪币辨识

5 6 7 8 = 9 10 11 12

1 2 3 > 5 6 7

1 > = < 2

> < = 4

5 6 7 8

9 10 11 12

重

伪币辨识

5 6 7 8 > 9 10 11 12

5 6 9 = 7 8 10

11 > < 12

1 2 3 4

5 6 7 8

9 10 < >

轻

伪币辨识

5 6 7 8 > 9 10 11 12

5 6 9 > 7 8 10

5 > = < 6

1 2 3 4

> < 7 8

9 = 11 12

轻 10

重 5 6

自适应

- 自适应
  - 硬币真伪的可能性共有$12\times2=24$种，三次称量可以给出$3^3=27$种结果
  - 三种称量结果不会出现，其余每一种称量结果对应一种可能性。不同称量结果对应的可能性各不相同，根据称量结果可辨别伪币并确定轻重
  - 后一次称量依赖于之前称量结果的方案为自适应（**adaptive**）的

伪币辨识

1 4 9 10 > 2 5 7 11

1 6 7 12 = 2 4 8 10

3 4 7 11 > 1 5 8 12

重	1	4	9	10
	3	5	9	11
	3	4	7	11
轻	2	5	7	11
	3	5	9	11
	1	5	8	12

非自适应

- 非自适应
  - 三种称量结果不会出现，其余每一种称量结果对应一种可能性。不同称量结果对应的可能性各不相同，根据称量结果可辨别伪币并确定轻重
  - 后一次称量不依赖于之前称量结果的方案为非自适应（**non-adaptive**）的。非自适应的试验可同时进行

一般结论

浙江大学 ZheJiang University
数学建模

- 对任意整数 $w \geq 2$
  - 若 $3 \leq n \leq (3^w - 3)/2$，存在一非适应的称量方案，使用 w 次称量可从 n 枚硬币中辨别伪币并确定轻重
  - 若 $n > (3^w - 3)/2$，不存在自适应的称量方案，用 w 次称量即可从 n 枚硬币中辨别伪币并确定轻重

Freeman John Dyson
(1923-)
英裔美籍物理学家、数学家
英国皇家学会会员
1981年Wolf奖得主

Dyson FJ. 1931 The Problem of the Pennies. *The Mathematical Gazette*, 30, 231-234, 1946.
Born A, Hurkens CA, Woeginger GJ. How to detect a counterfeit coin: Adaptive versus non-adaptive solutions. *Information Processing Letters*, 86, 137-141, 2003.

Dyson集

- 满足条件 (i) $\sum_{\mathbf{v}\in S}\mathbf{v}=\mathbf{0}$ (ii)若 $\mathbf{v}\in S$，则 $-\mathbf{v}\notin S$ 的向量子集 $S\subseteq\{-1,0,1\}^w$ 称为**Dyson集**
- 若存在**Dyson**集 $S=\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\cdots,\mathbf{v}_n\}$，则用无砝码的天平可用非自适应称量方案经 w次称量从 n 枚硬币中辨别伪币并确定轻重
  - 若 $\mathbf{v}_j$第 i 个分量为 $-1/1/0$，则在第 i 次称量中将第 j 枚硬币放在左盘/放在右盘/不作称量
  - 记 $\mathbf{z}\in\{-1,0,1\}^w$。若第 i 次称量结果为左盘偏重/右盘偏重/天平平衡，则 $\mathbf{z}$的第 i 个分量为 $-1/1/0$
  - 若 $\mathbf{z}=\mathbf{v}_j$，则第 j 枚硬币是伪币且偏重；若 $\mathbf{z}=-\mathbf{v}_j$，则第 j 枚硬币是伪币且偏轻

天平左右硬币数相同　　$\mathbf{z}=\mathbf{v}_j$ 和 $\mathbf{z}=-\mathbf{v}_j$不会同时出现

$$
\begin{array}{l}
(\ \ 1,\ \ 1,-1)\\
(-1,-1,\ \ 0)\\
(\ \ 0,\ \ 0,\ \ 1)\\
(\ \ 1,-1,\ \ 1)\\
(-1,\ \ 0,-1)\\
(\ \ 0,\ \ 1,\ \ 0)\\
(-1,\ \ 1,\ \ 1)\\
(\ \ 0,-1,-1)\\
(\ \ 1,\ \ 0,\ \ 0)\\
(\ \ 1,-1,\ \ 0)\\
(-1,\ \ 0,\ \ 1)\\
(\ \ 0,\ \ 1,-1)
\end{array}
$$

Dyson集

浙江大学 ZheJiang University

数学建模

- 函数 $f:\{-1,0,1\}\to\{-1,0,1\}$
- 函数 $\mathbf{f}:\{-1,0,1\}^w\to\{-1,0,1\}^w$，若 $\mathbf{x}=(x_1,\cdots,x_w)\in\{-1,0,1\}^w$，则 $\mathbf{f}(\mathbf{x})=(f(x_1),\cdots,f(x_w))$
- 对任意 $\mathbf{x}\in\{-1,0,1\}^w$，$\mathbf{x}\neq(-1,-1,\cdots,-1),(1,1,\cdots,1),(0,0,\cdots,0)$，定义 $S(\mathbf{x})=\{\mathbf{x},\mathbf{f}(\mathbf{x}),\mathbf{f}(\mathbf{f}(\mathbf{x})),-\mathbf{x},-\mathbf{f}(\mathbf{x}),-\mathbf{f}(\mathbf{f}(\mathbf{x}))\}$
  - $S(\mathbf{x})$ 中向量两两不同
  - 对任意 $\mathbf{v}\in S(\mathbf{x})$，$\mathbf{f}(\mathbf{v})\in S(\mathbf{x})$

x	-1	0	1
$f(x)$	0	1	-1
$f(f(x))$	1	-1	0
$f(f(f(x)))$	-1	0	1

$-x$	1	0	-1
$-f(x)$	0	-1	1
$-f(f(x))$	-1	1	0

$f(-x)$	-1	1	0
$f(-f(x))$	1	0	-1
$f(-f(f(x)))$	0	-1	1

$\mathbf{f}(-\mathbf{x})=-\mathbf{f}(\mathbf{f}(\mathbf{x})),\mathbf{f}(-\mathbf{f}(\mathbf{x}))=\mathbf{f}(-\mathbf{x}),\mathbf{f}(-\mathbf{f}(\mathbf{f}(\mathbf{x})))=-\mathbf{x}$

Dyson集

- 记 $W=\frac{1}{6}(3^w-3)$。存在 $\{-1,0,1\}^w$中 W个向量 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\cdots,\mathbf{v}_W$，使得

$$\{-1,0,1\}^w=S(\mathbf{v}_1)\cup S(\mathbf{v}_2)\cup\cdots\cup S(\mathbf{v}_W)$$
$$\cup\{(-1,\cdots,-1),(1,\cdots,1),(0,\cdots,0)\}$$

x	-1	0	1
$f(x)$	0	1	-1
$f(f(x))$	1	-1	0
$-x$	1	0	-1
$-f(x)$	0	-1	1
$-f(f(x))$	-1	1	0

$$x+f(x)+f(f(x))=0$$
$$S^+(\mathbf{x})=\{\mathbf{x},\mathbf{f}(\mathbf{x}),\mathbf{f}(\mathbf{f}(\mathbf{x}))\}$$

- **Dyson集的构造**
  - $n=3k,1\le k\le W$：$S^+(\mathbf{v}_1)\cup S^+(\mathbf{v}_2)\cup\cdots\cup S^+(\mathbf{v}_k)$
  - $n=3k+2,1\le k<W$

$$\begin{array}{ll}
(\ \ 1,\ \ 1,\ \ 1,\ \ 1,\cdots,\ \ 1) & \\
(\ \ 1,-1,\ \ 0,\ \ 0,\cdots,\ \ 0) & \mathbf{v}_1\\
(\ \ 0,-1,\ \ 1,\ \ 1,\cdots,\ \ 1) & -\mathbf{f}(\mathbf{f}(\mathbf{v}_1))\\
(-1,\ \ 1,-1,-1,\cdots,-1) & \mathbf{v}_2\\
(-1,\ \ 0,-1,-1,\cdots,-1) & -\mathbf{f}(\mathbf{f}(\mathbf{v}_2))
\end{array}$$

$S^+(\mathbf{v}_3),S^+(\mathbf{v}_4),\cdots,S^+(\mathbf{v}_{k+1})$

$n=3k+1,2\le k<W$

$$\begin{array}{ll}
(\ \ 1,\ \ 1,\ \ 1,\ \ 1,\cdots,\ \ 1) & \\
(-1,-1,\ \ 1,\ \ 1,\cdots,\ \ 1) & \mathbf{v}_1\\
(-1,-1,\ \ 0,\ \ 0,\cdots,\ \ 0) & -\mathbf{f}(\mathbf{f}(\mathbf{v}_1))\\
(\ \ 0,\ \ 0,-1,-1,\cdots,-1) & \mathbf{f}(\mathbf{v}_1)\\
(-1,\ \ 1,\ \ 0,\ \ 0,\cdots,\ \ 0) & \mathbf{v}_2\\
(\ \ 1,\ \ 0,-1,-1,\cdots,-1) & \mathbf{f}(\mathbf{f}(\mathbf{v}_2))\\
(\ \ 1,\ \ 0,\ \ 0,\ \ 0,\cdots,\ \ 0) & \mathbf{v}_3
\end{array}$$

$S^+(\mathbf{v}_4),S^+(\mathbf{v}_5),\cdots,S^+(\mathbf{v}_{k+1})$

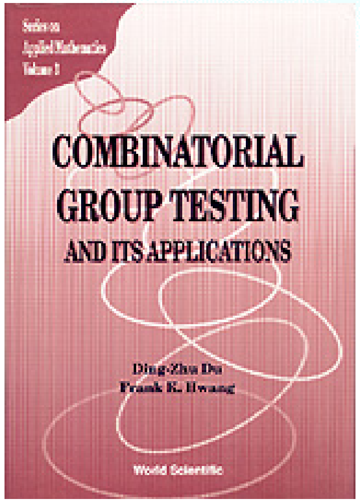
$n=4$

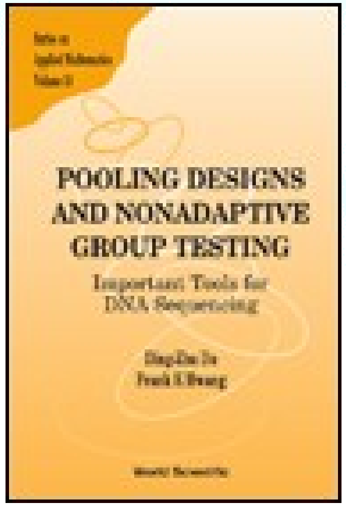
$$\begin{array}{l}
(\ \ 1,\ \ 1,\ \ 1,\cdots,\ \ 1)\\
(-1,\ \ 0,\ \ 0,\cdots,\ \ 0)\\
(\ \ 0,-1,\ \ 0,\cdots,\ \ 0)\\
(\ \ 0,\ \ 0,-1,\cdots,-1)
\end{array}$$

ZheJiang University
数学建模

群试

- 群试（**group testing**）技术产生于二十世纪四十年代，在医学检验、可靠性测试、编码、分子生物学等领域发挥了重要的作用
  - 概率群试
  - 组合群试





D.-Z. Du, F. K. Hwang, *Combinatorial Group Testing and Its Applications*, World Scientific, 2000.

D.-Z. Du, F. K. Hwang, *Pooling Designs and Nonadaptive Group Testing: Important Tools For DNA Sequencing*. World Scientific, 2006.

浙江大学 ZheJiang University

数学建模

投入产出表

	农业	工业	服务业	最终需求	总产出
农业	15	20	30	35	100
工业	30	10	45	115	200
服务业	20	60	0	70	150

为实现100亿农业产值需投入农业产值15亿，工业产值30亿，服务业产值20亿

100亿农业产值中，15亿用于农业，20亿用于工业，30亿元用于服务业，35亿用于满足最终需求

投入产出模型

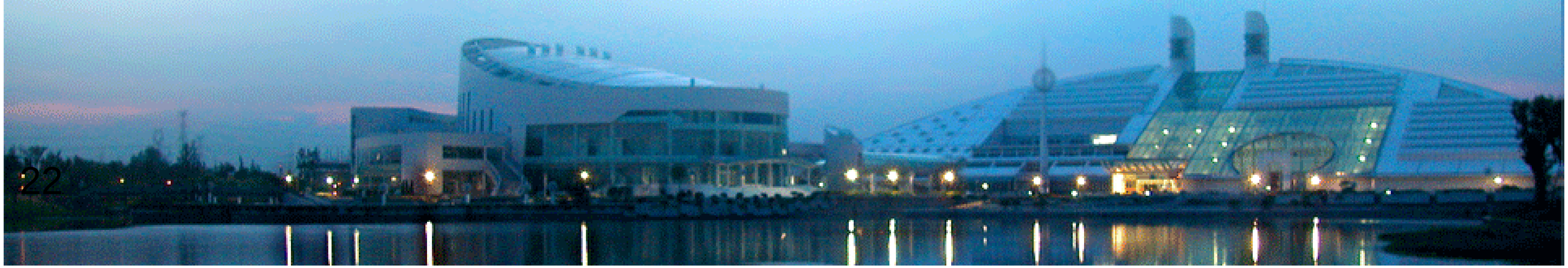
浙江大学 ZheJiang University

数学建模

- x_i：部门 i 的总产出
- d_i：部门 i 的最终需求
- a_{ij}：部门 i 的产出中用于部门 j的产值

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} + d_i = x_i \Longrightarrow \sum_{j=1}^{n} t_{ij} x_j + d_i = x_i$$

- $t_{ij} = \dfrac{a_{ij}}{x_j}$：部门 j 生产单位产值的产品需投入部门 i 的 t_{ij}个单位的产值（直接消耗系数）



投入产出模型

浙江大学 ZheJiang University

数学建模

- 令 $\mathbf{T}=(t_{ij})_{n\times n}$, $\mathbf{d}=(d_1,\cdots,d_n)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{x}=(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$,
  投入产出模型可表示为

$$(\mathbf{I}-\mathbf{T})\mathbf{x}=\mathbf{d}$$

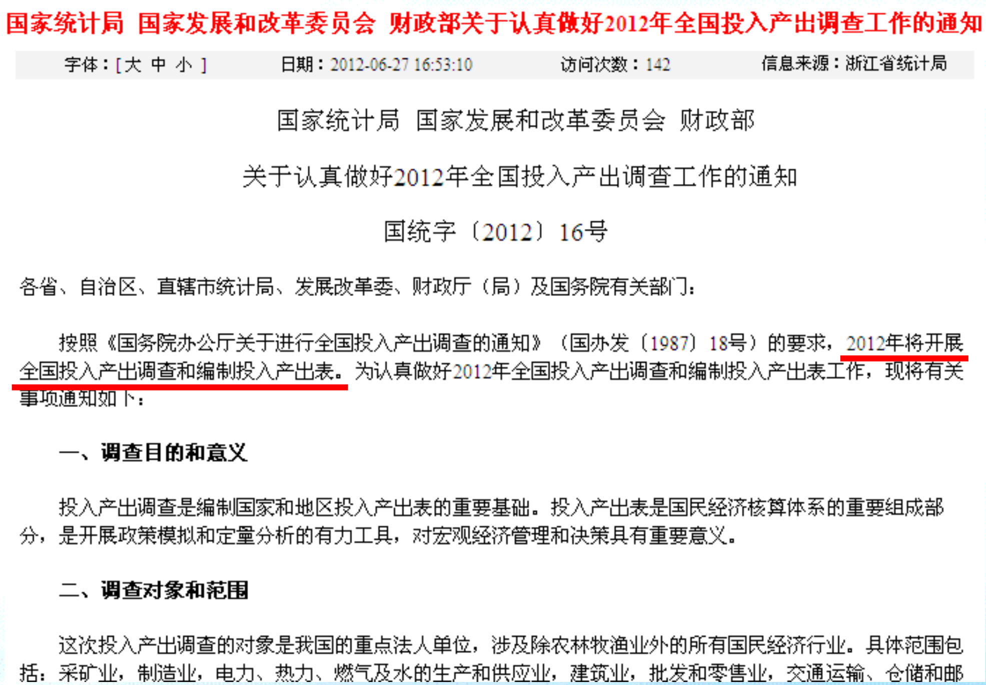
$$\boxed{\sum_{j=1}^{n} t_{ij}x_j + d_i = x_i}$$

- 若 $\mathbf{d}\neq\mathbf{0}$，模型称为开放（**open**）的；
  若 $\mathbf{d}=\mathbf{0}$，模型称为封闭（**closed**）的
- 封闭投入产出模型和**PageRank**模型形式相同

投入产出模型

数学建模

- 直接消耗系数短期内变化不大，其值可通过统计获得
- 若对任何最终需求，方程总有非负解，则经济系统可行（feasible）
- 给定直接消耗系数，如何判断经济系统是否可行，如何求出一定最终需求下各部门的产值



国家统计局 国家发展和改革委员会 财政部关于认真做好2012年全国投入产出调查工作的通知

字体：[大 中 小]　日期：2012-06-27 16:53:10　访问次数：142　信息来源：浙江省统计局

国家统计局 国家发展和改革委员会 财政部

关于认真做好2012年全国投入产出调查工作的通知

国统字〔2012〕16号

各省、自治区、直辖市统计局、发展改革委、财政厅（局）及国务院有关部门：

按照《国务院办公厅关于进行全国投入产出调查的通知》（国办发〔1987〕18号）的要求，2012年将开展全国投入产出调查和编制投入产出表。为认真做好2012年全国投入产出调查和编制投入产出表工作，现将有关事项通知如下：

一、调查目的和意义

投入产出调查是编制国家和地区投入产出表的重要基础。投入产出表是国民经济核算体系的重要组成部分，是开展政策模拟和定量分析的有力工具，对宏观经济管理和决策具有重要意义。

二、调查对象和范围

这次投入产出调查的对象是我国的重点法人单位，涉及除农林牧渔业外的所有国民经济行业。具体范围包括：采矿业，制造业，电力、热力、燃气及水的生产和供应业，建筑业，批发和零售业，交通运输、仓储和邮

投入产出表

	农业	工业	服务业	最终需求	总产出
农业	15	20	30	35	100
工业	30	10	45	115	200
服务业	20	60	0	70	150

$$\mathbf{T}=\begin{pmatrix}0.15 & 0.10 & 0.20\\ 0.30 & 0.05 & 0.30\\ 0.20 & 0.30 & 0.00\end{pmatrix}\qquad \mathbf{A}=\mathbf{I}-\mathbf{T}=\begin{pmatrix}0.85 & -0.10 & -0.20\\ -0.30 & 0.95 & -0.30\\ -0.20 & -0.30 & 1.00\end{pmatrix}$$

投入产出表

- $\mathbf{A}=\mathbf{I}-\mathbf{T}$ 的非主对角元素非正（Z-矩阵）

$$\mathbf{A}^{-1}=\begin{pmatrix}1.3459 & 0.2504 & 0.3443\\ 0.5634 & 1.2676 & 0.4930\\ 0.4382 & 0.4304 & 1.2167\end{pmatrix}\geq \mathbf{0}$$

$$\boxed{(\mathbf{I}-\mathbf{T})\mathbf{x}=\mathbf{d}}$$

$$\mathbf{d}=\begin{pmatrix}100\\ 200\\ 300\end{pmatrix},\mathbf{x}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{d}=\begin{pmatrix}287.96\\ 457.76\\ 494.91\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{d}=\begin{pmatrix}300\\ 200\\ 300\end{pmatrix},\mathbf{x}=\begin{pmatrix}557.14\\ 570.44\\ 582.55\end{pmatrix}$$

M-矩阵

数学建模

- 开放投入产出模型可行，当且仅当$A^{-1} \geq 0$，满足上述条件的矩阵也称为 **M-矩阵**
- 若 **A** 为**Z-**矩阵，则 **A** 为**M-**矩阵当且仅当 **A** 的所有主子式为正
  - **1949**年，**David Hawkins**和**Herbert Alexander Simon**证明了上述开放投入产出模型可行的条件。事实上，条件的等价性早在**1937**年已由**Alexander Ostrowski**证明

Hawkins D, Simon HA, Note: Some conditions of macroeconomic stability, *Econometrica* 17, 245-248, 1949.

Ostrowski AM. Uber die Determinanten mit iiberwiegender Hauptdiagonale, *Commentarii Mathematici Helvetici.* 10, 69-96, 1937.

收益与风险

- 现有 n 种股票，股票 S_j 的收益率为 r_j
  - 某一时段内股票的收益率由该时段初和该时段末股票价格变化决定
  - 由于市场的不确定性，r_j 为一随机变量，其期望 $Er_j = \mu_j, j=1,\cdots,n$
- 风险（**risk**）：可能发生的危险
  - 股票 S_j 的风险为其收益率的标准差，反映了收益率围绕其均值波动的幅度
- 随机变量 r_i 和 r_j 的协方差

$$\sigma_{ij} = \mathrm{Cov}(r_i, r_j) = E(r_i - Er_i)(r_j - Er_j), i, j = 1,\cdots,n$$

金融市场中，人们为获得更多的利益愿意承担更大的风险，风险本身体现一定的价值

协方差矩阵

浙江大学 ZheJiang University

数学建模

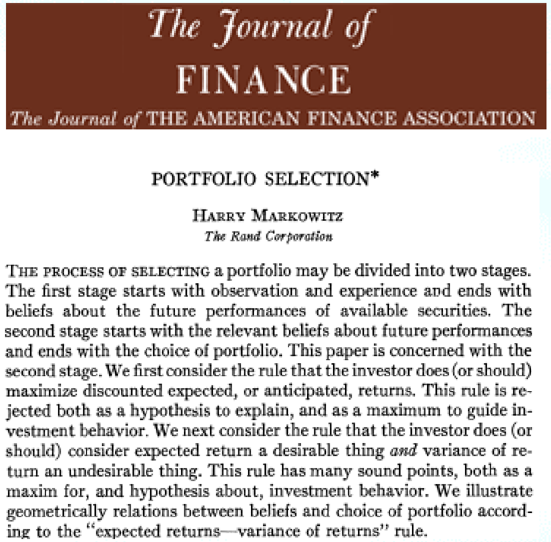
- 随机变量向量 $\mathbf{r}=(r_1,r_2,\cdots,r_n)^{\mathrm{T}}$ 的协方差矩阵 $\mathbf{V}=(\sigma_{ij})_{n\times n}$
  - 协方差矩阵为半正定矩阵
    - $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{V}\mathbf{x}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}x_ix_j=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_ix_jE(r_i-Er_i)(r_j-Er_j)=E\left(\sum_{i=1}^{n}x_i(r_i-Er_i)\right)^2\geq 0$
  - 若 $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{V}\mathbf{x}=E\left(\sum_{i=1}^{n}x_i(r_i-Er_i)\right)^2=0$，则 $P\left(\sum_{i=1}^{n}x_i(r_i-Er_i)=0\right)=1$，随机变量 $\sum_{i=1}^{n}x_ir_i$ 退化为 $\sum_{i=1}^{n}x_i\mu_i$
    - 证券中可能存在无风险组合，或存在某种证券的收益率可表示为其他证券收益率的线性组合
- 假设 $\mathbf{V}$ 正定，$\mu_j, j=1,\cdots,n$ 不全相同，记 $\boldsymbol{\mu}=(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n)^{\mathrm{T}}$

投资组合

数学建模

- 将总投资额单位化为1，投资于股票S_j的份额为$x_j, j=1,\cdots,n$，该组合（**portfolio**）可用$\mathbf{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$表示
- 在该组合下收益为 $\mathrm{E}(\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{r})=\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\mu}$ ，风险的平方为 $\mathrm{Var}(\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{r})=\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{V}\mathbf{x}$
- 如何选择股票进行投资，使得收益最大而风险最小

如何变多目标为单目标?


The Journal of FINANCE
The Journal of THE AMERICAN FINANCE ASSOCIATION

PORTFOLIO SELECTION*

HARRY MARKOWITZ
The Rand Corporation

THE PROCESS OF SELECTING a portfolio may be divided into two stages. The first stage starts with observation and experience and ends with beliefs about the future performances of available securities. The second stage starts with the relevant beliefs about future performances and ends with the choice of portfolio. This paper is concerned with the second stage. We first consider the rule that the investor does (or should) maximize discounted expected, or anticipated, returns. This rule is rejected both as a hypothesis to explain, and as a maximum to guide investment behavior. We next consider the rule that the investor does (or should) consider expected return a desirable thing *and* variance of return an undesirable thing. This rule has many sound points, both as a maxim for, and hypothesis about, investment behavior. We illustrate geometrically relations between beliefs and choice of portfolio according to the "expected returns—variance of returns" rule.

Markowitz, H., Portfolio Selection, *The Journal of Finance*, 7, 77-91, 1952

Markowitz模型

浙江大学 ZheJiang University

数学建模

- **Markowitz模型**
  - 选择投资组合 $\mathbf{x}^*(\mu)$，在收益达到给定值 μ 的前提下，组合的风险最小

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{V}\mathbf{x} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\mu} = \mu \\ & \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{e} = 1 \end{aligned}$$

仅含等式约束的二次凸规划

Largrange函数的驻点为极小值点

  - **Largrange函数** $L(\mathbf{x}, \lambda_1, \lambda_2) = \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{V}\mathbf{x} - \lambda_1(\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\mu} - \mu) - \lambda_2(\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{e} - 1)$

Largrange乘子法

- **对Largrange函数求偏导，并求驻点**

对应于 μ 的极小风险组合

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L(\mathbf{x},\lambda_1,\lambda_2)}{\partial \mathbf{x}}=2\mathbf{V}\mathbf{x}-\lambda_1\boldsymbol{\mu}-\lambda_2\mathbf{e}=0 \Rightarrow \mathbf{x}=\dfrac{1}{2}\mathbf{V}^{-1}(\boldsymbol{\mu}\quad\mathbf{e})\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{x}^*(\mu)=\mathbf{V}^{-1}(\boldsymbol{\mu}\quad\mathbf{e})\mathbf{A}^{-1}\begin{pmatrix}\mu\\ 1\end{pmatrix}\\ \left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial L(\mathbf{x},\lambda_1,\lambda_2)}{\partial \lambda_1}=-(\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\mu}-\mu)=0\\ \dfrac{\partial L(\mathbf{x},\lambda_1,\lambda_2)}{\partial \lambda_2}=-(\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{e}-1)=0\end{array}\right\}\Rightarrow \begin{pmatrix}\boldsymbol{\mu}^{\mathrm{T}}\\ \mathbf{e}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}\mathbf{x}=\begin{pmatrix}\mu\\ 1\end{pmatrix}\Rightarrow \dfrac{1}{2}\boxed{\overset{\mathbf{A}}{\begin{pmatrix}\boldsymbol{\mu}^{\mathrm{T}}\\ \mathbf{e}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}\mathbf{V}^{-1}(\boldsymbol{\mu}\quad\mathbf{e})}}\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mu\\ 1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{pmatrix}=2\mathbf{A}^{-1}\begin{pmatrix}\mu\\ 1\end{pmatrix}\end{cases}$$

代入

A 为二阶正定矩阵

- 记 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\mu}^{\mathrm{T}}\\ \mathbf{e}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}\mathbf{V}^{-1}(\boldsymbol{\mu}\quad\mathbf{e})=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\mu}^{\mathrm{T}}\mathbf{V}^{-1}\boldsymbol{\mu} & \boldsymbol{\mu}^{\mathrm{T}}\mathbf{V}^{-1}\mathbf{e}\\ \mathbf{e}^{\mathrm{T}}\mathbf{V}^{-1}\boldsymbol{\mu} & \mathbf{e}^{\mathrm{T}}\mathbf{V}^{-1}\mathbf{e}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\ b & c\end{pmatrix}$

$$\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{ac-b^2}\begin{pmatrix}c & -b\\ -b & a\end{pmatrix}$$

- $\sigma^*(\mu)^2=\mathbf{x}^*(\mu)^{\mathrm{T}}\mathbf{V}\mathbf{x}^*(\mu)=(\mu\quad 1)\mathbf{A}^{-1}\boxed{\overset{\mathbf{A}}{\begin{pmatrix}\boldsymbol{\mu}^{\mathrm{T}}\\ \mathbf{e}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}\mathbf{V}^{-1}\mathbf{V}\mathbf{V}^{-1}(\boldsymbol{\mu}\quad\mathbf{e})}}\mathbf{A}^{-1}\begin{pmatrix}\mu\\ 1\end{pmatrix}$

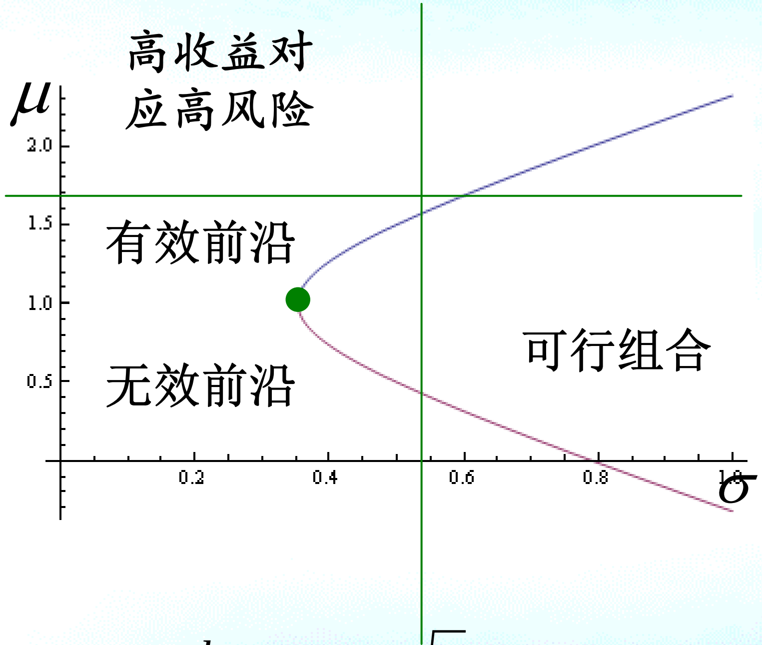
$$=(\mu\quad 1)\mathbf{A}^{-1}\begin{pmatrix}\mu\\ 1\end{pmatrix}=\frac{1}{ac-b^2}(\mu\quad 1)\begin{pmatrix}c & -b\\ -b & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mu\\ 1\end{pmatrix}=\frac{a-2b\mu+c\mu^2}{ac-b^2}$$

对应于 μ 的极小风险组合的风险

$$\boxed{\min\left\{\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{V}\mathbf{x}\,|\,\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\mu}=\mu,\ \ \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{e}=1\right\}\quad L(\mathbf{x},\lambda_1,\lambda_2)=\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{V}\mathbf{x}-\lambda_1(\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\mu}-\mu)-\lambda_2(\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{e}-1)}$$

有效前沿

- 在 (σ,μ) 平面上，极小风险组合的收益 μ 与风险 $\sigma^*(\mu)$ 的轨迹为一条双曲线的右支
  - 双曲线上半部称为有效前沿（**efficient frontier**）。其上每一点对应的组合为有效组合，即收益固定时风险最小的组合或风险固定时收益最大的组合
  - 双曲线下半部为无效前沿（**inefficient frontier**）
  - 双曲线顶点 (σ_G,μ_G) 为总体最小风险组合（**global minimum variance portfolio**）



$$\mu_G=\frac{b}{c}\qquad \sigma_G=\sqrt{\frac{1}{c}}$$

$$\boxed{\sigma^*(\mu)^2=\frac{a-2b\mu+c\mu^2}{ac-b^2}}$$

$$\frac{\sigma^*(\mu)^2}{\frac{1}{c}}-\frac{\left(\mu-\frac{b}{c}\right)^2}{\frac{ac-b^2}{c^2}}=1$$

$$\mathbf{x}^*(\mu_G)=\mathbf{V}^{-1}(\boldsymbol{\mu}\quad \mathbf{e})\mathbf{A}^{-1}\begin{pmatrix}\mu_G\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{c}\mathbf{V}^{-1}\mathbf{e}$$

无风险资产

- 设市场上另有无风险资产，收益率为固定常数 r_f，投资份额为 x_0，$\sum_{j=0}^{n} x_j = 1$
- 投资组合的收益为

$$x_0 r_f + \sum_{j=1}^{n} x_j \mu_j = \left(1 - \sum_{j=1}^{n} x_j\right) r_f + \sum_{j=1}^{n} x_j \mu_j = \sum_{j=1}^{n} x_j (\mu_j - r_f) + r_f$$

风险仍为 $\mathbf{x}^{\mathrm{T}} \mathbf{V} \mathbf{x}$，其中 $\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$

- 记 $\mu_j' = \mu_j - r_f, \boldsymbol{\mu}' = \{\mu_1', \cdots, \mu_n'\}^{\mathrm{T}}$，则 $\boldsymbol{\mu}' = \boldsymbol{\mu}' - r_f \mathbf{e}$，投资组合的收益为 $r_f + \mathbf{x}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\mu}'$

无风险资产

- 有无风险资产的**Markowitz**模型

$$\min \quad \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{V}\mathbf{x}$$
$$\text{s.t.} \quad \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\mu}' = \mu'$$

模型中不显含变量 x_0

  - $L(\mathbf{x},\lambda) = \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{V}\mathbf{x} - \lambda(\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\mu}' - \mu')$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(\mathbf{x},\lambda)}{\partial \mathbf{x}} = 2\mathbf{V}\mathbf{x} - \lambda\boldsymbol{\mu}' = 0 \;\Rightarrow \mathbf{x}^* = \dfrac{\lambda}{2}\mathbf{V}^{-1}\boldsymbol{\mu}' \;\Rightarrow \mathbf{x}^*(\mu') = \dfrac{\mu'}{\boldsymbol{\mu}'^{\mathrm{T}}\mathbf{V}^{-1}\boldsymbol{\mu}'}\mathbf{V}^{-1}\boldsymbol{\mu}' \\ \dfrac{\partial L(\mathbf{x},\lambda)}{\partial \lambda} = -(\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\mu}' - \mu') = 0 \;\Rightarrow \boldsymbol{\mu}'^{\mathrm{T}}\mathbf{x}^* = \mu' \;\Rightarrow \dfrac{\lambda}{2}\boldsymbol{\mu}'^{\mathrm{T}}\mathbf{V}^{-1}\boldsymbol{\mu}' = \mu' \end{cases}$$

$$\sigma^*(\mu')^2 = \mathbf{x}^*(\mu')^{\mathrm{T}}\mathbf{V}\mathbf{x}^*(\mu') = \left(\frac{\mu'}{\boldsymbol{\mu}'^{\mathrm{T}}\mathbf{V}^{-1}\boldsymbol{\mu}'}\right)^2 \boldsymbol{\mu}'^{\mathrm{T}}\mathbf{V}^{-1}\mathbf{V}\mathbf{V}^{-1}\boldsymbol{\mu}' = \frac{\mu'^2}{\boldsymbol{\mu}'^{\mathrm{T}}\mathbf{V}^{-1}\boldsymbol{\mu}'}$$

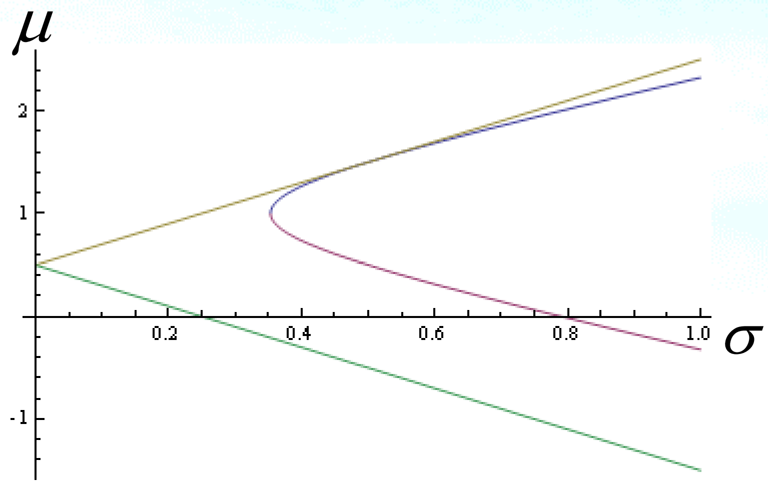
$$\sigma^*(\mu') = \pm\frac{\mu'}{\sqrt{a - 2r_f b + r_f^{\,2} c}} = \pm\frac{\mu - r_f}{\sqrt{a - 2r_f b + r_f^{\,2} c}}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu}^{\mathrm{T}}\mathbf{V}^{-1}\boldsymbol{\mu} & \boldsymbol{\mu}^{\mathrm{T}}\mathbf{V}^{-1}\mathbf{e} \\ \mathbf{e}^{\mathrm{T}}\mathbf{V}^{-1}\boldsymbol{\mu} & \mathbf{e}^{\mathrm{T}}\mathbf{V}^{-1}\mathbf{e} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}}$$

$$\boldsymbol{\mu}'^{\mathrm{T}}\mathbf{V}^{-1}\boldsymbol{\mu}' = (\boldsymbol{\mu} - r_f\mathbf{e})^{\mathrm{T}}\mathbf{V}^{-1}(\boldsymbol{\mu} - r_f\mathbf{e}) = a - 2r_f b + r_f^{\,2} c$$

有效前沿

- 存在无风险资产时，在 (σ,μ) 平面上，极小风险组合的收益 μ 与风险 $\sigma^*(\mu')$ 的轨迹为两条射线
- 两条射线相交于点 $(0,r_f)$，为总体最小风险组合。斜率为正的射线为有效前沿，斜率为负的射线为无效前沿
- 射线与双曲线相交时，极小风险组合中无风险资产份额为 0 ，风险资产份额为 1



$$\sigma^*(\mu') = \pm\frac{\mu'}{\sqrt{a-2r_f b + r_f{}^2 c}}$$

$$\sigma^*(\mu)^2 = \frac{a-2b\mu+c\mu^2}{ac-b^2}$$

交点

- 当 $\mu' = \dfrac{\boldsymbol{\mu}'^{\mathrm{T}}\mathbf{V}^{-1}\boldsymbol{\mu}'}{\mathbf{e}^{\mathrm{T}}\mathbf{V}^{-1}\boldsymbol{\mu}'} = \dfrac{a-2r_f b+r_f{}^2 c}{b-r_f c}$ 时，射线与双曲线切于点

$$M\left(\frac{\sqrt{a-2r_f b+r_f{}^2 c}}{b-r_f c},\ r_f+\frac{a-2r_f b+r_f{}^2 c}{b-r_f c}\right)=M\left(\frac{\sqrt{a-2r_f b+r_f{}^2 c}}{b-r_f c},\ \frac{a-r_f b}{b-r_f c}\right)$$

  - 双曲线切线的斜率 $\dfrac{d\mu}{d\sigma}=\dfrac{\sigma\dfrac{ac-b^2}{c}}{\mu-\dfrac{b}{c}}$

    - 在 $M(\sigma_M,\mu_M)$处的斜率为 $\dfrac{\sigma_M\dfrac{ac-b^2}{c}}{\mu_M-\dfrac{b}{c}}=\dfrac{\sigma_M\dfrac{ac-b^2}{c}}{\dfrac{a-r_f b}{b-r_f c}-\dfrac{b}{c}}=\dfrac{\sigma_M\dfrac{ac-b^2}{c}}{\dfrac{ac-b^2}{c(b-r_f c)}}=\sigma_M(b-r_f c)=\sqrt{a-2r_f b+r_f{}^2 c}$

$$\boxed{\mathbf{x}^*(\mu')=\frac{\mu'}{\boldsymbol{\mu}'^{\mathrm{T}}\mathbf{V}^{-1}\boldsymbol{\mu}'}\mathbf{V}^{-1}\boldsymbol{\mu}'}$$

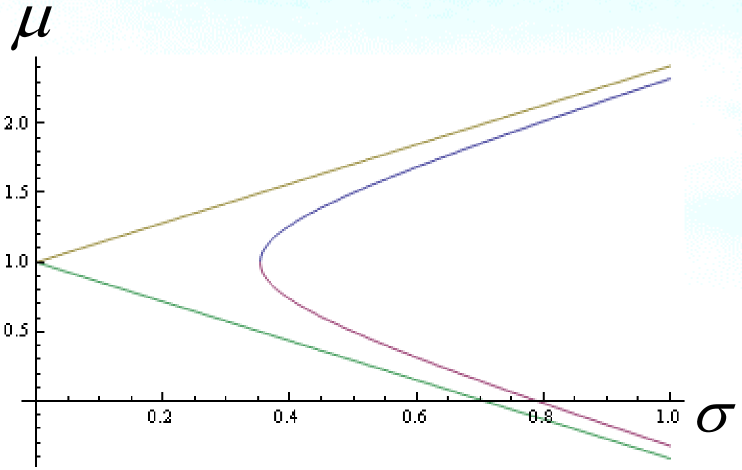
$$\boxed{\boldsymbol{\mu}'^{\mathrm{T}}\mathbf{V}^{-1}\boldsymbol{\mu}'=a-2r_f b+r_f{}^2 c}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\sigma^*(\mu')&=\pm\frac{\mu'}{\sqrt{a-2r_f b+r_f{}^2 c}}\\ \sigma^*(\mu)^2&=\frac{a-2b\mu+c\mu^2}{ac-b^2}\end{aligned}}$$

$$\mathbf{e}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}^*(\mu')=\frac{\mu'}{\boldsymbol{\mu}'^{\mathrm{T}}\mathbf{V}^{-1}\boldsymbol{\mu}'}\mathbf{e}^{\mathrm{T}}\mathbf{V}^{-1}\boldsymbol{\mu}' \quad \mathbf{e}^{\mathrm{T}}\mathbf{V}^{-1}\boldsymbol{\mu}'=\mathbf{e}^{\mathrm{T}}\mathbf{V}^{-1}(\boldsymbol{\mu}-r_f\mathbf{e})^{\mathrm{T}}=b-r_f c$$

有效前沿

- 不含无风险资产和含无风险资产两种情形的有效前沿
  - 当 $r_f < \frac{b}{c}$ 时，切点位于斜率为正的射线上
  - 当 $r_f > \frac{b}{c}$ 时，切线位于斜率为负的射线上
  - 当 $r_f = \frac{b}{c}$ 时，不含无风险资产的极小风险组合不存在，射线为双曲线渐近线



$$\sigma^*(\mu') = \pm \frac{\mu'}{\sqrt{a - 2r_f b + r_f^{\ 2} c}}$$

$$\sigma^*(\mu)^2 = \frac{a - 2b\mu + c\mu^2}{ac - b^2}$$

资本市场线

浙江大学 ZheJiang University
数学建模

- 含无风险资产的有效前沿称为资本市场线（**Capital Market Line，CML**）
  - 投资者在投资时，应在这条射线上选择一个适合他的组合
- 定义投资组合的**Sharpe**比（**Sharpe ratio**）为 $\frac{\mu - r_f}{\sigma^*(\mu)}$，表示承担单位风险所获得的超额收益
  - 有效前沿上每一组合**Sharpe**比均为 $\sqrt{a - 2r_f b + r_f{}^2 c}$

$$\boxed{\sigma^*(\mu') = \frac{\mu'}{\sqrt{a - 2r_f b + r_f{}^2 c}}} \qquad \frac{\mu - r_f}{\sigma^*(\mu)} = \sqrt{a - 2r_f b + r_f{}^2 c}$$

Sharpe W F. Mutual fund performance. *The Journal of business*, 39(1): 119-138, 1966

两基金分离定理

- 两基金分离定理（**two-fund separation theorem**）
  - 设 $\mathbf{x}^*(\mu_1)$ 和 $\mathbf{x}^*(\mu_2)$ 为两个极小风险组合，其中 $\mu_1 \neq \mu_2$，则 $\mathbf{x}^*$ 是极小风险组合的充要条件是存在 ,λ 使得
    $\mathbf{x}^* = \lambda \mathbf{x}^*(\mu_1) + (1-\lambda)x^*(\mu_2)$
    - 若 $\mathbf{x}^*(\mu_1)$ 和 $\mathbf{x}^*(\mu_2)$ 均为有效组合，且 $0 \le \lambda \le 1$，则 $\mathbf{x}^* = \lambda \mathbf{x}^*(\mu_1) + (1-\lambda)x^*(\mu_2)$ 也是有效组合
  - 两种极小风险组合可以生成整个组合前沿。考虑所有组合和两种组合的组合具有相同的效果

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{V}\mathbf{x} \\
\text{s.t.} \quad & \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\mu} = \mu \\
& \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{e} = 1
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\min \quad & \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{V}\mathbf{x} \\
\text{s.t.} \quad & \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\mu}' = \mu'
\end{aligned}
$$

投资基金（共同基金）：通过发行基金权益凭证，将各个投资者彼此分散的资金集中起来，交由投资专家集中进行资产组合运作和管理，主要投资于证券等金融产品或其他产业部门，最终实现预定的投资目的，并将收益按比例向投资者进行分配。

——《中国大百科全书》

资产定价模型

- 资产定价模型（**Capital asset pricing model**）
  - 设两种证券 S_1 和 S_2 的期望收益率 $\mu_1 \neq \mu_2$，证券 S_0 不改变 S_1 和 S_2 生成的组合前沿的充要条件为：存在 $\lambda \in \mathbb{R}$，使得
    - $\mu_0 = (1-\lambda)\mu_1 + \lambda\mu_2$
    - $\sigma_{01} = (1-\lambda)\sigma_1^2 + \lambda\sigma_{12}$ ，$\sigma_{02} = (1-\lambda)\sigma_{12} + \lambda\sigma_2^2$
  - 设证券（组合）S_1 和 S_2 满足 $\mu_1 \neq \mu_2$ ，$\sigma_{12} = 0$
    - 若 S_2 是风险证券，证券 S_0 不改变 S_1 和 S_2 生成的组合前沿的充要条件为 $\mu_0 - \mu_2 = \dfrac{\sigma_{01}}{\sigma_1^2}(\mu_1 - \mu_2)$
    - 若 S_2 是无风险证券，证券 S_0 不改变 S_1 和 S_2 生成的组合前沿的充要条件为 $\mu_0 - r_f = \dfrac{\sigma_{01}}{\sigma_1^2}(\mu_1 - r_f)$

卖空

- 卖空（**short selling**）：允许投资者在交易时卖出他并不持有的证券
- 若不允许卖空，则在模型中需增加约束 $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$
  - 规划为带不等式约束的二次凸规划，无法求出解析解
  - 无无风险资产时有效前沿不再是双曲线的一支
  - 两基金分离定理不再成立

选举制度

数学建模

- m 位候选人参加选举，n 位选民通过投票（**ballot**）表达自身意愿。选举制度（**voting system**）规定选民投票的形式，以及如何根据所有选民的投票情况确定选举结果
  - 投票形式可以是某位或某几位候选人，也可以是候选人的一个（完全或部分）偏好顺序（**preference list**）
  - 选举结果可以是某位或某几位候选人当选，也可以是候选人的一个排名

公平选举

- 公平选举制度应有的性质
  - 中立性（**neutral**）：候选人当选与否或其排名由投票情况决定，与候选人自身无关
  - 平等性（**anonymous**）：所有选民的投票具有同等效力
  - 单调性（**monotonicity**）：某位选民投票情况作出有利于某候选人的改变不会不利于该候选人的选举结果
- 显失公平的选举制度
  - 存在被指定的候选人，其选举结果不依赖于投票情况
  - 存在独裁选民（**dictatorship**），候选人的选举结果完全由他的投票情况决定

两候选人选举

- A, B 两候选人参加选举， n 位选民 $v_1, v_2, \cdots, v_n$ 每位选择其中一人，选举系统 V 根据 n 位选民的投票情况判定其中一位候选人当选
- 多数规则（**majority rule**）：若某候选人有超过半数的选民选择，则该候选人当选
- （**May定理**）若选民数为奇数，唯一满足中立性、平等性、单调性，且能避免平局（同时当选或同时不当选）出现的选举制度为多数规则

Kenneth O. May Prize in the History of Mathematics

Kenneth O. May

（1915 - 1977）

美国数学家

多人选举

浙江大学
ZheJiang University
数学建模

- 若有至少三个候选人参加选举，每位选民给出候选人的偏好顺序，选举制度判定一位候选人当选

未必存在

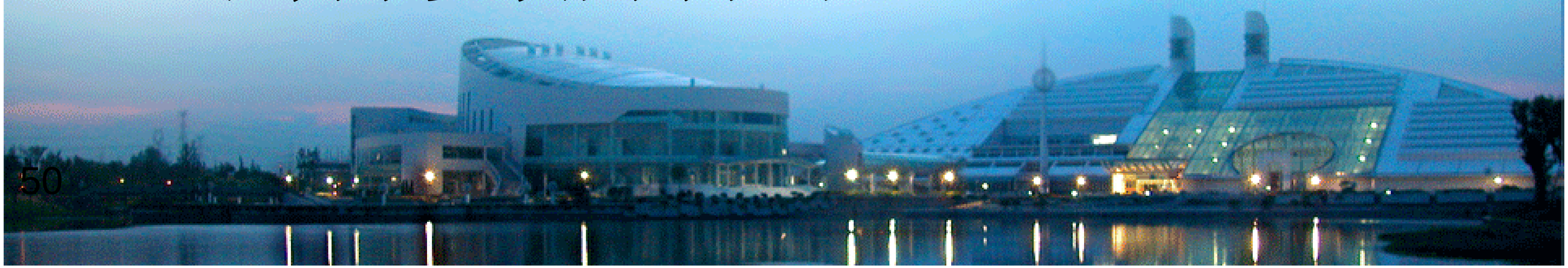
  - 多数规则：若有超过半数的选民将某位候选人置于偏好顺序的首位，则该候选人当选
  - 简单多数规则（**plurality**）：若某位候选人被最多的选民置于偏好顺序的首位，则该候选人当选

简单多数

人数	2	1	1	$\cdots$	1
偏	A	B_1	B_2	$\cdots$	B_M
好	B_1	B_2	B_3	$\cdots$	B_1
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
顺	B_{M-1}	B_M	B_1	$\cdots$	B_{M-1}
序	B_M	A	A	$\cdots$	A

占选民比例 $\dfrac{2}{M+2}$ 的选民将其置于首位，占选民比例 $\dfrac{M}{M+2}$ 的选民将其置于末位

A 在简单多数规则下当选



Borda记分法

- **Borda记分法（Borda count）**
  - 若某选民对m位候选人$B_1, B_2, \cdots, B_m$的偏好顺序为$B_1 \succ B_2 \succ \cdots \succ B_m$，则对$B_i$赋分$m-i$
  - 候选人的得分为所有选民对其赋分之和。按候选人得分从大到小的顺序确定候选人的排名

古罗马元老院的选举曾采用过**Borda**记分法，斯洛文尼亚下议院的个别议席，瑙鲁国会议员选举以及很多社会团体的选举目前仍采用**Borda**记分法或其变形

Jean-Charles de Borda
（1733 - 1799）
法国数学家、物理学家

多数原则

数学建模

- 多数原则（**majority criterion**）：若有超过半数的选民将某位候选人置于偏好顺序的首位，则该候选人当选
- **Borda**记分法不满足多数原则

人数	2	1
偏好顺序	A	B_1
	B_1	B_2
	$\vdots$	$\vdots$
	B_{M-1}	B_M
	B_M	A

M

按**Borda**记分法 B_1 当选

按多数规则 A 当选

A 得分为 $2(M-1)$

B_1 得分为 $2(M-2)+M-1=3M-5$

对决

- 若在偏好顺序中，将 A 置于 B 之前的选民超过一半，则称 A 在 A 和 B 的对决中获胜
- 按简单多数原则当选的候选人可能在与任何人对决中失败

人数	35	28	20	17
偏好顺序	A	B	C	C
	B	A	A	B
	C	C	B	A

$A: C$

$B : C$

$63:37$

Condorcet规则

浙江大学 ZheJiang University

数学建模

- 可在和任何人对决中获胜的候选人称为 **Condorcet 胜利者**（**Condorcet Winner**）
- **Condorcet规则**：**Condorcet胜利者当选**
- **Condorcet 胜利者未必存在**

人数	1	1	1
偏好顺序	A	B	C
	B	C	A
	C	A	B

$$A \succ B$$

$$B \succ C$$

$$C \succ A$$

Condorcet悖论

Marquis de Condorcet
（1743 - 1794）
法国哲学家、数学家

序列两两对决

数学建模

- 序列两两对决（**Sequential Pairwise Voting**）
  - 给定候选人的一个序列 $B_{(1)}, B_{(2)}, \cdots, B_{(m-1)}, B_{(m)}$
  - $B_{(1)}$ 与 $B_{(2)}$ 对决的胜者与 $B_{(3)}$ 对决，胜者再与 $B_{(4)}$ 对决，直至有 $B_{(m)}$ 参与的对决的胜者当选
- 序列两两对决的结果与序列选择有关，不满足中立性

12	7	5	3
F	G	H	I
G	H	I	H
H	I	F	G
I	F	G	F

$\xrightarrow{\text{交换} I,H \text{后}}$

G,H,F,I

$G\ F\ I$

12	7	5	3
F	G	I	H
G	I	H	I
I	H	F	G
H	F	G	F

Instant Runoff

- Instant Runoff（IRV）
  - 若某位候选人被最少的选民置于偏好顺序的首位，则该候选人必不能当选
  - 在所有选民的偏好顺序中删去该候选人，重复上述过程直至仅剩一个候选人为止，该候选人即为当选者
- 若在某一阶段，有超过半数的选民将某位候选人置于当前偏好顺序的首位，则该候选人必当选
- **Instant Runoff不满足单调性**

浙江大学 ZheJiang University

数学建模

Instant Runoff

6	5	4	2
G	M	D	S
M	G	S	D
D	D	M	G
S	S	G	M

删去S →

6	5	4	2
G	M	D	D
M	G	M	G
D	D	G	M

删去M →

6	5	4	2
G	G	D	D
D	D	G	G

删去 D，G 当选

6	5	4	2
G	M	D	S
M	G	S	G
D	D	M	D
S	S	G	M

删去S →

6	5	4	2
G	M	D	G
M	G	M	D
D	D	G	M

删去 D →

6	5	4	2
G	M	M	G
M	G	G	M

删去 G，M 当选

单人当选制度

- **Exhaustive Ballot**
  - 选民每轮选择一位候选人，每轮删除被最少选民选择的候选人。持续上述过程直至剩下一位候选人为止，该候选人即为当选者
- **Two-round system**
  - 在第一轮投票中，选民选择一位候选人，被最多选民选择的两位候选人进入第二轮。第二轮选举遵循多数规则

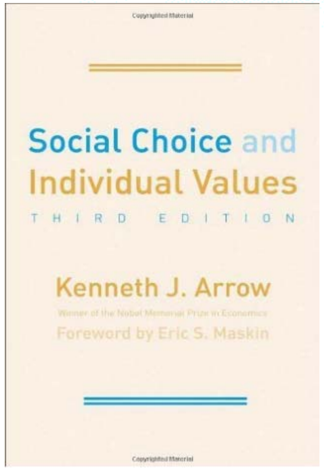
北京	32	37	40	43
悉尼	30	30	37	45
曼彻斯特	11	13	11	
柏林	9	9		
伊斯坦布尔	7			

北京	44	56		
多伦多	20	22		
伊斯坦布尔	17	18		
巴黎	15	9		
大阪	6			

社会选择和社会福利函数

数学建模

- 社会选择函数（**social choice function**）：对 n 位选民给出的候选人的满足完全性和传递性的偏好顺序集 $\mathbb{P}$，有一个候选人的子集与之对应
- 社会福利函数（**social welfare function**）：对 n 位选民给出的候选人的满足完全性和传递性的偏好顺序集 $\mathbb{P}$，有一个候选人的满足完全性和传递性的社会偏好顺序 $\Phi(\mathbb{P})$ 与之对应



Arrow. K., *Social Choice and Individual Values*，1951年初版，2012年三版

Social Choice and Welfare

社会福利函数

数学建模

- 社会福利函数应有的性质
  - **Pareto性**：若存在候选人 A和 B，所有选民的偏好顺序均将 A置于B 之前，则社会偏好顺序中 A也置于B之前
  - 无关选择独立性（**independence of irrelevant alternative**，**IIA** ）：若在所有选民的偏好顺序中，候选人A 和B 的相对位置没有变化，则在社会偏好顺序中，A和 B 的相对位置也没有变化
  - 一般性（**Universality**，**unrestricted domain**）：不得对选民的偏好顺序作出比完全性和传递性更强的限制

Arrow不可能定理

- **Arrow不可能定理（Arrow’s Impossible Theorem）：**
  - （强形式）若候选人多于两名，任意满足一般性、无关选择独立性、**Pareto**性的社会福利函数必为独裁的
    - 独裁：社会偏好顺序完全由某个独裁选民的偏好顺序决定，而与其它选民的偏好顺序无关
  - （弱形式）若候选人多于两名，不存在同时满足一般性、单调性、中立性、无关选择独立性、非独裁的社会福利函数

基本数学模型

招聘问题

Secretary Problem

浙江大学
ZheJiang University
数学建模

- n 位求职者应聘某一职位，招聘方通过逐个面试予以考察
  - 应聘者的综合能力各不相同，通过面试可给出已面试的应聘者的综合能力大小顺序
- 应聘者以某一顺序接受面试，某个应聘者是否被录用必须在他面试结束后立即决定
  - 若录用，招聘即告结束，不再面试其他应聘者
  - 若不录用，招聘方继续面试下一位应聘者
  - 招聘方不得录用曾作出过不录用决定的应聘者
- 招聘方采用何种策略可使招聘到综合能力最强（第一名）的应聘者的概率最大

可行策略

- 由于目标为招聘到第一名的概率，因此除最后一位应聘者外，招聘方只会录用比之前所有应聘者均优的那位应聘者，称这样的应聘者为备选者
- 策略 k
  - 从第 k位应聘者开始，录用首次出现的一名备选者
  - 若至最后一名应聘者面试时仍未有备选者出现，录用最后一名应聘者

数学描述

数学建模

- 用 i 表示所有应聘者中综合能力居于第 i 名的应聘者，i 称为绝对名次，$i=1,\cdots,n$
- 记 A_i 为第 i 位接受面试的应聘者，$i=1,\cdots,n$
- 用 y_i 表示 A_i 在前 i 位接受面试的应聘者 $A_1,\cdots,A_i$ 中综合能力名次，称为相对名次
- 对 $1,2,\cdots,n$ 的任一排列，应聘者以该顺序面试的概率均为 $\frac{1}{n!}$

$n=4$ 实例

- 策略 2 在 24种可能顺序中有 11次可录用到第一名，为最优策略

策略1	策略2		策略3		策略4
1234	2134	3124	2314	3241	2341
1243	2143	3142	2341	3412	2431
1324	2314	3412	2413	4213	3241
1342	2341	4123	2431	4312	3421
1423	2413	4132	3214	4231	4321
1432	2431				4231

古典概型

- $p_n(s)$：采用策略 s 录用到第一名的概率
  - 采用策略1，必录用 A_1，$p_n(1)=P(A_1=1)=\dfrac{1}{n}$
- $p_n^k(s)$：采用策略 s 录用 $A_k(k\geq s)$，且为第一名 $(A_k=1)$ 的概率
  - $A_s,\cdots,A_{k-1}$ 均不是备选者
  - 前 $k-1$ 位应聘者中的最佳者出现在前 $s-1$ 位应聘者中，否则他将先于 A_k 被录用

浙江大学 ZheJiang University

数学建模

古典概型

$$p_n^k(s)=\frac{1}{n}\cdot\frac{s-1}{k-1}$$

第一名出现在第 k 位

前 $k-1$位中的最佳者只能选择在前 $s-1$位

			s				k		

前$k-1$位中的最佳者

第一名

选$k-1$位应聘者

前 $k-1$位中最佳者的可能位置数

其余$k-2$位的可能排列数

其余 $n-k$位的可能排列数

$$p_n^k(s)=\frac{\binom{n-1}{k-1}(s-1)(k-2)!(n-k)!}{n!}=\frac{(n-1)!(s-1)(k-2)!(n-k)!}{n!(k-1)!(n-k)!}=\frac{s-1}{n(k-1)}$$

概率计算

浙江大学 ZheJiang University

数学建模

$$\boxed{p_n^k(s)=\frac{s-1}{n(k-1)}}$$

$$p_n(s)=\sum_{k=s}^{n}p_n^k(s)$$

$$=\sum_{k=s}^{n}\frac{s-1}{n(k-1)}=\frac{s-1}{n}\sum_{k=s}^{n}\frac{1}{k-1}=\frac{s-1}{n}\sum_{k=s-1}^{n-1}\frac{1}{k}$$

$$p_n(s)-p_n(s-1)=\frac{s-1}{n}\sum_{k=s-1}^{n-1}\frac{1}{k}-\frac{s-2}{n}\sum_{k=s-2}^{n-1}\frac{1}{k}=\frac{1}{n}\sum_{k=s-1}^{n-1}\frac{1}{k}-\frac{1}{n}$$

$$p_n(s)-p_n(s+1)=\frac{s-1}{n}\sum_{k=s-1}^{n-1}\frac{1}{k}-\frac{s}{n}\sum_{k=s}^{n-1}\frac{1}{k}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n}\sum_{k=s}^{n-1}\frac{1}{k}$$

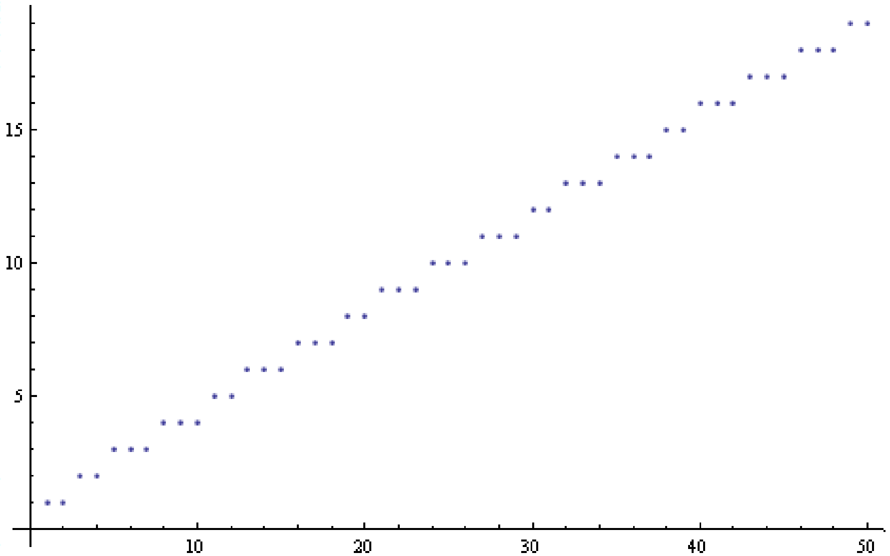
阈值

$$p_n(s)-p_n(s-1)=\frac{1}{n}\sum_{k=s-1}^{n-1}\frac{1}{k}-\frac{1}{n}$$

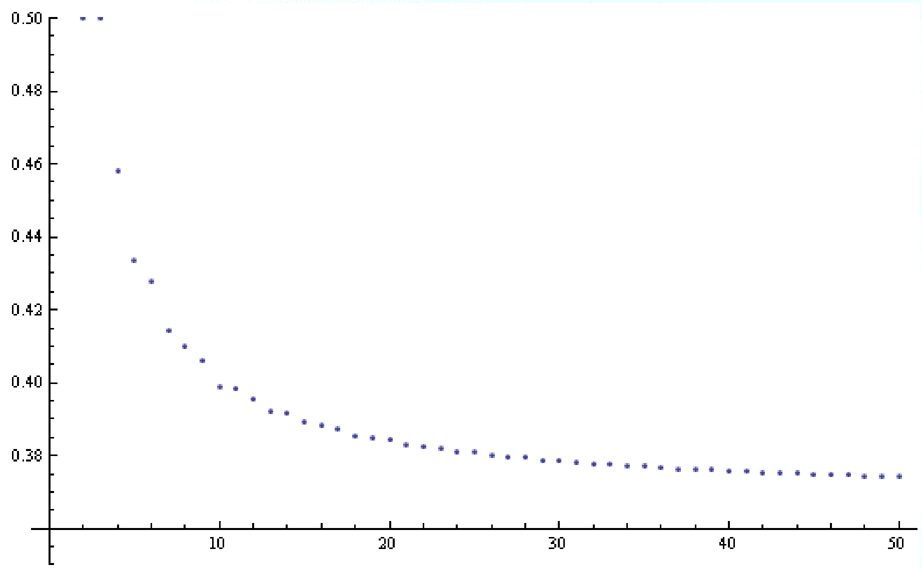
$$p_n(s)-p_n(s+1)=\frac{1}{n}-\frac{1}{n}\sum_{k=s}^{n-1}\frac{1}{k}$$

- 令 $s^* = \min\left\{s \mid \sum_{k=s}^{n-1}\frac{1}{k}<1\right\}$
  - 当 $s \geq s^*$ 时，$\sum_{k=s}^{n-1}\frac{1}{k}<1, p_n(s)>p_n(s+1)$
  - 当 $s \leq s^*$ 时，$\sum_{k=s-1}^{n-1}\frac{1}{k}\geq 1, p_n(s)\geq p_n(s-1)$
- 当 $s=s^*$ 时，$p_n(s)$达到最大值 $p_n(s^*)$

函数图像



s^* 图像



$p_n(s^*)$ 图像

s^* 的估计

浙江大学 ZheJiang University

数学建模

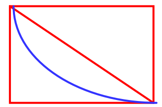
$$1 \le \sum_{k=s^*-1}^{n-1} \frac{1}{k} < \int_{s^*-\frac{3}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \frac{1}{x}\,dx = \ln \frac{2n-1}{2s^*-3}$$

$$\Leftrightarrow e \le \frac{2n-1}{2s^*-3} \Leftrightarrow s^* \le \frac{1}{e}\left(n-\frac{1}{2}\right)+\frac{3}{2}$$

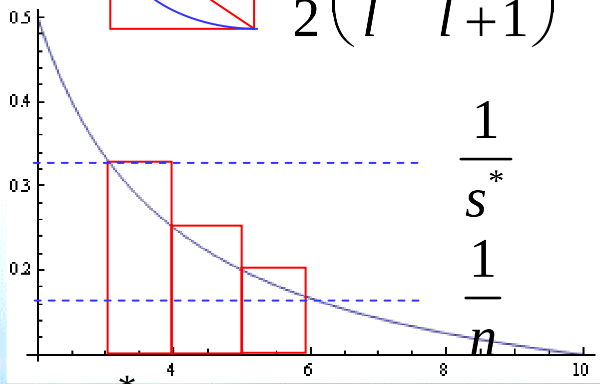
$$1 > \sum_{k=s^*}^{n-1} \frac{1}{k} > \int_{s^*}^{n} \frac{1}{x}\,dx + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s^*}-\frac{1}{n}\right)$$

$$\Leftrightarrow e > \frac{n}{s^*} e^{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s^*}-\frac{1}{n}\right)} > \frac{n}{s^*}\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s^*}-\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$\boxed{s^* = \min\left\{ s \,\middle|\, \sum_{k=s}^{n-1} \frac{1}{k} < 1 \right\}}$$



$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{l}-\frac{1}{l+1}\right)$$



$\frac{1}{s^*}$

$\frac{1}{n}$

s^* n

s^*的估计

$$e > \frac{n}{s^*} e^{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s^*}-\frac{1}{n}\right)} > \frac{n}{s^*}\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s^*}-\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$\ge \frac{n}{s^*}\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\frac{1}{e}\left(n-\frac{1}{2}\right)+\frac{3}{2}}-\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow s^* \ge \frac{1}{e}\left(n-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}-\frac{3e-1}{2(2n+3e-1)}$$

$$p_n(s^*) = \frac{s^*-1}{n}\sum_{k=s^*-1}^{n-1}\frac{1}{k} \approx \frac{s^*-1}{n}\ln\frac{n-2}{s^*-2} \approx \frac{1}{e}$$

$$\boxed{\begin{gathered} s^* \le \frac{1}{e}\left(n-\frac{1}{2}\right)+\frac{3}{2} \\ p_n(s) = \frac{s-1}{n}\sum_{k=s-1}^{n-1}\frac{1}{k} \end{gathered}}$$

s^*的上下界差距不超过

$$1+\frac{3e-1}{2(2n+3e-1)} \approx 1+\frac{1.79}{n+1.79}$$

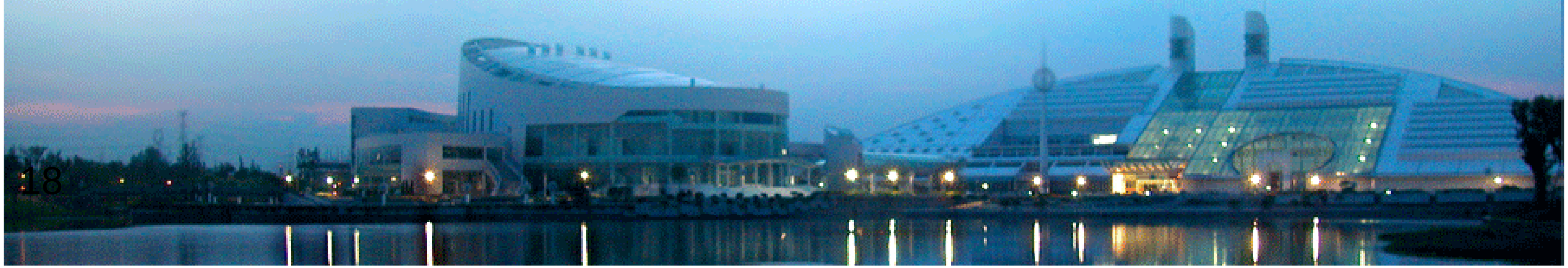
$$\lim_{n\to\infty} s^* = \frac{n}{e}$$

两次选择

浙江大学 ZheJiang University

数学建模

- 招聘方可录用两名应聘者，但对每位应聘者聘用与否的决定仍需在该应聘者面试结束时给出
- 招聘方采用何种策略可使录用的两位应聘者中其中一位为第一名的概率尽可能大
- 策略 $(r,s)(s>r)$：
  - 录用自 A_r 起首次出现的一名备选者，称为第一次录用
  - 若已录用一人，录用不早于 A_s 的一名备选者，称为第二次录用



实例演示

浙江大学 ZheJiang University

数学建模

	(1,3)	(2,3)
1234	1	
1243	1	
1324	1	
1342	1	
1423	1	
1432	1	

	(1,3)	(2,3)
2134	2	1
2143	2	1
2314	2 1	1
2341	2 1	1
2413	2 1	1
2431	2 1	1

	(1,3)	(2,3)
3124	3	1
3142	3	1
3214	3 1	2 1
3241	3 1	2 1
3412	3 1	1
3421	3 2	2 1

	(1,3)	(2,3)
4123	4	1
4132	4	1
4213	4 1	2 1
4231	4 1	2 1
4312	4 1	3 1
4321	4 2	3 2

(1,3) 共**16**次

(2,3) 共**17**次

实例分析

- 策略 (2,3)
  - **2143**：第一次录用在 A_s之前，录用到第一名
  - **2341**：第一次录用在 A_s之后（含），录用到到第一名
  - **3241**：第一次录用在 A_s之前，未录用到第一名，第二次录用到第一名
  - **3421**：第一次录用在 A_s之后（含），未录用到第一名，第二次录用到第一名
  - **4321**：两次录用都未录用到第一名

事件分解

数学建模

- 采用策略 (r,s) 录用到第一名
  - **1.** 第一名是第一次被录用者
  - **2.** 第一名是第二次被录用者，且第一次被录用者为 $A_u, u \geq s$
  - **3.** 第一名是第二次被录用者，且第一次被录用者为 $A_u, r \leq u \leq s-1$
- 按情形 j 录用到第一名，且他为 A_k 的概率为 $p_n^{j,k}(r,s)$

概率计算

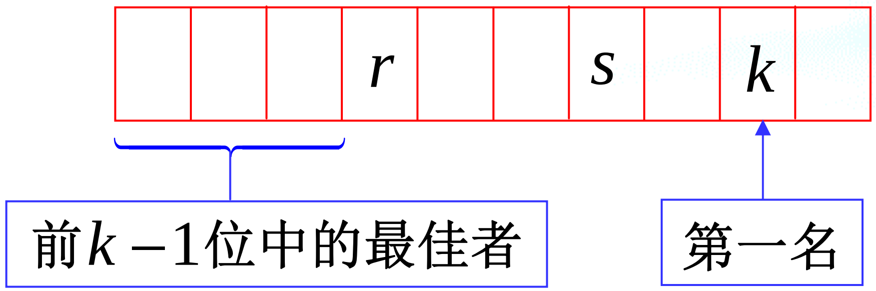
$$p_n^{1,k}(r,s)=\frac{1}{n}\cdot\frac{r-1}{k-1}$$

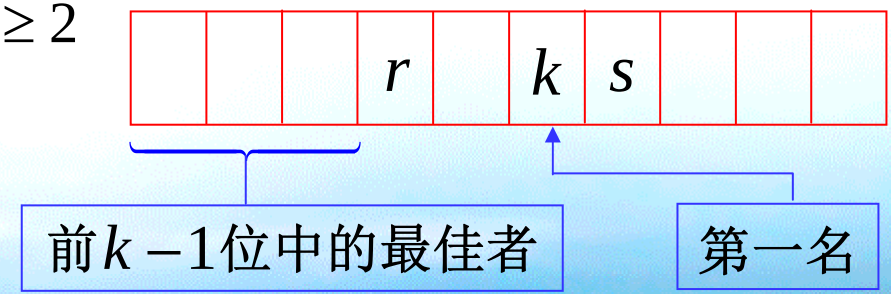
$$=\frac{\binom{n-1}{k-1}(r-1)(k-2)!(n-k)!}{n!}$$

$$p_n^{1}(r,s)=\sum_{k=r}^{n}\frac{r-1}{n(k-1)}=\frac{r-1}{n}\sum_{k=r-1}^{n}\frac{1}{k},r\geq 2$$

$$p_n^{1}(1,s)=\frac{1}{n}$$

情形1：第一名是第一次被录用者





概率计算

- 情形3：第一名 $A_k\,(k \geq s)$是第二次被录用者，且第一次被录用者为 $A_u, r \leq u \leq s-1$
- 设前 $k-1$位应聘者中的最佳者为 A_Δ，则
  $r \leq \Delta \leq s-1$
  - 若 $\Delta < r$，不会录用 A_u，A_k 是第一次被录用者
  - 若 $\Delta \geq s$，A_Δ将先于A_k 被第二次录用

概率计算

			r	u	Δ	s		k	

前$k-1$位中的最佳者　　第一名

$$p_n^{3,k}(r,s)=\frac{1}{n}\cdot\frac{s-r}{k-1}$$

$$=\frac{\binom{n-1}{k-1}(s-r)(k-2)!(n-k)!}{n!}$$

$$p_n^{3}(r,s)=\sum_{k=s}^{n}\frac{s-r}{n(k-1)}=\frac{s-r}{n}\sum_{k=s}^{n}\frac{1}{k-1}$$

概率计算

数学建模

- 情形2：第一名 $A_k\,(k \ge s)$ 是第二次被录用者，且第一次被录用者为 $A_u, u \ge s$
- 设前 $k-1$ 位应聘者中的最佳者为 A_Δ，则 $\Delta = u \le k-1$
  - 若 $\Delta < r$，A_u 不会被第一次录用
  - 若 $r \le \Delta \le s-1$，A_Δ 被第一次录用，属情形 **3**
  - 若 $s \le \Delta < u$，第一次被录用的是 A_Δ 而非 A_u
  - 若 $u < \Delta \le k-1$，第二次被录用的是 A_Δ 而非 A_k
- 设前 $u-1$ 位应聘者中的最佳者为 A_δ，则 $\delta \le r-1$
  - 若 $r \le \delta \le s-1$，A_δ 被第一次录用，属情形 **3**
  - 若 $s \le \delta \le u-1$，第一次被录用的是 A_δ 而非 A_u

概率计算

浙江大学 ZheJiang University

数学建模

	δ		r		s	u		k	

前$u-1$位中的最佳者

前$k-1$位中的最佳者

第一名

$$p_n^2(r,s)=\frac{r-1}{n}\sum_{k=s}^{n}\sum_{u=s}^{k-1}\frac{1}{(u-1)(k-1)}$$

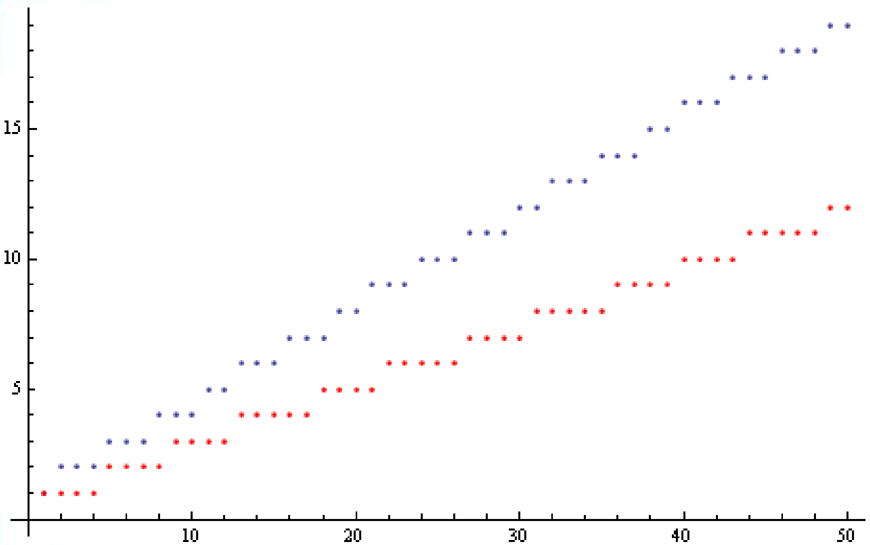
$$p_n^{2,k,u}(r,s)=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{k-1}\cdot\frac{r-1}{u-1}$$

$$=\frac{\binom{n-1}{k-1}\binom{k-2}{u-1}(r-1)(u-2)!(k-u-1)!(n-k)!}{n!}$$

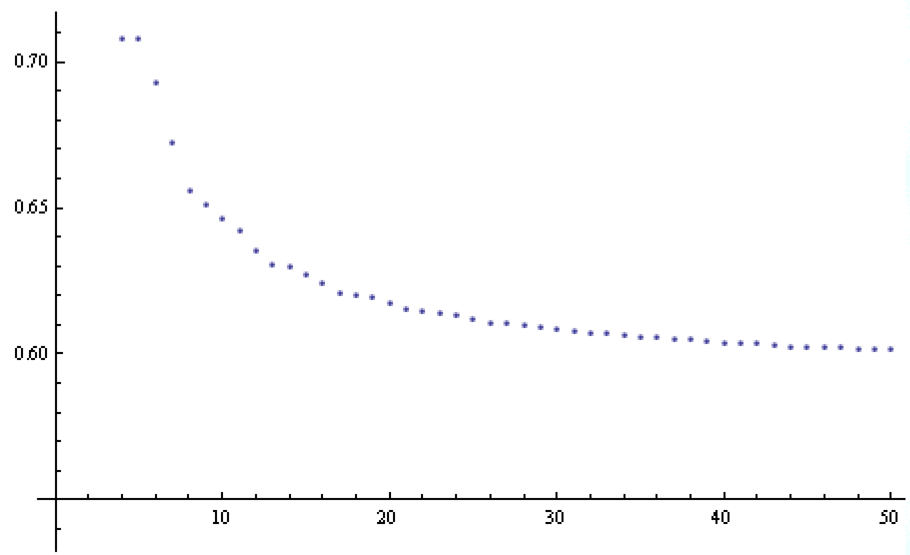
$$p_n(r,s)=p_n^1(r,s)+p_n^2(r,s)+p_n^3(r,s)$$

函数图像

浙江大学
ZheJiang University
数学建模



r^*, s^* 图像



$p_n(r^*, s^*)$图像

浙江大学

ZheJiang University

数学建模

渐近估计

- $$p_n^1(r,s) \approx \frac{r-1}{n}\ln\left(\frac{n-1}{r-2}\right) \approx \frac{r}{n}\ln\frac{n}{r}$$

$$p_n^2(r,s) \approx \frac{r-1}{n}\sum_{k=s}^{n}\frac{1}{k-1}\ln\left(\frac{k-2}{s-2}\right) \approx \frac{r}{n}\int_s^n \frac{1}{k}\ln\frac{k}{s}\,dk \approx \frac{r}{2n}\ln^2\frac{n}{s}$$

$$\int_s^n \frac{1}{k}\ln\frac{k}{s}\,dk = \ln^2\frac{k}{s}\Big|_s^n - \int_s^n \frac{1}{k}\ln\frac{k}{s}\,dk$$

$$p_n^3(r,s) \approx \frac{s-r}{n}\ln\frac{n-1}{s-2} \approx \frac{s-r}{n}\ln\frac{n}{s}$$

$$\boxed{p_n^1(r,s) = \frac{r-1}{n}\sum_{k=r-1}^{n}\frac{1}{k} \quad p_n^2(r,s) = \frac{r-1}{n}\sum_{k=s}^{n}\sum_{u=s}^{k-1}\frac{1}{(u-1)(k-1)} \quad p_n^3(r,s) = \frac{s-r}{n}\sum_{k=s}^{n}\frac{1}{k-1}}$$

极值

$$p_n^1(r,s) \approx \frac{r}{n}\ln\frac{n}{r}$$

$$p_n^2(r,s) \approx \frac{r}{2n}\ln^2\frac{n}{s}$$

$$p_n^3(r,s) \approx \frac{s-r}{n}\ln\frac{n}{s}$$

- 令 $\alpha = \frac{r}{n}, \beta = \frac{s}{n}$

$$p_n(\alpha,\beta) \approx -\alpha\ln\alpha + \frac{\alpha}{2}\ln^2\beta - (\beta-\alpha)\ln\beta$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p_n}{\partial \alpha} = -\ln\alpha - 1 + \dfrac{1}{2}\ln^2\beta + \ln\beta = 0 \\ \dfrac{\partial p_n}{\partial \beta} = \dfrac{\alpha}{\beta}\ln\beta - \ln\beta - \dfrac{\beta-\alpha}{\beta} = 0 \Rightarrow \dfrac{\beta-\alpha}{\beta}(1+\ln\beta) = 0 \end{cases}$$

$$\alpha = \beta \text{或} \beta = \frac{1}{e} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = e^{-\sqrt{2}} \\ \beta = e^{-\sqrt{2}} \end{cases} \text{或} \begin{cases} \alpha = e^{-\frac{3}{2}} \\ \beta = e^{-1} \end{cases}$$

极值

$$p_n(e^{-\sqrt{2}},e^{-\sqrt{2}}) \approx e^{-\sqrt{2}}\left(\sqrt{2}+1\right) \approx 0.5869$$

$$p_n(e^{-\frac{3}{2}},e^{-1}) \approx e^{-1}+e^{-\frac{3}{2}} \approx 0.5910$$

- 当 n 充分大时，最优策略为 $(e^{-\frac{3}{2}}n, e^{-1}n)$，录用到第一名的概率约为 0.5910，比仅录用一名应聘者时有较大增加

$$p_n(\alpha,\beta) \approx -\alpha\ln\alpha + \frac{\alpha}{2}\ln^2\beta - (\beta-\alpha)\ln\beta \qquad \begin{cases}\alpha = e^{-\sqrt{2}}\\ \beta = e^{-\sqrt{2}}\end{cases} \text{或} \begin{cases}\alpha = e^{-\frac{3}{2}}\\ \beta = e^{-1}\end{cases}$$

问题推广

- 招聘方录用 k 位应聘者，采用何种策略可使其中包含第一名的概率尽可能大
- 招聘方录用一位应聘者，采用何种策略可使他为前 k 名的概率尽可能大
- 招聘方录用一位应聘者，采用何种策略可使录用者绝对名次期望值尽可能小

期望

数学建模

- 招聘方依据 $y_1, y_2, \cdots, y_i$ 值决定是否录用应聘者 A_i。由于每位应聘者录用与否的决定需在面试结束时给出，决策仅与 y_i 有关
  - 招聘方可以录用 $y_i > 1$ 的非备选者
- 在录用相对名次为 y_i 的应聘者 A_i 情况下，被录用者绝对名次的期望值为

$$E(A_i \mid y_i = j) = \sum_{k=1}^{n} kP(A_i = k \mid y_i = j)$$

条件概率

$$P(A_i = k \mid y_i = j) = \frac{P(A_i = k, y_i = j)}{P(y_i = j)}$$

$$P(y_i = 1) = P(y_i = 2) = \cdots = P(y_i = i)$$

$$P(y_i = j) = \frac{\binom{n}{i}(i-1)!(n-i)!}{n!} = \frac{1}{i}$$

$$P(A_i = k, y_i = j) = \frac{\binom{k-1}{j-1}\binom{n-k}{i-j}(i-1)!(n-i)!}{n!} = \frac{\binom{k-1}{j-1}\binom{n-k}{i-j}}{i \cdot \binom{n}{i}}$$

$A_i = k, y_i = j$

恰有 $j-1$ 位优于 k

前 i 位中的第 j 名

$(k \geq j, n-k \geq i-j)$

期望

浙江大学 ZheJiang University

数学建模

$$E(A_i \mid y_i = j) = \sum_{k=1}^{n} kP(A_i = k \mid y_i = j) = \sum_{k=1}^{n} k\frac{P(A_i = k, y_i = j)}{P(y_i = j)}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{k\binom{k-1}{j-1}\binom{n-k}{i-j}}{\binom{n}{i}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{j\binom{k}{j}\binom{n-k}{i-j}}{\binom{n}{i}} = \frac{j}{\binom{n}{i}} \sum_{k=1}^{n} \binom{k}{j}\binom{n-k}{i-j}$$

$$\boxed{P(y_i = j) = \frac{1}{i} \qquad P(A_i = k, y_i = j) = \frac{\binom{k-1}{j-1}\binom{n-k}{i-j}}{i \cdot \binom{n}{i}}}$$

组合恒等式

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots=\sum_{l=0}^{\infty}x^l$$

$$\frac{1}{(1-x)^{p+1}}=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(l+p)(l+p-1)\cdots(l+1)}{p\cdot(p-1)\cdots 1}x^l=\sum_{l=0}^{\infty}\binom{l+p}{p}x^l$$

$$\sum_{l=0}^{\infty}\binom{l+i+1}{i+1}x^l=\frac{1}{(1-x)^{i+2}}=\frac{1}{(1-x)^{j+1}}\frac{1}{(1-x)^{i-j+1}}=\sum_{l=0}^{\infty}\binom{l+j}{j}x^l\cdot\sum_{l=0}^{\infty}\binom{l+i-j}{i-j}x^l$$

- 比较两端 x^{n-i} 系数

$$\binom{n+1}{i+1}=\sum_{k=0}^{n-i}\binom{k+j}{j}\binom{n-k-j}{i-j}=\sum_{k=1}^{n}\binom{k}{j}\binom{n-k}{i-j}$$

期望

- 在录用相对名次为 y_i 的应聘者 A_i 情况下，录用者绝对名次的期望值为

$$\binom{n+1}{i+1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{k}{j}\binom{n-k}{i-j}$$

$$E(A_i \mid y_i = j) = \sum_{k=1}^{n} kP(A_i = k \mid y_i = j)$$

$$= \frac{j}{\binom{n}{i}} \sum_{k=1}^{n} \binom{k}{j}\binom{n-k}{i-j} = \frac{j}{\binom{n}{i}} \binom{n+1}{i+1} = \frac{n+1}{i+1} j$$

- A_i 面试后招聘方可作录用和不录用两种决策

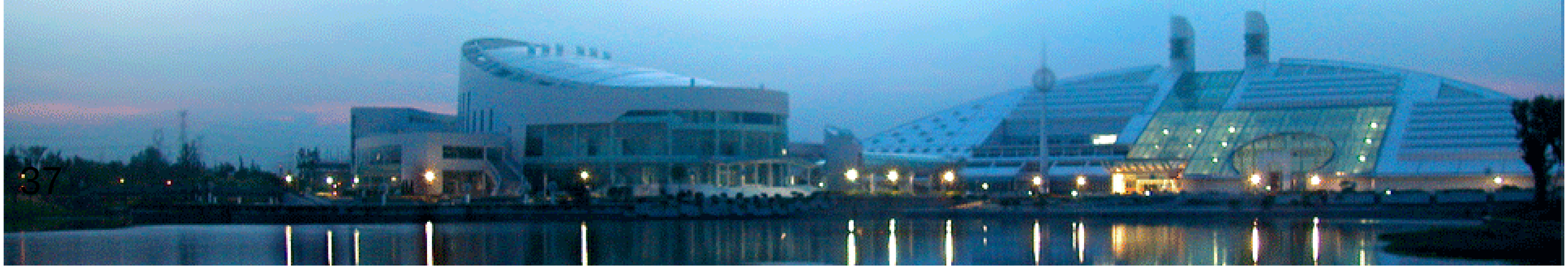
决策

数学建模

- 令$U(j,i)$为面试相对名次$y_i=j$的A_i时可能取得的最优绝对名次期望值
  - 录用A_i：$U(j,i)=\dfrac{n+1}{i+1}j$
  - 继续面试A_{i+1}：$U(j,i)=\dfrac{1}{i+1}\sum_{k=1}^{i+1}U(k,i+1)$

$$U(j,i)=\min\left\{\frac{n+1}{i+1}j,\frac{1}{i+1}\sum_{k=1}^{i+1}U(k,i+1)\right\}$$

- 面试A_n时，相对名次即为绝对名次，招聘方必定录用，$U(j,n)=j, j=1,\cdots,n$



递推

浙江大学 ZheJiang University 数学建模

- 自首位应聘者面试起，招聘方采用正确决策所能得到的最优绝对名次期望值为 $U(1,1)$
- 令 $C_{i-1}=\frac{1}{i}\sum_{k=1}^{i}U(k,i)$，则 $U(j,i)=\min\left\{\frac{n+1}{i+1}j,C_i\right\}$

$$C_{i-1}=\frac{1}{i}\sum_{j=1}^{i}U(j,i)=\frac{1}{i}\sum_{j=1}^{i}\min\left\{\frac{n+1}{i+1}j,C_i\right\}$$

$$C_{n-1}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}U(k,n)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}j=\frac{n+1}{2} \qquad U(1,1)=C_0=c_n$$

$$\boxed{U(j,i)=\min\left\{\frac{n+1}{i+1}j,\frac{1}{i+1}\sum_{k=1}^{i+1}U(k,i+1)\right\} \qquad U(j,n)=j,\ j=1,\cdots,n}$$

递推

数学建模

- 令 $s_i = \left\lfloor \dfrac{C_i(i+1)}{n+1} \right\rfloor, i = n-1, \cdots, 1$

$$\boxed{C_{i-1} = \frac{1}{i}\sum_{j=1}^{i} \min\left\{\frac{n+1}{i+1} j, C_i\right\}}$$

$$C_{i-1} = \frac{1}{i}\sum_{j=1}^{i} \min\left\{\frac{n+1}{i+1} j, C_i\right\} = \frac{1}{i}\left(\frac{n+1}{i+1}(1+\cdots+s_i) + (i-s_i)C_i\right)$$

$$= \frac{1}{i}\left(\frac{n+1}{i+1}\cdot\frac{s_i(1+s_i)}{2} + (i-s_i)C_i\right)$$

- 最优策略
  - 面试 A_i时，若 $y_i \le s_i$，则录用 A_i，否则继续面试 A_{i+1}

$(s_n = n)$

实例

- $n = 4 \qquad c_4 = 1.875$

  $$C_3 = \frac{5}{2}, C_2 = \frac{25}{12}, C_1 = \frac{15}{8}, C_0 = \frac{15}{8}$$

  $$s_3 = 2, s_2 = 1, s_1 = 0 \ (s_4 = 4)$$

- $c_{10} = 2.56, c_{100} = 3.60, c_{1000} = 3.83$

- $$\lim_{n\to\infty} c_n = \prod_{j=1}^{\infty} \left(\frac{j+2}{j} \right)^{\frac{1}{j}+1} \approx 3.8695$$

OPTIMAL SELECTION BASED ON RELATIVE RANK*
(the "Secretary Problem")

BY

Y. S. CHOW, S. MORIGUTI, H. ROBBINS AND S. M. SAMUELS

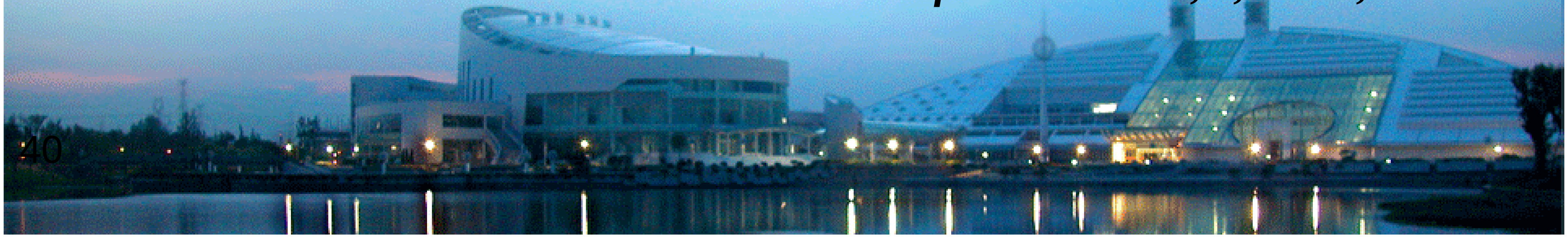
ABSTRACT

n rankable persons appear sequentially in random order. At the ith stage we observe the relative ranks of the first i persons to appear, and must either select the ith person, in which case the process stops, or pass on to the next stage. For that stopping rule which minimizes the expectation of the absolute rank of the person selected, it is shown that as $n \to \infty$ this tends to the value

$$\prod_{j=1}^{\infty} \left(\frac{j+2}{j} \right)^{1/j+1} \cong 3.8695.$$

1. **Introduction.** n girls apply for a certain position. If we could observe them all we could rank them absolutely with no ties, from best (rank 1) to worst (rank n). However, the girls present themselves one by one, in random order, and when the ith girl appears we can observe only her rank relative to her $i-1$ predecessors, that is, $1 +$ the number of her predecessors who are better than she. We may either select the ith girl to appear, in which case the process ends, or reject her and go on to the $(i+1)$th girl; in the latter case the ith girl cannot be recalled. We must select one of the n girls. Let X denote the absolute rank of the girl selected. The values of X are $1, \cdots, n$, with probabilities determined by our selection strategy. What selection strategy (*i.e.* stopping rule) will minimize the expectation $EX =$ expected absolute rank of the girl selected?

Y. S. Chow, S. Moriguti, H. Robbins, S. M. Samuels, Optimal selection based on relative rank (the "secretary problem"), *Israel Journal of Mathematics*, 2, 81-90, 1964



问题推广 II

数学建模

- 招聘方拟录用某应聘者时，应聘者以 $p(0<p<1)$ 的概率接受聘用
- 招聘方可以录用在当前面试者之前第 r 个接受面试的应聘者，应聘者仍然接受聘用的概率为 $q(r)$，$q(r)$ 为 r 的非增函数
- 应聘者数目为一随机变量

博士后问题

- 博士后问题
  - 考虑到最优秀的学生可能在录取后选择其他学校，学校希望录取到所有考生中综合素质第二名的学生的概率尽可能大
    - 分别记 f_k 和 g_k 为综合素质在前 k 名面试的学生中居于第一名和第二名的学生在所有学生中居于第二名的概率。求 f_k 和 g_k
    - 记 v_k 为不录取前名学生后，采用最优策略可能录取到综合素质第二名的学生的概率的最大值。试写出 v_k 满足的递推关系
    - 求 v_k，并给出相应的最优策略


浙江大学
ZheJiang University
谢 谢


浙江大学
ZheJiang University
运筹与统计
数学规划

数学规划

- 若干个变量在满足一些等式或不等式限制条件下，使一个或多个目标函数取得最大值或最小值
- 极值问题
  - 求函数 $f(\mathbf{x})$在 $\mathbf{x}\in S$ 上的极大（小）值
- 条件极值
  - 求函数 $f(\mathbf{x})$在满足
    $$h_j(\mathbf{x})=0,\quad j=1,\cdots,t$$
    条件下的极大（小）值
- 数学规划

$$\begin{aligned} &\min \quad f(\mathbf{x}) \\ &s.t. \quad g_i(\mathbf{x})\ge 0 \quad i=1,\cdots,s \\ &\qquad\;\; h_j(\mathbf{x})=0 \quad j=1,\cdots,t \\ &\qquad\;\; \mathbf{x}\in\mathbb{R}^n \end{aligned}$$

目标函数

min 极小
max 极大

subject to:
以下为约束条件

变量取值
范围约束

等式约束

不等式约束

数学规划

- 满足所有约束条件的点称为可行点（解）（**feasible point**），可行点的集合称为可行域（**feasible region**），记为 S
- $\mathbf{x}^* \in S$ 称为（单目标、极小化）优化问题的最优解（**optimal solution**），若对任意 $\mathbf{x} \in S$，均有 $f(\mathbf{x}^*) \le f(\mathbf{x})$；相应地 $f(\mathbf{x}^*)$ 称为最优值
  - 局部最优解和全局最优解

分类

- 线性规划与非线性规划
  - 线性规划：目标函数为线性函数，约束条件为线性等式或不等式
  - 非线性规划：目标函数为非线性函数，或者至少有一个约束条件为非线性等式或不等式
    - 二次规划（**Quadratic Programming**）：目标函数为二次函数，约束条件为线性等式或不等式
    - 带二次约束的二次规划（**Quadratically Constrained Quadratic Program，QCQP**）：目标函数为二次函数，约束条件为线性或二次等式或不等式
- 整数规划：至少有一个决策变量限定取整数值
  - 混合整数规划（**Mixed Integer Programming, MIP**）：部分决策变量取整数值
  - **0-1**规划：所有决策变量都取 **0** 或 **1**

食谱问题

- 食谱问题（**diet problem**）
  - 在市场上可以买到 n 种不同的食品，第 j 种食品的单位售价为 c_j
  - 人体正常生命活动过程需要 m 种基本营养成分，一个人每天至少需要摄入第 i 种营养成分 b_i 个单位
  - 每单位第 j 种食物包含第 i 种营养成分 a_{ij} 个单位
  - 在满足人体营养需求的前提下，如何寻找最经济的配食方案

George Joseph Stigler
（1911－1991）
美国经济学家
1982年诺贝尔经济学奖得主

18

食谱问题

数学建模

- 决策变量：食谱中第 j 种食物的数量为 x_j 个单位，$j=1,\cdots,n$
- 目标函数：所有食物费用之和 $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$
- 约束条件：
  - 满足人体营养需求
    - x_j 个单位第 j 种食物中含第 i 种营养成分 $a_{ij}x_j$ 个单位
    - 人体摄入的第 i 种营养成分的总量为 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$
    - 每种营养成分应满足人体需要 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ge b_i, i=1,\cdots,m$
  - 摄入食物量非负 $x_j \ge 0, j=1,\cdots,n$

数学建模

食谱问题

$$\min \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$s.t. \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i, \quad i = 1, \cdots, m$$

$$x_j \ge 0, \; j = 1, \cdots, n$$

$$\min \quad \mathbf{cx}$$

$$s.t. \quad \mathbf{Ax} \ge \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \ge \mathbf{0}$$

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$$

$$\mathbf{A} = (a_{ij})_{m \times n}$$

$$\mathbf{c} = (c_1, \cdots, c_n)$$

$$\mathbf{b} = (b_1, \cdots, b_m)^{\mathrm{T}}$$

MATHEMATICA

```
In[55]:= c = {4, 2, 3};
         b = {4, 11};
         A = (2 0 2
              4 3 1);
         LinearProgramming[c, A, b]

Out[58]= {2, 1, 0}
```

LINGO

```
MODEL:
sets:
    nut/1..2/:b;
    food/1..3/:c,x;
    cost(nut,food):a;
endsets
data:
  c=4 2 3;
  b=4 11;
  a=2 0 2 4 3 1;
enddata
min=@sum(food(j):c(j)*x(j));
@for(nut(i): @sum(food(j):a(i,j)*x(j))>b(i););
END
```

```
Global optimal solution found.
Objective value:                    10.00000
Infeasibilities:                    0.000000
Total solver iterations:                   2

                  Variable           Value
                     X( 1)        2.000000
                     X( 2)        1.000000
                     X( 3)        0.000000
```

运输问题

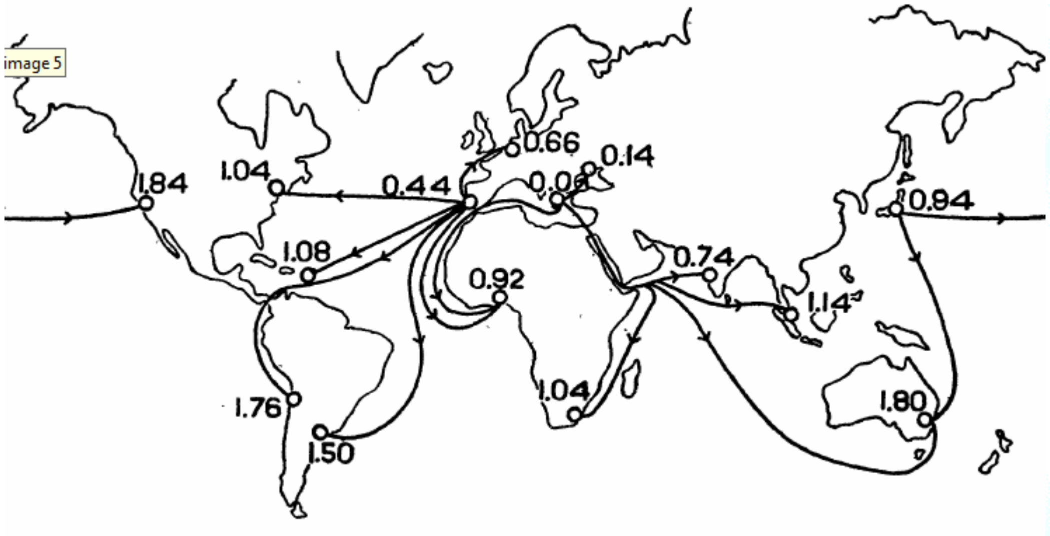
- 决策变量
  - x_{ij} ： 产地 i 调运到销地 j 的货物数量

$$\min \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

$$s.t. \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i,\ i=1,\ \cdots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j,\ j=1,\cdots,n$$

$$x_{ij} \ge 0$$



以净输入港口为产地，净输出港口为销地的运输问题的最优解，给出了最优空船调运路线

下料问题

- 下料问题（**Cutting-Stock Problem**）
  - 给定生产一批产品所需的某种材料的大小与数量列表，如何从相同规格的原料中下料，使所用的原料最少
- 装箱问题（**bin-packing problem**）
  - 给定一系列大小已知的物品和若干个容量相同的箱子，如何将物品放入箱子中，使所用箱子数尽可能少

现有**15**米长的钢管若干，生产某产品需**4**米，**5**米，**7**米长的钢管各**100**，**150**，**200**根，如何截取方能使材料最省

如何选择决策变量

下料问题

浙江大学 ZheJiang University

数学建模

- 列举所有可能的截取方式
- 决策变量
  - x_i：按第 i 种方式截取的原料的数量，$i=1,\cdots,7$
  - x_i 必须取正整数值

方式	1	2	3	4	5	6	7
7米	2	1	1	0	0	0	0
5米	0	1	0	3	2	1	0
4米	0	0	2	0	1	2	3
余料	1	3	0	0	1	2	3

$$
\begin{aligned}
\min\quad & x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7 \\
s.t.\quad & 2x_1+x_2+x_3 \ge 200 \\
& x_2+3x_4+2x_5+x_6 \ge 150 \\
& 2x_3+x_5+2x_6+3x_7 \ge 100 \\
& x_i \ge 0 \text{ 且 } x_i \text{ 为整数，} \quad i=1,2,\cdots,7.
\end{aligned}
$$

浙江大学 ZheJiang University

数学建模

选址问题

- 选址问题
  - 设在平面上有 n 个点，第 j 个点的坐标为 (x_j, y_j)
  - 求一个面积最小的圆，使这 n 个点均为该圆内的点

A QUESTION IN THE GEOMETRY OF SITUATION.

By J. J. SYLVESTER.

IT is required to find the least circle which shall contain a given system of points in a plane.

THE

QUARTERLY JOURNAL

OF

PURE AND APPLIED

MATHEMATICS.

EDITED BY

J. J. SYLVESTER, M.A., F.R.S.,

PROFESSOR OF MATHEMATICS IN THE ROYAL MILITARY ACADEMY, WOOLWICH; AND

N. M. FERRERS, M.A.,

FELLOW OF GONVILLE AND CAIUS COLLEGE, CAMBRIDGE:

ASSISTED BY

G. G. STOKES, M.A., F.R.S.,

LUCASIAN PROFESSOR OF MATHEMATICS IN THE UNIVERSITY OF CAMBRIDGE;

A. CAYLEY, M.A., F.R.S.,

LATE FELLOW OF TRINITY COLLEGE, CAMBRIDGE; AND

M. HERMITE,

CORRESPONDING EDITOR IN PARIS.

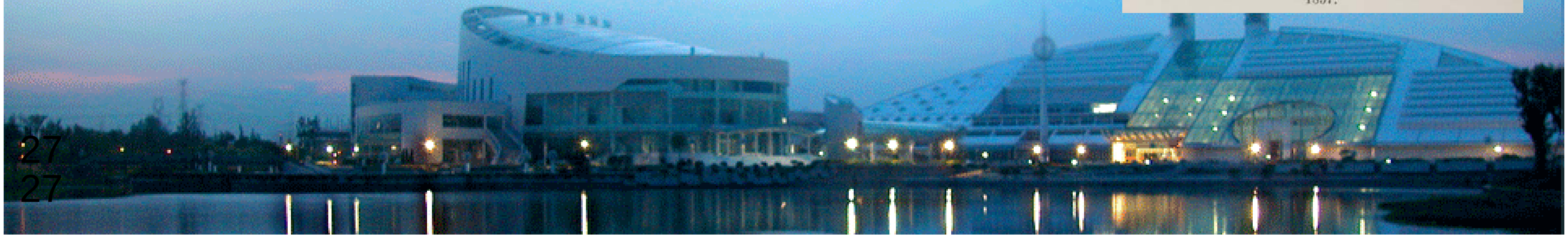
VOL. I.

ὅ τι οὐσία πρὸς γένεσιν, ἐπιστήμη πρὸς πίστιν καὶ διάνοια πρὸς εἰκασίαν ἐστι.

LONDON:

JOHN W. PARKER AND SON, WEST STRAND.

1857.



27

选址问题

浙江大学 ZheJiang University

数学建模

- 选址问题
  - 决策变量：圆心 (x_0, y_0)，半径 r
  - 目标函数：r^2
  - 约束条件：每个点到圆心的距离不超过半径

带二次约束的二次规划

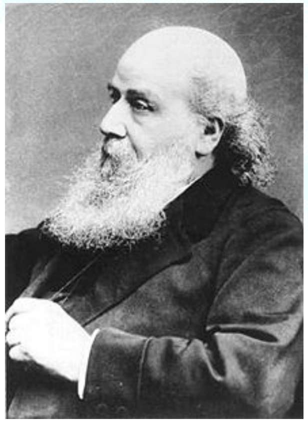
$$\begin{aligned} &\min\ \ r^2 \\ &s.t.\ \ (x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2 \le r^2, \quad i = 1, 2, \cdots, n \end{aligned}$$

- 定义新决策变量 $\lambda = r^2 - (x_0^2 + y_0^2)$ 替代 r

二次规划

$$\begin{aligned} &\min\ \ \lambda + x_0^2 + y_0^2 \\ &s.t.\ \ \lambda + 2x_0 x_i + 2y_0 y_i \ge x_i^2 + y_i^2, \quad i = 1, 2, \cdots, n \end{aligned}$$

$$x_i^2 - 2x_0 x_i + x_0^2 + y_i^2 - 2y_0 y_i + y_0^2 \le r^2 \Longrightarrow x_i^2 - 2x_0 x_i + y_i^2 - 2y_0 y_i \le r^2 - x_0^2 - y_0^2 = \lambda$$



James Joseph Sylvester (1814-1897)

英国数学家

支持向量机

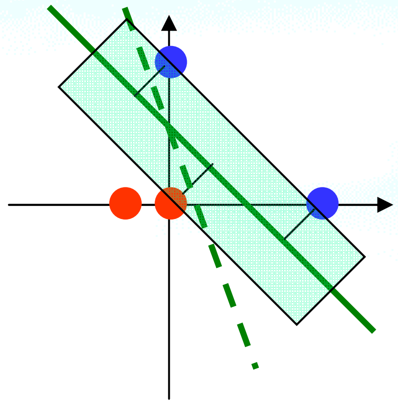
- 支持向量机（**Support Vector Machine**）
  - 拟将一数据集分为 C_1, C_2 两类。每个数据有 n 个特征，用 n 维实向量表示数据
  - 训练集 $S=\{\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\cdots,\mathbf{x}_m\}$，其分类已知，记 $y_i=\begin{cases}1 & \mathbf{x}_i\in C_1\\ -1 & \mathbf{x}_i\in C_2\end{cases}$
  - 训练集可线性分离（**linearly separable**），即存在超平面 $\mathbf{w}\cdot\mathbf{x}+b=0$，使得 $\begin{cases}\mathbf{w}\cdot\mathbf{x}_i+b>0 & \mathbf{x}_i\in C_1\\ \mathbf{w}\cdot\mathbf{x}_i+b<0 & \mathbf{x}_i\in C_2\end{cases}$， 或 $y_i(\mathbf{w}\cdot\mathbf{x}_i+b)>0$
- 超平面
  - 设 $\mathbf{w}$为 n 维实向量，b 为实数，称 $\mathbf{w}\cdot\mathbf{x}+b=0$为 $\mathbb{R}^n$ 中的超平面（**hyperplane**）
  - $\mathbb{R}^n$中点 $\mathbf{x}$ 到超平面 $\mathbf{w}\cdot\mathbf{x}+b=0$的距离为 $\dfrac{|\mathbf{w}\cdot\mathbf{x}+b|}{\sqrt{\mathbf{w}\cdot\mathbf{w}}}$

不妨要求
$\mathbf{w}\cdot\mathbf{w}=1$

Cortes C, Vapnik V. Support-vector networks. *Machine Learning*, *20*(3), 273-297, 1995.

支持向量机

- 若（I）有解，（I）与（II）等价
  - （I）的可行域包含在（II）的可行域内
  - （II）的最优解在（I）的可行域内
    - 由于（I）有解，存在 $\mathbf{w}, b$，满足 $\mathbf{w}\cdot\mathbf{w}=1$ 与 $y_i(\mathbf{w}\cdot\mathbf{x}_i+b)>0,\ i=1,\cdots,m$ 。这也是（II）的一组可行解，故（II）的最优值非负。因此（II）的最优解 $\mathbf{w}^*, b^*$ 总满足 $y_i(\mathbf{w}^*\cdot\mathbf{x}_i+b^*)>0,\ i=1,\cdots,m$
  - 在（I）的可行域内，对相同决策变量，（I）的目标值与（II）的目标值相等
    - 由于 $y_i=\pm 1$，若 $y_i(\mathbf{w}\cdot\mathbf{x}_i+b)>0$，则 $y_i(\mathbf{w}\cdot\mathbf{x}_i+b)=|\mathbf{w}\cdot\mathbf{x}_i+b|$



所有点至超平面距离的最小值尽可能大

（I）
$$\begin{aligned}\max\quad & \min_{i=1,\cdots,m} |\mathbf{w}\cdot\mathbf{x}_i+b| \\ \text{s.t.}\quad & y_i(\mathbf{w}\cdot\mathbf{x}_i+b)>0,\ i=1,\cdots,m \\ & \mathbf{w}\cdot\mathbf{w}=1\end{aligned}$$

（II）
$$\begin{aligned}\max\quad & \min_{i=1,\cdots,m} y_i(\mathbf{w}\cdot\mathbf{x}_i+b) \\ \text{s.t.}\quad & \mathbf{w}\cdot\mathbf{w}=1\end{aligned}$$

支持向量机

- 若 $\mathbf{w}_0, b_0$ 是（III）的最优解，则 $\dfrac{\mathbf{w}_0}{\sqrt{\mathbf{w}_0\cdot\mathbf{w}_0}}, \dfrac{b_0}{\sqrt{\mathbf{w}_0\cdot\mathbf{w}_0}}$ 是（II）的最优解
  - 设 $\mathbf{w}^*, b^*$ 是（II）的最优解，$\mathbf{w}^*\cdot\mathbf{w}^*=1$，最优值为 $\gamma^*=\min\limits_{i=1,\cdots,m} y_i(\mathbf{w}^*\cdot\mathbf{x}_i+b^*)$
  - $y_i(\mathbf{w}^*\cdot\mathbf{x}_i+b^*)\geq\gamma^*$，$i=1,\cdots,m$，即 $y_i\left(\dfrac{\mathbf{w}^*}{\gamma^*}\cdot\mathbf{x}_i+\dfrac{b^*}{\gamma^*}\right)\geq 1,\ i=1,\cdots,m$，
    故 $\dfrac{\mathbf{w}^*}{\gamma^*}, \dfrac{b^*}{\gamma^*}$ 是（III）的可行解
  - 由于 $\mathbf{w}_0, b_0$ 是（III）的最优解，$\sqrt{\mathbf{w}_0\cdot\mathbf{w}_0}\leq\sqrt{\dfrac{\mathbf{w}^*}{\gamma^*}\cdot\dfrac{\mathbf{w}^*}{\gamma^*}}=\dfrac{1}{\gamma^*}$
  - $y_i\left(\dfrac{\mathbf{w}_0}{\sqrt{\mathbf{w}_0\cdot\mathbf{w}_0}}\cdot\mathbf{x}_i+\dfrac{b_0}{\sqrt{\mathbf{w}_0\cdot\mathbf{w}_0}}\right)\geq y_i\left(\gamma^*\mathbf{w}_0\cdot\mathbf{x}_i+\gamma^* b_0\right)=\gamma^* y_i\left(\mathbf{w}_0\cdot\mathbf{x}_i+b_0\right)\geq\gamma^*,\ i=1,\cdots,m$ ，
    故 $\dfrac{\mathbf{w}_0}{\sqrt{\mathbf{w}_0\cdot\mathbf{w}_0}}, \dfrac{b_0}{\sqrt{\mathbf{w}_0\cdot\mathbf{w}_0}}$ 的目标值不小于 $\mathbf{w}^*, b^*$ 的目标值，也是（II）的最优解

（II）
$$\max \quad \min_{i=1,\cdots,m} y_i(\mathbf{w}\cdot\mathbf{x}_i+b)$$
$$\text{s.t.} \quad \mathbf{w}\cdot\mathbf{w}=1$$

带不等式约束的二次规划

（III）
$$\min \quad \mathbf{w}\cdot\mathbf{w}$$
$$\text{s.t.} \quad y_i(\mathbf{w}\cdot\mathbf{x}_i+b)\geq 1,\ i=1,\cdots,m$$

数学规划

- 建立实际问题数学规划的原则与技巧
  - 选择合适的决策变量，数量适中，目标函数和约束条件表达清晰、形式简单
  - 约束条件完整反映问题要求，不遗漏，不冗余。确保数学规划的最优值与原问题的最优值一致
  - 善于转化和变形，一般应尽量减少非线性约束和整数取值限制，灵活处理绝对值、分段函数等复杂情况
  - 善于运用**0-1**变量建立决策变量之间的联系和描述逻辑关系
  - 结合计算求解检验、修正和改进已有规划


浙江大学
ZheJiang University
运筹与统计
多目标规划

浙江大学 ZheJiang University

数学建模

多目标规划

- **多目标规划**研究变量在满足给定约束条件下，如何使多个目标函数同时极小化的问题

$$
\text{(MOP)}\quad
\begin{aligned}
\min\quad & \mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \cdots, f_p(\mathbf{x}))^{\mathrm{T}} \\
s.t.\quad & \mathbf{g}_i(\mathbf{x}) \geq \mathbf{0}, i = 1, \cdots, s, \\
& \mathbf{h}_j(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, j = 1, \cdots, t.
\end{aligned}
$$

Vilfredo Federico Damaso Pareto
（1848－1923）
意大利经济学家

解的类型

数学建模

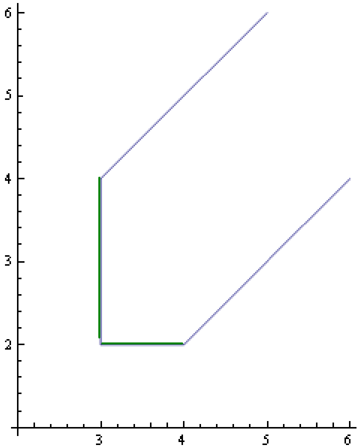
- 设 $\mathbf{x}^* \in S$
  - 若对任意 $\mathbf{x} \in S, f_k(\mathbf{x}^*) \le f_k(\mathbf{x}), k=1,\cdots,p$ ，则称 $\mathbf{x}^*$为（**MOP**）的绝对最优解
  - 若不存在 $\mathbf{x} \in S$ ，使得 $f_k(\mathbf{x}) \le f_k(\mathbf{x}^*), k=1,\cdots,p$ ，且至少存在某个 $k, f_k(\mathbf{x}) < f_k(\mathbf{x}^*)$，则称 $\mathbf{x}^*$为（**MOP**）的**Pareto**最优解
  - 若不存在 $\mathbf{x} \in S$，使得 $f_k(\mathbf{x}) < f_k(\mathbf{x}^*), k=1,\cdots,p$，则称 $\mathbf{x}^*$ 为（**MOP**）的弱**Pareto**最优解
- （**MOP**）的所有绝对最优解，**Pareto**最优解，弱**Pareto**最优解的集合分别记作 S_a, S_p和 S_{wp}

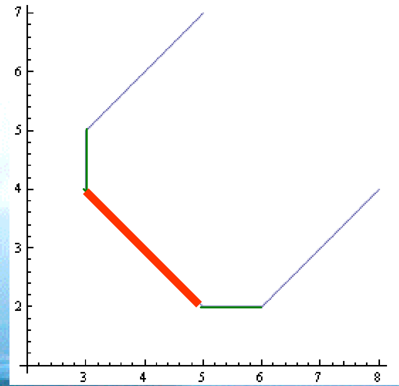
解的关系

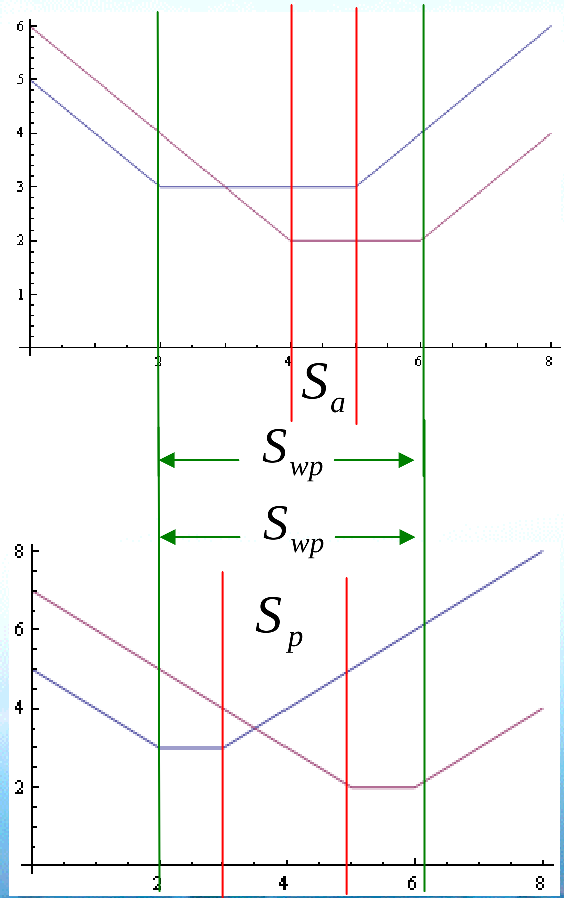
- 记 S^i 为单目标规划 $\min\limits_{\mathbf{x}\in S} \; f_i(\mathbf{x})$ 的最优解，则

$$S_a = \bigcap_{i=1}^{p} S^i$$

$$S^i \subseteq S_{wp}$$







解的关系

浙江大学 ZheJiang University

数学建模

- $S_a \subseteq S_p \subseteq S_{wp} \subseteq S$
  - 若 $\mathbf{x}^* \in S_a$，但 $\mathbf{x}^* \notin S_p$，则存在 $\bar{\mathbf{x}} \in S$ 和某个 k，使得 $f_k(\bar{\mathbf{x}}) < f_k(\mathbf{x}^*), f_l(\bar{\mathbf{x}}) \le f_l(\mathbf{x}^*), l \ne k$，与 $\mathbf{x}^* \in S_a$ 矛盾
  - 若 $\mathbf{x}^* \in S_p$ ，但 $\mathbf{x}^* \notin S_{wp}$，则存在 $\bar{\mathbf{x}} \in S$ ，使得 $f_k(\bar{\mathbf{x}}) < f_k(\mathbf{x}^*), k = 1, \cdots, p$，与 $\mathbf{x}^* \in S_p$ 矛盾
- 若 $S_a \ne \varnothing$，则 $S_a = S_p$
  - 若 $\mathbf{x}^* \in S_p$，但 $\mathbf{x}^* \notin S_a$，由于 $S_a \ne \varnothing$，存在 $\bar{\mathbf{x}} \in S_a$，使得 $f_k(\bar{\mathbf{x}}) \le f_k(\mathbf{x}^*), k = 1, \cdots, p$ ，由于 $\mathbf{x}^* \ne \bar{\mathbf{x}}$，存在某个 k, $f_k(\bar{\mathbf{x}}) \ne f_k(\mathbf{x}^*)$，$f_k(\bar{\mathbf{x}}) < f_k(\mathbf{x}^*)$，与 $\mathbf{x}^* \in S_p$ 矛盾

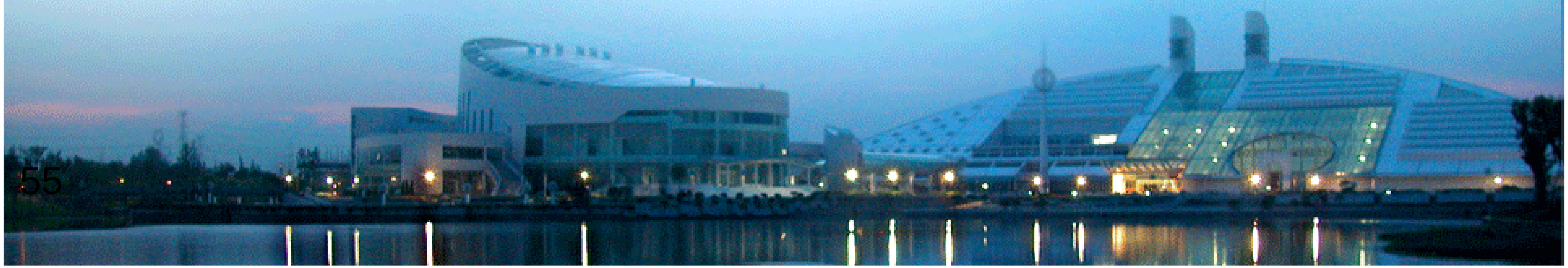
多目标问题解法

数学建模

- 求(MOP)所有的Pareto最优解或弱Pareto最优解
- 加权法
  - 令 $\Lambda = \{\boldsymbol{\lambda} \mid \boldsymbol{\lambda} > \mathbf{0}, \sum_{k=1}^{p} \lambda_k = 1\}$
  - 线性加权和法 $(SP_{\boldsymbol{\lambda}})$ $\min_{\mathbf{x}\in S} \sum_{k=1}^{p} \lambda_k f_k(\mathbf{x})$
  - 极小化极大法 $(P_{\boldsymbol{\lambda}})$ $\min_{\mathbf{x}\in S} \max_{1\le k\le p} \lambda_k f_k(\mathbf{x})$
  - 对任意 $\boldsymbol{\lambda} \in \Lambda, (SP_{\boldsymbol{\lambda}})$的最优解必是（MOP）的Pareto最优解，$(P_{\boldsymbol{\lambda}})$的最优解必是（MOP）的弱Pareto最优解

多目标问题解法

- 分层排序法
  - 将目标按重要程度排序，在前一个目标的最优解集中，寻找后一个目标的最优解集，并把最后一个目标的最优解作为（**MOP**）的解
  - 分层排序法得到的解必为（**MOP**）的**Pareto**最优解
- 带宽容值的分层排序法



多目标问题解法

- 主要目标法
  - 确定一个目标函数，如 $f_1(x)$，为主要目标，对其余 $p-1$ 个目标函数 $f_k(x)$，选定一定的界限值 $u_k, k=2,\cdots,p$，求解单目标规划

$$
(SP)\quad
\begin{aligned}
\min\quad & f_1(\mathbf{x}) \\
s.t.\quad & f_k(\mathbf{x}) \le u_k, k=2,\cdots,p, \\
& \mathbf{x} \in S
\end{aligned}
$$

  - (SP) 的最优解都是（**MOP**）的弱**Pareto**最优解

浙江大学
ZheJiang University

运筹与统计

赛程编制

赛程编制问题

- **2018世界杯南美赛区预选赛**
  - **10个成员国，4.5个决赛阶段名额**
  - 双循环主客场制，**9**阶段**18**轮。两轮为一个阶段，每阶段跨时一周，不同阶段相隔一月或数月
- **2002-2014世界杯南美赛区预选赛赛程**

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
ARG	CHI	VEN	BOL	COL	ECU	BRA	PAR	PER	URU
BOL	URU	COL	ARG	VEN	CHI	PAR	ECU	BRA	PER
BRA	COL	ECU	PER	URU	PAR	ARG	CHI	BOL	VEN
CHI	ARG	PER	URU	PAR	BOL	VEN	BRA	COL	ECU
COL	BRA	BOL	VEN	ARG	PER	ECU	URU	CHI	PAR
ECU	VEN	BRA	PAR	PER	ARG	COL	BOL	URU	CHI
PAR	PER	URU	ECU	CHI	BRA	BOL	ARG	VEN	COL
PER	PAR	CHI	BRA	ECU	COL	URU	VEN	ARG	BOL
URU	BOL	PAR	CHI	BRA	VEN	PER	COL	ECU	ARG
VEN	ECU	ARG	COL	BOL	URU	CHI	PER	PAR	BRA

- CONMEBOL
- FIFA WORLD CUP RUSSIA 2018

	Argentina 阿根廷
	Bolivia 玻利维亚
	Brazil 巴西
	Chile 智利
	Colombia 哥伦比亚
	Ecuador 厄瓜多尔
	Paraguay 巴拉圭
	Peru 秘鲁
	Uruguay 乌拉圭
	Venezuela 委内瑞拉

58

赛程特点

- **2002-2014世界杯南美赛区预选赛赛程特点**
  - 任意两队在前后两个半程各交手一次，两场比赛的主客场互换
    - 镜像双循环 1~10, 2~11, ……， 9~18
  - 不存在多于两场的连续主场与客场
  - 任一队不连续对阵巴西与阿根廷
- 赛程缺点
  - 存在同一阶段内两场比赛均为主场或客场的情况，且各队出现上述情况的次数不均衡
  - 同一阶段内各队先主后客和先客后主的次数不均衡
  - 赛程编制原理不透明，关键比赛存在争议

最后一轮：阿根廷——乌拉圭

	2002-2014		
	主主，客客	主客	客主
ARG	0	9	0
BOL	4	2	3
BRA	0	0	9
CHI	2	1	6
COL	2	6	1
ECU	2	4	3
PAR	2	3	4
PER	2	6	1
URU	2	4	3
VEN	2	1	6

赛程编制新举措

浙江大学 ZheJiang University
数学建模

- **2018世界杯新举措**
  - 各成员国提交候选方案，南美洲足联投票决定最终赛程模板
  - 赛程模板中各队用编号代替，抽签决定编号与球队对应关系（种子队与非种子队分别抽签）
  - **Durán**团队为智利足联编制赛程已逾十年，他们设计的方案为智利足联所采纳，并最终在投票中胜出

Guillermo Durán
Professor of Department of Mathematics and Calculus Institute Faculty of Exact and Natural Sciences University of Buenos Aires

Alarcón F, Durán G, Guajardo M. Referee assignment in the Chilean football league using integer programming and patterns. *International Transactions in Operational Research*, 21: 415-438, 2014.

Bonomo F, Cardemil A, Durán G, et al. An application of the traveling tournament problem: The Argentine volleyball league. *Interfaces*, 42: 245-259, 2012.

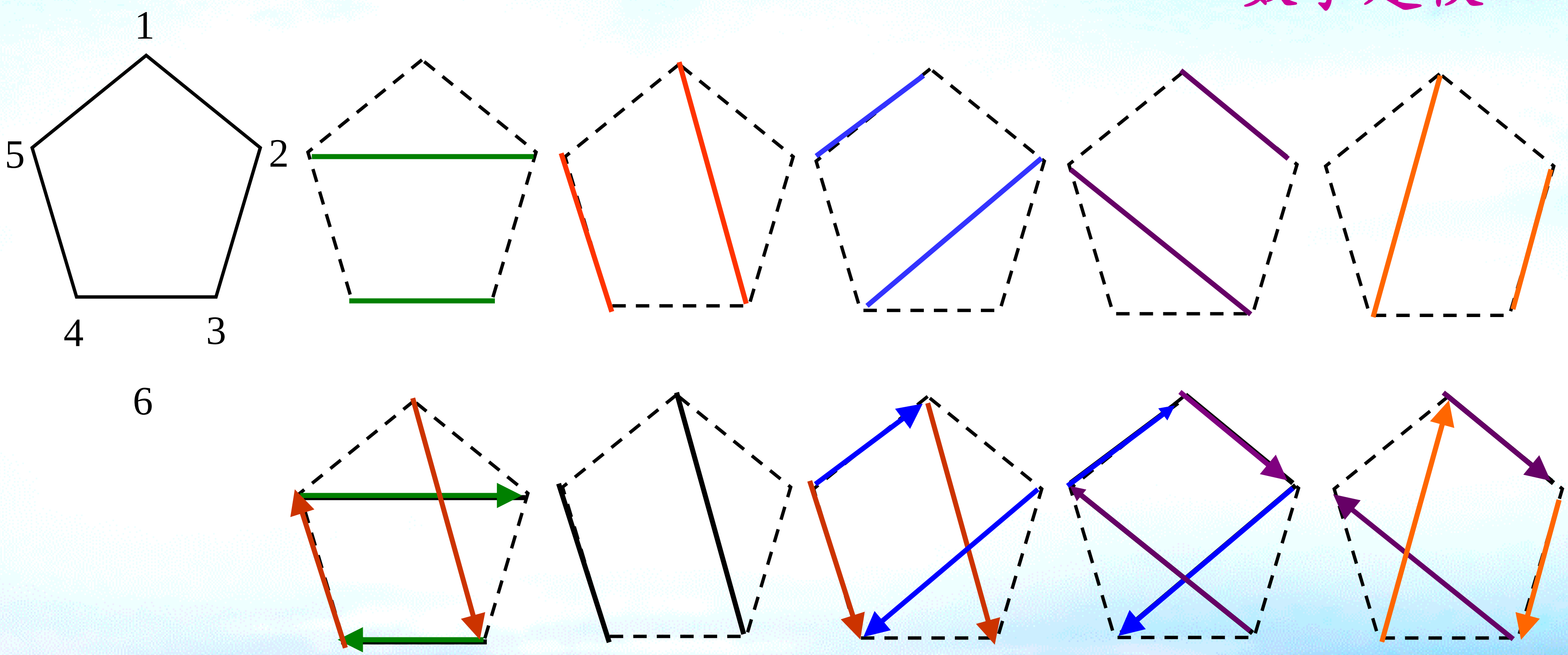
Durán G, Guajardo M, Wolf-Yadlin R. Operations research techniques for scheduling Chile's second division soccer league. *Interfaces*, 42: 273-285, 2012.

镜像赛程

- n 支队伍的单循环赛程，全程所有队伍总**break**数至少为 $n-2$
  - 用形如 **HAH…HA**，长度为 $n-1$（奇数）的字符串表示每支队伍的主客场安排，称为模式
  - 任何两支队伍的模式互不相同
  - 只有**HAHA…HAH** 和 **AHAH…AHA** 两种模式没有**break**，其它模式的**break**数至少为 1
- n 支队伍的镜像双循环赛程，全程所有队伍总**break**数至少为 $3n-6$
  - 若半程没有**break**，则全程也没有**break**，这样的队伍至多有两支
  - 若半程只有一个**break**，由于模式字符串长度为奇数，在前后半程之间有一个**break**
  - 若半程有至少两个**break**，全程**break**数至少为 4
  - 总**break**数至少为 $3(n-2)=3n-6$

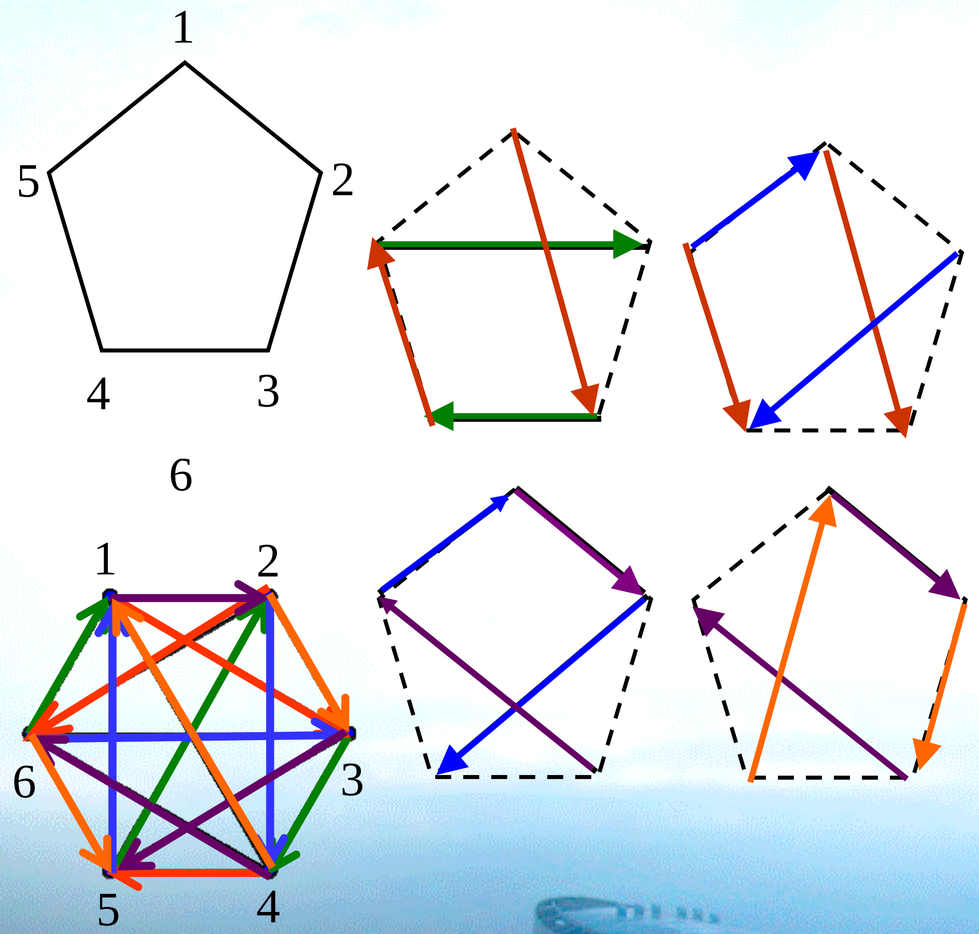
	1	**2**	**3**	**…**	**9**	**10**	**11**	**12**	**…**	**18**	
镜像（**mirror**）	**1**	**2**	**3**	**…**	**9**	**1**	**2**	**3**	**…**	**9**	意大利

单循环赛程



单循环赛程

数学建模



	1	2	3	4	5
1	−6	+3	−5	+2	−4
2	−5	+6	+4	−1	+3
3	+4	−1	−6	+5	−2
4	−3	+5	−2	+6	+1
5	+2	−4	+1	−3	−6
6	+1	−2	+3	−4	+5

镜像赛程

浙江大学 ZheJiang University 数学建模

- 根据世界杯南美赛区预选赛的特点，不必考虑连续两场比赛之间的break，只需考虑同一阶段两场比赛之间的double-round break
- 10支队的镜像赛程的double-round break数至少为16　　如何证明？
  - 若半程没有break，则全程也没有break，这样的队伍至多有两支。其他队伍半程至少有1个break，全程至少有2个double-round break
    - 前后半程之间若有break，必为double-round break
    - 若前半程的break不为double-round，后半程的break必为double-round

	1	2	3	…	9	10	11	12	…	17	18	
镜像（mirror）	1	2	3	…	9	1	2	3	…	8	9	意、德
法制（French）	1	2	3	…	9	2	3	4	…	9	1	法、俄
英制（English）	1	2	3	…	9	9	1	2	…	7	8	奥
逆向（Inverted）	1	2	3	…	9	9	8	7	…	2	1	瑞士

整数规划

- 决策变量

$$x_{ijk}=\begin{cases}1 & \text{第}k\text{轮队}i\text{在主场与队}j\text{比赛,}\\0 & \text{其他,}\end{cases}\qquad i,j=1,\cdots,10,k=1,\cdots 18$$

- 约束条件
  - 每轮各队恰有一场比赛

$$\sum_{i=1}^{10}\left(x_{ijk}+x_{jik}\right)=1,\quad j=1,\cdots,10,k=1,\cdots,18$$

  - 任意两队在前后半程各交手一次

$$\sum_{k=1}^{9}\left(x_{ijk}+x_{jik}\right)=1,\ i,j=1,\cdots,10\qquad \sum_{k=10}^{18}\left(x_{ijk}+x_{jik}\right)=1,\ i,j=1,\cdots,10$$

  - 任意两队之间的两场比赛中每队均有一个主场

$$\sum_{k=1}^{18}x_{ijk}=1,\qquad i,j=1,\cdots,10,i\neq j$$

65

整数规划

- 约束条件
  - 法制规则

$$x_{i,j,1} = x_{j,i,18}, x_{i,j,k} = x_{j,i,k+8}, k = 2,\cdots,9, i, j = 1,\cdots,10$$

  - 任一队不连续与种子队（用 I_s 表示）对阵

$$\sum_{j\in I_s}\left(x_{ijk} + x_{jik} + x_{i,j,k+1} + x_{j,i,k+1}\right) \le 1,\ i \in I \setminus I_s, k = 1,\cdots,17$$

  - 各支队伍各阶段先主后客（先客后主）的次数尽可能均衡
  - 同一阶段出现两个客场的次数尽可能少

66

整数规划

浙江大学 ZheJiang University

数学建模

- （辅助）决策变量

$$y_{il}=\begin{cases}1 & \text{第} l \text{阶段队} i \text{两场比赛为先主后客}\\ 0 & \text{其他}\end{cases} \qquad i=1,\cdots,10,\ l=1,\cdots,9$$

- 两组决策变量之间的联系

$y_{il}=1$

$\Updownarrow$

队 i 在第 $2l-1$ 轮为主场作战，第 $2l$ 轮为主场作战

$\Updownarrow$

存在 j_1，使得 $x_{i,j_1,2l-1}=1$，
存在 j_2，使得 $x_{j_2,i,2l}=1$

$\Updownarrow$

$$\sum_{j=1}^{10}x_{i,j,2l-1}=1,\ \sum_{j=1}^{10}x_{j,i,2l}=1$$

$$\sum_{j=1}^{10}\left(x_{i,j,2l-1}+x_{j,i,2l}\right)\le 1+y_{il},\quad i=1,\cdots,10,l=1,\cdots,9$$

$$y_{il}\le\sum_{j=1}^{10}x_{i,j,2l-1},\quad i=1,\cdots,10,l=1,\cdots,9$$

$$y_{il}\le\sum_{j=1}^{10}x_{j,i,2l},\quad i=1,\cdots,10,l=1,\cdots,9$$

$$4\le\sum_{l=1}^{9}y_{il}\le 5,\quad i=1,\cdots,10$$

67

浙江大学 ZheJiang University

数学建模

整数规划

- （辅助）决策变量

$$w_{il}=\begin{cases}1 & \text{第}\,l\,\text{阶段队}\,i\,\text{两场比赛均为客场}\\ 0 & \text{其他}\end{cases}\qquad i=1,\cdots,10,\ l=1,\cdots,9$$

- 两组决策变量之间的联系

$$w_{il}=1$$

$$\Updownarrow$$

队 i 在第 $2l-1$ 轮和第 $2l$ 轮均为客场作战

$$\Updownarrow$$

存在 j_1，使得 $x_{j_1,i,2l-1}=1$，
存在 j_2，使得 $x_{j_2,i,2l}=1$

$$\sum_{j=1}^{10}\left(x_{j,i,2l-1}+x_{j,i,2l}\right)\le 1+w_{il},\quad i=1,\cdots,10,l=1,\cdots,9$$

$$w_{il}\le\sum_{j=1}^{10}x_{j,i,2l-1},\quad i=1,\cdots,10,l=1,\cdots,9$$

$$w_{il}\le\sum_{j=1}^{10}x_{j,i,2l},\quad i=1,\cdots,10,l=1,\cdots,9$$

- 目标函数：$\min\sum_{i=1}^{10}\sum_{l=1}^{9}w_{il}$

68

![浙江大学 ZheJiang University]

数学建模

最终赛程

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
ARG	ECU	PAR	BRA	COL	CHI	BOL	URU	VEN	PER
BOL	URU	ECU	VEN	PAR	COL	ARG	PER	CHI	BRA
BRA	CHI	VEN	ARG	PER	URU	PAR	ECU	COL	BOL
CHI	BRA	PER	COL	URU	ARG	VEN	PAR	BOL	ECU
COL	PER	URU	CHI	ARG	BOL	ECU	VEN	BRA	PAR
ECU	ARG	BOL	URU	VEN	PAR	COL	BRA	PER	CHI
PAR	VEN	ARG	PER	BOL	ECU	BRA	CHI	URU	COL
PER	COL	CHI	PAR	BRA	VEN	URU	BOL	ECU	ARG
URU	BOL	COL	ECU	CHI	BRA	PER	ARG	PAR	VEN
VEN	PAR	BRA	BOL	ECU	PER	CHI	COL	ARG	URU

	2018		
	主主,客客	主客	客主
ARG	0	5	4
BOL	0	5	4
BRA	0	4	5
CHI	0	5	4
COL	0	5	4
ECU	0	4	5
PAR	0	4	5
PER	0	4	5
URU	0	4	5
VEN	0	5	4

排名										
积分	41	31	28	27	26	26	24	20	14	12
净胜球	30	12	3	2	1	-1	-6	-3	-22	-16

0-1变量

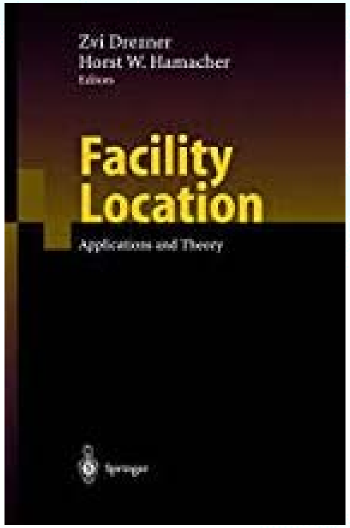
浙江大学 ZheJiang University 数学建模

- 仅当**0-1**变量 $y=1$时，n 个**0-1**变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中的任一个才能取值 1
  - $\sum_{j=1}^{n} x_j \le ny$
- n 个**0-1**变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中有且仅有一个取值 1
  - $\sum_{j=1}^{n} x_j = 1$ ，且取值为1的那个变量的足标为 $\sum_{j=1}^{n} jx_j$
- 整变量 $0 \le y \le a$ 是否取非零值
  - **0-1**变量 w 满足 $w \le y \le aw$
- 两个整变量 y,z，当 $y>z$ 时， **0-1**变量 $w=1$
  - $w=1 \Leftrightarrow y \ge z+1, w=0 \Leftrightarrow y \le z$
  - $(1+M)W - M \le y-z \le Mw$

设施选址

数学建模

- 设施选址（**facility location**）
  - 现有 n 个居民小区需提供某项服务，有 m 处地点可用于开设服务点。在地点 i 开设服务点所需开设费用为 $f_i, i=1,\cdots,m$ 。设置在地点 i 的服务点为小区 j 提供服务所需的运营费用为 $c_{ij}, i=1,\cdots,m, j=1,\cdots,n$ 。现需选择若干地点开设服务点，并确定每个服务点的服务对象，使每个小区至少有一个服务点为其提供服务，并且总费用最小



- 问题分析　　　　y_i　　　　x_{ij}
  - 决策变量：是否开设、服务对象
  - 约束条件：小区全覆盖、先开设再服务

用对、用好、用活**0-1**变量

Zvi, D, Hamacher, HW (eds.), *Facility Location: Applications and Theory*. Springer, 2001.

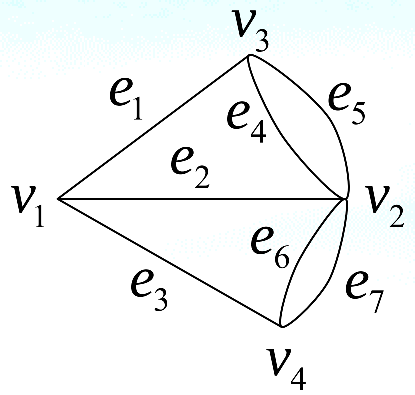
浙江大学 ZheJiang University

运筹与统计

图的基本概念

图

- 图（**graph**）：有序二元组 $G=(V,E)$
  - V 为顶点集，V 中元素称为顶点（**vertex**）
  - E 为边集，E 中元素称为边（**edge**），E 中每条边 e 与 V 中两个顶点 u,v 关联（**incident**）
    - 若 u,v 有序，则称 G 为有向图（**digraph**），有向图中的边也称作弧（**arc**），u 为 e 的起点，v 为 e 的终点
    - 若 u,v 无序，则称 G 为无向图，u,v 称为 e 的端点
- 图可以用以点表示顶点，以曲线段表示边的图形来表示，但图与上述表示中点和曲线段在图形中的相对位置无关



$$V=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$$

$$E=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6,e_7\}$$

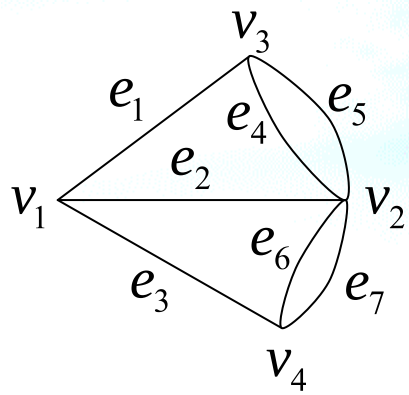
$$e_1=v_1v_3,\ e_2=v_1v_2,\ e_3=v_1v_4,$$

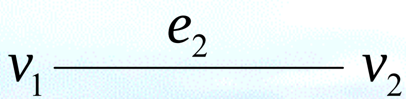
$$e_4=v_2v_3,\ e_5=v_2v_3,$$

$$e_6=v_2v_4,\ e_6=v_2v_4$$

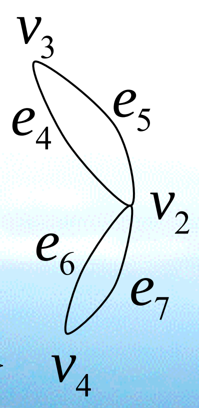
子图

- 图 $G'=(V',E')$ 称为图 $G=(V,E)$的子图（**subgraph**），若 $V'\subseteq V$, $E'\subseteq E$ 且 G 中边的关联关系在 G' 中保持不变
  - 生成子图：$V'=V$
  - 导出子图：$G(V')$，$G\backslash V'$，$G(E')$，$G\backslash E'$

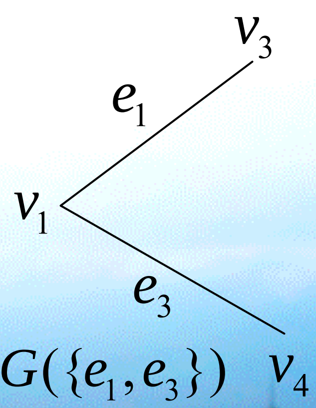




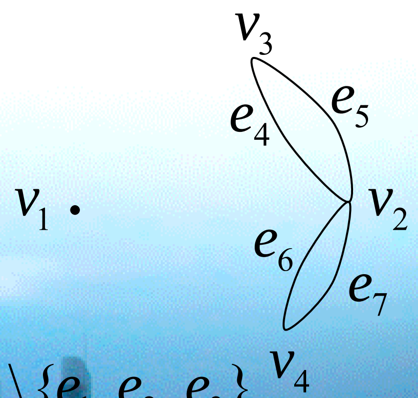
$G(\{v_1,v_2\})$



$G\backslash\{v_1\}$



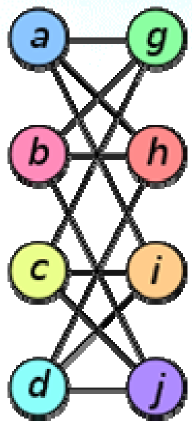
$G(\{e_1,e_3\})$

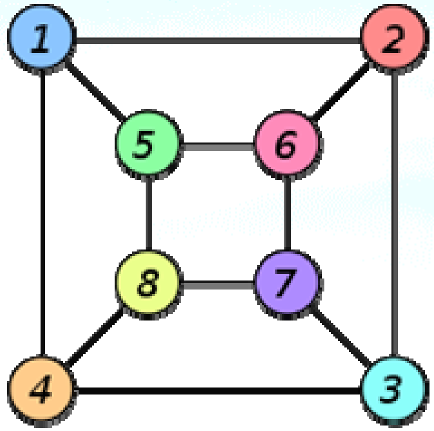


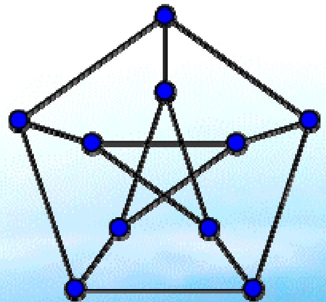
$G\backslash\{e_1,e_2,e_3\}$

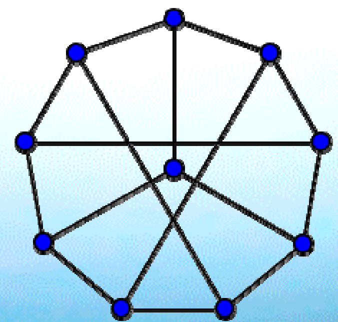
图同构

- 称图 $G=(V,E)$ 与图 $G'=(V',E')$ **同构**（**isomorphic**），若存在双射 $\sigma: V \to V'$，使得 G 中两顶点 u,v 相邻（**adjacent**）当且仅当 G' 中两顶点 $\sigma(u),\sigma(v)$ 相邻
- **图同构问题**（**Graph Isomorphism, GI**）：给定图 G 与图 G'，判断 G 与 G' 是否同构
  - 图同构问题是复杂性迄今未决的重要 $\mathcal{NP}$ 问题之一





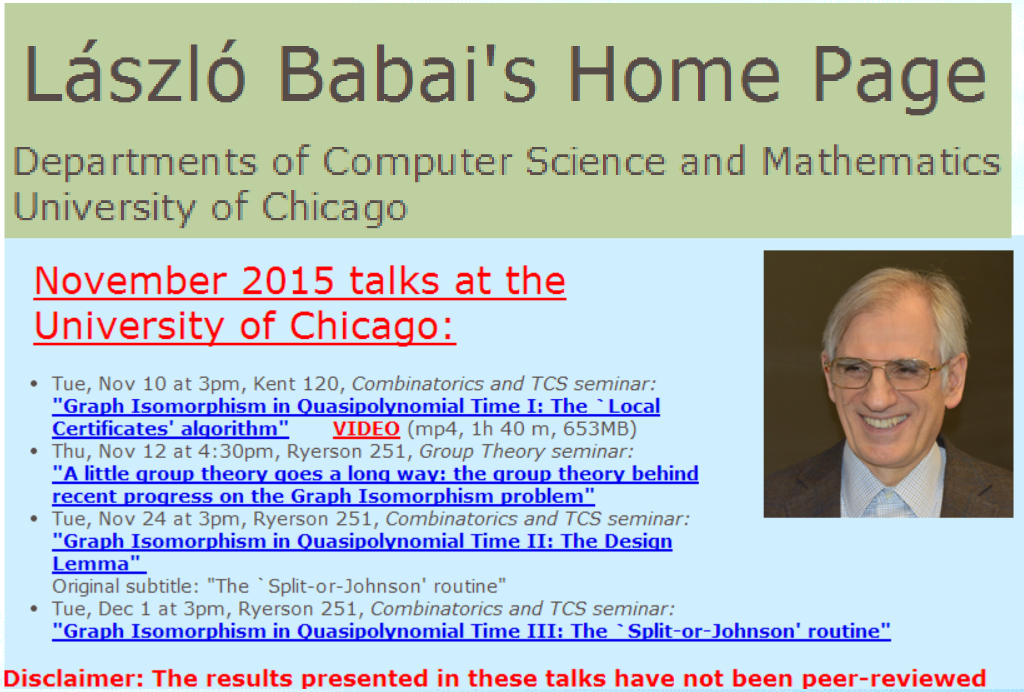




图同构

浙江大学
ZheJiang University
数学建模

- **1983年， Babai和Luks** 给出了图同构问题时间复杂性为 $(2^{\sqrt{n\log n}})$ 的算法，其中 为图的顶点数
- **2015年，Babai**宣称给出了图同构问题时间复杂性为 $(2^{(\log n)^c})$ 的拟多项式时间（**quasi-polynomial**）算法

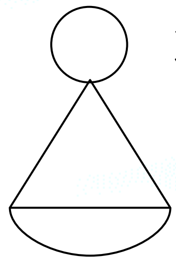


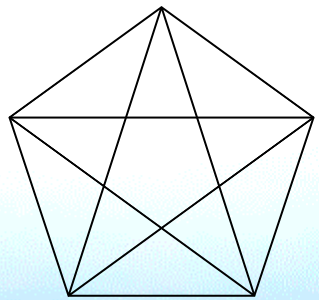
http://people.cs.uchicago.edu/~laci/

Babai L, Luks E M, Canonical labeling of graphs, *Proceedings of the 15th Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, 171-183, 1983.

简单图

- 两端点相同的边称为环（**loop**），两端点分别相同的两条边称为平行边（**parallel edges**）
- 既没有环，也没有平行边的图称为简单图（**simple graph**）
  - 若 $|V|=n$，则 $|E|\le\frac{n(n-1)}{2}$
- 任何两个不同顶点之间都有边相连的简单图称为完全图（**complete graph**）
  - G 的顶点子集 $V'\subseteq V$ 称为团（**clique**），若其导出子图 $G(V')$ 是完全图





完全图 K_5

路

数学建模

- 顶点和边交替出现的序列 $W = v_{i_0} e_{i_1} v_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_k} v_{i_k}$ 称为连接顶点 v_{i_0} 和 v_{i_k} 的长度为 k 的途径（**walk**）
  - 若图为简单图，则可省略途径中边的符号
  - 若图为有向图，所有边的方向均为自 v_{i_j} 指向 $v_{i_{j+1}}$，W 为从 v_{i_0} 到 v_{i_k} 的有向途径
- 经过边互不相同的途径称为迹（**trail**），经过顶点互不相同的迹称为路（**path**），起点和终点相同的路称为圈（**cycle**）
- 若无向图中两顶点之间有途径相连，则必有迹相连；若无向图中两顶点之间有迹相连，则必有路相连
- 设 $u,v \in V$，G 中所有从 u 到 v 的路的最短长度称为从 u 到 v 的距离（**distance**），记为 $d_G(u,v)$。长度等于距离的路称为最短路（**shortest path**）

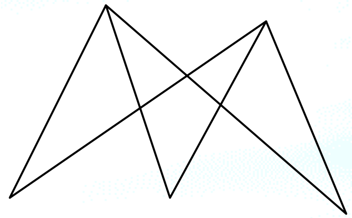
连通

- 若图中顶点 u,v 之间有路相连，则称 u,v 连通（**connected**）
  - 连通是图中顶点之间的一种等价关系，连通关系将 V 划分为 ω 个等价类 $V_1,\cdots,V_\omega$
  - $G(V_i), i=1,\cdots,\omega$ 称为 G 的连通分枝（**connect component**）
  - 连通分枝数为 1 的图称为连通图（**connect graph**）
- 有向图 G 称为强连通（**strongly connected**）的，若对任意顶点对 u,v，图中既存在从 u 到 v 的有向路，又存在从 v 到 u 的有向路

二部图

数学建模

- 若图的顶点集可以划分为两个非空集合 X 和 Y，使得 X,Y 中任何两顶点之间无边相连，则称该图为二部图（**bipartite graph**），记为 $G=(X\cup Y,E)$
  - X 中所有顶点与 Y 中所有顶点都有边相连的二部图称为完全二部图

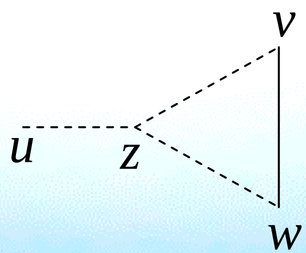


完全二部图 $K_{2,3}$

- G 是二部图当且仅当 G 中不存在奇圈
  - 若 G 是二部图 $(X\cup Y,E)$，则长度为奇数的路的起点与终点分别在 X 与 Y 中，G 中不存在奇圈
  - 若 G 中不存在奇圈，任取 $u\in V$，令

    $$X=\{v\in V\mid d_G(u,v)\text{为奇数}\},\ Y=\{v\in V\mid d_G(u,v)\text{为偶数}\}$$

    若存在 $v,w\in X$，$e=vw\in E$，记 P_v 是从 u 到 v 的最短路，P_w 是从 u 到 w 的最短路。z 是 P_v 与 P_w 的最后一个公共端点，P_v,P_w 上自 z 到 v,w 的部分分别记为 P_v',P_w'，则 $P_v'eP_w'$ 为一个奇圈



奇数+奇数 $-2k+1$

度

数学建模

- 与顶点 v 关联的边的数目称为 v 的度（**degree**），记为 $\deg_G(v)$
  - $\Delta(G)$ 和 $\delta(G)$ 分别表示图的最大度和最小度
  - 度为 0的点称为孤立点（**isolated vertex**）
  - 所有顶点度相等的图称为正则图（**regular graph**）
  - （**Handshaking**引理）$\sum_{v\in V}\deg_G(v)=2|E|$
  - 无向图中度为奇数的顶点总有偶数个
- 有向图中以 v 为起点的弧的数目称为 v 的出度（**out-degree**），以 v 为终点的弧的数目称为 v 的入度（**in-degree**），分别记为 $\deg_G^+(v)$ 和 $\deg_G^-(v)$
  - $\sum_{v\in V}\deg_G^+(v)=\sum_{v\in V}\deg_G^-(v)=|E|$

图与矩阵

数学建模

- 设 $|V|=n, |E|=m$
  - 矩阵 $\mathbf{M}=(m_{ij})_{n\times m}$ 称为图的关联矩阵（**incidence matrix**），其中

$$(\text{有向图})\quad m_{ij}=\begin{cases}1 & e_j\text{以}v_i\text{为起点}\\ -1 & e_j\text{以}v_i\text{为终点}\\ 0 & \text{其它}\end{cases}\qquad (\text{无向图})\quad m_{ij}=\begin{cases}1 & e_j\text{以}v_i\text{为端点}\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

  - 矩阵 $\mathbf{A}=(\mu_{ij})_{n\times n}$ 称为图的邻接矩阵（**adjacency matrix**），其中 μ_{ij} 为（有向图）以 v_i 为起点，v_j 为终点的边的数目或（无向图）连接 v_i, v_j 的边的数目

图的应用

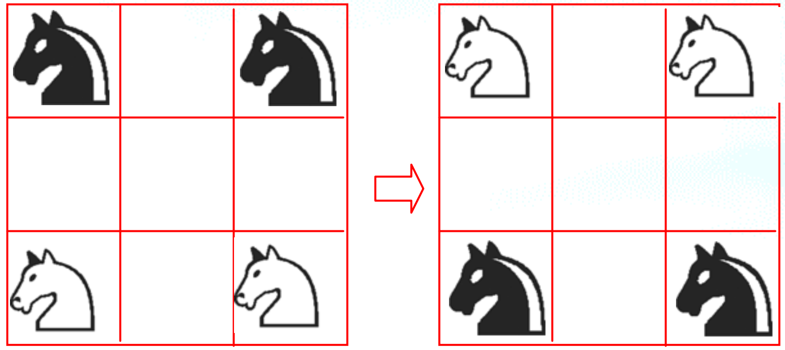
数学建模

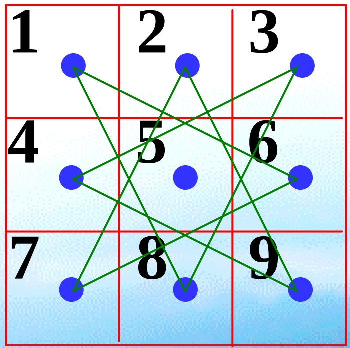
- 一群人中任两人要么互相认识，要么互相不认识，则总有两人认识的人数相同
  - 以每一人为一个顶点，两个顶点之间有边相连当且仅当相应的两人互相认识。每人认识的人数为顶点的度
  - 若顶点数为 n，且不存在两人认识的人数相同，则 n 个顶点的度为 $0,1,\cdots,n-1$
  - 度为$n-1$的顶点必与所有其他顶点有边相连，故不存在度为0的顶点　矛盾

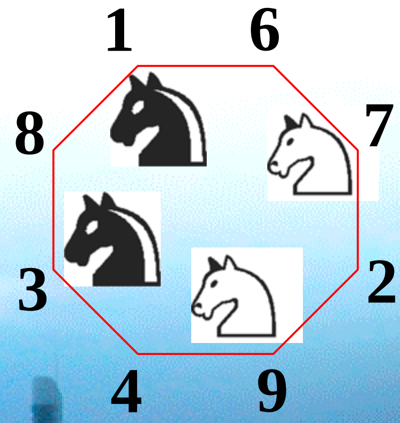
黑白易位

数学建模

- 一 3×3 方格棋盘，第一行左、右两个方格各置一匹黑马，第三行左、右两个方格各置一匹黑马，按国际象棋中马的走子规则，如何用最少的步数将黑马白马的位置互换
- 将每个格子作为图的一个顶点，对应两个格子的顶点之间有边相连当且仅当马能从一个跳到另一个








浙江大学
ZheJiang University
运筹与统计
环游

Hamiltion圈

浙江大学 ZheJiang University

数学建模

- 经过图的所有顶点恰好一次的圈称为 **Hamilton圈**（**Hamiltion cycle**）。存在**Hamilton**圈的图称为**Hamilton图**
- **Hamilton图问题（HC）**：判断图 G 是否为一**Hamilton**图

Hamilton图问题是图论中最重要的问题之一。图论中有很多判别**Hamilton**图的充分/必要条件和对不同类型特殊图是否为**Hamilton**图的讨论。在计算复杂性理论中重点关注**Hamilton**图判别算法的复杂性

William Rowan Hamilton

爱尔兰数学家

(1805-1865)

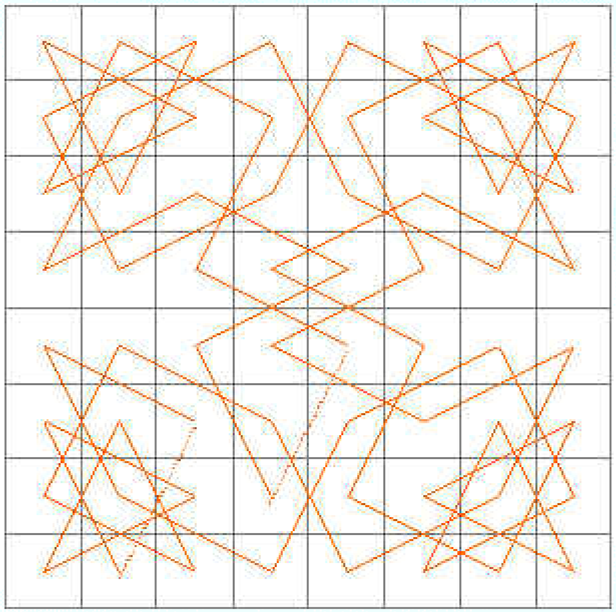
17

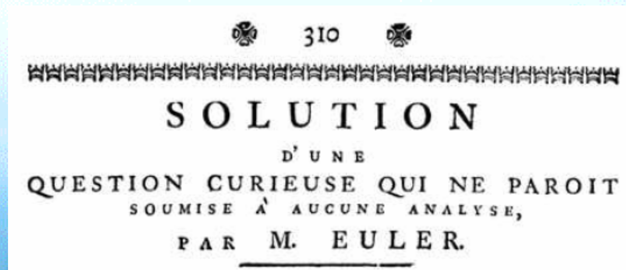
Knight's tour

数学建模

- 在 8×8 国际象棋棋盘上，马能否按其走子规则，从一个格子出发，经过其它格子恰好一次，最后回到起点
  - 构造“跳马图”，每一格子为图的一个顶点，两个格子之间有边相连当且仅当马可按走子规则从一个格子跳到另一个格子
- $m \times n\ (m \le n)$方格棋盘对应的“跳马图”为**Hamiltonian**图，除非
  - m, n 均为奇数
  - 或 $m = 1, 2, 4$
  - 或 $m = 3, n = 4, 6, 8$

Euler, L., Solution of a curious question which does not seem to have been subjected to any analysis, *Mémoires de l‘Academie Royale des Sciences et Belles Lettres*, 15, 310–337, 1759

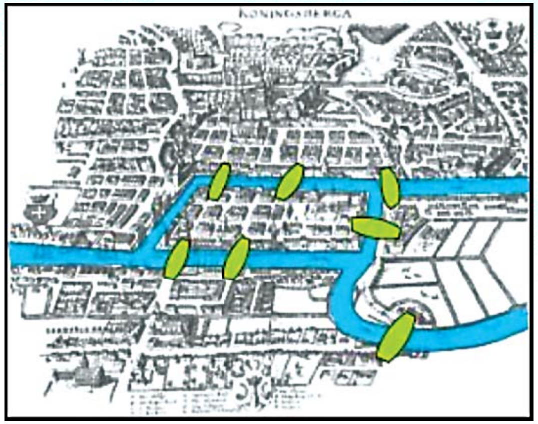



310

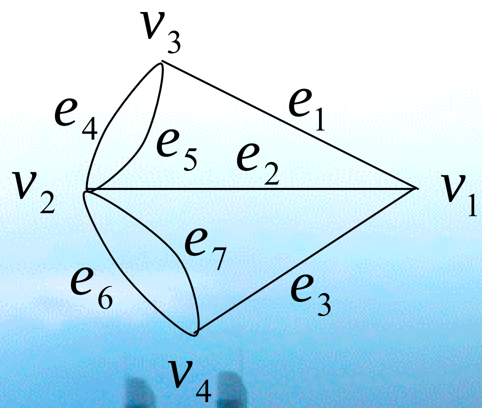
SOLUTION
D'UNE
QUESTION CURIEUSE QUI NE PAROIT
SOUMISE À AUCUNE ANALYSE,
PAR M. EULER.

19

七桥问题

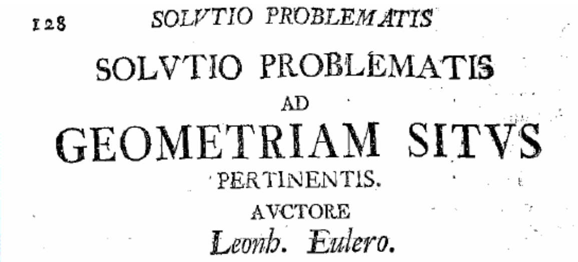


- 在**Konigsberg**城，有七座桥梁建在**Pregel**河上，是否有一条从城中某处出发，经过每座桥梁恰好一次，最后回到出发点的路线
- 以河流分割而成的城市区域为顶点，桥梁为边，边的端点为该桥梁连接的两片区域，七桥问题等价于由此得到的图中是否存在一条经过所有边的闭迹



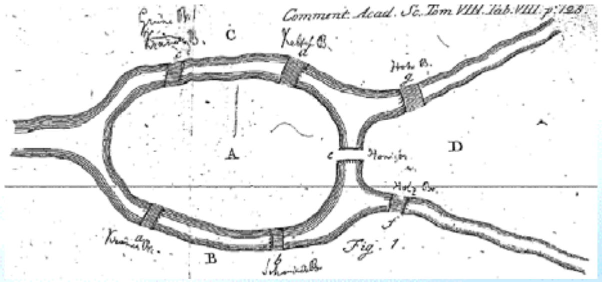
Euler图

- 称经过图的所有边恰好一次的闭迹为**Euler回路**，存在**Euler**回路的图为**Euler图**
- 一连通图是**Euler**图的充要条件是图中没有奇度顶点



128 SOLVTIO PROBLEMATIS

SOLVTIO PROBLEMATIS
AD
GEOMETRIAM SITVS
PERTINENTIS.
AVCTORE
Leonh. Eulero.



Leonhard Euler

(1707-1783)

瑞士数学家

Euler, L., *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*, 8, 128–140, 1741

1736年Euler对七桥问题的研究被认为是现代图论的起源

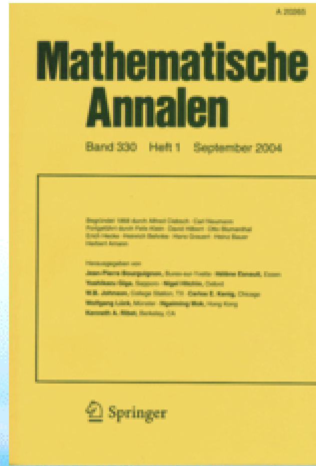
Euler回路

- **求Euler图** G **的一条Euler回路的算法**
  - 从任一顶点出发，找一条闭迹 C

    所有顶点的度为偶数
  - 考虑图 $G\setminus C$ ，若其边集非空，从某一个 C 经过的顶点出发找 $G\setminus C$ 的一条闭迹 C'；将 C 和 C' 合为一条闭迹，仍记为 C

    图是连通的　　$G\setminus C$ 所有顶点的度为偶数
  - 重复上步直至 G 的边均包含在 C 中

Carl Hierholzer
(1840 –1871)
德国数学家



Hierholzer, C., Wiener, C., Ueber die Möglichkeit, einen Linienzug ohne Wiederholung und ohne Unterbrechung zu umfahren, *Mathematische Annalen*, 6, 30-32, 1873

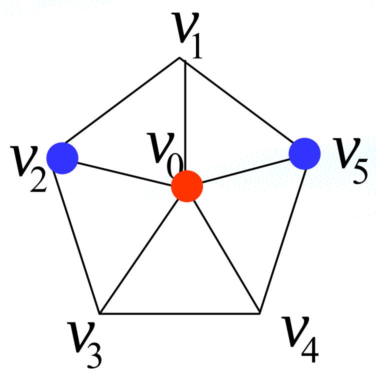
浙江大学
ZheJiang University

运筹与统计

覆盖与匹配

独立集与支配集

- V 的子集 S 称为 G 的独立集（**independent set**），若 S 中任何两个顶点在 G 中均不相邻。顶点数最多的独立集称为最大独立集
- V 的子集 S 称为 G 的支配集（**dominated set**），若任意 $V\setminus S$ 中顶点均与某个 S 中顶点关联。顶点数最少的支配集称为最小支配集
- 最大独立集与最小支配集问题都是$\mathcal{NP}$ –难的



$\{v_2, v_5\}$ 是最大独立集，也是支配集
$\{v_0\}$是最小支配集，也是独立集

独立集　支配集　顶点覆盖　团

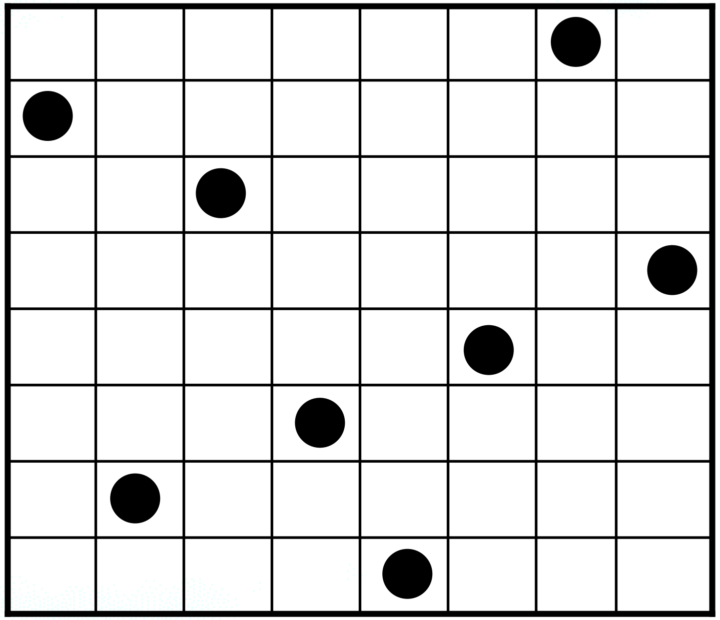
皇后问题

- 在 8×8 国际象棋棋盘上
  - 最多可放置几个皇后，使得任一皇后不会被其他皇后吃掉
  - 最少需放置几个皇后，使得任何一个格子上的棋子可被至少一个皇后吃掉
- 构造“皇后图”，每个格子为图的一个顶点，两个格子之间有边相连当且仅当位于一个格子中的皇后可吃掉另一个格子中的子

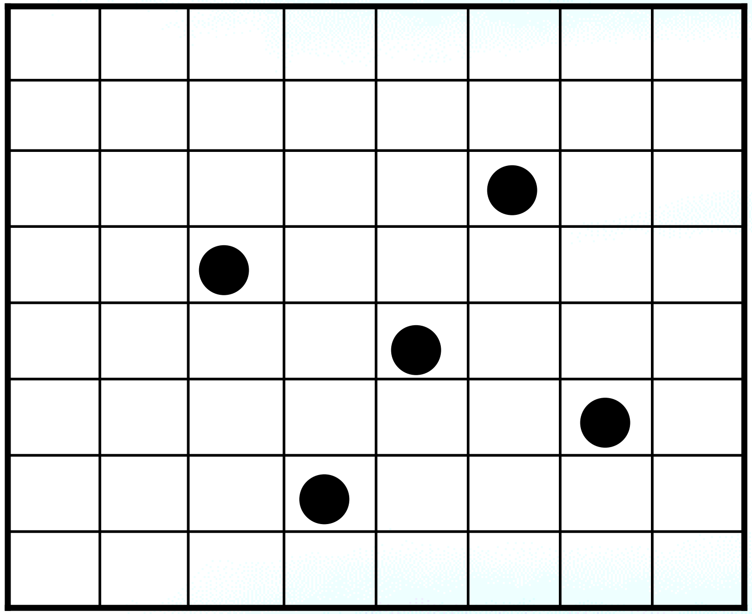
Karl Friedrich Gauss (1777-1855)

德国数学家

皇后问题



八皇后问题　最大独立集



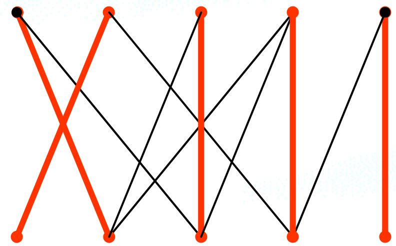
五皇后问题　最小支配集

匹配

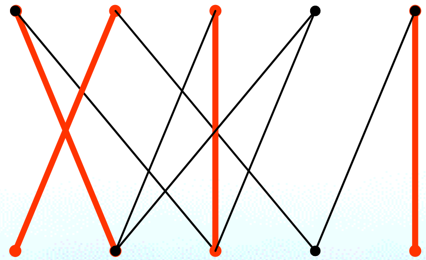
浙江大学 ZheJiang University

数学建模

- 图 $G=(V,E)$ 边集 E 的一个非空子集 M 称为 G 的一个匹配（**matching**），若 M 中任何两条边在 G 中均不相邻
- 若 G 中所有顶点都与匹配 M 中某条边关联，则称 M 为完美匹配（**perfect matching**）
- 图的最优匹配
  - 边数最多的匹配称为最大基数匹配
  - 赋权图中总权重最大的匹配称为最大权匹配
  - 赋权图中总权重最小的完美匹配称为最小权完美匹配



完美匹配



最大基数匹配

Hall定理

数学建模

- 设 $G=(X\cup Y,E)$ 为二部图，则 G 存在匹配 M，使得 X 中的任一个顶点均与 M 中某条边关联的充要条件是
$$|S|\le|N_G(S)|,\forall S\subseteq X,$$
这里 $N_G(S)$ 为 G 中所有与 S 相邻的顶点集

Hall定理	完美匹配存在性
König–Egerváry定理	**0-1**矩阵的项秩与覆盖
König定理	二部图的匹配与边覆盖
Menger定理	顶点互不相同的路
最大流最小割定理	网络流
Birkhoff–Von Neumann定理	双随机矩阵分解
Dilworth定理	偏序集中的链与反链

Philip Hall
（**1904**－**1982**）
英国数学家

Hall定理

浙江大学
ZheJiang University
数学建模

- **A round-robin tournament of $2n$ teams lasted for $2n-1$ days, as follows. On each day, every team played one game against another team, with one team winning and one team losing in each of the n games. Over the course of the tournament, each team played every other team exactly once. Can one necessarily choose one winning team from each day without choosing any team more than once?**
  - 任取m天，必有至少m支队在这m天中至少获胜**1**场
    - 任取m支队，若不合要求，其中必有一支在这m天的比赛中均失败，它的m个对手队即为所求
  - 构造二部图$G=(X\cup Y,E)$，其中X中顶点代表各天，Y中顶点代表各队，每队对应的顶点与该队获胜日期对应的顶点有边相连
  - G满足**Hall**定理条件，故存在关联X中所有顶点的匹配，该匹配所关联的Y中顶点即为所求的$2n-1$支队

William Lowell Putnam Mathematical Competition

2012B3

总分前**189**名该题得分

得分	人数	2分	4人
10分	44人	1分	21人
9分	2人	0分	48人
8分	3人	空白	61人

运筹与统计

着色

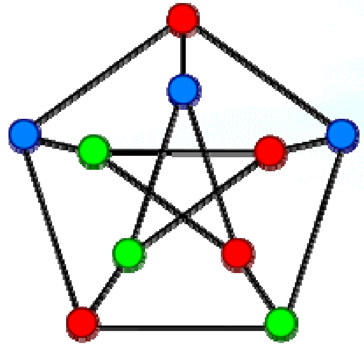
顶点着色

数学建模

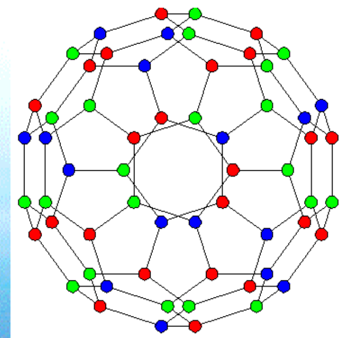
- 图 G 的顶点 k 着色是指将图 G 的每一个顶点用 k 种颜色之一着色，使得相邻的顶点不染同一种颜色
  - 图的顶点 k 着色等价于将图的顶点集划分为 k 个两两不相交的独立集之并
  - 图可顶点 k 着色的最小的 k 值称为图的色数（**chromatic number**），记为 $\chi(G)$
- 对任意简单图 $\chi(G) \le \Delta(G)+1$
  - 连通图 G 满足 $\chi(G) = \Delta(G)+1$ 当且仅当 G 为奇圈或完全图
- 图的顶点着色问题：给定图 G，求 $\chi(G)$
  - 存在最坏情况界为 $O\left(n\frac{(\log\log n)^2}{(\log n)^3}\right)$ 的多项式时间近似算法
  - 任意多项式时间近似算法的最坏情况界至少为 $n^{1-\varepsilon}$，除非 $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$

Brooks RL, On colouring the nodes of a network. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 37, 194–197, 1941
Halldórsson MM. A still better performance guarantee for approximate graph coloring. *Information Processing Letters*, 45, 19-23, 1993
Zuckerman D. Linear degree extractors and the inapproximability of max clique and chromatic number. *Theory of Computing*, 3, 103–128, 2007

$\chi(G) = 3$



Petersen 图



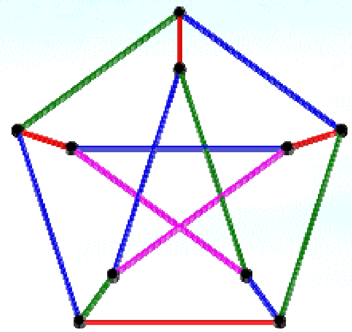
Buckyball图

边着色

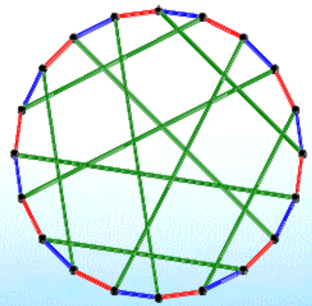
- 图 G 的边 k着色是指将图 G 的每一条边用 k 种颜色之一着色，使得相邻的边不染同一种颜色
  - 图的边 k着色等价于将图的边集划分为 k个两两不相交的匹配之并
  - 图可边 k 着色的最小的 k值称为图的边色数（**edge chromatic number**），记为 $\chi'(G)$
- 若 G 是非空简单图，则 $\Delta(G) \le \chi'(G) \le \Delta(G)+1$
  - 若 G 是二部图，则 $\chi'(G) = \Delta(G)$
- 图的边着色问题：给定图 G，求 $\chi'(G)$
  - 判断图 G 是否满足 $\chi'(G) = \Delta(G)$ 是$\mathcal{NP}$-完全的

Vizing VG, On an estimate of chromatic class of a P-graph. *Diskretn Analiz*, 3, 25–30, 1964

Holyer I. The NP-completeness of edge-coloring. *SIAM Journal on Computing*, 10, 718-720, 1981



$\chi'(G) = 4$



Desargues图

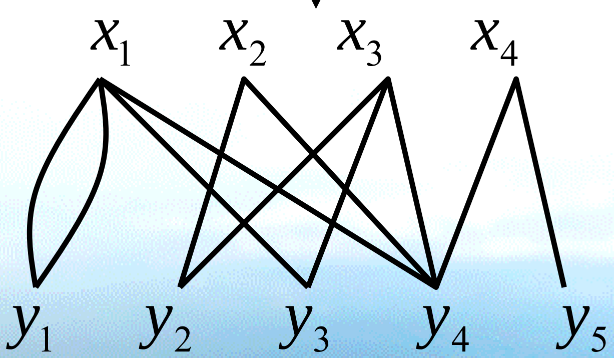
$\chi'(G) = 3$

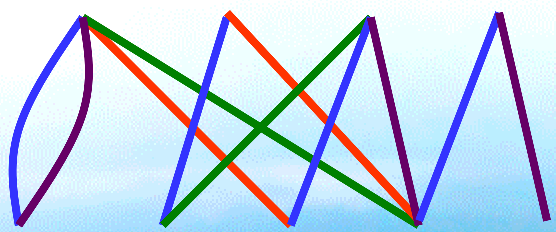
排课表问题

- 排课表问题（**timatabling problem**）
  - 有 m 位教师和 n 个班级，教师 i 每天为班级 j 授课 p_{ij} 个学时。如何安排一张课表，在同一时刻任一教师至多为一个班级授课，任一班级至多仅有一位教师授课，使用 k 间教室且每天课时数最少
- 构造有平行边的二部图 $G=(X\cup Y,E)$，其中 X 为教师集，Y 为班级集，X 中顶点 i 和 Y 中顶点 j 有 p_{ij} 条边相连
  - 排课表问题等价于 G 的边着色问题，每天最少课时数即为 $\chi'(G)$，着同一种颜色的边的数量的最大值即为所需的教室数
  - 设 G 是二部图，对任意的 $l\geq\Delta(G)$，G 中存在 l 个无公共边的匹配 $M_i, i=1,\cdots,l$，使得 $E=\bigcup_{i=1}^{p}M_i$，且 $\left\lfloor\frac{|E|}{l}\right\rfloor\leq|M_i|\leq\left\lceil\frac{|E|}{l}\right\rceil$, $i=1,\cdots,l$

排课表问题

$$\begin{array}{c|ccccc} & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 \\ \hline x_1 & & & & & \\ x_2 & & & & & \\ x_3 & & & & & \\ x_4 & & & & & \end{array}\quad \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$





课时 / 教师	1	2	3	4
x_1	y_1	y_1	y_3	y_4
x_2	y_2		y_4	
x_3	y_3	y_4		y_2
x_4	y_4	y_5		

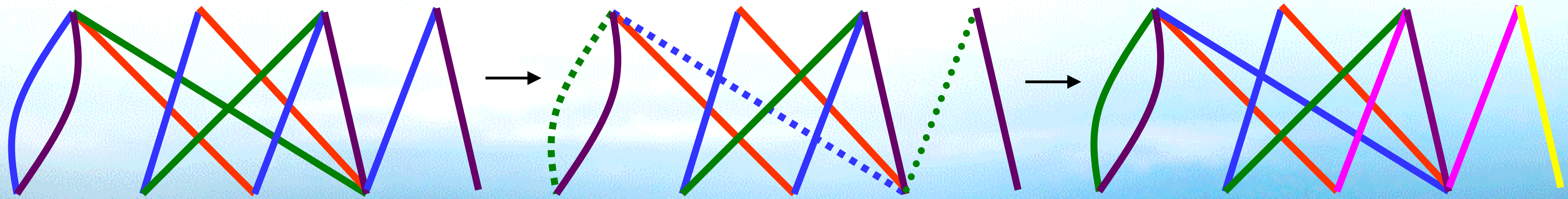
排课表问题

	1	2	3	4
x_1	y_4	y_1	y_3	y_1
x_2	y_2		y_4	
x_3	y_3	y_4		y_2
x_4		y_5		y_4

三间教室

	1	2	3	4	5	6
x_1	y_4	y_3	y_1		y_1	
x_2	y_2	y_4				
x_3			y_4	y_3	y_2	
x_4				y_4		y_5

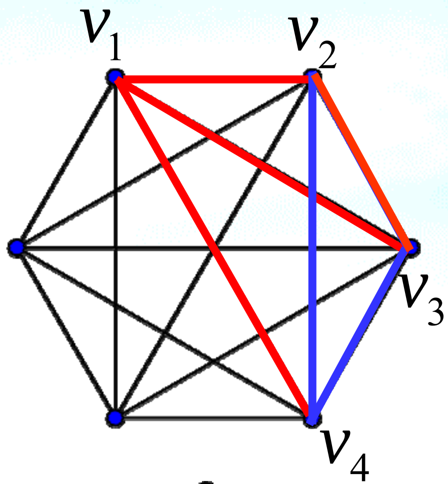
两间教室

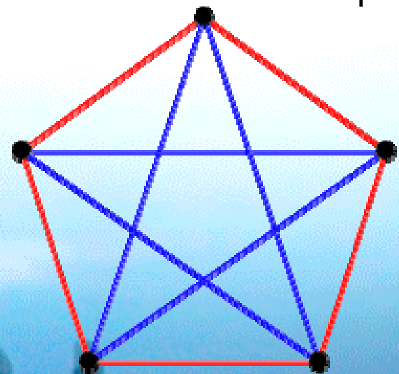


$H = G(V, M_1 \oplus M_2)$　　增广路

Ramsey数

- 用红、蓝两种颜色对完全图K_6的边进行着色，每条边着两种颜色中的一种，着色后的图中要么存在一个边全是红色的团K_3，要么存在一个边全为蓝色的团K_3
  - 任取K_6的一个顶点v_1，与它关联的 5条边中至少有三条着同一种颜色，不妨设为红色，其中三条边的另一端点分别为v_2, v_3, v_4
  - 若边v_2v_3, v_2v_4, v_3v_4均着蓝色，则它们组成一蓝色的K_3；若v_2v_3, v_2v_4, v_3v_4中有一条边着红色，不妨设为v_2v_3，则v_1, v_2, v_3组成一个红色的K_3
- 对K_5进行类似着色，存在一种着色方案，其中既无红色的K_3，也无蓝色的K_3





Ramsey数

浙江大学 ZheJiang University

数学建模

- 用红、蓝两种颜色对 K_n 的边进行着色，每条边着两种颜色中的一种。给定正整数 s,t，要求任一着色后的图中要么存在一个边全为红色的 K_s，要么存在一个边全为蓝色的 K_t。n 的最小值称为**Ramsey数**，记为 $r(s,t)$

Frank Plumpton Ramsey (1903 –1930)

英国数学家、哲学家、经济学家

$$r(3,3)=6$$

$$r(2,t)=t$$

Ramsey, F. P., On a problem of formal logic, *Proceedings London Mathematical Society, S2*-30, 264–286, 1930.

Ramsey数

$$r(s,t) \le r(s-1,t) + r(s,t-1)$$

$$r(3,4) = 9, r(3,5) = 14,$$

$$r(3,6) = 18, r(3,7) = 23,$$

$$r(3,8) = 28, r(3,9) = 36$$

$$r(4,4) = 18, r(4,5) = 25$$

$R(4,5) = 25$

Brendan D. McKay
DEPARTMENT OF COMPUTER SCIENCE
AUSTRALIAN NATIONAL UNIVERSITY
ACT 0200, AUSTRALIA
e-mail: bdm@cs.anu.edu.au

Stanisław P. Radziszowski
DEPARTMENT OF COMPUTER SCIENCE
ROCHESTER INSTITUTE OF TECHNOLOGY
ROCHESTER, NEW YORK 14623, USA
e-mail: spr@cs.rit.edu

ABSTRACT

The Ramsey number $R(4,5)$ is defined to be the least positive integer n such that every n-vertex graph contains either a clique of order 4 or an independent set of order 5. With the help of a long computation using novel techniques, we prove that $R(4,5) = 25$. © 1995 John Wiley & Sons, Inc.

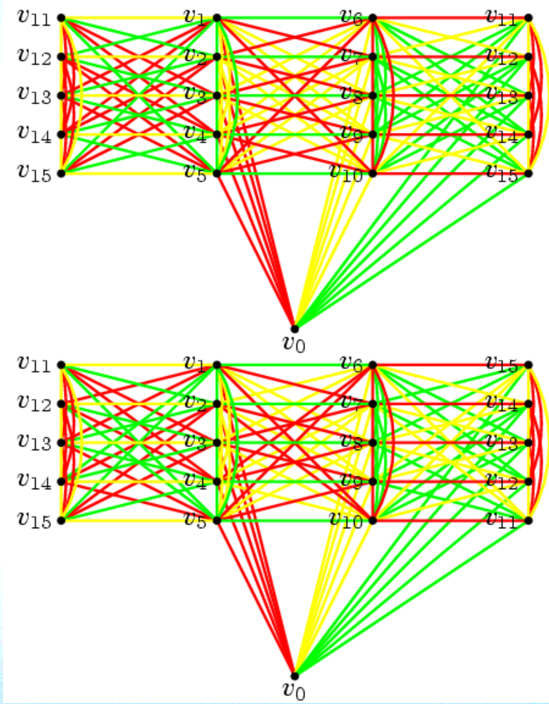
Journal of Graph Theory, 19, 309-322, 1995.

Erdös asks us to imagine an alien force, vastly more powerful than us, landing on Earth and demanding the value of $R(5,5)$ or they will destroy our planet. In that case, he claims, we should marshall all our computers and all our mathematicians and attempt to find the value. But suppose, instead, that they ask for $R(6,6)$. In that case, he believes, we should attempt to destroy the aliens.

——Spencer, J., *Ten Lectures on the Probabilistic Method*

Ramsey数

- （**IMO 1964**）17位科学家中每一位和其余16位通信，在他们的通信中所讨论的仅有三个问题，而任两位科学家通信时所讨论的是同一问题，证明至少有三位科学家通信时所讨论的是同一问题
  - 选定科学家 v_1，他和其它16位科学家中至少6位讨论的是同一问题
  - 若这6位科学家中的其中两位讨论的也是该问题，则这两位与 v_1 三人讨论的是同一问题
  - 若这6位科学家中的任两位讨论都是另两个问题之一，则由 $r(3,3)=6$，其中至少有三位讨论的是一个问题



$$r(3,3,3)=17$$

Greenwood, R. E., Gleason, A. M., Combinatorial Relations and Chromatic Graphs, *Canadian Journal of Mathematics*, 7, 1-7, 1955.

运筹与统计

网络流

最短路

数学建模

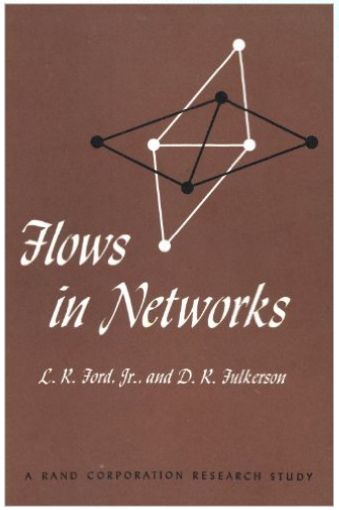
- 最短路（**Shortest Paths**）
  - 赋权图：边 $v_i v_j$ 的权为 w_{ij} 。若 v_i, v_j 之间无边相连，则令 $w_{ij} = \infty$
  - 赋权图中某条路的权为该条路所经过的所有边的权之和
  - 赋权图上的最短路一般要求图中不存在负圈，但某条边的权可以为负
- 最短路算法
  - **Bellman–Ford**算法：某个顶点到其余顶点的最短路
  - **Dijkstra**算法：非负权图上某个顶点到其余顶点的最短路
  - **Floyd–Warshall**算法：所有点对之间的最短路

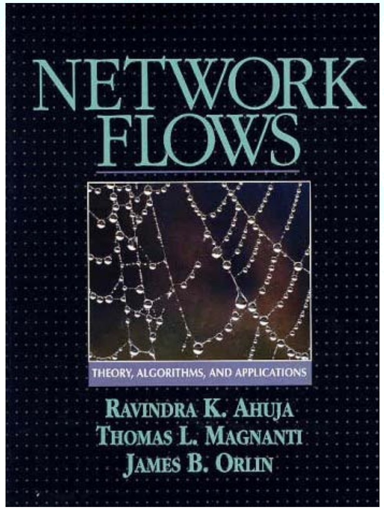
Robert W Floyd
（1936 –2001）
美国计算机科学家
1978年**Turing**奖得主

Bellman R. On a routing problem. *Quarterly of Applied Mathematics*, 16, 87–90, 1958.
Ford LR Jr, Network Flow Theory, Paper P-923, The RAND Corporation, 1956.
Floyd RW. Algorithm 97: shortest path. *Communications of the ACM*, 5, 345, 1962.
Warshall S. A theorem on boolean matrices. *Journal of the ACM*, 9, 11-12, 1962.

网络流

- 网络
  - 有向图 $N=(V,A)$，弧 $a\in A$ 的容量（**capacity**）记为 $c(a)$
  - N中存在一入度为 0的顶点 s和一出度为 0的顶点 t，分别称为源（**source**）与汇（**sink**）
  - v^+,v^-分别表示 N 中以 v为起点和终点的弧的集合
- 流（**flow**）：定义在 A上的非负函数 f，$f(a)$称为流经弧 a 的流量





Ford LR, Fulkerson DR. *Flows in Networks*. Princeton University Press, 1962.

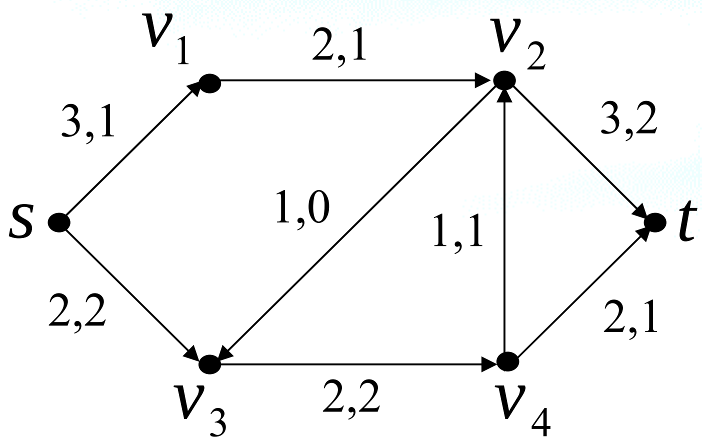
Ahuja RK, Magnanti TL, Orlin JB, *Network Flows: Theory, Algorithms, and Applications*, Prentice Hall, 1993.

最大流

浙江大学 ZheJiang University

数学建模

- 可行流
  - 经过每条弧的流量不超过每条弧的容量，即 $f(a) \le c(a)$
  - 除源和汇外，流入每个顶点 v 的流量等于流出 v 的流量，即
    $$\sum_{a \in v^+} f(a) = \sum_{a \in v^-} f(a)$$
  - 可行流中流出源的流量与流入汇的流量必相同，称为该流的流量，记为 $\mathrm{val}(f)$
    $$\sum_{a \in v^+} f(a) - \sum_{a \in v^-} f(a) = \begin{cases} \mathrm{val}(f), & 若 v = s \\ 0, & 若 v \ne s,t \end{cases}$$
- 最大流问题（**maximum flow**）：给定一网络，求网络中流量最大的可行流

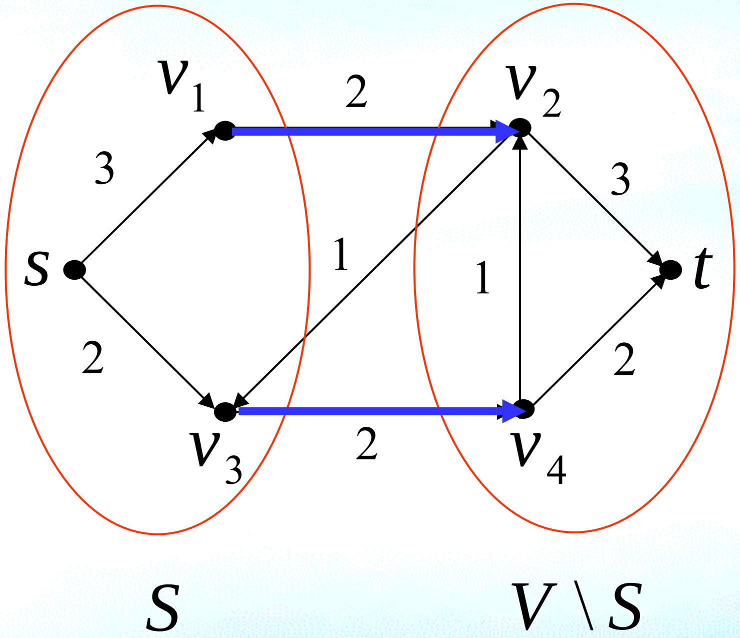


弧上第一个数字表示弧的容量，第二个数字表示当前每条弧的流量

该可行流的流量为**3**

割

- 割（**cut**）
  - 任取 $S \subseteq V$，满足 $s \in S, t \in V \setminus S$，所有起点在 S 中，终点在 $V \setminus S$ 中的弧的全体称为网络的割（**cut**），记为 $(S, \bar{S})$
  - 割 $(S, \bar{S})$ 中弧的容量之和称为割量，记为 $\text{cap}(S, \bar{S})$。网络中割量最小（大）的割称为最小（大）割
- 最小割问题（**minimum cut**）：给定一网络，求网络中割量最小的割

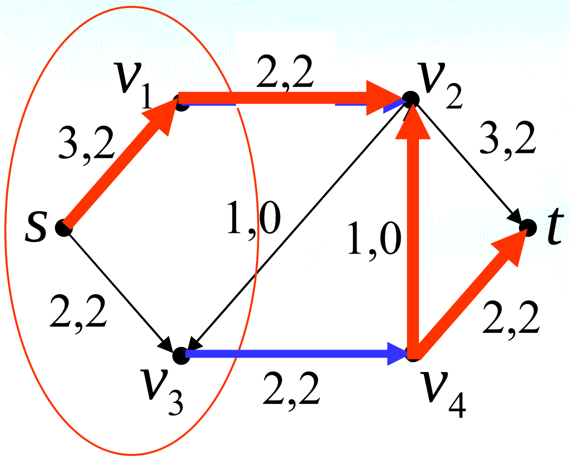


割，割量为 **4**

最大流与最小割

浙江大学
ZheJiang University
数学建模

- 最大流最小割定理（**Max-flow min-cut theorem**）
  - 任一网络中，最大流量等于最小割量
- 最大流算法
  - **Ford–Fulkerson（1956）**：$O(|E|f)$
  - **Edmonds–Karp（1972）**：$O(|E|^2|V|)$
    Dinic（1970）：$O(|E||V|^2)$
  - **Goldberg-Tarjan（1988）**：$O\left(|E||V|\log\frac{|V|^2}{|E|}\right)$
  - **King, Rao, Tarjan（1994）+ Orlin（2013）**$O(|E||V|)$



最大流，流量为 **4**

Goldberg AV, Tarjan RE. A new approach to the maximum-flow problem. *Journal of the ACM*, 35, 921-940, 1988.
King V, Rao S, Tarjan R. A faster deterministic maximum flow algorithm. *Journal of Algorithms*, 17, 447-474, 1994.
Orlin JB. Max flows in $O(nm)$ time, or better. *Proceedings of the 45th annual ACM Symposium on Theory of Computing*, 765-774, 2013.

Ford LR, Fulkerson DR, Maximal flow through a network, *Canadian Journal of Mathematics*, 8, 399-404, 1956
Edmonds J, Karp RM. Theoretical improvements in algorithmic efficiency for network flow problems. *Journal of the ACM*, 19, 248-264, 1972.


浙江大学
ZheJiang University
谢　谢

研究性问题 1

- 排名汇总问题
  - $N_n=\{1,2,\cdots,n\}$为 n 个对象的集合，N_n 上的一一映射称为对象的一种排名， n 个对象的所有可能排名全体记为 S_n ，$S^0=\bigcup_{n=1}^{\infty}S_n$
  - 若 $\Sigma=\{\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_k\}\subseteq S_n$，对象 j 在 Σ 下的得分为

$$b_\Sigma(j)=\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\sigma_i(j), j=1,2,\cdots,n$$

  - 得分的导出排名 σ_Σ^b 满足若 $b_\Sigma(j)<b_\Sigma(l)$，则 $\sigma_\Sigma(j)<\sigma_\Sigma(l)$
  - 排名 σ 与排名集 Σ 的距离 $d(\sigma,\Sigma)=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}|\sigma(j)-\sigma_i(j)|$
  - 排名集 Σ 的最优排名 σ_Σ^* 满足 $d(\sigma_\Sigma^*,\Sigma)=\min_{\sigma\in S_n}d(\sigma,\Sigma)$
  - 求得分导出排名的最坏性能

$$r^b=\max_{\Sigma\subseteq S^0}\frac{d(\sigma_\Sigma^b,\Sigma)}{d(\sigma_\Sigma^*,\Sigma)}$$

研究性问题 1

- 实例
  - $n=5, k=3$，$\Sigma=\{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3\}$，$\sigma_1=\sigma_2=(1,3,5,2,4), \sigma_3(1,3,2,5,4)$
  - $b_\Sigma=(1,3,4,3,4)$，$\sigma_\Sigma^b=(1,2,4,3,5)$，$d(\sigma_\Sigma^b,\Sigma)=14$
  - $d(\sigma_1,\Sigma)=6$，$r^b=\max\limits_{\Sigma\subseteq S^0}\dfrac{d(\sigma_\Sigma^b,\Sigma)}{d(\sigma_\Sigma^*,\Sigma)}\geq\dfrac{d(\sigma_\Sigma^b,\Sigma)}{d(\sigma_\Sigma^*,\Sigma)}\geq\dfrac{d(\sigma_\Sigma^b,\Sigma)}{d(\sigma_1,\Sigma)}\geq\dfrac{7}{3}$
- 现有结论 $\dfrac{7}{3}\leq r^b\leq 4$
- 待研究问题
  - 改进 r^b 的上界或下界
  - 对给定的 n，给出 $r_n^b=\max\limits_{\Sigma\subseteq S_n}\dfrac{d(\sigma_\Sigma^b,\Sigma)}{d(\sigma_\Sigma^*,\Sigma)}$ 的参数上界


浙江大学
ZheJiang University
谢 谢