浙江大学 2014 – 2015 学年秋冬学期

《 数学建模 》课程期末考试试卷

课程号：06186290，开课学院：数学系

考试试卷：√A 卷、B 卷（请在选定项上打√）

考试形式：闭、√开卷（请在选定项上打√），允许带书籍、笔记入场

考试日期：2015 年 1 月 26 日,考试时间：120 分钟

诚信考试，沉着应考，杜绝违纪。

考生姓名：__________学号：__________所属院系：_________

题序	一	二	三	四	总 分
得分					
评卷人					

一、（20 分）记 t 时刻某地区男性人口数和女性人口数分别为 $m(t)$ 和 $f(t)$。设男性和女性死亡率分别为常数 a_m 和 a_f，单位时间男性和女性出生数分别为 $b_m B(m,f)$ 和 $b_f B(m,f)$，其中 b_m，b_f 为常数，$B(m,f)$ 为 m 和 f 的某个函数。

（1）试给出反映男性人口数和女性人口数变化规律的微分方程（组）；

（2）试给出 $a_m = a_f$ 且 $b_m = b_f$ 时，男女人口数之差或比值的发展趋势；

（3）试给出函数 $B(m,f)$ 的某个较为合理的具体形式，并说明你的理由。

二、（20 分）（1）3 位科学家共同研究一保密项目，规定当且仅当半数以上科学家到场时才能打开存有文件的保险柜。为此需要至少为保险柜安装多少把不同的锁，并且给每位科学家配发多少把钥匙才能实现上述要求。若科学家人数为 11，锁和钥匙的数量又为多少？（假设一把钥匙只能开一把锁，所有锁均开启时保险柜才能打开，同一把锁可配发多把钥匙。）

（2）设一保险柜的开启密码为整数 S，规定当且仅当与之相关的 n 个人中有 k 个或以上同意并提供帮助时保险柜方可开启。为此选择素数 $p > S$，随机选择 $k-1$ 个小于 p 的整数 $b_1,\cdots,b_{k-1}$ 和 n 个互不相同的小于 p 的整数 $c_1,\cdots,c_n$。计算

$$P_i \equiv S + b_1c_i + b_2c_i^{2} + \cdots + b_{k-1}c_i^{k-1} \pmod p, \quad i = 1,\cdots,n,$$

并将数 c_i 和 P_i 告知第 i 人。试说明上述方案的可行性。

（提示：可应用以下定理：设矩阵 $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n\times n}$，其中 $a_{ij} \in \mathbb{Z}$，整数 $b_i \in \mathbb{Z}$，$i = 1,\cdots,n$，p 为素数，则线性方程组

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \equiv b_i \pmod p, \quad i = 1,\cdots,n$$

有模 p 意义下的唯一解当且仅当 $|A| \not\equiv 0 \pmod p$。）

三、（30 分）考虑可应用于编码和计算生物学中的**最近邻字符串问题**（Closest-String Problem）：给定两个由 m 个英文字母组成的字符串 $\Phi=\phi_1\phi_2\cdots\phi_m$ 和 $\Gamma=\gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_m$。定义它们的**距离** $d(\Phi,\Gamma)$ 为两个字符串对应位置字母不相同的位置数量，即 $d(\Phi,\Gamma)=\sum_{i=1}^{m}\delta(\phi_i,\gamma_i)$，其中 $\delta(\phi_i,\gamma_i)=\begin{cases}1, & \phi_i\neq\gamma_i,\\ 0, & \phi_i=\gamma_i.\end{cases}$。字符串 Φ 与 n 个字符串 $\Phi_1,\Phi_2,\cdots,\Phi_n$ 的**距离**定义为 Φ 与每个字符串距离的最大值，即 $D(\Phi,\{\Phi_1,\Phi_2,\cdots,\Phi_n\})=\max_{1\le j\le n} d(\Phi,\Phi_j)$。给定 n 个字符串 $\Phi_1,\Phi_2,\cdots,\Phi_n$，需求字符串 Φ，使得 $D(\Phi,\{\Phi_1,\Phi_2,\cdots,\Phi_n\})$ 最小。

（1）定义 $V_i=\bigcup_{j=1}^{n}\{\phi_{ji}\}$，$i=1,\cdots,m$，这里 ϕ_{ji} 是字符串 Φ_j 的第 i 个字符。证明必存在一最优解 $\Phi_0=\phi_{01}\phi_{02}\cdots\phi_{0m}$，使得 $\phi_{0i}\in V_i, i=1,\cdots,m$；

（2）定义 $v_{\phi,i}=\begin{cases}1, & 若\Phi_0第i个字符为\phi\\ 0, & 其它.\end{cases}$，试利用 $v_{\phi,i}$ 写出 $d(\Phi_0,\Phi_j)$ 的表达式；

（3）试写出求解最近邻字符串问题的整数线性规划。

四、（30+20 分）**基尼系数**（Gini Index）是经济学中度量经济不平等的一个主要指标。假设家庭收入 X 服从离散分布，其分布律为 $P(X=y_i)=\frac{1}{n}$，$i=1,\cdots,n$，其中 $a\le y_1\le y_2\le\cdots\le y_n\le b$。记 L_i 为收入不超过 y_i 的家庭的总收入占整体家庭总收入的比例。约定 $L_0=0$，在 Oxy 平面上连接点 $\left(\frac{i}{n},L_i\right)$，$i=0,1,\cdots,n$ 的分段线性函数 L 称为**洛伦兹曲线**（Lorenz Curve）。L 与线段 $y=x,0\le x\le 1$ 围成的区域记为 S。基尼系数 G 定义为 S 的面积 A 的两倍。

（1）试给出 G 的表达式，并简要说明 G 如何反映家庭收入差异程度；

（2）现有 n 个单位，单位 i 的员工数为 v_i，$i=1,\cdots,n$。现要从所有 $V=\sum_{i=1}^{n}v_i$ 个人中选择 S 个组成一委员会，其中来自单位 i 的人数为 s_i，$i=1,\cdots,n$。委员会中各单位人数应尽可能与该单位总人数相适应。试将基尼系数的思想移植到该问题上，给出某个分配方案基尼系数的定义，并分别计算以下实例两种不同分配方案的基尼系数值。

<table>
<tr><td colspan="2">单位</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>总人数</td></tr>
<tr><td colspan="2">员工数</td><td>45</td><td>30</td><td>25</td><td>100</td></tr>
<tr><td rowspan="2">委员会人数</td><td>方案 1</td><td>3</td><td>1</td><td>1</td><td>5</td></tr>
<tr><td>方案 2</td><td>2</td><td>2</td><td>1</td><td>5</td></tr>
</table>

（3）（**附加题**）记 $q_i=v_i\frac{S}{V}$ 为单位 i 的配额，现欲寻找一满足 $\lfloor q_i\rfloor\le s_i\le\lceil q_i\rceil$，$i=1,\cdots,n$，且基尼系数最小的方案。试给出 $n=2$ 时的解。当 n 为一般值时有何求解思路。

（4）（**附加题**）若家庭收入服从 $[a,b]$ 上的连续分布，其分布函数和密度函数分别为 $F(y)$ 和 $f(y)$，试给出洛伦兹曲线和基尼系数的表达式。

浙江大学《数学建模（H）》课程期末考试参考答案

一．令 $x_{ij}=\begin{cases}1 & 若仓库建于地点 j \\ 0 & 其他\end{cases}$ ，数学规划为：

$$\min \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} a_{ik}b_{jl}x_{ij}x_{kl}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

s.t. $\sum_{i=1}^{n} x_{ij}=1,\quad j=1,\ldots\ldots,n$

$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}=1,\quad i=1,\ldots\ldots,n$

$x_{ij}=0或1$

二．

(1) 参与人：n 位市民，$c_1,c_2,\ldots\ldots,c_n$

（纯）策略集：{参与维修（Y），视而不见（N）}

c_i 采用 Y，$c_j\ j\neq i$ 采用 N 是 Nash 均衡。c_i 由 Y 改为 N，其收益由 v-c 减为 0，$c_j\ j\neq i$ 由 N 改为 Y，其收益由 v 减为 v-c；

所有人均采用 N 不是 Nash 均衡，此时任一人改为 Y，其收益由 o 增加为 v-c；

所有人均采用 Y 不是 Nash 均衡，此时任一人改为 N，其收益由 v-c 增加为 v。

$k,k\geq 2$ 个人采用 Y，n-k 个人采用 N 不是 Nash 均衡，此时其中一人由 Y 改为 N，其收益由 v-c 增加为 v。

(2) c_n 采用 Y，期望收益为 v-c；c_n 采用 N，期望收益为

0·P{其余 n-1 人采用 N}+v·P{其余 n-1 人中至少有一人采用 Y}

$=v\cdot(1-q^{n-1}))=v(1-(1-p^{n-1}))$

(3) 在对称混合策略 Nash 均衡中，所有市民的混合策略均相同，则c_{n-1}的期望收益为$p\cdot(v-c)+(1-p)(v\cdot(1-(1-p)^{n-1}))$。此时有$v-c=v(1-(1-p)^{n-1})$，即

$p=1-(\frac{c}{v})^{\frac{1}{n-1}}$。当 n 增加时，p 减少，$\lim_{n\to\infty}p(n)=0$。

三.

(1) 一次允许的运输过程

左→右：$(V_L,V_R,左)\to(V_L',V_R',右)$。其中$V_R\subseteq V_R'$，$|V_R|-|V_R'|\le k$，且$V_R$与$V_L'$均为图的独立集

右→左：$(V_L',V_R',右)\to(V_L'',V_R'',左)$。其中$V_R''\subseteq V_R'$，$|V_R'|-|V_R''|\le k$，且$V_R'$与$V_L'$均为图的独立集。

上述问题要求给出从初始状态(V，Φ，左)到结束状态(Φ，V，右)的状态变化过程，且在这一变化过程中“左→右”与“右→左”的状态变化交替出现。

(2)设V_{vc}是 G 的最小顶点覆盖，$|V_{vc}|=\beta(G)$，$V\setminus V_{vc}$为图的独立集。

船容量为$\beta(G)+1$时的可行运输方案如下，将V_{vc}中的顶点始终置于船上，将$V\setminus V_{vc}$中的顶点逐个置于船上从左岸移至右岸。最后将V_{vc}中的顶点置于右岸。因此$k^*\le\beta(G)+1$

若$k^*<\beta(G)$，则船首次离开左岸时左岸的物品数至少为$n-k^*>n-\beta(G)$，因此左岸物品不构成一独立集，矛盾。故$k^*\ge\beta(G)$

(3) 由(iv)，存在x_3的划分$x_3=x_{31}\cup x_{32}$，使得$|x_{31}|\le|Y_1|$，$|x_{32}|\le|Y_2|$

由于$|Y|\le k$，Y_1，Y_2非空，故$|Y\setminus Y_1|<k$，$|Y\setminus Y_2|<k$

（阶段 1，将Y置于船上，Y_1留于右岸）

（V，Φ，左）→（X，Y，右）→（$X\cup(Y\setminus Y_1)$，Y_1，左） 2次

（阶段2，将X_1逐个运至右岸）（记$X_1=\{x_1\ldots\ldots x_l\}$）

（$X\cup(Y\setminus Y_1)$，Y_1，左）→（$X\setminus\{x_1\}$，$Y_1\cup(Y\setminus Y_1)\cup\{x_1\}$，右）→（$X\setminus\{x_1\}\cup(Y\setminus Y_1)$，$Y_1\cup\{x_1\}$，左）→⋯→（$X\setminus X_1$，$Y_1\cup X_1\cup(Y\setminus Y_1)$，右）→（$X\setminus X_1\cup Y\setminus Y_1$，$Y_1\cup X_1$，左） 2$|X_1|$次

（阶段3，将X_3分两次运至右岸）

（$X\setminus X_1\cup Y\setminus Y_1$，$Y_1\cup X_1$，左）$\xrightarrow{(Y\setminus Y_1\cup X_{31})}$（$X\setminus X_1\setminus X_{31}$，$Y_1\cup X_1\cup(Y\setminus Y_1\cup X_{31})$，右）$\xrightarrow{Y}$（$X\setminus X_1\setminus X_{31}\cup Y$，$X_1\cup X_{31}$，左）$\xrightarrow{(Y\setminus Y_2\cup X_{32})}$（$X\setminus X_1\setminus X_{31}\setminus X_{32}\cup Y_2$，$X_1\cup X_{31}\cup Y\setminus Y_2\cup X_{32}$，右）$\xrightarrow{Y\setminus Y_2}$（$X\setminus(X_1\cup X_3)\setminus Y$，$X_1\cup X_3$，左） 至多4次

（阶段4，将X_2逐个运至右岸）（记$X_2=\{x_1'\ldots\ldots x_l'\}$）

（$X\setminus(X_1\cup X_3)\cup Y$，$X_1\cup X_3$，左）$\xrightarrow{Y\setminus Y_2\cup\{x_1'\}}$（$X\setminus(X_1\cup X_3)\cup Y_2\setminus\{x_1'\}$，$X_1\cup X_3\cup Y\setminus Y_2\cup\{x_1'\}$，右）$\xrightarrow{Y\setminus Y_2}$（$X_2\cup Y_2\setminus\{x_1'\}\cup Y\setminus Y_2$，$X_1\cup X_3\cup\{x_1'\}$，左）→⋯→（$Y_2$，$X_1\cup X_2\cup X_3\cup Y\setminus Y_2$，右）$\xrightarrow{Y\setminus Y_2}$（$Y_2\cup(Y_1\setminus Y_2)$，$X$，左） 2$|X_2|$次

（阶段5，将Y运至右岸）

（Y，X，左）→（Φ，V，右） 1次

由于$|V|=|X|+|Y|\ge|X_1|+|X_2|+|X_3|+1$，总运输次数为：

$2+2|X_1|+4+2|X_2|+1\le 2(|V|-|X_3|)+5$

若$|X_3|\ge 2$，则次数不超过$2|V|+1$次。若$|X_3|=0$，则阶段2最后一次运输和阶段4的第一次运输为（$X\setminus X_1$，$Y_1\cup X_1\cup(Y\setminus Y_1)$，右）$\xrightarrow{Y}$（$X\setminus X_1\cup Y$，$X_1$，左）$\xrightarrow{Y\setminus Y_2\cup\{x_1'\}}$（$X\setminus X_1\cup Y_2\setminus\{x_1'\}$，$X_1\cup Y\setminus Y_2\cup\{x_1'\}$，右）

由此阶段 3 的 4 次运输均可删去。若$|X_3|=1$，则阶段 2 最后一次运输和阶段 3 的运输为（$X \setminus X_1$，$Y_1 \cup X_1 \cup (Y \setminus Y_1)$，右）$\xrightarrow{Y}$（$X \setminus X_1 \cup Y$，$X_1$，左）$\xrightarrow{(Y \setminus Y_2) \cup X_3}$（$X_2 \cup Y_2$，$X_1 \cup Y \setminus Y_2 \cup X_3$，右）$\xrightarrow{}$（$X_2 \cup Y$，$X_1 \cup X_3$，左）

由此阶段 3 只需 2 次运输，对以上两种情形，仍有次数不超过$2|V|+1$次。

四.

(1)时刻 t 年龄在$[r, r+dr)$内的人数为$p(r,t)dr$，至时刻$t+dt$，这部分人年龄在$[r+dt, r+dr+dt)$之间，期间死亡人数为$\mu(r,t)p(r,t)drdt$。

故$p(r,t)dr - p(r+dt, t+dt)dr = \mu(r,t)p(r,t)drdt$

$$(p(r+dt, t+dt) - p(r, t+dt))dr + (p(r, t+dt) - p(r,t))dr = -\mu(r,t)p(r,t)drdt$$

$$\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial p}{\partial t} = -\mu(r,t)p(r,t)$$

(2) $n_{jm}(k+1) = \min\{n_{am}(k), n_{af}(k)\} \cdot \frac{b}{2}$

$$n_{jf}(k+1) = \min\{n_{am}(k), n_{af}(k)\} \cdot \frac{b}{2}$$

$$n_{am}(k+1) = p_j n_{jm}(k) + p_a n_{am}(k)$$

$$n_{af}(k+1) = p_j n_{jf}(k) + p_a n_{af}(k)$$

记$N_k = (n_{jm}(k), n_{jf}(k), n_{am}(k), n_{af}(k))^T$，则

当$n_{am} \le n_{af}$时，$N_{k+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{b}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{b}{2} & 0 \\ p_j & 0 & p_a & 0 \\ 0 & p_j & 0 & p_a \end{pmatrix} N_k$，

当 $n_{am} > n_{af}$ 时， $N_{k+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{b}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{b}{2} \\ p_j & 0 & p_a & 0 \\ 0 & p_j & 0 & p_a \end{pmatrix} N_k$

(3) $a_{k,n} = \sum_{s \geq 0} a_{s,n-1} \cdot \sum_{t_1+t_2+\cdots\cdots+t_s = k} p_{t_1} p_{t_2} \cdots\cdots p_{t_s}$

$$f_n(x) = \sum_{k \geq 0} a_{k,n} x^k = \sum_{k \geq 0} \sum_{s \geq 0} a_{s,n-1} \sum_{t_1+t_2+\cdots\cdots+t_s=k} p_{t_1} p_{t_2} \cdots\cdots p_{t_s} x^k$$

$$= \sum_{s \geq 0} a_{s,n-1} \sum_{k \geq 0} \sum_{t_1+t_2+\cdots\cdots+t_s=k} p_{t_1} x^{t_1} \cdot p_{t_2} x^{t_2} \cdots\cdots p_{t_s} x^{t_s}$$

$$= \sum_{s \geq 0} a_{s,n-1} (p_0 x^0 + p_1 x + \cdots\cdots + p_N x^N + \qquad)^s$$

$$= \sum_{s \geq 0} a_{s,n-1} (f(x))^s = f_{n-1}(f(x))$$

浙江大学《数学建模》课程期末考试试卷参考解答

1. 1→1→2→3→5→8→13→21→34→55→89→144　　（10 分）

一年后家里有 144 对兔子（12 分）

$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$，　　　　（15 分）

性质（1） $\dfrac{F_{n-1}}{F_n} + \dfrac{F_{n-2}}{F_n} = 1$

（2）单调数列 $\dfrac{F_{n-1}}{F_n} \to 0.618$，**单调数列** $\dfrac{F_{n-2}}{F_n} \to 0.382$（$\lambda^2 + \lambda = 1$的根）

2.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = r_1 x - \alpha xy \\ \dfrac{dy}{dt} = -r_2 y + \beta xy - \gamma yz \\ \dfrac{dz}{dt} = -r_3 z + \lambda yz \end{cases}$$

说明：应用了方式系统原理，是用了集中参数法，在马尔萨斯模型的基础上又应用了统计筹算率（或称竞争项的乘积原理）

3. $\dfrac{dv}{dt} = mg - kv^2$，　极限速度满足$mg - kv^2 = 0$，为了使

$v \le 40$，应使$k \ge mg/1600$，（其中 1600 为v^2的上界）

4. （1）$Thankyou \to$ [illegible] **加密后为** [illegible]

密文为：　jncriuea　　　　　　　　**（8 分）**

(2) $|A| = 5$，其逆元素为 21，$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 0 & 21 \end{bmatrix}$

（注：可用伴随矩阵或行初等变换来求）　（１５分）

5. $\begin{bmatrix} 2 & 10 & 9 & 7 \\ 15 & 4 & 14 & 8 \\ 15 & 14 & 16 & 11 \\ 4 & 15 & 13 & 9 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 & 0 \\ 13 & 0 & 5 & 1 \\ 13 & 10 & 7 & 4 \\ 2 & 11 & 4 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 6 & 0^* & 0 \\ 13 & 0^* & 5 & 1 \\ 9 & 6 & 3 & 0^* \\ 0^* & 9 & 2 & 0 \end{bmatrix}$，

最优值为 28

（注：如先对行变换，则还需调整，计算较繁）

6. 用两段法求解。写出标准形式的线性规划　（5 分）；第一段得（0，3，1，0，2），z = 0　求得原问题基本可行解（原问题目标 z = - 6）（10 分，其中检查 z = 0 两分）；第二段得（0，4，0，1，3），z = - 8

（5 分）

（注：用图解法至多得一半分），缺 z=0 扣分

7. 划分问题是此问题的一个实例，只要在划分问题中增加一个元素，其大小正好等于划分问题中元素总和的一半 B，则划分问题有解当且仅当新的集合可以划分成相等的三部分。

浙江大学 2012—2013 学年春夏学期

《 数学建模（H） 》课程期末考试试卷

课程号：061R0200，开课学院：理学院

考试试卷：√A 卷、B 卷（请在选定项上打√）

考试形式：闭、√开卷（请在选定项上打√），允许带书籍、笔记入场

考试日期：2013 年 6 月 30 日,考试时间：120 分钟

诚信考试，沉着应考，杜绝违纪。

考生姓名：__________学号：__________所属院系：_________

题序	**一**	**二**	**三**	**四**	**总 分**
得分					
评卷人					

一、（15 分）现有 n 个物资储备仓库需分别建于 n 个地点。已知在地点 j 建造仓库 i 所需费用为 c_{ij}，从地点 j 到地点 l 的单位运输费用为 b_{jl}，从仓库 i 到仓库 k 的运输量为 $a_{ik}, i, j, k, l = 1, \cdots, n$。现欲给出一建设方案，使得总费用最少。试写出该问题的数学规划。

二、（25 分）城市某处公共设施发生损坏，n 位市民同时发现了这一情况。每位市民有两种策略，参与维修和视而不见。由于损坏程度较轻，只要有一人参与维修设施即可复原。设施复原对每位市民带来的收益均为 v，而参与维修的市民均付出代价 c。设 $v > c > 0$。

（1）试建立该问题的博弈模型，并求出所有纯策略意义下的 Nash 均衡。

（2）用 (p,q) 表示如下的混合策略：以概率 p 参与维修，以概率 $q = 1 - p$ 视而不见。试分别求出第 $1,2,\cdots,n-1$ 位市民均采用策略 (p,q)，第 n 位市民采用纯策略“参与维修”和纯策略“视而不见”时他的期望收益。

（3）称一 Nash 均衡为**对称**的，若在该 Nash 均衡中，所有参与者采用的策略（纯策略或混合策略）均相同。求该博弈所有混合策略意义下的对称 Nash 均衡，并说明其结果反映了什么样的社会现象。

三、（30 分+10 分）中世纪英国学者 Alcuin 在他的著作中给出了下面的过河问题。现有n件物品需用一艘船从河的左岸运至右岸。两件不同的物品之间可能存在排斥性，即它们不能同时位于河的一侧，除非此时船也在河的这一侧。用图$G=(V,E)$表示物品之间的排斥性。V中每个顶点表示一件物品，两个顶点之间有边相连当且仅当这两个顶点表示的物品是排斥的。所有物品和船的一种状态可用三元组(V_L,V_R,b)表示，其中V_L,V_R分别代表位于河左岸和右岸的物品集，且有$V_L \cup V_R = V, V_L \cap V_R = \emptyset$，$b \in \{左,右\}$表示船所在的位置。船从左岸到达右岸，或从右岸到达左岸的过程称为一次运输。每次运输时船至多装载k件物品，k称为船的容量。现要求给出一由多次运输组成的可行运输方案，将所有物品从左岸运到右岸。

（1）请用图论语言表示一次允许的运输过程导致的状态变化，进而完整描述上述问题。

（2）记$\beta(G)$为G的最小顶点覆盖所包含顶点的数目，k^*为G的 **Alcuin 数**，即存在可行运输方案时船容量的最小值，证明$\beta(G) \le k^* \le \beta(G)+1$。

（3）设X_1,X_2,X_3,Y_1,Y_2为V的子集，$X = X_1 \cup X_2 \cup X_3$，$Y = V \setminus X$，这些子集满足以下条件：

（ⅰ）X_1,X_2,X_3两两不交，X为G的独立集；

（ⅱ）$|Y| \le k$，Y_1,Y_2为Y的非空子集；

（ⅲ）$X_1 \cup Y_1$和$X_2 \cup Y_2$为G的独立集；

（ⅳ）$|Y_1|+|Y_2| \le |X_3|$

试设计一可行运输方案，（以下为附加题）并证明其运输次数不超过$2|V|+1$。

四、（30 分+10 分）人口和种群数量是数学生物学的重要课题。除著名的 Malthus 模型和 Logistics 模型外，学者从不同角度，运用不同数学工具给出了众多研究成果。试回答以下问题:

（1）记**人口分布函数** $F(r,t)$ 为 t 时刻年龄小于 r 的人口数，**人口密度函数** $p(r,t)=\frac{\partial F}{\partial r}$， $\mu(r,t)$ 为 t 时刻年龄为 r 的人的死亡率。试写出反映年龄在 $[r,r+dr)$ 内的人口数自 t 时刻到 $t+dt$ 时刻变化情况的等式，进而给出 $p(r,t)$ 所满足的微分方程。

（2）某生物生长经过幼年、成年两个阶段。幼年个体（不论雌雄）经过一个时段进入成年，存活的概率为 p_j。成年个体经过一个时段仍存活的概率为 p_a。该种生物实行一雌一雄单配偶制，一个时段一对成年个体组成的配偶可产生幼年个体数量为 b，其中雌雄个体各占一半。记时段 k 某群落中该种生物幼年雄性、幼年雌性、成年雄性、成年雌性的个体数量分别为 $n_{jm}(k),n_{jf}(k),n_{am}(k),\ n_{af}(k)$ 试给出从时段 k 到时段 $k+1$ 该生物各类型个体数量应满足的关系，并将上述关系用矩阵表示。

（3）设某生物单个个体繁衍 l 个后代的概率为 $p_l,l=0,1,\cdots,N$，$\sum_{l=0}^{N}p_l=1$。定义多项式函数 $f(x)=\sum_{l=0}^{N}p_lx^l$。设某群落中该生物第 0 代仅有 1 个个体，历经 n 代繁衍，第 n 代有 k 个个体的概率为 $a_{k,n}$，记 $f_n(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_{k,n}x^k$。试写出 $a_{k,n}$ 满足的递推关系，（以下为附加题）并证明 $f_n(x)=f_{n-1}(f(x))$。

浙江大学《数学建模》课程期末考试试卷

考生姓名：__________学号：_______专业：___________

1. （本题 15 分）兔子出生后两个月就生小兔，如果最初你养了刚出生的一雌一雄两只小兔，假设你养的所有兔子长成后均每对每月生一次且恰好生一雌一雄的一对，出生的小兔年内均不死亡。用 F_n 表示第 *n* 个月后兔子的对数，$n = 0,1,2,......12$，（$F_0 = 1$ 为初始时的兔子对数）（1）写出 F_n 满足的递推关系（即菲波那奇数列的递推公式）（2）问一年后你家里共有多少对兔子？（3）根据你的观察，写出菲波那奇数列的一些性质。
2. （本大题 15 分）设 *t* 时刻虾米、小鱼、大鱼的数量分别为 x(t)、y(t)和 z(t)，大鱼只吃小鱼，小鱼只吃虾米，试建立该系统满足的微分方程。你的方程是根据那些建模原理建立起来的，请作出简要说明 。
3. （本题 10 分）伞降兵跳伞时的总质量为 100 公斤（含武器装备），实验证明，降落伞打开后的空气阻力与速度的平方成正比，假定伞降兵的落地速度不能大于 40 米/ 秒，为安全起见，降落伞应当如何设计？（即求阻力系数 *k* 至少应达到多大）
4. （本大题共 15 分，第一小题 7 分，第二小题 8 分）求解以下两小题：

（1） 取 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$，分别用 1，...，25，0 表示英文字母 a，...，y，z，采用此矩阵按照希尔密码原理加密 Thank you，（空格不计）

（2） 对上面的加密矩阵 A 求出可用于解密的逆矩阵 A^{-1}

5. （本题 15 分）求解下面的指派问题（求最小），并求出最优指派下的目标函数值：

$$\begin{bmatrix} 2 & 10 & 9 & 7 \\ 15 & 4 & 14 & 8 \\ 15 & 14 & 16 & 11 \\ 4 & 15 & 13 & 9 \end{bmatrix}$$

（注意：必须写出所有必要的中间步骤）。

6. （本题 20 分） 用两段单纯型法求解线性规划并求出最优目标函数值（注：用图解法求解最多只给一半分）

$$\textbf{\textit{min}} \quad x_1 - 2x_2$$

$$\textbf{\textit{s.t}} \quad \begin{cases} x_2 \le 4 \\ x_1 + x_2 \ge 3 \\ -x_1 + x_2 \ge 1 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

7. （本题 10 分）证明以下将 n 个正整数的集合划分成相等的 3 个子集的

问题是 NP 难的：设 $A=\{a_1,a_2,......,a_n\}$ ， $B=\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{n}a_i$ ，问：是否存在 A 的子集 A_1 、 A_2 、 A_3 ，使得 $\sum_{a_i \in A_k} a_i = B$ ， $k=1,2,3$

浙江大学 2013—2014 学年春夏学期

《 数学建模（H） 》课程期末考试试卷

课程号：061R0200，开课学院：数学系

考试试卷：√A 卷、B 卷（请在选定项上打√）

考试形式：闭、√开卷（请在选定项上打√），允许带书籍、笔记入场

考试日期：2014 年 6 月 30 日,考试时间：120 分钟

诚信考试，沉着应考，杜绝违纪。

考生姓名：__________学号：__________所属院系：__________

题序	一	二	三	四	总 分
得分					
评卷人					

一、（15 分）考虑下面的设施选址问题。现有 n 个居民小区需提供某项服务，有 m 处地点可用于开设服务点。在地点 i 开设服务点所需开设费用为 f_i，$i=1,\cdots,m$。设置在地点 i 的服务点为小区 j 提供服务所需的运营费用为 c_{ij}，$i=1,\cdots,m$， $j=1,\cdots,n$。现需选择若干地点开设服务点，并确定每个服务点的服务对象，使每个小区至少有一个服务点为其提供服务，并且总费用最小。试写出该问题的数学规划。

二、（20 分）英国生物学家 Ronald Ross 因发现蚊子是疟疾的传播媒介等贡献而获得 1902 年的诺贝尔生理与医学奖。他曾尝试建立疟疾在人和蚊子之间传播的数学模型。假设某区域在一段时间内人的数量 N 与蚊子的数量 n 保持不变。在时刻 t，感染疟疾的人和蚊子数量分别为 $I(t)$ 和 $i(t)$。在 dt 时间内，有 $aI(t)dt$ 已感染疟疾的人康复，$mi(t)dt$ 已感染疟疾的蚊子死亡。在 dt 时间内，每只蚊子会叮咬 bdt 个人。发生叮咬时，从已感染疟疾的人传染给未感染疟疾的蚊子的概率为 p，从已感染疟疾的蚊子传染给未感染疟疾的人的概率为 p'。

（1）试建立 $I(t)$ 和 $i(t)$ 满足的微分方程；

（2）求上述微分方程的平衡点，并说明其对疟疾防控有何指导意义。

三、（25+10 分）某委员会将就一草案进行表决，委员会组成人员中有k位支持，m位反对。每位委员可以选择到现场按本人意愿投票，也可以选择弃权。若投支持票人数多于投反对票人数，则该草案获得通过；若投反对票人数多于投支持票人数，则该草案被否决；若投支持票人数与投反对票人数相等，则该草案延期再议。对支持该草案的委员，草案通过、延期再议、否决的收益分别为 2、1、0；对反对该草案的委员，草案通过、延期再议、否决的收益分别为 0、1、2。到现场投票的委员另需付出的投票成本为$c, 0<c<1$。

（1）试分别求$k=m$和$k<m$时所有的纯策略 Nash 均衡；

（2）设k □ m。考虑下面的局势：反对该草案的委员中有k位到现场投票，$m-k$位弃权；支持该草案的每一位委员均以概率p到现场投票。试分别求该局势下反对该草案的委员中到现场投票者和弃权者的期望收益；以及在其它$k+m-1$位委员策略不变时，其中一位反对该草案的委员由到现场投票改为弃权，或由弃权改为到现场投票时他的期望收益；

（3）（**附加题**）求p的值，使（2）中所述局势为一混合策略 Nash 均衡。

四、（40+10 分）考虑下面的联赛赛程编制问题。现有 n 支球队（$n=2m, m\in \mathbf{N}$）进行主客场单循环赛。比赛共分 $n-1$ 轮，在每一轮中，每支球队均和某支球队进行一场比赛。在所有 $n-1$ 轮中，每支球队和其他 $n-1$ 支球队中的任一支恰好交手一次。**对阵方案**确定了每轮中每场比赛的交手双方。如图 1 给出了 4 支球队的一种对阵方案。在对阵方案基础上安排主客场可得到一张赛程。对每轮中的每场比赛，确定交手两队中其中一队为主场，另一队为客场。若某队在连续两轮中均为主场或均为客场，则称该队在这两轮间出现一次 **break**。球队的 break 数为在所有连续两轮间出现的 break 总次数，赛程的 break 数为所有球队 break 数之和。如图 2 为在图 1 对阵方案基础上给出的赛程，队 1，队 4 的 break 数均为 2，队 2，队 3 的 break 数均为 1。赛程 break 数为 6。

第 1 轮	第 2 轮	第 3 轮
1-2	1-3	1-4
3-4	2-4	2-3

图 1：对阵方案

	1 轮	2 轮	3 轮
队 1	+2	+3	+4
队 2	−1	+4	+3
队 3	+4	−1	−2
队 4	−3	−2	−1

图 2：赛程

（+为主场，－为客场）

（1）可用由 +,− 组成的长度为 $n-1$ 的字符串表示赛程中某支球队的主客场情况，如图 2 所示的赛程中队 1 的字符串为+++。试通过分析字符串的性质证明任意赛程的 break 数至少为 $n-2$；

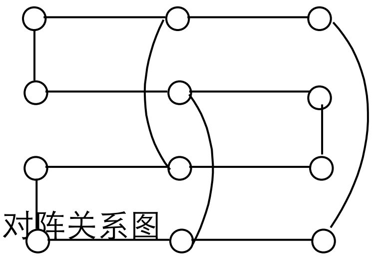

图 3：对阵关系图

（2）考虑有 $n-1$ 个顶点 $v_1, v_2, \cdots, v_{n-1}$ 的完全图 K_{n-1}，其中顶点 v_i 代表球队 i，$i=1,\cdots,n-1$。令

$$E_i=\{v_{i-k}v_{i+k} \mid k=1,\cdots,m-1\}, i=1,\cdots,n-1.$$

这里 + 与 − 均为模 $n-1$ 加法。证明：存在一对阵方案，使得 E_i 中每条边的两个端点对应的球队在第 i 轮恰有一场比赛；对任意 $i=1,\cdots,n-2$，可通过对 $E_i \cup E_{i+1}$ 中的边定向，使之成为 K_{n-1} 的一条有向 Hamilton 路；

（3）在给定的对阵方案基础上安排主客场，使赛程的 break 数最少的问题称为 **break 最小化问题**。为此，构造**对阵关系图** $G=(V,E)$，其中 $V=\bigcup_{i=1}^{n} V_i$，$V_i=\{v_{i1}, \cdots, v_{i,n-1}\}$。顶点 v_{ij} 表示球队 i 在第 j 轮的比赛。边集 $E=E_t \cup E_g$，其中 $E_t=\bigcup_{i=1}^{n}\bigcup_{j=1}^{n-2}\{v_{ij}v_{i,j+1}\}$，$v_{i_1 j}v_{i_2 j}\in E_g$ 当且仅当在第 j 轮球队 i_1 与球队 i_2 交手。图 3 为对应于图 1 对阵方案的对阵关系图。证明：对任一对阵方案，总存在一种主客场安排方法，使得对任一给定的 j，任意球队在第 j 轮和第 $j+1$ 轮间均不会出现 break（提示：考虑子图 $G(V_j \cup V_{j+1})$）；

（4）试对对阵关系图中的边赋予适当的权，使得 break 最小化问题等价于对阵关系图的最大割问题；

（5）（**附加题**）给出一 6 支球队 break 数为 4 的赛程（答案填在下一页的表格中）。（提示：利用（2）的结果）

	1 轮	2 轮	3 轮	4 轮	5 轮
队 1					
队 2					
队 3					
队 4					
队 5					
队 6					

浙江大学 2015－2016 学年秋冬学期

《　数学建模　》课程期末考试试卷

课程号：06186290，开课学院：数学系

考试试卷：√A 卷、B 卷（请在选定项上打√）

考试形式：闭、√开卷（请在选定项上打√），允许带书籍、笔记入场

考试日期：_2016_年_1_月_10_日,考试时间：_120_分钟

诚信考试，沉着应考，杜绝违纪。

考生姓名：__________学号：__________所属院系：_________

题序	一	二	三	四	总 分
得分					
评卷人					

一、（20 分）天花是一种严重传染病，数学家 Daniel Bernoulli 对此作过以下研究。假设感染天花后死亡率为 p，且会在感染后极短时间内死亡，但治愈后终身不会再受到感染。记某区域年龄为 $x(x \square 16)$ 的总人数为 $P(x)$，其中未感染天花的人数和曾感染天花但已治愈的人数分别为 $S(x)$ 和 $R(x)$。设每人在年龄 x 到 $x+dx$ 之间感染天花的概率为 qdx，因天花以外的其它原因死亡的概率为 $m(x)dx$。

（1）试建立 $S(x)$ 和 $R(x)$ 所满足的微分方程模型；

（2）试推导出 $f(x)=\dfrac{S(x)}{P(x)}$ 所满足的微分方程，该方程为 Bernoulli 方程，以 Daniel Bernoulli 之叔 Jokob Bernoulli 命名。

二、（20 分）一单行道上有 n 个车位，按车行方向分别记为 $1,2,\cdots,n$ 。每个车位有空闲和占用两种状态，车位 i 空闲的概率为 $\alpha_i>0$ ，且各车位是否空闲相互独立。车辆行进时至多只能看到车行前方最近的一个车位的状态。若在车位 i 上停车的效用为 $U_i>0$ ，未在 n 个车位上停车的效用为 0。一车从该道路起点出发沿道路单向行驶，试寻找一停车策略，使期望效用达到最大。

（1）记 $V_i, i=1,\cdots,n+1$ 为驶过车位 $i-1$ 后（车位 0 为道路起点）开始计划停车所可能获得的最大期望效用，试写出 V_i 所满足的递推关系；

（2）令 $x_i=V_i-V_{i+1}$ ， $i=1,\cdots,n$ ，试写出求解该问题的以 x_i 为决策变量的数学规划。

三、（30+10 分）现有一种棋类游戏。每局比赛在两人之间进行，其中先行一方可以概率 p 获胜，以概率 $1-p$ 守和，而不会失败。p 称为先行概率。

（1）若 A,B 两人的先行概率分别为 p,q。两人轮流先行，进行多局比赛，直至其中有一人失败为止。若首局比赛由 A 先行，他最终获胜的概率是多少?

现有 A,B,C 三人参与该游戏。每一局比赛三人中的一人拥有主动权，他可选择另一个对手进行比赛并在比赛中先行。假设三人按 C,B,A 的顺序轮流获得主动权，进行多局比赛，在任一局比赛中失败者即退出以后的所有比赛。两人退出比赛后，另一人获得最终胜利。设 A,B,C 三人的先行概率分别为 $1,b,c$，且 $1>b>c>0$。每人均以最终胜利为目标，获得主动权时按最优策略选择比赛对手。

（2）若在某一时刻 A,B,C 三人均未退出比赛，A 拥有主动权，则 A 应选择谁为对手？若此时 B 拥有主动权，B 应选择谁为对手？为什么?

（3）若 C 在第一局比赛中选择 B 为对手并获得胜利，他最终胜利的概率是多少？若 C 在第一局比赛中选择 A 为对手并获得胜利，他最终胜利的概率是多少?

（4）（附加题）若 $b=\frac{1}{2},c=\frac{1}{3}$，C 在第一局中消极比赛以确保结果为和局，为什么?

四、（30+10 分）n 支球队进行比赛，每场比赛在两支球队之间进行，任意两支球队之间至多进行一场比赛，每支球队参与比赛的场数相同。记队 i 与队 j 比赛中，队 i 的得分为 p_{ij}，队 j 的得分为 p_{ji}，队 i 的分差为 $q_{ij}=p_{ij}-p_{ji}$。与队 i 进行过比赛的球队集合记为 T_i。约定 $i\notin T_i$，且 $q_{ii}=0$。记 $|T_1|=|T_2|=\cdots=|T_n|=l$。

A-B	5-10
A-D	57-45
B-C	10-7
C-D	3-10

（1）记 s_i 为队 i 在各场比赛中分差之和，即 $s_i=\sum\limits_{j\in T_i} q_{ij}$，$\mathbf{S}=(s_1,s_2,\cdots,s_n)^T$ 称为分差向量，可用来衡量各球队的实力。若四支球队之间的比赛结果如表所示，求向量 $\mathbf{S}$；

（2）对任意 $j\in T_i$，若 $k\in T_j$，则称队 i 与队 k 之间进行了一场“二级比赛”，且在该场比赛中队 i 的分差为 $q_{ij}+q_{jk}$。（队 i 可与自身进行二级比赛，队 i 与队 j 之间可以进行多场二级比赛）。记 $s_i^{(2)}$ 为队 i 在所有可能的 l^2 场二级比赛中的分差之和，$\mathbf{S}^{(2)}=(s_1^{(2)},s_2^{(2)},\cdots,s_n^{(2)})^T$ 称为二级分差向量。对表中所示的比赛结果，求向量 $\mathbf{S}^{(2)}$；

（3）定义矩阵 $\mathbf{M}=(m_{ij})_{n\times n}$，其中 $m_{ij}=\begin{cases}1, & \text{若 } j\in T_i \\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，试给出由 $\mathbf{M}$ 和 $\mathbf{S}$ 计算 $\mathbf{S}^{(2)}$ 的公式，并说明 $\mathbf{M}^2$ 中各元素的含义。

（4）（附加题）类似地，对任意整数 r，可定义 r 级比赛和 r 级分差向量 $\mathbf{S}^{(r)}$，试给出由 $\mathbf{M}$ 和 $\mathbf{S}$ 计算 $\mathbf{S}^{(r)}$ 的公式。