数学建模

浙江大学数学系　谈之奕

tanzy@zju.edu.cn

运筹与统计

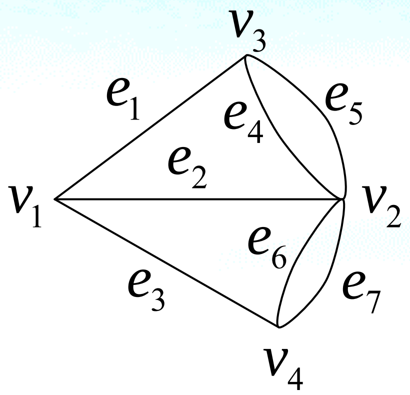
图的基本概念

浙江大学 ZheJiang University

数学建模

图

- 有序三元组 $G=(V,E,\varphi)$ 称为（无向）图（**graph**）
  - V 为顶点集，V 中元素称为顶点（**vertex**）
  - E 为边集，E 中元素称为边（**edge**）
  - φ 为 E 到 $V\times V$ 的函数，称为关联函数（**incident function**）
- 图可以用以点表示顶点，以曲线段表示边的图形来表示，但图与上述表示中点和曲线段在图形中的相对位置无关



$$V=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$$

$$E=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6,e_7\}$$

$$\varphi(e_1)=(v_1,v_3),\ \varphi(e_2)=(v_1,v_2),$$

$$\varphi(e_3)=(v_1,v_4),$$

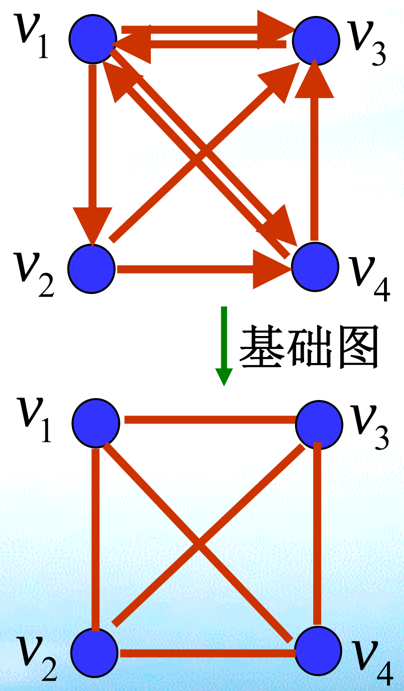
$$\varphi(e_4)=\varphi(e_5)=(v_2,v_3),$$

$$\varphi(e_6)=\varphi(e_7)=(v_2,v_4)$$

顶点与边

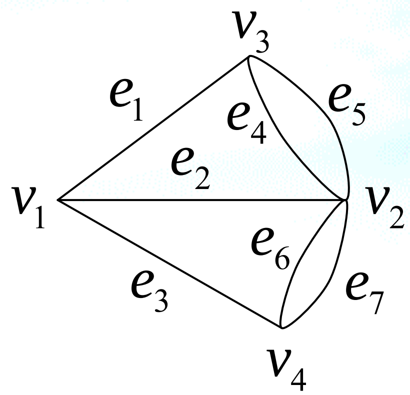
数学建模

- 若 $\varphi(e)=(u,v)$，则称 u,v 为 e 的端点（**endpoint**），也称 u,v 与 e 关联（**incident**）
  - 与同一个顶点关联的两条边或与同一条边关联的两个顶点称为相邻（**adjacent**）
- 若 φ 的像集 $V\times V$ 中的元素为有序对，则称相应的图 $D=(V,A,\varphi)$ 为有向图（**digraph**）
  - 有向图中的边也称作弧（**arc**）
  - 若 $\varphi(a)=(u,v)$，则称 u 为 a 的起点，v 为 a 的终点
- 对图中每条边 e 赋予权重 $w(e)$，可得赋权图

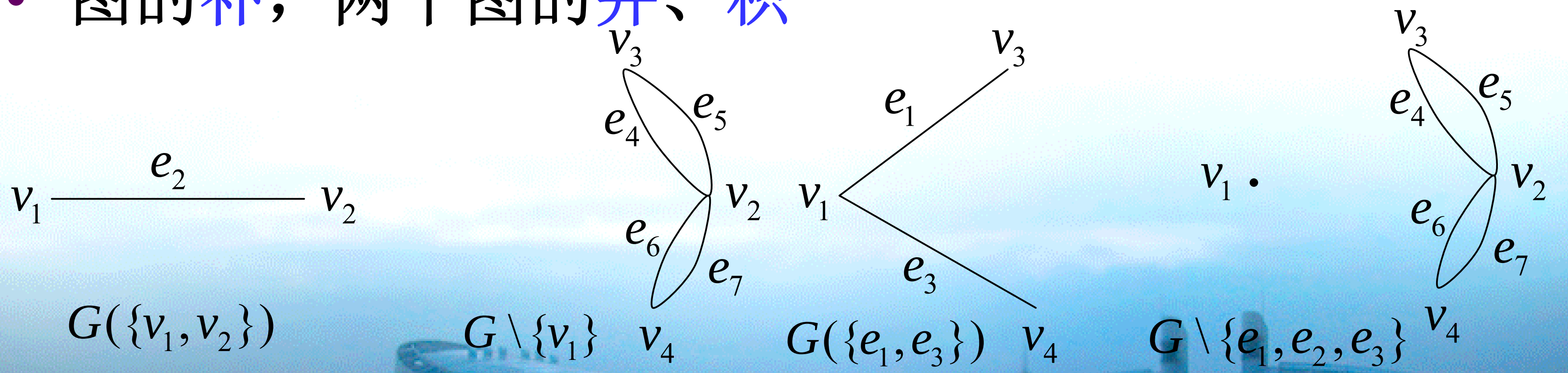


子图与图的运算

- 图 $G'=(V',E',\varphi')$ 称为图 $G=(V,E,\varphi)$ 的子图（**subgraph**），若 $V'\subseteq V$，$E'\subseteq E$ 且 φ' 是 φ 在 E' 上的限制
  - 生成子图：$V'=V$
  - 导出子图：$G(V')$， $G\setminus V'$， $G(E')$，$G\setminus E'$



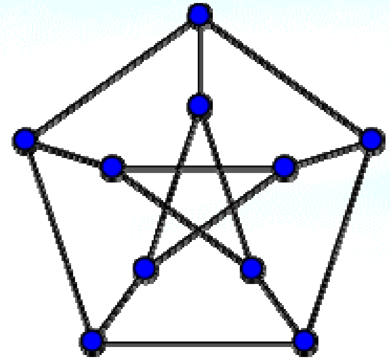
- 图的补，两个图的并、积



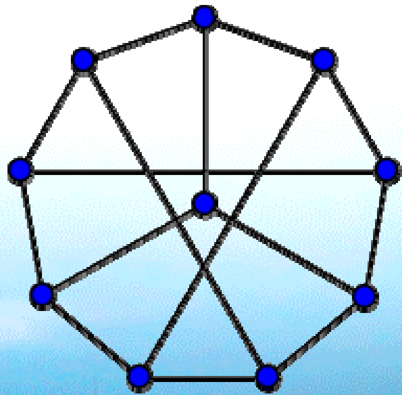
同构

数学建模

- 称图 $G=(V,E,\varphi)$ 与图 $G'=(V',E',\varphi')$ 同构（**isomorphic**），若存在两个双射 $\sigma:V\to V',\tau:E\to E'$，使得
$$\varphi(e)=(x,y)\Leftrightarrow\varphi'(\tau(e))=(\theta(x),\theta(y))$$



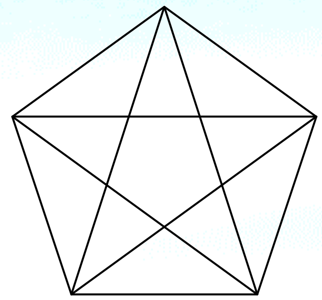
- 判断两个图是否同构是复杂性迄今未决的重要 $\mathcal{NP}$ 问题之一



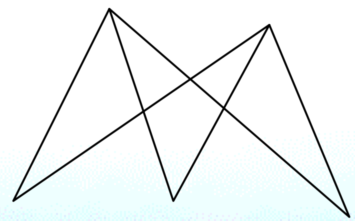
- 判断图 G 是否存在子图与另一图 G' 同构是 $\mathcal{NP}$-完全问题

简单图

- 两端点相同的边称为环（**loop**），两端点分别相同的两条边称为平行边（**parallel edges**）
- 既没有环，也没有平行边的图称为简单图（**simple graph**）
- 任何两个不同顶点之间都有边相连的简单图称为完全图（**complete graph**）
- 若图的顶点集可以划分为两个非空集合 X 和 Y，使得 $X\,(Y)$ 中任何两顶点之间无边相连，则称该图为二部图（**bipartite graph**）



完全图 K_5



完全二部图 $K_{2,3}$

路

- 顶点和边交替出现的序列 $W = v_{i_0} e_{i_1} v_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_k} v_{i_k}$ 称为连接顶点 v_{i_0} 和 v_{i_k} 的长度为 k 的途径（**walk**）
  - 若图为简单图，则可省略途径中边的符号
  - 若图为有向图，所有边的方向均为自 v_{i_j} 指向 $v_{i_{j+1}}$，W 为从 v_{i_0} 到 v_{i_k} 的有向途径
- 经过边互不相同的途径称为迹（**trail**），经过顶点互不相同的迹称为路（**path**），起点和终点相同的路称为圈（**cycle**）
- 若无向图中两顶点之间有途径相连，则必有迹相连；若无向图中两顶点之间有迹相连，则必有路相连

连通

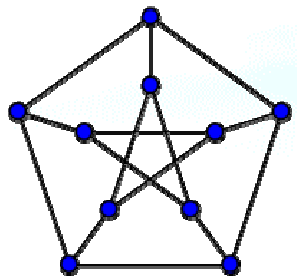
数学建模

- 若图中顶点 u,v 之间有路相连，则称 u,v 连通（**connected**）
  - 连通是图中顶点之间的一种等价关系，连通关系将 V 划分为 ω 个等价类 $V_1,\cdots,V_\omega$
  - $G(V_i), i=1,\cdots,\omega$ 称为 G 的连通分枝（**connect component**）
  - 连通分枝数为 1 的图称为连通图（**connect graph**）
- 有向图中顶点 u,v 称为强连通（**strongly connected**）的，若既存在从 u 到 v 的有向路，又存在从 v 到 u 的有向路

度

数学建模

- 与顶点v关联的边的数目称为 v 的度（**degree**），记为 $d_G(v)$
  - $\Delta(G)$ 和 $\delta(G)$ 分别表示图的最大度和最小度
  - 度为 0 的点称为孤立点（**isolated vertex**）
  - 所有顶点度相等的图称为正则图（**regular graph**）



- 有向图中以 v 为起点的弧的数目称为v的出度（**out degree**），以v为终点的弧的数目称为v的入度（**in-degree**）

$$\sum_{v\in V} d_G(v) = 2|E|$$

- （**Handshaking**定理）
  - 无向图中度为奇数的顶点总有偶数个

图与矩阵

- 设 $|V|=n, |E|=m$
  - 矩阵 $\mathbf{M}=(m_{ij})_{n\times m}$ 称为图的关联矩阵（**incidence matrix**），其中

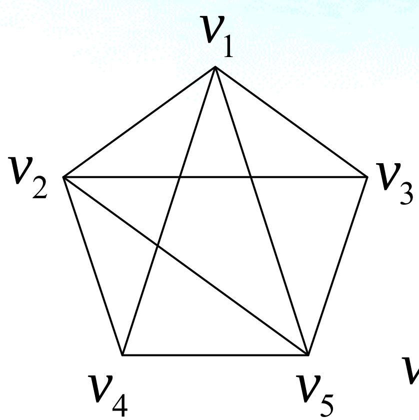
$$m_{ij}=\begin{cases}1 & e_j\text{以}v_i\text{为起点}\\ -1 & e_j\text{以}v_i\text{为终点}\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

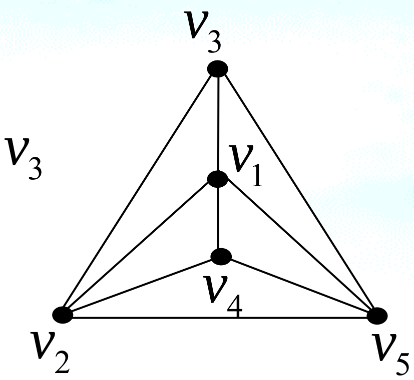
  - 矩阵 $\mathbf{A}=(\mu_{ij})_{n\times n}$ 称为图的邻接矩阵（**adjacency matrix**），其中 μ_{ij} 为以 v_i 为起点，v_j 为终点的边的数目
- 图的特征值、谱、能量 $\varepsilon(G)=\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|$

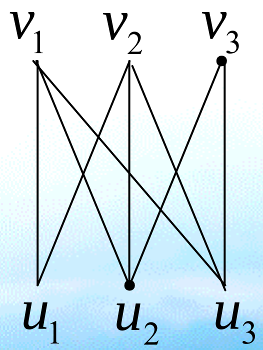
平面图

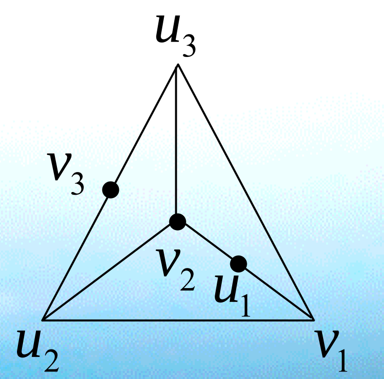
数学建模

- 若存在 G 的一种图形表示，使得除端点外，任何两条边均不相交，则称G为平面图（**planar graph**）
  - $K_5 \setminus \{e\}, K_{3,3} \setminus \{e\}$ 均为平面图，但 $K_5, K_{3,3}$ 均不是平面图
- 非空平面图G将平面划分成的连通区域 $f_1, \cdots, f_\phi$ 称为 G的面。G的对偶图（**dual graph**）以$\cdots, f_\phi$为顶点f_i, f_j之间有边相连当且仅当f_i, f_j的边界有公共边



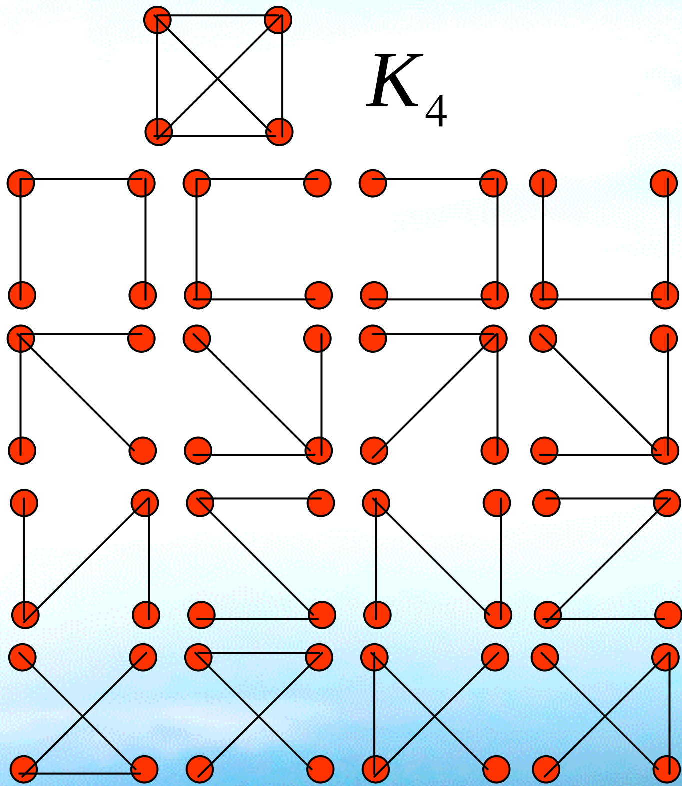






简单无向图的性质

- 若 G 连通，则 $|E|\geq|V|-1$；若 G 无圈，则 $|E|\leq|V|-1$
- G 是二部图当且仅当 G 中不含奇圈
- 连通 $2-$正则图必为圈
- 无圈图称为森林（**forest**），连通无圈图称为树（**tree**）
- 完全图 K_n 有 n^{n-2} 颗不同的生成树

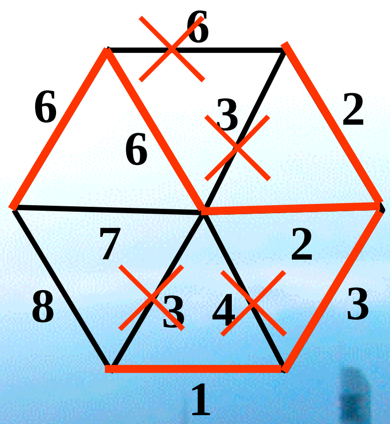

K_4

最小生成树

数学建模

- 赋权图的所有生成树中总权和最少的生成树称为最小生成树（**minimum spanning tree，MST**）
- **Kruskal** 算法
  - 将边按权非降顺序排列
  - 加入不会导致圈出现的边

贪婪思想　拟阵（**matroid**）

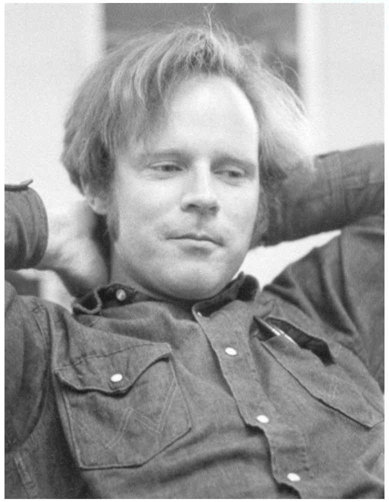


Otakar Borůvka
（1899－1995）
捷克数学家

Joseph Bernard Kruskal
(1928 –2010)
美国数学家、
计算机科学家

最短路

- 连接赋权图中两个顶点之间总权和最小的路称为最短路（**shortest path**）
  - **Dijkstra**算法　动态规划
  - **Bellman–Ford**算法：负权图
  - **Floyd–Warshall**算法：所有点对之间的最短路



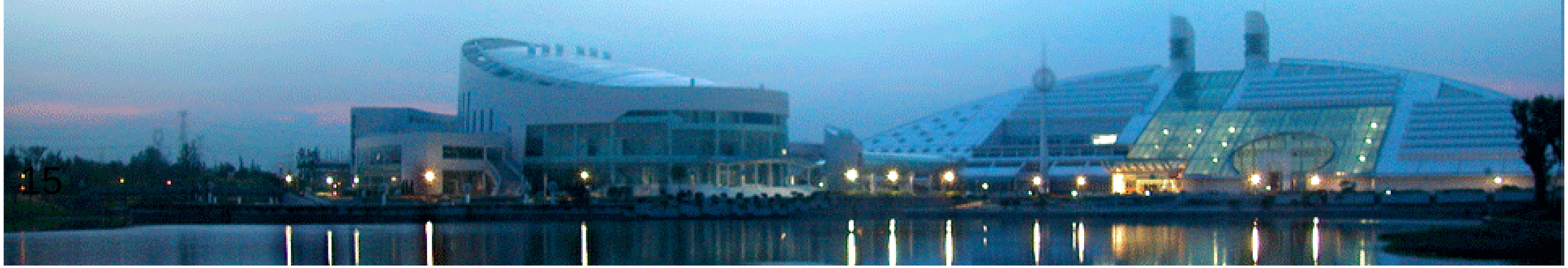
Robert W Floyd
（**1936 –2001**）
美国计算机科学家
1978年**Turing**奖得主

Otakar Borůvka
（**1930 –2002**）
荷兰计算机科学家
1972年**Turing**奖得主

图的应用

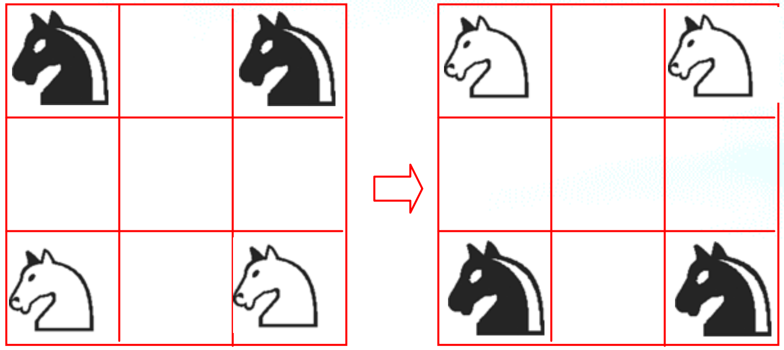
数学建模

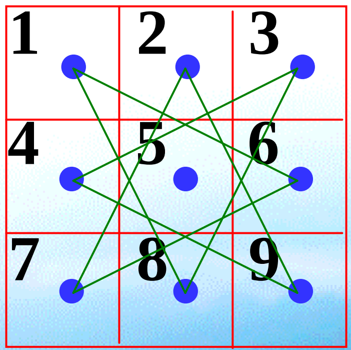
- 一群人中任两人要么互相认识，要么互相不认识，则总有两人认识的人数相同
  - 以每一人为一个顶点，两个顶点之间有边相连当且仅当相应的两人互相认识。每人认识的人数为顶点的度
  - 若顶点数为 n，且不存在两人认识的人数相同，则 n 个顶点的度为 $0,1,\cdots,n-1$
  - 度为$n-1$的顶点必与所有其他顶点有边相连，故不存在度为0的顶点　矛盾

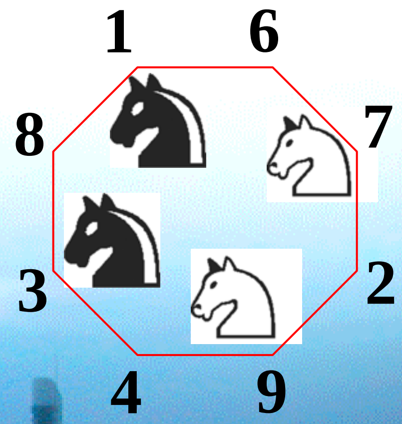


黑白易位

- 一 3×3 方格棋盘，第一行左、右两个方格各置一匹黑马，第三行左、右两个方格各置一匹黑马，按国际象棋中马的走子规则，如何用最少的步数将黑马白马的位置互换
- 将每个格子作为图的一个顶点，对应两个格子的顶点之间有边相连当且仅当马能从一个跳到另一个







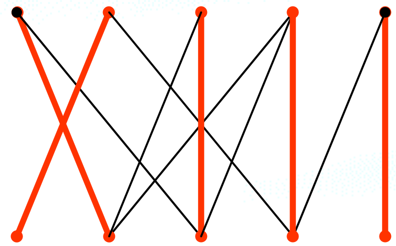
浙江大学 ZheJiang University

运筹与统计

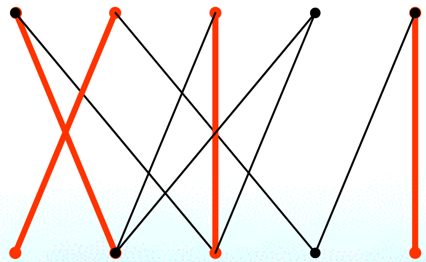
匹配

匹配

- E的非空子集M称为G的一个匹配（**matching**），若M中任何两条边在G中均不相邻
- 若G中所有顶点都与匹配 M中某条边关联，则称 M为完美匹配（**perfect matching**）
- 图中边数最多的匹配称为最大基数匹配，赋权图中总权重最大的匹配称为最大权匹配，赋权图中总权重最小的完美匹配称为最小权完美匹配



完美匹配



最大基数匹配

浙江大学

ZheJiang University

数学建模

匹配

完全二部图的最小权完美匹配＝指派问题

	最大基数匹配	最大权匹配
二部图	**Egervary，1931**	**Kuhn，1955**
任意图	**Edmonds，1965**	**Edmonds，1965**

Jack Edmonds

（1934－ ）

加拿大数学家

Edmonds, J., Paths, trees, and flowers. *Canadian Journal of Mathematics*, 17, 449–467, 1965

Edmonds, J., Maximum matching and a polyhedron with 0,1-vertices. *Journal of Research National Bureau of Standards B*, 69, 125–130, 1965

Blossom Algorithm

运筹与统计

环游

Hamiltion圈

- 经过图的所有顶点恰好一次的圈称为 **Hamilton圈**（**Hamiltion cycle**）。存在**Hamilton**圈的图称为**Hamilton图**
- **Hamilton图问题（HC）**：判断图 G 是否为一**Hamilton**图

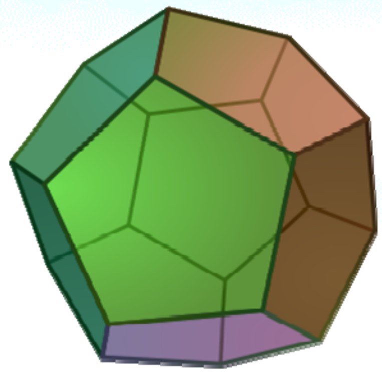
Hamilton图问题是图论中最重要的问题之一。图论中有很多判别**Hamilton**图的充分/必要条件和对不同类型特殊图是否为**Hamilton**图的讨论。在计算复杂性理论中重点关注**Hamilton**图判别算法的复杂性

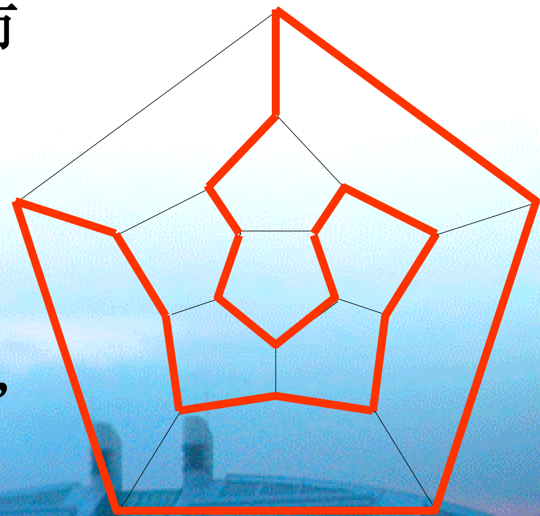
William Rowan Hamilton
爱尔兰数学家
(1805-1865)

21

周游世界

- **1859年Hamilton发明了周游世界的游戏icosian game**
  - 一个正十二面体的二十个顶点各代表一个城市，是否有一条从某个城市出发，沿正十二面体的棱行走，经过每个城市恰好一次，最后回到出发城市的路线





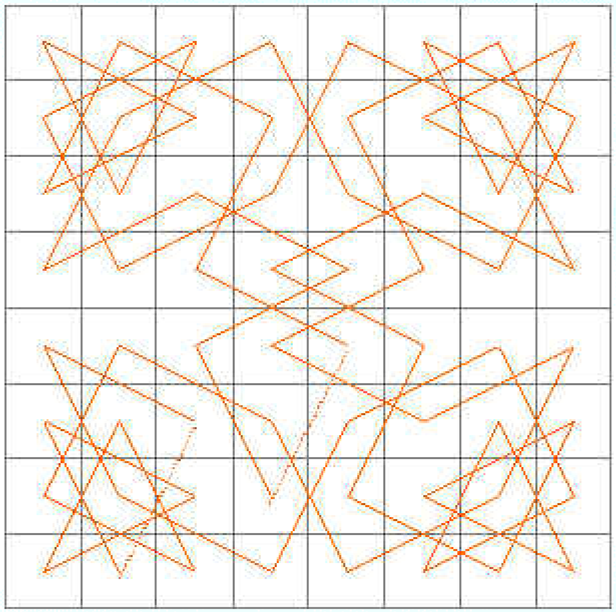
Amsterdam, Ann Arbor, Berlin, Budapest, Dublin, Edinburgh, Jerusalem, London, Melbourne, Moscow, Novosibirsk, New York, Paris, Peking, Prague, Rio di Janeiro, Rome, San Francisco, Tokyo, Warsaw

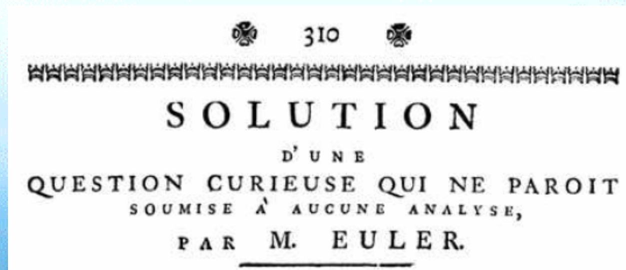
22

Knight's tour

数学建模

- 在 8×8 国际象棋棋盘上，马能否按其走子规则，从一个格子出发，经过其它格子恰好一次，最后回到起点
  - 构造“跳马图”，每一格子为图的一个顶点，两个格子之间有边相连当且仅当马可按走子规则从一个格子跳到另一个格子
- $m\times n\ (m\le n)$方格棋盘对应的“跳马图”为**Hamiltonian**图，除非
  - m,n 均为奇数
  - 或 $m=1,2,4$
  - 或 $m=3, n=4,6,8$




310

SOLUTION

D'UNE

QUESTION CURIEUSE QUI NE PAROIT

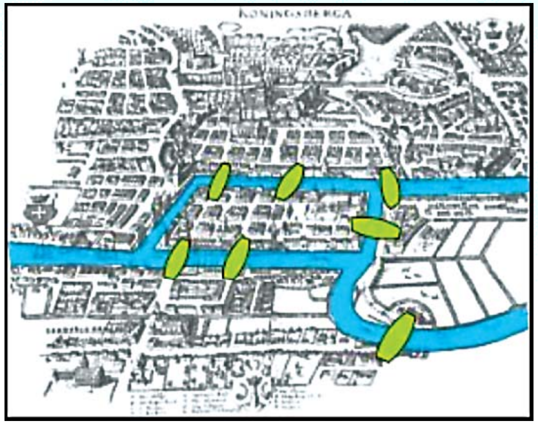
SOUMISE À AUCUNE ANALYSE,

PAR M. EULER.

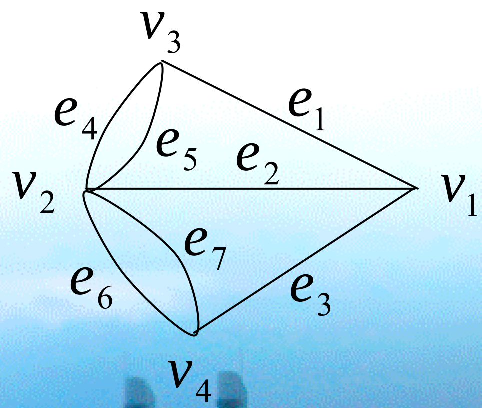
Euler, L., Solution of a curious question which does not seem to have been subjected to any analysis, *Mémoires de l'Academie Royale des Sciences et Belles Lettres*, 15, 310–337, 1759

23

七桥问题



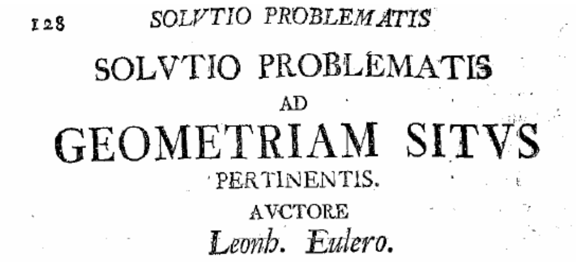
- 在**Konigsberg**城，有七座桥梁建在**Pregel**河上，是否有一条从城中某处出发，经过每座桥梁恰好一次，最后回到出发点的路线
- 以河流分割而成的城市区域为顶点，桥梁为边，边的端点为该桥梁连接的两片区域，七桥问题等价于由此得到的图中是否存在一条经过所有边的闭迹



Euler图

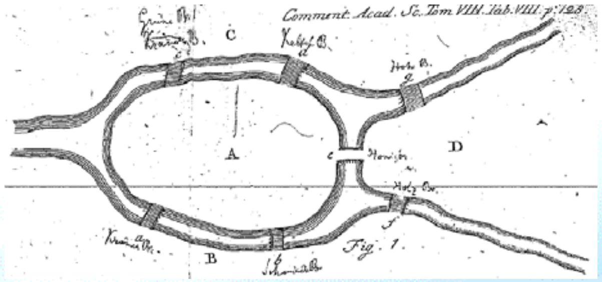
数学建模

- 称经过图的所有边恰好一次的闭迹为**Euler回路**，存在**Euler**回路的图为**Euler图**
- 一连通图是**Euler**图的充要条件是图中没有奇度顶点



128 SOLVTIO PROBLEMATIS

SOLVTIO PROBLEMATIS
AD
GEOMETRIAM SITVS
PERTINENTIS.
AVCTORE
Leonb. Eulero.



Leonhard Euler

(1707-1783)

瑞士数学家

Euler, L., ***Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*****, 8, 128–140, 1741**

1736年Euler对七桥问题的研究被认为是现代图论的起源

Euler回路

数学建模

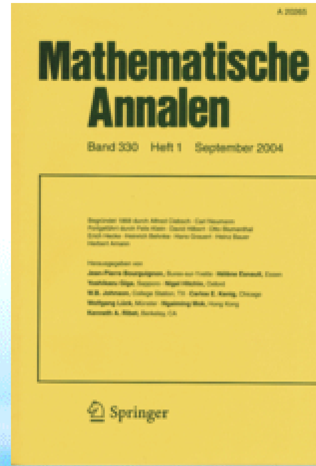
- 求**Euler**图 G 的一条**Euler**回路的算法
  - 从任一顶点出发，找一条闭迹 C

    所有顶点的度为偶数
  - 考虑图 $G \setminus C$，若其边集非空，从某一个 C 经过的顶点出发找 $G \setminus C$ 的一条闭迹 C'；将 C 和 C' 合为一条闭迹，仍记为 C

    图是连通的　　$G \setminus C$ 所有顶点的度为偶数
  - 重复上步直至 G 的边均包含在 C 中

Carl Hierholzer (1840 –1871)

德国数学家



Hierholzer, C., Wiener, C., Ueber die Möglichkeit, einen Linienzug ohne Wiederholung und ohne Unterbrechung zu umfahren, *Mathematische Annalen*, 6, 30-32, 1873

中国邮递员问题

浙江大学
ZheJiang University
数学建模

- **Chinese Postman Problem，CPP**
  - 一个投递员每次上班，要走遍他负责送信的段，然后回到邮局。问应该怎样走才能使所走的路程最短

第10卷 第3期 数 学 学 报 Vol. 10, No. 3
1960年12月 ACTA MATHEMATICA SINICA Dec., 1960

奇 偶 点 图 上 作 业 法*

管 梅 谷
(山 东 师 范 学 院)

§1. 問題的提出

在邮局搞綫性規划时，发現了下述問題："一个投递員每次上班，要走遍他負責送信的段[1]，然后回到邮局．問应該怎样走才能使所走的路程最短．"

这个問題可以归結为

"在平面上給出一个連通的綫性图[2]，要求将这个綫性图从某一点开始一笔画出(允許重复)，并且最后仍回到起点，問怎样画才能使重复路綫最短．"

管梅谷，数学学报, 10, 263-266, 1960

中国邮递员问题

- 若图是**Euler**图，**Euler**回路即是中国邮递员问题的最优解
- **1973**年，**Edmonds**和**Johnson**给出了中国邮递员问题的多项式时间算法
  - 任意图的最小权完美匹配
  - 图的最短路
  - **Euler**图的**Euler**回路
- 混合图上的中国邮递员问题是$\mathcal{NP}$ —完全的

Edmonds, J., Johnson, E. L., Matching, Euler tours and the Chinese postman, *Mathematical Programming*, 5, 88-124, 1973

运筹与统计

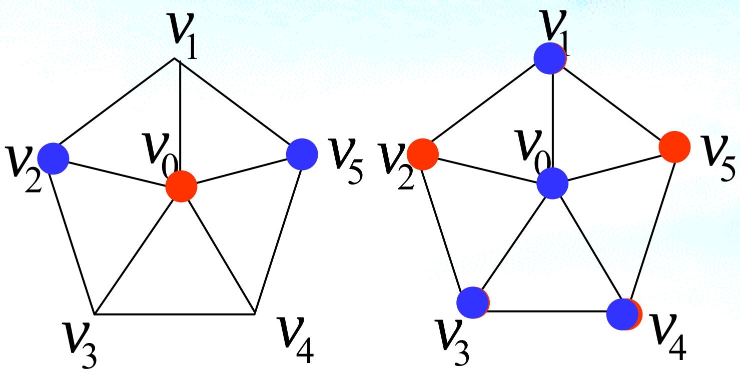
覆盖

独立集、顶点覆盖和团

浙江大学 ZheJiang University

数学建模

- V的子集 S 称为G 的独立集（**independent set**），若 S 中任何两个顶点在 G中均不相邻。顶点数最多的独立集称为最大独立集
- V 的子集 S称为G 的顶点覆盖（**vertex cover**），若E中每条边都与S中某点关联。顶点数最少的顶点覆盖称为最小顶点覆盖
- G 的完全子图称为团（**clique**）。顶点数最多的团称为最大团



$\{v_0\}$与$\{v_2, v_5\}$都是独立集，后者是最大独立集

$\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ 与$\{v_0, v_1, v_3, v_4\}$ 都是顶点覆盖，后者是最小顶点覆盖

独立集、顶点覆盖和团

浙江大学 ZheJiang University 数学建模

- S是G的独立集当且仅当$V\setminus S$是G的顶点覆盖，当且仅当S是G^c的团
- S是G的最大独立集当且仅当$V\setminus S$是G的最小顶点覆盖
  - $\alpha+\beta=n$，α,β分别为独立数、点覆盖数
- 最大独立集、最小顶点覆盖和最大团都是$\mathcal{NP}-$完全问题

顶点覆盖问题最坏情况界为2的多项式时间近似算法

皇后问题

数学建模

- 在 8×8 国际象棋棋盘上
  - 最多可放置几个皇后，使得任一皇后不会被其他皇后吃掉　　最大独立集
  - 最少需放置几个皇后，使得任何一个格子上的棋子可被至少一个皇后吃掉
- 构造“皇后图”，每个格子为图的一个顶点，两个格子之间有边相连当且仅当位于一个格子中的皇后可吃掉另一个格子中的子

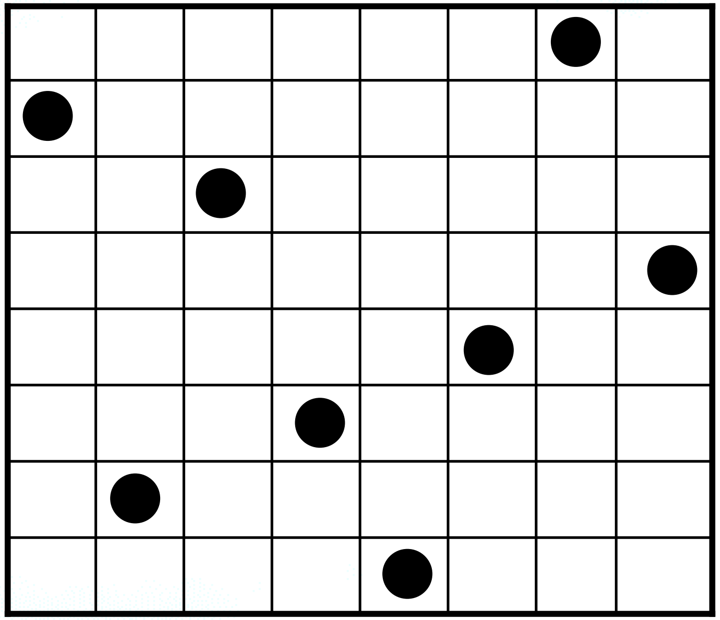
Karl Friedrich Gauss (1777-1855)

德国数学家

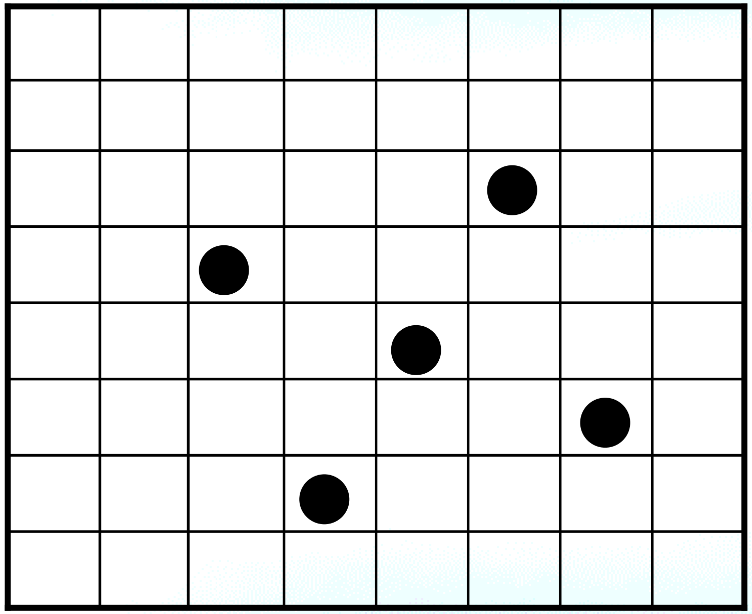
浙江大学 ZheJiang University

数学建模

皇后问题



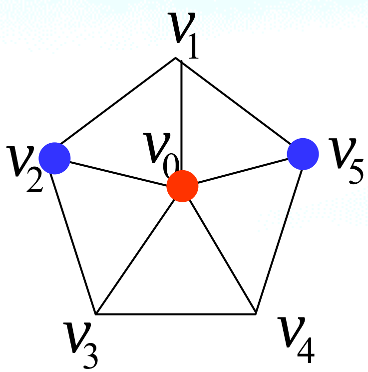
八皇后问题



五皇后问题　　最小支配集

支配集

- V 的子集 S 称为 G 的支配集（**dominated set**），若对 G 中任意顶点 v，要么 $v \in S$，要么 v 与 S 中某个顶点在 G 中相邻。顶点数最少的支配集称为最小支配集
- 最小支配集问题是$\mathcal{NP}$—完全的



$\{v_0\}$与$\{v_2, v_5\}$都是支配集，后者是最小支配集

极小支配集与极大独立集

运筹与统计

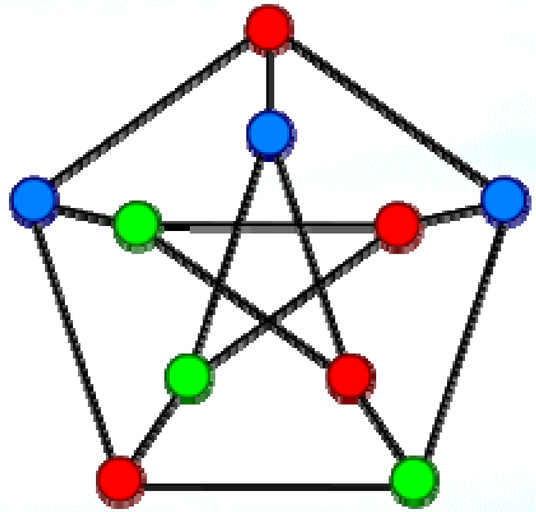
着色

顶点着色

浙江大学 ZheJiang University

数学建模

- 图 G 的顶点 k 着色是指将图 G 的每一个顶点用 k 种颜色之一着色，使得相邻的顶点不染同一种颜色
- 将 G 的顶点按上述要求着色所需的最少颜色数称为图 G 的色数（**chromatic number**），记为 $\chi(G)$
- 对任意简单图 G，$\chi(G) \le \Delta(G)+1$，若 G 连通且不是奇圈或完全图，$\chi(G) \le \Delta(G)$
- 图的顶点着色问题是 $\mathcal{NP}$—完全的，且不存在最坏情况界为常数的多项式时间近似算法，除非 $\mathcal{P}=\mathcal{NP}$



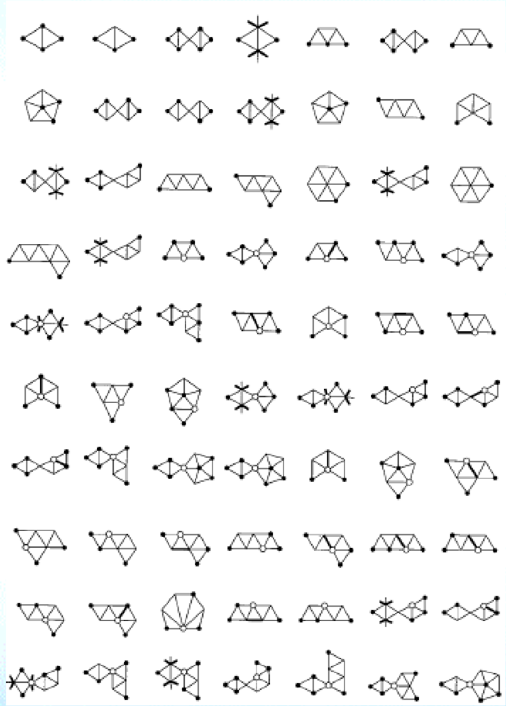
Petersen 图

$\chi(G)=3$

四色定理

- 设图 G 是任一平面图，则 $\chi(G) \le 4$
  - 地图着色可转化为其对偶图的顶点着色问题
- 四色定理提出于**1852**年。**1976**年，美国数学家**Appel** 和**Haken**利用计算机证明了四色定理

Appel, K., Haken, W., Every Planar Map is Four Colorable, *Illinois Journal of Mathematics*
Part I. Discharging, 21, 429–490, 1979
Part II. Reducibility, 21, 491–567,1979



可约构形组成的不可免完备集（部分）

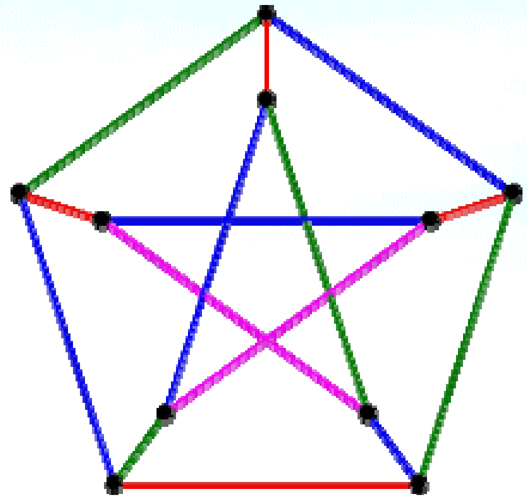
边着色

数学建模

- 图 G 的边 k 着色是指将图 G 的每一条边用 种颜色之一着色，使得相邻的边不染同一种颜色
- 将图G 的边按上述要求着色所需的最少颜色数称为图 G 的边色数（**edge chromatic number**），记为 $\chi'(G)$
- 若 G 是非空简单图，则

$$\Delta(\mathrm{G}) \le \chi'(\mathrm{G}) \le \Delta(\mathrm{G})+1$$

- 判断图 G 是否满足 $\chi'(\mathrm{G})=\Delta(\mathrm{G})$ 是 $\mathcal{NP}$-完全的



Petersen 图

$\chi'(G)=4$

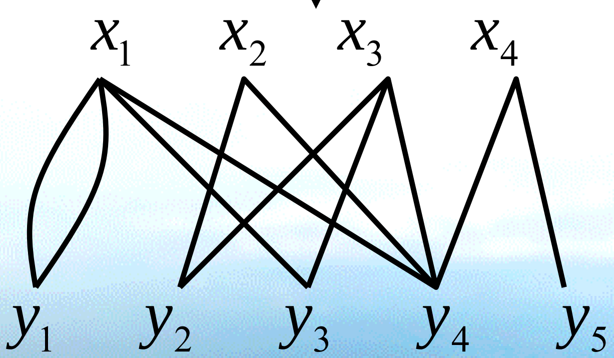
排课表问题

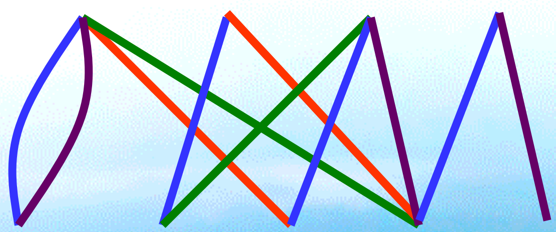
数学建模

- 有 m 位教师和 n 个班级，教师 i 每天为班级 j 授课 p_{ij} 个学时，如何安排一张课表，可使每天课时数最少
- 构造有平行边的二部图 G，顶点集 $V = \mathrm{X} \cup \mathrm{Y}$，$X$ 为教师集，Y 为班级集，X 中顶点 i 和 Y 中顶点 j 有 p_{ij} 条边相连
- 排课表问题等价于 G 的边着色问题，每天最少课时数即为 $\chi'(\mathrm{G})$

排课表问题

$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$





教师 \ 课时	1	2	3	4
x_1	y_1	y_1	y_3	y_4
x_2	y_2		y_4	
x_3	y_3	y_4		y_2
x_4	y_4	y_5		

排课表问题

浙江大学 ZheJiang University 数学建模

- 若可以提供的教室数有限制，只能通过增加课时来错开教室使用，若给定可用的教室数，则需安排多少个课时
- 设 G 是二部图，对任意的 $p \geq \Delta(G)$，G 中存在 p 个无公共边的匹配 M_i，使得

$$E = \bigcup_{i=1}^{p} M_i, \text{ 且 } \left\lfloor \frac{|E|}{p} \right\rfloor \leq |M_i| \leq \left\lceil \frac{|E|}{p} \right\rceil, \ i = 1, \cdots, p$$

排课表问题

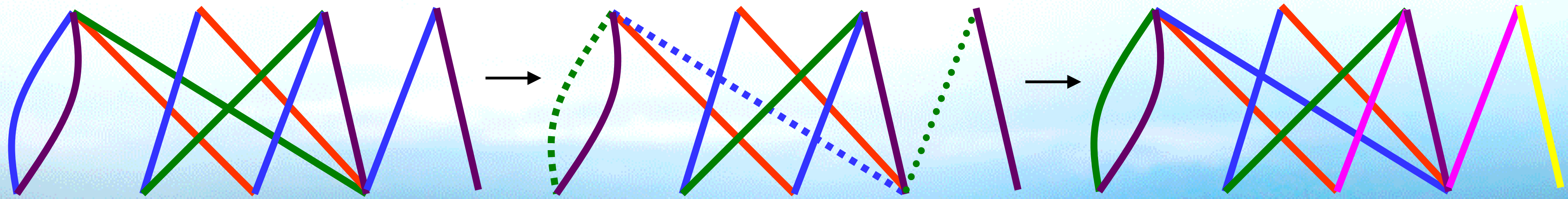
数学建模

	1	2	3	4
x_1	y_4	y_1	y_3	y_1
x_2	y_2		y_4	
x_3	y_3	y_4		y_2
x_4		y_5		y_4

三间教室

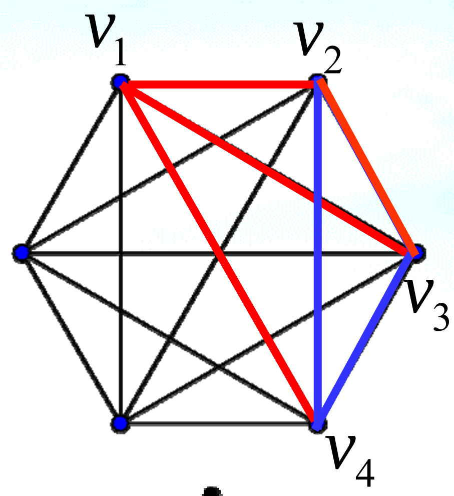
	1	2	3	4	5	6
x_1	y_4	y_3	y_1		y_1	
x_2	y_2	y_4				
x_3			y_4	y_3	y_2	
x_4				y_4		y_5

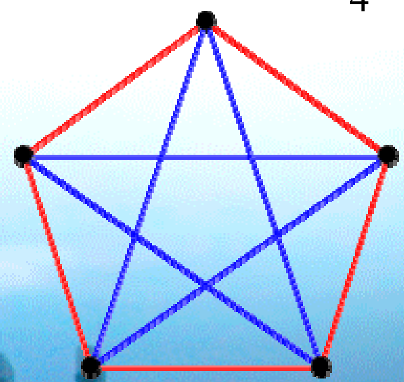
两间教室



Ramsey数

- 用红、蓝两种颜色对完全图K_6的边进行着色，每条边着两种颜色中的一种，着色后的图中要么存在一个边全是红色的团K_3，要么存在一个边全为蓝色的团K_3
  - 任取K_6的一个顶点v_1，与它关联的5条边中至少有三条着同一种颜色，不妨设为红色，其中三条边的另一端点分别为v_2, v_3, v_4
  - 若边v_2v_3, v_2v_4, v_3v_4均着蓝色，则它们组成一蓝色的K_3；若v_2v_3, v_2v_4, v_3v_4中有一条边着红色，不妨设为v_2v_3，则v_1, v_2, v_3组成一个红色的K_3
- 对K_5进行类似着色，存在一种着色方案，其中既无红色的K_3，也无蓝色的K_3





Ramsey数

数学建模

- 用红、蓝两种颜色对K_n的边进行着色，每条边着两种颜色中的一种。给定正整数 s,t，要求任一着色后的图中要么存在一个边全为红色的K_s，要么存在一个边全为蓝色的K_t。n的最小值称为**Ramsey数**，记为$r(s,t)$

Frank Plumpton Ramsey (1903 –1930)
英国数学家、哲学家、经济学家

$r(3,3)=6$

$r(2,t)=t$

Ramsey, F. P., On a problem of formal logic, *Proceedings London Mathematical Society*, *S2*-30, 264–286, 1930.

浙江大学 ZheJiang University

数学建模

Ramsey数

$$r(s,t) \le r(s-1,t) + r(s,t-1)$$

$$r(3,4) = 9, r(3,5) = 9, r(3,5) = 14,$$

$$r(3,6) = 18, r(3,7) = 23,$$

$$r(3,8) = 28, r(3,9) = 36$$

$$r(4,4) = 18, r(4,5) = 25$$

$R(4,5) = 25$

Brendan D. McKay
DEPARTMENT OF COMPUTER SCIENCE
AUSTRALIAN NATIONAL UNIVERSITY
ACT 0200, AUSTRALIA
e-mail: bdm@cs.anu.edu.au

Stanisław P. Radziszowski
DEPARTMENT OF COMPUTER SCIENCE
ROCHESTER INSTITUTE OF TECHNOLOGY
ROCHESTER, NEW YORK 14623, USA
e-mail: spr@cs.rit.edu

ABSTRACT

The Ramsey number $R(4,5)$ is defined to be the least positive integer n such that every n-vertex graph contains either a clique of order 4 or an independent set of order 5. With the help of a long computation using novel techniques, we prove that $R(4,5) = 25$. © 1995 John Wiley & Sons, Inc.

***Journal of Graph Theory*, 19, 309-322, 1995.**

Erdös asks us to imagine an alien force, vastly more powerful than us, landing on Earth and demanding the value of $R(5,5)$ or they will destroy our planet. In that case, he claims, we should marshall all our computers and all our mathematicians and attempt to find the value. But suppose, instead, that they ask for $R(6,6)$. In that case, he believes, we should attempt to destroy the aliens.

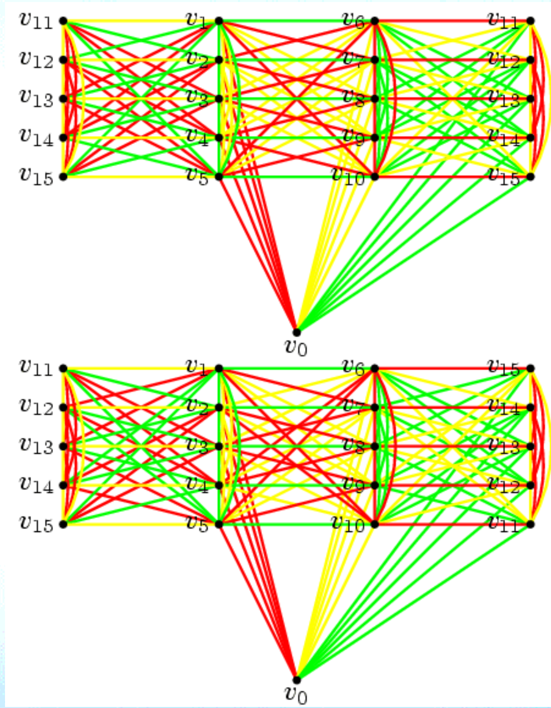
——Spencer, J., *Ten Lectures on the Probabilistic Method*

Ramsey数

浙江大学 ZheJiang University

数学建模

- （**IMO 1964**）17位科学家中每一位和其余16位通信，在他们的通信中所讨论的仅有三个问题，而任两位科学家通信时所讨论的是同一问题，证明至少有三位科学家通信时所讨论的是同一问题
  - 选定科学家 v_1，他和其它16位科学家中至少6位讨论的是同一问题
  - 若这6位科学家中的其中两位讨论的也是该问题，则这两位与 v_1 三人讨论的是同一问题
  - 若这6位科学家中的任两位讨论都是另两个问题之一，则由 $r(3,3)=6$，其中至少有三位讨论的是一个问题



$$r(3,3,3)=17$$

Greenwood, R. E., Gleason, A. M., Combinatorial Relations and Chromatic Graphs, *Canadian Journal of Mathematics*, 7, 1-7, 1955.

浙江大学 ZheJiang University

运筹与统计

网络流

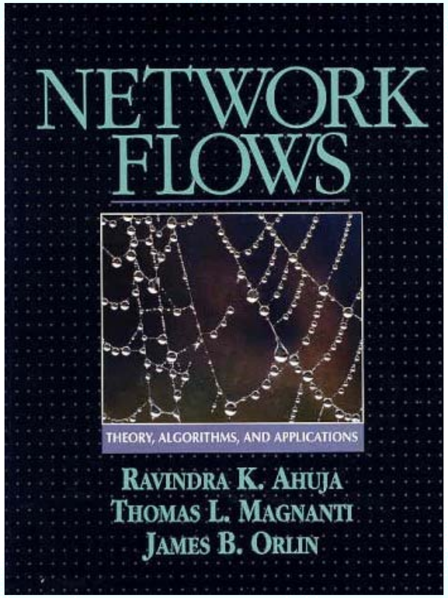
网络流

浙江大学 ZheJiang University

数学建模

- 有向图 $N=(V,A,\varphi)$，弧 (v_i,v_j) 的容量（**capacity**）为 $u_{ij}\in\mathbb{Z}^+$。N 有两个特殊顶点 s,t，源（**source**）s 入度为 0，流（**sink**）t 出度为 0 。N 也称作网络
- 记 f_{ij} 为通过弧 (v_i,v_j) 的流量，满足以下条件的 $f=\{f_{ij}\}$ 称为可行流
  - 经过每条弧的流量不超过每条弧的容量，即 $0\le f_{ij}\le u_{ij}$
  - 除源和流外，流入每个顶点 v_i 的流量等于流出 v_i 的流量，即

$$\sum_{j:(v_i,v_j)\in A} f_{ij}-\sum_{j:(v_j,v_i)\in A} f_{ji}=0, v_i\neq s,t$$

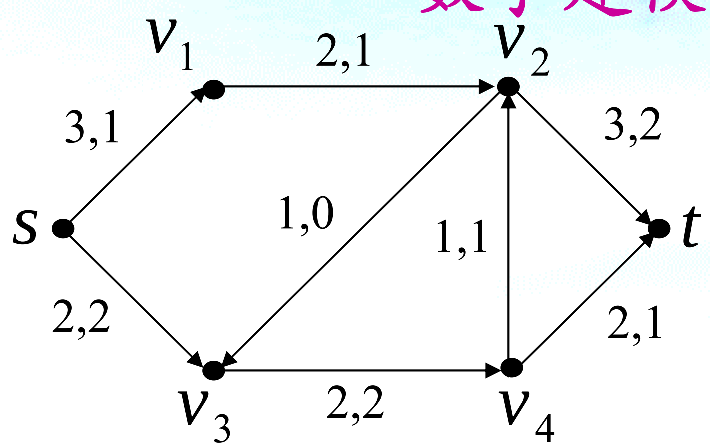


Ahuja, R.K., Magnanti, T.L., Orlin, J.B., *Network Flows: Theory, Algorithms, and Applications*, Prentice Hall, 1993.

最大流

数学建模

- 若 f 为可行流，则流出源 s 的流量与流入流 t 的流量相同，称其为 f 的流量
- 求一网络流量最大的可行流问题称为最大流（**maximum flow**）



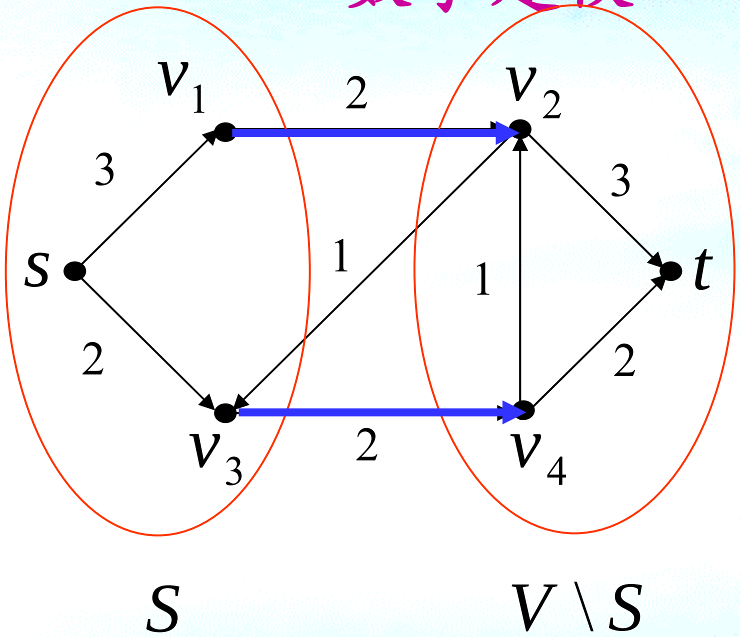
可行流

图中弧上第一个数字表示弧的容量，第二个数字表示当前每条弧的流量

该可行流的流量为3

割

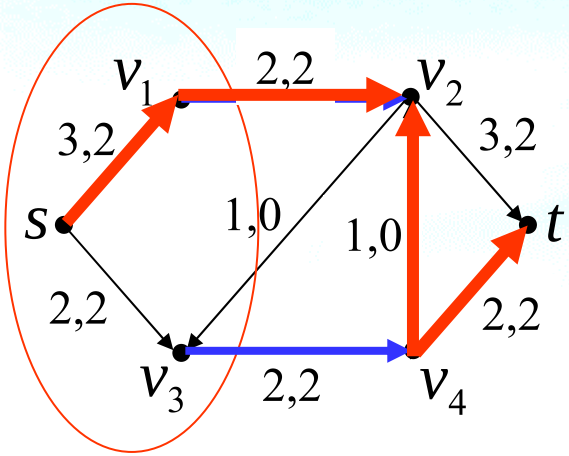
- 设 $S \subseteq V$，且 $s \in S, t \in V \setminus S$ ，用 $(S,\bar{S})$ 表示所有起点在 S 中，终点在 $V \setminus S$ 中的弧的全体，称为网络的**割**（**cut**），割中弧的容量之和称为**割量**
- 网络中割量最小的割称为最小割



割，割量为 **4**

最大流与最小割

- （最大流最小割定理）任一网络中，最大流量等于最小割量
- **Ford**和 **Fulkerson** 于**1956** 年证明了最大流最小割定理，并提出了最大流问题的一个算法，但该算法不是多项式时间的。**Edmonds** 和 **Karp**对该算法作了改进，使之成为多项式时间算法

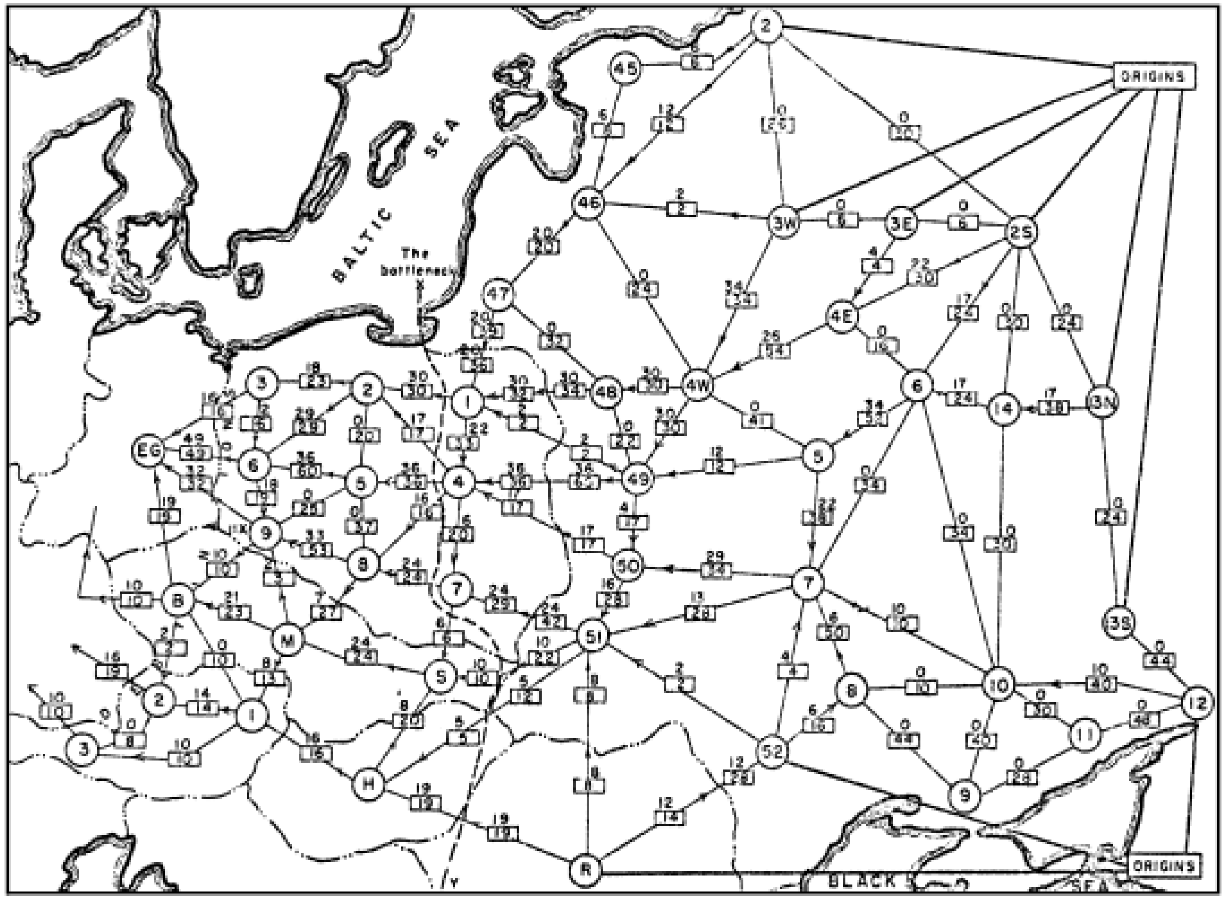


最大流，流量为 **4**

Ford., L. R., Fulkerson, D. R., Maximal flow through a network, *Canadian Journal of Mathematics*, 8, 399-404, 1956

RAND 1954

浙江大学
ZheJiang University
数学建模



Schematic diagram of the railway network of the Western Soviet Union and Eastern European countries, with a maximum flow of value 163,000 tons from Russia to Eastern Europe, and a cut of capacity 163,000 tons indicated as "The bottleneck"

——Harris, T.E., Ross, F.S., *Fundamentals of a Method for Evaluating Rail Net Capacities*, Research Memorandum-1573, The RAND Corporation,1955.

最小费用流

- 有向图$G=(V,A,\varphi)$，顶点 $v_i \in V$ 的供应量为b_i（b_i为负时实为需求量），且$\sum_{i\in V} b_i = 0$。弧(v_i,v_j)的容量为$u_{ij} \in \mathbb{Z}^+$，费用为$c_{ij} \in \mathbb{Z}^+$
- 满足以下条件的流 $f=\{f_{ij}\}$称为可行流
  - 经过每条弧的流量不超过每条弧的容量，即 $0 \le f_{ij} \le u_{ij}$
  - 流出每个顶点 v_i 的流量与流入v_i 的流量之差为b_i，即

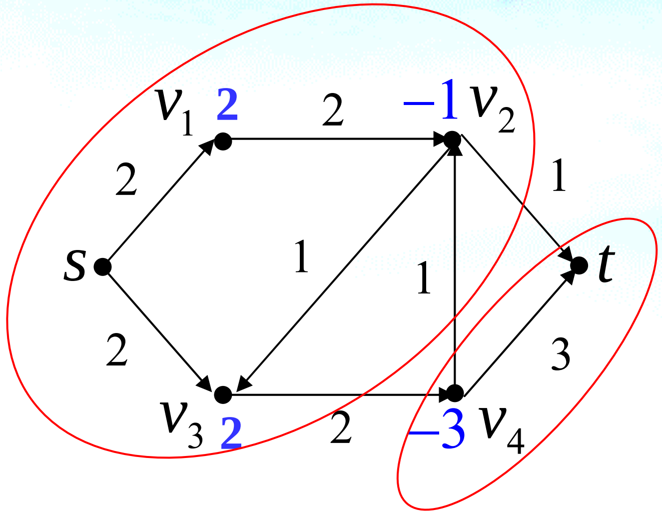
$$\sum_{j:(v_i,v_j)\in A} f_{ij} - \sum_{j:(v_j,v_i)\in A} f_{ji} = b_i, v_i \in V$$

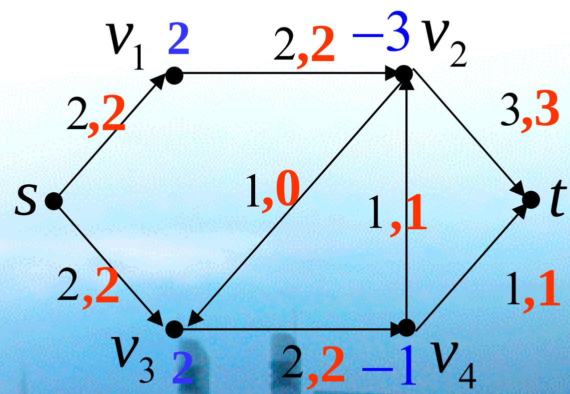
- 求可行流 f，使得 $\sum_{(i,j)\in A} c_{ij} f_{ij}$ 最小的网络流问题称为最小费用流（**minimum cost flow**）

可行性

数学建模

- 给定有向图 G 和各顶点的供应量 b_i，可通过最大流问题判断是否存在可行流
    - 新增源 s 和流 t，给定弧 (s,v_i) 的容量为 $\max\{0,b_i\}$，弧 (v_i,t) 的容量为 $\max\{0,-b_i\}$，得到网络 N
    - G 存在可行流的充要条件是 N 的最大流流量为 $\sum_{v_i\in V}\max\{0,b_i\}$





运输问题

浙江大学 ZheJiang University

数学建模

- 运输问题（**transportation problem**）
  - 某产品有m个产地和n个销地，产地x_i的产量为g_i，销地y_j的销量为h_j，产销平衡，自产地x_i到销地y_j的单位运费为c_{ij}，采用怎样的调运方案可将产品从产地运到销地，且总费用最少
- 构造有向图$G=\{X\cup Y, A, \varphi\}$，$X$代表$m$个产地，$Y$代表$n$个销地，$X$中任一顶点$x_i$的供应量为$g_i$，$Y$中任一顶点$y_j$的供应量为$-h_j$，弧$(x_i, y_j)$的费用为$c_{ij}$，容量为$+\infty$，则运输问题可转化为$G$的最小费用流问题
- 运输问题有线性规划、表上作业法等多种其它解法。最小费用流问题也可转化为运输问题求解

$$\sum_{i=1}^{m} g_i = \sum_{j=1}^{n} h_j \qquad\qquad \sum_{i=1}^{m} g_i + \left(\sum_{j=1}^{n} -h_j\right) = 0$$

代表问题

- 学校从修读每门课程的同学中选择一名召开座谈会，要求参加同学中来自专业 k 的学生数不超过 u_k 。假设每位同学属于一个专业，修读若干门课程

课程集 学生集 专业集

  - 构造网络 N，顶点集为 $\{s,t\}\cup C\cup S\cup M$
    - 对任意 c_i ，弧 (s,c_i) 的容量为 1
    - 若学生 s_j 修读课程 c_i，则弧 (c_i,s_j) 的容量为 1
    - 若学生 s_j 属于专业 m_k，则弧 (s_j,m_k) 的容量为 1
    - 对任意 m_k，弧 (m_k,t) 的容量为 u_k
  - 代表问题有解当且仅当网络 N 的最大流流量为 $|C|$

浙江大学
ZheJiang University

运筹与统计

联赛赛程编制问题

意甲联赛赛程

浙江大学
ZheJiang University
数学建模

- **2012-2013赛季意大利足球甲级联赛赛程（节选）**

第1轮	第2轮	第3轮	第4轮
亚特兰大－拉齐奥	博洛尼亚－AC米兰	切沃－拉齐奥	亚特兰大－巴勒莫
切沃－博洛尼亚	卡利亚里－亚特兰大	AC米兰－亚特兰大	博洛尼亚－佩斯卡拉
佛罗伦萨－乌迪内斯	乌迪内斯－尤文图斯	热那亚－尤文图斯	卡利亚里－罗马
热那亚－卡利亚里	国际米兰－罗马	佛罗伦萨－卡塔尼亚	卡塔尼亚－那不勒斯
尤文图斯－帕尔马	那不勒斯－佛罗伦萨	那不勒斯－帕尔马	国际米兰－锡耶纳
AC米兰－桑普多利亚	拉齐奥－巴勒莫	巴勒莫－卡利亚里	尤文图斯－切沃
佩斯卡拉－国际米兰	帕尔马－切沃	佩斯卡拉－桑普多利亚	拉齐奥－热那亚
巴勒莫－那不勒斯	桑普多利亚－锡耶纳	罗马－博洛尼亚	帕尔马－佛罗伦萨
罗马－卡塔尼亚	卡塔尼亚－热那亚	锡耶纳－乌迪内斯	桑普多利亚－都灵
锡耶纳－都灵	都灵－佩斯卡拉	都灵－国际米兰	乌迪内斯－AC米兰

联赛赛制

- 镜像双循环主客场制
  - 每支队伍确定一个城市（或场馆）作为其主场
  - 任何两支队伍之间交手两次，分别在各自的主场进行
  - 所有比赛按时段分为若干轮，每一轮所有队伍恰有一场比赛
  - 后半程第 k 轮与前半程第 k 轮的每场比赛的交手双方完全相同，主客场互换
- 同城队伍比赛限制
  - 同城队伍不能同时进行主场比赛
    - 同城队伍进行比赛时，约定其中一队为主场作战，另一队为客场作战
  - 同城队伍间的比赛不能在半程的前三轮和后三轮

联赛赛制

浙江大学
ZheJiang University
数学建模

- 连续主客场限制
  - 不得出现同一队伍连续三场或以上主（客）场比赛的情况
  - 同一队伍连续两场主（客）场比赛的次数尽可能少
- **2012－2013赛程各队break数** **break**
  - **0**次：佛罗伦萨、卡利亚里
  - **3**次：亚特兰大、那不勒斯、巴勒莫、卡塔尼亚、乌迪内斯、佩斯卡拉、拉齐奥、罗马、帕尔马、锡耶纳
  - **4**次：都灵、尤文图斯、切沃、桑普多利亚、博洛尼亚、热那亚、国际米兰、**AC**米兰

总**62**次

赛程编制问题

浙江大学
ZheJiang University
数学建模

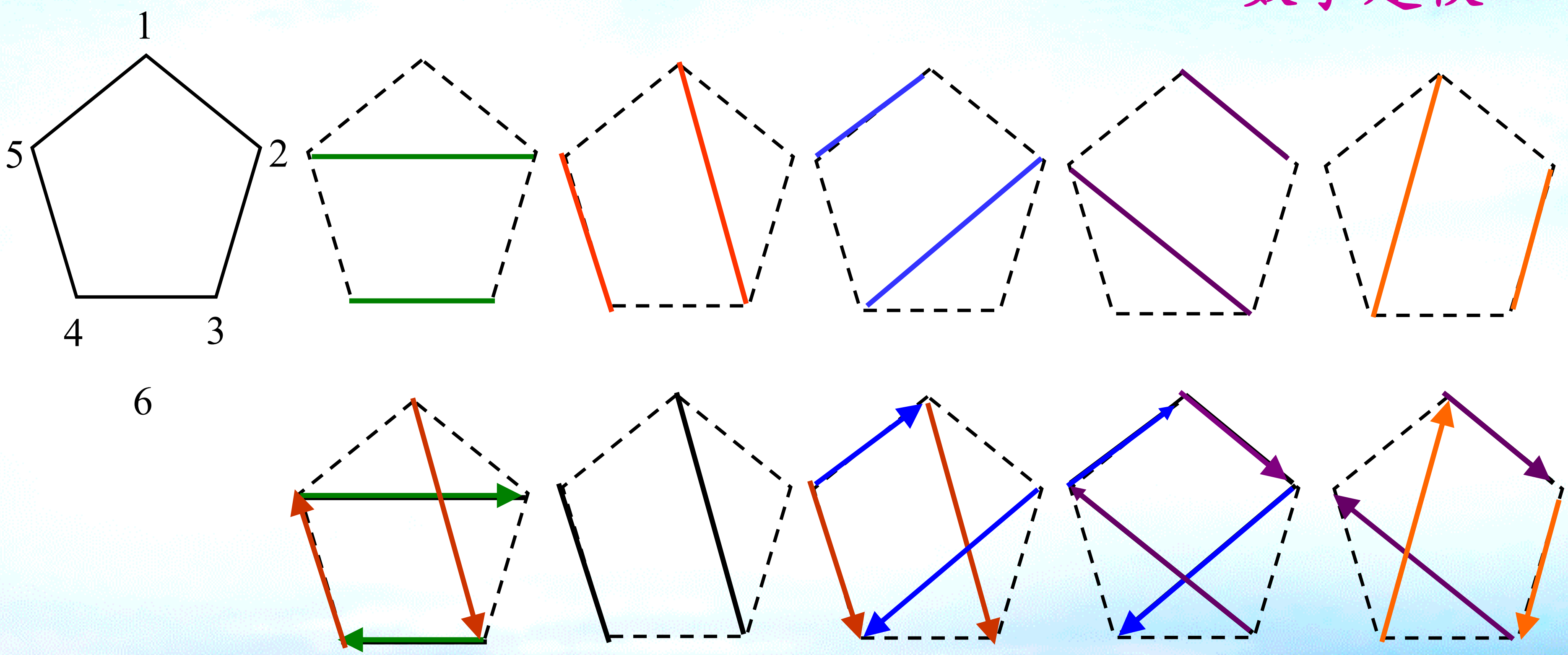
- 给定队伍数量和联赛赛制，如何编制一份包含各轮次所有比赛对阵关系和主客场安排的赛程，满足赛制的所有要求，并具有尽可能好的性质
  - 总**break**数尽可能少
  - 各队**break**数尽可能均衡
  - ……
- 上述问题可通过数学规划求解，但队伍数量较多时，单个数学规划过于复杂，求解困难

单循环赛程

数学建模

- 对 n（n 为偶数）支队伍的单循环赛程，全程所有队伍总**break**数至少为 $n-2$
  - 用形如 **HAH…HA**，长度为 $n-1$（奇数）的字符串表示每支队伍的主客场安排，称为模式
  - 任何两支队伍的模式互不相同
  - 只有**HAHA…HAH** 和 **AHAH…AHA** 两种模式没有 **break**，其它模式的**break**数至少为 1
- 存在一张赛程，全程所有队伍总**break**数恰为 $n-2$

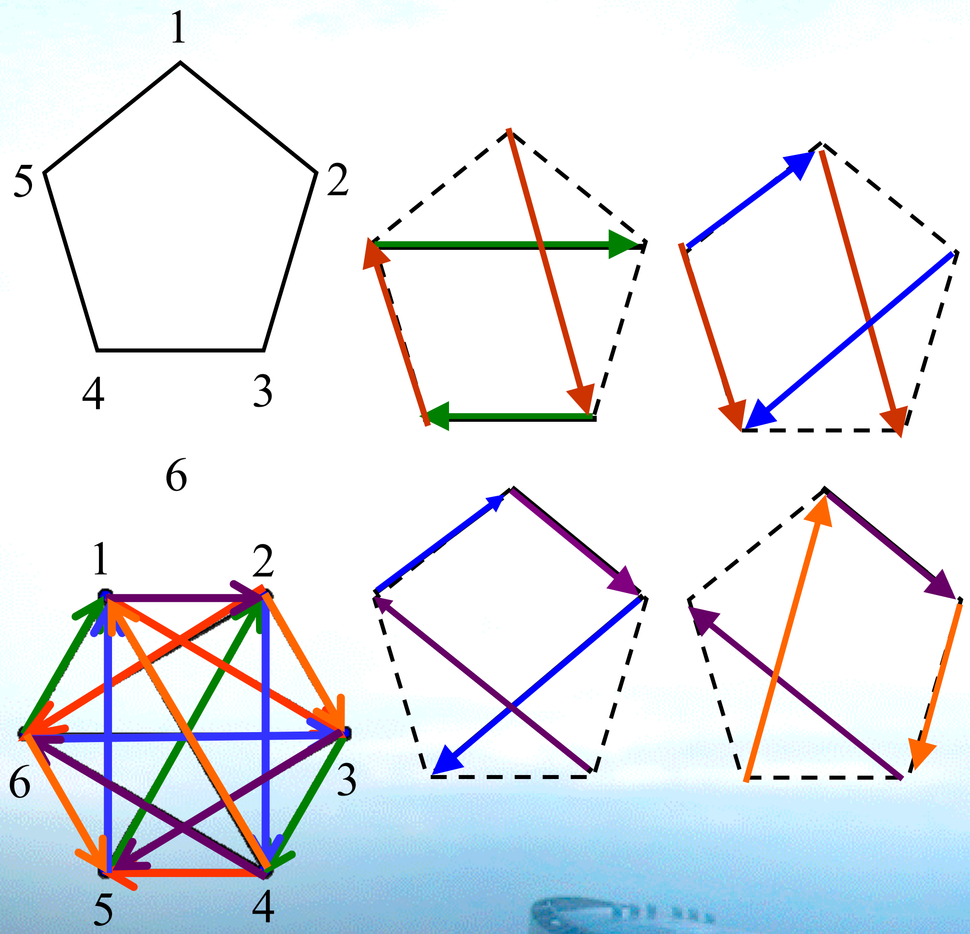
单循环赛程



浙江大学 ZheJiang University

数学建模

单循环赛程



	1	2	3	4	5
1	−6	+3	−5	+2	−4
2	−5	+6	+4	−1	+3
3	+4	−1	−6	+5	−2
4	−3	+5	−2	+6	+1
5	+2	−4	+1	−3	−6
6	+1	−2	+3	−4	+5

镜像双循环比赛

- 对 n（n为偶数）支队伍的镜像双循环赛程，全程所有队伍总**break**数至少为 $3n-6$
  - 若半程没有**break**，则全程也没有**break**，这样的队伍至多有两支
  - 若半程只有一个**break**，由于模式字符串长度为奇数，在前后半程之间有一个**break**
  - 若半程有至少两个**break**，全程**break**数至少为**4**
  - 总**break**数至少为 $3(n-2)=3n-6$
- 意甲联赛总**break**数下界为 $3(20-2)=54$

两阶段法

数学建模

- 变换队伍的编号，可以得到 $n!$份不同的赛程，它们的**break**数均是最少的。但从中未必能找到满足其他与队伍有关约束的赛程，**break**数最少也未必是赛程的唯一要求
- 对复杂问题，可尝试分阶段求解，以分散难点、简化问题
  - （**schedule-break**）对给定的符合要求的对阵方案，如何安排每场比赛的主客场，使赛程总**break**数最少
  - （**break-schedule**）如何选取一组**break**数较少的模式，并将它们与队伍一一对应，以满足与队伍有关的约束要求
- 以下讨论按**schedule-break**顺序解决单循环赛制问题的方法

对阵方案与赛程

浙江大学 ZheJiang University 数学建模

- 同一对阵方案可以有不同的主客场安排，对应的**break**数也不同。不同对阵方案安排主客场后的最少**break**数也不同

	1	2	3
1	+3	+2	+4
2	+4	−1	−3
3	−1	+3	+2
4	−2	−4	−1

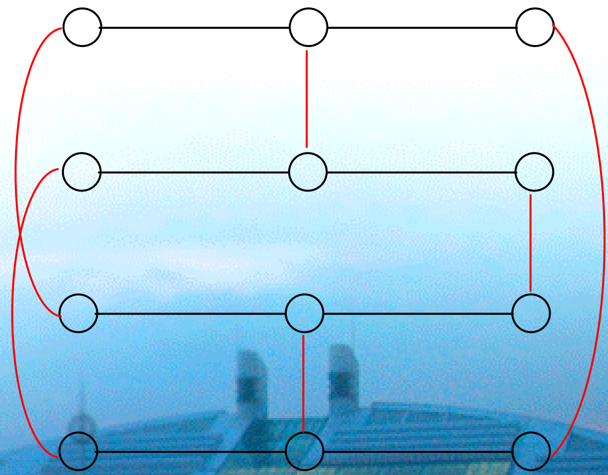
	1	2	3
1	+3	−2	+4
2	+4	+1	−3
3	−1	+3	+2
4	−2	−4	−1

对阵方案图

数学建模

- 构造对应于某一对阵方案的无向图，并约定一种直观的图形表示
  - 每一队伍的每一轮比赛为一顶点，代表同一队伍所有比赛的顶点位于同一水平线上，代表同一轮所有比赛的顶点位于同一垂直线上
  - 代表同一队伍相邻两轮的两场比赛的顶点用水平边连接
  - 代表每场比赛交手双方的顶点用垂直边连接

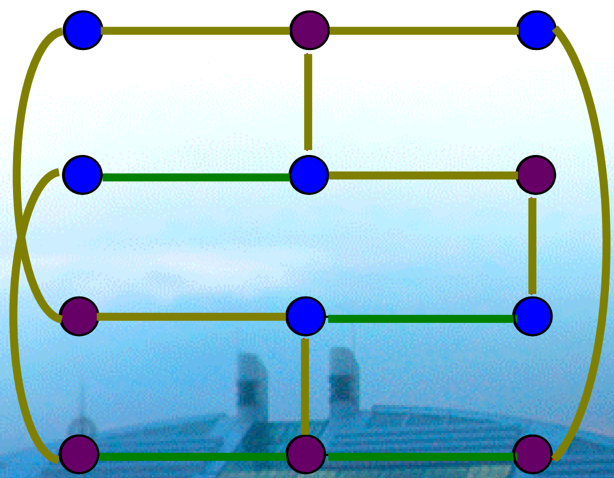
	1	2	3
1	3	2	4
2	4	1	3
3	1	3	2
4	2	4	1



着色

- 主客场安排对应于对阵方案图顶点集的一种双色着色方案，着同一种颜色的顶点对应的队伍在该轮均为主（客）场作战
  - 垂直边连接的两个顶点需着不同颜色
  - 水平边连接的两个顶点着相同颜色的边的数目，即为赛程的**break**数
- 极小化**break**数等价于极大化对阵方案图中两个端点着不同颜色的边的数目

	1	2	3
1	+3	+2	+4
2	+4	−1	−3
3	−1	+3	+2
4	−2	−4	−1

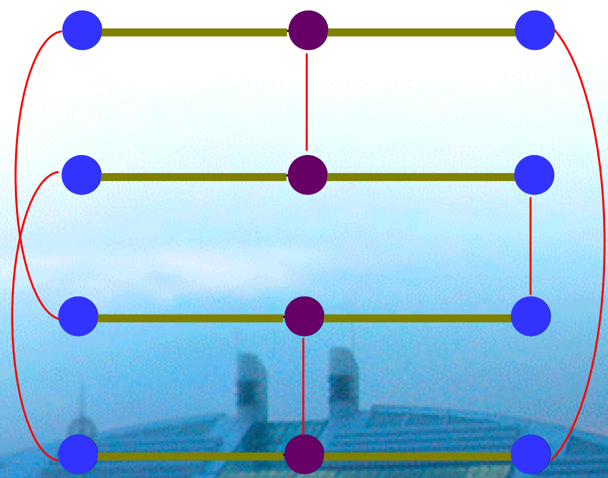


割

数学建模

- 着同一种颜色的顶点组成的两个子集构成顶点集的一个划分
- 图的顶点集的划分与图的割一一对应
- 极小化**break**数等价于求图的最大割（**max cut**），但要求所有的垂直边都在割内

	1	2	3
1	3	2	4
2	4	1	3
3	1	3	2
4	2	4	1



极小化**break**数 ⟺ 极大化两个端点着不同颜色的边的数目 ⟺ 对阵方案图的特殊最大割

最大割

- 对所有的水平边赋权 1，所有的垂直边赋权 $M > n(n-2)$，由于水平边共有 $n(n-2)$ 条，赋权对阵方案图的最大割必包含所有垂直边
- 最大割问题是$\mathcal{NP}$-完全问题，对其最优算法和近似算法已有较多研究
  - 对赋权对阵方案图这一特殊情形，是否存在更好算法

Goemans, M. X., Williamson, D. P., Improved approximation algorithms for maximum cut and satisfiability problems using semidefinite programming, *Journal of the ACM*, 42, 1115–1145, 1995

Trevisan, L., Max Cut and the Smallest Eigenvalue, *SIAM Journal on Computing*, 41, 1769–1786, 2012

极小化 **break**数 $\Longleftrightarrow$ 极大化两个端点着不同颜色的边的数目 $\Longleftrightarrow$ 对阵方案图的特殊最大割 $\Longleftrightarrow$ 赋权对阵方案图的最大割

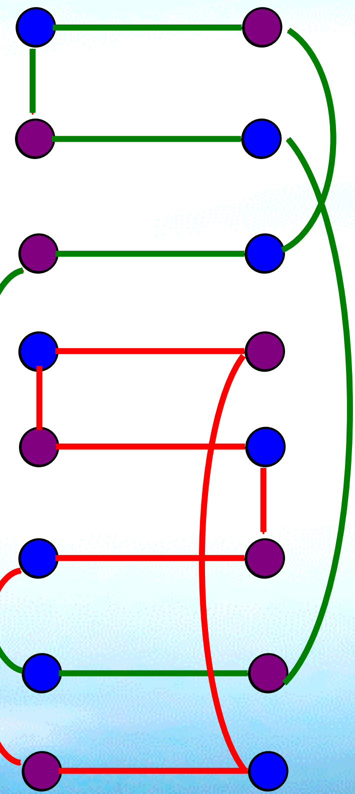
浙江大学 ZheJiang University

数学建模

双轮法

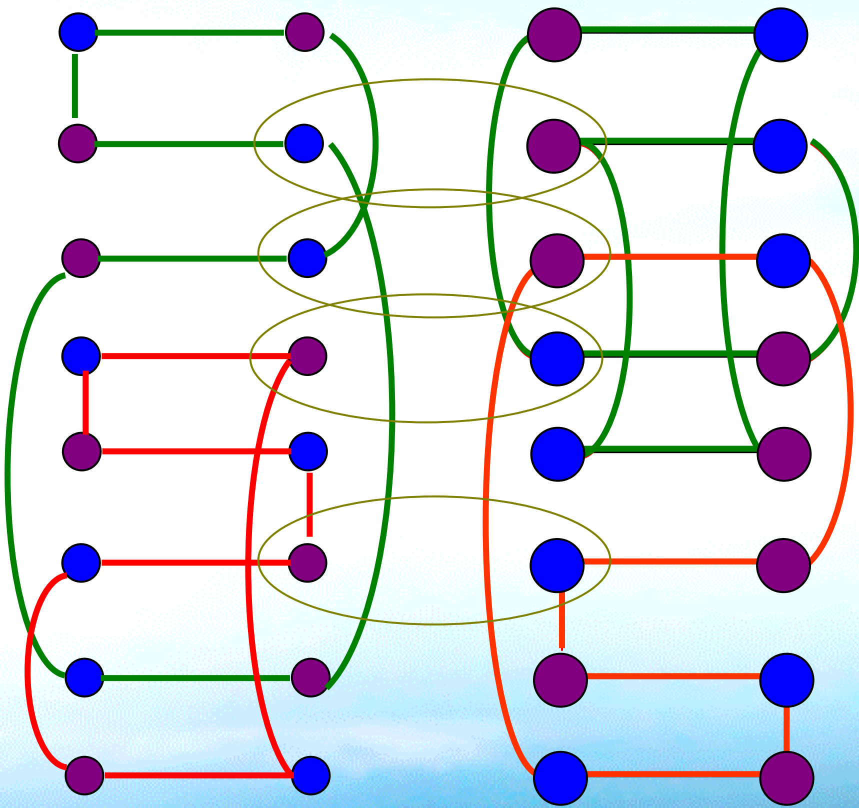
- 考虑对阵方案图中由代表相邻两轮的顶点导出的子图，该图为2－正则图
- 对任一对阵方案，总存在对其中任意相邻两轮比赛的一种主客场安排，在这两轮间任一队伍都不出现**break**

	1	**2**	**3**	**4**	**…**
1	2	3	4	5	…
2	1	7	5	4	…
3	7	1	8	6	…
4	5	8	1	2	…
5	4	6	2	1	…
6	8	5	7	3	…
7	3	2	6	8	…
8	6	4	3	7	…



双轮法

- 对 $k=1,\cdots,\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor$，应用上述方法安排第 $2k-1$ 轮和 $2k$ 轮比赛的主客场
- 若在第 $2k$ 轮和 $2k+1$ 轮比赛出现 b 次**break**，则交换第 $2k+1, 2k+2$ 轮比赛的主客场安排，两轮间**break**数为 $n-b$



双轮法

数学建模

- 采用双轮法，$2k-1$轮与$2k$轮之间不出现**break**，$2k$轮与$2k+1$轮之间的**break**数不超过$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$
- 对任意 n 支队伍的对阵方案，采用双轮法安排主客场，其**break**数不超过$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \cdot \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$
- 当 $n=2^p$时，存在一种对阵方案，不论怎样安排主客场，**break**数至少为 $\frac{n(n-2)}{4} = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \cdot \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$

浙江大学 ZheJiang University

数学建模

下界

8支队伍，12次break

Post, G. Woeginger, G. J., Sports tournaments, home–away assignments, and the break minimization problem, *Discrete Optimization*, 3, 165–173, 2006.

Brouwer, A. E., Post, G. F., Woeginger, G. J., Tight bounds for break minimization in tournament scheduling, *Journal of Combinatorial Theory A*, 115, 1065–1068, 2008

队\轮	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
1	+2	−5	+4	−7	+6	−3	+8
2	−1	+4	−3	+6	−5	+8	−7
3	−4	+7	+2	−5	−8	+1	−6
4	+3	−2	−1	+8	+7	−6	+5
5	−6	+1	−8	+3	+2	−7	−4
6	+5	−8	+7	−2	−1	+4	+3
7	+8	−3	−6	+1	−4	+5	+2
8	−7	+6	+5	−4	+3	−2	−1

进一步研究

数学建模

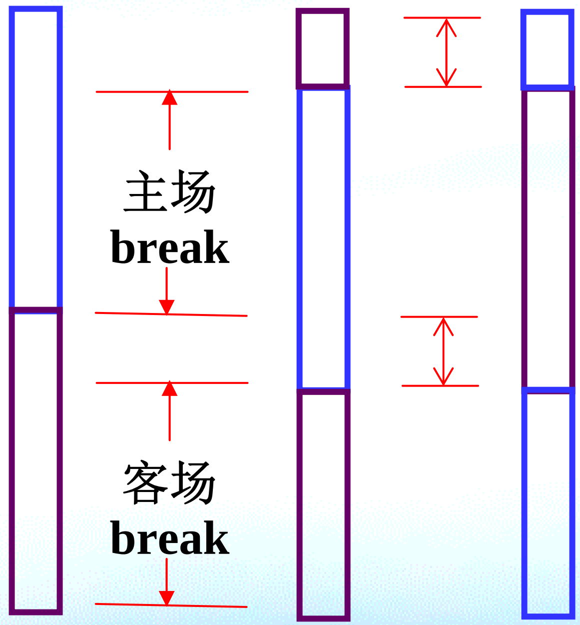
- 对单循环赛制的结论能否推广到镜像双循环赛制，增加不出现连续三场以上主（客）场比赛限制后问题有何变化；对其它特殊赛制，问题又有何变化
- 是否存在其它最优或近似算法，是否可用类似于最坏情况界的标准来评价方法的优劣

类型	$1,2,3,\cdots,n-2,n-1$	采用国家
镜像	$1,2,3,\cdots,n-2,n-1$	德国、意大利等
法制	$2,3,4,\cdots,n-1,1$	法国、捷克等
英制	$n-1,1,2,3,\cdots,n-3,n-2$	奥地利（部分阶段）
逆向	$n-1,n-2,n-3,\cdots,3,2,1$	瑞士（部分阶段）

Goossens, D. R., Spieksma, F. C. R., Soccer schedules in Europe: an overview, *Journal of Scheduling*, 15, 641-651, 2012.

旅行费用

- 如何编制一份赛程，使参赛队伍的旅行成本较少
  - 若旅行成本与各队主场之间距离有关，问题与TSP问题相近
  - 假设任意队伍自主场至客场、客场至主场、客场至客场的成本均为1
- 对任意主客场安排，任两轮间主场**break**数和客场**break**数相同
- 交换两轮中后一轮比赛的主客场安排，交换前后**break**数之和为 n



旅行费用

数学建模

- 各队旅行费用之和极小化问题与赛程总**break**数之间有何关系，如何给出一张各队旅行费用之和最小的赛程
- 在增加不出现连续三场以上主（客）场比赛限制后，各队旅行费用之和是否存在下界。给定队伍数，是否能构造出达到下界的赛程


浙江大学
ZheJiang University
谢 谢