浙江大学 ZheJiang University

# 数学建模


浙江大学数学科学学院　谈之奕

*tanzy@zju.edu.cn*


# 运筹与统计

## 线性规划

浙江大学 ZheJiang University

数学建模

# 线性规划

- 标准型
  - 要求
    - 目标为极小化函数
    - 所有约束均为等式约束
    - 约束等式右端均为非负常数
    - 决策变量取非负值
  - 任意形式的线性规划可以变形为标准型

$$\min \ \mathbf{cx}$$
$$s.t. \ \ \mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$
$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

$$\mathbf{Ax} \geq \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{Ax} - \mathbf{y} = \mathbf{b}$$

$x_j$ 无约束 $\Rightarrow x_j = x_j' - x_j''$

- 线性规划最优解的类型
  - 唯一最优解
  - 无穷多最优解 ~~有限个最优解~~
  - 最优值无下界
  - 无可行解

$$\begin{aligned} &\min -2x_1 + x_2 \\ &s.t. \ \ -x_1 + x_2 \leq 2 \\ &\qquad x_1 - 4x_2 \leq 2 \\ &\qquad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$x_1 = 2M, x_2 = M$$

# 基本可行解

数学建模

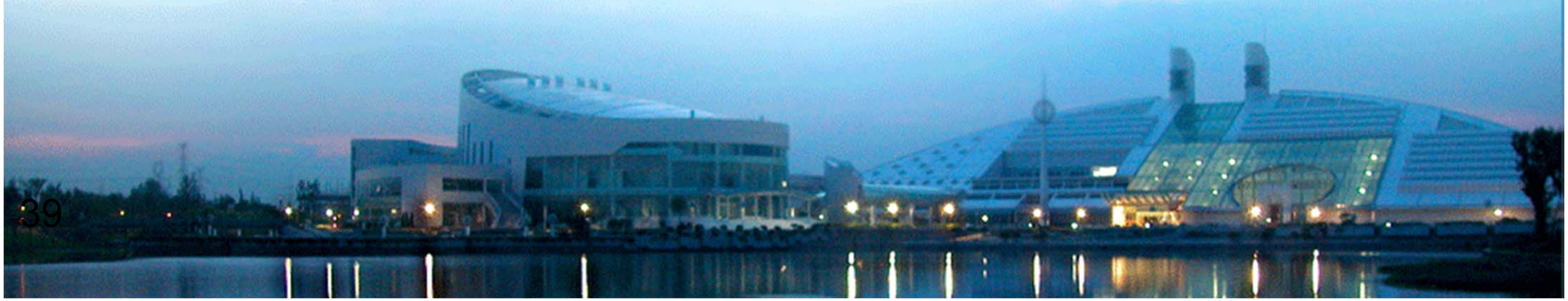
- 基与基本可行解
  - 设系数矩阵 $\mathbf{A}$ 为 $m \times n$ 行满秩矩阵
  - 将$\mathbf{A}$分块为 $(\mathbf{B},\mathbf{N})$（必要时调整列的次序），其中$\mathbf{B}$为 $m$ 阶可逆方阵，称为基（**basis**）
  - 决策变量 $\mathbf{x}$ 相应地分块为$\begin{pmatrix}\mathbf{x}_B\\ \mathbf{x}_N\end{pmatrix}$，$\mathbf{x}_B$和 $\mathbf{x}_N$ 中的分量分别称为基变量和非基变量
  - 令 $\mathbf{x}_N=\mathbf{0}$，则 $\mathbf{x}_B=\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ ，称 $\mathbf{x}=\begin{pmatrix}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}\\ \mathbf{0}\end{pmatrix}$ 为相应于基 $\mathbf{B}$ 的基本解
  - 当 $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}\ge\mathbf{0}$ 时，称 $\mathbf{x}$为一基本可行解

$$\begin{aligned}&\min \quad \mathbf{cx}\\ &s.t.\quad \mathbf{Ax}=\mathbf{b}\\ &\qquad\quad \mathbf{x}\ge\mathbf{0}\end{aligned}$$

$$(\mathbf{B},\mathbf{N})\begin{pmatrix}\mathbf{x}_B\\ \mathbf{x}_N\end{pmatrix}=\mathbf{b}$$

$$\mathbf{B}\mathbf{x}_B+\mathbf{N}\mathbf{x}_N=\mathbf{b}$$

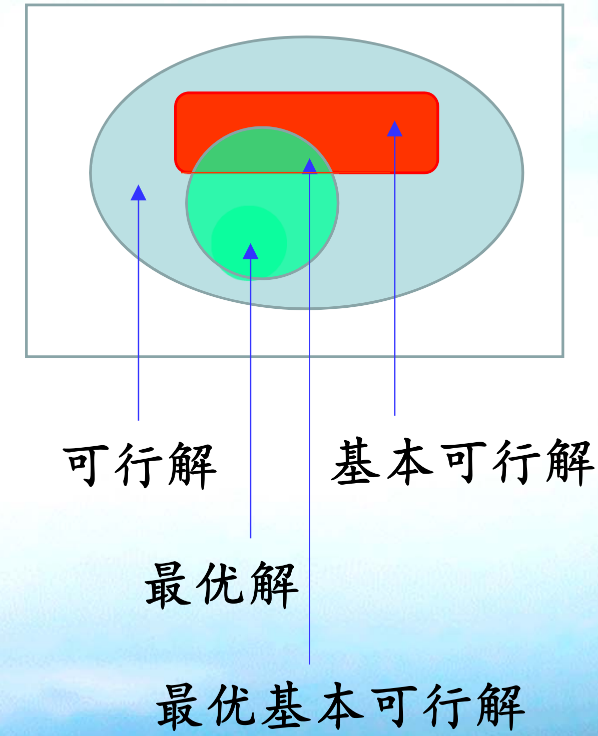
$$\mathbf{x}_B\ge 0,\ \mathbf{x}_N\ge 0$$



# 线性规划基本定理

数学建模

- 线性规划基本定理
  - 若线性规划有可行解，必有基本可行解
  - 若线性规划有有界最优解，则必有最优基本可行解
- 寻求线性规划的最优解，只需在所有基本可行解中寻找
  - 基本可行解的数目不超过系数矩阵所有可能的不同的基的数目 $\binom{n}{m}$



# 单纯形法

- 单纯形法（**Simplex Method**）的基本思想
  - 寻找到一个初始基本可行解，判断是否是最优解
  - 若不是最优解，则转换到另一个基本可行解（它们对应的基只有一列不同），并使目标值下降（或不上升）
  - 重复有限次，可找到最优解或判断解无界
- 单纯形法的几何意义
  - 线性规划的可行域是一个凸多面体（有界或无界），每个基本可行解对应于凸多面体的一个顶点
  - 单纯形法每次迭代过程对应于从凸多面体的一个顶点转到相邻的另一个顶点，直至找到最优解


41

# 时间复杂度

数学建模

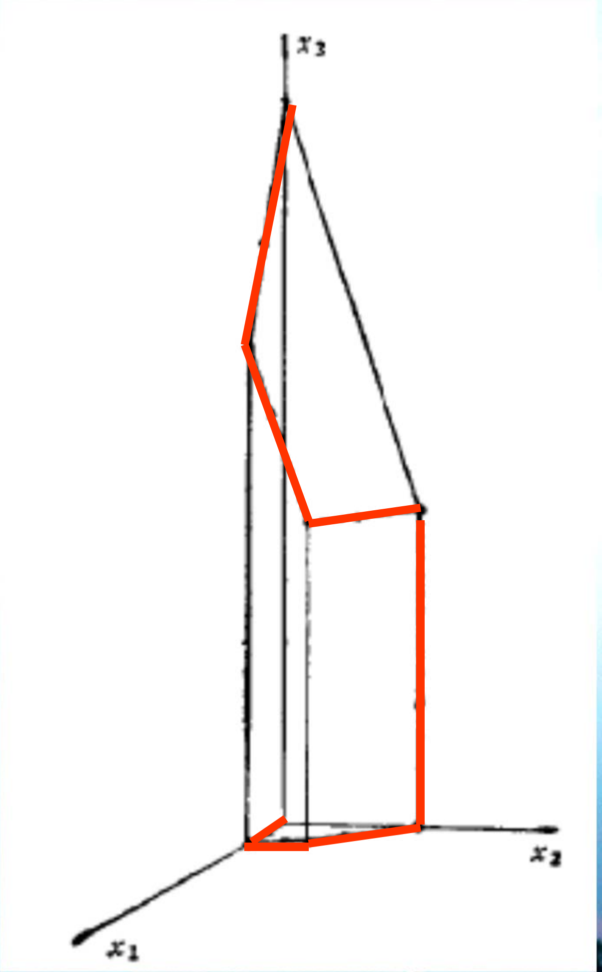
- 大量实践表明，对多数线性规划问题，单纯形法迭代次数为 $m$ 和 $n$ 的多项式
- 存在含 $m$ 个变量的线性规划，单纯形法需要进行 $2^m-1$ 次迭代

$$\max \sum_{i=1}^{m} 10^{m-i} x_i$$

$$s.t.\ \ 2\sum_{i=1}^{j-1} 10^{j-i} x_i + x_j \le 100^{j-1},\ j=1,\ \cdots,\ m$$

$$x_i \ge 0,\ i=1,\ \cdots,\ m$$

**Klee V, Minty GJ, How good is the simplex algorithm? In *Inequalities – III* (Shisha O, Eds.), Academic Press, 159–175, 1972**



# 多项式时间算法

浙江大学
ZheJiang University
数学建模

- **1979年，Khachiyan** 给出了求解线性规划的第一个多项式时间算法——椭球算法（**Ellipsoid algorithm**），解决了关于线性规划问题复杂性的**open**问题
- **1984年，Karmarkar** 给出了实际效果更好的多项式时间算法——内点法（**Interior Point Method**），在数学规划领域产生了深远的影响

**Karmarkar NK, A new polynomial-time algorithm for linear programming, *Combinatorica*, 4, 373–395, 1984**

**Narendra Karmarkar**

**(1957- )**

印度数学家

**Leonid Genrikhovich Khachiyan**

**(1952-2005)**

苏联数学家

浙江大学
ZheJiang University

# 运筹与统计

## 整数规划

# 松弛

- 设有整数线性规划（IP），去除决策变量取整数约束后所得线性规划记为（LP），称（LP）为（IP）的松弛（relaxation）
  - （IP）的可行域包含于（LP）的可行域中
  - （IP）的可行解也是（LP）的可行解，但反之不然
  - （IP）的最优值不优于（LP）的最优值
  - 若（LP）的最优解为整数解，则它也是（IP）的最优解

$$
\text{(IP)}\quad \begin{aligned} \min\ & \mathbf{cx} \\ s.t.\ & \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \in \mathbb{Z}_+^n \end{aligned}
$$

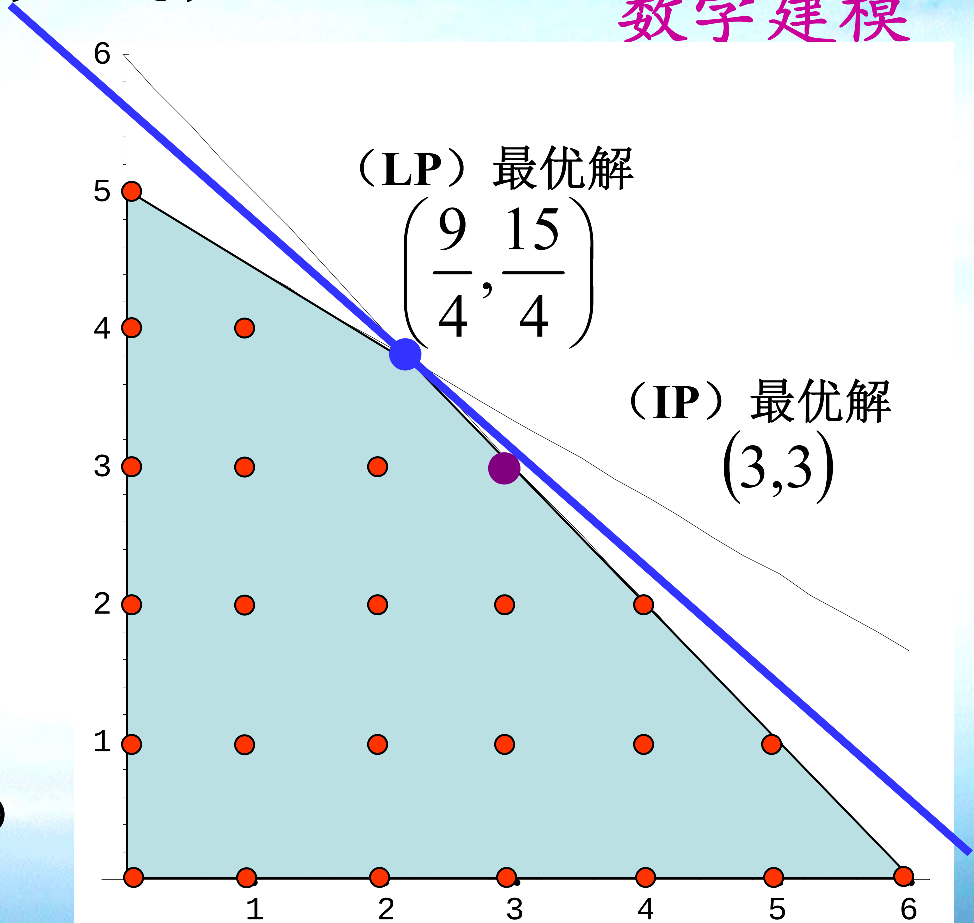
$$
\text{(LP)}\quad \begin{aligned} \min\ & \mathbf{cx} \\ s.t.\ & \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n \end{aligned}
$$

# 松弛线性规划



$$
\text{(IP)}\quad \begin{aligned} &\min -30x_1 - 36x_2 \\ s.t.\quad & x_1 + \ \ x_2 \le 6 \\ & 5x_1 + 9x_2 \le 45 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \text{ 且为整数} \end{aligned}
$$

$$
\text{(LP)}\quad \begin{aligned} &\min -30x_1 - 36x_2 \\ s.t.\quad & x_1 + \ \ x_2 \le 6 \\ & 5x_1 + 9x_2 \le 45 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}
$$




不存在简单的取整策略将（LP）的最优解变为（IP）的最优解

# 分枝定界法

- (BP) had ambitions to extend the model to deal also with the planning of world movement of oil from source to refinery, but knew that the capacity restrictions on the ships and storage tanks introduced discrete variables into their models
- the solution of this type of problem required electronic computation, but unfortunately LSE at that time did not have any access to such a facility. However, we had no doubt that using the same approach to computing could be achieved, if rather painfully, on desk computers, which were plentifully available. We became quite skilful at doing vector operations by multiplying with the left hand, and adding and subtracting with the right hand on another machine


**Ailsa Land** **Alison Doig**

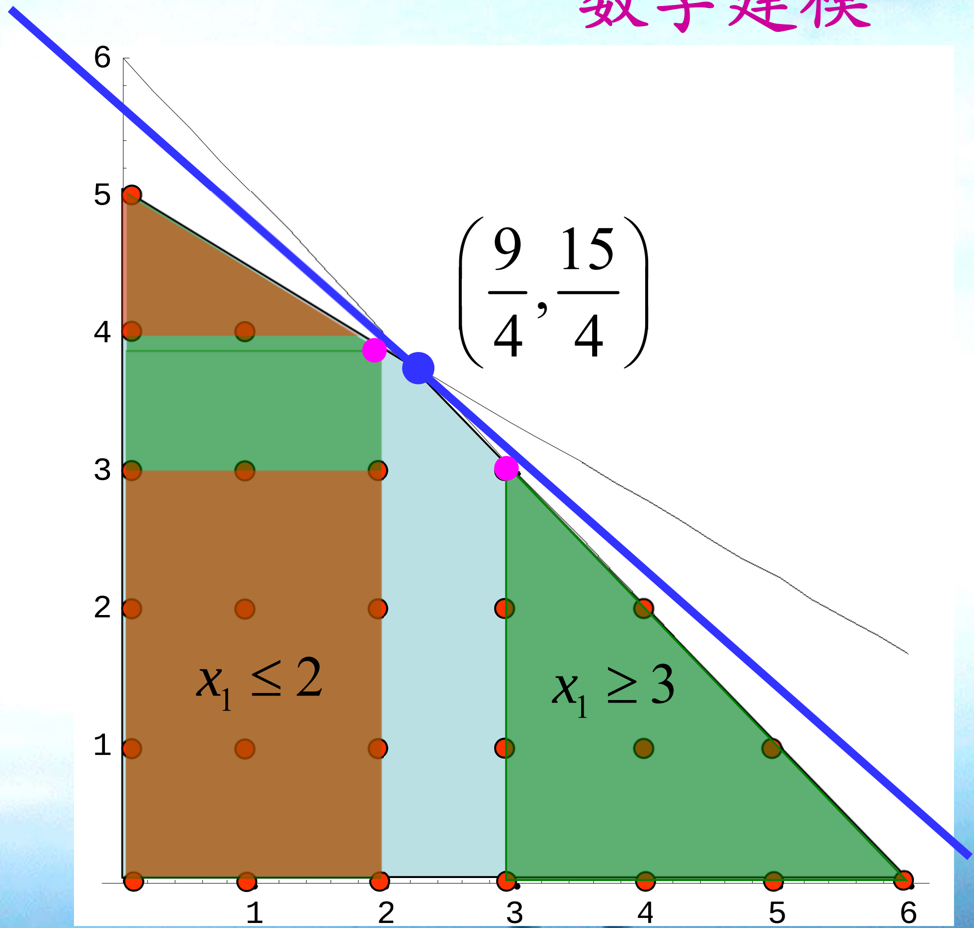
**An automatic method of solving discrete programming problems, *Econometrica* 28, 497–520, 1960.**

ECONOMETRICA
JOURNAL OF THE ECONOMETRIC SOCIETY

# 分枝定界法

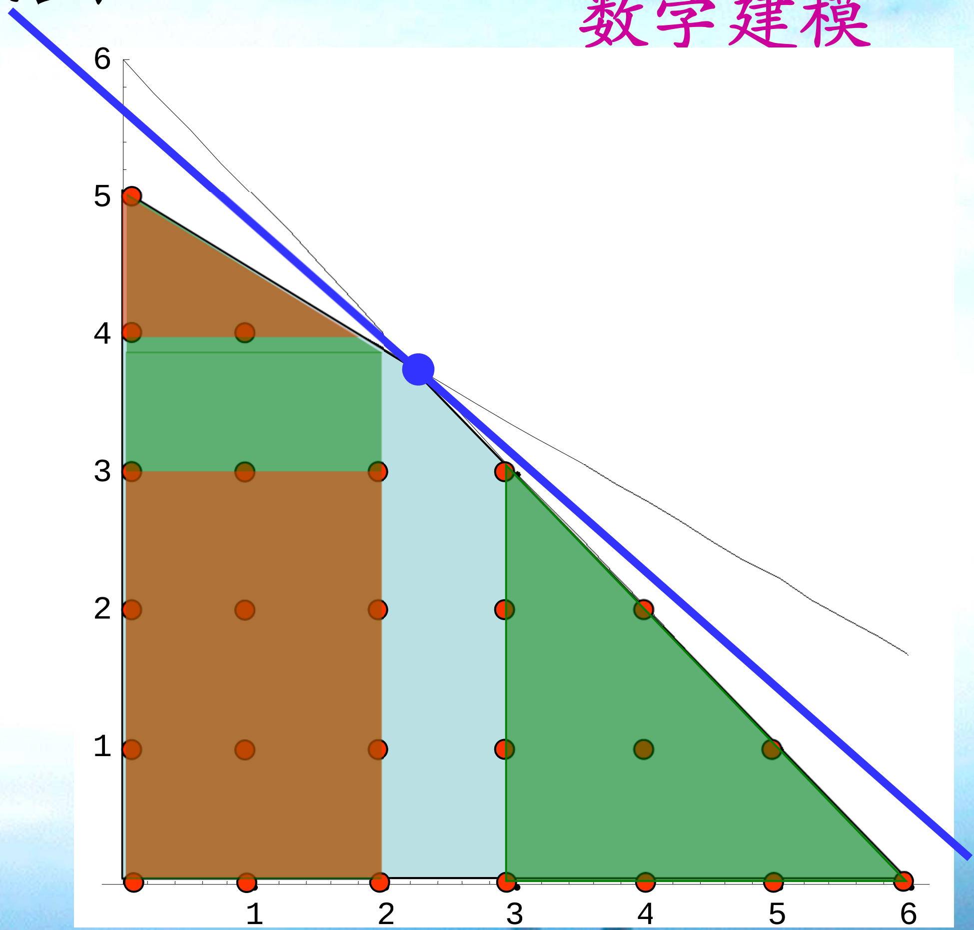
数学建模

- **Branch and Bound（B-B）**
  - （分枝）求解整数线性规划（IP）的松弛（LP），若其最优解不为整数解，选择最优解中任一个不取整数值的变量，在（IP）中分别加入一对互斥的约束，形成两个分枝整数线性规划。原（IP）的任一可行解分属两个分枝的可行域之一



# 分枝定界法

- **Branch and Bound（B-B）**
  - （定界）求解分枝整数线性规划的松弛，确定每个分枝最优值的上界或下界，删去松弛线性规划最优解为整数解或不包含（IP）最优解的分枝。至所有分枝均已删去时，（IP）的最优解必包含在历次求得的整数解中



# 分枝定界法

数学建模

- 分枝定界法是求解整数规划最常用的算法之一，但仍是指数时间算法。采用更为复杂的定界方法或选择适宜的分枝策略可在一定程度上减少运算时间
- 用于求解**0-1**规划等特殊整数规划的分枝定界法有更为简单的表现形式和更好的实际效果
- 分枝定界法的思想可用于其它离散优化问题的求解，分枝、定界的策略与方法和问题特征密切相关


浙江大学
ZheJiang University
运筹与统计
多目标规划

浙江大学 ZheJiang University

数学建模

# 多目标规划

- 多目标规划研究变量在满足给定约束条件下，如何使多个目标函数同时极小化的问题

$$
\begin{aligned}
& \min \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \cdots, f_p(\mathbf{x}))^{\mathrm{T}} \\
(\mathrm{MOP}) \quad & s.t. \quad \mathbf{g}_i(\mathbf{x}) \geq \mathbf{0}, i = 1, \cdots, s, \\
& \qquad\quad \mathbf{h}_j(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, j = 1, \cdots, t.
\end{aligned}
$$

**Vilfredo Federico Damaso Pareto**

**（1848－1923）**

意大利经济学家

# 解的类型

数学建模

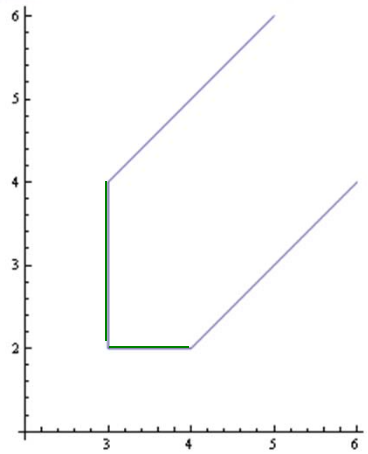
- 设 $\mathbf{x}^* \in S$
  - 若对任意 $\mathbf{x} \in S, f_k(\mathbf{x}^*) \le f_k(\mathbf{x}), k = 1, \cdots, p$，则称 $\mathbf{x}^*$为（**MOP**）的绝对最优解
  - 若不存在 $\mathbf{x} \in S$，使得 $f_k(\mathbf{x}) \le f_k(\mathbf{x}^*), k = 1, \cdots, p$，且至少存在某个 $k, f_k(\mathbf{x}) < f_k(\mathbf{x}^*)$，则称 $\mathbf{x}^*$为（**MOP**）的**Pareto**最优解
  - 若不存在 $\mathbf{x} \in S$，使得 $f_k(\mathbf{x}) < f_k(\mathbf{x}^*), k = 1, \cdots, p$，则称 $\mathbf{x}^*$为（**MOP**）的弱**Pareto**最优解
- （**MOP**）的所有绝对最优解，**Pareto**最优解，弱**Pareto**最优解的集合分别记作 $S_a, S_p$和 $S_{wp}$

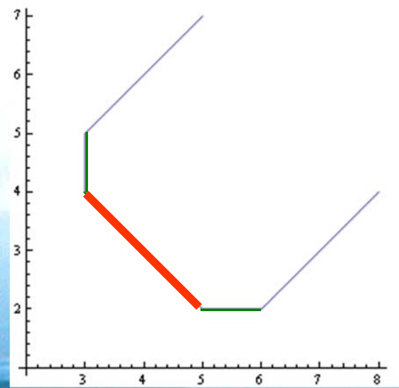
# 解的关系

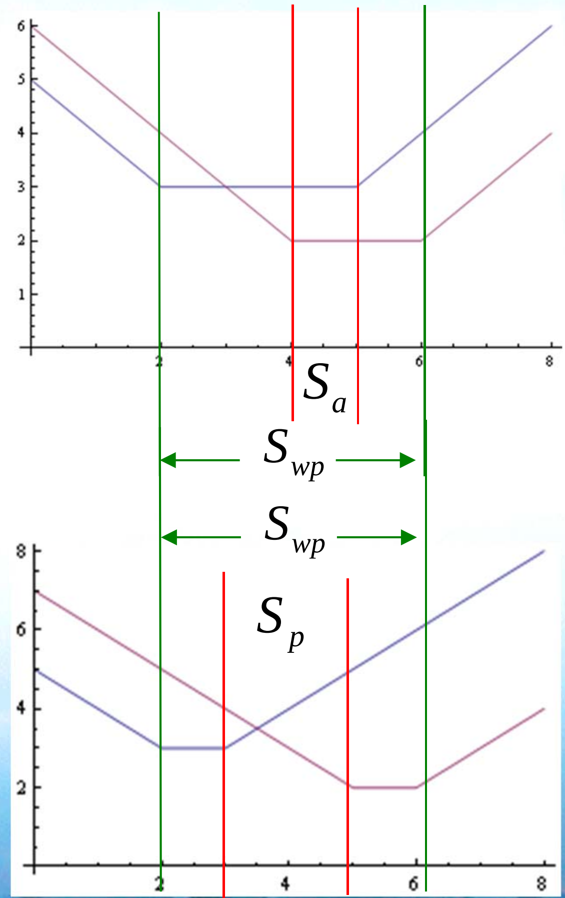
- 记 $S^i$ 为单目标规划 $\min\limits_{\mathbf{x}\in S} f_i(\mathbf{x})$ 的最优解，则

$$S_a = \bigcap_{i=1}^{p} S^i$$

$$S^i \subseteq S_{wp}$$







# 解的关系

- $S_a \subseteq S_p \subseteq S_{wp} \subseteq S$
  - 若 $\mathbf{x}^* \in S_a$，但 $\mathbf{x}^* \notin S_p$，则存在 $\bar{\mathbf{x}} \in S$ 和某个$k$，使得 $f_k(\bar{\mathbf{x}}) < f_k(\mathbf{x}^*), f_l(\bar{\mathbf{x}}) \le f_l(\mathbf{x}^*), l \ne k$，与 $\mathbf{x}^* \in S_a$ 矛盾
  - 若 $\mathbf{x}^* \in S_p$ ，但 $\mathbf{x}^* \notin S_{wp}$，则存在 $\bar{\mathbf{x}} \in S$ ，使得 $f_k(\bar{\mathbf{x}}) < f_k(\mathbf{x}^*), k = 1, \cdots, p$，与 $\mathbf{x}^* \in S_p$矛盾
- 若 $S_a \ne \varnothing$，则 $S_a = S_p$
  - 若 $\mathbf{x}^* \in S_p$，但 $\mathbf{x}^* \notin S_a$，由于$S_a \ne \varnothing$，存在 $\bar{\mathbf{x}} \in S_a$，使得 $f_k(\bar{\mathbf{x}}) \le f_k(\mathbf{x}^*), k = 1, \cdots, p$ ，由于$\mathbf{x}^* \ne \bar{\mathbf{x}}$，存在某个 $k$, $f_k(\bar{\mathbf{x}}) \ne f_k(\mathbf{x}^*)$，$f_k(\bar{\mathbf{x}}) < f_k(\mathbf{x}^*)$，与 $\mathbf{x}^* \in S_p$ 矛盾

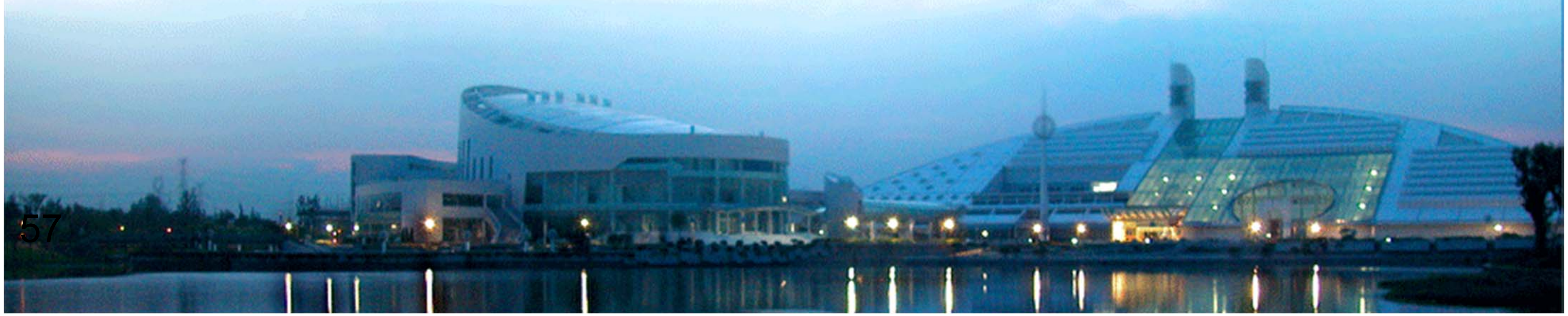
# 多目标问题解法

数学建模

- **求(MOP)所有的Pareto最优解或弱Pareto最优解**
- 加权法
  - 令 $\Lambda = \{\boldsymbol{\lambda} \mid \boldsymbol{\lambda} > \mathbf{0}, \sum_{k=1}^{p} \lambda_k = 1\}$
  - 线性加权和法 $(SP_{\boldsymbol{\lambda}})$ $\min\limits_{\mathbf{x}\in S} \sum_{k=1}^{p} \lambda_k f_k(\mathbf{x})$
  - 极小化极大法 $(P_{\boldsymbol{\lambda}})$ $\min\limits_{\mathbf{x}\in S} \max\limits_{1\le k\le p} \lambda_k f_k(\mathbf{x})$
  - 对任意 $\boldsymbol{\lambda} \in \Lambda$, $(SP_{\boldsymbol{\lambda}})$的最优解必是（**MOP**）的**Pareto**最优解, $(P_{\boldsymbol{\lambda}})$的最优解必是（**MOP**）的弱**Pareto**最优解

# 多目标问题解法

- 分层排序法
  - 将目标按重要程度排序，在前一个目标的最优解集中，寻找后一个目标的最优解集，并把最后一个目标的最优解作为（**MOP**）的解
  - 分层排序法得到的解必为（**MOP**）的**Pareto**最优解
- 带宽容值的分层排序法



# 多目标问题解法



- 主要目标法
  - 确定一个目标函数，如 $f_1(x)$，为主要目标，对其余 $p-1$ 个目标函数 $f_k(x)$，选定一定的界限值 $u_k, k=2,\cdots,p$，求解单目标规划

$$
(SP)\quad \begin{aligned} \min \quad & f_1(\mathbf{x}) \\ s.t. \quad & f_k(\mathbf{x}) \le u_k, k=2,\cdots,p, \\ & \mathbf{x} \in S \end{aligned}
$$

  - $(SP)$ 的最优解都是（**MOP**）的弱**Pareto**最优解


浙江大学
ZheJiang University
谢　谢