数学建模

浙江大学数学系　谈之奕

tanzy@zju.edu.cn

生物数学模型

种间关系

Lotka-Volterra模型

浙江大学
ZheJiang University
数学建模

- 鱼市数据
  - 二十世纪二十年代， **D’Ancona**观察到**Trieste**鱼市上鲨鱼和食用鱼所占比例的波动情况，这一数据基本反映了**Adriatic**海中两类鱼的比例
  - 在第一次世界大战期间，捕鱼量大幅下降，数据显示对作为捕食者的鲨鱼更为有利

年份	1914	1915	1916	1917	1918
鲨鱼比例(%)	11.9	21.4	22.1	21.2	36.4
年份	1919	1920	1921	1922	1923
鲨鱼比例(%)	27.3	16.0	15.9	14.8	10.7

Umberto D’Ancona
（1896–1964）
意大利生物学家

Lotka-Volterra模型

浙江大学
ZheJiang University
数学建模

- **Lotka-Volterra模型**
  - **D'Ancona**将不同鱼种数量变化问题求教于**Volterra**，后者建立了数学模型，对这一现象作出了解释
  - 稍早时，**Lotka**也给出了相同的模型，并阐述了其在生物学中的应用

Alfred James Lotka
（**1880－1949**）
美国数学家

Vito Volterra
（**1860－1940**）
意大利数学家

Lotka AJ. *Elements of Physical Biology,* Williams & Wilkins, 1925
Reissued as *Elements of Mathematical Biology*, Dover, 1956.

Volterra V. Variazioni e fluttazioni del numero d'individui in specie animali conviventi (Fluctuations in the abundance of a species considered mathematically), *Memorie della R. Accademii dei Lincei*, 2, 85, 1926.
Also in *Nature*, 118, 558-560, 1926
Lotka AJ. Letter, *Nature*, 119, 12, 1927

Lotka-Volterra模型

数学建模

- **Lotka-Volterra模型**
  - 记 $x(t), y(t)$分别为 t 时刻食用鱼（食饵）和鲨鱼（捕食者）的种群数量
  - 由于海洋资源丰富，食用鱼独立生存时以常数增长率增长；鲨鱼的存在使食用鱼增长率减少，程度与鲨鱼数量呈正比
  - 鲨鱼缺乏食用鱼时死亡率为常数；食用鱼的存在使鲨鱼死亡率降低，程度与食饵数量呈正比
  - $\dfrac{dx}{dt} = rx - axy$，$\dfrac{dy}{dt} = -dy + bxy$

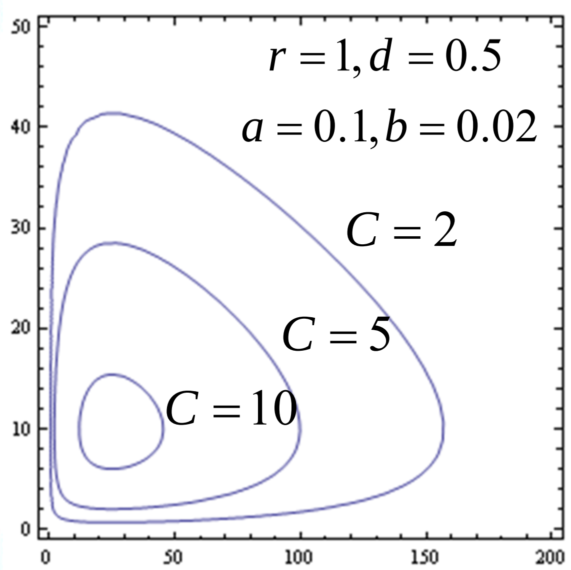
Lotka-Volterra模型

数学建模

- 相轨线
  - $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{x(r-ay)}{y(-d+bx)} \Rightarrow \dfrac{-d+bx}{x}dx=\dfrac{r-ay}{y}dy$

    $\Rightarrow -d\ln x+bx=r\ln y-ay+c$

    $\Rightarrow (x^d e^{-bx})(y^r e^{-ay})=C$
  - 若 $x(0)=x_0, y(0)=y_0$，则 $C=(x_0^d e^{-bx_0})(y_0^r e^{-ay_0})$
  - 令 $f(x)=x^d e^{-bx}$，$f(x)$ 在 $x_m=\dfrac{d}{b}$ 处取得极大值 $f_{\max}$；令 $g(y)=y^r e^{-ay}$，$g(y)$ 在 $y_m=\dfrac{r}{a}$ 处取得极大值 $g_{\max}$
  - $0\le C=f(x)g(y)\le f_{\max}g_{\max}$，若 $C=f_{\max}g_{\max}$，则 $x=x_m, y=y_m$，相轨线退化为点 (x_m,y_m)

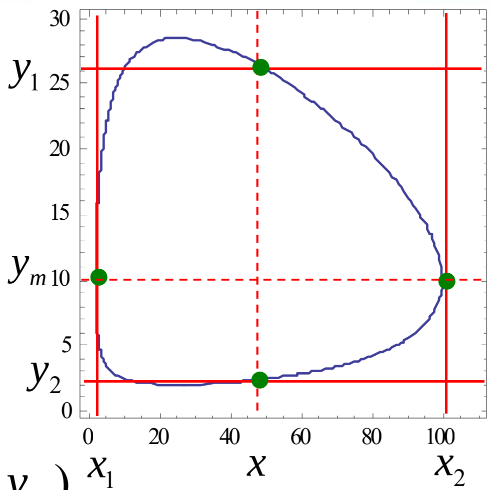


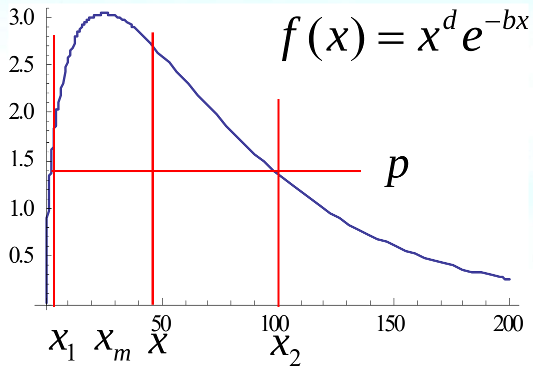
$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}= rx-axy\\ \dfrac{dy}{dt}=-dy+bxy\end{cases}$$

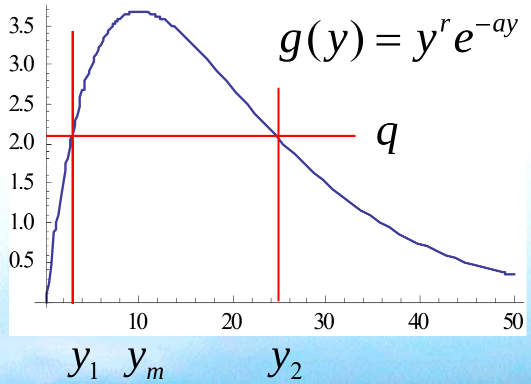
Lotka-Volterra模型

数学建模

- 相轨线
  - 任取 $0 < C < f_{\max} g_{\max}$，
    记 $p = \dfrac{C}{g_{\max}} < f_{\max}$，则存在 x_1, x_2，$x_1 < x_m < x_2$
    且 $f(x_1) = f(x_2) = p$，相轨线通过点 $(x_1, y_m), (x_2, y_m)$





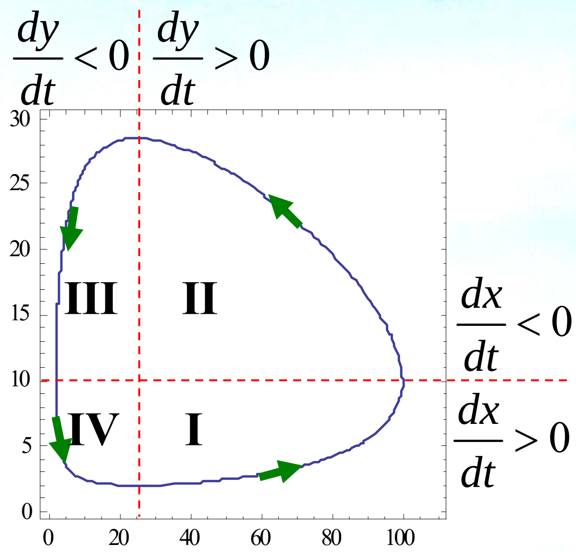


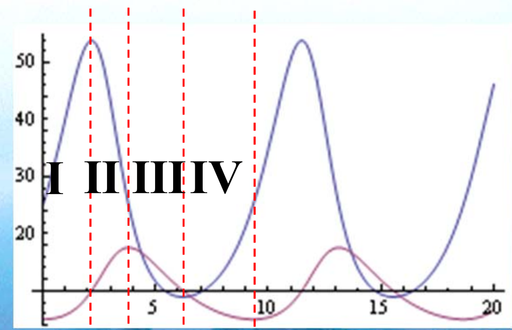
  - 对任一 $x \in (x_1, x_2)$，$f(x) > p$。记 $q = \dfrac{C}{f(x)}$，
    则 $q = \dfrac{p g_{\max}}{f(x)} < g_{\max}$，存在 $y_1, y_2, y_1 < y_m < y_2$，
    且 $g(y_1) = g(y_2) = q$，相轨线通过点 $(x, y_1), (x, y_2)$

$$\boxed{(x^d e^{-bx})(y^r e^{-ay}) = C}$$

Lotka-Volterra模型

- 相轨线
  - 对任意 C，相轨线是一条封闭曲线。当 C 自 $f_{\max} g_{\max}$ 开始逐渐变小时，相轨线从退化点 (x_m, y_m) 开始不断向外扩展
  - 函数 $x(t), y(t)$ 均为周期函数，记周期为 T
  - 直线 $x = x_m, y = y_m$ 将相轨线分为四段，各段内 $\frac{dx}{dt}$ 和 $\frac{dy}{dt}$ 符号不全相同，由此可确定轨线的方向和 $x(t), y(t)$ 的增减性
  - 在一个周期内食饵先于捕食者到达最大值或最小值





$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = rx - axy \\ \frac{dy}{dt} = -dy + bxy \end{cases} \qquad x_m = \frac{d}{b}, \quad y_m = \frac{r}{a}$$

Lotka-Volterra模型

数学建模

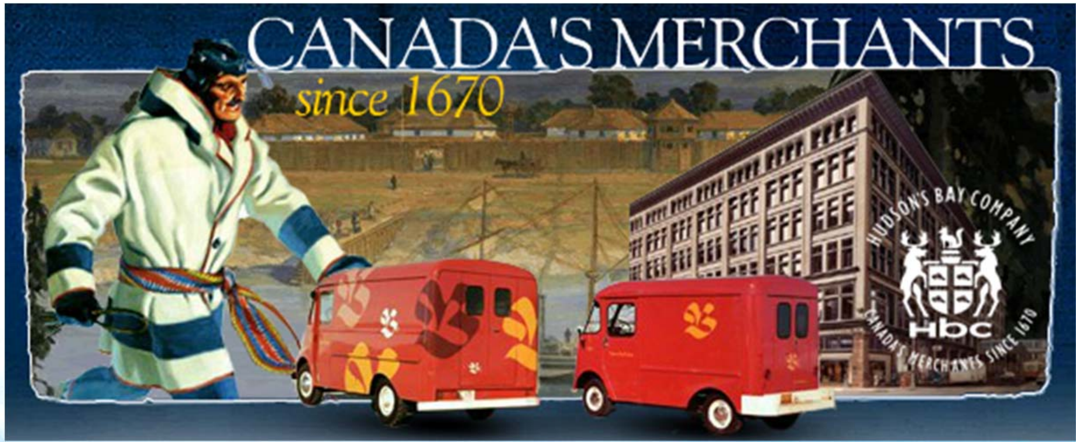
$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = rx - axy \\ \dfrac{dy}{dt} = -dy + bxy \end{cases}$$

- 一周期平均值
  - $x(t) = \dfrac{1}{by(t)}\dfrac{dy}{dt} + \dfrac{d}{b}$，$\bar{x} = \dfrac{1}{T}\int_0^T x(t)dt = \dfrac{1}{T}\left(\dfrac{1}{b}\ln y(t) + \dfrac{d}{b}t\right)\Big|_0^T = \dfrac{d}{b}$
  - $y(t) = -\dfrac{1}{ax(t)}\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{r}{a}$，$\bar{y} = \dfrac{1}{T}\int_0^T y(t)dt = \dfrac{1}{T}\left(-\dfrac{1}{a}\ln x(t) + \dfrac{r}{a}t\right)\Big|_0^T = \dfrac{r}{a}$
- 捕捞
  - 设捕捞系数为 e，即由于捕捞，食用鱼增长率由 r 下降为 $r-e$，鲨鱼死亡率由 d 上升为 $d+e$，则 $\bar{x}(e) = \dfrac{d+e}{b} > \bar{x}(0), \bar{y}(e) = \dfrac{r-e}{a} < \bar{y}(0)$
    - 当捕捞系数减小时，鲨鱼所占比例增加
  - 害虫和它的天敌益虫构成食饵—捕食者系统。如果一种杀虫剂杀死益虫和害虫的效力相当，长期使用将导致害虫增加

山猫与野兔

数学建模

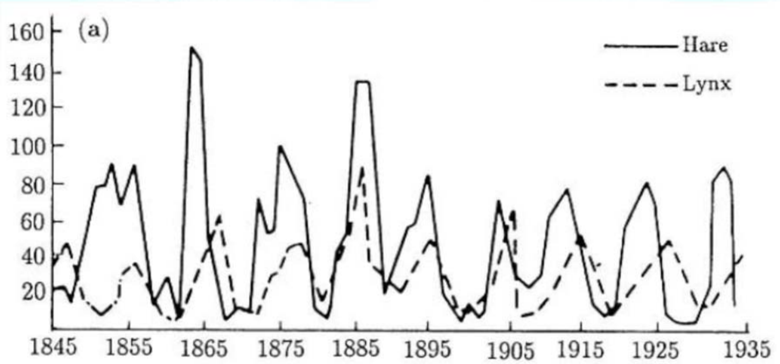
- 加拿大**Hudson Bay Company**长期从事皮毛贸易，存有**1845－1930**年在北美捕获的**Lynx canadensis**和**Lepus americanus (snowshoe hare)**两种动物的数量数据。这组数据常被用来分析捕食者－食饵系统

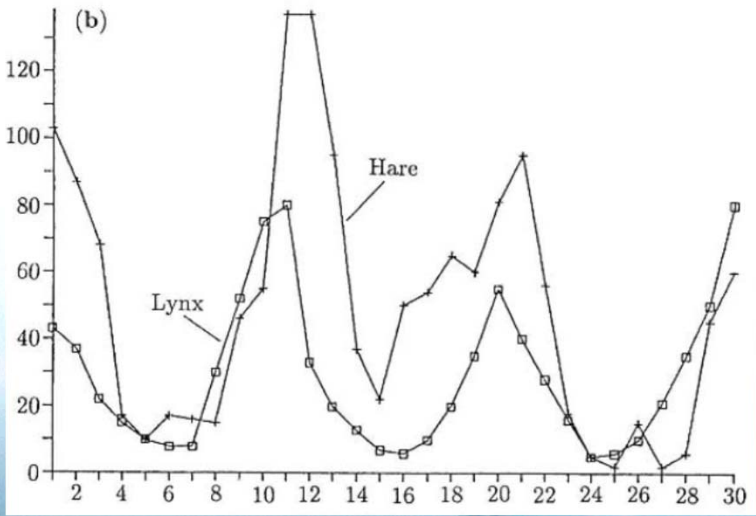


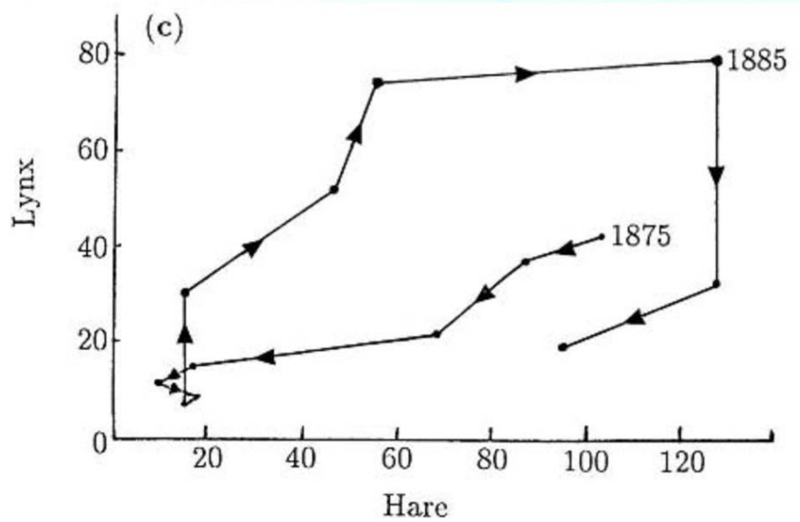
山猫与野兔

浙江大学
ZheJiang University

数学建模







顺时针！野兔吃山猫？

（a）1845－1935年山猫，野兔－时间图

（b）1875－1904年山猫，野兔－时间图

（c）1875－1904年山猫－野兔图

（单位均为千只）

一般双种群模型

浙江大学 ZheJiang University

数学建模

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x(a_{10} + a_{11}x + a_{12}y) \\ \dfrac{dy}{dt} = y(a_{20} + a_{21}x + a_{22}y) \end{cases}$$

- 一般双种群模型
  - 种群 X,Y 的增长率 a_{10}, a_{20}
    - $a_{10} > 0$ 表示 X 可依靠系统外食物为生
    - $a_{20} < 0$ 表示 Y必须依赖X 为食才能生存
  - 种群 X,Y 的密度制约项 a_{11}, a_{22}
    - $a_{11} = 0$ 表示 X是非密度制约的
    - $a_{11} < 0$ 表示 X是密度制约的
  - 种间关系
    - 利用（**Exploitation**）：$a_{12} < 0, a_{21} > 0$
      - X 为食饵，Y为捕食者，X 为寄主，Y 为寄生物
    - 种间竞争（**Interspecific competition**）：$a_{12} < 0, a_{21} < 0$
    - 共生（**Mutualism**）：$a_{12} > 0, a_{21} > 0$

浙江大学 ZheJiang University

生物数学模型

偏微分方程模型

人口模型

ZheJiang University
浙江大学
数学建模

- 与年龄有关的人口模型
  - 人口在 t 时刻按年龄坐标 x 的分布密度为 $p(t,x)$
    - 在时刻 t ，年龄在 $[x, x+\mathrm{d}x]$ 中的人口数为 $p(t,x)\,\mathrm{d}x$
    - 在时刻人口总数为 $P(t)=\int_0^{\infty} p(t,x)\,\mathrm{d}x$
  - 与年龄有关的死亡率 $d(x)$
    - 年龄在 $[x, x+\mathrm{d}x]$ 中的人口在 $[t, t+\mathrm{d}t]$ 时段中死亡数与此年龄段中人口数成正比，与时间区间长度 $\mathrm{d}t$ 成正比，比例系数为 $d(x)$
  - 与年龄有关的生育率 $b(x)$
    - 年龄在 $[x, x+\mathrm{d}x]$ 中的人口在 $[t, t+\mathrm{d}t]$ 时段中生育的婴儿数与此年龄段中人口数成正比，与时间区间长度 $\mathrm{d}t$ 成正比，比例系数为 $b(x)$

人口模型

数学建模

$t+\mathrm{d}t$ 时刻年龄在 $[x, x+\mathrm{d}x]$ 之间的人口数	=	t 时刻年龄在 $[x-\mathrm{d}t, x-\mathrm{d}t+\mathrm{d}x]$ 之间的人口数	−	$[t, t+\mathrm{d}t]$ 时段年龄在 $[x-\mathrm{d}t, x-\mathrm{d}t+\mathrm{d}x]$ 之间的死亡数

$$p(t+\mathrm{d}t, x)\,\mathrm{d}x = p(t, x-\mathrm{d}t)\,\mathrm{d}x - d(x-\mathrm{d}t)\,p(t, x-\mathrm{d}t)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

$$p(t+\mathrm{d}t, x)\,\mathrm{d}x - p(t,x)\,\mathrm{d}x = p(t, x-\mathrm{d}t)\,\mathrm{d}x - p(t,x)\,\mathrm{d}x - d(x-\mathrm{d}t)\,p(t, x-\mathrm{d}t)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

$$\frac{\partial p(t,x)}{\partial t}\mathrm{d}x = -\frac{\partial p(t,x)}{\partial x}\mathrm{d}x - d(x)\,p(t,x)\,\mathrm{d}x$$

$$\frac{\partial p(t,x)}{\partial t} + \frac{\partial p(t,x)}{\partial x} = -d(x)\,p(t,x)$$ 一阶线性偏微分方程

$$p(0,x) = p_0(x)$$ 初始条件

$$p(t,0) = \int_0^\infty b(\xi)\,p(t,\xi)\,\mathrm{d}\xi$$ 边界条件

传染病动力学模型

- **SIR模型**
  - 人的最大寿命为 A，最大病程为 $B \le A$，自然死亡率为 $d(x)$，出生率为 $b(x)$，新生儿均为易感者
  - t 时刻易感者、移出者按年龄 x 的分布密度分别为 $p_1(t,x)$ 和 $p_3(t,x)$，t 时刻感染者按年龄 x 和病程 y 的分布为 $p_2(t,x,y)$
  - 发病、治愈和传染病死亡
    - $[t,t+\mathrm{d}t]$ 时段年龄在 $[x,x+\mathrm{d}x]$ 中的易感者被感染人数与易感者人数 $p_1(t,x)\,\mathrm{d}x$，感染者总人数和时间 $\mathrm{d}t$ 成正比，比例系数为 $\alpha(x)$
    - $[t,t+\mathrm{d}t]$ 时段年龄在 $[x,x+\mathrm{d}x]$ 中，病程在 $[y,y+\mathrm{d}y]$ 中的感染者被治愈人数与因病死亡人数均与感染者人数 $p_2(t,x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 和时间 $\mathrm{d}t$ 成正比，比例系数分别为 $\beta(x,y)$ 和 $d(x,y)$

传染病动力学模型

数学建模

- 易感者
  - $$p_1(t+\mathrm{d}t,x)\,\mathrm{d}x = p_1(t,x-\mathrm{d}t)\,\mathrm{d}x - d(x-\mathrm{d}t)\,p_1(t,x-\mathrm{d}t)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$
    $$-\alpha(x)\left(\int_0^A\int_0^B p_2(t,x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right)p_1(t,x-\mathrm{d}t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$$

$$\Rightarrow \frac{\partial p_1}{\partial t}+\frac{\partial p_1}{\partial x} = -\left(d(x)+\alpha(x)\left(\int_0^A\int_0^B p_2(t,x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right)\right)p_1(t,x)$$

- 移出者
  - $$p_3(t+\mathrm{d}t,x)\,\mathrm{d}x = p_3(t,x-\mathrm{d}t)\,\mathrm{d}x - d(x-\mathrm{d}t)\,p_3(t,x-\mathrm{d}t)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$
    $$+\left(\int_0^B \beta(x-\mathrm{d}t,y)\,p_2(t,x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$$

$$\Rightarrow \frac{\partial p_3}{\partial t}+\frac{\partial p_3}{\partial x} = -d(x)\,p_3(t,x)+\left(\int_0^B \beta(x,y)\,p_2(t,x,y)\,\mathrm{d}y\right)$$

传染病动力学模型

- 感染者
  - $$p_2(t+\mathrm{d}t,x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = p_2(t,x-\mathrm{d}t,y-\mathrm{d}y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
    $$-d(x-\mathrm{d}t)\,p_2(t,x-\mathrm{d}t,y-\mathrm{d}t)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}t$$
    $$-\bar{d}(x-\mathrm{d}t,y-\mathrm{d}t)\,p_2(t,x-\mathrm{d}t,y-\mathrm{d}t)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}t$$
    $$-\beta(x-\mathrm{d}t,y-\mathrm{d}t)\,p_2(t,x-\mathrm{d}t,y-\mathrm{d}t)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}t$$

$$
\begin{aligned}
&p_2(t+\mathrm{d}t,x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y - p_2(t,x-\mathrm{d}t,y-\mathrm{d}y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&\quad=\left(p_2(t+\mathrm{d}t,x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y - p_2(t,x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)\\
&\qquad+\left(p_2(t,x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y - p_2(t,x-\mathrm{d}t,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)\\
&\qquad+\left(p_2(t,x-\mathrm{d}t,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y - p_2(t,x-\mathrm{d}t,y-\mathrm{d}y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow \frac{\partial p_2}{\partial t}+\frac{\partial p_2}{\partial x}+\frac{\partial p_2}{\partial y} = -\left(d(x)+\bar{d}(x,y)+\beta(x,y)\right)p_2(t,x,y)$$

传染病动力学模型

- 初始条件与边界条件

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial p_1}{\partial t}+\dfrac{\partial p_1}{\partial x}=-\left(d(x)+\alpha(x)\left(\int_0^A\int_0^B p_2(t,x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right)\right)p_1(t,x)\\
\dfrac{\partial p_2}{\partial t}+\dfrac{\partial p_2}{\partial x}+\dfrac{\partial p_2}{\partial y}=-\left(d(x)+\bar{d}(x,y)+\beta(x,y)\right)p_2(t,x,y)\\
\dfrac{\partial p_3}{\partial t}+\dfrac{\partial p_3}{\partial x}=-d(x)p_3(t,x)+\left(\int_0^B \beta(x,y)p_2(t,x,y)\,\mathrm{d}y\right)
\end{cases}
$$

  - $p_1(0,x)=p_1^0(x)$
    $p_2(0,x,y)=p_2^0(x,y)$
    $p_3(0,x)=p_3^0(x)$
  - $p_1(t,0)=\int_0^A b(\xi)\left(p_1(t,\xi)+\int_0^B p_2(t,\xi,\eta)\,\mathrm{d}\eta+p_3(t,\xi)\right)\mathrm{d}\xi$
    $p_2(t,0,y)=0,\ 0\le y\le B$
    $p_3(t,0)=0$
  - $p_2(t,x,0)=\alpha(x)\left(\int_0^A\int_0^B p_2(t,x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right)p_1(t,x)$


浙江大学
ZheJiang University
谢　谢