



浙江大学  
Zhejiang University

# 数学建模

浙江大学数学科学学院 谈之奕

*[tanzy@zju.edu.cn](mailto:tanzy@zju.edu.cn)*



浙江大学  
Zhejiang University

# 运筹与统计

## 赛程编制



# 赛程编制问题



浙江大学

Zhejiang University

数学建模

- 2018世界杯南美赛区预选赛
  - 10个成员国，4.5个决赛阶段名额
  - 双循环主客场制，9阶段18轮。两轮为一个阶段，每阶段跨时一周，不同阶段相隔一月或数月
- 2002-2014世界杯南美赛区预选赛赛程

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
ARG	CHI	VEN	BOL	COL	ECU	BRA	PAR	PER	URU
BOL	URU	COL	ARG	VEN	CHI	PAR	ECU	BRA	PER
BRA	COL	ECU	PER	URU	PAR	ARG	CHI	BOL	VEN
CHI	ARG	PER	URU	PAR	BOL	VEN	BRA	COL	ECU
COL	BRA	BOL	VEN	ARG	PER	ECU	URU	CHI	PAR
ECU	VEN	BRA	PAR	PER	ARG	COL	BOL	URU	CHI
PAR	PER	URU	ECU	CHI	BRA	BOL	ARG	VEN	COL
PER	PAR	CHI	BRA	ECU	COL	URU	VEN	ARG	BOL
URU	BOL	PAR	CHI	BRA	VEN	PER	COL	ECU	ARG
VEN	ECU	ARG	COL	BOL	URU	CHI	PER	PAR	BRA



	<b>Argentina</b> 阿根廷
	<b>Bolivia</b> 玻利维亚
	<b>Brazil</b> 巴西
	<b>Chile</b> 智利
	<b>Colombia</b> 哥伦比亚
	<b>Ecuador</b> 厄瓜多尔
	<b>Paraguay</b> 巴拉圭
	<b>Peru</b> 秘鲁
	<b>Uruguay</b> 乌拉圭
	<b>Venezuela</b> 委内瑞拉

# 赛程特点

- 2002-2014世界杯南美赛区预选赛赛程特点

- 任意两队在前后两个半程各交手一次，两场比赛的主客场互换

- 镜像双循环 1~10, 2~11, ....., 9~18

- 不存在多于两场的连续主场与客场

- 任一队不连续对阵巴西与阿根廷

- 赛程缺点

- 存在同一阶段内两场比赛均为主场或客场的情况，且各队出现上述情况的次数不均衡

- 同一阶段内各队先主后客和先客后主的次数不均衡

最后一轮：阿根廷——乌拉圭

- 赛程编制原理不透明，关键比赛存在争议

Durán G, Guajardo M, Sauré D. Scheduling the South American Qualifiers to the 2018 FIFA World Cup by integer programming. *European Journal of Operational Research*, 262, 1109-1115, 2017.

	2002-2014		
	主主, 客客	主客	客主
ARG	0	9	0
BOL	4	2	3
BRA	0	0	9
CHI	2	1	6
COL	2	6	1
ECU	2	4	3
PAR	2	3	4
PER	2	6	1
URU	2	4	3
VEN	2	1	6



# 赛程编制新举措



浙江大学  
Zhejiang University

数学建模

- **2018世界杯新举措**

- 各成员国提交候选方案，南美洲足联投票决定最终赛程模板
- 赛程模板中各队用编号代替，抽签决定编号与球队对应关系（种子队与非种子队分别抽签）
- **Durán**团队为智利足联编制赛程已逾十年，他们设计的方案为智利足联所采纳，并最终在投票中胜出



**Guillermo Durán**  
Professor of  
Department of  
Mathematics and  
Calculus Institute  
Faculty of Exact and  
Natural Sciences  
University of Buenos  
Aires

Alarcón F, Durán G, Guajardo M. Referee assignment in the Chilean football league using integer programming and patterns. *International Transactions in Operational Research*, 21: 415-438, 2014.

Bonomo F, Cardemil A, Durán G, et al. An application of the traveling tournament problem: The Argentine volleyball league. *Interfaces*, 42: 245-259, 2012.

Durán G, Guajardo M, Wolf-Yadlin R. Operations research techniques for scheduling Chile's second division soccer league. *Interfaces*, 42: 273-285, 2012.



# 镜像赛程

- $n$  支队伍的单循环赛程，全程所有队伍总**break**数至少为  $n-2$ 
  - 用形如 **HAH...HA**，长度为  $n-1$ （奇数）的字符串表示每支队伍的主客场安排，称为**模式**
  - 任何两支队伍的模式互不相同
  - 只有**HAHA...HAH** 和 **AHAH...AHA** 两种模式没有**break**，其它模式的**break**数至少为 1
- $n$  支队伍的镜像双循环赛程，全程所有队伍总**break**数至少为  $3n-6$ 
  - 若半程没有**break**，则全程也没有**break**，这样的队伍至多有两支
  - 若半程只有一个**break**，由于模式字符串长度为奇数，在前后半程之间有一个**break**
  - 若半程有至少两个**break**，全程**break**数至少为 4
  - 总**break**数至少为  $3(n-2) = 3n-6$

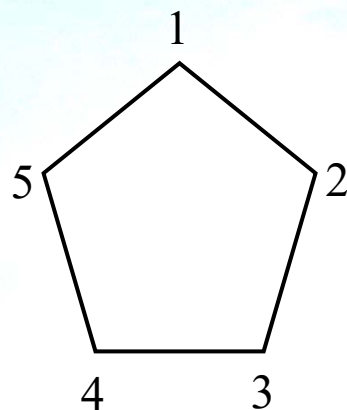
	1	2	3	...	9	10	11	12	...	18	
镜像 (mirror)	1	2	3	...	9	1	2	3	...	9	意大利



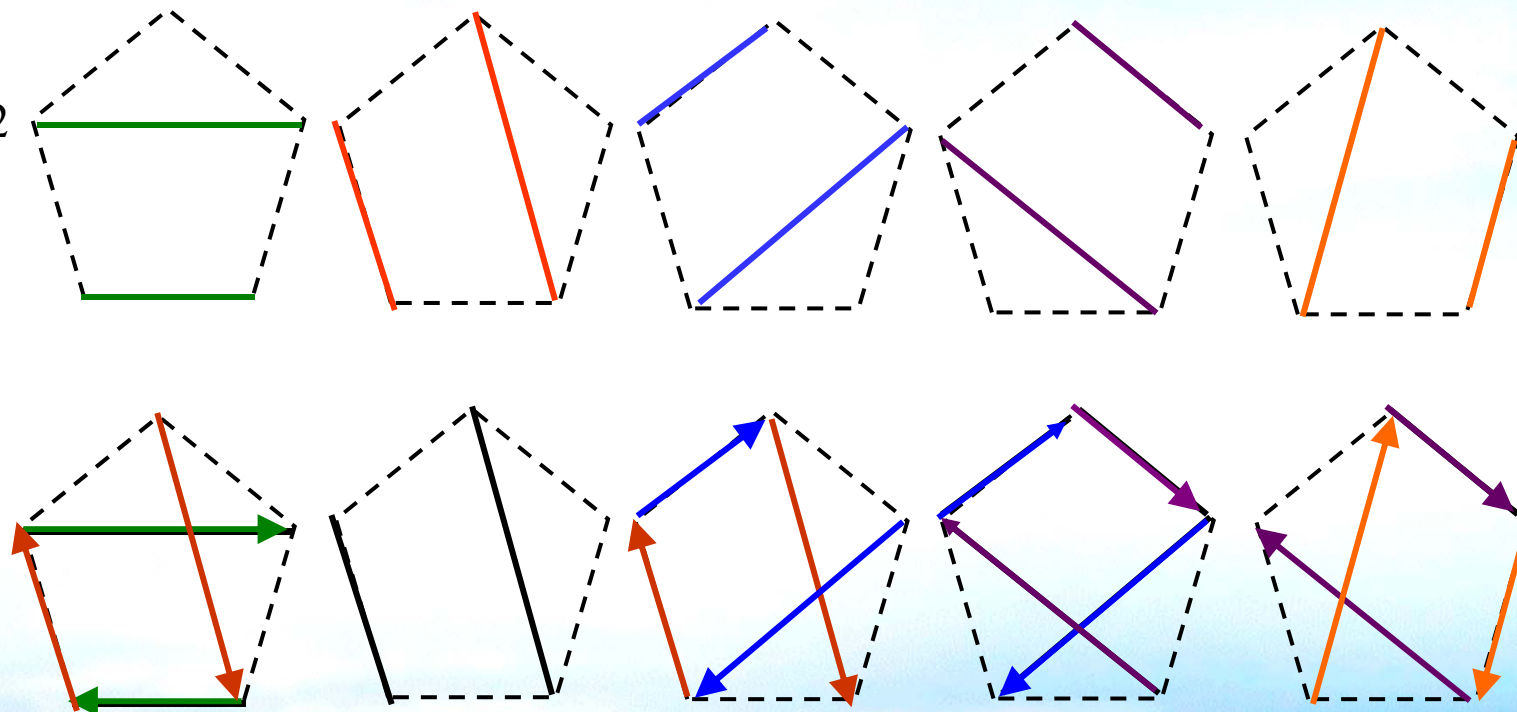
浙江大学  
Zhejiang University

数学建模

# 单循环赛程



6





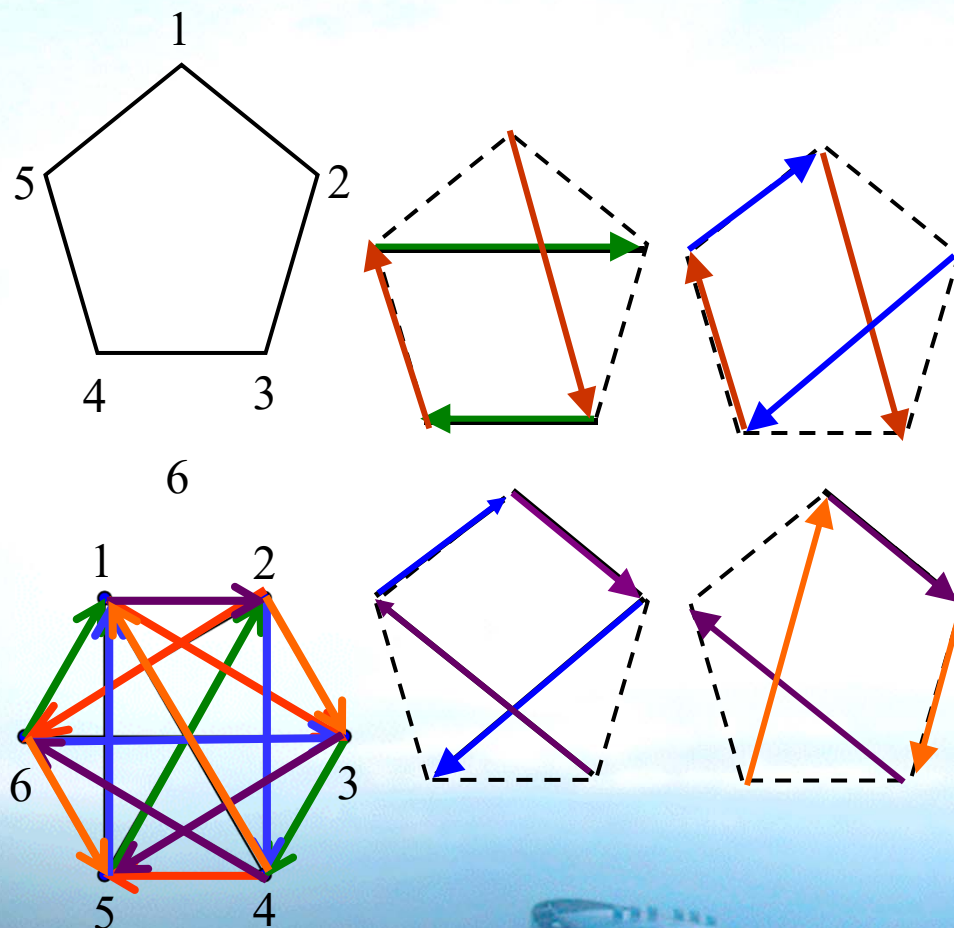


浙江大学

Zhejiang University

数学建模

# 单循环赛程



	1	2	3	4	5
1	-6	+3	-5	+2	-4
2	-5	+6	+4	-1	+3
3	+4	-1	-6	+5	-2
4	-3	+5	-2	+6	+1
5	+2	-4	+1	-3	-6
6	+1	-2	+3	-4	+5



# 镜像赛程

- 根据世界杯南美赛区预选赛的特点，不必考虑连续两场比赛之间的**break**，只需考虑同一阶段两场比赛之间的**double-round break**
- 10支队的镜像赛程的**double-round break**数至少为16 如何证明？
  - 若半程没有**break**，则全程也没有**break**，这样的队伍至多有两支。其他队伍半程至少有1个**break**，全程至少有2个**double-round break**
    - 前后半程之间若有**break**，必为**double-round break**
    - 若前半程的**break**不为**double-round**，后半程的**break**必为**double-round**

	1	2	3	...	9	10	11	12	...	17	18	
镜像 (mirror)	1	2	3	...	9	1	2	3	...	8	9	意、德
法制 (French)	1	2	3	...	9	2	3	4	...	9	1	法、俄
英制 (English)	1	2	3	...	9	9	1	2	...	7	8	奥
逆向 (Inverted)	1	2	3	...	9	9	8	7	...	2	1	瑞士



# 整数规划

- 决策变量

$$x_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{第 } k \text{ 轮队 } i \text{ 在主场与队 } j \text{ 比赛,} \\ 0 & \text{其他,} \end{cases} \quad i, j = 1, \dots, 10, k = 1, \dots, 18$$

- 约束条件

- 每轮各队恰有一场比赛

$$\sum_{i=1}^{10} (x_{ijk} + x_{jik}) = 1, \quad j = 1, \dots, 10, k = 1, \dots, 18$$

- 任意两队在前后半程各交手一次

$$\sum_{k=1}^9 (x_{ijk} + x_{jik}) = 1, \quad i, j = 1, \dots, 10 \quad \sum_{k=10}^{18} (x_{ijk} + x_{jik}) = 1, \quad i, j = 1, \dots, 10$$

- 任意两队之间的两场比赛中每队均有一个主场

$$\sum_{k=1}^{18} x_{ijk} = 1, \quad i, j = 1, \dots, 10, i \neq j$$



# 整数规划

- 约束条件
  - 法制规则

$$x_{i,j,1} = x_{j,i,18}, x_{i,j,k} = x_{j,i,k+8}, k = 2, \dots, 9, i, j = 1, \dots, 10$$

- 任一队不连续与种子队（用  $I_s$  表示）对阵

$$\sum_{j \in I_s} (x_{ijk} + x_{jik} + x_{i,j,k+1} + x_{j,i,k+1}) \leq 1, i \in I \setminus I_s, k = 1, \dots, 17$$

- 各支队伍各阶段先主后客（先客后主）的次数尽可能均衡
- 同一阶段出现两个客场的次数尽可能少



# 整数规划

- （辅助）决策变量

$$y_{il} = \begin{cases} 1 & \text{第 } l \text{ 阶段队 } i \text{ 两场比赛为先主后客} \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad i = 1, \dots, 10, l = 1, \dots, 9$$

- 两组决策变量之间的联系

$$y_{il} = 1$$

⇕

队  $i$  在第  $2l-1$  轮为主场作战，第  $2l$  轮为客场作战

⇕

存在  $j_1$ ，使得  $x_{i,j_1,2l-1} = 1$ ，  
存在  $j_2$ ，使得  $x_{j_2,i,2l} = 1$

⇕

$$\sum_{j=1}^{10} x_{i,j,2l-1} = 1, \quad \sum_{j=1}^{10} x_{j,i,2l} = 1$$

$$\sum_{j=1}^{10} (x_{i,j,2l-1} + x_{j,i,2l}) \leq 1 + y_{il}, \quad i = 1, \dots, 10, l = 1, \dots, 9$$

$$y_{il} \leq \sum_{j=1}^{10} x_{i,j,2l-1}, \quad i = 1, \dots, 10, l = 1, \dots, 9$$

$$y_{il} \leq \sum_{j=1}^{10} x_{j,i,2l}, \quad i = 1, \dots, 10, l = 1, \dots, 9$$

$$4 \leq \sum_{l=1}^9 y_{il} \leq 5, \quad i = 1, \dots, 10$$



# 整数规划

- (辅助) 决策变量

$$w_{il} = \begin{cases} 1 & \text{第 } l \text{ 阶段队 } i \text{ 两场比赛均为客场} \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad i = 1, \dots, 10, l = 1, \dots, 9$$

- 两组决策变量之间的联系

$$w_{il} = 1$$

$$\Downarrow$$

队  $i$  在第  $2l-1$  轮和第  $2l$  轮均为客场作战

$$\Downarrow$$

存在  $j_1$ , 使得  $x_{j_1, i, 2l-1} = 1$ ,  
存在  $j_2$ , 使得  $x_{j_2, i, 2l} = 1$

- 目标函数:  $\min \sum_{i=1}^{10} \sum_{l=1}^9 w_{il}$

$$\sum_{j=1}^{10} (x_{j, i, 2l-1} + x_{j, i, 2l}) \leq 1 + w_{il}, \quad i = 1, \dots, 10, l = 1, \dots, 9$$

$$w_{il} \leq \sum_{j=1}^{10} x_{j, i, 2l-1}, \quad i = 1, \dots, 10, l = 1, \dots, 9$$

$$w_{il} \leq \sum_{j=1}^{10} x_{j, i, 2l}, \quad i = 1, \dots, 10, l = 1, \dots, 9$$

# 最终赛程



浙江大学

Zhejiang University

数学建模

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
ARG	ECU	PAR	BRA	COL	CHI	BOL	URU	VEN	PER
BOL	URU	ECU	VEN	PAR	COL	ARG	PER	CHI	BRA
BRA	CHI	VEN	ARG	PER	URU	PAR	ECU	COL	BOL
CHI	BRA	PER	COL	URU	ARG	VEN	PAR	BOL	ECU
COL	PER	URU	CHI	ARG	BOL	ECU	VEN	BRA	PAR
ECU	ARG	BOL	URU	VEN	PAR	COL	BRA	PER	CHI
PAR	VEN	ARG	PER	BOL	ECU	BRA	CHI	URU	COL
PER	COL	CHI	PAR	BRA	VEN	URU	BOL	ECU	ARG
URU	BOL	COL	ECU	CHI	BRA	PER	ARG	PAR	VEN
VEN	PAR	BRA	BOL	ECU	PER	CHI	COL	ARG	URU

排名										
积分	41	31	28	27	26	26	24	20	14	12
净胜球	30	12	3	2	1	-1	-6	-3	-22	-16

	2018		
	主主, 客客	主客	客主
ARG	0	5	4
BOL	0	5	4
BRA	0	4	5
CHI	0	5	4
COL	0	5	4
ECU	0	4	5
PAR	0	4	5
PER	0	4	5
URU	0	4	5
VEN	0	5	4





浙江大学  
Zhejiang University

谢 谢

