数学建模

浙江大学数学系　谈之奕

tanzy@zju.edu.cn

浙江大学
ZheJiang University

运筹与统计

运筹学概说

运筹学

浙江大学 ZheJiang University

数学建模

- 主要研究经济、管理与军事活动中能用数量来表达的有关应用、筹划与决策等方面的问题。它根据问题的要求，通过数学的分析与运算，作出综合性的、合理的安排，以便较经济、较有效地使用人力、物力 ——《辞海》

高祖曰：“公知其一，未知其二。夫運籌策帷帳之中，決勝於千里之外，吾不如子房。鎮國家，撫百姓，給餽餉，不絕糧道，吾不如蕭何。連百萬之軍，戰必勝，攻必取，吾不如韓信。此三者，皆人傑也，吾能用之，此吾所以取天下也。項羽有一范增而

——《史记•高祖本纪》

不與人利，此其所以失天下也。”上曰：“公知其一，未知其二。夫運籌帷幄之中，決勝千里之外，吾不如子房；填國家，撫百姓，給餉餽，不絕

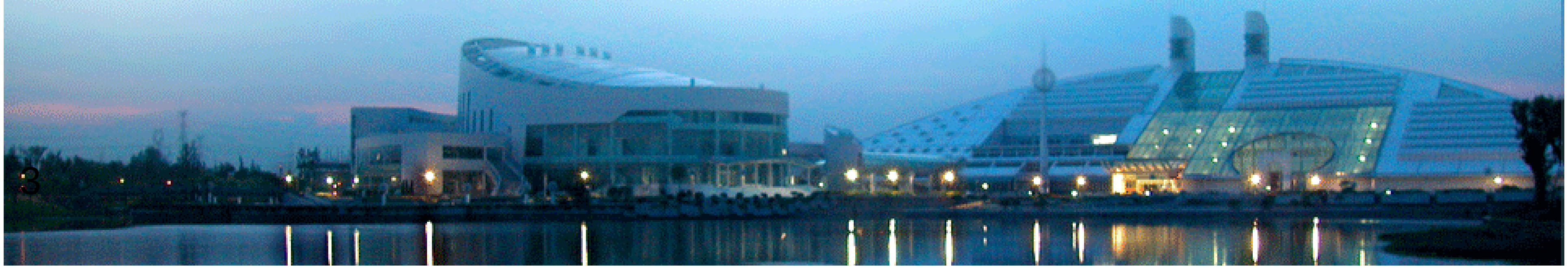
——《汉书•高帝纪》

Operations Research

数学建模

ENCYCLOPÆDIA BRITANNICA

- **Operations research attempts to provide those who manage organized systems with an objective and quantitative basis for decision**
- **It is normally carried out by teams of scientists and engineers drawn from a variety of disciplines**
- **It focuses on the performance of organized systems taken as a whole rather than on their parts taken separately**
- **Usually concerned with systems in which human behaviour plays an important part**
- **Operations research was originally concerned with improving the operations of existing systems rather than developing new ones**



起源

- 优化问题的理论与方法
  - **Fermat**定理（**1637**）
  - 求方程近似解的**Newton**法（**1665**）
  - **Lagrange**乘子法（**1788**）
  - 线性不等式组（**Fourier**，**1826**）
  - 最速下降法（**Cauthy**，**1847**）
  - **Farkas**引理 （**1902**）
- 应用问题的建模与求解
  - 科学管理（**Taylor**，**Gantt**等，二十世纪初）
  - 电话系统（**Erlang**，**1909**）
  - **Lanchester**方程（**1916**）

诞生

数学建模

- 第二次世界大战期间，英、美等国在运用科技指导作战的实践中认识到优化决策的作用和意义，推动运筹学发展为一个独立学科
  - **Blackett**领导的多学科团队**Blackett Circus**对英国空军雷达系统的决策支持
  - **Morse**参与的美国海军反潜作战的巨大胜利

Patrick Maynard Stuart Blackett
（1897－1974）
英国物理学家、运筹学家
1948年诺贝尔物理学奖得主

Philip McCord Morse
（1903－1985）
美国物理学家、运筹学家

诞生

浙江大学 ZheJiang University

数学建模

- 自二十世纪三十年代起，**Kantorovich**开始研究计划经济体系中的数学问题，**1939**年出版的《**Mathematical Method of Production Planning and Organization**》一书中给出了众多实际问题的线性规划模型
- 二十世纪四十年代，**Koopmans**在对商船调度的研究中提出了运输问题及其它资源配置问题的线性规划模型

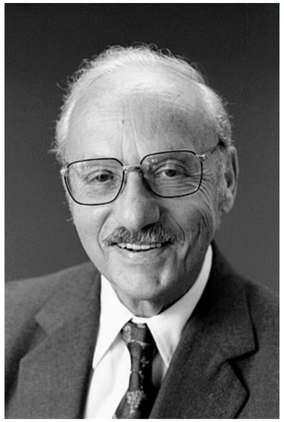
Leonid Vitaliyevich Kantorovich
(1912-1986)
苏联数学家、经济学家

Tjalling Charles Koopmans
(1910-1985)
美国经济学家

1975年**Nobel**经济学奖得主

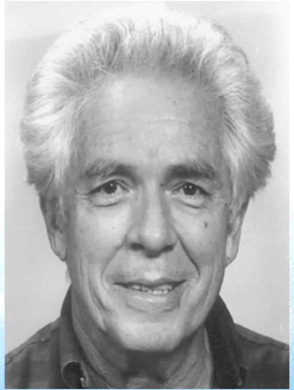
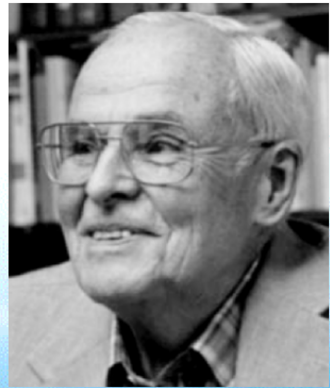
发展

- **1947年，Dantzig提出了一般线性规划模型及其求解方法——单纯形法**
- **1951年，Kuhn和Tucker给出了刻划非线性规划最优解性质的Karush–Kuhn–Tucker条件**
- **1958年，Gomory给出了求解整数线性规划的割平面法**




左：George Bernard Dantzig (1914-2005)

右： Ralph Edward Gomory (1929-)

左：Harold William Kuhn (1925-)

右：Albert William Tucker (1905－1995)

浙江大学 ZheJiang University

数学建模

研究内容与主要分支

- 研究内容
  - 优化理论
  - 应用问题
  - 实际案例
- 主要分支
  - 数学规划（**Mathematical Programming**）
    - 线性规划（**Linear Programming**）
    - 非线性规划（**Nonlinear Programming**）
    - 整数规划（**Integer Programming**）
    - 多目标规划（**Multiobjective Programming**）
  - 组合优化（**Combinatorial Optimization**）
  - 随机运筹
    - 排队论（**Queuing Theory**）
    - 可靠性理论（**Reliability Theory**）
    - 库存论（**Inventory theory**）
  - 博弈论（**Game Theory**）与决策理论（**Decision Theory**）

学会与期刊

数学建模

- **1952年美国成立了世界上第一个运筹学会ORSA， 1995年，ORSA与美国管理学会（TIMS）合并成立INFORMS（Institute for Operations Research and the Management Sciences）。其它有影响的学会有The Mathematical Optimization S**

informs

Mathematical Optimization Society

https://www.informs.org/ http://www.mathopt.org/

浙江大学 ZheJiang University

运筹与统计

数学规划

数学规划

- 若干个变量在满足一些等式或不等式限制条件下，使一个或多个目标函数取得最大值或最小值
- 极值问题
  - 求函数 $f(\mathbf{x})$在 $\mathbf{x}\in S$ 上的极大（小）值
- 条件极值
  - 求函数 $f(\mathbf{x})$在满足

    $$h_j(\mathbf{x})=0,\quad j=1,\cdots,t$$

    条件下的极大（小）值
- 数学规划

$$\begin{aligned} \min \quad & f(\mathbf{x}) \\ s.t. \quad & g_i(\mathbf{x})\ge 0 \quad i=1,\cdots,s \\ & h_j(\mathbf{x})=0 \quad j=1,\cdots,t \\ & \mathbf{x}\in\mathbb{R}^n \end{aligned}$$

目标函数

min 极小
max 极大

subject to:
以下为约束条件

变量取值
范围约束

等式约束

不等式约束

数学规划

- 满足所有约束条件的点称为可行点（解）（**feasible point**），可行点的集合称为可行域（**feasible region**），记为 S
- $\mathbf{x}^* \in S$ 称为（单目标、极小化）优化问题的最优解（**optimal solution**），若对任意 $\mathbf{x} \in S$，均有 $f(\mathbf{x}^*) \le f(\mathbf{x})$；相应地 $f(\mathbf{x}^*)$ 称为最优值
  - 局部最优解和全局最优解

分类

- 线性规划与非线性规划
  - 线性规划：f, g_i, h_j 均为线性函数
  - 非线性规划：f, g_i, h_j 至少有一个是非线性函数
- 整数规划：至少有一个决策变量限定取整数值
  - 混合整数规划（**Mixed Integer Programming, MIP**）：部分决策变量取整数值
  - **0-1**规划：所有决策变量都取 **0** 或 **1**
- 凸规划（**convex programming**）：$f(\mathbf{x})$ 为凸函数且 S 为凸集
  - S 为凸集，若对任意 $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2 \in S$，$\lambda \in [0,1]$ 均有 $\lambda \mathbf{x}^1 + (1-\lambda)\mathbf{x}^2 \in S$

问题建模

数学建模

- 对实际问题建立数学规划模型一般包含确定决策变量、给出目标函数、列出约束条件等步骤
- 食谱问题（**diet problem**）
  - 在市场上可以买到 n 种不同的食品，第 j 种食品的单位售价为 c_j
  - 人体正常生命活动过程需要 m 种基本营养成分，一个人每天至少需要摄入第 i 种营养成分 b_i 个单位
  - 每单位第 j 种食物包含第 i 种营养成分 a_{ij} 个单位
  - 在满足人体营养需求的前提下，如何寻找最经济的配食方案

14

食谱问题

- 决策变量：食谱中第 j 种食物的数量为 x_j 个单位，$j=1,\cdots,n$
- 目标函数：所有食物费用之和 $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$
- 约束条件：
  - 满足人体营养需求
    - x_j 个单位第 j 种食物中含第 i 种营养成分 $a_{ij}x_j$ 个单位
    - 人体摄入的第 i 种营养成分的总量为 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$
    - 每种营养成分应满足人体需要 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ge b_i,\ i=1,\cdots,m$
  - 摄入食物量非负 $x_j \ge 0,\ j=1,\cdots,n$

食谱问题

$$\min \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$s.t. \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i, \quad i=1, \ \cdots, m$$

$$x_j \geq 0, \ j=1, \cdots, n$$

- 食谱问题为一线性规划

- 记 $\mathbf{x}=(x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{A}=(a_{ij})_{m\times n}$, $\mathbf{c}=(c_1, \cdots, c_n)$, $\mathbf{b}=(b_1, \cdots, b_m)^{\mathrm{T}}$，食谱问题可写为矩阵形式

$$\begin{aligned} &\min \ \mathbf{cx} \\ &s.t. \ \mathbf{Ax} \geq \mathbf{b} \\ &\quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} &\min \ \mathbf{cx} \\ &s.t. \ \mathbf{Ax}-\mathbf{y}=\mathbf{b} \\ &\quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

16

数学建模

食谱问题

营养物质	PDA
热量	3000卡
蛋白质	70克
钙	0.8克
铁	12毫克
维生素A	5000IU
维生素B1	1.8毫克
维生素B2	2.7毫克
烟碱酸	18毫克
维生素C	75毫克

THE COST OF SUBSISTENCE

GEORGE J. STIGLER
University of Minnesota

ELABORATE investigations have been made of the adequacy of diets at various income levels, and a considerable number of "low-cost," "moderate," and "expensive" diets have been recommended to consumers. Yet, so far as I know, no one has determined the minimum cost of obtaining the amounts of calories, protein, minerals, and vitamins which these studies accept as adequate or optimum. This will be done in the present paper, not only for its own interest but because it sheds much light on the meaning of conventional "low-cost" diets.

G. J. Stigler, The Cost of Subsistence, *Journal of Farm Economics*, 27, 303-314, 1945

1943年美国研究院发布的从事中等强度活动，体重为154磅的成年男性9种营养成分的每天推荐摄入量（PDA）

George J. Stigler

（1911－1991）

美国经济学家

1982年诺贝尔经济学奖得主

17

食谱问题

食品种类（选自77种常用食品）	Stigler所得近似解		最优解	
	年摄入量	费用（$）	年摄入量	费用（$）
小麦粉（Wheat Flour）	370磅	13.33	299磅	10.78
炼乳（Evaporated Milk）	57加仑	3.84	—	—
卷心菜（Cabbage）	111磅	4.11	111磅	4.10
菠菜（Spinach）	23磅	1.85	23磅	1.83
干菜豆（Dried Navy Beans）	285磅	16.80	378磅	22.29
牛肝（Beef Liver）	—	—	2.57磅	0.69
年度总费用（以1939年度价格计算）		39.93		39.69

下料问题

- **Cutting-Stock Problem**
  - 现有**15**米长的钢管若干，生产某产品需**4**米，**5**米，**7**米长的钢管各**100**，**150**，**200**根，如何截取方能使材料最省
- 如何选择该问题的决策变量
  - 一根钢管可以截为长度不同的几根钢管

19

下料问题

- 考虑所有可能的截取方式

方式	1	2	3	4	5	6	7
7米	2	1	1	0	0	0	0
5米	0	1	0	3	2	1	0
4米	0	0	2	0	1	2	3
余料	1	3	0	0	1	2	3

- 决策变量：按第 i 种方式截取原料 x_i 根，$i=1,\cdots,7$

下料问题

$$
\begin{aligned}
\min \quad & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \\
s.t. \quad & 2x_1 + x_2 + x_3 \ge 200 \\
& x_2 + 3x_4 + 2x_5 + x_6 \ge 150 \\
& 2x_3 + x_5 + 2x_6 + 3x_7 \ge 100 \\
& x_i \ge 0 \text{ 且 } x_i \text{ 为整数}, \quad i = 1, 2, \cdots, 7.
\end{aligned}
$$

截取时允许多余若干根某种规格的钢管

- 按任一种方式截取的钢管数必须是整数，下料问题为一整数线性规划

选址问题

浙江大学 ZheJiang University

数学建模

- 设在平面上有 n 个点，第 j 个点的坐标为 (x_j, y_j)
- 求一个面积最小的圆，使这 n 个点均为该圆内的点

A QUESTION IN THE GEOMETRY OF SITUATION.

By J. J. SYLVESTER.

IT is required to find the least circle which shall contain a given system of points in a plane.

THE

QUARTERLY JOURNAL

OF

PURE AND APPLIED

MATHEMATICS.

EDITED BY

J. J. SYLVESTER, M.A., F.R.S.,

PROFESSOR OF MATHEMATICS IN THE ROYAL MILITARY ACADEMY, WOOLWICH; AND

N. M. FERRERS, M.A.,

FELLOW OF GONVILLE AND CAIUS COLLEGE, CAMBRIDGE:

ASSISTED BY

G. G. STOKES, M.A., F.R.S.,

LUCASIAN PROFESSOR OF MATHEMATICS IN THE UNIVERSITY OF CAMBRIDGE;

A. CAYLEY, M.A., F.R.S.,

LATE FELLOW OF TRINITY COLLEGE, CAMBRIDGE; AND

M. HERMITE,

CORRESPONDING EDITOR IN PARIS.

VOL. I.

ὅ τι οὐσία πρὸς γένεσιν, ἐπιστήμη πρὸς πίστιν καὶ διάνοια πρὸς εἰκασίαν ἐστι.

LONDON:

JOHN W. PARKER AND SON, WEST STRAND.

1857.

22

浙江大学 ZheJiang University

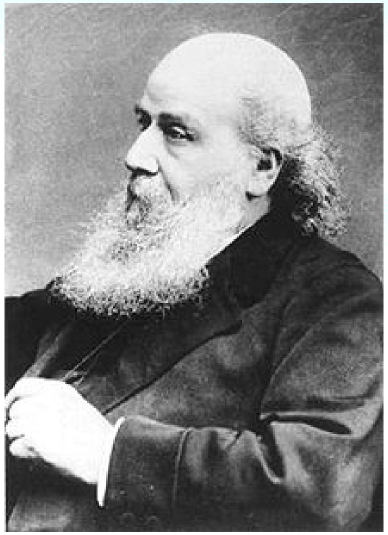
数学建模

选址问题

- 决策变量：圆心 (x_0, y_0)，半径 r
- 目标函数：r^2
- 约束条件：每个点到圆心的距离不超过半径

$$
\begin{aligned}
&\min \quad r^2 \\
&s.t. \quad (x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2 \le r^2, \quad i = 1, 2, \cdots, n
\end{aligned}
$$

- 选址问题为一非线性规划



James Joseph Sylvester

(1814-1897)

英国数学家

23

选址问题

$$
\begin{aligned}
&\min \quad r^2 \\
&s.t. \quad (x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2 \le r^2, \quad i = 1, 2, \cdots, n
\end{aligned}
$$

- 定义新决策变量 $\lambda = r^2 - (x_0^2 + y_0^2)$，规划可写为更简单的形式

$$
\begin{aligned}
&\min \quad \lambda + x_0^2 + y_0^2 \\
&s.t. \quad \lambda + 2x_0 x_i + 2y_0 y_i \ge x_i^2 + y_i^2, \quad i = 1, 2, \cdots, n
\end{aligned}
$$

- 目标函数为二次函数，约束条件均为线性等式或不等式的非线性规划称为二次规划（**Quadratic Programming**）

24

数学规划

- 建立实际问题数学规划的原则与技巧
  - 选择合适的决策变量，数量适中，目标函数和约束条件表达清晰、形式简单
  - 约束条件完整反映问题要求，不遗漏，不冗余
  - 善于转化和变形，一般应尽量减少非线性约束和整数取值限制，灵活处理绝对值、分段函数等复杂情况
  - 结合计算求解检验、修正和改进已有规划

浙江大学
ZheJiang University

运筹与统计

线性规划

标准形

- 线性规划的标准形

$$\min \ \mathbf{cx}$$
$$s.t. \ \ \mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$
$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

价格系数向量 → $\mathbf{c}$

系数矩阵 → $\mathbf{A}$

右端向量 → $\mathbf{b}$

  - 目标为极小化函数
  - 所有约束均为等式约束
  - 约束等式右端均为非负常数
  - 决策变量取非负值

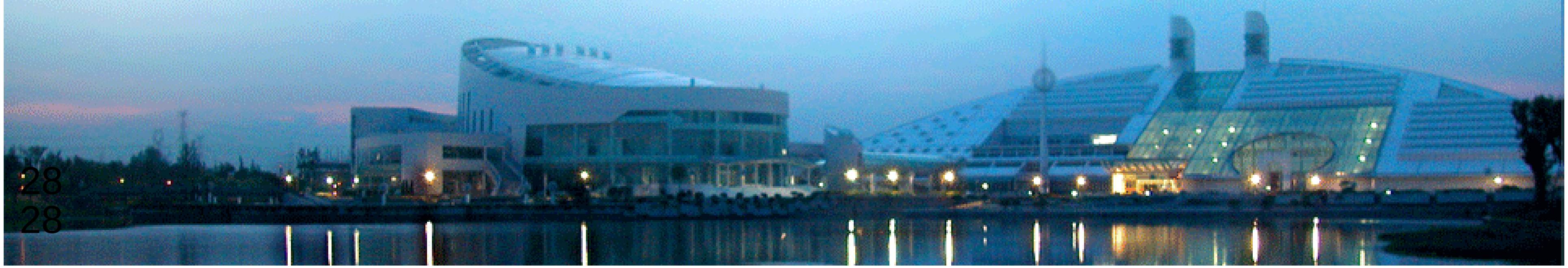
- 任何线性规划总可通过适当变形变为标准形
- 线性规划解的情况
  - 有唯一最优解
  - 有无穷多最优解
  - 最优解无下界（可行域非空）
  - 可行域为空

由可行域的凸性，线性规划不可能出现有有限多个最优解的情况

基本可行解

数学建模

- 设 $\mathbf{A}$ 为 $m\times n$ 阶系数矩阵， **A 行满秩**
  - 将 $\mathbf{A}$ 分块为 $(\mathbf{B},\mathbf{N})$（必要时调整列的次序），其中 $\mathbf{B}$ 为 m 阶可逆方阵，称为基（basis）
  - 决策变量 $\mathbf{x}$ 相应地分块为 $\begin{pmatrix}\mathbf{x}_B\\ \mathbf{x}_N\end{pmatrix}$ ，$\mathbf{x}_B$ 和 $\mathbf{x}_N$ 中的分量分别称为基变量和非基变量
  - 约束条件变为 $\mathbf{B}\mathbf{x}_B+\mathbf{N}\mathbf{x}_N=\mathbf{b},\ \mathbf{x}_B\geq 0,\ \mathbf{x}_N\geq 0$



28

浙江大学 ZheJiang University

数学建模

基本可行解

$$\mathbf{B}\mathbf{x}_B + \mathbf{N}\mathbf{x}_N = \mathbf{b}$$
$$\mathbf{x}_B \geq 0, \mathbf{x}_N \geq 0$$

- 令 $\mathbf{x}_N = \mathbf{0}$ ，则 $\mathbf{x}_B = B^{-1}\mathbf{b}$
  - 称 $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$ 为相应于基 $\mathbf{B}$ 的基本解
  - 当 $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$ 时，称 $\mathbf{x}$ 为一基本可行解
- （线性规划基本定理）若线性规划有可行解，必有基本可行解；若线性规划有有界最优解，则必有最优基本可行解

29

单纯形法

浙江大学
ZheJiang University
数学建模

- 由线性规划基本定理，要寻求线性规划的最优解，只需在所有基本可行解中寻找。基本可行解的数目不超过 **A** 的所有可能的不同的基的数目，因此不超过$\binom{n}{m}$个
- 单纯形法（**Simplex Method**）的基本思想是先找到一个初始基本可行解，判断是否是最优解。若不是最优解，则转换到另一个基本可行解（它们对应的基只有一列不同），并使目标值下降（或不上升）。重复有限次，可找到最优解或判断解无界

30

几何意义

- 线性规划的可行域是一个凸多面体（有界或无界），每个基本可行解对应于凸多面体的一个顶点
- 由线性规划基本定理，最优解必在某个顶点处达到
- 单纯形法的几何意义是从凸多面体的一个顶点转到相邻的另一个顶点，直至找到最优解

31

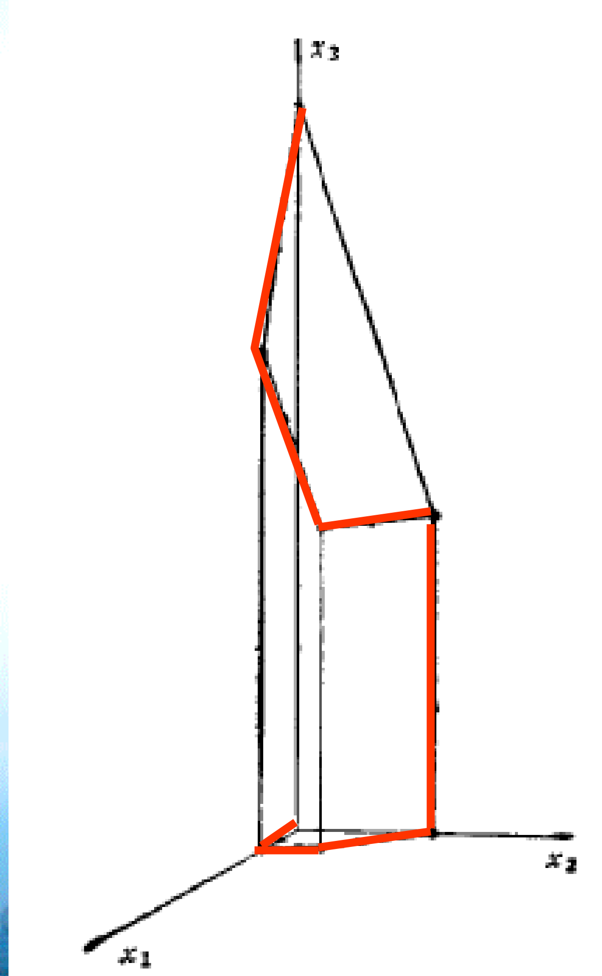
时间复杂性

- 大量实践表明，对多数线性规划问题，单纯形法迭代次数为m和 n的多项式
- **V. Klee**和**G. L. Minty**于**1972**年构造出含 m个变量的线性规划，单纯形法需要进行 2^m-1 次迭代

$$\max \sum_{i=1}^{m} 10^{m-i} x_i$$

$$s.t.\ \ 2\sum_{i=1}^{j-1} 10^{j-i} x_i + x_j \le 100^{j-1},\ j=1,\ \cdots,m$$

$$x_i \ge 0, i=1,\cdots,m$$



多项式时间算法

- **1979年，Khachiyan** 给出了求解线性规划的第一个多项式时间算法——椭球算法（**Ellipsoid algorithm**），解决了关于线性规划问题复杂性的**open**问题
- **1984年，Karmarkar** 给出了实际效果更好的多项式时间算法——内点法（**Interior Point Method**），在数学规划领域产生了深远的影响

Narendra Karmarkar

(1957-)

印度数学家

Leonid Genrikhovich Khachiyan

(1952-2005)

苏联数学家

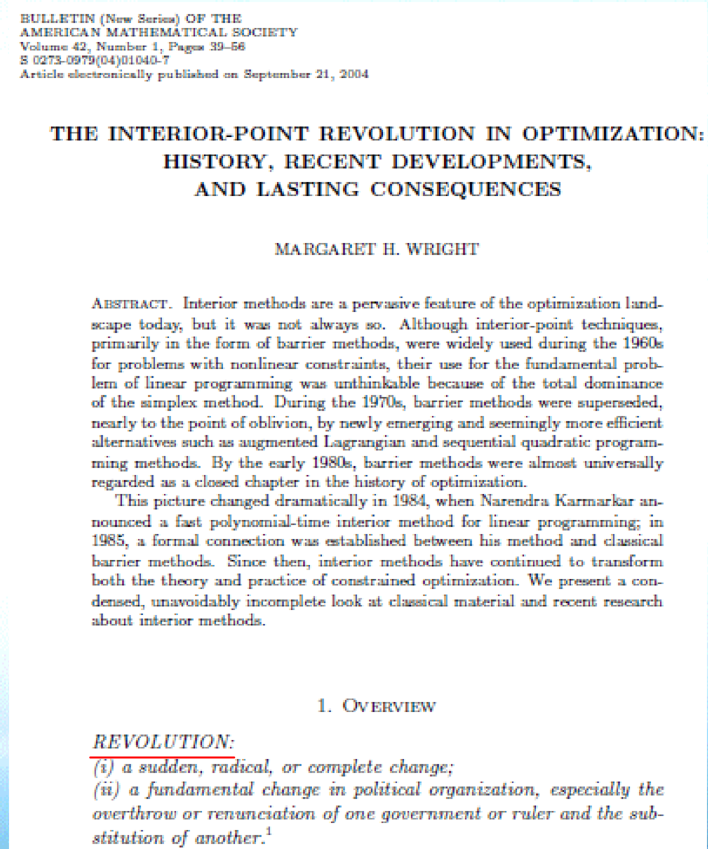
33

多项式时间算法

ZheJiang University

数学建模

- **E. L. Lawler, The great mathematical sputnik of 1979, *The Mathematical Intelligencer*, 2, 191-198, 1980**
- **N. K. Karmarkar, A new polynomial-time algorithm for linear programming, *Combinatorica*, 4, 373–395, 1984**
- **M. H. Wright, The interior-point revolution in optimization: History, recent developments, and lasting consequences, *Bulletin of the American Mathematical Society*, 42, 39-56, 2005**
- **D. A. Spielman, S.-T. Teng, Smoothed analysis of algorithms: Why the simplex algorithm usually takes polynomial time, *Journal of the ACM*, 51, 385–463, *2004***



BULLETIN (New Series) OF THE
AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY
Volume 42, Number 1, Pages 39–56
S 0273-0979(04)01040-7
Article electronically published on September 21, 2004

THE INTERIOR-POINT REVOLUTION IN OPTIMIZATION: HISTORY, RECENT DEVELOPMENTS, AND LASTING CONSEQUENCES

MARGARET H. WRIGHT

Abstract. Interior methods are a pervasive feature of the optimization landscape today, but it was not always so. Although interior-point techniques, primarily in the form of barrier methods, were widely used during the 1960s for problems with nonlinear constraints, their use for the fundamental problem of linear programming was unthinkable because of the total dominance of the simplex method. During the 1970s, barrier methods were superseded, nearly to the point of oblivion, by newly emerging and seemingly more efficient alternatives such as augmented Lagrangian and sequential quadratic programming methods. By the early 1980s, barrier methods were almost universally regarded as a closed chapter in the history of optimization.

This picture changed dramatically in 1984, when Narendra Karmarkar announced a fast polynomial-time interior method for linear programming; in 1985, a formal connection was established between his method and classical barrier methods. Since then, interior methods have continued to transform both the theory and practice of constrained optimization. We present a condensed, unavoidably incomplete look at classical material and recent research about interior methods.

1. Overview

REVOLUTION:

(i) a sudden, radical, or complete change;

(ii) a fundamental change in political organization, especially the overthrow or renunciation of one government or ruler and the substitution of another.[1]

食谱问题的对偶

浙江大学 ZheJiang University

数学建模

- 有一制药商欲通过制造 m 种不同的营养丸与食品商竞争，如何确定第 i 种营养丸的单价 w_i 才能抢占食品市场又能获得最大利润
  - 第 j 种食品的单价不小于通过购买各种营养丸获得相同营养成分所需的价格 $c_j \geq \sum_{i=1}^{m} w_i a_{ij}$
  - 制造商的利润尽可能大 $\max \sum_{i=1}^{m} w_i b_i$

$$
\begin{aligned}
\min\ & \mathbf{cx} \\
s.t.\ & \mathbf{Ax} \geq \mathbf{b} \\
& \mathbf{x} \geq \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

35

对偶

食谱问题　　　　对偶问题

$$\min \ \mathbf{cx} \qquad\qquad \max \ \mathbf{wb}$$

$$s.t. \ \ \mathbf{Ax} \geq \mathbf{b} \qquad\qquad s.t. \ \ \mathbf{wA} \leq \mathbf{c}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0} \qquad\qquad \mathbf{w} \geq \mathbf{0}$$

（**P**）　对称形式　（**D**）

决策变量 $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \cdots, w_m)$

注意左乘与右乘的区别

- 对其它形式的线性规划，可通过转化为对称形式写出其对偶
- 对偶的对偶即为其本身，因此（**P**）与（**D**）互为对偶

对偶原理

数学建模

- 若 x 是（P）的任一可行解，w 是（D）的任一可行解
  - $\mathbf{cx} \geq \mathbf{wAx} \geq \mathbf{wb}$
  - 若 $\mathbf{cx} = \mathbf{wb}$，则 x 和 w 分别是（P）和（D）的最优解
- 若（P）或（D）中有一个问题有最优解，则另一个问题也有最优解，且它们的最优目标值相等

$$
(\mathrm{P})\quad
\begin{array}{ll}
\min & \mathbf{cx} \\
s.t. & \mathbf{Ax} \geq \mathbf{b} \\
 & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}
\end{array}
$$

$$
(\mathrm{D})\quad
\begin{array}{ll}
\max & \mathbf{wb} \\
s.t. & \mathbf{wA} \leq \mathbf{c} \\
 & \mathbf{w} \geq \mathbf{0}
\end{array}
$$

$$
\underbrace{\text{（D）的目标值}}\ \underbrace{\text{（P）的目标值}} \longrightarrow
$$

运筹与统计

整数规划

浙江大学 ZheJiang University

数学建模

松弛

- 设有整数线性规划（IP），去除决策变量取整数约束后所得线性规划记为（LP），称（LP）为（IP）的松弛（relaxation）
  - （IP）的可行域包含于（LP）的可行域中
  - （IP）的可行解也是（LP）的可行解，但反之不然
  - （IP）的最优值不优于（LP）的最优值
  - 若（LP）的最优解为整数解，则它也是（IP）的最优解

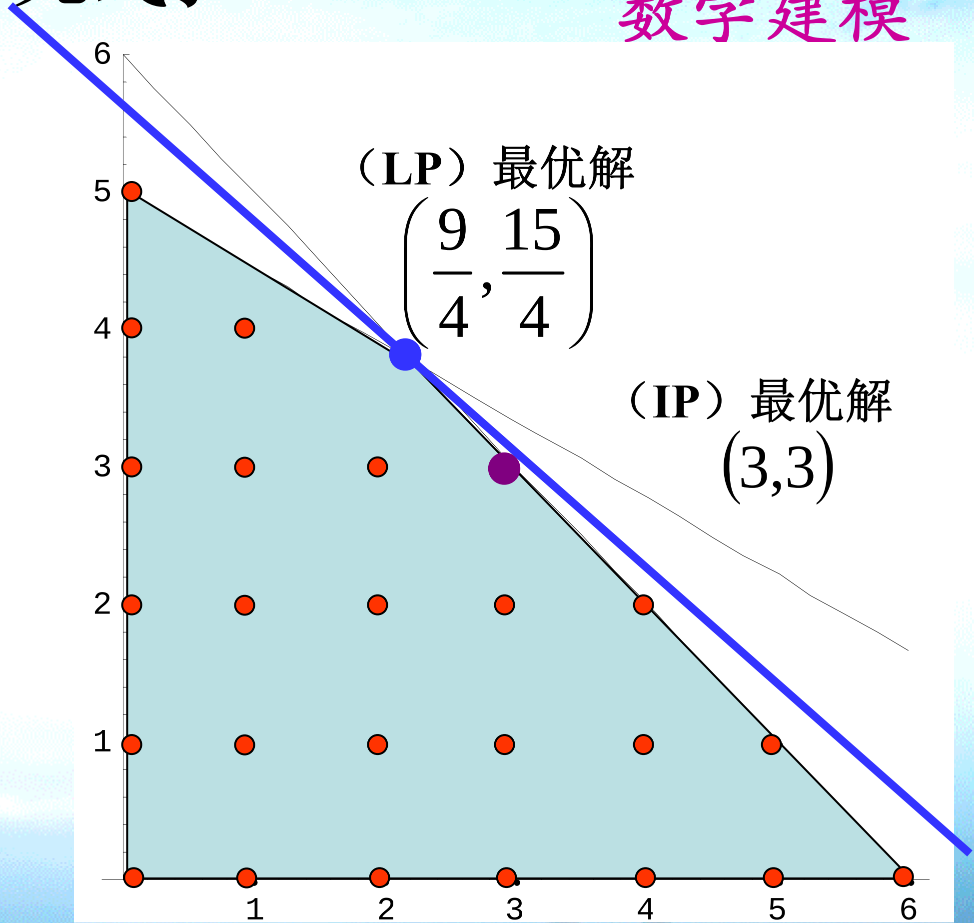
$$
\begin{aligned}
&\min \quad \mathbf{cx} \\
(\mathrm{IP}) \quad & s.t. \quad \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\
& \mathbf{x} \in \mathbb{Z}_+^n
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\min \quad \mathbf{cx} \\
(\mathrm{LP}) \quad & s.t. \quad \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\
& \mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n
\end{aligned}
$$

松弛线性规划

$$
\text{(IP)}\quad \begin{aligned} &\min -30x_1 - 36x_2 \\ s.t.\quad & x_1 + \ \ x_2 \le 6 \\ & 5x_1 + 9x_2 \le 45 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \text{ 且为整数} \end{aligned}
$$

$$
\text{(LP)}\quad \begin{aligned} &\min -30x_1 - 36x_2 \\ s.t.\quad & x_1 + \ \ x_2 \le 6 \\ & 5x_1 + 9x_2 \le 45 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}
$$



不存在简单的取整策略将（LP）的最优解变为（IP）的最优解

分枝定界法

- (BP) had ambitions to extend the model to deal also with the planning of world movement of oil from source to refinery, but knew that the capacity restrictions on the ships and storage tanks introduced discrete variables into their models
- the solution of this type of problem required electronic computation, but unfortunately LSE at that time did not have any access to such a facility. However, we had no doubt that using the same approach to computing could be achieved, if rather painfully, on desk computers, which were plentifully available. We became quite skilful at doing vector operations by multiplying with the left hand, and adding and subtracting with the right hand on another machine


Ailsa Land

Alison Doig

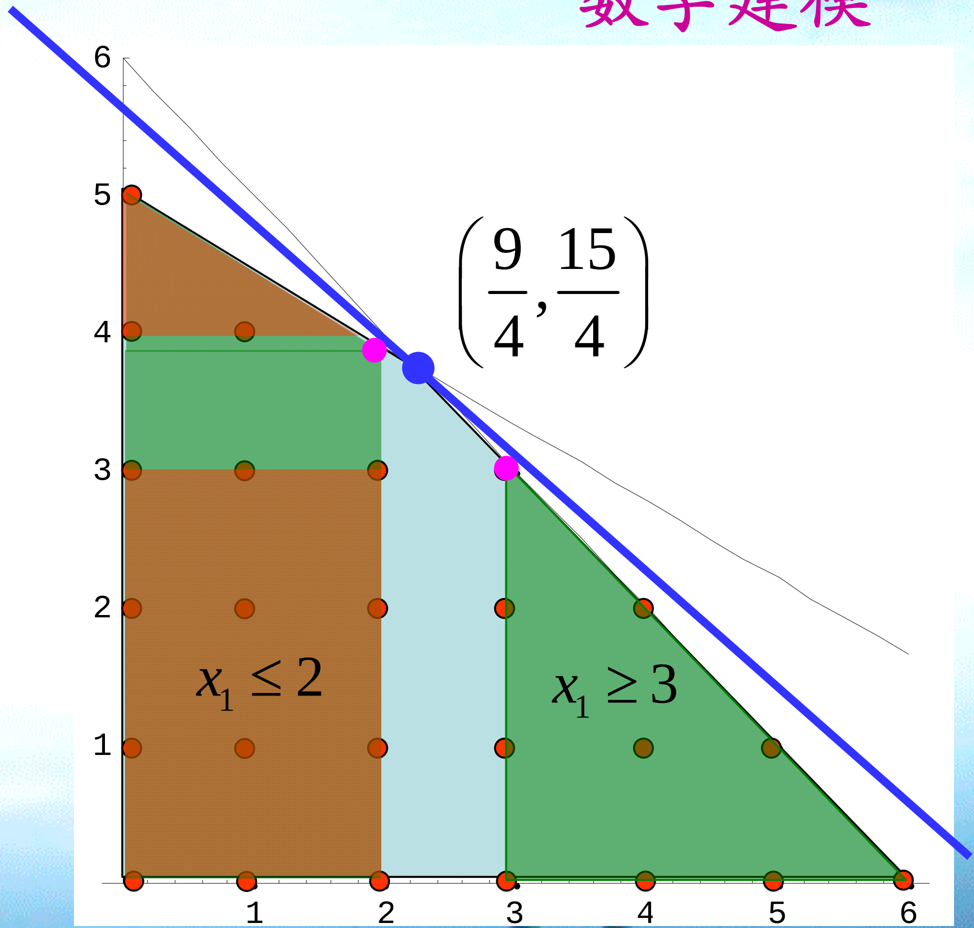
An automatic method of solving discrete programming problems, *Econometrica* 28, 497–520, 1960.

ECONOMETRICA
JOURNAL OF THE ECONOMETRIC SOCIETY

分枝定界法

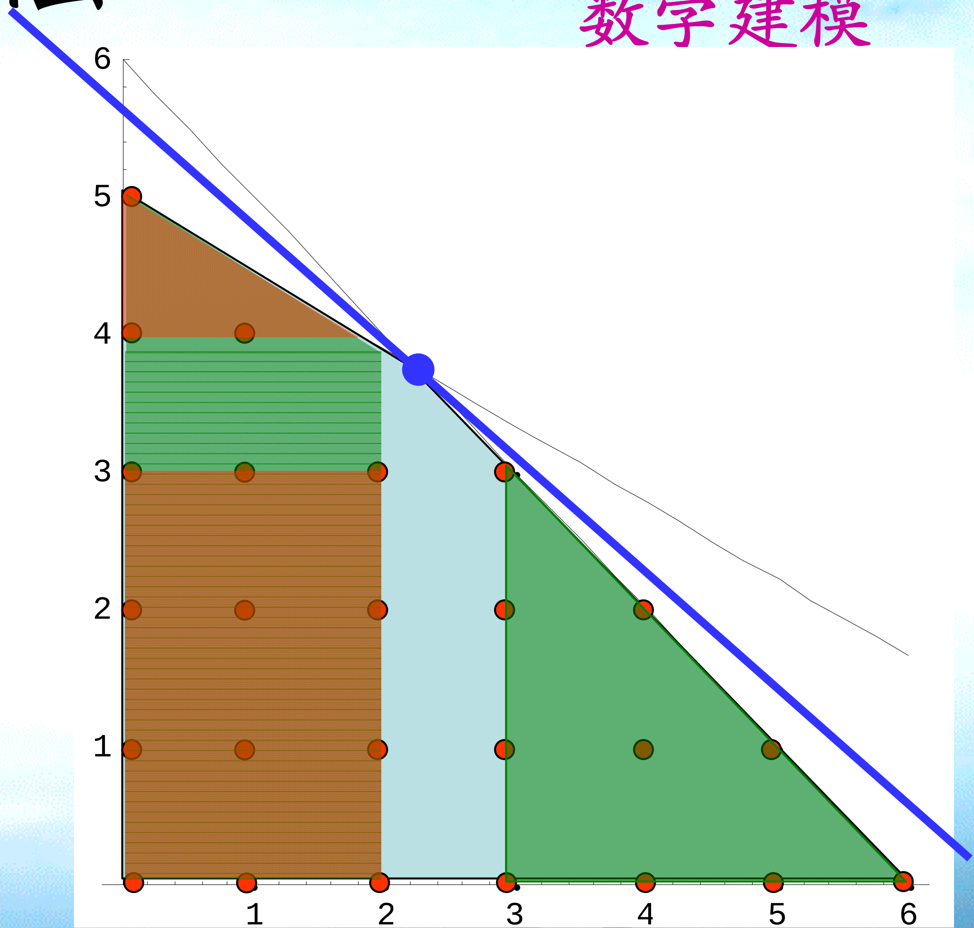
数学建模

- **Branch and Bound（B-B）**
  - （分枝）求解整数线性规划（**IP**）的松弛（**LP**），若其最优解不为整数解，选择最优解中任一个不取整数值的变量，在（**IP**）中分别加入一对互斥的约束，形成两个分枝整数线性规划。原（**IP**）的任一可行解分属两个分枝的可行域之一



分枝定界法

- **Branch and Bound（B-B）**
  - （定界）求解分枝整数线性规划的松弛，确定每个分枝最优值的上界或下界，删去松弛线性规划最优解为整数解或不包含（IP）最优解的分枝。至所有分枝均已删去时，（IP）的最优解必包含在历次求得的整数解中



分枝定界法

数学建模

- 分枝定界法是求解整数规划最常用的算法之一，但仍是指数时间算法。采用更为复杂的定界方法或选择适宜的分枝策略可在一定程度上减少运算时间
- 用于求解**0-1**规划等特殊整数规划的分枝定界法有更为简单的表现形式和更好的实际效果
- 分枝定界法的思想可用于其它离散优化问题的求解，分枝、定界的策略与方法和问题特征密切相关

浙江大学
ZheJiang University

运筹与统计

多目标规划

多目标规划

- **多目标规划**研究变量在满足给定约束条件下，如何使多个目标函数同时极小化的问题

$$
\text{(MOP)}\quad
\begin{aligned}
\min\ \ & \mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \cdots, f_p(\mathbf{x}))^{\mathrm{T}} \\
s.t.\ \ & \mathbf{g}_i(\mathbf{x}) \geq \mathbf{0}, i = 1, \cdots, s, \\
& \mathbf{h}_j(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, j = 1, \cdots, t.
\end{aligned}
$$

Vilfredo Federico Damaso Pareto
（1848－1923）
意大利经济学家

解的类型

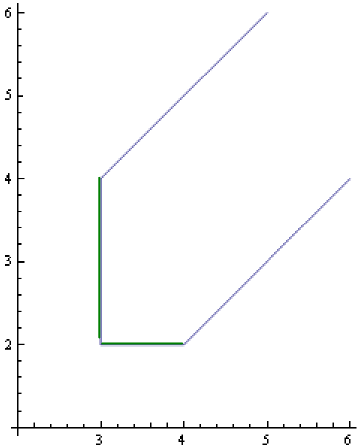
- 设 $\mathbf{x}^* \in S$
  - 若对任意 $\mathbf{x} \in S, f_k(\mathbf{x}^*) \le f_k(\mathbf{x}), k = 1, \cdots, p$，则称 $\mathbf{x}^*$为（MOP）的绝对最优解
  - 若不存在 $\mathbf{x} \in S$，使得 $f_k(\mathbf{x}) \le f_k(\mathbf{x}^*), k = 1, \cdots, p$，且至少存在某个 $k, f_k(\mathbf{x}) < f_k(\mathbf{x}^*)$，则称 $\mathbf{x}^*$为（MOP）的**Pareto**最优解
  - 若不存在 $\mathbf{x} \in S$，使得 $f_k(\mathbf{x}) < f_k(\mathbf{x}^*), k = 1, \cdots, p$，则称 $\mathbf{x}^*$为（MOP）的弱**Pareto**最优解
- （**MOP**）的所有绝对最优解，**Pareto**最优解，弱**Pareto**最优解的集合分别记作 S_a, S_p和 S_{wp}

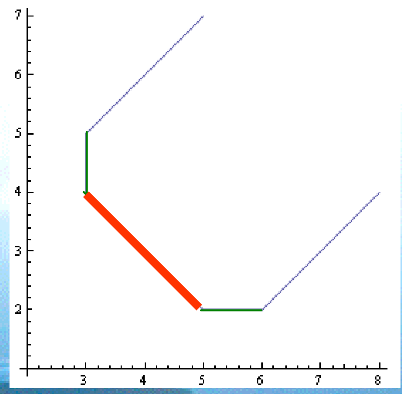
解的关系

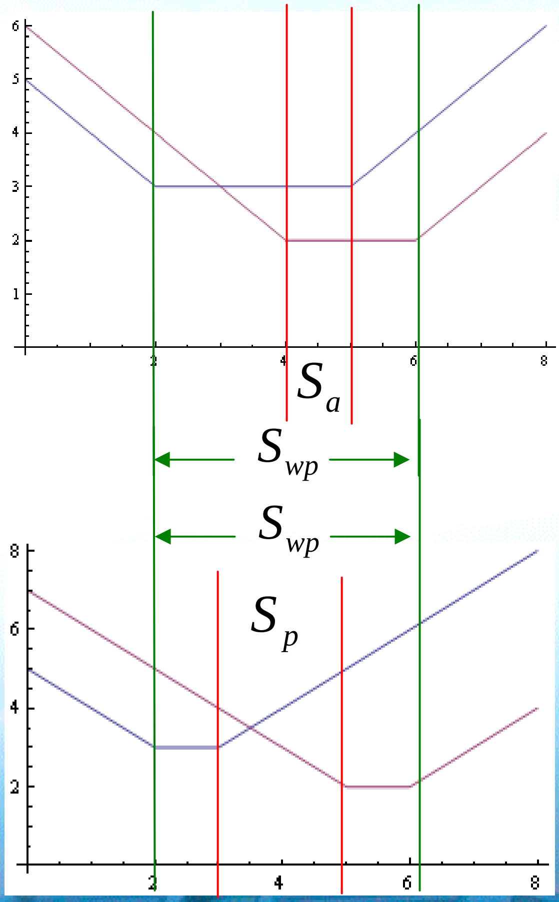
- 记 S^i 为单目标规划 $\min\limits_{\mathbf{x}\in S} \ f_i(\mathbf{x})$ 的最优解，则

$$S_a = \bigcap_{i=1}^{p} S^i$$

$$S^i \subseteq S_{wp}$$







解的关系

- $S_a \subseteq S_p \subseteq S_{wp} \subseteq S$
  - 若 $\mathbf{x}^* \in S_a$，但 $\mathbf{x}^* \notin S_p$，则存在 $\bar{\mathbf{x}} \in S$ 和某个 k，使得 $f_k(\bar{\mathbf{x}}) < f_k(\mathbf{x}^*), f_l(\bar{\mathbf{x}}) \le f_l(\mathbf{x}^*), l \ne k$，与 $\mathbf{x}^* \in S_a$ 矛盾
  - 若 $\mathbf{x}^* \in S_p$，但 $\mathbf{x}^* \notin S_{wp}$，则存在 $\bar{\mathbf{x}} \in S$，使得 $f_k(\bar{\mathbf{x}}) < f_k(\mathbf{x}^*), k = 1, \cdots, p$，与 $\mathbf{x}^* \in S_p$ 矛盾
- 若 $S_a \ne \varnothing$，则 $S_a = S_p$
  - 若 $\mathbf{x}^* \in S_p$，但 $\mathbf{x}^* \notin S_a$，由于 $S_a \ne \varnothing$，存在 $\bar{\mathbf{x}} \in S_a$，使得 $f_k(\bar{\mathbf{x}}) \le f_k(\mathbf{x}^*), k = 1, \cdots, p$，由于 $\mathbf{x}^* \ne \bar{\mathbf{x}}$，存在某个 k, $f_k(\bar{\mathbf{x}}) \ne f_k(\mathbf{x}^*)$，$f_k(\bar{\mathbf{x}}) < f_k(\mathbf{x}^*)$，与 $\mathbf{x}^* \in S_p$ 矛盾

多目标问题解法

- 求(MOP)所有的Pareto最优解或弱Pareto最优解
- 加权法
  - 令 $\Lambda = \{\boldsymbol{\lambda} \mid \boldsymbol{\lambda} > \mathbf{0}, \sum_{k=1}^{p} \lambda_k = 1\}$
  - 线性加权和法 (SP_{λ}) $\min\limits_{\mathbf{x} \in S} \sum_{k=1}^{p} \lambda_k f_k(\mathbf{x})$
  - 极小化极大法 (P_{λ}) $\min\limits_{\mathbf{x} \in S} \max\limits_{1 \le k \le p} \lambda_k f_k(\mathbf{x})$
  - 对任意 $\boldsymbol{\lambda} \in \Lambda, (SP_{\lambda})$的最优解必是（MOP）的Pareto最优解，$(P_{\lambda})$的最优解必是（MOP）的弱Pareto最优解

多目标问题解法

- 分层排序法
  - 将目标按重要程度排序，在前一个目标的最优解集中，寻找后一个目标的最优解集，并把最后一个目标的最优解作为（**MOP**）的解
  - 分层排序法得到的解必为（**MOP**）的**Pareto**最优解
- 带宽容值的分层排序法

多目标问题解法

- 主要目标法
  - 确定一个目标函数，如 $f_1(x)$，为主要目标，对其余 $p-1$个目标函数 $f_k(x)$，选定一定的界限值 $u_k, k=2,\cdots,p$，求解单目标规划

$$
(SP)\quad \begin{array}{ll} \min & f_1(\mathbf{x}) \\ s.t. & f_k(\mathbf{x}) \le u_k, k=2,\cdots,p, \\ & \mathbf{x} \in S \end{array}
$$

  - (SP) 的最优解都是（**MOP**）的弱**Pareto**最优解

运筹与统计

混合双打

混合双打问题

- n 名男运动员和 n 名女运动员搭配进行多轮混合双打比赛
- 每轮比赛所有运动员均需参与
- 每一位运动员在各轮中的搭档都不相同
- 每一位运动员在各轮中的对手（同性或异性）都不相同
- 最多能安排多少轮比赛

混合双打问题

- 男运动员数目和女运动员数目 n 需为偶数，每轮需安排 $n/2$ 场比赛，比赛轮数不多于 $n-1$
- 轮数恰为或接近 $n-1$ 的比赛安排未必存在
- 用整数规划的方法可确定轮数为 m 的比赛安排是否可行，并在可行时求出一种安排

决策变量

浙江大学
ZheJiang University
数学建模

- 决策变量

$$x_{ghijk}=\begin{cases}1 & \text{男运动员}g\text{和女运动员}h\text{搭配与} \\ & \quad\text{男运动员}i\text{和女运动员}j\text{搭配} \\ & \quad\text{在第}k\text{轮交手} \\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

$$g,h,i,j=1,\cdots,n,k=1,\cdots,m$$

♂g h♀
v.s.
♂i j♀
第k轮

- 决策变量的定义蕴含约束条件

$$x_{ghijk}=x_{ijghk},\ g,h,i,j=1,\cdots,n,k=1,\cdots,m$$

约束条件

- 每位男（女）运动员在每轮恰参加一场比赛

$$\sum_{h=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_{ghijk}=1,\ g=1,\cdots,n,k=1,\cdots,m$$

$$\sum_{g=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_{ghijk}=1,\ h=1,\cdots,n,k=1,\cdots,m$$

♂g h♀

v.s.

♂i j♀

第k轮

约束条件

数学建模

- 每位男运动员与另一位男运动员在各轮比赛中至多交手一次；每位女运动员与另一位女运动员在各轮比赛中至多交手一次

$$\sum_{h=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} x_{ghijk} \le 1,\ g=1,\cdots,n, i=1,\cdots,n$$

$$\sum_{g=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} x_{ghijk} \le 1,\ h=1,\cdots,n,\ j=1,\cdots,n$$

♂g h♀

v.s.

♂i j♀

第k轮

约束条件

- 每位男运动员与某位女运动员在各轮比赛中至多搭档一次

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} x_{ghijk} \le 1,\ g = 1,\cdots,n,\ h = 1,\cdots,n$$

- 每位男运动员与某位女运动员在各轮比赛中至多交手一次

$$\sum_{h=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} x_{ghijk} \le 1,\ g = 1,\cdots,n,\ j = 1,\cdots,n$$

♂g h♀

v.s.

♂i j♀

第k轮

约束条件

- 每位男（女）运动员在任一轮比赛中不会和自己交手

$$\sum_{h=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} x_{ghgjk} = 0,\ g = 1,\cdots,n$$

$$\sum_{g=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} x_{ghihk} = 0,\ h = 1,\cdots,n$$

♂g h♀

v.s.

♂i j♀

第k轮

目标函数

浙江大学 ZheJiang University
数学建模

- 问题要求给出轮次数最多的比赛安排，但若将轮次数也作为决策变量，不利于整数规划建模和求解
- 由于轮次数有一上界 $n-1$，可以通过有限次求解固定轮次数整数规划的方法给出轮次数最多的比赛安排
- 给定轮次数，只需判断相应整数规划是否存在可行解，故目标函数可以省略

可行解

♂	♀												
1	3	1	5	1	1	1	4	1	7	1	6	1	2
7	9	4	1	3	2	2	0	6	8	0	7	8	6
2	4	2	2	2	5	3	9	2	6	2	1	2	7
4	2	6	7	9	8	7	2	3	1	5	0	7	3
3	0	3	4	4	4	4	8	4	0	3	3	3	8
0	8	5	3	7	7	9	6	8	9	4	5	6	4
5	6	7	6	5	9	5	5	5	2	6	9	4	9
6	5	9	0	0	6	8	7	9	3	9	4	5	1
8	1	8	8	6	3	6	1	7	4	7	8	9	5
9	7	0	9	8	0	0	3	0	5	8	2	0	0

$$n = 10$$
$$m = 7$$

混合双打问题

- 由于变量和约束数随 n 和 m 值的增加而迅速增加，即便利用计算机也无法完成求解
- 当 $n=10$ ，$m=7$ 时，可求出一组可行解；$m=8$ 或 $m=9$ 时，整数规划是否存在可行解仍是未知的。因此，$n=10$ 时的问题仍未得到解决
- 是否存在求解效率更高的整数规划描述，是否可用组合或图论等方法给出该问题的解或判断给定参数时解的存在性

运筹与统计

投资组合

收益与风险

数学建模

- 现有 n 种股票，股票 j 的收益率为 r_j
  - 某一时段内股票的收益率由该时段初和该时段末股票价格变化决定
  - 由于市场的不确定性，r_j 为一随机变量，其期望 $Er_j = \mu_j, j = 1, \cdots, n$
- 风险（**risk**）：可能发生的危险
  - 股票 j 的风险为其收益率的标准差，反映了收益率围绕其均值波动的幅度

Harry Markowitz
(1927-)
美国经济学家
1990年诺贝尔
经济学奖得主

协方差矩阵

- 随机变量 r_i 和 r_j 的协方差

$$\sigma_{ij} = Cov(r_i, r_j) = E(r_i - Er_i)(r_j - Er_j), i, j = 1, \cdots, n$$

- 随机变量向量 $\mathbf{r} = (r_1, r_2, \cdots, r_n)^{\mathrm{T}}$ 的协方差矩阵

$$\mathbf{V} = (\sigma_{ij})_{n \times n}$$

  - 协方差矩阵为半正定矩阵，对任意 $\mathbf{x}$，

$$\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{V}\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}x_i x_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_i x_j E(r_i - Er_i)(r_j - Er_j)$$

$$= E\left(\sum_{i=1}^{n}x_i(r_i - Er_i)\right)^2 \geq 0$$

协方差矩阵

- 若 $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{V}\mathbf{x} = E\left(\sum_{i=1}^{n} x_i(r_i - Er_i)\right)^2 = 0$，则

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} x_i(r_i - Er_i) = 0\right) = 1$$

随机变量 $\sum_{i=1}^{n} x_i r_i$ 退化于 $\sum_{i=1}^{n} x_i \mu_i$

- 以下假设 $\mathbf{V}$ 正定，$\mu_j, j = 1,\cdots,n$ 不全相同，记

$\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n)^{\mathrm{T}}$

投资组合

- 将总投资额单位化为1，投资于股票 j 的份额为 $x_j, j=1,\cdots,n$ ，该组合（**portfolio**）可用 $\mathbf{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$ 表示
- 在该组合下收益为 $E(\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{r})=\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\mu}$ ，风险的平方为 $Var(\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{r})=\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{V}\mathbf{x}$
- 如何选择股票进行投资，使得收益最大而风险最小

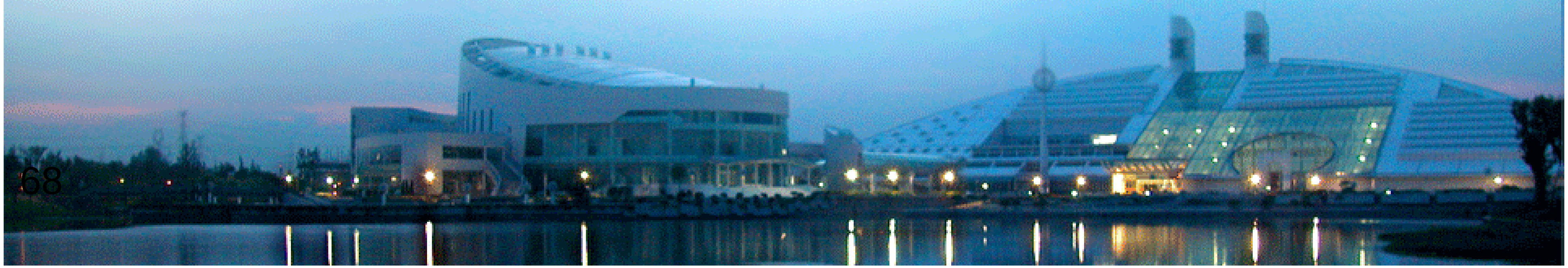
The Journal of
FINANCE
The Journal of THE AMERICAN FINANCE ASSOCIATION

PORTFOLIO SELECTION*

HARRY MARKOWITZ
The Rand Corporation

THE PROCESS OF SELECTING a portfolio may be divided into two stages. The first stage starts with observation and experience and ends with beliefs about the future performances of available securities. The second stage starts with the relevant beliefs about future performances and ends with the choice of portfolio. This paper is concerned with the second stage. We first consider the rule that the investor does (or should) maximize discounted expected, or anticipated, returns. This rule is rejected both as a hypothesis to explain, and as a maximum to guide investment behavior. We next consider the rule that the investor does (or should) consider expected return a desirable thing *and* variance of return an undesirable thing. This rule has many sound points, both as a maxim for, and hypothesis about, investment behavior. We illustrate geometrically relations between beliefs and choice of portfolio according to the "expected returns—variance of returns" rule.

Markowitz, H., Portfolio Selection, *The Journal of Finance*, 7, 77-91, 1952



Markowitz模型

数学建模

- 选择投资组合 $\mathbf{x}^*(\mu)$，在收益达到给定值 μ 的前提下，组合的风险最小

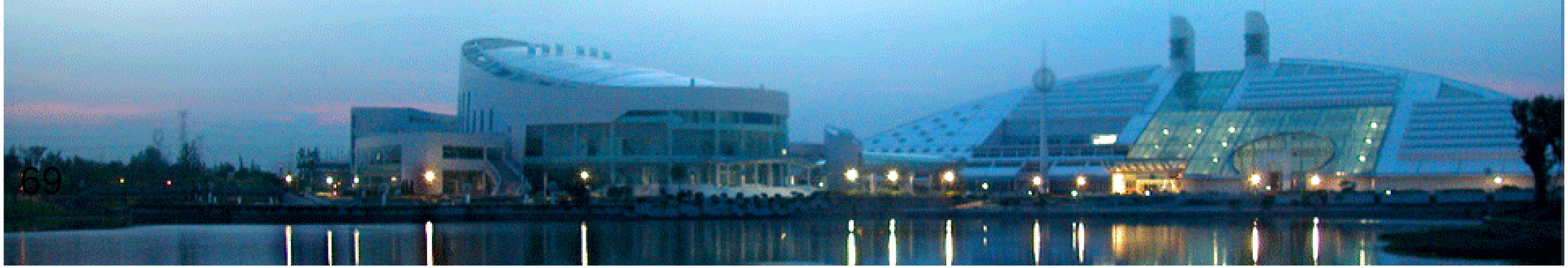
$$
\begin{aligned}
\min \quad & \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{V}\mathbf{x} \\
s.t. \quad & \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\mu} = \mu \\
& \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{e} = 1
\end{aligned}
$$

仅含等式约束的二次凸规划

局部极小点也是全局极小点

- **Largrange函数**

$$L(\mathbf{x}, \lambda_1, \lambda_2) = \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{V}\mathbf{x} - \lambda_1(\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\mu} - \mu) - \lambda_2(\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{e} - 1)$$



Largrange乘子法

浙江大学 ZheJiang University

数学建模

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial L(\mathbf{x},\lambda_1,\lambda_2)}{\partial \mathbf{x}} = 2\mathbf{V}\mathbf{x} - \lambda_1\boldsymbol{\mu} - \lambda_2\mathbf{e} = 0 \Rightarrow \mathbf{x} = \dfrac{1}{2}\mathbf{V}^{-1}(\boldsymbol{\mu} \quad \mathbf{e})\begin{pmatrix}\lambda_1 \\ \lambda_2\end{pmatrix} \\
\dfrac{\partial L(\mathbf{x},\lambda_1,\lambda_2)}{\partial \lambda_1} = -(\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\mu} - \mu) = 0 \\
\dfrac{\partial L(\mathbf{x},\lambda_1,\lambda_2)}{\partial \lambda_2} = -(\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{e} - 1) = 0
\end{cases}
$$

$$
\Rightarrow \begin{pmatrix}\boldsymbol{\mu}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{e}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}\mathbf{x} = \begin{pmatrix}\mu \\ 1\end{pmatrix}
$$

$$
\Rightarrow \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\mu}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{e}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}\mathbf{V}^{-1}(\boldsymbol{\mu} \quad \mathbf{e})\begin{pmatrix}\lambda_1 \\ \lambda_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mu \\ 1\end{pmatrix}
$$

$$
\boxed{L(\mathbf{x},\lambda_1,\lambda_2) = \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{V}\mathbf{x} - \lambda_1(\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\mu} - \mu) - \lambda_2(\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{e} - 1)}
$$

Largrange乘子法

浙江大学 ZheJiang University 数学建模

- 记 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\mu}^{\mathrm{T}}\\ \mathbf{e}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}\mathbf{V}^{-1}(\boldsymbol{\mu}\quad\mathbf{e})=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\mu}^{\mathrm{T}}\mathbf{V}^{-1}\boldsymbol{\mu} & \boldsymbol{\mu}^{\mathrm{T}}\mathbf{V}^{-1}\mathbf{e}\\ \mathbf{e}^{\mathrm{T}}\mathbf{V}^{-1}\boldsymbol{\mu} & \mathbf{e}^{\mathrm{T}}\mathbf{V}^{-1}\mathbf{e}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\ b & c\end{pmatrix}$
- $\mathbf{A}$ 为二阶正定矩阵，$\mathbf{A}^{-1}=\dfrac{1}{ac-b^2}\begin{pmatrix}c & -b\\ -b & a\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{pmatrix}=2\mathbf{A}^{-1}\begin{pmatrix}\mu\\ 1\end{pmatrix}\qquad \mathbf{x}^*(\mu)=\mathbf{V}^{-1}(\boldsymbol{\mu}\quad\mathbf{e})\mathbf{A}^{-1}\begin{pmatrix}\mu\\ 1\end{pmatrix}$$

$$\boxed{\mathbf{x}=\frac{1}{2}\mathbf{V}^{-1}(\boldsymbol{\mu}\quad\mathbf{e})\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{pmatrix}\qquad \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\mu}^{\mathrm{T}}\\ \mathbf{e}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}\mathbf{V}^{-1}(\boldsymbol{\mu}\quad\mathbf{e})\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mu\\ 1\end{pmatrix}}$$

极小风险组合

数学建模

$$\sigma^*(\mu)^2 = \mathbf{x}^*(\mu)^{\mathrm{T}}\mathbf{V}\mathbf{x}^*(\mu) = \begin{pmatrix}\mu & 1\end{pmatrix}\mathbf{A}^{-1}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\mu}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{e}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}\mathbf{V}^{-1}\mathbf{V}\mathbf{V}^{-1}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\mu} & \mathbf{e}\end{pmatrix}\mathbf{A}^{-1}\begin{pmatrix}\mu \\ 1\end{pmatrix}$$

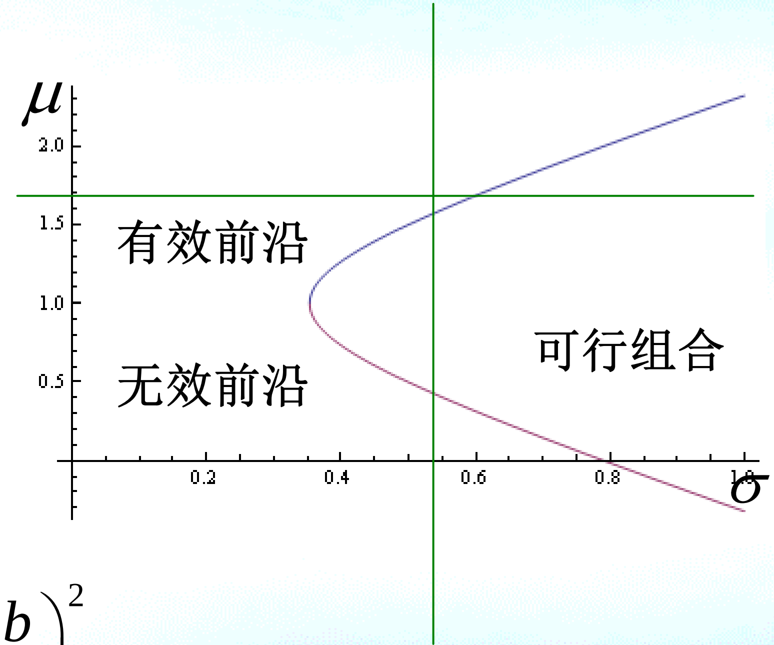
$$= \begin{pmatrix}\mu & 1\end{pmatrix}\mathbf{A}^{-1}\begin{pmatrix}\mu \\ 1\end{pmatrix} = \frac{1}{ac-b^2}\begin{pmatrix}\mu & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c & -b \\ -b & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mu \\ 1\end{pmatrix} = \frac{a-2b\mu+c\mu^2}{ac-b^2}$$

- $\mathbf{x}^*(\mu)$ 称为对应于 μ 的极小风险组合
- 在 (σ,μ) 平面上，极小风险组合的收益 μ 与风险 $\sigma^*(\mu)$ 的轨迹为一条双曲线的右支

$$\boxed{\mathbf{x}^*(\mu) = \mathbf{V}^{-1}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\mu} & \mathbf{e}\end{pmatrix}\mathbf{A}^{-1}\begin{pmatrix}\mu \\ 1\end{pmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{\mu}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{e}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}\mathbf{V}^{-1}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\mu} & \mathbf{e}\end{pmatrix} \quad \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{ac-b^2}\begin{pmatrix}c & -b \\ -b & a\end{pmatrix}}$$

有效前沿

- 双曲线上半部称为有效前沿（**efficient frontier**）。其上每一点对应的组合为有效组合，即收益固定时风险最小的组合或风险固定时收益最大的组合
- 双曲线下半部为无效前沿（**inefficient frontier**）



$$\boxed{\sigma^*(\mu)^2 = \frac{a-2b\mu+c\mu^2}{ac-b^2}} \qquad \frac{\sigma^*(\mu)^2}{\frac{1}{c}} - \frac{\left(\mu-\frac{b}{c}\right)^2}{\frac{ac-b^2}{c^2}} = 1$$ 高收益对应高风险

总体最小风险组合

浙江大学 ZheJiang University

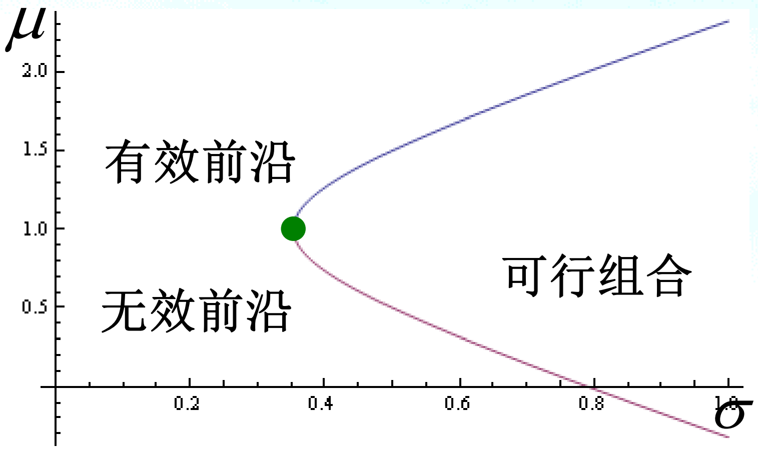
数学建模

- 双曲线顶点 (σ_G, μ_G) 为总体最小风险组合（**global minimum variance portfolio**），其中

$$\mu_G = \frac{b}{c} \qquad \sigma_G = \sqrt{\frac{1}{c}}$$

$$\mathbf{x}^*(\mu_G) = \mathbf{V}^{-1}(\boldsymbol{\mu} \quad \mathbf{e})\mathbf{A}^{-1}\begin{pmatrix}\mu_G \\ 1\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{ac-b^2}\mathbf{V}^{-1}(\boldsymbol{\mu} \quad \mathbf{e})\begin{pmatrix} c & -b \\ -b & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{b}{c} \\ 1\end{pmatrix} = \frac{\mathbf{V}^{-1}\mathbf{e}}{c}$$



$$\frac{\sigma^*(\mu)^2}{\frac{1}{c}} - \frac{\left(\mu - \frac{b}{c}\right)^2}{\frac{ac-b^2}{c^2}} = 1$$

$$\mathbf{x}^*(\mu) = \mathbf{V}^{-1}(\boldsymbol{\mu} \quad \mathbf{e})\mathbf{A}^{-1}\begin{pmatrix}\mu \\ 1\end{pmatrix}$$

投资组合理论

浙江大学

ZheJiang University

数学建模

Finally, I would like to add a comment concerning portfolio theory as a part of the microeconomics of action under uncertainty. It has not always been considered so. For example, when I defended my dissertation as a student in the Economics Department of the University of Chicago, Professor Milton Friedman argued that portfolio theory was not Economics, and that they could not award me a Ph.D. degree in Economics for a dissertation which was not in Economics. I assume that he was only half serious, since they did award me the degree without long debate. As to the merits of his arguments, at this point I am quite willing to concede: at the time I defended my dissertation, portfolio theory was not part of Economics. But now it is.

Foundations of Portfolio Theory

——Nobel Prize Lecture by Harry Markowitz


浙江大学
ZheJiang University
谢 谢