多目标规划

- 多目标规划研究变量在满足给定约束条件下，如何使多个目标函数同时极小化的问题

$$
\begin{aligned}
&\min \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \cdots, f_p(\mathbf{x}))^{\mathrm{T}} \\
(\mathrm{MOP}) \quad & s.t. \quad \mathbf{g}_i(\mathbf{x}) \geq \mathbf{0}, i = 1, \cdots, s, \\
& \qquad\quad \mathbf{h}_j(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, j = 1, \cdots, t.
\end{aligned}
$$

Vilfredo Federico Damaso Pareto
（1848－1923）
意大利经济学家

解的类型

浙江大学 ZheJiang University

数学建模

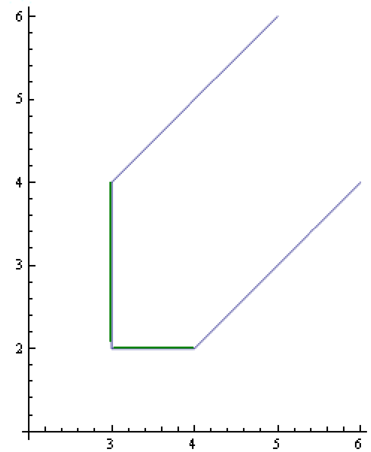
- 设 $\mathbf{x}^* \in S$
  - 若对任意 $\mathbf{x} \in S, f_k(\mathbf{x}^*) \le f_k(\mathbf{x}), k = 1, \cdots, p$，则称 $\mathbf{x}^*$为（**MOP**）的绝对最优解
  - 若不存在 $\mathbf{x} \in S$，使得 $f_k(\mathbf{x}) \le f_k(\mathbf{x}^*), k = 1, \cdots, p$，且至少存在某个 $k, f_k(\mathbf{x}) < f_k(\mathbf{x}^*)$，则称 $\mathbf{x}^*$为（**MOP**）的**Pareto**最优解
  - 若不存在 $\mathbf{x} \in S$，使得 $f_k(\mathbf{x}) < f_k(\mathbf{x}^*), k = 1, \cdots, p$，则称 $\mathbf{x}^*$为（**MOP**）的弱**Pareto**最优解
- （**MOP**）的所有绝对最优解，**Pareto**最优解，弱**Pareto**最优解的集合分别记作 S_a, S_p和 S_{wp}

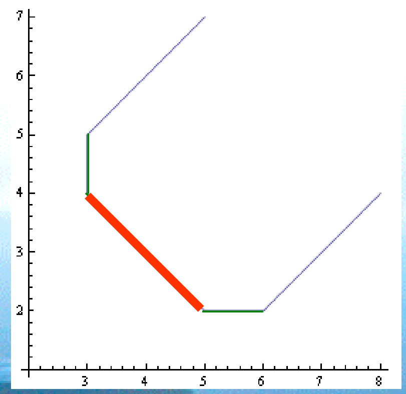
解的关系

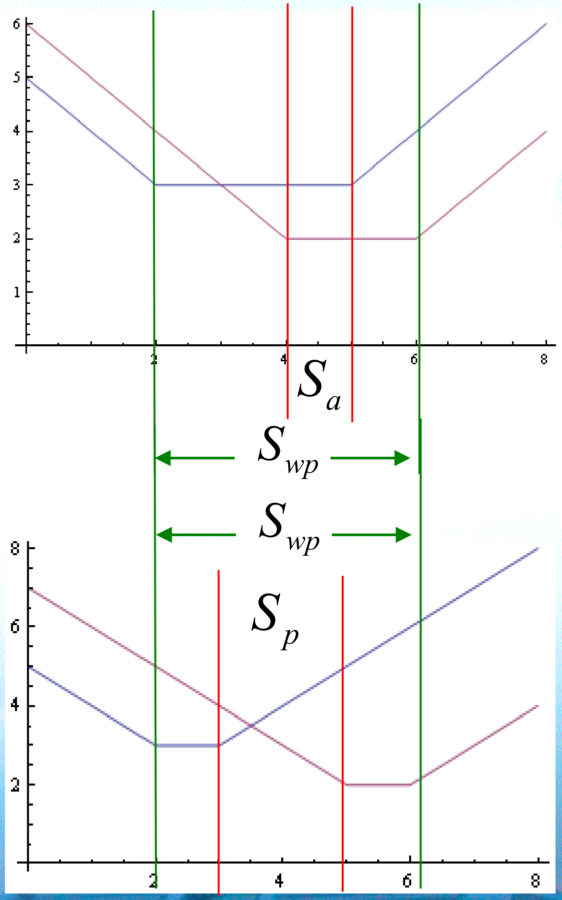
- 记 S^i 为单目标规划 $\min\limits_{\mathbf{x}\in S} f_i(\mathbf{x})$ 的最优解，则

$$S_a = \bigcap_{i=1}^{p} S^i$$

$$S^i \subseteq S_{wp}$$







解的关系

浙江大学 ZheJiang University
数学建模

- $S_a \subseteq S_p \subseteq S_{wp} \subseteq S$
  - 若 $\mathbf{x}^* \in S_a$，但 $\mathbf{x}^* \notin S_p$，则存在 $\bar{\mathbf{x}} \in S$ 和某个 k，使得 $f_k(\bar{\mathbf{x}}) < f_k(\mathbf{x}^*), f_l(\bar{\mathbf{x}}) \le f_l(\mathbf{x}^*), l \ne k$，与 $\mathbf{x}^* \in S_a$ 矛盾
  - 若 $\mathbf{x}^* \in S_p$ ，但 $\mathbf{x}^* \notin S_{wp}$，则存在 $\bar{\mathbf{x}} \in S$ ，使得 $f_k(\bar{\mathbf{x}}) < f_k(\mathbf{x}^*), k = 1,\cdots,p$，与 $\mathbf{x}^* \in S_p$ 矛盾
- 若 $S_a \ne \varnothing$，则 $S_a = S_p$
  - 若 $\mathbf{x}^* \in S_p$，但 $\mathbf{x}^* \notin S_a$，由于 $S_a \ne \varnothing$，存在 $\bar{\mathbf{x}} \in S_a$，使得 $f_k(\bar{\mathbf{x}}) \le f_k(\mathbf{x}^*), k = 1,\cdots,p$ ，由于 $\mathbf{x}^* \ne \bar{\mathbf{x}}$，存在某个 $k, f_k(\bar{\mathbf{x}}) \ne f_k(\mathbf{x}^*)$，$f_k(\bar{\mathbf{x}}) < f_k(\mathbf{x}^*)$，与 $\mathbf{x}^* \in S_p$ 矛盾

多目标问题解法

- 求(MOP)所有的Pareto最优解或弱Pareto最优解
- 加权法
  - 令 $\Lambda = \{\boldsymbol{\lambda} \mid \boldsymbol{\lambda} > \mathbf{0}, \sum_{k=1}^{p} \lambda_k = 1\}$
  - 线性加权和法 $(SP_{\boldsymbol{\lambda}})$ $\min_{\mathbf{x}\in S} \sum_{k=1}^{p} \lambda_k f_k(\mathbf{x})$
  - 极小化极大法 $(P_{\boldsymbol{\lambda}})$ $\min_{\mathbf{x}\in S} \max_{1\le k\le p} \lambda_k f_k(\mathbf{x})$
  - 对任意 $\boldsymbol{\lambda} \in \Lambda, (SP_{\boldsymbol{\lambda}})$的最优解必是（MOP）的Pareto最优解，$(P_{\boldsymbol{\lambda}})$的最优解必是（MOP）的弱Pareto最优解

多目标问题解法

- 分层排序法
  - 将目标按重要程度排序，在前一个目标的最优解集中，寻找后一个目标的最优解集，并把最后一个目标的最优解作为（**MOP**）的解
  - 分层排序法得到的解必为（**MOP**）的**Pareto**最优解
- 带宽容值的分层排序法

多目标问题解法

浙江大学 ZheJiang University

数学建模

- 主要目标法
  - 确定一个目标函数，如$f_1(x)$，为主要目标，对其余 $p-1$个目标函数 $f_k(x)$，选定一定的界限值 $u_k, k=2,\cdots,p$，求解单目标规划

$$\begin{aligned} &\min \quad f_1(\mathbf{x}) \\ (SP) \quad &s.t. \quad f_k(\mathbf{x}) \le u_k, k=2,\cdots,p, \\ &\qquad\quad \mathbf{x} \in S \end{aligned}$$

  - (SP) 的最优解都是（**MOP**）的弱**Pareto**最优解

浙江大学 ZheJiang University

谢 谢