数学建模

浙江大学数学系　谈之奕

tanzy@zju.edu.cn

浙江大学 ZheJiang University

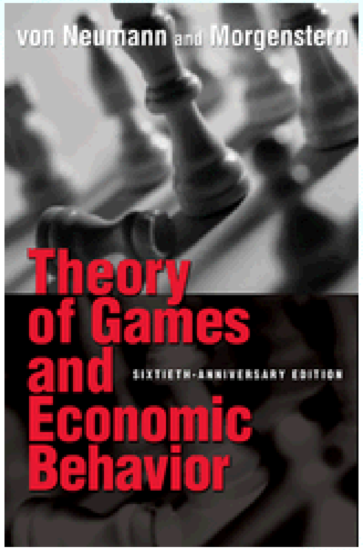
运筹与统计

博弈论概述

博弈论

- 博弈论（game theory），又称对策论。研究由一些带有相互竞争性质的主体所构成的体系的理论。它能以数学表示人的行为或为人的行为建立模式，研究对抗局势中最优的对抗策略和稳定局势，以及如何追求各方的最优策略和决定对策的结果，协助人们在一定规则范围内寻求最合理的行为方式

右：**John von Neumann**
（1903－1957）
匈牙利裔美国数学家
左：**Oskar Morgenstern**
（1902 –1977）
奥地利裔美国经济学家
Spring Lake, 1946



von Neumann, J., Morgenstern, O., *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton University Press, 1944

数学建模

田忌赛马

局	齐王	田忌	结果
1	$A+$	$A-$	齐王胜
2	$B+$	$B-$	齐王胜
3	$C+$	$C-$	齐王胜

3:0

局	齐王	田忌	结果
1	$A+$	$C-$	齐王胜
2	$B+$	$A-$	田忌胜
3	$C+$	$B-$	田忌胜

1:2

齊使者如梁，孫臏以刑徒陰見，說齊使。齊使以爲奇，竊載與之齊。齊將田忌善而客待之。忌數與齊諸公子馳逐重射。孫子見其馬足不甚相遠，馬有上、中、下輩。於是孫子謂田忌曰："君弟重射，臣能令君勝。"田忌信然之，與王及諸公子逐射千金。及臨質，孫子曰："今以君之下駟與彼上駟，取君上駟與彼中駟，取君中駟與彼下駟。"既馳三輩畢，而田忌一不勝而再勝，卒得王千金。於是忌進孫子於威王。威王問兵法，遂以爲師。

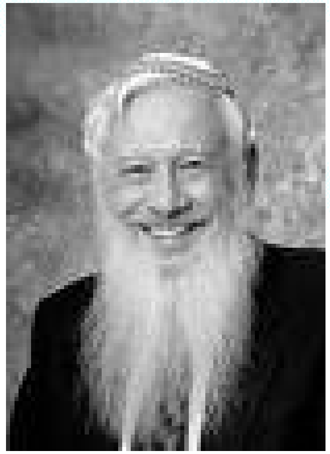
——《史记•孙子吴起列传》

破产清偿

资产余额 \ 债务数额	100	200	300
100	$\frac{100}{3}$	$\frac{100}{3}$	$\frac{100}{3}$
200	50	75	75
300	50	100	150

Aumann, R. J., Maschler, M., Game theoretic analysis of a bankruptcy problem from the Talmud, *Journal of Economic Theory*, 36, 195-213, 1985

Talmud（塔木德）
犹太教口传律法汇编，仅次于《圣经》的典籍，主体部分成书于2世纪末至6世纪初

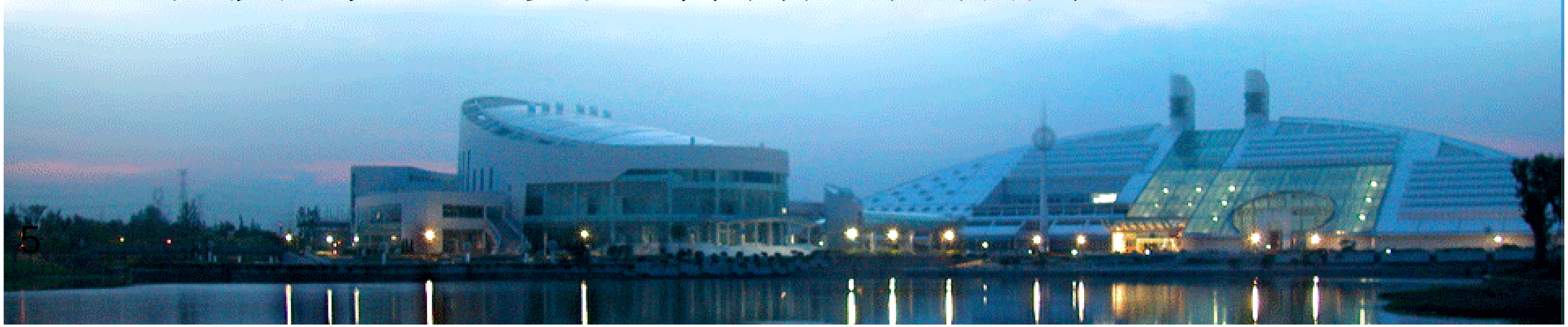


Robert John Aumann
（1930－ ）
以色列经济学家
2005年诺贝尔
经济学奖得主

博弈的要素

数学建模

- 参与者（**player**）：参与博弈的决策主体
- 策略（**strategy**）：参与者可以采取的行动方案
  - 某个参与者的策略全体组成策略集（**strategy set**）
  - 所有参与者采取各自的行动后形成的状态称为局势（**outcome**）
- 收益（**payoff**）：各个参与者在不同局势下获得的利益
- 规则（**rule**）：对参与者行动的先后顺序、参与者获知信息的多少等内容的具体规定

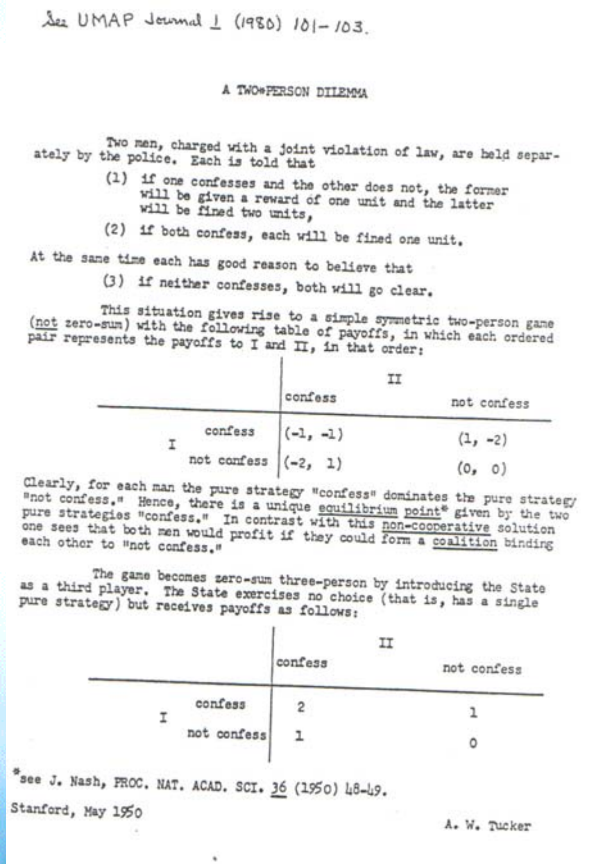


囚徒困境

浙江大学
ZheJiang University
数学建模

- 囚徒困境（**Prisoner's Dilemma**）
  - 甲、乙两人共同犯罪，警方掌握了一部分犯罪事实，将他们带到警局分别讯问
    - 若两人均承认所有罪行，则各被判处**6**个月徒刑
    - 若一人认罪，一人不认罪，前者被轻判**1**个月徒刑，后者被重判**9**个月徒刑
    - 若两人均不认罪，则以部分罪行各被判处**2**个月徒刑

Tucker, A.W., A two-person dilemma, Unpublished Manuscript, 1950. Reprint, On jargon: The prisoner's dilemma. *UMAP Journal*, 1, 101, 1980.



See UMAP Journal 1 (1980) 101–103.

A TWO-PERSON DILEMMA

Two men, charged with a joint violation of law, are held separately by the police. Each is told that

(1) if one confesses and the other does not, the former will be given a reward of one unit and the latter will be fined two units,

(2) if both confess, each will be fined one unit.

At the same time each has good reason to believe that

(3) if neither confesses, both will go clear.

This situation gives rise to a simple symmetric two-person game (not zero-sum) with the following table of payoffs, in which each ordered pair represents the payoffs to I and II, in that order:

		II: confess	II: not confess
I	confess	(-1, -1)	(1, -2)
I	not confess	(-2, 1)	(0, 0)

Clearly, for each man the pure strategy "confess" dominates the pure strategy "not confess." Hence, there is a unique equilibrium point* given by the two pure strategies "confess." In contrast with this non-cooperative solution one sees that both men would profit if they could form a coalition binding each other to "not confess."

The game becomes zero-sum three-person by introducing the State as a third player. The State exercises no choice (that is, has a single pure strategy) but receives payoffs as follows:

		II: confess	II: not confess
I	confess	2	1
I	not confess	1	0

*see J. Nash, PROC. NAT. ACAD. SCI. 36 (1950) 48-49.

Stanford, May 1950

A. W. Tucker

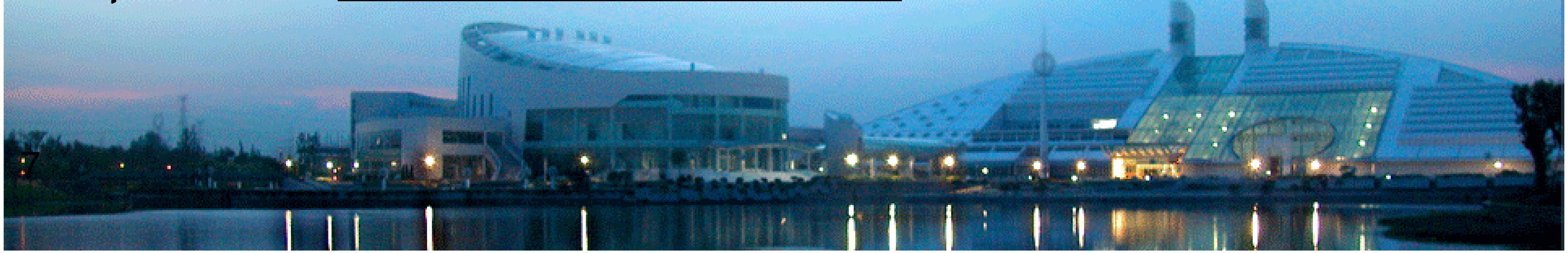
囚徒困境

数学建模

- 参与者：甲、乙
- 策略集（甲、乙）
  - 坦白、沉默
- 局势（收益）
  - 甲坦白 –1、乙沉默 –9
  - 甲沉默 –9、乙坦白 –1
  - 甲沉默 –2、乙沉默 –2
  - 甲坦白 –6、乙坦白 –6

		囚徒乙	
		沉默（甲 乙）	坦白
囚徒甲	沉默	(–2, –2)	(–9, –1)
	坦白	(–1, –9)	(–6, –6)

当参与者只有两个时，博弈可以用简洁的表格形式表示



囚徒困境

囚徒乙

囚徒甲	沉默	坦白
沉默	(−2, −2)	(−9, −1)
坦白	(−1, −9)	(−6, −6)

甲：坦白 ≻ 沉默

乙：坦白 ≻ 沉默

甲坦白、乙坦白是稳定局势

其它三种局势均不是稳定局势

囚徒乙

囚徒甲	沉默	坦白
沉默	(−2, −2)	(−9, −1)
坦白	(−1, −9)	(−6, −6)

囚徒乙

囚徒甲	沉默	坦白
沉默	(−2, −2)	(−9, −1)
坦白	(−1, −9)	(−6, −6)

博弈分类

浙江大学 ZheJiang University

数学建模

- 合作博弈（**cooperative game**）与非合作博弈（**non-cooperative game**）
  - 在合作博弈中，部分参与者可组成联盟（**coalition**）以获得更大收益；在非合作博弈中，参与者决策独立进行
- 静态博弈（**static game**）与动态博弈（**dynamic game**）
  - 在静态博弈中，所有参与者同时决策（或在决策时不知道其它参与者的决策）
- 完全信息（**complete information**）与不完全信息
  - 完全信息指所有参与者均掌握其它参与者的策略集、收益等信息
  - 完美信息（**perfect information**）指在动态博弈中所有参与者均掌握其它参与者之前已作的决策

浙江大学
ZheJiang University

运筹与统计

矩阵博弈

矩阵博弈

- 二人零和（**zero-sum**）有限博弈（完全信息静态博弈）
  - 参与者为两人：甲、乙
  - 每人的可行策略集为有限集，设甲、乙的策略集分别为$\{X_1, X_2, \cdots, X_m\}$和$\{Y_1, Y_2, \cdots, Y_n\}$，所有的局势形如$(X_i, Y_j)$
  - 对任一局势，两人收益之和为零
- 博弈可用一个矩阵 $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m\times n}$ 来表示，称为收益矩阵（**payoff matrix**），其中 a_{ij} 为局势 (X_i, Y_j)下甲的收益，该局势下乙的收益为 $-a_{ij}$

极小极大原则

- 若甲选择策略 X_s，不论乙如何选择，其收益至少为 $\min\limits_{1\le t\le n} a_{st}$。甲可选择策略使其达到最大，其值为

  $\max\limits_{1\le s\le m}\min\limits_{1\le t\le n} a_{st}$　　收益矩阵每行元素最小值中的最大值

- 若乙选择策略 Y_t，不论甲如何选择，其收益至少为 $\min\limits_{1\le s\le m}(-a_{st})$。乙可选择策略使其达到最大，其值为 $\max\limits_{1\le t\le n}\min\limits_{1\le s\le m}(-a_{st}) = -\min\limits_{1\le t\le n}\max\limits_{1\le s\le m} a_{st}$

  收益矩阵每列元素最大值中的最小值

鞍点

- $\max\limits_{1\le s\le m}\min\limits_{1\le t\le n} a_{st} \le \min\limits_{1\le t\le n}\max\limits_{1\le s\le m} a_{st}$
  - 设 $a_{ij} = \max\limits_{1\le s\le m}\min\limits_{1\le t\le n} a_{st}$，
    $a_{kl} = \min\limits_{1\le t\le n}\max\limits_{1\le s\le m} a_{st}$
- 若 $\max\limits_{1\le s\le m}\min\limits_{1\le t\le n} a_{st} = \min\limits_{1\le t\le n}\max\limits_{1\le s\le m} a_{st}$，则存在元素 a_{il}，它既是所在行的最小值，又是所在列的最大值，称为鞍点（**saddle point**）

$$\boxed{\max_{1\le s\le m}\min_{1\le t\le n} a_{st} \qquad \min_{1\le t\le n}\max_{1\le s\le m} a_{st}}$$

$$\begin{pmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1l} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{il} & \cdots & a_{in} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{k1} & \cdots & a_{kj} & \cdots & a_{kl} & \cdots & a_{kn} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{ml} & \cdots & a_{mn}
\end{pmatrix}$$

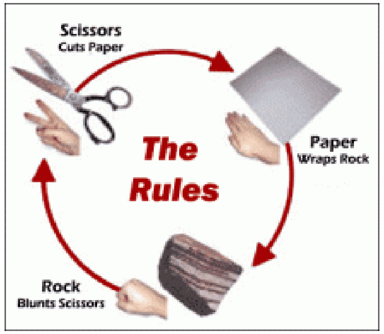
(X_i, Y_l)是稳定局势

矩阵博弈

浙江大学 ZheJiang University

数学建模

$$\begin{pmatrix} 4 & \boxed{0} & 2 \\ 3 & \boxed{2} & 5 \\ \boxed{-5} & 1 & 1 \end{pmatrix}$$



$$\begin{array}{c|ccc} & \text{石头} & \text{剪刀} & \text{布} \\ \hline \text{石头} & \multicolumn{3}{c}{\begin{pmatrix} 0 & 1 & \boxed{-1} \\ \boxed{-1} & 0 & 1 \\ 1 & \boxed{-1} & 0 \end{pmatrix}} \\ \text{剪刀} & & & \\ \text{布} & & & \end{array}$$

(X_2, Y_2)是稳定局势

$$\boxed{\max_{1\le s\le m}\min_{1\le t\le n} a_{st} = \min_{1\le t\le n}\max_{1\le s\le m} a_{st}}$$

稳定局势
不存在

混合策略

浙江大学 ZheJiang University

数学建模

- 若参与者可以以一定的概率分布选择若干个不同的策略，这样的策略称为混合策略（**mixed strategy**）；若参与者每次行动都选择某个确定的策略，这样的策略称为纯策略（**pure strategy**）
  - 甲以概率 p_i 选择策略 X_i，$i=1,\dots,m$ ，其中 $p_i \ge 0$ ，且 $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$，该混合策略也可用 m 维列向量 $\mathbf{x}=(p_1,p_2,\cdots,p_m)^{\mathrm{T}}$ 表示
- 在混合策略意义下，参与者的收益为期望收益（**expected payoff**）

矩阵博弈的混合策略

ZheJiang University

数学建模

- 甲、乙的混合策略集分别为

$$\mathbf{X}=\left\{(x_1,x_2,\cdots,x_m)^{\mathrm{T}}\mid x_i\ge 0,\sum_{i=1}^{m}x_i=1\right\}\quad \mathbf{Y}=\left\{(y_1,y_2,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}\mid y_j\ge 0,\sum_{j=1}^{n}y_j=1\right\}$$

- 设甲、乙采用的混合策略分别为 $\mathbf{x}\in\mathbf{X},\mathbf{y}\in\mathbf{Y}$ ，甲的期望收益为 $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{y}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}x_iy_ja_{ij}$ ，乙的期望收益为 $-\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{y}$
- （**von Neumann极小极大定理**，**Minimax Theorem**）

设 $\mathbf{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ ，则存在 $\mathbf{x}^*\in\mathbf{X},\mathbf{y}^*\in\mathbf{Y}$

$$\mathbf{x}^{*\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{y}^*=\max_{\mathbf{x}\in\mathbf{X}}\min_{\mathbf{y}\in\mathbf{Y}}\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{y}=\min_{\mathbf{y}\in\mathbf{Y}}\max_{\mathbf{x}\in\mathbf{X}}\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{y}$$

双矩阵博弈

浙江大学 ZheJiang University
数学建模

- 若二人博弈不是零和的，双方的收益需用两个矩阵分别表示，称这样的博弈为双矩阵博弈（**bimatrix game**）
  - 囚徒困境即为双矩阵博弈
- **1964**年，**Lemke**和**Howson**给出了求双矩阵博弈稳定局势的算法，该算法需要指数时间

从零和到双赢

$(-2, -2)$	$(-9, -1)$
$(-1, -9)$	$(-6, -6)$

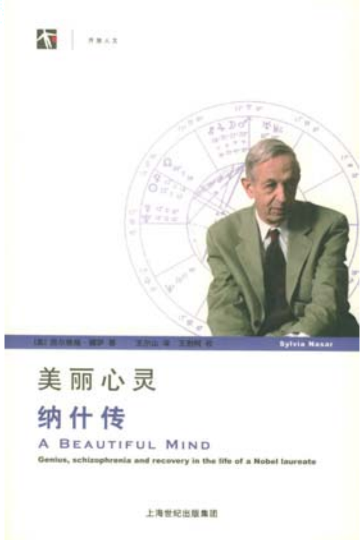
$$\begin{pmatrix} -2 & -9 \\ -1 & -6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -9 & -6 \end{pmatrix}$$

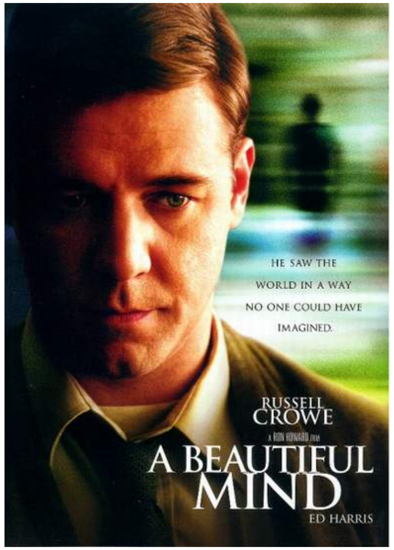
Lemke, C. E., Howson, J. T., Equilibrium points of bimatrix games. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 12, 413–423, 1964

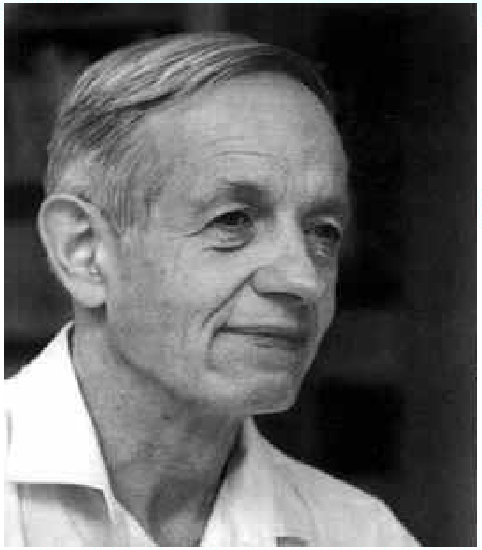
运筹与统计

Nash均衡

John Forbes Nash







美丽心灵 A Beautiful Mind

The Life of Mathematical Genius and Nobel Laureate John Nash—— Sylvia Nasar

同名电影获第**74** 届奥斯卡最佳影片奖（**2002**）

John Forbes Nash

（**1928**－）

美国数学家、经济学家

1994年**Nobel**经济学奖得主

Nash均衡

浙江大学 ZheJiang University

数学建模

- （完全信息静态）博弈的某个局势称为 Nash 均衡（**Nash equilibrium**），若每一个理性的参与者都不会单独偏离它，即在其他参与者的策略不变情况下，单独采取其他策略，收益不会增加
- （**Nash 定理**）若参与者有限，每位参与者的策略集均有限，收益函数均为实值函数，则博弈必存在混合策略意义下的**Nash**均衡

Nash, J. F., Jr., Equilibrium points in n-person games, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 36, 48–49, 1950.
Nash, J. F., Jr., Non-Cooperative Games, *Annals of Mathematics, 54*, 286-295, 1951

EQUILIBRIUM POINTS IN N-PERSON GAMES

BY JOHN F. NASH, JR.*

PRINCETON UNIVERSITY

Communicated by S. Lefschetz, November 16, 1949

One may define a concept of an n-person game in which each player has a finite set of pure strategies and in which a definite set of payments to the n players corresponds to each n-tuple of pure strategies, one strategy being taken for each player. For mixed strategies, which are probability distributions over the pure strategies, the pay-off functions are the expectations of the players, thus becoming polylinear forms in the probabilities with which the various players play their various pure strategies.

Any n-tuple of strategies, one for each player, may be regarded as a point in the product space obtained by multiplying the n strategy spaces of the players. One such n-tuple counters another if the strategy of each player in the countering n-tuple yields the highest obtainable expectation for its player against the $n - 1$ strategies of the other players in the countered n-tuple. A self-countering n-tuple is called an equilibrium point.

The correspondence of each n-tuple with its set of countering n-tuples gives a one-to-many mapping of the product space into itself. From the definition of countering we see that the set of countering points of a point is convex. By using the continuity of the pay-off functions we see that the graph of the mapping is closed. The closedness is equivalent to saying: if $P_1, P_2, \ldots$ and $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n, \ldots$ are sequences of points in the product space where $Q_n \to Q$, $P_n \to P$ and Q_n counters P_n then Q counters P.

Since the graph is closed and since the image of each point under the mapping is convex, we infer from Kakutani's theorem[1] that the mapping has a fixed point (i.e., point contained in its image). Hence there is an equilibrium point.

In the two-person zero-sum case the "main theorem"[2] and the existence of an equilibrium point are equivalent. In this case any two equilibrium points lead to the same expectations for the players, but this need not occur in general.

* The author is indebted to Dr. David Gale for suggesting the use of Kakutani's theorem to simplify the proof and to the A. E. C. for financial support.

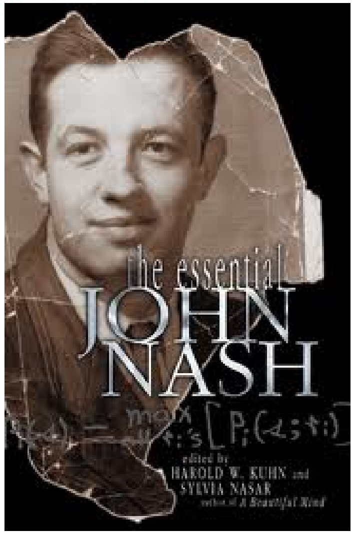
[1] Kakutani, S., *Duke Math. J.*, **8**, 457–459 (1941).

[2] Von Neumann, J., and Morgenstern, O., *The Theory of Games and Economic Behaviour*, Chap. 3, Princeton University Press, Princeton, 1947.

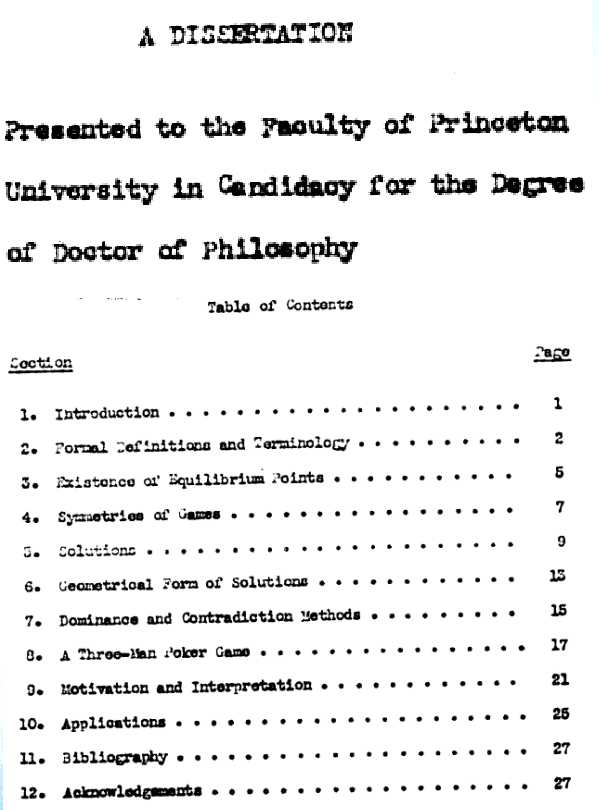
Nash均衡

浙江大学
ZheJiang University

数学建模



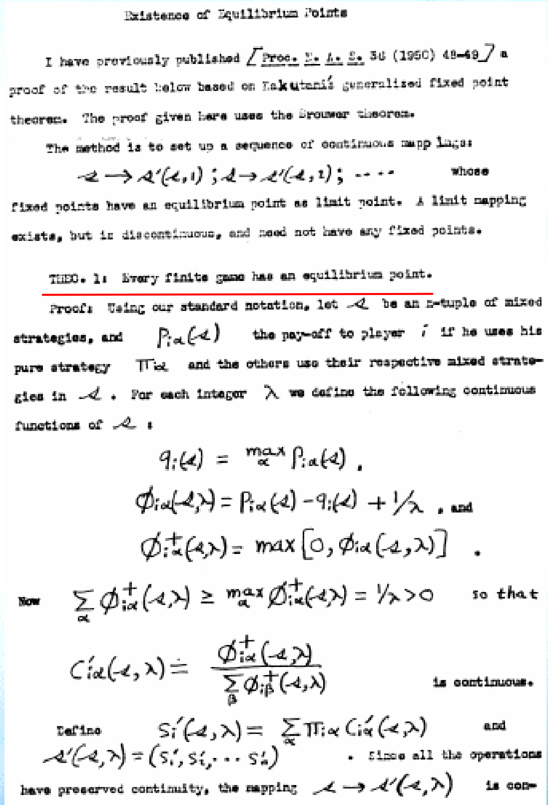
Nash, J. F., Jr., *The Essential John Nash*. Kuhn, H.W., Nasar, S. Eds, Princeton University Press, 2007



A DISSERTATION

Presented to the Faculty of Princeton University in Candidacy for the Degree of Doctor of Philosophy

Table of Contents



Existence of Equilibrium Points

I have previously published [Proc. N. A. S. 36 (1950) 48-49] a proof of the result below based on Kakutani's generalized fixed point theorem. The proof given here uses the Brouwer theorem.

The method is to set up a sequence of continuous mappings: $\mathscr{A} \to \mathscr{A}'(\mathscr{A},1)$; $\mathscr{A} \to \mathscr{A}'(\mathscr{A},2)$; ---- whose fixed points have an equilibrium point as limit point. A limit mapping exists, but is discontinuous, and need not have any fixed points.

THEO. 1: Every finite game has an equilibrium point.

Proof: Using our standard notation, let $\mathscr{A}$ be an n-tuple of mixed strategies, and $p_{i\alpha}(\mathscr{A})$ the pay-off to player i if he uses his pure strategy $\pi_{i\alpha}$ and the others use their respective mixed strategies in $\mathscr{A}$. For each integer λ we define the following continuous functions of $\mathscr{A}$:

$$q_i(\mathscr{A}) = \max_{\alpha} p_{i\alpha}(\mathscr{A}),$$

$$\phi_{i\alpha}(\mathscr{A},\lambda) = p_{i\alpha}(\mathscr{A}) - q_i(\mathscr{A}) + 1/\lambda, \text{ and}$$

$$\phi^+_{i\alpha}(\mathscr{A},\lambda) = \max[0, \phi_{i\alpha}(\mathscr{A},\lambda)].$$

Now $\sum_{\alpha} \phi^+_{i\alpha}(\mathscr{A},\lambda) \geq \max_{\alpha} \phi^+_{i\alpha}(\mathscr{A},\lambda) = 1/\lambda > 0$ so that

$$C'_{i\alpha}(\mathscr{A},\lambda) = \frac{\phi^+_{i\alpha}(\mathscr{A},\lambda)}{\sum_{\beta} \phi^+_{i\beta}(\mathscr{A},\lambda)}$$ is continuous.

Define $s'_i(\mathscr{A},\lambda) = \sum_{\alpha} \pi_{i\alpha} C'_{i\alpha}(\mathscr{A},\lambda)$ and $\mathscr{A}'(\mathscr{A},\lambda) = (s'_1, s'_2, \dots s'_n)$. Since all the operations have preserved continuity, the mapping $\mathscr{A} \to \mathscr{A}'(\mathscr{A},\lambda)$ is con-

Nash, J. F., Jr., *Non-cooperative games*, Thesis, Princeton University, 1950.

不动点定理

浙江大学 ZheJiang University

数学建模

- （**Brouwer**）设 $C\subset\mathbb{R}^n$ 是一个非空有界闭凸集，$f:C\to C$ 连续，则存在 $x^*\in C$，使得 $f(x^*)=x^*$
- （**Kakutani**）设 $C\subset\mathbb{R}^n$是一个非空有界闭凸集，$P_0(C)$是C中所有非空子集的集合，集值映射 $F:C\to P_0(C)$ 满足对任意 $x\in C$，$F(x)$ 是C中的非空闭凸集，且F在C上上半连续，则存在$x^*\in C$，使得 $x^*\in F(x^*)$

Luitzen Egbertus Jan Brouwer
（1881 - 1966）
荷兰数学家

Shizuo Kakutani
（角谷 静夫）
（1911 - 2004）
日本数学家

最优反应函数

浙江大学 ZheJiang University

数学建模

- 设参与者 i 的策略集为 A_i，收益函数为 $u_i(a_1, a_2, \cdots, a_n)$，其中 $a_i \in A_i$ 。用 a_{-i} 表示 $(a_1, \cdots, a_{i-1}, a_{i+1}, \cdots, a_n)$
- 参与者 i 的最优反应函数（**best response function**）为

$$B_i(a_{-i}) = \left\{a_i^* \mid u_i(a_i^*, a_{-i}) \geq u_i(a_i, a_{-i}), \forall a_i \in A_i\right\}$$

定义 $\mathscr{B}(a) = (B_1(a_{-1}), B_2(a_{-2}), \cdots, B_n(a_{-n}))$

- $\left(a_1^*, a_2^*, \cdots, a_n^*\right)$为 **Nash** 均衡当且仅当

$$u_i(a_i^*, a_{-i}^*) \geq u_i(a_i, a_{-i}^*), \forall a_i \in A_i, i = 1, \cdots, n$$

当且仅当 $a_i^* \in B_i(a_{-i}^*), i = 1, \cdots, n$ ，即 $a^* \in \mathscr{B}(a^*)$

Nash 均衡

- 矩阵博弈的稳定局势即为 Nash 均衡，Nash 定理是极小极大定理向多人博弈和非零和博弈的推广
- Nash 定理仍是一个存在性证明，求（近似）Nash 均衡的复杂性证明与算法设计是当前算法博弈论（Algorithmic Game Theory）的研究热点之一

Nash went to see von Neumann a few days after he passed his generals. …… Nash started to describe the proof he had in mind for an equilibrium in games of more than two players. But before he had gotten out more than a few disjointed sentences, von Neumann interrupted, jumped ahead to the yet unstated conclusion of Nash's argument, and said abruptly, "That's trivial, you know. That's just a fixed point theorem."

——Nasar, S., *A Beautiful Mind*

双人博弈

浙江大学 ZheJiang University

数学建模

- **Battle of the Sexes**

		女：看球	女：逛街
男	看球	(3,1)	(0, 0)
	逛街	(0, 0)	(1, 3)

- **Chicken（hawk-dove）**

		乙：避	乙：冲
甲	避	(0,0)	(–1, 1)
	冲	(1, –1)	(–5, –5)

- **Boxed Pigs**
  - 猪圈的一端有一个食槽，另一端安装了一个按钮。按一下按钮，将有**10**个单位的猪食进入食槽
  - 按按钮需要相当于两个单位的成本，并且由于需从按钮处回到食槽，吃食的数量也将减少

		小：按	小：等
大	按	(5,1)	(4, 4)
	等	(9, –1)	(0,0)

Stag or Hare

浙江大学 ZheJiang University

数学建模

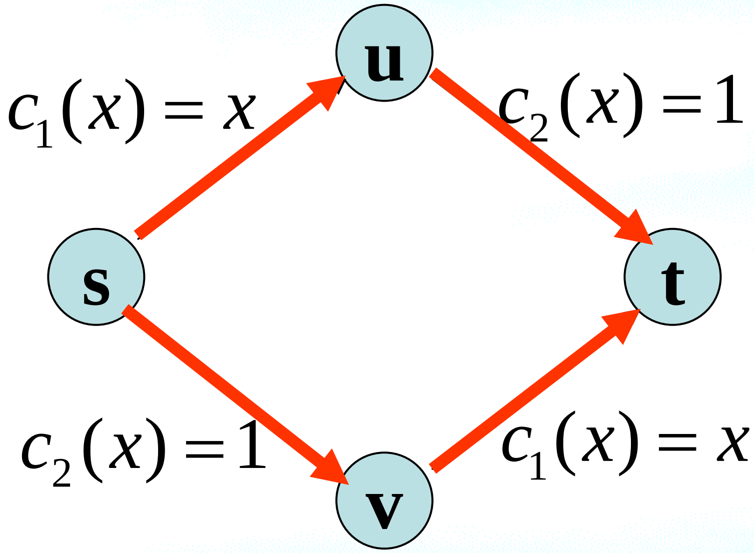
- 一群猎人相约去打猎，猎场中有鹿和兔两种动物，鹿的价值远大于兔的价值。每个猎人在打猎时只能专注于一种猎物，猎到某猎物后他即中止打猎
- 一头鹿需要所有人协力才能捕获，一只兔只要单人努力即可捕获，所有人协力获得的猎物收益由所有人平分
- 所有人捕鹿或所有人捕兔是两个**Nash**均衡

不用説遙远的将来，甚至連第二天的事情都不会想到。如果大家在捕一只鹿，每人都很知道应該忠实地守着自己的崗位。但是如果有一只兎从其中一人的眼前跑过，这个人一定会毫不迟疑地去追捕这只兎；当他捕到了兎以后，他的同伴們因此而沒有捕到他們的猎获物这件事，他会不大在意，这是无須怀疑的。

让•雅克•卢梭著：论人类不平等的起源和基础，**1755.**（李常山译，商务印书馆**1962**年版）

Braess 悖论

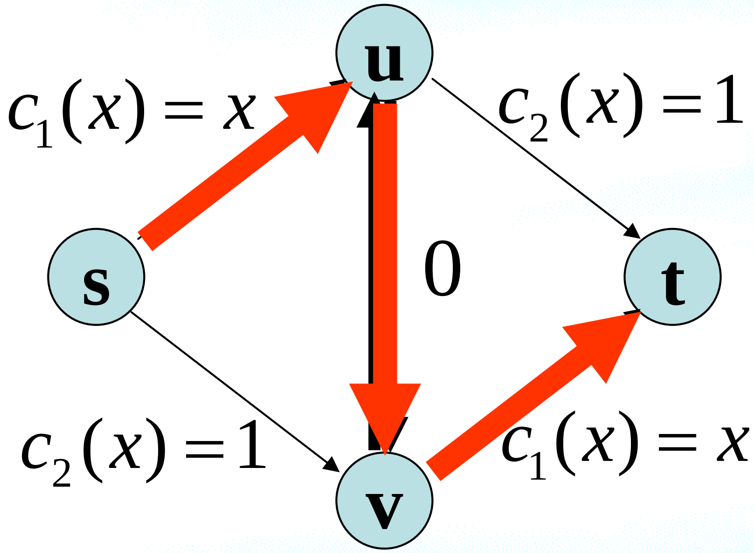
- 从 s 到 t 有s-u-t 和s-v-t两条道路，每个路段通行时间与路况有关，也与通过路段车流量有关
- 半数机动车选择 s-u-t 路，半数机动车选择s-v-t 路是一个Nash均衡，所有机动车行驶总时间为 $c_1\left(\frac{1}{2}\right)+c_2\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}$



将车流量单位化为 [0,1] 间的数，$c(x)$表示该路段车流量为x时通过该路段需要的时间

Braess 悖论

- 新建一条从 u 到 v的双向快速通道，通行时间可忽略不计
- 所有机动车选择 s-u-v-t路为 Nash 均衡。所有机动车行驶总时间为 $2c_1(1)=2$
- Nash 均衡未必是每个参与者的最优选择，也未必是某种整体利益最优的局势

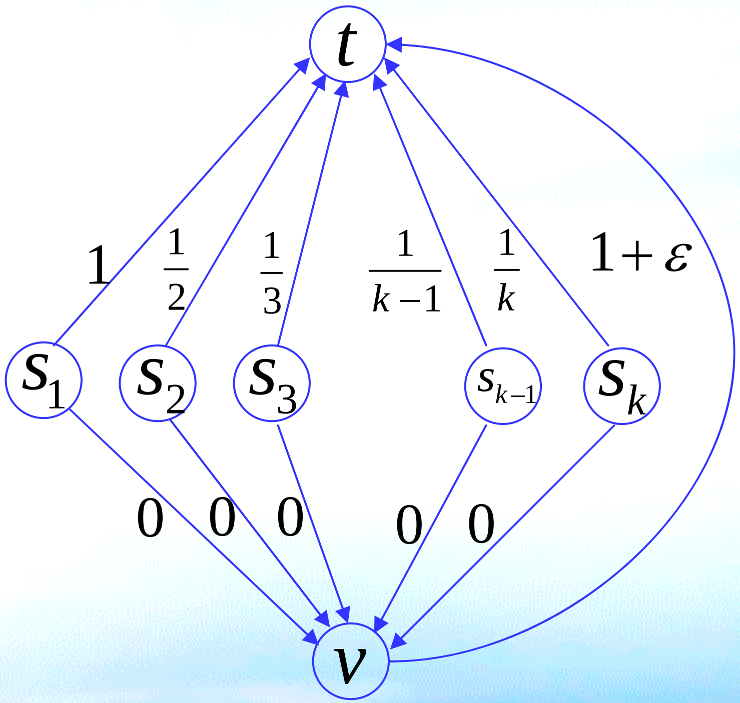


Inefficiency of Equilibria

Braess, D., Über ein Paradoxon aus der Verkehrsplanung. *Unternehmensforschung*, 12, 258–268, 1969. （英译版） On a Paradox of Traffic Planning, *Transportation Science*, 39, 446–450, 2005.

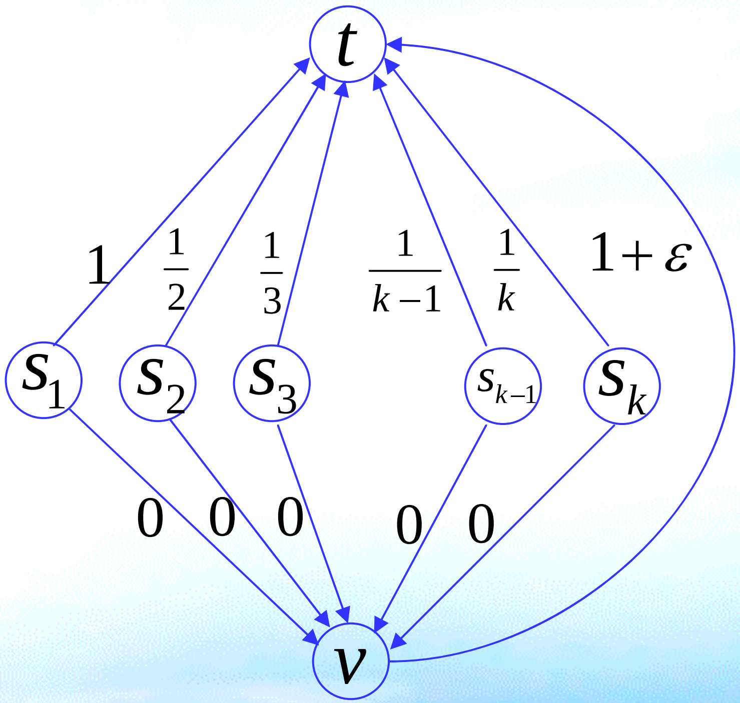
网络设计博弈

- 现有一由若干节点和线路组成的通讯网络，每个使用者可借此网络建立两点之间的通讯联系，为此需向网络所有者购买线路使用权
- 每条线路价格不同。若多个使用者共同使用某线路，费用由这些使用者分摊
- 有 k 个使用者，起点分别为 s_i ，$i=1,\cdots,k$，终点均为 t



网络设计博弈

- 从所有使用者整体利益来看，使用者 i 选择 $s_i - v - t$ 是最优的，总费用是 $1+\varepsilon$
- 使用者 i 选择 $s_i - t$ 是唯一的一个**Nash**均衡，总费用为 $\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i} = O(\ln k)$
- 当 $k \to \infty$时，**Nash**均衡与整体最优局势支付总费用之比为无穷大



Price of Anarchy

- 定义某种**social cost**作为整体利益的度量， **social cost**可视同局势的目标函数
  - 博弈的 **Price of Anarchy**（**PoA**）为目标值最大的**Nash**均衡与最优局势的目标值之比
  - 博弈的 **Price of Stability**（**PoS**）为目标值最小的**Nash**均衡与最优局势的目标值之比
- **PoA**反映了个体基于自身利益自由选择策略对整体利益的影响程度，其值的大小可作为判断是否需要干预和衡量干预效果的标准

浙江大学 ZheJiang University

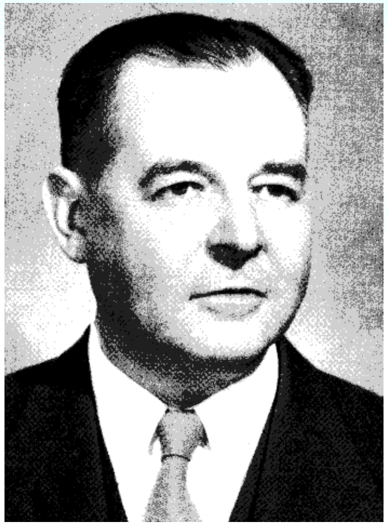
运筹与统计

竞争与垄断

Hotelling 模型

数学建模

- 现有两家快餐连锁店拟在一条街道上开设分店
- 居民住宅在街道上均匀分布，每人都会选择距他住址较近的一家快餐店就餐（若距离相等则随机选择一家）
- 连锁店应在何处选址才能吸引到比另一家更多的顾客

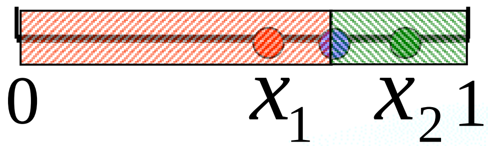


Harold Hotelling
（1895-1973 ）
美国数学家、经济学家、统计学家

Hotelling 模型

数学建模

- 将街道抽象为实数轴上区间[0, 1]，两家连锁店位置分别为 x_1, x_2，$0 \le x_i \le 1$



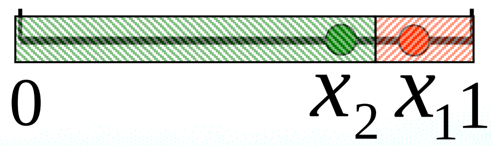
- 若 $x_1 \le x_2$（$x_1 > x_2$的情形是对称的）
  - 位于$\left[0, \frac{x_1+x_2}{2}\right)$的顾客将到快餐店甲就餐，位于$\left(\frac{x_1+x_2}{2}, 1\right]$的顾客将到快餐店乙就餐
  - 当 $x_1 + x_2 > 1$ 时，快餐店甲拥有更多的客源，当 $x_1 + x_2 < 1$ 时，快餐店乙拥有更多的客源

Hotelling 模型

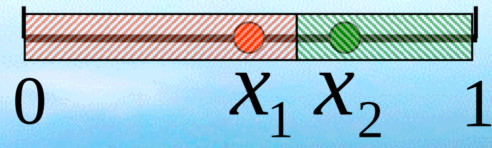
浙江大学 ZheJiang University

数学建模

- 给定快餐店乙的位置为 $x_2 > \frac{1}{2}$
  - 若 $x_1 > x_2$，快餐店甲的顾客数总少于快餐店乙
  - 若 $x_1 = x_2$，快餐店甲的顾客数与快餐店乙相等
  - 若 $1 - x_2 < x_1 < x_2$，快餐店甲的顾客数总多于快餐店乙



  - 若 $x_1 < 1 - x_2$，快餐店甲的顾客数总少于快餐店乙



Hotelling 模型

- 给定快餐店乙的位置为$x_2 > \frac{1}{2}$，快餐店甲的最优策略为$1 - x_2 < x_1 < x_2$
- 若给定快餐店乙的位置为 $x_2 = \frac{1}{2}$，快餐店甲的最优策略也为 $x_1 = \frac{1}{2}$，两家快餐店平分客源
  - 无论快餐店甲选择 $x_1 < \frac{1}{2}$ 或者 $x_1 > \frac{1}{2}$，其顾客数总少于快餐店乙
- 若给定快餐店乙的位置为 $x_2 < \frac{1}{2}$，则快餐店甲的最优策略为 $x_2 < x_1 < 1 - x_2$

Hotelling 模型

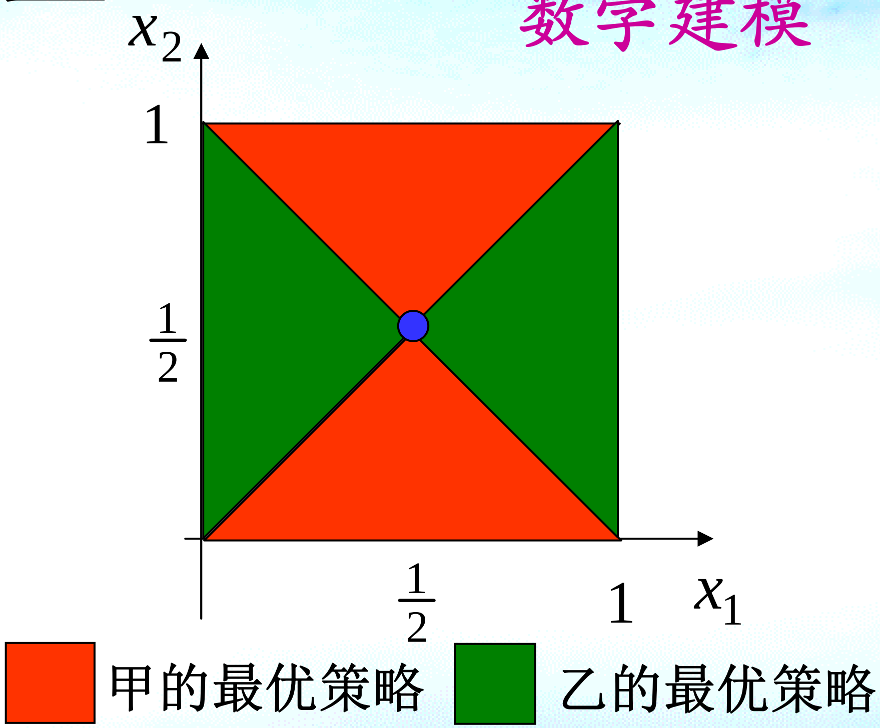
数学建模

- 快餐店甲的最优反应函数为

$$B(x_2)=\begin{cases} x_2<x_1<1-x_2, & x_2<\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}, & x_2=\frac{1}{2} \\ 1-x_2<x_1<x_2, & x_2>\frac{1}{2} \end{cases}$$

- 快餐店乙的最优反应函数为

$$B(x_1)=\begin{cases} x_1<x_2<1-x_1, & x_1<\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}, & x_1=\frac{1}{2} \\ 1-x_1<x_2<x_1, & x_1>\frac{1}{2} \end{cases}$$

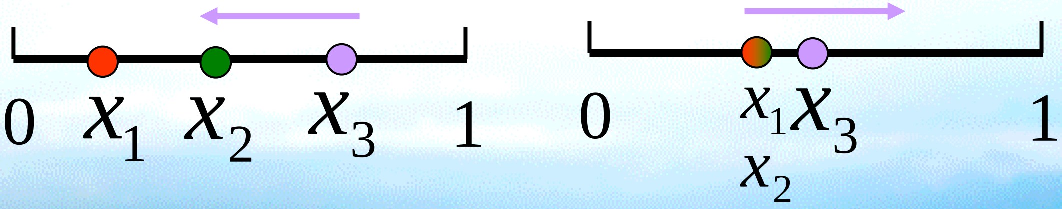


$\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$是 Nash均衡，两家快餐店开在同一地点，平分所有的客源

三方竞争

数学建模

- 现有第三家快餐店丙加入竞争，选址为 x_3
  - 若 $x_1 \le x_2 < x_3$， 则快餐店丙有向左移动靠近 x_1 和 x_2 的倾向
  - 若 $x_1 = x_2 = x_3$，则快餐店丙有向左或者向右移动离开 x_1 和 x_2 的倾向
- 三方竞争是不稳定的，Nash 均衡不存在



Cournot双头垄断

数学建模

- 两家垄断企业生产同一产品，生产单位产品的成本为常数 c
- 若市场上该产品供应量为 Q，则产品销售价格为 $M-Q$，其中 $M \geq Q$ 为一常数
- 两家企业应如何选择各自的产量可使自身获益最大

其他形式的生产函数和供给函数

Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses (Cournot, 1838)

Antoine Augustin Cournot （1801－1877）

法国数学家、经济学家、哲学家

收益与策略

- 设两家企业的产量分别为 q_1, q_2 ，市场总供应量为 q_1+q_2，产品价格为 $M-(q_1+q_2)$
  - 企业 i 的收益

$$u_i(q_1,q_2)=\begin{cases} q_i(M-q_1-q_2-c), & q_1+q_2\le M,\\ -cq_i, & q_1+q_2>M.\end{cases}$$

  - 两企业的最优反应函数

$$B_1(q_2)=\begin{cases} \dfrac{M-q_2-c}{2}, & q_2\le M-c,\\ 0, & q_2>M-c.\end{cases} \qquad B_2(q_1)=\begin{cases} \dfrac{M-q_1-c}{2}, & q_1\le M-c,\\ 0, & q_1>M-c.\end{cases}$$

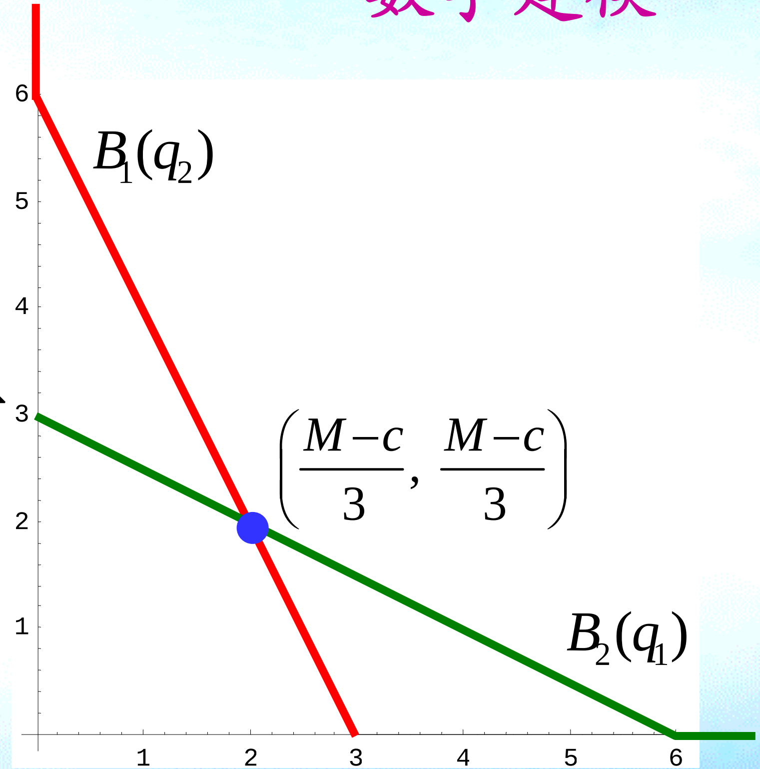
Nash 均衡

$$\begin{cases} q_1^* = \dfrac{1}{2}(M - q_2^* - c) \\ q_2^* = \dfrac{1}{2}(M - q_1^* - c) \end{cases} \Rightarrow q_1^* = q_2^* = \frac{M-c}{3}$$

- $\left(\dfrac{M-c}{3}, \dfrac{M-c}{3}\right)$是 **Nash 均衡，此时**

  两家企业的收益均为$\dfrac{(M-c)^2}{9}$，

  产品价格为$\dfrac{M+2c}{3} > c$



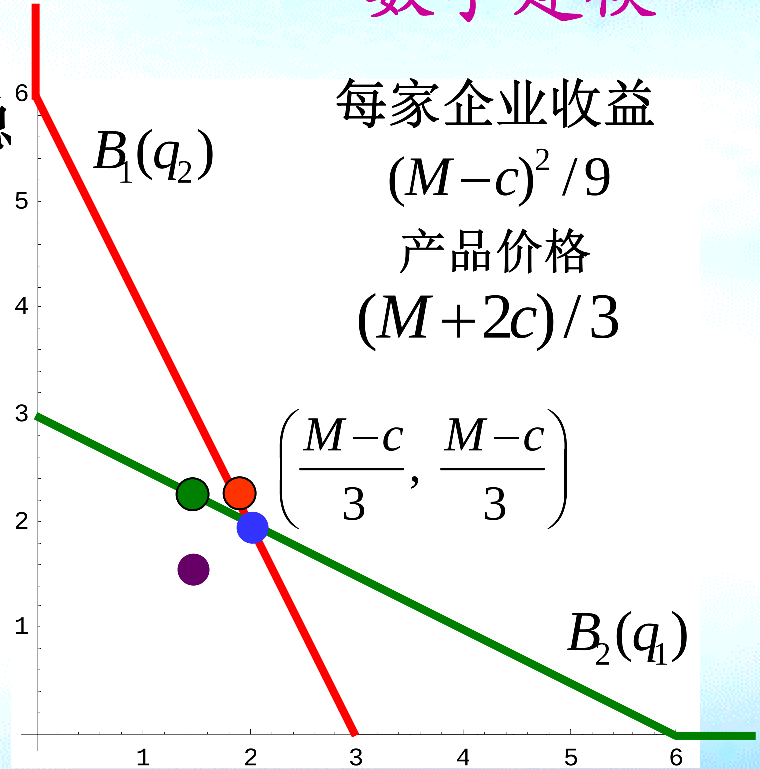
$$B_1(q_2) = \begin{cases} \dfrac{M - q_2 - c}{2}, & q_2 \le M - c, \\ 0, & q_2 > M - c. \end{cases} \quad B_2(q_1) = \begin{cases} \dfrac{M - q_1 - c}{2}, & q_1 \le M - c, \\ 0, & q_1 > M - c. \end{cases}$$

浙江大学 ZheJiang University

数学建模

联合和欺骗

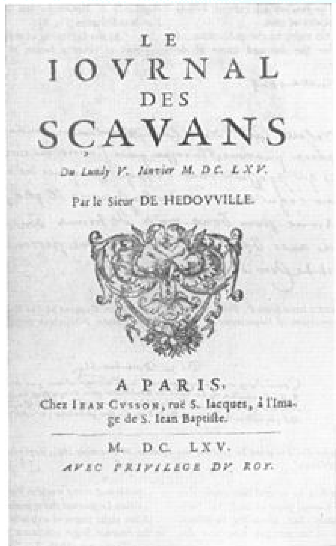
- 若两家企业联合，总产量为 Q，总收益为 $Q(M-Q-c)$
  - 当 $Q=(M-c)/2$ 时两家企业总收益最大。此时每家企业只需生产$(M-c)/4$，收益为 $(M-c)^2/8$，产品价格为 $(M+c)/2>(M+2c)/3$
- 一家企业的产量为 $(M-c)/4$ 时，另一家企业的最优策略为 $3(M-c)/8$，收益为 $3(M-c)^2/16$，大于联合时的收益



$$B_1(q_2)=\begin{cases}\dfrac{M-q_2-c}{2}, & q_2\le M-c,\\ 0, & q_2>M-c.\end{cases} \qquad B_2(q_1)=\begin{cases}\dfrac{M-q_1-c}{2}, & q_1\le M-c,\\ 0, & q_1>M-c.\end{cases}$$

Bertrand 双头垄断

- 两家垄断企业生产同一产品，生产单位产品的成本为常数 c
- 两家企业可自行确定产品价格，目标为自身获益最大
  - 消费者只会选择定价较低的企业生产的产品。若两企业定价相同，则市场份额由两企业平分
  - 若该产品最低售价为 p，则市场需求量为 $M - p$



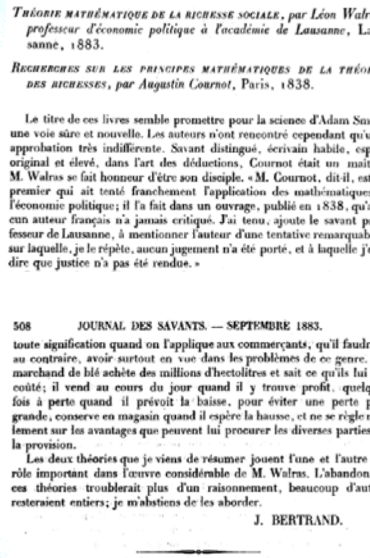
LE
IOVRNAL
DES
SCAVANS.

Du Lundy V. Ianvier M. DC. LXV.

Par le Sieur DE HEDOVVILLE.

A PARIS,
Chez IEAN CVSSON, ruë S. Iacques, à l'Image de S. Iean Baptiste.

M. DC. LXV.
AVEC PRIVILEGE DV ROY.



Théorie mathématique de la richesse sociale, par Léon Walras, professeur d'économie politique à l'académie de Lausanne, Lausanne, 1883.

Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses, par Augustin Cournot, Paris, 1838.

Le titre de ces livres semble promettre pour la science d'Adam Smith une voie sûre et nouvelle. Les auteurs n'ont rencontré cependant qu'une approbation très indifférente. Savant distingué, écrivain habile, esprit original et élevé, dans l'art des déductions, Cournot était un maître. M. Walras se fait honneur d'être son disciple. « M. Cournot, dit-il, est le premier qui ait tenté franchement l'application des mathématiques à l'économie politique; il l'a fait dans un ouvrage, publié en 1838, qu'aucun auteur français n'a jamais critiqué. J'ai tenu, ajoute le savant professeur de Lausanne, à mentionner l'auteur d'une tentative remarquable, sur laquelle, je le répète, aucun jugement n'a été porté, et à laquelle j'ose dire que justice n'a pas été rendue. »

508 JOURNAL DES SAVANTS. — SEPTEMBRE 1883.

toute signification quand on l'applique aux commerçants, qu'il faudrait, au contraire, avoir surtout en vue dans les problèmes de ce genre. Un marchand de blé achète des millions d'hectolitres et sait ce qu'ils lui ont coûté; il vend au cours du jour quand il y trouve profit, quelquefois à perte quand il prévoit la baisse, pour éviter une perte plus grande, conserve en magasin quand il espère la hausse, et ne se règle nullement sur les avantages que peuvent lui procurer les diverses parties de la provision.

Les deux théories que je viens de résumer jouent l'une et l'autre un rôle important dans l'œuvre considérable de M. Walras. L'abandon de ces théories troublerait plus d'un raisonnement, beaucoup d'autres resteraient entiers; je m'abstiens de les aborder.

J. BERTRAND.

Bertrand, J., Review of *Theorie mathematique de la richesse sociale* and of *Recherches sur les principles mathematiques de la theorie des richesses*; *Journal des Savants*, 67, 499–508, 1883

创刊于**1665**年，欧洲最早的学术期刊之一

价格与收益

数学建模

- 设两家企业的价格分别为p_1, p_2，则企业 **1** 的市场份额和收益如下表所示

	市场份额	收益
$p_1 < p_2$	$M - p_1$	$(p_1 - c)(M - p_1)$
$p_1 = p_2$	$\frac{M - p_1}{2}$	$\frac{(p_1 - c)(M - p_1)}{2}$
$p_1 > p_2$	0	0

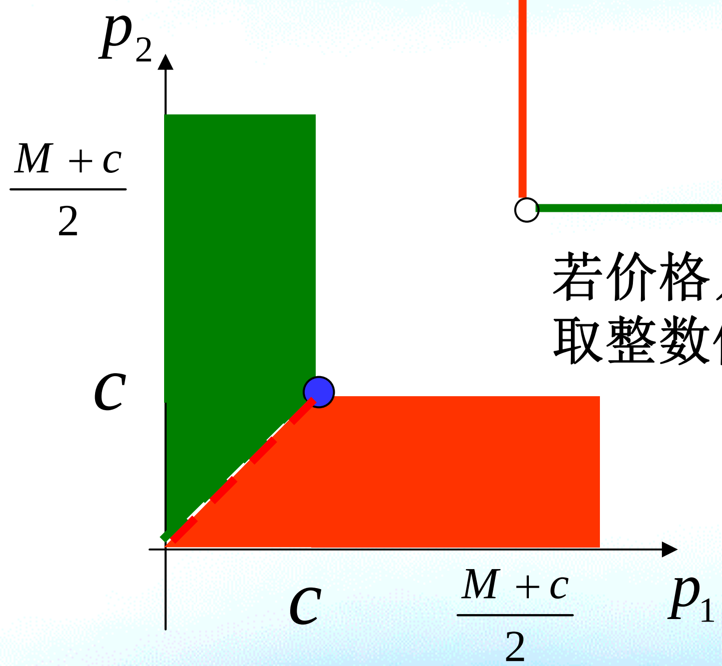
Joseph Louis François Bertrand （1822－1900）
法国数学家

Nash均衡

$$B_1(p_2)=\begin{cases}\{p_1 \mid p_1 > p_2\}, & p_2 < c\\ \{p_1 \mid p_1 \ge p_2\}, & p_2 = c\\ \varnothing, & c < p_2 \le \dfrac{M+c}{2}\\ \dfrac{M+c}{2}, & p_2 > \dfrac{M+c}{2}\end{cases}$$

- (c,c) 是唯一的一个**Nash均衡**。两家企业竞相压低价格，直至成本

$$u_1(p_1,p_2)=\begin{cases}(p_1-c)(M-p_1), & p_1 < p_2,\\ \dfrac{(p_1-c)(M-p_1)}{2}, & p_1 = p_2,\\ 0, & p_1 > p_2.\end{cases}$$



若价格只能取整数值?

1的最优策略

2的最优策略

运筹与统计

讨价还价

讨价还价

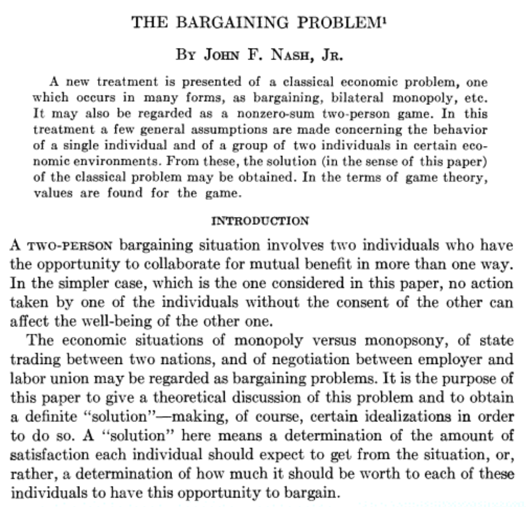
- 讨价还价（**bargaining**）问题
  - 两人协商分配一笔总额为**1**万元的资金，约定如果达成协议，双方可以按协议取走各自应得的部分；若未达成协议，则两人分文不得，资金收归他用
- 用 (x,y) 记甲、乙讨价还价后获得的资产。讨价还价后两人资产所有可能组成的集合记为 S，谈判破裂后两人可得的资产为 $d_0=(x_0,y_0)\in S$ 。一个讨价还价问题可用 $\langle S,d_0\rangle$ 来表示
  - $S=\{(x,y)\mid x+y\le 1 且 x\ge 0, y\ge 0\}$, $d_0=(0,0)$

讨价还价

浙江大学 ZheJiang University

数学建模

- 讨价还价问题的解为一个函数 φ，对每个讨价还价问题 $\langle S, d_0 \rangle$，有一个唯一的 $d^* = (x^*, y^*) \in S$ 与之对应
  - 至少存在一 $(\bar{x}, \bar{y}) \in S$，使得 $\bar{x} > x_0$ 且 $\bar{y} > y_0$
  - S 为有界闭凸集
- **Nash**应用公理化思想，首次给出了讨价还价问题的一种解



THE BARGAINING PROBLEM[1]

BY JOHN F. NASH, JR.

A new treatment is presented of a classical economic problem, one which occurs in many forms, as bargaining, bilateral monopoly, etc. It may also be regarded as a nonzero-sum two-person game. In this treatment a few general assumptions are made concerning the behavior of a single individual and of a group of two individuals in certain economic environments. From these, the solution (in the sense of this paper) of the classical problem may be obtained. In the terms of game theory, values are found for the game.

INTRODUCTION

A TWO-PERSON bargaining situation involves two individuals who have the opportunity to collaborate for mutual benefit in more than one way. In the simpler case, which is the one considered in this paper, no action taken by one of the individuals without the consent of the other can affect the well-being of the other one.

The economic situations of monopoly versus monopsony, of state trading between two nations, and of negotiation between employer and labor union may be regarded as bargaining problems. It is the purpose of this paper to give a theoretical discussion of this problem and to obtain a definite "solution"—making, of course, certain idealizations in order to do so. A "solution" here means a determination of the amount of satisfaction each individual should expect to get from the situation, or, rather, a determination of how much it should be worth to each of these individuals to have this opportunity to bargain.

Nash, J. F., Jr., The Bargaining Problem. *Econometrica*, 18, 155–162, 1950.

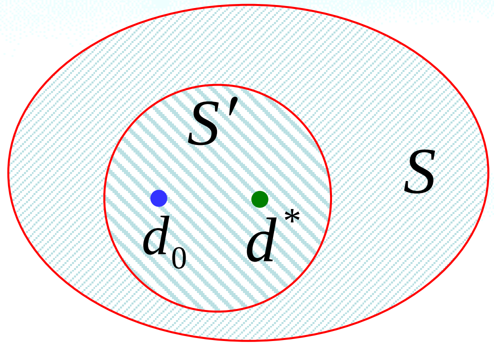
公理与定理

- 设有讨价还价问题 $\langle S, d_0 \rangle$，其解为 $d^* = (x^*, y^*)$
  - 公理Ⅰ（**Pareto有效性**）若 $d' = (x', y')$ 满足 $x' \geq x^*$，$y' \geq y^*$，且 $d' \neq d^*$，则 $d' \notin S$
  - 公理Ⅱ（对称性）若 $x_0 = y_0$ 且集合 S 是对称的，即若 $(x, y) \in S$，必有 $(y, x) \in S$，则 $x^* = y^*$
  - 公理Ⅲ（仿射不变性）设 $\alpha_i > 0, \beta_i, i = 1, 2$ 为实数，记 $\tilde{S} = \{(\alpha_1 x + \beta_1, \alpha_2 y + \beta_2) \mid (x, y) \in S\}$，$\tilde{d}_0 = (\alpha_1 x_0 + \beta_1, \alpha_2 y_0 + \beta_2)$
    则讨价还价问题 $\langle \tilde{S}, \tilde{d}_0 \rangle$ 的解 $d^* = (\alpha_1 x^* + \beta_1, \alpha_2 y^* + \beta_2)$

公理与定理

数学建模

- 公理Ⅳ （无关选择独立性）设 $\langle S, d_0\rangle$，$\langle S', d_0\rangle$ 为两讨价还价问题，且 $S' \subset S$，若 $\langle S, d_0\rangle$ 的解 $d^* \in S'$，则 $\langle S', d_0\rangle$ 的解也是 d^*



- 讨价还价问题 $\langle S, d_0\rangle$ 满足公理Ⅰ－Ⅳ的解是唯一的，即为非线性规划（**NLP**）的最优解

$$
\begin{aligned}
&\max && (x-x_0)(y-y_0)\\
(\text{NLP})\ &s.t. && (x,y)\in S,\\
& && x \ge x_0
\end{aligned}
$$

存在唯一性

- $S\cap\{(x,y)\mid x\geq x_0\}$为有界闭集，二元连续函数$(x-x_0)(y-y_0)$最大值存在
- 若存在两个最优解$(x_1,y_1),(x_2,y_2)$
  - $(x_1-x_0)(y_1-y_0)=(x_2-x_0)(y_2-y_0)$
    $$\geq(\bar{x}-x_0)(\bar{y}-y_0)>0$$
    $$\Rightarrow x_1\neq x_0\Rightarrow x_1>x_0 \qquad \Rightarrow x_1\neq x_2$$
  - 不妨设$x_1<x_2$，则$y_1>y_2$，$\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)\in S$　凸性

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}-x_0\right)\left(\frac{y_1+y_2}{2}-y_0\right)=(x_1-x_0)(y_1-y_0)+\frac{1}{4}(y_2-y_1)(x_1-x_2)$$
$$>(x_1-x_0)(y_1-y_0)$$

矛盾

$$\begin{aligned}\max\quad & (x-x_0)(y-y_0)\\ s.t.\quad & (x,y)\in S,\\ & x\geq x_0\end{aligned}$$

S 为有界闭凸集，且存在$(\bar{x},\bar{y})\in S$，$\bar{x}>x_0$，$\bar{y}>y_0$

证明满足公理

- 若另有 $(x', y') \neq (x^*, y^*)$ 满足 $x' \geq x^*, y' \geq y^*$
  $$(x'-x_0)(y'-y_0) > (x^*-x_0)(y^*-y_0)$$
- 若 $x_0 = y_0$， 则 $y^* > y_0 = x_0$，(y^*, x^*) 也是最优解
- $(\alpha_1 x+\beta_1-(\alpha_1 x_0+\beta_1))(\alpha_2 y+\beta_2-(\alpha_2 y_0+\beta_2))$
  $$=\alpha_1\alpha_2(x-x_0)(y-y_0)$$
- **若(NLP1)的可行域包含在(NLP2)的可行域中，且(NLP2)的最优解是(NLP1)的可行解，则它也是(NLP1)的最优解**

$$\begin{aligned} \max \quad & (x-x_0)(y-y_0) \\ s.t. \quad & (x,y)\in S, \\ & x \geq x_0 \end{aligned}$$

S 为有界闭凸集，且存在 $(\bar{x},\bar{y})\in S$，$\bar{x} > x_0$，$\bar{y} > y_0$

(x^*, y^*) 是唯一的最优解，且 $x^* > x_0, y^* > y_0$

最优解的性质

数学建模

- 对任意的 $(x,y)\in S$，$\dfrac{x-x^*}{x^*-x_0}\le\dfrac{y^*-y}{y^*-y_0}$
  - 若存在 $(x',y')\in S$，$\dfrac{x'-x^*}{x^*-x_0}>\dfrac{y^*-y'}{y^*-y_0}$

$$(x'',y'')=\varepsilon(x',y')+(1-\varepsilon)(x^*,y^*)$$ 凸性

$$=(x^*+\varepsilon(x'-x^*),y^*+\varepsilon(y'-y^*))\in S$$

$$x''=x^*+\varepsilon(x'-x^*)\ge x_0$$

$$(x''-x_0)(y''-y_0)-(x^*-x_0)(y^*-y_0)$$

$$=\varepsilon\left((x^*-x_0)(y^*-y_0)\left(\frac{y'-y^*}{y^*-y_0}+\frac{x'-x^*}{x^*-x_0}\right)+\varepsilon(x'-x^*)(y'-y^*)\right)>0$$ 有界

矛盾

$$\begin{aligned}\max\quad & (x-x_0)(y-y_0)\\ s.t.\quad & (x,y)\in S,\\ & x\ge x_0\end{aligned}$$

S 为有界闭凸集，且存在 $(x,y)\in S$，$x>x_0$，$y>y_0$

(x^*,y^*) 是唯一的最优解，且 $x^*>x_0, y^*>y_0$

浙江大学 ZheJiang University

数学建模

最优解的性质

- 令 $\mathscr{D} = \left\{(x,y) \mid \dfrac{x-x^*}{x^*-x_0} \le \dfrac{y^*-y}{y^*-y_0}\right\} = \left\{(x,y) \mid \dfrac{x-x_0}{x^*-x_0} + \dfrac{y-y_0}{y^*-y_0} \le 2\right\}$
  - 作仿射变换 $u(x) = \dfrac{x-x_0}{x^*-x_0}, v(y) = \dfrac{y-y_0}{y^*-y_0}$

    $\widetilde{\mathscr{D}} = \{(u,v) \mid u+v \le 2\}$

$$\langle S, d_0 \rangle \xrightarrow[\text{公理IV}]{S \subseteq \mathscr{D}} \langle \mathscr{D}, d_0 \rangle \xrightarrow[\text{公理III}]{} \langle \widetilde{\mathscr{D}}, (0,0) \rangle$$

$\xrightarrow[\text{公理 II}]{}$ 解在直线 $u = v$ 上

$\xrightarrow[\text{公理 I}]{}$ 解为 $(u,v) = (1,1)$ $\longrightarrow$ 解为 (x^*, y^*)

S 为有界闭凸集，且存在 $(x,y) \in S$，$x > x_0$，$y > y_0$

(x^*, y^*) 是唯一的最优解，且 $x^* > x_0, y^* > y_0$

对任意的 $(x,y) \in S$，
$$\frac{x-x^*}{x^*-x_0} \le \frac{y^*-y}{y^*-y_0}$$


浙江大学
ZheJiang University
谢 谢