运筹与统计

数学规划

数学规划

数学建模

- 若干个变量在满足一些等式或不等式限制条件下，使一个或多个目标函数取得最大值或最小值

- 极值问题
  - 求函数 $f(\mathbf{x})$在 $\mathbf{x}\in S$ 上的极大（小）值
- 条件极值
  - 求函数 $f(\mathbf{x})$在满足

    $h_j(\mathbf{x})=0,\quad j=1,\cdots,t$

    条件下的极大（小）值

- 数学规划

$$\begin{aligned}
\min\quad & f(\mathbf{x}) \\
s.t.\quad & g_i(\mathbf{x})\ge 0 \quad i=1,\cdots,s \\
& h_j(\mathbf{x})=0 \quad j=1,\cdots,t \\
& \mathbf{x}\in\mathbb{R}^n
\end{aligned}$$

目标函数

min 极小
max 极大

subject to:
以下为约束条件

变量取值
范围约束

等式约束

不等式约束

数学规划

- 满足所有约束条件的点称为可行点（解）（**feasible point**），可行点的集合称为可行域（**feasible region**），记为 S
- $\mathbf{x}^* \in S$ 称为（单目标、极小化）优化问题的最优解（**optimal solution**），若对任意 $\mathbf{x} \in S$，均有 $f(\mathbf{x}^*) \le f(\mathbf{x})$；相应地 $f(\mathbf{x}^*)$ 称为最优值
  - 局部最优解和全局最优解

分类

- 线性规划与非线性规划
  - 线性规划：目标函数为线性函数，约束条件为线性等式或不等式
  - 非线性规划：目标函数为非线性函数，或者至少有一个约束条件为非线性等式或不等式
    - 二次规划（**Quadratic Programming**）：目标函数为二次函数，约束条件为线性等式或不等式
    - 带二次约束的二次规划（**Quadratically Constrained Quadratic Program，QCQP**）：目标函数为二次函数，约束条件为线性或二次等式或不等式
- 整数规划：至少有一个决策变量限定取整数值
  - 混合整数规划（**Mixed Integer Programming, MIP**）：部分决策变量取整数值
  - **0-1**规划：所有决策变量都取 **0** 或 **1**

食谱问题

- 食谱问题（**diet problem**）
  - 在市场上可以买到 n 种不同的食品，第 j 种食品的单位售价为 c_j
  - 人体正常生命活动过程需要 m 种基本营养成分，一个人每天至少需要摄入第 i 种营养成分 b_i 个单位
  - 每单位第 j 种食物包含第 i 种营养成分 a_{ij} 个单位
  - 在满足人体营养需求的前提下，如何寻找最经济的配食方案

George Joseph Stigler
（1911－1991）
美国经济学家
1982年诺贝尔经济学奖得主

18

食谱问题

- 决策变量：食谱中第 j 种食物的数量为 x_j 个单位，$j=1,\cdots,n$
- 目标函数：所有食物费用之和 $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$
- 约束条件：
  - 满足人体营养需求
    - x_j 个单位第 j 种食物中含第 i 种营养成分 $a_{ij}x_j$ 个单位
    - 人体摄入的第 i 种营养成分的总量为 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$
    - 每种营养成分应满足人体需要 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ge b_i, i=1,\cdots,m$
  - 摄入食物量非负 $x_j \ge 0, j=1,\cdots,n$

食谱问题

$$\min \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$s.t. \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i, \quad i = 1, \cdots, m$$

$$x_j \ge 0, \quad j = 1, \cdots, n$$

$$\min \quad \mathbf{cx}$$

$$s.t. \quad \mathbf{Ax} \ge \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \ge \mathbf{0}$$

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$$

$$\mathbf{A} = (a_{ij})_{m \times n}$$

$$\mathbf{c} = (c_1, \cdots, c_n)$$

$$\mathbf{b} = (b_1, \cdots, b_m)^{\mathrm{T}}$$

MATHEMATICA

```
In[55]:= c = {4, 2, 3};
         b = {4, 11};
         A = (2 0 2
              4 3 1);
         LinearProgramming[c, A, b]

Out[58]= {2, 1, 0}
```

LINGO

```
MODEL:
sets:
    nut/1..2/:b;
    food/1..3/:c,x;
    cost(nut,food):a;
endsets
data:
  c=4 2 3;
  b=4 11;
  a=2 0 2 4 3 1;
enddata
min=@sum(food(j):c(j)*x(j));
@for(nut(i): @sum(food(j):a(i,j)*x(j))>b(i););
END
```

```
Global optimal solution found.
Objective value:                    10.00000
Infeasibilities:                    0.000000
Total solver iterations:                   2

               Variable           Value
                  X( 1)        2.000000
                  X( 2)        1.000000
                  X( 3)        0.000000
```

运输问题

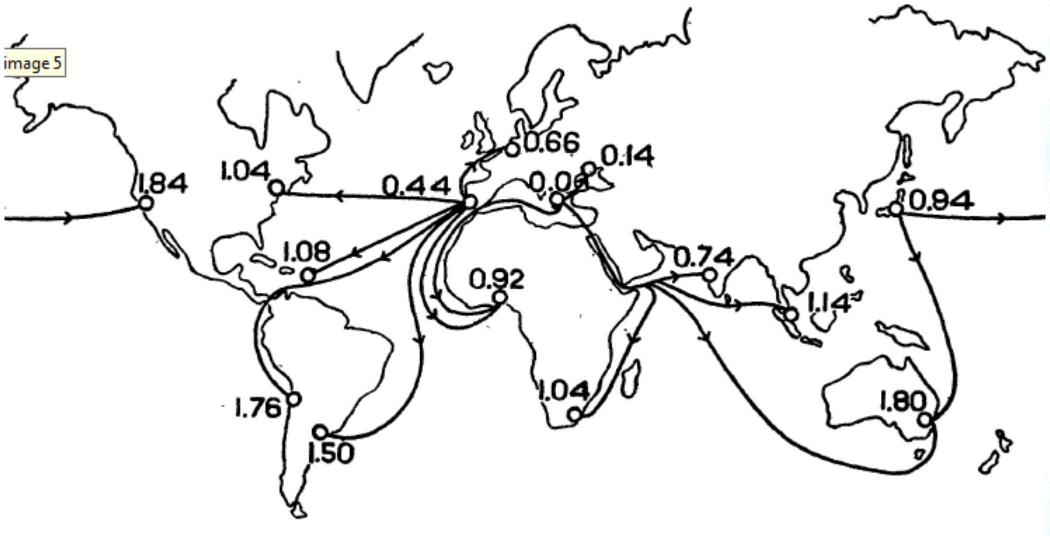
- 决策变量
  - x_{ij} ： 产地 i 调运到销地 j 的货物数量

$$\min \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

$$s.t. \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i,\ i=1,\ \cdots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j,\ j=1,\cdots,n$$

$$x_{ij} \ge 0$$



以净输入港口为产地，净输出港口为销地的运输问题的最优解，给出了最优空船调运路线

下料问题

数学建模

- 下料问题（Cutting-Stock Problem）
  - 给定生产一批产品所需的某种材料的大小与数量列表，如何从相同规格的原料中下料，使所用的原料最少
- 装箱问题（bin-packing problem）
  - 给定一系列大小已知的物品和若干个容量相同的箱子，如何将物品放入箱子中，使所用箱子数尽可能少

现有15米长的钢管若干，生产某产品需4米，5米，7米长的钢管各100，150，200根，如何截取方能使材料最省

如何选择决策变量

下料问题

浙江大学 ZheJiang University

数学建模

- 列举所有可能的截取方式
- 决策变量
  - x_i：按第 i 种方式截取的原料的数量，$i=1,\cdots,7$
  - x_i 必须取正整数值

方式	1	2	3	4	5	6	7
7米	2	1	1	0	0	0	0
5米	0	1	0	3	2	1	0
4米	0	0	2	0	1	2	3
余料	1	3	0	0	1	2	3

$$\begin{aligned}
\min\quad & x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7\\
s.t.\quad & 2x_1+x_2+x_3 \ge 200\\
& x_2+3x_4+2x_5+x_6 \ge 150\\
& 2x_3+x_5+2x_6+3x_7 \ge 100\\
& x_i \ge 0 \text{ 且 } x_i \text{ 为整数},\quad i=1,2,\cdots,7.
\end{aligned}$$

选址问题

- 选址问题
  - 设在平面上有 n 个点，第 j 个点的坐标为 (x_j, y_j)
  - 求一个面积最小的圆，使这 n 个点均为该圆内的点

A QUESTION IN THE GEOMETRY OF SITUATION.

By J. J. SYLVESTER.

IT is required to find the least circle which shall contain a given system of points in a plane.

THE

QUARTERLY JOURNAL

OF

PURE AND APPLIED

MATHEMATICS.

EDITED BY

J. J. SYLVESTER, M.A., F.R.S.,

PROFESSOR OF MATHEMATICS IN THE ROYAL MILITARY ACADEMY, WOOLWICH; AND

N. M. FERRERS, M.A.,

FELLOW OF GONVILLE AND CAIUS COLLEGE, CAMBRIDGE:

ASSISTED BY

G. G. STOKES, M.A., F.R.S.,

LUCASIAN PROFESSOR OF MATHEMATICS IN THE UNIVERSITY OF CAMBRIDGE;

A. CAYLEY, M.A., F.R.S.,

LATE FELLOW OF TRINITY COLLEGE, CAMBRIDGE; AND

M. HERMITE,

CORRESPONDING EDITOR IN PARIS.

VOL. I.

ὅ τι οὐσία πρὸς γένεσιν, ἐπιστήμη πρὸς πίστιν καὶ διάνοια πρὸς εἰκασίαν ἐστι.

LONDON:

JOHN W. PARKER AND SON, WEST STRAND.

1857.

27

浙江大学 ZheJiang University

数学建模

选址问题

- 选址问题
  - 决策变量：圆心(x_0, y_0)，半径 r
  - 目标函数：r^2
  - 约束条件：每个点到圆心的距离不超过半径

带二次约束的二次规划

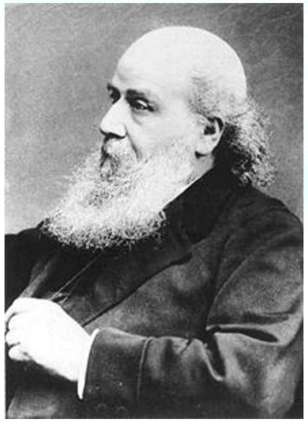
$$\begin{aligned} &\min \quad r^2 \\ &s.t. \quad (x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2 \le r^2, \quad i = 1, 2, \cdots, n \end{aligned}$$

- 定义新决策变量 $\lambda = r^2 - (x_0^2 + y_0^2)$ 替代 r

二次规划

$$\begin{aligned} &\min \quad \lambda + x_0^2 + y_0^2 \\ &s.t. \quad \lambda + 2x_0 x_i + 2y_0 y_i \ge x_i^2 + y_i^2, \quad i = 1, 2, \cdots, n \end{aligned}$$

$$x_i^2 - 2x_0x_i + x_0^2 + y_i^2 - 2y_0y_i + y_0^2 \le r^2 \Longrightarrow x_i^2 - 2x_0x_i + y_i^2 - 2y_0y_i \le r^2 - x_0^2 - y_0^2 = \lambda$$



James Joseph Sylvester (1814-1897)
英国数学家

支持向量机

浙江大学 ZheJiang University

数学建模

- 支持向量机（**Support Vector Machine**）
  - 拟将一数据集分为 C_1, C_2 两类。每个数据有 n 个特征，用 n 维实向量表示数据
  - 训练集 $S=\{\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\cdots,\mathbf{x}_m\}$，其分类已知，记 $y_i=\begin{cases}1 & \mathbf{x}_i\in C_1\\ -1 & \mathbf{x}_i\in C_2\end{cases}$
  - 训练集可线性分离（**linearly separable**），即存在超平面 $\mathbf{w}\cdot\mathbf{x}+b=0$，使得 $\begin{cases}\mathbf{w}\cdot\mathbf{x}_i+b>0 & \mathbf{x}_i\in C_1\\ \mathbf{w}\cdot\mathbf{x}_i+b<0 & \mathbf{x}_i\in C_2\end{cases}$， 或 $y_i(\mathbf{w}\cdot\mathbf{x}_i+b)>0$
- 超平面
  - 设 $\mathbf{w}$ 为 n 维实向量，b 为实数，称 $\mathbf{w}\cdot\mathbf{x}+b=0$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的超平面（**hyperplane**）
  - $\mathbb{R}^n$ 中点 $\mathbf{x}$ 到超平面 $\mathbf{w}\cdot\mathbf{x}+b=0$ 的距离为 $\dfrac{|\mathbf{w}\cdot\mathbf{x}+b|}{\sqrt{\mathbf{w}\cdot\mathbf{w}}}$

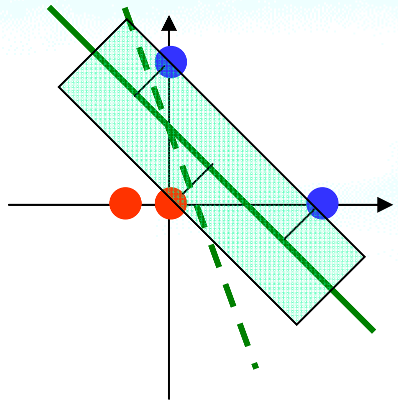
不妨要求 $\mathbf{w}\cdot\mathbf{w}=1$

Cortes C, Vapnik V. Support-vector networks. *Machine Learning*, *20*(3), 273-297, 1995.

支持向量机

数学建模

- 若（I）有解，（I）与（II）等价
  - （I）的可行域包含在（II）的可行域内
  - （II）的最优解在（I）的可行域内
    - 由于（I）有解，存在 $\mathbf{w}, b$，满足 $\mathbf{w}\cdot\mathbf{w}=1$ 与 $y_i(\mathbf{w}\cdot\mathbf{x}_i+b)>0,\ i=1,\cdots,m$。这也是（II）的一组可行解，故（II）的最优值非负。因此（II）的最优解 $\mathbf{w}^*, b^*$ 总满足 $y_i(\mathbf{w}^*\cdot\mathbf{x}_i+b^*)>0,\ i=1,\cdots,m$
  - 在（I）的可行域内，对相同决策变量，（I）的目标值与（II）的目标值相等
    - 由于 $y_i=\pm 1$，若 $y_i(\mathbf{w}\cdot\mathbf{x}_i+b)>0$，则 $y_i(\mathbf{w}\cdot\mathbf{x}_i+b)=|\mathbf{w}\cdot\mathbf{x}_i+b|$



所有点至超平面距离的最小值尽可能大

（I）
$$\begin{aligned}\max\quad & \min_{i=1,\cdots,m} |\mathbf{w}\cdot\mathbf{x}_i+b| \\ \text{s.t.}\quad & y_i(\mathbf{w}\cdot\mathbf{x}_i+b)>0,\ i=1,\cdots,m \\ & \mathbf{w}\cdot\mathbf{w}=1\end{aligned}$$

（II）
$$\begin{aligned}\max\quad & \min_{i=1,\cdots,m} y_i(\mathbf{w}\cdot\mathbf{x}_i+b) \\ \text{s.t.}\quad & \mathbf{w}\cdot\mathbf{w}=1\end{aligned}$$

支持向量机

数学建模

- 若 $\mathbf{w}_0, b_0$ 是（III）的最优解，则 $\dfrac{\mathbf{w}_0}{\sqrt{\mathbf{w}_0\cdot\mathbf{w}_0}}, \dfrac{b_0}{\sqrt{\mathbf{w}_0\cdot\mathbf{w}_0}}$ 是（II）的最优解
  - 设 $\mathbf{w}^*, b^*$ 是（II）的最优解，$\mathbf{w}^*\cdot\mathbf{w}^*=1$，最优值为 $\gamma^* = \min\limits_{i=1,\cdots,m} y_i(\mathbf{w}^*\cdot\mathbf{x}_i + b^*)$
  - $y_i(\mathbf{w}^*\cdot\mathbf{x}_i + b^*) \ge \gamma^*$，$i=1,\cdots,m$，即 $y_i\left(\dfrac{\mathbf{w}^*}{\gamma^*}\cdot\mathbf{x}_i + \dfrac{b^*}{\gamma^*}\right) \ge 1,\ i=1,\cdots,m$，
    故 $\dfrac{\mathbf{w}^*}{\gamma^*}, \dfrac{b^*}{\gamma^*}$ 是（III）的可行解
  - 由于 $\mathbf{w}_0, b_0$ 是（III）的最优解，$\sqrt{\mathbf{w}_0\cdot\mathbf{w}_0} \le \sqrt{\dfrac{\mathbf{w}^*}{\gamma^*}\cdot\dfrac{\mathbf{w}^*}{\gamma^*}} = \dfrac{1}{\gamma^*}$
  - $y_i\left(\dfrac{\mathbf{w}_0}{\sqrt{\mathbf{w}_0\cdot\mathbf{w}_0}}\cdot\mathbf{x}_i + \dfrac{b_0}{\sqrt{\mathbf{w}_0\cdot\mathbf{w}_0}}\right) \ge y_i\left(\gamma^*\mathbf{w}_0\cdot\mathbf{x}_i + \gamma^* b_0\right) = \gamma^* y_i\left(\mathbf{w}_0\cdot\mathbf{x}_i + b_0\right) \ge \gamma^*,\ i=1,\cdots,m$ ，
    故 $\dfrac{\mathbf{w}_0}{\sqrt{\mathbf{w}_0\cdot\mathbf{w}_0}}, \dfrac{b_0}{\sqrt{\mathbf{w}_0\cdot\mathbf{w}_0}}$ 的目标值不小于 $\mathbf{w}^*, b^*$ 的目标值，也是（II）的最优解

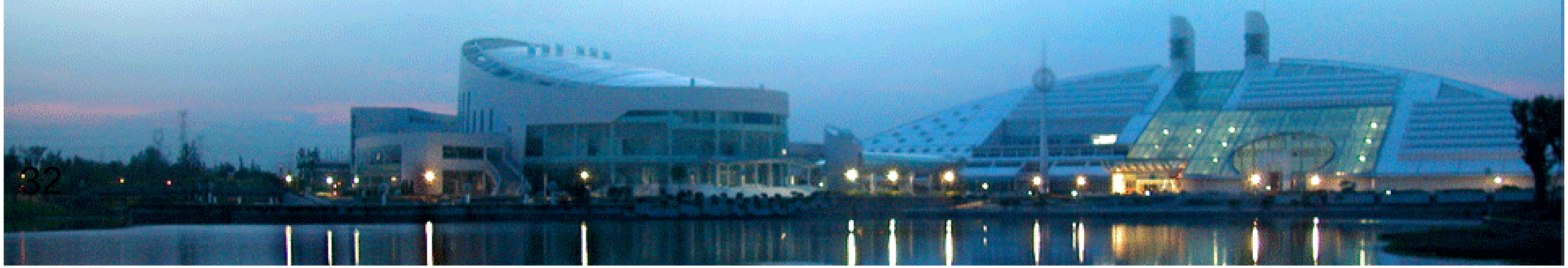
（II）
$$
\begin{aligned}
&\max \quad \min_{i=1,\cdots,m} y_i(\mathbf{w}\cdot\mathbf{x}_i + b) \\
&\text{s.t.} \quad \mathbf{w}\cdot\mathbf{w} = 1
\end{aligned}
$$

带不等式约束的二次规划

（III）
$$
\begin{aligned}
&\min \quad \mathbf{w}\cdot\mathbf{w} \\
&\text{s.t.} \quad y_i(\mathbf{w}\cdot\mathbf{x}_i + b) \ge 1,\ i=1,\cdots,m
\end{aligned}
$$

数学规划

- 建立实际问题数学规划的原则与技巧
  - 选择合适的决策变量，数量适中，目标函数和约束条件表达清晰、形式简单
  - 约束条件完整反映问题要求，不遗漏，不冗余。确保数学规划的最优值与原问题的最优值一致
  - 善于转化和变形，一般应尽量减少非线性约束和整数取值限制，灵活处理绝对值、分段函数等复杂情况
  - 善于运用**0-1**变量建立决策变量之间的联系和描述逻辑关系
  - 结合计算求解检验、修正和改进已有规划



运筹与统计

多目标规划

多目标规划

- 多目标规划研究变量在满足给定约束条件下，如何使多个目标函数同时极小化的问题

$$\text{(MOP)}\quad \begin{aligned} \min\ & \mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \cdots, f_p(\mathbf{x}))^{\mathrm{T}} \\ s.t.\ & \mathbf{g}_i(\mathbf{x}) \ge \mathbf{0}, i = 1, \cdots, s, \\ & \mathbf{h}_j(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, j = 1, \cdots, t. \end{aligned}$$

Vilfredo Federico Damaso Pareto
（1848－1923）
意大利经济学家

解的类型

数学建模

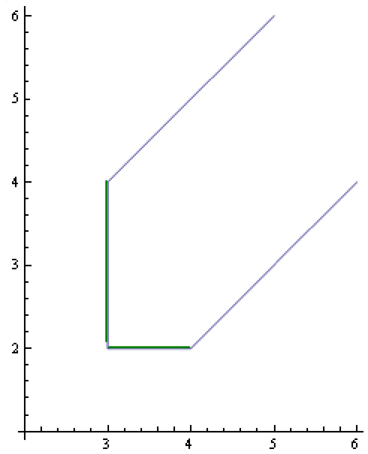
- 设 $\mathbf{x}^* \in S$
  - 若对任意 $\mathbf{x} \in S, f_k(\mathbf{x}^*) \le f_k(\mathbf{x}), k=1,\cdots,p$，则称 $\mathbf{x}^*$为（**MOP**）的绝对最优解
  - 若不存在 $\mathbf{x} \in S$，使得 $f_k(\mathbf{x}) \le f_k(\mathbf{x}^*), k=1,\cdots,p$，且至少存在某个 $k, f_k(\mathbf{x}) < f_k(\mathbf{x}^*)$，则称 $\mathbf{x}^*$为（**MOP**）的**Pareto**最优解
  - 若不存在 $\mathbf{x} \in S$，使得 $f_k(\mathbf{x}) < f_k(\mathbf{x}^*), k=1,\cdots,p$，则称 $\mathbf{x}^*$为（**MOP**）的弱**Pareto**最优解
- **（MOP）的所有绝对最优解，Pareto最优解，弱Pareto最优解的集合分别记作 S_a, S_p和 S_{wp}**

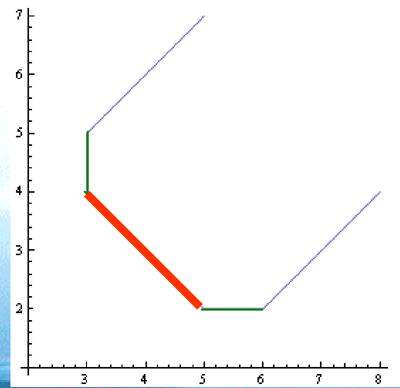
解的关系

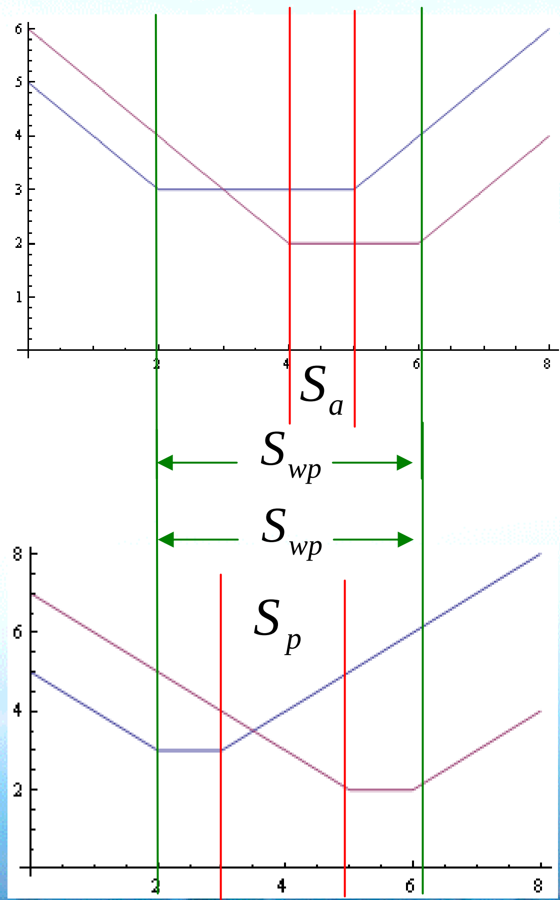
- 记 S^i 为单目标规划 $\min\limits_{\mathbf{x}\in S} f_i(\mathbf{x})$ 的最优解，则

$$S_a = \bigcap_{i=1}^{p} S^i$$

$$S^i \subseteq S_{wp}$$







解的关系

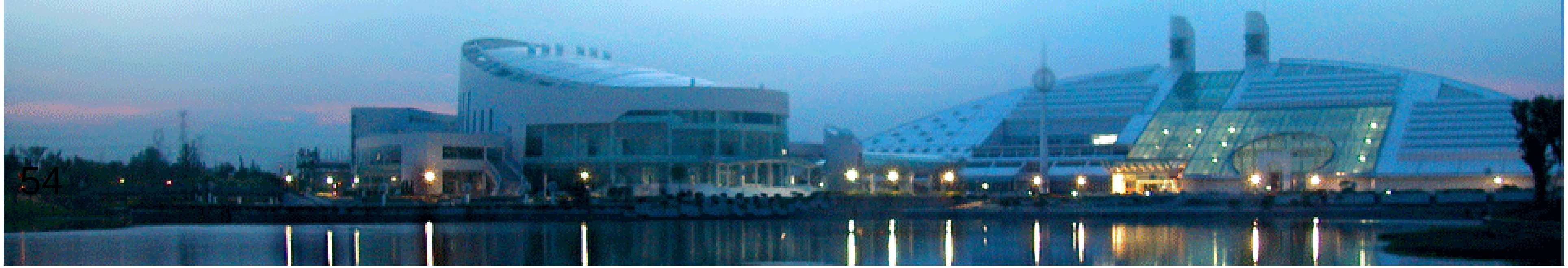
数学建模

- $S_a \subseteq S_p \subseteq S_{wp} \subseteq S$
  - 若 $\mathbf{x}^* \in S_a$，但 $\mathbf{x}^* \notin S_p$，则存在 $\bar{\mathbf{x}} \in S$ 和某个k，使得 $f_k(\bar{\mathbf{x}}) < f_k(\mathbf{x}^*), f_l(\bar{\mathbf{x}}) \le f_l(\mathbf{x}^*), l \neq k$，与 $\mathbf{x}^* \in S_a$ 矛盾
  - 若 $\mathbf{x}^* \in S_p$ ，但 $\mathbf{x}^* \notin S_{wp}$，则存在 $\bar{\mathbf{x}} \in S$ ，使得 $f_k(\bar{\mathbf{x}}) < f_k(\mathbf{x}^*), k = 1, \cdots, p$，与 $\mathbf{x}^* \in S_p$矛盾
- 若 $S_a \neq \varnothing$，则 $S_a = S_p$
  - 若 $\mathbf{x}^* \in S_p$，但 $\mathbf{x}^* \notin S_a$，由于$S_a \neq \varnothing$，存在 $\bar{\mathbf{x}} \in S_a$，使得 $f_k(\bar{\mathbf{x}}) \le f_k(\mathbf{x}^*), k = 1, \cdots, p$ ，由于$\mathbf{x}^* \neq \bar{\mathbf{x}}$，存在某个 k, $f_k(\bar{\mathbf{x}}) \neq f_k(\mathbf{x}^*)$，$f_k(\bar{\mathbf{x}}) < f_k(\mathbf{x}^*)$，与 $\mathbf{x}^* \in S_p$ 矛盾

多目标问题解法

数学建模

- **求(MOP)所有的Pareto最优解或弱Pareto最优解**
- 加权法
  - 令 $\Lambda=\{\boldsymbol{\lambda} \mid \boldsymbol{\lambda}>\mathbf{0}, \sum_{k=1}^{p} \lambda_k=1\}$
  - 线性加权和法 $(SP_{\boldsymbol{\lambda}})$ $\min\limits_{\mathbf{x}\in S} \sum_{k=1}^{p} \lambda_k f_k(\mathbf{x})$
  - 极小化极大法 $(P_{\boldsymbol{\lambda}})$ $\min\limits_{\mathbf{x}\in S} \max\limits_{1\le k\le p} \lambda_k f_k(\mathbf{x})$
  - 对任意 $\boldsymbol{\lambda}\in\Lambda$, $(SP_{\boldsymbol{\lambda}})$的最优解必是（**MOP**）的**Pareto**最优解, $(P_{\boldsymbol{\lambda}})$的最优解必是（**MOP**）的弱**Pareto**最优解



多目标问题解法

数学建模

- 分层排序法
  - 将目标按重要程度排序，在前一个目标的最优解集中，寻找后一个目标的最优解集，并把最后一个目标的最优解作为（**MOP**）的解
  - 分层排序法得到的解必为（**MOP**）的**Pareto**最优解
- 带宽容值的分层排序法

多目标问题解法

浙江大学 ZheJiang University

数学建模

- 主要目标法
  - 确定一个目标函数，如 $f_1(x)$，为主要目标，对其余 $p-1$ 个目标函数 $f_k(x)$，选定一定的界限值 $u_k, k=2,\cdots,p$，求解单目标规划

$$
\begin{aligned}
& \min \quad f_1(\mathbf{x}) \\
(SP) \quad & s.t. \quad f_k(\mathbf{x}) \le u_k, k=2,\cdots,p, \\
& \qquad\quad \mathbf{x} \in S
\end{aligned}
$$

  - (SP) 的最优解都是（**MOP**）的弱**Pareto**最优解

运筹与统计

赛程编制

赛程编制问题

浙江大学
ZheJiang University
数学建模

- 2018世界杯南美赛区预选赛
  - 10个成员国，4.5个决赛阶段名额
  - 双循环主客场制，9阶段18轮。两轮为一个阶段，每阶段跨时一周，不同阶段相隔一月或数月
- 2002-2014世界杯南美赛区预选赛赛程

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
ARG	CHI	VEN	BOL	COL	ECU	BRA	PAR	PER	URU
BOL	URU	COL	ARG	VEN	CHI	PAR	ECU	BRA	PER
BRA	COL	ECU	PER	URU	PAR	ARG	CHI	BOL	VEN
CHI	ARG	PER	URU	PAR	BOL	VEN	BRA	COL	ECU
COL	BRA	BOL	VEN	ARG	PER	ECU	URU	CHI	PAR
ECU	VEN	BRA	PAR	PER	ARG	COL	BOL	URU	CHI
PAR	PER	URU	ECU	CHI	BRA	BOL	ARG	VEN	COL
PER	PAR	CHI	BRA	ECU	COL	URU	VEN	ARG	BOL
URU	BOL	PAR	CHI	BRA	VEN	PER	COL	ECU	ARG
VEN	ECU	ARG	COL	BOL	URU	CHI	PER	PAR	BRA

- CONMEBOL -

FIFA WORLD CUP RUSSIA 2018

	Argentina 阿根廷
	Bolivia 玻利维亚
	Brazil 巴西
	Chile 智利
	Colombia 哥伦比亚
	Ecuador 厄瓜多尔
	Paraguay 巴拉圭
	Peru 秘鲁
	Uruguay 乌拉圭
	Venezuela 委内瑞拉

58

赛程特点

- **2002-2014世界杯南美赛区预选赛赛程特点**
  - 任意两队在前后两个半程各交手一次，两场比赛的主客场互换
    - 镜像双循环　　1~10, 2~11, ……，9~18
  - 不存在多于两场的连续主场与客场
  - 任一队不连续对阵巴西与阿根廷
- 赛程缺点
  - 存在同一阶段内两场比赛均为主场或客场的情况，且各队出现上述情况的次数不均衡
  - 同一阶段内各队先主后客和先客后主的次数不均衡
  - 赛程编制原理不透明，关键比赛存在争议

最后一轮：阿根廷——乌拉圭

	2002-2014		
	主主，客客	主客	客主
ARG	0	9	0
BOL	4	2	3
BRA	0	0	9
CHI	2	1	6
COL	2	6	1
ECU	2	4	3
PAR	2	3	4
PER	2	6	1
URU	2	4	3
VEN	2	1	6

赛程编制新举措

浙江大学 ZheJiang University

数学建模

- **2018世界杯新举措**
  - 各成员国提交候选方案，南美洲足联投票决定最终赛程模板
  - 赛程模板中各队用编号代替，抽签决定编号与球队对应关系（种子队与非种子队分别抽签）
  - **Durán**团队为智利足联编制赛程已逾十年，他们设计的方案为智利足联所采纳，并最终在投票中胜出

Guillermo Durán
Professor of Department of Mathematics and Calculus Institute Faculty of Exact and Natural Sciences University of Buenos Aires

Alarcón F, Durán G, Guajardo M. Referee assignment in the Chilean football league using integer programming and patterns. *International Transactions in Operational Research*, 21: 415-438, 2014.

Bonomo F, Cardemil A, Durán G, et al. An application of the traveling tournament problem: The Argentine volleyball league. *Interfaces*, 42: 245-259, 2012.

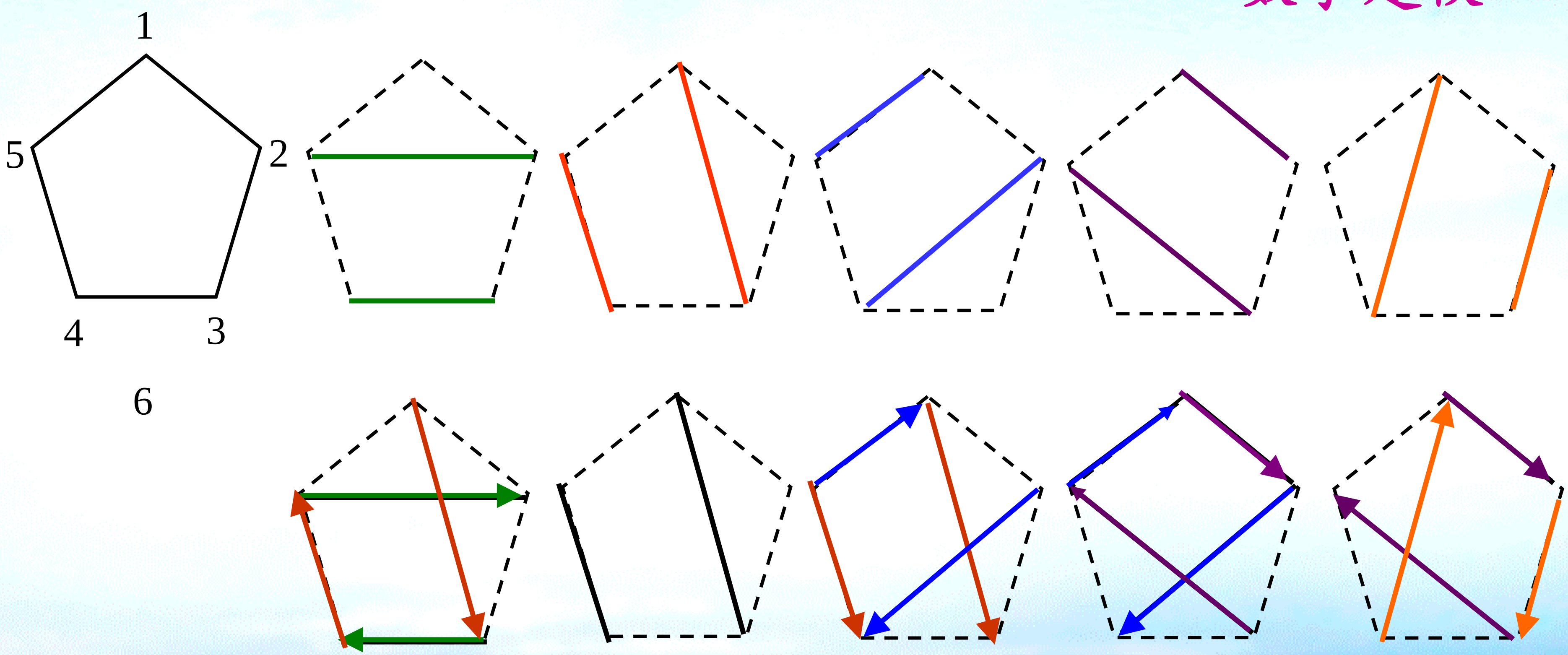
Durán G, Guajardo M, Wolf-Yadlin R. Operations research techniques for scheduling Chile's second division soccer league. *Interfaces*, 42: 273-285, 2012.

镜像赛程

- n 支队伍的单循环赛程，全程所有队伍总**break**数至少为 $n-2$
  - 用形如 **HAH…HA**，长度为 $n-1$（奇数）的字符串表示每支队伍的主客场安排，称为模式
  - 任何两支队伍的模式互不相同
  - 只有**HAHA…HAH** 和 **AHAH…AHA** 两种模式没有**break**，其它模式的**break**数至少为 1
- n 支队伍的镜像双循环赛程，全程所有队伍总**break**数至少为 $3n-6$
  - 若半程没有**break**，则全程也没有**break**，这样的队伍至多有两支
  - 若半程只有一个**break**，由于模式字符串长度为奇数，在前后半程之间有一个**break**
  - 若半程有至少两个**break**，全程**break**数至少为 4
  - 总**break**数至少为 $3(n-2)=3n-6$

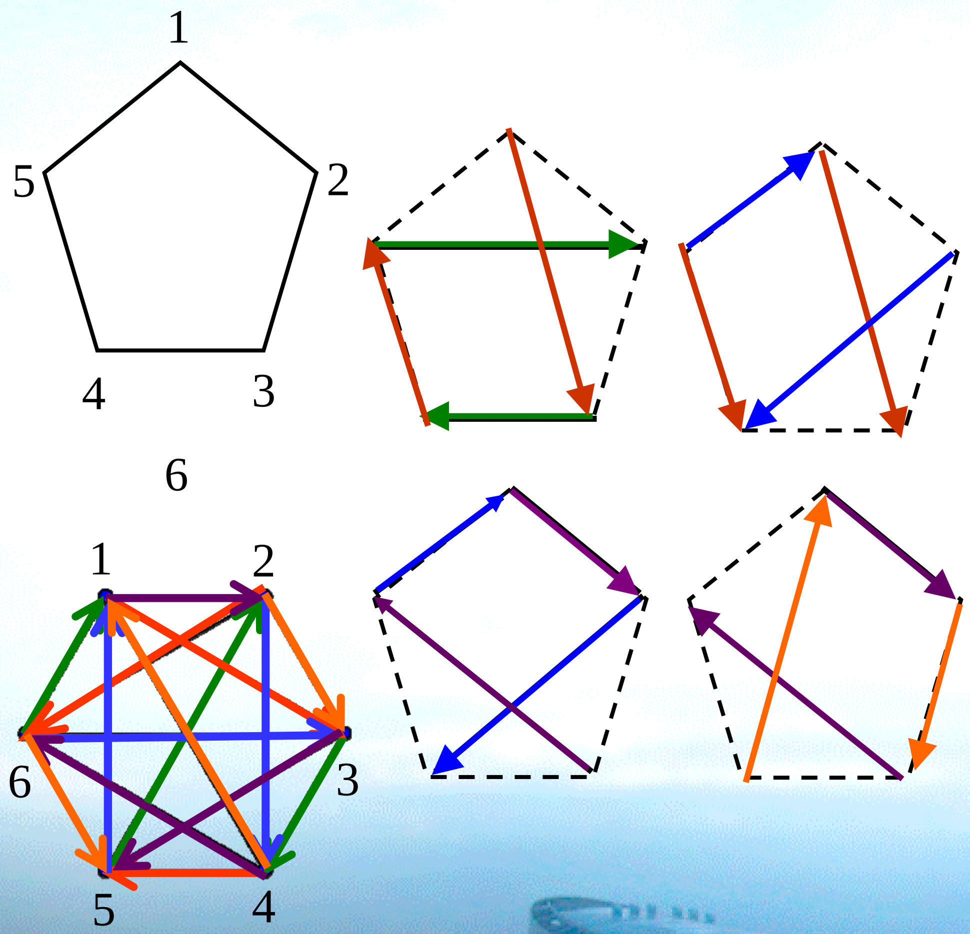
	1	2	3	…	9	10	11	12	…	18	
镜像（**mirror**）	1	2	3	…	9	1	2	3	…	9	意大利

单循环赛程



单循环赛程

数学建模



	1	2	3	4	5
1	−6	+3	−5	+2	−4
2	−5	+6	+4	−1	+3
3	+4	−1	−6	+5	−2
4	−3	+5	−2	+6	+1
5	+2	−4	+1	−3	−6
6	+1	−2	+3	−4	+5

镜像赛程

数学建模

- 根据世界杯南美赛区预选赛的特点，不必考虑连续两场比赛之间的break，只需考虑同一阶段两场比赛之间的double-round break
- 10支队的镜像赛程的double-round break数至少为16　　如何证明？
  - 若半程没有break，则全程也没有break，这样的队伍至多有两支。其他队伍半程至少有1个break，全程至少有2个double-round break
    - 前后半程之间若有break，必为double-round break
    - 若前半程的break不为double-round，后半程的break必为double-round

	1	2	3	…	9	10	11	12	…	17	18	
镜像（mirror）	1	2	3	…	9	1	2	3	…	8	9	意、德
法制（French）	1	2	3	…	9	2	3	4	…	9	1	法、俄
英制（English）	1	2	3	…	9	9	1	2	…	7	8	奥
逆向（Inverted）	1	2	3	…	9	9	8	7	…	2	1	瑞士

整数规划

- 决策变量

$$x_{ijk}=\begin{cases}1 & \text{第}k\text{轮队}i\text{在主场与队}j\text{比赛},\\ 0 & \text{其他},\end{cases}\qquad i,j=1,\cdots,10,\ k=1,\cdots 18$$

- 约束条件
  - 每轮各队恰有一场比赛

$$\sum_{i=1}^{10}\left(x_{ijk}+x_{jik}\right)=1,\quad j=1,\cdots,10,k=1,\cdots,18$$

  - 任意两队在前后半程各交手一次

$$\sum_{k=1}^{9}\left(x_{ijk}+x_{jik}\right)=1,\ i,j=1,\cdots,10 \qquad \sum_{k=10}^{18}\left(x_{ijk}+x_{jik}\right)=1,\ i,j=1,\cdots,10$$

  - 任意两队之间的两场比赛中每队均有一个主场

$$\sum_{k=1}^{18}x_{ijk}=1,\qquad i,j=1,\cdots,10,i\neq j$$

65

整数规划

数学建模

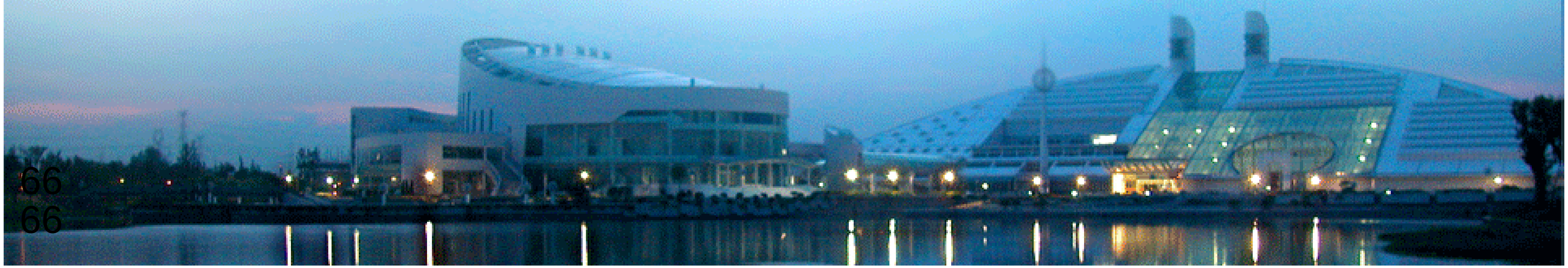
- 约束条件
  - 法制规则

$$x_{i,j,1}=x_{j,i,18},\; x_{i,j,k}=x_{j,i,k+8}, k=2,\cdots,9, i, j=1,\cdots,10$$

  - 任一队不连续与种子队（用 I_s 表示）对阵

$$\sum_{j\in I_s}\left(x_{ijk}+x_{jik}+x_{i,j,k+1}+x_{j,i,k+1}\right)\le 1,\; i\in I\setminus I_s, k=1,\cdots,17$$

  - 各支队伍各阶段先主后客（先客后主）的次数尽可能均衡
  - 同一阶段出现两个客场的次数尽可能少



66

整数规划

- （辅助）决策变量

$$y_{il}=\begin{cases}1 & \text{第}\,l\,\text{阶段队}\,i\,\text{两场比赛为先主后客}\\ 0 & \text{其他}\end{cases}\qquad i=1,\cdots,10,\ l=1,\cdots,9$$

- 两组决策变量之间的联系

$$y_{il}=1$$

$$\Updownarrow$$

队 i 在第 $2l-1$ 轮为主场作战，第 $2l$ 轮为主场作战

$$\Updownarrow$$

存在 j_1，使得 $x_{i,j_1,2l-1}=1$，
存在 j_2，使得 $x_{j_2,i,2l}=1$

$$\Updownarrow$$

$$\sum_{j=1}^{10}x_{i,j,2l-1}=1,\ \sum_{j=1}^{10}x_{j,i,2l}=1$$

$$\sum_{j=1}^{10}\left(x_{i,j,2l-1}+x_{j,i,2l}\right)\le 1+y_{il},\quad i=1,\cdots,10,l=1,\cdots,9$$

$$y_{il}\le\sum_{j=1}^{10}x_{i,j,2l-1},\ i=1,\cdots,10,l=1,\cdots,9$$

$$y_{il}\le\sum_{j=1}^{10}x_{j,i,2l},\ i=1,\cdots,10,l=1,\cdots,9$$

$$4\le\sum_{l=1}^{9}y_{il}\le 5,\quad i=1,\cdots,10$$

67

整数规划

数学建模

- （辅助）决策变量

$$w_{il}=\begin{cases}1 & \text{第}\,l\,\text{阶段队}\,i\,\text{两场比赛均为客场}\\ 0 & \text{其他}\end{cases}\qquad i=1,\cdots,10,\ l=1,\cdots,9$$

- 两组决策变量之间的联系

$$w_{il}=1$$

$$\Updownarrow$$

队 i 在第 $2l-1$ 轮和第 $2l$ 轮均为客场作战

$$\Updownarrow$$

存在 j_1，使得 $x_{j_1,i,2l-1}=1$，
存在 j_2，使得 $x_{j_2,i,2l}=1$

$$\sum_{j=1}^{10}\left(x_{j,i,2l-1}+x_{j,i,2l}\right)\le 1+w_{il},\quad i=1,\cdots,10,l=1,\cdots,9$$

$$w_{il}\le\sum_{j=1}^{10}x_{j,i,2l-1},\quad i=1,\cdots,10,l=1,\cdots,9$$

$$w_{il}\le\sum_{j=1}^{10}x_{j,i,2l},\quad i=1,\cdots,10,l=1,\cdots,9$$

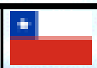
- 目标函数：$\min\sum_{i=1}^{10}\sum_{l=1}^{9}w_{il}$

68

最终赛程

浙江大学
ZheJiang University
数学建模

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
ARG	ECU	PAR	BRA	COL	CHI	BOL	URU	VEN	PER
BOL	URU	ECU	VEN	PAR	COL	ARG	PER	CHI	BRA
BRA	CHI	VEN	ARG	PER	URU	PAR	ECU	COL	BOL
CHI	BRA	PER	COL	URU	ARG	VEN	PAR	BOL	ECU
COL	PER	URU	CHI	ARG	BOL	ECU	VEN	BRA	PAR
ECU	ARG	BOL	URU	VEN	PAR	COL	BRA	PER	CHI
PAR	VEN	ARG	PER	BOL	ECU	BRA	CHI	URU	COL
PER	COL	CHI	PAR	BRA	VEN	URU	BOL	ECU	ARG
URU	BOL	COL	ECU	CHI	BRA	PER	ARG	PAR	VEN
VEN	PAR	BRA	BOL	ECU	PER	CHI	COL	ARG	URU

排名										
积分	41	31	28	27	26	26	24	20	14	12
净胜球	30	12	3	2	1	-1	-6	-3	-22	-16

	2018		
	主主,客客	主客	客主
ARG	0	5	4
BOL	0	5	4
BRA	0	4	5
CHI	0	5	4
COL	0	5	4
ECU	0	4	5
PAR	0	4	5
PER	0	4	5
URU	0	4	5
VEN	0	5	4

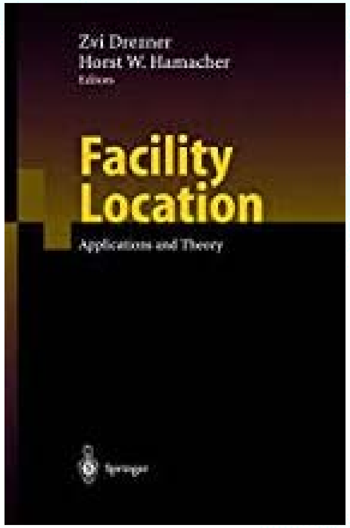
0-1变量

浙江大学 ZheJiang University

数学建模

- 仅当**0-1**变量 $y=1$ 时，n 个**0-1**变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中的任一个才能取值 1
  - $\sum_{j=1}^{n} x_j \le ny$
- n 个**0-1**变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中有且仅有一个取值 1
  - $\sum_{j=1}^{n} x_j = 1$ ，且取值为1的那个变量的足标为 $\sum_{j=1}^{n} jx_j$
- 整变量 $0\le y\le a$ 是否取非零值
  - **0-1**变量 w 满足 $w\le y\le aw$
- 两个整变量 y,z，当 $y>z$ 时，**0-1**变量 $w=1$
  - $w=1 \Leftrightarrow y\ge z+1, w=0 \Leftrightarrow y\le z$
  - $(1+M)W-M\le y-z\le Mw$

设施选址



- 设施选址（**facility location**）
  - 现有 n 个居民小区需提供某项服务，有 m 处地点可用于开设服务点。在地点 i 开设服务点所需开设费用为 $f_i, i=1,\cdots,m$ 。设置在地点 i 的服务点为小区 j 提供服务所需的运营费用为 $c_{ij}, i=1,\cdots,m, j=1,\cdots,n$ 。现需选择若干地点开设服务点，并确定每个服务点的服务对象，使每个小区至少有一个服务点为其提供服务，并且总费用最小
- 问题分析　　　y_i　　　x_{ij}
  - 决策变量：是否开设、服务对象
  - 约束条件：小区全覆盖、先开设再服务

用对、用好、用活**0-1**变量

Zvi, D, Hamacher, HW (eds.), *Facility Location: Applications and Theory*. Springer, 2001.