数学建模

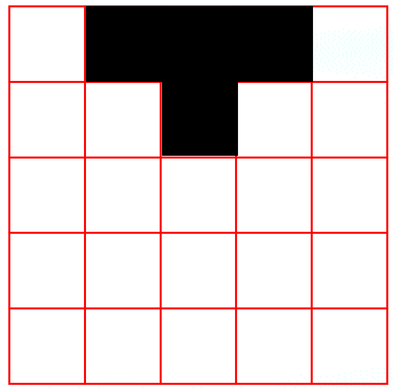
浙江大学数学系　谈之奕

tanzy@zju.edu.cn


浙江大学
ZheJiang University
基本数学模型
关灯游戏

关灯游戏

- 给定一个5×5方格棋盘，棋盘上的每个方格有白色和黑色两种状态
- 点击棋盘上任何一个方格时，这个方格自身及与之相邻的上、下、左、右四个方格（若存在）均改变状态
- 是否可以通过点击棋盘上的若干个方格，使棋盘上所有方格的状态由白色变为黑色



棋盘状态

浙江大学 ZheJiang University

数学建模

- 用0和1分别表示方格的白色和黑色两种状态
- 将棋盘上的**25**个方格依序用整数**1~25**编号
- 棋盘的一种状态可用一**25**维列向量 $\mathbf{c}=\{c_1,\cdots,c_{25}\}^{\mathrm{T}}$ 来表示，其中 $c_i\in\{0,1\}$。所有棋盘状态的全体记为 $\mathcal{C}$
- 所有方格均为白色和均为黑色的状态分别为 $\mathbf{0}$ 和 $\mathbf{1}$

1	**2**	**3**	**4**	**5**
6	**7**	**8**	**9**	**10**
11	**12**	**13**	**14**	**15**
16	**17**	**18**	**19**	**20**
21	**22**	**23**	**24**	**25**

状态变换

- 定义$\mathscr{C}$上的一个变换t，它固定地将某些方格 i 的状态由c_i变为$1-c_i$，其余方格的状态保持不变
- 记 V 为 $\mathscr{C}$ 上所有变换的全体组成的集合
- 定义恒等变换t_0，$t_0(c)=c, c\in\mathscr{C}$
- 对任一棋盘状态重复两次施行同一变换，棋盘状态保持不变，即有 $t(t(c))=c, c\in\mathscr{C}$

域

- 集合 F 称为域（**field**），若有 F 上加法运算 $\oplus$和乘法运算 $\otimes$
  - 加法满足交换律、结合律
  - 存在加法零元素 0，对任意 $a\in F, a\oplus 0=a$
  - 对任意$a\in F$，存在$-a\in F, a\oplus(-a)=0$

  $(F,\oplus)$是交换群

  - 乘法满足交换律、结合律
  - 存在乘法单位元 1，对任意 $a\in F\setminus\{0\}, a\otimes 1=a$
  - 对任意 $a\in F\setminus\{0\}$，存在 $a^{-1}\in F, a\otimes a^{-1}=1$

  $(F\setminus\{0\},\otimes)$是交换群

  - 加法和乘法满足分配律 $a\otimes(b\oplus c)=(a\otimes b)\oplus(a\otimes c)$

有限域

- $\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}$ 关于数的加法和乘法都构成域，常称为数域
- 只含有有限多个元素的域称为有限域
- 二元数域 $F_2=\{0,1\}$

$$
\begin{array}{c|cc}
\oplus & 0 & 1 \\
\hline
0 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 0
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{c|cc}
\otimes & 0 & 1 \\
\hline
0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1
\end{array}
$$

线性空间

- 定义 V上的加法运算

$$(t \oplus s)(c) = t(s(c)), c \in \mathscr{C}, t, s \in V$$

  - 加法满足交换律、结合律
  - t_0为加法零元素，t 的逆元素为 t自身
- 定义F_2 中元素与 V中元素的数乘运算

$$1 \otimes t = t, 0 \otimes t = t_0$$

- V 关于以上定义的加法和数乘运算构成 F_2上的线性空间

基和维数

- 定义 f_i 为只改变方格 i 的状态的变换，即

$$f_i(c_1,\cdots,c_{i-1},c_i,c_{i+1},\cdots,c_{25})^{\mathrm{T}}$$
$$=(c_1,\cdots,c_{i-1},1-c_i,c_{i+1},\cdots,c_{25})^{\mathrm{T}},\ i=1,\cdots,25$$

- $f_i, i=1,\cdots,25$ 线性无关，构成 V 的一组基，$\dim V=25$
- $\sum_{i=1}^{25} f_i$ 可将状态 **0** 变为状态 **1**，但 f_i 不能通过点击棋盘上某一个方格来实现

游戏规则

数学建模

- 记 g_i 为点击方格 i 对应的变换，则

$$g_i = f_i \oplus f_{i-1} \oplus f_{i+1} \oplus f_{i-5} \oplus f_{i+5}, i = 1, \cdots, 25,$$

其中 $f_k = t_0$，若 $k \notin \{1, \cdots, 25\}$

		$i-5$		
	$i-1$	i	$i+1$	
		$i+5$		

- 在同一方格上点击两次（不论是否连续），效果抵消
- 问题转化为求 $x_i \in \{0,1\}, i = 1, \cdots, 25,$

使得 $\sum_{i=1}^{25} g_i x_i = \sum_{i=1}^{25} f_i$

矩阵表示

$$(g_1, g_2, \cdots, g_{25}) = (f_1, f_2, \cdots, f_{25})\mathbf{A}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix}
1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&0&0&0&1&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&0&0&0&1&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0&0&1&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&1&0&0&0&1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&1&0&0&0&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&1&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&0&0&0&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1
\end{pmatrix}$$

		$i-5$		
	$i-1$	i	$i+1$	
		$i+5$		

1	**2**			
6				

分块矩阵

- 令 $\mathbf{H}_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，$\mathbf{I}_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

则 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_5 & \mathbf{I}_5 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_5 & \mathbf{H}_5 & \mathbf{I}_5 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_5 & \mathbf{H}_5 & \mathbf{I}_5 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{H}_5 & \mathbf{I}_5 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_5 & \mathbf{H}_5 \end{pmatrix}$

线性方程组

- 令 $\mathbf{X}=(\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2,\mathbf{X}_3,\mathbf{X}_4,\mathbf{X}_5)^{\mathrm{T}}$，其中

  $$\mathbf{X}_i=(x_{5i-4},x_{5i-3},x_{5i-2},x_{5i-1},x_{5i})^{\mathrm{T}},i=1,2,3,4,5$$

- $$\sum_{i=1}^{25} g_i x_i=\sum_{i=1}^{25} f_i$$

  $$\boxed{(g_1,\cdots,g_{25})=(f_1,\cdots,f_{25})\mathbf{A}}$$

  $$\Leftrightarrow (f_1,\cdots,f_{25})\mathbf{AX}=(g_1,\cdots,g_{25})\mathbf{X}=(f_1,\cdots,f_{25})\mathbf{1}$$

  $$\Leftrightarrow \mathbf{AX}=\mathbf{1}$$

记号约定

- 若不特别说明，加法和数乘均为 F_2 中的运算，加法用 $+$ 表示，矩阵相乘略去 $\otimes$ 号
- 对任意矩阵 $\mathbf{B}$，$\mathbf{B}+\mathbf{B}=\mathbf{0}$，$\mathbf{B}_1-\mathbf{B}_2=\mathbf{B}_1+\mathbf{B}_2$，但矩阵乘法仍不可交换
- 在讨论 5×5 方格棋盘时，略去表示矩阵阶数的下标

初等变换

浙江大学 ZheJiang University

数学建模

$$
\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{I} & \mathbf{H} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{H} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{H} & \mathbf{I} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{H} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathbf{H}\otimes(2)+(1)]{} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{H}^2+\mathbf{I} & \mathbf{H} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{H1}+\mathbf{1} \\ \mathbf{I} & \mathbf{H} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{H} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{H} & \mathbf{I} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{H} & \mathbf{1} \end{pmatrix}
$$

$$
\xrightarrow[(\mathbf{H}^2+\mathbf{I})\otimes(3)+(1)]{} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{H}^3 & \mathbf{H}^2+\mathbf{I} & \mathbf{0} & (\mathbf{H}^2+\mathbf{H})\mathbf{1} \\ \mathbf{I} & \mathbf{H} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{H} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{H} & \mathbf{I} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{H} & \mathbf{1} \end{pmatrix}
$$

$$\boxed{(\mathbf{H}^2+\mathbf{I})\mathbf{H}+\mathbf{H}=\mathbf{H}^3}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &((\mathbf{H}^2+\mathbf{I})\mathbf{1})+(\mathbf{H1}+\mathbf{1}) \\ &=(\mathbf{H}^2+\mathbf{H})\mathbf{1} \end{aligned}}$$

初等变换

浙江大学 ZheJiang University

数学建模

$$
\begin{pmatrix} A & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & H^3 & H^2+I & 0 & (H^2+H)1 \\ I & H & I & 0 & 0 & 1 \\ 0 & I & H & I & 0 & 1 \\ 0 & 0 & I & H & I & 1 \\ 0 & 0 & 0 & I & H & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
\boxed{\begin{aligned} &(H^3H)+(H^2+I) \\ &\quad = H^4+H^2+I \end{aligned}}
$$

$$
\boxed{\begin{aligned} &H^3 1+(H^2+H)1 \\ &\quad = (H^3+H^2+H)1 \end{aligned}}
$$

$$
\xrightarrow[H^3 \otimes (4)+(1)]{} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & H^4+H^2+I & H^3 & (H^3+H^2+H)1 \\ I & H & I & 0 & 0 & 1 \\ 0 & I & H & I & 0 & 1 \\ 0 & 0 & I & H & I & 1 \\ 0 & 0 & 0 & I & H & 1 \end{pmatrix}
$$

初等变换

$$
\begin{pmatrix} A & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & H^4+H^2+I & H^3 & (H^3+H^2+I)1 \\ I & H & I & 0 & 0 & 1 \\ 0 & I & H & I & 0 & 1 \\ 0 & 0 & I & H & I & 1 \\ 0 & 0 & 0 & I & H & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
\boxed{\begin{aligned} &(H^4+H^2+I)H+H^3 \\ &=H^5+H \end{aligned}}
$$

$$
\boxed{\begin{aligned} &(H^4+H^2+I)1 \\ &+(H^3+H^2+H)1 \\ &=(H^4+H^3+H+I)1 \end{aligned}}
$$

$$
\xrightarrow[(H^4+H^2+I)\otimes(5)+(1)]{} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & H^5+H & (H^4+H^3+H+I)1 \\ I & H & I & 0 & 0 & 1 \\ 0 & I & H & I & 0 & 1 \\ 0 & 0 & I & H & I & 1 \\ 0 & 0 & 0 & I & H & 1 \end{pmatrix}
$$

阶梯型矩阵

$$
\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \rightarrow
\begin{pmatrix}
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{P} & \mathbf{M1} \\
\mathbf{I} & \mathbf{H} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\
\mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{H} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{H} & \mathbf{I} & \mathbf{1} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{H} & \mathbf{1}
\end{pmatrix}
\Rightarrow
\begin{cases}
\mathbf{P}\mathbf{X}_5 = \mathbf{M1} \\
\mathbf{X}_1 + \mathbf{H}\mathbf{X}_2 + \mathbf{X}_3 = \mathbf{1} \\
\mathbf{X}_2 + \mathbf{H}\mathbf{X}_3 + \mathbf{X}_4 = \mathbf{1} \\
\mathbf{X}_3 + \mathbf{H}\mathbf{X}_4 + \mathbf{X}_5 = \mathbf{1} \\
\mathbf{X}_4 + \mathbf{H}\mathbf{X}_5 = \mathbf{1}
\end{cases}
\qquad
\mathbf{M1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

$$
\mathbf{P} = \mathbf{H}^5 + \mathbf{H} = \begin{pmatrix}
0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 0
\end{pmatrix}
\qquad
\mathbf{M} = \mathbf{H}^4 + \mathbf{H}^3 + \mathbf{H} + \mathbf{I} = \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
$$

阶梯型矩阵

$$
(\mathbf{P}\quad \mathbf{M1}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{(5)+(2)\\(5)+(3)}]{} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
\xrightarrow[\substack{(3)+(1)\\(3)+(2)}]{} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[(4)+(2)]{} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

特解与通解

数学建模

- 非齐次线性方程组 $\mathbf{PX}_5=\mathbf{M1}$的特解为 $(1,1,0,0,0)^{\mathrm{T}}$
- 齐次线性方程组 $\mathbf{PX}_5=\mathbf{0}$的通解为 $(b,a,a+b,a,b)^{\mathrm{T}}$
- 非齐次线性方程组 $\mathbf{PX}_5=\mathbf{M1}$ 的一切解为

$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\1\end{pmatrix}$$

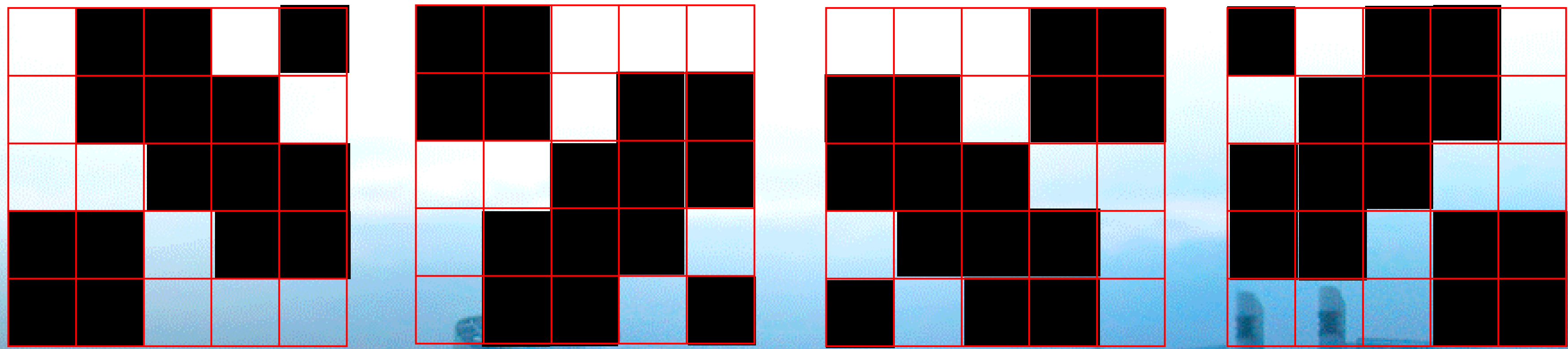
$$(\mathbf{P\ M1})\to\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&1&1&0&1&1\\0&0&1&1&1&0\\1&0&1&1&0&1\end{pmatrix}$$

所有方案

数学建模

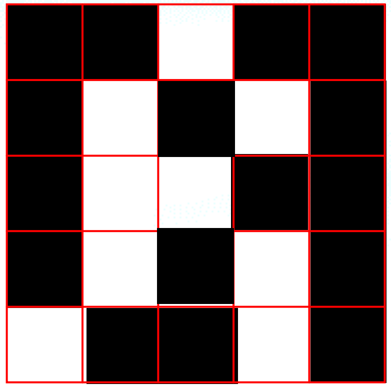
- 将 $\mathbf{X}_5$ 代入可依次求得 $\mathbf{X}_4, \mathbf{X}_3, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_1$，由此可求得 $\mathbf{AX}=\mathbf{1}$ 的一切解
- 无论采用哪种方案均需点击**15**个方格，任一方案均为次数最少的方案

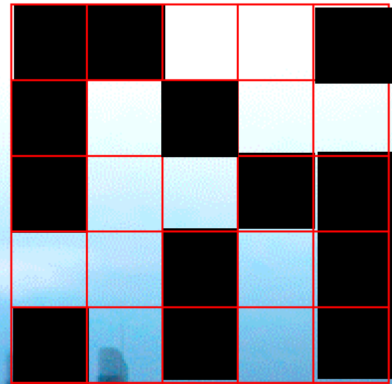
$$\begin{cases} \mathbf{PX}_5 = \mathbf{M1} \\ \mathbf{X}_1 + \mathbf{HX}_2 + \mathbf{X}_3 = \mathbf{1} \\ \mathbf{X}_2 + \mathbf{HX}_3 + \mathbf{X}_4 = \mathbf{1} \\ \mathbf{X}_3 + \mathbf{HX}_4 + \mathbf{X}_5 = \mathbf{1} \\ \mathbf{X}_4 + \mathbf{HX}_5 = \mathbf{1} \end{cases}$$



关灯游戏 V2.0

- 给定一个 5×5 方格棋盘，以及两个棋盘状态 $\mathbf{c}',\mathbf{c}''\in\mathscr{C}$，是否可以通过点击棋盘上的若干个方格，使棋盘状态由 $\mathbf{c}'$ 变为 $\mathbf{c}''$
- 上述问题等价于判断 $\mathbf{AX}=\mathbf{c}'+\mathbf{c}''$ 是否有解
- 是否可以不通过求解线性方程组，而从状态本身直接判断





任意状态转换

- 是否可以通过点击若干个方格实现任意两种棋盘状态之间的转换
- 对任意向量 $\mathbf{b}$，以方阵 $\mathbf{B}$为系数矩阵的线性方程组 $\mathbf{BX}=\mathbf{b}$ 均有解的充要条件是 $\mathbf{B}$可逆
  - （充分性）$\mathbf{X}=\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ 即为 $\mathbf{BX}=\mathbf{b}$ 的一个解
  - （必要性）$\mathbf{e}_1,\cdots,\mathbf{e}_n$ 可被 $\mathbf{B}$ 的列向量组线性表出，$n=\mathrm{rank}(\mathbf{e}_1,\cdots,\mathbf{e}_n)\le\mathrm{rank}(\mathbf{B})\le n$

子空间

浙江大学 ZheJiang University

数学建模

- rank(**A**)=rank(**P**)+20 $= 23 < 25$**,** 通过点击若干方格未必能从一个状态变为另一状态
- $g_1, g_2, \cdots, g_{25}$线性相关
- 记 $W = L(g_1, g_2, \cdots, g_{25})$，则 $\dim W = 23$

$$\boxed{(g_1, \cdots, g_{25}) = (f_1, \cdots, f_{25})\mathbf{A}}$$

$$\mathbf{A} \to \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{P} \\ \mathbf{I} & \mathbf{H} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{H} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{H} & \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{H} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

扩充

- 记 $(g_1,\cdots,g_{23},f_{24},f_{25})=(f_1,\cdots,f_{23},f_{24},f_{25})\mathbf{A}'$

$$\mathbf{A}'=\begin{pmatrix}\mathbf{H}&\mathbf{I}&\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}\\ \mathbf{I}&\mathbf{H}&\mathbf{I}&\mathbf{0}&\mathbf{0}\\ \mathbf{0}&\mathbf{I}&\mathbf{H}&\mathbf{I}&\mathbf{0}\\ \mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{I}&\mathbf{H}&\mathbf{K}\\ \mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{I}&\mathbf{L}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{P}'\\ \mathbf{I}&\mathbf{H}&\mathbf{I}&\mathbf{0}&\mathbf{0}\\ \mathbf{0}&\mathbf{I}&\mathbf{H}&\mathbf{I}&\mathbf{0}\\ \mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{I}&\mathbf{H}&\mathbf{K}\\ \mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{I}&\mathbf{L}\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{L}=\begin{pmatrix}1&1&0&0&0\\1&1&1&0&0\\0&1&1&0&0\\0&0&1&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{K}=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P}'=(\mathbf{H}^4+\mathbf{H}^2+\mathbf{I})\mathbf{L}+\mathbf{H}^3\mathbf{K}=\begin{pmatrix}0&1&1&0&1\\1&1&1&1&0\\1&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\1&0&1&0&0\end{pmatrix}$$

$$|\mathbf{P}'|\neq 0$$

$$|\mathbf{A}'|\neq 0$$

划分

- $g_1,\cdots,g_{23},f_{24},f_{25}$ 线性无关，是 V 的另一组基，$g_1,\cdots,g_{23}$ 是 W 的一组基，$f_{24},f_{25},f_{24}+f_{25}\notin W$
- 定义

$$V_1=W$$
$$V_2=f_{24}+W=\{f_{24}+g\,|\,g\in W\}$$
$$V_3=f_{25}+W=\{f_{25}+g\,|\,g\in W\}$$
$$V_4=f_{24}+f_{25}+W=\{f_{24}+f_{25}+g\,|\,g\in W\}$$

浙江大学 ZheJiang University

数学建模

划分

- V_1, V_2, V_3, V_4 构成 V 的一个划分
  - 对任意 $t \in V$ ，t 属于某个 V_k
  - $V_k \cap V_l = \varnothing, k \neq l$
    - 若 $t \in V_2 \cap V_3$，则存在 g', g''，使得 $t = f_{24} + g' = f_{25} + g''$，从而 $f_{24} + f_{25} = g' + g'' \in W$，矛盾

$$
\boxed{\begin{aligned}
V_1 &= W \\
V_2 &= f_{24} + W \\
V_3 &= f_{25} + W \\
V_4 &= f_{24} + f_{25} + W
\end{aligned}}
$$

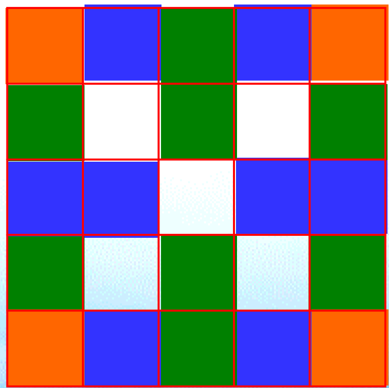
- 两变换之和是否属于 W是 V上的一种等价关系

数学建模

变换分类

- 任一 f_i 必属于某个 V_k，通过四个线性方程组 $\mathbf{AX}=\mathbf{e}_i, \mathbf{AX}=\mathbf{e}_i+\mathbf{e}_{24}, \mathbf{AX}=\mathbf{e}_i+\mathbf{e}_{25}, \mathbf{AX}=\mathbf{e}_i+\mathbf{e}_{24}+\mathbf{e}_{25}$ 解的情况可判断 f_i 属于哪个集合

V_1	V_2	V_3	V_4
7,9,13, 17,19	**2,4,11,12, 14,15,22,24**	**1,5, 21,25**	**3,6,8,10, 16,18,20,23**
仅点击方格	点击方格 + f_{24} 一次	点击方格 + f_{25} 一次	点击方格+ f_{24}, f_{25} 各一次



浙江大学 ZheJiang University
数学建模

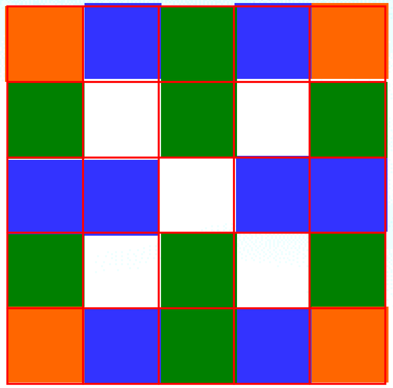
判别准则

- 记 $U=\{f_i \mid c_i' \neq c_i''\}$，通过施行 U 中所有变换可使棋盘状态由 $\mathbf{c}'$ 变为 $\mathbf{c}''$
- 记 $m_k=|U \cap V_k|, k=1,2,3,4$，当且仅当 m_2, m_3, m_4 均为奇数或均为偶数时棋盘状态转变只需点击棋盘方格即可实现

$m_2m_3m_4$	f_{24}	f_{25}
奇奇奇	**1+0+1**	**0+1+1**
奇奇偶	**1+0+0**	**0+1+0**
奇偶奇	**1+0+1**	**0+0+1**
偶奇奇	**0+0+1**	**0+1+1**
奇偶偶	**1+0+0**	**0+0+0**
偶奇偶	**0+0+0**	**0+1+0**
偶偶奇	**0+0+1**	**0+0+1**
偶偶偶	**0+0+0**	**0+0+0**

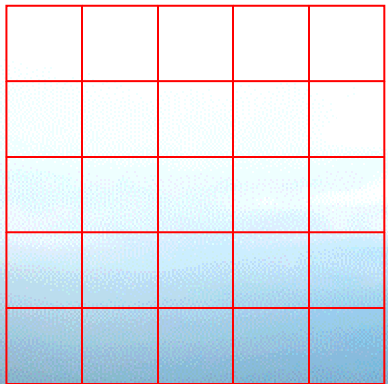
状态分类

- 根据判别准则，可将棋盘状态分为四类。同一类中任何两个状态可通过点击棋盘方格实现转换，不同类中任何两个状态无法仅通过点击棋盘方格实现转换

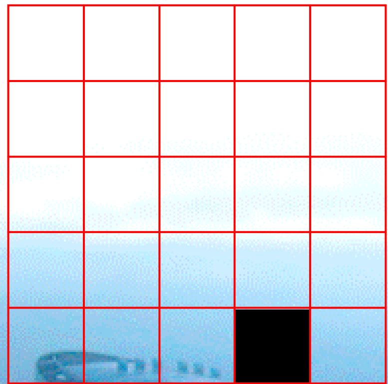


m_4 m_2 m_3

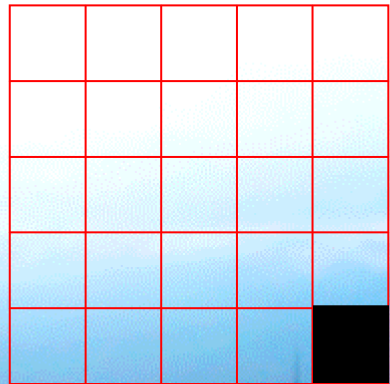
偶偶偶　奇奇奇



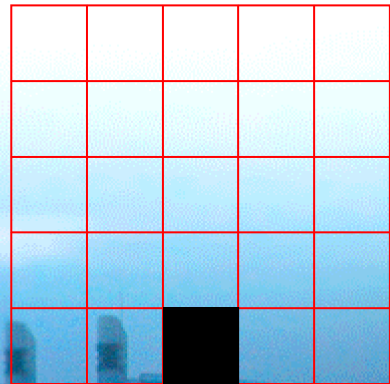
奇偶偶　偶奇奇



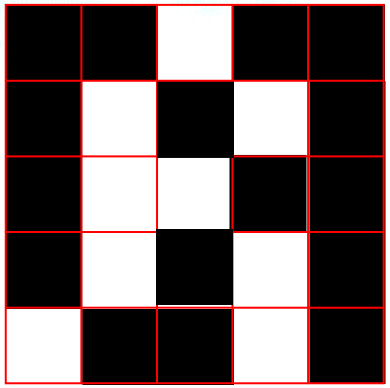
偶奇偶　奇偶奇



偶偶奇　奇奇偶



状态分类

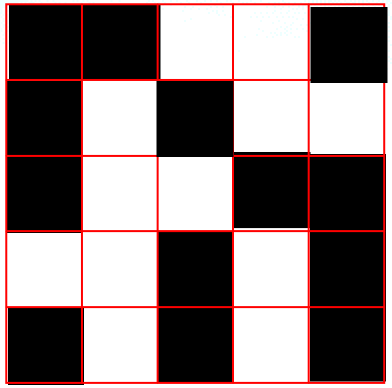


6

3

7

第二类

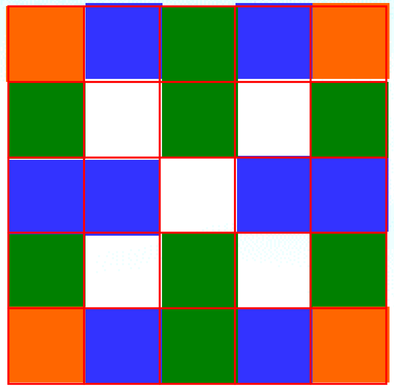


4

4

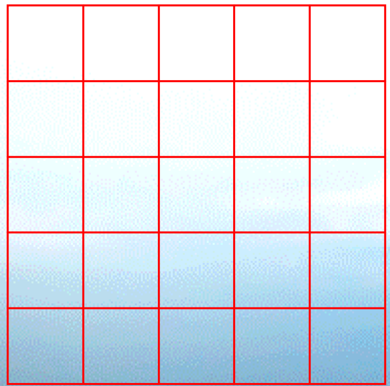
5

第四类

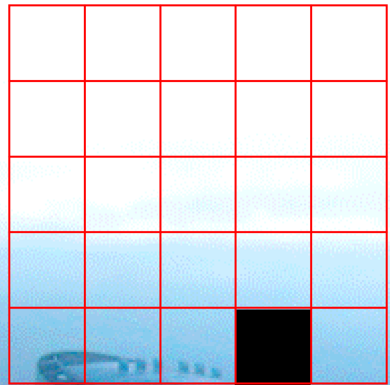


m_4 m_2 m_3

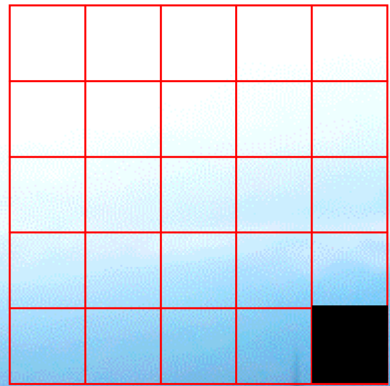
偶偶偶　奇奇奇



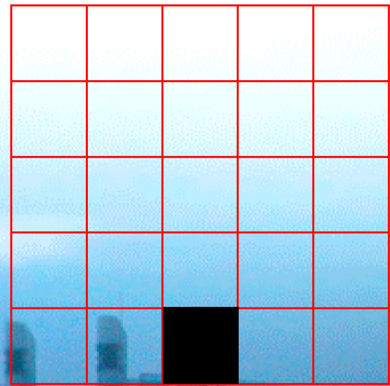
奇偶偶　偶奇奇



偶奇偶　奇偶奇



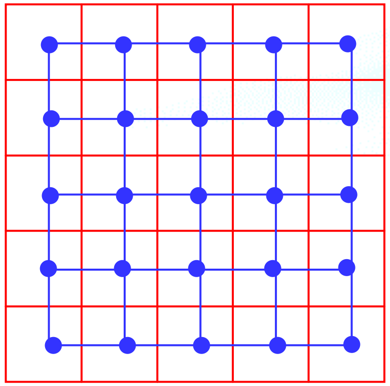
偶偶奇　奇奇偶



关灯游戏 V3.0

数学建模

- 给定无向图 $G=(V,E)$，图中每个顶点有白色和黑色两种状态
- 点击图中任意一个顶点时，这个顶点自身及所有与它邻接的顶点均改变状态
- 是否可以通过点击图中若干个顶点，使图中所有顶点的状态由白色变为黑色



网格图$G_{5,5}$（**grid graph**）

图与矩阵

- 对任意图 G，总存在一种方案，仅通过点击图中若干个顶点，可使图中所有顶点的状态由白色变为黑色
  - 对顶点数用归纳法、分奇偶数讨论、选择点击的顶点集
- 对任一 n 阶对称矩阵 $\mathbf{B}=(b_{ij})$, $\mathbf{b}=(b_{11},b_{22},\cdots,b_{nn})^{\mathrm{T}}$, 线性方程组 $\mathbf{BX}=\mathbf{b}$ 在 F_2 上总有解

定理证明

数学建模

- 反证法 记 β_i为 $\mathbf{B}$ 的第 i个行向量，$i=1,\cdots,m$
  - 由 $\mathbf{BX}=\mathbf{b}$无解，$\text{rank}(\mathbf{B})<\text{rank}(\mathbf{B}\ \ \mathbf{b})$
    - 设 $(\beta_{i_1},b_{i_1i_1}),(\beta_{i_2},b_{i_2i_2}),\cdots,(\beta_{i_k},b_{i_ki_k})$ 是增广矩阵$(\mathbf{B}\ \mathbf{b})$的行向量组的极大线性无关组，则 $\beta_{i_1},\beta_{i_2},\cdots,\beta_{i_k}$ 线性相关
    - 存在 $\mu_1,\cdots,\mu_k\in\{0,1\}$，使得$\mu_1\beta_{i_1}+\mu_2\beta_{i_2}+\cdots+\mu_k\beta_{i_k}=0$，不妨设$\mu_1,\cdots,\mu_l=1,\mu_{l+1},\cdots,\mu_k=0$，则 $\beta_{i_1}+\beta_{i_2}+\cdots+\beta_{i_l}=0$
    - $b_{i_1,i_1}+b_{i_2,i_2}+\cdots+b_{i_l,i_l}=1$，否则 $(\beta_{i_1},b_{i_1i_1}),(\beta_{i_2},b_{i_2i_2}),\cdots,(\beta_{i_l},b_{i_li_l})$ 线性相关

ZheJiang University

数学建模

定理证明

$$\boxed{\beta_{i_1}+\beta_{i_2}+\cdots+\beta_{i_l}=0 \qquad b_{i_1,i_1}+b_{i_2,i_2}+\cdots+b_{i_l,i_l}=1}$$

- 取 $\mathbf{B}$ 的第 $i_1,i_2,\cdots,i_l$ 行，第 $i_1,i_2,\cdots,i_l$ 列组成 l 阶子矩阵 $\mathbf{B}'$
  - $\mathbf{B}'$的行向量线性相关，$\mathbf{B}'$所有元素之和为 0
  - $\mathbf{B}'$为对称矩阵，$\mathbf{B}'$所有元素之和等于其对角线元素之和，即为 $b_{i_1,i_1}+b_{i_2,i_2}+\cdots+b_{i_l,i_l}=1$

矛盾

邻接矩阵

- 令 $a_{ij}=\begin{cases}1 & (v_i,v_j)\in E,\\ 1 & i=j,\\ 0 & \text{其它},\end{cases}$ $\mathbf{A}=(a_{ij})$为 G 的邻接矩阵，$\mathbf{A}$ 对称且主对角元素均为 1
- 通过点击图中顶点使图中所有顶点的状态由白色变为黑色的问题转化为线性方程组 $\mathbf{AX}=\mathbf{1}$的求解问题，运用前述定理即知对任意图相应方案存在


浙江大学
ZheJiang University
谢 谢