

# Prática 4 — Laboratório de Análise de Sistemas Lineares

Bernardo Bresolini\* Ester Queiroz Alvarenga\*

\* Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais,  
Divinópolis - MG (e-mails: [berbresolini14@gmail.com](mailto:berbresolini14@gmail.com) e  
[esterqueirozalvarenga@gmail.com](mailto:esterqueirozalvarenga@gmail.com)).

## Resumo

Na prática 4 da disciplina de Laboratório Análise de Sistemas Lineares foi utilizado duas topologias de controle para se fazer um estudo da sensibilidade do sistema ao ganho proporcional, além de avaliar as características da saída do sistema para a entrada degrau. Ademais, foi feito um comparativo entre o modelo dado e planta real (filtro RC de segunda ordem) constatando-se que o modelo teve performance similar à planta em todos os aspectos analisados.

*Palavras-chaves:* Filtro RC de segunda ordem. Entrada degrau. Sensibilidade. Características de resposta.

## Abstract

In practice 4 of the Linear Systems Analysis Laboratory discipline two control topologies were used to study the sensibility of the system to proportional gain. Besides to evaluating the system output characteristics for degree input. Furthermore, a comparison was made between the given model and the real plant (second-order RC filter) and it was found that the model had similar plant performance in all aspects analyzed.

*Keywords:* Second-order RC filter. Degree input. Sensibility. Response characteristics.

## 1. INTRODUÇÃO

A prática 4 da disciplina de Laboratório de Análise de Sistemas Lineares tem por objetivo estender as ideias de um sistema de controle, incluindo suas principais características. Tais como a sensibilidade, erros de rastreamento, influência de uma perturbação de um sistema realimentado e em malha aberta e as características de respostas transitórias e permanente de um sistema em malha fechada.

Diante disso, o presente relatório destina-se a explanar a atividade requerida aos autores para se atingir o proposto — reconhecer as características de sistemas realimentados. Ademais desta parte este documento ainda é composto por Referencial Teórico, Metodologia, Resultados e Discussões e Conclusão.

## 2. REFERENCIAL TEÓRICO

### 2.1 Características da Resposta

Em sistemas de controle, o objetivo é obter uma resposta desejada. Assim sendo, a resposta transitória — que vai do estado inicial ao estado final — e a resposta em regime permanente são importantes de serem analisadas, para que seja possível ajustá-las caso faça-se necessário.

Se em malha aberta a resposta do sistema não for satisfatória pode-se ajustá-la por meio dos parâmetros da malha de retroação e/ou pela inserção de um controlador, como um ganho proporcional (DORF, 2001).

A resposta do sistema como função do tempo pode ser caracterizada pelos seguintes conceitos:

- *Overshoot (OS)*, que é a ocorrência em porcentagem de um sinal que excede o proposto, calculado por

$$\%OS = 100 \exp\left(-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right) \quad (1)$$

- Tempo de acomodação ( $t_s$ ): tempo gasto para se entrar em regime permanente, dado por

$$t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} \quad \text{para } 2\% \quad (2)$$

- Tempo de subida ( $T_r$ ): tempo para o sistema ir de 0 a 100%

$$T_r = \frac{2,16\zeta + 0,6}{\omega_n} \quad (3)$$

- Erro de estado estacionário ( $e_{ss}$ ):

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow \infty} sE(s) \quad (4)$$

Ainda, para um processo cuja função de transferência seja  $G(s)$  tem-se as constantes de erro:

- Erro de posição

$$k_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) \quad (5)$$

- Erro de velocidade

$$k_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) \quad (6)$$

- Erro de aceleração

$$k_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s) \quad (7)$$

## 2.2 Sensibilidade de Sistemas

Segundo Dorf (2001, p. 141), todo processo está sujeito a mudanças das condições ambientais, envelhecimento, ignorância dos valores exatos dos parâmetros do processo e a outros fatores naturais que afetam um procedimento de controle. Estes erros e alterações provocam modificações na saída dos sistemas em malha aberta ou gera tentativas de correções da saída em um sistema realimentado.

Deste modo, um sistema de controle é sensível a variações de parâmetros, promovendo uma característica de grande importância: a sensibilidade de um sistema. Que é definida pela relação entre a variação percentual da função de transferência do sistema pela relação percentual da função de transferência do processo (ou parâmetro) para pequena mudança incremental (DORF, 2001).

Seja um processo representado pela função de transferência  $G(s)$  e seja  $T(s)$  a função de transferência do sistema. A sensibilidade para variações incrementais pequenas, portanto, é dada por

$$S_G^T = \frac{\partial T}{\partial G} \cdot \frac{G}{T} \quad (8)$$

## 3. METODOLOGIA

Para avaliar as características de um sistema de controle, utilizou-se dos sistemas em malha fechada e em malha aberta mostrados na FIG. 1.

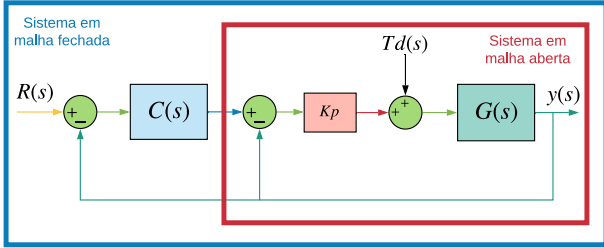


Figura 1. Sistema em malha aberta e realimentado com parâmetro variável

sendo  $G(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 1}$ ,  $C(s) = \frac{2,65(0,25s^2 + 0,5s + 1)}{s(0,25s + 1)}$  e  $k_p = 3$ .

Para a simulação destes sistemas, usa-se o programa *Simulink* do software MATLAB®. Ainda, com fins comparativos, utiliza-se de uma placa eletrônica com filtros passa baixa de primeira ordem até oitava ordem.

As atividades relatadas nesse relatório são divididas em prática 1, 2, 3, 4 e 5, concernentes a ordem de realização das mesmas em sala de aula.

### 3.1 Prática 1

De modo a verificar a sensibilidade de um sistema realimentado e em malha aberta dada a variação de um parâmetro, deve-se considerar os sistemas representados na FIG. 1. Tem de se obter a função sensibilidade em relação ao ganho  $k_p$  para ambos os sistemas.

### 3.2 Prática 2

Considerando ainda os sistemas da FIG. 1 e admitindo  $r(t) = 0,4$  V. Deve-se comparar os resultados da saída

devido as variações de  $k_p$  para 2 e 3,5 em ambos os sistemas.

### 3.3 Prática 3

Utilizando o sistema real (o filtro RC de segunda ordem) como a saída do sistema, deve-se repetir os procedimentos requeridos na prática 2.

### 3.4 Prática 4

Para as repostas obtidas nas duas práticas anteriores, tem de se encontrar suas características (%OS,  $t_s$  e  $t_r$ ) e em regime permanente encontrar as constantes de erro e os valores dos erros de estado estacionário, comparando os resultados obtidos.

### 3.5 Prática 5

Dada uma perturbação degrau de amplitude 0,3 nos sistemas em malha aberta e fechada da FIG. 1, com  $k_p = 3$ . Deve-se calcular sua influência e comparar os resultados em simulação e real.

## 4. RESULTADOS E DISCUSSÕES

### 4.1 Prática 1

#### DISCUTIR RESULTADOS

O sistema em malha aberta da FIG. 1 apresenta com  $T_d(s) = 0$  apresenta a seguinte função de transferência:

$$H_{ma} = \frac{k_p G(s)}{1 + k_p G(s)} \quad (9)$$

substituindo  $G(s)$  em (9) tem-se

$$H_{ma} = \frac{k_p}{s^2 + 2s + (k_p + 1)} \quad (10)$$

A partir de (8) sabe-se que a função de sensibilidade de  $H_{ma}$  em relação ao ganho  $k_p$  é dada por

$$S_{k_p}^{H_{ma}} = \frac{\partial H_{ma}}{\partial k_p} \cdot \frac{k_p}{H_{ma}} \quad (11)$$

Derivando parcialmente (10) em relação a  $k_p$ :

$$\frac{\partial H_{ma}}{\partial k_p} = \frac{s^2 + 2s + 1}{(s^2 + 2s + k_p + 1)^2} \quad (12)$$

Logo,

$$S_{k_p}^{H_{ma}} = \frac{s^2 + 2s + 1}{s^2 + 2s + k_p + 1} \quad (13)$$

O sistema em malha fechada da FIG. 1 com  $T_d(s) = 0$  apresenta a seguinte função transferência

$$H_{mf} = \frac{C(s)H_{ma}(s)}{1 + C(s)H_{ma}} \quad (14)$$

substituindo os valores do sistema analisado, chega-se

$$H_{mf} = \frac{2,65k_p(0,25s^2 + 0,5s + 1)}{s(0,25s + 1)(s^2 + 2s + k_p + 1) + 2,65k_p(0,25s^2 + 0,5s + 1)} \quad (15)$$

Derivando parcialmente (15) em relação a  $k_p$  é obtido

$$\frac{\partial H_{mf}}{\partial k_p} = 1060 \frac{s(s+1)^2(s^3 + 6s^2 + 12s + 16)}{a^2} \quad (16)$$

sendo  $a = 20s^4 + 120s^3 + 180s^2 + 73k_p s^2 + 80s + 186k_p s + 212k_p$ .

Portanto a sensibilidade do sistema em malha fechada em relação ao ganho  $k_p$  é

$$S_{k_p}^{H_{mf}} = \frac{20s(s+1)^2(s+4)}{a} \quad (17)$$

#### 4.2 Prática 2

Considerando o sistema em malha aberta exposto na FIG. 1 com  $T_d(s) = 0$ . Assim sendo, a aplicação de um degrau com amplitude de 0,4 para os valores de  $k_p$  iguais a 2 e 3 são mostrados na FIG. 2(a). Enquanto que para os valores de 3 e 3,5 são expostos na FIG. 2(b).

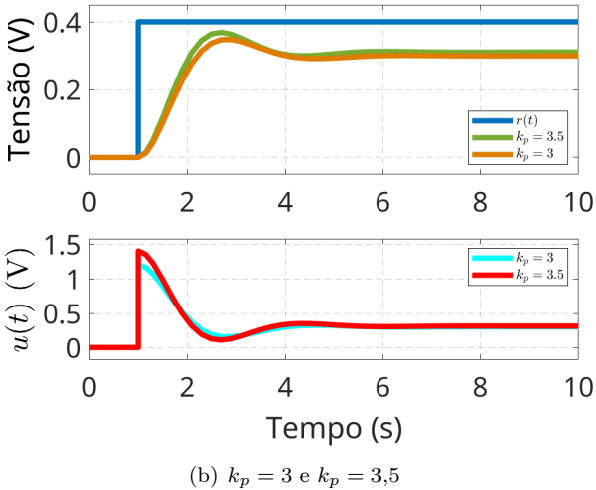
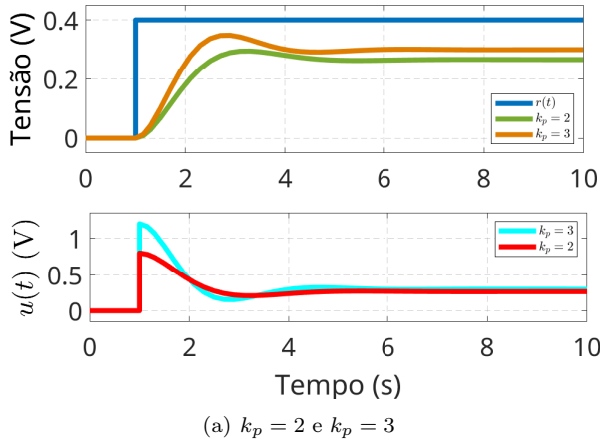


Figura 2. Simulação do sistema em malha aberta

É observável que em nenhum dos casos o erro de regime permanente foi nulo e, inclusive, todos apresentaram características de sistemas de segunda ordem com polos conjugados complexos.

Na FIG. 2(a) comparado-se os valores entre  $k_p = 2$  e  $k_p = 3$ , percebe-se que o primeiro apresentou menor *overshoot*, maior tempo de subida e erro de regime permanente maior,

em comparação com o último. Ademais, energia gasta  $u(t)$  para controlar o sistema também foi menor para  $k_p = 2$ .

Na FIG. 2(b) para o  $k_p = 3,5$  se observa um leve aumento no *overshoot* e menores tempo de subida e erro de estado estacionário, em comparação com  $k_p = 3$ . Entretanto, foi necessário um maior fornecimento de energia ao sistema.

Portanto a análise dos gráficos denota uma tendência de que o valor de  $k_p$  está diretamente relacionado com o *overshoot* e inversamente relacionado com o tempo de subida e o erro de regime permanente. Estas constatações são corroboradas a partir da análise da função de transferência de malha aberta dada por

$$H_{ma} = \frac{k_p}{s^2 + 2s + (k_p + 1)} \quad (18)$$

cujos polos são  $p = -1 \pm 0,5\sqrt{4 - 4(k_p + 1)}$ .

Para  $k_p > 0$  segue-se um sistema com polos conjugados complexos com parte real  $-1$  e parte imaginária dada por  $0,5\sqrt{4 - 4(k_p + 1)}$ . Nota-se que quanto maior  $k_p$ , maior será o valor da parte complexa e, portanto, maior o percentual de *overshoot* e tempo de subida. Entretanto, o erro de estado estacionário para a entrada em degrau equivale à

$$e_{ss} = 0,4 - 0,4 \lim_{s \rightarrow 0^+} H_{ma} = 0,4 - 0,4 \frac{k_p}{k_p + 1} \quad (19)$$

Portanto, a medida que  $k_p$  cresce, menor fica o erro de regime permanente.

Considerando o sistema em malha fechada exposto na FIG. 1 com  $T_d(s) = 0$ . Assim sendo, a aplicação de um degrau com amplitude de 0,4 para os valores de  $k_p$  iguais a 2 e 3 são mostrados na FIG. 3(a). Enquanto que para os valores de 3 e 3,5 são expostos na FIG. 3(b).

A análise dos gráficos indica que o ganho influencia levemente no tempo de subida e no tempo de acomodação, embora seja praticamente indistinguível qual se acomodou mais rápido. Ademais, houve grande diferença na energia fornecida  $u(t)$  ao sistema, sendo esta diretamente relacionada ao ganho.

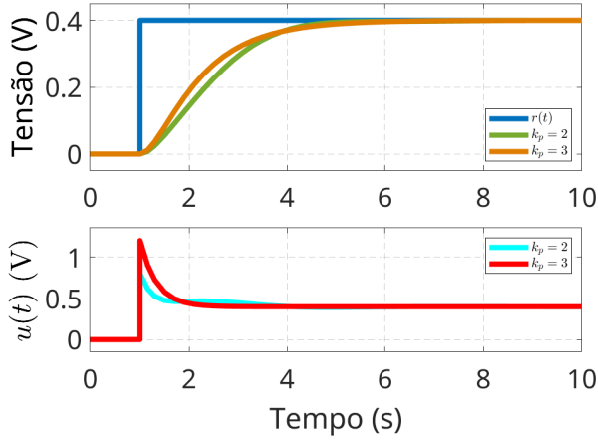
É possível verificar a relação entre o  $k_p$  e o erro de regime permanente da malha fechada para a entrada dada. Fazendo

$$e_{ss} = 0,4 - 0,4 \lim_{s \rightarrow 0^+} H_{mf} = 0,4 - 0,4 \frac{2,65k_p}{2,65k_p} = 0 \quad (20)$$

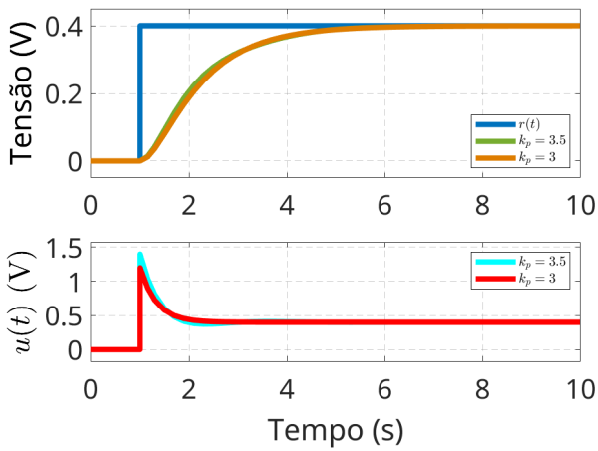
Assim, o erro de regime permanente para a entrada em degrau não varia com o ganho  $k_p$  nem com a amplitude do degrau, como se constatou com as simulações expostas.

Nota-se, a partir das FIG. 2 e 3, grande melhora da resposta em malha fechada se comparada com a resposta em malha aberta. Isso se deve ao sistema de retroação que tenta corrigir a saída e ao controlador de ganho proporcional que compensa o erro gerado pela diferença entre a saída e a entrada.

Ainda vê-se pelas FIG. 3(a) e 3(b), que o  $k_p = 3,5$  acelera a resposta, pois quanto maior o erro maior será o termo proporcional de compensação.



(a)  $k_p = 2$  e  $k_p = 3$



(b)  $k_p = 3$  e  $k_p = 3,5$

Figura 3. Simulação do sistema em malha fechada

#### 4.3 Prática 3

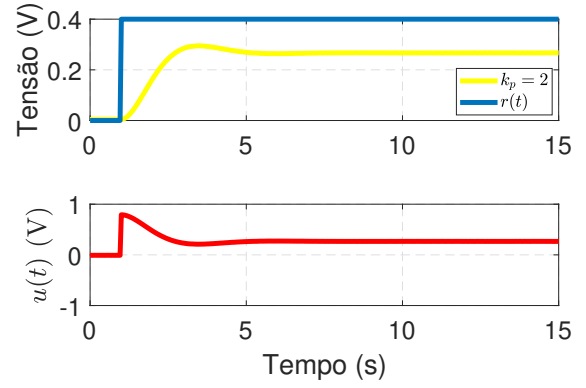
Utilizando agora o filtro real de segunda ordem como  $G(s)$  para os sistemas da FIG. 1, tem-se a resposta para  $k_p = 2, 3$  e  $3,5$  mostradas na FIG. 4.

É perceptível, da mesma forma que para o modelo, que o erro de regime permanente para o sistema em malha aberta não foi nulo. As respostas ainda apresentaram uma oscilação, caracterizando-as como sistemas de segunda ordem com polos com parte imaginária diferente de zero.

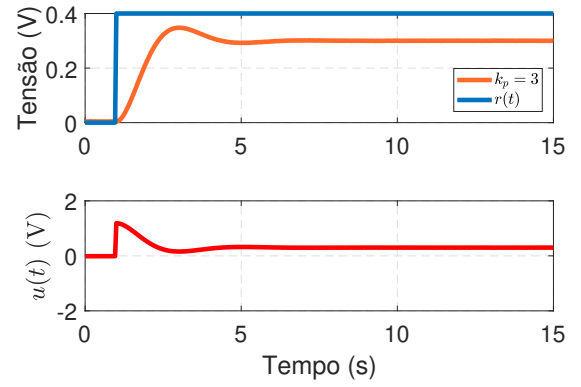
O aumento do ganho proporcional de 2 para 3,5 ocasionou uma diminuição do erro de regime estacionário, porém o erro ainda não foi nulo. Destarte, o modelo tomado para a planta apresenta verosimilhança com a planta real, com resultados semelhantes

Já as repostas do sistema real em malha fechada podem ser vistas na FIG. 5, para  $k_p = 2, 3$  e  $3,5$  assim como solicitado.

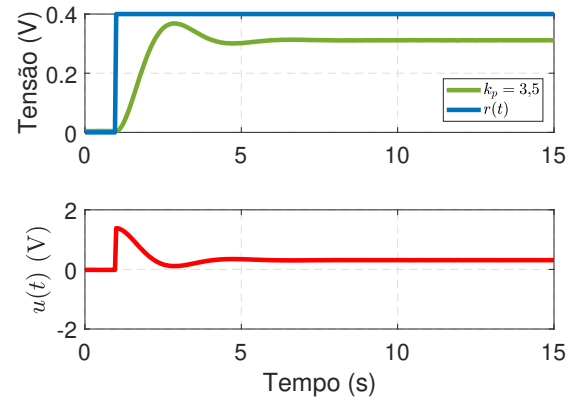
Neste caso, o erro de regime permanente é nulo para todos os valores de  $k_p$  testados. Já no período transitório há variação para  $k_p = 2$ , para o qual nota-se uma pequena sobrepassagem da saída em relação a referência.



(a)  $k_p = 2$



(b)  $k_p = 3$



(c)  $k_p = 3,5$

Figura 4. Simulação do sistema real em malha aberta

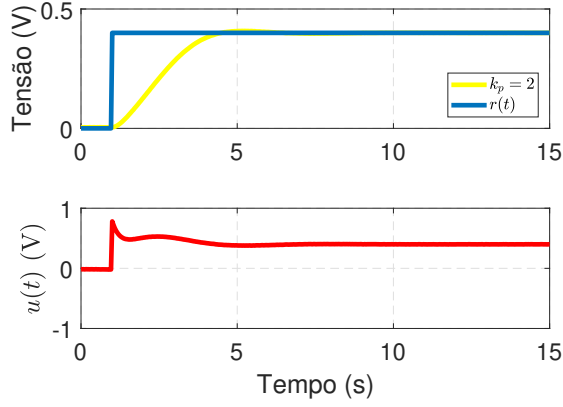
Assim como ocorreu nas respostas do modelo, o sistema real com  $k_p = 3,5$  também apresentou um tempo de acomodação menor que os demais.

#### 4.4 Prática 4

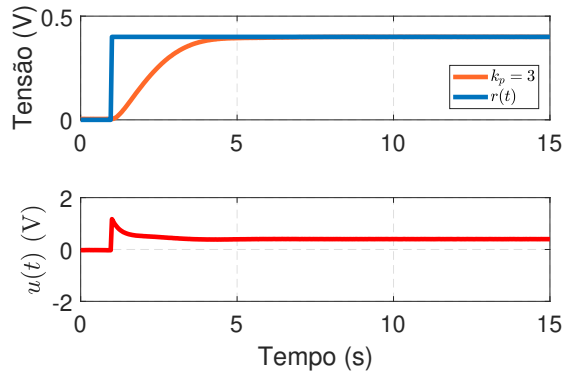
Utilizando a função *stepinfo* do software MATLAB®, obtém-se a maioria das características das respostas para  $k_p = 2, 3$  e  $3,5$ , considerando os sistemas da FIG. 1 — tanto para os modelos quanto para o processo real.

O sistema em malha aberta da FIG. 1 possui erro igual a

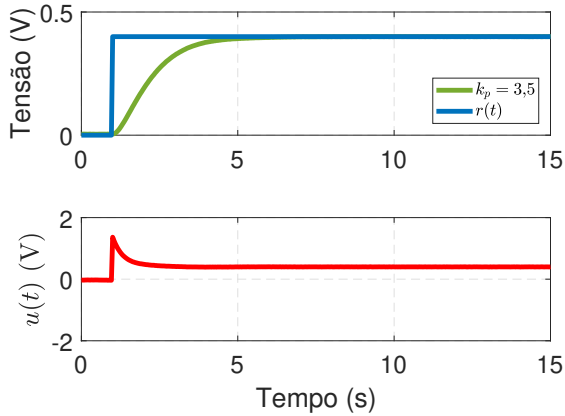
$$E(s)_{H_{ma}} = \frac{1}{1 + k_p G(s)} \cdot R(s) \quad (21)$$



(a)  $k_p = 2$



(b)  $k_p = 3$



(c)  $k_p = 3,5$

Figura 5. Simulação do sistema real em malha fechada

Substituindo  $G(s)$  e  $R(s)$  em (21) tem-se:

$$E(s)_{H_{ma}} = \frac{0,4(s^2 + 2s + 1)}{s(s^2 + 2s + 1 + k_p)} \quad (22)$$

Já o sistema em malha fechada da FIG. 1 tem erro igual a

$$E(s)_{H_{mf}} = \frac{0,4(s^2 + 2s + 1)(0,25s + 1)}{b} \quad (23)$$

sendo  $b = (s^2 + 2s + 1)(0,25s^2 + s) + 2,65k_p(0,25s^2 + 0,5s + 1)$ .

Logo, com (4), (22) e (23) tem-se os erros de regime permanente dos processos. Já as constantes de erro são calculadas pelas equações (5), (6) e (7).

Contudo, para os valores do sistema real, usar-se-á que o erro de estado estacionário é a referência menos o valor da resposta acomodada, ou seja

$$e(t \rightarrow \infty) = 0,4 - y(t \rightarrow \infty) \quad (24)$$

E, uma vez que as constantes  $k_p$ ,  $k_v$  e  $k_a$  são encontradas para as entradas degrau, em rampa e parabólica, respectivamente. Faz sentido somente calcular  $k_p$  para o sistema real com os dados coletados, resolvendo

$$e_{ss} = \frac{A}{1 + k_p} \quad (25)$$

sendo  $e_{ss}$  o erro de regime permanente para a entrada degrau e  $A$  a amplitude do sinal.

As características obtidas a partir da função *stepinfo* e das equações referenciadas nesta seção podem ser vistas nas TAB. 1, 2 e 3 para o sistema em malha aberta e nas TAB. 4, 5 e 6 para o sistema realimentado.

Tabela 1. Características das respostas para  $k_p = 2$  em malha aberta

Características	Modelo	Real
$T_r$ (s)	1,0656	1,1655
$T_s$ (s)	4,4122	4,7752
$OS$ (%)	10,8291	10,3248
Tensão final (V)	0,2667	0,2667
$e_{ss}$	2/15	0,1333
$k_p$	2	2,0008
$k_v$	0	—
$k_a$	0	—

Tabela 2. Características das respostas para  $k_p = 3$  em malha aberta

Características	Modelo	Real
$T_r$ (s)	0,8322	0,9120
$T_s$ (s)	5,0189	5,4296
$OS$ (%)	16,2511	15,8874
Tensão final (V)	0,3	0,3001
$e_{ss}$	0,1	0,0999
$k_p$	3/4	3,0040
$k_v$	0	—
$k_a$	0	—

Tabela 3. Características das respostas para  $k_p = 3,5$  em malha aberta

Características	Modelo	Real
$T_r$ (s)	0,7680	0,8296
$T_s$ (s)	4,9000	5,3216
$OS$ (%)	17,5130	18,3283
Tensão final (V)	0,3111	0,3114
$e_{ss}$	4/45	0,0886
$k_p$	7/9	3,5147
$k_v$	0	—
$k_a$	0	—

Comparando os dados das TAB. 1, 2, 3, 4, 5 e 6, observa-se que o modelo adotado se aproxima fielmente do filtro RC de segunda ordem usado; obtendo comportamentos semelhantes em todos os aspectos coletados. Ademais, verificou-se uma tend

Tabela 4. Características das respostas para  $k_p = 2$  em malha fechada

Características	Modelo	Real
$T_r$ (s)	2,3905	2,2775
$T_s$ (s)	4,8060	5,2632
$OS$ (%)	$2,5536 \times 10^{-04}$	2,0271
Tensão final (V)	0,4	0,4
$e_{ss}$	0	0
$k_p$	1	1
$k_v$	0	—
$k_a$	0	—

Tabela 5. Características das respostas para  $k_p = 3$  em malha fechada

Características	Modelo	Real
$T_r$ (s)	2,4029	2,1727
$T_s$ (s)	5,3285	4,6312
$OS$ (%)	0	0
Tensão final (V)	0,4	0,4
$e_{ss}$	0	0
$k_p$	1	1
$k_v$	0	—
$k_a$	0	—

Tabela 6. Características das respostas para  $k_p = 3,5$  em malha fechada

Características	Modelo	Real
$T_r$ (s)	2,4964	2,2155
$T_s$ (s)	5,2677	4,9840
$OS$ (%)	0	0
Tensão final (V)	0,4	0,4
$e_{ss}$	0	0
$k_p$	1	1
$k_v$	0	—
$k_a$	0	—

#### 4.5 Prática 5

Aplicando um sinal de referência  $r(t) = 0,4$  V na planta real com a topologia em malha aberta da FIG. 1 juntamente com uma perturbação  $t_d(t) = 0,3$  V quando  $t \geq 10$  s se foi obtido o gráfico da FIG. 8

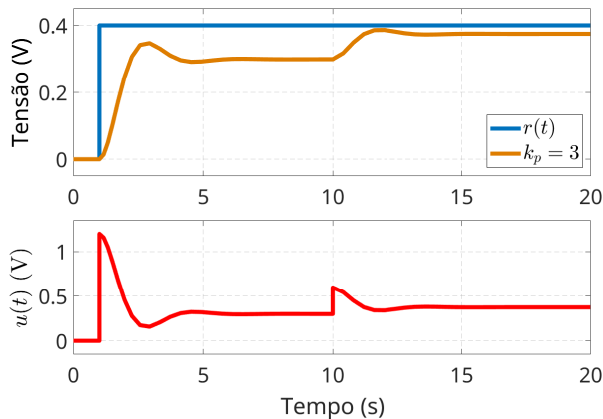


Figura 6. Resposta do sistema em malha aberta dada uma perturbação de 0,3 V e entrada de 0,4 V

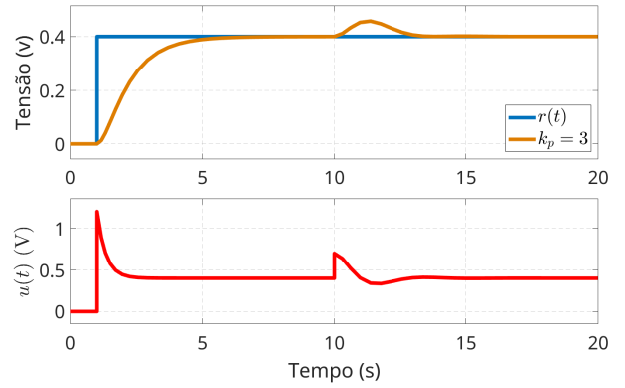


Figura 7. Resposta do sistema em malha fechada dada uma perturbação de 0,3 V e entrada de 0,4 V

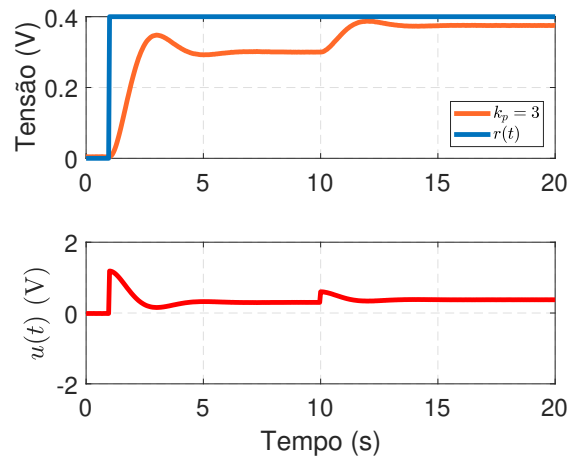


Figura 8. Resultado experimental do filtro RC de segunda ordem em malha aberta com uma perturbação de 0,3 V e entrada de 0,4 V

Como é visto, a perturbação afeta o valor de equilíbrio do sistema, passando-o para um valor superior ao quando acomodado apenas com a entrada. Este comportamento é típico de malha aberta, coincidindo com o pressuposto pela topologia em malha aberta empregada.

Aplicando os mesmos valores de  $r(t)$  e  $t_d(t)$  na planta real com a topologia em malha fechada na FIG. 1, é obtido o gráfico da FIG. 9

É visto no gráfico que a perturbação dada apenas afeta a resposta do sistema por um breve período de tempo, obtendo-se ainda erro de estado estacionário nulo para a entrada em degrau. Este comportamento é característico de topologias em malha fechada com integrador.

## 5. CONCLUSÃO

Foi verificado que o modelo e planta apresentam sensibilidade similares ao ganho  $k_p$  empregado nas topologias em malha aberta e malha fechada. Percebeu-se que, em malha aberta o ganho era relacionado diretamente com o overshoot e o tempo de subida, enquanto que inversamente relacionado com o erro de regime permanente para a entrada em degrau. Para a malha fechada, o  $e_{ss}$  não dependeu do valor de  $k_p$  e o sistema se tornou superamortecido, com pouca variação ao ganho proporcional.

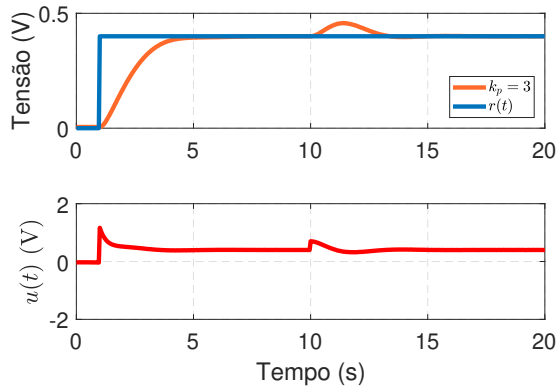


Figura 9. Resultado experimental do filtro RC de segunda ordem em malha fechada com uma perturbação de 0,3 V e entrada de 0,4 V

Com as atividades desenvolvidas, foi possível perceber que o modelo  $G(s)$  dado representa fidedignamente as características do filtro RC de segunda ordem. Uma vez que a sensibilidade ao ganho  $k_p$ , o erro de regime permanente, o *overshoot* (quando houve) do modelo e da planta, nas duas topologias usadas, apresentaram resultados próximos.

Contudo, ressalta-se o abuso da notação “malha aberta” empregada ao longo do relatório. Isto ocorreu devido ao seu uso nas instruções dadas e foram adotadas para facilitar ao interlocutor a explanação das práticas. Sendo assim, vale notar que um sistema em malha aberta não contém qualquer tipo de realimentação.

Ademais, a prática exerceu conhecimentos usados em sala e serviu para o reforço do conteúdo de Análise de Sistemas Lineares ministrado, sendo, deste modo, recomendável nas matérias subsequentes.

## 6. REFERÊNCIAS

DORF, R. C.; BISHOP, R. H. (2001). Sistemas de Controle Modernos. 8<sup>a</sup>. Ed, LTC, Rio de Janeiro.