

# Realização Física da Compensação

M. M. Quadros & V. J. S. Leite

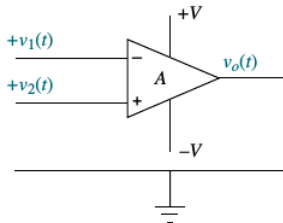
Teoria de Controle  
Engenharia Mecatrônica — CEFET/MG

10 de março de 2020

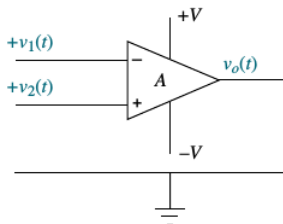
- Amplificadores Operacionais
- Realização de Circuito Ativo
- Realização de Circuito Passivo
- Exemplos

# Amplificadores Operacionais

- Entrada diferencial  $\rightarrow v_2(t) - v_1(t)$
- Alta impedância de entrada  $\rightarrow Z_i = \infty$  (ideal)
- Baixa impedância de saída  $\rightarrow Z_o = 0$  (ideal)
- Alta constante de ganho de amplificação  $\rightarrow A = \infty$  (ideal)



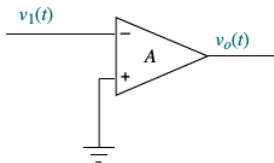
- Saída  $v_o(t) = A(v_2(t) - v_1(t))$



# Amplificadores Operacionais

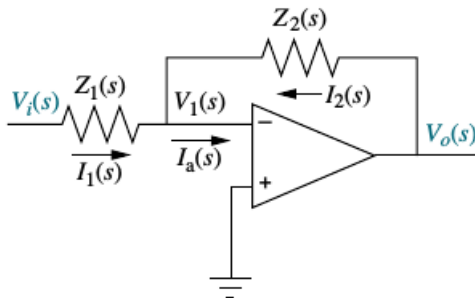
## Amplificador Operacional Inversor

- $v_2(t) \rightarrow$  aterrado
- $v_o(t) = -Av_1(t)$



# Amplificadores Operacionais

## Amplificador Operacional Inversor



# Amplificadores Operacionais

## Amplificador Operacional Inversor

- Se a impedância de entrada do amplificador é alta:

- $I_a(s) = 0$
- $I_1(s) = -I_2(s)$

- $A$  grande:

- $v_1(t) \approx 0$
- $I_1(s) = V_i(s)/Z_1(s)$
- $-I_2(s) = -V_o(s)/Z_2(s)$

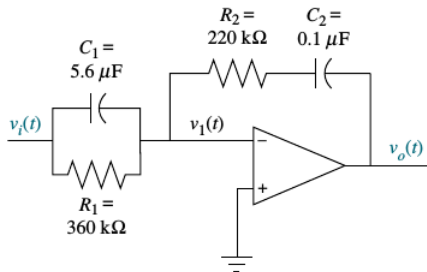
$$\frac{V_o(s)}{Z_2(s)} = -\frac{V_i(s)}{Z_1(s)} \quad (1)$$

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = -\frac{Z_2(s)}{Z_1(s)} \quad (2)$$

# Amplificadores Operacionais

## Amplificador Operacional Inversor - Exemplo

- Função de transferência  $V_o(s)/V_i(s)$





# Amplificadores Operacionais

## Amplificador Operacional Inversor - Exemplo

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = -\frac{Z_2}{Z_1} \quad (3)$$

$$Z_1(s) = \frac{R_1 \frac{1}{C_1 s}}{\frac{1}{C_1 s} + R_1} = \frac{R_1}{1 + R_1 C_1 s} \quad (4)$$

$$Z_2(s) = R_2 + \frac{1}{C_2 s} = \frac{C_2 R_2 s + 1}{C_2 s} \quad (5)$$

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = -\frac{C_2 R_2 s + 1}{C_2 s} \frac{R_1 C_1 s + 1}{R_1} = -\frac{C_2 R_2 R_1 C_1 s^2 + (C_2 R_2 + R_1 C_1)s + 1}{R_1 C_2 s} \quad (6)$$

# Amplificadores Operacionais

## Amplificador Operacional Inversor - Exemplo

- $C_1 = 5,6\mu F$ ,  $R_1 = 360k\Omega$
- $C_2 = 0,1\mu F$ ,  $R_2 = 220k\Omega$

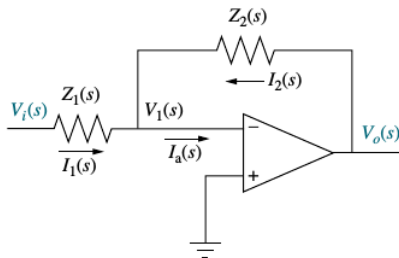
$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = -1,232 \frac{s^2 + 45,950s + 22,547}{s} \quad (7)$$

- Controlador PID







# Realização de Circuito Ativo

- Bloco de construção para implementar controladores

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = -\frac{Z_2(s)}{Z_1(s)} \quad (8)$$



# Realização de Circuito Ativo

Function	$Z_1(s)$	$Z_2(s)$	$G_c(s) = -\frac{Z_2(s)}{Z_1(s)}$
Gain			$-\frac{R_2}{R_1}$
Integration			$-\frac{1}{RCs}$
Differentiation			$-RCs$

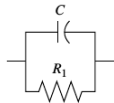
# Realização de Circuito Ativo

PI controller



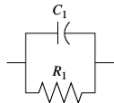
$$-\frac{R_2}{R_1} \left( s + \frac{1}{R_2 C} \right)$$

PD controller



$$-R_2 C \left( s + \frac{1}{R_1 C} \right)$$

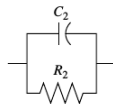
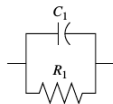
PID controller



$$-\left[ \left( \frac{R_2}{R_1} + \frac{C_1}{C_2} \right) + R_2 C_1 s + \frac{1}{s} \right]$$

# Realização de Circuito Ativo

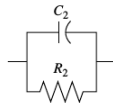
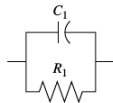
Lag compensation



$$-\frac{C_1}{C_2} \frac{\left(s + \frac{1}{R_1 C_1}\right)}{\left(s + \frac{1}{R_2 C_2}\right)}$$

where  $R_2 C_2 > R_1 C_1$

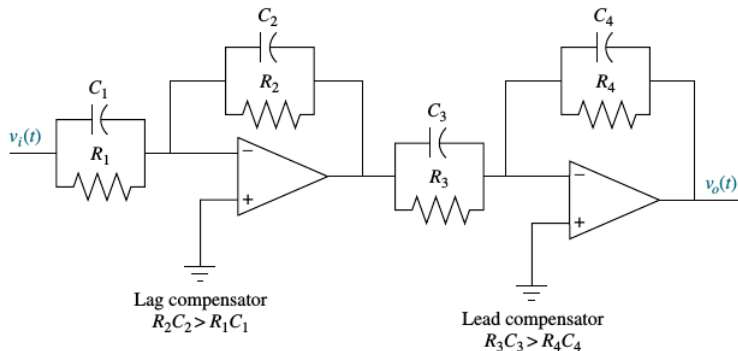
Lead compensation



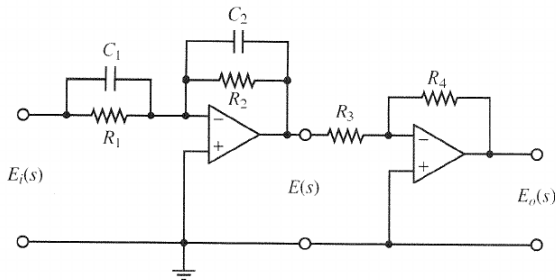
$$-\frac{C_1}{C_2} \frac{\left(s + \frac{1}{R_1 C_1}\right)}{\left(s + \frac{1}{R_2 C_2}\right)}$$

where  $R_1 C_1 > R_2 C_2$

# Realização de Circuito Ativo



# Realização de Circuito Ativo - Compensador de avanço/atraso de fase





# Realização de Circuito Ativo - Compensador de avanço/atraso de fase

$$Z_1 = \frac{R_1}{R_1 C_1 s + 1}, \quad Z_2 = \frac{R_2}{R_2 C_2 s + 1} \quad (9)$$

$$\frac{E(s)}{E_i(s)} = -\frac{Z_2}{Z_1} = -\frac{R_2}{R_1} \frac{R_1 C_1 s + 1}{R_2 C_2 s + 1} = -\frac{C_1}{C_2} \frac{s + \frac{1}{R_1 C_1}}{s + \frac{1}{R_2 C_2}} \quad (10)$$

$$\frac{E_o(s)}{E(s)} = -\frac{R_4}{R_3} \quad (11)$$

# Realização de Circuito Ativo - Compensador de avanço/atraso de fase

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{R_2 R_4}{R_1 R_3} \frac{R_1 C_1 s + 1}{R_2 C_2 s + 1} = \frac{R_4 C_1}{R_3 C_2} \frac{s + \frac{1}{R_1 C_1}}{s + \frac{1}{R_2 C_2}} \quad (12)$$

$$= K_c \alpha \frac{T s + 1}{\alpha T s + 1} = K_c \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\alpha T}} \quad (13)$$

$$T = R_1 C_1, \quad \alpha T = R_2 C_2, \quad K_c = \frac{R_4 C_1}{R_3 C_2} \quad (14)$$

$$K_c \alpha = \frac{R_4 C_1}{R_3 C_2} \frac{R_2 C_2}{R_1 C_1} = \frac{R_2 R_4}{R_1 R_3}, \quad \alpha = \frac{R_2 C_2}{R_1 C_1} \quad (15)$$

- Avanço: se  $R_1 C_1 > R_2 C_2$  ou  $0 < \alpha < 1$
- Atraso: se  $R_1 C_1 < R_2 C_2$

# Realização de Circuito Ativo - Compensador de avanço/atraso de fase

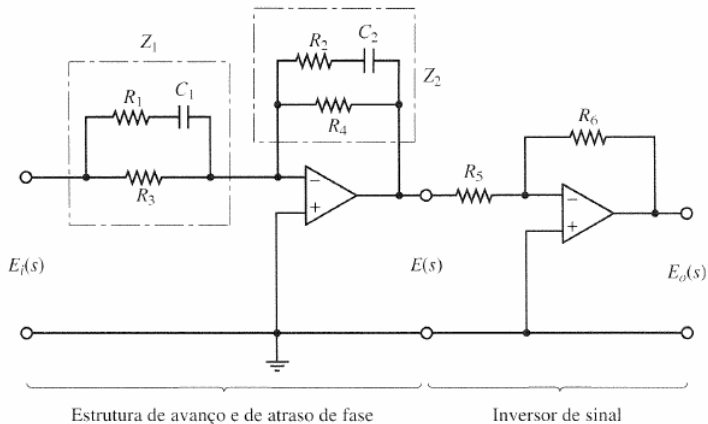
$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{R_2 R_4}{R_1 R_3} \frac{R_1 C_1 s + 1}{R_2 C_2 s + 1} = \frac{R_4 C_1}{R_3 C_2} \frac{s + \frac{1}{R_1 C_1}}{s + \frac{1}{R_2 C_2}} \quad (16)$$

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \hat{K}_c \beta \frac{Ts + 1}{\beta Ts + 1} = \hat{K}_c \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\beta T}} \quad (17)$$

$$T = R_1 C_1, \quad \beta T = R_2 C_2, \quad \beta = \frac{R_2 C_2}{R_1 C_1} > 1, \quad \hat{K}_c = \frac{R_4 C_1}{R_3 C_2} \quad (18)$$

- Atraso: se  $R_1 C_1 < R_2 C_2$

# Realização de Circuito Ativo - Compensador atraso e avanço de fase



# Realização de Circuito Ativo - Compensador atraso e avanço de fase

$$Z_1 = \frac{\left(R_1 + \frac{1}{C_1 s}\right) R_3}{\left(R_1 + \frac{1}{C_1 s}\right) + R_3} = \frac{R_3(C_1 R_1 s + 1)}{C_1 s(R_1 + R_3) + 1} \quad (19)$$

$$Z_2 = \frac{R_4(C_2 R_2 s + 1)}{C_2 s(R_2 R_4) + 1} \quad (20)$$

$$\frac{E(s)}{E_i(s)} = -\frac{Z_2}{Z_1} = -\frac{R_4(C_2 R_2 s + 1)}{C_2 s(R_2 + R_4) + 1} \frac{C_1 s(R_1 + R_3) + 1}{R_3(C_1 R_1 s + 1)} \quad (21)$$

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \left(-\frac{R_6}{R_5}\right) \left(-\frac{R_4}{R_3}\right) \left[\frac{C_1 s(R_1 + R_3) + 1}{C_1 R_1 s + 1}\right] \left[\frac{C_2 R_2 s + 1}{C_2 s(R_2 + R_4) + 1}\right] \quad (22)$$

# Realização de Circuito Ativo - Compensador atraso e avanço de fase

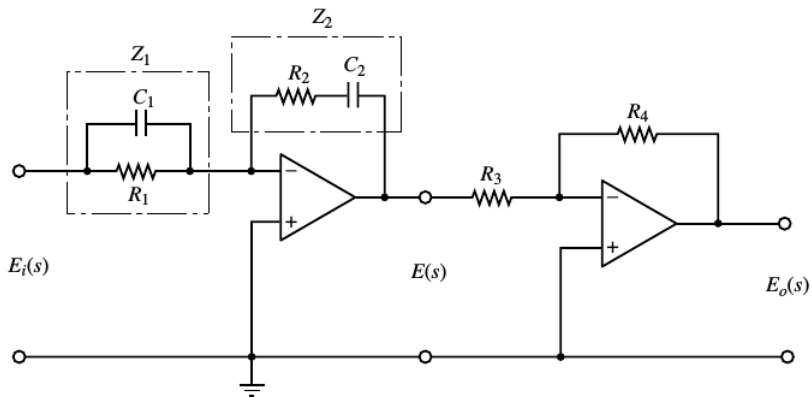
$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \left(-\frac{R_6}{R_5}\right) \left(-\frac{R_4}{R_3}\right) \left[\frac{C_1 s(R_1 + R_3) + 1}{C_1 R_1 s + 1}\right] \left[\frac{C_2 R_2 s + 1}{C_2 s(R_2 + R_4) + 1}\right] \quad (23)$$

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = K_c \frac{\left(s + \frac{1}{T_1}\right) \left(s + \frac{1}{T_2}\right)}{\left(s + \frac{\gamma}{T_1}\right) \left(s + \frac{1}{\beta T_2}\right)} \quad (24)$$

$$T_1 = (R_1 + R_3)C_1, \quad \frac{T_1}{\gamma} = R_1 C_1, \quad T_2 = R_2 C_2, \quad \beta T_2 = (R_2 + R_4)C_2 \quad (25)$$

$$K_c = \frac{R_2 R_4 R_6}{R_1 R_3 R_5} \frac{R_1 + R_3}{R_2 + R_4} \quad (26)$$

# Realização de Circuito Ativo - PID



$$\frac{E(s)}{E_i(s)} = -\frac{Z_2}{Z_1} \quad (27)$$

$$Z_1 = \frac{R_1}{R_1 C_1 s + 1}, \quad Z_2 = \frac{R_2 C_2 s + 1}{C_2 s} \quad (28)$$

$$\frac{E(s)}{E_i(s)} = -\left(\frac{R_2 C_2 s + 1}{C_2 s}\right) \left(\frac{R_1 C_1 s + 1}{R_1}\right) \quad (29)$$

$$= -\frac{R_2 C_2 R_1 C_1 s^2 + (R_2 C_2 + R_1 C_1)s + 1}{R_1 C_2 s} \quad (30)$$

$$= -\frac{R_2 C_2 + R_1 C_1}{R_1 C_2} \left(1 + \frac{R_1 C_1 R_2 C_2}{R_1 C_1 + R_2 C_2} s + \frac{1}{(R_2 C_2 + R_1 C_1)s}\right) \quad (31)$$



$$\frac{E_o(s)}{E(s)} = -\frac{R_4}{R_3} \quad (32)$$

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{E_o(s)}{E(s)} \frac{E(s)}{E_i(s)} \quad (33)$$

$$= \frac{R_4(R_1 C_1 + R_2 C_2)}{R_3 R_1 C_2} \left[ 1 + \frac{1}{(R_1 C_1 + R_2 C_2)s} + \frac{R_1 C_1 R_2 C_2}{R_1 C_1 + R_2 C_2} s \right] \quad (34)$$

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{R_4(R_1 C_1 + R_2 C_2)}{R_3 R_1 C_2} \left[ 1 + \frac{1}{(R_1 C_1 + R_2 C_2)s} + \frac{R_1 C_1 R_2 C_2}{R_1 C_1 + R_2 C_2} s \right] \quad (35)$$

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = K_p \left( 1 + \frac{T_i}{s} + T_d s \right) \quad (36)$$

$$K_p = \frac{R_4(R_1 C_1 + R_2 C_2)}{R_3 R_1 C_2} \quad (37)$$

$$T_i = \frac{1}{R_1 C_1 + R_2 C_2} \quad (38)$$

$$T_d = \frac{R_1 C_1 R_2 C_2}{R_1 C_1 + R_2 C_2} \quad (39)$$

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{R_4(R_1 C_1 + R_2 C_2)}{R_3 R_1 C_2} \left[ 1 + \frac{1}{(R_1 C_1 + R_2 C_2)s} + \frac{R_1 C_1 R_2 C_2}{R_1 C_1 + R_2 C_2} s \right] \quad (40)$$

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s \quad (41)$$

$$K_p = \frac{R_4(R_1 C_1 + R_2 C_2)}{R_3 R_1 C_2} \quad (42)$$

$$K_i = \frac{R_4}{R_3 R_1 C_2} \quad (43)$$

$$K_d = \frac{R_4 R_2 C_1}{R_3} \quad (44)$$

- Controlador PID

$$G_c(s) = \frac{(s + 55,92)(s + 0,5)}{s} \quad (45)$$

$$G_c(s) = s + 56,42 + \frac{27,96}{s} \quad (46)$$

- Controlador PID

$$G_c(s) = \frac{(s + 55,92)(s + 0,5)}{s} \quad (47)$$

$$G_c(s) = s + 56,42 + \frac{27,96}{s} \quad (48)$$

$$K_p = \frac{R_4(R_1 C_1 + R_2 C_2)}{R_3 R_1 C_2} = 56,42 \quad (49)$$

$$K_i = \frac{R_4}{R_3 R_1 C_2} = 27,96 \quad (50)$$

$$K_d = \frac{R_4 R_2 C_1}{R_3} = 1 \quad (51)$$

# Realização de Circuito Ativo - Exemplo

- Escolha arbitrária de um valor prático para um dos componentes
- $C_2 = 0,1\mu F \Rightarrow R_1 = 357,65k\Omega, R_2 = 178,891k\Omega, C_1 = 5,59\mu F$

$$G_c(s) = 1,2287 \frac{s + 1,9432}{s + 4,6458} \quad (52)$$

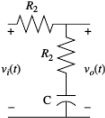
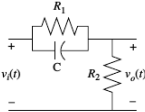
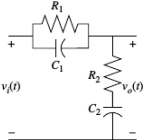
$$G_c(s) = 0,9 \frac{s + 1}{s + 3} \quad (53)$$



$$G_c(s) = 9,656 \frac{20s + 1}{200s + 1} \quad (54)$$

$$G_c(s) = \frac{10(2s + 1)(5s + 1)}{(0,1992s + 1)(80,19s + 1)} \quad (55)$$

# Realização de Circuito Passivo

Function	Network	Transfer function, $\frac{V_o(s)}{V_i(s)}$
Lag compensation		$\frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{s + \frac{1}{R_2 C}}{s + \frac{1}{(R_1 + R_2)C}}$
Lead compensation		$\frac{s + \frac{1}{R_1 C}}{s + \frac{1}{R_1 C} + \frac{1}{R_2 C}}$
Lag-lead compensation		$\frac{\left(s + \frac{1}{R_1 C_1}\right) \left(s + \frac{1}{R_2 C_2}\right)}{s^2 + \left(\frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_2 C_2} + \frac{1}{R_2 C_1}\right) s + \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}}$

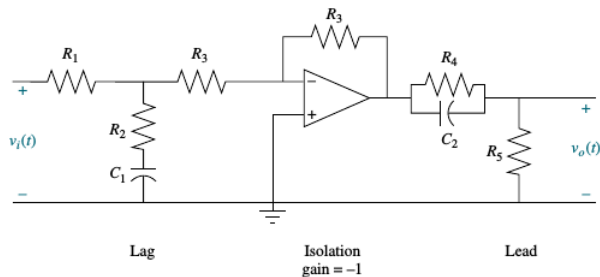
- Função de transferência de avanço e atraso de fase

$$G_c(s) = \frac{\left(s + \frac{1}{T_1}\right) \left(s + \frac{1}{T_2}\right)}{\left(s + \frac{1}{\alpha T_1}\right) \left(s + \frac{\alpha}{T_2}\right)} \quad (56)$$

com  $\alpha < 1$

- Restrição  $\rightarrow$  razão entre o zero do compensador de avanço de fase e o polo, deve ser igual à razão entre o polo do compensador de atraso de fase e o zero

# Realização de Circuito Passivo



- Avanço de Fase

$$G_c(s) = \frac{s + 4}{s + 20,09} \quad (57)$$

- Avanço de Fase

$$G_c(s) = \frac{s + 4}{s + 20,09} \quad (58)$$

$$\frac{1}{R_1 C} = 4 \quad (59)$$

$$\frac{1}{R_1 C} + \frac{1}{R_2 C} = 20,09 \quad (60)$$

$$R_1 C = 0,25, \quad R_2 C = 0,0622 \quad (61)$$

$$C = 1\mu F \Rightarrow R_1 = 250k\Omega, \quad R_2 = 62,2k\Omega \quad (62)$$

$$C = 100\mu F \Rightarrow R_1 = 2,5k\Omega, \quad R_2 = 622\Omega \quad (63)$$

$$C = 10\mu F \Rightarrow R_1 = 25k\Omega, \quad R_2 = 6,22k\Omega \quad (64)$$

- Realização ou implementação de uma função de transferência arbitrária de ordem  $N$
- A função de transferência mais genérica com  $M = N$  é dada por

$$H(s) = \frac{b_0 s^N + b_1 s^{N-1} + \dots + b_{N-1} s + b_N}{s^N + a_1 s^{N-1} + \dots + a_{N-1} s + a_N} \quad (65)$$

- Não há uma forma única de realizar um sistema
- $H(s)$  implementada com integradores, diferenciadores, somadores e multiplicadores



# Realização de Sistemas

## Realização na Forma Direta I

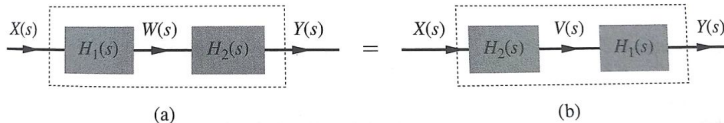
$$H(s) = \frac{b_0s^3 + b_1s^2 + b_2s + b_3}{s^3 + a_1s^2 + a_2s + a_3} = \frac{b_0 + \frac{b_1}{s} + \frac{b_2}{s^2} + \frac{b_3}{s^3}}{1 + \frac{a_1}{s} + \frac{a_2}{s^2} + \frac{a_3}{s^3}} \quad (66)$$

$$H(s) = \underbrace{\left( b_0 + \frac{b_1}{s} + \frac{b_2}{s^2} + \frac{b_3}{s^3} \right)}_{H_1(s)} \underbrace{\left( \frac{1}{1 + \frac{a_1}{s} + \frac{a_2}{s^2} + \frac{a_3}{s^3}} \right)}_{H_2(s)} \quad (67)$$

- $H(s) \rightarrow$  cascata de  $H_1(s)$  e  $H_2(s)$
- Saída de  $H_1(s) \rightarrow W(s)$
- $H(s) \rightarrow$  cascata de  $H_2(s)$  e  $H_1(s)$
- Saída de  $H_2(s) \rightarrow V(s)$

# Realização de Sistemas

## Realização na Forma Direta I



# Realização de Sistemas

## Realização na Forma Direta I

- $W(s) = H_1(s)X(s)$

$$W(s) = \left( b_0 + \frac{b_1}{s} + \frac{b_2}{s^2} + \frac{b_3}{s^3} \right) X(s) \quad (68)$$

- $Y(s) = W(s)H_2(s)$

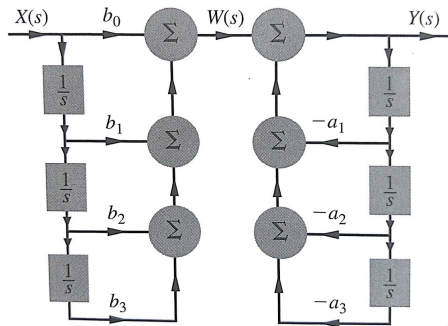
$$Y(s) = W(s) \left( \frac{1}{1 + \frac{a_1}{s} + \frac{a_2}{s^2} + \frac{a_3}{s^3}} \right) \quad (69)$$

$$W(s) = \left( 1 + \frac{a_1}{s} + \frac{a_2}{s^2} + \frac{a_3}{s^3} \right) Y(s) \quad (70)$$

$$Y(s) = W(s) - \left( \frac{a_1}{s} + \frac{a_2}{s^2} + \frac{a_3}{s^3} \right) Y(s) \quad (71)$$

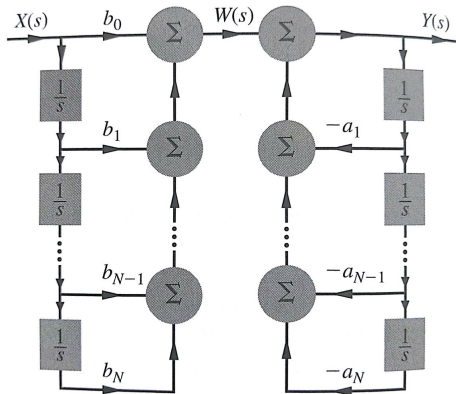
# Realização de Sistemas

## Realização na Forma Direta I



# Realização de Sistemas

## Realização na Forma Direta I



# Realização de Sistemas

## Realização na Forma Direta II

- $H_2(s)$  seguida de  $H_1(s)$
- Troca de posição das seções de  $H_1(s)$  e  $H_2(s)$

$$V(s) = X(s)H_2(s) \quad (72)$$

$$V(s) = X(s) \frac{1}{1 + \frac{a_1}{s} + \frac{a_2}{s^2} + \frac{a_3}{s^3}} \quad (73)$$

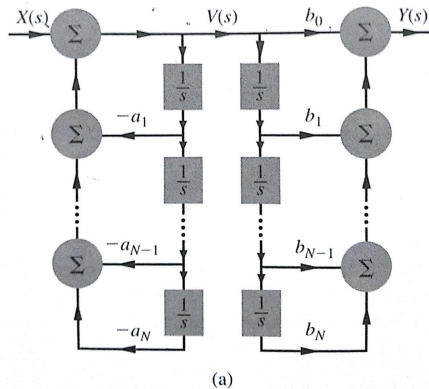
$$V(s) = X(s) - \left( \frac{a_1}{s} + \frac{a_2}{s^2} + \dots + \frac{a_N}{s^N} \right) V(s) \quad (74)$$

$$Y(s) = \left( b_0 + \frac{b_1}{s} + \frac{b_2}{s^2} + \dots + \frac{b_N}{s^N} \right) V(s) \quad (75)$$

- Utilização de hardware mais eficiente

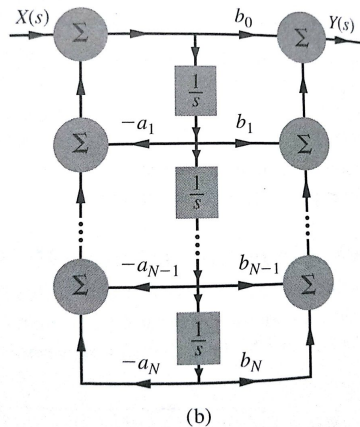
# Realização de Sistemas

## Realização na Forma Direta II



# Realização de Sistemas

## Realização na Forma Direta II





# Realização de Sistemas

## Realização na Forma Direta II - Exemplos

$$\frac{5}{s+7} \quad (76)$$

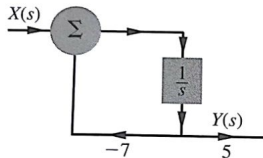
$$\frac{s}{s+7} \quad (77)$$

$$\frac{s+5}{s+7} \quad (78)$$

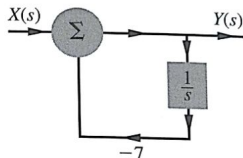
$$\frac{4s+28}{s^2+6s+5} \quad (79)$$

# Realização de Sistemas

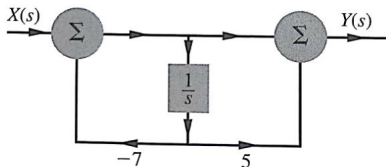
## Realização na Forma Direta II - Exemplos



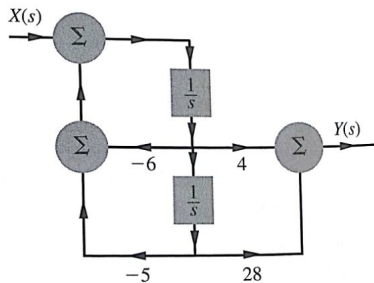
(a)



(b)



(c)



(d)

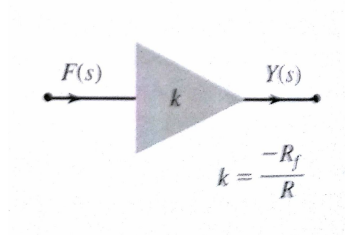
# Realização de Sistemas

## Utilização de Amplificadores Operacionais para a Realização de Sistemas

$$H(s) = -\frac{Z_f(s)}{Z(s)} \quad (80)$$

- Multiplicador escalar

$$H(s) = -\frac{R_f}{R} \quad (81)$$



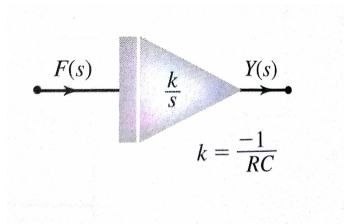
# Realização de Sistemas

## Utilização de Amplificadores Operacionais para a Realização de Sistemas

$$H(s) = -\frac{Z_f(s)}{Z(s)} \quad (82)$$

- Integrador

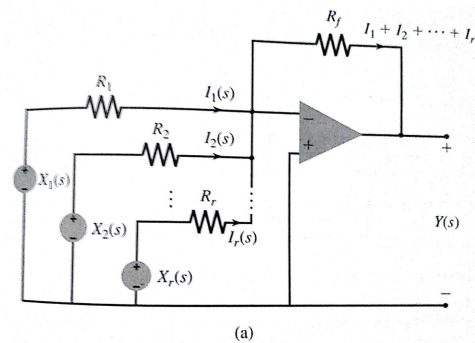
$$H(s) = \left(-\frac{1}{RC}\right) \frac{1}{s} \quad (83)$$



# Realização de Sistemas

## Utilização de Amplificadores Operacionais para a Realização de Sistemas

- Somador



- Somador

$$I_j(s) = \frac{X_j(s)}{R_j}, \quad j = 1, 2, \dots, r \quad (84)$$

$$Y(s) = -R_f [I_1(s) + I_2(s) + \dots + I_r(s)] \quad (85)$$

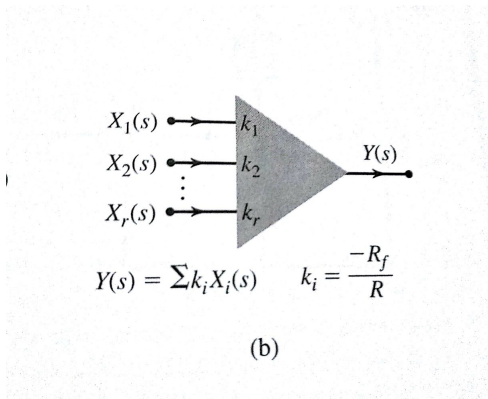
$$Y(s) = - \left[ \frac{R_f}{R_1} X_1(s) + \frac{R_f}{R_2} X_2(s) + \dots + \frac{R_f}{R_r} X_r(s) \right] \quad (86)$$

$$Y(s) = k_1 X_1(s) + k_2 X_2(s) + \dots + k_r X_r(s) \quad (87)$$

$$k_i = \frac{-R_f}{R_i} \quad (88)$$

# Realização de Sistemas

## Utilização de Amplificadores Operacionais para a Realização de Sistemas



# Realização de Sistemas

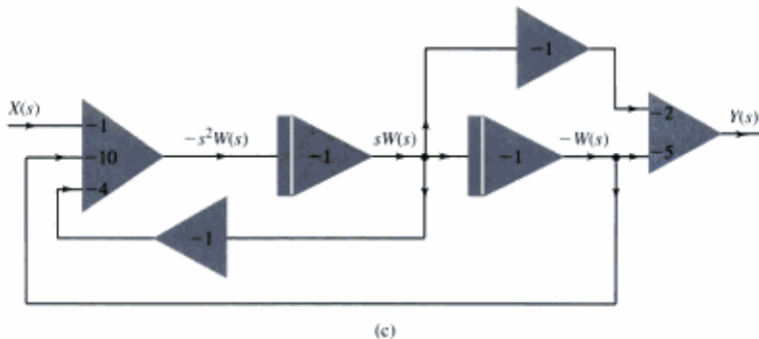
## Utilização de Amplificadores Operacionais para a Realização de Sistemas - Exemplo

$$H(s) = \frac{2s + 5}{s^2 + 4s + 10} \quad (89)$$



# Realização de Sistemas

## Utilização de Amplificadores Operacionais para a Realização de Sistemas - Exemplo



## Utilização de Amplificadores Operacionais para a Realização de Sistemas - Exemplo

