Controlabilidade e observabilidade — Parte 1

Valter J. S. Leite[1]

[1]CEFET-MG / *Campus* V Divinópolis, MG – Brasil

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica
Associação ampla entre CEFET–MG e UFSJ

O que nos espera?

1. Controlabilidade & Observabilidade
2. Controlabilidade
3. Observabilidade

6.1 Controlabilidade e observabilidade

- Um sistema é chamado controlável se os estados do sistema podem ser controlados a partir de suas entradas.

- Um sistema é chamado observável se os estados do sistema podem ser obtidos das saídas.

6.2 Controlabilidade

Considere o sistema

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \tag{1}$$

com $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times p}$.

Controlabilidade

A equação de estados (1) ou o par $(\mathbf{A},\mathbf{B})$ é dito controlável se para qualquer estado inicial $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ e qualquer estado final $\mathbf{x}_1$, existe uma entrada $\mathbf{u}(t)$ que transfere $\mathbf{x}_0$ para $\mathbf{x}_1$ em um tempo finito.

- Ver Exemplo 6.1 .

Teorema 6.1

As seguintes afirmativas são equivalentes:
(1) O par n-dimensional $(\mathbf{A},\mathbf{B})$ é controlável.

(2)A matriz $n \times n$

$$\mathbf{W}_c(t) = \int_0^t e^{\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}\mathbf{B}' e^{\mathbf{A}'\tau} d\tau = \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{B}' e^{\mathbf{A}'(t-\tau)} d\tau \qquad (2)$$

é não singular para qualquer $t > 0$.
(3)A matriz de controlabilidade $n \times np$

$$\mathfrak{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \mathbf{A}^2\mathbf{B} & \cdots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \end{bmatrix} \qquad (3)$$

tem posto n (posto completo de linhas).

(4)A matriz $[(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\ \ \mathbf{B}]$, de dimensões $n \times (n+p)$, possui posto completo de linhas em cada autovalor, λ, de $\mathbf{A}$.

(5)Se todos os autovalores de $\mathbf{A}$ possuem parte real negativa, então a solução única de

$$\mathbf{A}\mathbf{W}_c + \mathbf{W}_c\mathbf{A}' = -\mathbf{B}\mathbf{B}' \tag{4}$$

é definida positiva.

A solução é chamada *Gramiano de controlabilidade* e pode ser expressa como

$$\mathbf{W}_c(t) = \int_0^{\infty} e^{\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}\mathbf{B}' e^{\mathbf{A}'\tau} d\tau. \tag{5}$$

Demonstração do Teorema 6.1

• A equivalência entre as duas formas integrais de (2) pode ser provada por meio da mudança de variável $\overline{\tau} = t - \tau$.
• O que garante que $\mathbf{W}_c$ é semidefinida positiva é a forma do integrando $(\mathbf{H}\mathbf{H}')$.
(1) $\leftrightarrow$ (2): $\mathbf{W}_c$ é não singular se e só se $(\mathbf{A},\mathbf{B})$ é controlável.
A solução do sistema é dada por

$$\mathbf{X}(t_1) = e^{\mathbf{A}t_1}\mathbf{X}(0) + \int_0^{t_1} e^{\mathbf{A}t_1-\tau}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau.$$

Para qualquer $\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0$ e $\mathbf{X}(1) = \mathbf{X}_1$ a entrada

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{B}'e^{\mathbf{A}'(t_1-t)}{\mathbf{W}_c}^{-1}(t_1)\left[e^{\mathbf{A}t_1}\mathbf{X}_0 - \mathbf{X}_1\right]$$

transfere $\mathbf{X}_0$ para $\mathbf{X}_1$ no tempo t_1.

Demonstração do Teorema 6.1:

Assim, substituíndo $\mathbf{u}(t)$ em $\mathbf{X}(t_1)$ tem-se

$$\mathbf{X}(t_1) = e^{\mathbf{A}t_1}\mathbf{X}_0 + \int_0^{t_1} e^{\mathbf{A}(t_1-\tau)}\mathbf{B} \underbrace{\left(-\mathbf{B}' e^{\mathbf{A}'(t_1-\tau)} \mathbf{W}_c{}^{-1}(t_1) \left[e^{\mathbf{A}t_1}\mathbf{X}_0 - \mathbf{X}_1\right]\right)}_{\mathbf{u}(t)} d\tau, \tag{6}$$

$$\mathbf{X}(t_1) = e^{\mathbf{A}t_1}\mathbf{X}_0 - \left(\int_0^{t_1} e^{\mathbf{A}(t_1-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{B}' e^{\mathbf{A}'(t_1-t)} d\tau\right) \mathbf{W}_c{}^{-1} \times (t_1) \left[e^{\mathbf{A}t_1}\mathbf{X}_0 - \mathbf{X}_1\right], \tag{7}$$

$$\mathbf{X}(t_1) = e^{\mathbf{A}t_1}\mathbf{X}_0 - \mathbf{W}_c(t_1)\mathbf{W}_c{}^{-1}(t_1) \left[e^{\mathbf{A}t_1}\mathbf{X}_0 - \mathbf{X}_1\right] = \mathbf{X}_1.$$

Assim conclui-se que se $\mathbf{W}_c$ é não singular então $(\mathbf{A},\mathbf{B})$ é controlável.
Em seguida será mostrado, por contradição, que
"se o par $(\mathbf{A},\mathbf{B})$ é controlável então $\mathbf{W}_c$ é não singular."

Demonstração do Teorema 6.1:

Suponha que $(\mathbf{A},\mathbf{B})$ é controlável mas que $\mathbf{W}_c$ não é definida positiva para algum t_1. Então existe um vetor $\mathbf{v} \neq 0$ tal que

$$\mathbf{v}'\mathbf{W}_c\mathbf{v} = \int_0^{t_1} \mathbf{v}' e^{\mathbf{A}(t_1-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{B}' e^{\mathbf{A}'(t_1-t)}\mathbf{v} d\tau = \int_0^{t_1} \left\| \mathbf{B}' e^{\mathbf{A}'(t_1-t)}\mathbf{v} \right\|^2 d\tau = 0. \quad (8)$$

Isso implica em

$$\mathbf{B}' e^{\mathbf{A}'(t_1-t)}\mathbf{v} = 0 \quad \text{ou} \quad \mathbf{v}' e^{\mathbf{A}(t_1-\tau)}\mathbf{B} = 0$$

para todo τ em $[0,t_1]$.

Se $(\mathbf{A},\mathbf{B})$ é controlável então existe uma entrada que transfere $\mathbf{X}(0) = e^{-\mathbf{A}'t_1}\mathbf{v}$ para $\mathbf{X}(t_1) = \mathbf{0}$ e a equação de $\mathbf{X}(t)$ se torna

$$\mathbf{0} = \mathbf{v} + \int_0^{t_1} e^{\mathbf{A}(t_1-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau.$$

Demonstração do Teorema 6.1:

$$\mathbf{0} = \mathbf{v} + \int_0^{t_1} e^{\mathbf{A}(t_1-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau.$$

Multiplicando ambos os lados por $\mathbf{v}'$ tem-se

$$\mathbf{0} = \mathbf{v}\mathbf{v}' + \int_0^{t_1} \mathbf{v}'e^{\mathbf{A}(t_1-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau = \mathbf{v}\mathbf{v}' + \int_0^{t_1} \mathbf{0}\mathbf{u}(\tau)d\tau = \|\mathbf{v}\|^2 + \mathbf{0}.$$

Isso contradiz a hipótese de que $\mathbf{v} \neq 0$, provando a relação entre (1) e (2).
(2) $\leftrightarrow$ (3): $\mathbf{W}_c$ é não singular se e só se $\mathfrak{C}$ tem posto completo de linhas. • $\mathbf{W}_c$ é não singular então $\mathfrak{C}$ tem posto completo de linhas.
Suponha que $\mathfrak{C}$ não tem posto completo de linhas, então existe um vetor não-nulo tal que $\mathbf{v}'\mathfrak{C} = \mathbf{0}$ ou $\mathbf{v}'\mathbf{A}^k\mathbf{B} = \mathbf{0}$.
Sabe-se que $e^{\mathbf{A}t}$ pode ser expresso como uma combinação linear de $[\mathbf{B},\ \mathbf{A}\mathbf{B},\ \mathbf{A}^2\mathbf{B},\ \ldots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]$. Assim $e^{\mathbf{A}t} = 0$ o que contradiz a hipótese de que $\mathbf{W}_c$ é não-singular, provando o enunciado.

Demonstração do Teorema 6.1:

- $\mathfrak{C}$ tem posto completo de linhas então $\mathbf{W}_c$ é não singular.

  $\star$ Assuma que $\mathbf{W}_c$ é singular. Assim, $\mathbf{v}'e^{\mathbf{A}t}\mathbf{B} = 0$. Para $t = 0$ tem-se $\mathbf{v}'\mathbf{B} = \mathbf{0}$.

  $\star$ Derivando $\mathbf{v}'e^{\mathbf{A}t}\mathbf{B} = 0$ e fazendo $t = 0$ tem-se $\mathbf{v}'\mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{0}$.

  $\star$ Repetindo o procedimento tem-se $\mathbf{v}'\mathbf{A}^k\mathbf{B} = \mathbf{0}$.

  $\star$ Esses termos podem ser agrupados como $\mathbf{v}'[\mathbf{B},\ \ \mathbf{A}\mathbf{B},\ \ \mathbf{A}^2\mathbf{B},\ \ \ldots,\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] = \mathbf{v}'\mathfrak{C} = 0$.

  $\star$ Isso contradiz a hipótese de $\mathfrak{C}$ ter posto completo de linhas.

Demonstração do Teorema 6.1:

$(3) \leftrightarrow (4)$: $\mathfrak{C}$ tem posto completo de linhas ($\rho(\mathfrak{C}) = n$) se e só se $[(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) \quad \mathbf{B}]$ tem posto completo de linhas ($\rho([(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) \quad \mathbf{B}]) = n$).

- Suponha que $\mathfrak{C}$ tem posto completo de linhas e que para um determinado autovalor λ_1 a matriz $[(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) \quad \mathbf{B}]$ não tem posto n, ou seja, $[(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) \quad \mathbf{B}]$ é singular.
  - $\star$ Assim, existe $\mathbf{q} \neq \mathbf{0}$ tal que $\mathbf{q}\,[(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) \quad \mathbf{B}] = \mathbf{0}$ o que implica que $\mathbf{qA} = \lambda_1\mathbf{q}$ e $\mathbf{qB} = 0$.
  - $\star$ $\mathbf{q}$ é um autovetor de $\mathbf{A}$.
  - $\star$ $\mathbf{qA}^2 = (\mathbf{qA})\mathbf{A} = (\lambda_1\mathbf{q})\mathbf{A} = \lambda_1(\lambda_1\mathbf{q}) = \lambda_1^2\mathbf{q} \Rightarrow \mathbf{qA}^k = \lambda_1^k\mathbf{q}$.
  - $\star$ $\mathbf{qA}^k = \lambda_1^k\mathbf{q}$.
  - $\star$ $\mathbf{q}[\mathbf{B}, \ \mathbf{AB}, \ \mathbf{A}^2\mathbf{B}, \ \ldots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] = [\mathbf{qB}, \ \lambda_1\mathbf{qB}, \ {\lambda_1}^2\mathbf{qB}, \ \ldots, {\lambda_1}^{n-1}\mathbf{qB}] = \mathbf{0}$.
  - $\star$ Isso contradiz a hipótese de que $\mathfrak{C}$ tem posto completo de linhas.

Demonstração do Teorema 6.1:

- $\rho(\mathfrak{C}) < n \Rightarrow \rho([(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) \quad \mathbf{B}]) < n.$

  ⋆ Dois resultados são necessários:

1. A controlabilidade é invariante sobre qualquer transformação de equivalência.
2. Se o posto de $\mathfrak{C}$ é menor que n, ou seja, $\rho(\mathfrak{C}) = n - m$, para algum $m \geq 1$, então existe uma matriz $\mathbf{P}$ tal que

$$\overline{\mathbf{A}} = \mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{A}}_c & \overline{\mathbf{A}}_{12} \\ \mathbf{0} & \overline{\mathbf{A}}_{\overline{c}} \end{bmatrix} \quad e \quad \overline{\mathbf{B}} = \mathbf{P}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{B}}_c \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

Demonstração do Teorema 6.1:

$\star$ Seja λ_1 um autovalor de $\overline{\mathbf{A}}_{\overline{c}}$ e $\mathbf{q}_1$ o correspondente autovetor não nulo.

$\star$ $\mathbf{q}\left[\left(\overline{\mathbf{A}}-\lambda_1\mathbf{I}\right) \quad \overline{\mathbf{B}}\right] =$

$[\mathbf{0} \quad \mathbf{q}_1]\begin{bmatrix} (\overline{\mathbf{A}}_c-\lambda_1\mathbf{I}) & \overline{\mathbf{A}}_{12} & \overline{\mathbf{B}}_c \\ \mathbf{0} & (\overline{\mathbf{A}}_{\overline{c}}-\lambda_1\mathbf{I}) & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \mathbf{0}$ o implica que $\rho(\left[\left(\overline{\mathbf{A}}-\lambda\mathbf{I}\right) \quad \overline{\mathbf{B}}\right]) < n$ o que implica que $\rho([(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}) \quad \mathbf{B}]) < n$ para algum autovalor de $\mathbf{A}$.

$(2) \leftrightarrow (5)$:

Se $\mathbf{A}$ é estável, então a solução única da equação de Lyapunov pode ser expressa como $\mathbf{W}_c$. O Gramiano $\mathbf{W}_c$ é sempre semidefinido positivo. Será definido positivo se e só se $\mathbf{W}_c$ é não singular. (c.q.d.)

Exemplo 6.2: Para um determinado pêndulo invertido tem-se

$$
\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{X} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} u, \\
y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{X}.
\end{aligned}
$$

Ver dedução no Exemplo 2.8 do Chen.

O cálculo da matriz de controlabilidade resulta em

$$\mathfrak{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \mathbf{A}^2\mathbf{B} & \mathbf{A}^3\mathbf{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -10 \\ -2 & 0 & -10 & 0 \end{bmatrix}.$$

A matriz $\mathfrak{C}$ tem posto 4. Assim conclui-se que o sistema é controlável.

No Matlab:

- `ctrb`: calcula a matriz de controlabilidade.
- `gram`: calcula o gramiano de controlabilidade.

Exemplo 6.3:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -0{,}5 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{X} + \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 1 \end{bmatrix} u.$$

Se as condições iniciais são $x_1(0) = 10$ e $x_2(0) = -1$, é possível trazer o sistema para o ponto de equilíbrio $\mathbf{X} = \mathbf{0}$ em 2 segundos?

Resolução: Verificação de controlabilidade

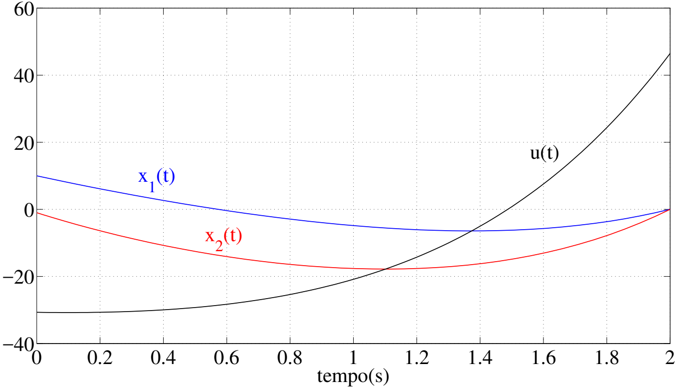
$$\rho\left([\mathbf{B} \quad \mathbf{AB}]\right) = \rho \begin{bmatrix} 0{,}5 & -0{,}25 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = 2.$$

Conclusão: O sistema é controlável.

O próximo passo é determinar a entrada:

$$\mathbf{W}_c(2) = \int_0^2 \left(\begin{bmatrix} e^{-0,5\tau} & 0 \\ 0 & e^{-\tau} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,5 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-0,5\tau} & 0 \\ 0 & e^{-\tau} \end{bmatrix} \right) d\tau.$$

$$\begin{aligned}
u_1 &= -\mathbf{B}' e^{\mathbf{A}'(t_1 - t)} \mathbf{W}_c{}^{-1}(t_1) \left[e^{\mathbf{A}t_1} \mathbf{X}_0 - \mathbf{X}_1 \right] \\
u_1 &= -\begin{bmatrix} 0,5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{(0,5t-1)} & 0 \\ 0 & e^{(t-2)} \end{bmatrix} \mathbf{W}_c{}^{-1}(2) \begin{bmatrix} e^{-1} & 0 \\ 0 & e^{-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ -1 \end{bmatrix} \\
u_1 &= -58,82 e^{0,5t} + 27,96 e^{t}.
\end{aligned}$$

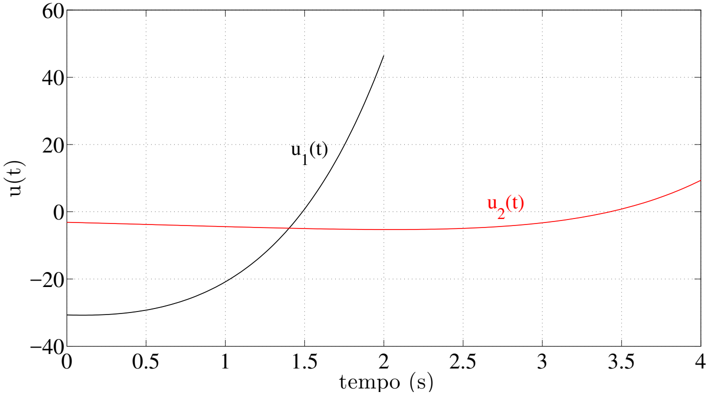


Evolução temporal dos estados e entrada do sistema.

- A entrada $u(t)$ é chamada controle de energia mínima pois para qualquer outra $\overline{u}(t)$ tem-se que

$$\int_{t_0}^{t_1} \overline{\mathbf{u}}'(t)\overline{\mathbf{u}}(t)dt \geq \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{u}'(t)\mathbf{u}(t)dt.$$

- O esforço de controle (amplitude) aumenta com a diminuição do tempo de transferência;
- Se alguma restrição é imposta a $\mathbf{u}(t)$, então pode não ser possível transferir o sistema em um intervalo de tempo arbitrariamente pequeno.



Comparação entre diferentes entradas.

Teorema 6.2
A propriedade de controlabilidade é invariante sobre qualquer transformação de equivalência.
Demonstração
- Considere $\mathfrak{C}$ e as matrizes $\overline{\mathbf{A}} = \mathbf{PAP}^{-1}$ e $\overline{\mathbf{B}} = \mathbf{PB}$.

$$\begin{aligned}
\overline{\mathfrak{C}} &= \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{B}} & \overline{\mathbf{AB}} & \ldots & \overline{\mathbf{A}}^{(n-1)}\overline{\mathbf{B}} \end{bmatrix} \\
\overline{\mathfrak{C}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{PB} & \mathbf{PAP}^{-1}\mathbf{PB} & \ldots & \mathbf{PA}^{(n-1)}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{PB} \end{bmatrix} \\
\overline{\mathfrak{C}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{PB} & \mathbf{PAB} & \ldots & \mathbf{PA}^{(n-1)}\mathbf{B} \end{bmatrix} \\
\overline{\mathfrak{C}} &= \mathbf{P}\begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \ldots & \mathbf{A}^{(n-1)}\mathbf{B} \end{bmatrix} = \mathbf{P}\mathfrak{C}
\end{aligned}$$

Com $\mathbf{P}$ é não singular, $\rho(\mathbf{C}) = \rho(\overline{\mathbf{C}})$. (c.q.d.)

6.3 Observabilidade

Considere o sistema

$$\left.\begin{array}{l}\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{AX}(t) + \mathbf{Bu}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{CX}(t) + \mathbf{Du}(t)\end{array}\right\} \qquad (9)$$

sendo $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times p}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{q\times n}$ e $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{q\times p}$.

Observabilidade

A equação de estados (9) ou o par $(\mathbf{A},\mathbf{C})$ é dito observável se para qualquer estado inicial $\mathbf{X}(0)$ existe um tempo finito $t_1 > 0$ tal que o conhecimento da entrada $\mathbf{u}(t)$ e da saída $\mathbf{y}(t)$ no intervalo $[0,\ t_1]$ seja suficiente para determinar de forma única o estado inicial $\mathbf{X}(0)$.

- Ver exemplos: 6.6 e 6.7

- A resposta de (9) é

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{X}(0) + \mathbf{C}\int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau + \mathbf{D}\mathbf{u}(t).$$

- Assume-se que a entrada $\mathbf{u}(t)$ e a saída $\mathbf{y}(t)$ são conhecidas e somente $\mathbf{X}(0)$ é desconhecido.
- A resposta de (9) pode ser escrita como

$$\mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{X}(0) = \overline{\mathbf{y}}(t) \tag{10}$$

sendo $\overline{\mathbf{y}}(t) := \mathbf{y}(t) - \mathbf{C}\int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau - \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$.

- Assim o problema da observabilidade se reduz a obter $\mathbf{X}(0)$ de (10).

- A equação (9) é observável se e somente se o estado inicial $\mathbf{X}(0)$ puder ser determinado unicamente da resposta a entrada zero em um intervalo finito de tempo.

- Para um t fixo, é sempre possível obter $\mathbf{X}(0)$ de (10). No entanto, a solução não será única.

- $\mathbf{X}(0)$ será determinado unicamente se forem conhecidas $\mathbf{u}(t)$ e $\mathbf{y}(t)$ em certo intervalo de tempo. Como formalizado no teorema abaixo.

Teorema 6.4

A equação de estado (9) é observável se e somente se a matriz $n \times n$

$$\mathbf{W}_0(t) = \int_0^t e^{\mathbf{A}'\tau}\mathbf{C}'\mathbf{C}e^{\mathbf{A}\tau}d\tau$$

é não singular para qualquer $t > 0$.

Demonstração do Teorema 6.4

- Se $\mathbf{W}_0(t)$ é não singular então (9) é observável.

Se multiplicarmos (10) a esquerda por $e^{\mathbf{A}'\tau}\mathbf{C}'$ e então integrarmos no intervalo de $[0,t_1]$ resulta em

$$\left(\int_0^{t_1} e^{\mathbf{A}'\tau}\mathbf{C}'\mathbf{C}e^{\mathbf{A}\tau}d\tau\right)\mathbf{X}(0) = \int_0^{t_1} e^{\mathbf{A}'\tau}\mathbf{C}'\overline{y}(t)dt.$$

Se $\mathbf{W}_0(t)$ é não singular então

$$\mathbf{X}(0) = \mathbf{W}_0{}^{-1}(t)\int_0^{t_t} e^{\mathbf{A}'\tau}\mathbf{C}'\overline{y}(t)dt.$$

Demonstração do Teorema 6.4

- Se $\mathbf{W}_0(t)$ é singular (semidefinida positiva) então (9) é não-observável.

Se $\mathbf{W}_0(t)$ é semidefinida positiva então existe um vetor $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ tal que

$$\mathbf{v}'\mathbf{W}_0(t_1)\mathbf{v} = \int_0^{t_1} \mathbf{v}'e^{\mathbf{A}'\tau}\mathbf{C}'\mathbf{C}e^{\mathbf{A}\tau}\mathbf{v}d\tau = \int_0^{t_1} \left\|\mathbf{C}e^{\mathbf{A}\tau}\mathbf{v}\right\|^2 d\tau = 0$$

o que implica que

$$\mathbf{C}e^{\mathbf{A}\tau}\mathbf{v} \equiv 0.$$

Assim, se $\mathbf{u}(t) \equiv 0$ e dados $\mathbf{X}_1(0)$ e $\mathbf{X}_2(0)$ diferentes a saída será $\mathbf{y}(t) \equiv 0$. Isso demonstra a não unicidade de soluções e consequentemente a não observabilidade. (c.q.d.).

Teorema 6.5

O par $(\mathbf{A},\mathbf{B})$ é controlável se e somente se o par $(\mathbf{A}',\mathbf{B}')$ é observável.

Teorema 6.O1

As seguintes afirmativas são equivalentes:

(1) O par n-dimensional $(\mathbf{A},\mathbf{C})$ é observável.

(2)A matriz $n \times n$

$$\mathbf{W}_o(t) = \int_0^t e^{\mathbf{A}'\tau}\mathbf{C}'\mathbf{C}e^{\mathbf{A}\tau}d\tau \tag{11}$$

é não singular para qualquer $t > 0$.

(3)A matriz de observabilidade $nq \times n$

$$\mathbf{O} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix} \tag{12}$$

tem posto n (posto completo de colunas).

(4)A matriz $\begin{bmatrix} \mathbf{A} - \lambda \mathbf{I} \\ \mathbf{C} \end{bmatrix}$, de dimensões $(n+q) \times n$, possui posto completo de colunas em cada autovalor, λ, de $\mathbf{A}$.

(5)Se todos os autovalores de $\mathbf{A}$ possuem parte real negativa, então a solução única de

$$\mathbf{A}'\mathbf{W}_o + \mathbf{W}_o\mathbf{A} = -\mathbf{C}'\mathbf{C} \tag{13}$$

é definida positiva. A solução (13) é chamada *Gramiano de observabilidade* e pode ser expressa como

$$\mathbf{W}_o(t) = \int_0^{\infty} e^{\mathbf{A}'\tau}\mathbf{C}'\mathbf{C}e^{\mathbf{A}\tau} d\tau. \tag{14}$$

Teorema 6.O2
A propriedade de observabilidade é invariante sobre qualquer transformação de equivalência.

Forma alternativa de obtenção de $\mathbf{X}(0)$

Derivando $\mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{X}(0) = \overline{\mathbf{y}}(t)$ repetidamente e igualando $t = 0$ tem-se:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{(v-1)} \end{bmatrix} \mathbf{X}(0) = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{y}}(t) \\ \dot{\overline{\mathbf{y}}}(t) \\ \vdots \\ \overline{\mathbf{y}}^{(n-1)}(t) \end{bmatrix}$$

ou

$$\mathbf{O}_v\mathbf{X}(0) = \tilde{\mathbf{y}}(0).$$

Assim, $\mathbf{X}(0)$ pode ser obtido por mínimos quadrados

$$\mathbf{X}(0) = [\mathbf{O}_v'\mathbf{O}_v]^{-1}\mathbf{O}_v'\tilde{\mathbf{y}}(0).$$

No entanto, como $\tilde{\mathbf{y}}(0)$ é composto pelas derivadas de $\mathbf{y}$, e derivadas amplificam ruído de alta frequência, essa forma alternativa de obtenção de $\mathbf{X}(0)$ geralmente não é empregada na prática.