

# Modelagem do Sistema Ball and Beam

Bernardo Bresolini\* Ester Queiroz Alvarenga\*

\* Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais,  
Divinópolis - MG (e-mails: berbresolini14@gmail.com e  
esterqueirozalvarenga@gmail.com).

## 1. SISTEMA BALL AND BEAM

O sistema *ball and beam* é um clássico sistema eletromecânico subatuado com dois graus de liberdade e somente um atuador. A barra rotaciona num plano vertical em função do torque desenvolvido por um motor; enquanto que a bola pode rolar livremente ao longo da barra (MARTÓN *et al.*, 2008, p. 3724).

O conjunto formado pela bola e pela viga tem propósito de controlar a posição da bola sobre a barra com movimentos rotacionais. Tal sistema descreve um processo com aplicações diretas na área de controle, como o manejo da inclinação de aeronaves.

A viga deve ser capaz de rotacionar no plano vertical, logo ela deve ser biarticulada. Em uma das suas extremidades, há uma junção com um servomotor, por meio de dois elos (barras), capaz de rotacionar a viga, como mostra a FIG. 1.

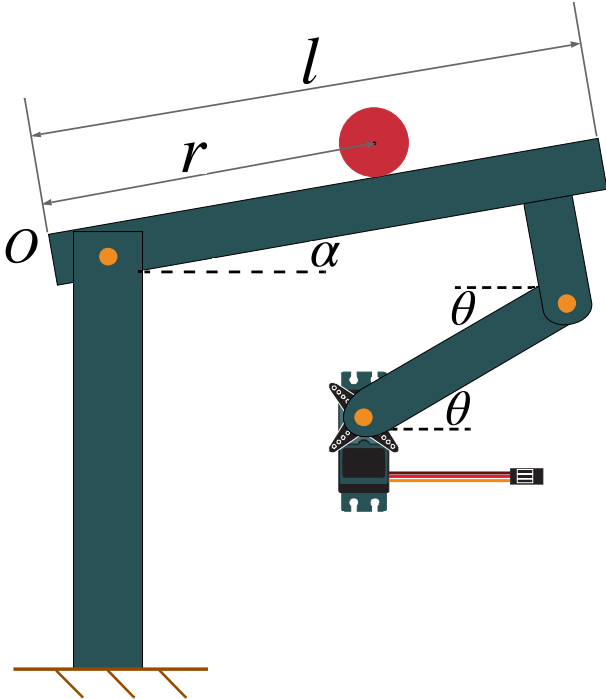


Figura 1. Esquemático do sistema *ball and beam*

## 2. MODELAGEM

Os parâmetros do sistema *ball and beam* assim como seus símbolos são exibidos na TAB. 1. Diante disto, a

modelagem do sistema por ser feita por Euler-Lagrange, fazendo

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right] - \frac{\partial L}{\partial q} = Q \quad (1)$$

em que  $L = K - P$ ,  $K$  é a energia cinética,  $P$  é a energia potencial,  $Q$  é a força generalizada e  $q$  é a coordenada generalizada.

Tabela 1. Parâmetros do Sistema Ball and Beam

Símbolo	Definição
$m_B$	massa da bola
$m_b$	massa da barra
$R$	raio da bola
$l$	comprimento da barra
$J_B$	inércia da bola
$J_b$	inércia da barra

### 2.1 Energia Cinética e Potencial do sistema

Seja uma bola de raio  $R$  sob uma viga, inclinada em  $\alpha$  em relação ao eixo horizontal, posicionada a uma distância  $r$  do raio de giração desta viga. Considerando que a bola não deslizará e que ela poderá se mover livremente sob a viga, sua movimentação será como mostra a FIG. 2.

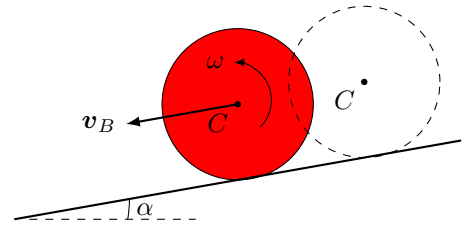


Figura 2. Movimentação da bola sobre a viga

Como exposto, a bola descreve um movimento plano geral, logo sua rolagem pode ser dividida em translação pura sobreposta por uma rotação pura, como mostra a FIG. 3.

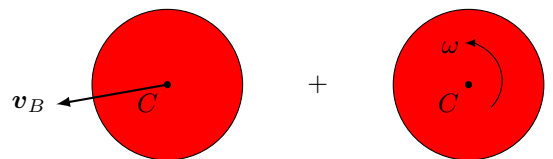


Figura 3. Decomposição do movimento de rolagem

Sendo assim, a velocidade cinética de uma bola rolando é determinada por

$$K_{\text{rolagem}} = \frac{1}{2}m_B \mathbf{v}_B^2 + \frac{1}{2}J_B \omega^2 \quad (2)$$

sendo  $\mathbf{v}_B$  a velocidade de translação da bola e  $\omega$  a velocidade de rotacional da bola em torno do seu centro.

Expressando  $\omega$  em termos de  $r$  segue-se

$$\omega = \frac{\dot{r}}{R} \quad (3)$$

Ainda, a intensidade da velocidade translacional da bola  $\mathbf{v}_B$  pode ser expressa nos termos de  $r$  e  $\alpha$ , fazendo

$$v_B^2 = (v_B)_x^2 + (v_B)_y^2 \quad (4)$$

sendo  $(v_B)_x$  e  $(v_B)_y$  suas componentes horizontal e vertical, respectivamente tais que

$$(v_B)_x = \frac{d}{dt} [r \cos \alpha] = \dot{r} \cos \alpha - r \dot{\alpha} \sin \alpha \quad (5)$$

$$(v_B)_y = \frac{d}{dt} [r \sin \alpha] = \dot{r} \sin \alpha + r \dot{\alpha} \cos \alpha \quad (6)$$

Substituindo (5) e (6) em (4),

$$v_B^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\alpha}^2 \quad (7)$$

Assim sendo, aplicando (3) e (7) em (2), obtém-se

$$\begin{aligned} K_{\text{rolagem}} &= \frac{1}{2}m_B [\dot{r}^2 + r^2 \dot{\alpha}^2] + \frac{1}{2} \frac{J_B}{R^2} \dot{r}^2 \\ &= \frac{1}{2} \left( m_B + \frac{J_B}{R^2} \right) \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m_B r^2 \dot{\alpha}^2 \end{aligned} \quad (8)$$

A energia cinética oriunda da inclinação  $\alpha$  da barra é de

$$K_{\text{inclinação}} = \frac{1}{2} (J_B + J_b) \dot{\alpha}^2 \quad (9)$$

Pelo princípio da superposição, a energia cinética total do sistema é dada pela soma algébrica das energias cinéticas de cada corpo rígido, ou seja,

$$K = \frac{1}{2} \left( m_B + \frac{J_B}{R^2} \right) \dot{r}^2 + \frac{1}{2} (m_B r^2 + J_B + J_b) \dot{\alpha}^2 \quad (10)$$

Considerando o material da barra homogêneo, pode-se concentrar seu centro de massa no centro da barra  $0,5\ell$ . Portanto, a energia potencial  $P$  do sistema é dado por

$$P = m_b g (0,5\ell \sin \alpha) + m_B g r \sin \alpha \quad (11)$$

## 2.2 Equação dinâmica de Euler-Lagrange

Sejam  $Q = [\tau_B \quad \tau_b]^T$  e  $q = [r \quad \alpha]^T$ , sendo  $r$  a posição da bola,  $\alpha$  o ângulo da barra,  $\tau_b$  o torque da barra e  $\tau_B$  o torque exógeno da bola. Assim, dinâmica do sistema pode ser modelada matematicamente pela equação dinâmica de Euler-Lagrange aplicando (10) e (11) em (1). Assim,

$$\begin{bmatrix} \tau_B \\ \tau_b \end{bmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} (m_B + J_B R^{-2}) \dot{r} \\ (m_B r^2 + J_B + J_b) \dot{\alpha} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} m_B r \dot{\alpha}^2 - m_B g \sin \alpha \\ -g \cos \alpha (0,5\ell m_b + m_B r) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \tau_B \\ \tau_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (m_B + J_B R^{-2}) \ddot{r} \\ (m_B r^2 + J_B + J_b) \ddot{\alpha} + 2m_B r \dot{r} \dot{\alpha} \\ - \begin{bmatrix} m_B r \dot{\alpha}^2 - m_B g \sin \alpha \\ -g \cos \alpha (0,5\ell m_b + m_B r) \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (12)$$

Desenvolvendo separadamente os termos, vê-se para o primeiro

$$\ddot{r} (m_B + J_B R^{-2}) - m_B r \dot{\alpha}^2 + m_B g \sin \alpha = \tau_B$$

Isolando  $\ddot{r}$ ,

$$\ddot{r} = \frac{1}{a} (\tau_B + m_B r \dot{\alpha}^2 - m_B g \sin \alpha) \quad (13)$$

no qual

$$a = m_B + J_B R^{-2}$$

Para o segundo termo, tem-se

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha} (m_B r^2 + J_B + J_b) + 2m_B r \dot{r} \dot{\alpha} \\ + g (0,5\ell m_b + m_B r) \cos \alpha = \tau_b \end{aligned}$$

Isolando  $\ddot{\alpha}$

$$\ddot{\alpha} = \frac{1}{b} (\tau_b - 2m_B r \dot{r} \dot{\alpha} - g (0,5\ell m_b + m_B r) \cos \alpha) \quad (14)$$

sendo

$$b = m_B r^2 + J_B + J_b$$

No entanto, existe uma junção entre a viga e o eixo-árvore do servomotor. Como se vê na FIG. 4, o elo binário que transmite o torque do servo tem um raio de giração  $r$ ; enquanto que o raio de giração da viga tem amplitude de  $\ell$ .

Como a junção superior está fixada na viga, elas sempre terão  $90^\circ$ . Deste modo, a variação da altura da viga é igual a variação da altura da junção inferior. Matematicamente

$$\ell \sin \alpha \approx d \sin \theta \quad (15)$$

Portanto, pode-se controlar a angulação da viga de acordo com o giro do motor pela relação cinemática descrita em (15). Para pequenas angulações, é válida a aproximação

$$\theta = \frac{\ell}{d} \alpha \quad (16)$$

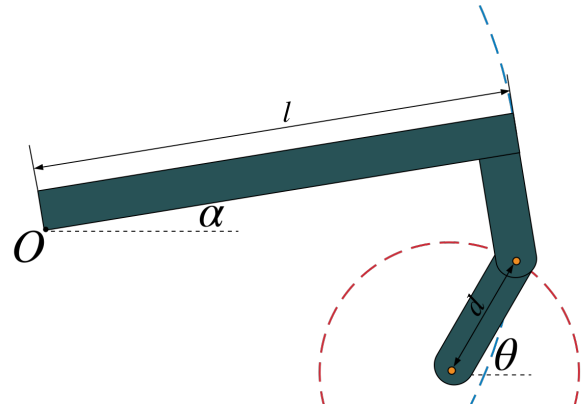


Figura 4. Relação cinemática do movimento

## 3. DIMENSIONAMENTO

Os componentes do sistema devem ser capazes de aguentar os esforços exigidos no processo. Deste modo, esta seção

tem o intuito de dimensionar os componentes para que o sistema opere normalmente nas condições da sua faixa de operação.

### 3.1 Circuito eletrônico

O circuito eletrônico do sistema *Ball and Beam* é composto por um servomotor o qual interferirá diretamente no processo; um microcontrolador Arduino, sendo a interface do controlador (MATLAB) e o hardware montado; uma fonte de alimentação; um sensor de distância: dispositivo de entrada que captará informações do processo; e um *protoboard* e os *jumpers* que permitirão a condução de corrente entre os componentes do circuito. Estes elementos são ligados ao computador e na parte mecânica do processo. A configuração do circuito descrito pode ser vista na FIG. 5.

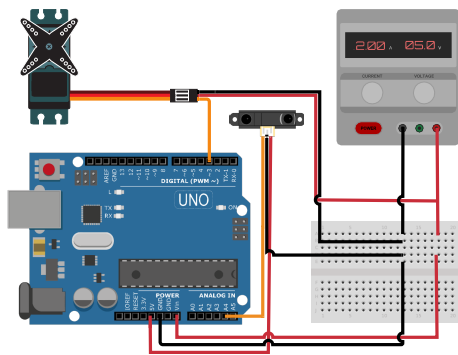


Figura 5. Circuito eletrônico

O sensor de distância mensurará a posição da bola e a enviará ao controlador — que se encontrará no computador ao qual o Arduino será ligado. A depender da ação de controle, será enviada pelo Arduino a tensão necessária para mover o servomotor, alterando o ângulo da barra e consequentemente a posição da bola sobre ela.

**Sensor de distância** A medição da distância  $r$  da bola se dará pelo sensor GP2Y0A21YK0F<sup>1</sup> cujas especificações gerais é dada na TAB. 2. A relação entre a distância  $L$  (cm) e a tensão de saída  $V_O$  (V) fornecida pelo fabricante é vista na FIG. 6

Tabela 2. Especificações gerais do sensor GP2Y0A21YK0F

Grandeza	Valor
Tensão de alimentação	4,5 V a 5,5 V
Corrente máxima	50 mA
Faixa de Operação	7 cm a 80 cm
Preço*	R\$ 59,90

\* Preço em Robocore Tecnologia (<https://www.robocore.net/loja/sensores/sensor-de-distancia-infra-vermelho-sharp-10-80cm>) em 15 set. 2019.

<sup>1</sup> O *datasheet* do componente pode ser visto em [http://www.sharpp-world.com/products/device/lineup/data/pdf/datasheet/gp2y0a21yk\\_e.pdf](http://www.sharpp-world.com/products/device/lineup/data/pdf/datasheet/gp2y0a21yk_e.pdf).

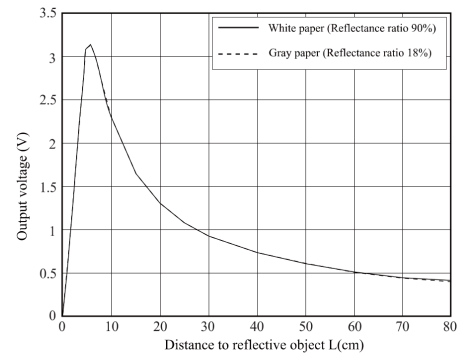


Figura 6. Curva  $V_O \times L$  do sensor GP2Y0A21YK0F dada pelo fabricante

**Servomotor** Os autores do presente relatório possuem o servomotor JX PDI-6221MG. Portanto, optou-se por utilizá-lo no projeto. Este servomotor possui engrenagens metálicas para a redução das folgas e ganho de potência/torque. Ele é alto torque e tem alta capacidade de resposta. Suas especificações estão expostas na TAB. 3.

Tabela 3. Especificações do servomotor JX PDI-6221M

Grandeza	Valor
Tensão de alimentação	4,8 V a 6,0 V
Banda morta	2 $\mu$ s
Frequência de operação	1520 $\mu$ s/330 Hz
Velocidade de operação (4,8 V)	0,18 s/60°
Velocidade de operação (6,0 V)	0,16 s/60°
Torque estol (4,8 V)	17,25 kg·cm
Torque estol (6,0 V)	20,32 kg·cm
Preço**	R\$ 119,00

\*\* Preço em Amazon (<https://www.amazon.com.br/Servo-JX-PDI-6221MG-Alto-Torque/dp/B07F6C98MW>) em 15 set. 2019.

### 3.2 Mecânica

Segundo o modelo predefinido, de um sistema *ball and beam* de quatro barras, subatuado com dois graus de liberdade e somente um atuador, gera-se a representação exposta na FIG. 7. O *design* da viga como sendo duas barras cilíndricas se deu devido a sua facilidade de obtenção.

### 3.3 Projeto mecânico

A vista explodida da estrutura pode ser vista na FIG. 8, assim como é posto na TAB. 4 a especificação de cada componente do sistema.

Escolheu-se o MDF como o material dos elementos estruturais e de suporte — peças 1, 5, 6 e 8 — devido o seu preço acessível, fácil montagem e rigidez satisfatória. Já os encaixes (peças 2 e 9) serão feitos de ABS, material rígido e de fácil acesso, utilizado pela impressora 3D (escolhida por permitir o desenvolvimento preciso das peças projetadas). Os elos binários foram especificados na TAB. 4 como sendo feitos de MDF, entretanto, testes serão realizados para definir se o MDF atenderá os requisitos necessários: leve e rígido a ponto de não afrouxar as junções com movimentos rotativos. Caso o MDF não satisfaça, uma opção será usar

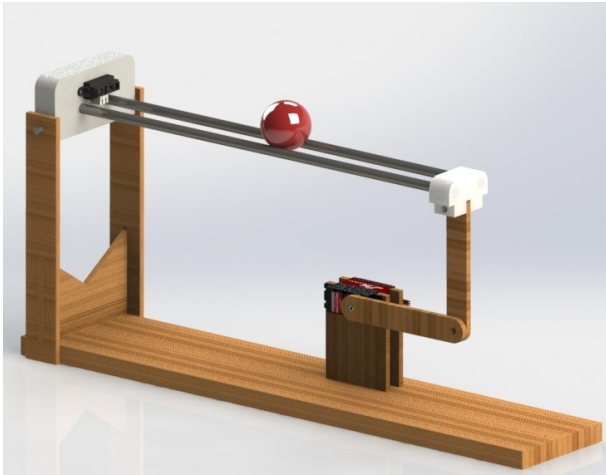


Figura 7. Vista trimétrica da estrutura mecânica do sistema ball and beam

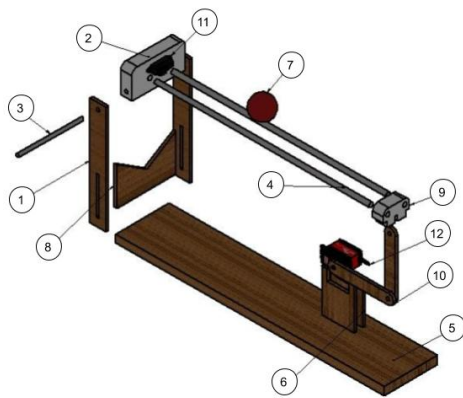


Figura 8. Vista trimétrica explodida

Tabela 4. Componentes

Nº item	Peça	Material	Qtd.
1	Coluna de sustentação da viga	MDF	2
2	Encaixe coluna-viga	ABS	1
3	Junta para o encaixe 2	Aço	1
4	Viga	Aço	2
5	Base	MDF	1
6	Suporte servo	MDF	1
7	Bola	Plástico	1
8	Nervura	MDF	1
9	Encaixe elo-viga	ABS	1
10	Elo binário	MDF	2
11	Sensor	—	1
12	Servomotor	—	1

elos de ABS. Ademais, a bola será de plástico para uma menor densidade de massa.

O dimensionamento dos componentes da planta restringiu-se pelos materiais obtidos inicialmente: as barras cilíndricas de 400 mm de comprimento a serem utilizadas como viga, bola de diâmetro igual a 40 mm, servomotor (20 × 40 ×) mm e sensor infravermelho. A altura da coluna (peça 1) foi a primeira a ser especificada — determinada de modo a ser cômoda para manuseio. Os elos binários receberam atenção para que ambos fossem do mesmo

tamanho (facilitando o modelo matemático) e que não fossem longos para não causar grande momento no eixo do motor e dificultar a movimentação. O APÊNDICE A especifica o dimensionamento e as vistas de todo projeto mecânico.

#### 4. REFERÊNCIAS

BACK, Nelson; *et al.* Projeto integrado de produtos: Planejamento, concepção e modelagem. Barueri: Manole, 2008.

CHEN, Chi-Tsong. *Linear System Theory and Design*. 4. ed. New York: Oxford, 2012. p. 398.

CHAN, Wei-Shou; CHANG, Chia-Wen. T-S Fuzzy Model-Based Adaptive Dynamic Surface Control for Ball and Beam System. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, v. 60, n. 6, p. 2251-2263, 2013. Disponível em: <<http://ieeexplore.ieee.org/stamp/stamp.jsp?tp=&arnumber=6177238&isnumber=6451226>>. Acesso em: 21 ago. 2019.

DORF, Richard C.; BISHOP, Robert H. *Modern Control System*. 12. ed. New Jersey: Prentice Hall, 2010. p. 1111.

MARTÓN, Lörinc; HODEL, A. Scottedwand; LANTOS, Bella; HUNG, John Y. Underactuated Robot Control: Comparing LQR, Subspace Stabilization, and Combined Error Metric Approaches. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, v. 55, n. 10, p. 3724-3730, 2008. Disponível em: <<https://ieeexplore.ieee.org/document/4493428>>. Acesso em: 21 ago. 2019.

OGATA, Katsuhiko. *Engenharia de Controle Moderno*. 5. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2010. p. 822.

REVISTA CIATEC. Passo Fundo: Instituto de Ciências Exatas e Geociências e Faculdade de Engenharia e Arquitetura, v. 7, 2015.

