

Primeira lista de Controle Moderno: linearização

Bresolini, Bernardo *

* Departamento de Engenharia Mecatrônica, CEFET-MG câmpus
Divinópolis, MG, (e-mail: berbresolini14@gmail.com).

1. INTRODUÇÃO

Considere o sistema de vasos comunicantes cujo diagrama é apresentado na Figura 1, em que os tanques são cilíndricos, cada um com diâmetro interno de 1 m, altura máxima de 1 m. No tanque da esquerda, TQ-01, há a entrada de líquidos $q_i(u(t))$, dada em litros/segundo e no tanque da direita, TQ-02, há a saída $q_o(h_2(t))$, também medida em litros por segundo, que depende apenas da altura no tanque TQ-02, dada por $h_2(t)$ m.

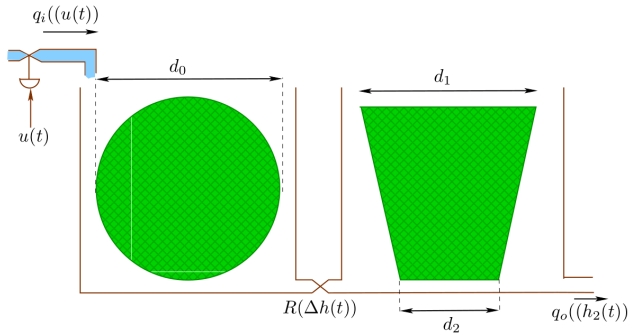


Figura 1. Sistema de vasos comunicantes

Em TQ-01 há uma esfera de diâmetro $d_0 = 0,90$ m que está colocada a 0,05 m do fundo do tanque. No tanque TQ-02 há um tronco de cone invertido, com diâmetro superior dado por $d_1 = 0,80$ m e diâmetro inferior $d_2 = 0,20$ m. A parte mais estreita do cone está a 0,10 m do fundo do tanque TQ-02. A variável controlada é o nível $h_2(t)$ no tanque TQ-02, através da variável manipulada pode variar entre $0\% \leq u(t) \leq 100\%$. A vazão de entrada é dada por

$$q_i(u(t)) = 2,617 \times 10^{-4} u^2(t) + 0,03 \quad [\text{l/s}],$$

a vazão de saída é dada por

$$q_o(h_2(t)) = 2,6\sqrt{h_2(t)} \quad [\text{l/s}]$$

e a vazão entre os tanques é positiva quando a vazão vai do TQ-01 para o TQ-02. Essa vazão depende da resistência hidráulica $R(\Delta h(t))$

$$q_{12} = \text{sign}(h_1(t) - h_2(t)) 6,78 R(\Delta h(t))$$

$$R(\Delta h(t)) = \sqrt{|h_1(t) - h_2(t)|}$$

- Determine o modelo não linear que relaciona a saída controlada com o sinal de controle.
- Determine uma aproximação para o modelo não linear para $h_2 \approx 0,8$ m.

- Mostre, através de simulação, usando apenas linhas de código, a validade da aproximação para variações em torno desse ponto de operação.
- Avalie a aproximação obtida em relação ao modelo não linear, partindo de $h_2(0) = 0,2$ m e fazendo o nível variar entre 0,5 m e 0,15 m. Esta avaliação precisa ser qualitativa e quantitativa.

2. EQUAÇÕES QUE REGEM O SISTEMA

O modelo não linear foi adquirido obtendo-se as equações do volume para cada tanque individualmente seguido da diferenciação dos volumes e igualando as suas derivadas com as diferenças das vazões.

2.1 Tanque 1

Em TQ-01, tem-se uma esfera inserida no cilindro. Considere uma esfera de raio $r_0 = d_0/2$, como mostra a Figura 2. Então, o volume dela, em função da área (raio) e da altura, pode ser encontrado integrando a área da seção esférica pela altura.

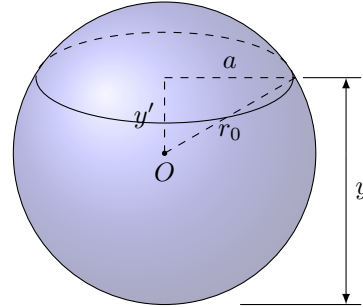


Figura 2. Esfera de raio $r_0 = 0,9$ m

A área da seção esférica A_{SE} é dada por

$$A_{SE} = \pi a^2 \quad (1)$$

em que a é o raio da seção esférica a uma altura y' do centro O . Pelo Teorema de Pitágoras, segue-se

$$r_0^2 = a^2 + y'^2 \Rightarrow a^2 = r_0^2 - y'^2$$

Logo, a equação (1) pode ser reescrita como

$$A_{SE} = \pi(r_0^2 - y'^2) = \pi r_0^2 - \pi y'^2 \quad (2)$$

em que o r_0 é fixo e y' pode variar e $y' = y - r_0$ para o hemisfério superior e $y' = r_0 - y$ para o hemisfério inferior. Portanto

$$A_{SE} = \begin{cases} \pi r_0^2 - \pi(y - r_0)^2, & \text{se } y \geq r_0 \\ \pi r_0^2 - \pi(r_0 - y)^2, & \text{se } y < r_0 \end{cases} \quad (3)$$

Contudo, sabe-se que $(r_0 - y)^2 = (y - r_0)^2$, ou seja, pode-se reduzir a equação (3) em apenas uma expressão válida para ambos os casos, embora deva-se ter em mente que, à rigor, as notações não poderiam ser usadas (devido à relação $a - y - r_0$ tirada do Teorema de Pitágoras).

Ao se pensar no TQ-01, um tanque cilíndrico com a esfera inserida, o volume de líquido para um dado intervalo da altura $[y_1, y_2]$, pode ser calculado por

$$V_1 = \int_{y_0}^{y_1} A dy \quad (4)$$

onde A é a área da seção do tanque, equacionada por

$$A = A_{\text{cilindro}} - A_{\text{esfera}}$$

Para o caso da região com a esfera de isopor inserida, tem-se que A será

$$A = \pi R^2 - \pi r_0^2 - \pi (r_0 - y)^2, \quad 0,05 < y < 0,95$$

O volume V_1 do primeiro tanque terá três regiões distintas (como mostra Figura 3) devido às mudanças nas equações.

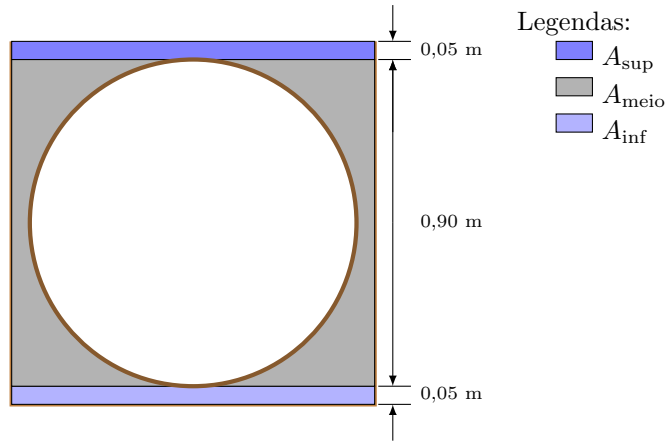


Figura 3. Partição das regiões das modelagens para o volume do TQ-01

Portanto, V_1 será

$$V_1 = \begin{cases} 0,95\pi R^2 + \int A_{\text{sup}}, & \text{se } h_1(t) \geq 0,95 \\ 0,05\pi R^2 + \int A_{\text{meio}}, & \text{se } 0,05 \leq h_1(t) < 0,95 \\ \int A_{\text{inf}}, & \text{se } 0 \leq h_1(t) < 0,05 \end{cases} \quad (5)$$

em que,

$$\begin{aligned} \int A_{\text{sup}} &= \int_{0,95}^{h_1(t)} \pi R^2 dy \\ \int A_{\text{meio}} &= \int_{0,05}^{h_1(t)} \pi R^2 - 2\pi r_0 y + \pi y^2 dy \\ \int A_{\text{inf}} &= \int_0^{h_1(t)} \pi R^2 dy \end{aligned}$$

2.2 Tanque 2

No TQ-02, tem-se um tronco de cone invertido inserido no cilindro. Considere $r_1 = d_1/2$ e ainda que sua altura seja $z = 0,9$ m. E a altura total do tronco igual a z . Então, o

volume em função da área e da altura pode ser encontrado multiplicando a área da seção cônica pela altura.

Considere um cone invertido de base circular com altura z_t e raio da base igual a r_1 (Figura 4(a)). Fazendo-se um corte a uma altura $z_t - z$, obtém-se um tronco de cone de altura z , como mostrado na Figura 4(b).

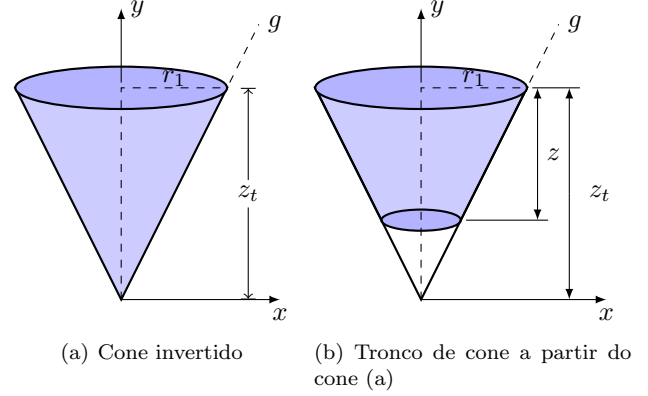


Figura 4. Cone invertido

Área da seção cônica A_{SC} do tronco de cone invertido a uma altura y qualquer é a mesma que a área da seção cônica na mesma, se $y \geq z_t - z$, ou seja

$$A_{SC} = \pi x^2 \quad (6)$$

Como se observa, a relação de y e x se dá através da geratriz g do cone. Fazendo-se um corte axial no tronco de cone inserido no TQ-02, tem-se o que é mostrado na Figura 5.

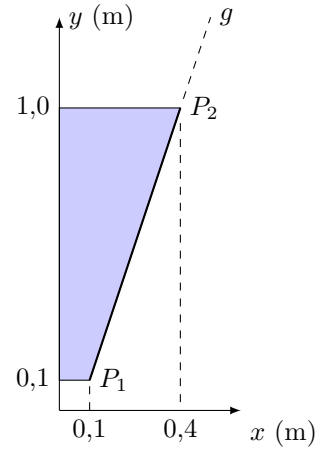


Figura 5. Corte axial do tronco de cone

Portanto, adquire-se a equação da reta $x = g(y) = \beta_1 y + \beta_0$, fazendo

$$\beta_1 = \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} = \frac{0,400 - 0,1}{1,0 - 0,1} = \frac{1}{3}$$

Aplicando $x = g(y)$ em um ponto conhecido, tem-se

$$0,4 = \frac{1}{3}(1,0) + \beta_0 \Rightarrow \beta_0 = \frac{1}{15}$$

Destarte, $x = (y + 0,2)/3$. Aplicando essa relação na equação (6), segue-se

$$A_{SE} = \frac{\pi}{9}(y + 0,2)^2 \quad (7)$$

Assim, o volume V'_2 a partir de uma altura a_2 até b_2 (tronco de cone) é calculado por

$$\begin{aligned} V &= \int_{a_2}^{b_2} dV = \int_{a_2}^{b_2} A_{SC} dy = \int_{a_2}^{b_2} \frac{\pi}{9} (y + 0,2)^2 dy \\ &= \frac{\pi}{9} \int_{a_2}^{b_2} y^2 + 0,4y + 0,04 \\ &= \left[\frac{\pi}{27} (y^3 + 0,6y^2 + 0,12y) \right]_{a_2}^{b_2} \\ &= \frac{\pi}{27} [b^3 + 0,6b^2 + 0,12b - (a^3 + 0,6a^2 + 0,12a)] \quad (8) \end{aligned}$$

O volume V_2 do primeiro tanque terá duas regiões distintas, mostradas na Figura 6, devido às mudanças nas equações.

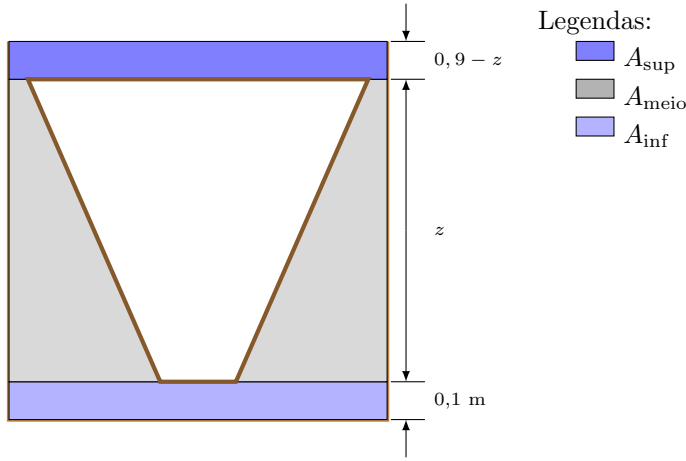


Figura 6. Partição das regiões das modelagens para o volume do TQ-02

Portanto V_2 será

$$V_2 = \begin{cases} 0,10\pi R^2 + \int A_{meio} & \text{se } 0,10 \leq h_2(t) < 1,0 \\ A_{inf} & \text{se } 0 \leq h_2(t) < 0,10 \end{cases} \quad (9)$$

em que,

$$\begin{aligned} \int A_{meio} &= \int_{0,1}^{h_2(t)} \pi R^2 - \frac{\pi}{9}(y + 0,2)^2 dy \\ \int A_{inf} &= \int_0^{h_2(t)} \pi R^2 dy \end{aligned}$$

Resolvendo as integrais para TQ-01,

$$\begin{aligned} \int A_{sup} &= \int_{0,95}^{h_1(t)} \pi R^2 dy = 0,25\pi(h_1(t) - 0,95) \\ &= 0,25\pi h_1(t) - 0,25\pi \cdot 0,95 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int A_{meio} &= \int_{0,05}^{h_1(t)} \pi R^2 - 2\pi r_0 y + \pi y^2 dy \\ &= \int_{0,05}^{h_1(t)} 0,52\pi - 0,9\pi y + \pi y^2 dy \\ &= \frac{\pi}{3} h_1^3(t) - 0,45\pi h_1^2(t) + 0,25\pi h_1(t) - \frac{137\pi}{12000} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int A_{inf} &= \int_0^{h_1(t)} \pi R^2 dy = 0,25\pi(h_1(t) - 0) \\ &= 0,25\pi h_1(t) \end{aligned}$$

Portanto,

$$V_1 = \begin{cases} 0,25\pi h_1(t), & \text{se } I_1 \\ \frac{\pi}{3} h_1^3(t) - 0,45\pi h_1^2(t) + 0,25\pi h_1(t) + \frac{13\pi}{12000}, & \text{se } I_2 \\ 0,25\pi h_1(t), & \text{se } I_3 \end{cases} \quad (10)$$

em que

$$\begin{aligned} I_1 &:= h_1(t) \in [0,95, 1] & I_2 &:= h_1(t) \in [0,05, 0,95) \\ I_3 &:= h_1(t) \in [0, 0,05] \end{aligned}$$

e para V_2 , considerando $z = 0,9 \text{ m}$,

$$\begin{aligned} \int A_{meio} &= \int_{0,1}^{h_2(t)} \pi R^2 - \frac{\pi}{9}(y + 0,2)^2 dy \\ &= 0,25\pi(h_2(t) - 0,1) - \frac{\pi}{27} [(h_2(t) + 0,2)^3 - 0,3^3] \\ &= -\frac{\pi}{27} h_2^3(t) - \frac{\pi}{45} h_2^2(t) + \frac{221\pi}{900} h_2(t) - \frac{82\pi}{3375} \end{aligned}$$

$$\int A_{inf} = \int_0^{h_2(t)} \pi R^2 dy = 0,25\pi h_2(t)$$

Portanto, V_2 será

$$V_2 = \begin{cases} -\frac{\pi}{27} h_2^3(t) - \frac{\pi}{45} h_2^2(t) + \frac{221\pi}{900} h_2(t) + \frac{19\pi}{27000} & \text{se } I_4 \\ 0,25\pi h_2(t) & \text{se } I_5 \end{cases} \quad (11)$$

em que

$$I_4 := h_2 \in [0,1, 1] \quad I_5 := h_2 \in [0, 0,1)$$

3. MODELO NÃO LINEAR

A partir de (10) e (11) é possível desenvolver o modelo não linear do sistema de vasos comunicantes. Note também que se adotou apenas as equações para as regiões I_2 e I_4 , pois elas que contém o ponto de operação.

A vazão de água, variação do fluxo de fluidos no tempo, é definida matematicamente como $\partial V / \partial t = \text{vazão}$. Para o caso estudado, tem-se

$$\frac{\partial V_1}{\partial t} = q_i(u(t)) - q_{12}(t) \quad \frac{\partial V_2}{\partial t} = q_{12}(t) - q_0(h_2(t))$$

3.1 Ponto de operação

Para o ponto de operação, $h_2(t) \approx 0,8 \text{ m}$, segue-se

$$\begin{aligned} q_0(0,8) &= 2,6\sqrt{0,8} & q_{12}(t) &= 6,78\sqrt{|h_1(t) - 0,8|} \\ q_i(u(t)) &= 2,617 \times 10^{-4} u^2(t) + 0,03 \end{aligned}$$

E, sabendo-se que para o sistema estabilizado, $q_0 = q_{12} = q_i$ e ainda o fluxo de água é do TQ-01 para TQ-02 (i.e., $h_1(t) > h_2(t)$), obtém-se

$$\begin{aligned} 6,78\sqrt{h_1(t) - 0,8} &= 2,6\sqrt{0,8} \\ h_1(t) &= \left(\frac{130}{339} \right)^2 \cdot 0,8 \approx 0,918 \text{ m} \end{aligned}$$

e

$$2,6\sqrt{0,8} = 2,617 \times 10^{-4}u^2(t) + 0,03$$

$$u(t) = \sqrt{\frac{2,6\sqrt{0,8} - 0,03}{2,617 \times 10^{-4}}} \approx 93,656$$

Isto é, se configura por $h_1(t) \approx 0,918$ m, $h_2(t) \approx 0,800$ m, $u(t) \approx 93,656$ %.

A vazão do TQ-01 então é obtida fazendo $\partial V_1/\partial t$, ou seja

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_1}{\partial t} &= \pi h_1^2(t) \dot{h}_1(t) - 0,9\pi h_1(t) \dot{h}_1(t) + 0,25\pi \dot{h}_1(t) \\ &= \dot{h}_1(t) [\pi h_1^2(t) - 0,9\pi h_1(t) + 0,25\pi] \end{aligned} \quad (12)$$

Igualando a derivada parcial com a diferença das vazões

$$\begin{aligned} \dot{h}_1(t) [\pi h_1^2(t) - 0,9\pi h_1(t) + 0,25\pi] &= 2,617 \times 10^{-4}u^2(t) \\ &\quad + 0,03 - 6,78\sqrt{|h_1(t) - h_2(t)|} \\ \dot{h}_1(t) &= \frac{2,617 \times 10^{-4}u^2(t) + 0,03 - 6,78\sqrt{|h_1(t) - h_2(t)|}}{\pi h_1^2(t) - 0,9\pi h_1(t) + 0,25\pi} \end{aligned} \quad (13)$$

Para o TQ-02, faz-se $\partial V_2/\partial t$, isto é

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_2}{\partial t} &= -\frac{\pi}{9}h_2^2(t)\dot{h}_2(t) - \frac{2\pi}{45}h_2(t)\dot{h}_2(t) + \frac{221\pi}{900}\dot{h}_2(t) \\ &= \dot{h}_2(t) \left[-\frac{\pi}{9}h_2^2(t) - \frac{2\pi}{45}h_2(t) + \frac{221\pi}{900} \right] \end{aligned} \quad (14)$$

Igualando a derivada parcial com a diferença das vazões

$$\begin{aligned} \dot{h}_2(t) \left[-\frac{\pi}{9}h_2^2(t) - \frac{2\pi}{45}h_2(t) + \frac{221\pi}{900} \right] &= 6,78\sqrt{|h_1(t) - h_2(t)|} \\ &\quad - 2,6\sqrt{h_2(t)} \\ \dot{h}_2(t) &= \frac{6,78\sqrt{|h_1(t) - h_2(t)|} - 2,6\sqrt{h_2(t)}}{-\pi h_2^2(t)/9 - 2\pi h_2(t)/45 + 221\pi/900} \end{aligned} \quad (15)$$

Aplicando $h_2(t) = 0,8$ m em sabendo-se que para o sistema estabilizado, $\partial V_1/\partial t = \partial V_2/\partial t = 0$

4. LINEARIZAÇÃO

Para linearizar (13) e (15), utilizar-se-á os jacobianos da equação de espaço de estados.

4.1 Espaço de Estados

Seja a saída do sistema $y_1(t) := h_2(t)$ e $u_1(t) := u(t)$. Seja ainda $x_1(t) := h_1(t)$ e $x_2(t) := h_2(t)$, assim

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = [y_1(t)], \quad \dot{\mathbf{u}}(t) = [u_1(t)] \quad (16)$$

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{h}_1(t) \\ \dot{h}_2(t) \end{bmatrix} \quad (17)$$

Representando no espaço de estados, cuja forma é

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}(t) \end{cases} \quad (18)$$

sendo \mathbf{A} e \mathbf{B} o jacobiano de $\dot{\mathbf{h}}(t)$ em relação à \mathbf{x} e \mathbf{u} respectivamente, tais que

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \partial \dot{h}_1 / \partial x_1 & \partial \dot{h}_1 / \partial x_2 \\ \partial \dot{h}_2 / \partial x_1 & \partial \dot{h}_2 / \partial x_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \partial \dot{h}_1 / \partial u_1 \\ \partial \dot{h}_2 / \partial u_1 \end{bmatrix} \quad (19)$$

e \mathbf{y} a saída do sistema ($h_2(t)$) \mathbf{C} e \mathbf{D} o jacobiano de $h_2(t)$ em relação a \mathbf{x} e \mathbf{u} , respectivamente, tais que

$$\mathbf{C} = [\partial h_2 / \partial x_1 \quad \partial h_2 / \partial x_2] \quad \mathbf{D} = [\partial h_2 / \partial u_1] \quad (20)$$

Resolvendo o jacobianos para \mathbf{A} e \mathbf{B} por meio do MATLAB, encontra-se

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -11,8186 & 11,8186 \\ 22,6513 & -25,9824 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0,0586 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (21)$$

Contudo que não foi usado o MATLAB para fazer o jacobiano para \mathbf{C} e \mathbf{D} pois estes são simples de calcular. Já que $y_1 = h_2$, tem-se

$$\mathbf{C} = [0 \ 1] \quad \mathbf{D} = [0] \quad (22)$$

Esta resolução foi feita por meio do *Script* exibido abaixo.

```
1 syms u
2 syms h1 h2
3 syms g1 g2
4
5 %Valores do sistema
6 v_h2 = 0.8;
7 v_h1 = v_h2*(130/339)^2+v_h2;
8 v_u = sqrt( (6.78*sqrt(v_h1-v_h2) - ...
9           0.03)/(2.617*10^(-4) ) );
10
11 %Equacoes
12 q1 = 2.617*10^(-4)*u^2 + 0.03;
13 q12 = 6.78*sqrt(h1-h2);
14 q0 = 2.6*sqrt(h2);
15 dh1 = ( q1 - q12 ) / ( pi*h1^2 - 0.9*pi*h1 + ...
16       0.25*pi );
17 dh2 = ( q12 - q0 ) / ( -(pi/9)*h2^2 - ...
18       2*pi*h2/45 + 221*pi/900 );
19
20 %Linearizacao
21 A1 = jacobian([dh1,dh2],[h1,h2]);
22 A2 = subs(A1,[u,h1,h2],[v_u,v_h1,v_h2]); ...
23 %substituicao das variaveis
24 A = double(A2)
25
26 B1 = jacobian([dh1,dh2],u);
27 B2 = subs(B1,[u,h1],[v_u,v_h1]);
28 B = double(B2)
```

4.2 Análise da linearização em torno do ponto de operação

A fim de analisar o comportamento do modelo em torno de $h_2(t) \approx 0,8$ m, variou-se o $u(t)$ em +2 % e -5% para ambos os modelos — linear e não linear — e plotando seus gráficos para uma comparação visual. A Figura 7 exibe o comportamento de $h_1(t)$ de cada modelo.

É possível observar que o modelo linear tem resposta bastante próxima ao não linear, afirmando que a modelagem para este ponto corresponde bem com o fenômeno físico¹.

¹ Vale ressaltar que o equacionamento adotado para $h_1(t)$ só é válido se este se insere entre 0,05 e 0,95, inclusive. Contudo, como a atividade se interessa na linearização, foi admitido como se todo o tanque tivesse o comportamento descrito por (13).

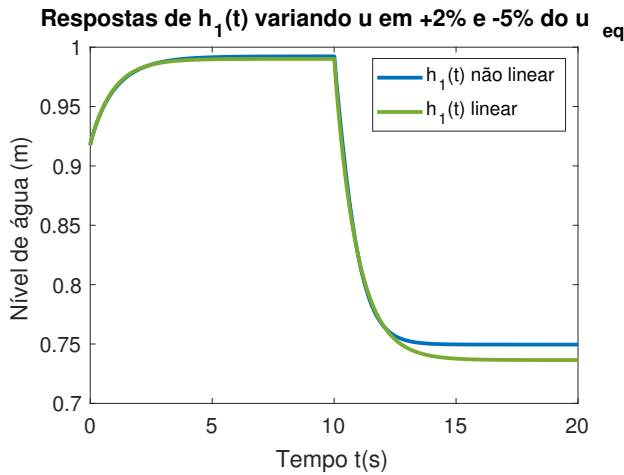


Figura 7. Gráficos de $h_1(t) \times t$ partindo da sua altura de equilíbrio $\approx 0,918$ m para ambos os modelos

Fazendo o mesmo para $h_1(t)$ temos os gráficos expostos na Figura 8.

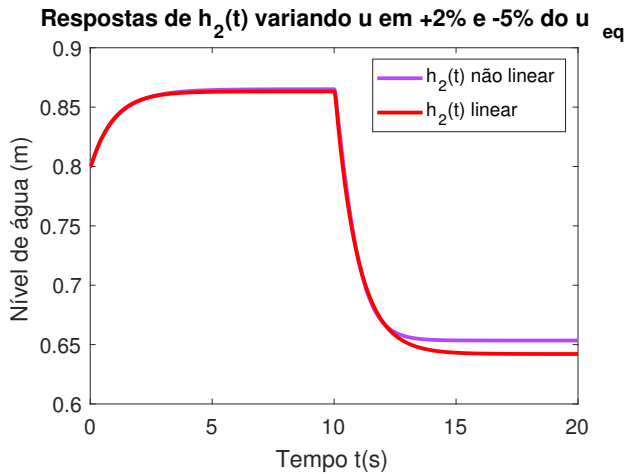


Figura 8. Gráficos de $h_1(t) \times t$ partindo da sua altura de equilíbrio $\approx 0,918$ m para ambos os modelos

Nesse caso também se observa que o modelo linear se aproxima bastante do não linear, sendo quase incidentes, ou seja, uma boa aproximação. O Script usado para a plotagem dos gráficos das Figuras 7 e 8 é mostrado a seguir.

```

1 % Codigo anterior
2
3 C1 = [1 0]; %y = h1
4 C2 = [0 1]; %y = h2
5 D = 0;
6 x0 = [v_h1, v_h2];
7
8 linear1 = ss(A,B,C1,D);
9 linear2 = ss(A,B,C2,D);
10
11 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
12 %                               Modelo nao linear                       %
13 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
14 opt = odeset('Abstol', 1e-6, 'Reltol', 1e-6);
15 %configuracao da ODE (erros relativos e ...
    absolutos)

```

```

16 ta = 0:0.01:10;
17 tb = 10.01:0.01:20;
18 y0 = [v_h1, v_h2];
19 [t1,y1] = ode23(@(t1,y1) ...
    odefcn(t1,y1,v_u*1.02), ta, y0, opt);
20 [ly1,cy1] = size(y1); %quer-se o ultimo ...
    ponto de y1
21 [t2,y2] = ode23(@(t2,y2) ...
    odefcn(t2,y2,v_u*0.95), tb, y1(ly1,:), opt);
22
23 tnl = [t1; t2];
24 ynl = [y1; y2];
25
26 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
27 %                               Modelo linear                           %
28 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
29 tt = 0:0.01:20;
30 J = tf(1);
31 valU1 = v_u*1.02-v_u;
32 valU2 = v_u*0.95-v_u;
33 opt1 = ...
    stepDataOptions('StepAmplitude',valU1); ...
    % + 2%
34 opt2 = ...
    stepDataOptions('StepAmplitude',valU2); ...
    % - 5%
35 u1 = step(J, opt1, ta); %configurando u1
36 u2 = step(J, opt2, tb); %configurando u2
37 u = [u1; u2];
38 y1 = lsim(linear1, u, tt) + v_h1;
39 y12 = lsim(linear2, u, tt) + v_h2;
40 plot(tnl, ynl(:,1), '- ', tt, y1, '- ');
41 plot(tnl, ynl(:,2), '- ', tt, y12, '- ');
42
43 function dydt = odefcn(t,y,u)
44 dydt = zeros(2,1);
45 dydt(1) = ( 2.617*10^(-4)*u^2 + 0.03 - ...
    6.78*sqrt(y(1)-y(2)) ) / ( pi*y(1)^2 - ...
    0.9*pi*y(1) + 0.25*pi );
46 dydt(2) = ( 6.78*sqrt(y(1)-y(2)) - ...
    2.6*sqrt(y(2)) ) / ( -(pi/9)*y(2)^2 - ...
    2*pi*y(2)/45 + 221*pi/900 );
47 end

```

4.3 Análise da linearização fora do ponto de operação

A análise da linearização longe do ponto de operação se dará partindo de $h_2(t) = 0,2$ m e variando $h_2(t)$ em 0,15 m e 0,5 m no modelo linear. Então ver-se-á se $h_1(t)$ e $h_2(t)$ para o modelo não linear se aproxima daquele. Ou seja, preservar-se-á o modelo, o $u_{eq} \approx 93,656\%$ e o $y_{eq} \approx 0,8$ m e variará o u_{real} .

Para $h_2(t) \approx 0,2$ m, segue-se $h_1(t) \approx 0,229$. Enquanto que para $h_2(t) \approx 0,15$ m, tem-se $h_1(t) \approx 0,172$ m e $u_{0,15}(t) \approx 61,01\%$; para $h_2(t) \approx 0,5$ m, tem-se $h_1(t) \approx 0,574$ m e $u_{0,5}(t) \approx 83,13\%$.

Plotando-se os gráficos de $h_1(t)$ para os dois modelos quando submetido a $u_{0,15}$, vê-se o que é mostrado na Figura 9.

É possível observar que a linearização para 0,15 m é bastante incoerente com o modelo não linear, tendo, inclusive valores negativos, que indicam que a linearização é totalmente inválida para o ponto 0,15 m.

Contudo, quando se opera com $u_{0,5}$, vê-se que o modelo linear se aproxima do não linear, embora permaneça ra-

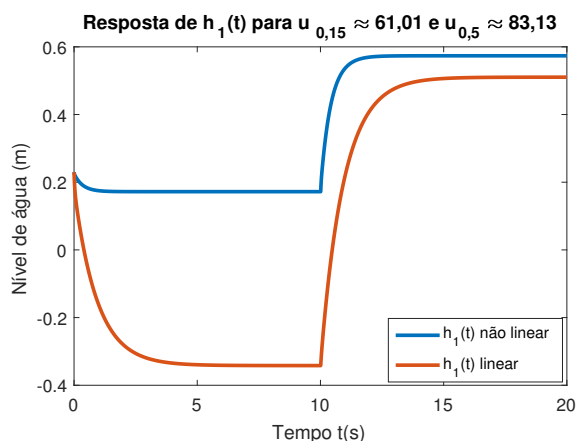


Figura 9. Gráficos de $h_1(t) \times t$ para $u_{0,15} \approx 61,01\%$ e $u_{0,5} \approx 83,13\%$ para ambos os modelos

zoavelmente um pouco distante. Ainda se observa que em ambos os casos, o modelo linear apresentou considerável demora em estabilizar seu valor, em relação ao outro modelo.

A Figura 10 mostra as curvas $h_1(t) \times t$ para ambas modelagens.

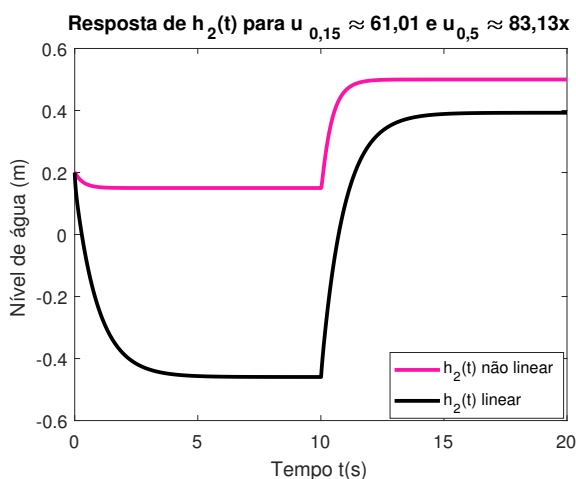


Figura 10. Gráficos de $h_2(t) \times t$ para $u_{0,15} \approx 61,01\%$ e $u_{0,5} \approx 83,13\%$ para ambos os modelos

Como esperado, para $u_{0,15}$ o nível de $h_2(t)$ do modelo linear mostra um valor discrepante com o não linear, novamente apresentando valores negativos, que indicam que o modelo é totalmente inválido nesta região. Conquanto, para 0,5 m seu comportamento se aproxima da curva do não linear, embora ainda com razoável distância.

O script usado para a plotagem destes gráficos foi

```
1 %Codigo anterior
2 C1 = [1 0]; %y = h1
3 C2 = [0 1]; %y = h2
4 D = 0;
5
6 linear1 = ss(A,B,C1,D); %y = h1
7 linear2 = ss(A,B,C2,D); %y = h2
8
9 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
10 % Para 0.15-0.5 %
11 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
12 h20 = 0.2; %Valor inicial de h2
13 h10 = h20*(130/339)^2+h20;
14
15
16 v2h2 = 0.15;
17 v2h1 = v2h2*(130/339)^2+v2h2;
18 v2u = sqrt( (6.78*sqrt(v2h1-v2h2) - ...
19 0.03)/(2.617*10^(-4) ) );
19 v3h2 = 0.5;
20 v3h1 = v3h2*(130/339)^2+v3h2;
21 v3u = sqrt( (6.78*sqrt(v3h1-v3h2) - ...
22 0.03)/(2.617*10^(-4) ) );
23
24 opt = ode23('Abstol', 1e-6, 'Reltol', 1e-6);
25 ta = 0:0.01:10;
26 tb = 10.01:0.01:20;
27 y02 = [h10, h20];
28
29 [t1,y1] = ode23(@(t1,y) odefcn(t1,y,v2u), ...
30 ta, y02, opt);
31 [ly1,c] = size(y1); %quer-se o ultimo valor ...
32 de y1
33 [t2,y2] = ode23(@(t2,y) odefcn(t2,y,v3u), ...
34 tb, y1(ly1,:), opt);
35
36 tnl = [t1; t2];
37 ynl = [y1; y2];
38
39 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
40 % Modelo linear %
41 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
42 tt = 0:0.01:20;
43 K = tf(1);
44 opt1 = stepDataOptions('StepAmplitude', ...
45 v2u-v_u);
46 opt2 = stepDataOptions('StepAmplitude', ...
47 v3u-v_u);
48
49 u1 = step(K, opt1, ta);
50 u2 = step(K, opt2, tb);
51 u = [u1; u2];
52 y1 = lsim(linear1,u,tt,y02-v_h1) + v_h1;
53 plot(tnl, ynl(:,1), '- ', tt, y1, '- ');
54
55 y12 = lsim(linear1,u,tt,[h20-v_h2 h20-v_h2]) ...
56 + v_h2;
57 plot(tnl, ynl(:,2), '- ', tt, y12, '- ');
58
59 function dydt = odefcn(t,y,u)
60 dydt = zeros(2,1);
61 dydt(1) = ( 2.617*10^(-4)*u^2 + 0.03 - ...
62 6.78*sqrt(y(1)-y(2)) ) / ( pi*y(1)^2 - ...
63 0.9*pi*y(1) + 0.25*pi );
64 dydt(2) = ( 6.78*sqrt(y(1)-y(2)) - ...
65 2.6*sqrt(y(2)) ) / ( -(pi/9)*y(2)^2 - ...
66 2*pi*y(2)/45 + 221*pi/900 );
67 end
```

5. CONCLUSÃO

Diante do caso estudado, pode-se perceber que a validade de um modelo linear de um sistema que se comporta de maneira não linear, está bastante vinculado ao ponto de operação usado na linearização. Usar um modelo linearizado para um ponto muito longe do valor de operação, implica em demora na estabilidade do sistema, respostas

discrepantes e pouco precisas e até invalidez, mesmo que a equação compreenda o ponto usado.

Destarte, ao se mudar muito o ponto de operação, é recomendável fazer uma outra linearização, para que se evite grandes imprecisões na saída do controlador.