



Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais
Departamento de Engenharia Mecatrônica
Engenharia Mecatrônica

Identificação de Sistemas

Bernardo Bresolini e Ester Q. Alvarenga

Divinópolis

Setembro/2020

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Objetivos	1
2	Preliminares	2
2.1	Método da resposta ao degrau	2
2.2	Método da resposta ao degrau — Segunda ordem	3
2.3	Índices de desempenho e o coeficiente de determinação	4
2.3.1	IAE	5
2.3.2	ITAE	5
2.3.3	RMSE	6
2.3.4	R^2	6
3	Identificação de Sistemas	7
3.1	Teste dinâmico e coleta de dados	7
3.1.1	Ponto de operação para o sistema e sinal de controle	8
3.1.2	Vetor degrau	8
3.1.2.1	Vetor sinal de controle	9
3.1.2.2	Vetor referência	9
3.2	Obtenção da representação matemática para o sistema	9
3.3	Estimação de parâmetros	10
3.4	Modelo de segunda ordem	10
3.5	Validação do modelo	11
4	Resultados e Discussão	12
4.1	Teste dinâmico e coleta de dados	12
4.1.1	Ponto de operação e sinal de controle	12
4.1.2	Vetores degraus	13
4.1.3	Simulação	13
4.2	Obtenção da representação matemática para o sistema	14
4.2.1	Modelo de segunda ordem	15
4.3	Validação dos modelos	16
5	Conclusão	19
	Referências	20

1 Introdução

A identificação de sistemas é uma área de modelagem matemática que estuda técnicas em que pouco ou nenhum conhecimento prévio do sistema é necessário para descrever as relações de causa e efeito entre suas variáveis de entrada e saída (AGUIRRE, 2007). Esta modelagem, também chamada de modelagem empírica, é frequentemente utilizada quando não se conhecem as equações envolvidas no funcionamento do sistema ou elas são conhecidas, mas são impraticáveis. Por esse motivo, as primeiras práticas da disciplina de Laboratório de Teoria de Controle teve como propósito realizar as principais etapas de um problema de identificação de sistemas.

1.1 Objetivos

Nestes termos, é objetivo deste trabalho é descrever a prática de identificação de sistemas para um sistema de controle de nível.

Para alcançar tal objetivo, é preciso seguir as etapas: realizar testes dinâmicos e coletar dados; escolher a representação matemática a ser usada; determinar a estrutura do modelo; estimar os parâmetros e validar o modelo.

2 Preliminares

Para que um processo seja controlado, é essencial que seja conhecida a relação causal entre suas entradas e saídas. Por este e outros motivos, as técnicas de identificação de sistemas são estudadas, uma vez que esta abordagem se propõe a obter um modelo matemático que explique, de forma aproximada, a relação de causa e efeito presente nos dados (AGUIRRE, 2007). Assim, dentre várias técnicas de identificação, o método dos três parâmetros para a resposta ao degrau é destacado por sua simplicidade e uso em sintonias de controlador PID (ÅSTRÖM; HAGGLUND, 1995). Destarte, nas demais seções ele será abordado.

2.1 Método da resposta ao degrau

Devido a sua simples interpretação física, a resposta ao degrau é uma maneira conveniente de caracterizar a dinâmica de um processo. Neste método, parâmetros são utilizados para capturar as propriedades estáticas e dinâmicas de um sistema.

Considerando o modelo

$$G(s) = \frac{k}{1 + sT} e^{-sL} \quad (2.1)$$

em que k é o ganho estático, T a constante de tempo e L é o tempo morto ou atraso do sistema. Esse modelo é caracterizado pelos três parâmetros (k, T, L) . A resposta ao degrau desse modelo, adaptado de Åström e Hagglund (1995) é dada por

$$s(t) = k(1 - e^{-(t-L)/T})\mu(t - L) \quad (2.2)$$

sendo μ a função de Heaviside definida como

$$\mu(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t < 0 \\ 1, & \text{se } t \geq 0 \end{cases}.$$

A constante

$$\tau = \frac{L}{L + T} = \frac{L}{T_{ar}} \quad (2.3)$$

com T_{ar} igual ao tempo de residência médio, apresenta a propriedade $0 \leq \tau \leq 1$, chamada de taxa normalizada do tempo morto ou taxa de controlabilidade. Este parâmetro indica a dificuldade de se controlar um sistema, quanto mais próximo de $\tau \sim 1$ mais difícil poderá ser o controle.

Os parâmetros de (2.1) podem ser determinados graficamente. O ganho estático (k) e o tempo de atraso (L) são obtidos de forma direta, como mostra o gráfico da FIG. 1. Já o parâmetro T pode ser obtido fazendo:

1. A constante de tempo equivalente a distância $T = AC$,
2. A constante de tempo equivalente a distância $T = AB$.

A reta mostrada na FIG. 1 é tangente no ponto de maior inclinação da resposta temporal. Para ambos os métodos, o ponto A é aquele na qual a reta toca o eixo das abscissas; enquanto B é o tempo na qual a resposta atinge $0,63K$. Por fim, C é o instante na qual a reta atinge K .

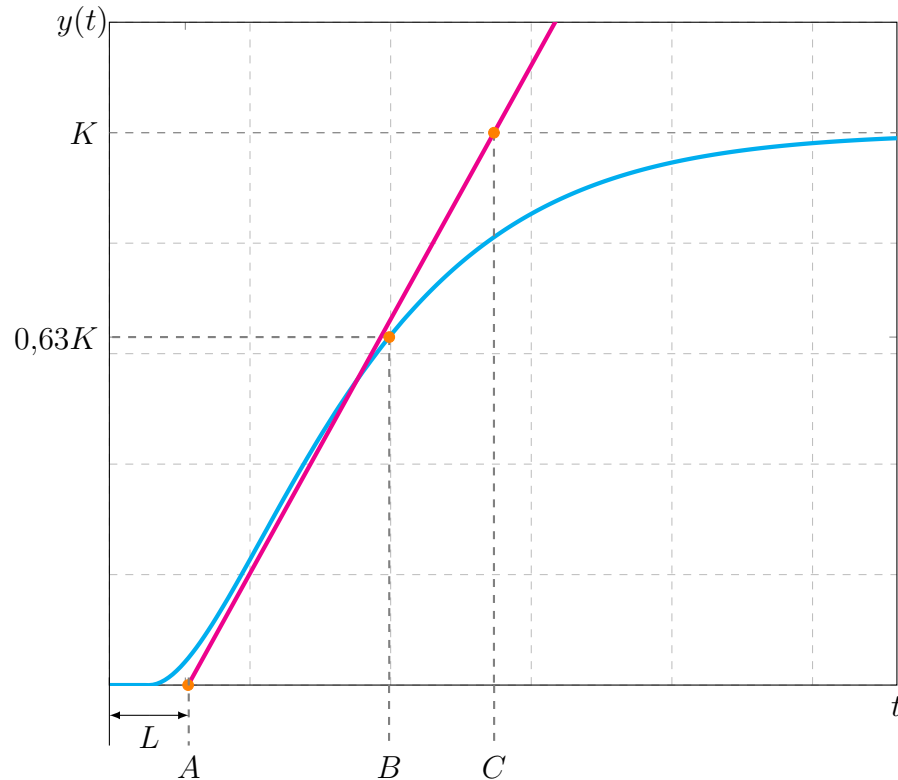


Figura 1 – Determinação gráfica dos três parâmetros do modelo (2.1) para sistemas sujeito a uma entrada degrau.

2.2 Método da resposta ao degrau — Segunda ordem

Considere o sistema de segunda ordem criticamente amortecido, dado por

$$G(s) = \frac{K}{(1 + sT)^2} e^{-Ls} \quad (2.4)$$

De acordo com Åstrom e Hagglund (1995) e aplicando uma adaptação, a resposta temporal de (2.4) é dada por

$$s(t) = K \left[1 - \left(1 + \frac{t-L}{T} \right) e^{-\frac{t-L}{T}} \right] \mu(t-L). \quad (2.5)$$

As constantes K e L são obtidas conforme o método anterior. Entretanto, o termo T é obtido resolvendo (2.5) para $t = t_{ss}$ (tempo no qual a resposta é $s(t) = 0,98K$). Logo,

$$0,02 = \left(1 + \frac{t_{ss}-L}{T} \right) e^{-\frac{t_{ss}-L}{T}}$$

Se tomarmos $w = -\frac{t_{ss}-L}{T} - 1$ e $z = -0,02/e$, tem-se

$$\begin{aligned} we^{w+1} &= -0,02 \\ \implies we^w &= z \end{aligned} \quad (2.6)$$

A equação (2.6) é definida na literatura como função W de Lambert em homenagem ao matemático suíço Johann Heinrich Lambert que em 1758 iniciou o estudo de tal função (CORLESS *et al.*, 1996).

Como (2.6) aparece em diversas aplicações de matemática pura e aplicada (resolução analítica de equações, combinatória, física quântica, problemas de combustão de jatos, controle de sistemas lineares com delay e afins), existem diversos métodos numéricos para resolvê-la¹. Foi adotado o método de Halley

$$w_{k+1} = w_k + \frac{f(w_k)}{\sqrt{|f'(w_k)|}} = w_k + \frac{w_k e^{w_k} - z}{e^{w_k}(w_k + 1) - \frac{(w_k+2)(w_k e^{w_k} - z)}{2w_k+2}}, \quad (2.7)$$

devido sua convergência ser cúbica. Sendo f a função a ser resolvida numericamente.

Obtendo o valor de w , o tempo de acomodação T é obtido por

$$T = \frac{t_{ss} - L}{w + 1}. \quad (2.8)$$

2.3 Índices de desempenho e o coeficiente de determinação

Os índices de desempenho IAE , $ITAE$ e $RMSE$ são valores que quantificam o desempenho de um modelo em relação a um conjunto de dados tomados como padrão. Sendo assim, eles possibilitam uma comparação matemática entre os modelos. Entretanto, eles devem ser usados estritamente para as comparações de modelos pois não exprimem resultado

¹ No MATLAB® é resolvido pelo método `lamberw`, enquanto que no Python o *package* Scipy também implementa o método `scipy.special.lambertw` para resolvê-lo.

normalizado. Ainda, a estimação cujos índices de desempenho obteve menor valor, é a que melhor aproxima dos dados reais.

Os dois primeiros são índices de desempenho usado amiúde na literatura de controle. O *IAE* atribui a cada instante a mesma importância; o *ITAE* prioriza os valores finais da simulação (BANERJEE *et al.*, 2011). O *RMSE* também não prioriza nenhum instante, mas ele computa a dispersão da estimação ao longo dos dados reais.

Por fim, o coeficiente de determinação é um valor usado para regressões lineares para as quais se deseja determinar o quanto dos dados estimados correspondem aos dados reais. Ele pode variar de 0 a 1, para 1 sendo a melhor regressão e 0 a pior. Assim, diferente dos índices de desempenho supracitados, ele consegue informar acerca da regressão sem a necessidade de comparação. Embora possa ser usado para tal.

2.3.1 IAE

A integral do erro absoluto (*integral absolute error IAE*) é definida matematicamente como

$$IAE = \int_0^T |e(t)|dt = \int_0^T |y(t) - \hat{y}(t)|dt, \quad (2.9)$$

sendo e o resíduo dos dados reais com o modelo aproximado, y a resposta temporal dos dados reais, \hat{y} a resposta temporal do modelo aproximado e T o tempo final da simulação.

Como os dados são discretizados em intervalos equidistantes em Δt , (2.9) se torna

$$IAE = \sum_{j=0}^{T/\Delta t} |y(j) - \hat{y}(j)|\Delta t, \quad (2.10)$$

no qual j é o índice do vetor que contém os valores das respostas temporais.

2.3.2 ITAE

A integral de tempo do erro absoluto (*integral time absolute error ITAE*) é definida matematicamente como

$$ITAE = \int_0^T |e(t)|t dt = \int_0^T |y(t) - \hat{y}(t)|t dt, \quad (2.11)$$

sendo e o resíduo dos dados reais com o modelo aproximado, y a resposta temporal dos dados reais, \hat{y} a resposta temporal do modelo aproximado e T o tempo final da simulação.

Como os dados são discretizados em intervalos equidistantes em Δt , (2.11) se torna,

$$ITAE = \sum_{j=0}^{T/\Delta t} |y(j) - \hat{y}(j)|j(\Delta t)^2, \quad (2.12)$$

no qual j é o índice do vetor que contém os valores das respostas temporais.

2.3.3 RMSE

A raiz da média quadrada do erro (*root mean square error RMSE*) é definida matematicamente como

$$RMSE = \sqrt{\text{mean}[(y - \hat{y})^2]} \quad (2.13)$$

sendo y a resposta temporal dos dados reais, \hat{y} a resposta do modelo. O operador `mean` significa a média dos valores.

2.3.4 R^2

O coeficiente de determinação é vastamente aplicado em regressões estatísticas e é usado para inferir a adequabilidade de uma regressão. Ele também indica a quantidade de variação dos dados explicada pela regressão (MONTGOMERY; RUNGER, 2014).

Ele é calculado fazendo

$$R^2 = 1 - \frac{SS_E}{SS_T} = 1 - \frac{\sum_{j=0}^n [y(j) - \text{mean}(y)]^2}{\sum_{j=0}^n [y(j) - \hat{y}(j)]^2} \quad (2.14)$$

no qual y é os dados reais, `mean(y)` sua média, \hat{y} a estimacão e n a quantidade de dados.

O valor de R^2 é normalizado entre 0 e 1. Da (2.14) se observa que caso o resíduo seja nulo (i.e., $y - \hat{y} = 0$), o coeficiente de determinação se torna 1. Assim, quanto mais próximo de 1, melhor é a regressão feita.

3 Identificação de Sistemas

Para fins de estudo, as técnicas de identificação de modelo serão aplicadas em um sistema de controle de nível. Representado pelo diagrama da FIG. 2. Esse sistema tem como objetivo de controle regular a altura da coluna de líquido em torno do ponto de operação desejado.

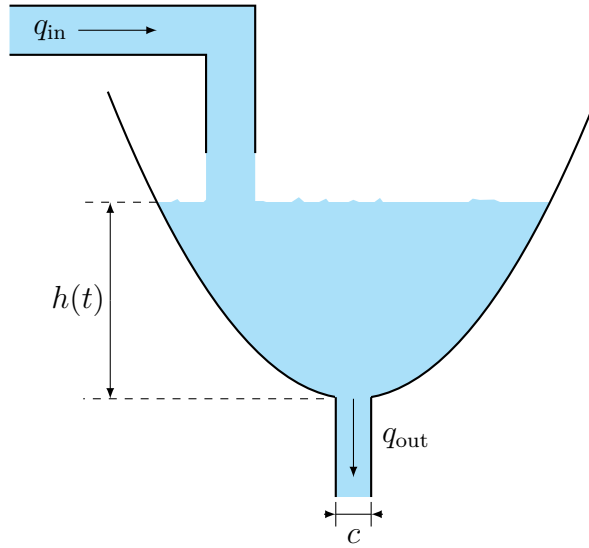


Figura 2 – Sistema dinâmico de um tanque para controle de nível

A EDO que rege o comportamento do sistema é

$$\begin{aligned}\dot{h}(t) &= \frac{q_{in} - q_{out}}{A} \\ &= \frac{16,998u(t) - 12,741h(t) - 462,893}{3019}\end{aligned}\tag{3.1a}$$

$$y(t) = h(t)\tag{3.1b}$$

sendo q_{in} a vazão de entrada em cm^3/s , q_{out} a vazão de saída em cm^3/s , $u(t)$ é o sinal de controle dado em porcentagem e limitado ao intervalo $[0, 100]$, e $y(t)$ a saída de interesse do sistema, limitada a $[0, 70]$ cm.

3.1 Teste dinâmico e coleta de dados

Nesta etapa, as características da dinâmica do sistema de controle de nível durante o processo de aquisição de dados para a modelagem devem ser obtidas. Para tal, é determinado

o ponto de operação, o sinal de controle, um vetor que contém a referência do sistema e um vetor contendo os sinais em degrau aplicados ao sistema descrito em (3.1a).

3.1.1 Ponto de operação para o sistema e sinal de controle

Após escolher o ponto de operação y_{op} . O sinal de controle necessário para levar o sistema em regime permanente a este ponto pode ser encontrado com (3.1a), sabendo que em estado estacionário, a variação é nula, i.e, $\dot{h}(t \rightarrow \infty) = 0$. Portanto,

$$u_{op} = \frac{462,893 + 12,741y_{op}}{16,998} \quad (3.2)$$

3.1.2 Vetor degrau

Para obter os degraus requeridos para o sistema — vetor degrau de referência para malha aberta e vetor degrau do sinal de controle — foi feito o método `degrau` que retorna um vetor com o sinal degrau. Para tanto, deve ser passado o tempo do degrau (`tstep`), o tempo final (`tf`), e o intervalo de tempo (`dt`) entre os valores do vetor de saída, necessariamente. Opcionalmente, é possível escolher a amplitude do sinal de saída (`amp`), normalmente em 1 e o tempo inicial (`t0`), por definição 0.

O código utiliza do método `numpy.heaviside(x1, x2)` provido pela biblioteca NumPy, já usada pelo professor no código original. O método equivale a

$$\text{numpy.heaviside}(x1, x2) = \begin{cases} 0 & \text{se } x1 < 0 \\ x2 & \text{se } x1 = 0 \\ 1 & \text{se } x1 > 0 \end{cases}$$

no qual `x1` pode ser um vetor e o processo será feito elemento a elemento.

Deste modo, o método desenvolvido é

```
1 def degrau(tstep,tf,dt,amp=1,t0=0):
2     t=np.arange(t0,tf+dt,dt)
3     u=amp*np.heaviside(t-tstep,1)
4     return u
```

Para usar diversas funções degraus simultaneamente basta somar os vetores de forma a produzir o comportamento desejado.

3.1.2.1 Vetor sinal de controle

O vetor do sinal de controle, para ser usado posteriormente na identificação do sistema, é calculado de modo a produzir uma sequência de degraus em torno do ponto de operação, variando em 7% do fundo de escala.

Monta-se o vetor sinal de controle (uu), a partir do método `degrau` criado. Ainda, este vetor é feito por somas de `degrau`: para `max_du` igual a variação máxima do sinal de controle em torno do ponto de operação, soma-se ao ponto de operação um degrau de amplitude igual a 50% de `max_du`; diminui-se duas vezes 50% de `max_du` para que o sinal de controle volte ao sinal de controle do ponto de operação e atinja -50% de `max_du`; por fim, repete-se os passos descritos anteriormente a partir do ponto de operação para $\pm 100\%$ de `max_du`.

3.1.2.2 Vetor referência

O vetor de referência para o sistema em malha aberta, deve possuir a forma de uma sequência de degraus e também variar em torno do ponto de operação em no máximo 7% do fundo de escala. Sendo assim, computa-se o vetor de referência (r) a partir de (3.1a), assumindo $h(t) = 0$ e aplicando u igual aos valores do vetor de sinal de controle uu .

3.2 Obtenção da representação matemática para o sistema

Supondo que a equação que rege a dinâmica do sistema de controle de nível não é conhecida e que se quer modelar este sistema de forma experimental. Deve-se então, utilizar das ferramentas de identificação de sistemas. Para tanto, é preciso obter do sistema, apenas seus sinais de entrada e de saída. Dados que foram obtidos a partir da descrição da seção anterior.

Para fins de avaliação da representação matemática, selecionou-se três amostras de sinal de entrada com seus respectivos sinais de saída:

1. O segundo intervalo de *step* que vai de u_{op} a 50% de `max_du`;
2. O quarto intervalo de *step*, de u_{op} a -50% de `max_du`;
3. E o sexto intervalo de *step*, de u_{op} a -100% de `max_du`.

Aplicou-se o método da resposta ao degrau, elucidado na seção 2.1, para cada uma das saídas destes 3 intervalos, utilizando as duas formas de obtenção de T .

3.3 Estimação de parâmetros

Para obter o parâmetro T , precisa-se definir o ponto A , que por sua vez é determinado quando a reta tangente ao ponto de maior inclinação corta o eixo do tempo.

Uma reta é descrita pela equação:

$$y = a_1 t + a_0$$

em que a_1 representa a inclinação da reta e a_0 é onde a reta corta o eixo y .

Deste modo, a reta tangente foi traçada computando as diferenças $y_{j+1} - y_j$ da curva de saída. Uma vez que a inclinação da reta tangente é a derivada da curva, verificou-se qual o maior valor das diferenças e dividiu-o pelo passo de tempo Δt . Portanto, a_1 foi determinado.

Sabendo o instante t^* no qual a maior inclinação ocorre, sabe-se o ponto de tangência y^* . Por meio desses encontra-se a_0 fazendo

$$a_0 = y^* - a_1 t^* \quad (3.3)$$

O ganho estático k é adquirido selecionando o último valor da curva dividido pelo sinal de controle correspondente. E a partir de k encontra-se o ponto B que é o valor em segundos quando $y(t)$ é igual a $0,63k$. E também o ponto C , que é o instante em que a reta tangente apresenta $y = k$, ou seja,

$$C = \frac{1 - a_0}{a_1} \quad (3.4)$$

Uma vez definidos os valores dos pontos, os demais parâmetros são calculados facilmente, como é indicado na descrição do método da resposta ao degrau.

Ademais, calcula-se a constante τ aplicando os parâmetros temporais em (2.3). É esperado que o valor da controlabilidade seja próximo de 0, visto que o sistema representa um tanque.

3.4 Modelo de segunda ordem

Outra proposta de modelo testada para o sistema de nível é o modelo de segunda ordem apresentado na seção 2.2. Neste experimento, o objetivo é testar uma representação dinâmica capaz de retratar muitas situações e compará-la com o modelo de primeira ordem.

Para implementação, utilizou-se a aproximação do atraso pelo polinômio de Padé de décima ordem. Os parâmetros L e K foram os mesmos obtidos para o modelo médio final de primeira ordem e T foi calculado pela solução numérica (2.7) aplicada em (2.8).

Ainda, o desempenho do modelo de segunda ordem obtido para o tanque de controle de nível foi comparado com a melhor solução encontrada a partir do método da resposta ao degrau com sistemas de primeira ordem. De modo a verificar qual é a melhor representação para o tanque.

3.5 Validação do modelo

O modelo é validado ao testar seu comportamento em sinais de entrada diferentes aos usados para a obtenção do modelo. Caso o desempenho do modelo matemático obtido seja satisfatório, ou seja, se seu comportamento for suficientemente próximo do real, o modelo é tido como válido.

De modo a quantificar a performance dos modelos, utilizou-se os índices de desempenho IAE, ITAE, RMSE e R^2 para detectar a melhor representação matemática.

4 Resultados e Discussão

4.1 Teste dinâmico e coleta de dados

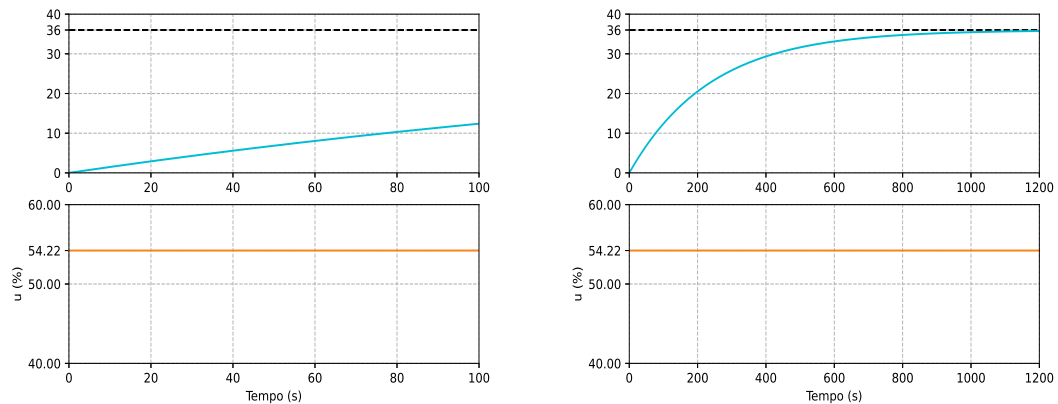
4.1.1 Ponto de operação e sinal de controle

O ponto de operação escolhido para controle é $y_{op} = 36$ cm. Portanto, aplicando o valor escolhido em (3.2), obtém-se o sinal de controle igual a

$$u_{op} = 54,22\%$$

ou seja, é necessário que 54,22 % do sinal de controle seja aplicado para que o sistema alcance $h = 36$ cm.

Foi disponibilizado pelo professor da disciplina, o código *Tank_MA.py* que simula a dinâmica de malha aberta do tanque. Simulando tal código com a variável (`amp`) igual a 54,22%, obteve-se a curva da FIG. 3(a), vê-se que o sistema não alcançou o ponto de operação desejado. Isso se deu porque o tempo de simulação não foi suficiente para que o tanque chegasse em $h = 36$ cm. Aumentando o tempo de duração do teste (`tf`), determinou-se que o tempo mínimo necessário para o sistema alcançar a altura desejada é de 1200 s, como mostra a FIG. 3(b).



(a) Resposta em malha aberta do tanque com 100 s de simulação

(b) Resposta em malha aberta do tanque com 1200 s de simulação

Figura 3 – Simulação das respostas temporais em malha aberta do tanque, submetido a um sinal de controle de 54,22 %

4.1.2 Vetores degraus

O fundo de escala é de 70 cm, sendo assim, a variação máxima da saída é de 4,9 cm e ocorre em torno da altura de 36 cm. Gerando, portanto, a partir de (3.2), o valor máximo do sinal de controle u_{max} e o valor mínimo u_{min} de

$$u_{max} = \frac{462,893 + 12,741(36 + 4,9)}{16,998} = 57,89\%$$

$$u_{min} = \frac{462,893 + 12,741(36 - 4,9)}{16,998} = 50,54\%$$

Logo, a variação máxima do sinal de controle ($u_{max} - u_{min}$) é de 7,35%. E ainda, a variação de u em torno do ponto de operação \max_du é de $7,35/2 = 3,67\%$.

O trecho abaixo descreve o vetor de sinal de controle calculado com o método `degrau`

```
1 uu = uop + degrau(ts,10*ts,dt,0.5*max_du) + \
2 degrau(2*ts,10*ts,dt,-0.5*max_du) + \
3 degrau(3*ts,10*ts,dt,-0.5*max_du) + \
4 degrau(4*ts,10*ts,dt,+0.5*max_du) + \
5 degrau(5*ts,10*ts,dt,-1.0*max_du) + \
6 degrau(6*ts,10*ts,dt,+1.0*max_du) + \
7 degrau(7*ts,10*ts,dt,+1.0*max_du) + \
8 degrau(8*ts,10*ts,dt,-1.0*max_du) + \
9 degrau(9*ts,10*ts,dt,-0.5*max_du)
```

Por meio de testes verificou-se que o sistema acomoda em 1200 s, sendo assim, utilizou-se o tempo de duração dos degraus de 2000 s para garantir que o sistema seja estabilizado.

Já o vetor referência, é descrito como:

```
1 r = ( 16.998*uu - 462.893 ) / (12.741)
```

4.1.3 Simulação

Tendo em mãos a equação que descreve a dinâmica do sistema de controle de nível, o vetor de sinal de controle e o vetor de referência é possível plotar a resposta do sistema (h), a sequência de degrau da referência e o sinal de controle (u).

A FIG. 4 apresenta tal simulação. Nota-se que com o tempo de 2000 s para o degrau a estabilização do sistema e a variação da resposta é visualizada de forma clara. Ainda é

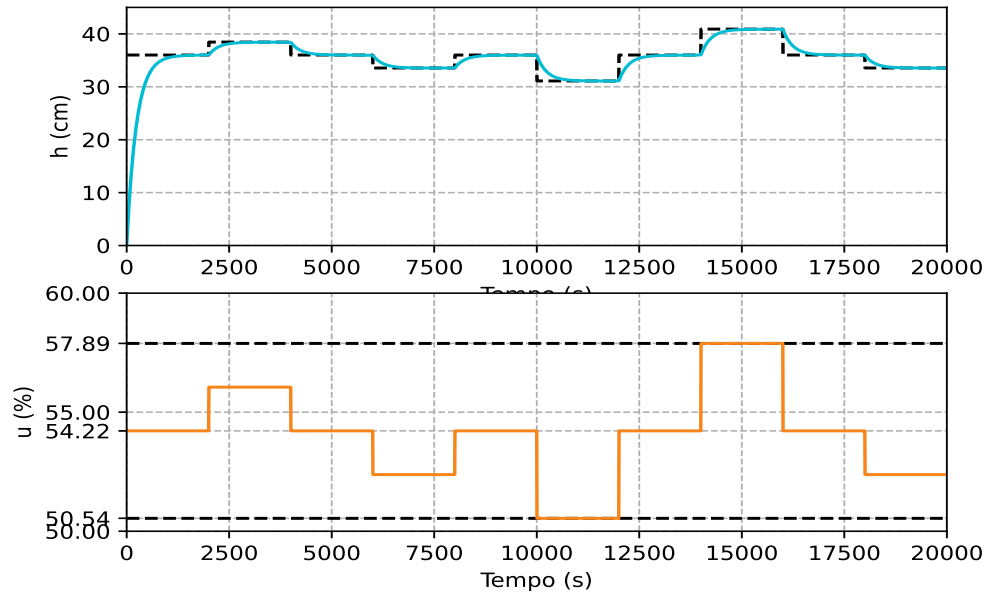


Figura 4 – Resposta do sistema controle de nível a um sinal de controle em degrau

possível observar que as variações dos degraus não ultrapassaram a amplitude máxima de 7% do fundo de escala.

4.2 Obtenção da representação matemática para o sistema

A FIG. 5 apresenta, para os três *steps* selecionados, a resposta da saída referente ao sinal de controle utilizado, juntamente com a reta tangente traçada no ponto de maior inclinação da curva. Os parâmetros obtidos de cada uma das curvas é apresentado na TAB. 1, em que T_1 é a constante de tempo equivalente a distância AC e T_2 é equivalente a distância AB .

Tabela 1 – Parâmetros dos modelos de primeira ordem

Parâmetros	k	L (s)	T_1 (s)	T_2 (s)
Intervalo 1	1,3253	2,259	234,641	232,991
Intervalo 2	1,3424	0	236,900	235,25
Intervalo 3	1,3381	0	236,900	235,25

Assim, os 6 modelos de primeira ordem requeridos podem ser obtidos substituindo os parâmetros da TAB. 1 em (2.1).

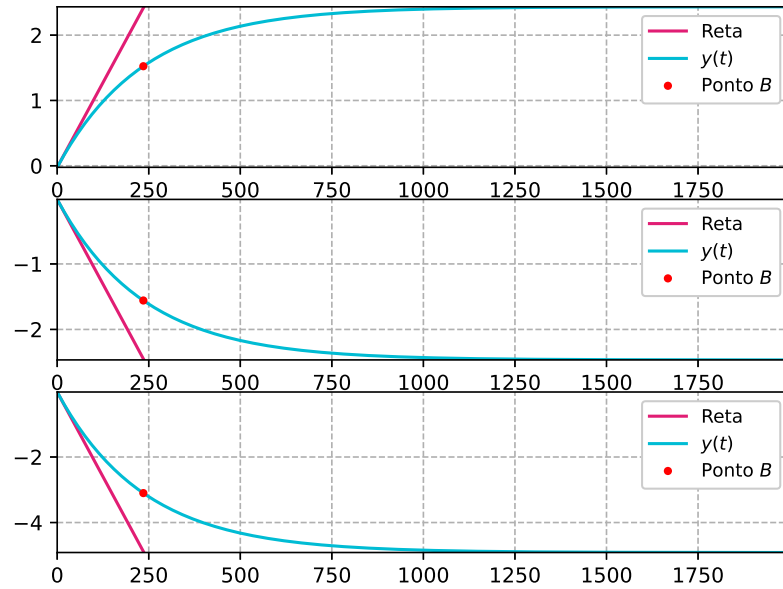


Figura 5 – Curva de saída e reta tangente traçada para os três *steps* selecionados

Com esses parâmetros é possível obter um indicativo da controlabilidade do sistema a partir de τ , cujos valores para cada um dos modelos é: $\tau_1 = 0,0095$ para o modelo em que $T = AC$ e $\tau_2 = 0,0096$ para o modelo em que $T = AB$. Quanto mais próximo de 1τ for, mais difícil poderá ser o controle. Assim, avalia-se que o modelo com $\tau = AB$ é um pouquinho mais difícil para ser controlado do que o outro modelo, embora sejam diferenças praticamente nulas.

4.2.1 Modelo de segunda ordem

Visto que a resposta dos dados coletados não tem *overshoot*, para encontrar o tempo de acomodação t_{ss} , basta investigar no vetor de dados quando $y(t) - 0,98\Delta y = \text{tol}$ (sendo $\text{tol} = 0,001$ por padrão). Isto foi feito fazendo

```

1 for i in range (0, r_y):
2     pto[i] = 0.98*( yy[i][-1] - yy[i][0] ) + yy[i][0]
3     for j in range (0, c_y):
4         if ( abs(pto[i] - yy[i][j] ) < 0.001):
5             iD[i] = j
6             break

```

No qual, i representa cada intervalo e j a posição no vetor de dados.

Assim, obtém-se o índice iD , que é a posição no vetor de tempo que corresponderá ao ponto no qual $y(t^{**}) = 0,98\Delta y \pm \text{tol}$. Desse modo, resolvendo numericamente a função de Lambert com o valor médio de t^{**} , segue $w = -6,8339$, se o valor inicial for $w_0 = -6$.

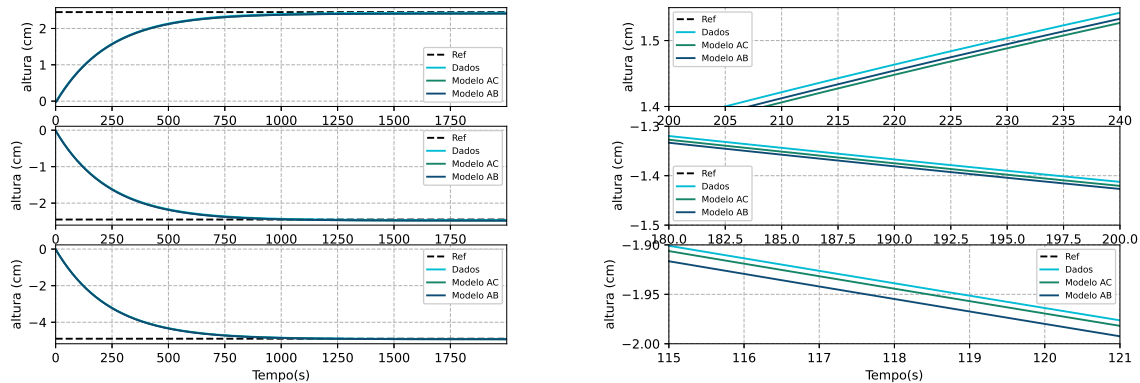
Por consequência, o modelo de segunda ordem do sistema de controle de nível apresentou como parâmetros: $k = 1,335$, $L = 0,753$ e $T = 157,612$. Logo, o modelo

$$G_2(s) = \frac{1,335}{(1 + 157,612s)^2} e^{-0,753s}$$

representa a relação entre a entrada e saída do tanque, como mostra a FIG. 7. Sua validação e comparação com o modelo de primeira ordem são abordados na próxima seção.

4.3 Validação dos modelos

A FIG. 6(a) traz as comparações do modelo de primeira ordem com o sistema real para os três intervalos definidos. Nesta escala todos os modelos estão visualmente idênticos ao sistema real. Entretanto, ao ampliar a imagem (FIG. 6(b)) vê-se que existe uma pequena diferença entre os modelos. Esta diferença pode ser percebida pelos índices de desempenho mostrados na TAB. 2.



(a) Comparação dos modelos $T_1 = AC$ e $T_2 = AB$ com os dados do sistema real (b) Comparação dos modelos $T_1 = AC$ e $T_2 = AB$ com os dados do sistema real ampliado

Figura 6 – Comparação das repostas dos modelos de primeira ordem para os dois casos de T com os dados do sistema real para três intervalos de *steps*

Sabendo dessa diferença, encontrou-se o modelo de primeira ordem médio final para o sistema calculando o coeficiente de determinação R^2 pela equação (2.14). Observa-se ainda na TAB. 2 que embora próximos, os valores exibem uma diferença sutil nos índices e no coeficiente.

Tabela 2 – Índices de desempenho dos modelos

Modelos	IAE	ITA	$RMSE$	R^2
AC_1	104,537	$3,822 \times 10^5$	0,027	0,99832
AC_2	127,625	$2,201 \times 10^5$	0,027	0,99936
AC_3	110,071	$2,518 \times 10^5$	0,027	0,99983
AB_1	106,927	$3,702 \times 10^5$	0,028	0,99856
AB_2	125,614	$1,950 \times 10^5$	0,028	0,99916
AB_3	106,023	$2,175 \times 10^5$	0,028	0,99972

Nota: os subíndices 1, 2 e 3 representam cada um dos 3 *steps*.

Em termos gerais, os índices de desenvolvimento foram maiores para os modelos AC . Isso indicaria que estes performam pior do que o outro modelo. Contudo, a média de R^2 para o modelo AC , $\text{mean}(R_{AC}^2) = 0,99917$, é maior do que para AB , $\text{mean}(R_{AB}^2) = 99915$. Sendo assim, escolhe-se o modelo AC .

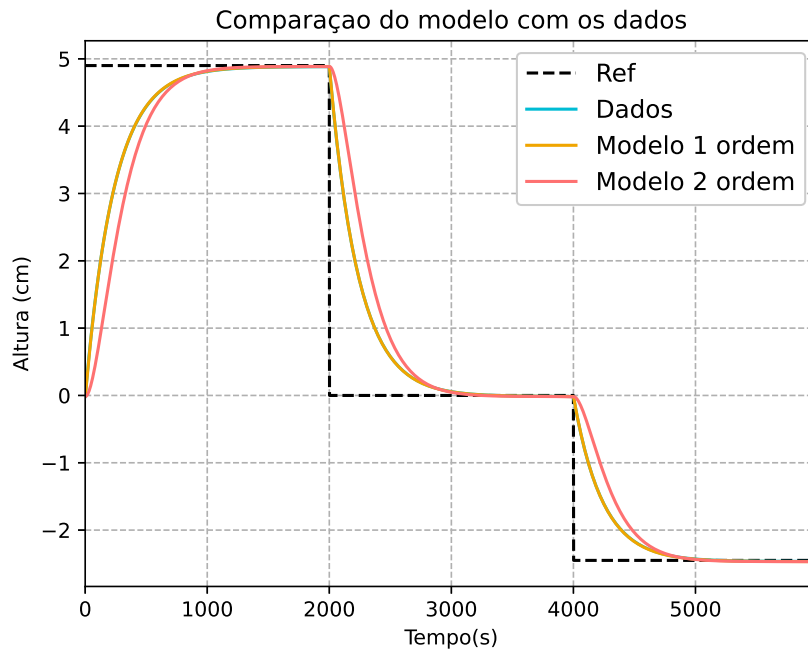


Figura 7 – Comparação entre os modelos de primeira escolhido e segunda ordem com os dados do sistema real

O modelo final de primeira ordem pode ser visto na FIG. 7, juntamente com o modelo de segunda ordem e a resposta do sistema real. Ambos os modelos conseguiram representar bem o processo de controle de nível, com respostas semelhantes aos dados reais e com o seguimento do sinal de referência. Entretanto, observa-se pequenas diferenças entre as curvas. A quantificação da performance dos modelos de primeira e segunda ordem é apresentado na

TAB. 3. Também é mostrado o desempenho para o modelo rejeitado.

Tabela 3 – Índices de desempenho dos modelos finais de primeira e segunda ordem

Modelos	IAE	$ITAE$	$RMSE$	R^2
$\text{mean}(AC)$	18.282	$5,078 \times 10^4$	0,004	0,999998
$\text{mean}(AB)$	34,983	$8,748 \times 10^4$	0,007	0,999994
Segunda ordem	1003,6	$1,884 \times 10^6$	0,338	0,985453

Estes índices são computados a partir do erro entre os dados e o modelo aproximado, então quanto maior o seu valor, maior é o erro. Dessa forma, uma análise da TAB. 3 revela que o modelo de primeira ordem escolhido representa melhor o sistema de controle de nível em todos os critérios adotados. Este resultado é válido, já que de fato o tanque com área constante é um processo de primeira ordem.

5 Conclusão

O experimento proporcionou a verificação de que é possível descrever a dinâmica de um sistema, pelo menos de forma aproximada, apenas dispostos os sinais de entrada e saída do mesmo. Passou-se pelas principais etapas de um problema de identificação. Apesar do teste dinâmico e coleta de dados não ter sido feito com o sistema real diretamente, acredita-se que a EDO que rege o comportamento do sistema é precisa e portanto, o processo de identificação do sistema não foi prejudicado.

Foram obtidos dois modelos finais para o sistema de tanque de forma experimental, a partir das ferramentas de identificação de sistemas. Verificou-se que o modelo de segunda ordem, embora aplicável na maior parte das situações, não se adequou tão bem para esse processo quanto o modelo de primeira ordem. O que era esperado, já que o processo de controle de nível realmente é de primeira ordem.

Foi observado como o coeficiente de determinação da curva se mostrou mais preciso do que os índices de desempenho. Pois, para os 3 modelos calculados, embora os índices de desempenho primeiramente tenham apresentado um resultado melhor para $T = AB$, o modelo médio obtido $\text{mean}(AB)$ performou pior do que $\text{mean}(AC)$ em todos os critérios adotados.

A semelhança dos dados coletados com os modelos de primeira e segunda ordem indicam que o método dos três parâmetros é eficiente para sistemas sem *overshoot*.

Ademais, a prática apresentou e exerceu conhecimentos essenciais para um futuro profissional que atuará na área de controle de processos, uma vez que, para isso, é necessário saber da relação causal entre as entradas e saídas do sistema. Neste sentido, este conteúdo é recomendável nos planos subsequentes da disciplina.

Referências

ÅSTROM, K. J.; HAGGLUND, T. *PID Controllers, Theory, Design and Tuning*. 2. ed. [S.l.]: Instrument Society of America, 1995. Citado 2 vezes nas páginas 2 e 4.

AGUIRRE, L. A. *Introdução à Identificação de Sistemas: Técnicas Lineares e Não-Lineares Aplicadas a Sistemas Reais*. 3. ed. [S.l.]: Editora UFMG, 2007. Citado 2 vezes nas páginas 1 e 2.

BANERJEE, S.; CHAKRABARTY, A.; MAITY, S.; CHATTERJEE, A. Feedback linearizing indirect adaptive fuzzy control with foraging based on-line plant model estimation. *Applied Soft Computing*, Elsevier, v. 11, p. 3441–3450, 2011. Citado na página 5.

CORLESS, C. M.; GONNET, G. H.; HARE, D. E. G.; JEREY, D. J.; KNUTH, D. E. On the lambert w function. *Advances in Computational Mathematics*, SpringerLink, v. 5, p. 329–359, 1996. Citado na página 4.

MONTGOMERY, D. C.; RUNGER, G. C. *Applied Statistics and Probability for Engineers*. 6. ed. [S.l.]: Wiley, 2014. Citado na página 6.