

Etapas de projeto do sistema Ball and Beam

Bernardo Bresolini* Ester Queiroz Alvarenga*

* Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais,
Divinópolis - MG (e-mails: berbresolini14@gmail.com e
esterqueirozalvarenga@gmail.com).

Resumo

O sistema *ball and beam* permite o controle da posição de uma bola sobre uma viga a partir de movimentos rotacionais. Este conjunto descreve processos com aplicações diretas na área de controle. Em vista disso, o presente trabalho tem a finalidade de descrever as etapas de projeto de um controlador para o sistema usado. Fez-se a análise da resposta do *ball and beam* a um controlador com ganho proporcional. Os estudos demonstraram que apenas o controlador proporcional não é capaz de estabilizar a resposta do processo, sendo portanto, necessário acrescentar ao controlador pelo menos um zero para estabilizar o sistema.

Palavras-chaves: Ball and beam. Controlador proporcional. Mecatrônica.

Abstract

The *ball and beam* system allows you to control the position of a ball on a beam from rotational movements. This set describes processes with direct applications in the control area. In view of this, this paper aims to describe the design steps of a controller for the system used. Ball and beam response to a proportional gain controller was analyzed. Studies have shown that only the proportional controller cannot stabilize the process response, so it is necessary to add at least one zero to the controller to stabilize the system.

Keywords: Ball and beam. Proportional controller. Mechatronics.

1. SISTEMA BALL AND BEAM

O sistema *ball and beam* é um clássico sistema eletromecânico subatuado com dois graus de liberdade e somente um atuador. A barra rotaciona num plano vertical em função do torque desenvolvido por um motor; enquanto que a bola pode rolar livremente ao longo da barra (MARTÓN *et al.*, 2008, p. 3724).

O conjunto formado pela bola e pela viga tem propósito de controlar a posição da bola sobre a barra com movimentos rotacionais. A viga deve ser capaz de rotacionar no plano vertical, logo ela deve ser biarticulada. Em uma das suas extremidades, há uma junção com um servomotor, por meio de dois elos (barras), que proporcionam a rotação da viga, como mostra a FIG. 1.

Tal sistema descreve um processo com aplicações diretas na área de controle, como o manejo da inclinação de aeronaves. Sendo assim, tornar-se interessante para os autores implementar as etapas de um controlador para a planta em questão. Portanto, o presente trabalho visa descrever o estudo de um controlador proporcional para o modelo, a partir das seções Modelagem, Linearização, Lugar Geométrico das Raízes e a Conclusão.

2. MODELAGEM

Desconsiderando as forças dissipativas, o deslizamento da bola e forças exógenas na bola, o modelo matemático que

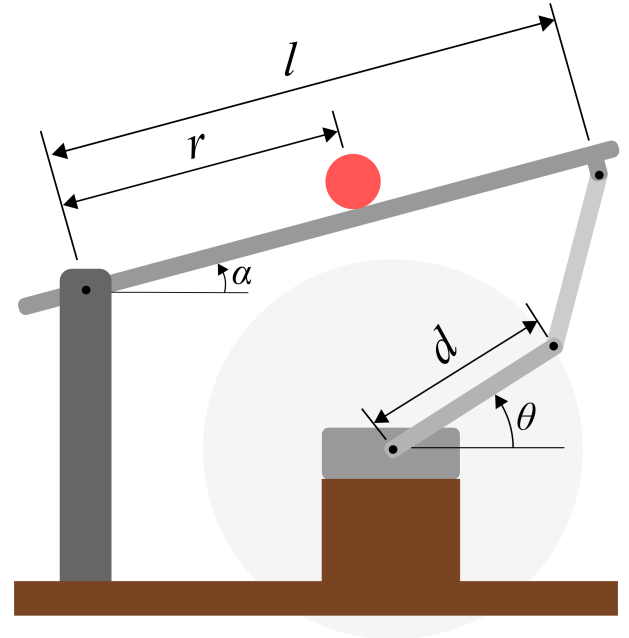


Figura 1. Esquemático do sistema *ball and beam*

relaciona a posição $r(t)$ da bola em função do ângulo da viga $\alpha(t)$ é

$$\ddot{r}(t) = \frac{m_B r(t) \dot{\alpha}^2(t) - m_B g \sin \alpha(t)}{m_B + J_B R^{-2}} \quad (1)$$

sendo m_B a massa da bola; J_B o momento de inércia da bola; g a gravidade; d o comprimento da junta e ℓ o comprimento da viga; todas constantes cujos valores são definidos na TAB. 1.

Tabela 1. Parâmetros do sistema

Símbolo	Valor	Unidade
m_B	3×10^{-3}	kg
d	10,15	cm
ℓ	40,00	cm
g	981	cm/s ²
R	2,00	cm
J_B	8×10^{-3}	kg · cm

3. LINEARIZAÇÃO

No sistema da FIG. 1, a variável a ser controlada é $r(t)$ e a manipulada é $\theta(t)$. Assim, a relação entre α e θ é dada por $\ell \sin \alpha = d \sin \theta$, válida para pequenos ângulos de θ .

Deste modo, a equação que descreve a dinâmica requerida do sistema *Ball and beam* é

$$\ddot{r}(t) = \frac{1}{a_1} (a_2 r(t) \dot{\theta}^2(t) - a_3 \sin \theta(t)) \quad (2)$$

sendo $a_1 = m_B + J_B R^{-2}$, $a_2 = m_B d^2 \ell^{-2}$ e $a_3 = m_B g d \ell^{-1}$ constantes.

O sistema atuará em torno de $\theta = 0$, com pequenas variações desse valor. Logo, é permissível aproximar o sistema não linear descrito em (2) por um sistema linear válido próximo do ponto de operação escolhido.

Definindo então $\theta_{op} := 0$ vê-se que $\sin \theta \approx \theta$. Admitir-se-á somente baixas variações na velocidade angular ($\dot{\theta} \approx 0$), logo o sistema em equilíbrio está estático e $r_{op} = r_0$, a condição inicial dada. A equação linear obtida é então

$$\ddot{r}(t) = -\frac{m_B g d}{\ell(m_B + J_B R^{-2})} \theta(t) = -\frac{g d R^2}{\ell(R^2 + J_B/m_B)} \theta(t) \quad (3)$$

ou seja, a aceleração da bola é proporcional à gravidade multiplicada pela inclinação da barra. O sinal negativo indica que se $\theta(t)$ for positivo, a bola aproximar-se-á da origem.

Admitindo condições iniciais nulas e aplicando a transformada de Laplace na EDO, é obtido a função transferência do sistema, dada por

$$G(s) := \frac{R(s)}{\Theta(s)} = -\frac{A}{s^2} \quad (4)$$

em que $A = g d R^2 \ell^{-1} (R^2 + J_B/m_B)^{-1}$.

A equação (4) descreve um sistema instável, dado que tem polos duplos em 0.

4. LUGAR GEOMÉTRICO DAS RAÍZES

Considere o processo $G(s)$ descrito em (4) na topologia de malha fechada da FIG. 2 sendo k_p uma constante, doravante denominada de ganho proporcional. A função transferência da malha fechada $H(s)$ é dada por

$$H(s) = \frac{k_p G(s)}{1 + k_p G(s)} = \frac{-k_p A}{s^2 - k_p A} \quad (5)$$

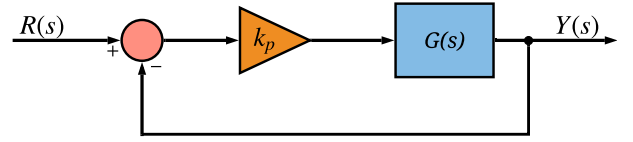
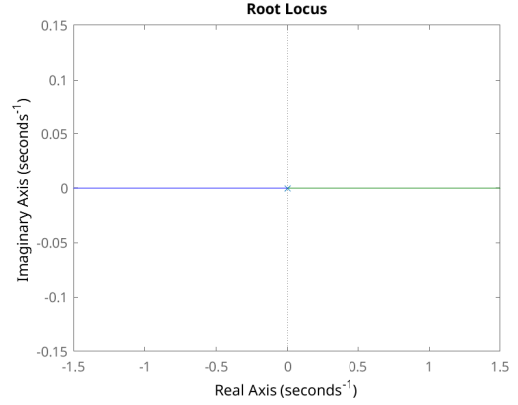
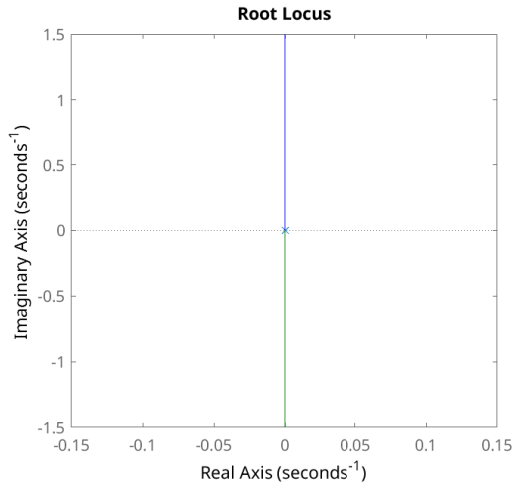


Figura 2. Controlador proporcional com realimentação unitária



(a) Origem na extremidade esquerda



(b) Origem na extremidade direita

Figura 3. LGR do sistema

cujos polos p são encontrados isolando s e radiciando os termos, obtendo

$$p = (k_p A)^{1/2} \quad (6)$$

Visto que s é um número complexo, a operação de radiciação em (6) se distingue da operação $\sqrt{}$ usada ordinariamente. Sua solução são os valores

$$z = r e^{i\phi} \implies z^{1/2} = \sqrt{r} e^{i(\theta+2n\pi)/2} \quad (7)$$

sendo r (o módulo de z) e ϕ (o argumento principal de z) números reais e $n = 0, 1$.

Os números reais positivos tem argumento principal igual a 0. Portanto, conclui-se que o LGR resultará em dois polos iniciando em 0 e obtendo o comportamento

$$p_1 = -\sqrt{k_p A} \quad \text{e} \quad p_2 = \sqrt{k_p A} \quad (8)$$

um polo real positivo e outro negativo, defasados em 180°. O Sistema assim é instável.

Note que caso se tivesse tomado como referência a posição na extremidade direita da FIG. 1, o sinal de $G(s)$ seria invertido e portanto, ter-se-ia os polos

$$p'_1 = -j\sqrt{k_p A} \quad \text{e} \quad p'_2 = j\sqrt{k_p A} \quad (9)$$

resultando em um sistema oscilatório.

A partir da função `rlocus()` do MATLAB, obteve-se as respostas da FIG. 3 que apresentam o lugar das raízes para os sistemas com origem na extremidade esquerda e na extremidade direita da calha. Vê-se que as respostas são rotacionadas em 90° uma da outra devido a presença do sinal negativo em uma delas.

O lugar das raízes retorna o caminho no qual os polos do sistema em malha fechada percorrerá mediante a variação de um ganho proporcional. Observando a FIG. 3, nota-se que a resposta em malha fechada do *ball and beam* é marginalmente estável ou instável para qualquer controlador proporcional. Percebe-se, portanto, que o sistema não pode ser controlado apenas com um ganho proporcional. O sistema necessita da presença de um zero no semiplano esquerdo, de modo a atrair os polos para o semiplano real negativo, estabilizando-o.

De modo a aferir os resultados apresentados pela ferramenta Lugar Geométrico das Raízes, simulou-se para o modelo linear do processo — representado pela função de transferência vista em (4) — sua resposta para dois valores de k_p .

Na FIG. 4 vê-se a simulação para $k_p = 0,1$ e na FIG. 5 para $k_p = 2$. Como é possível perceber, ambas as respostas ficaram instáveis, como previsto pelo lugar geométrico das raízes visto na FIG. 3, para a origem na extremidade esquerda. Além disso, nota-se que para maiores valores de k_p , mais rapidamente o sistema fica instável.

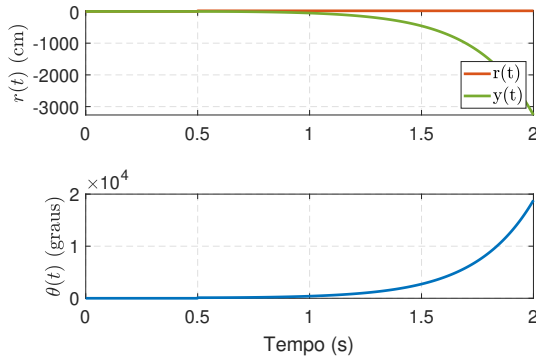


Figura 4. Simulação da resposta da planta para $k_p = 0,1$

Desse modo, é atestado que o sistema *ball and beam* não pode ser controlado apenas com um controlador proporcional. Necessita-se ainda de um controlador com pelo menos um zero no semiplano esquerdo do eixo real para que o sistema estabilize.

Na TAB. 2 está quantificado os valores de alguns critérios da avaliação da resposta do sistema em relação à referência dada. O sistema é instável, portanto a saída irá tender a infinito à medida que t tende a infinito. Portanto, os valores dos critérios se mostraram suficientemente grandes, sendo o seu menor valor para $k_p = 0,1$ na ordem de 10^5 e 10^{14} para $k_p = 2$. É verificado ainda que para $k_p = 2$ os critérios são todos maiores que para $k_p = 0,1$.

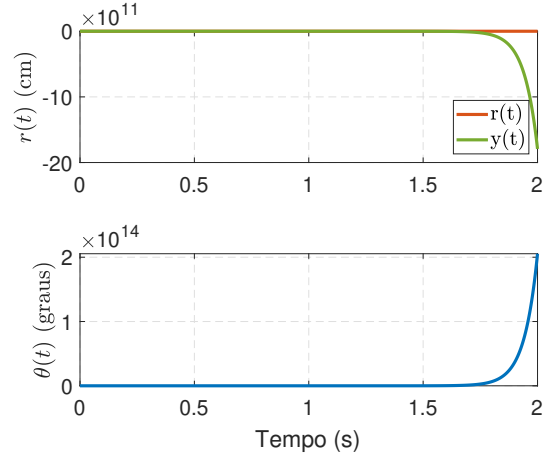


Figura 5. Simulação da resposta da planta para $k_p = 2$

Tabela 2. Critérios obtidos na simulação

Critério	$k_p = 0,1$	$k_p = 2$
IAE	$8,5252 \times 10^5$	$1,0469 \times 10^{14}$
ISA	$1,4015 \times 10^9$	$9,4655 \times 10^{25}$
$\sigma_{e(t)}$	$6,0982 \times 10^8$	$5,7917 \times 10^{22}$
$\sigma_{u(t)}$	$2,0019 \times 10^7$	$7,6053 \times 10^{26}$

5. CONTROLADOR PD E A EQUAÇÃO DIOFANTINA

5.1 Controlador PD

Um controlador PD com filtro no derivativo tem a seguinte característica

$$C_{PD}(s) = k_p + k_d \frac{s}{s+p} = \frac{k_p(s+p) + k_d s}{s+p} \quad (10)$$

Usando a topologia mostrada na FIG. 6, a equação de malha fechada H_{PD} será

$$H_{PD} = \frac{C_{PD}(s)G(s)}{1 + C_{PD}(s)G(s)} \quad (11)$$

$$= \frac{-[k_p(s+p) + k_d s]A}{s^2(s+p) - [k_p(s+p) + k_d s]A} \quad (12)$$

Expandindo a equação do denominador,

$$\text{den} = s^3 + ps^2 - A(k_p + k_d)s - Ak_p p \quad (13)$$

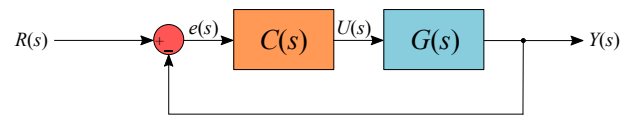


Figura 6. Realimentação unitária com Controlador $C(s)$

5.2 Critérios de desempenho

Requer-se que o sistema em malha fechada apresente tempo de acomodação $t_s = 2$ s e uma sobrepassagem de $\%OS = 20\%$. Então ter-se-á dois polos complexos conjugados e um polo real negativo com seu módulo 10 vezes maior que o módulo da parte real dos outros. Para determinar o par, resolve-se

$$p_1 \text{ ou } p_2 = \zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \quad (14)$$

sendo

$$\zeta = -\frac{\ln OS}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2 OS}} \quad \omega_n = \frac{4}{\zeta t_s} \quad (15)$$

Com os critérios admitidos, obtém-se

$$p_1 \text{ ou } p_2 = 2 \pm j3,9040$$

Assim, o outro polo deve ser $p_3 = -20$. Logo, deseja-se um denominador igual a

$$\begin{aligned} \text{den} &= (s^2 + 4s + 19,2409)(s + 20) \\ &= s^3 + 24s^2 + 99,2409s + 384,1885 \end{aligned} \quad (16)$$

5.3 Equação diofantina

Igualando a equações (13) com (16), chegar-se-á na igualdade

$$\begin{aligned} p &= 24 \\ -A(k_p + k_d) &= 99,2409 \\ Ak_p p &= 384,1185 \end{aligned}$$

Usando os dados coletados, a constante A é $A = 247,28 \text{ cm/s}^2$.

$$\begin{aligned} p &= 24 \\ k_p &= -64,8418 \times 10^{-3} \\ k_d &= -0,4662 \end{aligned}$$

6. CONCLUSÃO

O sistema *ball and beam* apresentou característica de um sistema instável em malha aberta. Inclusive, para a realimentação negativa com ganho proporcional, o sistema continua instável (se o referencial de posição for tomado à esquerda) ou marginalmente estável (caso seja tomada à direita). Assim, visto que a montagem foi feita para o primeiro caso, percebeu-se que será preciso inverter a calibração do sensor, de maneira que sua origem seja dada na extremidade direita da barra.

Entretanto não há como controlá-lo apenas com um ganho proporcional. Faz-se necessário o uso de um derivativo, que apresentará um zero no sistema. Isto fará com que os polos sejam trazidos para o semiplano esquerdo sob a influência da ação derivativa, estabilizando o sistema.

Para as próximas atividades, é sugerido que tenta implementar um controlador PD com filtro no derivativo por meio da alocação de polos. A principal dificuldade encontrada neste método é a agressividade do controlador, tendendo a saturar o sinal de controle.

7. REFERÊNCIA

JAZAR, Reza N. Applied Mechanisms. In: _____. *Vehicle Dynamics: Theory and Application*. 2. ed. New York: Springer, 2014. cap. 6. p. 336-402.

MARTÓN, Lörinc; HODEL, A. Scottedwand; LANTOS, Bella; HUNG, John Y. Underactuated Robot Control: Comparing LQR, Subspace Stabilization, and Combined Error Metric Approaches. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, v. 55, n. 10, p. 3724-3730, 2008. Disponível em: <<https://ieeexplore.ieee.org/document/4493428>>. Acesso em: 21 ago. 2019.

ZILL, Denis G.; SHANAHAN, Patrick D. Complex numbers and the complex plane. In: _____. *A first course in complex analysis with applications*. 1. ed. New York: Jones and Bartlett Publishers, 2003. cap. 1. p. 1-48.