Trabalho Final — Controle Moderno

Bernardo Bresolini [*] **Ester Queiroz Alvarenga** [*]

[*] *Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais, Divinópolis - MG.*

1. INTRODUÇÃO

Muitas aplicações industriais exigem que seus atuadores mecânicos tenham um controle de posicionamento preciso, e.g., a robótica, a medicina, aplicações aeroespaciais etc. Portanto, em sistemas com esta especificação e cujos atuadores são motores, a classe de servomotores são preferivelmente usados, já que se controla sua posição e velocidade através da tensão/corrente elétrica aplicada. Portanto, o processo escolhido foi o controle do posicionamento de um servomotor com carga no eixo.

Para tanto, escolheu-se como referência o artigo de Tang *et al.*, entitulado "Combined PID and adaptive nonlinear control for servo mechanical systems", publicado em *Mechatronics* pela revista Elsevier em 2004. Este trabalho aborda o problema desenvolvendo dois controladores, um PID para o modelo dominante de segunda ordem do sistema; e outro um adaptativo para compensar as perturbações não lineares que decorrem de um termo desconhecido não linear e variante no tempo. O artigo ainda apresenta simulações e resultados experimentais do controle em um motor piezoelétrico de alta precisão.

O modelo não linear obtido do periódico mencionado relaciona a posição x do motor com a força desenvolvida pela força contra eletromotriz (f.c.e.m.) do motor subtraída das suas perdas. A não linearidade advém justamente do atrito e da sua descontinuidade em 0. Para linearizá-lo, fez-se necessário substituir a função $\operatorname{sign}\dot{x}$ por $\operatorname{tgh} 20\dot{x}$, que apresenta um comportamento bastante próximo da função original e é derivável no ponto em questão.

Nas seções seguintes, será detalhada a modelagem escolhida, assim como a linearização e as simulações computacionais da dinâmica do sistema não linear e linear em torno do ponto de operação.

2. MODELAGEM DO SISTEMA SERVOMOTOR

O circuito elétrico de um motor CC juntamente com seu diagrama de corpo-livre é mostrado na FIG. 1.

Sejam $v(t)$ a tensão de armadura, $i(t)$ a corrente de armadura, $u(t)$ a força contra eletromotriz do motor, R a resistência da armadura, L é a indutância. Ainda sejam F a força desenvolvida pelo motor, x a sua posição e m a massa do motor e a carga.

Decorre da Lei de Faraday que a força contra eletromotriz u é

$$u = \alpha\eta\psi$$

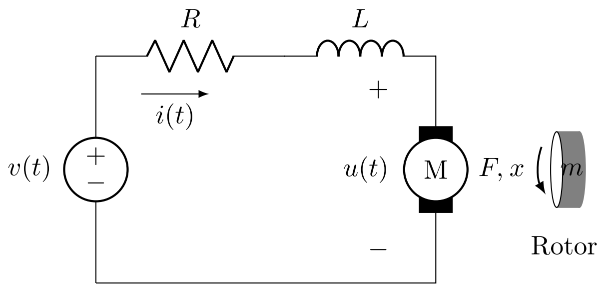

Figura 1. Esquemático eletromecânico de um motor/servomotor

em que α é a constante do motor e depende da sua característica construtiva, η é a velocidade de rotação e ψ é o fluxo magnético. Como $\eta = \dot{\theta}/(2\pi \times 60)$, então

$$u = c_1\dot{\theta}\psi \tag{1}$$

sendo $c_1 = \alpha/(120\pi)$ uma constante. Assumindo que o fluxo magnético é constante ($\psi(t) = \text{cte}$), a força contra eletromotriz é

$$u(t) = k_e\dot{\theta}(t) \tag{2}$$

em que $k_e = c_1\psi$ é a constante de força contra eletromotriz.

Aplicando a Lei das Tensões de Kirchhoff na armadura, tem-se

$$v(t) - Ri(t) - L\frac{di(t)}{dt} - u(t) = 0$$
$$v(t) = u(t) + Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} \tag{3}$$

Substituindo (2) em (3), tem-se

$$v(t) = k_e\dot{x}(t) + Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} \tag{4}$$

Pela Primeira e Segunda Lei de Newton, tem-se que

$$F(t) = m\ddot{x} + F_{\text{perdas}}$$

cujo o termo F_{perdas} representa a perda por atrito e da carga e $m\ddot{x}$ é a força desenvolvida pelo rotor, portanto

$$F(t) = m\ddot{x} + F_{\text{atrito}} + F_{\text{carga}} \tag{5}$$

E ainda, assumindo-se que $\psi = \text{cte}$, vê-se que a força é proporcional a i por uma constante de força k_f. Matematicamente

$$F(t) = k_f i(t) \tag{6}$$

Então, a dinâmica do servomotor é modelada por

$$\begin{cases} k_f i(t) = m\ddot{x} + F_{\text{atrito}} + F_{\text{carga}} \\ v(t) = k_e\dot{x}(t) + Ri(t) + L\dfrac{di(t)}{dt} \end{cases} \tag{7}$$

A constante elétrica de tempo é muito menor que a mecânica, portanto, segue-se que o atraso ocasionado pela bobina Ldi/dt pode ser desprezado. Assim, isolando-se $\ddot{x}$,

$$\ddot{x} = \Big(k_f\big[v(t) - k_e\dot{x}(t)\big]/R - F_{\text{atrito}} - F_{\text{carga}}\Big)/m$$

Sejam as constantes a e b, tais que

$$a = -\frac{k_f k_e}{Rm} \qquad b = \frac{k_f}{Rm}$$

assim, reescreve-se (7) como

$$\ddot{x} = a\dot{x}(t) + bv(t) - F_{\text{atrito}}/m - F_{\text{carga}}/m \tag{8}$$

A força de atrito que afeta o movimento do tradutor é modelada como uma combinação de Coulomb e atrito viscoso

$$F_{\text{atrito}} = \Big[F_c + F_v|\dot{x}|\Big]\operatorname{sign}(\dot{x}) + \delta F_{\text{atrito}} \tag{9}$$

em que F_c é o nível mínimo de atrito de Coulomb e F_v está associado com a constante de viscosidade. δF_{atrito} denota possível tendência direcional associada à fricção de Coulomb. Para efeitos de carregamento que são independentes da direção do movimento, F_{carga} pode ser descrita como:

$$F_{\text{carga}} = F_l \operatorname{sign}(\dot{x}) + \delta F_{\text{carga}} \tag{10}$$

no qual δF_{carga} denota possível tendência direcional associada com a carga, que é o caso quando a carga é transportada em uma direção alinhada com a força gravitacional. Cumulativamente, a força de atrito e carga podem ser descritas como uma perturbação externa F_{perdas}, dada pela soma de (9) com (10):

$$F_{\text{perdas}} = \Big[F_1 + F_2|\dot{x}|\Big]\operatorname{sign}(\dot{x}) + \delta F \tag{11}$$

sendo $F_1 = F_l + F_c$, $F_2 = F_v$ e $\delta F_{\text{perdas}} = \delta F_{\text{atrito}} + \delta F_{\text{carga}}$.

O comportamento de F_{perdas} é mostrado na FIG. 2, nela se observa a não linearidade do modelo, evidenciada pela descontinuidade em 0, bem como o que cada parâmetro de F_{perdas} corresponde.

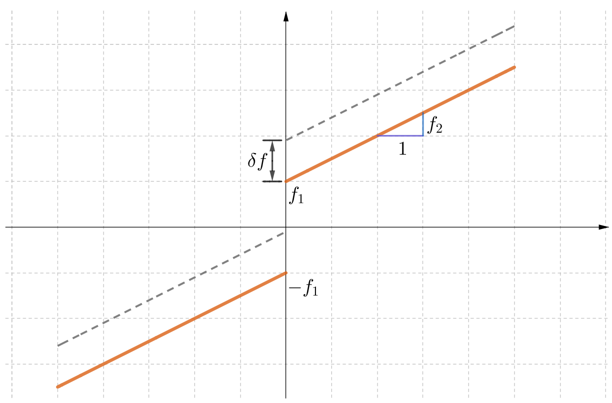

Figura 2. Gráfico de $F_{\text{perdas}} \times \dot{x}$ ilustrando seus termos

E assim, a EDO é reescrita substituindo em (7) os termos F_{atrito} e F_{carga}, segue-se

$$\ddot{x} = a\dot{x}(t) + bv(t) - \Big[F_1 + F_2|\dot{x}|\Big]\operatorname{sign}\dot{x}/m - \delta F/m$$

$$\ddot{x} = a\dot{x}(t) + bv(t) - \Big(F_1 \operatorname{sign}\dot{x} + F_2\dot{x}\Big)/m - \delta F/m \tag{12}$$

3. ESPAÇO DE ESTADOS E LINEARIZAÇÃO

Sejam $x_1 \coloneqq x$ e $x_2 \coloneqq \dot{x}$, $\mathbf{x} \coloneqq \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^T$ e por conseguinte,

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ ax_2 + bv - \big(F_1 \operatorname{sign} x_2 + F_2 x_2 + \delta F\big)/m \end{bmatrix}$$

Portanto, a linearização dar-se-á pelo Jacobiano destas funções. Contudo, a função $\operatorname{sign} x_2$ não possui derivada, no senso ordinário [1], em 0. Portanto, optou-se por substituí-la por $\operatorname{tgh} 20\dot{x}$, função contínua e derivável [2] em $\mathbb{R}$, cujo comportamento se assemelha muito a $\operatorname{sign}\dot{x}$, como se observa na FIG. 3.

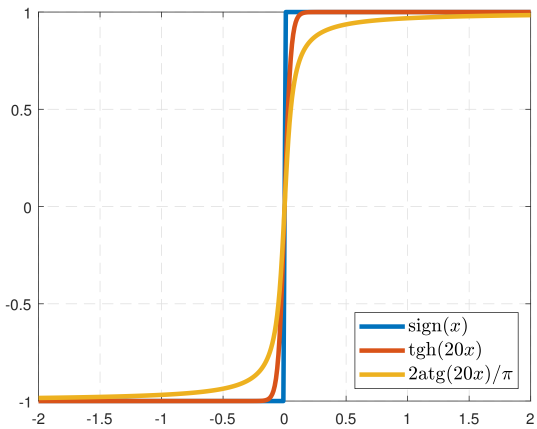

Figura 3. Gráficos comparativo das funções sign, tgh e atg

Destarte, a matriz $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ que linearizaram $\mathbf{x}$ são obtidas por

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \partial h_1/\partial x_1 & \partial h_1/\partial x_2 \\ \partial h_2/\partial x_1 & \partial h_2/\partial x_2 \end{bmatrix} \qquad \bar{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \partial h_1/\partial u_1 \\ \partial h_2/\partial u_2 \end{bmatrix}$$

Sendo assim, computando-os com a função `jacobian` do MATLAB, tem-se

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & a - F_2/m - 20F_1(1 - \operatorname{tgh}^2 20x_2)/m \end{bmatrix}, \ \bar{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}$$

Substituindo os valores para o ponto de operação, $x_2 =$ 0,02 m/s. Assim sendo, vê-se

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & a - F_2/m \end{bmatrix}, \qquad \bar{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}$$

4. SIMULAÇÃO

Para a simulação usar-se-ão os parâmetros do servomotor do artigo de referência, cujos valores são apresentados na TAB. 1. Como se observa é um motor de alta resolução e de baixo porte.

Com estes valores, a validação do modelo linear obtido na seção anterior, foi feita no ponto de operação $\dot{x} = 0{,}02$ m/s e $\ddot{x} = 0$ m/s^2. Isolando $v(t)$ de (12) e substituindo os valores das contantes dadas na TAB. 1, obtém-se o valor da variável manipulada $v = 2{,}9526$V.

---

[1] No sentido generalizado da função, é possível demonstrar que ela é derivável em 0 e seu valor é $\operatorname{sign}' = 2\delta$, em que δ é a função de Dirac. Este resultado é demonstrado em *The Fourier Transform and its Applications*, por Osgood, prof. do Departamento de Engenharia Elétrica de Stanford, disponível em: `https://see.stanford.edu/materials/lsoftaee261/book-fall-07.pdf`

[2] $\frac{d}{dt}\operatorname{tgh}(20u) = 20\big[1 - \operatorname{tgh}^2(20u)\big]$.

Tabela 1. Grandezas e seus valores usados

Grandeza	Símbolo	Unidade	Valor
Força máxima	—	N	40
Velocidade máxima	—	m/s	0,25 m/s
Resolução	—	m	0,1 $\times 10^{-6}$
Constante de força	k_f	N/V	8
Constante de f.c.e.m.	k_e	N · s/m	144
Massa da carga e do motor	m	kg	5,3
Resistência de armadura	R	Ω	1,5
Força de atrito	F_1	N	0,0064
Força de carga	F_2	N	8,2876e-5
Força de bias	δF	N	0,381

Os valores especificados estão dentro do limite de operação do servomotor, como se vê de (7) se $v = 2{,}9526$ V, $i = 48{,}425$ mA e a força desenvolvida pelo motor será 0,387 N, menor que o valor máximo de 40 N. Assim sendo, está se trabalhando dentro da faixa de funcionamento do dispositivo.

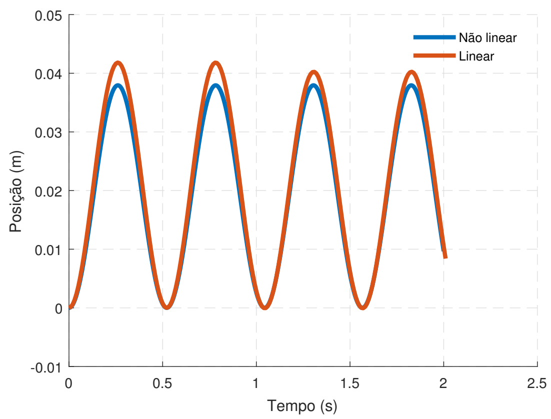

Figura 4. Comparação do modelo linear com o modelo não linear em torno do ponto de operação $\dot{x} = 0.02$

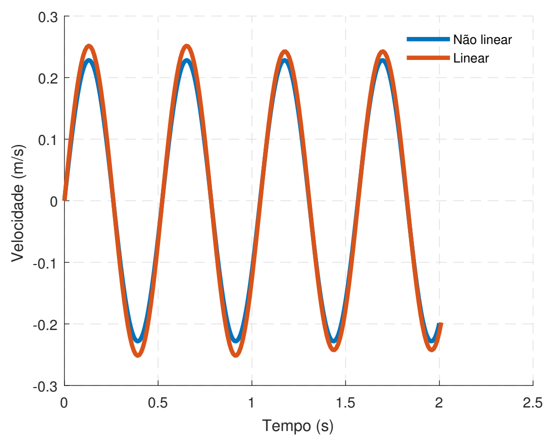

Figura 5. Comparação do modelo linear com o modelo não linear em torno do ponto de operação $\ddot{x} = 0$

Ao aplicar este valor nas funções do modelo não linear e linear, gera-se representações da variação da posição e velocidade em torno deste ponto de operação. Possibilitando avaliar e comparar a aproximação linear em relação ao modelo não linear para valores próximos a este ponto.

A simulação de tal dinâmica foi feita com o *software* MATLAB®, utilizado para computar os dados das funções e plotar seus comportamentos ao longo do tempo.

As FIG. 4 e 5 mostram um erro de deslocamento muito reduzido entre as curvas do modelo linear e não linear. Assim, para o ponto de operação escolhido, é possível afirmar que o modelo linear se aproxima de forma satisfatória do modelo não linear variado neste mesmo ponto. Como os resultados da simulação são consistentes com os previstos, assegura-se o bom desempenho e eficacia da linearização feita.

O código desenvolvido pode ser visto a seguir, assim como a comparação dos modelos.

```
clear
clc
close

%Constantes
kf = 8;
ke = 144;
m = 5.3;
R = 1.5;
f1 = 0.0064;
f2 = 8.2826*10^(-5);
delF = 0.381;
a = -(kf*ke)/(m*R);
b = kf/(m*R);

%Ponto de operacao
val_x1 = 0.02;     %VELOCIDADE
val_x2 = 0;        %ACELERACAO
val_v = (val_x2*m + (f1*sign(val_x1) + ...
    f2*val_x1 + delF)/m -a*val_x1 )/b;

%############ FUNCAO NAO LINEAR ##########
t1 = 0;
t2 = 2;
x0 = [0; 0]; %cond. iniciais
options = odeset('Abstol', 1e-6, 'Reltol', ...
    1e-6);
[t, x] = ode23(@(t,x) fdo(t,x,val_v*0.95), ...
    [t1 t2], x0, options);
hold on
p = plot(t,x);
p(1).LineWidth = 2;
p(2).LineWidth = 2;

%############## FUNCAO LINEAR ###############

syms x1 x2 v
F   = f1*tanh(20*x1) + f2*x1 + delF;
g1 = x2;
g2 = a*x1 + b*v - F/m;
g = [g1, g2];

A1 = jacobian(g, [x1, x2]);
old = [v, x1, x2];
new = [val_v, val_x1, val_x2];
A2 = subs(A1, old, new);
A = double(A2)

B1 = jacobian(g, v);
B2 = subs(B1, old, new);
B = double(B2)

C1 = [1 0];  %y = x1
```

```
C2 = [0 1];  %y = x2
D = [0];

ModL1 = ss(A,B,C1,D);
ModL2 = ss(A,B,C2,D);

t1 = 0:0.01:1;
t2 = 1:0.01:2;
tt = 0:0.01:2.01;

u1 = val_v*1.02*ones(length(t1),1);
u2 = val_v*0.98*ones(length(t1),1);
vv = [u1;u2];

y1linear = lsim(ModL1, vv, tt);
y2linear = lsim(ModL2, vv, tt);
ylinear = [y1linear, y2linear];
p = plot(tt, ylinear);
p(1).LineWidth = 2;
p(2).LineWidth = 2;
legend('Pos.','Vel.','Pos. Lin.', 'Vel. Lin.');

%########################################
function dx = fdo(t,x,val_v)
f1 = 0.0064;
f2 = 8.2826*10^(-5);
delF = 0.381;
m = 5.3;
F = ( f1*sign(x(1)) + f2*x(1) + delF )/m;
a = -(8*144)/(5.3*1.5);
b = 8/(5.3*1.5);
v = val_v; %28.8726;
%%%%%%%%%%%% EQUACAO %%%%%%%%%%%%%
dx = zeros(2,1);
dx(1) = x(2);
dx(2) = a*x(1) + b*v - F;
end
```

5. REFERÊNCIAS

CHEN, Chi-Tsong. *Linear System Theory and Design*. 3. ed. New York: Oxford, 1999. p. 334.

FUJIMOTO, Y.; KAWAMURA, A. Robust Servo-System Based on Two-Degree-of-Freedom Ccontrol with Sliding Mode. IEEE Transactions on Industrial Eletronics, v. 42. n. 3, 1995. Disponível em: <https://ieeexplore.ieee.org/document/382138/citations#citations>. Acesso em: 18 abr. 2019.

OSGOOD, Brad. Lectures on the Fourier transform and its Applications. In: ____. *Distributions and their Fourier Transform*. Stanford: *American Mathematical Socity*, 2019. p. 176-177. Disponível em: <https://see.stanford.edu/materials/lsoftaee261/book-fall-07.pdf>. Acesso em: 18 abr. 2019.

PHYU, Hla Nu. *Numerial Analysis of a Brushless Permanent Magnet DC Motor Using Coupled Systems*. 2004. Tese (Ph.D. em Engenharia Elétrica e Engenharia Computacional) — Departamento de Engenharia Elétrica e Engenharia Computacional, Universidade Nacional de Singapura. Singapura. Disponível em: <https://core.ac.uk/reader/48628452>. Acesso em: 18 abr. 2019.

TAN, K.; LIM, S.; HUANG, S. Two-Degree-of-Freedom Controller Incorporating RBF Adaptation for Precision Motion Control Applications. IEEE, International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics, 1999. Disponível em: <https://ieeexplore.ieee.org/document/803283>. Acesso em: 19 abr. 2019.

TANG,K.; HUANG, S.; TAN,K.; LEE, T. Combined PID and Adaptive Nonlinear Control for Servo Mechanical System. *Mechatronics*, 2004, v. 14, n.6, p. 701-714. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.mechatronics.2004.01.007>. Acesso em: 18 abr. 2019.