Análise de Sistemas Lineares: Parte IV

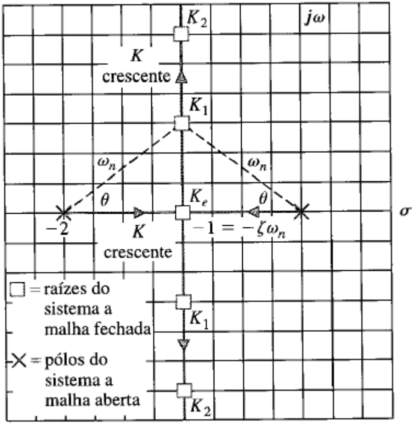
Professor: Luís Filipe Pereira Silva

O método do lugar geométrico das raízes: Introdução

- O desempenho de um sistema com realimentação pode ser descrito em termos da posição das raízes da eq. característica no plano s.
- Um gráfico mostrando como as raízes da eq. característica se movem no plano s à medida que um único parâmetro varia é conhecido como diagrama do lugar geométrico das raízes.
- O lugar geométrico das raízes é uma ferramenta poderosa para se projetar e analisar sistemas de controle com realimentação.

O conceito do lugar geométrico das raízes

O lugar geométrico das raízes é o caminho das raízes da equação característica traçado no plano s à medida que um parâmetro do sistema é alterado.



O procedimento do lugar geométrico das raízes

Passo 1: Prepare o esboço do lugar geométrico das raízes

$$1 + F(s) = 0.$$

O procedimento do lugar geométrico das raízes

Passo 1: Prepare o esboço do lugar geométrico das raízes

$$1 + F(s) = 0.$$

Rearranje a eq., se necessário, de modo que o parâmetro de interesse, K, apareça como fator multipliativo

$$1 + KG(s) = 0.$$

O procedimento do lugar geométrico das raízes

Passo 1: Prepare o esboço do lugar geométrico das raízes

$$1 + F(s) = 0.$$

Rearranje a eq., se necessário, de modo que o parâmetro de interesse, K, apareça como fator multipliativo

$$1 + KG(s) = 0.$$

Tem-se por interesse determinar o LGR à medida que K varia, ou seja,

$$0 \leq K \leq \infty$$

O procedimento do lugar geométrico das raízes

Passo 1: Prepare o esboço do lugar geométrico das raízes

$$1 + F(s) = 0.$$

Rearranje a eq., se necessário, de modo que o parâmetro de interesse, K, apareça como fator multipliativo

$$1 + KG(s) = 0.$$

Tem-se por interesse determinar o LGR à medida que K varia, ou seja,

$$0 \leq K \leq \infty$$

Fatore $G(s)$

$$1 + K \frac{\prod_{i=1}^{M}(s + z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s + p_j)} = 0$$

Marque a posição dos pólos p_i com "x" e dos zeros "o".

O procedimento do lugar geométrico das raízes

Reescreva a equação anterior, ou seja,

$$\prod_{j=1}^{n}(s+p_j)+K\prod_{i=1}^{M}(s+z_i)=0$$

O procedimento do lugar geométrico das raízes

Reescreva a equação anterior, ou seja,

$$\prod_{j=1}^{n}(s+p_j)+K\prod_{i=1}^{M}(s+z_i)=0$$

Considerando $K=0$, tem-se

$$\prod_{j=1}^{n}(s+p_j)=0.$$

O procedimento do lugar geométrico das raízes

Reescreva a equação anterior, ou seja,

$$\prod_{j=1}^{n}(s+p_j)+K\prod_{i=1}^{M}(s+z_i)=0$$

Considerando $K=0$, tem-se

$$\prod_{j=1}^{n}(s+p_j)=0.$$

Considerando $K\rightarrow\infty$, tem-se

$$\prod_{i=1}^{M}(s+z_i)=0$$

O procedimento do lugar geométrico das raízes

Reescreva a equação anterior, ou seja,

$$\prod_{j=1}^{n}(s+p_j)+K\prod_{i=1}^{M}(s+z_i)=0$$

Considerando $K=0$, tem-se

$$\prod_{j=1}^{n}(s+p_j)=0.$$

Considerando $K\to\infty$, tem-se

$$\prod_{i=1}^{M}(s+z_i)=0$$

- O lugar das raízes começa dos pólos de $P(s)$ e termina nos zeros de $P(s)$ à medida que K aumenta.
- Se em $P(s)$ o número de pólos for maior q o número de zeros, então o LR termina nos zeros infinitos.

O procedimento do lugar geométrico das raízes

Passo 2: O lugar geométrico das raízes no eixo real fica sempre em uma seção do eixo real à esquerda de um número ímpar de pólos e zeros $\rightarrow$ Esse passo satisfaz o critério de ângulo.

O procedimento do lugar geométrico das raízes

Passo 3: Os lugares vão para os zeros no infinito ao longo de assíntotas centradas em σ_A e com ângulos ϕ_A.

- $M \rightarrow$ número de zeros finitos
- $n \rightarrow$ número de pólos
- $N = n - M$ ramos de lugares terminam em zeros no infinito

O procedimento do lugar geométrico das raízes

Passo 3: Os lugares vão para os zeros no infinito ao longo de assíntotas centradas em σ_A e com ângulos ϕ_A.

- $M \rightarrow$ número de zeros finitos
- $n \rightarrow$ número de pólos
- $N = n - M$ ramos de lugares terminam em zeros no infinito

$$\sigma_A = \frac{\sum_{j=1}^{n}(-p_j) - \sum_{i=1}^{M}(-z_i)}{n - M}$$

$$\phi_A = \frac{2k+1}{n-M}180^o, \;\; k = 0, 1, 2, \ldots, (n - M - 1)$$

O procedimento do lugar geométrico das raízes

Passo 4: A partir do critério de Routh-Hurwitz, determina-se onde o lugar das raízes cruza o eixo $j\omega$, caso isso ocorra.

O procedimento do lugar geométrico das raízes

Passo 5: Determina o ponto de saída no eixo real (caso exista).

$$K = p(s)$$

$$\frac{dK}{ds} = \frac{dp(s)}{ds} = 0$$

O procedimento do lugar geométrico das raízes

Passo 6: Determina o ângulo de partida do lugar das raízes a partir de um pólo e o ângulo de chegada do lugar das raízes em um zero, usando o critério de ângulo ($\pm 180^o(2k+1)$).

O procedimento do lugar geométrico das raízes

Passo 7: Complete o esboço do LGR e localize K específico que satisfaça o critério de ângulo e de módulo.

Sensibilidade e o lugar geométrico das raízes

- Uma das principais razões para a utilização de realimentação negativa em sistemas de controle é a redução do efeito das variações de parâmetros.

Sensibilidade e o lugar geométrico das raízes

- Uma das principais razões para a utilização de realimentação negativa em sistemas de controle é a redução do efeito das variações de parâmetros.
- O efeito da variações de parâmetros pode ser definida por uma medida da sensibilidade.

Sensibilidade e o lugar geométrico das raízes

- Uma das principais razões para a utilização de realimentação negativa em sistemas de controle é a redução do efeito das variações de parâmetros.
- O efeito da variações de parâmetros pode ser definida por uma medida da sensibilidade.
- Define-se a sensibilidade logarítmica como

$$S_K^T = \frac{\partial T/T}{\partial K/K}$$

Sensibilidade e o lugar geométrico das raízes

- Uma das principais razões para a utilização de realimentação negativa em sistemas de controle é a redução do efeito das variações de parâmetros.
- O efeito da variações de parâmetros pode ser definida por uma medida da sensibilidade.
- Define-se a sensibilidade logarítmica como

$$S_K^T = \frac{\partial T/T}{\partial K/K}$$

- As raízes da eq. característica representam os modos dominantes da resposta transitória e, sendo assim, o efeito das variações de parâmetros nas posições das raízes é uma medida importante e útil da sensibilidade.

Sensibilidade e o lugar geométrico das raízes

A sensibilidade da raiz de um sistema $T(s)$ pode ser definida como

$$S_K^{r_i} = \frac{\partial r_i}{\partial K/K},$$

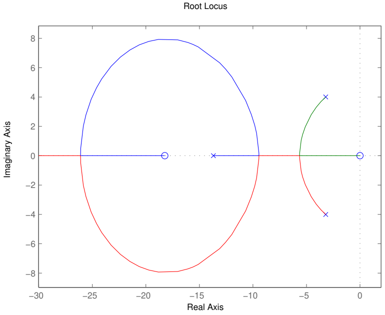
sendo r_i a i-ésima raiz do sistema.

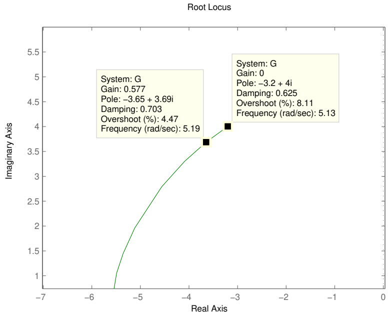
Sensibilidade e o lugar geométrico das raízes

A sensibilidade da raiz $S_K^{r_i}$ pode ser calculada na raiz $-r_i$ examinando-se o contorno do LGR para o parâmetro K variando. Então, tem-se

$$S_K^{r_i} \approx \frac{\Delta r_i}{\Delta K / K}.$$

Sensibilidade e o lugar geométrico das raízes - Exemplo





Exercícios

Exercícios livro Dorf 11ª edição: P7.1 (fazer os lugares das raízes na "mão"), P7.5, P7.6, P7.18, P7.20 e P7.22.