

Prática 1 — Laboratório de Análise de Sistemas Lineares

Bernardo Bresolini* Ester Queiroz Alvarenga*

* Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais,
Divinópolis - MG (e-mails: berbresolini14@gmail.com e
esterqueirozalvarenga@gmail.com).

Resumo

A modelagem e linearização é um dos primeiros passos para a análise de sistemas e projeto de controladores. Sendo assim, a prática 01 da disciplina de Laboratório de Análise de Sistemas Lineares obteve sucesso em propor uma prática que exigisse dos alunos seus conhecimentos físicos e mecânicos, adquiridos ao longo do curso, para a modelagem de sistemas clássicos (tanque e pêndulo); além da sua linearização e representação em espaço de estados. Os modelos obtidos foram linearizados e representados em espaço de estados. Ainda, a modelagem foi simulada via software MATLAB® em sua interface *Simulink*. Pode-se perceber que o modelo linear se aproxima satisfatoriamente do não linear em torno do ponto linearizado.

Palavras-chaves: Modelagem. Linearização. Tanque simples. Pêndulo simples.

Abstract

Modeling and linearization is one of the first steps for system analysis and controller design. Thus, Practice 01 of the Linear Systems Analysis Laboratory discipline succeeded in proposing a practice that required students to obtain their physical and mechanical knowledge, acquired throughout the course, for the modeling of classical systems (tank and pendulum); beyond its linearization and state space representation. The obtained models were linearized and represented in state space. Still, the modeling was simulated via MATLAB® software in its *Simulink* interface. It can be seen that the linear model satisfactorily approximates the nonlinear model around the linearized point.

Keywords: Modeling. Linearization. Simple tank. Simple pendulum.

1. INTRODUÇÃO

Em 14 de agosto de 2019 na disciplina de *Laboratório de Análise de Sistemas Lineares*, foi-se proposto a modelagem, linearização, simulação e comparação dos sistemas: tanque simples e pêndulo simples. Diante disto, este relatório se propõe a descrever a instrumentação, métodos e conceitos utilizados para cumprir a prática.

2. TANQUE SIMPLES

Considere o tanque mostrado na FIG. 1, em que a variável manipulada é a vazão de entrada $q_i(v(t))$ por meio de uma válvula e a variável controlada é a altura de água $h(t)$.

2.1 Modelagem

O volume de água no tanque é calculado por

$$V = Ah(t)$$

Diferenciando o volume no tempo, tem-se

$$\frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}[Ah(t)] = A\dot{h}(t) \quad (1)$$

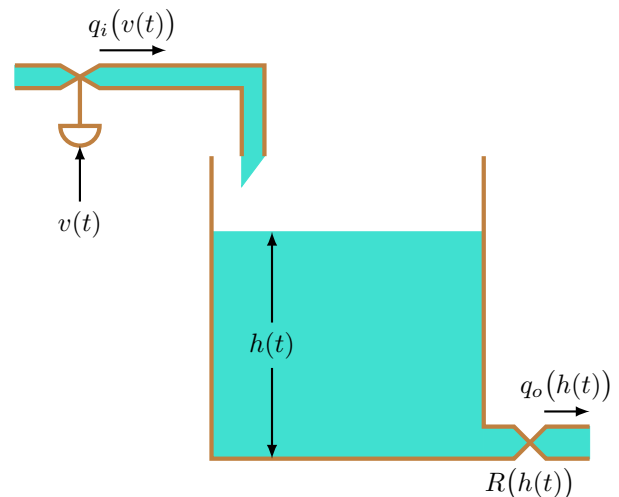


Figura 1. Esquemático de um tanque simples

Entretanto, fisicamente o diferencial do volume corresponde a diferença das vazões. Portanto,

$$A\dot{h}(t) = q_i(v(t)) - q_o(h(t)) \quad (2)$$

Considerando o líquido incompressível, o escoamento invíscido e em regime permanente, a equação de Bernoulli da saída do tanque é

$$q_o(h(t)) = \frac{\sqrt{h(t)}}{R} \quad (3)$$

Aplicando (3) em (2), segue

$$A\dot{h}(t) = q_i(v(t)) - \frac{\sqrt{h(t)}}{R}$$

Isolando $\dot{h}(t)$,

$$\dot{h}(t) = \frac{q_i(v(t))}{A} - \frac{\sqrt{h(t)}}{RA} \quad (4)$$

A equação (4) é não linear devido ao termo $\sqrt{h(t)}$. Sendo assim, ela deve ser linearizada para um ponto de equilíbrio h_{eq} desejado e, por meio do Jacobiano da EDO, fazendo

$$\begin{aligned} \delta\dot{h}(t) = & (h(t) - h_{eq}) \left. \frac{\partial f(h(t), q_i(v(t)), t)}{\partial h} \right|_{h=h_{eq}, q_i=q_{ieq}} + \\ & + (u(t) - u_{eq}) \left. \frac{\partial f(h(t), q_i(v(t)), t)}{\partial q_i} \right|_{h=h_{eq}, q_i=q_{ieq}} \end{aligned}$$

em que $f(h(t), u(t), t)$ é a função que descreve o comportamento de $\dot{h}(t)$, neste caso, a equação (4). Aplicando, tem-se

$$\begin{aligned} \delta\dot{h}(t) = & (h(t) - h_{eq}) \left(-\frac{1}{2RA\sqrt{h_{eq}}} \right) + \\ & + \left(q_i(v(t)) - q_{ieq} \right) \frac{1}{A} \end{aligned} \quad (5)$$

Sejam $\delta h(t) := (h(t) - h_{eq})$ e $\delta q_i(v(t)) := (q_i(v(t)) - q_{ieq})$.

Diante disso, a equação (5) é escrita como

$$\delta\dot{h}(t) = -\frac{\delta h(t)}{2RA\sqrt{h_{eq}}} + \frac{\delta q_i(v(t))}{A} \quad (6)$$

2.2 Espaço de Estados

Seja $x(t) := \delta h(t)$, $\dot{x}(t) := \delta\dot{h}(t)$, $u(t) := \delta q_i(v(t))$, a representação em espaço de estados do sistema é

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \mathbf{A}x(t) + \mathbf{B}u(t) \\ y(t) &= x(t) \end{aligned} \quad (7)$$

em que

$$\mathbf{A} = -\frac{1}{2RA\sqrt{h_{eq}}}, \quad \mathbf{B} = \frac{1}{A}$$

3. PÊNDULO SIMPLES

Considere o pêndulo mostrado na FIG. 2, em que a variável manipulada é a força \mathbf{F} aplicada na sua extremidade P . A variável controlada é a posição θ do pêndulo em relação ao eixo vertical.

O pêndulo é composto por um cabo inextensível cuja massa pode ser desprezada, fazendo com que o seu centro de gravidade CG se concentre em P . Além disso, a força de atrito viscoso \mathbf{F}_a será a única força dissipativa do sistema, sendo desconsiderado o atrito seco, a resistência do ar ou a deformação dos corpos.

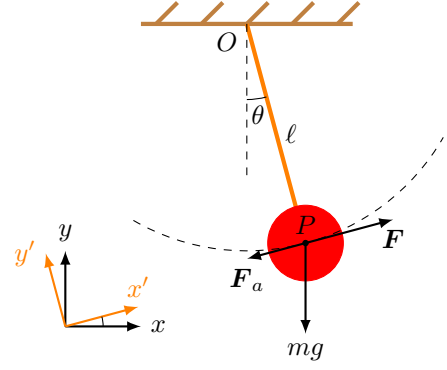


Figura 2. Esquemático do pêndulo simples

3.1 Modelagem

A aplicação da segunda lei de newton no eixo x' resulta em

$$\sum F_{x'} = ma_{x'} \Rightarrow F(t) - F_a(\theta(t)) - mg \sin \theta(t) = ma_{x'}(t)$$

Já o somatório de forças em y' é zero, pois as únicas forças atuantes neste eixo é a força peso e a reação do cabo. Ademais, a aceleração é a derivada temporal de ordem 2 da posição, ou seja,

$$F(t) - F_a(\theta(t)) - mg \sin \theta(t) = m \frac{d^2}{dt^2} (\ell \sin \theta(t)) \quad (8)$$

O atrito viscoso é tal que

$$F_a(\theta(t)) = \ell k \dot{\theta}(t) \quad (9)$$

Aplicando (9) em (8) e diferenciando a posição,

$$F(t) - \ell k \dot{\theta}(t) - mg \sin \theta(t) = m \ell \frac{d^2}{dt^2} (\sin \theta(t)) \quad (10)$$

Considerando que o ângulo θ não varia muito em torno do eixo vertical, pode-se considerar que $\sin \theta \approx \theta$. Dessarte ¹,

$$F(t) - \ell k \dot{\theta}(t) - mg \theta(t) = m \ell \ddot{\theta}(t) \quad (11)$$

Isolando $\ddot{\theta}(t)$, obtém-se

$$\ddot{\theta}(t) = \frac{F(t)}{m\ell} - \frac{k}{m} \dot{\theta}(t) - \frac{g}{\ell} \theta(t) \quad (12)$$

uma função linear válida para $\theta \approx 0$.

3.2 Espaço de estados

Sejam $x_1(t) := \theta(t)$, $x_2(t) := \dot{\theta}(t)$, $\mathbf{x} := [x_1 \ x_2]^T$ e $u(t) := F(t)$. Assim, a representação em espaço de estados do pêndulo simples é

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \\ y(t) &= [1 \ 0] \mathbf{x}(t) \end{aligned} \quad (13)$$

sendo

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -g/\ell & -k/m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/(m\ell) \end{bmatrix}$$

¹ Note que a linearização foi feita antes de se derivar a função seno. Contudo, para resultados mais precisos, fazer-se-ia

$$\frac{d^2}{dt^2} [\sin \theta(t)] = \ddot{\theta}(t) \cos \theta(t) - \dot{\theta}^2(t) \sin \theta(t)$$

cujas linearizações considerando $\theta(t) \approx 0$ implica que $\cos \theta(t) \cong 1$, $\sin \theta(t) \cong 0$, que culmina ao valor de (11).

4. RESULTADOS

Por meio da representação de espaços de estados é possível simular o modelo obtido dos sistemas e analisar suas respostas.

4.1 Tanque simples

Para simular os resultados de um tanque, considere um tanque com altura total $z < h(t)$, $\forall t \geq 0$ s. Ainda, considere que o tanque seja tal que

$$A = 0,4 \text{ m}^2 \quad \text{e} \quad \beta = \frac{1}{RA} = 0,6$$

Deliberando que o ponto de equilíbrio $h_{eq} = 1$ m. Para o ponto escolhido, a variação do nível é nula, então $\dot{h}(t) = 0$, por isso, aplicando estes valores em (4), o sinal de controle q_{ieq} encontrado é de

$$q_{ieq} = 0,24 \text{ m}^3/\text{s}$$

Diante disso, a equação de espaço de estados que representa o sistema é

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -0,3x(t) + 2,5u(t) \\ y(t) &= x(t) \end{aligned} \quad (14)$$

4.2 Pêndulo Simples

Para simular os resultados de um pêndulo simples, considere

$$g = 9,8 \text{ m/s}^2 \quad \ell = 0,5 \text{ m} \quad k = 1 \quad m = 1 \text{ kg}$$

No processo de linearização admitiu-se $\theta(t) \approx 0$ rad, portanto o ponto de equilíbrio que corresponde à linearização deve ser $\theta_{eq} = 0$ rad. Para o ponto escolhido, a velocidade e a aceleração angular são nulas, então $\dot{\theta}(t) = 0$ rad/s e $\ddot{\theta}(t) = 0$ rad/s², por isso, aplicando estes valores em (12), o sinal de controle F_{eq} encontrado é de

$$F_{eq} = 0 \text{ N}$$

Diante disso, a equação de espaço de estados que representa o sistema é

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} \dot{\theta}(t) \\ \ddot{\theta}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -19,6 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (15)$$

5. SIMULAÇÃO

A partir das equações que descrevem os fenômenos físicos do tanque e pêndulo, utilizou-se o MATLAB® a fim de simular os modelos linearizado e o não linear obtidos. Com isso, é possível verificar se pequenas variações no ponto de equilíbrio ainda tornam o modelo fidedigno.

5.1 Tanque simples

A topologia para plotar as respostas temporais dos modelos linear e não linear do tanque simples é exposta na FIG. 3.

Fisicamente, espera-se que quando for aplicado um degrau no sistema, sua vazão varie por um curto período de tempo

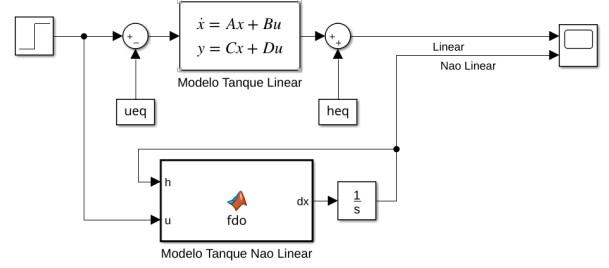


Figura 3. Topologia para simulação do tanque simples

e depois se estabilize em uma altura, quando as vazões de entrada forem iguais. Aplicando um degrau de $1,05q_{ieq}$ em $t = 0$ s e $0,90q_{ieq}$ em $t = 15$ s, a resposta obtida é mostrada na FIG. 4.

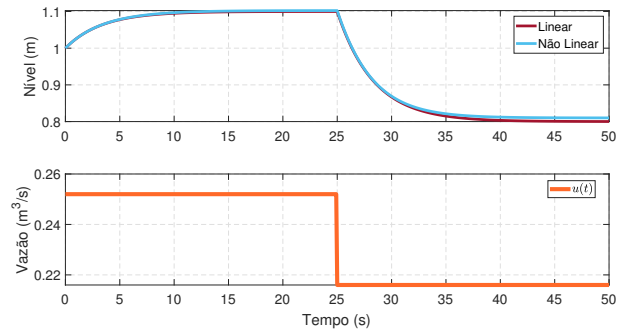


Figura 4. Comportamento do tanque quando aplicada $1,05q_{ieq}$ e $0,90q_{ieq}$

A curva do nível do modelo linear aparenta grande verossimilhança com a curva do nível do modelo não linear, pois visivelmente seus valores não apresentam desvios significativos. Isso implica que a linearização continua válida para $\pm 10\%$ do ponto de equilíbrio.

O nível do tanque quando excitado por um degrau descreve um comportamento de sistemas de primeira ordem, o que se comprova pela modelagem obtida em (4). A curva não apresenta inflexões antes de estabilizar e não há oscilação, desempenhos típicos de sistemas de primeira ordem.

5.2 Pêndulo Simples

A topologia para plotar as respostas temporais dos modelos linear e não linear do pêndulo simples é exposta na FIG. 5.

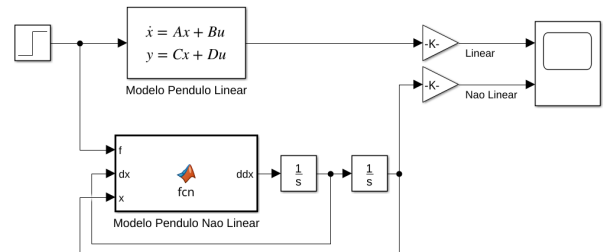


Figura 5. Topologia para simulação do pêndulo simples

O sinal de controle $u(t) = 0,1\mu_0(t) + 0,5\mu_{15}(t)$ (sendo μ_a a função degrau aplicada no instante a) e a resposta do sistema gerada por tal é mostrada na FIG. 6.

Em $0 \leq t \leq 15$, note que a posição angular do pêndulo parte de 5° , a condição inicial escolhida, e oscila em torno do ponto de operação θ_{op} até que ele entre em regime permanente e se estabilize num valor.

Em regime permanente, a variação da posição é desprezível, logo $d^2/dt^2(\sin \theta(t)) \approx 0$, $\ddot{\theta}(t) \approx 0$ e $\dot{\theta}(t) \approx 0$. Aplicando estes valores em (11) e (12), obtém-se

$$(\theta_{op})_{n. lin.} = 3,51^\circ \quad (\theta_{op})_{lin.} = 0,58^\circ$$

denotando que pequenos desvios do ponto de operação não afetam significativamente na linearização obtida.

Em $15 \leq t \leq 30$, note que a posição angular do pêndulo parte de $0,58^\circ$ e oscila em torno do ponto de operação θ_{op} para $F(t) = 0,6$ N até que ele entre em regime permanente e se estabilize num valor.

Em regime permanente, a variação da posição é desprezível, logo $d^2/dt^2(\sin \theta(t)) \approx 0$, $\ddot{\theta}(t) \approx 0$ e $\dot{\theta}(t) \approx 0$. Aplicando estes valores em (11) e (12), obtém-se

$$(\theta_{op})_{n. lin.} = 2,27^\circ \quad (\theta_{op})_{lin.} = 3,51^\circ$$

Embora houve certo desvio nos valores devido à discrepância da aproximação $\theta(t) \approx \sin \theta(t)$. Ainda, como $\theta(t)$ é sempre maior ou igual que $\sin \theta(t)$ em $0 \leq \theta(t) < \infty$, e agregando-se ao fator que estes termos aparecem negativos na modelagem, já era esperado que o valor de regime permanente do modelo linear fosse levemente inferior ao outro modelo.

Adicionalmente, o comportamento do pêndulo é oscilatório em torno de um valor quando solto. Sendo assim, as respostas obtidas apresentam verossimilhança com o fenômeno físico. Além de que o modelo obtido apresenta bem as características do sistema.

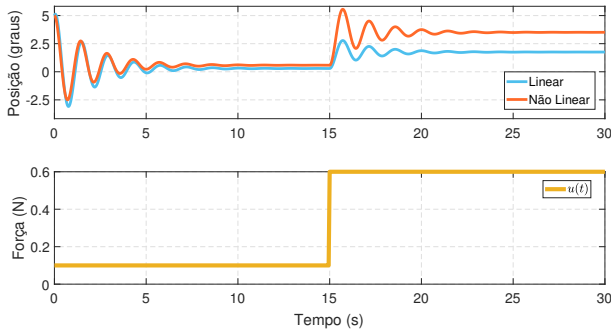


Figura 6. Resposta temporal do pêndulo

6. CONCLUSÃO

A modelagem e linearização é um dos primeiros passos para a análise de sistemas e projeto de controladores. Sendo assim, a prática 01 da disciplina de Laboratório de Análise de Sistemas Lineares obteve sucesso em propor uma prática que exigisse dos alunos seus conhecimentos físicos e mecânicos para a modelagem de sistemas clássicos (tanque e pêndulo) além da sua linearização e representação em espaço de estados.

Diante disso, os dados coletados das simulações mostraram que a linearização de sistemas não lineares é fidedigna em torno de 10% do ponto de operação para as plantas analisadas.

A linearização do tanque simples se mostrou mais semelhante ao modelo não linear, contendo baixos desvios em regime permanente e ainda com aproximação satisfatória no transiente.

Já o modelo do pêndulo apresentou significativos desvios quando o sinal aplicado se distaciava levemente do ponto de operação $\theta_{op} = 0$ rad. Um desvio assim era esperado, uma vez que durante sua modelagem arbitrou-se que $\theta(t)$ estaria em torno de 0 rad. No entanto, em valores absolutos, os valores de estado estacionários não apresentaram grandes alterações, o que não causaria grandes erros num futuro controle.

Ademais, foi possível visualizar os comportamentos típicos de sistemas de primeira e segunda ordem (este último apenas polos complexos conjugados), o que gera boa percepção visual destes tipos de plantas.

7. REFERÊNCIAS

- CHEN, Chi-Tsong. *Linear System Theory and Design*. 4. ed. New York: Oxford, 2012. p. 398.
- OGATA, Katsuhiko. *Engenharia de Controle Moderno*. 5. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2010. p. 822.