

# Prática 1 — Laboratório de Análise de Sistemas Lineares

Bernardo Bresolini\* Ester Queiroz Alvarenga\*

\* Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais,  
Divinópolis - MG (e-mails: [berbresolini14@gmail.com](mailto:berbresolini14@gmail.com) e  
[esterqueirozalvarenga@gmail.com](mailto:esterqueirozalvarenga@gmail.com)).

ResumoLorem Ipsum.

*Palavras-chaves:* Modelagem. Linearização. Tanque simples. Pêndulo simples.

Abstract  
Lorem Ipsum.

*Keywords:* Modeling. Linearization. Simple tank. Simple pendulum.

## 1. INTRODUÇÃO

## 2. PÊNDULO SIMPLES

Considere o pêndulo mostrado na FIG. 1, em que a variável manipulada é a força  $F$  aplicada na sua extremidade  $P$ . A variável controlada é a posição  $\theta$  do pêndulo em relação ao eixo vertical.

O pêndulo é composto por um cabo inextensível cuja massa pode ser desprezada, fazendo com que o seu centro de gravidade  $CG$  se concentre em  $P$ . Além disso, a força de atrito viscoso  $F_a$  será a única força dissipativa do sistema, sendo desconsiderado o atrito seco, a resistência do ar ou a deformação dos corpos.

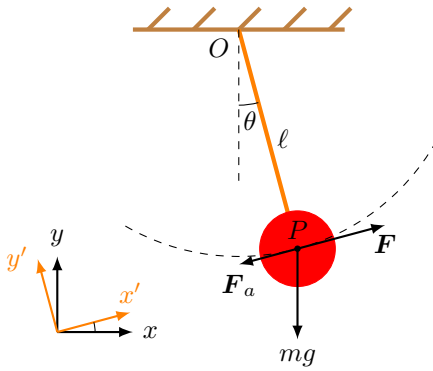


Figura 1. Esquemático do pêndulo simples

### 2.1 Modelagem

A aplicação da segunda lei de newton no eixo  $x'$  resulta em

$$\sum F_{x'} = ma_{x'} \\ F(t) - F_a(\theta(t)) - mg \sin \theta(t) = ma_{x'}(t)$$

Já o somatório de forças em  $y'$  é zero, pois as únicas forças atuantes neste eixo é a força peso e a reação do cabo. Ademais, a aceleração é a derivada temporal de ordem 2 da posição, ou seja,

$$F(t) - F_a(\theta(t)) - mg \sin \theta(t) = m \frac{d^2}{dt^2} (\ell \sin \theta(t)) \quad (1)$$

O atrito viscoso é tal que

$$F_a(\theta(t)) = \ell k \dot{\theta}(t) \quad (2)$$

Aplicando (2) em (1) e diferenciando a posição,

$$F(t) - \ell k \dot{\theta}(t) - mg \sin \theta(t) = m \ell \frac{d^2}{dt^2} (\sin \theta(t)) \quad (3)$$

Resolvendo o termo à direita da igualdade,

$$\frac{d^2}{dt^2} [\sin \theta(t)] = \ddot{\theta}(t) \cos \theta(t) - \dot{\theta}^2(t) \sin \theta(t) \quad (4)$$

Substituindo (4) em (3) e isolando a derivada de maior ordem,

$$\ddot{\theta}(t) = \dot{\theta}(t) [\dot{\theta}(t) \operatorname{tg} \theta(t) - \ell k \operatorname{cosec} \theta(t)] \\ + F(t) \operatorname{cosec} \theta(t) - mg \operatorname{tg} \theta(t) \quad (5)$$

### 2.2 Implementação

As constantes utilizadas no sistema são mostradas na TAB. 1.

Tabela 1. Constantes físicas do problema

Símbolo	Valor	Unidade
$\ell$	0,5	m
$m$	0,2	kg
$g$	9,8	m/s <sup>2</sup>
$k$	1,0	kg/s

### 3. REFERÊNCIAS

CHEN, Chi-Tsong. *Linear System Theory and Design*. 4. ed. New York: Oxford, 2012. p. 398.

OGATA, Katsuhiko. *Engenharia de Controle Moderno*. 5. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2010. p. 822.