Teoria de Controle: Projeto via aboradagem Poliniomial

Docentes: Luís & Valter

Departamento de Engenharia Mecatrônica / CEFET-MG

20 de agosto de 2020

Motivação (I)

Considere um sistema cuja função de transferência é dada por $G(s)$ e um controlador $C(s)$:

$$G(s) = \frac{B(s)}{A(s)} \qquad C(s) = \frac{\beta(s)}{\alpha(s)}.$$

O objetivo é projetar o controlador $C(s)$ de forma a assegurar a estabilidade da malha fechada:

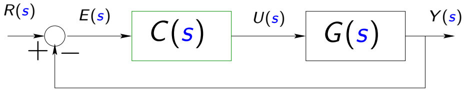

Figura: Malha de controle 1: controle série.

Motivação (II)

Neste caso, a malha fechada é dada por

$$G_{MF} = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)} = \frac{\frac{\beta(s)}{\alpha(s)}\frac{B(s)}{A(s)}}{1 + \frac{\beta(s)}{\alpha(s)}\frac{B(s)}{A(s)}},$$

que após simplificar resulta em:

$$G_{MF} = \frac{\beta(s)B(s)}{\alpha(s)A(s) + \beta(s)B(s)}$$

• A dinâmica da malha fechada pode ser especificada por um polinômio $D(s)$ tal que

$$D(s) = \alpha(s)A(s) + \beta(s)B(s), \text{ (identidade } \textit{Diofantina}\text{)} \qquad (1)$$

em $\alpha(s)$ e $\beta(s)$ precisam ser determinados.

Motivação (III)

Note que se o controlador é colocado na realimenatção:

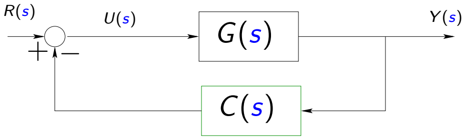

Figura: Malha de controle 2: controle na realimentação.

A malha fechada é dada por:

$$G_{MF} = \frac{\alpha(s)B(s)}{\boxed{\alpha(s)A(s) + \beta(s)B(s)} = D(s)},$$

e os polos do controlador (raízes de $\alpha(s)$) são zeros de $G_{MF}(s)$.

Motivação (IV)

Como resolver:

$$D(s) = \alpha(s)A(s) + \beta(s)B(s), \text{ (identidade } \textit{Diofantina}\text{)}$$

para obter:

$$C(s) = \frac{\beta(s)}{\alpha(s)}?$$

Equação Diofantina (I)

Considere os polinômios $A(s)$ e $B(s)$ dados por

$$A(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n \tag{2}$$

$$B(s) = b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \cdots + b_{n-1} s + b_n \tag{3}$$

em que:

- $A(s)$ é mônico;
- $A(s)$ e $B(s)$ são polinômios co-primos.

Equação Diofantina (I)

Considere os polinômios $A(s)$ e $B(s)$ dados por

$$A(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n \tag{2}$$

$$B(s) = b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \cdots + b_{n-1}s + b_n \tag{3}$$

em que:

- $A(s)$ é mônico;
- $A(s)$ e $B(s)$ são polinômios co-primos.

Seja $D(s)$ um polinômio estável de grau $\delta(D(s)) = (2n-1)$:

$$D(s) = d_0 s^{2n-1} + d_1 s^{2n-2} + \cdots + d_{2n-2}s + d_{2n-1}. \tag{4}$$

Equação Diofantina (II)

Unicidade de solução

Admitidas as características de $A(s)$, $B(s)$ e $D(s)$ apresentadas anteriorementе, a identidade

$$\alpha(s)A(s) + \beta(s)B(s) = D(s) \tag{5}$$

adminite solução única com $\alpha(s)$ e $\beta(s)$ polinômios de grau $(n-1)$ em que

$$\alpha(s) = \alpha_0 s^{n-1} + \alpha_1 s^{n-2} + \cdots + \alpha_{n-2} s + \alpha_{n-1} \tag{6}$$

$$\beta(s) = \beta_0 s^{n-1} + \beta_1 s^{n-2} + \cdots + \beta_{n-2} s + \beta_{n-1} \tag{7}$$

Solução da Equação Diofantina (I)

Seja a matriz de Sylvester $\mathbf{E}$ com dimensões $2n \times 2n$ dada por:

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} a_n & 0 & \cdots & 0 & b_n & 0 & \cdots & 0 \\ a_{n-1} & a_n & \cdots & 0 & b_{n-1} & b_n & \cdots & 0 \\ \vdots & a_{n-1} & \cdots & 0 & \vdots & b_{n-1} & \cdots & 0 \\ a_1 & \vdots & \ddots & \vdots & b_1 & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_1 & \cdots & a_{n-1} & b_0 & b_1 & \cdots & b_{n-1} \\ 0 & 1 & \cdots & a_{n-2} & 0 & b_0 & \cdots & b_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & a_1 & 0 & 0 & \cdots & b_1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & b_0 \end{bmatrix} \tag{8}$$

Solução da Equação Diofantina (II)

$$\left.\begin{array}{c} \alpha_0 s^{n-1} + \alpha_1 s^{n-2} + \cdots + \alpha_{n-2} s + \alpha_{n-1} \\ \& \\ \beta_0 s^{n-1} + \beta_1 s^{n-2} + \cdots + \beta_{n-2} s + \beta_{n-1} \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{M} = \begin{bmatrix} \alpha_{n-1} \\ \alpha_{n-2} \\ \vdots \\ \alpha_0 \\ \beta_{n-1} \\ \beta_{n-2} \\ \vdots \\ \beta_0 \end{bmatrix} \tag{9}$$

Solução da Equação Diofantina (III)

Do polinômio $D(s)$ define-se

$$d_0 s^{2n-1} + d_1 s^{2n-2} + \cdots + d_{2n-2} s + d_{2n-1}$$
$$\Downarrow$$
$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_{2n-1} \\ d_{2n-2} \\ \vdots \\ d_1 \\ d_0 \end{bmatrix}, \qquad (10)$$

Solução da Equação Diofantina (III)

Do polinômio $D(s)$ define-se

$$d_0 s^{2n-1} + d_1 s^{2n-2} + \cdots + d_{2n-2} s + d_{2n-1}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_{2n-1} \\ d_{2n-2} \\ \vdots \\ d_1 \\ d_0 \end{bmatrix}, \tag{10}$$

e assim, tem-se a solução dada por

$$\mathbf{M} = \mathbf{E}^{-1}\mathbf{D} \tag{11}$$

Exemplo (I)

Seja

$$G(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{s+2}{s^2+s+0{,}5}$$

Exemplo (I)

Seja

$$G(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{s+2}{s^2+s+0{,}5}$$

- $\delta(A(s)) = 2 \Rightarrow \delta(D(s)) = 3$, ou seja,

$D(s) = d_0 s^3 + d_1 s^2 + d_2 s + d_3$;

Exemplo (I)

Seja

$$G(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{s+2}{s^2+s+0{,}5}$$

- $\delta(A(s)) = 2 \Rightarrow \delta(D(s)) = 3$, ou seja,
$D(s) = d_0 s^3 + d_1 s^2 + d_2 s + d_3$;
- Logo, $\delta(\alpha(s)) = \delta(\beta(s)) = 1$ e, portanto,

$$\alpha(s) = \alpha_0 s + \alpha_1,\ \beta(s) = \beta_0 s + \beta_1 \Rightarrow C(s) = \frac{\beta(s)}{\alpha(s)}.$$

Exemplo (I)

Seja

$$G(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{s+2}{s^2+s+0{,}5}$$

- $\delta(A(s)) = 2 \Rightarrow \delta(D(s)) = 3$, ou seja,
$D(s) = d_0 s^3 + d_1 s^2 + d_2 s + d_3$;
- Logo, $\delta(\alpha(s)) = \delta(\beta(s)) = 1$ e, portanto,

$$\alpha(s) = \alpha_0 s + \alpha_1,\ \beta(s) = \beta_0 s + \beta_1 \Rightarrow C(s) = \frac{\beta(s)}{\alpha(s)}.$$

Exemplo (I)

Seja

$$G(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{s+2}{s^2+s+0{,}5}$$

- $\delta(A(s)) = 2 \Rightarrow \delta(D(s)) = 3$, ou seja, $D(s) = d_0 s^3 + d_1 s^2 + d_2 s + d_3$;
- Logo, $\delta(\alpha(s)) = \delta(\beta(s)) = 1$ e, portanto,

$$\alpha(s) = \alpha_0 s + \alpha_1,\ \beta(s) = \beta_0 s + \beta_1 \Rightarrow C(s) = \frac{\beta(s)}{\alpha(s)}.$$

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0{,}5 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ \mathbf{M} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_0 \\ \beta_1 \\ \beta_0 \end{bmatrix},\ \mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_3 \\ d_2 \\ d_1 \\ d_0 \end{bmatrix}$$

Exemplo (II)

- É necessário especificar $D(s)$. Suponha que seja desejada uma malha fechada com tempo de acomodação de 5s e *overshoot*, $\%OS$, de no máximo 15% e menor tempo de subida possível.

Exemplo (II)

- É necessário especificar $D(s)$. Suponha que seja desejada uma malha fechada com tempo de acomodação de 5s e *overshoot*, $\%OS$, de no máximo 15% e menor tempo de subida possível.

$$t_s = 5 \Rightarrow \zeta\omega_n = \frac{4}{5} = 0{,}8$$

$$\begin{aligned} \%OS &= e^{-\left(\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)} \Rightarrow \\ \zeta &= \frac{-\ln\frac{\%OS}{100}}{\sqrt{\pi^2+\ln^2\frac{\%OS}{100}}} \\ &= \frac{-\ln 0{,}15}{\sqrt{\pi^2+\ln^2 0{,}15}} \\ &= 0{,}5169; \text{ logo:} \\ \theta &= \arccos 0{,}5169 = 58{,}87^o. \end{aligned} \tag{12}$$

Exemplo (III)

Assim, $\tan\theta = \dfrac{\text{parte imaginária}}{0{,}8} = \tan 58{,}87 = 1{,}6560 \Rightarrow$ parte imaginária $= 1{,}656 \times 0{,}8 = 1{,}324$.

Exemplo (III)

Assim, $\tan\theta = \dfrac{\text{parte imaginária}}{0{,}8} = \tan 58{,}87 = 1{,}6560 \Rightarrow$ parte imaginária $= 1{,}656 \times 0{,}8 = 1{,}324$.

$$s_{1,2} = -0{,}8 \pm 1{,}324j$$

Terceiro polo:

Exemplo (III)

Assim, $\tan\theta = \dfrac{\text{parte imaginária}}{0{,}8} = \tan 58{,}87 = 1{,}6560 \Rightarrow$ parte imaginária $= 1{,}656 \times 0{,}8 = 1{,}324$.

$$s_{1,2} = -0{,}8 \pm 1{,}324j$$

Terceiro polo:
Escolha pelo menos uma década abaixo, por exemplo $s_3 = -8$.

Exemplo (III)

Assim, $\tan\theta = \dfrac{\text{parte imaginária}}{0{,}8} = \tan 58{,}87 = 1{,}6560 \Rightarrow$
parte imaginária $= 1{,}656 \times 0{,}8 = 1{,}324$.

$$s_{1,2} = -0{,}8 \pm 1{,}324j$$

Terceiro polo:
Escolha pelo menos uma década abaixo, por exemplo $s_3 = -8$.

Assim, $D(s) = (s - s_1)(s - s_2)(s - s_3) =$
$(s + 0{,}8 + 1{,}324j)(s + 0{,}8 - 1{,}324j)(s + 8) = \ldots$
Veja comandos matlab no próximo slide.

Exemplo (IV)

- No Matlab:

```
D = conv(conv([1 0.8+1.324i],[1 0.8-1.324i]),[1 8]) % Calcula D(s)
Dinv = fliplr(D)' % Empilha coeficientes D(s)
den = [1 1 0.5];
num = [0 1 2];
deninv = fliplr(den)';
numinv = fliplr(num)';
E = [[deninv; 0;] [0; deninv]];
E = [E [numinv; 0] [0; numinv]];
```

Exemplo (V)

Resultados:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_0 \\ \beta_1 \\ \beta_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9{,}6631 \\ 1{,}0000 \\ 7{,}1561 \\ -1{,}0631 \end{bmatrix} \Longrightarrow \frac{-1{,}0631s + 7{,}1561}{s + 9{,}6631} = C(s)$$

Exemplo (VI)

- Zeros de $G_{MF}(s)$:
  1. Controlador série: zeros em $s_0 \in \{-2, 6{,}7314\}$
  2. Controlador na realimentação: zeros em $s_0 \in \{-2, -9{,}6631\}$

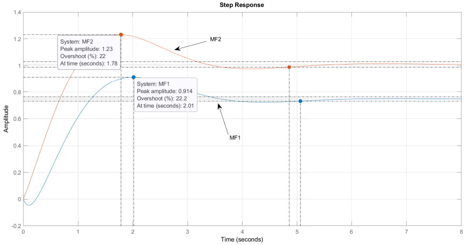

Figura: Degrau unitário em $G_{MF}(s)$ com controlador série (MF1) e na realimentação (MF2). Especificações: $OS_{\%} = 15\%$ e $t_s = 5$s. Qual(is) o(s) problema(s)?

Exemplo (VII)

1. Zero em -2, próximo do polo dominante $(-0.8 \pm 1{,}324j)$.
2. Zero de fase não mínima na configuração MF2.
3. Ganho de regime permanente não unitário.

Exemplo (VII)

1. Zero em -2, próximo do polo dominante $(-0.8 \pm 1{,}324j)$.
2. Zero de fase não mínima na configuração MF2.
3. Ganho de regime permanente não unitário.

- Pré-compensação na referência para o zero de fase mínima: $C_p(s) = \frac{2}{s+2}$;
- Pré-compensação do ganho na referência: $P = G_{MF}(0)^{-1}$.

Exemplo (VIII)

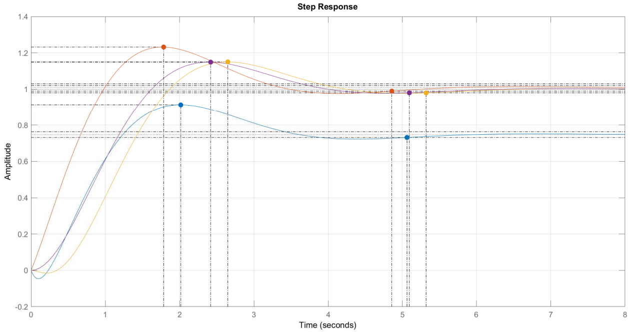

Figura: Sinais originais e sinais compensados.

Exercícios

- Sejam $A(s) = s^2 + s + 0{,}5$, $B(s) = s + 2$ e $D(s)$ tal que o sobressinal máximo seja limitado a 12%, tempo de acomodação limitado a 8s e menor tempo de subida possível. Analise as topologias de controle possíveis.
- Seja $G(s) = \frac{5}{s-2}$ e $D(s) = 2s + 1$. Encontre $\alpha(s)$ e $\beta(s)$.
- Seja $G(s) = \frac{3(s+4)}{s^3+7s^2+11s-4}$. Escolha um $D(s)$ estável adequado e calcule $\alpha(s)$ e $\beta(s)$ correspondentes. Analise as topologias possíveis.
- Seja $G(s) = \frac{5e^{-10s}}{40s+1}$ e projete um controlador que assegure $t_s = 80$s e seja criticamente amortecido.
- Calcule a constante de erro de posição em cada caso anterior.

Um caso de maior dimensão

Seja

$$G(s) = \frac{s^2 + 1{,}2s + 4}{(s+1)(s-2)(s^2 + 1{,}4s + 1)},$$

que possui zeros em $z_i = -0{,}6 \pm 1{,}9j$ e polos em $p_i = -1,\ 2,\ -0{,}7 \pm 0{,}7j$.

Deseja-se $t_s \approx 2$s, $\%OS < 5\%$ e menor tempo de subida possível.

O que fazer?

Síntese PID

Controlador PID

Seja o controlador do tipo PID com equação dada por

$$C(s) = K\left(1 + T_d s + \frac{1}{T_i s}\right) = \frac{\beta_0 s^2 + \beta_1 s + \beta_2}{s}$$

em que

$$\beta_0 = KT_d, \quad \beta_1 = K, \quad \beta_2 = \frac{K}{T_i}$$

usado para controlar um processo cujo modelo de 2^a ordem é:

$$G(s) = \frac{b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0}$$

Síntese PID

Problema de Síntese

Projetar β_2, β_1 e β_0 para que a malha fechada tenha uma dinâmica dada por $D(s)$

Síntese PID

Problema de Síntese

Projetar β_2, β_1 e β_0 para que a malha fechada tenha uma dinâmica dada por $D(s)$

Resolvendo a malha fechada:

$$G_{MF}(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)}$$

iguala-se o denominador ao polinômio desejado:

$$D(s) = s^3 + d_2 s^2 + d_1 s + d_0$$

Resultados

Após manipulações:

$$\begin{bmatrix} 0 & b_1 & (b_0 - b_1 d_2) \\ b_1 & b_0 & -b_1 d_1 \\ b_0 & 0 & -b_1 d_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_2 \\ \beta_1 \\ \beta_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_2 - a_1 \\ d_1 - a_0 \\ d_0 \end{bmatrix}$$

Resultados

$$K = \beta_1; \qquad T_d = \frac{\beta_0}{K}; \qquad T_i = \frac{K}{\beta_2}$$

Resultados

$$K = \beta_1; \qquad T_d = \frac{\beta_0}{K}; \qquad T_i = \frac{K}{\beta_2}$$

Exemplo 1:

Condisere o controle de velocidade por tensão de um motor CC, com

$$G(s) = \frac{\omega(s)}{E_a(s)} = \frac{1500}{s^2 + 50{,}1s + 275} \frac{\text{rpm}}{\text{V}}$$

Deseja-se malha fechada com erro nulo para o seguimento de referências constantes, rejeição a perturbações de carga, $t_s < 1\text{s}$, $\%OS < 10\%$.