Prática 3 – Métodos de identificação de sistemas de primeira e segunda ordem

1. Objetivos:

- A partir da resposta ao degrau unitário:
    - Identificar o modelo matemático de um sistema de primeira ordem;
    - Identificar o modelo matemático de um sistema de segunda ordem.

2. Introdução

2.1. Modelagem matemática:

Modelagem matemática é a área do conhecimento que estuda maneiras de representar sistemas reais através de modelos matemáticos. Há diferentes formas de classificar as técnicas de modelagem. Uma delas as divide em três categorias: modelagem caixa branca, modelagem caixa preta e modelagem caixa cinza (AGUIRRE, 2007).

A primeira delas, modelagem caixa branca, é utilizada para descrever à física ou natureza do processo, portanto, é necessário o conhecimento prévio do sistema em estudo, as leis físicas que o descrevem (ANDRADE, 2005). Esse método nem sempre é viável de ser utilizado devido à complexidade, ao conhecimento e ao tempo necessários (AGUIRRE, 2007).

A modelagem caixa preta é conhecida por identificação de sistemas. Uma da principais características dessa técnica é descrever as relações de causa e efeito entre as variáveis de entrada e saída, sem a necessidade de profundo conhecimento sobre o sistema (HSIA, 1977).

Além essas duas categorias já citadas, existe uma terceira, a identificação caixa cinza. Nesse grupo, as técnicas caracterizam-se por utilizar informações complementares auxiliares, que não se encontram nos dados de entrada e de saída (AGUIRRE, 2007).

2.2. Características dos métodos de identificação

Os métodos abordados na aula têm as seguintes características:

- Determinísticos, pois não haverá nenhum tratamento especial para o sinal ruído presente no sistema. Os métodos determinísticos são pouco imunes a ruído e só apresentam bons resultados quando a relação sinal/ruído é suficientemente alta.

Métodos que levam em consideração o sinal ruído presente nos dados são denominados estocásticos e não serão tratados nesta aula;

- Paramétricos, pois os modelos resultantes serão representados por função de transferência. Já os métodos não paramétricos resultam em representação de um sistema via gráfico ou tabela.

2.3. Método de identificação para um sistema de primeira ordem: Método da resposta complementar

Um sistema de primeira ordem com atraso de transporte é representado pela seguinte função de transferência:

$$G(s) = \frac{K.e^{-ds}}{\tau s + 1}$$

Obs.: atraso de transporte é o tempo decorrente para que uma variação no sinal de entrada (excitação) seja efetivamente "percebida" pela variável de saída (resposta), também é chamado de tempo morto. A Figura 1 mostra esse atraso.

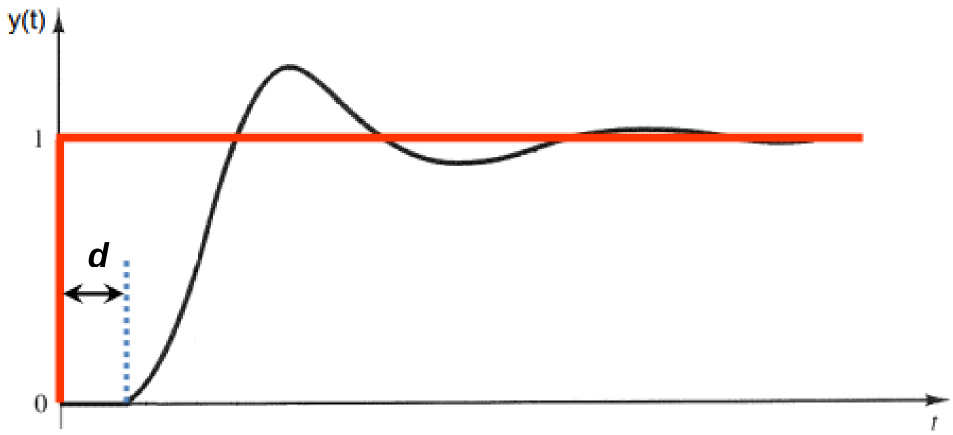

Figura 1 - Atraso de transporte.

Calculando a resposta ao degrau desse sistema, tem-se:

$$y(t) = K(1 - e^{-\frac{t-d}{\tau}})$$

Manipulando a equação anterior temos:

$$Z = \ln\left(\frac{-y(t) + K}{K}\right)$$

Onde:

$$Z = \frac{-(t-d)}{\tau}$$

Observe que derivando Z obtém-se:

$$\frac{dZ}{dt} = \frac{-1}{\tau}$$

Lembrando que: K é o ganho estático, τ a constante de tempo e d nosso atraso de transporte.

A identificação de um sistema de primeira ordem pelo método da resposta complementar baseia-se, portanto, em:

- $K = \frac{y_{ss}}{u_{ss}}$;
- $\tau = -\frac{\Delta t}{\Delta Z}$;
- Instante d em que Z fica diferente de zero.

Onde y_{ss} e u_{ss} são a saída e a entrada do sistema em estado estacionário respectivamente.

Observe que todas as informações acima são obtidas diretamente dos gráficos da resposta ao degrau e do gráfico calculado para Z.

Exemplo:

A Figura 2 apresenta a resposta de um dado sistema a uma entrada degrau. Além disso é apresentada a curva Z.

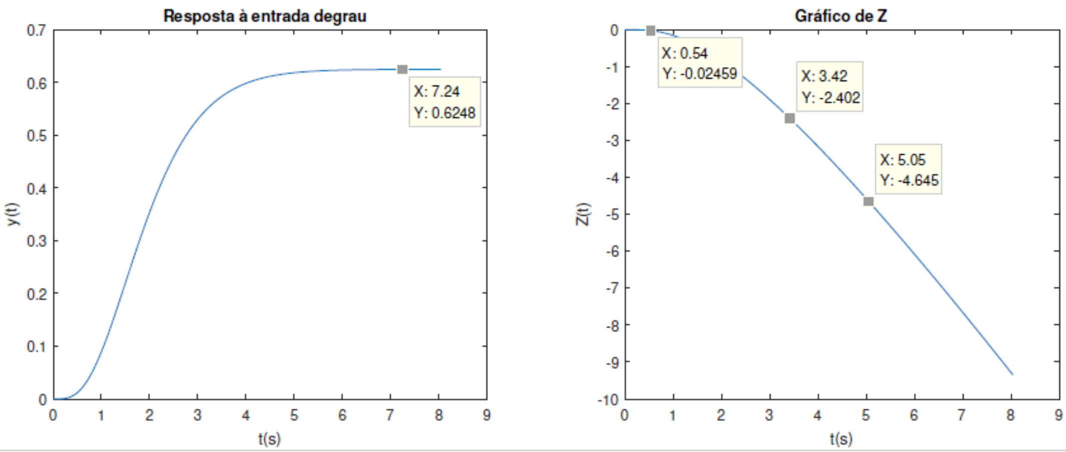

Figura 2 - Resposta de um dado sistema ao degrau unitário.

A partir das curvas pode-se identificar o sistema pelo método da resposta complementar. Sendo assim, tem-se:

- $K = 0.6248$
- $\tau = \frac{-(5.05-3.42)}{(-4.645-(-2.402)} = 0.727$
- $d = 0.54$

A Figura 3 mostra a comparação da resposta do sistema com o modelo identificado sem ajuste.

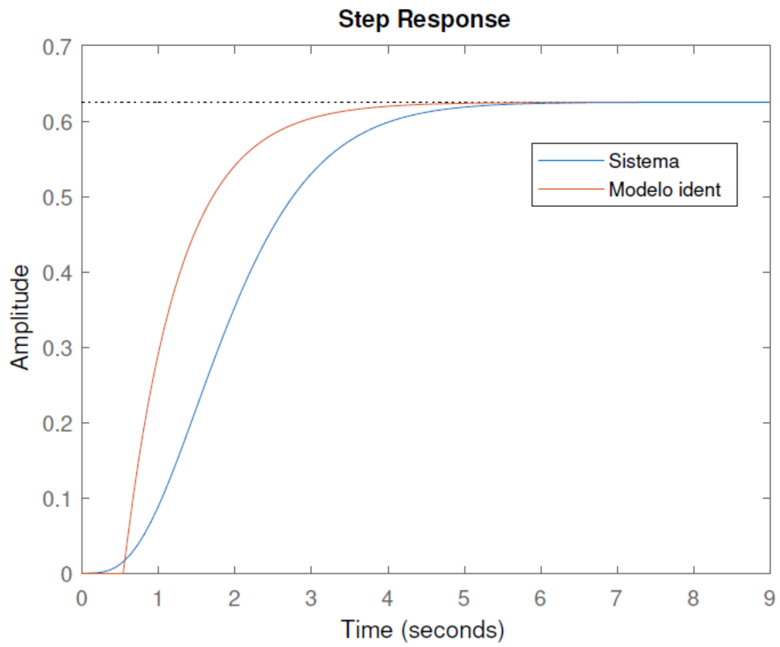

Figura 3 - Comparação da resposta do sistema com o modelo identificado sem ajuste.

Após ajustar a constante de tempo para $\tau = 1.197$, obtém-se a seguinte comparação (Figura 4):

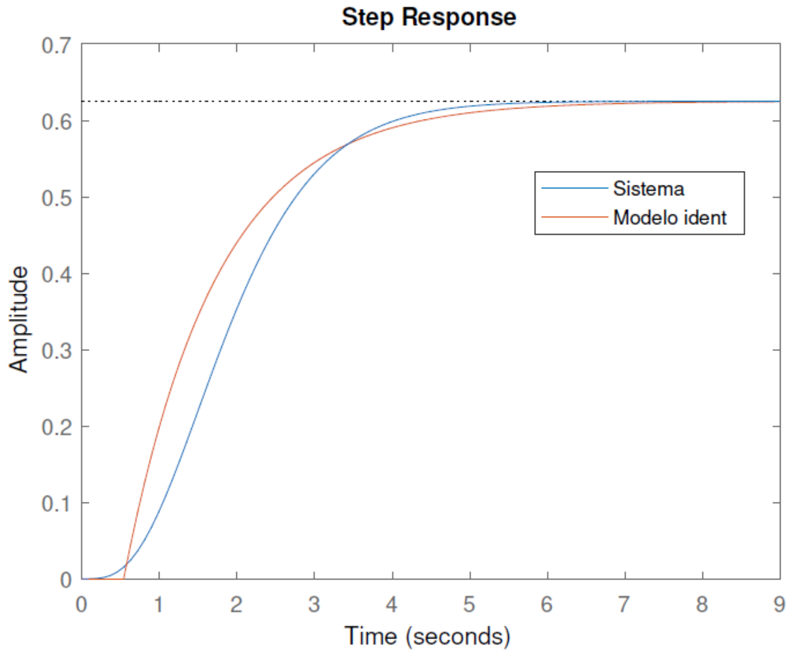

Figura 4 - Comparação da resposta do sistema com o modelo identificado com ajuste.

2.4. Método de identificação de sistemas de segunda ordem

Um sistema de segunda ordem é representado pela seguinte função de transferência:

$$G(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Onde K é o ganho estático do sistema, ζ é o fator de amortecimento e ω_n é a frequência natural de oscilação do sistema.

Para uma entrada degrau, tem-se a seguinte saída:

$$y(t) = K\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}\, e^{-\zeta\omega_0 t}\, sen\,\left(\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}t + cos^{-1}(\zeta)\right)\right)$$

Para identificar um sistema de segunda ordem a partir da resposta a entrada degrau, é necessário obter os valores de K, ζ e ω_0. Esses valores podem ser obtidos diretamente do sinal de saída, ou seja:

- $K = \frac{y_{ss}}{u_{ss}}$;
- $\zeta = -\frac{\ln MUP}{\sqrt{\pi^2 + (\ln(\text{MUP}))^2}}$;

- $\omega_0 = \frac{2\pi}{(T\sqrt{1-\zeta^2})}$

Onde, MUP é a máxima ultrapassagem e T é o período de oscilação.

Exemplo:

A Figura 5 mostra a resposta ao degrau de um dado sistema.

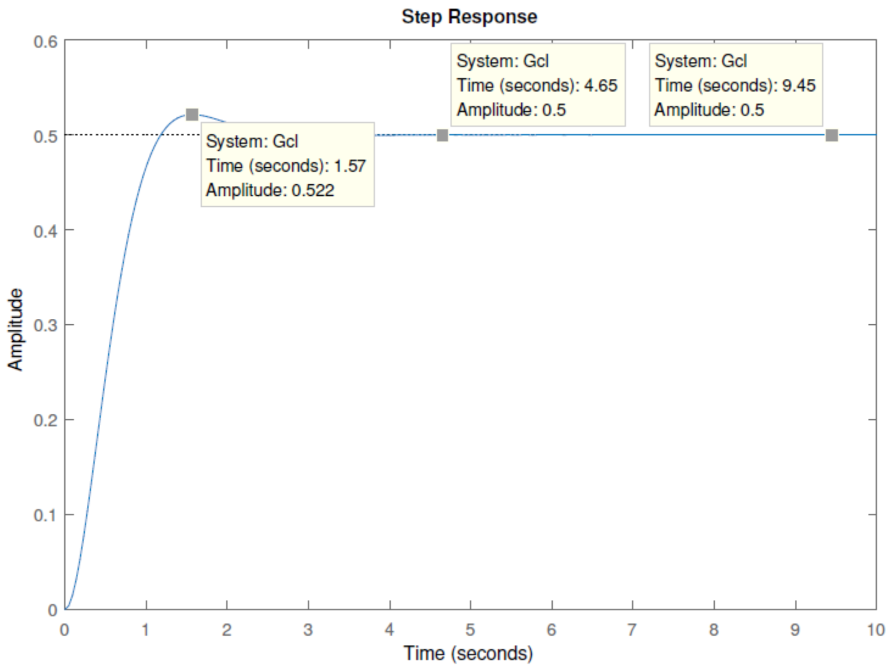

Figura 5 - Resposta ao degrau de um dado sistema de segunda ordem.

Utilizando o método de identificação apresentado, encontra-se:

- $K = 0.5;$
- $MUP = \left(\frac{0.522}{0.5}\right) - 1 = 0.044;$
- $\zeta = -\frac{\ln 0.044}{\sqrt{\pi^2+(\ln(0.044))^2}} = 0.705;$
- $\omega_0 = \frac{2\pi}{(3.08\sqrt{1-0.705^2})} = 2.877.$

2.5. Avaliação do modelo identificado

Em problemas de validação a questão chave é tentar determinar se um dado modelo é válido ou não. Um modelo será válido se incorporar características do sistema que são fundamentais para a aplicação desejada.

Comparar a simulação do modelo obtido com dados medidos é provavelmente a forma mais usual de se validar um modelo. Nesse caso, deseja-se saber se o modelo reproduz ao longo do tempo os dados observados.

Um cuidado básico nesse método de validação é não usar os dados utilizados para obter o modelo na validação. Portanto, na prática, o ideal é efetuar dois testes independentes, gerando assim dois conjuntos de dados: um deles utilizado para identificação do modelo e outro para a validação.

Uma forma simples de quantificar dois modelos e avaliar qual tem a melhor representatividade é a partir da utilização dos índices de desempenho da integral do erro entre a saída real e a saída do modelo, ou seja:

- Integral do erro quadrático:

$$ISE = \int_0^T e^2\,(t)dt$$

- Integral do módulo do erro:

$$IAE = \int_0^T |e\,(t)|\,dt$$

Onde:

$$e\,(t) = y(t) - \hat{y}(t)$$

Nesse caso, verifica-se qual modelo foi melhor identificado. Existem técnicas mais complexas que fazem uso de estudos estocásticos entre o sistema real e o modelo identificado, estes não serão abordados nessa aula.

Atividades:

1. **Identifique os modelos de primeira ordem para os filtros de primeira, terceira e sexta ordem.**
2. **Proponha ajustes aos modelos identificados.**
3. **Mostre, a partir dos índices de desempenho, que o modelo ajustado representa melhor o sistema físico em questão.**
4. **Faça o mesmo para o filtro de segunda ordem em malha fechada com o ganho Kp variando de 4 até 6.**

Obs: Para salvar os gráficos do real time:

1. **Verificar em configurações o nome do mesmo;**
2. **Na janela de comandos escrever as seguintes instruções:**

   t = NomeDoGráfico.time; (Para salvar o vetor de tempo);

   y = NomeDoGráfico.signals.values (Para salvar o vetor de saída).