

Análise de Sistemas Lineares: Resposta em Frequência

Professores: Luís Silva & Valter Leite

Métodos da resposta em frequência: Introdução

- Anteriormente, a resposta e o desempenho de um sistema foram descritos em termos da variável de frequência complexa s e da posição dos polos e zeros no plano s .
- Uma abordagem alternativa muito prática e importante para a análise e o projeto de um sistema é o método da resposta em frequência.

Métodos da resposta em frequência: Introdução

- Anteriormente, a resposta e o desempenho de um sistema foram descritos em termos da variável de frequência complexa s e da posição dos polos e zeros no plano s .
- Uma abordagem alternativa muito prática e importante para a análise e o projeto de um sistema é o método da resposta em frequência.

A resposta em frequência de um sistema estável: resposta em regime permanente do sistema a um sinal de entrada senoidal.

Sinal de entrada senoidal \Rightarrow saída será um sinal senoidal com amplitude e fase diferentes do sinal de entrada (possivelmente).

Métodos da resposta em frequência: Introdução

Vantagens:

- sinais de teste senoidais são facilmente obtidos para várias faixas de frequência e amplitude;
- a determinação experimental da resposta em frequência de um sistema é facilmente realizada;
- a função de transferência pode ser deduzida a partir da resposta em frequência.

Métodos da resposta em frequência: Introdução

Vantagens:

- sinais de teste senoidais são facilmente obtidos para várias faixas de frequência e amplitude;
- a determinação experimental da resposta em frequência de um sistema é facilmente realizada;
- a função de transferência pode ser deduzida a partir da resposta em frequência.

Desvantagem: conexão indireta entre os domínios **frequência** e **tempo**.

Diagrama de Bode

- Diagrama de Bode é o gráfico da resposta de amplitude e da fase como funções de ω em uma escala logarítmica.
- Usando o comportamento assintótico das respostas de amplitude e fase, pode-se rascunhar esses gráficos com uma certa facilidade.
- A escala logarítmica facilita os cálculos do ganho.

Diagrama de Bode: Constante Ka_1a_2/b_1b_3

- A amplitude do termo constante Ka_1a_2/b_1b_3 também é uma constante, $20 \log(Ka_1a_2/b_1b_3)$.
- A contribuição de fase desse termo é zero para valores positivos e π para valores negativos da constante.

Diagrama de Bode: Pólo (ou zero) na origem

$$G(s) = s \quad \text{ou} \quad G(s) = \frac{1}{s}$$

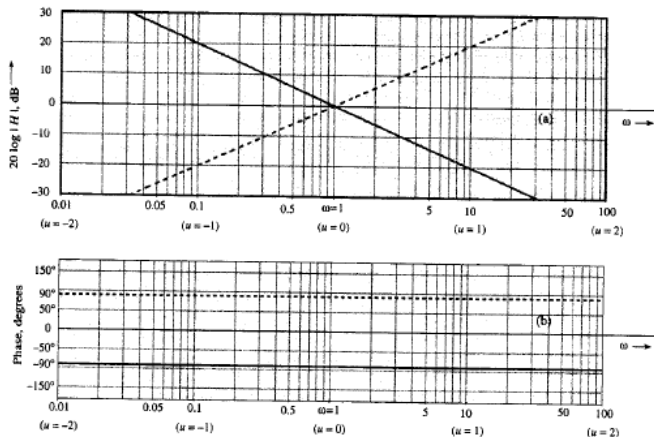


Diagrama de Bode: Pólo (ou zero) de primeira ordem

$$G(s) = \frac{1}{s+a} \quad \text{ou} \quad G(s) = \frac{a}{s+a}$$

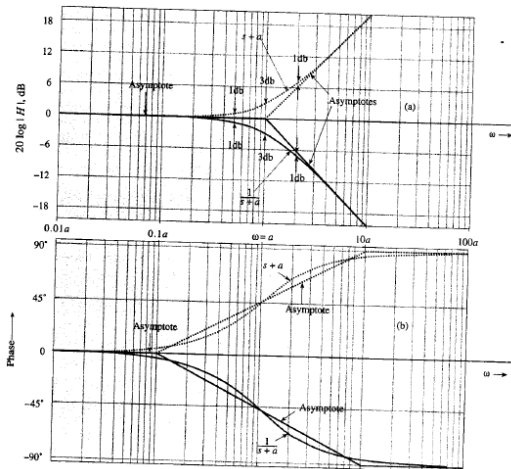


Diagrama de Bode: Pólo (ou zero) de segunda ordem

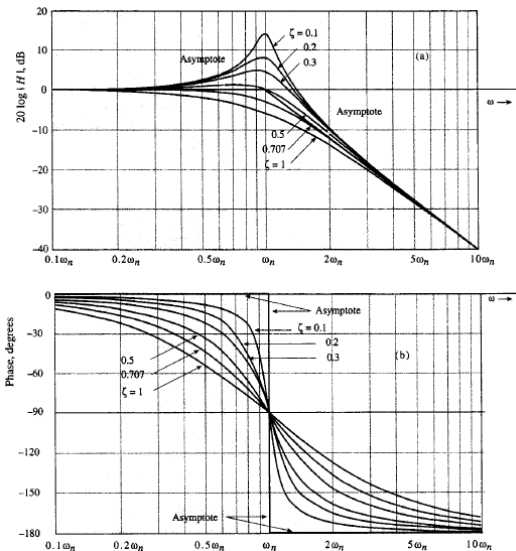


Diagrama de Bode: Pólo (ou zero) de segunda ordem

- O valor máximo $M_{p\omega}$ da resposta em frequência ocorre na frequência de ressonância.
- Quando o fator de amortecimento tende a zero ω_r tende a ω_n

Diagrama de Bode: Pólo (ou zero) de segunda ordem

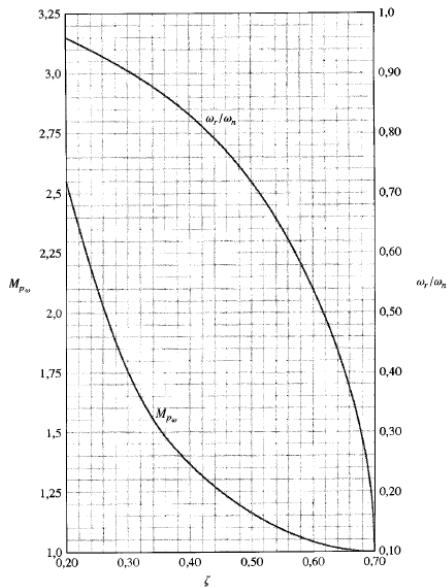
- O valor máximo $M_{p\omega}$ da resposta em frequência ocorre na frequência de ressonância.
- Quando o fator de amortecimento tende a zero ω_r tende a ω_n

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2}, \quad \xi < 0.707$$

$$M_{p\omega} = |G(j\omega_r)| = \left(2\xi\sqrt{1 - \xi^2}\right)^{-1}, \quad \xi < 0.707$$

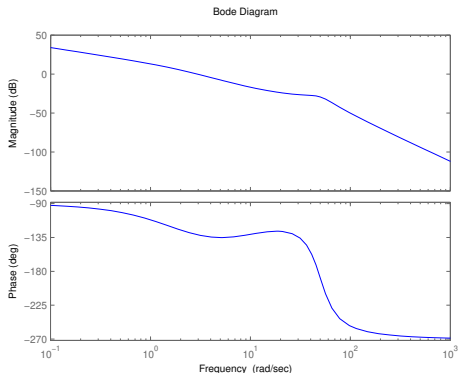
Diagrama de Bode: Polo (ou zero) de segunda ordem

Supondo a dominância de um par de pólos de malha fechada complexos conjugados, é possível estimar o fator de amortecimento a partir das curvas.



Exemplo

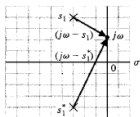
$$G(s) = \frac{5(1 + s/10)}{s(1 + s/2)(1 + 0.6s/50 + (s/50)^2)}$$



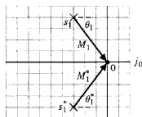
Outra forma de obter a resposta em frequência de um sistema

As curvas de resposta em frequência podem ser calculadas no plano s determinando-se os comprimentos e os ângulos dos vetores em várias frequências ω ao longo do eixo ($s = +j\omega$).

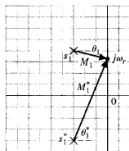
$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \Rightarrow G(j\omega) = \frac{\omega^2}{(j\omega - s_1)(j\omega - s_1^*)}$$



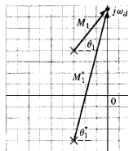
(a)



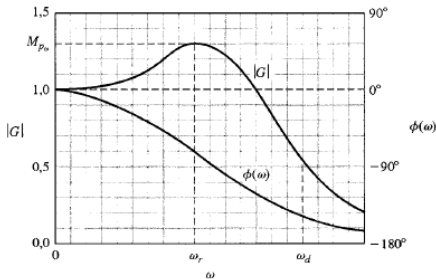
(b)



(c)



(d)



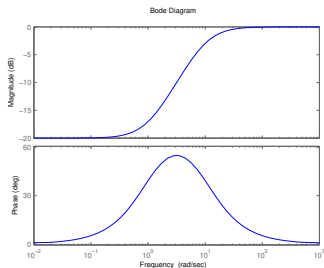
Função de transferência de fase mínima e de fase não-mínima

Uma função de transferência é chamada de função de transferência de fase mínima se todos os seus zeros estiverem no semiplano esquerdo do plano s . Ela é chamada de função de transferência de fase não-mínima se ela tiver zeros no semiplano direito do plano s .

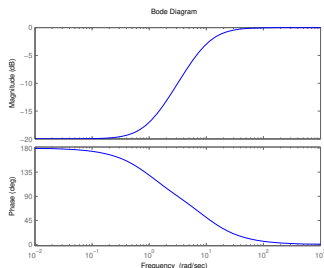
Função de transferência de fase mínima e de fase não-mínima

Uma função de transferência é chamada de função de transferência de fase mínima se todos os seus zeros estiverem no semiplano esquerdo do plano s . Ela é chamada de função de transferência de fase não-mínima se ela tiver zeros no semiplano direito do plano s

$$G_1(s) = \frac{s + 1}{s + 10}$$



$$G_1(s) = \frac{s - 1}{s + 10}$$

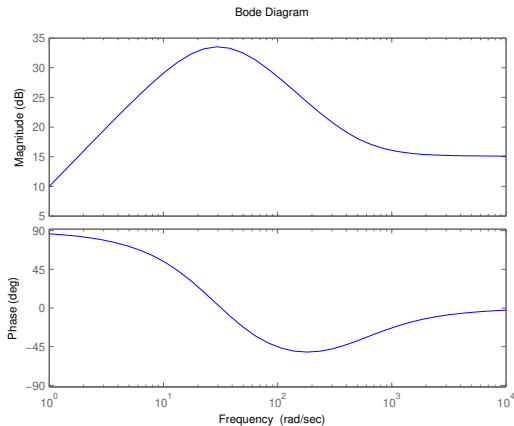


Medidas da resposta em frequência

- Uma onda senoidal pode ser usada para medir a resposta em frequência em malha aberta ou fechada de um sistema de controle.
- A função de transferência de um sistema de controle pode ser obtida a partir da resposta em frequência desse sistema.

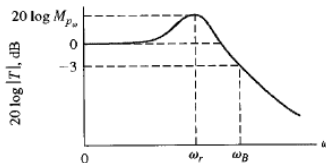
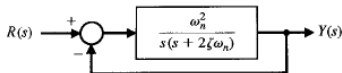
Medidas da resposta em frequência

- Uma onda senoidal pode ser usada para medir a resposta em frequência em malha aberta ou fechada de um sistema de controle.
- A função de transferência de um sistema de controle pode ser obtida a partir da resposta em frequência desse sistema.



Especificações de desempenho no domínio da frequência

- Como a resposta em frequência de um sistema se relaciona com a resposta transitória esperada do sistema?
- Máxima ultrapassagem (*overshoot*), tempo de acomodação e outros critérios de desempenho, como integral do erro absoluto.



Especificações de desempenho no domínio da frequência

- Na frequência de ressonância ω_r um valor máximo de $M_{p\omega}$ da resposta em frequência é obtido.
- A faixa de passagem é a frequência ω_B na qual a resposta em frequência decai $3dB$ a partir do seu valor em baixa frequência.
- Frequência de ressonância e a faixa de passagem estão relacionadas com a velocidade da resposta transitória:
 - ① faixa de passagem grande \rightarrow tempo de subida da resposta ao degrau pequena;
 - ② *overshoot* está relacionado com $M_{p\omega}$ pelo fator de amortecimento.

Exercícios

Os exercícios numerados se encontram no Dorf décima primeira edição:
P8.6, P8.8, P8.22, P8.23.