Anotações: Dinâmica de Robôs

Bernardo Bresolini *

* *Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais, Divinópolis - MG (e-mails: berbresolini14@gmail.com.)*

1. ATIVIDADE 01

1.1 Questão 1

Dado o manipulador Smart5 Six em sua posição inicial (Home) e com uma tocha de soldagem acoplada, como mostrado abaixo, encontre H_1^0. A tocha tem um comprimento de 0,45 m e um deslocamento da sua extremidade em relação ao eixo que passa pelo centro de sua base de acoplamento de 0,05 m, além de uma curvatura de 30° (ver figura superior direita).

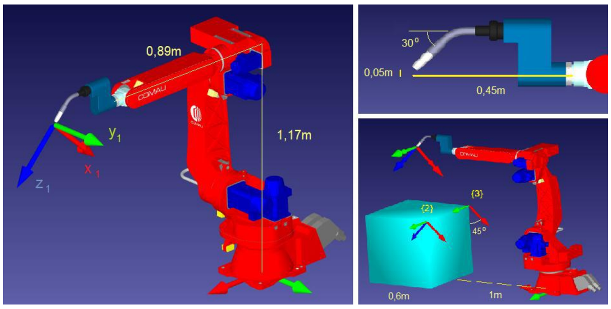

Figura 1. Questão 1 e 2

Resposta:
Considere o diagrama simplificado exposto na FIG. 2. Então, obtenha a matriz de transformação homogênea do frame da base para o *end effector*, sabendo que $l_1 = 1{,}22$ m, $l_2 = 1{,}34$ m e $\theta = 30°$.

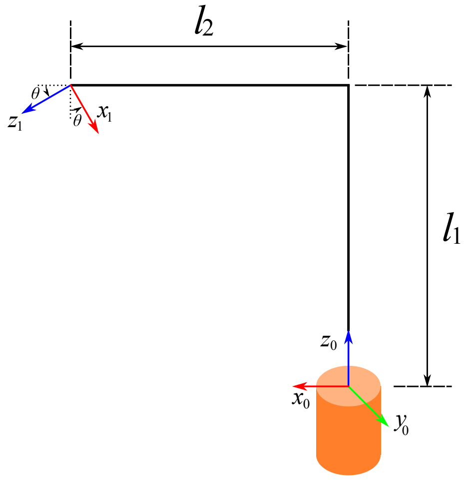

Figura 2. Diagrama simplificado da FIG. 1

Para sair do frame 0 e chegar ao frame 1 deve-se rotacionar $90° + \theta = 120°$ em y, além de transladar. Logo

$$
\begin{aligned}
H_1^0 &= \left[\begin{array}{c:c} R_{y,\,120°} & p_1^0 \\ \hdashline \text{Perspectiva} & \text{Escala} \end{array}\right] \\
&= \left[\begin{array}{ccc:c} \cos 120° & 0 & \operatorname{sen} 120° & 1{,}34 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\operatorname{sen} 120° & 0 & \cos 120° & 1{,}22 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \\
&= \left[\begin{array}{ccc:c} -1/2 & 0 & \sqrt{3}/2 & 1{,}34 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & 0 & -1/2 & 1{,}22 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]
\end{aligned} \tag{1}
$$

1.2 Questão 2

Imagine agora que se pretende soldar a borda superior de uma caixa que se encontra mais próxima do robô. A caixa é cúbica com 0,6 m de aresta e está sobre o piso, com sua borda inferior simetricamente posicionada em $x_o = 1$ m, como pode ser visto na FIG. 1 na posição inferior direita. A orientação ideal para essa soldagem é de 45°, sendo indicado pelos frames 2 e 3, que marcam as extremidades do cordão de solda pretendido. Encontre as M.T.H. H_2^0 e H_3^0.

Resposta:
Como o frame 0 do robô está posicionado simetricamente em relação ao cubo, as bordas estão distanciadas do frame 0 em $a/2$, sendo a a aresta do cubo. A rotação de $\{2\}$ em relação a $\{0\}$ é de $90° + 45° = 135°$.

Portanto, a matriz de transformação homogênea para o frame 2 é

$$
\begin{aligned}
H_2^0 &= \left[\begin{array}{ccc:c} \cos 135° & 0 & \operatorname{sen} 135° & 1{,}0 \\ 0 & 1 & 0 & 0{,}3 \\ -\operatorname{sen} 135° & 0 & \cos 135° & 0{,}6 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \\
&= \left[\begin{array}{ccc:c} -\sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 & 1{,}00 \\ 0 & 1 & 0 & 0{,}3 \\ -\sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 & 0{,}60 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]
\end{aligned} \tag{2}
$$

Pela similaridade do eixo x, H_3^0 será

$$
H_3^0 = \left[\begin{array}{ccc:c} -\sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 & 1{,}0 \\ 0 & 1 & 0 & -0{,}3 \\ -\sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 & 0{,}60 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \tag{3}
$$

1.3 Questão 3

Partindo da equação matricial $H_2^0 = H_1^0 H_2^1$, encontre H_2^1 algebricamente. Use os resultados dos exercícios 1 e 2 para calcular H_2^1 numericamente. Essa é a função de erro que deve ser minimizada pela controladora do robô.

Resposta:
Sabemos que a transformação de $\{2\}$ para $\{0\}$ corresponde a equação matricial

$$H_2^0 = H_1^0 H_2^1 \tag{4}$$

pré-multiplicando ambos os lados pela inversa de H_1^0,

$$\begin{aligned} \left(H_1^0\right)^{-1} H_2^0 &= \left(H_1^0\right)^{-1} H_2^1 \\ \implies \left(H_1^0\right)^{-1} H_2^0 &= H_2^1 \end{aligned} \tag{5}$$

Logo, computando a inversa de H_1^0, segue

$$\begin{aligned} \left(H_1^0\right)^{-1} &= \left[\begin{array}{c|c} R^T_{y,\,120°} & -R^T_{y,\,120°}\, p_1^0 \\ \hline \text{Perspectiva} & \text{Escala} \end{array}\right] \\ &= \left[\begin{array}{ccc|c} -1/2 & 0 & -\sqrt{3}/2 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ \sqrt{3}/2 & 0 & -1/2 & c \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{aligned}$$

sendo

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} &= -\begin{bmatrix} -1/2 & 0 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 0 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1{,}34 \\ 0 \\ 1{,}22 \end{bmatrix} \\ &= -\begin{bmatrix} -1{,}34/2 - 1{,}22\sqrt{3}/2 \\ 0 \\ 1{,}34\sqrt{3}/2 - 1{,}22/2 \end{bmatrix} \\ &\approx -\begin{bmatrix} -1{,}7266 \\ 0 \\ 0{,}5505 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Então, H_2^1 é dada pela multiplicação

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1/2 & 0 & -\sqrt{3}/2 & 1{,}7266 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 0 & -1/2 & -0{,}5505 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc|c} -\sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 & 1{,}00 \\ 0 & 1 & 0 & 0{,}3 \\ -\sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 & 0{,}60 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Resolvendo,

$$H_2^1 = \left[\begin{array}{ccc|c} (\sqrt{6}+\sqrt{2})/4 & 0 & (\sqrt{6}-\sqrt{2})/4 & c \\ 0 & 1 & 0 & 0{,}3 \\ -(\sqrt{6}-\sqrt{2})/4 & 0 & (\sqrt{6}+\sqrt{2})/2 & d \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \tag{6}$$

nos quais,

$$c = \frac{1{,}7 + 3{,}1\sqrt{3}}{10}, \qquad d = \frac{3{,}1 - 1{,}7\sqrt{3}}{10}.$$

1.4 Questão 4

Na programação dos robôs Comau, são usados Ângulos de Euler ZYZ para a definição de poses, como no trecho de programa na linguagem PDL2:

```
VAR p2: POSITION
p2 := POS(1000, 300, 600, 0, 137, 0)
MOVE TO p2
```

Use a formulação vista e os dados do trecho de programa acima para obter a submatriz de rotação. Veja se apresenta consistência com os resultados do exercício 3.

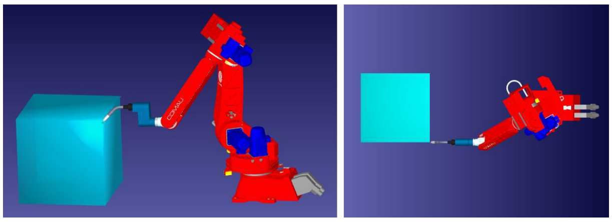

Figura 3. Questão 3

Resposta: A formulação em ângulos de Euler ZYZ é composta por uma rotação no eixo z por um ângulo ϕ, seguida de uma rotação no eixo y em θ. Por fim, uma rotação, no eixo z, de ψ, como mostrado na FIG. 4.

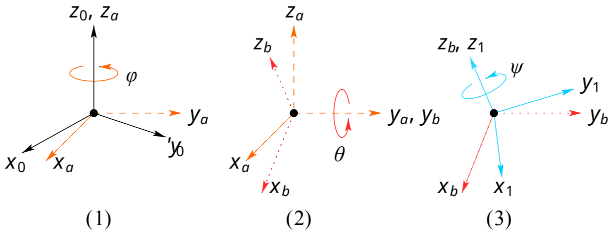

Figura 4. Representação dos ângulos de Euler

Logo, a rotação é dada por

$$\begin{aligned} R_{ZYZ} &= \begin{bmatrix} c_\phi & -s_\phi & 0 \\ s_\phi & c_\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_\theta & 0 & s_\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_\theta & 0 & c_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_\psi & -s_\psi & 0 \\ s_\psi & c_\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} c_\phi c_\theta c_\psi - s_\phi s_\psi & -c_\phi c_\theta s_\psi - s_\phi c_\psi & c_\phi s_\theta \\ s_\phi c_\theta s_\psi - c_\phi s_\psi & -c_\phi c_\theta s_\psi + c_\phi c_\psi & s_\phi s_\theta \\ -s_\theta c_\psi & s_\theta s_\psi & c_\theta \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{7}$$

Para $\phi = 0°$ e $\psi = 0°$, segue que a matrizes de rotação em Z serão iguais à matriz identidade. Logo,

$$R_{XYZ} = R_{y,\,\theta} = \begin{bmatrix} c_\theta & 0 & s_\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_\theta & 0 & c_\theta \end{bmatrix}$$

Para $\theta = 137°$, a matriz de rotação será

$$R_2^0 = \begin{bmatrix} -0{,}7314 & 0 & 0{,}6820 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0{,}6820 & 0 & -0{,}7314 \end{bmatrix}$$

Por fim, a matriz de transformação homogênea será

$$H_2^0 = \left[\begin{array}{ccc|c} -0{,}7314 & 0 & 0{,}6820 & 1{,}0 \\ 0 & 1 & 0 & 0{,}3 \\ -0{,}6820 & 0 & -0{,}7314 & 0{,}6 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \tag{8}$$

Caso se compare a matriz (2) obtida na questão 2 com a matriz (8) obtida na questão 4, verificará uma pequena diferença. Isso se dá pois o valor da matriz de rotação em y deveria ser 135°.