Capítulo 8: Realimentação de Estados e Estimadores de Estado

Valter J. S. Leite[1]

[1]CEFET-MG / *Campus* V Divinópolis, MG – Brasil

Pós-Graduação em Engenharia Elétrica
CEFET–MG / *campus* Divinópolis

Conteúdo:

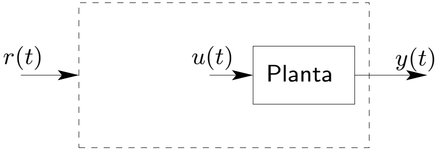
- Anteriormente: conceitos de

  ⇒ Controlabilidade e Observabilidade para estudar estrutura interna e estabelecer relações entre as descrições internas e externas.

- Neste capítulo: implicações desses conceitos no projeto de controle de sistemas.

  ⇒ Malha Aberta:

  ⇒ Malha fechada:



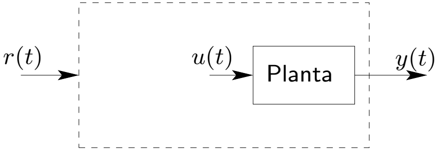
- Anteriormente: conceitos de

⇒ Controlabilidade e Observabilidade para estudar estrutura interna e estabelecer relações entre as descrições internas e externas.

- Neste capítulo: implicações desses conceitos no projeto de controle de sistemas.

⇒ Malha Aberta: $u(t)$ dependende apenas de $r(t)$

⇒ Malha fechada:



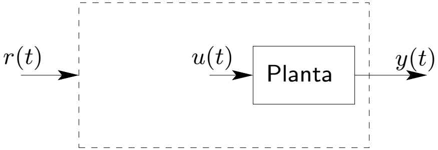
- Anteriormente: conceitos de

⇒ Controlabilidade e Observabilidade para estudar estrutura interna e estabelecer relações entre as descrições internas e externas.

- Neste capítulo: implicações desses conceitos no projeto de controle de sistemas.

⇒ Malha Aberta: $u(t)$ dependende apenas de $r(t)$

⇒ Malha fechada: $u(t)$ dependende $r(t)$ e de $y(t)$



Objetivos de projeto: malha fechada

- Assegurar estabilidade
- Reduzir os efeitos de variações de parâmetros.
- Suprimir ruídos e distúrbios (efeitos de carga).

Objetivos de projeto: malha fechada

- Assegurar estabilidade
- Reduzir os efeitos de variações de parâmetros.
- Suprimir ruídos e distúrbios (efeitos de carga).

Estudos apenas para sistemas invariantes no tempo.

- Seja o sistema

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u && (1) \\ y &= \mathbf{c}\mathbf{x} && (2) \end{aligned}$$

- Considere a lei de controle

$$u = r - \mathbf{k}\mathbf{x} = r - \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_n \end{bmatrix}\mathbf{x} = r - \sum_{i=1}^{n} k_i x_i \qquad (3)$$

$\Rightarrow$ Valores k_i são reais e constantes.

$\Rightarrow$ Denomina-se *realimentação de estados*.

Diagrama de blocos

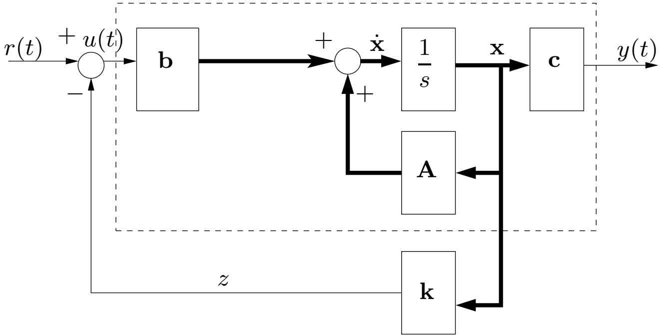


Figura: Projeto de sistema de controle

- Levando (3) em (1)-(2):

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k})\mathbf{x} + \mathbf{b}r \qquad (4)$$

$$y = \mathbf{c}\mathbf{x} \qquad (5)$$

Teorema 8.1

O par $(\mathbf{A} - \mathbf{bk}, \mathbf{b})$, para qualquer vetor real constante $\mathbf{b}$ de dimensões $n \times 1$, é controlável se e somente se o par $(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ é controlável.

Teorema 8.1

O par $(\mathbf{A} - \mathbf{bk}, \mathbf{b})$, para qualquer vetor real constante $\mathbf{b}$ de dimensões $n \times 1$, é controlável se e somente se o par $(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ é controlável.

Prova: Considere $n = 4$ e as matrizes de controlabilidade de (1) e (4), respectivamente:

$$\mathcal{C} = [\ \mathbf{b} \quad \mathbf{Ab} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{b} \quad \mathbf{A}^3\mathbf{b}\ ]$$

e

$$\mathcal{C}_f = [\ \mathbf{b} \quad (\mathbf{A} - \mathbf{bk})\mathbf{b} \quad (\mathbf{A} - \mathbf{bk})^2\mathbf{b} \quad (\mathbf{A} - \mathbf{bk})^3\mathbf{b}\ ]$$

Que pode ser reescrito como

$$\mathcal{C}_f = \mathcal{C} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -\mathbf{kb} & -\mathbf{k}(\mathbf{A}-\mathbf{bk})\mathbf{b} & -\mathbf{k}(\mathbf{A}-\mathbf{bk})^2\mathbf{b} \\ 0 & 1 & -\mathbf{kb} & -\mathbf{k}(\mathbf{A}-\mathbf{bk})\mathbf{b} \\ 0 & 0 & 1 & -\mathbf{kb} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{Posto Completo}} \tag{6}$$

e portanto tem o mesmo posto de $\mathcal{C}$.

Note que:

$\Rightarrow$ Cada entrada da matriz mais à direita de (6) é um escalar.

Observações. . .

- Veja na Figura 2 que r não controla $\mathbf{x}$ diretamente.

Observações...

- Veja na Figura 2 que r não controla $\mathbf{x}$ diretamente.

  $\Rightarrow$ gera u para controlar $\mathbf{x}$.

  $\Rightarrow$ se u não controla $\mathbf{x}$ então r também não!

Observações. . .

- Veja na Figura 2 que r não controla $\mathbf{x}$ diretamente.

  $\Rightarrow$ gera u para controlar $\mathbf{x}$.

  $\Rightarrow$ se u não controla $\mathbf{x}$ então r também não!

- Controlabilidade é invariante sob qualquer realimentação de estados.

- Observabilidade não !

Exemplo 8.1

Considere o sistema controlável e observável (Teste!)

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x} \end{aligned}$$

- Suponha $u = r - \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$ que resulta em

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x} \end{aligned}$$

cuja matrizes de controlabilidade e observabilidade são (Verifique!):

$$\mathcal{C}_f = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathcal{O}_f = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Exemplo 8.2

Objetivo

Mostrar que a realimentação de estados pode ser usada para alocar os autovalores da malha fechada em posições arbitrárias.

- Considere

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$\Rightarrow$ cujo polinômio característico é

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \Delta(s) = (s-1)^2 - 9 = (s-4)(s+2)$$

$\Rightarrow$ Portanto, autovalores em 4 e -2.

- Suponha $u = r - \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} \mathbf{x}$

resultando em:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \left(\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} r \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} 1-k_1 & 3-k_2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_f(k_1,k_2)=\mathbf{A}_f(\mathbf{k})} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} r\end{aligned}$$

- Novo polinômio característico

$$\Delta_f(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A}_f(\mathbf{k})) = s^2 + (k_1 - 2)s + (3k_2 - k_1 - 8) \qquad (7)$$

- Para autovalores λ_1 e λ_2:

$$\Delta_{\text{desejado}}(s) = (s - \lambda_1)(s - \lambda_2) = s^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)s + \lambda_1\lambda_2 \qquad (8)$$

- Pode-se igualar os coeficientes de (7) e (8):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - \lambda_1 - \lambda_2 \\ 8 + \lambda_1 \lambda_2 \end{bmatrix}$$

- Se $\lambda_1 = -1 + 2j$ e $\lambda_2 = -1 - 2j$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 13 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{k} = \begin{bmatrix} 4 \\ \frac{17}{3} \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ No matlab:

```
>> lamb1 = -1+2j; lamb2 = -1-2j;
>> A = [1 0; -1 3]; B = [2-lamb1-lamb2; 8+lamb1*lamb2];
>> k = A\B; format rat; disp(k)
```

Teorema 8.2

- Objetivo: preparar condições para um procedimento mais geral para o projeto de $\mathbf{k}$.

- Considere (1) com a equação característica

$$\Delta(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \ldots + \alpha_{n-1}s + \alpha_n = 0 \quad (9)$$

Se (1) é controlável, então ela pode ser transformada usando $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{P}\mathbf{x}$ em que

$$\mathbf{Q} = \mathbf{P}^{-1} =$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{b} & \mathbf{A}\mathbf{b} & \cdots & \mathbf{A}^{n-2}\mathbf{b} & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_{n-2} & \alpha_{n-1} \\ 0 & 1 & \cdots & \alpha_{n-3} & \alpha_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha_1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (10)$$

o que resulta na *forma canônica controlável*

$$\begin{aligned}
\dot{\bar{\mathbf{x}}} &= \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{b}}u \\
&= \begin{bmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 & \cdots & -\alpha_{n-1} & -\alpha_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{x}} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (11) \\
y &= \bar{\mathbf{c}}\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_{n-1} & \beta_n \end{bmatrix} \bar{\mathbf{x}} \qquad (12)
\end{aligned}$$

- Além disso a função de transferência de (1)–(2) é

$$\hat{g}(s) = \frac{\beta_1 s^{n-1} + \beta_2 s^{n-2} + \ldots + \beta_{n-1}s + \beta_n}{s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \ldots + \alpha_{n-1}s + \alpha_n} \qquad (13)$$

Prova

- Sejam $\mathcal{C}$ e $\bar{\mathcal{C}}$ as matrizes de controlabilidade de (1) e (11).
- $\mathcal{C}$ e $\bar{\mathcal{C}}$ são quadradas (no caso SISO)
- Se (1) é controlável ($\mathcal{C}$ é não-singular) o mesmo vale para (11) ($\bar{\mathcal{C}}$).
- $\bar{\mathcal{C}} = \mathbf{P}\mathcal{C} \Rightarrow \mathbf{P} = \bar{\mathcal{C}}\mathcal{C}^{-1}$ ou $\mathbf{Q} = \mathbf{P}^{-1} = \mathcal{C}\bar{\mathcal{C}}^{-1}$

- Mostra-se que a matriz[1] $\bar{\mathcal{C}}^{-1}$ resulta em

$$\bar{\mathcal{C}}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_{n-2} & \alpha_{n-1} \\ 0 & 1 & \cdots & \alpha_{n-3} & \alpha_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha_1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{14}$$

$\Rightarrow$ Note que α_n não aparece em (14).

- Substituindo (14) em $\mathbf{Q} = \mathcal{C}\bar{\mathcal{C}}^{-1}$ obtém-se (10).

- Note que (11) é a realização de (13).

$\Rightarrow$ Portanto, (11)-(12) — e consequentemente (1)-(2) — é uma realização de (13), o que estabelece o teorema.

[1] Veja cômputo de $\bar{\mathcal{C}}$ à pág. 186

Um resultado mais geral

Teorema 8.3

Se o sistema n-dimensional (1)-(2) é controlável, então a lei de realimentação de estados $u = r - \mathbf{kx}$, $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^{1\times n}$ pode alocar de forma arbitrária os autovalores de $\mathbf{A} - \mathbf{bk}$, desde que os autovalores complexos sejam atribuídos em pares complexos conjugados.

- Prova:

$\Rightarrow$ (1) controlável $\Rightarrow$ pode ser transformado na forma canônica controlável (11)–(12).

$\Rightarrow$ Sejam $\bar{\mathbf{A}}$ e $\bar{\mathbf{b}}$ as matrizes em (11), então:

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{PAP}^{-1}; \quad \bar{\mathbf{b}} = \mathbf{Px}$$

$\Rightarrow$ Substituindo $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{P}\mathbf{x}$ na realimentação de estados:

$$u = r - \mathbf{k}\mathbf{x} = r - \mathbf{k}\mathbf{P}^{-1}\bar{\mathbf{x}} = r - \bar{\mathbf{k}}\bar{\mathbf{x}}$$

portanto,

$$\bar{\mathbf{k}} = \mathbf{k}\mathbf{P}^{-1} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{k} = \bar{\mathbf{k}}\mathbf{P}$$

$\Rightarrow$ Substituindo $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{P}\mathbf{x}$ na realimentação de estados:

$$u = r - \mathbf{k}\mathbf{x} = r - \mathbf{k}\mathbf{P}^{-1}\bar{\mathbf{x}} = r - \bar{\mathbf{k}}\bar{\mathbf{x}}$$

portanto,

$$\bar{\mathbf{k}} = \mathbf{k}\mathbf{P}^{-1} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{k} = \bar{\mathbf{k}}\mathbf{P}$$

$\Rightarrow$ Os autovalores do sistema são os mesmos em qualquer representação, pois:

$$\bar{\mathbf{A}} - \bar{\mathbf{b}}\bar{\mathbf{k}} = \mathbf{P}(\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k})\mathbf{P}^{-1}$$

e portanto $\bar{\mathbf{A}} - \bar{\mathbf{b}}\bar{\mathbf{k}}$ e $\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}$ possuem os mesmos autovalores.

$\Rightarrow$ Substituindo $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{P}\mathbf{x}$ na realimentação de estados:

$$u = r - \mathbf{k}\mathbf{x} = r - \mathbf{k}\mathbf{P}^{-1}\bar{\mathbf{x}} = r - \bar{\mathbf{k}}\bar{\mathbf{x}}$$

portanto,

$$\bar{\mathbf{k}} = \mathbf{k}\mathbf{P}^{-1} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{k} = \bar{\mathbf{k}}\mathbf{P}$$

$\Rightarrow$ Os autovalores do sistema são os mesmos em qualquer representação, pois:

$$\bar{\mathbf{A}} - \bar{\mathbf{b}}\bar{\mathbf{k}} = \mathbf{P}(\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k})\mathbf{P}^{-1}$$

e portanto $\bar{\mathbf{A}} - \bar{\mathbf{b}}\bar{\mathbf{k}}$ e $\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}$ possuem os mesmos autovalores.

$\Rightarrow$ Para qualquer conjunto desejado de autovalores, pode-se obter:

$$\begin{aligned} \Delta_{\text{desejado}}(s) &= (s+\lambda_1)(s+\lambda_2)\cdots(s+\lambda_n) \\ &= s^n + \bar{\alpha}_1 s^{(n-1)} + \cdots + \bar{\alpha}_{n-1}s + \bar{\alpha}_n \end{aligned} \qquad (15)$$

⇒ Escolhendo-se

$$\bar{\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} \bar{\alpha}_1 - \alpha_1 & \bar{\alpha}_2 - \alpha_2 & \cdots & \bar{\alpha}_{n-1} - \alpha_{n-1} & \bar{\alpha}_n - \alpha_n \end{bmatrix} \quad (16)$$

a equação realimentada torna-se

⇒ Escolhendo-se

$$\bar{\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} \bar{\alpha}_1 - \alpha_1 & \bar{\alpha}_2 - \alpha_2 & \cdots & \bar{\alpha}_{n-1} - \alpha_{n-1} & \bar{\alpha}_n - \alpha_n \end{bmatrix} \quad (16)$$

a equação realimentada torna-se

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\mathbf{x}}} &= (\bar{\mathbf{A}} - \bar{\mathbf{b}}\bar{\mathbf{k}})\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{b}}r \\ &= \begin{bmatrix} -\bar{\alpha}_1 & -\bar{\alpha}_2 & \cdots & -\bar{\alpha}_{n-1} & -\bar{\alpha}_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{x}} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} r \quad (17) \\ y &= \begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_{n-1} & \beta_n \end{bmatrix} \bar{\mathbf{x}} \quad (18) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Como (17) está na forma companheira, o polinômio característicos de $(\bar{\mathbf{A}} - \bar{\mathbf{b}}\mathbf{k})$ e *consequentemente* de $(\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k})$ são iguais a (15)

$\Rightarrow$ Como (17) está na forma companheira, o polinômio característicos de $(\bar{\mathbf{A}} - \bar{\mathbf{b}}\mathbf{k})$ e *consequentemente* de $(\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k})$ são iguais a (15)

Portanto, o ssitema realimentado possui os autovalores desejados!

$\Rightarrow$ Como (17) está na forma companheira, o polinômio característicos de $(\bar{\mathbf{A}} - \bar{\mathbf{b}}\mathbf{k})$ e *consequentemente* de $(\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k})$ são iguais a (15)

$\boxed{\text{Portanto, o ssitema realimentado possui os autovalores desejados!}}$

$\Rightarrow$ O ganho $\mathbf{k}$ é computado como:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{k} &= \bar{\mathbf{k}}\mathbf{P} = \bar{\mathbf{k}}\bar{\mathcal{C}}\mathcal{C}^{-1} \\
&= \bar{\mathbf{k}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_{n-2} & \alpha_{n-1} \\ 0 & 1 & \cdots & \alpha_{n-3} & \alpha_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha_1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{b} & \mathbf{A}\mathbf{b} & \cdots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b} \end{bmatrix}^{-1}}_{\mathbf{P} \Rightarrow \text{ melhor calcular } \mathbf{P}^{-1} = \mathcal{C}\bar{\mathcal{C}}^{-1}}
\end{aligned}
$$

Função de Transferência

- Considere a planta descrita por $(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$.

$\Rightarrow$ Se o par $(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ é controlável $\Rightarrow$ pode-se transformar $(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ na forma controlável (11)–(12) e

$\Rightarrow$ sua função de transferência é dada por

$$\hat{g}(s) = \mathbf{c}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} = \frac{\beta_1 s^{n-1} + \beta_2 s^{n-2} + \ldots + \beta_{n-1}s + \beta_n}{s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \ldots + \alpha_{n-1}s + \alpha_n}$$

Função de Transferência do Sistema Realimentado

- Após a realimentação, a equação de estados torna-se $(\mathbf{A} - \mathbf{bk}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$.

  $\Rightarrow$ Ainda terá forma canônica controlável (17)–(18);

  $\Rightarrow$ Possui função de transferência

$$\begin{aligned} \hat{g}_{\text{Desejado}}(s) &= \mathbf{c}(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{bk})^{-1}\mathbf{b} \\ &= \frac{\beta_1 s^{n-1} + \beta_2 s^{n-2} + \ldots + \beta_{n-1} s + \beta_n}{s^n + \bar{\alpha}_1 s^{n-1} + \ldots + \bar{\alpha}_{n-1} s + \bar{\alpha}_n} \end{aligned} \tag{19}$$

- Note que os zeros não foram afetados
- Se algum dos novos pólos coincide com algum dos zeros *haverá* cancelamento

- Note que os zeros não foram afetados

- Se algum dos novos pólos coincide com algum dos zeros *haverá* cancelamento

Portanto, realimentação de estados pode afetar *observabilidade*!

Exemplo 8.3

- Considere o pêndulo invertido estudado no Exemplo 6.2 com

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

- Por inspeção ($\mathbf{A}$ bloco triangular):

$$\Delta(s) = s^2(s^2 - 5) = s^4 + \underbrace{0}_{\alpha_1} s^3 \underbrace{-5}_{\alpha_2} s^2 + \underbrace{0}_{\alpha_3} s + \underbrace{0}_{\alpha_4}$$

- Calculando $\mathbf{P}^{-1} = \mathcal{C}\bar{\mathcal{C}}^{-1}$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}^{-1} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -10 \\ -2 & 0 & -10 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ logo:}
\end{aligned} \tag{20}$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{6} & 0 \end{bmatrix}$$

- Autovalores desejados: $-1.5 \pm 0.5j$ e $-1 \pm j$. Logo:

$$\begin{aligned} \Delta_{\text{Desejado}}(s) &= (s + 1.5 + 0.5j)(s + 1.5 - 0.5j)(s + 1 + j)(s + 1 - j) \\ &= s^4 + \underbrace{5}_{\bar{\alpha}_1} s^3 + \underbrace{10.5}_{\bar{\alpha}_2} s^2 + \underbrace{11}_{\bar{\alpha}_3} s + \underbrace{5}_{\bar{\alpha}_4} \end{aligned} \quad (21)$$

- Autovalores desejados: $-1.5 \pm 0.5j$ e $-1 \pm j$. Logo:

$$\begin{aligned}\Delta_{\text{Desejado}}(s) &= (s+1.5+0.5j)(s+1.5-0.5j)(s+1+j)(s+1-j) \\ &= s^4 + \underbrace{5}_{\bar{\alpha}_1} s^3 + \underbrace{10.5}_{\bar{\alpha}_2} s^2 + \underbrace{11}_{\bar{\alpha}_3} s + \underbrace{5}_{\bar{\alpha}_4} \end{aligned} \tag{21}$$

- Para o projeto de $\bar{\mathbf{k}}$, usa-se (16):

$$\bar{\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} 5-0 & 10.5-(-5) & 11-0 & 5-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 15.5 & 11 & 5 \end{bmatrix}$$

- Autovalores desejados: $-1.5 \pm 0.5j$ e $-1 \pm j$. Logo:

$$\begin{aligned} \Delta_{\text{Desejado}}(s) &= (s+1.5+0.5j)(s+1.5-0.5j)(s+1+j)(s+1-j) \\ &= s^4 + \underbrace{5}_{\bar{\alpha}_1} s^3 + \underbrace{10.5}_{\bar{\alpha}_2} s^2 + \underbrace{11}_{\bar{\alpha}_3} s + \underbrace{5}_{\bar{\alpha}_4} \end{aligned} \tag{21}$$

- Para o projeto de $\bar{\mathbf{k}}$, usa-se (16):

$$\bar{\mathbf{k}} = \left[\begin{array}{cccc} 5-0 & 10.5-(-5) & 11-0 & 5-0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccc} 5 & 15.5 & 11 & 5 \end{array}\right]$$

$\Rightarrow$ e recupera-se $\mathbf{k}$ fazendo

$$\mathbf{k} = \bar{\mathbf{k}}\mathbf{P} = \left[\begin{array}{cccc} -\frac{5}{3} & -\frac{11}{3} & -\frac{103}{12} & -\frac{13}{3} \end{array}\right]$$

- Os autovalores foram deslocados de $\{0, 0, \pm j\sqrt{5}\}$ para $\{-1.5 \pm 0.5j, -1 \pm j\}$.
- No matlab, use `place`:

```
>> format rat
>> A = [0 1 0 0; 0 0 -1 0; 0 0 0 1; 0 0 5 0];
>> b = [0 1 0 -2]';
>> polos = [-1.5+0.5j -1.5-0.5j -1+j -1-j];
>> k = place(A,b,polos)

k =

      -5/3          -11/3          -103/12          -13/3
```

Escolha dos pólos

- Pólos rápidos (parte real muito negativa) leva a sinais de controle grandes.

  $\Rightarrow$ pode ocorrer saturação.

- Pólos lentos (próximos à origem) serão dominantes.

  $\Rightarrow$ Sistema terá resposta lenta.

- Parte imaginária com módulo elevado: maior *overshoot*.

Escolha dos pólos

- Pólos rápidos (parte real muito negativa) leva a sinais de controle grandes.

  $\Rightarrow$ pode ocorrer saturação.

- Pólos lentos (próximos à origem) serão dominantes.

  $\Rightarrow$ Sistema terá resposta lenta.

- Parte imaginária com módulo elevado: maior *overshoot*.

Veja regiões da figura 8.3!

$\Rightarrow$ Observe em 8.3.(a) a região: interna ao círculo, dentro do cone e a esquerda de $-\sigma$: boa localização!

Comentários sobre Controle Ótimo

- Busca-se um controlador $\mathbf{k}$ tal que a função de custo

$$J = \int_0^\infty [\mathbf{x}'(t)\mathbf{Q}\mathbf{x}(t) + u'(t)\mathbf{R}u(t)]dt$$

seja minimizada.

$\Rightarrow$ $\mathbf{Q}$ pondera os desvios de $\mathbf{x}(t)$ em relação ao ponto de equilíbrio $(\mathbf{x} = \mathbf{0})$.

$\Rightarrow$ $\mathbf{R}$ pondera o sinal de controle: quanto maior $\mathbf{R}$, menor a energia disponível.

Procedimento 8.1

Problema

Dado um par $(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ controlável, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, encontre $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ tal que $(\mathbf{A} - \mathbf{bk})$ possua qualquer conjunto de autovalores desejado que não contenha os autovalores de $\mathbf{A}$.

Procedimento:

1. Escolha $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ com os autovalores desejados.
2. Selecione qualquer $\bar{\mathbf{k}} \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ tal que $(\mathbf{F}, \bar{\mathbf{k}})$ seja observável.
3. Encontre o único $\mathbf{T}$ solução de $\mathbf{AT} - \mathbf{TF} = \mathbf{b}\bar{\mathbf{k}}$
4. Calcule $\mathbf{k} = \bar{\mathbf{k}}\mathbf{T}^{-1}$

Procedimento 8.1: que bruxaria é essa?

- Do procedimento, vemos que $\bar{\mathbf{k}} = \mathbf{k}\mathbf{T}$.
- Levando em $\mathbf{A}\mathbf{T} - \mathbf{T}\mathbf{F} = \mathbf{b}\bar{\mathbf{k}}$: $(\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k})\mathbf{T} = \mathbf{T}\mathbf{F}$ ou

$$\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k} = \mathbf{T}\mathbf{F}\mathbf{T}^{-1}$$

Portanto, trata-se de uma transformação de similaridade!

Exemplo no Matlab

```
A = [0 1 0 0; 0 0 -1 0; 0 0 0 1; 0 0 5 0];
b = [0 1 0 -2]';
F = diag([-2 -3 -4 -5]);
kb = [1 1 1 1];
O = obsv(F,kb);
rank(O)
T = lyap(A,-F,-b*kb)
k = kb*inv(T)
eig(A-b*k)
```

Existência de T não-singular

Teorema 8.4

Se $\mathbf{A}$ e $\mathbf{F}$ não possuem autovalores em comum, então a solução $\mathbf{T}$ de $\mathbf{AT} - \mathbf{TF} = \mathbf{b}\bar{\mathbf{k}}$ é não singular se e somente se $(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ é controlável e $(\mathbf{F}, \bar{\mathbf{k}})$ é observável.

Escolha de $\mathbf{F}$

- Dado o polinômio característico desejado, monte $\mathbf{F}$ na forma companheira e selecione $\bar{\mathbf{k}} = [1 \; 0 \; \cdots \; 0]$ que o par $(\mathbf{F}, \bar{\mathbf{k}})$ será observável.

- Autovalores complexos: use $\mathbf{F}$ na forma modal.

$\Rightarrow$ Exemplo: autovalores $\{\lambda_1, \alpha_1 \pm \beta_1 j, \alpha_2 \pm \beta_2 j\}$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1 & \beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta_1 & \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_2 & \beta_2 \\ 0 & 0 & 0 & -\beta_2 & \alpha_2 \end{bmatrix}$$

Escolha de $\bar{\mathrm{k}}$

- $\bar{\mathbf{k}}$ possíveis (basta ter entrada não nula para cada bloco da diagonal):
  - $\bar{\mathbf{k}} = [1\ 1\ 0\ 1\ 0]$,
  - $\bar{\mathbf{k}} = [1\ 1\ 0\ 0\ 1]$,
  - $\bar{\mathbf{k}} = [1\ 1\ 1\ 1\ 1]$, etc.

- Use a função `lyap(A,B,C)` que resolve a equação $\mathbf{AT} + \mathbf{TB} + \mathbf{C} = \mathbf{0}$

Regulação

- Deficiência importante da realimentação de estados: não anula o erro entre a saída $y(t)$ e a referência $r(t)$.

$\Rightarrow$ Útil para regulação e nem tanto para seguimento de referência (controle servo).

$\Rightarrow$ Controle em regulação $\Rightarrow$ levar o sistema de uma condição dada para a condição de equilíbrio, com um comportamento especificado.

$\Rightarrow$ Regulação $\Rightarrow$ $r(t) = 0$.

Controle Servo

- Mais complexo que o controle para *regulação*.
- Além de $\mathbf{k}$ deve-se ajustar um ganho p na lei de controle:

$$u(t) = pr(t) - \mathbf{k}\mathbf{x}(t) \tag{22}$$

$\Rightarrow$ resulta em função de transferência equivalente a (13) com um ganho direto:

$$\hat{g}(s) = p\frac{\beta_1 s^{n-1} + \beta_2 s^{n-2} + \ldots + \beta_{n-1}s + \beta_n}{s^n + \bar{\alpha}_1 s^{n-1} + \ldots + \bar{\alpha}_{n-1}s + \bar{\alpha}_n} \tag{23}$$

- Usando Teorema 5.2, pág. 123, para uma entrada em degrau com aplitude a, a saída do sistema será

$$y(t) = a\hat{g}(0) = p\frac{\beta_n}{\bar{\alpha}_n}$$

- Para $y(t) = u(t)$ é necessário

$$\hat{g}(0) = p\frac{\beta_n}{\bar{\alpha}_n} = 1 \quad \Rightarrow \quad p = \frac{\bar{\alpha}_n}{\beta_n}$$

$\Rightarrow$ o que requer

$\beta_n \neq 0 \quad \Rightarrow \quad$ Sistema não possui zero na origem.

Resumindo. . .

Ajuste para entrada em degrau

Dado $(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$, se $(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ é controlável então faz-se a realimentação de estados para ajustar os autovalores da malha fechada $(\mathbf{A} - \mathbf{bk})$ em qualquer posição desejada de forma a prover *regulação* ao sistema.

Resumindo. . .

Ajuste para entrada em degrau

Dado $(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$, se $(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ é controlável então faz-se a realimentação de estados para ajustar os autovalores da malha fechada $(\mathbf{A} - \mathbf{bk})$ em qualquer posição desejada de forma a prover *regulação* ao sistema. Em seguida coloca-se um ganho direto $p = \dfrac{\bar{\alpha}_n}{\beta_n}$ como em (23), provendo seguimento de referência em degrau (de qualquer amplitude).

Robustez no seguimento de referência

- Solução para entradas em degrau (inclusão do ganho de caminho direto) não é adequado se os parâmetros da planta mudam ou não são bem conhecidos.

$\Rightarrow$ Neste caso: falta robustez ao seguimento de referência.

$\Rightarrow$ Inclui caso em que uma perturbação constante $w(t)$ com amplitude desconhecida pode afetar a saída da planta (efeito de carga).

- Alternativa: Realimentação unitária de saída com integração do sinal de erro

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t) + \mathbf{b}w(t) \quad (24)$$

$$y(t) = \mathbf{c}\mathbf{x}(t) \quad (25)$$

Diagrama

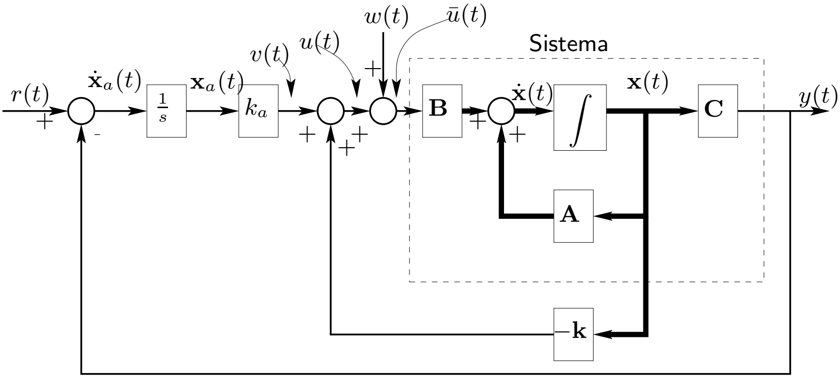


Figura: Topologia para controle servo.

Do diagrama temos:

$$\dot{x}_a = r - y = r - \mathbf{c}\mathbf{x}$$

$$u(t) = v(t) - \mathbf{k}\mathbf{x}(t) = \underbrace{k_a x_a}_{v(t)} - \mathbf{k}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -\mathbf{k} & k_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ x_a \end{bmatrix}$$

Definindo:

$$\tilde{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ x_a \end{bmatrix}; \quad \tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k} & \mathbf{b}k_a \\ -\mathbf{c} & \mathbf{0} \end{bmatrix}; \quad \tilde{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{e} = \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{c}} = \begin{bmatrix} \mathbf{c} & 0 \end{bmatrix}$$

Assim,

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{x}_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k} & \mathbf{b}k_a \\ -\mathbf{c} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ x_a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix} r + \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ 0 \end{bmatrix} w$$

$$y = \begin{bmatrix} \mathbf{c} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ x_a \end{bmatrix}$$

Levando em (24)–(25):

$$\left.\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}} &= \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{b}}r + \mathbf{e}w \\ y &= \tilde{\mathbf{c}}\tilde{\mathbf{x}} \end{aligned}\right\}$$

Teorema 8.5

Se $(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ é controlável e se $\hat{g}(s) = \mathbf{c}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}$ não possui zeros em $s = 0$, então todos os autovalores de $\tilde{\mathbf{A}}$ podem ser alocados arbitrariamente selecionando o ganho $[-\mathbf{k}\ k_a]$

Prova

- Assume-se que $(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ pode ser colocado na forma canônica controlável (11)–(12) e sua função de transferência é dada por (13).

- Sem zeros em $s = 0 \Rightarrow \ \beta_n \neq 0.$

  $\Rightarrow$ Mostra-se que o par

$$\left(\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{c} & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ 0 \end{bmatrix} \right) \tag{26}$$

é controlável $\Leftrightarrow \ \beta_n \neq 0.$

- Pode-se mostrar que a matriz de controlabilidade do par (26): possui determinante $-\beta_n$ (veja pág. 245 para $n = 4$).

- Conclui-se que, se $(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ é controlável e $\hat{g}(s)$ não possui zero em $s = 0$, então o par (26) é controlável.

$\Rightarrow$ Segue-se que, do Teorema 8.3, todos os autovalores de $\tilde{\mathbf{A}}$ podem ser arbitrariamente escolhidos por uma adequada seleção de $[-\mathbf{k}\ k_a]$

Estabilização

- Suponha que a equação de estados não seja controlável.
- A equação de estados pode, então, ser transformada em

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{\mathbf{x}}}_c \\ \dot{\bar{\mathbf{x}}}_{\bar{c}} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_c & \bar{\mathbf{A}}_{12} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{A}}_{\bar{c}} \end{bmatrix}}_{\tilde{A}_c} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_c \\ \bar{\mathbf{x}}_{\bar{c}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{b}}_c \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} u \tag{27}$$

em que $(\bar{\mathbf{A}}_c, \bar{\mathbf{b}}_c)$ é controlável.

- Como $\tilde{\mathbf{A}}_c$ é bloco triangular, seus autovalores são dados pelos de $\bar{\mathbf{A}}_c$ e de $\bar{\mathbf{A}}_{\bar{c}}$.

- Introduzindo a realimentação de estados:

$$u = r - \mathbf{k}\mathbf{x} = r - \bar{\mathbf{k}}\bar{\mathbf{x}} = r - \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{k}}_1 & \bar{\mathbf{k}}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_c \\ \bar{\mathbf{x}}_{\bar{c}} \end{bmatrix}$$

resulta em

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{\mathbf{x}}}_c \\ \dot{\bar{\mathbf{x}}}_{\bar{c}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_c - \bar{\mathbf{b}}_c\bar{\mathbf{k}}_1 & \bar{\mathbf{A}}_{12} - \bar{\mathbf{b}}_c\bar{\mathbf{k}}_2 \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{A}}_{\bar{c}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_c \\ \bar{\mathbf{x}}_{\bar{c}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{b}}_c \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} r \quad (28)$$

$\Rightarrow$ $\bar{\mathbf{A}}_{\bar{c}}$ não é afetada pela realimentação $\Rightarrow$ controlabilidade de $(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ é *necessária e suficiente* para que seja possível alocar os autovalores de $(\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k})$ em quaisquer posições.

Colocação do Problema

- Dado o sistema:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \quad (29)$$

$$y = \mathbf{c}\mathbf{x} \quad (30)$$

$\Rightarrow$ Matrizes $\mathbf{A}$, $\mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$ são *conhecidas*.

Colocação do Problema

- Dado o sistema:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \tag{29}$$

$$y = \mathbf{c}\mathbf{x} \tag{30}$$

$\Rightarrow$ Matrizes $\mathbf{A}$, $\mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$ são *conhecidas*.

O problema

Estimar $\mathbf{x}$ a partir de u e y com o conhecimento de $\mathbf{A}$, $\mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$.

Colocação do Problema

- Dado o sistema:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \tag{29}$$

$$y = \mathbf{c}\mathbf{x} \tag{30}$$

$\Rightarrow$ Matrizes $\mathbf{A}$, $\mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$ são *conhecidas*.

O problema

Estimar $\mathbf{x}$ a partir de u e y com o conhecimento de $\mathbf{A}$, $\mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$.

- Pode-se duplicar o sistema orignal:

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{b}u \tag{31}$$

em que $\hat{\mathbf{x}}$ é uma estimativa de $\mathbf{x}$.

Observador em malha aberta

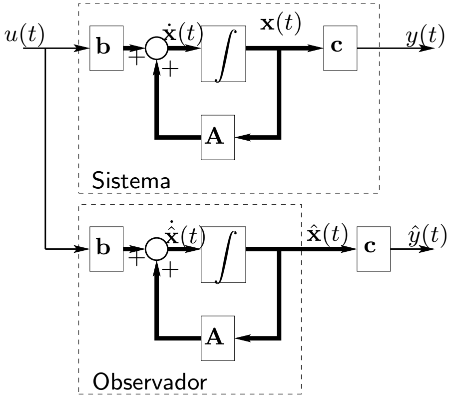


Figura: Estimador de estados em malha aberta.

- Neste caso tem-se o estimador em malha aberta da Fig. 4.

$\Rightarrow$ Se o sistema e o observador possuem as mesmas condições iniciais, $\mathbf{x}(t) = \hat{\mathbf{x}}(t)$, $\forall t \geq 0$.

$\Rightarrow$ Se (29)–(30) é observável, pode-se estimar o estado inicial em um dado instante.

- Neste caso tem-se o estimador em malha aberta da Fig. 4.

$\Rightarrow$ Se o sistema e o observador possuem as mesmas condições iniciais, $\mathbf{x}(t) = \hat{\mathbf{x}}(t)$, $\forall t \geq 0$.

$\Rightarrow$ Se (29)–(30) é observável, pode-se estimar o estado inicial em um dado instante.

- Desvantagens:

1. Estado inicial precisa ser calculado a cada uso do observador.
2. Se algum autovalor de $\mathbf{A}$ possui parte real positiva, então pequenos desvios de $\hat{\mathbf{x}}(t)$ em relação a $\mathbf{x}(t)$ implicará em erros crescentes com o tempo.

Uma alternativa. . .

- Usar a diferença entre a saídas real $(y(t))$ e estimada $(\hat{y}(t))$ para corrigir os estados estimados.

- Correção de estados proporcional a $y(t) - \hat{y}(t)$:

$$\text{Correção(t)} = \mathbf{L}(y(t) - \hat{y}(t)) = \mathbf{L}(y(t) - \underbrace{\mathbf{c}\hat{\mathbf{x}}(t)}_{\hat{y}(t)})$$

- Nova equação do estimador

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{b}u + \mathbf{L}(y - \mathbf{c}\hat{\mathbf{x}}) \tag{32}$$

Realimentação de $y - \hat{y}$

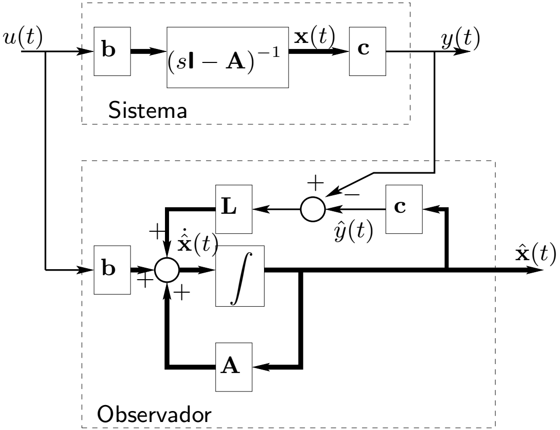


Figura: Estimador de estados em malha fechada.

Comportamento do erro de estimação

- Seja $\mathbf{e}(t) = \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)$ o erro de estimação.

$\Rightarrow$ Derivando:

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{e}}(t) &= \dot{\mathbf{x}} - \dot{\hat{\mathbf{x}}} \\
&= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u - (\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{b}u + \mathbf{L}(y - \mathbf{c}\hat{\mathbf{x}})) \\
&= (\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{c})\mathbf{x} - (\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{c})\hat{\mathbf{x}} \\
&= (\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{c})(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) \\
&= (\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{c})\mathbf{e} \qquad (33)
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ A taxa com a qual $\mathbf{e}(t)$ aproxima-se de zero pode ser arbitrariamente escolhida ajustando-se os autovalores de $(\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{c})$.

- Se todos os autovalores de $(\mathbf{A} - \mathbf{Lc})$ possuem parte real negativa e menor que $-\sigma$, então todos os elementos de $\mathbf{e}(t)$ convergirão para zero em taxas mais rápidas que $e^{-\sigma t}$.

- Se todos os autovalores de $(\mathbf{A} - \mathbf{Lc})$ possuem parte real negativa e menor que $-\sigma$, então todos os elementos de $\mathbf{e}(t)$ convergirão para zero em taxas mais rápidas que $e^{-\sigma t}$.

- Portanto, a escolha adequada de $\mathbf{L}$ dispensa o cálculo de $\mathbf{x}(t_0)$
$\Rightarrow$ mesmo com erro inicial grande, rapidamente $\hat{\mathbf{x}}(t) \longrightarrow \mathbf{x}(t)$.

- Se todos os autovalores de $(\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{c})$ possuem parte real negativa e menor que $-\sigma$, então todos os elementos de $\mathbf{e}(t)$ convergirão para zero em taxas mais rápidas que $e^{-\sigma t}$.

- Portanto, a escolha adequada de $\mathbf{L}$ dispensa o cálculo de $\mathbf{x}(t_0)$
$\Rightarrow$ mesmo com erro inicial grande, rapidamente $\hat{\mathbf{x}}(t) \longrightarrow \mathbf{x}(t)$.

- Quais autovalores escolher para $(\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{c})$?

- Quais autovalores escolher para $(\mathbf{A} - \mathbf{Lc})$?

$\Rightarrow$ Mesma região discutida no caso de realimentação de estados;

$\Rightarrow$ Se o estimador é usado para realimentação de estados $\Rightarrow$ seus autovalores devem ser mais rápidos que os da malha fechada;

$\Rightarrow$ Limitação: quanto mais rápido o estimador, maiores serão os problemas devidos a saturação e ruído.

Se existe perturbação...

- Considere o sistema

$$\left.\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t) + \mathbf{E}w(t) \\ y(t) &= \mathbf{c}\mathbf{x}(t) + \mathbf{d}u(t) + \mathbf{F}w(t) \end{aligned}\right\} \qquad (34)$$

Se existe perturbação. . .

- Considere o sistema

$$\left.\begin{array}{l}\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t) + \mathbf{E}w(t) \\ y(t) = \mathbf{c}\mathbf{x}(t) + \mathbf{d}u(t) + \mathbf{F}w(t)\end{array}\right\} \tag{34}$$

⇒ O observador é dado por:

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{b}u + \text{Correção} \tag{35}$$

$$\text{Correção} = \mathbf{L}(y - \hat{y}) = \mathbf{L}[y - (\mathbf{c}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{d}u)] \tag{36}$$

$$= \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{b}u + \mathbf{L}y - \mathbf{L}\mathbf{c}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{L}\mathbf{d}u \tag{37}$$

$$= (\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{c})\hat{\mathbf{x}} + (\mathbf{b} - \mathbf{L}\mathbf{d})u + \mathbf{L}y \tag{38}$$

Se existe perturbação. . .

- Considere o sistema

$$\left.\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t) + \mathbf{E}w(t) \\ y(t) &= \mathbf{c}\mathbf{x}(t) + \mathbf{d}u(t) + \mathbf{F}w(t) \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

$\Rightarrow$ O observador é dado por:

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{b}u + \text{Correção} \tag{35}$$

$$\text{Correção} = \mathbf{L}(y - \hat{y}) = \mathbf{L}[y - (\mathbf{c}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{d}u)] \tag{36}$$

$$= \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{b}u + \mathbf{L}y - \mathbf{L}\mathbf{c}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{L}\mathbf{d}u \tag{37}$$

$$= (\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{c})\hat{\mathbf{x}} + (\mathbf{b} - \mathbf{L}\mathbf{d})u + \mathbf{L}y \tag{38}$$

$\Rightarrow$ Usando (38), (34) e $\mathbf{e} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$:

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{c})\mathbf{e}(t) + (\mathbf{E} - \mathbf{L}\mathbf{F})w(t) \tag{39}$$

Procedimento $8.O1$

Teorema $8.O3$

Considere o par $(\mathbf{A}, \mathbf{c})$. Todos os autovalores de $(\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{c})$ podem ser arbitrariamente escolhidos selecionando-se um vetor real $\mathbf{L}$ se e somente se $(\mathbf{A}, \mathbf{c})$ (ou $(\mathbf{A}', \mathbf{c}')$) é *observável* (*controlável*).

Procedimento $8.O1$

Teorema $8.O3$

Considere o par $(\mathbf{A}, \mathbf{c})$. Todos os autovalores de $(\mathbf{A} - \mathbf{Lc})$ podem ser arbitrariamente escolhidos selecionando-se um vetor real $\mathbf{L}$ se e somente se $(\mathbf{A}, \mathbf{c})$ (ou $(\mathbf{A}', \mathbf{c}')$) é *observável* (*controlável*).

- Procedimento $8.O1$
  1. Escolha $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ com os autovalores desejados.
  2. Selecione qualquer $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ tal que $(\mathbf{F}, \mathbf{L})$ seja controlável.
  3. Encontre o único $\mathbf{T}$ solução de $\mathbf{TA} - \mathbf{FT} = \mathbf{Lc}$. $\mathbf{T}$ é não singular, conforme Teorema 8.4, pág. 240.
  4. Uma estimativa de $\mathbf{x}$ é gerada por

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{Fz} + \mathbf{Tb}u + \mathbf{L}y \quad (40)$$

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{z} \quad (41)$$

Seja o erro dado por

$$\tilde{\mathbf{e}} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}} \Rightarrow \mathbf{T}\mathbf{e} = \mathbf{T}\mathbf{x} - \underbrace{\mathbf{T}\hat{\mathbf{x}}}_{\mathbf{z}} \Rightarrow \tilde{\mathbf{e}} = \mathbf{T}\mathbf{x} - \mathbf{z}$$

Derivando:

$$\dot{\tilde{\mathbf{e}}} = \mathbf{T}\dot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{z}}$$

Usando: $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u$ e, da equação de Silvester (Lyapunov), $\mathbf{T}\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{c} + \mathbf{F}\mathbf{T}$:

$$\begin{aligned}
\dot{\tilde{\mathbf{e}}} &= \underbrace{\mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{T}\mathbf{b}u}_{\mathbf{T}\dot{\mathbf{x}}} \underbrace{-(\mathbf{F}\mathbf{z} + \mathbf{T}\mathbf{b}u + \mathbf{L}\overbrace{\mathbf{c}\mathbf{x}}^{y})}_{\dot{\mathbf{z}}} \\
&= (\mathbf{F}\mathbf{T} + \mathbf{L}\mathbf{c})\mathbf{x} - (\mathbf{F}\mathbf{z} + \mathbf{L}\mathbf{c}\mathbf{x}) \\
&= \mathbf{F}(\underbrace{\mathbf{T}\mathbf{x} - \mathbf{z}}_{\tilde{\mathbf{e}}}) \\
&= \mathbf{F}\tilde{\mathbf{e}} \qquad (42)
\end{aligned}$$

- Se $\mathbf{F}$ é estável, $\lim_{t \to \infty} \mathbf{e}(t) = \mathbf{0}$

$\Rightarrow$ portanto $\mathbf{z}(t)$ aproxima-se de $\mathbf{T}\mathbf{x}(t)$

$\Rightarrow$ de forma equivalente: $\mathbf{T}\hat{\mathbf{x}}(t)$ aproxima-se de $\mathbf{T}\mathbf{x}(t)$ $\Leftrightarrow$ $\hat{\mathbf{x}}(t) \longrightarrow \mathbf{x}(t)$

- Toda a discussão feita sobre a escolha de $\mathbf{F}$ e $\bar{\mathbf{k}}$ (aqui $\mathbf{L}$) aplica-se novamente.

Estimador de ordem reduzida

Note que o sistema[2] (29)-(30) pode ser levado à forma canônica observável:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}'\mathbf{x} + \mathbf{c}'u = \begin{bmatrix} -\alpha_1 & 1 & 0 & 0 \\ -\alpha_2 & 0 & 1 & 0 \\ -\alpha_3 & 0 & 0 & 1 \\ -\alpha_4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{bmatrix} u \quad (43) \\ y &= \mathbf{b}'\mathbf{x} = [1 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0]\,\mathbf{x} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ veja slide eq. (7.14) à pág. 188 do Chen.

- Neste caso, a saída y é o estado x_1. Logo, precisam ser estimados $n-1$ estados.

[2]Aqui foi usado $n = 4$. Vale para qualquer n.

Procedimento para Estimador de Ordem Reduzida

- Procedimento $8.R1$

1. Escolha $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{n-1 \times n-1}$ com os autovalores desejados.
2. Selecione qualquer $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^{n-1 \times 1}$ tal que $(\mathbf{F}, \mathbf{L})$ seja controlável.
3. Encontre o único $\mathbf{T}$ solução de $\mathbf{TA} - \mathbf{FT} = \mathbf{Lc}$. Note que $\mathbf{T} \in \mathbb{R}^{n-1 \times n}$.
4. Uma estimativa de $\mathbf{x}$ é gerada por

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{Fz} + \mathbf{Tb}u + \mathbf{L}y \tag{44}$$

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{T} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} y \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} \tag{45}$$

que é um sistema de dimensão $n-1$.

- Seja o sistema em malha aberta

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u && (46) \\ y &= \mathbf{c}\mathbf{x} && (47) \end{aligned}$$

tal que $(\mathbf{A}, \mathbf{c})$ é observável e $(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ é controlável.

- Seja a lei de controle dada por

$$u = r - \mathbf{k}\hat{\mathbf{x}} \tag{48}$$

em que o estimador tem dinâmica dada por

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = (\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{c})\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{b}u + \mathbf{L}y \tag{49}$$

resulta no sistema indicado na figura 6.

Observador em malha aberta

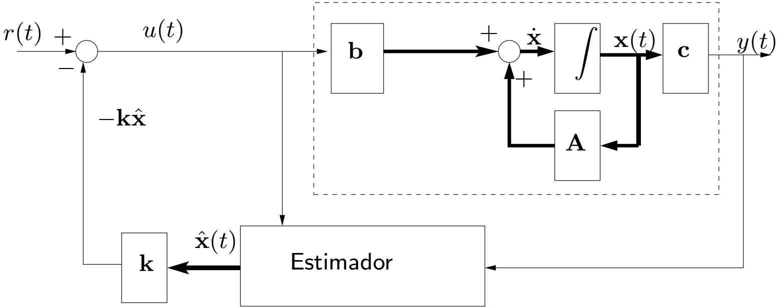


Figura: Realimentação de estados estimados.

- Levando a lei de controle (48) em (46)-(47) e (49) resulta em

$$
\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\mathbf{k}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{b}r && (50)\\
\dot{\hat{\mathbf{x}}} &= (\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{c})\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{b}(r - \mathbf{k}\hat{\mathbf{x}}) + \mathbf{L}\mathbf{c}\mathbf{x} && (51)
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$ ou ainda

$$
\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\hat{\mathbf{x}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{b}\mathbf{k} \\ \mathbf{L}\mathbf{c} & \mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{c} - \mathbf{b}\mathbf{k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \hat{\mathbf{x}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} r \qquad (52)
$$

$$
y = \begin{bmatrix} \mathbf{c} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \hat{\mathbf{x}} \end{bmatrix} \qquad (53)
$$

- Seja a transformação

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \hat{\mathbf{x}} \end{bmatrix} = \mathbf{P} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \hat{\mathbf{x}} \end{bmatrix}$$

- Fazendo $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{P}\mathbf{x}$ em (52)-(53):

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{e}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k} & \mathbf{b}\mathbf{k} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} r \qquad (54)$$

$$y = \begin{bmatrix} \mathbf{c} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix} \qquad (55)$$

Portanto...

- Matriz bloco triangular em (54) assegura independência de projeto para o estimador e controlador.

$\Rightarrow$ Propriedade da separação

$\Rightarrow$ Sistema em malha fechada possui autovalores do controlador $(\mathbf{A} - \mathbf{bk})$ e do estimador $(\mathbf{A} - \mathbf{Lc})$.

$\Rightarrow$ Equação (54) não é controlável!

$\Rightarrow$ Função de transferência é dada por[3]

$$\hat{g}_f = \mathbf{c}(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \bar{\mathbf{b}}\mathbf{k})^{-1}\mathbf{b}$$

$\Rightarrow$ Não há diferença se o estimador é empregado ou não: ele é completamente cancelado.

[3]Veja Teorema 6.6, pág. 159