

Etapas de projeto do sistema Ball and Beam

Bernardo Bresolini* Ester Queiroz Alvarenga*

* Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais,
Divinópolis - MG (e-mails: berbresolini14@gmail.com e
esterqueirozalvarenga@gmail.com).

Resumo

O sistema *ball and beam* permite o controle da posição de uma bola sobre uma viga a partir de movimentos rotacionais. Este conjunto descreve processos com aplicações diretas na área de controle. Em vista disso, o presente trabalho tem a finalidade de descrever as etapas de projeto de um controlador para o sistema usado. Fez-se a análise da resposta do *ball and beam* a um controlador com ganho proporcional. Os estudos demonstraram que apenas o controlador proporcional não é capaz de estabilizar a resposta do processo, sendo portanto, necessário acrescentar ao controlador pelo menos um zero para estabilizar o sistema.

Palavras-chaves: Ball and beam. Controlador proporcional. Mecatrônica.

Abstract

The *ball and beam* system allows you to control the position of a ball on a beam from rotational movements. This set describes processes with direct applications in the control area. In view of this, this paper aims to describe the design steps of a controller for the system used. Ball and beam response to a proportional gain controller was analyzed. Studies have shown that only the proportional controller cannot stabilize the process response, so it is necessary to add at least one zero to the controller to stabilize the system.

Keywords: Ball and beam. Proportional controller. Mechatronics.

1. INTRODUÇÃO

Sistemas eletromecânicos que possuem mais graus de liberdade do que atuadores são denominados de subatuados. Segundo CHAN e CHANG (2013, p. 2251), o estudo de sistemas não lineares subatuados tem tido grande interesse na área de controle devido a seu menor consumo energético.

O sistema *ball and beam* é um clássico sistema eletromecânico subatuado com dois graus de liberdade e somente um atuador. A barra rotaciona num plano vertical em função do torque desenvolvido por um motor; enquanto que a bola pode rolar livremente ao longo da barra (MARTÓN *et al.*, 2008, p. 3724).

O conjunto formado pela bola e pela viga tem propósito de controlar a posição da bola $r(t)$ sobre a barra com movimentos rotacionais. Tal sistema descreve um processo com aplicações diretas na área de controle, como o manejo da inclinação de aeronaves.

1.1 Sistema Ball and Beam

A FIG. 1 exibe o esquemático de um sistema *ball and beam* cuja intenção é controlar a posição da bola $r(t)$ à partir da variável manipulada $\theta(t)$. Para tanto, o servo é acoplado a um elo motor que formará um mecanismo 4 barras, capaz de transmitir o movimento do servo para a viga.

Além disso, o ângulo α da barra de rolagem não implica, necessariamente, na movimentação da bola; embora com

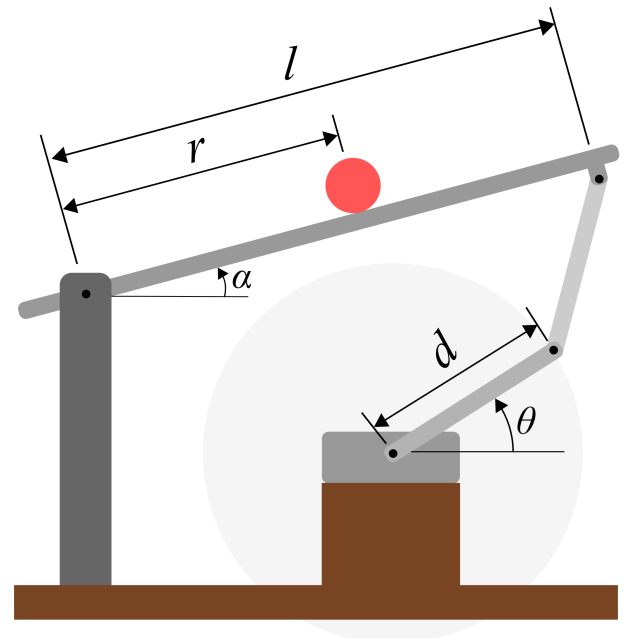


Figura 1. Esquemático do sistema *ball and beam*

a sua inclinação, a força normal passe a não ser igual em módulo e direção a força peso (mostrado na FIG. 2).

Isto culmina numa força que tenderá a por em movimento a bola, que pode vir a não deslocar caso o atrito, a

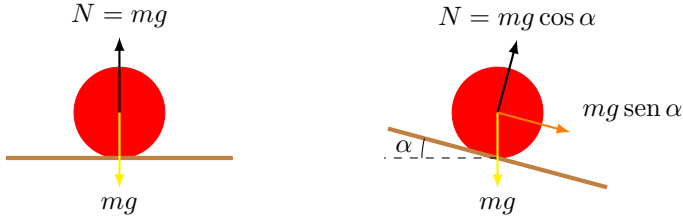


Figura 2. Diagrama de forças para a bola quando não há inclinação e quando há

resistência do ar e/ou objetos no caminho impeçam que o movimento aconteça.

2. OBJETIVOS

2.1 Objetivo geral

O presente trabalho tem a intenção de aplicar as técnicas de análise vistas nas aulas teóricas e laboratoriais num sistema *ball and beam* projetado pelos autores. Ainda, tem-se o intuito de desenvolver um controlador capaz de atingir critérios de desempenho estabelecidos.

2.2 Objetivos específicos

Para atingir o objetivo pretende-se

- Projetar e implementar um sistema físico *ball and beam*;
- desenvolver e validar um modelo não linear para o sistema;
- linearizar o modelo obtido;
- analisar a estabilidade e a resposta do sistema;
- projetar, se possível, um controlador proporcional a partir do lugar geométrico das raízes (LGR);
- projetar um controlador PID que deva atender a critérios de desempenho estabelecidos;
- implementar o controlador PID na planta e comparar os resultados.

3. REFERENCIAL TEÓRICO

3.1 Lugar geométrico das raízes

O lugar das raízes é uma ferramenta poderosa para se analisar e projetar sistemas de controle com retroação, visto que a estabilidade e o desempenho de um sistema de controle a malha fechada estão diretamente relacionados com a localização das raízes da equação característica a malha fechada (DORF e BISHOP, 2001).

Considerando um sistema descrito pela função de transferência de malha fechada:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)H(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (1)$$

A equação característica é obtida igualando o denominador a zero:

$$G(s)H(s) = -1 \quad (2)$$

Supondo $G(s)H(s)$ uma relação de polinômios em s , como este polinômio é uma grandeza complexa, (2) pode ser reescrito como duas condições:

- Condição angular:

$$\angle G(s)H(s) = \pm 180^\circ (2k + 1) \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (3)$$

- Condição modular:

$$|G(s)H(s)| = 1 \quad (4)$$

Dessa forma, os valores que satisfazem as condições angular e modular são as raízes da equação característica ou os polos de malha fechada. Um lugar dos pontos no plano complexo que satisfaz somente a condição angular é o lugar das raízes (OGATA, 2010). Os polos de malha fechada — que correspondem a determinado valor de um ganho k — podem ser determinadas pela condição de módulo (OGATA, 2010).

Então, o lugar geométrico das raízes do sistema é um gráfico construído a partir dos polos e zeros de malha aberta. E ainda é o lugar ou caminho dos polos de malha fechada quando o ganho k varia de zero a infinito.

No *software* MATLAB®, essa técnica pode ser utilizada a partir do comando `rlocus()`.

3.2 Equação diofantina

Seja um processo em dada topologia, resultando numa equação de malha fechada da forma

$$H_{mf} = \frac{(s + z_1)(s + z_2) \cdots (s + z_n)}{(s + p_1)(s + p_2) \cdots (s + p_m)} \quad (5)$$

no qual os polos p_1, p_2, \dots, p_m são determinados pelo controlador $C(s)$ e, portanto, dependerão deste.

Assim, à partir dos critérios de desempenho: tempo de acomodação t_s e *overshoot* OS , ter-se-á a determinação de dois polos p_1 e p_2 , quando $OS > 0$, chamados de polos dominantes. Os demais polos deverão ser adotados com módulo real dez vezes maior que os dois primeiros. Assim, obter-se-á os polos com a dinâmica desejada.

Igualando o denominador de (5) com o denominador com a dinâmica desejada, será obtido um sistema de equações lineares possível e determinado, denominado de equação diofantina. Resolvendo as equações, será obtido os coeficientes do controlador especificado $C(s)$.

Resta, por fim, compensar os zeros z_1, z_2, \dots, z_n a partir de um pré-compensador G_c dado por

$$G_c = \frac{z_1 z_2 \cdots z_n}{(s + z_1)(s + z_2) \cdots (s + z_n)} \quad (6)$$

4. CRONOGRAMA

De forma que o projeto a ser desenvolvido venha satisfazer o especificado, será traçada e detalhada a seguir uma linha que conduzirá os autores no andamento da planta proposta. O desenvolvimento do sistema *ball and beam*, será dividido em etapas que serão executadas uma paralelamente às outras. Essa prática é denominada engenharia simultânea, a qual resulta em maior agilidade ao trabalho (GASPARIN *et al.*, 2015).

Inicialmente, dividiu-se o projeto em partes, a fim de dar maior clareza dos passos a serem tomados. As divisões são: *elaboração e início do projeto*, *modelagem e simulação*, *materiais*, *montagem e controle*, mostrado na FIG. 3. Ademais, o ANEXO A contém todo o cronograma de projeto feito, assim como suas datas.

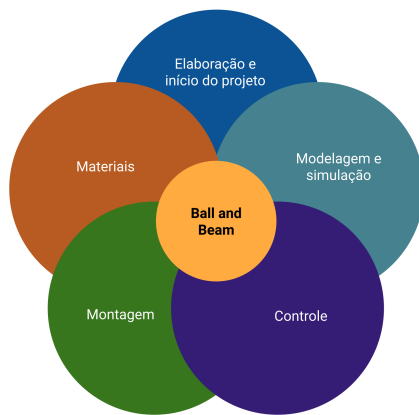


Figura 3. Relação entre as divisões do cronograma

4.1 Elaboração e início do projeto

Em essência, esta subdivisão consiste na elaboração conceitual e inicial do projeto. As etapas contidas nessa são:

- definição dos parâmetros;
- dimensionamento.

4.2 Modelagem e simulação

Esta divisão se caracteriza pela descrição matemática da planta assim como a validação do modelo levantado. Suas etapas são:

- modelagem do sistema;
- linearização do modelo;
- representação em função transferência;
- simulação e validação do modelo;
- ajustes necessários.

4.3 Materiais

Este módulo consiste nas etapas em que se analisa os materiais utilizados na planta. Suas etapas são:

- escolha dos materiais;
- orçamento;
- compra dos componentes;
- calibração dos sensores e atuadores.

4.4 Montagem

Esta divisão contém aquelas etapas que requerem a montagem física (mecânica, elétrica etc) dos componentes e mecanismos da planta junto com sua análise. Suas etapas são:

- montagem do sistema;
- estudo das características em malha aberta;
- comparação do modelo e da planta.

4.5 Controle

A subdivisão controle engloba as etapas que envolvam efetivamente a disciplina de análise de sistemas lineares e o controle da planta. Suas etapas são:

- análise da estabilidade e controlabilidade;
- definição das metas de controle;

- projeto e validação do controlador P;
- projeto e validação do controlador PID.

5. SISTEMA FÍSICO

Os componentes do sistema devem ser capazes de aguentar os esforços exigidos no processo. Deste modo, esta seção tem o intuito de dimensionar e elencar os componentes utilizados no sistema, de forma que o mesmo opere normalmente nas condições da sua faixa de operação. Além disso, também serão descritos os processos de montagem do sistema.

5.1 Circuito eletrônico

O circuito eletrônico do sistema *Ball and Beam* é composto por um servomotor o qual interferirá diretamente no processo; um microcontrolador Arduino, sendo a interface do controlador (MATLAB) e o hardware montado; uma fonte de alimentação; um sensor de distância: dispositivo de entrada que captará informações do processo; uma *proto-board* e *jumpers* que permitirão a condução de corrente entre os componentes do circuito. Estes elementos serão ligados ao computador e na parte mecânica do processo. A configuração do circuito descrito pode ser vista na FIG. 4.

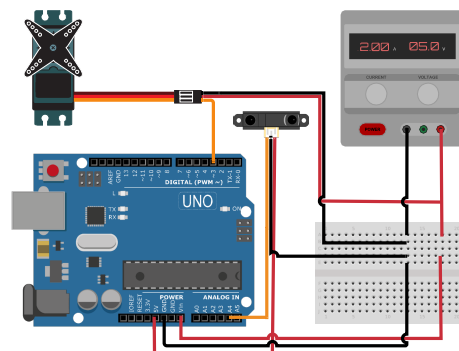


Figura 4. Circuito eletrônico

O sensor de distância mensurará a posição da bola e a enviará ao controlador — que se encontrará no computador ao qual o Arduino será ligado. A depender da ação de controle, será enviada pelo Arduino a tensão necessária para mover o servomotor, alterando o ângulo da barra e consequentemente a posição da bola sobre ela.

Sensor de distância A medição da distância r da bola se dará pelo sensor GP2YA21YK0F¹ cujas especificações gerais é dada na TAB. 1. A relação entre a distância L (cm) e a tensão de saída V_O (V) fornecida pelo fabricante.

¹ O *datasheet* do componente pode ser visto em http://www.sharpp-world.com/products/device/lineup/data/pdf/datasheet/gp2y0a21yk_e.pdf.

Tabela 1. Especificações gerais do sensor GP2YA21YK0F

Grandeza	Valor
Tensão de alimentação	4,5 V a 5,5 V
Corrente máxima	50 mA
Faixa de Operação	7 cm a 80 cm
Preço*	R\$ 59,90

* Preço em Robocore Tecnologia (<https://www.robocore.net/loja/sensores/sensor-de-distancia-infra-vermelho-sharp-10-80cm>) em 15 set. 2019.

Servomotor Os autores do presente relatório possuem o servomotor JX PDI-6221MG. Portanto, optou-se por utilizá-lo no projeto. Este servomotor possui engrenagens metálicas para a redução das folgas e ganho de potência/torque. Ele é alto torque e tem alta capacidade de resposta. Suas especificações estão expostas na TAB. 2.

Tabela 2. Especificações do servomotor JX PDI-6221M

Grandeza	Valor
Tensão de alimentação	4,8 V a 6,0 V
Banda morta	2 μ s
Frequência de operação	1520 μ s/330 Hz
Velocidade de operação (4,8 V)	0,18 s/60°
Velocidade de operação (6,0 V)	0,16 s/60°
Torque estol (4,8 V)	17,25 kg.cm
Torque estol (6,0 V)	20,32 kg.cm
Preço**	R\$ 119,00

** Preço em Amazon (<https://www.amazon.com.br/Servo-JX-PDI-6221MG-Alto-Torque/dp/B07F6C98MW>) em 15 set. 2019.

5.2 Mecânica

Seguindo o modelo predefinido, de um sistema *ball and beam* de quatro barras, subatuado com dois graus de liberdade e somente um atuador, gera-se a representação exposta na FIG. 5 projetada no *software* SolidWorks. O *design* da viga como sendo duas barras cilíndricas se deu devido a sua facilidade de obtenção.

A vista explodida da estrutura pode ser vista na FIG. 6, assim como é posto na TAB. 3 a especificação de cada componente do sistema.

Tabela 3. Componentes

Nº item	Peça	Material	Qtd.
1	Coluna de sustentação da viga	MDF	2
2	Encaixe coluna-viga	ABS	1
3	Junta para o encaixe 2	Aço	1
4	Viga	Aço	2
5	Base	MDF	1
6	Suporte servo	MDF	1
7	Bola	Plástico	1
8	Nervura	MDF	1
9	Encaixe elo-viga	ABS	1
10	Elo binário	MDF	2
11	Sensor	—	1
12	Servomotor	—	1

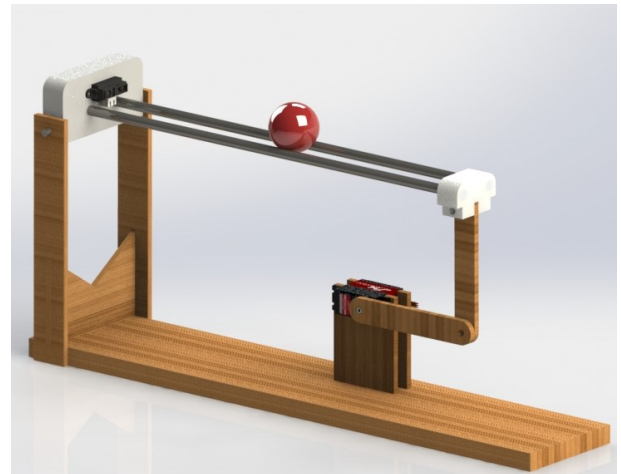


Figura 5. Vista trimétrica da estrutura mecânica do sistema *ball and beam*

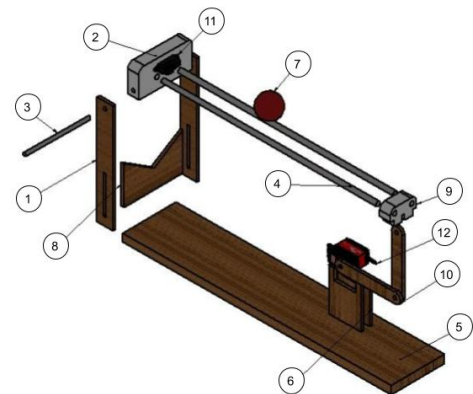


Figura 6. Vista trimétrica explodida

Escolheu-se o MDF como o material dos elementos estruturais e de suporte — peças 1, 5, 6 e 8 — devido o seu preço acessível, fácil montagem e rigidez satisfatória. Já os encaixes (peças 2 e 9) serão feitos de ABS, material rígido e de fácil acesso, utilizado pela impressora 3D (escolhida por permitir o desenvolvimento preciso das peças projetadas). Os elos binários foram especificados na TAB. 3 como sendo feitos de MDF, entretanto, testes serão realizados para definir se o MDF atenderá os requisitos necessários: leve e rígido a ponto de não afrouxar as junções com movimentos rotativos. Caso o MDF não satisfaça, uma opção será usar elos de ABS. Ademais, a bola será de plástico para uma menor densidade de massa.

O dimensionamento dos componentes da planta restringiu-se pelos materiais obtidos inicialmente: as barras cilíndricas de 400 mm de comprimento a serem utilizadas como viga, bola de diâmetro igual a 40 mm, servomotor (20 × 40 ×) mm e sensor infravermelho. A altura da coluna (peça 1) foi a primeira a ser especificada — determinada de modo a ser cômodo para manuseio. Os elos binários receberam atenção para que ambos fossem do mesmo tamanho (facilitando o modelo matemático) e que não fossem longos para não causar grande momento no eixo do motor e dificultar a movimentação. O APÊNDICE B

especifica o dimensionamento e as vistas de todo projeto mecânico.

5.3 Montagem

A montagem da planta aconteceu depois de obtidos todos os materiais mencionados na TAB. 3. A FIG. 7 apresenta a foto da montagem já finalizada.

Nesta etapa foi necessário fazer alguns ajustes, principalmente com as peças de ABS, pois a impressora que as imprimiu não tem tanta precisão. Os elos feitos de MDF em conjunto com a viga e a bola não ultrapassaram o peso limite que o servo consegue rotacionar. Ainda é interessante ressaltar que obteve-se sucesso com a junta entre os elos, formada por parafuso contraporca e arruelas pois ela permitiu pouca folga e atrito, assim como planejado.

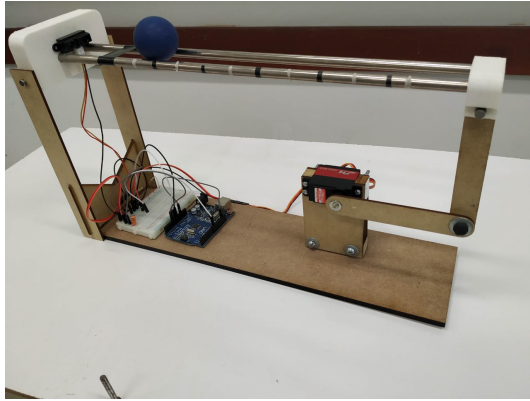


Figura 7. Planta real montada

Apesar da fabricante do sensor infravermelho disponibilizar uma conversão da tensão medida para a distância em cm, foi preciso realizar uma calibração para melhores resultados. Para tal, coletou-se os pontos mostrados na FIG. 8 e fez-se uma regressão polinomial de terceira ordem para se obter a equação que descreve a relação de tensão medida e distância em cm:

$$y = 49,6 - 0,236x + 5,06 \cdot 10^{-4}x^2 - 3,98 \cdot 10^{-7}x^3 \quad (7)$$

em que x é o valor de tensão e y a distância em cm.

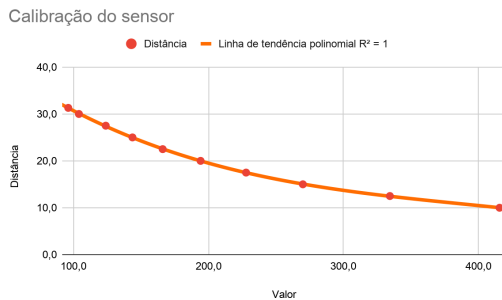


Figura 8. Relação entre a tensão medida pelo sensor infravermelho com a distância em cm

Neste processo também constatou-se que o sensor é muito ruidoso. Diante disso, fez-se um filtro com um capacitor de $10 \mu F$ para o sensor. Este filtro diminui em muito o ruído observado, contudo ele atrasou um pouco a dinâmica do infravermelho.

6. MODELAGEM

Os parâmetros do sistema *ball and beam* assim como seus símbolos são exibidos na TAB. 4. Diante disto, a modelagem do sistema por ser feita por Euler-Lagrange, fazendo

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right] - \frac{\partial L}{\partial q} = Q \quad (8)$$

em que $L = K - P$, K é a energia cinética, P é a energia potencial, Q é a força generalizada e q é a coordenada generalizada.

Tabela 4. Parâmetros do Sistema Ball and Beam

Símbolo	Definição
m_B	massa da bola
m_b	massa da barra
R	raio da bola
l	comprimento da barra
J_B	inércia da bola
J_b	inércia da barra

6.1 Energia Cinética e Potencial do sistema

Seja uma bola de raio R sob uma viga em dado instante t , inclinada em α em relação ao eixo horizontal, posicionada a uma distância r do raio de giração desta viga. Considerando que a bola não deslizará e que ela poderá se mover livremente sob a viga, sua movimentação será como mostra a FIG. 9.

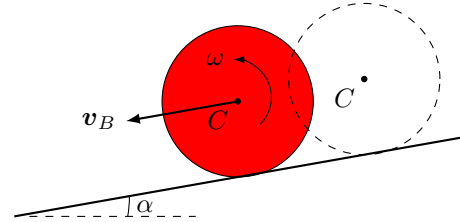


Figura 9. Movimentação da bola sobre a viga

Como exposto, a bola descreve um movimento plano geral, logo sua rolagem pode ser dividida em translação pura sobreposta por uma rotação pura, como mostra a FIG. 10.

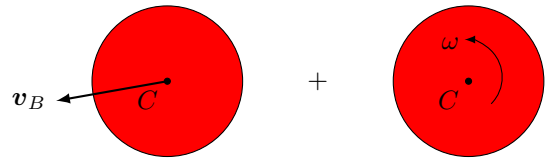


Figura 10. Decomposição do movimento de rolagem

Sendo assim, a velocidade cinética de uma bola rolando é determinada por

$$K_{\text{rolagem}} = \frac{1}{2} m_B v_B^2 + \frac{1}{2} J_B \omega^2 \quad (9)$$

sendo v_B a velocidade de translação da bola e ω a velocidade de rotacional da bola em torno do seu centro.

Expressando ω em termos de r segue-se

$$\omega = \frac{\dot{r}}{R} \quad (10)$$

Ainda, a intensidade da velocidade translacional da bola v_B pode ser expressa nos termos de r e α , fazendo

$$v_B^2 = (v_B)_x^2 + (v_B)_y^2 \quad (11)$$

sendo $(v_B)_x$ e $(v_B)_y$ suas componentes horizontal e vertical, respectivamente tais que

$$(v_B)_x = \frac{d}{dt} [r \cos \alpha] = \dot{r} \cos \alpha - r \dot{\alpha} \sin \alpha \quad (12)$$

$$(v_B)_y = \frac{d}{dt} [r \sin \alpha] = \dot{r} \sin \alpha + r \dot{\alpha} \cos \alpha \quad (13)$$

Substituindo (12) e (13) em (11),

$$v_B^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\alpha}^2 \quad (14)$$

Assim sendo, aplicando (10) e (14) em (9), obtém-se

$$\begin{aligned} K_{\text{rolagem}} &= \frac{1}{2} m_B [\dot{r}^2 + r^2 \dot{\alpha}^2] + \frac{1}{2} \frac{J_B}{R^2} \dot{r}^2 \\ &= \frac{1}{2} \left(m_B + \frac{J_B}{R^2} \right) \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m_B r^2 \dot{\alpha}^2 \end{aligned} \quad (15)$$

A energia cinética oriunda da inclinação α da barra é de

$$K_{\text{inclinação}} = \frac{1}{2} J_{\text{total}} \dot{\alpha}^2 = \frac{1}{2} (J_B + J_b) \dot{\alpha}^2 \quad (16)$$

Pelo princípio da superposição, a energia cinética total do sistema é dada pela soma algébrica das energias cinéticas de cada corpo rígido, ou seja,

$$K = \frac{1}{2} \left(m_B + \frac{J_B}{R^2} \right) \dot{r}^2 + \frac{1}{2} (m_B r^2 + J_B + J_b) \dot{\alpha}^2 \quad (17)$$

Considerando o material da barra homogêneo, pode-se concentrar seu centro de massa no centro da barra $0,5\ell$. Portanto, a energia potencial P do sistema é dado por

$$P = m_b g (0,5\ell \sin \alpha) + m_B g r \sin \alpha \quad (18)$$

6.2 Equação dinâmica de Euler-Lagrange

Sejam $Q = \tau_B$ e $q = r$, sendo r a posição da bola e τ_B o torque exógeno da bola. Assim, a dinâmica do sistema pode ser modelada matematicamente pela equação dinâmica de Euler-Lagrange aplicando (17) e (18) em (8).

Assim,

$$\tau_B = \frac{d}{dt} \left[(m_B + J_B R^{-2}) \dot{r}(t) \right] - m_B r(t) \dot{\alpha}^2(t) + m_B g \sin \alpha(t) \quad (19)$$

$$= (m_B + J_B R^{-2}) \ddot{r}(t) - m_B r(t) \dot{\alpha}^2(t) + m_B g \sin \alpha(t) \quad (20)$$

O torque na barra será considerado nulo, pois é de difícil modelagem. Assim, isolando a derivada da posição de maior ordem $\ddot{r}(t)$, resultando em

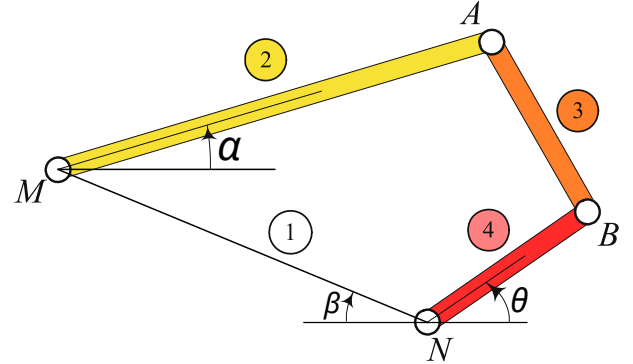
$$\ddot{r}(t) = \frac{m_B r(t) \dot{\alpha}^2(t) - m_B g \sin \alpha(t)}{m_B + J_B R^{-2}} \quad (21)$$

Numa análise newtoniana da equação, vê que a primeira parcela do numerador corresponde a força radial sob a bola devido a rotação da barra; o segundo termo corresponde à força devido à energia potencial. Por fim, o denominador corresponde à massa equivalente total.

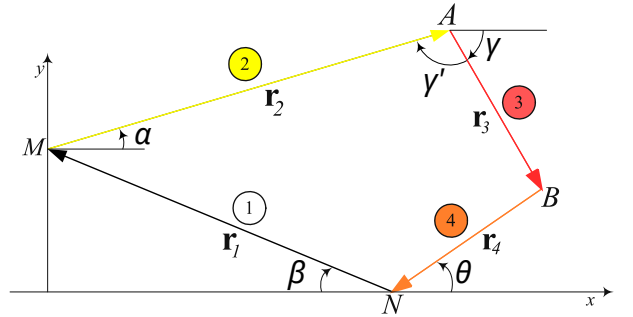
6.3 Cinemática

No entanto, a rotação da barra $\alpha(t)$ decorre de uma relação cinemática entre o elo motor e a viga, isto é, depende de θ e dos comprimentos das barras.

Considere o mecanismo quatro barras exposto em FIG. 11. A barra NM é o solo do sistema. Seja o *link* 4 a entrada do mecanismo e a barra MA a saída. Deseja-se conhecer a relação entre θ e α . A TAB. 5 expõe a nomenclatura usada.



(a) Esquemático



(b) Laço de vetores

Figura 11. Representação do mecanismo quatro barras

Tabela 5. Representação vetorial do mecanismo quatro barras da FIG. 11

Link	Vetor	Ângulo	Comprimento
1	\mathbf{r}_1	β	a
2	\mathbf{r}_2	α	ℓ
3	\mathbf{r}_3	γ	b
4	\mathbf{r}_4	θ	d

A soma vetorial dos vetores da barra partindo-se da origem M é nula. Assim sendo, segue-se

$$\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_4 = \mathbf{0} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \ell(\mathbf{i} \cos \alpha + \mathbf{j} \sin \alpha) + b(\mathbf{i} \cos \gamma - \mathbf{j} \sin \gamma) + \\ + d(-\mathbf{i} \cos \theta - \mathbf{j} \sin \theta) - \mathbf{ia} = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (23)$$

Trabalhando separadamente as coordenadas em x e y , segue-se

$$\begin{cases} \ell \cos \alpha + b \cos \gamma - d \cos \theta - a = 0 \\ \ell \sin \alpha - b \sin \gamma - d \sin \theta = 0 \end{cases} \quad (24)$$

isolando o termo com γ

$$\begin{cases} b \cos \gamma = a + d \cos \theta - \ell \cos \alpha \\ b \sin \gamma = \ell \sin \alpha - d \sin \theta \end{cases} \quad (25)$$

Para pequenas variações de θ , o ângulo de transmissão γ terá pequenas variações. Tem-se o interesse que este ângulo seja 90° , quando ocorre a máxima transmissão do torque. Deste modo, a montagem física da planta será de maneira a deixá-lo 90° para $\theta = 0^\circ$. Decorre disto que $\gamma \approx 90^\circ \Rightarrow \sin \gamma \approx 0$, logo

$$d \sin \theta \approx \ell \sin \alpha \quad (26)$$

cujas linearizações leva a

$$\alpha \approx \frac{d}{\ell} \theta \quad (27)$$

6.4 Modelo não linear

Aplicando a relação cinemática (26) em (21), ter-se-á

$$\ddot{r}(t) = \frac{m_B r(t) d^2 \ell^{-2} \dot{\theta}^2(t) - m_B g d \ell^{-1} \sin \theta(t)}{m_B + J_B R^{-2}} \quad (28)$$

um modelo não linear. Por curiosidade, sua transformada de Laplace, assumindo condições iniciais nulas, resulta em

$$s^2 R(s) (m_B + J_B R^{-2}) = m_B d^2 \ell^{-2} + \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} R(p) \hat{\Theta}(s-p) dp - m_B g d \ell^{-1} \frac{1}{s^2 + 1} \quad (29)$$

no qual $\hat{\Theta}(s) = \mathcal{L}\{\dot{\theta}(t)\}$.

No domínio s verifica-se que o modelo resulta numa integral de convolução complexa, difícil de ser resolvida. Portanto, é necessária uma linearização.

6.5 Modelo linear

Para tanto, visto que já se considerou pequenas variações de θ , segue-se $\sin \theta \approx \theta$ e ainda, ter-se-á que $\dot{\theta} \approx 0$ rad/s. Então,

$$\ddot{r}(t) = -\frac{m_B g d \ell^{-1} \theta(t)}{m_B + J_B R^{-2}} \quad (30)$$

cujas transformada de Laplace, admitindo-se condições iniciais nulas, resulta na função transferência

$$G(s) = \frac{R(s)}{\Theta(s)} = -\frac{d}{\ell} \frac{m_B}{m_B + J_B R^{-2}} \frac{g}{s^2} \quad (31)$$

ou ainda

$$G(s) = \frac{R(s)}{\Theta(s)} = -\frac{A}{s^2} \quad (32)$$

em que $A = g d R^2 \ell^{-1} (R^2 + J_B / m_B)^{-1}$.

7. VALIDAÇÃO DO MODELO E ANÁLISE MALHA ABERTA

Os parâmetros do sistema *ball and beam* requeridos para o modelo são listados na TAB. 6.

Tabela 6. Constantes do sistema

Símbolo	Valor	Unidade
m_B	3×10^{-3}	kg
d	10,15	cm
ℓ	40,00	cm
g	981	cm/s ²
R	2,00	cm
J_B	8×10^{-3}	kg · cm

Utilizando o programa de extensão *simulink* do software MATLAB[®] simulou-se a resposta do modelo do sistema a uma entrada degrau. O diagrama da FIG. 12 representa a implementação da modelagem teórica do sistema no programa.



Figura 12. Diagrama usado para implementar o modelo

Para a obtenção dos dados do sensor e servo motor da planta real usou-se a placa Arduino Uno. Os valores foram enviados para o MATLAB[®] e implementados para comparação com o modelo da forma como mostra o diagrama da FIG. 13. A comparação das respostas ao degrau de amplitude 15, i. e., $\theta = 15^\circ$, são mostradas na FIG. 14.

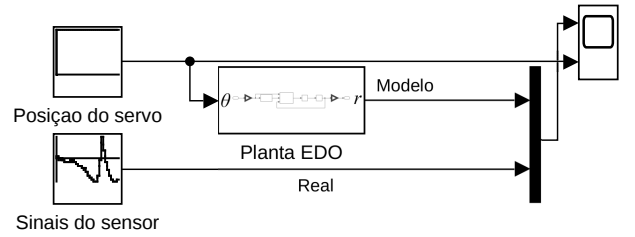


Figura 13. Diagrama usado para comparação das respostas

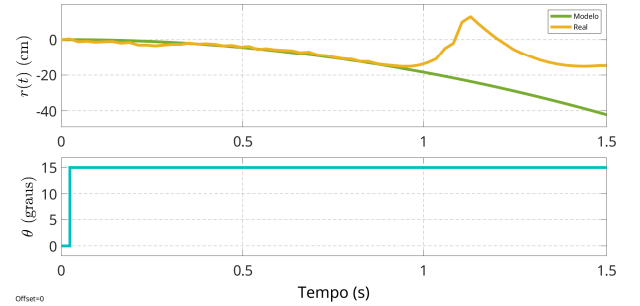


Figura 14. Comparação das respostas do sistema real com a do modelo dada uma entrada degrau

No experimento, deixou-se a bola em repouso a 25,01 cm do sensor. Entretanto, este ponto foi tomado como a referência: 0 cm. Assim, após a aplicação do degrau, a bola começou a rolar e diminuir sua distância. Quando ela chegou em aproximadamente -19 cm (cerca de 6 cm de distância do sensor), ela atinge o limite de funcionamento estipulado e, por conseguinte, a leitura do sensor não condiz com a distância da bola. No gráfico é visível a saturação do sensor. Fora este ponto, verifica-se que o modelo se adequou bem à planta.

Conquanto, devido à instabilidade da planta em malha aberta, é pouco provável que na utilização desta seja aplicado apenas um degrau. É plausível supor que a ação de controle se dará alternando entre ângulos positivos e negativos a fim de parar a bola. Por isso, fez-se também a resposta do sistema às entradas 10 e -10, como visto na FIG. 15.

Neste experimento a bola partiu de uma distância de 28,25 cm, em relação ao sensor, tomado como referência. Verificou-se que a movimentação da bola acelera durante

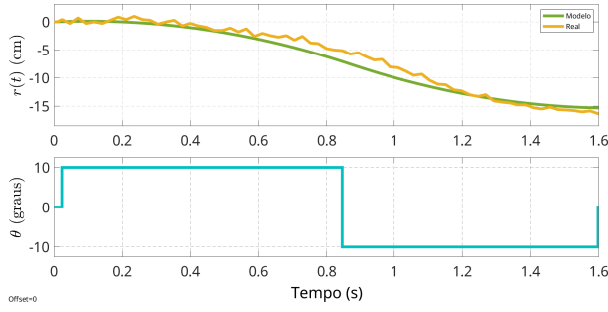


Figura 15. Comparação das repostas do sistema real com a do modelo dada uma entrada degrau

o degrau positivo e desacelera durante o negativo, quase parando ao final do experimento.

O modelo previa que a bola pararia. Esta leve diferença ocorre pois a dinâmica do servomotor foi considerada unitária, mas devido a posição do centro de gravidade do sistema, é mais difícil (e demorado) para o servo subir do que para descer, já que está submetido à ação da gravidade. Assim, existe certa assimetria, não considerada no modelo, que influencia levemente na dinâmica da planta. Há ainda as influências não consideradas do atrito e do erro na leitura do sensor, cuja precisão observada foi menor do que seu *datasheet* informa.

Não obstante, o comportamento do modelo descreveu com certa precisão o da planta, sendo, portanto validado pelos dois experimentos mostrados.

8. CONTROLE

8.1 Controlador P

Considere o processo $G(s)$ descrito em (32) na topologia de malha fechada da FIG. 16 sendo k_p uma constante, doravante denominada de ganho proporcional. A função

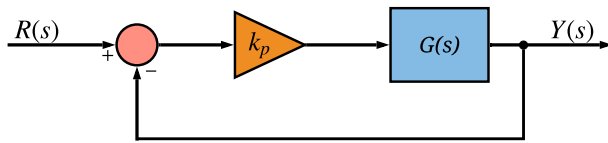


Figura 16. Controlador proporcional com realimentação unitária

transferência da malha fechada $H(s)$ é dada por

$$H(s) = \frac{k_p G(s)}{1 + k_p G(s)} = \frac{-k_p A}{s^2 - k_p A} \quad (33)$$

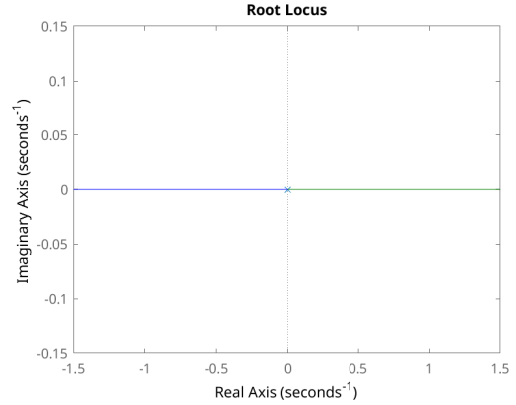
cujos polos p são encontrados isolando s e radicando os termos, obtendo

$$p = (k_p A)^{1/2} \quad (34)$$

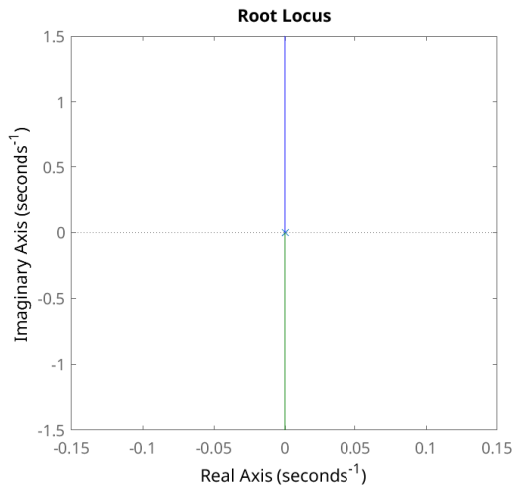
Visto que s é um número complexo, a operação de radicação em (34) se distingue da operação $\sqrt{}$ usada ordinariamente. Sua solução são os valores

$$z = r e^{i\phi} \implies z^{1/2} = \sqrt{r} e^{i(\theta+2n\pi)/2} \quad (35)$$

sendo r (o módulo de z) e ϕ (o argumento principal de z) números reais e $n = 0, 1$.



(a) Origem na extremidade esquerda



(b) Origem na extremidade direita

Figura 17. LGR do sistema

Os números reais positivos tem argumento principal igual a 0. Portanto, conclui-se que o LGR resultará em dois polos iniciando em 0 e obtendo o comportamento

$$p_1 = -\sqrt{k_p A} \quad \text{e} \quad p_2 = \sqrt{k_p A} \quad (36)$$

um polo real positivo e outro negativo, defasados em 180° . O Sistema assim é instável.

Note que caso se tivesse tomado como referência a posição na extremidade direita da FIG. 1, o sinal de $G(s)$ seria invertido e portanto, ter-se-ia os polos

$$p'_1 = -j\sqrt{k_p A} \quad \text{e} \quad p'_2 = j\sqrt{k_p A} \quad (37)$$

resultando em um sistema oscilatório.

A partir da função `rlocus()` do MATLAB, obteve-se as respostas da FIG. 17 que apresentam o lugar das raízes para os sistemas com origem na extremidade esquerda e na extremidade direita da calha. Vê-se que as respostas são rotacionadas em 90° uma da outra devido a presença do sinal negativo em uma delas.

O lugar das raízes retorna o caminho no qual os polos do sistema em malha fechada percorrerá mediante a variação de um ganho proporcional. Observando a FIG. 17, nota-se que a resposta em malha fechada do *ball and beam* é marginalmente estável ou instável para qualquer controla-

dor proporcional. Percebe-se, portanto, que o sistema não pode ser controlado apenas com um ganho proporcional. O sistema necessita da presença de um zero no semiplano esquerdo, de modo a atrair os polos para o semiplano real negativo, estabilizando-o.

De modo a aferir os resultados apresentados pela ferramenta Lugar Geométrico das Raízes, simulou-se para o modelo linear do processo — representado pela função de transferência vista em (32) — sua resposta para dois valores de k_p .

Na FIG. 18 vê-se a simulação para $k_p = 0,1$ e na FIG. 19 para $k_p = 2$. Como é possível perceber, ambas as respostas ficaram instáveis, como previsto pelo lugar geométrico das raízes visto na FIG. 17, para a origem na extremidade esquerda. Além disso, nota-se que para maiores valores de k_p , mais rapidamente o sistema fica instável.

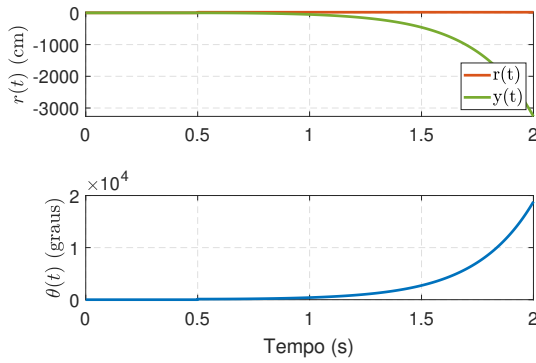


Figura 18. Simulação da resposta da planta para $k_p = 0,1$

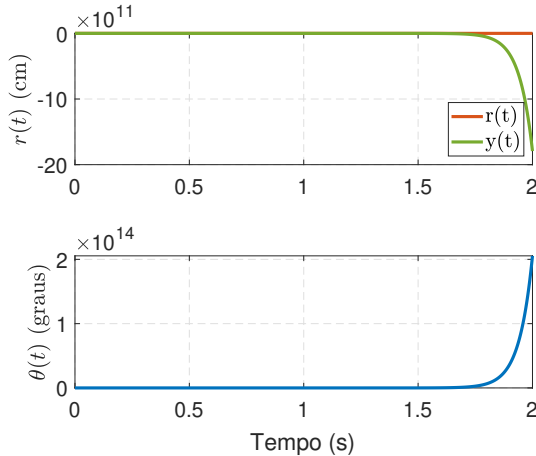


Figura 19. Simulação da resposta da planta para $k_p = 2$

Desse modo, é atestado que o sistema *ball and beam* não pode ser controlado apenas com um controlador proporcional. Necessita-se ainda de um controlador com pelo menos um zero no semiplano esquerdo do eixo real para que o sistema estabilize.

Na TAB. 7 está quantificado os valores de alguns critérios da avaliação da resposta do sistema em relação à referência dada. O sistema é instável, portanto a saída irá tender a infinito à medida que t tende a infinito. Portanto, os valores dos critérios se mostraram suficientemente grandes, sendo o seu menor valor para $k_p = 0,1$ na ordem de 10^5 e 10^{14} para $k_p = 2$. É verificado ainda que para $k_p = 2$ os critérios são todos maiores que para $k_p = 0,1$.

Tabela 7. Critérios obtidos na simulação

Critério	$k_p = 0,1$	$k_p = 2$
IAE	$8,5252 \times 10^5$	$1,0469 \times 10^{14}$
ISA	$1,4015 \times 10^9$	$9,4655 \times 10^{25}$
$\sigma_{e(t)}$	$6,0982 \times 10^8$	$5,7917 \times 10^{22}$
$\sigma_{u(t)}$	$2,0019 \times 10^7$	$7,6053 \times 10^{26}$

8.2 Controlador PID

Considere o sistema *ball and beam* descrito por $G(s)$ controlado por um controlador PID, como exposto na FIG. 20. Sob esta topologia, segue-se que a função transferência de malha fechada $H_{mf}(s)$ é dada por

$$H_{mf} = \frac{-A[s^2(k_d p + k_p) + s(k_p p + k_i) + k_i p]}{s^3(s + p) - A[s^2(k_d p + k_p) + s(k_p p + k_i) + k_i p]} \quad (38)$$

cujo denominador resulta num polinômio de quarta ordem

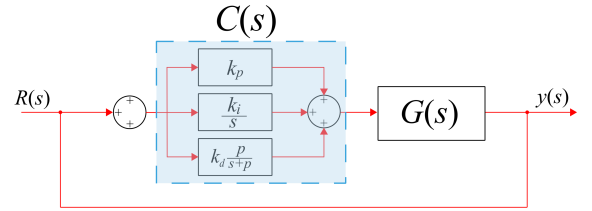
$$s^4 + s^3 p - s^2 A(k_d p + k_p) + s A(k_p p + k_i) - A k_i p \quad (39)$$


Figura 20. Topologia PID

É possível, com os recursos ensinados em análise, estimar os critérios de desempenho (*overshoot OS* e tempo de acomodação t_s) quando o denominador for de segunda ordem. Conquanto caso dois polos forem dominantes, i.e., tenha o módulo da parte real dez vezes menor, o sistema pode ser tomado como de segunda ordem.

Assim, à partir dos critérios de desempenho especificados, se $OS < 0$, ter-se-á dois polos complexos conjugados conhecidos,

$$p_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

sendo

$$\zeta = -\frac{\ln OS}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2 OS}} \quad \omega_n = \frac{4}{\zeta t_s}$$

Os demais polos podem ser admitidos como

$$p_3 = -10\zeta\omega_n \quad p_4 = -10\zeta\omega_n - 1$$

Logo, se $a = \zeta\omega_n$ e $b = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$, o denominador desejado é

$$(s + a + jb)(s + a - jb)(s + 10a)(s + 10a + 1) \quad (40)$$

Deste modo, igualando (39) com (40) terá um sistema de equações lineares resolvido por substituição, denominado por equação diofantina. O resultado, assim como os critérios adotados, está exposto na TAB. 8.

Note que em (38) existe um numerador de segunda ordem. Portanto, ter-se-á zeros de fase mínima que impedirão o sistema de alcançar o desempenho desejado. Deste modo deve ser feita uma pré-compensação G_c tal que

$$G_c(s) = \frac{|c|}{(s + c)(s + \bar{c})} \quad (41)$$

Tabela 8. Solução da equação diofantina para os critérios de desempenho estipulados

Variável	Valor
OS	20%
t_s	10 s
A	
k_p	
k_d	
k_i	
p	

em que

$$c = \frac{-(k_p p + k_i) + \sqrt{(k_d p + k_p)^2 + 4k_i p(k_d p + k_p)}}{2(k_d p + k_p)} \quad (42)$$

e \bar{c} o complemento de c .

Note que o pré-compensador independe de A constante do modelo. Ele resulta puramente do controlador projetado e, conseqüentemente, conhecido com precisão.

Isto posto, implementando no *simulink* como exposto na FIG. 21(a) no modelo e na planta são obtidas as respostas da FIG. 21(b) e 21(c).

9. CONCLUSÃO

REFERÊNCIA

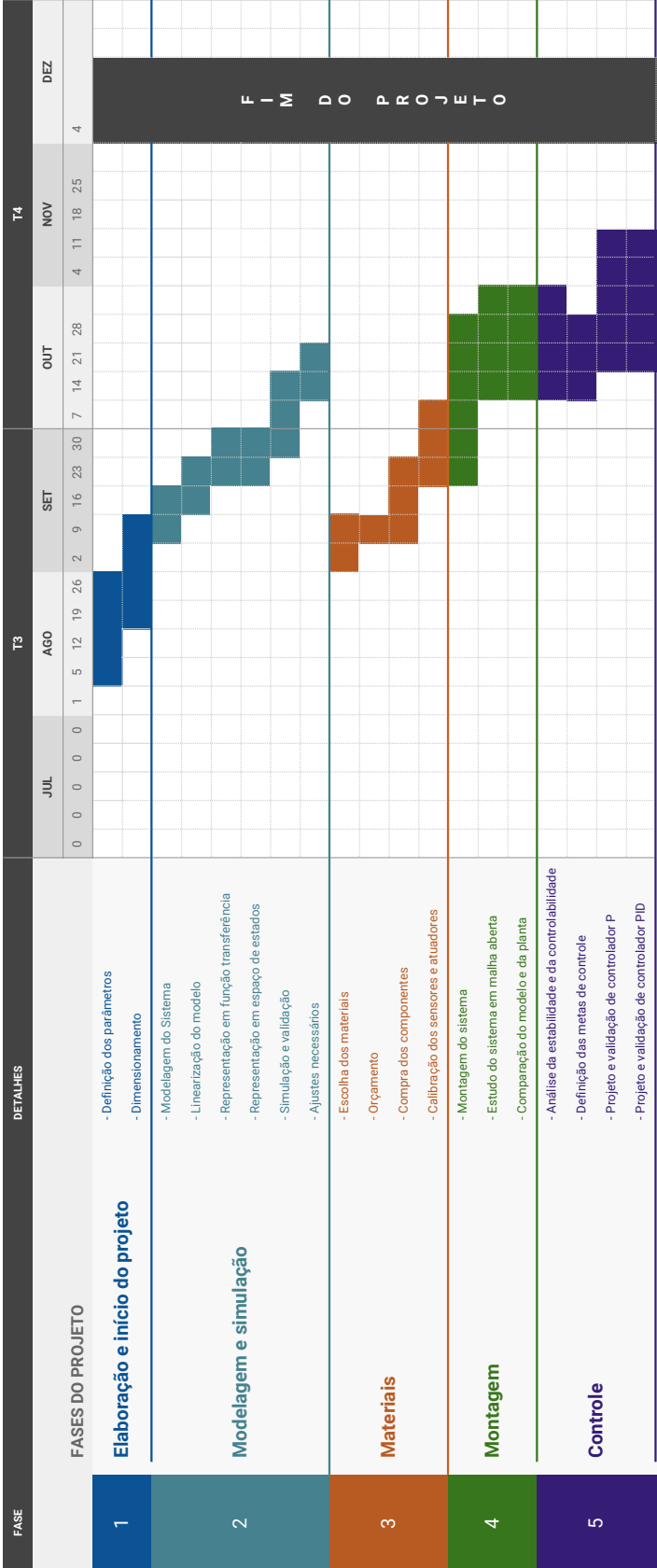
JAZAR, Reza N. Applied Mechanisms. In: _____. *Vehicle Dynamics: Theory and Application*. 2. ed. New York: Springer, 2014. cap. 6. p. 336-402.

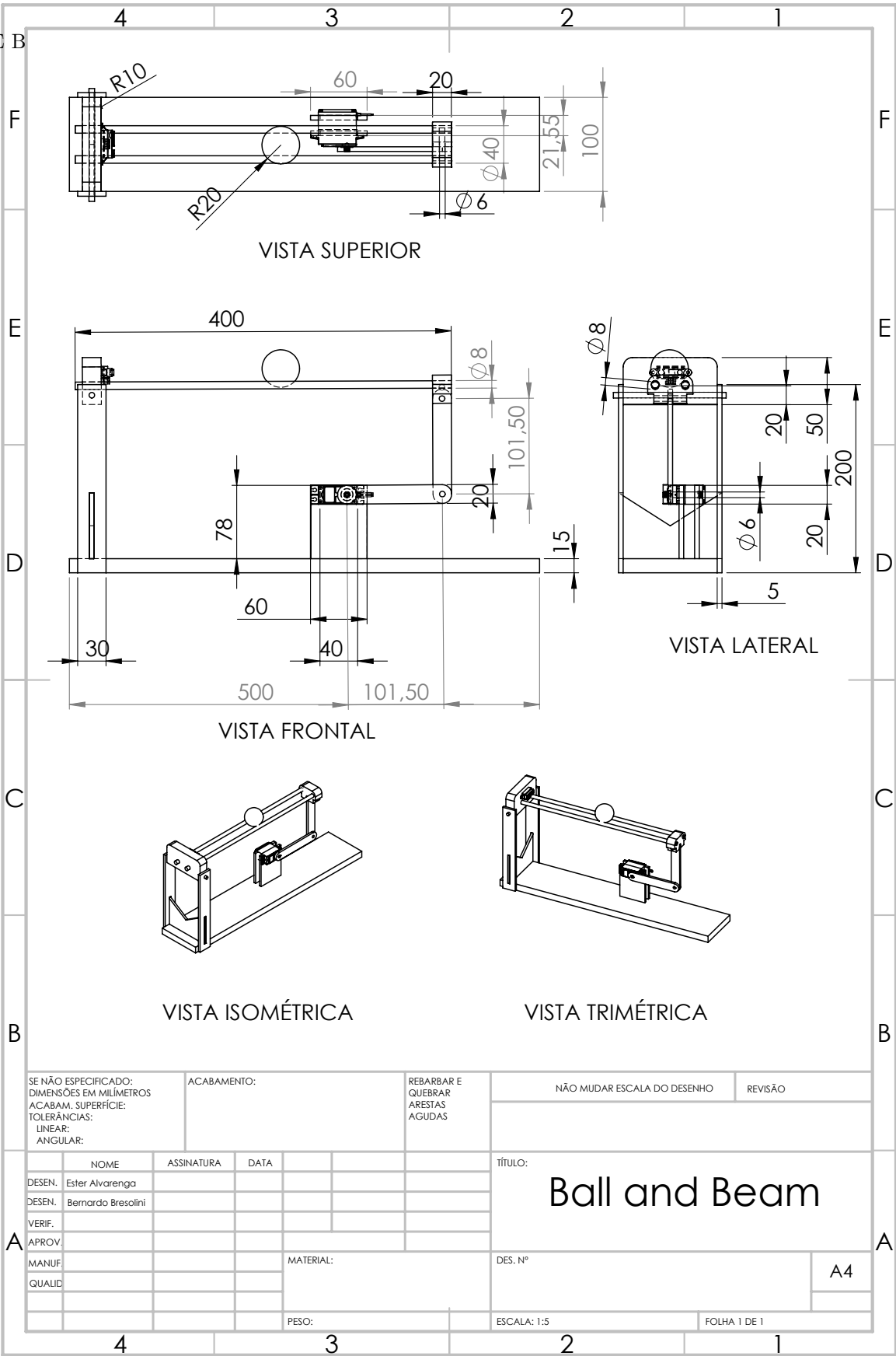
MARTÓN, Lörinc; HODEL, A. Scottedwand; LANTOS, Bella; HUNG, John Y. Underactuated Robot Control: Comparing LQR, Subspace Stabilization, and Combined Error Metric Approaches. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, v. 55, n. 10, p. 3724-3730, 2008. Disponível em: <<https://ieeexplore.ieee.org/document/4493428>>. Acesso em: 21 ago. 2019.

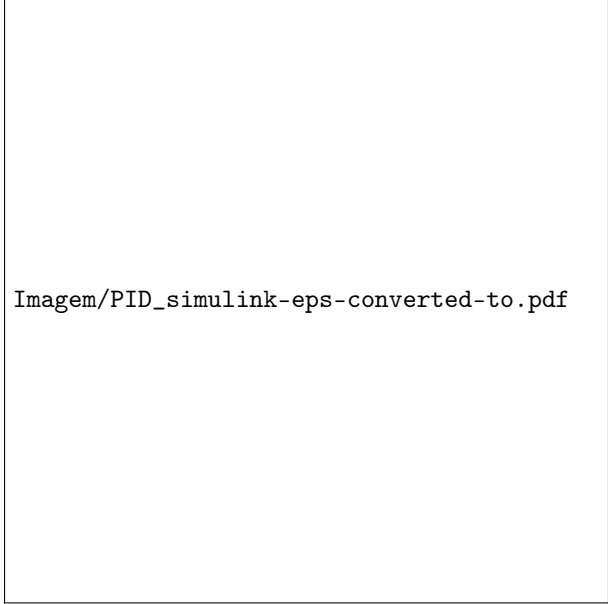
ZILL, Denis G.; SHANAHAN, Patrick D. Complex numbers and the complex plane. In: _____. *A first course in complex analysis with applications*. 1. ed. New York: Jones and Bartlett Publishers, 2003. cap. 1. p. 1-48.

CRONOGRAMA DE PROJETO

BALL AND BEAM	DISCIPLINA	LAB. ANÁLISE DE SISTEMAS LINEARES
BERNARDO BRESOLINI	DATA	04/12/19
ESTER QUEIROZ ALVARENGA		

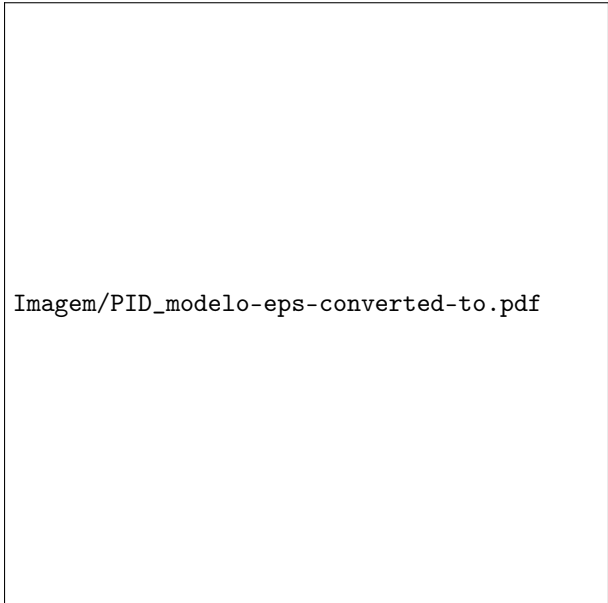







Imagem/PID_simulink-eps-converted-to.pdf

(a) Topologia implementada do controlador PID



Imagem/PID_modelo-eps-converted-to.pdf

(b) Resposta do modelo



Imagem/PID_planta-eps-converted-to.pdf

(c) Resposta da planta