Terceira Lista de Controle Moderno: Solução da Equação de Estados

Bresolini, Bernardo * **Ester Queiroz Alvarenga** *

* *Departamento de Engenharia Mecatrônica, CEFET-MG câmpus Divinópolis, MG, (e-mail: berbresolini14@gmail.com).*

1. INTRODUÇÃO

(1) Seja um sistema linear descrito por $\dot{x}(t) = \bar{A}x(t) + \bar{B}u(t)$. Calcule analiticamente a resposta à entrada nula para esse sistema sabendo que $x(0) = \begin{bmatrix} 10 & -10 & 5 & -5 \end{bmatrix}^T$, $\bar{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T$ e que a matriz $\bar{A}$ seja dada por:

(a)

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} -0{,}5 & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 \\ 0{,}0 & -0{,}5 & 0{,}0 & 0{,}0 \\ 0{,}0 & 0{,}0 & -0{,}5 & 0{,}0 \\ 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & -0{,}5 \end{bmatrix}$$

(b)

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} -1{,}0000 & 1{,}0000 & 2{,}0000 & 2{,}5000 \\ 0{,}4000 & -0{,}5000 & -1{,}6000 & -1{,}2000 \\ 0{,}1750 & 0{,}2500 & -1{,}2000 & -0{,}2750 \\ -0{,}4000 & 0{,}0000 & 1{,}6000 & 0{,}7000 \end{bmatrix}$$

(c)

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} -1{,}5000 & 0{,}0000 & 0{,}0000 & 1{,}25000 \\ 0{,}4000 & -0{,}5000 & -1{,}6000 & -1{,}2000 \\ 0{,}3000 & 0{,}5000 & -0{,}7000 & 0{,}0375 \\ -0{,}4000 & 0{,}0000 & 1{,}6000 & 0{,}7000 \end{bmatrix}$$

(2) Relacione as componentes temporais que aparecem na solução de cada caso da questão anterior com as respectivas representações das matrizes $\bar{A}$ na forma de Jordan.

(3) Seja o sistema linearizado em torno do ponto de operação $u_{op} = 30\%$ e $y_{op} = 20\,\text{psi}$ descrito por

$$\dot{\delta x}(t) = \begin{bmatrix} -2{,}068 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \delta x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \delta u(t),$$

$$\delta y(t) = \begin{bmatrix} 1 & -0{,}4 \end{bmatrix} \delta x(t).$$

Determine a evolução da saída real do sistema, $y_{\text{real}}(t)$, se o sinal de entrada do sistema real é dado por

$$u_{\text{real}}(t) = \begin{cases} 30\%, & t \le 0\,\text{s} \\ 35\%, & 0 < t \le 10\,\text{s} \\ 25\%, & 10 < t \le 20\,\text{s} \\ 30\%, & t > 20\,\text{s} \end{cases}$$

Utilizando a solução analítica obtida para $y(t)$, obtenha o instante em que a resposta do sistema atinge o valor máximo. Compare sua solução analítica com a obtida por um software de simulação, como por exemplo, o *matlab*.

(4) Considere apenas o modelo linearizado da Lista 2, questão 5.

(a) Resolva analiticamente a equação de estados supondo o sinal de controle constante e estados iniciais com uma perturbação dada por

$$\delta h(0) = \begin{bmatrix} 0{,}05 \\ -0{,}05 \end{bmatrix} [\text{m}].$$

(b) Usando o MATLAB ou outro software, determine $h_2(t)$ (nível real) se as condições iniciais são nulas e o sinal de controle real sobre uma perturbação na forma de dois pulsos retangulares (com duração suficientemente grande para que o sistema estabilize em cada caso) de amplitudes iguais a $+5\%$ e -5%. Note que esses valores correspondem, portanto, ao $\delta u(t)$.

2. RESPOSTAS

1.

A resposta a entrada nula de $\dot{x}(t) = \bar{A}x(t)$ excitada por um estado inicial x_0 diferente de 0 é dada por $x(t) = e^{At}x_0$. Em que a operação matricial $e^{\bar{A}t}$ é calculado pelo método de Cayley-Hamilton.

Seja $f(\lambda) = e^{\lambda t}$, uma exponencial escalar. Seja ainda $h(\lambda)$ um polinômio de grau 3 igual a $h(\lambda) = \beta_3\lambda^3 + \beta_2\lambda^2 + \beta_1\lambda + \beta_0$. Tais que

$$f^{(\ell)}(\lambda_i) = h^{(\ell)}(\lambda_i), \qquad i = 0, 1, 2, 3 \quad \ell = 0, 1, 2, 3.$$

sendo $f^{(\ell)}(\lambda_i)$ e $h^{(\ell)}(\lambda_i)$ a derivada ℓ-ésima [1] aplicada em λ_i. Diante disso, tem-se o seguinte sistema:

$$\begin{cases} e^{\lambda_0 t} = \beta_3\lambda_0^3 + \beta_2\lambda_0^2 + \beta_1\lambda_0 + \beta_0 \\ te^{\lambda_1 t} = 3\beta_3\lambda_1^2 + 2\beta_2\lambda_1 + \beta_1 \\ t^2e^{\lambda_2 t} = 6\beta_3\lambda_2 + 2\beta_2 \\ t^3e^{\lambda_3 t} = 6\beta_3 \end{cases}$$

se $\lambda_i = \lambda$, $i = 0, 1, 2, 3$, o sistema pode ser reescrito da forma

$$\begin{bmatrix} \lambda^3 & \lambda^2 & \lambda & 1 \\ 3\lambda^2 & 2\lambda & 1 & 0 \\ 6\lambda & 2 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_3 \\ \beta_2 \\ \beta_1 \\ \beta_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} \\ te^{\lambda t} \\ t^2e^{\lambda t} \\ t^3e^{\lambda t} \end{bmatrix}$$

um sistema triangular. Sua resolução se dá por substituições retroativas, obtendo

$$\begin{bmatrix} \beta_3 \\ \beta_2 \\ \beta_1 \\ \beta_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^3e^{\lambda t}/6 \\ -\lambda t^3e^{\lambda t}/2 + t^2e^{\lambda t}/2 \\ \lambda^2t^3e^{\lambda t}/2 - \lambda t^2e^{\lambda t} + te^{\lambda t} \\ -\lambda^3t^3e^{\lambda t}/6 + \lambda^2t^2e^{\lambda t}/2 - \lambda te^{\lambda t} + e^{\lambda t} \end{bmatrix} \tag{1}$$

[1] A derivada é aplicada quando os autovalores da matriz são iguais e na medida em que são iguais, logo, 4 vezes (de 0 até 3).

Segundo Cayley-Hamilton, $h(\lambda) = h(\bar{A})$, logo:

$$h(\bar{A}) = \beta_0(I) + \beta_1(\bar{A}) + \beta_2(\bar{A})^2 + \beta_3(\bar{A})^3 \qquad (2)$$

(a) Por meio do polinômio característico $p(\lambda) = \det(\bar{A} - \lambda I)$ é possível obter os autovalores (λ_n, $n = 0, 1, 2, 3$) da matriz $\bar{A}$

$$\begin{vmatrix} -0{,}5-\lambda & 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 \\ 0{,}0 & -0{,}5-\lambda & 0{,}0 & 0{,}0 \\ 0{,}0 & 0{,}0 & -0{,}5-\lambda & 0{,}0 \\ 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & -0{,}5-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(-0{,}5-\lambda)^4 = 0 \Rightarrow \lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -0{,}5$$

Os coeficientes $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ *e* β_3 são obtidos substituindo $\lambda = -0{,}5$ em (1) e a resposta à entrada nula do sistema para a matriz $\bar{A}$ é dada ao comutar os valores em (2):

$$h(\bar{A}) = \begin{bmatrix} e^{-t/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t/2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t/2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-t/2} \end{bmatrix}$$

(b) O polinômio característico de $\bar{A}$, $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$, é

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 2 & 2{,}5 \\ 0{,}4 & -0{,}5-\lambda & -1{,}6 & -1{,}2 \\ 0{,}175 & 0{,}25 & -1{,}2-\lambda & -0{,}275 \\ -0{,}4 & 0 & 1{,}6 & 0{,}7-\lambda \end{vmatrix}$$

que resulta em

$$p(\lambda) = \frac{\left(4\lambda^2 + 4\lambda + 1\right)^2}{16}$$

igualando a zero e resolvendo a equação, obtém-se os autovetores de $\bar{A}$. Ou seja,

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \frac{\left(4\lambda^2 + 4\lambda + 1\right)^2}{16} = 0 \\ &= \left(4\lambda^2 + 4\lambda + 1\right)^2 = 0 \end{aligned}$$

Resolvendo a equação de segundo grau dentro dos parênteses,

$$\lambda = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \times 4 \times 1}}{2 \times 4} = -\frac{4}{8} = -0{,}5$$

Destarte, os autovalores são

$$\lambda_i = -0{,}5 \qquad i = 0, 1, 2, 3.$$

De forma semelhante a questão anterior, a resposta à entrada nula $h(\bar{A})$ se dá substituindo os valores de λ e $\bar{A}$ nas equações (1) e (2):

$$h(\bar{A}) = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

(c) Igualando o polinômio característico $p(\lambda)$ de $\bar{A}$ a zero:

$$\begin{vmatrix} -1{,}50-\lambda & 0{,}00 & 0{,}00 & 1{,}25 \\ 0{,}40 & -0{,}50-\lambda & -1{,}60 & -1{,}20 \\ 0{,}30 & 0{,}50 & -0{,}70-\lambda & 0{,}0375 \\ -0{,}40 & 0{,}00 & 1{,}60 & 0{,}70-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\frac{(2\lambda+1)^4}{16} = 0$$

Resolvendo a equação dentro dos parênteses obtém-se os autovalores,

$$\lambda_i = -0{,}5 \quad i = 0{,}1{,}2{,}3.$$

Aplicando $\lambda = -0{,}5$ em (1) tem-se os valores de $\beta_0, \beta_1, \beta_2\, e\, \beta_3$ que ao serem substituídos em (2) juntamente com $\bar{A}$ gera,

$$h(\bar{A}) = \Big[\, e^{-t/2}(t-2)^2/4 \;\; 0.167t^3e^{-t/2} \;\; t^2e^{-t/2} \;\; 0.0417te^{-t/2}(4t^2+3$$

a resposta à entrada nula para este sistema.

2.

3.

O sistema proposto é um sistema em espaço de estados da forma

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}} &= \boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{Bu} \\ \boldsymbol{y} &= \boldsymbol{Cx} + \boldsymbol{Du} \end{aligned}$$

em que

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -2{,}068 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \; \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{C} = [\, 1 \;\; -0{,}5 \,], \; \boldsymbol{D} = [\, 0 \,]$$

Linearizado em torno dos pontos de operação $u_{\text{op}} = 30\%$ e $y_{\text{op}} = 20$ psi. Sendo assim, está associado ao sistema tais valores, tornando-se necessário o reajuste mostrado na FIG. 1.

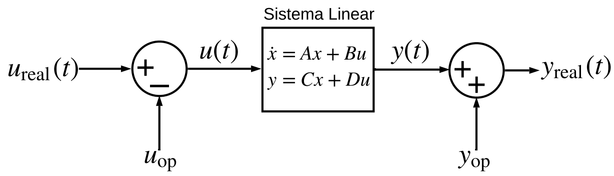

Figura 1. Sistema Linear da Questão 3.

Observa-se que $u(t)$ e $y(t)$ se relaciona com tais valores pelas equações

$$u_{\text{real}}(t) = u(t) + u_{\text{op}} \qquad y_{\text{real}}(t) = y(t) + y_{\text{op}} \qquad (3)$$

A função degrau $\mu_a(t)$ é definida como

$$\mu_a(t) = \begin{cases} 0, & t < a \\ 1, & t \leq a \end{cases}$$

Com isso, o sinal de controle dado por ser reescrito matematicamente como

$$u(t) = 30 + 5\mu_0(t) - 10\mu_{10}(t) + 5\mu_{20}(t) \qquad (4)$$

cuja resposta pode ser vista na FIG. 2.

A operação $e^{\boldsymbol{A}t}$, sendo $\boldsymbol{A}$ uma matriz $n \times n$, é definida como

$$e^{\boldsymbol{A}t} = \sum_{\text{k}=0}^{\infty} \frac{\boldsymbol{A}^k t^k}{k!} \qquad t \neq 0 \qquad (5)$$

e, em especial, se $t = 0$, $e^{\boldsymbol{0}} = \boldsymbol{I}$. Ainda, particularmente, se $t = 1$, segue-se

$$e^{\boldsymbol{A}} = \sum_{\text{k}=0}^{\infty} \frac{\boldsymbol{A}^k}{k!} \qquad (6)$$

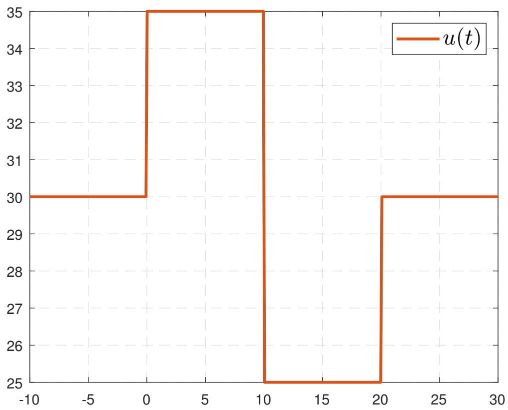

Figura 2. Sinal de Controle $u(t)$ da 3.

Caso se multiplique ambos os lados por $\boldsymbol{A}^{-1}$, vê-se

$$\boldsymbol{A}^{-1}e^{\boldsymbol{A}t} = \boldsymbol{A}^{-1}\sum_{\mathrm{k}=0}^{\infty}\frac{\boldsymbol{A}^k}{k!} = \sum_{\mathrm{k}=0}^{\infty}\frac{\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}^k}{k!}$$

Da propriedade de matriz $\boldsymbol{A}$, vê-se

$$\boldsymbol{A}^s\boldsymbol{A}^r = \boldsymbol{A}^{s+r}$$

Logo,

$$\boldsymbol{A}^{-1}e^{\boldsymbol{A}t} = \sum_{\mathrm{k}=0}^{\infty}\frac{\boldsymbol{A}^{k-1}}{k!} = \sum_{\mathrm{k}=0}^{\infty}\frac{\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{A}^{-1}}{k!} = \sum_{\mathrm{k}=0}^{\infty}\frac{\boldsymbol{A}^k}{k!}\boldsymbol{A}^{-1}$$

Contudo, como $\boldsymbol{A}^{-1}$ é constante, logo,

$$\boldsymbol{A}^{-1}e^{\boldsymbol{A}t} = \left(\sum_{\mathrm{k}=0}^{\infty}\frac{\boldsymbol{A}^k}{k!}\right)\boldsymbol{A}^{-1}$$

A parte entre parenteses é, por definição, igual a $e^{\boldsymbol{A}t}$, ou seja,

$$\boldsymbol{A}^{-1}e^{\boldsymbol{A}t} = e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{A}^{-1} \tag{7}$$

Ademais, utilizar-se-á da propriedade de $\int e^{\boldsymbol{A}t} = \boldsymbol{A}^{-1}e^{\boldsymbol{A}t}$, demonstrada a seguir.

Seja $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$, tal que $\boldsymbol{f}(t) = e^{\boldsymbol{A}t}$, sendo $\boldsymbol{A}$ uma matriz não singular $n \times n$, então

$$\frac{d\boldsymbol{f}}{dt} = \frac{d}{dt}e^{\boldsymbol{A}t} = \boldsymbol{A}e^{\boldsymbol{A}t} = e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{A}$$

Sendo assim, a primitiva de $\boldsymbol{A}e^{\boldsymbol{A}t}$ será

$$\int \boldsymbol{A}e^{\boldsymbol{A}t}\,dt = \boldsymbol{A}\int e^{\boldsymbol{A}t}\,dt = e^{\boldsymbol{A}t} + \boldsymbol{C} \tag{8}$$

Destarte, percebe-se que

$$\int e^{\boldsymbol{A}t} = \boldsymbol{A}^{-1}e^{\boldsymbol{A}t}$$

pois, somente assim, é verdadeiro as igualdades em (8).

A resposta de um sistema pode ser calculado fazendo,

$$\begin{aligned} y(t) &= \boldsymbol{C}e^{\boldsymbol{A}t}x(0) + \boldsymbol{C}\int_0^t e^{\boldsymbol{A}(t-\tau)}\boldsymbol{B}u(\tau)\,d\tau + \boldsymbol{D}u(t) \\ &= \boldsymbol{C}e^{\boldsymbol{A}t}x(0) + \boldsymbol{C}e^{\boldsymbol{A}t}\int_0^t e^{-\boldsymbol{A}\tau}\boldsymbol{B}u(\tau)\,d\tau \end{aligned}$$

Sabe-se que $\boldsymbol{B}$ é constante e o vetor $u(\tau) = u_{\text{real}}(\tau) - u_{\text{op}}$ é constante nos intervalos dados, exceto nos instantes 0 s, 10 s e 20 s. Diante disso, a integral de 0 a t pode ser feita por partes — já que uma quantidade finita de pontos não afeta seu cálculo. Contudo, fazer-se-á cada caso de maneira separada, mas resguardando o valor de $x(0)$ do caso anterior. Assim, segue-se

$$y(t) = \boldsymbol{C}e^{\boldsymbol{A}t}x(0) + \boldsymbol{C}e^{\boldsymbol{A}t}\big(-\boldsymbol{A}\big)^{-1}e^{-\boldsymbol{A}\tau}\boldsymbol{B}u(\tau)\Big|_{\tau=0}^{\tau=t}$$

lembrando que $e^{\boldsymbol{0}} = \boldsymbol{I}$ por definição

$$\begin{aligned} y(t) = \boldsymbol{C}e^{\boldsymbol{A}t}x(0) - \boldsymbol{C}e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{A}^{-1}e^{-\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{B}u(t) \\ + \boldsymbol{C}e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}u(0) \end{aligned}$$

Aplicando a propriedade (7), segue-se

$$\boldsymbol{C}e^{\boldsymbol{A}t}x(0) - \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}u(t) + \boldsymbol{C}e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}u(0)$$

Isolando $\boldsymbol{C}e^{\boldsymbol{A}t}$

$$y(t) = \boldsymbol{C}e^{\boldsymbol{A}t}\Big(x(0) + \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}u(0)\Big) - \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}u(t)$$

Haja vista que se está resolvendo por partes, tal que $u(t)$ é constante; deste modo $u(0) = u(t)$, então

$$y(t) = \boldsymbol{C}e^{\boldsymbol{A}t}\Big(x(0) + \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}u(t)\Big) - \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}u(t) \tag{9}$$

Computando[2] $\boldsymbol{C}e^{\boldsymbol{A}t}$, para $\boldsymbol{A}$ uma matriz $n \times n$ e $\boldsymbol{C}$ a matriz dada, obtém-se[3]

$$\begin{bmatrix} \frac{\lambda_1 e^{\lambda_2 t} - \lambda_2 e^{\lambda_1 t}}{\lambda_1 - \lambda_2} - \frac{717\left(e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}\right)}{250(\lambda_1 - \lambda_2)} \\ -\frac{2\left(\lambda_1 e^{\lambda_2 t} - \lambda_2 e^{\lambda_1 t}\right)}{5(\lambda_1 - \lambda_2)} - \frac{2\left(e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}\right)}{\lambda_1 - \lambda_2} \end{bmatrix}^T$$

cujos termos λ_1 e λ_2 são os autovalores de $\boldsymbol{A}$.

Então, como se pede a saída real, deve-se ajustar os valores de y_{op}, somando-o. Matematicamente,

$$y_{\text{real}} = y(t) + y_{\text{op}} \tag{10}$$

Como a multiplicação matricial $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}u(t)$ aparecerá frequentemente, pode-se simplificá-la pelo seu respectivo valor,

$$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}u(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ -0{,}5 \end{bmatrix} u(t)$$

Multiplicando por $\boldsymbol{C}$, acha-se

$$\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}u(t) = 0{,}2u(t)$$

2.1 Em $-\infty < t \leq 0$ s

O sinal de controle real neste intervalo é $u_{\text{real}}(t) = 30\%$, o valor de linearização, logo, $u(t) = 0\%$ e $y(t) = 0$ o que implica que $y_{\text{real}}(t) = 20$ psi. Além do mais, em $t = 0$ s, vê-se que $x(0) = \big[0, 0\big]^T$.

2.2 Em $0 < t < 10$ s

O sinal de controle real neste intervalo é $u_{\text{real}}(t) = 35\%$, logo, $u(t) = 5\%$, $x(0) = \big[0, 0\big]^T$. Então, a partir de (9) e das simplificações possíveis, tem-se

$$y(t) = \boldsymbol{C}e^{\boldsymbol{A}t}\begin{bmatrix} 0 \\ -0{,}5u(t) \end{bmatrix} - 0{,}2u(t)$$

---

[2] O cálculo pode ser feito como mostrado na questão 1, embora tenha sido usado a função `expm` do MATLAB®.
[3] A matriz foi transposta apenas para caber na coluna.

Se $u(t) = 5$, vê-se que

$$y(t) = \boldsymbol{C}e^{\boldsymbol{A}t}\begin{bmatrix} 0 \\ -2{,}5 \end{bmatrix} - 1$$

Logo,

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{\lambda_1 e^{\lambda_2 t} - \lambda_2 e^{\lambda_1 t}}{\lambda_1 - \lambda_2} + \frac{5\left(e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}\right)}{\lambda_1 - \lambda_2} - 1 \\ &= \frac{\lambda_1 e^{\lambda_2 t} - \lambda_2 e^{\lambda_1 t} + 5\left(e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}\right)}{\lambda_1 - \lambda_2} - 1 \\ &= \frac{e^{\lambda_1 t}(5 - \lambda_2) - e^{\lambda_2 t}(5 - \lambda_1)}{\lambda_1 - \lambda_2} - 1 \end{aligned}$$

Se λ_1 é o conjugado de λ_2, segue-se que

$$\mathrm{Re}\left(e^{\lambda_1 t}\right) = \mathrm{Re}\left(e^{\lambda_2 t}\right), \qquad \mathrm{Imag}\left(e^{\lambda_1 t}\right) = -\mathrm{Imag}\left(e^{\lambda_2 t}\right)$$

Sejam a, b, α, $\beta \in \mathbb{R}$ e $b \neq 0$, tais que,

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\,\lambda_1 &= a, &\quad \mathrm{Imag}\,\lambda_1 &= b \\ \mathrm{Re}\left(e^{\lambda_1 t}\right) &= \alpha, &\quad \mathrm{Imag}\left(e^{\lambda_1 t}\right) &= \beta \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{(\alpha + i\beta)(5 - a + bi) - (\alpha - i\beta)(5 - a - bi)}{2bi} - 1 \\ &= \frac{\alpha b + \beta(5 - a)}{b} - 1 \end{aligned}$$

Os autovalores λ_1 e λ_2 de $\boldsymbol{A}$ são

$$\lambda_1 = \frac{-517 + i\sqrt{732711}}{500}, \qquad \lambda_2 = \frac{-517 - i\sqrt{732711}}{500}$$

Desenvolvendo $e^{\lambda_1 t}$, encontra-se

$$\begin{aligned} e^{\lambda_1 t} &= e^{-517t/500} e^{i\sqrt{732711}\,t/500} \\ &= e^{-517t/500}\left[\cos(\sqrt{732711}\,t/500) + i\,\mathrm{sen}(\sqrt{732711}\,t/500)\right] \end{aligned}$$

Decorre da Identidade de Euler, $e^{xi} = \cos x + i\,\mathrm{sen}\,x$, a exponencial de $\lambda_1 t$ é determinado por uma parte real e outra imaginária.

Sejam a, b, α, β, tais que

$$\begin{aligned} a &= -\frac{517}{500} \\ b &= \frac{\sqrt{732711}}{500} \\ \alpha &= e^{-517t/500}\cos(\sqrt{732711}\,t/500) \\ \beta &= e^{-517t/500}\,\mathrm{sen}(\sqrt{732711}\,t/500) \end{aligned}$$

A saída real é calculada fazendo

$$y_{\text{real}}(t) = \frac{\alpha b + \beta(5 - a)}{b} + 19$$

que apresenta o formato de onda mostrado na FIG. 3.

Seus estados em t são encontrados por meio da equação

$$x(t) = e^{\boldsymbol{A}t}x(0) + \boldsymbol{B}u(t)$$

fazendo $t = 10$ s e, já que $x(0) = \boldsymbol{0}$, basta calcular $\boldsymbol{B}u(10)$, obtendo:

$$x(10) = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2.3 Em $10 < t \leq 20$

Procedendo como no intervalo anterior e, tendo-se $u_{\text{real}}(t) = 25\%$, vê-se que $u(t) = -5\%$ e,

$$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}u(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2{,}5 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}u(t) = -1$$

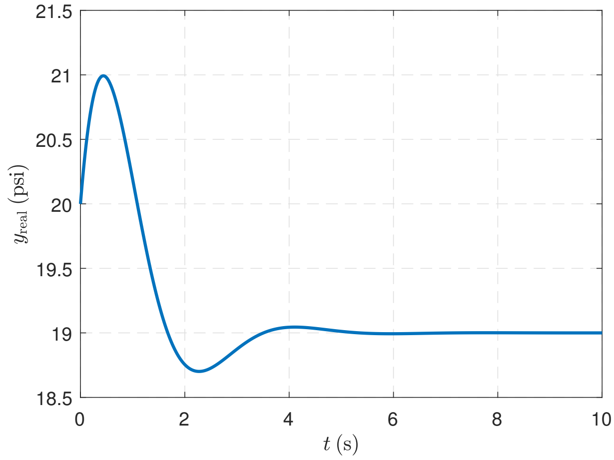

Figura 3. Resposta de 0 s a 10 s calculada

com seu estado inicial igual a

$$x(10) = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Com base nisto, tem-se de (9) que

$$y(t) = \boldsymbol{C}e^{\boldsymbol{A}t}\begin{bmatrix} 5 \\ 2{,}5 \end{bmatrix} + 1$$

computando a multiplicação matricial,

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{200(\lambda_1 e^{\lambda_2 t} - \lambda_2 e^{\lambda_1 t}) - 967(e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t})}{50(\lambda_1 - \lambda_2)} \\ &= \frac{e^{\lambda_2 t}(200\lambda_1 + 967) - e^{\lambda_1 t}(200\lambda_2 + 967)}{50(\lambda_1 - \lambda_2)} \end{aligned}$$

Sejam a, b, α, $\beta \in \mathbb{R}$ e $b \neq 0$, tais que,

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\,\lambda_1 &= a, &\quad \mathrm{Imag}\,\lambda_1 &= b \\ \mathrm{Re}\left(e^{\lambda_1 t}\right) &= \alpha, &\quad \mathrm{Imag}\left(e^{\lambda_1 t}\right) &= \beta \end{aligned}$$

Assim,

$$y(t) = \frac{200\alpha b - \beta(200a + 967)}{50b} + 1$$

em que os autovalores λ_1 e λ_2 de $\boldsymbol{A}$ são

$$\lambda_1 = \frac{-517 + i\sqrt{732711}}{500}, \qquad \lambda_2 = \frac{-517 - i\sqrt{732711}}{500}$$

Desenvolvendo $e^{\lambda_1 t}$, encontra-se

$$\begin{aligned} e^{\lambda_1 t} &= e^{-517t/500} e^{i\sqrt{732711}\,t/500} \\ &= e^{-517t/500}\left[\cos(\sqrt{732711}\,t/500) + i\,\mathrm{sen}(\sqrt{732711}\,t/500)\right] \end{aligned}$$

Decorre da Identidade de Euler, $e^{xi} = \cos x + i\,\mathrm{sen}\,x$, a exponencial de $\lambda_1 t$ é determinado por uma parte real e outra imaginária.

Sejam a, b, α, β, tais que

$$\begin{aligned} a &= -\frac{517}{500} \\ b &= \frac{\sqrt{732711}}{500} \\ \alpha &= e^{-517t/500}\cos(\sqrt{732711}\,t/500) \\ \beta &= e^{-517t/500}\,\mathrm{sen}(\sqrt{732711}\,t/500) \end{aligned}$$

A saída real é calculada fazendo

$$y_{\text{real}}(t) = \frac{\alpha b + \beta(5 - a)}{b} + 19$$

que apresenta o formato de onda mostrado na FIG. 3.

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%    Matrizes e condicoes dadas     %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

A = [-2.068, -2; 2, 0];
B = [1; 0];
C = [1, -0.4];
D = 0;
uop = 30;
yop = 20;
autov = eig(A);

ur  = 35;
x0 = [0;0];

tt = 0:0.001:10;
u = ur - uop;

a = real(autov(1));
b = imag(autov(1));

alf = exp(a*t)*cos(b*t);
bet = exp(a*t)*sin(b*t);

y = func(a,b,alf,bet);
y = double(subs(y,t,tt));

p = plot(tt,y);

function y = func(a,b,alf,bet)
    y = (alf*b + bet*(5-a))/b + 19;
end
```

4.

A equação de estados é da forma,

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t).$$

Sendo a matriz A do modelo linear analisado,

$$A = \begin{bmatrix} -63{,}4078 & 63{,}4078 \\ 21{,}3049 & -24{,}4379 \end{bmatrix},$$

o sinal de controle, $u(t) = 100\%, \quad t \geq 0$, e os estados iniciais,

$$\delta h(0) = \begin{bmatrix} 0{,}05 \\ -0{,}05 \end{bmatrix} [\mathrm{m}].$$