

Atividade Teoria de Controle — Abordagem Polinomial

Bernardo Bresolini *, Ester Q. Alvarenga *

* Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais,
Divinópolis - MG.

1. INTRODUÇÃO

A maneira com a qual escolhe-se o sistema de controle — interconexão de componentes, formando uma configuração de sistema para produzir uma resposta desejada ao mesmo (DORF, 2010) — pode ser definida como topologia de controle. O estudo desta metodologia é indispensável ao se fazer o projeto de um sistema que deve ser controlável, para que se possa avaliar as capacidades, limitações e os pressupostos de cada uma de acordo com sua aplicação. Visando uma melhor compreensão das diferentes topologias de controle e da utilização das técnicas de projeto de controladores, a atividade da disciplina de Teoria de Controle baseou-se no estudo das técnicas para projeto de controladores.

Para este estudo, faz-se necessário selecionar o processo a ser controlado; obter o modelo do processo; especificar o desempenho desejado; aplicar a técnica de projeto de controlador; verificar os resultados alcançados; analisar a malha fechada e por fim, realizar o controlador.

Sendo assim, o presente trabalho ocupa-se em descrever e detalhar a realização desse processo para a técnica de projeto de controladores baseada em representação polinomial.

2. REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 Projeto via abordagem Polinomial

Em síntese, a abordagem polinomial consiste em partir de critérios de desempenho para um sistema, encontrar o denominador que cumprirá as especificações. Então, igualar este denominador com o do sistema controlado e encontrar os parâmetros do controlador. Por fim, serão gerados zeros no sistema que podem vir a afetar o desempenho do processo, sendo feita, portanto, uma pré-compensação desses zeros de fase mínima. A FIG. 1 mostra as etapas da abordagem polinomial e as próximas subseções tratará do método de forma mais detalhada.

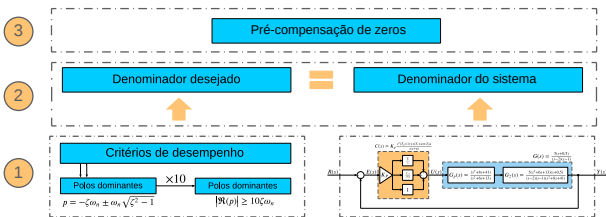


Figura 1. Esquemático da abordagem polinomial

Descrição Considera-se um sistema, cuja função de transferência $G(s)$ e controlador $C(s)$ são descritos por

$$G(s) = \frac{B(s)}{A(s)}, \quad C(s) = \frac{\beta(s)}{\alpha(s)}. \quad (1)$$

para o qual tem-se a intenção de torná-lo estável em malha fechada. Se $G(s)$ é conhecido, é preciso então, projetar o controlador $C(s)$ de forma que este assegure a estabilidade da malha fechada.

Para o caso em que o controlador é posicionado em série com a função de transferência do processo, a malha fechada se dá por

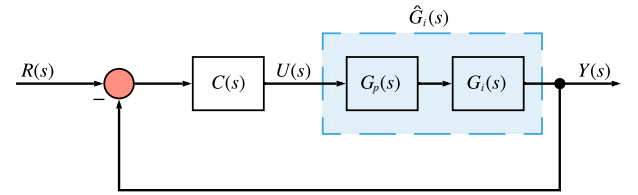
$$G_{MF}(s) = \frac{\beta(s)B(s)}{\alpha(s)A(s) + \beta(s)B(s)} \quad (\text{Série}) \quad (2a)$$

em que $\alpha(s)$ e $\beta(s)$ precisam ser determinados.

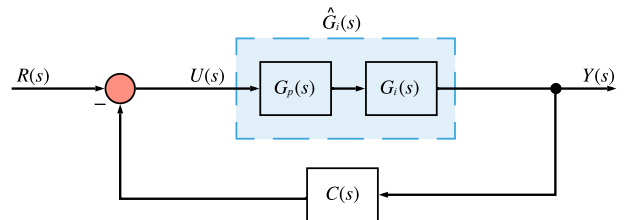
Note que, se o controlador é colocado na realimentação, a malha fechada é descrita por,

$$G_{MF} = \frac{\alpha(s)B(s)}{\alpha(s)A(s) + \beta(s)B(s)} \quad (\text{Realimentação}) \quad (2b)$$

As FIG. 2(a) e 2(b), mostram como é feita as topologias mencionadas acima.



(a) Controlador no ramo direto



(b) Controlador na realimentação

Figura 2. Topologias adotadas

Identidade Diofântia A dinâmica da malha fechada é especificada pelo polinômio $D(s)$, obtido a partir do denominador de (2a) ou (2b),

$$D(s) = \alpha(s)A(s) + \beta(s)B(s) \quad (3)$$

ou seja, o denominador desejável, $D(s)$, também chamado de identidade Diofantina, permanece o mesmo.

Resolução da equação Diofantina Considerando os polinômios $A(s)$ e $B(s)$ dados por,

$$A(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n \quad (4a)$$

$$B(s) = b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \dots + b_{n-1} s + b_n \quad (4b)$$

em que $A(s)$ é mônico e $A(s)$ e $B(s)$ são polinômios coprimos.

$D(s)$ será um polinômio estável de grau $\delta(D(s)) = (2n-1)$:

$$D(s) = d_0 s^{2n-1} + d_1 s^{2n-2} + \dots + d_{2n-2} s + d_{2n-1} \quad (5)$$

Assim, a identidade Diofantina (3) admite solução única com $\alpha(s)$ e $\beta(s)$, polinômios de grau $(n-1)$ tal que,

$$\alpha(s) = \alpha_0 s^{n-1} + \alpha_1 s^{n-2} + \dots + \alpha_{n-2} s + \alpha_{n-1} \quad (6a)$$

$$\beta(s) = \beta_0 s^{n-1} + \beta_1 s^{n-2} + \dots + \beta_{n-2} s + \beta_{n-1} \quad (6b)$$

Sejam a matriz de Sylvester E com dimensões $2n \times 2n$, o vetor M com os coeficientes do controlador e D o vetor contendo os coeficientes do denominador desejado, dados por

$$E = \begin{bmatrix} a_n & 0 & \dots & 0 & b_n & 0 & \dots & 0 \\ a_{n-1} & a_n & \dots & 0 & b_{n-1} & b_n & \dots & 0 \\ \vdots & a_{n-1} & \dots & 0 & \vdots & b_{n-1} & \dots & 0 \\ a_1 & \vdots & \ddots & \vdots & b_1 & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_1 & \dots & a_{n-1} & b_0 & b_1 & \dots & b_{n-1} \\ 0 & 1 & \dots & a_{n-2} & 0 & b_0 & \dots & b_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & a_1 & 0 & 0 & \dots & b_1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & b_0 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} \alpha_{n-1} \\ \alpha_{n-2} \\ \vdots \\ \alpha_0 \\ \beta_{n-1} \\ \beta_{n-2} \\ \vdots \\ \beta_0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} d_{2n-1} \\ d_{2n-2} \\ \vdots \\ d_1 \\ d_0 \end{bmatrix}$$

Assim, tem-se a solução dada por

$$M = E^{-1} D \quad (7)$$

Os coeficientes da matriz D são obtidos a partir da determinação dos polos dominantes do sistema em malha fechada. Estes, por sua vez, são escolhidos conforme os critérios de especificação, sobressinal $OS\%$ e tempo de acomodação t_s , de acordo com as equações

$$\zeta = -\frac{\ln OS}{\sqrt{\ln^2 OS + \pi^2}} \quad (8a)$$

$$\omega_n = \frac{a}{\zeta t_s} \quad (8b)$$

sendo a uma constante encontrada, no eixo y , pelo gráfico exposto na FIG. 3 em função do ζ encontrado em (8a).

Por fim, os polos dominantes devem ser

$$p = -\zeta \omega_n \pm j \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (9)$$

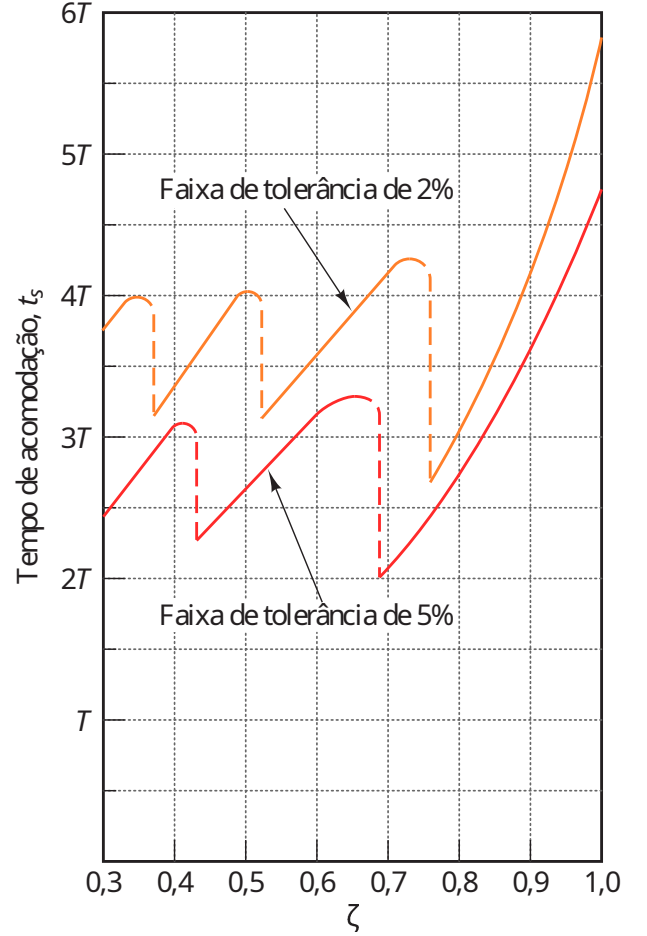


Figura 3. Tempo de acomodação em função de ζ e a constante de tempo $T = \zeta \omega_n$

Fonte: OGATA, 2010, p. 158. (Adaptação de cores).

Caso o polinômio $D(s)$ seja de ordem superior a dois, determina-se os demais polos com a parte real no mínimo 10 vezes menor que a parte real dos polos dominantes, para que estes não interfiram na dinâmica projetada do sistema. Eles ainda podem ser atribuídos de forma a cancelar com algum zero de $G(s)$.

2.2 Análise Freqüencial

Processos industriais muitas vezes estão sujeitos a ruídos, perturbações e distúrbios. Sendo assim, após fazer um projeto de controlador, é necessário investigar como estes fenômenos afetarão o sistema. Para tanto, utiliza-se do diagrama de Bode para analisar o ganho em baixas frequências k_{LF} , a frequência de ressonância ω_p e a faixa de passagem ω_{BW} para três circunstâncias:

1. referência $R(s)$ para saída $Y(s)$;
2. entrada de distúrbio $\delta(s)$ para a saída $Y(s)$;
3. ruído $\eta(s)$ na saída para a saída $Y(s)$.

A FIG. 4 mostra um diagrama de Bode de um sistema de segunda ordem. Nela está marcado a frequência de ressonância ω_p , na qual ocorre o maior ganho do sistema. Ainda é marcado a faixa de passagem ω_{BW} , frequência na qual a magnitude é -3 dB.

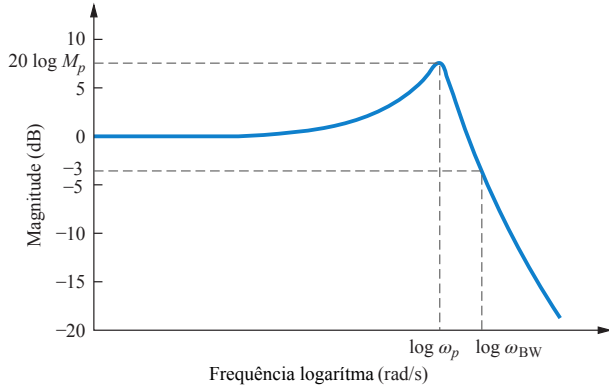


Figura 4. Faixa de passagem e frequência de ressonância
Fonte: NISE, 2015, p. 571. (Adaptação de cores).

Uma excitação na frequência de ressonância causará um maior efeito no sistema, visto que o ganho é o maior. Portanto, ela deve ser conhecida para se evitar com que os ruídos estejam nessa fase. A faixa de passagem mostrará até que frequência o sistema pode ser excitado e reagir com ganhos significativos. Para valores acima dela, o sistema quase não reage. Então, é preferível que o ruído esteja após ela.

Referência e saída Para analisar a relação da referência e da saída, é necessário conhecer a equação de malha fechada do sistema.

Sinal de controle e saída Os distúrbios no sinal de controle podem ser analisados à partir da função transferência entre o distúrbio na saída do controlador e a saída do sistema. Deste modo, segue

$$\left. \frac{Y(s)}{\delta(s)} \right|_{\text{série}} = \frac{G}{1 + CG}, \quad \left. \frac{Y(s)}{\delta(s)} \right|_{\text{paralelo}} = \frac{-G}{1 + CG}. \quad (10)$$

Ruído na saída e saída do sistema O ruído na saída $\eta(s)$ do sistema pode ser investigado fazendo o diagrama de Bode da função transferência entre o ele e a própria saída. Isto é,

$$\left. \frac{Y(s)}{\eta(s)} \right| = \frac{-CG}{1 + CG}, \quad (11)$$

válida para ambos os casos.

3. PROBLEMA

Os sistemas a serem estudados e testados com a técnica de projeto baseada na abordagem de representação polinomial, bem como sua especificação de desempenho, são apresentados nas subseções seguintes.

3.1 Processos

Os quatro processos a serem controlados são representados em função transferência com características mistas, compreendendo uma gama abrangente das possibilidades para sistemas SISO invariante no tempo e sem atraso. As funções de transferência dos processos são

$$G_1(s) = \frac{5(s + 0,5)}{s(s + 2)}, \quad (12a)$$

$$G_2(s) = \frac{5(s^2 + 6s + 13)(s + 0,5)}{(s - 2)(s - 1)(s^2 + 8s + 41)}, \quad (12b)$$

$$G_3(s) = \frac{5(s - 5)}{(s - 2)(s + 2)}, \quad (12c)$$

$$G_4(s) = \frac{5(s - 5)}{s^2(s - 2)} \quad (12d)$$

Como se observa, existem processos com integrador único ou duplo; zeros de fase mínima ou não mínima; polos estáveis e/ou instáveis.

3.2 Especificação

Todos os sistemas devem ter erro nulo para sinais de referência constantes por partes. Eles também devem atender aos critérios de desempenho da TAB. 1.

Tabela 1. Critérios de desempenho de cada processo estudado

Caso	t_s	t_r	OS%	t_p
1	1 s	< possível	10%	—
2	1 s	qualquer	0%	—
3	1 s	< possível	—	—
4	< 0,8 s	sem restrições	< 15%	< 1 s

Contudo, para um sistema não haver *overshoot*, sua parte imaginária deve ser nula e o sistema pode ser criticamente amortecido ou superamortecido. Entretanto, o **projeto do caso 2 será feito admitindo um sobressinal de 0,1%**, pois é mais bem conhecido, pelos autores, o comportamento de sistemas com par de polos complexos conjugados como os polos dominantes do sistema.

Ainda, o tempo de pico t_p , segundo o NISE (p. 175), é calculado por

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (13)$$

Comparando com a equação (9), verifica-se que t_p está relacionado estritamente com o inverso da parte imaginária dos polos.

O tempo de subida t_r , definido como o tempo para o sistema ir de 10% a 90% do valor final, é encontrado conforme a curva apresentada na FIG. 5. A curva é aproximada pelo polinômio

$$\omega_n t_r = 1,76\zeta^3 - 0,417\zeta^2 + 1,039\zeta + 1 \quad (14)$$

cujo erro máximo é de 0,5% para $0 < \zeta < 0,9$.

Note que o tempo de subida normalizado cresce à medida que ζ aumenta. Logo, para diminuí-lo, é necessário aumentar o percentual de *overshoot*. Contudo, de (8b), sabe-se que quando ζ diminui, ω_n cresce. Logo, é necessário um certo equilíbrio e algumas tentativas para encontrar um valor menor para t_r .

4. SOLUÇÃO

O uso do método polinomial é afetado pela ordem do processo dado. Para um processo de ordem n , ter-se-á que

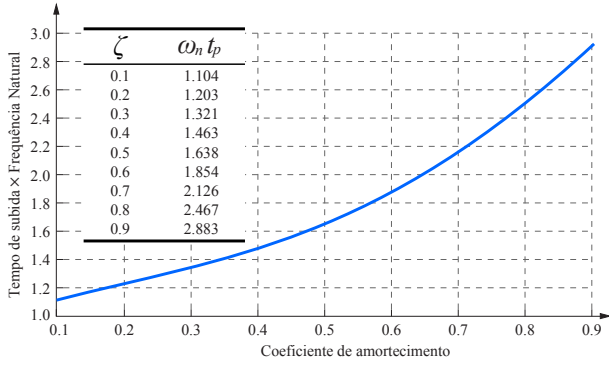


Figura 5. $\omega_n t_p \times \zeta$ para a resposta de um sistema de segunda ordem subamortecido

Fonte: NISE, 2015, p. 177. (Adaptação de cores e adição do grid).

inverter uma matriz (a matriz de Sylvester) de ordem $2n$ e operar com um controlador $C(s)$ de ordem $n - 1$.

Portanto, foi feita uma pré-compensação $G_p(s)$ em $G_2(s)$, a fim de simplificar a aplicação do método. Deste modo, anulou-se o efeito dos zeros em $(s^2 + 6s + 13)$ e o efeito dos polos em $(s^2 + 8s + 41)$, fazendo

$$G_p(s) = \frac{13s^2 + 8s + 41}{41s^2 + 6s + 13} \quad (15)$$

resultando na função de transferência compensada $\hat{G}(s)$

$$\hat{G}(s) = G_p(s)G_2(s) = \frac{65}{41} \frac{s + 0,5}{(s - 1)(s - 2)}$$

Para cumprir as especificações da TAB. 1, calculou-se ζ e ω_n analisando e testando os valores em (8a), (8b), (13) e as FIG. 3 e 5. Por fim, os resultados adotados são conforme a TAB. 2.

Tabela 2. ζ e ω_n adotados

Caso	ζ	ω_n (rad/s)
1	0,5912	5,9206
2	0,9103	4,6688
3	0,3400	11,7647
4	0,5912	8,4580

Os valores foram escolhidos, primeiramente priorizando os critérios fixos. Em seguida, caso ainda houvesse opções para os valores de ζ e/ou ω_n , aplicava-se os critérios requeridos em faixas de valores. No caso 3, mesmo que não fosse limitado o sobressinal, optou-se por uma especificação moderada, admitindo que $OS < 35\%$.

Para definir os polos não dominantes, utilizou-se como critério a atribuição de zeros uma década abaixo da parte real dos polos dominantes. Quando for necessário definir mais polos recessivos, atribui-os subtraindo um do polo não dominante anterior.

Com os polos do denominador e a função transferência do processo, monta-se a equação diofantina. Resolvendo-a obteve-se o controlador $C(s)$,

$$C_1(s) = \frac{300,49(s + 1,633)}{s - 2213}, \quad (16a)$$

$$C_2(s) = \frac{-99,993(s - 7,224)}{s + 199,8}, \quad (16b)$$

$$C_3(s) = \frac{-73,575(s + 3,792)}{s + 430,9}, \quad (16c)$$

$$C_4(s) = \frac{-1,6059 \times 10^5(s^2 + 2,411s + 6,371)}{s^2 + 207,7s + 8,183 \times 10^5}. \quad (16d)$$

O controlador (16a) tem um polo instável, então ele não é realizável.

5. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Com as soluções da equação Diofantina e a determinação dos controladores de cada sistema, pode-se resolver a equação de malha fechada da topologia em série (FIG. 2(a)) e realimentação (FIG. 2(b)).

Resolvendo a malha fechada das topologias em série e na realimentação e escolhendo-se a que melhor desempenhou após a pré-compensação, obtém-se

$$H_1(s) = \frac{5(s - 2213)(s + 0,5)}{(s + 40)(s^2 + 8s + 45,78)} \quad (17a)$$

$$H_2(s) = \frac{9,2716(s + 199,8)(s + 0,5)}{(s + 42,5)(s^2 + 8,5s + 21,8)} \quad (17b)$$

$$H_3(s) = \frac{-291,98(s - 5)(s + 3,792)}{(s + 40)(s^2 + 8s + 138,4)} \quad (17c)$$

$$H_4(s) = \frac{-8,03 \times 10^5(s - 5)(s^2 + 2,41s + 6,37)}{d_4(s)} \quad (17d)$$

sendo $d_4(s) = (s + 65,33)(s + 64,33)(s + 63,33)(s^2 + 12,67s + 96,09)$.

A abordagem polinomial induz zeros na malha fechada. Dito isso, os zeros de fase mínima e os polos não dominantes podem ser compensados (se necessário) antes do sinal de referência, bastando fazer as pré-compensações

$$G_{c1}(s) = \frac{0,5}{(s + 0,5)} \quad (18a)$$

$$G_{c2}(s) = \frac{2,3511(s + 42,5)}{(s + 199,8)(s + 0,5)} \quad (18b)$$

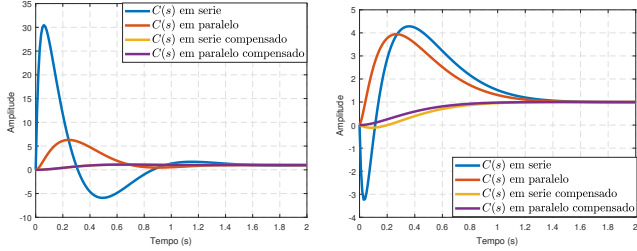
$$G_{c3}(s) = \frac{0,094807(s + 40)}{(s + 3,792)} \quad (18c)$$

$$G_{c4}(s) = \frac{0,0975(s + 65,33)(s + 64,33)}{s^2 + 2,411s + 6,371} \quad (18d)$$

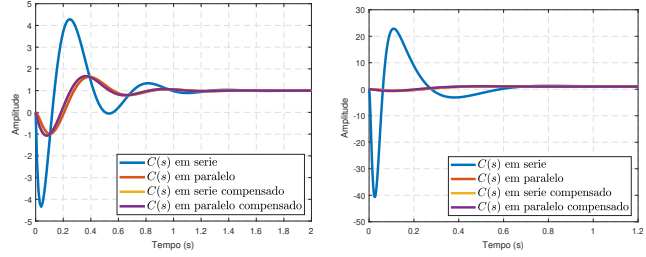
5.1 Resposta temporal

Aplicando um step unitário nos sistemas, foram obtidas as respostas temporais de cada processo, na topologia série e paralelo, com e sem a pré-compensação, como é exposto nas FIG. 6(a)–6(d).

Por meio do método `stepinfo` do MATLAB®, é possível coletar os dados referentes ao desempenho do sistema e averiguar se ele cumpriu com as especificações. As topologias com melhor desempenho (em cada caso) têm suas características de resposta temporal expostas na TAB. 3.



(a) Resposta da malha fechada de $G_1(s)$ (b) Resposta da malha fechada de $G_2(s)$



(c) Resposta da malha fechada de $G_3(s)$ (d) Resposta da malha fechada de $G_4(s)$

Figura 6. Respostas temporais dos sistemas em malha fechada

Tabela 3. Desempenho do sistema nas topologias série e paralelo

Parâmetros	Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4
Topologia	PID	P. C.	S. C.	P. C.
t_s (s)	9,6037	1,0307	1,0203	0,7074
OS (%)	11,1683	0,1000	66,374	11,453
US (%)		0	106,92	63,716
$t_{%OS}$ (s)		1,6254	0,3684	0,5163
t_r (s)		0,6276	0,0546	0,1383

Nota: As abreviações P. C. e S. C. referem-se, respectivamente, a paralelo compensado e série compensado.

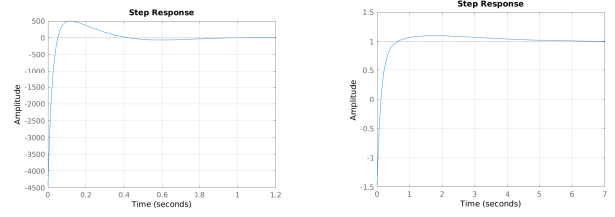
5.2 Caso 1

Algumas observações são importantes. No Caso 1, a aplicação do método polinomial se mostrou ineficiente para obter um controlador estável, embora fazendo o lugar geométrico das raízes, verificou-se que para um ganho K , o sistema se estabilizava. Contudo, como o intuito é abordar os problemas pelo método polinomial, utilizou-se como recurso a adaptação para PID, resultando no controlador

$$C_1(s) = \frac{0,1655s^2 - 0,2979s - 0,2}{s} \quad (\text{PID}) \quad (19a)$$

O método estudado para a determinação de um controlador PID não apresenta um zero no derivativo. Se fosse implementado assim, ele também seria não realizável. Sendo assim, utiliza-se um filtro $1/(s + \alpha)$, no qual $\alpha \ll 1$, uma constante ajustada na tentativa e erro.

Aplicando (19a) ao processo, obteve-se a resposta mostrada na FIG. 7(a). Como se observa, o sistema ficou estável, porém com um desempenho insatisfatório: *overshoot* e *undershoot* muito elvados. Dessa forma, variou-se os critérios de desempenho de projeto, obtendo



(a) Resposta da malha fechada de $G_1(s)$, abordagem PID polinomial (b) Resposta após variações nos parâmetros nominal

Figura 7. Respostas temporais da malha fechada de $G_1(s)$ calculados pela abordagem PID polinomial

$$C_1(s) = \frac{0,8749s^2 + 0,4393s - 0,1188}{s} \quad (\text{PID ajustado}) \quad (19b)$$

cujas resposta temporal é vista na FIG. 7(b).

Apesar de se ter conseguido abaixar consideravelmente o *overshoot* — marcando 10,07 % — com a variação, o tempo de acomodação não foi alcançado e ainda manteve-se um grande *undershoot*, resultante de um zero de fase não mínima que não pode ser compensado. Neste caso, portanto, percebe-se a insuficiência do projeto via abordagem polinomial, sendo preciso utilizar outra técnica de projeto de controlador.

5.3 Caso 2

No caso 2, os critérios de desempenho foram alcançados. É curioso notar que o tempo de pico foi maior do que o tempo de acomodação, pois o *overshoot* é menor do que 2%. Sendo assim, poder-se-ia ter projetado para este valor que ainda seria considerado um sobressinal nulo. Ademais, no projeto do controlador, foi feita uma compensação da função transferência do modelo. Portanto, os erros de modelagem irão afetar a precisão dos dados encontrados na TAB. 3, conquanto ainda devem apresentar resultados próximos.

Os distúrbios não serão compensados pela pré-compensação, o que fará com que os zeros interfiram na resposta temporal e, dada a posição de um dos zeros $z = -0,5$, para as especificações dadas, causará uma grande discrepância na saída, principalmente no *overshoot*, como pode ser visto na FIG. 6(b) para o sinal sem compensação.

5.4 Caso 3

Para o terceiro caso, o tempo de acomodação, foi como especificado. O tempo de subida foi bem pequeno também. Mas conforme esperado, para diminuí-lo o *overshoot* teve que ser aumentado, passando dos 32% projetados ($\zeta = 0,34$) devido aos efeitos dos zeros de fase não mínima. Eles ainda fizeram com que o sistema apresentasse uma alta porcentagem de *undershoot*, ao qual poderia ser um problema na implementação da planta física.

Como foi feita a anulação de um zero de fase mínima no sistema, essa compensação não será feita caso um distúrbio aconteça no sistema. Fazendo com que o *overshoot* seja ainda maior. No entanto, o sistema é composto por um zero

de fase não mínima por si só, então o efeito do distúrbio já seriam acentuados na resposta do processo.

5.5 Caso 4

As especificações do quarto caso foram mais flexíveis e, portanto, mesmo que o processo tivesse características como duplo integrador, um polo e um zero no semiplano direito, foi possível projetar um controlador que atendessem aos requisitos. Porém, o efeito do zero de fase não mínima do processo afetou a resposta temporal com um *undershoot* significativo. Ainda, sua ação pôde ser vista no atrasamento do tempo de acomodação e no aumento percentual de *overshoot*, visto que suas especificações de projeto foram $t_s = 0,6$ s e $OS\% = 7\%$.

O processo é composto por 3 polos instáveis e um zero de fase não mínima, então os distúrbios após o controlador, têm ação acentuada na resposta.

5.6 Resposta frequencial

A análise frequencial dos casos 2,3 e 4 serão expostas e discutidas a seguir. O controlador 1 não é realizável. Destarte, discutir aspectos da sua implementação prática como ruído e distúrbio não teria utilidade. Por isso, sua discussão não será feita.

Caso 2 O traçado do diagrama de Bode para a relação saída-referência, é dado a partir da função transferência da malha fechada do sistema H_{c2}

$$H_{c2}(s) = \frac{21,8}{s^2 + 8,5s + 21,8} \quad (20)$$

Note que neste caso, a função é compensada, visto que a referência é compensada.

A investigação do distúrbio é feita conforme (10), enquanto que para o ruído se utiliza (11).

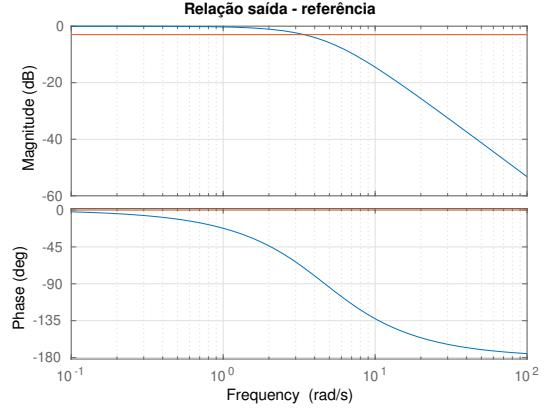
Na FIG. 8, é mostrada os diagramas de bode das 3 circunstâncias mencionados no referencial teórico. Os dados requeridos estão dispostos na TAB. 4. Repare que, como especificado, o amortecimento foi tão alto que o sistema não teve um pico de ressonância. Ainda, sua faixa de passagem foi baixa, próxima de 0,5 Hz. Sendo assim, deve-se evitar sinais após esta fase.

O distúrbio tem seu ápice de ganho em 4,26, após a faixa de passagem do sistema. Isso faz com que seja fácil identificá-lo e abordá-lo, caso seja necessário. Além disso, o seu ganho em baixas frequências tem uma magnitude muito pequena, o que faz com que influencie pouco em $Y(s)$.

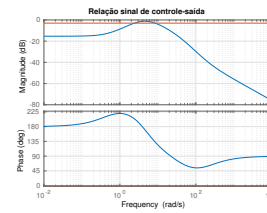
O ruído tem alto ganho em baixa frequência, o que o torna perigoso nesta região e deve-se isolar o sistema de tal. Entretanto, sua faixa de passagem é bem baixa o que torna difícil isolá-lo do sinal da planta. Sendo assim, deve-se ser meticoloso na escolha dos cabos, sensores e da região de operação da planta.

Caso 3 A função transferência da malha fechada do caso 3 é

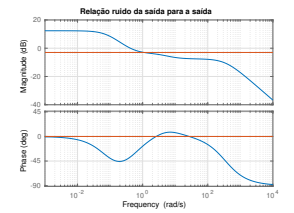
$$H_{c3}(s) = \frac{-291,98(s - 5)}{s^2 + 8s + 138,4} \quad (21)$$



(a) Bode de $Y(s)/R(s)$



(b) Bode de $Y(s)/\delta(s)$



(c) Bode de $Y(s)/\eta(s)$

Figura 8. Análise frequencial do caso 2

Tabela 4. Dados da análise frequencial do caso 2

Parâmetro	$Y(s)/R(s)$	$Y(s)/\delta(s)$	$Y(s)/\eta(s)$
k_{LF}	0	-15,3	12,3
ω_p (rad/s)	1	4,26	0,1
M_p dB	0	1,17	12,3
ω_{BW} (rad/s)	3,41	8,45	1,10

Na FIG. 9, é mostrada os diagramas de bode das 3 circunstâncias mencionados no referencial teórico. Os dados requeridos estão dispostos na TAB. 5. A faixa de passagem do sistema é baixa e portanto, apenas para sinais com menos de 1 Hz de frequência afetam a saída do sistema. O pico ocorrerá em 11,8 rad/s com uma acentuada magnitude.

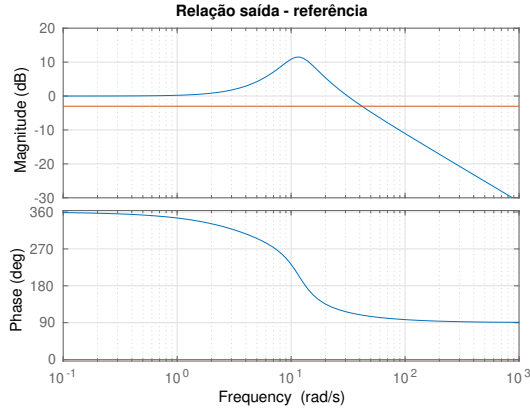
O distúrbio tem seu ápice de ganho em 11,8 junto com o ápice do sistema e com maior magnitude. Então, deve-se evitar que sejam dados distúrbios nessa frequência. Sua faixa de passagem é alta, então seus efeitos acontecerão durante toda a gama de frequências que o sistema responde.

O ruído apresenta pouca magnitude para baixas frequências. Além disso, sua faixa de passagem é baixa. Por isso, o ruído do sistema é um fator secundário no projeto.

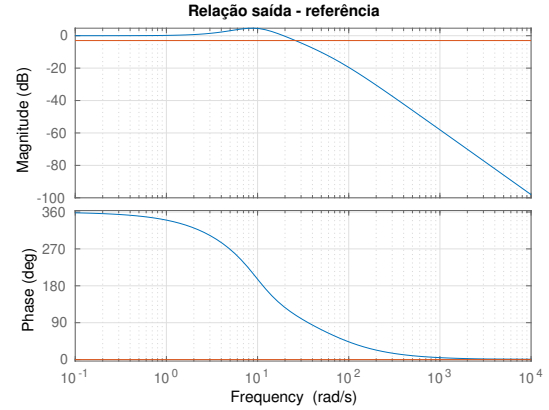
Tabela 5. Dados da análise frequencial do caso 3

Parâmetro	$Y(s)/R(s)$	$Y(s)/\delta(s)$	$Y(s)/\eta(s)$
k_{LF} (dB)	0	5,78	-2,14
ω_p (rad/s)	11,8	11,8	1,00
M_p dB	11,5	16,9	-2,14
ω_{BW} (rad/s)	41,9	50,1	2,19

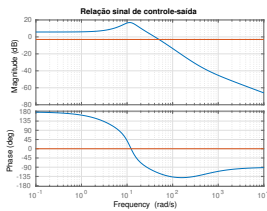
Caso 4 A função transferência da malha fechada do caso 4 é



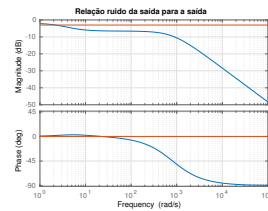
(a) Bode de $Y(s)/R(s)$



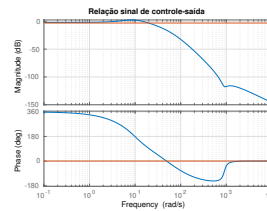
(a) Bode de $Y(s)/R(s)$



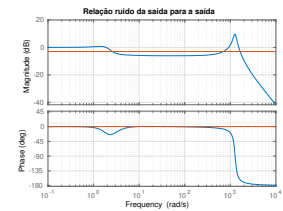
(b) Bode de $Y(s)/\delta(s)$



(c) Bode de $Y(s)/\eta(s)$



(b) Bode de $Y(s)/\delta(s)$



(c) Bode de $Y(s)/\eta(s)$

Figura 9. Análise frequencial do caso 3

$$H_{c4}(s) = \frac{-8,03 \times 10^5 (s - 5)}{(s + 65,33)(s^2 + 12,67s + 96,09)} \quad (22)$$

Na FIG. 10, é mostrada os diagramas de bode das 3 circunstâncias mencionados no referencial teórico. Os dados requeridos estão dispostos na TAB. 6. O sistema tem uma faixa de passagem de até 4,13 Hz.

O distúrbio tem pouca intensidade em baixas frequências. Embora sua faixa de passagem é menor do que do sistema, o seu pico é perto do pico do sistema, o que pode vir a ser problemático.

O ruído apresenta seu pico em uma elevada frequência. Portanto, fica fácil filtrá-lo sem afetar o sinal de saída da planta.

Tabela 6. Dados da análise frequencial do caso 4

Parâmetro	$Y(s)/R(s)$	$Y(s)/\delta(s)$	$Y(s)/\eta(s)$
k_{LF} (dB)	0	-1,94	0
ω_p (rad/s)	9,00	8,96	1260
M_p dB	4,63	2,52	9,66
ω_{BW} (rad/s)	26,02	19,75	1646

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os sistemas estudados neste trabalho apresentam características problemáticas como: polos e zeros de fase não mínima, integrador e duplo integrador. Mesmo assim, o projeto de controladores pelo método polinomial teve êxito em 3 dos 4 processos.

No caso 1, situação em que ele falhou, embora se tivesse variado os valores da especificação numa faixa além dos

Figura 10. Análise frequencial do caso 4

valores pedidos, verificou-se que ele propôs um controlador instável e, por consequência, não realizável.

Ao fazer o lugar geométrico das raízes se constatou que o sistema estabilizaria com um ganho K , logo ele é controlável. Este fato põe em cheque a abordagem polinomial como um método inequívoco para o projeto de um controlador. Ademais, para o caso 1 foi projetado um controlador PID com a mesma abordagem. No entanto, a resposta temporal se mostrou insatisfatória: com *overshoot*, *undershoot* e tempo de acomodação muito acima dos razoáveis para o que foi pedido.

Nos demais casos, salienta-se a necessidade de uso de pré-compensadores para anular os efeitos dos zeros de fase mínima do sistema ou que virão junto com o controlador. Considerando as incertezas nos parâmetros do modelo, isso pode ter uma influência no controle. Porém a abordagem polinomial se mostrou simples e prática para a determinação do controlador.

A análise frequencial indica que o ruído no caso 2 deve ser mitigado e que deve ser difícil filtrá-lo sem afetar o sistema. No caso 3, deve-se atentar ao distúrbios no sinal de controle, principalmente na zona de ressonância. No caso 4, verificou-se que o ruído apresentará seu pico em altas frequências, o que facilitará sua filtragem. A influência do distúrbio é moderada e dependendo da precisão necessária, não será um grande problema.

REFERÊNCIA

- DORF, Richard C.; BISHOP, Robert H. Modern Control System. 12. ed. New Jersey: Prentice Hall, 2010. p. 1111.
- OGATA, Katsuhiko. Engenharia de Controle Moderno. 5. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2010. p. 822.

NISE, Norman S. Control Systems Engineering. 7. ed. New Jersey: Wiley, 2015. p. 895.