Encontro 5: Soluções no Espaço de Estados — Parte I

Valter J. S. Leite[1]

[1]CEFET-MG / *Campus* V Divinópolis, MG – Brasil

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica
Associação ampla entre CEFET–MG e UFSJ

O que nos espera?

1. Solução de equações estado LTI
   - Cálculos úteis
   - Discretização
2. Equações de estado equivalentes
   - Motivação
   - Dicas de Sistemas
3. Realizações

Introdução

- Do encontro anterior:

$$y(t) = \int_{\tau=t_0}^{t} g(t,\tau)u(\tau)d\tau \tag{1}$$

$g(t,\tau)$: resposta impulsiva $\begin{cases} \text{no instante } t \\ \text{para impulso aplicado em } t_0 = \tau. \end{cases}$

Introdução

- Do encontro anterior:

$$y(t) = \int_{\tau=t_0}^{t} g(t,\tau)u(\tau)d\tau \qquad (1)$$

$$g(t,\tau)\text{: resposta impulsiva} \begin{cases} \text{no instante } t \\ \text{para impulso aplicado em } t_0 = \tau. \end{cases}$$

- Numericamente

$$y(kT) = \sum_{m=k_0}^{k} g(kT, mT)u(mT)T \qquad (2)$$

$\Rightarrow$ T período de amostragem (ou de integração)
$\Rightarrow$ resultados pouco precisos para um dado T

Introdução

- Alternativa

$\Rightarrow$ Parâmetros concentrados $\longrightarrow$ Transformada de Laplace

$\Rightarrow$ Requer cálculo: polos (`roots()`), expansão em frações parciais (`residue()`), tabela de transformadas.

$\Rightarrow$ Polos repetidos $\longrightarrow$ sensibilidade a erros de arredondamento

Introdução

- Alternativa

$\Rightarrow$ Parâmetros concentrados $\longrightarrow$ Transformada de Laplace

$\Rightarrow$ Requer cálculo: polos (`roots()`), expansão em frações parciais (`residue()`), tabela de transformadas.

$\Rightarrow$ Polos repetidos $\longrightarrow$ sensibilidade a erros de arredondamento

- Saída

$\Rightarrow$ Funções de transferências $\longrightarrow$ Eq. no Espaço de Estados

- Descrição do sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \mathbf{A}x(t) + \mathbf{B}u(t) && (3) \\ y(t) &= \mathbf{C}x(t) + \mathbf{D}u(t) && (4) \end{aligned}$$

⇒ Propriedade usada[1]:

$$\frac{d}{dt}e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t} = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{A} \qquad (5)$$

[1] Pode-se verificar usando a expansão em série de Taylor de $e^{\mathbf{A}t}$.

$\Rightarrow$ Pré-multiplicando ambos os lados de (3) por $e^{-\mathbf{A}t}$:

$$e^{-\mathbf{A}t}\dot{x}(t) - e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{A}x(t) = \frac{d}{dt}\left[e^{-\mathbf{A}t}x(t)\right] = e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{B}u(t)$$

Integrando[2] de 0 a t

$$e^{-\mathbf{A}\tau}x(\tau)\Big|_{\tau=0}^{t} = \int_0^t e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}u(\tau)d\tau$$

[2] O argumento do integrando foi trocado de t para τ, evitando confusão com os limites de integração.

$\Rightarrow$ Pré-multiplicando ambos os lados de (3) por $e^{-\mathbf{A}t}$:

$$e^{-\mathbf{A}t}\dot{x}(t) - e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{A}x(t) = \frac{d}{dt}\left[e^{-\mathbf{A}t}x(t)\right] = e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{B}u(t)$$

Integrando[2] de 0 a t

$$e^{-\mathbf{A}\tau}x(\tau)\Big|_{\tau=0}^{t} = \int_0^t e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}u(\tau)d\tau$$

$$e^{-\mathbf{A}t}x(t) - e^{\mathbf{0}}x(0) = e^{-\mathbf{A}t}x(t) - \mathbf{I}x(0) = \int_0^t e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}u(\tau)d\tau$$

[2] O argumento do integrando foi trocado de t para τ, evitando confusão com os limites de integração.

Pré-multiplicando por $e^{\mathbf{A}t}$:

$$x(t) = \underbrace{e^{\mathbf{A}t}x(0)}_{\text{Resposta à entrada nula}} + \underbrace{\int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}u(\tau)d\tau}_{\text{Resposta ao estado nulo}} \quad (6)$$

Pré-multiplicando por $e^{\mathbf{A}t}$:

$$x(t) = \underbrace{e^{\mathbf{A}t}x(0)}_{\text{Resposta à entrada nula}} + \underbrace{\int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}u(\tau)d\tau}_{\text{Resposta ao estado nulo}} \qquad (6)$$

- Levando (6) em (4):

$$y(t) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}x(0) + \mathbf{C}\int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}u(\tau)d\tau + \mathbf{D}u(t) \qquad (7)$$

Notas

- Cômputo aplicando Laplace em (3)–(4):

$$sX(s) - x(0) = \mathbf{A}X(s) + \mathbf{B}U(s) \Rightarrow X(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}[x(0) + \mathbf{B}U(s)]$$

$$Y(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}[x(0) + \mathbf{B}U(s)] + \mathbf{D}U(s)$$

Notas

- Cômputo aplicando Laplace em (3)–(4):

$$sX(s)-x(0) = \mathbf{A}X(s)+\mathbf{B}U(s) \Rightarrow X(s) = (s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}[x(0)+\mathbf{B}U(s)]$$

$$Y(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}[x(0)+\mathbf{B}U(s)] + \mathbf{D}U(s)$$

- Cômputo de $e^{\mathbf{A}t}$: várias maneiras. Por exemplo, use Cayley-Hamilton (veja exemplos 3.8 e 3.9)

$e^{\mathbf{A}t}$ via Cayley-Hamilton

- Calcule os autovalores de $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$;
- Faça $f(\lambda) = e^{\lambda t}$;
- Defina $h(\lambda)$ um polinômio de grau $n-1$;
- Calcule os coeficientes de $h(\lambda)$ usando:
  $f^{(\ell)}(\lambda_i) = h^{(\ell)}(\lambda_i),\ \ell = 0, 1, \ldots, (n_i - 1)$ e $i = 0, 1, \ldots, m$
  $\Rightarrow f^{(\ell)}(\lambda_i) = \left.\frac{d^\ell f(\lambda)}{d\lambda^\ell}\right|_{\lambda=\lambda_i}$
  $\Rightarrow h^{(\ell)}(\lambda_i)$ definido de maneira similar.
  $\Rightarrow f(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A})$

$$\text{Seja } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & -4 \end{bmatrix}; \quad \text{Calcule } e^{-\mathbf{A}t}$$

- `> > eig(-A)` resulta: $\lambda_i \in \{4, -1, -1\}$;
- $f(\lambda) = e^{\lambda t}; \quad h(\lambda) = \beta_0 + \beta_1\lambda + \beta_2\lambda^2$;
- $$f(4) = e^{4t} = \beta_0 + 4\beta_1 + 16\beta_2 = h(4) \tag{8}$$
  $$f(-1) = e^{-t} = \beta_0 - \beta_1 + \beta_2 = h(-1) \tag{9}$$

$$\begin{aligned} f^{(\ell=1)}(\lambda)\Big|_{\lambda=-1} &= te^{\lambda t}\Big|_{\lambda=-1} = te^{-t} \\ &= \beta_1 + 2\beta_2\lambda = \beta_1 - 2\beta_2 = h(-1)' \end{aligned} \tag{10}$$

Usando (8)-(10), monta-se o sistema linear:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 16 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{4t} \\ e^{-t} \\ te^{-t} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0.04 & 0.96 & 0.80 \\ 0.08 & -0.08 & 0.60 \\ 0.04 & -0.04 & -0.20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{4t} \\ e^{-t} \\ te^{-t} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0.04e^{4t} + 0.96e^{-t} + 0.8te^{-t} \\ 0.08e^{4t} - 0.08e^{-t} + 0.6te^{-t} \\ 0.04e^{4t} - 0.04e^{-t} - 0.2te^{-t} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (11)$$

Que resulta em

$$
\begin{aligned}
h(\lambda) = 0.04e^{4t} + 0.96e^{-t} + 0.8te^{-t} \\
+ \left(0.08e^{4t} - 0.08e^{-t} + 0.6te^{-t}\right)\lambda \\
+ \left(0.04e^{4t} - 0.04e^{-t} - 0.2te^{-t}\right)\lambda^2
\end{aligned} \quad (12)
$$

- Como calculamos $f(\lambda) = e^{\lambda t}$ e desejamos $f(-\lambda t)$, avalia-se $h(-\mathbf{A})$ no lugar de $h(\mathbf{A})$:

$$
\begin{aligned}
h(-\mathbf{A}) = \left(0.04e^{4t} + 0.96e^{-t} + 0.8te^{-t}\right)\mathbf{I} \\
+ \left(0.08e^{4t} - 0.08e^{-t} + 0.6te^{-t}\right)(-\mathbf{A}) \\
+ \left(0.04e^{4t} - 0.04e^{-t} - 0.2te^{-t}\right)(-\mathbf{A})^2
\end{aligned} \quad (13)
$$

$$h(-\mathbf{A}) = e^{-\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0.4\left(e^{4t} - e^{-t}\right) & 0.6\left(e^{4t} - e^{-t}\right) & e^{4t} \end{bmatrix}$$

- Como fazer isso no Matlab[3]?

```
>> syms t
>> Q = [1 4 16; 1 -1 1; 0 1 -2]
>> B = [exp(4*t); exp(-t); t*exp(-t)]
>> beta = inv(Q)*B
>> A = [1 0 0; 0 1 0; -2 -3 -4]
>> I = eye(3)
>> hA = beta(1)*I+beta(2)*(-A)+beta(3)*(-A)*(-A)
```

[3] Precisa do toolbox *Symbolic*

Solução via Transformada inversa de Laplace

- $e^{-At} = \mathcal{L}\left\{(s\mathbf{I} - A)^{-1}\right\}$

```
>> syms s
>> A = [1 0 0; 0 1 0; -2 -3 -4]
>> den = s*eye(3)-A
>> ft = inv(den)
>> yt = ilaplace(ft)
```

Calculando Matriz inversa

$$A^{-1} = \frac{\mathtt{Adj}A}{\det(A)}; \quad \mathtt{Adj}A = (\mathtt{Co}A)'$$

em que $\mathtt{Co}A$ é a matriz cofatora de A e

$$[\mathtt{Co}A]_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

em que M_{ij} é o menor ij da matriz A.

- M_{ij} é o determinante da matriz resultante da eliminação da linha i e coluna j da matriz A.

Exercício Complementar

1. Suponha que em um sistema é aplicado um impulso unitário em sua entrada e os dados da saída são amostrados em intervalos de tempo $T = 0.05$s. Os valores da saída formam uma sequência y_k que está no arquivo `dados.m`. Determine numerica e graficamente a resposta desse sistema a uma entrada do tipo $u(t) = 10e^{-t}\sin 2\pi t$.

2. Refaça os exemplos 4.1 e 4.2

3. Para o exemplo 2.12, página 28, determine os estados e a saída do sistema em $t = 10$s, supondo $u(t)$ um degrau unitário e as condições iniciais $x(0) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0.5 \end{bmatrix}'$. Resolva utilizando as equações no espaço de estados.

Discretização no tempo

- Usando

$$\dot{x}(t) = \lim_{T\to 0} \frac{x(t+T) - x(t)}{T}$$

$$\Longrightarrow \frac{x(t+T) - x(t)}{T} = \mathbf{A}x(t) + \mathbf{B}u(t) \tag{14}$$

ou

$$x(t+T) = x(t) + \mathbf{A}x(t)T + \mathbf{B}u(t)T \tag{15}$$

Calculando $x(t)$ e $y(t)$ apenas em $t = kT$, $k = 0, 1, 2, \ldots$:

$$x((k+1)T) = (\mathbf{I} + T\mathbf{A})x(kT) + T\mathbf{B}u(kT) \tag{16}$$

$$y(kT) = \mathbf{C}x(kT) + \mathbf{D}u(kT) \tag{17}$$

- Outra discretização

⇒ Mais precisa para um mesmo T

⇒ Assume $u(t)$ constante entre amostragens

$$u(t) = u[k], \quad kT \leq t < (k+1)T \tag{18}$$

⇒ Caso típico em controle digital.

⇒ Assume presença de um *hold* de ordem 0 no sinal de controle.

- Assumindo (18), a solução (6) pode ser avaliada em $t = kT$ e $t = (k+1)T$:

$$x(t = kT) = x[k] = e^{\mathbf{A}kT}x(0) + \int_0^{kT} e^{\mathbf{A}(kT-\tau)}\mathbf{B}u(\tau)d\tau \qquad (19)$$

$$x(t = (k+1)T) =$$

$$x[k+1] = e^{\mathbf{A}(k+1)T}x(0) + \int_0^{(k+1)T} e^{\mathbf{A}((k+1)T-\tau)}\mathbf{B}u(\tau)d\tau \qquad (20)$$

Colocando $e^{\mathbf{A}T}$ em evidência e separando a integração:

$$x[k+1] = e^{\mathbf{A}T} \underbrace{\left[e^{\mathbf{A}kT} x(0) + \int_0^{kT} e^{\mathbf{A}(kT-\tau)} \mathbf{B} u(\tau) d\tau \right]}_{x[k]} + \int_{kT}^{(k+1)T} e^{\mathbf{A}((k+1)T-\tau)} \mathbf{B} u(\tau) d\tau \quad (21)$$

Colocando $e^{\mathbf{A}T}$ em evidência e separando a integração:

$$x[k+1] = e^{\mathbf{A}T} \underbrace{\left[e^{\mathbf{A}kT} x(0) + \int_0^{kT} e^{\mathbf{A}(kT-\tau)} \mathbf{B} u(\tau) d\tau \right]}_{x[k]} + \int_{kT}^{(k+1)T} e^{\mathbf{A}((k+1)T-\tau)} \mathbf{B} u(\tau) d\tau \quad (21)$$

$\Rightarrow$ Mudança de variável: $\alpha = (k+1)T - \tau \Rightarrow d\alpha = -d\tau$

$$x[k+1] = e^{\mathbf{A}T} x[k] + \left(\int_0^T e^{\mathbf{A}\alpha} d\alpha \right) \mathbf{B} u[k] \quad (22)$$

- Assim, se a entrada muda apenas em instantes discretos no tempo , kT, e interessamos pela resposta nesses mesmos instantes:

$$x[k+1] = \mathbf{A}_d x[k] + \mathbf{B}_d u[k] \quad (23)$$

$$y[k] = \mathbf{C}_d x[k] + \mathbf{D}_d u[k] \quad (24)$$

- Assim, se a entrada muda apenas em instantes discretos no tempo , kT, e interessamos pela resposta nesses mesmos instantes:

$$\begin{aligned} x[k+1] &= \mathbf{A}_d x[k] + \mathbf{B}_d u[k] &(23)\\ y[k] &= \mathbf{C}_d x[k] + \mathbf{D}_d u[k] &(24)\end{aligned}$$

em que

$$A_d = e^{\mathbf{A}T}; \quad \mathbf{B}_d = \left(\int_0^T e^{\mathbf{A}\alpha} d\alpha\right)\mathbf{B}; \quad \mathbf{C}_d = \mathbf{C}; \quad \mathbf{D}_d = \mathbf{D} \quad (25)$$

Nota no cálculo de B_d

- Para $\mathbf{B}_d$:

$$\mathbf{B}_d = \left(\int_0^T \left(\mathbf{I} + \mathbf{A}\alpha + \mathbf{A}^2\frac{\alpha^2}{2!} + \ldots\right) d\alpha\right)\mathbf{B} \qquad (26)$$

$$= \left(T\mathbf{I} + \mathbf{A}\frac{T^2}{2!} + \mathbf{A}^2\frac{T^3}{3!} + \mathbf{A}^3\frac{T^4}{4!}\ldots\right)\mathbf{B} \qquad (27)$$

Nota no cálculo de $\mathbf{B}_d$

- Para $\mathbf{B}_d$:

$$\mathbf{B}_d = \left(\int_0^T \left(\mathbf{I} + \mathbf{A}\alpha + \mathbf{A}^2\frac{\alpha^2}{2!} + \ldots\right) d\alpha\right)\mathbf{B} \quad (26)$$

$$= \left(T\mathbf{I} + \mathbf{A}\frac{T^2}{2!} + \mathbf{A}^2\frac{T^3}{3!} + \mathbf{A}^3\frac{T^4}{4!}\ldots\right)\mathbf{B} \quad (27)$$

Se $\mathbf{A}$ é não-singular (por exemplo sistema sem integradores!):

$$\mathbf{B}_d = \mathbf{A}^{-1}\left(\underbrace{\underbrace{\mathbf{A}T + \mathbf{A}^2\frac{T^2}{2!} + \mathbf{A}^3\frac{T^3}{3!} + \ldots + \mathbf{I}}_{e^{\mathbf{A}T}} - \mathbf{I}}_{e^{\mathbf{A}T} - \mathbf{I}}\right)\mathbf{B} \quad (28)$$

$$\mathbf{B}_d = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{A}_d - \mathbf{I})\mathbf{B} \quad \text{Se } \mathbf{A} \text{ é não-singular!!} \quad (29)$$

No Matlab...

- Use: ■ `[Ad, Bd] = c2d(A,B,Ts)` para transformar um sistema contínuo no tempo em discreto no tempo, com *hold* de ordem zero e período de amostragem Ts.

$\Rightarrow$ Serve para a simulação, não para computar o controlador digital a ser implementado (*em geral*).

- Funções do Matlab transformam a *função de transferência* em *equações no espaço de estados* (`tf2ss`) e depois fazem a simulação no discreto.

- `step` usa `c2d` e procede como acima.

No Matlab...

- Note que:

$$
\begin{aligned}
x[1] &= \mathbf{A}_d x[0] + \mathbf{B}_d u[0] \\
x[2] &= \mathbf{A}_d x[1] + \mathbf{B}_d u[1] = \mathbf{A}_d^2 x[0] + \mathbf{A}_d \mathbf{B}_d u[0] + \mathbf{B}_d u[1] \\
x[3] &= \mathbf{A}_d x[2] + \mathbf{B}_d u[2] = \mathbf{A}_d^3 x[0] + \mathbf{A}_d^2 \mathbf{B}_d u[0] + \mathbf{A}_d \mathbf{B}_d u[1] + \mathbf{B}_d u[2] \\
\vdots &= \vdots \\
x[k] &= \mathbf{A}_d^k x[0] + \sum_{m=0}^{k-1} \mathbf{A}_d^{k-1-m} \mathbf{B}_d u[m] \qquad (30) \\
y[k] &= \mathbf{C}_d \mathbf{A}_d^k x[0] + \mathbf{C}_d \sum_{m=0}^{k-1} \mathbf{A}_d^{k-1-m} \mathbf{B}_d u[m] + \mathbf{D}_d u[k] \qquad (31)
\end{aligned}
$$

Estudo de caso

- Exemplo 4.3, página 93.

$\Rightarrow$ x_1 $\longrightarrow$ corrente no indutor

$\Rightarrow$ x_2 $\longrightarrow$ tensão no capacitor

$\Rightarrow$ Tensão no indutor $\dot{x}_1$ $(L = 1\text{H})$ e Corrente no capacitor $\dot{x}_2$ $(C = 1\text{F})$

$\Rightarrow$ Tensão no resistor $=$ Tensão no capacitor $= x_2$

$\Rightarrow$ Corrente no resistor $= x_2/R = x_2$ $(R = 1\Omega)$

Estudo de caso

- Exemplo 4.3, página 93.
  - $\Rightarrow x_1 \longrightarrow$ corrente no indutor
  - $\Rightarrow x_2 \longrightarrow$ tensão no capacitor
  - $\Rightarrow$ Tensão no indutor $\dot{x}_1$ $(L = 1\text{H})$ e Corrente no capacitor $\dot{x}_2$ $(C = 1\text{F})$
  - $\Rightarrow$ Tensão no resistor $=$ Tensão no capacitor $= x_2$
  - $\Rightarrow$ Corrente no resistor $= x_2/R = x_2$ $(R = 1\Omega)$
- Modelagem
  - $\Rightarrow$ Lei dos nós: $x_1 = x_2 + \dot{x}_2$

Estudo de caso

- Exemplo 4.3, página 93.
  - $\Rightarrow x_1 \longrightarrow$ corrente no indutor
  - $\Rightarrow x_2 \longrightarrow$ tensão no capacitor
  - $\Rightarrow$ Tensão no indutor $\dot{x}_1$ $(L = 1\text{H})$ e Corrente no capacitor $\dot{x}_2$ $(C = 1\text{F})$
  - $\Rightarrow$ Tensão no resistor $=$ Tensão no capacitor $= x_2$
  - $\Rightarrow$ Corrente no resistor $= x_2/R = x_2$ $(R = 1\Omega)$

- Modelagem
  - $\Rightarrow$ Lei dos nós: $x_1 = x_2 + \dot{x}_2$
  - $\Rightarrow$ Lei das tensões: $\dot{x}_1 + x_2 - u = 0$

Estudo de caso

- Exemplo 4.3, página 93.
  - $\Rightarrow x_1 \longrightarrow$ corrente no indutor
  - $\Rightarrow x_2 \longrightarrow$ tensão no capacitor
  - $\Rightarrow$ Tensão no indutor $\dot{x}_1$ $(L = 1\text{H})$ e Corrente no capacitor $\dot{x}_2$ $(C = 1\text{F})$
  - $\Rightarrow$ Tensão no resistor $=$ Tensão no capacitor $= x_2$
  - $\Rightarrow$ Corrente no resistor $= x_2/R = x_2$ $(R = 1\Omega)$

- Modelagem
  - $\Rightarrow$ Lei dos nós: $x_1 = x_2 + \dot{x}_2$
  - $\Rightarrow$ Lei das tensões: $\dot{x}_1 + x_2 - u = 0$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u; \quad y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

- Outra modelagem possível para o mesmo sistema
  - $\Rightarrow \bar{x}_1$ corrente na malha 1
  - $\Rightarrow \bar{x}_2$ corrente na malha 2

- Outra modelagem possível para o mesmo sistema
  - $\Rightarrow$ $\bar{x}_1$ corrente na malha 1
  - $\Rightarrow$ $\bar{x}_2$ corrente na malha 2
  - $\Rightarrow$ Malha 1: $u = \dot{\bar{x}}_1 + \bar{x}_1 - \bar{x}_2 \Rightarrow \dot{\bar{x}}_1 = -\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + u$
  - $\Rightarrow$ Malha 2: $\dot{\bar{x}}_2 = \dot{\bar{x}}_1 - \bar{x}_2 \Rightarrow \dot{\bar{x}}_2 = -\bar{x}_1 + u$

- Outra modelagem possível para o mesmo sistema
  - $\Rightarrow$ $\bar{x}_1$ corrente na malha 1
  - $\Rightarrow$ $\bar{x}_2$ corrente na malha 2
  - $\Rightarrow$ Malha 1: $u = \dot{\bar{x}}_1 + \bar{x}_1 - \bar{x}_2 \Rightarrow \dot{\bar{x}}_1 = -\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + u$
  - $\Rightarrow$ Malha 2: $\dot{\bar{x}}_2 = \dot{\bar{x}}_1 - \bar{x}_2 \Rightarrow \dot{\bar{x}}_2 = -\bar{x}_1 + u$

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_1 \\ \dot{\bar{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u; \quad y = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix}$$

Observações

- As duas descrições são do mesmo sistema.
- Portanto, são algebricamente equivalentes.
- Como passar de uma respresentação para outra?

Transformação de equivalência

- Advém de uma transformação de similaridade.
- Define-se $\bar{x}(t) = \mathbf{P}x(t)$, $\mathbf{P}$ não-singular , resulta em

$$\left.\left[\begin{array}{c|c} \bar{\mathbf{A}} & \bar{\mathbf{B}} \\ \hline \bar{\mathbf{C}} & \bar{\mathbf{D}} \end{array}\right]\right|_{\text{em } \bar{x}(t)} \quad \text{equivale a} \quad \left.\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{array}\right]\right|_{\text{em } x(t)}$$

Transformação de equivalência

- Advém de uma transformação de similaridade.
- Define-se $\bar{x}(t) = \mathbf{P}x(t)$, $\mathbf{P}$ não-singular , resulta em

$$\left.\left[\begin{array}{c|c} \bar{\mathbf{A}} & \bar{\mathbf{B}} \\ \hline \bar{\mathbf{C}} & \bar{\mathbf{D}} \end{array}\right]\right|_{\text{em } \bar{x}(t)} \quad \text{equivale a} \quad \left.\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{array}\right]\right|_{\text{em } x(t)}$$

$\Rightarrow$ com

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P}^{-1}; \quad \bar{\mathbf{B}} = \mathbf{P}\mathbf{B}; \quad \bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\mathbf{P}^{-1}; \quad \bar{\mathbf{D}} = \mathbf{D}$$

Transformação de equivalência

- Advém de uma transformação de similaridade.
- Define-se $\bar{x}(t) = \mathbf{P}x(t)$, $\mathbf{P}$ não-singular , resulta em

$$\left.\left[\begin{array}{c|c} \bar{\mathbf{A}} & \bar{\mathbf{B}} \\ \hline \bar{\mathbf{C}} & \bar{\mathbf{D}} \end{array}\right]\right|_{\text{em } \bar{x}(t)} \quad \text{equivale a} \quad \left.\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{array}\right]\right|_{\text{em } x(t)}$$

$\Rightarrow$ com

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{PAP}^{-1}; \quad \bar{\mathbf{B}} = \mathbf{PB}; \quad \bar{\mathbf{C}} = \mathbf{CP}^{-1}; \quad \bar{\mathbf{D}} = \mathbf{D}$$

$\Rightarrow$ $\bar{x}(t) = \mathbf{P}x(t)$ é uma transformação de equivalência

- No caso do Exemplo 4.3, a transformação é dada por

$$\bar{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} x(t)$$

- No caso do Exemplo 4.3, a transformação é dada por

$$\bar{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} x(t)$$

- Equivalência se dá em:

$$\Rightarrow \bar{\Delta}(\lambda) = \det(\lambda \mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}}) = \det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = \Delta(\lambda)$$

$$\Rightarrow \bar{\mathbf{G}}(s) = \bar{\mathbf{C}}(s\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}})^{-1}\bar{\mathbf{B}} + \bar{\mathbf{D}} = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} + \mathbf{D} = \mathbf{G}(s)$$

$\Rightarrow$ Sugestão de sistemas:

Vejam `http://slicot.org/` para acessar bibliotecas de sistemas contínuos no tempo e sistemas discretos no tempo

Outro conjunto de sistemas pode ser encontrada no projeto *COMPlib* que pode ser baixado e instalado como um toolbox do Matlab. Acesse em `http://www.complib.de/`

- Todo sistema LTI[4] tem uma descrição *entrada-saída* dada por

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{G}(s)\mathbf{U}(s) \tag{32}$$

- Se os parâmetros são concentrados

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{aligned} \tag{33}$$

- Usando equações de estado, o cômputo de $\mathbf{G}(s)$ é único :

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$$

[4] Linear time invariant.

O Problema

Encontrar uma representação no espaço de estados a partir de uma matriz de transferência

- Esse problema é denominado Realização .

- Uma matriz de transferência é dita realizável se existe um conjunto de equações de estado finitas (33) ou

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{array}\right] \equiv \left\{ \begin{array}{rcl} \dot{\mathbf{x}}(t) & = & \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) & = & \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{array} \right. \tag{34}$$

- Neste caso, $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}\} \equiv \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{array}\right]$ é uma realização de $\mathbf{G}(s)$

- Sistemas distribuídos podem ser representados por uma matriz de transferência,

  mas não por uma equação de estados de dimensão finita.

- Nem toda $\mathbf{G}(s)$ é realizável.

- Se $\mathbf{G}(s)$ é realizável, ela possui infinitas realizações (não necessariamente de mesma dimensão).

Teorema

$\mathbf{G}(s)$ é realizável se e somente se $\mathbf{G}(s)$ é uma *matriz racional própria*.

- $\mathbf{G}(s)$ estritamente própria, $q \times p$ $(\mathbf{D} = \mathbf{0})$:

$$\mathbf{G}_{\mathsf{sp}}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} = \frac{1}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})}\mathbf{C}[\mathtt{Adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})]\mathbf{B} \quad (35)$$

$\Rightarrow$ $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$ tem grau n

$\Rightarrow$ Cada entrada de $\mathtt{Adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$ tem grau máximo $n-1$

$\Rightarrow$ Portanto, $\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$ é uma matriz racional estritamente própria.

- $\mathbf{G}(s)$ própria, $q \times p$ ($\mathbf{D} \neq \mathbf{0}$):

  $\Rightarrow$ $\mathbf{G}(\infty) = \mathbf{D}$.

  $\Rightarrow$ $\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$ é própria

  $\Rightarrow$ Decomposição possível:

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{G}(\infty) + \mathbf{G}_{\mathsf{sp}}(s) \tag{36}$$

- Seja $d(s)$ o menor denominador comum[5] das entradas de $\mathbf{G}(s)$:

$$d(s) = s^r + \alpha_1 s^{r-1} + \ldots + \alpha_{r-1}s + \alpha_r \tag{37}$$

  $\Rightarrow$ Assim

$$\mathbf{G}_{\mathsf{sp}}(s) = \frac{1}{d(s)}\left[\mathbb{N}_1 s^{r-1} + \mathbb{N}_2 s^{r-2} + \ldots + \mathbb{N}_{r-1}s + \mathbb{N}_r\right] \tag{38}$$

em que $\mathbb{N}_i$, $i = 1, \ldots, r$, são matrizes constantes $q \times p$.

[5] Um polinômio mônico.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -\alpha_1 \mathbf{I}_p & -\alpha_2 \mathbf{I}_p & \cdots & -\alpha_{r-1} \mathbf{I}_p & -\alpha_r \mathbf{I}_p \\ \mathbf{I}_p & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_p & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{I}_p & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{I}_p \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) \tag{39}$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} \mathbb{N}_1 & \mathbb{N}_2 & \cdots & \mathbb{N}_{r-1} & \mathbb{N}_r \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \mathbf{G}(\infty)\mathbf{u}(t) \tag{40}$$

- Em que $\mathbf{I}$ e $\mathbf{0}$ são $p \times p$.
- Forma Canônica Controlável .

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{array}\right] \longleftrightarrow \left[\begin{array}{c|c} rp \times rp & rp \times p \\ \hline q \times rp & q \times p \end{array}\right] \tag{41}$$

Demonstração de que (39)–(40) é uma realização de (32):

1. Defina

$$\mathbf{Z} := \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_1 \\ \mathbf{Z}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{Z}_r \end{bmatrix} := (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}; \quad \mathbf{Z}_i \in \mathbb{R}^{p \times p} \tag{42}$$

2.

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{G}(\infty) = \\ \mathbb{N}_1\mathbf{Z}_1 + \mathbb{N}_2\mathbf{Z}_2 + \cdots + \mathbb{N}_r\mathbf{Z}_r + \mathbf{G}(\infty) \tag{43}$$

4. Note que (42) pode ser escrita como

$$s\mathbf{Z} = \mathbf{A}\mathbf{Z} + \mathbf{B} \tag{44}$$

5. $$\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{G}(\infty) = \sum_{i=1}^{r} \mathbb{N}_i \mathbf{Z}_i + \mathbf{G}(\infty) \tag{45}$$

6. De (44) e (39):

$$\begin{bmatrix} s\mathbf{Z}_1 \\ s\mathbf{Z}_2 \\ s\mathbf{Z}_3 \\ \vdots \\ s\mathbf{Z}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha_1\mathbf{Z}_1 - \alpha_2\mathbf{Z}_2 - \ldots - \alpha_r\mathbf{Z}_r + \mathbf{I} \\ \mathbf{Z}_1 \\ \mathbf{Z}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{Z}_{r-1} \end{bmatrix} \tag{46}$$

8. que resulta em

$$\mathbf{Z}_2 = \frac{1}{s}\mathbf{Z}_1, \ldots, \mathbf{Z}_r = \frac{1}{s^{r-1}}\mathbf{Z}_1 \tag{47}$$

9. levando na primeira linha de (46):

$$\begin{aligned} s\mathbf{Z}_1 &= -\alpha_1\mathbf{Z}_1 - \alpha_2\mathbf{Z}_2 - \ldots - \alpha_r\mathbf{Z}_r + \mathbf{I} && (48)\\ &= -\left(\alpha_1 + \frac{\alpha_2}{s} + \ldots + \frac{\alpha_r}{s^{r-1}}\right)\mathbf{Z}_1 + \mathbf{I} && (49)\end{aligned}$$

10. manipulando...

$$\left(s + \alpha_1 + \frac{\alpha_2}{s} + \ldots + \frac{\alpha_r}{s^{r-1}}\right)\mathbf{Z}_1 = \frac{d(s)}{s^{r-1}}\mathbf{Z}_1 = \mathbf{I}$$

11. Portanto:

$$\mathbf{Z}_1 = \frac{s^{r-1}}{d(s)}\mathbf{I}$$

13. Usando (47):

$$\mathbf{Z}_i = \frac{s^{r-1}}{s^{i-1}d(s)}\mathbf{I}; \quad i = 1, \ldots, r$$

14. Levando em (45)

$$\begin{aligned}\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{G}(\infty) &= \sum_{i=1}^{r} \mathbb{N}_i Z_i + \mathbf{G}(\infty)\\ &= \sum_{i=1}^{r} \mathbb{N}_i \frac{s^{r-1}}{s^{i-1}d(s)}\mathbf{I} + \mathbf{G}(\infty)\\ &= \frac{1}{d(s)}\left[\mathbb{N}_1 s^{r-1} + \mathbb{N}_2 s^{r-2} + \cdots + \mathbb{N}_{r-1}s^1 + \mathbb{N}_r\mathbf{I}\right] + \mathbf{G}(\infty)\end{aligned} \tag{50}$$

que iguala a (36)

Exemplo

- Fazer o Exemplo 4.6, página 103.

- Encontrar uma realização para

$$\begin{aligned}\mathbf{G}(s) &= \begin{bmatrix} \frac{4s-10}{2s+1} & \frac{3}{s+2} \\ \frac{1}{(2s+1)(s+2)} & \frac{s+1}{(s+2)^2} \end{bmatrix} && (51)\\ &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{-12}{2s+1} & \frac{3}{s+2} \\ \frac{1}{(2s+1)(s+2)} & \frac{s+1}{(s+2)^2} \end{bmatrix}}_{\mathbf{G}_{\mathsf{sp}}(s)} && (52)\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Menor denominador comum (mônico):
$d(s) = (s+0.5)(s+2)^2 = s^3 + 4.5s^2 + 6s + 2$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{G}_{\mathsf{sp}} &= \frac{1}{s^3 + 4.5s^2 + 6s + 2} \begin{bmatrix} -6(s+2)^2 & 3(s+2)(s+0.5) \\ 0.5(s+2) & (s+1)(s+0.5) \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{d(s)} \left(\begin{bmatrix} -6 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} s^2 + \begin{bmatrix} -24 & 7.5 \\ 0.5 & 1.5 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} -24 & 3 \\ 1 & 0.5 \end{bmatrix} \right)
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$ que resulta em . . .

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} -4.5 & 0 & -6 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -4.5 & 0 & -6 & 0 & -2 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \mathbf{x}(t) + \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} u_1(t) \\ u_2(t) \end{array}\right] \tag{53}$$

$$\mathbf{y}(t) = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} -6 & 3 & -24 & 7.5 & -24 & 3 \\ 0 & 1 & 0.5 & 1.5 & 1 & 0.5 \end{array}\right] \mathbf{x}(t) + \left[\begin{array}{cc} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} u_1(t) \\ u_2(t) \end{array}\right] \tag{54}$$

- Existem várias formas canônicas possíveis.

- No Matlab use:

```
> > [A,B,C,D] = tf2ss(nun,den)
```

para obter a forma canônica controlável

$\Rightarrow$ Neste caso, se o sistema é multivariável, `den` é o menor denominador comum (não necessariamente mônico);

$\Rightarrow$ `num` tem de ser informado *após* obter o menor denominador comum.

- Seja $\mathbf{G}_{\mathsf{C}i}(s)$ a i-ésima coluna de $\mathbf{G}(s)$ e $u_i(t)$ a correspondente entrada. Então:

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{G}_{\mathsf{C}1}(s)u_1(s) + \mathbf{G}_{\mathsf{C}2}(s)u_2(s) + \ldots = \mathbf{Y}_{\mathsf{C}1}(s) + \mathbf{Y}_{\mathsf{C}2}(s) + \ldots$$

Exercícios Complementares

1. Fazer o exercício 4.9, página 118 do livro do Chen.
2. Refazer o exemplo 4.7, página 105 do livro do Chen.

   $\Rightarrow$ Veja que a matriz obtida no exemplo 4.7 não é algebricamente equivalente a (53)–(54), porém possuem a *mesma* matriz de transferência. São, portanto, equivalentes para a resposta com estados nulos.