

Modelagem e especificações do Sistema Ball and Beam

Bernardo Bresolini* Ester Queiroz Alvarenga*

* Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais,
Divinópolis - MG (e-mails: berbresolini14@gmail.com e
esterqueirozalvarenga@gmail.com).

Resumo

O trabalho final da disciplina de Laboratório de Análise de Sistemas Lineares tem por objetivo o desenvolvimento de uma planta didática, de modo que sejam aplicados os conhecimentos mecatrônicos adquiridos pelos autores ao longo do curso de graduação em Engenharia Mecatrônica. Adotando, em especial, os saberes dos eixos de Modelagem e Controle de Processos. Desta forma, o presente relatório visa descrever a terceira etapa deste trabalho, apresentando a modelagem de projeto, bem como a simulação para validação do mesmo e o dimensionamento e especificações da planta física.

Palavras-chaves: Ball and beam. Modelagem. Mecatrônica.

Abstract

The objective of the final task of the discipline of Laboratory of Linear System Analysis is the development of a didactic design, so that mechatronic knowledge, acquired by the authors of this paper in undergraduate mechatronics engineering, is applied. Adopting, in particular, the knowledge of modeling and process control axes. Thus, this report aims to describe the third step of this work, presenting the project modeling, as well as the simulation for its validation and the sizing and specifications of the physical plant.

Keywords: Ball and beam. Modeling. Mechatronics.

1. SISTEMA BALL AND BEAM

O sistema *ball and beam* é um clássico sistema eletromecânico subatuado com dois graus de liberdade e somente um atuador. A barra rotaciona num plano vertical em função do torque desenvolvido por um motor; enquanto que a bola pode rolar livremente ao longo da barra (MARTÓN *et al.*, 2008, p. 3724).

O conjunto formado pela bola e pela viga tem propósito de controlar a posição da bola sobre a barra com movimentos rotacionais. Tal sistema descreve um processo com aplicações diretas na área de controle, como o manuseio da inclinação de aeronaves.

A viga deve ser capaz de rotacionar no plano vertical, logo ela deve ser biarticulada. Em uma das suas extremidades, há uma junção com um servomotor, por meio de dois elos (barras), capaz de rotacionar a viga, como mostra a FIG. 1.

2. MODELAGEM

Considere o mecanismo quatro barras exposto em 2(a). A barra NM é o solo do sistema. Seja o *link* 4 a entrada do mecanismo e a barra MA a saída. Deseja-se conhecer a relação entre θ e α . Para tanto, redesenha-se o mecanismo como um laço de vetores como mostrado na FIG. 2(b). Rotacionando no sentido anti-horário este sistema em β_0 , obtém-se o sistema mostrado em 2(c).

A TAB. mostra as relações entre os ângulos do *frame* da FIG. 2(c) com os da FIG. 2(b). Note que nesse último, pelo

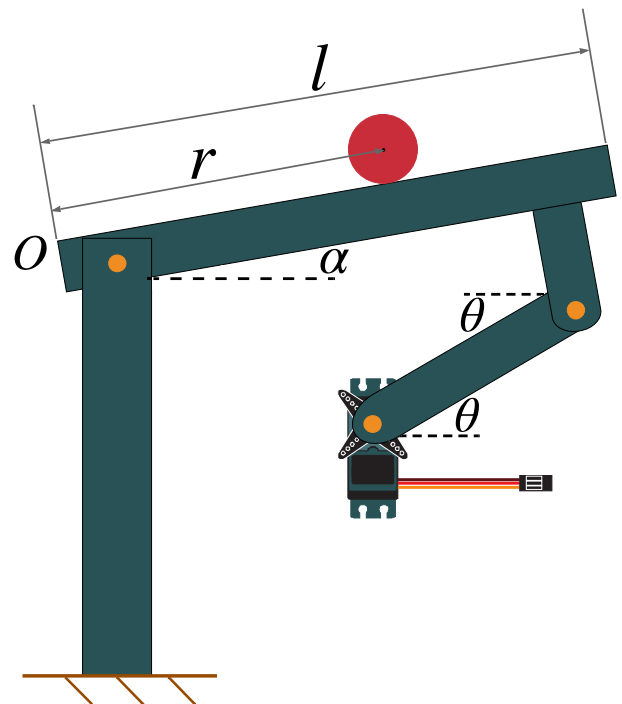
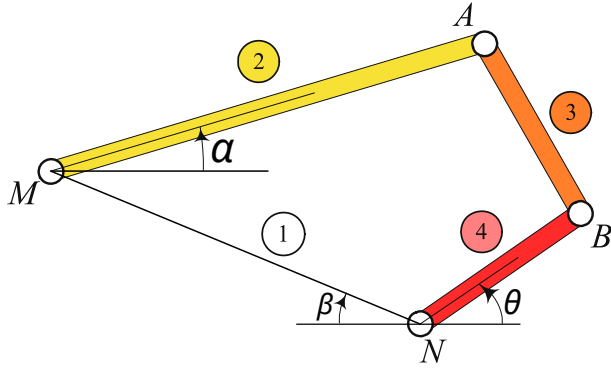
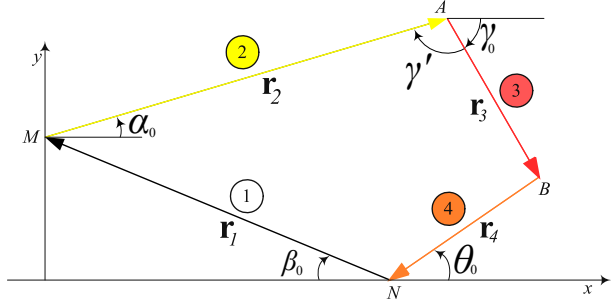


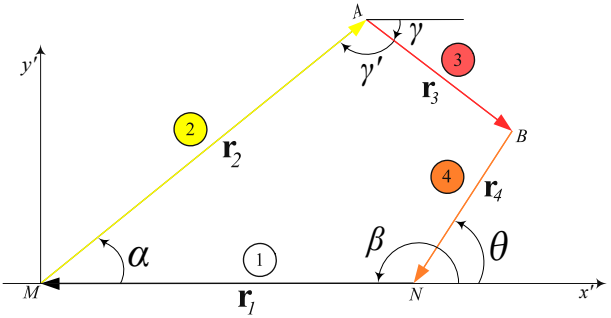
Figura 1. Esquemático do sistema *ball and beam*



(a) Mecanismo quatro barras



(b) Laço de vetores do mecanismo quatro barras



(c) Laço de vetores com relação ao solo do mecanismo quatro barras

Figura 2. Esquemático do mecanismo quatro barras

Teorema dos Alternos Internos, sabe-se que $\alpha = \alpha_0 + \beta_0$. Ainda, a barra AB é rotacionada em anti-horário, fazendo com que $\gamma = \gamma_0 - \beta_0$. Já a barra BN tem uma angulação final de $\theta = \theta_0 + \beta_0$. A rotação geral do mecanismo, não afeta os ângulos internos de tal, ou seja, o valor de γ' permanece constante. Diante disto, constata-se que ao se determinar a relação entre θ e α , encontra-se a relação entre θ_0 e α_0 .

Tabela 1. Representação vetorial do mecanismo quatro barras das FIG. 2(b) e 2(c)

Link	Vetor	Ângulo inicial	Ângulo final	Comprimento
1	\mathbf{r}_1	β_0	π	a
2	\mathbf{r}_2	α_0	$\alpha = \alpha_0 + \beta_0$	ℓ
3	\mathbf{r}_3	γ_0	$\gamma = \gamma_0 - \beta_0$	b
4	\mathbf{r}_4	θ_0	$\theta = \theta_0 + \beta_0$	d

A soma vetorial dos vetores da barra partindo-se de M é nula. Assim sendo, segue-se

$$\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_4 = \mathbf{0} \quad (1)$$

$$\ell(\mathbf{i} \cos \alpha + \mathbf{j} \sin \alpha) + b(\mathbf{i} \cos \gamma - \mathbf{j} \sin \gamma) + d(-\mathbf{i} \cos \theta - \mathbf{j} \sin \theta) - \mathbf{ia} = \mathbf{0} \quad (2)$$

Trabalhando separadamente as coordenadas em x' e y' , segue-se

$$\begin{cases} \ell \cos \alpha + b \cos \gamma - d \cos \theta - a = 0 \\ \ell \sin \alpha - b \sin \gamma - d \sin \theta = 0 \end{cases} \quad (3)$$

isolando o termo com γ

$$\begin{cases} b \cos \gamma = a + d \cos \theta - \ell \cos \alpha \\ b \sin \gamma = \ell \sin \alpha - d \sin \theta \end{cases} \quad (4)$$

elevando ambas equações ao quadrado, chega-se a

$$\begin{aligned} (b \cos \gamma)^2 &= (a + d \cos \theta - \ell \cos \alpha)^2 \\ b^2 \cos^2 \gamma &= a^2 + d^2 \cos^2 \theta + \ell^2 \cos^2 \alpha + \\ &+ 2ad \cos \theta - 2a\ell \cos \alpha - 2d\ell \cos \theta \cos \alpha \end{aligned} \quad (5)$$

e

$$\begin{aligned} (b \sin \gamma)^2 &= (\ell \sin \alpha - d \sin \theta)^2 \\ &= \ell^2 \sin^2 \alpha + d^2 \sin^2 \theta - 2d\ell \sin \alpha \sin \theta \end{aligned} \quad (6)$$

somando-se as equações (5) e (6),

$$\begin{aligned} b^2 &= a^2 + d^2 + \ell^2 + 2ad \cos \theta - 2a\ell \cos \alpha - \\ &- 2d\ell (\cos \theta \cos \alpha + \sin \theta \sin \alpha) \end{aligned} \quad (7)$$

Decorre da trigonometria que $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$, assim

$$b^2 = a^2 + d^2 + \ell^2 + 2ad \cos \theta - 2a\ell \cos \alpha - 2d\ell \cos(\theta - \alpha) \quad (8)$$

Isolando $\cos(\theta - \alpha)$,

$$\cos(\theta - \alpha) = J_1 + J_2 \cos \theta - J_3 \cos \alpha \quad (9)$$

sendo

$$J_1 = \frac{a^2 + d^2 + \ell^2 - b^2}{2d\ell}, \quad J_2 = \frac{a}{\ell}, \quad J_3 = \frac{a}{d}$$

A equação (9) é denominada de equação de Freudenstein, em homenagem ao amplamente considerado pai da cinemática moderna, Ferdinand Freudenstein, que a desenvolveu em seu PhD, em 1954. Ela pode ser reescrita a partir das identidades

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} \quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} \quad (10)$$

pois

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} \left[\cos \theta (1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}) + 2 \sin \theta \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right] &= J_1 + \\ &+ J_2 \cos \theta - J_3 \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} \end{aligned}$$

multiplicando ambos os lados por $1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}$, chega-se a

$$\begin{aligned} \cos \theta (1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}) + 2 \sin \theta \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} &= J_1 (1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}) + \\ &+ J_2 \cos \theta (1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}) - J_3 (1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}) \end{aligned}$$

colocando os termos em evidência,

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \left(J_1 + J_2 \cos \theta + \cos \theta + J_3 \right) - 2 \sin \alpha \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \\ + J_1 + J_2 \cos \theta - \cos \theta - J_3 = 0 \end{aligned}$$

Sejam A , B e C funções dependentes de α , tais que

$$A = J_1 + (J_2 + 1) \cos \theta + J_3$$

$$B = -2 \sin \alpha$$

$$C = J_1 + (J_2 - 1) \cos \theta - J_3$$

A equação se torna

$$A \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} + B \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + C = 0 \quad (11)$$

uma função de segundo grau de fácil resolução.

Encontrando-se α

$$\alpha = 2 \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \right) \quad (12)$$

3. IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

Uma identidade trigonométrica é uma relação entre as funções trigonométricas. Inicialmente, definir-se-á as funções trigonométricas $\operatorname{sen} \theta$, $\cos \theta$, $\operatorname{tg} \theta$, $\operatorname{cosec} \theta$, $\sec \theta$ e $\cotg \theta$ para, então, utilizar da sua definição para a demonstração de algumas identidades trigonométricas que foram usadas.

3.1 Definição e periodicidade

Definição 1. Seja um sistema coordenadas Oxy . Considere ainda um ponto qualquer $P(x, y)$ sobre o lado final de θ e $|OP| = r$, como mostra a FIG. 3. Então, define-se

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{y}{r} \quad \operatorname{cosec} \theta = \frac{r}{y}$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r} \quad \sec \theta = \frac{r}{x}$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x} \quad \cotg \theta = \frac{x}{y}$$

uma vez que a divisão por 0 é indefinida, $\operatorname{tg} \theta$ e $\sec \theta$ são indefinidas quando $x = 0$ e $\operatorname{cosec} \theta$ e $\cotg \theta$ são indefinidas quando $y = 0$.

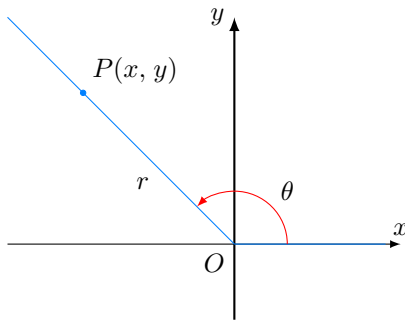


Figura 3. Ponto $P(x, y)$ no sistema Oxy

Note que os ângulos θ e $\theta + 2\pi$ têm o mesmo lado final, destarte

$$\boxed{\operatorname{sen}(\theta + 2\pi) = \operatorname{sen} \theta} \quad \boxed{\cos(\theta + 2\pi) = \cos \theta} \quad (13)$$

isto informa que as funções seno e cosseno são periódicas de período fundamental igual a 2π .

3.2 Identidades trigonométricas básicas

Seja um ponto qualquer $P(x, y)$ cuja distância é $|OP| = r$ com um ângulo θ com o eixo Ox . A distância entre P e

a origem O é definida por $|OP| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Sendo assim, segue-se

$$\boxed{\operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta = \frac{y^2}{r^2} + \frac{x^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2} = 1} \quad (14)$$

Se $\cos \theta \neq 0$, dividindo ambos os lados por $\cos^2 \theta$ observa-se

$$\boxed{\operatorname{tg}^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta} \quad (15)$$

Analogamente, se $\operatorname{sen} \theta \neq 0$, a divisão de (14) por $\operatorname{sen}^2 \theta$ resulta em

$$\boxed{1 + \cotg^2 \theta = \operatorname{cosec}^2 \theta} \quad (16)$$

3.3 Lei dos Cossenos

Seja um triângulo qualquer com lados a , b e c e ângulo θ entre os lados com comprimentos a e b , como mostra a FIG. 4.

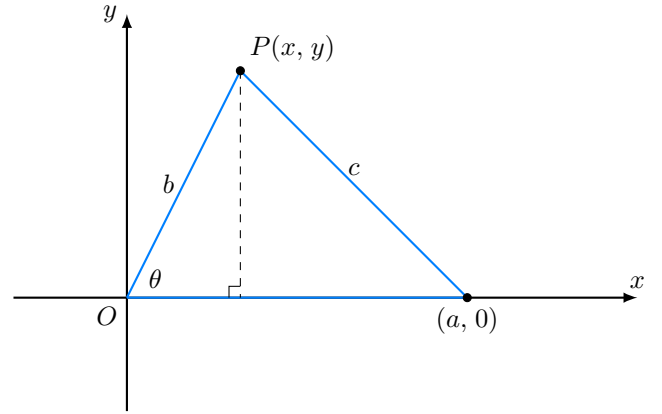


Figura 4. Triângulo qualquer

A distância c é calculada pela distância entre os pontos $P(x, y)$ e $(a, 0)$, fazendo

$$c^2 = (a - x)^2 + y^2$$

contudo, as coordenadas x e y podem ser escritas em função de b e θ ,

$$x = b \cos \theta \quad y = b \operatorname{sen} \theta$$

e, portanto, segue-se

$$\begin{aligned} c^2 &= (a - b \cos \theta)^2 + (b \operatorname{sen} \theta)^2 \\ &= a^2 - 2ab \cos \theta + b^2 \cos^2 \theta + b^2 \operatorname{sen}^2 \theta \end{aligned}$$

colocando b^2 em evidência e sabendo que $\operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$, demonstra-se a Lei dos Cossenos

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta} \quad (17)$$

3.4 Funções par e ímpar

Definição 2. Uma função $f : D \rightarrow I$ é par se, e somente se,

$$f(-x) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{D}$$

Definição 3. Uma função $f : D \rightarrow I$ é ímpar se, e somente se,

$$f(-x) = -f(x), \quad \forall x \in \mathbb{D}$$

A expansão em série de Taylor das funções $\sin \theta$ e $\cos \theta$, $\forall \theta \in \mathbb{R}$, resulta em

$$\sin \theta = \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i \theta^{2i+1}}{(2i+1)!} \quad \cos \theta = \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i \theta^{2i}}{(2i)!}$$

Portanto, avaliando para a função seno os casos para $-\theta$, tem-se

$$\begin{aligned} \sin(-\theta) &= \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i (-\theta)^{2i+1}}{(2i+1)!} \\ &= \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i (-1)^{2i+1} \theta^{2i+1}}{(2i+1)!} \\ &= \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i (-1)^{2n} (-1) \theta^{2n+1}}{(2i+1)!} \end{aligned}$$

uma vez que $2n$ é sempre par, então $(-1)^{2n} = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Ainda, como -1 é uma constante, segue-se

$$\sin(-\theta) = - \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i \theta^{2i+1}}{(2i+1)!}$$

Deste modo, conclui-se que

$$\boxed{\sin(-\theta) = -\sin \theta} \quad (18)$$

uma função ímpar.

Avaliando-se para a função cosseno tem-se,

$$\begin{aligned} \cos(-\theta) &= \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i (-\theta)^{2i}}{(2i)!} \\ &= \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i (-1)^{2i} \theta^{2i}}{(2i)!} \end{aligned}$$

Novamente, $(-1)^{2n} = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, obtém-se

$$\cos(-\theta) = \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i \theta^{2i}}{(2i)!}$$

Assim sendo, conclui-se que

$$\cos(-\theta) = \cos \theta \quad (19)$$

uma função par.

3.5 Fórmula da adição/subtração

Considere os triângulos dispostos como mostra a FIG. 5. A hipotenusa do triângulo retângulo é unitária e faz um ângulo α com o eixo Ox . O segundo também é composto por um lado unitário, mas com inclinação β em relação à Ox , com outro lado indo até a ponta da hipotenusa.

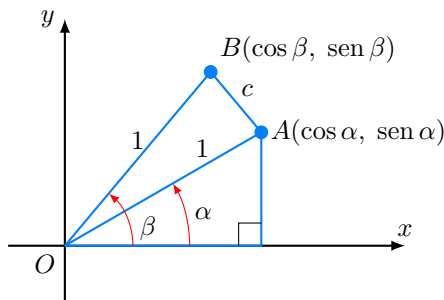


Figura 5. Triângulos para a fórmula da adição

Aplicando a Lei dos Cossenos para c resulta em

$$c^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \cos(\beta - \alpha)$$

Adicionalmente, do cálculo da distância c decorre que

$$c^2 = |BA|^2 = (\cos \beta + \cos \alpha)^2 + (\sin \beta + \sin \alpha)^2$$

expandindo os termos

$$\begin{aligned} c^2 &= \cos^2 \beta - 2 \cos \beta \cos \alpha + \cos^2 \alpha \\ &\quad + \sin^2 \beta - 2 \sin \beta \sin \alpha + \sin^2 \alpha \end{aligned}$$

Aplicando a propriedade de $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ obtém-se

$$c^2 = 2 - 2 \cos \beta \cos \alpha - 2 \sin \beta \sin \alpha$$

Igualando as equações e dividindo ambos os lados por -2 , segue-se

$$\boxed{\cos(\beta - \alpha) = \cos \beta \cos \alpha + \sin \beta \sin \alpha} \quad (20)$$

Especialmente, caso se tenha $\beta = \pi/2$, obtém-se

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \frac{\pi}{2} \cos \alpha + \sin \frac{\pi}{2} \sin \alpha$$

consequentemente,

$$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha} \quad (21)$$

Derivando ambos os lados é obtido,

$$-\left[-\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right] = \cos \alpha$$

o qual resulta em

$$\boxed{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha} \quad (22)$$

Adicionalmente, tomando $-\alpha$ ao invés de α em (20),

$$\cos(\beta + \alpha) = \cos \beta \cos(-\alpha) + \sin \beta \sin(-\alpha)$$

utilizando as propriedades $\cos(-\theta) = \cos \theta$ e $\sin(-\theta) = -\sin \theta$, resulta em

$$\boxed{\cos(\beta + \alpha) = \cos \beta \cos \alpha - \sin \beta \sin \alpha} \quad (23)$$

Substituindo α por $\frac{\pi}{2} - \alpha$, vê-se

$$\cos\left[\beta + \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right] = \cos \beta \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \sin \beta \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

Entretanto, $\cos\left[\beta + \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right] = \cos\left[\frac{\pi}{2} - (\alpha - \beta)\right]$. Usando as identidades (21) e/ou (22), ter-se-á

$$\boxed{\sin(\alpha - \beta) = \cos \beta \sin \alpha - \sin \beta \cos \alpha} \quad (24)$$

Substituindo β por $-\beta$, demonstra-se

$$\boxed{\sin(\alpha + \beta) = \cos \beta \sin \alpha + \sin \beta \cos \alpha} \quad (25)$$

3.6 Fórmula da adição/subtração para a tangente

Estas fórmulas são deduzidas a partir da divisão das equações (25) por (23),

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta}$$

dividindo em cima e em baixo por $\cos \alpha \cos \beta$,

$$\boxed{\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}} \quad (26)$$

Especialmente, para $\alpha = \beta$,

$$\boxed{\operatorname{tg}(2\alpha) = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} \quad (27)$$