



Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais  
Departamento de Engenharia Mecatrônica  
Engenharia Mecatrônica

## **Projeto de controladores baseado em lugar geométrico das raízes**

Bernardo Bresolini e Ester Q. Alvarenga

Divinópolis

Setembro/2020

# Sumário

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>1</b> | <b>Introdução . . . . .</b>                              | <b>1</b>  |
| 1.1      | Objetivos . . . . .                                      | 1         |
| <b>2</b> | <b>Referencial Teórico . . . . .</b>                     | <b>2</b>  |
| 2.1      | Projeto de controlador via LGR com compensação . . . . . | 2         |
| 2.1.1    | Compensadores em avanço . . . . .                        | 2         |
| 2.1.2    | Compensador de atraso . . . . .                          | 3         |
| 2.2      | Parâmetros para sistemas de segunda ordem . . . . .      | 4         |
| 2.3      | Análise Frequencial . . . . .                            | 5         |
| 2.3.1    | Referência e saída . . . . .                             | 6         |
| 2.3.2    | Sinal de controle e saída . . . . .                      | 7         |
| 2.3.3    | Ruído na saída e saída do sistema . . . . .              | 7         |
| <b>3</b> | <b>Projeto de controladores baseado em LGR . . . . .</b> | <b>8</b>  |
| 3.1      | Projeto via lugar geométrico das raízes . . . . .        | 8         |
| 3.1.1    | Compensadores de avanço de fase . . . . .                | 9         |
| 3.1.2    | Compensador de atraso de fase . . . . .                  | 10        |
| 3.2      | Análise Frequencial . . . . .                            | 11        |
| <b>4</b> | <b>Resultados e Discussão . . . . .</b>                  | <b>12</b> |
| 4.1      | Caso 1 . . . . .   | 12        |
| 4.2      | Caso 2 . . . . .   | 15        |
| 4.3      | Caso 3 . . . . .   | 18        |
| 4.4      | Caso 4 . . . . .   | 19        |
| 4.5      | Análise Frequencial . . . . .                            | 21        |
| 4.5.1    | Relação saída-referência . . . . .                       | 21        |
| 4.5.2    | Relação sinal de controle e saída . . . . .              | 22        |
| 4.5.3    | Relação ruído da saída para a saída . . . . .            | 22        |
| <b>5</b> | <b>Conclusão . . . . .</b>                               | <b>24</b> |
|          | <b>Referências . . . . .</b>                             | <b>25</b> |

# 1 Introdução

Um método de controle clássico para o projeto de controladores é o lugar geométrico das raízes (LGR). Contudo, para sistemas subamortecidos de segunda ordem, a abordagem via LGR é limitada ao ponto de interseção dos polos. Sendo assim, é desenvolvidos compensadores de avanço e atraso que permitem modificar o desenho do LGR e assim, projetar controladores com maior flexibilidade nos critérios de desempenho.

## 1.1 Objetivos

O presente trabalho ocupa-se em descrever e detalhar a realização desse processo para a técnica de projeto de controladores baseada no lugar geométrico das raízes.

Para este estudo, faz-se necessário selecionar o processo a ser controlado; obter o modelo do processo; especificar o desempenho desejado; aplicar a técnica de projeto de controlador; verificar os resultados alcançados; analisar a malha fechada e por fim, realizar o controlador.

Ainda será analisada a resposta frequencial de um dos 4 processos percorridos. Será traçado o diagrama de Bode para 3 análises: referência-saída, sinal de controle-ruído e sinal de controle-distúrbio.

## 2 Referencial Teórico

### 2.1 Projeto de controlador via LGR com compensação

Dada a limitação do LGR na abrangência de polos do sistema, o método pode ser expandido aplicando uma compensação na malha de controle que force o LGR passar pelos polos desejados. Para tanto, é estudado os compensadores em avanço, em atraso e em avanço-atraso. Os dois primeiros serão descritos.

#### 2.1.1 Compensadores em avanço

A estrutura do compensador em avanço de fase é

$$G_c(s) = K_c \frac{s + 1/T}{s + 1/(\alpha T)}, \quad (0 < \alpha < 1). \quad (2.1)$$

ou seja, o polo está mais a direita do zero. Analisando a resposta frequencial, via Diagrama de Bode, de  $G_c$ , tem-se a FIG. 1, verifica-se que a fase é avançada, daí o nome avanço de fase.

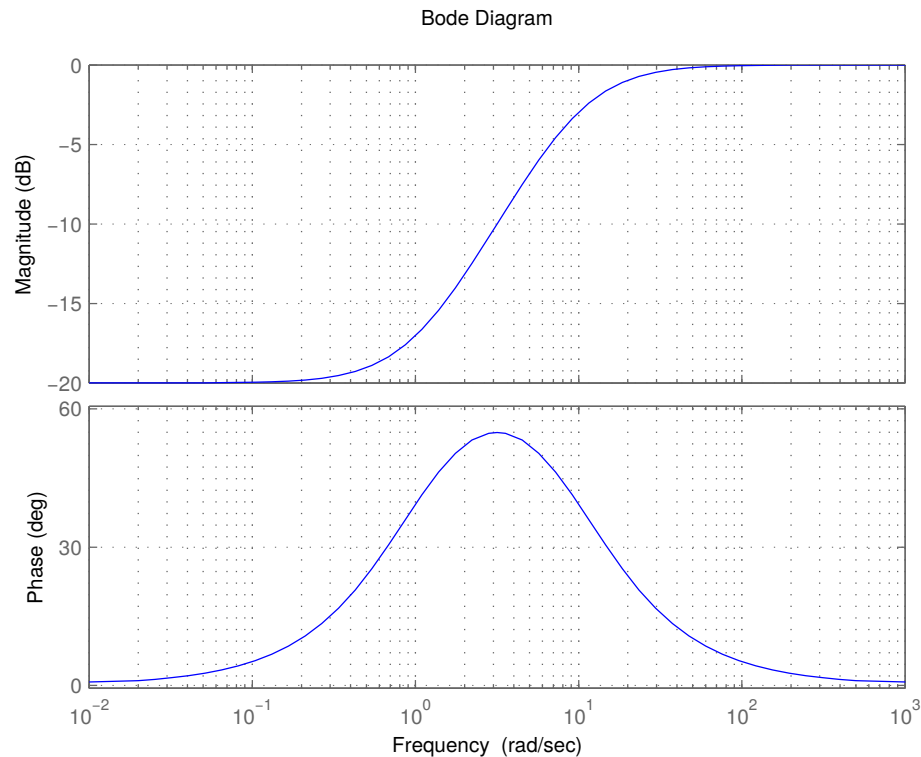


Figura 1 – Diagrama de bode de (2.1)

Ainda, a adição de de um zero (o zero está mais a direita, então terá mais influência no sistema que o polo) na função de transferência do processo tem o efeito de deslocar o LGR para a esquerda, tendendo a estabilizar e acomodar mais rapidamente o sistema. Por isso, compensadores em avanço de fase são a primeira abordagem para redesenhar o LGR. Visto que o objetivo principal é a estabilidade do sistema.

### 2.1.2 Compensador de atraso

A estrutura do compensador em atraso de fase é

$$G_c(s) = K_c \frac{s + 1/T}{s + 1/(\alpha T)}, \quad (\alpha < 1). \quad (2.2)$$

ou seja, o polo está mais a esquerda do zero. Analisando a resposta frequencial, via Diagrama de Bode, de  $G_c$ , tem-se a FIG. 2, verifica-se que a fase é atrasado, daí o nome atraso de fase.

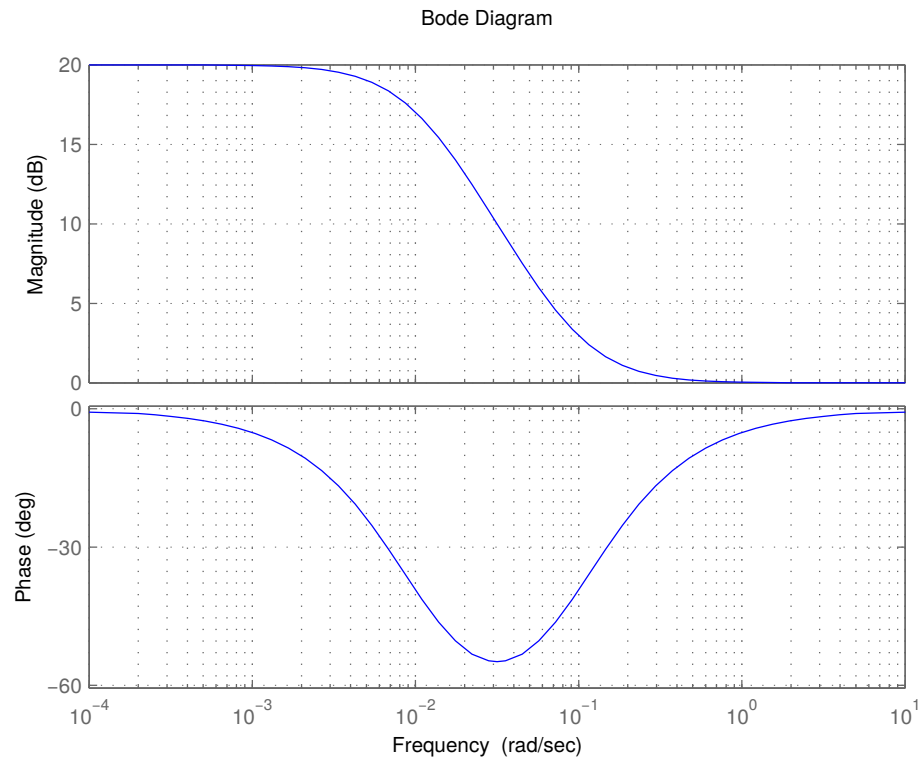


Figura 2 – Diagrama de bode de (2.2)

Ainda, a adição de de um polo na função de transferência do processo tem o efeito de deslocar o LGR para a direita, tendendo a reduzir a estabilidade relativa e acomodar mais lentamente o sistema. Por isso, compensadores em atraso de fase são a segunda abordagem para redesenhar o LGR, mais usados para a correção do erro de regime permanente.

## 2.2 Parâmetros para sistemas de segunda ordem

O cálculo dos parâmetros de projeto são feitas a partir da determinação dos polos do sistema em malha fechada. Estes, por sua vez, são escolhidos conforme os critérios de especificação, sobressinal  $OS\%$  e tempo de acomodação  $t_s$ , de acordo com as equações

$$\zeta = -\frac{\ln OS}{\sqrt{\ln^2 OS + \pi^2}} \quad (2.3a)$$

$$\omega_n = \frac{a}{\zeta t_s} \approx \frac{4}{\zeta t_s} \quad (2.3b)$$

sendo  $a$  uma constante encontrada, no eixo  $y$ , pelo gráfico exposto na FIG. 3 em função do  $\zeta$  encontrado em (2.3a). Visando simplificar o projeto do controlador, adota-se  $a = 4$  para todo o valor de  $\zeta$ .

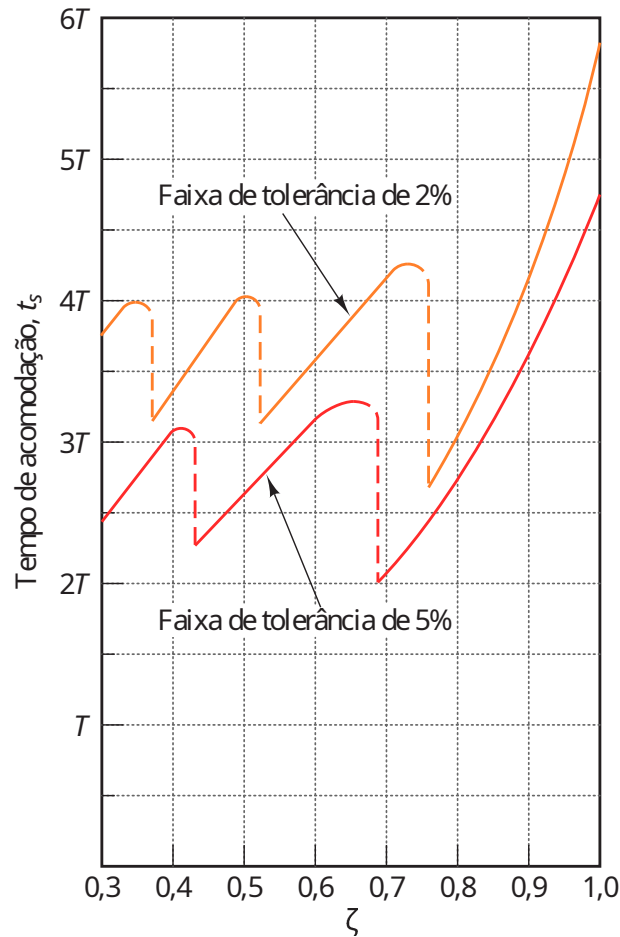


Figura 3 – Tempo de acomodação em função de  $\zeta$  e a constante de tempo  $T = \zeta\omega_n$

Fonte: OGATA, p. 158, 2010. (Adaptação de cores).

Com estes critérios, obtém-se os polos do sistema,

$$p = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \quad (2.4)$$

Ainda, o tempo de pico  $t_p$ , segundo o Nise (2015, p. 146), é calculado por

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (2.5)$$

Comparando com a equação (2.4), verifica-se que  $t_p$  está relacionado estritamente com o inverso da parte imaginária dos polos.

O tempo de subida  $t_r$ , definido como o tempo para o sistema ir de 10% a 90% do valor final, é encontrado conforme a curva apresentada na FIG. 4. A curva é aproximada pelo polinômio

$$\omega_n t_r = 1,76\zeta^3 - 0,417\zeta^2 + 1,039\zeta + 1 \quad (2.6)$$

cujo erro máximo é de 0,5% para  $0 < \zeta < 0,9$ .

Note que o tempo de subida normalizado cresce à medida que  $\zeta$  aumenta. Logo, para diminuí-lo, é necessário aumentar o percentual de *overshoot*. Contudo, de (2.3b), sabe-se que quando  $\zeta$  diminui,  $\omega_n$  cresce. Logo, é necessário um certo equilíbrio e algumas tentativas para encontrar um valor menor para  $t_r$ .

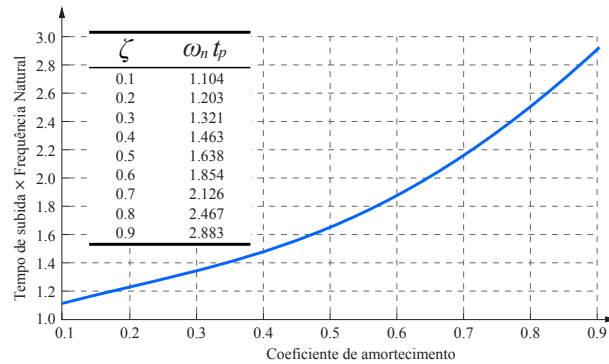


Figura 4 –  $\omega_n t_p \times \zeta$  para a resposta de um sistema de segunda ordem subamortecido

Fonte: NISE, p. 177, 2015. (Adaptação de cores e adição do grid).

## 2.3 Análise Freqüencial

Processos industriais muitas vezes estão sujeitos a ruídos, perturbações e distúrbios. Sendo assim, após fazer um projeto de controlador, é necessário investigar como estes fenômenos afetarão o sistema. Para tanto, utiliza-se do diagrama de Bode para analisar o ganho em baixas frequências  $k_{LF}$ , a frequência de ressonância  $\omega_p$  e a faixa de passagem  $\omega_{BW}$  para três circunstâncias:

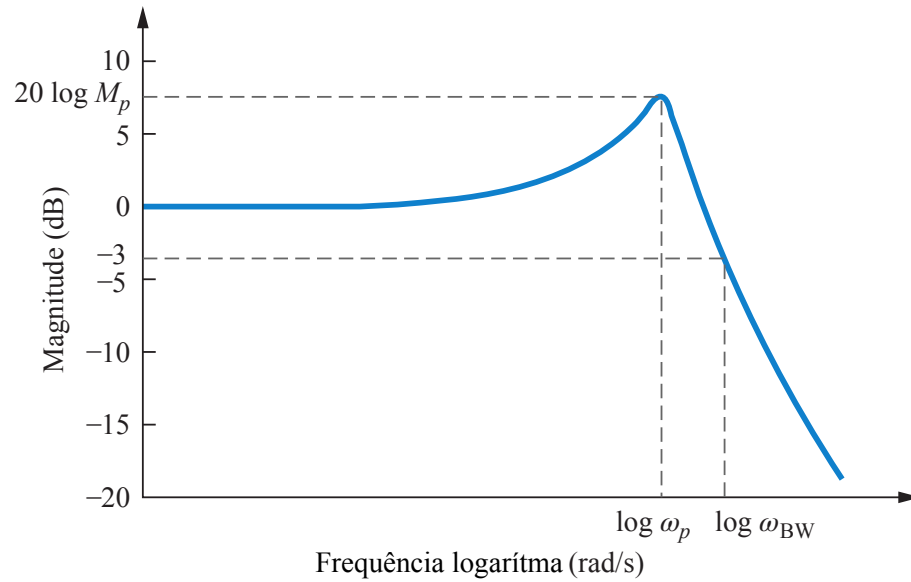


Figura 5 – Faixa de passagem e frequência de ressonância

Fonte: NISE, p. 571, 2015. (Adaptação de cores).

1. referência  $R(s)$  para saída  $Y(s)$ ;
2. entrada de distúrbio  $\delta(s)$  para a saída  $Y(s)$ ;
3. ruído  $\eta(s)$  na saída para a saída  $Y(s)$ .

A FIG. 5 mostra um diagrama de Bode de um sistema de segunda ordem. Nela está marcado a frequência de ressonância  $\omega_p$ , na qual ocorre o maior ganho do sistema. Ainda é marcado a faixa de passagem  $\omega_{BW}$ , frequência na qual a magnitude é -3 dB.

Uma excitação na frequência de ressonância causará um maior efeito no sistema, visto que o ganho é o maior. Portanto, ela deve ser conhecida para se evitar com que os ruídos estejam nessa fase. A faixa de passagem mostrará até que frequência o sistema pode ser excitado e reagir com ganhos significativos. Para valores acima dela, o sistema quase não reage. Então, é preferível que o ruído esteja após ela.

### 2.3.1 Referência e saída

Para analisar a relação da referência e da saída, é necessário conhecer a equação de malha fechada o sistema.



### 2.3.2 Sinal de controle e saída

Os distúrbios no sinal de controle podem ser analisados à partir da função transferência entre o distúrbio na saída do controlador e a saída do sistema. Deste modo, segue

$$\left. \frac{Y(s)}{\delta(s)} \right|_{\text{série}} = \frac{G}{1 + CG}. \quad (2.7)$$

### 2.3.3 Ruído na saída e saída do sistema

O ruído na saída  $\eta(s)$  do sistema pode ser investigado fazendo o diagrama de Bode da função transferência entre ele e a própria saída. Isto é,

$$\left. \frac{Y(s)}{\eta(s)} \right| = \frac{-CG}{1 + CG}, \quad (2.8)$$

válida para ambos os casos.

### 3 Projeto de controladores baseado em LGR

Foram selecionados quatro processos para serem estudados e testados com as técnicas de projeto de controlares. Estes sistemas são representados em função transferência e eles apresentam características mistas, compreendendo uma gama abrangente das possibilidades para sistemas SISO invariante no tempo e sem atraso. As funções de transferência dos processos são

$$G_1(s) = \frac{5(s + 0,5)}{s(s + 2)}, \quad (3.1a)$$

$$G_2(s) = \frac{5(s^2 + 6s + 13)(s + 0,5)}{(s - 2)(s - 1)(s^2 + 8s + 41)}, \quad (3.1b)$$

$$G_3(s) = \frac{5(s - 5)}{(s - 2)(s + 2)}, \quad (3.1c)$$

$$G_4(s) = \frac{5(s - 5)}{s^2(s - 2)}. \quad (3.1d)$$

Como se observa, existem processos com integrador único ou duplo; zeros de fase mínima ou não mínima; polos estáveis e/ou instáveis.

Todos os sistemas devem ter erro nulo para sinais de referência constantes por partes. Eles também devem atender aos critérios de desempenho da TAB. 1.

Tabela 1 – Critérios de desempenho de cada processo estudado

| Caso | $t_s$   | $t_r$          | $OS\%$ | $t_p$ |
|------|---------|----------------|--------|-------|
| 1    | 1 s     | < possível     | 10%    | —     |
| 2    | 1 s     | qualquer       | 0%     | —     |
| 3    | 1 s     | < possível     | —      | —     |
| 4    | < 0,8 s | sem restrições | < 15%  | < 1 s |

#### 3.1 Projeto via lugar geométrico das raízes

Os parâmetros de projeto, são calculados por (2.3a) e (2.3b), que por sua vez definem a posição que os polos dominantes da malha fechada devem estar para que as especificações dadas para cada processo sejam cumpridas.

Com base na análise do lugar geométrico das raízes do processo, obtida pela função `rlocus()` do MATLAB, verifica-se se é ou não possível atender as especificações de desem-

penho apenas com a inserção de um ganho proporcional na malha fechada. Analisando se o lugar geométrico das raízes do sistema passa pelo polo desejado.

Caso não seja possível, é feito um estudo baseado na modificação do lugar das raízes dos sistemas, acrescentando zeros e polos no processo a partir de um compensador. Essa modificação é feita de modo que force o lugar das raízes a passar pelos polos de malha fechada desejados.

Fundamentado no efeito da adição de polos e zeros à função de transferência de malha aberta, escolhe-se o tipo de compensador a ser aplicado, compensadores avanço, atraso, ou avanço-atraso.

### 3.1.1 Compensadores de avanço de fase

Se no lugar geométrico das raízes não intercepta os polos desejados, então é necessário alterar as características do LGR.

Dado um sistema  $G(s)$  como

$$G(s) = \frac{\prod_{i=0}^n (s - z_i)}{\prod_{j=0}^m (s - p_j)}, \quad n < m \quad (3.2)$$

cujo interesse é que em malha fechada se tenha características dadas pelo par de polos dominantes

$$p = \zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2} \quad (3.3)$$

no qual  $\zeta$  e  $\omega_n$  são determinado por (2.3a) e (2.3b).

Contudo, é constatado que o LGR do sistema não passa pelo par de polos desejados, então é necessário uma compensação de fase. Para tanto, considere o controlador da forma

$$G_c(s) = K_c \alpha \frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1} = K_c \frac{s + 1/T}{s + 1/(\alpha T)}, \quad (0 < \alpha < 1) \quad (3.4)$$

um controlador com avanço de fase no qual  $\alpha$  e  $T$  são determinados com base na deficiência angular.  $K_c$  é determinado a partir do requisito de ganho de malha aberta.

Se o controlador  $G_c(s)$  e o processo  $G(s)$  estão conectados conforme a FIG. 6, então a função transferência de malha fechada  $H(s)$  é dada por

$$H(s) = \frac{G_c(s)G(s)}{G_c(s)G(s) + 1} \quad (3.5)$$

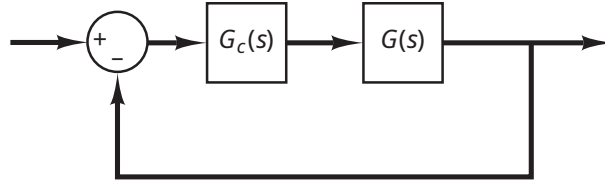


Figura 6 – Sistema de controle por compensação

Fonte: OGATA, p. 285, 2010. (Adaptação do bloco somador)

Assim, para que o denominador do processo tenha o desenvolvimento desejado o projeto deve satisfazer a

$$|G_c(s)G(s)| = 1 \quad (3.6a)$$

$$\angle G_c(s)G(s) = 180^\circ \quad (3.6b)$$

Aplicando (3.2) e (3.4) em (3.6b), segue

$$\sum_{i=0}^n \theta_i \Big|_{s=z_i} - \sum_{j=0}^m \phi_j \Big|_{s=p_i} + \theta_c - \phi_c = -180^\circ \quad (3.7)$$

sendo  $\theta$  e  $\phi$  o ângulo medido em anti-horário do zero ou polo, respectivamente, com o polo dominante do terceiro quadrante.

Atribuindo arbitrariamente o polo do compensador  $p_c = -1/(\alpha T)$  fica especificado  $\phi_c$  e, destarte a única variável de (3.7) é  $\theta_c$ .

Sabendo que no compensador em avanço o zero está sempre à direita do polo, isso implica que a distância  $d$  entre o zero do compensador e a parte real do polo dominante pode ser obtida fazendo

$$d = \frac{\text{Im } p}{\text{tg } \theta_c}. \quad (3.8)$$

O zero do compensador é então  $z_c = p + d$ . Então, o ganho  $K_c$  pode ser especificado resolvendo (3.6a), ao qual se torna

$$K_c = \frac{1}{\left| \frac{s - z_c}{s - p_c} \frac{\prod_{i=0}^n (s - z_i)}{\prod_{j=0}^m (s - p_j)} \right|_{s=p}} \quad (3.9)$$

### 3.1.2 Compensador de atraso de fase

Considere o processo descrito por (3.2) e o controlador dado por

$$G_c(s) = K_c \alpha \frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1} = K_c \frac{s + 1/T}{s + 1/(\alpha T)}, \quad (\alpha > 1) \quad (3.10)$$

isto é, agora o polo do compensador está à direita do seu zero.

Então utilizando a mesma topologia de controle para a compensação de avanço, mostrada na FIG. 6. A metodologia para obtenção dos parâmetros  $p_c$ ,  $z_c$  (e portanto,  $T$  e  $\alpha$ ) é conforme a seção 3.1.1 com diferença na determinação de  $z_c$ , ao qual deve ser obtido fazendo  $z_c = p - d$ .

## 3.2 Análise Freqüencial

Para estudar e investigar os efeitos de ruídos e perturbações, aos quais os processos estão submetidos, tomou-se como base o projeto de controlador de  $G_1(s)$ .

Utilizando a função `bode()` do MATLAB, plotou-se o diagrama da resposta em frequência para a função transferência da malha fechada do primeiro caso, que representa a relação saída - referência do processo.

A perturbação é avaliada a partir do `bode()` da função de transferência (2.7) e o ruído também pelo `bode()`, mas da função transferência (2.8).

## 4 Resultados e Discussão

### 4.1 Caso 1

O primeiro sistema possui um zero de fase mínima, um integrador e um polo estável, assim como demonstra a função de transferência,

$$G_1(s) = \frac{5(s + 0,5)}{s(s + 2)}, \quad (4.1)$$

A função `rlocus()` do MATLAB, apresentou o resultado exposto na FIG. 7. Como o lugar das raízes apresentado está localizado apenas sobre o eixo real, não existirá oscilação na resposta do sistema, implicando em  $OS = 0\%$ . Sabe-se que para este processo é especificado um *overshoot* de 10%, portanto, é necessário alterar o LGR deste processo.

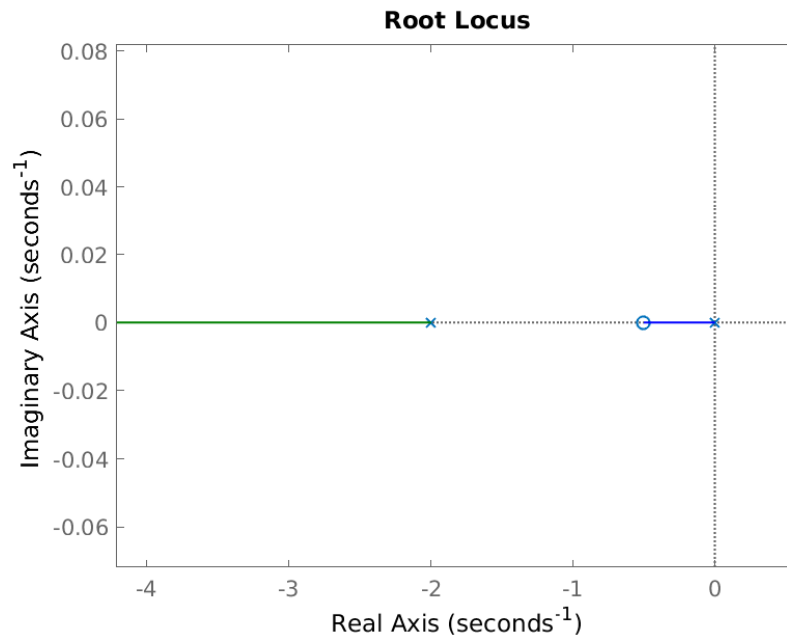


Figura 7 – Lugar geométrico das raízes para  $G_1(s)$

Como mostra a FIG. 8 um compensador em avanço não resulta num sistema com *overshoot*. Ao inserir o zero do compensador perto do zero do processo, o polo em  $-2$  será atraído para este enquanto que o polo do compensador tenderá a infinito. Logo, o sistema não apresenta mudanças significativas com a FIG. 7. Inserindo o zero do compensador à esquerda o comportamento será parecido

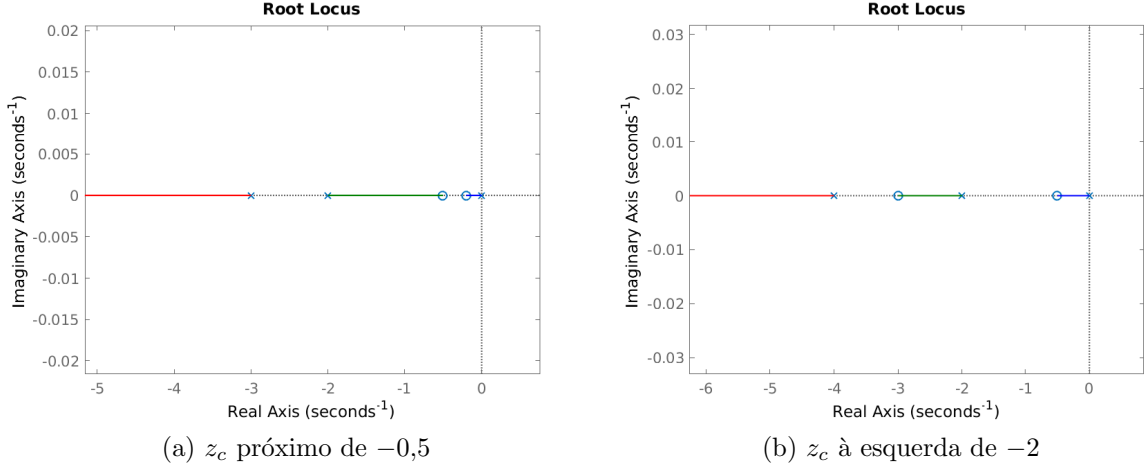


Figura 8 – Compensação por avanço de fase

Com isso, projetou-se o sistema com um compensador em atraso de fase da forma

$$G_{c1}(s) = K_{c1}\alpha_1 \frac{s + 1/T_1}{s + 1/(\alpha_1 T_1)}. \quad \alpha > 1. \quad (4.2)$$

considerando ainda, uma folga nas especificações. Isto é,  $t_s = 0,74$  s e  $OS = 7\%$ . Assim, os polos dominantes devem ser

$$p = -5,4054 \pm j6,3858 \quad (4.3)$$

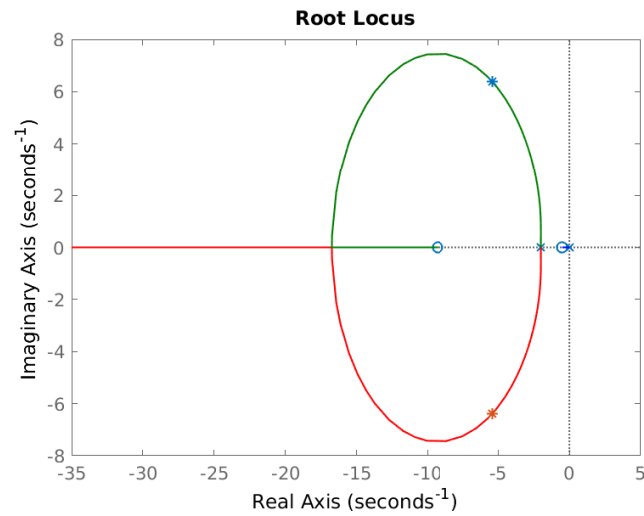
Dessa forma, atribuindo o polo do compensador em  $p_c = -2$ , a deficiência angular a ser compensada pela posição do zero é  $\theta_c = 58,86^\circ$ . Resolvendo (3.8) para a deficiência angular mencionada, o zero do compensador deve ser colocado em  $z_c = -9,264$ .

O LGR de  $G_c(s)G(s)$  para a variação de  $K_c$  é mostrado na FIG. 9, Nele é mostrado que os polos da malha fechada passam pelo polo desejado e assim, a compensação foi bem executada. Então, determinando o ganho corretamente, o sistema apresentará os polos conforme se deseja. Entretanto, o comportamento de malha fechada pode vir a não ser o esperado, dado a influência do outro polo e dos zeros.

Por fim, o ganho  $K_c$  do compensador é determinado resolvendo (3.9), obtendo  $K_c = 1,4587$ . Implementando o sistema de controle conforme a topologia da FIG. 6, segue que a malha fechada é equacionada como

$$H_1(s) = \frac{7,293s^2 + 71,22s + 33,78}{s^3 + 11,29s^2 + 75,22s + 33,78} \quad (4.4)$$

Aplicando um *step*, a resposta temporal de  $H_1(s)$  é como vista na FIG. 10. A resposta mostra que o sistema apresenta erro de regime permanente nulo, como requerido. Os parâme-

Figura 9 – LGR de  $G_c(s)G(s)$ 

tros do desempenho estão expostos na TAB. 2 ao qual é possível constatar que o controlador performou satisfatoriamente bem.

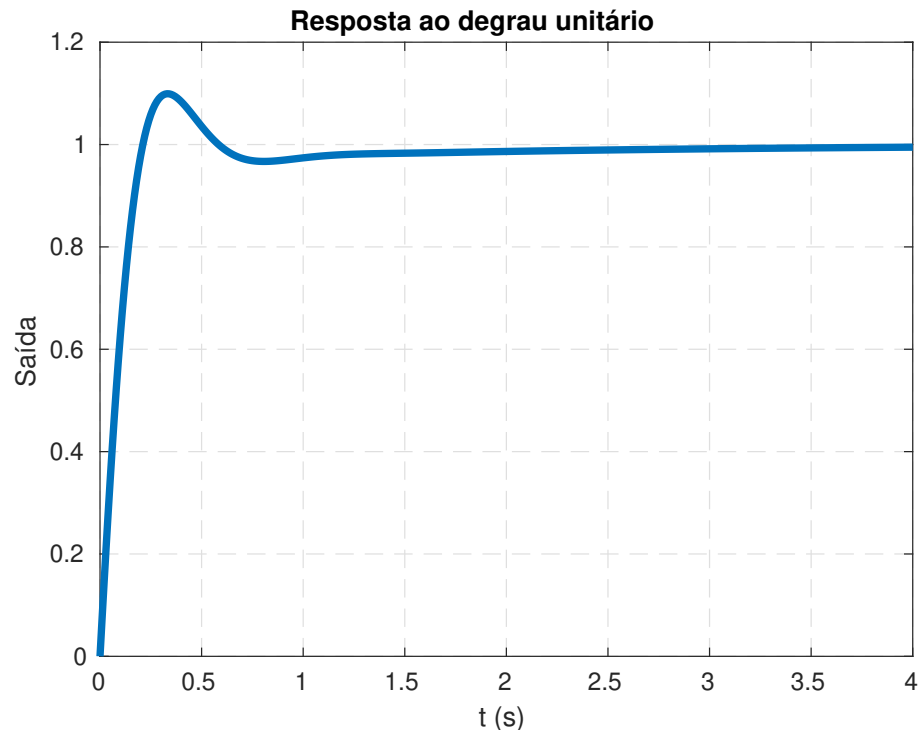
Figura 10 – Resposta temporal de  $H_1(s)$  a um degrau unitário



Tabela 2 – Desempenho da resposta

| Parâmetros | Valor  | Unidade |
|------------|--------|---------|
| $t_s$      | 1,1815 | s       |
| $t_r$      | 0,1555 | s       |
| $t_p$      | 0,3323 | s       |
| $OS$       | 9,9306 | %       |
| $US$       | 0      | %       |

## 4.2 Caso 2

O segundo sistema possui um zero de fase mínima e um par de zeros complexo conjugados, dois polos instáveis e um par de polos complexo conjugados. A sua forma é

$$G_2(s) = \frac{5(s^2 + 6s + 13)(s + 0,5)}{(s - 1)(s - 2)(s^2 + 8s + 41)}. \quad (4.5)$$

A fim de simplificar o controle e a análise de tal sistema em malha fechada, foi aplicada uma pré-compensação no processo  $G_{p2}(s)$  que irá reduzir a ordem de (4.5) para 2, fazendo

$$G_{p2} = \frac{13}{41} \cdot \frac{s^2 + 8s + 41}{s^2 + 6s + 13}. \quad (4.6)$$

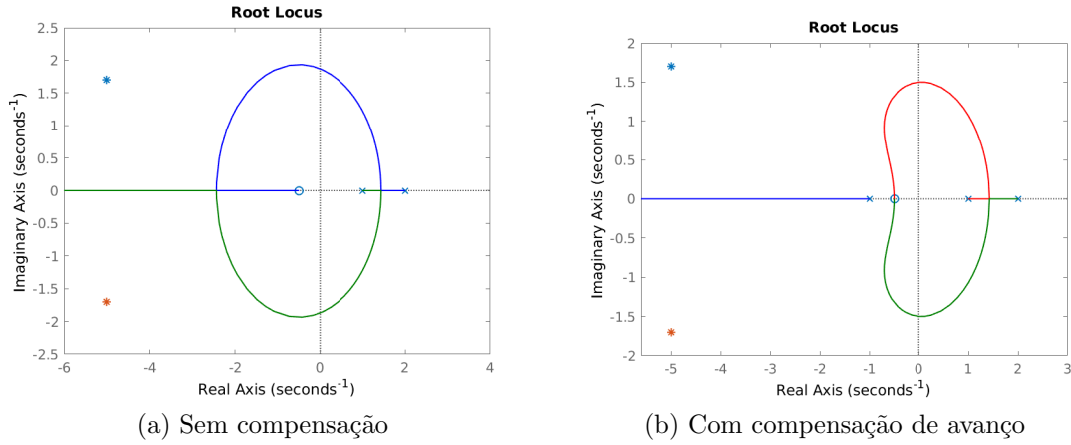
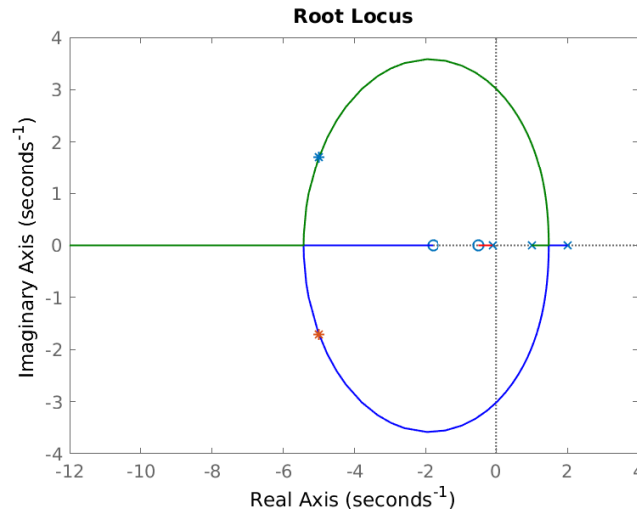
Admitindo uma folga no tempo de acomodação  $t_s = 0,8$  s e projetando o *overshoot* para 1%, os polos dominantes do sistema devem estar em

$$p = -5 \pm j1,7055. \quad (4.7)$$

Usando a função `rlocus()` do MATLAB para  $G_2G_{p2}$ , obteve-se o resultado exposto na FIG. 11a. Foi marcado no plano a posição do polo desejado e é visto que o LGR não passa por tal ponto, sendo necessário aplicar uma compensação de avanço ou atraso. A compensação em avanço não ajudaria o sistema pois o polo puxaria o LGR para a direita, como mostra a FIG. 11b e não ajudaria a chegar no ponto escolhido. Logo será aplicado um compensador de atraso.

Atribuindo o polo do compensador em  $p_c = -0,1$ , a deficiência angular a ser compensada pelo zero de  $G_c(s)$  é  $\theta_c = 152,01^\circ$ . Assim, aplicando em (3.8) segue que o zero do compensador deve estar localizado em  $z_c = -1,792$ .

O LGR de  $G_c(s)G_2(s)G_{p2}(s)$  para a variação de  $K_c$  é mostrado na FIG. 12. Nele é mostrado que os polos da malha fechada passam pelo polo desejado e assim, nota-se que a compensação foi bem executada. Então, determinando o ganho corretamente, o sistema

Figura 11 – Lugar geométrico das raízes para  $G_2(s)$ Figura 12 – LGR de  $G_c(s)G_2(s)$ 

apresentará os polos conforme se deseja. Entretanto, o comportamento de malha fechada pode vir a não ser o esperado, dado a influência do outro polo e dos zeros.

Por fim, o ganho  $K_c$  do compensador é determinado resolvendo (3.9), obtendo  $K_c = 8,4115$ . Implementando o sistema de controle conforme a topologia da FIG. 6, segue que a malha fechada é equacionada como

$$H_2(s) = 13,335 \frac{(s + 1,792)(s + 0,5)}{(s + 0,4352)(s^2 + 10s + 27,91)} \quad (4.8)$$

A posição dos zeros e do polo influenciarão na resposta temporal, visto que estão a direita dos polos dominantes, como pode ser visto na FIG. 14. Deste modo, foi projetado um compensador na referência  $G_{r2}(s)$  que irá remover o efeito destes zeros e polo indesejáveis,

fazendo

$$G_{r2}(s) = 2,0928 \frac{s + 0,4352}{(s + 1,792)(s + 0,5)} \quad (4.9)$$

Conectando conforme mostra a FIG. 13, a função transferência de malha fechada com compensação na referência  $H'_2(s)$  será

$$H'_2(s) = \frac{27,909}{s^2 + 10s + 27,91} \quad (4.10)$$

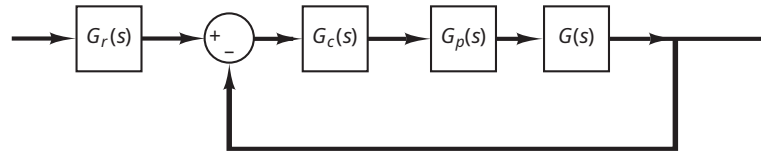


Figura 13 – Topologia usada para o caso 2

A resposta temporal de (4.8) e (4.10) para uma entrada em degrau unitária é mostrada na FIG. 14. Nela se observa que enquanto a função sem compensação na referência apresenta um elevado sobressinal (embora projetado para 1%),  $H'_2(s)$  não apresenta um *overshoot* visível. Os parâmetros da resposta estão detalhados na TAB. 3, na qual se percebe que  $H'_2$  cumpre com as especificações de desempenho enquanto que  $H_2$  deixa a desejar no tempo de acomodação e no sobressinal. Esse comportamento já era esperado pois, dada as posições dos zeros e do polo, eles afetariam significativamente na resposta temporal.

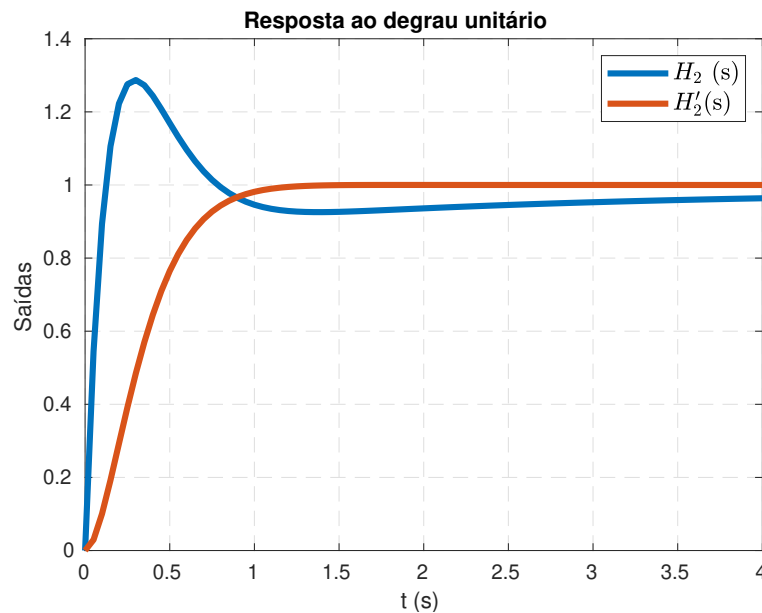


Figura 14 – Resposta temporal de  $G_2(s)$

Tabela 3 – Desempenho da resposta G2

| Parâmetros | $H_2$   | $H'_2$ |
|------------|---------|--------|
| $t_s$ (s)  | 4,0244  | 0,9882 |
| $t_r$ (s)  | 0,0908  | 0,5865 |
| $t_p$ (s)  | 0,2947  | 1,6487 |
| $OS$ (%)   | 30,8879 | 0      |
| $US$ (%)   | 0       | 0      |

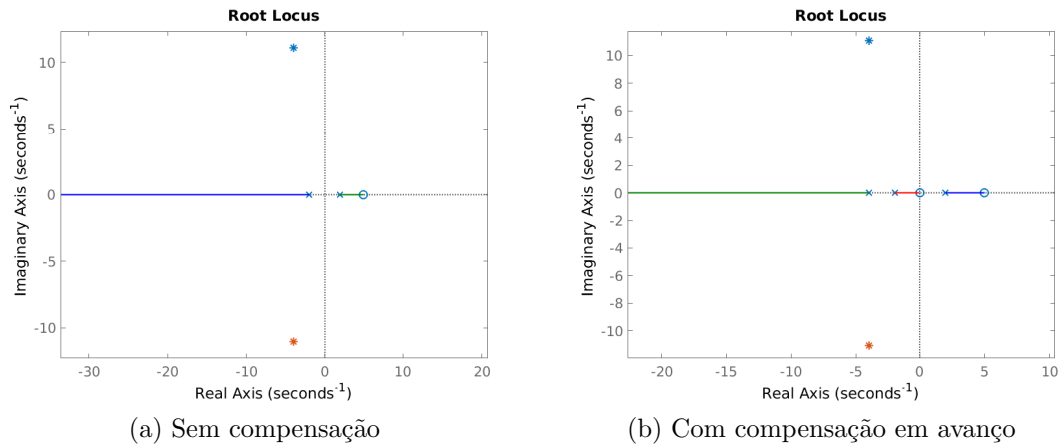
### 4.3 Caso 3

A função de transferência do terceiro processo é

$$G_3(s) = \frac{5(s-5)}{(s-2)(s+2)} \quad (4.11)$$

a qual contém um zero de fase não mínima, um polo instável e outro estável. Por consequência, em malha aberta o sistema fica instável.

A intenção se torna, aplicar um controlador projetado via LGR que consiga satisfazer aos critérios requeridos para o processo na TAB. 1, isto é,  $t_s = 1$  s e  $t_r$  o menor possível. Para tanto, traçando o LGR de (4.11) com o `rlocus` do MATLAB.

Figura 15 – LGR de  $G_3(s)$ 

Na FIG. 15a é possível verificar que a medida que o ganho aumenta, o polo do sistema em 2 vai para o zero em 5. Isso faz com que o sistema continua instável. Ao utilizar um compensador em avanço no sistema, como mostra a FIG. 15b, o zero do compensador atrairá o polo estável do sistema enquanto que o polo do compensador irá para infinito. Note que essa configuração não altera a instabilidade do sistema. Sendo assim, resta verificar para a compensação em atraso.

Aplicando uma compensação em atraso, o polo do compensador e o polo estável do processo se interceptarão e formarão um par de polos complexo conjugado. Contudo, isso não afetará o caminho do polo instável e assim, não é possível controlar o processo descrito por  $G_3(s)$  via LGR usando compensação de avanço ou de atraso.

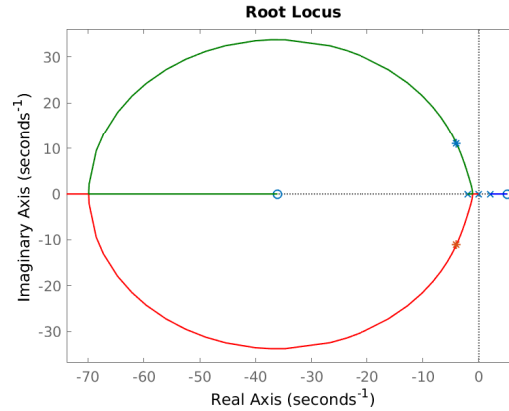


Figura 16 – LGR de  $G_3$  com a compensação em atraso

#### 4.4 Caso 4

A função de transferência do terceiro processo é

$$G_4(s) = \frac{5(s - 5)}{s^2(s - 2)} \quad (4.12)$$

a qual contém um duplo integrador e um outro polo instável e ainda um zero de fase não mínima. Por consequência, em malha aberta o sistema fica instável.

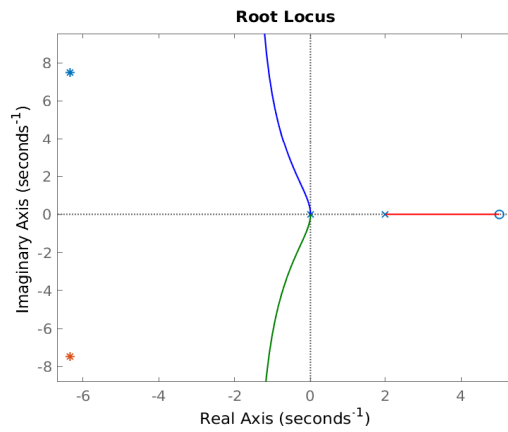
Sendo assim, resta verificar se o método de projeto de controlador por LGR com compensação em atraso ou avanço consegue fornecer um controlador que estabilize o sistema, pelo menos.

Utilizando a função `rlocus` do MATLAB, foi traçado o LGR para o sistema (4.12) e seu resultado é mostrado na FIG. 17a. Como visto o polo em 2 irá para o zero em 5 à medida em que o ganho aumenta. Deste modo o sistema continua instável.

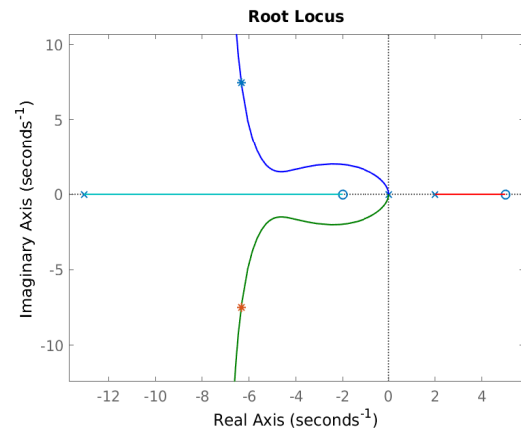
Adicionando uma compensação em avanço de fase, como expõe a FIG. 17b, o sistema continua com o mesmo problema de instabilidade, pois a adição do zero e do polo do compensador não afetará o caminho do polo do processo em 2.

Resta tentar a compensação em atraso de fase. Adicionado-a e traçando o seu LGR, exposto na FIG. 17c, verifica-se que a instabilidade persiste e assim, não é possível estabilizar

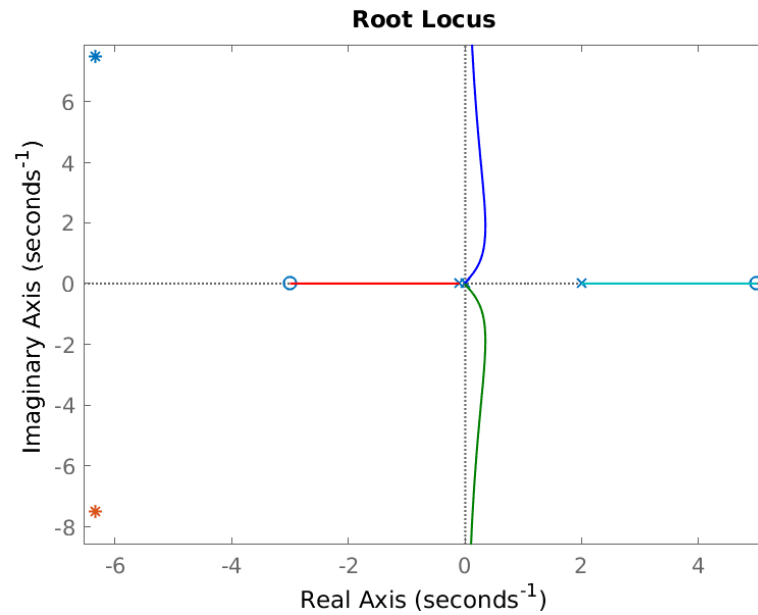
o processo descrito por  $G_4(s)$  projetando o controlador via LGR com compensação em atraso ou avanço.



(a) Sem compensação



(b) Com compensação em avanço



(c) Com compensação em atraso

Figura 17 – LGR de  $G_4(s)$

## 4.5 Análise Freqüencial

### 4.5.1 Relação saída-referência

O bode () da função de transferência da malha fechada do primeiro processo é mostrado na FIG. 18.

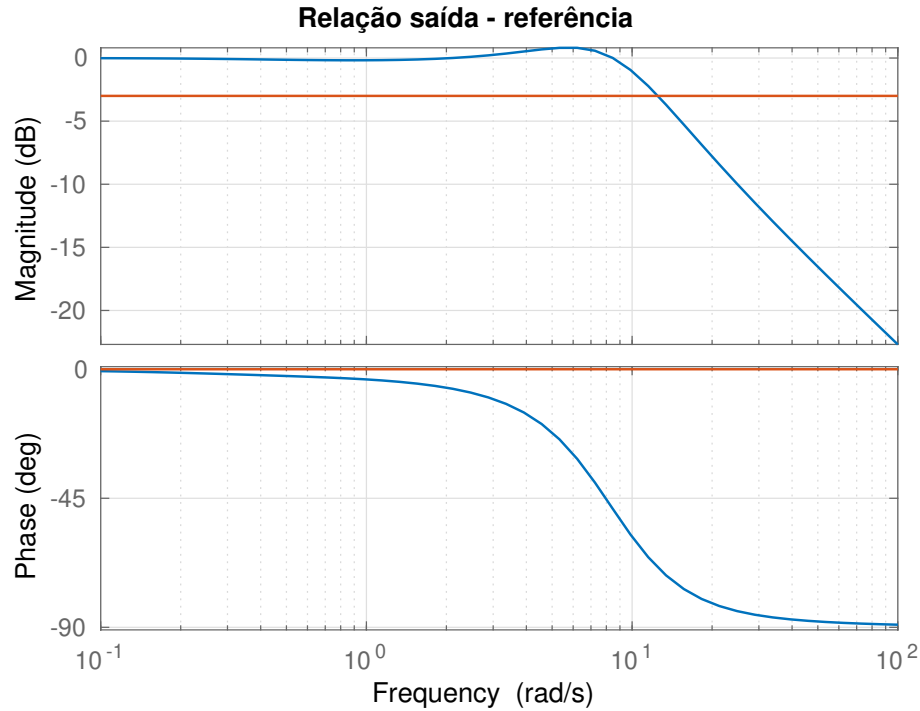


Figura 18 – Resposta em frequência da malha fechada do primeiro caso

Como pode ser observado, existe um pico em 0,81 dB na resposta da magnitude do Bode, cuja respectiva frequência em 5,7 rad/s representa a frequência de ressonância desse processo. Portanto, entradas nesta frequência implicarão em uma saída com o maior ganho que pode ser obtido.

O ganho em baixa frequência  $k_c$  da saída com relação a referência é de 0 dB. Assim, referências de baixa frequência, não alteração no ganho da saída e o erro de regime permanente continuará sendo nulo.

Ainda, pode ser obtido dessa resposta, a faixa de passagem  $w_{BW} = 12,476$  rad/s que é a frequência a partir da qual a excitação terá módulo desprezível. Portanto, deve-se evitar sinais de referências com frequência acima de 12,476 rad/s.

### 4.5.2 Relação sinal de controle e saída

Substituindo  $G_1(s)$  e  $G_{c1}$  em (2.7) e aplicando o bode na função transferência resultante, obtém-se o resultado mostrado em FIG. 19.

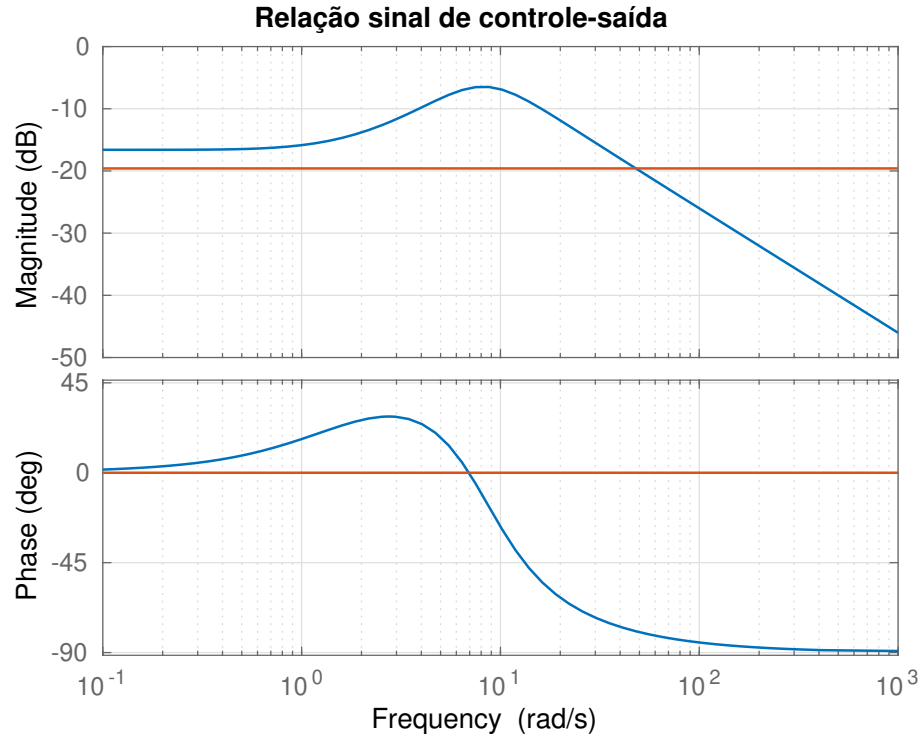


Figura 19 – Resposta em frequência da saída com relação ao sinal de controle

A frequência de ressonância para essa resposta é de  $\omega_p = 8$  rad/s. Assim, perturbações nessa frequência terá a maior magnitude.

Ainda, a faixa de passagem é de  $\omega_{Bw} = 47,98$  rad/s. Logo, perturbações com frequências superiores a essa não afetaram a magnitude da saída.

Já perturbação de baixa frequência, causará um ganho de  $-16,6$  dB, uma vez que  $k_c = -16,6$  dB.

### 4.5.3 Relação ruído da saída para a saída

Substituindo  $G_1(s)$  e  $G_{c1}$  em (2.8) e aplicando o bode na função transferência resultante, obtém-se o resultado mostrado em FIG. 20.

A partir da análise do gráfico, nota-se que não existirá frequência de ressonância para o ruído. Também a partir do bode dessa relação, obtém-se a frequência do ruído a partir da qual não haverá saída com magnitude significativa, que é  $\omega_{BW} = 7,25$  rad/s. E ainda, constata-se que ruídos de baixa frequência apresentarão ganho nulo.



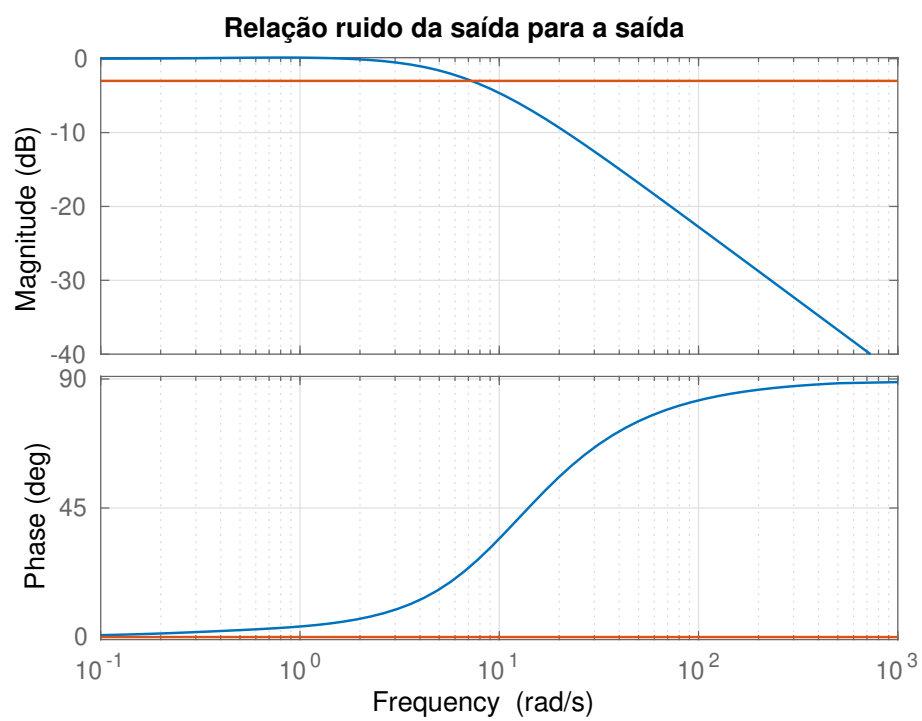


Figura 20 – Resposta em frequência do saída com relação ao ruído da saída

## 5 Conclusão

Nos casos 1 e 2, o emprego do projeto de controladores por LGR com compensação de fase teve êxito em projetar um controlador que estabilizasse o sistema e ainda atendesse às especificações de desempenho requeridas. Conquanto no segundo caso teve-se que se valer de uma compensação no sinal de referência.

Contudo, verificou-se que o projeto de controladores por LGR com compensação de avanço ou atraso se mostrou ineficiente em certas circunstâncias. Não foi possível estabilizar os processos  $G_3(s)$  e  $G_4(s)$  pois o arranjo os seus polos e zeros não permitiam o redesenho do LGR de forma a estabilizar o sistema.

Ainda, ao longo do trabalho foi possível constatar que o método requer certa flexibilidade nas especificações pois, após fazer a compensação o grau da função de transferência de malha fechada aumentará em 1. Sendo assim, a resposta não será obrigatoriamente como um sistema de segunda ordem subamortecido, como projetado. Logo, deve-se alterar a posição do zero e do polo do compensador e, se necessário, utilizar uma compensação na malha fechada.

Por isso, o método estudado apresenta riscos na sua implementação e o controlador, por si só, pode vir a não atender às especificações do projeto. Isso implica num maior uso de blocos (e na prática, de circuitos e de custos) na topologia.

A análise frequencial para o primeiro caso, indica que é preciso se atentar com perturbações de baixa frequência no sinal de controle, uma vez que essa adicionaram ganho a saída do sistema. Tendo isso em vista, é interessante adicionar ao processo um filtro passa baixa.

## Referências

NISE, N. S. *Control Systems Engineering*. 7. ed. [S.l.: s.n.], 2015. Citado 2 vezes nas páginas 5 e 6.

OGATA, K. *Engenharia de Controle Moderno*. 5. ed. [S.l.]: Pearson Education, 2010. Citado 2 vezes nas páginas 4 e 10.