# Atividade Laboratório de Controle Digital: Projeto de Controlador Polinomial

**Bernardo Bresolini** *, **Ester Q. Alvarenga** *

* *Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais, Divinópolis - MG.*

## 1. INTRODUÇÃO

O controle de processos teve o primeiro trabalho significativo ao ao final do século XVIII, quando o escocês James Watt inventou o regulador centrífugo (*flyball speed governor*), dispositivo mecânico capaz de controlar automaticamente a velocidade de uma máquina a vapor.

Em seguida, diversos trabalhos importantes foram desenvolvidos, desde a modelagem matemática, análise de estabilidade em malha aberta e fechada até o desenvolvimento de controladores PID. Contudo até a época o controle era feito com base em circuitos analógicos e não havia o emprego de microprocessadores.

A partir de 1960, o uso de computadores digitais se tornou presente no projeto e operação de sistemas e processos. Desde então, o emprego de controladores analógicos em processos industriais vem sendo substituídos por controladores digitais.

Sendo assim, o conhecimento em Controle Digital por parte de engenheiros que atuarão na área é requerido devido à presença massiva dos controladores digitais em ambiente industrial. Por isso, o presente relatório apresenta os estudos e implementações da técnica de projeto de controladores digitais via abordagem polinomial.

Para este estudo, fez-se necessário, identificar o processo a ser trabalhado, especificar o desempenho desejado, discretizar o sistema, aplicar a técnica de projeto de controlador, simular o processo de controle e analisar o desempenho da malha fechada.

## 2. REFERENCIAL TEÓRICO

### *2.1 Determinação dos polos de malha fechada*

Uma técnica comum no projeto de controladores é determinar a posição dos polos na malha fechada de forma com que o sistema performe como desejado. Esta técnica é conhecida como alocação de polos.

Os parâmetros mais comuns para a determinação dos polos de malha fechada são o *overshoot* $OS\%$ e o tempo de acomodação $t_s$. Para um sistema de segunda ordem, tem-se que

$$OS\% = 100 \exp\left(\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right), \tag{1}$$

$$t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} \tag{2}$$

Com os valores de $OS\%$ e $t_s$ especificados, pode-se resolver o sistema com (1) e (2) para encontrar o fator de amortecimento $\zeta$ e a frequência natural $\omega_n$. Com os quais encontra-se a posição dos polos desejados no plano $z$, uma vez que

$$r = e^{-\zeta\omega_n T}, \qquad \theta = \omega_n T\sqrt{1-\zeta^2} \tag{3}$$

em que $r$ e $\theta$ são as coordenadas polares do polo, tais que $z = r\underline{/\theta}$, e $T$ é o período de amostragem. O polo desejado $p$ no plano $z$ também pode ser calculado por

$$z = e^{pT}. \tag{4}$$

### *2.2 Discretização de sistemas contínuos no tempo*

O primeiro passo na discretização é garantir um período de amostragem $T_s$. Dentre outras possibilidades, $T_s$ pode ser escolhido de acordo com a especificação do tempo de acomodação da malha fechada ou em termos da constante de tempo dominante do sistema:

- Assuma que o processo tenha uma constante de tempo dominante $\tau_{dom}$, então o período de amostragem, $T_s$ deve satisfazer $T_s = \tau_{dom}/10$ para o sistema em malha aberta.
  Um cuidado a ser tomado é que, ao fechar a malha do sistema, a dinâmica do sistema em malha fechada não seja muito mais rápida que o sistema em malha aberta. Caso contrário, o período de amostragem se tornará grande para o sistema
- Assuma que o processo seja requisitado a um processo em malha fechada ter um tempo de acomodação $t_s$, ou uma frequência natural $\omega_n$. Então, para o primeiro caso escolhe-se $T_s = t_s/10$. No segundo caso escolhe-se $\omega_s > 10\omega_n$, em que $\omega_s = 2\pi/T_s$ é a frequência de amostragem.

Para discretizar um sistema, utiliza-se a transformada $z$, calculada por

$$G(z) = \sum_{\text{polos de } G(\lambda)} \left[\begin{matrix}\text{residuos} \\ \text{de } G(\lambda)\end{matrix}\ \frac{1}{1 - z^{-1}e^{T_s\lambda}}\right] \tag{5}$$

para um $G(\lambda) = G(s) = ZOH \cdot G_p(s)$, em que $G_p(s)$ é a função transferência a ser discretizada e ZOH é o método de aproximação do segurador de ordem zero.

### *2.3 Controlador PID*

Seja um controlador PID que recebe como entrada o sinal de erro $\epsilon(t)$. A sua saída $u(t)$ será dada por

$$u(t) = K\left(\epsilon(t) + \frac{1}{T_i}\int \epsilon(t)dt + T_d\frac{d\epsilon(t)}{dt}\right) \tag{6}$$

em que $K$ é o parâmetro proporcional, $T_i$ o integral e $T_d$ o derivativo.

A aplicação da transformada de Laplace em (6) retorna

$$U(s) = K\left(E(s) + \frac{E(s)}{T_i s} + E(s)T_d s\right) \tag{7}$$

$$\implies C(s) = K\left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right) \tag{8}$$

cuja representação em diagrama de blocos é apresentada na FIG. 1.

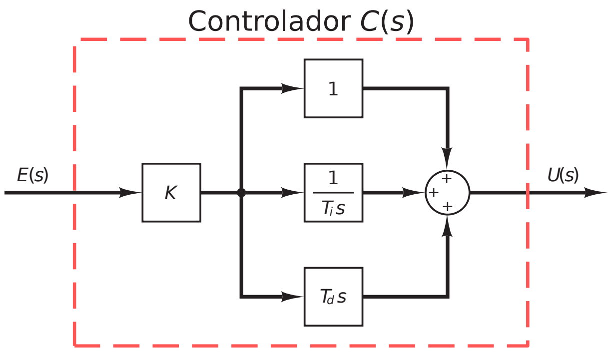


Figura 1. Diagrama de blocos de um Controlador PID

Portanto, a transformada $z$ em (7) leva a

$$U(z) = KE(z)\left(1 + \frac{T_s}{T_i}\frac{z}{z-1} + \frac{T_d}{T_s}\frac{z-1}{z}\right) \tag{9}$$

Logo, a função transferência discretizada é

$$C(z) = K\left(\frac{z(z-1) + T_s z^2/T_i + T_d(z-1)^2/T_s}{z(z-1)}\right) \tag{10}$$

simplificando obtém-se,

$$C(z) = K\frac{c_2 z^2 + c_1 z + c_0}{z^2 - z} \tag{11}$$

sendo

$$\begin{aligned} c_2 &= T_s/T_i + T_d/T_s + 1 \\ c_1 &= -(2T_d/T_s + 1) \\ c_0 &= T_d/T_s \end{aligned}$$

A equação a diferença de (11) é dada como

$$u[k] = u[k-1] + K\big(c_2 e[k] + c_1 e[k-1] + c_0 e[k-2]\big) \tag{12}$$

### *2.4 Projeto de controlador PID via LGR*

Dado um sistema $G(s)$ como

$$G(s) = K_G \frac{\prod_{i=0}^{n}(s - z_i)}{\prod_{j=0}^{m}(s - p_j)}, \qquad n < m \tag{13}$$

cujo interesse é que em malha fechada se tenha características dadas pelo par de polos dominantes

$$p = \zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \tag{14}$$

no qual $\zeta$ e $\omega_n$ são, respectivamente, o coeficiente amortecimento e a frequência natural do sistema.

Para alocar os polos de $G(s)$ em $p$ o sistema é controlado por $KC(s)$ como mostra a FIG. 2. Nesta topologia $C(s)$

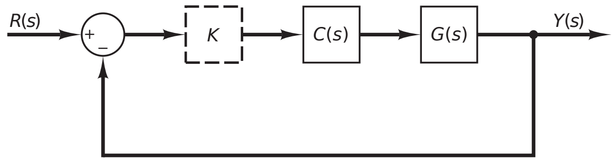


Figura 2. Topologia do controlador PID pelo método LGR

irá alterar o traçado do LGR para que ele passe em $p$ e $K$ é o ganho que leva a malha fechada para tal lugar.

A malha fechada da FIG. 2 é dada por

$$H(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{KC(s)G(s)}{KC(s)G(s) + 1} \tag{15}$$

As raízes de $H(s)$ então satisfazem a

$$|KC(s)G(s)| = 1, \quad \underline{/KC(s)G(s)} = \pm(2n+1)\pi \tag{16}$$

para $n = 0, 1, \ldots$

Como $K$ é apenas um ganho, ele não altera na fase [1]. Por consequência, o compensador $C(s)$ é determinado pelo critério do ângulo.

Para que o controlador seja projetado seja PID ideal, sua estrutura é dada por

$$C(s) = \frac{(s + z_{pd})(s + z_{pi})}{s} \tag{17}$$

sendo $z_{pd}$ responsável pela ação proporcional-derivativa e $z_{pi}$ pela ação proporcional-integral.

A contribuição angular $\alpha$ de $G(s)$ com relação a $p$ é encontrada por

$$\alpha = \sum_{i=0}^{n}\theta_i\Big|_{s=z_i} - \sum_{j=0}^{m}\phi_j\Big|_{s=p_i} \tag{18}$$

em que os ângulos $\theta$ e $\phi$ é a inclinação entre o segmento que leva o zero/polo até $p$, medido em sentido anti-horário com o eixo das abscissas.

Assim, a defasagem angular $\beta$ a ser compensada por $C(s)$ é

$$\beta = \pm\pi - \alpha. \tag{19}$$

Se a defasagem angular for compensada somente por $z_{pd}$, então aplicando trigonometria tem-se

$$z_{pd} = -\zeta\omega_n - \frac{\omega_n\sqrt{1-\zeta}}{\operatorname{tg}\beta} \tag{20}$$

O zero da ação PI deve ser colocado perto de 0 para que ele atraia o polo do integrador em 0 e o efeito deles se anulem a medida que $K$ cresce.

Determinando $C(s)$, o ganho $K$ é encontrado pelo critério do módulo como

$$K = \frac{1}{|C(s)G(s)|_{s=p}} \tag{21}$$

## 3. METODOLOGIA

O sistema para o qual será projetado o controlador digital via abordagem polinomial consiste no controle de posição

[1] De fato, o ganho pode contribuir com $\pm\pi$ no ângulo, dependendo do seu sinal. Contudo a condição angular é de $\pm\pi$ e assim o impacto prático de $K$ é nulo. Ainda assim, no traçado do LGR, considera-se o intervalo $(0,\ \infty)$.

em um esquema de mixagem de vídeo. Este controle está incluso no processo descrito a seguir. Será relatado também como se poderá obter as dinâmicas envolvidas no processo, bem como o que deve ser feito até que se possa projetar o controlador digital e o passo a passo para se projetar o controlador.

### *3.1 Descrição do problema*

Na indústria cinematográfica é comum com que algumas cenas exijam planos de fundos inviáveis para a gravação no estúdio. Uma das soluções é utilizar um sistema duplo de câmera, em que a primeira filma o ator e a segunda o plano de fundo em maquete. Então, a imagem de ambas as câmeras serão unidas e formarão as cenas do filme.

Contudo, é preciso fazer com que a segunda câmera siga o movimento da primeira. Portanto, um sistema como o apresentado na FIG. 3 é requerido. A relação entre a movimentação do ator e o deslocamento da câmera 2 não é unitária e portanto, foi utilizado um conversor.

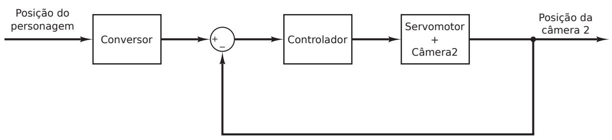


Figura 3. Esquemático do processo a ser controlado

### *3.2 Identificação dos processos*

Sabendo que a amplitude de deslocamento da câmera 2 é de ±1 m, com origem no meio do cenário de fundo e que a amplitude de movimento do ator é de ±1,5 m com origem no meio da sala, é possível calcular a dinâmica do conversor.

A função de transferência do processo (movimentação do servo motor e câmera 2), poderá ser identificada pela FIG. 4 que mostra a variação temporal da posição da 2ª câmera para uma tensão de entrada de 3 V. Sabendo também que se a tensão for positiva, a câmera se moverá para a direita da imagem de fundo; se for negativa, ela se moverá para a esquerda.

### *3.3 Discretização*

Utilizando a linguagem de programação `python 3`, os sistemas identificados podem ser discretizados por meio da função `control.matlab.c2d()`, uma vez definido o período de amostragem $T_s$ de acordo com a Seção 2.2 e o método de aproximação que será utilizado.

### *3.4 Projeto do controlador PID via LGR*

Adotando a topologia de controle mostrada na FIG. 2, o projeto de um controlador PID para dado processo $G(s)$ é feito fazendo:

1. determinar a localização do par de polos dominantes $p$ com base nos critérios de desempenho requeridos;
2. calcular a contribuição angular $\alpha$ de $G(s)$ com relação a $p$ como apresentado em (18);
3. determinar a posição de $z_{pd}$ que satisfaça a (20).

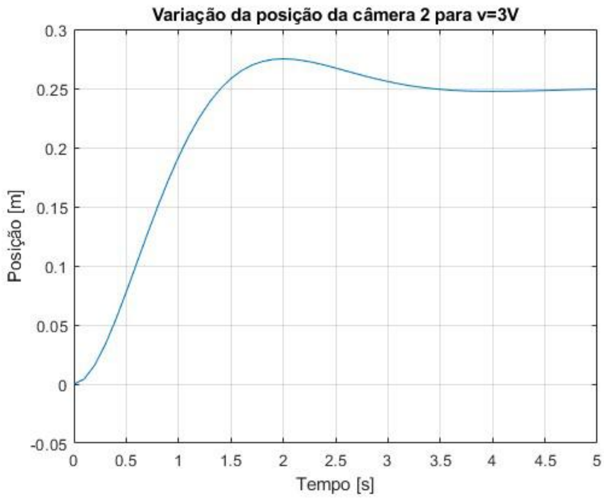


Figura 4. Variação temporal da posição em metros da câmera 2 para uma tensão de 3 V

4. escolher a posição de $z_{pi}$ próximo de 0 para que à medida que $K$ cresce o polo do integrador, em 0, tenda a $z_{pi}$, tornando a contribuição angular deste dois quase nula.
5. determine o ganho $K$ pela regra do módulo, resolvendo (21).

## 4. RESULTADOS E DISCUSSÃO

### *4.1 Identificação dos sistemas e dinâmicas*

Esta subseção apresenta os resultados da identificação dos sistemas e dinâmicas envolvidas no processo a ser controlado, apresentado na FIG. 3.

O conversor representa entre a relação entre a posição do personagem e a posição da câmera 2, equacionada por

$$y = \frac{2}{3}x \tag{22}$$

para $x$ sendo a posição do personagem e $y$ a posição da câmera. Em termos de função transferência (razão da saída sobre a entrada) o conversor se torna,

$$\frac{x}{y} = \frac{2}{3} \tag{23}$$

*Dinâmica do servomotor* A identificação da dinâmica do servomotor da resposta apresentada na FIG. 4 resulta em

$$G(s) = \frac{0{,}3161}{s^2 + 2{,}303s + 3{,}793} \quad \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{V}}\right]. \tag{24}$$

cuja resposta temporal é apresentada na FIG. 5. O perfil da curva mostrada é similar a resposta exposta na FIG. 4, validando a identificação obtida.

### *4.2 Discretização*

Como a dinâmica de malha fechada requisitada é muito maior que a dinâmica do sistema, escolheu-se o período de amostragem $T_s$ a partir da especificação do tempo de acomodação $t_s = 100$ ms,

$$T_s = \frac{100 \times 10^{-3}}{10} = 0{,}01\,\mathrm{s}. \tag{25}$$

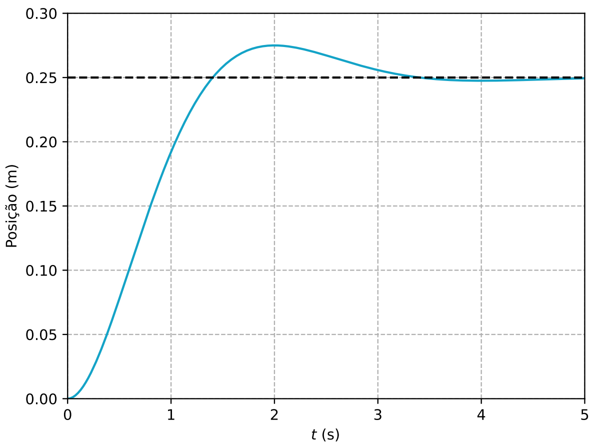


Figura 5. Resposta de $G(s)$ para um degrau de 3 V

A partir do qual, discretizou-se o sistema (24), usando o método de aproximação ZOH, gerando,

$$G(z) = \frac{1{,}568 \times 10^{-5} z + 1{,}556 \times 10^{-5}}{z^2 - 1{,}977z + 0{,}9775} \qquad T_s = 0{,}01 \tag{26}$$

*4.3 Controlador PID via LGR*

Para as especificações de $t_s = 90\,\mathrm{ms}$ e $OS = 0{,}1\%$, os polos desejados de malha fechada são

$$p_{1,\,2} = -44{,}4444 \pm j20{,}213. \tag{27}$$

Fazendo o LGR de $G(s)$ verifica-se que os polos não passarão por $p_1$ e $p_2$ e portanto, a compensação faz-se necessária. A FIG. 6 evidencia este argumento.

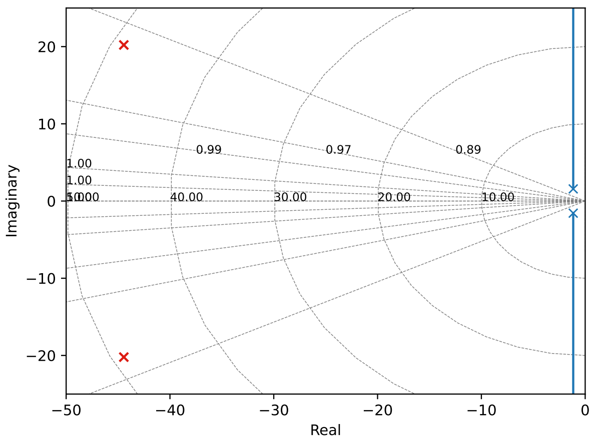


Figura 6. Traçado do LGR de $G(s)$

A contribuição angular de $G(s)$ com relação a $p_1$ é

$$\alpha = -156{,}70^\circ - 153{,}29^\circ = -309{,}99^\circ \tag{28}$$

A posição de $z_{pd}$ que garanta com que o sistema tenha $-180^\circ$ é

$$z_{pd} = -44{,}4444 - \frac{20{,}213}{\operatorname{tg} 129{,}99^\circ} = -61{,}401 \tag{29}$$

Já o zero da ação proporcional-integral foi atribuído em $-0{,}5$ e logo, o compensador PID projetado é da forma

$$C(s) = \frac{(s + 61{,}401)(s + 0{,}5)}{s} \tag{30}$$

Para confirmar, se refaz o traçado do LGR para o sistema compensado e se verifica se os polos irão passar nos polos desejados $p_1$ e $p_2$. O desenho do LGR de $C(s)G(s)$ é mostrado na FIG. 7 em que os polos desejados são marcados por um $\times$ vermelho e com isso se observa que o compensador cumpriu com seu papel.

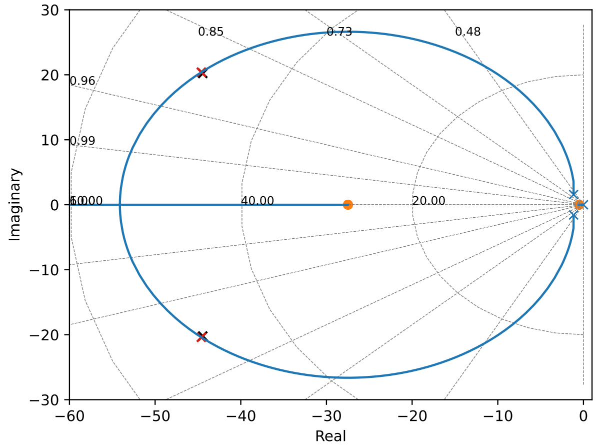


Figura 7. Traçado do LGR de $C(s)G(s)$

Resta determinar o ganho $K$ pela regra do módulo e logo, temos

$$K = \left| \frac{s(s^2 + 2{,}303 + 3{,}793)}{0{,}3161(s + 61{,}041)(s + 0{,}5)} \right|_{s=p_1} = 276{,}49 \tag{31}$$

O controlador PID projetado é então

$$C_{PID}(s) = 276{,}49 \frac{(s + 61{,}041)(s + 0{,}5)}{s} \tag{32}$$

cuja discretização com $T_s = 0{,}001\,\mathrm{s}$ leva a

$$C_{PID}(z) = 284236{,}6 \frac{(z - 0{,}9995)(z - 0{,}9732)}{z(z-1)}. \tag{33}$$

A equação a diferença de $C(z)$ leva a

$$\begin{aligned} u[k] = u[k-1] &+ 284237e[k] - 560727e[k-1] \\ &+ 276494e[k-2] \end{aligned} \tag{34}$$

*4.4 Controlador PID empírico*

Implementando (34) em malha fechada na topologia mostrada na FIG. 3, obtemos a resposta apresentada na FIG. 8

Tabela 1. Critérios de desempenho

| Parâmetro | Série | Paralelo |
|---|---|---|
| $t_{ss}$ (s) | 0,13 | 0,11 |
| $OS$ (%) | 26,13 | 0,02 |
| $US$ (%) | 0 | 0 |
| $t_r$ (s) | 0,02 | 0,07 |

*4.5 Simulação*

Para a simulação do sistema, supôs-se que o ator caminhou de maneira linear até

(1) 0,5 m para a direita;
(2) após 10 s, 0,5 m para a esquerda

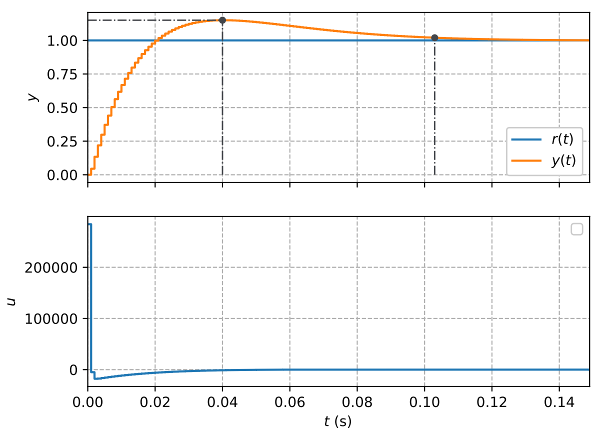


Figura 8. Resposta da malha fechada do controlador PID projetado via LGR

Simulou-se o movimento linear do ator da direita para esquerda de 0,5 m a cada 10 segundos. Ao chegar ao final da sala, o ator parou por 20 segundos e então retomou o movimento na direção oposta. Estes movimentos geraram a sequência de degraus apresentadas no primeiro *subplot* da FIG. 9. Multiplicando este sinal por (23) (função de transferência que representa o conversor), obtém-se a posição da câmera 2, mostrada também no primeiro *subplot* da FIG. 9.

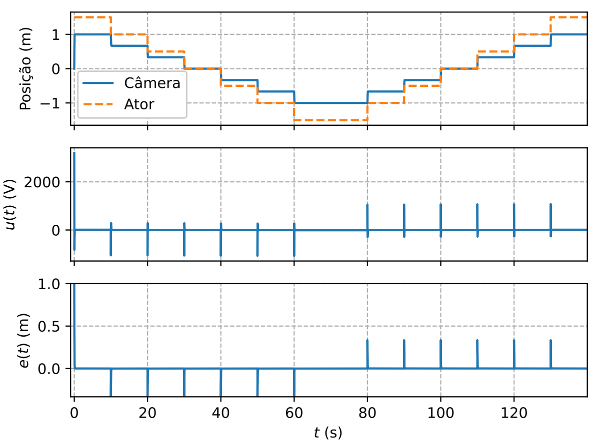


Figura 9. Simulação do processo

A posição da câmera é utilizada como referência no processo, o que gera o sinal de controle apresentado no segundo *subplot* da FIG. 9 e o sinal de erro ao longo do tempo, mostrado no terceiro *subplot* da FIG. 9.

O sinal de controle do sistema obteve picos elevados nos momentos de variação da referência e depois estabilizando em um valor na ordem de $\pm 10$ V. O pico do sinal de controle durante o período transitório indica que para reduzir a acomodação do sistema de 3,5 s para 0,1 s, o controlador projetado se tornou bastante agressivo, necessitando de muita energia para alterar tanto a dinâmica do sistema. Isto indica que os critérios requeridos são inadequados para tal o equipamento usado e devem ser revistos antes da implementação prática.

Vale ressaltar que a identificação da dinâmica do servomotor foi feita para um degrau de 3 V e logo uma aplicação na ordem de 3000 V facilmente foge da dinâmica especificada. Além disso, um sinal nesta magnitude provavelmente seria inviável praticamente ou queimaria o atuador do sistema.

A malha fechada projetado apresentou erro de estado estacionário nulo, como se verifica no terceiro gráfico da FIG. 9. Houveram apenas picos durante o momento de transição que rapidamente foram anulados pela ação do controlador projetado.

## 5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Para o processo de filmagem apresentado foi elaborado uma malha de controle que transforma a posição do ator em um sinal de referência para a câmera 2 que é atuada por um servomotor. Assim, foi projetado e validado um controlador digital com base nas informações do processo obtidas.

O controlador projetado obteve uma performance suficientemente próxima das especificações passadas com pequenos desvios devido a presença dos polos ou zeros do controlador na malha fechada, dependendo da topologia adotada. A performance do controlador na realimentação foi melhor pois o zero da malha fechada é o polo do controlador que esteve bem afastado dos polos dominantes.

Sendo assim, a simulação da movimentação do ator foi feita utilizando o controlador na realimentação, ao qual se observou que os critérios estipulados foram cumpridos. O erro em regime permanente foi nulo, o tempo de acomodação e o sobressinal estiveram na faixa estipulada.

Contudo, observou-se que a alteração da dinâmica de malha aberta de $t_s \approx 3{,}5\,\mathrm{s}$ para $t_s \approx 0{,}1\,\mathrm{s}$ foi muito agressiva e fez com que o sinal de controle saísse em muito dos limites físicos do processo. Portanto, para a realização prática o controlador projetado não poderia ser implementado. A sugestão é que se altere o servomotor usado para um que tenha uma dinâmica de malha aberta mais rápida.

## REFERÊNCIAS