Encontro 5: Soluções no Espaço de Estados

Valter J. S. Leite[1]

[1]CEFET-MG / *Campus* V Divinópolis, MG – Brasil

Graduação em Engenharia Mecatrônica
CEFET–MG

O que nos espera?

Introdução

- De Análise e Teoria de Controle:

$$y(t) = \int_{\tau=t_0}^{t} g(t,\tau)u(\tau)d\tau \tag{1}$$

$g(t,\tau)$: resposta impulsiva $\begin{cases} \text{no instante } t \\ \text{para impulso aplicado em } t=\tau. \end{cases}$

Introdução

- De Análise e Teoria de Controle:

$$y(t) = \int_{\tau=t_0}^{t} g(t,\tau)u(\tau)d\tau \tag{1}$$

$g(t,\tau)$: resposta impulsiva $\begin{cases} \text{no instante } t \\ \text{para impulso aplicado em } t=\tau. \end{cases}$

- Numericamente

$$y(kT) = \sum_{m=k_0}^{k} g(kT, mT)u(mT)T \tag{2}$$

$\Rightarrow$ T período de amostragem (ou de integração)
$\Rightarrow$ resultados pouco precisos para um dado T

Introdução

- Alternativa

$\Rightarrow$ Parâmetros concentrados $\longrightarrow$ Transformada de Laplace

$\Rightarrow$ Requer cálculo: polos (`roots()`), expansão em frações parciais (`residue()`), tabela de transformadas.

$\Rightarrow$ Polos repetidos $\longrightarrow$ sensibilidade a erros de arredondamento

Introdução

- Alternativa

$\Rightarrow$ Parâmetros concentrados $\longrightarrow$ Transformada de Laplace

$\Rightarrow$ Requer cálculo: polos (`roots()`), expansão em frações parciais (`residue()`), tabela de transformadas.

$\Rightarrow$ Polos repetidos $\longrightarrow$ sensibilidade a erros de arredondamento

- Saída

$\Rightarrow$ Funções de transferências $\longrightarrow$ Eq. no Espaço de Estados

- Descrição do sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \mathbf{A}x(t) + \mathbf{B}u(t) && (3) \\ y(t) &= \mathbf{C}x(t) + \mathbf{D}u(t) && (4) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Propriedade usada[1]:

$$\frac{d}{dt}e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t} = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{A} \qquad (5)$$

[1] Pode-se verificar usando a expansão em série de Taylor de $e^{\mathbf{A}t}$. Veja slide da aula 3.

⇒ Sabendo que

$$\left(e^{\mathbf{A}t}\right)^{-1} = e^{-\mathbf{A}t} \quad \Longrightarrow \quad e^{-\mathbf{A}t}e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I}$$

multiplica-se ambos os lados de (3) por $e^{-\mathbf{A}t}$:

$$e^{-\mathbf{A}t}\dot{x}(t) - e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{A}x(t) = \frac{d}{dt}\left[e^{-\mathbf{A}t}x(t)\right] = e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{B}u(t)$$

Integrando[2] de 0 a t

$$e^{-\mathbf{A}\tau}x(\tau)\Big|_{\tau=0}^{t} = \int_0^t e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}u(\tau)d\tau$$

[2] O argumento do integrando foi trocado de t para τ, evitando confusão com os limites de integração.

$\Rightarrow$ Sabendo que

$$\left(e^{\mathbf{A}t}\right)^{-1} = e^{-\mathbf{A}t} \quad \Longrightarrow \quad e^{-\mathbf{A}t}e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I}$$

multiplica-se ambos os lados de (3) por $e^{-\mathbf{A}t}$:

$$e^{-\mathbf{A}t}\dot{x}(t) - e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{A}x(t) = \frac{d}{dt}\left[e^{-\mathbf{A}t}x(t)\right] = e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{B}u(t)$$

Integrando[2] de 0 a t

$$e^{-\mathbf{A}\tau}x(\tau)\Big|_{\tau=0}^{t} = \int_0^t e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}u(\tau)d\tau$$

$$e^{-\mathbf{A}t}x(t) - e^{\mathbf{0}}x(0) = e^{-\mathbf{A}t}x(t) - \mathbf{I}x(0) = \int_0^t e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}u(\tau)d\tau$$

[2] O argumento do integrando foi trocado de t para τ, evitando confusão com os limites de integração.

Pré-multiplicando por $e^{\mathbf{A}t}$:

$$x(t) = \underbrace{e^{\mathbf{A}t}x(0)}_{\text{Resposta à entrada nula}} + \underbrace{\int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}u(\tau)d\tau}_{\text{Resposta ao estado nulo}} \qquad (6)$$

Pré-multiplicando por $e^{\mathbf{A}t}$:

$$x(t) = \underbrace{e^{\mathbf{A}t}x(0)}_{\text{Resposta à entrada nula}} + \underbrace{\int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}u(\tau)d\tau}_{\text{Resposta ao estado nulo}} \qquad (6)$$

- Levando (6) em (4):

$$y(t) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}x(0) + \mathbf{C}\int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}u(\tau)d\tau + \mathbf{D}u(t) \qquad (7)$$

Notas

- Cômputo aplicando Laplace em (3)–(4):

$$sX(s) - \underbrace{x(0)}_{\text{Cond. Inicial}} = \mathbf{A}X(s) + \mathbf{B}U(s)$$

$$\Rightarrow X(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}[x(0) + \mathbf{B}U(s)] \quad (8)$$

$$Y(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}[x(0) + \mathbf{B}U(s)] + \mathbf{D}U(s)$$

Notas

- Cômputo aplicando Laplace em (3)–(4):

$$sX(s) - \underbrace{x(0)}_{\text{Cond. Inicial}} = \mathbf{A}X(s) + \mathbf{B}U(s)$$

$$\Rightarrow X(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}[x(0) + \mathbf{B}U(s)] \quad (8)$$

$$Y(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}[x(0) + \mathbf{B}U(s)] + \mathbf{D}U(s)$$

- Cômputo de $e^{\mathbf{A}t}$: várias maneiras. Por exemplo, use Cayley-Hamilton, já estudado em *Análise de Sistemas Lineares* e em *Teoria de Controle*.

Calculando Matriz inversa

$$A^{-1} = \frac{\texttt{Adj}A}{\det(A)}; \quad \texttt{Adj}A = (\texttt{Co}A)'$$

em que $\texttt{Co}A$ é a matriz cofatora de A e

$$[\texttt{Co}A]_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

em que M_{ij} é o menor ij da matriz A.

- M_{ij} é o determinante da matriz resultante da eliminação da linha i e coluna j da matriz A.

$e^{\mathbf{A}t}$ via Cayley-Hamilton

- Calcule os autovalores de $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$;
- Faça $f(\lambda) = e^{\lambda t}$;
- Defina $h(\lambda)$ um polinômio de grau $n-1$;
- Calcule os coeficientes de $h(\lambda)$ usando:
  $f^{(\ell)}(\lambda_i) = h^{(\ell)}(\lambda_i),\ \ell = 0, 1, \ldots, (n_i - 1)$ e $i = 0, 1, \ldots, m$

  $\Rightarrow f^{(\ell)}(\lambda_i) = \left.\frac{d^\ell f(\lambda)}{d\lambda^\ell}\right|_{\lambda=\lambda_i}$

  $\Rightarrow h^{(\ell)}(\lambda_i)$ definido de maneira similar.

  $\Rightarrow f(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A})$

Estudo de caso

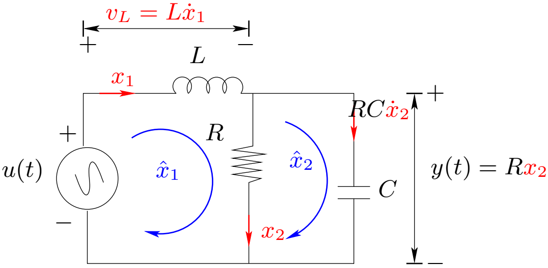

Figura: Um circuito e dois conjuntos de variáveis de estado.

Em que:

- $u(t)$ e $y(t)$ são a entrada e saída, respectivamente.
- x_1 e x_2 são estados baseados nas correntes dos ramos.
- $\hat{x}_1$ e $\hat{x}_2$ são estados baseados nas correntes das malhas.

$\Rightarrow$ x_2 $\longrightarrow$ tensão no capacitor

$\Rightarrow$ Tensão no indutor $v_L = L\dot{x}_1$, Tensão no capacitor $v_C = Rx_2$ e Corrente no capacitor $i_C = C\dfrac{dv_C}{dt} = CR\dot{x}_2$.

$\Rightarrow$ $x_2 \longrightarrow$ tensão no capacitor

$\Rightarrow$ Tensão no indutor $v_L = L\dot{x}_1$, Tensão no capacitor $v_C = Rx_2$ e Corrente no capacitor $i_C = C\dfrac{dv_C}{dt} = CR\dot{x}_2$.

- Modelagem

  $\Rightarrow$ Lei dos nós: $x_1 = x_2 + CR\dot{x}_2$

  $\Rightarrow$ Lei das tensões: $L\dot{x}_1 + Rx_2 - u = 0$

$\Rightarrow$ $x_2 \longrightarrow$ tensão no capacitor
$\Rightarrow$ Tensão no indutor $v_L = L\dot{x}_1$, Tensão no capacitor $v_C = Rx_2$ e Corrente no capacitor $i_C = C\dfrac{dv_C}{dt} = CR\dot{x}_2$.

- Modelagem
  $\Rightarrow$ Lei dos nós: $x_1 = x_2 + CR\dot{x}_2$
  $\Rightarrow$ Lei das tensões: $L\dot{x}_1 + Rx_2 - u = 0$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & \dfrac{-R}{L}\\ \dfrac{1}{CR} & \dfrac{-1}{CR}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}u; \quad y = \begin{bmatrix}0 & R\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

- Outra modelagem possível para o mesmo sistema

$\Rightarrow$ Malha 1: $u = L\dot{\hat{x}}_1 + R\hat{x}_1 - R\hat{x}_2$

$$\boxed{\dot{\hat{x}}_1 = -\frac{R}{L}\hat{x}_1 + \frac{R}{L}\hat{x}_2 + \frac{1}{L}u}$$

- Outra modelagem possível para o mesmo sistema

$\Rightarrow$ Malha 1: $u = L\dot{\hat{x}}_1 + R\hat{x}_1 - R\hat{x}_2$

$$\boxed{\dot{\hat{x}}_1 = -\frac{R}{L}\hat{x}_1 + \frac{R}{L}\hat{x}_2 + \frac{1}{L}u}$$

$\Rightarrow$ Malha 2:

$$v_C = v_R \Rightarrow i_C = C\frac{d}{dt}v_R \Rightarrow \hat{x}_2 = RC\dot{\hat{x}}_1 - RC\dot{\hat{x}}_2$$

- Outra modelagem possível para o mesmo sistema

$\Rightarrow$ Malha 1: $u = L\dot{\hat{x}}_1 + R\hat{x}_1 - R\hat{x}_2$

$$\boxed{\dot{\hat{x}}_1 = -\frac{R}{L}\hat{x}_1 + \frac{R}{L}\hat{x}_2 + \frac{1}{L}u}$$

$\Rightarrow$ Malha 2:

$$v_C = v_R \Rightarrow i_C = C\frac{d}{dt}v_R \Rightarrow \hat{x}_2 = RC\dot{\hat{x}}_1 - RC\dot{\hat{x}}_2$$

Usando a expressão obtida para $\dot{\hat{x}}_1$:

$$\boxed{\dot{\hat{x}}_2 = -\frac{R}{L}\hat{x}_1 + \frac{R^2C - L}{RLC}\hat{x}_2 + \frac{1}{L}u}$$

- Outra modelagem possível para o mesmo sistema

$\Rightarrow$ Malha 1: $u = L\dot{\hat{x}}_1 + R\hat{x}_1 - R\hat{x}_2$

$$\boxed{\dot{\hat{x}}_1 = -\frac{R}{L}\hat{x}_1 + \frac{R}{L}\hat{x}_2 + \frac{1}{L}u}$$

$\Rightarrow$ Malha 2:

$$v_C = v_R \Rightarrow i_C = C\frac{d}{dt}v_R \Rightarrow \hat{x}_2 = RC\dot{\hat{x}}_1 - RC\dot{\hat{x}}_2$$

Usando a expressão obtida para $\dot{\hat{x}}_1$:

$$\boxed{\dot{\hat{x}}_2 = -\frac{R}{L}\hat{x}_1 + \frac{R^2C - L}{RLC}\hat{x}_2 + \frac{1}{L}u}$$

$$\begin{bmatrix}\dot{\hat{x}}_1\\ \dot{\hat{x}}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{-R}{L} & \frac{R}{L}\\ \frac{R}{C} & \frac{R^2C-L}{RLC}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{x}_1\\ \hat{x}_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\frac{1}{L}\\ \frac{1}{L}\end{bmatrix}u; \quad y = \begin{bmatrix}R & -R\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{x}_1\\ \hat{x}_2\end{bmatrix}$$

Observações

- As duas descrições são do mesmo sistema.
- Portanto, são algebricamente equivalentes.
- Como passar de uma representação para outra?

Transformação de equivalência

- Advém de uma transformação de similaridade.
- Define-se $\hat{x}(t) = \mathbf{P}x(t)$, $\mathbf{P}$ não-singular , resulta em

$$\left.\left[\begin{array}{c|c} \hat{\mathbf{A}} & \hat{\mathbf{B}} \\ \hline \hat{\mathbf{C}} & \hat{\mathbf{D}} \end{array}\right]\right|_{\text{em } \hat{x}(t)} \quad \text{equivale a} \quad \left.\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{array}\right]\right|_{\text{em } x(t)}$$

Transformação de equivalência

- Advém de uma transformação de similaridade.
- Define-se $\hat{x}(t) = \mathbf{P}x(t)$, $\mathbf{P}$ não-singular , resulta em

$$\left.\left[\begin{array}{c|c} \hat{\mathbf{A}} & \hat{\mathbf{B}} \\ \hline \hat{\mathbf{C}} & \hat{\mathbf{D}} \end{array}\right]\right|_{\text{em } \hat{x}(t)} \quad \text{equivale a} \quad \left.\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{array}\right]\right|_{\text{em } x(t)}$$

$\Rightarrow$ com

$$\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{PAP}^{-1}; \quad \hat{\mathbf{B}} = \mathbf{PB}; \quad \hat{\mathbf{C}} = \mathbf{CP}^{-1}; \quad \hat{\mathbf{D}} = \mathbf{D}$$

Transformação de equivalência

- Advém de uma transformação de similaridade.
- Define-se $\hat{x}(t) = \mathbf{P}x(t)$, $\mathbf{P}$ não-singular , resulta em

$$\left[\begin{array}{c|c} \hat{\mathbf{A}} & \hat{\mathbf{B}} \\ \hline \hat{\mathbf{C}} & \hat{\mathbf{D}} \end{array}\right]\Bigg|_{\text{em } \hat{x}(t)} \quad \text{equivale a} \quad \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{array}\right]\Bigg|_{\text{em } x(t)}$$

$\Rightarrow$ com

$$\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{PAP}^{-1}; \quad \hat{\mathbf{B}} = \mathbf{PB}; \quad \hat{\mathbf{C}} = \mathbf{CP}^{-1}; \quad \hat{\mathbf{D}} = \mathbf{D}$$

$\Rightarrow$ $\hat{x}(t) = \mathbf{P}x(t)$ é uma transformação de equivalência

- Qual é a transformação?

- Qual é a transformação?
- Equivalência se dá em:

$$\Rightarrow \hat{\Delta}(\lambda) = \det(\lambda \mathbf{I} - \hat{\mathbf{A}}) = \det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = \Delta(\lambda)$$

$$\Rightarrow$$

$$\hat{\mathbf{G}}(s) = \hat{\mathbf{C}}(s\mathbf{I} - \hat{\mathbf{A}})^{-1}\hat{\mathbf{B}} + \hat{\mathbf{D}} = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} + \mathbf{D} = \mathbf{G}(s)$$

Atividade 3

1. Calcule a transformação que relaciona as duas representações do exemplo usado nesse conjunto de slides.
2. Calcule a função de transferência em cada caso, manualmente.
3. Encontre uma representação no espaço de estados para o circuito em uma forma canônica, via transformação de similaridade.
4. Suponha $i_L = 1$A, $i_R = 0.5$A, $L = 49$mH, $C = 49\mu$F e $R = 3194.4$. Para essas condições, simule cada uma das 3 representações obtidas usando o cálculo da matriz exponencial[3], mostrando, em cada caso, o comportamento dos estados e da saída. Armazene os valores obtidos em 3 matrizes, uma para cada simulação.
5. Usando os valores salvos em uma das matrizes do item anterior, determine os estados e a partir desses a saída para as outras duas representações (Use as relações entre os estados para isso!). Verifique o erro cometido em cada caso.

[3] Usando Cayley Hamilton, por exemplo!

⇒ Sugestão de sistemas para trabalhos futuros ou para estudo das técnicas apresentadas:

Vejam `www.slicot.org` para uma biblioteca de sistemas contínuos no tempo `http://www.slicot.org/REPORTS/SLWN1998-9.ps.gz` e sistemas discretos no tempo `http://www.slicot.org/REPORTS/SLWN1998-10.ps.gz`

Outro conjunto de sistemas pode ser encontrada no projeto *COMPlib* que pode ser baixado e instalado como um toolbox do Matlab. Acesse em `http://www.complib.de/`