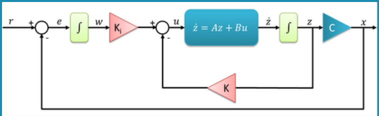
Critério de Routh-Hurwitz

estabilidade em polinômios



State-Space Control Structure

Valter J. S. Leite & Luís F. P. Silva

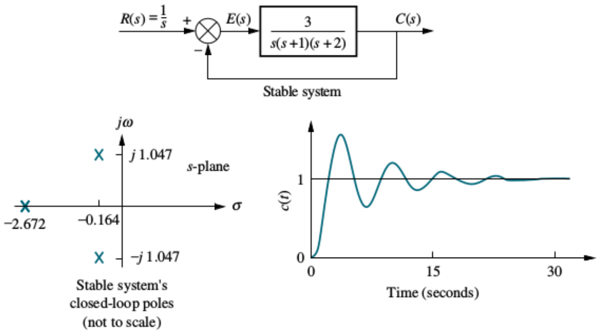
Centro Federal de Educação Tecnológica de MG
Departamento de Engenharia Mecatrônica

Análise de Sistemas Lineares

October 18, 2

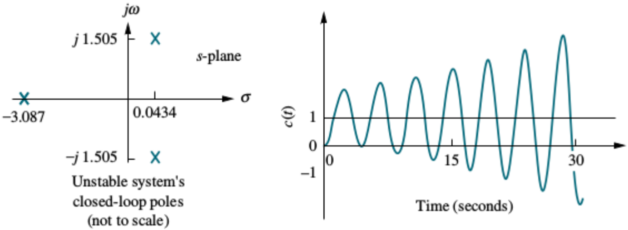
Sumário

Como saber se um sistema é estável?



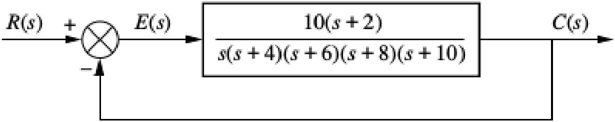
- Ao aumentar o ganho...

Como saber se um sistema é estável?

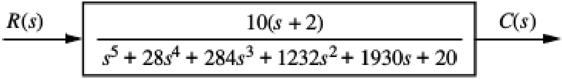


Como saber se um sistema é estável?

- Solução: verificar a equação característica!



(*a*)



Critério de estabilidade de Routh-Hurwitz

Considere a equação característica:

$$q(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0$$

Fatorando, tem-se:

$$a_n(s - r_1)(s - r_2)\cdots(s - r_n) = 0$$

Multiplicando-se os fatores:

$$q(s) = a_n s^n - a_n(r_1 + \cdots + r_n)s^{n-1} + a_n(r_1 r_2 + r_2 r_3 + \cdots)s^{n-2}$$
$$- a_n(r_1 r_2 r_3 + r_1 r_2 r_4 + \cdots)s^{n-3} + \cdots + a_n(-1)^n r_1 r_2 \cdots r_n = 0.$$

Critério de estabilidade de Routh-Hurwitz

Considere a equação característica:

$$q(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0$$

Fatorando, tem-se:

$$a_n(s - r_1)(s - r_2)\cdots(s - r_n) = 0$$

Multiplicando-se os fatores:

$$q(s) = a_n s^n - a_n(r_1 + \cdots + r_n)s^{n-1} + a_n(r_1 r_2 + r_2 r_3 + \cdots)s^{n-2}$$
$$- a_n(r_1 r_2 r_3 + r_1 r_2 r_4 + \cdots)s^{n-3} + \cdots + a_n(-1)^n r_1 r_2 \cdots r_n = 0.$$

Condições necessárias, mas não suficiente, para que as raízes da eq. característica estejam no semiplano esquerdo do plano s:

- todos os coeficientes do polinômio devem ter o mes sinal; e

Critério de estabilidade de Routh-Hurwitz

- O critério de Routh-Hurwitz é um critério necessário e suficiente para a estabilidade de sistemas lineares.

Critério de Routh-Hurwitz baseia-se na ordenação dos coeficientes da eq. característica

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + \cdots + a_1 s + a_0$$

em uma tabela ou lista como a seguir

$$\begin{array}{c|ccccc}
s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots \\
s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots \\
s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & \cdots \\
s^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
s^0 & h_1 & & &
\end{array}$$

Critério de estabilidade de Routh-Hurwitz

$$b_1 = -\frac{1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix},$$

$$b_2 = -\frac{1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix},$$

$$c_1 = -\frac{1}{b_1} \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix},$$

$$\vdots$$

Critério de estabilidade de Routh-Hurwitz

$$b_1 = -\frac{1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix},$$

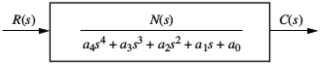
$$b_2 = -\frac{1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix},$$

$$c_1 = -\frac{1}{b_1} \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix},$$

$$\vdots$$

O critério de Routh-Hurwitz declara que o número de raízes de $q(s)$ com parte real positiva é igual ao número de trocas de sinal da primeira coluna da tabela de Routh.

Resumo do método



Resumo do método

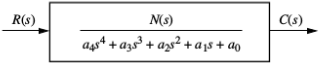


TABLE 6.1 Initial layout for Routh table

s^4	a_4	a_2	a_0
s^3	a_3	a_1	0
s^2			
s^1			
s^0			

Resumo do método

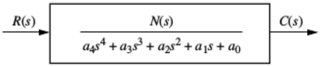


TABLE 6.1 Initial layout for Routh table

s^4	a_4	a_2	a_0
s^3	a_3	a_1	0
s^2			
s^1			
s^0			

TABLE 6.2 Completed Routh table

s^4	a_4	a_2	a_0
s^3	a_3	a_1	0
s^2	$\dfrac{-\begin{vmatrix} a_4 & a_2 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix}}{a_3} = b_1$	$\dfrac{-\begin{vmatrix} a_4 & a_0 \\ a_3 & 0 \end{vmatrix}}{a_3} = b_2$	$\dfrac{-\begin{vmatrix} a_4 & 0 \\ a_3 & 0 \end{vmatrix}}{a_3} = 0$
s^1	$\dfrac{-\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}{b_1} = c_1$	$\dfrac{-\begin{vmatrix} a_3 & 0 \\ b_1 & 0 \end{vmatrix}}{b_1} = 0$	$\dfrac{-\begin{vmatrix} a_3 & 0 \\ b_1 & 0 \end{vmatrix}}{b_1} = 0$
s^0	$\dfrac{-\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & 0 \end{vmatrix}}{c_1} = d_1$	$\dfrac{-\begin{vmatrix} b_1 & 0 \\ c_1 & 0 \end{vmatrix}}{c_1} = 0$	$\dfrac{-\begin{vmatrix} b_1 & 0 \\ c_1 & 0 \end{vmatrix}}{c_1} = 0$

Critério de estabilidade de Routh-Hurwitz

- Caso 1: Nenhum elemento na primeira coluna é zero.

Critério de estabilidade de Routh-Hurwitz

- Caso 1: Nenhum elemento na primeira coluna é zero.
- Caso 2: Existe um zero na primeira coluna, mas alguns elementos da linha que contém o zero na primeira coluna são diferentes de zero.

Critério de estabilidade de Routh-Hurwitz

- Caso 1: Nenhum elemento na primeira coluna é zero.
- Caso 2: Existe um zero na primeira coluna, mas alguns elementos da linha que contém o zero na primeira coluna são diferentes de zero.
- Caso 3: Há um zero na primeira coluna, e os outros elementos da linha que contém o zero também são iguais a zero.

Critério de estabilidade de Routh-Hurwitz

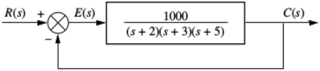
- Caso 1: Nenhum elemento na primeira coluna é zero.
- Caso 2: Existe um zero na primeira coluna, mas alguns elementos da linha que contém o zero na primeira coluna são diferentes de zero.
- Caso 3: Há um zero na primeira coluna, e os outros elementos da linha que contém o zero também são iguais a zero.
- Caso 4: Raízes repetidas da equação característica no eixo $j\omega$.

Estabilidade relativa

- O critério de Routh-Hurwitz fornece a estabilidade absoluta de um sistema.
- Às vezes é desejável determinar a estabilidade relativa de um sistema.
- A partir da localização dos polos do sistema é possível dizer sobre a estabilidade relativa de um sistema $\rightarrow$ quanto um polo (ou um par de polos complexo conjugado) é mais estável que outros polos.
- Para verificar a estabilidade relativa de um sistema pelo critério de Routh-Hurwitz é necessário deslocar o eixo vertical no plano s.
- A magnitude do deslocamento do eixo vertical deve ser obtida na base da tentativa e erro.

Atividade

- Determine se o sistema realimentado é estável:



Atividade

- Determine se o sistema realimentado é estável:

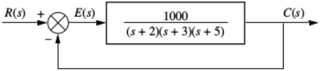


TABLE 6.3 Completed Routh table for Example 6.1

s^3	1	31	0
s^2	$\cancel{10}\ \ 1$	$\cancel{1030}\ \ 103$	0
s^1	$\dfrac{-\begin{vmatrix} 1 & 31 \\ 1 & 103 \end{vmatrix}}{1} = -72$	$\dfrac{-\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}}{1} = 0$	$\dfrac{-\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{1} = 0$
s^0	$\dfrac{-\begin{vmatrix} 1 & 103 \\ -72 & 0 \end{vmatrix}}{-72} = 103$	$\dfrac{-\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -72 & 0 \end{vmatrix}}{-72} = 0$	$\dfrac{-\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -72 & 0 \end{vmatrix}}{-72} = 0$

Exercícios

1. Determine o número de raízes com parte real negativa na equação:
$$s^3 + 6s^2 + 12s + 8 = 0$$
2. Determine o número de raízes em cada semi-plano da equação $3s^7 + 9s^6 + 6s^5 + 4s^4 + 7s^3 + 8s^2 + 2s + 6 = 0$.
3. Determine os valores de K que asseguram que a equação
$$s^3 + 3s^2 + 1 + K = 0$$
não possua raízes positivas.
4. O que acontece no exercício anterior se $K = 1$?

Problema no último exercício: zero **apenas** na primeira coluna

- Se o zero está **apenas** na primeira coluna, há duas possibilidades:
  1. Trocar zero por ϵ e estudar as trocas de sinal.
  2. Estudar o polinômio das raízes recíprocas ($s \leftarrow \frac{1}{d}$).

Método da substituição por ϵ

$$G(s) = \frac{10}{s^5 + 2s^4 + 3s^3 + 6s^2 + 5s + 3}$$

Método da substituição por ϵ

$$G(s) = \frac{10}{s^5 + 2s^4 + 3s^3 + 6s^2 + 5s + 3}$$

s^5	1	3	5
s^4	2	6	3
s^3	$\cancel{0}$ ϵ	$\frac{7}{2}$	0
s^2	$\frac{6\epsilon - 7}{\epsilon}$	3	0
s^1	$\frac{42\epsilon - 49 - 6\epsilon^2}{12\epsilon - 14}$	0	0
s^0	3	0	0

$\boxed{\text{Veja a troca do 0 por } \epsilon \text{ na linha } s^3}$

Estudo do sinal

Label	First column	$\epsilon = +$	$\epsilon = -$
s^5	1	$+$	$+$
s^4	2	$+$	$+$
s^3	$\cancel{0}$ ϵ	$+$	$-$
s^2	$\frac{6\epsilon - 7}{\epsilon}$	$-$	$+$
s^1	$\frac{42\epsilon - 49 - 6\epsilon^2}{12\epsilon - 14}$	$+$	$+$
s^0	3	$+$	$+$

Estudo do sinal

Label	**First column**	$\epsilon = +$	$\epsilon = -$
s^5	1	$+$	$+$
s^4	2	$+$	$+$
s^3	$\cancel{0}\quad \epsilon$	$+$	$-$
s^2	$\dfrac{6\epsilon - 7}{\epsilon}$	$-$	$+$
s^1	$\dfrac{42\epsilon - 49 - 6\epsilon^2}{12\epsilon - 14}$	$+$	$+$
s^0	3	$+$	$+$

- Ambos os casos há 2 trocas de sinal: 2 raízes positivas.

Estudo do sinal

Label	First column	$\epsilon = +$	$\epsilon = -$
s^5	1	$+$	$+$
s^4	2	$+$	$+$
s^3	$\cancel{0}\quad \epsilon$	$+$	$-$
s^2	$\dfrac{6\epsilon - 7}{\epsilon}$	$-$	$+$
s^1	$\dfrac{42\epsilon - 49 - 6\epsilon^2}{12\epsilon - 14}$	$+$	$+$
s^0	3	$+$	$+$

- Ambos os casos há 2 trocas de sinal: 2 raízes positivas.

```
>>roots([1 2 3 6 5 3])
```

$$= [0.3429 \pm 1.5083i, \;\; -1.6681, \;\; -0.5088 \pm 0.7020i].$$

Método da raiz recíproca ($s \leftarrow \frac{1}{d}$)

- 5deia: as raízes inversas possuem mesmo sinal. Portanto:

$$s^5 + 2s^4 + 3s^3 + 6s^2 + 5s + 3 \Rightarrow$$
$$\left(\frac{1}{d}\right)^5 + 2\left(\frac{1}{d}\right)^4 + 3\left(\frac{1}{d}\right)^3 + 6\left(\frac{1}{d}\right)^2 + 5\left(\frac{1}{d}\right) + 3 \quad (1)$$

- após manipulações... $3s^5 + 5s^4 + 6s^3 + 3s^2 + 2s + 1 = 0$

Montando tabela Routh-Hurwitz

s^5	3	6	2
s^4	5	3	1
s^3	4.2	1.4	
s^2	1.33	1	
s^1	−1.75		
s^0	1		

Montando tabela Routh-Hurwitz

s^5	3	6	2
s^4	5	3	1
s^3	4.2	1.4	
s^2	1.33	1	
s^1	−1.75		
s^0	1		

- Há 2 trocas de sinal: 2 raízes positivas.

Uma linha inteira de zeros

Razão: há um polinômio par que é fator do polinômio original.

- Ideia é tomar o polinômio da linha acima, derivar em relação a s e trocar na linha de zeros.
- Exemplo $p(s) = s^5 + 7s^4 + 6s^3 + 42s^2 + 8s + 56$

Veja tabela no próx. slide!

Tabela

s^5	1	6	8
s^4	$\cancel{7}\quad 1$	$\cancel{42}\quad 6$	$\cancel{56}\quad 8$
s^3	$\cancel{0}\quad \cancel{4}\quad 1$	$\cancel{0}\quad \cancel{12}\quad 3$	$\cancel{0}\quad \cancel{0}\quad 0$
s^2	3	8	0
s^1	$\frac{1}{3}$	0	0
s^0	8	0	0

- Linha s^4: simplificação.
- Linha s^3: i) nula; ii) derivada da linha s^4; iii) simplificação.
- De fato as raízes são: -7, $\pm 2j$, $\pm\sqrt{2}j$

Polos puramente complexos

- Quando há uma linha de zeros, a análise refere-se ao comportamento do polinômio acima da linha de zeros.
- Polinômio par: raízes simétricas em relação à origem!
- Quando há uma linha de zeros, a análise refere-se ao comportamento do polinômio acima da linha de zeros.

Exercícios: analise de estabilidade

1. Determine a distribuição de polos da malha fechada em que o ramo direto é dado por $G(s)$ e uma realimentação negativa dada por $H(s)$. Suponha:
   1.1 $H(s) = 1$ e $G(s) = \frac{200}{s(s^3+6s^2+11s+6)}$;
   1.2 $H(s) = 1$ e $G(s) = \frac{1}{s(2s^4+3s^3+2s^2+3s+2)}$;
   1.3 $H(s) = 1$ e
   $G(s) = \frac{128}{s(s^7+3s^6+10s^5+24s^4+48s^3+96s^2+128s+192)}$;
2. Para cada item anterior, determine o erro em regime permanente para cada uma das entradas padronizadas unitárias.

Exercícios: projeto de estabilização

1. Determine a faixa de valores de $K > 0$ tais que o sistema de realimentação negativa com em que o ramo direto é dado por $KG(s)$ e a realimentação por $H(s)$ seja: i) estável; ii) marginalmente estável; iii) instável. Suponha:
   1.1 $H(s) = 1$ e $G(s) = \frac{1}{s(s+7)(s+11)}$;
   1.2 $H(s) = \frac{s-1}{s^2+2s+1}$ e $G(s) = \frac{1}{s}$;
   1.3 $H(s) = \frac{0.1}{s+0.1}$ e $G(s) = \frac{0.7}{(s+0.4)(s^2+1.7s+0.25)}$;
   1.4 $H(s) = \frac{s+6}{s+7}$ e $G(s) = \frac{s+2}{s(s+1)(s+3)}$
2. Um sistema com realimentação unitária negativa tem ramo direto dado por $KG(s)$, com $G(s) = \frac{1}{(s+49)(s^2+4s+5)}$. Determine i) a faixa de valores de K para a estabilidade; e ii) a frequência de oscilação quando o sistema é marginalmente estável.

Exercícios: espaço de estados

1. Determine a distribuição de autovalores do sistema com dinâmica dada por $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ e saída dada por $y(t) = Cx(t)$, em que $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$, $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ e

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 7 & 1 \\ -3 & 4 & -5 \end{bmatrix}.$$

2. Idem anterior com $B = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ e

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 8 & 1 \\ -10 & -5 & -2 \end{bmatrix}.$$

Exercícios

Exercícios da décima primeira edição do Dorf: E6.4, E6.14, E6.23 P6.8 e P6.14.