Segunda lista de Controle Moderno: linearização

Bresolini, Bernardo * **Ester Queiroz Alvarenga** *

* *Departamento de Engenharia Mecatrônica, CEFET-MG câmpus Divinópolis, MG, (e-mail: berbresolini14@gmail.com).*

1. INTRODUÇÃO

(1) Determine os valores de $a \in \mathbb{R}$ para que o sistema linear abaixo possua solução (uma ou mais de uma):

$$\begin{cases} 2ax_1 - 3x_2 = 2 \\ 2x_1 + 5x_2 = 3 \\ -2x_1 + x_2 = -a \end{cases}$$

(2) Para o polinômio

$$p(s) = s^5 + 3s^2 + 2s - 1,$$

faça o que é pedido:

(a) forneça a representação desse polinômio na base canônica dada por

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & s & s^2 & s^3 & s^4 & s^5 \end{bmatrix}.$$

(b) verifique se $\mathbf{Q}_s = \begin{bmatrix} s^5+4 & 4s^2-s & 10s \end{bmatrix}$ é uma base descrever $p(s)$. Em caso positivo, dê a respectiva representação de $p(s)$ em $\mathbf{Q}_s$.

(c) Considerando a base dada por $\mathbf{Q}_s$ no item anterior, determine a família de polinômios que pode ser representada em $\mathbf{Q}$ mais não em em $\mathbf{Q}_s$.

(3) Um robô usado em competições de robôs, categoria F-180 pode ter quatro rodas omnidirecionais conforme mostrado na FIG. 1. Nesse caso, cada uma das rodas do robô é atuada por um motor CC comandado por um sinal de tensão $\rho_i = 1, \ldots, 4$. As variáveis de interesse são: a velocidade do robô em relação às direções X e Y , $\dot{X}$ e $\dot{Y}$,respectivamente, e sua velocidade de rotação $\dot{\theta}$. Uma descrição matemática possível para esse robô é dada por

$$\begin{bmatrix} \ddot{X} \\ \ddot{Y} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 & a_2\dot{\theta} & 0 \\ -a_2\dot{\theta} & -a_1 & 0 \\ 0 & 0 & -a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} -b_1 & -b_1 & b_1 & b_1 \\ b_1 & -b_1 & -b_1 & b_1 \\ b_2 & b_2 & b_2 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \\ \rho_4 \end{bmatrix}$$

Com relação a esse modelo:

(a) A análise baseada na resposta em frequência pode ser usada para estudar as propriedades desse sistema? Discuta em quais condições isso é possível e quais as limitações associadas.

(b) O robô apresentado é super-atuado, uma vez que existem 4 motores comandados por 4 tensões ρ_i para comandar um movimento no plano e uma variável de orientação. Em algumas técnicas de controle é necessário que o sistema tenha um número de atuadores igual ao número de variáveis de estado. Nesse caso o sistema pode ser representado por

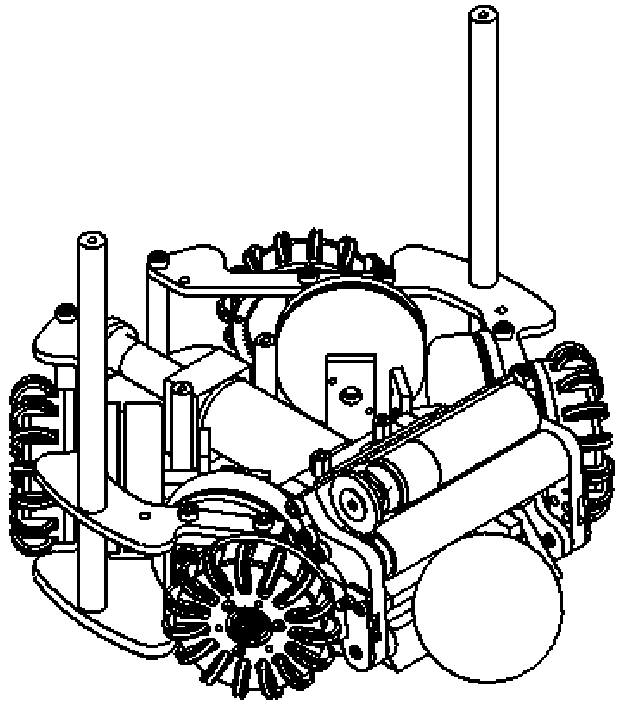

Figura 1. Robô com 4 rodas omnidirecionais usado em competições da modalidade F-180.

$$\begin{bmatrix} \ddot{X} \\ \ddot{Y} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 & a_2\dot{\theta} & 0 \\ -a_2\dot{\theta} & -a_1 & 0 \\ 0 & 0 & -a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_1 & 0 \\ 0 & 0 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{bmatrix}$$

em que

$$\begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \\ \rho_4 \end{bmatrix}$$

Determine a solução geral do sistema acima que relaciona o vetor de sinal de controle real ρ com o vetor de sinal de controle virtual calculado, μ.

(4) Faça um programa em Matlab ou outro código que desenhe no espaço $x_1 \times x_2 \times x_3$ o lugar geométrico dos vetores que possuem

(a) norma 1 unitária;

(b) norma euclidiana unitária (norma 2);

(c) norma ∞ unitária.

(5) Utilize o modelo não linear desenvolvido na Lista 1 e obtenha uma linearização para o ponto de operação

de $h_2 = 0,50$ m. Para o modelo linear obtido, obtenha uma base que leve a matriz A à forma diagonal ou à forma de Jordan.

2. RESPOSTAS

2.1 Sistema Impossível

Podemos reescrever a equação como

$$\begin{cases} 2ax_1 - 3x_2 - 2 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 - 3 = 0 \\ -2x_1 + x_2 + a = 0 \end{cases}$$

Sejam $\mathbf{A}$ uma matriz 3×3 e $\mathbf{x}$ uma matriz 3×1, tais que

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2a & -3 & -2 \\ 2 & 5 & -3 \\ -2a & 1 & a \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Assim, $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$, isto é, um sistema homogêneo sem solução trivial, pois $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, já que $1 \neq 0$.

Teorema 1. Seja $\mathbf{A}$ uma matriz $n \times n$. *O sistema homogêneo* $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ *tem solução não trivial se, e somente se,* $\mathbf{A}$ *é singular (não invertível).*

e ainda

Teorema 2. *Uma matriz* $\mathbf{A}$, $n \times n$, *é invertível, se e somente se,* $\mathbf{A}$ *é equivalente por linhas à matriz identidade* I_n.

Transformando a matriz $[\,\mathbf{A} \mid I_n\,]$, por meio do método de Gauss-Jordan, na sua forma reduzida denotada por $[\,\mathbf{R} \mid \mathbf{S}\,]$. Então, $\mathbf{A}$ é invertível se $\mathbf{R}$ é a matriz identidade, de acordo com o Teorema 2.

Desta forma, utilizando-se do MATLAB® para aplicar o método de Gauss-Jordan em $\mathbf{A}$ usando o *script*:

```
syms a
A = [2*a, -3, -2;
       2,  5, -3;
      -2,  1,  a];
I = eye(3);
AI = [A I];       % A estendida
RS = rref(Aest); % R e S estendidas
```

obtém-se em `RS`

$$[\,\mathbf{R} \mid \mathbf{S}\,] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & (5a+3)/2z & (3a-2)/2z & 19/2z \\ 0 & 1 & 0 & (-a+3)/z & (a-2)/z & (3a-2)/z \\ 0 & 0 & 1 & 6/z & (a-3)/z & (5a+3)/z \end{array}\right]$$

em que $z = 5a + 6a - 21$.

Contudo, observa-se que $\mathbf{R} = I_3$, logo, $\mathbf{A}$ é invertível. Destarte, decorre do Teorema 1 que não existem valores $a \in \mathbb{R}$ tais que o sistema analisado tenha solução.

2.2 Bases

O polinômio dado é

$$p(s) = s^5 + 3s^2 + 2s - 1$$

(a) Na base canônica $\mathbf{Q}$, tem-se

$$p_(s) = [\,-1\ \ 2\ \ 3\ \ 0\ \ 0\ \ 1\,]$$

(b) Se $\mathbf{Q}_s$ é uma base para $p(s)$ existem c_1, c_2 e $c_3 \in \mathbb{R}$ tais que

$$c_1(s^5 + 4) + c_2(4S^2 - S) + c_3(10S) =$$
$$s^5 + 3s^2 + 2s - 1$$

Implicando no sistema

$$\begin{cases} c_1 = 1 \\ 4c_2 = 3 \\ 10c_3 - c_2 = 2 \\ 4c_1 = -1 \end{cases}$$

cuja solução é impossível. Logo, $\mathbf{Q}_s$ não é uma base para $p(s)$.

(c) Dado $\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & s & s^2 & s^3 & s^4 & s^5 \end{bmatrix}$, linearmente independente, a família de polinômios $as^5 + bs^4 + cs^3 + ds^2 + es + f$ só poderá ser representada em $\mathbf{Q}$ se existir c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, $c_6 \in \mathbb{R}$ tais que

$$c_1 s^5 + c_2 s^4 + c_3 s^3 + c_4 s^2 + c_5 s + c_6 =$$
$$as^5 + bs^4 + cs^3 + ds^2 + es + f$$

Em que se observa

$$\begin{array}{lll} c_1 = a & c_2 = b & c_3 = c \\ c_4 = d & c_5 = e & c_6 = f \end{array}$$

infinitas soluções, sem nenhuma restrição, significando que a base $\mathbf{Q}$ é capaz de representar todos os polinômios de grau menor ou igual a 5.

Para $\mathbf{Q}_s = \begin{bmatrix} s^5 + 4 & 4s^2 - s & 10s \end{bmatrix}$, que é LI, a família de polinômios $as^5 + bs^4 + cs^3 + ds^2 + es + f$ só poderá ser representada em $\mathbf{Q}$ se existir c_1, c_2, $c_3 \in \mathbb{R}$ tais que

$$c_1(s^5 + 4) + c_2(4s^4 - s) + c_3(10s) =$$
$$as^5 + bs^4 + cs^3 + ds^2 + es + f$$

Assim,

$$\begin{array}{lll} a = c_1 & b = 4c_2 & c = 0 \\ d = 0 & e = 10c_3 - c_2 & f = 4c_1 \end{array}$$

Implica que os polinômios que podem ser representados por essa base são restringidos para quando $f = 4a$ e $c_3 = e/10 + b/40$.

Logo, a família de polinômios que pode ser representada em $\mathbf{Q}$ mas não em $\mathbf{Q}_s$ são aqueles que apresentam $f = 4a$ e $c_3 = e/10 + b/40$ na equação de verificação da base $\mathbf{Q}_s$.

2.3 Robôs

(3) (a) Sim, a análise no domínio da frequência do sistema capaz de fornecer informações pertinentes do sistema. A visualização da resposta do sistema no domínio da frequência pode mostrar os polos dele, dizendo se ele é BIBO estável ou não (caso todos os polos sejam negativos). Ainda fornece a matriz $\mathbf{D}$ para o sistema em regime permanente. Ademais, ela pode fornecer as frequências onde o sistema reage mais ou menos rápidos, possíveis pontos de aplicação desejáveis para minimizar o gasto energético dele.

2.4 Normas

(4) Seja $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{e}_i$ a representação de um vetor em $\mathbb{R}^n$. As normas canônicas definidas nestes espaços são definidas por

$$\|\boldsymbol{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty$$

$$\|\boldsymbol{x}\|_\infty = \max_{i=1}^{n} \left(|x_i| \right)$$

(a) Para $p = 1$ e sabendo-se que $n = 2$, segue-se que

$$\|\boldsymbol{x}\| = |x_1| + |x_2|$$

Entretanto, a norma deve ser unitária, isto é,

$$\|\boldsymbol{x}\| = |x_1| + |x_2| = 1$$

em que $|x| = \sqrt{x^2}$.

Para $p = 2$ e sabendo-se que $n = 2$, segue-se que

$$\|\boldsymbol{x}\| = \left(x_1^2 + x_2^2\right)^{1/2}$$

Entretanto, a norma deve ser unitária, isto é,

$$\|\boldsymbol{x}\| = x_1^2 + x_2^2 = 1$$

Para $p = \infty 1$ e sabendo-se que $n = 2$, segue-se que

$$\|\boldsymbol{x}\| = \max(x_1,\ x_2)$$

Entretanto, a norma deve ser unitária, isto é,

$$\|\boldsymbol{x}\| = \max(x_1,\ x_2) = 1$$

o qual define um quadrado centrado em (0, 0) vértices em $(-1, -1)$, $(-1, 1)$, (1,1) e $(1, -1)$.

No MATLAB,

```
syms x1 x2;
xx1 = linspace(-1,1,100);
xx2 = linspace(-1,1,100);

%Norma-1
eq1 = sqrt(x1^2) + sqrt(x2^2) == 1;
eq1 = solve(eq1,x1);
plot(xx1, subs(eq1,x2,xx2) );
hold on;

%Norma-2
eq2 = x1^2 + x2^2 == 1;
eq2 = solve(eq2,x1);
p = plot(xx1, subs(eq2,x2,xx2) );

%Norma-∞
plot([-1 1 1 -1], [-1 -1 1 1])
```

cujo gráfico é

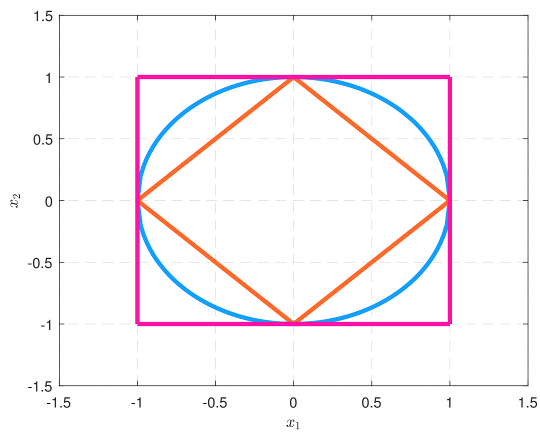

Figura 2. Gráficos das normas unitárias no espaço $x_1 \times x_2$, em que o losângulo representa a norma-1, a circunferência, norma-2 e o quadrado, a norma-∞

(5) O modelo não linear do sistema de vasos comunicantes é da forma

$$\dot{h}_1(t) = \frac{2,617 \times 10^{-4} u^2(t) + 0,03 - 6,78\sqrt{|h_1(t) - h_2(t)|}}{\pi h_1^2(t) - 0,9\pi h_1(t) + 0,25\pi}$$

$$\dot{h}_2(t) = \frac{6,78\sqrt{|h_1(t) - h_2(t)|} - 2,6\sqrt{h_2(t)}}{-\pi h_2^2(t)/9 - 2\pi h_2(t)/45 + 221\pi/900}$$

em que $h_1(t)$, a altura de TQ-01, $h_2(t)$, a altura de TQ-02, e u, a variável manipulada da vazão, se relacionam por

$$q_i(u(t)) = 2,617 \times 10^{-4}\, u^2(t) + 0,03$$

$$q_0(h_2(t)) = 2,6\sqrt{h_2(t)}$$

$$q_{12} = \operatorname{sign}\Big(h_1(t) - h_2(t)\Big)\, 6,78\sqrt{|h_1(t) - h_2(t)|}$$

sendo q_i a vazão de entrada no TQ-01, q_{12} a vazão de TQ-01 para TQ-02 e q_0 a vazão de saída do TQ-02.

Se $h_2(t) = 0,5$ m, segue-se que $h_1(t) = 0,5735$ m e $u = 83,1294\%$. Então, aplicando-se o Jacobiano nas ODEs mostradasm em relação a h_1 e h_2, tem-se que a matriz A é

$$A = \begin{bmatrix} -63,4078 & 63,4078 \\ 21,3049 & -24,4379 \end{bmatrix}$$

obtidos a partir do *script*

```
%variaveis
syms h1 h2 u

%Ponto de operacao
vh2 = 0.5;
vh1 = 2.6*sqrt(vh2) == 6.78*sqrt(h1-vh2);
vh1 = solve(vh1,h1);
vu  = 2.6*sqrt(vh2) == 2.617e-4*u^2 + 0.03;
vu  = solve(vu,u);
vu  = vu(1);

z1 = ( 2.617e-4*u^2 + 0.03 - ...
     6.78*sqrt(h1-h2) )/( pi*h1^2 - 0.9*pi*h1 ...
     + 0.25*pi );
z2 = ( 6.78*sqrt(h1-h2) - 2.6*sqrt(h2) )/( ...
     -pi*h1^2/9 - 2*pi*h2/45 + 221*pi/900 );
Z = [z1;z2];
H = [h1;h2];

A = double ( subs( jacobian(Z,H),[H; ...
    u],[vh1;vh2;vu] ) );
B = double ( subs( jacobian(Z,u),[H; ...
    u],[vh1;vh2;vu] ) );
```

Encontrando os autovalores λ e autovetores de A por meio de $\det\big(A - \lambda I\big) = 0$, encontra-se

$$\lambda_1 = -85,5228 \qquad \lambda_2 = -2,3229$$

cujos autovetores $\boldsymbol{v}_1$ e $\boldsymbol{v}_2$ associados

$$\boldsymbol{v}_1 = (-0,9442,\ 0,3293) \qquad \boldsymbol{v}_2 = (-0,7292,\ -0,6938)$$

Portanto, as matrizes P e D, tais que

$$D = P^{-1}AP$$

são

$$D = \begin{bmatrix} -85,5228 & 0 \\ 0 & -2,3229 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} -0,9442 & -0,7292 \\ 0,3293 & -0.6938 \end{bmatrix}$$

Assim sendo, a matriz requerida é a matriz P.