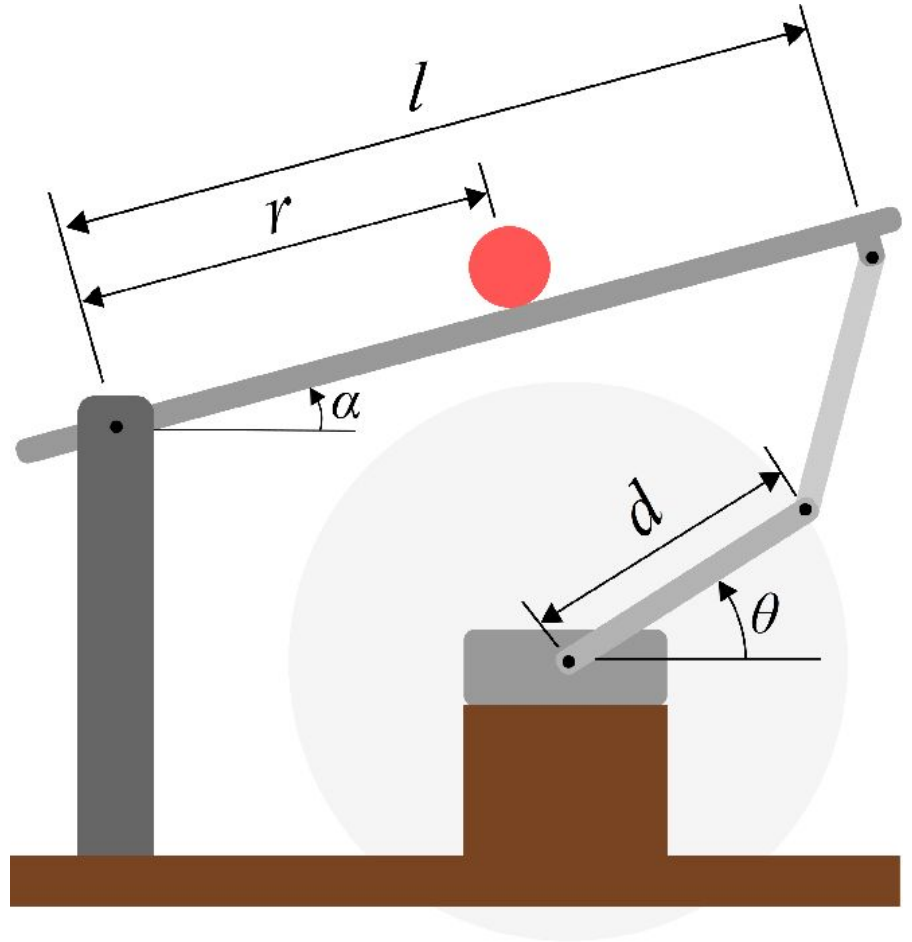

Sistema *Ball and Beam*: Quatro Barras

Bernardo Bresolini
Ester Q. Alvarenga

Visão geral

O sistema ball and beam é um clássico sistema eletromecânico subatuado com dois graus de liberdade e somente um atuador.

- Controle da posição da bola
- Aplicação em aeronaves



— Etapas do Projeto

★ Elaboração e início do projeto

- Definição dos parâmetros
- Dimensionamento

★ Modelagem e Simulação

- Modelagem do sistema
- Linearização do modelo
- Simulação e validação do modelo
- Ajustes

★ Materiais

- Escolha dos materiais
- Orçamento e compra dos componentes
- Calibração do sensor e atuador



★ Montagem

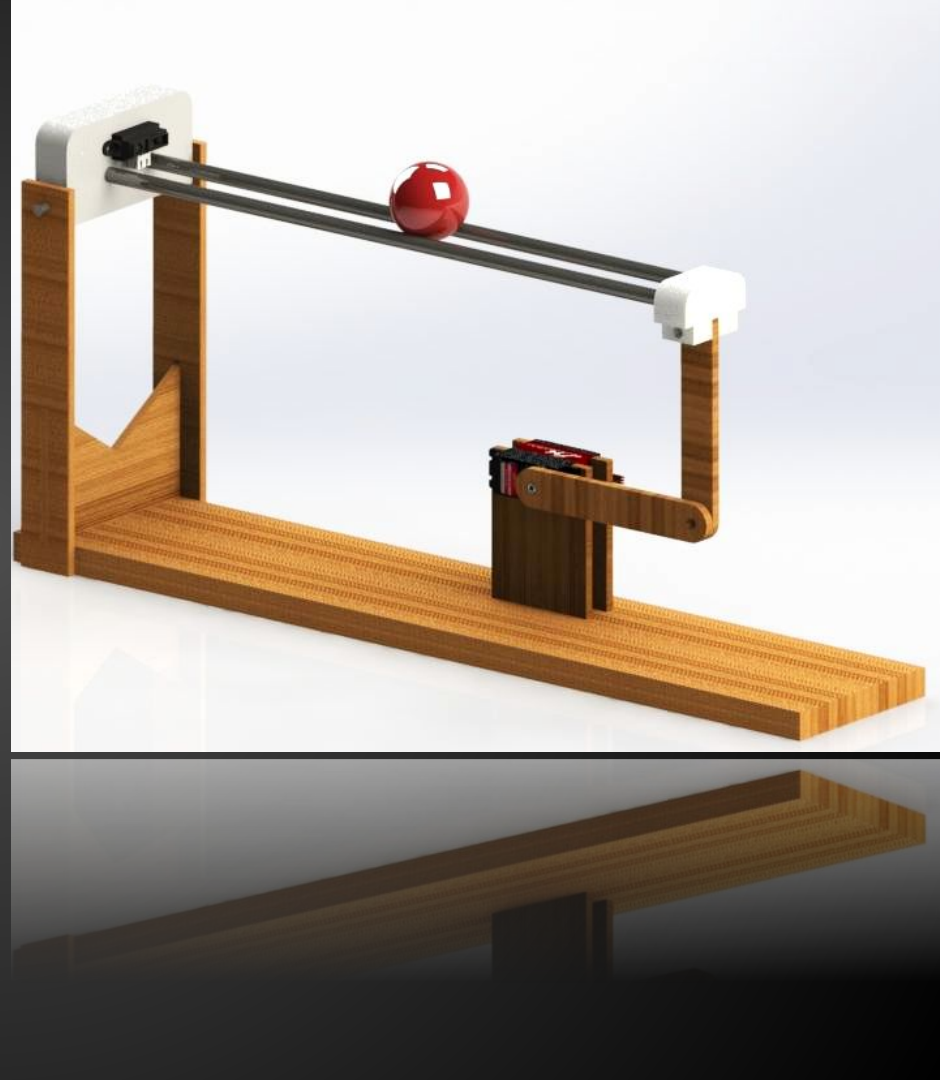
- Montagem do sistema físico
- Estudo das características em malha aberta

★ Controle

- Definição de metas de controle
- Projeto e validação controlador P
- Projeto e validação controlador PIDF

Elaboração e início do Projeto

- Condições de operação
- Dimensionamento



Condições de operação

Faixa de operação

O sistema será projetado para trabalhar na seguinte faixa:

- 6–31 cm
- $< 0,25 \text{ s}/60^\circ$

Condições

Além da faixa de operação, o sistema deverá operar nas seguintes condições:

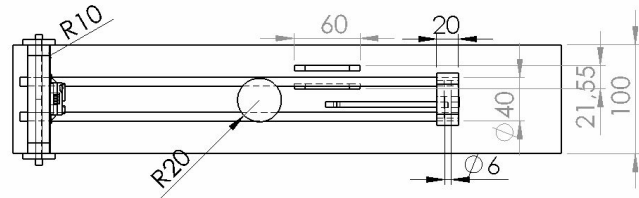
- Desprezível o efeito de deslizamento
- A bola está em contato com as guias
- Não há obstáculos na viga na faixa de operação

Limites

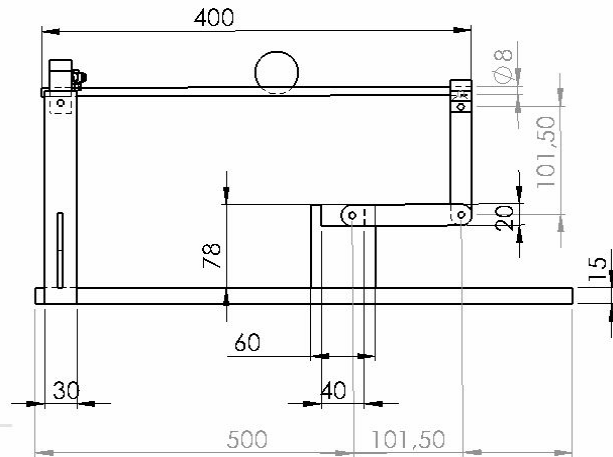
O sensor e atuador e a alimentação têm limitações quanto ao uso, sendo elas

- Torque: 15 kgF·cm
- Precisão: $\sim 0,2 \text{ mm}$
- Corrente: 2 A

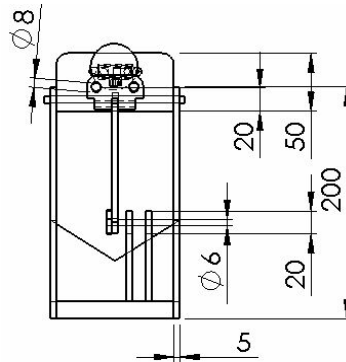
Dimensionamento



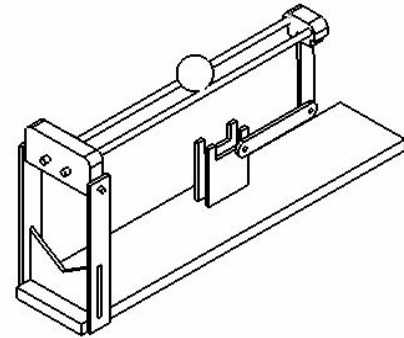
VISTA SUPERIOR



VISTA FRONTAL



VISTA LATERAL



Circuito Eletrônico

1 Arduino Uno

- ❑ Interface entre o controlador (MATLAB) e a planta

1 Capacitor de 10 μF

- ❑ Filtra o ruído do sensor

1 Fonte de alimentação CC

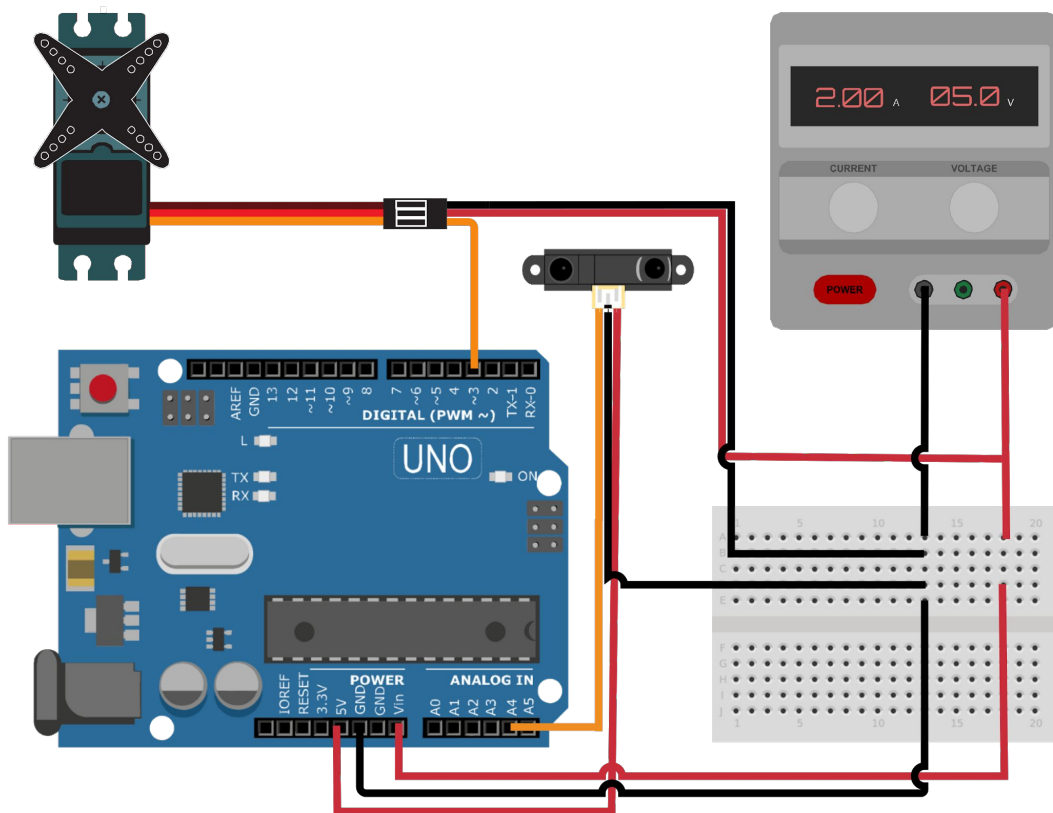
- ❑ Fornece a energia (5 V e até 2 A) para o atuador, sensor e o Arduino.

1 Sensor de distância a laser

- ❑ Resolução de 0,2 mm
- ❑ Latência mínima de 100 ms

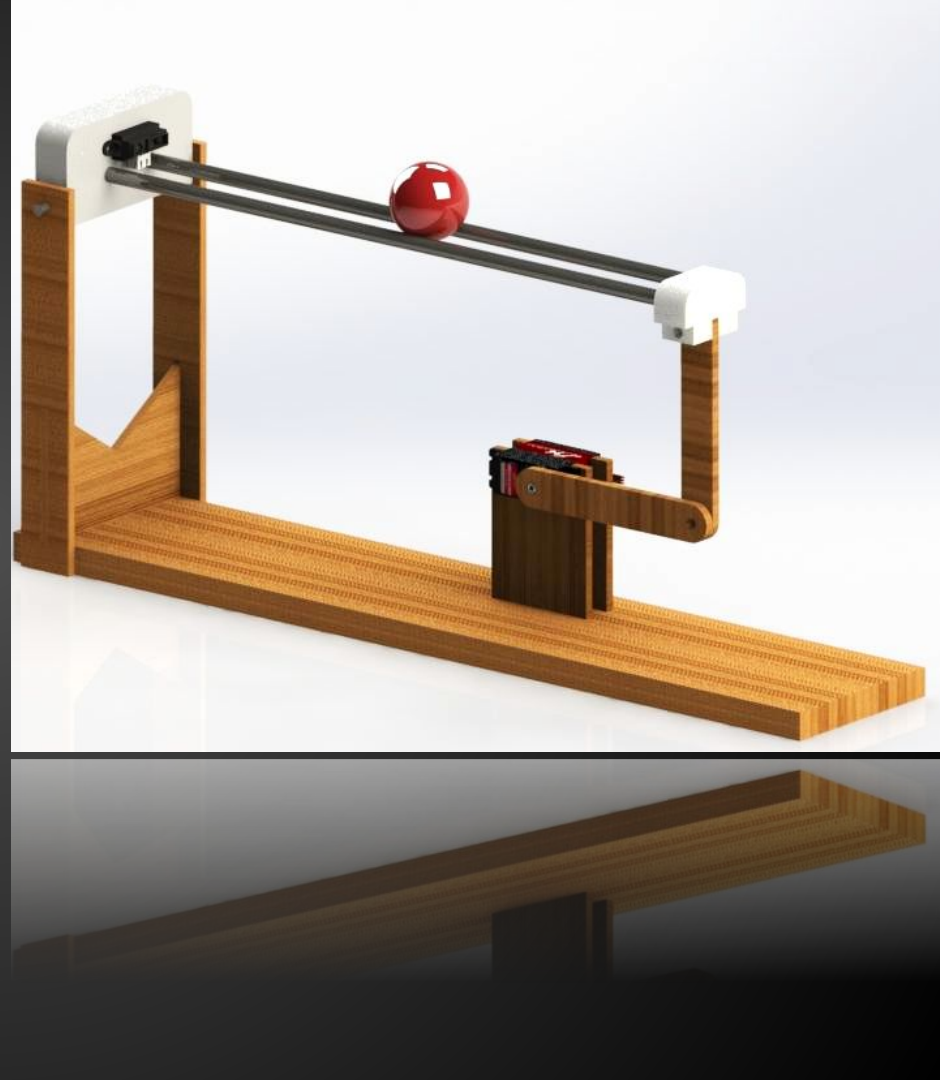
1 Servomotor 20 kgF·cm

- ❑ Atuador de alta precisão
- ❑ Constante de tempo de 8 rad/s

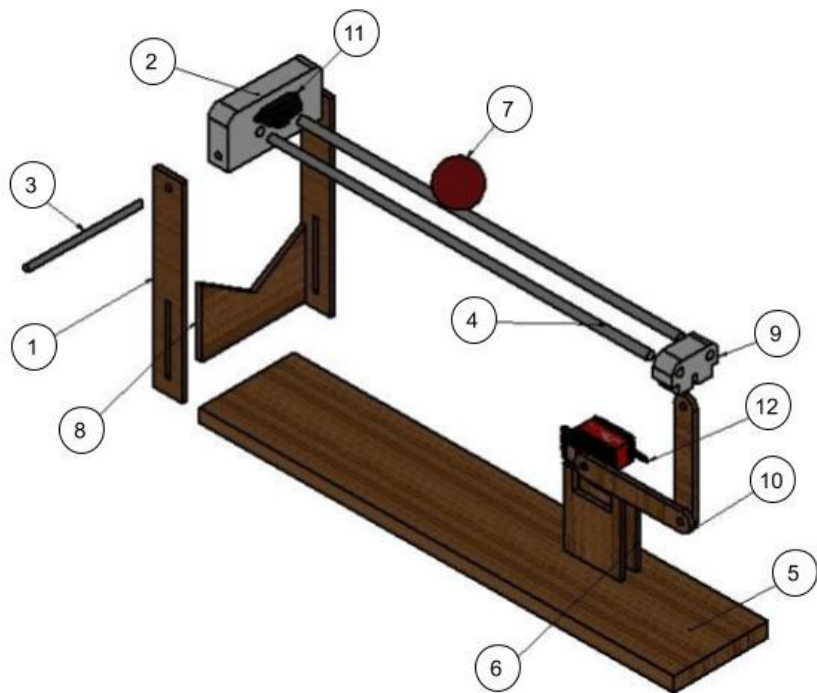


Materiais

- Escolha dos materiais
- Orçamento e compra dos componentes
- Calibração do sensor e atuador



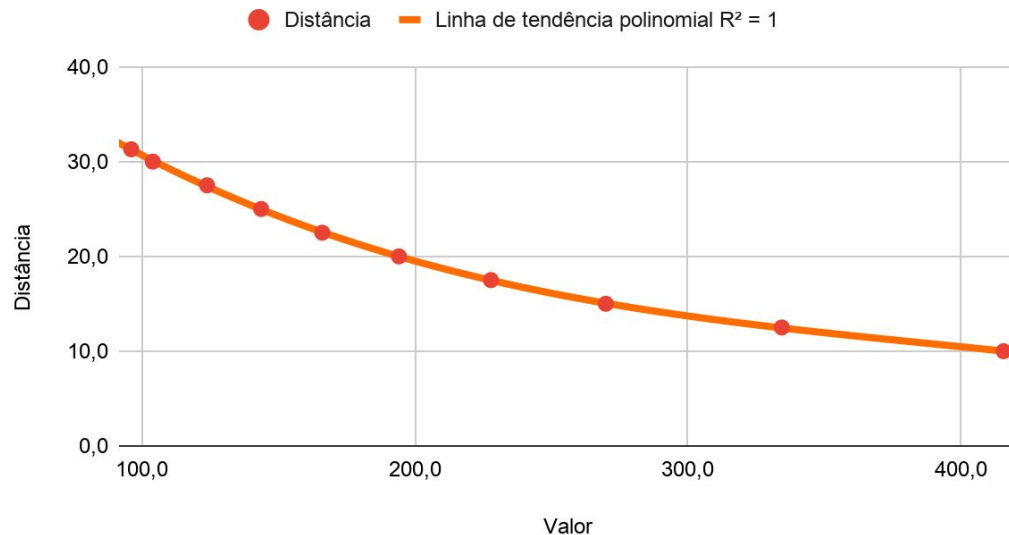
— Materiais



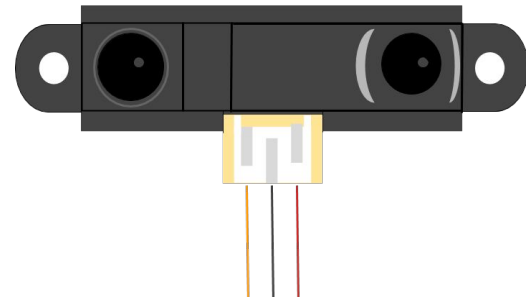
Índice	Peça	Material	Qtd.
1	Coluna de Sustentação da viga	MDF	2
2	Encaixe coluna-viga	ABS	1
3	Junta para o encaixe 2	Aço	1
4	Viga	Aço	2
5	Base	MDF	1
6	Suporte servo	MDF	1
7	Bola	Plástico	1
8	Nervura	MDF	1
9	Encaixe elo-viga	ABS	1
10	Elo binário	MDF	2
11	Sensor	-	1
12	Servomotor	-	1

Sensor Infravermelho - GP2Y0A21YK0F

Calibração do sensor



$$y = 49,6 - 0,236x + 5,06 \cdot 10^{-4}x^2 - 3,98 \cdot 10^{-7}x^3$$



— Servomotor - JX PDI-6221MG

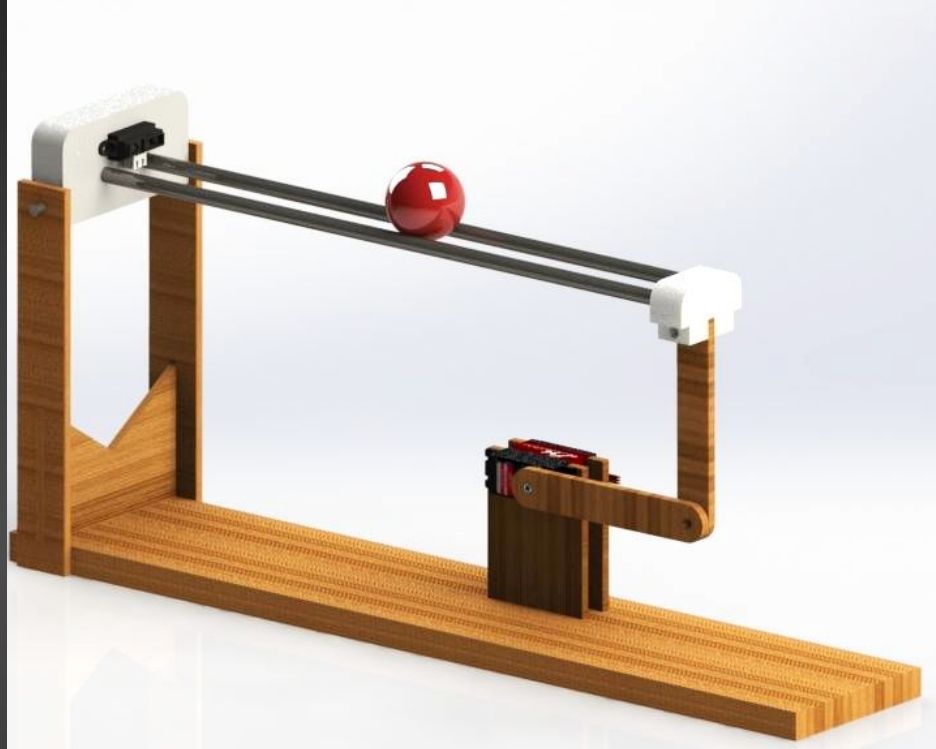
Grau	Ângulo
-8	80
1	90
28	130
45	150

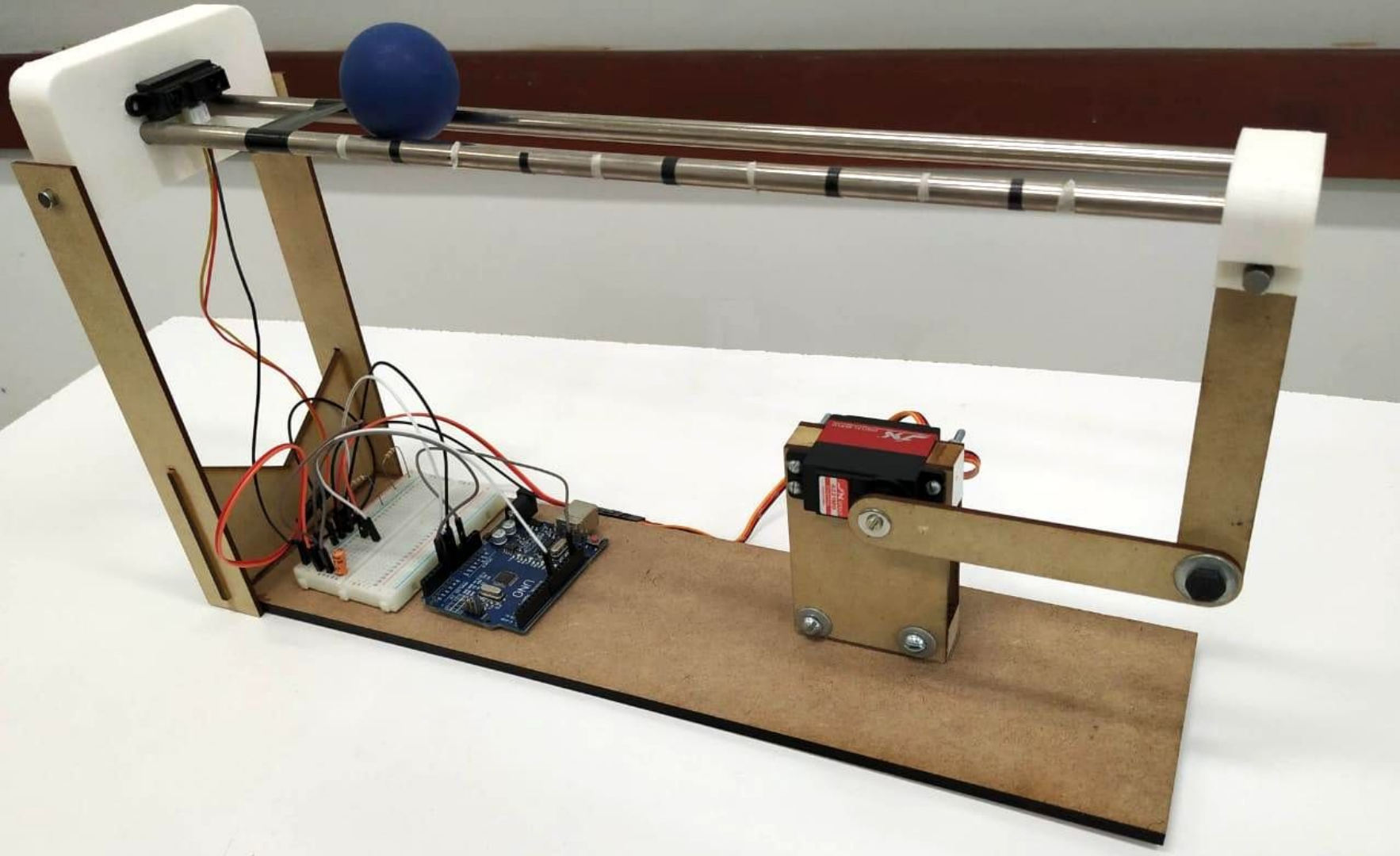
$$\hat{\text{Ângulo}} = 1,35\text{Grau} + 90,2$$



Montagem

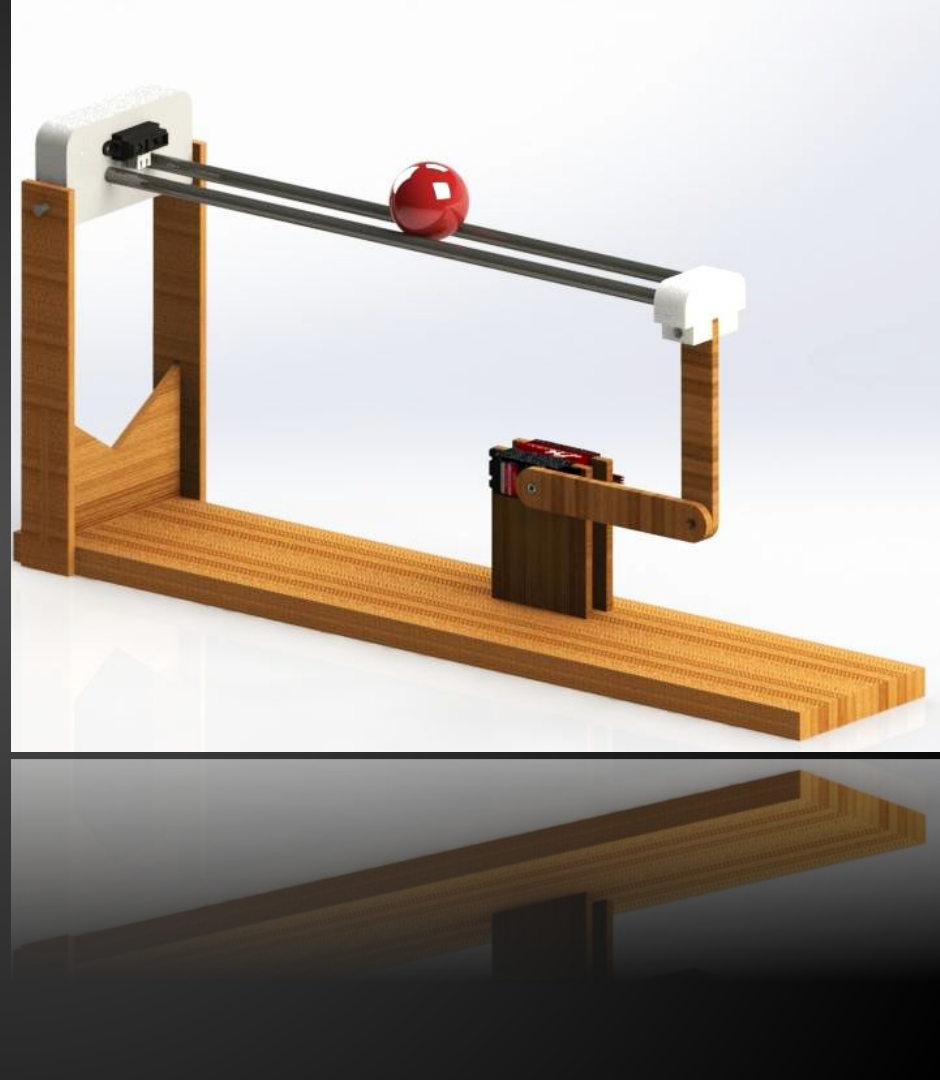
- Montagem do sistema físico





Modelagem

- Modelagem do sistema
- Linearização do modelo
- Simulação e validação do modelo

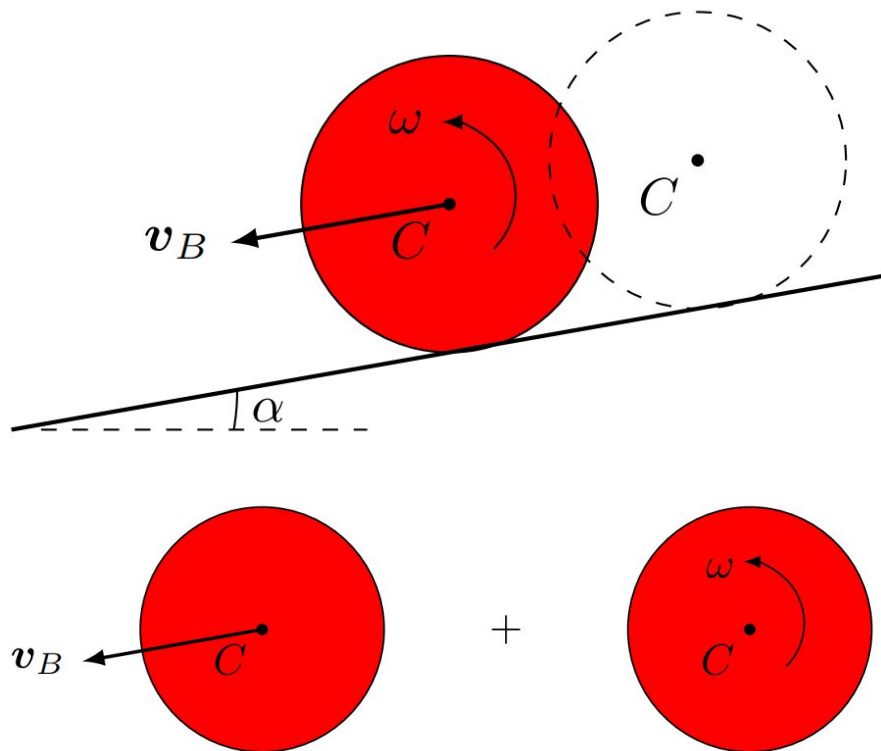


Movimentação

O movimento descrito pela bola é do tipo movimento plano geral, sendo portanto, dividido em:

- ❑ rotação pura
- ❑ translação pura

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right] - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$



—

Movimentação

Assim

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right] - \frac{\partial L}{\partial r} = 0, \quad L = K - P$$

No qual

$$\begin{aligned} K &= K_{\text{rolagem}} + K_{\text{inclinação}} \\ &= \frac{1}{2} \left(m_B + \frac{J_B}{R^2} \right) \dot{r}^2 + \frac{1}{2} (m_B r^2 + J_B + J_b) \dot{\alpha}^2 \end{aligned}$$

$$P = m_b g (0,5\ell \sin \alpha) + m_B g r \sin \alpha$$

—

Movimentação

Resolvendo

$$\ddot{r}(t) = - \frac{m_B r(t) \dot{\alpha}^2(t) + m_B g \sin \alpha(t)}{m_B + J_B R^{-2}}$$

Perceba que em termos newtonianos tem-se

$$m_B r(t) \dot{\alpha}^2(t)$$

Força radial

$$m_B g \sin \alpha(t)$$

Força devido a energia potencial

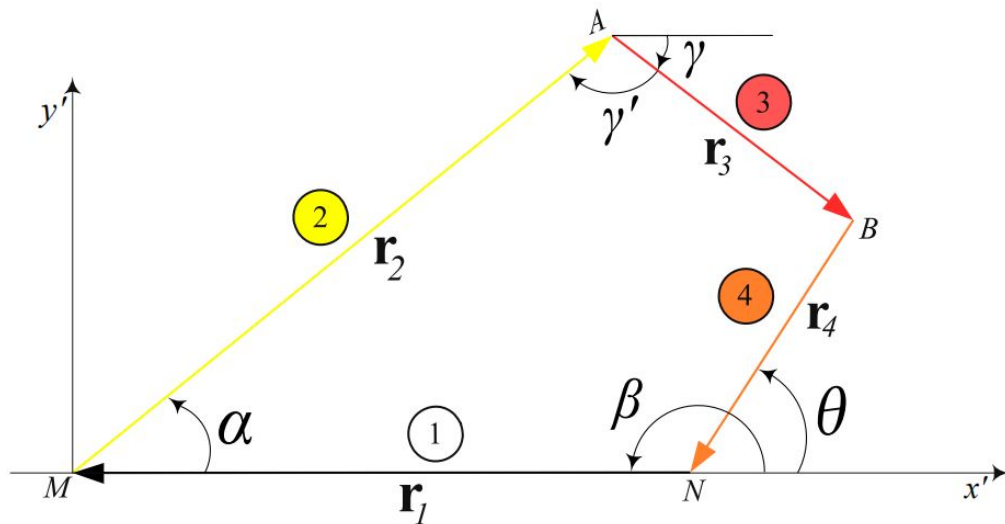
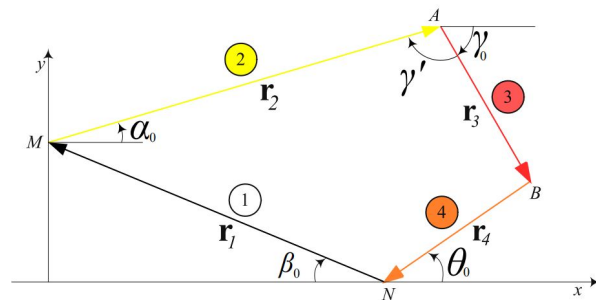
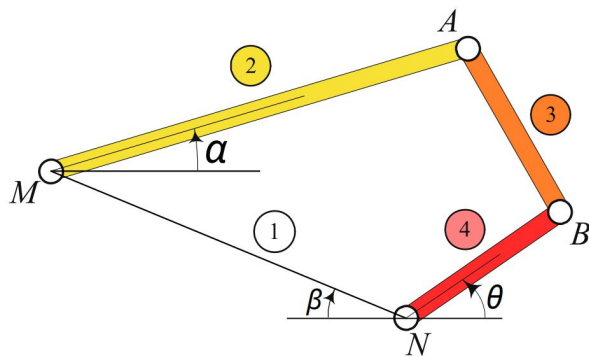
$$m_B + J_B R^{-2}$$

Massa equivalente

Quatro Barras

Considera-se o mecanismo quatro barras como uma soma de vetores, resultando na equação de Freudenstein.

$$\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3 + \vec{r}_4 = \vec{0}$$



—

Quatro barras

$$\begin{cases} b \cos \gamma = a + d \cos \theta - \ell \cos \alpha \\ b \sin \gamma = \ell \sin \alpha - d \sin \alpha \end{cases}$$

$$\alpha = 2 \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \right)$$

em que

$$A = J_1 + (J_2 + 1) \cos \theta + J_3$$

$$B = -2 \sin \theta$$

$$C = J_1 + (J_2 - 1) \cos \theta + J_3$$

$$J_1 = \frac{a^2 + d^2 + \ell^2 - b^2}{2a\ell}$$

$$J_2 = \frac{a}{\ell}$$

$$J_3 = \frac{d}{\ell}$$

Linearização

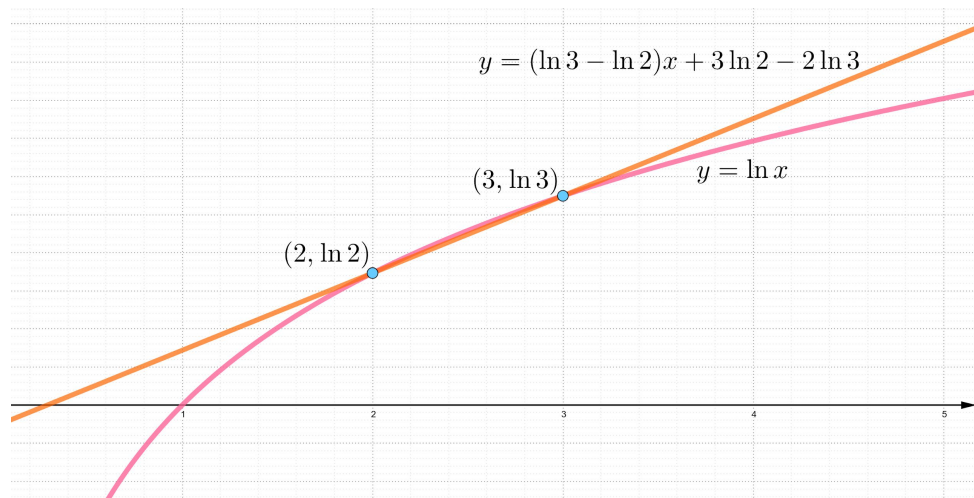
Da equação de Freudstein, separando em x e y vê-se

$$\begin{cases} b \cos \gamma = a + d \cos \theta - \ell \cos \alpha \\ b \sin \gamma = \ell \sin \alpha - d \sin \alpha \end{cases}$$

Conquanto, para uma faixa de operação de pequenos ângulos de entrada,

$$\gamma \approx 90^\circ \implies \ell \sin \alpha = d \sin \theta$$

$$\theta \approx 0^\circ \implies \alpha = \frac{d}{\ell} \theta$$



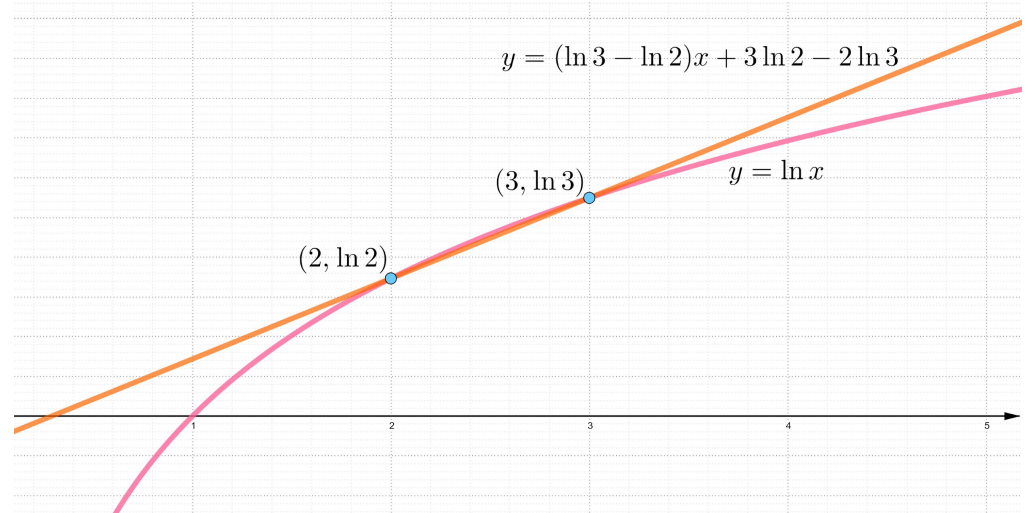
Linearização

Resultando na EDO

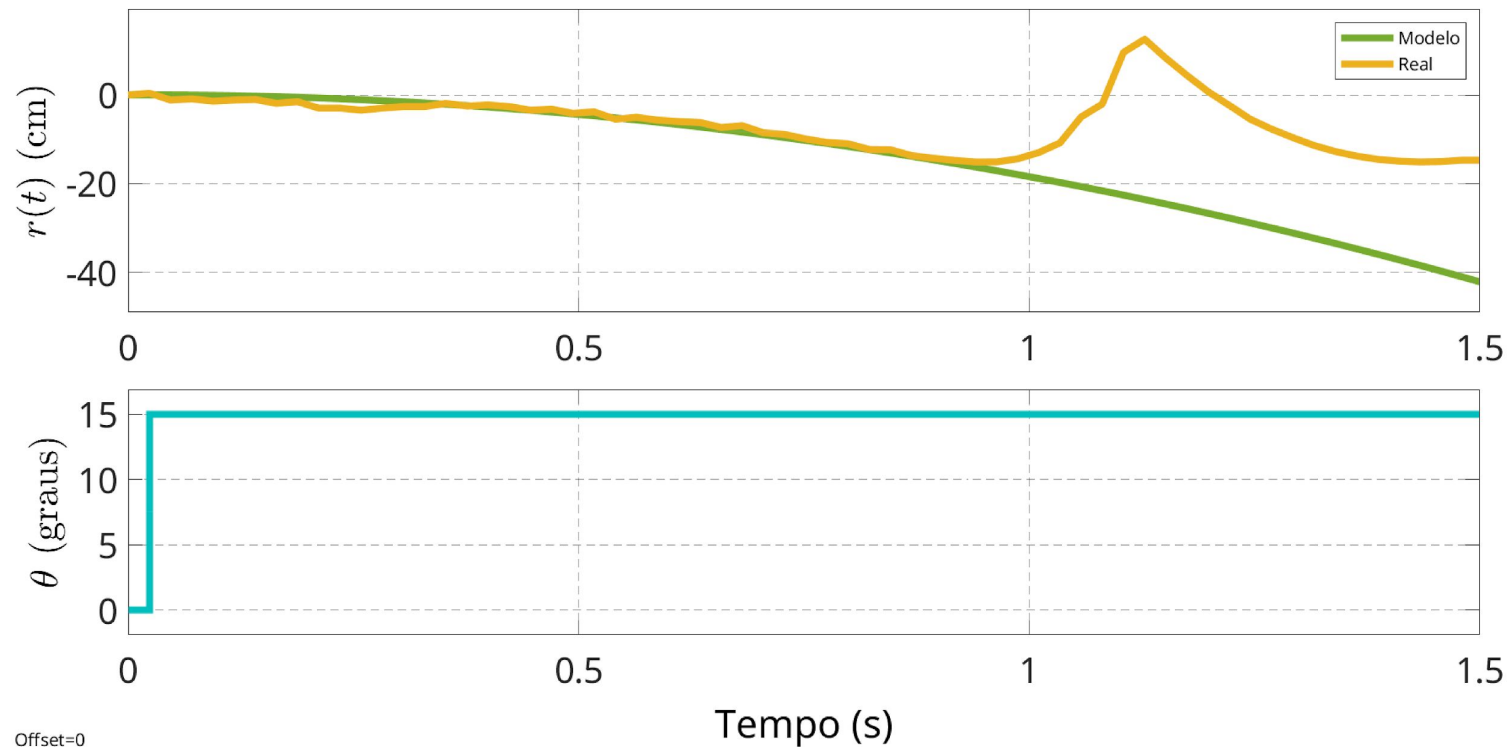
$$\ddot{r}(t) = -\frac{d}{\ell} \frac{m_B g}{m_B + J_B R^{-2}} \alpha(t)$$

$\mathcal{L}\{\downarrow\}$

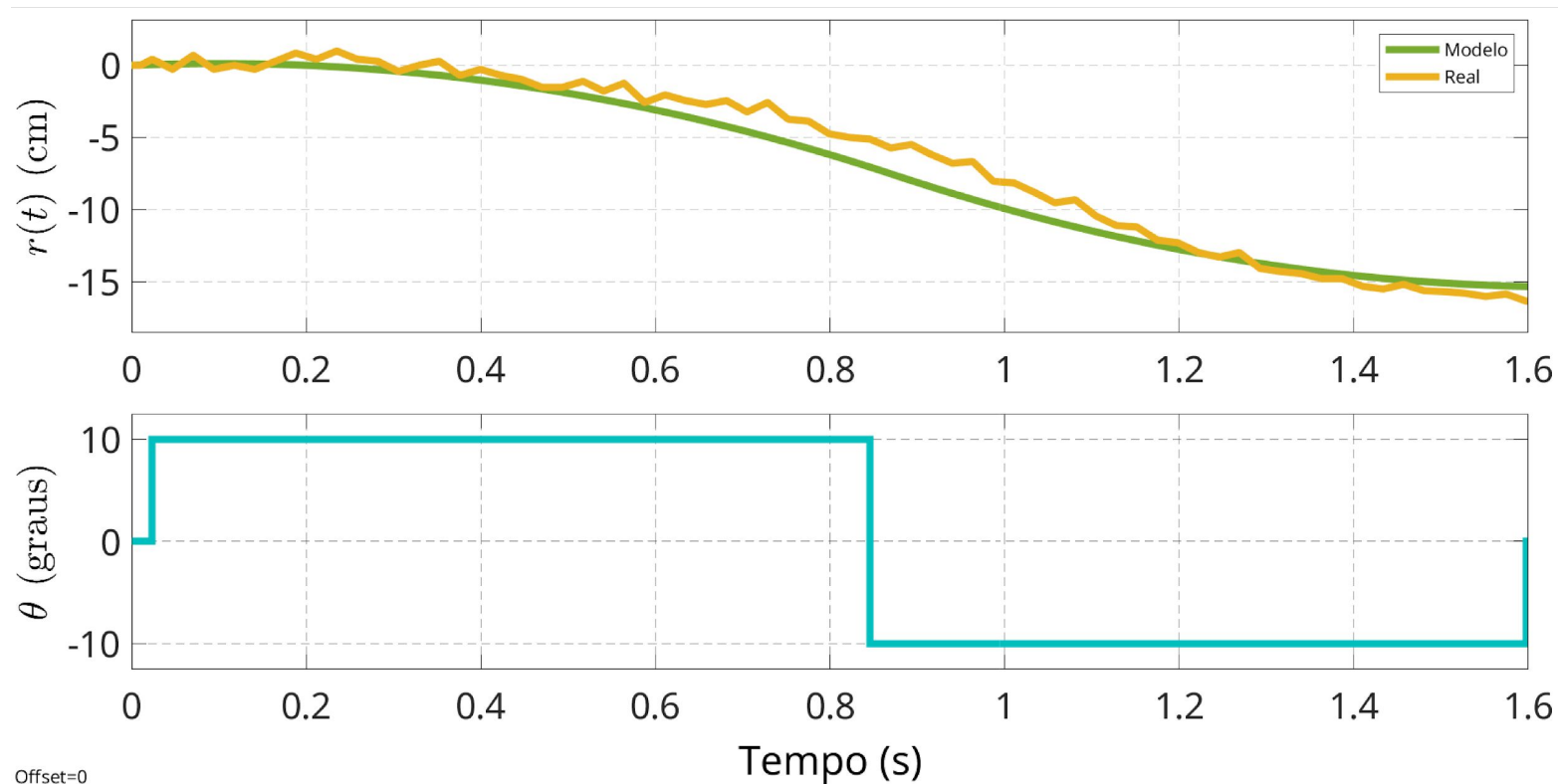
$$G(s) = \frac{R(s)}{\Theta(s)} = -\frac{A}{s^2} \Theta(s)$$



— Comparação com a planta real

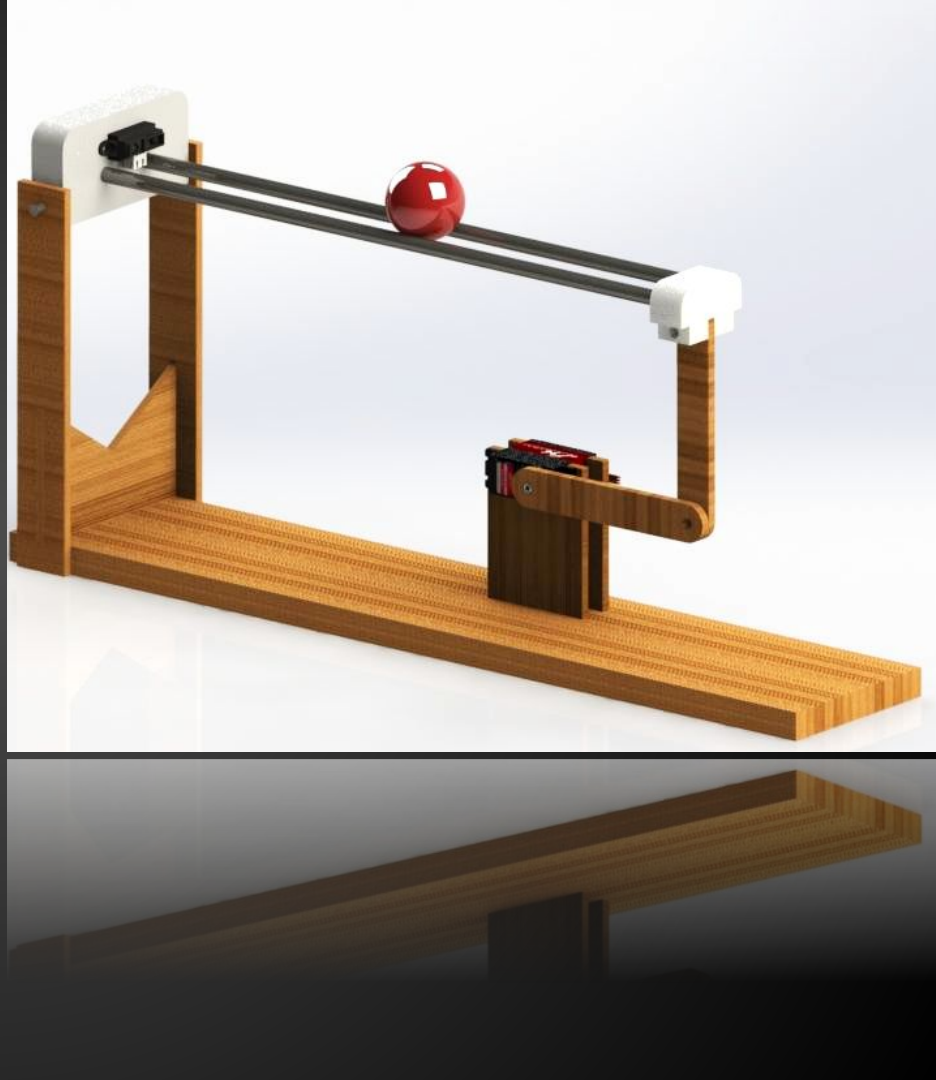


— Comparação com a planta real

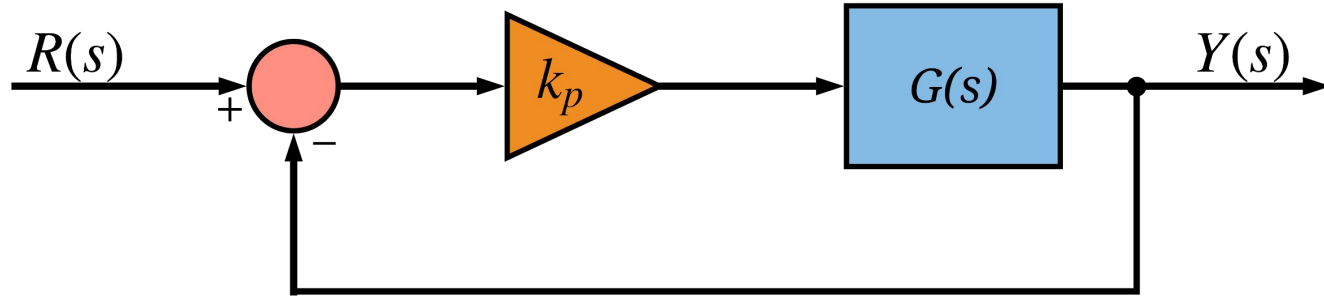


Controle

- Projeto e validação controlador P
- Projeto e validação controlador PID



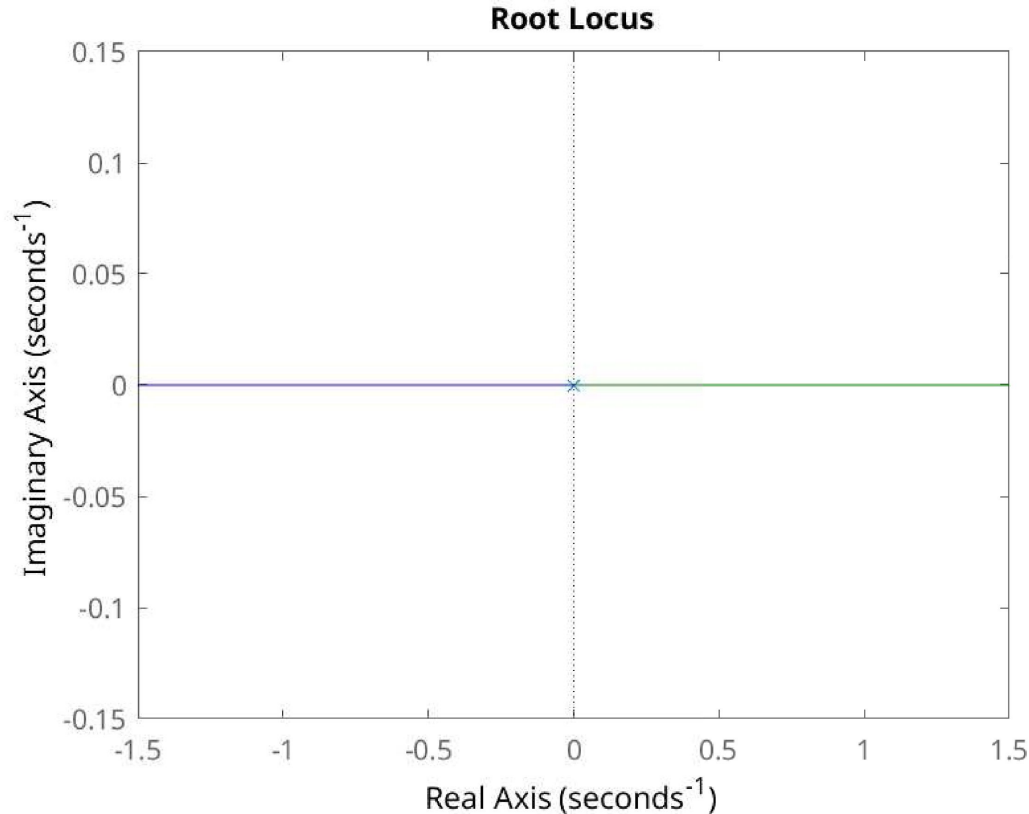
Controlador Proporcional



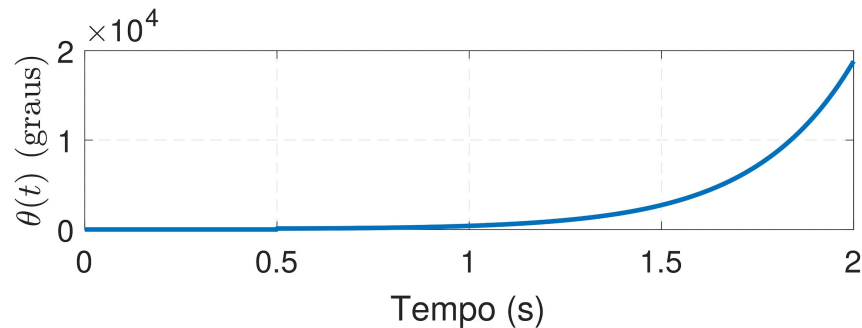
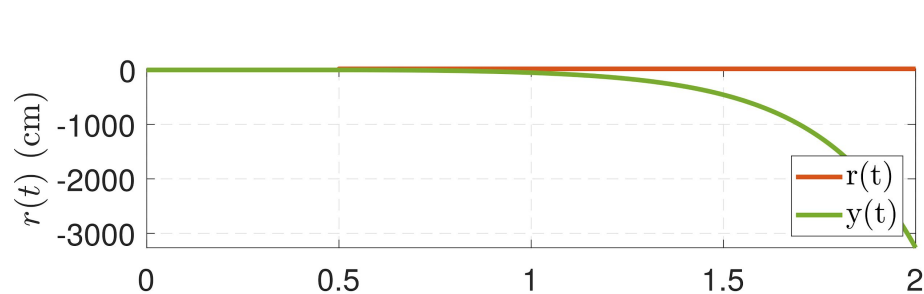
$$Mf = \frac{k_p G(s)}{1 + k_p G(s)} = \frac{-k_p A}{s^2 - k_p A}$$

$$\text{polos} = \pm \sqrt{k_p A}$$

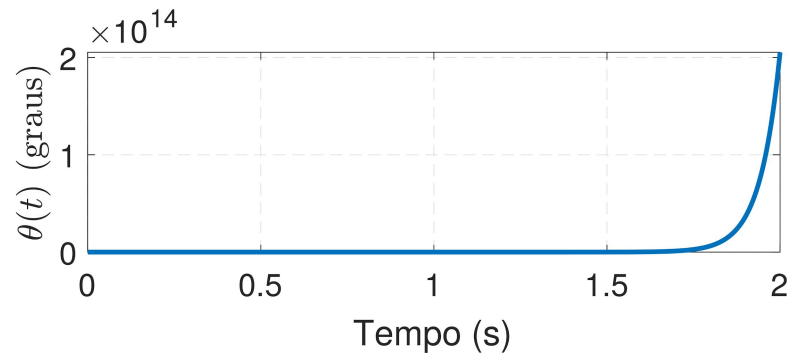
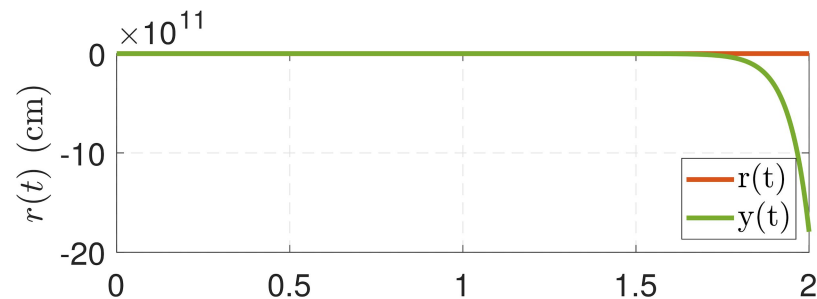
Lugar Geométrico das Raízes



Simulação Controlador Proporcional

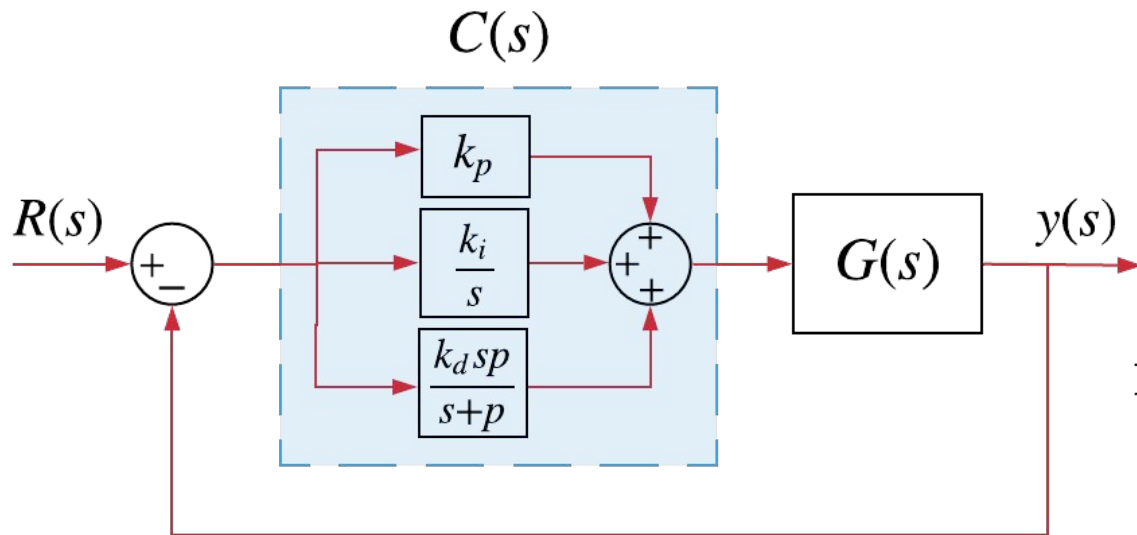


Simulação para $k_p = 0,1$



Simulação para $k_p = 2$

Controlador PID



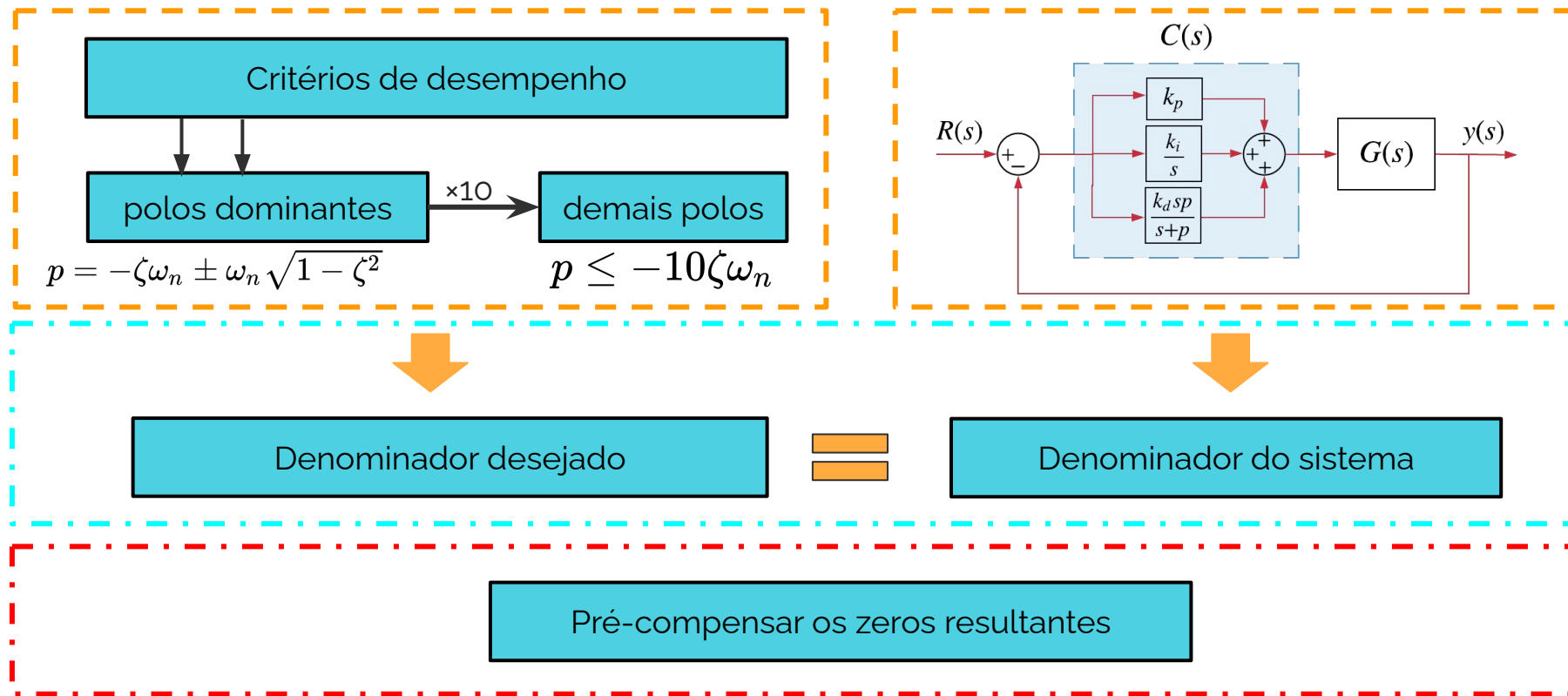
O controlador é dado por

$$C(s) = k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s \frac{p}{s+p}$$

Portanto, a função transferência de malha fechada resultará em

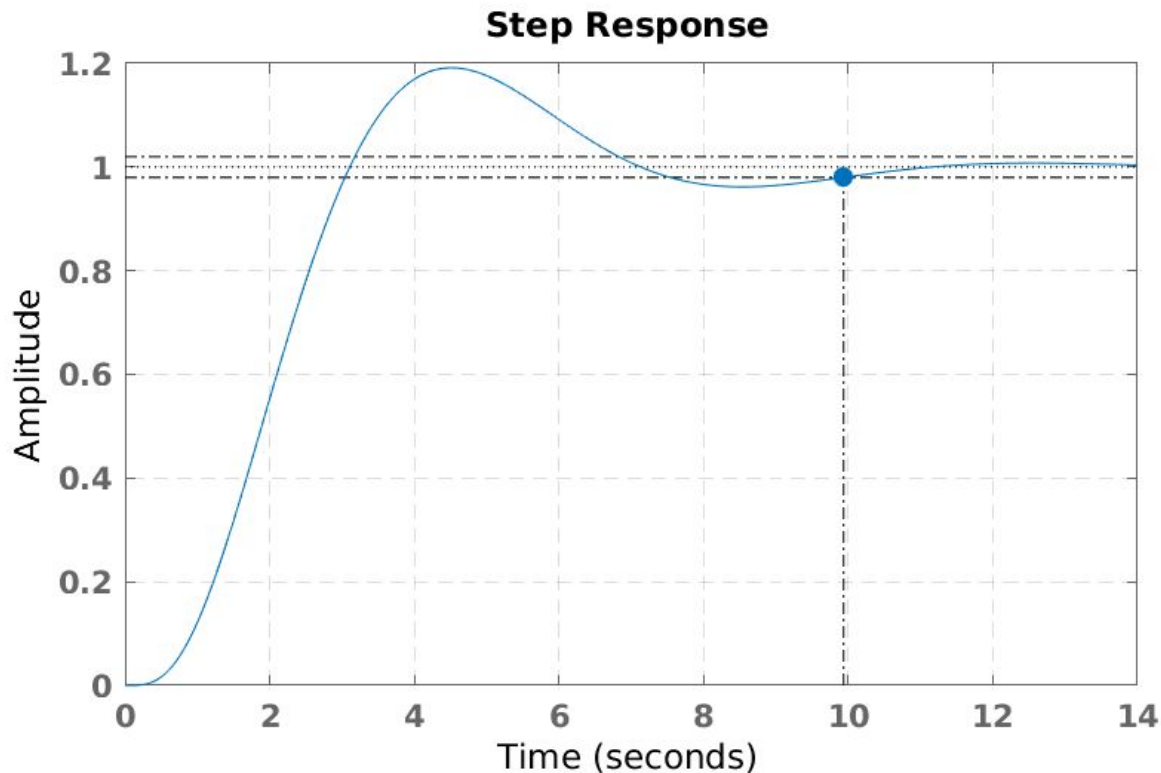
$$Mf = \frac{-A[s^2(k_d p + k_p) + s(k_p p + k_i) + k_i p]}{s^3(s+p) - A[s^2(k_d p + k_p) + s(k_p p + k_i) + k_i p]}$$

Controlador PID: Alocação de polos



Simulação PID

Especificando um tempo de acomodação de 10 s e um percentual de overshoot máximo de 20 %, tem-se a resposta ao lado.



Teste real

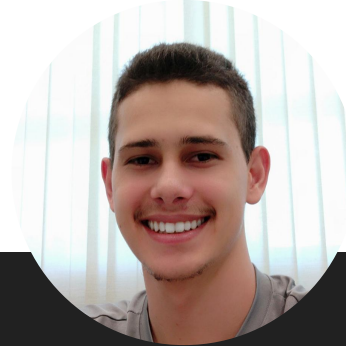
Obrigado!



Ester Q. Alvarenga

6° período em Engenharia
Mecatrônica

<esterqueirozalvarenga@gmail.com>



Bernardo Bresolini

6° período em Engenharia
Mecatrônica

<berbresolini14@gmail.com>

Referências

BACK, Nelson; *et al.* *Projeto integrado de produtos: Planejamento, concepção e modelagem*. Barueri: Manole, 2008.

CHAN, Wei-Shou; CHANG, Chia-Wen. T-S Fuzzy Model-Based Adaptive Dynamic Surface Control for Ball and Beam System. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, v. 60, n. 6, p. 2251-2263, 2013. Disponível em: <<http://ieeexplore.ieee.org/stamp/stamp.jsp?tp=&arnumber=6177238&isnumber=6451226>>. Acesso em: 21 ago. 2019.

CHEN, Chi-Tsong. *Linear System Theory and Design*. 4. ed. New York: Oxford, 2012. p. 398.

DORF, Richard C.; BISHOP, Robert H. *Modern Control System*. 12. ed. New Jersey: Prentice Hall, 2010. p. 1111.

JAZAR, Reza N. Applied Mechanisms. In: _____. *Vehicle Dynamics: Theory and Application*. 2. ed. New York: Springer, 2014. cap. 6. p. 336-402.

Referências

OGATA, Katsuhiko. *Engenharia de Controle Moderno*. 5. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2010. p. 822.

MARTÓN, Lörinc; HODEL, A. Scottedwand; LANTOS, Bella; HUNG, John Y. Underactuated Robot Control: Comparing LQR, Subspace Stabilization, and Combined Error Metric Approaches. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, v. 55, n. 10, p. 3724-3730, 2008. Disponível em: <<https://ieeexplore.ieee.org/document/4493428>>. Acesso em: 21 ago. 2019.

ZILL, Denis G.; SHANAHAN, Patrick D. Complex numbers and the complex plane. In: _____. *A first course in complex analysis with applications*. 1. ed. New York: Jones and Bartlett Publishers, 2003. cap. 1. p. 1-48.