

# Prática 2 — Laboratório de Análise de Sistemas Lineares

Bernardo Bresolini\* Ester Queiroz Alvarenga\*

\* Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais,  
Divinópolis - MG (e-mails: [berbresolini14@gmail.com](mailto:berbresolini14@gmail.com) e  
[esterqueirozalvarenga@gmail.com](mailto:esterqueirozalvarenga@gmail.com)).

## Resumo

A prática 02 da disciplina de Laboratório de Análise de Sistemas Lineares propôs a modelagem, simulação e comparação do modelo matemático com a planta real de dois circuitos eletrônicos. De modo que as características das respostas às entradas impulsiva e constante fossem analisadas, tanto para o sistema de primeira ordem quanto para o de segunda ordem. Além disso, esta prática solicitou um controlador proporcional para o circuito de segunda ordem para o qual variou-se o valor da constante de proporcionalidade e calculou-se o *Overshoot* e o tempo de acomodação de cada configuração. Diante disso, validou-se aos modelos matemáticos das plantas reais via software MATLAB® e percebeu-se a interferência do valor da constante de proporcionalidade na resposta do sistema — um ganho alto pode desestabilizar o sistema, enquanto um baixo ganho pode ser ineficaz para ação de controle.

*Palavras-chaves:* Modelagem. Filtro passa baixa. Controlador proporcional.

## Abstract

Practice 02 of the Linear Systems Analysis Laboratory discipline succeeded in proposing the modeling, simulation and comparison of the mathematical model with the real plan of two electronic circuits. So that the characteristics of the impulsive and constant input responses were analyzed both for the first order as for the second order. In addition, this practice required a proportional controller for the second order circuit for which the value of the proportionality constant was varied and the overshoot of accommodation of each configuration was calculated. Given this, we validated the mathematical models of real plants via MATLAB® software and realized the interference of the proportionality constant value in the system response - a high gain can destabilize the system, while a low gain may be ineffective for control action.

*Keywords:* Modeling. Low pass filter. Proportional controller.

## 1. INTRODUÇÃO

Em 28 de agosto de 2019 na disciplina de *Laboratório de Análise de Sistemas Lineares*, foi proposto a modelagem, simulação e comparação do modelo matemático com a planta real de dois sistemas elétricos de modo que as características e respostas dos sistemas de primeira e segunda ordem fossem tomados e analisados. Assim sendo, o presente trabalho se propõe a descrever a instrumentação, métodos e conceitos utilizados no cumprimento da prática.

## 2. FILTRO PASSA BAIXA

O circuito RC em série funcionando como um filtro passa baixa tem a configuração mostrada na FIG. 1 em que  $v_i(t)$  é a fonte que alimenta o circuito e  $v_o(t)$  é a tensão de saída do filtro.

Este circuito é denominado filtro passa baixa porque o capacitor é um curto circuito para frequências altas e um circuito aberto para frequências baixas. Sendo assim, ao ser submetido a baixas frequências,  $v_o(t) \approx v_i(t)$ ; e quando

o capacitor é um circuito fechado, o sinal de  $v_i(t)$  vai para o terra, gerando  $v_o(t) \approx 0$ .

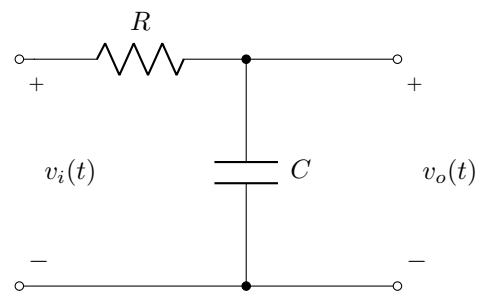


Figura 1. Filtro passa baixa 1ª ordem

### 2.1 Modelagem

A obtenção das equações diferenciais que regem a dinâmica dos sistemas elétricos é feita por meio da aplicação das Leis de Kirchhoff.

Neste sentido, adota-se o modelo básico para os capacitores definidos por NILSSON e RIEDEL (2015), em que o capacitor consiste de placas curtas paralelas separadas por um material dielétrico que, quando submetido a uma tensão, produz pequenos deslocamentos de cargas dentro de si.

À medida que se varia a tensão aplicada, o deslocamento de cargas também varia, provocando uma corrente de deslocamento equacionada por

$$i = C \frac{dv}{dt} \quad (1)$$

Ainda, para amplificadores operacionais *AmpOps*, considera-se o modelo ideal, descrito por SEDRA e SMITH (2009) cuja impedância de entrada é suposta ser infinita enquanto a impedância de saída é suposta ser nula.

Consequentemente, não há drenagem de corrente nos seus terminais de entrada; enquanto que a sua saída equivale a uma fonte de tensão com amplitude  $v_{saída} = A(v_+ - v_-)$ , sendo  $A$  o ganho do amplificador cujo valor é muito alto<sup>1</sup>.

## 2.2 Circuito RC de primeira ordem

Considere o circuito mostrado na FIG. 1. Aplicando a Lei de Kirchhoff das tensões ao sistema, obtém-se

$$v_i(t) = Ri(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt \quad (2)$$

Ainda, a queda de tensão no capacitor é a própria variável de controle  $v_o(t)$ . Logo,

$$v_o(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt \quad (3)$$

Admitindo-se condições iniciais nulas e aplicando a transformada de Laplace em (2) e (3), segue-se

$$V_i(s) = RI(s) + \frac{I(s)}{Cs} \quad (4)$$

$$V_o(s) = \frac{I(s)}{Cs} \quad (5)$$

Dividindo-se (5) por (4) tem-se a função transferência  $G_1(s)$  do sistema:

$$G_1(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{I(s)/Cs}{I(s)(R + 1/Cs)} \quad (6)$$

$$G_1(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{RCs + 1}$$

## 2.3 Circuito RC de segunda ordem

Considere o circuito mostrado na FIG. 2. O amplificador operacional não drena corrente do primeiro filtro RC e sua porta inversora é realimentada pela saída  $v'_o(t)$ . Diante disso,

$$v'_o(t) = A(v_{C1} - v'_o(t))$$

$$v'_o(t) = \frac{A}{A + 1} v_{C1}$$

<sup>1</sup> Idealmente, o ganho de um AmpOp é infinito. Na prática, para sinais com frequência menor que 10 Hz, seu ganho é em torno de  $10^5 \sim 10^6$ .

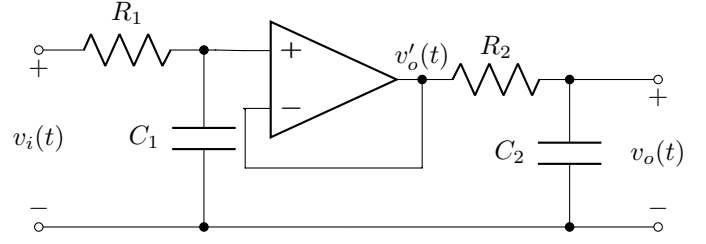


Figura 2. Filtro passa baixa 2ª ordem

como  $A \gg 1$ , vê-se que  $A/(A + 1) \approx 1$ . Sendo assim, conclui-se que

$$v'_o(t) = v_{C1} \quad (7)$$

Destarte, o amplificador opera de forma a isolar o efeito de um circuito no outro. Portanto, a função transferência  $G(s)$  do sistema pode ser determinada fazendo

$$G(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = G_1(s)G_2(s) \quad (8)$$

Da seção anterior, é conhecido o modelo que descreve a dinâmica de um filtro passa-baixa. Assim,

$$G(s) = \frac{1}{(R_1C_1s + 1)(R_2C_2s + 1)} \quad (9)$$

Especialmente se  $R_1 = R_2 = R$  e  $C_1 = C_2 = C$ , tem-se

$$G(s) = \frac{1}{(RCs + 1)^2} = \frac{1}{R^2C^2s^2 + 2RCs + 1} \quad (10)$$

## 3. RESPOSTA À ENTRADA IMPULSIVA

### 3.1 Circuito RC de primeira ordem

Para o impulso unitário de entrada  $v_i(t) = \delta(t)$ , no domínio  $s$ ,  $V_i(s) = 1$ . Portanto, o sinal  $G_1(s)V_i(s)$  torna-se

$$G_1(s)V_i(s) = \frac{1}{RCs + 1} \quad (11)$$

Para  $R = 10 \text{ k}\Omega$  e  $C = 100 \text{ }\mu\text{F}$ ,

$$G_1(s)V_i(s) = \frac{1}{s + 1} \quad (12)$$

A transformada inversa de Laplace da Equação (12) resulta em:

$$v_o(t) = e^{-t}, \quad \text{para } t \geq 0 \quad (13)$$

A função exponencial de resposta dada por (13) é uma curva decrescente que possui uma assíntota horizontal em 0, como mostra a FIG. 3, obtida no MATLAB® a partir do diagrama exibido na FIG. 4.

De modo a validar o modelo obtido matematicamente, ainda experimentou-se dar um impulso no circuito real e comparar a resposta real com a gerada pelo modelo. A comparação das respostas vê-se na FIG. 5.

Apesar de a primeira vista as curvas da FIG. 5 não apresentarem um comportamento semelhante, percebe-se ao analisar a escala de  $v_o(t)$  que o erro entre as curvas é de 0,01 no estado estacionário e aproximadamente 0,04 em seus picos, valores aceitáveis para um modelo. Além disso, a resposta da planta real também apresenta características da função exponencial, com curvatura positiva e decrescente, validando portanto o modelo do circuito RC de primeira ordem para o impulso unitário.

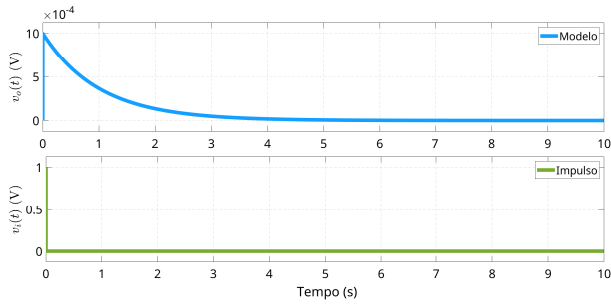


Figura 3. Resposta do modelo matemático do circuito de primeira ordem à  $V_i(s) = 1$

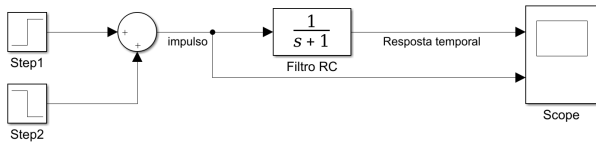


Figura 4. Diagrama da entrada impulsiva no modelo do circuito RC de primeira ordem

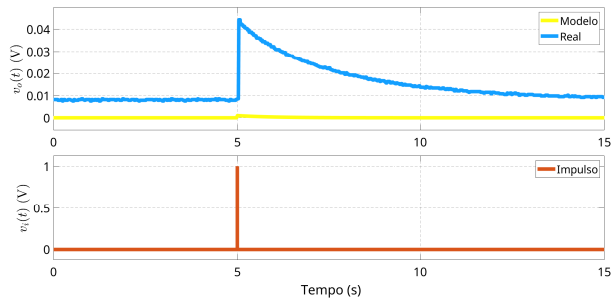


Figura 5. Comparação das respostas à entrada impulsiva do modelo com o circuito real

### 3.2 Circuito RC de segunda ordem

Seja  $V_i(s) = 1$  e  $G_2(s)$  a função transferência dada em (10), o sinal é tido como

$$V_i(s)G_2(s) = \frac{1}{R^2C^2s^2 + 2RCs + 1} \quad (14)$$

em que  $R = 10 \text{ k}\Omega$  e  $C = 100 \text{ }\mu\text{F}$ , logo:

$$V_i(s)G_2(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 1} = \frac{1}{(s+1)^2} \quad (15)$$

A transformada inversa de Laplace de (15) é dada por:

$$v_o(t) = te^{-t}, \quad \text{para } t \geq 0 \quad (16)$$

que descreve o comportamento do circuito no tempo, dado um impulso unitário. Esta representação é mostrada pela curva da FIG. 6 advinda do diagrama exibido na FIG. 7.

## 4. RESPOSTA AO DEGRAU UNITÁRIO

### 4.1 Circuito RC primeira ordem

Como a transformada de Laplace da função degrau unitário é  $1/s$ , aplicando  $V_i(s) = 1/s$  no sinal  $G_1(s)V_i(s)$  obtém-se,

$$G_1(s)V_i(s) = \frac{1}{RCs + 1} \cdot \frac{1}{s} \quad (17)$$

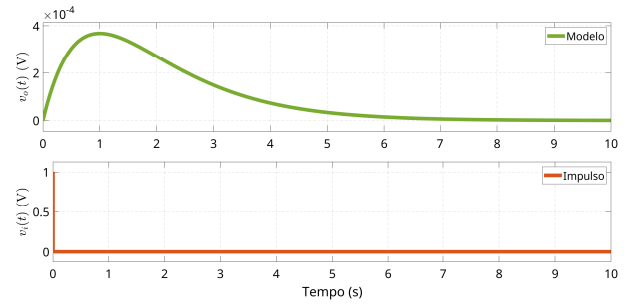


Figura 6. Resposta do modelo matemático do circuito de segunda ordem à  $V_i(s) = 1$

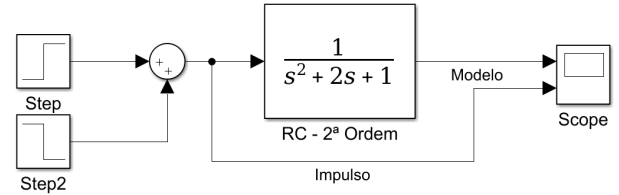


Figura 7. Diagrama para entrada impulsiva no modelo do circuito RC de segunda ordem

Usando  $R = 10 \text{ k}\Omega$  e  $C = 100 \text{ }\mu\text{F}$

$$G_1(s)V_i(s) = \frac{1}{s(s+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} \quad (18)$$

em que

$$A = \frac{s}{s(s+1)} \Big|_{s=0} = 1 \quad \text{e} \quad B = \frac{s+1}{s(s+1)} \Big|_{s=-1} = -1$$

Dessa forma, a transformada inversa de Laplace de (18) é

$$v_o(t) = 1 - e^{-t} \quad (19)$$

A equação (19) indica, inicialmente, que em  $t = 0$  a resposta  $v_o(t)$  é zero e quando  $t \rightarrow \infty$   $v_o(t) = 1$ , assim como mostra a FIG. 8, obtida pelo diagrama da FIG. 9 feito no MATLAB®.

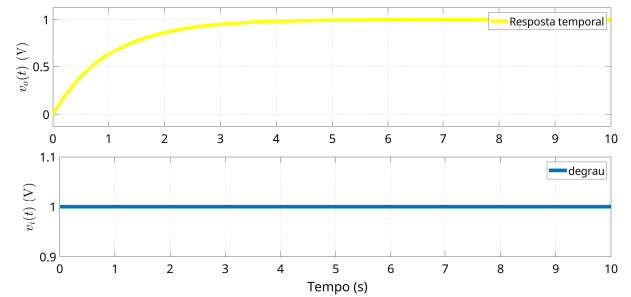


Figura 8. Resposta do modelo do filtro passa baixa de primeira ordem à entrada degrau unitário

De modo a validar novamente o modelo do filtro passa baixa de primeira ordem, comparou-se a resposta à entrada

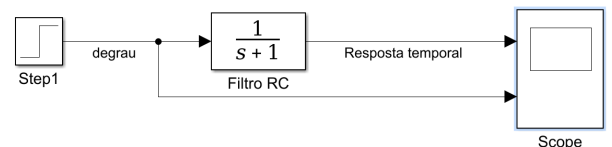


Figura 9. Diagrama da entrada degrau unitário no modelo do filtro passa baixa de primeira ordem

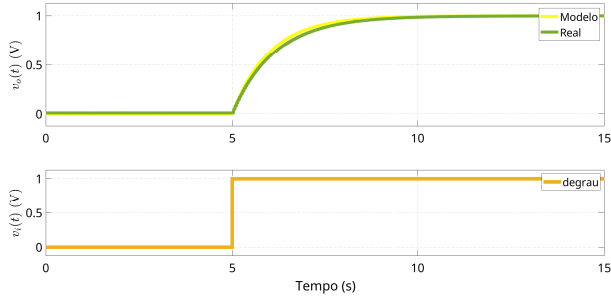


Figura 10. Comparação das resposta do circuito de primeira ordem à  $V_i(s) = 1/s$

degrau unitário do modelo com a da planta real. A comparação pode ser vista na FIG. 10. Vê-se que a aproximação da curva do modelo com a curva real é muito boa.

#### 4.2 Circuito RC segunda ordem

Para  $V_i(s) = 1/s$ , o sinal  $G_2(s)V_i(s)$ , usando  $R = 10 \text{ k}\Omega$  e  $C = 100 \text{ }\mu\text{F}$ , torna-se,

$$V_o(s) = \frac{1}{s(s^2 + 2s + 1)} \quad (20)$$

O polinômio característico da função transferência, vista na equação (10), é  $s^2 + 2s + 1$ . Igualando-o a zero, tem-se a equação característica

$$s^2 + 2s + 1 = 0 \quad (21)$$

cujos polos são  $p_1 = p_2 = -1$ . Logo, o sistema é estável e os teoremas do valor final e inicial podem ser aplicados, sendo possível determinar para qual valor a saída  $v_o(t)$  converge e se inicia.

Do teorema do valor final,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v_o(t) = \lim_{s \rightarrow 0^+} sV_o(s) = \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{s}{s(s^2 + 2s + 1)} = 1 \quad (22)$$

e do teorema do valor inicial

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} v_o(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sV_o(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s}{s(s^2 + 2s + 1)} = 0 \quad (23)$$

Sendo assim, a saída  $v_o(t)$  em resposta a um degrau unitário, iniciar-se-á em zero e desenvolver-se-á até convergir em 1 V. Como pode ser aferido na FIG. 11 — que corresponde também a saída do diagrama da FIG. 12.

A FIG. 13 trás a comparação de  $v_o(t)$  do modelo matemático e da planta real. Vê-se, novamente a validação do modelo.

### 5. CONTROLADOR PROPORCIONAL PARA FILTRO DE SEGUNDA ORDEM

Ao comparar o sinal de saída do sistema com o sinal de referência, é possível corrigir a saída caso esta esteja desviada do *setpoint*. O erro entre estes sinais é utilizado para determinar o sinal de controle que agirá para corrigir este desvio. O estabelecimento do sinal de controle pode ser feito utilizando-se uma ação proporcional, que produzirá

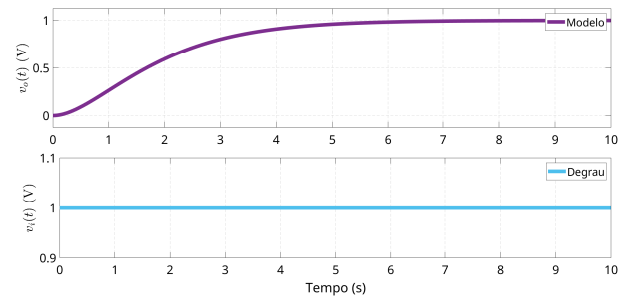


Figura 11. Resposta do modelo matemático do circuito de segunda ordem à  $V_i(s) = 1/s$

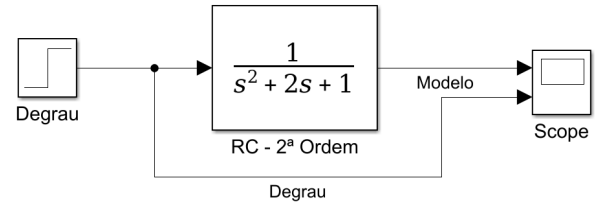


Figura 12. Diagrama da entrada degrau unitário no modelo do circuito RC de segunda ordem

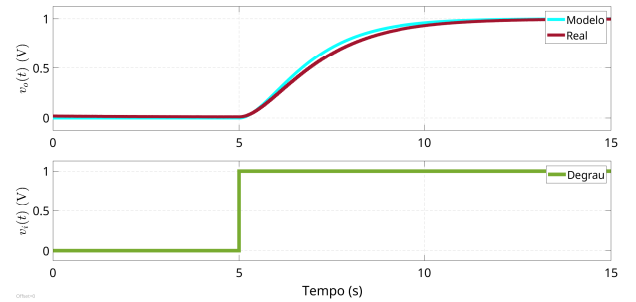


Figura 13. Comparação das resposta do circuito de segunda ordem à  $V_i(s) = 1/s$

um sinal de saída proporcional à amplitude do erro, sendo 'k' a constante de proporcionalidade. O sistema descrito, aplicado ao filtro de segunda ordem é representado pelo diagrama mostrado na FIG. 14.

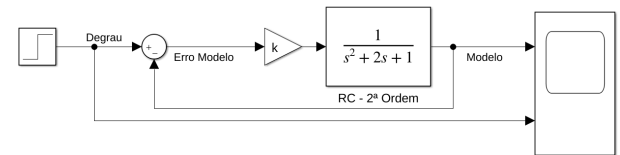


Figura 14. Topologia do controlador proporcional para o filtro de segunda ordem

A razão saída entrada do diagrama da FIG. 14 é dada por,

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{k}{s^2 + 2s + (k + 1)} \quad (24)$$

aplicando um degrau unitário na entrada deste sistema, tem-se

$$V_o(s) = \frac{k}{s((s + 1)^2 + k)} \quad (25)$$

Seja a função transferência de segunda ordem dada por

$$G(s) = k \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (26)$$

sendo  $k$  o ganho estático do sistema;  $\zeta$  o fator de amortecimento e  $\omega_n$  a frequência natural de oscilação do sistema.

Caso os polos  $p_1$  e  $p_2$  do sistema sejam números complexos conjugados, obtém-se a relação

$$\text{Real}(p_1) = \zeta\omega_n \quad \left| \text{Imag}(p_1) \right| = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (27)$$

O fator de amortecimento e a frequência natural estão correlacionados com o tempo de acomodação  $t_s$  (em  $\pm 2\%$ ), por meio da equação

$$t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} \quad (28)$$

Enquanto o percentual de *overshoot* %OS é calculado por

$$\%OS = 100 \exp\left(-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1 - \zeta^2}}\right) \quad (29)$$

Deste modo, variando  $k$  em 0, 1, ..., 5 e encontrando os polos da função  $G(s)$  em (24) e resolvendo (27) para  $\zeta$  e  $\omega_n$ , determina-se os valores de tais constantes. Estes são expostos na TAB. 1.

Tabela 1.  $\zeta\omega_n$  e  $\omega_n$  em função da variação de  $k$ .

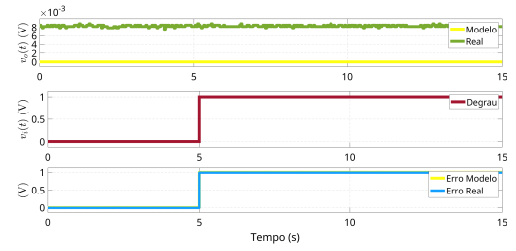
$K_p$	$\zeta$	$\omega_n$	$\zeta\omega_n$
0	—	—	—
1	$1/\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1
2	$1/\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	1
3	$1/2$	2	1
4	$1/\sqrt{5}$	$\sqrt{5}$	1
5	$1/\sqrt{6}$	$\sqrt{6}$	1

De posse dos valores da TAB. 1, pode-se calcular o tempo de acomodação e o *overshoot* por (28) e (29), respectivamente. Os resultados desta operação são mostrados na TAB. 2. Adicionalmente, aferiu-se estes valores durante a simulação computacional no *Simulink* e é possível comparar os valores teóricos e os simulados.

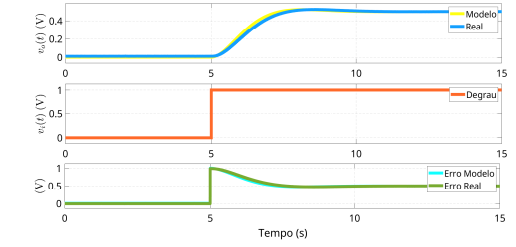
Tabela 2. *Overshoot* e tempo de acomodação dado valores variados de  $k$

$k$	$OS_{\text{teórico}}$	$t_{s\text{teórico}}$	$OS_{\text{simulado}}$	$t_{s\text{simulado}}$
0	0	0	0	0
1	4,32	4	4,74	4
2	10,85	4	10,56	4
3	16,30	4	17,06	4
4	20,79	4	21,34	4
5	24,54	4	24,37	4

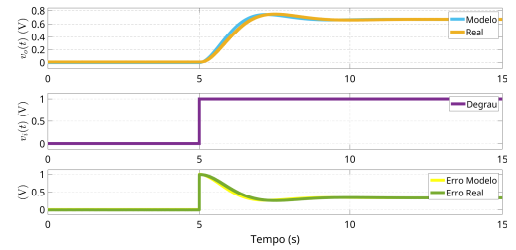
Os dados obtidos mostram que a variação do ganho  $k$  não alterou o tempo de acomodação do sistema, quer seja teoricamente ou na simulação. Isto ocorre pois como  $k$  é o termo independente de  $s$  no denominador de  $G_2(s)$ , ele apenas afeta os polos por meio da raiz  $\sqrt{2^2 - 4(k+1)} = 2\sqrt{-k}$ . Devido a  $k$  ter assumido valores entre 0 e 5, a raiz será sempre um valor nulo ou complexo. Assim, o tempo de acomodação realmente não deveria variar.



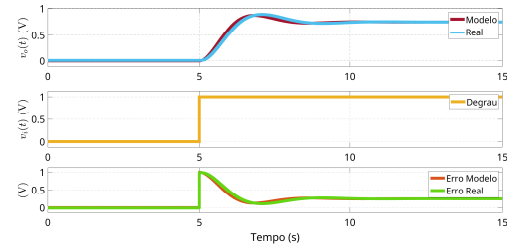
(a)  $k = 0$



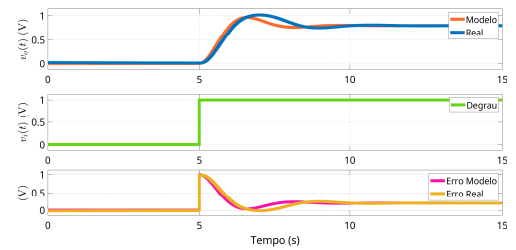
(b)  $k = 1$



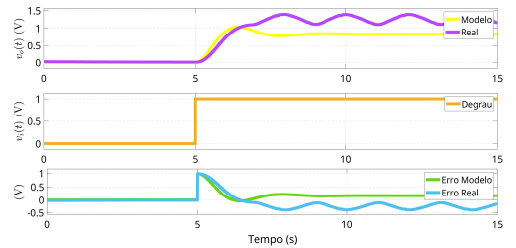
(c)  $k = 2$



(d)  $k = 3$



(e)  $k = 4$



(f)  $k = 5$

Figura 15. Resposta temporal do modelo e do sistema em função de  $k$

Conquanto, os valores de *overshoot* cresceram significativamente à medida em que  $k$  aumentava. Novamente a explicação decorre que a parte complexa dos polos está correlacionada diretamente com  $k$ : quanto maior o ganho, maior a parte imaginária e, conseqüentemente, o *overshoot*.

Como pode ser visto na TAB. 2, o tempo de acomodação foram iguais na simulação e no cálculo. Contudo, o *overshoot* teve uma variação sutil dos valores. Este fato ressalta a necessidade da simulação computacional do modelo para validar os cálculos feitos. Mas no geral, percebe-se uma proximidade aceitável dos dados, incorrendo em pouco erro a aproximação dos valores de *overshoot* por (29).

As respostas temporais do modelo e do sistema real para os valores de  $k$  adotados são expostas na FIG. 15. Note que esperou-se 5 segundos para a aplicação do degrau. Se faz isto para certificar que o sistema real terá condições iniciais nulas no início do degrau.

Quando o valor de  $k$  adotado foi 0, o sinal realmente enviado para o sistema é o erro multiplicado por 0, ou seja, o sistema não recebe excitação. Entretanto, o sistema real acusa uma tensão na ordem de  $10^{-3}$ . Este sinal é devido a ruídos e a não completa descarga do capacitor.

Para  $k = 1$ , observa-se que o sistema e o modelo apresentam leve *overshoot* e bastante proximidade nas curvas. No entanto, é visível que o sinal da saída apresenta erro de estado estacionário. A mesma análise pode ser feita, apenas constatando que o *overshoot* aumenta diretamente em função de  $k$ .

Para  $k = 4$ , percebe-se que o modelo e a planta apresentou leve assincronicidade no sinal após a sobrepassagem, mas apresentando um comportamento semelhante ao modelo.

Já quando posto  $k = 5$ , o sistema real apresenta desvios significativos no valor e no comportamento da tensão no capacitor, tornando-se oscilatória (instável), quando o modelo estabiliza. Este fenômeno ocorre devido ao erro se tornar negativo e, sendo assim, deve haver uma injeção de tensão contrário à montagem do circuito. Como esta condição de operação não está na delimitação do projeto, é passível de causar a instabilidade do sistema, como é exposto.

## 6. CONCLUSÃO

O experimento foi capaz de abordar diversos conceitos vistos na teoria e ainda dar certa dimensão prática da disciplina. A análise em malha aberta do sistema é capaz de dizer as características naturais do sistema. Contudo, é possível alterar tais por meio de uma ação de controle.

O filtro passa-baixa é um sistema de primeira ordem que apresenta polo negativo e, conseqüentemente, estabilidade. Quando acoplado por um *buffer* a outro filtro passa-baixa, passa a ser um sistema de segunda ordem com polos negativos reais. No caso usado, utilizou-se dos mesmos valores de  $R$  e  $C$  nos filtros, logo o sistema se tornou criticamente estável, bastando pouca mudança para variar sua condição.

Esta constatação apresentou-se ser verdadeira pois, quando fechou-se a malha de controle aplicando um ganho  $k$ ,

percebeu-se que o sistema passou a apresentar características de subamortecimento, fazendo-o apresentar uma sobrepassagem diretamente correlacionada com o valor de  $k$  usado.

Com a prática, pôde-se aferir que a utilização do sistema fora das condições de operação projetadas pode levar o sistema à instabilidades, como visto para  $k = 5$ . Sendo assim, sempre deve-se atentar aos limites de operação do sistema.

Adicionalmente, observou-se que a topologia de controle proporcional ocasiona erro estacionário, exigindo, portanto, a aplicação de um ganho ou da implementação de um controle integral.

## 7. REFERÊNCIAS

- OGATA, Katsuhiko. *Engenharia de Controle Moderno*. 5. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2010. p. 822.
- NILSON, James W.; RIEDEL, Susan A. *Circuitos Elétricos*. 10. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2015. p. 890.
- SEDRÁ, Adel S.; SMITH, Kenneth C. *Microelectronic Circuits*. 6. ed. New York: Oxford, 2007. p. 822.