

Modelagem do Sistema Ball and Beam

Bernardo Bresolini* Ester Queiroz Alvarenga*

* Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais,
Divinópolis - MG (e-mails: berbresolini14@gmail.com e
esterqueirozalvarenga@gmail.com).

Resumo

As ferramentas do Controle Clássico exigem o conhecimento de um modelo matemático que descreva ou se aproxime do comportamento do sistema. Portanto, o sistema *ball and beam* foi modelado por meio da equação de Euler-Lagrange junto com a análise cinemática do mecanismo quatro barras. Considerou-se o sistema sem a ação de forças dissipativas e com pequenas variações dos ângulos. A resposta do modelo se mostrou próxima a da planta montada, sendo ambas instáveis.

Palavras-chaves: Ball and beam. Modelagem. Validação. Mecatrônica.

Abstract

Classical Control tools require knowledge of a mathematical model that describes or approximates system behavior. Therefore, the *ball and beam* system was modeled using the Euler-Lagrange equation together with the kinematic analysis of the four bar mechanism. The system was considered without the action of dissipative forces and with slight variations in angles. The model response was close to that of the assembled plant, both being unstable.

Keywords: Ball and beam. Modeling. Validation. Mechatronics.

1. SISTEMA BALL AND BEAM

O sistema *ball and beam* é um clássico sistema eletromecânico subatuado com dois graus de liberdade e somente um atuador. A barra rotaciona num plano vertical em função do torque desenvolvido por um motor; enquanto que a bola pode rolar livremente ao longo da barra (MARTÓN *et al.*, 2008, p. 3724).

O conjunto formado pela bola e pela viga tem propósito de controlar a posição da bola sobre a barra com movimentos rotacionais. Tal sistema descreve um processo com aplicações diretas na área de controle, como o manejo da inclinação de aeronaves.

A viga deve ser capaz de rotacionar no plano vertical, logo ela deve ser biarticulada. Em uma das suas extremidades, há uma junção com um servomotor, por meio de dois elos (barras), capaz de rotacionar a viga, como mostra a FIG. 1.

As ferramentas do Controle Clássico exigem o conhecimento de um modelo matemático que descreva ou se aproxime do comportamento do sistema. Sendo assim, o presente relatório irá demonstrar a modelagem do sistema *ball and beam* junto com suas considerações. Então será feito a validação do modelo por meio da comparação entre as respostas da planta com o obtido no *simulink*.

2. MODELAGEM

O sistema *ball and beam* é um mecanismo composto por elementos cinemáticos e dinâmicos. Dessa forma, sua

modelagem pode ser desenvolvida a partir das análises cinemáticas e dinâmicas do processo, como se segue.

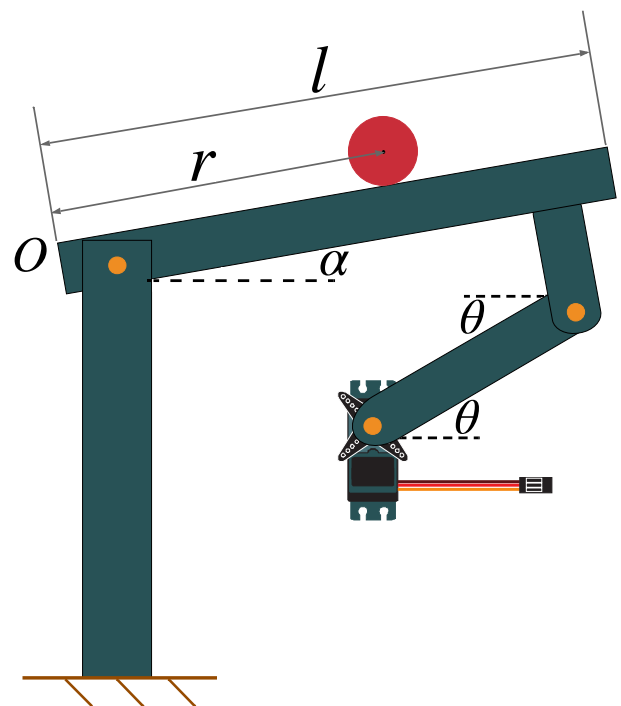


Figura 1. Esquemático do sistema *ball and beam*

2.1 Cinemática

Considere o mecanismo quatro barras exposto em FIG. 2. A barra NM é o solo do sistema. Seja o *link* 4 a entrada do mecanismo e a barra MA a saída. Deseja-se conhecer a relação entre θ e α . A TAB. 1 expõe a nomenclatura usada.

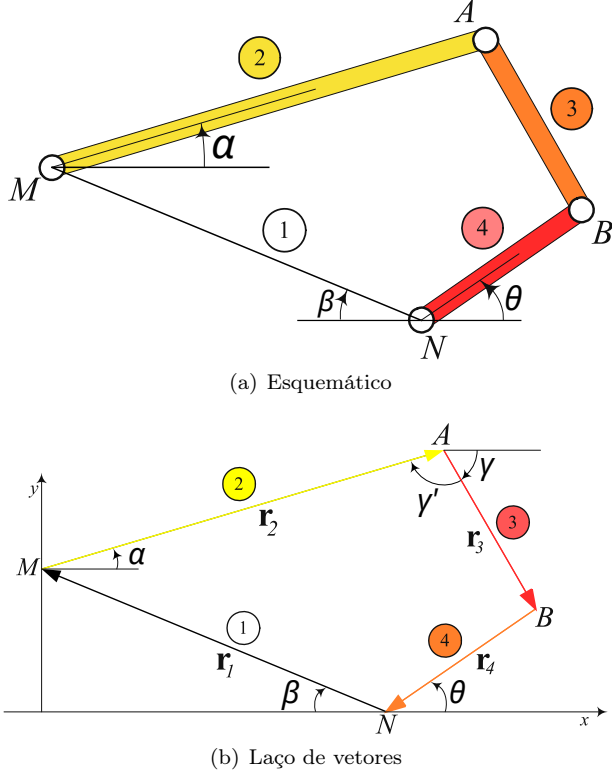


Figura 2. Representação do mecanismo quatro barras

Tabela 1. Representação vetorial do mecanismo quatro barras da FIG. 2

| Link | Vetor | Ângulo | Comprimento |
|------|----------------|----------|-------------|
| 1 | \mathbf{r}_1 | β | a |
| 2 | \mathbf{r}_2 | α | ℓ |
| 3 | \mathbf{r}_3 | γ | b |
| 4 | \mathbf{r}_4 | θ | d |

A soma vetorial dos vetores da barra partindo-se da origem M é nula. Assim sendo, segue-se

$$\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_4 = \mathbf{0} \quad (1)$$

$$\ell(\mathbf{i} \cos \alpha + \mathbf{j} \sin \alpha) + b(\mathbf{i} \cos \gamma - \mathbf{j} \sin \gamma) + d(-\mathbf{i} \cos \theta - \mathbf{j} \sin \theta) - \mathbf{i}a = \mathbf{0} \quad (2)$$

Trabalhando separadamente as coordenadas em x e y , segue-se

$$\begin{cases} \ell \cos \alpha + b \cos \gamma - d \cos \theta - a = 0 \\ \ell \sin \alpha - b \sin \gamma - d \sin \theta = 0 \end{cases} \quad (3)$$

isolando o termo com γ

$$\begin{cases} b \cos \gamma = a + d \cos \theta - \ell \cos \alpha \\ b \sin \gamma = \ell \sin \alpha - d \sin \theta \end{cases} \quad (4)$$

Para pequenas variações de θ , o ângulo de transmissão γ terá pequenas variações. Tem-se o interesse que este

ângulo seja 90° , quando ocorre a máxima transmissão do torque. Deste modo, a montagem física da planta será de maneira a deixá-lo 90° para $\theta = 0^\circ$. Decorre disto que $\gamma \approx 90^\circ \Rightarrow \sin \gamma \approx 0$, logo

$$d \sin \theta \approx \ell \sin \alpha \quad (5)$$

cujas linearização leva a

$$\alpha \approx \frac{d}{\ell} \theta \quad (6)$$

2.2 Dinâmica

Os parâmetros do sistema *ball and beam* assim como seus símbolos são exibidos na TAB. 2. Diante disto, a modelagem do sistema por ser feita por Euler-Lagrange, fazendo

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right] - \frac{\partial L}{\partial q} = Q \quad (7)$$

em que $L = K - P$, K é a energia cinética, P é a energia potencial, Q é a força generalizada e q é a coordenada generalizada.

Tabela 2. Parâmetros do Sistema Ball and Beam

| Símbolo | Definição |
|---------|----------------------|
| m_B | massa da bola |
| m_b | massa da barra |
| R | raio da bola |
| l | comprimento da barra |
| J_B | inércia da bola |
| J_b | inércia da barra |

Energia Cinética e Potencial do sistema Seja uma bola de raio R sob uma viga, inclinada em α em relação ao eixo horizontal, posicionada a uma distância r do raio de giração desta viga. Considerando que a bola não deslizará e que ela poderá se mover livremente sob a viga, sua movimentação será como mostra a FIG. 3.

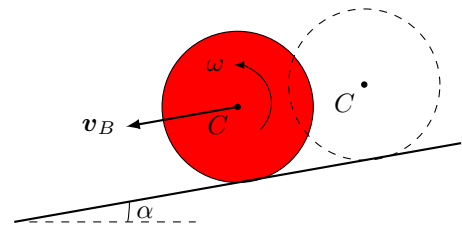


Figura 3. Movimentação da bola sobre a viga

Como exposto, a bola descreve um movimento plano geral, logo sua rolagem pode ser dividida em translação pura sobreposta por uma rotação pura, como mostra a FIG. 4.

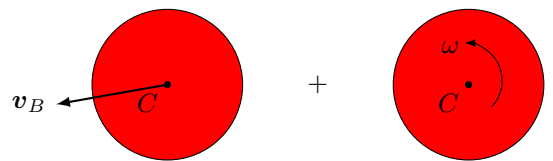


Figura 4. Decomposição do movimento de rolagem

Sendo assim, a velocidade cinética de uma bola rolando é determinada por

$$K_{\text{rolagem}} = \frac{1}{2}m_B \mathbf{v}_B^2 + \frac{1}{2}J_B \omega^2 \quad (8)$$

sendo \mathbf{v}_B a velocidade de translação da bola e ω a velocidade de rotacional da bola em torno do seu centro.

Expressando ω em termos de r segue-se

$$\omega = \frac{\dot{r}}{R} \quad (9)$$

Ainda, a intensidade da velocidade translacional da bola \mathbf{v}_B pode ser expressa nos termos de r e α , fazendo

$$v_B^2 = (v_B)_x^2 + (v_B)_y^2 \quad (10)$$

sendo $(v_B)_x$ e $(v_B)_y$ suas componentes horizontal e vertical, respectivamente tais que

$$(v_B)_x = \frac{d}{dt}[r \cos \alpha] = \dot{r} \cos \alpha - r \dot{\alpha} \sin \alpha \quad (11)$$

$$(v_B)_y = \frac{d}{dt}[r \sin \alpha] = \dot{r} \sin \alpha + r \dot{\alpha} \cos \alpha \quad (12)$$

Substituindo (11) e (12) em (10),

$$v_B^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\alpha}^2 \quad (13)$$

Assim sendo, aplicando (9) e (13) em (8), obtém-se

$$\begin{aligned} K_{\text{rolagem}} &= \frac{1}{2}m_B [\dot{r}^2 + r^2 \dot{\alpha}^2] + \frac{1}{2} \frac{J_B}{R^2} \dot{r}^2 \\ &= \frac{1}{2} \left(m_B + \frac{J_B}{R^2} \right) \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m_B r^2 \dot{\alpha}^2 \end{aligned} \quad (14)$$

A energia cinética oriunda da inclinação α da barra é de

$$K_{\text{inclinação}} = \frac{1}{2}(J_B + J_b) \dot{\alpha}^2 \quad (15)$$

Pelo princípio da superposição, a energia cinética total do sistema é dada pela soma algébrica das energias cinéticas de cada corpo rígido, ou seja,

$$K = \frac{1}{2} \left(m_B + \frac{J_B}{R^2} \right) \dot{r}^2 + \frac{1}{2} (m_B r^2 + J_B + J_b) \dot{\alpha}^2 \quad (16)$$

Considerando o material da barra homogêneo, pode-se concentrar seu centro de massa no centro da barra $0,5\ell$. Portanto, a energia potencial P do sistema é dado por

$$P = m_b g (0,5\ell \sin \alpha) + m_B g r \sin \alpha \quad (17)$$

Equação dinâmica de Euler-Lagrange Sejam $Q = \tau_B$ e $q = r$, sendo r a posição da bola e τ_B o torque exógeno da bola. Assim, dinâmica do sistema pode ser modelada matematicamente pela equação dinâmica de Euler-Lagrange aplicando (16) e (17) em (7). Assim,

$$\begin{aligned} \tau_B &= \frac{d}{dt} \left[(m_B + J_B R^{-2}) \dot{r} \right] - m_B r \dot{\alpha}^2 - m_B g \sin \alpha \\ &= (m_B + J_B R^{-2}) \ddot{r} - m_B r \dot{\alpha}^2 - m_B g \sin \alpha \end{aligned} \quad (18)$$

Desenvolvendo,

$$\ddot{r}(t) (m_B + J_B R^{-2}) - m_B r(t) \dot{\alpha}^2(t) + m_B g \sin \alpha(t) = \tau_B$$

Isolando \ddot{r} ,

$$\ddot{r}(t) = \frac{1}{a} \left(\tau_B + m_B r(t) \dot{\alpha}^2(t) - m_B g \sin \alpha(t) \right) \quad (19)$$

no qual

$$a = m_B + J_B R^{-2}$$

Visto que a variável a ser controlada é θ , deve-se usar da relação cinemática encontrada anteriormente para adequar o modelo. Deste modo, tomando $\alpha \approx \frac{d}{\ell} \theta$, $\sin \alpha \approx \frac{d}{\ell} \sin \theta$ e $\dot{\alpha} \approx \frac{d}{\ell} \dot{\theta}$, tem-se

$$\ddot{r}(t) = \frac{1}{a} \left(\tau_B + m_B r(t) d^2 \ell^{-2} \dot{\theta}^2(t) - m_B g d \ell^{-1} \sin \theta(t) \right) \quad (20)$$

o torque exógeno τ_B na bola é de difícil descrição matemática pelo seu caráter arbitrário. Conquanto ele pode ser considerado zero na modelagem e tratado pelo controlador como perturbação. Isto é válido pois este torque só ocorrerá devido aos fatores externos como arrasto e toques na bola. A partir desta consideração vê-se

$$\ddot{r}(t) = \frac{1}{a} \left(B r(t) \dot{\theta}^2(t) - C \sin \theta(t) \right) \quad (21)$$

sendo $B = m_B d^2 \ell^{-2}$ e $C = m_B g d \ell^{-1}$, constantes.

Segundo Halliday e Resnick (2014, p. 274), o momento de inércia de uma casca esférica fina em relação ao seu centro (FIG. 5) é dado por

$$J_B = \frac{2mR^2}{3} \quad (22)$$

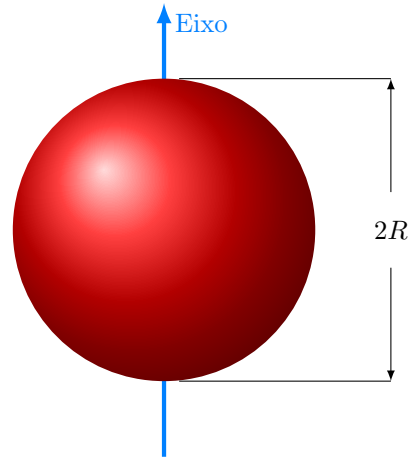


Figura 5. Casca esférica fina

3. VALIDAÇÃO

Os parâmetros do sistema *ball and beam* requeridos para o modelo são listados na TAB. 3.

Tabela 3. Constantes do sistema

| Símbolo | Valor | Unidade |
|---------|--------------------|-------------------|
| m_B | 3×10^{-3} | kg |
| d | 10,15 | cm |
| ℓ | 40,00 | cm |
| g | 981 | cm/s ² |
| R | 2,00 | cm |
| J_B | 8×10^{-3} | kg · cm |

Utilizando o programa de extensão *simulink* do software MATLAB[®] simulou-se a resposta do modelo do sistema a uma entrada degrau. O diagrama da FIG. 6 representa a implementação da modelagem teórica do sistema no programa.

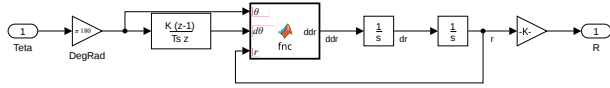


Figura 6. Diagrama usado para implementar o modelo

Para a obtenção dos dados do sensor e servo motor da planta real usou-se a placa Arduino Uno. Os valores foram enviados para o MATLAB® e implementados para comparação com o modelo da forma como mostra o diagrama da FIG. 7. A comparação das respostas ao degrau de amplitude 15, i. e., $\theta = 15^\circ$, são mostradas na FIG. 8.

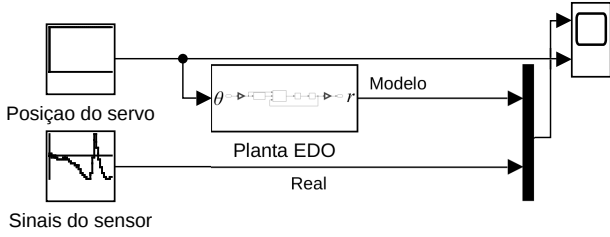


Figura 7. Diagrama usado para comparação das respostas

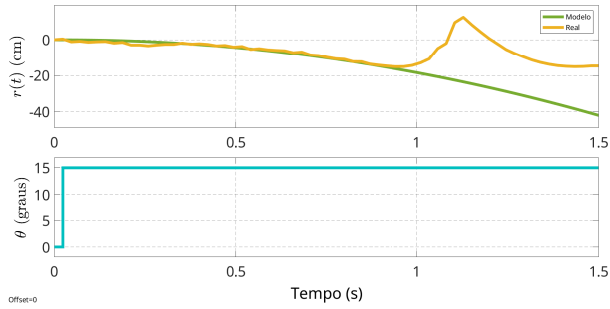


Figura 8. Comparação das repostas do sistema real com a do modelo dada uma entrada degrau

No experimento, deixou-se a bola em repouso a 25,01 cm do sensor. Entretanto, este ponto foi tomado como a referência: 0 cm. Assim, após a aplicação do degrau, a bola começou a rolar e diminuir sua distância. Quando ela chegou em aproximadamente -19 cm (cerca de 6 cm de distância com o sensor), ela atinge o limite de funcionamento estipulado e, por conseguinte, a leitura do sensor não condiz com a distância da bola. No gráfico é visível a saturação do sensor. Fora este ponto, verifica-se que o modelo se adequou bem à planta.

Conquanto, devido à instabilidade da planta, é pouco provável que na utilização desta seja aplicado apenas um degrau. É plausível supor que a ação de controle se dará alternando entre ângulos positivos e negativos a fim de parar a bola. Por isso, fez-se também a resposta do sistema às entradas 10 e -10, como visto na FIG. 9.

Neste experimento a bola partiu de uma distância de 28,25 cm, em relação ao sensor, tomado como referência. Verificou-se que a movimentação da bola acelera durante o degrau positivo e desacelera durante o negativo, quase parando ao final do experimento.

O modelo previa que a bola pararia. Esta leve diferença ocorre pois a dinâmica do servomotor foi considerada unitária, mas devido a posição do centro de gravidade do sistema, é mais difícil (e demorado) para o servo subir do

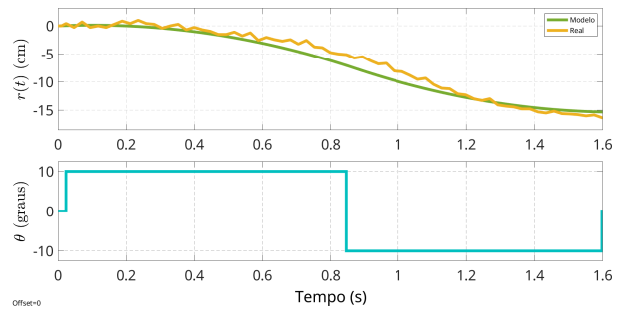


Figura 9. Comparação das repostas do sistema real com a do modelo dada uma entrada degrau

que para descer, já que está submetido à ação da gravidade. Assim, existe certa assimetria, não considerada no modelo, que influencia levemente na dinâmica da planta. Há ainda as influências não consideradas do atrito e do erro na leitura do sensor, cuja precisão observada foi menor do que seu *datasheet* informa.

Não obstante, o comportamento do modelo descreveu com certa precisão o da planta, sendo, portanto validado pelos dois experimentos mostrados.

4. CONCLUSÃO

As ferramentas do Controle Clássico exigem o conhecimento de um modelo matemático que descreva ou se aproxime do comportamento do sistema.

No sistema *ball and beam*, o uso da equação de Euler-Lagrange permite uma rápida modelagem matemática do movimento plano geral da bola sob a viga, inclusive com a ação de torques exógenos. Já a equação cinemática do movimento do servo com a viga é feita a partir do laço de vetores. Neste ponto, deve ser considerado que o *link* entre a viga e a barra unida ao servo opera em torno de 90° e, assim, chegar a uma relação simples entre θ e α .

Ademais, na prática é imposto o uso de pequenas variações dos ângulos, uma vez que a movimentação brusca do servo pode fazer a bola ser lançada. Assim, pode ser feito as simplificações de pequenos ângulos e, portanto, é desejável que a viga seja maior do que a barra do servo, para que $\alpha \leq \theta$, $\forall t$, contudo isto só é possível com o uso de um servomotor com maior torque.

O sensor de distância usado apresentou um erro sistemático na leitura da distância: de tempos em tempos o resultado da sua saída é incongruente com a distância do objeto. Adicionalmente, seu sinal se mostrou excessivamente ruidoso. Ambos os problemas foram tratados com a conexão de um capacitor eletrolítico de 10 μF em paralelo com o sinal do sensor e o terra. Em contrapartida, é observado um sutil atraso na leitura do sinal para variações bruscas. Uma alternativa a ser estudada é o uso de filtros digitais.

A modelagem feita da rolagem da bola desconsiderou as forças dissipativas e o deslizamento da bola. O primeiro termo é de fácil adequação para o modelo, visto que as equações de Euler-Lagrange já são definidas com ele. O empecilho de se usá-lo é que ele é um valor determinado empiricamente e associado à inúmeras variáveis. Para trabalhos futuros, sugere-se que este parâmetro seja considerado no modelo e que ele seja determinado via software,

ajustando-o de forma que o modelo se aproxime melhor dos resultados da planta.

Por fim, a comparação entre a resposta da planta com a do modelo apresenta grande semelhança na faixa de operação determinada, ambos informando que o processo é instável. Foi aplicado um degrau de amplitude 15 e as respostas adotaram o mesmo perfil durante a faixa de operação do sensor. Ainda, se aplicou um degrau positivo e outro negativo, a fim de se aproximar melhor do uso futuro do projeto e foi verificado leve desvio no valor final a ser estudado e rejeitado com os controladores.