

Prática 5 — Laboratório de Análise de Sistemas Lineares

Bernardo Bresolini* Ester Queiroz Alvarenga*

* Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais,
Divinópolis - MG (e-mails: berbresolini14@gmail.com e
esterqueirozalvarenga@gmail.com).

Resumo

O presente trabalho descreve e analisa as atividades desenvolvidas em laboratório. Com enfoque na ferramenta lugar geométrico das raízes e a sensibilidade e lugar geométrico das raízes. Constatou-se a facilidade da análise e escolha de um ganho proporcional com a ferramenta e a sensibilidade do filtro de segunda ordem a variações de um parâmetro, tanto em malha aberta quanto fechada.

Palavras-chaves: Filtro RC. Lugar geométrico das raízes.

Abstract

This paper describes and analyzes laboratory activities. Focusing on the tool root geometric location and sensitivity and root geometric location. It was found the ease of analysis and choice of proportional gain with the tool and the sensitivity of the second order filter to variations of a parameter, both open and closed loop.

Keywords: RC filter. Geometric place of roots.

1. INTRODUÇÃO

A aula do dia 16 de outubro de 2019 da disciplina de Laboratório de Análise de sistemas Lineares teve por objetivo inteirar os alunos a respeito da ferramenta lugar geométrico das raízes, a qual permite determinar um ganho — de forma simplificada — que satisfaça às condições desejadas.

O presente relatório, portanto, destina-se a explicar a atividade requerida aos autores para se atingir o proposto. Ademais desta parte este documento ainda é composto por Referencial Teórico, Metodologia, Resultados e Discussões e Conclusão.

2. REFERENCIAL TEÓRICO

Os experimentos a serem explicados neste trabalho, são baseados nos tópicos: lugar geométrico das raízes e sensibilidade e lugar geométrico das raízes.

2.1 Lugar geométrico das raízes

O lugar das raízes é uma ferramenta poderosa para se analisar e projetar sistemas de controle com retroação, visto que a estabilidade e o desempenho de um sistema de controle a malha fechada estão diretamente relacionados com a localização das raízes da equação característica a malha fechada (DORF e BISHOP, 2001).

Considerando um sistema descrito pela função de transferência de malha fechada:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (1)$$

A equação característica é obtida igualando o denominador a zero:

$$G(s)H(s) = -1 \quad (2)$$

Supondo $G(s)H(s)$ uma relação de polinômios em s , como este polinômio é uma grandeza complexa, (2) pode ser reescrito como duas condições:

- Condição angular:

$$\angle G(s)H(s) = \pm 180(2k + 1) \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (3)$$

- Condição modular:

$$|G(s)H(s)| = 1 \quad (4)$$

Dessa forma, os valores que satisfazem as condições angular e modular são as raízes da equação característica ou os polos de malha fechada. Um lugar dos pontos no plano complexo que satisfaz somente a condição angular é o lugar das raízes (OGATA, 2010). Os polos de malha fechada — que correspondem a determinado valor de um ganho k — podem ser determinadas pela condição de módulo (OGATA, 2010).

Então, o lugar geométrico das raízes do sistema é um gráfico construído a partir dos polos e zeros de malha aberta. E ainda é o lugar ou caminho dos polos de malha fechada quando o ganho k varia de zero a infinito.

No *software* MATLAB®, essa técnica pode ser utilizada a partir do comando `rlocus()`.

2.2 Sensibilidade e lugar geométrico das raízes

Segundo Dorf (2001, p. 141), todo processo está sujeito a mudanças das condições ambientais, envelhecimento,

ignorância dos valores exatos dos parâmetros do processo e a outros fatores naturais que afetam um procedimento de controle. Estes erros e alterações provocam modificações na saída dos sistemas em malha aberta ou gera tentativas de correções da saída em um sistema realimentado.

Deste modo, um sistema de controle é sensível a variações de parâmetros, promovendo uma característica de grande importância: a sensibilidade de um sistema. Que é definida pela relação entre a variação percentual da função de transferência do sistema pela relação percentual da função de transferência do processo (ou parâmetro) para pequena mudança incremental (DORF, 2001).

O método do lugar das raízes também fornece ao engenheiro uma medida da sensibilidade das raízes do sistema dada uma variação de um parâmetro. Sendo assim, a sensibilidade da raiz de um sistema $T(s)$ pode ser definida como:

$$S_k^{r_i} = \frac{\partial r_i}{\partial k/k} \quad (5)$$

em que r_i é a i -ésima raiz do sistema e k o parâmetro variado. Calculando a sensibilidade examinando o contorno do lugar geométrico das raízes, tem-se

$$S_k^{r_i} \approx \frac{\Delta r_i}{\Delta k/k} \quad (6)$$

3. METODOLOGIA

De modo a praticar e verificar experimentalmente a ferramenta lugar geométrico das raízes, é requerido aos autores 3 atividades que serão relatadas nas subseções seguintes.

Para simulação do proposto usa-se o programa *Simulink* do *software* MATLAB®. Ainda, com fins comparativos, utiliza-se de uma placa eletrônica com filtros passa baixa de primeira ordem até oitava ordem.

3.1 Atividade 1

Para os sistemas de primeira, terceira e sexta ordens do filtro passa baixa, deve-se fazer o lugar das raízes. Dado os resultados tem de se propor valores para o controlador proporcional, fechar a malha com o mesmo no *simulink* e comparar os resultados obtidos dos sistemas reais com os dos sistemas simulados.

3.2 Atividade 2

A segunda atividade utilizará os sistemas da FIG. 1, em que $G(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 1}$, $C(s) = K \times \frac{0,25s^2 + 0,5s + 1}{s(0,25s + 1)}$ e $kp = 3 + \Delta kp$.

Para o sistema de segunda ordem com ganho kp , considerando inicialmente $\Delta kp = 0$, tem de se projetar o valor de K para que o sistema tenha $T_s \leq 2$ s e $OS \leq 20\%$. Para tanto, deve-se usar a equação de “malha aberta” (H_{ma}) multiplicado pelo controlador, primeiramente sem o valor de K , ainda deve-se traçar o lugar das raízes e analisar um valor de K que satisfaça o que é pedido.

Após isso, no *simulink*, tem de se incluir o valor de K estimado, fechar a malha como na FIG. 1 e verificar o resultado por simulação e experimento.

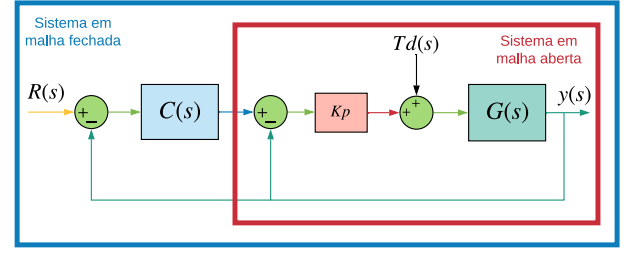


Figura 1. Sistema em malha aberta e realimentado com parâmetro variável

3.3 Atividade 3

Ainda considerando os sistemas da FIG. 1, é preciso fazer um estudo sobre a sensibilidade das raízes para variação de 50% de kp , ou seja, $\Delta kp = 1,5$, tanto para malha aberta quanto para malha fechada. Para a malha fechada, deve-se utilizar o valor de K determinado na atividade anterior.

Ainda é preciso verificar e comentar os resultados a partir de simulações e experimentos, simular e comparar os sistemas reais e experimentais com os diferentes valores de kp .

Obs.: caso seja verificado em simulação que o valor proposto para Δkp ultrapassa os valores limites do sinal de controle, ajuste o valor dessa variável para que não se tenha saturação do sinal de controle.

4. RESULTADOS E DISCUSSÕES

4.1 Atividade 1

Considere o sistema de primeira ordem

$$G_1(s) = \frac{1}{s + 1} \quad (7)$$

controlado como mostra a topologia da FIG. 2.

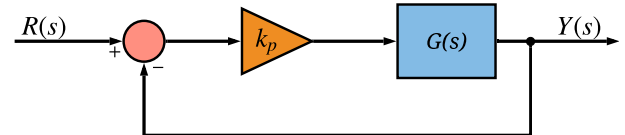


Figura 2. Topologia de realimentação unitária

A função transferência H que descreve o comportamento deste sistema é

$$H = \frac{kpG(s)}{1 + kpG(s)} \quad (8)$$

cujos polos são os valores que satisfazem a

$$kpG(s) + 1 = 0 \quad (9)$$

Para o processo em questão,

$$p_1 + 1 = -kp \implies p_1 = -kp - 1 \quad (10)$$

A função do MATLAB® `rlocus` computa alguns valores dos polos para dados valores de kp . A função ainda gera o gráfico do lugar das raízes. Para o sistema $G_1(s)$ o Lugar Geométrico das Raízes é mostrado na FIG. 3.

Visto que $G_1(s)$ é uma função transferência de grau 1, era esperado apenas um polo e que este tornasse-se menor à medida que kp crescesse. Ou seja, o modelo admite

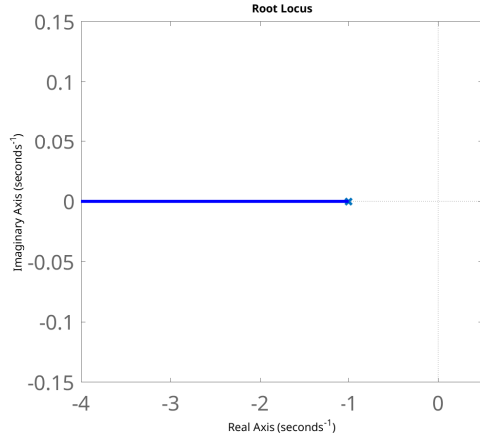
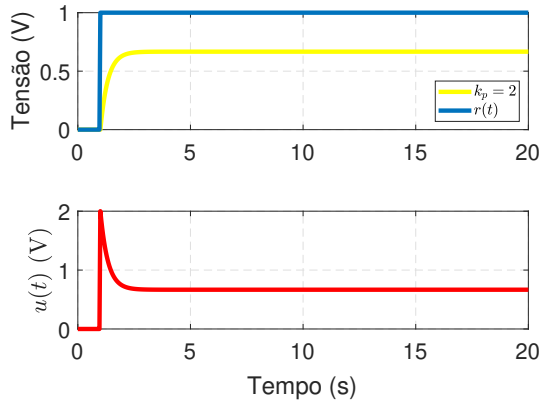


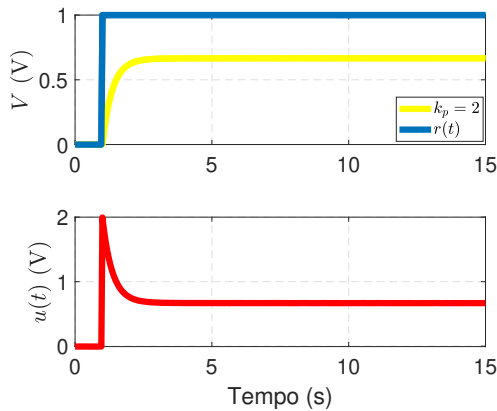
Figura 3. Lugar geométrico das raízes do sistema de primeira ordem

qualquer valor de kp , embora na prática, é sabido que altos valores do ganho proporcional implicam na saturação do atuador. Deste modo, foi escolhido o valor de $kp = 2$ que resulta em $p_1 = -3$.

Fechando a malha como na FIG. 2 com $kp = 2$ para $G(s) = G_1(s)$ e $G(s)$ igual ao filtro passa baixa de primeira ordem real, obteve-se os resultados mostrados na FIG. 4.



(a) Simulação de $G_1(s)$ a malha fechada com $kp = 2$



(b) Filtro de primeira ordem a malha fechada com $kp = 2$

Figura 4. Simulação do sistema de primeira ordem em malha fechada com $kp = 2$

Em que a FIG. 4(a) apresenta a resposta do modelo e a FIG. 4(b) mostra a resposta do filtro real. Ambas as respostas apresentaram resultados semelhantes, com um erro de estado estacionário aproximadamente igual a 0,3. Tal erro poderia ser reduzido ao se aumentar o valor do ganho, entretanto, saturaria o sinal de controle, por isso, a escolha em $kp = 2$.

Considere agora o sistema de terceira ordem

$$G_3(s) = \frac{1}{(s+1)^3} \quad (11)$$

na mesma topologia já estudada.

Os valores que satisfazem a (9) são

$$(p_3 + 1)^3 = -kp \implies p_3 = (-kp)^{1/3} - 1 \quad (12)$$

lembrando que p_3 é um número complexo e, assim, a operação de radiciação cúbica corresponde a três valores de mesmo módulo defasados em 120° entre si. A FIG. 5 mostra exatamente este comportamento.

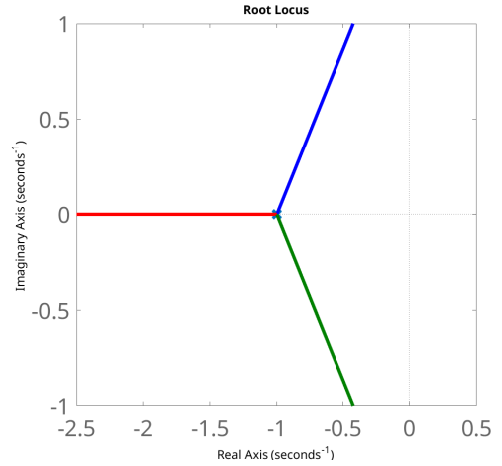


Figura 5. Lugar geométrico das raízes do sistema de terceira ordem

Analisando o gráfico, percebe-se que ele parte de -1 quando $kp = 0$ e quando kp cresce, vê-se um par de polos complexos conjugados (defasados em 120° entre si) e outro puramente negativo. É evidente que é possível tomar um valor do ganho proporcional que deixe o sistema instável. Logo, foi escolhido $kp = 2,5$.

A FIG. 6 apresenta a resposta do filtro de terceira ordem (FIG. 6(b)) e do seu modelo ((FIG. 6(a))) para a topologia da FIG. 2 com o controlador proporcional, igual a 2,5.

Vê-se que nem o modelo nem o filtro real conseguiu seguir a referência apenas com o ganho proporcional de 2,5. Para que a referência seja seguida, um controlador mais robusto deve ser acrescentado no sistema. Entretanto, atesta-se que o processo é estável, visto que o valor da resposta em regime permanente é constante.

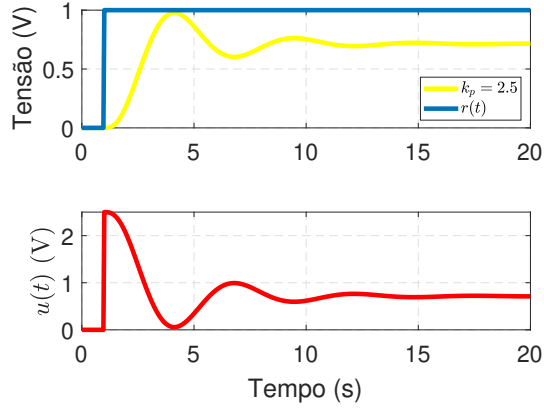
Considere, por fim, o sistema

$$G_6(s) = \frac{1}{(s+1)^6} \quad (13)$$

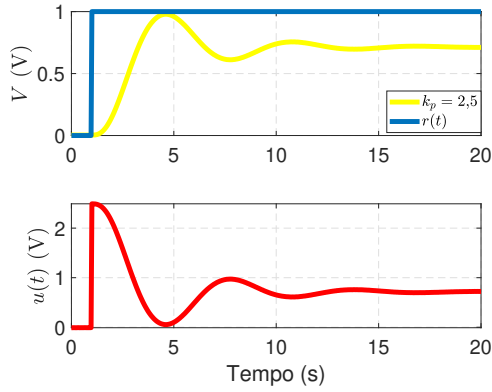
na mesma topologia abordada.

Os valores que satisfazem a (9) são

$$(p_6 + 1)^6 = -kp \implies p_6 = (-kp)^{1/6} - 1 \quad (14)$$



(a) Simulação de $G_3(s)$ a malha fechada com $k_p = 2,5$



(b) Filtro de terceira ordem a malha fechada com $k_p = 2,5$

Figura 6. Simulação do sistema de terceira ordem em malha fechada com $k_p = 2,5$

sendo p_6 um valor complexo e, assim, a radiação de grau 6 admite 6 valores distintos defasados em 60° entre si, embora com o mesmo módulo. Portanto, existe um valor de k_p capaz de instabilizar o sistema, como mostra a FIG. 7. Destarte, optou-se por um valor de $k_p = 1$.

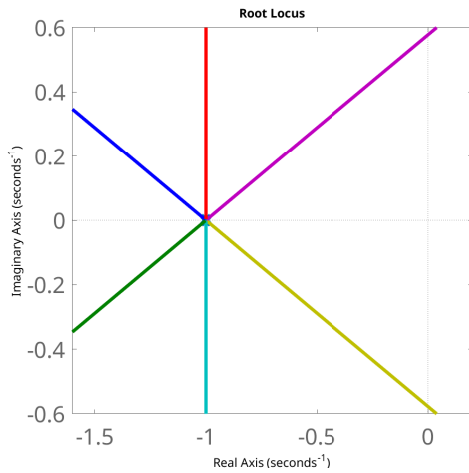
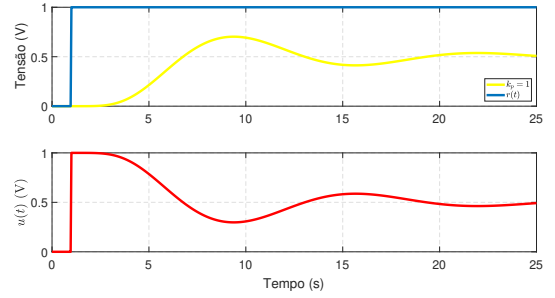


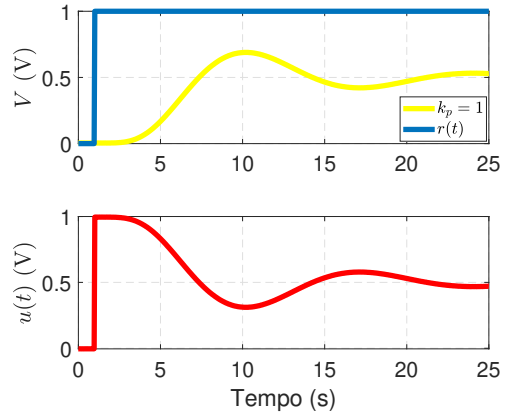
Figura 7. Lugar geométrico das raízes do sistema de sexta ordem

Simulou-se o sistema em ‘malha aberta’ da FIG. 1 com $G(s) = G_6(s)$ e $k_p = 1$. Tal resultado é exposto na FIG.

8(a) para o modelo e na FIG. 8(b) para o filtro de sexta ordem real.



(a) Simulação de $G_6(s)$ a malha fechada com $k_p = 1$



(b) Filtro de sexta ordem a malha fechada com $k_p = 1$

Figura 8. Simulação do sistema de sexta ordem em malha fechada com $k_p = 1$

A simulação sustenta que para o ganho escolhido, o sistema é estável, como desejado. Entretanto ainda tem-se o erro de regime permanente que é resolvido implementando o processo na topologia a malha fechada da FIG. 1.

4.2 Atividade 2

Seja o sistema em malha fechada da FIG. 9.

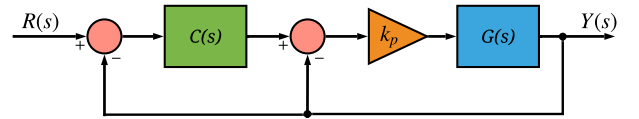


Figura 9. Topologia de malha fechada

em que $k_p = 3$, $G(s) = (s + 1)^{-2}$ e $C(s) = K(0,25s^2 + 0,5s + 1)(0,25s^2 + s)^{-1}$.

Para analisar o Lugar Geométrica das Raízes com a função `rlocus` do MATLAB® faz-se necessário computar a função transferência \hat{G} de ‘malha aberta’ e multiplicá-la por $C(s)$ sem o valor de K , ou seja

$$\hat{G}(s) = \frac{k_p G(s)}{1 + k_p G(s)} = \frac{k_p}{s^2 + 2s + 1 + k_p} \quad (15)$$

multiplicando por $C(s)$ sem o K é obtido

$$C(s)\hat{G}(s) = \frac{k_p}{(s + 1)(s + k_p + 1)} \quad (16)$$

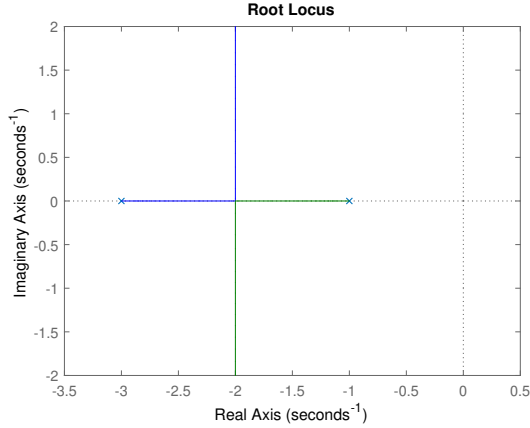


Figura 10. Lugar Geométrico das raízes do sistema da FIG. 9

uma equação de segunda ordem cujo lugar geométrico das raízes pode ser visto na FIG. 10, para $k_p = 3$.

Assim, é possível projetar um ganho K no controlador capaz de fazer os polos variarem nestes pontos. Visto que o tempo de acomodação $t_s = 2$ s e que quando os polos tornam-se complexos conjugados a parte real está em $-\zeta\omega_n = -2$, logo é possível alcançar a especificação do tempo de acomodação.

O percentual de *overshoot* máximo admitido é de $\%OS = 20\%$, logo o valor de ζ máximo será

$$\zeta = -\frac{\ln OS}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2 OS}} \approx 0,4559 \quad (17)$$

Assim, a frequência natural deve ser

$$\omega_n = \frac{4}{t_s \zeta} \approx 4,3864 \text{ rad/s} \quad (18)$$

Deste modo, o módulo da parte imaginária dos polos devem ser

$$\text{Imag}(p) = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \approx 3,9040 \quad (19)$$

Analisando a tabela retornada pela função `rlocus` do MATLAB®, verifica-se que para $K = 6,5$ os polos do sistema em malha fechada são $-2 \pm j3,9370$, suficientemente próximos do valor calculado. Assim, escolhe-se $K = 6,5$.

Adotando a topologia da FIG. 9 para o valor de K adotado (6,5), fez-se a simulação no *simulink* e a resposta obtida é mostrada na FIG. 11. Como esperado da topologia de malha fechada, o sistema seguiu a referência dada embora o sinal de controle $u(t)$ tenha estado abaixo de 0 V em um certo tempo. Os dados da resposta estão postos na TAB. 1.

Tabela 1. Características da resposta em malha fechada para $K = 6,5$

Característica	Valor
Tempo de subida	0,3516 s
Tempo de acomodação	1,8879 s
Overshoot	20,26%

Avaliando a resposta da planta real sob as mesmas condições, é obtido o gráfico mostrada na FIG. 12. Perceba que o sinal de controle $u(t)$ excedeu seu limite de operação

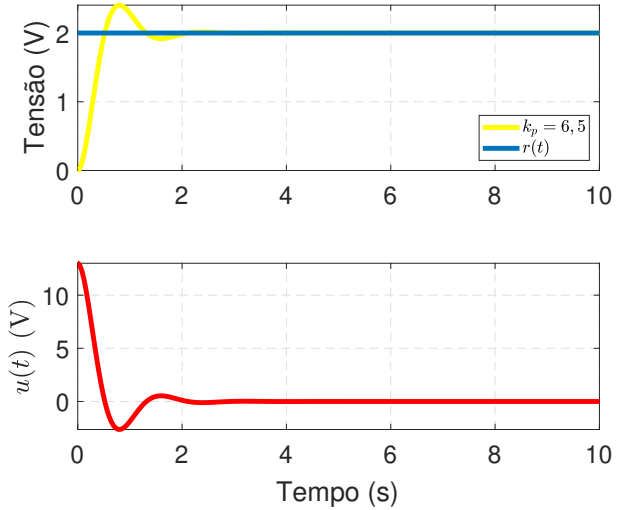


Figura 11. Simulação da resposta do sistema da FIG. 9 para $K = 6,5$

em muito e, assim, a resposta obtida passa longe do modelo. Como previsto, o modelo não se aproxima da planta quando esta está fora da sua faixa de operação.

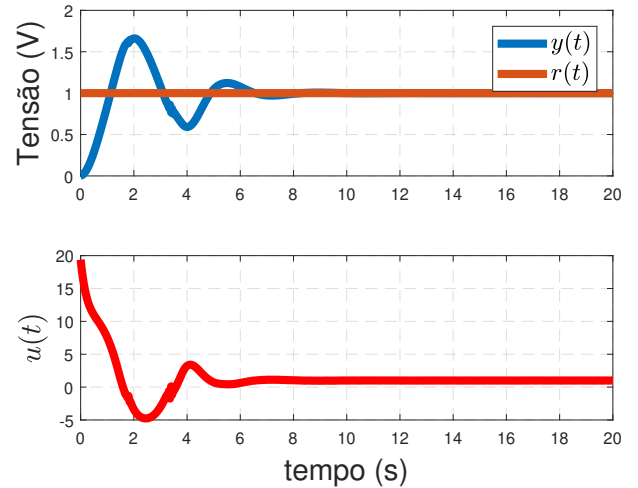


Figura 12. Resposta da planta real, em malha fechada, para $K = 6,5$

Portanto, para o sistema em questão, não se conseguiu controlar com as especificações dadas. Sugere-se que se diminua o valor de *overshoot* esperado para que o ganho K possa ser menor e, assim, evitar a saturação da planta.

4.3 Atividade 3

Considerando ainda os sistemas da FIG. 1, tem-se que, em malha aberta, a função de transferência descritiva do processo é

$$H_{ma} = \frac{3}{s^2 + 2s + 4} \quad (20)$$

Para $kp_1 = 3$ e a variação de 50% de kp requerida, conta-se com $kp_2 = 4,5$. Utilizando a função `rlocus`() do MATLAB, é possível encontrar as duas raízes referentes ao sistema com kp_1 e kp_2 . As raízes encontradas são $r_1 = -1,0000 + 1,7321j$ e $r_2 = -1,0000 + 2,1213j$.

Dessa forma, calcula-se com (6) a sensibilidade da raiz para o sistema em malha aberta,

$$S_{Hma} \approx \frac{(-1,0000 + 2,1213J) - (-1,0000 + 1,7321J)}{(4,5 - 3)/3}$$

Dessa forma, o sistema em malha aberta é sensível aproximadamente igual a 2,3356J dada a variação de 50% do valor de kp .

O sistema em malha fechada, por sua vez, utilizando $k = 6,5$ e $kp = 3$ é descrito pela função de transferência,

$$Hmf = \frac{19,5}{s^2 + 4s + 19,5} \quad (21)$$

A partir da função `rlocus()` do MATLAB, Hmf , kp_1 e kp_2 , gera-se as seguintes raízes: $r_1 = -2,0000 + 8,6023J$ e $r_2 = -2,0000 + 10,1612J$. Com as quais calcula-se a sensibilidade do sistema em malha fechada

$$S_{Hmf} \approx \frac{(-2,0000 + 10,1612J) - (-2,0000 + 8,6023J)}{(4,5 - 3)/3}$$

Logo, o sistema em malha fechada da FIG. 1 é sensível aproximadamente 9,3533J a variação de 50% de kp . Nota-se que para esta configuração a sensibilidade é maior do que para malha fechada, ou seja, os valores de kp influenciam na dinâmica do processo mais neste caso do que para o anterior.

De modo a verificar e comparar os valores de sensibilidade encontrados, simulou-se os sistemas reais e experimentais com diferentes valores de kp . Este experimento está apresentado nas FIG. 13, 14, 15 e 16.

Repara-se que em malha aberta, quanto maior o valor do kp mais próxima a resposta fica da referência, confirmando a sensibilidade do sistema a variação deste parâmetro. Ainda, vê-se que o modelo assemelha-se em muito do sistema real, o qual representa muito bem a dinâmica do filtro.

Em malha fechada conseguiu-se apenas variar o kp para o $G(s)$ igual ao modelo, já que com $k = 6,5$ e $kp > 2$ o filtro real satura. A FIG. 16 apresenta o comportamento em malha fechada para kp igual a 2 e 3.

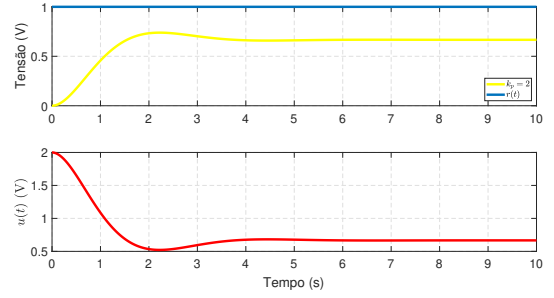
É importante ressaltar que, embora a simulação com o filtro real não tenha sido realizada para a topologia em malha fechada, sabe-se, dada as comparações anteriores que o modelo representa fidedignamente o filtro real. Logo, a análise de sensibilidade pode ser feita considerando apenas o modelo do sistema.

Para a malha fechada, ainda nota-se que quanto maior o valor de kp mais oscilatória é a resposta. Tal alteração mostra que o sistema, mais especificamente, as raízes do sistema são sensíveis a variações no valor de kp .

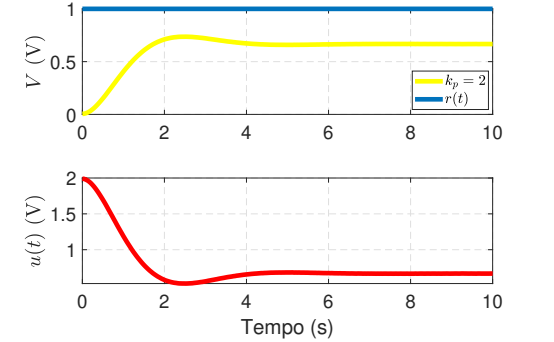
5. CONCLUSÃO

A análise do Lugar Geométrico das Raízes para sistemas com realimentação é um ferramenta útil para se detectar os possíveis polos quando se varia K .

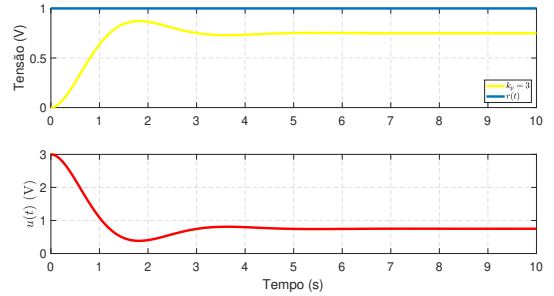
No presente relatório, foi-se feito seu uso, inclusive para projetar o valor de K necessário que se atendesse aos critérios estipulados. Ainda, a análise do gráfico gerado possibilita saber qual tipo de resposta é esperado: ordem



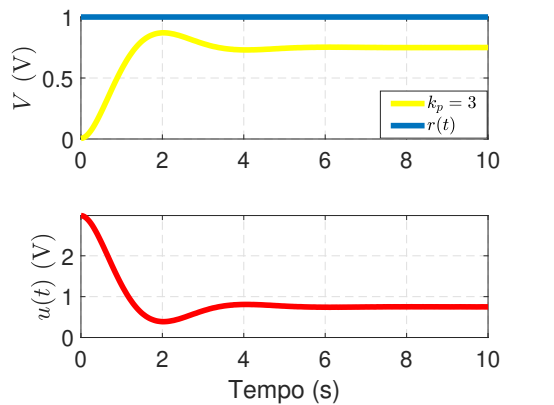
(a) Resposta do modelo em malha aberta com $kp = 2$



(b) Resposta do filtro em malha aberta com $kp = 2$



(c) Resposta do modelo em malha aberta com $kp = 3$

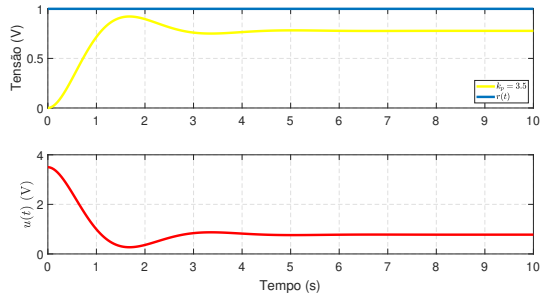


(d) Resposta do filtro em malha aberta com $kp = 3$

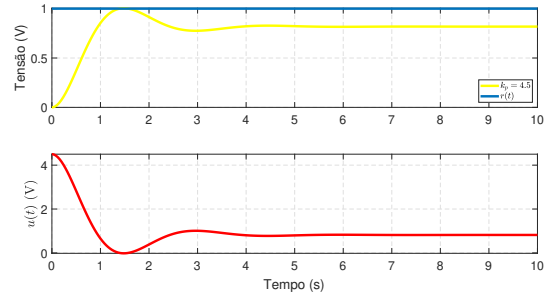
Figura 13. Simulação do sistema de segunda ordem para variações de kp em 2 e 3

do sistema, oscilatório, amortecido, instável e afins além da presença de zeros de fase mínima ou não mínima.

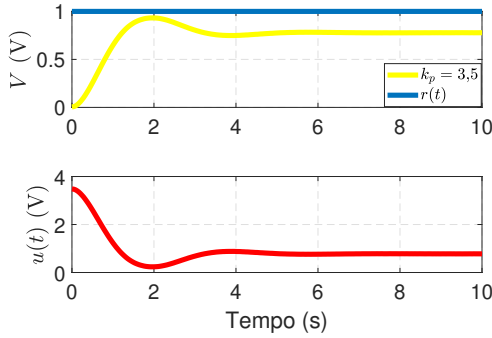
Conquanto, à medida que se avançou nas atividades, percebeu-se que esta ferramenta é válida somente para o modelo da planta que se tem. Inclusive, na aplicação



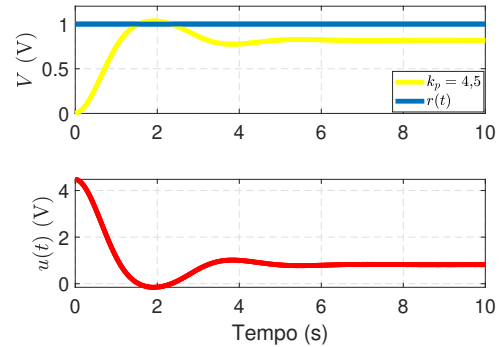
(a) Resposta do modelo em malha aberta com $k_p = 3,5$



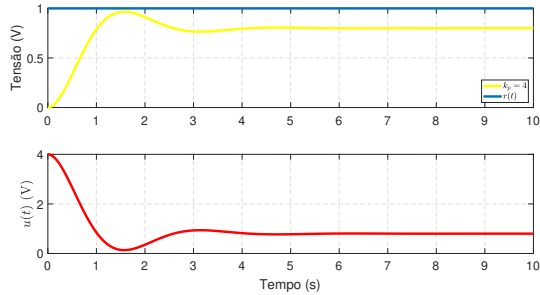
(a) Resposta do modelo em malha aberta com $k_p = 4,5$



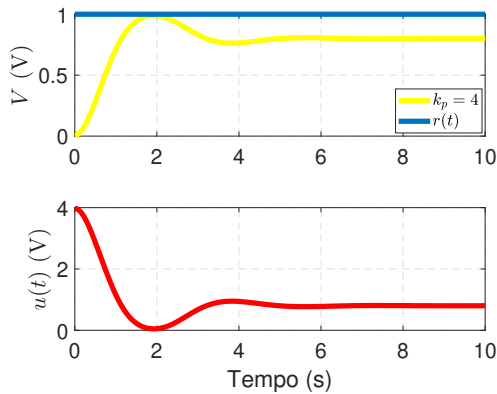
(b) Resposta do filtro em malha aberta com $k_p = 3,5$



(b) Resposta do filtro em malha aberta com $k_p = 4,5$



(c) Resposta do modelo em malha aberta com $k_p = 4$



(d) Resposta do filtro em malha aberta com $k_p = 4$

Figura 14. Simulação do sistema de segunda ordem para variações de k_p em 3,5 e 4

prática foi evidente que mesmo o projeto correto do ganho, é possível que o sistema apresente outra resposta, devido a saturação ou erro do próprio modelo.

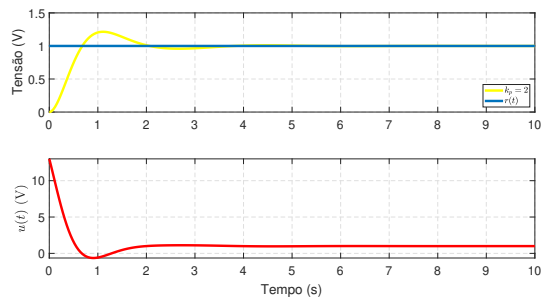
Sendo assim, os autores recomendam que nas práticas seguintes, seja requerido aos alunos o projeto de um

Figura 15. Simulação do sistema de segunda ordem para k_p igual a 4,5

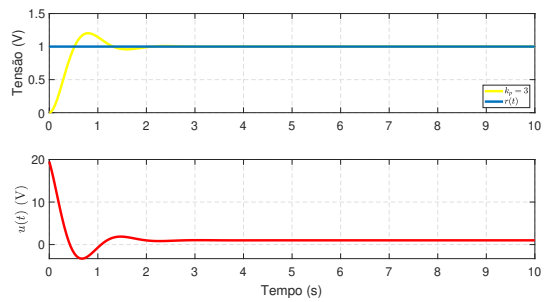
controlador proporcional de maneira que o ganho K não faça com que o sistema saia da sua faixa de operação. Sugere-se que o *overshoot* além do ganho k_p da planta também seja diminuído.

6. REFERÊNCIAS

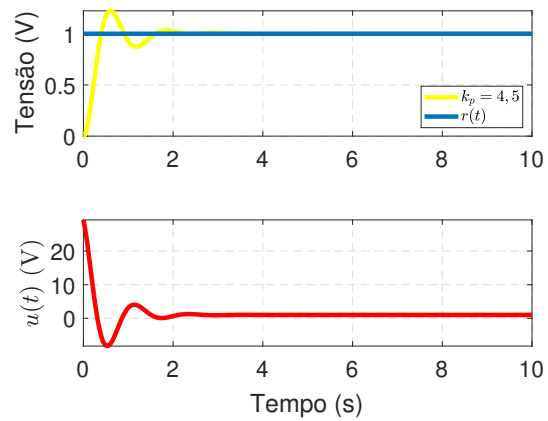
- DORF, R.nos que C.; BISHOP, R. H. (2001). Sistemas de Controle Modernos. 8^a. Ed, LTC, Rio de Janeiro.
- OGATA, K.: (2010). Engenharia de Controle Moderno. 5^a Ed, Pearson Education, São Paulo.



(a) Resposta do Modelo em malha fechada com $k_p = 2$



(b) Resposta do Modelo em malha fechada com $k_p = 3$



(c) Resposta do Modelo em malha fechada com $k_p = 4,5$

Figura 16. Variação do k_p em malha fechada