

Prática 3 — Laboratório de Análise de Sistemas Lineares

Bernardo Bresolini* Ester Queiroz Alvarenga*

* Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais,
Divinópolis - MG (e-mails: berbresolini14@gmail.com e
esterqueirozalvarenga@gmail.com).

Resumo

A prática 3 da disciplina de Laboratório de Análise de Sistemas Lineares destinou-se a trabalhar os métodos de identificação de sistemas de primeira e segunda ordem. Deste modo, utilizando uma planta real com filtros passa baixa de primeira a oitava ordem, implementou-se os métodos de identificação, tanto em malha aberta quanto em malha fechada. Avaliando se a aproximação feita era aceitável ou não. Para o segundo caso, fez-se ajustes no modelo de modo que a aproximação fosse satisfatória. Mediante o proposto, pôde-se conhecer, aplicar e validar os métodos de identificação.

Palavras-chaves: Modelagem. Caixa Preta. Filtro passa baixa.

Abstract

Practice 3 of the Linear Systems Analysis Laboratory course is designed to work out the first and second order systems identification methods. In this mode, using a real plant with low pass filters of first to eighth order, the identification methods were implemented, both open loop and closed loop. Assessing whether the approach made was acceptable or not. For the second case, adjustments were made to the model so that the approximation was satisfactory. Through the proposal, it was possible to know, apply and validate the identification methods.

Keywords: Modeling. Black box. Low pass filter.

1. INTRODUÇÃO

Em 28 de agosto de 2019 na disciplina de *Laboratório de Análise de Sistemas Lineares*, requereu-se aos presentes autores que a partir da resposta ao degrau unitário, identificassem os modelos matemáticos de um sistema de primeira ordem e de um sistema de segunda ordem. Assim sendo, o presente trabalho se propõe a descrever a instrumentação, métodos e conceitos utilizados no cumprimento da prática.

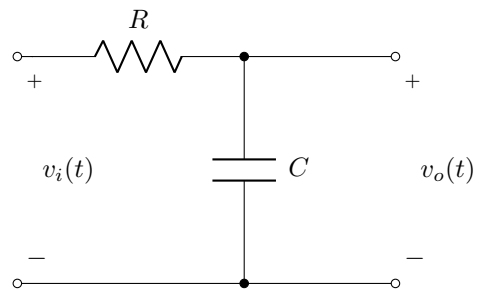


Figura 1. Filtro passa baixa 1^a ordem

2. FILTRO PASSA BAIXA

O circuito RC em série funcionando como um filtro passa baixa tem a configuração mostrada na FIG. 1 em que $v_i(t)$ é a fonte que alimenta o circuito e $v_o(t)$ é a tensão de saída do filtro.

Este circuito é denominado filtro passa baixa porque o capacitor é um curto circuito para frequências altas e um circuito aberto para frequências baixas. Sendo assim, ao ser submetido a baixas frequências, $v_o(t) \approx v_i(t)$; e quando o capacitor é um circuito fechado, o sinal de $v_i(t)$ vai para o terra, gerando $v_o(t) \approx 0$.

2.1 Modelagem

O filtro passa baixa pode ser representado por intermédio de modelos matemáticos. Uma técnica de modelagem utilizada é a modelagem caixa preta.

Neste método nenhuma informação além dos dados do sistema é disponível para uso, por isso é utilizado apenas informações da saída e entrada do sistema para identificação do processo. Em posse destes dados, usa-se procedimentos baseados na álgebra linear e em conceitos estatísticos (CORRÊA e AGUIRRE, 2004).

2.2 Método da identificação para sistema de primeira ordem

Seja um sistema de primeira ordem com atraso de transporte. Sua função transferência $G(s)$ é dada por

$$G(s) = \frac{k_e e^{-ds}}{\tau s + 1} \quad (1)$$

sendo d o tempo de atraso deste sistema, ilustrado na FIG. 2.

A resposta deste sistema à um degrau é calculada aplicando a Transformada Inversa de Laplace no sinal $Y(s) = G(s)/s$, em que vê-se

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{G(s)/s\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{k_e e^{-ds}}{s(\tau s + 1)}\right\} \\ &= k_e \left(1 - e^{-(t-d)/\tau}\right) \mu(t-d) \end{aligned} \quad (2)$$

no qual $\mu(t)$ é a função Heaviside ou função degrau.

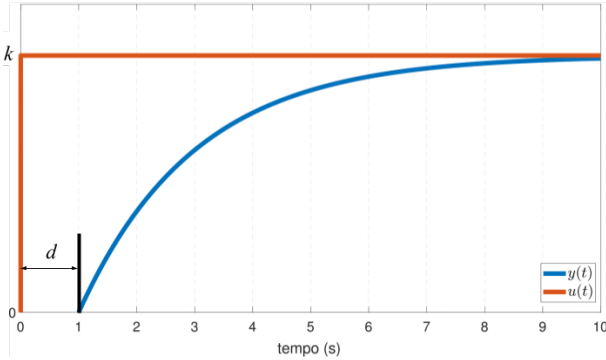


Figura 2. Ilustração do atraso de transporte

Isolando o expoente da exponencial e denominando-o de $z = -(t-d)/\tau$, segue-se

$$z = \ln \frac{k_e - y(t)}{k_e} \quad (3)$$

A derivada temporal de z é dada por

$$\frac{dz}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d-t}{\tau} \right) = -\frac{1}{\tau} \quad (4)$$

Sendo assim, um método gráfico e empírico (caixa preta) do sistema pode ser tomado fazendo $dz/dt \approx \Delta z/\Delta t$. Além disso, o valor de k_e pode ser obtido a partir da resposta temporal de y , uma vez que este será o ganho estático do sistema. Com posse destes valores, encontra-se a constante de tempo τ . A FIG 3 mostra os pontos necessários para a coleta dos dados. Note que a aproximação de k_e é tão melhor, quanto maior for o tempo decorrido. Além disso, a aproximação $\Delta z/\Delta t$ é mais fidedigna à medida em que se toma intervalos menores.

A identificação então é feita determinando-se

$$k_e = \frac{y_{ss}}{u_{ss}} \quad (5)$$

sendo y_{ss} o valor de $y(t)$ em estado estacionário e u_{ss} o valor de $u(t)$ em estado estacionário.

$$\tau = -\frac{\Delta t}{\Delta z} \quad (6)$$

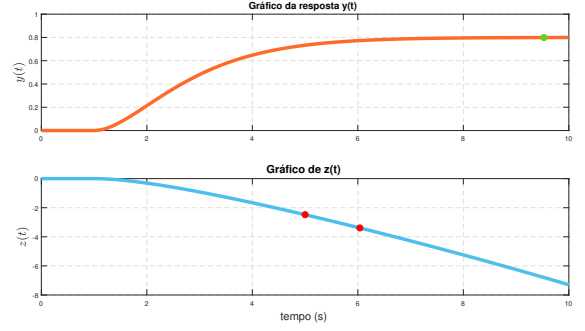


Figura 3. Respostas temporais de um sistema a um degrau unitário

Já o parâmetro de atraso d é obtido no instante em que z se difere de zero¹.

2.3 Método da identificação para sistema de segunda ordem

Em algumas ocasiões, prefere-se modelar a relação saída pela entrada de um sistema a partir de um modelo de segunda ordem.

Seja um sistema estável de segunda ordem representado por:

$$G(s) = \frac{k_e \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta \omega_n s + \omega_n^2} \quad (7)$$

em que k_e é o ganho estático do sistema, ζ o fator de amortecimento e ω_n a frequência natural de oscilação do sistema.

A resposta do sistema a um degrau unitário, obtém-se o seguinte sinal:

$$y(t) = k_e \left[1 - \frac{e^{-\zeta \omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t + \cos^{-1} \zeta) \right] \quad (8)$$

no qual o termo ω_d representa a oscilação forçada, dada por $\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}$.

A identificação é feita determinando-se os coeficientes k_e , ω_n , ζ , por intermédio das relações

$$k_e = \frac{y_{ss}}{u_{ss}} \quad (9)$$

$$\zeta = -\frac{\ln OS}{\sqrt{\pi^2 + (\ln OS)^2}} \quad (10)$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T \sqrt{1-\zeta^2}} \quad (11)$$

Sendo OS a máxima ultrapassagem e T o período de oscilação.

Percebe-se que a determinação da frequência natural do modelo é encontrada a partir do período de sua oscilação. Esse, por sua vez, será encontrado a partir dos pontos de inflexão da curva.

¹ Na prática, existe um certo ruído no sinal. Destarte, deve ser tomado um critério de variação de z acima do ruído para maior precisão.

Sabe-se que os pontos máximos e mínimos locais de uma função ocorrem nos seus pontos de inflexão. Em especial, para funções senoidais, um ponto P é máximo/mínimo local ocorre se na sua vizinhança ele é o maior/menor valor. Em valores discretos, basta testar se os valores seguintes e antecessores têm ambos maior/menor magnitude.

2.4 Análise do desempenho da identificação

Considere o erro de aproximação $e(t)$ em um instante t qualquer. Define-se $e(t)$ como a diferença dos valores coletados e do valor aproximado, ou seja,

$$e(t) = y(t) - \hat{y}(t) \quad (12)$$

Sendo assim, para avaliar o desempenho da aproximação, utilizar-se-á de dois critérios: *integral do erro quadrático (ISE)* e *integral do módulo do erro (IAE)*. Eles são definidos como

$$ISE = \int_0^T e^2(t) dt \quad (13)$$

e

$$IAE = \int_0^T |e(t)| dt \quad (14)$$

Note que, na prática, os valores coletados são discretos (particularmente no caso estudado, a uma taxa de 25 dados por segundo). Deste modo, as integrais definidas em (13) e (14) virarão um somatório.

3. RESULTADOS

A partir de uma placa real, com filtros passa baixa de primeira ordem até oitava ordem, juntamente com o programa *simulink*, obtém-se os dados de entrada e saída do processo. A FIG. 4 trás o diagrama que representa o processo de aquisição desses dados em malha aberta.



Figura 4. Diagrama para aquisição de dados da saída do sistema real

De modo a praticar e validar o modelo de identificação de primeira ordem testou-se a técnica para os filtros de primeira, terceira e sexta ordem com o diagrama da FIG. 4.

Para a verificação da identificação por modelos de segunda ordem, aplicou-se a técnica no filtro de segunda ordem em malha fechada, variando o ganho proporcional k_p de 4 até 6. A FIG. 5 mostra o diagrama que representa o processo de aquisição de dados em malha fechada com ganho proporcional.

3.1 Modelo de primeira ordem para filtro de primeira ordem

A FIG. 6 mostra a resposta do filtro de primeira ordem à entrada degrau. Em posse das curvas de entrada e saída, discretizadas, calcula-se k_e como sendo a coordenada em

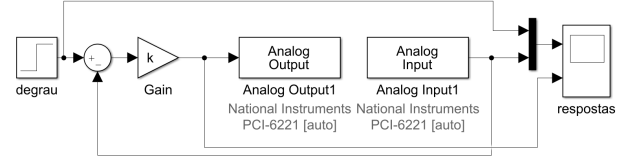


Figura 5. Diagrama para aquisição de dados do sistema real em malha fechada

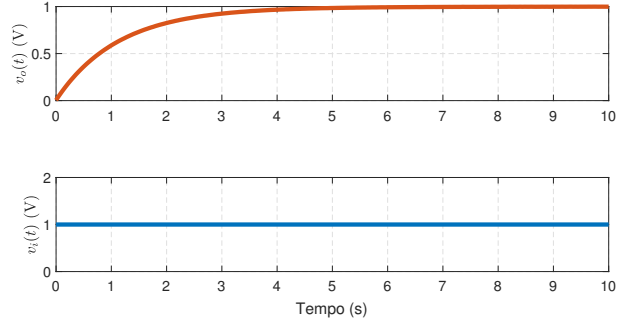


Figura 6. Resposta ao degrau unitário do filtro de primeira ordem

que $t = 90\%$ do tamanho total da curva de saída e $v_o(t) = 1$. Gerando $k_e = 0,9984$.

A partir de (3), traça-se a curva z , vista na FIG. 7

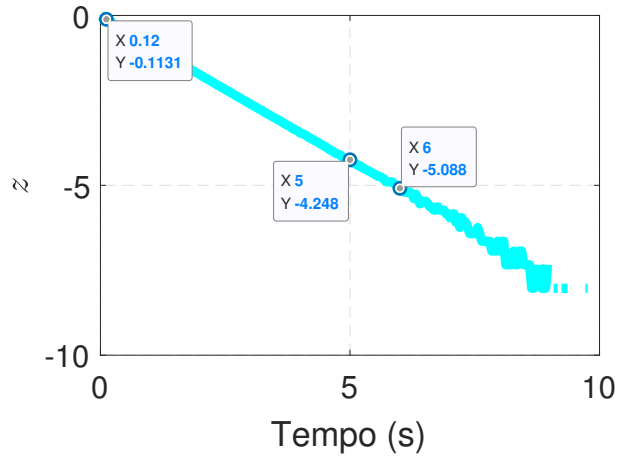


Figura 7. Curva z para o sistema de primeira ordem

Os pontos marcados na curva z foram escolhidos da seguinte forma: o primeiro é o ponto em que z fica diferente de zero; o segundo está a 50% da curva (tanto no eixo do Tempo, quanto no eixo z); já o terceiro está posicionado em 60% da curva. Dados os pontos, é possível calcular τ e d com os quais estima-se a curva $y(t)$ por (2) que descreve o sistema.

A FIG. 8 trás a comparação da curva da saída real com a curva modelada. Vê-se que o modelo segue de modo satisfatório a saída do sistema.

3.2 Modelo de primeira ordem para filtro de terceira ordem

A saída do filtro de segunda ordem dada uma entrada degrau pode ser vista na FIG. 9.

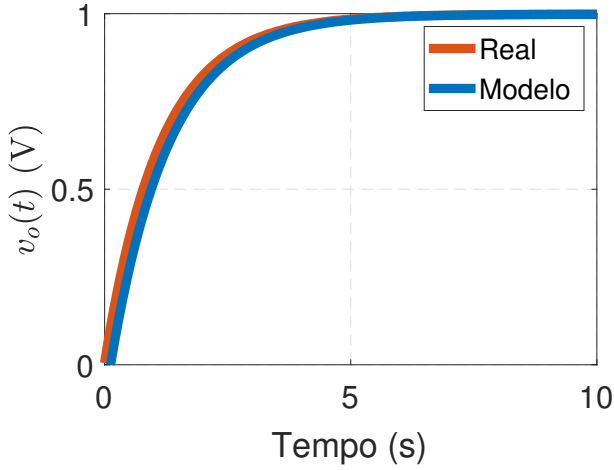


Figura 8. Comparação da curva saída da planta com o a curva modelada

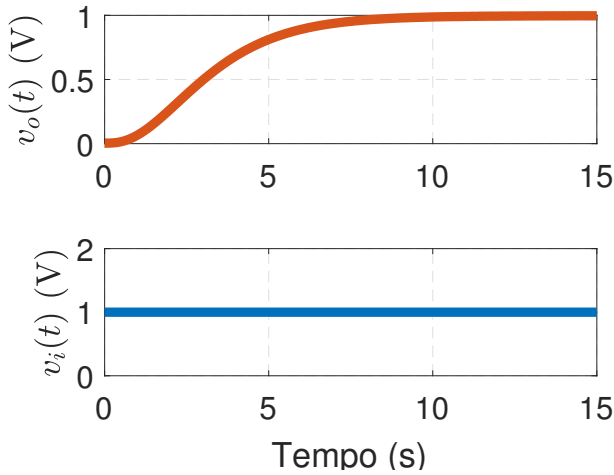


Figura 9. Resposta degrau do filtro de segunda ordem à entrada degrau

O ganho estático k_e é calculado do mesmo modo que para o filtro de primeira ordem. Obtém-se $k_e = 0,9958$, com ele gera-se a curva z , mostrada na FIG. 10.

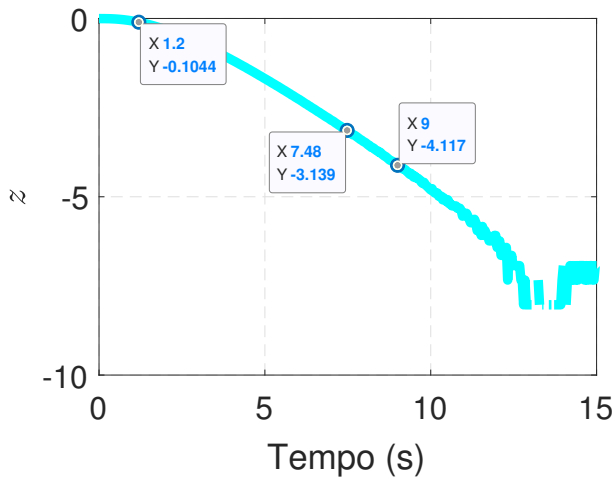


Figura 10. Curva z para o filtro de terceira ordem

Os parâmetros usados para escolha dos pontos marcados na FIG. 10 foram os mesmos utilizados para marcar os

pontos na curva z da subseção anterior. A partir dessas coordenadas, obtém-se $d = 1,2$ e $\tau = 1,5537$

A partir de (2) e dos valores calculados de k_e , d e τ , obtém-se a curva que representa o sistema. Tal curva é mostrada na FIG. 11 juntamente com a curva do sistema real.

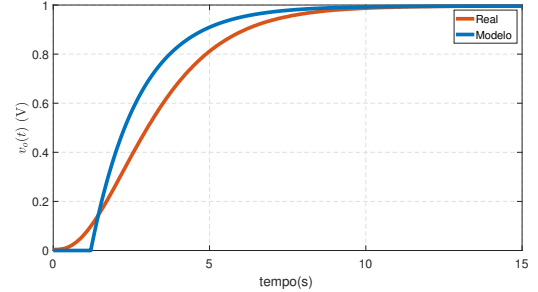


Figura 11. Comparação modelo com curva real para filtro de terceira ordem

É possível avaliar o desempenho do modelo com (13) e (14), gerando, $IAE = 18,3501$ e $ISE = 2,2646$. Vê-se que a integral do erro quadrático possui um alto valor, que implica em uma má aproximação do modelo.

Comparando a aproximação para o filtro de segunda ordem com a aproximação para o filtro de terceira ordem, nota-se que o desempenho diminuiu para o segundo. Isso se deu porque o método de identificação usado foi por sistemas de primeira ordem, logo, a melhor aproximação se dá para sistemas desta ordem. Diante disso, de modo a melhorar os índices de desempenho do modelo para o filtro de terceira ordem, faz-se alguns ajustes na identificação.

Ajuste Alterando o valor da constante de tempo de $\tau = 1,5537$ para $\tau = 2,2425$, obtém-se a resposta gráfica vista em FIG. 12. Recalculando os índices de desempenho do modelo, tem-se $IAE_{ajuste} = 6,6854$ e $ISE_{ajuste} = 0,2333$.

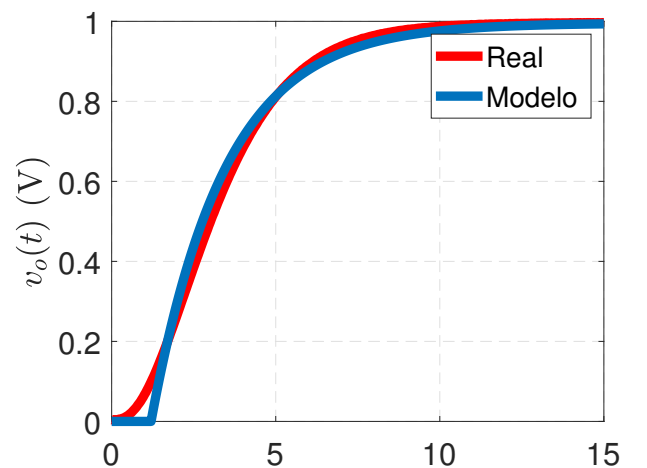


Figura 12. Comparação do modelo com ajuste com a curva real para filtro de terceira ordem

Nota-se uma grande melhora de desempenho do modelo ajustado para o não ajustado. No qual o modelo ajustado representa satisfatoriamente o sistema real.

3.3 Modelo de primeira ordem para filtro de sexta ordem

Aplicando um degrau unitário no filtro de sexta ordem, obtém-se a curva de saída apresentada na FIG. 13. Esta, fornece $k_e = 0,9932$, localizado em 90% do tamanho total da curva.

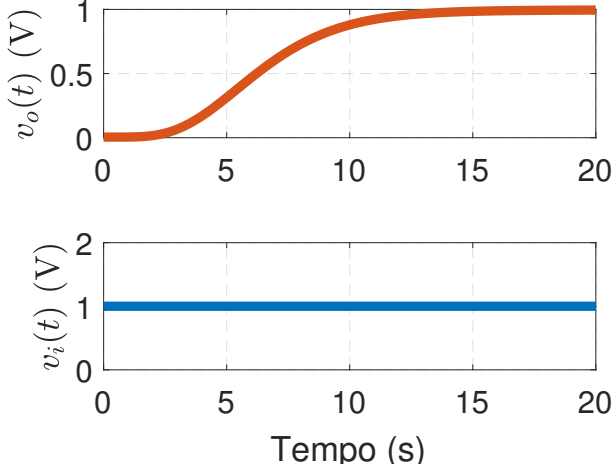


Figura 13. Resposta ao degrau unitário do filtro de sexta ordem

O valor de k_e juntamente com a equação (3) permite traçar a curva z . Para este sistema, a curva z é a mostrada na FIG. 14

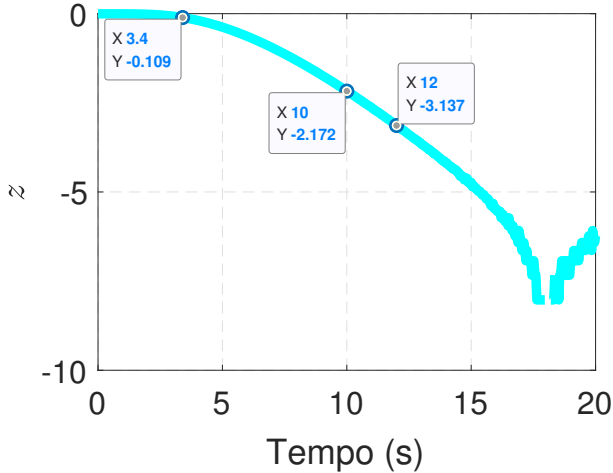


Figura 14. Curva z para o sistema de sexta ordem

O gráfico da FIG. 14 permite encontrar os seguintes valores: $d = 3,4$ e $\tau = 2,0731$. Com eles e a equação (2), traça-se a curva $y(t)$ mostrada em FIG. 15

Do mesmo modo que para o filtro de terceira ordem, vê-se na FIG. 15 que a aproximação obtida não foi boa. Pois utiliza-se um modelo de primeira ordem para representar um sistema de sexta ordem.

Para que se possa comparar se houve melhora com os ajustes a serem feitos, calcula-se os índices de desempenho da primeira aproximação obtida: $ISE = 5,2255$ e $IAE = 32,2839$.

Ajuste Alterando o valor da constante de tempo de $\tau = 2,0731$ para $\tau = 3,28$ obtém-se a curva da FIG. 16. Os

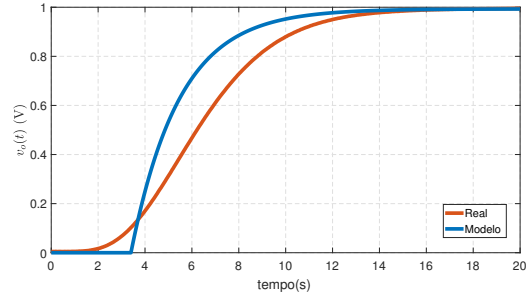


Figura 15. Comparação entre as curvas de saída do filtro de sexta ordem com a curva de saída modelada
novos índices de desempenho podem ser calculados e são: $IAE = 13,7504$ e $ISE = 0,6220$.

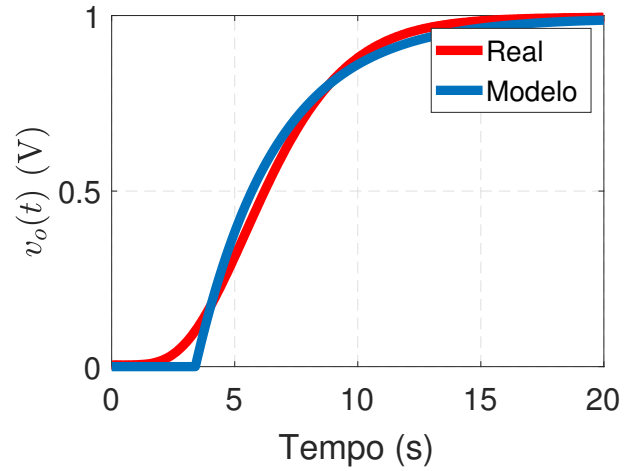


Figura 16. Aproximação com ajuste da curva de saída do filtro de sexta ordem

Vê-se com a FIG. 16 e com os novos índices de desempenho que houve grande melhora na aproximação da curva real com o ajuste da constante de tempo. A aproximação não é tão boa quanto para o sistema de primeira ordem. Entretanto, para aplicações de técnicas de controle, este modelo atende bem os requisitos e pode ser utilizado.

3.4 Modelo de segunda ordem para filtro de segunda ordem com $k_p = 4$

Usando-se o diagrama de blocos exposto na FIG. 5 e aplicando-se um degrau unitário no circuito RC de segunda ordem já estudado no relatório anterior (nº 02/19), a resposta obtida é como mostrada na FIG. 17.

Para a identificação do ganho estático, escolhe-se um ponto com o sistema já estabilizado e divide-se este valor por 1 (amplitude do degrau aplicado), como mostra a FIG. 18.

O *overshoot*/sobrepassagem é o maior valor atingido pelo sistema, sendo de fácil obtenção pela função `max` do MATLAB®.

A determinação do período de oscilação se deu partindo do instante em que ocorre o *overshoot* até a primeira inflexão da curva. Este tempo se refere a metade do período de oscilação².

² Optou-se por utilizar este valor no cálculo do período de oscilação devido à inflexão ser melhor detectada neste ponto. Após isto, como

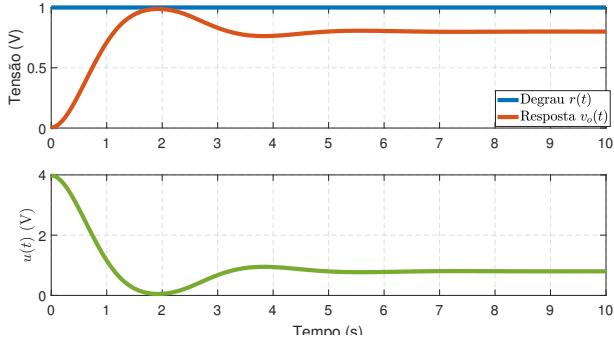


Figura 17. Resposta do sistema de 2ª ordem submetido a um degrau unitário

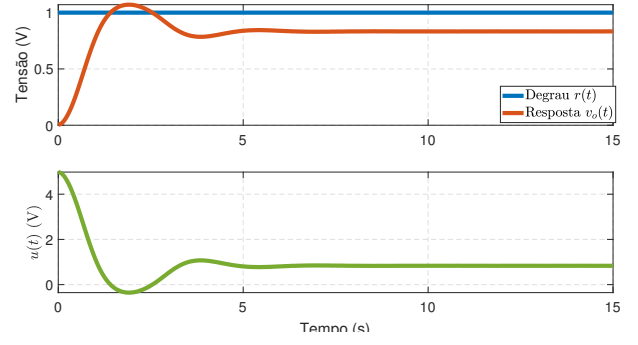


Figura 20. Resposta temporal da planta com $k_p = 5$ submetido a um degrau unitário

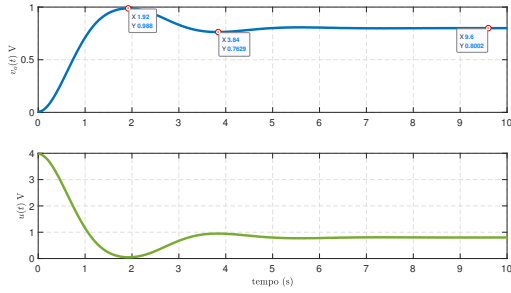


Figura 18. Valores utilizados na identificação

Deste modo, os valores encontrados são expostos na TAB. 1, juntamente com os parâmetros para $k_p = 5$ e $k_p = 6$. A FIG. 19 expõe a comparação entre o modelo e os dados da planta. Percebe-se visualmente a fidedignidade do modelo obtido. Fato ainda comprovado pelos baixos valores de IAE e ISE , respectivamente, .

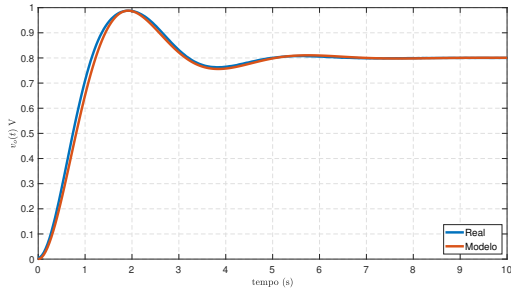


Figura 19. Comparação entre os dados do sistema real e da curva aproximada

3.5 Modelo de segunda ordem para filtro de segunda ordem com $k_p = 5$

Em um procedimento análogo ao exposto na seção anterior, o modelo obtido dos dados do sistema real (FIG. 20) utilizou dos pontos marcados na FIG. 21.

De posse dos parâmetros necessários (ζ , ω_n e k_e), expostos na TAB. 1 obteve-se o modelo cuja resposta temporal a um degrau é mostrada na FIG. 22 em contraste aos dados da planta. De modo geral, o modelo corresponde com acurácia em relação à planta.

a exponencial decairá rapidamente, na prática, a oscilação se torna difícil de ser obtida.

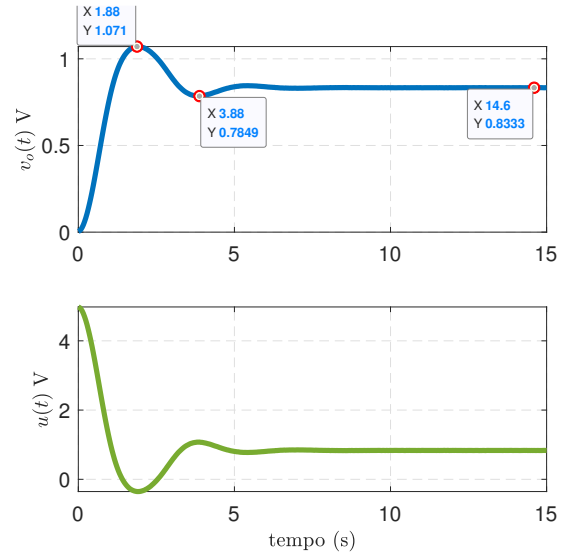


Figura 21. Pontos escolhidos para a determinação do modelo

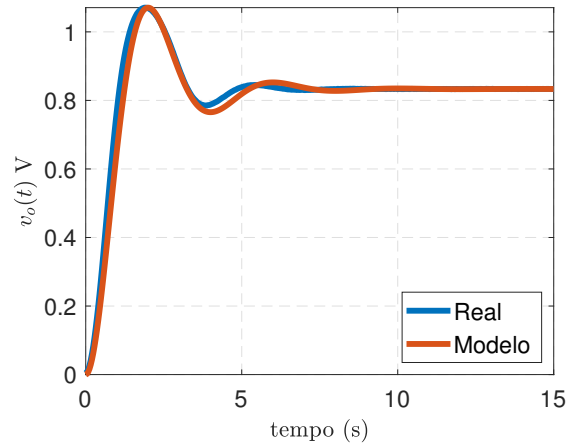


Figura 22. Comparação entre o modelo determinado e os dados da planta para $k_p = 5$

3.6 Modelo de segunda ordem para filtro de segunda ordem com $k_p = 6$

A característica temporal do filtro de segunda ordem conectado a um $k_p = 6$ é exibida na FIG. 23. Nela, é possível perceber um comportamento inesperado para o

filtro, tornando-se oscilatório. Este fato é explicado pelo sinal de controle $u(t)$ enviado ao circuito. Em um dado instante entre 0 s e 5 s, o valor torna-se negativo. Como o circuito utilizado não foi projetado para esta reversão, a característica da resposta pode não corresponder ao formato típico de sistemas subamortecidos de segunda ordem.

O que se pode perceber é que até o instante em que $u(t) \leq 0$, o formato de onda apresenta o comportamento de sistemas subamortecidos de segunda ordem. A partir deste instante, o sistema passa a ser oscilatório — parte real nula, embora ainda com parte imaginária. Sendo assim, o modelo a ser obtido não será fiel a curva dos dados, visto que a metodologia de identificação é restrita a sistemas de segunda ordem subamortecidos.

Poder-se-ia fazer um modelo oscilatório, bastando tomar $\zeta = 0$ e utilizar o valor de k_e igual a amplitude da oscilação. Entretanto, este modelo só valeria quando $u(t) < 0$. Sendo assim, optou-se por utilizar da metodologia já adotada nos casos anteriores e analisar o resultado esperado. Para tanto, considere a FIG. 24 com os pontos escolhidos para a determinação dos parâmetros do modelo. O k_e escolhido foi o valor médio da oscilação.

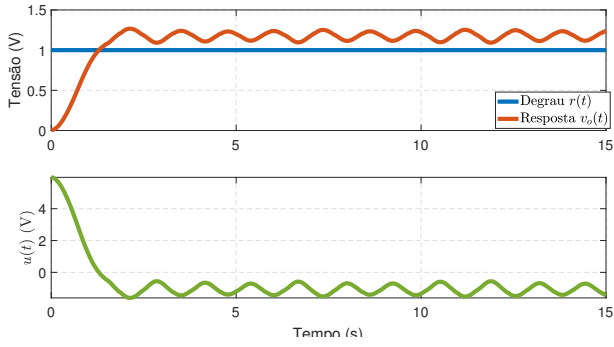


Figura 23. Sinais do circuito RC de segunda ordem para $k_p = 6$

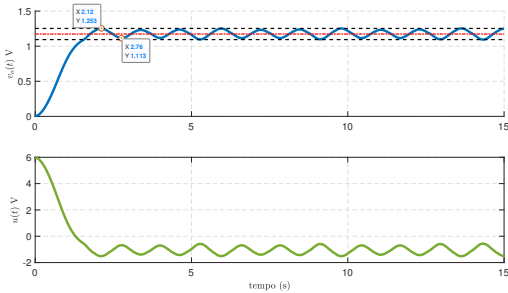


Figura 24. Pontos escolhidos para a determinação do modelo

Na FIG. 25 é possível visualizar o desempenho do modelo obtido. Já era esperado que ele não copiasse o formato oscilatório da planta. Adicionalmente, observa-se que o valor de $\zeta\omega_n$ foram maiores do que devia, fazendo o sistema estabilizar antes da primeira onda do circuito RC. Isto é explicado pois o cálculo de ζ foi feito considerando o *overshoot* como o pico da onda pelo valor médio. Uma vez que isto não representa a sobrepassagem, a relação usada

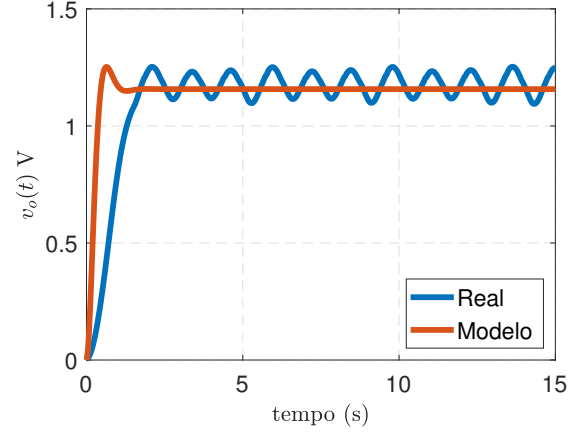


Figura 25. Comparação entre o modelo identificado e a planta para $k_p = 6$

tornou-se inválida. Por conseguinte, a frequência natural também não se adequa bem ao modelo, visto que depende de ζ .

Um modelo ajustado, com alterações no valor de ζ e ω_n resulta no que é mostrado na FIG. 26. Os índices de desempenho melhoraram significativamente, com $ISE = 1,7006$ e $IAE = 19,8354$. Na TAB. 1 é visto os valores para a identificação inicial.

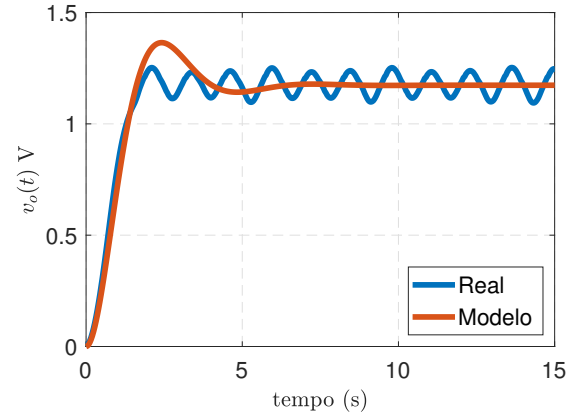


Figura 26. Comparação entre a planta e o modelo ajustado para $k = 6$

Tabela 1. Parâmetros dos modelos

| Parâmetro | $k_p = 4$ | $k_p = 5$ | $k_p = 6$ |
|--------------------|-----------|-----------|-----------|
| k_e | 0,8002 | 0,8333 | 1,1735 |
| OS (%) | 23,47 | 28,49 | 6,74 |
| T (s) | 3,8400 | 4,0000 | 1,2800 |
| ζ | 0,4190 | 0,3711 | 0,6513 |
| ω_n (rad/s) | 1,8020 | 1,6916 | 6,4690 |
| ISE | 0,0749 | 0,2799 | 12,4633 |
| IAE | 2,753 | 4,7999 | 31,9256 |

4. CONCLUSÃO

Os métodos de identificação dos sistemas de primeira e segunda ordem permitem estabelecer uma aproximação satisfatória quando se conhece apenas os dados de entrada

e saída de um sistema. Com a realização da prática, percebeu-se que os métodos se adequaram melhor para os sistemas próximos de sua ordem. Contudo, ajustes podem ser feitos até que se consiga estabelecer um modelo aceitável para o que é requerido.

Não obstante, durante a realização das atividades, pôde ser observado algumas de suas limitações. Quando o sistema torna-se oscilatório, dever-se-ia utilizar outra metodologia para aproximar mais fielmente aos dados.

Ademais, durante a realização da identificação do modelo de primeira ordem, foi apreendido pelos autores que uma maneira mais fiel de aproximar a curva do modelo seria por meio da regressão linear. Bastando isolar o termo exponencial e aplicar o logaritmo, poder-se-ia obter a curva com menores desvios possível. Em contrapartida, perder-se-ia as características físicas e de controle do sistema. Adicionalmente, notou-se que os índices de desempenho usados não são suficientemente adequados para a avaliação do modelo, dado que não são normalizados, como o coeficiente de determinação R^2 das regressões.

Assim sendo, recomenda-se que a partir das próximas práticas se utilize o coeficiente de determinação para o cálculo do desempenho da identificação do modelo feita.

5. REFERÊNCIAS

CORRÊA, V. M.; AGUIRRE, A. L., *Identificação não-linear caixa-cinza: uma revisão e novos resultados*, Sba: Controle Automação Sociedade Brasileira de Automática, v. 15, 2004. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0103-17592004000200001>. Acesso em: 23 set. 2019.