Álgebra Linear - Lista de Exercícios 2

escreva seu nome aqui

1. Ache a matriz de eliminação E que reduz a matriz de Pascal em uma menor:

$$E\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&2&1&0\\1&3&3&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&1&1&0\\0&1&2&1\end{bmatrix}.$$

   Qual matriz M reduz a matriz de Pascal à matriz identidade?

   Resolução:

2. Use o método de Gauss-Jordan para achar a inversa da matriz triangular inferior:

$$U=\begin{bmatrix}1&a&b\\0&1&c\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

   Resolução:

3. Para quais valores de a o método de eliminação não dará 3 pivôs?

$$\begin{bmatrix}a&2&3\\a&a&4\\a&a&a\end{bmatrix}.$$

   Resolução:

4. Verdadeiro ou falso (prove ou forneça um contra-exemplo):

   (a) Se A^2 está bem definida, então A é quadrada.

   (b) Se AB e BA estão bem definidas, então A e B são quadradas.

   (c) Se AB e BA estão bem definidas, então AB e BA são quadradas.

   (d) Se $AB = B$, então $A = I$.

   Resolução:

   (a)

   (b)

   (c)

   (d)

5. Mostre que se $BA = I$ e $AC = I$, então $B = C$.

   Resolução:

6. Ache uma matriz não-zero A tal que $A^2 = 0$ e uma matriz B com $B^2 \neq 0$ e $B^3 = 0$.

   Resolução:

7. Ache as inversas de

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 7 & 6 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   Resolução:

8. Verifique que a inversa de $M = I - \mathbf{u}\mathbf{v}^T$ é dada por $M^{-1} = I + \frac{\mathbf{u}\mathbf{v}^T}{1-\mathbf{v}^T\mathbf{u}}$. Verifique também que a inversa de $N = A - UW^{-1}V$ é dada por $N^{-1} = A^{-1} + A^{-1}U(W - VA^{-1}U)^{-1}VA^{-1}$.

   Resolução:

9. Sabemos que a matriz de diferenças tem a seguinte inversa

$$L^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

   Use essa propriedade (e sua versão triangular superior) para achar a inversa de

$$T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

   Dica: escreva T como produto de duas matrizes.

   Resolução:

10. Mostre que $I + BA$ e $I + AB$ são ambas invertíveis ou singulares. Relacione a inversa de $I + BA$ com a inversa de $I + AB$, caso elas existam.

    Resolução:

11. (Bônus) Mostre que se $\alpha_k A^k + \alpha_{k-1}A^{k-1} + \cdots + \alpha_1 A + \alpha_0 I = 0$, com $\alpha_0 \neq 0$, então A é invertível

    Resolução: