Álgebra Linear - Lista de Exercícios 2

Yuri F. Saporito

$\rightsquigarrow EA = B$

1. Ache a matriz de eliminação E que reduz a matriz de Pascal em uma menor:

$$E\underbrace{\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&2&1&0\\1&3&3&1\end{bmatrix}}_{A}=\underbrace{\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&1&1&0\\0&1&2&1\end{bmatrix}}_{B}.$$

$[A \,\vdots\, I] \to [B \,\vdots\, E]$

$\longrightarrow [I \,\vdots\, A^{-1}]$

Qual matriz M reduz a matriz de Pascal à matriz identidade?

2. Use o método de Gauss-Jordan para achar a inversa da matriz triangular ~~inferior~~ superior:

$$U=\begin{bmatrix}1&a&b\\0&1&c\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

$A^{-1}A = I$

3. Para quais valores de a o método de eliminação não dará 3 pivôs?

$$\begin{bmatrix}a&2&3\\\cancel{a}&a&4\\\cancel{a}&\cancel{a}&a\end{bmatrix}.$$

$[A \,\vdots\, I] \longrightarrow [E_1A \,\vdots\, E_1]$

$\longrightarrow [E_2E_1A \,\vdots\, E_2E_1]$

$A = LU$

$[A \,\vdots\, I] \longrightarrow [U \,\vdots\, E]$

$EA = U$

$A = \underbrace{E^{-1}}_{L}U$

4. Verdadeiro ou falso (prove ou forneça um contra-exemplo):
   (a) Se A^2 está bem definida, então A é quadrada.
   (b) Se AB e BA estão bem definidas, então A e B são quadradas.
   (c) Se AB e BA estão bem definidas, então AB e BA são quadradas.
   (d) Se $AB = B$, então $A = I$.

5. Mostre que se $BA = I$ e $AC = I$, então $B = C$.

6. Ache uma matriz não-zero A tal que $A^2 = 0$ e uma matriz B com $B^2 \neq 0$ e $B^3 = 0$.

7. Ache as inversas de

$$\begin{bmatrix}3&2&0&0\\4&3&0&0\\0&0&6&5\\0&0&7&6\end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix}0&0&0&2\\0&0&3&0\\0&5&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}$$

$I_{m\times m}$ $\quad u, v \in \mathbb{R}^m$ $\quad uv^T$ $\quad u_{m\times1}\ v_{m\times1}$ $\quad v^T_{1\times m}\,u_{m\times1}$ $\quad u_{m\times1}v^T_{1\times m} = (uv^T)_{m\times m}$

8. Verifique que a inversa de $M = I - \mathbf{u}\mathbf{v}^T$ é dada por $M^{-1} = I + \frac{\mathbf{u}\mathbf{v}^T}{1-\mathbf{v}^T\mathbf{u}}$. Verifique também que a inversa de $N = A - UW^{-1}V$ é dada por $N^{-1} = A^{-1} + A^{-1}U(W - VA^{-1}U)^{-1}VA^{-1}$.

$v^Tu_{1\times1}$

9. Sabemos que a matriz de diferenças tem a seguinte inversa

$$L^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-1&1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}.$$

Use essa propriedade (e sua versão triangular superior) para achar a inversa de

$$T=\begin{bmatrix}1&-1&0\\-1&2&-1\\0&-1&2\end{bmatrix}.$$

Dica: escreva T como produto de duas matrizes.

10. Mostre que $I + BA$ e $I + AB$ são ambas invertíveis ou singulares. Relacione a inversa de $I + BA$ com a inversa de $I + AB$, caso elas existam.

11. (Bônus) Mostre que se $\alpha_kA^k + \alpha_{k-1}A^{k-1} + \cdots + \alpha_1A + \alpha_0I = 0$, com $\alpha_0 \neq 0$, então A é invertível

8) $M = I - uv^T \qquad M^{-1} = I + \dfrac{uv^T}{1 - v^T u}$

$M \cdot M^{-1} = I$
$M^{-1} \cdot M = I$

$ABC = (AB)C$
$= A(BC)$

$$MM^{-1} = (I - uv^T)\left(I + \frac{uv^T}{1 - v^T u}\right)$$

$$= I + \frac{uv^T}{1 - v^T u} - uv^T - uv^T\left(\frac{uv^T}{1 - v^T u}\right)$$

$\langle v, u \rangle \in \mathbb{R}$

$$= I + \frac{uv^T}{1 - v^T u} - uv^T - \frac{u(v^T u)v^T}{1 - v^T u}$$

$$= I + \frac{uv^T}{1 - v^T u} - uv^T - \frac{v^T u}{1 - v^T u} uv^T$$

$$= I + uv^T\left(\frac{1}{1 - v^T u} I - I - \frac{v^T u}{1 - v^T u} I\right)$$

$$= I + uv^T\left(\left(\frac{1 - v^T u}{1 - v^T u}\right) I - I\right)$$

9)

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad L^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$\hookrightarrow$ T.I. $\qquad$ $\hookrightarrow$ T.I.

$$L^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (L^T)^{-1} = (L^{-1})^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

10) $I + AB$ e $I + BA$

$$B(I+AB) = B + BAB$$
$$= (I+BA)B$$

Assuma que existe $M = (I+AB)^{-1}$ e tente representar $(I+BA)^{-1}$ em função de M.

Faça o mesmo com $I+BA$. Assuma que existe $N = (I+BA)^{-1}$ e tente representar $(I+AB)^{-1}$ em função de N.

4) a) A^2 bem def. $\Rightarrow$ A quadrada

$A_{m\times n}$ $\quad A^2 = (A_{m\times n})(A_{m\times n})$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow n = m$

$A_{3\times 2}$ $\quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$ Não rola.