Álgebra Linear - Soluções da Lista de Exercícios 1

Caio Lins e Tiago Silva

8 de agosto de 2021

1. Quais condições para y_1, y_2 e y_3 fazem com que os pontos $(0, y_1)$, $(1, y_2)$ e $(2, y_3)$ caiam numa reta?

   Resolução:
   Vamos ver o que tem que acontecer para que $(2, y_3)$ esteja na mesma reta de $(0, y_1)$ e $(1, y_2)$. Essa reta é dada pelo conjunto:
   $$\{(0, y_1) + \lambda(1, y_2 - y_1) : \lambda \in \mathbb{R}\},$$
   ou seja, pelos pontos da forma $(\lambda, y_1 + \lambda(y_2 - y_1))$, onde $\lambda \in \mathbb{R}$. Igualando isso a $(2, y_3)$, obtemos $\lambda = 2$ e $y_3 = y_1 + \lambda(y_2 - y_1)$, o que implica $y_3 = 2y_2 - y_1$.

2. Se (a, b) é um múltiplo de (c, d) e são todos não-zeros, mostre que (a, c) é um múltiplo de (b, d). O que isso nos diz sobre a matriz
   $$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}?$$

   Resolução:
   Se (a, b) é múltiplo de (c, d) e são todos não nulos, então $a = \lambda c$ e $b = \lambda d$, com $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Com isso, temos
   $$\begin{aligned} (a, c) &= (\lambda c, c) \\ &= c(\lambda, 1) \\ &= \frac{c}{d}(\lambda d, d) \\ &= \frac{c}{d}(b, d). \end{aligned}$$
   Logo, (a, c) é um múltiplo de (b, d). Pondo $\alpha = \frac{c}{d}$, temos que a matriz A é singular, visto que
   $$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} - \alpha \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} = 0.$$

3. Se $\mathbf{w}$ e $\mathbf{v}$ são vetores unitários, calcule os produtos internos de (a) $\mathbf{v}$ e $-\mathbf{v}$; (b) $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ e $\mathbf{v} - \mathbf{w}$; (c) $\mathbf{v} - 2\mathbf{w}$ e $\mathbf{v} + 2\mathbf{w}$.

   Resolução:

   (a) $\langle \mathbf{v}, -\mathbf{v} \rangle = -\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = -\|\mathbf{v}\|^2 = -1$

   (b)
   $$\begin{aligned} \langle \mathbf{v} + \mathbf{w}, \mathbf{v} - \mathbf{w} \rangle &= \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{v}, -\mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{w}, -\mathbf{w} \rangle \\ &= \|\mathbf{v}\|^2 - \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle - \|\mathbf{w}\|^2 \\ &= 1 - 1 \\ &= 0. \end{aligned}$$

   (c) Analogamente, $\langle \mathbf{v} - 2\mathbf{w}, \mathbf{v} + 2\mathbf{w} \rangle = \|\mathbf{v}\|^2 - \|2\mathbf{w}\|^2 = \|\mathbf{v}\|^2 - 4\|\mathbf{w}\|^2 = 1 - 4 = -3$.

4. Se $\|\mathbf{v}\| = 5$ e $\|\mathbf{w}\| = 3$, quais são o menor e maior valores possíveis para $\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|$? E para $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$?

Resolução:

Teorema (Segunda desigualdade triangular)**.** *Dados* $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$*, temos*

$$|\|\mathbf{v}\| - \|\mathbf{w}\|| \leq \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|.$$

Demonstração. Pela primeira desigualdade triangular, temos

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}\| &= \|\mathbf{v} - \mathbf{w} + \mathbf{w}\| \\ &\leq \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\| + \|\mathbf{w}\|, \end{aligned}$$

o que implica $\|\mathbf{v}\| - \|\mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|$. Trocando os papeis de $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ temos $\|\mathbf{w}\| - \|\mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{w} - \mathbf{v}\| = \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|$. Sendo assim,

$$-(\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|) \leq \|\mathbf{v}\| - \|\mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|,$$

o que implica $|\|\mathbf{v}\| - \|\mathbf{w}\|| \leq \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|$. □

Observação. Não era necessário provar essa desigualdade, nós apenas utilizaremos ela na solução do gabarito e achamos importante que vocês vissem a prova.

Pelas desigualdades triangulares, temos

$$2 = |\|\mathbf{v}\| - \|\mathbf{w}\|| \leq \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\| = 8.$$

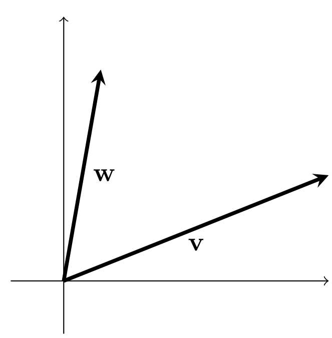
Para provar que de fato esses são os valores mínimo e máximo que a expressão $\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|$ pode alcançar, precisamos de mostrar que eles podem ser atingidos. Observe que se $\mathbf{v} = (5, \dots, 0)$ e $\mathbf{w} = (3, \dots, 0)$, entao $\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\| = 2$. Entretanto, se $\mathbf{v} = (5, \dots, 0)$ mas $\mathbf{w} = (-3, \dots, 0)$, então $\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\| = 8$.

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos

$$-15 = -\|\mathbf{v}\|\|\mathbf{w}\| \leq \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle \leq \|\mathbf{v}\|\|\mathbf{w}\| = 15.$$

Para provar que esses valores de fato podem ser atingidos, basta considerar os mesmos dois exemplos dados anteriormente.

5. Considere o desenho dos vetores $\mathbf{w}$ e $\mathbf{v}$ abaixo. Hachure as regiões definidas pelas combinações lineares $c\mathbf{v} + d\mathbf{w}$ considerando as seguintes restrições: $c + d = 1$ (não necessariamente positivos), $c, d \in [0, 1]$ e $c, d \geq 0$ (note que são três regiões distintas).

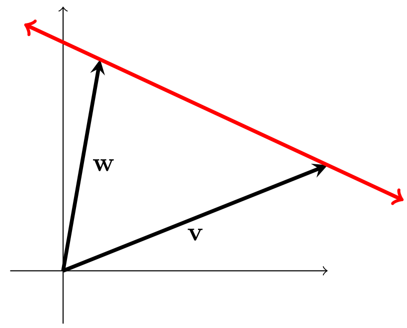


Resolução:

(a) $c + d = 1$.
Podemos escrever $c = 1 - d$ e, com isso,

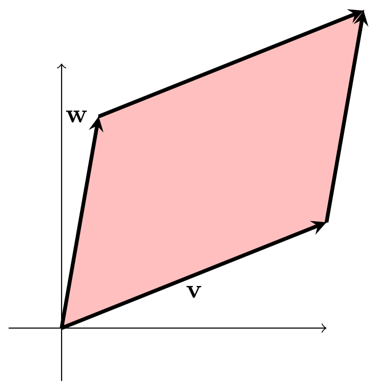
$$\begin{aligned} c\mathbf{v} + d\mathbf{w} &= (1 - d)\mathbf{v} + d\mathbf{w} \\ &= \mathbf{v} - d\mathbf{v} + d\mathbf{w} \\ &= \mathbf{v} + d(\mathbf{w} - \mathbf{v}). \end{aligned}$$

Ou seja, o conjunto $\{c\mathbf{v} + d\mathbf{w} : c + d = 1\}$ é a reta que passa pelos pontos $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$.



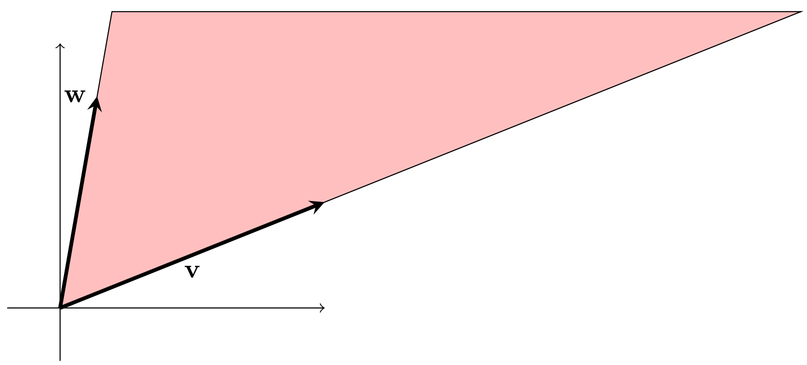
(b) $c, d \in [0, 1]$

A região formada será o paralelogramo de vértices $0, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ e $\mathbf{v} + \mathbf{w}$.



(c) $c, d \geq 0$

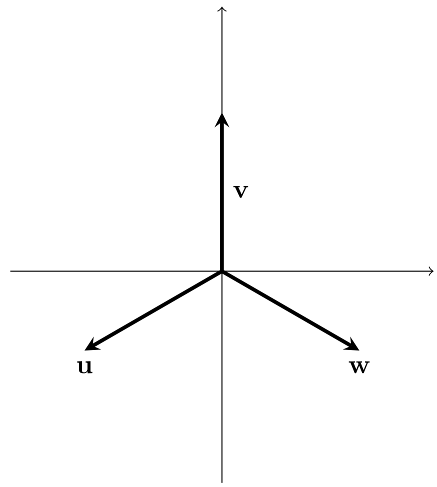
A região formada será a parcela do plano contida entre as semirretas $\{\lambda\mathbf{v} : \lambda \geq 0\}$ e $\{\lambda\mathbf{w} : \lambda \geq 0\}$.



6. É possível que três vetores em $\mathbb{R}^2$ tenham $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} < 0$, $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} < 0$ e $\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} < 0$? Argumente.

Resolução:

É possível. Intuitivamente, o produto interno entre dois vetores é negativo se eles "apontam em direções opostas". Matematicamente, como, em $\mathbb{R}^2$, $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \|\mathbf{v}\|\|\mathbf{w}\| \cos\theta$, onde θ é o menor ângulo entre $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$, só temos $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle < 0$ se ambos são não nulos e $\cos\theta < 0$, ou seja, se $\theta > \frac{\pi}{2}$. Logo, tomando $\mathbf{u}, \mathbf{w}$ e $\mathbf{v}$ como vetores unitários tais que quaisquer dois deles são separados por um ângulo de $\frac{2\pi}{3}$ (ou 120°), como na figura abaixo, teremos necessariamente $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle < 0, \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle < 0$ e $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle < 0$.



7. Sejam x, y, z satisfazendo $x + y + z = 0$. Calcule o ângulo entre os vetores (x, y, z) e (z, x, y).

   Resolução:
   Seja $\mathbf{v} = (x, y, z)$ e $\mathbf{w} = (z, x, y)$. Vamos supor ambos vetores não nulos, pois caso contrário a pergunta não faz sentido. O ângulo entre $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ é definido como o número $\theta \in [0, \pi]$ tal que

   $$\cos\theta = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle}{\|\mathbf{v}\|\|\mathbf{w}\|}. \tag{1}$$

   Expandindo o lado direito de (1), temos

   $$\begin{aligned} \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle}{\|\mathbf{v}\|\|\mathbf{w}\|} &= \frac{xz + yx + zy}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\sqrt{z^2 + x^2 + y^2}} \\ &= \frac{xz + yx + zy}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^2}} \\ &= \frac{xz + yx + zy}{x^2 + y^2 + z^2}. \end{aligned} \tag{2}$$

   Agora perceba que
   $$0 = (x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xz + yx + zy).$$
   Logo,
   $$xz + yx + zy = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2).$$
   Substituindo em (2), ficamos com
   $$\cos\theta = -\frac{1}{2},$$
   o que implica $\theta = \frac{2\pi}{3}$.

8. Resolva o sistema linear abaixo:
   $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}.$$
   Escreva a solução $\mathbf{x}$ como uma matriz A vezes o vetor $\mathbf{b}$.

   Resolução:
   Vamos prosseguir por eliminação gaussiana na matriz aumentada do sistema.

   $$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & b_1 \\ 1 & 1 & 0 & b_2 \\ 1 & 1 & 1 & b_3 \end{array}\right] &\xrightarrow[]{\substack{L_2 - L_1 \\ L_3 - L_1}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & 0 & b_2 - b_1 \\ 0 & 1 & 1 & b_3 - b_1 \end{array}\right] \\ &\xrightarrow{L_3 - L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & 0 & b_2 - b_1 \\ 0 & 0 & 1 & b_3 - b_2 \end{array}\right]. \end{aligned}$$

Assim,

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 - b_1 \\ b_3 - b_2 \end{bmatrix}.$$

Olhando cada linha de $\mathbf{x}$ como uma combinação linear das entradas de $\mathbf{b}$, podemos reescrevê-lo como

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{b}.$$

9. Repita o problema acima para a matriz:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Resolução:
Novamente, prosseguiremos por eliminação gaussiana na matriz aumentada do sistema.

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & | & b_1 \\ 0 & -1 & 1 & | & b_2 \\ 0 & 0 & -1 & | & b_3 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 + L_2} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & | & b_1 + b_2 \\ 0 & -1 & 1 & | & b_2 \\ 0 & 0 & -1 & | & b_3 \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{\substack{L_1 + L_3 \\ L_2 + L_3}} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & | & b_1 + b_2 + b_3 \\ 0 & -1 & 0 & | & b_2 + b_3 \\ 0 & 0 & -1 & | & b_3 \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{\substack{(-1) \cdot L_1 \\ (-1) \cdot L_2 \\ (-1) \cdot L_3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -(b_1 + b_2 + b_3) \\ 0 & 1 & 0 & | & -(b_2 + b_3) \\ 0 & 0 & 1 & | & -(b_3) \end{bmatrix}$$
.

Analogamente à questão anterior, temos

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -(b_1 + b_2 + b_3) \\ -(b_2 + b_3) \\ -(b_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{b}.$$

10. Considere a equação de recorrência $-x_{i+1} + 2x_i - x_{i-1} = i$ para $i = 1, 2, 3, 4$ com $x_0 = x_5 = 0$. Escreva essas equações em notação matricial $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ e ache $\mathbf{x}$.

Resolução:
Vamos escrever cada uma dessas equações:

$$\begin{cases} -x_2 + 2x_1 - x_0 = 1 \\ -x_3 + 2x_2 - x_1 = 2 \\ -x_4 + 2x_3 - x_2 = 3 \\ -x_5 + 2x_4 - x_3 = 4 \end{cases}.$$

Substituindo os valores de x_0 e x_5 e reordenando os termos, ficamos com o sistema:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ -x_2 + 2x_3 - x_4 = 3 \\ -x_3 + 2x_4 = 4 \end{cases},$$

o qual, escrito matricialmente, tem a seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Resolvendo por eliminação gaussiana na matriz aumentada do sistema, ficamos com:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & | & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & | & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & | & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & | & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 + \frac{1}{2}L_1} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 3/2 & -1 & 0 & | & 5/2 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & | & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & | & 4 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{L_1 + \frac{2}{3}L_2 \\ L_3 + \frac{2}{3}L_2}} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2/3 & 0 & | & 8/3 \\ 0 & 3/2 & -1 & 0 & | & 5/2 \\ 0 & 0 & 4/3 & -1 & | & 14/3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & | & 4 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{L_1 + \frac{1}{2}L_3 \\ L_2 + \frac{3}{4}L_3 \\ L_4 + \frac{3}{4}L_3}} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -1/2 & | & 5 \\ 0 & 3/2 & 0 & -3/4 & | & 6 \\ 0 & 0 & 4/3 & -1 & | & 14/3 \\ 0 & 0 & 0 & 5/4 & | & 15/2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{1/2 \cdot L_1 \\ 2/3 \cdot L_2 \\ 3/4 \cdot L_3 \\ 4/5 \cdot L_4}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1/4 & | & 5/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & | & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -3/4 & | & 7/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 6 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{L_1 + \frac{1}{4}L_4 \\ L_2 + \frac{1}{2}L_4 \\ L_3 + \frac{3}{4}L_4}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 6 \end{bmatrix}.$$

Portanto,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ 8 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

11. (Bônus) Use o seguinte código em `numpy` para gerar um vetor aleatório $\mathbf{v}$ =`numpy.random.normal(size =[2,1])` em $\mathbb{R}^3$. Fazendo $\mathbf{u} = \mathbf{v}/\|\mathbf{v}\|$ criamos então um vetor unitário aleatório. Crie 30 outros vetores unitários aleatórios $\mathbf{u}_j$ (use `numpy.random.normal(size =[2,30])`). Calcule a média dos produtos internos $|\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_j|$ e compare com o valor exato $\frac{1}{\pi}\int_0^\pi |\cos\theta| d\theta = \frac{2}{\pi}$.

    Observação. Aqui não há uma "solução", mas é interessante perceber intuitivamente por que isso ocorre. Como todos os vetores são unitários, temos que $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}_j \rangle| = |\cos\theta|$, onde $\theta \in [0, \pi]$ é o ângulo entre os vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{u}_j$. Como esses vetores são escolhidos aleatoriamente, o que estamos fazendo na verdade é calcular a média dos módulos dos cossenos de 30 ângulos escolhidos aleatoriamente entre $[0, \pi]$. Quando o número de amostragens cresce, essa média deve se aproximar da "média" da função $|\cos\theta|$ no intervalo $[0, \pi]$, dada pela integral fornecida. A realidade, entretanto, é mais complicada que isso. O que acontece é que a distribuição de probabilidade do ângulo entre cada vetor $\mathbf{u}_j$ e o vetor $\mathbf{u}$ é uniforme no intervalo $[0, \pi]$, sendo que esse é um fato verificado apenas em dimensão 2. Com isso, pela Lei dos Grandes Números, que vocês estudarão em Teoria da Probabilidade, a média dos valores $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}_j \rangle|$ deve se aproximar do valor esperado[1]da variável aleatória $Y = |\cos(\Theta)|$, onde Θ tem distribuição uniforme em $[0, \pi]$. Esse valor esperado é dado pela integral fornecida.

[1]Intuitivamente, o valor esperado de uma variável aleatória é uma média ponderada dos valores que ela pode assumir, utilizando como pesos as probabilidades dela assumir cada valor. Por exemplo, suponha que você jogou uma moeda justa para cima, e seja X uma variável aleatória que é igual a 0 se caiu cara e 1 se caiu coroa. Então o valor esperado de X é dado por

$$\mathbb{E}[X] = 1 \cdot \mathbb{P}(X = 1) + 0 \cdot \mathbb{P}(X = 0) = 1 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

No caso em que a variável aleatória assume valores num contínuo, seu valor esperado é dado por uma integral.