Álgebra Linear - Lista de Exercícios 3

escreva seu nome aqui

16 de agosto de 2021

1. Ache a decomposição LU da matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Resolução:

2. Ache a decomposição LU da matriz simétrica:

$$A = \begin{bmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{bmatrix}.$$

Qual condição para a, b, c, d para que A ter quatro pivots?

Resolução:

3. ~~Ache a uma matriz de permutação P tal que~~: Ache matrizes de permutação P e S tais que:

   (a) P é 3x3, $P \neq I$ e $P^3 = I$.

   Resolução:

   (b) S é 4x4 e $S^4 \neq I$

   Resolução:

4. Seja A uma matriz $4x4$. Quantas entradas de A podem ser escolhidas independentemente caso A seja

   (a) simétrica ($A^T = A$)?

   Exemplo:

   Resolução:

   $$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^T \Rightarrow b = c \Rightarrow$$

   (b) anti-simétrica ($A^T = -A$)?

   Resolução:

   $\Rightarrow$ Escolhemos a, c e d independentemente.
   (3 termos)

5. Suponha que A já é triangular inferior com 1's na diagonal. Mostre que $U = I$.

Resolução:

6. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & c & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

   (a) Qual é o número c que leva o segundo pivô a ser 0? O que podemos fazer para resolver tal problema? Ainda é válido $A = LU$?

   Resolução:

   (b) Qual é o número c que leva o terceiro pivô a ser 0? É possível resolver esse problema?

   Resolução:

7. Se A e B são simétricas, quais dessas matrizes são também simétricas:

   (a) $A^2 - B^2$;

   Resolução:

   (b) $(A + B)(A - B)$;

   Resolução:

   (c) ABA;

   Resolução:

   (d) $ABAB$.

   Resolução:

8. Prove que é sempre possível escrever $A = B + C$, onde B é simétrica e C anti-simétrica. *Dica: B e C são combinações simples de A e A^T.*

   Resolução:

9. Seja A uma matriz em blocos:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

   onde cada A_{ii} é quadrada $n \times n$ com A_{11} invertível. Ache L e U em blocos tal que $A = LU$:

$$L = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} \text{ e } U = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{bmatrix},$$

   onde L_{11}, L_{22} são triangulares inferiores com 1's na diagonal e U_{11}, U_{22} são triangulares superiores.

Resolução:

6) $\begin{bmatrix} 1 & c & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & c & 0 \\ 0 & 4-2c & 1 \\ 0 & 5-3c & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{4-2c \neq 0}$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & c & 0 \\ 0 & 4-2c & 1 \\ 0 & 0 & 1-\left(\frac{5-3c}{4-2c}\right) \end{bmatrix}.$$

9) $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}, A, B, C, D \in \mathbb{R}^{m \times m}$

Eliminação Gaussiana (em lote):

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 A^{-1} C} \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D - BA^{-1}C \end{bmatrix}$$