Álgebra Linear - Lista de Exercícios 3

Yuri F. Saporito

1. Ache a decomposição LU da matriz:
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Ache a decomposição LU da matriz simétrica:
$$A = \begin{bmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{bmatrix}.$$
Qual condição para a, b, c, d para que A ter quatro pivots?

3. Ache a uma matriz de permutação P tal que:
   (a) P é 3x3, $P \neq I$ e $P^3 = I$.
   (b) S é 4x4 e $S^4 \neq I$

4. Seja A uma matriz $4x4$. Quantas entradas de A podem ser escolhidas independentemente caso A seja
   (a) simétrica ($A^T = A$)?
   (b) anti-simétrica ($A^T = -A$)? $\rightarrow a_{ij} = -a_{ji}$ e se $i = j$?

5. Suponha que A já é triangular inferior com 1's na diagonal. Mostre que $U = I$.

6. Seja
$$A = \begin{bmatrix} 1 & c & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}.$$
   (a) Qual é o número c que leva o segundo pivô a ser 0? O que podemos fazer para resolver tal problema? Ainda é válido $A = LU$?
   (b) Qual é o número c que leva o terceiro pivô a ser 0? É possível resolver esse problema?

7. Se A e B são simétricas, quais dessas matrizes são também simétricas:
   (a) $A^2 - B^2$;
   (b) $(A + B)(A - B)$;
   (c) ABA;
   (d) $ABAB$.

8. Prove que é sempre possível escrever $A = B + C$, onde B é simétrica e C anti-simétrica. *Dica: B e C são combinações simples de A e A^T.*

9. Seja A uma matriz em blocos:
$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$
onde cada A_{ii} é quadrada $n \times n$ com A_{11} invertível. Ache L e U em blocos tal que $A = LU$:
$$L = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} \text{ e } U = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{bmatrix},$$
onde L_{11}, L_{22} são triangulares inferiores com 1's na diagonal e U_{11}, U_{22} são triangulares superiores.

$$LU = \begin{bmatrix} L_{11}U_{11} + L_{12}U_{21} & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

9) $\begin{cases} A_{11} \text{ tem decomposição } LU \Rightarrow A_{11} \text{ é invertível.} \\ A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \text{ tem decomposição } LU. \end{cases}$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{EA = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & ? \end{bmatrix}} \Rightarrow A = E^{-1} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & ? \end{bmatrix}$$

Exemplo: D é invertível e queremos eliminar B. A, B e D são $n \times n$.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix}}_{M}$$

$$EM = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} I & -BD^{-1} \\ 0 & I \end{bmatrix}}_{E} \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} IA + 0\cdot 0 & I\cdot B - BD^{-1}D \\ 0\cdot A + I\cdot 0 & 0\cdot B + I\cdot D \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix}$$

$$E^{-1} = \begin{bmatrix} I & BD^{-1} \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix} = E^{-1} \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} I & BD^{-1} \\ 0 & I \end{bmatrix}}_{\text{triangular superior.}} \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix}$$

Suponha que A e D têm decomposição LU

$A = L_A U_A$
$D = L_D U_D$

$$M = \begin{bmatrix} I & BD^{-1} \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} I & BD^{-1} \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_A U_A & 0 \\ 0 & L_D U_D \end{bmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} I & BD^{-1} \\ 0 & I \end{bmatrix} \overbrace{\begin{bmatrix} L_A & 0 \\ 0 & L_D \end{bmatrix}}}\overbrace{\begin{bmatrix} U_A & 0 \\ 0 & U_D \end{bmatrix}}$$

$$= \begin{bmatrix} I \cdot L_A + BD^{-1} \cdot 0 & I \cdot 0 + BD^{-1} L_D \\ 0 \cdot L_A + I \cdot 0 & 0 \cdot 0 + I \cdot L_D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_A & 0 \\ 0 & U_D \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} L_A & BD^{-1}L_D \\ 0 & I\cdot L_D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_A & 0 \\ 0 & U_D \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \vdots & & \vdots \\ 0 & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots 0 & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$E_{n(n-1)} \cdots E_{n2} \cdots E_{42} E_{32} E_{n1} \cdots E_{31} E_{21} A = U \Rightarrow A = \underbrace{\left(E_{21}^{-1} E_{31}^{-1} \cdots E_{n}^{-1} \cdots\right)} U$$

$$E_{21} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ -l_{21} & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \rightarrow E_{21}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ l_{21} & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_{31} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ 0 & 1 & & & \\ -l_{31} & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \rightarrow E_{31}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ 0 & 1 & & & \\ l_{31} & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\vdots$$

$$E_{n1} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ \vdots & 1 & & & \\ \vdots & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ -l_{n1} & & & & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow E_{n1}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ l_{n1} & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_1^{-1} = E_{n1}^{-1} E_{(n-1)1}^{-1} \cdots E_{21}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ l_{21} & 1 & & & \\ l_{31} & & 1 & & \\ \vdots & & & 1 & \\ l_{n1} & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_{21}^{-1} E_{31}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ l_{21} & 1 & & & \\ l_{31} & & 1 & & \\ \vdots & & & 1 & \\ \vdots & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = (\underbrace{E_1^{-1} E_2^{-1} E_3^{-1}} \cdots \underbrace{E_{n-1}^{-1}})U$$

$$E_i^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & l_{i+1\,i} & \ddots & \\ & & & \vdots & & 1 & \\ & & & \vdots & & & 1 \\ & & & l_{n\,i} & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_{n-1}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & l_{n(n-1)} & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ l_{21} & 1 & & & \\ l_{31} & & 1 & & \\ \vdots & & & 1 & \\ l_{n1} & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ 0 & 1 & & & \\ 0 & l_{32} & 1 & & \\ 0 & l_{42} & & 1 & \\ 0 & \vdots & & & \\ 0 & l_{n2} & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ l_{21} & 1 & & & \\ l_{31} & & 1 & & \\ \vdots & & & 1 & \\ l_{n1} & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & & & \\ 0 & 1 & & & \\ 0 & l_{32} & 1 & & \\ 0 & l_{42} & & 1 & \\ 0 & \vdots & & & \\ 0 & l_{n2} & & & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ l_{21} & 1 & & & & \\ l_{31} & l_{32} & 1 & & & \\ \vdots & l_{42} & & 1 & & \\ \vdots & \vdots & & & 1 & \\ & & & & & 1 \\ l_{n1} & l_{n2} & & & & & 1 \end{bmatrix}}_{M}$$

$$M \cdot E_3^{-1} = \underline{M} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & l_{43} & 1 & & \\ 0 & 0 & \vdots & & 1 & \\ 0 & 0 & l_{n3} & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} M_1 M_2 & 0 & & & \\ & 0 & & & \\ & 1 & & & \\ & l_{43} & 1 & & \\ & \vdots & & 1 & \\ & l_{n3} & & & 1 \end{bmatrix}$$