Subespaços vetoriais

Definição: Dado um espaço vetorial E, dizemos que um subconjunto $M \subset E$ é subespaço vetorial se:

- $0 \in M$
- Dados $v, w \in M$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, temos:

$$\left.\begin{array}{l} \to v + w \in M \\ \to \alpha v \in M. \end{array}\right\} \text{equivalente a } \alpha v + w \in M.$$

Exemplos:

a) $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x - 2y + 4z = 0\} \to$ Plano perpendicular a $(3,-2,4)$, que contém a origem.

Nesse caso $E = \mathbb{R}^3$.

↳ $0 \in M$.

De fato $0 = (0,0,0)$ e $3 \cdot 0 - 2 \cdot 0 + 4 \cdot 0 = 0 \Rightarrow 0 \in M$

. Sejam $v = (a, b, c)$, $w = (a', b', c') \in M$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

↳ $v + w \in M$

$$v + w = (a + a', b + b', c + c')$$

$$3(a+a') - 2(b+b') + 4(c+c') = 3a + 3a' - 2b - 2b' + 4c + 4c'$$
$$= \underbrace{3a - 2b + 4c}_{0} + \underbrace{(3a' - 2b' + 4c')}_{0}$$

Como $v \in M$ e $w \in M$, temos

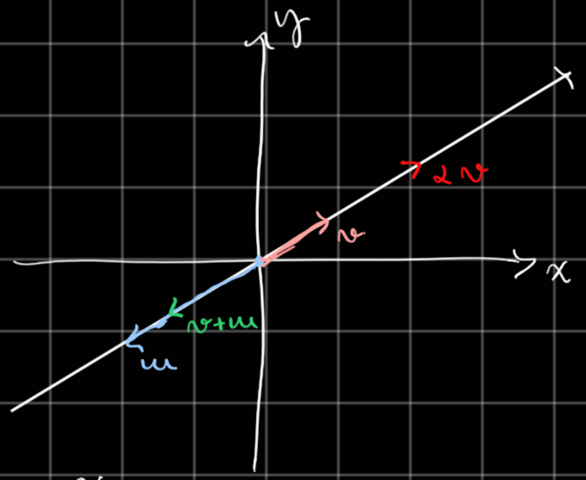
Logo,

$$3(a+a') - 2(b+b') + 4(c+c') = 0 \text{ e } v + w \in M.$$

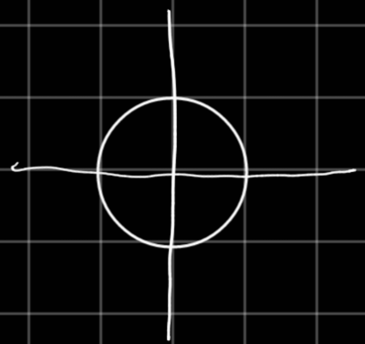
↳ Seja $v = (a, b, c) \in M$ e $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\alpha v = (\alpha a, \alpha b, \alpha c)$$

$$3(\alpha a) - 2(\alpha b) + 4(\alpha c) = \alpha(3a - 2b + 4c)$$
$$= \alpha \cdot 0$$
$$= 0 \Rightarrow \alpha v \in M.$$



NÃO é subespaço: $B_1(0) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\}$



$(0,1) \in B_1(0)$, mas $2\cdot(0,1) = (0,2) \notin B_1(0)$

$a < b \in \mathbb{R}$

b) $M = \{ \underline{f} : (a,b) \to \mathbb{R}$ diferenciáveis $\mid f'(x) - 4f(x) = 0 \ \forall x \in (a,b)\}$

E = Conjunto das funções $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ diferenciáveis.

- $0 \in M$

  0 é a função identicamente nula: $0(x) = 0 \ \forall x \in (a,b)$

  Seja $\varphi \equiv 0$.

  De fato $\varphi'(x) = 0 \ \forall x \in (a,b) \Rightarrow \forall x \in (a,b)$:

$$\varphi'(x) - 4\varphi(x) = 0 - 4\cdot 0 = 0.$$

- Sejam $f, g \in M$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

  $\hookrightarrow$ Dado $x \in (a,b)$:

$$\begin{aligned}(f+g)'(x) - 4(f+g)(x) &= f'(x) + g'(x) - 4f(x) - 4g(x) \\ &= f'(x) - 4f(x) + g'(x) - 4g(x) \\ &= \underbrace{}_{0} + \underbrace{}_{0} \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\Rightarrow f+g \in M$$

$$(\alpha f)'(x) - 4(\alpha f)(x) = \alpha f'(x) - \alpha 4 f(x)$$
$$= \alpha(f'(x) - 4 f(x))$$
$$= \alpha \cdot 0$$
$$= 0$$

$\Rightarrow \alpha f \in M.$

$\therefore M$ é subespaço.

$$f'(x) = 4f(x)$$

$f \neq 0$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 4$$

$$\frac{d}{dx}\left(\log(f(x))\right) = 4$$

$$\int \frac{d}{dx} \log(f(x))\, dx = 4x + C$$

$$\log(f(x)) = 4x + C$$

$$f(x) = De^{4x}, \quad D \in \mathbb{R}$$

$$f'(x) = 4De^{4x}$$
$$-4f(x) = -4De^{4x}$$

Dada $A = LU$

$v \in S+T$, $w \in S+T$ $\quad Ax = b \Leftrightarrow LUx = b \Leftrightarrow L(\overset{y}{Ux}) = b \Leftrightarrow Ly = b$

$\Rightarrow v + w \in S+T$ $\quad Ux = y$

$\Rightarrow \alpha v \in S+T$

Álgebra Linear - Lista de Exercícios 4

Yuri F. Saporito

$= \{ \underbrace{\boxed{\alpha s}}_{\in S} + \underbrace{\boxed{\beta t}}_{\in T} : \alpha, \beta \in \mathbb{R}, s \in S, t \in T \}$

1. Sejam S e T dois subespaços de um espaço vetorial V.
   (a) Defina $S + T = \{s + t \ ; \ s \in S \text{ e } t \in T\}$. Mostre que $S + T$ é um subespaço vetorial.
   (b) Defina $S \cup T = \{x \ ; \ x \in S \text{ ou } x \in T\}$. Argumente que $S \cup T$ não é necessariamente um subespaço vetorial.
   (c) Se S e T são retas no $\mathbb{R}^3$, o que é $S + T$ e $S \cup T$?

2. Como o núcleo $N(C)$ é relacionado aos núcleos $N(A)$ e $N(B)$, onde $C = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$?

3. Considere a matriz
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & 4 & 1 & 7 \\ 2 & -2 & 11 & -3 \end{bmatrix}.$$

   $A_{m\times n}$ $B_{l\times n}$

   $N(A) = \{ x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0 \}$

   $N(C) = \{ x \in \mathbb{R}^n : \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} x = 0 \}$

   (a) Ache a sua forma escalonada reduzida.
   (b) Qual é o posto dessa matriz?
   (c) Ache uma solução especial para a equação $Ax = 0$.

4. Ache a matrizes A_1 e A_2 $\underbrace{\text{(não triviais)}}_{\text{diferentes de } I \text{ e } O.}$ tais que posto$(A_1 B) = 1$ e posto$(A_2 B) = 0$ para $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

5. Verdadeiro ou Falso:
   (a) O espaço das matrizes simétricas é subespaço.
   (b) O espaço das matrizes anti-simétricas é um subespaço.
   (c) O espaço das matrizes não-simétricas ($A^T \neq A$) é um subespaço.

6. Se A é 4×4 e inversível, descreva todos os vetores no núcleo da matriz $B = \begin{bmatrix} A & A \end{bmatrix}$ (que é 4×8).

7. Mostre por contra-exemplos que as seguintes afirmações são falsas em geral:

   $B_{4\times 8}$

   (a) A e A^T tem os mesmo núcleos.
   (b) A e A^T tem as mesmas variáveis livres.

   $Bx = 0$

   (c) Se R é a forma escalonada de A, então R^T é a forma escalonada de A^T.

   x é 8×1 $\quad x = \begin{bmatrix} v_{4\times 1} \\ w_{4\times 1} \end{bmatrix}$

8. Construa uma matriz cujo espaço coluna contenha $(1, 1, 5)$ e $(0, 3, 1)$ e cujo núcleo contenha $(1, 1, 2)$.

9. Construa uma matriz cujo núcleo contenha todos os múltiplos de $(4, 3, 2, 1)$. $\quad A = [A_1 \ A_2 \ A_3]$ colunas

   $A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow x_1 A_1 + x_2 A_2 + x_3 A_3 = 0$

10. (*Bônus*) Dado um espaço vetorial real V, definimos o conjunto
$$V^* := \{f : V \to \mathbb{R} \mid f \text{ é linear}\}.$$
Ou seja, V^* é o conjunto de todas as funções lineares entre V e $\mathbb{R}$. Relembramos que uma função $f : E \to F$, onde E e F são espaços vetoriais, é dita *linear* se para todos $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in E$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ temos $f(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = f(\mathbf{v}) + f(\mathbf{w})$ e $f(\alpha \mathbf{v}) = \alpha f(\mathbf{v})$. Chamamos V^* de *espaço dual* de V.
   (a) Mostre que V^* é um espaço vetorial.
   (b) Agora, seja $V = \mathbb{R}^n$. Mostre que existe uma bijeção $\varphi : V^* \to V$ tal que , para toda $f \in V^*$ e para todo $\mathbf{v} \in V$, tenhamos
$$f(\mathbf{v}) = \langle \varphi(f), \mathbf{v} \rangle.$$
   Dica: Utilize a dimensão finita de $\mathbb{R}^n$ para expandir $\mathbf{v}$ como uma combinação linear dos vetores da base canônica e aplique a linearidade de f.

Em dimensão infinita, esse resultado é conhecido como Teorema da Representação de Riesz.

1) a)