

Álgebra Linear - Lista de Exercícios 7

Meu Nome Maravilhoso

30 de setembro de 2021

1. Se $AB = 0$, as colunas de B estão em qual espaço fundamental de A ? E as linhas de A estão em qual espaço fundamental de B ? É possível que A e B sejam 3×3 e com posto 2?

Resolução:

2. Se $Ax = b$ e $A^T y = 0$, temos $y^T x = 0$ ou $y^T b = 0$?

Resolução:

3. O sistema abaixo não tem solução:

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 5 \\ 2x + 2y + 3z = 5 \\ 3x + 4y + 5z = 9 \end{cases}$$

Ache números y_1, y_2, y_3 para multiplicar as equações acima para que elas somem $0 = 1$. Em qual espaço fundamental o vetor y pertence? Verifique que $y^T b = 1$. O caso acima é típico e conhecido como a *Alternativa de Fredholm*: ou $Ax = b$ ou $A^T y = 0$ com $y^T b = 1$.

Resolução:

4. Mostre que se $A^T Ax = 0$, então $Ax = 0$. O oposto é obviamente verdade e então temos $N(A^T A) = N(A)$.

Resolução:

5. Seja A uma matriz 3×4 e B uma 4×5 tais que $AB = 0$. Mostre que $C(B) \subset N(A)$. Além disso, mostre que $\text{posto}(A) + \text{posto}(B) \leq 4$.

Resolução:

6. Sejam $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ vetores não-zeros de \mathbb{R}^2 .

- (a) Quais são as condições sobre esses vetores para que cada um possa ser, respectivamente, base dos espaços $C(A^T)$, $N(A)$, $C(A)$ e $N(A^T)$ para uma dada matriz A que seja 2×2 . *Dica: cada espaço fundamental vai ter somente um desses vetores como base.*

Resolução:

- (b) Qual seria uma matriz A possível?

Resolução:

7. Ache S^\perp para os seguintes conjuntos:

(a) $S = \{0\}$

Resolução:

(b) $S = \text{span}\{[1, 1, 1]\}$

Resolução:

(c) $S = \text{span}\{[1, 1, 1], [1, 1, -1]\}$

Resolução:

(d) $S = \{[1, 5, 1], [2, 2, 2]\}$. Note que S não é um subespaço, mas S^\perp é.

Resolução:

8. Seja A uma matriz 4×3 formada pelas primeiras 3 colunas da matriz identidade 4×4 . Projeta o vetor $b = [1, 2, 3, 4]$ no espaço coluna de A . Ache a matriz de projeção P .

Resolução:

9. Se $P^2 = P$, mostre que $(I - P)^2 = I - P$. Para a matriz P do exercício anterior, em qual subespaço a matriz $I - P$ projeta?

Resolução: