Álgebra Linear - Lista de Exercícios 4

Caio Lins e Tiago da Silva

1. Sejam S e T dois subespaços de um espaço vetorial V.

Observação 1. Em geral, para mostrarmos que um conjunto $\mathbb{V}$ é um espaço vetorial, precisamos verificar que, um, ele contém o vetor nulo e, dois, ele é fechado para a soma e para a multiplicação por escalar. Essa tarefa, no entanto, pode ser mitigada; ela é, com efeito, equivalente a mostrar que, se $u, v \in \mathbb{V}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então $u + \alpha v \in \mathbb{V}$[1].

(a) Defina $S + T = \{s + t \ ; \ s \in S \text{ e } t \in T\}$. Mostre que $S + T$ é um subespaço vetorial.

Resolução:
Sejam, conforme a Observação 1, $u, v \in S + T$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, e perceba que, nesse sentido, existem, por definição, $s_1, s_2 \in S$ e $t_1, t_2 \in T$ tais que $u = s_1 + t_1$ e $v = s_2 + t_2$. Desta forma, temos que $u + \alpha v = (s_1 + \alpha s_2) + (t_1 + \alpha t_2) \in S + T$, porquanto a caracterização de S e de T como espaços vetoriais garante, pela Observação 1, que $\hat{s} = s_1 + \alpha s_2 \in S$ e $\hat{t} = t_1 + \alpha t_2 \in T$ e, portanto, $\hat{s} + \hat{t} \in S + T$. Em particular, $S + T$ é um espaço vetorial.

(b) Defina $S \cup T = \{x \ ; \ x \in S \text{ ou } x \in T\}$. Argumente que $S \cup T$ não é necessariamente um subespaço vetorial.

Resolução:
Geometricamente, a observação de que $S \cup T$ não é um espaço vetorial é bastante plausível; isso porque, em $\mathbb{R}^2$, os (únicos) espaços vetoriais consistem no plano, nas retas que contêm a origem e na própria origem. Ora, a união de duas retas não é, em geral, uma reta (nem um plano, nem a origem); portanto, a união de dois espaços vetoriais não é, em geral, um espaço vetorial.

Vamos, dessa forma, formalizar essa verificação. Sejam, para isso, $s, t \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ vetores não colineares, e escreva $S = \{\alpha s : \alpha \in \mathbb{R}\}$ e $T = \{\alpha t : \alpha \in \mathbb{R}\}$. Nesse sentido, temos, por um lado, que $s, t \in S \cup T$; por outro, $s + t \notin S \cup T$, porque, nesse caso, $s + t \in T$ e, logo, $s \in T$ ou $s + t \in S$ e, em consequência, $t \in S$, o que viola a não colinearidade entre s e t. Portanto, $S \cup T$ não é um espaço vetorial.

(c) Se S e T são retas no $\mathbb{R}^3$, o que é $S + T$ e $S \cup T$?

Resolução:
Como S e T são espaços vetoriais, essas retas contêm a origem; em particular, elas são colineares, $S = T$, ou concorrentes, $S \cap T = \{0\}$. Desse modo, temos, por um lado, que, se $S = T$, então $S + T = S$ e $S \cup T = S$; por outro, se $S \cap T = \{0\}$, então $S + T$ é o (único) plano que contém S e T, enquanto $S \cup T$ é, redundantemente, o conjunto dos vetores que estão em S ou em T. Formalmente, podemos escrever, se $S = \{\alpha s : \alpha \in \mathbb{R}\}$ e $T = \{\alpha t : \alpha \in \mathbb{R}\}$,

$$S + T = \{\alpha s + \beta t : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

e

$$S \cup T = \{\alpha(\xi s + (1 - \xi)t) : \alpha \in \mathbb{R} \text{ e } \xi \in \{1, 0\}\};$$

essa notação, no entanto, possivelmente não é tão expressiva quanto uma descrição verbal.

2. Como o núcleo $N(C)$ é relacionado aos núcleos $N(A)$ e $N(B)$, onde $C = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$?

[1] Explicitamente, escolhemos $u = v$ e $\alpha = -1$ para verificar que $0 \in \mathbb{V}$; em seguida, solicitamos que $\alpha = 1$ para verificar que $u + v \in \mathbb{V}$; enfim, pedimos que $u = 0$ para verificar que $\alpha v \in \mathbb{V}$.

Resolução:
Vamos mostrar que $N(C) = N(A) \cap N(B)$. Seja, para isso, $v \in N(C)$, e perceba que, dessa forma,

$$Cv = \begin{bmatrix} Av \\ Bv \end{bmatrix} = 0 \implies Av = 0 \text{ e } Bv = 0; \tag{1}$$

logo, $v \in N(A)$ e $v \in N(B)$ e, consequentemente, $v \in N(A) \cap N(B)$. Portanto, $N(C) \subseteq N(A) \cap N(B)$. Correlativamente, a Equação (1) garante que, se $v \in N(A) \cap N(B)$, então $Cv = 0$ e, desse modo, $v \in N(C)$; temos, nesse sentido, que $N(A) \cap N(B) \subseteq N(C)$. Dessa maneira, $N(C) = N(A) \cap N(B)$.

3. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & 4 & 1 & 7 \\ 2 & -2 & 11 & -3 \end{bmatrix}.$$

(a) Ache a sua forma escalonada reduzida.

Resolução:
O Gilbert Strang [1, página 89] distingue a forma *escalonada reduzida*, em que os pivôs precisam ser unitários, da forma *escalonada*, em que os pivôs podem, mas não precisam, ser unitários. Vou, portanto, adotar essa nomenclatura; mas essa distinção não é, nesse contexto, importante.

Nesse sentido, para computar a forma escolanada reduzida de A, subtraímos, inicialmente, duas vezes a linha um da linha três; em seguida, somamos três vezes a linha dois na linha três e, enfim, dividimos a linha dois pelo seu pivô, que é igual a quatro. Logo, se escrevermos $R(A)$ para a forma escalonada reduzida da matriz A, ficamos com

$$R(A) = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & 1 & 1/4 & 7/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(b) Qual é o posto dessa matriz?

Resolução:
O posto é, formalmente, a dimensão do espaço linha de A, que, por definição, é a quantidade de linhas linearmente independentes de A. Coincidentemente, essa quantidade é igual ao número de pivôs de A; portanto, o posto de A é igual a dois.

(c) Ache uma solução especial para a equação $Ax = 0$.

Resolução:
Como $Ax = 0$ se, e somente se, $R(A)x = 0$, precisamos escolher um vetor $x \in \mathbb{R}^4$ que seja ortogonal a todas as linhas de $R(A)$. Poderíamos, nesse sentido, utilizar o produto vetorial entre as duas linhas iniciais de A para computar um vetor ortogonal a elas; contudo, essa operação, com as propriedades de que ela goza em $\mathbb{R}^3$, existe, conforme o Teorema 1 de [2], exclusivamente em $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^7$.

Vamos, portanto, aplicar uma abordagem sistemática: como as variáveis três e quatro de $R(A)$ são livres, podemos escrever $x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e, em seguida, pedimos que $x_2 = -\frac{1}{4} - \frac{7}{4} = -2$ e que $x_1 = 5 \cdot 2 - 7 - 9 = -6$ para garantir que x seja ortogonal às linhas um e dois de $R(A)$. Dessa forma, temos

$$x = \begin{bmatrix} -6 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

que satisfaz $Ax = 0$.

4. Ache a matrizes A_1 e A_2 (não triviais) tais que $\text{posto}(A_1 B) = 1$ e $\text{posto}(A_2 B) = 0$ para $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Resolução:
Há, possivelmente, alguma ambiguidade, nesse contexto, na expressão "não triviais"; vou, desse modo, assumir que A_1 e A_2 são não nulas. Nesse sentido, temos que, como $B^2 = 2B$, posto$(B^2) =$ posto$(2B) =$ posto$(B) = 1$; logo, escolhemos $A_1 = B$. Agora, como $v = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}$ satisfaz $vB = 0$, temos que

$$A_2 = \begin{bmatrix} v \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 1 \\ 1 - 1 \end{bmatrix}$$

satisfaz $A_2B = 0$ e, portanto, posto$(A_2B) = 0$.

5. Verdadeiro ou Falso:

   (a) O espaço das matrizes simétricas é subespaço.

   Resolução:
   Seja $\mathcal{S} = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} : A^T = A\}$ o conjunto das matrizes simétricas (de dimensão n)[2] e escolha, conforme a Observação 1, $A, B \in \mathcal{S}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Como, nesse sentido, $(A + \alpha B)^T = A^T + \alpha B^T = A + \alpha B$, temos que a matriz $A + \alpha B$ é simétrica e, logo, pertence a $\mathcal{S}$; a arbitrariedade de A e B, em particular, garante que $\mathcal{S}$ é um espaço vetorial e que a afirmação é **verdadeira**.

   (b) O espaço das matrizes anti-simétricas é um subespaço.

   Resolução:
   Seja $\mathcal{A} = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} : A^T = -A\}$ o conjunto das matrizes antissimétricas. Vamos, conforme a Observação 1, escolher $A, B \in \mathcal{A}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$; verificamos, dessa forma, que $(A+\alpha B)^T = A^T + \alpha B^T = -A + \alpha(-B) = -(A+\alpha B)$ e que, nesse sentido, $A+\alpha B$ é antissimétrica. Temos, desse modo, que $A + \alpha B \in \mathcal{A}$, o que implica que $\mathcal{A}$ é um espaço vetorial e, portanto, a afirmação é **verdadeira**.

   (c) O espaço das matrizes não-simétricas ($A^T \neq A$) é um subespaço.

   Resolução:
   A afirmação é **falsa**: a matriz nula é simétrica e, portanto, o conjunto das matrizes não simétricas não contém o elemento nulo da adição; ele não é, logo, um espaço vetorial.

6. Se A é 4×4 e inversível, descreva todos os vetores no núcleo da matriz $B = \begin{bmatrix} A & A \end{bmatrix}$ (que é 4×8).

   Resolução:
   Seja $v \in N(B) \subseteq \mathbb{R}^8$ e escreva $v = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix}^T$, com $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^4$. Nesse sentido, temos que $Bv = 0$ e

$$Bv = Av_1 + Av_2; \tag{2}$$

   logo, $Av_1 = -Av_2$ e, como A é invertível, $v_1 = -v_2$. Por outro lado, se $v_1 = -v_2$, então, pela Equação (2), $v \in N(B)$. Portanto, o núcleo de B é igual a

$$\left\{ \begin{bmatrix} u \\ -u \end{bmatrix} : u \in \mathbb{R}^4 \right\}.$$

7. Mostre por contra-exemplos que as seguintes afirmações são falsas em geral:

   (a) A e A^T tem os mesmo núcleos.

   Resolução:
   Perceba que, se A não é quadrada, então os núcleos de A e de A^T são subconjuntos de conjuntos distintos; em particular, eles não são iguais. No entanto, a afirmação é falsa, em geral, mesmo que A seja quadrada; escolha, com efeito,

[2] É plausível escrever que esse conjunto não é, como descrito do enunciado, um espaço vetorial; isso porque o tamanho da matriz não é informado e, portanto, não temos a garantia de que a soma está bem definida: sem essa operação, não podemos definir um espaço vetorial. Essa observação, aliás, pode ser estendida para o item (b).

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e verifique que $N(A) = \{v \in \mathbb{R}^3 : \langle v, e_2 \rangle = 0\}$, enquanto $N(A^T) = \{v \in \mathbb{R}^3 : \langle v, e_1 \rangle = 0\}$ (escrevemos e_i para o vetor em que todas as coordenadas são nulas, exceto a i-ésima, que é unitária).

(b) A e A^T tem as mesmas variáveis livres.

Resolução:
Seja $R(A)$ a forma escalonada da matriz A: chamamos de *variáveis básicas* de A ao conjunto de variáveis que correspondem aos pivôs; dizemos que as outras são as *variáveis livres*. Dessa forma, na matriz do item (a), temos que, para a matriz A, as variáveis um e três são livres, enquanto, para A^T, as variáveis dois e três são livres. Portanto, as variáveis livres de A e de A^T são distintas, e a afirmação é falsa.

(c) Se R é a forma escalonada de A, então R^T é a forma escalonada de A.

Resolução:
Escrevendo, como no exercício três, $R(A)$ para a forma escalonada da matriz A, temos que, se A é a matriz do item (a), $R(A) = A$ e

$$R(A^T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

em particular, $R(A^T) \neq R(A)^T$, e a afirmação é falsa.

8. Construa uma matriz cujo espaço coluna contenha $(1, 1, 5)$ e $(0, 3, 1)$ e cujo núcleo contenha $(1, 1, 2)$.

Resolução:
Seja A uma matriz tal que o núcleo contém o vetor $(1, 1, 2)$ e o espaço coluna, os vetores $(1, 1, 5)$ e $(0, 3, 1)$, perceba que, como esses espaços são subconjuntos de $\mathbb{R}^3$, $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Nessas condições, temos que existem vetores $u, v \in \mathbb{R}^3$ tais que

$$A = \begin{bmatrix} u & v & -2(u+v) \end{bmatrix}$$

(isso porque $(1, 1, 2) \in N(A)$); escolhemos, portanto, $u = (1, 1, 5)$ e $v = (0, 3, 1)$, de modo que $Ae_1 = u$ e $Ae_2 = v$; isto é, u e v estão no espaço coluna de A. Dessa forma,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & -8 \\ 5 & 1 & -12 \end{bmatrix}$$

satisfaz as condições do enunciado.

9. Construa uma matriz cujo núcleo contenha todos os múltiplos de $(4, 3, 2, 1)$.

Resolução:
Seja $v = (4, 3, 2, 1)$. Vamos, agora, escolher um vetor linha u em $\mathbb{R}^{1\times 4}$ tal que $uv = 0$ e, portanto, v pertencerá ao núcleo de u. Heuristicamente, escrevemos $v = (v_1, v_2)$, com $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$, e escolhemos $u = (v_1^\perp, v_2^\perp)^T$, em que $v_i^\perp$ satisfaz, para $1 \leq i \leq 2$, $\langle v_i^\perp, v_i \rangle = 0$. Ora, como $v_1^\perp = (-3, 4)$ e $v_2^\perp = (-1, 2)$ satisfazem essas condições,

$$u = \begin{bmatrix} -3 & 4 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

é uma matriz tal que $v \in N(u)$.

Referências

[1] Gilbert Strang. *Linear algebra and its applications.* Thomson, Brooks/Cole, Belmont, CA, 2006.

[2] W. S. Massey. Cross products of vectors in higher dimensional euclidean spaces. *The American Mathematical Monthly*, 90(10):697, December 1983.