Álgebra Linear - Lista de Exercícios 7

escreva seu nome aqui

28 de setembro de 2021

1. Se $AB = 0$, as colunas de B estão em qual espaço fundamental de A? E as linhas de A estão em qual espaço fundamental de B? É possível que A e B sejam 3×3 e com posto 2?

   Resolução:

2. Se $Ax = b$ e $A^T y = 0$, temos $y^T x = 0$ ou $y^T b = 0$?

   ↳ $\cdot\, y^T$

   Resolução:

3. O sistema abaixo não tem solução:

   $Ax = b$, $x = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ $b = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix}$

   $$\begin{array}{l} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{array} \begin{cases} x + 2y + 2z = 5 \\ 2x + 2y + 3z = 5 \\ 3x + 4y + 5z = 9 \end{cases}$$

   $y^T A$, $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$

   de A.

   Ache números y_1, y_2, y_3 para multiplicar as equações acima para que elas somem $0 = 1$. Em qual espaço fundamental o vetor y pertence? Verifique que $y^T b = 1$. O caso acima é típico e conhecido como a *Alternativa de Fredholm*: ou $Ax = b$ ou $A^T y = 0$ com $y^T b = 1$.

   Resolução:

4. Mostre que se $A^T A x = 0$, então $Ax = 0$. O oposto é obviamente verdade e então temos $N(A^T A) = N(A)$.

   $\Longrightarrow$

   ↳ Feito em aula $N(A) = N(A^T A)$.

   Resolução:

   Um caminho: $\|Ax\|^2 = 0$.

5. Seja A uma matriz 3×4 e B uma 4×5 tais que $AB = 0$. Mostre que $C(B) \subset N(A)$. Além disso, mostre que posto(A) + posto$(B) \leq 4$.

   Resolução:

   $a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ ...

6. Sejam $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ vetores não-zeros de $\mathbb{R}^2$.

   (a) Quais são as condições sobre esses vetores para que cada um possa ser, respectivamente, base dos espaços $C(A^T)$, $N(A)$, $C(A)$ e $N(A^T)$ para uma [redacted] matriz A que seja 2×2. *Dica: cada espaço fundamental vai ter somente um desses vetores como base.*

   Resolução: Tentar pensar em uma condição necessária e provar que ela é suficiente.

   (b) Qual seria uma matriz A possível?

   Resolução: Só dar um exemplo.
   E exibir a, b, c e d satisfazendo a condição encontrada e mostrar quem seria A.

7. Ache $S^\perp$ para os seguintes conjuntos: Estamos em $\mathbb{R}^3$.

$S = span\{x_1, \dots, x_n\}$, $S^\perp = N([x_1 \cdots x_n]^T)$

↳ vejam porque é verdade.

   (a) $S = \{0\}$
   (b) $S = span\{[1, 1, 1]\}$
   (c) $S = span\{[1, 1, 1], [1, 1, -1]\}$
   (d) $S = \{[1, 5, 1], [2, 2, 2]\}$. Note que S não é um subespaço, mas $S^\perp$ é.

↳ sem "span"

Resolução:

   (a)
   (b)
   (c)
   (d)

---

8. Seja A uma matriz 4×3 formada pela primeiras 3 colunas da matriz identidade 4×4. Projeta o vetor $b = [1, 2, 3, 4]$ no espaço coluna de A. Ache a matriz de projeção P. ↳ $A\hat{x}$.

Resolução: $A^T(A\hat{x} - b) = 0$

---

9. Se $P^2 = P$, mostre que $(I - P)^2 = I - P$. Para a matriz P do exercício anterior, em qual subespaço a matriz $I - P$ projeta?

↳ desenvolver isso.

↳ calcula $I - P$.

Resolução:
