# Bases para os 4 espaços fundamentais

Encontre bases para os 4 espaços fundamentais de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

- Falar sobre quando um sistema tem solução.

Solução:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 - L_1]{L_2 - L_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \leftarrow$$

$$\xrightarrow{L_1 + 3L_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-L_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\text{Posto}(A) = 2$

Base para $C(A)$: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$

Base para $C(A^T)$: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

Sabemos que $\dim N(A^T) = 1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{E} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}}_{A}$$

$$\Rightarrow [-1 \;\; 0 \;\; 1]\, A = [0 \;\; 0 \;\; 0]$$

$$\Rightarrow A^T \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ Base para $N(A^T)$: $\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

Temos que

$$\text{rref}(A) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(1) \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_4 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$\dim N(A) = 2$

Solução de (1) com $x_2 = 1$ e $x_4 = 0$: $x_1 = -2$, $x_3 = 0$

Solução de (1) com $x_4 = 1$ e $x_2 = 0$: $x_3 = -1$, $x_1 = 1$

Base de $N(A)$: $\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

Suponha que temos $A_{m\times n}$ e $b \in \mathbb{R}^m$.

$$Ax = b \qquad (*)$$

$A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Se $\dim C(A) = m$, como $C(A) \subset \mathbb{R}^m$, devemos ter $C(A) = \mathbb{R}^m$. Logo, $(*)$ sempre tem solução.

Se $\dim C(A) < m$, pode ser que $(*)$ não tenha solução, pois $C(A) \neq \mathbb{R}^m$. Se $b \notin C(A)$, então não há solução para $(*)$.

Outra forma de calcular $N(A)$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\overset{x_2}{C_2} \leftrightarrow \overset{x_3}{C_3}} \begin{array}{cccc} & & \multicolumn{2}{c}{F} \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$N_A' = \begin{bmatrix} -F \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$N_A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# Base para um espaço de matrizes

Mostre que $V = \{ A \in \mathbb{M}_{3\times3} : A = -A^T \}$ é um espaço vetorial e encontre uma base para esse espaço.

Solução:

- Claramente $0 \in V$, pois $0 = 0^T = -0^T$
- Dadas $A, B \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} A + B &= -A^T - B^T \\ &= -(A^T + B^T) \\ &= -(A+B)^T \end{aligned}$$

$\Rightarrow A + B \in V$.

$$\begin{aligned} \alpha A &= \alpha(-A^T) \\ &= -\alpha A^T \\ &= -(\alpha A)^T \end{aligned}$$

$\Rightarrow \alpha A \in V$.

Logo, V é espaço vetorial.

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}^T = -\begin{bmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow a = e = i = 0$

$\Rightarrow b = -d, \; c = -g, \; f = -h$

Propomos, como base: ↱ vazios na matriz são zeros.

$$\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 & \\ -1 & 0 & \\ & & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & & 1 \\ & 0 & \\ -1 & & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & & \\ & 0 & 1 \\ & -1 & 0 \end{bmatrix} \right\} = \mathcal{B}$$

$$\quad \| \qquad\qquad \| \qquad\qquad \|$$

$$\quad E_1 \qquad\qquad E_2 \qquad\qquad E_3$$

- Vamos mostrar que $\mathcal{B}$ é L.I.

$$\alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2 + \alpha_3 E_3 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ -\alpha_1 & 0 & \alpha_3 \\ -\alpha_2 & -\alpha_3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0.$$

Logo, $\mathcal{B}$ é L.I.

- Vamos mostrar que $\mathcal{B}$ gera $V$, ou seja $V = \operatorname{span}\{\mathcal{B}\}$.

É trivial que $\operatorname{span}\{\mathcal{B}\} \subset V$. Vamos provar que $V \subset \operatorname{span}\{\mathcal{B}\}$

Dada $A \in V$, sabemos que $A$ da forma $\begin{bmatrix} 0 & b & c \\ -b & 0 & f \\ -c & -f & 0 \end{bmatrix}$. Assim,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & b & c \\ -b & 0 & f \\ -c & -f & 0 \end{bmatrix} = b E_1 + c E_2 + f E_3.$$

Portanto, $V \subset \operatorname{span}\{\mathcal{B}\}$ e $\mathcal{B}$ é uma base de $V$.

# Independência Linear

Seja $\mathcal{B} := \{v_1, \ldots, v_k\} \subset \mathbb{R}^n$. Mostre que $\mathcal{B}$ é L.I. se, e somente se, todo subconjunto não vazio de $\mathcal{B}$ é L.I.

Solução: Devemos provar duas coisas:

se

- Todo subconjunto não vazio de $\mathcal{B}$ é L.I $\Rightarrow$ $\mathcal{B}$ é L.I.

Observe que $\mathcal{B}$ é um subconjunto não-vazio de $\mathcal{B}$.

somente se

- $\mathcal{B}$ é L.I. $\Rightarrow$ Todo subconjunto não vazio de $\mathcal{B}$ é L.I

Sem perda de generalidade, seja $\{v_1, \ldots, v_\ell\}$, $\ell \leq k$, um subconjunto não vazio de $\mathcal{B}$. Observe que:

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_\ell v_\ell = 0 \Rightarrow \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_\ell v_\ell + 0 \cdot v_{\ell+1} + \cdots + 0 \cdot v_n = 0 \qquad (\ast)$$

Como $\mathcal{B}$ é L.I., isso implica todos coeficientes de $(\ast)$ serem nulos, ou seja, $\alpha_1 = \cdots = \alpha_\ell = 0$.
Portanto $\{v_1, \ldots, v_\ell\}$ é L.I.

# Independência Linear e Base

Sejam $V, W \subset \mathbb{R}^d$ subespaços vetoriais tais que $V \cap W = \{0\}$, $\dim V = n$ e $\dim W = m$, com $n + m \leq d$.
Relembramos a notação $V + W = \{v + w : v \in V \text{ e } w \in W\}$.
No caso especial em que $V \cap W = \{0\}$, escrevemos $V \oplus W := V + W$
e chamamos esse conjunto de soma direta entre $V$ e $W$.
Sejam $\mathcal{A} := \{v_1, \dots, v_n\}$ e $\mathcal{B} := \{w_1, \dots, w_m\}$ bases de $V$ e $W$ respectivamente.
Mostre que $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_m\}$ é uma base para $V \oplus W$.

## Solução

- $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ é L.I.

Sejam $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ tais que

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n + \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_m w_m = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n}_{\in V} = \underbrace{-(\lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_m w_m)}_{\in W} \qquad (1)$$

Como o lado esquerdo de (1) pertence a $V$ e o direito, a $W$, ambos pertencem a $V \cap W = \{0\}$. Logo,

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0$$

$$\lambda_1 w_1 + \dots \lambda_m w_m = 0$$

Como $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são bases de $V$ e $W$, respectivamente, concluímos que:

$$\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$$

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0$$

Portanto, $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ é L.I.

- $\text{span}(A \cup \beta) = V \oplus W = V + W$.

↳ $\text{span}(A \cup \beta) \subset V \oplus W$

$$\underbrace{\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n}_{= v \in V} + \underbrace{\lambda_1 \beta_1 + \cdots + \lambda_m \beta_m}_{w \in W} = v + w \in V \oplus W.$$

↳ $V \oplus W \subset \text{span}(A \cup \beta)$

Dado $\xi \in V \oplus W$, temos que existem $v \in V$ e $w \in W$ tais que $\xi = v + w$.
Mas, também devem existir $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ e $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ tais que

$$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$$
$$w = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j w_j$$

Portanto,

$$\xi = v + w = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j w_j \in \text{span}(A \cup \beta).$$

# Independência linear nível Hard

Sejam $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{R}$ dois a dois distintos ($k_i \neq k_j$ se $i \neq j$).
Mostre que o conjunto de funções $\{e^{k_1 t}, e^{k_2 t}, \ldots, e^{k_n t}\}$ é L.I.

Solução ( $\exp(x) = e^x$, $\exp(x) > 0 \; \forall x \in \mathbb{R}$, $(e^{cx})' = c\, e^{cx}$.

Sejam $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$\alpha_1 \exp(k_1 t) + \cdots + \alpha_n \exp(k_n t) = 0 \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

$$\Rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 \exp((k_2 - k_1)t) + \cdots + \alpha_n \exp((k_n - k_1)t) = 0 \qquad (1)$$

Derivando (1) com relação a $t$, ficamos com

$$\alpha_2 (k_2 - k_1) \exp((k_2 - k_1)t) + \cdots + \alpha_n (k_n - k_1) \exp((k_n - k_1)t) = 0 \qquad (2)$$

Dividimos (2) por $\exp((k_2 - k_1)t)$ e ficamos com

$$\alpha_2 (k_2 - k_1) + \alpha_3 (k_3 - k_1) \exp((k_3 - k_1)t - (k_2 - k_1)t) + \cdots + \alpha_n (k_n - k_1) \exp((k_n - k_1)t - (k_2 - k_1)t)$$

$$\alpha_2 (k_2 - k_1) + \alpha_3 (k_3 - k_1) \exp((k_3 - k_2)t) + \cdots + \alpha_n (k_n - k_1) \exp((k_n - k_2)t)$$

Derivamos de novo:

$$\alpha_3 (k_3 - k_1)(k_3 - k_2) \exp((k_3 - k_2)t) + \cdots + \alpha_n (k_n - k_1)(k_n - k_2) \exp((k_n - k_2)t)$$

Repetimos esse processo até sobrar 1 termo só!

$$\alpha_n(\lambda_n-\lambda_1)\cdots(\lambda_n-\lambda_{n-1})=0$$

Com $\lambda_n-\lambda_j \neq 0$ para $j\neq n$, concluímos que $\alpha_n=0$

Com isso,

$$\alpha_1 \exp(\lambda_1 t)+\cdots+\alpha_{n-1}\exp(\lambda_{n-1}t)=0$$

Repetindo o procedimento, obtemos, $\alpha_1=\cdots=\alpha_n=0$.

Refazendo por indução em $n$:

- $n=1$

$$\alpha_1 e^{\lambda_1 t}=0 \quad \forall\, t\in\mathbb{R}$$

Como $e^{\lambda_1 t}>0$, temos que $\alpha_1=0$.

- $n-1 \Rightarrow n$

$$\alpha_1 \exp(\lambda_1 t)+\cdots+\alpha_n \exp(\lambda_n t)=0 \qquad (*)$$

Vamos dividir por $\exp(\lambda_1 t)$ e derivar com relação a $t$:

$$\alpha_2(\lambda_2-\lambda_1)\exp((\lambda_2-\lambda_1)t)+\cdots+\alpha_n(\lambda_n-\lambda_1)\exp((\lambda_n-\lambda_1)t)=0$$

Pela Hipótese de Indução, temos

$$\alpha_2(\lambda_2-\lambda_1)=\cdots=\alpha_n(\lambda_n-\lambda_1)=0$$

Como $\lambda_i\neq\lambda_j$ para $i\neq j$, isso implica

$$\alpha_2=\cdots=\alpha_n=0.$$

Substituindo em (*), ficamos com

$$\alpha_1 \exp(\lambda_1 t) = 0$$

pelo caso $n=1$, $\alpha_1 = 0$ e acabamos.