

# Álgebra Linear - Lista de Exercícios 4

Caio Lins e Tiago da Silva

1. Sejam  $S$  e  $T$  dois subespaços de um espaço vetorial  $V$ .

**Observação 1.** Em geral, para mostrarmos que um conjunto  $\mathbb{V}$  é um espaço vetorial, precisamos verificar que, um, ele contém o vetor nulo e, dois, ele é fechado para a soma e para a multiplicação por escalar. Essa tarefa, no entanto, pode ser mitigada; ela é, com efeito, equivalente a mostrar que, se  $u, v \in \mathbb{V}$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$ , então  $u + \alpha v \in \mathbb{V}$ <sup>1</sup>.

- (a) Defina  $S + T = \{s + t ; s \in S \text{ e } t \in T\}$ . Mostre que  $S + T$  é um subespaço vetorial.

**Resolução:**

Sejam, conforme a Observação 1,  $u, v \in S + T$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$ , e perceba que, nesse sentido, existem, por definição,  $s_1, s_2 \in S$  e  $t_1, t_2 \in T$  tais que  $u = s_1 + t_1$  e  $v = s_2 + t_2$ . Desta forma, temos que  $u + \alpha v = (s_1 + \alpha s_2) + (t_1 + \alpha t_2) \in S + T$ , porquanto a caracterização de  $S$  e de  $T$  como espaços vetoriais garante, pela Observação 1, que  $\hat{s} = s_1 + \alpha s_2 \in S$  e  $\hat{t} = t_1 + \alpha t_2 \in T$  e, portanto,  $\hat{s} + \hat{t} \in S + T$ . Em particular,  $S + T$  é um espaço vetorial.

- (b) Defina  $S \cup T = \{x ; x \in S \text{ ou } x \in T\}$ . Argumente que  $S \cup T$  não é necessariamente um subespaço vetorial.

**Resolução:**

Geometricamente, a observação de que  $S \cup T$  não é um espaço vetorial é bastante plausível; isso porque, em  $\mathbb{R}^2$ , os (únicos) espaços vetoriais consistem no plano, nas retas que contêm a origem e na própria origem. Ora, a união de duas retas não é, em geral, uma reta (nem um plano, nem a origem); portanto, a união de dois espaços vetoriais não é, em geral, um espaço vetorial.

Vamos, dessa forma, formalizar essa verificação. Sejam, para isso,  $s, t \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  vetores não colineares, e escreva  $S = \{\alpha s : \alpha \in \mathbb{R}\}$  e  $T = \{\alpha t : \alpha \in \mathbb{R}\}$ . Nesse sentido, temos, por um lado, que  $s, t \in S \cup T$ ; por outro,  $s + t \notin S \cup T$ , porque, nesse caso,  $s + t \in T$  e, logo,  $s \in T$  ou  $s + t \in S$  e, em consequência,  $t \in S$ , o que viola a não colinearidade entre  $s$  e  $t$ . Portanto,  $S \cup T$  não é um espaço vetorial.

- (c) Se  $S$  e  $T$  são retas no  $\mathbb{R}^3$ , o que é  $S + T$  e  $S \cup T$ ?

**Resolução:**

Como  $S$  e  $T$  são espaços vetoriais, essas retas contêm a origem; em particular, elas são colineares,  $S = T$ , ou concorrentes,  $S \cap T = \{0\}$ . Desse modo, temos, por um lado, que, se  $S = T$ , então  $S + T = S$  e  $S \cup T = S$ ; por outro, se  $S \cap T = \{0\}$ , então  $S + T$  é o (único) plano que contém  $S$  e  $T$ , enquanto  $S \cup T$  é, redundantemente, o conjunto dos vetores que estão em  $S$  ou em  $T$ . Formalmente, podemos escrever, se  $S = \{\alpha s : \alpha \in \mathbb{R}\}$  e  $T = \{\alpha t : \alpha \in \mathbb{R}\}$ ,

$$S + T = \{\alpha s + \beta t : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

e

$$S \cup T = \{\alpha(\xi s + (1 - \xi)t) : \alpha \in \mathbb{R} \text{ e } \xi \in \{1, 0\}\};$$

essa notação, no entanto, possivelmente não é tão expressiva quanto uma descrição verbal.

2. Como o núcleo  $N(C)$  é relacionado aos núcleos  $N(A)$  e  $N(B)$ , onde  $C = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$ ?

---

<sup>1</sup>Explicitamente, escolhamos  $u = v$  e  $\alpha = -1$  para verificar que  $0 \in \mathbb{V}$ ; em seguida, solicitamos que  $\alpha = 1$  para verificar que  $u + v \in \mathbb{V}$ ; enfim, pedimos que  $u = 0$  para verificar que  $\alpha v \in \mathbb{V}$ .

**Resolução:**

Vamos mostrar que  $N(C) = N(A) \cap N(B)$ . Seja, para isso,  $v \in N(C)$ , e perceba que, dessa forma,

$$(1) \quad Cv = \begin{bmatrix} Av \\ Bv \end{bmatrix} = 0 \implies Av = 0 \text{ e } Bv = 0;$$

logo,  $v \in N(A)$  e  $v \in N(B)$  e, consequentemente,  $v \in N(A) \cap N(B)$ . Portanto,  $N(C) \subseteq N(A) \cap N(B)$ . Correlativamente, a Equação (1) garante que, se  $v \in N(A) \cap N(B)$ , então  $Cv = 0$  e, desse modo,  $v \in N(C)$ ; temos, nesse sentido, que  $N(A) \cap N(B) \subseteq N(C)$ . Dessa maneira,  $N(C) = N(A) \cap N(B)$ .

3. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & 4 & 1 & 7 \\ 2 & -2 & 11 & -3 \end{bmatrix}.$$

(a) Ache a sua forma escalonada reduzida.

**Resolução:**

O Gilbert Strang [1, página 89] distingue a forma *escalonada reduzida*, em que os pivôs precisam ser unitários, da forma *escalonada*, em que os pivôs podem, mas não precisam, ser unitários. Vou, portanto, adotar essa nomenclatura; mas essa distinção não é, nesse contexto, importante.

Nesse sentido, para computar a forma escalonada reduzida de  $A$ , subtraímos, inicialmente, duas vezes a linha um da linha três; em seguida, somamos três vezes a linha dois na linha três e, enfim, dividimos a linha dois pelo seu pivô, que é igual a quatro. Logo, se escrevermos  $R(A)$  para a forma escalonada reduzida da matriz  $A$ , ficamos com

$$R(A) = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & 1 & 1/4 & 7/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(b) Qual é o posto dessa matriz?

**Resolução:**

O posto é, formalmente, a dimensão do espaço linha de  $A$ , que, por definição, é a quantidade de linhas linearmente independentes de  $A$ . Coincidentemente, essa quantidade é igual ao número de pivôs de  $A$ ; portanto, o posto de  $A$  é igual a dois.

(c) Ache uma solução especial para a equação  $Ax = 0$ .

**Resolução:**

Como  $Ax = 0$  se, e somente se,  $R(A)x = 0$ , precisamos escolher um vetor  $x \in \mathbb{R}^4$  que seja ortogonal a todas as linhas de  $R(A)$ . Poderíamos, nesse sentido, utilizar o produto vetorial entre as duas linhas iniciais de  $A$  para computar um vetor ortogonal a elas; contudo, essa operação, com as propriedades de que ela goza em  $\mathbb{R}^3$ , existe, conforme o Teorema 1 de [2], exclusivamente em  $\mathbb{R}^3$  e  $\mathbb{R}^7$ .

Vamos, portanto, aplicar uma abordagem sistemática: como as variáveis três e quatro de  $R(A)$  são livres, podemos escrever  $x = [x_1 \ x_2 \ 1 \ 1]$  e, em seguida, pedimos que  $x_2 = -\frac{1}{4} - \frac{7}{4} = -2$  e que  $x_1 = 5 \cdot 2 - 7 - 9 = -6$  para garantir que  $x$  seja ortogonal às linhas um e dois de  $R(A)$ . Dessa forma, temos

$$x = \begin{bmatrix} -6 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

que satisfaz  $Ax = 0$ .

4. Ache as matrizes  $A_1$  e  $A_2$  (não triviais) tais que  $\text{posto}(A_1 B) = 1$  e  $\text{posto}(A_2 B) = 0$  para  $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ .

**Resolução:**

Há, possivelmente, alguma ambiguidade, nesse contexto, na expressão “não triviais”; vou, desse modo, assumir que  $A_1$  e  $A_2$  são não nulas. Nesse sentido, temos que, como  $B^2 = 2B$ ,  $\text{posto}(B^2) = \text{posto}(2B) = \text{posto}(B) = 1$ ; logo, escolhemos  $A_1 = B$ . Agora, como  $v = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}$  satisfaz  $vB = 0$ , temos que

$$A_2 = \begin{bmatrix} v \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

satisfaz  $A_2B = 0$  e, portanto,  $\text{posto}(A_2B) = 0$ .

5. Verdadeiro ou Falso:

- (a) O espaço das matrizes simétricas é subespaço.

**Resolução:**

Seja  $\mathcal{S} = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} : A^T = A\}$  o conjunto das matrizes simétricas (de dimensão  $n$ )<sup>2</sup> e escolha, conforme a Observação 1,  $A, B \in \mathcal{S}$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Como, nesse sentido,  $(A + \alpha B)^T = A^T + \alpha B^T = A + \alpha B$ , temos que a matriz  $A + \alpha B$  é simétrica e, logo, pertence a  $\mathcal{S}$ ; a arbitrariedade de  $A$  e  $B$ , em particular, garante que  $\mathcal{S}$  é um espaço vetorial e que a afirmação é **verdadeira**.

- (b) O espaço das matrizes anti-simétricas é um subespaço.

**Resolução:**

Seja  $\mathcal{A} = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} : A^T = -A\}$  o conjunto das matrizes antissimétricas. Vamos, conforme a Observação 1, escolher  $A, B \in \mathcal{A}$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$ ; verificamos, dessa forma, que  $(A + \alpha B)^T = A^T + \alpha B^T = -A + \alpha(-B) = -(A + \alpha B)$  e que, nesse sentido,  $A + \alpha B$  é antissimétrica. Temos, desse modo, que  $A + \alpha B \in \mathcal{A}$ , o que implica que  $\mathcal{A}$  é um espaço vetorial e, portanto, a afirmação é **verdadeira**.

- (c) O espaço das matrizes não-simétricas ( $A^T \neq A$ ) é um subespaço.

**Resolução:**

A afirmação é **falsa**: a matriz nula é simétrica e, portanto, o conjunto das matrizes não simétricas não contém o elemento nulo da adição; ele não é, logo, um espaço vetorial.

6. Se  $A$  é  $4 \times 4$  e inversível, descreva todos os vetores no núcleo da matriz  $B = \begin{bmatrix} A & A \end{bmatrix}$  (que é  $4 \times 8$ ).

**Resolução:**

Seja  $v \in N(B) \subseteq \mathbb{R}^8$  e escreva  $v = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix}^T$ , com  $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^4$ . Nesse sentido, temos que  $Bv = 0$  e

$$(2) \quad Bv = Av_1 + Av_2;$$

logo,  $Av_1 = -Av_2$  e, como  $A$  é invertível,  $v_1 = -v_2$ . Por outro lado, se  $v_1 = -v_2$ , então, pela Equação (2),  $v \in N(B)$ . Portanto, o núcleo de  $B$  é igual a

$$\left\{ \begin{bmatrix} u \\ -u \end{bmatrix} : u \in \mathbb{R}^4 \right\}.$$

7. Mostre por contra-exemplos que as seguintes afirmações são falsas em geral:

- (a)  $A$  e  $A^T$  tem os mesmo núcleos.

**Resolução:**

Perceba que, se  $A$  não é quadrada, então os núcleos de  $A$  e de  $A^T$  são subconjuntos de conjuntos distintos; em particular, eles não são iguais. No entanto, a afirmação é falsa, em geral, mesmo que  $A$  seja quadrada; escolha, com efeito,

---

<sup>2</sup>É plausível escrever que esse conjunto não é, como descrito do enunciado, um espaço vetorial; isso porque o tamanho da matriz não é informado e, portanto, não temos a garantia de que a soma está bem definida: sem essa operação, não podemos definir um espaço vetorial. Essa observação, aliás, pode ser estendida para o item (b).

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e verifique que  $N(A) = \{v \in \mathbb{R}^3 : \langle v, e_2 \rangle = 0\}$ , enquanto  $N(A^T) = \{v \in \mathbb{R}^3 : \langle v, e_1 \rangle = 0\}$  (escrevemos  $e_i$  para o vetor em que todas as coordenadas são nulas, exceto a  $i$ -ésima, que é unitária).

(b)  $A$  e  $A^T$  tem as mesmas variáveis livres.

**Resolução:**

Seja  $R(A)$  a forma escalonada da matriz  $A$ : chamamos de *variáveis básicas* de  $A$  ao conjunto de variáveis que correspondem aos pivôs; dizemos que as outras são as *variáveis livres*. Dessa forma, na matriz do item (a), temos que, para a matriz  $A$ , as variáveis um e três são livres, enquanto, para  $A^T$ , as variáveis dois e três são livres. Portanto, as variáveis livres de  $A$  e de  $A^T$  são distintas, e a afirmação é falsa.

(c) Se  $R$  é a forma escalonada de  $A$ , então  $R^T$  é a forma escalonada de  $A$ .

**Resolução:**

Escrevendo, como no exercício três,  $R(A)$  para a forma escalonada da matriz  $A$ , temos que, se  $A$  é a matriz do item (a),  $R(A) = A$  e

$$R(A^T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

em particular,  $R(A^T) \neq R(A)^T$ , e a afirmação é falsa.

8. Construa uma matriz cujo espaço coluna contenha  $(1, 1, 5)$  e  $(0, 3, 1)$  e cujo núcleo contenha  $(1, 1, 2)$ .

**Resolução:**

Seja  $A$  uma matriz tal que o núcleo contém o vetor  $(1, 1, 2)$  e o espaço coluna, os vetores  $(1, 1, 5)$  e  $(0, 3, 1)$ , perceba que, como esses espaços são subconjuntos de  $\mathbb{R}^3$ ,  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Nessas condições, temos que existem vetores  $u, v \in \mathbb{R}^3$  tais que

$$A = [u \quad v \quad -\frac{1}{2}(u+v)]$$

(isso porque  $(1, 1, 2) \in N(A)$ ); escolhemos, portanto,  $u = (1, 1, 5)$  e  $v = (0, 3, 1)$ , de modo que  $Ae_1 = u$  e  $Ae_2 = v$ ; isto é,  $u$  e  $v$  estão no espaço coluna de  $A$ . Dessa forma,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 5 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

satisfaz as condições do enunciado.

9. Construa uma matriz cujo núcleo contenha todos os múltiplos de  $(4, 3, 2, 1)$ .

**Resolução:**

Seja  $v = (4, 3, 2, 1)$ . Vamos, agora, escolher um vetor linha  $u$  em  $\mathbb{R}^{1 \times 4}$  tal que  $uv = 0$  e, portanto,  $v$  pertencerá ao núcleo de  $u$ . Heuristicamente, escrevemos  $v = (v_1, v_2)$ , com  $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$ , e escolhemos  $u = (v_1^\perp, v_2^\perp)^T$ , em que  $v_i^\perp$  satisfaz, para  $1 \leq i \leq 2$ ,  $\langle v_i^\perp, v_i \rangle = 0$ . Ora, como  $v_1^\perp = (-3, 4)$  e  $v_2^\perp = (-1, 2)$  satisfazem essas condições,

$$u = [-3 \quad 4 \quad -1 \quad 2]$$

é uma matriz tal que  $v \in N(u)$ .

## Referências

- [1] Gilbert Strang. *Linear algebra and its applications*. Thomson, Brooks/Cole, Belmont, CA, 2006.
- [2] W. S. Massey. Cross products of vectors in higher dimensional euclidean spaces. *The American Mathematical Monthly*, 90(10):697, December 1983.