Dependência Linear

Dados $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$, dizemos que eles são L.I (Linearmente Independentes), se vale a seguinte implicação:

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0.$$

Com isso, $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ são L.D. (linearmente dependentes) se existem $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, não todos nulos, tais que

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = 0.$$

Observe que se $v_1, \dots, v_n$ são as colunas de uma matriz A, então

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = A \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

Logo:

$v_1, \dots, v_n$ são L.I. $\Leftrightarrow N(A) = \{0\}$

$v_1, \dots, v_n$ são L.D. $\Leftrightarrow N(A)$ tem mais vetores que o 0.

Base:

Dado um espaço vetorial E, uma base de E é um conjunto de vetores $\{v_1, \dots, v_n\}$, L.I, tais que

$$\begin{aligned} E &= \operatorname{span}\{v_1, \dots, v_n\} \\ &= \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i : \alpha_i \in \mathbb{R} \ \forall i = 1, \dots, n \right\}. \end{aligned}$$

Álgebra Linear - Lista de Exercícios 5

escreva seu nome aqui

1. Explique porque essas afirmações são falsas

   ↳ solução particular, ou seja, algum vetor que satisfaz $Ax_p = b$.

   (a) A solução completa é qualquer combinação linear de x_p e x_n.

   ↳ qualquer elemento do núcleo.

   Resolução: ↳ o conjunto solução de $Ax = b$ para algum b

   → (b) O sistema $Ax = b$ tem no máximo uma solução particular. O sistema tem, no máximo, uma solução.

   Resolução:

   (c) Se A é inversível, não existe nenhuma solução x_n no núcleo. → A inversível $\Rightarrow N(A) = \emptyset$.

   Resolução:

2. Sejam

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \text{ e } c = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

   Use a eliminação de Gauss-Jordan para reduzir as matrizes $[U\ 0]$ e $[U\ c]$ para $[R\ 0]$ e $[R\ d]$. Resolva $Rx = 0$ e $Rx = d$

   ↳ $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \vdots & 5 \\ 0 & 0 & 4 & \vdots & 8 \end{bmatrix}$

   Resolução: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 4 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$

3. Suponha que $Ax = b$ e $Cx = b$ tenham as mesmas soluções (completas) para todo b. Podemos concluir que $A = C$?

   ↳ $\forall b,\ \{x : Ax = b\} = \{x : Cx = b\}$

   Resolução: 1º jeito: contradição

   2º jeito: tentar provar que as colunas de A são iguais às colunas de C.

4. Ache o maior número possível de vetores linearmente independentes dentre os vetores:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

   ↳ Usar o que vimos ali em cima

   Resolução:

   ↳ núcleo de uma matriz.

5. Ache uma base para o plano $\boxed{x - 2y + 3z = 0}$ em $\mathbb{R}^3$. Encontre então uma base para a interseção desse plano com o plano xy. Achar ainda uma base para todos os vetores perpendiculares a esse plano.

   Resolução: ↳ $z = 0$

   ↳ utilizar a base para o plano que você obtem.

   Base $= \{v, w, z\}$

   $\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}$

6. Ache (na sua forma mais simples) a matriz que é o produto das matrizes de posto 1 $\mathbf{u}\mathbf{v}^T$ e $\mathbf{w}\mathbf{z}^T$? Qual seu posto?

Resolução:

7. Suponha que a coluna j de B é uma combinação linear das colunas anteriores de B. Mostre que a coluna j de AB é uma combinação linear das colunas anteriores de AB. Conclua que posto$(AB) \leq$ posto(B).

posto = número de colunas L.I da matriz.

Resolução: $AB = A[b_1 \cdots b_n]$
$= [Ab_1 \cdots Ab_n]$

8. O item anterior nos dá posto$(B^T A^T) \leq$ posto(A^T). É possível concluir que posto$(AB) \leq$ posto(A)?

↳ use a questão 7.

Resolução:

Como posto(A) se relaciona com posto(A^T)?

9. Suponha que A e B são matrizes quadradas e $AB = I$. Prove que posto$(A) = n$. Conclua que B precisa ser a inversa (de ambos lados) de A. Então, $BA = I$.

↳ use as questões 8 e 9.

Resolução:

10. (*Bônus*) Dado um espaço vetorial real V, definimos o conjunto

$$V^* := \{f : V \to \mathbb{R} \mid f \text{ é linear}\}.$$

Ou seja, V^* é o conjunto de todas as funções lineares entre V e $\mathbb{R}$. Relembramos que uma função $f : E \to F$, onde E e F são espaços vetoriais, é dita *linear* se para todos $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in E$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ temos $f(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = f(\mathbf{v}) + f(\mathbf{w})$ e $f(\alpha\mathbf{v}) = \alpha f(\mathbf{v})$. Chamamos V^* de *espaço dual* de V.

(a) Mostre que V^* é um espaço vetorial.

Resolução:

(b) Agora, seja $V = \mathbb{R}^n$. Mostre que existe uma bijeção $\varphi : V^* \to V$ tal que , para toda $f \in V^*$ e para todo $\mathbf{v} \in V$, tenhamos

$$f(\mathbf{v}) = \boxed{\langle \varphi(f), \mathbf{v} \rangle.}$$

$\varphi(f)$ representa f.

Dica: Utilize a dimensão finita de $\mathbb{R}^n$ para expandir $\mathbf{v}$ como uma combinação linear dos vetores da base canônica e aplique a linearidade de f.

Resolução: $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$, onde $\{e_1, \dots, e_n\}$ é a base canônica

Em dimensão infinita, esse resultado é conhecido como Teorema da Representação de Riesz.

$$e_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dizemos que $f, g \in V^*$ são iguais, se $f(v) = g(v)\ \forall\, v \in V$.

bijeção: $f : A \to B$ é uma bijeção se:

i) f é injetiva: Dados $a_1, a_2 \in A$, $f(a_1) = f(a_2)$ implica $a_1 = a_2$

ii) f é sobrejetiva: Dado $b \in B$, existe pelo menos um $a \in A$ tal que $f(a) = b$.