Álgebra Linear - Lista de Exercícios 9

Yuri F. Saporito

1. Seja B uma matriz 3×3 com autovalores $\underline{0, 1 \text{ e } 2}$. Com essa informação, ache:

   (a) o posto de B; → pensar no núcleo de B

   (b) o determinante de $B^T B$;

   (c) os autovalores de $B^T B$; → não é possível saber com certeza quais são.

   (d) os autovalores de $(B^2 + I)^{-1}$. mas dá para saber alguma coisa.

   ↳ $\det(B^2 + I - \lambda I)$ ←

2. Ache os autovalores das seguintes matrizes

$$\text{(a) } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}; \text{ (b) } B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \text{ (c) } C = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

3. Descreva todas as matrizes S que diagonalizam as matrizes A e A^{-1}:

   $A = S \Lambda S^{-1}$ $\quad S$ e S^{-1} não são únicas.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

4. Ache Λ e S que diagonalizem A

   $\Lambda = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$ $\quad \Lambda^k = \begin{bmatrix} a^k & 0 \\ 0 & b^k \end{bmatrix}$

$$A = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.9 \\ 0.4 & 0.1 \end{bmatrix}.$$

   → Qual limite de $\boxed{\Lambda^k}$ quando $k \to +\infty$? E o limite de A^k?

   ↳ usar a diagonalização.

5. Seja $Q(\theta)$ a matriz de rotação do ângulo θ em $\mathbb{R}^2$:

   $a + bi$, onde $i^2 = -1$.

   $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

$$Q(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\theta \\ \text{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

   $e^{i\theta} = \cos\theta + i \,\text{sen}\,\theta$.

   Ache os autovalores e autovetores de $Q(\theta)$ (eles podem ser complexos).

6. Suponha que A e B são duas matrizes $n \times n$ com os mesmo autovalores $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ e os mesmos autovetores $x_1, \ldots, x_n$. Suponha ainda que $x_1, \ldots, x_n$ são LI. Prove que $A = B$.

   ↳ formam uma base do $\mathbb{R}^n$,

7. Seja $Q(\theta)$ como na Questão 5. Diagonalize $Q(\theta)$ e mostre que

$$\underline{Q(\theta)^n = Q(n\theta).} \quad (\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)^n = \cos(n\theta) + i\,\text{sen}(n\theta).$$

8. Suponha que G_{k+2} é a média dos dois números anteriores G_{k+1} e G_k. Ache a matriz A que faz com que

$$\begin{bmatrix} G_{k+2} \\ G_{k+1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} G_{k+1} \\ G_k \end{bmatrix}.$$

   (a) Ache os autovalores e autovetores de A;

   (b) Ache o limite de A^n quando $n \to +\infty$;

   (c) Mostre que G_n converge para $2/3$ quando $G_0 = 0$ e $G_1 = 1$.

   $\begin{bmatrix} G_{n+1} \\ G_n \end{bmatrix} = A^n \begin{bmatrix} G_1 \\ G_0 \end{bmatrix}$

9. Ache a solução do sistema de EDOs usando o método de diagonalização:

$$\begin{cases} u_1'(t) = 8u_1(t) + 3u_2(t), \\ u_2'(t) = 2u_1(t) + 7u_2(t), \end{cases}$$

   $A = S \Lambda S^{-1}$

   $\dot{U}(t) = S \Lambda S^{-1} U(t)$

   onde $U(0) = (5, 10)$. $\quad U(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}$ $\quad \dot{U}(t) = A U(t)$ $\quad S^{-1}\dot{U}(t) = \Lambda S^{-1} U(t)$

   $e^{At} U(0)$

   ↳ $V(t) := S^{-1} U(t)$

   $\dot{V}(t) = \Lambda V(t)$

10. Seja $\mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ o espaço vetorial das funções reais de uma variável real. Considere em $\mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ o subespaço

$$S := \operatorname{Span}\left\{e^{2x}\operatorname{sen} x, e^{2x}\cos x, e^{2x}\right\}.$$

e o operador linear $D : S \to \boxed{S}$ definido por $D(f) = f'$. Considere, ainda, as funções $f_1(x) = e^{2x}\operatorname{sen} x$, $f_2(x) = e^{2x}\cos x$ e $f_3(x) = e^{2x}$ em $\mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$. Determine:

(a) a matriz de D em relação à base $\mathcal{B} = \{f_1, f_2, f_3\}$. Lembre-se de que, dada a base $\mathcal{B}$, podemos enxergar os elementos de como vetores em $\mathbb{R}^3$. Por exemplo:

$$(1,2,3)_{\mathcal{B}} = \boxed{f_1 + 2f_2 + 3f_3.}$$

(b) os autovalores de D e as funções de S que são autovetores de D.

$$\left.\begin{array}{l} D(f_1) \\ D(f_2) \\ D(f_3) \end{array}\right\} \text{coluna da } D \text{ na base } \mathcal{B}$$

$$\underbrace{D(a f_1 + b f_2 + c f_3)}$$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}_{\mathcal{B}} \to \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}$$

Ae_i = i-ésima coluna de A na base canônica

$A = \boxed{S}\Lambda\boxed{S^{-1}}$

aplica uma transformação linear em vetores na base dos vetores

pega um vetor na base canônica e cospe um vetor na base dos autovetores

converte de volta da base dos autovetores para a base canônica.