Álgebra Linear - Soluções da Lista de Exercícios 3

Caio Lins e Tiago Silva

20 de agosto de 2021

1. Ache a decomposição LU da matriz:
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Resolução:
Vamos realizar a eliminação Gaussiana até obter uma matriz triangular superior:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\,]{\substack{L_2 - 2L_1 \\ L_3 - 2L_1}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -6 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 - 3L_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = U.$$

Para obter a matriz L, basta observar os coeficientes utilizados para eliminar cada entrada da matriz. Com isso,
$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Portanto,
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Ache a decomposição LU da matriz simétrica:
$$A = \begin{bmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{bmatrix}.$$

Qual condição para a, b, c, d para que A ter quatro pivots?

Resolução:
Novamente, prosseguimos por eliminação Gaussiana.

$$
\begin{bmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{bmatrix}
\xrightarrow{\substack{L_2 - L_1 \\ L_3 - L_1 \\ L_4 - L_1}}
\begin{bmatrix} a & a & a & a \\ 0 & b-a & b-a & b-a \\ 0 & b-a & c-a & c-a \\ 0 & b-a & c-a & d-a \end{bmatrix}
$$

$$
\xrightarrow{\substack{L_3 - L_2 \\ L_4 - L_2}}
\begin{bmatrix} a & a & a & a \\ 0 & b-a & b-a & b-a \\ 0 & 0 & c-b & c-b \\ 0 & 0 & c-b & d-b \end{bmatrix}
$$

$$
\xrightarrow{L_4 - L_3}
\begin{bmatrix} a & a & a & a \\ 0 & b-a & b-a & b-a \\ 0 & 0 & c-b & c-b \\ 0 & 0 & 0 & d-c \end{bmatrix} = U.
$$

Pelos coeficientes utilizados na eliminação, temos

$$
L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.
$$

Pela diagonal de U vemos que, para que A tenha quatro pivôs, é necessário e suficiente que tenhamos:

$$
\begin{cases} a \neq 0 \\ b \neq a \\ c \neq b \\ d \neq c \end{cases}.
$$

3. Ache a uma matriz de permutação P tal que:

   (a) P é 3x3, $P \neq I$ e $P^3 = I$.

   Resolução:
   Intuitivamente, nossa matriz desloca uma casa para cima todas as linhas da matriz sobre a qual ela opera. Ou seja, nossa matriz é

   $$
   P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.
   $$

   Com isso, $P \neq I$ e

   $$
   P^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}
   $$

   $$
   P^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I.
   $$

   (b) S é 4x4 e $S^4 \neq I$

   Resolução:
   Observe que se tomarmos a matriz do item anterior, de fato teremos $P^4 = P \neq I$. Entretanto, precisamos de uma matriz 4×4. Felizmente, basta "imbutir" P em uma matriz identidade 4×4, obtendo, assim,

   $$
   S = \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.
   $$

   Com isso,

   $$
   S^4 = \begin{bmatrix} P^4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = S \neq I.
   $$

4. Seja A uma matriz $4x4$. Quantas entradas de A podem ser escolhidas independentemente caso A seja
   (a) simétrica ($A^T = A$)?

   Resolução:
   Precisamos apenas selecionar os elementos da diagonal e todos aqueles abaixo dela, por exemplo. Logo, o número de entradas que podem ser escolhidas independentemente é 10.

   (b) anti-simétrica ($A^T = -A$)?

   Resolução:
   A resposta é parecida com a do item anterior, porém a diagonal já está determinada, pois deve ser igual a 0. Portanto, apenas 6 entradas podem ser escolhidas independentemente.

5. Suponha que A já é triangular inferior com 1's na diagonal. Mostre que $U = I$.

   Resolução:
   Observe que A pode ser decomposta como $A = AI$, onde A é uma matriz triangular inferior com 1's na diagonal e I é uma matriz triangular superior com diagonal não nula. Portanto, pela unicidade da decomposição LU, temos $U = I$.

6. Seja
$$A \begin{bmatrix} 1 & c & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

   (a) Qual é o número c que leva o segundo pivô a ser 0? O que podemos fazer para resolver tal problema? Ainda é válido $A = LU$?

   Resolução:
   Realizando a primeira eliminação em A obtemos
$$A \xrightarrow{L_2 - 2L_1} \begin{bmatrix} 1 & c & 0 \\ 0 & 4-2c & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}.$$
   Logo, se $c = 2$ temos $4 - 2c = 0$, fazendo aparecer um pivô nulo. Para concertar isso, podemos, antes de começar o processo de eliminação, permutar a segunda e a terceira linhas utilizando a matriz de permutação
$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$
   Com isso, supondo $c = 2$, obtemos a matriz
$$PA = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$
   Então, realizando o primeiro passo da eliminação ficamos com
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 - 3L_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix},$$
   e o segundo pivô não é mais nulo. Continuando o processo de eliminação, obtemos
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 - 2L_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = U.$$
   Dessa forma, não temos mais uma decomcoposição $L = LU$, mas sim $PA = LU$, dada por
$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{U}.$$

(b) Qual é o número c que leva o terceiro pivô a ser 0? É possível resolver esse problema?

Resolução:
Prosseguindo com a eliminação em A, ficamos com

$$A \xrightarrow{L_2 - 2L_1 L_3 - 3L_1} \begin{bmatrix} 1 & c & 0 \\ 0 & 4-2c & 1 \\ 0 & 5-3c & 1 \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{L_3 - \frac{5-3c}{4-2c} L_2} \begin{bmatrix} 1 & c & 0 \\ 0 & 4-2c & 1 \\ 0 & 0 & 1 - \frac{5-3c}{4-2c} \end{bmatrix}.$$

Logo, o terceiro pivô será zero se, e somente se,

$$5 - 3c = 4 - 2c,$$

ou seja, se $c = 1$. Nesse caso, oberve que o problema não tem concerto, pois mesmo que trocássemos a terceira linha com a segunda, continuaríamos com um pivô nulo, porém, agora, seria o segundo. Analogamente, se trocarmos a terceira linha com a primeira, o primeiro pivô passará a ser nulo.

7. Se A e B são simétricas, quais dessas matrizes são também simétricas:

(a) $A^2 - B^2$;

Resolução:
Observe que

$$\begin{aligned} \left(A^2 - B^2\right)^\intercal &= \left(A^2\right)^\intercal - \left(B^2\right)^\intercal \\ &= (AA)^\intercal - (BB)^\intercal \\ &= (A^\intercal A^\intercal) - (B^\intercal B^\intercal) \\ &= (AA) - (BB) \\ &= A^2 - B^2. \end{aligned}$$

Logo, $A^2 - B^2$ também é simétrica.

(b) $(A+B)(A-B)$;

Resolução:
Observe que $(A+B)(A-B) = A^2 + BA - AB + B^2$. Já sabemos que $A^2 - B^2$ é simétrica. Como a soma de matrizes simétricas é simétrica, vamos verificar se $BA - AB$ é simétrica:

$$\begin{aligned} (BA - AB)^\intercal &= (BA)^\intercal - (AB)^\intercal \\ &= A^\intercal B^\intercal - B^\intercal A^\intercal \\ &= AB - BA \\ &= -(BA - AB). \end{aligned}$$

Sendo assim, $BA - AB$ é antissimétrica e, com isso, a menos que A e B comutem, de modo que $BA - AB = 0$, a matriz $(A+B)(A-B)$ não será simétrica.

(c) ABA;

Resolução:
Temos

$$\begin{aligned} (ABA)^\intercal &= A^\intercal B^\intercal A^\intercal \\ &= ABA. \end{aligned}$$

Logo, ABA é simétrica.

(d) $ABAB$.

Resolução:
Calculando a transposta, obtemos

$$\begin{aligned}(ABAB)^\top &= B^\top A^\top B^\top A^\top \\ &= BABA.\end{aligned}$$

Portanto, a menos que A e B comutem, $ABAB$ não será simétrica.

8. Prove que é sempre possível escrever $A = B + C$, onde B é simétrica e C anti-simétrica. *Dica: B e C são combinações simples de A e A^T.*

Resolução:
Tome

$$\begin{cases} B = \frac{1}{2}\left(A + A^\top\right) \\ C = \frac{1}{2}\left(A - A^\top\right) \end{cases}.$$

Com isso, claramente temos $A = C + B$ e, ainda,

$$\begin{aligned} B^\top &= \frac{1}{2}\left(A + A^\top\right)^\top = \frac{1}{2}\left(A^\top + A\right) = B, \\ C^\top &= \frac{1}{2}\left(A - A^\top\right)^\top = \frac{1}{2}\left(A^\top - A\right) = -C \end{aligned},$$

ou seja, B é simétrica e C é antissimétrica.

9. Seja A uma matriz em blocos:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

onde cada A_{ii} é quadrada $n \times n$ e as matrizes A_{11} e $A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$ possuem decomposição LU. Ache L e U em blocos tal que $A = LU$:

$$L = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} \text{ e } U = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{bmatrix},$$

onde L_{11}, L_{22} são triangulares inferiores com 1's na diagonal e U_{11}, U_{22} são triangulares superiores.

Resolução:
Vamos fazer uma espécie de "eliminação em blocos" na matriz A. Perceba que

$$\underbrace{\begin{bmatrix} I & 0 \\ -A_{21}A_{11}^{-1} & I \end{bmatrix}}_{\text{Matriz de eliminação}} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{bmatrix}.$$

Com isso, multiplicando ambos lados à esquerda pela inversa da matriz de eliminação temos

$$A = \begin{bmatrix} I & 0 \\ A_{21}A_{11}^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{bmatrix}.$$

Sejam, agora, L_1, L_2 matrizes triangulares inferiores com 1's na diagonal e U_1, U_2 matrizes triangulares superiores tais que

$$\begin{cases} A_{11} = L_1U_1 \\ A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} = L_2U_2 \end{cases},$$

as quais existem por hipótese. Com isso, temos

$$
\begin{aligned}
A &= \begin{bmatrix} I & 0 \\ A_{21}A_{11}^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} I & 0 \\ A_{21}A_{11}^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1U_1 & A_{12} \\ 0 & L_2U_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} I & 0 \\ A_{21}A_{11}^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1 & 0 \\ 0 & L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 & L_1^{-1}A_{12} \\ 0 & U_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} L_1 & 0 \\ A_{21}U_1^{-1} & L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 & L_1^{-1}A_{12} \\ 0 & U_2 \end{bmatrix} \\
&= LU.
\end{aligned}
$$