Álgebra Linear - Soluções da Lista de Exercícios 5

Caio Lins e Tiago Silva

3 de setembro de 2021

Observação. Escreveremos $(x_1, \ldots, x_n)$, com parênteses, para denotar um vetor em $\mathbb{R}^n$ cujas coordenadas na base canônica são $x_1, \ldots, x_n$. Ou seja, $(x_1, \ldots, x_n)$ é para ser entendido como a mesma coisa que

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Utilizaremos essa notação para evitar o uso de transposição ao definir um vetor. Ao invés de escrevermos $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{bmatrix}^\mathsf{T}$, podemos agora escrever apenas $\mathbf{v} = (x_1, \ldots, x_n)$.

1. Explique porque essas afirmações são falsas

   (a) A solução completa é qualquer combinação linear de x_p e x_n.

   Resolução:
   Se o sistema $Ax = b$ tem $b = 0$, isso é verdade, pois qualquer solução particular está no núcleo de A, o qual é um espaço vetorial. Se, por outro lado, tivermos $b \neq 0$, a afirmação está errada. De fato, tome a combinação linear de x_p e x_n dada por $2 \cdot x_p + 0 \cdot x_n$. Então

   $$A(2x_p) = 2Ax_p = 2b \neq b.$$

   Logo, ela não é uma solução.

   (b) O sistema $Ax = b$ tem no máximo uma solução particular.

   Resolução:
   Se há alguma solução particular e o núcleo de A é não vazio, então há infinitas soluções.

   (c) Se A é inversível, não existe nenhuma solução x_n no núcleo.

   Resolução:
   Na verdade, sempre existe a solução trivial $x = 0$ no núcleo.

2. Sejam

   $$U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \text{ e } c = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

   Use a eliminação de Gauss-Jordan para reduzir as matrizes $[U\ 0]$ e $[U\ c]$ para $[R\ 0]$ e $[R\ d]$. Resolva $Rx = 0$ e $Rx = d$

   Resolução:
   Vamos trabalhar de uma vez com a matriz aumentada $[U\ c]$.

   $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 5 \\ 0 & 0 & 4 & | & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 - \frac{3}{4}L_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & | & -1 \\ 0 & 0 & 4 & | & 8 \end{bmatrix}$$
   $$\xrightarrow{L_2/4} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & | & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 \end{bmatrix}.$$

   Como U possui 2 pivôs, pelo Teorema do Posto sabemos que seu núcleo tem dimensão 1. Como a segunda coluna não tem pivô, a variável livre é x_2. Portanto, para encontrar uma base para o núcleo podemos definir $x_2 = 1$ e, com isso, concluímos que $x_1 = -2$ e $x_3 = 0$. Ou seja, a solução de $Rx = 0$ é o span do vetor $(-2, 1, 0)$.

Para obter uma solução particular de $Rx = d$, novamente definimos $x_2 = 1$ e, dessa vez, obtemos $x_1 = -3$ e $x_3 = 2$. Logo, a solução completa de $Rx = d$ é dada por

$$(-3, 1, 2) + t(-2, 1, 0), t \in \mathbb{R}.$$

3. Suponha que $Ax = b$ e $Cx = b$ tenham as mesmas soluções (completas) para todo b. Podemos concluir que $A = C$?

Resolução:
Podemos. Seja $\mathbf{e}_i$ o i-ésimo vetor da base canônica e defina $\mathbf{a}_i = A\mathbf{e}_i$, ou seja, $\mathbf{a}_i$ é a i-ésima coluna de A. Por hipótese, $\mathbf{e}_i$ deve ser solução do sistema $C\mathbf{x} = \mathbf{a}_i$, porém isso implica em $C\mathbf{e}_i = \mathbf{a}_i$, ou seja, a i-ésima coluna de C é igual à i-ésima coluna de A. Como i foi tomado arbitrariamente, $A = C$.

4. Ache o maior número possível de vetores linearmente independentes dentre os vetores:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Resolução:
Vamos realizar a eliminação de Gauss-Jordan em uma matriz que tem esses vetores como colunas. Com isso, obteremos o posto dessa matriz, ou seja, o maior número de colunas L.I. que ela possui.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 + L_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3 + L_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_4 + L_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Portanto, essa matriz tem 3 pivôs e, assim, esse é o maior número possível de vetores linearmente independentes dentre suas colunas.

5. Ache uma base para o plano $x - 2y + 3z = 0$ em $\mathbb{R}^3$. Encontre então uma base para a interseção desse plano com o plano xy. Ache ainda uma base para todos os vetores perpendiculares a esse plano.

Resolução:
Seja Π o plano em questão. Observe que esse plano é justamente o núcleo da matriz

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Como ela já está em sua forma escalonada reduzida, podemos obter seu núcleo diretamente, pois ele será o span dos vetores

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{w} = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Sendo assim, $\{\mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ é uma base para Π.

Os vetores $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ pertencentes à interseção entre Π e o plano xy são justamente os que satisfazem $x - 2y = 0$, ou seja,

$$x = 2y.$$

Portanto, eles são da forma $(2t, t), t \in \mathbb{R}$. É evidente que o vetor $(2, 1)$ constitui uma base para esse conjunto.

Agora, afirmamos que um vetor é perpendicular a Π se, e somente se, ele é perpendicular a $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$. De fato, como $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ pertencem a Π, naturalmente um vetor perpendicular a Π será perpendicular a $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$. Reciprocamente, se $\mathbf{u}$ é tal que $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle = 0$, então, dado $\mathbf{x} = \alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w} \in \Pi$, temos

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle &= \langle \mathbf{u}, \alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w} \rangle \\ &= \alpha\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \beta\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle \\ &= \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, o conjunto dos vetores perpendiculares a Π será justamente o núcleo da matriz

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{v} & \mathbf{w} \end{bmatrix}^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}^\mathsf{T} \\ \mathbf{w}^\mathsf{T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Vamos obter a forma escalonada reduzida de A:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} &\xrightarrow{L_2 + \frac{3}{2}L_1} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow{L_1 - \frac{2}{3}L_2} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow{\substack{L_1 \cdot \frac{1}{2} \\ L_2 \cdot \frac{2}{3}}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Logo, concluímos que o vetor $(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, 1)$ constitui uma base para o núcleo de A e, assim, para o conjunto dos vetores perpendiculares a Π.

6. Ache (na sua forma mais simples) a matriz que é o produto das matrizes de posto 1 $\mathbf{u}\mathbf{v}^T$ e $\mathbf{w}\mathbf{z}^T$? Qual seu posto?

Resolução:
Utilizando o fato de que $\mathbf{v}^\mathsf{T}\mathbf{w}$ é um número real, temos

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}\mathbf{v}^\mathsf{T})(\mathbf{w}\mathbf{z}^\mathsf{T}) &= \mathbf{u}(\mathbf{v}^\mathsf{T}\mathbf{w})\mathbf{z}^\mathsf{T} \\ &= (\mathbf{v}^\mathsf{T}\mathbf{w})(\mathbf{u}\mathbf{z}^\mathsf{T}). \end{aligned}$$

Sabemos que $\mathbf{u}\mathbf{z}^\mathsf{T}$ é uma matriz de posto 1. Logo, por ser múltipla de uma matriz de posto 1, $(\mathbf{u}\mathbf{v}^\mathsf{T})(\mathbf{w}\mathbf{z}^\mathsf{T})$ tem posto 1.

7. Suponha que a coluna j de B é uma combinação linear das colunas anteriores de B. Mostre que a coluna j de AB é uma combinação linear das colunas anteriores de AB. Conclua que posto$(AB) \leq$ posto(B).

Resolução:
Vamos supor que A é $m \times n$ e B é $n \times p$. Sejam $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ as colunas de A e $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_p$ as colunas de B. Pelo enunciado, sabemos que existem $\alpha_1, \dots, \alpha_{j-1} \in \mathbb{R}$, não todos nulos, tais que

$$\mathbf{b}_j = \sum_{i=1}^{j-1} \alpha_i \mathbf{b}_i.$$

Multiplicando essa equação por A e usando a linearidade da multiplicação matricial, obtemos

$$A\mathbf{b}_j = \sum_{i=1}^{j-1} \alpha_i (A\mathbf{b}_i),$$

ou seja, a j-ésima coluna de AB é combinação linear das colunas anteriores de AB.

Com isso, concluímos que o número de colunas L.D. de AB é maior ou igual ao número de colunas L.D. de B. Como o posto de uma matriz é o maior número de colunas linearmente independentes que ela possui, isso implica posto$(AB) \leq$ posto(B).

8. O item anterior nos dá posto$(B^T A^T) \leq$ posto(A^T). É possível concluir que posto$(AB) \leq$ posto(A)?

Resolução:
É possível. De fato, como posto$(M^\mathsf{T}) =$ posto(M) para toda matriz M, temos

$$\text{posto}(AB) = \text{posto}(AB)^\mathsf{T} = \text{posto}(B^\mathsf{T} A^\mathsf{T}) \leq \text{posto}(A^\mathsf{T}) = \text{posto}(A).$$

9. Suponha que A e B são matrizes quadradas e $AB = I$. Prove que posto$(A) = n$. Conclua que B precisa ser a inversa (de ambos lados) de A. Então, $BA = I$.

Resolução:
Pela questão anterior, temos

$$n = \text{posto}(I) = \text{posto}(AB) \leq \text{posto}(A).$$

Como A é $n \times n$, também temos posto$(A) \leq n$ e, com isso, posto$(A) = n$. Sendo assim, A é uma matriz invertível. Logo,

$$B = IB = A^{-1}AB = A^{-1}I = A^{-1}.$$

10. (*Bônus*) Dado um espaço vetorial real V, definimos o conjunto

$$V^* := \{f : V \to \mathbb{R} \mid f \text{ é linear}\}.$$

Ou seja, V^* é o conjunto de todas as funções lineares entre V e $\mathbb{R}$. Relembramos que uma função $f : E \to F$, onde E e F são espaços vetoriais, é dita *linear* se para todos $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in E$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ temos $f(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = f(\mathbf{v}) + f(\mathbf{w})$ e $f(\alpha\mathbf{v}) = \alpha f(\mathbf{v})$. Chamamos V^* de *espaço dual* de V.

(a) Mostre que V^* é um espaço vetorial.

Resolução:
Podemos definir a soma de funcionais (funções lineares que têm $\mathbb{R}$ como contradomínio são chamadas de *funcionais lineares*) de uma maneira natural. Dadas $f, g \in V^*$, definimos

$$\begin{aligned} f + g : V &\to \mathbb{R} \\ \mathbf{v} &\mapsto f(\mathbf{v}) + g(\mathbf{v}). \end{aligned}$$

Com isso, a soma de dois funcionais lineares é um funcional linear . Além disso, definimos de maneira análoga a multiplicação de um funcional por um escalar. Dada $f \in V^*$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, definimos

$$\begin{aligned} \alpha f : V &\to \mathbb{R} \\ \mathbf{v} &\mapsto \alpha f(\mathbf{v}). \end{aligned}$$

Portanto, a multiplicação de um funcional linear por um escalar é um funcional linear.

(b) Agora, seja $V = \mathbb{R}^n$. Mostre que existe uma bijeção $\varphi : V^* \to V$ tal que , para toda $f \in V^*$ e para todo $\mathbf{v} \in V$, tenhamos

$$f(\mathbf{v}) = \langle \varphi(f), \mathbf{v} \rangle.$$

Dica: Utilize a dimensão finita de $\mathbb{R}^n$ para expandir $\mathbf{v}$ como uma combinação linear dos vetores da base canônica e aplique a linearidade de f.

Resolução:
Denotanto por $\mathbf{e}_i$ o i-ésimo vetor da base canônica, dado $\mathbf{v} \in V$ podemos escrever

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{e}_i,$$

para alguns $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$. Com isso, se $f \in V^*$, pela sua linearidade podemos escrever

$$\begin{aligned}
f(\mathbf{v}) &= f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{e}_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i \mathbf{e}_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(\mathbf{e}_i) \\
&= \begin{bmatrix} f(\mathbf{e}_1) & \cdots & f(\mathbf{e}_n) \end{bmatrix} \mathbf{v}.
\end{aligned}$$

Perceba que, com isso, conhecendo os n valores $f(\mathbf{e}_i), \ldots, f(\mathbf{e}_n)$ podemos calcular $f(\mathbf{v})$ para qualquer vetor $\mathbf{v} \in V$, realizando o produto interno

$$\begin{bmatrix} f(\mathbf{e}_i) \\ \vdots \\ f(\mathbf{e}_n) \end{bmatrix}^{\mathsf{T}} \mathbf{v}.$$

Sendo assim, podemos definir uma função

$$\begin{aligned}
\varphi : V^* &\to V \\
f &\mapsto \varphi(f) = (f(\mathbf{e}_1), \ldots, f(\mathbf{e}_n)).
\end{aligned}$$

Pela discussão anterior, já temos a identidade

$$f(\mathbf{v}) = \langle \varphi(f), \mathbf{v} \rangle$$

para toda $f \in V^*$ e $\mathbf{v} \in V$. Resta mostrar que φ é uma bijeção.

Vamos mostrar, primeiro, que φ é sobrejetiva. Dado $\mathbf{u} = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in V$, devemos encontrar uma $g \in V^*$ tal que $\varphi(g) = \mathbf{u}$. Ora, definindo g por $g(\mathbf{v}) = \mathbf{u}^{\mathsf{T}}\mathbf{v}$ para todo $\mathbf{v} \in V$, claramente $g \in V^*$ e, ainda,

$$g(\mathbf{e}_i) = \mathbf{u}^{\mathsf{T}}\mathbf{e}_i = \beta_i$$

para todo $i = 1, \ldots, n$. Logo, $\varphi(g) = \mathbf{u}$.

Para mostrar a injetividade de φ, vamos supor que existem $f, g \in V^*$ tais que $\varphi(f) = \varphi(g)$. Pela definição da φ, isso implica em $f(\mathbf{e}_i) = g(\mathbf{e}_i)$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Com isso, dado qualquer $\mathbf{v} \in V$ com $\mathbf{v} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, temos, por um desenvolvimento feito anteriormente,

$$f(\mathbf{v}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(\mathbf{e}_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i g(\mathbf{e}_i) = g(\mathbf{v}).$$

Portanto, $f = g$ e φ é injetiva, o que conclui a demonstração. $\square$

Em dimensão infinita, esse resultado é conhecido como Teorema da Representação de Riesz.