Proposição 1 (Multiplicação de matrizes). *Suponha que A é uma matriz $m \times n$ e que B é uma matriz $n \times p$. Se $A_{j,\cdot}$ denota a j-ésima linha da matriz A, mostre que*

$$(AB)_{j,\cdot} = A_{j,\cdot}B;$$

isto é, que a j-ésima linha da matriz AB é precisamente o produto entre a j-ésima linha da matriz A e a matriz B.

Resolução:

Sejam $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ e $B = (b_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$. Como, por definição,

$$(AB)_{j,k} = \sum_{1 \leq l \leq n} a_{jl} b_{jk}$$

e, porquanto $A_{j,\cdot} = \begin{bmatrix} a_{j1} & \cdots a_{jn} \end{bmatrix}$,

$$(A_{j,\cdot}B)_k = \sum_{1 \leq l \leq n} a_{jl} b_{lk},$$

temos que $(A_{j,\cdot}B)_k = (AB)_{j,k}$ para $k \in \{1, \cdots, p\}$ e, assim, $A_{j,\cdot}B = (AB)_{j,\cdot}$. $\square$

Proposição 2 (Operações elementares). *Seja B uma matriz $m \times n$ e denotemos por B' a realização de uma operação elementar (troca de linhas, multiplicação de linha por escalar, soma de linhas) sobre B. Se, assim, escrevermos I para a matriz identidade, então chamamos I' de matriz elementar*

Nesse sentido, mostre que $(BA)' = B'A$. Em particular, $A' = (IA)' = I'A$ e, portanto, há uma equivalência entre efetuar uma operação elementar sobre A e multiplicar A por uma matriz elementar.

Resolução:

Pela Proposição 1, temos que, se trocarmos as linhar i e j da matriz B, então trocamos as linhas i e j da matriz BA; isto é, $(BA)' = B'A$ para a troca de linhas. Além disso, se trocamos a linha i pela soma entre as linhas i e j na matriz B, então a linha i da matriz $(BA)'$ será, pela Proposição 1, igual a $B'_{i,\cdot}A = (B_{i,\cdot} + B_{j,\cdot})A = (BA)_{i,\cdot} + (BA)_{j,\cdot}$, e $(BA)' = B'A$ para a soma de linhas. Enfim, se multiplicamos a linha i da matriz B por $\alpha \in \mathbb{R}$ para escrever B', então, também pela Proposição 1, multiplicamos a linha i da matriz BA por α, e $(BA)' = B'A$ para a multiplicação de linha por um escalar. Portanto, $(BA)' = B'A$ para qualquer operação elementar. $\square$

Exercício 1 (Desigualdade de Cauchy)**.** Sejam x e y vetores em $\mathbb{R}^n$. Mostre que

$$\langle x, y\rangle(\|x\| + \|y\|) \leq \|x\|\|y\|\|x + y\| \tag{1}$$

e que a desigualdade é falsa se escrevermos $|\langle x, y\rangle|$ em vez de $\langle x, y\rangle$.

Resolução:

Perceba, inicialmente, que, se $\langle x, y\rangle \leq 0$, então

$$\langle x, y\rangle(\|x\| + \|y\|) \leq 0 \leq \|x\|\|y\|\|x + y\|.$$

Assim, consideraremos, daqui em diante, que $\langle x, y\rangle > 0$. Nesse caso, ambos os membros da desigualdade da Equação (1) são positivos e, portanto, ela é equivalente a

$$\langle x, y\rangle^2(\|x\| + \|y\|)^2 \leq \|x\|^2\|y\|^2\|x + y\|^2. \tag{2}$$

Escrevemos, nesse sentido, $a = \|x\|$ e $b = \|y\|$ e, munidos de $\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y\rangle = \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2$, verificamos que, pela Equação (2),

$$\begin{aligned} \langle x, y\rangle(a + b)^2 \leq a^2b^2(a^2 + 2\langle x, y\rangle + b^2) \iff \\ \iff a^2(\langle x, y\rangle^2 - a^2b^2) + 2\langle x, y\rangle ab(\langle x, y\rangle - ab) + b^2(\langle x, y\rangle^2 - a^2b^2) \leq 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Ora, por hipótese, $\langle x, y\rangle > 0$ e, pela desigualdade de Cauchy, $\langle x, y\rangle \leq ab$. Logo, cada membro da soma da Equação (3) é não positivo e, assim, ela é verdadeira; em particular, também o é a Equação (1).

Agora, para verificar que a desigualdade é falsa se escrevermos $|\langle x, y\rangle|$ em vez de $\langle x, y\rangle$, faça $y = -x$ e $x \neq 0$. Com isso, $\|\langle x, -x\rangle\|(\|x\| + \|y\|) > 0 = \|x\|\| - x\|\|x + (-x)\|$. $\square$

Exercício 2. Calcule o cosseno do ângulo entre os vetores $\lambda_1(t) = ((-1)^i t)_{1\leq i\leq n}$ e $\lambda_2(t) = (2t)_{1\leq i\leq n}$ em $\mathbb{R}^n$.

Resolução:

Temos, por definição, que o cosseno do ângulo θ entre os vetores λ_1 e λ_2 é

$$\cos\theta = \frac{\langle \lambda_1, \lambda_2\rangle}{\|\lambda_1\|\|\lambda_2\|}.$$

Dessa maneira,

$$\|\lambda_1(t)\| = \left(\sum_{1\leq i\leq n} (-1)^{2i} t^2\right)^{1/2} = \sqrt{nt^2},$$

$$\|\lambda_2(t)\| = \left(\sum_{1\leq i\leq n} (2t)^2\right)^{1/2} = \sqrt{4nt^2}$$

e

$$\langle \lambda_1(t), \lambda_2(t)\rangle = \sum_{1\leq i\leq n} 2(-1)^i t^2 = \begin{cases} 0, & \text{se } n \text{ é par;} \\ -2t^2, & \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Portanto,

$$\cos\theta = \begin{cases} 0, & \text{se } n \text{ é par;} \\ -\frac{1}{n}, & \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

□