

Álgebra Linear - Lista de Exercícios 4

escreva seu nome aqui

1. Sejam S e T dois subespaços de um espaço vetorial V .

(a) Defina $S + T = \{s + t ; s \in S \text{ e } t \in T\}$. Mostre que $S + T$ é um subespaço vetorial.

Resolução:

(b) Defina $S \cup T = \{x ; x \in S \text{ ou } x \in T\}$. Argumente que $S \cup T$ não é necessariamente um subespaço vetorial.

Resolução:

(c) Se S e T são retas no \mathbb{R}^3 , o que é $S + T$ e $S \cup T$?

Resolução:

2. Como o núcleo $N(C)$ é relacionado aos núcleos $N(A)$ e $N(B)$, onde $C = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$?

Resolução:

3. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & 4 & 1 & 7 \\ 2 & -2 & 11 & -3 \end{bmatrix}.$$

(a) Ache a sua forma escalonada reduzida.

Resolução:

(b) Qual é o posto dessa matriz?

Resolução:

(c) Ache uma solução especial para a equação $Ax = 0$. **Resolução:**

4. Ache a matrizes A_1 e A_2 (não triviais) tais que $\text{posto}(A_1 B) = 1$ e $\text{posto}(A_2 B) = 0$ para $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

5. Verdadeiro ou Falso:

(a) O espaço das matrizes simétricas é subespaço.

Resolução:

- (b) O espaço das matrizes anti-simétricas é um subespaço.

Resolução:

- (c) O espaço das matrizes não-simétricas ($A^T \neq A$) é um subespaço.

Resolução:

6. Se A é 4×4 e inversível, descreva todos os vetores no núcleo da matriz $B = \begin{bmatrix} A & A \end{bmatrix}$ (que é 4×8).

Resolução:

7. Mostre por contra-exemplos que as seguintes afirmações são falsas em geral:

- (a) A e A^T tem os mesmo núcleos.

Resolução:

- (b) A e A^T tem as mesmas variáveis livres.

Resolução:

- (c) Se R é a forma escalonada de A , então R^T é a forma escalonada de A .

Resolução:

8. Construa uma matriz cujo espaço coluna contenha $(1, 1, 5)$ e $(0, 3, 1)$ e cujo núcleo contenha $(1, 1, 2)$.

Resolução:

9. Construa uma matriz cujo núcleo contenha todos os múltiplos de $(4, 3, 2, 1)$.

Resolução:

10. (*Bônus*) Dado um espaço vetorial real V , definimos o conjunto

$$V^* := \{f : V \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ é linear}\}.$$

Ou seja, V^* é o conjunto de todas as funções lineares entre V e \mathbb{R} . Relembramos que uma função $f : E \rightarrow F$, onde E e F são espaços vetoriais, é dita *linear* se para todos $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in E$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ temos $f(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = f(\mathbf{v}) + f(\mathbf{w})$ e $f(\alpha\mathbf{v}) = \alpha f(\mathbf{v})$. Chamamos V^* de *espaço dual* de V .

- (a) Mostre que V^* é um espaço vetorial.

Resolução:

- (b) Agora, seja $V = \mathbb{R}^n$. Mostre que existe uma bijeção $\varphi : V^* \rightarrow V$ tal que, para toda $f \in V^*$ e para todo $\mathbf{v} \in V$, tenhamos

$$f(\mathbf{v}) = \langle \varphi(f), \mathbf{v} \rangle.$$

Dica: Utilize a dimensão finita de \mathbb{R}^n para expandir \mathbf{v} como uma combinação linear dos vetores da base canônica e aplique a linearidade de f .

Resolução:

Em dimensão infinita, esse resultado é conhecido como [Teorema da Representação de Riesz](#).