Álgebra Linear - Lista de Exercícios 10

Yuri F. Saporito

↪ $L_2 - bL_1 = \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1-b^2 \end{bmatrix}$

1. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & b \\ b & 1 \end{bmatrix}$.

   → supondo a letra a

   (a) Ache b tal que A tenha um autovalor negativo. → fazer o pol. característico e achar as raízes em termos de b

   (b) Como podemos concluir que A precisa ter um pivô negativo?

   (c) Como podemos concluir que A não pode ter dois autovalores negativos?

2. Em quais das seguintes classes as matrizes A e B abaixo pertencem: invertível, ortogonal, projeção, permutação, diagonalizável, Markov?

   ↳ permutação das linhas de I

   ↳ entradas ≥ 0 e $\sum_i = 1$ coluna

   ↳ $P^2 = P$

   $PP^T = I$?

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } B = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

   Quais das seguintes fatorações são possíveis para A e B? $\underline{LU}$ ↳ triangular superior, QR (ortogonal), $\underline{S\Lambda S^{-1}}$ → diagonalizável ou $Q\Lambda Q^T$? ↳ teorema espectral

3. Complete a matriz A abaixo para que seja de Markov e ache o autovetor estacionário. Sua conclusão é válida para qualquer matriz simétrica de Markov A? Por quê? ↳ correspondente ao autovalor 1

   ↳ toda matriz simétrica de Markov tem esse vetor como autovetor estacionário?

$$A = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 0.6 & 0.3 \\ * & * & * \end{bmatrix}$$

   $Av = v$

4. Dizemos que $\mathcal{M}$ é um grupo de matrizes invertíveis se $A, B \in \mathcal{M}$ implica $AB \in \mathcal{M}$ e $A^{-1} \in \mathcal{M}$. Quais dos conjuntos abaixo é um grupo?

   Ex: $\mathcal{M} := \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}, a, b \neq 0 \right\}$

   ↓ inversa

   $\begin{bmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & b^{-1} \end{bmatrix}$

   (a) O conjunto das matrizes positivas definidas; ↳ $x^TAx > 0 \ \forall x \neq 0 \in \mathbb{R}^n$.

   (b) o conjunto das matrizes ortogonais;

   (c) o conjunto $\{e^{tC} \ ; \ t \in \mathbb{R}\}$, para uma matriz C fixa;

   (d) o conjunto das matrizes com determinante igual a 1.

5. Sejam A e B matrizes simétricas e positivas definidas. Prove que os autovalores de AB são positivos. Podemos dizer que AB é simétrica e positiva definida? ↳ usar o teo. Espectral e a def. de pos. definida.

6. Ache a forma quadrática associada à matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$. Qual o sinal dessa forma quadrática? Positivo, negativo ou ambos? ↳ usar a def.

   $f(x,y) = [x \ y]\, A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

   ↳ Olhar slide.

7. Prove os seguintes fatos:

   (a) Se A e B são similares, então A^2 e B^2 também o são. A é similar a B ($A \sim B$) se $\exists M$ invertível tal que $A = MBM^{-1}$

   (b) A^2 e B^2 podem ser similares sem A e B serem similares. ↳ dar um exemplo

   (c) $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ é similar à $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$. ↳ diagonalizar

   (d) $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ não é similar à $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

   ↳ isso não é diag.

8. Ache os valores singulares (como na decomposição SVD) da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

9. Suponha que as colunas de A sejam $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n$ que são vetores ortogonais com comprimentos $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$. Calcule A^TA. Ache a decomposição SVD de A.

   $\Rightarrow w_i^T w_i = \sigma_i^2$

A autovalores distintos $\Rightarrow$ diagonalizável
Autovalores repetidos $\Rightarrow$ Pode ser, ou não

$A=\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}$: $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$

$v_1 = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ $v_2 = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$

$A = S\Lambda S^{-1}$, onde $S = I$

$A=\begin{bmatrix}4&1\\0&4\end{bmatrix}$ $p_A(\lambda) = (4-\lambda)^2$
$\lambda = 4$ é o único autovalor

$A - 4I = \begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$, que só tem "um" vetor no núcleo

Teorema espectral: Se A é simétrica, então:

- Autovalores são reais.
- Autovetores de autovalores diferentes são ortogonais
- A é diagonalizável.
  - $A = S\Lambda S^{-1}$
    - matriz com colunas são ortogonais.

Podemos escolher os autovetores de modo a termos $A = Q\Lambda Q^T$, com Q ortogonal.