

# Álgebra Linear - Lista de Exercícios 1

escreva seu nome aqui

1. Quais condições para  $y_1, y_2$  e  $y_3$  fazem com que os pontos  $(0, y_1)$ ,  $(1, y_2)$  e  $(2, y_3)$  caiam numa reta?

**Resolução:**

2. Se  $(a, b)$  é um múltiplo de  $(c, d)$  e são todos não-zeros, mostre que  $(a, c)$  é um múltiplo de  $(b, d)$ . O que isso nos diz sobre a matriz

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}?$$

**Resolução:**

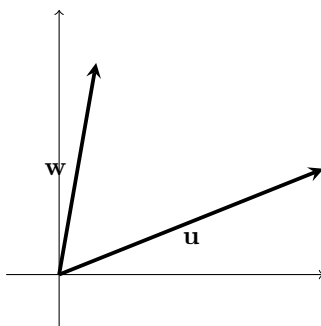
3. Se  $\mathbf{w}$  e  $\mathbf{v}$  são vetores unitários, calcule os produtos internos de (a)  $\mathbf{v}$  e  $-\mathbf{v}$ ; (b)  $\mathbf{v} + \mathbf{w}$  e  $\mathbf{v} - \mathbf{w}$ ; (c)  $\mathbf{v} - 2\mathbf{w}$  e  $\mathbf{v} + 2\mathbf{w}$ .

**Resolução:**

4. Se  $\|\mathbf{v}\| = 5$  e  $\|\mathbf{w}\| = 3$ , quais são o menor e maior valores possíveis para  $\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|$ ? E para  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ ?

**Resolução:**

5. Considere o desenho dos vetores  $\mathbf{w}$  e  $\mathbf{v}$  abaixo. Hachure as regiões definidas pelas combinações lineares  $c\mathbf{v} + d\mathbf{w}$  considerando as seguintes restrições:  $c + d = 1$  (não necessariamente positivos),  $c, d \in [0, 1]$  e  $c, d \geq 0$  (note que são três regiões distintas).



**Resolução:**

6. É possível que três vetores em  $\mathbb{R}^2$  tenham  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} < 0$ ,  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} < 0$  e  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} < 0$ ? Argumente.

**Resolução:**

7. Sejam  $x, y, z$  satisfazendo  $x + y + z = 0$ . Calcule o ângulo entre os vetores  $(x, y, z)$  e  $(z, x, y)$ .

**Resolução:**

8. Resolva o sistema linear abaixo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}.$$

Escreva a solução  $\mathbf{x}$  como uma matriz  $A$  vezes o vetor  $\mathbf{b}$ .

**Resolução:**

9. Repita o problema acima para a matriz:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

10. Considere a equação de recorrência  $-x_{i+1} + 2x_i - x_{i-1} = i$  para  $i = 1, 2, 3, 4$  com  $x_0 = x_5 = 0$ . Escreva essas equações em notação matricial  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  e ache  $\mathbf{x}$ .

**Resolução:**

11. (Bônus) Use o seguinte código em `numpy` para gerar um vetor aleatório `v = numpy.random.normal(size=[3,1])` em  $\mathbb{R}^3$ . Fazendo `u = v / ||v||` criamos então um vetor unitário aleatório. Crie 30 outros vetores unitários aleatórios `u_j` (use `numpy.random.normal(size=[3,30])`). Calcule a média dos produtos internos  $|\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_j|$  e compare com o valor exato  $\frac{1}{\pi} \int_0^\pi |\cos \theta| d\theta = \frac{2}{\pi}$ .

**Resolução:**