Álgebra Linear - Lista de Exercícios 10

escreva seu nome aqui

4 de novembro de 2021

1. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & b \\ b & 1 \end{bmatrix}$.

   (a) Ache b tal que A tenha um autovalor negativo.

   Resolução:

   (b) Como podemos concluir que A precisa ter um pivô negativo?

   Resolução:

   (c) Como podemos concluir que A não pode ter dois autovalores negativos?

   Resolução:

   ---

2. Em quais das seguintes classes as matrizes A e B abaixo pertencem: invertível, ortogonal, projeção, permutação, diagonalizável, Markov?

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } B = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

   Quais das seguintes fatorações são possíveis para A e B? LU, QR, $S\Lambda S^{-1}$ ou $Q\Lambda Q^T$?

   Resolução:

   ---

3. Complete a matriz A abaixo para que seja de Markov e ache o autovetor estacionário. Sua conclusão é válida para qualquer matriz simétrica de Markov A? Por quê?

$$A = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 0.6 & 0.3 \\ * & * & * \end{bmatrix}$$

   Resolução:

   ---

4. Dizemos que $\mathcal{M}$ é um grupo de matrizes invertíveis se $A, B \in \mathcal{M}$ implica $AB \in \mathcal{M}$ e $A^{-1} \in \mathcal{M}$. Quais dos conjuntos abaixo é um grupo?

   (a) O conjunto das matrizes positivas definidas;

   (b) o conjunto das matrizes ortogonais;

   (c) o conjunto $\{e^{tC} \ ; \ t \in \mathbb{R}\}$, para uma matriz C fixa;

   (d) o conjunto das matrizes com determinante igual a 1.

   Resolução:

(a)
(b)
(c)
(d)

---

5. Sejam A e B matrizes simétricas e positivas definidas. Prove que os autovalores de AB são positivos. Podemos dizer que AB é simétrica e positiva definida?

   Resolução:

---

6. Ache a forma quadrática associada à matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$. Qual o sinal dessa forma quadrática? Positivo, negativo ou ambos?

   Resolução:

---

7. Prove os seguintes fatos:

   (a) Se A e B são similares, então A^2 e B^2 também o são.

   Resolução:

   (b) A^2 e B^2 podem ser similares sem A e B serem similares.

   (c) $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ é similar à $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$.

   Resolução:

   (d) $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ não é similar à $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

   Resolução:

---

8. Ache os valores singulares (como na decomposição SVD) da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

   Resolução:

---

9. Suponha que as colunas de A sejam $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n$ que são vetores ortogonais com comprimentos $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$. Calcule $A^T A$. Ache a decomposição SVD de A.

   Resolução:
