Álgebra Linear - Lista de Exercícios 6

Caio Lins e Tiago da Silva

1. Seja A uma matriz $m \times n$ com posto r. Suponha que existem $\mathbf{b}$ tais que $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ não tenha solução.

   (a) Escreva todas as desigualdade ($<$ e $\leq$) que os números m, n e r precisam satisfazer.

   Resolução:
   Por um lado, temos que, como $\text{posto}(A) = \text{posto}(A^T)$, $r \leq \min\{m, n\}$. Por outro lado, o enunciado garante que o espaço coluna de A não contempla, em sua completude, o conjunto $\mathbb{R}^m$; portanto, $r < m$. Não há, contudo, informações que ensejem a descrição das dimensões da matriz A: por exemplo, as matrizes nulas de dimensões 2×3 e 3×2 satisfazem a existência de algum b que não está contido em seus espaços colunas; além disso, se $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, então $r = 1 < m = 2$ e $r = n = 1$.

   (b) Como podemos concluir que $A^T\mathbf{x} = 0$ tem solução fora $\mathbf{x} = 0$?

   Resolução:
   Como $A^T \in \mathbb{R}^{n \times m}$ e o posto é invariante à operação de transposição, temos que o posto de A^T é menor que seu número de colunas. Em particular, temos, pelo Teorema Fundamental da Álgebra Linear[1], que
   $$\dim N(A^T) = m - r \geq 1;$$
   logo, existe $\mathbf{x} \in N(A^T) \setminus \{0\}$; isto é, $A^T\mathbf{x} = 0$ e $\mathbf{x} \neq 0$.

2. Sem calcular A ache uma bases para os quatro espaços fundamentais:
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \\ 9 & 8 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Resolução:
Perceba que, neste exercício, temos a decomposição LU da matriz A. Seja, nesse sentido, $A = LU$, em que L e U são as matrizes triangulares que, no enunciado, caracterizam, em seu produto, A; em particular, $\text{posto}(A) = \text{posto}(U) = 3$. Nesse contexto, o espaço coluna de A é o próprio $\mathbb{R}^3$; uma base para ele, portanto, é o conjunto $\{e_1, e_2, e_3\}$, em que $e_i \in \mathbb{R}^3$ é a i-ésima coluna da matriz identidade em $\mathbb{R}^{3\times 3}$. Além disso, como L é invertível, temos que $x \in N(A)$ se, e somente se, $x \in N(U)$; logo, como o conjunto
$$\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$
é uma base para $N(U)$, ele é também uma base para $N(A)$. Por outro lado, temos, pelo Teorema Fundamental da Álgebra Linear, que $\dim N(A^T) = 3 - \text{posto}(A) = 0$; logo, o núcleo da transposta de A é igual a $\{0\}$. Correlativamente, a invertibilidade de L garante que, como $A^T = U^T L^T$, o espaço coluna de A é igual ao espaço coluna de U^T; portanto,
$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$
é uma base para o espaço coluna de A^T.

[1] A página da Wikipedia, aliás, se refere a esse teorema como o Teorema da Imagem e do Núcleo (*rank-nullity theorem*); apesar de este nome ser mais explícito, ele possivelmente não é tão enfático.

3. Explique porque $v = (1, 0, -1)$ não pode ser uma linha de A e estar também no seu núcleo.

   Resolução:
   Em geral, um vetor não nulo não pode pertencer, simultaneamente, ao espaço linha de uma matriz e ao seu núcleo; esses conjuntos são, com efeito, ortogonais[2], e esboçamos, nesse sentido, essa verificação na proposição seguinte.

   Proposição 1. *Seja $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ uma matriz. Nessas condições, se escrevermos $N(A)$ para o seu núcleo e $C(A)$ para o seu espaço coluna, temos que*

   $$N(A) \cap C(A^T) = \{0\}.$$

   Demonstração. Seja, por absurdo, $v \in N(A) \cap C(A^T)$ e $v \neq 0$. Nesse sentido, se $\{w_1, \ldots, w_k\}$ é uma base para $C(A)^T$ (podemos, aliás, supor que estes vetores são também linhas de A), temos que existe uma sequência $(\alpha_i)_{1\leq i\leq k}$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$, tal que

   $$v = \sum_{1\leq i\leq n} \alpha_i w_i; \qquad (1)$$

   agora, como v está no espaço núcleo de A, temos que $\langle v, w_i\rangle = 0$ para $1 \leq i \leq k$ e, como $v \neq 0$, $\langle v, v\rangle \neq 0$: em particular, se aplicarmos o produto interno com v em ambos os membros da Equação (1), verificamos, por absurdo, que $\langle v, v\rangle = 0$. Portanto, $v \in N(A) \cap C(A^T)$ se, e somente se, $v = 0$; esta é, com efeito, a asseração da proposição. □

   A Proposição 1, nesse contexto, garante que, se $v = (1, 0, -1) \neq 0$, então v não pertence concomitantemente às linhas e ao núcleo de A.

4. A equação $A^T\mathbf{x} = \mathbf{w}$ tem solução quando $\mathbf{w}$ está em qual dos quatro subespaços? Quando a solução é única (condição sobre algum dos quatro subespaços)?

   Resolução:
   A equação $A^T\mathbf{x} = \mathbf{w}$ tem solução quando (por definição) $\mathbf{w}$ está no espaço coluna de A^T, que é (estamos, ainda, aliceçados nas definições) igual ao espaço linha de A. Além disso, o conjunto $\{\mathbf{x} : A^T\mathbf{x} = \mathbf{w}\}$ é unitário se, e somente se, o núcleo de A^T é igual a $\{0\}$; isto é, se o posto de A é igual ao seu número de colunas.

5. Seja M o espaço de todas as matrizes 3×3. Seja

   $$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

   e note que $A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

   (a) Quais matrizes $X \in M$ satisfazem $AX = 0$?

   Resolução:
   Verificamos, inicialmente, que o posto de A é igual a dois; com efeito, a linha três é múltipla da soma das linhas um e dois, que são linearmente independentes. Portanto, o teorema fundamental da álgebra linear garante que a dimensão do núcleo de A é igual a um e, como o vetor v formado por uns está contido neste conjunto, temos que

   $$N(A) = \left\{ \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} : \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

[2] Em um espaço $\mathbb{V}$ tal que a operação de produto interno está bem definida, escrevemos que os conjuntos A e B, em $\mathbb{V}$, são ortogonais se, para quaisquer $a \in A$ e $b \in B$, $\langle a, b\rangle = 0$; isto é, se a e b são ortogonais.

Nesse sentido, temos que, se X é uma matriz em M, $AX = 0$ se, e somente se, as colunas de X estão no núcleo de A; portanto, $AX = 0$ se, e somente se,

$$X = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha & \beta & \gamma \end{bmatrix},$$

em que α, β e γ são números reais.

(b) Quais matrizes $Y \in M$ podem ser escritas como $Y = AX$, para algum $X \in M$?

Resolução:
No item (a), precisamos computar o núcleo de A; isso porque as colunas de A pertenciam a esse conjunto. Desta vez, computamos o espaço coluna de A; com efeito, se

$$X = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \mathbf{x}_3 \end{bmatrix}$$

($\mathbf{x}_i$ é, para $1 \leq i \leq 3$, um vetor coluna em $\mathbb{R}^3$), então

$$AX = \begin{bmatrix} A\mathbf{x}_1 & A\mathbf{x}_2 & A\mathbf{x}_3 \end{bmatrix};$$

isto é, as colunas de AX pertencem ao espaço coluna de A. Nesse contexto, como a coluna três de A é múltipla da soma das outras duas, que são linearmente independentes, temos que

$$C(A) = \left\{ \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\};$$

a matriz Y, portanto, assume a forma

$$Y = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 - \alpha_1 & \beta_2 - \beta_1 & \gamma_2 - \gamma_1 \\ -\alpha_2 & -\beta_2 & -\gamma_2 \end{bmatrix},$$

em que $(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i) \in \mathbb{R}^3$ para $i \in \{1, 2\}$.

6. Sejam A e B matrizes $m \times n$ com os mesmos quatro subespaços fundamentais. Se ambas estão na sua forma escalonada reduzida, prove que F e G são iguais, onde:

$$A = \begin{bmatrix} I & F \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } B \begin{bmatrix} I & G \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Resolução:
Suponha, por contraposição, que $F \neq G$. Vamos, nesse sentido, construir um vetor que está no núcleo de B; ele, contudo, não pertencerá ao de A. Seja, para isso, $p \times k$ a dimensão de F e de G (elas têm que ter as mesmas dimensões; em outro caso, A e B teriam postos distintos, o que, em particular, violaria a igualdade entre seus espaços colunas); escrevemos, dessa maneira,

$$r = \operatorname*{argmin}_{1 \leq i \leq k} \mathbf{f}_i \neq \mathbf{g}_i$$

(isto é, r é a coluna inicial em que F e G diferem; estamos escrevendo $\mathbf{f}_i$ para a i-ésima coluna da matriz F e $\mathbf{g}_i$ para a i-ésima linha de G). Nessas condições, seja

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -\mathbf{g}_r \\ \mathbf{e}_r \end{bmatrix},$$

em que $\mathbf{e}_r$ é a r-ésima coluna da matriz identidade com dimensão $k \times k$; perceba, dessa forma, que

$$\begin{aligned} B\mathbf{v} &= I(-\mathbf{g}_r) + G\mathbf{e}_r = \\ &= -\mathbf{g}_r + \mathbf{g}_r = 0; \end{aligned}$$

no entanto, $B\mathbf{v} = -\mathbf{g}_r + \mathbf{f}_r \neq 0$ (porque, por definição, $\mathbf{g}_r \neq \mathbf{f}_r$); logo, $N(B) \neq N(A)$, porquanto $\mathbf{v} \in N(B) \setminus N(A)$. Portanto, se os quatro espaços fundamentais das matrizes A e B coincidirem, então $F = G$.