Álgebra Linear - Soluções da Lista de Exercícios 9

Caio Lins e Tiago da Silva

31 de outubro de 2021

1. Seja B uma matriz 3×3 com autovalores 0, 1 e 2. Com essa informação, ache:

   (a) o posto de B;
   (b) o determinante de $B^T B$;
   (c) os autovalores de $B^T B$;
   (d) os autovalores de $(B^2 + I)^{-1}$.

Resolução:

(a) Sabemos que a multiplicidade algébrica (MA) de cada autovalor de B é 1. Com isso, como a multiplicidade geométrica (MG) de cada autovalor deve ser maior ou igual a 1 e menor ou igual à MA, concluímos que a MG de cada autovalor de B é exatamente 1. Portanto, a dimensão do autoespaço correspondente ao autovalor 0 (que é o núcleo de B) tem dimensão 1 e, assim, pelo Teorema do Posto, B tem posto 2.

(b) Naturalmente, se $B\boldsymbol{x} = 0$, então $B^\mathsf{T} B\boldsymbol{x} = 0$ e, com isso, o núcleo de B está contido no núcleo de $B^\mathsf{T} B$. Dessa forma, $\dim N(B^\mathsf{T} B) \geq 1$ e, assim, $\det B^\mathsf{T} B = 0$.

(c) Não é possível saber exatamente quais são os autovalores de $B^\mathsf{T} B$, mas podemos afirmar, com certeza, que 0 é um deles.

(d) Vamos calcular, primeiro, os autovalores de $B^2 + I$. Sabemos que λ é um autovalor de $B^2 + I$ se, e somente se, $\det(B^2 + I - \lambda I) = \det(B^2 - (\lambda - 1)I) = 0$. Portanto, λ ser autovalor de $B^2 + I$ é equivalente a $\lambda - 1$ ser autovalor de B^2. Porém, é fácil perceber que se α é autovalor de B, então α^2 é autovalor de B^2, com o mesmo autovetor. Sendo assim, os três autovalores de B^2 são $0, 1$ e 4 e, com isso, os autovalores de $B^2 + I$ são $1, 2$ e 5. Agora, perceba que $B^2 + I$ é invertível, pois todos seus autovalores são diferentes de 0. Além disso, observe que se λ é autovalor de $B^2 + I$, então λ^{-1} é autovalor de $(B^2 + I)^{-1}$ com o mesmo autovetor. Portanto, os autovalores de $(B^2 + I)^{-1}$ são $1, 1/2$ e $1/5$.

---

2. Ache os autovalores das seguintes matrizes

$$\text{(a) } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}; \text{ (b) } B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \text{ (c) } C = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Resolução:

(a) Calculando $\det(A - \lambda I)$ obtemos

$$(1 - \lambda)(4 - \lambda)(6 - \lambda).$$

Portanto, os autovalores de A são os seus elementos da diagonal. Observe que isso é verdade para qualquer matriz triangular.

(b) Calculando $\det(B - \lambda I)$ ficamos com

$$\lambda^2(2 - \lambda) - 3(2 - \lambda) = (2 - \lambda)(\lambda^2 - 3).$$

Portanto, os autovalores de B são $2, \sqrt{3}$ e $-\sqrt{3}$.

(c) Aqui podemos prosseguir mais rapidamente reparando que, como C tem posto 1, já sabemos que 0 é um de seus autovalores, com multiplicidade algébrica pelo menos 2. Como C não é a matriz nula, deve ser exatamente 2. Além disso, não é difícil reparar que $(1,1,1)$ é autovetor de C, com autovalor correspondente igual a 6. Dessa forma, os autovalores de C são 0 e 6.

---

3. Descreva todas as matrizes S que diagonalizam as matrizes A e A^{-1}:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Resolução:

Calculando o polinômio característico de A, obtemos

$$p_A(\lambda) = -\lambda(2-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 2\lambda - 4,$$

cujas raízes são $\lambda_1 = 1 + \sqrt{5}$ e $\lambda_2 = 1 - \sqrt{5}$. Vamos obter os autovetores correspondentes. Temos

$$A - \lambda_1 I = \begin{bmatrix} -1-\sqrt{5} & 4 \\ 1 & 1-\sqrt{5} \end{bmatrix}.$$

Perceba que multiplicando a primeira coluna por $\sqrt{5}-1$ e somando com a segunda, eliminamos a segunda entrada e, de fato, a primeira também. Logo, $\boldsymbol{v}_1 = (\sqrt{5}-1, 1)$. Da mesma forma, temos

$$A - \lambda_2 I = \begin{bmatrix} \sqrt{5}-1 & 4 \\ 1 & 1+\sqrt{5} \end{bmatrix}.$$

Analogamente, multiplicando a primeira coluna por $-1-\sqrt{5}$ e somando com a segunda, eliminamos a segunda entrada e, com efeito, a primeira também. Portanto, $\boldsymbol{v}_2 = (-1-\sqrt{5}, 1)$. Logo, dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ pondo

$$S = \begin{bmatrix} \alpha\boldsymbol{v}_1 & \beta\boldsymbol{v}_2 \end{bmatrix} \text{ e } \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix},$$

temos $A = S\Lambda S^{-1}$ e, ainda, $A^{-1} = S\Lambda^{-1}S^{-1}$. Sendo assim, as matrizes S que diagonalizam A e A^{-1} são as matrizes da forma

$$S = \begin{bmatrix} \alpha\boldsymbol{v}_1 & \beta\boldsymbol{v}_2 \end{bmatrix},$$

com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

---

4. Ache Λ e S que diagonalizem A

$$A = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.9 \\ 0.4 & 0.1 \end{bmatrix}.$$

Qual limite de Λ^k quando $k \to +\infty$? E o limite de A^k?

Resolução:

Utilizando a propriedade de que $\lambda_1 + \lambda_2 = \operatorname{tr} A = 0.7$ e $\lambda_1\lambda_2 = \det A = -0.3$, concluímos que $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -0.3$. Calculando os núcleos de $A - \lambda_1 I$ e $A - \lambda_2 I$, obtemos $\boldsymbol{v}_1 = (9,4)$ e $\boldsymbol{v}_2 = (1,-1)$. Portanto, pondo

$$S = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \text{ e } \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -0.3 \end{bmatrix},$$

temos $A = S\Lambda S^{-1}$. Observe que, como Λ é diagonal (não vamos nos preocupar muito com os detalhes aqui), temos

$$\Lambda^k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-0.3)^k \end{bmatrix}.$$

Como $|-0.3| < 1$, temos que $(-0.3)^k \to 0$ quando $k \to +\infty$. Dessa forma,

$$\lim \Lambda^k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Com isso, vale que

$$\begin{aligned} \lim A^k &= \lim S\Lambda^k S^{-1} \\ &= S(\lim \Lambda^k)S^{-1} \\ &= S \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} S^{-1}. \end{aligned}$$

Calculando S^{-1} pela fórmula para a inversa de matriz 2×2, obtemos

$$S^{-1} = \frac{1}{-13} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -4 & 9 \end{bmatrix},$$

e, assim,

$$\lim A^k = S \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} S^{-1} = \frac{1}{13} \begin{bmatrix} 9 & 9 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}.$$

---

5. Seja $Q(\theta)$ a matriz de rotação do ângulo θ em $\mathbb{R}^2$:

$$Q(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\theta \\ \text{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

Ache os autovalores e autovetores de $Q(\theta)$ (eles podem ser complexos).

Resolução:

Seja $p_\theta(\lambda)$ o polinômio característico de $Q(\theta)$. Ou seja, temos

$$p_\theta(\lambda) = (\cos\theta - \lambda)^2 + (\text{sen}\,\theta)^2 = \lambda^2 - 2(\cos\theta)\lambda + 1.$$

Pela fórmula quadrática, suas raízes são

$$\lambda_1(\theta) = \cos\theta + i|\text{sen}\,\theta| \text{ e } \lambda_2(\theta) = \cos\theta - i|\text{sen}\,\theta|.$$

Agora observe que, se $\theta \in [0, \pi)$ então $\lambda_1(\theta) = \cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta$ e $\lambda_2(\theta) = \cos\theta - i\,\text{sen}\,\theta$ e, se $\theta \in [\pi, 2\pi)$, então $\lambda_1(\theta) = \cos\theta - i\,\text{sen}\,\theta$ e $\lambda_2(\theta) = \cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta$. De qualquer forma, os autovalores são $\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta$ e $\cos\theta - i\,\text{sen}\,\theta$. Convencionemos, portanto, $\lambda_1(\theta) = \cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta$ e $\lambda_2(\theta) = \cos\theta - i\,\text{sen}\,\theta$.

Encontremos agora os autovetores. Temos

$$Q(\theta) - \lambda_1(\theta)I = \begin{bmatrix} -i\,\text{sen}\,\theta & -\text{sen}\,\theta \\ \text{sen}\,\theta & -i\,\text{sen}\,\theta \end{bmatrix}.$$

Percebe-se facilmente que $\boldsymbol{v}_1 = (i, 1)$ pertence ao núcleo dessa matriz. Da mesma forma, temos

$$Q(\theta) - \lambda_2(\theta)I = \begin{bmatrix} i\,\text{sen}\,\theta & -\text{sen}\,\theta \\ \text{sen}\,\theta & i\,\text{sen}\,\theta \end{bmatrix}.$$

Novamente, percebemos sem dificuldade que $\boldsymbol{v}_2 = (i, -1)$ pertence ao núcleo dessa matriz.

---

6. Suponha que A e B são duas matrizes $n \times n$ com os mesmo autovalores $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ e os mesmos autovetores $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$. Suponha ainda que $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ são LI. Prove que $A = B$.

Resolução:

Vamos provar o resultado mais geral:

Proposição. *Se A e B são matrizes $n \times n$, $\mathcal{A} = \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\} \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto de vetores L.I. e, ainda, $A\boldsymbol{v}_i = B\boldsymbol{v}_i$ para todo i, então $A = B$.*

Demonstração. Como $\mathcal{A}$ é formado por n vetores L.I., compõe uma base para $\mathbb{R}^n$. Sendo $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ a base canônica do $\mathbb{R}^n$, sabemos que, dado $\boldsymbol{e}_j \in \mathcal{B}$, existem escalares $\alpha_{1,j}, \ldots, \alpha_{n,j}$ tais que

$$\boldsymbol{e}_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,j} \boldsymbol{v}_i.$$

Agora, observe que para todo $j = 1, \ldots, n$ temos

$$\begin{aligned} A\boldsymbol{e}_j &= A\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,j} \boldsymbol{v}_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,j} A\boldsymbol{v}_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,j} B\boldsymbol{v}_i \\ &= B\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,j} \boldsymbol{v}_i\right) \\ &= B\boldsymbol{e}_j. \end{aligned}$$

Sendo assim, a j-ésima coluna de A é igual à j-ésima coluna de B para todo $j = 1, \ldots, n$, ou seja, $A = B$. $\square$

Para a questão, basta tomar $\mathcal{A} = \{\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n\}$.

---

7. Seja $Q(\theta)$ como na Questão 5. Diagonalize $Q(\theta)$ e mostre que

$$Q(\theta)^n = Q(n\theta).$$

Resolução:

Pelo desenvolvimento da Questão 5, sabemos que pondo

$$S = \begin{bmatrix} i & i \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ e } \Lambda = \begin{bmatrix} \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta & 0 \\ 0 & \cos\theta - i\operatorname{sen}\theta \end{bmatrix},$$

temos $Q(\theta) = S\Lambda S^{-1}$. Dessa forma,

$$\begin{aligned} Q(\theta)^n &= (S\Lambda S^{-1})^n \\ &= S(\Lambda^n)S^{-1} \\ &= S\begin{bmatrix} (\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)^n & 0 \\ 0 & (\cos\theta - i\operatorname{sen}\theta)^n \end{bmatrix} S^{-1}. \end{aligned}$$

Pela Fórmula de De Moivre, sabemos que $(\cos\theta \pm i\operatorname{sen}\theta)^n = \cos n\theta \pm i\operatorname{sen} n\theta$. Portanto,

$$S\begin{bmatrix} (\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)^n & 0 \\ 0 & (\cos\theta - i\operatorname{sen}\theta)^n \end{bmatrix} S^{-1} = S\begin{bmatrix} \cos n\theta + i\operatorname{sen} n\theta & 0 \\ 0 & \cos n\theta - i\operatorname{sen} n\theta \end{bmatrix} S^{-1} = Q(n\theta).$$

---

8. Suponha que G_{k+2} é a média dos dois números anteriores G_{k+1} e G_k. Ache a matriz A que faz com que

$$\begin{bmatrix} G_{k+2} \\ G_{k+1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} G_{k+1} \\ G_k \end{bmatrix}.$$

   (a) Ache os autovalores e autovetores de A;

(b) Ache o limite de A^n quando $n \to +\infty$;

(c) Mostre que G_n converge para $2/3$ quando $G_0 = 0$ e $G_1 = 1$.

Resolução:

(a) Não é difícil perceber que devemos ter

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Pelo traço e determinante de A, temos $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$. Calculando os núcleos de $A - \lambda_1 I$ e $A - \lambda_2 I$, obtemos $\boldsymbol{v}_1 = (1, 1)$ e $\boldsymbol{v}_2 = (1, -2)$.

(b) Pondo

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \text{ e } \Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

temos $A = S\Lambda S^{-1}$, de modo que

$$\begin{aligned} \lim A^n &= \lim (S\Lambda S^{-1})^n \\ &= \lim S\Lambda^n S^{-1} \\ &= S(\lim \Lambda^n) S^{-1}. \end{aligned}$$

Analogamente à Questão 4, temos

$$\lim \Lambda^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Calculando S^{-1} ficamos com

$$S^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$S(\lim \Lambda^n) S^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

(c) Seja $G = \lim G_n$ quando $n \to \infty$. Observe que $G = \lim G_{n+1} = \lim G_{n+2}$. Com isso,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} G \\ G \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \lim G_{n+2} \\ \lim G_{n+1} \end{bmatrix} \\ &= \lim \begin{bmatrix} G_{n+2} \\ G_{n+1} \end{bmatrix} \\ &= \lim \left(A^{n+1} \begin{bmatrix} G_1 \\ G_0 \end{bmatrix} \right) \\ &= (\lim A^{n+1}) \begin{bmatrix} G_1 \\ G_0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_1 \\ G_0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{2G_1 + G_0}{3} \\ \frac{2G_1 + G_0}{3} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Sendo assim, $G = (2G_1 + G_0)/3$. Se $G_0 = 0$ e $G_1 = 1$, então $G = 2/3$.

---

9. Ache a solução do sistema de EDOs usando o método de diagonalização:

$$\begin{cases} u_1'(t) = 8u_1(t) + 3u_2(t), \\ u_2'(t) = 2u_1(t) + 7u_2(t), \end{cases}$$

onde $u(0) = (5, 10)$.

Resolução:

Pondo
$$\boldsymbol{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix},$$
o sistema de EDOs pode ser reescrito como
$$\boldsymbol{u}'(t) = A\boldsymbol{u}(t),$$
onde
$$A = \begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix},$$
com
$$\boldsymbol{u}(0) = (5, 10).$$
Como visto em aula, a solução desses sistema é dada por
$$\boldsymbol{u}(t) = e^{At}\boldsymbol{u}(0).$$
Para calcular e^{At} vamos, primeiro, diagonalizar A. Não estou com paciência para fazer isso pela vigésima vez nessa lista, então aceite que temos $A = S\Lambda S^{-1}$, onde
$$S = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \text{ e } \Lambda = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}.$$
Com isso,
$$e^{At} = Se^{\Lambda t}S^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3e^{10t} + 2e^{5t} & 3e^{10t} - 3e^{5t} \\ 2(e^{10t} - e^{5t}) & 2e^{10t} + 3e^{5t} \end{bmatrix}.$$
Dessa forma,
$$\boldsymbol{u}(t) = e^{At}\boldsymbol{u}(0) = \begin{bmatrix} 9e^{10t} - 4e^{5t} \\ 6e^{10t} - 4e^{5t} \end{bmatrix}.$$

---

10. Seja $\mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ o espaço vetorial das funções reais de uma variável real. Considere em $\mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ o subespaço
$$S := \operatorname{span}\left\{e^{2x} \operatorname{sen} x, e^{2x} \cos x, e^{2x}\right\}.$$
e o operador linear $D : S \to S$ definido por $D(f) = f'$. Considere, ainda, as funções $f_1(x) = e^{2x} \operatorname{sen} x$, $f_2(x) = e^{2x} \cos x$ e $f_3(x) = e^{2x}$ em $\mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$. Determine:

(a) a matriz de D em relação à base $\mathcal{B} = \{f_1, f_2, f_3\}$. Lembre-se de que, dada a base $\mathcal{B}$, podemos enxergar os elementos de como vetores em $\mathbb{R}^3$. Por exemplo:
$$(1, 2, 3)_{\mathcal{B}} = f_1 + 2f_2 + 3f_3.$$

(b) os autovalores de D e as funções de S que são autovetores de D.

Resolução:

(a) Para obter a matriz $[D]_{\mathcal{B}}$ de D com relação à base $\mathcal{B}$, vamos calcular $D(f_i)$ para cada $f_i \in \mathcal{B}$:
$$D(f_1)(x) = f_1'(x) = 2e^{2x} \operatorname{sen} x + e^{2x} \cos x = 2f_1(x) + f_2(x).$$
Portanto, a primeira coluna de $[D]_{\mathcal{B}}$ é dada por $D(f_1) = 2f_1 + f_2 = (2, 1, 0)_{\mathcal{B}}$. Analogamente, temos
$$\begin{aligned} D(f_2)(x) &= f_2'(x) = -e^{2x} \operatorname{sen} x + 2e^{2x} \cos x = -f_1(x) + f_2(x) \\ D(f_3)(x) &= f_3'(x) = 2e^{2x} = 2f_3(x). \end{aligned}$$
Portanto, $D(f_2) = -f_1 + 2f_2 = (-1, 2, 0)_{\mathcal{B}}$ e $D(f_3) = 2f_3 = (0, 0, 2)_{\mathcal{B}}$.
Sendo assim, temos
$$[D]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

(b) Fazendo as contas, obtemos que os autovalores de $[D]_{\mathcal{B}}$ são $2, 2+i$ e $2-i$. Fazendo mais contas ainda, concluímos que os autovetores correspondentes são $(0,0,1)_{\mathcal{B}}, (i,1,0)_{\mathcal{B}}$ e $(1,i,0)_{\mathcal{B}}$. Ou seja, as funções que são autovetores de D são $g_1(x) = e^{2x}$, $g_2(x) = ie^{2x} \operatorname{sen} x + e^{2x} \cos x$ e $g_3(x) = e^{2x} \operatorname{sen} x + ie^{2x} \cos x$.