Álgebra Linear - Lista de Exercícios 1

escreva seu nome aqui

1. Quais condições para y_1, y_2 e y_3 fazem com que os pontos $(0, y_1)$, $(1, y_2)$ e $(2, y_3)$ caiam numa reta?

   Resolução:

2. Se (a, b) é um múltiplo de (c, d) e são todos não-zeros, mostre que (a, c) é um múltiplo de (b, d). O que isso nos diz sobre a matriz
$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}?$$

   Resolução:

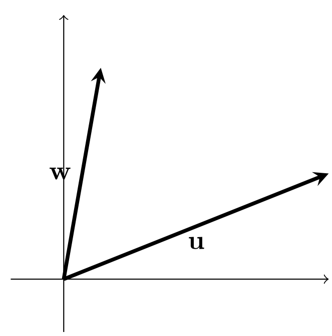
3. Se $\mathbf{w}$ e $\mathbf{v}$ são vetores unitários, calcule os produtos internos de (a) $\mathbf{v}$ e $-\mathbf{v}$; (b) $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ e $\mathbf{v} - \mathbf{w}$; (c) $\mathbf{v} - 2\mathbf{w}$ e $\mathbf{v} + 2\mathbf{w}$.

   Resolução:

4. Se $\|\mathbf{v}\| = 5$ e $\|\mathbf{w}\| = 3$, quais são o menor e maior valores possíveis para $\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|$? E para $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$?

   Resolução:

5. Considere o desenho dos vetores $\mathbf{w}$ e $\mathbf{v}$ abaixo. Hachure as regiões definidas pelas combinações lineares $c\mathbf{v} + d\mathbf{w}$ considerando as seguintes restrições: $c + d = 1$ (não necessariamente positivos), $c, d \in [0, 1]$ e $c, d \geq 0$ (note que são três regiões distintas).



   Resolução:

6. É possível que três vetores em $\mathbb{R}^2$ tenham $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} < 0$, $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} < 0$ e $\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} < 0$? Argumente.

   Resolução:

7. Sejam x, y, z satisfazendo $x + y + z = 0$. Calcule o ângulo entre os vetores (x, y, z) e (z, x, y).

   Resolução:

8. Resolva o sistema linear abaixo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}.$$

   Escreva a solução $\mathbf{x}$ como uma matriz A vezes o vetor $\mathbf{b}$.

   Resolução:

9. Repita o problema acima para a matriz:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

10. Considere a equação de recorrência $-x_{i+1} + 2x_i - x_{i-1} = i$ para $i = 1, 2, 3, 4$ com $x_0 = x_5 = 0$. Escreva essas equações em notação matricial $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ e ache $\mathbf{x}$.

    Resolução:

11. (Bônus) Use o seguinte código em `numpy` para gerar um vetor aleatório $\mathbf{v}$ =`numpy.random.normal(size=[3,1])` em $\mathbb{R}^3$. Fazendo $\mathbf{u} = \mathbf{v}/\|\mathbf{v}\|$ criamos então um vetor unitário aleatório. Crie 30 outros vetores unitários aleatórios $\mathbf{u}_j$ (use `numpy.random.normal(size=[3,30])`). Calcule a média dos produtos internos $|\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_j$ e compare com o valor exato $\frac{1}{\pi} \int_0^\pi |\cos\theta| d\theta = \frac{2}{\pi}$.

    Resolução: