

# Álgebra Linear - Lista de Exercícios 7

escreva seu nome aqui

28 de setembro de 2021

1. Se  $AB = 0$ , as colunas de  $B$  estão em qual espaço fundamental de  $A$ ? E as linhas de  $A$  estão em qual espaço fundamental de  $B$ ? É possível que  $A$  e  $B$  sejam  $3 \times 3$  e com posto 2?

**Resolução:**

---

2. Se  $Ax = b$  e  $A^T y = 0$ , temos  $y^T x = 0$  ou  $y^T b = 0$ ?

**Resolução:**

---

3. O sistema abaixo não tem solução:

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 5 \\ 2x + 2y + 3z = 5 \\ 3x + 4y + 5z = 9 \end{cases}$$

Ache números  $y_1, y_2, y_3$  para multiplicar as equações acima para que elas somem  $0 = 1$ . Em qual espaço fundamental o vetor  $y$  pertence? Verifique que  $y^T b = 1$ . O caso acima é típico e conhecido como a *Alternativa de Fredholm*: ou  $Ax = b$  ou  $A^T y = 0$  com  $y^T b = 1$ .

**Resolução:**

---

4. Mostre que se  $A^T Ax = 0$ , então  $Ax = 0$ . O oposto é obviamente verdade e então temos  $N(A^T A) = N(A)$ .

**Resolução:**

---

5. Seja  $A$  uma matriz  $3 \times 4$  e  $B$  uma  $4 \times 5$  tais que  $AB = 0$ . Mostre que  $C(B) \subset N(A)$ . Além disso, mostre que  $\text{posto}(A) + \text{posto}(B) \leq 4$ .

**Resolução:**

---

6. Sejam  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$  vetores não-zeros de  $\mathbb{R}^2$ .

- (a) Quais são as condições sobre esses vetores para que cada um possa ser, respectivamente, base dos espaços  $C(A^T)$ ,  $N(A)$ ,  $C(A)$  e  $N(A^T)$  para uma dada matriz  $A$  que seja  $2 \times 2$ . *Dica: cada espaço fundamental vai ter somente um desses vetores como base.*

**Resolução:**

---

- (b) Qual seria uma matriz  $A$  possível?

**Resolução:**

---

7. Ache  $S^\perp$  para os seguintes conjuntos:

- (a)  $S = \{0\}$
- (b)  $S = \text{span}\{[1, 1, 1]\}$
- (c)  $S = \text{span}\{[1, 1, 1], [1, 1, -1]\}$
- (d)  $S = \{[1, 5, 1], [2, 2, 2]\}$ . Note que  $S$  não é um subespaço, mas  $S^\perp$  é.

**Resolução:**

- (a)
  - (b)
  - (c)
  - (d)
- 

8. Seja  $A$  uma matriz  $4 \times 3$  formada pela primeiras 3 colunas da matriz identidade  $4 \times 4$ . Projeta o vetor  $b = [1, 2, 3, 4]$  no espaço coluna de  $A$ . Ache a matriz de projeção  $P$ .

**Resolução:**

---

9. Se  $P^2 = P$ , mostre que  $(I - P)^2 = I - P$ . Para a matriz  $P$  do exercício anterior, em qual subespaço a matriz  $I - P$  projeta?

**Resolução:**