Álgebra Linear - Lista de Exercícios 2

Caio Lins e Tiago da Silva

Vamos, por conveniência, declarar algumas notações. Daqui em diante, $\mathbb{R}^{m\times n}$ representa o conjunto das matrizes de dimensão $m\times n$; em particular, identificamos por $\mathbb{R}^m$ o conjunto dos vetores colunas $\mathbb{R}^{m\times 1}$. Além disso, escrevemos $E_{ij}(p) = I + p\Delta_{ij}$, em que I é a matriz identidade (o tamanho, em geral, é contextualizado no enunciado) e $\Delta_{ij} = (\delta_{ab})$ satisfaz $\delta_{ij} = 1$ e $\delta_{ab} = 0$ se $(a,b) \neq (i,j)$; por exemplo,

$$E_{32}(9) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 9 & 1 \end{bmatrix}.$$

Perceba, aliás, que a operação elementar que consiste em somar p vezes a linha j na linha i equivale à multiplicação (à esquerda) por $E_{ij}(p)$.

Enunciamos, adicionalmente, a proposição seguinte, que estabelece uma forma mais agradável de operar com matrizes esparsas. Ela é particularmente importante para a questão sete, em que devem ser computadas algumas matrizes inversas.

Proposição 1 (Multiplicação em Blocos)**.** *Sejam $\{A_1, \cdots, A_n\}$ e $\{B_1, \cdots, B_n\}$ conjuntos de matrizes tais que $A_i \in \mathbb{R}^{a_i \times n_i}$ e $B_i \in \mathbb{R}^{n_i \times b_i}$, com $a_i, b_i, n_i \in \mathbb{N}$. Se, nesse sentido,*

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & A_n \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} B_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & B_n \end{bmatrix},\ \tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & A_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_n & \cdots & 0 \end{bmatrix}\ e\ \tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & B_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_n & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

então

$$AB = \begin{bmatrix} A_1B_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & A_nB_n \end{bmatrix}\ e\ \tilde{A}\tilde{B} = \begin{bmatrix} A_1B_n & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & A_nB_1 \end{bmatrix}.$$

Em particular, A e $\tilde{A}$ são invertíveis se, e somente se, cada A_i, $1 \leq i \leq n$, o é; nesse caso,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} A_1^{-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & A_n^{-1} \end{bmatrix}\ e\ \tilde{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & A_n^{-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_1^{-1} & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

1. Ache a matriz de eliminação E que reduz a matriz de Pascal em uma menor:

$$E \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Qual matriz M reduz a matriz de Pascal à matriz identidade?

Resolução:
Seja P a matriz de Pascal. Precisamos, a partir do método da eliminação de Gauss, subtrair a linha um das linhas dois, três e quatro; isso equivale a multiplicar por $E_{41}(-1)E_{31}(-1)E_{21}(-1)$. Ficamos, assim, com

$$E_{41}(-1)E_{31}(-1)E_{21}(-1)P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Subtraímos, agora, a linha dois das linhas três e quatro; em seguida, subtraímos a linha três da linha quatro. Ora, esse conjunto de operações é equivalente à multiplicação (à esquerda) por $E_{34}(-1)E_{23}(-1)E_{24}(-1)$. Portanto,

$$E_{34}(-1)E_{23}(-1)E_{24}(-1)E_{41}(-1)E_{31}(-1)E_{21}(-1)P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

e, dessa maneira, $E = E_{34}(-1)E_{23}(-1)E_{24}(-1)E_{41}(-1)E_{31}(-1)E_{21}(-1)$; essa expressão é igual a

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Perceba, dessa maneira, que, para transformarmos EP na matriz identidade, podemos subtrair a linha dois das linhas três e quatro e, então, subtrair o dobro da linha três da linha quatro, o que equivale a multiplicar (à esquerda) por $E_{34}(-2)E_{23}(-1)E_{24}(-1)$. Logo, $M = E_{34}(-2)E_{23}(-1)E_{24}(-1)E$, de modo que

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Use o método de Gauss-Jordan para achar a inversa da matriz triangular **superior**[1]:

$$U = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Resolução:
O procedimento é similar ao da questão um. Iniciamos, assim, subtraindo a vezes a linha dois da linha um e, em seguida, $b - ac$ vezes a linha três da linha um; essas operações, que equivalem à multiplicação (à esquerda) por $E_{13}(-(b-ac))E_{12}(-a)$, culminam em

$$E_{13}(ac-b)E_{12}(-a)U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Precisamos, neste momento, subtrair c vezes a linha três da linha dois. Verificamos, desta forma, que a inversa de U é igual a

$$U^{-1} = E_{23}(-c)E_{13}(ac-b)E_{12}(-a) = \begin{bmatrix} 1 & -a & ac-b \\ 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. Para quais valores de a o método de eliminação não dará 3 pivôs?

$$\begin{bmatrix} a & 2 & 3 \\ a & a & 4 \\ a & a & a \end{bmatrix}.$$

Resolução:
Seja A a matriz do enunciado. Vamos, para iniciar o método da eliminação de Gauss, subtrair a linha

[1] O enunciado original estava equivocado; a matriz U é *triangular superior*.

um das linhas dois e três e, então, subtrair a linha dois da linha três; ficamos, portanto, com a matriz,

$$E_{32}(-1)E_{31}(-1)E_{21}(-1)A = \begin{bmatrix} a & 2 & 3 \\ 0 & a-2 & 1 \\ 0 & 0 & a-4 \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Em particular, o método não produzirá três pivôs se, e somente se, $a \in \{0, 2, 4\}$ (isto é, se algum dos elementos da diagonal principal da matriz da Equação (1) for nulo).

4. Verdadeiro ou falso (prove ou forneça um contra-exemplo):

(a) Se A^2 está bem definida, então A é quadrada.
(b) Se AB e BA estão bem definidas, então A e B são quadradas.
(c) Se AB e BA estão bem definidas, então AB e BA são quadradas.
(d) Se $AB = B$, então $A = I$.

Resolução:

(a) Ora, se A^2 está bem definida, então A tem a mesma quantidade de linhas e de colunas. Portanto, a afirmação é **verdadeira**.
(b) A afirmação é **falsa**. Se, por exemplo, A é um vetor linha e B, um vetor coluna, ambos de tamanho n, então $AB \in \mathbb{R}$ e $BA \in \mathbb{R}^n$ estão bem definidas.
(c) Sejam $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e $B \in \mathbb{R}^{k\times p}$. Como AB e BA estão bem definidas, $n = k$ e $p = m$. Portanto, como $AB \in \mathbb{R}^{m\times p}$ e $BA \in \mathbb{R}^{k\times n}$, a afirmação é **verdadeira**.
(d) Ora, se B é a matriz nula, então $AB = B$ para qualquer matriz A; portanto, a afirmação é **falsa**.

5. Mostre que se $BA = I$ e $AC = I$, então $B = C$.

Resolução:
Perceba que, como $BA = I$ e $AC = I$, $B(AC) = (BA)C = BI = IC \implies B = C$. Logo, $B = C$.

6. Ache uma matriz não-zero A tal que $A^2 = 0$ e uma matriz B com $B^2 \neq 0$ e $B^3 = 0$.

Resolução:
Perceba, inicialmente, que as matrizes têm que ser quadradas; isso porque suas potências estão bem definidas. Vamos, portanto, munidos da interpretação geométrica de matrizes quadradas, construir as matrizes A e B.

Por um lado, vamos, para a matriz A, considerar a aplicação que conduz, no plano, o ponto (x, y) ao ponto $(y, 0)$; em particular, todos os pontos da forma $(x, 0)$, $x \in \mathbb{R}$, são direcionados à origem. Assim,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } A^2 = 0.$$

Por outro lado, seja, no espaço, B a matriz correspondente à condução do ponto (x, y, z) ao ponto $(y, z, 0)$. Iterando, dessa forma, esse procedimento duas vezes, conduzimos (x, y, z) a $(z, 0, 0)$; na próxima iteração, direcionaremos $(z, 0, 0)$ à origem. A matriz B, nesse sentido, satisfaz $B^2 \neq 0$ e $B^3 = 0$; além disso, ela assume a forma

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Aliás, perceba que, em geral, podemos construir, dado $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \cdots\}$, uma matriz X tal que $X^{n-1} \neq 0$ e $X^n = 0$ de forma semelhante à construção de A e de B. Escreva, com efeito, X como a matriz que conduz $(x_1, \cdots, x_n)$ a $(x_2, \cdots, x_n, 0)$; podemos, *grosso modo*, dizer que X é a matriz identidade com a diagonal deslocada.

7. Ache as inversas de

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 7 & 6 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Resolução:
Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 7 & 6 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Pela Proposição 1, temos que, como[2]

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{3 \cdot 3 - 4 \cdot 2} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{6 \cdot 6 - 7 \cdot 5} \begin{bmatrix} 6 & -5 \\ -7 & 6 \end{bmatrix},$$

a inversa de A é igual a

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & 0 \\ -4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & -7 & 6 \end{bmatrix}.$$

Além disso, a Proposição 1 também garante que

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(nas notações desta proposição, perceba que cada B_i é uma matriz 1×1; isto é, B_i é um número real).

8. Verifique que a inversa de $M = I - \mathbf{u}\mathbf{v}^T$ é dada por $M^{-1} = I + \frac{\mathbf{u}\mathbf{v}^T}{1 - \mathbf{v}^T\mathbf{u}}$. Verifique também que a inversa de $N = A - UW^{-1}V$ é dada por $N^{-1} = A^{-1} + A^{-1}U(W - VA^{-1}U)^{-1}VA^{-1}$.

Resolução:
Seja $P = I + \frac{\mathbf{u}\mathbf{v}^T}{1 - \mathbf{v}^T\mathbf{u}}$; vamos mostrar que P é a inversa de M. Para isso, perceba que

$$\begin{aligned} MP &= \left(I - \mathbf{u}\mathbf{v}^T\right)\left(I + \frac{\mathbf{u}\mathbf{v}^T}{1 - \mathbf{v}^T\mathbf{u}}\right) = \\ &= I - \frac{\mathbf{u}\mathbf{v}^T}{1 - \mathbf{v}^T\mathbf{u}} - \mathbf{u}\mathbf{v}^T + \frac{\mathbf{u}\mathbf{v}^T\mathbf{u}\mathbf{v}^T}{1 - \mathbf{v}^T\mathbf{u}}. \end{aligned} \tag{2}$$

Nesse sentido, como $\mathbf{v}^T\mathbf{u} \in \mathbb{R}$, temos que $\mathbf{u}\mathbf{v}^T\mathbf{u}\mathbf{v}^T = (\mathbf{v}^T\mathbf{u})\mathbf{u}\mathbf{v}^T$ e, assim,

$$\frac{\mathbf{u}\mathbf{v}^T}{1 - \mathbf{v}^T\mathbf{u}} + \frac{\mathbf{u}\mathbf{v}^T\mathbf{u}\mathbf{v}^T}{1 - \mathbf{v}^T\mathbf{u}} = \mathbf{u}\mathbf{v}^T.$$

Logo, a Equação (2) garante que $MP = I$ e, portanto, P é a inversa de M.

Além disso, seja $N = A - UW^{-1}V$; vamos verificar que $J = A^{-1} + A^{-1}U(W - VA^{-1}U)VA^{-1}$ é a inversa de N. Podemos, com efeito, computar NJ e observar que esta é a matriz identidade; contudo,

[2] Existe uma fórmula razoavelmente elementar para computar a inversa de uma matriz 2×2: se $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$, então, se $a_1a_4 - a_3a_2 \neq 0$, $A^{-1} = \frac{1}{a_1a_4 - a_2a_3} \begin{bmatrix} a_4 & -a_2 \\ -a_3 & a_1 \end{bmatrix}$; a quantidade $a_1a_4 - a_3a_2$ é chamada de *determinante* da matriz A.

as contas não são atrativas. Dessa maneira, escolhemos um vetor x arbitrariamente (consistente com as dimensões de N) e verificamos que, se $y = Nx$, então $Jy = x$. Ora, como $Nx = y$, $Ax - UW^{-1}Vx = y \implies A^{-1}y = x - A^{-1}UW^{-1}Vx$. Portanto,

$$
\begin{aligned}
Jy = A^{-1}y + A^{-1}U(W - VA^{-1}U)^{-1}VA^{-1}y = \\
= x - A^{-1}UW^{-1}Vx + A^{-1}U(W - VA^{-1}U)^{-1}VA^{-1}y.
\end{aligned}
$$

Ficamos, assim, com a tarefa de mostrar que

$$A^{-1}UW^{-1}Vx = A^{-1}U(W - VA^{-1}U)^{-1}VA^{-1}y.$$

Ora, isso é equivalente a

$$UW^{-1}Vx = U(W - VA^{-1}U)^{-1}VA^{-1}y,$$

e, como $y = Ax - UW^{-1}Vx$,

$$
\begin{aligned}
UW^{-1}Vx = U(W - VA^{-1}U)^{-1}VA^{-1}(Ax - UW^{-1}Vx) \iff \\
\iff UW^{-1}Vx - U(W - VA^{-1}U)^{-1}Vx = -U(W - VA^{-1}U)^{-1}VA^{-1}UW^{-1}Vx.
\end{aligned}
$$

Deste modo, temos que provar a seguinte identidade

$$UW^{-1}V - U(W - VA^{-1}U)^{-1}V = -U(W - VA^{-1}U)^{-1}VA^{-1}UW^{-1}V. \tag{3}$$

Nesse sentido, fatoramos U e V e verificamos que uma condição suficiente[3] para que a Equação (3) seja verdadeira é

$$W^{-1} - (W - VA^{-1}U)^{-1} = -(W - VA^{-1}U)^{-1}VA^{-1}UW^{-1}. \tag{4}$$

Multiplicando, enfim, ambos os lados da Equação (4) por $(W - VA^{-1}U)$, ficamos com

$$(W - VA^{-1}U)W^{-1} - I = -VA^{-1}UW^{-1},$$

que é verdadeira. Portanto, a Equação (3) é válida e, assim, $Jy = x$, de modo que a arbitrariedade de x garante que J é a inversa de N.

9. Sabemos que a matriz de diferenças tem a seguinte inversa

$$L^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \mathbf{1} & 1 & 1 \end{bmatrix}.^{4}$$

Use essa propriedade (e sua versão triangular superior) para achar a inversa de

$$T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Dica: escreva T como produto de duas matrizes.

Resolução:
Seja

[3]Em maior detalhe, uma condição suficiente para a igualdade $UAV = UBV$ é a de que $A = B$; no entanto, ela não é necessária, na medida em que ela é sempre válida se, por exemplo, $U = 0$, mesmo que $A \neq B$.

[4]Havia, no documento original, outro equívoco no enunciado: o item em negrito da matriz era nulo; no entanto, ele é unitário.

$$U = L^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

como a inversa da transposta é igual à transpota da inversa, temos que

$$U^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Agora, perceba que $T = LU$; logo, $T^{-1} = U^{-1}L^{-1}$ e, portanto,

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

10. Mostre que $I + BA$ e $I + AB$ são ambas invertíveis ou singulares. Relacione a inversa de $I + BA$ com a inversa de $I + AB$, caso elas existam.

    Resolução:
    Suponha, por um lado, que $I+AB$ seja invertível. Nesse caso, o exercício oito garante que, se pedirmos, em suas notações, que $U = B$, $V = -A$, $A = I$ e $W = I$, verificaremos que $I + BA$ é invertível e, ainda, que a sua inversa é igual a $I - B(I + AB)^{-1}A$. Por outro lado, temos, similarmente, que, se $I + BA$ é invertível, $I + AB$ é invertível; com efeito, escolhemos, no exercício oito, $U = A$, $V = -B$, $A = I$ e $W = I$. Portanto, $I + AB$ é invertível se, e somente se, $I + BA$ também o é; e, nessa situação, a equação

    $$(I + AB)^{-1} = I - A(I + BA)^{-1}B$$

    é verdadeira.

11. (Bônus) Mostre que se $\alpha_k A^k + \alpha_{k-1}A^{k-1} + \cdots + \alpha_1 A + \alpha_0 I = 0$, com $\alpha_0 \neq 0$, então A é invertível

    Resolução:
    Suponha, por contraposição, que A não é invertível. Nesse caso, existe $v \neq 0$ tal que $Av = 0$ e, em geral, $A^k v = 0$ para $k \geq 1$. Portanto, como $\alpha_o \neq 0$,

    $$\left(\sum_{0 \leq i \leq k} \alpha_i A^i \right) v = \alpha_o v \neq 0;$$

    (escrevemos $I = A^0$) logo, $\sum_{0 \leq i \leq k} \alpha_i A^i \neq 0$. Assim, se $\sum_{0 \leq i \leq k} \alpha_i A^i = 0$, então A é invertível.