Álgebra Linear - Soluções Lista de Exercícios 7

Caio Lins e Tiago Silva

3 de outubro de 2021

1. Se $AB = 0$, as colunas de B estão em qual espaço fundamental de A? E as linhas de A estão em qual espaço fundamental de B? É possível que A e B sejam 3×3 e com posto 2?

   Resolução:

   Como $AB = 0$, devemos ter $A\mathbf{b}_i = 0$ para toda coluna $\mathbf{b}_i$ de B. Logo, $\mathbf{b}_i \in N(A)$. Da mesma forma, devemos ter $\mathbf{a}_i^\mathsf{T} B = 0$ para toda linha $\mathbf{a}_i^\mathsf{T}$ de A. Tomando o transposto de cada lado da equação, temos $B^\mathsf{T}\mathbf{a}_i = 0$, ou seja, $\mathbf{a}_i \in N(B^\mathsf{T})$.

   Não é possível que ambas sejam 3×3 com posto 2. Se B tem posto 2, então temos $\dim N(A) \geq 2$. Pelo Teorema do Posto, isso implica $\dim C(A) \leq 1$ e, assim, A não pode ter posto 2.

---

2. Se $Ax = b$ e $A^T y = 0$, temos $y^T x = 0$ ou $y^T b = 0$?

   Resolução:

   De $\mathbf{y}^\mathsf{T} A = 0$ obtemos $A^\mathsf{T}\mathbf{y} = 0$. Portanto, multiplicando ambos lados de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ por $\mathbf{y}^\mathsf{T}$, obtemos $\mathbf{y}^\mathsf{T}\mathbf{b} = 0$. Por outro lado, se A não é quadrada, $\mathbf{y}$ e $\mathbf{x}$ não pertencem a espaços euclidianos de mesma dimensão. Logo, o produto interno $\mathbf{y}^\mathsf{T}\mathbf{x}$ nem sempre está bem definido. Entretanto, mesmo se A for quadrada essa afirmação ainda não será válida. Tome, por exemplo,

   $$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \ \text{ e } \ \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

---

3. O sistema abaixo não tem solução:

   $$\begin{cases} x + 2y + 2z = 5 \\ 2x + 2y + 3z = 5 \\ 3x + 4y + 5z = 9 \end{cases}$$

   Ache números y_1, y_2, y_3 para multiplicar as equações acima para que elas somem $0 = 1$. Em qual espaço fundamental o vetor y pertence? Verifique que $y^T b = 1$. O caso acima é típico e conhecido como a *Alternativa de Fredholm*: ou $Ax = b$ ou $A^T y = 0$ com $y^T b = 1$.

   Resolução:

   O sistema pode ser escrito como $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, onde

   $$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}, \ \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \ \text{ e } \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

   Procuramos $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$ tal que $\mathbf{y}^\mathsf{T} A = 0$, ou seja, $\mathbf{y} \in N(A^\mathsf{T})$, e $\mathbf{y}^\mathsf{T}\mathbf{b} = 1$. Observe que basta encontrarmos um $\mathbf{y}' \in N(A^\mathsf{T})$ e fazer $\mathbf{y} := \left\|\mathbf{y}^\mathsf{T}\mathbf{b}\right\|^{-1}\mathbf{y}'$. Prosseguindo pelos métodos já estudados, chegamos no vetor

   $$\mathbf{y}' = (1, 1, -1).$$

   Por sorte, já temos $\mathbf{y}^\mathsf{T}\mathbf{b} = 1$ e não precisamos realizar a normalização, podendo, então, tomar $\mathbf{y} := \mathbf{y}'$.

---

4. Mostre que se $A^T Ax = 0$, então $Ax = 0$. O oposto é obviamente verdade e então temos $N(A^T A) = N(A)$.

   Resolução:

   Multiplicando ambos lados de $A^\mathsf{T} A\mathbf{x} = 0$ por $\mathbf{x}^\mathsf{T}$, ficamos com

   $$\mathbf{x}^\mathsf{T} A^\mathsf{T} A\mathbf{x} = 0,$$

   o que implica $(A\mathbf{x})^\mathsf{T}(A\mathbf{x}) = 0$ e, assim, $\|A\mathbf{x}\|^2 = 0$. Com isso, $\|A\mathbf{x}\| = 0$ e $A\mathbf{x} = 0$.

   ---

5. Seja A uma matriz 3×4 e B uma 4×5 tais que $AB = 0$. Mostre que $C(B) \subset N(A)$. Além disso, mostre que posto(A) + posto$(B) \leq 4$.

   Resolução:

   Pela questão 1 sabemos que as colunas de B pertencem a $N(A)$. Como $C(B)$ é, por definição, o span das colunas de B e $N(A)$ é um subespaço vetorial, temos $C(B) \subset N(A)$. Com isso, $\dim C(B) \leq \dim N(A)$. Pelo Teorema do Posto, temos $\dim N(A) = 4 - \dim C(A)$ e, assim, $\dim C(B) \leq 4 - \dim C(A)$, ou seja,

   $$\dim C(A) + \dim C(B) \leq 4.$$

   ---

6. Sejam $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ vetores não-zeros de $\mathbb{R}^2$.

   (a) Quais são as condições sobre esses vetores para que cada um possa ser, respectivamente, base dos espaços $C(A^T)$, $N(A)$, $C(A)$ e $N(A^T)$ para uma dada matriz A que seja 2×2. *Dica: cada espaço fundamental vai ter somente um desses vetores como base.*

   Resolução:

   Perceba que, como temos $C(A^\mathsf{T}) \perp N(A)$ e $C(A) \perp N(A^\mathsf{T})$, uma condição necessária para termos

   $$\begin{aligned} C(A^\mathsf{T}) &= \operatorname{span}\{\mathbf{a}\} \\ N(A) &= \operatorname{span}\{\mathbf{b}\} \\ C(A) &= \operatorname{span}\{\mathbf{c}\} \\ N(A^\mathsf{T}) &= \operatorname{span}\{\mathbf{d}\} \end{aligned}$$

   é $\mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{b} = \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{d} = 0$. Vamos mostrar que essa condição é, na verdade, suficiente, ou seja, vamos encontrar uma matriz A que satisfaça as igualdades acima, dados os vetores $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ e $\mathbf{d}$. Para termos $C(A^\mathsf{T}) = \operatorname{span}\{\mathbf{a}\}$ é necessário que a matriz A seja da forma

   $$\begin{bmatrix} \alpha\mathbf{a}^\mathsf{T} \\ \beta\mathbf{a}^\mathsf{T} \end{bmatrix},$$

   onde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Perceba que, com isso, temos $\dim C(A) = \dim C(A^\mathsf{T}) = 1$, o que implica, pelo Teorema do Posto, $\dim N(A) = 1$. Com isso, $\mathbf{b}$ já é uma base para $N(A)$. Agora, sendo $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ e $\mathbf{c} = (c_1, c_2)$, observe que pondo $\alpha := c_1/a_1$ e $\beta := c_2/a_1$ (ou sobre a_2, caso $a_1 = 0$, mas vamos supor $a_1 \neq 0$, pois o outro caso é análogo), ficamos com

   $$A = \begin{bmatrix} c_1 & \frac{a_2}{a_1}c_1 \\ c_2 & \frac{a_2}{a_1}c_2 \end{bmatrix}.$$

   Definindo $\lambda := a_2/a_1$, temos que

   $$A = \begin{bmatrix} \mathbf{c} & \lambda\mathbf{c} \end{bmatrix}.$$

   Portanto, seguindo um raciocínio análogo ao anterior, automaticamente temos $C(A) = \operatorname{span}\{\mathbf{c}\}$ e $N(A^\mathsf{T}) = \operatorname{span}\{d\}$.

(b) Qual seria uma matriz A possível?

Resolução:

Como mostrado no item anterior, podemos tomar

$$A = \begin{bmatrix} c_1 & \frac{a_2}{a_1}c_1 \\ c_2 & \frac{a_2}{a_1}c_2 \end{bmatrix}.$$

---

7. Ache $S^\perp$ para os seguintes conjuntos:

(a) $S = \{0\}$
(b) $S = span\{[1,1,1]\}$
(c) $S = span\{[1,1,1],[1,1,-1]\}$
(d) $S = \{[1,5,1],[2,2,2]\}$. Note que S não é um subespaço, mas $S^\perp$ é.

Resolução:
Observe (*tente mostrar*) que se $V = \text{span}\{\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n\}$, então $\mathbf{w} \in V^\perp$ se, e somente se, $\mathbf{w}^\mathsf{T}\mathbf{v}_i = 0$ para todo $i = 1,\ldots,n$. Vamos usar esse fato nas resoluções.

(a) Para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, vale $\mathbf{x}^\mathsf{T}0 = 0$. Logo, $S^\perp = \mathbb{R}^3$.

(b) O conjunto $S^\perp$ é exatamente $N(A)$, onde $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Como o posto de A é claramente 1, o núcleo de A tem dimensão 2. Como $(-1,0,1)$ e $(0,-1,1)$ são dois elementos linearmente independentes de $N(A)$, temos

$$S^\perp = N(A) = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

(c) Analogamente ao item anterior, vamos calcular $N(A)$, onde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Prosseguindo pelos métodos usuais, encontramos a base

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Portanto,

$$S^\perp = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

(d) De maneira análoga,

$$S^\perp = N\left(\begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \right) = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}.$$

---

8. Seja A uma matriz 4×3 formada pela primeiras 3 colunas da matriz identidade 4×4. Projeta o vetor $b = [1,2,3,4]$ no espaço coluna de A. Ache a matriz de projeção P.

Resolução:

Temos

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Queremos encontrar $\hat{\mathbf{x}}$ tal que

$$A^\mathsf{T}(A\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b}) = 0.$$

Desenvolvendo a equação, obtemos

$$\hat{\mathbf{x}} = (A^\mathsf{T}A)^{-1}A^\mathsf{T}\mathbf{b}.$$

Realizando as contas, ficamos com

$$A^\mathsf{T}A = I_3.$$

Assim,

$$\hat{x} = A^\mathsf{T}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

A projeção de $\mathbf{b}$ é dada por $A\hat{\mathbf{x}} = (1, 2, 3, 0)$. A matriz de projeção é dada por

$$P = A(A^\mathsf{T}A)^{-1}A^\mathsf{T} = AA^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

---

9. Se $P^2 = P$, mostre que $(I - P)^2 = I - P$. Para a matriz P do exercício anterior, em qual subespaço a matriz $I - P$ projeta?

Resolução:

Desenvolendo $(I - P)^2$, obtemos

$$\begin{aligned} (I - P)^2 &= I^2 - IP - PI + P^2 \\ &= I - 2P + P \\ &= I - P. \end{aligned}$$

Com a matriz P do item anterior, temos

$$I - P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Essa matriz projeta no subespaço

$$\left\{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 = x_2 = x_3 = 0\right\}.$$
