

Cálculo numérico

S. C. Coutinho

DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO, INSTITUTO DE MATEMÁTICA,
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO, P.O. Box 68530, 21945-970 RIO
DE JANEIRO, RJ, BRAZIL.

E-mail address: `collier@dcc.ufrj.br`

Aviso e agradecimentos

Todos os capítulos nestas notas são apenas esboços e estão longe de representar uma versão final deste material. Correções e sugestões são muito bem-vindas. Obrigado a

- Karina Pereira;
- Gabriel Vargas Ferreira;
- Ingrid Canaane;
- Pedro Paulo Kastrup Ferreira;
- João Pedro Gomes da Costa
- João Vitor de Oliveira Silva;
- Anna Carolina G. Bittencourt;
- Victor de Barros Melo;
- Lucas Clemente;
- Stephanie Orazem;
- Gabriel Conde;
- Thiago B. de Almeida Soares;

pela ajuda em corrigir os erros.

Sumário

Aviso e agradecimentos	iii
Parte 1. Métodos diretos e problemas de valor de contorno	1
Capítulo 1. A ponte pênsil	3
1. A equação da ponte	3
2. Discretizando o problema	7
3. Resolução de sistemas lineares	12
4. Eliminação e substituição	18
5. Recapitulando e olhando adiante	23

Parte 1

Métodos diretos e problemas de valor de contorno

CAPÍTULO 1

A ponte pênsil

Neste capítulo estudaremos o problema que servirá de inspiração para toda a primeira parte destas notas: a determinação da curva descrita pelo cabo de sustentação de uma ponte pênsil. Começaremos determinando a equação diferencial que descreve a curva desejada. Como esta equação, em geral, não tem solução analítica, veremos como determinar uma aproximação do problema, de modo que pontos ao longo da curva solução possam ser obtidos como soluções de um sistema linear. Para tornar isto viável, precisaremos desenvolver também um procedimento eficiente para resolver sistemas lineares. Encerraremos o capítulo identificando algumas questões relativas à precisão dos resultados obtidos, que serão discutidas em detalhe nos capítulos da primeira parte destas notas.

1. A equação da ponte

Uma ponte pênsil é aquela cujo deque é amarrado a dois cabos, suportados em colunas, nas cabeceiras da ponte. A mais famosa destas pontes é, provavelmente, *Golden Gate Bridge* em São Francisco, Estados Unidos. Nesta seção deduziremos a equação diferencial cuja solução é a curva descrita pelos cabos de sustentação de uma ponte pênsil. Mais precisamente, deduziremos a equação correspondente a um modelo de ponte pênsil. Neste contexto, um *modelo* é uma representação simplificada de um objeto ou de um fenômeno. Um modelo está para o fenômeno ou objeto que representa, assim como um mapa está para a região da qual é a imagem. É precisamente a ausência de detalhes do mapa que nos permite usá-lo para achar nosso caminho em uma cidade; um mapa tão detalhado quanto a cidade, nada ajudaria em nossa orientação. Da mesma maneira, um modelo do comportamento da atmosfera só é útil se nos permite simular o que vai acontecer ao longo do dia de amanhã em menos de vinte e quatro horas. Portanto, os modelos precisam ser suficientemente simples para que possam ser resolvidos com rapidez, mas suficientemente complexos para que sua solução represente uma boa aproximação do problema do qual são a solução.

Por exemplo, o modelo da ponte pênsil, que analisaremos a seguir, pressupõe a completa ausência de vento e de outros fenômenos atmosféricos. As consequências de uma tal suposição para uma ponte pênsil real são bem conhecidas: em 1940 a



FIGURA 1. Golden Gate Bridge

ponte pênsil em *Tacoma Narrows*, nos Estados Unidos, entrou em colapso meses depois de ser inaugurada, por causa das oscilações causadas por ventos de 64 Km/h . A bem da verdade, a ausência de fenômenos atmosféricos é o menor dos nossos problemas porque, para simplificar a equação diferencial, suporemos que o deque da ponte é apoiado em um único cabo, cujo peso é zero. Com isso, precisamos considerar unicamente o peso do deque e dos veículos que estão parados sobre a ponte. Assim, podemos analisar o efeito de um engarrafamento sobre a forma do cabo de sustentação, mas não seu comportamento quando os veículos se movem sobre a ponte. Na prática, a hipótese de que o cabo tem peso nulo é mais razoável do que pode parecer à primeira vista, porque o peso do deque, mesmo quando vazio, supera em muito o peso do cabo.

Suponhamos, então, uma ponte pênsil que consiste de um deque suportado por um único cabo de peso desprezível, como ilustrado na figura 2. Nosso objetivo é encontrar a equação diferencial que descreve a curva formada pelo cabo horizontal ao qual está amarrado o deque da ponte.

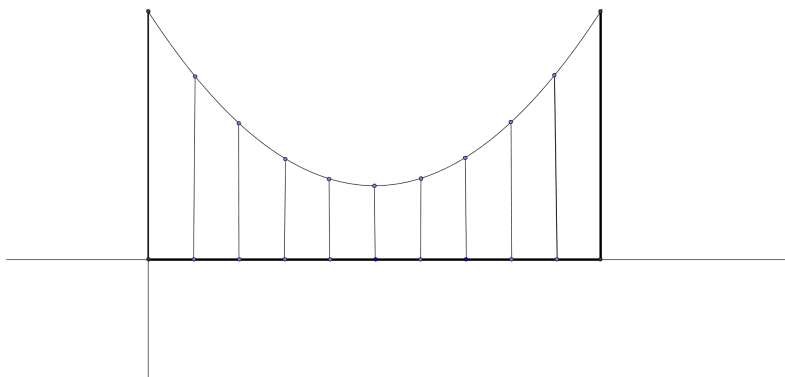


FIGURA 2. Diagrama de uma ponte pênsil

Começaremos a análise investigando as forças que atuam sobre um pequeno segmento do cabo que sustenta a ponte. Na figura 3, os vetores $\mathbf{T}(x)$ e $\mathbf{T}(x + \Delta x)$ denotam as tensões nos pontos de abscissas x e $x + \Delta x$, respectivamente, ao passo que \mathbf{F} corresponde à força exercida sobre o cabo pelo segmento do deque da ponte

entre x e $x + \Delta x$. Note que as tensões são tangentes ao cabo nas extremidades do segmento, ao passo que \mathbf{F} atua ao longo da vertical.

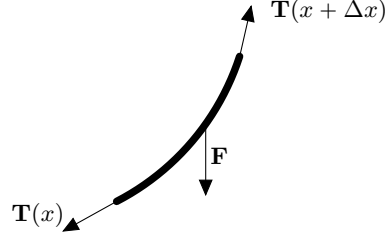


FIGURA 3. Forças no cabo de uma ponte pênsil

Nosso próximo passo consiste em projetar os vetores $\mathbf{T}(x)$, $\mathbf{T}(x + \Delta x)$ e \mathbf{F} ao longo das direções horizontal e vertical. Para isso precisamos conhecer a intensidade das tensões, que denotaremos por $T(x)$ e $T(x + \Delta x)$, além da massa $\rho(x)$ do deque por unidade de comprimento. Observe que estamos admitindo que $\rho(x)$ varie ao longo do deque, para que possamos analisar o que ocorre quando há veículos de diferentes pesos engarrafados ao longo da ponte. Suponhamos, finalmente, que $\varphi(x)$ seja o ângulo entre a tangente ao cabo no ponto de abscissa x e o eixo horizontal, como ilustrado na figura 4. Como \mathbf{F} é vertical, as projeções das tensões ao longo da horizontal devem ser iguais, o que nos dá

$$(1) \quad T(x) \cos(\varphi(x)) = T(x + \Delta x) \cos(\varphi(x + \Delta x)).$$

Por outro lado, o componente vertical de $T(x + \Delta x)$ deve anular a soma de \mathbf{F} com a componente vertical de $T(x)$, donde

$$(2) \quad T(x + \Delta x) \sin(\varphi(x + \Delta x)) = T(x) \sin(\varphi(x)) + g\rho(x)\Delta(x),$$

em que g é a aceleração da gravidade. Segue de (1) que os componentes horizontais das forças que atuam no cabo têm a mesma intensidade T_0 em todos os seus pontos. Reescrevendo (1) em termos de T_0 , obtemos

$$T(x) = \frac{T_0}{\cos(\varphi(x))} \quad \text{e} \quad T(x + \Delta x) = \frac{T_0}{\cos(\varphi(x + \Delta x))}.$$

Substituindo estas duas expressões em (2),

$$\frac{T_0}{\cos(\varphi(x + \Delta x))} \sin(\varphi(x + \Delta x)) = \frac{T_0}{\cos(\varphi(x))} \sin(\varphi(x)) + g\rho(x)\Delta(x);$$

que equivale a

$$(3) \quad T_0 \tan(\varphi(x + \Delta x)) = T_0 \tan(\varphi(x)) + g\rho(x)\Delta(x).$$

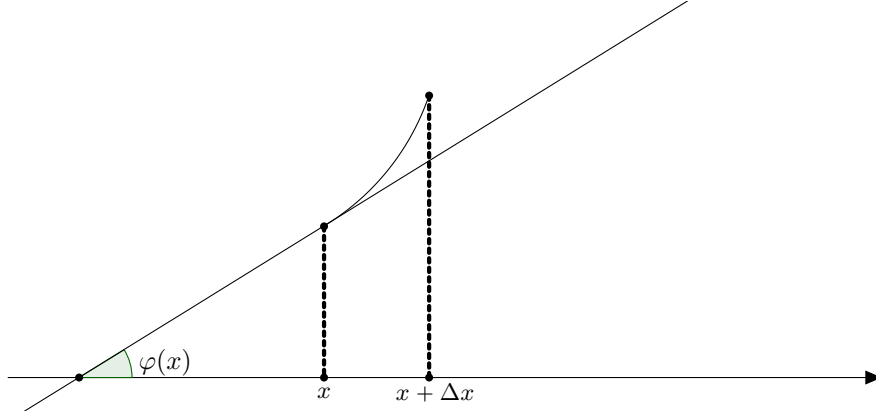


FIGURA 4. $\varphi(x)$ é o ângulo entre a tangente ao cabo em x e a horizontal.

Contudo, se $y = u(x)$ for a equação da curva descrita pelo cabo da ponte, então

$$u'(x) = \tan(\varphi(x)),$$

de modo que (3) pode ser escrita na forma

$$T_0 u'(x + \Delta x) - T_0 u'(\varphi(x)) = g\rho(x)\Delta(x).$$

Dividindo esta última equação por Δx e tomando o limite quando Δx tende a zero, obtemos

$$T_0 u''(x) = T_0 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u'(x + \Delta x) - u'(\varphi(x))}{\Delta x} = g\rho(x).$$

Portanto, a função $u(x)$ cujo gráfico corresponde à curva descrita pelo cabo de sustentação da ponte satisfaz a equação diferencial

$$(4) \quad u''(x) = \frac{g}{T_0} \rho(x).$$

Vejamos o que acontece quando a distribuição de massa no deque da ponte é uniforme; isto é, quando $\rho(x) = \rho_0$ é constante. Neste caso a equação diferencial é

$$u''(x) = \frac{g}{T_0} \rho_0,$$

que pode ser facilmente resolvida. Integrando os dois lados desta equação duas vezes, obtemos

$$(5) \quad u(x) = \frac{g\rho_0}{T_0} x^2 + c_1 x + c_0,$$

em que c_0 e c_1 são as constantes de integração. Para fixar completamente a curva descrita pelo cabo da ponte pênsil que estamos considerando, precisamos de duas condições que nos permitam calcular os valores de c_0 e c_1 . Em nosso modelo estas condições correspondem a dizer que o cabo é amarrado a duas torres verticais de altura h , situadas nas cabeceiras da ponte. Supondo que a ponte tem comprimento ℓ

e posicionando a origem dos eixos na cabeceira esquerda da ponte, as duas condições adicionais são

$$u(0) = a \quad \text{e} \quad u(\ell) = a.$$

Mas, por (5),

$$a = u(0) = c_0 \quad \text{e} \quad a = u(\ell) = \frac{g\rho_0}{T_0}\ell^2 + c_1\ell + c_0;$$

donde

$$c_0 = a \quad \text{e} \quad c_1 = -\frac{g\rho_0}{T_0}\ell.$$

Portanto, quando a distribuição de massa no deque da ponte é uniforme, nosso modelo tem como solução a parábola

$$u(x) = \frac{g\rho_0}{T_0}x^2 - \frac{g\rho_0}{T_0}x + a.$$

Modelos descritos desta maneira surgem frequentemente em física e engenharia e são conhecidos como *problemas de valor de contorno*. Outros exemplos incluem a deflexão de uma barra cujas extremidades estão fixas e a distribuição de calor em uma barra metálica cujas extremidades são mantidas a uma temperatura constante. Todos os problemas de valor de contorno que estudaremos serão definidos por uma equação diferencial linear de segunda ordem e pelos valores constantes que a função assume nas extremidades do seu domínio. Infelizmente, mesmo uma equação como a da curva descrita pelo cabo da ponte em nosso modelo altamente simplificado pode não ter solução analítica. Isto ocorre, por exemplo, quando a ponte é muito longa e a massa dos veículos engarrafados sobre ela aumenta em direção ao centro da ponte, sendo descrita por $\rho(x) = \exp(-sx(x - \ell))$, em que s é um número real. Quanto maior for s , mais concentrado estará o peso no meio da ponte. Neste caso, a única saída para encontrar a curva descrita pela solução do problema de valor de contorno é apelar para aproximações numéricas da solução.

2. Discretizando o problema

Vimos na seção anterior que, sob algumas hipóteses simples, a curva descrita pelo cabo de sustentação de uma ponte pênsil é o gráfico da função $u(x)$ definida pelo problema de valor de contorno

$$(6) \quad u''(x) = \frac{g}{T_0}\rho(x), \quad u(0) = a \quad \text{e} \quad u(\ell) = a,$$

em que ℓ é o comprimento da ponte, a é a altura das colunas que apóiam o cabo de sustentação, g é a aceleração da gravidade, T_0 é a intensidade da componente horizontal da tensão no cabo e $\rho(x)$ é a distribuição de massa do deque por unidade de comprimento.

Para que a equação acima faça sentido, é necessário que $u(x)$ tenha segunda derivada; em particular, $u(x)$ tem que ser uma função contínua. Contudo, o espaço de memória em um computador é finito e não nos permite calcular $u(x)$ para todos os valores de x , a não ser nos raros casos em que a equação pode ser resolvida analiticamente. Contornaremos este problema calculando uma quantidade finita pontos que estejam suficientemente próximos da curva solução do problema. Quanto mais pontos calcularmos, melhor será a aproximação.

Infelizmente isto não resolve completamente nosso problema porque, na equação diferencial (6), aparece uma segunda derivada. Mas derivadas são calculadas usando limites que, por sua vez, requerem uma variável contínua. A saída é, mais uma vez, recorrer a aproximações finitas. Assim, como a primeira derivada de $u(x)$ é igual a

$$u'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x},$$

sabemos que o quociente de Newton

$$(7) \quad \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x}$$

estará tão mais próximo de $u'(x)$ quanto menor for o valor de h . Isto sugere que, tomando Δx suficientemente pequeno, o quociente (7) deveria nos dar uma boa aproximação para $u'(x)$. Quão pequeno Δx deve ser, vai depender da precisão com que o problema precisa ser resolvido.

Antes de poder continuar, precisamos organizar o que dissemos de maneira um pouco mais sistemática. Para começar, escolhemos em quantas partes o intervalo $[0, \ell]$ deve ser dividido. Digamos que sejam n partes, para que não precisemos nos comprometer com nenhum número específico. Tomando $h = \ell/n$, nossa meta é determinar aproximações y_j para os valores de $u(x_j)$ nos pontos $x_j = j \cdot h$, para $j = 0, \dots, n$. Lembre-se que, pelas condições de contorno.

$$u(x_0) = u(0) = a \quad \text{e} \quad u(x_n) = u(\ell) = a.$$

Em seguida, aproximamos as derivadas primeiras usando o quociente de Newton com $\Delta x = h$. Como

$$x_j + h = jh + h = (j + 1)h = x_{j+1},$$

temos que

$$u'(x_j) \approx \frac{u(x_j + h) - u(x_j)}{h} = \frac{u(x_{j+1}) - u(x_j)}{h} \approx \frac{y_{j+1} - y_j}{h}.$$

Contudo, o problema de valor de contorno que estamos resolvendo depende de uma equação diferencial de segunda ordem. Entretanto,

$$u''(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u'(x + \Delta x) - u'(x)}{\Delta x}$$

de modo que, repetindo o que já fizemos para a primeira derivada, podemos aproximar $u''(x)$ pelo quociente de Newton

$$\frac{u'(x_j + h) - u'(x_j)}{h} = \frac{u'(x_{j+1}) - u'(x_j)}{h}$$

Como não conhecemos $u'(x_j)$, nem $u'(x_{j+1})$, o melhor que podemos fazer é substituí-las pelas aproximações

$$u'(x_j) \approx \frac{y_{j+1} - y_j}{h} \quad \text{e} \quad u'(x_{j+1}) \approx \frac{y_{j+2} - y_{j+1}}{h}.$$

Fazendo isto, obtemos

$$u''(x) \approx \frac{1}{h} \left(\frac{y_{j+2} - y_{j+1}}{h} - \frac{y_{j+1} - y_j}{h} \right) = \frac{y_{j+2} - 2y_{j+1} + y_j}{h^2}.$$

Admitindo que esta fórmula nos dê uma aproximação muito boa para $u''(x)$, temos de (6) que

$$(8) \quad \frac{y_{j+2} - 2y_{j+1} + y_j}{h^2} = \frac{g}{T_0} \rho(x_j)$$

para $j = 0, \dots, n-2$. Note que paramos em $j = n-2$, porque y_{j+2} não faz sentido quando $j > n-2$. Mais importante é que, em um ato com todos os sinais de pura bravata, substituímos o sinal \approx , usado para indicar aproximação, por uma igualdade. Esta maneira de resolver problemas de valor de contorno é conhecida como *método das diferenças finitas*.

À primeira vista, não parecemos ter feito grande coisa: mesmo aceitando que esta aproximação para $u''(x)$ não é um caso claro de abusar da sorte, apenas reduzimos o problema aos valores de $y_j \approx u(x_j)$; mas não são exatamente os y_j que queremos calcular? Para mostrar porque seu ceticismo é equivocado, basta juntarmos as equações para $j = 0, \dots, n-2$. Tomando $j = 0$ em (8), obtemos

$$\frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{h^2} = \frac{g}{T_0} \rho(x_0).$$

Lembrando que $y_0 = q$ e $x_0 = 0$, esta equação pode ser reescrita na forma

$$\frac{y_2 - 2y_1}{h^2} = \frac{g}{T_0} \rho(x_0) - \frac{q}{h^2},$$

cujo lado direito contém apenas valores conhecidos. Tomando, agora, $j = 1$,

$$\frac{y_3 - 2y_2 + y_1}{h^2} = \frac{g}{T_0} \rho(x_1) = \frac{g}{T_0} \rho(h).$$

Continuando assim, obtemos um sistema de equações lineares cuja última equação é

$$\frac{-2y_{n-1} + y_{n-2}}{h^2} = \frac{g}{T_0} \rho(x_n) - \frac{y_n}{h^2}.$$

Como $y_n = a$ e $x_n = \ell$,

$$\frac{-2y_{n-1} + y_{n-2}}{h^2} = \frac{g}{T_0}\rho(\ell) - \frac{a}{h^2}.$$

Por exemplo, supondo que $\ell = 1$, que $a = 2$ e que $\rho(x)$ é constante e igual a T_0/g . Escolhendo $n = 5$, teremos $h = 1/5$, de modo que o sistema será

$$(9) \quad \begin{aligned} 25(y_2 - 2y_1) &= -49 \\ 25(y_3 - 2y_2 + y_1) &= 1 \\ 25(y_4 - 2y_3 + y_2) &= 1 \\ 25(-2y_4 + y_3) &= -49. \end{aligned}$$

Resolvendo este sistema linear obtemos

$$y_1 = \frac{48}{25}, \quad y_2 = \frac{47}{25}, \quad y_3 = \frac{47}{25} \quad \text{e} \quad y_4 = \frac{48}{25},$$

que correspondem às seguintes aproximações de pontos sobre a curva solução,

$$\left(\frac{1}{5}, \frac{48}{25}\right), \left(\frac{2}{5}, \frac{47}{25}\right), \left(\frac{3}{5}, \frac{47}{25}\right), \left(\frac{4}{5}, \frac{48}{25}\right),$$

além, naturalmente, de $(0, 2)$ e $(1, 2)$. A figura 5 ilustra a curva poligonal obtida ligando entre si os pontos da solução aproximada, juntamente com a solução analítica exata, que calculamos na seção anterior.

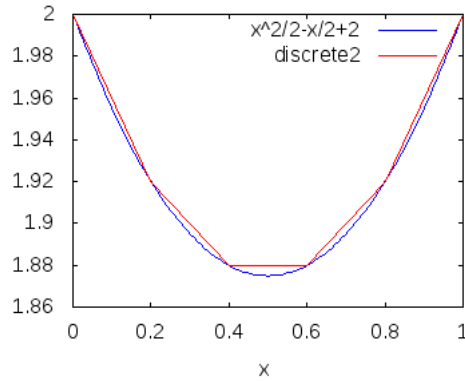


FIGURA 5. A solução exata e a aproximação poligonal da ponte com peso uniforme com $n = 5$.

Na solução do exemplo passamos diretamente do sistema (9) à sua solução, sem dar nenhuma indicação de como foi resolvido. Por sorte este sistema específico pode ser reduzido a um sistema com duas equações e duas incógnitas que pode ser facilmente resolvido. Para isto, basta usar a primeira equação para escrever y_1 em

função de y_2 e a quarta equação para escrever y_4 em função de y_3 . Substituindo estas expressões, respectivamente, na segunda e terceira equações, obtemos o sistema 2×2

$$\begin{aligned} 25y_3 - \frac{75y_2}{2} &= -\frac{47}{2} \\ -\frac{75y_3}{2} + 25y_2 &= -\frac{47}{2}. \end{aligned}$$

Infelizmente, a aproximação que fizemos produziu uma curva poligonal que está muito longe da solução correta. Isto aconteceu porque dividimos o intervalo em poucas partes. Aumentando n de 5 para 20, obtemos um resultado muito melhor, como mostra a figura 6 onde, apesar das duas curvas terem sido desenhadas, mal conseguimos distinguir uma da outra.

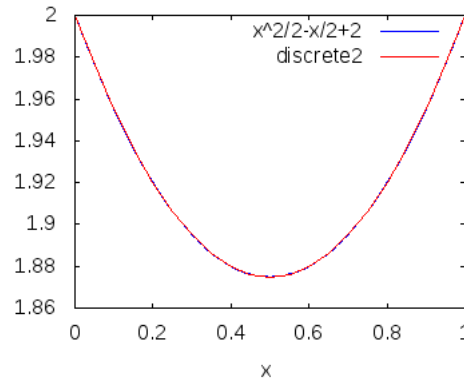


FIGURA 6. A solução exata e a aproximação poligonal da ponte com peso uniforme e $n = 20$.

Desta vez, o sistema tem 19 equações e 19 incógnitas e está fora de cogitação resolvê-lo através de um método ingênuo, como o utilizado quando $n = 5$. Na próxima seção descreveremos um método prático para resolver sistemas lineares, que funciona tão bem com lápis-e-papel, quanto quando usamos um computador. Antes, porém, faremos um exemplo em que a carga sobre a ponte não está uniformemente distribuída sobre o deque.

Suponhamos, como sugerido ao final da seção anterior, que a carga se acumula no centro da ponte de acordo com a função $y = \exp(-10x(x - 1))$, que é ilustrada na figura 7 da página 12. Usando o método das diferenças finitas para resolver o problema de valor de contorno

$$u''(x) = \exp(-10x(x - 1)), \quad u(0) = 2 \quad \text{e} \quad u(1) = 2,$$

com $n = 20$, obtemos um sistema com 19 equações e, portanto, grande demais para escrever aqui. Na figura 8 da página 8 desenhamos a curva poligonal, obtida a partir

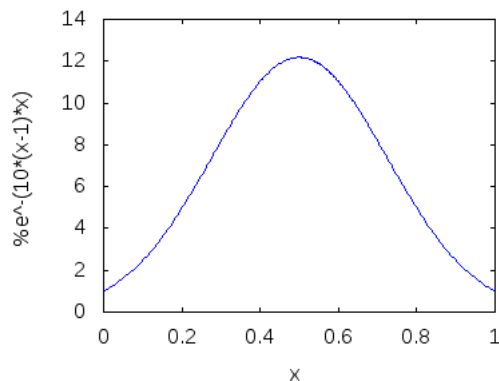


FIGURA 7. Distribuição normal de peso na ponte.

da solução do sistema linear, e a parábola que passa pelo vértice da poligonal e pelos pontos $(0, 2)$ e $(1, 2)$. Como você pode observar, mesmo tendo escolhido $n = 20$, a solução desta vez está muito longe de ser uma parábola — o que não é surpreendente, já que agora a massa está concentrada no centro da ponte.

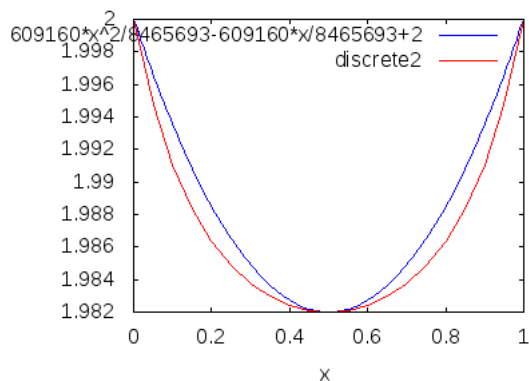


FIGURA 8. Curva descrita pelo cabo para a distribuição normal.

3. Resolução de sistemas lineares

Nos últimos anos do ensino fundamental aprendemos vários métodos para resolver sistemas lineares de duas variáveis. Um deles, é o *método de adição*, que consiste em multiplicar uma das equações por uma constante de modo que, quando as equações forem somadas, reste uma equação linear em apenas uma das variáveis. Por exemplo,

se no sistema

$$(10) \quad \begin{aligned} x + 3y &= 1 \\ 2x + 5y &= 4, \end{aligned}$$

subtraímos da segunda equação o dobro da primeira, obteremos $-y = 2$. Substituindo, então, $y = -2$ na primeira equação, encontramos

$$x = 1 - 3y = 1 - 3 \cdot (-2) = 7.$$

Portanto, a solução do (10) é $x = 7$ e $y = -2$. Podemos interpretar o que fizemos dizendo que transformamos o sistema (10) em

$$(11) \quad \begin{aligned} x + 3y &= 1 \\ -y &= 2, \end{aligned}$$

que é fácil de resolver porque a solução da segunda equação é totalmente óbvia.

Este procedimento pode ser estendido a sistemas de mais de duas equações. Por exemplo, considere o sistema

$$(12) \quad \begin{aligned} \mathbf{x} + \mathbf{3y} + z &= \mathbf{1} \\ \mathbf{2x} + \mathbf{5y} + 3z &= \mathbf{4} \\ 3x + 4y + 7z &= 5. \end{aligned}$$

cujas parcelas em negrito são iguais às do sistema 2×2 que consideramos anteriormente. Subtraindo da segunda equação o dobro da primeira, como fizemos acima, obtemos

$$\begin{aligned} x + 3y + z &= 1 \\ -y + z &= 2 \\ 3x + 4y + 7z &= 5; \end{aligned}$$

que, apesar de ainda ter três equações e três incógnitas, é um pouco mais simples que (12). Mas nada nos impede de utilizar um procedimento semelhante para simplificar a terceira equação. De fato, multiplicando a primeira equação por -3 e somando à terceira, encontramos

$$(13) \quad \begin{aligned} x + 3y + z &= 1 \\ -y + z &= 2 \\ -5y + 4z &= 2. \end{aligned}$$

Desta vez as duas últimas equações formam um sistema de duas equações em duas incógnitas, que podemos resolver utilizando o método de adição. Para isso, basta

multiplicar a segunda equação de (13) por -5 e somá-la à segunda, que nos dá

$$(14) \quad \begin{aligned} x + 3y + z &= 1 \\ -y + z &= 2 \end{aligned}$$

$$(15) \quad -z = -8.$$

Mas segue da última equação de (14) que $z = 8$. Substituindo isto na segunda equação deste mesmo sistema, encontramos $y = 6$. Finalmente, substituindo $y = 6$ e $z = 8$ na primeira equação, obtemos $x = -25$, com o que resolvemos o sistema (12).

O método que utilizamos para resolver o sistema (12) é típico de um *procedimento recursivo*, que é o nome dado aos procedimentos que resolvem um dado problema reduzindo-o a uma instância mais simples do mesmo problema. No exemplo acima, ao eliminar as parcelas em x da segunda e terceira equações, transformamos

$$\begin{array}{ll} x + 3y + z = 1 & x + 3y + z = 1 \\ 2x + 5y + 3z = 4 & \text{em} \quad -y + z = 2 \\ 3x + 4y + 7z = 5 & -5y + 4z = 2. \end{array}$$

Mas, para resolver este último sistema, basta aplicar o mesmo procedimento a

$$\begin{aligned} -y + z &= 2 \\ -5y + 4z &= 2; \end{aligned}$$

que, como tem apenas duas equações e duas incógnitas, é um sistema menor que aquele com o qual começamos.

Nada nos impede de aplicar este mesmo procedimento a sistemas com mais equações e mais incógnitas, mas antes de fazer isto, convém simplificar um pouco a notação. A chave para isto é a observação de que o único papel que as incógnitas desempenham neste procedimento é o de marcadores de posição. Para tornar mais claro o que isto quer dizer, considere novamente o sistema dois por dois com o qual começamos

$$(16) \quad \begin{aligned} x + 3y &= 1 \\ 2x + 5y &= 4, \end{aligned}$$

A maneira mais comum de resolvê-lo é por substituição, e não por adição, e consiste em “tirar o valor de x da primeira equação e substituí-lo na segunda”. Em outras palavras, reescrevemos $x + 3y = 1$ na forma $x = 1 - 3y$ e aplicamos isto na segunda equação, obtendo

$$2(1 - 3y) + 5y = 4,$$

que tem uma única incógnita e pode ser facilmente resolvida. Neste método, uma das incógnitas é efetivamente escrita em função da outra, mas nada semelhante acontece no método de adição *até que o sistema tenha sido completamente simplificado*; só então calculamos os valores das incógnitas, começando da última e acabando na

primeira. De fato, para aplicar o método de adição, precisamos apenas saber quais coeficientes pertencem a quais incógnitas. A melhor maneira de lhe convencer disto é apagar as incógnitas e o sinal de igualdade em (16) e escrever os coeficientes em uma tabela, na qual suas posições relativas são mantidas, como abaixo

$$\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \end{array}$$

Para aplicar o método de adição basta multiplicar a primeira linha por -2 e somar o resultado à segunda linha, obtendo

$$\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{array}$$

Repondo as incógnitas em seus devidos lugares, obtemos o sistema (11), que pode ser facilmente resolvido. Tradicionalmente as tabelas acima são representadas como matrizes, mas a razão pela qual é preferível pensar nelas como matrizes e não simples tabelas só vai se tornar clara quando chegarmos ao capítulo 4.

Não posso lhe culpar se você estiver pensando que o parágrafo anterior é um caso típico de um matemático fazendo muito barulho por nada. A verdade é que esta simplificação só é perceptível quando o sistema tem muitas equações e muitas incógnitas. Para lhe convencer disto, faremos um outro exemplo. Considere o seguinte sistema de cinco equações e cinco incógnitas

$$\begin{aligned} (17) \quad & x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 = 1 \\ & -2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 - 2x_5 = 0 \\ & 2x_1 + 3x_2 + 2x_4 + 4x_5 = 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (18) \quad & -3x_1 - 6x_2 + 2x_3 + x_4 + 6x_5 = 16 \\ & -x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 + 11x_5 = 20. \end{aligned}$$

Onde é mais fácil de identificar os coeficientes: no sistema acima, ou na matriz abaixo?

$$(19) \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ -2 & -3 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 2 & 4 & 7 \\ -3 & -6 & 2 & 1 & 6 & 16 \\ -1 & -3 & 1 & 1 & 11 & 20 \end{bmatrix}.$$

Já que temos a matriz, vamos aproveitar e simplificá-la usando o processo de eliminação introduzido na solução do sistema (12). Como cada linha da matriz corresponde a uma equação do sistema, multiplicar toda uma linha por uma constante e somá-la a outra equivale a fazer esta mesma operação sobre as equações correspondentes. Começamos multiplicando a primeira linha da matriz 2 e somando o

resultado à segunda linha, o que nos dá

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 2 & 4 & 7 \\ -3 & -6 & 2 & 1 & 6 & 16 \\ -1 & -3 & 1 & 1 & 11 & 20 \end{bmatrix}.$$

Multiplicando, agora, a primeira linha por -2 e somando o resultado à terceira linha, resta

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 5 \\ -3 & -6 & 2 & 1 & 6 & 16 \\ -1 & -3 & 1 & 1 & 11 & 20 \end{bmatrix}.$$

Procedendo de maneira semelhante para as duas últimas linhas, obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & -3 & -1 & 4 & 12 & 19 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 13 & 21 \end{bmatrix}.$$

Com isto eliminamos todas as entradas da primeira coluna da matriz, exceto a primeira. O processo pode, então, ser repetido para a submatriz

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 5 \\ -3 & -1 & 4 & 12 & 19 \\ -2 & 0 & 2 & 13 & 21 \end{bmatrix}.$$

Na prática, não vale à pena destacar a submatriz, basta aplicar o processo de eliminação à segunda coluna de

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & -3 & -1 & 4 & 12 & 19 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 13 & 21 \end{bmatrix},$$

usando a primeira posição não nula da segunda linha (em negrito) para eliminar as posições da segunda coluna que ficam abaixo dela. Fazendo isto, obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 6 & 13 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 9 & 17 \end{bmatrix},$$

que tem todas as entradas da segunda coluna nulas, exceto as duas primeiras. Note que esta segunda rodada da eliminação não afeta a primeira coluna, porque todas as entradas desta coluna já são nulas, exceto a primeira. Em seguida, eliminamos todas as posições na terceira coluna de

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 6 & 13 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 9 & 17 \end{bmatrix}$$

que ficam abaixo da diagonal. Com isto, obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -\mathbf{1} & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 5 & 3 \end{bmatrix}.$$

Finalmente, a posição abaixo da diagonal na quarta coluna é eliminada, resultando a matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Resta-nos apenas construir o sistema correspondente a esta última matriz e resolvê-lo. Tomando cuidado em usar o mesmo posicionamento das variáveis utilizado quando convertimos o sistema original na matriz (19), obtemos

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 &= 1 \\ -x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 &= 2 \\ x_3 + x_4 + 2x_5 &= 7 \\ -x_4 + 2x_5 &= -1 \\ x_5 &= 5, \end{aligned}$$

que pode ser facilmente resolvido, começando da última equação para a primeira, o que nos dá

$$x_5 = -5, \quad x_4 = -11, \quad x_3 = 14, \quad x_2 = -33, \quad x_1 = 67$$

Na próxima seção analisaremos em detalhe o procedimento que utilizamos ao resolver os sistemas acima, a fim de identificar suas principais etapas e explicar porque funciona.

4. Eliminação e substituição

Começaremos determinando as etapas que foram executadas para resolver os sistemas da seção anterior. A primeira coisa que fizemos foi introduzir a *matriz aumentada* do sistema, que é o nome dado à matriz cujas linhas contêm os coeficientes das variáveis de um dada equação do sistema. Lembre-se que os coeficientes de uma mesma variável devem todos aparecer na mesma coluna. Em seguida simplificamos a matriz, eliminando, em cada coluna, todas as entradas abaixo da diagonal. Ao final da simplificação, obtivemos uma matriz conhecida como *triangular superior*, porque todas as suas entradas abaixo da diagonal são nulas. Em seguida, construímos o sistema associado à matriz triangular superior, utilizando as mesmas convenções usadas para obter a matriz aumentada do sistema original. Finalmente, resolvemos o sistema associado à matriz triangular superior. Portanto, descontando as traduções entre sistemas e matrizes, que não tem nenhum conteúdo matemático, o método que usamos para resolver os sistemas da seção 3 consiste de duas etapas:

Etapas 1: *eliminação* sistemática das posições abaixo da diagonal, de modo a obter uma matriz triangular superior;

Etapas 2: solução do sistema correspondente à matriz triangular superior por *substituição reversa* (back substitution).

Estas duas etapas precisam ser analisadas em mais detalhe. Seja

$$(20) \quad \begin{array}{rcl} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ & \vdots & \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,n}x_n & = & b_n \end{array}$$

um sistema *determinado*, cujo número de equações coincide com o número de incógnitas. Como vimos nos exemplos, a eliminação na **Etapas 1** é realizada usando

operações extremamente simples. A matriz aumentada do sistema (20) é

$$(21) \quad \left[\begin{array}{cccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} & b_n \end{array} \right].$$

Supondo que $a_{1,1} \neq 0$ e tomando

$$(22) \quad c_j = -\frac{a_{j,1}}{a_{1,1}},$$

anulamos a primeira entrada da j -ésima linha usando a *operação elementar* entre esta e a primeira linha que consiste em substituir a entrada $a_{j,i}$ por $a_{j,i} + c_j a_{1,i}$, ao longo de toda a linha. A matriz resultante desta operação é

$$(23) \quad \left[\begin{array}{cccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{j,2} + c_j a_{1,2} & \cdots & a_{j,n} + c_j a_{1,n} & b_j + c_j b_j \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} & b_n \end{array} \right].$$

Fazendo isto para todas as linhas abaixo da primeira, obtemos

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ 0 & a_{2,2} + c_2 a_{1,2} & \cdots & a_{2,n} + c_2 a_{1,n} & b_2 + c_2 b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{j,2} + c_j a_{1,2} & \cdots & a_{j,n} + c_j a_{1,n} & b_j + c_j b_j \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n,2} + c_n a_{1,2} & \cdots & a_{n,n} + c_n a_{1,n} & b_n + c_n b_n \end{array} \right],$$

pois

$$a_{j,1} + c_j a_{1,1} = a_{j,1} - \frac{a_{j,1}}{a_{1,1}} a_{1,1} = 0.$$

A entrada $a_{1,1}$ é o *pivô* deste passo da eliminação e não pode ser nula, porque, se fosse, não poderíamos calcular c_j usando (22). Infelizmente não é possível garantir que as matrizes aumentadas de todos os sistemas que analisaremos tenham a entrada 1, 1 diferente de zero. Contudo, a primeira coluna da matriz (21) não pode ser toda nula porque, se isto acontecesse, teríamos um sistema com mais equações que incógnitas, o que contraria nossa suposição inicial. Portanto, tem que haver uma linha em (21) cuja primeira entrada é diferente de zero. Assim, podemos contornar o pivô nulo simplesmente trocando a primeira linha da matriz aumentada por outra linha cuja primeira posição é diferente de zero. Note que isto pode ser feito impunemente,

porque as linhas da matriz aumentada apenas nos dão uma maneira descomplicar as equações do sistema, e trocar equações de posição não altera o sistema.

Como nos exemplos, continuamos o processo de eliminação aplicando o mesmo procedimento à submatriz

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_{2,2} + c_2a_{1,2} & \cdots & a_{2,n} + c_2a_{1,n} & b_2 + c_2b_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j,2} + c_ja_{1,2} & \cdots & a_{j,n} + c_ja_{1,n} & b_j + c_jb_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,2} + c_na_{1,2} & \cdots & a_{n,n} + c_na_{1,n} & b_n + c_nb_1 \end{array} \right],$$

e usando $a_{2,2} + c_2a_{1,2}$ como pivô. Caso $a_{2,2} + c_2a_{1,2} = 0$, trocamos a primeira linha desta submatriz com outra linha cuja primeira posição não seja nula, exatamente como fizemos quando $a_{1,1} = 0$. O procedimento continua desta maneira, até que tenhamos obtido uma matriz triangular superior

$$(24) \quad \left[\begin{array}{cccc|c} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \cdots & \alpha_{1,n} & \beta_1 \\ 0 & \alpha_{2,2} + c_2\alpha_{1,2} & \cdots & \alpha_{2,n} + c_2\alpha_{1,n} & \beta_2 + c_2\beta_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_{n,n} + c_n\alpha_{1,n} & \beta_n + c_n\beta_1 \end{array} \right],$$

com o quê a **Etapa 1** se encerra. Note que $\alpha_{1,i} = a_{1,i}$, para todo $1 \leq i \leq n$ e $\beta_1 = b_1$, mas, dependendo da matriz, os demais coeficientes podem ser todos diferentes dos seus correspondentes em (21).

A **Etapa 2** é, então, aplicada ao sistema

$$(25) \quad \begin{aligned} \alpha_{1,1}x_1 + \alpha_{1,2}x_2 + \cdots + \alpha_{1,n-1}x_{n-1} + \alpha_{1,n}x_n &= \beta_1 \\ \alpha_{2,2}x_2 + \cdots + \alpha_{1,n-1}x_{n-1} + \alpha_{2,n}x_n &= \beta_2 \\ &\vdots \\ \alpha_{n-1,n-1}x_{n-1} + \alpha_{n,n}x_n &= \beta_n \\ \alpha_{n,n}x_n &= \beta_n \end{aligned}$$

Note que, como estamos supondo que o sistema (20) é determinado, nenhuma das entradas $\alpha_{1,1}, \alpha_{2,2}, \dots, \alpha_{n,n}$ pode ser nula. Logo, a última equação de (25) nos dá

$$x_n = \frac{\beta_n}{\alpha_{n,n}}.$$

Substituindo isto nas demais equações de (25), obtemos o sistema

$$\begin{aligned}\alpha_{1,1}x_1 + \alpha_{1,2}x_2 + \cdots + \alpha_{1,n-1}x_{n-1} &= \beta_1 - \alpha_{1,n}\beta_n/\alpha_{n,n} \\ \alpha_{2,2}x_2 + \cdots + \alpha_{1,n-1}x_{n-1} &= \beta_2 - \alpha_{2,n}\beta_n/\alpha_{n,n} \\ &\vdots \\ \alpha_{n-1,n-1}x_{n-1} &= \beta_{n-1} - \alpha_{n-1,n}\beta_n/\alpha_{n,n},\end{aligned}$$

que tem uma variável e uma equação a menos que (25) e cuja última equação tem apenas uma variável. Fazendo o mesmo com este novo sistema, e assim sucessivamente, eventualmente teremos obtido os valores de todas as incógnitas.

Note que os procedimentos usados para resolver as duas etapas são recursivos; em outras palavras, consistem em efetuar operações que reduzem um problema $n \times n$ a um problema análogo de tamanho $(n-1) \times (n-1)$ que, por sua vez é reduzido a um problema $(n-2) \times (n-2)$, e assim por diante.

Tendo analisado as várias etapas do método que utilizamos para resolver sistemas lineares, somos confrontados com uma dura realidade. Embora nosso objetivo original fosse o de resolver (20), o sistema que efetivamente resolvemos foi (25). Mas *isto só nos dará uma solução do sistema original se os dois sistemas tiverem a mesma solução*. Por sorte, um sistema é transformado por uma sucessão de operações elementares por linhas que afetam apenas duas linhas de cada vez. Levando em conta a relação entre (20) e sua matriz aumentada (21), isto equivale a dizer que estamos transformando o sistema uma equação de cada vez. Portanto, basta mostrar que os sistemas correspondentes às matrizes aumentadas antes e depois da aplicação de *uma* operação elementar por linha têm a mesma solução. Por exemplo, se (20) tiver como solução

$$(26) \quad x_1 = s_1, \quad x_2 = s_2, \dots, x_n = s_n,$$

então

$$a_{1,1}s_1 + a_{1,2}s_2 + \cdots + a_{1,n}s_n = b_1 \quad \text{e} \quad a_{j,1}s_1 + a_{j,2}s_2 + \cdots + a_{j,n}s_n = b_j.$$

Multiplicando os dois lados da primeira igualdade por c_j e somando o resultado à segunda, obtemos

$$(a_{j,1} + c_j a_{1,1})s_1 + (a_{j,2} + c_j a_{1,2})s_2 + \cdots + (a_{j,n} + c_j a_{1,n})s_n = b_j + c_j a_{1,n}s_n,$$

o que mostra que (26) também é solução da equação correspondente à j -ésima linha da matriz (23). Como isto pode ser facilmente generalizado para os sistemas antes e depois de qualquer passos da eliminação, podemos concluir que (20) e (25) de fato têm a mesma solução.

Vamos encerrar com um exemplo em que ocorre o anulamento de um pivô. Considere o sistema

$$(27) \quad \begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 2 \\ -2x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 2 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 &= 6 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 &= 16. \end{aligned}$$

cujas matriz aumentada é

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 3 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 3 & 1 & 6 \\ 2 & 4 & -3 & 2 & 16 \end{array} \right].$$

Usando a entrada 1,1 como pivô, anulamos as entradas que ficam abaixo dela, obtendo

$$\left[\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & 8 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 12 \end{array} \right].$$

Nosso próximo pivô deveria estar em 2,2. Entretanto, esta posição é nula, de modo que não podemos utilizá-la na eliminação. Neste exemplo, poderíamos trocar a segunda linha desta última matriz com a terceira ou quarta linhas. Digamos que a troca seja feita com a terceira linha, o que nos dá

$$\left[\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 12 \end{array} \right].$$

Continuando o processo de eliminação a partir desta matriz, obtemos ao final a matriz triangular superior

$$\left[\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 10 \end{array} \right],$$

que corresponde ao sistema

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 2 \\ x_3 + 2x_4 &= 6 \\ -x_2 + x_3 &= 2 \\ -2x_4 &= 10 \end{aligned}$$

cuja solução é dada por

$$x_4 = -5, x_3 = 16, x_2 = 14, x_1 = 9.$$

Como já sabemos que este último sistema tem as mesmas soluções que (27), resolvemos o sistema desejado.

5. Recapitulando e olhando adiante

É hora de recapitular o que fizemos e estabelecer metas para os próximos quatro capítulos. Nosso objetivo neste capítulo foi estudar a curva descrita pelo cabo de sustentação de uma ponte pênsil. Vimos que, na ausência de vento e supondo que a ponte fica suspensa em um único cabo, muito mais leve que o deque da ponte, a função $u(x)$ cujo gráfico descreve a forma do cabo é solução do problema de valor de contorno

$$u''(x) = \frac{g}{T_0} \rho(x) \quad \text{e} \quad u(0) = u(\ell) = a,$$

em que g é a aceleração da gravidade, T_0 é a componente horizontal (constante) da tensão no cabo, ℓ é o comprimento do deque, a é a altura das torres que sustentam o cabo e $\rho(x)$ é a massa por unidade de comprimento do deque, incluindo os veículos que estão sobre ele.

Quando esta equação não tem solução analítica, precisamos usar métodos numéricos para determinar a forma do cabo. Para isto, introduzimos, na seção 2 o método das diferenças finitas que nos permite aproximar a segunda derivada de $u(x)$, em um dado ponto, por uma fórmula que envolve apenas as aproximações dos valores de $u(x)$ para uma quantidade finita de valores de x .

Mais precisamente, escolhemos um inteiro positivo n , e dividimos o deque da ponte em n partes iguais, cada uma de comprimento $h = \ell/n$. Como estamos posicionando a origem dos eixos no ponto de interseção do deque com a torre esquerda, como na figura 2, os segmentos em que o deque fica dividido são da forma $[x_j, x_{j+1}]$, para $j = 0, \dots, n-1$. Usando y_j para denotar a aproximação de $u(x_j)$ que pretendemos calcular, argumentamos que é possível tomar

$$\frac{y_{j+2} - 2y_{j+1} + y_j}{h^2}$$

como aproximação de $u''(x_j)$. Substituindo estas aproximações na equação diferencial, e escolhendo as unidades de medida de maneira que $g/T_0 = 1$, obtemos

$$(28) \quad \frac{y_{j+2} - 2y_{j+1} + y_j}{h^2} = \rho(x_j) \quad \text{para} \quad j = 0, \dots, n-2.$$

Levando em conta que

$$y_0 = y(0) = a = y(\ell) = y_n,$$

as equações em (28) nos dão um sistema de $n - 1$ equações nas $n - 1$ incógnitas y_1, \dots, y_{n-1} , cuja matriz aumentada tem a forma

$$(29) \quad \frac{1}{h^2} \left[\begin{array}{cccccc|c} -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \rho(x_0)h^2 - y_0 \\ 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \rho(x_1)h^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -2 & 1 & \rho(x_{n-2})h^2 - y_n \end{array} \right].$$

Note que as únicas entradas não nulas desta matriz estão situadas em sua diagonal principal e nas duas subdiagonais, imediatamente acima e abaixo da diagonal principal. Em seguida, aplicamos operações elementares por linha à matriz (29) até transformá-la em uma matriz triangular superior. O sistema correspondente a esta última matriz pode, então, ser resolvido usando substituição reversa. A propósito, não é difícil ver que o sistema correspondente a (29) é sempre determinado, de modo que tudo o que aprendemos na seção 4 pode ser aplicado a ele. Tendo resolvido o sistema (28) obtemos números y_1, \dots, y_{n-1} , tais que os pontos

$$(x_1, y_1), \dots, (x_{n-1}, y_{n-1})$$

estão aproximadamente sobre a curva $y = u(x)$. Ligando os pontos consecutivos desta lista, juntamente com (x_0, y_0) e (x_n, y_n) , obtemos uma aproximação da curva $y = u(x)$.

O que fizemos até este ponto levanta tantas questões quanto as que responde. Para começar (1) quão boas são as aproximações que obtivemos desta maneira? Naturalmente gostaríamos que, quanto maior fosse o número de partes em que $[0, \ell]$ for dividido, tanto melhor seja a aproximação calculada para a solução. Mas isto é apenas um desejo: (2) como ter certeza de que realmente se verifica? Uma pergunta relacionada de perto às duas primeiras diz respeito ao procedimento de eliminação utilizado para simplificar a matriz aumentada. Para executá-lo, tivemos que fazer uma grande quantidade de cálculos com números que, em problemas de física, química ou engenharia, serão necessariamente aproximados: (3) como ter certeza de que estes cálculos não amplificam os erros inerentes a estes valores aproximados, a ponto de tornar inúteis as soluções do sistema linear? O mesmo problema pode ocorrer em casos em que não há números oriundos de medições de problemas físicos. Por exemplo, para resolver o problema de valor de contorno

$$u''(x) = \exp(10x(x-1)), \quad u(0) = 2 \quad \text{e} \quad u(1) = 2,$$

ao final da seção 2, tivemos que calcular $\exp(10x(x-1))$ para vários valores de x , mas (4) como controlar o erro cometido nestes cálculos? Mesmo tendo uma calculadora, como isto deveria ser feito? Finalmente, há a questão da *validação* do nosso modelo; isto é, (5) quão próxima da curva descrita pelo cabo de uma ponte de verdade está aquela calculada a partir de nosso modelo matemático?

As questões listadas acima podem ser resumidas nas seguintes perguntas, que associamos aos capítulos onde serão respondidas:

Capítulo 2: como estimar o erro cometido em cálculos aritméticos e no cálculo de valores aproximados de funções?

Capítulo 3: como aproximar $u''(x)$ cometendo um erro pequeno que não invalida o modelo que criamos?

Capítulo 4: como estimar o erro inerente aos cálculos executados na solução de um sistema linear por eliminação e substituição reversa?

Capítulo 5: como comparar o modelo matemático, codificado no problema de valor de contorno, a dados obtidos experimentalmente?