

Οι λύσεις της δεύτερης σειράς ασκήσεων θα παραδίδονται **ηλεκτρονικά** και θα υποβάλλονται στην ιστοσελίδα του μαθήματος στο <https://helios.ntua.gr/> (μέχρι και τις 29-01-2023). Αρκεί η χειρόγραφη επίλυση των ασκήσεων και η ηλεκτρονική υποβολή ενός μοναδικού αρχείου .pdf με σκαναρισμένα αντίγραφα όλων των σελίδων των χειρόγραφων λύσεων, οι οποίες πρέπει να είναι καθαρογραμμένες και ευανάγνωστες. Το όνομα του αρχείου που θα υποβάλετε θα αποτελείται μόνον από λατινικούς χαρακτήρες και θα είναι διαμορφωμένο ως εξής: SS2022-23\_hwk2\_AM\_LastnameFirstname.pdf, όπου AM είναι ο 8-ψήφιος αριθμός μητρώου σας.

Επισημαίνεται ότι **οι εργασίες είναι ατομικές**.

**Παρατήρηση:** Σε όλες τις ασκήσεις ισχύει:  $\alpha = AM \bmod 10 + 1$ , όπου  $\alpha$  ο αριθμός μητρώου σας. Στο πρώτο δίφυλλο του .pdf αρχείου λύσεών σας, να αναγράφετε ευκρινώς την τιμή του αριθμού  $\alpha$  ο οποίος και σας αντιστοιχεί.

**Άσκηση 2.1** Δίδονται τα σήματα συνεχούς χρόνου:  $x_1(t) = \sin(20\alpha\pi t)\cos(300\pi t)/\pi t$  και  $x_2(t) = 2\sin(500\pi t)/\pi t$ . Αφού υπολογίσετε και σχεδιάσετε τα φάσματα των σημάτων  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ , να υπολογίσετε τη μέγιστη περίοδο δειγματοληψίας για κάθε ένα από τα παρακάτω σήματα, ώστε να είναι δυνατή η ανακατασκευή αυτών βάσει των δειγμάτων τους:

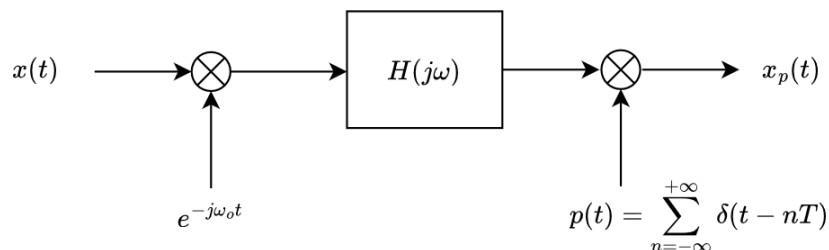
(α)  $x_1(t) + x_2(t)$

(β)  $[x_1(t)]^3$

(γ)  $x_1(t) * x_2(t)$

(δ)  $x_1(t) \cdot [x_2(t)]^2 + [x_1(t)]^2 * x_2(t)$

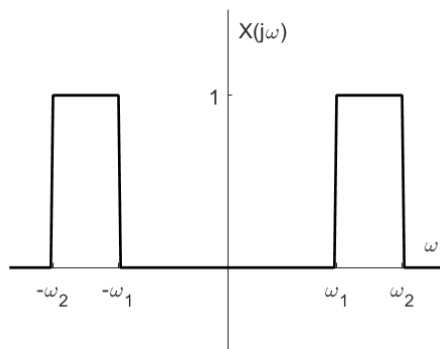
**Άσκηση 2.2** Μία διαδικασία που μπορούμε να ακολουθήσουμε για τη δειγματοληψία ζωνοπερατών πραγματικών σημάτων  $x(t)$  αποτελείται από τον πολλαπλασιασμό του σήματος  $x(t)$  με ένα μιγαδικό εκθετικό, ακολουθούμενο από δειγματοληψία του γινομένου. Η διάταξη αυτή απεικονίζεται στο παρακάτω σχήμα:



Έστω ότι για το ζωνοπερατό σήμα  $x(t)$  το φασματικό περιεχόμενο εντοπίζεται μεταξύ των συχνοτήτων  $\omega_1$  και  $\omega_2$ , δηλαδή,  $X(j\omega) \neq 0$  μόνο για  $\omega_1 \leq |\omega| \leq \omega_2$ . Τότε, η συχνότητα του μιγαδικού εκθετικού επιλέγεται ως  $\omega_0 = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$ , ενώ το βαθυπερατό φίλτρο  $H(j\omega)$  έχει

απόκριση συχνότητας:

$$H(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1) \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$



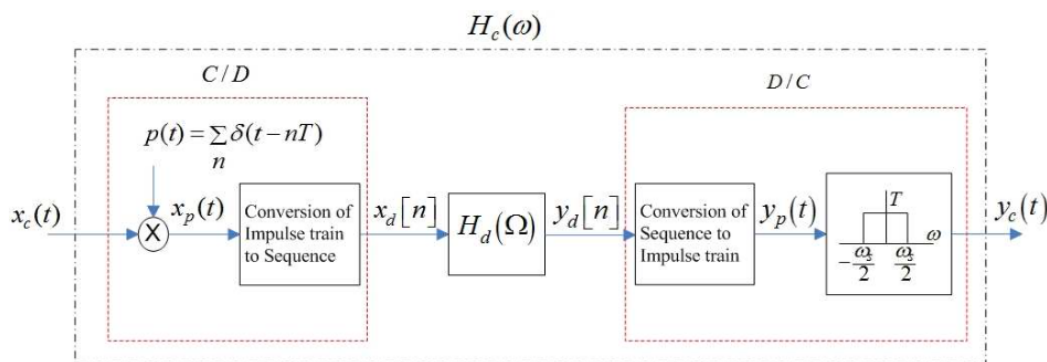
- (α) Υπολογίστε και σχεδιάστε το  $X_p(j\omega)$ , καθώς και όλα τα ενδιαμέσως φάσματα, εάν το  $X(j\omega)$  είναι όπως στο παραπάνω σχήμα. Εξηγήστε αναλυτικά την εργασία σας.
- (β) Προσδιορίστε τη μέγιστη περίοδο δειγματοληψίας  $T$ , ώστε το  $x(t)$  να μπορεί να ανακτηθεί από το  $x_p(t)$ .
- (γ) Σχεδιάστε κατάλληλο σύστημα για την ανακατασκευή του  $x(t)$  από το  $x_p(t)$ . Όπως και στο ερώτημα (α), σχεδιάστε όλα τα ενδιαμέσως φάσματα και εξηγήστε αναλυτικά την εργασία σας.

### Άσκηση 2.3

Θεωρούμε ένα ΓΧΑ σύστημα συνεχούς χρόνου με σήματα εισόδου  $x_c(t)$  και σήματα εξόδου  $y_c(t)$ . Για να υλοποιήσουμε αυτό το σύστημα ψηφιακά, χρησιμοποιούμε τα εξής τρία στάδια:

- Δειγματοληψία του  $x_c(t)$  και μετατροπή του σε σήμα διακριτού χρόνου  $x_d[n]$ .
- Ψηφιακή επεξεργασία του  $x_d[n]$  από ένα ΓΧΑ σύστημα διακριτού χρόνου που παράγει ως έξοδο το διακριτό σήμα  $y_d[n]$ .
- Μετατροπή του  $y_d[n]$  σε συνεχές σήμα  $y_c(t)$  με πλήρη ανακατασκευή (παρεμβολή) συνεχούς σήματος από διακριτό σήμα (όπως προβλέπει το θεώρημα δειγματοληψίας).

Τα ανωτέρω στάδια απεικονίζονται στο ακόλουθο Σχήμα 1. Θεωρούμε ότι όλα τα σήματα συνεχούς χρόνου στην είσοδο έχουν πεπερασμένο εύρος ζώνης. Δηλ.,  $X_c(\omega) = 0$  για  $|\omega| \geq \omega_M$ . Επίσης η δειγματοληψία τους γίνεται με συχνότητα  $\omega_s = (2 + \alpha \bmod 3) \cdot \omega_M$ .



Σχήμα 1

Το διακριτό σύστημα περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών:

$$y[n] = \frac{x[n-1] - 2x[n] + x[n+1]}{4}$$

(α) Να βρείτε αναλυτικά την απόκριση συχνότητας  $H_d(\Omega)$  του ενδιαμέσου συστήματος διακριτού χρόνου καθώς και την κρουστική απόκρισή του  $h_d[n]$ . Να εξηγήσετε ποιοτικά τι είδος επεξεργασίας εκτελεί αυτό το σύστημα.



Σχήμα 2

(β) Να σχεδιάσετε τα φάσματα των σημάτων  $x_p(t)$ ,  $x_d[n]$ ,  $y_d[n]$ ,  $y_p(t)$  και  $y_c(t)$  για όλα τα στάδια της επεξεργασίας, σημειώνοντας κρίσιμες τιμές στους άξονες, αν το φάσμα του σήματος εισόδου  $x_c(t)$  δίνεται από το Σχήμα 2. Να εξηγήσετε την εργασία σας σε όλα τα ερωτήματα.

(γ) Να βρείτε αναλυτικά την ισοδύναμη απόκριση συχνότητας του συστήματος συνεχούς χρόνου

$$H_c(\omega) = \frac{Y_c(\omega)}{X_c(\omega)}.$$

**Άσκηση 2.4** Να προσδιοριστεί ο μετασχηματισμός  $\mathcal{Z}$ , των εξής σημάτων διακριτού χρόνου:

(α)  $x_1[n] = \alpha^n \sin[\pi(n+1)/3] \cos[\pi(n+1)/6] u[n]$

(β)  $x_2[n] = n\alpha^{-|n|}$

(γ)  $x_3[n] = \frac{n}{\alpha^n} \sin[(\pi n/3) + (\pi/4)] u[n]$

(δ)  $x_4[n] = \begin{cases} \alpha^n, & n < 0 \\ (\frac{1}{2})^n, & n = 0, 2, 4, \dots \\ (\frac{1}{3})^n, & n = 1, 3, 5, \dots \end{cases}$

**Άσκηση 2.5** Προσδιορίστε τον αντίστροφο μετασχηματισμό  $\mathcal{Z}$  των:

(α)  $X_1(z) = \frac{z-3}{z^2-2z+2}$ ,  $x_1[n]$  αιτιατό

(β)  $X_2(z) = \frac{z+2z^{-1}}{z^2+4}$ ,  $|z| > 2$

(γ)  $X_3(z) = \frac{7z^2+4z}{z^3+z^2-4z-4}$ ,  $|z| < 1$

$$(δ) X_4(z) = \frac{z^3(5z+1)}{(z+1)(z^2-2z-3)}, \quad 1 < |z| < 3.$$


---

**Άσκηση 2.6** Θεωρήστε ένα αιτιατό σύστημα διακριτού χρόνου που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών:

$$y[n] - \frac{1}{4}y[n-2] = x[n] + 2x[n-1] + x[n-2]$$

- (α) Υπολογίστε τη συνάρτηση μεταφοράς,  $H(z)$ , του συστήματος, και δώστε ένα διάγραμμα με τους πόλους και τα μηδενικά του. Πως μπορεί να χαρακτηριστεί το σύστημα ως προς την ευστάθειά του;
  - (β) Προσδιορίστε αναλυτικά και σχεδιάστε την απόκριση πλάτους  $|H(\Omega)|$  του συστήματος. Πώς θα χαρακτηρίζατε το συγκεκριμένο σύστημα ως προς την επιλεκτικότητά του στις συχνότητες;
  - (γ) Υπολογίστε την κρουστική απόκριση  $h[n]$  του συστήματος.
  - (δ) Υπολογίστε την έξοδο  $y[n]$  του συστήματος για είσοδο  $x[n] = (-\frac{1}{2})^n u[n]$  με αρχικές συνθήκες  $y[-1] = \frac{1}{2}$ ,  $y[-2] = 1$ . Ξεχωρίστε στην απόκριση αυτή το μέρος που αποτελεί την απόκριση μηδενικής εισόδου και την απόκριση μηδενικής κατάστασης.
- 

**Άσκηση 2.7** Δίνεται το σήμα  $x[n] = \delta[n] + 2\delta[n-2]$ .

- (α) Υπολογίστε τον DFT 6 σημείων,  $X[k]$ ,  $k = 0, \dots, 5$ , του σήματος  $x[n]$ ,  $n = 0, \dots, 5$ .
- (β) Υπολογίστε το σήμα  $z[n]$  του οποίου ο DFT είναι ίσος με  $Z[k] = e^{jk2\pi/6} X[k]$ ,  $k = 0, \dots, 5$ , με  $X[k]$  τον DFT 6 σημείων του  $x[n]$ .
- (γ) Έστω το σήμα  $h[n] = u[n-1] - u[n-6]$ . Βρείτε το σήμα  $f[n]$ , 6 σημείων, το οποίο έχει DFT  $F[k] = X[k]H[k]$ ,  $k = 0, \dots, 5$ .
- (δ) Βρείτε το σήμα  $g[n]$ , 8 σημείων, το οποίο έχει DFT  $G[k] = X[k]H[k]$ ,  $k = 0, \dots, 7$ , όπου τώρα τα  $X[k]$ ,  $H[k]$  συμβολίζουν 8-σημείων DFT των σημάτων  $x[n]$ ,  $h[n]$  που έχουν επεκταθεί κατάλληλα με μηδενικά.
- (ε) Συγκρίνετε τα σήματα  $f[n]$  και  $g[n]$  που υπολογίσατε στα ερωτήματα (γ) και (δ) με την γραμμική συνέλιξη  $y[n] = x[n] * h[n]$  των  $x[n]$  και  $h[n]$ .