Οι λύσεις της πρώτης σειράς ασκήσεων θα παραδίδονται **ηλεκτρονικά** και **θα υποβάλλονται στην ιστοσελίδα του μαθήματος στο https://helios.ntua.gr/** (**μέχρι και τις 31-01-2022**). Αρκεί η χειρόγραφη επίλυση των ασκήσεων και η ηλεκτρονική υποβολή **ενός μοναδικού αρχείου .pdf** με σκαναρισμένα αντίγραφα όλων των σελίδων των χειρόγραφων λύσεων.
Επισημαίνεται ότι οι εργασίες είναι ατομικές.
Παρατήρηση: Σε όλες τις ασκήσεις ισχύει: $\alpha = AM \bmod 10 + 1$, όπου ο αριθμός μητρώου σας. Στο πρώτο δίφυλλο του .pdf αρχείου λύσεών σας, να αναγράφετε ευκρινώς την τιμή του αριθμού α ο οποίος και σας αντιστοιχεί.

Άσκηση 2.1 Δίδονται τα ακόλουθα σήματα συνεχούς χρόνου: $x_1(t) = \cos^2(5\pi t/6\alpha + \pi/7)$ και $x_2(t) = 2\sin(\pi t/3)/\pi t$. Να υπολογιστεί η μέγιστη περίοδος δειγματοληψίας για κάθε ένα από τα παρακάτω σήματα, ώστε να είναι δυνατή η ανακατασκευή αυτών βάσει των δειγμάτων τους:

(α) $x_1(t) + x_2(t)$

(β) $[x_1(t)]^2$

(γ) $[x_1(t)]^2 \cdot x_2(t)$

(δ) $x_1(t) * [x_2(t)]^3$

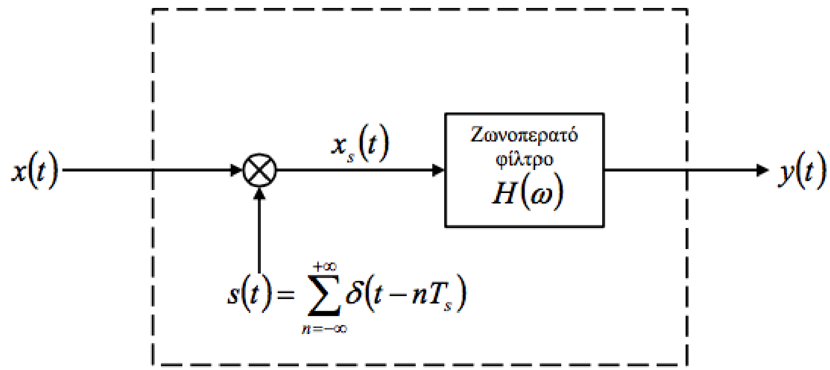
(ε) $[x_1(t)] \cdot x_2(t) + x_1(t) * [x_2(t)]^2$

Άσκηση 2.2 Στο ερώτημα αυτό εξετάζεται η δυνατότητα δειγματοληψίας ζωνοπερατού σήματος με ρυθμό μικρότερο από αυτόν που θα αντιστοιχούσε στην μέγιστη συχνότητα του βάσει του θεωρήματος δειγματοληψίας.

Έστω ζωνοπερατό σήμα $x(t)$, του οποίου το φασματικό περιεχόμενο εντοπίζεται μεταξύ των συχνοτήτων ω_1 και ω_2, δηλαδή, $X(\omega) \neq 0$ μόνο για $\omega_1 \leq |\omega| \leq \omega_2$. Το σήμα αυτό εφαρμόζεται στην είσοδο συστήματος δειγματοληψίας με κρουστικούς παλμούς, το οποίο ακολουθείται από ζωνοπερατό φίλτρο με απόκριση συχνότητας $H(\omega) = \begin{cases} A, \omega_L \leq |\omega| \leq \omega_H \\ 0, \text{otherwise} \end{cases}$

Η παραπάνω διάταξη φαίνεται στο παρακάτω Σχήμα:
Εάν ισχύει ότι $\omega_1 > \omega_2 - \omega_1$, να υπολογιστεί η μέγιστη τιμή της περιόδου δειγματοληψίας T_s, καθώς και οι τιμές των σταθερών παραμέτρων A, ω_L και ω_H που θα πρέπει να χαρακτηρίζουν το ζωνοπερατό φίλτρο, έτσι ώστε να λαμβάνεται στην έξοδο της διάταξης σήμα $y(t) = x(t)$. Να εντοπιστούν τα διαστήματα συχνοτήτων δειγματοληψίας, στα οποία δεν είναι δυνατή η ανακατασκευή του $x(t)$ μέσω της παραπάνω διάταξης.

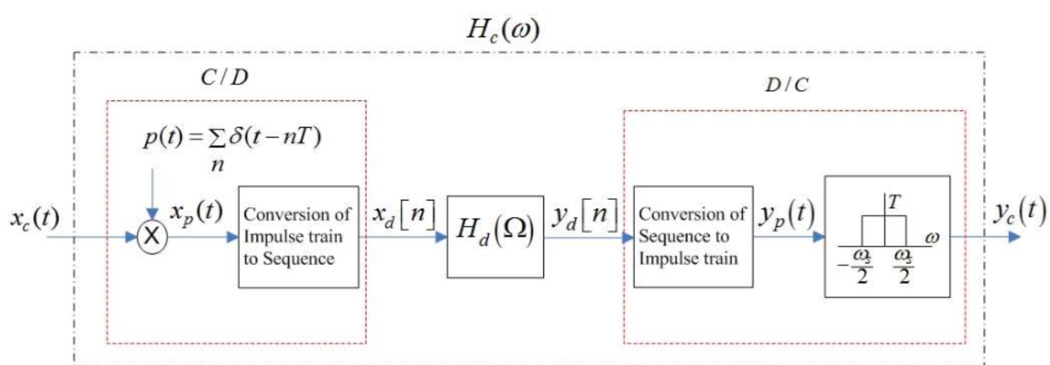
Στα παραπάνω ερωτήματα να γίνουν αναλυτικά οι υπολογισμοί, να σχεδιαστούν τα φάσματα όλων των σημάτων και να αιτιολογηθεί η εργασία και τα αποτελέσματά σας.



Άσκηση 2.3
Θεωρούμε ένα ΓΧΑ σύστημα συνεχούς χρόνου με σήματα εισόδου $x_c(t)$ και σήματα εξόδου $y_c(t)$. Για να υλοποιήσουμε αυτό το σύστημα ψηφιακά, χρησιμοποιούμε τα εξής τρία στάδια:

- Δειγματοληψία του $x_c(t)$ και μετατροπή του σε σήμα διακριτού χρόνου $x_d[n]$.
- Ψηφιακή επεξεργασία του $x_d[n]$ από ένα ΓΧΑ σύστημα διακριτού χρόνου που παράγει ως έξοδο το διακριτό σήμα $y_d[n]$.
- Μετατροπή του $y_d[n]$ σε συνεχές σήμα $y_c(t)$ με πλήρη ανακατασκευή (παρεμβολή) συνεχούς σήματος από διακριτό σήμα (όπως προβλέπει το θεώρημα δειγματοληψίας).

Τα ανωτέρω στάδια απεικονίζονται στο ακόλουθο Σχήμα 1. Θεωρούμε ότι όλα τα σήματα συνεχούς χρόνου στην είσοδο έχουν πεπερασμένο εύρος ζώνης. Δηλ., $X_c(\omega) = 0$ για $|\omega| \geq \omega_M$. Επίσης η δειγματοληψία τους γίνεται με συχνότητα $\omega_s = 3\omega_M$.

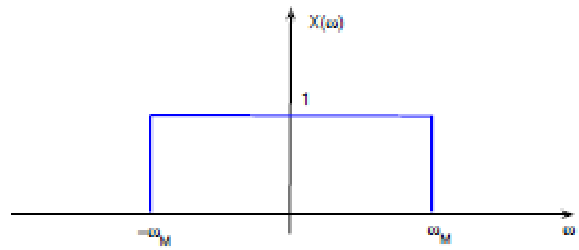


Σχήμα 1

Το διακριτό σύστημα περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών:

$$y[n] = \frac{x[n-1] + \alpha x[n] + x[n+1]}{\alpha + 2}$$

(α) Να βρείτε αναλυτικά την απόκριση συχνότητας $H_d(\Omega)$ του ενδιάμεσου συστήματος διακριτού χρόνου καθώς και την κρουστική απόκρισή του $h_d[n]$. Να εξηγήσετε ποιοτικά τι είδος επεξεργασίας εκτελεί αυτό το σύστημα.
(β) Να σχεδιάσετε τα φάσματα των σημάτων $x_p(t), x_d[n], y_d[n], y_p(t)$ και $y_c(t)$ για όλα τα στάδια της επεξεργασίας, σημειώνοντας κρίσιμες τιμές στους άξονες, αν το φάσμα του σήματος εισόδου $x_c(t)$ δίνεται από το Σχήμα 2. Να εξηγήσετε την εργασία σας σε όλα τα ερωτήματα.



Σχήμα 2

(γ) Να βρείτε αναλυτικά την ισοδύναμη απόκριση συχνότητας του συστήματος συνεχούς χρόνου

$$H_c(\omega) = \frac{Y_c(\omega)}{X_c(\omega)}.$$

Άσκηση 2.4 Να προσδιοριστεί ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$, των εξής σημάτων διακριτού χρόνου:

(α) $x_1[n] = n\alpha^n \cos(\pi n/4) u[n]$

(β) $x_2[n] = n^2 \alpha^n u[n]$

(γ) $x_3[n] = \alpha^n \cos[(\pi n/4) + (\pi/4)] u[n]$

(δ) $x_4[n] = \begin{cases} \alpha^{|n|}, \ |n| \leq M, \quad M \geq 1 \\ 0, \quad \text{otherwise} \end{cases}$

Άσκηση 2.5 Προσδιορίστε τον αντίστροφο μετασχηματισμό $\mathcal{Z}$ των:

(α) $X_1(z) = \dfrac{z-1}{z^2+z+1}, \ \ x_1[n]$ αιτιατό

(β) $X_2(z) = \dfrac{z^2+2}{z(z^2+1)}, \ \ |z| < 1$

(γ) $X_3(z) = \dfrac{z(2z^2+5z-6)}{(z-1)(z^2+3z+2)}, \ \ 1 < |z| < 2$

(δ) $X_4(z) = z^2 + 3z + 5 + \dfrac{2}{z^2+5z+4}, \ \ x_4[n]$ αυστηρά μη-αιτιατό.

Άσκηση 2.6 Θεωρήστε ένα αιτιατό σύστημα διακριτού χρόνου που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών:

$$y[n] - 3y[n-2] + 2y[n-3] = x[n] + 4x[n-1] + 3x[n-2]$$

(α) Υπολογίστε τη συνάρτηση μεταφοράς, $H(z)$, του συστήματος, καθώς και τους πόλους και τα μηδενικά του. Είναι το σύστημα ευσταθές;

(β) Προσδιορίστε αναλυτικά και σχεδιάστε την απόκριση πλάτους $|H(\Omega)|$ του συστήματος. Πώς θα χαρακτηρίζατε το συγκεκριμένο σύστημα ως προς την επιλεκτικότητά του στις συχνότητες;

(γ) Υπολογίστε την κρουστική απόκριση $h[n]$ του συστήματος.

(δ) Υπολογίστε την έξοδο $y[n]$ του συστήματος για είσοδο $x[n] = n(-\frac{1}{3})^n u[n]$ με αρχικές συνθήκες $y[-1] = -\frac{1}{2}$, $y[-2] = \frac{1}{2}$ και $y[-3] = 0$. Ξεχωρίστε στην απόκριση αυτή το μέρος που αποτελεί την απόκριση μηδενικής εισόδου και την απόκριση μηδενικής κατάστασης.

Άσκηση 2.7 Δίνεται το σήμα $x[n] = \delta[n] - 3\delta[n-3]$.

(α) Υπολογίστε τον DFT 6 σημείων, $X[k]$, $k = 0, ..., 5$, του σήματος $x[n]$, $n = 0, ..., 5$.

(β) Υπολογίστε το σήμα $z[n]$ του οποίου ο DFT είναι ίσος με $Z[k] = e^{jk4\pi/6}X[k]$, $k = 0, ..., 5$, με $X[k]$ τον DFT 6 σημείων του $x[n]$.

(γ) Έστω το σήμα $h[n] = u[n] - u[n-5]$. Βρείτε το σήμα $f[n]$, 6 σημείων, το οποίο έχει DFT $F[k] = X[k]H[k]$, $k = 0, ..., 5$.

(δ) Βρείτε το σήμα $g[n]$, 8 σημείων, το οποίο έχει DFT $G[k] = X[k]H[k]$, $k = 0, ..., 7$, όπου τώρα τα $X[k], H[k]$ συμβολίζουν 8-σημείων DFT των σημάτων $x[n], h[n]$ που έχουν επεκταθεί κατάλληλα με μηδενικά.

(ε) Συγκρίνετε τα σήματα $f[n]$ και $g[n]$ που υπολογίσατε στα ερωτήματα (γ) και (δ) με την γραμμική συνέλιξη $y[n] = x[n] * h[n]$ των $x[n]$ και $h[n]$.