Ε.Μ.Π. Σχολή Η.Μ.&Μ.Υ. Σήματα και Συστήματα Ακαδ. έτος: 2022-2023

Ημερομηνία 28-11-2022 ***1η Σειρά Ασκήσεων*** Παραδοτέα: 18-12-2022

Οι λύσεις της πρώτης σειράς ασκήσεων θα παραδίδονται **ηλεκτρονικά** και **θα υποβάλλονται στην ιστοσελίδα του μαθήματος στο https://helios.ntua.gr/** (**μέχρι και τις 18-12-2022**). Αρκεί η χειρόγραφη επίλυση των ασκήσεων και η ηλεκτρονική υποβολή **ενός μοναδικού αρχείου .pdf** με σκαναρισμένα αντίγραφα όλων των σελίδων των χειρόγραφων λύσεων, οι οποίες πρέπει να είναι καθαρογραμμένες και ευανάγνωστες. Το όνομα του αρχείου που θα υποβάλετε θα αποτελείται μόνον από λατινικούς χαρακτήρες και θα είναι διαμορφωμένο ως εξής: SS2022-23_hwk1_AM_LastnameFirstname.pdf, όπου AM είναι ο 8-ψήφιος αριθμός μητρώου σας.

Επισημαίνεται ότι οι εργασίες είναι **ατομικές**.

Παρατήρηση: Σε όλες τις ασκήσεις ισχύει: $a = AM\, mod\; 10 + 1$, όπου AM ο αριθμός μητρώου σας. Στο πρώτο δίφυλλο του .pdf αρχείου λύσεών σας, θα πρέπει να αναγράφετε ευκρινώς την τιμή του αριθμού α ο οποίος σας αντιστοιχεί, καθώς και τη διεύθυνση του ηλεκτρονικού σας ταχυδρομείου.

Άσκηση 1.1.

Δίδονται τα ακόλουθα σήματα:

(α) $x_1(t) = \left[\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)\right]^{a \bmod 4} + \left[\cos\left(\frac{\pi}{5a}t\right)\right]^{4-a \bmod 4} - \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2a}t\right)$

(β) $x_2(t) = \left[\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} rect\left(\frac{t+9k}{2a}\right)\right] + sin\left(\frac{\pi}{15a}t\right)$

(γ) $x_3[n] = e^{-j\frac{\pi}{3a}n} - e^{j\frac{\pi}{4a}n} + e^{-j\frac{\pi}{7a}n}$

(δ) $x_4[n] = \sum_{k=1}^{5} \exp\left(j\frac{\pi}{3+a\mathrm{mod}k}n\right)$

Ζητείται να αποφανθείτε σχετικά με την περιοδικότητα ή όχι των σημάτων αυτών αιτιολογώντας επαρκώς τις απαντήσεις σας και για τις περιπτώσεις περιοδικών σημάτων, να υπολογιστεί η θεμελιώδης περίοδός τους.

Άσκηση 1.2.

Δίδονται οι αποκρίσεις $y(t)$ (ή $y[n]$) συστημάτων συνεχούς (ή διακριτού) χρόνου σε εισόδους $x(t)$ (ή $x[n]$), οι οποίες έχουν ως ακολούθως:

(α) $y_1(t) = \int_{-\infty}^{at} x(\tau - a)d\tau$

(β) $y_2(t) = \frac{1}{x(t)+a}$

(γ) $y_3[n] = x[n] * x[n^2] + 1$

(δ) $y_4[n] = \cos\left(\frac{a\pi}{3}x[n]\right)$

Ζητείται να αποφανθείτε σχετικά με τη γραμμικότητα, το χρονικά αναλλοίωτο, τη μνήμη, την αιτιατότητα και την ευστάθεια (κατά την έννοια BIBO) ή όχι των συστημάτων αυτών αιτιολογώντας επαρκώς τις απαντήσεις σας.

Άσκηση 1.3.

Δίδονται τα παρακάτω σήματα διακριτού χρόνου:

$$x[n] = \sum_{k=n-2}^{k=n+2}\left[a^k \cdot [u[k] - u[k-2]]\right]$$

$$h_1[n] = \exp\left(j\frac{\pi}{3}n\right) \cdot \left[u[n] - u[n-2-a\text{mod}3]\right]$$

$$h_2[n] = (2 + a\text{mod}3)^{-|n|}$$

$$y_1[n] = x[n] * h_1[n]$$

$$y_2[n] = x[n] * h_2[n]$$

Επίσης δίδονται τα ακόλουθα σήματα συνεχούς χρόνου:

$$x(t) = -t \cdot u(t + 2 + a\text{mod}3) + 2t \cdot u(t) - t \cdot u(t - 2 - a\text{mod}3)$$

$$h_1(t) = \cos\left(\frac{a\pi}{3}t\right) \cdot [u(t+a) - u(t-a)]$$

$$h_2(t) = a \cdot \left[u\left(t + \frac{a}{2}\right) - u\left(t - \frac{a}{2} - 2\right)\right] + a \cdot \delta(t-1)$$

$$y_1(t) = x(t) * h_1(t)$$

$$y_2(t) = x(t) * h_2(t)$$

Αφού σχεδιαστούν τα δεδομένα σήματα εισόδου x και h, ζητείται να υπολογιστούν αναλυτικά και να σχεδιαστούν τα σήματα εξόδου y που προκύπτουν από τις παραπάνω σχέσεις.

Άσκηση 1.4.

(α) Θεωρήστε περιοδικό σήμα $x(t)$, το οποίο έχει περίοδο $T = 2a$ και για το οποίο ισχύει:

$$x(t) = \begin{cases} t + a, & -a \leq t \leq 0 \\ a, & 0 < t \leq a \end{cases}$$

Αφού σχεδιαστεί το σήμα στο πεδίο του χρόνου, να υπολογιστούν οι συντελεστές c_m του αναπτύγματος του σήματος αυτού σε μιγαδική σειρά Fourier και να σχεδιαστεί το φάσμα πλάτους $|c_m|$.

(β) Θεωρήστε το περιοδικό σήμα $x(t) = at^2, 0 \leq t \leq 2\pi,$ το οποίο έχει περίοδο $T = 2\pi$. Αφού σχεδιαστεί το σήμα στο πεδίο του χρόνου, να βρεθούν οι συντελεστές $\frac{\alpha_0}{2}, a_m, b_m$ του αναπτύγματος του σήματος αυτού σε τριγωνομετρική σειρά Fourier με ημίτονα και συνημίτονα και στη συνέχεια να υπολογιστούν οι συντελεστές A_0, A_m και οι φάσεις Φ_m του αναπτύγματος μόνο με συνημίτονα.

Να υπολογιστεί η ενέργεια $\bar{E}$ του σήματος, τόσο στο πεδίο του χρόνου, όσο και στο πεδίο της συχνότητας (με βάση τα A_0, A_m) και να επαληθευθεί το θεώρημα του Parseval.

(γ) Αν το $x(t)$ είναι μιγαδικό περιοδικό σήμα με θεμελιώδη περίοδο T και c_m είναι οι συντελεστές του αναπτύγματος του σήματος αυτού σε σειρά Fourier, να αποδειχτεί η παρακάτω σχέση:

$$\frac{1}{T}\int_T |x(t)|^2 dt = \sum_{m=-\infty}^{\infty} |c_m|^2$$

Άσκηση 1.5.

Υπολογίστε το μετασχηματισμό Fourier των παρακάτω σημάτων συνεχούς χρόνου:

(α) $x_1(t) = [te^{-at}\cos(t+a)] \cdot u(t-a)$

(β) $x_2(t) = \begin{cases} e^{-\frac{t}{a}}, & 0 \le t < a \\ 1/e, & a \le t < a+2 \\ -\frac{1}{2e}(t-a-4), & a+2 \le t < a+4 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$

Ακολούθως, υπολογίστε τα σήματα συνεχούς χρόνου, τα οποία αντιστοιχούν στους παρακάτω μετασχηματισμούς Fourier:

(γ) $X_3(\omega) = e^{-a|\omega|} \cdot [u(\omega+a) - u(\omega-a)]$

(δ) $X_4(\omega) = \frac{2a^2}{a^3 + a\omega^2 + j(\omega^3 + \omega a^2)}$

Άσκηση 1.6.

Υπολογίστε το μετασχηματισμό Fourier (DTFT) των παρακάτω σημάτων διακριτού χρόνου:

(α) $x_1[n] = n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \left[u[n+2a-1] - u[n-2a]\right]$

(β) $x_2[n] = \frac{1}{n} \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{a+1}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{a+3}\right)$

Ακολούθως, υπολογίστε τα σήματα διακριτού χρόνου, τα οποία αντιστοιχούν στους παρακάτω μετασχηματισμούς Fourier (DTFT):

(γ) $X_3(\Omega) = \frac{1-\beta^2}{1+\beta^2 - 2\beta\cos\Omega}$, $\beta = \max(\alpha, 2)$

(δ) $X_4(\Omega) = \cos\left(\frac{\beta\Omega}{2}\right) + j\sin(a\Omega)$, $\beta = \begin{cases} a, & \text{αν } a \text{ περιττός} \\ a+1, & \text{αν } a \text{ άρτιος} \end{cases}$

Άσκηση 1.7.

α) Δίδεται Γραμμικό και Χρονικά Αναλλοίωτο σύστημα συνεχούς χρόνου, του οποίου η απόκριση συχνότητας $H(\omega)$ είναι ίση με: $H(\omega)=\dfrac{4+j\omega}{-\omega^2+8aj\omega+7a^2}$. Ζητείται να υπολογιστούν τα ακόλουθα:

(α) Η διαφορική εξίσωση που συνδέει την είσοδο $x(t)$ του συστήματος με την έξοδό του $y(t)$.

(β) Η κρουστική απόκριση $h(t)$ του συστήματος.

(γ) Η έξοδος $y_1(t)$ του συστήματος, όταν εφαρμοστεί σε αυτό είσοδος:

$x_1(t) = e^{-2(a\mathrm{mod}3+1)t} \cdot u(t)$.

(δ) Η έξοδος $y_2(t)$ του συστήματος, όταν εφαρμοστεί σε αυτό είσοδος:

$x_2(t) = \left[e^{-2(a\mathrm{mod}3+1)t} + t \cdot e^{-2(a\mathrm{mod}3+1)t}\right] \cdot u(t)$.

<u>Σημείωση:</u> Τα ζητούμενα σήματα θα πρέπει να είναι εκπεφρασμένα σε όσο το δυνατόν απλούστερες μορφές (π.χ., να μην είναι εκπεφρασμένα ως μιγαδικοί, σε περίπτωση που είναι πραγματικές συναρτήσεις).