1η Σειρά Ασκήσεων Σήματα και Συστήματα

Παναγιώτης Σταματόπουλος el20096

$a = AM \bmod 10 + 1 = 6 + 1 = 7$

1.1) (a) $a \bmod 4 = 7 \bmod 4 = 3$

$$x_1(t) = \sin^3\left(\frac{\pi}{4}t\right) + \cos\left(\frac{\pi}{35}t\right) - \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{14}t\right) =$$

$$= \frac{3}{4}\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right) - \frac{1}{4}\sin\left(\frac{3\pi}{4}t\right) + \cos\left(\frac{\pi}{35}t\right) - \frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{5\pi}{21}t\right) - \sin\left(-\frac{4\pi}{42}t\right)\right] =$$

$$= \frac{3}{4}\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right) - \frac{1}{4}\sin\left(\frac{3\pi}{4}t\right) + \cos\left(\frac{\pi}{35}t\right) - \frac{1}{2}\sin\left(\frac{5\pi}{21}t\right) - \sin\left(\frac{2\pi}{21}t\right)$$

Παρατηρούμε ότι το $x_1(t)$ προκύπτει από υπέρθεση ημιτονικών σημάτων, άρα είναι περιοδικό.

$$T_1 = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}} = 8s \quad , \quad T_2 = \frac{2\pi}{\frac{3\pi}{4}} = \frac{8}{3}s \quad , \quad T_3 = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{35}} = 70s$$

$$T_4 = \frac{2\pi}{\frac{5\pi}{21}} = \frac{42}{5}\,s \quad , \quad T_5 = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{21}} = 21\,s$$

Επομένως η θεμελιώδης συχνότητα του $x_1(t)$ είναι:

$$T = lcm\{T_1, T_2, T_3, T_4, T_5\} = lcm\left\{8, \frac{8}{3}, 70, \frac{42}{5}, 21\right\}$$

$$2^3 \ , \ \frac{2^3}{3} \ , \ 2\cdot5\cdot7 \ , \ \frac{2\cdot3\cdot7}{5} \ , \ 3\cdot7$$

$$\text{Ε.Κ.Π.} = 2^3\cdot3\cdot5\cdot7 = 840$$

Άρα $T = 840s$

β) $$x_2(t) = \left[\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} rect\left(\frac{t+9k}{14}\right)\right] + \sin\left(\frac{\pi}{105}t\right)$$

$$rect\left(\frac{t}{14} + \frac{9k}{14}\right) = \begin{cases} 0, & \left|\frac{t}{14}+\frac{9k}{14}\right| > \frac{1}{2} \\ \frac{1}{14}, & \left|\frac{t}{14}+\frac{9k}{14}\right| < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{28}, & \left|\frac{t}{14}+\frac{9k}{14}\right| = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\left|\frac{t}{14}+\frac{9k}{14}\right| < \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} < \frac{t}{14} + \frac{9k}{14} < \frac{1}{2} \overset{\cdot 14}{\Rightarrow}$$

$$-7 < t+9k < 7 \Rightarrow -7-9k < t < 7-9k$$

Θα μελετήσουμε το σήμα που προκύπτει για $k=\{-2,-1,0,1,2\}$

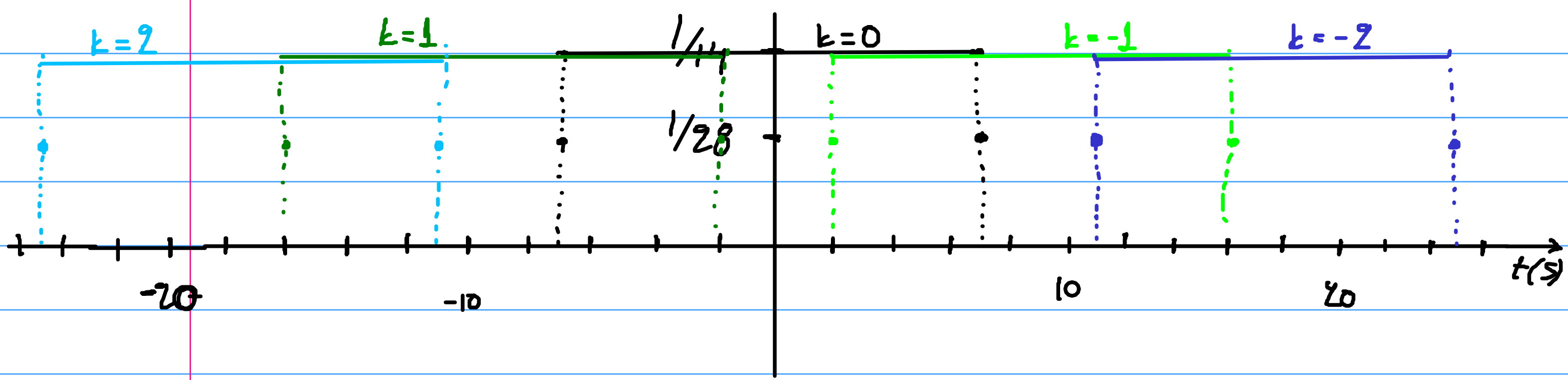
$k=-2: \; -7+18<t<7+18 \Rightarrow 11_s<t<25_s$

$k=-1: \; -7+9<t<7+9 \Rightarrow 2_s<t<16_s$

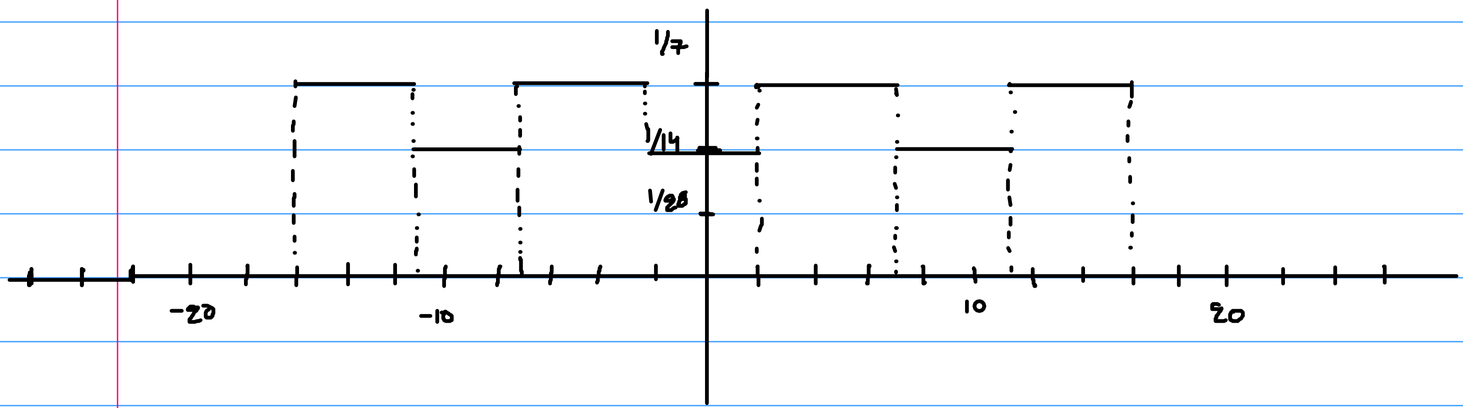
$k=0: \; -7-0<t<7-0 \Rightarrow -7_s<t<7_s$

$k=1: \; -7-9<t<7-9 \Rightarrow -16_s<t<-2_s$

$k=2: \; -7-18<t<7-18 \Rightarrow -25_s<t<-11_s$



Με υπέρθεση αυτών των σημάτων προκύπτει:



Παρατηρούμε πως δημιουργείται περιοδικό σήμα με περίοδο $T_1=9_s$

Άρα το $x_2(t)$ προκύπτει από την υπέρθεση περιοδικών σημάτων με

$T_1=9_s \quad , \quad T_2=\dfrac{2\pi}{\frac{\pi}{105}}=210_s$

Επομένως η θεμελιώδης συχνότητα του $x(t)$ είναι:

$$T = lcm\{9, 210\} = 630s$$

γ) $$x_3[n] = e^{-j\frac{\pi}{21}n} - e^{j\frac{\pi}{28}n} + e^{-j\frac{\pi}{49}n} =$$

$$= \cos\left(-\frac{\pi}{21}n\right) + j\sin\left(-\frac{\pi}{21}n\right) - \cos\left(\frac{\pi}{28}n\right) - j\sin\left(\frac{\pi}{28}n\right) +$$

$$+ \cos\left(-\frac{\pi}{49}n\right) + j\sin\left(-\frac{\pi}{49}n\right) =$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{21}n\right) - \cos\left(\frac{\pi}{28}n\right) + \cos\left(\frac{\pi}{49}n\right) - j\left[\sin\left(\frac{\pi}{21}n\right) + \sin\left(\frac{\pi}{28}n\right) + \right.$$

$$\left. + \sin\left(\frac{\pi}{49}n\right)\right]$$

Το $x_3[n]$ αποτελείται από υπέρθεση περιοδικών σημάτων, επομένως και το $x_3[n]$ είναι περιοδικό.

$$N_1 = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{21}} = 42s = N_4, \quad N_2 = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{28}} = 56s = N_5, \quad N_3 = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{49}} = 98s = N_6$$

Επομένως η θεμελιώδης συχνότητα του $x_3[n]$ είναι:

$$N = lcm\{N_1, N_2, N_3\} = lcm\{42, 56, 98\} = 1176s$$

δ) $x_4[n] = \sum_{k=1}^{5} \exp\left(j \frac{\pi}{3+7 \bmod k} n\right) =$

$$= e^{j \frac{\pi}{3+7 \bmod 1} n} + e^{j \frac{\pi}{3+7 \bmod 2} n} + e^{j \frac{\pi}{3+7 \bmod 3} n} +$$

$$+ e^{j \frac{\pi}{3+7 \bmod 4} n} + e^{j \frac{\pi}{3+7 \bmod 5} n} =$$

$$= e^{j \frac{\pi}{3} n} + e^{j \frac{\pi}{4} n} + e^{j \frac{\pi}{4} n} + e^{j \frac{\pi}{6} n} + e^{j \frac{\pi}{5} n} =$$

$$= e^{j \frac{\pi}{3} n} + 2 e^{j \frac{\pi}{4} n} + e^{j \frac{\pi}{5} n} + e^{j \frac{\pi}{6} n}$$

Ομοίως με το (γ) ερώτημα, το $x_4(t)$ είναι περιοδικό

$N_1 = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}} = 6_s$, $N_2 = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}} = 8_s$, $N_3 = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{5}} = 10_s$

$N_4 = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{6}} = 12_s$

Επομένως η θεμελιώδης περίοδος του $x_3[n]$ είναι:

$N = \mathrm{lcm}\{N_1, N_2, N_3, N_4\} = \mathrm{lcm}\{6, 8, 10, 12\} = 120_s$

1.2) α) $y_1(t) = \int_{-\infty}^{7t} x(\tau - 7)\,d\tau$

• Γραμμικότητα: Για είσοδο $x_1(t)$ έχουμε έξοδο $y_1(t)$
Για είσοδο $x_2(t)$ έχουμε έξοδο $y_2(t)$

Για είσοδο $x_3(t) = b x_1(t) + c x_2(t)$:

$$y_3(t) = \int_{-\infty}^{7t} x_3(\tau-7)\,d\tau = \int_{-\infty}^{7t} \left[b x_1(\tau-7) + c x_2(\tau-7) \right] d\tau =$$

$$= b \int_{-\infty}^{7t} x_1(\tau-7)\,d\tau + c \int_{-\infty}^{7t} x_2(\tau-7)\,d\tau = b y_1(t) + c y_2(t)$$

Επομένως το σύστημα είναι γραμμικό

• Χρονικά Αναλλοίωτο:

Για είσοδο $x_1(t) = x(t-t_0)$ έχουμε

$$y_1(t) = \int_{-\infty}^{7t} x_1(\tau-7)\,d\tau = \int_{-\infty}^{7t} x(\tau-7-t_0)\,d\tau = y(t-t_0)$$

Επομένως το σύστημα είναι χρονικά αναλλοίωτο.

• <u>Μνήμη</u>: Η έξοδος εξαρτάται και από προηγούμενες εισόδους, άρα το σύστημα έχει μνήμη.

• <u>Αιτιατότητα</u>: Η έξοδος εξαρτάται και από μελλοντικές εισόδους, άρα το σύστημα είναι μη αιτιατό.

• <u>Ευστάθεια (BIBO)</u>:

Έστω $x(t)$: $|x(t)| \leq M \Rightarrow |x(\tau-7)| \leq M$

Τότε: $|y(t)| = \left| \int_{-\infty}^{7t} x(\tau-7) d\tau \right| \leq \left| \int_{-\infty}^{7t} M d\tau \right| = M \left| \int_{-\infty}^{7t} d\tau \right| =$

$= M \left| 7t + \infty \right|$ μη πεπερασμένο για οποιοδήποτε πεπερασμένο t.

Επομένως το σύστημα είναι μη ευσταθές κατά BIBO

β) $y_2(t) = \dfrac{1}{x_2(t)+7}$

• <u>Γραμμικότητα</u>:

Για είσοδο $x_1(t)$ έχουμε έξοδο $y_1(t)$
Για είσοδο $x_2(t)$ έχουμε έξοδο $y_2(t)$

Για είσοδο $x_3(t) = b\, x_1(t) + c\, x_2(t)$ έχουμε:

$$y_3(t) = \frac{1}{x_3(t)+7} = \frac{1}{bx_1(t)+cx_2(t)+7} \neq by_1(t)+cy_2(t)$$

Άρα το σύστημα είναι <u>μη γραμμικό</u>

• <u>Χρονικά αναλλοίωτο</u>:

Για είσοδο $x_1(t)=x(t-t_0)$ έχουμε:

$$y_1(t) = \frac{1}{x_1(t)+7} = \frac{1}{x(t-t_0)+7} = y(t-t_0)$$

Άρα είναι <u>χρονικά αναλλοίωτο</u>.

• <u>Μνήμη</u>: Η έξοδος δεν εξαρτάται από προηγούμενες εισόδους επομένως <u>δεν έχει μνήμη</u>.

• <u>Αιτιατότητα</u>: Η έξοδος δεν εξαρτάται από μελλοντικές εισόδους, άρα είναι <u>αιτιατό</u>.

• <u>Ευστάθεια BIBO</u>: Για είσοδο $x(t): |x(t)| \leq M$

$$|y(t)| = \left|\frac{1}{x(t)+7}\right| \geq \left|\frac{1}{M+7}\right| \overset{M>0}{=} \frac{1}{M+7}$$

$$|x(t)| \leq M \Rightarrow |x(t)|+7 \leq M+7 \Rightarrow$$

$$|x(t)+7| \leq |x(t)|+7 \leq M+7 \Rightarrow \left|\frac{1}{x(t)+7}\right| \geq \frac{1}{M+7}$$

Άρα το σύστημα είναι <u>ασταθές κατά BIBO</u>.

γ) $y_3[n] = x[n] * x[n^2] + 1 =$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[n-k] \cdot x[n^2] + 1$$

• <u>Γραμμικότητα</u>:

Για είσοδο $x_1[n]$ έχουμε έξοδο $y_1[n]$
Για είσοδο $x_2[n]$ έχουμε έξοδο $y_2[n]$

Για είσοδο $x_3[n] = bx_1[n] + cx_2[n]$ έχουμε:

$$y_3[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_3[n-k] \cdot x_3[n^2] + 1 =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (bx_1[n-k] + cx_2[n-k])(bx_1[n^2] + cx_2[n^2]) + 1 \neq$$

$$\neq by_1[n] + cy_2[n]$$

Άρα είναι <u>μη γραμμικό</u>.

• <u>Χρονικά αναλλοίωτο</u>:

Για είσοδο $x_1[n] = x[n-n_0]$ έχουμε:

$$y_1[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_1[n-k] \cdot x_1[n^2] + 1 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[n-n_0-k] x[(n-n_0)^2] + 1 =$$

$= y[n-n_0]$ Άρα είναι <u>χρονικά αναλλοίωτο</u>.

• <u>Μνήμη:</u> Η έξοδος εξαρτάται από προηγούμενες εισόδους άρα το σύστημα έχει <u>μνήμη</u>.

• <u>Αιτιατότητα:</u> Η έξοδος εξαρτάται από μελλοντικές εισόδους άρα το σύστημα είναι <u>μη αιτιατό</u>.

• <u>Ευστάθεια BIBO:</u>

Έστω $x[n]$ με $|x[n]| \leq M$, $\forall n$

Για $x[n] = u[n]$ το $y[n]$ απειρίζεται άρα το σύστημα είναι <u>μη ευσταθές</u>.

δ) $y_4[n] = \cos\left(\frac{7\pi}{3} x[n]\right)$

• <u>Γραμμικότητα:</u>

Για είσοδο $x_1[n]$ έχουμε έξοδο $y_1[n]$
Για είσοδο $x_2[n]$ έχουμε έξοδο $y_2[n]$

Για είσοδο $x_3[n] = bx_1[n] + cx_2[n]$ έχουμε:

$$y_3[n] = \cos\left(\frac{7\pi}{3} x_3[n]\right) = \cos\left[\frac{7\pi}{3}\left(bx_1[n] + cx_2[n]\right)\right] \neq$$

$$\neq b\cos\left(\frac{7\pi}{3} x_1[n]\right) + c\cos\left(\frac{7\pi}{3} x_2[n]\right)$$ Άρα <u>μη γραμμικό</u>.

• **Χρονικά Αναλλοίωτο:**

Για είσοδο $x_1[n]=x[n-n_0]$ έχουμε έξοδο:

$$y_1[n] = \cos\left(\frac{7\pi}{3}x_1[n]\right) = \cos\left(\frac{7\pi}{3}x[n-n_0]\right) = y[n-n_0]$$ άρα είναι

χρονικά αναλλοίωτο.

• **Μνήμη:** Η έξοδος δεν εξαρτάται από προηγούμενες εισόδους
άρα **δεν έχει μνήμη.**

• **Αιτιατότητα:** Η έξοδος δεν εξαρτάται από μελλοντικές εισόδους
άρα είναι **αιτιατό.**

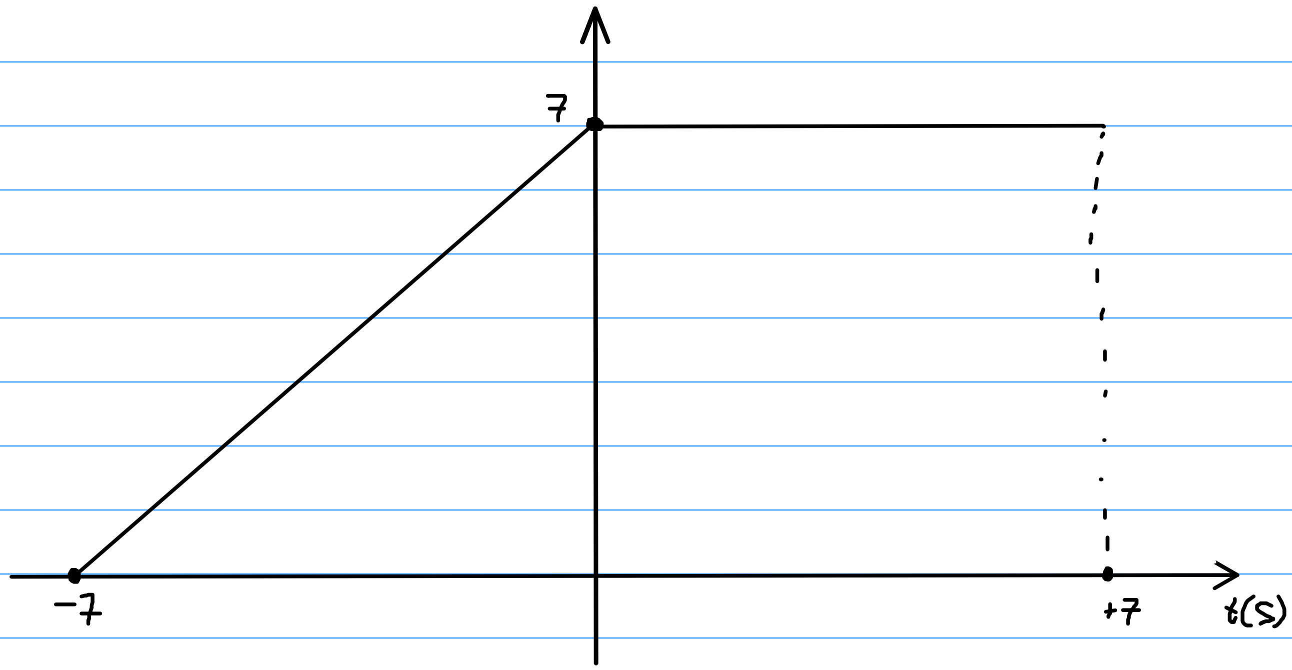
• **Ευστάθεια BIBO:** Για οποιαδήποτε είσοδο ισχύει:

$$|y[n]| = \left|\cos\left(\frac{7\pi}{3}x[n]\right)\right| \leq 1$$

Το σύστημα δίνει φραγμένη έξοδο άρα είναι **ευσταθές** κατά BIBO.

1.4) α) $T = 2\cdot a = 14s$

$$x(t) = \begin{cases} t+7, & -7 \leq t \leq 0 \\ 7, & 0 < t \leq 7 \end{cases}$$



Το σήμα είναι περιοδικό, οπότε με ανάλυση Fourier γράφεται ως άθροισμα ημιτονικών όρων:

$$x(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} C_m e^{j\omega_0 m t} + C_0 \quad , \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\cdot 7} = \frac{\pi}{7}$$

Άρα $x(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} C_m e^{j\frac{\pi}{7}mt}$

Το σήμα έχει πεπερασμένη διάρκεια, επομένως τα άκρα της σειράς του $x(t)$ θα εκτείνονται για $m=-7$ έως $m=+7$.

$$x(t) = \sum_{m=-7}^{7} C_m e^{j\frac{\pi}{7}mt} + C_0$$

$$c_m = \frac{1}{14}\int_{-7}^{7} x(t)\, e^{-j\frac{\pi}{7}mt}\, dt = \frac{1}{14}\int_{-7}^{0} (t+7)\, e^{-j\frac{\pi}{7}mt}\, dt +$$

$$+\frac{1}{14}\int_{0}^{7} 7 e^{-j\frac{\pi}{7}mt}\, dt =$$

$$= -\frac{49}{14\pi^2 m^2}\left(e^{j\pi m} - j\pi m - 1\right) + \frac{49j}{14\pi m}\left(e^{-j\pi m} - 1\right) =$$

$$= \frac{49}{14\pi m}\left[-\frac{e^{j\pi m}}{\pi m} + \cancel{j} + \frac{1}{\pi m} + je^{-j\pi m} - \cancel{j}\right] =$$

$$= \frac{7}{2\pi m}\left(je^{-j\pi m} - \frac{e^{j\pi m}}{\pi m} + \frac{1}{\pi m}\right)$$

$$c_0 = \frac{1}{14}\int_{-7}^{7} x(t)\, dt = \frac{1}{14}\int_{-7}^{0} (t+7)\, dt + \frac{1}{14}\int_{0}^{7} 7\, dt = \frac{147}{28} = \frac{21}{4}$$

$$c_1 = \frac{7}{2\pi}\left(je^{-j\pi} - \frac{e^{j\pi}}{\pi} + \frac{1}{\pi}\right) = \frac{7}{2\pi}\left(j\cos\pi + \cancelto{0}{\sin\pi} - \frac{\cos\pi + \cancelto{0}{j\sin\pi}}{\pi} + \frac{1}{\pi}\right) =$$

$$= \frac{7}{2\pi}\left(\frac{2}{\pi} - j\right) = \frac{7}{\pi^2} - j\frac{7}{2\pi}$$

$$c_{-1} = -\frac{7}{2\pi}\left(je^{j\pi} + \frac{e^{j\pi}}{\pi} - \frac{1}{\pi}\right) = -\frac{7}{2\pi}\left(-j - \frac{1}{\pi} - \frac{1}{\pi}\right) = \frac{7}{\pi^2} + j\frac{7}{2\pi}$$

$$c_2 = \frac{7}{4\pi}\left(je^{-j2\pi} - \frac{e^{j2\pi}}{2\pi} + \frac{1}{2\pi}\right) = \frac{7}{4\pi}\left(j - \cancel{\frac{1}{2\pi}} + \cancel{\frac{1}{2\pi}}\right) = j\frac{7}{4\pi}$$

$$c_{-2} = -\frac{7}{4\pi}\left(je^{j2\pi} + \frac{e^{-j2\pi}}{2\pi} - \frac{1}{2\pi}\right) = -\frac{7}{4\pi}\left(j + \cancel{\frac{1}{2\pi}} - \cancel{\frac{1}{2\pi}}\right) = -j\frac{7}{4\pi}$$

$$c_3 = \frac{7}{6\pi}\left(je^{-j3\pi} - \frac{e^{-j3\pi}}{3\pi} + \frac{1}{3\pi}\right) = \frac{7}{6\pi}\left(-j + \frac{1}{3\pi} + \frac{1}{3\pi}\right) =$$

$$= \frac{7}{6\pi}\left(-j + \frac{2}{3\pi}\right) = \frac{7}{9\pi^2} - j\frac{7}{6\pi}$$

$$c_{-3} = -\frac{7}{6\pi}\left(je^{j3\pi} + \frac{e^{-j3\pi}}{3\pi} - \frac{1}{3\pi}\right) = -\frac{7}{6\pi}\left(-j - \frac{1}{3\pi} - \frac{1}{3\pi}\right) =$$

$$= \frac{7}{9\pi^2} + j\frac{7}{6\pi}$$

$$c_4 = \frac{7}{8\pi}\left(je^{-j4\pi} - \frac{e^{j4\pi}}{4\pi} + \frac{1}{4\pi}\right) = \frac{7}{8\pi}\left(j - \cancel{\frac{1}{4\pi}} + \cancel{\frac{1}{4\pi}}\right) = j\frac{7}{8\pi}$$

$$c_{-4} = \frac{7}{-8\pi}\left(je^{j4\pi} + \frac{e^{-j4\pi}}{4\pi} - \frac{1}{4\pi}\right) = -\frac{7}{8\pi}\left(j + \cancel{\frac{1}{4\pi}} - \cancel{\frac{1}{4\pi}}\right) = -j\frac{7}{8\pi}$$

$$c_5 = \frac{7}{10\pi}\left(je^{-j5\pi} - \frac{e^{j5\pi}}{5\pi} + \frac{1}{5\pi}\right) = \frac{7}{10\pi}\left(-j + \frac{1}{5\pi} + \frac{1}{5\pi}\right) =$$

$$= \frac{7}{25\pi^2} - j\frac{7}{10\pi}$$

$$c_{-5} = -\frac{7}{10\pi}\left(je^{j5\pi} + \frac{e^{j5\pi}}{5\pi} - \frac{1}{5\pi}\right) = -\frac{7}{10\pi}\left(-j - \frac{1}{5\pi} - \frac{1}{5\pi}\right) = \frac{7}{25\pi^2} + j\frac{7}{10\pi}$$

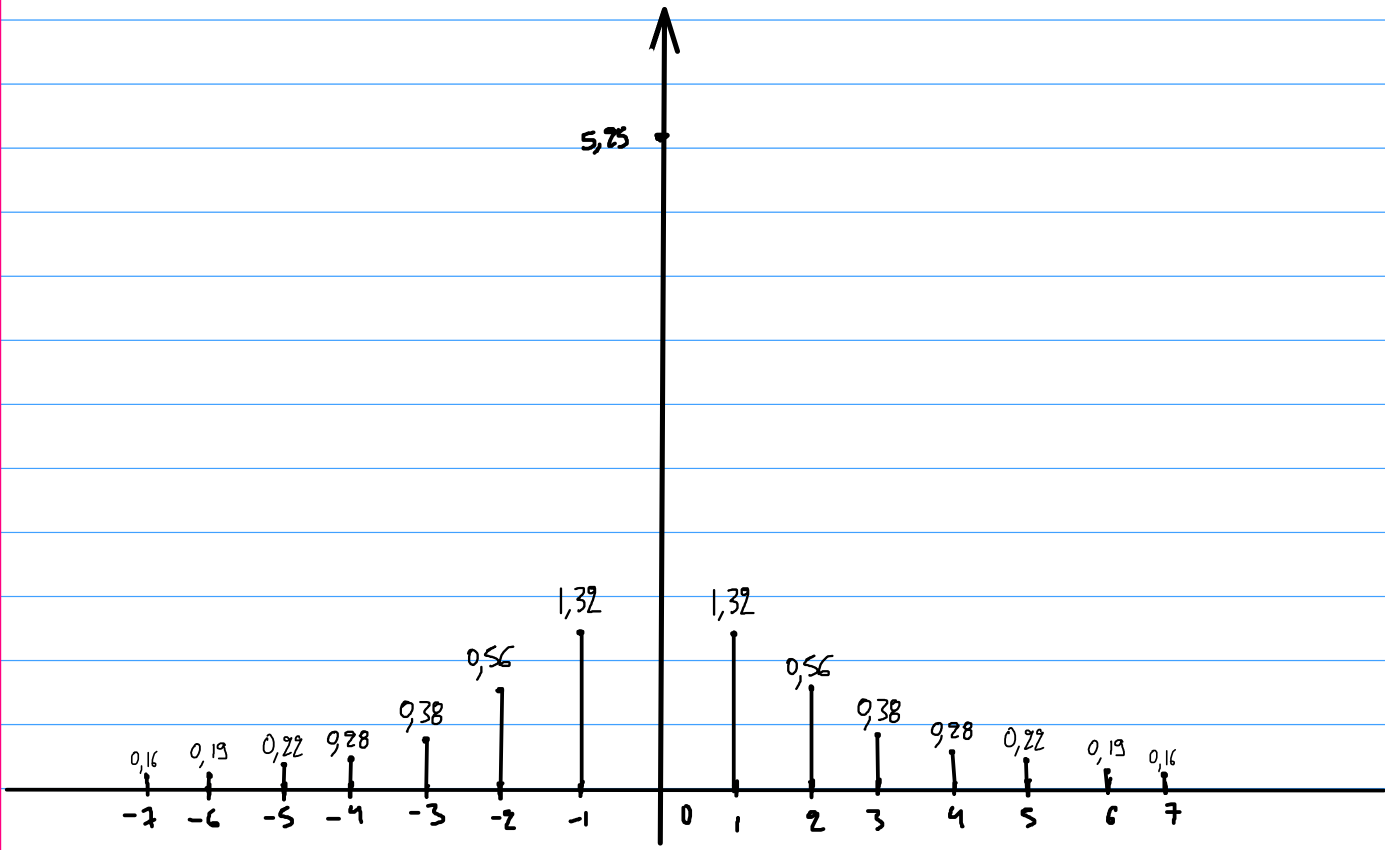
$$C_6 = \frac{7}{12\pi}\left(je^{-j6\pi} - \frac{e^{j6\pi}}{6\pi} + \frac{1}{6\pi}\right) = \frac{7}{12\pi}\left(j - \cancel{\frac{1}{6\pi}} + \cancel{\frac{1}{6\pi}}\right) = j\frac{7}{12\pi}$$

$$C_{-6} = -\frac{7}{12\pi}\left(je^{j6\pi} + \frac{e^{-j6\pi}}{6\pi} - \frac{1}{6\pi}\right) = -\frac{7}{12\pi}\left(j + \cancel{\frac{1}{6\pi}} - \cancel{\frac{1}{6\pi}}\right) = -j\frac{7}{12\pi}$$

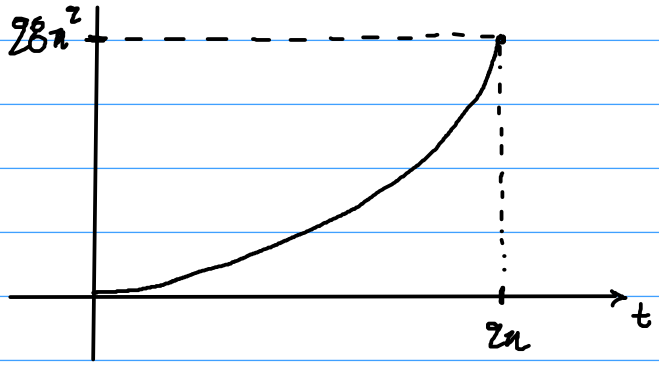
$$C_7 = \frac{1}{2\pi}\left(je^{-j7\pi} - \frac{e^{j7\pi}}{7\pi} + \frac{1}{7\pi}\right) = \frac{1}{2\pi}\left(-j + \frac{1}{7\pi} + \frac{1}{7\pi}\right) = \frac{1}{7\pi^2} - j\frac{1}{2\pi}$$

$$C_{-7} = -\frac{1}{2\pi}\left(je^{j7\pi} + \frac{e^{-j7\pi}}{7\pi} - \frac{1}{7\pi}\right) = -\frac{1}{2\pi}\left(-j - \frac{1}{7\pi} - \frac{1}{7\pi}\right) = \frac{1}{7\pi^2} + j\frac{1}{2\pi}$$

$\lvert C_1\rvert = \lvert C_{-1}\rvert \simeq 1{,}32$	$\lvert C_3\rvert = \lvert C_{-3}\rvert \simeq 0{,}38$	$\lvert C_5\rvert = \lvert C_{-5}\rvert \simeq 0{,}22$	$\lvert C_7\rvert = \lvert C_{-7}\rvert = 0{,}16$
$\lvert C_2\rvert = \lvert C_{-2}\rvert \simeq 0{,}56$	$\lvert C_4\rvert = \lvert C_{-4}\rvert \simeq 0{,}28$	$\lvert C_6\rvert = \lvert C_{-6}\rvert \simeq 0{,}19$	$\lvert C_0\rvert = 5{,}25$



b) $x(t) = 7t^2$, $0 \leq t \leq 2\pi$, $T = 2\pi$



$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos(m w_0 t) + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin(m w_0 t)$$

$$w_0 = \frac{2\pi}{T} = 1$$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 7t^2 dt = \frac{28\pi^2}{3}$$

$$a_m = \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\pi} \int_0^{2\pi} 7t^2 \cos(mt) dt = -\frac{28}{m^2}$$

$$b_m = \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\pi} \int_0^{2\pi} t^2 \sin(mt) dt = -\frac{28\pi}{m}$$

$$x(t) = A_0 + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \cos(mt + \varphi_m)$$

$$A_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{28\pi^2}{3}$$

$$A_m = \sqrt{a_m^2+b_m^2} = \sqrt{\frac{28^2}{m^4}+\frac{28^2\pi^2}{m^2}} = \frac{28}{m}\sqrt{\frac{1}{m^2}+\pi^2} =$$

$$= \frac{28}{m}\sqrt{\frac{(m\pi)^2+1}{m^2}} = \frac{28}{m^2}\sqrt{m^2\pi^2+1}$$

$$\phi_m = \arctan\left(-\frac{b_m}{a_m}\right) = \arctan\left(\frac{\frac{\cancel{28}\pi}{\cancel{m}}}{-\frac{\cancel{28}}{m^2}}\right) = \arctan(-\pi m)$$

$$\bar{E} = \frac{1}{T}\int_T x^2(t)dt = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m^2 = A_0^2 + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{A_m^2}{2}$$

$$A_0^2 + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{A_m^2}{2} = \left(\frac{28\pi^2}{3}\right)^2 + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{28}{m^2}\sqrt{m^2\pi^2+1}$$

$$\gamma)\ \frac{1}{T}\int_T |x(t)|^2 dt = \sum_{m=-\infty}^{+\infty}|C_m|^2$$

$$\bar{E} = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}|x(t)|^2 dt = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}x(t)\cdot x^*(t)dt = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}x(t)\left(\sum_m C_m e^{jm\omega_0 t}\right)^* dt =$$

$$= \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}x(t)\sum_m C_m^* e^{-jm\omega_0 t}dt = \sum_m C_m^*\left(\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}x(t)e^{-jm\omega_0 t}dt\right) =$$

$$= \sum_m C_m^* C_m = \sum_m |C_m|^2$$ αποδείχθηκε

1.5) a) $x_1(t) = \left[te^{-7t}\cos(t+7)\right]u(t-7) =$

$$= \left[te^{-7t}\,\frac{e^{j(t+7)}+e^{-j(t+7)}}{2}\right]u(t-7) =$$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t)\,e^{-j\omega t}\,dt = \int_{7}^{+\infty} \frac{1}{2}te^{-7t}e^{-j\omega t}\left(e^{j(t+7)}+e^{-j(t+7)}\right)dt =$$

$$= \int_{7}^{+\infty} \frac{1}{2}te^{-7t}\,e^{-j[(\omega+1)t+7]}\,dt + \int_{7}^{+\infty} \frac{1}{2}te^{-7t}\,e^{j[(1-\omega)t+7]}\,dt =$$

$$= \frac{e^{-[49+7j(\omega+2)]}}{8+\omega} - \frac{e^{-[49+7j(\omega-2)]}}{7+6j}$$

b)

$$x_2(t) = \begin{cases} e^{-\frac{t}{7}}, & 0\le t< 7_s \\ 1/e, & 7_s\le t<9_s \\ -\frac{1}{2e}(t-11), & 9_s\le t<11_s \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

$$X_{21}(\omega) = \int_{0}^{7} e^{t\left(-\frac{1}{7}-j\omega\right)}\,dt = \frac{1-e^{-1-j7\omega}}{1/7+j\omega}$$

$$X_{22}(\omega) = \int_{7}^{9} \frac{1}{e}e^{-j\omega t}\,dt = \frac{j}{e\omega}\left(e^{-j9\omega}-e^{-j7\omega}\right)$$

$$X_{23}(\omega) = -\frac{1}{2e}\int_{9}^{11}(t-11)\,e^{-j\omega t}\,dt =$$

$$= \frac{11}{-2ej\omega}\left(e^{-j11\omega} - e^{-j9\omega}\right) + \frac{1}{2ej\omega}\left(11e^{-j11\omega} - 9e^{-j9\omega}\right) - \frac{e^{-j\omega}}{2\omega} + \frac{e^{-j9\omega}}{2e\omega}$$

$$X_{24}(\omega) = 0$$

Άρα $X_2(\omega) = X_{21}(\omega) + X_{22}(\omega) + X_{23}(\omega) + X_{24}(\omega) =$

$$= \frac{1 - e^{-1-j7\omega}}{1/7 + j\omega} + \frac{1}{e} \cdot \frac{1}{-j\omega}\left(e^{-j9\omega} - e^{-j7\omega}\right) + \frac{11}{-2ewj}\left(e^{-j11\omega} - e^{-j9\omega}\right) +$$

$$+ \frac{1}{2ej\omega}\left(11e^{-j11\omega} - 9e^{-j9\omega}\right) - \frac{e^{-j\omega}}{2\omega} + \frac{e^{-j9\omega}}{2e\omega}$$

γ) $X_3(\omega) = e^{-7|\omega|} \cdot \left[u(\omega+7) - u(\omega-7)\right]$

$$u(\omega+7) = \begin{cases} 1, & \omega \geq -7 \\ 0, & \omega < -7 \end{cases} \qquad u(\omega-7) = \begin{cases} 1, & \omega \geq 7 \\ 0, & \omega < 7 \end{cases}$$

	$-\infty$ … -7	-7 … 7	7 … $+\infty$
$u(\omega+7)$	0	1	1
$u(\omega-7)$	0	0	1
$u(\omega+7)-u(\omega-7)$	0	1	0

$$X_3(\omega) = e^{-7|\omega|}, \quad -7 \leq \omega \leq 7$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X_3(\omega)e^{j\omega t}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-7}^{7} e^{-7|\omega|}\,e^{j\omega t}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1-e^{-7(7+jt)}}{7+jt} + \frac{e^{7(-7+jt)}-1}{-7+jt} \right), \quad -\frac{2\pi}{7} \leq t \leq \frac{2\pi}{7}$$

$$x(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1-e^{-7(7+jt)}}{7+jt} + \frac{e^{7(-7+jt)}-1}{-7+jt} \right), & -\frac{2\pi}{7} \leq t \leq \frac{2\pi}{7} \\ 0 & , \text{αλλού} \end{cases}$$

δ) $$X_4(w) = \frac{2a^2}{a^3+aw^2+j(w^3+wa^2)} = \frac{2a^2}{a(a^2+w^2)+jw(a^2+w^2)} =$$

$$= \frac{2a^2}{(a^2+w^2)(a+jw)} = \frac{2a^2}{(w+ja)(w-ja)(a+jw)} = \frac{-2a^2 j}{(w-ja)^2(w+ja)} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{a-jw} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{a+jw} + \frac{7}{(a+jw)^2}$$

$$e^{-at}u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{a+jw}, \quad te^{-at}u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{(a+jw)^2}$$

Άρα:

$$X_4(t) = \frac{e^{7t}}{-2}u(t) + \frac{1}{2}e^{-7t}u(t) + 7te^{-7t}u(t)$$

1.6) (a) $x_1[n] = n\left(\frac{1}{2}\right)^n \left[u[n+14-1]-u[n-14]\right] =$

$$= n\left(\frac{1}{2}\right)^n \left[u[n+13]-u[n-14]\right] = \sum_{n=-13}^{14} n\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$X_1[\Omega] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^n \left[u[n+13]-u[n-14]\right] e^{-j\Omega n} =$$

$$= \sum_{n=-13}^{14} n\left(\frac{1}{2}\right)^n e^{-j\Omega n} = \sum_{n=0}^{13} (-n)\left(\frac{1}{2}\right)^n e^{-j\Omega n} + \sum_{n=1}^{14} n\left(\frac{1}{2}\right)^n e^{-j\Omega n} =$$

$$= -\sum_{n=0}^{13} n\left(\frac{e^{-j\Omega}}{2}\right)^n + \sum_{n=1}^{14} n\left(\frac{e^{-j\Omega}}{2}\right)^n =$$

$$= -\frac{e^{j\Omega}}{2}\cdot\frac{13\left(\frac{e^{-j\Omega}}{2}\right)^{14} - 14\left(\frac{e^{-j\Omega}}{2}\right)^{13} + 1}{\left(1-\frac{e^{-j\Omega}}{2}\right)^2} + \frac{e^{j\Omega}}{2}\cdot\frac{14\left(\frac{e^{-j\Omega}}{2}\right)^{15} - 15\left(\frac{e^{-j\Omega}}{2}\right)^{14} + 1}{\left(1-\frac{e^{-j\Omega}}{2}\right)^2}$$

(b) $x_2[n] = \underbrace{\frac{1}{n}\sin\left(\frac{\pi n}{8}\right)}_{x_{21}[n]} \cdot \underbrace{\sin\left(\frac{\pi n}{10}\right)}_{x_{22}[n]}$

$$\frac{1}{n}\sin\left(\frac{\pi n}{8}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi n}{8}\right)\cdot\pi}{\pi n} \longleftrightarrow X_{21}[\Omega] = \begin{cases}\pi, & |\Omega| < \pi/8 \\ 0, & \pi/8 < |\Omega| < \pi\end{cases}$$

$$\sin\left(\frac{\pi n}{10}\right) \longleftrightarrow = -j\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left[\delta(\omega-\pi/10+2k\pi) - \delta(\omega+\pi/10+2k\pi)\right]$$

$$X_2(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_{21}(\theta) X_{22}(\Omega-\theta)\, d\theta \Longrightarrow$$

$$X_2(\Omega) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/8}^{\pi/8} \pi(-j\pi) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left[\delta\left(\Omega-\theta-\frac{\pi}{10}+2k\pi\right) - \delta\left(\Omega-\theta+\frac{\pi}{10}+2k\pi\right)\right] d\theta =$$

$$= j\frac{\pi}{2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\pi/8}^{\pi/8} \left(\delta\left(\Omega-\theta-\frac{\pi}{10}+2k\pi\right) - \delta\left(\Omega-\theta+\frac{\pi}{10}+2k\pi\right)\right) d\theta \right]$$

γ) $X_3(\Omega) = \dfrac{1-7^2}{1+7^2-2\cdot 7\cdot \cos\Omega}$

$$1+b^2-2b\cos\Omega = 1+b^2 - b\left(e^{j\Omega}+e^{-j\Omega}\right) =$$

$$= 1 - be^{j\Omega} + b^2 - be^{-j\Omega} =$$

$$= e^{j\Omega}\left(e^{-j\Omega}-b\right) - b\left(e^{-j\Omega}-b\right) =$$

$$= \left(e^{-j\Omega}-b\right)\left(e^{j\Omega}-b\right) = \left(7-e^{-j\Omega}\right)\left(7-e^{j\Omega}\right)$$

$$X_3(\Omega) = \frac{-48}{\left(7-e^{-j\Omega}\right)\left(7-e^{j\Omega}\right)}$$

$$\frac{1}{7-e^{-j\Omega}} = \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{1-\frac{e^{-j\Omega}}{7}} \longleftrightarrow \frac{1}{7}\cdot\left(\frac{1}{7}\right)^n u[n]$$

$$\frac{1}{7-e^{j\Omega}} \longleftrightarrow \frac{1}{7}\cdot 7^n u[-n]$$

$$-\frac{48}{(7-e^{j\Omega})(7-e^{-j\Omega})} = \frac{-7}{7-e^{j\Omega}} + \frac{-7}{7-e^{-j\Omega}} + 1$$

$$x_3[n] = -\frac{\cancel{7}}{\cancel{7}} \cdot 7^n u[-n] - \cancel{7} \cdot \frac{1}{\cancel{7}} \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^n u[n] + \delta[n] =$$

$$= -7^n u[-n] - \frac{1}{7^n} u[n] + \delta[n]$$

δ) $X_4[\Omega] = \cos\left(\frac{a\Omega}{2}\right) + j\sin(a\Omega) = \cos\left(\frac{7\Omega}{2}\right) + j\sin(7\Omega) =$

$$= \frac{1}{2} e^{j\frac{7}{2}\Omega} + \frac{1}{2} e^{-j\frac{7}{2}\Omega} + j \cdot \frac{1}{2j}\left(e^{j7\Omega} - e^{-j7\Omega}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} e^{j\frac{7}{2}\Omega} + \frac{1}{2} e^{-j\frac{7}{2}\Omega} + \frac{1}{2} e^{j7\Omega} - \frac{1}{2} e^{-j7\Omega}$$

$$e^{-j\omega n_0} \longleftrightarrow \delta[-n-n_0]$$

$$x_4[n] = \frac{1}{2}\delta\left[-n-\frac{7}{2}\right] + \frac{1}{2}\delta\left[n-\frac{7}{2}\right] + \frac{1}{2}\delta[-n-7] - \frac{1}{2}\delta[n-7]$$