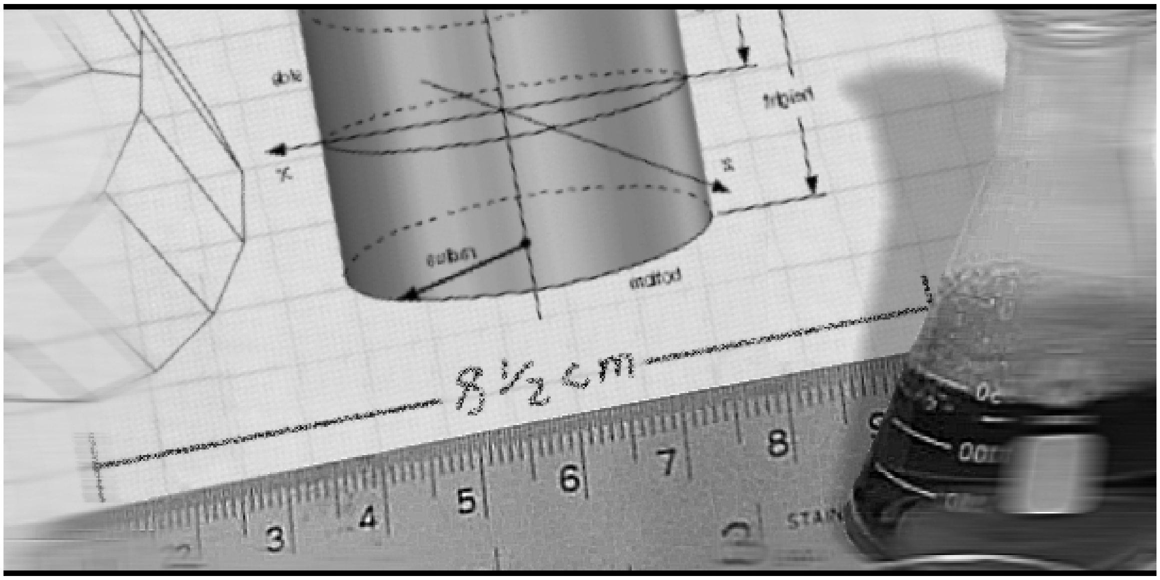
Programme de Formation de base

Module 5.01

(Multiplication et division de fractions et de nombres entiers, exposants et notation scientifique)

Arithmétique



Rédaction	Paulette DesChâtelets, La Cité collégiale Francine Bertrand, La Cité collégiale
Mise à jour	Julie Gratton, Collège Boréal

Subventionné par	Le ministère de la Formation et des Collèges et Universités de l'Ontario et le Secrétariat national à l'alphabétisation.

Module 1

Arithmétique

Au niveau 3, nous avons appris à additionner et soustraire des fractions. Au niveau 5, nous allons voir comment les multiplier et les diviser.

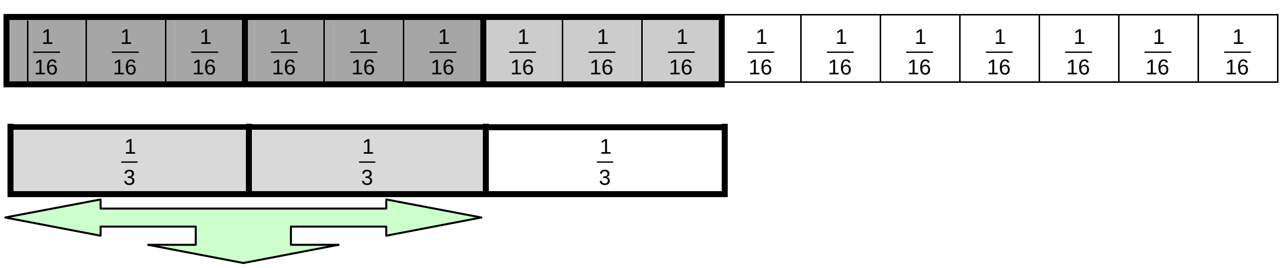
<u>Multiplier des fractions</u>

La multiplication de fractions est exprimée par le symbole (×) mais aussi par le mot (de).

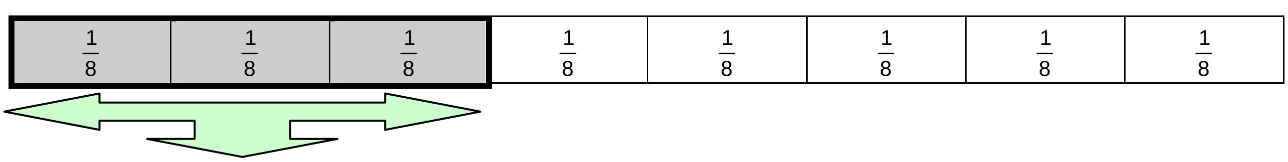
$$\frac{1}{2} \textit{ de } 10 \qquad \text{veut dire} \qquad \frac{1}{2} \times 10$$

Il est facile de savoir que $\frac{1}{2}$ *de* $10 = 5$

Mais comment savoir ce que donne $\frac{2}{3}$ *de* $\frac{9}{16}$



$$\frac{2}{3} \textit{ de } \frac{9}{16} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$



$$\frac{3}{8}$$

Pour multiplier des fractions ordinaires :

1- on simplifie si c'est possible,

2- on multiplie les numérateurs,

3- ensuite, on multiplie les dénominateurs.

Exemple 1 : $\dfrac{2}{3} \times \dfrac{9}{16}$

On simplifie un numérateur et un dénominateur.

$$\dfrac{\overset{1}{\cancel{2}}}{3} \times \dfrac{9}{\underset{8}{\cancel{16}}}$$

Le numérateur '2' et le dénominateur '16' ont été simplifiés en divisant les deux nombres par 2.

$$\dfrac{2}{\underset{1}{\cancel{3}}} \times \dfrac{\overset{3}{\cancel{9}}}{16}$$

Le numérateur '9' et le dénominateur '3' ont été simplifiés en divisant les deux nombres par 3.

Les deux ensemble donnent :

$$\dfrac{\overset{1}{\cancel{2}}}{\underset{1}{\cancel{3}}} \times \dfrac{\overset{3}{\cancel{9}}}{\underset{8}{\cancel{16}}} = \dfrac{3}{8} \quad \begin{array}{l} \text{produit des numérateurs} \\ \text{produit des dénominateurs} \end{array}$$

Exemple 2 : $\frac{1}{2} \times 10$

On peut changer 10 entiers à $\frac{10}{1}$.

On simplifie et on effectue la multiplication. $\frac{1}{\cancel{2}_{1}} \times \frac{\cancel{10}^{5}}{1} = \frac{5}{1} = 5$

EXERCICE 1

1. Effectuez, puis vérifiez à l'aide de la calculatrice.

(a) $\frac{1}{4} \times \frac{1}{8} =$

(b) $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} =$

(c) $\frac{3}{4} \times \frac{1}{3} =$

(d) $\frac{7}{12} \times \frac{4}{5} =$

(e) $\frac{2}{5}$ *de* $15 =$

(f) $\frac{9}{10}$ *de* $\frac{8}{15} =$

(g) $\frac{7}{18}$ *de* $\frac{9}{14} =$

(h) $\frac{9}{16}$ *de* $8 =$

(i) $\frac{5}{8}$ *de* $\frac{4}{5} =$

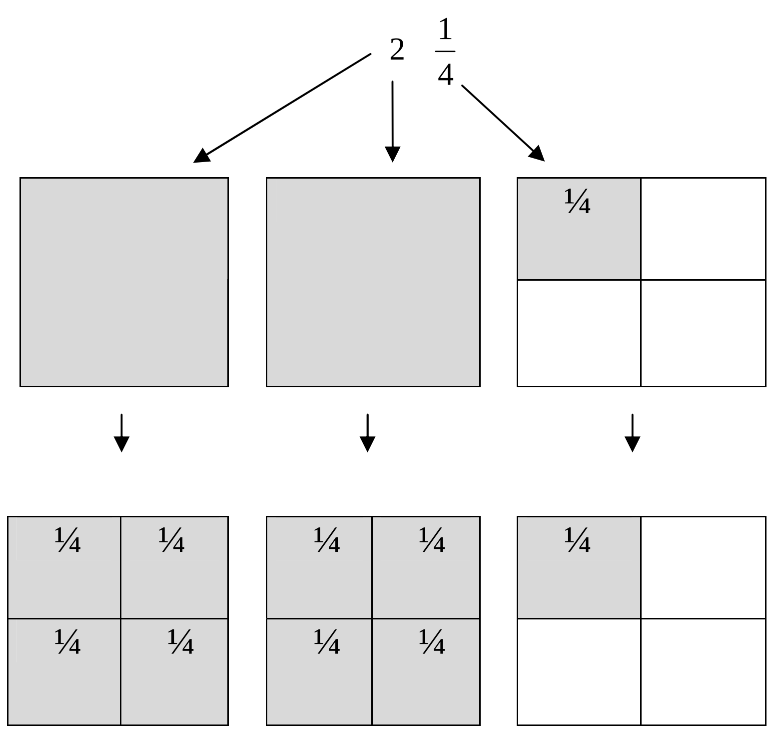
(j) $\frac{11}{12}$ *de* $\frac{2}{11} =$

2. Illustrez, à l'aide d'un dessin, la solution de (b).

Convertir un nombre fractionnaire en expression fractionnaire

En mathématiques, on peut toujours faire les conversions dans les deux sens. S’il est possible de convertir une expression fractionnaire en nombre fractionnaire, il est aussi possible de convertir un nombre fractionnaire en expression fractionnaire.

Puisque $\frac{9}{4} = 2\ \frac{1}{4}$ il est aussi vrai que $2\ \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$



$$\frac{4}{4} + \frac{4}{4} + \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$$

Pour convertir rapidement un nombre fractionnaire en expression fractionnaire :

$$2\frac{1}{4} \longrightarrow \quad ?$$

Étape 1 : On multiplie le dénominateur par l'unité ($4 \times 2 = 8$).

Étape 2 : On additionne le résultat que l'on vient d'obtenir avec le numérateur ($8 + 1 = 9$).

Étape 3 : On écrit cette somme sur le dénominateur existant ($\frac{9}{4}$).

Voici un truc :

$$\overset{+}{\underset{\times}{2}}\,\frac{1}{4}$$

$$4 \times 2 + 1 = 9$$

On écrit ce nombre au-dessus du dénominateur 4 : $\frac{9}{4}$

Convertir les nombres fractionnaires en expressions fractionnaires.

Exemple 1 : $3\frac{1}{6} = 6 \times 3 + 1 = 19$

donc, l'expression fractionnaire est : $\frac{19}{6}$

Exemple 2 : $4\frac{1}{3} = 3 \times 4 + 1 = 13$

donc, l'expression fractionnaire est : $\frac{13}{3}$

EXERCICE 2

Convertissez les nombres fractionnaires en expressions fractionnaires.

(a) $3\frac{3}{4}$	(b) $1\frac{1}{5}$	(c) $4\frac{2}{11}$	(d) $4\frac{6}{7}$
(e) $13\frac{1}{7}$	(f) $1\frac{2}{3}$	(g) $3\frac{7}{20}$	(h) $6\frac{2}{5}$
(i) $16\frac{2}{3}$	(j) $6\frac{1}{8}$	(k) $2\frac{1}{4}$	(l) $5\frac{1}{3}$
(m) $5\frac{1}{7}$	(n) $20\frac{3}{5}$	(o) $3\frac{1}{15}$	(p) $13\frac{1}{4}$

Multiplier des nombres fractionnaires

Pour multiplier des nombres fractionnaires :

1- on change les nombres fractionnaires en expressions fractionnaires,
2- ensuite, on procède de la même façon que pour les fractions ordinaires.

Exemple : $3\frac{1}{2} \times 1\frac{5}{8}$

On convertit les nombres fractionnaires en expressions fractionnaires.

$$\frac{7}{2} \times \frac{13}{8}$$

On multiplie les numérateurs ensemble et les dénominateurs ensemble.

$$\frac{7}{2} \times \frac{13}{8} = \frac{91}{16}$$

On convertit l'expression fractionnaire à un nombre fractionnaire.

$$\frac{91}{16} = 5\frac{11}{16}$$

EXERCICE 3

1. Effectuez, puis vérifiez à l'aide de la calculatrice.

(a) $3\ \frac{1}{8} \times 24 =$

(b) $1\ \frac{3}{10} \times 14 =$

(c) $3\ \frac{5}{6} \times 5 =$

(d) $48 \times 2\ \frac{9}{16} =$

(e) $20 \times 4\ \frac{3}{8} =$

(f) $7 \times 1\ \frac{1}{2} =$

(g) $5\ \frac{1}{3} \times \frac{3}{8} =$

(h) $2\ \frac{3}{5} \times \frac{3}{4} =$

(i) $\frac{9}{10} \times 1\ \frac{2}{3} =$

(j) $\frac{2}{3} \times 3\ \frac{1}{7} =$

(k) $4\ \frac{1}{2} \times 2\ \frac{2}{3} =$

(l) $1\ \frac{5}{16} \times 1\ \frac{1}{5} =$

(m) $3\ \frac{5}{8} \times 2\ \frac{4}{5} =$

(n) $\frac{3}{8} \times \frac{4}{5} \times \frac{5}{6} =$

2. Effectuez, puis vérifiez à l'aide de la calculatrice.

(a) $\frac{3}{4}$ *de* $4 =$

(b) $\frac{7}{8}$ *de* $72 =$

(c) $\frac{9}{10}$ *de* $5 =$

(d) $\frac{7}{16}$ *de* $36 =$

(e) $\frac{2}{3}$ *de* $11 =$

(f) $\frac{7}{12}$ *de* $3\ \frac{1}{7} =$

(g) $\frac{9}{10}$ *de* $2\ \frac{13}{16} =$

(h) $\frac{3}{5}$ *de* $4\ \frac{1}{6} =$

(i) $\frac{5}{6}$ *de* $6\ \frac{3}{4} =$

(j) $\frac{4}{5}$ *de* $5\ \frac{2}{3} =$

Diviser les fractions ordinaires

Pour diviser les fractions ordinaires :

1- on inverse le diviseur,
2- on change le symbole de division à un symbole de multiplication,
3- ensuite, on multiplie les fractions.

Exemple 1 : $\frac{5}{6} \div \frac{1}{2}$

On inverse le diviseur et on change le symbole (÷) à (×).

$$\frac{5}{6} \times \frac{2}{1}$$

On simplifie s'il y a lieu et on procède comme pour la multiplication

$$\frac{5}{\cancel{6}_{3}} \times \frac{\cancel{2}^{1}}{1} = \frac{5}{3} = 1\,\frac{2}{3}$$

Exemple 2 : $6\,\frac{2}{3} \div 3 \longrightarrow 6\,\frac{2}{3} \div \frac{3}{1}$

$$\frac{20}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{20}{9} = 2\,\frac{2}{9}$$

EXERCICE 4

1. Effectuez, puis vérifiez à l'aide de la calculatrice.

(a) $\frac{3}{5} \div 3 =$

(b) $\frac{6}{13} \div 9 =$

(c) $\frac{2}{7} \div 7 =$

(d) $1\frac{7}{8} \div 5 =$

(e) $4 \div \frac{1}{3} =$

(f) $12 \div \frac{3}{5} =$

(g) $\frac{1}{9} \div \frac{1}{3} =$

(h) $8 \div 4\frac{4}{5} =$

(i) $\frac{3}{4} \div \frac{5}{16} =$

(j) $\frac{11}{12} \div 4\frac{2}{5} =$

(k) $5\frac{1}{4} \div \frac{7}{10} =$

(l) $3\frac{1}{8} \div 1\frac{7}{8} =$

(m) $1\frac{1}{5} \div 4\frac{2}{3} =$

(n) $1\frac{3}{7} \div 3\frac{4}{7} =$

2. Effectuez les divisions. Que remarquez-vous?

$4 \div 4 =$

$4 \div 3 =$

$4 \div 2 =$

$4 \div 1 =$

$4 \div \frac{1}{2} =$

$4 \div \frac{1}{3} =$

$4 \div \frac{1}{4} =$

Multiplication et division de nombres décimaux avec nombres fractionnaires

Peut-on effectuer des opérations avec des nombres décimaux et des nombres fractionnaires ?

Découvrez vous-même la réponse en effectuant les opérations suivantes avec votre calculatrice.

$+$	$2{,}6 \quad + \quad 4\frac{1}{2}$	$8\frac{4}{5} \quad + \quad 6{,}25$
$-$	$7{,}2 \quad - \quad 3\frac{1}{5}$	$4\frac{7}{8} \quad - \quad 1{,}65$
$\times$	$8{,}2 \quad \times \quad 4\frac{1}{4}$	$3\frac{3}{8} \quad \times \quad 5{,}25$
$\div$	$6{,}72 \quad \div \quad 2\frac{1}{6}$	$4\frac{3}{4} \quad \div \quad 1{,}5$

Comme vous le constatez, il est possible de faire toutes ces opérations à l'aide de la calculatrice. Vous avez probablement aussi constaté que la réponse est exprimée sous forme de décimales ; ce qui est très bien, car, dans presque tous les cas, nous devons exprimer la réponse en décimales.

Est-il possible d'effectuer toutes ces opérations sans calculatrice sans devoir convertir l'une ou l'autre des données?

Examinons d'abord la division.

Exemple 1 : $6{,}72 \div 2\frac{1}{6}$	devient	$6{,}72 \div \frac{13}{6}$	Oui, c'est possible!
Exemple 2 : $4\frac{3}{4} \div 1{,}5$	devient	$\frac{19}{3} \div 1{,}5$	Oui, c'est possible!

Examinons la multiplication.

Exemple 1 : $8{,}2 \times 4\frac{1}{4}$	devient	$8{,}2 \times \frac{17}{4}$	Oui, c'est possible!
Exemple 2 : $3\frac{3}{8} \times 5{,}25$	devient	$\frac{27}{8} \times 5{,}25$	Oui, c'est possible!

Nous avons vu au niveau 4 que l'on peut seulement effectuer des additions et des soustractions sur des fractions avec des décimaux si l'on convertit une des données.

Examinons la soustraction.

Exemple 1 : $7{,}2 \ - \ 3\frac{1}{5}$ Ce n'est pas possible!

Il faut d'abord convertir une des données. Le plus pratique est de changer le nombre fractionnaire en fraction décimale.

$7{,}2 \ - \ 3\frac{1}{5}$ devient $7{,}2 \ - \ 3{,}2$

Exemple 2 : $4\frac{7}{8} \ - \ 1{,}65$ Ce n'est pas possible!

Il faut d'abord changer une des données. Le plus pratique est de changer le nombre fractionnaire en fraction décimale.

$4\frac{7}{8} \ - \ 1{,}65$ devient $4{,}875 \ - \ 1{,}65$

Examinons l'addition.

Exemple 1 : $2{,}6 \quad + \quad 4\frac{1}{2}$ Ce n'est pas possible!

Il faut d'abord changer une des données. Le plus pratique est de changer le nombre fractionnaire en fraction décimale.

$2{,}6 \quad + \quad 4\frac{1}{2}$ devient $2{,}6 + 4{,}5$

Exemple 2 : $8\frac{4}{5} \quad + \quad 6{,}25$ Ce n'est pas possible!

Il faut d'abord changer une des données. Le plus pratique est de changer le nombre fractionnaire en fraction décimale.

$8\frac{4}{5} \quad + \quad 6{,}25$ devient $8{,}8 + 6{,}25$

EXERCICE 5

Effectuez les calculs.

(a) $\frac{2}{3} \times 3{,}4$

(b) $4{,}3 \times \frac{1}{2}$

(c) $\frac{4}{5} \times 5$

(d) $\frac{1}{2} \div 4$

(e) $\frac{5}{8} \div 2{,}5$

(f) $4{,}5 \div \frac{3}{4}$

(g) $3\frac{1}{4} \times 5{,}5$

(h) $5\frac{2}{3} \times 3{,}5$

(i) $1{,}2 \times 4\frac{1}{5}$

(j) $2\frac{2}{5} \div 1{,}4$

(k) $5\frac{1}{5} \div 4{,}7$

(l) $9{,}1 \div 2\frac{1}{2}$

EXERCICE 6

Effectuez les calculs en convertissant les fractions en nombres décimaux.

(a) $\frac{2}{3}+3{,}4$

(b) $4{,}3+\frac{1}{2}$

(c) $\frac{4}{5}+5$

(d) $\frac{1}{2}-4$

(e) $\frac{5}{8}-2{,}5$

(f) $4{,}5-\frac{3}{4}$

(g) $3\frac{1}{4}+5{,}5$

(h) $5\frac{2}{3}+3{,}5$

(i) $1{,}2+4\frac{1}{5}$

(j) $2\frac{2}{5}-1{,}4$

(k) $5\frac{1}{5}-4{,}7$

(l) $9{,}1-2\frac{1}{2}$

Résoudre des problèmes de la vie courante faisant appel aux nombres naturels, décimaux et fractionnaires ainsi qu'aux pourcentages, racines carrées et exposants

Il arrive que dans un problème les données sont exprimées sous diverses formes : 1- des nombres entiers naturels, 2- des nombres décimaux, 3- des nombres fractionnaires ou expressions fractionnaires, 4- des pourcentages, et 5- des exposants et racines carrées. Est-il possible d'effectuer des calculs sur des nombres exprimés sous diverses formes?

<u>Multiplication et division</u>

Il est possible d'effectuer des multiplications et des divisions sur les nombres exprimés sous toutes ces formes, sans modifications aux données.

Exemple 1 : Effectuer $5{,}5 \times 3^3$.

Solution :

$$\begin{aligned} & 5{,}5 \times 3 \times 3 \times 3 \\ = \; & 5{,}5 \times 9 \times 3 \\ = \; & 5{,}5 \times 27 \\ = \; & 148{,}5 \end{aligned}$$

Exemple 2 : Effectuer $\frac{1}{2} \div 5$.

Solution : $\frac{1}{2} \times \frac{1}{5} \quad = \frac{1}{10}$

Exemple 3 : Effectuer 15% de 12,89$ ÷ 2.

Solution : $\frac{15}{100} \times 12{,}89\$ \div 2$

$= \frac{193{,}35}{100}\$ \div 2$

$= \frac{193{,}35}{100}\$ \times \frac{1}{2}$

$= \frac{193{,}35}{200}\$$

$= 0{,}96675\$$

Puisqu'on parle d'argent, on arrondit la réponse au centième près : 0,97$.

Exemple 4 : Effectuer $2 \times \frac{3}{4} \div 0{,}5 \times (10\% \text{ de } 4^2)$.

Dans cet exemple, nous avons

Nombre naturel × Fraction ÷ Nombre décimal × (Pourcentage d'un nombre à l'exposant 2)

Pour résoudre, on effectue le calcul à l'intérieur de la parenthèse, ensuite on effectue les opérations de la gauche vers la droite.

Solution :

Étape 1 : On effectue le calcul à l'intérieur de la parenthèse.

$$(10\% \text{ de } 4^2) = (\frac{10}{100} \times 16) = \frac{160}{100}$$

L'expression devient : $2 \times \frac{3}{4} \div 0{,}5 \times \frac{160}{100}$

Étape 2 : On multiplie les deux premières données.

$$(2 \times \frac{3}{4}) = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

L'expression devient : $\frac{3}{2} \div 0{,}5 \times \frac{160}{100}$

Étape 3 : On divise les deux premières données.

$$\left(\frac{3}{2} \div 0{,}5\right) = \left(\frac{3}{2} \times \frac{1}{0{,}5}\right) = \frac{3}{1}$$

L'expression devient : $\frac{3}{1} \times \frac{160}{100}$

Étape 4 : On effectue la multiplication.

$$\frac{3}{1} \times \frac{160}{100} = \frac{480}{100}$$

Étape 5 : On simplifie la solution.

$$4{,}8 \text{ ou } 4\frac{4}{5}$$

La réponse peut être exprimée soit en nombre décimal ou en fraction.

EXERCICE 7

Effectuez les opérations. Exprimez vos réponses en nombres décimaux.

(a) $\frac{2}{3} \div 4{,}5$

(b) $4^2 \times 15\%$ de $50\$$

(c) $\sqrt{16} \div 12{,}5$

(d) $(25\%$ de $100) \div 2$

(e) $1\,008 \times \sqrt{25} \div 3{,}5$

(f) $\frac{2}{3}$ de $25{,}65\$ \div 3^2$

(g) $\sqrt{36} \div 5^2 \times 2{,}2$

(h) $\frac{3}{4} \div 5$

(i) $\frac{4}{9} \times 66{,}8 \div \sqrt{100}$

(j) $\frac{1}{3} \div \frac{5}{6} \times 36{,}9$

(k) $2 \times \frac{6}{7} \times (5\%$ de $15\$)$

(l) $(50\%$ de $100) \times 25$

Addition et soustraction

Il est possible d’effectuer des additions et des divisions sur les nombres exprimés sous toutes ces formes en faisant certaines modifications aux données.

Les nombres naturels et les nombres décimaux

On peut effectuer toutes les opérations avec des nombres entiers naturels et des nombres décimaux sans faire de modifications aux nombres.

Exemples : $46 + 3{,}65 = 49{,}65$

$67{,}95\$ - 6\$ = 61{,}95\$$

Les exposants et racines carrées avec les nombres naturels et décimaux

On peut effectuer toutes les opérations avec des exposants, racines carrées, nombres entiers naturels et nombres décimaux, sans faire de modifications aux nombres.

Exemples : $5^2 + 7{,}8 = 25 + 7{,}8 = 32{,}8$

$15 + \sqrt{25} = 15 + 5 = 20$

Les nombres naturels et décimaux avec les fractions et pourcentages

Il faut convertir un nombre naturel ou un nombre décimal en fraction ou vice versa afin de pouvoir effectuer une addition ou une soustraction.

Exemple 1 : Effectuer en convertissant

$$4 + \frac{1}{2}$$

(1) le nombre naturel en fraction.

(2) la fraction en nombre décimal.

(1) On convertit le nombre naturel, 4 en fraction.

$$4 + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{8}{2} + \frac{1}{2} \quad = \frac{9}{2} = 4\frac{1}{2}$$

(2) On convertit la fraction, $\frac{1}{2}$ en nombre décimal.

$$4 + \frac{1}{2}$$

$$4 + 0{,}5 \quad = 4{,}5$$

Exemple 2 : Effectuer en convertissant (1) les nombres naturels en fractions.

(2) la fraction en nombre décimal.

$$5^2 + 4 + \frac{3}{4}$$

$$= 25 + 4 + \frac{3}{4}$$

(1) On convertit les nombres naturels, 25 et 4 en fractions.

$$\frac{100}{4} + \frac{16}{4} + \frac{3}{4}$$

$$= \frac{119}{4} = 29\frac{3}{4}$$

(2) On convertit la fraction en nombre décimal.

$$25 + 4 + 0{,}75$$

$$= 29{,}75$$

EXERCICE 8

1. Effectuez les opérations, et exprimez vos réponses en fractions.

(a) $2^3 + \frac{1}{2}$

(b) $\sqrt{49} - \frac{3}{4}$

(c) $4\frac{1}{2} - 2^2$

(d) $22{,}25 - \frac{4}{5}$

(e) $\frac{2}{3} + 4{,}6 - \sqrt{4}$

(f) $29{,}95 + 0{,}75 - \frac{3}{2}$

(g) $3^3 - \frac{1}{2}$

(h) $138 + \frac{7}{8} - 3^4 + \sqrt{64}$

2. Effectuez les opérations, et exprimez vos réponses en nombres décimaux.

(a) $2^3 + \frac{1}{2}$

(b) $\sqrt{49} - \frac{3}{4}$

(c) $4\frac{1}{2} - 2^2$

(d) $22{,}25 - \frac{4}{5}$

(e) $\frac{2}{3} + 4{,}6 - \sqrt{4}$

(f) $29{,}95 + 0{,}75 - \frac{3}{2}$

(g) $3^3 - \frac{1}{2}$

(h) $138 + \frac{7}{8} - 3^4 + \sqrt{64}$

Notez : Quand les données d'un problème peuvent êtres exprimées sous diverses formes, on doit choisir comment exprimer la réponse : en fractions ordinaires? en décimales?

Ce qui est important de retenir c'est que toute mesure métrique (mètre, litre, gramme) devrait être exprimée en décimales.

Mal exprimé	**Bien exprimé**
$5\frac{3}{4}$ mètres	5,75 mètres
$2\frac{3}{8}$ litres	2,375 litres
$4\frac{2}{3}$ grammes	$4,\overline{6}$ ou 4,7 grammes

EXERCICE 9

Effectuez. N'oubliez pas de suivre les étapes de la résolution de problèmes.

(a) Un avion parcourt 28 km en $3\frac{1}{2}$ minutes. Combien de temps prend-il pour parcourir 1 km ? (Donnez votre réponse en secondes : 1 minute = 60 secondes.)

(b) Louis et Claudine adorent la pizza. En $5\frac{1}{2}$ jours, ils ont mangé $8\frac{5}{6}$ pizzas. Combien, en moyenne, ont-ils mangé de pizza par jour ?

(c) Trois personnes mangent une pizza.
La première personne mange $\frac{1}{4}$ de la pizza.
La deuxième personne mange $\frac{2}{3}$ de ce qui reste.
La troisième personne mange ce qui reste de la pizza.

Montrez que la 1ère et la 3e personne ont mangé la même quantité de pizza.

(d) Gilles a déjà parcouru les $\frac{3}{4}$ d'un trajet de 342,5 km. Si sa voiture fait 12 km/litre et que l'essence coûte 56,5 ¢ le litre, combien lui coûtera l'essence pour le reste du trajet ?

(e) Dans un contenant, il y a 1,48 litres de lait. Luce donne 0,15 litre à sa chatte et elle donne les $\frac{2}{3}$ de ce qui reste aux 8 chatons. Combien de lait boit chaque chaton ?

Multiplications et divisions de nombres entiers

Le produit de deux nombres entiers

On se souvient que le produit est la réponse à une multiplication.

En algèbre, il y a trois possibilités :

1- la multiplication de deux nombres positifs,
2- la multiplication d'un nombre positif par un nombre négatif et vice versa,
3- la multiplication de deux nombres négatifs.

1- La multiplication de deux nombres positifs

Vous savez déjà que le produit de deux nombres naturels est positif : $5 \times 3 = 15$

Si on traduit cette multiplication en langage algébrique, on obtient : $5(3) = 15$

Habituellement, on n'utilise pas le signe de multiplication (×) en algèbre.
La multiplication est représentée par l'absence de signe.

$5\,(3) = 15$ Il n'y a pas de signe entre le nombre et la parenthèse, ce qui indique une multiplication.

On sait aussi que la multiplication est une méthode rapide d'additionner le même nombre plusieurs fois : $5(3) = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 15$

2- La multiplication d’un nombre positif par un nombre négatif et vice versa

On se souvient qu’un nombre négatif représente une perte ou une dette. Si, trois fois de suite , on perd 5$ au casino, on aura perdu 15$ en tout. On exprime ce calcul algébriquement par :

$3(-5) = -15$ d’où le (-5) représente une perte de 5$
et le (-15) représente une perte de 15$.

Comme la commutativité s’applique à la multiplication, il est aussi vrai que :

$$-5(3) = -15$$

On peut vérifier en transformant la multiplication en addition :

$$3\,(-5) = (-5) + (-5) + (-5) = -15$$

On conclut que le produit d’un nombre positif par un nombre négatif est négatif et que le produit d’un nombre négatif par un nombre positif est négatif.

3- Le produit de deux nombres négatifs

Puisque -5 (3) = -15

Il faut que -5 (-3) = +15

On conclut que le produit de deux nombres négatifs est positif.

On peut résumer les règles de la multiplication en disant que :

*La multiplication de nombres ayant des **signes semblables** donne **un produit positif.***

*La multiplication de nombres ayant des **signes différents** donne **un produit négatif.***

Multiplier plusieurs nombres entiers

Pour multiplier plusieurs nombres entiers, on multiplie deux nombres à la fois.

Exemple : $\underbrace{(-2)\ (-4)}\ (1)\ (-3)\ (2)$

$= \underbrace{8\ (1)}\ (-3)\ (2)$

$= \underbrace{8\ (-3)}\ (2)$

$= \underbrace{-24\ (2)}$

$= -48$

Une autre façon de multiplier plusieurs nombres entiers est :

- d’abord établir le signe,
- puis multiplier les valeurs absolues des nombres.

Exemple :

(-2) (-4) (1) (-3) (-1)

= 24

- On établit d’abord le signe.

(-) (-) = (+) ;

(+) (+) = (+) ;

(+) (-) = (-) ;

(-) (-) = (+)

- On multiplie les valeurs absolues.

$2 \times 4 \times 1 \times 3 \times 1 = 24$

Multiplier plusieurs termes qui sont entre parenthèses

Pour multiplier plusieurs termes qui sont entre parenthèses, on commence par réduire les parenthèses à un seul terme.

Exemple 1 : $4\ (3 - 5 - 2)$

$= 4\ (-4)$

$= -16$

Exemple 2 : $5\ (8 - 2 - 3) - 6\ (4 + 2 - 9) - 1\ (3 - 1 + 6)$

$= 5\ (3) - 6\ (-3) - 1\ (8)$

$= 15 + 18 - 8$

$= 25$

Exemple 3: $(3 - 4 + 6)\ (-5 + 2 - 1)$

$= (5)\ (-4)$

$= -20$

EXERCICE 10

1. Calculez le produit.

(a) -3 (15) (b) 52 (0) (c) 42 (-2)

(d) -39 (3) (e) -31 (-3) (f) -25 (-3)

2. Calculez le produit.

(a) (-10) (8) (-1) (-3) (-1)

(b) (-2) (3) (4) (0) (-1)

(c) (-6) (-7) (-2) (-1) (0)

(d) (-2) (8) (-3) (-1) (-2)

(e) (5) (-3) (2) (-1) (2)

(f) (-1) (-3) (-1) (-3) (-1)

3. Effectuez.

(a) 4 (35 - 40 - 5) - 3 (6 + 2 - 7)

(b) 2 (-3 - 4) - 1 (6 + 3 - 9)

(c) - 5 (9 + 4 - 6) + 4 (2 - 8 + 3)

(d) 8 (-3 - 6 - 2) - 8 (3 + 6 + 2)

(e) 6 (14 - 18 + 5) - 2 (4 - 2 - 6) + 3 (12 - 8 - 10)

(f) - 4 (5 + 7 + 2) + 10 (35 - 42 - 28) - 3 (5 + 2 - 9)

Le quotient d’une division de deux nombres entiers

Les règles de la division sont les mêmes que celles de la multiplication.

1- La division d’un nombre positif par un nombre positif

Un nombre positif divisé par un nombre positif donne un quotient positif.

Exemple : $\frac{15}{3} = 5$ ou $15 \div 3 = 5$

2- La division d’un nombre positif par un nombre négatif et vice versa

Un nombre positif divisé par un nombre négatif donne un quotient négatif et un nombre négatif divisé par un nombre positif donne un quotient négatif.

Exemple : $\frac{-15}{3} = -5$ ou $(- 15) \div 3 = -5$

$\frac{15}{-3} = -5$ ou $15 \div (- 3) = -5$

3- La division d'un nombre négatif par un nombre négatif

Le quotient d'un nombre négatif par un nombre négatif est positif.

Exemple : $\frac{-15}{-3} = 5$	ou	(-15) ÷ (-3) = 5

On peut résumer les règles de la division en disant :

La division de deux nombres ayant ***des signes semblables*** *donne* ***un quotient positif.***

-*La division de deux nombres ayant* ***des signes différents*** *donne* ***un quotient négatif.***

Le 0 dans la division

Dans une division, si le dividende est 0, le quotient est 0.

Exemple : $\frac{0}{5} = 0$ et $\frac{0}{-5} = 0$*

** Puisque ‘0’ est à la fois positif et négatif, on ne met pas de signe.*

La division avec plusieurs termes entre parenthèses

Si le dividende et/ou le diviseur est composé de plusieurs termes, on commence par réduire ceux-ci à un seul terme.

Exemple 1 : $\frac{8+4+3}{5} = \frac{15}{5} = 3$ ou

$(8 + 4 + 3) \div (5)$
$= 15 \div 5$
$= 3$

Exemple 2 : $\frac{15}{-20+15+2} = \frac{15}{-3} = -5$ ou

$15 \div (-20 + 15 + 2)$
$= 15 \div (-3)$
$= -5$

Exemple 3 : $\frac{8+4+3}{5+8-16} = \frac{15}{-3} = -5$ ou

$(8 + 4 + 3) \div (5 + 8 - 16)$
$= 15 \div (-3)$
$= -5$

EXERCICE 11

1. Divisez.

   (a) $\frac{-35}{7}$ (b) $\frac{170}{10}$ (c) $\frac{0}{9}$

   (d) $8 \div (-4)$ (e) $-66 \div (-22)$

2. Effectuez.

   (a) $12 \div (3 + 9 - 6)$

   (b) $(5 + 3 - 8 - 14) \div 2$

   (c) $\frac{15-20-3}{6+5-9}$

   (d) $\frac{4+5-15}{2}$

   (e) $\frac{8+2-8-2}{5}$

   (f) $\frac{-25}{-15+10}$

   (g) $(8 - 2 + 12) \div (-11 + 5)$

   (h) $\frac{18-6+4}{5+9-2-4}$

Effectuer les quatre opérations de base sur les nombres entiers positifs et négatifs

Vous avez jusqu’à maintenant manipulé les quatre opérations sur les nombres entiers. Vous allez maintenant manipuler les quatre opérations ensemble.

Pour commencer, faites le calcul mental de ce problème :

$$20 + 28 \div 2 - 9 \div 3 + 6 \times 4 =$$

Retenez votre réponse.

Maintenant, refait les calculs à l’aide de la calculatrice.
Si vous n‘avez jamais fait d’algèbre, votre réponse est probablement différente de celle obtenue à la calculatrice.

La raison est, qu’en algèbre, il faut respecter un certain ordre en effectuant les opérations.

<u>L’ordre des opérations</u>

En algèbre, on doit respecter l’ordre des opérations :

- On effectue d’abord les multiplications et les divisions dans l’ordre où elles apparaissent de gauche à droite.

- On effectue ensuite les additions et les soustractions dans l’ordre où elles apparaissent de gauche à droite.

Reprenons le problème de la page précédente.

$$20 + 28 \div 2 - 9 \div 3 + 6 \times 4 =$$

- On identifie les multiplications et les divisions.

$$20 + \underbrace{28 \div 2} - \underbrace{9 \div 3} + \underbrace{6 \times 4} =$$

- On effectue les divisions et les multiplications.

$$20 + \underbrace{28 \div 2} - \underbrace{9 \div 3} + \underbrace{6 \times 4}$$

$$= 20 + 14 - 3 + 24$$

- On effectue les additions et les soustractions.

$$= 20 + 14 - 3 + 24$$

$$= 55$$

On aurait aussi pu les mettre entre parenthèses :

$$
\begin{aligned}
& 20 + (28 \div 2) - (9 \div 3) + (6 \times 4) \\
= \; & 20 + (14) - (3) + (24) \\
= \; & 20 + 14 - 3 + 24 \\
= \; & 55
\end{aligned}
$$

EXERCICE 12

Effectuez en respectant l'ordre des opérations.

(a) $12 \div 2 + 3 - 2 \times 4 - 6 \div 3$

(b) $4 - 12 \div 3 + 5 \times 2 + 1$

(c) $16 \div 2 \div 4 \times 5 + 3 - 12 \div 4$

(d) $6 \times 3 - 4 + 15 \div 5 - 18 \div 6$

(e) $24 \div 4 - 3 + 5 + 9 \div 3$

L’ordre des opérations s’il y a des parenthèses

S’il y a des parenthèses, les étapes à suivre sont :

- réduire les parenthèses à un seul terme s’il y a lieu,
- effectuer les multiplications et les divisions,
- effectuer les additions et les soustractions.

Exemple :

$(2 \times 3)\ (-2 + 10) + 5 - (7 + 2) \div 3 + (4 + 12 \div 3) \div 2 + 1$ ← réduire les parenthèses

$= \underbrace{(6)\ (8)} + 5 - \underbrace{(9) \div 3} + \underbrace{(8) \div 2} + 1$ ← effectuer les multiplications et les divisions

$= \quad 48 \quad + 5 - \quad 3 \quad + \quad 4 \quad + 1$ ← effectuer les additions et les soustractions

$= \quad 55$

Attention : La calculatrice fait la distinction entre le signe de soustraction (–) et le signe de valeur (-), c’est-à-dire le signe qui indique qu’un nombre est négatif. Dans (-2 + 10), le signe (-) indique que le 2 est négatif ; il faut se servir de la touche $\boxed{^{+}/_{-}}$.

Notez : Certaines calculatrices ne sont pas vraiment programmées pour faire de l’algèbre. Un petit test pour vérifier est :

$$\boxed{2}\boxed{(}\boxed{1}\boxed{-}\boxed{3}\boxed{)}\boxed{=}$$

La calculatrice devrait afficher (- 4) comme réponse.

Si votre calculatrice affiche (-2) ou ‘ error ‘ c’est peut-être qu’elle n’est pas dans le bon ‘mode’ ou tout simplement qu’elle n’est pas programmée pour faire de l’algèbre. Vous pouvez essayer de mettre un signe de multiplication devant la parenthèse : $2 \times (1-3) =$. Vous vous rendrez compte qu’il est probablement plus facile d’effectuer les calculs sans calculatrice. Il est quand même bon de faire des expériences afin de maîtriser l’utilisation de votre calculatrice. Mais vous n’aurez pas droit à la calculatrice pour écrire le test.

EXERCICE 13

Effectuez.

(a) $(8 + 6 - 2) \div 2 + (-6 + 9) - 2\,(1 + 9 \div 3)\,(6 \div 3)$

(b) $4 - (2 + 3 \times 3 + 1) \div 3 + (3 \times 2 + 9 \div 3) \times 2 + 1$

(c) $(18 \div 3 - 2 + 4 \times 3) \div 2 \div 4 + 8 + 3 - (4 - 6 + 2 \times 6 + 2) \div 4$

(d) $(10 - 2 \times 2)\,(3) - 4 - (-10 - 5) \div 5 - (4 \times 4 + 2) \div (2 \times 3)$

(e) $(5 \times 4 + 4) \div 4 - 3 + (-5 + 11) \div 3$

L’ordre des opérations avec des parenthèses et des crochets

Les parenthèses : ( )
Les crochets : [ ]

Si on doit se servir de parenthèses à l’intérieur d’une parenthèse, on a recours aux crochets : [( )]

Par exemple, si dans l’expression : $5 - (8 \div 2)$, on voulait changer la valeur de 2 à une valeur négative, on aurait : $5 - (8 \div - 2)$; mais comme on ne peut pas avoir deux signes de suite, on a recours aux crochets : $5 - [8 \div (-2)]$

S’il y a des parenthèses et des crochets, les étapes à suivre sont :

- on réduit les parenthèses à un seul terme s’il y a lieu,
- on chasse les parenthèses,
- on réduit les crochets à un seul terme s’il y a lieu,
- on effectue les multiplications et les divisions,
- on effectue les additions et les soustractions.

Exemple :

$3 - [\ 23 + (6 \div 2)\ ] \div [\ 8 + (15 - 10)\ ]$ ⟵ Réduire les parenthèses à un seul terme.

$= 3 - [\ 23 + (3)\ ] \div [\ 8 + (5)\ ]$ ⟵ Chasser les parenthèses.

$= 3 - [\ 23 + 3\ ] \div [\ 8 + 5\ ]$ ⟵ Réduire les crochets à un seul terme.

$= 3 - [\ 26\ ] \div [\ 13\ ]$ ⟵ Effectuer les multiplications et les divisions.

$= 3 - 2$ ⟵ Effectuer les additions et les soustractions.

$= 1$

EXERCICE 14

Simplifiez.

(a) $[\,-4 - (-9)\,] + (3 + 2)$

(b) $[\,-3 + (5 - 6) + (10 - 1)\,] - [\,(-8 - 16) + (-4 + 19) - 15\,]$

(c) $-4 + [\,-9 + 12 + 8 + (12 + 19 - 4)\,] - 9 - 6$

(d) $50 - [\,6(-4) - 4 + (-30 + 18) - (7 + 9 \div 3)\,]$

(e) $(-5 + 2)\,[\,(-7 + 8)(-3 + 1)\,]$

(f) $[\,35 \div (-7) - 5\,] \div 2$

(g) $[\,(-1)(5)\,]\,[\,(-2)(7)\,]$

(h) $[\,12(6) - 3(2)\,] \div (5 + 6)$

(i) $[\,(5)(-5) + (-13) + (-18 - 24)\,] \div [\,8(5)\,]$

(j) $[\,4(3)\,] - [\,5(2)\,]$

(k) $[\,9(2) - (10 \div 5)\,] \div [\,(-1)(4)\,]$

(l) $[\,2(-6 - 4) \div (-5)\,] - [\,7(2) + 6\,]$

(m) $[\,-2(-3)(2)\,] + [\,5(1)(6)\,]$

(n) $[\,2(6 - 7)\,] - [\,3(11 + 2) + 5(8 - 10)\,]$

(o) $[\,2(-3) + 4(-5) - 16\,] \div (-7)$

Résoudre des problèmes de la vie courante en effectuant des opérations de nombres positifs et négatifs

Résoudre des problèmes qui contiennent des nombres entiers

Avant de résoudre le problème, on le lit attentivement. On identifie ensuite les données qui auront l'effet de diminuer la réponse (perte), et lesquelles résulteront en une augmentation (gain).

Voici un exemple :

Une association organise un banquet. Les organisateurs ont payé des décorations qui ont coûté 96$ (taxes incluses), 6 caisses de vin à 42$ chacune et des hors d'œuvre pour une valeur de 64$. Ils ont vendu 65 billets à 6$ chacun. Ont-ils fait un profit ou une perte? de combien?

dépenses		revenus
décorations	96$	$65 \times 6\$ = 390\$$
vin ($6 \times 42\$$)	252$	
hors d'œuvre	64$	
total	412$	

On a : dépenses – revenus = perte

412$ – 390$ = 22$

Alors, Ils ont accumulé une perte de 22$.

Raccourci : En algèbre, il est possible de résoudre le problème en une seule ligne.

revenus – dépenses = profit ou perte

$(65 \times 6) - [\,96 + (6 \times 42) + 64\,] = -22$

Ils ont donc accumulé une perte de 22$.

EXERCICE 15

Résolvez algébriquement.

(a) D’une boîte de 108 biscuits, 12 ont déjà été mangés. On veut distribuer les biscuits qui restent à 32 enfants. Combien de biscuits recevra chaque enfant ?

(b) Si une gomme à effacer coûte 8¢, combien coûteront 35 douzaines de gommes?

(c) Dans un verger, il y a 12 rangées de pommiers. Si on remplit 15 barils de pommes par rangée et qu’un baril se vend 25$, à combien s’élève le profit du cultivateur si la cueillette lui coûte 7$ du baril ?

(d) La boutique Ordi vend un système au coût de 24 paiements de 106$. La boutique Techni vend le même système au coût de 15 paiements de 175$. Quelle est la différence de prix entre les deux boutiques?

(e) Dans un registre, on a inscrit les absences :
septembre : 7 absences ; octobre : 6 absences ; novembre : 12 absences ; décembre : 11 absences. Quelle est la moyenne mensuelle des absences?

Résoudre algébriquement des problèmes qui contiennent des décimales

> Toutes les règles de l'algèbre qui s'appliquent aux nombres entiers s'appliquent aussi aux nombres décimaux.

Exemple :

Un couple décide de rénover leur salon. Ils dépensent en tout 281,53$. Ils ont acheté un tapis, de la peinture et du papier peint. Le papier peint a coûté 89,56$ taxes incluses. Ils ont acheté deux contenants de peinture à 18,29$ chacun ; la taxe pour la peinture est de 5,49$. Combien ont-ils payé le tapis ?

Solution :

Total des achats – coût du papier et de la peinture = coût du tapis

281,53$ – [89,56$ + 2 (18,29$) + 5,49$] = $

Résolution :

281, 53 – [89,56 + 2 (18,29) + 5,49]

= 281,53 – [89,56 + 36,58 + 5,49]

= 281,53 – [131,63]

= 281,53 – 131,63

= 149,90

Ils ont payé le tapis 149,90$

EXERCICE 16

Résolvez algébriquement.

(a) D’une boîte de café de 975 mL, on a déjà pris 549,5 mL. Pour faire une tasse de café, on prend 12,5 mL. Combien de tasses de café peut-on faire avec le café qui reste?

(b) Un marchand paye une boîte de 12 douzaines de crayons 7,20$. S’il vend les crayons 0,12$ chacun, quel est son profit pour toute la boîte?

(c) Alain achète un téléviseur qui lui coûte 1 031,25$ incluant les taxes. Il le paye en 15 versements égaux. Carole achète aussi un téléviseur. Elle paye 986,75$ incluant les taxes. Elle fait aussi 15 versements égaux. Quelle est la différence entre le montant des versements de Carole et ceux d‘Alain?

(d) Pierre a budgété ses dépenses à 40$ par semaine pour l’année. S’il a dépensé 1 286,79$ au bout de six mois, à combien doit-il réduire ses dépenses par semaine pour les six derniers mois?

(e) Une femme a laissé 24 342,65$ en héritage à ses enfants et à ses petits enfants. Elle a 3 enfants et 7 petits enfants. Si chacun des enfants reçoit 7 000$, combien reçoit chaque petit enfant?

Effectuer le produit de puissances de même base

Nous avons vu au niveau 4 que si l'on multiplie un certain nombre de fois une quantité par elle-même, le produit s'appelle puissance de cette quantité.

Ainsi, dans	$3 \times 3 = 9$,	9 est la deuxième puissance de 3
	$2 \times 2 \times 2 = 8$,	8 est la troisième puissance de 2
	$5 \times 5 \times 5 \times 5 = 625$,	625 est la quatrième puissance de 5

On peut également exprimer ce produit au moyen de la forme exponentielle qui consiste en une base affectée d'un exposant.

Ainsi,	$3 \times 3 = 3^2$	et se lit 3 exposant 2 ; La base est 3 et l'exposant est 2.
	$2 \times 2 \times 2 = 2^3$	et se lit 2 exposant 3 ; La base est 2 et l'exposant est 3.
	$5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^4$	et se lit 5 exposant 4 ; La base est 5 et l'exposant est 4.

Nous pouvons maintenant mieux saisir l'énoncé général de la puissance.

La puissance n^e d'une quantité est le produit de n facteurs égaux à cette quantité.

On représente le produit $\underbrace{a \times a \times a \ldots \times a}_{\text{n facteurs}}$

par la notion a^n qui se lit ¨a puissance n¨.

Remarque :

1- Si a est positif, la puissance n^e de a est toujours positive.

Ainsi, $3^4 = 81$

2- Si a est négatif, la puissance n^e de a est positive si n est un nombre pair.

Ainsi, $(-3)^4 = +81$

3- Si a est négatif, la puissance n^e de a est négative si n est un nombre impair.

Ainsi, $(-3)^5 = -243$

Produit de puissances

La première loi des exposants peut s'énoncer comme suit :

POUR EFFECTUER LE PRODUIT DE PLUSIEURS PUISSANCES D'UNE MEME BASE, IL SUFFIT DE FAIRE LA SOMME DES EXPOSANTS.

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

Voici quelques exemples :

1. $a^2 \times a^3 = a^{2+3} = a^5$
2. $3^2 \times 3^3 = 3^{2+3} = 3^5$
3. $(ax)^2 (ax)^4 (ax)^6 = (ax)^{2+4+6} = (ax)^{12}$
4. $(2x)^4 (2x)^5 = (2x)^{4+5} = (2x)^9$
5. $(-ax)^3 (-ax)^2 = (-ax)^5$

Si tu as bien remarqué, dans les exemples précédents nous n'avons multiplié que des puissances de même base. On ne peut effectuer le produit de 2^3 par 4^2 car les bases 2 et 4 sont différentes. Mais, si l'on peut exprimer ces deux expressions sous forme d'une même base, nous pourrons par la suite effectuer le produit.

EXERCICE 17

1. Évaluez.

(a) 5^2 (b) 1^3

(c) $(-4)^2$ (d) $(-3)^5$

(e) $(-1)^{15}$ (f) $(-1)^{20}$

(g) 2^4 (h) $(-2)^4$

2. Effectuez les multiplications.

(a) $3^2 \times 3$ (b) $2^3 \times 2^5 \times 2^6$

(c) $1^{15} \times 1^3$ (d) $2^2 \times 2^3$

(e) $(-2)^5 \times (-2)^4$ (f) $(-5) \times (-5)^3$

(g) $(-8)\,(-8)^2 \times (-8)^5$ (h) $3^2 \times 3^5$

(i) $(6) \times (6)^9\,(6)^{10}$ (j) $(-4)^4\,(-4)^3$

3. Quelle valeur de x vérifie chacune des équations suivantes?

(a) $2^3 \times 2^x = 2^5$ (b) $8^5 \times 8^x = 8^6$

(c) $y^6 \times y^x \times y = y^{12}$ (d) $a^x \times a^3 \times a = a^6$

(e) $(a - b)^3 \times (a - b)^2\,(a - b)^x = (a - b)^9$

Quotient de puissances

Pour effectuer le quotient de puissances de même base, il suffit de faire la différence entre l'exposant du numérateur et celui du dénominateur.

$$a^m \div a^n = a^{m-n}$$

ou $$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Voici quelques exemples :

1. $a^5 \div a^2 = a^{5-2} = a^3$
2. $b^{10} \div b^3 = b^{10-3} = b^7$
3. $7^8 \div 7^5 = 7^{8-5} = 7^3$

Notons, qu'encore une fois, il est important que les expressions aient la même base.

En appliquant la loi pour effectuer le quotient de puissance, trois cas sont à distinguer :

1- Si m est plus grand que n :

Exemple : $\frac{a^6}{a^3} = a^{6-3} = a^3$

car, $\frac{a^6 \times a^{-3}}{a^3 \times a^{-3}} = \frac{a^{6-3}}{a^0} = \frac{a^3}{1} = a^3$

2- Si m est égal à n :

Exemple : $\frac{a^4}{a^4} = a^{4-4} = a^0 = 1$

Notez : $a^0 = 1$ car $\frac{a^4}{a^4} = \frac{\cancel{a} \times \cancel{a} \times \cancel{a} \times \cancel{a}}{\cancel{a} \times \cancel{a} \times \cancel{a} \times \cancel{a}} = 1$

De cette démonstration, nous pouvons tirer l'énoncer suivant :

> Tout nombre affecté de l'exposant 0 est égal à 1.
>
> $a^{m-n} = a^0 = 1$

3- Si m est plus petit que n :

Exemple : $\frac{a^5}{a^7} = a^{5-7} = a^{-2} = \frac{1}{a^2}$

$\frac{a^5}{a^7} = \frac{1}{a^2}$ car $\frac{a^5}{a^7} = \frac{\cancel{a} \times \cancel{a} \times \cancel{a} \times \cancel{a} \times \cancel{a}}{\cancel{a} \times \cancel{a} \times \cancel{a} \times \cancel{a} \times \cancel{a} \times a \times a} = \frac{1}{a^2}$

De cette démonstration, nous pouvons tirer l'énoncé suivant :

> Tout nombre affecté d'un exposant négatif est égal
>
> à son inverse affecté du même exposant positif.
>
> $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$

Voici d'autres exemples :

1. $6^{-3} = \frac{1}{6^3}$

2. $a^8 \div a^9 = a^{-1} = \frac{1}{a}$

3. $(-7)^0 = 1$

4. $(-4)^2 \div (-4)^2 = (-4)^0 = 1$

EXERCICE 18

Effectuez la division.

(a) $a^6 \div a^2$

(b) $y^6 \div y^3$

(c) $6x^5 \div 3x^2$

(d) $(-1)^6 \div (-1)^5$

(e) $(-3)^6 \div (-3)^4$

(f) $m^5 \div m^5$

(g) $3r^2 \div 3r$

(h) $x^4 \div x^3$

(i) $(-1)^4 \div (-1)^4$

(j) $(-2)^5 \div (-2)^5$

2. Quelle valeur de x vérifie chacune des équations suivantes?

(a) $b^8 \div b^3 = b^x$

(b) $b^4 \div b^x = b^2$

(c) $b^x \div b^8 = b^{12}$

(d) $3^x \div 3^4 = 3^{10}$

(e) $32^8 \div 32^x = 32^5$

(f) $a^8 \div a^x = 1$

(g) $(7a)^x \div (7a)^6 = 1$

(h) $9^5 \div 9^x = 1$

3. Trouvez une expression équivalente affectée d'un exposant positif.

(a) a^{-n}

(b) b^{-7}

(c) 8^{-2}

(d) $(1/x)^{-2}$

(e) $(2/3)^{-4}$

(f) a^3y^{-2}

(g) $5x^{-2}$

(h) $\dfrac{1}{p^{-3}q}$

(i) a^3y^{-2}

(j) pq^{-2}

(k) $a^{-2}b$

(l) $\dfrac{b}{a^{-2}}$

(m) $\dfrac{3p^{-2}}{q}$

(n) $\dfrac{b^{-2}c}{8a^{-2}}$

Exprimer un nombre en notation scientifique

Un nombre entier peut être représenté de façon décomposée en utilisant des puissances.

Exemples : $347 = (3 \times 10^2) + (4 \times 10^1) + (7 \times 10^0)$

$1\,259 = (1 \times 10^3) + (2 \times 10^2) + (5 \times 10^1) + (9 \times 10^0)$

Rappel : Tout nombre affecté de l'exposant 0 est égal à 1.

$$a^{m-n} = a^0 = 1$$

Alors, $7 \times 10^0 = 7 \times 1 = 7$

et $9 \times 10^0 = 9 \times 1 = 9$

EXERCICE 19

Décomposez les nombres en utilisant des puissances.

(a) 29

(b) 301

(c) 4 568

(d) 89 901

(e) 775 923

(f) 1 539 441

Notation scientifique

Les exposants nous sont d'une grande utilité lorsque nous devons effectuer des calculs avec des nombres très grands ou très petits. En sciences, nous rencontrons souvent de tels nombres.

Ainsi : - la vitesse de la lumière est estimée à 300 000 km/s
- le temps mis par la lumière pour parcourir 1 mètre est d'environ 0,000 000 031 seconde
- la population terrestre est de 3 000 000 000 habitants

Manipuler de tels nombres, même à l'aide d'une calculatrice serait souvent très difficile si nous ne pouvions les exprimer autrement. Pour faciliter les calculs numériques nous exprimons ces nombres sous la forme

$$\mathcal{X} \times 10^n$$

Cette forme est appelée notation scientifique.

Exprimer un nombre en notation scientifique c'est l'écrire sous la forme d'un produit d'un nombre compris entre 1 et 10 et d'une puissance de 10.

$$\mathcal{X} \times 10^n$$

où $\mathcal{X}$ est un nombre entre 1 et 10

10^n est la puissance n^e de 10

Voici quelques exemples : Exprimer en notation scientifique,

1. $52\ 060\ 000\ 000 = 5{,}206 \times 10^{10}$

   5,206 est le nombre compris entre 1 et 10

   10^{10} nous indique un déplacement vers la gauche de 10 places.

2. $0{,}000\ 000\ 001\ 236 = 1{,}236 \times 10^{-9}$

   1,236 est le nombre compris entre 1 et 10

   10^{-9} nous indique un déplacement vers la droite de 9 places.

3. $5\ 200\ 000 = 5{,}2 \times 10^{6}$

4. $0{,}000\ 005\ 236 = 5{,}236 \times 10^{-6}$

5. En reprenant les nombres donnés au début, nous remarquons que

   - la vitesse de la lumière peut s’exprimer 3×10^{5} km/s
   - le temps mis par la lumière pour parcourir 1 mètre est $3{,}1 \times 10^{-8}$ s
   - la population terrestre est 3×10^{9} habitants.

EXERCICE 20

1. Quelle valeur de x vérifie chacune des équations suivantes?

(a) $6\ 000\ 000\ 000 = 2 \times 10^{x}$

(b) $720\ 000 = 7{,}2 \times 10^{x}$

(c) $0{,}02 = 2 \times 10^{x}$

(d) $0{,}000\ 000\ 35 = 3{,}5 \times 10^{x}$

(e) $0{,}000\ 004\ 326 = 4{,}326 \times 10^{x}$

2. Exprimez en notation scientifique.

(a) 8 000 000

(b) 845 000

(c) 0,038

(d) 0,009

(e) 4 774 000 000

(f) 93 000 000

(g) 6 020 000

(h) 0,000 423

(i) 0,000 000 35

(j) 0,001

(k) 0,000 000 1

(l) 0,000 000 000 000 001

3. Écrivez en notation décimale.

(a) $5{,}8 \times 10^{5}$

(b) 6×10^{4}

(c) $2{,}384 \times 10^{6}$

(d) $8{,}75 \times 10^{-7}$

(e) 8×10^{-4}

(f) $9{,}8 \times 10^{-3}$

(g) $3{,}5 \times 10^{7}$

(h) $4{,}772 \times 10^{-12}$

CORRIGÉ

Exercice 1

1. (a) $\frac{1}{32}$ (b) $\frac{8}{15}$

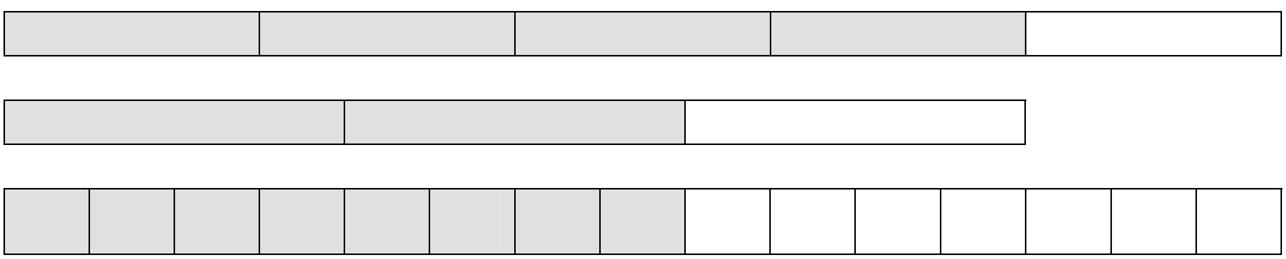
(c) $\frac{1}{4}$ (d) $\frac{7}{15}$

(e) 6 (f) $\frac{12}{25}$

(g) $\frac{1}{4}$ (h) $\frac{9}{2}$

(i) $\frac{1}{2}$ (j) $\frac{1}{6}$

2.



Exercice 2

(a) $\frac{15}{4}$ (b) $\frac{6}{5}$ (c) $\frac{46}{11}$ (d) $\frac{34}{7}$

(e) $\frac{92}{7}$ (f) $\frac{5}{3}$ (g) $\frac{67}{20}$ (h) $\frac{32}{5}$

(i) $\frac{50}{3}$	(j) $\frac{49}{8}$	(k) $\frac{9}{4}$	(l) $\frac{16}{3}$
(m) $\frac{36}{7}$	(n) $\frac{103}{5}$	(o) $\frac{46}{15}$	(p) $\frac{53}{4}$

Exercice 3

1.

(a) 75	(b) 18 1/5	(c) 19 1/6	(d) 123
(e) 87 1/2	(f) 10 1/2	(g) 2	(h) 1 19/20
(i) 1 1/2	(j) 2 2/21	(k) 12	(l) 1 23/40
(m) 10 3/20	(n) 1/4		

2.

(a) 3	(b) 63	(c) 4 1/2	(d) 15 3/4
(e) 7 1/3	(f) 1 5/6	(g) 2 17/32	(h) 2 1/2
(i) 5 5/8	(j) 4 8/15		

Exercice 4

1.

(a) 1/5	(b) 2/39	(c) 2/49	(d) 3/8
(e) 12	(f) 20	(g) 1/3	(h) 1 2/3
(i) 2 2/5	(j) 5/24	(k) 7 1/2	(l) 1 2/3
(m) 9/35	(n) 2/5		

2. Le quotient devient plus grand au fur et à mesure que le quotient devient plus petit.

Exercice 5

(a) 2,27
(b) 2,15
(c) 4
(d) 0,125
(e) 0,25
(f) 6
(g) 17,875
(h) 19,83
(i) 5,04
(j) 1,714285
(k) 1,1063829
(l) 3,64

Exercice 6

(a) 4,07
(b) 4,8
(c) 5,8
(d) -3,5
(e) -1,88
(f) 3,75
(g) 8,75
(h) 9,17
(i) 5,4
(j) 1
(k) 0,5
(l) 6,6

Exercice 7

(a) 0,15
(b) 120$
(c) 0,32
(d) 12,5
(e) 1 440
(f) 1,90$
(g) 0,53
(h) 0,15
(i) 2,97
(j) 14,76
(k) 1,29
(l) 1 250

Exercice 8

1.

(a) $8\frac{1}{2}$

(b) $6\frac{1}{4}$

(c) $\frac{1}{2}$

(d) $21\frac{9}{20}$

(e) $3\frac{4}{15}$

(f) $29\frac{1}{5}$

(g) $26\frac{1}{2}$

(h) $65\frac{7}{8}$

2.

(a) 8,5

(b) 6,25

(c) 0,5

(d) 21,45

(e) 3,27

(f) 29,2

(g) 26,5

(h) 65,875

Exercice 9

(a) Il prend 7,5 secondes pour parcourir 1 km.

(b) Ils ont mange en moyenne 1,6 pizzas par jour.

(c) 1^{ere} personne : ¼ de la pizza, 2^{e} personne : ½ de la pizza, 3^{e} personne : ¼ de la pizza

(d) L’essence lui coûtera environ 4,03$.

(e) Chaque chaton boit environ 0,1 litre de lait.

Exercice 10

1. (a) -45 (b) 0 (c) -84 (d) -117 (e) 93 (f) 75

2. (a) 240 (b) 0 (c) 0 (d) 96 (e) 60 (f) -9

3. (a) -43 (b) -14 (c) -47 (d) -176 (e) -4 (f) -400

Exercice 11

1. (a) -5 (b) 17 (c) 0 (d) -2 (e) 3

2. (a) 2 (b) -7 (c) -4 (d) -3
   (e) 0 (f) 5 (g) -3 (h) 2

Exercice 12

(a) -1 (b) 11 (c) 10 (d) 14 (e) 11

Exercice 13

(a) -7 (b) 19 (c) 10 (d) 14 (e) 5

Exercice 14

(a) 10 (b) 29 (c) 19 (d) 100 (e) 6
(f) -5 (g) 70 (h) 6 (i) -2 (j) 2
(k) -4 (l) -16 (m) 42 (n) -31 (o) 6

Exercice 15

(a) $(108 - 12) \div 32 = 3$ biscuits

(b) (35) (12) (0,08\$) = 33,60\$

(c) [(12) (15) (25\$)] – [(12) (15) (7\$)] = 3 240\$

(d) [24 (106\$)] – [15 (175\$)] = | -81 | = 81\$

(e) $(7 + 6 + 12 + 11) \div 4 = 9$ absences

Exercice 16

(a) (975 mL – 549,5 mL) ÷ 12,5 mL = 34 tasses

(b) [(12) (12) (0,12\$)] – 7,20\$ = 10,08\$

(c) (1 031,25\$ ÷ 15) – (986,75\$ ÷ 15) = 2,97\$

(d) [(40) (52) – 1286,79\$] ÷ 26 = 30,51\$

(e) [24 342,65\$ – 3(7 000\$)] ÷ 7 = 477,52\$

Exercice 17

1. (a) 25 (b) 1

(c) 16 (d) -243

(e) -1 (f) 1

(g) 16 (h) 16

2. (a) 3^2 (b) 2^{14}

(c) 1^{18} (d) 2^5

(e) -2^9 (f) $(-5)^4$

(g) $(-8)^8$ (h) 3^7

(i) 6^{20} (j) $(-4)^7$

3. (a) $x = 2$ (b) $x = 1$
(c) $x = 5$ (d) $x = 2$
(e) $x = 4$

Exercice 18

1. (a) a^4 (b) y^3
(c) $2x^3$ (d) -1
(e) -3^2 (f) 1
(g) r (h) x
(i) 1 (j) 1

2. (a) $x = 5$ (b) $x = 2$
(c) $x = 20$ (d) $x = 14$
(e) $x = 3$ (f) $x = 8$
(g) $x = 6$ (h) $x = 5$

3. (a) $\frac{1}{a^n}$ (b) $\frac{1}{b^7}$

(c) $\frac{1}{8^2}$ (d) x^2

(e) $(\frac{3}{2})^4$ (f) $\frac{a^3}{y^2}$

(g) $\frac{5}{x^2}$ (h) $\frac{p^3}{q}$

(i) $\frac{a^3}{y^2}$

(j) $\frac{p}{q^2}$

(k) $\frac{b}{a^2}$

(l) a^2b

(m) $\frac{3}{p^2q}$

(n) $\frac{a^2c}{8b^2}$

Exercice 19

(a) 2×10^1, 9

(b) 3×10^2, 0×10^1, 1

(c) 4×10^3, 5×10^2, 6×10^1, 8

(d) 8×10^4, 9×10^3, 9×10^2, 0×10^1, 1

(e) 7×10^5, 7×10^4, 5×10^3, 9×10^2, 2×10^1, 3

(f) 1×10^6, 5×10^5, 3×10^4, 9×10^3, 4×10^2, 4×10^1, 1

Exercice 20

1. (a) x = 9

(b) x = 5

(c) x = -2

(d) x = -7

(e) x = -6

2. (a) 8×10^6

(b) $8{,}45 \times 10^5$

(c) $3{,}8 \times 10^{-2}$

(d) 9×10^{-3}

(e) $4{,}774 \times 10^9$

(f) $9{,}3 \times 10^7$

(g) $6{,}02 \times 10^6$

(h) $4{,}23 \times 10^{-4}$

(i) $3{,}5 \times 10^{-7}$

(j) 1×10^{-3}

(k) 1×10^{-7}

(l) 1×10^{-15}

3. (a) 580 000

(b) 60 000

(c) 2 384 000

(d) 0,000 000 875

(e) 0, 000 8

(f) 0,009 8

(g) 35 000 000

(h) 0,000 000 000 004 772