XAI - TME 4

Théorie des sous-ensembles flous et logique floue
Formulaire

Manipulation de sous-ensembles flous

Définitions générales des t-normes et t-conormes

Une t-norme est une fonction $\top\ : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow [0,1]$ qui vérifie les propriétés suivantes : $\forall x, y, z \in [0,1]$

- commutativité : $\top(x,y) = \top(y,x)$
- associativité : $\top(x, \top(y,z)) = \top(\top(x,y), z)$
- monotonie : $x \leq y \Rightarrow \top(x,z) \leq \top(y,z)$
- 1 est élément neutre : $\top(x,1) = x$

Une t-conorme est une fonction $\perp\ : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow [0,1]$ qui est commutative, associative, monotone, et qui possède 0 comme élément neutre ($\perp(x,0) = x$).

Une t-norme $\top$ et une t-conorme $\perp$ sont dites duales si elles respectent les lois de de Morgan (c'est-à-dire si pour tout a et b de $[0,1]$, $\perp(a,b) = 1 - \top(1-a, 1-b)$ et $\top(a,b) = 1 - \perp(1-a, 1-b)$).

Quelques t-normes $\top$ et t-conormes $\perp$ classiques $\forall x, y \in [0,1]$

Probabiliste :	$\top(x,y)$	$=$	$x \cdot y$	et	$\perp(x,y)$	$=$	$x + y - x \cdot y$
Łukasiewicz :	$\top(x,y)$	$=$	$\max(x+y-1, 0)$	et	$\perp(x,y)$	$=$	$\min(x+y, 1)$
Zadeh :	$\top(x,y)$	$=$	$\min(x,y)$	et	$\perp(x,y)$	$=$	$\max(x,y)$
produit d'Hamacher :	$\top(x,y)$	$=$	$\begin{cases} 0 & \text{si } x = y = 0 \\ \frac{xy}{x+y-xy} & \text{sinon} \end{cases}$	et	$\perp(x,y)$	$=$	$\frac{x+y}{1+xy}$
Drastique :	$\top(x,y)$	$=$	$\begin{cases} y & \text{si } x = 1 \\ x & \text{si } y = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$	et	$\perp(x,y)$	$=$	$\begin{cases} y & \text{si } x = 0 \\ x & \text{si } y = 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$

Négation Elle est classiquement définie par $n(x) = 1 - x$.

Produit cartésien $A_1, A_2, \ldots A_n$ étant des sous-ensembles flous définis respectivement sur les univers $X_1, \ldots, X_n$, leur *produit cartésien* $A = A_1 \times \ldots \times A_n$ est le sous-ensemble flou de $X = X_1 \times \ldots \times X_n$ défini par :

$$\forall x = (x_1, \ldots, x_n) \in X, \ \ f_A(x) \ = \ \min(f_{A_1}(x_1), \ldots, f_{A_n}(x_n))$$

Projection A étant un sous-ensemble flou défini sur un univers $X_1 \times X_2$, produit cartésien de deux univers X_1 et X_2, la *projection* de A sur X_1 est le sous-ensemble flou $\mathrm{Proj}_{X_1}(A)$, dont la fonction d'appartenance est définie par :

$$\forall x_1 \in X_1, \ f_{\mathrm{Proj}_{X_1}(A)}(x_1) \ = \ \sup_{\{x_2 \in X_2\}} f_A(x_1, x_2)$$

Principe d'extension A étant un sous-ensemble flou de X et φ une application de X vers Y, le *principe d'extension* définit le sous-ensemble flou B de Y image de A par φ :

$$\forall y \in Y, \ \ f_B(y) = \begin{cases} \sup\limits_{\{x \in X \mid y = \varphi(x)\}} f_A(x) & \text{si } \varphi^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0 & \text{si } \varphi^{-1}(y) = \emptyset \end{cases}$$

Logique floue

Fonction d'implication floue

Une *fonction d'implication floue* est une fonction $F : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$. Les fonctions d'implication floue les plus courantes sont

$$
\begin{array}{llcl}
\text{Brouwer-Gödel} & F_{BG}(u,v) & = & \begin{cases} 1 \text{ si } u \leq v \\ v \text{ sinon} \end{cases} \\
\text{Goguen} & F_G(u,v) & = & \begin{cases} \min(\frac{v}{u}, 1) \text{ si } u \neq 0 \\ 1 \text{ sinon} \end{cases} \\
\text{Kleene-Dienes} & F_{KD}(u,v) & = & \max(1-u, v) \\
\text{Larsen} & F_P(u,v) & = & u \cdot v \\
\text{Łukasiewicz} & F_L(u,v) & = & \min(1-u+v, 1) \\
\text{Mamdani} & F_M(u,v) & = & \min(u,v) \\
\text{Reichenbach} & F_R(u,v) & = & 1-u+uv \\
\text{Willmott} & F_W(u,v) & = & \max(1-u, \min(u,v))
\end{array}
$$

Implication floue

Une *implication floue* associe à toute règle floue de la forme “si V est A alors W est B”, construite à partir des variables linguistiques (V, X, T_V) et (W, Y, T_W), une relation floue R de $X \times Y$, définie par

$$\forall x \in X,\ \forall y \in Y,\ f_R(x,y) = F(f_A(x), f_B(y))$$

où F est une fonction d'implication floue.

Modus ponens généralisé

À partir d'une règle floue et d'un fait observé A' pour V, on en déduit une valeur B' pour la conclusion dont la fonction d'appartenance est définie par :

$$\forall y \in Y,\ f_{B'}(y) = \sup_{x \in X} \top(f_{A'}(x), f_R(x,y))$$

L'*opérateur de modus ponens généralisé* $\top$ dépend de la fonction d'implication floue utilisée, comme indiqué dans le tableau suivant

Opérateur de MPG		*Implication floue*
Łukasiewicz	$\top_L(u,v) = \max(u+v-1, 0)$	F_{KD}, F_G, F_L, F_M, F_P
Probabiliste	$\top_P(u,v) = u \cdot v$	F_{BG}, F_G, F_M, F_P
Zadeh	$\top_Z(u,v) = \min(u,v)$	F_{BG}, F_M, F_P