Apprentissage Statistique

Exercice du diapo

S1-2023

1 Supervised classification

1.1 Excercice

Exercice 1 :

$$\begin{aligned}
L^* &= 1 - P(g^*(X) = Y) \\
&= 1 - \mathbb{E}[g^*(X) = 1]P(Y = 1|X) \\
&= 1 - \mathbb{E}[\mathbb{1}_{P(Y=1|X)} + \mathbb{1}_{g^*(X)=0}P(Y = 0|X)] \\
&= 1 - \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\eta(X)>1/2}\eta(X) + \mathbb{1}_{\eta(X)\leq 1/2}(1 - \eta(X))]
\end{aligned}$$

Exercice 2

$$\begin{aligned}
L^* &= 1 - P(g^*(X) = Y) \\
&= 1 - \mathbb{E}[P(g^*(X) = Y|X)] \\
&= 1 - \mathbb{E}[\max(1 - \eta(X), \eta(X))] \\
&= 1 + \mathbb{E}[\min(\eta(X) - 1, -\eta(X))] \\
&= \mathbb{E}[\min(\eta(X), 1 - \eta(X))]
\end{aligned}$$

Exercice 3: Si $L * (X) = 0$ ça veut dire que c'est un processus déterministe. Que Y a un lien déterministe avec X

$$P(g^*(X) \neq Y) = 0 \Rightarrow Y = g^*(X) as..$$

$$Y = \phi(X) \Rightarrow P(Y \neq \phi(X)) = 0 \Rightarrow L* = 0.$$

1.2 Statistical Learning

Exercice diapo 18 : $consistency \Leftrightarrow L(g_n) \to^{L^1} L* \Leftrightarrow L(g_n) \to^{\mathbb{P}} L*$

- Pour la convergence L1 (je crois)

$$\begin{aligned}
&P(g_n(X) \neq Y|\mathcal{D}_n) \to^{L1} L* \\
&\mathbb{E}[P(g_n(X) \neq Y|\mathcal{D}_n) - L*] \\
&= \mathbb{E}[P(g_n(X) \neq Y[\mathcal{D}_n) - L*])] \\
&= P(g_n(X) \neq Y) - L* \\
&\to 0(?)
\end{aligned}$$

- Pour la convergence en proba dans le sens non instinctif, on veut montrer que

$$\begin{aligned}
&Z_n \to^{\mathbb{P}} 0 \\
&|Z_n| \leq 1 \text{ car proba} \\
&\text{alors } Z_n \to^{L1} 0
\end{aligned}$$

Preuve :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[|Z_n|] = \mathbb{E}[Z_n|\mathbb{1}_{|Z_n|>\epsilon}] + \mathbb{E}[Z_n|\mathbb{1}_{|Z_n|\leq\epsilon}] \\
&\leq P(|Z_n| > \epsilon)
\end{aligned}$$

1.3 Exercice TD

1.3.1 Exercice 1

$(X, Y) \in \mathbb{R} \times [0,1], X \sim \mathcal{U}([-2,2]), ect$

$$\begin{aligned}
Y &= \mathbb{1}_{X<0, U\leq 2} + \mathbb{1}_{X>0, U>1} \\
\eta &= P(Y=1|X) \\
&= P(X<0, u\leq 2|X) + P(X>0, U>1|X) \\
&= \mathbb{1}_{X<0} P(U \leq 2) + \mathbb{1}_{X>0} P(U>1) \\
&= \mathbb{1}_{X<0} \frac{2}{10} + \mathbb{1}_{X>0} \frac{9}{10}
\end{aligned}$$

$$g*(X) = \mathbb{1}_{\eta(X)>\frac{1}{2}} = \mathbb{1}_{X>0}$$

Bayes error

$$\begin{aligned}
L* &= P(g*(X) \neq Y) \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathbb{E}[|2\eta(X) - 1|] \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathbb{E}[\left|\frac{4}{10}\mathbb{1}_{X<0} + \frac{18}{10}\mathbb{1}_{X>0} - 1\right|] \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathbb{E}[\left|\frac{6}{10}\mathbb{1}_{X<0} + \frac{8}{10}\mathbb{1}_{X>0}\right|] \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} * \frac{6}{10} * \frac{1}{2} - \frac{1}{2} * \frac{8}{10} * \frac{1}{2} \\
&= \frac{3}{20}
\end{aligned}$$

1.3.2 Exercice 2

1.

$$\begin{aligned}
L* &= \mathbb{E}[\min(\eta(X), 1-\eta(X))] \\
&= \mathbb{E}[\min(\frac{x}{c+x}, \frac{c}{c+x})] \\
&= \mathbb{E}[\frac{\min(x,c)}{c+x}]
\end{aligned}$$

2. $f_x(x) = \frac{\mathbb{1}_{x\in[0,\alpha c]}}{\alpha c}$

$$\begin{aligned}
L* &= \int_0^{\alpha c} \frac{\min(x,c)}{x+c} \frac{dx}{\alpha c} \\
&= \int_0^{c} \frac{x}{x+c} \frac{dx}{\alpha c} \\
&= \frac{1}{\alpha} \log(\frac{(\alpha+1)e}{4})
\end{aligned}$$

3. exercice, étudier la fonction ou

   - f continue sur $[1, +\infty]$
   - $\lim_{\alpha\to\infty} f(\alpha) = 0$

   Docn f admet un maximum

1.3.3 Exerice 3

$X \sim (T, B, E) \sim \mathcal{E}(1)$
densité d'une loi exp $Z \sim \mathcal{E}(1)$

$$
\begin{aligned}
f_Z(z) &= e^{-z\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(z)} \\
F_Z(t) &= (1 - e^{-t})\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t) \\
G_z(t) &= \mathbb{1}_{\mathbb{R}_-} + e^{-t}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t)
\end{aligned}
$$

1. Y est une fonction de X donc $L* = 0$. C'est déterministe
2. $$
\begin{aligned}
P(Y = 1|T, B) &= P(T + B + E < 7|T, B) \\
&= F_Z(7 - T - B) \text{ car } E \perp (T, B) \qquad = (1 - e^{-(7-T-B)})\mathbb{1}_{7-T-B>0}
\end{aligned}
$$
3. $$
\begin{aligned}
&g^*(T, B) = \mathbb{1}_{\eta(T,B)>1/2} \\
&\eta(T, B) > 1/2 \\
\Leftrightarrow &1 - e^{T+B-7} > \frac{1}{2} \\
\Leftrightarrow &- \ln 2 > T + B - 7 \\
\Leftrightarrow &T + B < 7 - \ln 2
\end{aligned}
$$
   Donc $g * (T, B) = \mathbb{1}_{T+B<7-\ln 2}$
4. $T, B \sim \mathcal{E}(1)$ et $T \perp B$ donc $T + B \sim \gamma(2, 1)$, $f_{T+B}(u) = ue^{-u}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+(u)}$
5. $$
\begin{aligned}
L^* = P(g^*(T, B) \neq Y) &= P(g^*(T, B) = 1, Y = 0) + P(g^*(T, B) = 1, Y = 0) \\
&= P(T + B < 7 - \ln 2, T + B + E \geq 7) + P(T + B \geq 7 - \ln 2, T + B + E < 7) \\
&= a + b \\
a &= \mathbb{E}[P(T + B < 7 - \ln 2, T + B + 3 \geq 7|T, B)] \\
&= \mathbb{E}[\mathbb{1}_{T+B<7-\ln 2}G(7 - T - B)] \\
&= \mathbb{E}[\mathbb{1}_{T+B<7-\ln 2}e^{T+B-7}] \\
&= \int_0^{7-\ln 2} e^{u-7}ue^{-u}du \\
&= e^{-7}[\frac{u^2}{2}]_0^{7-\ln 2} \\
&= e^{-7}\frac{(7 - \ln 2)^2}{2} \\
b &= \text{ same} \\
a + b &= e^{-7}(\frac{(7 - \ln 2)^2}{2} + 2(8 - \ln 2) - 8 - \frac{7^2}{2} + \frac{(7 - \ln 2)^2}{2})
\end{aligned}
$$
6. $$
\begin{aligned}
P(Y = 0) &= P(T + B + E \geq 7) \\
&= P(\gamma(3) \geq 7) \\
&= \int_7^{+\infty} \frac{1}{2}u^2e^{-u}du \\
&= 0.029
\end{aligned}
$$