Apprentissage Statistique

Exercice du diapo

S1-2023

1 Supervised classification

1.1 Excercice

Exercice 1 :

$$\begin{aligned} L* &= 1 - P(g*(X) = Y) \\ &= 1 - \mathbb{E}[g*(X) = 1]P(Y = 1|X) \\ &= 1 - \mathbb{E}[\mathbb{1}_{P(Y=1|X)} + \mathbb{1}_{g*(X)=0}P(Y = 0|X)] \\ &= 1 - \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\eta(X)>1/2}\eta(X) + \mathbb{1}_{\eta(X)\leq 1/2}(1 - \eta(X))] \end{aligned}$$

Exercice 2

$$\begin{aligned} L* &= 1 - P(g*(X) = Y) \\ &= 1 - \mathbb{E}[P(g*(X) = Y|X)] \\ &= 1 - \mathbb{E}[\max(1 - \eta(X), \eta(X))] \\ &= 1 + \mathbb{E}[\min(\eta(X) - 1, -\eta(X))] \\ &= \mathbb{E}[\min(\eta(X), 1 - \eta(X))] \end{aligned}$$

Exercice 3: Si $L*(X) = 0$ ça veut dire que c'est un processus déterministe. Que Y a un lien déterministe avec X

$$P(g*(X) \neq Y) = 0 \Rightarrow Y = g*(X) as..$$

$$Y = \phi(X) \Rightarrow P(Y \neq \phi(X)) = 0 \Rightarrow L* = 0.$$

1.2 Statistical Learning

Exercice diapo 18 : $consistency \Leftrightarrow L(g_n) \to^{L^1} L* \Leftrightarrow L(g_n) \to^{\mathbb{P}} L*$

- Pour la convergence L1 (je crois)

$$\begin{aligned} &P(g_n(X) \neq Y|\mathcal{D}_n) \to^{L1} L* \\ &\mathbb{E}[P(g_n(X) \neq Y|\mathcal{D}_n) - L*] \\ &= \mathbb{E}[P(g_n(X) \neq Y[\mathcal{D}_n) - L*])] \\ &= P(g_n(X) \neq Y) - L* \\ &\to 0(?) \end{aligned}$$

- Pour la convergence en proba dans le sens non instinctif, on veut montrer que

$$\begin{aligned} &Z_n \to^{\mathbb{P}} 0 \\ &|Z_n| \leq 1 \text{ car proba} \\ &\text{alors } Z_n \to^{L1} 0 \end{aligned}$$

Preuve :

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}[|Z_n|] = \mathbb{E}[Z_n|\mathbb{1}_{|Z_n|>\epsilon}] + \mathbb{E}[Z_n|\mathbb{1}_{|Z_n|\leq\epsilon}] \\ &\leq P(|Z_n| > \epsilon) \end{aligned}$$