

# Apprentissage Statistique

## Exercice du diapo

S1-2023

## 1 Supervised classification

### 1.1 Exercice

Exercice 1 :

$$\begin{aligned}L^* &= 1 - P(g^*(X) = Y) \\&= 1 - \mathbb{E}[g^*(X) = 1]P(Y = 1|X) \\&= 1 - \mathbb{E}[\mathbb{1}_{P(Y=1|X)} + \mathbb{1}_{g^*(X)=0}P(Y = 0|X)] \\&= 1 - \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\eta(X) > 1/2}\eta(X) + \mathbb{1}_{\eta(X) \leq 1/2}(1 - \eta(X))]\end{aligned}$$

Exercice 2

$$\begin{aligned}L^* &= 1 - P(g^*(X) = Y) \\&= 1 - \mathbb{E}[P(g^*(X) = Y|X)] \\&= 1 - \mathbb{E}[\max(1 - \eta(X), \eta(X))] \\&= 1 + \mathbb{E}[\min(\eta(X) - 1, -\eta(X))] \\&= \mathbb{E}[\min(\eta(X), 1 - \eta(X))]\end{aligned}$$

Exercice 3: Si  $L^*(X) = 0$  ça veut dire que c'est un processus déterministe. Que  $Y$  a un lien déterministe avec  $X$

$$P(g^*(X) \neq Y) = 0 \Rightarrow Y = g^*(X) \text{ as..}$$

$$Y = \phi(X) \Rightarrow P(Y \neq \phi(X)) = 0 \Rightarrow L^* = 0.$$

### 1.2 Statistical Learning

Exercice diapo 18 :  $\text{consistency} \Leftrightarrow L(g_n) \xrightarrow{L^1} L^* \Leftrightarrow L(g_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} L^*$

- Pour la convergence L1 (je crois)

$$\begin{aligned}P(g_n(X) \neq Y|\mathcal{D}_n) &\xrightarrow{L^1} L^* \\ \mathbb{E}[P(g_n(X) \neq Y|\mathcal{D}_n) - L^*] \\ &= \mathbb{E}[P(g_n(X) \neq Y|\mathcal{D}_n) - L^*] \\ &= P(g_n(X) \neq Y) - L^* \\ &\rightarrow 0(?)\end{aligned}$$

- Pour la convergence en proba dans le sens non instinctif, on veut montrer que

$$\begin{aligned}Z_n &\xrightarrow{\mathbb{P}} 0 \\ |Z_n| &\leq 1 \text{ car proba} \\ \text{alors } Z_n &\xrightarrow{L^1} 0\end{aligned}$$

Preuve :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[|Z_n|] &= \mathbb{E}[Z_n \mathbb{1}_{|Z_n| > \epsilon}] + \mathbb{E}[Z_n \mathbb{1}_{|Z_n| \leq \epsilon}] \\ &\leq P(|Z_n| > \epsilon)\end{aligned}$$

### 1.3 Exercice TD

#### 1.3.1 Exercice 1

$(X, Y) \in \mathbb{R} \times [0, 1], X \sim \mathcal{U}([-2, 2]), \text{ et}$

$$\begin{aligned} Y &= \mathbb{1}_{X < 0, U \leq 2} + \mathbb{1}_{X > 0, U > 1} \\ \eta &= P(Y = 1|X) \\ &= P(X < 0, u \leq 2|X) + P(X > 0, U > 1|X) \\ &= \mathbb{1}_{X < 0}P(U \leq 2) + \mathbb{1}_{X > 0}P(U > 1) \\ &= \mathbb{1}_{X < 0}\frac{2}{10} + \mathbb{1}_{X > 0}\frac{9}{10} \end{aligned}$$

$$g^*(X) = \mathbb{1}_{\eta(X) > \frac{1}{2}} = \mathbb{1}_{X > 0}$$

Bayes error

$$\begin{aligned} L^* &= P(g^*(X) \neq Y) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathbb{E}[2\eta(X) - 1] \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\frac{4}{10}\mathbb{1}_{X < 0} + \frac{18}{10}\mathbb{1}_{X > 0} - 1\right] \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\frac{6}{10}\mathbb{1}_{X < 0} + \frac{8}{10}\mathbb{1}_{X > 0}\right] \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} * \frac{6}{10} * \frac{1}{2} - \frac{1}{2} * \frac{8}{10} * \frac{1}{2} \\ &= \frac{3}{20} \end{aligned}$$

#### 1.3.2 Exercice 2

1.

$$\begin{aligned} L^* &= \mathbb{E}[\min(\eta(X), 1 - \eta(X))] \\ &= \mathbb{E}[\min(\frac{x}{c+x}, \frac{c}{c+x})] \\ &= \mathbb{E}[\frac{\min(x, c)}{c+x}] \end{aligned}$$

$$2. f_x(x) = \frac{\mathbb{1}_{x \in [0, \alpha c]}}{\alpha c}$$

$$\begin{aligned} L^* &= \int_0^{\alpha c} \frac{\min(x, c)}{x+c} \frac{dx}{\alpha c} \\ &= \int_0^c \frac{x}{x+c} \frac{dx}{\alpha c} \\ &= \frac{1}{\alpha} \log\left(\frac{(\alpha+1)e}{4}\right) \end{aligned}$$

3. exercice, étudier la fonction ou

- $f$  continue sur  $[1, +\infty]$
- $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} f(\alpha) = 0$

Donc  $f$  admet un maximum

### 1.3.3 Exerice 3

$X \sim (T, B, E) \sim \mathcal{E}(1)$

densité d'une loi exp  $Z \sim \mathcal{E}(1)$

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= e^{-z} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(z) \\ F_Z(t) &= (1 - e^{-t}) \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t) \\ G_Z(t) &= \mathbb{1}_{\mathbb{R}_-} + e^{-t} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t) \end{aligned}$$

1.  $Y$  est une fonction de  $X$  donc  $L^* = 0$ . C'est déterministe

2.

$$\begin{aligned} P(Y = 1|T, B) &= P(T + B + E < 7|T, B) \\ &= F_Z(7 - T - B) \text{ car } E \perp (T, B) = (1 - e^{-(7-T-B)}) \mathbb{1}_{7-T-B>0} \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} g^*(T, B) &= \mathbb{1}_{\eta(T, B) > 1/2} \\ \eta(T, B) &> 1/2 \\ \Leftrightarrow 1 - e^{T+B-7} &> \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow -\ln 2 &> T + B - 7 \\ \Leftrightarrow T + B &< 7 - \ln 2 \end{aligned}$$

Donc  $g^*(T, B) = \mathbb{1}_{T+B < 7 - \ln 2}$

4.  $T, B \sim \mathcal{E}(1)$  et  $T \perp B$  donc  $T + B \sim \gamma(2, 1)$ ,  $f_{T+B}(u) = ue^{-u} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(u)$

5.

$$\begin{aligned} L^* &= P(g^*(T, B) \neq Y) = P(g^*(T, B) = 1, Y = 0) + P(g^*(T, B) = 0, Y = 1) \\ &= P(T + B < 7 - \ln 2, T + B + E \geq 7) + P(T + B \geq 7 - \ln 2, T + B + E < 7) \\ &= a + b \\ a &= \mathbb{E}[P(T + B < 7 - \ln 2, T + B + 3 \geq 7|T, B)] \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{1}_{T+B < 7 - \ln 2} G(7 - T - B)] \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{1}_{T+B < 7 - \ln 2} e^{T+B-7}] \\ &= \int_0^{7 - \ln 2} e^{u-7} ue^{-u} du \\ &= e^{-7} \left[ \frac{u^2}{2} \right]_0^{7 - \ln 2} \\ &= e^{-7} \frac{(7 - \ln 2)^2}{2} \\ b &= \text{same} \\ a + b &= e^{-7} \left( \frac{(7 - \ln 2)^2}{2} + 2(8 - \ln 2) - 8 - \frac{7^2}{2} + \frac{(7 - \ln 2)^2}{2} \right) \end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned} P(Y = 0) &= P(T + B + E \geq 7) \\ &= P(\gamma(3) \geq 7) \\ &= \int_7^{+\infty} \frac{1}{2} u^2 e^{-u} du \\ &= 0.029 \end{aligned}$$