

Projet d'apprentissage statistique
Facteur de régulation des ResNets profonds

SHEN Pingya, VIN Charles

December 24, 2023

Contents

1	Introduction	2
2	Le facteur α_L à l'initialisation	4
2.1	Modèle et hypothèses	4
2.2	Limite probabilistique de la norme des états cachés	5
2.3	Limite probabilistique des gradients	8
2.4	Conclusion	9

Chapter 1

Introduction

Avant l'introduction de ResNet en 2015 par He et al., l'architecture GoogLeNet était le dernier gagnant des challenges de vision par ordinateur. Cette architecture avait été développée pour pallier les problèmes d'apprentissage liés à l'augmentation de la profondeur de VGG, une autre architecture prééminente.

Un réseau plus profond peut offrir de meilleures performances dans certaines conditions, mais il est aussi sujet à des problèmes tels que l'explosion ou l'évanouissement du gradient de la loss. Durant la rétropropagation, les grandes ou petites valeurs de gradient peuvent s'amplifier à travers les couches du réseau, entraînant un gradient bien plus grand ou plus petit dans les dernières couches par rapport aux premières. Cet effet est multiplicatif et dépend donc de la profondeur du réseau.

Pour un réseau d'une profondeur L , on modélise ces états cachés de dimension d par une séquence $(h_k)_{1 \leq k \leq L}$ avec $h_k \in \mathbb{R}^d, \forall 0 \leq k \leq L$. L'explosion du gradient peut être décrite mathématiquement par, avec une forte probabilité, $\left\| \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h_0} \right\| \gg \left\| \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h_L} \right\|$, où \mathcal{L} représente la loss et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne.

GoogLeNet, bien qu'offrant des une légère amélioration des performance par rapport à VGG, était encore relativement complexe et sa profondeur comparable à celle de VGG, passant de 22 à 16 couches. En 2015, ResNet a introduit un modèle allant jusqu'à 152 couches, divisant par deux le nombre d'erreurs de GoogLeNet. Son innovation réside dans l'intégration de *skip connections* entre les couches successives, facilitant le passage du gradient au sein du réseau. Mathématiquement, cela donne la relation récurrente suivante pour la séquence $(h_k)_{1 \leq k \leq L}$:

$$h_{k+1} = h_k + f(h_k, \theta_{k+1}).$$

où $f(\cdot, \theta_{k+1})$ représente les transformations effectuées par la couche k et paramétrées par $\theta_{k+1} \in \mathbb{R}^p$.

Les ResNets sont devenus la base de nombreux modèles d'apprentissage profond de pointe, s'étendant au-delà du traitement d'images pour inclure des domaines tels que le traitement du langage naturel et l'apprentissage par renforcement. L'idée des *skip connections* a inspiré de nombreuses autres architectures et est devenue une pratique courante dans la conception des réseaux neuronaux profonds.

Figure 1.1: Illustration du modèle ResNet avec la présence de *skip connections* dans chaque bloc.

Malgré ces avancées, ResNet rencontre toujours des problèmes de gradient durant l'apprentissage. La méthode traditionnelle pour contrer cela est la normalisation des états cachés après chaque couche (*batch normalization*). Cependant, cette approche a un coût computationnel et dépend fortement de la taille du *batch*. Une alternative est d'incorporer un facteur d'échelle α_L devant le terme résiduel, conduisant au modèle suivant :

$$h_{k+1} = h_k + \alpha_L f(h_k, \theta_{k+1}) \tag{1.1}$$

Le choix de α_L est crucial et dépend naturellement de la profondeur L du réseau. Il assure que la variance du signal reste stable lors de sa propagation à travers les couches. Cependant, il n'existe actuellement ni preuve formelle ni justification mathématique solide pour le choix de ce facteur de régularisation.

Dans ce cours, nous examinerons les fondements mathématiques pour choisir la valeur de α_L en fonction de L et de la distribution initiale des poids, dans le but d'éviter les problèmes d'apprentissage. Deux axes principaux d'étude seront abordés :

1. Le facteur α_L à l'initialisation : L'initialisation des paramètres est cruciale pour la phase d'apprentissage d'un modèle et influe même sur ses capacités de généralisation. Une mauvaise initialisation peut entraîner une divergence ou une disparition rapide du gradient, voire un blocage dans l'apprentissage. L'étude du rôle de α_L lors de l'initialisation est donc pertinente. Nous considérerons que, à

l'initialisation, les poids de chaque couche $(\theta_k)_{1 \leq k \leq L}$ sont choisis de manière indépendante et identique selon une loi, typiquement gaussienne ou uniforme sur \mathbb{R}^p .

2. L'approche continue : Bien que le réseau neuronal soit constitué de nombreuses couches distinctes, l'ensemble du réseau peut être considéré comme une fonction, lorsqu'il y a suffisamment de neurones. L'idée centrale des équations différentielles neuronales est de traiter les couches distinctes du réseau comme continues, en supposant que chaque couche subit de petits changements. Ainsi, l'entrée de la couche suivante est considérée comme le résultat de l'intégrale de l'entrée de la couche précédente. Cela peut être comparé au mouvement d'un projet, où le déplacement dans la deuxième seconde peut être approximé par le déplacement dans la première seconde plus la vitesse dans la première seconde (multipliée par l'intervalle de temps d'une seconde). Les équations différentielles neuronales ont ouvert une nouvelle direction pour la théorie et la pratique de l'apprentissage profond et ont été appliquées à la classification d'images, aux séries chronologiques et à d'autres domaines. Tous les réseaux d'apprentissage profond avec des connexions résiduelles peuvent être exprimés approximativement par des équations différentielles neuronales

Chapter 2

Le facteur α_L à l'initialisation

Dans cette section, notre objectif est d'examiner comment le facteur de mise à l'échelle α_L affecte la stabilité des ResNets lors de leur initialisation, en supposant que les poids sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.). Nous analyserons la modélisation, l'initialisation des paramètres et les hypothèses nécessaires à cette démarche.

2.1 Modèle et hypothèses

Modèle

Le modèle est basé sur un ensemble de données composé de n paires $(x_i, y_i)_{1 \leq i \leq n}$ avec $x_i \in \mathbb{R}^{n_{\text{in}}}$ comme vecteur d'entrée et $y_i \in \mathbb{R}^{n_{\text{out}}}$ comme vecteur de sortie à prédire (soit en valeurs continues soit en format *one-hot*). Soit $F_\pi(x) \in \mathbb{R}^{n_{\text{out}}}$, $x \in \mathbb{R}^{n_{\text{in}}}$ la sortie du ResNet définie par

$$\begin{aligned} h_0 &= Ax, \\ h_{k+1} &= h_k + \alpha_L V_{k+1} g(h_k, \theta_k), \quad 0 \leq k \leq L-1, \\ F_\pi(x) &= Bh_L, \end{aligned} \tag{2.1}$$

où $\pi = (A, B, (\theta_k)_{k \leq L}, (V_k)_{1 \leq k \leq L})$ sont les paramètres du modèle avec $A \in \mathbb{R}^{d \times n_{\text{in}}}$, $B \in \mathbb{R}^{n_{\text{out}} \times d}$, $\theta_k \in \mathbb{R}^p$ et $V_k \in \mathbb{R}^{d \times d}$ pour $k = 1, \dots, L$. La fonction $g : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^d$ représente le choix de l'architecture d'un bloc du ResNet. Nous nous intéressons principalement à la suite des états cachés $(h_k)_{0 \leq k \leq L}$ et non aux changements de dimension permis par les matrices A et B . Finalement, on définit $l : \mathbb{R}^{n_{\text{out}}} \times \mathbb{R}^{n_{\text{out}}} \rightarrow \mathbb{R}_+$ comme la fonction de *loss*, différentiable par rapport à son premier paramètre. Cette *loss* peut être une perte quadratique ou une entropie croisée. L'objectif de l'apprentissage est de trouver le paramètre optimal π qui minimise le risque empirique $\mathcal{L}(\pi) = \sum_{i=1}^n l(F_\pi(x_i), y_i)$ à travers une descente de gradient stochastique ou l'une de ses variantes.

Durant ce cours, nous nous concentrerons particulièrement sur trois architectures classiques de ResNet, présentées dans la table 2.1 ci-dessous. Il pourrait également être intéressant d'envisager un quatrième modèle intégrant plusieurs couches linéaires ou convolutives.

Nom	Réurrence	Paramètres
res-1	$h_{k+1} = h_k + \alpha_L V_{k+1} \sigma(h_k)$	$\theta_{k+1} = \emptyset$
res-2	$h_{k+1} = h_k + \alpha_L V_{k+1} \sigma(W_{k+1} h_k)$	$\theta_{k+1} = W_{k+1}$
res-3	$h_{k+1} = h_k + \alpha_L V_{k+1} \text{ReLU}(W_{k+1} h_k)$	$\theta_{k+1} = W_{k+1}$

Table 2.1: Exemples d'architectures ResNet considérées dans l'article. Dans les deux premiers cas, la fonction d'activation σ est telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $a|x| \leq |\sigma(x)| \leq b|x|$, avec $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq a < b \leq 1$. Dans les deux derniers cas, $W_{k+1} \in \mathbb{R}^{d \times d}$.

Initialisation des paramètres

Nous rappelons que $\theta_k \in \mathbb{R}^p$ et $V_k \in \mathbb{R}^{d \times d}$ sont les paramètres des couches cachées de notre modèle pour tout $k \in \llbracket 1, L \rrbracket$. Ces paramètres sont choisis à l'initialisation comme la réalisation de variables aléatoires i.i.d., généralement suivant une distribution uniforme ou gaussienne. Cette initialisation est indépendante de L et donc du modèle représenté par g , permettant de considérer plusieurs architectures différentes dans notre étude. Nous examinerons également d'autres approches dépendantes du modèle pour étudier le choix de α_L (par exemple, Yang et Schoenholz, 2017 ou Wang et al., 2022 [2]).

Hypothèses

Pour notre première hypothèse, nous avons besoin de la définition suivante :

Définition 1 (Variable aléatoire s^2 sub-gaussienne) *En théorie des probabilités, une distribution s^2 sub-gaussienne est une distribution de probabilité caractérisée par une décroissance rapide des queues de distribution. Bien qu'il existe de nombreuses définitions et propriétés, nous retiendrons dans ce cours la suivante : soit X une variable aléatoire réelle,*

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \mathbb{E}[\exp(\lambda X)] \leq \exp\left(\frac{\lambda^2 s^2}{2}\right).$$

De manière informelle, les queues d'une distribution sub-gaussienne sont dominées par celles d'une distribution gaussienne, c'est-à-dire qu'elles décroissent au moins aussi rapidement.

Avec cette définition en tête, passons aux hypothèses. Pour tout $1 \leq k \leq L$

Hypothèse 1 *Pour un certain $s \geq 1$, les entrées de $\sqrt{d}V_k$ sont des variables aléatoires symétriques i.i.d., s^2 sub-gaussiennes, indépendantes de d et L et de variance unitaire.*

Note 1 *L'hypothèse 1 est en pratique satisfaite par toutes les initialisations, en particulier celle par défaut dans les paquets Keras [1] et Torch Vision [2].*

Hypothèse 2 *Pour un certain $C > 0$, indépendant de d et L , et pour tout $h \in \mathbb{R}^D$*

$$\frac{\|h\|^2}{2} \leq \mathbb{E}[\|g(h, \theta_k)\|^2] \leq \|h\|^2.$$

and

$$\mathbb{E}[\|g(h, \theta_k)\|^8] \leq C \|h\|^8.$$

Note 2 *La première partie de l'hypothèse 2 assure que $g(\cdot, \theta_{k+1})$ se comporte approximativement comme une isométrie en moyenne, c'est-à-dire qu'elle préserve les longueurs et les mesures d'angles entre son espace de départ et son espace d'arrivée.*

La deuxième partie de l'hypothèse 2 vise à limiter les variations excessives dans la norme de $g(h_k, \theta_{k+1})$.

Proposition 1 (Admis) *Soit les modèles res-1, res-2, res-3 décrit dans la Table 2.1, on a*

- (i) *L'Hypothèse 2 est valide pour l'architecture res-1*
- (ii) *L'Hypothèse 2 est valide pour les architectures res-2 et res-3 dès lors que les entrées de $\sqrt{d}W_{k+1}$, $0 \leq k \leq L-1$ sont des variables aléatoires de variance unitaire, i.i.d., symétriques, sub-gaussienne et indépendante de d et L*

Lemme 1 (Admis) *Considérons un ResNet [1.1] tel que les hypothèses 1 et 2 soient satisfaites.*

$$\left((1 + \frac{\alpha_L^2}{2})^L - 1\right) \leq \mathbb{E}\left(\frac{\|h_L - h_0\|^2}{\|h_0\|^2}\right) \leq ((1 + \alpha_L^2)^L - 1).$$

Ce lemme nous servira en particulier dans la preuve de la proposition 2.

2.2 Limite probabilistique de la norme des états cachés

Dans cette section, nous nous intéressons à la quantité $\|h_L - h_0\|/\|h_0\|$. Cette mesure permet d'analyser la valeur des états cachés entre le début et la fin du réseau. Si $\|h_L - h_0\| \ll \|h_0\|$, cela suggère que le réseau agit presque comme une fonction identité. À l'inverse, un ratio $\|h_L - h_0\| \gg \|h_0\|$ indique une explosion des valeurs des états cachés. Une situation équilibrée serait représentée par $\|h_L - h_0\| \approx \|h_0\|$.

Nous appliquerons un raisonnement similaire aux gradients avec la quantité $\left\|\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h_0} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h_L}\right\|/\left\|\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h_L}\right\|$. En raison de la propagation rétroactive du gradient qui commence à partir de la fin du réseau, cette mesure est comparée à la dernière valeur du gradient $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h_L}$.

Les propositions et corollaires suivants décriront comment le rapport $\|h_L - h_0\|/\|h_0\|$ se comporte en fonction de $L\alpha_L$, en établissant différentes bornes supérieures et inférieures.

Proposition 2 *Considérons un ResNet [1.1] tel que les hypothèses 1 et 2 soient satisfaites. Si $L\alpha_L^2 \leq 1$, alors, pour tout $\delta \in (0, 1)$, avec une probabilité d'au moins $1 - \delta$,*

$$\frac{\|h_L - h_0\|^2}{\|h_0\|^2} \leq \frac{2L\alpha_L^2}{\delta}.$$

La proposition 2 par sa borne supérieure petite indique que le réseau se comporte comme une fonction identité dans le cas où $L\alpha_L^2 \ll 1$.

Preuve 1 (Proposition 2) *En se basant sur le lemme 1, on a*

$$\mathbb{E}\left(\frac{\|h_L - h_0\|^2}{\|h_0\|^2}\right) \leq ((1 + \alpha_L^2)^L - 1).$$

En se basant sur le lemme 1, considérons le cas où $L\alpha_L^2 \leq 1$ (valeur faible) et L tend vers de grandes valeurs. Dans ce contexte, $(1 + \alpha_L^2)^L$ est une bonne approximation de $\exp(L\alpha_L^2)$ par définition, tout en restant inférieur ou égal à celui-ci en raison de la croissance exponentielle de la fonction \exp . En effet, $(1 + \alpha_L^2)^L$ se rapproche de $1 + L\alpha_L^2$ selon la formule du binôme de Newton, et correspond aux premiers termes du développement en série de Taylor de l'exponentielle. Finalement, on a obtenus

$$(1 + \alpha_L^2)^L - 1 \leq \exp(L\alpha_L^2) - 1.$$

En poursuivant avec le développement de Taylor, nous obtenons une majoration plus précise.

$$(1 + \alpha_L^2)^L - 1 \leq \exp(L\alpha_L^2) - 1 \leq L\alpha_L^2 \leq 2L\alpha_L^2.$$

Ainsi on obtient

$$\mathbb{E}\left(\frac{\|h_L - h_0\|^2}{\|h_0\|^2}\right) \leq 2L\alpha_L^2.$$

En appliquant l'inégalité de Markov, nous parvenons au résultat souhaité.

Proposition 3 (Admise) *Considérons un ResNet [1.1] tel que les hypothèses 1 et 2 soient satisfaites.*

(i) *Supposons que $d \geq 64$ et $\alpha_L^2 \leq \frac{2}{(\sqrt{C}s^4 + 4\sqrt{C} + 16s^4)d}$. Alors, pour tout $\delta \in (0, 1)$, avec une probabilité d'au moins $1 - \delta$,*

$$\frac{\|h_L - h_0\|^2}{\|h_0\|^2} > \exp\left(\frac{3L\alpha_L^2}{8} - \sqrt{\frac{11L\alpha_L^2}{d\delta}}\right) - 1,$$

à condition que

$$2L \exp\left(-\frac{d}{64\alpha_L^2 s^2}\right) \leq \frac{\delta}{11}.$$

(ii) *Supposons que $\alpha_L^2 \leq \frac{1}{\sqrt{C}(d+128s^4)}$. Alors, pour tout $\delta \in (0, 1)$, avec une probabilité d'au moins $1 - \delta$,*

$$\frac{\|h_L - h_0\|^2}{\|h_0\|^2} < \exp\left(L\alpha_L^2 + \sqrt{\frac{5L\alpha_L^2}{d\delta}}\right) + 1.$$

La proposition 3 aborde les deux cas restants : $L\alpha_L^2 \gg 1$ et $L\alpha_L^2 \approx 1$. Dans la partie (i), la borne inférieure indique une explosion très probable du gradient lorsque $L\alpha_L^2 \gg 1$. La partie (ii) traite du cas où $L\alpha_L^2 \approx 1$, avec une borne supérieure qui, en combinaison avec celle de (i), suggère que h_L fluctue autour de h_0 , étant ainsi borné des deux côtés.

Cette proposition 3 peut présenter des hypothèses qui semblent atypiques, mais elles sont en réalité souvent vérifiées dans la majorité des ResNets profonds. En effet, il est courant de trouver des ResNets avec une profondeur $L \geq 100$, pour lesquels on définit généralement $\alpha_L = 1/L^\beta$ avec $\beta > 0$. De plus, la dimension des états cachés atteint fréquemment des valeurs telles que $d \geq 100$.

Les conséquences des propositions 2 et 3 vont devenir plus claires en fixant $\alpha_L = 1/L^\beta$ comme montré dans le corollaire suivant.

Corollaire 1 *Considérons un ResNet [1.1] tel que les hypothèses 1 et 2 soient satisfaites, et soit $\alpha_L = 1/L^\beta$, avec $\beta > 0$.*

(i) *Si $\beta > \frac{1}{2}$, alors*

$$\frac{\|h_L - h_0\|}{\|h_0\|} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0 \text{ lorsque } L \rightarrow \infty.$$

(ii) Si $\beta < \frac{1}{2}$ et $d \geq 9$, alors

$$\frac{\|h_L - h_0\|}{\|h_0\|} \xrightarrow{\mathbb{P}} \infty \text{ lorsque } L \rightarrow \infty.$$

(iii) Si $\beta = \frac{1}{2}$, $d \geq 64$, $L \geq \left(\frac{1}{2}\sqrt{C}s^4 + 2\sqrt{C} + 8s^4\right)d + 96\sqrt{C}s^4$, alors, pour tout $\delta \in (0, 1)$, avec une probabilité d'au moins $1 - \delta$,

$$\exp\left(\frac{3}{8} - \sqrt{\frac{22}{d\delta}}\right) - 1 < \frac{\|h_L - h_0\|^2}{\|h_0\|^2} < \exp\left(1 + \sqrt{\frac{10}{d\delta}}\right) + 1,$$

à condition que

$$2L \exp\left(-\frac{Ld}{64s^2}\right) \leq \frac{\delta}{11}.$$

Le corollaire 4 clarifie le comportement de notre dernier état caché $\|h_L\|$ en fonction de β .

- Lorsque $\beta > 1/2$, la distance entre h_L et h_0 converge vers zéro lorsque L tend vers l'infinie. Indiquant un réseau agissant essentiellement comme une fonction identité.
- Lorsque $\beta < 1/2$, la norme de h_L explose.
- Lorsque $\beta = 1/2$, On voit que h_L fluctue autour de h_0 , indépendamment de la longueur du réseau L .

On conclut donc que seul fixer $\beta = 1/2$ permet d'obtenir une distribution correcte.

Le corollaire 4 précise le comportement de notre dernier état caché $\|h_L\|$ en fonction de β .

- Lorsque $\beta > 1/2$, la distance entre h_L et h_0 tend vers zéro lorsque L augmente indéfiniment. Cela indique que le réseau fonctionne essentiellement comme une fonction identité.
- Lorsque $\beta < 1/2$, la norme de h_L tend à l'explosion avec la valeur de L .
- Lorsque $\beta = 1/2$, h_L fluctue autour de h_0 , indépendamment de la longueur du réseau L .

En conséquence, fixer $\beta = 1/2$ est la seule manière d'assurer une distribution adéquate des valeurs de h_L .

Preuve 2 (Corollaire 1) L'affirmation (i) est une conséquence de la Proposition 2. L'affirmation (ii) est une conséquence de la Proposition 3. En effet, cette dernière est valide les conditions $d \geq 64$ et $\alpha_L \leq \frac{2}{(\sqrt{C}s^4 + 4\sqrt{C} + 16s^4)d}$. La majoration d' α_L est automatiquement satisfaite pour L assez grand. Quant à la contrainte sur d , elle peut être, dans notre cas, relâché à $d \geq 9$ en observant la preuve de la Proposition 3 non décrite ici.

Pour prouver l'affirmation (iii), nous utilisons l'union des deux affirmations de la Proposition 3.

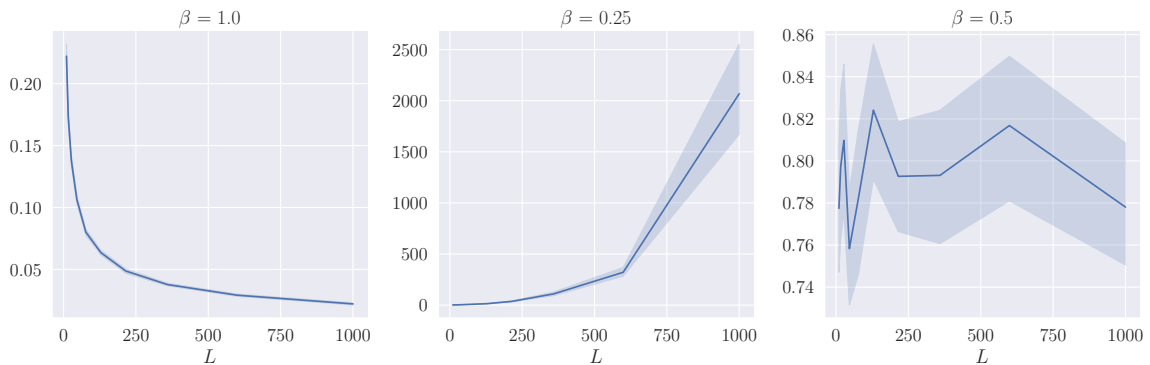


Figure 2.1: Illustration du corollaire 1. Évolution de $\|h_L - h_0\| / \|h_0\|$ en fonction de L pour différentes valeurs de β .

2.3 Limite probabilistique des gradients

Dans la section précédente, nous avons étudié le comportement de la sortie du réseau pour des valeurs élevées de L . Cependant, cette analyse ne nous renseigne pas sur le comportement du gradient du coût $p_k = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h_k} \in \mathbb{R}^d$ durant la rétropropagation, une donnée cruciale pour évaluer la capacité d'entraînement du réseau à l'initialisation. Par conséquent, cette section se consacrera à l'étude des variations de $\|p_0 - p_L\| / \|p_L\|$, toujours dans un contexte où la profondeur du réseau L est grande. Il est important de noter que, en raison de la nature de la rétropropagation, notre attention se porte désormais sur p_0 plutôt que sur p_L . Nous définissons donc la séquence $(p_k)_{0 \leq k \leq L}$ comme suit :

$$p_k = p_{k+1} + \alpha_L \frac{\partial g(h_k, \theta_{k+1})^T}{\partial h} V_{k+1}^T p_{k+1}$$

Bien que cette récurrence soit similaire à celle des états cachés (2.1), nous ne pouvons pas appliquer les mêmes techniques de preuve utilisées pour les états cachés. Cette différence s'explique par la dépendance de $\frac{\partial g(h_k, \theta_{k+1})}{\partial h}$ à h_k , et donc à $\theta_1, V_1, \dots, \theta_k, V_k$. Supposer l'indépendance de ces deux quantités serait une hypothèse assez forte, non vérifiée par de nombreuses architectures, comme notre modèle *res-1*. Ainsi, nous adopterons une autre approche, basée sur la dérivation automatique. Cette méthode nécessite des hypothèses moins contraignantes, mais les résultats obtenus seront exprimés en termes d'espérance plutôt qu'avec une forte probabilité.

Soit $z \in \mathbb{R}^d$. Pour tout $0 \leq i, j \leq L$, définissons $\frac{\partial h_j}{\partial h_i} \in \mathbb{R}^{d \times d}$ comme la matrice Jacobienne de h_j par rapport à h_i . Pour rappel, l'élément en position (m, n) de la Jacobienne représente la dérivée de la m -ème coordonnée de h_j par rapport à la n -ème coordonnée de h_i . Définissons ensuite $q_k(z) = \frac{\partial h_k}{\partial h_0} z$. En appliquant la règle de la chaîne, nous obtenons

$$q_{k+1}(z) = \frac{\partial h_{k+1}}{\partial h_k} q_k(z) = q_k(z) + \alpha_L V_{k+1} \frac{\partial g(h_k, \theta_{k+1})}{\partial h} q_k(z) \quad (2.2)$$

Nous observons une récurrence similaire à celle présentée dans l'Equation (1.1). En considérant maintenant que z est une variable aléatoire suivant une distribution gaussienne, il devient possible de décrire la valeur de $\|p_0\| / \|p_L\|$ en fonction du dernier vecteur $q_L(z)$.

$$\frac{\|p_0\|^2}{\|p_L\|^2} = \frac{1}{\|p_L\|^2} \mathbb{E}_{z \sim \mathcal{N}(0, I_d)} (|p_0^T z|^2) = \mathbb{E}_{z \sim \mathcal{N}(0, I_d)} \left(\left| \left(\frac{p_L}{\|p_L\|} \right)^T q_L(z) \right|^2 \right) \quad (2.3)$$

avec I_d la matrice identité sur \mathbb{R}^d . On retrouve la seconde égalité comme conséquence de

$$p_0^T = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h_0} \right)^T, z = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h_0} \right)^T \frac{\partial h_L}{\partial h_0} z = p_L^T q_L(z).$$

En résumé, la récurrence énoncée dans l'équation (2.2) va nous permettre de déterminer les bornes de $\|q_L(z)\|$. Ces résultats pourront ensuite être transposés à $\|p_0\| / \|p_L\|$ en utilisant l'Equation (2.3). Pour ce faire, il nous faudra établir certaines hypothèses sur le rapport $p_L / \|p_L\|$.

Hypothèses

Hypothèse 3 Soit $b = p_L / \|p_L\|$, alors $\mathbb{E}[b | h_L] = 0$ et $\mathbb{E}(b^T b | h_L) = I_d / d$

Note 3 Cette hypothèse est facilement vérifiée. Par exemple, en considérant $n_{out} = 1$ et en utilisant l'entropie croisée pour une classification binaire, ou bien l'erreur quadratique dans le cadre d'une régression.

L'hypothèse suivante est l'équivalent pour les gradients de ce qui est énoncé dans Hypothèse 2.

Hypothèse 4 On a, presque surement,

$$\frac{\|q_k\|^2}{2} \leq \mathbb{E} \left(\left\| \frac{\partial g(h_k, \theta_{k+1})}{\partial h} q_k \right\|^2 \mid h_k, q_k \right) \leq \|q_k\|^2.$$

L'Hypothèse 4 s'applique à toutes les architectures répertoriées dans la Table 2.1, comme le démontre la proposition suivante.

Proposition 4 Soit les réseaux *res-1*, *res-2* et *res-3* définis dans la Table 2.1. Supposons l'Hypothèse 1 satisfaite et σ dérivable presque partout avec $a \leq \sigma' \leq b$. Alors

(i) L'Hypothèse 4 est valide pour res-1

(ii) L'Hypothèse 4 est valide pour res-2 et res-3 dès lors que les entrées de $\sqrt{d}W_{k+1}, 0 \leq k \leq L-1$ sont des variables aléatoires de variance unitaire, i.i.d, symétriques et indépendante de d et L .

Les propositions Proposition 5 et 6 sont les homologues des Proposition 2 et 3 pour l'analyse du gradient du coût à l'initialisation.

Proposition 5 Soit un ResNet (2.1) tel que les Hypothèses 1 à 4 sont satisfaites. Si $L\alpha_L^2 \leq 1$ alors, pour tout $\delta \in (0, 1)$ avec une probabilité d'au moins $1 - \delta$

$$\frac{\|p_0 - p_L\|^2}{\|p_l\|^2} \leq \frac{2L\alpha_L^2}{\delta}.$$

Proposition 6 Soit un ResNet (2.1) tel que les Hypothèses 1 à 4 sont satisfaites. Alors

$$(1 + \frac{1}{2}\alpha_L^2)^L - 1 \leq \mathbb{E}(\frac{\|p_0 - p_L\|^2}{\|p_l\|^2}) \leq (1 + \alpha_L^2)^L - 1.$$

De façon similaire au Corollaire 1, le Corollaire 2 est déduit à partir des Proposition 5 et 6.

Corollaire 2 Soit un ResNet (2.1) tel que les Hypothèses 1 à 4 sont satisfaites. En posant $\alpha_L = 1/L^\beta$ avec $B > 0$, on obtient

(i) Si $\beta > 1/2$, alors

$$\frac{\|p_0 - p_L\|}{\|p_l\|} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0 \text{ lorsque } L \rightarrow \infty.$$

(ii) Si $\beta < 1/2$ alors

$$\mathbb{E}(\frac{\|p_0 - p_L\|^2}{\|p_l\|^2}) \xrightarrow{\mathbb{P}} \infty \text{ lorsque } L \rightarrow \infty.$$

1. ([iii]) Si $\beta = 1/2$ alors

$$\exp(\frac{1}{2}) - 1 \leq \mathbb{E}(\frac{\|p_0 - p_L\|^2}{\|p_l\|^2}) \leq \exp(4) - 1.$$

Ce corollaire est illustré dans la Figure 2.2.

Figure 2.2: Illustration du corollaire 2. Évolution de $\|p_0 - p_L\| / \|p_L\|$ en fonction de L pour différente valeur de β .

export la figure du pdf avec Windows

2.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons examiné comment le comportement des gradients et des états cachés est influencé par la valeur de β , qui se décline en trois cas distincts :

- $\beta < 1/2$: Une explosion qui empêche l'entraînement du réseau.
- $\beta > 1/2$: Un effet d'identité qui diminue les performances du réseau.
- $\beta = 1/2$: Une limite non-dégénérée favorable.

Il est intéressant de noter que la valeur $\beta = 1/2$ joue un rôle clé. De manière surprenante, cette valeur trouve une interprétation spécifique dans l'étude des ResNet dans un cadre continu, sujet que nous aborderons dans le chapitre suivant.

Bibliography

- [1] François Chollet et al. Keras. <https://keras.io>, 2015.
- [2] TorchVision maintainers and contributors. Torchvision: Pytorch’s computer vision library. <https://github.com/pytorch/vision>, 2016.