TP de TRIVA III

Charlotte Perlant

Mars 2019

1 Question 1

On considère un ensemble de points 3D (situés sur la mire) auxquels on rajoute un 1 comme dernière coordonnée : $X_i = \begin{bmatrix} X_i^1 \\ X_i^2 \\ X_i^3 \\ X_i^4 \end{bmatrix}$ avec $X_i^4 = 1$.

On considère également leur projection sur le plan de la caméra, points auxquels on a ajouté une dernière coordonnée valant 1 : $x_i = \begin{bmatrix} x_i^1 \\ x_i^2 \\ x_i^3 \end{bmatrix}$ avec $x_i^3 = 1$.

A partir des équations : $x_i \times (PX_i) = 0$, on cherche à trouver la matrice A vérifiant $Ap = 0$ avec $p = (P_1^T P_2^T P_3^T p_4^T)^T$.

Le système d'équations : $x_i \times (PX_i) = 0$, se réécrit pour chaque i sous la forme suivante :

- (1) $x_i^2 P_3^T X_i - x_i^3 P2^T X_i = 0$
- (2) $x_i^3 P_1^T X_i - x_i^1 P_3^T X_i = 0$
- (3) $x_i^1 P_2^T X_i - x_i^2 P_1^T X_i = 0$

On remarque grâce à ce système d'équations que : $-x_i^1(1) - x_i^2(2) = x_i^3(3)$ Ainsi, on peut supprimer la dernière équation et ne conserver que les deux premières qui forment un système libre.

D'après l'écriture du vecteur p : $p = \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ p_{31} \\ p_{21} \\ p_{22} \\ p_{23} \\ p_{31} \\ p_{32} \\ p_{33} \\ p_{41} \\ p_{42} \\ p_{43} \end{bmatrix}$ et grâce au système d'équations écrit plus haut, on peut identifier les coefficients de la matrice A, matrice traduisant les deux premières équations du système (qui sont libres) :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -x_i^3X_i^1 & x_i^2X_i^1 & 0 & -x_i^3X_i^2 & x_i^2X_i^2 & 0 & -x_i^3X_i^3 & x_i^2X_i^3 & 0 & -x_i^3X_i^4 & x_i^2X_i^4 \\ x_i^3X_i^1 & 0 & -x_i^1X_i^1 & x_i^3X_i^2 & 0 & -x_i^1X_i^2 & x_i^3X_i^3 & 0 & -x_i^1X_i^3 & x_i^3X_i^4 & 0 & -x_i^1X_i^4 \end{bmatrix}$$

2 Question 2

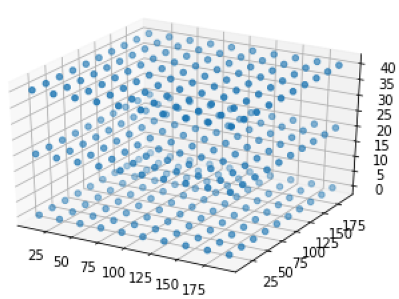
Tout d'abord multiplier à droite une matrice M par la matrice J inverse les colonnes de M. De même, multiplier à gauche une matrice M par la matrice J, inverse l'ordre des lignes de la matrice M. On suppose que l'on dispose de la décomposition QR de la matrice JM^TJ. Donc on a : $JM^TJ = QR$, et l'on souhaite accéder à la décomposition RQ de la matrice M. Sachant que $JJ = I_3$, on remarque que : $(JM^TJ)^T = R^TQ^T = JMJ$ Puis en utilisant le fait que : $J = J^{-1}$, on en déduit que : $M = (JR^TJ)(JQ^TJ)$ La première matrice est bien une matrice triangulaire supérieure et la deuxième une matrice orthogonale.
En effet, R^T est triangulaire inférieure car R est triangulaire supérieure mais la multiplication de part et d'autre par J permet de la transformer en une matrice triangulaire supérieure d'après les actions de ces multiplications décrites précédemment. Enfin, on a : $(JQ^TJ)^T(JQ^TJ) = JQQ^TJ = JJ = I_3$ La matrice (JQ^TJ) est donc orthogonale.
Par conséquent, on obtient bien la décomposition RQ de la matrice M.

3 Question 3

1/ Chargement du vecteur des points X Y Z x y grâce à la fonction np.loadtxt.
2/ Création de deux matrices de points :

- Une matrice pts_3D des points 3D de la mire de calibration auxquels on a ajouté une dernière coordonnée valant 1.
- Une matrice pts_2D des points 2D projections des points 3D de la mire de calibration sur le plan de la caméra auxquels on a ajouté une dernière coordonnée valant 1.

3/Tracé des points 3D de la mire de calibration à l'aide de la fonction mpl toolkits.mplot3d.Axes3D.scatter de python.



4/ Construction de la matrice A.
5/ Résolution du système Ap = 0. Ce système dispose d'une solution évidente qui est p = 0. Or, on souhaite trouver une solution telle que p soit non nul. Pour cela, on impose à la dernière composante de p (p_{43}) d'être égale à 1. Cela conduit à résoudre le nouveau système Ax = b avec A une matrice

de taille (2, 11) obtenue à partir de la matrice A précédente en en enlevant la dernière colonne et $b = -\mathrm{A}_{12}\ où \mathrm{A}_{12}$ correspond à la dernière colonne de A qui a été retirée.
6/ On sait que $P = \lambda K(RT)$. En prenant $\lambda = 1/K_{33}$ (étape de normalisation), on obtient une matrice K dont le dernier coefficient vaut 1. Enfin, la décomposition RQ de la matrice (3,3) extraite à gauche de P permet de trouver cette matrice K.
7/On commence par projeter les points 3D de la mire de calibration sur le plan de l'écran à l'aide de la matrice P. Puis on divise les points PX PY PZ ainsi obtenus par la valeur de PZ afin de se placer dans l'espace quotient P^2 (espace de projection). On obtient la figure suivante :