第9章 展望

第25讲 机器困境

第25讲 机器困境

二十世纪初，以希尔伯特为首的一批数学家展开了一场空前的数学形式化努力，并试图为全部数学构建起坚实的逻辑基础。他们努力的目标就是要实现这样一个数学家们一直梦寐以求的理想，那就是宇宙万事万物的规律都可以化归为数学表述的形式，而全部数学则又可化归为严密的逻辑形式化系统。

但令人意外的是，所有这些努力的结果却事与愿违，事实无情地宣告这一梦想的破灭。数理学家们终于认识到了逻辑系统的局限性。

1、形式系统局限性

公元1931年是一个具有划时代意义的年份，正是在这一年，伟大的奥地利逻辑学家库尔特·哥德尔发表了题为《ＰＭ及有关系统中的形式不可判定命题》的论文。在这篇论文中，哥德尔用严密的数学论证方法，指出了任意足够强大的一致性逻辑系统（强大到足以描述初等数论中的全部命题），一定是不完备的，即起码有一个命题在该逻辑系统中既不为真又不为假（存在着不能证明的命题）；反之，如果一个逻辑统要避免这样的不完备的结局，那么其又肯定是描述能力有限的或不一致的（即这一逻辑系统能够导致自相矛盾）。

更有甚者，一个逻辑系统是不是一致的、是不是完备的这一问题本身，对于这一逻辑系统而言也是不能证明的。

1、形式系统局限性

如果我们记“皮亚诺算术公理系统”为PA，就是以一阶谓词逻辑的形式语言陈述皮亚诺公理系统而得到的形式算术理论（一阶谓词逻辑+自然数定义+数学归纳法）。那么，哥德尔的两个定理可表述如下。

哥德尔第一不完全性定理　存在一个PA句子p，使得：如果PA是一致的，则p在PA中不可证；如果PA是ω-一致的（后来在1936年罗塞证明可以去掉ω），则¬p在PA中不可证。因此PA是不完全的。

哥德尔第二不完全性定理　如果PA是一致的，那么PA的一致性不能在PA内部证明。

1、形式系统局限性

很明显，对于第一个定理，只要具体构造出满足要求的这样一个p句子即可。哥德尔当年找到的句子是：

号码为λ的公式的自代入是不可证的

由于采用哥德尔创造的一种编码方法可以对任意PA中的公式进行能行可判定且唯一性编码，因此上面的句子可以表示为一个PA公式

α（x/λ）

1、形式系统局限性

上面其中a（x）就是$\forall y \neg A(x,y)$，意思是“任何公式序列y都不是公式x的自代入的证明”，当然这也是哥德尔可编码的，其编码就是λ。由于λ又自代入到a（x）中，因此a（x/λ）又表示“号码为λ的公式的自代入”本身。于是找到的p句子实际上就是一个自指句，这样就很容易证明其正是满足第一定理的句子。

1、形式系统局限性

第二定理的证明思路稍微要直接一些，因为利用第一定理我们有：

如果“**PA**一致”，则“**λ**的自代入是不可证的”此时由于上述陈述用**PA**可以表达为：

$$\mathbf{Consis(PA)\to \alpha\,(x/\lambda)}$$

因此，如果我们能够在**PA**内部完成对上式的证明（一致性的要求），即得到

$$\mathbf{PA\vdash Consis(PA)\to \alpha\,(x/\lambda)}$$

那么我们从**PA**一致（**Consis(PA)**），就能推出**PA**$\vdash$ **α**（**x/λ**），显然这与**α**（**x/λ**）在**PA** 中不可证是矛盾的。因此我们必然得出哥德尔第二定理。

1、形式系统局限性

这意味着什么？这意味着，根据哥德尔定理，逻辑系统不再是无所不能了，其存在着致命的局限性，除非你放弃是非分别，否则靠逻辑的手段是无法企及完美至善的事物。

于是哥德尔定理彻底动摇了作为理想和权威的逻辑思维的基础，其结果是震撼人心的。因为正是哥德尔定理，抽掉了一切理性思维活动完备性的支点，逻辑思维的局限性亦暴露无遗。

1、形式系统局限性

但事情到此还没有完，指出形式系统局限性的不仅仅是哥德尔定理。

事实上，自1915年勒文海姆（L.Löwenheim）开始，到1920年至1933年期间斯科伦（T.Skolem）发表的一系列论文为止，揭示了形式系统的又一个缺陷，这就是后来被简练提出的、著名的勒文海姆—斯科伦定理。

企图用公理形式系统来描述一类唯一的**模型对象**根本上是不可能的。

1、形式系统局限性

简言之，勒文海姆—斯科伦定理指出的是，企图用公理形式系统来描述一类唯一的**模型对象**根本上是不可能的。

这是因为对于一组公理及其形式系统能够容许比人们预期多得多的语义解释，而这些解释具有本质上的不同。也就是说，用公理形式系统描述的事物对象既不可靠也不唯一，公理系统根本没有限制解释模型。这就意味着数学真理性（由此推及客观真理性）不可能与公理化描述完全一致。

1、形式系统局限性

如果说哥德尔定理指出的是形式系统描述能力上的局限性，那么勒文海姆—斯科伦定理则是指出，即使形式系统的描述能力没有局限性，其对所要描述对象的可靠性也是不可能保证的。

必须清楚的认识到，自然对象和对自然对象的描述是两个不同的东西，不能混为一谈。

而现在我们看到，用形式系统给出的所谓自然对象的描述，根本就不可能真切的、唯一的反映自然对象本身。

1、形式系统局限性

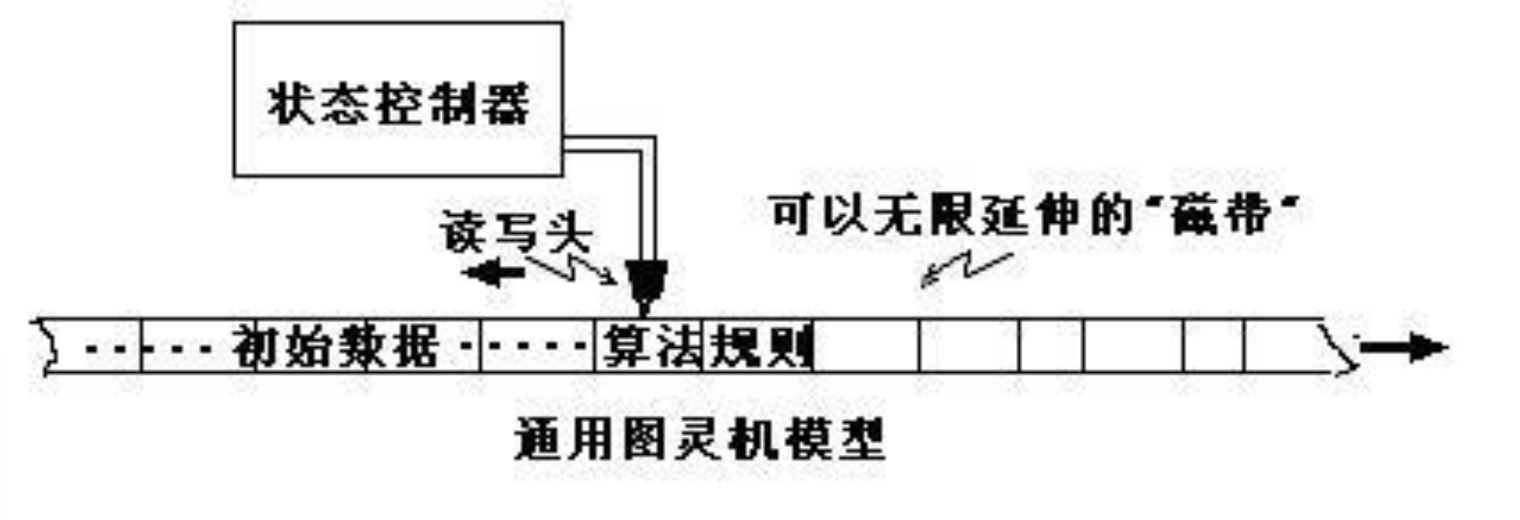
总之，靠形式系统是不可能真切可靠地描述自然对象及其复杂性的，公理形式化方法的固有缺陷是无法靠公理形式化方法本身来弥补的，对于这些我们必须也应该有清醒的认识。

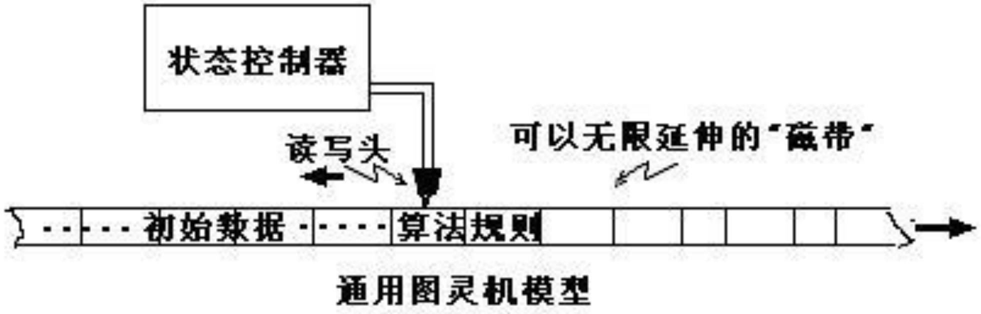
几乎在算法化计算理论初创的一开始，公理形式系统不可回避的缺陷就波及到了这一年轻的学科之中。1936年图灵发表的论文与1941年丘奇发表的论文，恰恰说明的正是这一点，并被后人总结为图灵—丘奇论题。

End 1

2、计算能力的限度

是的，由于直接受到哥德尔定理的影响，1936年，英国年轻的数学家阿兰·图灵提出了一种被人们称为图灵机的理论计算机模型，就是为了寻找计算机器的极限能力的。





2、计算能力的限度

如图所示，图灵机由控制器、存储带和读写头组成。

控制器代表图灵机所处的状态，图灵机在不同的状态下采取不同的操作，用来驱动存储带左右移动和控制读写头的操作。

存储带则是一条可向两端无限延伸的带子，带上分成一个个方格，每一方格可以存储规定字符表中的一个字符，也可保持空白。

读写头主要对存储带进行扫描，每次读出或写入一个字符。读写头正描准的格子中字符，称为当前字符。当前字符与当前状态一起决定着图灵机的一步计算，使得图灵机进入一个新状态，相应地带子或不动或左移一格或右移一格，以及当前字符或不变或改写为新字符或清空都也发生变化。

2、计算能力的限度

如果把一开始带上的字符串看作为输入数据，那么经过一系列的计算步操作后，当图灵机处于终止状态时带上的字符串就是输出结果。

于是，对于给定的图灵机（规定了初始状态和终止状态在内的所有状态及其变换和操作规则）就对应地规定了该图灵机的计算功能。

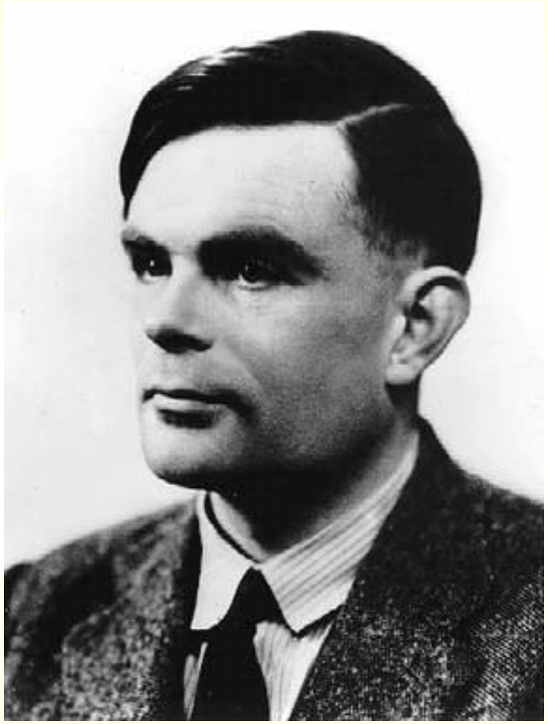
因此我们也称图灵机定义了一种计算函数，不同的图灵机完成不同的计算功能，也就对应了不同的计算函数。

进一步，图灵证实存在着这样的图灵机，其可以模拟实现任意给定图灵机的功能，这便是通用图灵机的概念。

2、计算能力的限度

现有理论表明，任何计算装置，包括理论模型和实际机器，其计算能力均不大于图灵机的计算能力。

如果我们规定带上的符号仅由“0”和“1”两种数字组成并约定n＋1个“1”连写表示自然数n，而用“0”（不管连写几次均作为一个看待）来作为数与数之间的间隔符，那么同样可以证明任何计算装置的计算能力均不大于这种自然数上的图灵机。也就是说，任意一个可计算的问题，使用编码方法，都可以对应为相应的一个自然数上的图灵机。



阿兰·图灵

2、计算能力的限度

那么是不是所有的问题都是图灵机可计算解决的呢？

根据上述说明，这个问题可以归结为：是不是所有的自然数函数都是可计算函数呢？

也就是说：存在不存在图灵机不能计算的自然数函数呢？

回答是肯定的，因为确实存在着图灵机不可计算的自然数函数。如果设f_i（x）为所有自然数可计算函数，那么通过

$$g(x)=f_x'(x)+1$$

导出悖论，就可以证明存在不可计算函数。

2、计算能力的限度

不仅如此，实际上从理论上讲，几乎处处都有不可计算（不可判定）问题，就拿数论命题的可判定性来说，就存在着不可数的不可判定命题，而可判定命题则是可数。打个比方说，如果可计算（可判定）问题看作有整数集那么大，那么不可计算（不可判定）问题就有实数集那么大，其差距之大，不言而喻。比较著名的不可计算问题有图灵停机问题、刁番图方程解的问题、铺地砖问题等。

2、计算能力的限度

因此，图灵机及其存在着不可计算问题是具有普适性意义的。不仅如此，我们还知道问题不可判定性本身也是不可判定的。

现在我们还想补充告诉读者的是，要想让计算机解决问题，还必须首先将该问题表述为图灵机（计算机）能处理的形式，比如说用 0， 1 符号来给问题进行编码，这时我们还会遇到一个对问题进行形式化描述的问题。由于这一问题本身（任意问题可不可形式化描述）又是一个不可计算问题。

因此问题能不能形式化与形式化的问题可不可计算一起，就成为计算机器能力极限的双重限制。

2、计算能力的限度

除了计算机器能力极限的双重限制外，我们还知道机器的任何计算有效性又是建立在逻辑一致性之上的，而哥德尔定理却指出，一致性要求势必会以丧失完备性为代价，从而机器的计算能力注定将是有局限性的。这种局限性首先体现在机器无法处理普遍存在的各种不合逻辑的**悖论**之中。于是，面对充满矛盾的世界，机器就显得苍白无力了。

End 2

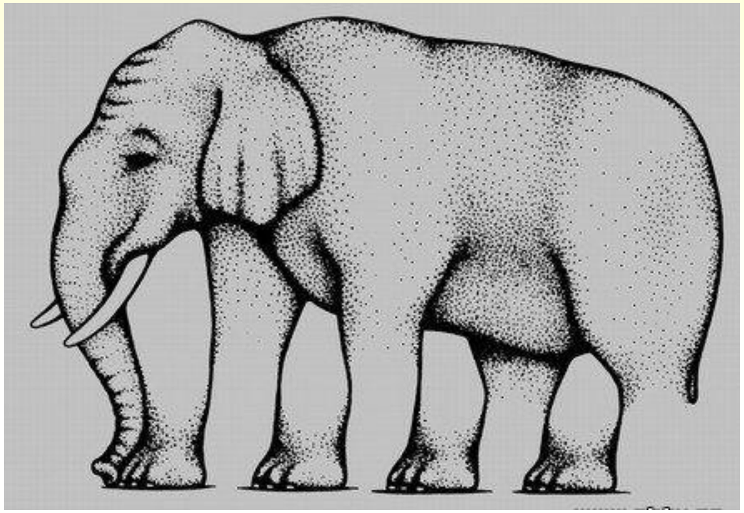
3、悖论是无处不在

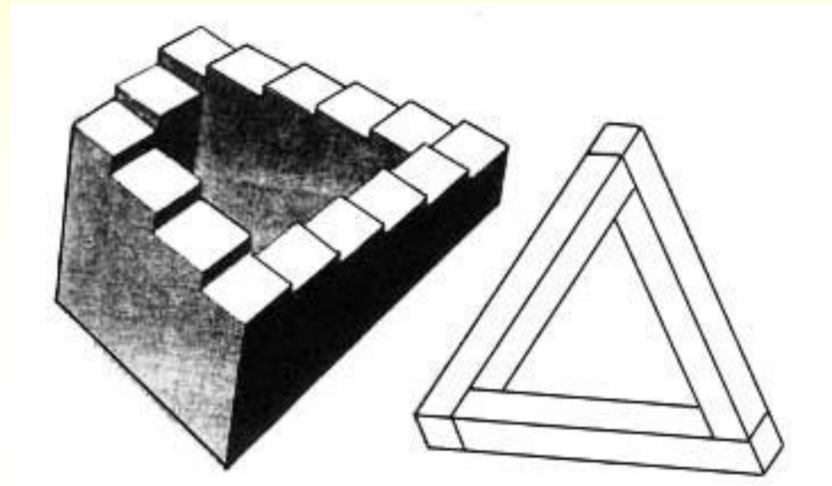
的确，悖论是无处不在的，只要你以逻辑一致性看待问题，那么当问题变得足够复杂或完备时，就难免出现悖论。

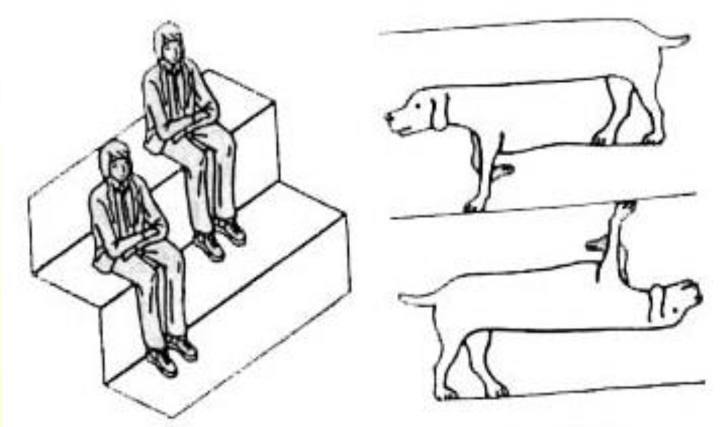
小时候我们听说的那些“说谎者悖论”、“理发师的悖论”、“芝诺龟兔赛跑悖论”等也都是缺乏逻辑一致性的。

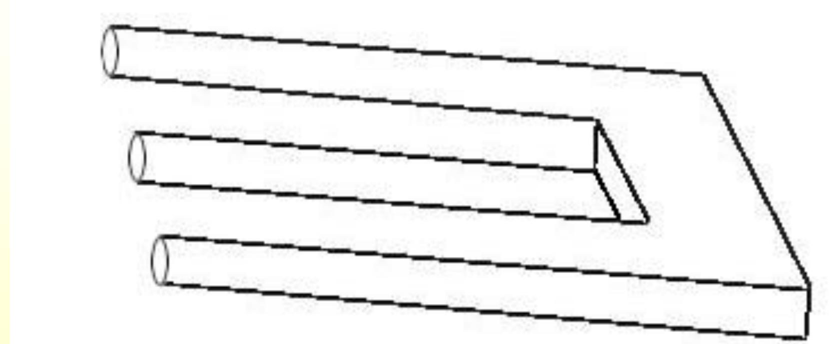
其实即使在严密的数学中，如果过份追求完备性的话，也同样无法避免悖论。比如象定义“所有集合的集合”、“所有不是自己的元素的集合所组成的集合”（罗素悖论）以及“不能够由少于二十二个字而命名的最小的自然数”等都能引起悖论。

3、悖论是无处不在



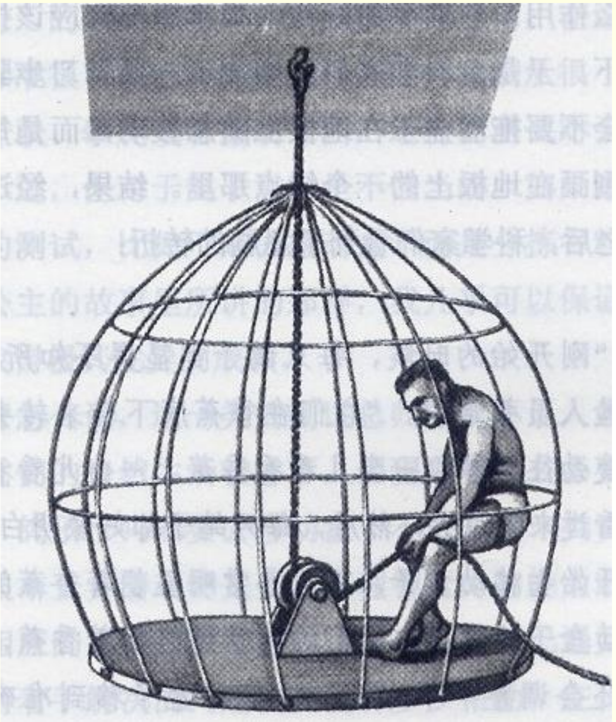






3、悖论是无处不在

通常悖论大多是由自谓性和全称性引起的，或者更严格地说，如果在概念分别的基础上，又涉及了无限全称或自谓自指，那么就往往能够引发悖论。上面“所有集合的集合”是无限全称引起悖论的例子，而罗素悖论（所有不是自己的元素的集合所组成的集合）则既有无限全称，又有自谓自指因素。



自举性悖论示意图

3、悖论是无处不在

就无限全称引发悖论来说，由于众所周知的追求完备数学理论的要求，其根源便在于数学家们提出的实无穷连续统假设，并因此也播下了无限可分性悖论的种子。

芝诺的龟兔赛跑悖论、庄子的“一尺之棰[chuí]，日取其半，万世不竭”悖论以及我国古代惠施十事和论辩二十一事中的大部分悖论等都是建立在时空连续性、无限可分性之上的。而这一切却未必是客观世界的真实图景，因为宇宙在亚原子层次上就具有不可分割的性质。

3、悖论是无处不在

这样一来，实无穷和连续统假设便没有了现实基础，尽管其在完备数学理论体系上是一个十分重要的数学概念。很明显，无穷是我们逻辑思维局限性的一个反映。实际上，按照量子概念，世界是一个统一的、不可分割的整体，不是能够靠逻辑概念分别的方法所能掌握。

3、悖论是无处不在

比起无限全称引发的悖论而言，自谓性引发的悖论更为本质地反映出逻辑思维所固的局限性。

实际上哥德尔定理、图灵停机不可判定的证明，都是通过揭示这种自谓性得到肯定的。

一般而言，当一个逻辑形式系统拥有了自指自谓能力，那么其势必会导致不一致性，这实际上也就是哥德尔定理的精髓所在。

3、悖论是无处不在

最简捷典型的自指性悖论无过于“本句子是假的”这一悖论了。

如果你顽固站在“非此既彼”逻辑思维立场上，那么你永远也不可能推出该命题是真是假。实际上，利用自指能力，我们甚至可以推导出更为荒谬的结果：设我们允许“本句子蕴涵A命题”这种自指命题，如果记这一命题为B，那么B又可写成B→A，于是通过证明，我们总可以证明A命题为真而不管A实际指的是什么陈述，于是这样在这种具有自指能力的逻辑系统中，一切命题均为真，从而必然导致该逻辑系统变得毫无意义（注意，“一切匀为真”与“不一致性”互为可推导）。

3、悖论是无处不在

有时自谓性悖论会采用互指的表现形式，并往往导致一种相互缠结现象。例如象：

下面的句子是假的。

上面的句子是真的。

与“本句子是假的”有异曲同工之妙，你根本就弄不清这对句子的真真假假。

古代有一个称为“鳄鱼难局”的悖论就是一种典型的相互缠结悖论。该悖论说的是一条鳄鱼偷了一个孩子，鳄鱼允许把孩子还给他的父亲，条件是只要该位父亲能够猜对鳄鱼是否将会把孩子归还。现在假设这位父亲猜说鳄鱼不还孩子，那么鳄鱼该怎么办呢？

3、悖论是无处不在

相互缠结式悖论是典型的二难问题，不管你如何用逻辑推导，两种选择总是纠缠在一起而无法分开。

有趣的是，这种貌似荒唐的悖论，却有着坚实的现实基础作后盾呢。比如在生命现象中ＤＮＡ和蛋白质的相互关系问题 、支配微观物理世界中的并协原理、意识现象中的心物互依问题等等都无不体现了这种境况。

3、悖论是无处不在

主观上的悖论效果不但影响着对主观本身的观察，使这种观察结果的可信性陷于悖论的“泥潭”；而且由于对客观的观察也同样有赖于主观经验，因此这种悖论效果同样可以扩散到主观对客观事物的观察把握之中，这就是所谓休谟提出的归纳悖论问题，即由经验而得来的一切结论的基础何在的问题。换句话说，人们理性思维所推崇的归纳法是有效的吗？注意，由于用来论证归纳法有效性的推论本身也是建筑在经验之上的一个归纳推论，因此休谟问题便构成了一个真正的悖论。

3、悖论是无处不在

德国哲学家康德在《纯粹理性批判》中提到两个互相排斥但同样是可论证的命题悖论（二律背反）时指出，当理性思维企图对自在之物有所认识时，就势必要陷入难以自解的矛盾之中。现在我们明白，这是因为对理想化整体理解的追求的代价往往是导致不一致性的根源。

对于足够强大的理论体系，要么追求完备性而容纳矛盾冲突；要么追求一致性而放弃完备性，除此别无选择。科学选择了一致性（逻辑机器也然），于是面对众多悖论现象而一筹莫展；艺术和宗教选择了完备性，因此也就处处表现和超越了矛盾和冲突。