Segunda Presentación de Problemas

Montesinos Correa Jesús Adrián

Sección 2.5, Ejercicio 5 Do Carmo

Demuestre que el área de una región acotada Z de la superficie $z = f(x, y)$ está dada por

$$\int_Q \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\, dxdy$$

Donde Q es la proyección normal de R en el plano XY

Demostración

Sea $X : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to S$, donde $U \subseteq dom(f)$ y $R \subseteq X(U)$ dada por

$$X(x, y) = (x, y, f(x, y))$$

Sabemos que el área está dada por

$$A(R) = \int_Q ||X_x \times X_v||\, dxdy, \quad Q = X^{-1}(R)$$

Tomamos las derivadas

$$X_x = (1, 0, f_x) \quad y \quad X_y = (0, 1, f_y)$$

Haciendo el producto cruz y tomando su magnitud obtenemos

$$\begin{aligned} ||X_x \times X_y|| &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{a}}_x & \hat{\mathbf{a}}_y & \hat{\mathbf{a}}_z \\ 1 & 0 & f_x \\ 0 & 1 & f_y \end{vmatrix} = \left|(-f_x, -f_y, 1)\right| \\ &= \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} \end{aligned}$$

Sustituyendo obtenemos lo pedido