Tercera Exposición

Jesús Montesinos

March 25, 2022

Problema 11, Secc. 2.5 Do Carmo
Sea S una superficie de revolución y C su curva generadora. Sea s la longitud de arco de C, denotemos por $\rho = \rho(s)$ la distancia al eje de rotación del punto de C correspondiente a s, demuestre

1. El **Teorema de Pappus** Demuestre que el área de S es

$$A(S) = 2\pi \int_{s=0}^{l} \rho(s)\ ds$$

   Donde l es la longitud de C

2. Usando el *teorema de Pappus* obtenga el área de un toroide

Solución

De 1. Sean

$$x = f(s), \quad z = g(s), \quad \alpha(s) = (f(s), 0, g(s)),\ s \in I$$

La parametrización de C
Sea

$$X(\theta, s) = (f(s)\cos(\theta), f(s)\operatorname{sen}(\theta), g(s))\ \ s \in I,\ \theta \in (0, 2\pi)$$

La parametrización de S, derivando con respecto a θ y s obtenemos

$$X_\theta = (-f(s)\operatorname{sen}(\theta), f(s)\cos(\theta), 0), \quad X_s = (f_s(s)\cos(\theta), f_s\operatorname{sen}(\theta), g_s(s))$$

Así los coeficientes de la primera forma fundamental son

$$E = f^2(s), \quad F = 0, \quad G = 1$$

Luego

$$\begin{aligned} A(s) &= \int_Q ||X_\theta \times X_s||\ d\theta ds \\ &= \int_Q \sqrt{EG - F^2}\, d\theta ds \\ &= \int_Q \sqrt{f^2(s)}\, d\theta ds \end{aligned}$$

Como $\rho(s) = ||f(s)|| = \sqrt{f^2(s)}$ obtenemos

$$
\begin{aligned}
&= \int\limits_{s=0}^{l} \int\limits_{\theta=0}^{2\pi} \rho(s)\ d\theta\ ds \\
&= 2\pi \int\limits_{s=0}^{l} \rho(s)\ ds
\end{aligned}
$$

Solución

De 2. Considere el círculo de radio r y centro $(a,0)$, así

$$\alpha(u) = (a + r\cos(u), 0, r\text{sen}(u)), \quad 0 < u < 2\pi$$

Obtenemos su derivada con respecto a u y la norma

$$||\alpha'(u)|| = ||(-r\text{sen}(u), 0, r\cos(u))|| = r$$

Integrando obtenemos

$$s(u) = \int_{u=0}^{u} ||\alpha'(u)|| \; du = \int_{u=0}^{u} r \; du = ru \Rightarrow \; u(s) = \frac{s}{r}$$

Reparametrizando $\alpha(u)$ tenemos

$$\alpha(s) = \left(a + r\cos\left(\frac{s}{r}\right), 0, r\text{sen}\left(\frac{s}{r}\right)\right), \quad 0 < s < 2\pi r$$

Así $\rho(s) = a + r\cos\left(\frac{s}{r}\right)$. Por **1**

$$A(s) = 2\pi \int_{s=0}^{2\pi r} \rho(s) \; ds = 2\pi \int_{s=0}^{2\pi r} \left(a + r\cos\left(\frac{s}{r}\right)\right) \; ds = 4\pi r^2 a$$