Extraktion der Hüllkurve eines amplitudenmodulierten Signals mittels Hilbert-Transformation

1. Zeitkontinuierlicher Fall

Ein *amplitudenmoduliertes* Signal mit *Trägerkreisfrequenz* $\omega_0 = 2\pi f_0$ hat die Form

$$s_{\mathrm{AM}}(t) = x(t)\cos(\omega_0 t) = x(t)\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 t}}{2} \quad , \tag{1}$$

wobei $x(t)$ die *Hüllkurve* darstellt und die eigentliche Amplitudeninformation enthält. Das unmodulierte Trägersignal $\cos(\omega_0 t)$ enthält keine Information, weil dessen Verlauf bei vorgegebener Trägerkreisfrequenz und Amplitude eindeutig vorhergesagt werden kann.

Ziel ist es aus dem modulierten Signal $s_{\mathrm{AM}}(t)$ die durch $x(t)$ gegebene Amplituden-information zu extrahieren. Dies kann mit Hilfe der **Hilbert-Transformation**

$$\mathcal{H}\{y\}(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y(\tau)}{t-\tau}\,\mathrm{d}\tau \tag{2}$$

erfolgen. Ein LTI-System[1] mit Eingangssignal $y(t)$ und Ausgangssignal $z(t) = \mathcal{H}\{y\}(t)$ ist ein sogenannter *Hilbert-Transformator* mit dem Frequenzgang

$$H_{\mathcal{H}}(\mathrm{j}\omega) = \frac{\hat{z}(\mathrm{j}\omega)}{\hat{y}(\mathrm{j}\omega)} = -\mathrm{j}\,\mathrm{sign}(\omega) \tag{3}$$

und der Impulsantwort

$$h_{\mathcal{H}}(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H_{\mathcal{H}}(\mathrm{j}\omega)\} = \frac{1}{\pi t} \quad ,$$

wodurch die Hilbert-Transformierte (2) von $y(t)$ auch als Faltung[2]

$$\mathcal{H}\{y\}(t) = (\,y * h_{\mathcal{H}})(t)$$

geschrieben werden kann.

Der ideale Hilbert-Transformator wirkt nach Gleichung (3) als *Allpass*[3] mit konstanter Phasenverschiebung von $\pm\frac{\pi}{2}$, siehe Abbildung 1.

---

[1] LTI … Linear Time-Invariant

[2] $*$ kennzeichnet das *Faltungsprodukt* $(x * y)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$.

[3] $|H_{\mathcal{H}}(\mathrm{j}\omega)| = 1 \;\;,\;\; \forall\omega \neq 0$

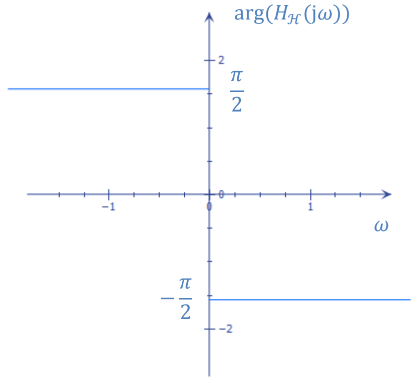

Abbildung 1: Phasenfrequenzgang $\arg(H_{\mathcal{H}}(\mathrm{j}\omega)) = -\frac{\pi}{2}\,\mathrm{sign}(\omega)$ des idealen Hilbert-Transformators.

Abbildung 2 zeigt die Impulsantwort $h_{\mathcal{H}}(t)$ des idealen Hilbert-Transformators. Da die Impulsantwort $h_{\mathcal{H}}(t)$ nicht kausal ist, kann der Hilbert-Transformator nur näherungsweise realisiert werden!

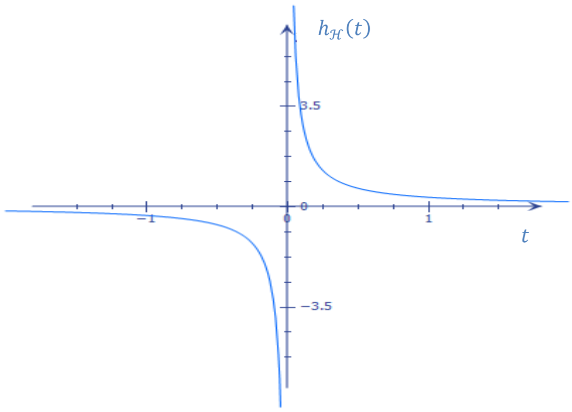

Abbildung 2: Nichtkausale Impulsantwort $h_{\mathcal{H}}(t) = \frac{1}{\pi t}$ des idealen Hilbert-Transformators.

Ein sogenanntes **analytisches Signal** weist Spektralkomponenten nur bei positiven Frequenzen auf. Man gewinnt aus einem allgemeinen reellen Signal $y(t)$ ein zugehöriges analytisches Signal $y^+(t) \in \mathbb{C}$ durch

$$\begin{aligned} y^+(t) = y(t) + \mathrm{j}\,\mathcal{H}\{y\}(t) \quad \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \quad \hat{y}^+(\mathrm{j}\omega) &= \hat{y}(\mathrm{j}\omega) + \mathrm{j}\,\hat{y}(\mathrm{j}\omega)\,\big(-\mathrm{j}\,\mathrm{sign}(\omega)\big) = \\ &= \hat{y}(\mathrm{j}\omega)\,\big(1 + \mathrm{sign}(\omega)\big) = \hat{y}(\mathrm{j}\omega)\,2\varepsilon(\omega) \quad . \end{aligned}$$

Zur Gewinnung des analytischen Signals $y^+(t)$ ist deshalb die in Abbildung 3 dargestellte Verarbeitung des zugehörigen reellen Signals $y(t)$ erforderlich.

Für das reellwertige amplitudenmodulierte Signal (1) folgt mittels Fourier-Transformation der Zusammenhang

$$s_{\mathrm{AM}}(t) = \frac{x(t)}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t} + \frac{x(t)}{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 t} \quad \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \quad \hat{s}_{\mathrm{AM}}(\mathrm{j}\omega) = \frac{1}{2}\,\hat{x}(\mathrm{j}\omega - \mathrm{j}\omega_0) + \frac{1}{2}\,\hat{x}(\mathrm{j}\omega + \mathrm{j}\omega_0) \quad .$$

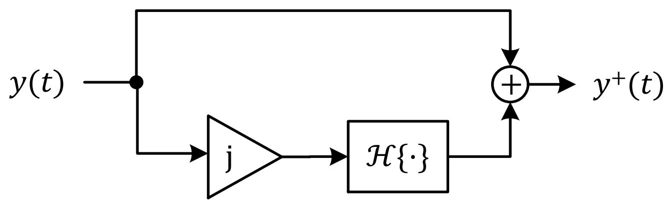

Abbildung 3: Blockdiagramm zur Gewinnung des analytischen Signals $y^+(t)$ aus einem reellen Signal $y(t)$.

Unter der Annahme, dass das Signal $x(t)$ hinreichend schmalbandig ist,[4] folgt damit für das zugehörige analytische Signal

$$s_{\mathrm{AM}}^+(t) = s_{\mathrm{AM}}(t) + \mathrm{j}\,\mathcal{H}\{s_{\mathrm{AM}}\}(t) \quad \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \quad \hat{s}_{\mathrm{AM}}^+(\mathrm{j}\omega) = \hat{x}(\mathrm{j}\omega - \mathrm{j}\omega_0) \quad .$$

Mit[5]

$$\hat{s}_{\mathrm{AM}}^+(\mathrm{j}\omega) = \hat{x}(\mathrm{j}\omega - \mathrm{j}\omega_0) \quad \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \quad x(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t} = x(t)\,[\cos(\omega_0 t) + \mathrm{j}\sin(\omega_0 t)] = s_{\mathrm{AM}}^+(t)$$

erhält man schließlich für das analytische Signal $s_{\mathrm{AM}}^+(t)$ das angestrebte Ergebnis

$$|s_{\mathrm{AM}}^+(t)| = |s_{\mathrm{AM}}(t) + \mathrm{j}\,\mathcal{H}\{s_{\mathrm{AM}}\}(t)| = \sqrt{{s_{\mathrm{AM}}}^2(t) + \left(\mathcal{H}\{s_{\mathrm{AM}}\}(t)\right)^2} = |x(t)| \quad ,$$

nämlich die Hüllkurve von $s_{\mathrm{AM}}(t)$.

Die Hüllkurve eines amplitudenmodulierten Signals kann einerseits gewollt von der zu übertragenden Information stammen, sie kann aber auch die Folge von schwankenden Übertragungseigenschaften sein. Während die zu übertragende Information eher schnelle Änderungen im Rhythmus der Übertragungsrate - z.B. Kilobaud oder Megabaud - bewirkt, werden sich die Übertragungseigenschaften vergleichsweise langsam ändern.

2. Zeitdiskreter Fall

Eine einfache (kausale) zeitdiskrete Realisierung eines Hilbert-Transformators erhält man mittels der *Fenster-Methode* als FIR-Filter[6] der ungeraden Ordnung M durch Abtastung der zeitbegrenzten und zeitverschobenen Impulsantwort $h_{\mathcal{H}}(t)$ des idealen Hilbert-Transformators mit Abtastperiode T_s zu (siehe Abbildung 4)

$$h_{\mathcal{H}}^{\mathrm{real}}[k] = T_s \cdot h_{\mathcal{H}}(t)\Big|_{t=kT_s - \frac{M}{2}T_s} \cdot (\varepsilon[k] - \varepsilon[k-M-1]) \quad . \tag{4}$$

[4] $|\hat{x}(\mathrm{j}\omega + \mathrm{j}\omega_0)| \equiv 0 \quad , \quad \omega \geq 0$

[5] Im Allgemeinen gilt $s_{\mathrm{AM/WM}}^+(t) = x(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi(t)}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}$, wobei $x(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi(t)}$ die **komplexe Hüllkurve** (***Einhüllende***) ist. $x(t)$ beschreibt die Amplitudenmodulation und $\psi(t)$ die Winkelmodulation des Trägers mit Kreisfrequenz ω_0.

[6] FIR … Finite Impulse Response

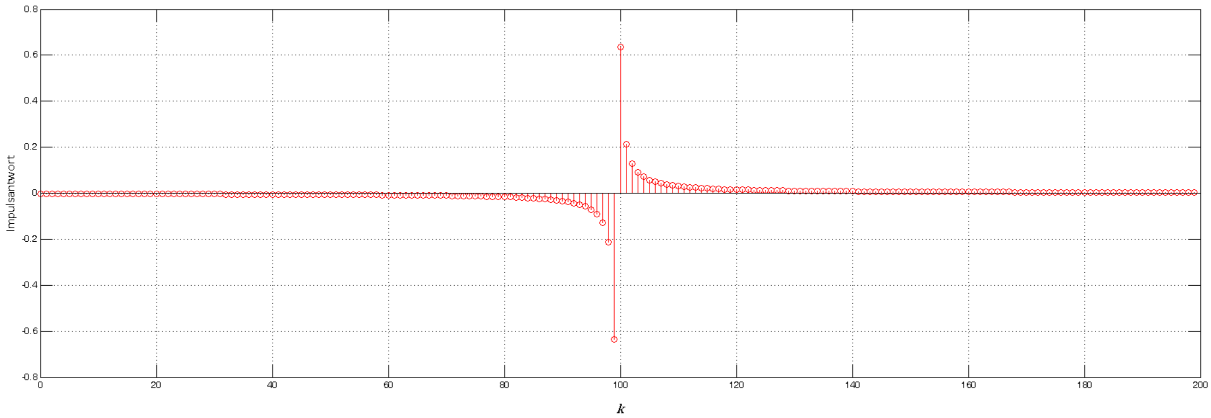

Abbildung 4: Impulsantwort $h_{\mathcal{H}}^{\text{real}}[k]$ einer kausalen zeitdiskreten Realisierung des Hilbert-Transformators als FIR-System mit der Ordnung $M = 199$.

Der Frequenzgang folgt mittels der zeitdiskreten Fourier-Transformation als

$$H_{\mathcal{H}}^{\text{real}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}) = \mathrm{DTFT}\left\{h_{\mathcal{H}}^{\text{real}}[k]\right\} = \sum\nolimits_0^M h_{\mathcal{H}}^{\text{real}}[k]\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\theta} \quad .$$

Durch die zeitliche Verschiebung um $\frac{M}{2}T_{\mathrm{s}}$ in Gleichung (4) weist der Phasenfrequenzgang $\arg\left(H_{\mathcal{H}}^{\text{real}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta})\right)$ einer realen zeitdiskreten Realisierung des Hilbert-Transformators allgemein einen linearen Anteil[7] auf und nicht nur die konstante Phasenverschiebung von $\pm\frac{\pi}{2}$ wie in Abbildung 5 ersichtlich.

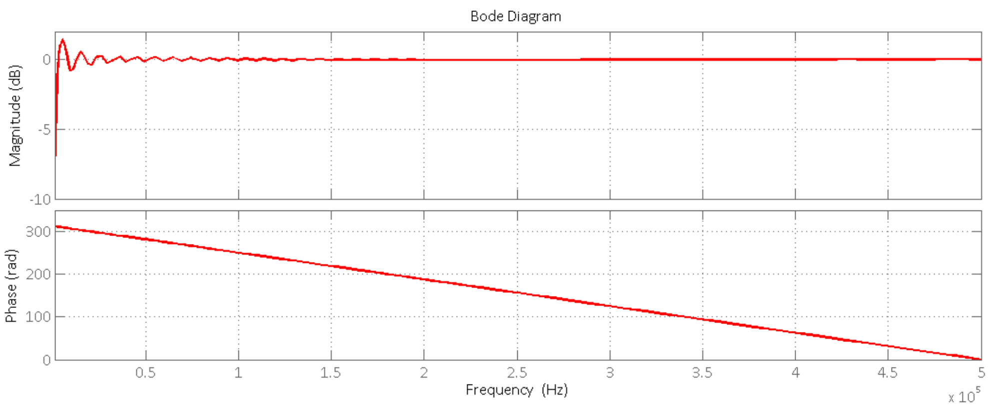

Abbildung 5: Frequenzgang $H_{\mathcal{H}}^{\text{real}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f T_{\mathrm{s}}}\right)$ einer kausalen zeitdiskreten Realisierung des Hilbert-Transformators als FIR-System mit der Ordnung $M = 199$.

[7] $v[k-k_0] \xleftrightarrow{\mathrm{DTFT}} \hat{v}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta k_0} \quad , \quad \theta = \omega T_{\mathrm{s}}$