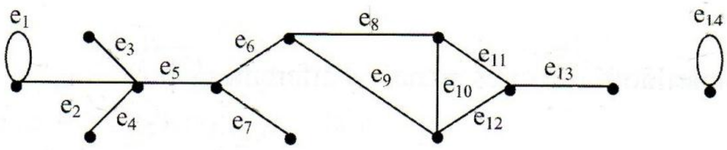
5ª Série de exercícios – Teoria dos Grafos

1) Encontre todas as pontes no grafo a seguir:



2) Seja G um grafo conectado:

a) Se G tem 17 arestas, qual o número máximo possível de vértices em G ?
b) Se G tem 21 vértices, qual o número mínimo possível de arestas em G ?

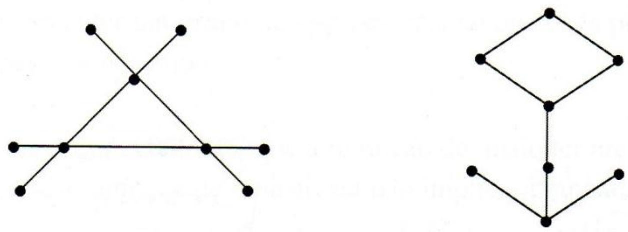
3) Seja G um grafo conectado. O que você pode dizer sobre:

a) Uma aresta de G que aparece em toda árvore geradora ?
b) Uma aresta de G que não aparece em nenhuma árvore geradora ?

4) Prove que qualquer árvore com pelo menos dois vértices é um grafo bipartido.

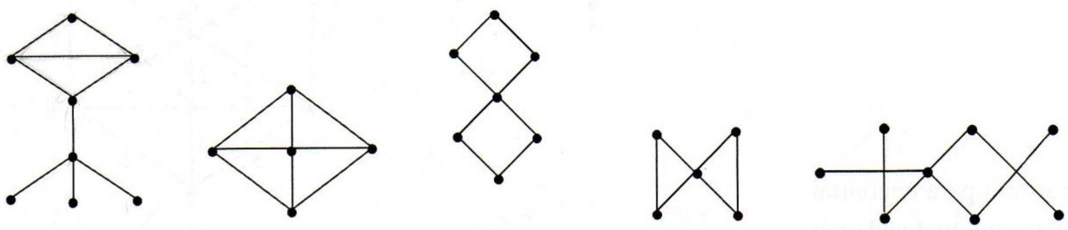
5) Grafos bipartidos completos $K_{1,n}$, conhecidos como grafos estrelas, são árvores. Prove que grafos estrelas são os únicos grafos bipartidos completos que são árvores.

6) Um grafo G é chamado uniciclo se for conectado e contiver precisamente um ciclo. Os grafos (a) e (b) a seguir, são uniciclos. Prove que um grafo conectado G, com n vértices e k arestas, é uniciclo se e somente se n = k.



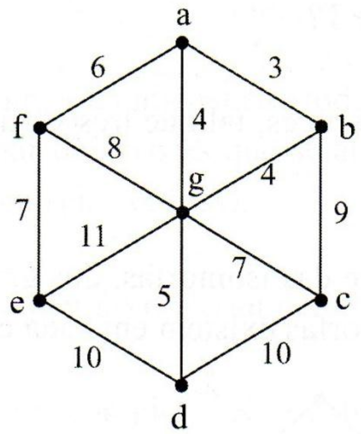
(a) (b)

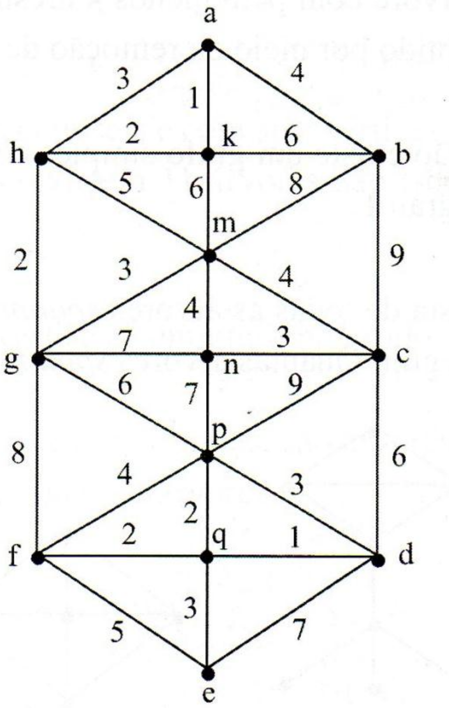
7) Faça uma lista de todas as árvores geradoras, inclusive das isomorfas, dos grafos conexos (a), (b), (c) e (d) a seguir. Quantas árvores geradoras não isomorfas existem em cada caso ?



(a) (b) (c) (d) (e)

Os exercícios 8, 9 e 10 fazem referência aos grafos a seguir.





8) Encontre a árvore geradora minima (MST) para cada um dos grafos conectados ponderados usando os algoritmos de Kruskal e Prim. (A execução do algoritmo deve ser feita passo a passo).

9) Encontre a árvore geradora máxima (MST) para cada um dos grafos conectados ponderados usando os algoritmos de Kruskal e Prim. (A execução do algoritmo deve ser feita passo a passo).

10) A descrição a seguir é a de um terceiro algoritmo para encontrar a árvore geradora mínima de um grafo conectado ponderado G com n vértices: remova uma por uma as arestas de G com os maiores pesos, de maneira que cada remoção não implique um grafo desconectado, até que sobrem apenas n-1 arestas. O subgrafo resultante é uma árvore geradora mínima de G. Faça o *trace* desse algoritmo nos dois grafos apresentados anteriormente.

11) O grau médio dos vértices de uma árvore é 1.96. Quantas arestas e quantos vértices tem a árvore ?

12) Seja G = (V,E) um grafo simples conectado, com n vértices e m arestas. Mostre que se o grau médio dos vértices é maior que 2, então G possui pelo menos 2 ciclos. (Isso implica na prática que, se numa rede social com n integrantes, em média, cada pessoa uma conhece pelo menos outras duas, então há pelo menos 2 círculos de amizade. Ex: *Fulano* conhece *Ciclano* que conhece *Beltrano* ... que conhece *Fulano*)