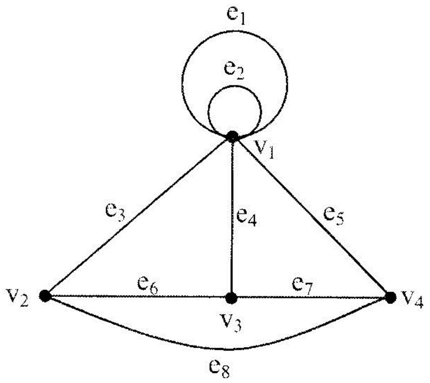
4ª Série de exercícios – Teoria dos Grafos

1) Desenhe cada um dos grafos com as seguintes matrizes de adjacências.

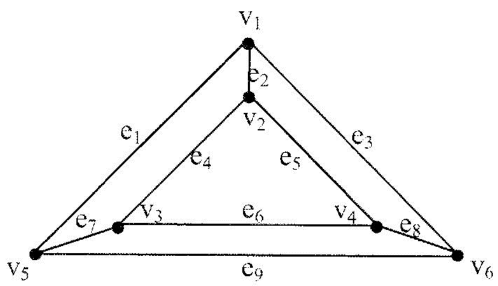
a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

2) Use as potências das matrizes de adjacência para determinar se os grafos cujas matrizes de adjacência mostradas no exercício anterior são conectados ou não.

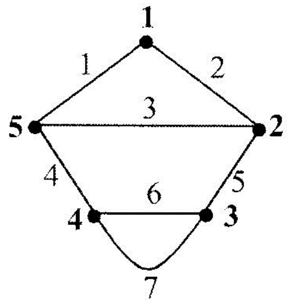
3) Escreva a matriz de adjacência, incidência e Laplaciana para os grafos a seguir



(a)



(b)



(c)

4) Seja G uma grafo simples e A sua matriz de adjacência. Suponha que, por algum motivo, temos acesso apenas a A^2 (mas não diretamente a matriz A). Explique como podemos obter a sequência de graus de G a partir de A^2.

5) Utilize o processo de fusão de vértices para determinar se os grafos do exercício 1, especificados por suas matrizes de adjacência, são conectados ou não. A cada passo do processo, especifique o grafo correspondente e sua matriz de adjacência. (Dica: Implemente o algoritmo e teste com as matrizes).

6) Seja G um grafo sem loops. O que se pode dizer sobre a somas das entradas em:

a) Qualquer linha ou coluna da matriz de adjacência de G ?
b) Qualquer linha da matriz de incidência ?
c) Qualquer coluna da matriz de incidência de G ?

7) Se um grafo G tem vértices de graus 1,2,3,3,4,5, quantas arestas ele tem ? Justifique sua resposta.

8) Se *m* e *n* são dois inteiros positivos, encontre um grafo G com a propriedade que todo vértice tem grau *m* ou *n*.

9) Seja G =(V,E) um grafo bipartido. Mostre que existe uma dada ordenação de vértices para a qual a matriz de adjacência de G tenha a forma:

$$A(G)=\begin{bmatrix} O & C \\ D & O \end{bmatrix}$$

onde O são submatrizes nulas (com todos elementos nulos) e C = D^T (C é a transposta de D).

10) Seja G = (V,E) um grafo bipartido com v vértices. Mostre que G tem no máximo $\frac{v^2}{4}$ arestas.