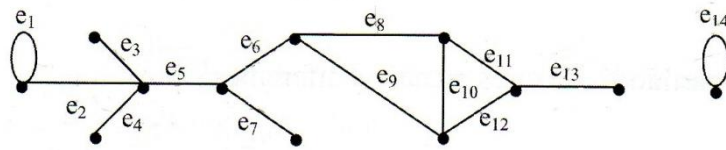


5ª Série de exercícios – Teoria dos Grafos

1) Encontre todas as pontes no grafo a seguir:



2) Seja G um grafo conectado:

- Se G tem 17 arestas, qual o número máximo possível de vértices em G ?
- Se G tem 21 vértices, qual o número mínimo possível de arestas em G ?

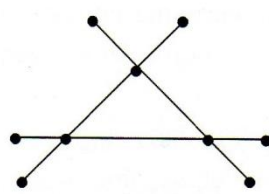
3) Seja G um grafo conectado. O que você pode dizer sobre:

- Uma aresta de G que aparece em toda árvore geradora ?
- Uma aresta de G que não aparece em nenhuma árvore geradora ?

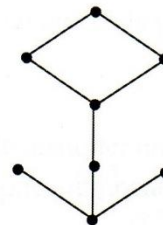
4) Prove que qualquer árvore com pelo menos dois vértices é um grafo bipartido.

5) Grafos bipartidos completos $K_{1,n}$, conhecidos como grafos estrelas, são árvores. Prove que grafos estrelas são os únicos grafos bipartidos completos que são árvores.

6) Um grafo G é chamado uniciclo se for conectado e contiver precisamente um ciclo. Os grafos (a) e (b) a seguir, são uniciclos. Prove que um grafo conectado G , com n vértices e k arestas, é uniciclo se e somente se $n = k$.



(a)

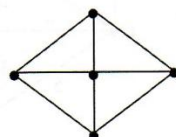


(b)

7) Faça uma lista de todas as árvores geradoras, inclusive das isomorfas, dos grafos conexos (a), (b), (c) e (d) a seguir. Quantas árvores geradoras não isomorfas existem em cada caso ?



(a)



(b)



(c)

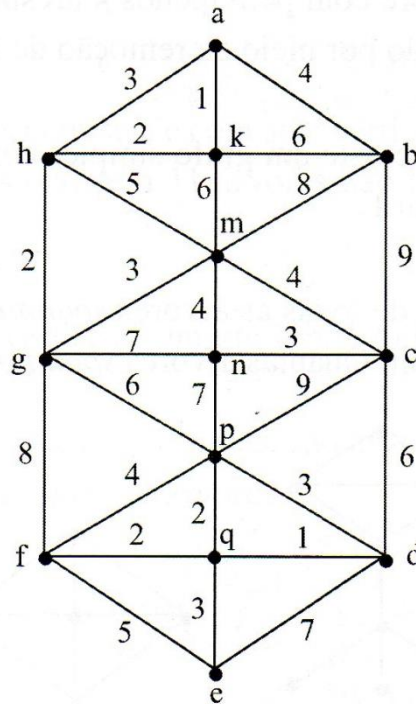
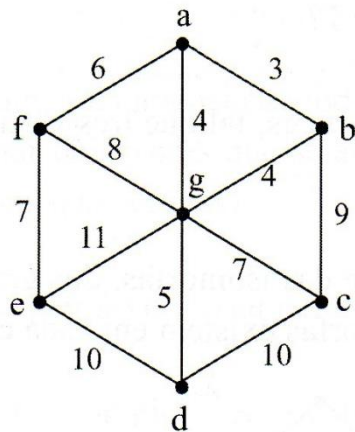


(d)



(e)

Os exercícios 8, 9 e 10 fazem referência aos grafos a seguir.



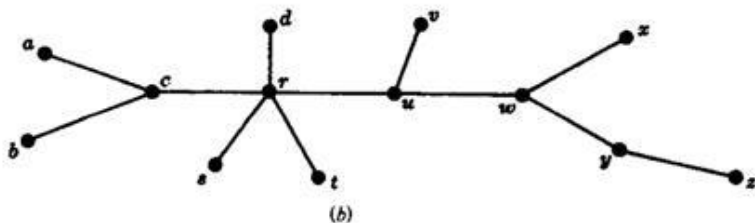
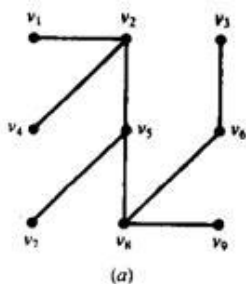
8) Encontre a árvore geradora mínima (MST) para cada um dos grafos conectados ponderados usando os algoritmos de Kruskal e Prim. (A execução do algoritmo deve ser feita passo a passo).

9) Encontre a árvore geradora máxima (MST) para cada um dos grafos conectados ponderados usando os algoritmos de Kruskal e Prim. (A execução do algoritmo deve ser feita passo a passo).

10) Codifique as árvores obtidas nos exercícios anteriores utilizando o código de Prüfer.

11) Suponha que o número de seu RG represente o código de Prüfer de uma árvore. Gere a árvore correspondente (substitua todos os zeros ou X pelo dígito 9). Faça o mesmo para seu CPF.

12) Codifique as seguintes árvores com o código de Prüfer (use a ordem alfabética para rotular)



13) Qual é a árvore cujo código de Prüfer é 123456789 ?

14) A descrição a seguir é a de um terceiro algoritmo para encontrar a árvore geradora mínima de um grafo conectado ponderado G com n vértices: remova uma por uma as arestas de G com os maiores pesos, de maneira que cada remoção não implique um grafo desconectado, até que sobrem apenas $n-1$ arestas. O subgrafo resultante é uma árvore geradora mínima de G . Faça o *trace* desse algoritmo nos dois grafos apresentados anteriormente.

15) O grau médio dos vértices de uma árvore é 1.96. Quantas arestas e quantos vértices tem a árvore ?

16) Seja $G = (V, E)$ um grafo simples conectado, com n vértices e m arestas. Mostre que se o grau médio dos vértices é maior que 2, então G possui pelo menos 2 ciclos. (Isso implica na prática que, se numa rede social com n integrantes, em média, cada pessoa uma conhece pelo menos outras duas, então há pelo menos 2 círculos de amizade. Ex: *Fulano* conhece *Ciclano* que conhece *Beltrano* ... que conhece *Fulano*)