Lista 1 Extra de Exercícios - Geometria Analítica

Nome: ____ Nº ______________

Observações: O objetivo desta lista será auxiliar e direcionar os estudos. Não são exercícios triviais e não creio serem suficientes para sua avaliação. Procure outros exercícios em outras referências. Bom trabalho.

1 - Vários candidatos prestaram um concurso para preenchimento de duas vagas numa empresa. Somente quatro foram classificados, e suas notas foram divulgadas através da tabela:

Candidatos	NOTAS				Média	Classificação
	Português	Matemática	Computação	Legislação		
A	8,0	9,2	8,5	9,3	8,58	1
B	8,1	7,7	8,2	8,2	8,28	2
C	8,9	7,3	7,8	8,6	8,22	3
D	8,0	7,5	7,6	8,1	7,80	4

A empresa convocou os candidatos A e B. Entretanto, o candidato C não aceitou o resultado e procurou o gerente da empresa para se informar como as médias tinham sido calculadas, pois ele observou que não fora a média aritmética (neste caso sua média seria ________). A resposta do gerente fora que o critério seria a média ponderada. Baseado nesta informação o candidato C requereu à Justiça a anulação do concurso. Qual o veredicto do juiz designado para o caso e por que?

RESPOSTA: Sejam x, y, z, w os pesos aplicados em cada prova. Então podemos obter o seguinte sistema linear

$$\begin{cases} \dfrac{8,0x + 9,2y + 8,5z + 9,3w}{x + y + z + w} & = & 8,58 \\ \dfrac{8,1x + 7,7y + 8,2z + 8,2w}{x + y + z + w} & = & 8,28 \\ \dfrac{8,9x + 7,3y + 7,8z + 8,6w}{x + y + z + w} & = & 8,22 \\ \dfrac{8,0x + 7,5y + 7,6z + 8,1w}{x + y + z + w} & = & 7,80 \end{cases}$$

que após alguns cálculos podemos obter o seguinte sistema linear homogêneo

$$\begin{cases} -0,58x + 0,62y - 0,08z + 0,72w = 0 \\ -0,18x - 0,58y - 0,08z + 0,38w = 0 \\ 0,68x - 0,92y - 0,42z + 0,38w = 0 \\ 0,2x - 0,3y - 0,2z + 0,3w = 0 \end{cases}$$

A única solução obtida é a trivial, portanto não houve a aplicação da média ponderada

2 - Determine se o sistema abaixo tem ou não solução e se a solução é única (justifique sua resposta). Caso tenha solução(ões) encontre-a(s).

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 11 \\ 4x - 3y + 2z = 0 \\ x + y + z = 6 \\ 3x + y + z = 4 \end{cases}$$

RESPOSTA: $\{(-1, 2, 5)\}$

3 - Considere o sistema de equações lineares $(A - \alpha I)X = \mathrm{O}$, sendo que αI é a matriz identidade multiplicada por uma constante α, e matriz A é dada por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) Para qualquer valor de α o sistema sempre tem solução? Justifique sua resposta.

RESPOSTA: Sim, por que o sistema linear $(A - \alpha I)X = \mathrm{O}$, é .....

(b) Determine valores para α tais que o sistema tenha:

(i) Solução única.

(ii) Infinitas soluções.

RESPOSTA: Para que o sistema não tenha solução única, a trivial (por que?) o $\det(A - \alpha I) = 0$. Calculando o determinante chega-se a $\alpha = 0, 1, 2$. Quaisquer valores diferentes destes o det $\neq 0$ e a solução será única igual a....

Neste último caso, escolha um dos valores de α encontrado e determine duas soluções distintas não-triviais.

RESPOSTA: escolhendo por exemplo $\alpha = 1$ obtemos a solução $\{(\beta, 0, 0), \beta \in \mathbb{R}\}$

4 - Ache os valores de a tais que o sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & + & 2a\,z & = & 2a+2 \\ x & + & y & + & a\,z & = & a+2 \\ -x & - & 2y & + & (a^2-2a-1)z & = & -a-1 \end{array} \right.$$

(a) possua solução única.

(b) não possua solução.

(c) possua infinitas soluções.

RESPOSTA: Para que o sistema tenha solução única, após aplicarmos eliminação de Gauss, chegamos ao sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & + & a\,z & = & 2a+2 \\ & - & y & & & = & -a \\ & & & & (a^2-2a-1)z & = & -a-1 \end{array} \right.$$

Basta analisar a última linha e decidir pela resposta.

5 - Decida se as seguintes afirmativas são verdadeiras ou falsas, justificando suas respostas.

(a) Se A e B são matrizes de mesmo tamanho tais que os sistemas $AX = 0$ e $BX = 0$ têm as mesmas soluções então $A = B$.

(b) Se uma matriz quadrada A é tal que $A = A^3$ então $\det(A) = \pm 1$.

(c) Um sistema linear com três equações e quatro incógnitas tem sempre infinitas soluções.

6 - Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & (\lambda+1) \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

(a) Encontre o valor do escalar λ para o qual a matriz A é não invertível (=singular).

RESPOSTA: Lembrando que A é invertível se, e somente se, $\det(A) \neq 0$, obtemos $\lambda = -1$

(b) Substitua $\lambda = 0$ e calcule a inversa, se existir, da matriz A.

RESPOSTA: $\det(A) = -1$ portanto existe a inversa dada por

$$\begin{bmatrix} -11 & -2 & 6 \\ -2 & 0 & 1 \\ 6 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

7 - Considere o sistema linear

$$\begin{cases} x - 3y + 2z &= 4 \\ 4x - 5y + 3z &= b \\ 6x + ay + 2z &= 10 \\ 4x + 2y - 2z &= 2 \end{cases}$$

(a) Encontre valores de a e b para os quais o sistema abaixo tenha **infinitas** soluções.

RESPOSTA: Aplicando eliminação de Gauss obtemos o sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 4 \\ 0 & 7 & -5 & b-16 \\ 0 & 0 & 20+5a & 190-ab+16a-18b \\ 0 & 0 & 0 & 18-2b \end{bmatrix}$$

Analisando a matriz acima chegamos aos valores $b = 9, a = -4$

(b) Substitua os valores de a e b encontrados e determine o conjunto solução.

RESPOSTA: $\{(\frac{6}{5} + \frac{1}{5}\alpha, \alpha, \frac{7}{5} + \frac{7}{5}\alpha), \alpha \in \mathbb{R}\}$

8 - Encontre a(s) solução(ões) do sistema $AX = 2X$ sendo que

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 6 & 3 \end{bmatrix}.$$

RESPOSTA: $\{(\alpha, 0, \alpha), \alpha \in \mathbb{R}\}$

9 - Sejam A e B matrizes tais que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B^{-1} = \begin{bmatrix} 20 & 10 & 0 \\ 40 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 30 \end{bmatrix}$$

(a) Mostre que a matriz A é invertível e calcule sua inversa.

RESPOSTA:

$$\begin{bmatrix} -1/2 & 1 & -1/2 \\ 1/2 & -1 & 3/2 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

(b) Calcule a inversa da matriz AB.

RESPOSTA:

$$(AB) = B^{-1}A^{-1} = \begin{bmatrix} -5 & 10 & 5 \\ -15 & 30 & -5 \\ 0 & 30 & -60 \end{bmatrix}$$

10 - Encontre uma matrix X tal que $XA - B = \overline{O}$ sendo que

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

RESPOSTA: Observe que A é invertível. Portanto $XA - B = \overline{O} \Rightarrow XA = B$

$$\Rightarrow XAA^{-1} = BA^{-1} \Rightarrow X = BA^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & 13 & 4 \\ -2 & 6 & 0 \\ -5 & 11 & -2 \end{bmatrix}$$

11 - Se D é a matriz abaixo, para quais valores de β a matriz escalonada reduzida da matriz D é a matriz identidade?

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 12 & \beta & -11 & 21 \\ 3 & 0 & -1 & 5 \\ 4 & 0 & 1 & \beta \end{bmatrix}$$

RESPOSTA: Este é um exercício interessante que melhor do que ser dada a resposta numérica, é pensar o que acontece com uma matriz quando a escalonada reduzida não é a identidade! Neste caso qual seria o valor do determinante? Se $\beta = 0$ é possível escaloná-la à forma reduzida?

12 - Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

(a) Calcule $\det A$. **RESPOSTA:** 4

(b) Calcule $\det\left(2A^5(A^t)^{-1}\right)$. **RESPOSTA:** $2^4 4^4$

13 - Verifique se cada uma das proposições seguintes é falsa ou verdadeira, justificando sua resposta.

(a) Seja A uma matriz quadrada $n \times n$. Se n é par e $A^t = -A$, então $\det A = 0$.

(b) Se A é uma matriz quadrada singular, então existe uma matriz $B \neq 0$ tal que $AB = 0$.