Projeto e Análise de Algoritmos

Prof. Dr. Ednaldo B. Pizzolato

www.dc.ufscar.br/~ednaldo

ednaldo@dc.ufscar.br

Relações de Recorrência

- Sequências e relações de recorrência
  - Uma sequência numérica é uma lista ordenada de números.
  - Exemplos: 2, 4, 6, 8, 10, 12, ...
  - 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, ...

  Normalmente é representada por uma letra com um subíndice (n ou i) escrita entre chaves: $\{x_n\}$.

  Alternativamente, pode ser representada por x(n)

Relações de Recorrência

- Existem 2 formas principais de se definir uma sequência:
  - Uma fórmula explícita indicando sua fórmula genérica como, por exemplo: $x(n) = 2.n$ para $n \geq 0$
  - Uma equação relacionando o termo genérico com outro(s) termo(s) da sequência, combinando com um ou mais valores específicos para o primeiro termo:
    - $x(n) = x(n-1) + n$ para $n > 0$
    - $x(0) = 0$

Relações de Recorrência

- A equação $x(n) = x(n-1) + n$ é chamada de equação de recorrência enquanto que a equação $x(0) = 0$ é chamada de condição inicial.
- Claro que uma condição inicial pode ser para um valor diferente de 0 (por exemplo, 1) ou podem existir mais de uma (como, por exemplo, na sequência dos números de Fibonacci.

Relações de Recorrência

- Solucionar uma dada recorrência levando-se em consideração a condição inicial significa encontrar uma fórmula explícita que contemple tanto a equação de recorrência como a condição inicial ou provar que tal sequência não existe.

$$x(n) = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \text{p/ n} \geq 0$$

MÉTODOS PARA RESOLVER RELAÇÕES DE RECORRÊNCIA

Métodos

- Substituições para frente
- Substituições para tras

- Não existe um método universal que possibilitará a resolução de toda relação de recorrência.

Métodos

- Forward substitution
  - Começando com o termo inicial (ou termos) da sequência dado pela condição inicial (ou condições), pode-se usar a equação para gerar os primeiros termos da solução, na esperança de se ver um padrão em uma fórmula. Se tal fórmula for encontrada, então sua validade deve ser verificada através de substituição na equação de recorrência e condição inicial ou provada por <u>indução matemática</u>.

Métodos

- Por exemplo: $x(n) = 2(n-1) + 1$ para $n > 1$

  $x(1) = 1$

Aplicando o método: $x(1) = 1$

$x(2) = 2(1) + 1 = 3$

$x(3) = 3(2) + 1 = 7$

$x(4) = 4(3) + 1 = 13$

Métodos

- Não é difícil verificar que, para o exemplo apresentado, $x(n) = 2^n - 1$ para $n = 1, 2, 3$ e 4.

- Basta, após constatado o fato, verificar se vale para todos os valores positivos de n.

Métodos

- Backward substitution
  - Este método funciona exatamente como o nome sugere: tenta-se representar x(n-1) como uma função de x(n-2) e substitui-se o resultado na equação original para se obter x(n) como uma função de x(n-3). Em muitos casos, com este procedimento é possível detectar um padrão e pode-se representar x(n) como uma função de x(n-i) para valores arbitrários de i.

Métodos

- $x(n) = x(n-1) + n$

  substituindo n por n-1 tem-se:

  $x(n-1) = x(n-2) + n - 1$

  com isso, pode-se substituir x(n-1) na equação inicial:

  $x(n) = x(n-2) + n - 1 + n = x(n-2) + (n-1) + n$

Métodos

- Agora, substituindo x por n-2 na equação inicial tem-se: $x(n-2) = x(n-3) + n - 2$
- Retornando à equação original…

$$\begin{aligned} x(n) &= [x(n-3) + n - 2] + (n-1) + n \\ &= x(n-3) + (n-2) + (n-1) + n \end{aligned}$$

Comparando-se as fórmulas, aparentemente o padrão é o seguinte:

$$x(n) = x(n-i) + (n-i+1) + (n-i+2) + \ldots + n$$

Métodos

- Portanto:

$$
\begin{aligned}
x(n) &= x(0) + 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n \\
&= 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n \\
&= n(n+1)/2.
\end{aligned}
$$

RECORRÊNCIAS LINERARES DE SEGUNDA ORDEM COM COEFICIENTES CONSTANTES

Definição

- Uma importante classe de recorrência é a do tipo:

$$ax(n) + bx(n-1) + cx(n-2) = f(n)$$

onde a, b e c são números reais sendo a ≠ 0. São chamadas de recorrências lineares de segunda ordem com coeficientes constantes. Se f(n) = 0, então a recorrência é classificada como homogênea; senão será heterogênea.

Definição

- Exceto pela situação em que b = c = 0, a recorrência ax(n) + bx(n-1) + cx(n-2) = 0 tem infinitas soluções. As raízes da equação quadrática a seguir podem fornecer pistas de como obter a solução:
  - $ar^2 + br + c = 0$

onde a, b e c são os coeficientes da recorrência.

Teorema 1

- Seja r_1 e r_2 2 raízes da equação quadrática (também chamada de equação característica).
  - Se r_1 e r_2 são reais e distintas, a solução geral da recorrência é obtida pela fórmula:

$$x(n) = \alpha r_1^n + \beta r_2^n$$

com α e β duas constantes reais arbitrárias.

Teorema 1

- Seja r_1 e r_2 2 raízes da equação quadrática (também chamada de equação característica).
  - Se r_1 e r_2 são reais e iguais, a solução geral da recorrência é obtida pela fórmula:

$$x(n) = \alpha r^n + \beta n r^n$$

com α e β duas constantes reais arbitrárias e r substitui as duas raízes.

Teorema 1

- Seja r_1 e r_2 2 raízes da equação quadrática (também chamada de equação característica).
  - Se $r_{1,2} = u + iv$ são complexos e distintos, a solução geral da recorrência é obtida pela fórmula:

$$x(n) = \gamma^n[\alpha.\cos(n\theta) + \beta.sen(n\theta)]$$

com α e β duas constantes reais arbitrárias,

θ = arctan v/u e

$\gamma = \sqrt{u^2 + v^2}$.

Teorema 2

- A solução geral da recorrência não homogênea é obtida através da soma com a correspondente recorrência homogênea.

Tipos comuns de recorrência em análise de algoritmos

Decrementar e conquistar

- Decrementar por 1 resolve um problema explorando a relação entre uma instancia de tamanho n e uma menor de tamanho n-1. Exemplos são as avaliações recursivas de n! e do insertion sort.
  - $T(n) = T(n-1) + f(n)$

  onde f(n) é responsável por medir o tempo necessário para fazer a redução.

Decrementar e conquistar

- $$\begin{aligned} T(n) &= T(n-1) + f(n) \\ &= T(n-2) + f(n-1) + f(n) \\ &= T(n-3) + f(n-2) + f(n-1) + f(n) \\ &\ldots \\ &= T(0) + \sum_{j=1}^{n} f(j) \end{aligned}$$

a soma em questão pode ser computada de forma exata ou aproximada e produzir n, log n, n^k...

Decrementar e conquistar

- Decremento por um fator constante consiste em resolver um problema através da redução de sua instancia de tamanho n em instâncias menores de tamanho n/b (b=2 para a maioria dos casos), resolvendo os problemas pequenos e, depois, recursivamente, se necessário, estendendo a solução para a instancia desejada. A equação de recorrência típica para estes casos é: $T(n) = T(n/b) + f(n)$ (com $b > 1$).

Dividir e conquistar

- Tal estratégia resolve problemas através da divisão de sua instância em várias menores, resolvendo-as e, se necessário, combinando as soluções obtidas para estender a solução à data instancia do problema. Assumindo que todas as instâncias menores têm tamanho n/b com a delas sendo resolvidas, tem-se:

$$T(n) = aT(n/b) + f(n)$$

THE END