089109 - Cálculo 1 - Turma C

Segunda lista de exercícios

Prof. Marcelo José Dias Nascimento 18 de março de 2010

---

1. Demonstre, utilizando a **definição de limite**, que:

   (a) $\lim_{x \to 4} x^2 = 16.$

   (b) $\lim_{x \to -1} (11x + 5) = -6.$

   (c) $\lim_{x \to \sqrt{2}} 8\sqrt{3} = 8\sqrt{3}.$

   (d) $\lim_{x \to 10} \dfrac{x^2 - 100}{x - 10} = 20.$

2. Calcule, caso exista, cada um dos limites abaixo. Se não existir, justifique.

   (a) $\lim_{x \to 1} x + 2.$

   (b) $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2 + x}{x + 3}.$

   (c) $\lim_{x \to 0} \dfrac{x^2 + x}{x}.$

   (d) $\lim_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}.$

   (e) $\lim_{x \to -1} -x^2 - 2x + 3.$

   (f) $\lim_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{x - 3}.$

   (g) $\lim_{x \to 0} \dfrac{x^2 + 3x - 1}{x^2 + 2}.$

   (h) $\lim_{h \to 0} \dfrac{(x + h)^3 - x^3}{h}.$

   (i) $\lim_{x \to 1^+} \dfrac{|x - 1|}{x - 1}.$

   (j) $\lim_{x \to 1^-} \dfrac{|x - 1|}{x - 1}.$

   (k) $\lim_{x \to 1} \dfrac{|x - 1|}{x - 1}.$

   (l) $\lim_{x \to 1^+} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ onde $f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{se } x \geq 1 \\ 2x, & \text{se } x < 1 \end{cases}.$

   (m) $\lim_{x \to 0} \sqrt{x}.$

   (n) $\lim_{x \to 2^-} \dfrac{g(x) - g(2)}{x - 2}$ onde $g(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 2 \\ \dfrac{x^2}{2}, & \text{se } x < 2 \end{cases}.$

   (o) $\lim_{x \to 2^+} \dfrac{g(x) - g(2)}{x - 2}$ onde $g(x)$ é a função do item (n).

   (p) $\lim_{x \to 2} \dfrac{g(x) - g(2)}{x - 2}$ onde $g(x)$ é a função do item (n).

3. Mostre, usando a definição de limite, que $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} |f(x)| = 0$.

4. Demonstre o Teorema da Comparação dado em sala de aula: *Sejam f e g funções tais que $f(x) \leqslant g(x)$ para $0 < |x - x_0| < r$, para algum $r > 0$. Se $\lim_{x\to x_0} f(x)$ e $\lim_{x\to x_0} g(x)$ existem, então $\lim_{x\to x_0} f(x) \leqslant \lim_{x\to x_0} g(x)$.*

5. Demonstre o Corolário do Teorema do Confronto dado em sala de aula: *Suponha que $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ e que existam $M > 0$ e $r > 0$ satisfazendo $|g(x)| \leqslant M$ para $0 < |x - x_0| < r$. Então $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = 0$.* [Sugestão: Use o Teorema do Confronto e o Exercício 3.]

6. Demonstre o Teorema da Conservação do sinal dado em sala de aula. *Suponha que $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$. Se $L > 0$, então existe $r > 0$ tal que $0 < |x - x_0| < r, x \in D_f \Rightarrow f(x) > 0$. Analogamente, se $L < 0$, então existe $r > 0$ tal que $0 < |x - x_0| < r, x \in D_f \Rightarrow f(x) < 0$.* [Sugestão: Use a definição de limite com $\epsilon = L/2$ no caso em que $L > 0$ e $\epsilon = -L/2$ no caso em que $L < 0$.]

7. Considere $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^3 + 6x^2}}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ 6, & \text{se } x = 0. \end{cases}$

   (a) Calcule $\lim_{x\to 0} f(x)$.

   (b) Verifique se $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$.

8. Verifique se as afirmações abaixo são verdadeiras, justificando as respostas, isto é, exibindo uma prova nos casos verdadeiros e dando um contraexemplo nos casos falsos. (Atenção: você pode assumir verdadeiras as propriedades de limites vistas em sala de aula.)

   (a) Se existem os limites $\lim_{x\to x_0} f(x)$ e $\lim_{x\to x_0} (f(x) + g(x))$, então existe $\lim_{x\to x_0} g(x)$.

   (b) Pode existir $\lim_{x\to x_0} (f(x) + g(x))$ sem que exista $\lim_{x\to x_0} f(x)$ ou $\lim_{x\to x_0} g(x)$.

   (c) Se existe $\lim_{x\to x_0} f(x)$ e não existe $\lim_{x\to x_0} g(x)$, então não existe $\lim_{x\to x_0} (f(x) + g(x))$.

   (d) Se existem $\lim_{x\to x_0} f(x)$ e $\lim_{x\to x_0} g(x)$, então existe $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

   (e) Se existe $\lim_{x\to x_0} f(x)$ e não existe $\lim_{x\to x_0} g(x)$, então não existe $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x)$.

   (f) Se existem $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ e $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$, então $\lim_{x\to x_0} f(x)$ existe.

9. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $-x^2 + 3x \leqslant f(x) < \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$, para todo $x \neq 1$. Calcule $\lim_{x\to 1} f(x)$ e justifique.

10. Suponha que $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é tal que $|g(x)| \leqslant x^4$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Calcule $\lim_{x\to 0} \dfrac{g(x)}{x}$.

11. Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que $[g(x)]^2 + [f(x)]^2 = 2$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Calcule e justifique

    (a) $\lim_{x\to 0} x^5 g(x)$.

    (b) $\lim_{x\to 3} f(x)\sqrt{x^3 - 27}$.

    (Sugestão: Use o Corolário do Teorema do Confronto.)