089109 - Cálculo 1 - J

Sexta lista de exercícios

Prof. Marcelo José Dias Nascimento 2 de maio de 2011

---

1. Em cada item abaixo, calcule a derivada da função dada.

(a) $f(x) = \dfrac{3}{x^9}$ (b) $f(x) = \sqrt[7]{x^3}$

(c) $f(x) = x^{-4}$ (d) $f(x) = \sqrt[8]{x}$

(e) $f(x) = (1+\sqrt{x})^2$ (f) $f(x) = \operatorname{arcsen}\left(\dfrac{3x+1}{x}\right)$

(g) $f(x) = \arccos\left(\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$ (h) $f(x) = \sqrt{1+\sqrt{1+x}}$

(i) $f(x) = \ln(x+\cos(x))$ (j) $f(x) = \mathrm{e}^{2x}\ln\left(x\,\operatorname{sen}(x) + \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x^5+1}\right)$

(k) $f(x) = \mathrm{e}^{x^3} - \ln(x^2+1)$ (l) $f(x) = 11^x$

(m) $f(x) = \pi^x$ (n) $f(x) = \log_7 x$

(o) $f(x) = \log_\pi x$ (p) $f(x) = \sqrt{x+2} + \dfrac{6}{x^3+2x}$

(q) $f(x) = \dfrac{\cos x + \operatorname{sen} x}{x^2+1}$ (r) $f(x) = \dfrac{x^4+2x}{x\operatorname{sen} x}$

(s) $f(x) = \dfrac{x^3 + \operatorname{sen} x}{x^3 - \cos x}$ (t) $f(x) = 5\operatorname{cossec} x + \operatorname{cotg} x + x^5\operatorname{tg} x$

(u) $f(x) = \log_3(x) + 5x^2\ln x$ (v) $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^5+2x}$

(w) $f(x) = \dfrac{x+4}{x\ln x}$ (x) $f(x) = x^3\cos x(3+\ln x + \operatorname{sen} x)$

(y) $f(x) = (\sqrt[3]{x}+\sqrt{x})\mathrm{e}^x\operatorname{cotg} x$

2. Calcule a derivada de:

(a) $f(x) = \sqrt[4]{\dfrac{x-2}{x+2}}$ (b) $y = \cos(\operatorname{sen} x)$

(c) $y = \mathrm{e}^{\operatorname{tg}^2 x}$ (d) $y = \ln(\operatorname{cossec} x + \operatorname{cotg} x)$

(e) $f(x) = \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen}^4 x}$ (f) $f(t) = \dfrac{t\mathrm{e}^{2\operatorname{sen} t}}{\ln(3t+1)}$

(g) $g(x) = \mathrm{e}^{x^3}\ln(3+\sqrt{x})$ (h) $y = \sqrt{x^4 + \mathrm{e}^{\sqrt{x}}}$

(i) $g(x) = (3+\operatorname{tg} x)^x$ (j) $y = (1+x^2)^{\mathrm{e}^{-x}}$

(k) $y = (2+\sec x)^{\cos 3x}$ (l) $y = \operatorname{tg} 5x$

(m) $y = \sec 2x$ (n) $y = \mathrm{e}^{\operatorname{tg} x^2}$

(o) $y = \mathrm{e}^{-7x}\sec x^2$ (p) $y = \ln(\sec 3x + \operatorname{tg} 3x)$

3. Determine a reta que é tangente ao gráfico de $f(x) = x^4$ e paralela à reta $y = 4x+3$.

4. Seja r a reta tangente ao gráfico de $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ no ponto de abscissa p. Verifique que r intercepta o eixo Ox no ponto de abscissa $\dfrac{3p}{2}$.

5. Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que $g(-1) = 3$ e $g'(-1) = 5$. Calcule $f'(0)$, sendo f dada por

$$f(x) = \mathrm{e}^x g(4x-1).$$

6. Seja g uma função derivável. Verifique que

(a) $[\tan g(x)]' = \sec^2 g(x) \cdot g'(x)$

(b) $[\sec g(x)]' = \sec g(x)\ \mathrm{tg}\, g(x) \cdot g'(x)$

(c) $[\ \mathrm{cotg}\, g(x)]' = -\ \mathrm{cossec}^{\,2} g(x) \cdot g'(x)$

(d) $[\ \mathrm{cossec}\, g(x)]' = -\ \mathrm{cossec}\, g(x)\ \mathrm{cotg}\, g(x) \cdot g'(x)$

7. Encontre, em cada um dos ítens abaixo, $\dfrac{dy}{dx}$, onde $y = y(x)$ é dada implicitamente pelas equações abaixo:

(a) $\cos^2(x+y) = \dfrac{1}{4}$

(b) $y^3 = \dfrac{x-y}{x+y}$

(c) $(y^2-9)^4 = (4x^2+3x-1)^2$

(d) $x^3 + x^2y - 2xy^2 + y^3 - 1 = 0$

(e) $\mathrm{sen}\,(xy) + y - x^2 = 0$

(f) $xy + 16 = 0$

(g) $x \arctan(x) + y^2 = 4$

(h) $\sqrt{2x+y} + \sqrt{x+2y} = 6$

8. Nos correspondentes itens do exercício acima, encontre o valor de $\dfrac{dy}{dx}(x_0)$, onde:

(a) $x_0 = 0$ e $0 \leqslant y \leqslant \pi$

(b) $x_0 = 0$ e $y \neq 0$

(c) $x_0 = -1$ e $y \geqslant 0$

(d) $x_0 = 1$ e $y \neq 0$

(e) $x_0 = 0$

(f) $x_0 = -2$

(g) $x = 0$ e $y \geqslant 0$

(h) $x = 0$

(i) $x = 0$ e $y \leqslant 0$.

9. Considere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x < 1 \\ x^2, & \text{se } 1 \leqslant x \leqslant 9 \\ 27\sqrt{x}, & \text{se } x > 9. \end{cases}$.

(a) Determine os pontos $x \in \mathbb{R}$ onde f é diferenciável.

(b) Onde existe f^{-1}, isto é, a função inversa de f ?

(c) Determine os pontos onde f^{-1} é diferenciável e calcule $(f^{-1})'$ nesses pontos.

10. (a) Para que valores de M a reta $y = Mx$ é tangente ao círculo $y^2 + x^2 - 4x + 3 = 0$?

(b) Encontre as equações das retas tangentes à elipse $4x^2 + 9y^2 = 40$ cujos coeficientes angulares valem $-\dfrac{2}{9}$.

11. Considere a função $f(x) = \begin{cases} x^2\ \mathrm{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right), & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}$. Encontre $f'(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Verifique se f'' é contínua em $\mathbb{R}$.

12. Em quais pontos da curva $y = \mathrm{sen}\, x + \cos x$, $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, a reta tangente é horizontal?

13. Seja $f(x) = x + \mathrm{e}^x$, $x \in [a,b] \subset \mathbb{R}$, e seja g a inversa de f. Mostre que g é derivável e que $g'(x) = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{g(x)}}$, para todo $x \in [a,b]$. [: Sugestão: observe que f é estritamente crescente no intervalo fechado $[a,b]$, e portanto f é invertível com inversa $g : [f(a), f(b)] \to [a,b]$ contínua]

14. A função $f(x) = \sec x$, $0 \leqslant x < \dfrac{\pi}{2}$ é invertível e sua inversa é a função $f^{-1}(x) = \ \mathrm{arcsec}\, x$, $x \geqslant 1$. Calcule $\mathrm{arcsec}\,' x$.