089109 - Cálculo 1 - C

Sétima lista de exercícios

Prof. Marcelo José Dias Nascimento 6 de maio de 2011

---

1. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função derivável até 2ª ordem e g uma função definida por
$$g(x) = f(e^{2x}).$$
Verifique que
$$g''(x) = 4e^{2x}[f'(e^{2x}) + e^{2x}f''(e^{2x})].$$

2. Seja α uma raíz da equação
$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$
com a e b constantes. Se $y = e^{\alpha x}$, mostre que
$$\frac{d^2y}{dx^2} + a\frac{dy}{dx} + by = 0$$

3. Seja $y = f(x)$ uma função diferenciável tal que, para todo $x \in D_f$, o ponto $(x, f(x))$ é solução da equação
$$xy^3 + 2xy^2 + x = 4$$
Se $f(1) = 1$. Calcule $f'(1)$.

4. Calcule a derivada da função
$$f(x) = \ln \frac{\cos\sqrt{x}}{1 + \operatorname{sen}\sqrt{x}}.$$

5. Se $y = e^x \cos x$, mostre que
$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 2y = 0.$$

6. Calcule a derivada segunda de $y = x\sqrt[5]{2x+2}$.

7. Calcule a derivada de $f(x) = 4\sec x + \operatorname{cossec} x + \ln(\operatorname{sen} x)$.

   Definição Consideremos uma equação nas variáveis x e y. Dizemos que uma função $y = f(x)$ é dada implicitamente por tal equação se, para todo $x \in D_f$, o ponto $(x, f(x))$ for solução da equação.

8. Considere a equação
$$y^2 + xy - 1 = 0. \qquad (1)$$
   (a) Determine uma função que seja dada implicitamente pela equação (1).

   (b) Mostre que $(2y + x)\frac{dy}{dx} = 0$.

9. A função $y = f(x)$, $y \geqslant 0$, é dada implicitamente pela equação

$$x^2 + y^2 = 81.$$

   (a) Determine $f(x)$.

   (b) Mostre que $x + y\frac{dy}{dx} = 0$ para todo $x \in D_f$.

   (c) Calcule $\frac{dy}{dx}$.

10. Seja $f(x) = x^3 - x + 3$.

   (a) Determine a equação da reta r tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa 0.

   (b) Determine a equação da reta s normal ao gráfico de f no ponto de abscissa 0.

   (c) Esboce, num mesmo desenho, os gráficos de f, r e s.

11. Determine uma reta que seja paralela à reta $x + y = 1$ e que seja tangente à curva

$$x^2 + xy + y^2 = 3.$$

12. Supondo que $y = f(x)$ seja uma função real derivável e que satisfaz a equação $xy^2 + y + x = 1$, podemos afirmar que:

$$(a) f'(x) = \frac{-f(x)}{2xf(x) - 1} \qquad (b) f'(x) = \frac{-1 - [f(x)]^2}{2xf(x) + 1} \qquad (c) f'(x) = \frac{-[f(x)]^2}{2xf(x) + 1}$$

$$(d) f'(x) = \frac{-1 + [f(x)]^2}{2xf(x) + 1} \qquad (e) f'(x) = \frac{1 - [f(x)]^2}{2xf(x) + 1} \qquad (f) f'(x) = \frac{-1}{2xf(x) + 1}$$