Regras de Derivação

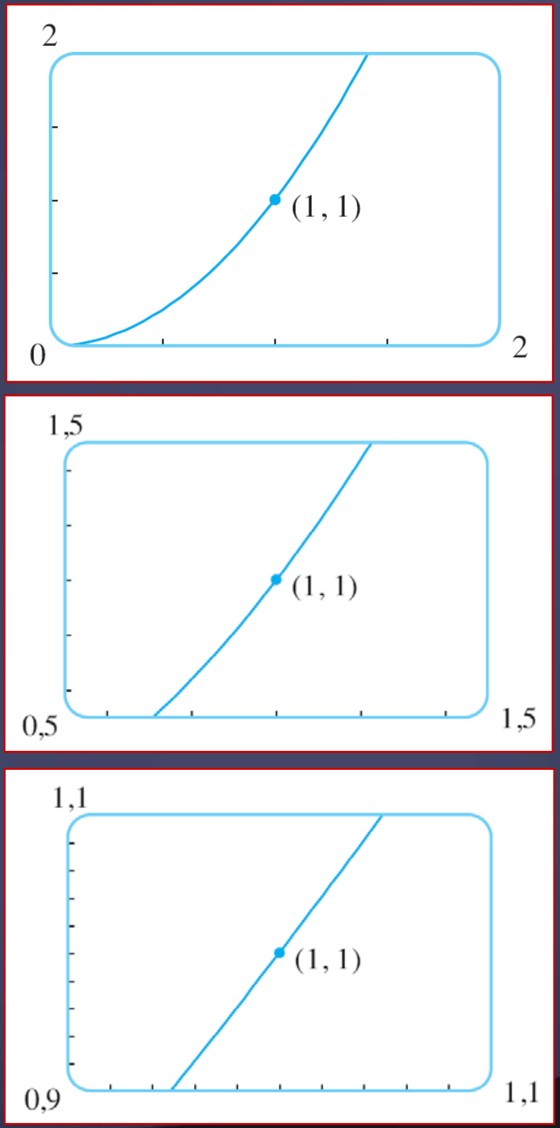
Capítulo 3

REGRAS DE DERIVAÇÃO

Vimos que uma curva fica muito perto de sua reta tangente nas proximidades do ponto de tangência.

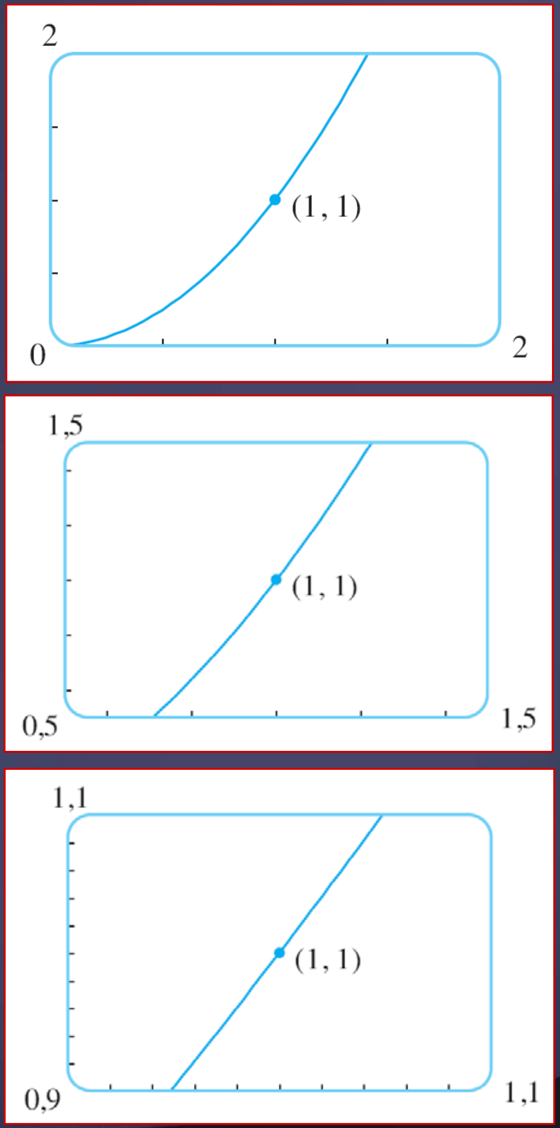
REGRAS DE DERIVAÇÃO

De fato, dando um *zoom* em torno de um ponto sobre o gráfico de uma função derivável, notamos que o gráfico se assemelha cada vez mais à sua reta tangente (veja a segunda figura na Seção 2.7).



REGRAS DE DERIVAÇÃO

Essa observação é a base para um método de encontrar valores aproximados de funções.



3.10

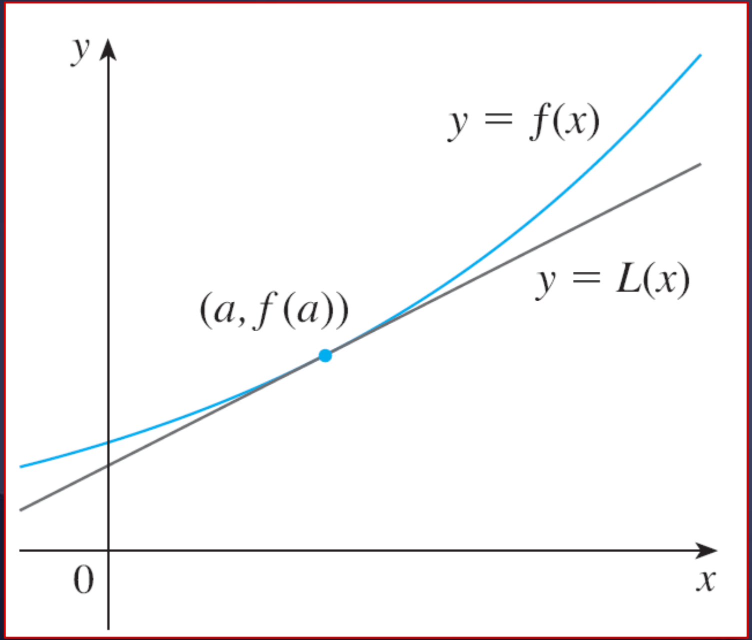
Aproximações Lineares e Diferenciais

Nesta seção, nós aprenderemos sobre: Aproximações Lineares e Diferenciais e suas aplicações.

CENGAGE Learning™

APROXIMAÇÕES LINEARES

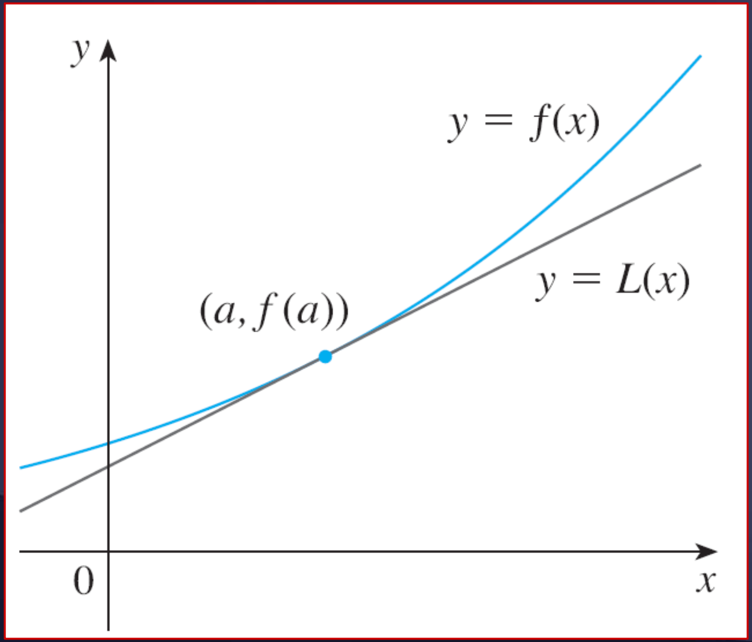
A ideia é que pode ser fácil calcular um valor *f* (*a*) de uma função, mas difícil (ou mesmo impossível) calcular os valores de *f* em pontos próximos.



- Assim, nos contentamos com os valores facilmente calculados da função *L*, cujo gráfico é a reta tangente a *f* em (*a*, *f* (*a*)). (Veja a figura.)

APROXIMAÇÕES LINEARES

Em outras palavras, usamos a reta tangente em (a, f (a)) como uma aproximação para a curva $y = f(x)$ quando x está próximo de a.



Uma equação dessa reta tangente é

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

Equação 1

A aproximação

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a)$$

é denominada **aproximação linear** ou **aproximação pela reta tangente** de f em a.

A função linear cujo gráfico é essa reta tangente, isto é,

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

é chamada **linearização** de *f* em *a*.

Encontre a linearização da função

$$f(x) = \sqrt{x+3}$$

em *a* = 1 e use-a para aproximar os números $\sqrt{3{,}98}$ e $\sqrt{4{,}05}$.

Essas aproximações estão superestimadas ou subestimadas?

A derivada de $f(x) = (x + 3)^{1/2}$ é:

$$f'(x) = \tfrac{1}{2}(x+3)^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x+3}}$$

e assim temos $f(1) = 2$ e $f'(1) = ¼$.

Colocando esses valores na Equação 2, vemos que a linearização é

$$\begin{aligned} L(x) &= f(1) + f'(1)(x-1) \\ &= 2 + \frac{1}{4}(x-1) \\ &= \frac{7}{4} + \frac{x}{4} \end{aligned}$$

A aproximação linear correspondente (1) é

$$\sqrt{x+3} \approx \frac{7}{4} + \frac{x}{4}$$ quando x está próximo de 1

Em particular, temos

$$\boxed{\sqrt{3{,}98} \approx \frac{7}{4} + \frac{0{,}98}{4} = 1{,}995}$$

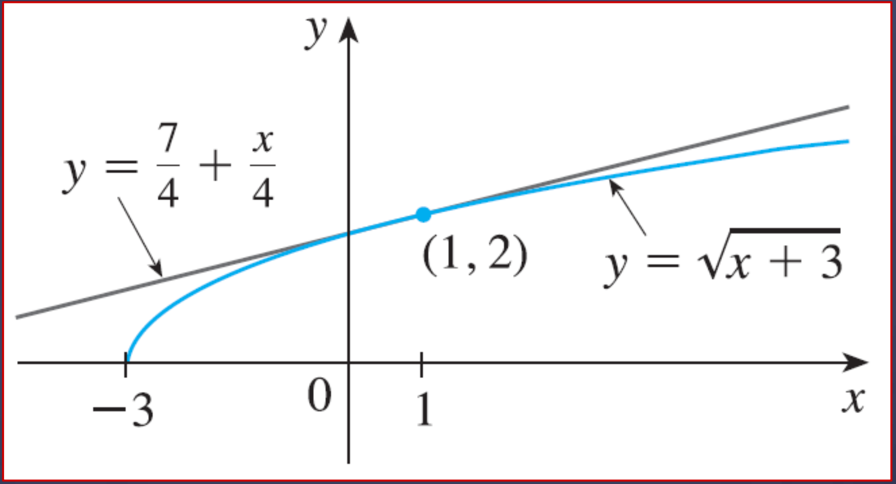
e

$$\boxed{\sqrt{4{,}05} \approx \frac{7}{4} + \frac{1{,}05}{4} = 2{,}0125}$$

APROXIMAÇÕES LINEARES EXEMPLO 1

A aproximação linear está ilustrada na figura.

- Vemos que, realmente, a aproximação pela reta tangente é uma boa aproximação para a função dada quando *x* está próximo de 1.
- Vemos também que nossas aproximações são superestimadas, pois a reta tangente está acima da curva.



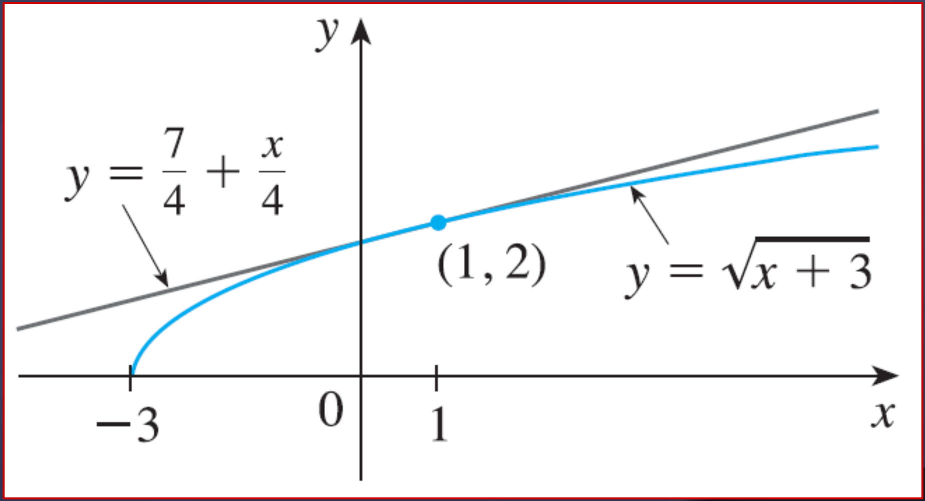
Naturalmente, uma calculadora nos daria aproximações para $\sqrt{3,98}$ e $\sqrt{4,05}$, mas a aproximação linear funciona *em todo um intervalo*.

Na tabela a seguir comparamos as estimativas da aproximação linear do Exemplo 1 com os valores verdadeiros.

APROXIMAÇÕES LINEARES

- Observe na tabela, e também na figura, que a aproximação pela reta tangente dá boas estimativas quando *x* está próximo de 1, mas a precisão da aproximação deteriora à medida que *x* se afasta de 1.

	x	De $L(x)$	Valor real
$\sqrt{3,9}$	0,9	1,975	1,97484176...
$\sqrt{3,98}$	0,98	1,995	1,99499373...
$\sqrt{4}$	1	2	2,00000000...
$\sqrt{4,05}$	1,05	2,0125	2,01246117...
$\sqrt{4,1}$	1,1	2,025	2,02484567...
$\sqrt{5}$	2	2,25	2,23606797...
$\sqrt{6}$	3	2,5	2,44948974...



APROXIMAÇÕES LINEARES

Quão boa é a aproximação obtida no Exemplo 1?

- O exemplo a seguir mostra que usando uma calculadora gráfica ou computador podemos determinar o intervalo dentro do qual uma aproximação linear fornece uma precisão especificada.

Para que valores de *x* a aproximação linear

$$\sqrt{x+3} \approx \frac{7}{4} + \frac{x}{4}$$ tem precisão de 0,5?

O que se pode dizer sobre uma precisão de 0,1?

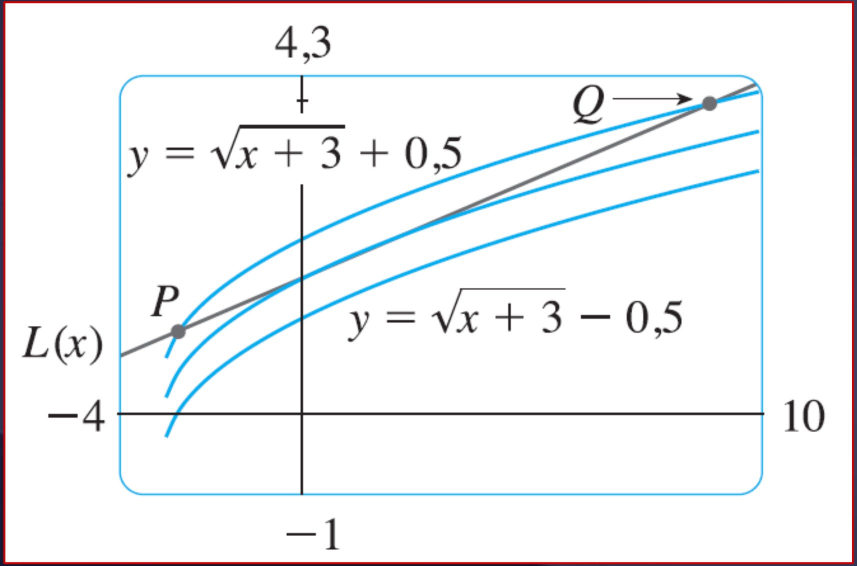
Uma precisão de 0,5 significa que as funções devem diferir por menos que 0,5:

$$\left|\sqrt{x+3} - \left(\frac{7}{4} + \frac{x}{4}\right)\right| < 0{,}5$$

Assim, podemos escrever

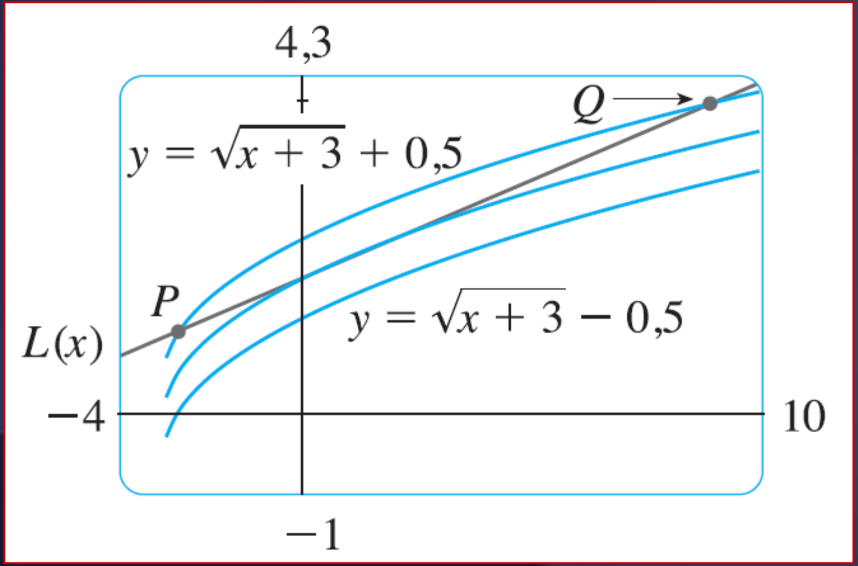
$$\sqrt{x+3} - 0{,}5 < \frac{7}{4} + \frac{x}{4} < \sqrt{x+3} + 0{,}5$$

O que diz que a aproximação linear deve ficar entre as curvas obtidas deslocando-se a curva $y = \sqrt{x+3}$ para cima e para baixo por uma distância de 0,5.



- A figura mostra que a reta tangente $y = (7 + x)/4$ intercepta a curva superior $y = \sqrt{x+3} + 0,5$ em P e Q.

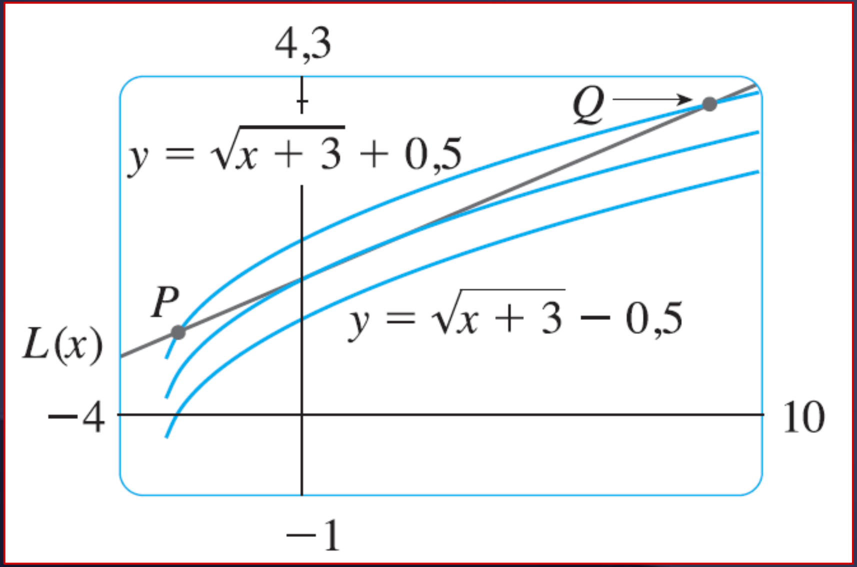
Dando um *zoom* e usando o cursor, estimamos que a coordenada *x* de *P* é cerca de -2,66 e que a coordenada *x* de *Q* é cerca de 8,66.



Assim, vemos do gráfico que a aproximação

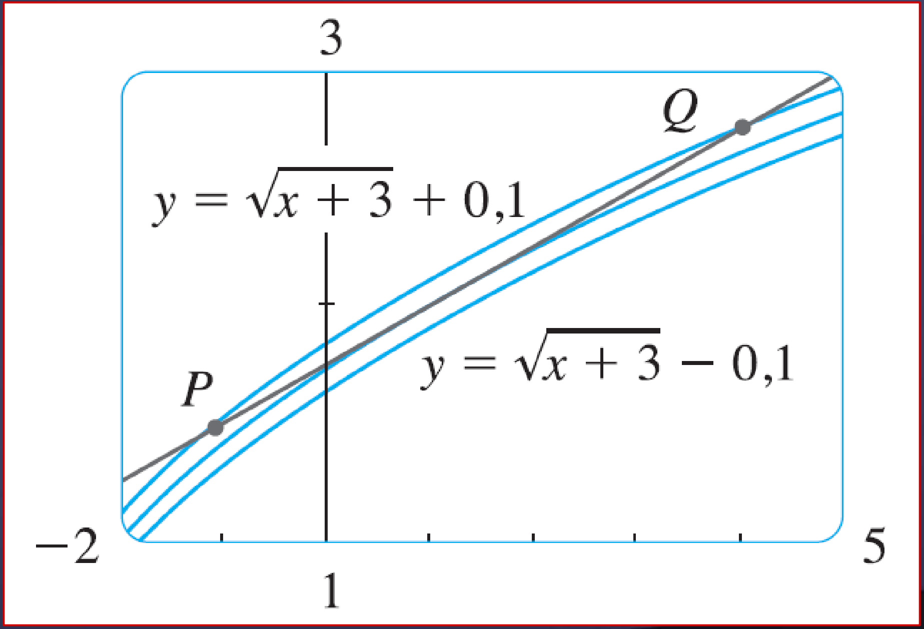
$$\sqrt{x+3} \approx \frac{7}{4} + \frac{x}{4}$$ tem precisão dentro de 0,5

quando -2,6 < x < 8,6.



- Arredondamos a favor da segurança

Analogamente, da Figura, vemos que a aproximação tem precisão de 0,1 quando -1,1 < x < 3,9.



APLICAÇÕES À FÍSICA

As aproximações lineares são muitas vezes usadas em física.

Ao analisar as consequências de uma equação, um físico às vezes precisa simplificar uma função, substituindo-a por sua aproximação linear.

APLICAÇÕES À FÍSICA

Por exemplo, ao deduzir uma fórmula para o período de um pêndulo, os livros de física obtêm a expressão $a_T = -g \text{ sen } \theta$ para a aceleração tangencial e então substituem sen θ por θ com a observação de que sen θ está muito próximo de θ se θ não for grande.

APLICAÇÕES À FÍSICA

Você pode verificar que a linearização da função $f(x) = \text{sen } x$ em $a = 0$ é $L(x) = x$, e assim a aproximação linear em 0 é $\text{sen } x \approx x$ (veja o Exercício 42).

Assim, a dedução da fórmula para o período de um pêndulo usa a aproximação pela reta tangente para a função seno.

APLICAÇÕES À FÍSICA

Outro exemplo ocorre na teoria da óptica, na qual os raios de luz que chegam em ângulos rasos em relação ao eixo ótico são chamados *raios paraxiais*.

Na ótica paraxial (ou gaussiana), tanto sen θ como cos θ são substituídos por suas linearizações.

APLICAÇÕES À FÍSICA

Em outras palavras, as aproximações lineares

$$\text{sen}\,\theta \approx \theta \text{ e } \cos\theta \approx 1$$

são usadas, pois θ está próximo de 0.

Os resultados de cálculos feitos com essas aproximações tornam-se a ferramenta teórica básica para projetar as lentes.

APLICAÇÕES À FÍSICA

Na Seção 11.11, no Volume II, vamos apresentar outras aplicações da ideia de aproximação linear na física.

DIFERENCIAIS

As ideias por trás das aproximações lineares são algumas vezes formuladas na terminologia e notação de *diferenciais*.

Se $y = f(x)$, onde f é uma função derivável, então a **diferencial** dx é uma variável independente; isto é, a dx pode ser dado um valor real qualquer.

Equação 3

A **diferencial** *dy* é então definida em termos de *dx* pela equação

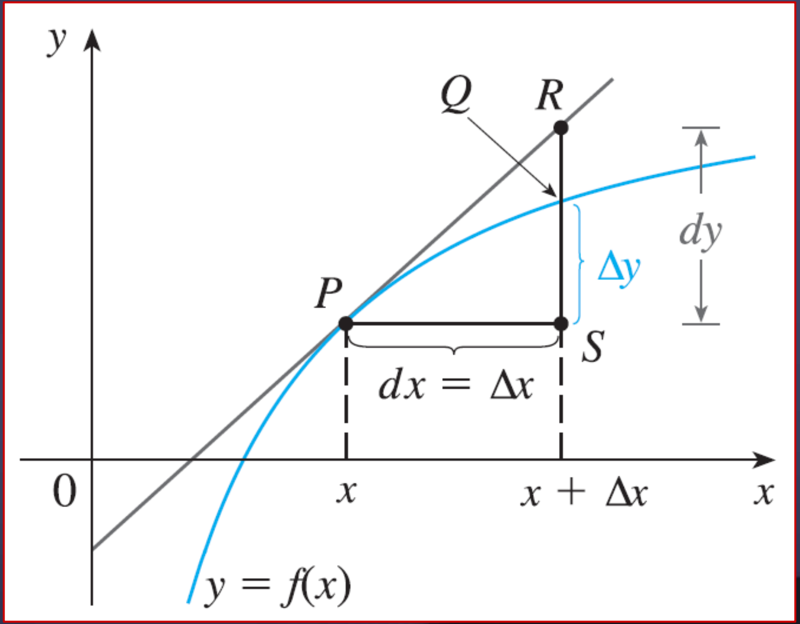
$$dy = f'(x)dx$$

- Assim *dy* é uma variável dependente; ela depende dos valores de *x* e *dx*.
- Se a *dx* for dado um valor específico e *x* for algum número específico no domínio de *f* , então o valor numérico de *dy* está determinado.

DIFERENCIAIS

O significado geométrico de diferenciais está ilustrado abaixo.

Seja $P(x, f(x))$ e $Q(x + \Delta x, f(x + \Delta x))$ pontos sobre o gráfico de f e façamos $dx = \Delta x$.



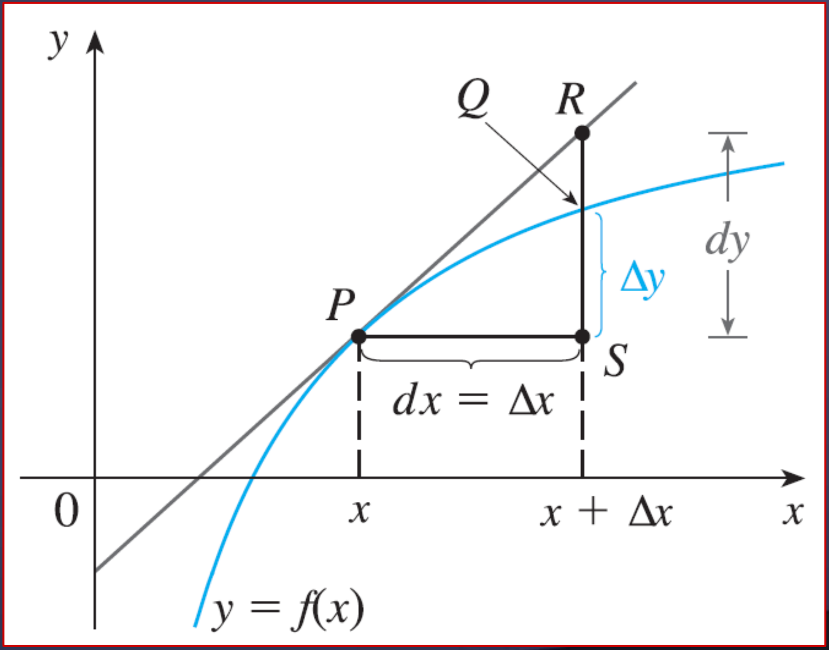
DIFERENCIAIS

A variação correspondente em *y* é

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

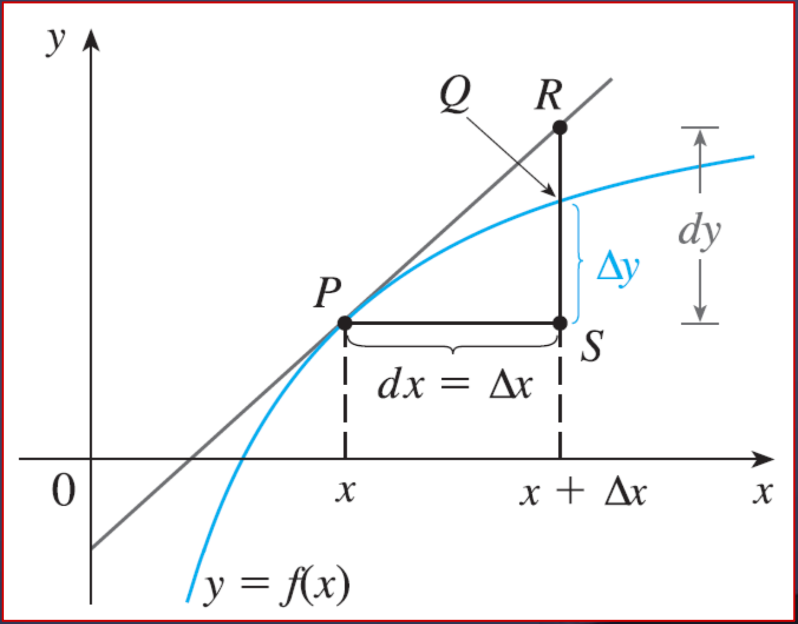
- A inclinação da reta tangente *PR* é a derivada $f'(x)$.
- Assim, a distância direta de *S* a *R* é

  $f'(x)\, dx = dy$.



DIFERENCIAIS

Consequentemente, *dy* representa a distância que a reta tangente sobe ou desce (a variação na linearização), enquanto Δ*y* representa a distância que a curva *y* = *f* (*x*) sobe ou desce quando *x* varia por uma quantidade d*x*.



Compare os valores de Δy e dy se

$$y = f(x) = x^3 + x^2 - 2x + 1 \text{ e } x \text{ variar:}$$

a. de 2 para 2,05

b. de 2 para 2,01

- Solução a: Temos que

$$f(2) = 2^3 + 2^2 - 2(2) + 1 = 9$$

$$f(2{,}05) = (2{,}05)^3 + (2{,}05)^2 - 2(2{,}05) + 1$$

$$= 9{,}717625$$

$$\Delta y = f(2{,}05) - f(2) = 0{,}717625$$

Em geral,

$$dy = f'(x)dx = (3x^2 + 2x - 2)\, dx$$

Quando $x = 2$ e $dx = \Delta x = 0{,}05$, temos:

$$dy = [3(2)^2 + 2(2) - 2]\, 0{,}05 = 0{,}7$$

- Solução b: Temos

$$
\begin{aligned}
f(2{,}01) &= (2{,}01)^3 + (2{,}01)^2 - 2(2{,}01) + 1 \\
&= 9{,}140701
\end{aligned}
$$

$$\Delta y = f(2{,}01) - f(2) = 0{,}140701$$

Quando $dx = \Delta x = 0{,}01$,

$$dy = [3(2)^2 + 2(2) - 2]0{,}01 = 0{,}14$$

DIFERENCIAIS

Observe que no Exemplo 3 a aproximação $\Delta y \approx dy$ torna-se melhor à medida que Δx fica menor. Observe também que é muito mais fácil calcular dy do que Δy.

Para as funções mais complicadas pode ser impossível calcular exatamente Δy. Nesses casos, a aproximação por diferenciais é especialmente útil.

DIFERENCIAIS

Na notação de diferenciais, a aproximação linear (1) pode ser escrita como

$$f(a + dx) \approx f(a) + dy$$

Por exemplo, para a função $f(x) = \sqrt{x+3}$ do Exemplo 1, temos $dy = f'(x)dx$

$$= \frac{dx}{2\sqrt{x+3}}$$

DIFERENCIAIS

Se a = 1 and $dx = \Delta x$ = 0,05, então

$$dy = \frac{0{,}05}{2\sqrt{1+3}} = 0{,}0125$$

e $$\sqrt{4{,}05} = f(1{,}05) \approx f(1) + dy = 2{,}0125$$

- Exatamente como encontramos no Exemplo 1.

DIFERENCIAIS

Nosso exemplo final ilustra o uso de diferenciais na estimativa de erros que ocorrem em virtude de medidas aproximadas.

EXEMPLO 4

O raio de uma esfera tem 21 cm, com um possível erro de medida de no máximo 0,05 cm.

Qual é o erro máximo cometido ao usar esse valor de raio para calcular o volume da esfera?

Se o raio da esfera for r, então seu volume é $V = 4/3\pi\, r^3$.

Se o erro na medida do valor de r for denotado por $dr = \Delta r$, então o erro correspondente no cálculo do valor de V é ΔV, que pode ser aproximado pela diferencial

$$dV = 4\pi\, r^2\, dr$$

Quando $r = 21$ e $dr = 0,05$, temos

$$dV = 4\pi(21)^2 0,05 \approx 277$$

O erro máximo no volume calculado é de cerca de 277 cm^3.

ERRO RELATIVO

OBS:

Embora o erro possível no Exemplo 4 possa parecer muito grande, uma ideia melhor é dada pelo **erro relativo**, que é calculado dividindo-se o erro pelo volume total:

$$\frac{\Delta V}{V} \approx \frac{dV}{V} = \frac{4\pi r^2 dr}{\frac{4}{3}\pi r^3} = 3\frac{dr}{r}$$

CENGAGE Learning™

ERRO RELATIVO **OBS:**

Assim, o erro relativo no volume é cerca de três vezes o erro relativo no raio.

No Exemplo 4, o erro relativo no raio é de aproximadamente $dr/r = 0{,}05/21 \approx 0{,}0024$ e produz um erro relativo de cerca de 0,007 no volume. Os erros também poderiam ser expressos como **erros percentuais** de 0,24% no raio e 0,7% no volume.