089109 - Cálculo 1 - Turma C

Terceira lista de exercícios

Prof. Marcelo José Dias Nascimento 26 de março de 2010

---

1. Esboce o gráfico da função dada e determine os pontos em que a função é contínua.

   (a) $f(x) = x + 1$ (b) $f(x) = x^2 + 2$

   (c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2}, & \text{se } |x| \geqslant 1 \\ 2, & \text{se } |x| < 1 \end{cases}$ (d) $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } x \leqslant 1 \\ 2, & \text{se } x > 1 \end{cases}$

   (e) $f(x) = [x]$ (função maior inteiro).

2. A função $f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{se } x \leqslant 1 \\ 1, & \text{se } x > 1 \end{cases}$ é contínua em $x_0 = 1$? Justifique.

3. Prove, pela definição, que a função dada é contínua no ponto dado.

   (a) $f(x) = 4x - 3$ em $x_0 = 2$.

   (b) $f(x) = x + 1$ em $x_0 = 2$.

4. Mostre que uma função f é contínua em $x_0 \in D_f$ se, e somente se, $\lim\limits_{h \to 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$.

5. Mostre a unicidade do limite, ou seja, mostre que se $\lim\limits_{x \to p} f(x) = L_1$ e $\lim\limits_{x \to p} f(x) = L_2$, então $L_1 = L_2$.

6. Determine o valor, caso exista, que a função dada deveria ter no ponto dado para ser contínua neste ponto. Justifique sua resposta.

   (a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ em $x_0 = 2$.

   (b) $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{x}$ em $x_0 = 0$.

   (c) $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ em $x_0 = 0$.

   (d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}, & \text{se } x \neq 3 \\ L, & \text{se } x = 3 \end{cases}$ em $x_0 = 3$.

   (e) $f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x < 1 \\ \dfrac{1}{x}, & \text{se } x > 1 \end{cases}$ em $x_0 = 1$.

7. A função $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + x}{x + 1}, & \text{se } x \neq -1 \\ 2, & \text{se } x = -1 \end{cases}$ é contínua em $x_0 = -1$? E em $x_0 = 0$? Justifique.

8. A afirmação "$\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) \Rightarrow f$ contínua em x_0" é falsa ou verdadeira? Justifique.

9. Dada a função $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$, verifique que $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$. A função f é contínua em 1? Justifique.

10. Calcule:

(a) $\lim_{x\to 5} \sqrt[3]{3x^2-4x+9}$ (b) $\lim_{x\to 2^+} 1+\sqrt{x-2}$ (c) $\lim_{x\to 0} \sqrt[3]{\dfrac{x^3+1}{x+1}}$

(d) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x^2}$ (e) $\lim_{x\to -\infty} \left(5+\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{x^2}\right)$ (f) $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{x^2-2x+3}{3x^2+x+1}$

(g) $\lim_{x\to 4^-} \dfrac{1}{(x-4)^3}$ (h) $\lim_{x\to 4^+} \dfrac{1}{(x-4)^3}$ (i) $\lim_{x\to 4} \dfrac{1}{(x-4)^3}$

(j) $\lim_{x\to +\infty} (x^4-3x+2)$ (k) $\lim_{x\to +\infty} (5-4x+x^2-x^5)$ (l) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{5x^3-6x+1}{6x^2+x+3}$

(m) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{5x^3-6x+1}{6x^3+2}$ (n) $\lim_{x\to 3^+} \dfrac{5}{3-x}$ (o) $\lim_{x\to 3^-} \dfrac{5}{3-x}$

(p) $\lim_{x\to \frac{1}{2}^+} \dfrac{4}{2x-1}$ (q) $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{3}{x^2-x}$ (r) $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{x^4-2x+3}{3x^4+7x-1}$

(s) $\lim_{x\to -1^+} \dfrac{2x+1}{x^2+x}$ (t) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$.

11. Calcule:

(a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan(3x)}{x}$ (b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{7x}{6\sin x}$

(c) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}$ (d) $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\cos x-\sin x}{\tan x-1}$

(e) $\lim_{x\to 2} \dfrac{\tan(\pi x)}{x-2}$ (f) $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$

(g) $\lim_{x\to p} \dfrac{\tan(x-p)}{x^2-p^2}$, $p\neq 0$ (h) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin\left(x^2+\frac{1}{x}\right)-\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x}$

(i) $\lim_{x\to p} \dfrac{\sin x-\sin p}{x-p}$ (j) $\lim_{x\to p} \dfrac{\tan x-\tan p}{x-p}$.

12. Seja f uma função definida em $\mathbb{R}$ e suponha que exista $M>0$ tal que $|f(x)-f(p)|\leqslant M|x-p|$ para todo x. Prove, usando a definição de função contínua, que f é contínua em p. Exiba outra maneira de mostrar este resultado.

13. Seja f definida em $\mathbb{R}$. Suponha que $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x}=1$. Calcule:

(a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(3x)}{x}$ (b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x^2)}{x}$

(c) $\lim_{x\to 1} \dfrac{f(x^2-1)}{x-1}$ (d) $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(7x)}{3x}$

14. Seja f uma função definida em $\mathbb{R}$ tal que $-x^2+3x\leqslant f(x)<\dfrac{x^2-1}{x-1}$, para todo $x\neq 1$. Calcule $\lim_{x\to 1} f(x)$ e justifique.

15. Em cada dos ítens abaixo, determine o maior conjunto onde a função f é contínua.

(a) $f(x)=\dfrac{3x-5}{2x^2-x-3}$ (b) $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x-3}$

(c) $f(x)=\sqrt{2x-3}+x^2$ (d) $f(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}$

(e) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$ (f) $f(x)=\dfrac{\sqrt{9-x}}{\sqrt{x-6}}$.

16. Se $f(x)=\begin{cases} \dfrac{|x-3|}{x-3}, & \text{se } x\neq 3 \\ 1, & \text{se } x=3 \end{cases}$, então f é contínua em $x=3$? Justifique sua resposta.

17. Analise a continuidade das funções abaixo nos seus domínios.

(a) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{x-1}{x^2-1}}, & \text{se } x \neq \pm 1 \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}, & \text{se } x = -1 \text{ ou } x = 1. \end{cases}$

(b) $f(x) = \dfrac{x - [x]}{2x}$

(c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2-x}{2-|x|}, & \text{se } x \neq 2 \\ 1 & \text{se } x = 2. \end{cases}$

(d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(2x)}{2}, & \text{se } x \neq 0 \\ 2 & \text{se } x = 0. \end{cases}$

18. Determine as constantes A, B de modo que a função $f(x) = \begin{cases} 3x, & \text{se } x \leqslant 2 \\ Ax + B, & \text{se } 2 < x < 5 \\ -6x, & \text{se } x \geqslant 5 \end{cases}$ seja contínua em $\mathbb{R}$.

19. Encontre exemplos de funções tais que:

(a) $f + g$ é contínua em x_0, mas f e g não são.

(b) $f \circ g$ é contínua em x_0, mas g é descontínua em x_0 e f é descontínua em $g(x_0)$.

(c) f é contínua em $g(x_0)$, g não é contínua em x_0, mas $f \circ g$ é contínua em x_0.

20. Sejam f , $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções contínuas em $\mathbb{R}$ tais que $f(3) = g(3)$. Verifique se a função $h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \leqslant 3 \\ g(x), & \text{se } x > 3 \end{cases}$ é contínua em $\mathbb{R}$. Justifique sua resposta.

21. Prove que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} [f(x) - L] = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} |f(x) - L| = 0$.

22. Calcule:

(a) $\lim\limits_{x \to 0} \cos\left(\dfrac{x}{\sin x - 2x}\right)$

(b) $\lim\limits_{x \to 0} \sin\left(\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right)}{x}\right)$.

23. Suponha que $|f(x) - f(1)| \leqslant (x-1)^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Mostre que f é contínua no ponto $x_0 = 1$.

24. (a) Dê um exemplo de uma função definida em $\mathbb{R}$ que seja contínua em todos os pontos de $\mathbb{R}$, exceto nos pontos $-1, 0, 1$.

(b) Dê um exemplo de uma função definida em $\mathbb{R}$ que seja contínua em todos os pontos de $\mathbb{R}$, exceto nos números inteiros.

(c) Dê um exemplo de uma função definida em $\mathbb{R}$ que não seja contínua em $x = 2$ mas que $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$.