089109 - Cálculo 1 - Turma C

Primeira lista de exercícios

Prof. Marcelo José Dias Nascimento 15 de março de 2010

---

1. Em cada um dos ítens abaixo, determine o domínio da função dada.

   (a) $g(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$ (b) $g(x) = \dfrac{x+1}{x^2+2x}$

   (c) $g(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$ (d) $g(x) = \sqrt[3]{x^2-x}$

   (e) $g(x) = \sqrt[6]{\dfrac{x-3}{x+2}}$ (f) $g(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x-1}}$

   (g) $y = \sqrt{x-1} + \sqrt{3-x}$ (h) $y = \sqrt{1-\sqrt{x}}$

   (i) $y = \sqrt{x} - \sqrt{5-2x}$ (j) $y = \sqrt{x-\sqrt{x}}$.

2. Considere a função f dada por $f(x) = x^2 + 4x + 5$.

   (a) Determine o domínio e a imagem de f.

   (b) Mostre que $f(x) = (x+2)^2 + 1$.

   (c) Esboce o gráfico de f.

   (d) Qual o menor valor de $f(x)$? Em que x este menor valor é atingido?

   Definição: Dados dois pontos $A = (x_0, y_0)$ e $B = (x_1, y_1)$ em $\mathbb{R}^2$, definimos a *distância* entre A e B como $\mathrm{d} = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}$.

3. No caso em que d é a distância entre $(0,0)$ e (x,y), onde (x,y) um ponto do gráfico de $f(x) = \dfrac{1}{x}$, expresse d em função de x.

4. Suponha que (x,y) seja um ponto do plano cuja soma das distâncias a $(-1,0)$ e $(1,0)$ é igual a 4.

   (a) Verifique que $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{3} = 1$.

   (b) Supondo $y \geqslant 0$, expresse y em função de x e esboce o gráfico da função obtida.

5. Na fabricação de uma caixa, de forma cilíndrica, e volume $1(m^3)$, utilizam-se, nas laterais e no fundo, um material que custa \$1.000 o metro quadrado e na tampa um outro que custa \$2.000 o metro quadrado. Expresse o custo C do material utilizado, em função do raio r da base.

6. Expresse a área de um triângulo equilátero em função do lado l.

7. Um retângulo está inscrito numa circunferência de raio r dado. Expresse a área do retângulo em função de um de seus lados.

8. Determine os domínios e esboce os gráficos de $f+g$ e $\dfrac{g}{f}$.

   (a) $f(x) = x$ e $g(x) = x^2 - 1$ (b) $f(x) = x$ e $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

   (c) $f(x) = 1$ e $g(x) = \sqrt{x-1}$ (d) $f(x) = 1$ e $g(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2}$

   (e) $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ -1, & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ e $g(x) = \begin{cases} -1, & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 1, & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$.

9. Em um certo país, o imposto de renda é cobrado da seguinte forma: são isentos os que têm rendimento até \$10.000; para qualquer renda acima de \$10.000 é cobrado um imposto de 10%, até \$20.000; e acima de \$20.000 o imposto é de 15%.

   (a) Esboce o gráfico do imposto de renda R como uma função da renda I.

   (b) Qual o imposto cobrado sobre um rendimento de \$14.000? E sobre \$26.000?

   (c) Esboce o gráfico do imposto total cobrado T como uma função da renda I.

10. Em cada um dos ítens abaixo, esboce o gráfico da função $y = f(x)$ definida implicitamente pela equação dada.

    (a) $x^2 + y^2 = 1$, $y \geqslant 0$

    (b) $x - y^2 = 0$, $y \geqslant 0$

    (c) $(x-1)^2 + y^2 = 4$, $y \geqslant 0$

    (d) $x^2 + y^2 + 2y = 0$, $y \geqslant -1$

    (e) $x^2 + y^2 + 2x + 4y = 0$, $y \leqslant -2$

    (f) $\dfrac{y+1}{y} = x$, $x \neq 1$.

11. Considere a função $f(x) = \max\left\{x, \dfrac{1}{x}\right\}$.

    (a) Calcule $f(2)$, $f(-1)$ e $f(1/2)$.

    (b) Determine o domínio e esboce o gráfico de f.

12. Considere a função $f(x) = [x] = \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leqslant x\}$. (*Função maior inteiro*)

    (a) Calcule $[1/2]$, $[1]$, $[5/4]$ e $[-1/5]$.

    (b) Esboce o gráfico de f.

13. Determine o maior conjunto A tal que $\mathrm{Im} f \subset D_g$ e em seguida construa a composta $h(x) = g(f(x))$.

    (a) $g(x) = \sqrt{x}$ e $f : A \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - x$.

    (b) $g(x) = \dfrac{2}{x+2}$ e $f : A \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + 3$.

    (c) $g(x) = \sqrt{x-1}$ e $f : A \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$.

    (d) $g(x) = \sqrt{x-1}$ e $f : A \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-3}$.

    (e) $g(x) = \dfrac{1}{x}$ e $f : A \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - x^2$.

    (f) $g(x) = \sqrt{x^2-1}$ e $f : A \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2$.

14. Para cada um dos ítens do exercício anterior, verifique se f e g são monótonas. Em caso afirmativo, determine se são (estritamente) crescentes ou (estritamente) decrescentes.

15. Em cada um dos ítens abaixo, determine f de modo que $g(f(x)) = x$, para todo $x \in D_f$, sendo g dada.

    (a) $g(x) = \dfrac{1}{x}$

    (b) $g(x) = \dfrac{x+2}{x+1}$

    (c) $g(x) = x^2$, $x \geqslant 0$

    (d) $g(x) = x^2 - 2x$, $x \geqslant 1$

    (e) $g(x) = 2 + \dfrac{3}{x+1}$

    (f) $g(x) = x^2 - 4x + 3$, $x \geqslant 2$.

16. Determine se f é par, ímpar, ou se nenhum dos dois casos se aplica. Se f for par ou ímpar, use a simetria para esboçar seu gráfico.

(a) $f(x) = x^{-2}$	(b) $f(x) = x^{-3}$
(c) $f(x) = x^2 + x$	(d) $f(x) = x^4 - 4x^2$
(e) $f(x) = x^3 - x$	(f) $f(x) = 3x^3 + 2x^2 + 1$.

17. (a) Se $g(x) = 2x + 1$ e $h(x) = 4x^2 + 4x + 7$, encontre uma função f tal que $f \circ g = h$.

    (b) Se $f(x) = 3x + 5$ e $h(x) = 3x^2 + 4x + 2$, encontre uma função g tal que $f \circ g = h$.

18. Suponha g uma função par e seja $h = f \circ g$. A função h é sempre uma função par?

19. Em cada um dos ítens abaixo determine se a função dada é injetora, sobrejetora, bijetora.

    (a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 5x + 1$.

    (b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2 + 4$.

    (c) $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ dada por $f(x) = x^2 + 4$.

    (d) $f : [0, \infty) \to [4, \infty)$ dada por $f(x) = x^2 + 4$.

20. (a) Existe alguma simetria no gráfico de uma função par? Qual? E de uma função ímpar?

    (b) Mostre que para toda função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ existem uma função par g e uma função ímpar h tais que $f(x) = g(x) + h(x)$.

21. Um móvel desloca-se (em movimento retilíneo) de $(0, 0)$ a $(x, 10)$ com uma velocidade constante de 1 (m/s); em seguida, de $(x, 10)$ a $(30, 10)$ (em movimento retilíneo) com velocidade constante de 2 (m/s). Expresse o tempo total $T(x)$, gasto no percurso, em função de x. (Suponha que a unidade adotada no sistema de referência seja o metro.)