

1ª Série de exercícios – Teoria dos Grafos

1) Seja  $I = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ , liste todos os elementos das seguintes relações (1.0 pto)

- a)  $I \times I$
- b)  $R_1 = \{ \langle x, y \rangle \mid x, y \in I \text{ e } x < y \}$
- c)  $R_2 = \{ \langle x, y \rangle \mid x, y \in I \text{ e } x = y \}$

2) Seja  $A = \{a, b, c, d\}$ . Caracterize: (1.0 pto)

- a) uma relação que seja ao mesmo tempo simétrica e anti-simétrica, mas não reflexiva
- b) uma relação reflexiva que seja uma função
- c) uma relação R que satisfaça  $R \cap R^{-1} = \emptyset$
- d) uma relação R que satisfaça  $R = R^{-1}$

3) Seja  $X = \{1, 4, 9, 16, \dots\}$ . Sugira uma ou mais relações de ordem parcial em X. (1.0 pto)

4) Cada uma das seguintes sentenças define uma relação R nos números naturais. Diga se elas são relações de equivalência, de ordem parcial ou nenhuma das duas: (1.0 pto)

- a) x é menor ou igual a y
- b) x “divide” y
- c)  $x + y = 10$

5) Dê exemplos de relações definidas no conjunto  $A = \{1, 2, 3\}$  (1.0 pto)

- a) reflexiva, transitiva, mas não simétrica
- b) simétrica e transitiva, mas não reflexiva
- c) simétrica e anti-simétrica

6) Considere o produto cartesiano  $A \times B$ , com  $|A| = m$  e  $|B| = n$ . (1.0 pto)

- a) Qual é o maior número de elementos que um conjunto  $C \subseteq A \times B$  pode ter se deve ser uma função ?
- b) Se  $f : A \rightarrow B$  e  $m < n$ , a função f pode ser sobrejetora ? Porque ?

7) Digamos que dois números inteiros estejam próximos um do outro se sua diferença for no máximo 2. Por exemplo, 3 está próximo de 5, 10 está próximo de 9, mas 8 não está próximo de

4. Representemos por R essa relação “estar próximo de”. (1.0 pto)

- a) Escreva R como um conjunto  $R = \{ \langle x, y \rangle : \dots \}$
- b) R é reflexiva ou antirreflexiva ?
- c) R é simétrica ou antissimétrica ?
- d) R é transitiva ?

8) Defina a relação  $\leq^{-1}$  ? O que ela significa ? (1.0 pto)

9) Seja  $A = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ . Defina a relação de congruência em módulo 4 em A. Particione o conjunto A encontrando as classes de equivalência geradas pelos elementos de A. (1.0 pto)

10) Seja A o conjunto de inteiros não-nulos e seja  $\approx$  a relação em  $A \times A$  definido por

$$(a,b) \approx (c,d) \quad \text{se} \quad ad = bc$$

Mostre que  $\approx$  é uma relação de equivalência. (0.5 pto)

11) Mostre que uma relação R é simétrica se e somente se  $R = R^{-1}$ . (0.5 pto)