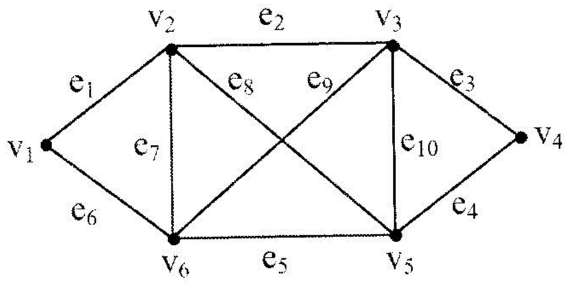
3ª Série de exercícios – Teoria dos Grafos

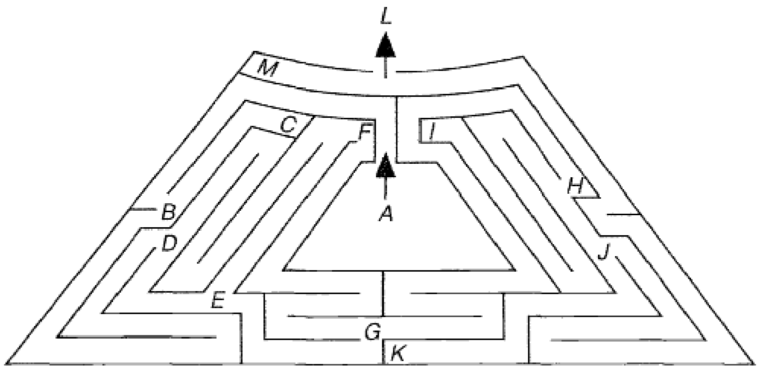
1) Para o grafo a seguir, encontre:

a) Quatro caminhos diferentes de v_1 a v_4.
b) Quatro diferentes trilhas de v_1 a v_4 que não sejam caminhos.
c) Quatro diferentes passeios de v_1 a v_4 que não sejam trilhas.



2) Considerando o labirinto abaixo, encontre:

a) O grafo que representa sua topologia.
b) O menor caminho do centro (A) até a saída (L) . Qual é seu tamanho ?
c) Existe algum ciclo ? Se sim, indique alguns deles e seus respectivos tamanhos.
d) Existe algum circuito (que não seja ciclo) ? Se sim, indique alguns deles e seus respectivos tamanhos.
e) O "labirinto" é bipartido ? Explique. Se não é, modifique sua estrutura para que seja. Redesenhe sua estrutura de modo a evidenciar a bipartição.



3) Seja um grafo G com 15 vértices e 4 componentes conectadas. Prove que G tem pelo menos uma componente com ao menos 4 vértices. Qual o menor número de vértices que uma componente de G pode ter ?

4) Dê um exemplo de grafo em que o comprimento do ciclo mais curto é 4 e o comprimento do ciclo mais longo é 9.

5) Seja G um grafo conectado com o conjunto de vértices V.

- Para cada $v \in V$, a excentricidade de v, denotada por e(v), é definida como:

$$e(v) = \max\{d(u,v) \mid u \in V, u \neq v\}$$

- O raio de G, denotado por r(G), é definido como:

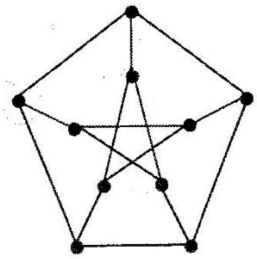
$$r(G) = \min\{e(v) \mid v \in V\}$$

- O diâmetro de G, denotado por d(G), é definido como:

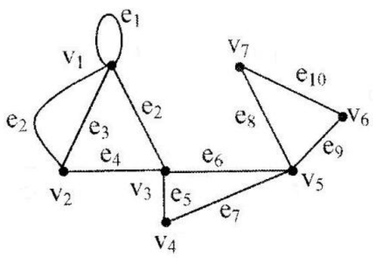
  $$d(G) = \max\{e(v) \mid v \in V\}$$

Assim, o diâmetro de um grafo é a máxima distância entre dois vértices. Responda as questões a seguir:

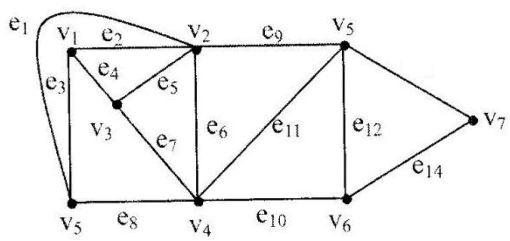
a) Encontre o raio e o diâmetro do grafo abaixo, conhecido como grafo de Petersen.



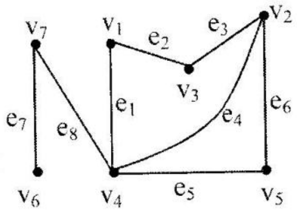
b) Encontre o raio, o diâmetro, o centro topológico (subgrafo induzido pelos vértices de mínima excentricidade) e o comprimento médio dos caminhos de cada um dos grafos abaixo.



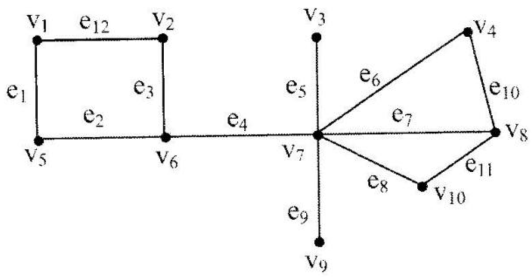
(a)



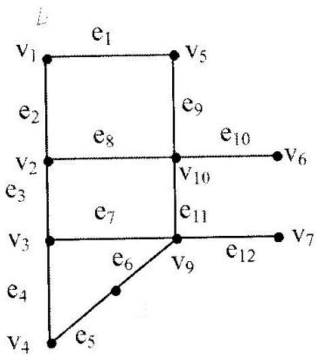
(b)



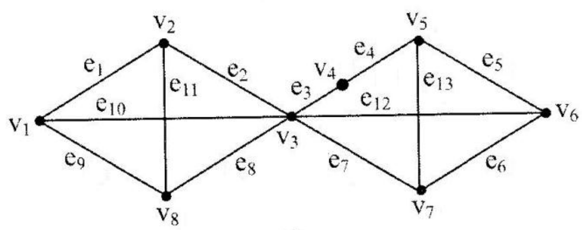
(c)



(d)



(e)

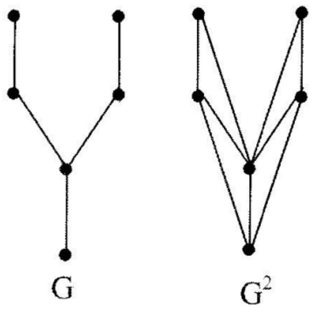


(f)

c) Dê um exemplo de grafo cujo diâmetro é igual a 1. Quais grafos simples possuem essa característica ?

d) Prove que para qualquer grafo conectado G, $r(G) \leq d(G) \leq 2r(G)$.

6) Seja G um grafo simples conectado. O quadrado de G, notado por G^2, é definido como o grafo com o mesmo conjunto de vértices que G e no qual dois vértices u e v são unidos por uma aresta se e somente se em G a seguinte desigualdade for verificada: $1 \leq d(u,v) \leq 2$. A figura a seguir mostra G e G^2.



Mostre que o quadrado de $K_{1,3}$ é K_4. Especifique mais dois grafos cujo quadrado resulte em K_4.

7) Mostre que não existe um grafo simples com 12 vértices e 28 arestas no qual:

a) O grau de cada vértice seja 3 ou 4.
b) O grau de cada vértice seja 3 ou 6.

8) É possível que num grupo de sete pessoas cada uma delas tenha exatamente outros três amigos no grupo ? Prove sua resposta.

9) Para quaisquer dois vértices u e v conectados por um caminho em um grafo G, a distância entre u e v, denotada por d(u,v), é definida como o comprimento do caminho mais curto entre u e v. Se não existir caminho conectando u e v, a distância d(u,v) é definida como infinito.

a) Prove que, para quaisquer vértices u, v e w em G, tem-se: $d(u,w) \leq d(u,v) + d(v,w)$.
b) Prove que, se $d(u,v) \geq 2$, então existe um vértice z em G, tal que $d(u,v) = d(u,z) + d(z,v)$.

10) Seja G um grafo conectado. Suponha que uma aresta e faça parte de um ciclo. Mostre que G, com a aresta e removida ainda é conectado.

11) Seja G um grafo. Defina a relação R no conjunto de vértices V como: $(v,w) \in R$ se existe um caminho do vértice v para o vértice w. Prove que R é uma relação de equivalência em V. O que podemos afirmar sobre a partição induzida em V pelas classes de equivalência de R?

12) Suponha que duas pessoas P1 e P2 fazem parte de uma relação R se existe algum relacionamento entre P1 e P2 (conhece, é amigo, é parente,...). De quantas maneiras N pessoas podem estar relacionadas ? (Dica: pense em um grafo particular de N vértices para definir uma forma específica de N pessoas estarem relacionadas. O que representa o número total de grafos de N vértices existentes?)