

1ª Série de exercícios – Teoria dos Grafos

1) O que é uma relação? Especifique o que são relações simétricas, anti-simétricas, reflexivas e transitivas.

2) O que é uma relação de equivalência?

3) Que tipo de estrutura de dados é fundamentada por relações de equivalência? Explique porque descrevendo como tais relações induzem partições no conjunto em que são definidas.

4) O que são relações de ordem parcial?

5) O que são diagramas de Hasse? Para que servem? Como podemos construir um diagrama de Hasse a partir de um conjunto A e uma relação binária R definida em A.

6) Seja $I = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, liste todos os elementos das seguintes relações (1.0 pto)

- a) $I \times I$
- b) $R_1 = \{ \langle x, y \rangle \mid x, y \in I \text{ e } x < y \}$
- c) $R_2 = \{ \langle x, y \rangle \mid x, y \in I \text{ e } x = y \}$

7) Seja $A = \{a, b, c, d\}$. Caracterize: (1.0 pto)

- a) uma relação que seja ao mesmo tempo simétrica e anti-simétrica, mas não reflexiva
- b) uma relação reflexiva que seja uma função
- c) uma relação R que satisfaça $R \cap R^{-1} = \emptyset$
- d) uma relação R que satisfaça $R = R^{-1}$

8) Seja $X = \{1, 4, 9, 16, \dots\}$. Sugira uma ou mais relações de ordem parcial em X. (1.0 pto)

9) Cada uma das seguintes sentenças define uma relação R nos números naturais. Diga se elas são relações de equivalência, de ordem parcial ou nenhuma das duas: (1.0 pto)

- a) x é menor ou igual a y
- b) x “divide” y
- c) $x + y = 10$

10) Dê exemplos de relações definidas no conjunto $A = \{1, 2, 3\}$ (1.0 pto)

- a) reflexiva, transitiva, mas não simétrica
- b) simétrica e transitiva, mas não reflexiva
- c) simétrica e anti-simétrica

11) Digamos que dois números inteiros estejam próximos um do outro se sua diferença for no máximo 2. Por exemplo, 3 está próximo de 5, 10 está próximo de 9, mas 8 não está próximo de 4. Representemos por R essa relação “estar próximo de”. (1.0 pto)

- a) Escreva R como um conjunto $R = \{ \langle x, y \rangle : \dots \}$
- b) R é reflexiva ou antirreflexiva ?
- c) R é simétrica ou antissimétrica ?
- d) R é transitiva ?

12) Defina a relação \leq^{-1} ? O que ela significa ? (1.0 pto)

13) Seja $A = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Defina a relação de congruência em módulo 4 em A. Particione o conjunto A encontrando as classes de equivalência geradas pelos elementos de A. (1.0 pto)

14) Seja A o conjunto de inteiros não-nulos e seja \approx a relação em $A \times A$ definido por

$$(a,b) \approx (c,d) \quad \text{se} \quad ad = bc$$

Mostre que \approx é uma relação de equivalência. (0.5 pto)

15) Mostre que uma relação R é simétrica se e somente se $R = R^{-1}$. (0.5 pto)