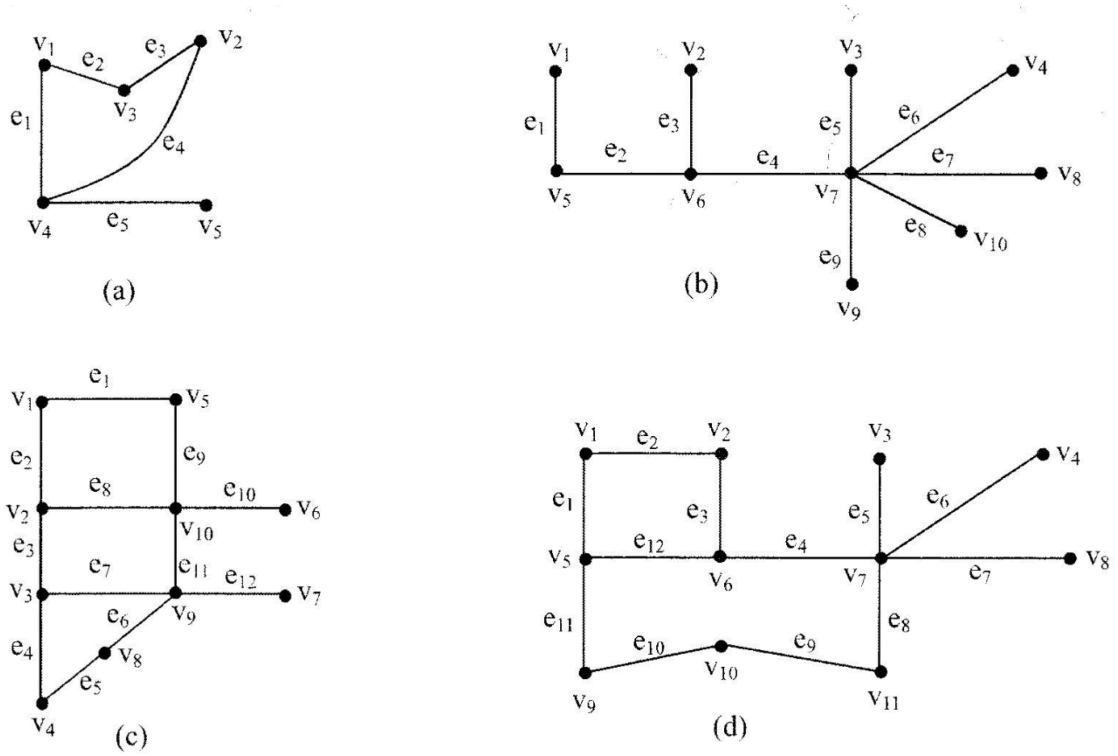
2ª Série de exercícios – Teoria dos Grafos

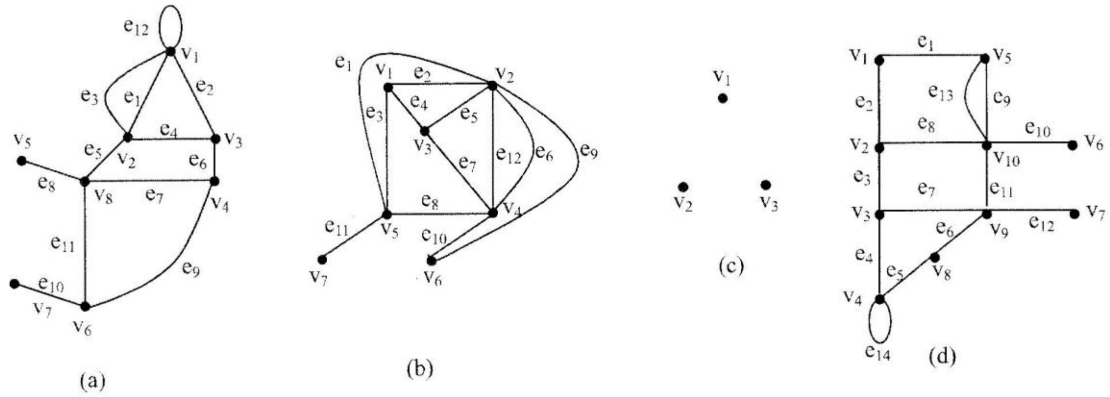
1) Verifique se cada um dos grafos a seguir é bipartido. Se o grafo em questão for bipartido, redesenhe-o de forma a evidenciar a bipartição, especificando os conjuntos disjuntos.



2) Determine a validade ou não das afirmações a seguir, justificando cada uma delas:

a) Todo grafo é seu próprio subgrafo.
b) Um subgrafo de um subgrafo de G é subgrafo de G.
c) Um único vértice em um grafo G é subgrafo de G.
d) Uma única aresta de G, juntamente com seus vértices-extremidade, é um subgrafo de G.

Os próximos exercícios fazem referência aos seguintes grafos



3) Especifique 3 subgrafos geradores para cada um dos grafos a), b) c) e d).

4) Para os 4 grafos acima, defina os subgrafos G – U, onde U = $\{v_1, v_3\}$

5) Construa o grafo básico simples de a), b), c) e d).

6) Para cada um dos grafos a), b) e d) construa os subgrafos induzidos G[U], para U = {v_1, v_3, v_5, v_6}, e G[F], para F = {e=, e_2, e_6, e_8}.

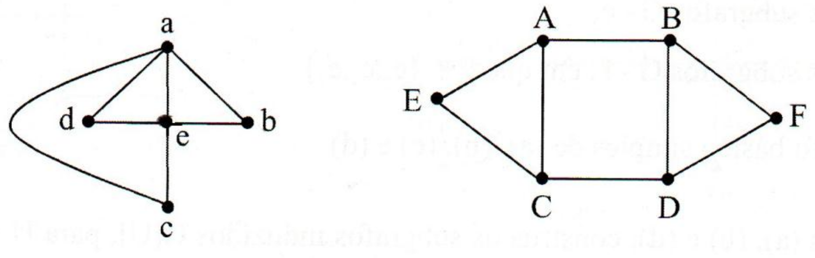
7) Para cada um dos grafos a), b), c) e d) construa um novo grafo, resultante da fusão dos vértices v_1 com v_2.

8) Verifique, usando definições da “álgebra” dos grafos, que se G1 e G2 são arestas disjuntos, então temos que G1 ∩ G2 é igual ao grafo nulo e G1 ⊕ G2 = G1 ∪ G2.

9) Verifique que se G1 e G2 são vértices-disjuntos então G1 ∩ G2 = ∅.

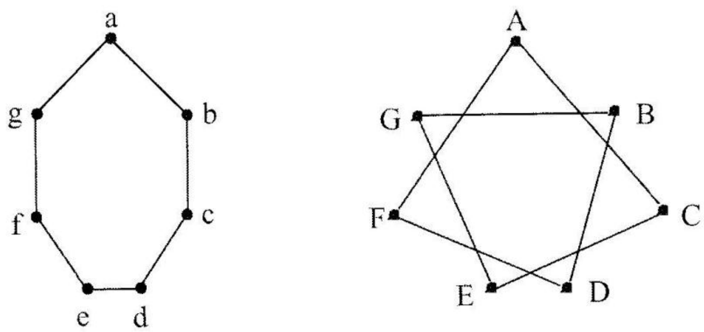
10) Determine se os grafos G1 e G2 a seguir são isomorfos. Se forem, escreva as funções f e g que estabelecem o isomorfismo. Caso contrário, forneça um invariante que os grafos não compartilham.
(Lembre-se também que mesmo no caso de grafos não isomorfos, eles podem compartilhar as propriedades invariantes (vide Ex. 3.8 da apostila). Nesse caso, descreva qual a alteração na topologia que caracteriza a transformação não-isomorfa.)

a)



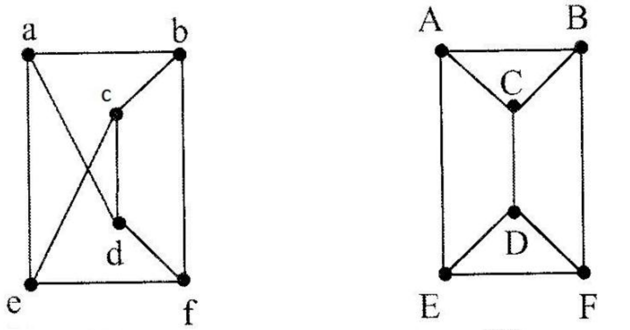
G1 G2

b)



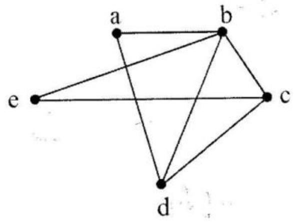
G1 G2

c)

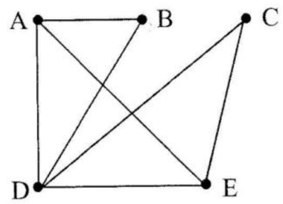


G1 G2

d)

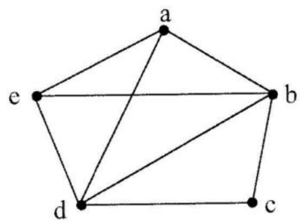


G1

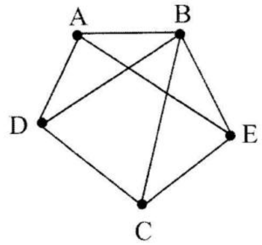


G2

e)

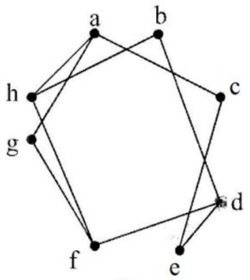


G1

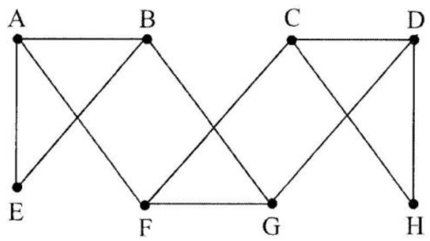


G2

f)

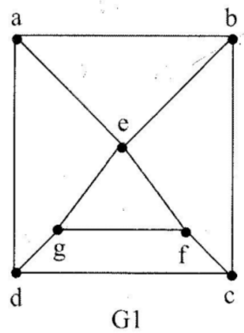


G1

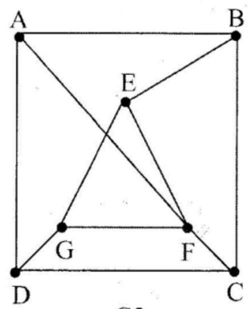


G2

g)

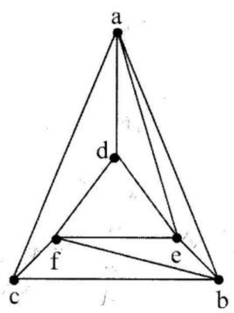


G1

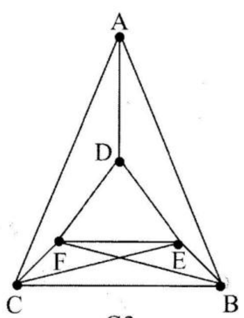


G2

h)



G1



G2

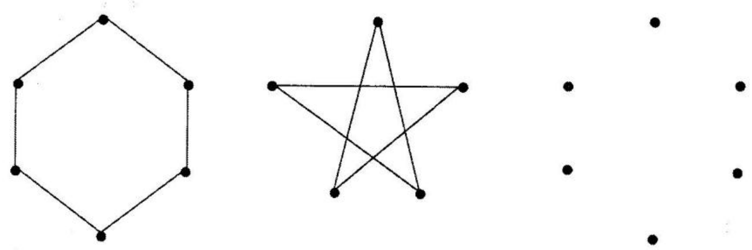
11) Para cada um dos itens a seguir, desenhe o grafo com a propriedade especificada ou justifique porque tal grafo não existe.

a) Grafo G com seis vértices, cada um com grau três.
b) Grafo G com cinco vértices, cada um com grau três.
c) Grafo G com quatro vértices, cada um com grau um.
d) Grafo G com seis vértices e quatro arestas.
e) Grafo G com quatro arestas e quatro vértices com graus 1,2,3,4.
f) Grafo G com quatro vértices de graus 1,2,3,4.
g) Grafo G simples com seis vértices e graus 1,2,3,4,5,5.
h) Grafo G simples com cinco vértices e graus 2,3,3,4,4.
i) Grafo G simples com cinco vértices e graus 2,2,4,4,4.

12) É possível se ter um grafo conectado tal que a remoção de qualquer aresta resulte em um grafo não conectado ? Justifique sua resposta com um exemplo ou provando porque tal grafo não existe.

13) Um grafo simples é chamado de autocomplementar se for isomorfo ao seu próprio complemento.

a) Quais dos grafos a seguir são autocomplementares ?



(a) (b) (c)

b) Prove que, se G é um grafo autocomplementar com n vértices, então n = 4t ou n = 4t + 1, para algum inteiro t (dica: considere o número de arestas do K_n).
c) Especifique 3 grafos autocomplementares de 4 vértices e outros 3 de 5 vértices.

14) Seja G um grafo simples com n vértices e H seu complemento.

a) Prove que para cada vértice v em G, $d_G(v) + d_H(v) = n - 1$
b) Suponha que G tenha exatamente um vértice par. Quantos vértices ímpares H tem?

10) Um grafo tripartido completo G = (V,E) é um grafo simples no qual o conjunto V é a união de 3 subconjuntos não-vazios V_1 , V_2 e V_3 com $V_i \cap V_j = \emptyset$ para $i \neq j$, sendo que uma aresta une dois vértices $u,v \in V$, se e somente se, u e v não pertencem a mesma partição V_i . Trata-se de uma generalização do grafo bipartido.

a) Desenhe os grafos $K_{2,2,2}$ e $K_{3,3,2}$
b) Encontre o número de arestas de $K_{3,4,5}$
c) Quantas arestas existem no grafo $K_{r,s,t}$?