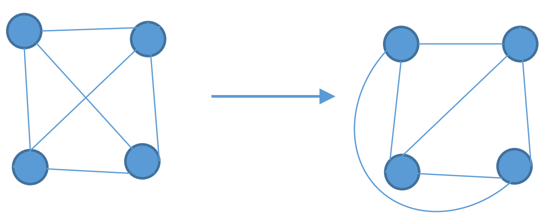
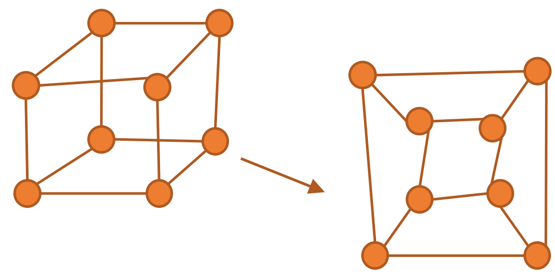
Grafos Planares

Definição: Um grafo é plano se pode ser desenhado numa superfície plana sem que haja cruzamento de arestas. G é planar se G for isomorfo a um grafo plano.



H (K4)
H é planar
(não é plano)

Plano e planar



Importância:

1) Grafos planares são esparsos (poucas arestas) mas são conexos.
2) Diversos problemas NP podem ser simplificados em grafos planares.

Engenharias:

projetos linhas férreas/metrô, transmissão, encanamento...

circuitos impresso (VLSI)

Objetivo: Como caracterizar grafos planares? Dado G, ele é planar?

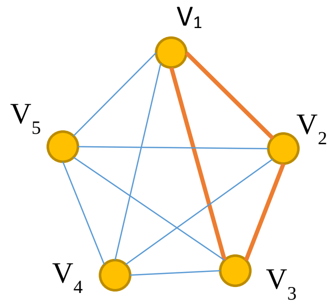
Curvas de Jordan

Definição: Toda curva fechada que não intercepta a si própria.

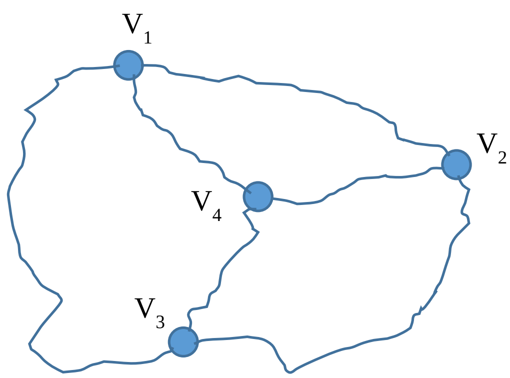
Teorema: Se C é curva de Jordan com $x \in int(C)$ e $y \in ext(C)$ então qualquer curva que uma x a y intercepta C.

Teorema: O grafo completo K_5 não é planar.

Assuma K_5 planar e veja que isso é impossível.



C = $V_1V_2V_3V_1$ (Curva de Jordan)



$$\left\{ \begin{array}{l} V_4 \in int(C) \\ V_4 \in ext(C) \end{array} \right.$$

Com V_4 temos

$$\left\{ \begin{array}{l} C_1 = V_1V_2V_4V_1 \\ C_2 = V_2V_3V_4V_2 \\ C_3 = V_1V_3V_4V_1 \end{array} \right.$$

Opções para V_5:

a) $V_5 \in ext(C) \rightarrow (V_4, V_5)$cruza (X)
b) $V_5 \in int(C_1) \rightarrow (V_3, V_5)$cruza (X)
c) $V_5 \in int(C_2) \rightarrow (V_1, V_5)$cruza (X)
d) $V_5 \in ext(C_3) \rightarrow (V_2, V_5)$cruza (X)

Portanto, K_5 não é planar.

Teorema: O grafo bipartido $K_{3,3}$ não é planar.

Obs: Utility problem

Fórmula de Euler: Seja G plano e conexo. Então $n - m + f = 2$ cujo $n = |V|$, $m = |E|$, $f =$ nº faces.

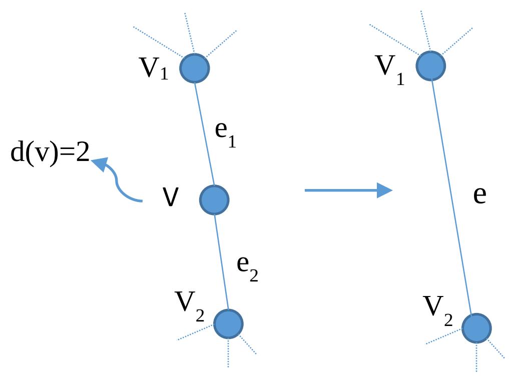
Obs: *Propriedade*: Se G é planar então $m \leq 3(n-2)$. Ele é esparso.

Teorema de Kuratowski (1930)

Como determinar se G é planar ou não através de 3 operações:

i) Remoção arestas
ii) Redução de séries
iii) Remoção de vértices

Def: Redução de série (arestas)



Def: Grafos Homeomorfos

G_1 e G_2 são homeomorfos se puderem ser reduzidos a grafos isomorfos a partir de redução de série.

Teorema de Kuratowski: Um grafo G é planar se e somente se não tiver um subgrafo homeomorfo a K_5 ou $K_{3,3}$.

Extra:

https://en.wikipedia.org/wiki/Planarity

https://en.wikipedia.org/wiki/Planar_graph

https://en.wikipedia.org/wiki/Jordan_curve_theorem

http://w3.math.uminho.pt/~pedro/Aulas0506/Discreta/grafos/node7.html

https://en.wikipedia.org/wiki/Kuratowski%27s_theorem