089109 - Cálculo 1 - Turma C

Quarta lista de exercícios

Prof. Marcelo José Dias Nascimento 4 de abril de 2011

---

1. Seja f uma função contínua no ponto 3 com $f(3) = 10$. Mostre que existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in D_f$,
$$3 - \delta < x < 3 + \delta \Rightarrow f(x) > 9.$$

2. Se f é contínua em 1 e $f(1) = 4$, mostre que existe $r > 0$ tal que para todo $x \in D_f$,
$$1 - r < x < 1 + r \Rightarrow \frac{7}{2} < f(x) < \frac{9}{2}.$$

3. Dê um exemplo de uma função f de maneira que $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)|$ exista, mas $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ não exista.

4. Mostre que $f(x) = \cos x$ é contínua, para todo $x \in \mathbb{R}$. $\Big[$ *Sugestão: mostre e use a identidade* $\cos x - \cos x_0 = -2 \sin\left(\frac{x + x_0}{2}\right) \sin\left(\frac{x - x_0}{2}\right)$ $\Big]$

5. Considere $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ e $h(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \geqslant 6 \\ f(x), & \text{se } x < 6 \end{cases}$. Verifique se as afirmações abaixo são verdadeiras ou não.
   (a) $\lim\limits_{x \to 2} h(f(x)) = h(\lim\limits_{x \to 2} f(x))$
   (b) $\lim\limits_{x \to 2} f(h(x)) = f(\lim\limits_{x \to 2} h(x))$.

6. Mostre que existe um número real x_0 tal que $x_0^5 - 4x_0 + 1 = 7,21$.

7. (a) Se $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 9$, mostre que existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) = 100$.
   (b) Mostre que a equação $x^5 - 3x^4 - 2x^3 - x + 1 = 0$ tem, pelo menos, uma raiz no intervalo $[0, 1]$.

8. Dada a função $f : [-2, 7] \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \begin{cases} 4 - \frac{x^2}{2}, & \text{se } -2 \leqslant x < 4 \\ 2, & \text{se } 4 \leqslant x \leqslant 7 \end{cases}$, verifique se f tem máximo e/ou mínimo no intervalo $[-2, 7]$. Justifique sua resposta. Caso a resposta seja negativa, decida se isto contradiz o Teorema de Weirstrass e justifique sua resposta.

9. Um monge tibetano deixa o monastério às 7 horas da manhã e segue sua caminhada usual para o topo da montanha, chegando lá às 7 horas da noite. Na manhã seguinte, ele parte do topo às 7 horas da manhã, pega o mesmo caminho de volta e chega ao monastério às 7 horas da noite. Mostre que existe um ponto no caminho que o monge vai cruzar exatamente na mesma hora do dia em ambas as caminhadas.

10. Sejam a, b, $c \in \mathbb{R}$ e suponha que $|ax^2 + bx + c| \leqslant |x|^3$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Prove que $a = b = c = 0$ necessariamente.

11. Seja $f(x) = x^5 + x + 1$. Mostre que f admite pelo menos uma raiz no intervalo $[-1, 0]$.

12. Mostre que a equação $x^3 - \dfrac{1}{x^4 + 1} = 0$ admite pelo menos uma raiz real.

13. Seja $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{x^2 + x}{x^2 + 1}$.

    (a) Prove que o valor máximo de f é $f(1)$.

    (b) Mostre que existe $x_1 \in (-1, 0)$ tal que $f(x_1)$ é o valor mínimo de f .

14. Seja $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua, com $f(a) < f(b)$. Suponha que para quaisquer $s, t \in [a, b]$ com $s \neq t$, tem-se $f(s) \neq f(t)$. Prove que f é estritamente crescente.

15. Seja f uma função definida por $f(x) = 2x^3 - \sqrt{x^2 + 3x}$.

    (a) Determine o domínio de f.

    (b) Verifique que f é contínua em $[0, +\infty)$.

    (c) Mostre que 1 a única raiz de f em $(0, +\infty)$, que $f(2) > 0$ e que $f\left(\dfrac{1}{2}\right) < 0$.

    (d) Conclua que $f(x) > 0$ em $(1, +\infty)$ e que $f(x) < 0$ em $(0, 1)$.