

# Задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения

Скалько Юрий Иванович  
Цыбулин Иван

# Обыкновенные дифференциальные уравнения

## Задача Коши

Дано обыкновенное дифференциальное уравнение 1го порядка  
и начальное условие

$$\begin{aligned}\frac{dy(t)}{dt} &= G(t, y(t)) \\ y(0) &= y_0\end{aligned}$$

Требуется найти решение  $y(t)$  при  $t \in [0, T]$

# Обыкновенные дифференциальные уравнения

## Приближение непрерывной функции

Решением задачи коши является некоторая непрерывная функция  $y(t)$ .

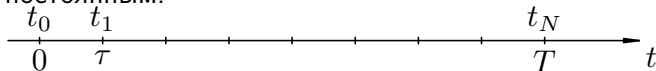
Поскольку вычислительная техника не может работать с произвольными непрерывными функциями, требуется упростить вид функции решения  $y(t)$ .

# Обыкновенные дифференциальные уравнения

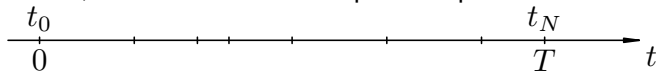
## Сетка

Введем на отрезке  $[0, T]$ , на котором решается задача Коши, сетку из точек  $t_n$ .

- Если  $\tau = t_{n+1} - t_n$  одинаков для всех  $n$ , то сетка называется равномерной. При этом шаг сетки  $\tau$  является постоянным.



- Иначе, сетка называется неравномерной



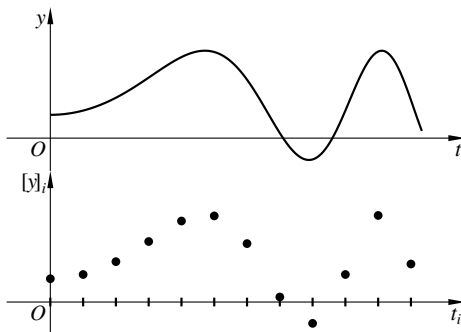
# Обыкновенные дифференциальные уравнения

## Сеточная функция

Сеточная функция, в отличие от непрерывной, является элементом конечномерного пространства  $\mathbb{R}^n$

Операция получения из непрерывной функции  $y(t)$  сеточной функции  $u$  называется *проецированием* и обозначается квадратными скобками.

$$u_n = y(t_n) = [y]_n$$



# Обыкновенные дифференциальные уравнения

## Операторная запись

Задачу Коши

$$\begin{aligned}\frac{dy(t)}{dt} &= G(t, y(t)) \\ y(0) &= y_0\end{aligned}$$

можно записать в операторном виде

$$\mathcal{L}y(t) = f(t)$$

Оператор  $\mathcal{L}$  состоит из дифференциального оператора и начального условия

$$\mathcal{L}y(t) = \begin{cases} \frac{dy(t)}{dt} - G(t, y(t)) \\ y(0) \end{cases}, \quad f(t) = \begin{cases} 0 \\ y_0 \end{cases}$$

# Обыкновенные дифференциальные уравнения

## Разностная задача

Поскольку неизвестной функцией является теперь *сеточная функция*  $[y]$  необходимо переформулировать исходную задачу Коши для непрерывной функции, в некоторую, похожую, *разностную задачу*.

# Обыкновенные дифференциальные уравнения

## Разностная задача

Поскольку неизвестной функцией является теперь *сеточная функция*  $[y]$  необходимо переформулировать исходную задачу Коши для непрерывной функции, в некоторую, похожую, *разностную задачу*.

По аналогии с общим видом задачи Коши

$$\mathcal{L}y(t) = f(t)$$

рассмотрим разностную задачу

$$\mathcal{L}^\tau \mathbf{u} = \mathbf{g}$$

Здесь  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{g}$  — сеточные функции, а  $\mathcal{L}^\tau$  — разностный оператор



# Обыкновенные дифференциальные уравнения

## Сравнение различных задач

Допустим имеется дифференциальная задача Коши

$$\mathcal{L}y(t) = f(t)$$

и разностная задача

$$\mathcal{L}^\tau \mathbf{u} = \mathbf{g}$$

- Как убедиться, что эти задачи действительно “похожи”, и главное, что “похожи” *решения* этих задач?

# Обыкновенные дифференциальные уравнения

## Сравнение различных задач

Допустим имеется дифференциальная задача Коши

$$\mathcal{L}y(t) = f(t)$$

и разностная задача

$$\mathcal{L}^\tau \mathbf{u} = \mathbf{g}$$

- Как убедиться, что эти задачи действительно “похожи”, и главное, что “похожи” *решения* этих задач?
- Как вообще можно сравнить между собой непрерывную функцию  $y(t)$  и сеточную функцию  $\mathbf{u}$ ?

# Обыкновенные дифференциальные уравнения

## Сравнение решений

Сравнивать решения разных задач из разных пространств напрямую невозможно.

Вместо этого необходимо перевести решения в некоторое другое пространство и сравнивать уже элементы одного и того же пространства.

# Обыкновенные дифференциальные уравнения

## Сравнение решений

Сравнивать решения разных задач из разных пространств напрямую невозможно.

Вместо этого необходимо перевести решения в некоторое другое пространство и сравнивать уже элементы одного и того же пространства.

Оказывается, удобно сравнивать решения именно в пространстве сеточных функций. Для этого необходимо перевести непрерывное решение  $y(t)$  в пространство сеточных функций. Операция проектирования как раз и служит для этого

$$y(t) \rightarrow [y]$$

# Обыкновенные дифференциальные уравнения

## Сходимость

Можно легко сравнить проекцию решения дифференциальной задачи  $[y]_n$  и решение разностной задачи  $u_n$ .

$$\varepsilon = \|[y] - \mathbf{u}\| = \max_n |[y]_n - u_n|$$

При изменении шага сетки  $\tau$  будут получаться различные разностные задачи с различными решениями  $\mathbf{u}^{(\tau)}$ .

$$\varepsilon^{(\tau)} = \|[y] - \mathbf{u}^{(\tau)}\| = \max_n |[y]_n - u_n^{(\tau)}|$$

Если  $\varepsilon^{(\tau)} \rightarrow 0$  при  $\tau \rightarrow 0$ , то говорят о *сходимости* решений разностной задачи к решению дифференциальной задачи. Если при этом  $\varepsilon^{(\tau)} = O(\tau^k)$ , то говорят о сходимости  $k$ -го порядка

# Обыкновенные дифференциальные уравнения

## Пример

Рассмотрим задачу Коши

$$y' = y, \quad y(0) = 1, \quad t \in [0, T]$$

и разностную задачу

$$u_{n+1} = (1 + \tau)u_n, \quad u_0 = 1, \quad n = \overline{0, N}, \quad \tau = \frac{T}{N}$$

Решения обеих задач легко находятся:  $y(t) = e^t$  и  $u_n = (1 + \tau)^n$

$$\begin{aligned} \varepsilon(\tau) &= e^T - (1 + \tau)^N = e^T - e^{N \ln(1 + \tau)} = \\ &= e^T - e^{T - \frac{T\tau}{2} + o(\tau)} = e^T \left( 1 - e^{1 - \frac{\tau}{2} + o(\tau)} \right) = \frac{e^T}{2} \tau + o(\tau) = O(\tau) \end{aligned}$$

Решение разностной задачи сходится к решению дифференциальной задачи с первым порядком

# Обыкновенные дифференциальные уравнения

## Сходимость

Наличие сходимости позволяет находить решение дифференциальной задачи с любой точностью, взяв в качестве решения решение разностной задачи.

Например, в примере для вычисления  $y(1)$  можно было взять  $u_N$  при достаточно большом  $N$ .

# Обыкновенные дифференциальные уравнения

## Сходимость

Наличие сходимости позволяет находить решение дифференциальной задачи с любой точностью, взяв в качестве решения решение разностной задачи.

Например, в примере для вычисления  $y(1)$  можно было взять  $u_N$  при достаточно большом  $N$ .

Однако, напрямую проверять сходимость бессмысленно, так как требуется иметь решение исходной дифференциальной задачи.

Рассмотрим другие свойства, которые можно проверить не обладая точным решением



# Обыкновенные дифференциальные уравнения

## Аппроксимация

Аппроксимация показывает насколько хорошо решение дифференциальной задачи

$$\mathcal{L}y(t) = f(t)$$

удовлетворяет разностной задаче

$$\mathcal{L}^\tau \mathbf{u} = \mathbf{g}$$

# Обыкновенные дифференциальные уравнения

## Аппроксимация

Аппроксимация показывает насколько хорошо решение дифференциальной задачи

$$\mathcal{L}y(t) = f(t)$$

удовлетворяет разностной задаче

$$\mathcal{L}^\tau \mathbf{u} = \mathbf{g}$$

Поскольку решение дифференциальной задачи является непрерывной функцией, а разностная задача сформулирована в терминах сеточной функции, необходимо вначале спроецировать решение  $y(t)$  на сетку, а уже после этого подставлять в разностную задачу  $\mathcal{L}^\tau \mathbf{u} = \mathbf{g}$

# Обыкновенные дифференциальные уравнения

## Аппроксимация

Аппроксимация показывает насколько хорошо решение дифференциальной задачи

$$\mathcal{L}y(t) = f(t)$$

удовлетворяет разностной задаче

$$\mathcal{L}^{\tau} \mathbf{u} = \mathbf{g}$$

Поскольку решение дифференциальной задачи является непрерывной функцией, а разностная задача сформулирована в терминах сеточной функции, необходимо вначале спроецировать решение  $y(t)$  на сетку, а уже после этого подставлять в разностную задачу  $\mathcal{L}^{\tau} \mathbf{u} = \mathbf{g}$

Поскольку, в общем случае, такая функция не обязана быть решением разностной задачи, в правой части появится невязка

$$\mathcal{L}^{\tau}[y] = \mathbf{g} + \delta \mathbf{g}$$

$$\mathcal{L}^\tau[y] = \mathbf{g} + \delta \mathbf{g}$$

Величина невязки в правой части называется ошибкой аппроксимации

$$\delta g = \|\delta \mathbf{g}\|$$

Если эта величина стремится к нулю при  $\tau \rightarrow 0$ , то говорят что разностная задача *аппроксимирует* дифференциальную, а если дополнительно  $\delta g = O(\tau^k)$ , то говорят, что имеет место аппроксимация  $k$ -го порядка

# Обыкновенные дифференциальные уравнения

## Ошибка аппроксимации

$$\mathcal{L}^\tau[y] = \mathbf{g} + \delta \mathbf{g}$$

Величина невязки в правой части называется ошибкой аппроксимации

$$\delta g = \|\delta \mathbf{g}\|$$

Если эта величина стремится к нулю при  $\tau \rightarrow 0$ , то говорят что разностная задача *аппроксимирует* дифференциальную, а если дополнительно  $\delta g = O(\tau^k)$ , то говорят, что имеет место аппроксимация  $k$ -го порядка

Но исходя из определения не ясно, как найти ошибку аппроксимации не обладая точным решением  $y(t)$  или его проекцией  $[y]$

# Обыкновенные дифференциальные уравнения

## Нахождение ошибки аппроксимации

Выберем произвольную точку  $t^*$ . Удачный выбор точки позволит впоследствии сильно сократить объем вычислений. Разностный оператор  $\mathcal{L}^\tau$  действуя на сеточную функцию  $[y]$ , на самом деле, действует на значения  $y(t_n)$ . Каждое из этих значений можно представить по формуле Тейлора в виде

$$y(t_n) = y(t^*) + (t_n - t^*)y'(t^*) + \frac{(t_n - t^*)^2}{2}y''(t^*) + \dots + \frac{(t_n - t^*)^k}{k!}y^{(k)}(\xi_n)$$

Отметим, что все производные функции  $y(t)$  взяты в одной и той же точке  $t^*$ . Вспомним, что  $y(t)$  является на самом деле решением задачи Коши, поэтому

$$y'(t^*) = G(t^*, y(t^*))$$

$$y''(t^*) = G_t(t^*, y(t^*)) + G_y(t^*, y(t^*))G(t^*, y(t^*))$$

$$\vdots$$

# Обыкновенные дифференциальные уравнения

## Нахождение ошибки аппроксимации

Итак, имея представление в виде формулы Тейлора

$$y(t_n) = y(t^*) + (t_n - t^*)y'(t^*) + \frac{(t_n - t^*)^2}{2}y''(t^*) + \dots + \frac{(t_n - t^*)^k}{k!}y^{(k)}(\xi_n)$$

а также связи

$$y'(t^*) = G(t^*, y(t^*))$$

$$y''(t^*) = G'_t(t^*, y(t^*)) + G'_y(t^*, y(t^*))G(t^*, y(t^*))$$

$$\vdots$$

можно выразить ошибку аппроксимации  $\delta g_n$  как

$$\delta g_n = F_0(y(t^*)) + \tau F_1(y(t^*)) + \dots + \frac{\tau^{k-1}}{k-1!}F_{k-1}(y(t^*)) + O(\tau^k)$$

Если все функции  $F_0(y), F_1(y), \dots, F_k(y)$  тождественно равны нулю, то ошибка аппроксимации будет иметь порядок  $O(\tau^k)$

# Обыкновенные дифференциальные уравнения

## Пример

Рассмотрим задачу Коши

$$y' = t \sin y, \quad y(0) = 1, \quad t \in [0, T]$$

и разностную задачу

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{\tau} = \tau \left( n + \frac{1}{2} \right) \sin \left( u_n + \frac{\tau^2 n}{2} \sin u_n \right), \quad u_0 = 1$$

Подставим  $\mathbf{u} = [y]$

$$\begin{aligned} \frac{[y]_{n+1} - [y]_n}{\tau} &= \tau \left( n + \frac{1}{2} \right) \sin \left( [y]_n + \frac{\tau^2 n}{2} \sin [y]_n \right) + \delta g_{n+1} \\ [y]_0 &= 1 + \delta g_0 \end{aligned}$$

Заметим, что начальное условие является частью разностного оператора и тоже может иметь невязку!



# Обыкновенные дифференциальные уравнения

## Пример

Задача Коши

$$y' = t \sin y, \quad y(0) = 1, \quad t \in [0, T]$$

Разностная задача

$$\frac{[y]_{n+1} - [y]_n}{\tau} = \tau \left( n + \frac{1}{2} \right) \sin \left( [y]_n + \frac{\tau^2 n}{2} \sin [y]_n \right) + \delta g_{n+1}$$

$$[y]_0 = 1 + \delta g_0$$

Представим  $[y]_{n+1}$  в виде формулы Тейлора в окрестности точки  $t_n$

$$[y]_{n+1} = [y]_n + \tau [y']_n + \frac{\tau^2}{2} [y'']_n + O(\tau^3)$$

$$\frac{[y]_{n+1} - [y]_n}{\tau} = [y']_n + \frac{\tau}{2} [y'']_n + O(\tau^2)$$

# Обыкновенные дифференциальные уравнения

## Пример

Задача Коши

$$y' = t \sin y, \quad y(0) = 1, \quad t \in [0, T]$$

Разностная задача

$$\frac{[y]_{n+1} - [y]_n}{\tau} = \tau \left( n + \frac{1}{2} \right) \sin \left( [y]_n + \frac{\tau^2 n}{2} \sin [y]_n \right) + \delta g_{n+1}$$

$$[y]_0 = 1 + \delta g_0$$

Воспользуемся дифференциальным уравнением

$$[y']_n = n\tau \sin [y]_n = O(1) \quad (n = O(\tau^{-1}))$$

$$[y'']_n = \sin [y]_n + (n\tau)^2 \cos [y]_n \sin [y]_n = O(1)$$

$$\begin{aligned} \frac{[y]_{n+1} - [y]_n}{\tau} &= [y']_n + \frac{\tau}{2} [y'']_n + O(\tau^2) = \\ &= n\tau \sin [y]_n + \frac{\tau}{2} (\sin [y]_n + (n\tau)^2 \cos [y]_n \sin [y]_n) + O(\tau^2) \end{aligned}$$

# Обыкновенные дифференциальные уравнения

## Пример

Задача Коши

$$y' = t \sin y, \quad y(0) = 1, \quad t \in [0, T]$$

Разностная задача

$$\frac{[y]_{n+1} - [y]_n}{\tau} = \tau \left( n + \frac{1}{2} \right) \sin \left( [y]_n + \frac{\tau^2 n}{2} \sin [y]_n \right) + \delta g_{n+1}$$

$$[y]_0 = 1 + \delta g_0$$

Представим правую часть в виде формулы Тейлора

$$\begin{aligned} \tau \left( n + \frac{1}{2} \right) \sin \left( [y]_n + \frac{\tau^2 n}{2} \sin [y]_n \right) &= \\ &= (n\tau) \sin [y]_n + \frac{\tau}{2} \sin [y]_n + \frac{\tau}{2} (n\tau)^2 \cos [y]_n \sin [y]_n + O(\tau^2) \end{aligned}$$

# Обыкновенные дифференциальные уравнения

## Пример

Задача Коши

$$y' = t \sin y, \quad y(0) = 1, \quad t \in [0, T]$$

Разностная задача

$$\frac{[y]_{n+1} - [y]_n}{\tau} = \tau \left( n + \frac{1}{2} \right) \sin \left( [y]_n + \frac{\tau^2 n}{2} \sin [y]_n \right) + \delta g_{n+1}$$

$$[y]_0 = 1 + \delta g_0$$

Сравнивая разложения для правой и левой частей, получаем

$$\delta g_0 = 0$$

$$\delta g_{n+1} = O(\tau^2)$$

$$\delta g = \|\delta \mathbf{g}\| = O(\tau^2)$$

Разностная задача аппроксимирует дифференциальную со вторым порядком

# Обыкновенные дифференциальные уравнения

## Аппроксимация

Не стоит забывать проверять аппроксимацию начальных условий. Хотя в предыдущем примере аппроксимация с любым порядком начального условия была очевидна, так бывает не всегда.

Например, изменив в разностной задаче начальное условие с

$$u_0 = 1$$

на

$$u_0 = 1 + 2\tau$$

мы бы все равно получили аппроксимирующую задачу, но порядок аппроксимации был бы уже первый, так как

$$\delta g_0 = 2\tau = O(\tau)$$

$$\delta g_{n+1} = O(\tau^2)$$

$$\delta g = \|\delta g_n\| = O(\tau)$$

# Обыкновенные дифференциальные уравнения

## Устойчивость

При проверке аппроксимации мы убеждаемся, что решение  $[y]$  “почти” удовлетворяет задаче

$$\mathcal{L}^\tau \mathbf{u} = \mathbf{g}$$

Рассмотрим возмущенную задачу

$$\mathcal{L}^\tau \mathbf{u} = \mathbf{g} + \delta \mathbf{g}$$

Эти задачи отличаются только небольшим возмущением правой части. Если это возмущение не сильно повлияет на решение, можно утверждать, что  $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$ . Если допустить единственность решения возмущенной задачи, то

$$\mathcal{L}^\tau \mathbf{v} = \mathbf{g} + \delta \mathbf{g} = \mathcal{L}^\tau [y]$$

и  $[y] = \mathbf{v}$ , а следовательно и  $\mathbf{u} \approx [y]$ .

Введем понятие *устойчивой* разностной задачи. Задача

$$\mathcal{L}^\tau \mathbf{u} = \mathbf{g}$$

называется *устойчивой*, если для для небольших возмущений  $\delta \mathbf{g}_n$  задача

$$\mathcal{L}^\tau \mathbf{u} = \mathbf{g} + \delta \mathbf{g}$$

имеет единственное решение  $\mathbf{v}_n$ , причем

$$\|\mathbf{v} - \mathbf{u}\| < C \|\delta \mathbf{g}\|$$

а константа  $C$  не зависит от  $\tau$

### Теорема

Пусть устойчивая с коэффициентом  $C$  разностная задача

$$\mathcal{L}^\tau \mathbf{u} = \mathbf{g}$$

аппроксимирует задачу

$$\mathcal{L}y(t) = f(t)$$

с ошибкой аппроксимации  $\|\delta \mathbf{g}\| = \delta g < D\tau^k$ . Тогда решения разностной задачи сходятся к решению дифференциальной, причем для ошибки сходимости справедлива оценка

$$\varepsilon^{(\tau)} < CD\tau^k \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} 0$$



Устойчивость гарантирует еще одно свойство разностной схемы: любые ошибки, возникающие при решении разностной задачи не могут неограниченно возрастать. Численные ошибки не могут возрасти более чем в  $C$  раз, причем эта константа  $C$  не меняется при уменьшении шага сетки.

# Обыкновенные дифференциальные уравнения

## Устойчивость

В отличие от нахождения ошибки аппроксимации, единого способа проверки устойчивости нет.

Докажем устойчивость разностной задачи

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{\tau} = G \left( t_n + \frac{\tau}{2}, u_n + \frac{\tau}{2} G(t_n, u_n) \right), \quad u_0 = y_0$$

в предположении, что по второму аргументу функция  $G$  Липшицева, то есть

$$|G(t, u) - G(t, v)| < L|u - v|$$

Введем функцию

$$F(t, u, \tau) = u + \tau G \left( t + \frac{\tau}{2}, u + \frac{\tau}{2} G(t, u) \right)$$

# Обыкновенные дифференциальные уравнения

## Устойчивость

$$F(t, u, \tau) = u + \tau G\left(t + \frac{\tau}{2}, u + \frac{\tau}{2} G(t, u)\right)$$

Функция  $F(t, u, \tau)$  также Липшицева по  $u$

$$|F(t, u, \tau) - F(t, v, \tau)| < |u - v| \left(1 + L\tau \left(1 + \frac{L\tau}{2}\right)\right) < e^{L\tau} |u - v|$$

Разностную задачу можно переписать в виде

$$u_{n+1} = F(t_n, u_n, \tau), \quad u_0 = y_0$$

При возмущении исходной задачи на  $\delta \mathbf{g}$  получается задача

$$v_{n+1} = F(t_n, v_n, \tau) + \tau \delta g_{n+1}, \quad v_0 = y_0 + \delta g_0$$

Отметим множитель  $\tau$  перед  $\delta g_{n+1}$ . Он появился при умножении исходной задачи на  $\tau$

# Обыкновенные дифференциальные уравнения

## Устойчивость

$$|F(t, u, \tau) - F(t, v, \tau)| < e^{L\tau} |u - v|$$

$$u_{n+1} = F(t_n, u_n, \tau), \quad u_0 = y_0$$

$$v_{n+1} = F(t_n, v_n, \tau) + \tau \delta g_{n+1}, \quad v_0 = y_0 + \delta g_0$$

Справедлива следующая цепочка оценок

$$|u_0 - v_0| = |\delta g_0|$$

$$|u_1 - v_1| = |F(t_0, u_0, \tau) - F(t_0, v_0, \tau) - \tau \delta g_1| < e^{L\tau} |\delta g_0| + \tau |\delta g_1|$$

$$|u_2 - v_2| = |F(t_1, u_1, \tau) - F(t_1, v_1, \tau) - \tau \delta g_2| < e^{2L\tau} |\delta g_0| + e^{L\tau} \tau |\delta g_1| + \tau |\delta g_2|$$

$$|u_n - v_n| < e^{nL\tau} |\delta g_0| + \frac{e^{nL\tau} - 1}{e^{L\tau} - 1} \tau \max_{n>0} |\delta g_n|$$

$$\|u_n - v_n\| \lesssim e^{LT} |\delta g_0| + \frac{e^{LT} - 1}{L} \max_{n>0} |\delta g_n| \leq \max \left( e^{LT}, \frac{e^{LT} - 1}{L} \right) \|\delta g\|$$

Для данной задачи единственность решения очевидна (все неизвестные  $u_n$  вычисляются последовательно), а константой устойчивости будет

$$\max \left( e^{cT}, \frac{e^{cT} - 1}{c} \right)$$

Заметим, что от  $\tau$  она не зависит. По определению, данная задача устойчива.

Спасибо за внимание!

[tsybulin@crec.mipt.ru](mailto:tsybulin@crec.mipt.ru)