Интегрирование

Собственные интегралы

Цыбулин Иван (tsybulin@crec.mipt.ru)

Задача численного интегрирования

Требуется вычислить определенный интеграл

$$\int_a^b f(x)dx$$

Интеграл предполагается собственным, то есть $a, b \neq \infty$, $|f(x)| < \infty$.

Приближение подынтегральной функции

Для вычисления интеграла, подынтегральную функцию приближают интегрируемой аналитически. Самый простой вариант — приблизить функцию интерполяционным многочленом:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P(x)dx$$

Формулы численного интегрирования называются также *квадратурными формулами* или *квадратурами*.

Формулы для равномерной сетки

Будем приближать функцию на отрезке $[a, b]$ интерполяционным многочленом на равномерной сетке:

- $P_0(x) = f(a)$. Получится формула прямоугольников: $\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)f(a)$
- $P_1(x) = f(a) + f(a,b)(x-a)$. Получится формула трапеций: $\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)\dfrac{f(a)+f(b)}{2}$

Общий случай

Интерполянт в форме Лагранжа $P_p(x) = \sum_{k=0}^{p} f(x_k)\ell_k(x)$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P_p(x)dx = \sum_{k=0}^{p} f(x_k) \int_a^b \ell_k(x)dx =$$

$$= (b-a)\sum_{k=0}^{p} w_k f(x_k), \quad w_k = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \tilde{\ell}_k(t)dt$$

Здесь $\tilde{\ell}_k$ построены уже на отрезке $[-1, 1]$.

Формула Симпсона

Для случая $p = 2$ получаем формулу Симпсона

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)\left[f(a)w_0 + f\left(\frac{a+b}{2}\right)w_1 + f(b)w_0\right],$$

$$w_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{x(x-1)}{2}dx = \frac{1}{6}$$

$$w_1 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(1-x^2)dx = \frac{2}{3}$$

$$w_2 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{x(x+1)}{2}dx = \frac{1}{6}$$

Формулы Ньютона-Котеса

p	Название	Формула	Остаточный член
0	Прямоугольников	$(b-a)f(x_1)$	$\frac{(b-a)^2}{2}f'(\xi)$
1	Трапеций	$(b-a)\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$	$-\frac{(b-a)^3}{12}f''(\xi)$
2	Симпсона	$(b-a)\frac{f(x_1)+4f(x_2)+f(x_3))}{6}$	$-\frac{(b-a)^5}{2880}f^{(4)}(\xi)$
3	Формула 3/8	$(b-a)\frac{f(x_1)+3f(x_2)+3f(x_3)+f(x_4)}{8}$	$-\frac{(b-a)^5}{6480}f^{(4)}(\xi)$

Здесь $x_1, \dots, x_p$ — равномерная сетка на $[a, b]$.

Составные формулы

Разобьем отрезок $[a, b]$ на равные интервалы длины $h = \frac{b-a}{n}$. Применим к каждому отдельному интервалу формулу прямоугольников

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \approx h \sum_{i=1}^n f(x_{i-1}).$$

Применив к каждому формулу трапеций, получаем

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \approx h \sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} =$$

$$= \frac{h}{2}(f(x_0) + 2f(x_1) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n))$$

Объединив интервалы по два и применив к каждой паре формулу Сипсона, получаем

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n/2} \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} f(x)dx \approx 2h \sum_{i=1}^{n/2} \frac{f(x_{2i-2}) + 4f(x_{2i-1}) + f(x_{2i})}{6} =$$

$$= \frac{h}{3}(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \cdots +$$

$$+ 4f(x_{n-3}) + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n))$$

Погрешность составных формул

Пусть элементарная квадратурная формула на одном интервале имеет остаточный член вида

$$R_1 = C(b-a)^{k+1} f^{(k)}(\xi).$$

Тогда суммарная ошибка на всех интервалах

$$R_{\text{сост}} = Ch^{k+1} \sum_{i=1}^{n} f^{(k)}(\xi_i),$$

$$|R_{\text{сост}}| \leqslant Ch^{k+1} \sum_{i=1}^{n} |f^{(k)}(\xi_i)| \leqslant C(b-a)h^k \max_{x\in[a,b]} |f^{(k)}(x)|$$

Для формулы Симпсона требуется оценить ошибку немного иначе, так как она интегрирует пары интервалов:

$$R = \frac{(2h)^5}{2880} \sum_{i=1}^{n/2} f^{(4)}(\xi_i),$$

$$|R| \leqslant 32 \frac{h^5}{2880} \sum_{i=1}^{n/2} |f^{(4)}(\xi_i)| \leqslant \frac{(b-a)h^4}{180} \max_{x \in [a,b]} |f^{(4)}(x)|$$

Погрешности составных формул

$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{n}$	**Название**	**Погрешность**
0	$\forall$	Прямоугольников	$\frac{(b-a)h}{2}M_1$
1	$\forall$	Трапеций	$\frac{(b-a)h^2}{12}M_2$
2	$n=2m$	Симпсона	$\frac{(b-a)h^4}{180}M_4$
3	$n=3m$	Формула 3/8	$\frac{(b-a)h^4}{80}M_4$

Точность квадратурных формул

Алгебраической степенью точности квадратурной формулы называют такое число d, что квадратурная формула точна для всех многочленов степени d, но для некоторых многочленов степени $d+1$ уже не точна. Из вида остаточного члена заключаем, что метод прямоугольников имеет $d=0$, метод трапеций — $d=1$, методы Симпсона и 3/8 — $d=3$.

Можно видеть, что порядок метода (степень h в оценке ошибки) совпадает с $d+1$.

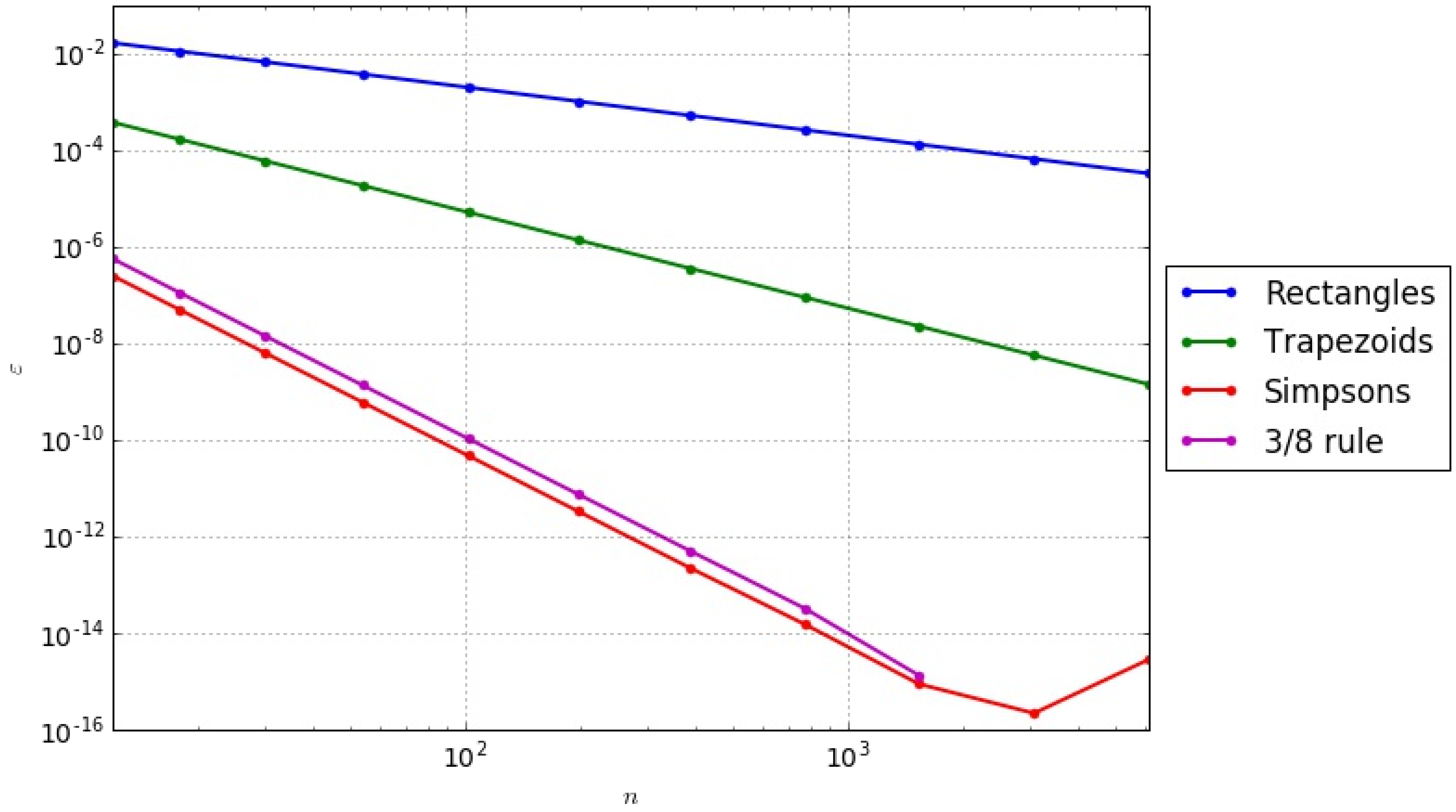
```
def rectangle(f, h):
    return h * sum(f[:-1])

def trapezoid(f, h):
    return 0.5 * h * (f[0] + 2 * sum(f[1:-1]) + f[-1])

def simpson(f, h):
    assert (len(f)-1) % 2 == 0
    return h/3. * (f[0] + 4 * sum(f[1:-1:2]) + \
                   2 * sum(f[2:-2:2]) + f[-1])

def threeeights(f, h):
    assert (len(f)-1) % 3 == 0
    return 3*h/8. * (f[0] + 3 * sum(f[1:-1:3]) + \
                3 * sum(f[2:-1:3]) + 2 * sum(f[3:-3:3]) + f[-1])
```

Show code



10^{-2}
10^{-4}
10^{-6}
10^{-8}
10^{-10}
10^{-12}
10^{-14}
10^{-16}
ε
10^{2}
10^{3}
n
Rectangles
Trapezoids
Simpsons
3/8 rule

Формулы с произвольным расположением узлов

Расположим на отрезке $[a, b]$ узлы $\{x_i\}_{i=1}^m$ произвольно. Тогда проводя по этим узлам интерполяцию, получим квадратурную формулу в том же виде

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)\sum_{k=1}^m w_k f(x_k), \qquad w_k = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 \tilde{\ell}_k(t)dt$$

Очевидно, что такая формула точная для всех многочленов степени $m-1$, то есть алгебраическая точность такой формулы не ниже $m-1$. Как мы видели выше, это означает, что порядок формулы не ниже m.

Формула средней точки

Рассмотрим случай $m = 1$ (один узел). Располагая точку по центру

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right),$$

получаем формулу первой степени точности (то есть второго порядка). Соответствующая составная формула имеет вид

$$\int_a^b f(x)dx \approx h \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right),$$

Уравнения для узлов и весов

Запишем условия точности формулы для многочленов $1, x, x^2, \ldots, x^d$

$$\sum_{k=0}^{p} w_k x_k^j = \int_a^b x^j dx, \qquad j = 0, 1, \ldots, d$$

Это система из $d+1$ нелинейного уравнения с $2m$ неизвестными x_k, w_k — потенциально может иметь решение при $d = 2m-1$.

Оказывается, решение этой системы выражаются через корни ортогональных многочленов.

Узлы квадратуры x_k должны быть выбраны в корнях многочлена $L_{p+1}(x)$. Многочлены $L_j(x)$ образуют ортогональное семейство

$$\int_a^b L_i(x) L_j(x) dx = 0, \quad i \neq j, \qquad \deg L_j(x) = j,\ L_j(x) = x^j + \ldots$$

Веса могут быть найдены либо из линейной системы (после определения x_k система становится линейной), либо по стандартной формуле $w_k = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \tilde{\ell}_k(t) dt$

Более того, этот результат сохраняется и для интегралов вида

$$\int_a^b f(x)\omega(x)dx,$$

где $\omega(x) \geqslant 0$ — известная весовая функция.

В этом случае необходимо узлы взять в корнях многочленов $H_j(x)$, ортогональных с этим весом:

$$\int_a^b H_i(x)H_j(x)\omega(x) = 0,\ i \neq j, \quad \deg H_j(x) = j, H_j(x) = x^j + \dots$$

Веса определяются по формуле $w_k = \int_a^b \ell_k(x)\omega(x)dx$.

Гауссовы квадратуры

Эти квадратурные формулы называются Гауссовыми квадратурами. Для формул с весовой функцией $\omega(x)$ иногда используют название квадратуры Гаусса-Кристоффеля. Также формулы для конкретного веса $\omega(x)$ часто называют по семейству ортогональных многочленов (квадратура Гаусса-Лежандра, Гаусса-Чебышева, Гаусса-Эрмита и т.п.)

Общее свойство данных квадратур — они имеют алгебраический порядок точности $2m-1$ имея всего m узлов на отрезке $[a,b]$. При этом порядок составной квадратурной формулы равен $2m$.

Построим квадратурную формулу для случая $\omega(x) \equiv 1$ для $m = 2$ узлов на отрезке $[-1, 1]$. Для этого необходимо сначала построить соответствующее семейство многочленов вплоть до многочлена $L_2(x)$:

$$L_0(x) \equiv 1$$

$$L_1(x) = x + \alpha$$

$$L_2(x) = x^2 + \beta x + \gamma$$

Многочлен $L_1(x)$ должен быть ортогонален $L_0(x)$:

$$0 = \int_{-1}^{1} L_0(x)L_1(x)dx = \int_{-1}^{1} (x+\alpha)dx = 2\alpha \implies L_1(x) = x.$$

Многочлен $L_2(x)$ должен быть ортогонален $L_0(x)$ и $L_1(x)$:

$$0 = \int_{-1}^{1} L_0(x)L_2(x)dx = \int_{-1}^{1} (x^2+\beta x+\gamma)dx = \frac{2}{3} + 2\gamma$$

$$0 = \int_{-1}^{1} L_1(x)L_2(x)dx = \int_{-1}^{1} x(x^2+\beta x+\gamma)dx = \frac{2}{3}\beta$$

$$L_2(x) = x^2 - \frac{1}{3}$$

Корни многочлена $L_2(x) = x^2 - \frac{1}{3} = 0$ равны $x_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. Эти корни будут узлами квадратуры.

$$w_1 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} dx = \frac{2x_2}{x_2 - x_1} = 1$$

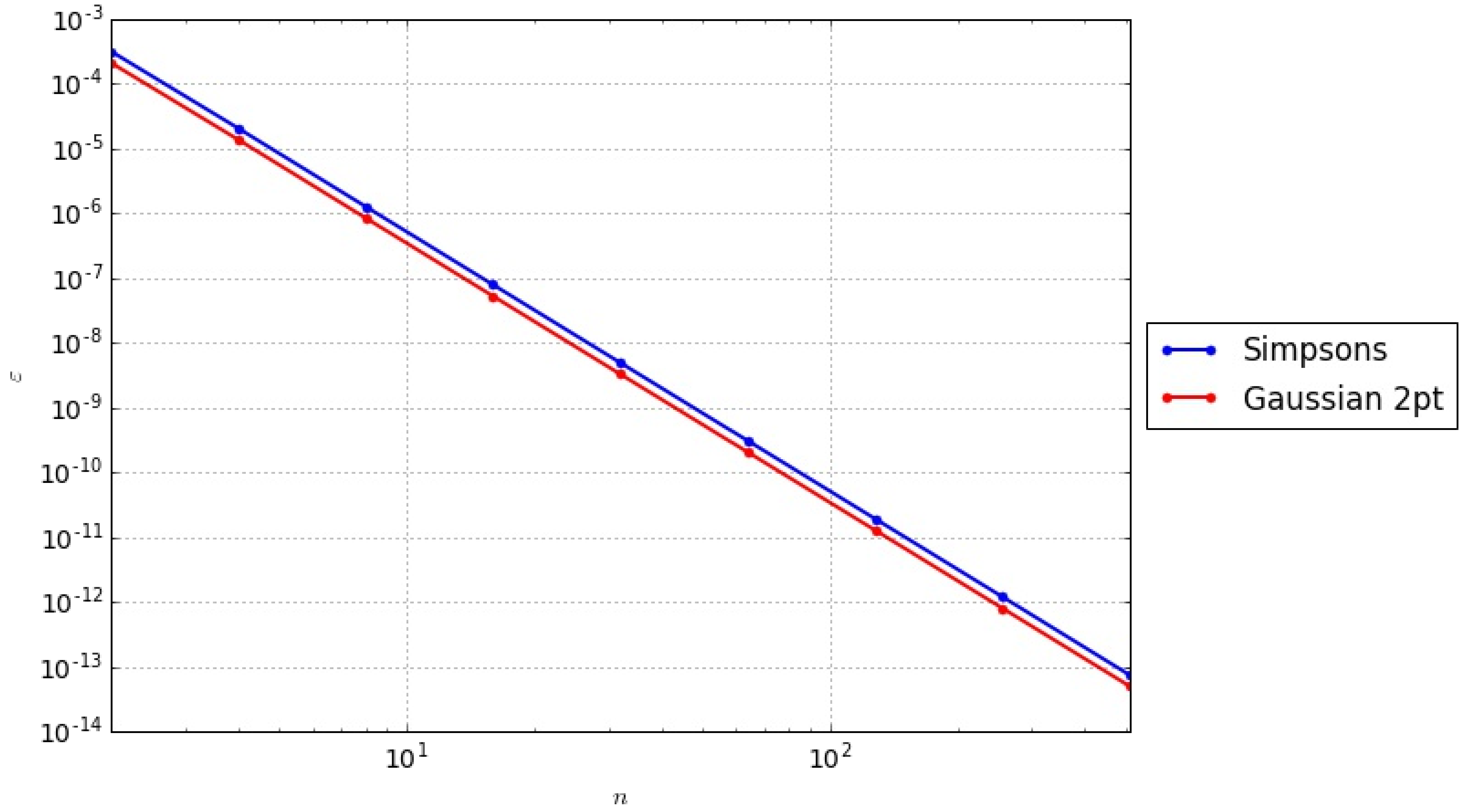
$$w_2 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} dx = \frac{2x_1}{x_1 - x_2} = 1.$$

Полученная квадратура имеет вид

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

```python
# Интегрировать f(x) на отрезке [a,b] используя n вычислений f(x)
def gauss2(f, a, b, n):
    assert n % 2 == 0
    h = (b - a) / n
    s = 0
    for i in range(n // 2):
        x1 = (2*i+1) * h - h / np.sqrt(3)
        x2 = (2*i+1) * h + h / np.sqrt(3)
        s += h * (f(x1) + f(x2))
    return s
```

Show code



10^{-3}
10^{-4}
10^{-5}
10^{-6}
10^{-7}
10^{-8}
10^{-9}
10^{-10}
10^{-11}
10^{-12}
10^{-13}
10^{-14}
ε
10^{1}
10^{2}
n
Simpsons
Gaussian 2pt

Практическая оценка погрешности

Не всегда на практике удается воспользоваться априорной оценкой вида

$$\varepsilon \leqslant C M_p h^p,$$

так как не всегда удается оценить M_p для подынтегральной функции. В этом случае, обычно, пользуются правилом Рунге для определения подходящего шага h.

Правило Рунге

Предположим, что нам известен порядок метода, которым мы хотим найти значение интеграла с заданной точностью ε. Тогда результат, вычисленный этим методом с шагом h будет иметь вид

$$I_h = I^* + \underbrace{C_1 h^p + C_2 h^{p+1} + \ldots}_{\text{ошибка интегрирования}}.$$

Здесь I^* — точное значение интеграла. Для достаточно малых h можно записать

$$I_h = I^* + C_h h^p,$$

где C_h — почти константа, то есть слабо зависит от h.

Вычислим интеграл с шагом h и с шагом $h/2$:

$$I_h = I^* + C_1 h^p + C_2 h^{p+1} + \dots$$

$$I_{h/2} = I^* + C_1 \left(\frac{h}{2}\right)^p + C_2 \left(\frac{h}{2}\right)^{p+1} + \dots$$

Тогда

$$I_h - I_{h/2} = C_h h^p - C_{h/2}\left(\frac{h}{2}\right)^p \approx (2^p - 1) C_{h/2}\left(\frac{h}{2}\right)^p = (2^p - 1)(I_{h/2} - I^*)$$

$$\frac{2^p I_{h/2} - I_h}{2^p - 1} = I^* + O(h^{p+1})$$

Таким образом, погрешность интегрирования на сетке $h/2$ может быть оценена как

$$I_{h/2} - I^* \approx \frac{I_h - I_{h/2}}{2^p - 1}.$$

Величина

$$\frac{2^p I_{h/2} - I_h}{2^p - 1} = I_{h/2} - \frac{I_h - I_{h/2}}{2^p - 1},$$

называется экстраполяцией результата по Ричардсону и характеризуется тем, что приближает ответ I^* с большим порядком $O(h^{p+1})$, чем исходный метод $O(h^p)$

Использование правила Рунге

Алгоритм применения правила Ругне следующий:

1. Задать небольшое число интевалов, скажем $n = 10$
2. Вычислить $I_h, I_{h/2}$ и оценить ошибку
$$\Delta_{h/2} = \frac{I_h - I_{h/2}}{2^p - 1}.$$
3. Если $|\Delta_{h/2}| < \varepsilon$, прекратить вычисления. Иначе измельчить сетку вдвое $h := h/2$ и перейти к шагу 2.
4. Ответом служит либо $I_{h/2}$, либо экстраполированное по Ричардсону значение $I_{h/2} - \Delta_{h/2}$.

```python
def runge(f, a, b, eps=1e-12, richardson=False):
    n = 4
    Ih = simpson(f(np.linspace(a, b, n+1)), (b-a) / n)
    while True:
        Ih_2 = simpson(f(np.linspace(a, b, 2*n+1)), (b-a) / (2*n))
        Dh_2 = (Ih - Ih_2) / (2**4 - 1) # p = 4 для Симпсона
        print('I(h) = %.16f, err(h) = %.6e' % (Ih_2, Dh_2))
        if abs(Dh_2) < eps:
            break
        n *= 2; Ih = Ih_2
        if n > 10000: print('Too large n'); break
    return Ih_2 - Dh_2 if richardson else Ih_2
```

```python
def f(x): return 1 / (1 + x**2)
a = 0; b = 0.5; exact = np.arctan(b)

runge(f, a, b) - exact
```

```
I(h) = 0.4636479223346336, err(h) = 3.157185e-07
I(h) = 0.4636476285453064, err(h) = 1.958596e-08
I(h) = 0.4636476102217171, err(h) = 1.221573e-09
I(h) = 0.4636476090771032, err(h) = 7.630759e-11
I(h) = 0.4636476090055746, err(h) = 4.768578e-12
I(h) = 0.4636476090011042, err(h) = 2.980246e-13
```

```
2.9809488211185453e-13
```

Возможные проблемы

Правилом Рунге и экстраполяцией Ричардсона можно пользоваться лишь в том случае, когда вы можете гарантировать, что используемый численный метод интегрирования действительно имеет порядок p.

```
def f(x): return np.sqrt(x)
a = 0; b = 4; exact = 2 / 3 * b**1.5

runge(f, a, b, eps=1e-4) - exact
```

```
I(h) = 5.3046342406801887, err(h) = -3.494941e-03
I(h) = 5.3231855090252225, err(h) = -1.236751e-03
I(h) = 5.3297454619694369, err(h) = -4.373302e-04
I(h) = 5.3320648246268956, err(h) = -1.546242e-04
I(h) = 5.3328848474901243, err(h) = -5.466819e-05
```

```
-0.00044848584320877904
```

Дополнительные проверки

Для проверки корректности использования правила Рунге достаточно проверять условия

- что метод фактически сходится с порядком p,
$$\frac{\Delta_h}{\Delta_{h/2}} \approx 2^p$$
- что константа C_h слабо зависит от h:
$$C_h = \frac{\Delta_h}{h^p} \to C = \mathrm{const}$$

```
def runge_checks(f, a, b, eps=1e-12, richardson=False):
    n = 4
    Ih = simpson(f(np.linspace(a, b, n+1)), (b-a) / n)
    Dh = None;
    while True:
        h_2 = (b-a) / (2*n)
        Ih_2 = simpson(f(np.linspace(a, b, 2*n+1)), h_2)
        Dh_2 = (Ih - Ih_2) / (2**4 - 1) # p = 4 для Симпсона
        Ch_2 = Dh_2 / h_2**4; ps = np.log2(Dh / Dh_2) if Dh != None else np.nan
        print('I(h) = %.16f, err(h) = %.6e, p* = %4.2f, C = %.6e' % \
              (Ih_2, Dh_2, ps, Ch_2))
        if abs(Dh_2) < eps:
            break
        n *= 2; Ih = Ih_2; Dh = Dh_2
        if n > 10000: print('Too large n'); break
    return Ih_2 - Dh_2 if richardson else Ih_2
```

```python
def f(x): return 1 / (1 + x**2)
a = 0; b = 0.5; exact = np.arctan(b)

runge_checks(f, a, b) - exact
```

```
I(h) = 0.4636479223346336, err(h) = 3.157185e-07, p* =  nan, C = 2.069093e-02
I(h) = 0.4636476285453064, err(h) = 1.958596e-08, p* = 4.01, C = 2.053736e-02
I(h) = 0.4636476102217171, err(h) = 1.221573e-09, p* = 4.00, C = 2.049459e-02
I(h) = 0.4636476090771032, err(h) = 7.630759e-11, p* = 4.00, C = 2.048366e-02
I(h) = 0.4636476090055746, err(h) = 4.768578e-12, p* = 4.00, C = 2.048089e-02
I(h) = 0.4636476090011042, err(h) = 2.980246e-13, p* = 4.00, C = 2.048009e-02
```

```
2.9809488211185453e-13
```

```python
def f(x): return np.sqrt(x)
a = 0; b = 4; exact = 2 / 3 * b**1.5

runge_checks(f, a, b, eps=1e-4) - exact
```

```
I(h) = 5.3046342406801887, err(h) = -3.494941e-03, p* =  nan, C = -5.591906e-02
I(h) = 5.3231855090252225, err(h) = -1.236751e-03, p* = 1.50, C = -3.166083e-01
I(h) = 5.3297454619694369, err(h) = -4.373302e-04, p* = 1.50, C = -1.791304e+00
I(h) = 5.3320648246268956, err(h) = -1.546242e-04, p* = 1.50, C = -1.013345e+01
I(h) = 5.3328848474901243, err(h) = -5.466819e-05, p* = 1.50, C = -5.732375e+01
```

```
-0.00044848584320877904
```

Несобственные интегралы

Рассмотрим случай несобственного интеграла

$$\int_a^b f(x)dx,$$

у которого в точке a функция обращается в бесконечность. При этом отрезок $[a, b]$ остается конечным, и других особых точек у $f(x)$ нет. Любой несобственный интеграл можно свести к такой постановке заменой переменных и разбиением отрезка на участки с одной особенностью.

Регуляризация

Разобъем подынтегральную функцию $f(x)$, на часть $\varphi(x)$, содержащую особенность, и часть $R(x) = f(x) - \varphi(x)$, в которой особенности нет.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \varphi(x)dx + \int_a^b R(x)dx$$

Выберем простую функцию $\varphi(x)$, так, чтобы первый интеграл вычислялся аналитически. Ко второму применим правило Рунге. Рассмотрим на примере

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sin\sqrt{x}} \approx 2.7531419339480817286036675708 4$$

```
def f(x): return np.sqrt(x) / np.sin(x)
def R(x): return np.append([0], f(x[1:]) - x[1:]**(-0.5))
a = 0; b = np.pi / 2; exact = 2.75314193394808172860366757084 - np.sqrt(2*np.pi)

runge_checks(R, a, b, eps=1e-14) - exact
```

```
I(h) = 0.2465669562957238, err(h) = 2.423191e-05, p* =  nan, C = 1.630302e-02
I(h) = 0.2465215993654357, err(h) = 3.023795e-06, p* = 3.00, C = 3.255014e-02
I(h) = 0.2465149658115324, err(h) = 4.422369e-07, p* = 2.77, C = 7.616850e-02
I(h) = 0.2465138841057180, err(h) = 7.211372e-08, p* = 2.62, C = 1.987276e-01
I(h) = 0.2465136986662544, err(h) = 1.236263e-08, p* = 2.54, C = 5.450938e-01
I(h) = 0.2465136662487450, err(h) = 2.161167e-09, p* = 2.52, C = 1.524645e+00
I(h) = 0.2465136605409121, err(h) = 3.805222e-10, p* = 2.51, C = 4.295170e+00
I(h) = 0.2465136595333304, err(h) = 6.717212e-11, p* = 2.50, C = 1.213136e+01
I(h) = 0.2465136593553030, err(h) = 1.186850e-11, p* = 2.50, C = 3.429541e+01
I(h) = 0.2465136593238377, err(h) = 2.097687e-12, p* = 2.50, C = 9.698419e+01
I(h) = 0.2465136593182757, err(h) = 3.707997e-13, p* = 2.50, C = 2.742961e+02
I(h) = 0.2465136593172924, err(h) = 6.555127e-14, p* = 2.50, C = 7.758564e+02
Too large n
```

```
2.1083135237631723e-13
```

Недостаточное выделение особенности

Хотя $R(x)$ теперь и не содержит особенности, она еще недостаточно регулярна для применения к ней метода Симпсона. Для него требуется, чтобы $R(x)$ имела ограниченную четвертую производную.

$$\frac{\sqrt{x}}{\sin x} = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{x^{3/2}}{6} + \frac{7x^{7/2}}{360} + \frac{31x^{11/2}}{15120} + O\left(x^{15/2}\right)$$

Все слагаемые, отмеченные красным, имеют неограниченную вторую производную, и все они должны быть вынесены в $\varphi(x)$.

```python
def f(x): return np.sqrt(x) / np.sin(x)
def phi(x): return x**(-0.5) + x**1.5/6. + (7*x**3.5)/360.
exphi = 2.7457604543273544586 # Вычисляется аналитически

def R(x): return np.append([0], f(x[1:]) - phi(x[1:]))
a = 0; b = np.pi / 2; exact = 2.75314193394808172860366757084 - exphi

runge_checks(R, a, b, eps=1e-14) - exact
```

```
I(h) = 0.0073926725777687, err(h) = 9.908375e-06, p* =  nan, C = 6.666270e-03
I(h) = 0.0073822021936242, err(h) = 6.980256e-07, p* = 3.83, C = 7.514010e-03
I(h) = 0.0073815251641254, err(h) = 4.513530e-08, p* = 3.95, C = 7.773860e-03
I(h) = 0.0073814824732734, err(h) = 2.846057e-09, p* = 3.99, C = 7.843031e-03
I(h) = 0.0073814797991069, err(h) = 1.782778e-10, p* = 4.00, C = 7.860634e-03
I(h) = 0.0073814796318775, err(h) = 1.114863e-11, p* = 4.00, C = 7.865056e-03
I(h) = 0.0073814796214242, err(h) = 6.968866e-13, p* = 4.00, C = 7.866155e-03
I(h) = 0.0073814796207708, err(h) = 4.355775e-14, p* = 4.00, C = 7.866576e-03
I(h) = 0.0073814796207300, err(h) = 2.721897e-15, p* = 4.00, C = 7.865240e-03

2.787700625894729e-15
```