Подготовка к контрольной. Системы линейных алгебраичеких уравнений

Скалько Юрий Иванович
Цыбулин Иван
Шевченко Александр

LU-подобное разложение

Представить матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 11 & -3 & 6 \\ -3 & 7 & 0 \\ 6 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

в виде произведения нижней треугольной матрицы L и верхней треугольной матрицы с единичной матрицей U.

От "настоящего" LU-разложения данное разложение отличается требованием единичной диагонали у матрицы U, когда для традиционного единичную диагональ имеет матрица L.

LU-подобное разложение

Представить матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 11 & -3 & 6 \\ -3 & 7 & 0 \\ 6 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Будем искать L и U в виде

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -3 & 6 \\ -3 & 7 & 0 \\ 6 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

LU-подобное разложение

$$\begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -3 & 6 \\ -3 & 7 & 0 \\ 6 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Для начала найдем первый столбец матрицы L и первую стоку матрицы U

$$l_{i1} = a_{i1}, \quad l_{11} u_{1j} = a_{1j}$$

$$\begin{pmatrix} 11 & 0 & 0 \\ -3 & l_{22} & 0 \\ 6 & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3/11 & 6/11 \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -3 & 6 \\ -3 & 7 & 0 \\ 6 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

LU-подобное разложение

$$\begin{pmatrix} 11 & 0 & 0 \\ -3 & l_{22} & 0 \\ 6 & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3/11 & 6/11 \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -3 & 6 \\ -3 & 7 & 0 \\ 6 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Для второй строки U и второго столбца L имеются уравнения

$$\begin{aligned} 9/11 + l_{22} &= a_{22} \\ -18/11 + l_{32} &= a_{32} \\ -18/11 + l_{22} u_{23} &= a_{23} \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 11 & 0 & 0 \\ -3 & 68/11 & 0 \\ 6 & 18/11 & l_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3/11 & 6/11 \\ 0 & 1 & 9/34 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -3 & 6 \\ -3 & 7 & 0 \\ 6 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

LU-подобное разложение

$$\begin{pmatrix} 11 & 0 & 0 \\ -3 & 68/11 & 0 \\ 6 & 18/11 & l_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3/11 & 6/11 \\ 0 & 1 & 9/34 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -3 & 6 \\ -3 & 7 & 0 \\ 6 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Последнее уравнение на l_{33}

$$36/11 + 81/187 + l_{33} = a_{33} = 7$$

$$\begin{pmatrix} 11 & 0 & 0 \\ -3 & 68/11 & 0 \\ 6 & 18/11 & 56/17 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3/11 & 6/11 \\ 0 & 1 & 9/34 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -3 & 6 \\ -3 & 7 & 0 \\ 6 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Норма матрицы

Норма матрицы определяется через некоторую векторную норму $\|\cdot\|$ следующим образом:

$$\|A\| = \sup_{\|x\|\neq 0} \|Ax\|$$

Свойства нормы матрицы

$$\|Ax\| \leq \|A\|\|x\|$$
$$\exists x_0 \neq 0 : \|Ax_0\| = \|A\|\|x_0\|$$

Рассматриваемые векторные нормы

- $\|x\|_\infty = \max |x_i|$ — "Первая" или ℓ_∞ норма
- $\|x\|_1 = \sum |x_i|$ — "Вторая" или ℓ_1 норма
- $\|x\|_E = \sqrt{\sum x_i^2}$ — "Третья" или евклидова норма

Первая норма

$$\|x\|_\infty = \max |x_i|$$

Соответствующая матричная норма

$$\|A\|_\infty = \max_i \sum_j |a_{ij}|$$

Пусть максимум достигается для i_0-й строки. Тогда на векторе

$$x_0 = \alpha \begin{pmatrix} \operatorname{sgn} a_{i_0 1} \\ \operatorname{sgn} a_{i_0 2} \\ \vdots \\ \operatorname{sgn} a_{i_0 n} \end{pmatrix}, \quad \|x_0\|_\infty = |\alpha|$$

достигается норма матрицы, т.е.

$$\|Ax_0\|_\infty = \|A\|_\infty \|x_0\|_\infty$$

Вторая норма

$$\|x\|_1 = \sum |x_i|$$

Соответствующая матричная норма

$$\|A\|_1 = \max_j \sum_i |a_{ij}|$$

Пусть максимум достигается для j_0-го столбца. Тогда на векторе

$$x_0 = \begin{cases} 0\,, & i \neq j_0 \\ \alpha, & i = j_0 \end{cases}\,, \qquad \|x_0\|_1 = |\alpha|$$

достигается норма матрицы, т.е.

$$\|Ax_0\|_1 = \|A\|_1 \|x_0\|_1$$

Евклидова норма. Несимметричный случай

$$\|x\|_E = \sqrt{\sum x_i^2}$$

Соответствующая матричная норма

$$\|A\|_E = \sqrt{\max \lambda(A^T A)}$$

Пусть x_0 — собственный вектор матрицы $A^T A$, соответствующий максимальному собственному значению

$$A^T A x_0 = \lambda_{\max} x_0$$

Тогда на x_0 достигается норма матрицы

$$\|Ax_0\|_E = \|A\|_E \|x_0\|_E$$

Евклидова норма. Симметричный случай

$$\|x\|_E = \sqrt{\sum x_i^2}$$

В случае $A = A^T$, матричная норма

$$\|A\|_E = \max |\lambda(A)|$$

Пусть x_0 — собственный вектор матрицы A, соответствующий максимальному по модулю собственному значению

$$Ax_0 = \lambda_{\text{absmax}} x_0$$

Тогда на x_0 достигается норма матрицы

$$\|Ax_0\|_E = \|A\|_E \|x_0\|_E$$

Обусловленность

Для системы линейных уравнений

$$Ax = b$$
$$A(x + \Delta x) = b + \Delta b$$

справедливо следующее соотношение между относительной погрешностью правой части и относительной погрешностью решения

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \le \nu(A, b)\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \le \mu(A)\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$$

Здесь

$$\nu(A, b) = \frac{\|A^{-1}\|\|b\|}{\|A^{-1}b\|}, \qquad \mu(A) = \|A\|\|A^{-1}\|$$

Точные оценки сверху

При условии, что правая часть b задана, оценка

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \nu(A, b)\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$$

является точной, поскольку при некотором Δb она обращается в равенство, то есть погрешность достигается. Это происходит при

$$\|A^{-1}\Delta b\| = \|A^{-1}\|\|\Delta b\|$$

то есть на векторе Δb достигается норма матрицы A^{-1}

Точные оценки сверху

При условии, что правая часть b произвольна, оценка

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \le \mu(A) \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$$

является точной, поскольку при некоторых Δb и b она обращается в равенство, то есть погрешность достигается. Это происходит при

$$\|A^{-1}\Delta b\| = \|A^{-1}\| \|\Delta b\|$$
$$\|Ax\| = \|b\| = \|A\| \|A^{-1}b\| = \|A\| \|x\|$$

то есть на векторе Δb достигается норма матрицы A^{-1}, на векторе x достигается норма A. Соответствующий вектор $b = Ax$

Оценки снизу

В случае когда интересует оценка снизу для минимально возможной погрешности, можно поступить следующим образом. Рассмотрим систему, эквивалентную исходной

$$A^{-1}b = x$$

Для нее справедливо

$$\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \leq \nu(A^{-1}, x)\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \mu(A^{-1})\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|}$$

Учитывая $\mu(A) = \mu(A^{-1})$

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \geq \frac{1}{\nu(A^{-1}, x)}\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \geq \frac{1}{\mu(A)}\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$$

Точные оценки снизу

По аналогии со случаем верхних оценок, при некотором Δb оценка

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \geq \frac{1}{\nu(A^{-1}, x)} \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$$

достигается. Это следует из того, что оценка

$$\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \leq \nu(A^{-1}, x) \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|}$$

для системы $A^{-1} b = x$ превращается в равенство при

$$\|A \Delta x\| = \| \left(A^{-1}\right)^{-1} \Delta x\| = \| \left(A^{-1}\right)^{-1} \| \|\Delta x\| = \|A\| \|\Delta x\|$$

Эта оценка становится точной когда на Δx достигается норма A. Соответствующее $\Delta b = A \Delta x$

Точные оценки снизу

По аналогии со случаем верхних оценок, при некоторых $\Delta b, b$ оценка

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \geq \frac{1}{\mu(A)} \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$$

достигается. Это следует из того, что оценка

$$\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \leq \mu(A^{-1}) \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|}$$

для системы $A^{-1}b = x$ превращается в равенство при

$$\|A\Delta x\| = \| \left(A^{-1}\right)^{-1} \Delta x\| = \| \left(A^{-1}\right)^{-1} \| \|\Delta x\| = \|A\| \|\Delta x\|$$

$$\|A^{-1}b\| = \|A^{-1}\| \|b\|$$

Эта оценка становится точной когда на Δx достигается норма A, а на векторе b достигается норма A^{-1}. Соответствующее $\Delta b = A\Delta x$

Итерационный процесс

$$x_{n+1} = Bx_n + f$$

сходится если

- Некоторая норма B меньше единицы (достаточное условие)
- Все собственные числа $\lambda(B)$ лежат в единичном круге (необходимое и достаточное условие)

Если все собственные значения B различны, то скорость сходимости

$$q = \max|\lambda(B)|$$

Матрица B часто бывает несимметричной, поэтому собственные числа могут быть комплексными.

Монотонная и немонотонная сходимость

Пусть итерационный процесс

$$x_{n+1} = Bx_n + f$$

сходится к x^*. Рассмотрим ошибку $\varepsilon_n = x_n - x^*$. Для ошибки справедливо

$$\varepsilon_{n+1} = B\varepsilon_n$$

Возможны 2 случая:

- $\|B\| < 1$. Сходимость имеет монотонный характер в силу

$$\|\varepsilon_{n+1}\| \le \|B\|\|\varepsilon_n\| < \|\varepsilon_n\|$$

- $\|B\| \ge 1$. Существует начальное приближения, для которого сходимость имеет немонотонный характер. Возьмем $x_0 = x^* + \varepsilon_0$, причем на ε_0 достигается норма B

$$\|\varepsilon_1\| = \|B\varepsilon_0\| = \|B\|\|\varepsilon_0\| > \|\varepsilon_0\|$$

После первой итерации норма ошибки решения возрастает, сходимость немонотонная

Итерационный метод Якоби для системы

$$Ax = b$$

выглядит как

$$x_{n+1} = x_n - D^{-1}(Ax_n - b) = (E - D^{-1}A)x_n + D^{-1}b$$

Матрица D состоит из диагональных элементов A

$$D = \mathrm{diag}(a_{ii})$$

Метод Якоби сходятся для матриц с диагональным преобладанием. При отсутствии преобладания необходимо проверять собственные значения $B = E - D^{-1}A$ или искать норму в которой $\|B\| < 1$

Метод Зейделя

Итерационный метод Зейделя для системы

$$Ax = b$$

выглядит как

$$x_{n+1} = L^{-1}(-Ux_n + b) = -L^{-1}Ux_n + L^{-1}b$$

Матрица U состоит из элементов выше главной диагонали, L — из остальных

$$U = \begin{cases} a_{ij}, & j > i \\ 0\ , & j \leq i \end{cases} \qquad L = \begin{cases} 0\ , & j > i \\ a_{ij}, & j \leq i \end{cases}$$

Метод Зейделя сходится при условии $A = A^T > 0$, иначе необходимо проверять собственные значения $B = -L^{-1}U$ или искать норму в которой $\|B\| < 1$

Метод простой итерации с параметром

Для уравнения $Ax = b$ метод простой итерации записывается как

$$x_{n+1} = x_n - \tau(Ax_n - b) = (E - \tau A)x_n + \tau b$$

В случае $A = A^T > 0$ все собственные числа $\lambda(A) > 0$.
Собственные значения матрицы B

$$\lambda(B) = \lambda(E - \tau A) = 1 - \tau\lambda(A)$$

Итерационный процесс сходится, если все $\lambda(B)$ по модулю меньше 1

$$|1 - \lambda(A)| < 1 \Leftrightarrow \tau < \frac{2}{\lambda_{\max}(A)}$$

Метод простой итерации с параметром

Скорость сходимости q метода простой итерации определяется минимальным и максимальным собственными числами A.

$$q = \max|\lambda(B)| = \max(|1 - \tau\lambda_{\min}|, |1 - \tau\lambda_{\max}|)$$

При $\tau = \frac{2}{\lambda_{\min}+\lambda_{\max}}$ q принимает минимальное значение

$$q_{\text{opt}} = \frac{\lambda_{\max} - \lambda_{\min}}{\lambda_{\max} + \lambda_{\min}}$$

Специальные начальные условия

В случае, когда начальная ошибка $\varepsilon_0 = x_0 - x^*$ раскладывается по части собственных векторов матрицы A, собственные значения, соответствующие остальным собственным векторам можно исключить при нахождении скорости сходимости.

Например, если в разложении ε_0 по собственным векторам нет слагаемого соответствующего собственному вектору с максимальным собственным значением, то в качестве $\lambda_{\max}$ берется максимальное из оставшихся значение

Специальные начальные условия

Пусть у матрицы A собственные значения λ_1, λ_2 и λ_3

$$Ah_i = \lambda_i h_i, \quad , \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$$

а начальная ошибка $x_0 = x^*$ раскладывается только по h_1 и h_2. Скорость сходимости при данном τ теперь определяется только значениями λ_1 и λ_2

$$q = \max(|1 - \tau\lambda_1|, |1 - \tau\lambda_2|)$$

Условие $q < q_{\text{opt}}$ задает границы параметра τ при которых скорость сходимости для данного приближения выше чем при τ_{opt}

$$\frac{1 - q_{\text{opt}}}{\lambda_1} < \tau < \frac{1 + q_{\text{opt}}}{\lambda_2}$$

Специальные начальные условия

Хотя при вычислении скорости сходимости некоторые собственные значения могут отбрасываться, условие

$$\tau < \frac{2}{\lambda_{\max}}$$

должно быть выполнено всегда, даже если в исходной ошибке не было соответствующей компоненты в разложении по собственным векторам.

В случае нарушения этого условия процесс становится вычислительно неустойчивым. Условие

$$\frac{1 - q_{\text{opt}}}{\lambda_1} < \tau < \frac{1 + q_{\text{opt}}}{\lambda_2}$$

следует исправить на

$$\frac{1 - q_{\text{opt}}}{\lambda_1} < \tau < \min\left(\frac{1 + q_{\text{opt}}}{\lambda_2}, \frac{2}{\lambda_3}\right)$$

Спасибо за внимание!

tsybulinhome@gmail.com