Уравнения параболического типа
Уравнение теплопроводности

Скалько Юрий Иванович
Цыбулин Иван
Шевченко Александр

Уравнение теплопроводности

Типичный представитель уравнений параболического типа — уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\varkappa \frac{\partial u}{\partial x}\right).$$

Будем также рассматривать случай $\varkappa = \mathrm{const}$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \varkappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Уравнение описывает распространение тепла, диффузию вещества, вязкие процессы и т.п.

Запишем простейшую явную схему для уравнения теплопроводности

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = \frac{\varkappa_{m+1/2} \frac{u_{m+1}^n - u_m^n}{h} - \varkappa_{m-1/2} \frac{u_m^n - u_{m-1}^n}{h}}{h}$$

Похожая аппроксимация встречалась в задаче Штурма-Лиувилля (там она обеспечивала диагональное преобладание в системе уравнений).
В точке (t_n, x_m) правая часть аппроксимирована с порядком $O(h^2)$, а левая с порядком $O(\tau)$. Значит порядок аппроксимации схемы не хуже $O(\tau + h^2)$.

Простейшая схема. Аппроксимация

Запишем разложения точного решения и коэффициента теплопроводности в ряд Тейлора в окрестности (t_n, x_m)

$$[u]_m^{n+1} = [u]_m^n + \tau[u_t]_m^n + \frac{\tau^2}{2}[u_{tt}]_m^n + O(\tau^3)$$

$$[u]_{m\pm1}^n = [u]_m^n \pm h[u_x]_m^n + \frac{h^2}{2}[u_{xx}]_m^n \pm \frac{h^3}{6}[u_{xxx}]_m^n + \frac{h^4}{24}[u_{xxxx}]_m^n + O(h^5)$$

$$[\varkappa]_{m\pm1/2}^n = [\varkappa]_m^n \pm \frac{h}{2}[\varkappa_x]_m^n + \frac{h^2}{8}[\varkappa_{xx}]_m^n \pm \frac{h^3}{48}[\varkappa_{xxx}]_m^n + O(h^4)$$

Подставляя эти разложения в разностную схему и собирая слагаемые при одинаковых степенях h, получаем

$$\varkappa_{m+1/2}\left(u_{m+1}^n - u_m^n\right) - \varkappa_{m-1/2}\left(u_m^n - u_{m-1}^n\right) =$$
$$\left([\varkappa_x]_m^n[u_x]_m^n + [\varkappa]_m^n[u_{xx}]_m^n\right)h^2 + O(h^5) +$$
$$\left([\varkappa_{xxx}]_m^n[u_x]_m^n + 3[\varkappa_{xx}]_m^n[u_{xx}]_m^n + 4[\varkappa_x]_m^n[u_{xxx}]_m^n + 2[\varkappa]_m^n[u_{xxxx}]_m^n\right)h^4$$

Простейшая схема. Аппроксимация

Заметим, что $\varkappa_x u_x + \varkappa u_{xx} \equiv (\varkappa u_x)_x$

$$\delta = \frac{\tau}{2}[u_{tt}]_m^n -$$
$$\left([\varkappa_{xxx}]_m^n[u_x]_m^n + 3[\varkappa_{xx}]_m^n[u_{xx}]_m^n + 4[\varkappa_x]_m^n[u_{xxx}]_m^n + 2[\varkappa]_m^n[u_{xxxx}]_m^n\right)h^2 =$$
$$= O(\tau + h^2)$$

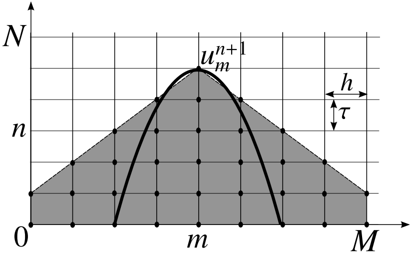
Область зависимости численного решения по данной явной четырехточечной схеме — конус с наклоном образующих τ/h. А вот область зависимости точного решения сложнее. Формально, решение уравнения теплопроводности зависит от значения в *любой* точке. В бесконечном пространстве верна формула Пуассона

$$u(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(0, \xi)}{\sqrt{4\varkappa\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\varkappa t}} d\xi.$$

Видно, что *существенно* решение зависит при $(x - \xi)^2 \lesssim 2\varkappa t$, то есть областью зависимости можно назвать параболу $(x - \xi)^2 = 2\varkappa t$

Область зависимости

$$(x - x_m)^2 = 2\varkappa(t_n - t)$$



Чтобы задача была устойчива, все узлы, попавшие в область зависимости дифференциальной задачи попали и в область зависимости разностной задачи. То есть необходимое условие устойчивости явной схемы уже выглядит как $\frac{\tau}{h^2} < O(1)$

Устойчивость явной схемы

Если схема монотонна, то доказательство устойчивости проводится в полной аналогии с доказательством устойчивости монотонных схем для уравнения переноса. Найдем условие монотонности схемы, для этого перепишем ее в разрешенной форме

$$u_m^{n+1} = u_m^n + \frac{\tau}{h}\left(\varkappa_{m+1/2}\frac{u_{m+1}^n - u_m^n}{h} - \varkappa_{m-1/2}\frac{u_m^n - u_{m-1}^n}{h}\right)$$

$$u_m^{n+1} = \left(1 - \frac{\tau(\varkappa_{m+1/2} + \varkappa_{m-1/2})}{h^2}\right)u_m^n + \frac{\tau}{h^2}\varkappa_{m-1/2}u_{m-1}^n + \frac{\tau}{h^2}\varkappa_{m+1/2}u_{m+1}^n$$

Условие устойчивости

$$\frac{\left(\varkappa_{m+1/2} + \varkappa_{m-1/2}\right)\tau}{h^2} < 1$$

справедливо при

$$\frac{2\tau \max\varkappa}{h^2} < 1$$

Устойчивость по спектральному признаку

Условие монотонности не всегда является необходимым, проверим достаточность по спектральному признаку. Для этого нужно избавится от граничных условий, превратив начально-краевую задачу в задачу Коши, обнулить правую часть и рассмотреть возмущение специального вида $e^{i\alpha m}$.
Необходимо также «заморозить» коэффициент $\varkappa$, то есть сделать его константой $\varkappa = \text{const}$.
Будем искать решение в виде $u_m^n = \lambda^n e^{i\alpha m}$

$$\frac{\lambda - 1}{\tau} = \varkappa \frac{e^{-i\alpha} - 2 + e^{i\alpha}}{h^2} = -\frac{4\varkappa}{h^2} \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$\lambda = 1 - \frac{4\varkappa\tau}{h^2} \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$|\lambda| < 1 \Rightarrow \frac{2\varkappa\tau}{h^2} < 1$$

Выводы для явной схемы

Итак, при исследовании как спектральным признаком, так и по определению получается условие устойчивости

$$\frac{\varkappa\tau}{h^2} < \frac{1}{2}.$$

На практике, такое ограничение является довольно неприятным, и его стараются ослабить.

Неявная схема

Построим схему по аналогии с простейшей явной, только аппроксимируем производную по пространству на верхнем слое по времени.

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = \frac{\varkappa_{m+1/2} \frac{u_{m+1}^{n+1} - u_m^{n+1}}{h} - \varkappa_{m-1/2} \frac{u_m^{n+1} - u_{m-1}^{n+1}}{h}}{h}$$

Аналогично явной схеме, ее порядок аппроксимации $O(\tau + h^2)$. Исследовать такую схему по определению на устойчивость уже практически невозможно. Заморозим коэффициент $\varkappa = \mathrm{const}$ и применим спектральный признак

Спектральный признак. Неявная схема

$$\frac{\lambda - 1}{\tau} = \lambda \varkappa \frac{e^{-i\alpha} - 2 + e^{i\alpha}}{h^2} = -\lambda \frac{4\varkappa}{h^2} \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$\lambda = 1 - \lambda \frac{4\varkappa\tau}{h^2} \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$\lambda = \frac{1}{1 + \frac{4\varkappa\tau}{h^2} \sin^2 \frac{\alpha}{2}}$$

Теперь λ меньше единицы по модулю всегда при любых соотношениях между τ и h, то есть схема безусловно устойчива.

Неявная схема

Но платой за безусловную устойчивость оказалась неявность схемы. Теперь на каждом шаге по времени необходимо решать систему уравнений для определения u^{n+1}.

$$\left(1+\tau\frac{\varkappa_{m+1/2}+\varkappa_{m-1/2}}{h^2}\right)u_m^{n+1}-\frac{\tau\varkappa_{m+1/2}}{h^2}u_{m+1}^{n+1}-\frac{\tau\varkappa_{m-1/2}}{h^2}u_{m-1}^{n+1}=u_m^n$$

Вместе с граничными условиями

$$u_0^{n+1}=\alpha^{n+1}$$
$$u_M^{n+1}=\beta^{n+1}$$

мы получаем трехдиагональную систему. Более того, в этой системе имеется диагональное преобладание, значит алгоритм прогонки в этом случае гарантировано будет устойчив. Таким образом, решение по неявной схеме всего в несколько раз медленнее решения по явной схеме.

Рассмотрим двумерное уравнение теплопроводности с постоянным коэффициентом $\varkappa = \text{const}$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \varkappa \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

Простейшие аппроксимации

У сеточной функции теперь 3 индекса (m, n) — пространственные индексы по x и y, p — временной индекс. Условимся операторами $\Lambda_{xx}, \Lambda_{yy}$ обозначать разностные вторые производные, то есть

$$\Lambda_{xx} u^p_{n,m} = \frac{u^p_{m+1,n} - 2u^p_{m,n} + u^p_{m-1,n}}{h^2}$$

$$\Lambda_{yy} u^p_{n,m} = \frac{u^p_{m,n+1} - 2u^p_{m,n} + u^p_{m,n-1}}{h^2}$$

Простейшая явная схема записывается в этих обозначениях как

$$\frac{u^{p+1}_{m,n} - u^p_{m,n}}{\tau} = \varkappa \left(\Lambda_{xx} u^p_{m,n} + \Lambda_{yy} u^p_{m,n}\right)$$

$$u^0_{m,n} = \varphi_{m,n}$$

$$u^p_{m,n}\Big|_\Gamma = \psi^p_{m,n}\big|_{(x,y)\in\Gamma}$$

Свойства операторов вторых производных

Важной особенностью операторов Λ_{xx} и Λ_{yy} является то, что они, как и операторы $\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ коммутируют

$$\Lambda_{xx}\Lambda_{yy}u_{m,n} = \Lambda_{yy}\Lambda_{xx}u_{m,n}$$

Также, для этих операторов известны собственные числа и собственные вектора

$$\Lambda_{xx}e^{i\alpha m} = \frac{4}{h^2}\sin^2\frac{\alpha}{2}e^{i\alpha m}$$

сравните с

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}e^{\frac{i\alpha x}{h}} = -\frac{\alpha^2}{h^2}e^{\frac{i\alpha x}{h}}$$

Операторы $\Lambda_{xx}, \Lambda_{yy}$ аппроксимируют вторые производные со вторым порядком

$$\Lambda_{xx}[u]^p_{m,n} = [u_{xx}]^p_{m,n} + \frac{h^2}{12}[u_{xxxx}]^p_{m,n} + O(h^4),$$

воспользуемся этим для нахождения ошибки аппроксимации

$$\frac{[u]^{p+1}_{m,n} - [u]^p_{m,n}}{\tau} = \varkappa \left(\Lambda_{xx}[u]^p_{m,n} + \Lambda_{yy}[u]^p_{m,n}\right) + \delta$$

$$\delta = \frac{\tau}{2}[u_{tt}] + O(\tau^2) + \varkappa\frac{h^2}{12}([u_{xxxx}]^p_{m,n} + [u_{yyyy}]^p_{m,n}) + O(h^4) = O(\tau + h^2)$$

Проверим устойчивость по спектральному признаку. Ищем решение в виде $u^p_{m,n} = \lambda^p e^{i\alpha m} e^{i\beta n}$

$$\frac{\lambda - 1}{\tau} = \varkappa \left(-\frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{\alpha}{2} - \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{\beta}{2} \right)$$

$$\lambda = 1 - \frac{4\varkappa\tau}{h^2} \left(\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\beta}{2} \right)$$

$$|\lambda| < 1 \Rightarrow \frac{\varkappa\tau}{h^2} < \frac{1}{4}$$

Схема является условно устойчивой с вдвое более жестким условием, чем для одномерной схемы

Изучим устойчивость неявной схемы

$$\frac{u_{m,n}^{p+1} - u_{m,n}^{p}}{\tau} = \varkappa \left(\Lambda_{xx} u_{m,n}^{p+1} + \Lambda_{yy} u_{m,n}^{p+1}\right)$$

Также ищем решение в виде $u_{m,n}^{p} = \lambda^p e^{i\alpha m} e^{i\beta n}$

$$\frac{\lambda - 1}{\tau} = \varkappa\lambda \left(-\frac{4}{h^2}\sin^2\frac{\alpha}{2} - \frac{4}{h^2}\sin^2\frac{\beta}{2}\right)$$

$$\lambda = \frac{1}{1 + \frac{4\varkappa\tau}{h^2}\left(\sin^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\beta}{2}\right)}$$

$$|\lambda| < 1$$

Схема безусловно устойчива, как и в одномерном случае.

В двумерном случае матрица системы уже не трехдиагональная. Аналогичных быстрых методов для такой системы не существует. Выходом из положения являются различные методы расщепления. Рассмотрим на примере следующей схемы

$$\frac{w_{m,n}^{p+1/2} - u_{m,n}^{p}}{\tau/2} = \varkappa\left(\Lambda_{xx} w_{m,n}^{p+1/2} + \Lambda_{yy} u_{m,n}^{p}\right)$$
$$\frac{u_{m,n}^{p+1} - w_{m,n}^{p+1/2}}{\tau/2} = \varkappa\left(\Lambda_{xx} w_{m,n}^{p+1/2} + \Lambda_{yy} u_{m,n}^{p+1}\right)$$

Шаг по времени разбивается на два полушага. На первом полушаге аппроксимация производной по x неявная, по y явная, на следующем полушаге — наоборот.

Исключение промежуточного слоя

Запишем схему в операторном виде

$$w^{p+1/2} - u^p = \frac{\varkappa\tau}{2}\left(\Lambda_{xx} w^{p+1/2} + \Lambda_{yy} u^p\right)$$

$$u^{p+1} - w^{p+1/2} = \frac{\varkappa\tau}{2}\left(\Lambda_{xx} w^{p+1/2} + \Lambda_{yy} u^{p+1}\right)$$

$$\left(E - \frac{\varkappa\tau}{2}\Lambda_{xx}\right) w^{p+1/2} = \left(E + \frac{\varkappa\tau}{2}\Lambda_{yy}\right) u^p$$

$$\left(E - \frac{\varkappa\tau}{2}\Lambda_{yy}\right) u^{p+1} = \left(E + \frac{\varkappa\tau}{2}\Lambda_{xx}\right) w^{p+1/2}$$

Чтобы найти $W^{p+1/2}$ достаточно сделать прогонку по координате x, затем прогонку по координате y, чтобы найти u^{p+1}. Исключим $w^{p+1/2}$

$$u^{p+1} = \left(E - \frac{\varkappa\tau}{2}\Lambda_{yy}\right)^{-1}\left(E + \frac{\varkappa\tau}{2}\Lambda_{xx}\right)\left(E - \frac{\varkappa\tau}{2}\Lambda_{xx}\right)^{-1}\left(E + \frac{\varkappa\tau}{2}\Lambda_{yy}\right) u^p$$

Аппроксимация схемы расщепления

$$u^{p+1} = \left(E - \frac{\varkappa\tau}{2}\Lambda_{yy}\right)^{-1} \left(E + \frac{\varkappa\tau}{2}\Lambda_{xx}\right) \left(E - \frac{\varkappa\tau}{2}\Lambda_{xx}\right)^{-1} \left(E + \frac{\varkappa\tau}{2}\Lambda_{yy}\right) u^p$$

Раскладывая операторы в ряд

$$\left(E - \frac{\varkappa\tau}{2}\Lambda_{xx}\right)^{-1} = E + \frac{\varkappa\tau}{2}\Lambda_{xx} + \frac{\varkappa^2\tau^2}{4}\Lambda_{xx}^2 + O(\tau^3)$$

и перемножая, получаем

$$u^{p+1} = \left(E + \varkappa\tau(\Lambda_{xx} + \Lambda_{yy}) + \frac{\varkappa^2\tau^2}{2}(\Lambda_{xx} + \Lambda_{yy})^2 + O(\tau^3)\right) u^p$$

$$\frac{u^{p+1} - u^p}{\tau} = (\Lambda_{xx} + \Lambda_{yy})\, u^p + \frac{\varkappa^2\tau}{2}(\Lambda_{xx} + \Lambda_{yy})^2 u^p + O(\tau^2)$$

Ошибка аппроксимации

$$\delta = \frac{\tau}{2}[u_{tt}]^p - \frac{\varkappa^2\tau}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^2 u^p + O(\tau^2 + h^2)$$

Аппроксимация схемы расщепления

Ошибка аппроксимации

$$\delta = \frac{\tau}{2}[u_{tt}]^p - \frac{\varkappa^2\tau}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^2 u^p + O(\tau^2 + h^2)$$

На первый взгляд ошибка аппроксимации $O(\tau + h^2)$, но внимательно посмотрев, можно заметить, что на решении

$$u_{tt} = \varkappa^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^2 u$$

и первые два члена ошибки взаимно уничтожаются и оибка аппроксимации равна

$$\delta = O(\tau^2 + h^2)$$

$$u^{p+1} = \left(E - \frac{\varkappa\tau}{2}\Lambda_{yy}\right)^{-1}\left(E + \frac{\varkappa\tau}{2}\Lambda_{xx}\right)\left(E - \frac{\varkappa\tau}{2}\Lambda_{xx}\right)^{-1}\left(E + \frac{\varkappa\tau}{2}\Lambda_{yy}\right)u^p$$

Воспользуемся спектральным признаком

$$u^p = \lambda^p e^{i\alpha m} e^{i\beta n}$$

Заметим, что u^p — собственная функция операторов Λ. Это позволяет заменить все операторы на собственные значения

$$\lambda = \frac{1}{1 + \frac{4\varkappa\tau}{2h^2}\sin^2\frac{\beta}{2}}\left(1 - \frac{4\varkappa\tau}{2h^2}\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)\frac{1}{1 + \frac{4\varkappa\tau}{2h^2}\sin^2\frac{\alpha}{2}}\left(1 - \frac{4\varkappa\tau}{2h^2}\sin^2\frac{\beta}{2}\right)$$

$$|\lambda| = \left|\frac{1 - \frac{4\varkappa\tau}{2h^2}\sin^2\frac{\alpha}{2}}{1 + \frac{4\varkappa\tau}{2h^2}\sin^2\frac{\alpha}{2}}\right|\left|\frac{1 - \frac{4\varkappa\tau}{2h^2}\sin^2\frac{\beta}{2}}{1 + \frac{4\varkappa\tau}{2h^2}\sin^2\frac{\beta}{2}}\right| < 1$$

Данная схема также безусловно устойчива, имеет порядок $O(\tau^2 + h^2)$ и один шаг «стоит» две прогонки

Спасибо за внимание!

tsybulinhome@gmail.com