Дополнительные задачи по курсу вычислительной математики. 5 семестр

Цыбулин Иван

13 ноября 2014 г.

1. Используя ваш любимый язык программирования, напишите функцию, вычисляющую функцию Бесселя первого рода $J_0(x)$, суммируя часть ее ряда Тейлора в окрестности точки $x_0 = 0$:

$$J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}.$$

Далее, используя эту функцию и формулу численного дифференцирования, найдите производную функции Бесселя $J_0(x)$ в точке $x = 1$ с заданной точностью $\varepsilon = 10^{-6}$.

Если в программе используются константы, такие как число членов ряда Тейлора или значение шага дифференцирования, должно быть указано, как они получены.

Примечание. Для дифференцирования использовать оптимальный шаг h^*. Принять, что погрешность, с которой вычисляются значения $J_0(x)$ равна ошибке метода вычисления функции с помощью отрезка ее ряда Тейлора, и может быть принята равной первому отброшенному слагаемому в ряде Тейлора. Использовать минимальное число членов ряда Тейлора для решения этой задачи. Для оценки максимумов всех производных функции Бесселя использовать $M_n \leq 1$.

2. Построить для функции $f(x) = \sin x$ на отрезке $[0, 2\pi]$ кубический сплайн $P(x)$, который в узлах интерполяции x_k совпадает со значениями $f(x_k)$, производная которого непрерывна, и в узлах совпадает со значениями $f'(x_k) = \cos x_k$ (такой сплайн называется сплайном Эрмита). Численно изучить зависимость максимального отклонения $f(x)$ и $P(x)$

в зависимости от количества узлов N. Найти порядок метода (степень зависимости максимального отклонения от $h = \frac{2\pi}{N-1}$)

3. Написать программу, которая используя правило Рунге и формулу Гаусса численного интегрирования четвертого порядка (ошибка на всем отрезке имеет порядок $O(h^4)$)

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx \approx \frac{x_2 - x_1}{2}\left[f\left(\frac{x_1+x_2}{2} - \frac{x_2-x_1}{2\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{x_1+x_2}{2} + \frac{x_2-x_1}{2\sqrt{3}}\right)\right]$$

вычисляет интеграл

$$\int_0^{\pi/2} \ln\frac{1}{\sin x}dx$$

с точностью $\varepsilon = 10^{-10}$. Сравнить полученное значение с точным значением интеграла $\frac{\pi}{2}\ln 2$

Указание. Убедиться, что $\Delta_h = |I_h - I_{h/2}| \sim O(h^4)$. Если это не так, регуляризуйте подынтегральную функцию.

4. Для решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода

$$\int_{-\pi}^{\pi} K(x-y)u(y) = f(x)$$

с ядром $K(s) = |s|$ и правой частью $f(x) = (\pi^2 + x^2)\cos^2\frac{x}{2}$ используется квадратурная формула средней точки. При этом интегральное уравнение сводится к следующей системе линейных уравнений

$$h\sum_{m=1}^{N} K_{nm}u_m = f_n, \quad n = 1, \ldots, N$$

где $K_{nm} = h|n-m|$ — симметричная матрица ядра размера $N \times N$, а $f_n = f\left(nh - \frac{h}{2}\right)$. Точное решение интегрального уравнения $U(x) = \cos^2\frac{\pi}{2}$, численно должно совпадать с ним с точностью до небольшой ошибки метода порядка $O(h^2)$.

Решить полученную систему одним из следующих методов и сравнить решение с точным $U_m = U\left(mh - \frac{h}{2}\right)$:

- с помощью LU-разложения;
- * с помощью LUP-разложения;
- * с помощью LL^{T}-разложения (Холецкого);

- $\bullet^*$ с помощью QR-разложения методом вращений Гивенса;
- $\bullet^*$ с помощью QR-разложения методом отражений Хаусхолдера.

Возмутить правую часть системы случайным вектором δf_n и получить возмущение решения δu_m. Оценить число обусловленности матрицы $\mathbf{K}$

$$\mu_E(\mathbf{K}) \gtrsim \frac{||\delta\mathbf{f}||_E/||\mathbf{f}||_E}{||\delta\mathbf{u}||_E/||\mathbf{u}||_E}$$

5. Решить линейную систему уравнений из предыдущей задачи одним из итерационных методов:

- методом Зейделя;
- методом простой итерации с параметром $\tau = \frac{2}{\|\mathbf{K}\|_\infty}$ (для симметричной положительно определенной матрицы $\lambda(\mathbf{K}) < \|\mathbf{K}\|_\infty$);

Итерационный процесс следует завершить, если $||\mathbf{u}^{(k)} - \mathbf{u}^{(k-1)}|| < \varepsilon = 10^{-6}$. В качестве начального приближения $\mathbf{u}^{(0)}$ возьмите $\mathbf{u}^{(0)} = \mathbf{0}$.

6. Решить следующую трехдиагональную систему уравнений методом прогонки

$$\begin{cases} u_0 & = 0 \\ -u_{n-1} + \big(2 + h^2\big) u_n - u_{n+1} & = 2h^2 \sin(nh), \qquad n = \overline{1, N-1}\,, \\ u_N & = 0 \end{cases}$$

где $N = 20, h = \frac{\pi}{N}$. Сравнить u_n и $\sin(nh)$.

7. Для задачи Коши

$$\begin{cases} \dfrac{dy(t)}{dt} = -2ty(t) + 2t, \qquad t \in [0, 1] \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

используется метод Адамса

$$\begin{cases} \dfrac{u_{n+1} - u_n}{\tau} = 3n\tau(1 - u_n) - \tau(n-1)(1 - u_{n-1}), \qquad n = \overline{1, N-1} \\ u_0 = 2 \\ u_1 = 2 \end{cases},$$

где $\tau = \frac{1}{N}$. Написать программу, реализующую этот метод, и численно убедиться, что решение разностной задачи u сходится к решению дифференциальной задачи $y(t) = 1 + e^{-t^2}$ со вторым порядком по τ.