Линейные многошаговые методы

Условия порядка. Устойчивость

Цыбулин Иван

K2. *Для решения жесткой задачи коши из n обыкновенных дифференциальных уравнений*

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{G}(y, \mathbf{y}(t)), \quad \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}^0, \quad t \in [0, T]$$

предлагается использовать следующий линейный многошаговый метод

$$a_2\mathbf{u}_{n+1} + a_1\mathbf{u}_n + a_0\mathbf{u}_{n-1} = \tau\Big(b_2\mathbf{G}(t_{n+1}, \mathbf{u}_{n+1}) + b_1\mathbf{G}(t_n, \mathbf{u}_n) + b_0\mathbf{G}(t_{n-1}, \mathbf{u}_{n-1})\Big),$$
$$\mathbf{u}_0 = \mathbf{y}^0, \quad \mathbf{u}_1 = \mathbf{y}^1,$$
$$a_2 = \frac{5}{6},\ a_1 = -\frac{2}{3},\ a_0 = -\frac{1}{6}, \qquad b_2 = \frac{1}{3},\ b_1 = \frac{2}{3},\ b_0 = 0$$

а) Указать порядок аппроксимации для разностного уравнения.

б) Исследовать разностную задачу на устойчивость по начальным данным для тестового уравнения $y' = \lambda y(t), \lambda \in \mathbb{C}$.

в) Исследовать метод на A-устойчивость.

г) Исследовать метод на L-устойчивость.

а) Условия порядка для линейного многошагового метода:

- Необходимое условие: $a_2 + a_1 + a_0 = 0$. Если его нарушить, метод не будет аппроксимировать никакую задачу.
- Условие первого порядка и выше: $a_2 - a_0 = b_2 + b_1 + b_0$
- Условие второго порядка и выше: $\frac{1}{2}(a_2 + a_0) = b_2 - b_0$

- Условие третьего порядка и выше: $\frac{1}{6}(a_2 - a_0) = \frac{1}{2}(b_2 + b_0)$
- Условие четвертого порядка и выше: $\frac{1}{24}(a_2 + a_0) = \frac{1}{6}(b_2 - b_0)$

Условие четвертого порядка противоречит условию второго, и для двухшагового метода выполняться не может. Иными словами, двухшаговый метод может иметь порядок не выше третьего.

В нашем случае выполнены необходимое условие $\frac{5}{6} - \frac{2}{3} - \frac{1}{6} = 0$, условия первого порядка $\frac{5}{6} - \left(-\frac{1}{6}\right) = 1 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + 0$, условие второго порядка $\frac{1}{2}\left(\frac{5}{6} - \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{3} = \frac{1}{3} - 0$ и условие третьего порядка $\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6} + \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{6} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} + 0\right)$. Следовательно, метод имеет третий порядок аппроксимации.

б) Рассмотрим тестовое уравнение $y' = \lambda y, \quad \lambda \in \mathbb{C}$. Пусть $z = \tau\lambda$.

$$a_2 u_{n+1} + a_1 u_n + a_0 u_{n-1} = z(b_2 u_{n+1} + b_1 u_n + b_0) u_{n-1}.$$

Общее решение этого разностного уравнения имеет вид

$$u_n = C_1 q_1(z)^n + C_2 q_2(z)^n,$$

где $q_{1,2}(z)$ — корни характеристического многочлена

$$(a_2 - z b_2) q^2 + (a_1 - z b_1) q + (a_0 - z b_0) = 0.$$

Для нашей задачи характеристический многочлен имеет вид

$$(5 - 2z) q^2 - 4(1 + z) q - 1 = 0,$$

а его корни

$$q_{1,2} = \frac{2(1+z) \pm \sqrt{4(1+z)^2 + (5-2z)}}{5-2z} = \frac{2 + 2z \pm \sqrt{9 + 6z + 4z^2}}{5-2z}.$$

Разложим $q_{1,2}(z)$ в окрестности $z = 0$ (это соответствует окрестности $\tau = 0$).

$$q_1(z) = \frac{2 + 2z + \sqrt{9 + 6z + O(z^2)}}{5 - 2z} = \frac{2 + 2z + 3\sqrt{1 + \frac{6z}{9} + O(z^2)}}{5 - 2z} =$$
$$= \frac{2 + 2z + 3(1 + \frac{3z}{9} + O(z^2))}{5 - 2z} = \frac{5 + 3z + O(z^2)}{5 - 2z} = \frac{1 + \frac{3}{5}z + O(z^2)}{1 - \frac{2z}{5}} =$$
$$= 1 + z + O(z^2)$$

$$q_2(z) = \frac{2+2z-\sqrt{9+6z+O(z^2)}}{5-2z} = \frac{2+2z-3\sqrt{1+\frac{6z}{9}+O(z^2)}}{5-2z} =$$
$$= \frac{2+2z-3(1+\frac{3z}{9}+O(z^2))}{5-2z} = \frac{-1+z+O(z^2)}{5-2z} = -\frac{1}{5}+O(z)$$

Так как задача линейная, для устойчивости достаточно показать, что для достаточно малого τ (достаточно малого z)

$$\max_{0\leqslant n\leqslant N} |u_n| \leqslant C\max(|u_0|, |u_1|),$$

где C зависит только от λ, но не от τ. u_0 и u_1 являются двумя начальными условиями для многошагового метода. Найдем C_1 и C_2 из начальных условий

$$C_1q_1^0 + C_2q_2^0 = C_1 + C_2 = u_0$$
$$C_1q_1^1 + C_2q_2^1 = C_1q_1 + C_2q_2 = u_1$$

Перейдем от возмущения начальных условий u_0, u_1 к возмущению констант C_1, C_2:

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & q_1 \\ 1 & q_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}$$
$$\max(|C_1|, |C_2|) \leqslant \left\| \begin{pmatrix} 1 & q_1 \\ 1 & q_2 \end{pmatrix}^{-1} \right\|_\infty \max(|u_0|, |u_1|) \leqslant K\max(|u_0|, |u_1|)$$

В окрестности $z = 0$ норма обратной матрицы ограничена константой K (для конкретного случая годится, например, $K = \frac{11}{6}$). Чтобы показать устойчивость достаточно проверить, что

$$\max_{0\leqslant n\leqslant N} |u_n| \leqslant C\max(|C_1|, |C_2|),$$

из чего сразу можно заключить, что

$$\max_{0\leqslant n\leqslant N} |u_n| \leqslant CK\max(|u_0|, |u_1|).$$

Поскольку $u_n = C_1q_1^n + C_2q_2^n$,

$$|u_n| \leqslant C_1|q_1|^n + C_2|q_2|^n \leqslant \max(|C_1|, |C_2|)(|q_1|^n + |q_2|^n)$$

В некоторой окрестности $z = 0$ величина $|q_2| \leqslant 1$, а значит

$$|u_n| \leqslant \max(|C_1|, |C_2|)(1 + |q_1|^n)$$

$$|q_1|^n = e^{n \ln |q_1|} = e^{n \ln |1+z+O(z^2)|} = e^{n(|z|+O(z^2))} = e^{n|\tau\lambda|+n\tau O(\tau)} = e^{|\lambda|t_n} + O(\tau)$$

В некоторой окрестности $\tau = 0$ выполняется

$$|q_1|^n \leqslant 2e^{|\lambda|t_n} \leqslant 2e^{|\lambda|T}.$$

Окончательно

$$\max_{0 \leqslant n \leqslant N} |u_n| \leq (1 + 2e^{|\lambda|T}) \max(|C_1|, |C_2|),$$

и задача будет устойчивой по начальным данным. Такой способ работает всегда, когда $q_1(z) = 1 + z + O(z^2)$, а $|q_2(z = 0)| \leqslant 1$. В нашем случае $q_2(z = 0) = -\frac{1}{5}$. Если $|q_2(z = 0)| > 1$, то задача не будет устойчивой, так как $|q_2|^{T/\tau}$ будет расти слишком быстро при $\tau \to 0$, и этот рост невозможно будет ограничить константой, не зависящей от τ.

в) Общее решение модельного уравнения $y' = \lambda y$ имеет вид

$$u_n = C_1 q_1(z)^n + C_2 q_2(z)^n.$$

Для жесткой устойчивости требуется, чтобы оба элементарных решения q_1^n и q_2^n не возрастали по модулю. Областью устойчивости будет множество

$$\{|q_1(z)| \leqslant 1\} \cap \{|q_2(z)| \leqslant 1\}.$$

Границей области устойчивости будет множество точек z, в которых одна из функций $q_{1,2}(z)$ по модулю равна 1.

Если $|q(z)| = 1$, то $q(z)$ можно представить в виде $e^{i\phi}, \phi \in [0, 2\pi]$. Таким образом, всю границу области устойчивости можно задать в виде

$$z : q(z) = e^{i\phi}, \phi \in [0, 2\pi].$$

Выразим z как функцию q на границе. Вспомним характеристическое уравнение

$$(a_2 - zb_2)q^2 + (a_1 - zb_1)q + (a_0 - zb_0) = 0,$$

откуда

$$z = \frac{a_2 q^2 + a_1 q + a_0}{b_2 q^2 + b_1 q + b_0} = \frac{a_2 q + a_1 + a_0 q^{-1}}{b_2 q + b_1 + b_0 q^{-1}}.$$

Граница области устойчивости, таким образом, задается в виде

$$z = \frac{a_2 e^{i\phi} + a_1 + a_0 e^{-i\phi}}{b_2 e^{i\phi} + b_1 + b_0 e^{-i\phi}}, \quad \phi \in [0, 2\pi].$$

Для A-устойчивости требуется, чтобы вся эта граница находилась в правой полуплоскости $\operatorname{Re} z \geqslant 0$, а область устойчивости находилась вне этой кривой. Для проверки можно найти зависимость действительной части $z(\phi)$, это позволит сказать, находится ли кривая в правой полуплоскости:

$$\operatorname{Re} z = \operatorname{Re} \frac{a_2 e^{i\phi} + a_1 + a_0 e^{-i\phi}}{b_2 e^{i\phi} + b_1 + b_0 e^{-i\phi}} = \frac{\operatorname{Re}(a_2 e^{i\phi} + a_1 + a_0 e^{-i\phi})(b_2 e^{-i\phi} + b_1 + b_0 e^{i\phi})}{Q},$$

где Q — несущественное положительное число (квадрат модуля знаменателя). Рассмотрим отдельно числитель

$$\begin{aligned} Q \operatorname{Re} z = (a_2 b_2 + a_1 b_1 + a_0 b_0) + {} \\ + (a_2 b_1 + a_1 b_0 + a_0 b_1 + a_1 b_2)\cos\phi + {} \\ + (a_2 b_0 + a_0 b_2)\cos 2\phi, \end{aligned}$$

который после подстановки $\cos 2\phi = 2\cos^2\phi - 1$ превращается в

$$\begin{aligned} Q \operatorname{Re} z = (a_2 b_2 + a_1 b_1 + a_0 b_0 - a_2 b_0 - a_0 b_2) + {} \\ + (a_2 b_1 + a_1 b_0 + a_0 b_1 + a_1 b_2)\cos\phi + {} \\ + 2(a_2 b_0 + a_0 b_2)\cos^2\phi. \end{aligned}$$

Если эта величина неотрицательна при любом ϕ, то метод будет A-устойчивым.

Для нашей задачи

$$\begin{aligned} Q \operatorname{Re} z = \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{3} - \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} - \left(-\frac{1}{6}\right)\cdot\frac{1}{3} + \left(\frac{5}{6}\cdot\frac{2}{3} - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\cdot\frac{2}{3}\right)\cos\phi + {} \\ + 2\left(-\frac{1}{6}\right)\frac{1}{3}\cos^2\phi = -\frac{1}{9} + \frac{2}{9}\cos\phi - \frac{1}{9}\cos^2\phi = -\frac{(1-\cos\phi)^2}{9} \leqslant 0, \end{aligned}$$

а значит, граница области устойчивости заходит на левую полуплоскость, что нарушает предположение об A-устойчивости.

Рассмотрим другой пример, на этот раз A-устойчивого метода ФДН2 (задача **T7**)

$$3\mathbf{u}_{n+1} - 4\mathbf{u}_n + \mathbf{u}_{n-1} = 2\tau \mathbf{G}(t_{n+1}, \mathbf{u}_{n+1})$$

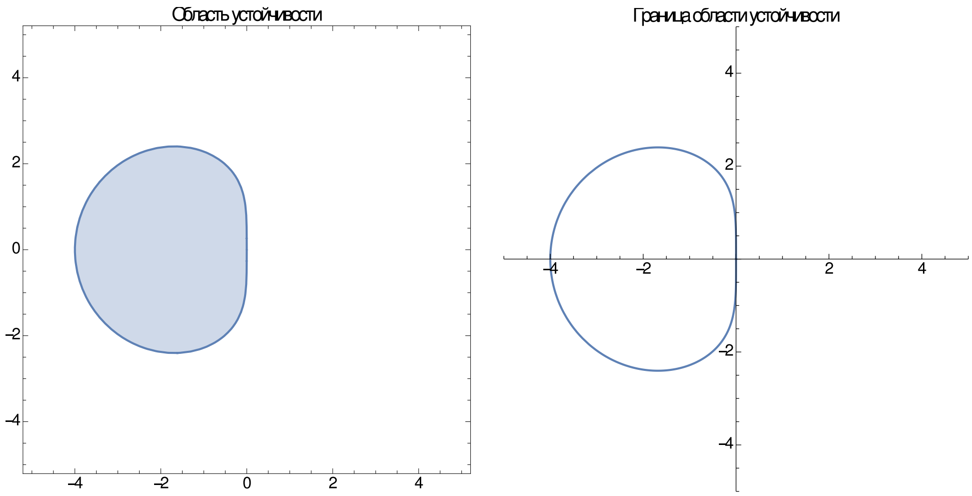

Рис. 1: Область $|q_{1,2}(z)| < 1$ и ее граница $z(\phi)$

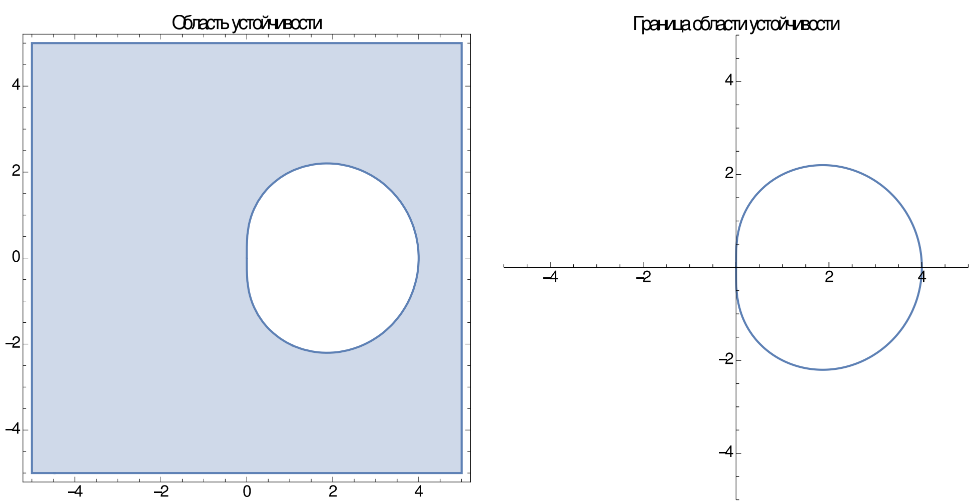

Рис. 2: Область $|q_{1,2}(z)| < 1$ и ее граница $z(\phi)$ для ФДН-метода

Он характеризуется набором коэффициентов

$$a_2 = 3, \quad a_1 = -4, \quad a_0 = 1, \quad b_2 = 2, \quad b_1 = b_0 = 0$$

Для него определяющая величина

$$Q \operatorname{Re} z = 6 - 2 - 8\cos\phi + 4\cos^2\phi = 4(\cos\phi - 1)^2 \geqslant 0$$

Чтобы показать A-устойчивость остается лишь проверить, что областью устойчивости является внешность, а не внутренность кривой. Для этих целей обычно удобно проверять $z = -\infty$. Для ФДН-метода

$$q_{1,2}(z) = \frac{2 \pm \sqrt{1+2z}}{3-2z}.$$

Обе функции устойчивости при $z \to -\infty$ меньше единицы по модулю (так как стремятся к нулю), что завершает доказательство A-устойчивости.

г) Поскольку L-устойчивым может быть только A-устойчивый метод, наш метод не L-устойчив.

Но ФДН метод, рассмотренный в предыдущем пункте является L-устойчивым, поскольку обе его функции устойчивости $q_{1,2}(z)$ стремятся по модулю при $z \to -\infty$ к нулю.