Подготовка к контрольной. Задача Коши

Скалько Юрий Иванович
Цыбулин Иван
Шевченко Александр

Задача

Для задачи Коши

$$y'(t) = f(t, y(t))$$
$$y(0) = y_0$$

Используется следующая численная схема

$$u_{n+1} - u_{n-1} = \frac{h}{3}\left(f(t_{n-1}, u_{n-1}) + 4f(t_n, u_n) + f(t_{n+1}, u_{n+1})\right)$$
$$u_0 = y_0$$

1. Описать способ нахождения $u_2, u_3, \dots$
2. Задать u_1 так, чтобы метод имел максимальный порядок аппроксимации (какой?)
3. Показать устойчивость метода *по начальным данным*. Чему равна константа устойчивости?

Нахождение u_n

Равенство

$$u_{n+1} - u_{n-1} = \frac{h}{3}\left(f(t_{n-1}, u_{n-1}) + 4f(t_n, u_n) + f(t_{n+1}, u_{n+1})\right)$$

задает при известных u_n, u_{n-1} *уравнение* на u_{n+1}.

$$F(u_{n+1}) = u_{n+1} - \frac{h}{3} f(t_{n+1}, u_{n+1}) + \\ + \left[u_{n-1} + \frac{h}{3}\left(f(t_{n-1}, u_{n-1}) + 4f(t_n, u_n)\right)\right] = 0$$

Данное уравнение обычно решается методом Ньютона с начальным приближением $u_{n+1}^{(0)} = u_n$

$$u_{n+1}^{(s+1)} = u_{n+1}^{(s)} - \left[F'(u_{n+1}^{(s)})\right]^{-1} F(u_{n+1}^{(s)})$$

Задание u_1

Чтобы иметь возможность вычислить хотя бы u_2 необходимо знать u_0 и u_1. Требуется задать u_1 каким-то образом.

Задание u_1

Чтобы иметь возможность вычислить хотя бы u_2 необходимо знать u_0 и u_1. Требуется задать u_1 каким-то образом.

Ошибка аппроксимации всей задачи будет равна самой большой из ошибок аппроксимации уравнения и ошибки аппроксимации начального условия u_1. Поэтому, нет смысла аппроксимировать u_1 с большим или меньшим порядком, по сравнению с порядком аппроксимации уравнения. Найдем порядок аппроксимации уравнения $y'(t) = f(t, y(t))$ разностной схемой

$$u_{n+1} - u_{n-1} = \frac{h}{3}\left(f(t_{n-1}, u_{n-1}) + 4f(t_n, u_n) + f(t_{n+1}, u_{n+1})\right)$$

Ошибка аппроксимации уравнения

Подставим в качестве $u_n = [y]_n$, где $y(t)$ — решение Из-за симметрии разностной схемы относительно точки n, разложения в ряд Тейлора запишем именно относительно t_n.

$$[y]_{n\pm1} = [y]_n \pm h[y']_n + \frac{h^2}{2}[y'']_n \pm \frac{h^3}{6}[y''']_n + \frac{h^4}{24}[y^{IV}]_n + O(h^5)$$

$$f(t_{n\pm1}, [y]_{n\pm1}) = [y']_{n\pm1} = [y']_n \pm h[y'']_n + \frac{h^2}{2}[y''']_n \pm \frac{h^3}{6}[y^{IV}]_n + O(h^4)$$

Раскладывая левую часть $[y]_{n+1} - [y]_{n-1}$, получим

$$[y]_{n+1} - [y]_{n-1} = 2h\left([y']_n + \frac{h^2}{6}[y''']_n + O(h^4)\right)$$

Разложение правой имеет вид

$$\frac{h}{3}\left([f]_{n-1} + 4[f]_n + [f]_{n+1}\right) = \frac{h}{3}\left(6[y']_n + h^2[y''']_n + O(h^4)\right)$$

Ошибка аппроксимации уравнения

Разностное уравнение аппроксимирует дифференциальное уравнение $y = f(t, y(t))$ в точке t_n, умноженное на $2h$. Из-за этого множителя $2h$ схема не является устойчивой по определению. "Константа" устойчивости в этом случае зависит от h

$$C = O(h)$$

Легко построить устойчивую разностную схему (с $C = O(1)$), достаточно просто разделить схему на $O(h)$.

$$\frac{u_{n+1} - u_{n-1}}{2h} = \frac{1}{6}\left(f(t_{n-1}, u_{n-1}) + 4f(t_n, u_n) + f(t_{n+1}, u_{n+1})\right)$$

Теперь хорошо видно, что левая часть приближает $y'(t)$, а правая $f(t, y(t))$. Константа устойчивости (при условии, что схема действительно устойчива), будет равна $O(1)$. Ошибку аппроксимации следует вычислять именно для такого уравнения

Ошибка аппроксимации уравнения

Вернемся к разложениям левой и правой частей разностного уравнения

$$[y]_{n+1} - [y]_{n-1} = 2h\left([y']_n + \frac{h^2}{6}[y''']_n + O(h^4)\right)$$

$$\frac{h}{3}\left([f]_{n-1} + 4[f]_n + [f]_{n+1}\right) = \frac{h}{3}\left(6[y']_n + h^2[y''']_n + O(h^4)\right)$$

После деления на $2h$ видно, что левая и правая части отличаются на величину порядка $O(h^4)$, это различие и будет ошибкой аппроксимации.

Ошибка аппроксимации уравнения

Вернемся к разложениям левой и правой частей разностного уравнения

$$[y]_{n+1} - [y]_{n-1} = 2h\left([y']_n + \frac{h^2}{6}[y''']_n + O(h^4)\right)$$

$$\frac{h}{3}\left([f]_{n-1} + 4[f]_n + [f]_{n+1}\right) = \frac{h}{3}\left(6[y']_n + h^2[y''']_n + O(h^4)\right)$$

После деления на $2h$ видно, что левая и правая части отличаются на величину порядка $O(h^4)$, это различие и будет ошибкой аппроксимации.

Уравнения аппроксимированы с четвертым порядком. Значит необходимо задать u_1 также с четвертым порядком, т.е.

$$u_1 - y(h) = O(h^4)$$

Задание u_1

Разложим $y(h)$ в ряд Тейлора вплоть до $O(h^4)$

$$y(h) = y(0) + hy'(0) + \frac{h^2}{2}y''(0) + \frac{h^3}{6}y'''(0) + O(h^4)$$

Воспользуемся

$$y(0) = y_0, \quad y'(0) = f(0, y_0), \quad y''(0) = f_t(0, y_0) + f_y(0, y_0)f(0, y_0)$$

$$y'''(0) = f_{tt}(0, y_0) + 2f_{ty}(0, y_0)f(0, y_0) + f_{yy}(0, y_0)f^2(0, y_0) +$$
$$+ f_y(0, y_0)f_t(0, y_0) + f_y^2(0, y_0)f(0, y_0)$$

Тогда

$$u_1 = [y]_0 + h[f]_0 + \frac{h^2}{2}\left([f_t]_0 + [f_y]_0[f]_0\right) +$$

$$+\frac{h^3}{6}\left([f_{tt}]_0 + 2[f_{ty}]_0[f]_0 + [f_{yy}]_0[f]_0^2 + [f_y]_0[f_t]_0 + [f_y]_0^2[f]_0\right)$$

Задание u_1

Задать u_1 можно и не зная аналитического выражения для $f(t, y)$. Для этого можно просто воспользоваться некоторым методом четвертого порядка, для которого достаточно только одного начального условия u_0.

Задание u_1

Задать u_1 можно и не зная аналитического выражения для $f(t, y)$. Для этого можно просто воспользоваться некоторым методом четвертого порядка, для которого достаточно только одного начального условия u_0.

Например, можно воспользоваться следующим методом (метод Рунге-Кутты 4го порядка)

$$k_1 = f(0, y_0)$$

$$k_2 = f\left(\frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = f\left(\frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2}k_2\right)$$

$$k_4 = f\left(h, y_0 + hk_3\right)$$

$$u_1 = y_0 + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = y(h) + O(h^4)$$

Устойчивость по начальным данным

Пусть u_n — решение разностной задачи с начальными условиями $u_0 = y_0, u_1 = y_1$. Рассмотрим возмущенную задачу для v_n, которая отличается от исходной только начальными условиями $v_0 = y_0 + \delta_0, v_1 = y_1 + \delta_1$. Если

$$\|u_n - v_n\| < C \max(\delta_0, \delta_1),$$

причем C не зависит от h, то задача называется устойчивой по начальным данным.

Устойчивость по начальным данным

Пусть u_n — решение разностной задачи с начальными условиями $u_0 = y_0, u_1 = y_1$. Рассмотрим возмущенную задачу для v_n, которая отличается от исходной только начальными условиями $v_0 = y_0 + \delta_0, v_1 = y_1 + \delta_1$. Если

$$\|u_n - v_n\| < C \max(\delta_0, \delta_1),$$

причем C не зависит от h, то задача называется устойчивой по начальным данным.

Данное определение отличается от обычного определения устойчивости тем, что возмущение допускается только в начальных условиях, когда для обычно устойчивости оно допускается и в правой части.

Устойчивость по начальным данным

Для удобства введем $\Delta_n = |u_n - v_n|$. Тогда

$$\Delta_0 = \delta_0, \qquad \Delta_1 = \delta_1$$

Устойчивость по начальным данным

Для удобства введем $\Delta_n = |u_n - v_n|$. Тогда

$$\Delta_0 = \delta_0, \qquad \Delta_1 = \delta_1$$

Докажем устойчивость в предположении, что $f(t, y)$ Липшицева по y, то есть

$$|f(t, y) - f(t, g)| < L|y - g|$$

Устойчивость по начальным данным

Для удобства введем $\Delta_n = |u_n - v_n|$. Тогда

$$\Delta_0 = \delta_0, \qquad \Delta_1 = \delta_1$$

Докажем устойчивость в предположении, что $f(t, y)$ Липшицева по y, то есть

$$|f(t, y) - f(t, g)| < L|y - g|$$

Запишем возмущенное и невозмущенное уравнения

$$u_{n+1} = u_{n-1} + \frac{h}{3}\left(f(t_{n-1}, u_{n-1}) + 4f(t_n, u_n) + f(t_{n+1}, u_{n+1})\right)$$

$$v_{n+1} = v_{n-1} + \frac{h}{3}\left(f(t_{n-1}, v_{n-1}) + 4f(t_n, v_n) + f(t_{n+1}, v_{n+1})\right)$$

Для Δ_{n+1} справедливо

$$\Delta_{n+1} \leq \Delta_{n-1} + \frac{Lh}{3}\Delta_{n-1} + \frac{4Lh}{3}\Delta_n + \frac{Lh}{3}\Delta_{n+1}$$

Устойчивость по начальным данным

$$\Delta_{n+1} \le \Delta_{n-1} + \frac{Lh}{3}\Delta_{n-1} + \frac{4Lh}{3}\Delta_n + \frac{Lh}{3}\Delta_{n+1}$$

$$\left(1 - \frac{Lh}{3}\right)\Delta_{n+1} \le \left(1 + \frac{Lh}{3}\right)\Delta_{n-1} + \frac{4Lh}{3}\Delta_n$$

Пусть h мало настолько, что $A = Lh < 3$. Тогда

$$\Delta_{n+1} \le \frac{3+A}{3-A}\Delta_{n-1} + \frac{4A}{3-A}\Delta_{n-1} \le \frac{3+5A}{3-A}\max(\Delta_{n-1}, \Delta_n) \le$$

$$\le \left(\frac{3+5A}{3-A}\right)^2 \max(\Delta_{n-2}, \Delta_{n-1}) \le \dots \le \left(\frac{3+5A}{3-A}\right)^{n-1} \max(\Delta_1, \Delta_0)$$

Получаем

$$\|u_n - v_n\| = \max \Delta_n \le \left(\frac{3+5A}{3-A}\right)^{N-1} \max(\delta_1, \delta_0)$$

Устойчивость по начальным данным

$$\|u_n - v_n\| = \max \Delta_n \le \left(\frac{3+5A}{3-A}\right)^{N-1} \max(\delta_1, \delta_0)$$

Покажем, что $\left(\frac{3+5A}{3-A}\right)^{N-1}$ можно ограничить константой, не зависящей от h.

$$\left(\frac{3+5A}{3-A}\right)^{N-1} = \exp\left\{(N-1)\ln\left(\frac{3+5Lh}{3-Lh}\right)\right\} =$$

$$= \exp\left\{(N-1)\ln\left(1+\frac{6Lh}{3}+O(h^2)\right)\right\} = e^{2LNh+O(h)} \to e^{2LT}$$

В пределе при $h \to 0$ выражение $\left(\frac{3+5A}{3-A}\right)^{N-1}$ стремится к e^{2LT}, значит его можно ограничить константой не зависящей от h. Эта константа не будет сильно отличаться от e^{2LT}, поэтому можно принять, что константа устйочивости равна e^{2LT}

Спасибо за внимание!

tsybulinhome@gmail.com