Дополнительные задачи для самостоятельного решения

Цыбулин Иван

14 мая 2016 г.

Данные задачи предлагаются как альтернатива соответствующим лабораторным работам. Для реализации можно использовать любой язык программирования.

1 Задача Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений

Решить одну из предложенных задач Коши

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{G}(t, \mathbf{y}), \quad \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0$$

имеющих периодические решения с периодом T:

а)

$$\begin{cases} \varphi'(t) = \omega(t) \\ \omega'(t) = -\sin\varphi(t) \\ \varphi(0) = \frac{\pi}{2}, \quad \omega(0) = 0 \end{cases} \qquad 0 \le t \le T\ ,$$

где $T = 4K\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$$K(\alpha) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-t^2\sin^2\alpha)}}, \qquad K\left(\frac{\pi}{4}\right) \approx 1.854074677301372$$

б)

$$\begin{cases} \rho'(t) = v(t) \\ v'(t) = \rho(t)\omega^2(t) - \dfrac{1}{\rho^2(t)} \\ \varphi'(t) = \omega(t) \\ \omega'(t) = -\dfrac{2\omega(t)v(t)}{\rho(t)} \\ \varphi(0) = 0, \quad \omega(0) = 1/\sqrt{3}, \quad \rho(0) = 1, \quad v(0) = 0 \end{cases} \qquad 0 \le t \le T\ ,$$

где $T = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\left(\frac{6}{5}\right)^{3/2} \approx 2.920160646701$

в)

$$\begin{cases} u'(t) = v(t) \\ v'(t) = -u^3(t) \\ u(0) = 1, \quad v(0) = 0 \end{cases} \qquad 0 \le t \le T\ ,$$

где $T = \sqrt{32\pi}\dfrac{\Gamma(5/4)}{\Gamma(3/4)} \approx 7.41629870920549$

В качестве численного метода используйте один из методов Рунге-Кутты выше первого порядка, например:

- Метод Хойна третьего порядка

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 2/3 & 0 & 2/3 & 0 \\ \hline & 1/4 & 0 & 3/4 \end{array}$$

- Метод Рунге третьего порядка

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & 1/6 & 2/3 & 0 & 1/6 \end{array}$$

- «Классический» метод Рунге-Кутты четвертого порядка

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & 1/6 & 1/3 & 1/3 & 1/6 \end{array}$$

Проверьте, что метод имеет указанный порядок. Для этого исследуйте зависимость отклонения за период численного решения $\varepsilon = \|\mathbf{y}(T) - \mathbf{y}(0)\|$ от величины шага.

2 Жесткая задача Коши для ОДУ

Найти численное решение одной из следующих жестких задач

а) «Брюсселятор»

$$\frac{dx(t)}{dt} = A + x^2(t)y(t) - (B+1)x(t),$$
$$\frac{dy(t)}{dt} = Bx(t) - x^2(t)y(t),$$
$$x(0) = 2, y(0) = 3, A = 1, B = 3, \qquad 0 \le t \le 20$$

б)

$$y'(t) = 50(\cos t - y^3(t)), \qquad 0 \le t \le 20$$
$$y(0) = 0$$

В качестве численного метода используйте один из следующих неявных методов:

- Неявный метод Эйлера первого порядка

$$\begin{cases} \dfrac{\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n}{\tau} = \mathbf{G}(t_{n+1}, \mathbf{u}_{n+1}) \\ \mathbf{u}_0 = \mathbf{y}(0) \end{cases}$$

- Диагонально-неявный метод Рунге-Кутты с таблицей Бутчера

$$\begin{array}{c|cc} 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \hline & \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}$$

- ФДН[1]-метод второго порядка

$$\begin{cases} \dfrac{3\mathbf{u}_{n+1} - 4\mathbf{u}_n + \mathbf{u}_{n-1}}{2\tau} = \mathbf{G}(t_{n+1}, \mathbf{u}_{n+1}) \\ \mathbf{u}_0 = \mathbf{y}(0) \\ \mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_0 + \tau \mathbf{G}(\tau, \mathbf{u}_1) \end{cases}$$

Для решения нелинейных уравнений используйте метод Ньютона.

Определить максимальный шаг по времени, при котором *явный* метод Эйлера для данной задачи Коши устойчив. Убедиться, что используемый метод устойчив при гораздо больших шагах по времени.

3 Нелинейная краевая задача

Форму волн на поверхности воды в некотором приближении можно описать уравнением

$$\phi''(x) + 3\phi^2(x) - \phi(x) = 0$$

Найдите методом линеаризации решение, удовлетворяющее условиям

$$\phi(0) = 0.027923117357796894 \qquad \phi(5) = 0.498518924361681638$$

Проверить, что решение дополнительно удовлетворяет условиям

$$\phi'(0) = \phi'(5) = 0.$$

Последнее означает, что решение можно периодически продолжить на всю числовую ось.

[1] Формула дифференцирования назад

4 Спектральная задача для оператора Штурма-Лиувилля

Найти волновую функцию $\psi(x)$ и уровень энергии E основного состояния в одной из следующих задач для уравнения Шрёдингера:

- Квантовый гармонический осциллятор

$$-\frac{1}{2}\psi''(x) + \frac{x^2}{2}\psi(x) = E\psi(x)$$

Волновая функция основного состояния удовлетворяет условию $\psi'(0) = 0$, а также условию асимптотики на бесконечности

$$\lim_{x\to+\infty} \psi'(x) + \sqrt{x^2 - 2E}\psi(x) = 0,$$

которое для простоты можно перенести в конечную точку $x = L \equiv 5$

$$-\frac{1}{2}\psi''(x) + \frac{x^2}{2}\psi(x) = E\psi(x)$$
$$\psi'(0) = 0 \qquad \psi'(L) + \sqrt{L^2 - 2E}\psi(L) = 0$$

Найти нетривиальное решение с минимальным $E > 0$.

- Треугольная потенциальная яма

$$U(x) = \begin{cases} +\infty, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$$

Уравнение Шрёдингера принимает вид

$$-\frac{1}{2}\psi''(x) + x\psi(x) = E\psi(x)$$

Поскольку при $x < 0$ волновая функция равна нулю, $\psi(0) = 0$. Также должно выполняться условие асимптотики на бесконечности

$$\lim_{x\to+\infty} \psi'(x) + \sqrt{2x - 2E}\psi(x) = 0,$$

которое для простоты можно перенести в конечную точку $x = L \equiv 5$

$$-\frac{1}{2}\psi''(x) + x\psi(x) = E\psi(x)$$
$$\psi(0) = 0 \qquad \psi'(L) + \sqrt{2L - 2E}\psi(L) = 0$$

Найти нетривиальное решение с минимальным $E > 0$.

5 Уравнение переноса

Решить уравнение переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad 0 \leqslant t \leqslant 0.5$$

$$u\Big|_{t=0} = \begin{cases} 0, & x > 0.2 \\ 1, & x \leqslant 0.2 \end{cases}$$

$$u\Big|_{x=0} = 1,$$

используя следующую разностную схему:

$$u_0^{n+1} = u_1^{n+1} = 1,$$

$$u_m^{n+1} = (1-\sigma)u_m^n + \sigma u_{m-1}^n + \frac{\sigma(\sigma-1)}{2}\left(f(u_{m-1}^n, u_m^n, u_{m+1}^n) - f(u_{m-2}^n, u_{m-1}^n, u_m^n)\right),$$

$$\frac{u_M^{n+1} - u_M^n}{\tau} + \frac{u_M^n - u_{M-1}^n}{h} = 0.$$

Пусть $M = 100, h = \dfrac{1}{M}, \tau = \dfrac{h}{2}, \sigma = \dfrac{\tau}{h} = \frac{1}{2}$.

Использовать одну из следующих функций $f(x,y,z)$:

- Схема Лакса-Вендроффа

$$f(x,y,z) = z - y$$

- Схема Бима-Уорминга

$$f(x,y,z) = y - x$$

- Схема Фромма

$$f(x,y,z) = \frac{z-x}{2}$$

- TVD схема с ограничителем minmod

$$f(x,y,z) = \mathrm{minmod}(z-y, y-x)$$

- TVD схема с ограничителем superbee

$$f(x,y,z) = \mathrm{maxmod}\Big[\mathrm{minmod}\big(2(z-y), y-x\big), \mathrm{minmod}\big(z-y, 2(y-x)\big)\Big]$$

- TVD схема с ограничителем ван Альбада

$$f(x,y,z) = \frac{(z-x)\max(0,(z-y)(y-x))}{(z-y)^2 + (y-x)^2 + 10^{-14}}$$

- TVD схема с ограничителем ван Лира

$$f(x,y,z) = \frac{|z-y|(y-x) + |y-x|(z-y)}{|z-y| + |y-x| + 10^{-14}}$$

Здесь

$$\operatorname{minmod}(a,b) = \begin{cases} 0, & ab \leqslant 0 \\ \min(a,b), & a>0, b>0 \\ \max(a,b), & a<0, b<0 \end{cases}$$

$$\operatorname{maxmod}(a,b) = \begin{cases} 0, & ab \leqslant 0 \\ \max(a,b), & a>0, b>0 \\ \min(a,b), & a<0, b<0 \end{cases}$$

Провести сравнение решения с решением по схеме с $f(x,y,z) \equiv 0$ (левый уголок).

6 Параболическое уравнение

Решить нестационарное уравнение Шрёдинрега

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{i}{200}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.3, \quad i = \sqrt{-1}$$

с начальным условием

$$\Psi\Big|_{t=0} = \exp\left\{100ix - \frac{(x-0.3)^2}{0.01}\right\}$$

и граничными условиями

$$\Psi\Big|_{x=0} = \Psi\Big|_{x=1} = 0.$$

Использовать одну из следующих схем:

- Схема Кранка-Никольсон

$$\frac{\Psi_m^{n+1} - \Psi_m^n}{\tau} = \frac{i}{400}\left[\frac{\Psi_{m-1}^{n+1} - 2\Psi_m^{n+1} + \Psi_{m+1}^{n+1}}{h^2} + \frac{\Psi_{m-1}^{n} - 2\Psi_m^{n} + \Psi_{m+1}^{n}}{h^2}\right]$$
$$\Psi_0^{n+1} = \Psi_M^{n+1} = 0$$

- Неявная схема

$$\frac{\Psi_m^{n+1} - \Psi_m^n}{\tau} = \frac{i}{200}\frac{\Psi_{m-1}^{n+1} - 2\Psi_m^{n+1} + \Psi_{m+1}^{n+1}}{h^2}$$
$$\Psi_0^{n+1} = \Psi_M^{n+1} = 0$$

Принять $M = 1000, h = \dfrac{1}{M}, \tau = h$