Тренировочная к/р по вычислительной математике. Осенний семестр, 1 задание

Цыбулин Иван

13 октября 2016 г.

1. Условия

Первый пункт в контрольной — контрольный вопрос. Это теоретический вопрос, который *рассматривался на лекциях*. Оценка за это задание может быть от 0 до 1 и служит множителем к оценке за все остальные задачи. Очень важно хоть что-нибудь написать в ответе на этот вопрос, иначе оценка за всю контрольную автоматически обнулится.

1.1. Контрольные вопросы

Погрешности. Абсолютная и относительная погрешность. Погрешность хранения чисел в вычислительной технике. Погрешности при суммировании рядов. Ошибка метода и ошибка вычислений.

Численное дифференцирование. Формулы дифференцирования первого и второго порядка. Оптимальный шаг дифференцирования.

Нормы и обусловленность. Определение согласованной и подчиненной нормы. Стандартные подчиненные матричные нормы ($\|\cdot\|_\infty, \|\cdot\|_{\ell_1}, \|\cdot\|_E$). Число обусловленности для линейной системы и для матрицы, связь с относительной погрешностью решения системы.

СЛАУ. Что такое прямые и итерационные методы решения СЛАУ. Метод прогонки. Метод простой итерации, достаточное условие и критерий сходимости.

Итерационные методы решения СЛАУ. Метод простой итерации с параметром τ, условия сходимости. Методы Якоби, Зейделя — достаточные условия и критерии сходимости.

Метод наименьших квадратов. Решение переопределенной СЛАУ в смысле МНК. Явный вид многочлена наилучшего приближения в норме L_2 через многочлены Лежандра.

1.2. Задачи

1. Оценить относительную погрешность в определении корней $x_{1,2}$ уравнения $ax^2+bx+c=0$, если известно, что величины $a = 10, b = -21, c = 2$ заданны с абсолютными погрешностями $|\Delta a| \leqslant 10^{-3}, |\Delta b| \leqslant 10^{-3}, |\Delta c| \leqslant 10^{-4}$.

2. Для вычисления первой производной функции $f(x)$ в точке $x_0 = x+h$ используется формула

$$f'(x+h) \approx \frac{f(x+2h) - f(x-2h)}{4h}.$$

Сама функция $f(x)$ вычисляется с погрешностью Δf.

- Каков порядок данной формулы дифференцирования?
- Найти оптимальный шаг дифференцирования по этой формуле в произвольной точке x_0 для четырежды дифференцируемой функции.
- Оценить его численное значение для функции $f(x) = \cos(x+\pi/4)$ в случае использования арифметики одинарной и двойной точности (относительная погрешность округления чисел в одинарной точности $\delta = 6.0 \cdot 10^{-8}$, в двойной точности — $\delta = 1.1 \cdot 10^{-16}$).

3. Для системы линейных алгебраических уравнений $\mathbf{Ax} = \mathbf{f}$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \ \mathbf{f} = \begin{pmatrix} 4 \\ -11 \end{pmatrix}$$

- Вычислить число обусловленности системы в нормах, подчиненных векторным нормам $\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_i |x_i|, \ \|\mathbf{x}\|_{\ell_1} = \sum_i |x_i|, \ \|\mathbf{x}\|_E = \sqrt{\sum_i x_i^2}$.
- Найти оптимальный итерационный параметр τ для итерационного метода

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + \tau(\mathbf{f} - \mathbf{A}\mathbf{x}_n)$$

- Определить число итераций, достаточное для уменьшения погрешности в 10^6 раз при параметре τ из предыдущего пункта.
- Выполнить одну итерацию методом Якоби и одну итерацию методом Зейделя, используя в качестве начального приближения $\mathbf{x}_0 = (2, 0)^\top$.

4. Решить переопределенную систему линейных уравнений в смысле МНК:

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ 2x + y = 15 \\ x + 2y = 20 \end{cases}$$

5. Построить на отрезке $[-1, 1]$ квадратичный многочлен наилучшего приближения $P_2(x)$ в норме L_2 для функции $f(x) = \cos \pi x$.

2. Решения

1. Для начала найдем корни уравнения

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{21 \pm 19}{20} = \begin{cases} x_1 = 0.1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

Пусть коэффициенты уравнения a, b, c изменены на $\Delta a, \Delta b, \Delta c$ соответственно. Тогда решение изменится на некоторый Δx:

$$ax^2 + bx + c = 0$$
$$(a + \Delta a)(x + \Delta x)^2 + (b + \Delta b)(x + \Delta x) + (c + \Delta c) = 0$$

Раскроем во втором уравнении скобки и пренебрежем всеми слагаемыми содержащими произведения возмущений (оставим только линейные слагаемые по $\Delta a, \Delta b, \Delta c, \Delta x$):

$$ax^2 + bx + c = 0$$
$$ax^2 + 2ax\Delta x + x^2\Delta a + bx + b\Delta x + x\Delta b + c + \Delta c \approx 0$$

Вычтем из второго первое:

$$(2ax + b)\Delta x + x^2\Delta a + x\Delta b + \Delta c \approx 0 \tag{1}$$
$$\Delta x \approx -\frac{x^2\Delta a + x\Delta b + \Delta c}{2ax + b}. \tag{2}$$

Отметим, что уравнение (1) можно было выписать сразу, если записать уравнение в виде

$$f(a, b, c, x) = 0, \qquad f(a, b, c, x) = ax^2 + bx + c$$

Уравнение (1) получается, если записать $df = 0$

$$df = \frac{\partial f}{\partial a}da + \frac{\partial f}{\partial b}db + \frac{\partial f}{\partial c}dc + \frac{\partial f}{\partial x}dx = x^2da + xdb + dc + (2ax + b)dx$$

и заменить в нем дифференциалы на изменения Δ:

$$x^2da + xdb + dc + (2ax + b)dx = 0 \longrightarrow x^2\Delta a + x\Delta b + \Delta c + (2ax + b)\Delta x \approx 0.$$

Итак,

$$\Delta x = -\frac{x^2\Delta a + x\Delta b + \Delta c}{2ax + b}.$$

Для корня $x = x_1 = 0.1$

$$\Delta x_1 = -\frac{0.01\Delta a + 0.1\Delta b + \Delta c}{2 \cdot 10 \cdot 0.1 - 21} = \frac{0.01\Delta a + 0.1\Delta b + \Delta c}{19}$$
$$|\Delta x_1| \leqslant \frac{0.01|\Delta a| + 0.1|\Delta b| + |\Delta c|}{19} \leqslant \frac{10^{-5} + 10^{-4} + 10^{-4}}{19} \approx 1.1 \cdot 10^{-5}.$$

Для корня $x = x_2 = 2$

$$\Delta x_2 = -\frac{4\Delta a + 2\Delta b + \Delta c}{20 \cdot 10 \cdot 2 - 21} = -\frac{4\Delta a + 2\Delta b + \Delta c}{19}$$
$$|\Delta x_2| \leqslant \frac{4|\Delta a| + 2|\Delta b| + |\Delta c|}{19} \leqslant 4 \cdot 10^{-3} + 2 \cdot 10^{-3} + 10^{-4} \approx 3.2 \cdot 10^{-4}.$$

2. Пусть $x_0 = x + h$ — та точка, в которой мы вычисляем производную. Тогда формула дифференцирования может быть записана в виде

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - 3h)}{4h}.$$

Разложим правую часть в *окрестности точки* x_0, используя остаточный член в форме Лагранжа:

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0-3h)}{4h} =$$
$$= \frac{1}{4h}\left[\left(f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2}f''(x_0) + O(h^3)\right) - \right.$$
$$\left. - \left(f(x_0) - 3hf'(x_0) + \frac{9h^2}{2}f''(x_0) + O(h^3)\right)\right] =$$
$$= f'(x_0) - hf''(x_0) + O(h^2).$$

Таким образом, отличие левой и правой частей приближенного равенства

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - 3h)}{4h}.$$

составляет

$$\left|-hf''(x_0) + O(h^2)\right| \lesssim M_2 h = \varepsilon_{\text{метода}}$$

где M_2 — максимум модуля второй производной $f(x)$. Так как $\varepsilon_{\text{метода}} = O(h)$, метод имеет первый порядок.

Для определения оптимального шага оценим ошибку вычислений по данной формуле:

$$\Delta\left(\frac{f(x_0+h) - f(x_0-3h)}{4h}\right) \leqslant \frac{\Delta f + \Delta f}{4h} = \frac{\Delta f}{2h} = \varepsilon_{\text{вычисл}}.$$

Найдем минимум полной ошибки $\varepsilon_{\text{полн}} = \varepsilon_{\text{метода}} + \varepsilon_{\text{вычисл}}$:

$$\frac{\partial \varepsilon_{\text{полн}}}{\partial h} = M_2 - \frac{\Delta f}{2h^2} = 0 \implies h_{\text{опт}} = \sqrt{\frac{\Delta f}{2M_2}}.$$

Для функции $f(x) = \cos(x + \pi/4)$ максимум всех производных равен 1. Оценим абсолютную погрешность $f(x)$:

$$\Delta f \leqslant \delta \max_x |f(x)| = \delta \max_x |\cos(x + \pi/4)| = \delta.$$

Для одинарной точности $\Delta f = \delta = 6 \cdot 10^{-8}$:

$$h_{\text{опт}} = \sqrt{\frac{6 \cdot 10^{-8}}{2 \cdot 1}} \approx 1.7 \cdot 10^{-4}.$$

Для двойной точности $\Delta f = \delta = 1.1 \cdot 10^{-16}$:

$$h_{\text{опт}} = \sqrt{\frac{1.1 \cdot 10^{-16}}{2 \cdot 1}} \approx 7.4 \cdot 10^{-9}.$$

3. Заметим, что $\mathbf{A} = \mathbf{A}^\top$, значит $\|\mathbf{A}\|_\infty = \|\mathbf{A}\|_{\ell_1}$, а также $\|\mathbf{A}\|_E = \max|\lambda(\mathbf{A})|$. Аналогично справедливо для обратной матрицы $\mathbf{A}^{-1}$. Найдем обратную матрицу:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{\operatorname{adj}\mathbf{A}}{\det\mathbf{A}} = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Также, найдем решение системы:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{f} = \begin{pmatrix} 9/5 \\ -16/5 \end{pmatrix}$$

Число обусловленности системы

$$\nu(\mathbf{A}, \mathbf{f}) = \frac{\|\mathbf{A}^{-1}\|\|\mathbf{f}\|}{\|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{f}\|} = \frac{\|\mathbf{A}^{-1}\|\|\mathbf{f}\|}{\|\mathbf{x}\|}$$

- Для $\|\cdot\|_\infty$:

$$\|\mathbf{A}^{-1}\|_\infty = \frac{4+1}{15} = \frac{1}{3}$$
$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \frac{16}{5}$$
$$\|\mathbf{f}\|_\infty = 11$$
$$\nu_\infty = \frac{1/3 \cdot 11}{16/5} = \frac{55}{48} \approx 1.146.$$

- Для $\|\cdot\|_{\ell_1}$:

$$\|\mathbf{A}^{-1}\|_{\ell_1} = \frac{4+1}{15} = \frac{1}{3}$$
$$\|\mathbf{x}\|_{\ell_1} = \frac{25}{5} = 5$$
$$\|\mathbf{f}\|_{\ell_1} = 15$$
$$\nu_{\ell_1} = \frac{1/3 \cdot 15}{5} = 1.$$

- Для $\|\cdot\|_E$:

$$\det(\mathbf{A}^{-1} - \lambda\mathbf{E}) = \begin{vmatrix} 4/15 - \lambda & -1/15 \\ -1/15 & 4/15 - \lambda \end{vmatrix} = (4/15 - \lambda)^2 - 1/15^2 = 0$$
$$\lambda_{1,2} = \frac{4 \pm 1}{15}$$
$$\|\mathbf{A}^{-1}\|_E = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$
$$\|\mathbf{x}\|_E = \frac{\sqrt{9^2 + 16^2}}{5} = \frac{\sqrt{337}}{5}$$
$$\|\mathbf{f}\|_E = \sqrt{137}$$
$$\nu_E = \frac{1/3 \cdot \sqrt{137}}{\sqrt{337}/5} \approx 1.063.$$

Для итерационного метода $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + \tau(\mathbf{f} - \mathbf{A}\mathbf{x}_n)$ в случае симметричной положительно определенной матрицы $\mathbf{A}$ оптимальный параметр дается выражением

$$\tau_{\text{опт}} = \frac{2}{\lambda_{\text{max}}(\mathbf{A}) + \lambda_{\text{min}}(\mathbf{A})}.$$

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 \\ -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)^2 - 1 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = 4 \pm 1$$

$$\tau_{\text{опт}} = \frac{2}{3+5} = \frac{1}{4}.$$

При этом параметре скорость сходимости $\|\mathbf{B}\|_E = q_{\text{опт}} = \frac{\lambda_{\text{max}}(\mathbf{A}) - \lambda_{\text{min}}(\mathbf{A})}{\lambda_{\text{max}}(\mathbf{A}) + \lambda_{\text{min}}(\mathbf{A})} = \frac{5-3}{5+3} = \frac{1}{4}$. Учтем, что

$$\|\mathbf{e}_n\|_E \leqslant q^n \|\mathbf{e}_0\|_E$$

и для уменьшения ошибки в 10^6 раз достаточно взять такое n, что

$$q^n \leqslant 10^{-6} \implies n \geqslant \frac{\ln 10^{-6}}{\ln q} \approx 9.96.$$

Достаточно сделать 10 итераций данным методом.

Сделаем одну итерацию методом Якоби. Найдем текущую невязку:

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{f} - \mathbf{A}\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 4 \\ -11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -13 \end{pmatrix}$$

Запишем метод Якоби в канонической форме

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 + \mathbf{D}^{-1}\mathbf{r}_0$$

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -4 \\ -13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -13/4 \end{pmatrix}$$

Проделаем то же для метода Зейделя Запишем метод Якоби в канонической форме

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 + (\mathbf{L} + \mathbf{D})^{-1}\mathbf{r}_0$$

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -4 \\ -13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

4. Запишем систему в форме

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 15 \\ 20 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} 8 \\ 15 \\ 20 \end{pmatrix}$$

Для того, чтобы решить систему методом наименьших квадратов, умножим ее слева на $\mathbf{A}^\top$:

$$\mathbf{A}^\top\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}^\top\mathbf{f}$$

$$\mathbf{A}^\top\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}^\top\mathbf{f} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 15 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 58 \\ 63 \end{pmatrix}$$

Решая полученную систему 2×2, получаем

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

5. Будем строить многочлен в форме разложения по $1, x, x^2$:

$$P_2(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2.$$

Тогда коэффициенты c_0, c_1, c_2 удовлетворяют системе

$$\begin{pmatrix} (1,1) & (1,x) & (1,x^2) \\ (x,1) & (x,x) & (x,x^2) \\ (x^2,1) & (x^2,x) & (x^2,x^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\cos \pi x, 1) \\ (\cos \pi x, x) \\ (\cos \pi x, x^2) \end{pmatrix}$$

$$(f,g) = \int\limits_{-1}^{1} f(x) g(x) dx.$$

Найдем элементы матрицы системы

$$\Gamma_{ik} = \int\limits_{-1}^{1} x^{i+k} dx = \frac{1-(-1)^{i+k+1}}{i+k+1}$$

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

$$g_0 = \int\limits_{-1}^{1} \cos \pi x dx = 0$$

$$g_1 = \int\limits_{-1}^{1} x \cos \pi x dx = 0$$

$$g_2 = \int\limits_{-1}^{1} x^2 \cos \pi x dx = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-1}^{1} x^2 d(\sin \pi x) = -\frac{2}{\pi} \int\limits_{-1}^{1} x \sin \pi x dx =$$

$$= \frac{2}{\pi^2} \int\limits_{-1}^{1} x d(\cos \pi x) = \frac{2}{\pi^2}(\cos \pi + \cos(-\pi)) - \frac{2}{\pi^2} \int\limits_{-1}^{1} \cos \pi x dx = -\frac{4}{\pi^2}$$

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{4}{\pi^2} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{\Gamma c} = \mathbf{g}$$

Из системы видно, что $c_1 = 0$, а для c_0, c_2 имеем

$$\begin{pmatrix} 2 & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_2 \end{pmatrix} = -\frac{4}{\pi^2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Имеем $c_2 = -3c_0$, а для c_0:

$$\frac{2}{3}c_0 - \frac{6}{5}c_0 = -\frac{4}{\pi^2}$$

$$c_0 = \frac{15}{2\pi^2}$$

$$P_2(x) = \frac{15 - 45x^2}{2\pi^2}.$$