

# Погрешности вычислений

## Численное дифференцирование

Скалько Юрий Иванович  
Цыбулин Иван

# Материалы по курсу вычислительной математики

- Материалы курса (методички, лекции, учебники и др.) можно найти на [сайте кафедры вычислительной математики](#)
- Любые вопросы по курсу (и не только) можно присылать на почтовый ящик [tsybulin@cres.mipt.ru](mailto:tsybulin@cres.mipt.ru)

# Абсолютная и относительная погрешность

Если про величину  $X$  известно, что  $X \in [\bar{X} - \frac{\Delta X}{2}, \bar{X} + \frac{\Delta X}{2}]$ , то

- *абсолютной погрешностью*  $X$  называется величина  $\Delta X$
- *относительной погрешностью* — отношение  $\frac{\Delta X}{|\bar{X}|}$

# Приближенные вычисления

## Задача

Как вычислить сложную функцию (например,  $f(x) = \sin x$ ) в некоторой заданной точке?

# Приближенные вычисления

## Задача

Как вычислить сложную функцию (например,  $f(x) = \sin x$ ) в некоторой заданной точке?

- Воспользоваться большой таблицей заранее посчитанных значений функций

# Приближенные вычисления

## Задача

Как вычислить сложную функцию (например,  $f(x) = \sin x$ ) в некоторой заданной точке?

- Воспользоваться большой таблицей заранее посчитанных значений функций

Но ведь эту таблицу необходимо еще составить! Не ясно, как искать значения, которые в таблице отсутствуют

# Приближенные вычисления

## Задача

Как вычислить сложную функцию (например,  $f(x) = \sin x$ ) в некоторой заданной точке?

- Воспользоваться большой таблицей заранее посчитанных значений функций  
Но ведь эту таблицу необходимо еще составить! Не ясно, как искать значения, которые в таблице отсутствуют
- Численно решить дифференциальное уравнение  $y''(x) + y(x) = 0$

# Приближенные вычисления

## Задача

Как вычислить сложную функцию (например,  $f(x) = \sin x$ ) в некоторой заданной точке?

- Воспользоваться большой таблицей заранее посчитанных значений функций  
Но ведь эту таблицу необходимо еще составить! Не ясно, как искать значения, которые в таблице отсутствуют
- Численно решить дифференциальное уравнение  $y''(x) + y(x) = 0$   
Пока совершенно не ясно, как это сделать (но это только пока!)



# Приближенные вычисления

## Задача

Как вычислить сложную функцию (например,  $f(x) = \sin x$ ) в некоторой заданной точке?

- Воспользоваться большой таблицей заранее посчитанных значений функций  
Но ведь эту таблицу необходимо еще составить! Не ясно, как искать значения, которые в таблице отсутствуют
- Численно решить дифференциальное уравнение  $y''(x) + y(x) = 0$   
Пока совершенно не ясно, как это сделать (но это только пока!)
- Воспользоваться представлением в виде рядов

# Приближенные вычисления

## Задача

Как вычислить сложную функцию (например,  $f(x) = \sin x$ ) в некоторой заданной точке?

- Воспользоваться большой таблицей заранее посчитанных значений функций  
Но ведь эту таблицу необходимо еще составить! Не ясно, как искать значения, которые в таблице отсутствуют
- Численно решить дифференциальное уравнение  $y''(x) + y(x) = 0$   
Пока совершенно не ясно, как это сделать (но это только пока!)
- Воспользоваться представлением в виде рядов  
Простейший вариант — воспользоваться рядом Тейлора

## Ряд Тейлора

Для функции  $\sin x$  ряд Тейлора в окрестности точки  $x = 0$  выглядит следующим образом

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

## Ряд Тейлора

Для функции  $\sin x$  ряд Тейлора в окрестности точки  $x = 0$  выглядит следующим образом

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

### Вопрос

Какой радиус сходимости этого ряда?

## Ряд Тейлора

Для функции  $\sin x$  ряд Тейлора в окрестности точки  $x = 0$  выглядит следующим образом

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

### Вопрос

Какой радиус сходимости этого ряда?

$R = \infty$ , Ряд сходится при любом  $x \in \mathbb{C}$

## Ряд Тейлора

Для функции  $\sin x$  ряд Тейлора в окрестности точки  $x = 0$  выглядит следующим образом

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

### Вопрос

Какой радиус сходимости этого ряда?

$R = \infty$ , Ряд сходится при любом  $x \in \mathbb{C}$

- Но как суммировать бесконечный ряд на практике?

## Ряд Тейлора

Для функции  $\sin x$  ряд Тейлора в окрестности точки  $x = 0$  выглядит следующим образом

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

### Вопрос

Какой радиус сходимости этого ряда?

$R = \infty$ , Ряд сходится при любом  $x \in \mathbb{C}$

- Но как суммировать бесконечный ряд на практике?
- Ограничимся только несколькими членами этого ряда

## Ряд Тейлора

Для функции  $\sin x$  ряд Тейлора в окрестности точки  $x = 0$  выглядит следующим образом

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

### Вопрос

Какой радиус сходимости этого ряда?

$R = \infty$ , Ряд сходится при любом  $x \in \mathbb{C}$

- Но как суммировать бесконечный ряд на практике?
- Ограничимся только несколькими членами этого ряда
- Необходимо оценить ошибку, допущенную при этом



## Практический метод

Итак, для приближенного вычисления  $\sin x$  можно просуммировать несколько первых членов ряда Тейлора. Для оценки ошибки воспользуемся формулой Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа

$$\sin x = \underbrace{\sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}}_{S_n} + \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \sin^{(2n+2)} \xi, \quad \xi \in [0, x]$$

## Практический метод

Итак, для приближенного вычисления  $\sin x$  можно просуммировать несколько первых членов ряда Тейлора. Для оценки ошибки воспользуемся формулой Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа

$$\sin x = \underbrace{\sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}}_{S_n} + \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \sin^{(2n+2)} \xi, \quad \xi \in [0, x]$$

Отбросив остаточный член, мы тем самым допускаем ошибку

$$\varepsilon_{\text{метод}} \equiv \left| \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \sin^{(2n+2)} \xi \right| \leq \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} M_{2n+2}$$

Здесь для максимума модуля  $2n+2$ -й производной использовано стандартное в вычислительной математике обозначение  $M_{2n+2}$ .

# Погрешность метода

Ошибка  $\varepsilon_{\text{метод}}$  обусловлена тем, что метод, который мы применяем для вычисления значения функции, является *неточным*. Данная ошибка называется *ошибкой метода* (или *погрешностью метода*)

## Погрешность метода

Ошибка  $\varepsilon_{\text{метод}}$  обусловлена тем, что метод, который мы применяем для вычисления значения функции, является *неточным*. Данная ошибка называется *ошибкой метода* (или *погрешностью метода*) Так как все производные функции  $\sin x$  ограничены по модулю единицей,  $M_{2n+2} = 1$  и

$$\varepsilon_{\text{метод}} = \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

При стремлении  $n \rightarrow \infty$  ошибка метода начиная с  $n = n_0 > x/2$  монотонно стремится к нулю.

## Погрешность метода

Для знакопеременных рядов, члены которого монотонно убывают по модулю (начиная с некоторого  $n_0$ ) справедлива следующая

### Теорема

Сумма «хвоста» монотонно убывающего знакопеременного ряда не превосходит по модулю модуля первого слагаемого в «хвосте».

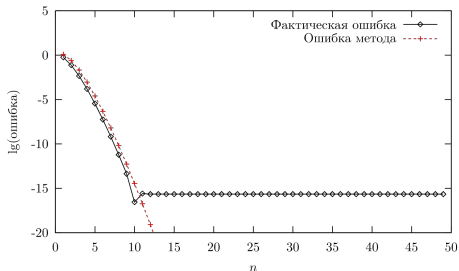
Из этой теоремы сразу следует, что ошибка метода (сумма отброшенного «хвоста» ряда) при суммировании ряда для синуса не превосходит

$$\varepsilon_{\text{метод}} \leq \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!}.$$

Данная оценка не содержит максимумов производных, и, поэтому, удобнее на практике для сложных функций.

# Проверка

Для проверки посчитаем  $\sin \frac{\pi}{2}$  суммируя до 50 членов ряда.

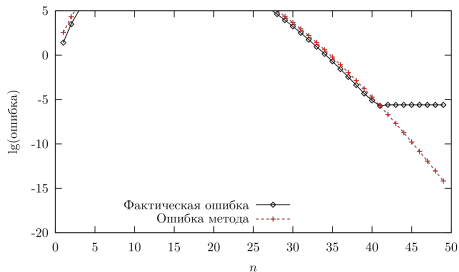


После сложения 10 членов ряда фактическая ошибка составила  $10^{-16}$  и перестала уменьшаться. Такое поведение говорит про наличие еще какой-то погрешности, кроме ошибки метода.

Но ведь  $10^{-16}$  это же совсем немного? Или нет?

## Проверка №2

Прделаем аналогичные вычисления, но уже для  $\sin \frac{17\pi}{2} *$



Теперь ошибка перестает уменьшаться после 40 слагаемого и составляет уже  $10^{-6}$ . Определенно, данная ошибка может стать серьезной проблемой.

---

\*  $x = \frac{17\pi}{2} \approx 26.7$

# Машинная арифметика

До сих пор все вычисления мы рассматривали в *идеальной арифметике*, где все математические операции производятся *абсолютно точно*. На практике, приходится иметь дело с машинной арифметикой, которая оперирует с *приближенными* значениями чисел. Чаще всего, числа представлены в вычислительной технике в виде *чисел с плавающей запятой* (floating-point values). Каждое число хранится в виде

$$x = \pm s \cdot 2^e, \quad s = \overline{1.s_1s_2 \dots s_K}$$

где  $1 \leq s < 2$  - мантисса, число с фиксированным количеством знаков после запятой,  $e$  - экспонента или показатель степени, целое число. Поскольку целая часть мантиссы всегда равна 1, число значащих цифр в машинном представлении  $x$  всегда совпадает с количеством знаков в мантиссе.



# Машинная арифметика в вычислениях

На практике, хранение чисел в форме с плавающей запятой приводит к хранению каждого числа с фиксированной относительной погрешностью. Например, в десятичной системе, если в мантиссе числа 5 значащих цифр (не считая первой единицы), то относительная погрешность хранения данного числа составляет  $10^{-5}$

$$1.23456 \cdot 10^{78} = (1.23456 \pm 0.000005) \cdot 10^{78}$$

$$\bar{X} = 1.23456 \cdot 10^{78}, \Delta X = 0.00001 \cdot 10^{78},$$

$$\frac{\Delta X}{|\bar{X}|} = \frac{0.00001 \cdot 10^{78}}{1.23456 \cdot 10^{78}} = \frac{0.00001}{1.23456} < 10^{-5}$$

# Машинная арифметика в вычислениях

Аналогично, только с использованием двоичной, а не десятичной системы счисления, определяются относительные погрешности хранения стандартных чисел с плавающей запятой

- тип single или float (32 бита) - мантисса имеет 23 значащих бита, относительная погрешность составляет  $2^{-23} \approx 1.2 \cdot 10^{-7}$
- тип double (64 бита) - мантисса имеет 53 значащих бита, относительная погрешность составляет  $2^{-53} \approx 1.1 \cdot 10^{-16}$

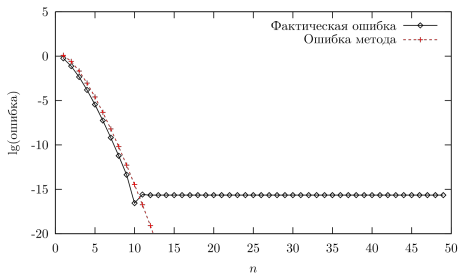
Действительное число  $x$  в машинном представлении имеет вид

$$x_{\text{маш}} = x(1 + \varepsilon(x)),$$

где

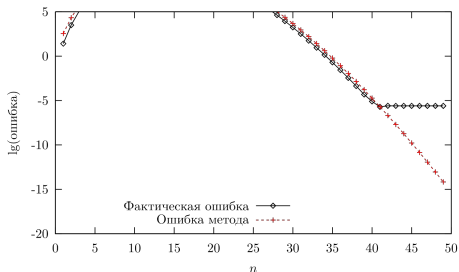
$$|\varepsilon(x)| \leq 2^{-K} |x|$$

# Вычислительные ошибки



Теперь понятно, что ошибка  $10^{-16}$ , которую мы получили при вычислении  $\sin \frac{\pi}{2}$  — это просто погрешность, с которой может быть представлен ответ в вычислительной технике.

# Вычислительные ошибки



Теперь понятно, что ошибка  $10^{-16}$ , которую мы получили при вычислении  $\sin \frac{\pi}{2}$  — это просто погрешность, с которой может быть представлен ответ в вычислительной технике.

Но как объяснить ошибку  $10^{-6}$ , которую мы получили, вычисляя  $\sin \frac{17\pi}{2}$ ?

## Ошибка округления. Оценка сверху

Так как округление до 16 значащих цифр<sup>†</sup> происходит при *каждой* операции, необходимо подсчитать суммарную ошибку округления всех слагаемых. Поскольку заранее неизвестно, в какую сторону происходит округление, необходимо сложить погрешности округления по модулю.

---

<sup>†</sup> подразумеваем операции с double

## Ошибка округления. Оценка сверху

Так как округление до 16 значащих цифр<sup>†</sup> происходит при *каждой* операции, необходимо подсчитать суммарную ошибку округления всех слагаемых. Поскольку заранее неизвестно, в какую сторону происходит округление, необходимо сложить погрешности округления по модулю. Оценим ошибку округления  $S_n$ .

$$S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\varepsilon_{\text{округ}} = \sum_{k=0}^n \left| 2^{-K} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \right| = 2^{-K} \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \lesssim 2^{-K} \operatorname{sh} x$$

Для  $x = \frac{17\pi}{2} \approx 26.7$

$$\varepsilon_{\text{округ}} \lesssim 2^{-K} \operatorname{sh} x = 2.1 \cdot 10^{-5}$$

---

<sup>†</sup> подразумеваем операции с double

## Ошибка округления. Оценка снизу

Итак, хотя исходный ряд был знакопеременным, и по модулю сумма ряда не превосходила единицы, отдельные слагаемые могли достигать весьма существенных значений по модулю.

$$\max_k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \approx \frac{x^x}{x!} \approx \frac{x^x}{\sqrt{2\pi x} \left(\frac{x}{e}\right)^x} = \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}$$

## Ошибка округления. Оценка снизу

Итак, хотя исходный ряд был знакопеременным, и по модулю сумма ряда не превосходила единицы, отдельные слагаемые могли достигать весьма существенных значений по модулю.

$$\max_k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \approx \frac{x^x}{x!} \approx \frac{x^x}{\sqrt{2\pi x} \left(\frac{x}{e}\right)^x} = \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}$$

Возвращаясь к случаю  $\sin \frac{17\pi}{2}$ ,  $x \approx 26.7$

$$\frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} = 3 \cdot 10^{10}.$$

Погрешность округления только этого слагаемого

$\varepsilon_{\text{округ}} = 2^{-53} \times 3 \cdot 10^{10} \approx 3.3 \cdot 10^{-6}$ , что вполне соответствует фактической ошибке при вычислении  $\sin \frac{17\pi}{2}$ .



# Вывод

Практически все прикладные задачи, которые приходится решать в рамках вычислительной математики, невозможно решить точно. Этому препятствует два основных источника погрешности — неточные (приближенные) методы и неидеальная (машинная) арифметика. Ошибке метода соответствует погрешность решения задачи в идеальной арифметике (в которой все действия выполняются точно). В ошибку округления входят погрешности всех вычислений при реализации данного метода.

# Производная

## Задача

Допустим, задана функция  $f(x)$ , то есть мы можем вычислить ее значение в любой точке  $x$ . Как вычислить ее производную в заданной точке  $x_0$ ?

# Производная

## Задача

Допустим, задана функция  $f(x)$ , то есть мы можем вычислить ее значение в любой точке  $x$ . Как вычислить ее производную в заданной точке  $x_0$ ?

Вспомним определение производной

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

## Вопрос

Какие еще определения производной Вы знаете?

# Численный метод

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Поиск предела, так же как и суммирование бесконечной суммы, является нетривиальной операцией.

# Численный метод

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Поиск предела, так же как и суммирование бесконечной суммы, является нетривиальной операцией.

Заменим предел значением отношения при некотором маленьком значении  $\Delta x = h > 0$ .

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Такие выражения называются в вычислительной математике *конечными разностями*.

## Ошибка метода

В первую очередь, нас интересует ошибка метода, которая возникает в результате замены предела конечной разностью. Здесь нам снова поможет формула Тейлора. Разложим  $f(x)$  в окрестности точки  $x = x_0$ .

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2}f''(\xi), \quad \xi \in [x_0, x]$$

## Ошибка метода

В первую очередь, нас интересует ошибка метода, которая возникает в результате замены предела конечной разностью. Здесь нам снова поможет формула Тейлора. Разложим  $f(x)$  в окрестности точки  $x = x_0$ .

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2}f''(\xi), \quad \xi \in [x_0, x]$$

Подставляя  $x = x_0 + h$ ,

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2}f''(\xi), \quad \xi \in [x_0, x_0 + h]$$

# Ошибка метода

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2}f''(\xi), \quad \xi \in [x_0, x_0 + h]$$

Группируем и делим на  $h$

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0) = \frac{h}{2}f''(\xi)$$

$$\varepsilon_{\text{метод}} = \left| \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0) \right| = \left| \frac{h}{2}f''(\xi) \right| \leq \frac{M_2 h}{2}$$

Чем меньше  $h$ , тем меньшим оказывается погрешность метода.  
Погрешность метода линейно зависит от  $h$ .



# Метод неопределенных коэффициентов

Будем искать другие способы вычисления производной. Допустим, мы хотим построить наиболее точный метод для вычисления производной, который бы использовал значения функции в трех точках — в  $x_0$ ,  $x_0 + h$  и  $x_0 - h$ .

Некоторые соображения о том, в каком виде следует искать требуемый метод дают свойства оператора дифференцирования. Известно, что операция дифференцирования линейна, т.е.

$$(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$$

Вполне логично искать *линейную* формулу дифференцирования, т.е. такую, в которую значения дифференцируемой функции входят *линейно*

## Метод неопределенных коэффициентов

Запишем линейную функцию от  $f(x_0)$ ,  $f(x_0 + h)$ ,  $f(x_0 - h)$  в виде линейной комбинации с неопределенными коэффициентами

$$f'(x_0) \approx \frac{\alpha f(x_0 - h) + \beta f(x_0) + \gamma f(x_0 + h)}{h}$$

За счет надлежащего выбора  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  добьемся максимального совпадения левой и правой части равенства.

# Метод неопределенных коэффициентов

Запишем линейную функцию от  $f(x_0)$ ,  $f(x_0 + h)$ ,  $f(x_0 - h)$  в виде линейной комбинации с неопределенными коэффициентами

$$f'(x_0) \approx \frac{\alpha f(x_0 - h) + \beta f(x_0) + \gamma f(x_0 + h)}{h}$$

За счет надлежащего выбора  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  добьемся максимального совпадения левой и правой части равенства.

Потребуем совпадения максимального количества членов в представлении в виде формулы Тейлора в точке  $x_0$  левой и правой частей.

## Замечание

Здесь делается предположение, что у функции  $f(x)$  существует достаточное количество производных в точке  $x_0$ . Необходимо иметь в виду, что если функция  $f(x)$  не имеет всех необходимых производных, погрешность метода может увеличиваться.

# Формула Тейлора

$$f'(x_0) \approx \frac{\alpha f(x_0 - h) + \beta f(x_0) + \gamma f(x_0 + h)}{h}$$

Представляя значения в крайних точках с помощью формулы Тейлора

$$f(x_0 \pm h) = f(x_0) \pm hf'(x_0) + \frac{h^2}{2}f''(x_0) \pm \frac{h^3}{6}f'''(\xi_{1,2})$$

$$\xi_1 \in [x_0 - h, x_0], \xi_2 \in [x_0, x_0 + h]$$

$$f'(x_0) \approx \frac{\alpha + \beta + \gamma}{h}f(x_0) + (\gamma - \alpha)f'(x_0) + (\alpha + \gamma)\frac{h}{2}f''(x_0) + R$$

$$R = \frac{h^2}{6}(\gamma f'''(\xi_2) - \alpha f'''(\xi_1))$$

## Определение коэффициентов

После исключения значений функции в крайних точках, приближенное равенство приобретает вид

$$f'(x_0) \approx \frac{\alpha + \beta + \gamma}{h} f(x_0) + (\gamma - \alpha) f'(x_0) + (\alpha + \gamma) \frac{h}{2} f''(x_0) + R$$

$$R = \frac{h^2}{6} (\gamma f'''(\xi_2) - \alpha f'''(\xi_1))$$

Потребуем, чтобы  $\alpha + \beta + \gamma = 0$ ,  $(\gamma - \alpha) = 1$ ,  $(\alpha + \gamma) \frac{h}{2} = 0$ . Искомые значения  $\gamma = -\alpha = \frac{1}{2}$ ,  $\beta = 0$ . При этом равенство превратится в

$$f'(x_0) \approx f'(x_0) + R$$

Добавка  $R$  как раз будет ошибкой метода.

$$\varepsilon_{\text{метод}} = |R| = \frac{h^2}{6} \frac{1}{2} |f'''(\xi_2) + f'''(\xi_1)| \leq \frac{h^2}{6} M_3$$

# Формулы дифференцирования 1-го и 2-го порядков

Формула  $f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$  называется формулой односторонней разности, а  $f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$  — формулой центральной разности. Важное различие этих формул заключается в разной зависимости ошибки метода от  $h$ . Для односторонней разности эта зависимость линейная  $\varepsilon_{\text{метод}} \leq \frac{M_2 h}{2}$ , в то время как для центральной — квадратичная  $\varepsilon_{\text{метод}} \leq \frac{M_3 h^2}{6}$ .

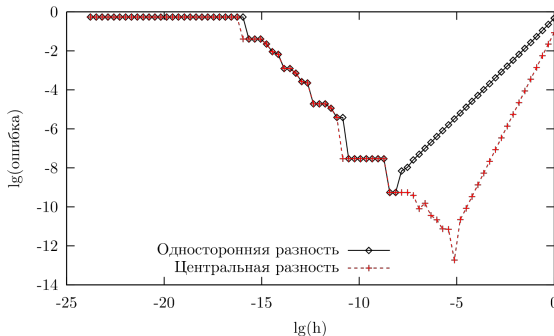
# Формулы дифференцирования 1-го и 2-го порядков

Формула  $f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$  называется формулой односторонней разности, а  $f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$  — формулой центральной разности. Важное различие этих формул заключается в разной зависимости ошибки метода от  $h$ . Для односторонней разности эта зависимость линейная  $\varepsilon_{\text{метод}} \leq \frac{M_2 h}{2}$ , в то время как для центральной — квадратичная  $\varepsilon_{\text{метод}} \leq \frac{M_3 h^2}{6}$ .

Говорят, что формула односторонней разности имеет *первый порядок аппроксимации*, а центральной — *второй порядок аппроксимации*.

# Проверка

Проверим, действительно ли зависимость ошибки имеет такой характер для каждой из формул. Рассчитаем  $\sin' 1 = \cos 1$



Оказывается, поведение ошибки имеет такой характер только при сравнительно больших  $h$ . Для односторонней разности при  $h > 10^{-8}$ , а для центральной — при  $h > 10^{-5}$ .



## Вычислительные погрешности

Проще всего объяснить постоянное значение ошибки при использовании  $h < 10^{-16}$ . При данном значении величины  $x_0 + h = 1 + h$  и  $x_0 - h = 1 - h$  округляются до 1, при этом в числителе обеих формул стоит тождественный ноль, хотя реальное значение производной ненулевое.

## Вычислительные погрешности

Проще всего объяснить постоянное значение ошибки при использовании  $h < 10^{-16}$ . При данном значении величины  $x_0 + h = 1 + h$  и  $x_0 - h = 1 - h$  округляются до 1, при этом в числителе обеих формул стоит тождественный ноль, хотя реальное значение производной ненулевое.

Учтем теперь, что значения  $f(x_0)$ ,  $f(x_0 + h)$  сами по себе могут содержать ошибки (например, из-за машинного хранения или вычисления по приближенному алгоритму):

$$f'(x_0) \approx \frac{(f(x_0 + h) \pm \Delta f) - (f(x_0) \pm \Delta f)}{h}$$
$$\varepsilon_{\text{выч}} \leq \frac{2\Delta f}{h}$$

Если  $\Delta f$  обусловлена только ошибкой машинного представления, то

$$\Delta f \lesssim 2^{-K} |f(x_0)|, \quad \varepsilon_{\text{выч}} \leq 2 \frac{2^{-K} |f(x_0)|}{h}$$

## Оптимальное значение $h$

Итак, при слишком маленьких значениях  $h$  основной вклад в ошибку дает именно вычислительная погрешность, которая растет с уменьшением  $h$ , а при слишком больших становится значительной ошибка метода. Найдем оптимальное значение  $h$ , при котором сумма обеих ошибок имеет минимальную величину.

## Оптимальное значение $h$

Итак, при слишком маленьких значениях  $h$  основной вклад в ошибку дает именно вычислительная погрешность, которая растет с уменьшением  $h$ , а при слишком больших становится значительной ошибка метода. Найдем оптимальное значение  $h$ , при котором сумма обеих ошибок имеет минимальную величину.

Для односторонней разности

$$\varepsilon_{\text{сумм}} = \varepsilon_{\text{выч}} + \varepsilon_{\text{метод}} = \frac{2\Delta f}{h} + \frac{M_2 h}{2}$$

$$h_{\text{опт}} = 2\sqrt{\frac{\Delta f}{M_2}}, \text{ при этом } \varepsilon_{\text{сумм}} = 2\sqrt{M_2 \Delta f}$$

Для проверки подставим  $M_2 = 1, \Delta f = 10^{-16}$ , тогда

$$h = 2 \cdot 10^{-8}, \quad \varepsilon_{\text{сумм}} = 2 \cdot 10^{-8}$$

## Оптимальное значение $h$

Итак, при слишком маленьких значениях  $h$  основной вклад в ошибку дает именно вычислительная погрешность, которая растет с уменьшением  $h$ , а при слишком больших становится значительной ошибка метода. Найдем оптимальное значение  $h$ , при котором сумма обеих ошибок имеет минимальную величину.

Для центральной разности

$$\varepsilon_{\text{сумм}} = \varepsilon_{\text{выч}} + \varepsilon_{\text{метод}} = \frac{2\Delta f}{h} + \frac{M_3 h^2}{6}$$

$$h_{\text{опт}} = \sqrt[3]{\frac{6\Delta f}{M_3}}, \text{ при этом } \varepsilon_{\text{сумм}} = 3\sqrt[3]{\frac{M_3 \Delta f^2}{6}}$$

Для проверки подставим  $M_3 = 1, \Delta f = 10^{-16}$ , тогда

$$h \approx 8.4 \cdot 10^{-6}, \quad \varepsilon_{\text{сумм}} \approx 3.6 \cdot 10^{-11}$$

## Вывод

Важно отметить, что при использовании формулы второго порядка удалось получить меньшую суммарную погрешность не выходя за пределы той же машинной точности что и в формуле первого порядка, то есть только за счет выбора более качественного метода.

## Вывод

Важно отметить, что при использовании формулы второго порядка удалось получить меньшую суммарную погрешность не выходя за пределы той же машинной точности что и в формуле первого порядка, то есть только за счет выбора более качественного метода.

Однако, не стоит забывать что функция, которую мы дифференцировали была достаточное число раз (а именно 3 раза) непрерывно дифференцируема. Если формулу второго порядка применять к функции, у которой, например,  $M_3 = \infty$ , но  $M_2 < \infty$ , то оценка ошибки метода имела бы такой же вид, как у формулы односторонней разности 1го порядка. В этом случае выигрыш был бы совсем незначительным.

# Спасибо за внимание!

Цыбулин Иван  
e-mail: [tsybulin@crec.mipt.ru](mailto:tsybulin@crec.mipt.ru)