Методы Рунге-Кутты

Условия порядка. Функции устойчивости

Цыбулин Иван

T5. *Рассматривается следующее однопараметрическое семейство однократно диагонально-неявных методов Рунге-Кутты:*

$$\begin{array}{c|cc} \gamma & \gamma & 0 \\ 1-\gamma & 1-2\gamma & \gamma \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}$$

Найти все значения параметра γ, при которых:

а) метод является правильным (интерполяционным)

б) метод имеет третий порядок аппроксимации,

в) метод является асимптотически устойчивым (L-устойчивым),

г) метод является A-устойчивым.

а) Метод Рунге-Кутты называется правильным или интерполяционным, если все коэффициенты в его таблице Бутчера неотрицательны. Данный метод будет правильным, если

$$0 \leqslant \gamma \leqslant \frac{1}{2}$$

Методы, не являющиеся правильными склонны накапливать и усиливать ошибки округления.

б) Условия порядка методов Рунге-Кутты при выполнении условий Кутты

$$c_i = \sum_{j=1}^{s} a_{ij}$$

имеют вид

- для первого порядка и выше: $\sum_i b_i = 1$
- для второго порядка и выше: $\sum_i b_i c_i = \frac{1}{2}$
- для третьего порядка и выше:

$$\sum_i b_i c_i^2 = \frac{1}{3}$$
$$\sum_{i,j} b_i a_{ij} c_j = \frac{1}{6}$$

Считаем, что коэффициенты a_{ij}, b_i, c_j расположены в таблице Бутчера следующим образом

$$\begin{array}{c|c} \mathbf{c} & \mathbf{A} \\ \hline & \mathbf{b}^\mathsf{T} \end{array}$$

Данный метод удовлетворяет условиям Кутты

$$c_1 = \gamma = \gamma + 0 = \sum_j a_{1j}$$
$$c_2 = 1 - \gamma = 1 - 2\gamma + \gamma = \sum_j a_{2j},$$

а также условиям первого

$$\sum_i b_i = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

и второго порядка

$$\sum_i b_i c_i = \frac{\gamma}{2} + \frac{1-\gamma}{2} = \frac{1}{2}$$

при любых γ. Выясним, когда метод дополнительно удовлетворяет условиям третьего порядка

$$\sum_i b_i c_i^2 = \frac{1}{2}\left(\gamma^2 + (1-\gamma)^2\right) = \gamma^2 - \gamma + \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$
$$\sum_{ij} b_i a_{ij} c_j = \frac{1}{2}\left(\gamma^2 + (1-2\gamma)\gamma + \gamma(1-\gamma)\right) = \gamma - \gamma^2 = \frac{1}{6}$$

Оба условия свелись к одному квадратному уравнению

$$\gamma^2 - \gamma + \frac{1}{6} = 0, \qquad \gamma_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{6}.$$

Корень $\gamma = \frac{3-\sqrt{3}}{6} \approx 0.211$ соответствует правильному (интерполяционному) методу третьего порядка, корень $\gamma = \frac{3+\sqrt{3}}{6} \approx 0.789$ — другому методу третьего порядка, но с отрицательными коэффициентами.

в) Для исследования поведения метода на жестких задачах, применим его к модельному уравнению

$$y' = \lambda y, \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

При этом, полученный разностный метод можно записать в виде

$$u_{n+1} = r(\tau\lambda)u_n,$$

где $r(z)$ — функция устойчивости метода, которая для методов Рунге-Кутты может быть записана как

$$r(z) = \frac{\det(\mathbf{E} - z\mathbf{A} + z\mathbf{B})}{\det(\mathbf{E} - z\mathbf{A})}.$$

В последнем выражении $\mathbf{E}$ — единичная матрица, а $\mathbf{B}$ — матрица, в которой коэффициенты $\mathbf{b}$ повторяются в каждой строке

$$\mathbf{B} = \begin{Vmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_s \\ b_1 & b_2 & \dots & b_s \\ & & \vdots & \\ b_1 & b_2 & \dots & b_s \end{Vmatrix}$$

Для данного метода

$$r(z) = \frac{\begin{vmatrix} 1 - \gamma z + z/2 & z/2 \\ 1 + 2\gamma z - z/2 & 1 - \gamma z + z/2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 - \gamma z & 0 \\ 1 + 2\gamma z - z & 1 - \gamma z \end{vmatrix}} = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

$$P(z) = 1 + (1 - 2\gamma)z + (1 - 4\gamma + 2\gamma^2)\frac{z^2}{2}$$
$$Q(z) = (1 - \gamma z)^2 = 1 - 2\gamma z + \gamma^2 z^2.$$

Метод будет L-устойчивым тогда, когда $r(z) \to 0$ при $z \to -\infty$.

$$\lim_{z\to-\infty} r(z) = \lim_{z\to-\infty} \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{1-4\gamma+2\gamma^2}{\gamma^2}$$

L-устойчивость возможна лишь при

$$1-4\gamma+2\gamma^2=0, \quad \gamma_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{2}}{2}$$

Из этих двух L-устойчивых методов правильным будет метод с $\gamma = \frac{2-\sqrt{2}}{2} \approx 0.293$.

г) Чтобы исследовать метод на A-устойчивость, рассмотрим область устойчивости метода

$$z \in \mathbb{C} : |r(z)| \leqslant 1.$$

Для $r(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ можно дать эквивалентное определение.

$$z \in \mathbb{C} : |P(z)| \leqslant |Q(z)|$$

Метод будет A-устойчив, если $|r(z)| \leqslant 1$ для всей левой полуплоскости $\operatorname{Re} z \leqslant 0$. Рассмотрим область $\operatorname{Re} z \leqslant 0$. Ее границей будет мнимая ось $\operatorname{Re} z = 0$. Для этой области существует принцип максимума (принцип Фрагмена — Линделёфа), который гласит, что функция, которая растет медленнее, чем $e^|z|$, и аналитична в области $\operatorname{Re} z \leqslant 0$ достигает своего максимума на границе, то есть на мнимой оси.

Функция $r(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ является отношением многочленов, поэтому не может экспоненциально расти. Дополнительно, единственный полюс $z = \frac{1}{\gamma}$ функции $r(z)$ расположен вне левой полуплоскости, а значит, функция $r(z)$ аналитическая в левой полуплоскости.

Рассмотрим мнимую ось и функцию $r(z) = r(iy)$ на ней. Всего возможно два варианта:

- $\max\limits_{y\in\mathbb{R}} |r(iy)| \leqslant 1$. Из принципа максимума, во всей области $\operatorname{Re} z \leqslant 0$ функция устойчивости по модулю не превышает 1, и метод является A-устойчивым

- $\max\limits_{y\in\mathbb{R}} |r(iy)| > 1$. Метод не может быть A-устойчивым, так как некоторые точки (вместе с некоторой окрестностью) на мнимой оси не принадлежат области устойчивости.

Вместо проверки $|r(iy)| \leqslant 1$ проще проверять $|P(iy)|^2 \leqslant |Q(iy)|^2$. Пусть $E(y) \equiv |Q(iy)|^2 - |P(iy)|^2$. Для нашего метода

$$
\begin{aligned}
E(y) = |1 - 2\gamma i y - \gamma^2 y^2|^2 - \left|1 + (1-2\gamma) i y - (1 - 4\gamma + 2\gamma^2)\frac{y^2}{2}\right|^2 = \\
= (1 - \gamma^2 y^2)^2 + 4\gamma^2 y^2 - \left(1 - (1 - 4\gamma + 2\gamma^2)\frac{y^2}{2}\right)^2 - (1-2\gamma)^2 y^2 = \\
= 1 - 1 + (-2\gamma^2 + 4\gamma^2 - 1 + 4\gamma - 4\gamma^2 + 1 - 4\gamma + 2\gamma^2) y^2 + \\
+ \gamma^4 y^4 - \frac{(1 - 4\gamma + 2\gamma^2)^2}{4} y^4 = \\
= \frac{y^4}{4}(4\gamma - 1)(1 - 2\gamma)^2
\end{aligned}
$$

Функция $E(y)$ неотрицательна при $\gamma \geqslant \frac{1}{4}$, а значит метод будет A-устойчивым при $\gamma \geqslant \frac{1}{4}$