Нелинейные алгебраические уравнения Системы алгебраических уравнений

Скалько Юрий Иванович
Цыбулин Иван

Постановка задачи

Дана функция $f(x)$. Найти решение уравнения

$$f(x) = 0$$

В отличие от случая линейного уравнения, нелинейное уравнение может иметь сколько угодно корней, в том числе и не иметь их вовсе. Чтобы как-то конкретизировать корень, требуется дополнительно указать отрезок локализации. Задача формулируется в следующем виде: найти решение уравнения

$$f(x) = 0, \quad x \in [a, b]$$

Метод дихотомии

Предположим, что непрерывная функция $f(x)$ принимает в концах отрезка $[a, b]$ разные по знаку значения. Пусть для определенности $f(a) < 0$, $f(b) > 0$. Иначе можно просто изменить знак у функции f. Значит, на отрезке $[a, b]$ она принимает все значения от $f(a)$ до $f(b)$ включая и значение 0. Таким образом, корень локализован на отрезке $[a, b]$. Разобьем его точкой $c = \frac{a+b}{2}$ на пару отрезков $[a, c]$ и $[c, b]$. Возможны варианты

- $f(c) = 0$. Корень найден - это точка c
- $f(c) < 0$. Поскольку $f(b) > 0$, то на отрезке $[c, b]$ должен быть корень $f(x) = 0$
- $f(c) > 0$. Поскольку $f(a) < 0$, то на отрезке $[a, c]$ должен быть корень $f(x) = 0$

Таким образом, задача свелась к такой же, но с меньшим отрезком.

Метод дихотомии

Сделав некоторое число делений отрезка пополам, можно получить хорошее приближение к решению уравнения. Поскольку длина отрезка на каждом шаге уменьшается в 2 раза

$$b_n - a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n (b_0 - a_0)$$

Корень уравнения расположен где-то на отрезке $[a_n, b_n]$, и можно написать

$$\left| x^* - \frac{a_n + b_n}{2} \right| < \frac{|b_n - a_n|}{2} = |b_0 - a_0| \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

Метод сходится со скоростью геометрической прогрессии с показателем $q = \frac{1}{2}$

Метод дихотомии

Рассмотрим в качестве примера функцию $f(x) = \operatorname{tg} \frac{x}{4} - 1$. Ее корни расположены в точках $x_k = (1 + 4k)\pi$ Допустим, мы хотим найти численно корень $x_0 = \pi$. Необходимо найти отрезок локализации этого корня, на концах которого функция принимает разные по знаку значения.

Легко проверить, что $[3, 4]$ удовлетворяет этому требованию.

$$
\begin{aligned}
[a_0, b_0] &= [\underline{3.}0000000000, 4.0000000000] \\
[a_1, b_1] &= [\underline{3.}0000000000, \underline{3.}5000000000] \\
[a_2, b_2] &= [\underline{3.}0000000000, \underline{3.}2500000000] \\
[a_3, b_3] &= [\underline{3.1}250000000, \underline{3.}2500000000] \\
&\vdots \\
[a_{20}, b_{20}] &= [\underline{3.141592}0258, \underline{3.141592}9794]
\end{aligned}
$$

Метод простой итерации

Предположим, что уравнение $f(x) = 0$ удалось заменить эквивалентным ему уравнением $x = \varphi(x)$. В качестве $\varphi(x)$ можно взять, например,

$$\varphi(x) = x + f(x)$$

Рассмотрим итерационный процесс

$$x_{k+1} = \varphi(x_k)$$

Рассмотрим, когда этот процесс сходится

Теорема Банаха о сжимающем отображении

На вопрос сходимости итерационного процесса $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ отвечает следующая

Теорема(Банах,1922)

Если $\varphi(x) : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{X}$ задает сжимающее отображение, то есть существует $0 \le q < 1$

$$\rho(\varphi(x), \varphi(y)) \le q\rho(x, y),$$

то у отображения $\varphi(x)$ существует единственная неподвижная точка $x^* = \varphi(x^*)$ и

$$x^* = \lim_{k\to\infty} x_k$$

То есть, если $\varphi(x)$ сжимающее отображение, то итерационный процесс сходится. Можно показать, что

$$|x^* - x_k| < Cq^k$$

Сжимающие отображения

Часто не удается подобрать такое отображение $\varphi(x)$, которое сжимает всю числовую ось $\mathbb{R}$. Однако, этого и не требуется. В теореме Банаха фигурирует полное метрическое пространство $\mathbb{X}$, в качестве которого может выступать любое замкнутое подмножество $\mathbb{R}$, например некоторый отрезок $\mathbb{X} = [a, b]$. Заметим, что для метрики в $\mathbb{X}$ верно

$$\rho(\varphi(x), \varphi(y)) = |\varphi(x) - \varphi(y)| \leq |\varphi'(\xi)||x - y| = |\varphi'(\xi)|\rho(x, y)$$

При $|\varphi'(x)| \leq q < 1$ отображение сжимающее

$$\rho(\varphi(x), \varphi(y)) \leq q\rho(x, y)$$

Достаточное условие сжимаемости

Пусть $\varphi(x)$ отображает отрезок $[a, b]$ в себя и имеет на нем производную по модулю меньше $q < 1$.

- $\varphi([a, b]) \subset [a, b]$
- $\max\limits_{x \in [a,b]} |\varphi'(x)| = q < 1$

Тогда $\varphi(x)$ задает на $[a, b]$ сжимающее отображение, а значит для нее итерационный процесс

$$x_{k+1} = \varphi(x_k)$$

сходится от любого начального приближения $x_0 \in [a, b]$ к неподвижной точке

$$x^* = \varphi(x^*)$$

Рассмотрим $f(x)$ такую, что $f(a) < 0, f(b) > 0$ и $f'(x) > 0$ на отрезке $[a, b]$. Построим $\varphi(x)$ следующим образом

$$\varphi(x) = x - \tau f(x), \quad \tau > 0$$

Тогда

$$\varphi'(x) = 1 - \tau f'(x)$$

Если взять $\tau < \frac{1}{\max f'(x)}$, то $0 \leq \varphi'(x) < 1$, то $\varphi(x)$ монотонно растет от $\varphi(a)$ до $\varphi(b)$. Поскольку $a < \varphi(a) \leq \varphi(b) < b$, такая функция $\varphi(x)$ действительно отображает $[a, b]$ в себя и является сжимающей.

Можно брать и другие значения τ вплоть до $\tau_{max} = \frac{2}{\max f'(x)}$, только сжимаемость требуется проверять непосредственно.

Метод простой итерации

Для примера возьмем то же уравнение $f(x) = \operatorname{tg}\frac{x}{4} - 1 = 0$.
Возьмем следующую функцию

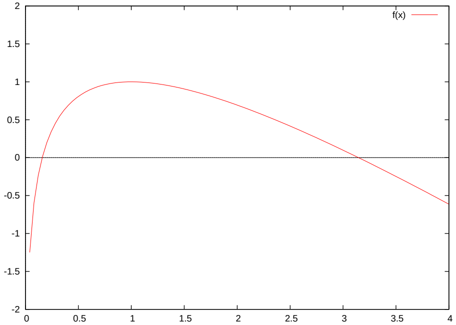
$$\varphi(x) = x - \tau f(x) = x - \frac{3}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{4} - 1\right)$$

$\tau = \frac{3}{2} \approx \frac{2}{\max f'(x) + \min f'(x)}$ выбрано по аналогии с оптимальным значением τ для метода простой итерации для линейных систем $\tau_{opt} = \frac{2}{\lambda_1 + \lambda_n}$. При таком выборе τ максимум модуля производной $q = \max|\varphi'(x)|$ минимален, а значит процесс сходится быстрее всего. При данном τ $q \approx 0.30$, что меньше 0.5 для метода дихотомии.
Функция $\varphi(x)$ переводит отрезок $[3, 4]$ в себя.
Проделаем 20 итераций метода $x_{k+1} = \varphi(x_k)$

$$x_{20} = \underline{3.14159265358}96458$$

Метод простой итерации

Метод простой итерации не всегда хорошо работает. Довольно часто можно подобрать другую функцию $\varphi(x)$, для которой процесс сходится быстрее.
Рассмотрим уравнение $f(x) = \ln x + 2 - x = 0$.



Другие итерационные методы

$$f(x) = \ln x + 2 - x = 0$$

У данного уравнения два корня, первый лежит на отрезке $[e^{-2}, e^{-1}]$, второй – на $[3, e^2]$.

$$f(x) = \ln x + 2 - x = 0$$

У данного уравнения два корня, первый лежит на отрезке $[e^{-2}, e^{-1}]$, второй – на $[3, e^2]$.
Возьмем $\varphi(x) = \ln x + 2$. Производная $\varphi'(x) = \frac{1}{x}$ по модулю меньше единицы при $x > 1$.
Эта функция отображает отрезок $[3, e^2]$ в отрезок $[2 + \ln 3, 4] \subset [3, e^2]$, то есть задает на нем сжимающее отображение.

$$q = \max_{x \in [3, e^2]} \left| \frac{1}{x} \right| = \frac{1}{3}$$

Метод $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ будет сходиться к корню из отрезка $[3, e^2]$.

Другие итерационные методы

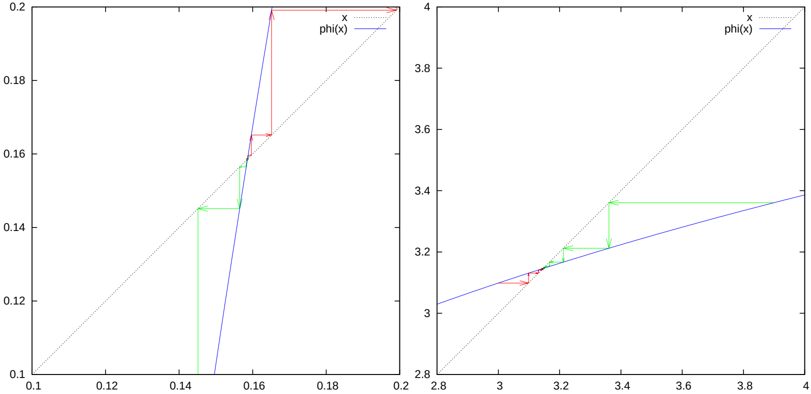


Рис. 1: Поведение метода в окрестности первого и второго корня

Другие итерационные методы

$$f(x) = \ln x + 2 - x = 0$$

Построим для первого корня метод простой итерации на отрезке $[e^{-2}, e^{-1}]$.

$$\varphi(x) = x - \tau f(x)$$

При оптимальном по скорости сходимости $\tau = \frac{2}{e^2 - 1 + e - 1} \approx 0.25$ функция $\varphi(x)$ осуществляет сжимающее отображение отрезка $[e^{-2}, e^{-1}]$ в себя, причем коэффициент сжмания $q \approx 0.58$. Видно, что метод сходится довольно медленно, в данном случае метод дихотомии оказался бы быстрее.

Вспомним случай $\varphi(x) = \ln x + 2$. Метод расходился, убегая от корня, даже при очень близких начальных значениях.

Другие итерационные методы

Вспомним случай $\varphi(x) = \ln x + 2$. Метод расходился, убегая от корня, даже при очень близких начальных значениях.
"Развернем" направление итераций. Рассмотрим вместо

$$x_{k+1} = \varphi(x_k)$$

процесс

$$x_k = \varphi(x_{k+1}), \quad x_{k+1} = \varphi^{-1}(x_k)$$

Обратная функция $\varphi^{-1}(x) = e^{x-2}$. Она отображает внутрь себя отрезок $[e^{-2}, e^{-1}]$ и ее производная $\varphi'(x) = e^{x-2}$ на этом отрезке ограничена по модулю $q = 0.20$.
Этот метод сходится в три раза быстрее метода простой итерации с оптимальным параметром и $q = 0.58$!

Метод Ньютона

В основе метода Ньютона лежит замена нелинейного уравнения $f(x) = 0$ приближенным линейным уравнением. Разложим $f(x)$ в окресности точки x_k в ряд Тейлора, отбросив все члены кроме первых двух.

$$0 = f(x) \approx f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k)$$

Линейное уравнение легко решается $x = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$. Возьмем это решение в качестве нового приближения к решению $f(x) = 0$

$$x_{k+1} = \varphi(x_k) = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Метод Ньютона

Существует окрестность точки x^*, в которой $|\varphi'(x)| < 1$.

Теорема(Канторович)

Если существуют константы A, B, C такие, что на отрезке $[a, b]$

- $\frac{1}{|f'(x)|} < A$, то есть $f'(x)$ ограничена и не равна 0
- $|\frac{f(x)}{f'(x)}| < B$, то есть $f(x)$ ограничена
- $|f''(x)| \leq C \leq \frac{1}{2AB}$
- $|a - b| < \frac{1}{AB}\left(1 - \sqrt{1 - 2ABC}\right)$

Тогда на отрезке $[a, b]$ есть корень уравнения $f(x) = 0$, и метод Ньютона с $x_0 = \frac{a+b}{2}$ сходится к нему с квадратичной скоростью

$$|x_n - x^*| \leq \frac{B}{2^{n-1}}(2ABC)^{2^{n-1}} \leq Dq^{2^n}$$

Сходимость метода Ньютона

В отличие от ранее рассмотренных методов, метод Ньютона сходится квадратично. Это значит что на каждой итерации точность не просто увеличивается, умножаясь на константу, а возводится в квадрат. Сравните линейную сходимость

$$|x^* - x_k| \le q|x^* - x_{k-1}|$$

и квадратичную

$$|x^* - x_k| \le q|x^* - x_{k-1}|^2$$

На практике квадратичная сходимость выражается в *удвоении* на каждом шаге количества правильных знаков. В случае линейной сходимости каждая итерация *добавляла* несколько правильных знаков.

Сходимость метода Ньютона

Чтобы получить на практике квадратичную сходимость необходимо удовлетворить нескольким условиям из теоремы. Но, как правило, условиям теоремы удовлетворяет довольно малый отрезок $[a, b]$, и чтобы реально получить быструю сходимость требуется выбрать очень хорошее начальное приближение.

Если нарушать условия теоремы, и выбрать плохое начальное приближение, возможна расходимость или не сходимость метода Ньютона

Сходимость метода Ньютона

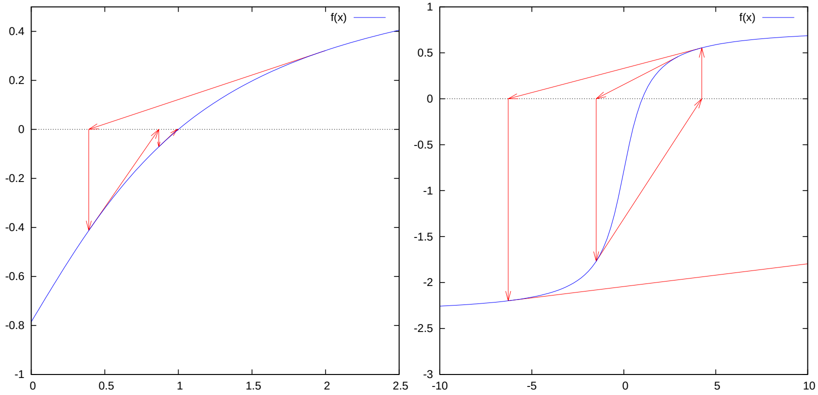


Рис. 2: Поведение метода Ньютона при различных начальных приближениях

Метод секущих

В случаях, когда непосредственно нахождение производной функции $f(x)$ затруднительно, прибегают к методу секущих. В нем вместо точного значения производной используется разностное отношение

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} f(x_k)$$

Метод позволяет сохранить квадратичную сходимость метода Ньютона, но может испытывать численные неустойчивости в окрестности корня. К тому же метод стал трехшаговым, то есть x_{k+1} вычисляется через пару x_k и x_{k-1}, и методу необходимо два начальных приближения x_0 и $x_1 \neq x_0$.

Постановка задачи

Дана система алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\ &\vdots \\ f_m(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \end{aligned}$$

или в векторной форме

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = 0, \qquad \mathbf{F} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$$

Требуется найти решение, локализованное в области $G \subset \mathbb{R}^n$
Снова характерное отличие от СЛАУ - система алгебраических уравнений может как иметь так и не иметь решений вне зависимости от соотношения между числом неизвестных n и уравнений m.

Теорема Банаха может применяться и в этом случае. Если $\varphi(\mathbf{x})$ задает сжимающее отображение замкнутой области G в себя ($\varphi(G) \subset G$) и

$$\|\varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{y})\| \leq q\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$$

то последовательность $\mathbf{x}_{k+1} = \varphi(\mathbf{x}_k)$ будет сходится к неподвижной точке $\mathbf{x}^* = \varphi(\mathbf{x}^*)$.

Сжимающее отображение

В многомерном случае есть теорема, дающая достаточное условие сжимаемости отображения φ

Теорема

Если G - выпуклая область, все производные $\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}$ равномерно непрерывны на G и норма матрицы Якоби

$$\mathbf{J} = \left[\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \right]$$

не превосходит $q < 1$, то отображение является сжимающим в G

В случае, когда G - компакт, равномерная непрерывность производных следует из непрерывности.
Отличие от одномерного случая в том, что вместо условия $|\varphi'(x)| \leq q < 1$ теперь используется $\|\mathbf{J}\| \leq q < 1$

Оптимизационные методы

Для любой системы $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = 0$ можно построить функцию $\Phi(\mathbf{x}) = (\mathbf{F}(\mathbf{x}), \mathbf{F}(\mathbf{x}))$. Эта функция неотрицательна $\Phi(\mathbf{x}) \geq 0$, а ее минимум $\Phi(\mathbf{x}) = 0$ достигается как раз в точке $\mathbf{x}^*$ где $\mathbf{F}(\mathbf{x}^*) = 0$.

$$\nabla \Phi(\mathbf{x}) = 2 \left(\frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \mathbf{F}(\mathbf{x})$$

Для поиска минимума функции $\Phi(\mathbf{x})$ можно применять различные методы оптимизации, например, метод градиентного спуска или метод сопряженных градиентов.

Метод Ньютона можно применять и в многомерном случае при выполнении условия $n = m$.

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \left[\frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{x}_k)}{\partial \mathbf{x}}\right]^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{x}_k)$$

Практически все свойства одномерного метода Ньютона без изменений переносятся на многомерный случай. Заметим, что в данном случае приходится на каждом шаге решать систему линейных уравнений с матрицей $\frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{x}_k)}{\partial \mathbf{x}}$.

Иногда бывает легко найти решение системы $\mathbf{G}(\mathbf{x}) = 0$ "похожей" на систему $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = 0$, но решение $\mathbf{G}(\mathbf{x})$ не является достаточно хорошим приближением, чтобы метод Ньютона для системы $\mathbf{F}$ сошелся.
Рассмотрим систему $\mathbf{H}(\mathbf{x}, \lambda)$ с параметром $\lambda \in [0, 1]$.

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}, \lambda) = \lambda \mathbf{F}(\mathbf{x}) + (1 - \lambda)\mathbf{G}(\mathbf{x})$$

При $\lambda = 0$ система $\mathbf{H}$ совпадает с $\mathbf{G}$, а при $\lambda = 1$ — с $\mathbf{F}$.
Решение системы $\mathbf{H}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{G}(\mathbf{x})$ известно. Можно рассмотреть функцию $\mathbf{x}(\lambda)$ — решение системы $\mathbf{H}$ при заданном λ. $\mathbf{x}(0)$ известно — это решение $\mathbf{G}(\mathbf{x})$. Обозначим его $\mathbf{x}_0$

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}, \lambda) = \lambda \mathbf{F}(\mathbf{x}) + (1-\lambda)\mathbf{G}(\mathbf{x})$$

Поскольку $\mathbf{x}(\lambda)$ — решение $\mathbf{H}$, то

$$0 = \mathbf{H}(\mathbf{x}(\lambda), \lambda)$$

Продифференцируем это выражение по λ

$$0 = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{x}} \frac{d\mathbf{x}(\lambda)}{d\lambda} + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \lambda}$$

Отсюда

$$\frac{d\mathbf{x}(\lambda)}{d\lambda} = \left(\lambda \mathbf{F}_\mathbf{x}(\mathbf{x}) + (1-\lambda)\mathbf{G}_\mathbf{x}(\mathbf{x})\right)^{-1} \left(\mathbf{G}(\mathbf{x}) - \mathbf{F}(\mathbf{x})\right)$$

Дополнив это уравнение условием $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$, получаем задачу Коши для функции $\mathbf{x}(\lambda)$.

Примечательно, но идея, которая использовалась для решения СЛАУ методом Зейделя переносится и на СНАУ

$$
\begin{aligned}
f_1(\boxed{x_{k+1,1}}, x_{k,2}, \ldots, x_{k,n}) &= 0 \\
f_2(x_{k+1,1}, \boxed{x_{k+1,2}}, \ldots, x_{k,n}) &= 0 \\
f_3(x_{k+1,1}, x_{k+1,2}, \ldots, x_{k,n}) &= 0 \\
&\vdots \\
f_n(x_{k+1,1}, x_{k+1,2}, \ldots, \boxed{x_{k+1,n}}) &= 0
\end{aligned}
$$

Если решать уравнения сверху вниз, то каждое уравнение является уравнением с одной неизвестной.

Спасибо за внимание!

tsybulin@crec.mipt.ru