УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной и методической работе
Д.А. Зубцов
15 декабря 2014 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Вычислительная математика**
по направлению подготовки: 03.03.01 «Прикладные математика и физика»
факультет: **ФУПМ**
кафедра: **вычислительной математики**
курс: 3
семестр: 6
Трудоемкость: базовая часть – зач. ед.– 3

лекции – 34 часа
практические (семинарские) занятия – нет
лабораторные занятия – 34 часа

Экзамен – нет

Диф. зачет – 6 семестр

Самостоятельная работа – 40 часов

ВСЕГО ЧАСОВ – 68

Программу и задание составил доц. В.Б. Пирогов

Программа принята на заседании
кафедры вычислительной математики
14 ноября 2014 года

Заведующий кафедрой А.С. Холодов

Понятие жесткой задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ЖС ОДУ). *[1]Численное решение ЖС ОДУ.

A-устойчивые, $A(\alpha)$-устойчивые и L-устойчивые схемы. *Анализ двухточечных схем (Рунге–Кутты), линейных многошаговых схем в пространстве неопределенных коэффициентов. *Одноитерационные методы Розенброка.

Численное решение краевых задач для ОДУ. Методы решения линейных краевых задач (метод численного построения общего решения, конечно-разностный метод для линейного уравнения второго порядка, метод прогонки). Методы решения нелинейных краевых задач (метод стрельбы, метод квазилинеаризации). Задача на собственные значения. Задача Штурма—Лиувилля.* Понятие жесткой краевой задачи. *Методы решения жесткой линейной краевой задачи.

Разностные методы решения задач, описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных. Методы построения аппроксимирующих разностных уравнений для уравнений в частных производных. Аппроксимация, устойчивость, сходимость. Приемы исследования разностных задач на устойчивость. Принцип максимума, спектральный признак устойчивости, принцип замороженных коэффициентов.

Численные методы решения уравнений в частных производных гиперболического типа на примере уравнения переноса и волнового уравнения.

Корректная постановка краевых условий для системы уравнений с частными производными гиперболического типа. Характеристики, инварианты Римана. Разностные схемы для характеристической формы записи системы.

Численные методы решения линейных уравнений в частных производных параболического типа.

Разностные схемы для решения многомерных уравнений теплопроводности. Понятие о методах расщепления. Метод переменных направлений.

*Разностные схемы для квазилинейного уравнения теплопроводности. *Консервативные разностные схемы.

---

[1] Знаком * помечены пункты вариативной части программы.

Численные методы решения уравнений в частных производных эллиптического типа. Разностная схема «крест» для численного решения уравнений Лапласа, Пуассона. Итерационные методы для численного решения возникающих систем линейных уравнений.

Принцип установления для решения стационарных задач. Условия сходимости.

* Вариационно- и проекционно-разностные методы построения разностных схем. Метод конечных элементов.

Литература

Основная

1. *Рябенький В.С.* Введение в вычислительную математику. — М.: Наука–Физматлит, 1994. — 335 с.; 3-е изд.— М.: Физматлит, 2008. — 288 с. (Физтеховский учебник).
2. *Федоренко Р.П.* Введение в вычислительную физику. — М.: Изд-во МФТИ, 1994 — 528 с.; 2-е изд. /под редакцией А.И. Лобанова. — Долгопрудный: Интеллект, 2008.— 504 с. (Физтеховский учебник).
3. *Косарев В.И.* 12 лекций по вычислительной математике. 3-е изд. — М.: Физматкнига, 2013. — 240 с.
4. *Лобанов А.И., Петров И.Б.* Лекции по вычислительной математике. — М.: Интернет-Университет информационных технологий, 2006. — 522 с.
5. *Калиткин Н.Н.* Численный анализ. — М.: Академия, 2013. — 304 с.

Дополнительная

1. Основы вычислительной математики: лабораторный практикум. 2-е изд, испр. и доп. / В.Д. Иванов, В.И. Косарев, А.И. Лобанов, И.Б. Петров, В.Б. Пирогов, В.С. Рябенький, Т.К. Старожилова, А.Г. Тормасов, С.В. Утюжников, А.С. Холодов. — М.: Изд-во МЗ-Пресс, 2003. — 196 с.
2. *Хайрер Э., Ваннер Г.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. — М.: Мир, 1999. — 685 с.
3. *Самарский А. А., Гулин А В.* Численные методы. — М.: Наука, 1989.

1-я контрольная работа — первая декада марта

ЗАДАНИЕ 1 (срок сдачи — вторая неделя марта)

Задачи из Сборника задач для упражнений по курсу вычислительной математики / под ред. В.С. Рябенького. — М.: МФТИ, 1988: **VII.7, VII.8, VII.9(а,б), VII.12, VII.13.**

1.Уравнение Ван-дер-Поля второго порядка можно записать в представлении Льенара:

$$y' = -a\left(\frac{y^3}{3} - y\right) + p,$$

$$p' = -y$$

с условиями

$$y(0) = y_0 > 0; \;\; y'(0) = 0, \;\; 0 \le t \le 3000, \;\; a{>>}0 \;\; (100 \div 1\,000).$$

Найти показатель жесткости рассматриваемой задачи в зависимости от параметра a. В какой части фазового пространства задача жесткая?

2. Семейство неявных методов Рунге–Кутты вида

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{f}(t_n + c_1\tau, \;\; \mathbf{y}_n + \tau\sum_{j=1}^{s} a_{1j}\mathbf{k}_j) \; ,$$

$$\mathbf{k}_s = \mathbf{f}(t_n + c_s\tau, \;\; \mathbf{y}_n + \tau\sum_{j=1}^{s} a_{sj}\mathbf{k}_j) \; ,$$

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \tau\sum_{j=1}^{s} b_j\mathbf{k}_j,$$

где $\mathbf{k}_1,\ldots,\mathbf{k}_s$ определяются как решение нелинейной системы уравнений, называется *неявным методом Рунге–Кутты порядка S*(*S-стадийным*). Как будет выглядеть для него таблица Бутчера?

Вывести условия аппроксимации порядка p ($p = 1, 2, 3, 4$; $S = 2$). Обратите внимание, что для определения $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_2, \ldots, \mathbf{k}_s$ необходимо решать систему нелинейных уравнений. Какова ее размерность?

В чем состоит особенность методов с $a_{ij} = 0$ при $j > i$? (Это так называемые полуявные или диагонально неявные методы.)

3. Построить функцию устойчивости для ВСЕХ явных методов Рунге–Кутты 1, 2, 3 и 4 порядков аппроксимации, для которых число стадий равно порядку аппроксимации.

4. Для системы

$$\dot{x}_1 = 98x_1 + 198x_2,$$

$$\dot{x}_2 = -99x_1 - 199x_2$$

численное решение получают явными методами Рунге–Кутты 1, 2, 3 и 4 порядков аппроксимации, число стадий равно порядку аппроксимации. При каких шагах τ методы устойчивы? Объяснить, почему для методов порядков 2 и 4 и методов порядков 1 и 3 неустойчивость носит качественно разный характер.

5. Рассматривается следующее однопараметрическое семейство однократно диагонально-неявных методов Рунге–Кутты:

$$\begin{array}{c|cc} \gamma & \gamma & 0 \\ 1-\gamma & 1-2\gamma & \gamma \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}.$$

Найти все значения параметра γ, при которых:

а) метод имеет третий порядок аппроксимации,
б) метод является асимптотически устойчивым,
в) метод является A-устойчивым.

6. Показать, что метод трапеций для решения жестких задач Коши является A-устойчивым, но не является L-устойчивым.

7. Исследовать на устойчивость простейший ФДН-метод:

$$3y^{n+1} - 4y^{n} + y^{n-1} = 2\tau f^{n+1}$$

для решения обыкновенного дифференциального уравнения $\dot{y} = f(t, y)$.

8. Найти все λ, для которых разностная задача имеет нетривиальное решение:

а) $\dfrac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{h^2} = (2-\lambda)u_n, \quad u_0 = u_1, \quad u_N = 0,$

$hN = 1, n = 1, \ ..., \ N-1,$

б) $\dfrac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{h^2} = -\lambda u_n, \quad u_0 = 0, \quad u_N = u_{N-1},$

$hN = 1, n = 1, \ ..., \ N-1.$

9*, 10*, 11*. Лабораторные работы по курсу «Вычислительная математика»:

1. Жесткая задача Коши для систем ОДУ.
2. Краевая задача для систем ОДУ.
3. Уравнение переноса.

2-я контрольная работа — первая декада мая

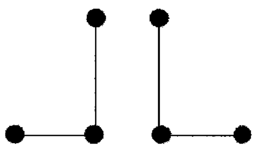
ЗАДАНИЕ 2 (срок сдачи 20—31 апреля)

Задачи из Сборника задач для упражнений по курсу вычислительной математики / под ред. В.С. Рябенького. — М.: МФТИ, 1988: **VIII.1, VIII.4, VIII.5, VIII.2, VIII.3, VIII.6, VIII.7, VIII.9, IX.1(а), IX.3, IX.4, II.9.**

1. Преобразовать систему уравнений с частными производными первого порядка

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial x} = f(t,x), & 0 \le t \le T, \quad -\infty < x < \infty, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} + \dfrac{\partial v}{\partial x} = g(t,x), & u(0,x) = \varphi(x), \quad v(0,x) = \psi(x) \end{cases}$$

к характеристической форме, и для ее решения предложить сходящуюся разностную схему, используя шаблоны «явный левый уголок» и «явный правый уголок»:



2. Какие из предложенных вариантов начальных и граничных условий соответствуют корректной постановке смешанной задачи для системы уравнений в частных производных первого порядка:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial x} = f(t,x), & 0 \le t \le 1, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} + \dfrac{\partial v}{\partial x} = g(t,x), & 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

1) $u(0,x) = \varphi_0(x)$, $v(0,x) = \varphi_1(x)$, $u(t,0) = \psi_0(t)$, $u(t,1) = \psi_1(t)$,

2) $u(0,x) = \varphi_0(x)$, $v(0,x) = \varphi_1(x)$, $u(t,0) = \psi_0(t)$, $v(t,1) = \psi_1(t)$,

3) $u(0,x) = \varphi_0(x)$, $v(0,x) = \varphi_1(x)$, $u(t,0) = \psi_0(t)$, $v(t,0) = \psi_1(t)$,

4) $u(0,x) = \varphi_0(x)$, $v(0,x) = \varphi_1(x)$, $u(t,0) = \psi_0(t)$, $-2u(t,0) + v(t,0) = \psi_1(t)$?

3.* Лабораторные работы по курсу «Вычислительная математика»:

1. Волновое уравнение.
2. Уравнение теплопроводности.
3. Задача Дирихле для уравнения Пуассона.

Усл. печ. л. 0,5. Тираж 140 экз.