

Методы Рунге-Кутты

Условия порядка. Функции устойчивости

Цыбулин Иван

Т5. Рассматривается следующее однопараметрическое семейство однократно диагонально-неявных методов Рунге-Кутты:

$$\begin{array}{c|cc} \gamma & \gamma & 0 \\ 1-\gamma & 1-2\gamma & \gamma \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}$$

Найти все значения параметра γ , при которых:

- а) метод является правильным (интерполяционным)
- б) метод имеет третий порядок аппроксимации,
- в) метод является асимптотически устойчивым (L -устойчивым),
- г) метод является A -устойчивым.

а) Метод Рунге-Кутты называется правильным или интерполяционным, если все коэффициенты в его таблице Бутчера неотрицательны. Данный метод будет правильным, если

$$0 \leq \gamma \leq \frac{1}{2}$$

Методы, не являющиеся правильными склонны накапливать и усиливать ошибки округления.

б) Условия порядка методов Рунге-Кутты при выполнении условий Кутты

$$c_i = \sum_{j=1}^s a_{ij}$$

имеют вид

- для первого порядка и выше: $\sum_i b_i = 1$
- для второго порядка и выше: $\sum_i b_i c_i = \frac{1}{2}$
- для третьего порядка и выше:

$$\begin{aligned} \sum_i b_i c_i^2 &= \frac{1}{3} \\ \sum_{i,j} b_i a_{ij} c_j &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Считаем, что коэффициенты a_{ij}, b_i, c_j расположены в таблице Бутчера следующим образом

$$\begin{array}{c|c} \mathbf{c} & \mathbf{A} \\ \hline & \mathbf{b}^\top \end{array}$$

Данный метод удовлетворяет условиям Кутты

$$\begin{aligned} c_1 &= \gamma = \gamma + 0 = \sum_j a_{1j} \\ c_2 &= 1 - \gamma = 1 - 2\gamma + \gamma = \sum_j a_{2j}, \end{aligned}$$

а также условиям первого

$$\sum_i b_i = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

и второго порядка

$$\sum_i b_i c_i = \frac{\gamma}{2} + \frac{1-\gamma}{2} = \frac{1}{2}$$

при любых γ . Выясним, когда метод дополнительно удовлетворяет условиям третьего порядка

$$\begin{aligned} \sum_i b_i c_i^2 &= \frac{1}{2} (\gamma^2 + (1-\gamma)^2) = \gamma^2 - \gamma + \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \\ \sum_{ij} b_i a_{ij} c_j &= \frac{1}{2} (\gamma^2 + (1-2\gamma)\gamma + \gamma(1-\gamma)) = \gamma - \gamma^2 = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Оба условия свелись к одному квадратному уравнению

$$\gamma^2 - \gamma + \frac{1}{6} = 0, \quad \gamma_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{6}.$$

Корень $\gamma = \frac{3-\sqrt{3}}{6} \approx 0.211$ соответствует правильному (интерполяционному) методу третьего порядка, корень $\gamma = \frac{3+\sqrt{3}}{6} \approx 0.789$ — другому методу третьего порядка, но с отрицательными коэффициентами.

в) Для исследования поведения метода на жестких задачах, применим его к модельному уравнению

$$y' = \lambda y, \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

При этом, полученный разностный метод можно записать в виде

$$u_{n+1} = r(\tau\lambda)u_n,$$

где $r(z)$ — функция устойчивости метода, которая для методов Рунге-Кутты может быть записана как

$$r(z) = \frac{\det(\mathbf{E} - z\mathbf{A} + z\mathbf{B})}{\det(\mathbf{E} - z\mathbf{A})}.$$

В последнем выражении \mathbf{E} — единичная матрица, а \mathbf{B} — матрица, в которой коэффициенты \mathbf{b} повторяются в каждой строке

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_s \\ b_1 & b_2 & \dots & b_s \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_1 & b_2 & \dots & b_s \end{bmatrix}$$

Для данного метода

$$r(z) = \frac{\begin{vmatrix} 1 - \gamma z + z/2 & z/2 \\ 1 + 2\gamma z - z/2 & 1 - \gamma z + z/2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 - \gamma z & 0 \\ 1 + 2\gamma z - z & 1 - \gamma z \end{vmatrix}} = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

$$P(z) = 1 + (1 - 2\gamma)z + (1 - 4\gamma + 2\gamma^2)\frac{z^2}{2}$$

$$Q(z) = (1 - \gamma z)^2 = 1 - 2\gamma z + \gamma^2 z^2.$$

Метод будет L -устойчивым тогда, когда он хотя бы $A(\alpha)$ -устойчив и $r(z) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow -\infty$. A -устойчивость будет исследована далее, а пока просто выясним когда $\lim_{z \rightarrow -\infty} r(z) = 0$:

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} r(z) = \lim_{z \rightarrow -\infty} \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{1 - 4\gamma + 2\gamma^2}{\gamma^2}$$

L -устойчивость возможна лишь при

$$1 - 4\gamma + 2\gamma^2 = 0, \quad \gamma_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{2}$$

Из этих двух L -устойчивых методов правильным будет метод с $\gamma = \frac{2-\sqrt{2}}{2} \approx 0.293$.

г) Чтобы исследовать метод на A -устойчивость, рассмотрим область устойчивости метода

$$z \in \mathbb{C} : |r(z)| \leq 1.$$

Для $r(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ можно дать эквивалентное определение.

$$z \in \mathbb{C} : |P(z)| \leq |Q(z)|$$

Метод будет A -устойчив, если $|r(z)| \leq 1$ для всей левой полуплоскости $\operatorname{Re} z \leq 0$. Рассмотрим область $\operatorname{Re} z \leq 0$. Ее границей будет мнимая ось $\operatorname{Re} z = 0$. Для этой области существует принцип максимума¹, который гласит, что функция, которая растет медленнее, чем $e^{|z|}$, и аналитична в области $\operatorname{Re} z \leq 0$ достигает своего максимума на границе, то есть на мнимой оси.

Функция $r(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ является отношением многочленов, поэтому не может экспоненциально расти. Дополнительно, единственный полюс $z = \frac{1}{\gamma}$ функции $r(z)$ расположен вне левой полуплоскости, а значит, функция $r(z)$ аналитическая в левой полуплоскости.

Рассмотрим мнимую ось и функцию $r(z) = r(iy)$ на ней. Всего возможно два варианта:

¹принцип Фрагмена — Линделёфа

- $\max_{y \in \mathbb{R}} |r(iy)| \leq 1$. Из принципа максимума, во всей области $\operatorname{Re} z \leq 0$ функция устойчивости по модулю не превышает 1, и метод является A -устойчивым
- $\max_{y \in \mathbb{R}} |r(iy)| > 1$. Метод не может быть A -устойчивым, так как некоторые точки (вместе с некоторой окрестностью) на мнимой оси не принадлежат области устойчивости.

Вместо проверки $|r(iy)| \leq 1$ проще проверять $|P(iy)|^2 \leq |Q(iy)|^2$. Пусть $E(y) \equiv |Q(iy)|^2 - |P(iy)|^2$. Для нашего метода

$$\begin{aligned}
E(y) &= |1 - 2\gamma iy - \gamma^2 y^2|^2 - \left| 1 + (1 - 2\gamma)iy - (1 - 4\gamma + 2\gamma^2)\frac{y^2}{2} \right|^2 = \\
&= (1 - \gamma^2 y^2)^2 + 4\gamma^2 y^2 - \left(1 - (1 - 4\gamma + 2\gamma^2)\frac{y^2}{2} \right)^2 - (1 - 2\gamma)^2 y^2 = \\
&= 1 - 1 + (-2\gamma^2 + 4\gamma^2 - 1 + 4\gamma - 4\gamma^2 + 1 - 4\gamma + 2\gamma^2)y^2 + \\
&\quad + \gamma^4 y^4 - \frac{(1 - 4\gamma + 2\gamma^2)^2}{4} y^4 = \\
&= \frac{y^4}{4} (4\gamma - 1)(1 - 2\gamma)^2
\end{aligned}$$

Функция $E(y)$ неотрицательна при $\gamma \geq \frac{1}{4}$, а значит метод будет A -устойчивым при $\gamma \geq \frac{1}{4}$