Краевая задача

Цыбулин Иван

К3. *Дана краевая задача для системы из n ОДУ*

$$\begin{aligned}&\frac{d\mathbf{u}}{dt} = A(t)\mathbf{u} + \boldsymbol{\varphi}(t),\ 0 \le t \le 1\\&L_i^-\mathbf{u}(0) = \alpha_i^-,\ i = \overline{1, r}\\&L_i^+\mathbf{u}(1) = \alpha_i^+,\ i = \overline{r+1, n}\end{aligned}$$

Рассмотреть вариант

$$L^- = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \quad \alpha^- = \begin{pmatrix} 1\\ 2\end{pmatrix}$$

$$L^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix} \quad \alpha^+ = \begin{pmatrix} 1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}$$

а) *Предложить алгоритм численного построения общего решения системы ОДУ.*

б) *Предложить алгоритм численного построения линейного многообразия всех решений системы ОДУ, удовлетворяющих левым (или правым) условиям.*

в) *Предложить эффективный алгоритм решения краевой задачи.*

1). Требуется построить общее решение системы ОДУ. Оно представляет из себя сумму решений неоднородной задачи и произвольной линейной комбинации решений однородной задачи. Для этого численно решим 6 задач Коши следующего вида:

$$\begin{cases}\dfrac{d\mathbf{u}_0}{dt} = A\mathbf{u}_j + \boldsymbol{\varphi}\\ \mathbf{u}_0(0) = \mathbf{0}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{d\mathbf{u}_j}{dt} = A\mathbf{u}_j\\ \mathbf{u}_j(0) = \mathbf{e}_j\end{cases}$$

Здесь $j = \overline{1, 5}$, $\mathbf{e}_j$ - j-й столбец единичной матрицы. Так как начальные условия для однородных задач Коши линейно независимы, то и решения будут линейно независимы. Общее решение можно записать в виде

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \sum_{j=1}^{5} C_j\mathbf{u}_j$$

2). С одной стороны, имея общее решение из п. 1 мы бы могли наложить краевые условия непосредственно на общее решение. При этом бы мы получили 2 уравнения на 5 неизвестных $C_1, \ldots, C_5$, и смогли бы выразить две из них через 3 другие. Таким образом, необходимое многообразие бы задавалось тремя оставшимися неизвестными. Но это неэффективно с точки зрения вычислений, так как требует решения 6и задач Коши. Покажем, как можно обойтись меньшим числом. Если для построения общего решения мы брали линейно независимую систему из 5 различных начальных условий, то теперь возьмем систему из трех линейно независимых начальных условий, но при этом каждое из них должно удовлетворять левым краевым условиям. Построим многообразие начальных условий, которые удовлетворяют левым краевым условиям, т.е. просто разрешим систему

$$L^{-}\mathbf{u}(0) = \alpha^{-}$$

Базисный минор L^{-} находится, например, в столбцах 2 и 5. Эти компоненты будут зависимыми и будут выражаться через остальные. Приведем минор к виду единичной матрицы. Вычтем для этого из первой строки вторую

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} & 2 & 0 & \mathbf{0} \\ 0 & \mathbf{0} & 0 & 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^1(0) \\ u^2(0) \\ u^3(0) \\ u^4(0) \\ u^5(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u^1(0) \\ u^2(0) \\ u^3(0) \\ u^4(0) \\ u^5(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{f}_0 + C_1\mathbf{f_1} + C_2\mathbf{f_2} + C_3\mathbf{f_3}$$

Многообразие начальных условий, которое удовлетворяем левым краевым условиям найдено. Осталось найти многообразие решений краевой задачи только с левыми условиями. Оно находится с помощью решения четырех задач Коши.

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{u}_0}{dt} = A\mathbf{u}_j + \boldsymbol{\varphi} \\ \mathbf{u}_0(0) = \mathbf{f}_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{u}_j}{dt} = A\mathbf{u}_j \\ \mathbf{u}_j(0) = \mathbf{f}_j \end{cases}$$

Необходимое многообразие задается следующим выражением

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \sum_{j=1}^{3} C_j \mathbf{u}_j$$

Заметим, что если производить аналогичные действия на правом конце отрезка, то необходимо решать только 3 задачи Коши.

3). Воспользуемся п. 2 и построим численно многообразие решений, удовлетворяющих правым краевым условиям. При этом необходимо решить 3 задачи Коши. Искомое многообразие будет представлено в виде

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \sum_{j=1}^{2} C_j \mathbf{u}_j$$

На правом конце оно удовлетворяет тождеству

$$L^+ \mathbf{u}(1) \equiv \alpha^+$$

Остается только найти при каких C_j данное многообразие удовлетворяет также и левым краевым условиям. Подставив значения этого многообразия решений в левом конце отрезка в левые граничные условия, получаем линейную систему из двух уравнений на 2 неизвестные C_1 и C_2.

$$L^- \mathbf{u}(0) = \alpha^-$$

$$L^- \mathbf{u}_0(0) + C_1 L^- \mathbf{u}_1(0) + C_2 L^- \mathbf{u}_2(0) = \alpha^-$$

Разрешив систему, получим элемент многообразия, который удовлетворяет левым и правым условиям, дифференциальному уравнению, т.е. является решением краевой задачи. Этот алгоритм в два раза экономичнее метода численного построения общего решения.