

СЛАУ

Нормы векторов и матриц. Обусловленность

Цыбулин Иван (tsybulin@crec.mipt.ru)

Задача решения СЛАУ

Будем рассматривать случай системы с невырожденной квадратной матрицей

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Из линейной алгебры известно, что система разрешима при $\det \mathbf{A} \neq 0$ и при этом решение единственно.

Что такое вырожденная матрица?

С точки зрения вычислительной математики матрица никогда не бывает строго вырождена в смысле $\det A = 0$. Но может ли небольшая коррекция коэффициентов быть решением проблемы $\det A = 0$?

Рассмотрим следующие две системы, которые лишь немного отличаются

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 &= 1 \\ 2x_1 + 4.0001x_2 &= 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + 2x_2 &= 1 \\ 2x_1 + 4.0001x_2 &= 2.0001 \end{cases}$$

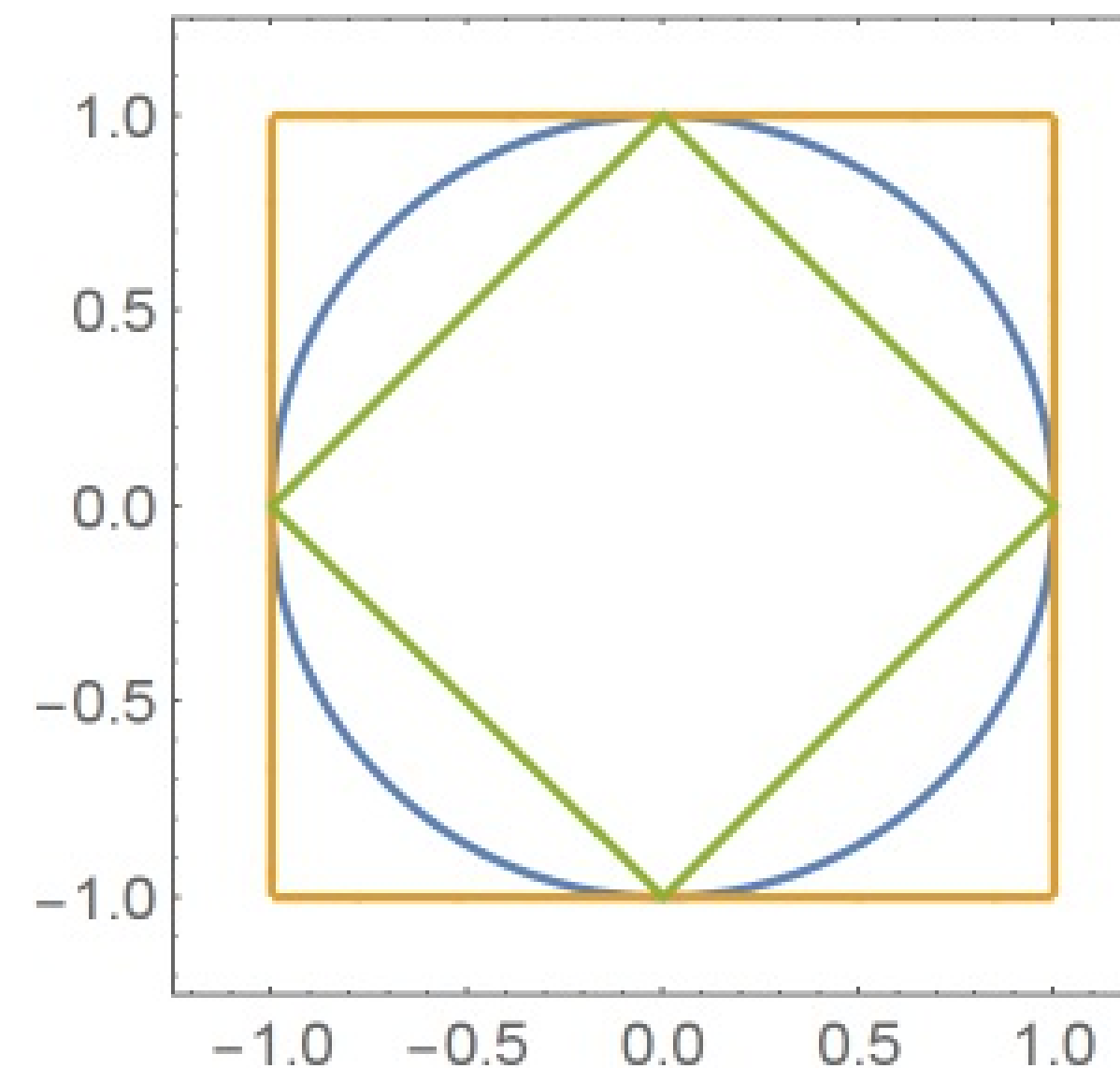
Их решения совершенно различны

$$\begin{cases} x_1 &= 1 \\ x_2 &= 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 &= -1 \\ x_2 &= 1 \end{cases}$$

Нормы векторов

Для количественного исследования данной проблемы нужно ввести некоторую норму для векторов. В вычислительной математике наиболее часто используются

- $\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_i |x_i|$ — максимум-норма, Чебышевская норма, ℓ_∞ норма
- $\|\mathbf{x}\|_{\ell_1} = \sum_i |x_i|$ — Манхэттенская норма, ℓ_1 норма
- $\|\mathbf{x}\|_E = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})} = \sqrt{\sum_i x_i^2}$ — Евклидова норма



Матричные нормы

Говорят, что матричная норма $\|\mathbf{A}\|$ согласована с векторной нормой $\|\mathbf{x}\|$, если для любой матрицы \mathbf{A} и любого вектора \mathbf{x} выполняется следующее неравенство

$$\|\mathbf{Ax}\| \leq \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{x}\|$$

Вводят понятие матричной нормы $\|\mathbf{A}\|$, подчиненной данной векторной норме $\|\mathbf{x}\|$

$$\|\mathbf{A}\| = \sup_{\mathbf{x}} \frac{\|\mathbf{Ax}\|}{\|\mathbf{x}\|}$$

Каждая векторная норма порождает свою подчиненную матричную норму. Подчиненная норма является согласованной.

Стандартные подчиненные матричные нормы

Доказывается, что

- $\|\mathbf{A}\|_{\infty} = \max_i \sum_j |a_{ij}|.$
- $\|\mathbf{A}\|_{\ell_1} = \max_j \sum_i |a_{ij}| = \|\mathbf{A}^{\top}\|_{\infty}.$
- $\|\mathbf{A}\|_E = \sigma_{\max}(\mathbf{A}) = \sqrt{\lambda_{\max}(\mathbf{A}^{\top} \mathbf{A})}$
 - для $\mathbf{A} = \mathbf{A}^{\top}$, $\|\mathbf{A}\|_E = \max |\lambda(\mathbf{A})|$
 - для $\mathbf{A} = \mathbf{A}^{\top} > 0$, $\|\mathbf{A}\|_E = \lambda_{\max}(\mathbf{A})$

Задание. Вычислить все три нормы для

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Число обусловленности для СЛАУ

Рассмотрим СЛАУ

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

и полученную из нее возмущением правой части

$$\mathbf{Az} = \mathbf{b} + \Delta\mathbf{b}.$$

Пусть $\Delta\mathbf{x} = \mathbf{z} - \mathbf{x}$.

Нам хотелось бы оценить относительную погрешность решения $\frac{\|\Delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|}$, связав ее с относительной погрешностью правой части $\frac{\|\Delta\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|}$

Пользуясь тем, что $\Delta \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \Delta \mathbf{b}$, оценим

$$\frac{\|\Delta \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \frac{\|\mathbf{A}^{-1}\| \|\Delta \mathbf{b}\|}{\|\mathbf{x}\|} = \frac{\|\mathbf{A}^{-1}\| \|\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{x}\|} \frac{\|\Delta \mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|}$$

Величина

$$\nu(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \frac{\|\mathbf{A}^{-1}\| \|\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{x}\|} \equiv \frac{\|\mathbf{A}^{-1}\| \|\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{A}^{-1} \mathbf{b}\|}$$

называется *числом обусловленности системы уравнений $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$* .

$$\frac{\|\Delta \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \nu(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \frac{\|\Delta \mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|}$$


```
import numpy as np
from numpy.linalg import norm, inv

def nu(A, b, kind = np.inf):
    return norm(inv(A), kind) * norm(b, kind) / norm(inv(A).dot(b), kind)

eps = 0.0001
A = np.array([[1, 2], [2, 4 + eps]])
b = np.array([1, 2])
print('nu_inf(A, b) =', nu(A, b, np.inf))
print('nu_1(A, b) =', nu(A, b, 1))
print('nu_E(A, b) =', nu(A, b, 2))
```

nu_inf(A, b) = 120002.0

nu_1(A, b) = 180003.0

nu_E(A, b) = 111805.187737

Число обусловленности матрицы

Насколько плохо может быть обусловлена система с данной матрицей \mathbf{A} ? Можно ли за счет выбора правой части \mathbf{b} сделать систему сколь угодно плохой? Оказывается, нет.

$$\nu(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \frac{\|\mathbf{A}^{-1}\| \|\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{A}^{-1} \mathbf{b}\|} = \frac{\|\mathbf{A}^{-1}\| \|\mathbf{A} \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{A}^{-1}\|.$$

Последняя величина зависит лишь от матрицы \mathbf{A} и называется *числом обусловленности матрицы*

$$\mu(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{A}^{-1}\|$$

Матрицу можно считать вырожденной, если ее число обусловленности превосходит $\frac{1}{\delta}$, где δ — относительная погрешность выполнения машинных операций.

```
def mu(A, kind = np.inf):  
    return norm(inv(A), kind) * norm(A, kind)
```

```
eps = 0.0001  
A = np.array([[1, 2], [2, 4 + eps]])  
print('mu_inf(A) =', mu(A, np.inf))  
print('mu_1(A) =', mu(A, 1))  
print('mu_E(A) =', mu(A, 2))
```

mu_inf(A) = 360012.000101

mu_1(A) = 360012.000101

mu_E(A) = 250008.000097

Плохо обусловленные задачи

Решение СЛАУ — пример потенциально *плохо обусловленной задачи*, то есть задачи, в которой небольшое возмущение входных данных может приводить к существенным отличиям в решении. Для таких задач необходимо задавать входные данные с большой точностью, иначе результат может получиться совершенно недостоверным.