

Дополнительные задачи по курсу вычислительной математики. 5 семестр

Цыбулин Иван

26 сентября 2016 г.

1 Первое задание

1. Используя ваш любимый язык программирования, напишите функцию, вычисляющую функцию Бесселя первого рода $J_0(x)$, суммируя часть ее ряда Тейлора в окрестности точки $x_0 = 0$:

$$J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}.$$

Далее, используя эту функцию и формулу численного дифференцирования, найдите производную функции Бесселя $J_0(x)$ в точке $x = 1$ с заданной точностью $\varepsilon = 10^{-6}$.

Если в программе используются константы, такие как число членов ряда Тейлора или значение шага дифференцирования, должно быть указано, как они получены.

Примечание. Для дифференцирования использовать оптимальный шаг h^* . Принять, что погрешность, с которой вычисляются значения $J_0(x)$ равна ошибке метода вычисления функции с помощью отрезка ее ряда Тейлора, и может быть принята равной первому отброшенному слагаемому в ряде Тейлора. Использовать минимальное число членов ряда Тейлора для решения этой задачи. Для оценки максимумов всех производных функции Бесселя использовать $M_n \leq 1$.

2. Решить следующую трехдиагональную систему уравнений мето-

дом прогонки

$$\begin{cases} u_0 & = 0 \\ -u_{n-1} + (2 + h^2)u_n - u_{n+1} & = 2h^2 \sin(nh), \quad n = \overline{1, N-1}, \\ u_N & = 0 \end{cases}$$

где $N = 20, h = \frac{\pi}{N}$. Сравнить u_n и $\sin(nh)$.

3. Для решения интегрального уравнения Фредгольма второго рода

$$u(x) - \lambda \int_{-\pi}^{\pi} K(x-y)u(y) dy = f(x)$$

с ядром $K(s) = |s|$ и правой частью $f(x) = (1+2\lambda) \cos^2 \frac{x}{2} - \lambda \frac{x^2 + \pi^2}{2}$ используется квадратурная формула средней точки. При этом интегральное уравнение сводится к следующей системе линейных уравнений

$$\sum_{m=1}^N [\delta_{nm} - \lambda K_{nm}] u_m = f_n, \quad n = 1, \dots, N$$

где $K_{nm} = h^2 |n-m|$ — симметричная матрица ядра размера $N \times N$, $h = \frac{2\pi}{N}$, δ_{nm} — единичная матрица, а $f_n = f(x_n)$, $x_n = -\pi + (n-1/2)h$. Точное решение интегрального уравнения $U(x) = \cos^2 \frac{x}{2}$, численно должно совпадать с ним с точностью до небольшой ошибки метода порядка $O(h^2)$. Взять $\lambda = 0.01, N = 100$.

Решить полученную систему одним из следующих методов и сравнить решение с точным $U_m = U(x_m)$:

- с помощью LU -разложения;
- * с помощью LUP -разложения;
- * с помощью LL^T -разложения (Холецкого);
- * с помощью QR -разложения методом вращений Гивенса;
- * с помощью QR -разложения методом отражений Хаусхолдера.

Возмутить правую часть системы случайным вектором δf_n и получить возмущение решения δu_m . Оценить число обусловленности матрицы системы \mathbf{A}

$$\mu_E(\mathbf{A}) \gtrsim \frac{\|\delta \mathbf{u}\|_E / \|\mathbf{u}\|_E}{\|\delta \mathbf{f}\|_E / \|\mathbf{f}\|_E}$$

Оценить число обусловленности при

$$\lambda \lesssim \lambda_{\text{крит}} \approx 0.07291218479495440151.$$

Данное число является (единственным положительным) собственным значением интегрального уравнения.

4. Решить линейную систему уравнений из предыдущей задачи одним из итерационных методов:

- методом Зейделя;
- методом простой итерации с параметром $\tau = \frac{2}{\|\mathbf{A}\|_\infty}$ (для симметричной положительно определенной матрицы $\lambda(\mathbf{A}) < \|\mathbf{A}\|_\infty$);
- SOR методом, подобрать вручную параметр релаксации $1 < \omega < 2$, при котором сходимость будет самой быстрой.

Итерационный процесс следует завершить, если $\|\mathbf{u}^{(k)} - \mathbf{u}^{(k-1)}\| < \varepsilon = 10^{-6}$. В качестве начального приближения $\mathbf{u}^{(0)}$ возьмите $\mathbf{u}^{(0)} = \mathbf{0}$. Сколько итераций потребовалось для сходимости?

5. Построить для функции $f(x) = \sin x$ на отрезке $[-1, 1]$ приближение многочленом степени $n = 8$ в смысле наименьших квадратов по одной из норм

- Многочлен наилучшего равномерного приближения

$$\|f - g\|_C^2 = \int_{-1}^1 \frac{(f(x) - g(x))^2}{\sqrt{1 - x^2}} dx.$$

Указание. Разложить многочлен по многочленам Чебышева

$$P(x) = \sum_{k=0}^n c_k T_k(x), \quad T_k = \cos k \arccos x.$$

и воспользоваться ортогональностью многочленов Чебышева в этой норме.

$$\int_{-1}^1 \frac{T_n(x) T_m(x)}{\sqrt{1 - x^2}} dx = \begin{cases} \pi, & n = m = 0 \\ \pi/2, & n = m \neq 0 \\ 0, & n \neq m, \end{cases}$$

- Многочлен наилучшего приближения в норме L_2 :

$$\|f - g\|_2^2 = \int_{-1}^1 (f(x) - g(x))^2 dx.$$

Указание. Разложить многочлен по многочленам Лежандра

$$P(x) = \sum_{k=0}^n c_k L_k(x),$$

$$L_{k+1}(x) = \frac{2k+1}{k+1} x L_k(x) - \frac{k}{k+1} L_{k-1}(x), \quad L_0(x) = 1, \quad L_1(x) = x.$$

и воспользоваться ортогональностью многочленов Чебышева в этой норме.

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = \begin{cases} \frac{2}{2k+1}, & n = m \\ 0, & n \neq m, \end{cases}$$

Найти максимальную ошибку такого приближения на всем отрезке $[-1, 1]$.

- 6.** Решить одно из следующих уравнений

- Уравнение состояния реального газа Ван-дер-Ваальса

$$\left(p + 3 \frac{p_{\text{кр}} V_{\text{кр}}^2}{V^2}\right) \left(V - \frac{V_{\text{кр}}}{3}\right) = RT,$$

относительно V при $p = 10^5$ Па, $T = 300$ К, $V_{\text{кр}} = 0.1095$ м³/кмоль, $p_{\text{кр}} = 3.77 \cdot 10^6$ Па, $R = 8314$ Дж/(кмоль К).

- Уравнение Кеплера

$$M = E - e \sin E$$

относительно E для $e = 0.1$ и $M = \frac{5\pi}{6}$.

- Уравнение для зон для частицы в периодическом потенциале

$$\cos x + \frac{a}{x} \sin x = 1$$

относительно x (найти корень с минимальным положительным x) при $a = 0.2$.

- Любое нетривиальное нелинейное уравнение на выбор, например из [Аристова Е.Н., Завьялова Н.А., Лобанов А.И. Практические занятия по вычислительной математике в МФТИ. Часть I, стр. 110–112.]

одним из перечисленных методов

- метод деления отрезка пополам;
- метод секущих;
- метод Ньютона.

Для каждого метода должно быть задано начальное приближение с объяснением, как это начальное приближение было выбрано. Получить ответы с точностью не ниже $|\Delta x| \lesssim \varepsilon = 10^{-14}$. Сколько итераций потребовалось для сходимости?

2 Второе задание

7. Построить для функции $f(x) = \sin x$ на отрезке $[0, 2\pi]$ кубический сплайн $P(x)$, имеющий две непрерывные производные. Численно изучить зависимость максимального отклонения $f(x)$ и $P(x)$ в зависимости от количества узлов N . Найти порядок метода (степень зависимости максимального отклонения от $h = \frac{2\pi}{N-1}$). В качестве конечных условий использовать точные условия

$$f'(0) = f'(2\pi) = 1$$

либо

$$f''(0) = f''(2\pi) = 0.$$

8. Построить для функции $f(x) = \sin x$ на отрезке $[0, 2\pi]$ кубический сплайн $P(x)$, который в узлах интерполяции x_k совпадает со значениями $f(x_k)$, производная которого непрерывна, и в узлах совпадает со значениями $f'(x_k) = \cos x_k$ (такой сплайн называется сплайном Эрмита). Численно изучить зависимость максимального отклонения $f(x)$ и $P(x)$ в зависимости от количества узлов N . Найти порядок метода (степень зависимости максимального отклонения от $h = \frac{2\pi}{N-1}$).

9. Написать программу, которая используя правило Рунге и формулу Гаусса численного интегрирования четвертого порядка (ошибка на всем отрезке имеет порядок $O(h^4)$)

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx \approx \frac{x_2 - x_1}{2} \left[f\left(\frac{x_1 + x_2}{2} - \frac{x_2 - x_1}{2\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{x_2 - x_1}{2\sqrt{3}}\right) \right]$$

вычисляет интеграл

$$\int_0^{\pi/2} \ln \frac{1}{\sin x} dx$$

с точностью $\varepsilon = 10^{-10}$. Сравнить полученное значение с точным значением интеграла $\frac{\pi}{2} \ln 2$

Указание. Убедиться, что $\Delta_h = |I_h - I_{h/2}| \sim O(h^4)$. Если это не так, регуляризируйте подынтегральную функцию.

10. Для задачи Коши

$$\begin{cases} \frac{dy(t)}{dt} = -2ty(t) + 2t, & t \in [0, 1] \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

используется метод Адамса

$$\begin{cases} \frac{u_{n+1} - u_n}{\tau} = 3n\tau(1 - u_n) - \tau(n-1)(1 - u_{n-1}), & n = \overline{1, N-1} \\ u_0 = 2 \\ u_1 = 2 \end{cases},$$

где $\tau = \frac{1}{N}$. Написать программу, реализующую этот метод, и численно убедиться, что решение разностной задачи u сходится к решению дифференциальной задачи $y(t) = 1 + e^{-t^2}$ со вторым порядком по τ .