# Нелинейные алгебраические уравнения и системы

## Метод простой итерации. Метод Ньютона

Цыбулин Иван (tsybulin@crec.mipt.ru)

# Особенности нелинейных уравнений

В отличие от линейного уравнения (и невырожденных линейных систем), нелиейное уравнение вида

$$f(x) = 0$$

может иметь сколько угодно решений, в том числе и вовсе их не иметь.

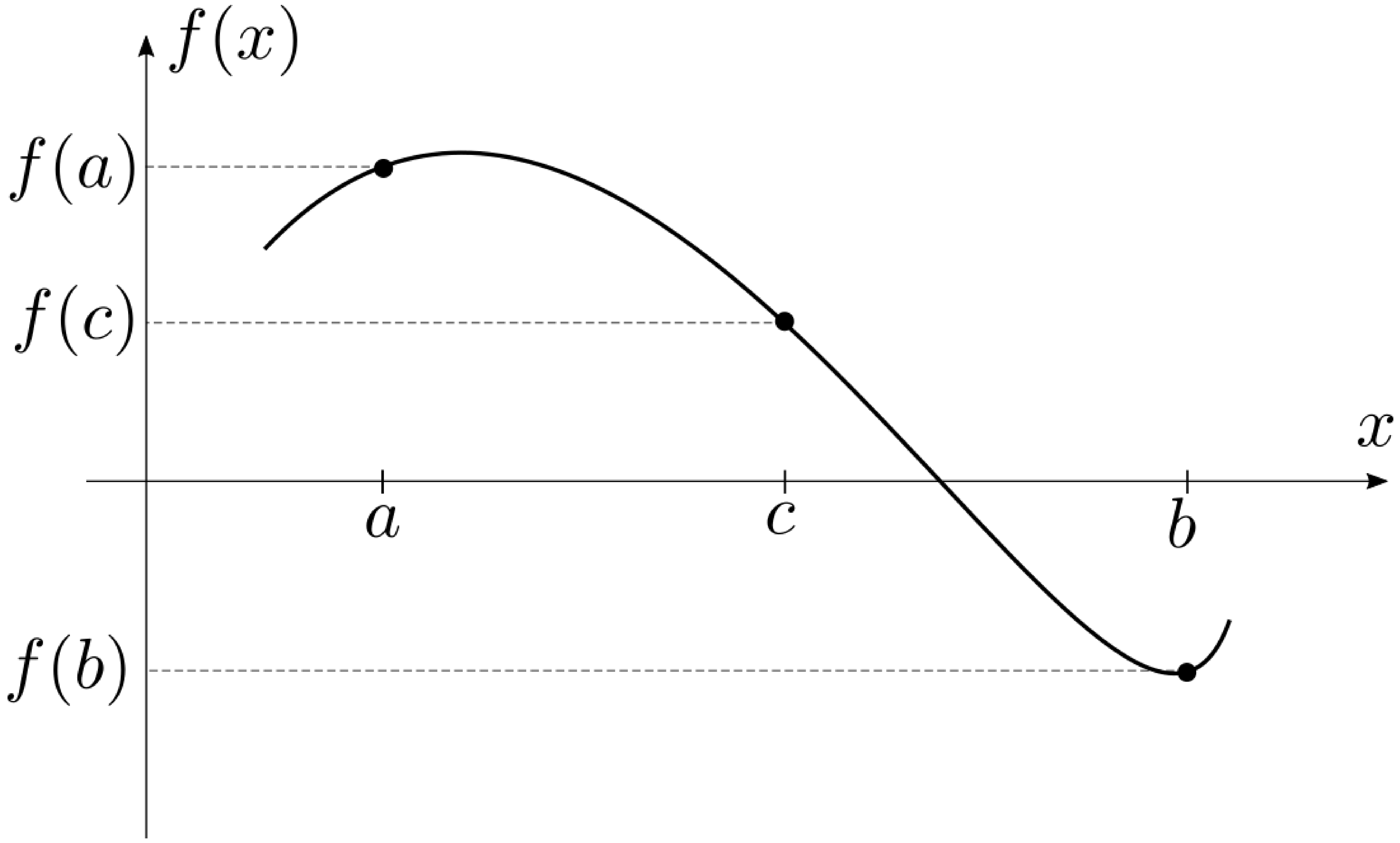
Для корректной постановки требуется локализовать корень, например так

$$a < x < b$$

Error preparing HTML-CSS output (postProcess)

# Метод дихотомии

Простейший метод решения скалярного уравнения — метод деления отрезка пополам. Допустим, что функция $f(x)$ непрерывна и в концах отрезка $[a, b]$ принимает значения разного знака. Вычислим функцию в середине отрезка $c = \frac{a+b}{2}$. Если $f(c)$ того же знака, что и $f(a)$, тогда корень расположен на отрезке $[c, b]$. В противном случае, корень расположен на отрезке $[a, c]$




Процедура деления отрезка снова применяется к новому интервалу. Итерации заканчиваются, когда очередной отрезок $[a_k, b_k]$ становится достаточно мал: $b_k - a_k < \epsilon$

```python
import numpy as np
def bisect(f, a, b, eps=1e-6):
    fa = f(a); fb = f(b)
    while b - a > eps:
        c = (a + b) / 2
        fc = f(c)
        if fa * fc > 0: # If sign f(a) = sign f(c)
            a = c; fa = fc
        else:
            b = c; fb = fc
        print('[%12.10f, %12.10f]' % (a, b))
    return (a + b) / 2

def f(x): return np.tan(x / 4) - 1
bisect(f, 3, 4) - np.pi
```

```
[3.0000000000, 3.5000000000]
[3.0000000000, 3.2500000000]
[3.1250000000, 3.2500000000]
[3.1250000000, 3.1875000000]
[3.1250000000, 3.1562500000]
[3.1406250000, 3.1562500000]
[3.1406250000, 3.1484375000]
[3.1406250000, 3.1445312500]
[3.1406250000, 3.1425781250]
```

Метод дихотомии на каждой итерации делит отрезок пополам, следовательно

$$\left|x^* - \frac{a_k + b_k}{2}\right| \leqslant \frac{b_k - a_k}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^k \frac{b_0 - a_0}{2}.$$

Видно, что метод сходится со скоростью $q = \frac{1}{2}$.

# Метод простой итерации

Рассмотрим следующий (одношаговый) итерационный метод

$$x_{k+1} = \varphi(x_k)$$

Пусть этот процесс сходится $x_k \to x^*$. Что можно сказать про $x^*$?

$$x^* = \varphi(x^*)$$

# Сходимость метода простой итерации

**Теорема Банаха**. Если $\varphi(x)$ задает на отрезке $[a, b]$ сжимающее отображение, то есть отображает отрезок в себя $\varphi([a, b]) \subseteq [a, b]$ и уменьшает расстояния между любой парой точек

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leqslant q|x - y|, \quad \forall x, y \in [a, b],$$

где $q < 1$, то у такого отображения на отрезке $[a, b]$ есть единственная неподвижная точка $x^* = \varphi(x^*)$ и последовательность $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ сходится к ней при любом $x_0 \in [a, b]$.

Если $\varphi(x)$ — сжимающее отображение, то

$$|x_{k+1} - x^*| \leqslant q|x_k - x^*| \leqslant \cdots \leqslant q^{k+1}|x_0 - x^*|$$

То есть итерационный процесс сходится со скоростью $q$.

# Достаточное условие сжимаемости

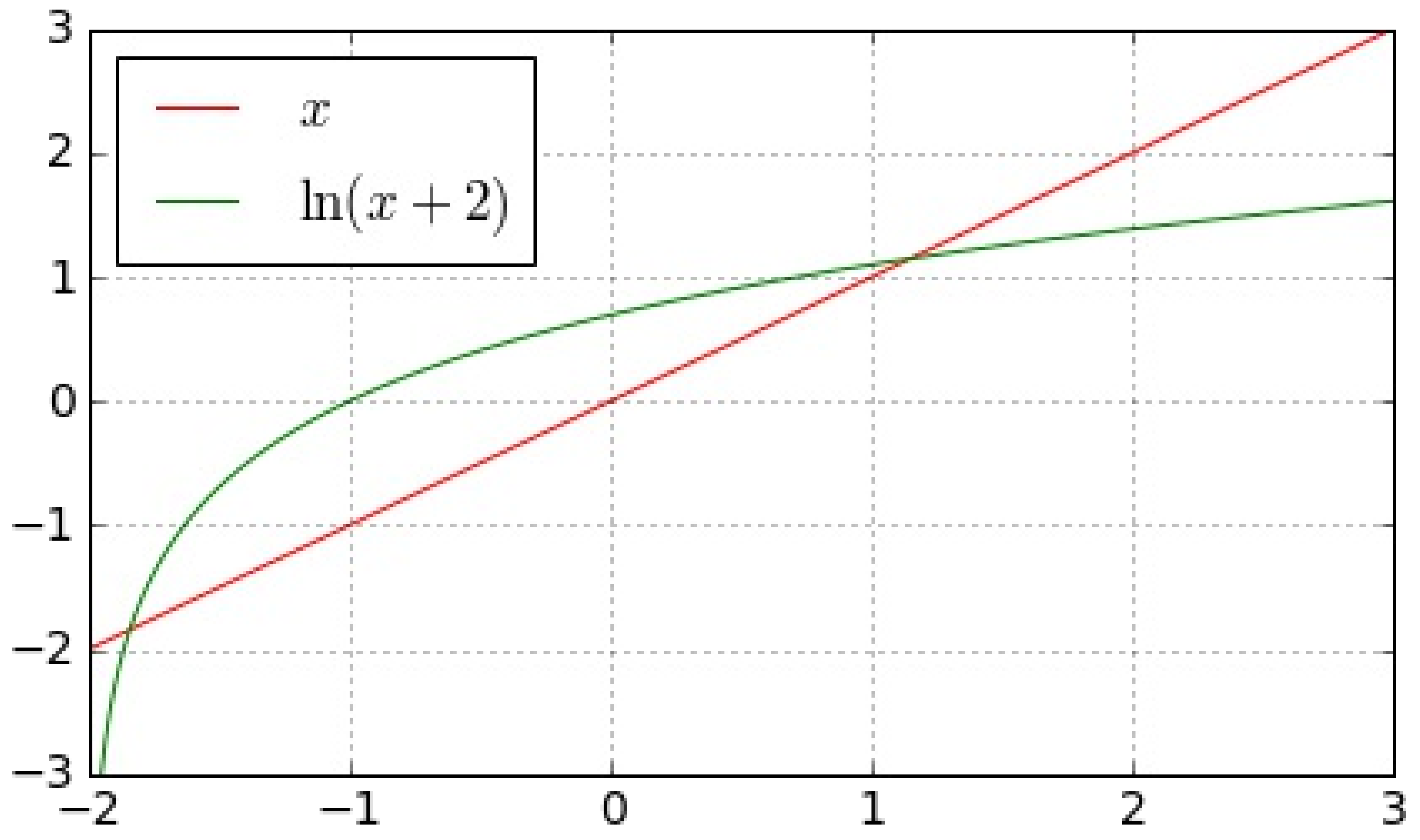
- Функция $\varphi(x)$ отображает отрезок в себя (важное условие!): $\varphi(x) \in [a, b], \quad \forall x \in [a, b]$
- Производная $\varphi'(x)$ по модулю меньше единицы на $[a, b]$:
$$q = \max_{x \in [a,b]} |f'(x)|$$

Если $|\varphi'(x^*)| < 1$, то существует такая окрестность корня $[x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon]$, где $\varphi(x)$ задает сжимающее отображение. При необходимости можно измельчать отрезок $[a, b]$ дихотомией до выполнения первого условия.

Рассмотрим уравнение

$$x = \ln(x+2)$$

Show code



Из графиков видно, что один корень расположен в на отрезке $[1, 2]$, а второй — на отрезке $[-1.9, -1]$. Действительно,

$$x - \ln(x+2)\big|_{x=1} = 1 - \ln 3 < 1 - \ln e = 0$$

$$x - \ln(x+2)\big|_{x=2} = 2 - \ln 4 > 2 - \ln e^2 = 0$$

$$x - \ln(x+2)\big|_{x=-1.9} = -1.9 - \ln 0.1 > -1.9 - \ln e^{-2} = 0.1 > 0$$

$$x - \ln(x+2)\big|_{x=-1} = -1 - \ln 1 = -1 < 0$$

Возьмем итерационный процесс $x_{k+1} = \varphi(x_k)$, где $\varphi(x) = \ln(x+2)$. Это отображение переводит отрезок $[1,2]$ внутрь себя:

$$1 < \ln 3 \leqslant \ln(x+2) \leqslant \ln 4 < 2.$$

Производная этого отображения равна

$$\varphi'(x) = \frac{1}{x+2}, \qquad q = \max_{x\in[1,2]} |\varphi'(x)| = \frac{1}{3} < 1.$$

Значит, $\varphi(x)$ — сжимающее отображение на $[1,2]$.

```python
from scipy.optimize import fsolve

def phi(x):
    return np.log(x + 2)

x = 1.5
for i in range(10):
    x = phi(x)

[xtrue] = fsolve(lambda x: x - phi(x), 1.5, xtol=1e-20)
print('x =', x, ', x* =', xtrue)
print('x - x* =', x - xtrue)
```

```
x = 1.1461966638 , x* = 1.14619322062
x - x* = 3.4431762046e-06
```

Попробуем применить то же отображение, но к другому корню $x \approx -1.84141$

```
x0 = -1.84140
x = x0
for i in range(10):
    x = phi(x)

[xtrue] = fsolve(lambda x: x - phi(x), x0, xtol=1e-20)
print('x =', x, ', x* =', xtrue)
print('x - x* =', x - xtrue)
```

```
x = 1.02413690972 , x* = -1.84140566044
x - x* = 2.86554257015
```

Дело в том, что $\varphi(x) = \log(x+2)$ не задает сжимающее отображение на $[-1.9, -1]$, это видно хотя бы из того, что

$$|\varphi'(x)| = \left|\frac{1}{x+2}\right| \geqslant 1$$

Предложите другой способ записать решение уравнения $x = \ln(x+2)$ в виде неподвижной точки некоторого итерационного процесса $x_{k+1} = \tilde{\varphi}(x_k)$

$$x = \tilde{\varphi}(x)$$

Рассмотрим $\tilde{\varphi}(x) = e^x - 2$. Это отображение переводит отрезок $[-1.9, -1]$ в себя:

$$-1.9 < -1.85 \lesssim e^{-1.9} - 2 < e^x - 2 < \frac{1}{e} - 2 < -1,$$

а его производная

$$\tilde{\varphi}'(x) = e^x, \qquad q = \max_{x \in [-1.9, -1]} |e^x| = \frac{1}{e} \approx 0.3679$$

```python
def phi2(x):
    return np.exp(x) - 2

x0 = -1.45
x = x0
for i in range(10):
    x = phi2(x)

[xtrue] = fsolve(lambda x: x - phi2(x), x0, xtol=1e-20)
print('x =', x, ', x* =', xtrue)
print('x - x* =', x - xtrue)
```

```
x = -1.84140565539 , x* = -1.84140566044
x - x* = 5.04783015387e-09
```

# Метод Ньютона

Рассмотрим уравнение $f(x) = 0$. Пусть нам известно приближение к решению $x_k \approx x^*$.
*Линеаризуем* функцию $f(x)$ в окрестности $x = x_k$:

$$f(x) \approx f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k).$$

Вместо $f(x_{k+1}) = 0$ решим линеаризованное уравнение $f(x_k) + f'(x_k)(x_{k+1} - x_k) = 0$:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$

Запишем метод Ньютона в виде метода простой итерации

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}, \qquad \varphi'(x) = 1 - \frac{f'(x)}{f'(x)} + \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} = \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}$$

Видно, что в окрестности корня $f(x) = 0$ производная $\varphi'(x)$ по модулю будет меньше единицы.

На самом деле, верна следующая теорема: если точка $x_k$ *достаточно близка* к $x^*$, то

$$|x_{k+1} - x^*| \leqslant C|x_k - x^*|^2 \leqslant C\left(C|x_{k-1} - x^*|^2\right)^2 = C^3|x_{k-1} - x^*|^4 \leqslant \cdots \leqslant C^{2^{k+1}-1}|x_0 - x^*|^{2^{k+1}}.$$

Говорят, что метод Ньютона сходится *квадратично*.

Грубо говоря, $k$ итераций метода Ньютона так же эффективны, как $2^k$ итераций метода с постоянным $q$.

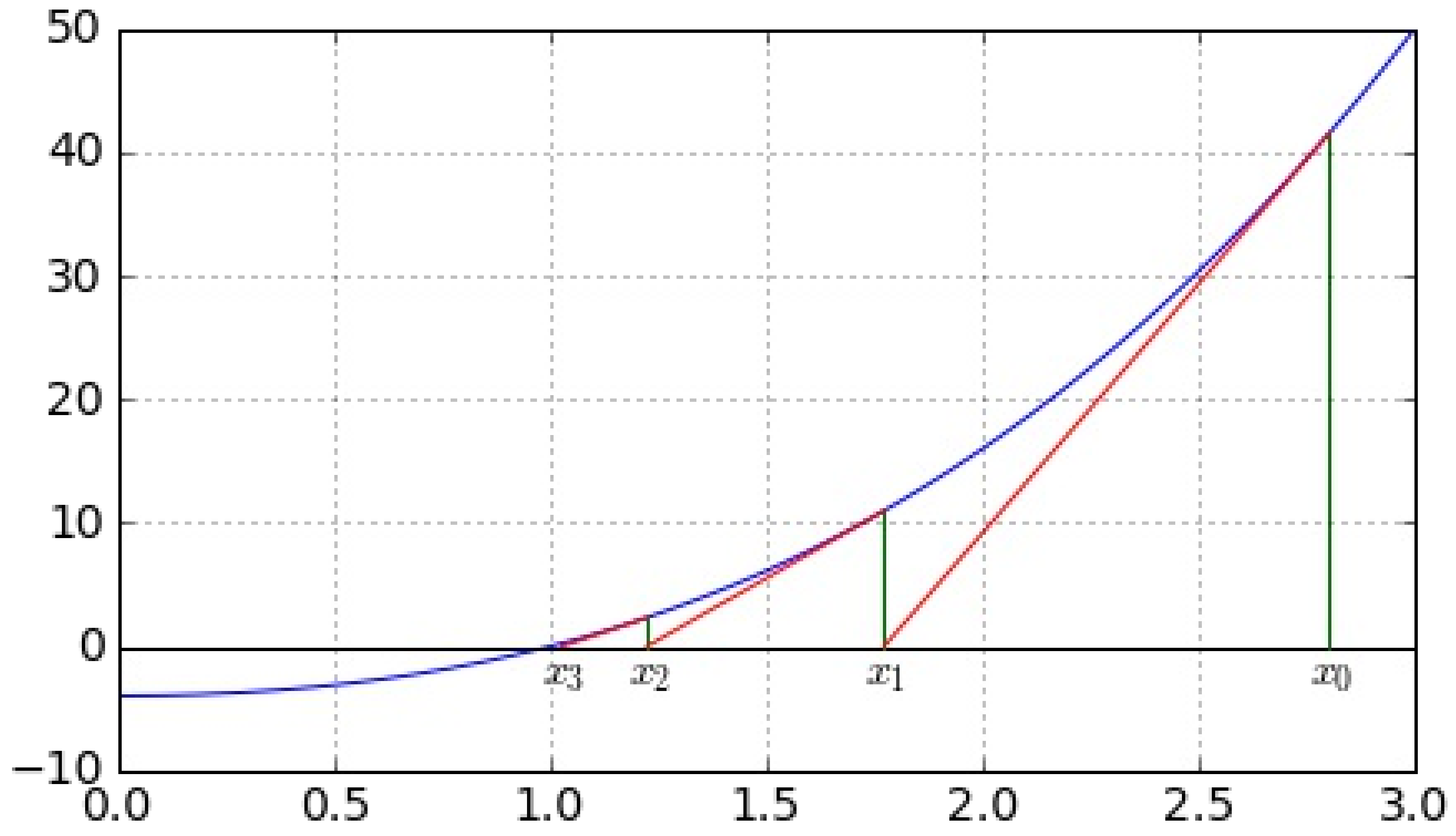
```python
def f(x):
    return np.tan(x / 4) - 1
def fprime(x):
    return 0.25 / np.cos(x / 4)**2

x = 1.
for i in range(1, 7):
    x = x - f(x) / fprime(x)
    print('x_%d - x^* = %e' % (i, x - np.pi))
```

```
x_1 - x^* = 6.547214e-01
x_2 - x^* = 1.178428e-01
x_3 - x^* = 3.538901e-03
x_4 - x^* = 3.132800e-06
x_5 - x^* = 2.453593e-12
x_6 - x^* = 0.000000e+00
```

Метод Ньютона нуждается в хорошем начальном приближении. Если начальное приближение задано неудачно, метод разойдется (причем тоже квадратично — ошибка будет на каждой итерации возводиться в квадрат). Метод также допускает наглядную интерпретацию:

Show code



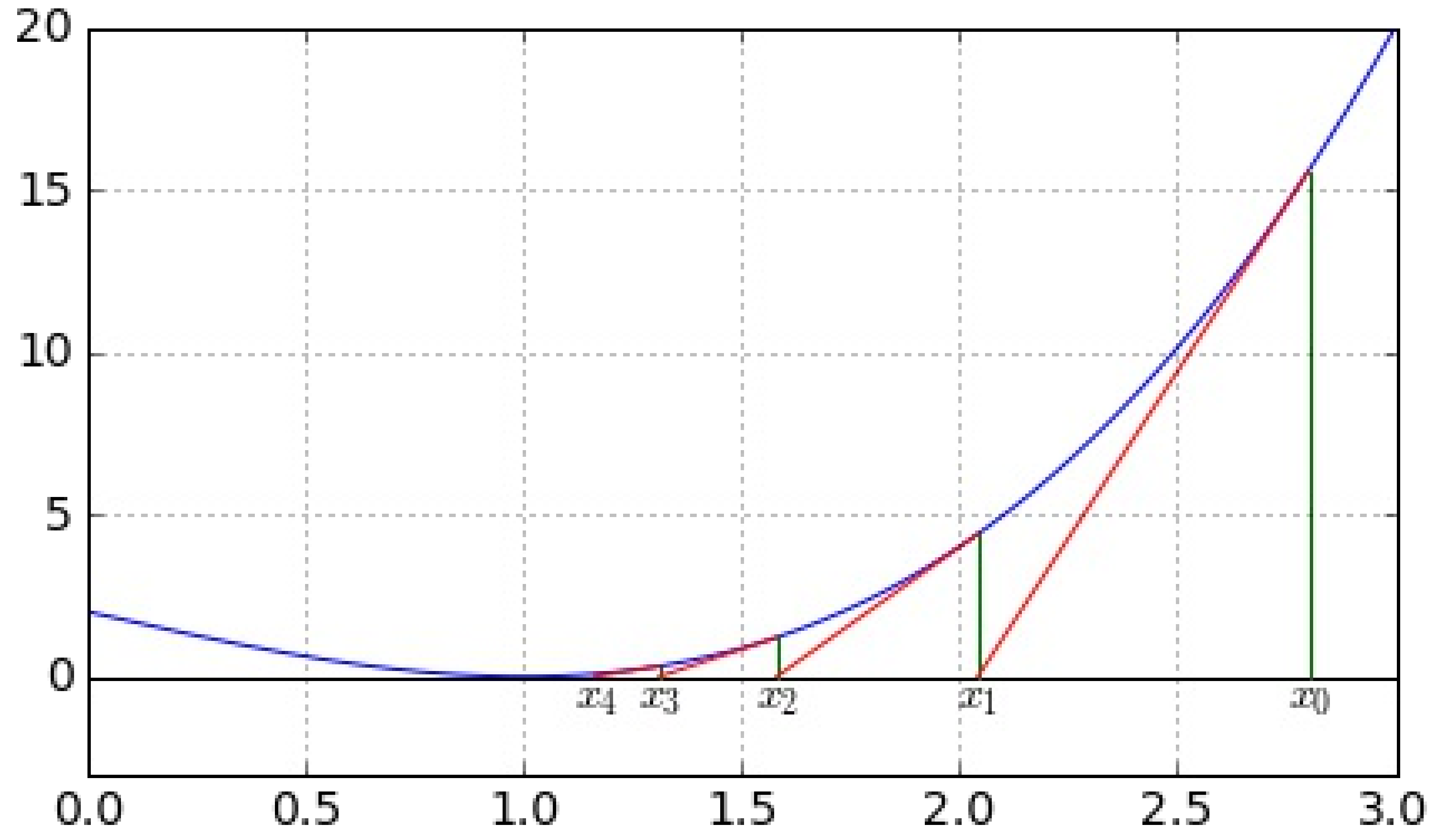
Если корень функции кратный, метод Ньютона метод Ньютона сходится медленее (линейно, а не квадратично)

```python
def f(x):
    return (x-1)**2 * (x+2)
def fprime(x):
    return 3 * (x**2 - 1)

x = 3.
for i in range(1, 10):
    x = x - f(x) / fprime(x)
    print('x_%d - x^* = %e' % (i, x - 1))
```

```
x_1 - x^* = 1.166667e+00
x_2 - x^* = 6.549708e-01
x_3 - x^* = 3.544152e-01
x_4 - x^* = 1.860994e-01
x_5 - x^* = 9.569009e-02
x_6 - x^* = 4.857325e-02
x_7 - x^* = 2.447858e-02
x_8 - x^* = 1.228862e-02
x_9 - x^* = 6.156817e-03
```

Show code



## Системы уравнений

Будем рассматривать системы алгебраических уравнений

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0},$$

в которых число неизвестных равно числу уравнений.

## Сжиамющие отображения

Аналогично одномерному случаю, отображение $\boldsymbol{\varphi}$ называется сжимающим в области $G$, если

- Отображает область в себя: $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) \in G,\ \forall \mathbf{x} \in G$
- Уменьшает расстояния: существует такое $q < 1$, что
$$\|\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{y}) - \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})\| \leqslant q\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|,\ \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in G.$$

В этом случае $\mathbf{x}_{n+1} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_n)$ сходится к неподвижной точке при любом $\mathbf{x}_0 \in G$

## Достаточное условие сжимаемости

Для того, чтобы $\boldsymbol{\varphi}$ задавала сжимающее отображение в $G$ достаточно, чтобы $\boldsymbol{\varphi}$

- Отображала область в себя: $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) \in G, \ \forall \mathbf{x} \in G$
- Имела норму матрицы Якоби меньше единицы:
$$q = \max_{\mathbf{x} \in G} \left\| \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) \right\| < 1$$
Как и для линейных систем, для сходимости достаточно найти хотя бы одну такую норму.

## Пример

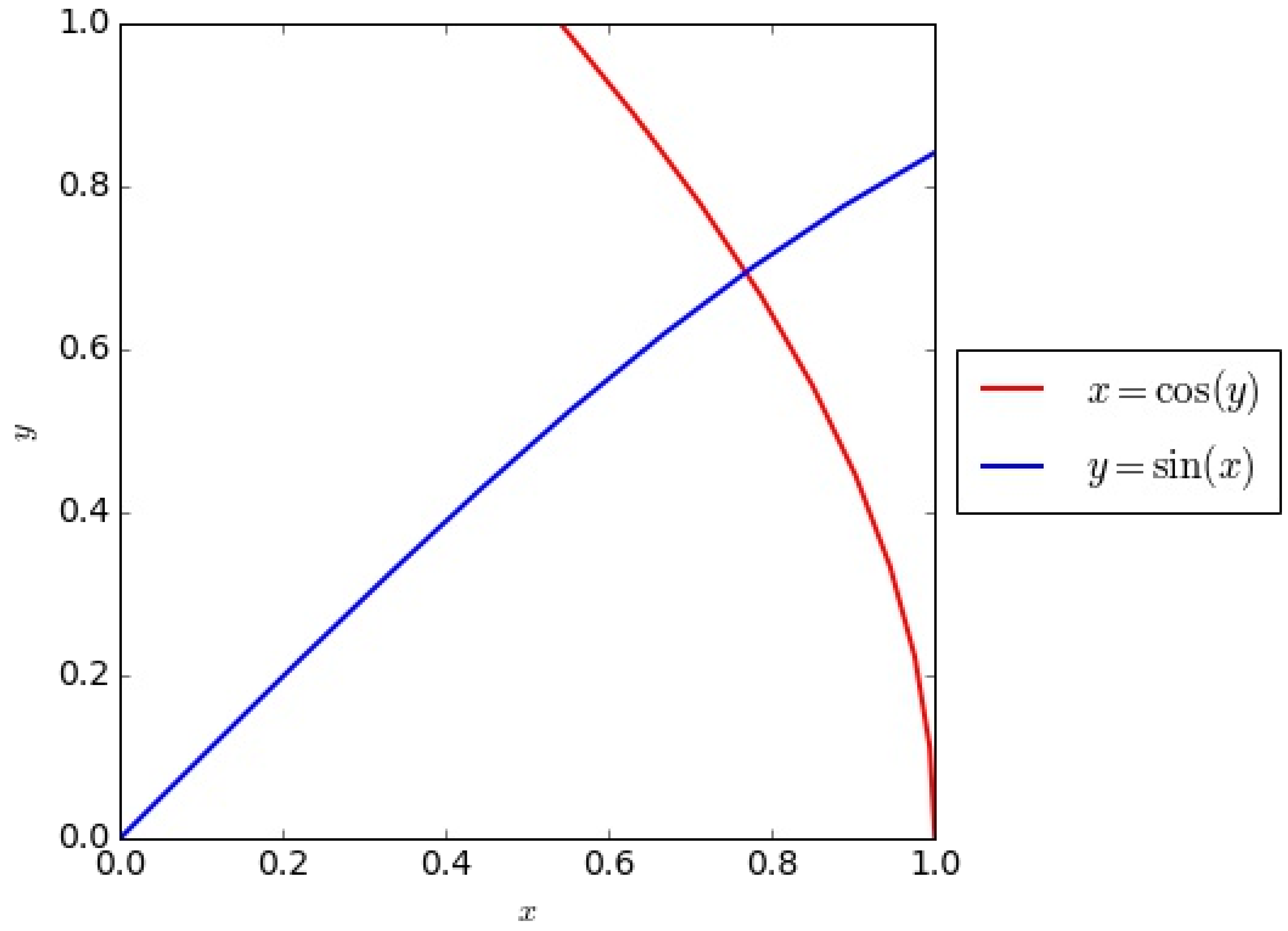
Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} x - \cos y = 0 \\ \sin x - y = 0 \end{cases}$$

Необходимо найти корень в области $0 < x < 1,\ 0 < y < 1.$

Для наглядности изобразим каждое уравнение в виде графика.

Show code



Решение исходной системы является неподвижной точкой для следующего итерационного процесса

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos y_k \\ \sin x_k \end{pmatrix},$$

задаваемого вектор-функцией

$$\boldsymbol{\varphi} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos y \\ \sin x \end{pmatrix}$$

Изучим его сходимость

Нетрудно видеть, что точка из $G = \{0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1\}$ отображается снова в $G$:

$$1 \geqslant \varphi_1(x, y) = \cos y \geqslant \cos 1 > 0$$

$$0 \leqslant \varphi_2(x, y) = \sin x \leqslant \sin 1 < 1$$

Значит $\boldsymbol{\varphi}(G) \subseteq G$

Проверим матрицу Якоби:

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 & -\sin y \\ \cos x & 0 \end{pmatrix}$$

Ее $\infty$ и $\ell_1$ нормы совпадают и равны соответственно

$$\|\mathbf{B}(\mathbf{x})\|_\infty = \max(|\cos x|, |\sin y|).$$

Однако, величина $q = \max_{\mathbf{x} \in G} \|\mathbf{B}(\mathbf{x})\|_\infty = 1 \not< 1$. Гарантировать сжимаемость мы не можем

Выясним, из-за чего $q$ получилось равным $1$. Дело в линии $x = 0$, на ней $\cos x = 1$. Необходимо исключить эту линию из области $G$ вместе с некоторой окрестностью. Пусть

$$G' = \{a \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1\}, \quad a > 0$$

При этом в $G'$

$$q' = \max_{\mathbf{x} \in G'} \|\mathbf{B}(\mathbf{x})\|_\infty = \max(\cos a, \sin 1) < 1.$$

Осталось только выбрать такое $a$, чтобы не нарушить свойство $\boldsymbol{\varphi}(G') \subseteq G'$.

В уменьшенной области
$$G' = \{a \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1\}, \quad a > 0$$
условие $\varphi(G') \subseteq G'$ соответствует
$$1 \geqslant \varphi_1(x, y) = \cos y \geqslant a$$
$$0 < \sin a \leqslant \varphi_2(x, y) = \sin x \leqslant \sin 1 < 1.$$
Условие $\cos y \geqslant a$ может нарушаться, если выбрать слишком большое $a$. Возьмем $a = \cos 1$ — предельно возможное значение $\cos y$.

Итак, в области

$$G' = \{\cos 1 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1\} \approx \{0.5403 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1\}$$

функция $\boldsymbol{\varphi}(x, y) = (\cos y, \sin x)$ задает сжимающее отображение с

$$q = \max(\cos\cos 1, \sin 1) \approx 0.8576$$

```python
def phi(x, y):
    return np.cos(y), np.sin(x)

x, y = 0.8, 0.8
for i in range(1, 91):
    x, y = phi(x, y)
    if i % 10 == 0: print('it =', i, 'x =', x, 'y =', y)
```

```
it = 10 x = 0.767511630584 y = 0.692510335887
it = 20 x = 0.768182766819 y = 0.694867420509
it = 30 x = 0.768168875029 y = 0.694818702769
it = 40 x = 0.768169162568 y = 0.69481971118
it = 50 x = 0.768169156616 y = 0.694819690308
it = 60 x = 0.768169156739 y = 0.69481969074
it = 70 x = 0.768169156737 y = 0.694819690731
it = 80 x = 0.768169156737 y = 0.694819690731
it = 90 x = 0.768169156737 y = 0.694819690731
```

## Метод Ньютона для систем

Пусть имеется приближение $\mathbf{x}_k$ к решеннию системы $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. Точно так же, как в случае скалярного уравнения, заменим уравнение приближенным линейным

$$0 = \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k) + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_k)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k) + O\big((\mathbf{x} - \mathbf{x}_k)^2\big) \approx \mathbf{f}(\mathbf{x}_k) + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_k)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k)$$

Решение системы линейных уравнений принимаем в качестве нового приближения

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_k)(\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k) = -\mathbf{f}(\mathbf{x}_k) \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_k)\right]^{-1} \mathbf{f}(\mathbf{x}_k)$$

```python
def f(xy):
    x, y = xy
    return np.array([x - np.cos(y), y - np.sin(x)])
def jacf(xy):
    x, y = xy
    return np.array([[1, np.sin(y)], [-np.cos(x), 1]])

xy = np.array([0.5, 0.5])
for _ in range(5):
    dxy = np.linalg.solve(jacf(xy), f(xy))
    xy -= dxy
    print('x = %.14f y = %.14f' % tuple(xy), 'dx = % 6.2e dy = % 6.2e' % tuple(dxy))
```

```
x = 0.77270838674620 y = 0.71874966329392 dx = -2.73e-01 dy = -2.19e-01
x = 0.76831340773161 y = 0.69493015833692 dx =  4.39e-03 dy =  2.38e-02
x = 0.76816915677603 y = 0.69481969798874 dx =  1.44e-04 dy =  1.10e-04
x = 0.76816915673680 y = 0.69481969073079 dx =  3.92e-11 dy =  7.26e-09
x = 0.76816915673680 y = 0.69481969073079 dx = -4.87e-17 dy =  7.60e-17
```