

Дополнительные задачи для самостоятельного решения

Цыбулин Иван

18 февраля 2015 г.

Данные задачи предлагаются как альтернатива соответствующим лабораторным работам. Для реализации можно использовать любой язык программирования.

1 Задача Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений

Решить одну из предложенных задач Коши

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{G}(t, \mathbf{y}), \quad \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0$$

имеющих периодические решения с периодом T :

а)

$$\begin{cases} \varphi'(t) = \omega(t) \\ \omega'(t) = -\sin \varphi(t) \\ \varphi(0) = \frac{\pi}{2}, \quad \omega(0) = 0 \end{cases} \quad 0 \leq t \leq T,$$

где $T = 4K\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$$K(\alpha) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-t^2 \sin^2 \alpha)}}, \quad K\left(\frac{\pi}{4}\right) \approx 1.854074677301372$$

б)

$$\begin{cases} \rho'(t) = v(t) \\ v'(t) = \rho(t)\omega^2(t) + \frac{1}{\rho^2(t)} \\ \varphi'(t) = \omega(t) \\ \omega'(t) = -\frac{2\omega(t)v(t)}{\rho(t)} \\ \varphi(0) = 0, \quad \omega(0) = 1/\sqrt{3}, \quad \rho(0) = 1, \quad v(0) = 0 \end{cases} \quad 0 \leq t \leq T,$$

где $T = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \left(\frac{6}{5}\right)^{3/2} \approx 2.920160646701$

в)

$$\begin{cases} u'(t) = v(t) \\ v'(t) = -u^3(t) \\ u(0) = 1, \quad v(0) = 0 \end{cases} \quad 0 \leq t \leq T,$$

$$\text{где } T = \sqrt{32\pi} \frac{\Gamma(5/4)}{\Gamma(3/4)} \approx 7.41629870920549$$

В качестве численного метода используйте один из методов Рунге-Кутты выше первого порядка, например:

- Метод Хойна третьего порядка

0	0	0	0
1/3	1/3	0	0
2/3	0	2/3	0
	1/4	0	3/4

- Метод Рунге третьего порядка

0	0	0	0	0
1/2	1/2	0	0	0
1	0	1	0	0
1	0	0	1	0
	1/6	2/3	0	1/6

- «Классический» метод Рунге-Кутты четвертого порядка

0	0	0	0	0
1/2	1/2	0	0	0
1/2	0	1/2	0	0
1	0	0	1	0
	1/6	1/3	1/3	1/6

Проверьте, что метод имеет указанный порядок. Для этого исследуйте зависимость отклонения за период численного решения $\varepsilon = \|\mathbf{y}(T) - \mathbf{y}(0)\|$ от величины шага.

2 Жесткая задача Коши для ОДУ

Найти численное решение одной из следующих жестких задач

- а) «Брюсселятор»

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= A + x^2(t)y(t) - (B+1)x(t), \\ \frac{dy(t)}{dt} &= Bx(t) - x^2(t)y(t), \\ x(0) &= 2, y(0) = 3, A = 1, B = 3, \quad 0 \leq t \leq 20 \end{aligned}$$

б)

$$y'(t) = 50(\cos t - y^3(t)), \quad 0 \leq t \leq 20$$

$$y(0) = 0$$

В качестве численного метода используйте один из следующих неявных методов:

- Неявный метод Эйлера первого порядка

$$\begin{cases} \frac{\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n}{\tau} = \mathbf{G}(t_{n+1}, \mathbf{u}_{n+1}) \\ \mathbf{u}_0 = \mathbf{y}(0) \end{cases}$$

- Диагонально-неявный метод Рунге-Кутты с таблицей Бутчера

$$\begin{array}{c|cc} 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \hline & \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}$$

- ФДН¹-метод второго порядка

$$\begin{cases} \frac{3\mathbf{u}_{n+1} - 4\mathbf{u}_n + \mathbf{u}_{n-1}}{2\tau} = \mathbf{G}(t_{n+1}, \mathbf{u}_{n+1}) \\ \mathbf{u}_0 = \mathbf{y}(0) \\ \mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_0 + \tau \mathbf{G}(\tau, \mathbf{u}_1) \end{cases}$$

Для решения нелинейных уравнений используйте метод Ньютона.

Определить максимальный шаг по времени, при котором *явный* метод Эйлера для данной задачи Коши устойчив. Убедиться, что используемый метод устойчив при гораздо больших шагах по времени.

3 Нелинейная краевая задача

Форму волн на поверхности воды в некотором приближении можно описать уравнением

$$\phi''(x) + 3\phi^2(x) - \phi(x) = 0$$

Найдите методом линеаризации решение, удовлетворяющее условиям

$$\phi(0) = 0.027923117357796894 \quad \phi(5) = 0.498518924361681638$$

Проверить, что решение дополнительно удовлетворяет условиям

$$\phi'(0) = \phi'(5) = 0.$$

Последнее означает, что решение можно периодически продолжить на всю числовую ось.

¹Формула дифференцирования назад

4 Спектральная задача для оператора Штурма-Лиувилля

Найти волновую функцию $\psi(x)$ и уровень энергии E основного состояния в одной из следующих задач для уравнения Шрёдингера:

- Квантовый гармонический осциллятор

$$-\frac{1}{2}\psi''(x) + \frac{x^2}{2}\psi(x) = E\psi(x)$$

Волновая функция основного состояния удовлетворяет условию $\psi'(0) = 0$, а также условию асимптотики на бесконечности

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \psi'(x) + \sqrt{x^2 - 2E}\psi(x) = 0,$$

которое для простоты можно перенести в конечную точку $x = L \equiv 5$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\psi''(x) + \frac{x^2}{2}\psi(x) &= E\psi(x) \\ \psi'(0) = 0 \quad \psi(L) + \sqrt{L^2 - 2E}\psi(L) &= 0 \end{aligned}$$

Найти нетривиальное решение с минимальным $E > 0$.

- Треугольная потенциальная яма

$$U(x) = \begin{cases} +\infty, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$$

Уравнение Шрёдингера принимает вид

$$-\frac{1}{2}\psi''(x) + x\psi(x) = E\psi(x)$$

Поскольку при $x < 0$ волновая функция равна нулю, $\psi(0) = 0$. Также должно выполняться условие асимптотики на бесконечности

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \psi'(x) + \sqrt{2x - 2E}\psi(x) = 0,$$

которое для простоты можно перенести в конечную точку $x = L \equiv 5$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\psi''(x) + x\psi(x) &= E\psi(x) \\ \psi(0) = 0 \quad \psi(L) + \sqrt{2L - 2E}\psi(L) &= 0 \end{aligned}$$

Найти нетривиальное решение с минимальным $E > 0$.

5 Уравнение переноса

Решить уравнение переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq 0.5$$

$$u|_{t=0} = \begin{cases} 0, & x > 0.2 \\ 1, & x \leq 0.2 \end{cases}$$

$$u|_{x=0} = 1,$$

используя следующую разностную схему:

$$u_0^{n+1} = u_1^{n+1} = 1,$$

$$u_m^{n+1} = (1 - \sigma)u_m^n + \sigma u_{m-1}^n + \frac{\sigma(\sigma - 1)}{2} (f(u_{m-1}^n, u_m^n, u_{m+1}^n) - f(u_{m-2}^n, u_{m-1}^n, u_m^n)),$$

$$\frac{u_M^{n+1} - u_M^n}{\tau} + \frac{u_M^n - u_{M-1}^n}{h} = 0.$$

Пусть $M = 100, h = \frac{1}{M}, \tau = \frac{h}{2}, \sigma = \frac{\tau}{h} = \frac{1}{2}$.

Использовать одну из следующих функций $f(x, y, z)$:

- Схема Лакса-Вендроффа

$$f(x, y, z) = z - y$$

- Схема Бима-Уорминга

$$f(x, y, z) = y - x$$

- Схема Фромма

$$f(x, y, z) = \frac{z - x}{2}$$

- TVD схема с ограничителем minmod

$$f(x, y, z) = \text{minmod}(z - y, y - x)$$

- TVD схема с ограничителем superbee

$$f(x, y, z) = \text{maxmod} \left[\text{minmod} (2(z - y), y - x), \text{minmod} (z - y, 2(y - x)) \right]$$

- TVD схема с ограничителем ван Альбада

$$f(x, y, z) = \frac{(z - x) \max(0, (z - y)(y - x))}{(z - y)^2 + (y - x)^2 + 10^{-14}}$$

- TVD схема с ограничителем ван Лира

$$f(x, y, z) = \frac{|z - y|(y - x) + |y - x|(z - y)}{|z - y| + |y - x| + 10^{-14}}$$

Здесь

$$\begin{aligned} \min\text{mod}(a, b) &= \begin{cases} 0, & ab \leq 0 \\ \min(a, b), & a > 0, b > 0 \\ \max(a, b), & a < 0, b < 0 \end{cases} \\ \max\text{mod}(a, b) &= \begin{cases} 0, & ab \leq 0 \\ \max(a, b), & a > 0, b > 0 \\ \min(a, b), & a < 0, b < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Провести сравнение решения с решением по схеме с $f(x, y, z) \equiv 0$ (левый уголок).

6 Параболическое уравнение

Решить нестационарное уравнение Шрёдингера

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{i}{200} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq 1.3, \quad i = \sqrt{-1}$$

с начальным условием

$$\Psi|_{t=0} = \exp \left\{ 100ix - \frac{(x - 0.3)^2}{0.01} \right\}$$

и граничными условиями

$$\Psi|_{x=0} = \Psi|_{x=1} = 0.$$

Использовать одну из следующих схем:

- Схема Кранка-Никольсон

$$\frac{\Psi_m^{n+1} - \Psi_m^n}{\tau} = \frac{i}{400} \left[\frac{\Psi_{m-1}^{n+1} - 2\Psi_m^{n+1} + \Psi_{m+1}^{n+1}}{h^2} + \frac{\Psi_{m-1}^n - 2\Psi_m^n + \Psi_{m+1}^n}{h^2} \right]$$

$$\Psi_0^{n+1} = \Psi_M^{n+1} = 0$$

- Неявная схема

$$\frac{\Psi_m^{n+1} - \Psi_m^n}{\tau} = \frac{i}{200} \frac{\Psi_{m-1}^{n+1} - 2\Psi_m^{n+1} + \Psi_{m+1}^{n+1}}{h^2}$$

$$\Psi_0^{n+1} = \Psi_M^{n+1} = 0$$

Принять $M = 1000, h = \frac{1}{M}, \tau = h$