

Линейные многошаговые методы

Условия порядка. Устойчивость

Цыбулин Иван

К2. Для решения жесткой задачи Коши из n обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{G}(y, \mathbf{y}(t)), \quad \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}^0, \quad t \in [0, T]$$

предлагается использовать следующий линейный многошаговый метод

$$a_2 \mathbf{u}_{n+1} + a_1 \mathbf{u}_n + a_0 \mathbf{u}_{n-1} = \tau \left(b_2 \mathbf{G}(t_{n+1}, \mathbf{u}_{n+1}) + b_1 \mathbf{G}(t_n, \mathbf{u}_n) + b_0 \mathbf{G}(t_{n-1}, \mathbf{u}_{n-1}) \right),$$

$$\mathbf{u}_0 = \mathbf{y}^0, \quad \mathbf{u}_1 = \mathbf{y}^1,$$

$$a_2 = \frac{5}{6}, \quad a_1 = -\frac{2}{3}, \quad a_0 = -\frac{1}{6}, \quad b_2 = \frac{1}{3}, \quad b_1 = \frac{2}{3}, \quad b_0 = 0$$

а) Указать порядок аппроксимации для разностного уравнения.

б) Исследовать метод на A -устойчивость.

в) Исследовать метод на L -устойчивость.

а) Условия порядка для линейного многошагового метода:

- Необходимое условие: $a_2 + a_1 + a_0 = 0$. Если его нарушить, метод не будет аппроксимировать никакую задачу.
- Условие первого порядка и выше: $a_2 - a_0 = b_2 + b_1 + b_0$
- Условие второго порядка и выше: $\frac{1}{2}(a_2 + a_0) = b_2 - b_0$
- Условие третьего порядка и выше: $\frac{1}{6}(a_2 - a_0) = \frac{1}{2}(b_2 + b_0)$
- Условие четвертого порядка и выше: $\frac{1}{24}(a_2 + a_0) = \frac{1}{6}(b_2 - b_0)$

Условие четвертого порядка противоречит условию второго, и для двухшагового метода выполняться не может. Иными словами, двухшаговый метод может иметь порядок не выше третьего.

В нашем случае выполнены необходимое условие $\frac{5}{6} - \frac{2}{3} - \frac{1}{6} = 0$, условия первого порядка $\frac{5}{6} - (-\frac{1}{6}) = 1 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + 0$, условие второго порядка $\frac{1}{2}(\frac{5}{6} - \frac{1}{6}) = \frac{1}{3} = \frac{1}{3} - 0$ и условие третьего порядка $\frac{1}{6}(\frac{5}{6} + \frac{1}{6}) = \frac{1}{6} = \frac{1}{2}(\frac{1}{3} + 0)$. Следовательно, метод имеет третий порядок аппроксимации.

б) Общее решение модельного уравнения $y' = \lambda y$ имеет вид

$$u_n = C_1 q_1(z)^n + C_2 q_2(z)^n.$$

Для жесткой устойчивости требуется, чтобы оба элементарных решения q_1^n и q_2^n не возрастали по модулю. Областью устойчивости будет множество

$$\{|q_1(z)| \leq 1\} \cap \{|q_2(z)| \leq 1\}.$$

Подставляя $u_n = q^n$ в разностное уравнение для u_n , получаем характеристическое уравнение для q :

$$(a_2 - zb_2)q^2 + (a_1 - zb_1)q + (a_0 - zb_0) = 0,$$

откуда для конкретных значений $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2$,

$$q_{1,2} = \frac{2(1+z) \pm \sqrt{4(1+z)^2 + (5-2z)}}{5-2z} = \frac{2+2z \pm \sqrt{9+6z+4z^2}}{5-2z}.$$

Исследовать область устойчивости исходя из выражений для $q_{1,2}$ очень сложно. Исследуем вместо этого параметрическое задание границы области устойчивости. Границей области устойчивости будет множество точек z , в которых одна из функций $q_{1,2}(z)$ по модулю равна 1.

Если $|q(z)| = 1$, то $q(z)$ можно представить в виде $e^{i\phi}$, $\phi \in [0, 2\pi]$. Таким образом, всю границу области устойчивости можно задать в виде

$$z : q(z) = e^{i\phi}, \phi \in [0, 2\pi].$$

Выразим z как функцию q на границе:

$$z = \frac{a_2q^2 + a_1q + a_0}{b_2q^2 + b_1q + b_0} = \frac{a_2q + a_1 + a_0q^{-1}}{b_2q + b_1 + b_0q^{-1}}.$$

Граница области устойчивости, таким образом, задается в виде

$$z = \frac{a_2e^{i\phi} + a_1 + a_0e^{-i\phi}}{b_2e^{i\phi} + b_1 + b_0e^{-i\phi}}, \quad \phi \in [0, 2\pi].$$

Для A -устойчивости требуется, чтобы вся эта граница находилась в правой полуплоскости $\operatorname{Re} z \geq 0$, а область устойчивости находилась вне этой кривой. Для проверки можно найти зависимость действительной части $z(\phi)$, это позволит сказать, находится ли кривая в правой полуплоскости:

$$\operatorname{Re} z = \operatorname{Re} \frac{a_2e^{i\phi} + a_1 + a_0e^{-i\phi}}{b_2e^{i\phi} + b_1 + b_0e^{-i\phi}} = \frac{\operatorname{Re}(a_2e^{i\phi} + a_1 + a_0e^{-i\phi})(b_2e^{-i\phi} + b_1 + b_0e^{i\phi})}{Q},$$

где Q — несущественное положительное число (квадрат модуля знаменателя). Рассмотрим отдельно числитель

$$\begin{aligned} Q \operatorname{Re} z = & (a_2b_2 + a_1b_1 + a_0b_0) + \\ & + (a_2b_1 + a_1b_0 + a_0b_1 + a_1b_2) \cos \phi + \\ & + (a_2b_0 + a_0b_2) \cos 2\phi, \end{aligned}$$

который после подстановки $\cos 2\phi = 2 \cos^2 \phi - 1$ превращается в

$$\begin{aligned} Q \operatorname{Re} z = & (a_2b_2 + a_1b_1 + a_0b_0 - a_2b_0 - a_0b_2) + \\ & + (a_2b_1 + a_1b_0 + a_0b_1 + a_1b_2) \cos \phi + \\ & + 2(a_2b_0 + a_0b_2) \cos^2 \phi. \end{aligned}$$

Если эта величина неотрицательна при любом ϕ , то метод будет A -устойчивым.

Для нашей задачи

$$Q \operatorname{Re} z = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{3} - \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} - \left(-\frac{1}{6}\right) \cdot \frac{1}{3} + \left(\frac{5}{6} \cdot \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3}\right) \cos \phi + \\ + 2 \left(-\frac{1}{6}\right) \frac{1}{3} \cos^2 \phi = -\frac{1}{9} + \frac{2}{9} \cos \phi - \frac{1}{9} \cos^2 \phi = -\frac{(1 - \cos \phi)^2}{9} \leq 0,$$

а значит, граница области устойчивости заходит на левую полуплоскость, что нарушает предположение об A -устойчивости.

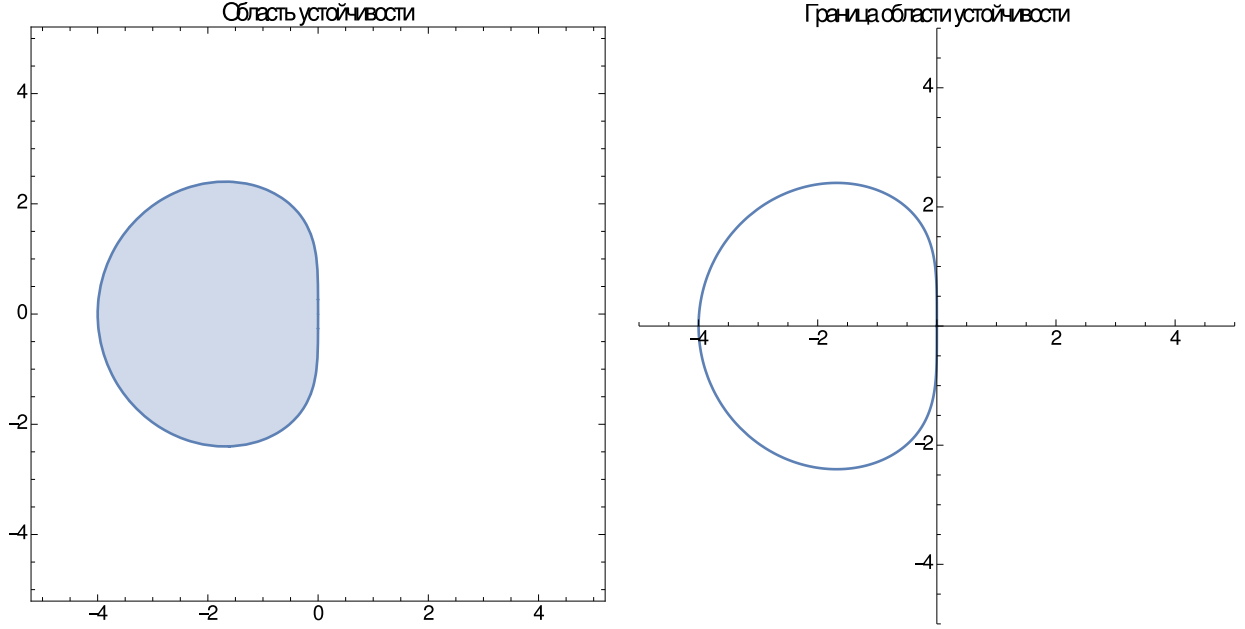


Рис. 1: Область $|q_{1,2}(z)| < 1$ и ее граница $z(\phi)$

Рассмотрим другой пример, на этот раз A -устойчивого метода ФДН2 (задача **T7**)

$$3\mathbf{u}_{n+1} - 4\mathbf{u}_n + \mathbf{u}_{n-1} = 2\tau \mathbf{G}(t_{n+1}, \mathbf{u}_{n+1})$$

Он характеризуется набором коэффициентов

$$a_2 = 3, \quad a_1 = -4, \quad a_0 = 1, \quad b_2 = 2, \quad b_1 = b_0 = 0$$

Для него определяющая величина

$$Q \operatorname{Re} z = 6 - 2 - 8 \cos \phi + 4 \cos^2 \phi = 4(\cos \phi - 1)^2 \geq 0$$

Чтобы показать A -устойчивость остается лишь проверить, что областью устойчивости является внешность, а не внутренность кривой. Для этих целей обычно удобно проверять $z = -\infty$ или $z = 0 - \epsilon$. Для ФДН-метода

$$q_{1,2}(z) = \frac{2 \pm \sqrt{1 + 2z}}{3 - 2z}.$$

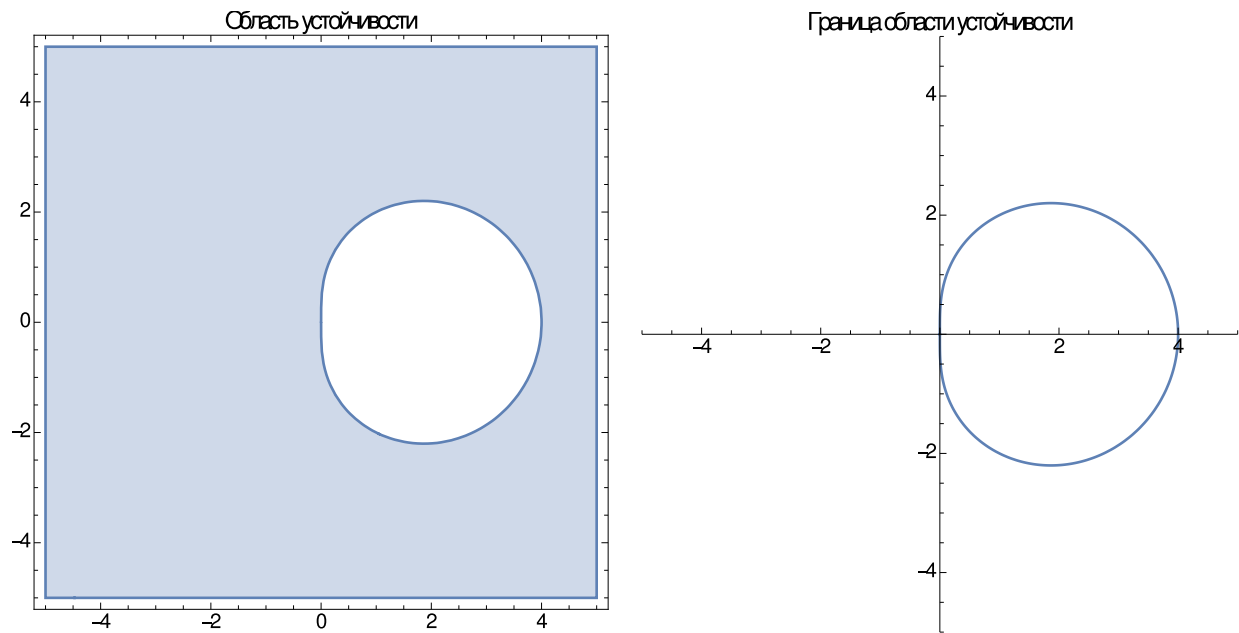


Рис. 2: Область $|q_{1,2}(z)| < 1$ и ее граница $z(\phi)$ для ФДН-метода

Обе функции устойчивости при $z \rightarrow -\infty$ меньше единицы по модулю (так как стремятся к нулю), что завершает доказательство A -устойчивости.

в) Поскольку L -устойчивым может быть только A -устойчивый метод, наш метод не L -устойчив.

Но ФДН метод, рассмотренный в предыдущем пункте является L -устойчивым, поскольку обе его функции устойчивости $q_{1,2}(z)$ стремятся по модулю при $z \rightarrow -\infty$ к нулю.