Дополнительные задачи по курсу вычислительной математики. 5 семестр

Цыбулин Иван

29 августа 2017 г.

1. Первое задание

1.1. Погрешности и численное дифференцирование

1. Используя ваш любимый язык программирования, напишите функцию, вычисляющую функцию Бесселя первого рода $J_0(x)$, суммируя часть ее ряда Тейлора в окрестности точки $x_0 = 0$:

$$J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}.$$

Далее, используя эту функцию и формулу численного дифференцирования, найдите производную функции Бесселя $J_0(x)$ в точке $x = 1$ с заданной точностью $\varepsilon = 10^{-6}$.

Если в программе используются константы, такие как число членов ряда Тейлора или значение шага дифференцирования, должно быть указано, как они получены.

Примечание. Для дифференцирования использовать оптимальный шаг h^*. Принять, что погрешность, с которой вычисляются значения $J_0(x)$ равна ошибке метода вычисления функции с помощью отрезка ее ряда Тейлора, и может быть принята равной первому отброшенному слагаемому в ряде Тейлора. Использовать минимальное число членов ряда Тейлора для решения этой задачи. Для оценки максимумов всех производных функции Бесселя использовать $M_n \leqslant 1$.

1.2. Системы линейных алгебраических уравнений

2. Решить следующую трехдиагональную систему уравнений методом прогонки

$$\begin{cases} u_0 & = 0 \\ -u_{n-1} + \left(2 + h^2\right) u_n - u_{n+1} & = 2h^2 \sin(nh), \qquad n = \overline{1, N-1}, \\ u_N & = 0 \end{cases}$$

где $N = 20, h = \frac{\pi}{N}$. Сравнить u_n и $\sin(nh)$: найти $\varepsilon = \max\limits_{0 \leqslant n \leqslant N} |u_n - \sin(nh)|$.

3. Для решения интегрального уравнения Фредгольма второго рода

$$u(x) - \lambda \int\limits_{-\pi}^{\pi} K(x-y) u(y) = f(x)$$

с ядром $K(s) = |s|$ и правой частью $f(x) = (1+2\lambda)\cos^2\frac{x}{2} - \lambda\frac{x^2+\pi^2}{2}$ используется квадратурная формула средней точки. При этом интегральное уравнение сводится к следующей системе линейных уравнений

$$\sum_{m=1}^{N}[\delta_{nm} - \lambda K_{nm}]u_m = f_n, \quad n = 1,\ldots,N$$

где $K_{nm} = h^2|n-m|$ — симметричная матрица ядра размера $N\times N$, $h = \frac{2\pi}{N}$, δ_{nm} — единичная матрица, а $f_n = f(x_n),\ x_n = -\pi + (n-1/2)h$. Точное решение интегрального уравнения $U(x) = \cos^2\frac{x}{2}$, численно должно совпадать с ним с точностью до небольшой ошибки метода порядка $O(h^2)$. Взять $\lambda = 0.01, N = 100$.

Решить полученную систему одним из следующих методов и сравнить решение с точным $U_m = U(x_m)$:

- с помощью LU-разложения;
- * с помощью LUP-разложения;
- * с помощью LL^{T}-разложения (Холецкого);
- * с помощью QR-разложения методом вращений Гивенса;
- * с помощью QR-разложения методом отражений Хаусхолдера.

Возмутить правую часть системы случайным вектором δf_n и получить возмущение решения δu_m. Оценить число обусловленности матрицы системы $\mathbf{A}$

$$\mu_E(\mathbf{A}) \gtrsim \frac{||\delta\mathbf{u}||_E/||\mathbf{u}||_E}{||\delta\mathbf{f}||_E/||\mathbf{f}||_E}$$

Оценить число обусловленности при

$$\lambda \lesssim \lambda_{\text{крит}} \approx 0.072912184794954 40151.$$

Число $\lambda_{\text{крит}}$ является (единственным положительным) собственным значением интегрального уравнения.

4. Решить линейную систему уравнений из предыдущей задачи одним из итерационных методов:

- методом Зейделя;
- методом простой итерации с параметром $\tau = \frac{2}{\|\mathbf{A}\|_\infty}$ (для симметричной положительно определенной матрицы $\lambda(\mathbf{A}) < \|\mathbf{A}\|_\infty$);
- SOR методом, подобрать вручную параметр релаксации $1 < \omega < 2$, при котором сходимость будет самой быстрой.

Итерационный процесс следует завершить, если $||\mathbf{u}^{(k)} - \mathbf{u}^{(k-1)}|| < \varepsilon = 10^{-6}$. В качестве начального приближения $\mathbf{u}^{(0)}$ возьмите $\mathbf{u}^{(0)} = \mathbf{0}$. Сколько итераций потребовалось для сходимости?

1.3. Переопределенные СЛАУ и МНК

5. Построить для функции $f(x) = \sin x$ на отрезке $[-1, 1]$ приближение многочленом степени $n = 8$ в смысле наименьших квадратов по одной из норм

- Многочлен наилучшего равномерного приближения

$$\|f - g\|_C^2 = \int\limits_{-1}^{1} \frac{(f(x) - g(x))^2}{\sqrt{1 - x^2}} dx.$$

Указание. Разложить многочлен по многочленам Чебышева

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k T_k(x), \qquad T_k = \cos k \arccos x.$$

и воспользоваться ортогональностью многочленов Чебышева в этой норме.

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{T_n(x) T_m(x)}{\sqrt{1 - x^2}} dx = \begin{cases} \pi, & n = m = 0 \\ \pi/2, & n = m \neq 0 \\ 0, & n \neq m, \end{cases}$$

- Многочлен наилучшего приближения в норме L_2:

$$\|f - g\|_2^2 = \int\limits_{-1}^{1} (f(x) - g(x))^2 dx.$$

Указание. Разложить многочлен по многочленам Лежандра

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k L_k(x),$$

$$L_{k+1}(x) = \frac{2k+1}{k+1} x L_k(x) - \frac{k}{k+1} L_{k-1}(x),\ L_0(x) = 1,\ L_1(x) = x.$$

и воспользоваться ортогональностью многочленов Чебышева в этой норме.

$$\int\limits_{-1}^{1} P_n(x) P_m(x) dx = \begin{cases} \frac{2}{2k+1}, & n = m \\ 0, & n \neq m, \end{cases}$$

Найти максимальную ошибку такого приближения на всем отрезке $[-1, 1]$.

1.4. Нелинейные алгебраические уравнения

6. Решить одно из следующих уравнений

- Уравнение состояния реального газа Ван-дер-Ваальса

$$\left(p + 3\frac{p_{\text{кр}} V_{\text{кр}}^2}{V^2}\right) \left(V - \frac{V_{\text{кр}}}{3}\right) = RT,$$

относительно V при $p = 10^5$ Па, $T = 300$ К, $V_{\text{кр}} = 0.1095$ м^3/кмоль, $p_{\text{кр}} = 3.77 \cdot 10^6$ Па, $R = 8314$ Дж/(кмоль К).

- Уравнение Кеплера
$$M = E - e\sin E$$
относительно E для $e = 0.1$ и $M = \frac{5\pi}{6}$.

- Уравнение для зон для частицы в периодическом потенциале
$$\cos x + \frac{a}{x}\sin x = 1$$
относительно x (найти корень с минимальным положительным x) при $a = 0.2$.

- Любое нетривиальное нелинейное уравнение на выбор, например из [*Аристова Е.Н., Завьялова Н.А., Лобанов А.И.* Практические занятия по вычислительной математике в МФТИ. Часть I, стр. 110–112.]

одним из перечисленных методов

- метод деления отрезка пополам;
- метод секущих;
- метод Ньютона.

Для каждого метода должно быть задано начальное приближение с объяснением, как это начальное приближение было выбрано. Получить ответы с точностью не ниже $|\Delta x| \lesssim \varepsilon = 10^{-14}$. Сколько итераций потребовалось для сходимости?

2. Второе задание

В этом задании разрешается использовать библиотечные функции для решения систем линейных уравнений.

2.1. Системы нелинейных алгебраических уравнений

7. Решить одну из следующих систем алгебраических уравнений методом Ньютона:

- Определение положения (x, y, z) и времени t по четырем спутникам
$$\begin{cases} (x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2 = (t-t_1)^2 \\ (x-x_2)^2 + (y-y_2)^2 + (z-z_2)^2 = (t-t_2)^2 \\ (x-x_3)^2 + (y-y_3)^2 + (z-z_3)^2 = (t-t_3)^2 \\ (x-x_4)^2 + (y-y_4)^2 + (z-z_4)^2 = (t-t_4)^2 \end{cases}$$
Координаты спутников
$$\mathbf{r}_1 = (1,1,1),\ \mathbf{r}_2 = (-1,-1,1),\ \mathbf{r}_3 = (-1,1,-1),\ \mathbf{r}_4 = (1,-1,-1),$$
а времена
$$t_1 = 2.00, \quad t_2 = 2.25, \quad t_3 = 1.70, \quad t_4 = 1.5.$$
Найти то решение, для которого $t < t_{1,2,3,4}$.

- Поиск орбит в одномерном отображении $\varphi(x) = rx(1-x)$.

$$\begin{cases} x_1 = \varphi(x_n) \\ x_2 = \varphi(x_1) \\ \quad\vdots \\ x_n = \varphi(x_{n-1}) \end{cases}$$

  Неизвестными являются $x_1, \ldots, x_n$. Найти одно из положительных решений. Предлагается взять параметры $r = 3.5, n = 4$ или $r = 3.56, n = 8$

Самостоятельно задать начальное приближение. В качестве условия остановки метода Ньютона использовать

$$\|\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n\|_E \leqslant \varepsilon = 10^{-14}.$$

2.2. Интерполяция и сплайны

8. Построить для функции $f(x) = \sin x$ на отрезке $[0, 2\pi]$ кубический сплайн $P(x)$, имеющий две непрерывные производные. Численно изучить зависимость максимального отклонения $f(x)$ и $P(x)$ в зависимости от количества узлов N. Найти порядок метода (степень зависимости максимального отклонения от $h = \frac{2\pi}{N-1}$). В качестве концевых условий использовать точные условия

$$f'(0) = f'(2\pi) = 1$$

либо

$$f''(0) = f''(2\pi) = 0.$$

9. Построить для функции $f(x) = \sin x$ на отрезке $[0, 2\pi]$ кубический сплайн $P(x)$, который в узлах интерполяции x_k совпадает со значениями $f(x_k)$, производная которого непрерывна, и в узлах совпадает со значениями $f'(x_k) = \cos x_k$ (такой сплайн называется сплайном Эрмита). Численно изучить зависимость максимального отклонения $f(x)$ и $P(x)$ в зависимости от количества узлов N. Найти порядок метода (степень зависимости максимального отклонения от $h = \frac{2\pi}{N-1}$).

2.3. Численное интегрирование

10. Написать программу, которая используя правило Рунге и формулу Гаусса численного интегрирования четвертого порядка (ошибка на всем отрезке имеет порядок $O(h^4)$)

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)dx \approx \frac{x_2 - x_1}{2}\left[f\left(\frac{x_1 + x_2}{2} - \frac{x_2 - x_1}{2\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{x_2 - x_1}{2\sqrt{3}}\right)\right]$$

вычисляет интеграл

$$\int\limits_0^{\pi/2} \ln\frac{1}{\sin x}dx$$

с точностью $\varepsilon = 10^{-10}$. Сравнить полученное значение с точным значением интеграла $\frac{\pi}{2}\ln 2$

Указание. Убедиться, что $\Delta_h = |I_h - I_{h/2}| \sim O(h^4)$. Если это не так, регуляризуйте подынтегральную функцию.

11. Вычислить один из следующих интегралов

- Полный эллиптический интеграл первого рода

$$K(m) = \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-mx^2)}}$$

- Полный эллиптический интеграл второго рода

$$E(m) = \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1-mx^2}}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

с помощью квадратурной формулы Гаусса-Чебышева для интегралов вида

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx.$$

Изучить как точность приближения зависит от выбранного числа узлов квадратуры. Параметр m взять произвольным из интервала $0 < m < 1$.

Примечание. Значение для проверки можно посмотреть, например, на WolframAlpha.

2.4. Задача Коши для ОДУ

12. Для решения задачи Коши

$$\begin{cases} \dfrac{dy(t)}{dt} = -2ty(t) + 2t, \qquad t \in [0,1] \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

использовать один из предложенных методов:

- метод Адамса:

$$\begin{cases} \dfrac{u_{n+1} - u_n}{\tau} = \dfrac{3f(t_n, u_n) - f(t_{n-1}, u_{n-1})}{2}, \quad n = 1, \ldots, N-1 \\ u_0 = y_0 \\ u_1 = y_0 + \tau f(0, y_0) \end{cases}$$

- метод Эйлера с пересчетом

$$\begin{cases} \dfrac{\tilde{u}_{n+1/2} - u_n}{\tau/2} = f(t_n, u_n), & n = 0, \ldots, N-1 \\ \dfrac{u_{n+1} - u_n}{\tau} = f\left(t_n + \dfrac{\tau}{2}, \tilde{u}_{n+1/2}\right), & n = 0, \ldots, N-1 \\ u_0 = y_0. \end{cases}$$

В этом методе величины $\tilde{u}_{n+1/2}$ вспомогательные, и не являются частью сеточной функции u.

Написать программу, реализующую выбранный метод, и численно убедиться, что решение разностной задачи u сходится к решению дифференциальной задачи $y(t) = 1 + e^{-t^2}$ со вторым порядком.