Compilando Conocimiento

Análisis Númerico

Matemáticas

Oscar Andrés Rosas Hernandez

Noviembre 2018

Índice general

I Raíces de Funciones **2**

1. Tolerancias **3**

1.1. Ideas 3

2. Bisección **4**

2.1. Algoritmo 4

3. Punto Fijo **5**

3.1. Ideas 5

3.1.1. Propiedades 5

4. Newton **6**

4.1. Definición 7

4.1.1. Porque funciona 7

4.1.2. De donde salio esta fórmula 8

4.1.3. Usar Newton para calcular la $\sqrt[n]{A}$ 9

II Interpolantes **10**

5. Interpolante de Lagrange **11**

5.1. Definición 12

Parte I

Raíces de Funciones

Capítulo 1

Tolerancias

1.1. Ideas

Lo que estamos haciendo es aproximar una raíz, no encontrarla, así que habrá que decidir cuando nuestra estimación $\boldsymbol{\xi}$ se parece suficiente a la raíz.

Tendremos 3 opciones:

- $\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{\xi}_k\right) < \epsilon$: Estamos muy cerca de que la función valga cero
- $\dfrac{\|\boldsymbol{\xi}_k\| - \|\boldsymbol{\xi}_{k-1}\|}{\|\boldsymbol{\xi}_k\|} < \epsilon$: Las estimaciones son muy parecidas y no podemos mejorar.
- El número de iteraciones k es mayor del que el número de iteraciones máximas.

Capítulo 2

Bisección

2.1. Algoritmo

Suponte que tienes una linda función $\boldsymbol{f}(x) = 0$ y tienes dos números $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ tal que $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$ sea de un signo diferente al $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{b})$ entonces estamos seguros de que existe una raíz $\boldsymbol{\xi}$ por ahí en medio.

Entonces, puedes tomar el punto intermedio de ambos $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + \dfrac{\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}}{2}$. Ahora pueden pasar 3 cosas:

- Si $\boldsymbol{c}$ es la raíz entonces ya estas
- Si $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}]$ tienen signos diferentes entonces la raíz anda por ahí
- Si $[\boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}]$ tienen signos diferentes entonces la raíz anda por ahí

En general, basta con suponer que el signo de $\boldsymbol{a}$ es igual que el signo de $\boldsymbol{c}$, de ser así, entonces $\boldsymbol{c}$ cumple el trabajo de $\boldsymbol{a}$ entonces el intervalo es $[\boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}]$. De no ser así entonces tiene que hacer el trabajo de $\boldsymbol{b}$ y entonces el intervalo es $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}]$.

Capítulo 3

Punto Fijo

3.1. Ideas

Sea una función $\boldsymbol{g}(x)$ entonces decimos que $\boldsymbol{\xi}$ es un punto fijo de $\boldsymbol{g}(x)$ si es que $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{\xi}$.
Suponte que podemos escribir a $\boldsymbol{f}(x) = 0$ como $\boldsymbol{f}(x) = \boldsymbol{g}(x) - x = 0$.
Entonces cualquier punto fijo $(\boldsymbol{\xi})$ de $\boldsymbol{g}(x)$ será una raíz de $\boldsymbol{f}(x)$.

La idea es entonces bastante intuitiva, toma un elemento inicial x_n entonces será una mejor aproximación a la raíz esto:

$$x_{n+1} = \boldsymbol{g}(x_n)$$

3.1.1. Propiedades

- Sea $\boldsymbol{f}(x) = 0$ escrita de forma $\boldsymbol{f}(x) = \boldsymbol{g}(x) - x = 0$, es decir $\boldsymbol{g}(x) = x$.
  Entonces si $\forall x \in [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ se cumple que:
  - $\boldsymbol{g}(x) \in [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$
  - $\boldsymbol{g}(x)$ toma todos los valores entre $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$
  - $g'(x)$ existe en $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ y existe una constante $0 < r < 1$ tal que $\|g'(x)\| \leq r$

  Va a pasar que:
  - Existe un único punto fijo $x = \boldsymbol{\xi}$ de $\boldsymbol{g}(x)$ entre $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$
  - La sequencia $x_{k+1} = g(x_k)$ converge siempre a $\boldsymbol{\xi}$

Capítulo 4

Newton

4.1. Definición

Resulta ser que el método de Newton se basa en el de punto fijo, es solo que podemos elegir una $g(x)$ muy especial, $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$.

Suponte que $f''(x)$ existe, es continua sobre $[a, b]$ y ξ una raíz simple de $f(x)$ (es decir $f(\xi) = 0$ y $f''(\xi) \neq 0$). Entonces usar el método de punto fijo funcionará para hallar la raíz.

4.1.1. Porque funciona

Elegimos a:

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} g'(x) &= 1 - \frac{f'(x)^2 - f(x)f''(x)}{f'(x)^2} \\ &= \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2} \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} g'(\xi) &= \frac{f(\xi)f''(\xi)}{f'(\xi)^2} \\ &= \frac{0f''(\xi)}{f'(\xi)^2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donde tenemos que $f(\xi) = 0$ y $f'(\xi) \neq 0$. Entonces como $g'(x)$ es continua, entonces eso nos dice que existe una pequeña región cerca de la raíz en que $\|g'(x)\| < 1$.

Entonces si tomamos un punto inicial x_0 suficientemente cerca de la raíz, entonces las iteraciones de punto fijo estan garantizada a converger.

4.1.2. De donde salio esta fórmula

Busquemos un punto x_0 y supongamos que por ahí esta la raíz, entonces podemos sacar la ecuación de la recta tangente a ese punto como:

$$\begin{aligned} y - y_0 &= f'(x_0)(x - x_0) \\ f(x) - f(x_0) &= f'(x_0)(x - x_0) \\ f(x) &= f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \end{aligned}$$

Ahora busquemos el punto en el que $y = 0$, entonces:

$$\begin{aligned} f(x) &= f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \\ 0 &= f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \\ -f(x_0) &= f'(x_0)(x - x_0) \\ -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} &= (x - x_0) \\ (x - x_0) &= -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \\ x &= x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \end{aligned}$$

Con esto llegamos la iteración de Newton:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

4.1.3. Usar Newton para calcular la $\sqrt[n]{A}$

Si quieres calcular $\sqrt[n]{A}$ entonces puedes solucionar la ecuación $\boldsymbol{f}(x) = x^n - A = 0$.

En ese caso $\boldsymbol{f'}(x) = nx^{n-1}$ y nuestra iteración es:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^n - A}{nx_k^{n-1}} = \frac{(n-1)x_k^n + A}{nx_k^{n-1}}$$

Parte II

Interpolantes

Capítulo 5

Interpolante de Lagrange

5.1. Definición