Compilando Conocimiento

Análisis Númerico

Matemáticas

Oscar Andrés Rosas Hernandez

Noviembre 2018

Índice general

Parte I

Raíces de Funciones

Capítulo 1

Tolerancias

1.1. Ideas

Lo que estamos haciendo es aproximar una raíz, no encontrarla, así que habrá que decidir cuando nuestra estimación ξ se parece suficiente a la raíz.

Tendremos 3 opciones:

- $f(\xi_k) < \epsilon$: Estamos muy cerca de que la función valga cero
- $\frac{\|\xi_k\| - \|\xi_{k-1}\|}{\|\xi_k\|} < \epsilon$: Las estimaciones son muy parecidas y no podemos mejorar.
- El número de iteraciones k es mayor del que el número de iteraciones máximas.

Capítulo 2

Bisección

2.1. Algoritmo

Suponte que tienes una linda función $f(x) = 0$ y tienes dos números a, b tal que $f(a)$ sea de un signo diferente al $f(b)$ entonces estamos seguros de que existe una raíz ξ por ahí en medio.

Entonces, puedes tomar el punto intermedio de ambos $c = a + \frac{b-a}{2}$. Ahora pueden pasar 3 cosas:

- Si c es la raíz entonces ya estas
- Si $[a, c]$ tienen signos diferentes entonces la raíz anda por ahí
- Si $[c, b]$ tienen signos diferentes entonces la raíz anda por ahí

En general, basta con suponer que el signo de a es igual que el signo de c, de ser así, entonces c cumple el trabajo de a entonces el intervalo es $[c, b]$. De no ser así entonces tiene que hacer el trabajo de b y entonces el intervalo es $[a, c]$.

Capítulo 3

Punto Fijo

3.1. Ideas

Sea una función $\boldsymbol{g}(x)$ entonces decimos que ξ es un punto fijo de $\boldsymbol{g}(x)$ si es que $\boldsymbol{g}(\xi) = \xi$.
Suponte que podemos escribir a $\boldsymbol{f}(x) = 0$ como $\boldsymbol{f}(x) = \boldsymbol{g}(x) - x = 0$.
Entonces cualquier punto fijo (ξ) de $\boldsymbol{g}(x)$ será una raíz de $\boldsymbol{f}(x)$.

La idea es entonces bastante intuitiva, toma un elemento inicial x_n entonces será una mejor aproximación a la raíz esto:

$$x_{k+1} = \boldsymbol{g}(x_k)$$

Mira como poco a poco nos vamos acercando al punto fijo de $\boldsymbol{g}(x)$ que es lo mismo que la raíz de $\boldsymbol{f}(x)$.

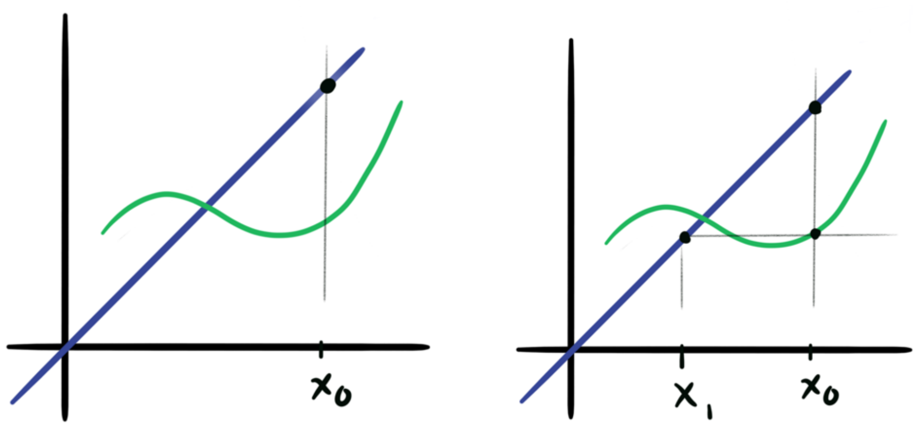

Figura 3.1: Paso de punto fijo

3.1.1. ¿Cómo eligo a $g(x)$?

Es muy sencillo, bueno, teorícamente. Sabes que $\boldsymbol{f}(x) = \boldsymbol{g}(x) - x = 0$, por lo tanto basta despejar y ver que: $\boldsymbol{g}(x) = x$.

Es decir, toma a $\boldsymbol{f}(x) = 0$ y empieza a manipularla la expresión hasta que llegues de un lado la identidad y del otro lado lo que tendrás será a $g(x)$.

Es decir tienes que llegar a $x = blob$ ó $x = g(x)$.

3.1.2. Propiedades

- Sea $\boldsymbol{f}(x) = 0$ escrita de forma $\boldsymbol{f}(x) = \boldsymbol{g}(x) - x = 0$, es decir $\boldsymbol{g}(x) = x$.

  Entonces si $\forall x \in [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ se cumple que:

  - $\boldsymbol{g}(x) \in [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$
  - $\boldsymbol{g}(x)$ toma todos los valores entre $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$
  - $g'(x)$ existe en $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ y existe una constante $0 < r < 1$ tal que $\|g'(x)\| \leq r$

  Va a pasar que:

  - Existe un único punto fijo $x = \boldsymbol{\xi}$ de $\boldsymbol{g}(x)$ entre $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$
  - La sequencia $x_{k+1} = g(x_k)$ converge siempre a $\boldsymbol{\xi}$

Capítulo 4

Newton

4.1. Definición

Resulta ser que el método de Newton se basa en el de punto fijo, es solo que podemos elegir una $g(x)$ muy especial, $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$.

Suponte que $f''(x)$ existe, es continua sobre $[a, b]$ y ξ una raíz simple de $f(x)$ (es decir $f(\xi) = 0$ y $f''(\xi) \neq 0$). Entonces usar el método de punto fijo funcionará para hallar la raíz.

4.1.1. De donde salio esta fórmula

Busquemos un punto x_0 y supongamos que por ahí esta la raíz, entonces podemos sacar la ecuación de la recta tangente a ese punto como:

$$\begin{aligned}
y - y_0 &= f'(x_0)(x - x_0) \\
f(x) - f(x_0) &= f'(x_0)(x - x_0) \\
f(x) &= f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)
\end{aligned}$$

Ahora busquemos el punto en el que $y = 0$, entonces:

$$\begin{aligned}
f(x) &= f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \\
0 &= f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \\
-f(x_0) &= f'(x_0)(x - x_0) \\
-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} &= (x - x_0) \\
(x - x_0) &= -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \\
x &= x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}
\end{aligned}$$

Con esto llegamos la iteración de Newton:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

4.1.2. Porque funciona

Elegimos a:

$$\boldsymbol{g}(x) = x - \frac{\boldsymbol{f}(x)}{\boldsymbol{f'}(x)}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} g'(x) &= 1 - \frac{\boldsymbol{f'}(x)^2 - \boldsymbol{f}(x)\boldsymbol{f''}(x)}{\boldsymbol{f'}(x)^2} \\ &= \frac{\boldsymbol{f}(x)\boldsymbol{f''}(x)}{\boldsymbol{f'}(x)^2} \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} g'(\xi) &= \frac{\boldsymbol{f}(\xi)\boldsymbol{f''}(\xi)}{\boldsymbol{f'}(\xi)^2} \\ &= \frac{0\boldsymbol{f''}(\xi)}{\boldsymbol{f'}(\xi)^2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donde tenemos que $\boldsymbol{f}(\xi) = 0$ y $\boldsymbol{f'}(\xi) \neq 0$. Entonces como $g'(x)$ es continua, entonces eso nos dice que existe una pequeña región cerca de la raíz en que $\|g'(x)\| < 1$.

Entonces si tomamos un punto inicial x_0 suficientemente cerca de la raíz, entonces las iteraciones de punto fijo estan garantizada a converger.

4.1.3. Geometría

La interpretación de este método es tomar una estimación x_k entonces lo que hacemos es tomar la recta tangente a ese punto y ver donde es que la recta toca al eje X, ese será nuestra x_{k+1} y ve viendo que poco a poco lo que vamos haciendo es aproximarnos a la raíz.

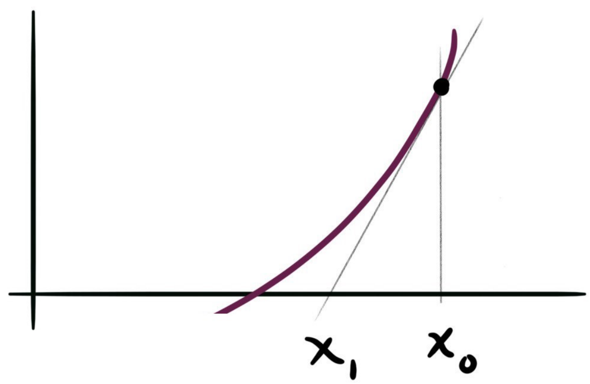

Figura 4.1: Paso de punto fijo

4.1.4. Usar Newton para calcular la $\sqrt[n]{A}$

Si quieres calcular $\sqrt[n]{A}$ entonces puedes solucionar la ecuación $f(x) = x^n - A = 0$.

En ese caso $f'(x) = nx^{n-1}$ y nuestra iteración es:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{(x_k)^n - A}{n(x_k)^{n-1}} = \frac{(n-1)(x_k)^n + A}{n(x_k)^{n-1}}$$

Capítulo 5

Secante

5.1. Definición

Resulta ser que evaluar derivadas no suele ser super fácil :v Por lo tanto podemos aproximar la derivada como:

$$f'(x_k) \approx \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$

Entonces basta con esto para llegar a la iteración del método de secante:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

Capítulo 6

Regla Falsa

6.1. Definición

Aqui tenemos como dos estilos, bisección es perfecto en sentido de que una vez elegidos puntos iniciales validos, la raíz ya esta "encerrada" y con cada iteración solo mejoramos.

Mientras que Newton y Secante con mucho mas rápidos pero si tomas puntos iniciales feos estos métodos divergen y nunca tendrás una respuesta, de hecho cada iteración será peor.

Así que este método es como un DLC en Secante con el objetivo de siempre estar seguro de que va a converger:

6.1.1. Iteración

1. Tienes dos puntos iniciales (x_0, x_1) que encapsulen la raíz, puntos válidos para el método de bisección.

2. Ahora crea x_2 usando la iteración de la secante

3. Ahora tienes 3 puntos, para elegir con cuales dos quedarte usa la idea de bisección. Así de sencillo.

4. Regresa al principio

Parte II

Aproximar Sistemas de Ecuaciones NO lineales

Capítulo 7

Ideas generales de ceros de funciones

7.1. Ideas

Esto es sencillo, lo que tienes que hacer si es que tienes un montón de ecuaciones raras a las que quieres encontrar solución basta con tomar tu sistema e igualarlo a cero.

Y ahora lo que estas viendo es nada más y nada menos que una función vectorial, que toma todos tus parametros y te regresa un vector columna de todas tus ecuaciones evaluadas en ese punto.

Así que resolverlas es tan sencillo como encontrar una raíz dentro de una función vectorial.

Capítulo 8

Newton Generalizado

8.1. Ideas

Recuerda que la iteración de Newton es:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{\boldsymbol{f}(x_k)}{\boldsymbol{f'}(x_k)} = x_k - \boldsymbol{f'}(x_k)^{-1} \boldsymbol{f}(x_k)$$

Por lo tanto la idea de Newtons generalizado es que si $\boldsymbol{F}(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$:

$$\overline{x_{k+1}} = \overline{x_k} - J_F\left(\overline{x_k}\right)^{-1} \boldsymbol{F}\left(\overline{x_k}\right)$$

Espera, espera, que demonios es J_F te preguntaras, pues, es el Jacobiano, es una matriz que representa "la derivada de la función $\boldsymbol{F}(x)$".

Pero, como te darás cuenta no solo hay que calcular el Jacobiano, sino que hay que evaluarlo y después invertir la matriz que nos da, y eso, pequeño ser humano no es fácil, así que podemos expresar la iteración de otra manera:

$$\overline{x_{k+1}} = \overline{x_k} + \overline{S}_k$$

Donde $\overline{S}_k$ como la solución al sistema:

$$J_F(\overline{x_k})\overline{S}_k = -\boldsymbol{F}\left(\overline{x_k}\right)$$

Parte III

Interpolantes

Capítulo 9

Interpolante de Lagrange

9.1. Definición

Parte IV

Optimización

Capítulo 10

Sección Áurea

10.1. Unimodal

Tomemos una función unimodal $\boldsymbol{f}(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dentro de un rango $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$.

Decir que es unimodal es decir que la función antes del mínimo siempre decrece y después del mínimo siempre crece.

O más formalmente tenemos que:

- $\forall x_1, x_2$ tal que $x_1 < x_2 < minimo$ entonces $\boldsymbol{f}(x_1) > \boldsymbol{f}(x_2)$
- $\forall x_1, x_2$ tal que $minimo < x_1 < x_2$ entonces $\boldsymbol{f}(x_1) < \boldsymbol{f}(x_2)$

10.2. Algoritmo

Toma un segmento en el que nuestra función $\boldsymbol{f}(x)$ es unimodal. Llamemoslo $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$.

Entonces definimos:

- $\tau = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2} = 0.618$
- $1 - \tau = 0.382$
- $x_1 = \boldsymbol{a} + (1 - \tau)(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})$
- $x_2 = \boldsymbol{a} + (\tau)(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})$

Con esta definición creo que es fácil probar que $\boldsymbol{a} < \boldsymbol{b}$

Ahora, pueden pasar dos cosas:

- $\boldsymbol{f}(x_1) < \boldsymbol{f}(x_2)$:

  Entonces estamos seguros de que el mínimo no puede estar en el segmento $[x_2, \boldsymbol{b}]$ porque como vimos es una función unimodal.

  Por esto mismo tomamos que:

  - $\boldsymbol{b} = x_2$
  - $x_2 = x_1$
  - $x_1 = \boldsymbol{a} + (1 - \tau)(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})$

- $\boldsymbol{f}(x_1) > \boldsymbol{f}(x_2)$:

  Entonces estamos seguros de que el mínimo no puede estar en el segmento $[\boldsymbol{a}, x_1]$ porque como vimos es una función unimodal.

  Por esto mismo tomamos que:

  - $\boldsymbol{a} = x_1$
  - $x_1 = x_2$
  - $x_2 = \boldsymbol{a} + (\tau)(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})$