

---

COMPILANDO CONOCIMIENTO

# Análisis Numérico

## MATEMÁTICAS

Oscar Andrés Rosas Hernandez

Noviembre 2018

# Índice general

<b>I</b>	<b>Raíces de Funciones</b>	<b>3</b>
<b>1.</b>	<b>Tolerancias</b>	<b>4</b>
1.1.	Ideas . . . . .	4
<b>2.</b>	<b>Bisección</b>	<b>5</b>
2.1.	Algoritmo . . . . .	5
<b>3.</b>	<b>Punto Fijo</b>	<b>6</b>
3.1.	Ideas . . . . .	7
3.1.1.	¿Cómo eligo a $g(x)$ ? . . . . .	8
3.1.2.	Propiedades . . . . .	8
<b>4.</b>	<b>Newton</b>	<b>9</b>
4.1.	Definición . . . . .	10
4.1.1.	De donde salio esta fórmula . . . . .	10
4.1.2.	Porque funciona . . . . .	11
4.1.3.	Geometría . . . . .	12
4.1.4.	Usar Newton para calcular la $\sqrt[n]{A}$ . . . . .	12
<b>5.</b>	<b>Secante</b>	<b>13</b>
5.1.	Definición . . . . .	13
<b>6.</b>	<b>Regla Falsa</b>	<b>14</b>
6.1.	Definición . . . . .	14
6.1.1.	Iteración . . . . .	14

<b>II</b>	<b>Aproximar Sistemas de Ecuaciones NO lineales</b>	<b>15</b>
<b>7.</b>	<b>Ideas generales de ceros de funciones</b>	<b>16</b>
7.1.	Ideas . . . . .	16
<b>8.</b>	<b>Newton Generalizado</b>	<b>17</b>
8.1.	Ideas . . . . .	18
<b>III</b>	<b>Interpolantes</b>	<b>19</b>
<b>9.</b>	<b>Interpolante de Lagrange</b>	<b>20</b>
9.1.	Definición . . . . .	21

# Parte I

## Raíces de Funciones

# Capítulo 1

## Tolerancias

### 1.1. Ideas

Lo que estamos haciendo es aproximar una raíz, no encontrarla, así que habrá que decidir cuando nuestra estimación  $\xi$  se parece suficiente a la raíz.

Tendremos 3 opciones:

- $f(\xi_k) < \epsilon$ : Estamos muy cerca de que la función valga cero
- $\frac{\|\xi_k\| - \|\xi_{k-1}\|}{\|\xi_k\|} < \epsilon$ : Las estimaciones son muy parecidas y no podemos mejorar.
- El número de iteraciones  $k$  es mayor del que el número de iteraciones máximas.

# Capítulo 2

## Bisección

### 2.1. Algoritmo

Suponte que tienes una linda función  $f(x) = 0$  y tienes dos números  $a, b$  tal que  $f(a)$  sea de un signo diferente al  $f(b)$  entonces estamos seguros de que existe una raíz  $\xi$  por ahí en medio.

Entonces, puedes tomar el punto intermedio de ambos  $c = a + \frac{b-a}{2}$ . Ahora pueden pasar 3 cosas:

- Si  $c$  es la raíz entonces ya estas
- Si  $[a, c]$  tienen signos diferentes entonces la raíz anda por ahí
- Si  $[c, b]$  tienen signos diferentes entonces la raíz anda por ahí

En general, basta con suponer que el signo de  $a$  es igual que el signo de  $c$ , de ser así, entonces  $c$  cumple el trabajo de  $a$  entonces el intervalo es  $[c, b]$ . De no ser así entonces tiene que hacer el trabajo de  $b$  y entonces el intervalo es  $[a, c]$ .

## Capítulo 3

### Punto Fijo

### 3.1. Ideas

Sea una función  $g(x)$  entonces decimos que  $\xi$  es un punto fijo de  $g(x)$  si es que  $g(\xi) = \xi$ .

Suponte que podemos escribir a  $f(x) = 0$  como  $f(x) = g(x) - x = 0$ .

Entonces cualquier punto fijo ( $\xi$ ) de  $g(x)$  será una raíz de  $f(x)$ .

La idea es entonces bastante intuitiva, toma un elemento inicial  $x_n$  entonces será una mejor aproximación a la raíz esto:

$$x_{k+1} = g(x_k)$$

Mira como poco a poco nos vamos acercando al punto fijo de  $g(x)$  que es lo mismo que la raíz de  $f(x)$ .

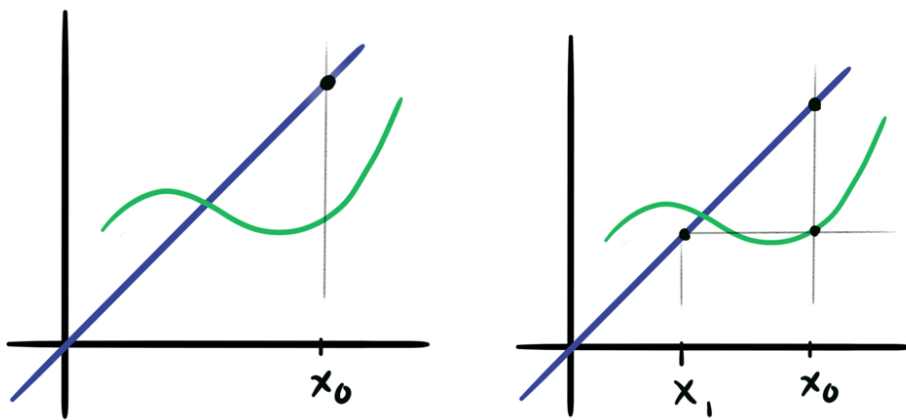


Figura 3.1: Paso de punto fijo



### 3.1.1. ¿Cómo eligo a $g(x)$ ?

Es muy sencillo, bueno, teóricamente. Sabes que  $f(x) = g(x) - x = 0$ , por lo tanto basta despejar y ver que:  $g(x) = x$ .

Es decir, toma a  $f(x) = 0$  y empieza a manipularla la expresión hasta que llegues de un lado la identidad y del otro lado lo que tendrás será a  $g(x)$ .

Es decir tienes que llegar a  $x = g(x)$  ó  $x = g(x)$ .

### 3.1.2. Propiedades

- Sea  $f(x) = 0$  escrita de forma  $f(x) = g(x) - x = 0$ , es decir  $g(x) = x$ .

Entonces si  $\forall x \in [a, b]$  se cumple que:

- $g(x) \in [a, b]$
- $g(x)$  toma todos los valores entre  $a$  y  $b$
- $g'(x)$  existe en  $(a, b)$  y existe una constante  $0 < r < 1$  tal que  $\|g'(x)\| \leq r$

Va a pasar que:

- Existe un único punto fijo  $x = \xi$  de  $g(x)$  entre  $[a, b]$
- La secuencia  $x_{k+1} = g(x_k)$  converge siempre a  $\xi$

# Capítulo 4

## Newton

## 4.1. Definición

Resulta ser que el método de Newton se basa en el de punto fijo, es solo que podemos elegir una  $g(x)$  muy especial,  $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ .

Suponte que  $f''(x)$  existe, es continua sobre  $[a, b]$  y  $\xi$  una raíz simple de  $f(x)$  (es decir  $f(\xi) = 0$  y  $f''(\xi) \neq 0$ ). Entonces usar el método de punto fijo funcionará para hallar la raíz.

### 4.1.1. De donde salio esta fórmula

Busquemos un punto  $x_0$  y supongamos que por ahí esta la raíz, entonces podemos sacar la ecuación de la recta tangente a ese punto como:

$$\begin{aligned} y - y_0 &= f'(x_0)(x - x_0) \\ f(x) - f(x_0) &= f'(x_0)(x - x_0) \\ f(x) &= f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \end{aligned}$$

Ahora busquemos el punto en el que  $y = 0$ , entonces:

$$\begin{aligned} f(x) &= f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \\ 0 &= f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \\ -f(x_0) &= f'(x_0)(x - x_0) \\ -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} &= (x - x_0) \\ (x - x_0) &= -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \\ x &= x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \end{aligned}$$

Con esto llegamos la iteración de Newton:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

### 4.1.2. Porque funciona

Elegimos a:

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} g'(x) &= 1 - \frac{f'(x)^2 - f(x)f''(x)}{f'(x)^2} \\ &= \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2} \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} g'(\xi) &= \frac{f(\xi)f''(\xi)}{f'(\xi)^2} \\ &= \frac{0f''(\xi)}{f'(\xi)^2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donde tenemos que  $f(\xi) = 0$  y  $f'(\xi) \neq 0$ . Entonces como  $g(x)$  es continua, entonces eso nos dice que existe una pequeña región cerca de la raíz en que  $\|g'(x)\| < 1$ .

Entonces si tomamos un punto inicial  $x_0$  suficientemente cerca de la raíz, entonces las iteraciones de punto fijo están garantizadas a converger.

### 4.1.3. Geometría

La interpretación de este método es tomar una estimación  $x_k$  entonces lo que hacemos es tomar la recta tangente a ese punto y ver donde es que la recta toca al eje  $X$ , ese será nuestra  $x_{k+1}$  y ve viendo que poco a poco lo que vamos haciendo es aproximarnos a la raíz.

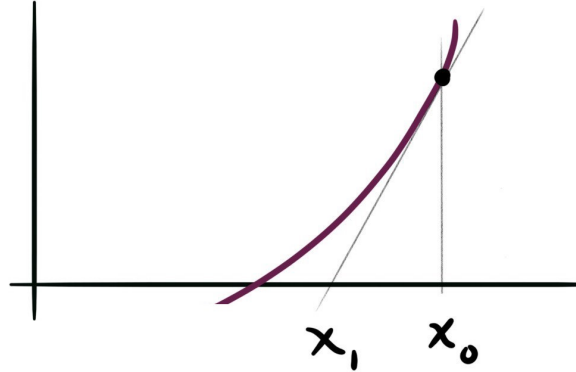


Figura 4.1: Paso de punto fijo

### 4.1.4. Usar Newton para calcular la $\sqrt[n]{A}$

Si quieres calcular  $\sqrt[n]{A}$  entonces puedes solucionar la ecuación  $f(x) = x^n - A = 0$ .

En ese caso  $f'(x) = nx^{n-1}$  y nuestra iteración es:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{(x_k)^n - A}{n(x_k)^{n-1}} = \frac{(n-1)(x_k)^n + A}{n(x_k)^{n-1}}$$

# Capítulo 5

## Secante

### 5.1. Definición

Resulta ser que evaluar derivadas no suele ser super fácil :v Por lo tanto podemos aproximar la derivada como:

$$f'(x_k) \approx \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$

Entonces basta con esto para llegar a la iteración del método de secante:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

# Capítulo 6

## Regla Falsa

### 6.1. Definición

Aquí tenemos como dos estilos, bisección es perfecto en sentido de que una vez elegidos puntos iniciales válidos, la raíz ya está “encerrada” y con cada iteración solo mejoramos.

Mientras que Newton y Secante son mucho más rápidos pero si tomas puntos iniciales malos estos métodos divergen y nunca tendrás una respuesta, de hecho cada iteración será peor.

Así que este método es como un DLC en Secante con el objetivo de siempre estar seguro de que va a converger:

#### 6.1.1. Iteración

1. Tienes dos puntos iniciales  $(x_0, x_1)$  que encapsulen la raíz, puntos válidos para el método de bisección.
2. Ahora crea  $x_2$  usando la iteración de la secante
3. Ahora tienes 3 puntos, para elegir con cuáles dos quedarte usa la idea de bisección. Así de sencillo.
4. Regresa al principio

## Parte II

### Aproximar Sistemas de Ecuaciones NO lineales



# Capítulo 7

## Ideas generales de ceros de funciones

### 7.1. Ideas

Esto es sencillo, lo que tienes que hacer si es que tienes un montón de ecuaciones raras a las que quieres encontrar solución basta con tomar tu sistema e igualarlo a cero.

Y ahora lo que estas viendo es nada más y nada menos que una función vectorial, que toma todos tus parametros y te regresa un vector columna de todas tus ecuaciones evaluadas en ese punto.

Así que resolverlas es tan sencillo como encontrar una raíz dentro de una función vectorial.

## Capítulo 8

### Newton Generalizado

## 8.1. Ideas

Recuerda que la iteración de Newton es:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - f'(x_k)^{-1} f(x_k)$$

Por lo tanto la idea de Newtons generalizado es que si  $F(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ :

$$\overline{x_{k+1}} = \overline{x_k} - J_F(\overline{x_k})^{-1} F(\overline{x_k})$$

Espera, espera, que demonios es  $J_F$  te preguntaras, pues, es el Jacobiano, es una matriz que representa “la derivada de la función  $F(x)$ ”.

Pero, como te darás cuenta no solo hay que calcular el Jacobiano, sino que hay que evaluarlo y después invertir la matriz que nos da, y eso, pequeño ser humano no es fácil, así que podemos expresar la iteración de otra manera:

$$\overline{x_{k+1}} = \overline{x_k} + \overline{S_k}$$

Donde  $\overline{S_k}$  como la solución al sistema:

$$J_F(\overline{x_k}) \overline{S_k} = -F(\overline{x_k})$$

# Parte III

## Interpolantes

## Capítulo 9

### Interpolante de Lagrange

## 9.1. Definición