

项目编号 Project 04-01~04-05&谱旋转性质

学生姓名：郝裕玮&张闯

截止日期：10.19

上交日期：10.19

摘要

本次实验共完成了 6 个项目：实现二维快速傅里叶变换，研究傅里叶谱相关性质（绘制图像，探究图像旋转），实现多种滤波器并探究频域相关问题。

小组分工:

郝裕玮: Project 04-01~04-03

张闯: Project 04-04~04-05 & 研究谱旋转性质

Project 04-01

(1) 技术讨论:

代码具体思路为: 根据如下图所示的步骤进行代码编写即可。

1. 给定一幅大小为 $M \times N$ 的输入图像 $f(x, y)$, 从式(4.6-31)和式(4.6-32)得到填充参数 P 和 Q 。
典型地, 我们选择 $P = 2M$ 和 $Q = 2N$ 。
2. 对 $f(x, y)$ 添加必要数量的 0, 形成大小为 $P \times Q$ 的填充后的图像 $f_p(x, y)$ 。
3. 用 $(-1)^{x+y}$ 乘以 $f_p(x, y)$ 移到其变换的中心。
4. 计算来自步骤 3 的图像的 DFT, 得到 $F(u, v)$ 。
5. 生成一个实的、对称的滤波函数 $H(u, v)$, 其大小为 $P \times Q$, 中心在 $(P/2, Q/2)$ 处^①。用阵列相乘形成乘积 $G(u, v) = H(u, v)F(u, v)$; 即 $G(i, k) = H(i, k)F(i, k)$ 。
6. 得到处理后的图像:

$$g_p(x, y) = \left\{ \text{real} \left[\mathcal{F}^{-1} [G(u, v)] \right] \right\} (-1)^{x+y}$$

如前所述, 关于中心对称有助于形象地描述滤波过程并生成滤波函数本身, 但它不是基本的需求。

其中, 为忽略由于计算不准确导致的寄生复分量, 选择了实部, 下标 p 指出我们处理的是填充后的阵列。

7. 通过从 $g_p(x, y)$ 的左上象限提取 $M \times N$ 区域, 得到最终处理结果 $g(x, y)$ 。

总之, 从式(4.2.5)或式(4.2.8)中可以看出傅里叶变换的成分很复杂。正如在复数的分析中, 我们发现有时在极坐标下表示 $F(u)$ 很方便:

$$F(u) = |F(u)| e^{-j\phi(u)} \quad (4.2.9)$$

其中

$$|F(u)| = [R^2(u) + I^2(u)]^{1/2} \quad (4.2.10)$$

上式称为傅里叶变换的幅度或频率谱, 同时

$$\phi(u) = \arctan \left[\frac{I(u)}{R(u)} \right] \quad (4.2.11)$$

上式称为变换的相角或相位谱。在式(4.1.10)和式(4.2.11)中, $R(u)$ 和 $I(u)$ 分别是 $F(u)$ 的实部和虚部。在研究图像增强时, 我们主要关心频率谱的性质。在本章后面使用的另一个量

4.8.1 理想低通滤波器

在以原点为圆心、以 D_0 为半径的圆内，无衰减地通过所有频率，而在该圆外“切断”所有频率的二维低通滤波器，称为理想低通滤波器 (ILPF)；它由下面的函数确定：

$$H(u,v) = \begin{cases} 1, & D(u,v) \leq D_0 \\ 0, & D(u,v) > D_0 \end{cases} \quad (4.8-1)$$

其中， D_0 是一个正常数， $D(u,v)$ 是频率域中点 (u,v) 与频率矩形中心的距离，即

$$D(u,v) = \left[(u - P/2)^2 + (v - Q/2)^2 \right]^{1/2} \quad (4.8-2)$$

其中，与以前一样， P 和 Q 是用式 (4.6-31) 和式 (4.6-32) 填充后的尺寸。图 4.40(a) 显示了 $H(u,v)$ 的透视图，图 4.40(b) 显示了以图像显示的滤波器。如 4.3.3 节提到的那样，理想这一名称表明在半径为 D_0 的圆

290
~
291

代码如下所示（具体分析已包含在代码注释中）：

```
% 读取图像
image=imread('C:\Users\93508\Desktop\1.jpg');
image=im2double(image); %图像处理需要双精度
figure(1);
imshow(image,[]);
title('初始图像');

% 扩充原图矩阵得到 fp(x,y)
[M,N]=size(image);
P=2*M;
Q=2*N;
image_fp=zeros(P,Q);
image_fp(1:M,1:N)=image(1:M,1:N);

% 用(-1)^(x+y)乘以 fp(x,y)，将其移动到变换中心
for x=1:P
    for y=1:Q
        image_fp(x,y)=image_fp(x,y).*(-1)^(x+y);
    end
end

% 对图像做二维傅里叶变换
image_F=fft2(image_fp);

% 生成理想低通滤波器 H(u,v)
image_H=zeros(P,Q);
D0=60;
for x=1:P
    for y=1:Q
        D=sqrt((x-M)^2+(y-N)^2);
```

```

        if D>D0
            image_H(x,y)=0;
        else
            image_H(x,y)=1;
        end
    end
end
figure(2);
imshow(image_H);
title('理想低通滤波器');

% 阵列相乘得到乘积  $G(u,v)=H(u,v)*F(u,v)$ 
image_G=image_H.*image_F;

% 求 G 的 IDFT 并取其实部, 再乘以  $(-1)^{(x+y)}$ , 得到处理后的图像  $gp(x,y)$ 
image_gp=real(iff2(image_G));
for x=1:P
    for y=1:Q
        image_gp(x,y)=image_gp(x,y).*(-1)^(x+y);
    end
end

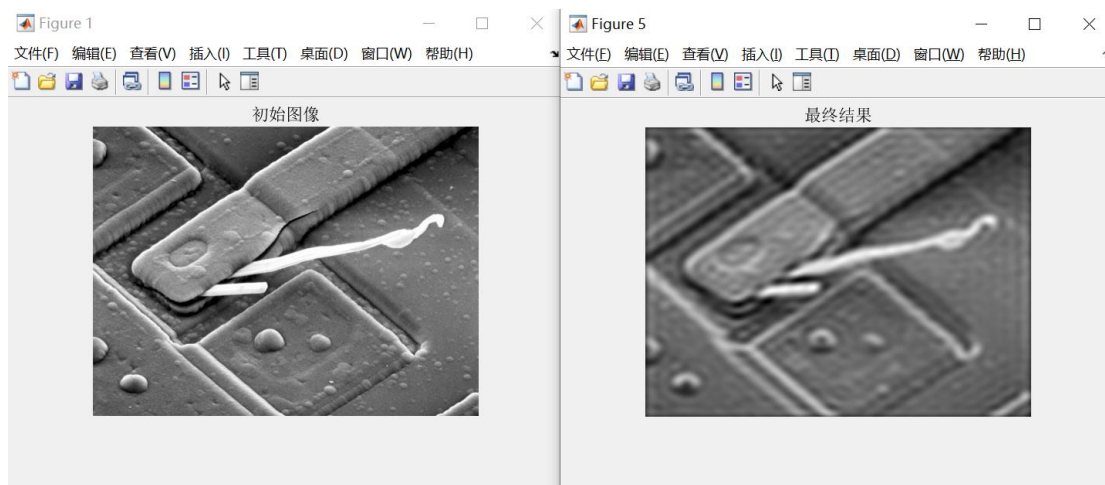
% 从  $gp(x,y)$  的左上象限提取  $M*N$  区域得到最终处理结果  $g(x,y)$ 
image_g=image_gp(1:M,1:N);
figure(3);
imshow(image_g,[]);
title('最终结果');

% 画出傅里叶频谱图
R=real(image_F); %提取实部
I=imag(image_F); %提取虚部
image_F1=log(1+abs(image_F));
figure(4);
imshow(image_F1,[]);
title('傅里叶变换幅度谱');
figure(5);
image_F2=atan(I./R);
imshow(image_F2,[]);
title('傅里叶变换相位谱');

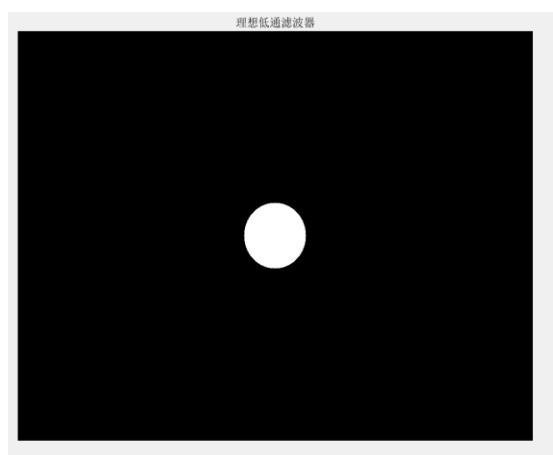
```

(2) 结果讨论：

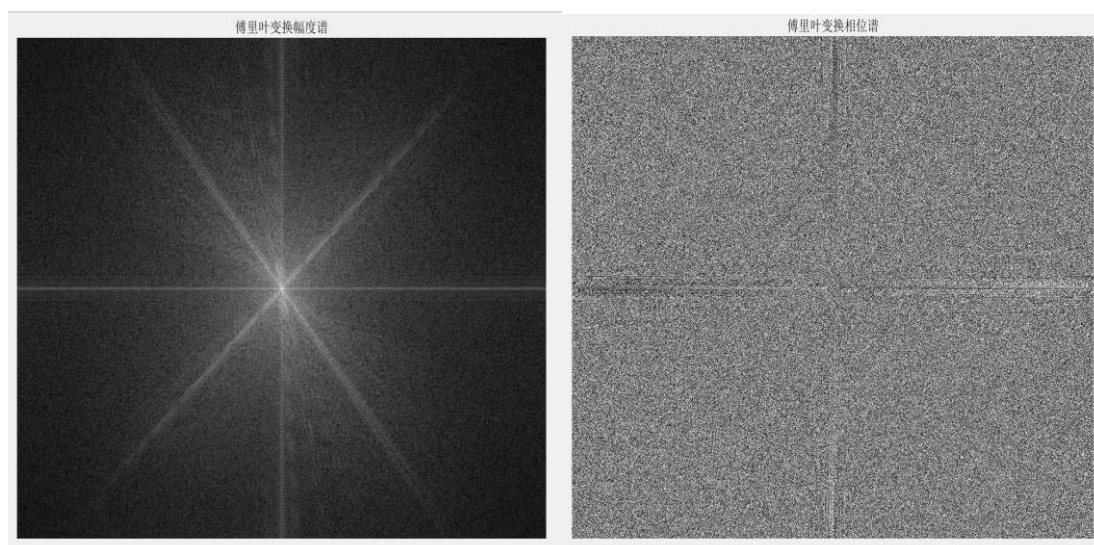
初始图像和最终结果的对比（见下页）：



理想低通滤波器 ($D_0=60$):



傅里叶频谱图为：



Project 04-02

(1) 技术讨论:

代码大多数部分和 04-01 一致, 代码如下所示 (具体分析详见代码注释):

总之, 从式(4.2.5)或式(4.2.8)中可以看出傅里叶变换的成分很复杂。正如在复数的分析中, 我们发现有时在极坐标下表示 $F(u)$ 很方便:

$$F(u) = |F(u)| e^{-j\phi(u)} \quad (4.2.9)$$

其中

$$|F(u)| = [R^2(u) + I^2(u)]^{1/2} \quad (4.2.10)$$

上式称为傅里叶变换的幅度或频率谱, 同时

$$\phi(u) = \arctan\left[\frac{I(u)}{R(u)}\right] \quad (4.2.11)$$

上式称为变换的相角或相位谱。在式(4.1.10)和式(4.2.11)中, $R(u)$ 和 $I(u)$ 分别是 $F(u)$ 的实部和虚部。在研究图像增强时, 我们主要关心频率谱的性质。在本章后面使用的另一个量

```
% 读取图像并计算图像的平均值
image=imread('C:\Users\93508\Desktop\2.jpg');
avg=mean2(image);
disp(['图像的平均值为',num2str(avg)]);

%图像处理需要双精度
image=im2double(image);
figure(1);
imshow(image,[]);
title('初始图像');

% 扩充原图矩阵得到 fp(x,y)
[M,N]=size(image);
P=2*M;
Q=2*N;
image_fp=zeros(P,Q);
image_fp(1:M,1:N)=image(1:M,1:N);

% 用 (-1)^(x+y) 乘以 fp(x,y), 将其移动到变换中心
for i=1:P
    for j=1:Q
        image_fp(i,j)=image_fp(i,j)*(-1)^(i+j); %平移函数, 移到其变换的中
    心
    end
end
end
```

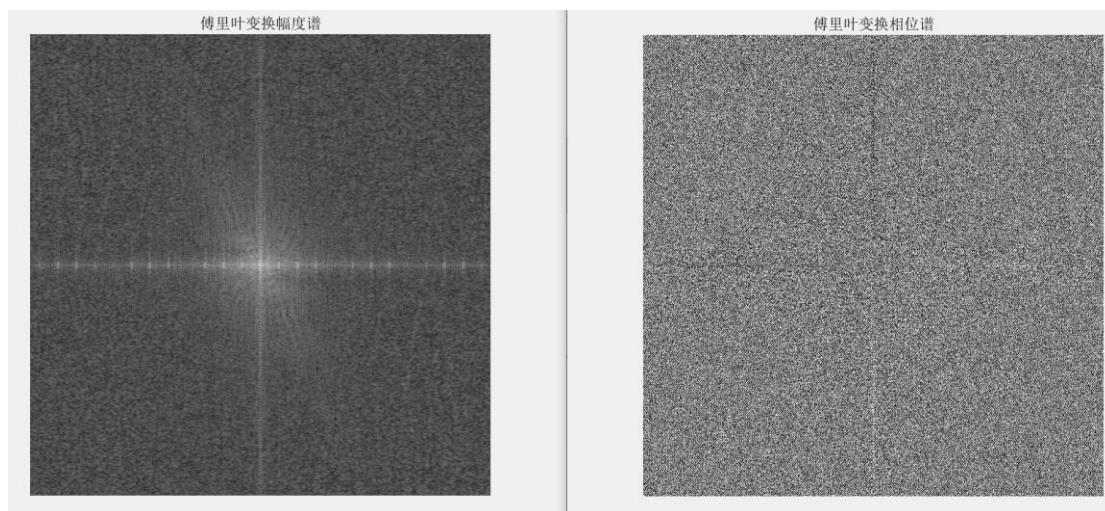
```

% 对图像做二维傅里叶变换
image_F=fft2(image_fp);

% 画出傅里叶频谱图
X=real(image_F); %提取实部
Y=imag(image_F); %提取虚部
image_F1=log(1+abs(image_F));
figure(2);
imshow(image_F1,[]);
title('傅里叶变换幅度谱');
figure(3);
image_F2=atan(Y./X);
imshow(image_F2,[]);
title('傅里叶变换相位谱');

```

(2) 结果讨论:



图像的平均值为：207.3635

```

>> Project04_02
图像的平均值为207.3635

```


Project 04-03

(1) 技术讨论：

代码大多数部分和 04-01 一致，代码如下所示（具体分析详见代码注释）：

4.8.3 高斯低通滤波器

一维高斯低通滤波器 (GLPF) 在 4.7.4 节中已介绍过，当时介绍它的目的是用来帮助寻找空间域与频率域之间的重要联系。这些滤波器的二维形式由下式给出：

$$H(u, v) = e^{-D^2(u, v)/2\sigma^2} \quad (4.8-6)$$

其中，如式 (4.8-2) 中那样， $D(u, v)$ 是距频率矩形中心的距离。为与本节讨论的滤波器保持一致，这里我们并未像在 4.7.4 节那样使用一个最高值为 1 的常量乘数。与以前一样， σ 是关于中心的扩展度的度量。通过令 $\sigma = D_0$ ，我们可以在本节中使用其他滤波器的表示法来表示该滤波器：

$$H(u, v) = e^{-D^2(u, v)/2D_0^2} \quad (4.8-7)$$

其中， D_0 是截止频率。当 $D(u, v) = D_0$ 时，GLPF 下降到其最大值的 0.607 处。

```
% 读取图像
image=imread('C:\Users\93508\Desktop\2.jpg');
image=im2double(image);
figure(1);
imshow(image);
title('初始图像');

% 扩充原图矩阵得到 fp(x,y)
[M,N]=size(image);
P=2*M;
Q=2*N;
image_fp=zeros(P,Q);
image_fp(1:M,1:N)=image(1:M,1:N);

% 用(-1)^(x+y)乘以 fp(x,y)，将其移动到变换中心
for x=1:P
    for y=1:Q
        image_fp(x,y)=image_fp(x,y).*(-1)^(x+y);
    end
end

% 对图像做二维傅里叶变换
image_F = fft2(image_fp);

% 高斯低通滤波器
image_H=zeros(P,Q);
P=2*M;
```



```

Q=2*N;
D0=30;
for i=1:P
    for j=1:Q
        image_H(i,j)=exp(-((i-P/2)^2+(j-Q/2)^2)/(2*D0^2));
    end
end
figure(2);
imshow(image_H);
title('高斯低通滤波器');

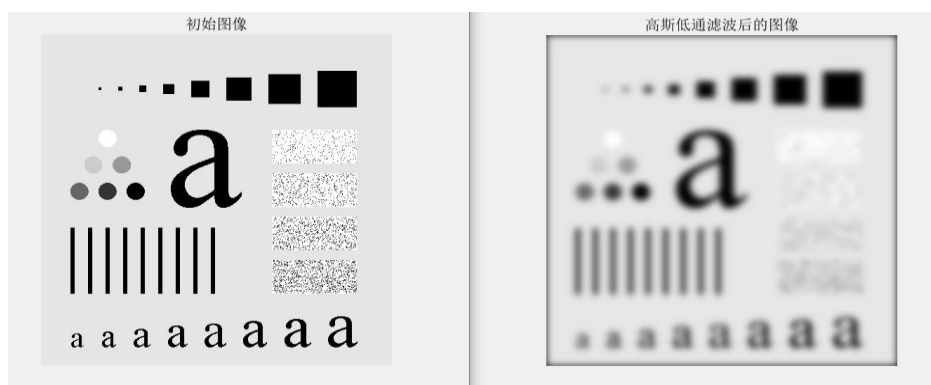
% 阵列相乘得到乘积 G(u,v)=H(u,v)*F(u,v)
image_G = image_F .* image_H;

% 求 G 的 IDFT 并取其实部，再乘以 (-1)^(x+y), 得到处理后的图像 gp(x,y)
image_gp = real(fft2(image_G));
for x=1:P
    for y=1:Q
        image_gp(x, y)=image_gp(x,y).*(-1)^(x+y);
    end
end

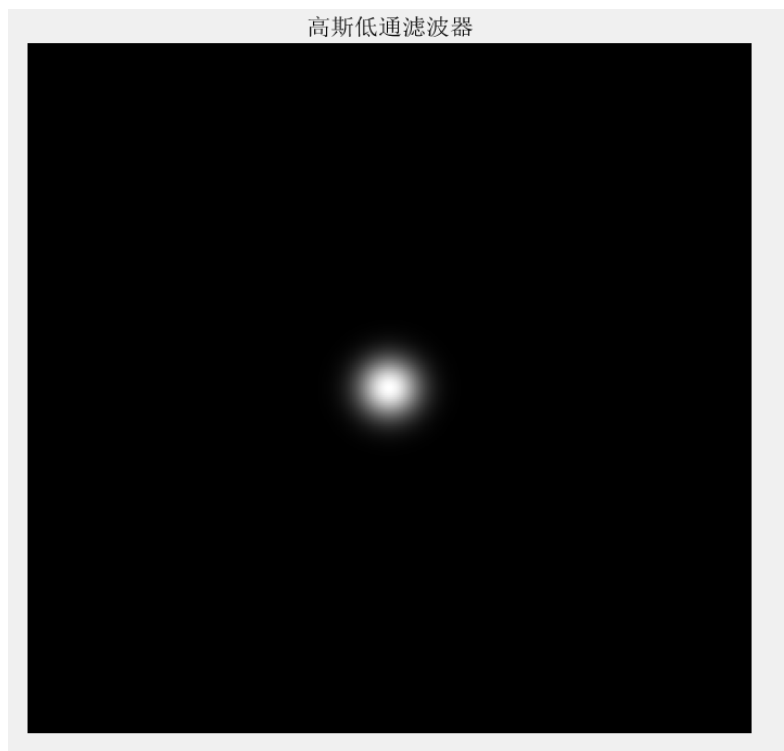
% 从 gp(x,y) 的左上象限提取 M*N 区域得到最终处理结果 g(x,y)
image_g=image_gp(1:M, 1:N);
figure(3);
imshow(image_g, []);
title('高斯低通滤波后的图像');

```

(2) 结果讨论：



高斯低通滤波器（截止频率 $D_0=30$ ）:



Project 04-04

(1) 技术讨论:

钝化模板简单地由从一幅图像减去其自身模糊图像而生成的锐化图像构成。采用频域技术,这意味着从图像自身减去低通滤波后的图像而得到高通滤波的图像。即:

$$f_{hp}(x, y) = f(x, y) - f_{lp}(x, y) \quad (4.4.14)$$

```
%读入原图像
img = imread('Fig4.11(a).jpg');
img = im2double(img);
figure(1);
imshow(img);
title('原图像');

% 扩充原图像
[M, N] = size(img);
P = 2 * M;
Q = 2 * N;
img_fp = zeros(P, Q);
img_fp(1:M, 1:N) = img(1:M, 1:N);

% 计算滤波函数;
```

```

alf = 80;
H = zeros(P, Q);
for i = 1:P
    for j = 1:Q
        H(i, j) = exp(-((i-P/2)^2 + (j-Q/2)^2) / (2 * alf^2));
    end
end

figure(2);
imshow(H);
title('滤波函数');

%将 f 移到变换重心
img_f = zeros(P, Q);
for x = 1:P
    for y = 1:Q
        img_f(x, y) = img_fp(x, y) .* (-1)^(x+y);
    end
end

%计算图像的傅里叶变换
img_F = fft2(img_f);

%用阵列相乘得到 img_G, 再用傅里叶反变换得到 img_g
img_G = img_F .* H;
img_g = real(ifft2(img_G));

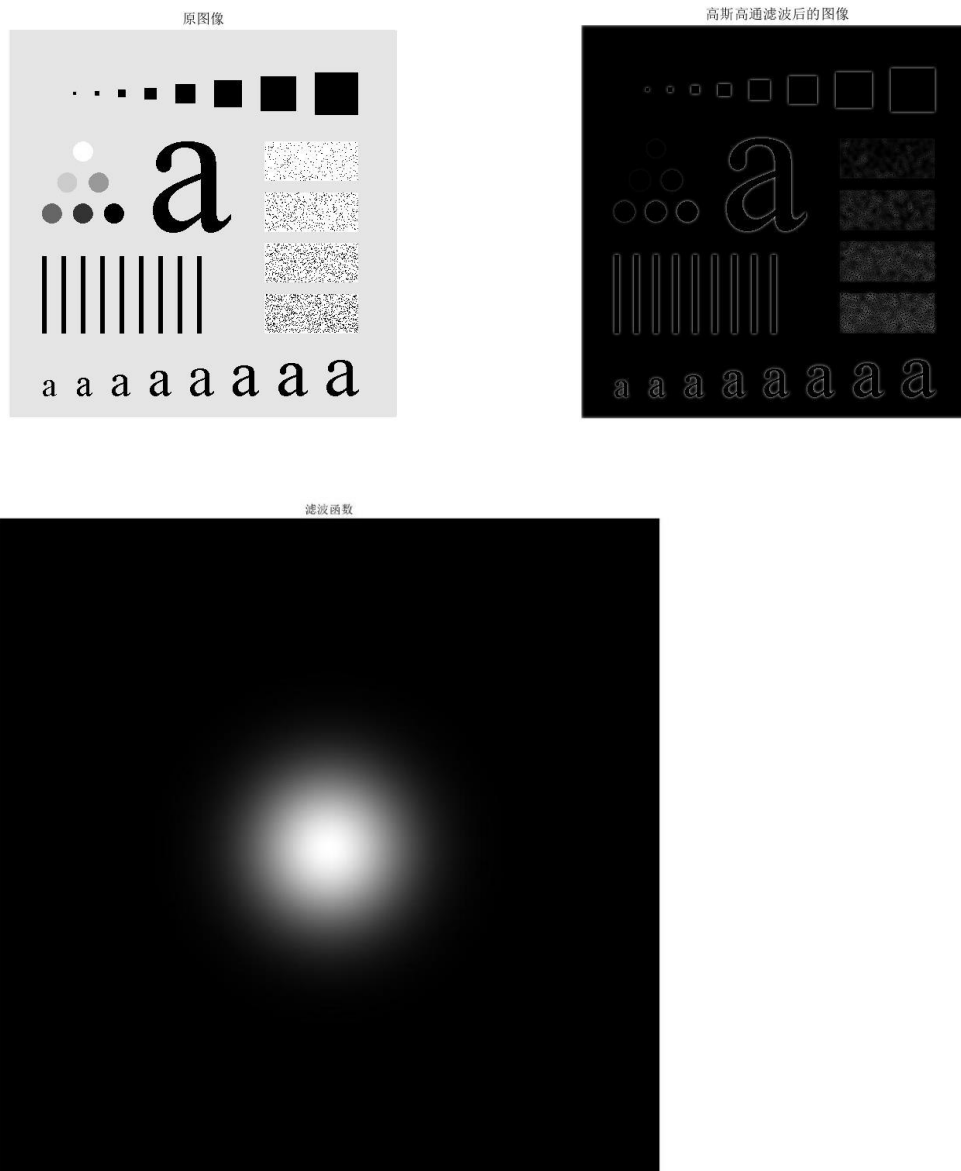
%将 f 变换回左上角, 得到处理后的图像
for x = 1:P
    for y = 1:Q
        img_g(x, y) = img_g(x, y) .* (-1)^(x+y);
    end
end

%截取左上角部分, 得到高斯低通滤波图像
img_o = img_g(1:M, 1:N);

%用原图像减去高斯低通滤波图像, 得到高斯高通滤波图像
img_4=img-img_o;
figure(3);
imshow(img_4);
title('高斯高通滤波后的图像')

```

(2) 结果讨论:



Project 04-05

(1) 技术讨论:

给出卷积与相关的相似性后,相关理论类似于卷积理论就不奇怪了。让 $F(u, v)$ 和 $H(u, v)$ 分别表示 $f(x, y)$ 和 $h(x, y)$ 的傅里叶变换。卷积理论有一半讲的是空间域的相关 $[f(x, y) \circ h(x, y)]$ 和频率域的乘积 $[F^*(u, v)H(u, v)]$, 它们组成了一个傅里叶变换对。这一结论形式上如下所示:

$$f(x, y) \circ h(x, y) \Leftrightarrow F^*(u, v)H(u, v) \quad (4.6.31)$$

它指出空间域的相关性可由 $F^*(u, v)H(u, v)$ 的傅里叶反变换得到, F^* 是 F 的复共轭。一个类似的结果是:频率域的相关简化为空间域的相乘。即:

$$f^*(x, y)h(x, y) \Leftrightarrow F(u, v) \circ H(u, v) \quad (4.6.32)$$

```

% 读入原图像
imga = imread('Fig4.41(a).jpg');
imga = im2double(imga);
figure(1);
imshow(imga);
title('原图像');
% 读入模板图像
imgb = imread('Fig4.41(b).jpg');
imgb = im2double(imgb);
figure(2);
imshow(imgb);
title('模板图像');

[A,B]=size(imga);
[C,D]=size(imgb);

% 扩充图像, 取  $P \geq A+C, Q \geq B+D$ , 选择  $298 \times 298$  的相等延拓尺度
P=298;
Q=298;

f=zeros(P,Q);
g=zeros(P,Q);

f(1:A,1:B)=imga(1:A,1:B);
figure(3);
imshow(f);
title('延拓原图像');

g(1:C,1:D)=imgb(1:C,1:D);
figure(4);
imshow(g);
title('延拓模板图像');

for x=1:P
    for y=1:Q
        f(x,y)=f(x,y).*(-1)^(x+y);
        g(x,y)=g(x,y).*(-1)^(x+y);
    end
end

% 利用相关理论对图像进行图像相关处理
F=fft2(f);
G=fft2(g);

```

```

Img=F.*conj(G);

img=ifft2(Img);

for x=1:P
    for y=1:Q
        img(x,y)=img(x,y).*(-1)^(x+y);
    end
end

img=real(img);
img = mat2gray(img);
figure(5);
imshow(img);
title('图像相关结果');

% 寻找最大值及最大值坐标
max_value = max(max(img));
[row,col] = find(img == max_value);

disp(['row: ', num2str(row), ' col: ', num2str(col)]);

```

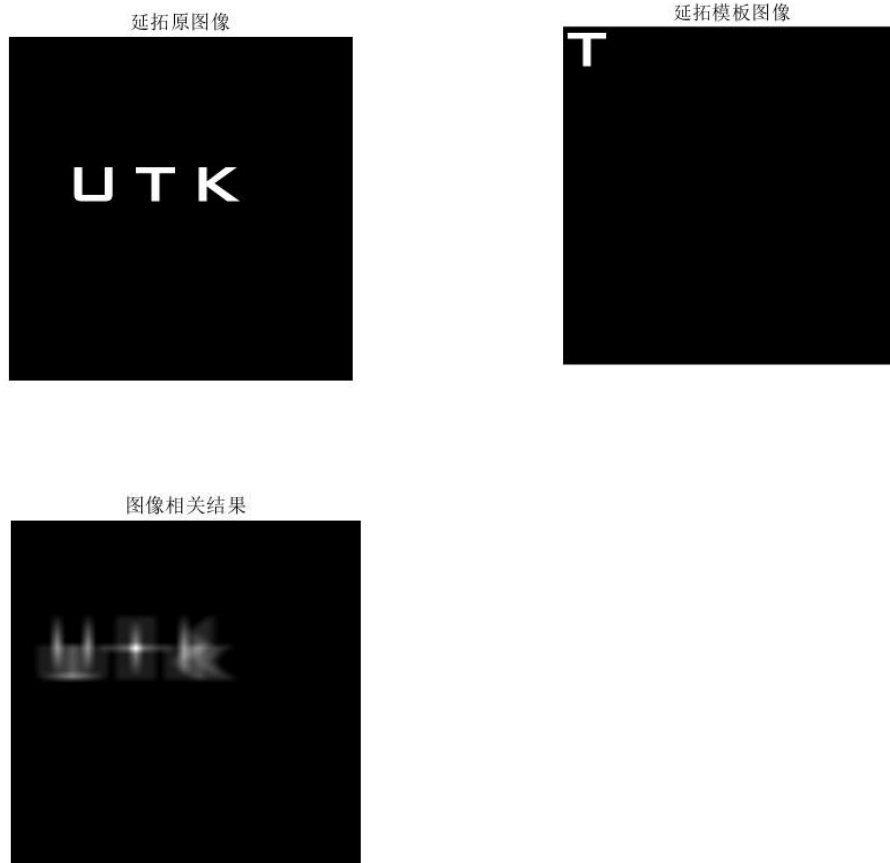
(2) 结果讨论：

原图像



模板图像





row: 109 col: 107

研究谱旋转性质

(1) 技术讨论:

一个恰当的比喻是将傅里叶变换比做一个玻璃棱镜。棱镜是可以将光分成不同颜色成分的物理仪器,每个成分的颜色由波长(或频率)决定。傅里叶变换可看做“数学的棱镜”,将函数基于频率分成不同的成分。当我们考虑光时,讨论它的光谱或频率谱线。同样,傅里叶变换使我们能够通过频率成分来分析一个函数。这是属于线性滤波核心的重要概念。

总之,从式(4.2.5)或式(4.2.8)中可以看出傅里叶变换的成分很复杂。正如在复数的分析中,我们发现有时在极坐标下表示 $F(u)$ 很方便:

$$F(u) = |F(u)| e^{-j\phi(u)} \quad (4.2.9)$$

其中

$$|F(u)| = [R^2(u) + I^2(u)]^{1/2} \quad (4.2.10)$$

上式称为傅里叶变换的幅度或频率谱,同时

$$\phi(u) = \arctan\left[\frac{I(u)}{R(u)}\right] \quad (4.2.11)$$

上式称为变换的相角或相位谱。在式(4.1.10)和式(4.2.11)中, $R(u)$ 和 $I(u)$ 分别是 $F(u)$ 的实部和虚部。在研究图像增强时,我们主要关心频率谱的性质。在本章后面使用的另一个量是功率谱,它被定义为傅里叶变换的平方:

$$\begin{aligned} P(u) &= |F(u)|^2 \\ &= R^2(u) + I^2(u) \end{aligned} \quad (4.2.12)$$

术语“谱密度”也用来指功率谱。


```

image=imread('Fig4.04(a).jpg');
image=im2double(image);

%angle 可设置为别的角度
angle=0;
image=imrotate(image,angle);
figure(1);
imshow(image);
title('旋转 0 度后的图像');

% 对图像进行扩充
[M,N]=size(image);
M=2*M;
N=2*N;
Image=zeros(M,N);
Image(1:M/2,1:N/2)=image(1:M/2,1:N/2);

% 将图像移动到变换中心
for x=1:M
    for y=1:N
        Image(x,y)=Image(x,y).*(-1)^(x+y);
    end
end
Image=Image(1:M/2,1:N/2);

%对图像进行傅里叶变换，计算出频谱图像
T=fft2(Image);

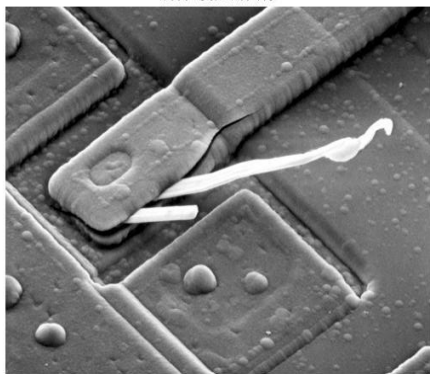
% 对图像取对数，增强效果
F=log(1+abs(T));

F=mat2gray(F);
figure(2);
imshow(F);
title('频谱图');

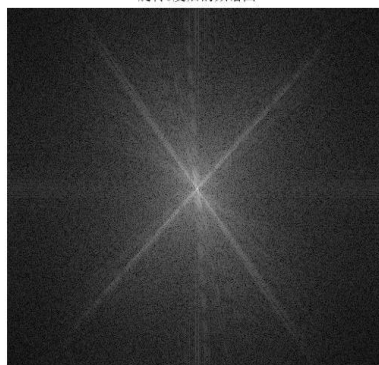
```

(2) 结果讨论（见下页）:

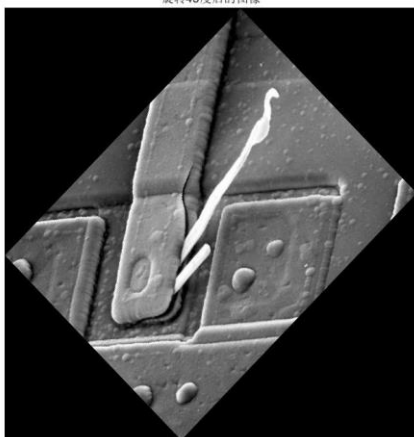
旋转0度后的图像



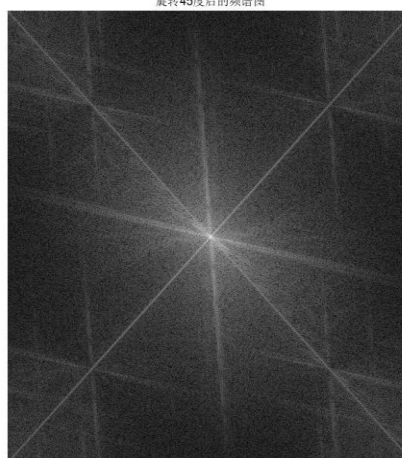
旋转0度后的频谱图



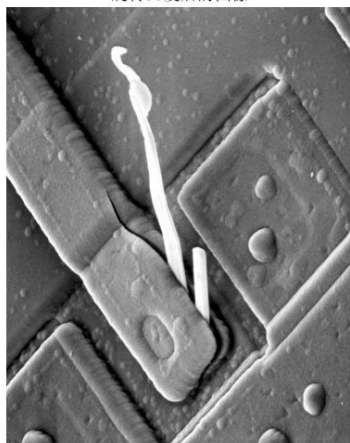
旋转45度后的图像



旋转45度后的频谱图



旋转90度后的图像



旋转90度后的频谱图

