



Уравнение Лапласа для давления:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0$$

Граничные условия на давление:

$$\begin{cases} P_{x=0} = 0 \\ P_{x=L} = P_0 \sin(\omega t) \end{cases}$$

или:

$$\begin{cases} P_{x=0} = -\frac{P_0}{2} \sin(\omega t) \\ P_{x=L} = \frac{P_0}{2} \sin(\omega t) \end{cases}$$

Возможно понадобятся дополнительные граничные условия на давление, это будет ясно из решения следующего этапа.

Уравнение Навье-Стокса:

$$\begin{cases} \frac{\partial v_x}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \gamma \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right) \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \gamma \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right) \end{cases}$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$$

Граничные условия для скорости:

$$V_y|_{y=W} = 0, V_x|_{y=W} = 0$$

$$V_y|_{y=0} = 0, V_x|_{y=0} = 0$$

$$V_y|_{y \in \text{cathode_top}} = 0, V_x|_{y \in \text{cathode_top}} = 0$$

$$V_x|_{x \in \text{cathode_side}} = 0, V_y|_{y \in \text{cathode_top}} = 0$$

Возможно упрощение до стационарного варианта.

Уравнение конвективной диффузии:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + D \left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} \right) = v_x \frac{\partial c}{\partial x} + v_y \frac{\partial c}{\partial y}$$

Граничные условия для концентрации:

$$c|_{\vec{r} \in \text{cathode}} = 0$$

$$c|_{\vec{r} \in \text{anode}} = c_a$$

$$\frac{\partial c}{\partial x} * n_x + \frac{\partial}{\partial y} * n_y|_{\vec{r} \notin \text{anode, cathode}} = 0$$

Распишем концентрацию следующим образом:

$$c = c_0 + c_1$$

$$\frac{\partial c_1}{\partial t} + D \left(\frac{\partial^2 c_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c_0}{\partial y^2} \right) = v_x \frac{\partial c_0}{\partial x} + v_y \frac{\partial c_0}{\partial y} + v_x \frac{\partial c_1}{\partial x} + v_y \frac{\partial c_1}{\partial y}$$

Для получения c_0 решим следующее уравнение:

$$D \left(\frac{\partial^2 c_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c_0}{\partial y^2} \right) = 0$$

Затем уравнение приводится к следующему виду;

$$\frac{\partial c_1}{\partial t} + D \left(\frac{\partial^2 c_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c_0}{\partial y^2} \right) = v_x \frac{\partial c_0}{\partial x} + v_y \frac{\partial c_0}{\partial y}$$

Будем строить график следующей функции:

$$v_x \frac{\partial c_0}{\partial x} + v_y \frac{\partial c_0}{\partial y}$$