第2章

3152018115447 闫雨

2.2

证: $f(n)=\Theta(f(n))$

$g(n)=\Theta(g(n))$

设 $\max(f(n),g(n))=f(n)$

则 $\Theta(f(n)+g(n))=\Theta(f(n))$

则 $\max(f(n),g(n))=\Theta(f(n)+g(n))$

同理可证 ——

2.3

证: $\frac{(n+a)^b}{n^b} \le \left(\frac{n+a}{n}\right)^b = \left(1+\frac{a}{n}\right)^b$

$\because (1+\frac{a}{n})^b = C$ 常数

$\therefore (n+a)^b=\Theta(n^b)$

2.9

证:

对于任意给定的函数 $f(n)$, $g(n)$,

$f(n)=\Theta(g(n))$ 当且仅当 $f(n)=O(g(n))$ 且

$f(n)=\Omega(g(n))$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)}$ 存在, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)}\neq 0$

$\Rightarrow f(n)=\Omega(g(n))$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)}$ 存在, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)}\neq\infty$,

$\Rightarrow f(n)=O(g(n))$

第三章

3.1

雇用一次: $P_1=\frac{(n-1)!}{n!}=\frac{1}{n}$

雇用二次: $P_2=\frac{C_{n-1}^1+C_{n-2}^2+\dots+C_{n-1}^{n-1}}{n!}$

$=\frac{2^{n-1}-1}{n!}$

雇用n次: 为 $\frac{1}{n!}$

3.2

$T(n)=\sum_{k=1}^{n} n\times\frac{1}{n}=n$

3.4.

$\cancel{2^0}$ 2^1 2^2 $\cdots$ 2^k $k=\log_2 n$

$\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$

$2\frac{(1-2^{\log_2 n}}{} +1$

解:

Let c_i = cost of i th operation

$$c_i = \begin{cases} i & \text{if } i \text{ is an exact power of } 2 \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

n operations cost

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \le n + \sum_{j=0}^{\lg n} 2^j = n+(2n-1)<3n$$

从而得到每个操作的平摊代价为 $O(1)$

3.8. 势能

设 $i=2^j+k$ ($j\ge 0$, $k\ge 0$, 且 j 取值尽可能大), 势能 $\Phi(D_i)2k$.

如果 $k=0$, 则

$$\begin{aligned} \hat{c}_i &= c_i + \Phi(D_i) - \Phi(D_{i-1}) \\ &= i + 0 - 2\cdot(2^j - 1 - 2^{j-1}) \\ &= i - (2^j(2-1)-2) \\ &= i - i + 2 = 2 \end{aligned}$$

否则

$$\begin{aligned} \hat{c}_i &= c_i + \Phi(D_i) - \Phi(D_{i-1}) \\ &= 1+2k-2(k-1) \\ &= 3 \end{aligned}$$