谱序列及其应用(II)

拓扑中的谱序列

熊锐

山东大学 泰山学堂

2021 年 10 月

https://www.cnblogs.com/XiongRuiMath/p/14992978.html

引入

这次我们介绍拓扑中的常用的谱序列的构造.

- Leray–Serre 谱序列 — 计算纤维丛的上同调
- Eilenberg–Moore 谱序列 — 计算纤维积的上同调
- Cartan–Leray 谱序列 — 计算覆叠空间的上同调
- Atiyah–Hirzebruch 谱序列 — 计算纤维丛的拓扑 K 群
- Adams 谱序列 — 计算稳定同伦群

其中 Leray–Serre 谱序列尤其重要, 其他谱序列我们会简单略过, 只提构造思路.

∼ § Leray–Serre 谱序列 § ∼

纤维丛

令 X 和 F 是两个拓扑空间, 考虑投射 $\pi = \begin{bmatrix} X\times F \\ \downarrow \\ X \end{bmatrix}$. 我们说这是一个以 F 为纤维的**平凡纤维丛**.

一般地, 对于一个连续映射 $\xi = \begin{bmatrix} E \\ \downarrow \\ X \end{bmatrix}$ 被称为一个以 F 为纤维的**纤维丛**如果局部上是平凡丛 (存在开覆盖...).

其中 X 被称为**底空间**, E 被称为**全空间**, F 被称为**纤维**. 对 $x \in X$ 记 $E_x = \xi^{-1}(x)$ 为 x **点处的纤维**.

局部上同构到平凡丛的同构 $U \times F \to \xi^{-1}(U)$ 被称为一个**局部平凡化**. 如下图所示,

$$\begin{tikzcd}
U \times F \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\mathrm{proj}"] & \xi^{-1}(U) \arrow[r, "\subseteq"] \arrow[d, "\xi|_U"] & E \arrow[d, "\xi"] \\
U \arrow[r, equal] & U \arrow[r, "\subseteq"'] & X
\end{tikzcd}$$

通常, 我们知道底空间 X 的信息, 也知道每个点 $x \in X$ 的纤维是什么, 但是要把握全空间的性质就比较困难.

问题

对于纤维丛, 如何 (从底空间和纤维) 计算全空间的上同调?

两个特殊情况

定理 (Künneth 定理)

对于以 F 为纤维的平凡丛 $E = X \times F$, 两个方向的投射 π_1, π_2 诱导了环同态

$$H^*(X) \otimes H^*(F) \longrightarrow H^*(E), \qquad \alpha \otimes \beta \longmapsto \pi_1^*\alpha \smile \pi_2^*\beta.$$

当 $H^*(F)$ 是自由模 (对系数而言), 上述映射是同构.

定理 (Leray–Hirsch 定理)

对于一个以 F 为纤维的纤维丛 $\begin{bmatrix} E \\ \downarrow \\ X \end{bmatrix}$, 如果 $H^*(F)$ 是自由模 (相对系数), 且对每个点 $x \in X$, 存在一个线性 (相对系数) 提升

$$\begin{tikzcd} & H^*(F) \arrow[dl, "\sim"'] \arrow[d, dotted, "\exists"] & \ni & \beta \arrow[d, mapsto] \\ H^*(E_x) & H^*(E) \arrow[l, "res"] & \ni & \tilde{\beta} \end{tikzcd}$$

那么

$$H^\bullet(X) \otimes H^\bullet(F) \longrightarrow H^\bullet(E), \qquad \alpha \otimes \beta \longmapsto \xi^* \alpha \smile \tilde{\beta}$$

是 $H^\bullet(X)$-模同构.

反例 — Hopf 纤维

考虑复射影直线

$$\mathbb{C}P^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

是复平面的一点紧化 $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$，即**黎曼球** $\mathbb{C}P^1 = S^2$．另一方面，自然映射

$$S^3 \subseteq \mathbb{R}^4 \setminus 0 \cong \mathbb{C}^2 \setminus 0 \longrightarrow \mathbb{C}P^1 \cong S^2$$

给出一个以 S^1 为纤维的纤维丛，这被称为**Hopf 纤维**．显然，

$$\underbrace{H^\bullet(S^2)}_{\text{rank}=2} \otimes \underbrace{H^\bullet(S^1)}_{\text{rank}=2} \neq \underbrace{H^\bullet(S^3)}_{\text{rank}=2}.$$

Leray–Serre 谱序列

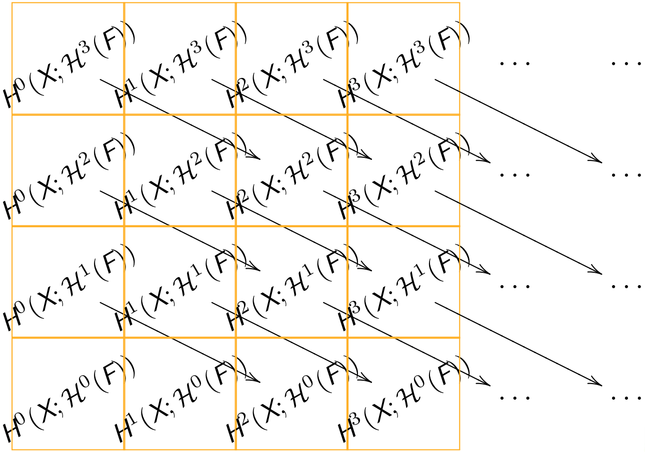
定理 (Leray–Serre 谱序列)

对于一个以 F 为纤维的纤维丛 $\begin{bmatrix} E \\ \downarrow \\ X \end{bmatrix}$，存在一个谱序列

$$E_2^{pq} = H^p(X; \mathcal{H}^q(F)) \Longrightarrow H^{p+q}(E)$$

其中 $\mathcal{H}^q(F)$ 是纤维对应的局部系统.

特别地，当 X 单连通时，$\mathcal{H}^q(F) = H^q(F)$ 是常数. 如果进一步假设 $H^q(F)$ 自由，那么 $E_2^{pq} = H^p(X) \otimes H^q(F)$.


$H^0(X;\mathcal{H}^3(F))$
$H^1(X;\mathcal{H}^3(F))$
$H^2(X;\mathcal{H}^3(F))$
$H^3(X;\mathcal{H}^3(F))$
$\cdots$
$\cdots$
$H^0(X;\mathcal{H}^2(F))$
$H^1(X;\mathcal{H}^2(F))$
$H^2(X;\mathcal{H}^2(F))$
$H^3(X;\mathcal{H}^2(F))$
$\cdots$
$\cdots$
$H^0(X;\mathcal{H}^1(F))$
$H^1(X;\mathcal{H}^1(F))$
$H^2(X;\mathcal{H}^1(F))$
$H^3(X;\mathcal{H}^1(F))$
$\cdots$
$\cdots$
$H^0(X;\mathcal{H}^0(F))$
$H^1(X;\mathcal{H}^0(F))$
$H^2(X;\mathcal{H}^0(F))$
$H^3(X;\mathcal{H}^0(F))$
$\cdots$
$\cdots$

证明思路

回忆我们之前讨论的单纯同调. 我们用 X 的 CW 胞腔结构去滤 $\mathrm{Sing}^\bullet(X)$ 得到一个只有一行的谱序列. 现在我们则是用 X 的 CW 胞腔结构去滤 $\mathrm{Sing}^\bullet(E)$, 这时会出现非平凡的谱序列.

证明

可以假设 X 是 CW 复形, 令 X_p 是 $\leq p$ 维胞腔的并. 记 X_p 的原像为 E_p. 我们得到 $\mathrm{Sing}^\bullet(E)$ 一串滤链 $\mathrm{Sing}^\bullet(E, E_p)$. 且

$$\operatorname{gr}\mathrm{Sing}^\bullet(E) = \mathrm{Sing}^\bullet(E_p, E_{p-1}).$$

于是我们得到了谱序列

$$E_1^{pq} = H^{p+q}\left(\mathrm{Sing}^\bullet(E_p, E_{p-1})\right) \xlongequal{\text{Künneth 定理}} H^p(X_p, X_{p-1}) \otimes \mathcal{H}^q(F),$$

通过微分的给法知道 E_1 上的微分恰好是计算单纯上同调的复形, 因此

$$E_2^{pq} = H^p(X; \mathcal{H}^q(F)) \Longrightarrow H^{p+q}(X).$$

证闭.

Hopf 纤维

回顾我们之前的 Hopf 纤维 $\left[\begin{array}{c} S^3 \\ \downarrow \\ S^2 \end{array}\right]$.

$$
\begin{aligned}
E_2^{pq} &= H^p(S^2) \otimes H^q(S^1) \\
&= \begin{cases} \mathbb{Z} & (p,q) \in \{0,2\} \times \{0,1\} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}.
\end{aligned}
$$

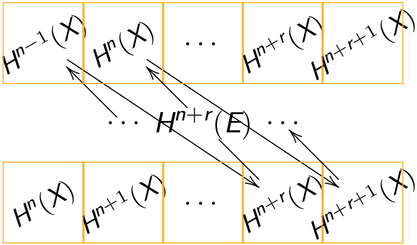
$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{Z} \arrow[drr] & & \mathbb{Z} \\
\mathbb{Z} & & \mathbb{Z}
\end{tikzcd}
$$

因为最终收敛到 $H^\bullet(S^3)$, 所以上图仅存的映射是同构.

Gysin 序列

对于一个秩 r 的球丛 $\begin{bmatrix} E \\ \downarrow \\ X \end{bmatrix}$ (即纤维是 r 维球面 S^r), 我们有 **Gysin 序列**

$$\cdots \longrightarrow H^{n-1}(X) \longrightarrow H^{n+r}(X) \longrightarrow H^{n+r}(E) \longrightarrow H^{n}(X) \longrightarrow \cdots$$



评注

下面陈列一些关于 Leray–Serre 谱序列的一些进一步的理论

- Leray–Serre 谱序列具有**函子性**. (4.12)
- Leray–Serre 谱序列具有**乘法结构**. (4.13)
  特别地, Gysin 序列在底空间成立 Poincaré 对偶的条件下有更加直接的描述.
- Leray–Serre 谱序列具有**相对版本**. (4.15)
  特别地, 我们可以得到 Thom 同构定理.
- 我们可以描述**越过**映射 $E_r^{0,r-1} \to E_r^{r,0}$. (4.17)

重看 Gysin 序列

实际上 Gysin 序列中的映射有更好的描述

- 映射 $H^{n-1}(X) \to H^{n+r}(X)$ 是和一个上同调类 $\epsilon \in H^{r+1}(X)$ 作 cup 积. 这个类被称为 **Euler 类**.
- 映射 $H^{n+r}(X) \to H^{n+r}(X)$ 是通常的拉回.
- 当 X 成立 Poincaré 对偶, 那么 $H^{n+r}(E) \to H^n(X)$ 满足下面的交换图

$$\begin{tikzcd}
H^{n+r}(E) \arrow[r] \arrow[d, "\substack{\text{Poincaré}\\ \text{对偶}}"'] & H^n(X) \arrow[d, "\substack{\text{Poincaré}\\ \text{对偶}}"] \\
H_{\dim E-n-r}(E) \arrow[r, "\text{推出}"'] & H_{\dim X-n}(X)
\end{tikzcd}$$

这是因为谱序列的**乘法结构**.

Thom 同构

定理

如果有以 $\mathbb{R}^r$ 为纤维的纤维丛 $\begin{bmatrix} E \\ \downarrow \\ X \end{bmatrix}$. 可以对每条纤维一点紧化得到一个球丛 $\begin{bmatrix} \hat{E} \\ \downarrow \\ X \end{bmatrix}$. 因为

$$H^n(\mathbb{R}^r \cup \{\infty\}, \infty) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & n = r, \\ 0, & otherwise. \end{cases}$$

所以 $H^n(X) = H^{n+r}(\hat{E}, \infty)$.

∼ § Eilenberg–Moore 谱序列 § ∼

拉回

$$\begin{tikzcd} E_f \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[d, "\xi"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

对于连续映射 $f: X \to Y$ 以及纤维丛 $\xi = \begin{bmatrix} E \\ \downarrow \\ Y \end{bmatrix}$，我们定义**拉回** $f^*\xi = \begin{bmatrix} E_f \\ \downarrow \\ X \end{bmatrix}$，其中

$$E_f = \{(x, v) \in X \times E : f(x) = \xi(v)\}$$

直观地，$f^*\xi$ 在 x 处的纤维是 ξ 在 $f(x)$ 处纤维的拷贝.

问题

如何 (从 E, X, Y) 计算纤维丛拉回的上同调?

Eilenberg–Moore 谱序列

我们有自然的乘法同态

$$H^*(E)\otimes_{H^*(Y)}H^*(X)\longrightarrow H^*(E_f).$$

如果 ξ 满足 Leray–Hirsch 定理的条件, 那么可以直接验证 $f^*\xi$ 也满足. 此时上面的映射是同构. 更一般地, 这可以由一个谱序列控制.

定理 (Eilenberg–Moore 谱序列)

假设 X 和 Y 都是单连通的, 那么有谱序列

$$E_2^{pq}=\mathrm{Tor}_{-p}^{H^\bullet(Y)}(H^\bullet(E),H^\bullet(X))\text{ 的 }q\text{ 次部分}\Longrightarrow H^{p+q}(E_f).$$

证明思路

- 我们有

$$\mathrm{Sing}^\bullet(E) \otimes_{\mathrm{Sing}^\bullet(Y)} \mathrm{Sing}^\bullet(X) \xrightarrow{\times} \mathrm{Sing}^\bullet(E_f)$$

思路是假设 $f\colon X \to Y$ 和 CW 结构相容，从而左右两边同时重复 Leray–Serre 谱序列的证明，看在这个映射下怎么变化.

- 我们会发现如果 $\mathrm{Sing}^\bullet(X)$ 是自由 $\mathrm{Sing}^\bullet(Y)$-模，那么取同调和张量交换，最后这个映射在 E_2 层面变成

$$H^\bullet(Y; H^q(F)) \otimes_{H^\bullet(Y)} H^\bullet(X) \longrightarrow H^\bullet(X).$$

由此根据**比较定理**可知 $\times$ 计算相同的上同调.

- 但是一般来说 $\mathrm{Sing}^\bullet(X)$ 不是自由 $\mathrm{Sing}^\bullet(Y)$-模，因此我们需要取预解再用双复形计算. 这需要对指标比较耐心.

∼ § Cartan–Leray 谱序列 § ∼

Cartan–Leray 谱序列

定理 (Cartan–Leray 谱序列)
令 $\pi = \begin{bmatrix} E \\ \downarrow \\ X \end{bmatrix}$ 是一个正规 *(Galois)* 覆叠，即离散群 $G = \mathrm{Aut}_X(\pi)$ 自由地作用在 E 上，且 $X = E/G$. 那么有谱序列

$$E_2^{pq} = H^p(G; H^q(E)) \Longrightarrow H^{p+q}(X).$$

其中 $H^p(G; -)$ 是群上同调.

群上同调 $H^i(G, M)$ 是取不动点 $M^G = \{x \in M : gx = x\}$ 的导出版本. 所以这告诉我们取同调取不变部分的交换性.

证明思路

- 可以假设 X 是 CW 复形且局部平凡. 这赋予 E 一个 CW 复形结构. 如果记 $C^\bullet_-$ 是计算单纯复形的复形, 那么 $(C^\bullet_E)^G = C^\bullet_X$. 选取一个 $\mathbb{Z}[G]$ 预解 $P \to \mathbb{Z}$. 考虑双复形 $\mathrm{Hom}_G(P_\bullet, C^\bullet_E)$.

- 因为作用自由，所以 $C_E^\bullet$ 是**余诱导的**，从而 $H^{\geq 1}(G, C_E^\bullet) = 0$，

$\mathrm{Hom}_G(P_0, C_E^2) \to$	$\mathrm{Hom}_G(P_1, C_E^2) \to$	$\mathrm{Hom}_G(P_2, C_E^2)$
$\mathrm{Hom}_G(P_0, C_E^1) \to$	$\mathrm{Hom}_G(P_1, C_E^1) \to$	$\mathrm{Hom}_G(P_2, C_E^1)$
$\mathrm{Hom}_G(P_0, C_E^0) \to$	$\mathrm{Hom}_G(P_1, C_E^0) \to$	$\mathrm{Hom}_G(P_2, C_E^0)$

$(C_E^2)^G$		
$(C_E^1)^G \uparrow$		
$(C_E^0)^G \uparrow$		

$H^2(X)$		
$H^1(X)$		
$H^0(X)$		

- 另一方面

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_G(P_0, C^2_E) & \mathrm{Hom}_G(P_1, C^2_E) & \mathrm{Hom}_G(P_2, C^2_E) \\
\mathrm{Hom}_G(P_0, C^1_E) \arrow[u] & \mathrm{Hom}_G(P_1, C^1_E) \arrow[u] & \mathrm{Hom}_G(P_2, C^1_E) \arrow[u] \\
\mathrm{Hom}_G(P_0, C^0_E) \arrow[u] & \mathrm{Hom}_G(P_1, C^0_E) \arrow[u] & \mathrm{Hom}_G(P_2, C^0_E) \arrow[u]
\end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_G(P_0, H^2(E)) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_G(P_1, H^2(E)) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_G(P_2, H^2(E)) \\
\mathrm{Hom}_G(P_0, H^1(E)) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_G(P_1, H^1(E)) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_G(P_2, H^1(E)) \\
\mathrm{Hom}_G(P_0, H^0(E)) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_G(P_1, H^0(E)) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_G(P_2, H^0(E))
\end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd}
H^0(G; H^2(E)) \arrow[rrd] & H^1(G; H^2(E)) & H^2(G; H^2(E)) \\
H^0(G; H^1(E)) \arrow[rrd] & H^1(G; H^1(E)) & H^2(G; H^1(E)) \\
H^0(G; H^0(E)) & H^1(G; H^0(E)) & H^2(G; H^0(E))
\end{tikzcd}
$$

这就是我们断言的谱序列.

∼ § Atiyah–Hirzebruch 谱序列 § ∼

Atiyah–Hirzebruch 谱序列

定理 (Atiyah–Hirzebruch 谱序列)

假如有以 F 为纤维的纤维丛 $\left[\begin{smallmatrix} E \\ \downarrow \\ X \end{smallmatrix}\right]$, 当 X 有限时 (即, 由有限的胞腔构造而来), 则存在谱序列

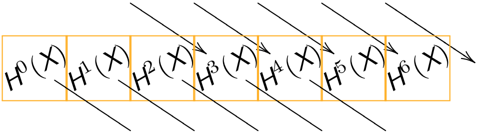
$$E_2^{pq} = H^p(X; \mathcal{K}^q(F)) \Longrightarrow K^{p+q}(E)$$

其中 $\mathcal{K}^q(F)$ 是纤维丛拓扑 K 理论对应的局部系统.

特别地，考虑 $F = \mathrm{pt}$ 和复代数 K 理论的情况，此时根据 **Bott 周期律** $K^q = K^{q+2}$，且

$$K^{\mathrm{even}}(\mathrm{pt}) = \mathbb{Z}, \qquad K^{\mathrm{odd}}(\mathrm{pt}) = 0$$

所以此时谱序列从第三页开始非平凡，如下图所示



证明思路

证明方法和 Leray–Serre 谱序列类似，关键一步是注意到

$$K^{p+q}(E_p, E_{p-1}) = H^p(X_p, X_{p-1}) \otimes K^q(F).$$

这是因为 (X_p, X_{p-1}) 其实另一个需要注意的地方是拓扑 K 理论不是由复形计算出的同调理论，因此实际上使用了正合对的构造 (我们跳过了).

即，在滤链构造谱序列中，我们可以得到

$$\cdots \longrightarrow H(F^{p+1}C) \longrightarrow H(F^pC) \longrightarrow H(F^{p+1}C/F^pC) \longrightarrow \cdots$$

正合对的构造是说，构造谱序列只需要这样的长正合列，不必来自复形的同调.

∼ § Adams 谱序列 § ∼

构造思路

令 G 是一个交换群.

我们可以根据 $\tilde{H}^{\bullet}(X;G)$ 的生成元构造一串纤维丛

$$\cdots \longrightarrow X(2) \longrightarrow X(1) \longrightarrow X(0) = X,$$

每个纤维都是 Eilenberg—MacLane 空间乘积 $\prod K(G,??)$ 的形式. 但是此时谱序列无法分析. 注意到

$$\tilde{H}^{\bullet}(X) = \tilde{H}^{\bullet+1}(\Sigma X)$$

所以我们改用**既约悬吊 (suspension)** $\Sigma^N X$ 替换 X, 得到新的

$$\cdots \longrightarrow X(2) \longrightarrow X(1) \longrightarrow X(0) = \Sigma^N X.$$

每个纤维都是 $\prod K(G, ??+N)$ 的形式.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
\boxed{\cdots} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} \\
\boxed{\cdots} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} \\
\boxed{\cdots} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\boxed{\mathbb{Z}} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} & \boxed{}
\end{array}
$$

同调上，利用纤维丛谱序列可以得到，当 $N \gg 0$,（忽略次数）

$$0 \longrightarrow \tilde{H}^\bullet(X(n+1); G) \longrightarrow \prod \tilde{H}^\bullet(K(G, ??); G) \longrightarrow \tilde{H}^\bullet(X(n); G) \longrightarrow 0$$

同伦上，利用纤维丛的长正合列可以得到，当 $N \gg 0$,（忽略次数）

$$\cdots \longrightarrow \pi_\bullet(X(n+1)) \longrightarrow \prod \pi_\bullet(K(G, ??)) \longrightarrow \pi_\bullet(X(n)) \longrightarrow \cdots .$$

取"极限" $N \to \infty$,

- 同调上，$\tilde{H}^\bullet(X(0); G)$ 依旧是 $\tilde{H}^\bullet(X; G)$，序列中间的模成为**Steenrod 代数** $\mathbb{A}$ 对其的预解 $P^\bullet$;
- 同伦上，$\pi_\bullet(X(0))$ 变成稳定同伦群 $\pi^s_\bullet(X)$，序列中间的模成为 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{A}}(P^\bullet, G)$,

Adams 谱序列

利用正合对得到谱序列

$$E_2 = \mathrm{Ext}_{\mathbb{A}}(\tilde{H}(X;G), G) \text{ “}\Longrightarrow\text{” } \pi^s(X).$$

但是我们需要添加条件来完成收敛性，还有小心处理次数，说明对 N 极限的合理性和验证正合性等．最终在 $G=\mathbb{Z}/p$ 时会得到

定理 (Adams 谱序列)

对于有限 CW 复形 X，

$$E_2^{pq} = \mathrm{Ext}^p_{\mathbb{A}_p^\bullet}(\tilde{H}^\bullet(X), \mathbb{Z}/p) \text{ 的 } q \text{ 次部分} \Longrightarrow \pi^s_{p+q}(X)\otimes\mathbb{Z}_{(p)},$$

其中 $\mathbb{Z}_{(p)}$ 是 p 进整数环．

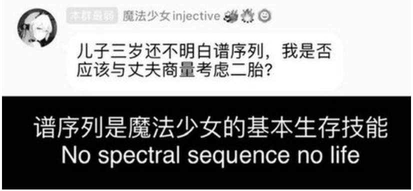
$\sim$ § 评注 § $\sim$

评注

- 利用 Leray–Serre 谱序列的手法结合一些拓扑知识，可以计算一部分球面的同伦群.（参见笔记）
- 我们之后会用谱序列计算一些经典的 Grassmann 流形，旗流形的上同调，并且讨论式性类，敬请期待.
- 在 $\mathbb{Q}$ 系数下，有限群 G 作用下的拓扑空间 X，不论作用是否自由，我们都有

$$H^\bullet(X;\mathbb{Q})^G = H^\bullet(X/G;\mathbb{Q}),$$

- 实际上，Atiyah–Hirzebruch 谱序列对一般的广义 Eilenberg–Steenrod 同调理论都对.



作业: 4.18, 4.20, 5.4,

下次: 谱序列在代数中的应用.

∼ § 感谢 § ∼