谱序列及其应用(I)

谱序列的构造

(校订版)

熊锐

山东大学　泰山学堂

2021 年 10 月

https://www.cnblogs.com/XiongRuiMath/p/14992978.html

引入

Spectral sequence is the thing which really controls when we guess something should be controlled by one.

— 沃兹基. 硕德

谱序列是一个广泛应用于数学各个领域的有力工具. 在**同调代数**, **代数拓扑**, **代数几何**等领域发挥的作用尤为显著. 如今, 谱序列的方法已经成为这些相关领域的研究生所必备的知识. 这次报告将致力于展现其理论及其应用.

本次的内容是谱序列的构造. 我们将会讨论**滤过复形**和**双复形**等谱序列构造. 我们会呈现**正确**且**自恰**的简单证明. 我们在构造之后很快就能看到谱序列的例子.

$\sim$ § <u>定义</u> § $\sim$

复形

对于一个复形 (C, d), 定义其**同调** $H(C) = \ker d / \operatorname{im} d$. 如下图所示

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
\cdots \arrow[rr, "d"] & & C^{i-1} \arrow[rr, "d"] \arrow[dr] & & \operatorname{im} d \arrow[rr] \arrow[dr] & & C^{i} \arrow[rr, "d"] \arrow[dr] & & \operatorname{im} d \arrow[rr] \arrow[dr] & & C^{i+1} \arrow[rr, "d"] & & \cdots \\
& & & \operatorname{cok} d \arrow[ur] \arrow[rr, bend right] & & \ker d \arrow[ur] \arrow[dr] & & \operatorname{cok} d \arrow[ur] \arrow[rr, bend right] & & \ker d \arrow[ur] \arrow[dr] & & & \\
& & H(C) \arrow[ur] & & & & H(C) \arrow[ur] & & & & H(C) & &
\end{tikzcd}
$$

注意到 C 到 $H(C)$ 或者 $H(C)$ 之间没有 “诱导” 的箭头.

谱序列 = 复形复复形

谱序列是一系列复形 $(E_r)_{r=r_0}^{\infty}$ 使得 $H(E_*) = E_{*+1}$. —"**复形复复形**"

$\boxed{\text{注意}}$ 谱序列 E_r 上的微分是"给出"的，而不是"诱导"的.

通常的谱序列的每一项都是双分次的. 我们采取下面的**上同调记号**.

双分次，上同调记号

对于谱序列 $E_r = (\bigoplus_{n=p+q} E_r^{pq})_{n\in\mathbb{Z}}$ 其微分 $d: E_r \to E_r$ 具有双次数 $(r, -r+1)$.

谱序列 (图示)

双分次, 上同调记号如图所示

$$\begin{tikzcd}
E_1^{03} \arrow[r] & E_1^{13} \arrow[r] & E_1^{23} \arrow[r] & E_1^{33} \\
E_1^{02} \arrow[r] & E_1^{12} \arrow[r] & E_1^{22} \arrow[r] & E_1^{32} \\
E_1^{01} \arrow[r] & E_1^{11} \arrow[r] & E_1^{21} \arrow[r] & E_1^{31} \\
E_1^{00} \arrow[r] & E_1^{10} \arrow[r] & E_1^{20} \arrow[r] & E_1^{30}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
E_2^{03} \arrow[drr] & E_2^{13} \arrow[drr] & E_2^{23} & E_2^{33} \\
E_2^{02} \arrow[drr] & E_2^{12} \arrow[drr] & E_2^{22} & E_2^{32} \\
E_2^{01} \arrow[drr] & E_2^{11} \arrow[drr] & E_2^{21} & E_2^{31} \\
E_2^{00} & E_2^{10} & E_2^{20} & E_2^{30}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
E_3^{03} \arrow[ddrrr] & E_3^{13} & E_3^{23} & E_3^{33} \\
E_3^{02} \arrow[ddrrr] & E_3^{12} & E_3^{22} & E_3^{32} \\
E_3^{01} & E_3^{11} & E_3^{21} & E_3^{31} \\
E_3^{00} & E_3^{10} & E_3^{20} & E_3^{30}
\end{tikzcd}$$

(上图每一条 ╲ 对角线的直和是一个复形的一项)

极限和收敛

对于谱序列 (E_r), 我们说 E_r 有**代数极限** 如果当 $r \gg 0$, E_r 上的微分是 0. 这时, 我们记其极限是 E_∞.

对于谱序列 (E_r), 一个模 H, 如果 H 存在一个有界的滤链, 使得其伴随分次对象 $\mathrm{gr}\, H = E_\infty$. 那么我们说 E_r **收敛到** H, 通常记为 $E_r \Rightarrow H$.

收敛, 上同调记号

模分次成 $H = (H^n)$ 被 $F^p H^n$ 滤过, 且当 p 越大, $F^p H^n$ 越小. 收敛的意思是说 $E_\infty^{pq} = \mathrm{gr}^p\, H^{p+q}$.

这里**有界**指的是, 滤链中只有有限个子空间不是零空间或全空间. 实际应用中会有其他意义的收敛, 我们暂不讨论.

收敛 (图示)

$$\begin{array}{cccccc}
\ddots & & & & & \\
& \supseteq & & & & \\
\ddots & F^0H^3 & & & & \\
& & \supseteq & & & \\
& \boxed{E_\infty^{03}} & F^1H^3 & & & \\
& & & \supseteq & & \\
& & \boxed{E_\infty^{12}} & F^2H^3 & & \\
& & & & \supseteq & \\
& & & \boxed{E_\infty^{21}} & F^3H^3 & \\
& & & & & \supseteq \\
& & & & \boxed{E_\infty^{30}} & F^4H^3 \\
& & & & & \supseteq \\
& & & & \ddots & \ddots
\end{array}$$

$\sim$ § <u>滤过复形</u> § $\sim$

滤过复形的谱序列

谱序列的一个主要来源是**滤过复形**.

定理

假如复形 (C, d) 上有一个有界滤链 F, 即 $F^* = F^* C$ 构成一个复形. 那么存在一个谱序列 E 使得 $E_0 = \mathrm{gr}\, C$, 其微分是诱导的微分,

$$E_1 = H(\mathrm{gr}\, C) \Longrightarrow H(C),$$

且 $H(C)$ 上的滤链是由 $\{\mathrm{im}\, d + F^* \cap \ker d\}$ 在 $H(C)$ 中的像给出的.

这告诉我们 "**取分次**" 和 "**取同调**" 的 "**交换性**".

上同调记号

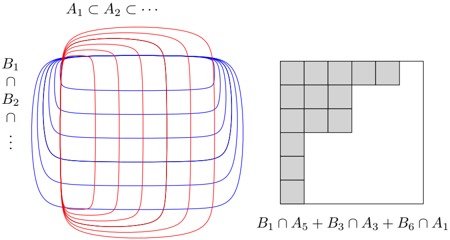
这里是说 $E_0^{pq} = F^p C^{p+q} / F^{p+1} C^{p+q}$.

关于滤链的一则哲学—子空间

考虑一个空间 (Abel 群, 线性空间, 模等) 上的两条有界滤链

$$\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small]
 & A_1 \arrow[r, phantom, "\subseteq"] & \cdots \arrow[r, phantom, "\subseteq"] & A_s \arrow[dr, phantom, "\subseteq"] & \\
0 \arrow[ur, phantom, "\subseteq"] \arrow[dr, phantom, "\subseteq"] & & & & X \\
 & B_1 \arrow[r, phantom, "\subseteq"] & \cdots \arrow[r, phantom, "\subseteq"] & B_t \arrow[ur, phantom, "\subseteq"] &
\end{tikzcd}$$

那么 $A_\bullet$ 和 $B_\bullet$ 的交和产生的空间可以用 Young 图来表示

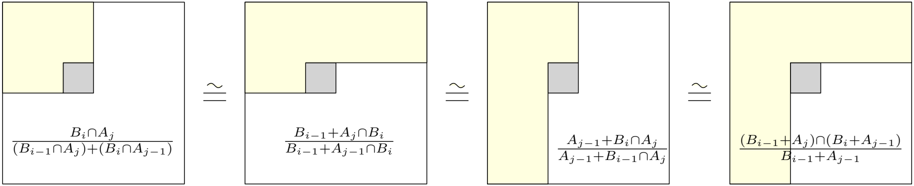


事实上, 此时这些空间上, $+, \cap$ 满足分配律.

关于滤链的一则哲学—商空间

任何一个斜 Young 图 (两个 Young 图的差) 则表示两个子空间的商. 且在同构意义下, 这和两个子空间的选取无关.

例如对于一个格子的情况, 这可以用 **Zassenhaus 引理** (即 "**蝴蝶引理**") 证明



关于滤链的一则哲学—函子性

如果有两个空间之间各自带有一条有界滤链，对于同态 $f\colon X \to Y$，考虑

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & A_1 \subseteq \cdots \subseteq A_s \arrow[dr, phantom, sloped, "\subseteq"] & \\
0 \arrow[ur, phantom, sloped, "\subseteq"] \arrow[dr, phantom, sloped, "\subseteq"] & & X \\
 & \ker f \subseteq f^{-1}(B_1) \subseteq \cdots \subseteq f^{-1}(B_t) \arrow[ur, phantom, sloped, "\subseteq"] &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & f(A_1) \subseteq \cdots \subseteq f(A_s) \subseteq \operatorname{im} f \arrow[dr, phantom, sloped, "\subseteq"] & \\
0 \arrow[ur, phantom, sloped, "\subseteq"] \arrow[dr, phantom, sloped, "\subseteq"] & & Y \\
 & B_1 \subseteq \cdots \subseteq B_t \arrow[ur, phantom, sloped, "\subseteq"] &
\end{tikzcd}$$

那么每一个对应的小格子都通过 f 诱导了同构.

证明思路

根据上面的讨论，我们可以用“函子性”得到一系列 C^i 的子商的同构.

$$
\begin{array}{ccc}
 & \cdots \subseteq d(F^pC^{n-1}) \subseteq \cdots \subseteq \operatorname{im} d \subseteq & \\
 \rotatebox{30}{$\subseteq$} & \quad\quad\quad \subseteq \ker d \subseteq \cdots \subseteq d^{-1}(F^pC^{n+1}) \subseteq \cdots & \rotatebox{-30}{$\subseteq$} \\
0 & & C^{p+q} \\
 \rotatebox{-30}{$\subseteq$} & & \rotatebox{30}{$\subseteq$} \\
 & \cdots \subseteq F^pC^n \subseteq \cdots &
\end{array}
$$

- 中间 $\operatorname{im} d \subseteq \ker d$ 的一列给出想要的同调群的滤链.
- 在 $\begin{matrix} F^{p+1}C^n \\ \cap\mid \\ F^pC^n \end{matrix}$ 一行对应行给出商复形的滤链.
- 如果 $p+q=n$，那么 E_0^{pq} 是一整行，E_1^{pq} 是一行去掉头尾，E_2^{pq} 是 E_{pq}^1 去掉头尾，以此类推，最终 E_∞^{pq} 是这行最中间 $\operatorname{im} d \subseteq \ker d$ 那列.

开始证明

定义

$$\begin{cases} Z^p_{r-1} = F^{p+1} + d^{-1}(F^{p+r}) \cap F^p & \supseteq F^{p+1} + \ker d \cap F^p \\ B^p_{r-1} = F^{p+1} + d(F^{p+1-r}) \cap F^p & \subseteq F^{p+1} + \operatorname{im} d \cap F^p \end{cases}$$

那么“小格子”

$$\begin{aligned} \frac{Z^p_{r-1}}{Z^p_r} &= \frac{F^{p+1} + d^{-1}(F^{p+r}) \cap F^p}{F^{p+1} + d^{-1}(F^{p+r+1}) \cap F^p} \\ &\overset{(*)}{=} \frac{d(F^{p+1}) + F^{p+r} \cap d(F^p)}{d(F^{p+1}) + F^{p+r+1} \cap d(F^p)} \\ &= \frac{F^{p+r} + d(F^p) \cap F^{p+r+1}}{F^{p+r} + d(F^{p+1}) \cap F^{p+r+1}} = \frac{B^{p+r}_r}{B^{p+r}_{r-1}} \end{aligned}$$

定义

$$E_r^p = \frac{Z_{r-1}^p}{B_{r-1}^p} = \frac{F^{p+1} + d^{-1}(F^{p+r}) \cap F^p}{F^{p+1} + d(F^{p+1-r}) \cap F^p}$$

$$d = \left[E_r^p = \frac{Z_{r-1}^p}{B_{r-1}^p} \twoheadrightarrow \frac{Z_{r-1}^p}{Z_r^p} \cong \frac{B_r^{p+r}}{B_{r-1}^{p+r}} \hookrightarrow \frac{Z_{r-1}^{p+r}}{B_{r-1}^{p+r}} = E_r^{p+r}\right].$$

那么 $\ker\left[E_r^p \xrightarrow{d} \cdots\right] = \frac{Z_r^p}{B_{r-1}^p}$, 且 $\mathrm{im}\left[\cdots \xrightarrow{d} E_r^p\right] = \frac{B_r^p}{B_{r-1}^p}$, 所以上同调群是 $\frac{Z_r^p}{B_r^p} = E_{r+1}^p$. 于是这给出一个谱序列.

关于收敛性

$$
\begin{aligned}
E_\infty^p &= \frac{\bigcap Z_r^p}{\bigcup B_r^p} = \frac{\bigcap F^{p+1} + d^{-1}(F^{p+r}) \cap F^p}{\bigcup F^{p+1} + d(F^{p-r-1}) \cap F^p} \\
&\overset{(*)}{=} \frac{F^{p+1} + \bigcap d^{-1}(F^{p+r}) \cap F^p}{F^{p+1} + \bigcup d(F^{p-r-1}) \cap F^p} = \frac{F^{p+1} + \ker d \cap F^p}{F^{p+1} + \operatorname{im} d \cap F^p} \\
&= \frac{\operatorname{im} d + F^p \cap \ker d}{\operatorname{im} d + F^{p+1} \cap \ker d}
\end{aligned}
$$

关于 E_1,

$$
E_1^p = \frac{Z_0^p}{B_0^p} = \frac{F^{p+1} + d^{-1}(F^{p+1}) \cap F^p}{F^{p+1} + d^{-1}(F^p) \cap F^p} = H(F^p / F^{p+1}).
$$

证闭.

～ § 例子 § ～

考虑复形的短正合列

$$0 \longrightarrow D \longrightarrow C \longrightarrow Q \longrightarrow 0.$$

我们可以将其视为一个滤链 $C \supseteq D \supseteq 0$. 其谱序列 E_0, E_1, E_2 如图

$$\begin{tikzcd}
Q^{i+1} & D^{i+2} \\
Q^{i} \arrow[u] & D^{i+1} \arrow[u] \\
Q^{i-1} \arrow[u] & D^{i} \arrow[u]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
H^{i+1}(Q) \arrow[r] & H^{i+2}(D) \\
H^{i}(Q) \arrow[r] & H^{i+1}(D) \\
H^{i-1}(Q) \arrow[r] & H^{i}(D)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{array}{cc}
\ker^{i+1} & \mathrm{cok}^{i+2} \\
\ker^{i} & \mathrm{cok}^{i+1} \\
\ker^{i-1} & \mathrm{cok}^{i}
\end{array}$$

所以此时 $E_2 = E_\infty$ 且收敛到 $H(C)$，即有短正合列

$$0 \longrightarrow \mathrm{cok}^i \longrightarrow H^i(C) \longrightarrow \ker^i \longrightarrow 0.$$

结合图上得到的

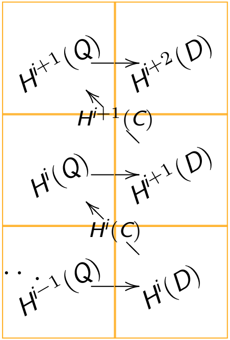
$$0 \longrightarrow \ker^i \longrightarrow H^i(Q) \longrightarrow H^{i+1}(D) \longrightarrow \mathrm{cok}^{i+1} \longrightarrow 0$$

我们可以串得长正合列

$$\cdots \longrightarrow H^i(D) \longrightarrow H^i(C) \longrightarrow H^i(Q) \longrightarrow H^{i+1}(D) \longrightarrow \cdots$$

这正是复形短正合列所诱导的长正合列.

助记:



单纯同调

记 $\mathrm{Sing}^\bullet(X)$ 为计算拓扑空间 X 的奇异上同调的复形. 对于子集 $U \subseteq X$, 我们有满射 $\mathrm{Sing}(X) \to \mathrm{Sing}(U)$, 记其核为 $\mathrm{Sing}(X, U)$. 根据定义, 这个复形是计算相对上同调 $H(X, U)$ 的复形.

令 X 是一个有限维 CW 复形. 记 X_k 是 $\leq k$ 维胞腔的并, 并约定 $X_{-1} = \varnothing$. 那么 $\mathrm{Sing}(X, X_*)$ 构成了一个 $\mathrm{Sing}(X)$ 上的有界滤链. 我们已知

$$H^{p+q}(X_p, X_{p-1}) = \begin{cases} \mathbb{Z}^{f_p}, & q = 0, \\ 0, & \text{否则}, \end{cases} \qquad f_p = \#\{p\text{-胞腔}\}.$$

因此谱序列形如

$$\boxed{\mathbb{Z}^{f_0}} \to \boxed{\mathbb{Z}^{f_1}} \to \boxed{\mathbb{Z}^{f_2}} \to \boxed{\mathbb{Z}^{f_3}}$$

这和计算单纯同调的复形相同.

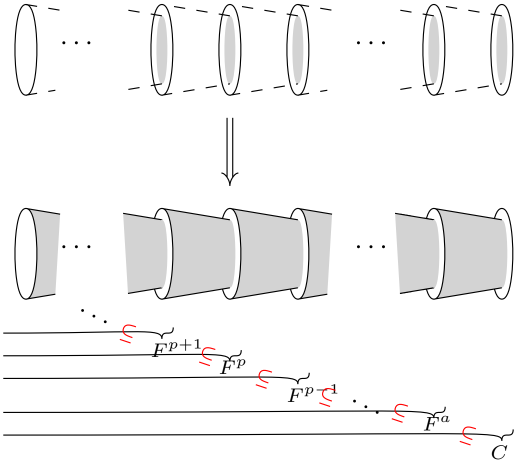
$\sim$ § <u>评注</u> § $\sim$

评注

- 在实际使用中会出现其他意义的极限. 例如我们将 E_r 写成初始项的子商 Z_{r-1}/B_{r-1}, 定义**经典极限**是 $E_\infty = \bigcap Z_r / \bigcup B_r$. 那么对于**穷遏的 (exhaustive)**且下方有界的滤链, 即零空间出现在滤链中, 且所有空间的并是全空间. 证明直接照搬即可 (习题 1.20).
- 实际上, 滤链只是一个技术性的条件. 因为任何一个复形的同态都 "同伦" 于一个单射. 这个构造就是**映射锥** (习题 1.22).
- 上述构造只适用于 "用复形计算的同调理论"(例如 K 理论就不是用复形计算的). 其实核心只需要能够产生长正合序列. 实际上**正合对 (exact couple)** 正是这样构造谱序列的 (笔记里有, 我们大概不会有时间讲了).

映射锥图示

$$0 \longrightarrow F^b \longrightarrow \cdots \longrightarrow F^{p+1} \longrightarrow F^p \longrightarrow F^{p-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow F^a \longrightarrow C$$



$\sim$ § 双复形 § $\sim$

双复形

考虑一个双复形 $C=(C^{pq})_{pq}$. 我们定义其**全复形** (在 Koszul 符号约定下)

$$
\mathrm{Tot}\,C:\quad
\begin{tikzcd}
p+q-1 & p+q & p+q+1 \\
C^{p-1,q} \arrow[dr, "d"] & \oplus & C^{p,q+1} \\
\oplus & C^{pq} \arrow[ur, "(-1)^p d"] \arrow[dr, "d"] & \oplus \\
C^{p,q-1} \arrow[ur, "(-1)^p d"] \arrow[dr, "d"] & \oplus & C^{p+1,q} \\
\oplus & C^{p+1,q-1} \arrow[ur, "(-1)^{p+1} d"] \arrow[dr, "d"] & \oplus \\
C^{p+1,q-2} \arrow[ur, "(-1)^{p+1} d"] & \oplus & C^{p+2,q-1}
\end{tikzcd}
$$

即在 C^{pq} 上, 微分给作

$$d=d_{(1,0)}+(-1)^p d_{(0,1)}.$$

双复形的谱序列

定理

对于双复形 C, 如果 $C^{pq}=0$ 对 $|p|\gg 0$, 那么存在一个谱序列 E 使得 $E_0=(C,d_{(0,1)})$, 在 E_1 上的微分诱导自 $\pm d_{(1,0)}$,

$$E_2=H(H(C,d_{(0,1)}),d_{(1,0)})\Longrightarrow H(\mathrm{Tot}\ C).$$

这告诉我们 "**两个方向分别取同调**" 和 "**取全复形的同调**" 的关系.

证明: 在 $\mathrm{Tot}\ C$ 上有 "列滤链" $\mathrm{Tot}(C^{pq})_{p\geq *}$. 对应的伴随分次复形恰是 $(C^{pq},d_{(0,1)})_{p=*}$. 剩余论断来自证明过程中的微分都诱导自 d.

双复形的谱序列图示

$$
\begin{tikzcd}
C \arrow[r] & C \arrow[r] & C \\
C \arrow[r] \arrow[u] & C \arrow[r] \arrow[u] & C \arrow[u] \\
C \arrow[r] \arrow[u] & C \arrow[r] \arrow[u] & C \arrow[u]
\end{tikzcd}
\quad \Bigg| \quad
\begin{tikzcd}
C & C & C \\
C \arrow[u] & C \arrow[u] & C \arrow[u] \\
C \arrow[u] & C \arrow[u] & C \arrow[u]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
H \arrow[r] & H \arrow[r] & H \\
H \arrow[r] & H \arrow[r] & H \\
H \arrow[r] & H \arrow[r] & H
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
E \arrow[drr] & E & E \\
E \arrow[drr] & E & E \\
E & E & E
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
C \arrow[r] & C \arrow[r] & C \\
C \arrow[r] \arrow[u] & C \arrow[r] \arrow[u] & C \arrow[u] \\
C \arrow[r] \arrow[u] & C \arrow[r] \arrow[u] & C \arrow[u]
\end{tikzcd}
\quad \Bigg| \quad
\begin{tikzcd}
C \arrow[r] & C \arrow[r] & C \\
C \arrow[r] & C \arrow[r] & C \\
C \arrow[r] & C \arrow[r] & C
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
H & H & H \\
H \arrow[u] & H \arrow[u] & H \arrow[u] \\
H \arrow[u] & H \arrow[u] & H \arrow[u]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
E & E & E \\
E & E & E \\
E & E \arrow[uul] & E \arrow[uul]
\end{tikzcd}
$$

下图的情况通常会取以转置.

∼ § 例子 § ∼

蛇形引理

假设有每行都是正合列的交换图

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "s"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "t"] & C \arrow[r] \arrow[d, "r"] & 0 \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "k"] & Y \arrow[r, "h"] & Z &
\end{tikzcd}$$

我们可以将其视为一个双复形.

$$\begin{array}{|c|c|c|}
\hline
A \to & B \to & C \\
\hline
X \to & Y \to & Z \\
\hline
\end{array}
\qquad
\begin{array}{|c|c|c|}
\hline
\ker f & 0 & 0 \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow \\
\hline
0 & 0 & \operatorname{cok} h \\
\hline
\end{array}$$

从这个方向会发现全复形的同调是

$$\ker f, \qquad 0, \qquad 0, \qquad \operatorname{cok} h.$$

从另一个方向会发现

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d] & B \arrow[d] & C \arrow[d] \\ X & Y & Z \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \ker s \arrow[r] & \ker t \arrow[r] & \ker r \\ \operatorname{cok} s \arrow[r] & \operatorname{cok} t \arrow[r] & \operatorname{cok} r \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} K_1 & M & C_1 \\ K_2 \arrow[urr] & N & C_2 \end{tikzcd}$$

因此 $K_1=\ker f$, $C_2=\operatorname{cok} h$, $M=0$, $N=0$, 且 $K_2\to C_1$ 是同构. 这给出了**蛇形引理**,

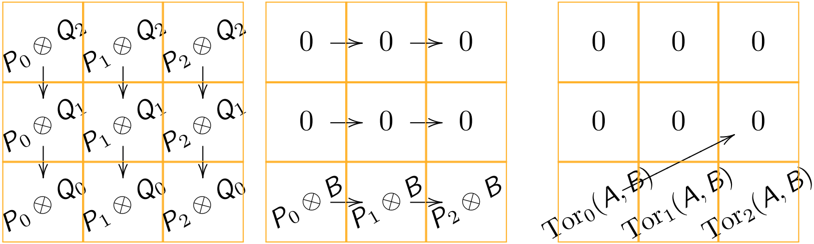
$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \ker f \arrow[r] \arrow[d, equal] & \ker s \arrow[r] \arrow[d] & \ker t \arrow[r] \arrow[d] & \ker r \arrow[d] \arrow[ddll, rounded corners, to path={-- ([xshift=2ex]\tikztostart.east) |- ([yshift=-2ex]\tikztostart.south) -| ([xshift=-2ex]\tikztotarget.west) -- (\tikztotarget)}] & & \\
0 \arrow[r] & \ker f \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d] & 0 & \\
& 0 \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[r] \arrow[d] & Z \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{cok} h \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
& & \operatorname{cok} s \arrow[r] & \operatorname{cok} t \arrow[r] & \operatorname{cok} r \arrow[r] & \operatorname{cok} h \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

平衡 Tor 和 Ext

令 A, B 是两个 (右, 左) 模, 取投射预解 $P \to A$ 和 $Q \to B$. 那么 $P \otimes Q$ 是一个双复形, 那么

$$H_n(\mathrm{Tot}(P \otimes Q)) = \mathrm{Tor}_n(A, B).$$

事实上,



类似结果也应用于 Ext.

零伦足矣

对于一个左正合函子 F, 回忆**导出函子** R^iF 的定义

对对象 A, 选择内射预解 $A \to I$, 定义**导出函子** $R^iF = H^i(F(I))$.

我们称 A 是***F*-零伦**的如果 $R^iF(A) = 0$ 对 $i \geq 1$.

如果 $A \to I$ 是一个预解且每个 I^i 都是 F-零伦的, 那么 $R^iF(A) = H^i(F(I))$.

因为我们可以对每个 I^i 取预解 $I^i \to J^i$, 那么 $A \to \mathrm{Tot}\, J$ 是一个内射预解:

$$
\begin{tikzcd}
J^{02} & J^{12} & J^{22} \\
J^{01} \arrow[u] & J^{11} \arrow[u] & J^{21} \arrow[u] \\
J^{00} \arrow[u] & J^{10} \arrow[u] & J^{20} \arrow[u]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \\
I^0 \arrow[r] & I^1 \arrow[r] & I^2
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
A \arrow[urr] & 0 & 0
\end{tikzcd}
$$

作用 F (作用函子和取 Tot 交换), 再用谱序列

$$
\begin{tikzcd}
F(J^{02}) & F(J^{12}) & F(J^{22}) \\
F(J^{01}) \arrow[u] & F(J^{11}) \arrow[u] & F(J^{21}) \arrow[u] \\
F(J^{00}) \arrow[u] & F(J^{10}) \arrow[u] & F(J^{20}) \arrow[u]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
R^2F(I^0) \arrow[r] & R^2F(I^1) \arrow[r] & R^2F(I^2) \\
R^1F(I^0) \arrow[r] & R^1F(I^1) \arrow[r] & R^1F(I^2) \\
F(I^0) \arrow[r] & F(I^1) \arrow[r] & F(I^2)
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
F(I^0) \arrow[r] & F(I^1) \arrow[r] & F(I^2)
\end{tikzcd}
$$

这就证明了结论.

Mayer–Vietoris 谱序列

假设拓扑空间 X 有一个有限的开覆盖 $\mathcal{U}$. 记

$$U_{i_0,\dots,i_p} = U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_p}, \qquad U^p = \coprod_{i_0<\dots<i_p} U_{i_0,\dots,i_p}.$$

定义

$$\mathrm{res}_{i_\ell} : \quad \mathrm{Sing}(U_{i_0,\dots,\hat{i_\ell},\dots,i_p}) \longrightarrow \mathrm{Sing}(U_{i_0,\dots,i_p}).$$

考虑下面的双复形

$$\check{C}^{pq} = \mathrm{Sing}^q(U^p) = \prod_{i_0<\dots<i_p} \mathrm{Sing}^q(U_{i_0,\dots,i_p}), \qquad d_{(1,0)} = \prod_{i_0<\dots<i_p} \sum_{\ell=0}^{p} (-1)^\ell \,\mathrm{res}_{i_\ell}$$

三个开集的例子

假设 A, B, C 三个开集 (实线 $+$, 虚线 $-$)

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 & 1 & 2 \\
 & \mathrm{Sing}(A) \arrow[r, dotted] \arrow[dr, dotted] & \mathrm{Sing}(A\cap B) \arrow[dr] & \\
\mathrm{Sing}(X) \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & \mathrm{Sing}(B) \arrow[ur] \arrow[dr, dotted] & \mathrm{Sing}(A\cap C) \arrow[r, dotted] & \mathrm{Sing}(A\cap B\cap C) \\
 & \mathrm{Sing}(C) \arrow[ur] \arrow[r] & \mathrm{Sing}(B\cap C) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

根据代数拓扑，上面的复形组成的复形的同调都是 0.

一方面，横向，

$$
\begin{tikzcd}
\check{C}^{0,q+1} \arrow[r] & \check{C}^{1,q+1} \arrow[r] & \check{C}^{2,q+1} \\
\check{C}^{0,q} \arrow[r] & \check{C}^{1,q} \arrow[r] & \check{C}^{2,q} \\
\check{C}^{0,q-1} \arrow[r] & \check{C}^{1,q-1} \arrow[r] & \check{C}^{2,q-1}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
? & ? & ? \\
? \arrow[u] & ? \arrow[u] & ? \arrow[u] \\
? \arrow[u] & ? \arrow[u] & ? \arrow[u]
\end{tikzcd}
\simeq
\begin{tikzcd}
\mathrm{Sing}^{q+1}(X) & 0 & 0 \\
\mathrm{Sing}^{q}(X) \arrow[u] & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] \\
\mathrm{Sing}^{q-1}(X) \arrow[u] & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u]
\end{tikzcd}
$$

所以全复形的同调是 $H(X)$.

另一方面

$$\begin{tikzcd}
\check{C}^{p-1,q+1} & \check{C}^{p,q+1} & \check{C}^{p+1,q+1} \\
\check{C}^{p-1,q} \arrow[u] & \check{C}^{pq} \arrow[u] & \check{C}^{p+1,q} \arrow[u] \\
\check{C}^{p-1,q-1} \arrow[u] & \check{C}^{p,q-1} \arrow[u] & \check{C}^{p+1,q-1} \arrow[u]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
H^{q+1}(U^{p-1}) \arrow[r] & H^{q+1}(U^{p}) \arrow[r] & H^{q+1}(U^{p+1}) \\
H^{q}(U^{p-1}) \arrow[r] & H^{q}(U^{p}) \arrow[r] & H^{q}(U^{p+1}) \\
H^{q-1}(U^{p-1}) \arrow[r] & H^{q-1}(U^{p}) \arrow[r] & H^{q-1}(U^{p})
\end{tikzcd}$$

于是我们得到了 Mayer–Vietoris 谱序列,

$$E_1^{pq} = H^q(U^p) \Longrightarrow H^{p+q}(X).$$

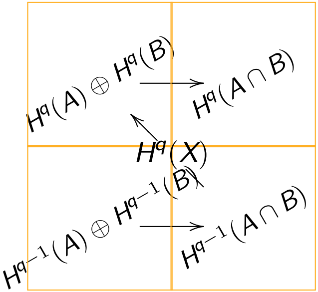
当所有 U^p 都零伦时, E_1 只剩下 $H^0(U_p)=\mathbb{Z}^{f_p}$, 其中 f_p 是 U_p 的连通分支数目. 这种计算方法得到的上同调叫**Čech 上同调**. 通过一些努力, 奇异同调可以被包括进这一方法

当只有两个开集 A 和 B 时,

$$H^q(U^0)=H^q(A)\oplus H^q(B)$$

$$H^q(U^1)=H^q(A\cap B).$$

此时谱序列给出 Mayer–Vietoris 序列.



∼ § 评注 § ∼

评注

- 全复形定义中使用的 Koszul 符号能够非常简便地取“转置”和“维数变动”. (习题 2.12)
- 追图中很多定理都可以用双复形的谱序列覆盖 (习题 2.14, 习题 2.15). 他们又都是**越过 (transgression)** (笔记中 2.7) 的例子.
- 关于导出函子的例子实际上启发了 Grothendieck 谱序列, 并且还有导出范畴版本, 我们后面也会讨论, 敬请期待.
- 关于 Čech 上同调我们还会讨论层论版本, 敬请期待.

习题: 1.18, 1.21, 1.22, 2.7, 2.14, 2.15.

下次: 谱序列在拓扑中的应用.

$\sim$ § 感谢 § $\sim$