

**MODELADO DE UN ROBOT BÍPEDO DE MARCHA  
SEMI-ESTÁTICA CON SEIS GRADOS DE LIBERTAD USANDO EL  
MÉTODO DEL PRODUCTO DE EXPONENCIALES**

**WILSON JAVIER ALMARIO RODRÍGUEZ  
JOSÉ LIBARDO LESMES MORA**

**ESCUELA TECNOLÓGICA INSTITUTO TÉCNICO CENTRAL  
INGENIERÍA MECATRÓNICA  
BOGOTÁ  
2017**

**MODELADO DE UN ROBOT BÍPEDO DE MARCHA  
SEMI-ESTÁTICA CON SEIS GRADOS DE LIBERTAD USANDO EL  
MÉTODO DEL PRODUCTO DE EXPONENCIALES**

**WILSON JAVIER ALMARIO RODRÍGUEZ  
JOSÉ LIBARDO LESMES MORA**

**Trabajo de grado para optar por el título de ingeniero en  
mecatrónica**

**Dirigida por: Henry Jinete Marquez  
Ingeniero Electrónico**

**ESCUELA TECNOLÓGICA INSTITUTO TÉCNICO CENTRAL  
INGENIERÍA MECATRÓNICA  
BOGOTÁ  
2017**

Nota de aceptación:

---

---

---

---

---

---

---

**Responsabilidad.** Ni la Escuela Tecnológica Instituto Técnico Central, ni el Asesor, ni los Jurados calificadores son responsables de las ideas expuestas por los autores del Trabajo de Grado.

---

Director de Trabajo de Grado

---

Jurado

---

Jurado

BOGOTÁ, Mes día de año

Texto de los agradecimientos (opcional)

## RESUMEN

Este trabajo tiene como finalidad el modelar matemáticamente y simular un robot bípedo de seis grados de libertad usando el método del producto de exponenciales, se pretende abordar el robot como la unión de cadenas cinemáticas, visto de esta manera el método propuesto parte del conocimiento de la posición y orientación del extremo del robot (un pie y el otro como referencia) en su configuración de reposo, para ir obteniendo en qué se transforman éstas tras los sucesivos movimientos de sus grados de libertad en secuencia descendente, desde el más alejado al más cercano a su base. Se aplica a una caminata semi-estática lo que significa que el análisis matemático se realizará como si estuviera en reposo lo que permite proyectar su centro de masa en un polígono cerrado formado por los pies, lo que permite despreciar los efectos dinámicos, se da este enfoque ya que analizarlo de forma dinámica se debe considerar el criterio del punto de momento cero lo que va más allá de nuestro trabajo.

Primero se hace un análisis de los trabajos realizados de robots bípedos, luego analizar y comprender el caminar bípedo se procede a explicar la teoría a implementar, posteriormente se realiza el diseño de la estructura, el estudio de materiales, ya con la estructura definida se procede a realizar el modelo matemático y por último la simulación para su correcta validación.

# CONTENIDO

<b>INTRODUCCIÓN</b>	<b>11</b>
<b>1 DEFINICIÓN DEL PROBLEMA</b>	<b>12</b>
1.1 DELIMITACIÓN DEL PROBLEMA . . . . .	13
1.2 FORMULACIÓN DEL PROBLEMA . . . . .	13
<b>2 JUSTIFICACIÓN</b>	<b>14</b>
<b>3 OBJETIVOS</b>	<b>15</b>
3.1 OBJETIVO GENERAL . . . . .	15
3.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS . . . . .	15
<b>4 MARCO REFERENCIAL</b>	<b>16</b>
4.1 MARCO HISTÓRICO . . . . .	16
4.2 MARCO TEÓRICO . . . . .	23
4.2.1 Robots bípedos. . . . .	23
4.2.2 Cinemática del robot. . . . .	24
4.2.3 Cinemática directa. . . . .	24
4.2.4 Cinemática inversa. . . . .	24
4.2.5 Representación de la posición y de la orientación. . . . .	24
4.2.6 Ángulos Euler. . . . .	28
4.2.7 Coordenadas exponenciales. . . . .	30
4.2.8 Screw Motion . . . . .	31
4.2.9 Matrices de transformación homogénea. . . . .	34
4.2.10 Formula del producto de exponenciales . . . . .	35
4.2.11 Primera Formulación: Forma Espacial del PoE . . . . .	35
4.2.12 Segunda Formulación: Forma Efectoria del PoE . . . . .	37
4.3 MARCO CONCEPTUAL . . . . .	39
4.3.1 La locomoción humana. . . . .	39
4.3.2 El ciclo de la marcha. . . . .	39
4.3.3 Marcha bípeda. . . . .	40
4.3.4 Marcha estática. . . . .	40

4.3.5	Marcha dinámica. . . . .	41
4.3.6	Desarrollo de robots bípedos. . . . .	41
<b>5</b>	<b>ALCANCE Y LIMITACIONES</b>	<b>43</b>
5.1	Alcances del proyecto. . . . .	43
5.2	Limitaciones del proyecto. . . . .	43
<b>6</b>	<b>DISEÑO METODOLÓGICO</b>	<b>44</b>
6.1	TIPO DE INVESTIGACIÓN. . . . .	44
6.2	ENFOQUE. . . . .	44
6.3	PLAN PARA RESOLVER PROBLEMA. . . . .	44
6.3.1	Etapas de estructuración y revisión bibliográfica. . . . .	44
6.3.2	Etapas de estudio. . . . .	45
6.3.3	Estudio de herramientas necesarias. . . . .	45
6.3.4	Diseño estructural en software CAE. . . . .	45
6.3.5	Análisis Mecánico. . . . .	45
6.3.6	Modelar matemáticamente la cinemática del robot. . . . .	46
6.3.7	Integración del modelo mecánico y cinemático. . . . .	46
6.3.8	Demostración del funcionamiento del modelo desarrollado y conclusión. . . . .	46
6.4	LINEAS DE INVESTIGACIÓN DEL PROGRAMA. . . . .	46
<b>7</b>	<b>DISEÑO MECÁNICO</b>	<b>47</b>
7.1	DISEÑO DE LA ESTRUCTURA DEL ROBOT BÍPEDO. . . . .	47
7.2	ANÁLISIS MECÁNICO . . . . .	53
7.2.1	Material Seleccionado . . . . .	53
7.2.2	Centro de Masa . . . . .	54
7.2.3	Análisis Estático Del Robot . . . . .	58
<b>8</b>	<b>MODELO CINEMÁTICO</b>	<b>60</b>
<b>9</b>	<b>SIMULACIÓN</b>	<b>68</b>
9.1	Fase de soporte único . . . . .	69
9.2	Fase de soporte doble . . . . .	69
9.3	Algoritmo para la caminata . . . . .	70
<b>10</b>	<b>CONCLUSIONES</b>	<b>76</b>





# LISTA DE FIGURAS

Figura 1. Wabot-1. . . . .	17
Figura 2. Robot E0. . . . .	17
Figura 3. Robot E1, E2 y E3. . . . .	18
Figura 4. Wabian. . . . .	18
Figura 5. Robot P1, P2 y P3 . . . . .	19
Figura 6. Robot ASIMO 2000. . . . .	20
Figura 7. Robot PARTNER. . . . .	20
Figura 8. Robot NAO . . . . .	21
Figura 9. Robot KOBIAN . . . . .	22
Figura 10. KIROBOT. . . . .	22
Figura 11. Robot PETMAN . . . . .	23
Figura 12. Vector de coordenadas $P$ . . . . .	25
Figura 13. Ubicación de un objeto en posición y orientación. . . . .	26
Figura 14. Ángulos de Euler $XYZ$ . . . . .	29
Figura 15. Ángulos de Euler: Roll, Pitch y Yaw. . . . .	29
Figura 16. Rotación del vector $P$ alrededor del eje $\omega$ un ángulo $\theta$ . . . . .	30
Figura 17. Desplazamiento de un cuerpo rígido expresado como un movimiento screw. . . . .	32
Figura 18. Fórmula de PoE ilustrada en un robot simple de cadena abierta con $n$ grados de libertad. . . . .	36
Figura 19. Ciclo del caminado del ser humano. . . . .	39
Figura 20. Marcha estática. . . . .	40
Figura 21. Modelo mecánico y pruebas del prototipo . . . . .	41
Figura 22. Robot Wabian 2 en la actualidad . . . . .	42
Figura 23. Extremidad inferior del cuerpo humano. . . . .	47
Figura 24. Diseño Cadera. . . . .	48
Figura 25. Diseño Fémur. . . . .	49
Figura 26. Diseño Pierna. . . . .	50
Figura 27. Diseño Pie. . . . .	50
Figura 28. Servomotor DYNAMIXEL RX- 24F . . . . .	51

Figura 29. Diseño Servomotor. . . . .	52
Figura 30. Robot Bípedo. . . . .	52
Figura 31. Simulación de material ABS en el pie. . . . .	53
Figura 32. Sección Pie con $m = 0,032kg$ . . . . .	55
Figura 33. Sección Pierna con $m = 0,020kg$ . . . . .	56
Figura 34. Sección Femur con $m = 0,020kg$ . . . . .	56
Figura 35. Sección Cadera con $m = 0,023kg$ . . . . .	57
Figura 36. Centro de masa del robot. . . . .	57
Figura 37. Propiedades físicas y mecánicas del ABS. . . . .	58
Figura 38. Tensión Von Mises en el Robot. . . . .	59
Figura 39. Modelo de Alambres del Robot. . . . .	60
Figura 40. Intercambio de sistema de coordenadas . . . . .	67
Figura 41. Modelo alambres robot bipedo . . . . .	68
Figura 42. Fase soporte . . . . .	69
Figura 43. Fase soporte doble. . . . .	70
Figura 44. Algoritmo simulación. . . . .	71
Figura 45. Función trayectoria . . . . .	72
Figura 46. Función matriz exponencial . . . . .	73
Figura 47. Generación fase soporte único . . . . .	74
Figura 48. Fase doble soporte . . . . .	74
Figura 49. Soporte pie izquierdo. . . . .	74

## LISTA DE TABLAS

Tabla 1. Comparación de especificaciones . . . . .	51
Tabla 2. Características físicas de los materiales en Articulación Pie . . . . .	54

# INTRODUCCIÓN

Los robots bípedos representan uno de los movimientos más complejos e interesantes que el hombre realiza diariamente, la marcha. El análisis de la marcha estática y dinámica en bípedos se ha incrementado en los últimos años debido a las ventajas de movilidad que presentan con respecto a otros robots móviles, por ejemplo, con ruedas convencionales. La marcha bípeda es un fenómeno periódico, donde el ciclo de la marcha se define como el intervalo comprendido entre dos eventos sucesivos referidos a una misma pierna y no teniendo ambos pies separados del suelo a la vez.

Durante la marcha se tienen dos periodos o fases importantes: fase de soporte doble (FSD) y fase de soporte simple (FSS), dependiendo del número de pies en apoyo. El balanceo estático se basa en el concepto del centro de masa (CoM). La condición de balanceo estático se reduce a la proyección del CoM dentro del área formada por la planta de los pies. Este trabajo presenta una metodología de diseño diferente a la usada tradicionalmente, aplica el producto de exponenciales (PoE), esta representación es relativamente moderna comparada con los parámetros de Denavith-Hartenberg, y hace uso de la descripción de los movimientos del cuerpo rígido mediante matrices exponenciales para la obtención del modelo cinemático, ofreciendo un enfoque geométrico, este enfoque es un campo moderno en la robótica, se pretende aplicar este enfoque y mostrar su aplicación en este caso particular para un robo bípedo de seis grados de libertad.

# 1. DEFINICIÓN DEL PROBLEMA

El campo de la robótica incluye el desarrollo de robots móviles los cuales pueden ser clasificados según el medio en el que se desplacen: terrestres, marinos y aéreos. Los terrestres generalmente se desplazan mediante ruedas o patas [11]; de este tipo de robots se ha tenido un particular interés en los robots que se desplazan con patas, en especial los robots bípedos los cuales su diseño se basa en la locomoción humana para sus movimientos, ya que tienen mejor desempeño en terrenos desconocidos [1]. Sin embargo un problema en el diseño de estos sistemas mecánicos es el efecto Hughes, el cual consiste el incremento de la dificultad de forma exponencial con el número de grados de libertad, haciendo que los problemas en un espacio dimensional elevado sean muy difícil de manejar [24]; por esto la necesidad de formulaciones sencillas para el modelo matemático del movimiento es un asunto de gran relevancia al momento de estudiar este tipo de robots, para esto se desea tener una representación de las ecuaciones de forma explícita donde los parámetros cinemáticos y dinámicos del sistema mecánico puedan ser representados de una forma transparente. Muchas aplicaciones de planificación y control de robots necesitan ecuaciones que puedan ser derivadas explícitamente con respecto a ciertos parámetros de interés. Al revisar la literatura existente sobre robot bípedo se encuentra que su diseño está basado en la formulación de Denavit-Hartenberg además de no haber una descripción explícita o detallada del modelo, también se encuentra que con esta formulación es más complejo el diseño, por ejemplo para los sistemas de referencia debemos construir uno por cada eslabón de la cadena cinemática lo cual lleva a que existan singularidades por lo cual se debe recurrir a soluciones numéricas.[20]

Bajo este contexto se pretende realizar el modelo matemático para un robot bípedo usando la formulación POE (Producto de Exponenciales) ya que presenta ventajas frente a la formulación de Denavit-Hartenberg como la utilización de solo dos sistemas de referencia, la facilidad de obtener el jacobiano y las velocidades del robot sin necesidad de calcular derivadas reduciendo la complejidad del modelo.

## **1.1. DELIMITACIÓN DEL PROBLEMA**

Se abarcara el modelado matemático cinemático de un robot bípedo, vista como la unión de dos cadenas articuladas usando el método de producto exponencial. No existiendo conocimiento ni experiencia en el diseño de robots bípedos en la ETITC, se pretende contextualizar el trabajo allí para que sea un punto de partida en esta área para que sea un apoyo a los grupos de investigación que se están conformando en torno a este campo.

## **1.2. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA**

¿Cómo modelar matemáticamente un robot bípedo de marcha semi-estática usando el método de producto exponencial?

## 2. JUSTIFICACIÓN

Los robots bípedos son mecanismos diseñados para imitar el caminar humano, estos conforman un área de investigación con gran crecimiento en los últimos años. Si bien el desplazamiento mediante rueda es más eficiente y permite mayor velocidad, los robots bípedos con patas son más versátiles y pueden desplazarse en terrenos irregulares. En particular los bípedos son especialmente aptos para manejar en nuestro entorno, por contar con características similares a las de los seres humanos. Es así sin necesidad de modificar nuestros lugares de trabajo, estos robots pueden realizar tareas por nosotros, siendo particularmente interesante su aplicación a trabajos que ponen en riesgo la salud o vida de la persona. Sin embargo antes de empezar a dar solución a este tipo de problemas, se debe comenzar por lo básico de un robot bípedo, el diseño y su correcto funcionamiento. [26]

Es importante la realización del proyecto ya que se realizara un modelo matemático detallado y transparente del modelo cinemático del robot utilizando una metodología diferente a la que se utiliza tradicionalmente; la formulación de producto exponencial basado en geometría diferencial cuya matemática está asociada a los grupos de y álgebras de Lie, la cual proporciona una formulación elegante de varios problemas canónicos, la idea de este método es reducir la complejidad del problema cinemático inverso mediante la división del mismo en subproblemas más sencillos, que ocurren de forma frecuente en la mecánica de robots, y cuyas soluciones geométricas son conocidas, en este sentido la realización del proyecto aporta un enfoque diferente al modelado de robots bípedos explorando una técnica diferente. Además importante la realización del proyecto porque es un punto de partida para la investigación en la Escuela Tecnológica en esta área y una aplicación o continuación de trabajos previos hechos anteriormente en la institución [2] [25] así creando una base de conocimiento en la institución que permita realizar investigaciones a futuro en este campo.

### **3. OBJETIVOS**

#### **3.1. OBJETIVO GENERAL**

Modelar matemáticamente un robot bípedo de marcha semi-estática usando el método de producto exponencial, creando una base de conocimiento en la Escuela Tecnológica para que sea un punto de partida en investigación sobre robots bípedos.

#### **3.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS**

- Modelar estructura mecánica del robot bípedo.
- Modelar la estructura cinemática del robot como la unión de dos cadenas articuladas usando el método de producto exponencial.
- Integrar el modelo mecánico y cinemático del robot bípedo.
- Demostrar por medio de una simulación el correcto funcionamiento del modelo mecánico y cinemático del robot.



## 4. MARCO REFERENCIAL

### 4.1. MARCO HISTÓRICO

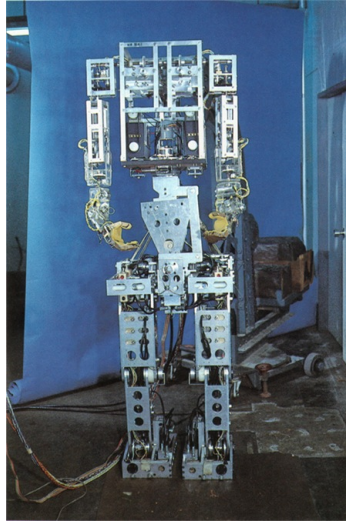
Si bien en principio los modelos analizados son prácticamente todos japoneses, no hay que olvidar que hay humanoides de interesantes características desarrollados en los EEUU por el MIT, en Canadá por Dr. Robot, en Corea del Sur por el KAIST o el KIST, en Suecia por la Universidad Chalmers, en China por el CMST, etc.

El robot ELEKTRO fue presentado en la feria mundial de Nueva York. Podría caminar por comando de voz, hablar (usando un tocadiscos de 78-rpm), podía fumar, volar globos, y mover la cabeza y los brazos.

A finales de los años 60 en Japón se crea un nuevo interés por los robots que se asemejen al ser humano, tanto en su apariencia como comportamiento, fue un gran reto al inicio pero mientras pasaba el tiempo y con el conocimientos y tecnología cada vez más avanzados se han llegado a construir robots bípedos y humanoides sorprendentes hasta la actualidad.

- **1970.** El WABOT-1 (Figura 1) fue el primer robot antropomórfico a gran escala desarrollado en el mundo. Se componía de un sistema de control para las extremidades, un sistema de visión y conversación. Era capaz de comunicarse con personas en japonés, medir distancias de los objetos con los sensores y lo más importante caminar. fue el inicio de una amplia familia de robots bípedos y humanoides. [16]

**Figura 1.** Wabot-1.



Fuente: Pagina web[16]

- **1986.** Honda desarrollo E0 (Figura 2 ) con el cual se estudió los principios de la locomoción bípeda observo todas las formas de caminar (caminata rápida y caminata lenta). caminaba poniendo una pierna antes que la otra, se logró con éxito la locomoción, pero sólo podía caminar lentamente en línea recta y cada paso tardaba cinco segundos. [8]

**Figura 2.** Robot E0.



Fuente: Pagina web [8]

- **1987 – 1991.** Honda inicia investigaciones del caminado también llamado ca-

minado dinámico, Honda investigó y analizó la marcha humana en profundidad. No solamente se estudiaron las forma de caminar humana sino de otros animales. El robot E1 (Figura 3) caminaba estáticamente, el E2 (Figura 3) fue el primer robot que podía caminar dinámicamente alcanzando una velocidad de 1.2 Km/h; finalmente el E3 (Figura 3) alcanzo una velocidad de 3 Km/h. [5]

**Figura 3.** Robot E1, E2 y E3.



Fuente: Pagina web [5]

- **1992.** Para dar continuidad al WABOT en la universidad de Waseda se desarrolla el robot WABIAN (Figura 4) con mejores características y prestaciones. [17]

**Figura 4.** Wabian.

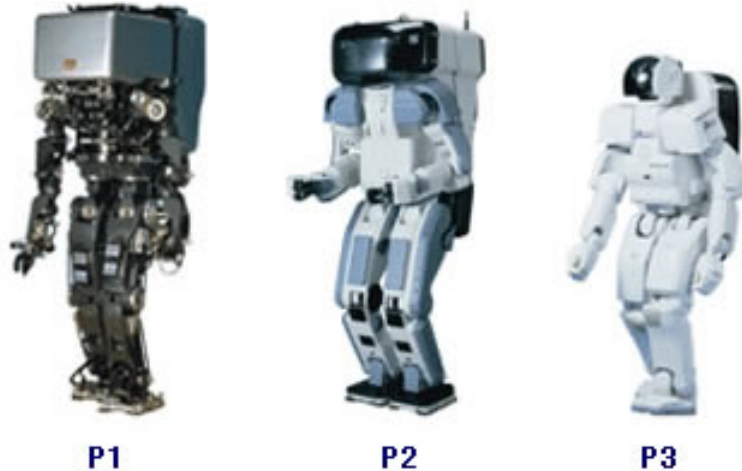


Fuente: Pagina web [17]

- **1993 – 1996 – 1997.** Honda presento durante estos años los robots P-1, P-2

y P-3 (Figura 5) respectivamente, se destaca como avance por ejemplo el P-2 capaz de compensar las fuerzas externas, de evitar colisiones y de caminar sobre superficies irregulares. Contaba con cámaras, acelerómetros, giroscopios y sensores de fuerza en los tobillos y muñecas lo que le permitía ser operado de forma inalámbrica. El robot P-3 usaba demostraciones de ciclos de marcha realizados por humanos para generar las trayectorias de referencia que debía seguir, la técnica de control usada para la generación de las trayectorias se llama “punto objetivo de movimiento”, la misma que consiste en que el robot parte de la posición erguida y mediante una cámara detecta un punto objetivo, inmediatamente el algoritmo de control calcula la trayectoria con la menor cantidad de movimientos posibles para llegar a este punto, se usa una base de datos de ciclos de marcha realizados por humanos. [6]

**Figura 5.** Robot P1, P2 y P3



Fuente: Pagina web [6]

- **2000.** Honda lanza la versión evolucionada del robot P-3, llamado ASIMO (Figura 6), su aplicación principal es la de dar asistencia a las personas; deja de ser una maquina controlable a ser una maquina automática ya que toma decisiones según su entorno. [7]

**Figura 6.** Robot ASIMO 2000.



Fuente: Pagina web [7]

- **2005.** El robot “PARTNER” (Figura 7) es capaz de tocar la trompeta, ya que tiene la capacidad de mover sus labios como los de un ser humano con  $1.80\text{ mts}$  de altura, esto le permite cargar a una persona de un lugar a otro, este fue el motivo de su creación, para ayudar a las personas de la tercera edad. [10]

**Figura 7.** Robot PARTNER.



Fuente: Pagina web [10]

- **2008.** El robot “NAO” (Figura 8), que es un organismo autónomo, programable y de mediana estatura, es el robot oficial de la ROBOCUP con 21 grados de libertad y también es utilizada la versión de 25 grados de libertad en empresas y universidades, desarrollado por la empresa francesa Aldabaran Robotics. [15]

**Figura 8.** Robot NAO



Fuente: Pagina web [15]

- **2009.** “KOBIAN” (Figura 9), es el “Robot Humanoide Emocional” usa no solo su cara, sino su cuerpo entero, para demostrar sus emociones, desarrollado entre Tmsuk y la universidad de Waseda. [19]

**Figura 9.** Robot KOBIAN



Fuente: Pagina web [19]

- **2013.** El robot “KIROBOT” (Figura 10), cuya misión es interactuar con personas que viven solas, debido a su edad o algún problema, tiene una interfaz totalmente nueva en comparación con otros robots humanoides, éste robot también está presente en el espacio en la Estación Espacial Internacional. Desarrollado por la empresa japonesa Toyota. [9]

**Figura 10.** KIROBOT.

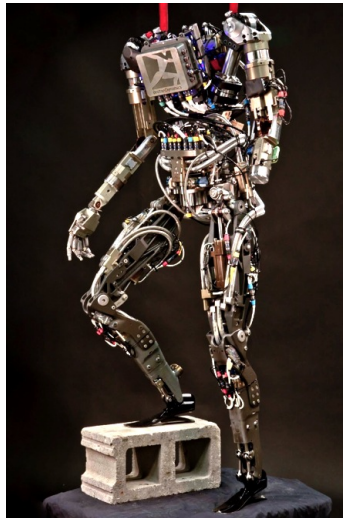


Fuente: Pagina web [9]

- **2014.** “PETMAN” (Figura 11) es un robot humanoide que está siendo desarrollado para el Ejército de los EE.UU. para poner a prueba la ropa especial utilizada por los soldados para la protección contra agentes de guerra química. El robot antropomórfico se han incrementado las capacidades en los probado-

res traje anteriores mecánicamente operados, lo que permitió sólo un número limitado de movimientos de movimiento, mientras que la realización de pruebas. Además se equilibra a medida que camina, se pone en cuclillas y hace ejercicios simples. PETMAN emula la fisiología humana mediante el control de temperatura, la humedad y el sudor, simulando el uso de la ropa mientras se está en movimiento o realizando algún tipo de ejercicio físico, condiciones necesarias para probar de manera realista la prueba. Desarrollado por Boston Dynamics y DARPA (Defense Advanced Research Projects Agency). [14]

**Figura 11.** Robot PETMAN



Fuente: Pagina web [14]

## **4.2. MARCO TEÓRICO**

### **4.2.1. Robots bípedos.**

Los robots bípedos forman parte de la categoría de robots móviles, su desplazamiento se basa en el movimiento de dos piernas. Puede tener o no tener el resto del cuerpo, en el caso de tener forma humana se le agrega el adjetivo de antropomórfico. Además hay que aclarar que un robot bípedo no necesariamente puede ser un robot humanoide, pero todos los robots humanoides son robots bípedos.



#### **4.2.2. Cinemática del robot.**

Se entiende por cinemática el estudio del movimiento sin considerar las fuerzas que lo producen. Por lo tanto se trata de estudiar tanto las propiedades geométricas como las temporales del movimiento. En estos términos, se considera, además el problema puramente geométrico en el posicionamiento estático, las variaciones en el tiempo de las posiciones y orientaciones; es decir, las velocidades. [4]

#### **4.2.3. Cinemática directa.**

Dado que un robot se puede considerar como una cadena cinemática formada por objetos rígidos o eslabones unidos entre sí mediante articulaciones, se puede establecer un sistema de referencia fijo situado en la base del robot y describir la localización de cada uno de los eslabones con respecto a dicho sistema de referencia. De esta forma, el problema cinemático directo consiste en determinar cuál es la posición y orientación del extremo final del robot con respecto a un sistema de coordenadas que se toma como referencia, conocidos los valores de movimiento de articulaciones y los parámetros geométricos de los elementos del robot. [3]

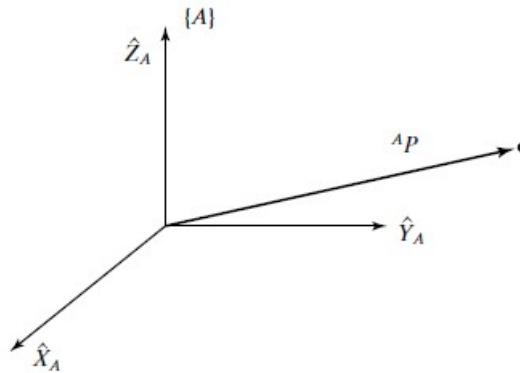
#### **4.2.4. Cinemática inversa.**

El objetivo del problema cinemático inverso consiste en encontrar los valores que deben adoptar las coordenadas articulares del robot, para que su extremos se posicionen y orienten según una determinada localización espacial. Resuelve la configuración que debe adoptar el robot para una posición y orientación del extremo conocidas. [12]

#### **4.2.5. Representación de la posición y de la orientación.**

En robótica es importante poder describir de forma conveniente las posiciones y orientaciones de los objetos en el espacio. Una vez que se establece un sistema de coordenadas, podemos ubicar cualquier punto en el universo con un vector de posición de orden  $3 \times 1$ . En la figura 12 representa el dibujo de un sistema de coordenadas llamado  $\{A\}$  con tres vectores unitarios mutuamente ortogonales con puntas sólidas.

**Figura 12.** Vector de coordenadas  $P$ .



Fuente: Robótica [12]

Matemáticamente la posición del punto se representa mediante el vector posición  $P$  cuyas componentes son las coordenadas:

$$A_P = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix}$$

Donde  $P_x, P_y, P_z$  son las coordenadas del punto extremo del vector  $P$ .

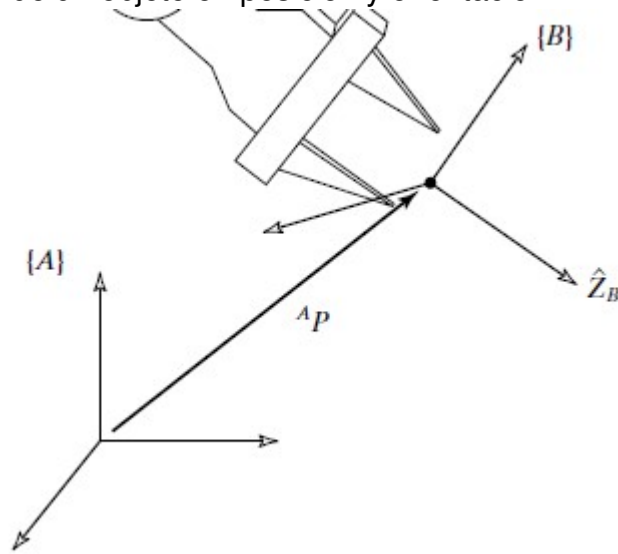
Además de la definición de sus datos en el espacio es necesario indicar su orientación respecto al sistema de referencia ya que no es suficiente con especificar cuál debe ser la posición de su extremo. Una orientación en el espacio tridimensional viene definida por tres grados de libertad o tres componentes linealmente independientes. Para poder describir de forma sencilla la orientación de un objeto respecto a un sistema de referencia, es habitual asignar solidariamente al objeto un nuevo sistema, y después estudiar la relación espacial existente entre los dos sistemas, ver Figura 13 .[12]

Una manera de describir el sistema de coordenadas  $\{B\}$  adjunto al cuerpo es escribiendo los vectores unitarios de sus tres ejes principales en términos del sistema de coordenadas  $\{A\}$ .

Pueden utilizarse un conjunto de tres vectores para especificar una orientación. A fin de ser más claros, construiremos una matriz de  $3 \times 3$  que tenga estos tres vectores como columnas. En consecuencia, siempre que se represente la posición de un punto con un vector, la orientación de un cuerpo se representará con una matriz. [3]

$${}^A_B R = \begin{bmatrix} {}^A\hat{X}_B & {}^A\hat{Y}_B & {}^A\hat{Z}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

**Figura 13.** Ubicación de un objeto en posición y orientación.



Fuente: Robótica [12]

Teniendo en cuenta que los componentes de cualquier vector son simplemente las proyecciones de ese vector en las direcciones unitarias de su trama de referencia. Por lo tanto, cada componente puede escribirse como el producto punto de un par de vectores unitarios:

$${}^A_B R = \begin{bmatrix} {}^A\hat{X}_B & {}^A\hat{Y}_B & {}^A\hat{Z}_B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{X}_B \cdot \hat{X}_A & \hat{Y}_B \cdot \hat{X}_A & \hat{Z}_B \cdot \hat{X}_A \\ \hat{X}_B \cdot \hat{Y}_A & \hat{Y}_B \cdot \hat{Y}_A & \hat{Z}_B \cdot \hat{Y}_A \\ \hat{X}_B \cdot \hat{Z}_A & \hat{Y}_B \cdot \hat{Z}_A & \hat{Z}_B \cdot \hat{Z}_A \end{bmatrix}$$

Como el producto punto de dos vectores unitarios es el coseno del ángulo entre ellos, queda claro por qué a los componentes de las matrices de rotación se les llama comúnmente cosenos de dirección. [12]

La principal utilidad de esta matriz de rotación corresponde a la representación de

la orientación de sistemas girados únicamente sobre uno de los ejes principales del sistema de referencia.

Por lo que cada eje de rotación del sistema se obtiene:

$$R_{(x,\alpha)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

$$R_{(y,\phi)} = \begin{bmatrix} \cos \phi & 0 & \sin \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \phi & 0 & \cos \phi \end{bmatrix}$$

$$R_{(z,\theta)} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Las matrices de rotación pueden componerse para expresar la aplicación continua de varias rotaciones, Así si al sistema {B} se le aplica una rotación de ángulo  $\alpha$  (alfa) sobre  $OX$ , seguida de una rotación de ángulo  $\phi$  (fi) sobre  $OY$  y de una rotación de ángulo  $\theta$  (teta) sobre  $OZ$ , la rotación puede expresarse como:

$$\begin{aligned} T &= R(z, \theta) R(y, \phi) R(x, \alpha) \\ &= \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \phi & 0 & \sin \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \phi & 0 & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} C\theta \cdot C\phi & -S\theta \cdot C\alpha + C\theta \cdot S\phi \cdot S\alpha & S\theta \cdot S\alpha + C\theta \cdot S\phi \cdot C\alpha \\ S\theta \cdot C\phi & C\theta \cdot C\alpha + S\theta \cdot S\phi \cdot S\alpha & -C\theta \cdot S\alpha + S\theta \cdot S\phi \cdot C\alpha \\ -S\phi & C\theta \cdot S\alpha & C\phi \cdot C\alpha \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Es importante considerar el orden en que se realizan las rotaciones, pues el producto de matrices no es conmutativo. Así, si la rotación se hiciera primero en un ángulo  $\theta$  sobre  $OZ$ , seguida de un ángulo  $\phi$  sobre  $OY$ , para finalizar con otra rotación de ángulo  $\alpha$  sobre  $OX$  vendrá expresada por:

$$T = R(x, \alpha) R(y, \phi) R(z, \theta)$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \phi & 0 & \sin \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \phi & 0 & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} C\phi \cdot C\theta & -C\phi \cdot S\theta & S\phi \\ S\alpha \cdot S\phi \cdot C\theta + C\alpha \cdot S\theta & -S\alpha \cdot S\phi \cdot S\theta + C\alpha \cdot C\theta & -S\alpha \cdot C\phi \\ -C\alpha \cdot S\phi \cdot C\theta + S\alpha \cdot S\theta & C\alpha \cdot S\phi \cdot S\theta + S\alpha \cdot C\theta & C\alpha \cdot C\phi \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Como se puede apreciar la matriz final difiere en gran medida de la anterior. [12]

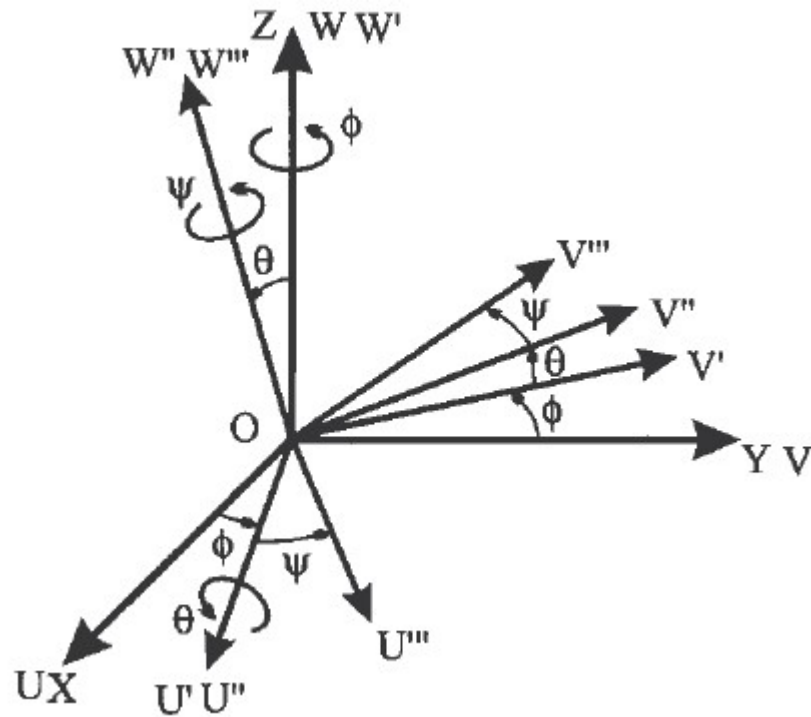
#### 4.2.6. Ángulos Euler.

Para la representación de un sistema tridimensional mediante la matriz de rotación es necesario definir nueve elementos, aunque presenta múltiples ventajas, existe un método que requiere únicamente de tres componentes para su definición, llamados ángulos de Euler.

Todo sistema  $OUVW$  solidario al cuerpo cuya orientación se requiere definir respecto al sistema de referencia  $OXYZ$  se puede hacer mediante tres ángulos  $\phi$ ,  $\theta$ ,  $\Psi$ , denominados ángulos de Euler. Girando sucesivamente el sistema  $OXYZ$  sobre uno de sus ejes determinados de un triedro ortonormal los valores de  $\phi$ ,  $\theta$ ,  $\Psi$ , se obtendrá el sistema  $OUVW$ .

Existen diversas posibilidades (24 definidas formalmente), siendo las tres más usadas las que se muestran en la figura 14.

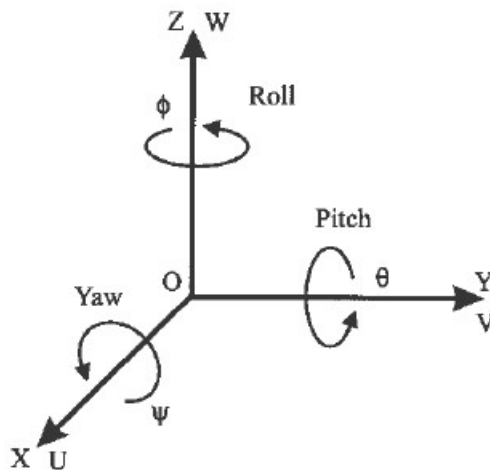
**Figura 14.** Ángulos de Euler XYZ.



Fuente: Fundamentos de robótica [3]

La representación más habitual de los ángulos es Roll, Pitch y Yaw (Figura 15 ) para  $\phi$ ,  $\theta$ ,  $\Psi$ , respectivamente. [3]

**Figura 15.** Ángulos de Euler: Roll, Pitch y Yaw.

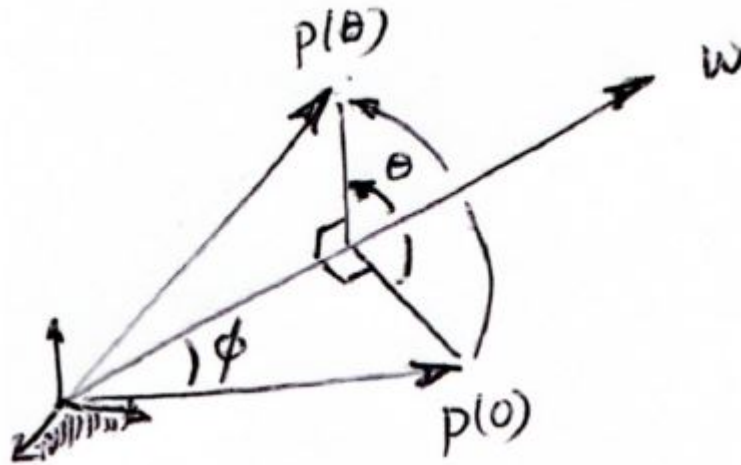


Fuente: Fundamentos de robótica [3]

#### 4.2.7. Coordenadas exponenciales.

Las coordenadas exponenciales es una forma de parametrizar una matriz rotacional en términos de una sola rotación de un eje representado por el vector  $\omega$  de longitud unitaria. Basado en el teorema de Euler, qué demostro qué: «Cualquier orientación  $R \in SO(3)$  es equivalente a una rotación alrededor de un eje fijo  $\omega \in R^3$  con un ángulo  $\theta \in [0, 2\pi]$ »[22]. supongo que un vector  $P(0)$  realiza una rotacion  $\theta$  en el espacio alrededor de un eje de rotación fijo  $\omega$  hasta  $P(\theta)$ , como se ilustrara en la figura 16.

**Figura 16.** Rotación del vector  $P$  alrededor del eje  $\omega$  un ángulo  $\theta$ .



Fuente : [21].

Se observa que  $P$  genera una trayectoria circular y que está tendrá una velocidad constante de  $1 \text{ rad/seg}$  , después de un determinado tiempo  $t$  habra recorrido  $\theta$  radianes. La velocidad de  $P$  esta dada así:

$$\dot{P} = \omega \times P \quad (4.1)$$

Un vector cualquiera en el espacio puede ser prepresentado como una matriz hemisimétrica de la siguiente forma:

$$[\omega] = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_1 & \omega_2 \\ \omega_1 & 0 & -\omega_3 \\ -\omega_2 & \omega_3 & 0 \end{bmatrix}$$

sea  $\omega \in \mathbb{R}^3$  cualquier vector tiene una representación de la forma  $[\omega] \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  así la ecuación 4.1 se escribe de la siguiente forma:

$$\dot{P}(t) = [\hat{\omega}]P(t) \quad (4.2)$$

Se obtiene una ecuación diferencia lineal que con condiciones iniciales  $P(0) = 0$  y con  $t = \theta$ , tiene una solución de la forma

$$P(\theta) = e^{[\hat{\omega}]\theta} P(0) \quad (4.3)$$

$e^{[\hat{\omega}]\theta}$  está definido por una serie infinita

$$e^{[\hat{\omega}]\theta} = I + [\hat{\omega}]^2 \frac{\theta^2}{2!} + [\hat{\omega}]^3 \frac{\theta^3}{3!} + \dots + [\hat{\omega}]^n \frac{\theta^n}{n!} \quad (4.4)$$

Aplicando el teorema de Caley-Hamilton para obtener una forma cerrada de 4.4 y así poder calcularla, se reformula a la siguiente forma

$$e^{[\hat{\omega}]\theta} = I + \sin(\theta)[\hat{\omega}] + (1 - \cos(\theta))[\hat{\omega}]^2 \quad (4.5)$$

La matriz exponencial  $e^{[\hat{\omega}]\theta}$  es una matriz de rotación expresada en coordenadas exponenciales y pertenece al  $SO(3)$ <sup>1</sup>. Geométricamente, la matriz hemisimétrica corresponde a un eje de rotación, con la matriz exponencial generando la rotación alrededor definido como  $\theta$ . Esta relación entre la matriz hemisimétrica y las matrices ortogonales explica la notación  $SO(3)$  [22].

#### 4.2.8. Screw Motion

Para desplazamientos de un cuerpo rígido en el espacio existe el teorema de Chasles-Mozzi, que afirma: «Todo desplazamiento de un cuerpo rígido puede ser expresado como una rotación alrededor de un eje fijo en el espacio, seguido de una traslación pura paralela al mismo eje». Cambiando el orden de la rotación y la traslación se obtiene los mismos resultados en el desplazamiento, se puede imaginar la

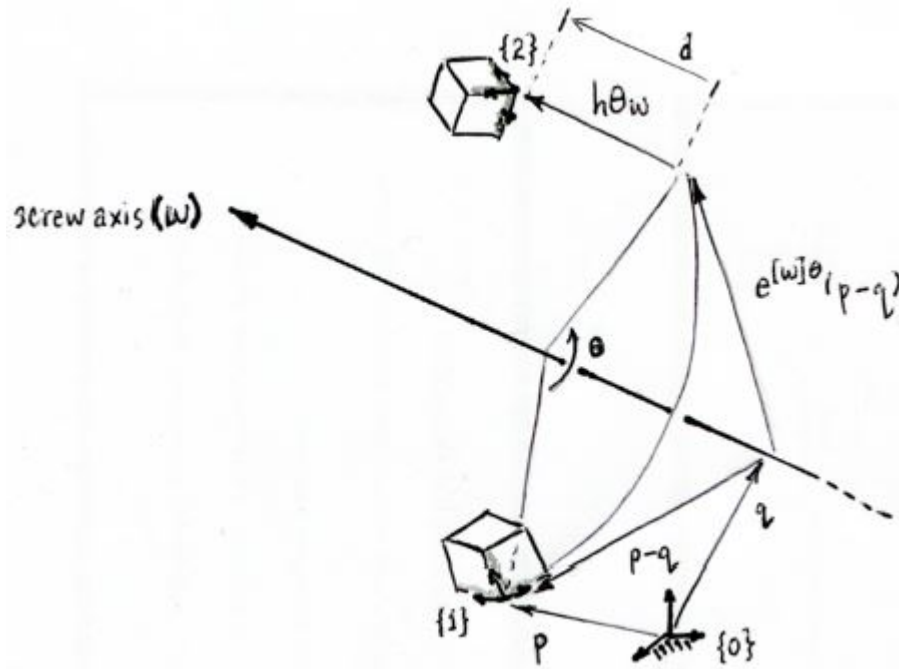
---

<sup>1</sup>Grupo especial ortogonal, grupo de matrices de rotación u orientaciones.



traslación y el desplazamiento efectuándose al mismo tiempo, resultando semejante al movimiento de una tuerca en un tornillo.<sup>2</sup>

**Figura 17.** Desplazamiento de un cuerpo rígido expresado como un movimiento screw.



Fuente: [21]

En la figura 17 se aprecia una representación del teorema, sea  $\{0\}$  el sistema de coordenadas de referencia,  $\{1\}$  y  $\{2\}$  son los sistemas de coordenadas del cuerpo rígido en su posición inicial y final respectivamente, el eje sobre el que se realiza el desplazamiento (screw) es un vector unitario tal que  $\hat{w} \in \mathbb{R}^3$ , con una rotación  $\theta$  y una traslación paralela  $d$ . Las matrices de transformación de homogénea de  $\{1\}$  y  $\{2\}$  son

$$T_{01} = \begin{bmatrix} R & P \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

$$T_{02} = \begin{bmatrix} R' & P' \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

<sup>2</sup>El término *screw* significa *tornillo* en inglés

El paso del tornillo (*screw pitch* en inglés)  $h$  definido como

$$h = \frac{d}{\theta} \quad (4.8)$$

Así

$$R' = e^{[\omega]\theta} R \quad (4.9)$$

$$P' = q + e^{[\omega]\theta}(p - q) + h\theta\omega \quad (4.10)$$

La ecuación 4.9 hace referencia a la rotación de  $\{1\}$  alrededor del eje  $\omega$  un ángulo  $\theta$ , y 4.10 hace referencia a una suma vectorial para la representación de la posición. Estas ecuaciones pueden ser representadas de forma matricial como

$$\begin{bmatrix} R' & P' \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{[\omega]\theta} R & q + e^{[\omega]\theta}(p - q) + h\theta\omega \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & P \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

La ecuación 4.11 puede ser descrita por otra matrix homogénea

$$\begin{bmatrix} R' & P' \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = e^{\begin{bmatrix} [\hat{\omega}] & v \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \theta} \begin{bmatrix} R & P \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

donde  $v = -\hat{\omega} \times q + h\hat{\omega}$ , representando

$$e^{\begin{bmatrix} [\hat{\omega}] & v \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \theta} = \begin{bmatrix} e^{[\omega]\theta} & G(\theta)v \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

donde  $G(\theta) = I\theta + (1 - \cos \theta)[\hat{\omega}] + (\theta - \sin \theta)[\hat{\omega}]^2$ . Obteniendo una representación simple para los cálculos.<sup>3</sup>

---

<sup>3</sup>Para el lector interesado en la deducción matemática detallada y demostraciones ver [22] y [2].

#### 4.2.9. Matrices de transformación homogénea.

Las matrices homogéneas permiten una representación conjunta de la posición y de la orientación es decir la localización. Se define como matriz de transformación homogénea  $T$  a una matriz de dimensión  $4 \times 4$  que representa la transformación de un vector de coordenadas homogéneas de un sistema de coordenadas a otro. La matriz de transformación homogénea  $4 \times 4$  relaciona dos sistemas de coordenadas, de forma que:

$$S_1 = T \cdot S_0$$

$$T = \begin{bmatrix} R_{3 \times 3} & -p_{3 \times 1} \\ F_{1 \times 3} & W_{1 \times 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Rotacion & Traslacion \\ Perspectiva & Escalado \end{bmatrix}$$

Donde  $S_1$  representa el sistema de coordenadas móviles y  $S_0$  es el sistema de coordenadas de referencia.

Mediante una matriz de transformación homogénea se asocia a cada eslabón un sistema de referencia solidario, siendo posible representar rotaciones y traslaciones relativas entre los eslabones; una matriz de transformación entre dos eslabones consecutivos se representa de la siguiente manera:  ${}^{i-1}A_i$  donde  $i$  representa el último eslabón de la cadena.

Mediante estas matrices se puede representar ya sea total o parcialmente la cinemática de un robot. [3]

Para la solución del problema cinemático directo, se considera a la matriz de transformación como:

$$T = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

donde  $\begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} o_x & o_y & o_z \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z \end{bmatrix}$  son los vectores que conforman la matriz de rotación y  $\begin{bmatrix} p_x & p_y & p_z \end{bmatrix}$  es el vector de traslación.

#### 4.2.10. Formula del producto de exponenciales

Esta fórmula se basa en la representación mediante matrices exponenciales del movimiento de un cuerpo rígido en el espacio expresado como un movimiento de tornillo (*screw*). En robótica los tipos de articulaciones más usadas y comunmente encontradas son de revolución y prismáticas, con la fórmula PoE<sup>4</sup> estos tipos de articulaciones se puede ver como movimientos *screw*, si existe un sistema de coordenadas fijo y un sistema de coordenadas para el cuerpo rígido entonces si el cuerpo se desplaza una configuración inicial  $M \in SE(3)$  hacia una configuración final  $T \in SE(3)$ , este desplazamiento puede ser expresado como

$$T = e^{[s]\theta} M \quad (4.14)$$

donde  $[s] = \begin{bmatrix} [\hat{\omega}] & v \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in SO(3)$  es la representación hemisimétrica y  $\theta$  es el desplazamiento de la unión,  $[S] \in \mathbb{R}^6$ . Para articulaciones rotacionales,  $\hat{\omega} \in \mathbb{R}^3$  es un vector unitario en la dirección del eje del movimiento *screw* y  $h \in R$  es el paso del *screw*, donde  $h = 0$  debido a que el movimiento es una rotación pura. Para articulaciones prismáticas se tiene que  $\hat{\omega} = 0$  y  $v \in R^3$  es un vector en la dirección positiva de traslación.[2].

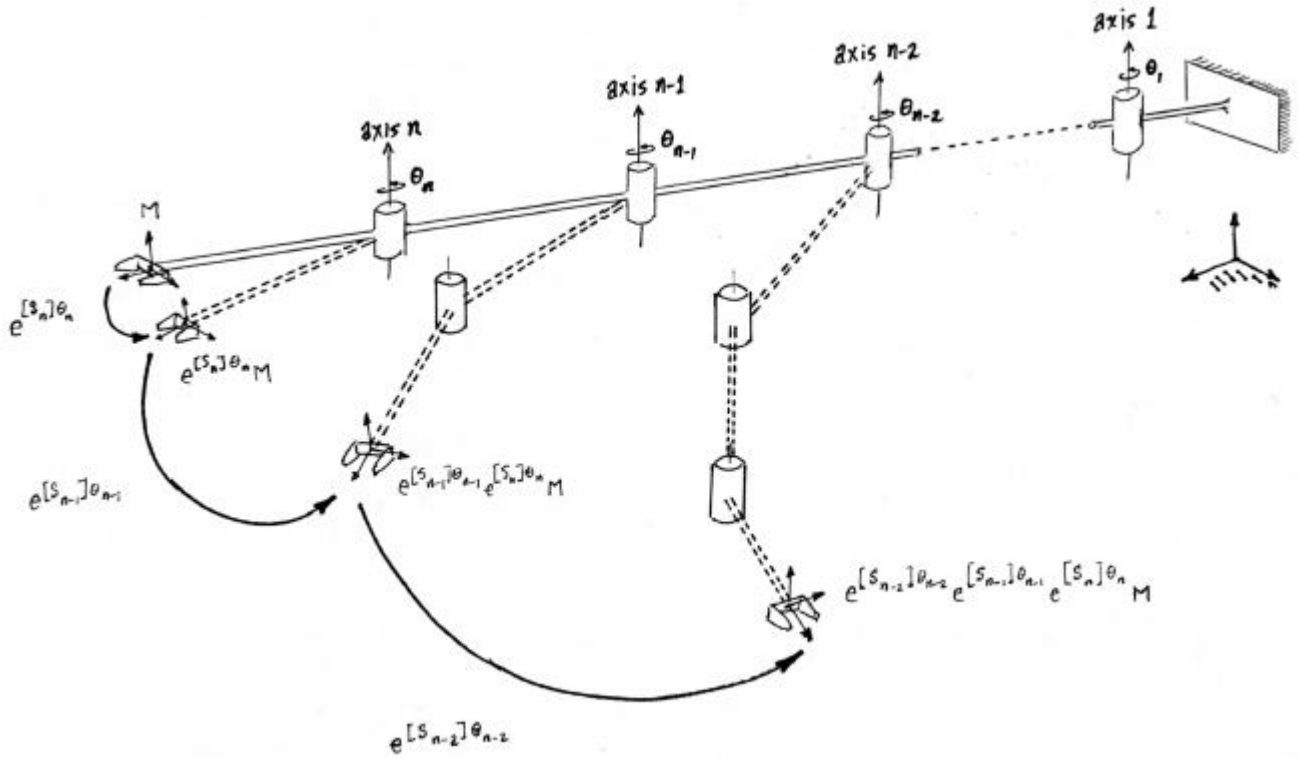
#### 4.2.11. Primera Formulación: Forma Espacial del PoE

La fórmula de PoE es considerar cada articulación como la encargada de realizar un movimiento *screw* sobre los eslabones que están después de dicha articulación (Figura 18).

---

<sup>4</sup>Product of Exponentials

**Figura 18.** Fórmula de PoE ilustrada en un robot simple de cadena abierta con  $n$  grados de libertad.



Fuente:[21].

Para aplicar PoE se lleva acabo los siguientes pasos:

1. Se adjunta un sistemas de coordenadas unido rígidamente a la base del robot y otro unido rídamente al extremo del efector
2. Colocar el robot en su posición cero es decir  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n = 0$  y se especifica la dirección positiva del desplazamiento, un ángulo para articulaciones rotacionales y una distancia para articulaciones prismáticas.
3. Suponga que la  $n$ -ésima articulación ha sido desplazada es decir  $\theta \neq 0$ , entonces al efector final se le aplicó un movimiento *screw* producido por la  $n$ -ésima articulación con un valor  $\theta_n$ . Expresado como:

$$T = e^{[s_n]\theta_n} M \quad (4.15)$$

Sea  $M \in SE(3)$  la matriz de transformación homogénea que describe la posición y la orientación del sistema de coordenadas unido al efector con respecto al sistema de coordenadas unido a la base cuando está en posición cero.  $T \in SE(3)$  es la nueva configuración del sistema de coordenadas del efector y  $S_n = (\hat{\omega}_n, v_n)$  es el vector twist que describe el movimiento realizado por la articulación  $n$ .

4. Si la articulación  $n$  es de revolución,  $\hat{\omega}_n \in \mathbb{R}^3$  es un vector en la dirección positiva del eje de la  $n$ -ésima articulación con  $v_n \in \mathbb{R}^3$  dado como  $v_n = -[\hat{\omega}_n]q_n = -\hat{\omega}_n \times q_n$  donde  $q_n$  es un punto arbitrario sobre el eje de la  $n$ -ésima articulación. Si la articulación fuese prismática, entonces  $\hat{\omega}_n = 0$  y  $v_n$  sería un vector en la dirección positiva de la traslación.
5. Los vectores y matrices son expresados con respecto al sistema de coordenadas fijo, que en este caso es el sistema de coordenadas adjunto a la base<sup>5</sup>.
6. Se desplaza la articulación  $n - 1$  en una cantidad  $\theta_{n-1}$ , aplicando un movimiento *screw* a todos los eslabones que están después de dicha articulación. Entonces la configuración obtenida anteriormente se transforma

$$T = e^{[s_{n-1}]\theta_{n-1}} e^{[s_n]\theta_n} M \quad (4.16)$$

7. Se desplazan todas las articulaciones  $1, 2, \dots, n$  con sus respectivos movimientos  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ . Así la configuración final queda de la forma

$$T = e^{[s_1]\theta_1} \dots e^{[s_{n-1}]\theta_{n-1}} e^{[s_n]\theta_n} M \quad (4.17)$$

La ecuación 4.17 se denomina forma espacial de la fórmula del producto de exponenciales y es la representación del modelo cinemático directo de un robot con  $n$  grados de libertad.

#### 4.2.12. Segunda Formulación: Forma Efectoria del PoE

La segunda formulación del PoE es utilizar el sistema de coordenadas del extremo efector para expresar  $M_i$ ,  $\hat{\omega}_i$  y  $q_i$  en vez de utilizar el sistema de referencia fijo. Se

<sup>5</sup>Si se escoge otro sistema como el sistema de referencia fijo, entonces todas las cantidades se representan respecto a este sistema.

puede partir de la forma espacial y mediante identidades matriciales llegar a la forma efectoria para luego identificar cada uno de los términos en la forma resultante.

Teniendo la identidad matricial

$$Me^{M^{-1}PM} = e^PM \quad (4.18)$$

aplicamos esta identidad matricial a la ecuación 4.17 de la forma espacial del PoE tenemos que

$$T_{st} = e^{[s_1]\theta_1} \dots e^{[s_{n-1}]\theta_{n-1}} e^{[s_n]\theta_n} M$$

$$T_{st} = e^{[s_1]\theta_1} e^{[s_2]\theta_2} \dots Me^{M^{-1}[s_n]M\theta_n}$$

$$T_{st} = Me^{[\beta_1]\theta_1} e^{[\beta_2]\theta_2} \dots e^{[\beta_n]\theta_n} \quad (4.19)$$

Esta forma se denomina forma efectoria del PoE donde  $[\beta_i] = M^{-1}[S_i]M$ , la matriz  $M$  representa orientación y posición del extremo del efector.

El procedimiento para la representación del modelo cinemático directo utilizando la forma efectoria del PoE es el siguiente:

1. Ubicar el sistema de coordenadas fijo  $\{S\}$  y el sistema de coordenadas del extremo efector  $\{T\}$ .
2. Identificar los ejes  $\hat{\omega}_i$  de cada articulación  $i$ , sus respectivos  $q_i$  y se define la dirección positiva de rotación para articulaciones rotacionales o de traslación para articulaciones prismáticas para luego definir la matriz  $M$ .
3. Se definen los twist para cada articulación, que ahora están representados con respecto al sistema de coordenadas  $\{T\}$  del extremo efector, entonces  $\beta_i = (\hat{\omega}_i, v_i)$  representa el twist representado por la articulación  $i$ .

$$\beta_i = \begin{bmatrix} \hat{\omega}_i \\ v_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\omega}_i \\ -\hat{\omega}_i \times q_i + h\hat{\omega}_i \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

4. en caso de que la articulación sea rotacional, entonces  $h = 0$  y por lo tanto  $v_i = -\hat{\omega}_i \times q_i$ . En caso de articulaciones prismáticas  $\beta_i = (0, v_i)$ , donde  $v_i$  es un vector unitario en la dirección positiva de traslación.

### 4.3. MARCO CONCEPTUAL

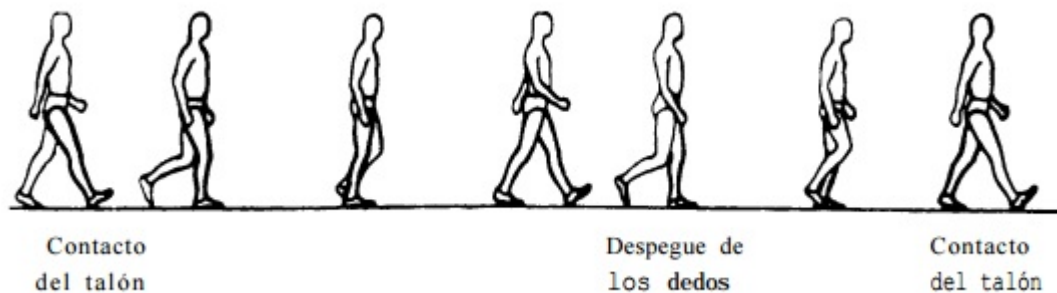
#### 4.3.1. La locomoción humana.

La locomoción humana se ha descrito como una serie de movimientos alternantes, rítmicos, de las extremidades y del tronco que determinan un desplazamiento con respecto al centro de gravedad. Aunque existen pequeñas diferencias en la forma de la marcha de un individuo a otro estas diferencias caen dentro de pequeños límites.

#### 4.3.2. El ciclo de la marcha.

El ciclo de la marcha comienza cuando el pie contacta con el suelo y termina con el siguiente contacto con el suelo del mismo pie. Los dos mayores componentes del ciclo de la marcha son: la fase de apoyo y la fase de balanceo (ver Figura 19). Una pierna está en fase de apoyo cuando está en contacto con el suelo y está en fase de balanceo cuando no contacta con el suelo.[13]

**Figura 19.** Ciclo del caminado del ser humano.



Fuente: Artículo web [13]



La longitud del paso completo es la distancia lineal entre los sucesivos puntos de contacto del talón del mismo pie. Longitud del paso es la distancia lineal en el plano de progresión entre los puntos de contacto de un pie y el otro pie.

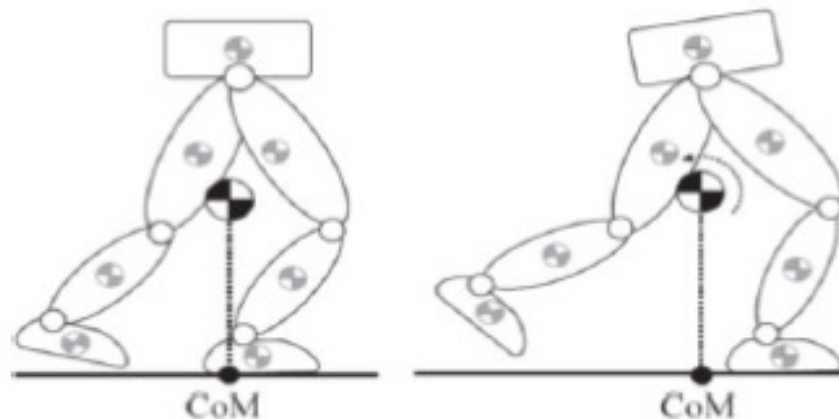
#### 4.3.3. Marcha bípeda.

La marcha bípeda es un fenómeno periódico, donde el ciclo de la marcha se define como el intervalo comprendido entre dos eventos sucesivos referidos a una misma pierna y no teniendo ambos pies separados del suelo a la vez. Durante la marcha se tienen dos periodos importantes: fase de soporte doble (FSD) y fase de soporte simple (FSS), dependiendo del número de pies en apoyo.

#### 4.3.4. Marcha estática.

El balanceo estático se basa en el concepto del centro de masa (CoM). La condición de balanceo estático se reduce a la proyección del CoM dentro del área formada por la planta de los pies. Esto significa que en cualquier momento donde se detenga el robot, se encontrará en un estado de equilibrio por tiempo indefinido. Este criterio es válido para velocidades de marcha lenta, donde los efectos dinámicos pueden ser despreciados.[23]

**Figura 20.** Marcha estática.



Fuente: Artículo web [23]

#### 4.3.5. Marcha dinámica.

En el caso de marcha rápida o dinámica se puede considerar el criterio del punto de momento cero (zero moment point, ZMP), donde se consideran las velocidades, aceleraciones, momento angular y momento lineal de todos los eslabones.


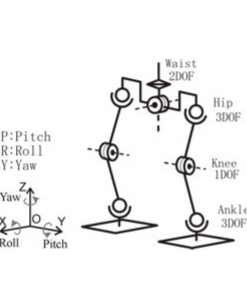


#### 4.3.6. Desarrollo de robots bípedos.

Como se vio en el marco histórico la realización de robots bípedos, no son proyectos que hayan iniciado hace pocos años, llevan bastante tiempo desarrollándose, por ejemplo los robots honda vienen desarrollándose desde 1993 y continúan realizando investigación sobre estos prototipos.

Un caso que veremos en particular es el robot WABIAN 2 el cual empezó su realización en 2003 a desarrollarse el prototipo mecánico basado investigaciones previas hechas en robótica, se destaca la realización mecánica del prototipo sobre el cual posteriormente se seguirían haciendo mejoras.[18]

En la figura 21 se puede apreciar el modelo mecánico del prototipo:

**Figura 21.** Modelo mecánico y pruebas del prototipo

	 <p>P: Pitch R: Roll Y: Yaw Z: Z X: X Y: Y Roll Pitch</p> <p>Waist 2DOF Hip 3DOF Knee 1DOF Ankle 3DOF</p>		<p>Conventional Walking</p> <p>Walking with constant waist height</p> <p>Walking cycle : 0.96[s/step]</p> <p>Step length : 200[mm/step]</p>
			<p>Stretch Walking</p> <p>Walking with knees stretched position</p> <p>Walking cycle : 0.96[s/step]</p> <p>Step length : 350[mm/step]</p>
WABIAN-2/LL	DOF Configuration of WABIAN-2/LL	WABIAN-2/LL Walking Experiments	

Fuente: Pagina web [18]

Este prototipo es el que la universidad de Waseda en Japón ha venido trabajando e investigando dentro de sus laboratorios, actualmente el robot cuenta con sistemas

de control para caminatas dinámicas y mejoras en sus componentes mecánicos, ya no es una simple cadena de eslabones articulada con motores, ya se han incorporado resortes por ejemplo para que tengan un mejor desempeño en la caminata.

**Figura 22.** Robot Wabian 2 en la actualidad



Fuente: Pagina web [18]

De lo anterior podemos destacar varias fases en el proyecto:

1. Diseño mecánico del robot.
2. Determinación de las restricciones del robot.
  - Determinación de los grados de libertad.
  - Diseño de los eslabones.

Simulación mecánica del robot

4. Estudio del caminata dinámico
5. Diseño e implementación de controladores para la estabilización de la caminata
6. Realización de prototipo sobre el cual se irán haciendo investigaciones, pruebas y experimento.

## **5. ALCANCE Y LIMITACIONES**

El proyecto como bien se ha visto en los capítulos anteriores plantear un modelo matemático para el diseño de robots bípedos vista como la unión de dos cadenas cinemáticas basada en la representación mediante matrices exponenciales del movimiento de un cuerpo rígido en el espacio (fórmula del producto de exponenciales). Como alcance abarcara el diseño estructural y mecánico sobre el robot que se va a trabajar, el diseño cinemático directo y la generación de trayectorias para una marcha semi-estática.

### **5.1. ALCANCES DEL PROYECTO.**

- Diseño mecánico del robot para una caminata semi-estática
- Modelo matemático del diseño cinemático del robot.
- Demostración del funcionamiento del modelo cinemático por medio de una simulación de caminata en software matemático y CAD, generando trayectorias que permitan que el robot camine.

### **5.2. LIMITACIONES DEL PROYECTO.**

El robot no cuenta con un lazo de control cerrado que le permita estabilidad, y una caminata dinámica ya que el diseño en estas etapas se basa en el concepto de centro de masa, bajo este concepto los efectos dinámicos son despreciados y por lo tanto no es posible hacer un controlador, además de las limitaciones de tiempo para el proyecto.

## **6. DISEÑO METODOLÓGICO**

De acuerdo al planteamiento del problema y para cumplir con los objetivos que se han planteado y así responder a la pregunta problema, dividiremos el proyecto en varias etapas.

### **6.1. TIPO DE INVESTIGACIÓN.**

Se llevara a cabo una investigación aplicada de tipo exploratoria.

La definimos investigación aplicada ya que partimos de una investigación básica en este caso el método de producto exponencial para el diseño de robots, no se enfocara en las demostraciones matemáticas que la teoría tiene, más bien será una aplicación del método a robots bípedos y exploratoria porque abordamos un tema poco estudiado como es el modelado de robots bípedos usando el producto exponencial con la cual se pretende sentar las bases para futuras investigaciones.

Proyecto de Desarrollo Tecnológico según el acuerdo 13-03-2013 de la ETITC

### **6.2. ENFOQUE.**

El proyecto se enfoca en las áreas de:

- Análisis mecánico y estructural del robot.
- Modelado matemático de la cinemática del robot.

### **6.3. PLAN PARA RESOLVER PROBLEMA.**

#### **6.3.1. Etapa de estructuración y revisión bibliográfica.**

Se estudiara el estado del arte para determinar las técnicas y consideraciones que actualmente se tienen en cuenta para este tipo problema, esto se realizara buscando y clasificando información por medio de libros, tesis, revistas, periódicos, Internet,

visitas y demás recursos disponibles que sean de utilidad para la definición del proyecto.

### **6.3.2. Etapa de estudio.**

Una vez definido el proyecto y conocer la información que se necesita para la realización del mismo, se procederá a un estudio de cada uno de los factores que influyen, delimitación de requerimientos en el diseño para posteriormente proceder a realizar el modelado.

### **6.3.3. Estudio de herramientas necesarias.**

Debido a que el proyecto es tecnológico este requiere de software de diseño CAE, simulación y cálculo numérico; se realiza las especificaciones para cada uno, y basados en esta información y los recursos disponibles en la ETITC se elige el más apropiado.

### **6.3.4. Diseño estructural en software CAE.**

La fase de diseño es la etapa que se proponen de acuerdo a los requerimientos planteados, se realizan diferentes alternativas aplicando conceptos de diseño, con bocetos a mano alzada o modelos virtuales. Luego se elige el más acorde o el más usado en la literatura existente en el cual se pueda realizar una marcha semi-estática y sea objeto de estudio para los modelos matemáticos que se planteen.

### **6.3.5. Análisis Mecánico.**

Con el diseño de la estructura a utilizar se realizan estudios de resistencia de materiales y las diferentes fuerzas que interactúan para que el robot este en equilibrio. Se realiza una simulación del prototipo para asegurar su correcto funcionamiento.

#### **6.3.6. Modelar matemáticamente la cinemática del robot.**

Con las bases teóricas de un enfoque geométrico para robots, se procede a modelar la estructura cinemática del robot como la unión de dos cadenas articuladas usando el método de producto exponencial luego se desarrolla la cinemática inversa del robot utilizando métodos geométricos. Describiendo paso a paso ya que es la parte fundamental del trabajo. Al finalizar el modelo matemático se plantean unas trayectorias y se simulan para verificar el correcto funcionamiento del modelo.

#### **6.3.7. Integración del modelo mecánico y cinemático.**

En esta etapa el modelo cinemático desarrollado se integra con la estructura mecánica, en la cual las trayectorias diseñadas serán usadas para hacer el algoritmo para la caminata deseada del robot.

#### **6.3.8. Demostración del funcionamiento del modelo desarrollado y conclusión.**

Para validar el proyecto se realiza una simulación del funcionamiento del robot en software matemático y CAD, en el cual se mostrara la generación de una trayectoria deseada.

### **6.4. LINEAS DE INVESTIGACIÓN DEL PROGRAMA.**

Invención, innovación, desarrollo y transferencia de tecnología.

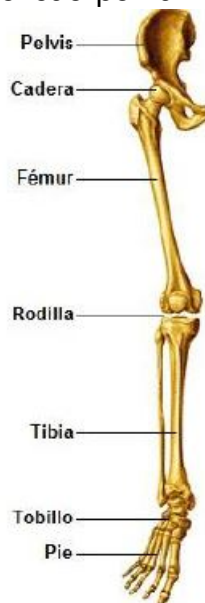
## 7. DISEÑO MECÁNICO

En éste capítulo se muestra el diseño y análisis de una estructura mecánica bípeda sobre la cuál se hará la validación del modelo cinemático, basado en la revisión bibliográfica el modelo será semejante a los que allí se encontraron.

### 7.1. DISEÑO DE LA ESTRUCTURA DEL ROBOT BÍPEDO.

El tipo de robot bípedo se busca que sea una máquina antropomórfica capaz de imitar las funciones básicas como lo es el caminar, así se busca que cada parte de la estructura del robot bípedo sea semejante a la distribución a las extremidades inferiores, como se aprecia en la figura 23; en la cual se indica la distribución de los huesos (pelvis, fémur, tibia y los conformados por el pie) y las articulaciones (cadera, rodilla y tobillo) de una pierna humana.

**Figura 23.** Extremidad inferior del cuerpo humano.



Fuente:

<http://cmapserver.unavarra.es/rid=1MB07WGY1-23M7KN2-2ST/Extremidades.jpg>



Con base en las necesidades del proyecto y los parámetros mecánicos de la sección 4.3 se inicia el diseño de cada una de las piezas de la estructura del robot bípedo las cuales nacen de la creatividad e inventiva de los autores del proyecto; mediante la observación y el estudio de los robots vistos en la sección 4.1.

Se establecen los parámetros de diseño:

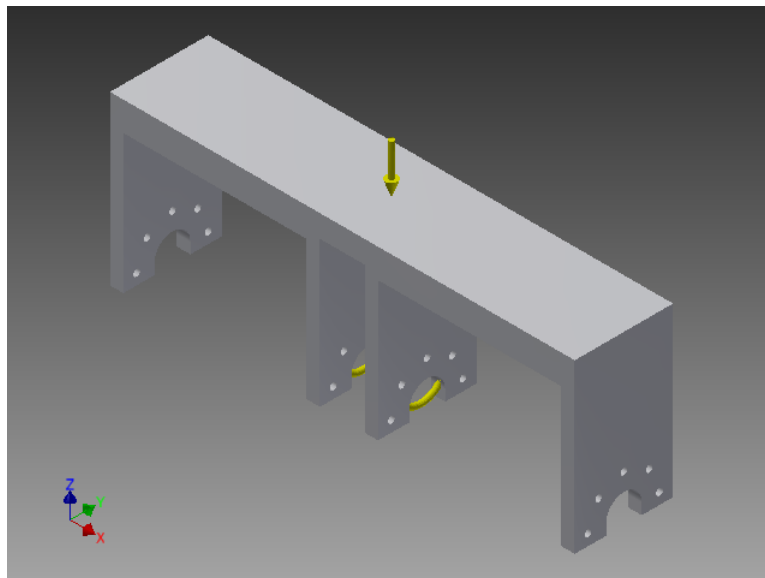
- Tamaño:
- Peso:
- Grados de libertad: 6
- Peso soportado:

Se diseñan cada una de las piezas que van a conformar la extremidad para luego ensamblarlas en un solo conjunto, para el diseño de las piezas se usa el software «Autodesk Inventor», a continuación se aprecia cada una de las piezas diseñadas:

#### ■ Cadera

Sera pieza inicial de donde se conectaran las dos extremidades del robot, contará con dos grados de libertad los cuales darán la movilidad a cada una de las extremidades.

**Figura 24.** Diseño Cadera.

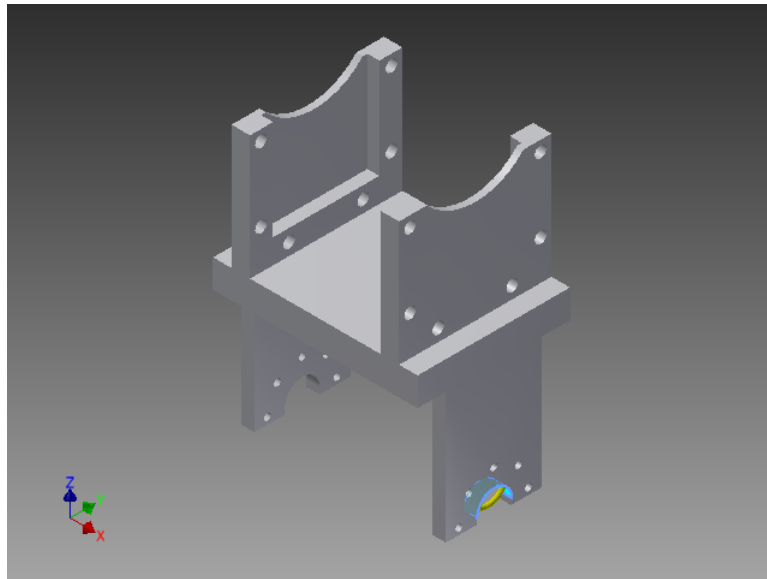


Fuente: Autores.

### ■ Fémur

Segunda pieza de la estructura, está duplicada para dar forma al robot, dará inicio a las piernas del robot las cuales soportan cada una un servomotor y al mismo tiempo estos se unen a la cadera bípeda a través de sus ejes de rotación.

**Figura 25.** Diseño Fémur.

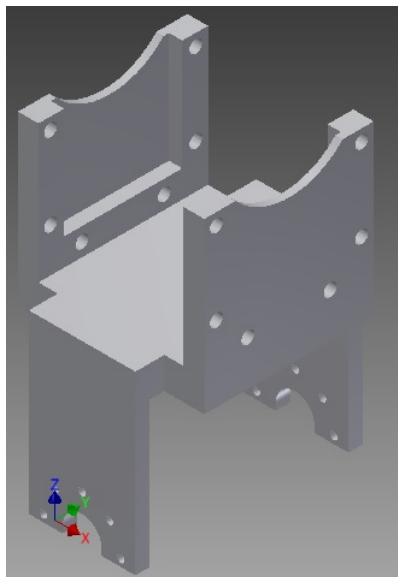


Fuente: Autores.

### ■ Pierna

La tercera pieza, también duplicada para formar las dos extremidades del robot soportan los servomotores que se unen al fémur, esta pieza esta diseñada para que los últimos grados de libertad queden perpendiculares a los anteriores.

**Figura 26.** Diseño Pierna.

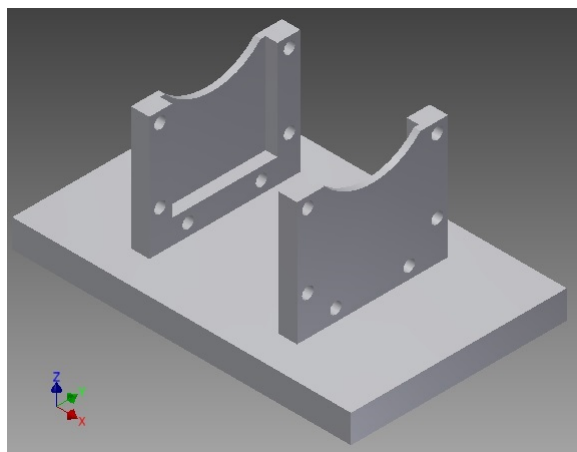


Fuente: Autores.

#### ■ Pie

Piezas que soportaran toda la estructura del robot y que están unidas a través del primer y último grado de libertad según como se desee ver la cadena cinemática.

**Figura 27.** Diseño Pie.



Fuente: Autores.

Para la unión de los eslabones se utiliza servomotores, los cuales serán los actuadores encargados de realizar el movimiento de cada articulación para la selección se tuvieron en cuenta las siguientes características, torque, velocidad, peso, tipo de motor, frecuencia y tamaño; para estos se seleccionaron tres de las marcas comerciales más importantes y recomendadas para éste tipo de aplicaciones, sus características se aprecian en la tabla 1.

**Tabla 1.** Comparación de especificaciones

Descripción	DYNAMIXEL RX-24F	TowerPro MG946R	BLS-2509H
Torque (12.0V)	$2.6N \cdot m$	$13.0kg \cdot cm$	$23.0kg \cdot cm$
Velocidad (12.0V)	$126.0rpm$	$0.17seg$	$0.12seg$
Peso	$67.0gr$	$55.0gr$	$72.0gr$
Tipo de Motor	Motor coreolis	Motor DC	Motor sin escobillas
Frecuencia de Trabajo	$1Mbps$	$1ms$	$1520\mu s/500hz$
Tamaño	$35.5x50.8x41.8mm$	$40.7x19.7x42.9mm$	$40.0x20.0x37.0mm$

Fuente: Autores

De acuerdo a esta comparación se observa que el servomotor DYNAMIXEL RX- 24F (Figura 28), ofrece una mayor ventaja sobre los otros dos, en cuánto a velocidad, torque y peso.

**Figura 28.** Servomotor DYNAMIXEL RX- 24F

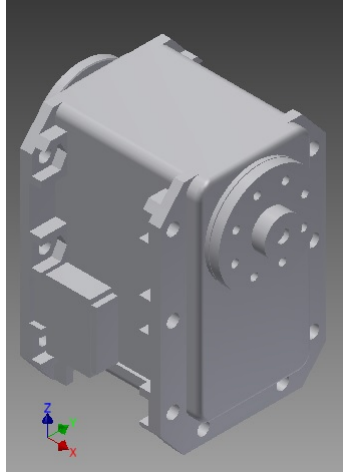


Fuente: [http://support.robotis.com/en/product/dynamixel/rx\\_series/rx-24f.htm](http://support.robotis.com/en/product/dynamixel/rx_series/rx-24f.htm)

Se procede al diseño del servomotor, previamente seleccionado, cabe aclarar que también se elije este este modelo ya que su diseño es genérico, esto en el caso

de que a futuro se es necesario cambiar la tecnología. El diseño del servomotor de observa en la figura 29.

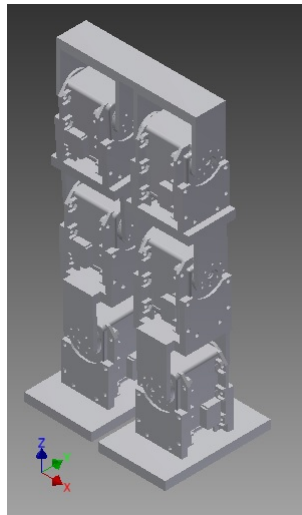
**Figura 29.** Diseño Servomotor.



Fuente: Autores.

Teniendo todas las piezas diseñadas se procede a ensamblar el cual se muestra en la Figura 30

**Figura 30.** Robot Bípedo.



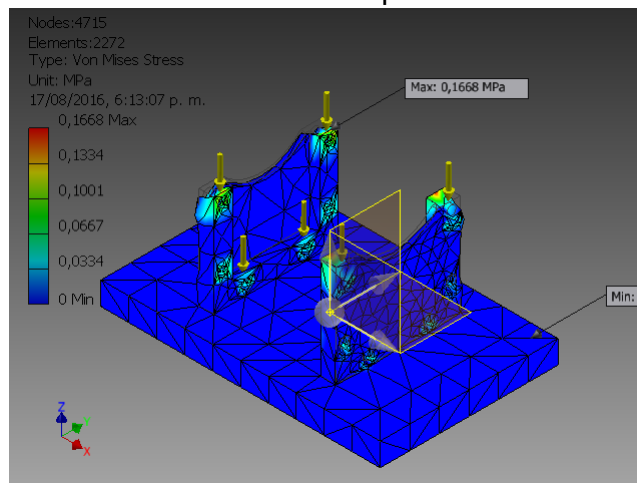
Fuente: Autores.

## 7.2. ANÁLISIS MECÁNICO

### 7.2.1. Material Seleccionado

La selección del material se hace de acuerdo a que dadas las propiedades físicas de determinado material como por ejemplo, que pueda resistir el peso, los torques al que va estar sometido...etc. Los materiales que se tomaron en cuenta para el estudio son: aluminio 6061, plástico ABS y nailon, ya que son materiales que presentan propiedades mecánicas como rigidez, resistencia al impacto en el caso del ABS y dureza, además de su uso comercial y fácil adquisición en el mercado; así para determinar que material es más idóneo para la estructura mecánica se toma el diseño del pie y a través software CAD (Figura 31), se le asigna estos tres materiales de prueba aplicando las fuerzas a las que va estar sometida esta pieza con la simulación. Se elije la parte del pie ya que como se vio en la sección anterior es la parte del cuerpo que va a estar sometida fuerzas a mayores que el resto de la piezas. Los resultados de la simulación de cada material se aprecian en la Tabla 2.

**Figura 31.** Simulación de material ABS en el pie.



Fuente: Autores.

**Tabla 2.** Características físicas de los materiales en Articulación Pie

Material	nylon		aluminio 6061		plástico ABS	
Densidad	$1,13g/cm^3$		$2,71g/cm^3$		$1,06g/cm^3$	
Masa	$0,0343525kg$		$0,0823852kg$		$0,0322245kg$	
Área	$14249,6mm^2$		$14249,6mm^2$		$14249,6mm^2$	
Volumen	$30400,4mm^3$		$30400,4mm^3$		$30400,4mm^3$	
	Mínimo	Máximo	Mínimo	Máximo	Mínimo	Máximo
Estrés Von Mises	$2,983 \cdot 10^{-5}MPa$	$0,207MPa$	$3,955 \cdot 10^{-5}MPa$	$0,211MPa$	$3,183 \cdot 10^{-6}MPa$	$0,201MPa$
Desplazamiento en X	$-4,798 \cdot 10^{-6}mm$	$4,821 \cdot 10^{-5}mm$	$-2,065 \cdot 10^{-6}mm$	$2,075 \cdot 10^{-6}mm$	$-6,14 \cdot 10^{-5}mm$	$6,196 \cdot 10^{-5}mm$
Desplazamiento en Y	$-4,964 \cdot 10^{-5}mm$	$4,996 \cdot 10^{-5}mm$	$-2,094 \cdot 10^{-6}mm$	$2,104 \cdot 10^{-6}mm$	$-6,635 \cdot 10^{-5}mm$	$6,592 \cdot 10^{-5}mm$
Desplazamiento en Z	$-2,417 \cdot 10^{-4}mm$	$8,816 \cdot 10^{-5}mm$	$-1,026 \cdot 10^{-6}mm$	$2,963 \cdot 10^{-8}mm$	$-3,174 \cdot 10^{-4}mm$	$1,398 \cdot 10^{-6}mm$

Fuente: Autores

Analizando estos datos observamos que con el aluminio la deformación es menor con respecto a los otros dos materiales pero se tiene una mayor masa lo que implica un mayor peso para la estructura. Con el nylon y el ABS por el contrario se obtiene un mayor desplazamiento en las piezas, pero su masa es mucho menor lo que significa menor peso para la estructura y menor esfuerzo tienen que ejercer los actuadores. Se decide utilizar el ABS ya que es resistente al impacto, resistencia a la fatiga y mayor uso en éste tipo de aplicaciones, lo que lo hace un material ideal para la estructura mecánica.

### 7.2.2. Centro de Masa

Para lograr una marcha balanceada semi-estáticamente, se requiere mantener su centro de masa verticalmente proyectado sobre el polígono o área de soporte, el cuál consiste en una figura geométrica plana formada en el suelo por uno o ambos pies. En caso de soporte sobre un único pie, es este mismo. En caso de soporte con los dos pies, se abarca la región de los pies y la parte del área entre ambos. Así el centro de masa para la estructura (Figura 30) se calcula de la siguiente manera.

La posición del centro de masas de un sistema de partículas viene dada por la expresión:

$$m\bar{r} = \sum_{i=1}^n m_i r_i \quad (7.1)$$

donde  $m$  representa la masa total y  $\sum_{i=1}^n$  de las partículas. Para el caso de un cuerpo rígido, se descomponen los vectores de posición  $\vec{r}$  y  $r_i$  en componentes rectangulares

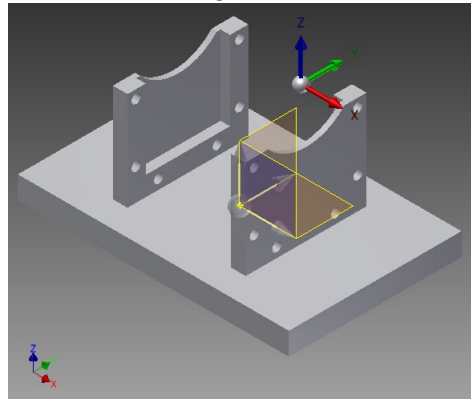
$$m\bar{x} = \sum_{i=1}^n m_i x_i \quad m\bar{y} = \sum_{i=1}^n m_i y_i \quad m\bar{z} = \sum_{i=1}^n m_i z_i \quad (7.2)$$

Se realiza el cálculo de centro de masa para cada partícula con respecto a sus centro de coordenadas  $x = 0$   $y = 0$   $z = 0$ .

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m} \quad \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{\sum_{i=1}^n m} \quad \bar{z} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i z_i}{\sum_{i=1}^n m} \quad (7.3)$$

Debido a que las piezas presentan gran cantidad de extrusiones y diferentes formas geométricas hacemos uso del software CAD para éste análisis así los resultados para cada pieza se aprecian en las siguientes figuras.

**Figura 32.** Sección Pie con  $m = 0,032kg$

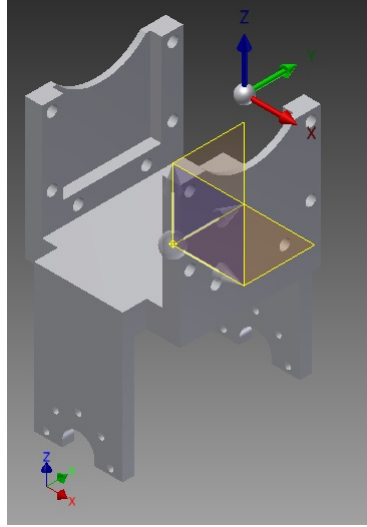


Fuente: Autores.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m} = -17,75mm \quad \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{\sum_{i=1}^n m} = 0.0mm \quad \bar{z} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i z_i}{\sum_{i=1}^n m} = -39.395mm$$



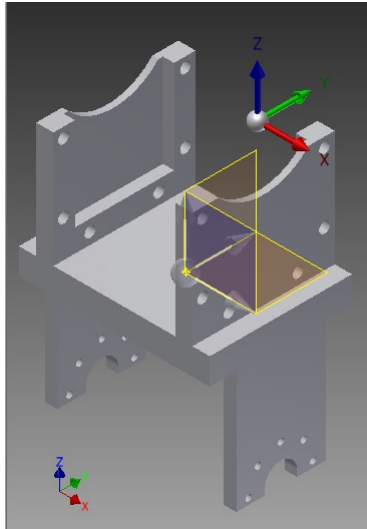
**Figura 33.** Sección Pierna con  $m = 0,020kg$



Fuente: Autores.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m} = -17,75mm \quad \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{\sum_{i=1}^n m} = 0.0mm \quad \bar{z} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i z_i}{\sum_{i=1}^n m} = -41,2768mm$$

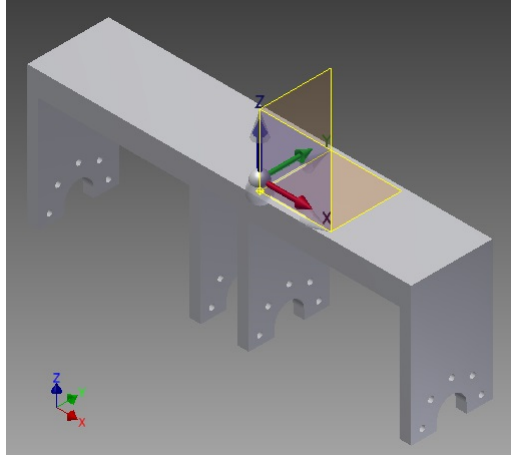
**Figura 34.** Sección Femur con  $m = 0,020kg$



Fuente: Autores.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m} = -17,75mm \quad \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{\sum_{i=1}^n m} = 0.0mm \quad \bar{z} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i z_i}{\sum_{i=1}^n m} = -41,2833mm$$

**Figura 35.** Sección Cadera con  $m = 0,023kg$

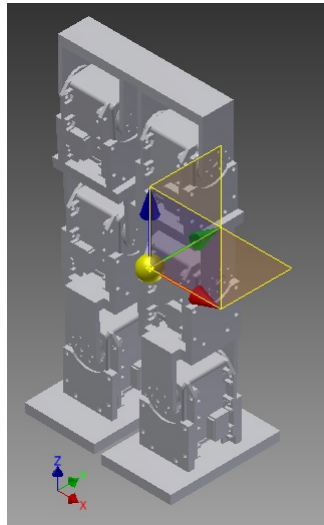


Fuente: Autores.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m} = 0.0mm \quad \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{\sum_{i=1}^n m} = 0.0mm \quad \bar{z} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i z_i}{\sum_{i=1}^n m} = -2,74522mm$$

con lo cual se halla el centroide masa de toda la estructura con el cual se comprueba que está dentro del polígono de soporte, lo cuál hace válido el diseño y adecuado para una caminata semi-estática con velocidades lentas (Figura 36).

**Figura 36.** Centro de masa del robot.



Fuentes: Autores.

### 7.2.3. Análisis Estático Del Robot

Se realiza este análisis para verificar que el diseño estructural sea capaz de soportar el peso de todas las piezas incluyendo los servomotores.

Asignando el material seleccionado anteriormente, el ABS para cada una de las piezas, se espera que sus propiedades físicas puedan resistir el peso y torques al que van a estar sometidas, de esta manera poder validar el diseño con este material después de haber analizado las tensiones de Von Mises y el factor de seguridad. Para esto es importante tener las propiedades físicas del ABS (Figura ).

**Figura 37.** Propiedades físicas y mecánicas del ABS.

<b>ABS – POLIACRILONITRILO BUTADIENO ESTIRENO</b>	
<b>Alargamiento a la Rotura (%)</b>	45
<b>Coefficiente de Fricción</b>	0,5
<b>Módulo de Tracción [GPa]</b>	2,1 - 2,4
<b>Resistencia a la Tracción – Flexión [MPa]</b>	41 – 45
<b>Resistencia al Impacto Izod [<math>J m^{-1}</math>]</b>	200 – 400
<b>Absorción de Agua – en 24 horas (%)</b>	0,3 – 0,7
<b>Densidad [<math>g cm^{-3}</math>]</b>	1,05
<b>Límite elástico [MPa]</b>	38.8
<b>Resistencia a los Ultra-violetas</b>	Pobre

Fuente: SIIM CO. SL. Recuperado de: <http://www.siim.com/docs/RAE-1018.pdf/>

En el análisis de esfuerzos, en la teoría de Von Mises expone que un material dúctil (material que si se aplica una fuerza, puede deformarse sosteniblemente sin romperse a diferencia de los materiales frágiles) no cede en una ubicación cuando la tensión de Von Mises es menor al límite elástico

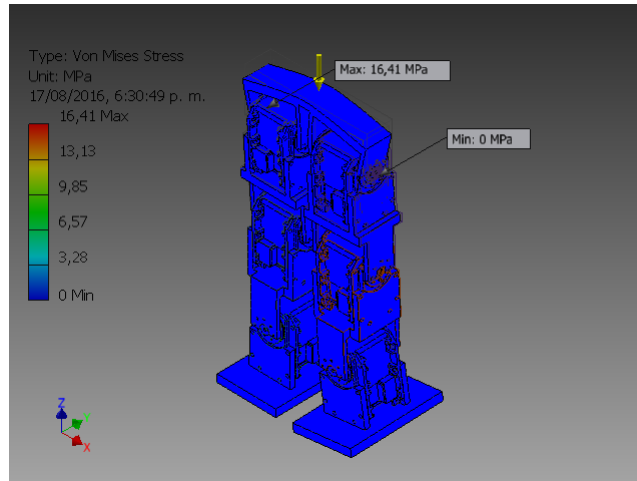
$$\sigma_{VonMises} < \sigma_{LímiteElastico} \quad (7.4)$$

Utilizando el software CAD para el análisis, se obtiene que el valor máximo de Von Mises aplicado a la estructura es de  $16,41 MPa$  (Figura ), se comprueba que el valor es inferior al límite elástico de  $38.8 MPa$  (Figura 37)

$$16,41MPa < 38.8MPa$$

(7.5)

**Figura 38.** Tensión Von Mises en el Robot.



Fuente: Autores.

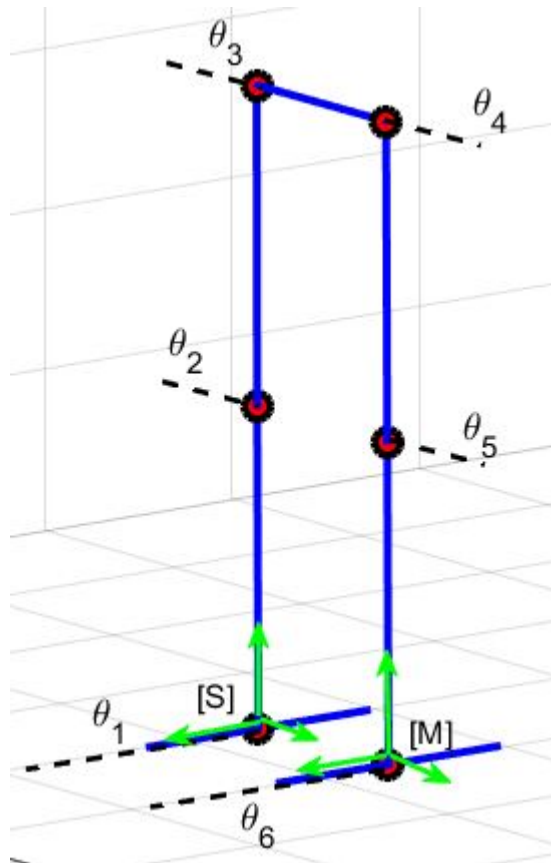
Se considera que el esfuerzo de diseño tiene que ser mayor al esfuerzo máximo que soporta la estructura para que no exista fallo en la misma. Con los resultados obtenidos en este análisis estático se concluye que la estructura resiste y no tiene fallos de seguridad estructural con el material asignado.

## 8. MODELO CINEMÁTICO

Para tener el modelo completo se requiere una descripción cinemática de la estructura del robot bípedo, para este caso el modelo cinemático directo que consiste en determinar cuál es la posición y orientación del extremo final del robot con respecto a un sistema de coordenadas que se toma como referencia. Para realizar este modelo matemático se usa la fórmula del modelo exponencial ya que conduce a una representación explícita del jacobiano del robot y resalta las propiedades geométricas del mecanismo.

Se realiza una representación del robot usualmente conocida como «modelo de alambres» Figura 39.

**Figura 39.** Modelo de Alambres del Robot.



Fuente: Autores

Se modela la estructura como la unión de seis eslabones unidas entre sí a través de un grado de libertad de tipo rotacional, es decir como si fuera un robot manipulador serial de seis grados de libertad con un sistema de referencia fijo. Teniendo en cuenta lo anterior, se asignó un sistema de referencia de coordenadas  $\{S\}$  al pie derecho, lo que significa que el pie izquierdo actuara como el efector final, el que queremos describir con respecto al sistema de referencia fijo. Se asignó el sistema de coordenadas  $\{M\}$  en el efector final (pie izquierdo). A continuación se identifican los ejes correspondientes a cada una de las articulaciones denotandolas como  $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6$ .

La matriz  $M$  tiene la forma:

$$M = \begin{bmatrix} R & P \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8.1)$$

como la orientación de  $\{S\}$  y  $\{M\}$  es igual  $R = I$  (matriz identidad) el vector  $P$  describe la posición con respecto al sistema de coordenadas fijo  $\{S\}$ . Se observa que no existe desplazamientos ni en  $x$  ni  $z$ , solo en  $y$  se recorre una distancia de  $L_3$ , así  $M$  queda definido como:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & L_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8.2)$$

como las articulaciones son rotacionales  $S_i = (\hat{w}_i, v_i)$  tiene la forma:

$$S_i = \begin{bmatrix} \hat{w}_i \\ v_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{w}_i \\ -\hat{w}_i \times q_i \end{bmatrix} \quad (8.3)$$

Los twist correspondientes a cada articulación quedan definidos de la siguiente manera:

$$\hat{w}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \hat{w}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \hat{w}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \hat{w}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \hat{w}_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \hat{w}_6 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8.4)$$

$\hat{w}_1$  y  $\hat{w}_6$  son iguales ya que el eje de rotación apunta en dirección  $x$ , para  $\hat{w}_2$ ,  $\hat{w}_3$ ,  $\hat{w}_4$  y  $\hat{w}_5$  apuntan en dirección  $y$ . Como no existen articulaciones prismáticas para todas las articulaciones  $h = 0$  así  $v_n = -\hat{w}_n \times q_n$ . Los vectores  $q_n$  corresponden a la ubicación de cada eje respecto al sistema de coordenadas fijo estarían definidos así:

$$\begin{aligned} q_1 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & q_2 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ L_1 \end{bmatrix} & q_3 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ L_1 + L_2 \end{bmatrix} \\ q_4 &= \begin{bmatrix} 0 \\ L_3 \\ L_1 + L_2 \end{bmatrix} & q_5 &= \begin{bmatrix} 0 \\ L_3 \\ L_5 \end{bmatrix} & q_6 &= \begin{bmatrix} 0 \\ L_3 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (8.5)$$

y cada  $v_n$  al hacer el producto cruz entre  $-\hat{w}_n$  y  $q_n$  queda así:

$$\begin{aligned} v_1 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & v_2 &= \begin{bmatrix} -L_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & v_3 &= \begin{bmatrix} -L_1 - L_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ v_4 &= \begin{bmatrix} -L_1 - L_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & v_5 &= \begin{bmatrix} -L_5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & v_6 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -L_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

La representación hemisimétrica de cada uno de los twist  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$ ,  $S_4$ ,  $S_5$  y  $S_6$  será:

$$S_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad S_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -L_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad S_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -L_1 - L_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$S_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -L_1 - L_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad S_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -L_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad S_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -L_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

la matriz correspondiente  $e^{[S_i]\theta_i}$  correspondiente al movimiento screw de cada articulación queda definido así:

$$e^{[S_1]\theta_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta_1) & -\sin(\theta_1) & 0 \\ 0 & \sin(\theta_1) & \cos(\theta_1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8.6)$$

$$e^{[S_2]\theta_2} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_2) & 0 & \sin(\theta_2) & -L_1 \sin(\theta_2) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin(\theta_2) & 0 & \cos(\theta_2) & L_1(1 - \cos(\theta_2)) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8.7)$$

$$e^{[S_3]\theta_3} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_3) & 0 & \sin(\theta_3) & -\sin(\theta_3)(L_1 + L_2) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin(\theta_3) & 0 & \cos(\theta_3) & (1 - \cos(\theta_3))(L_1 + L_2) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8.8)$$

$$e^{[S_4]\theta_4} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_4) & 0 & \sin(\theta_4) & -\sin(\theta_4)(L_1 + L_2) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin(\theta_4) & 0 & \cos(\theta_4) & (1 - \cos(\theta_4))(L_1 + L_2) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8.9)$$

$$e^{[S_5]\theta_5} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_5) & 0 & \sin(\theta_5) & -L_5 \sin(\theta_5) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin(\theta_5) & 0 & \cos(\theta_5) & L_5(1 - \cos(\theta_5)) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8.10)$$



$$e^{[S_6]\theta_6} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta_6) & -\sin(\theta_6) & L_3(1 - \cos(\theta_6)) \\ 0 & \sin(\theta_6) & \cos(\theta_6) & -L_3\sin(\theta_6) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8.11)$$

La matriz de transformación homogénea que describe el robot bípedo queda expresada como:

$$T = e^{[S_1]\theta_1} e^{[S_2]\theta_2} e^{[S_3]\theta_3} e^{[S_4]\theta_4} e^{[S_5]\theta_5} e^{[S_6]\theta_6} M = \begin{bmatrix} R(\theta) & P(\theta) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8.12)$$

donde  $R(\theta)$  es:

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

y  $P(\theta)$  es:

$$P(\theta) = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

Denotamos  $\sin(\theta_i) = s_i$ ,  $\cos(\theta_i) = c_i$  y tenemos que:

$$r_{11} = c_5(c_4(c_2c_3 - s_2s_3) - s_4(c_2s_3 + c_3s_2)) - s_5(c_4(c_2s_3 + c_3s_2) + s_4(c_2c_3 - s_2s_3))$$

$$r_{12} = s_6(c_5(c_4(c_2s_3 + c_3s_2) + s_4(c_2c_3 - s_2s_3)) + s_5(c_4(c_2c_3 - s_2s_3) - s_4(c_2s_3 + c_3s_2)))$$

$$r_{13} = c_6(c_5(c_4(c_2s_3 + c_3s_2) + s_4(c_2c_3 - s_2s_3)) + s_5(c_4(c_2c_3 - s_2s_3) - s_4(c_2s_3 + c_3s_2)))$$

$$r_{21} = c_5(c_4(c_2s_1s_3 + c_3s_1s_2) + s_4(c_2c_3s_1 - s_1s_2s_3)) + s_5(c_4(c_2c_3s_1 - s_1s_2s_3) - s_4(c_2s_1s_3 + c_3s_1s_2))$$

$$r_{22} = c_1c_6 - s_6(c_5(c_4(c_2c_3s_1 - s_1s_2s_3) - s_4(c_2s_1s_3 + c_3s_1s_2)) - s_5(c_4(c_2s_1s_3 + c_3s_1s_2) + s_4(c_2c_3s_1 - s_1s_2s_3)))$$

$$r_{23} = -c_1 s_6 - c_6 (c_5 (c_4 (c_2 c_3 s_1 - s_1 s_2 s_3) - s_4 (c_2 s_1 s_3 + c_3 s_1 s_2)) - s_5 (c_4 (c_2 s_1 s_3 + c_3 s_1 s_2) + s_4 (c_2 c_3 s_1 - s_1 s_2 s_3)))$$

$$r_{31} = -c_5 (c_4 (c_1 c_2 s_3 + c_1 c_3 s_2) + s_4 (c_1 c_2 c_3 - c_1 s_2 s_3)) - s_5 (c_4 (c_1 c_2 c_3 - c_1 s_2 s_3) - s_4 (c_1 c_2 s_3 + c_1 c_3 s_2))$$

$$r_{32} = c_6 s_1 + s_6 (c_5 (c_4 (c_1 c_2 c_3 - c_1 s_2 s_3) - s_4 (c_1 c_2 s_3 + c_1 c_3 s_2)) - s_5 (c_4 (c_1 c_2 s_3 + c_1 c_3 s_2) + s_4 (c_1 c_2 c_3 - c_1 s_2 s_3)))$$

$$r_{33} = c_6 (c_5 (c_4 (c_1 c_2 c_3 - c_1 s_2 s_3) - s_4 (c_1 c_2 s_3 + c_1 c_3 s_2)) - s_5 (c_4 (c_1 c_2 s_3 + c_1 c_3 s_2) + s_4 (c_1 c_2 c_3 - c_1 s_2 s_3))) - s_1 s_6$$

$$P_x = -L_1 s_2 - c_2 s_3 (L_1 + L_2) - s_2 (c_3 - 1) (L_1 + L_2) - s_4 (c_2 c_3 - s_2 s_3) (L_1 + L_2) - L_5 s_5 (c_4 (c_2 c_3 - s_2 s_3) - \dots$$

$$\dots - s_4 (c_2 s_3 + c_3 s_2)) - (c_4 - 1) (c_2 s_3 + c_3 s_2) (L_1 + L_2) - L_5 (c_4 (c_2 s_3 + c_3 s_2) + s_4 (c_2 c_3 - s_2 s_3)) (c_5 - 1)$$

$$P_y = L_3 (c_1 c_6 - s_6 (c_5 (c_4 (c_2 c_3 s_1 - s_1 s_2 s_3) - s_4 (c_2 s_1 s_3 + c_3 s_1 s_2)) - s_5 (c_4 (c_2 s_1 s_3 + c_3 s_1 s_2) + s_4 (c_2 c_3 s_1 - s_1 s_2 s_3)))) - \dots$$

$$\dots - L_5 s_5 (c_4 (c_2 s_1 s_3 + c_3 s_1 s_2) + s_4 (c_2 c_3 s_1 - s_1 s_2 s_3)) - s_4 (c_2 s_1 s_3 + c_3 s_1 s_2) (L_1 + L_2) + L_3 s_6 (c_5 (c_4 (c_2 c_3 s_1 - s_1 s_2 s_3) - \dots$$

$$\dots - s_4 (c_2 s_1 s_3 + c_3 s_1 s_2)) - s_5 (c_4 (c_2 s_1 s_3 + c_3 s_1 s_2) + s_4 (c_2 c_3 s_1 - s_1 s_2 s_3))) + L_5 (c_4 (c_2 c_3 s_1 - s_1 s_2 s_3) - \dots$$

$$\dots - s_4 (c_2 s_1 s_3 + c_3 s_1 s_2)) (c_5 - 1) + (c_2 c_3 s_1 - s_1 s_2 s_3) (c_4 - 1) (L_1 + L_2) - L_3 c_1 (c_6 - 1) + \dots$$

$$\dots + L_1 s_1 (c_2 - 1) - s_1 s_2 s_3 (L_1 + L_2) + c_2 s_1 (c_3 - 1) (L_1 + L_2)$$

$$P_z = L_3 (c_6 s_1 + s_6 (c_5 (c_4 (c_1 c_2 c_3 - c_1 s_2 s_3) - s_4 (c_1 c_2 s_3 + c_1 c_3 s_2)) - s_5 (c_4 (c_1 c_2 s_3 + c_1 c_3 s_2) + \dots$$

$$\dots + s_4 (c_1 c_2 c_3 - c_1 s_2 s_3))) + L_5 s_5 (c_4 (c_1 c_2 s_3 + c_1 c_3 s_2) + s_4 (c_1 c_2 c_3 - c_1 s_2 s_3)) - L_3 s_6 (c_5 (c_4 (c_1 c_2 c_3 - c_1 s_2 s_3) - \dots$$

$$\dots - s_4 (c_1 c_2 s_3 + c_1 c_3 s_2)) - s_5 (c_4 (c_1 c_2 s_3 + c_1 c_3 s_2 s_4 (c_1 c_2 c_3 - c_1 s_2 s_3)))) + L_5 s_5 (c_4 (c_1 c_2 s_3 + c_1 c_3 s_2) + \dots$$

$$\begin{aligned}
& \dots + s_4(c_1 c_2 c_3 - c_1 s_2 s_3)) - L_3 s_6(c_5(c_4(c_1 c_2 c_3 - c_1 s_2 s_3) - s_4(c_1 c_2 s_3 + c_1 c_3 s_2)) - s_5(c_4(c_1 c_2 s_3 + c_1 c_3 s_2) + \dots \\
& \dots + s_4(c_1 c_2 c_3 - c_1 s_2 s_3))) + s_4(c_1 c_2 s_3 + c_1 c_3 s_2)(L_1 + L_2) - L_5(c_4(c_1 c_2 c_3 - c_1 s_2 s_3) - s_4(c_1 c_2 s_3 + c_1 c_3 s_2))(c_5 - 1) - \dots \\
& \dots - (c_1 c_2 c_3 - c_1 s_2 s_3)(c_4 - 1)(L_1 + L_2) - L_1 c_1(c_2 - 1) - L_3 s_1(c_6 - 1) + c_1 s_2 s_3(L_1 + L_2) - c_1 c_2(c_3 - 1)(L_1 + L_2) + \dots \\
& \dots + s_4(c_1 c_2 c_3 - c_1 s_2 s_3))) + s_4(c_1 c_2 s_3 + c_1 c_3 s_2)(L_1 + L_2) - L_5(c_4(c_1 c_2 c_3 - c_1 s_2 s_3) - s_4(c_1 c_2 s_3 + c_1 c_3 s_2))(c_5 - 1) - \\
& \dots - (c_1 c_2 c_3 - c_1 s_2 s_3)(c_4 - 1)(L_1 + L_2) - L_1 c_1(c_2 - 1) - L_3 s_1(c_6 - 1) + c_1 s_2 s_3(L_1 + L_2) - c_1 c_2(c_3 - 1)(L_1 + L_2)
\end{aligned}$$

La matriz  $R \in SO(3)$  representa la orientación,  $P \in \mathbb{R}^3$  la posición del pie izquierdo con respecto al sistema de coordenadas fijo  $\{S\}$  que está en el pie derecho. Ahora esta representacion es valida para cuando se vaya hacer el movimeinto del pie izquierdo, para cuando se realice el movimiento del pie derecho, se intercambian los sistemas de coordenadas  $\{S\}$  y  $\{M\}$  (Figura 40), matemáticamente es la misma descripción pero en sentido contrario,  $\{S\}$  quedaría igual a  $\{M\}$  y se hallaría la nueva posición de  $\{M\}$ .

Diagram illustrating a 6-DOF robot arm structure. The joints are labeled  $\theta_1$  through  $\theta_6$ . The base consists of two parallel horizontal links labeled [M] and [S]. The vertical links are connected by a horizontal link at the top. Green arrows indicate the degrees of freedom at each joint.

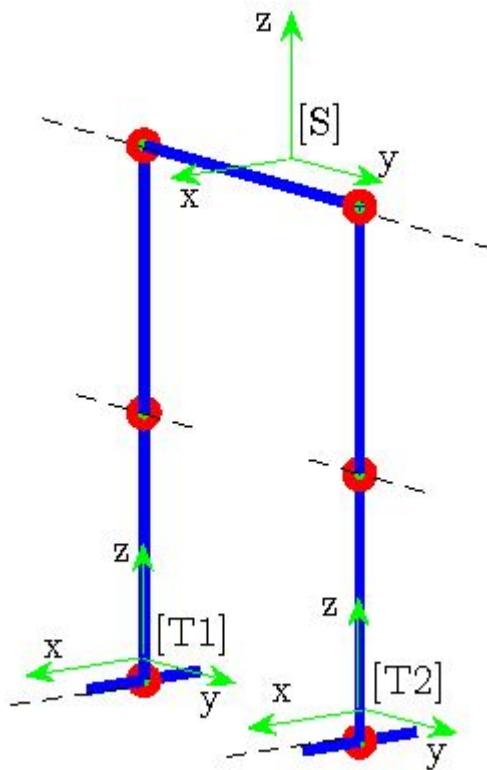
67

## 9. SIMULACIÓN

En este apartado se demuestra con el software MATLAB mediante una simulación el funcionamiento matemático descrito en el apartado anterior. Para esto se debe tener en cuenta el algoritmo de caminata descrito en la sección 4.3, recordando que la caminata es estática, la simulación se convierte en traducir el lenguaje matemático al lenguaje máquina.

Basado en el modelo mecánico descrito en el capítulo 7 se realiza un modelo como el de la figura 41, llamado modelo alambres que básicamente es una representación del robot, dónde los puntos rojos son las articulaciones y además tiene un marco de referencia adjunto para describir su posición respecto a cada uno.

**Figura 41.** Modelo alambres robot bipedo



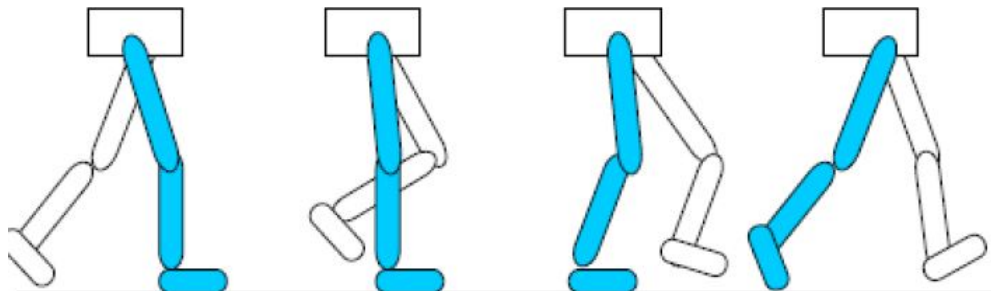
Fuente: Autores.

Teniendo el modelo se procede a crear el ciclo de caminado del robot (ver sección 4.3.3) como el de la figura 4.19, como se observa el proceso de caminado es un proceso cíclico, por lo tanto repetitivo, lo cual permite dividirla en varias fases, para determinar estas fases, se analiza haciendo como referencia toda la estructura y como esta es soportada por cada pierna.

## 9.1. FASE DE SOPORTE ÚNICO

Durante la fase de soporte único, el pie al que se le hace referencia del soporte, es el que se encuentra apoyado sobre el suelo y relativamente estacionario. Es el encargado de mantener el peso del cuerpo, de ahí su nombre, “soporte”. El comienzo de esta fase se puede distinguir cuando la otra pierna (la que no va a hacer el soporte) deja el suelo siendo la punta del pie lo último en estar en contacto con el suelo, y termina cuando esa misma pierna vuelve a tocar el suelo por medio del talón como se ve en la Figura 42.

**Figura 42.** Fase soporte

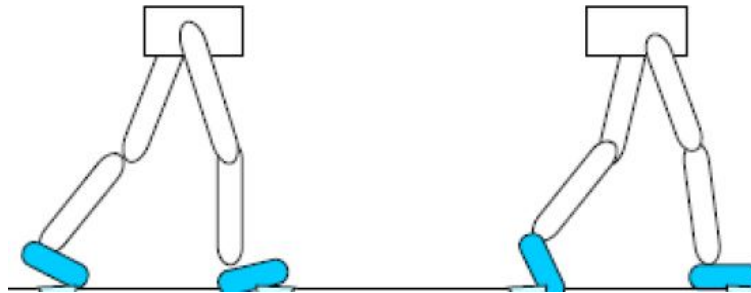


Fuente: Autores.

## 9.2. FASE DE SOPORTE DOBLE

Esta se caracteriza porque los pies se encuentran en contacto con el suelo compartiendo el soporte del cuerpo. El comienzo de esta fase se reconoce cuando el talón de una pierna toca por primera vez el suelo y termina cuando la punta del pie de la otra pierna se despegas del suelo. La duración de esta fase es bastante corta, pero indispensable ya que durante ella se hace el traspaso del soporte de la estructura de una pierna a otra. Figura 43.

**Figura 43.** Fase soporte doble.



Fuente: Autores.

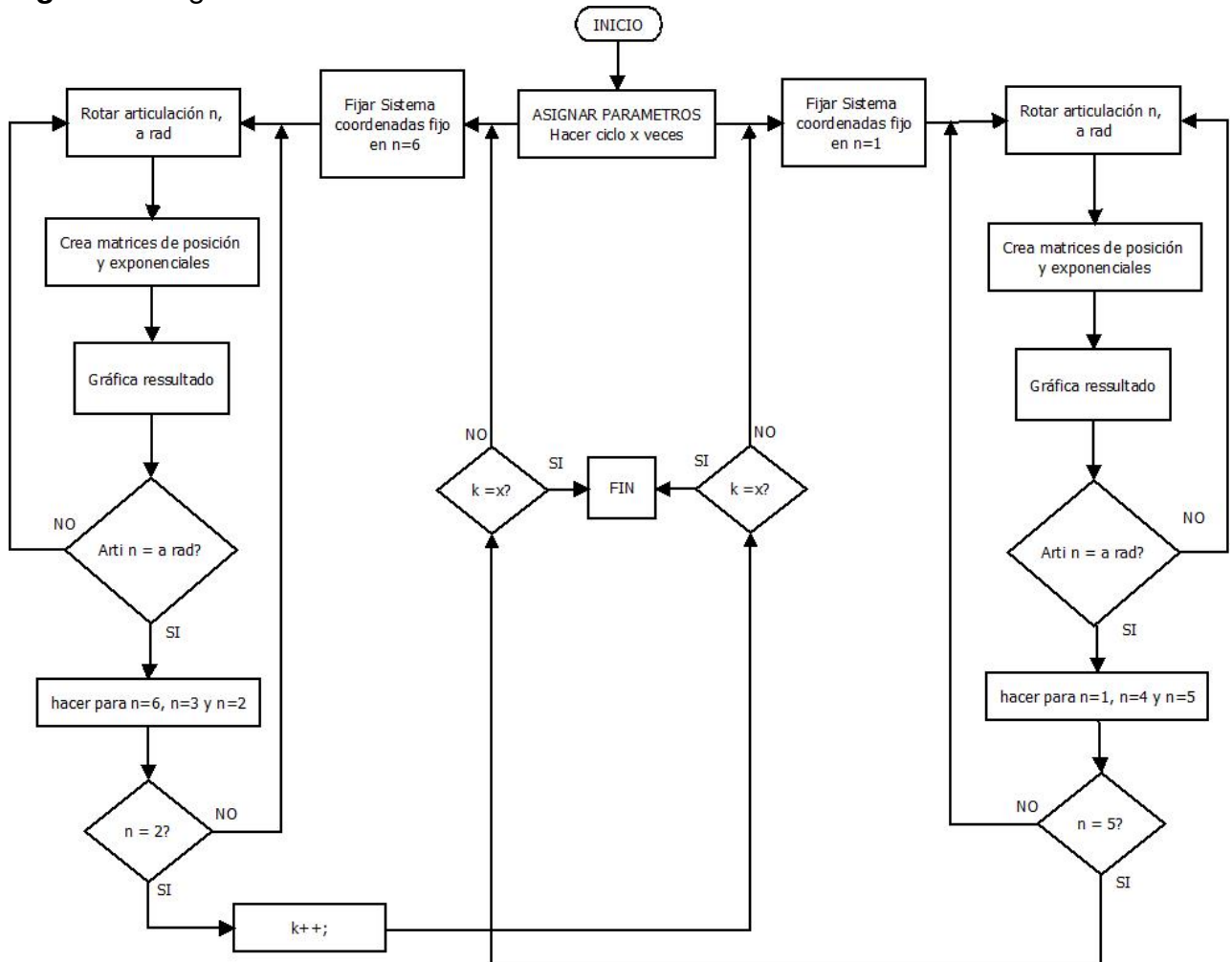
### 9.3. ALGORITMO PARA LA CAMINATA

Basado en lo expuesto en hasta aquí, se procede a generar un algoritmo que genere una trayectoria cíclica, la cual permita la simulación de una marcha bípeda usando el modelo de producto exponencial. Los pasos a seguir son los siguientes:

1. Definir Sistemas de coordenadas fijo
2. Asignar vectores unitarios a cada articulación con la dirección de rotación.
3. Describir la posición de cada con respecto al sistema de coordenadas fijo
4. Crear matriz exponencial para cada articulación.
5. Presentar la matriz de producto de exponencial para una pierna.
6. Graficar.

Así el algoritmo que generara la trayectoria es el siguiente:

**Figura 44.** Algoritmo simulación.



Fuente: Autores.

traduciendo al lenguaje de MATLAB las dos principales funciones de trayectoria y matriz exponencial quedan implementadas así como se muestra en la figura 45 y 46 respectivamente.



**Figura 45.** Función trayectoria

```
2 -   clc;
3 -   t =[0 0 0 0 0 0];
4 -   ct=0;
5
6 -   for t1=0:0.01:(pi/18);
7 -       t(1)=t1;
8 -       Bipedo_caminata_num(t,1);
9 -       pause(0.01)
10 -   end
11 -   for t4=0:0.01:(pi/12);
12 -       t(4)=t4;
13 -       Bipedo_caminata_num(t,1);
14 -       pause(0.01)
15 -   end
16 -   for t5=0:-0.01:(-pi/12);
17 -       %for t5=0:-0.01:(-pi/8);
18 -       t(5)=t5;
19 -       Bipedo_caminata_num(t,1);
20 -       pause(0.01)
21 -   end
22
23 -   for t1=(pi/18):-0.01:-0.09;
24 -       t(1)=t1;
25 -       t(6)=-t1;
26 -       O = Bipedo_caminata_num(t,1);
27 -       pause(0.01)
28 -   end
29 -   q=[0 0 0 0 0 0];
30 -   j=1;
```

Fuente: Autores.

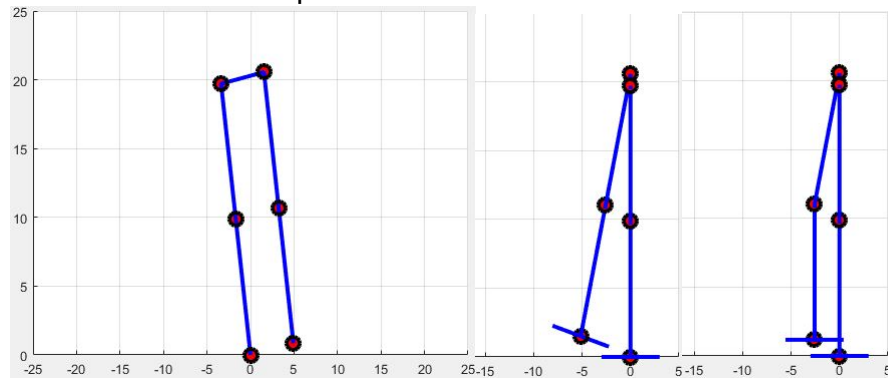
**Figura 46.** Función matriz exponencial

```
1  function y=ME_num(w1,w2,w3,v,t) %matriz exponencial para cada articulación
2
3  %syms t
4  %s = sin(teta), c = cos(teta), t = teta, w = [w]
5  s = sin(t);
6  c = cos(t);
7  %if(c<0.0000000001)
8  %   c=0;
9  %end
10 %if(s<0.0000000001)
11 %   s=0;
12 %end
13 %w = [0 -w3 w2; w3 0 -w1; -w2 w1 0]; %matriz hemisimétrica
14 w = [0 -w3 w2; w3 0 -w1; -w2 w1 0]; %matriz hemisimétrica
15 i = [1 0 0; 0 1 0; 0 0 1]; %matriz identidad
16
17 %ew = e^([w]teta), es = e^([s]teta)
18 ew = i + s*w + (1 - c)*(w^2);
19 r = ew; %Rotación
20 p = t*i + (1 - c)*w + (t - s)*(w^2); %*v
21 p = p*v; %Posición
22 %p = p'
23 es = [r p; 0 0 0 1];
24
25 y=es;
26
27 end
```

Fuente: Autores.

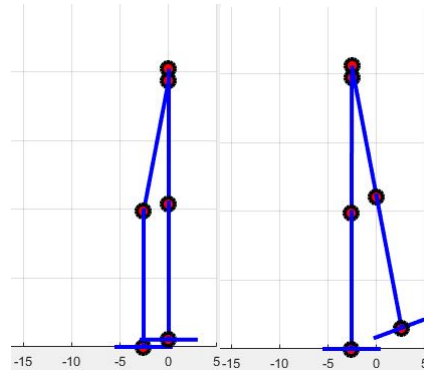
Ya teniendo implementado el código se procede a generar las gráficas, que simularan la caminata bípeda, e implementaran el algoritmo, en primera instancia se aprecia en la figura 47, la generación de la fase de soporte único, la articulación 1 rota  $\pi/18$  radianes, la articulación 4  $\pi/12$  radianes y la articulación 5  $-\pi/12$ . Después la articulación 1 vuelve a su posición inicial es decir rota  $-\pi/18$ , así queda posicionado el robot en la fase de doble soporte como se aprecia en la figura 48, como se había mencionado anteriormente el proceso es cíclico y por ende repetitivo, así lo único que varia es que el sistema de referencia va a ser el pie izquierdo y el pie derecho va actuar como la articulación móvil o efector final, las articulaciones que se moveran son la 6, 3, y 2, con los mismos valores respectivamente, figura 49.

**Figura 47.** Generación fase soporte único



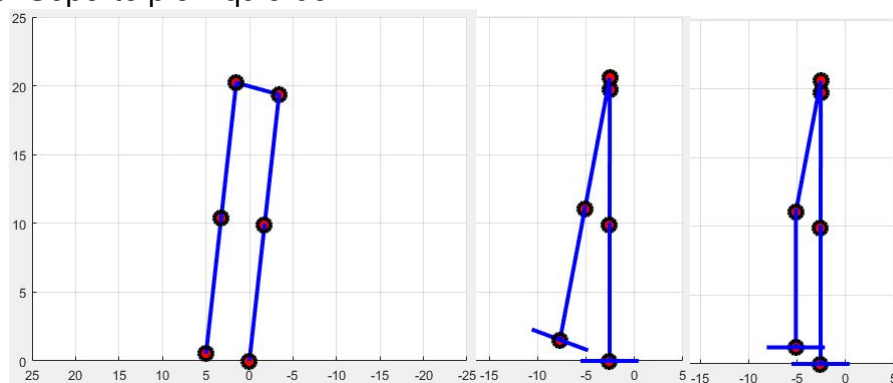
Fuente: Autores.

**Figura 48.** Fase doble soporte



Fuente: Autores.

**Figura 49.** Soporte pie izquierdo.



Fuente: Autores.

Con el algoritmo implementado, se genera una caminata, donde un ciclo representa

dos pasos, y por lo cual se valida el modelo matemático planteado en la sección 8, para una caminata semi-estática de 0.5 m/s.

## 10. CONCLUSIONES

Se ha presentado un método para el diseño de robots bípedos, vista como la unión de cadenas cinemáticas aplicando técnicas de geometría diferencial, basadas en la teoría matemática de los grupos y álgebras de Lie, estas permiten conocer el resultado de desplazar (rotar o trasladar) un punto en el espacio a lo largo de un eje cualquiera, obteniéndose así un modelo matemático para un robot bípedo de 6 grados de libertad, incluyendo su modelo computación y numérico, para su correspondiente aplicación.

La expresión final obtenida en el método mediante la formula del producto de exponenciales, permite reducir la complejidad del problema cinemático inverso mediante la división del mismo en subproblemas más sencillos, que ocurren de forma frecuente en la mecánica de robots, y cuyas soluciones geométricas son conocidas. Adicional el diseño del robot con este enfoque se deja la expresión lista para obtener el Jacobiano y las velocidades del robot sin necesidad de calcular derivadas, sino con una caracterización geométrica que permite describir las singularidades de una forma sencilla.

Al enfocar el diseño del robot bípedo usando el producto de exponenciales, conduce a una representación explícita del Manipulador Jacobiano que es realmente natural y que resalta las propiedades geométricas del robot bípedo, sin tener las desventajas de las representaciones locales, las cuales se presentan con el método tradicional (Denavit-Hartenberg), teniendo así relaciones entre las velocidades del movimiento de las articulaciones.

## Bibliografía

- [1] S.O. Anderson, M. Wisse, C.G. Atkeson, J.K. Hodgins, G.J. Zeglin, and B. Moyer. Powered bipeds based on passive dynamic principles. In *Humanoid Robots, 2005 5th IEEE-RAS International Conference on*, pages 110–116, 2005.
- [2] Cajamarca, Marlon Andrés. *Enfoque geométrico para el modelado dinámico de robots manipuladores simples de cadena abierta no redundantes*. Escuela Tecnológica Instituto Técnico Central, 2015.
- [3] Antonio Barrientos, Luis Felipe Peñín, Carlos Balaguer, and Rafael Aracil. *Fundamentos de robótica*, volume 2. McGraw-Hill, Interamericana de España, 2007.
- [4] Aníbal Ollero Baturone. *Robótica: manipuladores y robots móviles*. Marcombo, 2001.
- [5] Honda Motor Co. Building human like [en línea]. <[http://world.honda.com/ASIMO/history/e1\\_e2\\_e3/index.html](http://world.honda.com/ASIMO/history/e1_e2_e3/index.html)>, [citado 22 de febrero de 2015].
- [6] Honda Motor Co. Evolving to a humanoid [en línea]. <[http://world.honda.com/ASIMO/history/p1\\_p2\\_p3/index.html](http://world.honda.com/ASIMO/history/p1_p2_p3/index.html)>, [citado 22 de febrero de 2015].
- [7] Honda Motor Co. evolution of asimo [en línea]. <<http://world.honda.com/ASIMO/technology/index.html>>, [citado 22 de febrero de 2015].
- [8] Honda Motor Co. Start of robot development modeled on humans [en línea]. <<http://world.honda.com/ASIMO/history/e0/index.html>>, [citado 22 de febrero de 2015].
- [9] Toyota Motor Corporation. Toyota contributes to first-ever robot-human conversation experiments in space. [en línea]. <[http://www.toyotaoman.com/index.php?option=com\\_content&task=view&id=365&Itemid=](http://www.toyotaoman.com/index.php?option=com_content&task=view&id=365&Itemid=)> 2015.

- [10] Toyota Motor Corporation. Expo 2005 aichi, robot project [en línea]. <<http://engineering.curiouscatblog.net/2006/07/04/toyota-robots/>>, [citado 27 de febrero de 2015].
- [11] Fernando Reyes Cortés. *Robótica. Control de robots manipuladores*. Number 592 pag. Mexico D.F.: Alfaomega, 2011.
- [12] John J Craig. *Introduction to robotics: mechanics and control*, volume 3. Pearson Prentice Hall Upper Saddle River, 2005.
- [13] Escuela Graduada de Medicina de la Universidad de Nueva York. Ortesica del miembro inferior [en línea]. <http://www.oandplibrary.org/reference/ortesica/>, [citado 29 de mayo de 2015].
- [14] Boston Dynamics. Petman [en línea]. [http://www.bostondynamics.com/robot\\_petman.html](http://www.bostondynamics.com/robot_petman.html), 2015.
- [15] ALDEBARAN SoftBank Group. Who is nao? [en línea]. <<https://www.aldebaran.com/en/humanoid-robot/nao-robot>>, 2014.
- [16] Humanoid Robotics Institute. Wabot -waseda robot [en línea]. <[http://www.humanoid.waseda.ac.jp/booklet/kato\\_2.html](http://www.humanoid.waseda.ac.jp/booklet/kato_2.html)>, [citado 4 de febrero de 2015].
- [17] Waseda University Online. History of robot research at waseda [en línea]. <[http://www.yomiuri.co.jp/adv/wol/dy/campus/spreport\\_1401\\_02.html](http://www.yomiuri.co.jp/adv/wol/dy/campus/spreport_1401_02.html)>, [citado 10 de mayo de 2015].
- [18] Waseda University Online. Biped humanoid robot group wabian-2 [en línea]. [http://www.takanishi.mech.waseda.ac.jp/top/research/wabian/wabian2\\_2LL/wabian2\\_2LL](http://www.takanishi.mech.waseda.ac.jp/top/research/wabian/wabian2_2LL/wabian2_2LL). [citado 22 de mayo de 2015].
- [19] Waseda University Online. Wabian, a bipedal robot, and kobian, a robot which uses its entire body to express emotion [en línea]. <[http://www.yomiuri.co.jp/adv/wol/dy/campus/spreport\\_1401\\_03.html#KOBIAN](http://www.yomiuri.co.jp/adv/wol/dy/campus/spreport_1401_03.html#KOBIAN)>, [citado 22 de mayo de 2015].
- [20] Gotor, Jose Manuel Pardos. *Algoritmos de geometría diferencial para la locomoción y navegación bípedas de robots humanoides: aplicación al robot RH0*.

Madrid, Universidad Carlos III de Madrid, Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática, 2005. 260 p.

- [21] F. C. Park and K. M. Lynch. *INTRODUCTION TO ROBOTICS*. Course Notes From edx course: ROBOT MECHANICS, PLANNING, AND CONTROL part 1 and 2., April 2014.
- [22] S. Sastry R. Murray, Z. Li. *A mathematical introduction to robotic manipulation*. CRC Press, 1994.
- [23] A Rodríguez-Ángeles, CA Cruz-Villar, and DA Vite-Téllez. Generación de trayectorias para marcha semi-estática de un robot bípedo: diseño y pruebas experimentales. *Ingeniería*, 15(2):57–68, 2011.
- [24] K Sreejith C y Sreeshma. Design and experimental implementation of bipedal robot. *International Journal of Advanced Computer Research*, 2(3), 2012.
- [25] Javier Torres. *Robot manipulador. Trabajo de grado ingeniero en mecatrónica*. 2014.
- [26] Carlos de Pina Aloísio Yuri dos Santos Mota, Armando Carlos de Pina Filho. Research on bipedal robots applied to society [en línea]. <<http://www.sbmac.org.br/dincon/trabalhos/PDF/student/68009.pdf>>, 9 ed. junio 2010. [citado 23 de Agosto de 2015].