

逻辑与神经之间的桥

甄景贤 (King-Yin Yan)

General.Intelligence@Gmail.com

Abstract. 本篇讨论经典逻辑 AI 和神经网络之间的一个对应关系，探讨二者的数学结构。逻辑规则 (rules) 可以利用变量表达，对应於空间中的一些 diagonals，这种泛化方式比神经网络的基於 smooth function 和邻域的泛化更强。有可能结合二者的结构，亦即增加 inductive bias，达到加快学习的目的。

逻辑 AI 那边，「结构」很抽象符号化，但**学习算法太慢**；我的目的是建立一道「桥」，将逻辑 AI 的某部分结构**转移到**神经网络那边。

这个问题搞了很久都未能解决，因为逻辑 AI 那边的结构不是一般常见的数学结构，单是要表述出来也有很大困难。直到我应用了 model theory 的观点，才找到满意的解决方案：

$$\begin{array}{ccc}
 F = \text{logic system} & & F = \text{recurrent deep NN} \\
 \text{---} & \approx & \text{---} \\
 x \cup \text{KB} \models x' & & x \text{ --- } x' \\
 x = \text{model} & & x = \text{mental state}
 \end{array} \quad (1)$$

首先解释 neural network 那边的结构，然后再解释 logic 那边的结构。

1 神经网络的结构

一个神经网络基本上是:

每层的权重矩阵 总层数

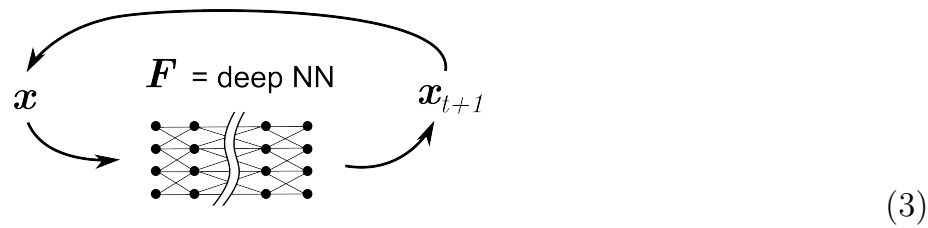
$$F(\mathbf{x}) = \mathcal{O}(W_1 \mathcal{O}(W_2 \dots \mathcal{O}(W_L \mathbf{x}))) \quad (2)$$

σ = sigmoid function, applied component-wise (其作用是赋予非线性)

⊗ 作用在 \mathbf{x} 的每个分量上，它的作用在座标变换下没有不变性。所以 ⊗ 不是一个向量运算，从而 $\mathbb{X} \ni \mathbf{x}$ 的结构也不是向量空间的结构。通常习惯把 \vec{x} 写成向量形式，但这有点误导。

如果将神经网络首尾相接造成迴路，这是一种智能系统的最简单形式。举例来说，如果要识别「白猫追黑猫」的视像，「猫」这物体要被识别两次，很明显我们不应浪费两个神经网

络去做这件事，所以 回路 是必须的：



它的状态方程是：

离散时间

$$\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{F}(\mathbf{x}_t)$$

(4)

连续时间

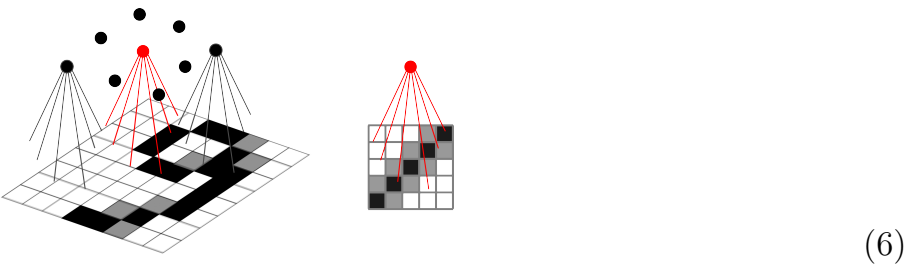
$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

(5)

由此可以看出， \mathbb{X} 是一个微分流形。更深入地讲，它是一个力学上的 Hamiltonian 系统，具有 symplectic（辛流形）结构。但这超出了本文范围，详见本篇的姊妹作 [16]。

现在思考一下，神经网络怎样识别模式，或许会有帮助....

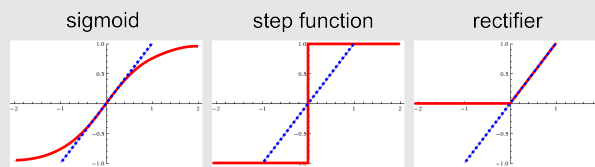
考虑最简单的情况，例如提取数字“9”的特征的一层网络。这层网络可以有很多神经元（左图），每个神经元局部地覆盖输入层，即所谓视觉神经元的 local receptive field（右图）。



假设红色的神经元专门负责辨识「对角线」这一特征。它的方程式是 $y = \text{Sigmoid}(Wx)$ 。矩阵 W 的作用是 affine「旋转」特征空间，令我们想要的特征指向某一方向。然后再用 Sigmoid 「挤压」想要的特征和不想要的特征。Sigmoid 之后的输出，代表某类特征的存在与否，即 $\{0, 1\}$ 。这是一种资讯的压缩。

叉开话题，讲一点 chaos theory:

\odot^{-1} 的作用是「扯」(stretch)，将本来邻近的两点的距离非线性地拉远。看看以下各种常见的激活函数，它们全都是相对于 identity $y = x$ 的非线性 deformation:



(7)

这和 Steven Smale 提出的「马蹄」[12] 非常类似，它是制造混沌的处方之一。Smale 马蹄的另一个变种叫做 baker map，其作用类似於「搓面粉」。换句话说，「拉扯」然后放回原空间，如此不断重复，就会产生混沌 [3] [13]。

这里有一点重大意义： F^{-1} 有混沌的典型特徵：它「对初始状态的微小变化非常敏感」。根据我的观点，神经网络的正向运算是 pattern recognition = 资讯压缩，反向是反压缩。反向的时候，因为同一概念可以对应於很多不同的输入 ($F^{-1}(x)$ 可以是很多 patterns)，所以输出的微小变化（例如 0.99 和 0.98）会造成 F^{-1} 的极大起伏；换句话说即是有混沌现象。换句话说 F 的逆是 unpredictable 的，简言之，神经网络 F 是不可逆的压缩过程。

最近一个有趣的例子是 DeepDream [1]，它用神经网络的 F^{-1} 产生有迷幻感觉的 pre-image，证实了 F^{-1} 可以和原本的 image 差距很大：



(8)

在神经网络的正向运作时似乎没有这种 “stretching”，这似乎不会产生混沌，而且根据 contraction mapping theorem， F 的 iteration 会终止於 fixed point(s)，但前提是 F 是 contractive 的，换句话说 the spectral radius of the Jacobian matrix of $F \leq 1$ ，但这一点我暂时未能确定（如果对 W 没有限制，这似乎不成立）。

另一方面，如果反向是混沌，正向似乎也应该是混沌；在 ergodic theory 里可以计算动态系统的 topological entropy，而这个 entropy 的值是 time-reversal invariant 的。我暂时不清楚如果用别的 entropy 计算会不会不同，有待请教一下 ergodic theory 方面的人....？

总括以上，可以归结出一些原则：

- 每个神经元的输出代表某个 feature 的存在与否
- 更高层的神经元代表下层 features 之间的关系

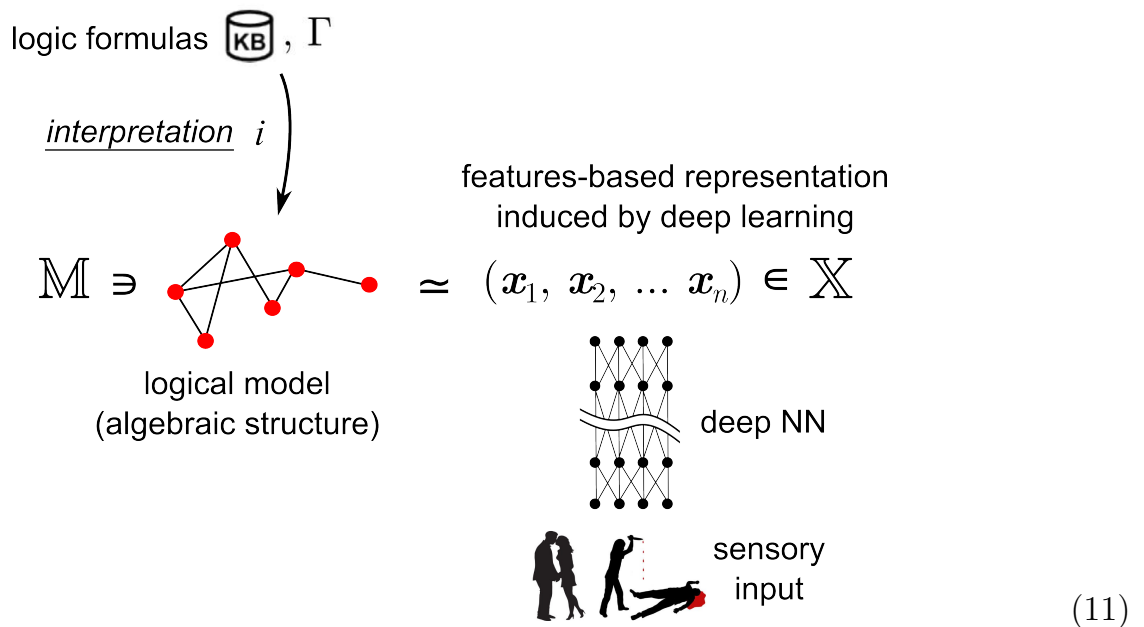
(9)

这些原则暂时未能严格地表述和证明，或者可以叫它做 **神经原理 (Neural Postulate)**。

凭这个思路推广，可以推测这样的 correspondence:

$$\begin{array}{llll}
 \mathbb{M} & \simeq & \mathbb{X} & \\
 \text{逻辑物体} & \bullet & \Leftrightarrow & \text{neuron} \\
 \text{逻辑关系} & \bullet\text{---}\bullet & \Leftrightarrow & \text{relation between higher and lower neurons}
 \end{array} \tag{10}$$

从 model theory 的角度可以这样理解:



2 逻辑的结构

一个逻辑系统可以这样定义:

- 一些 constant symbols, predicate symbols, 和 function symbols
- 由上述的原子建立 **命题** (propositions)
- 命题之间可以有连接词: \neg, \wedge, \vee 等
- 建立 **逻辑后果** (consequence) 关系: $\Gamma \vdash \Delta$

逻辑 AI 的 learning algorithm 叫 ILP (inductive logic programming), 这已经是一个 well-established field, 如有兴趣可参看我的 ILP tutorial (这版本有点旧, 有待更新) [14] 或 de Raedt 的教科书 [10]. ILP 在逻辑式子的符号空间中进行 combinatorial search, 缺点是太慢. 神经网络的 gradient descent (ie, back-propagation) 快很多, 暂时未知是不是要混合这两种算法, 还是只用 back-prop....?

我们的目的是将逻辑的结构 transfer 到神经网络. 逻辑的结构有两方面:

- 命题的内部结构 (sub-propositional structure)

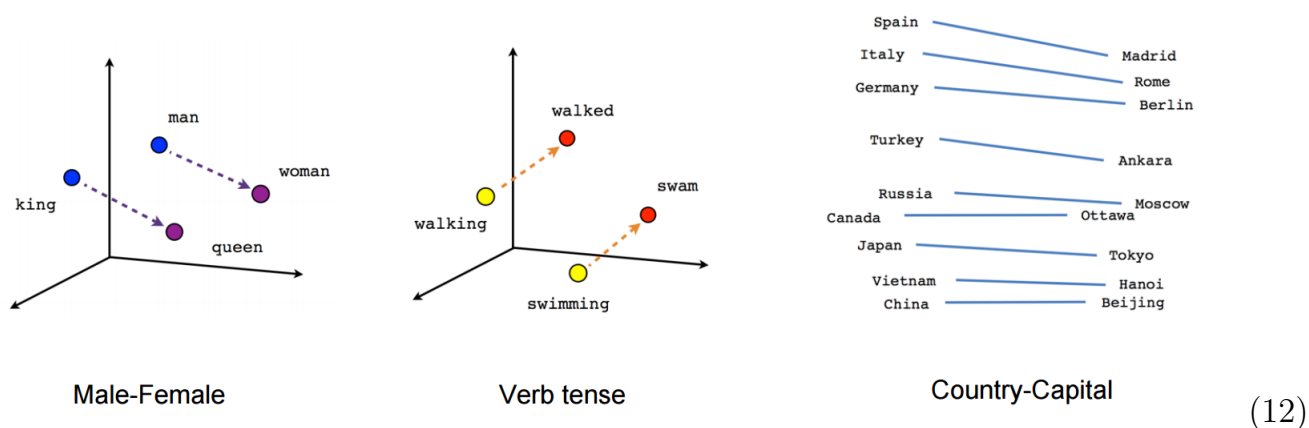
- 多个命题的集合 (= 记忆的结构)

以下分述之。谓词逻辑的命题结构比较特别，所以我初时专注於分析它。但后来发现《记忆的结构》[15] 更为基本，这是我们第 3 篇论文的题目。

2.1 逻辑命题的结构

Semantic distance 与 Compositionality

我们的目的是想将整套逻辑 AI 的器材搬到 [连续](#) 的微分流形上去实现。这个做法，是受了 Google 的 Word2Vec [9] 算法的启发，它可以将自然语言的词语 embed 到度量空间中，而且词语之间的距离是 [semantic distance](#) (语义学上的距离)：



当然，word2vec 一经发表之后，很多人开始构思怎样把「句子」也 embed 到度量空间上。第一个想法当然是用 [tensor product](#)，例如 “I love you” 这句子就变成了 $I \otimes \text{love} \otimes \text{you}$ 。

但这个做法表面上很好，但细思之下却有问题。在语言学 / 逻辑学里有一个重要概念叫 [compositionality](#)，它说：

合成物的语义 (semantics) 由其所构成的原子生成，而不依赖於其他资料 (13)

例如「我爱你」由「我、爱、你」三个原子组成。

举个例子，以下这些句子的意义相近：

- *pot calling the kettle black*
- 五十步笑百步
- *Those who live in glass houses should not throw stones*
- 其身不正

虽然可以想像这些句子之间（粗略地）可以建立一一对应，但仍然很难想像用「乘积」乘出来的位置会相近，因为这牵涉到每个词语在句子中的 interpretation *。所以句子的意义不是简单地由词语 bottom-up 生成的。

用 tensor product 的做法，得出的空间结构是 syntactic 而不是 semantic 的，但神经网络学习的重点是 泛化 (generalization)，它基於「邻近的点的意义相近」才能成功，所以一定要 semantic distance。

基於 “features” 的逻辑

上节看到 tensor product 的做法似乎有问题，它用原子 “algebraically” 组合成句子，原子之间的距离可以是语义学相近的，但「乘出来」的句子在语义空间上的位置可能 很不准确。另一方面，在神经网络里，「状态」 \mathbf{x} 是由一组 features 组成的，换句话说，它是一些 features 的 conjunction（也可以看成是乘积）。两者都是乘积，但前者有问题，因为它是由自然语言的字 / 词构成的，而后者是由概念原子 (conceptual atoms / features) 构成的。所以，如果我们避免将自然语言的字 / 句 naïve 地映照到 representation 上，使用概念原子的乘积应该没有问题。

暂时只考虑一个 thought (= 命题) 如何表示。

假设思维空间的 metric 是语义的（语义相近则点的距离相近）。根据「神经原理」(9)，每个 thought 必然是由一组 features 表述，例如 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ，每个 x_i 是一个概念原子。

记得逻辑学历史中 George Boole 曾经提出过一种逻辑 **，例如 x 代表「是人的」， y 代表「会死的」，那么「所有人都会死」就是：

$$x(1 - y) = 0 \quad (14)$$

这里 x, y 是 “classes”，乘法是集合的 intersection，即 \cap 。这种乘法和上面描述的句子 / 词语乘法不同；首先，这乘法是 commutative 的， $x \cap y = y \cap x$ 。如果将一个 thought 表示为：

$$\mathbf{x} = x_1, x_2, \dots, x_n = x_1 \cap x_2 \dots \cap x_n \quad (15)$$

则这些 x_i 可以看成是将所有思维的空间用「二分法」切割，每个 x_i 是一个二分切割。

两个 thoughts 之间的距离可以用 Hamming distance 量度，它是一个 semantic distance，尤其是当 n 比较大时，可能是一个效果不错的 metric。

总括来说：「二分法」逻辑用一组 binary features 去定义一个 thought，一条思维是 n -维 hypercube 上的一个顶点。

* 例如，“pot” 象徵有污点的人。经典 AI 研究者 Jerry Hobbs 开发了自然语言智能系统 Tacitus [5] [4]（这个字有「沉默」的意思），他的理论是基於逻辑上的 abductive interpretations（即逻辑上反方向推导，寻找句子意义的解释），没有这种解释的话，将句子分拆成词语 并不足以组成句子的完整意义；亦即是说，naïve compositionality 在人类语言中并不成立。

** 这和后世为他命名的 Boolean logic 不同。

逻辑中的 linkage 现象

在经典谓词逻辑 (predicate logic) 中有一个 “linkage” 的现象，例如以下这个式子（爸爸的爸爸是爷爷）：

$$\forall X \forall Y \forall Z. \text{grandfather}(X, Z) \leftarrow \text{father}(X, Y) \wedge \text{father}(Y, Z) \quad (16)$$

那意思是说，无论右边的变量（例如 X）怎样改变，左边的 X 必须代入相同的值。这是代入 (substitution) 的本质。

我们想将 predicate logic 的结构「搬到」神经网络，从抽象意义上说可以有很多种做法，现我讲述一种我设计的比较简单直接的做法：

状态空间的 transition $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{y}$ 看成是逻辑推导 $\mathbf{x} \vdash \mathbf{y}$ ，那么 linkage 就是 \mathbf{x} 的 i -分量到 \mathbf{y} 的 j -分量的 identity map。换句话说，有形如下式的一些 id maps 「埋藏」在 \mathbf{F} 里面：

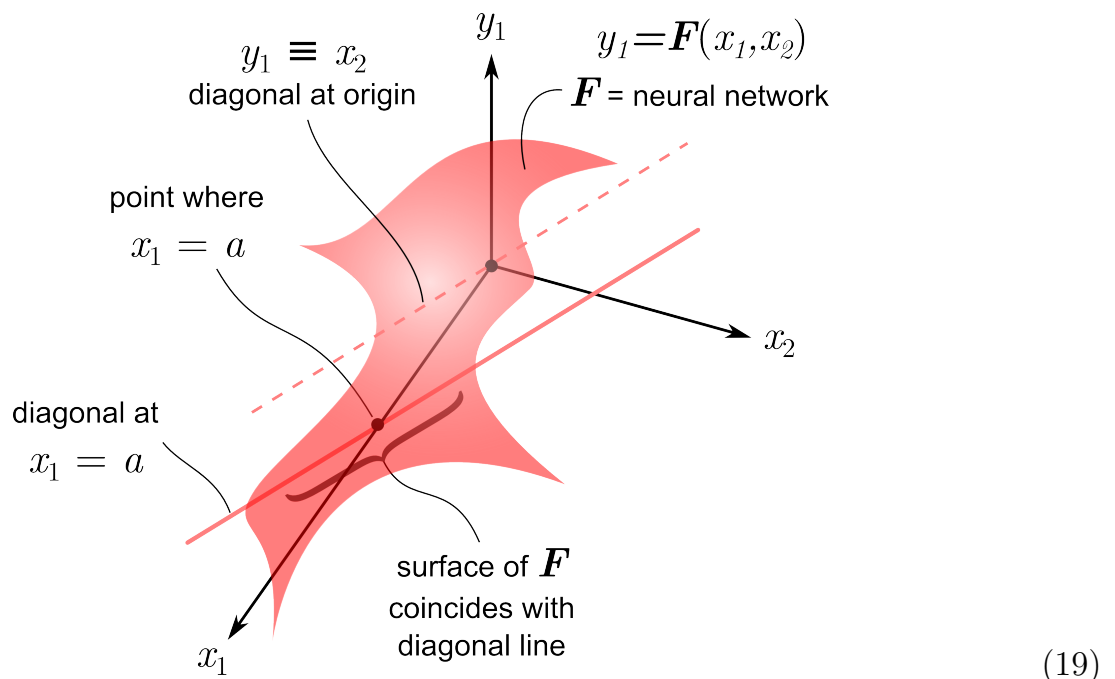
$$\mathbf{F} : (x_1, \dots, \mathbf{x}_i, \dots, x_n) \mapsto (y_1, \dots, \mathbf{y}_j, \dots, y_n) \quad (17)$$

注意，我说「埋藏」的意思是：这些 linkage 只在 \mathbf{x} 的某些位置才存在（例如，当前提中出现了两个关于「爸爸」的命题时）。更准确地说：

$$\mathbf{F} : \begin{cases} \mathbf{y}_j \equiv \mathbf{x}_i, & \text{if } \mathbf{x} = \hat{\mathbf{a}} \text{ for some coordinates except } x_i \\ \mathbf{y}_h \equiv \mathbf{x}_k, & \text{if } \mathbf{x} = \hat{\mathbf{b}} \text{ for some coordinates except } x_k \\ \dots \text{ etc } \dots \\ \text{is free otherwise} \end{cases} \quad (18)$$

以上每条等式代表一个 linkage。

一个 linkage 的几何图像如下：

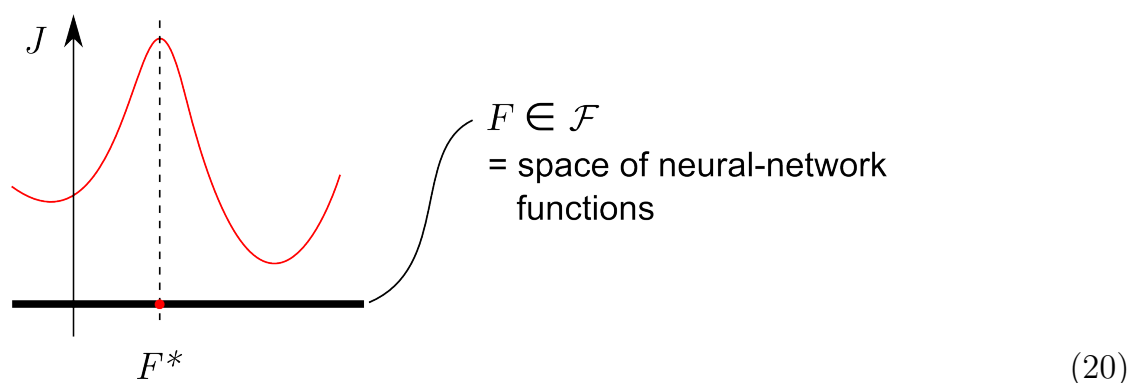


实际应用中 $\dim \mathbf{x}$ 可能达到成千上万，其中可以有有很多 linkages，很难 visualize。

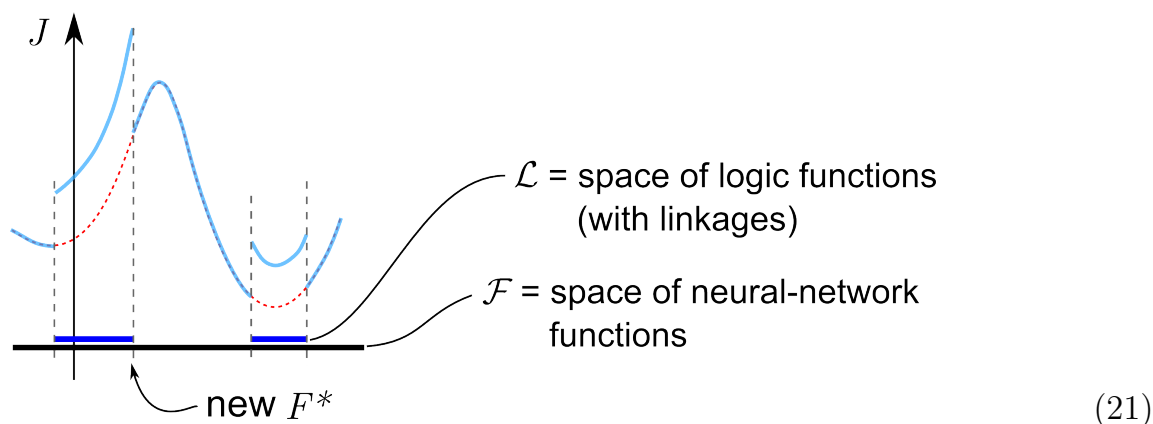
或者稍为形象化地解释一下：generalization 是智能的一个重要方面，例如由「苏格拉底会死、柏拉图会死」generalize 到「所有人都会死」这样的规律。这种泛化的 **propensity** 是一把双刃剑：有时候可以很聪明，但有时候过度泛化。例如有些男人被女性欺骗后，从此觉得所有女人都说谎。神经网络是一个空间中的 smooth function，它泛化的方法是靠 smoothness：某点的函数值改变时，该点的邻域的函数值也随著类似方向改变。神经网络本身没有那种 diagonal 式的泛化倾向（那是逻辑的特徵），但可以模拟它。神经网络 \mathbf{F} 对应於逻辑中的 \vdash ，即是由一些前题推出结论； \mathbf{F} 是一个非常高维数的空间上的一个 hyper-surface。 \mathbf{F} 里面包含著各种 logic rules，例如在「人」和「死」这些位置上埋藏了「所有人都会死」这个 diagonal；而在「爸爸」和「爷爷」之间埋藏了「爸爸的爸爸是爷爷」这个 diagonal。 \mathbf{F} 的函数曲面必须经过这些 diagonals。如果没有逻辑的约束， \mathbf{F} 的函数曲面就是自由的 smooth function 了。

Now，我们关心的是怎样“combine”逻辑结构和神经网络结构。在这里我再选择一个特别简单的方法：在 (18) 中的那些等式，构成了一些约束在神经网络的 W 之上的 equational constraints。只需要用这些 constraints 去训练神经网络，就可以实现 linkages。



传统的 back-prop 搜寻 \mathbf{F} 的最优值 \mathbf{F}^* ， J 是 score-function，注意底下的 domain 是 **泛函空间** (function space)：



而我们需要的是新的 back-prop，它在「混合」的 function space 上 optimize（至於 exactly 怎样混合我还不清楚）， J 在 logic 的 sub-space 上分数较高：



根据神经网络的 **universal approximation theorem** [2]， $L > 1$ 层神经网络的函数 \mathbf{F} 在函数空间中是 dense 的。换句话说，如果神经元的个数充分多，必然可以学习有任意 linkages 的函数。

如果还有疑惑，可以试试实际上 solve 一个 constraint。为简单起见，弃用  而用  (反正实践中很多深度网络都用 rectifier)，这样很方便，因为 rectifier 的前半截就是直线的 identity function。粗略地看，如果只有一层，那 constraint 约束了矩阵 W 的其中一行（有 n 个分量）；每个 linkage 使用 2 个自由度（ \equiv 等式使用 1 度，if-then 使用 1 度）。当层数增加时，涉及到的 W 数目递增，而约束等式仍然只是一条，换句话说，应该有很多的自由度可以用。这情况是乐观的。

注意：暂时我还未设计出使用 linkage 的 learning algorithm，我也不肯定使用了 linkage 之后会不会对学习速度有重大改进....？

用 relation algebra 如何？

以前曾经对 relation algebra [11] [8] 有些憧憬，因为它比较接近人类自然语言，但其实 relation algebra (RA) 和 first-order logic (FOL) 基本上是等效的，在 FOL 里面有 linkage 的复杂性，但在 RA 里面这个复杂性其实也没有消失。可以说「复杂度是守恒的」***。

举例来说，在 (16) 中表达「爸爸的爸爸是爷爷」，可以用 RA 更简单地表达：

$$\text{father} \circ \text{father} = \text{grandfather} \quad (22)$$

实际的推导是这样的：

$$\begin{array}{l} \text{John father Pete} \\ \text{Pete father Paul} \\ \text{John father} \circ \text{father Paul} \end{array} \quad (23)$$

这时要 **代入** 上面的等式才能得出结论：

$$\text{John grandfather Paul} \quad (24)$$

所以 linkage 的复杂性变成了代数 formula 长度的复杂性。

「长度」本身没有不妥，但我们的目的是将逻辑式子嵌入到状态空间 \mathcal{X} 里，这时 variable length 令人很头痛，但 fixed length 没有此问题。如果硬要将 variable length 的式子嵌入到（有限维）向量空间中，似乎必须用到 **fractal** 结构（因为它有自相似性），同时需要设计一种新的神经网络，它先天性地有 fractal 结构在里面；但这比较复杂，我没有在这方向 explore。

逻辑结构 summary

逻辑命题的**内部** (sub-propositional) 结构，传统上有两种方法表达：一是 predicate logic，二是 relation algebra。无论是哪种方式，它的本质都是想处理 **variable substitution**。有趣的是，「代数」的本质其实也是「代入」，但代数中的代入法则是 implicit 的，所以用代数来 explicitly 表达代入的概念反而很难。

*** 这句话是 category theorist Eugenia Cheng 说的。

至於 **λ -calculus**，它本质上就是一种处理 substitution 的方案。而 **combinatory logic** 和 λ -calculus 是等效的，后者消除了「变量」这概念，但取而代之的是式子的长度更复杂（比 relation algebra 更复杂）。

(First-order) predicate logic 的代数化，可以由 Alfred Tarski 的 **cylindric algebra** 给出：

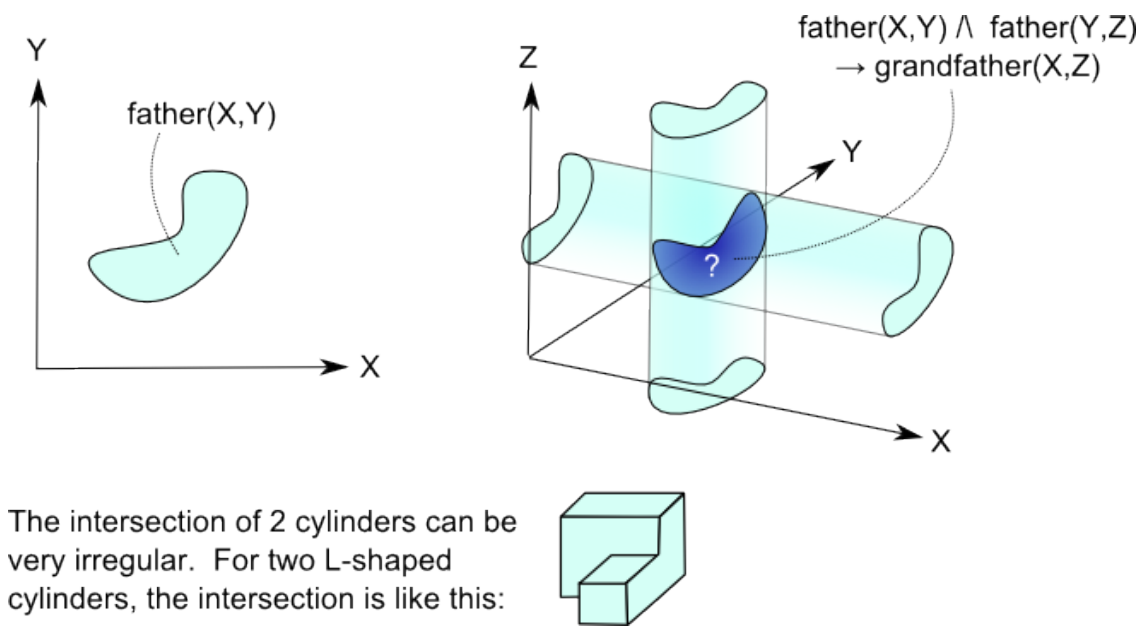
$$\frac{\text{propositional calculus}}{\text{Boolean algebra}} = \frac{\text{predicate calculus}}{\text{cylindric algebra}} \quad (25)$$

Higher-order logic (HOL) 的代数化可以用 **topoi theory** 给出 [6] [7]：

$$\frac{\text{intuitionistic propositional calculus}}{\text{Heyting algebra}} = \frac{\text{higher-order logic}}{\text{elementary topos}} \quad (26)$$

HOL 等效於 untyped λ -calculus，而 typed λ -calculus (= type theory) 较为弱一点。HOL 这个家族的特点，是“substitution of equal by equals”，这会令逻辑式子的长度增加。但 predicate logic 的做法是用**实物** (objects) 来做替换，它不会增加式子的长度；但将它代数化的结果是引入了 cylindrification、diagonal set 等概念，例如在 fig. (19) 有 $y_1 \equiv x_2$ 这个 diagonal。

所谓 **cylindrification** 的意思是这样的：



(27)

X, Y, Z 代表 domains，即所有「人」或「物体」(objects) 的集合。物体之间的**关系**是一些 regions（如蓝色那块平面代表“father”关系）。两个关系之间的“and”就是就是那两个 cylinders 的 intersection，所以叫 cylindric algebra。注意：这里的 (X, Y, Z) 不同於 fig. (19) 的 (x_1, x_2, y_1) ，前者是 3 个 domain 上的 2 个关系的交集：

$$\text{father} \wedge \text{father} \quad (28)$$

，后者是 x_1 = “father” 这个 predicate 的内部结构：

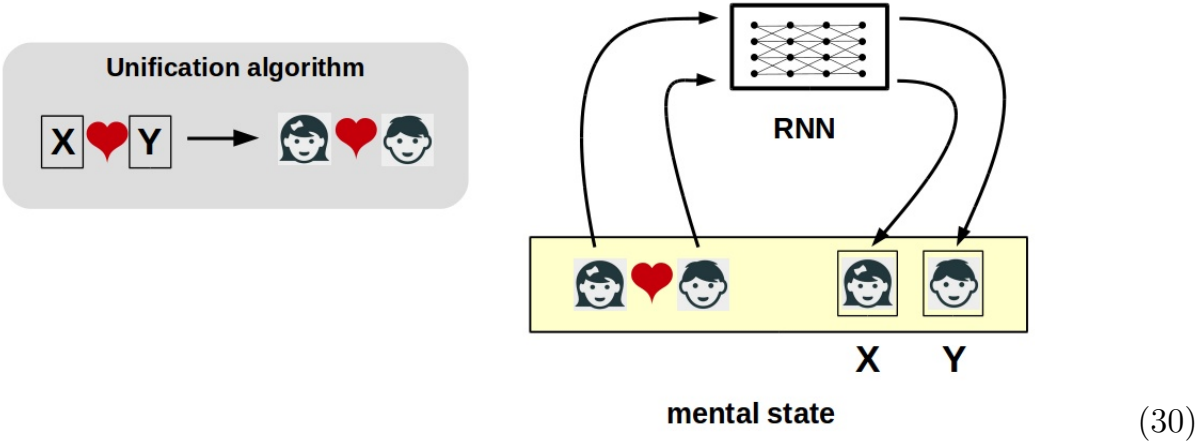
$$\text{father}(x_2, \cdot) \wedge \dots \mapsto \text{grandfather}(y_1, \cdot) \quad (29)$$

是个 diagonal (即 linkage: $x_2 \equiv y_1$)。

(这段的 references 太多，我有空再补上....)

用时间换取空间

上面说的是 substitution 在空间中的 linkage 结构。但也可以将 substitution 分拆成若干个简单的步骤。方法是：将某些内容放进记忆体中的「盒子」中，这些盒子充当 variables 的角色，也就是很具体地实现 substitution 的动作。换句话说，将空间复杂性转换成时间重复性[†]；以下是示意图：



X, Y 是状态空间 $\mathbb{X} \ni x$ 里面的「盒子」= variables。

先前我说的 linkage 结构，放在有限维向量空间比较方便，但它是 first-order logic，处理 higher-order 关系时有很大困难。Higher-order relations 似乎还是要用这种分拆步骤的方法解决。

2.2 结论

如上所述，适当地利用记忆体，可以不理睬 linkage 的空间结构。我在这篇论文中 elucidate 了逻辑的空间结构，先前仍是一个谜，妨碍思考，但现在有了比较清晰的理解，算是一种有益的贡献吧。

Acknowledgement

谢谢 Ben Goertzel (OpenCog 人工智能的创始人) 在 AGI mailing list 上和我的讨论。Ben 初次指出神经网络学习和逻辑 inductive 学习不同，引起我研究两者之间的关系。

References

1. Wikipedia: Deep dreaming (<https://en.wikipedia.org/wiki/Deepdreaming>).
2. Wikipedia: Universal approximation theorem (https://en.wikipedia.org/wiki/Universal_approximation_theorem).

[†] 人脑的脑电波由 0.5 Hz 到 40 Hz 都有，我们感觉上瞬间的动作可能已经过了若干次迴路。

3. Robert Gilmore and Marc Lefranc. *The topology of chaos: Alice in stretch and squeezeland*. Wiley-VCH, 2011.
4. Hobbs. interpretation as abduction, in book "discourse and inference", Nov 2003.
5. Jerry R Hobbs, Mark Stickel, Paul Martin, and Douglas Edwards. Interpretation as abduction. In *Proceedings of the 26th annual meeting on Association for Computational Linguistics*, pages 95–103. Association for Computational Linguistics, 1988.
6. Joachim Lambek. Categorical versus algebraic logic. In Andr  ka, Monk, and N  meti, editors, *Algebraic logic*, pages 351–360. North-Holland, 1988.
7. Saunders MacLane and Ieke Moerdijk. *Sheaves in geometry and logic – a first introduction to topos theory*. Springer, 1992.
8. Roger Maddux. *Relation algebras*. Elsevier, 2006.
9. Mikolov, Sutskever, Chen, Corrado, and Dean. Efficient estimation of word representations in vector space. *Proceedings of workshop at ICLR*, 2013.
10. Luc De Raedt. *Logical and relational learning*. Springer, 2008.
11. Gunther Schmidt. *Relational mathematics*. Cambridge, 2010.
12. Stephen Smale. Differentiable dynamical systems. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 1967.
13. Tam  s T  l and M  rton Gruiz. *Chaotic dynamics: an Introduction based on classical mechanics*. Cambridge, 2006.
14. King Yin Yan. ILP tutorial
[https://storage.googleapis.com/google-code-archive-downloads/v2/code.google.com/genifer/Genifer-induction\(30July2012\).pdf](https://storage.googleapis.com/google-code-archive-downloads/v2/code.google.com/genifer/Genifer-induction(30July2012).pdf).
15. King Yin Yan. The structure of memory. (to be submitted AGI-2017).
16. King Yin Yan, Juan Carlos Kuri Pinto, and Ben Goertzel. Wandering in the labyrinth of thinking – a cognitive architecture combining reinforcement learning and deep learning. (to be submitted AGI-2017).