逻辑与神经之间的桥

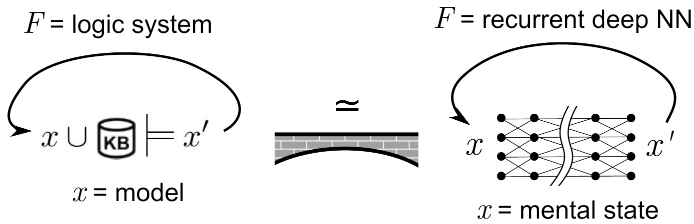
甄景贤 (King-Yin Yan)

General.Intelligence@Gmail.com

Abstract. Logic-based AI 和 connectionist AI 长久分裂，但作者最近发现可以建立两者之间的对应关系。逻辑的结构类似人类的自然语言，但大脑是用神经思考的。机器学习的主要目标，是用 inductive bias 去加快学习速度，但这目标太空泛。将逻辑结构加到神经结构之上，就增加了约束，亦即 inductive bias。

逻辑 AI 那边，「结构」很抽象符号化，但**学习算法**太慢；我的目的是建立一道「桥」，将逻辑 AI 的某部分结构**转移**到神经网络那边。

这个问题搞了很久都未能解决，因为逻辑 AI 那边的结构不是一般常见的数学结构，单是要要表述出来也有很大困难。直到我应用了 model theory 的观点，才找到满意的解决方案：



(1)

首先解释 neural network 那边的结构，然后再解释 logic 那边的结构。

1 神经网络的结构

一个 神经网络 基本上是：

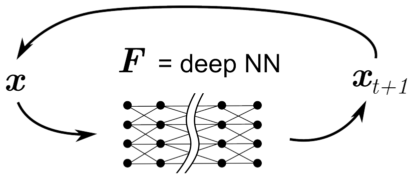
$$F(\boldsymbol{x}) = \sigma(W_1 \sigma(W_2 ... \sigma(W_L\, \boldsymbol{x}))) \tag{2}$$

其中 L 是层数，W_ℓ 是每层的**权重**矩阵，σ 是对每个分量的 sigmoid function （其作用是赋予非线性）。

σ 作用在 $\boldsymbol{x}$ 的每个分量上，它的作用在座标变换下**没有不变性**。所以 σ 不是一个向量运算，从而 $\mathbb{X} \ni \boldsymbol{x}$ 的结构也不是**向量空间**的结构。通常习惯把 $\vec{x}$ 写成向量形式，但这有点误导。

如果将神经网络**首尾相接**造成迴路，这是一种智能系统的最简单形式。举例来说，如果要识别「白猫追黑猫」的视像，「猫」这物体要被识别两次，很明显我们不应浪费两个神经网

络去做这件事，所以 迴路 是必须的：

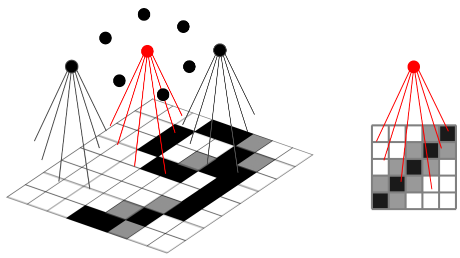


(3)

它的状态方程是 $\boldsymbol{x}_{n+1} = F(\boldsymbol{x}_n)$（或连续时间的 $\dot{\boldsymbol{x}} = f(\boldsymbol{x})$），由此可以看出，$\mathbb{X}$ 是一个**微分流形**。更深入地讲，它是一个力学上的 Hamiltonian 系统，具有 symplectic（辛流形）结构。但这超出了本文範围，详见本篇的姊妹作 [16]。

现在思考一下，神经网络怎样识别模式，或许会有帮助....

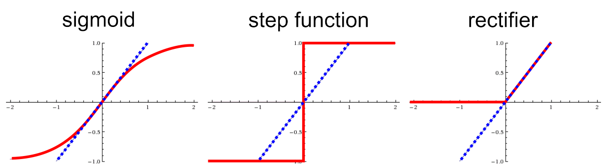
考虑最简单的情况，例如提取数字 "9" 的特徵的一层网络。这层网络可以有很多神经元（左图），每个神经元局部地覆盖输入层，即所谓视觉神经元的 local receptive field（右图）。



(4)

假设红色的神经元专门负责辨识「对角线」这一特徵。它的方程式是 $\boldsymbol{y} = \sigma(W\boldsymbol{x})$。矩阵 W 的作用是 affine「旋转」特徵空间，令我们想要的特徵指向某一方向。然后再用 σ「**挤压**」想要的特徵和不想要的特徵。Sigmoid 之后的输出，代表某类特徵的**存在与否**，即 $\{0, 1\}$。这是一种资讯的**压缩**。

讲一点 chaos theory：σ^{-1} 的作用是「扯」(stretch)，将本来邻近的两点的距离非线性地拉远。看看以下各种常见的激活函数，它们全都是相对於 identity $y = x$ 的非线性 deformation：



(5)

这和 Steven Smale 提出的「马蹄」[13] 非常类似，它是制造混沌的处方之一。Smale 马蹄的另一个变种叫做 baker map，其作用类似於「搓面粉」。换句话说，「拉扯」然后放回原空间，如此不断重复，就会产生混沌 [5] [14]。（神经网络的时间逆向就是 σ^{-1}，所以时间向前也是混沌。）

这里有一点重大意义：$\boldsymbol{F}^{-1}$ 有混沌的典型特徵：它「对初始状态的微少变化非常敏感」。换句话说 $\boldsymbol{F}$ 的逆是 unpredictable 的，简言之，神经网络 $\boldsymbol{F}$ 是**不可逆**的压缩过程。

最近一个有趣的例子是 DeepDream，它用神经网络的 $\boldsymbol{F}^{-1}$ 产生有迷幻感觉的 pre-image，证实了 $\boldsymbol{F}^{-1}$ 可以和原本的 image 差距很大：

(6)

总括以上，可以归结出一些原则：

$$\begin{array}{l} \bullet\ \underline{\text{每个神经元的输出代表某个 feature 的存在与否}} \\ \bullet\ \underline{\text{更高层的神经元代表下层 features 之间的}\textbf{关系}} \end{array} \tag{7}$$

这些原则暂时未能严格地表述和证明，或者可以叫它做 **神经原理 (Neural Postulate)**。

凭这个思路推广，可以推测这样的 correspondence：

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{M} & \simeq & \mathbb{X} \\ \text{逻辑物体} \bullet & \Leftrightarrow & \text{neuron} \\ \text{逻辑关系} & \Leftrightarrow & \text{relation between higher and lower neurons} \end{array} \tag{8}$$

2 逻辑的结构

一个**逻辑系统**可以这样定义：

- 一些 constant symbols，predicate symbols，和 function symbols
- 由上述的原子建立 **命题** (propositions)
- 命题之间可以有连接词：$\neg, \wedge, \vee$ 等
- 建立 **逻辑后果** (consequence) 关系：$\Gamma \vdash \Delta$

由一些原始的 sensory data，可以透过逻辑学习出一些 logic formulas，即知识库 (knowledge base) KB。这个过程叫逻辑**诱导学习** (inductive logic programming, ILP)。学经典 AI 的人都知道 ILP，但近数十年来，注意力集中在统计学习，这种符号逻辑的学习法被忽视。

原始的 sensory data 可以透过神经网络进行模式识别，也可以透过 ILP 进行模式识别，两条路径的结果很明显应该是（近似地）isomorphic 的：

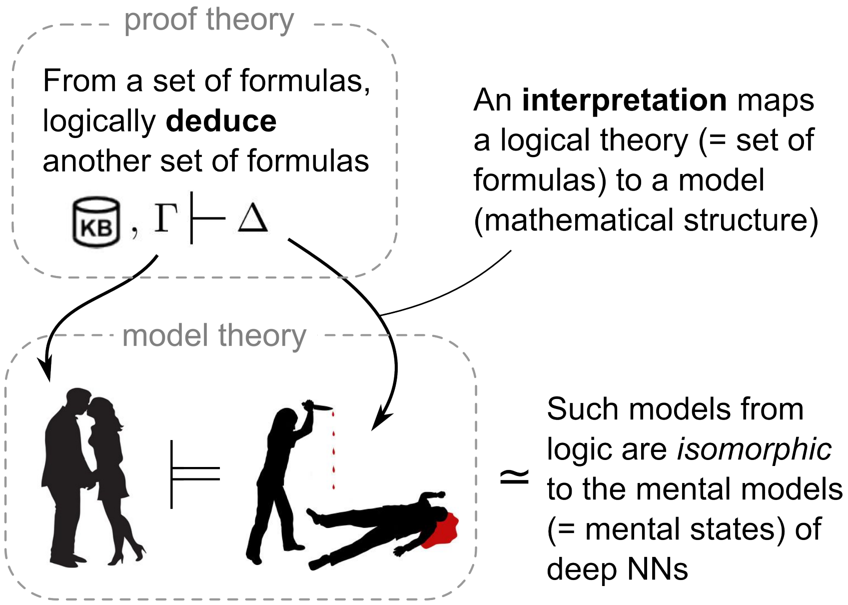
$$\begin{array}{ccc} \text{Logic representation} & \simeq & \text{Neural representation} \\ \nwarrow \text{inductive logic learning} & & \text{deep NN learning} \nearrow \end{array} \tag{9}$$

但实际上，这两边的 $\rightarrow$ 都是 **资讯压缩**的过程，因此是**不可逆**的，所以中间的 $\simeq$ 未必成立。（如果是可逆的，我们可以从一边往下回到原始资料然后再往上去到另一边。）

在**认知科学**里，有很多人相信大脑的内部的 representation 是一些所谓 "mental models"，而很少人会相信大脑使用一些像命题那样的符号结构做 representation，甚至用 λ-calculus 那样的符号 manipulation 去思考。

举例来说，用文字描述一起凶杀案，读者心目中会建立一个「模型」，它类似於真实经验但又不是真实的。人脑似乎是用这样的 mental models 思考，而不是一些命题的集合。有两本论文集关於 model-based reasoning，基於逻辑的：[10] [9]。

我终於发现到，logic-neuro correspondence 必须透过 model theory 才能达成：



(10)

$\vdash$ 是指由一些（符号逻辑的）**命题集合**推导出新的命题集合。$\models$ 指的是，由一个**模型**推导出另一个模型必然为真。

个人认为 relation algebra [12] [8] 比较接近人类自然语言，但在数理逻辑研究中最通用的逻辑是 first-order logic (FOL)。然而这并不是重点，因为各种逻辑基本上是等效的，而且相互之间可以很容易地转换。以下集中讨论 FOL。

3 模型论

模型论基础可参看 [4] [11]。模型论的做法是将逻辑的符号**语言** (language $\mathcal{L}$) 和它所指涉的**结构** $\mathcal{L}$-structure 分割，中间用 interpretation map 关联起来。

$\mathcal{L}$ 就是符号的集合 (predicates, relations, functions, constants)，递归地生成出句子和复合句子。这些都是 symbolic 的东西。

$\mathcal{L}$-structure 可以是任何抽象代数结构，它通常包含一个 base 集合，然后在集合上定义一些函数和关系。

模型论的中心思想是透过 interpretation i 去「保存」一些关系，例如：

$$R(a, b) \overset{i}{\mapsto} R^{\mathbb{M}}(a^{\mathbb{M}}, b^{\mathbb{M}}) \tag{11}$$

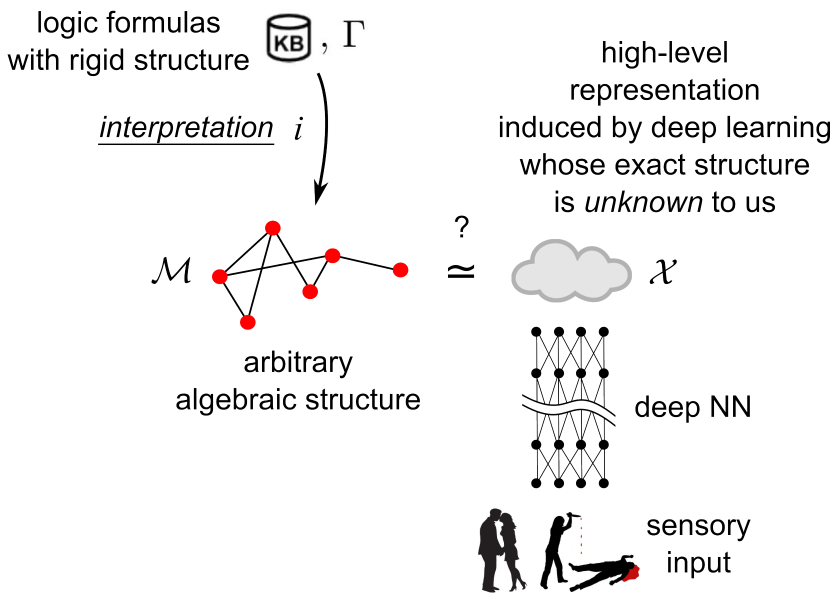
R 是一个关系，$x^{\mathbb{M}}$ 代表在结构 $\mathbb{M}$ 之上，x 所对应的物体。左边是符号逻辑，右边是实体的结构。模型论应用在 first-order logic，得出 $\vdash$ 和 $\vDash$ 等价的结论（看起来就好像同语反覆），这在数理逻辑教科书中都有，例如 [6]。

如果用範畴论的方法表示逻辑结构和神经结构之间的对应：

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{L} \arrow[d, "i"] & \\
\mathbb{M} \arrow[r, phantom, "\simeq"] & \mathbb{X} \\
& \mathcal{S} \arrow[u, "\text{deep NN}"']
\end{tikzcd} \tag{12}$$

- $\mathcal{L}$ = category of logic theories (= sets of formulas)
- i = interpretation maps
- $\mathbb{M}$ = category of models (from logic)
- $\mathbb{X}$ = category of models (from deep NNs)
- $\mathcal{S}$ = sensory input

上图等同於下面的卡通解释：



(13)

换句话说，$\mathbb{X}$ =  是由深度学习 induce 出来的结构；但它的结构对我们来说是不透明的（这是神经网络的弱点）。

而 $\mathbb{M}$ =  的结构就是模型论研究的对象。

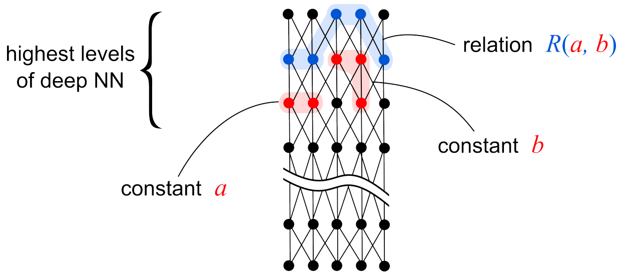
在模型论中，$\mathcal{L}$ 是逻辑句子的範畴，$\mathbb{M} =$  可以是任何抽象代数结构。只需把 $\mathcal{L}$ 中的 constants, predicates, relations, functions 映射到 $\mathbb{M}$ 就行。为简化讨论，我们只考虑 constants 和 relations，因为二者是逻辑中最**本质**的东西。

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{L} & \xrightarrow{i} & \mathbb{M} \\ \text{constant symbol} & \xmapsto{i} & \bullet \\ \text{relation symbol} & \xmapsto{i} & \bullet\!-\!\bullet \end{array} \tag{14}$$

问题是在神经那边缺乏  的结构。一直以来，人们习惯把神经网络看成是 “black box”，但如果我们不知道 $\mathbb{X} =$  的结构，就无法建立 $\mathbb{M} \simeq \mathbb{X}$ 的 isomorphism。

4 结论

但要注意的是这对应未必是一对一的，可能是一个 constant 对应几个 neurons 的（线性？）**组合**。具体情况可能像以下的示意图（实际上每层神经网络可能有很多神经元）：



(15)

$R(a,b)$ 可以在 a,b 的 common parents 中寻找（例如那些蓝色神经元，$R(a,b)$ 的值 = 蓝色神经元的某个线性组合）。验证的方法是：当 a 和 b 的信号都是「有」时，$R(a,b)$ 的值也应该是 true。

这篇论文并不太成功，因为跳到 (7) 和 (14) 的结论没有严谨的根据，只是直观上觉得有可能。理论上来说，既然知道了 $\mathbb{M}$ 那边是怎样生成的、$\mathbb{X}$ 那边是怎样生成的，则要在两边建立「高速公路」应该是可行的。实际上，似乎只要建立一个深度网络就可以，因为神经网路是 universal function approximator，根本不用考虑 $\mathbb{M}$ 和 $\mathbb{X}$ 这两个结构之间的关系。

进一步的研究，希望数学专业的人能帮助一下：

1. 在逻辑那边，可不可以转换成 algebraic geometry 的结构？即是说：逻辑式子 $\simeq$ 代数方程。这种代数逻辑的做法，我暂时只知道有 [2]，是很偏门的研究。

2. 能不能根据 $\mathbb{M}$ 和 $\mathbb{X}$ 的结构，找出它们之间的桥的最简单形式？可以用数学归纳法，逐步考虑 $\mathbb{M}$ 和 $\mathbb{X}$ 生成的方式，或许有帮助？

应用：对於用深度学习做 natural language understanding 的人，这理论或许会很有用。

5 Prior art

- Bader, Hitzler, Hölldobler and Witzel 在 2007 年提出了一个 neural-symbolic integration 的做法 [3]。他们首先由 logic theory 生成抽象的 Herbrand model[1]，再将 Herbrand model 映射到某个 fractal 空间，然后直接用神经网络学习那 fractal 空间。虽然用了 model theory，但他们没有利用到本文所说的 $\mathbb{M}$ 和 $\mathbb{X}$ 之间的关系。

- Khrennikov 在 1997 年开始的多篇论文中提出了用 p-adic 代数来模拟思维空间 $\mathbb{X}$ 的结构，详见 [1] 一书。一个 p-adic 数可以看成是一个 p 进制的小数，p 是任何质数。

- 经典逻辑是二元逻辑，近代已经有无数将它扩充到 fuzzy 或 probablistic 的尝试（作者也提出过 [17]），但仍未有统一的理论。与此不同的另一个方向，如果将点看成是 first-order objects，谓词是点空间上的函数，直接得到 metric structures 上的连续逻辑 (continuous first-order logic) [15]，这可以看成是一种 $\mathbb{M}$ 的结构。

- 模型论中有（超滤子）ultra-filter 和 ultra-product 这些建构，它们起源於泛函分析，最近有很多横跨模型论和 Banach 空间的新研究 [7]。简单地说 ultra-product 用来将一些 models 构造出新的乘积 models。但我粗略地看过一下之后发现 ultra-product 通常涉及无穷集合，而且是很大的物体，在计算机上应用似乎不太实际。

Acknowledgement

谢谢 Ben Goertzel（OpenCog 人工智能的创始人）在 AGI mailing list 上和我的讨论。Ben 初次指出神经网络学习和逻辑 inductive 学习的不同，引起我研究两者之间的关系。

References

1. Vladimir Anashin and Andrei Khrennikov. *Applied algebraic dynamics*. de Gruyter, 2009.
2. Andreka, Nemeti, and Sain. *Handbook of philosophical logic*, chapter Algebraic logic, pages 133–247. Springer, 2001.
3. Bader, Hitzler, Hödobler, and Witzel. The core method: Connectionist model generation for first-order logic programs. *Studies in Computational Intelligence 77, 205-232*, 2007.
4. Kees Doets. *Basic model theory*. CSLI notes, 1996.
5. Robert Gilmore and Marc Lefranc. *The topology of chaos: Alice in stretch and squeezeland*. Wiley-VCH, 2011.
6. Shawn Hedman. *A first course in logic*. Oxford, 2004.
7. José Iovino. *Applications of model theory to functional analysis*. Dover, 2002.
8. Roger Maddux. *Relation algebras*. Elsevier, 2006.
9. Magnani, Nersessian, and Pizzi, editors. *Logical and computational aspects of model-based reasoning*. Kluwer, 2002.

[1] Herbrand model 是邏輯 AI 中常用的概念，大意是用邏輯語言 $\mathcal{L}$ 生成「所有可以代入的東西」(instantiating whatever that can be instantiated)，由此產生的不含變量的句子 (sentence) 的集合。換句話說，Herbrand model 的特點是它只靠 $\mathcal{L}$ 自身產生它的模型，而不依賴任何外在結構。每个邏輯 theory 都必然至少有一个 Herbrand model。

10. Magnani, Nersessian, and Thagard, editors. *Model-based reasoning in scientific Discovery*. Kluwer, 1999.
11. Maria Manzano. *Model theory*. Oxford, 1999.
12. Gunther Schmidt. *Relational mathematics*. Cambridge, 2010.
13. Stephen Smale. Differentiable dynamical systems. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 1967.
14. Tamás Tél and Márton Gruiz. *Chaotic dynamics: an Introduction based on classical mechanics*. Cambridge, 2006.
15. Itaï Ben Yaacov, Alexander Berenstein, C Ward Henson, and Alexander Usvyatsov. Model theory for metric structures. In *Model theory with applications to algebra and analysis, vol 2*. Cambridge, 2008.
16. King Yin Yan. Wandering in the labyrinth of thinking – a cognitive architecture combining reinforcement learning and deep learning. to be submitted AGI 2017.
17. King-Yin Yan. Fuzzy-probabilistic logic for common sense reasoning. *Artificial general intelligence 5th international conference, LNCS 7716*, 2012.