

游荡在思考的迷宫中

King-Yin Yan (甄景贤), Ben Goertzel, and Juan Carlos Kuri Pinto

General.Intelligence@Gmail.com

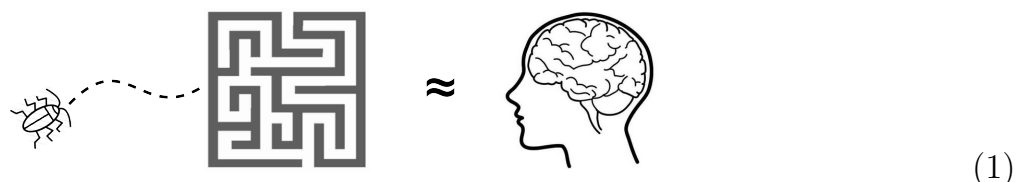
Abstract. 这篇是背景，介绍一个基於 **增强学习** 和 **深度学习** 的极简约的 cognitive architecture。系统包含一个 transition function，这函数的角色类似於逻辑推论算子 (\vdash)。在数学上这是一个 Hamiltonian 系统，而其 Lagrangian 对应於智能系统的「奖励」或「欲望」的价值。经典逻辑 AI 的技巧可以搬到这个 setting 之下，这会是我们第二篇论文的主题。

如果了解我们第二篇论文的主要理论 [6]，这篇的大部分内容可以不理，除了 §0 和对强化学习的基本认识（例如我的《强化学习 tutorial》[7]）。

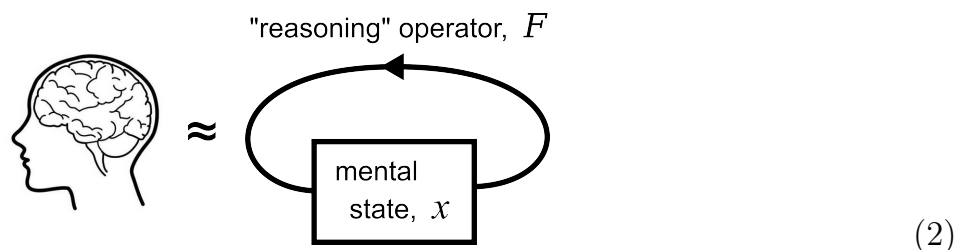
本篇大部份是背景理论，例如那「Hamiltonian 理论」已经是广为人知的，并非我们原创。

0 中心思想

标题中的**比喻**是指用增强学习的方法控制一隻自主的智能系统 (autonomous agent)，在「思维空间」中寻找最优路径：



关键是将「思考」看成是一个**动态系统** (dynamical system)，它运行在**思维状态** (mental states) 的空间中：



举例来说，一个**思维状态**可以是以下的一束命题：

- 我在我的房间内，正在写一篇 AGI-17 的论文。
- 我正在写一句句子的开头：「举例来说，」

- 我将会写一个 NP (noun phrase): 「一个思维状态....」

思考的过程就是从一个思维状态 **过渡** (transition) 到另一个思维状态。就算我现在说话，我的脑子也是靠思维状态记住我说话说到句子结构的哪部分，所以我才能组织句子的语法。

以下三者其实是同义词：

- 在人工智能里叫 **强化学习** (reinforcement learning (RL))
- 在运筹学里叫 **动态规划** (dynamic programming)
- 在现代控制论 (control theory) 中的 **状态空间** 表述

1 控制论：动态系统

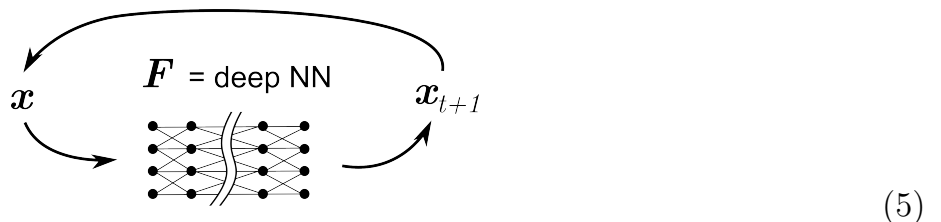
思维状态是一支向量 $\mathbf{x} \in \mathbb{X}$ ， \mathbb{X} 是所有可能的思维状态，思考算子 (reasoning operator) \mathbf{F} 是一个 endomorphism 映射： $\mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$ 。

在数学上这是一个标准的**动态系统 (dynamical system)**，它可以用以下方法定义：

$$\boxed{\text{离散时间}} \quad \mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{F}(\mathbf{x}_t) \quad (3)$$

$$\boxed{\text{连续时间}} \quad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (4)$$

在我设计的 cognitive architecture 里， \mathbf{F} 用深度神经网络来表示（所谓「深度」无非是很多层的意思）：



一个**神经网络**是一个有很多参数的非线性算子：

$$F(\mathbf{x}) = \bigcirc(W_1 \bigcirc(W_2 \dots \bigcirc(W_L \mathbf{x}))) \quad (6)$$

每层的**权重矩阵** 总层数

\bigcirc 是一个 sigmoid 形状的非线性函数。

如果连续时间的话 \mathbf{f} 也可以用深度神经网络表示，不过这两个 \mathbf{F} 和 \mathbf{f} 的性质是不同的，它们之间由这个关系决定： $\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{F}(\mathbf{x}(t))$ 。为方便起见，我会随意使用连续或离散时间的表述。

控制系统 (control system) 和动态系统的分别是在定义中加入了 **控制向量** $\mathbf{u}(t)$ ：

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \quad (7)$$

控制论的目的就是找出最好的 $\mathbf{u}(t)$ 函数，令系统由初始状态 \mathbf{x}_0 去到终点状态 \mathbf{x}_\perp 。

一个典型的控制论问题是这样描述的：

状态方程

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] \tag{8}$$

边值条件

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \mathbf{x}(t_\perp) = \mathbf{x}_\perp \tag{9}$$

目标函数

$$J = \int_{t_0}^{t_\perp} L[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] dt \tag{10}$$

要找的是最优控制 $\mathbf{u}^*(t)$ 。


根据控制论，最优路径的条件，是由 Hamilton-Jacobi 方程给出：

Hamilton-Jacobi equation

$$0 = \frac{\partial J^*}{\partial t} + \min_u H \tag{11}$$

跳过一节之后我会解释 J , L , 和 H 的意义。

2 强化学习 / 动态规划

Reinforcement learning 是机器学习里面的一个分支，特别善於控制一只能够在某个环境下 **自主行动** 的个体 (autonomous agent)，透过和 **环境** 之间的互动，例如 sensory perception 和 rewards，而不断改进它的 **行为**。强化学习最典型的比喻是一隻在迷宫中寻找食物和避开敌人的小昆虫：

一个强化学习的系统由 4 个元素的 tuple 构成

强化学习系统

$$= (\mathbf{x} \in \text{States}, \mathbf{u} \in \text{Actions}, R = \text{Rewards}, \pi = \text{Policy}) \tag{12}$$

详细可参阅我写的《强化学习 tutorial》[7]。

U 是一连串行动的 rewards 的总和：

状态 0 的总价值

时间 t 时的奖励

$$U(\mathbf{x}_0) = \sum_t R(\mathbf{x}_t, \mathbf{u}_t) \tag{13}$$

例如说，行一步棋的效用，不单是那步棋当前的利益，还包括走那步棋之后带来的后果。例如，当下贪吃一只卒，但 10 步后可能被将死。又或者，眼前有美味的食物，但有些人选择不吃，因为怕吃了会变肥。

Dynamic programming 的中心思想是 **Bellman optimality condition**。Richard Bellman 在 1953 年提出这个方程，当时他在 RAND 公司工作，处理的是运筹学的问题。

Bellman equation 说的是：「如果从最佳选择的路径的末端截除一小部分，馀下的路径仍然是最佳路径。」

全路径的价值

在当前状态下选择 \mathbf{u} 的奖励

馀下路径的价值

Bellman 方程

$$U^*(\mathbf{x}) = \max_u \{ R(\mathbf{u}) + U^*(\mathbf{x}_{t+1}) \} \tag{14}$$

这条看似简单的式子是动态规划的**全部内容**。它的意义是：我们想获得最佳效益的路径，所以将路径切短一些，於是问题化解成一个较小的问题；换句话说它是一个 **recursive relation**。

在人工智能中常用一个 trick，叫 **Q-learning**。 Q 值是 U 值的一个变种； U 是对每个 state 而言的， Q 把 U 值分拆成每个 state 中的每个 action 的份量。换句话说， Q 就是在状态 x 做动作 u 的 utility。 Q 和 U 之间的关系是：

$$U(x) = \max_u Q(x, u) \quad (15)$$

Q 的好处是方便学习，只需要学习在每一个状态下选择哪个动作的价值；亦即所谓“model free”学习。

在强化学习的框架下，智能系统的运作可以分开成两方面：**思考** 和 **学习**。

- **思考**即是根据已学得的知识（知识储存在 deep NN 里），在思维空间中找寻 x 最优的轨迹，方法是根据 Bellman 方程计算 u^* 。 x 的轨迹受 deep NN 约束（亦即是说，系统只能依据**正确的知识**去思考），思考时 deep NN 是**不变的**。
- **学习**就是学习神经网络 deep NN 的 weights W_ℓ ，改变 W 即改变 F ，而 F 决定**状态方程** (3)，所以整个系统变了另一个系统。换句话说，deep NN 的学习是一种 **second-order learning**：考虑两个系统 F 和 $F + \epsilon \hat{F}$ ，经过很多次思考过程，如果奖励的平均值在后者有所增加，则 F 向 \hat{F} 方向学习。

Prior art: 基於强化学习的智能系统 minimalist architecture, 以色列的 Itimar Ariel 在 2012 年提出过 [2]，而我也独立地在 2016 年提出 [?]。信号处理的资深研究者 Simon Haykin 最近也用 RL + 记忆 的设计，详见他的 2012 新书《Cognitive dynamic systems》[3]。Vladimir Anashin 在 1990's 年代也提出过这种 cognitive architecture [1]。可能还有更多的先例，eg: [4]。

3 控制论与强化学习的关系

在**强化学习**中，我们关注两个数量：

- $R(x, u)$ = 在状态 x 做动作 u 所获得的 **奖励** (reward)
- $U(x)$ = 状态 x 的 **效用** (utility) 或 **价值** (value)

简单来说，「价值」就是每个瞬时「奖励」对时间的积分：

$$\boxed{\text{价值 } U} = \int \boxed{\text{奖励 } R} dt \quad (16)$$

用**控制论**的术语，通常定义 cost functional：

$$\boxed{\text{价钱 } J} = \int L dt + \Phi(x_\perp) \quad (17)$$

其中 L 是 “running cost”，即行走每一步的「价钱」； Φ 是 terminal cost，即到达终点 \mathbf{x}_\perp 时，那位置的价值。

在[分析力学](#)里 L 又叫 **Lagrangian**，而 L 对时间的积分叫「作用量」：

$$\boxed{\text{作用量 (action) } S} = \int L dt$$

(18)

Hamilton 的[最小作用量原理](#) (principle of least action) 说，在自然界的运动轨迹里， S 的值总是取稳定值 (stationary value)，即比起邻近的轨迹它的 S 值最小。

Hamiltonian 的定义是 $H = L + \frac{\partial J^*}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}$ ，它是由 Lagrange multiplier 的方法走出来的。详细可参看我写的《控制论 tutorial》。

其实它们讲的是同一样东西，所以有如下的对应：

强化学习	最优控制	分析力学
效用/价值 U	价钱 J	作用量 S
即时奖励 R	running cost	Lagrangian L
action a	control u	(外力?)

(19)

有趣的是，奖励 R 对应於力学上的 Lagrangian，其物理学单位是「能量」；换句话说，「快感」或「开心」似乎可以用「能量」的单位来量度，这和通俗心理学里常说的「正能量」不谋而合。而，长远的价值，是以 [能量 × 时间] 的单位来量度。

这三者的对应关系，在 Daniel Liberzon 的书 [5] 有很详细的解释。这个对应在哲学上很有启发意味，但实践上的用处似乎不大：传统 AI 是离散时间系统，转换成连续时间之后可能增加了计算量，暂时不清楚这样做能带来什么好处....？

4 研究方向

- 这几篇论文的对象是数学家，希望他们能帮助解决人工智能中最瓶颈的问题：**学习**。在这 minimal architecture 中， \mathbf{x} 代表「正在思考的事」，而 Hamiltonian H 代表「系统已知的知识」。「学习」的**目的**是要找一个 H ，代表「对世界的正确 model / 知识」。注意：在一般的控制论问题中， H 是系统的定义，它是不变的。所以我们的问题是一个非一般的控制论问题。最优的 H^* 要满足的条件是：在很多很多次的思考 trajectory（思考过程）中，用 H^* 比用其他 H 所得的分数（奖励）最多。其实 H^* 可以不是唯一的，只要它的平均分数够高就可以，正如不同的人有不同的知识和想法，但他们都可以算是「有智慧」的人。
当然如果 H 没有其他结构，它就只有 symplectic 结构，它的搜寻空间太大了（顶多是加上 regularity 的约束，这 regularity 指的是限制函数的起伏）。但其实 H 也可以加上**逻辑**的结构（很明显，逻辑是思考的规律），这是第二篇论文《神经与逻辑之间的桥》[6] 的题目。 H 的逻辑结构或许可以表示为 H 的某种 symmetry group，而这关联到 H 的 **integrability**，但我不是这方面的专家。
- **记忆**：这 minimal architecture 里面没有 episodic memory，这会在第 3 篇论文《记忆的结构》[8] 中探讨。

References

1. Vladimir Anashin and Andrei Khrennikov. *Applied algebraic dynamics*. de Gruyter, 2009.
2. Itamar Arel. *Deep reinforcement learning as Foundations for Artificial Intelligence*, chapter 6, pages 89–102. Atlantis Press, 2012.
3. Simon Haykin. *Cognitive dynamic systems*. Cambridge Univ Press, 2012.
4. Vladimir Ivancevic and Tijana Ivancevic. *Geometrical dynamics of complex systems: a unified modeling approach to physics, control, biomechanics, neurodynamics and psycho-socio-economical dynamics*. Springer, 2006.
5. Daniel Liberzon. *Calculus of variations and optimal control theory: a concise introduction*. Princeton Univ Press, 2012.
6. King Yin Yan. A bridge between logic and neural. (to be submitted AGI-2017).
7. King Yin Yan. Reinforcement learning tutorial
https://drive.google.com/file/d/0Bx3_S9SExak-SG4tUy1fSkVMsDA/view.
8. King Yin Yan. The structure of memory. (to be submitted AGI-2017).