

# 逻辑与神经之间的桥

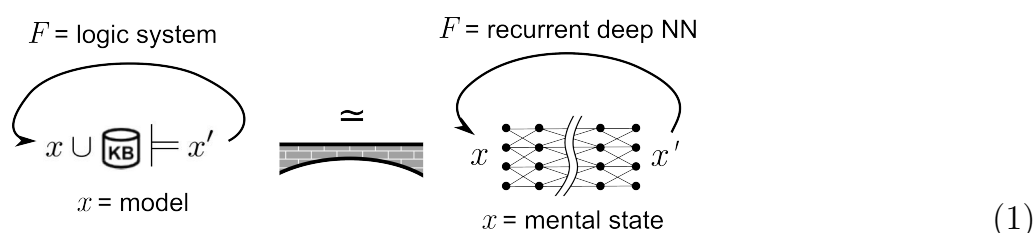
甄景贤 (King-Yin Yan)

General.Intelligence@Gmail.com

**Abstract.** Logic-based AI 和 connectionist AI 长久分裂，但作者最近发现可以建立两者之间的对应关系。逻辑的结构类似人类的自然语言，但大脑是用神经思考的。机器学习的主要目标，是用 inductive bias 去加快学习速度，但这目标太空泛。将逻辑结构加到神经结构之上，就增加了约束，亦即 inductive bias。

逻辑 AI 那边，「结构」很抽象符号化，但学习算法太慢；我的目的是建立一道「桥」，将逻辑 AI 的某部分结构转移到神经网络那边。

这个问题搞了很久都未能解决，因为逻辑 AI 那边的结构不是一般常见的数学结构，单是要表述出来也有很大困难。直到我应用了 model theory 的观点，才找到满意的解决方案：



首先解释 neural network 那边的结构，然后再解释 logic 那边的结构。

## 1 神经网络的结构

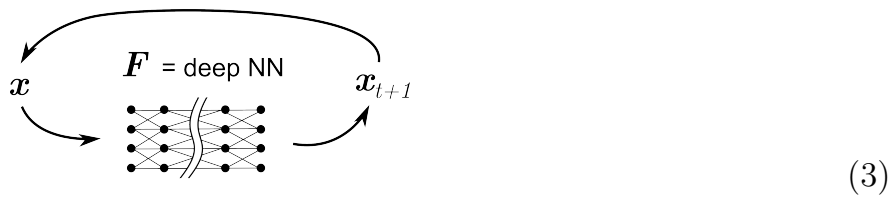
一个神经网络基本上是：

$$F(\mathbf{x}) = \sigma(W_1 \sigma(W_2 \dots \sigma(W_L \mathbf{x}))) \quad (2)$$

- $L$  = 层数
- $W_\ell$  = 每层的权重矩阵
- $\sigma$  = 对每个分量的 sigmoid function （其作用是赋予非线性）

$\sigma$  作用在  $\mathbf{x}$  的每个分量上，它的作用在坐标变换下没有不变性。所以  $\sigma$  不是一个向量运算，从而  $\mathbb{X} \ni \mathbf{x}$  的结构也不是向量空间的结构。通常习惯把  $\vec{x}$  写成向量形式，但这有点误导。

如果将神经网络首尾相接造成迴路，这是一种智能系统的最简单形式。举例来说，如果要识别「白猫追黑猫」的视像，「猫」这物体要被识别两次，很明显我们不应浪费两个神经网络去做这件事，所以 迴路 是必须的：



它的状态方程是：

离散时间

$$\boldsymbol{x}_{t+1} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_t)$$

(4)

连续时间

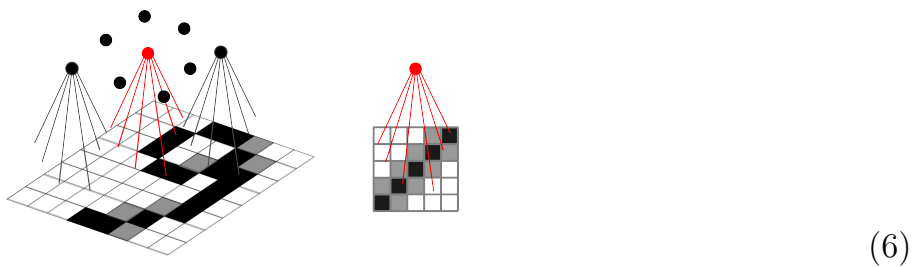
$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$$

(5)

由此可以看出， $\mathbb{X}$  是一个微分流形。更深入地讲，它是一个力学上的 Hamiltonian 系统，具有 symplectic（辛流形）结构。但这超出了本文范围，详见本篇的姊妹作 [17]。

现在思考一下，神经网络怎样识别模式，或许会有帮助....

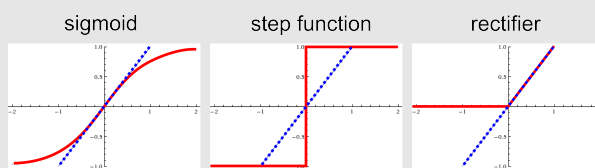
考虑最简单的情况，例如提取数字“9”的特徵的一层网络。这层网络可以有很多神经元（左图），每个神经元局部地覆盖输入层，即所谓视觉神经元的 local receptive field（右图）。



假设红色的神经元专门负责辨识「对角线」这一特徵。它的方程式是  $\boldsymbol{y} = \textcircled{S}(W\boldsymbol{x})$ 。矩阵  $W$  的作用是 affine「旋转」特徵空间，令我们想要的特徵指向某一方向。然后再用  $\textcircled{S}$ 「挤压」想要的特徵和不想要的特徵。Sigmoid 之后的输出，代表某类特徵的存在与否，即  $\{0, 1\}$ 。这是一种资讯的压缩。

叉开话题，讲一点 chaos theory:

$\odot^{-1}$  的作用是「扯」(stretch)，将本来邻近的两点的距离非线性地拉远。看看以下各种常见的激活函数，它们全都是相对于 identity  $y = x$  的非线性 deformation:



(7)

这和 Steven Smale 提出的「马蹄」[13] 非常类似，它是制造混沌的处方之一。Smale 马蹄的另一个变种叫做 baker map，其作用类似於「搓面粉」。换句话说，「拉扯」然后放回原空间，如此不断重复，就会产生混沌 [6] [14]。

这里有一点重大意义： $F^{-1}$  有混沌的典型特徵：它「对初始状态的微小变化非常敏感」。根据我的观点，神经网络的正向运算是 pattern recognition = 资讯压缩，反向是反压缩。反向的时候，因为同一概念可以对应於很多不同的输入（ $F^{-1}$ (输入) 可以是很多 patterns），所以输出的微小变化（例如 0.99 和 0.98）会造成  $F^{-1}$  的极大起伏；换句话说即是有混沌现象。换句话说  $F$  的逆是 unpredictable 的，简言之，神经网络  $F$  是不可逆的压缩过程。

最近一个有趣的例子是 DeepDream [1]，它用神经网络的  $F^{-1}$  产生有迷幻感觉的 pre-image，证实了  $F^{-1}$  可以和原本的 image 差距很大：



(8)

在神经网络的正向运作时似乎没有这种 “stretching”，这似乎不会产生混沌，而且根据 contraction mapping theorem， $F$  的 iteration 会终止於 fixed point(s)，但前提是  $F$  是 contractive 的，换句话说 the spectral radius of the Jacobian matrix of  $F \leq 1$ ，但这一点我暂时未能确定（如果对  $W$  没有限制，这似乎不成立）。

另一方面，如果反向是混沌，正向似乎也应该是混沌；在 ergodic theory 里可以计算动态系统的 topological entropy，而这个 entropy 的值是 time-reversal invariant 的。我暂时不清楚如果用别的 entropy 计算会不会不同，有待请教一下 ergodic theory 方面的人。

总括以上，可以归结出一些原则：

- 每个神经元的输出代表某个 feature 的存在与否
- 更高层的神经元代表下层 features 之间的关系

(9)

这些原则暂时未能严格地表述和证明，或者可以叫它做 **神经原理 (Neural Postulate)**。

凭这个思路推广，可以推测这样的 correspondence:

$$\begin{array}{lll} \mathbb{M} & \simeq & \mathbb{X} \\ \text{逻辑物体} & \bullet & \Leftrightarrow \text{neuron} \\ \text{逻辑关系} & \text{---}\bullet & \Leftrightarrow \text{relation between higher and lower neurons} \end{array}$$

(10)

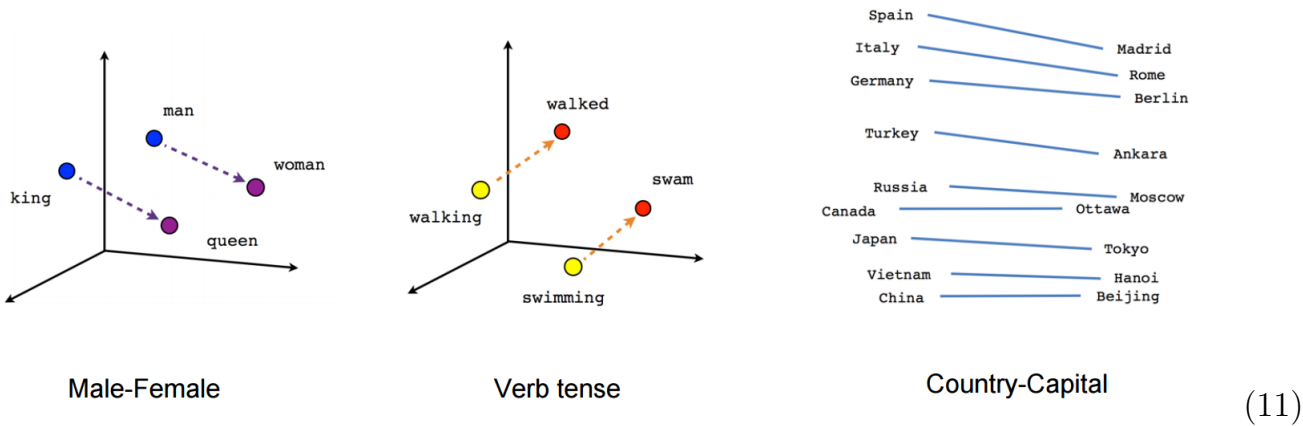
2 逻辑的结构

一个逻辑系统可以这样定义：

- 一些 constant symbols, predicate symbols, 和 function symbols
- 由上述的原子建立 命题 (propositions)
- 命题之间可以有连接词：¬, ∧, ∨ 等
- 建立 逻辑后果 (consequence) 关系：Γ ⊢ Δ

2.1 Semantic distance 与 Compositionality

我们的目的是想将整套逻辑 AI 的器材搬到 连续 的微分流形上去实现。这个做法，是受了 Google 的 Word2Vec [11] 算法的启发，它可以将自然语言的词语 embed 到度量空间中，而且词语之间的距离是 semantic distance （语义学上的距离）：



当然，word2vec 一经发表之后，很多人开始构思怎样把「句子」也 embed 到度量空间上。第一个想法当然是用 tensor product，例如 “I love you” 这句子就变成了  $I \otimes \text{love} \otimes \text{you}$ 。

但这个做法很有问题；在语言学 / 逻辑学里有一个重要概念叫 compositionality，它说：

合成物的语义 (semantics) 由其所构成的原子生成，而不依赖于其他资料

(12)

例如「我爱你」由「我、爱、你」三个原子组成。

举个例子，以下这些句子的意义相近：

- *pot calling the kettle black*
- 五十步笑百步
- *Those who live in glass houses should not throw stones*
- 其身不正

虽然可以想像这些句子之间（粗略地）可以建立一一对应，但仍然很难想像用「乘积」乘出来的位置会相近，因为这牵涉到每个词语在句子中的 interpretation<sup>1</sup>。所以句子的意义不是简单地由词语 bottom-up 生成的。

用 tensor product 的做法，得出的空间结构是 syntactic 而不是 semantic 的，但神经网络学习的重点是 泛化 (generalization)，它基於「邻近的点的意义相近」才能成功，所以一定要 semantic distance。

## 2.2 基於“features”的逻辑

上节看到 tensor product 的做法似乎有问题，它用原子 “algebraically” 组合成句子，原子之间的距离可以是语义学相近的，但「乘出来」的句子在语义空间上的位置可能很不准确。另一方面，在神经网络里，「状态」是由一组 features 组成的，换句话说，它是一些 features 的 conjunction（也可以看成是乘积）。两者都是乘积，但前者有问题，因为它是由自然语言的字 / 词构成的，而后者是由概念原子 (conceptual atoms / features) 构成的。所以，如果我们避免将自然语言的字 / 句 naïve 地映照到 representation 上，使用概念原子的乘积应该没有问题。

暂时只考虑一个 thought (= 命题) 如何表示。

假设思维空间的 metric 是语义的（语义相近则点的距离相近）。根据「神经原理」(9)，每个 thought 必然是由一组 features 表述，例如  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ，每个  $x_i$  是一个概念原子。

记得逻辑学历史中 George Boole 曾经提出过一种逻辑<sup>2</sup>，例如  $x$  代表「是人的」， $y$  代表「会死的」，那么「所有人都会死」就是：

$$x(1 - y) = 0 \quad (13)$$

这里  $x, y$  是 “classes”，乘法是集合的 intersection，即  $\cap$ 。这种乘法和上面描述的句子 / 词语乘法不同；首先，这乘法是 commutative 的， $x \cap y = y \cap x$ 。如果将一个 thought 表示为：

$$\mathbf{x} = x_1, x_2, \dots, x_n = x_1 \cap x_2 \dots \cap x_n \quad (14)$$

则这些  $x_i$  可以看成是将所有思维的空间用「二分法」切割，每个  $x_i$  是一个二分切割。

两个 thoughts 之间的距离可以用 Hamming distance 量度，它是一个 semantic distance，尤其是当  $n$  比较大时，可能是一个效果不错的 metric。

<sup>1</sup> 例如，“pot” 象徵有污点的人。经典 AI 研究者 Jerry Hobbs 开发了自然语言智能系统 Tacitus [8] [7]（这个字有「沉默」的意思），他的理论是基於逻辑上的 abductive interpretations（即逻辑上反方向推导，寻找句子意义的解释），没有这种解释的话，将句子分拆成词语 并不足以组成句子的完整意义；亦即是说，naïve compositionality 在人类语言中并不成立。

<sup>2</sup> 这和后世为他命名的 Boolean logic 不同。

总括来说：「二分法」逻辑用一组 binary features 去定义一个 thought，一条思维是  $n$ -维 hypercube 上的一个顶点。

## 2.3 逻辑中的 linkage 现象

在经典谓词逻辑 (predicate logic) 中有一个 “linkage” 的现象，例如以下这个式子（爸爸的爸爸是爷爷）：

$$\forall X \forall Y \forall Z. \text{grandfather}(X, Z) \leftarrow \text{father}(X, Y) \wedge \text{father}(Y, Z) \quad (15)$$

那意思是说，无论右边的变量（例如  $X$ ）怎样改变，左边的  $X$  必须代入相同的值。这是代入 (substitution) 的本质。

我们想将 predicate logic 的结构「搬到」神经网络，从抽象意义上说可以有很多种做法，现我讲述一种我设计的比较简单直接的做法：

状态空间的 transition  $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{y}$  看成是逻辑推导  $\mathbf{x} \vdash \mathbf{y}$ ，那么 linkage 就是  $\mathbf{x}$  的  $i$ -分量到  $\mathbf{y}$  的  $j$ -分量的 identity map。换句话说，有形如下式的一些 id maps 「埋藏」在  $\mathbf{F}$  里面：

$$\mathbf{F} : (x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) \mapsto (y_1, \dots, y_j, \dots, y_n) \quad (16)$$

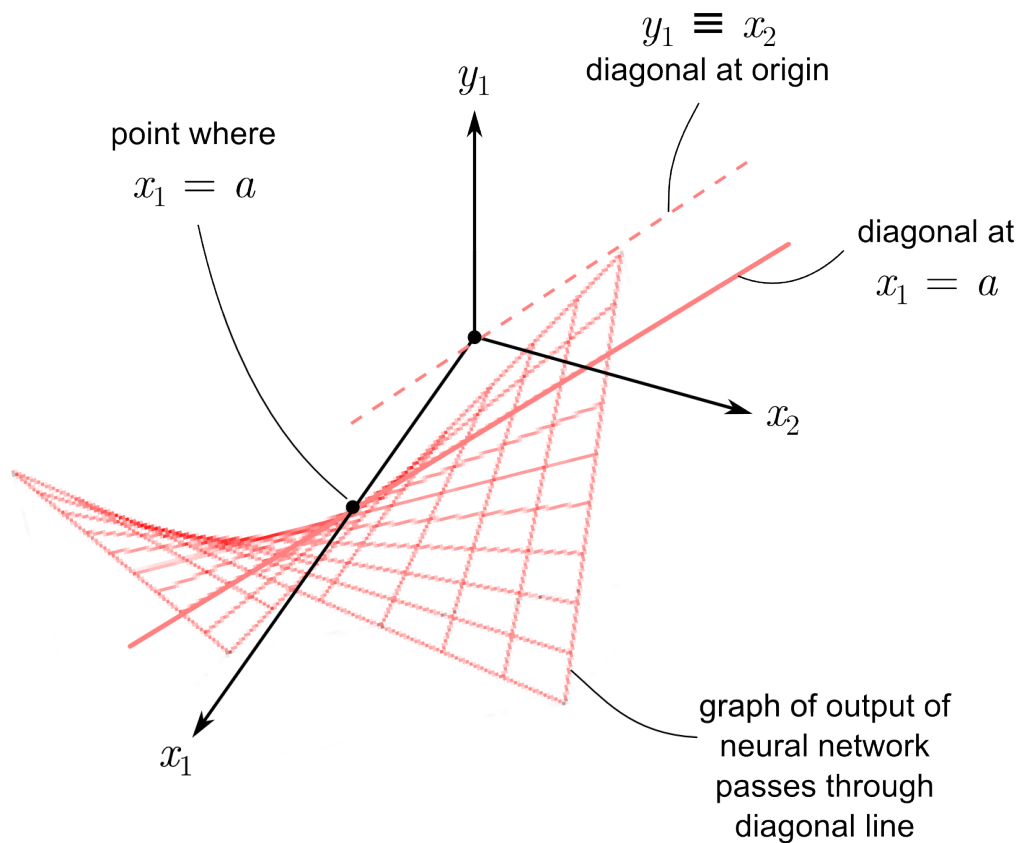
注意，我说「埋藏」的意思是：这些 linkage 只在  $\mathbf{x}$  的某些位置才存在（例如，当前提中出现了两个关于「爸爸」的命题时）。更准确地说：

$$\mathbf{F} : \begin{cases} y_j \equiv x_i, & \text{if } \mathbf{x} = \hat{\mathbf{a}} \text{ for some coordinates except } x_i \\ y_h \equiv x_k, & \text{if } \mathbf{x} = \hat{\mathbf{b}} \text{ for some coordinates except } x_k \\ \dots \text{ etc } \dots \\ \text{is free otherwise} \end{cases} \quad (17)$$

以上每条等式代表一个 linkage。



一个 linkage 的几何图像如下：



(18)

实际应用中  $\dim \mathbf{x}$  可能达到成千上万，其中可以有很多 linkages，很难 visualize。

Now，我们关心的是怎样“combine”逻辑结构和神经网络结构。在这里我再选择一个特别简单的方法：在 (17) 中的那些等式，构成了一些约束在神经网络的  $W$  之上的 equational constraints。只需要用这些 constraints 去训练神经网络，就可以实现 linkages。

根据神经网络的 **universal approximation theorem** [2],  $L > 1$  层神经网络的函数  $\mathbf{F}$  在函数空间中是 dense 的。换句话说，如果神经元的个数充分多，必然可以学习有任意 linkages 的函数。

如果还有疑惑，可以试试实际上 solve 一个 constraint。为简单起见，弃用  $\odot$  而用  $\ominus$ （反正实践中很多深度网络都用 rectifier），这样很方便，因为 rectifier 的前半截就是直线的 identity function。粗略地看，如果只有一层，那 constraint 约束了矩阵  $W$  的其中一行（有  $n$  个分量），而一个 linkage 是一条等式，所以只用了一个自由度。当层数增加时，涉及到的  $W$  数目递增，而约束等式仍然只是一条，换句话说，应该有很多的自由度可以用。这情况是乐观的。

## 2.4 用 relation algebra 如何？

以前曾经对 relation algebra [12] [10] 有些憧憬，因为它比较接近人类自然语言，但其实 relation algebra (RA) 和 first-order logic (FOL) 基本上是等效的，在 FOL 里面有 linkage 的复杂性，但在 RA 里面这个复杂性其实也没有消失。可以说「复杂度是守恒的」。

举例来说，在 (15) 中表达「爸爸的爸爸是爷爷」，可以用 RA 更简单地表达：

$$\text{father} \circ \text{father} = \text{grandfather} \quad (19)$$

实际的推导是这样的：

$$\begin{array}{l} \text{John father Pete} \\ \text{Pete father Paul} \\ \text{John father} \circ \text{father Paul} \end{array} \quad (20)$$

这时要 代入 上面的等式才能得出结论：

$$\text{John grandfather Paul} \quad (21)$$

所以 linkage 的复杂性变成了代数 formula 长度的复杂性。

## 2.5 命题的集合

神经的状态空间由一些 **thoughts**（思维）组成，例如「我正在上课  $\wedge$  邻座的女孩很漂亮」，这两个 thoughts 是独立的。也可以有另一个状态：「我正在搭地铁  $\wedge$  邻座的女孩很漂亮」。Thoughts 独立的好处是表述的 economy。思维状态  $x$  就是  $M$  个 thoughts 的集合， $M$  是 working memory 的大小。认知科学里有个说法：the size of human working memory is approximately  $7 \pm 2$  items.

思维空间是  $M$  个 hypercube 的卡积。

## Acknowledgement

谢谢 Ben Goertzel（OpenCog 人工智能的创始人）在 AGI mailing list 上和我的讨论。Ben 初次指出神经网络学习和逻辑 inductive 学习的不同，引起我研究两者之间的关系。

## References

1. Wikipedia: Deep dreaming (<https://en.wikipedia.org/wiki/Deepdreaming>).
2. Wikipedia: Universal approximation theorem ([https://en.wikipedia.org/wiki/Universal\\_approximation\\_theorem](https://en.wikipedia.org/wiki/Universal_approximation_theorem)).
3. Vladimir Anashin and Andrei Khrennikov. *Applied algebraic dynamics*. de Gruyter, 2009.
4. Andreka, Nemeti, and Sain. *Handbook of philosophical logic*, chapter Algebraic logic, pages 133–247. Springer, 2001.
5. Bader, Hitzler, Hödöbler, and Witzel. The core method: Connectionist model generation for first-order logic programs. *Studies in Computational Intelligence* 77, 205–232, 2007.
6. Robert Gilmore and Marc Lefranc. *The topology of chaos: Alice in stretch and squeezeland*. Wiley-VCH, 2011.
7. Hobbs. interpretation as abduction, in book "discourse and inference", Nov 2003.



8. Jerry R Hobbs, Mark Stickel, Paul Martin, and Douglas Edwards. Interpretation as abduction. In *Proceedings of the 26th annual meeting on Association for Computational Linguistics*, pages 95–103. Association for Computational Linguistics, 1988.
9. José Iovino. *Applications of model theory to functional analysis*. Dover, 2002.
10. Roger Maddux. *Relation algebras*. Elsevier, 2006.
11. Mikolov, Sutskever, Chen, Corrado, and Dean. Efficient estimation of word representations in vector space. *Proceedings of workshop at ICLR*, 2013.
12. Gunther Schmidt. *Relational mathematics*. Cambridge, 2010.
13. Stephen Smale. Differentiable dynamical systems. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 1967.
14. Tamás Tél and Márton Gruiz. *Chaotic dynamics: an Introduction based on classical mechanics*. Cambridge, 2006.
15. Itai Ben Yaacov, Alexander Berenstein, C Ward Henson, and Alexander Usvyatsov. Model theory for metric structures. In *Model theory with applications to algebra and analysis, vol 2*. Cambridge, 2008.
16. King-Yin Yan. Fuzzy-probabilistic logic for common sense reasoning. *Artificial general intelligence 5th international conference, LNCS 7716*, 2012.
17. King Yin Yan, Juan Carlos Kuri Pinto, and Ben Goertzel. Wandering in the labyrinth of thinking – a cognitive architecture combining reinforcement learning and deep learning. (to be submitted AGI-2017).