逻辑与神经之间的桥

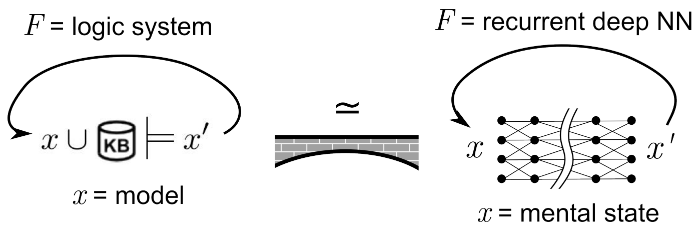
甄景贤 (King-Yin Yan)

General.Intelligence@Gmail.com

Abstract. 本篇讨论经典逻辑 AI 和神经网络之间的一个对应关系，探讨二者的数学结构。将逻辑 AI 的结构引进神经网络中，也就是 inductive bias，可能加快学习的速度。

逻辑 AI 那边，「结构」是高度的符号化抽象，但**学习算法**太慢；我的目的是建立一道「桥」，将逻辑 AI 的某部分结构**转移**到神经网络那边。

这个问题搞了很久都未能解决，因为逻辑 AI 那边的结构不是一般常见的数学结构，单是要要表述出来也有很大困难。直到我应用了 model theory 的观点，才找到满意的解决方案：



(1)

以下先解释 neural network 那边的结构，然后再解释 logic 那边的结构....

1　神经网络的结构

一个 **神经网络**基本上是：

每层的**权重**矩阵　　总层数

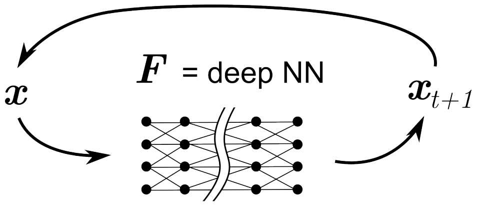
$$F(\boldsymbol{x}) = \sigma(W_1 \sigma(W_2 ... \sigma(W_L\ \boldsymbol{x}))) \qquad (2)$$

σ = sigmoid function, applied component-wise （其作用是赋予非线性）

σ 作用在 $\boldsymbol{x}$ 的每个分量上，它的作用在座标变换下**没有不变性**。所以 σ 不是一个向量运算，从而 $\mathbb{X} \ni \boldsymbol{x}$ 的结构也不是**向量空间**的结构。通常习惯把 $\vec{x}$ 写成向量形式，但这有点误导。

如果将神经网络**首尾相接**造成迴路，这是一种智能系统的最简单形式。举例来说，如果要识别「白猫追黑猫」的视像，「猫」这物体要被识别两次，很明显我们不应浪费两个神经网

络去做这件事，所以 **迴路**是必须的：



(3)

它的状态方程是：

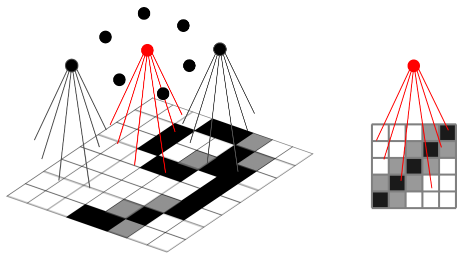
$$\boxed{\text{离散时间}} \qquad \boldsymbol{x}_{t+1} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_t) \tag{4}$$

$$\boxed{\text{连续时间}} \qquad \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \tag{5}$$

由此可以看出，$\mathbb{X}$ 是一个**微分流形**。更深入地讲，它是一个力学上的 Hamiltonian 系统，具有 symplectic（辛流形）结构。但这超出了本文範围，详见本篇的前篇 [16]。

现在思考一下，神经网络怎样识别模式，或许会有帮助....

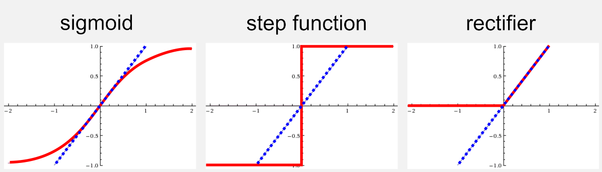
考虑最简单的情况，例如提取数字 “9” 的特徵的一层网络。这层网络可以有很多神经元（左图），每个神经元局部地覆盖输入层，即所谓视觉神经元的 local receptive field（右图）。



(6)

假设红色的神经元专门负责辨识「对角线」这一特徵。它的方程式是 $\boldsymbol{y} = \sigma(W\boldsymbol{x})$。矩阵 W 的作用是 affine「旋转」特徵空间，令我们想要的特徵指向某一方向。然后再用 σ 「**挤压**」想要的特徵和不想要的特徵。Sigmoid 之后的输出，代表某类特徵的**存在与否**，即 $\{0, 1\}$。这是一种资讯的**压缩**。

叉开话题，讲一点 chaos theory：
σ^{-1} 的作用是「扯」(stretch)，将本来邻近的两点的距离非线性地拉远。看看以下各种常见的激活函数，它们全都是相对於 identity $y = x$ 的非线性 deformation：



(7)

这和 Steven Smale 提出的「马蹄」[12] 非常类似，它是制造混沌的处方之一。Smale 马蹄的另一个变种叫做 baker map，其作用类似於「搓面粉」。换句话说，「拉扯」然后放回原空间，如此不断重复，就会产生混沌 [3] [13]。
这里有一点重大意义：$\boldsymbol{F}^{-1}$ 有混沌的典型特徵：它「对初始状态的微少变化非常敏感」。根据我的观点，神经网络的正向运作是 pattern recogntion = 资讯压缩，反向是反压缩。反向的时候，因为同一概念可以对应於很多不同的输入（$\boldsymbol{F}^{-1}(\boldsymbol{x})$ 可以是很多 patterns），所以输出的微少变化（例如 0.99 和 0.98）会造成 $\boldsymbol{F}^{-1}$ 的极大起伏；换句

话说即是有混沌现象。换句话说 $\boldsymbol{F}$ 的逆是 unpredictable 的，简言之，神经网络 $\boldsymbol{F}$ 是**不可逆**的压缩过程。
最近一个有趣的例子是 DeepDream [1]，它用神经网络的 $\boldsymbol{F}^{-1}$ 产生有迷幻感觉的 pre-image，证实了 $\boldsymbol{F}^{-1}$ 可以和原本的 image 差距很大：

(8)

在神经网络的正向运作时似乎没有这种 “stretching”，这似乎不会产生混沌，而且根据 contraction mapping theorem，$\boldsymbol{F}$ 的 iteration 会终止於 fixed point(s)，但前提是 $\boldsymbol{F}$ 是 contractive 的，换句话说 the spectral radius of the Jacobian matrix of $\boldsymbol{F} \le 1$，但这一点我暂时未能确定（如果对 W 没有限制，这似乎不成立）。
另方面，如果反向是混沌，正向似乎也应该是混沌；在 ergodic theory 里可以计算动态系统的 topological entropy，而这个 entropy 的值是 time-reversal invariant 的。我暂时不清楚如果用别的 entropy 计算会不会不同，有待请教一下 ergodic theory 方面的人....？

总括以上，可以归结出一个原则：

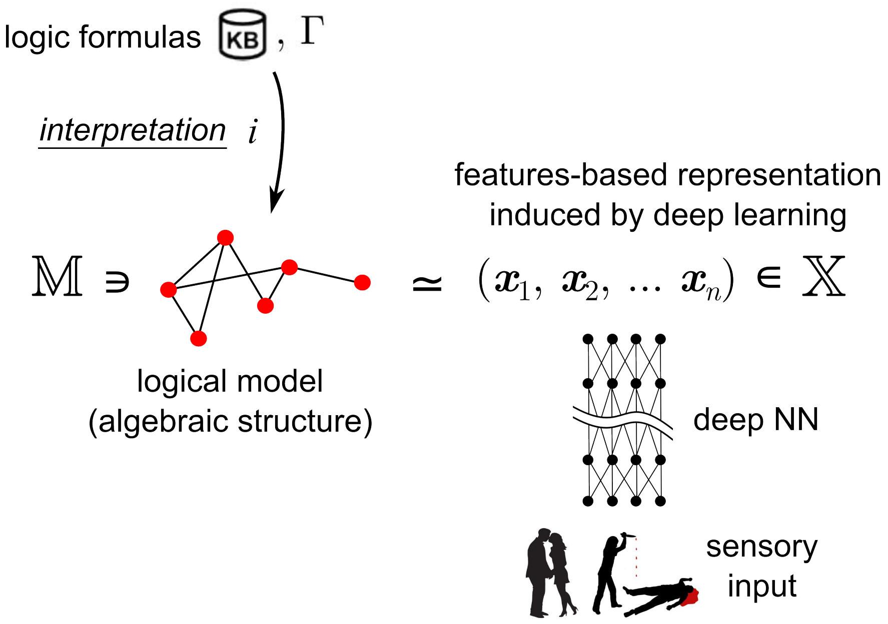
$$\begin{array}{l} \bullet\ \underline{\text{每个神经元的输出代表某个 feature 的存在与否}} \\ \bullet\ \underline{\text{更高层的神经元代表下层 features 之间的}\textbf{关系}} \end{array} \tag{9}$$

这些原则暂时未能严格地表述和证明，或者可以叫它做 **神经原理 (Neural Postulate)**。

凭这个思路推广，可以推测这样的 correspondence：

$$\begin{array}{rccl} & \mathbb{M} & \simeq & \mathbb{X} \\ \text{逻辑物体} & \bullet & \Leftrightarrow & \text{neuron} \\ \text{逻辑关系} & \bullet\!\!-\!\!\bullet & \Leftrightarrow & \text{relation between higher and lower neurons} \end{array} \tag{10}$$

从 model theory 的角度可以这样理解：



(11)

2 逻辑的结构

一个**逻辑系统**可以这样定义：

- 一些 constant symbols，predicate symbols，和 function symbols
- 由上述的原子建立 **命题** (propositions)
- 命题之间可以有连接词：$\neg, \wedge, \vee$ 等
- 建立 **逻辑后果** (consequence) 关系：$\Gamma \vdash \Delta$

逻辑 AI 的 learning algorithm 叫 ILP (inductive logic programming)，这已经是一个 well-established field，如有兴趣可参看我的 ILP tutorial（这版本有点旧，有待更新）[14] 或 de Raedt 的教科书 [10]。ILP 在逻辑式子的符号空间中进行 combinatorial search，缺点是太慢。神经网络的 gradient descent (ie, back-propagation) 快很多，暂时未知是不是要混合这两种算法，还是只用 back-prop....？

我们的目的是将逻辑的结构 transfer 到神经网络。逻辑的结构有两方面：

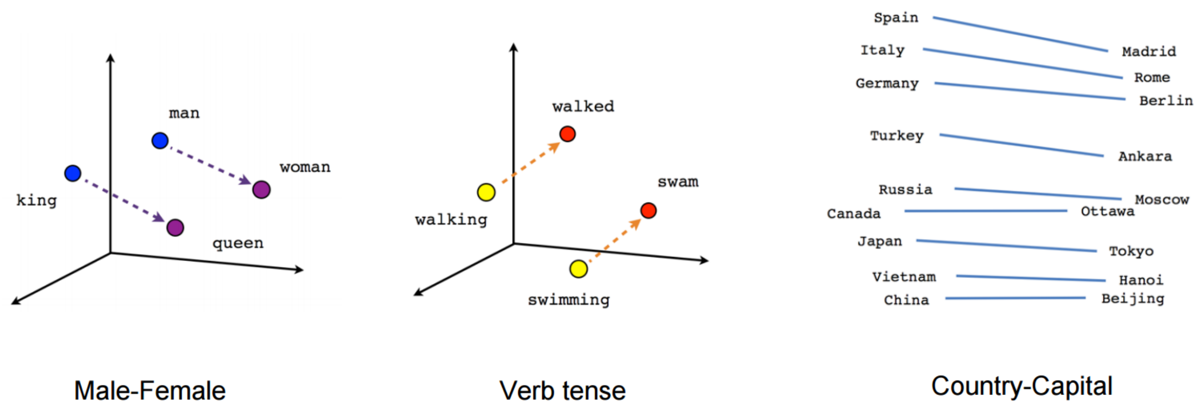
- 命题的内部结构 (sub-propositional structure)
- 命题之间的结构（= mental state 的结构）

2.1 命题内部结构

谓词逻辑的命题结构比较特别，所以我初时专注於分析它。但后来发现其实 **命题-level** 的结构 (§2.2) 才是比较重要的（即它更能缩小搜寻空间）。

2.1.1 Semantic distance 与 compositionality

我们的目的是想将整套逻辑 AI 的器材搬到 **连续**的微分流形上去实现。这个做法，是受了 Google 的 Word2Vec [9] 算法的启发，它可以将自然语言的词语 embed 到度量空间中，而且词语之间的距离是 **semantic distance （语义学上的距离）**：



(12)

当然，word2vec 一经发表之后，很多人开始构思怎样把「句子」也 embed 到度量空间上。第一个想法当然是用 **tensor product**，例如 “I love you” 这句子就变成了 $\mathrm{I} \otimes \mathrm{love} \otimes \mathrm{you}$。

但这个做法表面上很好，但细思之下却有问题。在语言学 / 逻辑学里有一个重要概念叫 **compositionality**，它说：

$$\underline{\text{合成物的语义 (semantics) 由其所构成的原子生成，而不依赖於其他资料}} \tag{13}$$

例如「我爱你」由「我、爱、你」三个原子组成。

举个反例：

- *John 对 Jennifer 说「我爱妳」*
- *John 对 Jessica 说「我爱妳」*
- *Jenifer 发怒走了*

「妳」字的意思在第 1、2 句中分别指 Jennifer 和 Jessica，如果简单地用「乘积」乘出来，欠缺了 pronoun resolution，就会导致谬误。这牵涉到每个词语在句子中的 interpretation ⋆。所以句子的意义 <u>不是简单地由词语 bottom-up 生成的</u>。

用 tensor product 的做法，得出的空间结构是 syntactic 而不是 semantic 的，但神经网络学习的重点是 **泛化** (generalization)，它基於「邻近的点的意义相近」才能成功，所以一定要 semantic distance。

⋆ 例如代名词、象徵和比喻等。经典 AI 研究者 Jerry Hobbs 开发了自然语言智能系统 Tacitus [5] [4]（这个字有「沉默」的意思），他的理论是基於逻辑上的 abductive interpretations（即逻辑上反方向推导，寻找句子意义的解释），没有这种解释的话，将句子分拆成词语 并不足以组成句子的完整意义；亦即是说，naïve compositionality 在人类语言中并不成立。

2.1.2 基於 “features” 的逻辑

上节看到 tensor product 的做法似乎有问题，它用原子 “algebraically” 组合成句子，原子之间的距离可以是语义学相近的，但「乘出来」的句子在语义空间上的位置可能 **很不准确**。另一方面，在神经网络里，「状态」$\boldsymbol{x}$ 是由一组 features 组成的，换句话说，它是一些 features 的 conjunction（也可以看成是乘积）。两者都是乘积，但前者有问题，因为它是由自然语言的字 / 词构成的，而后者是由概念原子 (conceptual atoms / features) 构成的。所以，如果我们避免将自然语言的字 / 句 naïve 地映照到 representation 上，使用概念原子的乘积应该没有问题。

暂时只考虑一个 thought （= 命题）如何表示。

假设思维空间的 metric 是语义的（语义相近则点的距离相近）。根据「神经原理」(9)，每个 thought 必然是由一组 features 表述，形如 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$，每个 x_i 是一个 feature 或**概念原子**。例如：

$$\boldsymbol{x} = \text{我很肚饿} = \text{关於我的} \cap \text{关於生理的} \cap \text{关於食物的} \cap \text{负面的} \cap .... \tag{14}$$

这些 features 可以数量很多，它们是 **sub-symbolic** 的，很多 features 的乘积构成通常意义下的 symbols。

总括来说： 一个 thought 是一组 binary features 的乘积。

2.1.3 逻辑中的 linkage 现象

在经典**谓词逻辑** (predicate logic) 中有一个 “linkage” 的现象，例如以下这个式子（爸爸的爸爸是爷爷）：

$$\forall X\ \forall Y\ \forall Z. \quad \text{grandfather}(X, Z) \leftarrow \text{father}(X, Y) \wedge \text{father}(Y, Z) \tag{15}$$

那意思是说，无论右边的变量（例如 X）怎样改变，左边的 X 必须代入相同的值。这是 **代入** (substitution) 的本质。

我们想将 predicate logic 的结构「搬到」神经网络，从抽象意义上说可以有很多种做法，现我讲述一种我设计的比较简单直接的做法：

状态空间的 transition $\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{y}$ 看成是逻辑推导 $\boldsymbol{x} \vdash \boldsymbol{y}$，那么 linkage 就是 $\boldsymbol{x}$ 的 i-分量到 $\boldsymbol{y}$ 的 j-分量的 identity map。换句话说，有形如下式的一些 id maps 「埋藏」在 $\boldsymbol{F}$ 里面：

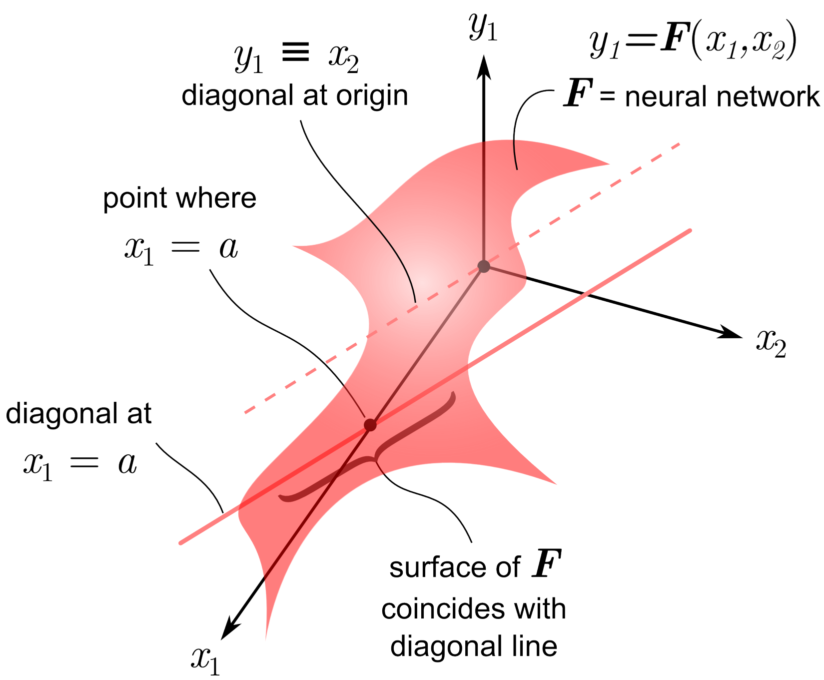
$$\boldsymbol{F}: \ (x_1, ..., x_i, ..., x_n) \mapsto (y_1, ..., y_j, ..., y_n) \tag{16}$$

注意，我说「埋藏」的意思是：这些 linkages 只在 $\boldsymbol{x}$ 的某些位置才存在（例如，当前提中出现了两个关於「爸爸」的命题时）。更准确地说：

$$\boldsymbol{F}: \begin{cases} {\color{red}y_j \equiv x_i}, & \text{if } \boldsymbol{x} = \hat{\boldsymbol{a}} \text{ for some coordinates except } x_i \\ {\color{red}y_h \equiv x_k}, & \text{if } \boldsymbol{x} = \hat{\boldsymbol{b}} \text{ for some coordinates except } x_k \\ \text{... etc ...} \\ \text{is free otherwise} \end{cases} \tag{17}$$

以上每条等式代表一个 linkage。

一个 linkage 的几何图像如下：



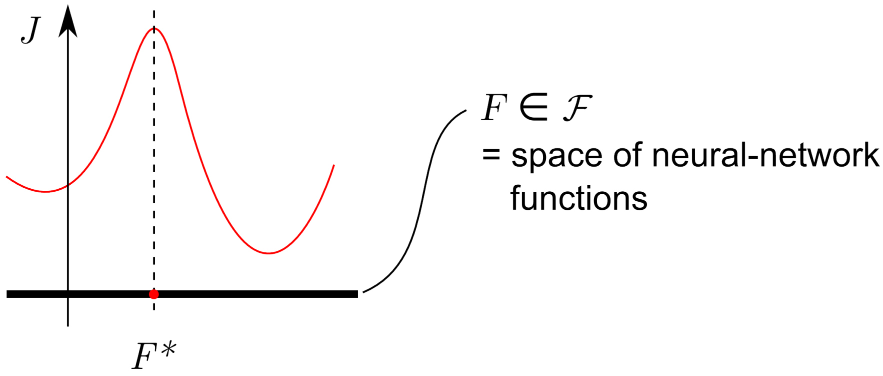
(18)

实际应用中 dim $\boldsymbol{x}$ 可能达到成千上万，其中可以有很多 linkages，很难 visualize。

或者稍为形象化地解释一下： generalization 是智能的一个重要方面，例如由「苏格拉底会死、柏拉图会死」generalize 到「所有人都会死」这样的规律。这种泛化的 **propensity** 是一把双刃剑：有时候可以很聪明，但有时候过度泛化。例如有些男人被女性欺骗后，从此觉得所有女人都说谎。神经网络是一个空间中的 smooth function，它泛化的方法是靠 smoothness：某点的函数值改变时，该点的**邻域**的函数值也随著类似方向改变。神经网络本身没有那种 diagonal 式的泛化倾向（那是逻辑的特徵），但可以模拟它。神经网络 $\boldsymbol{F}$ 对应於逻辑中的 $\vdash$，即是由一些**前题**推出**结论**；$\boldsymbol{F}$ 是一个非常高维数的空间上的一个 hyper-surface。$\boldsymbol{F}$ 里面包含著各种 logic rules，例如在「人」和「死」这些位置上埋藏了「所有人都会死」这个 diagonal；而在「爸爸」和「爷爷」之间埋藏了「爸爸的爸爸是爷爷」这个 diagonal。$\boldsymbol{F}$ 的函数曲面必须经过这些 diagonals。如果没有逻辑的约束，$\boldsymbol{F}$ 的函数曲面就是自由的 smooth function 了。

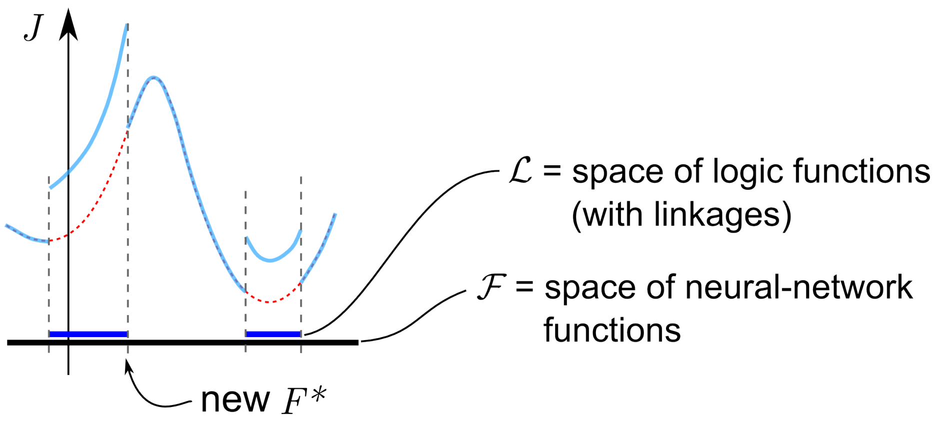
Now，我们关心的是怎样 "combine" 逻辑结构和神经网络结构。在这里我再选择一个特别简单的方法：在 (17) 中的那些等式，构成了一些约束在神经网络的 W 之上的 equational constraints。只需要用这些 constraints 去训练神经网络，就可以实现 linkages。

传统的 back-prop 搜寻 $\boldsymbol{F}$ 的最优值 $\boldsymbol{F}^*$，J 是 score-function，注意底下的 domain 是 **泛函空间** (function space)：



(19)

而我们需要的是新的 back-prop，它在「混合」的 function space 上 optimize（至於 exactly 怎样混合我还不清楚），J 在 logic 的 sub-space 上分数较高：



(20)

根据神经网络的 **universal approximation theorem** [2]，$L > 1$ 层神经网络的函数 $\boldsymbol{F}$ 在函数空间中是 dense 的。换句话说，如果神经元的个数充分多，必然可以学习有任意 linkages 的函数。

如果还有疑惑，可以试试实际上 solve 一个 constraint。为简单起见，弃用  而用 （反正实践中很多深度网络都用 rectifier），这样很方便，因为 rectifier 的前半截就是直线的 identity function。粗略地看，如果只有一层，那 constraint 约束了矩阵 W 的其中一行（有 n 个分量）；每个 linkage 使用 2 个自由度（$\equiv$ 等式使用 1 度，if-then 使用 1 度）。当层数增加时，涉及到的 W 数目递增，而约束等式仍然只是一条，换句话说，应该有很多的自由度可以用。这情况是乐观的。

注意： 暂时我还未设计出使用 linkage 的 learning algorithm，我也不肯定使用了 linkage 之后会不会对学习速度有重大改进....？

2.1.4 用 relation algebra 如何？

以前曾经对 relation algebra [11] [8] 有些憧憬，因为它比较接近人类自然语言，但其实 relation algebra (RA) 和 first-order logic (FOL) 基本上是等效的，在 FOL 里面有 linkage 的复杂性，但在 RA 里面这个复杂性其实也没有消失。可以说「复杂度是守恒的」**。

** 这句话是 category theorist Eugenia Cheng 说的。

举例来说，在 (15) 中表达「爸爸的爸爸是爷爷」，可以用 RA 更简单地表达：

$$\text{father} \circ \text{father} = \text{grandfather} \tag{21}$$

实际的推导是这样的：

$$\begin{aligned} \text{John father Pete} \\ \text{Pete father Paul} \\ \text{John father} \circ \text{father Paul} \end{aligned} \tag{22}$$

这时要 **代入**上面的等式才能得出结论：

$$\text{John grandfather Paul} \tag{23}$$

所以 linkage 的复杂性变成了代数 formula 长度的复杂性。

「长度」本身没有不妥，但我们的目的是将逻辑式子嵌入到状态空间 $\boldsymbol{x}$ 里，这时 variable length 令人很头痛，但 fixed length 没有此问题。如果硬要将 variable length 的式子嵌入到（有限维）向量空间中，似乎必须用到 **fractal** 结构（因为它有自相似性），同时需要设计一种新的神经网络，它先天性地有 fractal 结构在里面；但这比较复杂，我没有在这方向 explore。

2.1.5 逻辑结构 summary

逻辑命题的**内部** (sub-propositional) 结构，传统上有两种方法表达：一是 predicate logic，二是 relation algebra。无论是哪种方式，它的本质都是想处理 **variable substitution**。有趣的是，「代数」的本质其实也是「代入」，但代数中的代入法则是 implicit 的，所以用代数来 explicitly 表达代入的概念反而很难。

至於 **λ-calculus**，它本质上就是一种处理 substitution 的方案。而 **combinatory logic** 和 λ-calculus 是等效的，后者消除了「变量」这概念，但取而代之的是式子的长度更复杂（比 relation algebra 更复杂）。

(First-order) predicate logic 的代数化，可以由 Alfred Tarski 的 **cylindric algebra** 给出：

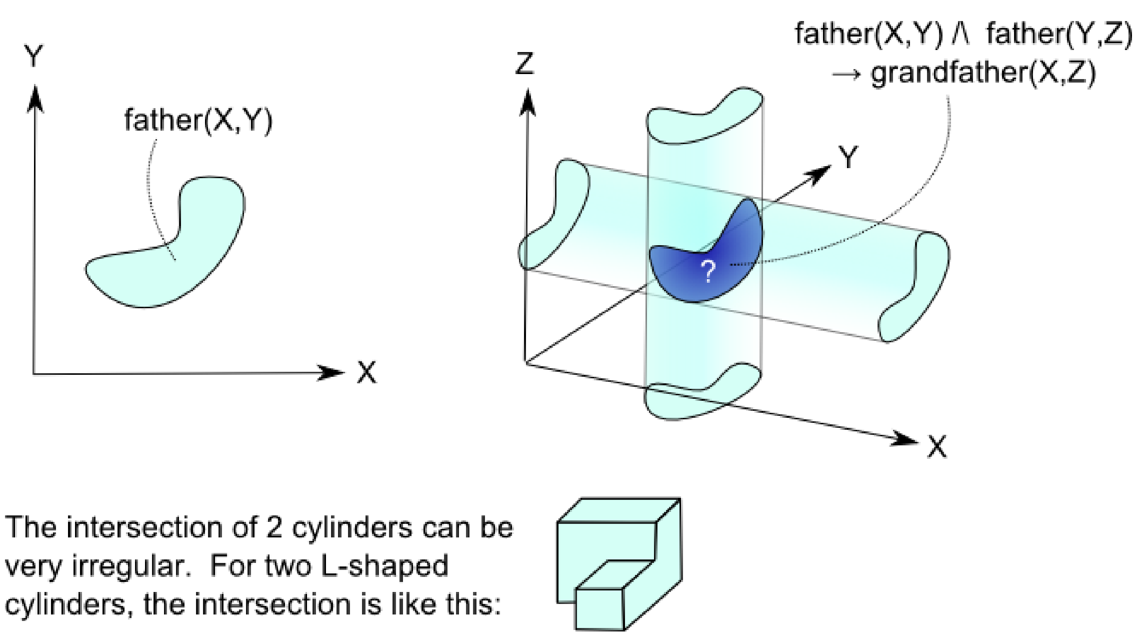
$$\frac{\text{propositional calculus}}{\text{Boolean algebra}} = \frac{\text{predicate calculus}}{\text{cylindric algebra}} \tag{24}$$

Higher-order logic (HOL) 的代数化可以用 **topoi theory** 给出 [6] [7]：

$$\frac{\text{intuitionistic propositional calculus}}{\text{Heyting algebra}} = \frac{\text{higher-order logic}}{\text{elementary topos}} \tag{25}$$

HOL 等效於 untyped λ-calculus，而 typed λ-calculus (= type theory) 较为弱一点。HOL 这个家族的特点，是 "substitution of equal by equals"，这会令逻辑式子的长度增加。但 predicate logic 的做法是用**实物** (objects) 来做替换，它不会增加式子的长度；但将它代数化的结果是引入了 cylindrification、diagonal set 等概念，例如在 fig. (18) 有 $y_1 \equiv x_2$ 这个 diagonal。

所谓 **cylindrification** 的意思是这样的：



(26)

X, Y, Z 代表 domains，即所有「人」或「物体」(objects) 的集合。物体之间的**关系**是一些 regions（如蓝色那块平面代表 "father" 关系）。两个关系之间的 "and" 就是就是那两个 cylinders 的 intersection，所以叫 cylindric algebra。注意：这里的 (X, Y, Z) 不同於 fig. (18) 的 (x_1, x_2, y_1)，前者是 3 个 domain 上的 2 个关系的交集：

$$\text{father} \wedge \text{father} \tag{27}$$

后者是 $x_1 =$ "father" 这个 predicate 的内部结构：

$$\text{father}(x_2, \cdot) \wedge .... \mapsto \text{grandfather}(y_1, \cdot) \tag{28}$$

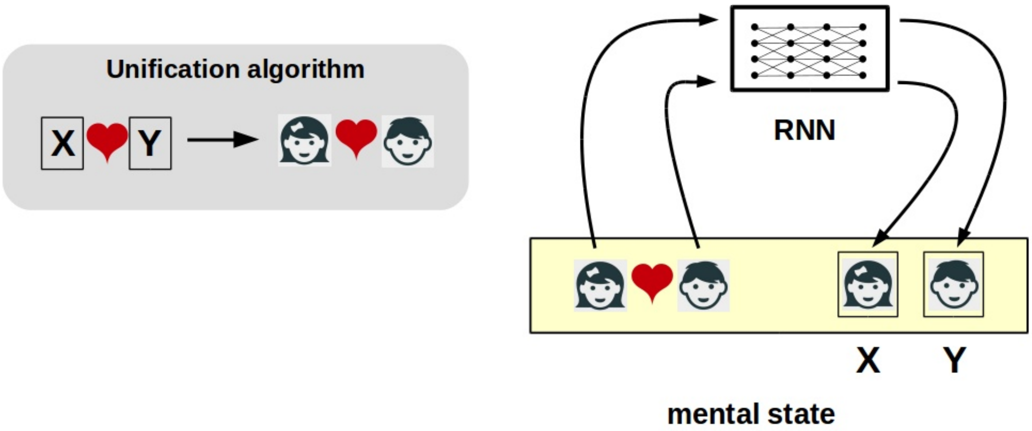
是个 diagonal (即 linkage: $x_2 \equiv y_1$)。

（这段的 references 太多，我有空再补上....）

2.1.6 用时间换取空间

上面说的是 substitution 在空间中的 linkage 结构。但也可以将 substitution **分拆**成若干个简单的步骤。方法是：将某些内容放进记忆体中的「盒子」中，这些盒子充当 variables 的角色，也就是很具体地实现 substitution 的动作。换句话说，将**空间复杂性**转换成**时间复习**

性***；以下是示意图：



(29)

X，Y 是状态空间 $\mathbb{X} \ni \boldsymbol{x}$ 里面的「盒子」= variables。

先前我说的 linkage 结构，放在有限维向量空间比较方便，但它是 first-order logic，处理 higher-order 关系时有很大困难。Higher-order relations 似乎还是要用这种分拆步骤的方法解决。

2.1.7 Cartesian-closedness

折腾了这么久，但仍然缺少了一个重要的特性：Cartesian-closedness。它指的是在某个範畴内，对任意的 A, B，都必然可以找到它们的：

$$\boxed{\text{product}}\ A \times B \quad \text{和} \quad B^A\ \boxed{\text{exponentiation}} \tag{30}$$

在逻辑中这是指：

$$A \wedge B \quad \text{和} \quad A \rightarrow B \tag{31}$$

为什么需要 Cartesian-closed？注意在 minimal architecture 里，只有两种记忆，即瞬时记忆 $\boldsymbol{x}$ 和永久记忆 $\boldsymbol{F} = \text{KB} \vdash$。从 logic-based AI 的角度来看，KB 里装著 logic rules，但 $\boldsymbol{x}$ 里面只有 ground facts。Ground sentence 指的是**没有变量**的命题，例如：

$$\boldsymbol{x} = \text{见到地上有血迹} \tag{32}$$

相比之下，logic rule 是有变量的 conditional statement，例如：

$$\forall Z. \quad Z\ \text{有血迹} \rightarrow Z\ \text{可能是凶案现场} \tag{33}$$

如果在 $\boldsymbol{x}$ 里面可以存放 rule，那表示 $\boldsymbol{x} \ni \mathbb{X}$ 是一个 Cartesian-closed category。这样的 $\mathbb{X}$ 是一个更 powerful 的结构，亦即系统可以思考更复杂的 thoughts。更重要的是，$\boldsymbol{x} \ni \mathbb{X}$ 和 $F = \text{KB} \vdash$ 现在**地位平等**，因为它们都是 $\mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$ 的**函数**，因为 Cartesian-closed 表示 $\mathbb{X} \simeq \mathbb{X}^{\mathbb{X}}$。这个特性在 belief revision 中似乎会很有用（见下节）。

如何在神经网络中做到 Cartesian-closed？记得神经网络中 $\boldsymbol{x}$ 是一组 features $= (x_1, x_2, ..., x_n)$。一个办法是将所有 $\boldsymbol{x}$ 都变成 $\mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$ 的函数。逻辑的 implication $A \rightarrow B$ 显然是函数，但单

*** 人脑的脑电波由 0.5 Hz 到 40 Hz 都有，我们感觉上瞬间的动作可能已经过了若干次迴路。

一 ground sentence A 也可以是函数：$\top \to A$，其中 $\top$ 是逻辑「真」。注意：这些函数中可以有 linkages，即处理变量的能力。

转到神经网络中，$A \to B$ 是一个 $\mathbb{X} \to \mathbb{X}$ 的神经网络。$\top \to A$ 也是一个 $\mathbb{X} \to \mathbb{X}$ 的神经网络，但它将 $\mathbf{1} \mapsto \boldsymbol{A}$。

那 $\mathbb{X}$ 是一个怎样的空间？它本身可以是一个深度神经网路的 weights，但这个神经网络的输入 / 输出层必须有足够的**阔度**去处理**它自己**！表面上似乎不可能.... 越多的 weights 需要更多的 weights 去处理.... 但如果令 $\boldsymbol{x}$ 储存一些 partial functions 或许可以。

2.1.8 Belief revision

Belief revision （也可以叫 “truth maintenance”）是经典逻辑 AI 发展的高峰。如果可以用我们的新 architecture 做到 belief revision，我们会很有信心这个理论是 general intelligence。

正常的逻辑运作模式是由 $\boxed{\mathrm{KB}}$ 作用在 $\boldsymbol{x}$ 上给出新的 $\boldsymbol{x}$：

$$\boxed{\mathrm{KB}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}' \tag{34}$$

但 belief revision 或者可以看成是 $\boldsymbol{x}$ 作用在 $\boxed{\mathrm{KB}}$ 上的结果：

$$\boldsymbol{x}(\boxed{\mathrm{KB}}) = \boxed{\mathrm{KB}}' \tag{35}$$

由於 Cartesian-closedness，$\boldsymbol{x}$ 和 $\boxed{\mathrm{KB}}$ 的地位是平等的，使上面的运作成为可能。

这只是一个 vague idea，我会再回到这里填补这空白....

2.2 命题-level 结构

2.2.1 思维状态分拆成命题

将思维状态 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}$（你当下所思想的东西）分拆为命题的集合，是有必要的。$\boldsymbol{x}$ 由一些 **thoughts**（思维单元）组成，一个 thought 对应於逻辑中的一条**命题**，举例来说：

$$\boldsymbol{x} = \text{ 我正在上课} \wedge \text{ 我很肚饿} \wedge .... \tag{36}$$

也可以有另一个状态：

$$\boldsymbol{x}_2 = \text{ 我正在搭地铁} \wedge \text{ 我很肚饿} \wedge .... \tag{37}$$

如果不分拆的话，$\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{x_2}$ 会是两个完全不同的状态。分拆之后，它们有共同的**因子**，这些因子可以 factor out 来处理，换句话说可以用较小的 $\boxed{\mathrm{KB}}$ 处理大量的情况，达到资讯压缩的 economy。

2.2.2 Boolean algebra

A **Boolean algebra** is a structure with:

$$\mathcal{B} = (\overset{\text{underlying set}}{A}, \overbrace{\wedge, \vee}^{\text{binary ops}}, \overset{\text{unary op}}{\neg}) \tag{38}$$

但似乎最重要的结构（尤其是当引入了 fuzzy-probabilistic 之后）是这个 commutativity：

$$\forall a, b \in \mathcal{B}. \qquad a \wedge b = b \wedge a \tag{39}$$

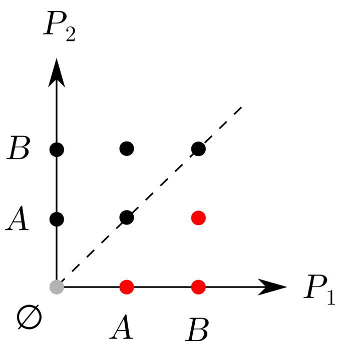
更简单地讲：状态 $\boldsymbol{x}$ 只需要是一个命题的集合，命题的次序和相同重复可忽略。

如果放到 vector space 上，这结构是一个 **symmetric algebra**，亦即一个 tensor algebra 加上 commutative 的条件。（但我暂时没有用这方面的理论）

2.2.3 命题 → 向量空间

目的是想将所有命题 map 到向量空间上，次序和重复不重要。

考虑最简单的情况：P_1 和 P_2 是两个命题的**容器**，思维状态 $= (P_1, P_2)$，而每个命题可以是 A 或 B。我们可以这样摆放 $P_1 \times P_2$ 空间的元素：



(40)

对角线上的元素可以不要，因为像 (A, A) 等是多馀的重复。换句话说，全体命题的集合就是 $\{$ lower-triangular 那些元素$\}$ $\setminus$ diagonal $\cup$ $\varnothing$。

在高维情况下这种空间的节省很有效率：symmetrize 之后，hypercube 的一角的体积是原体积的 $1/n!$。

然后，在 symmetrized 空间上的函数 $\boldsymbol{F}: \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ 也可以缩小 domain，其中 $\mathbb{X} = \text{sym}(\mathbb{P}^n)$ 而 $\mathbb{P}$ 是单个 proposition 的空间。换句话说，如果输入是 $(p_1, p_2, ..., p_n)$，则按照 $\mathbb{P}$ 上的 order 对 p_i **排序**，然后才呼叫 $\boldsymbol{F}$ 计算。

在 $\mathbb{P}$ 上的排序是很简单的，因为每个 $p \in \mathbb{P}$ 已经有其位置（位置是深度学习 learn 出来的），然后用 lexicographic ordering 即可。

3 结论

本篇分析了逻辑的基本结构，然后将这些结构附加到神经网络上，以加速学习。现正计划写代码验证这些想法的有效性。

Acknowledgement

谢谢 Ben Goertzel（OpenCog 人工智能的创始人）在 AGI mailing list 上和我的讨论。Ben 初次指出神经网络学习和逻辑 inductive 学习的不同，引起我研究两者之间的关系。

References

1. Wikipedia: Deep dreaming (`https://en.wikipedia.org/wiki/Deepdreaming`).
2. Wikipedia: Universal approximation theorem (`https://en.wikipedia.org/wiki/Universal_approximation_theorem`).
3. Robert Gilmore and Marc Lefranc. *The topology of chaos: Alice in stretch and squeezeland*. Wiley-VCH, 2011.
4. Hobbs. interpretation as abduction, in book "discourse and inference", Nov 2003.
5. Jerry R Hobbs, Mark Stickel, Paul Martin, and Douglas Edwards. Interpretation as abduction. In *Proceedings of the 26th annual meeting on Association for Computational Linguistics*, pages 95–103. Association for Computational Linguistics, 1988.
6. Joachim Lambek. Categorical versus algebraic logic. In Andréka, Monk, and Németi, editors, *Algebraic logic*, pages 351–360. North-Holland, 1988.
7. Saunders MacLane and Ieke Moerdijk. *Sheaves in geometry and logic – a first introduction to topos theory*. Springer, 1992.
8. Roger Maddux. *Relation algebras*. Elsevier, 2006.
9. Mikolov, Sutskever, Chen, Corrado, and Dean. Efficient estimation of word representations in vector space. *Proceedings of workshop at ICLR*, 2013.
10. Luc De Raedt. *Logical and relational learning*. Springer, 2008.
11. Gunther Schmidt. *Relational mathematics*. Cambridge, 2010.
12. Stephen Smale. Differentiable dynamical systems. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 1967.
13. Tamás Tél and Márton Gruiz. *Chaotic dynamics: an Introduction based on classical mechanics*. Cambridge, 2006.
14. King Yin Yan. ILP tutorial `https://storage.googleapis.com/google-code-archive-downloads/v2/code.google.com/genifer/Genifer-induction(30July2012).pdf`.
15. King Yin Yan. The structure of memory. (to be submitted AGI-2017).
16. King Yin Yan, Juan Carlos Kuri Pinto, and Ben Goertzel. Wandering in the labyrinth of thinking – a cognitive architecture combining reinforcement learning and deep learning. (to be submitted AGI-2017).