No problem can withstand the assault of sustained thinking.

— Voltaire

Genifer 4.1 理论笔记

YKY (甄景贤)

June 11, 2015

我也想写到满纸公式，但不能写公式的时候唯有做文字理论了。

Distributive 的目的是 graceful。如果用**点**的话可能没有 grace。

1 New insights

最近在香港认识了两个朋友，Dr 陈启良 (CUHK) 和 Dr 譚志斌 (HSMC)，和他们谈过我的 AI 理论之后获益良多：

1.1 命题空间的 dimension

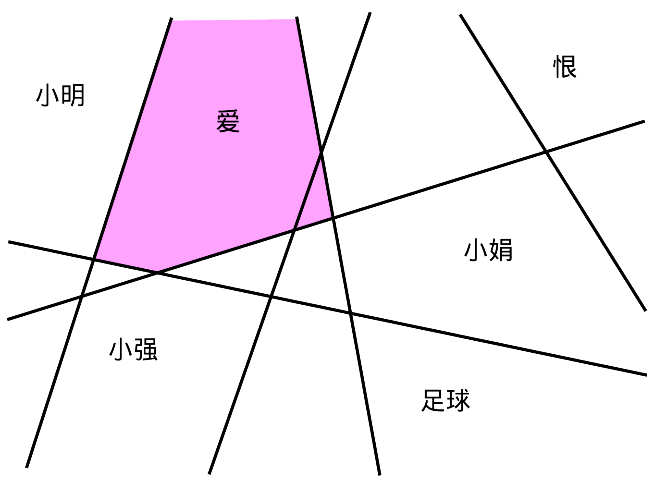
在知识空间中，如果 v_1, v_2, v_3 是三个互不相关的命题，那么它们的线性相关 $a_1 v_1 + a_2 v_2 = a_3 v_3$ 是不容许的，否则会出现谬误。结论是：要么知识空间的 dimension 等於命题的总数（那会很大，可能无限大），要么放弃 a_i 是真假值的做法。

人的词汇 (vocabulary) 的个数大约在 3,000 至 10,000's 之间。暂时假设我们可以用 dimensionality reduction 把原始概念的个数缩小到 3000，那么概念空间 C 的维数就是 3000。

如果只考虑像 $a\,R\,b$ 那样的关系，则命题空间是 $C \times C \times C$，维数是 $3000 \times 3 = 9K$。但如果是 $C \otimes C \otimes C$ 则维数是 $3000^3 = 9G$。现时的电脑记忆（例如 GPU）似乎可以处理后者。

1.2 Distributive representation

如果每个概念是向量空间中的一个独立分量，似乎很浪费空间。在神经网络中通常用**分布式**的表示法：



一粒神经元的公式是：$y =$  $(w^T x \leq b)$

（但如果只有一层神经元）那非线性函数可以不理（它不影响 decision boundary）。

$(w^T x \leq b)$ 表示一个 hyperplane 的切割。

一个概念就是一组 hyperplanes 切割而成的多面体 (polyhedron)，

$$c : (Wx \leq B)。$$

矩阵 W 对应於一层神经网络中的 weights。

问题是这个表示法，如何表示乘积？在这个表示法中，「线性无关」代表什么？

1.3 「连续性」

第二个问题是「连续」指的是什么。例如命题 $P_1 =$「小明爱小娟」，$P_2 =$「小强爱踢足球」，那么由 P_1 变化到 P_2 必然会有 discrete jump，那是无可置疑的。除非我们重新定义命题是像 $k_1P_1 + k_2P_2$ 那样的东西，才可以有「连续变化」；这一点需要再加以精确化。

我发觉「连续空间」不是一个严谨的术语，因为在 discrete 空间中也可以定义"continuous" 这概念，例如在 computer science 的 functional programming 里有 domain theory、denotational semantics 等，常常谈到离散空间中的连续函数。而且「可微分」的概念也有一些 generalizations，例如 Fréchet derivatives（在泛函空间中）。

1.4 近似

那些算子或许可以合写成一个:

$$T_1v + T_2v + ... + T_nv = \mathcal{T}v$$

然后合写后用 function approximation 来近似。

但这种近似必须有代价，否则违反了两项原则：

1. Turing 已经很有远见地意识到，逻辑推导的普适算法是不存在的，因为它违反了停机原理 (halting problem)。后者是用 Cantor 的集合论中的 diagonal argument 证明的。如果我们的优化算法必然会给出答案，而答案又可以转换回逻辑，那是不可能的。所以在近似过程中必然会有某些误差。

2. 如果 $P \neq NP$，我们的算法也不可能总是在 polynomial time 之内回覆正确答案。

1.5 Second-order

还有一个"second-order" 的想法。在 first-order 我们的算子是这个形式：

$$T : V \to V$$

但 second-order 的做法是将所有**物体**都看成是算子，算子可以作用在算子之上，这似乎是一种 duality。

如果我们简单地将 $\mathcal{T}$ 近似，那些逻辑推导就会有错误。或者应用某个 duality 或二次形式后，近似的做法会有较好结果？

从另一个角度，详细一点分析那**推导**和**学习**的过程。推导的过程是：

$$K_0 \xrightarrow{R} K_1 \xrightarrow{R} \cdots\cdots \xrightarrow{R} K_\infty$$

可以将它简写，并加上反向的 L map：

$$\begin{tikzcd}[column sep=large] K_0 \arrow[r, "R"{name=R}, "\infty"'] & K_\infty \arrow[to=R, bend right, "L"'] \end{tikzcd}$$

L 是由结论 K_∞ 到法则 R 的映射，可以叫 L 做 learning map。这个 map 比较复杂，它相当於学习的过程，通常要用 iteration 逼近。而且，有无限多个 R 可以符合条件，我们通常选取长度短的 R，这是 minimum description length 原理，又或者选取资讯**压缩比**最高者。

上面的 map 可以再简化，因为 K_0 是常项，可以省略。写成垂直形式：

$$\begin{tikzcd} K_\infty \arrow[d, shift left, "L"] \\ R \arrow[u, shift left] \end{tikzcd}$$

现在如果我们改变推导的结果 K^*，亦即改变 K_∞，那么 R 亦要改变成 R'，但 L 未必要改变。学习这个 L 是一种二次形式的学习。

$$\begin{tikzcd} K_\infty \arrow[r] \arrow[d, shift left, "L"] & K'_\infty \arrow[d, shift left, "L"] \\ R \arrow[u, shift left] \arrow[r] & R' \arrow[u, shift left] \end{tikzcd}$$

1.6 逻辑是什么？

現在概括一下逻辑是什么：一个逻辑系统 $\mathcal{L} = \{C, P, d(\cdot,\cdot), \subseteq\}$：

1. 原子概念集 $C \ni c_1, c_2, ...$
2. 命题集 $P \ni p_1, p_2, ...$ （可以限制在简单关系 $a\,R\,b$）
3. 连结词 (conjunction) $p_1 \wedge p_2$ 或 $p_1 + p_2$
4. 箭头 $p_1 + p_2 + ... \rightarrow p_0$
5. 概念之间的距离 $d(c_1, c_2)$
6. 概念之间的偏序 (partial order) $c_1 \subseteq c_2$

但其实 $d(\cdot,\cdot)$ 和 $\subseteq$ 并不是逻辑**内在**的，它们是从资料中 induce 出来的。其原理是基於 Liebniz extensionality：

$$f = g \quad \Leftrightarrow \quad \forall x.\ f(x) = g(x).$$

它原本是描述两个函数的相等，但我们可以将它普及到任何概念的乘积：

$$c_1 \approx c_2 \quad \Leftrightarrow \quad \forall_{\#} P, P'.\ P[c_1], P'[c_2].$$

这是说：概念 c_1 和 c_2 相似，如果它们经常出现在相似的命题之中。$\forall_{\#}$ 是 probabilistic quantification，它计算所有命题中相似者的份数。$d(\cdot,\cdot)$ 是 $\approx$ 的量度。

有了 $\approx$ 关系，可以用 hierarchical clustering 建立 $\subseteq$ 关系（注意这里的 $\subseteq$ 包含我们平时所说的 $\subseteq$ 和 $\in$ 关系）。

我们想把这个结构映射到 Banach 空间。

2 Neural Tensor Network

Andrew Ng 是香港人，Coursera 的 machine learning 教授，他在 Stanford，最近加入了百度。他和合作者提出了 NTN 模型 [4]：

$$\top(a\,R\,b) = u^T \, (a^T\,U\,b + W\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + c)$$

$\top(a\,R\,b)$ 表示 $a\,R\,b$ 这个关系的**强度**。
U 是一个 tensor，取两个向量 a, b 给出第三个向量 $a^T\,U\,b$（它服从张量的双线性性质）。
W 是一个矩阵，$W\binom{a}{b}$ 是一层传统的神经网络， 是一个非线性函数。
u^T 是一粒神经元，作用是把各个分量加起来，得出一个数。

3 Paul Smolensky's tensor representation

Paul Smolensky 的书是《The harmonic mind》(2006) [3]，第一卷是 AI 理论，第二卷是语言学理论。

他提出用张量来表示关系：

$$\begin{aligned} father(john, pete) \quad &\Leftrightarrow \quad father \otimes john \otimes pete \\ Var_1 : val_1, Var_2 : val_2 \quad &\Leftrightarrow \quad Var_1 \otimes val_1 + Var_2 \otimes val_2 \end{aligned}$$

第二句的意思是，variable 1 的值是 value 1，variable 2 的值是 value 2。

我在博客[1]上解释过，tensor 是所有 bi-linear forms 的 universal form。如果有向量空间 U 和 V，

$$\begin{aligned} T: \quad & U \otimes V \to W \\ t: \quad & u \otimes v \mapsto w \end{aligned}$$

[1]blog post

那么在 U, V 中线性无关的 $\{u_1, ..., u_m\}$ 和 $\{v_1, ..., v_n\}$，它们的乘积 $\{u_i \otimes v_i\}$ 在 W 中仍然是线性无关的。换句话说：

$$\text{线性无关集} \otimes \text{线性无关集} \mapsto \text{线性无关集}$$

而这正是我们需要的，因为根据「scalar = 逻辑命题真假值」的诠释，这正是命题之间不「相撞」的条件。

Antony Browne & Ron Sun 的较早的论文《Connectionist inference models, 2001》[1] 有讲述更多 neural-symbolic integration 的做法。

4 Metric embedding

最近有一本新书：[Mikhail Ostrovskii 2013] *Metric embeddings: bi-Lipschitz and coarse embeddings into Banach spaces* [2]，它似乎正正讲述了我们将 logic 嵌入到「连续空间」的问题。

What is the bi-Lipschitz condition? A map $f : X \to Y$ is called a *C-bi-Lipschitz embedding* if there exists $r > 0$ such that

$$\forall u, v \in X, \quad r\, d_X(u, v) \le d_Y(f(u), f(v)) \le rC\, d_X(u, v)$$

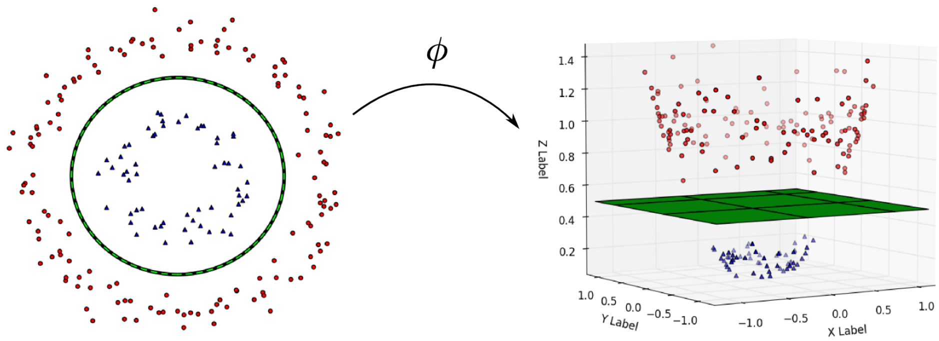
for some $C < \infty$. The smallest constant C for which there exists $r > 0$ such that the above is satisfied is called the *distortion* of the map f. 这似乎定义了「远的保持远、近的保持近」的意思。

5 SVMs and the kernel trick

印象中 **SVM** (support vector machine) 似乎可以将非凸的问题转化成凸优化的问题；可不可以将这个想法应用到我们的问题上呢？

SVM 的算法，首先用 kernel trick 将 data points 转换到高维空间，然后在高维空间中进行线性的 hyperplane 分割。

所谓 **kernel trick** 是指：给定一个 inner product，它暗含了一个到高维空间的转换 ϕ （但这个转换不需要真的计出来）。



而，在高维空间中用线性分割，那 error term 是一些正交距离，所以是 **quadratic form**，所以这问题是**凸优化**。

我们的问题是性质不同的，但两者似乎有些相似...

References

[1] Browne and Sun. Connectionist inference models. *Neural networks 14*, 2001.

[2] Ostrovskii. *Metric embeddings: bi-Lipschitz and coarse embeddings into Banach spaces*. De Gruyter, 2013.

[3] Smolensky and Legendre. *The harmonic mind, vol 1: cognitive architecture*. MIT Press, 2006.

[4] Socher, Chen, Manning, and Ng. Reasoning with neural tensor networks for knowledge base completion. *NIPS*, 2013.