

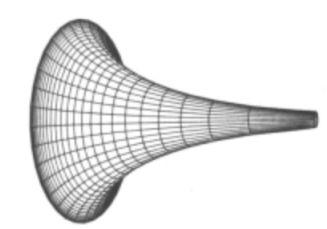
人工智能知识表述的数学基础

甄景贤

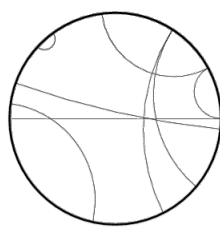
August 4, 2018

1 什么是 model theory?

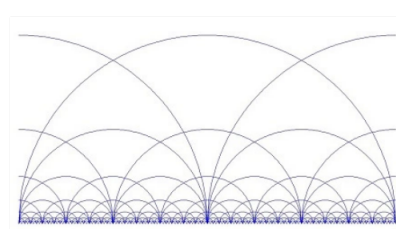
举例来说, hyperbolic geometry (双曲几何) 可以「实现」为某些 模型:



pseudo-sphere



Poincaré disc

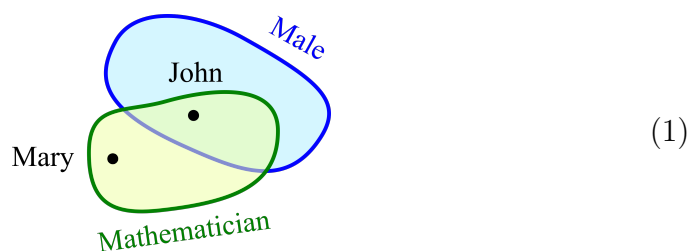


Poincaré half-plane

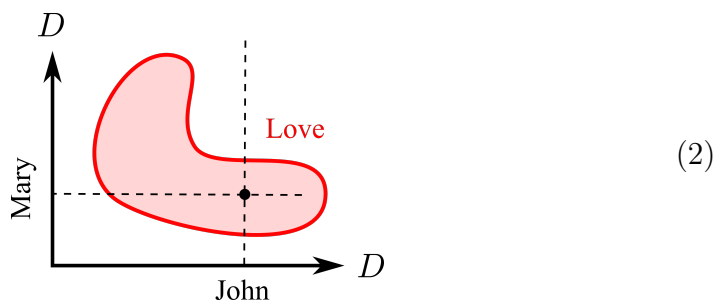
模型不是唯一的, 可以有很多种。

在数理逻辑中, 模型论 研究的是 syntax / theory 和 model 之间的 对偶。

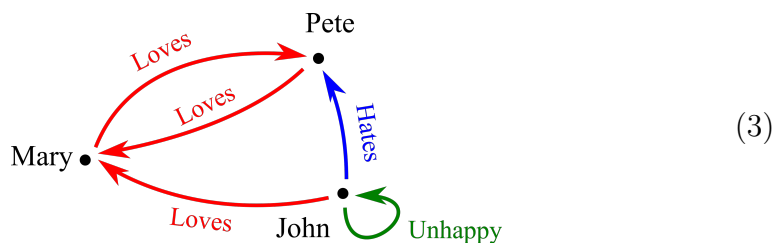
First-order logic 的 模型 可以用一些 集合 及其 元素 组成。例如,
 $\text{John} \in \text{Male}$, $\text{Mary} \in \text{Mathematician}$:



而 first-order objects (个体) 之间的关系是 domain D 的 Cartesian product $D \times D$ 内的一些子集, 例如:



对计算机的人来说, 更熟识的 model 是以下这种 relation graph 或 **knowledge graph**:



但这种 graph 不是数学中最常见的那种, 因为它的边有 labels。

以上的 knowledge graph 可以简单地转换成 逻辑式子 的集合:

$\text{Loves}(\text{John}, \text{Mary})$
 $\text{Loves}(\text{Pete}, \text{Mary})$
 $\text{Loves}(\text{Mary}, \text{Pete})$
 $\text{Hates}(\text{John}, \text{Pete})$
 $\text{Unhappy}(\text{John})$

(4)

所以说, 逻辑与 graph 基本上是等价的。

如果 graph 的每条边可以包含任意个顶点, 则有 **hyper-graph**。换句话说, hypergraph 的每条边 $\in \mathcal{O}(V)$, V 是顶点集。也可以说, hypergraph 就是 V 的子集系统 (set system)。对逻辑来说, 这好处是: 关系之上可以有关系。

Hypergraph 可以一一对应於拓扑学上的 **simplicial complex**, 可以研究它的 homology 和 cohomology。Simplicial complex 也可以和 **square-free monomial ideals** 一一对应。后者是 **组合交换代数** (combinatorial commutative algebra) 的研究范围。暂时我不知道这些关联有没有用, 详细可参看 [Brown 2013], [Miller and Sturmfels 2005]。

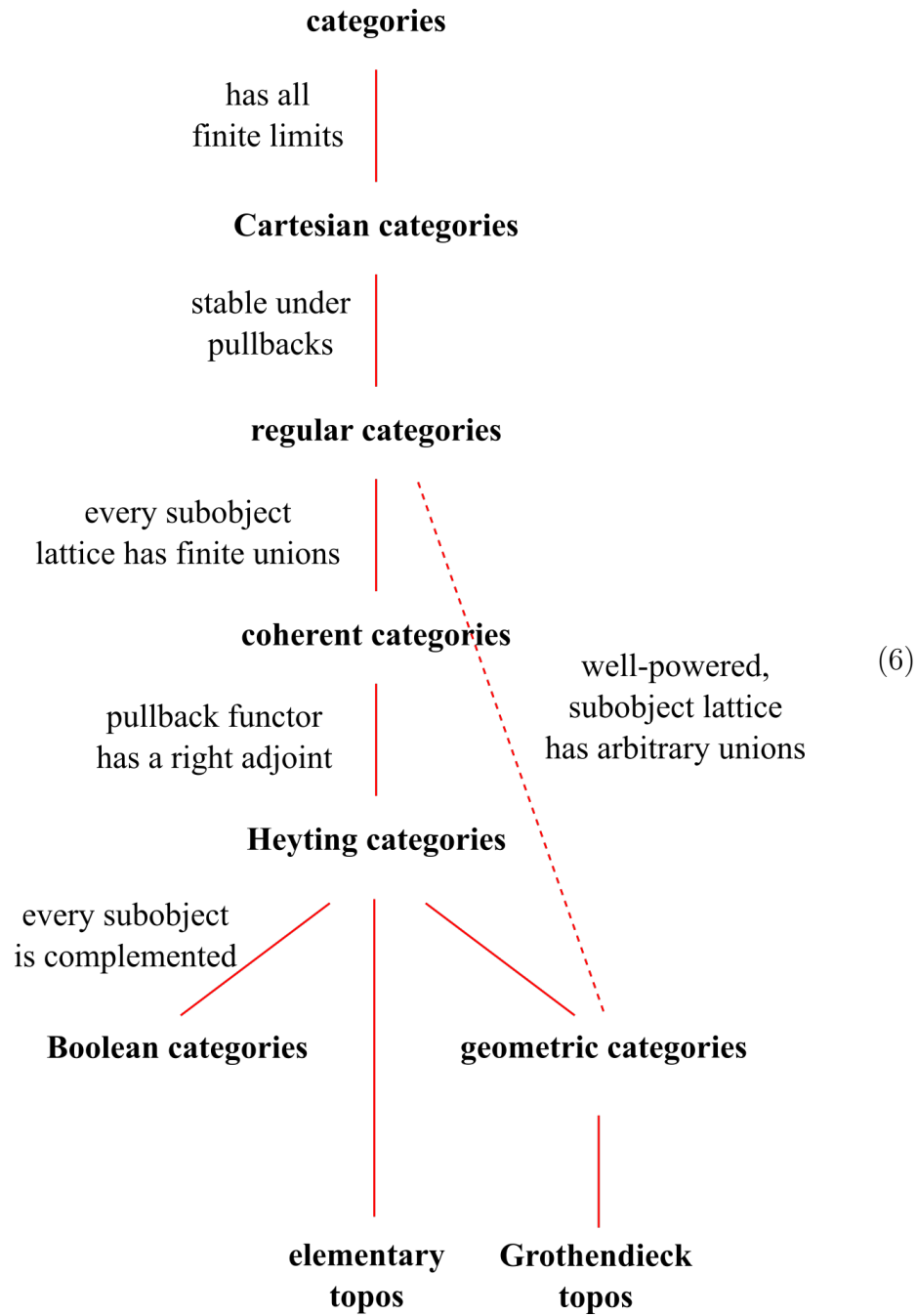
逻辑的 syntactic **theory** 方面, 例如可以有以下这个式子 (“失恋则不开心”):

$$\forall x, y. \text{Loves}(x, y) \wedge \neg \text{Loves}(y, x) \rightarrow \text{Unhappy}(x) \quad (5)$$

这个式子含有 universal quantification, 所以不是 model 的一部分。逻辑上来说, 只有 **ground sentences** (没有变量的式子) 的集合才可以组成 model, 例如 (4)。

所以, **theory** 中的一个式子 可以导致 model 中出现很多 **新的** 顶点和连接。这是 model theory 研究的问题。

2 Categorical semantics



3 Domain theory

References

- Brown (2013). *Discrete structures and their interactions*. CRC Press.
- Miller and Sturmfels (2005). *Combinatorial commutative algebra*. GTM 227.