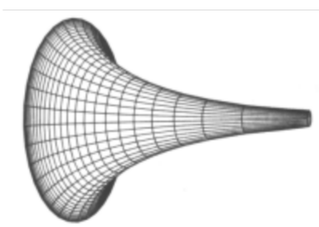
人工智能的知识表述

甄景贤

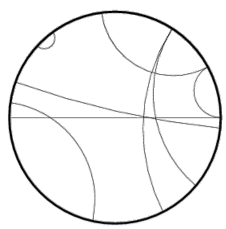
August 6, 2018

1 什么是 model theory？

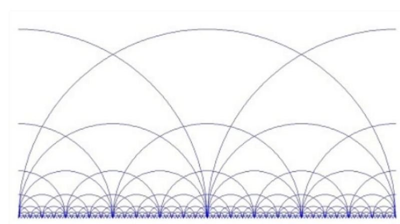
举例来说，hyperbolic geometry（双曲几何）可以「实现」为某些 **模型**：



pseudo-sphere



Poincaré disc

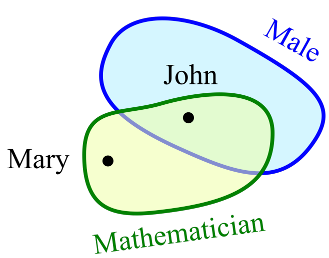


Poincaré half-plane

模型不是唯一的，可以有很多种。

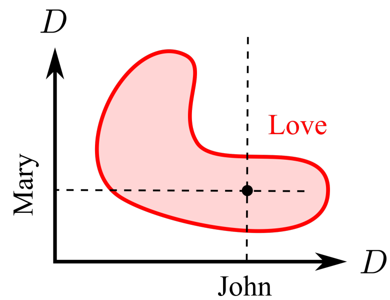
在数理逻辑中，**模型论** 研究的是 syntax / **theory** 和 **model** 之间的 **对偶**。

First-order logic 的 模型 可以用一些 **集合** 及其 **元素** 组成。例如，
John $\in$ Male, John, Mary $\in$ Mathematician：



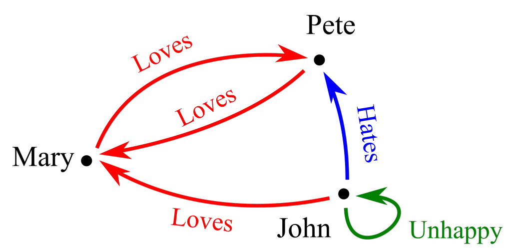
(1)

而 first-order objects（**个体**）之间的 **关系** 是 domain D 的 Cartesian product $D \times D$ 内的一些 **子集**，例如：



(2)

对计算系的人来说，更熟识的 model 是以下这种 relation graph 或 **knowledge graph**：



(3)

但这种 graph 不是数学中最常见的那种，因为它的 **边** 有 **labels**。

以上的 knowledge graph 可以简单地转换成 **逻辑式子** 的集合：

```
Loves(John, Mary)
Loves(Pete, Mary)
Loves(Mary, Pete)
Hates(John, Pete)
Unhappy(John)
```

(4)

所以说，逻辑 与 graph 基本上是 **等价** 的。

如果 graph 的每条 边 可以包含任意个 顶点，则有 **hyper-graph**。换句话说，hypergraph 的每条 边 $\in \wp(V)$，V 是 顶点集。也可以说，hypergraph 就是 V 的 **子集系统** (set system)。对逻辑来说，这好处是：关系之上可以有关系。
Hypergraph 可以一一对应於拓扑学上的 **simplicial complex**，可以研究它的 homology 和 cohomology。Simplicial complex 也可以和

square-free monomial ideals 一一对应。Square-free 的意思是 x_i 的指数只可以是 0 或 1。后者是 **组合交换代数** (combinatorial commutative algebra) 的研究范围。暂时我不知道这些关联有没有用，详细可参看 [Brown 2013], [Miller and Sturmfels 2005]。

逻辑的 syntactic **theory** 方面，例如可以有以下这个式子（“失恋则不开心”）：

$$\forall x, y.\ \mathrm{Loves}(x, y) \wedge \neg \mathrm{Loves}(y, x) \rightarrow \mathrm{Unhappy}(x) \tag{5}$$

这个式子含有 universal quantification，所以不是 model 的一部分。逻辑上来说，只有 **ground sentences** （没有变量的式子）的集合才可以组成 model，例如 (4) 。

所以，logic **theory** 中的一个式子 可以导致 model 中出现很多 **新的** 顶点和连接。这是 model theory 研究的问题。

例如，每一个自然数 $n \in \mathbb{N}$ 都有 它的 successor $S(n)$。这个函数的存在，导致 model 空间里有一系列 **无穷** 的顶点：

$$\bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \, ...\tag{6}$$

如果加入这条 **法则**：

$$\forall n \in \mathbb{N}. \quad S(n) \geq n \tag{7}$$

则立即产生无穷多个关系：

$$\bullet \xleftarrow{\geq} \bullet \xleftarrow{\geq} \bullet \xleftarrow{\geq} \bullet \xleftarrow{\geq} \bullet \xleftarrow{\geq} \bullet \xleftarrow{\geq} \bullet \xleftarrow{\geq} \bullet \, ...\tag{8}$$

虽然，在 **日常智能** (common-sense intelligence) 中，似乎比较少出现这种无穷的结构，而更多是 “shallow” 的结构。

值得注意的是，经典逻辑人工智能 (classical logic-based AI) 的知识表述 是分拆成 **rules** 和 **facts** 两部分。前者是带有 $\forall$ **变量** 的式子，后者是 ground sentences。Rules 储存在 KB 内，facts 储存在 **working memory** 内。前者是一个 **theory**，后者可以看成是一些 **“partial” models**。说 partial 的原因是因为它不代表整个 model。事实上 model 是非常庞大的东西，不可能储存在物理系统中。人工智能或大脑只能储存 某种 theories 和部分的 models。人工智能的关键问题是如何找一种良好的 syntax 结构，令 theory 的学习更快更有效率。

2 Distributive representations

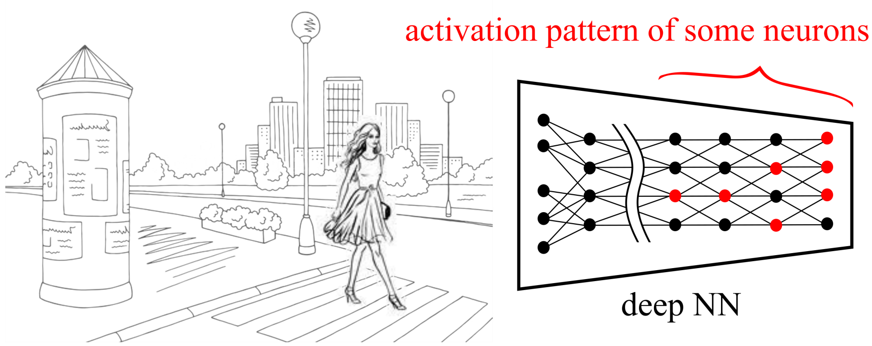
Distributive representation 当然是针对神经网络而言的，因为神经网络是现时最强的机器学习方法（除了我最近开始提倡使用的 **基因算法**）。

Distributive 的意思是：假设有一个 vector 表示神经网络的输出端有 $n = 10$ 粒神经元：

$$\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_{10}) \tag{9}$$

用 2 进制，每个 $x_i \in \{0, 1\}$，则 $\vec{x}$ 可以分别表示 10 个 "**one-hot**" 的概念。但如果用 distributive representation，这 10 个 bits 最多可以表达 $2^n = 1024$ 个不同的状态 / 概念。所以 distributiveness 可以非常有效地善用神经元。

假设，「遇见美女过马路」。这个图像经过譬如 CNN 的处理后，可以得到一个 **分布式知识表述**：



(10)

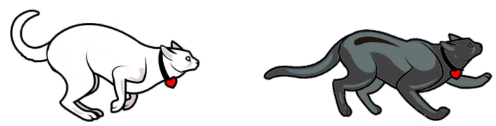
注意那些红点不一定是**最后**那层的输出。这是我心目中的图像，比较 general，不是指某个特定的 implementation。重点是：「美女过马路」是一个 "**neat**" proposition，但在感知过程中，我们会认得很多细节，例如「裙子、高跟鞋、金发、斑马线、路灯」等。这些特徵 (features) 构成整个 representation，至少我是这样理解 分布式表述 的。

经典逻辑表述是由 命题 构成的，其实 features 也可以看成是命题，例如「高跟鞋」可以看成是「有一只高跟鞋在这位置」的命题。逻辑上来说：

$$\boxed{\text{neat proposition}} \quad p \Leftrightarrow \bigwedge q_i \quad \boxed{\text{distributive features}} \tag{11}$$

有时（例如纯文字输入时），知道的只是一个 neat 命题，例如「美女过马路」，并不知道其他细节（例如「金发」），这时仍然可以有分布式表述，但那些特徵会是比较抽象的。

考虑「白猫追黑猫」这个图像：



(12)

「猫」的概念需要出现 **两次**，但神经网络内对应於「猫」的特徵只有 **一组**（除非有两个重复的可以表示任何概念的 modules，但很浪费）。换句话说，现时的 CNN 没有「巡迴 (traverse)」视野域的能力；它不能辨别和描述物体之间的**关系**。我很难想像一个 “monolithic” neural module 怎样可以做到这功能。似乎必须将命题表述成一连串 概念 的 **时间序列** (time sequence)。

考虑上节讲过的 逻辑 rule（“失恋则不开心”）：

$$\forall x, y.\ x \heartsuit y \wedge \neg y \heartsuit x \rightarrow \frownie x \tag{13}$$

这个 rule 的 **前件** (antecedent) 要成立，必须 两次出现的x **相等**、两次出现的y **相等**：

$$x \heartsuit y \wedge \neg y \heartsuit x \tag{14}$$

而且，要产生正确的 **后件** (consequent)，需要从前件中将 x **copy** 过来：

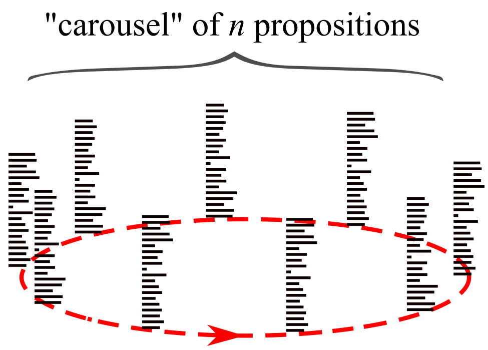
$$x \heartsuit y \wedge \neg y \heartsuit x \rightarrow \frownie x \tag{15}$$

这两个动作（**compare** 和 **copy**）都是用神经网络很难做到的。但它们是 variable substitution 的本质，也是 谓词逻辑 麻烦之处。换句话说，很难用一个 monolithic 的 end-to-end 神经网络 一口气完成这两个动作：

$$x \heartsuit y \wedge \neg y \heartsuit x \xrightarrow{\qquad} \frownie x \tag{16}$$

事实上，要做到以上功能，似乎必需有一个 **动态的记忆体**，它接收新来的元素时，会对记忆体中其他元素逐一 **比较**，而且具备 **复制** 功能。例如我考虑

过一个像「迴转木马」的时间序列机制（每个 代表一支 distributive vector）：



(17)

但仍未解决 compare 和 copy 的问题。总之，明显地很麻烦。这令我想到 放弃用 neural network 直接处理逻辑，而是用 hybrid 的神经 / 逻辑混合：视觉神经用 deep neural network，到高层次转用符号逻辑表述，后者用 genetic algorithm 做学习....

3 Genetic algorithm

首先有个 logic-based rule engine，它负责 forward-chaining（正向逻辑推导），这完全是经典 AI 范围。

馀下的问题是要学习那些 rules，这就是 genetic algorithm 做的。

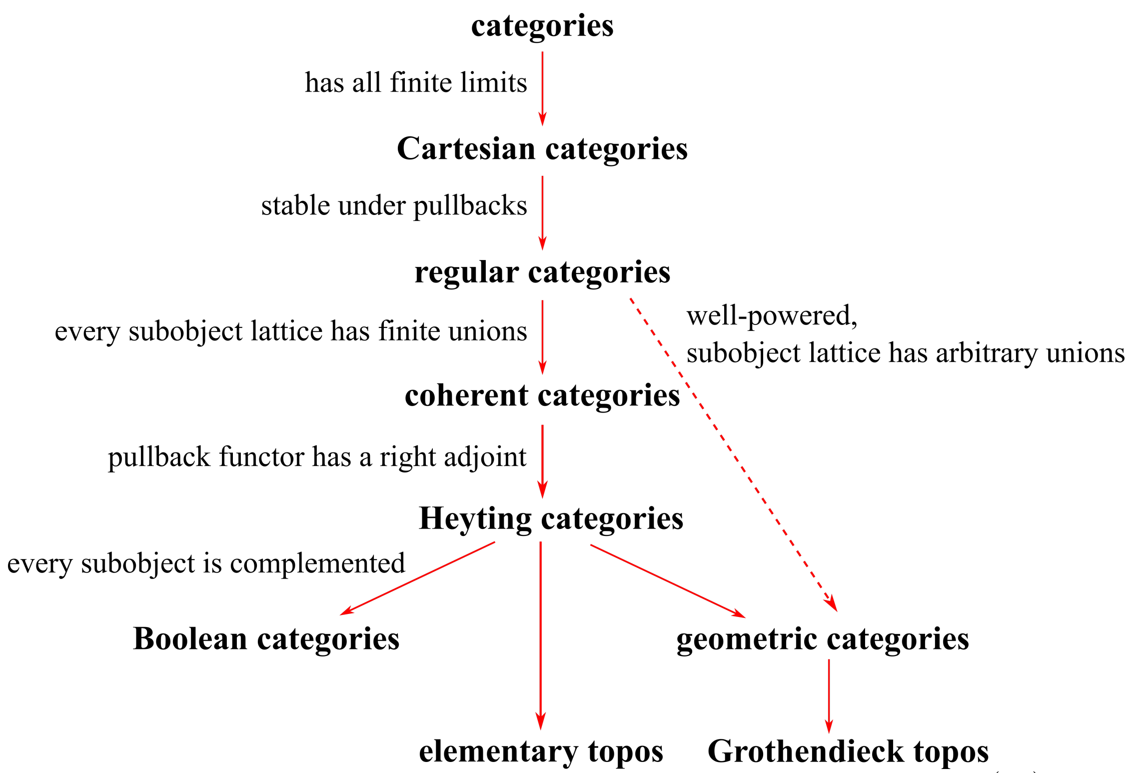
它的 population 是由个别的 rules 组成，但 winner 并不是单一条 rule，而是一整套 rules（最高分的 N 个）。这叫 cooperative co-evolution（COCO）。

输入和输出是 logic formulas，其实更易处理。

整个系统仍然是基於 reinforcement learning 的，但不需要直接做 RL，因为那些 rules 其实就是 actions，每一条 rule 的 probabilistic strength 就像 Q-learning 的作用。

4 Categorical semantics

Categorical semantics 是用 category theory 表达的 model theory。以下内容主要来自 [Caramello 2018] 这本新书的第一章。更经典的参考书是 [Goldblatt 1984, 2006].



(18)

5 Domain theory

λ-calculus 和 combinatory logic 都是可以表达任意 **函数** 的形式。如果全体函数的 domain 是 D，而 由 $D \to D$ 的函数的个数是 $|D^D|$，则根据集合论的 Cantor's theorem，$|D^D|$ 必定大於 $|D|$，即使 D 是无穷依然成立。换句

话说，λ-calculus 和 combinatory logic 不可能有 models。这结论是非常令人不安的。但这个问题被 Dana Scott 和 C Strachey 在 1971 年解决了，开创了 **domain theory**。

以下内容主要来自 [Vickers 1989]，是一本很易懂的书，还有更新的和更详尽的 [Goubault-Larrecq 2013].

6 Group theory

References

Brown (2013). *Discrete structures and their interactions*. CRC Press.

Caramello (2018). *Theories, sites, toposes — relating and studying mathematical theories through topos-theoretic 'bridges'*.

Goldblatt (1984, 2006). *Topoi — the categorical analysis of logic*.

Goubault-Larrecq (2013). *Non-Hausdorff topology and domain theory — selected topics in point-set topology*. Cambridge new mathematical monographs 22.

Miller and Sturmfels (2005). *Combinatorial commutative algebra*. GTM 227.

Vickers (1989). *Topology via logic*.