Číselné soustavy

David Weber

7. listopadu 2022

Co rozumíme pod zápisem čísla 963?

Co rozumíme pod zápisem čísla 963?

⇒ 9 stovek, 6 desítek, 3 jednotky

Co rozumíme pod zápisem čísla 963?

$$\Rightarrow$$
 9 stovek, 6 desítek, 3 jednotky

$$\Rightarrow \underbrace{9 \cdot 10^2}_{\text{stovky}} + \underbrace{6 \cdot 10^1}_{\text{desítky}} + \underbrace{3 \cdot 10^0}_{\text{jednotky}}.$$

Co rozumíme pod zápisem čísla 963?

$$\Rightarrow$$
 9 stovek, 6 desítek, 3 jednotky
$$\Rightarrow \underbrace{9 \cdot 10^2}_{\text{stovky}} + \underbrace{6 \cdot 10^1}_{\text{desítky}} + \underbrace{3 \cdot 10^0}_{\text{jednotky}}.$$

Pro každý z řádů máme deset symbolů: $0, 1, 2, ..., 9 \Rightarrow$ odtud **desítková (dekadická) soustava**.

Překročíme-li řád, pak zvýšíme hodnotu následujícího a aktuální vynulujeme.

Překročíme-li řád, pak zvýšíme hodnotu následujícího a aktuální vynulujeme.

- ...0001
- ...0002
 - :
- ...0009
- $\dots 0010 \leftarrow V$ ynulujeme a zvýšíme řád desítek

Co kdybychom měli např. pouze 5 číslic na řád, tzn. 0, 1, 2, 3, 4?

Co kdybychom měli např. pouze 5 číslic na řád, tzn. 0, 1, 2, 3, 4?

Princip bude zcela stejný. :-)

Co kdybychom měli např. pouze 5 číslic na řád, tzn. 0, 1, 2, 3, 4?

Princip bude zcela stejný. :-)

• \Rightarrow Řády nyní interpretujeme v mocninách **pětky**!

Co kdybychom měli např. pouze 5 číslic na řád, tzn. 0, 1, 2, 3, 4?

Princip bude zcela stejný. :-)

- → Řády nyní interpretujeme v mocninách pětky!
- Číslo 5 zde představuje tzv. základ soustavy.

Co kdybychom měli např. pouze 5 číslic na řád, tzn. 0, 1, 2, 3, 4?

Princip bude zcela stejný. :-)

- \Rightarrow Řády nyní interpretujeme v mocninách **pětky**!
- Číslo 5 zde představuje tzv. základ soustavy.
- Např. 4233₅ tak bude rovno

$$\boxed{4 \cdot 5^3 + \boxed{2} \cdot 5^2 + \boxed{3} \cdot 5^1 + \boxed{3} \cdot 5^0 = 568}$$

v desítkové soustavě.

Totéž obecněji

- Mějme nějakou soustavu o základu Z (tzn. máme celkem Z symbolů na řád).
- Libovolné číslo $(a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_0)_Z$ má pak hodnotu

$$a_n \cdot Z^n + a_{n-1} \cdot Z^{n-1} + \dots + a_1 \cdot Z^1 + a_0 \cdot Z^0$$
,

kde koeficienty a_i jsou menší než základ Z.

Významné soustavy

Desítková

Významné soustavy

- Desítková
- Dvojková (binární)
 - Pouze číslice 0 a 1.

Významné soustavy

- Desítková
- Dvojková (binární)
 - Pouze číslice 0 a 1.
- Šestnáctková (hexadecimální)
 - 16 symbolů na řád.

• Též binární soustava.

- Též **binární** soustava.
- Pouze číslice 0 a $1 \Rightarrow$ řád soustavy je 2.

- Též **binární** soustava.
- Pouze číslice 0 a $1 \Rightarrow$ řád soustavy je 2.
- Např. číslo 110001₂ je v desítkové soustavě

$$\begin{array}{l}
\boxed{1} \cdot 2^5 + \boxed{1} \cdot 2^4 + \boxed{0} \cdot 2^3 + \boxed{0} \cdot 2^2 + \boxed{0} \cdot 2^1 + \boxed{1} \cdot 2^0 \\
= 32 + 16 + 0 + 0 + 0 + 1 \\
= 49.
\end{array}$$

- Též **binární** soustava.
- Pouze číslice 0 a $1 \Rightarrow$ řád soustavy je 2.
- Např. číslo 1100012 je v desítkové soustavě

$$\boxed{1} \cdot 2^5 + \boxed{1} \cdot 2^4 + \boxed{0} \cdot 2^3 + \boxed{0} \cdot 2^2 + \boxed{0} \cdot 2^1 + \boxed{1} \cdot 2^0
= 32 + 16 + 0 + 0 + 0 + 1
= 49.$$

 Využívána v počítačích (elektrické obvody) ⇒ dva jednoduše rozlišitelné stavy (zapnuto/vypnuto).

- Též hexadecimální soustava.
- 16 symbolů na řád.
 - Číslice $0, 1, \ldots, 9$ a
 - písmena $A, B, \ldots, F \leftarrow$ chápeme jako hodnoty $10, 11, \ldots, 15$.

- Též hexadecimální soustava.
- 16 symbolů na řád.
 - Číslice $0, 1, \ldots, 9$ a
 - písmena $A, B, \ldots, F \leftarrow$ chápeme jako hodnoty $10, 11, \ldots, 15$.

$$\begin{aligned} \mathsf{FA8B}_{16} &= \overbrace{15}^{\mathsf{F}} \cdot 16^3 + \overbrace{10}^{\mathsf{A}} \cdot 16^2 + \boxed{8} \cdot 16^1 + \overbrace{11}^{\mathsf{B}} \cdot 16^0 \\ &= 61440 + 2560 + 128 + 11 \\ &= 64139. \end{aligned}$$

<u>Šestn</u>áctková soustava

Proč zrovna základ 16?

 Dvojková soustava není vždy vhodná pro zápis větších čísel.

- Dvojková soustava není vždy vhodná pro zápis větších čísel.
- Např. číslo 3834 je binárně 111011111010₂.
 - ⇒ potřebujeme 12 symbolů pro zápis!

<u>Šestn</u>áctková soustava

- Dvojková soustava není vždy vhodná pro zápis větších čísel.
- Např. číslo 3834 je binárně 111011111010₂.
 ⇒ potřebujeme 12 symbolů pro zápis!
- V hexadecimálním zápisu 3834 = EFA₁₆ nám stačí 3 symboly.

- Dvojková soustava není vždy vhodná pro zápis větších čísel.
- Např. číslo 3834 je binárně 111011111010₂.
 ⇒ potřebujeme 12 symbolů pro zápis!
- V hexadecimálním zápisu 3834 = EFA₁₆ nám stačí 3 symboly.
- Lze elegantně využít faktu, že $16 = 2^4$.

Rozepišme si číslo 3834:

Rozepišme si číslo 3834:

$$3834 = 111011111010_{2}$$

$$= \boxed{1} \cdot 2^{11} + \boxed{1} \cdot 2^{10} + \boxed{1} \cdot 2^{9} + \boxed{0} \cdot 2^{8} +$$

$$+ \boxed{1} \cdot 2^{7} + \boxed{1} \cdot 2^{6} + \boxed{1} \cdot 2^{5} + \boxed{1} \cdot 2^{4} +$$

$$+ \boxed{1} \cdot 2^{3} + \boxed{0} \cdot 2^{2} + \boxed{1} \cdot 2^{1} + \boxed{0} \cdot 2^{0}.$$

Rozepišme si číslo 3834:

$$3834 = 111011111010_{2}$$

$$= \boxed{1 \cdot 2^{11} + \boxed{1 \cdot 2^{10} + \boxed{1 \cdot 2^{9} + \boxed{0 \cdot 2^{8} + 1}} \cdot 2^{7} + \boxed{1 \cdot 2^{6} + \boxed{1 \cdot 2^{5} + \boxed{1 \cdot 2^{4} + 1}} \cdot 2^{3} + \boxed{0 \cdot 2^{2} + \boxed{1 \cdot 2^{1} + \boxed{0 \cdot 2^{0}}}.$$

Z každé čtveřice sousedních členů vytkneme nejnižší mocninu dvojky:

Rozepišme si číslo 3834:

$$3834 = 111011111010_{2}$$

$$= \boxed{1} \cdot 2^{11} + \boxed{1} \cdot 2^{10} + \boxed{1} \cdot 2^{9} + \boxed{0} \cdot 2^{8} +$$

$$+ \boxed{1} \cdot 2^{7} + \boxed{1} \cdot 2^{6} + \boxed{1} \cdot 2^{5} + \boxed{1} \cdot 2^{4} +$$

$$+ \boxed{1} \cdot 2^{3} + \boxed{0} \cdot 2^{2} + \boxed{1} \cdot 2^{1} + \boxed{0} \cdot 2^{0}.$$

Z každé čtveřice sousedních členů vytkneme nejnižší mocninu dvojky:

$$3834 = 2^8 \cdot (1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0) +$$

$$+ 2^4 \cdot (1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0) +$$

$$+ 2^0 \cdot (1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0).$$

10 / 14

Každý z koeficientů před závorkami lze nahradit mocninou čísla $16 = 2^4$:

$$3834 = 2^{8} \cdot (1 \cdot 2^{3} + 1 \cdot 2^{2} + 1 \cdot 2^{1} + 0 \cdot 2^{0}) +$$

$$+ 2^{4} \cdot (1 \cdot 2^{3} + 1 \cdot 2^{2} + 1 \cdot 2^{1} + 1 \cdot 2^{0}) +$$

$$+ 2^{0} \cdot (1 \cdot 2^{3} + 0 \cdot 2^{2} + 1 \cdot 2^{1} + 0 \cdot 2^{0}).$$

Každý z koeficientů před závorkami lze nahradit mocninou čísla $16 = 2^4$:

$$3834 = (2^{4})^{2} \cdot (1 \cdot 2^{3} + 1 \cdot 2^{2} + 1 \cdot 2^{1} + 0 \cdot 2^{0}) +$$

$$+ (2^{4})^{1} \cdot (1 \cdot 2^{3} + 1 \cdot 2^{2} + 1 \cdot 2^{1} + 1 \cdot 2^{0}) +$$

$$+ (2^{4})^{0} \cdot (1 \cdot 2^{3} + 0 \cdot 2^{2} + 1 \cdot 2^{1} + 0 \cdot 2^{0}).$$

Každý z koeficientů před závorkami lze nahradit mocninou čísla $16 = 2^4$:

$$3834 = 16^{2} \cdot (1 \cdot 2^{3} + 1 \cdot 2^{2} + 1 \cdot 2^{1} + 0 \cdot 2^{0}) + 16^{1} \cdot (1 \cdot 2^{3} + 1 \cdot 2^{2} + 1 \cdot 2^{1} + 1 \cdot 2^{0}) + 16^{0} \cdot (1 \cdot 2^{3} + 0 \cdot 2^{2} + 1 \cdot 2^{1} + 0 \cdot 2^{0}).$$

Výrazy v závorkách jsou rovny 13, 15 a 10 a odpovídají jednotlivým čtveřicím číslic původního čísla.

$$3834 = 16^{2} \cdot (1 \cdot 2^{3} + 1 \cdot 2^{2} + 1 \cdot 2^{1} + 0 \cdot 2^{0}) + \\ + 16^{1} \cdot (1 \cdot 2^{3} + 1 \cdot 2^{2} + 1 \cdot 2^{1} + 1 \cdot 2^{0}) + \\ + 16^{0} \cdot (1 \cdot 2^{3} + 0 \cdot 2^{2} + 1 \cdot 2^{1} + 0 \cdot 2^{0}).$$

Výrazy v závorkách jsou rovny 13, 15 a 10 a odpovídají jednotlivým čtveřicím číslic původního čísla.

Výrazy v závorkách jsou rovny $13,\,15$ a 10 a odpovídají jednotlivým čtveřicím číslic původního čísla.

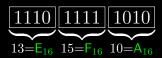
$$3834 = 16^{2} \cdot (1 \cdot 2^{3} + 1 \cdot 2^{2} + 1 \cdot 2^{1} + 0 \cdot 2^{0}) +$$

$$\Rightarrow 1111_{2}$$

$$+ 16^{1} \cdot (1 \cdot 2^{3} + 1 \cdot 2^{2} + 1 \cdot 2^{1} + 1 \cdot 2^{0}) +$$

$$\Rightarrow 1010_{2}$$

$$+ 16^{0} \cdot (1 \cdot 2^{3} + 0 \cdot 2^{2} + 1 \cdot 2^{1} + 0 \cdot 2^{0}).$$



David Weber

Výrazy v závorkách jsou rovny 13, 15 a 10 a odpovídají jednotlivým čtveřicím číslic původního čísla.

$$3834 = 16^{2} \cdot (1 \cdot 2^{3} + 1 \cdot 2^{2} + 1 \cdot 2^{1} + 0 \cdot 2^{0}) + 21111_{2}$$

$$+ 16^{1} \cdot (1 \cdot 2^{3} + 1 \cdot 2^{2} + 1 \cdot 2^{1} + 1 \cdot 2^{0}) + 21010_{2}$$

$$+ 16^{0} \cdot (1 \cdot 2^{3} + 0 \cdot 2^{2} + 1 \cdot 2^{1} + 0 \cdot 2^{0}).$$

$$\underbrace{1110}_{13=E_{16}}\underbrace{15=F_{16}}_{15=F_{16}}\underbrace{10=A_{16}}_{10=A_{16}} \Rightarrow EFA_{16}$$

10 / 14

 Číslo z binární do šestnáctkové soustavy lze převést tak, že převedeme jednotlivé čtveřice číslic jeho binárního zápisu (od nejnižšího řádu).

- Číslo z binární do šestnáctkové soustavy lze převést tak, že převedeme jednotlivé čtveřice číslic jeho binárního zápisu (od nejnižšího řádu).
- Např. převedeme číslo 10001111012 do šestnáctkové soustavy:

- Číslo z binární do šestnáctkové soustavy lze převést tak, že převedeme jednotlivé čtveřice číslic jeho binárního zápisu (od nejnižšího řádu).
- Např. převedeme číslo 10001111012 do šestnáctkové soustavy:

1000111101

- Číslo z binární do šestnáctkové soustavy lze převést tak, že převedeme jednotlivé čtveřice číslic jeho binárního zápisu (od nejnižšího řádu).
- Např. převedeme číslo 10001111012 do šestnáctkové soustavy:

10 | 0011 | 1101

- Číslo z binární do šestnáctkové soustavy lze převést tak, že převedeme jednotlivé čtveřice číslic jeho binárního zápisu (od nejnižšího řádu).
- Např. převedeme číslo 10001111012 do šestnáctkové soustavy:

Doplním na čtveřici $00 10 \mid 0011 \mid 1101$

- Číslo z binární do šestnáctkové soustavy lze převést tak, že převedeme jednotlivé čtveřice číslic jeho binárního zápisu (od nejnižšího řádu).
- Např. převedeme číslo 10001111012 do šestnáctkové soustavy:

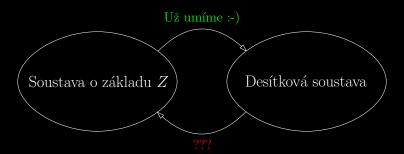
0010 | 0011 | 1101

- Číslo z binární do šestnáctkové soustavy lze převést tak, že převedeme jednotlivé čtveřice číslic jeho binárního zápisu (od nejnižšího řádu).
- Např. převedeme číslo 10001111012 do šestnáctkové soustavy:



- Číslo z binární do šestnáctkové soustavy lze převést tak, že převedeme jednotlivé čtveřice číslic jeho binárního zápisu (od nejnižšího řádu).
- Např. převedeme číslo 10001111012 do šestnáctkové soustavy:





Máme nějaké číslo x v desítkové soustavě

- Máme nějaké číslo x v desítkové soustavě
 - \Rightarrow chceme vyjádření v soustavě o základu Z.

- Máme nějaké číslo x v desítkové soustavě
 chceme vyjádření v soustavě o základu Z.
- Hledáme koeficienty a_0, a_1, \ldots, a_n , tak, aby platilo

$$x = a_n \cdot Z^n + a_{n-1} \cdot Z^{n-1} + \dots + a_1 \cdot Z^1 + a_0 \cdot Z^0$$

= $a_n \cdot Z^n + a_{n-1} \cdot Z^{n-1} + \dots + a_1 \cdot Z^1 + a_0$

• Hledáme koeficienty a_0, a_1, \ldots, a_n , tak, aby platilo

$$x = a_n \cdot Z^n + a_{n-1} \cdot Z^{n-1} + \dots + a_1 \cdot Z^1 + a_0 \cdot Z^0$$

= $a_n \cdot Z^n + a_{n-1} \cdot Z^{n-1} + \dots + a_1 \cdot Z^1 + a_0$

Až na poslední člen s a_0 můžeme všude vytknout základ Z:

• Hledáme koeficienty a_0, a_1, \ldots, a_n , tak, aby platilo

$$x = a_n \cdot Z^n + a_{n-1} \cdot Z^{n-1} + \dots + a_1 \cdot Z^1 + a_0 \cdot Z^0$$

= $a_n \cdot Z^n + a_{n-1} \cdot Z^{n-1} + \dots + a_1 \cdot Z^1 + a_0$

Až na poslední člen s a_0 můžeme všude vytknout základ Z:

$$(a_n \cdot Z^{n-1} + a_{n-1} \cdot Z^{n-2} + \dots + a_1) \cdot Z + a_0.$$

$$(a_n \cdot Z^{n-1} + a_{n-1} \cdot Z^{n-2} + \dots + a_1) \cdot Z + a_0.$$

$$(a_n \cdot Z^{n-1} + a_{n-1} \cdot Z^{n-2} + \dots + a_1) \cdot Z + a_0.$$

Vydělíme-li daný výraz základem Z, pak zbytek po celočíselném dělení bude právě koeficient a_0 (u prvního součinu se Z zkrátí), protože $a_0 < Z$.

$$(a_n \cdot Z^{n-1} + a_{n-1} \cdot Z^{n-2} + \dots + a_1) \cdot Z + a_0.$$

Vydělíme-li daný výraz základem Z, pak zbytek po celočíselném dělení bude právě koeficient a_0 (u prvního součinu se Z zkrátí), protože $a_0 < Z$.

 \Rightarrow Tím získáme první koeficient a_0 čísla x v nové soustavě!

$$(a_n \cdot Z^{n-1} + a_{n-1} \cdot Z^{n-2} + \dots + a_1) \cdot Z + a_0.$$

Vydělíme-li daný výraz základem Z, pak zbytek po celočíselném dělení bude právě koeficient a_0 (u prvního součinu se Z zkrátí), protože $a_0 < Z$.

 \Rightarrow Tím získáme první koeficient a_0 čísla x v nové soustavě!

Postup nyní můžeme opakovat pro zbytek výrazu v závorce, tj.

$$a_n \cdot Z^{n-1} + a_{n-1} \cdot Z^{n-2} + \dots + a_2 \cdot Z + a_1$$

12 / 14

$$a_n \cdot Z^{n-1} + a_{n-1} \cdot Z^{n-2} + \dots + a_2 \cdot Z + a_1$$

Opět vytkneme ze všech členů (až na poslední a_1) základ Z a zjistíme zbytek po celočíselném dělení základem Z.

$$a_n \cdot Z^{n-1} + a_{n-1} \cdot Z^{n-2} + \dots + a_2 \cdot Z + a_1$$

Opět vytkneme ze všech členů (až na poslední a_1) základ Z a zjistíme zbytek po celočíselném dělení základem Z.

$$(a_n \cdot Z^{n-2} + a_{n-1} \cdot Z^{n-3} + \dots + a_2) \cdot Z + a_1$$

 \Rightarrow získáváme a_1 .

12 / 14

$$a_n \cdot Z^{n-1} + a_{n-1} \cdot Z^{n-2} + \dots + a_2 \cdot Z + a_1$$

Opět vytkneme ze všech členů (až na poslední a_1) základ Z a zjistíme zbytek po celočíselném dělení základem Z.

$$(a_n \cdot Z^{n-2} + a_{n-1} \cdot Z^{n-3} + \dots + a_2) \cdot Z + a_1$$

 \Rightarrow získáváme a_1 .

Tím způsobem postupně odseparujeme všechny koeficienty a_0, \ldots, a_n , dokud ne<u>bude výsledek dělení</u> nulový.

• Převod čísla 571 do trojkové soustavy.

- Převod čísla 571 do trojkové soustavy.
- Postupně dělíme číslo a uchováváme si výsledek se zbytkem.

- Převod čísla 571 do trojkové soustavy.
- Postupně dělíme číslo a uchováváme si výsledek se zbytkem.

$$571: 3 = 190 \rightarrow \mathsf{zbytek} \ \boxed{1} = a_0$$

- Převod čísla 571 do trojkové soustavy.
- Postupně dělíme číslo a uchováváme si výsledek se zbytkem.

$$571: 3 = 190 \rightarrow \mathsf{zbytek} \boxed{1} = a_0$$

 $190: 3 = 63 \rightarrow \mathsf{zbytek} \boxed{1} = a_1$

- Převod čísla 571 do trojkové soustavy.
- Postupně dělíme číslo a uchováváme si výsledek se zbytkem.

$$571: 3 = 190 \rightarrow \mathsf{zbytek} \boxed{1} = a_0$$
 $190: 3 = 63 \rightarrow \mathsf{zbytek} \boxed{1} = a_1$
 $63: 3 = 21 \rightarrow \mathsf{zbytek} \boxed{0} = a_2$

- Převod čísla 571 do trojkové soustavy.
- Postupně dělíme číslo a uchováváme si výsledek se zbytkem.

$$571: 3 = 190 \rightarrow \mathsf{zbytek} \boxed{1} = a_0$$
 $190: 3 = 63 \rightarrow \mathsf{zbytek} \boxed{1} = a_1$
 $63: 3 = 21 \rightarrow \mathsf{zbytek} \boxed{0} = a_2$
 $21: 3 = 7 \rightarrow \mathsf{zbytek} \boxed{0} = a_3$

- Převod čísla 571 do trojkové soustavy.
- Postupně dělíme číslo a uchováváme si výsledek se zbytkem.

$$571: 3 = 190 \rightarrow \mathsf{zbytek} \ \boxed{1} = a_0$$
 $190: 3 = 63 \rightarrow \mathsf{zbytek} \ \boxed{1} = a_1$
 $63: 3 = 21 \rightarrow \mathsf{zbytek} \ \boxed{0} = a_2$
 $21: 3 = 7 \rightarrow \mathsf{zbytek} \ \boxed{0} = a_3$
 $7: 3 = 2 \rightarrow \mathsf{zbytek} \ \boxed{1} = a_4$

13 / 14

- Převod čísla 571 do trojkové soustavy.
- Postupně dělíme číslo a uchováváme si výsledek se zbytkem.

$$571: 3 = 190 \rightarrow \mathsf{zbytek} \ \boxed{1} = a_0$$
 $190: 3 = 63 \rightarrow \mathsf{zbytek} \ \boxed{1} = a_1$
 $63: 3 = 21 \rightarrow \mathsf{zbytek} \ \boxed{0} = a_2$
 $21: 3 = 7 \rightarrow \mathsf{zbytek} \ \boxed{0} = a_3$
 $7: 3 = 2 \rightarrow \mathsf{zbytek} \ \boxed{1} = a_4$
 $2: 3 = 0 \rightarrow \mathsf{zbytek} \ \boxed{2} = a_5$

13 / 14

$$571: 3 = 190 \rightarrow \mathsf{zbytek} \ \boxed{1} = a_0$$
 $190: 3 = 63 \rightarrow \mathsf{zbytek} \ \boxed{1} = a_1$
 $63: 3 = 21 \rightarrow \mathsf{zbytek} \ \boxed{0} = a_2$
 $21: 3 = 7 \rightarrow \mathsf{zbytek} \ \boxed{0} = a_3$
 $7: 3 = 2 \rightarrow \mathsf{zbytek} \ \boxed{1} = a_4$
 $2: 3 = 0 \rightarrow \mathsf{zbytek} \ \boxed{2} = a_5$

 $\Rightarrow 571 = 210011_3$.

Otázky?

