Multilat

Markus Hefele

1 Einführung

Multilat dient der näherungsweisen Berechnung einer Position aus Abständen zu bekannten Referenzpunkten, auch wenn diese fehlerbehaftet sind. Eine Anwendung ist die Positionsberechnung des Indoor Positioning Systems, das mithilfe von Laufzeitmessung von Ultraschallpulsen die Entfernungen eines Senders zu mehreren Basisstationen ermittelt.

2 Die Mathematik dahinter

2.1 Vorüberlegungen

Den Abstand zweier Punkte im $\mathbb{R}^3$ zu beschreibt folgende Formel:

$$r_i = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2} \tag{1}$$

Dabei ist $(x, y, z)^T = \vec{p}$ die gesuchte Position, $(x_i, y_i, z_i)^T = \vec{p_i}$ die Position der i-ten Basisstation und r_i der Abstand zu dieser. Diese Formel kann nun quadriert und umgestellt werden:

$$0 = (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2 - r_i^2 \tag{2}$$

Sollte das Ergebnis von 0 abweichen, entspricht die Position nicht dem exakten Wert. Auf diese Weise kann ein Fehler ermittelt werden, wie gut der Positionsvektor zu der Vorgabe aus Bodenstationsposition und Abstand passt. Um ein Maß für die Güte der Position für alle n Bodenstationen zu erhalten, werden alle Fehlerquadrate summiert:

$$R(\vec{p}) = \sum_{i=1}^{n} \left((x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2 - r_i^2 \right)^2 \tag{3}$$

Nun kann mit einem numerischen Verfahren dieses Residuum minimiert werden.

2.2 Optimierung

Zur Minimierung wird das Gradientenabstiegsverfahren mit Armijo-Schrittweitensteuerung eingesetzt.

Die Iteration besteht aus drei Schritten:
Zuerst wird der Gradient von (3) berechnet.

$$\nabla R(\vec{p}) = 4 \sum_{i=1}^{n} \left(\|\vec{p} - \vec{p}_i\|^2 - r_i^2 \right) (\vec{p} - \vec{p}_i) \tag{4}$$

Dazu wird eine Schrittweite $h_{(k)}$ nach Armijo bestimmt.
Sei $\gamma \in (0, 1)$, dann bestimme das größte $h \in \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, ...\right\}$ mit:

$$R\left(\vec{p}_{(k)} - h_{(k)} \nabla R\left(\vec{p}_{(k)}\right)\right) \leq R\left(\vec{p}_{(k)}\right) - h_{(k)} \gamma \nabla R\left(\vec{p}_{(k)}\right)^T \nabla R\left(\vec{p}_{(k)}\right) \tag{5}$$

Dann kann ausgehend von einer Startposition $(x_{(0)}, y_{(0)}, z_{(0)})^T$ eine neue Position berechnet werden.

$$\vec{p}_{(k+1)} = \vec{p}_{(k)} - h_{(k)} \nabla R(\vec{p}_{(k)}) \tag{6}$$

Der Schleifenabbruch erfolgt, wenn der Positionsvektor $\vec{p}$ im Rahmen der Genauigkeit stationär ist:

$$\|\vec{p}_{(k+1)} - \vec{p}_{(k)}\| < TOL \tag{7}$$