Projet Mathématiques

L'interpolation par spline

Olivia BRIODEAU
Caroline GOUMENT
Andrei-Silviu MILEA
Bozhidar PALASHEV
Damien TOOMEY

INSA de Rouen

30 août 2018

Sommaire

Introduction

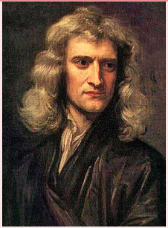
Les domaines où on emploie le mot 'interpolation'

- Musique
- Graphique
- Informatique
- Mathématiques
- Méthodologie
- Industrie de film et d'animation

Retour Sommaire

Interpolation

Grands Points



- Babyloniennes, Indiens, Chinois
- Newton 1711
- Gregory-Newton, Newton-Gauss, Stirling-Newton
- Lagrange 18^{eme} siècle
- 19^{eme} siècle Gauss, Bessel et Cauchy
- fin 19^{eme} siècle innovations de Tchebychef et Hermite

Splines

Grands points

- conception et fabrication des bateaux
- travail avec des dispositifs « ducks »
- 1940 Shanon et Schoenberg, les principales fondateurs
- 19^{eme} siècle apparition des ordinateurs : construction -> tracer des courbes
- industrie aéronautique Boeing, British Aircraft Corporation
- industrie automobile Renault, Citroën, General Motors

Contexte

Context

Unisurf

Retour Sommaire

Partie Mathématiques

$$\begin{pmatrix} A' \\ B' \\ C' \\ D' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{2}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix}$$

$$B_{i,n}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$$

Forme générale de la coube de Bézier cubique

$$B(t) = P_0(1-t)^3 + 3P_1 t(1-t)^2 + 3P_2 t^2(1-t) + P_3 t^3, \qquad t \in [0,1]$$

Exemple de calcul d'une fonction spline cubique

Considérons les 5 points (x_i, f_i) suivants :
(1 ;6),(2 ;3),(3 ;0),(4 ;2),(5 ;6).

<u>1ère étape : on remplace les coefficients dans la matrice A</u>

$h_i = x_{i+1} - x_i$
Ici, $h_i = 1$ pour $i = 0, ..., 3$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_0 & 2(h_1 + h_0) & h_1 & 0 & 0 \\ 0 & h_1 & 2(h_2 + h_1) & h_2 & 0 \\ 0 & 0 & h_2 & 2(h_3 + h_2) & h_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(1 ;6),(2 ;3),(3 ;0),(4 ;2),(5 ;6)

2ème étape : on simplifie notre système matriciel

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} f_0'' \\ f_1'' \\ f_2'' \\ f_3'' \\ f_4'' \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 6(f_2 - 2f_1 + f_0) \\ 6(f_3 - 2f_2 + f_1) \\ 6(f_4 - 2f_3 + f_2) \\ 0 \end{pmatrix}}_{G}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} f_1'' \\ f_2'' \\ f_3'' \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 30 \\ 12 \end{pmatrix}}_{G}$$

3ème étape : On résout notre système d'équations directement ou en utilisant l'algorithme de Thomas

Algorithme de Thomas :

La résolution du système AX=G est alors ramenée à la résolution successive des systèmes UX=Y et LY=G, pour ensuite avoir LUX=G, ce qui équivaut à AX=G.

On a les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1 & w_1 & 0 \\ e_2 & s_2 & w_2 \\ 0 & e_3 & s_3 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \beta_2 & 1 & 0 \\ 0 & \beta_3 & 1 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} \alpha_1 & c_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & c_2 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix}$$

Les relations sur les coefficients α_i et β_i trouvées dans le rapport sont :

$$\alpha_1 = s_1, \ \beta_i = \frac{e_i}{\alpha_{i-1}}, \ \alpha_i = s_i - \beta_i w_{i-1} \qquad i = 2, ..., n$$

Ainsi,

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{4}{15} & 1 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{15}{4} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{56}{15} \end{pmatrix}$$

On résout ensuite successivement les systèmes LY=G et UX=Y.

Pour **LY=G**, on pose : $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$

$$LY = G \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{4}{15} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 30 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$\iff Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 30 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Pour **UX=Y**, on a : $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 30 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$UX = Y \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{15}{4} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{56}{15} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 30 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} -\frac{27}{14} \\ \frac{54}{7} \\ \frac{15}{14} \end{pmatrix}$$

Ainsi,

$f_0'' = 0 \qquad f_1'' = -\frac{27}{14} \qquad f_2'' = \frac{54}{7} \qquad f_3'' = \frac{15}{14} \qquad f_4'' = 0$

4ème étape : on calcule les splines

$$s_i(x) = f_i'' \frac{(x_{i+1} - x)^3}{6h_i} + f_{i+1}'' \frac{(x - x_i)^3}{6h_i} + a_i(x_{i+1} - x) + b_i(x - x_i)$$

$i = 0, 1, ..., n-1 \;\; et \;\; h_i = x_{i+1} - x_i$

$$avec \;\; a_i = \frac{f_i}{h_i} - f_i'' \frac{h_i}{6} \;\; et \;\; b_i = \frac{f_{i+1}}{h_i} - f_{i+1}'' \frac{h_i}{6}$$

Ainsi, pour les 5 points, on obtient 4 splines :

$$s_0(x) = -\frac{27}{14}\frac{(x-1)^3}{6} + 6(2-x) + \frac{93}{28}(x-1)$$

$$s_1(x) = -\frac{27}{14}\frac{(3-x)^3}{6} + \frac{54}{7}\frac{(x-2)^3}{6} + \frac{93}{28}(3-x) - \frac{9}{7}(x-2)$$

$$s_2(x) = \frac{54}{7}\frac{(4-x)^3}{6} + \frac{15}{14}\frac{(x-3)^3}{6} - \frac{9}{7}(4-x) + \frac{51}{28}(x-3)$$

$$s_3(x) = \frac{15}{14}\frac{(5-x)^3}{6} + \frac{51}{28}(5-x) + 6(x-4)$$

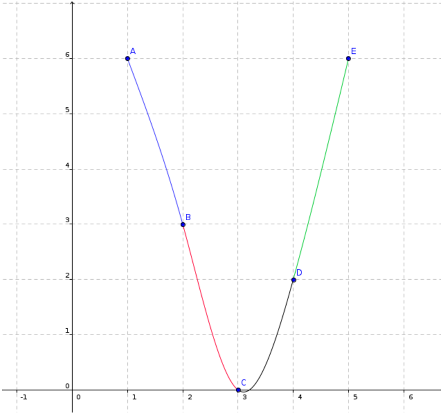


Figure – Exemple d'interpolation par spline cubique sur Geogebra

Les bases des B-splines

En cas général :

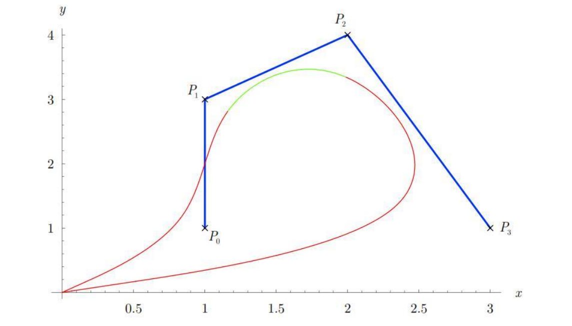
$$X_k(t) = \sum_i B_{i,k}(t).P_i$$

$$B_{i,k}(t) = \frac{t_{i+1+k} - t}{t_{i+1+k} - t_{i+1}} B_{i+1,k-1}(t) + \frac{t - t_i}{t_{i+k} - t_i} B_{i,k-1}(t)$$

Retour Sommaire

Courbe de degré 3 (k=3)

Exemple de courbe de B-spline de degré 3 avec points de contrôle $(1,1),(1,3),(2,4),(3,1)$ et vecteur nœud $(1,2,3,4,5,6,7)$



Courbes de Bézier

- AVANTAGES : Simplicité et description de formes complexes
- INCONVENIENTS : manque de contrôle local et phénom ‘ene de Runge

Splines cubiques

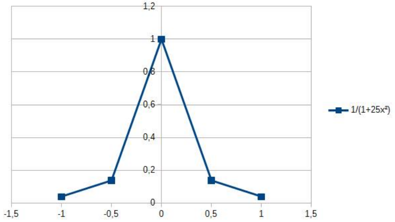
- AVANTAGES : Stabilité, simplicité et courbes harmonieuses
- INCONVENIENTS : spline oscillante si dérivées trop grandes

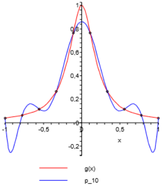
B-splines

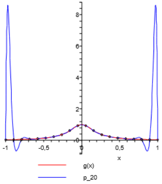
- AVANTAGES : contrôle local possible, degré du polynome indépendant du nombre de points de contrôle
- INCONVENIENTS : complexité

Fonction de Runge

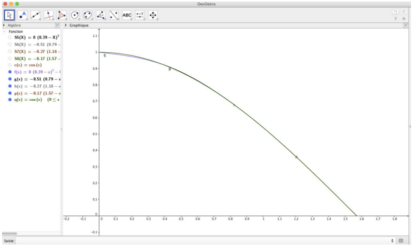
1901 : Carle David Tolme Runge et le phénomène de Runge

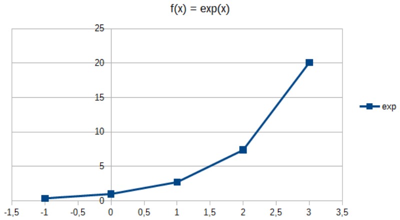






Fonctions Cosinus et Exponentielle

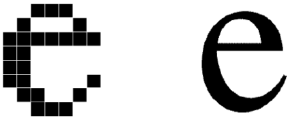




Retour Sommaire

Typographie

- Développement de l'informatique



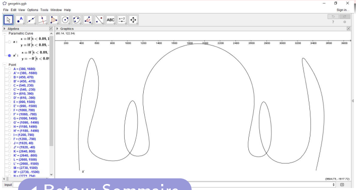
- Disparition de la pixellisation par l'utilisation des interpolations par splines
- Modélisation avec les logiciels de dessin tels que Geogebra et Paint

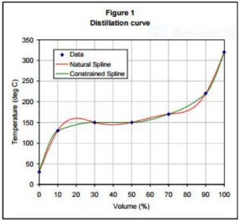
Retour Sommaire

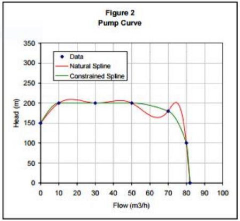
Les autres applications des interpolations par spline

Nombreux domaines d'application des interpolations :

- Aéronautique et automobile avec la F.A.O. (Fabrication Assistée par Ordinateur)
- Chimie, avec l'interpolation par fonctions splines restreintes
- Imagerie médicale
- Le Taj Mahal







Retour Sommaire

CONCLUSION