第三章栈与队列习题

我保证没有抄袭他人作业

3.1 请利用两个栈 S1 和 S2 来模拟一个队列。已知栈的三个运算定义如下：PUSH(ST,x): 元素 x 入 ST 栈；POP(ST,x)：ST 栈顶元素出栈，赋给变量 x；Sempty(ST)：判 ST 栈是否为空。那么如何利用栈的运算来实现该队列的三个运算：enqueue:插入一个元素入队列； dequeue:删除一个元素出队列；queue_empty：判队列为空。（请写明算法的思想及必要的注释）。

解:用 S1 模拟进队列的操作,用 S2 模拟出队列.入列时,直接进入 S1,需要出列时,先检查两个栈中是否有元素,如果 S2 为空,则将 S1 中所有元素弹出再压入 S2,非空就直接从 S2 中弹栈,这样就保证了元素的先进先出(也可以每次出列时将 S1 中元素全倒入 S2,从 S2 弹出一个再全倒回 S1,但这样会有很多重复的操作.)

```
bool enqueue(T x){
    PUSH(S1, x);//x 入 S1 栈
    return true;//入列成功
}


bool dequeue(T x){
    if(Sempty(S1) && Sempty(S2)) return false;//没有元素,出列失败
    //S2 为空,将 S1 中所有元素放入 S2 以备之后出列
    if(Sempty(S2)){
        while(!Sempty(S1)){
            T tmp;
            POP(S1, tmp);
            PUSH(S2, tmp);
        }
    }
    POP(S2, x);
    return true;//出列成功
}
//队列为空当且仅当 S1,S2 同时为空
bool queue_empty(){
    return Sempty(S1) && Sempty(S2);
}
```

3.2

(1) 编号为 1,2,...,n 的 n 辆火车顺序开进栈式结构的站台。禁止将车厢从缓冲铁轨移动至入轨，也禁止从出轨移动车厢至缓冲铁轨。请问开出车站的顺序有多少种可能？请写出你的推导过程。

(2) 证明：从初始输入序列 1，2，...，n，可以利用一个栈得到输出序列 p1，p2，...，pn（p1，p2，...，pn 是 1， 2，...，n 的一种排列）的充分必要条件是，不存在下标 i，j，k，满足 i<j<k 同时 Pj<Pk<Pi。

解:

记入栈为 1,出栈为 0,则所有开出车站的顺序一一对应一个长度为 2n,且任何前缀中 1 的个数不小于 0 的个数的 01 串.现考虑不符合条件的串的个数,即存在一个 k,使得在前 2k + 1 个字符中有 k 个 1,k + 1 个 0.若将前 2k + 1 个字符翻转,即变成 k 个 0,k + 1 个 1,则不符合条件的串对应着一个共有 n + 1 个 1,n - 1 个 0 的串.又,对任何有 n + 1 个 1,n - 1 个 0 的串,必可以找到一个位置使得前面有 k + 1 个 1,k 个 0(因为此串中 1 比 0 多,所以必有一个位置之前的 1 比 0 多),再按上面方法翻转回去又得到一个不符合条件的串,即这两种串可以形成一一对应,数量应相同,所以,不符合条件的串共有 C(2n, n - 1)个(表示从 2n 个不相同的数中取出 n - 1 个数(不计顺序)的方案数),又所有长为 2n 的 01 串共有 C(2n, n)个,所以符合条件的串的个数为 C(2n, n) - C(2n, n - 1).

证明:

必要性:对所有的下标 i < j < k,只需考虑 Pi, Pj, Pk 三个数的出栈顺序,因为三个数由小到大依次入栈且最大的 Pi 最先出栈,所以最大的 Pi 出栈时,Pi,Pj 都在栈中(因为这两个数不可能没有入栈,也不可能已经出栈),所以此时较大的 Pk 应在靠近栈顶的位置(因为相较于 Pj,Pk 更晚进栈),所以出栈时,也应是 Pk 先出栈,不可能 Pj 先出栈,所以不存在下标 i，j，k，满足 i<j<k 同时 Pj<Pk<Pi.

充分性:只需对任意的三个数,验证是否满足后进先出的特性.对任意的 Pi,Pj,Pk,三个数的入栈顺序是 Pj -> Pk -> Pi(从小到大),则满足”不存在下标 i，j，k，满足 i<j<k 同时 Pj<Pk<Pi”的输出序列可能为:ikj,kij,kji,jki,jik 五种,都是满足后进先出的序列,即可以用栈来实现,所以充分性得证.

综上,原命题是正确的.