第二次测试补交

黄道吉-1600017857

第二题

$\varphi(8! \times 5148) = \varphi(8! \times 2^2 \times 3^2 \times 11 \times 13)$
$= 8! \times 5148 \times (1 - \frac{1}{2}) \times (1 - \frac{1}{3}) \times (1 - \frac{1}{5}) \times (1 - \frac{1}{7}) \times (1 - \frac{1}{11}) \times (1 - \frac{1}{13}) = 39813120.$

第八题

对k进行归纳, 当$k = 0$时,$0!(p-1)! \equiv (-1)^{0+1} \pmod p$(Welson).

若当$k = m$时, 命题成立, 则当$k = m + 1$时,有

$(m+1)!(p-1-m-1)! \times (p-m) \equiv m!(p-1-m)! \times m \pmod p$

$(m+1)!(p-1-m-1)! \times (-m) \equiv m!(p-1-m)! \times m \pmod p$

则必有

$(m+1)!(p-1-m-1)! \equiv -m!(p-1-m)! \pmod p$

(因为p是素数, $xm = b \pmod p$关于x有唯一解)

由归纳假设, $k!(p-1-k)! \equiv (-1)^{k+1} \pmod p$

第九题

不妨设存在$n|2^n - 1$, 则显然n为奇数

令p为n的最小质因数, 则有$p|2^n - 1$, $p|2^{p-1} - 1$,

有$p|\gcd(2^n - 1, 2^{p-1} - 1)$

下证$\gcd(2^n - 1, 2^m - 1) = 2^{\gcd(n,m)} - 1$,

设$p = \gcd(n, m)$, 则存在x, y, $p = xm + yn$

$d = \gcd(2^n - 1, 2^{p-1} - 1)$, 则有$2^m \equiv 1 \pmod d$和$2^n \equiv 1 \pmod d$, 所以

$2^p = 2^{xm+yn} = (2^m)^x \times (2^n)^y \equiv 1 \pmod d$

得到$d|2^p - 1$

又 $p|n$, 则有$2^p - 1|2^m - 1$, 得到$2^p - 1|d$,

所以$2^p - 1 = d$, 即$\gcd(2^n - 1, 2^m - 1) = 2^{\gcd(n,m)} - 1$

回到原题, 得到$p|2^{\gcd(n,p-1)} - 1 = 2^1 - 1 = 1$, 矛盾!

所以不存在n, 使得$n|2^n - 1$

第十题

由$x^7 \equiv x^1 \pmod 7$(Fermat), 所以先求10^i模6的余数

$10 \equiv 4 \pmod 6$

$10^2 \equiv 4 \times 10 \equiv 4 \pmod 6$,

归纳得到$10^i \equiv 4 \pmod 6$

则原式化为$10 \times 10^4 \pmod 7 (7 \nmid 10^i)$

计算$10 \times 10^4 \pmod 7 \equiv 3 \times 3^4 \pmod 7 = 243 \pmod 7 = 5$

题号按照教学网上题号, 可能和试卷上的题号有差别