论哈密尔顿图的判定问题

陈显强[1], 吴集林[2]

(1、广东广播电视大学, 广东广州, 510091; 2、佛山广播电视大学, 广东佛山, 528000)

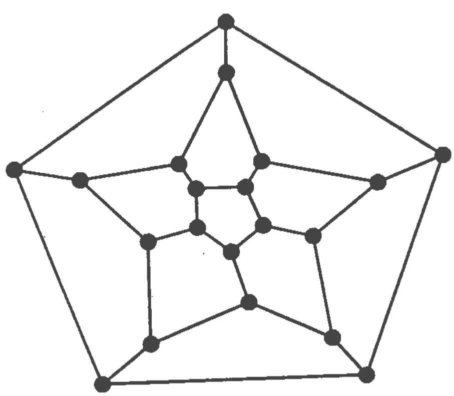
【摘要】本文探讨了哈密顿图的性质, 并根据这些性质给出了若干种判定非哈密顿图的方法。

【关键词】哈密顿图; 判定方法

【中图分类号】O157.5 【文献标识码】A 【文章编号】1008-9764(2005)01-0106-04

一、周游世界的游戏

1859年,英国数学家哈密尔顿爵士提出下列周游世界的游戏:在正十二面体的二十个顶点上依次标记伦敦、巴黎、莫斯科、华盛顿、北京、东京等世界着名大城市;正十二面体的棱(边)表示连接这些城市的路线。问:能否在图中做一次旅行,从顶点到顶点,沿着边行走,经过每个城市恰好一次之后再回到出发点?



哈密尔顿周游世界图

与哥尼斯堡七桥问题形成鲜明对照的是:没过多久,哈密尔顿先生就收到来自世界各地的表明已成功周游世界的答案。

然而,有没有一个一般的方法来判定一个图是或者不是哈密尔顿图呢?140多年过去了,这个问题即一个图是否为哈密尔顿图的判定问题至今尚未解决!

二、哈密顿图的概念和性质

1. 定义:设G是一个图,如果G中存在一条经过每个顶点恰好一次的初级回路(也即G中存在一个生成圈),那么称G是一个哈密顿图。G中经过每个顶点恰好一次的初级回路称为哈密顿回路。由定义很容易得到当 $n \geq 3$ 时,完全图 K_n 是哈密顿图。

定理1 当 $n \geq 3$ 时,完全图 K_n 是哈密顿图

证明:设完全图 K_n 的顶点为 $v_1, v_2 \cdots v_n$, e_i 为连接 v_i 与 v_{i+1} 的边,其中 $i=1,2\cdots n-1$, e_n 为连接 v_{n-1} 与 v_1 的边,则回路 $v_1 e_1 v_2 e_2 v_3 \cdots v_{n-1} e_n v_1$ 是哈密顿回路。

2. 哈密顿图的性质

(1) 哈密顿图一定是连通图。

因为哈密顿回路一定是初级回路,因此也一定是简单回路,这就保证了图中点与点之间的连通性。

【收稿日期】2005-02-27

【作者简介】陈显强(1962-), 男, 湖南娄底人, 博士, 广东广播电视大学副教授; 吴集林(1970-), 男, 湖南娄底人, 硕士, 佛山广东电视大学讲师。

(2) 哈密顿回路的长度等于顶点的个数。

(3) 如果G＝〈V, E〉是一个哈密顿图, L是G中一条哈密顿回路, 那么对G中任何一个顶点V而言, L上都有而且只有两条边与顶点u相关联。当deg(V)＝2时, 与顶点u相关联的两条边都必须在哈密顿回路上。当deg(V)＞2时, 与顶点u相关联的边当中只能有两条边在哈密顿回路上。

(4) 如果G＝〈V, E〉是一个哈密顿图, L是G中一条哈密顿回路, 那么对G中任何顶点的非空真子集 V_1 而言, 都有 $P(G-V_1)\leq|V_1|$。

(5) 哈密顿图一定无割点

注意: 利用性质3)、性质4)、性质5) 可用来判定一个图不是哈密顿图

3. 判定哈密顿图的一个充分条件:

设G是简单图, 顶点个数 $n\geq 3$, 如果G任何不相邻的两个顶点u和v都满足deg(u)＋deg(v)≥n, 那么G是哈密顿图。(Ore, 1960)

注意: 当一个图的顶点和边都较少时, 如果它是哈密顿图, 不难找出哈密顿回路, 因而判定它是一个哈密顿图; 如果它不是哈密顿图, 要说明理由倒是一个难题。

三、判断一个连通图不是哈密顿图的几种常用方法

我们首先设计了一个简单然而是非常典型非常重要的例子。

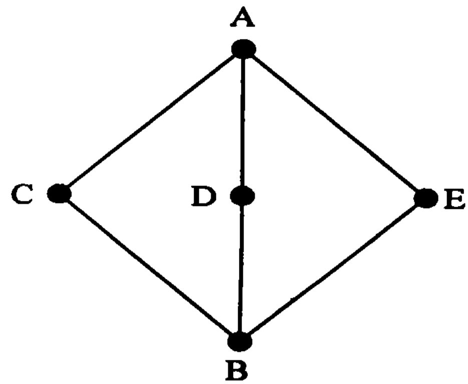
试判定下列由5个顶点6条边构成的图G不是哈密顿图。

方法1: 因为, 从图G中删除A、B两点之后, 剩余的子图为C、D、E三个孤立点, 由性质4), 故图G不是哈密顿图。

方法2: 因为, deg(C)＝deg(E)＝2, 且与C、E相关联的四条边构成一个圈, 但不是生成圈。由哈密顿回路的定义图G不是哈密顿图。

方法3: 假设图G是哈密顿图, 且L是哈密顿回路。那么, 因为deg(C)＝deg(D)＝deg(E)＝2, 所以, 边AC, AD, AE都在L上。这与AC, AD, AE中只能有两条边在L上相矛盾。由性质3) 图G不是哈密顿图。

方法4: 假设图G是哈密顿图, 且L是哈密顿回路。那么, $|L|=5$。因为deg(A)＝deg(B)＝3, 且A和B不相邻, 所以与A、B相关联的边中各有一条不在L上。图G中总共有6条边, 因而最多只有4条边在L上。与 $|L|=5$ 相矛盾。所以, 图G不是哈密顿图。



(一) 与点割集有关的方法

如果存在G的顶点的非空真子集 V_1 使得

$$P(G-V_1)>|V_1|,$$

那么G不是哈密顿图。

特别, 如果G中有割点, 则G不是哈密顿图。

如果G中有割边, 则G不是哈密顿图。

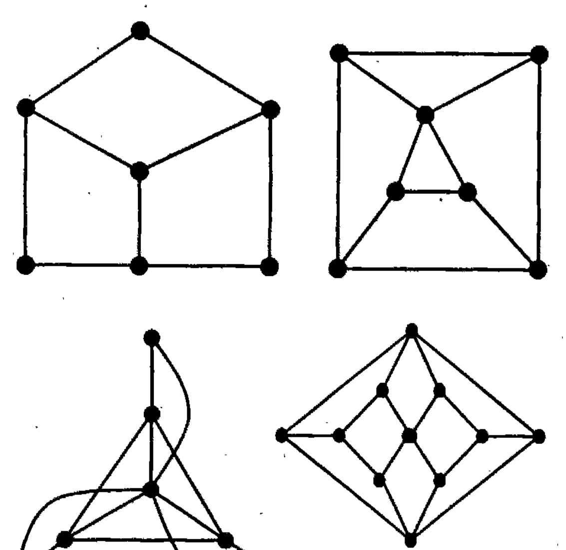
(二) 与度数为2的顶点有关的方法

如果图G中某些与度数为2的顶点相关联的边构成一个初级回路, 但该回路没有包含所有顶点, 则此回路不是哈密顿回路, 那么G不是哈密顿图。

(三) 与哈密顿回路的长度有关的方法

设G＝〈V, E〉, $|V|=n$, $|E|=m$。若G中有两两互不相邻的r个顶点 $v_1, v_2, \cdots, v_r$, 满足 $\deg(v_i)>2, 1\leq i\leq r$, 则至少有 $\sum_{i=1}^{r}[\deg(v_i)-2]$ 条边不能在哈密顿回路上, 能在哈密顿回路上的最多有 $m-\sum_{i=1}^{r}[\deg(v_i)-2]=m+2r-\sum_{i=1}^{r}\deg(v_i)$ 条边。当 $m-\sum_{i=1}^{r}[\deg(v_i)-2]=m+2r-\sum_{i=1}^{r}\deg(v_i)<n$ 时, G不是哈密顿图。

例2: 下面的4个图是否是哈密顿图。



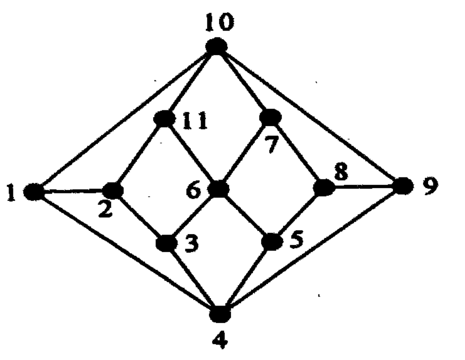
Herschel

解：1. 第一个图不是哈密顿图。用典型例题的方法 1 和方法 2 都可以证明。

2. 第二个图是哈密顿图。容易找到一条哈密顿回路。

3. 第三个图不是哈密顿图。用典型例题的方法 3 可以证明。

4. 第四个图不是哈密顿图。用典型例题的方法 1 和方法 4 分别证明如下。

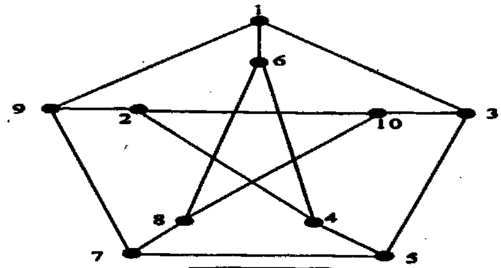


先将 Herschel 图按下列方法将顶点编号。则

方法 1：删除 5 个顶点 2, 4, 6, 8, 10 之后，余下 6 个孤立顶点 1, 3, 5, 7, 9, 11。所以 Herschel 图不是哈密顿图。

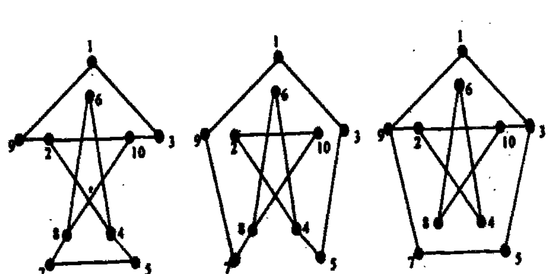
方法 4：假设 Herschel 图是哈密顿图，且 L 是哈密顿回路。那么，$|L|=11$。顶点 2, 4, 6, 8, 10 两两互不相邻，且 $\deg(2)=\deg(8)=3$, $\deg(4)=\deg(6)=\deg(10)=4$, 所以顶点 2, 8 各有一条边以及顶点 4, 6, 10 各有两条边不在 L 上，总共有 8 条边不在 L 上。Herschel 图中共有 18 条边，因而最多能有 10 条边在 L 上。与 L 的长为 11 相矛盾。所以 Herschel 图不是哈密顿图。

然而，上面的方法并不能判定所有的非哈密顿图。例如，下列著名的 Petersen 图不是哈密顿图。但用上面的方法不能给予证明。下面我们给出 Petersen 图不是哈密顿图的一个证明。



Petersen

首先，注意到{1, 3, 5, 7, 9, 1} 构成一个圈，称为外环。{2, 4, 6, 8, 10, 2} 构成一个圈，称为内环。连接外环和内环有 5 条边，称为桥。其次，容易看出，如果 Petersen 图中有哈密顿回路 L，那么 L 上必定恰好有 2 座桥或者恰好有 4 座桥。最后，证明有 4 座桥和有 2 座桥都是不可能的。因为如果 L 上有 4 座桥，不妨设桥(1, 6) 不在 L 上。这意味着下列的图(1) 中有哈密顿回路。



图(1)　　图(2)　　图(3)

如果 L 上有 2 座桥，则当两桥相邻时，不妨设桥(6, 4) 和(7, 8) 在 L 上，这意味着上面的图(2) 中有哈

（下转第 112 页）

$-1)(N-k)$……(1)

解法二：设从底开始一张张地翻牌，也翻到出现第二张 A 为止。翻过的纸牌数记为 η。由对称性，η 和 ξ 同分布。显然，$\xi+\eta=N+1$

$E\xi+E\eta=N+1$

故：$E\xi=E\eta=\frac{N+1}{2}$ ……(2)

综合(1)与(2)得：

$$\frac{6}{N(N-1)(N-2)}\sum_{k=2}^{N-1}k(k-1)(N-k)=\frac{N+1}{2}$$

即：$$\sum_{k=2}^{N-1}k(k-1)(N-k)=\frac{(N+1)N(N-1)(N-2)}{12}$$

【参考文献】

[1] B·B·格涅坚科．寿田高译．概率论教程[M]．北京：人民教育出版社．1960．

[2] 华东师大数理统计系编．概率论与数理统计[M]．北京：高等教育出版社．1981．

[3] 王梓坤．概率论基础及应用．高等教育出版社，1983．

Solving Mathematics Problems with Probability Theory Method

XU You-xue

(Zhanjiang Radio and TV University, Zhanjiang, Guangdong, 524003, China)

Abstract: Several identity and inequality in analytic mathematics have been proved with the probability theory method, some new results are found among them.

Key words: probability theory method; identity; inequality

（上接第 108 页）

密顿回路；当两桥不相邻时，不妨设桥(3, 10)和(9, 2)在 L 上，这意味着上面的图(3)中有哈密顿回路。

在图(1)中，deg(5) = deg(6) = deg(7) = 2，与顶点 5, 6, 7 相关联的 5 条边构成一个圈{5, 4, 6, 8, 7, 5}；

在图(2)中，deg(2) = deg(6) = deg(10) = 2，与顶点 2, 6, 10 相关联的 5 条边构成一个圈{2, 4, 6, 8, 10, 2}；

在图(3)中，deg(1) = deg(5) = deg(7) = 2，与顶点 1, 5, 7 相关联的 5 条边构成一个圈{1, 3, 5, 7, 9, 1}。

所以，图(1)、图(2)、图(3)都不是哈密顿图。

【参考文献】

[1] 任现淼，吴裕树．计算机数学基础(上册)—离散数学，北京：中央广播电视大学出版社，2000 年 5 月第二版．

[2] 徐洁磐．离散数学导论，北京：高等教育出版社，1982 年 5 月第 1 版．

[3] 耿素云，屈婉玲．离散数学基础，北京：北京大学出版社，1994 年 7 月第 1 版．

Judgement of Hamilton Graph

CHEN Xian-qiang[1], *WU Ji-lin*[2]

(1、Guangdong Radio and TV University, Guangzhou, Guangdong, 510091, China;
2、Foshan Radio and TV University, Guangdong, Foshan, 528000, Chiba)

Abstract: This paper mainly concerns the properties of Hamilton graph and some methods of judgment based on them.

Key words: Hamilton graph; methods of judgement