

## 1 Q1

$\mathcal{C}_1 = \phi$  是开集, 闭集, 有界集, 紧集, 它的内点集, 闭包, 边界和聚点集都是 $\phi$ .

$\mathcal{C}_2 = \mathcal{R}^n$  是开集, 闭集, 无界集, 不是紧集, 它的内点集, 闭包, 和聚点集都是 $\mathcal{R}^n$ , 它的边界点集是空集.

$\mathcal{C}_3 = [0, 1] \cup [2, 3] \cup [4, 5]$  不是开集, 不是闭集, 有界, 不紧, 它的内点集是  $(0, 1) \cup (2, 3) \cup (4, 5)$ , 它的闭包是  $[0, 1] \cup [2, 3] \cup [4, 5]$ , 它的边界是  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ , 它的聚点集是  $[0, 1] \cup [2, 3] \cup [4, 5]$ .

$\mathcal{C}_4 = \{(x, y)^T \mid x \geq 0, y > 0\}$  不开, 不闭, 无界, 不紧, 它的内点集是  $\{(x, y)^T \mid x > 0, y > 0\}$ , 它的闭包是  $\{(x, y)^T \mid x \geq 0, y \geq 0\}$ , 它的边界是  $\{(0, y)^T \mid y \geq 0\} \cup \{(x, 0)^T \mid x \geq 0\}$ , 它的聚点集是  $\{(x, y)^T \mid x \geq 0, y \geq 0\}$ .

$\mathcal{C}_5 = \{k \mid k \in \mathcal{Z}\}$  不是开集, 是闭集, 无界, 不紧, 它的内点集是  $\phi$ , 它的闭包和边界集都是它自身, 也就是  $\{k \mid k \in \mathcal{Z}\}$ , 它的聚点集是它自身(按讲义中定义, 孤立点算作聚点).

$\mathcal{C}_6 = \{k^{-1} \mid k \in \mathcal{Z}\}$  不开, 不闭, 有界, 不紧, 它的内点集是  $\phi$ , 它的闭包和边界集都是  $\{k^{-1} \mid k \in \mathcal{Z}\} \cup \{0\}$ , 它的聚点集也是  $\mathcal{C}_6 \cup \{0\}$ .

$\mathcal{C}_7 = \{(1/k, \sin k)^T \mid k \in \mathcal{Z}\}$  不开, 不闭, 有界, 但不紧, 它的内点集是  $\phi$ , 它的闭包和边界集都是  $\{(1/k, \sin k)^T \mid k \in \mathcal{Z}\} \cup \{(0, y) \mid -1 \leq y \leq 1\}$ , 它的聚点集也是  $\mathcal{C}_7 \cup \{(0, y) \mid -1 \leq y \leq 1\}$ .

## 2 Q2

1. 若  $\mathcal{C}$  是闭集, 如果存在  $x^*$  是  $\mathcal{C}$  中一个收敛序列的极限点, 但  $x^* \notin \mathcal{C}$ , 所以有  $x^* \in \mathcal{C}^c$ , 而  $\mathcal{C}^c$  是一个开集, 所以有

$$\exists \epsilon \text{ s.t. } (\cup(x^*, \epsilon)) \cap \mathcal{C} = \phi \quad (1)$$

因为  $\cup(x^*, \epsilon) \subseteq \mathcal{C}^c$ . 但存在  $\{x_k\}_1^\infty \subseteq \mathcal{C}$  并且  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x^*$ , 也就是说,

$$\forall \epsilon \quad (\cup(x^*, \epsilon)) \cap \mathcal{C} \neq \phi \quad (2)$$

矛盾! 所以对于所有  $x^*$  是  $\mathcal{C}$  中一个收敛序列的极限点, 都有  $x^* \in \mathcal{C}$ .

2. 如果  $\mathcal{C}$  包含其中所有收敛序列的极限点, 但  $\mathcal{C}$  并不是闭集, i.e.  $\mathcal{C}^c$  不是开集, 也就是,

$$\exists x^* \in \mathcal{C}^c, \text{ s.t. } \forall \epsilon > 0 \quad (\cup(x^*, \epsilon)) \cap \mathcal{C} \neq \phi \quad (3)$$

因为  $(\mathcal{C}^c)^c = \mathcal{C}$ . 选定一系列  $\epsilon_k \rightarrow 0$  并选取  $x_k \in (\cup(x^*, \epsilon_k)) \cap \mathcal{C}$ , 有  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x^*$ , 由假设得到  $x^* \in \mathcal{C}$ , 矛盾! 所以  $\mathcal{C}$  是闭集.

3. 由1和2, 我们证明了  $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{R}^n$  是闭集  $\iff \mathcal{C}$  包含其中所有收敛序列的极限点.

## 3 Q3

$$x \in \partial \mathcal{C} = \bar{\mathcal{C}} \setminus \mathcal{C}^o = ((\mathcal{C}^c)^o)^c \setminus \mathcal{C}^o = ((\mathcal{C}^c)^o)^c \cap (\mathcal{C}^o)^c$$

由定义,  $x \in \mathcal{C}^o \iff \exists \epsilon > 0 \quad \cup(x, \epsilon) \subseteq \mathcal{C}$ , 所以

$$x \in (\mathcal{C}^o)^c \iff \forall \epsilon > 0 \quad \exists z \notin \mathcal{C} \mid |z - x|_2 < \epsilon \quad (4)$$

把等式(4)中  $\mathcal{C}$  替换成  $\mathcal{C}^c$ , 得到

$$x \in ((\mathcal{C}^c)^o)^c \iff \forall \epsilon > 0 \quad \exists y \in \mathcal{C} \mid |y - x|_2 < \epsilon \quad (5)$$

合并两个等式, 所以  $x \in \partial C = ((C^c)^o)^c \cap (C^o)^c \iff \forall \epsilon > 0 \exists y \in C |y - x|_2 < \epsilon \exists z \notin C |z - x|_2 < \epsilon$

#### 4 Q4

**1.1** 如果  $C$  是闭集, 那么  $\forall x^* \in \partial C$ , 由 Q3, 得到  $\forall \epsilon > 0 \exists y \in C |y - x^*|_2 < \epsilon$ , 那么  $x^*$  一定是  $C$  中一个收敛序列的极限点, 又由 Q2, 得到  $x^* \in C$ , 所以  $C \supseteq \partial C$ .

**1.2** 如果  $C \supseteq \partial C$ , 但  $C$  并不是闭集, 由 Q2 的逆否命题, 至少存在一个点  $x^*$  是  $C$  中一个收敛序列的极限点, 但  $x^* \notin C$ , 所以有

$$\forall \epsilon > 0 \exists y \in C |y - x^*|_2 < \epsilon \exists z \notin C |z - x^*|_2 < \epsilon, \quad (6)$$

只需再等式(6)中选择  $z = x^*$ , 那由 Q3,  $x^* \in \partial C \subseteq C$ , 矛盾! 所以  $C$  是一个闭集.

**2.1** 如果  $C$  是开集, 假设存在  $x^* \in C \cap \partial C$ , 那么  $\exists \epsilon > 0 \cup(x^*, \epsilon) \subseteq C$  (这是因为  $C$  是一个开集) 并且  $\forall \epsilon > 0 \exists z \notin C |z - x^*|_2 < \epsilon$  (因为  $x^*$  在边界上), 矛盾! 所以  $C \cap \partial C = \emptyset$ .

**2.2** 如果  $C \cap \partial C = \emptyset$ , 假设  $C$  不是开集, i.e.  $\exists x^* \in C \forall \epsilon > 0 \exists z \notin C |z - x^*|_2 < \epsilon$ , 那么类似的, 在等式(6)中取  $y = x^*$ , 由 Q3,  $x^* \in \partial C$ , 矛盾! 所以  $C$  是开集.

#### 5 Q5

**a.1**

$$\begin{aligned} \overline{A \cup B} &= (((A \cup B)^c)^o)^c \\ &= ((A^c \cap B^c)^o)^c \quad (De Morgan) \\ &= ((A^c)^o \cap (B^c)^o)^c \quad (*) \\ &= ((A^c)^o)^c \cup ((B^c)^o)^c \quad (De Morgan) \\ &= \overline{A} \cup \overline{B} \end{aligned} \quad (7)$$

下证(\*)式, 只需证明  $(P \cap Q)^o = P^o \cap Q^o$

$$\begin{aligned} &\forall x \in \mathcal{R}^n \\ &x \in (P \cap Q)^o \\ \iff &\exists \epsilon \cup(x, \epsilon) \subseteq P \cap Q \\ \iff &\exists \epsilon \cup(x, \epsilon) \subseteq P \wedge \exists \epsilon \cup(x, \epsilon) \subseteq Q \\ \iff &x \in P^o \wedge x \in Q^o \end{aligned} \quad (8)$$

所以  $(P \cap Q)^o = P^o \cap Q^o$ .

**a.2**  $\forall x \in \overline{A \cap B}$ , 存在  $\{x_k\}_1^\infty \subseteq A \cap B$ , 并且  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x$  (为得到这个式子, 只需证明  $\overline{C} = C \cup C'$ , 其中,  $C'$  是导集(聚点集), 由 Q2,  $C \cup C' \subseteq \overline{C}$ , 即一个集合的闭包必然包含其导集(收敛点的集合), 又  $C \cup C'$  是闭集(下证它是闭集, 也就是  $(C \cup C')^c$  是开集: (反证)  $\forall x \in (C \cup C')^c$ , 若  $\forall \epsilon > 0$  都有  $(\cup(x, \epsilon)) \cap (C \cup C') \neq \emptyset$  则可以构造一系列  $x_k \in C$  (构造方法: 如果  $x_k \in C$ , 直接选取它, 如果在导集中, 可以选取离他足够近的  $C$  中的点),  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x$ , 即  $x \in C'$ , 矛盾!) 所以  $\overline{C} = C \cup C'$ , 这是因为闭包是最小闭集, 证毕)

我们证明了, 存在  $\{x_k\}_1^\infty \subseteq A \cap B$ , 并且  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x$ , 所以  $\exists \{x_k\} \subseteq A$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x$ ,  $\exists \{y_k\} \subseteq B$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = x$ ,

所以  $x \in A' \subseteq \overline{A}$ ,  $x \in B' \subseteq \overline{B}$ , 即  $x \in \overline{A \cap B}$ , 即  $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$

例子:  $\mathcal{R}$  中,  $\mathcal{A} = \{x \mid x < 0\}$ ,  $\mathcal{B} = \{x \mid x > 0\}$ , 则  $\overline{\mathcal{A} \cap \mathcal{B}} = \phi$ , 但  $\overline{\mathcal{A}} \cap \overline{\mathcal{B}} = \{0\}$ .

**b.1** 在Q5.a.1中已经证过

$$\begin{aligned}
 & \forall x \in \mathcal{R}^n \\
 & x \in (P \cap Q)^o \\
 & \iff \exists \epsilon \cup (x, \epsilon) \subseteq P \cap Q \\
 & \iff \exists \epsilon \cup (x, \epsilon) \subseteq P \wedge \exists \epsilon \cup (x, \epsilon) \subseteq Q \\
 & \iff x \in P^o \wedge x \in Q^o
 \end{aligned} \tag{9}$$

将 $P, Q$ 替换成 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 即为本题所求

**b.2** 类似的

$$\begin{aligned}
 & \forall x \in \mathcal{R}^n \\
 & x \in \mathcal{A}^o \cup \mathcal{B}^o \\
 & \iff \exists \epsilon \cup (x, \epsilon) \subseteq \mathcal{A} \vee \exists \epsilon \cup (x, \epsilon) \subseteq \mathcal{B} \\
 & \implies \exists \epsilon \cup (x, \epsilon) \subseteq \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \\
 & \iff x \in (\mathcal{A} \cup \mathcal{B})^o
 \end{aligned} \tag{10}$$

取 $\mathcal{A} = [0, 1)$ ,  $\mathcal{B} = [1, 2]$ , 则有  $(\mathcal{A} \cup \mathcal{B})^o = (0, 2)$ , 但是  $\mathcal{A}^o \cup \mathcal{B}^o = (0, 1) \cup (1, 2)$ .

## 6 Q6

**a**  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = 0$ , 又  $\frac{|e_{k+1}|}{|e_k|} = 0.5 < +\infty$ , 所以  $r = 1, c = 0.5$

**b**  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = 1$ , 又  $\frac{|e_{k+1}|}{|e_k|} = 0.01 < +\infty$ , 所以  $r = 1, c = 0.01$

**c**  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = 0$ , 又  $\frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^2} = 1 < +\infty$ , 所以  $r = 2, c = 1$

**d**  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = 0$ , 又  $\frac{|e_{k+1}|}{|e_k|} = 3^{-2k-1} \rightarrow 0 < +\infty$ , 所以  $r = 1, c = 0$

**e**  $\forall k, |e_k| \leq 2^{-k}$ , 由Q6.a得  $r = 1, c = 0.5$ .

## 7 Q7

可以确定

不妨设  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x^*$ , 类似的, 约定  $y^*, r_y, c_y, r_x, r_c, c_x, c_c$

$$\begin{aligned}
 \frac{|y_{k+1} - y^*|}{|y_k - y^*|^{r_y}} &= \frac{|c_{k+1}x_{k+1} - c_{k+1}x^* + c_{k+1}x^* - cx^*|}{|c_kx_k - c_kx^* + c_kx^* - cx^*|^{r_y}} \\
 &= \frac{|c_{k+1}e_{x,k+1} + e_{c,k+1}x^*|}{|c_k e_{x,k} + e_{c,k}x^*|^{r_y}} \\
 &= \frac{|ce_{x,k+1} + e_{c,k+1}x^*|}{|ce_{x,k} + e_{c,k}x^*|^{r_y}} \quad (c_k = c + e_{c,k} = c + o(c))
 \end{aligned} \tag{11}$$

$x^* = 0$ 时, 上式等于 $|e_{x,k+1}|/|e_{x,k}|^{r_y}$ , 则有  $r_y = r_x, c_y = c_x$ .

$x^* \neq 0$ 时, 分析各项的阶,  $r$ 越大则对应变量的阶越小, 则成为可以忽略的无穷小量, 所以

$$r_y = \min\{r_x, r_c\}, \quad c_y = \begin{cases} c_x, & r_x < r_c \\ c_c, & r_c < r_x \end{cases} \quad (12)$$

而当 $r_c = r_x$ 时,  $c$ 越大, 它的阶越大( $e_{k+1} \approx c|e_k|^r$ )

$$c_y = \max\{c_x, c_c\} \quad (\text{when } r_x = r_c) \quad (13)$$

综上所述  $x^* = 0$ 时

$$r_y = r_x, \quad c_y = c_x \quad (14)$$

$x^* \neq 0$ 时

$$r_y = \min\{r_x, r_c\}, \quad c_y = \begin{cases} c_x & (r_x < r_c) \\ c_c & (r_c < r_x) \\ \max\{c_x, c_c\} & (r_x = r_c) \end{cases} \quad (15)$$