上节课内容

- 排序问题复杂度下界
- 冒泡排序
- 堆排序
- 决策树确定下界

选择算法的时间复杂度分析

下界证明方法：构造最坏输入

- 任意给定一个算法 A，A对于任意输入 x 都存在一个确定的操作序列 τ
- τ中的操作分成两类：
  - 决定性的：能够对确定输出结果提供有效信息
  - 非决定性的：对确定结果没有帮助的冗余操作
- 根据算法A构造某个输入实例 x，使得A对x 的操作序列 τ 包含尽量多的非决定性操作.
- 给出冗余操作+必要的操作的计数公式

选择算法的有关结果

	算法	最坏情况	空间
选最大	顺序比较	$n-1$	$O(1)$
选最大和最小	顺序比较	$2n-3$	$O(1)$
	算法FindMaxMin	$\lceil 3n/2 \rceil - 2$	$O(1)$
选第二大	顺序比较	$2n-3$	$O(1)$
	锦标赛方法	$n+\lceil \log n \rceil - 2$	$O(n)$
选中位数	排序后选择	$O(n\log n)$	$O(\log n)$
	算法Select	$O(n)$~$2.95n$	$O(\log n)$

选最大算法 Findmax是最优的算法

选最大与最小算法

定理6 任何通过比较找最大和最小的算法至少需要$\lceil 3n/2 \rceil - 2$次比较.

证明思路：任给算法A，根据算法 A 的比较结果构造输入 T, 使得 A 对 T 至少做$\lceil 3n/2 \rceil - 2$ 次比较.

证：不妨设n个数彼此不等，A为任意找最大和最小的算法. max是最大，A必须确定有$n-1$个数比max小，通过与max的比较被淘汰. min是最小，A也必须确定有$n-1$个数比min大，通过与min的比较而淘汰.总共需要$2n-2$个信息单位.

基本运算与信息单位

数的状态标记及其含义：

N：没有参加过比较　　W：赢

L：输　　WL：赢过且至少输1次

如果比较后数的状态改变，则提供信息单位，状态不变不提供信息单位，每增加 1 个W 提供 1个信息单位每增加 1 个L 提供 1 个信息单位.

两个变量通过一次比较增加的信息单位个数不同：0,1,2

case1： N,N → W,L：增加2个信息单位

case2： W,N → W,L：增加1个信息单位

case3： W,L → W,L：增加0个信息单位

算法输出与信息单位

算法输出的条件：

n-2 个数带有 W 和 L 标记，最大数只带 W 标记，最小数只带 L 标记，总计 $2n$-2个信息单位

对于任意给定的算法，构造输入的原则是：

根据算法的比较次序，针对每一步参与比较的两个变量的状态，调整对参与比较的两个变量的赋值，使得每次比较后得到的信息单位数达到最小. 从而使得为得到 输出所需要的 $2n$-2个信息单位，该算法对所构造的输入至少要做 $\lceil 3n/2 \rceil$-2 次比较.

对输入变量的赋值原则

x 与 *y* 的状态	赋值策略	新状态	信息单位
N,N	*x*>*y*	W,L	2
W,N； WL,N	*x*>*y*	W,L； WL,L	1
L,N	*x*<*y*	L,W	1
W,W	*x*>*y*	W,WL	1
L,L	*x*>*y*	WL,L	1
W,L； WL,L； W,WL	*x*>*y*	不变	0
WL,WL	保持原值	不变	0

一个赋值的实例

x_1,x_2---$x_1>x_2$; x_1,x_5---$x_1>x_5$; x_3,x_4---$x_3>x_4$; x_3,x_6---$x_3>x_6$

x_3,x_1---$x_3>x_1$; x_2,x_4---$x_2>x_4$; x_5,x_6---$x_5>x_6$; x_6,x_4---$x_6>x_4$ …

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
	状态 值	状态 值	状态 值	状态 值	状态 值	状态 值
	N *	N *	N *	N *	N *	N *
$x_1>x_2$	W 20	L 10				
$x_1>x_5$	W 20				L 5	
$x_3>x_4$			W 15	L 8		
$x_3>x_6$			W 15			L 12
$x_3>x_1$	WL 20		W 25			
$x_2>x_4$		WL 10		L 8		
$x_5>x_6$					WL 5	L 3
$x_6>x_4$				L 2		WL 3

构造的输入为（20，10，25，2，5，3）

问题复杂度的下界

为得到2n-2个信息单位，对上述输入A至少做$\lceil 3n/2 \rceil - 2$ 次比较.

一次比较得到2个信息单位只有case1. A至多有$\lfloor n/2 \rfloor$个case1，至多得到 $2\lfloor n/2 \rfloor \le n$个信息单位. 其它case, 1次比较至多获得1个信息单位，至少还需要 n-2次比较.

当 n 为偶数，A做的比较次数至少为

$$\lfloor n/2 \rfloor + n - 2 = 3n/2 - 2 = \lceil 3n/2 \rceil - 2$$

当 n 为奇数，A做的比较次数至少为

$$\lfloor n/2 \rfloor + n - 2 + 1 = (n-1)/2 + 1 + n - 2 = \lceil 3n/2 \rceil - 2$$

结论：FindMaxMin是最优算法

找第二大问题

元素x的权：$w(x)$, 表示以x为根的子树中的结点数

初始，$w(x_i)=1$，$i=1, 2, \ldots, n$;

赋值原则： 在比较的时候进行赋值或者调整赋值. 只对没有失败过的元素（权大于0的元素）进行赋值. 权大者胜，原来胜的次数多的仍旧胜，输入值也大.

1. $w(x), w(y)>0$:

   若 $w(x)>w(y)$, 那么x的值大于y 的值；//权大者胜

   若 $w(x)=w(y)$, 那么x的值大于y 的值；//权等，任意分配

2. $w(x)=w(y)=0$, 那么x, y值不变；// x与 y 比较对于确定第二大无意义

实例

	$w(x_1)$	$w(x_2)$	$w(x_3)$	$w(x_4)$	$w(x_5)$	值
初始	1	1	1	1	1	*, *, *, *, *
第1步 $x_1>x_2$	2	0	1	1	1	20, 10, *, *, *
第2步 $x_1>x_3$	3	0	0	1	1	20, 10, 15, *, *
第3步 $x_5>x_4$	3	0	0	0	2	20, 10, 15, 30, 40
第4步 $x_1>x_5$	5	0	0	0	0	41, 10, 15, 30, 40

构造树

根据算法A的比较次序, 在比最大的过程中如下构造树：

1. 初始是森林，含有n个结点；
2. 如果x, y是子树的树根，则算法比较x, y；
3. 若x, y以前没有参加过比较，任意赋值给x, y，比如$x>y$；那么将y作为x的儿子；
4. 若x, y已经在前面的比较中赋过值，且$x>y$，那么把y作为x的儿子，以y为根的子树作为x的子树；

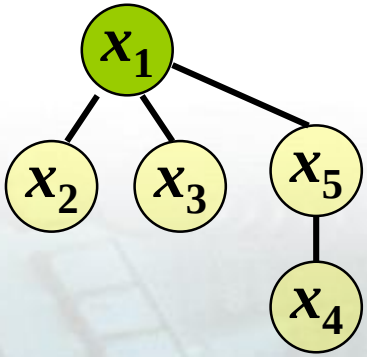
初始

$x_1>x_2$

$x_1>x_3$

$x_5>x_4$

$x_1>x_5$



实例

北京大学

找第二大问题复杂度下界

针对这个输入，估计与max比较而淘汰的元素数
根的权为n，其它的结点权为0，根为max

w_k表示 max 在它第 k 次比较后形成以max为根子树的结点总数，则 $w_k \le 2w_{k-1}$，设 K 为max最终与权不为0的结点的比较次数，则

$$n = w_K \le 2^K w_0 \le 2^K \Rightarrow K \ge \log n \Rightarrow K \ge \lceil \log n \rceil$$

这 K 个元素彼此不同，因为同一个元素不可能被 计数 2 次.
其中为确定第二大，要淘汰K–1个元素, 至少用$\lceil \log n \rceil$–1 次比较.

结论：锦标赛方法是找第二大的最优算法.

找中位数问题

定理8 设n为奇数，任何通过比较运算找n个数的中位数(median）的算法在最坏情况下至少做 $3n/2–3/2$ 次比较

证 首先定义决定性的比较与非决定性的比较.

决定性的比较: 建立了x与 median 的关系的比较.

$\exists y$ ($x>y$ 且 $y \geq$ median), x满足上述条件的第一次比较

$\exists y$ ($x<y$ 且 $y \leq$ median), x满足上述条件的第一次比较

（比较时 y 与median的关系可以不知道）

非决定性的比较：当$x>$median, $y<$median, 这时$x>y$的比较不是决定性的.

为找到中位数，必须要做 $n–1$ 次决定性的比较.

针对算法构造输入，使得非决定性比较达到$(n–1)/2$次.

输入构造方法

1. 分配一个值给中位数 median;
2. 如果*A*比较*x*与*y*，且*x* 与 *y* 没有被赋值，那么赋值*x*,*y* 使得
   x>median, *y*<median;
3. 如果*A*比较*x*与*y*, 且*x*>median, *y*没被赋值，则赋值 *y* 使得
   y<median;
4. 如果*A*比较*x*与*y*, 且*x*<median, *y*没被赋值，则赋值*y* 使得
   y>median;
5. 如果存在 (*n*–1)/2个元素已得到小于median的值，则对未赋值的全部分配大于median的值;
6. 如果存在 (*n*–1)/2个元素已得到大于median的值，则对未赋值的全部分配小于median的值.
7. 如果剩下1个元素则分配median给它.

构造实例

x_1,x_2---$x_1>x_2$; x_3,x_4---$x_3>x_4$; x_5,x_6---$x_5>x_6$;

x_1,x_3---$x_1>x_3$; x_3,x_7---$x_3>x_7$; x_7,x_4---$x_7>x_4$; …

1. 初始　　median=4
2. $x_1>x_2$　　$x_1=7,\ x_2=1$
3. $x_3>x_4$　　$x_3=5,\ x_4=2$
4. $x_5>x_6$　　$x_5=6,\ x_6=3$

非决定性比较

5. $x_7=4$
6. $x_1>x_3$
7. $x_3>x_7$

决定性比较

8. …

复杂性分析

元素状态　　N：未分配值；S：得到小于median值；
L：得到大于median值

比较前的状态	分配策略
N, N	一个大于median，一个小于median
L, N 或 N, L	分配给状态N的元素的值小于median
S, N 或 N, S	分配给状态N的元素的值大于median

这样赋值的输入使得*A*在这个输入下所进行的上述比较都是非决定性的. 这样的比较至少有$(n-1)/2$个. 因此总比较次数至少为

$$(n-1)+(n-1)/2 = 3n/2-3/2$$

结论：Select算法在阶上达到最优.

几种选择算法的总结

问题	算法	最坏情况	问题下界	最优性
找最大	**Findmax**	$n-1$	$n-1$	最优
找最大最小	**FindMaxMin**	$\lceil 3n/2 \rceil - 2$	$\lceil 3n/2 \rceil - 2$	最优
找第二大	锦标赛	$n+\lceil \log n \rceil - 2$	$n+\lceil \log n \rceil - 2$	最优
找中位数	**Select**	$O(n)$	$3n/2-3/2$	阶最优
找第k小	**Select**	$O(n)$	$n+\min\{k,n-k+1\}-2$	阶最优

通过归约确认问题计算复杂度的下界

问题P，问题Q

问题Q的复杂度已知（至少线性） $\Omega(g(n))$

存在变换 f 将Q的任何实例转换成 P 的实例，f 的时间为线性时间 $f(n)=O(n)$，解的反变换$s(n)$也是线性时间

解Q的算法：$T_Q(n)= f(n)+T_p(n)+s(n)$

1. 将Q的实例 I 变成 $f(I)$， $f(n)$
2. 用解 P 的算法作为子程序解 $f(I)$，时间与解P的时间为同样的阶 $T_p(n)$
3. 将解变换成原问题的解 $s(n)$

解P的算法可以解Q. 且时间的阶一样，因此 P至少与Q一样难. $Q \leq_l P$ （ l 表示线性时间）

$$f(n)+T_p(n)+s(n)= T_Q(n) =\Omega(g(n))$$

因子分解与素数测试

- 问题：
  因子分解 **factor**：输入正整数n， factor(n)是多重集(全部素因子)规定factor(1)={1}
  素数测试 **testp**：输入正整数n，test(n)为“Yes”或者“No”

- 归约：test ≤ factor
  假设 testp问题的难度是$W(n)$.
  素数测试算法 $A(n)$
  1. if n=1 then return “No”
  2. else $p \leftarrow$ factor(n)
  3. if $|p| \geq 2$ then return “No”
  4. else return “Yes”

- 结论： $\Omega(W(n)) = T_{\text{testp}}(n) \leq T_{\text{factor}}(n)$

元素唯一性问题

- 问题：给定 n 个数的集合S，判断 S 中的元素是否存在相同元素.
- 元素唯一性问题的复杂度为 $\Theta(n\log n)$

  输入：多重集 $S=\{n_1\cdot a_1, n_2\cdot a_2, \ldots, n_k\cdot a_k\}$

  构造决策树，树叶为 S 的全排列数

$$\frac{n!}{n_1!\,n_2!\ldots n_k!}$$

  最坏情况下树深为

$$\Theta(\log n!)=\Theta(n\log n)$$

最邻近点对与唯一性问题

- **P问题与Q问题：**
  P: 平面直角坐标系中*n*个点的最邻近点对问题Close
  Q: 元素的唯一性问题Uniqueness　$\Omega(n\log n)$
- **变换 *f* :**
  Q的实例：$x_1, x_2, \ldots, x_n$，变成点$(x_1,0),(x_2,0),\ldots,(x_n,0)$
- **解Q算法：**
  1. 利用求最邻近点对算法 P 计算最短距离 *d*.
  2. if *d*=0 then return “No”
  3. else return “Yes”
- **结论：计算平面直角坐标系中*n*个点的最邻近点对问题的时间是 $\Omega(n\log n)$，其中算法以比较为基本运算**

最小生成树与唯一性问题

- **P问题与Q问题：**

  P: 平面直角坐标系中*n*个点的最小生成树问题；

  Q: 元素的唯一性问题Uniqueness　Ω(*n*log*n*)

- **变换 *f* :**

  Q的实例：$x_1, x_2, \ldots, x_n$，变成X 轴上的*n*个点，

- **解Q算法：**

  1. 利用求最小生成树算法P构造树*T*，确定*T*的最短边*e*.

  2. 检测*e*的长度是否为0

  3. if |*e*|=0 then 不唯一，else 是唯一的.

- **结论：计算平面直角坐标系 *n*点最小生成树时间是Ω(*n*log*n*)，其中算法以比较为基本运算**