DOI:10.19329/j.cnki.1673-2928.2011.06.024

哈密顿图的充分条件及其应用

莫君慧[1,2],李亚鑫[2]

(1.郑州大学 数学系,河南 郑州 450001;2.安阳师范学院 数学与统计学院,河南 安阳 455002)

摘 要:哈密顿图是图论中比较重要的一部分,利用扩大路径法对哈密顿图的充分条件进行讨论,并列举一些应用。

关键词:扩大路径法; 哈密顿图; 连通性

中图分类号:O157.5 **文献标志码**:A **文章编号**:1673-2928(2011)06-0072-04

哈密顿是 19 世纪英国著名的数学家,1805 年 8 月 4 日出生于爱尔兰都柏林。他自幼聪明好学,精通数学、力学和光学,并对天文学有浓烈的兴趣。1859 年,哈密顿提出一个问题:能否在正十二面体上求一条初级回路,使它包含图中所有顶点?后来他将这一问题应用于现实,把每个顶点比作一个城市,连接两个顶点之间的边看作城市之间的交通线。于是原始问题就变成了所谓的周游世界问题:能否从某个城市出发沿交通线经过每个城市一次并且仅一次,最后回到出发点?哈密顿自己做了肯定的回答。如图 1,从数字 1 开始,按照数字从小到大的顺序经过各顶点,最后回到出发点 1。后人为了纪念这位数学家,将这种经过图中每个顶点一次且仅一次的回路称为哈密顿回路,将具有这种回路的图称为哈密顿图。

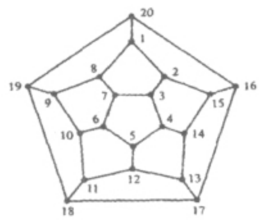

图 1 哈密顿图

经过图(有向图或无向图)中所有顶点一次且仅一次的通路称为哈密顿通路。经过图中所有顶点一次且仅一次的回路称为哈密顿回路。具有哈密顿回路的图称为哈密顿图,具有哈密顿通路但不具有哈密顿回路的图称为半哈密顿图,平凡图是哈密顿图。[1]

1 扩大路径法

设 $G=<V,E>$ 为 n 阶无向图,$E\neq\Phi$,设Γ_l 为 G 中一条路径,若此路径的始点或终点与通路外的顶点相邻,就将它们扩大到通路中来,继续这一过程,直到最后得到的通路的两个端点不与通路外的顶点相邻为止,设最后得到的路径为Γ_{l+k}(长度为 l 的路径扩大成了长度为 $l+k$ 的路径),称Γ_{l+k} 为"极大路径",称使用此方法证明问题的方法为"扩大路径法"。

2 定理及证明

2.1 定理设 G 是 n 阶无向简单图,若对 G 中任意不相邻的顶点 v_i,v_j 均有

$$d(v_i)+d(v_j)\geq n-1 \tag{1}$$

则 G 中存在哈密顿通路。

证明 首先证明 G 是连通图。否则 G 至少有两个连通分支,设 G_1,G_2 是阶数为 n_1,n_2 的两个连通分支,设$v_1\in V(G_1)$,$v_2\in V(G_2)$,因为 G 是简单图,所以。

$$d_G(v_1)+d_G(v_2)=d_{G_1}(v_1)+d_{G_2}(v_2)\leq n_1-1+n_2-1\leq n-1$$

这与(1)矛盾,所以 G 必为连通图。

注释:I 1)哈密顿通(回)路是初级通(回)路,初级回路又叫圈。

2)哈密顿图与半哈密顿图一定是连通的。

3)平行边与环的存在与否不影响图的哈密顿图或半哈密顿图。

*收稿日期:2011-08-17

作者简介:莫君慧(1981-),女,河南省林州人,安阳师范学院讲师,研究方向:计算数学及其应用。

下面证 G 中存在哈密顿通路。设$\Gamma=v_1,v_2\cdots v_l$ 为 G 中用“扩大路径法”得到“最大路径”，即Γ的始点 v_1 与终点 v_l 不与外的顶点相邻。显然有 $l\leq n$。

1)若 $l=n$，则Γ为 G 中哈密顿通路。

2)若 $l<n$，这说明Γ不是哈密顿通路，即 G 中还存在着Γ外的顶点。但可以证明 G 中存在过Γ上所有顶点的圈。

(a)若 v_1 和 v_l 相邻，即$(v_1,v_l)\in E(G)$，则$\Gamma\cup(v_1,v_l)$为满足要求的圈。

(b)若 v_1 和 v_l 不相邻,设 v_1 与Γ上的 $v_{i_1}=v_2,v_{i_2}\cdots v_{i_k}$相邻($k\geq2$,否则 $d(v_1)+d(v_2)\leq1+l-2=l-1<n-1$,这与 1)矛盾),此时 v_l 至少与 $v_{i_1}=v_2,v_{i_2},v_{i_3},\cdots,v_{i_k}$ 相邻的顶点$v_{i_2-1},v_{i_3-1},\cdots,v_{i_k-1}$之一相邻(否则 $d(v_i)+d(v_j)\leq k+l-2-(k-1)=l-1<n-1$)，设 v_l 与 v_{i_r-1} 相邻,如图 2 所示。于是,回路 $C=v_1v_2\cdots v_{i_r-1}v_lv_{l-1}\cdots v_i\cdots v_{i_r}v_1$过$\Gamma$上的所有顶点。

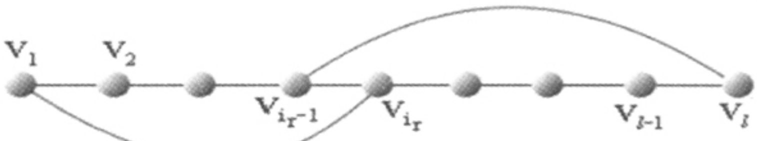

图 2 v_1 和 v_l 不相邻示意图

(c)下面证明存在比Γ更长的路径。因为 $1<n$，所以 C 外还有顶点，由 G 的连通性可知，存在$v_{l+1}\in V(G)-V(C)$与 C 上某顶点 v_f 相邻，如图 3 所示。

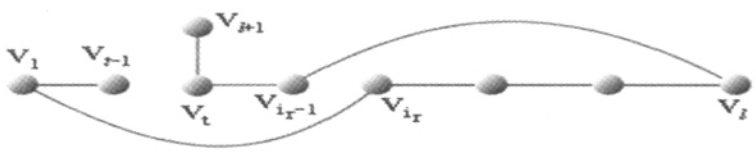

图 3 更长路径示意图

删除边(v_{t-1},v_t)得路径$\Gamma'=v_{t-1}\cdots v_1v_{i_r}\cdots v_lv_{i_r-1}\cdots v_tv_{l+1}$ 比Γ长度大 1，对Γ上的顶点重新排列，使其成为 $\Gamma'=v_1v_2\cdots v_lv_{l+1}$对重复(a)~(c)，在有限步内一定得到 G 的哈密顿通路。

2.2 推论 设 G 为 n 阶无向简单图，若对于 G 中任意不相邻的顶点 v_i,v_j，均有

$$d(v_i)+d(v_j)\geq n \tag{2}$$

则 G 中存在哈密顿回路。

证明 由定理可知,G 中存在哈密顿回路，设$\Gamma=v_1v_2\cdots v_n$ 为 G 中一条哈密顿通路，若 v_1 与 v_n 相邻，设边 $e(v_1,v_n)$，则$\Gamma\cup\{e\}$为 G 中哈密顿回路。若 v_1 与 v_n 不相邻，同定理证明中的 2)类似，可证明存在过Γ上各顶点的圈，此圈即为 G 中的哈密顿回路。

3 应用

例 1 在某次国际会议的预备会中共有 8 人参加，他们来自不同的国家，已知他们中任何两个无共同语言的人中的每一个与其余有共同语言的人数之和大于或等于 8，问能否将这 8 个人排在圆桌旁，使其任何人都能与两边交谈？[II]

解 设 8 个人分别是 $v_1v_2\cdots v_8$，作无向简单图 $G<=V$ 其中 $V=\{v_1v_2\cdots v_8\}$，$\forall v_i,v_j\in V$且 $i\neq j$，若 v_i 与 v_j 有共同语言，就在 v_i，v_i 之间连无向边(v_i,v_i)，由此得到集合 E，则 G 为 8 阶无向简单图，$\forall v_i\in V$，$d(v_i)$为 v_i 有共同语言的人数。

由已知条件可知$\forall v_i,v_j\in V$ 且 $i\neq j$，均有$d(v_i)+d(v_j)\geq8$。由定理的推论可知 G 中存在哈密顿回路，设 $C=v_{i_1},v_{i_2}\cdots v_8v_1$ 为 G 中一条哈密顿回路，按这条回路的顺序安排座次即可。

例 2 某工厂生产由 6 种不同颜色的纱织成双色布。已知在品种中，每种颜色至少能与其他 5 种颜色中的 3 种相搭配。证明可以挑出 3 种双色布，它们恰由 6 种不同颜色的纱织成。[III]

证明 做无向简单图$G=<V,E>,V=\{v\mid v$ 为 6 种颜色之一$\}$，
$E=\{(u,v)\mid u,v\in V,u\neq v$ ，且在这批布中有 u 与 v 搭配的双色布$\}$。

注释：[II] 由本题想到的:哈密顿图的实质是能将图中所有的顶点排在同一个圈中。

[III] 找 3 种双色布即为在这个图中找到 3 条不相邻的边的方案，这个哈密顿回路构成一个长为 6 的圈，而这个哈密顿图可以找到两种解决方案。

由已知条件可知,$\forall u,v\in V$,有

$$d(u)+d(v)\geq 3+3=6=|V|$$

由定理的推论可知,G 为哈密顿图,设$C=v_{i_1}v_{i_2}\cdots v_{i_6}v_{i_1}$是 G 中的一条哈密顿回路。任何两个顶点若在 C 中相邻,则在这批布中有v_{i_1}和v_{i_2},v_{i_3},与v_{i_4},v_{i_5},与v_{i_6}搭配成的 3 种双色布,它们是用的全部 6 种颜色。

例 3 在 5 个地区之间有甲、乙两个国际航空服务公司,在任意两个地区之间都有且仅有由其中一个公司单独经营的直达航线(可以往返)。已知对于其中任意 3 个地区之间的 3 条航线,都有甲、乙两公司各自经营的航线。证明:甲公司和乙公司各自经营一条环游这 5 个地区的航线。

证明 如果将每一个地区看成一个节点,那么这是一个 K_5 的哈密顿圈分解问题。只要证明这个 K_5 中每一个节点发出的 4 条边(航线)中恰好有甲公司经营的 2 条边(航线)就可以了。

首先,对于每一个节点(地区),不可能由单独一个公司经营着所有从这个地区出发的 4 条航线(否则就会有 3 个地区之间的 3 条航线全部由一个公司经营)。

其次,从一个节点(地区)出发的航线中不会有一个公司经营 3 条航线(与前面同理)。

于是,每一个节点(地区)恰好有甲公司经营的 2 条航线,也有乙公司经营的 2 条航线,甲公司和乙公司各自经营一条环游这 5 个地区的航线。如图 4,实线部分为甲公司经营的航线,虚线部分则为乙航空公司经营的航线。

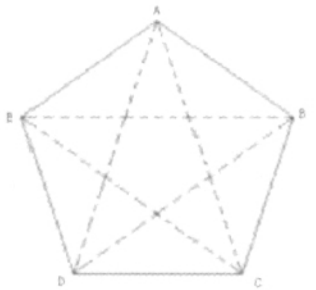

图 4 经营航线图

例 4 国际象棋中的马走日字,即在(x,y)格子的马可以走到$(x\pm2,y\pm1)$,$(x\pm2,y\pm1)$中的任何一个,只要棋盘中有这个格子,马从某个格子可以走遍所有的格子,且每个格子只走一次称为马的周游,证明:

1)在 3×4 的棋盘上存在马的周游;

2)在 3×3 的棋盘上不存在马的周游。

证明 用图表示棋盘:各个格子是一个顶点,两个顶点相邻当且仅当马可以从对应的一个格子跑到另一个格子。显然,存在马的周游当且仅当图中有哈密顿通路。

1)对于 3×4 的棋盘,可以在图中找到一个哈密顿通路:1,2,3.⋯,12,得到图 5。

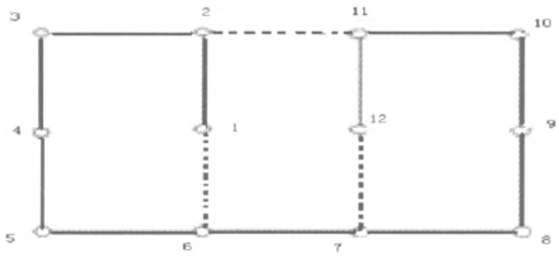

图 5 3×4 的棋盘哈密顿通路

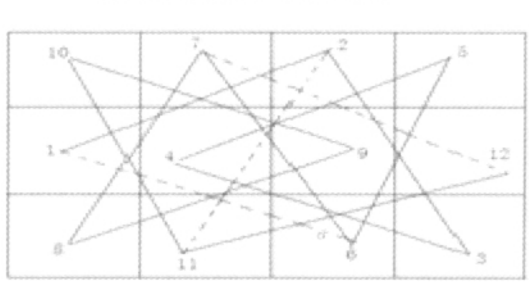

图 6 3×4 棋盘周游图

因此,存在马的周游。

图 6 给出 3×4 棋盘上画出的周游。

2)对于 3×3 的棋盘,中心格子对应的顶点是一个独立点,对应的图是非连通的,不存在哈密顿通路。

5 总结

现实生活中有很多问题都需要用哈密顿图来解决,如:货郎担问题等,本文只对其中一种判定方法做出了讨论,我们应该会用满足哈密顿图的充分条件的方法判断某些图是哈密顿图,要严格地分清哈密顿图必要条件和充分条件,不能将必要条件当充分条件,同样地,也不能将充分条件当成必要条件。而且,有些图不满足哈密顿的充分条件,但也是哈密顿图,如文章开篇提到的哈密顿周游世界问题,以及文章中的例 3 和例 4 就是不满足哈密顿图的充分条件,但却是哈密顿图。由于篇幅有限,不能对某些问题进行充分讨论。最后,哈密顿图的充分必要条件还未解决,这就有待我们继续为之探讨。

参考文献:

[1] 耿素云,屈婉玲,王捍贫.离散数学教程[M].北京:北京大学出版社,2002.

[2] 耿素云.离散数学习题集——图论分册[M].北京:北京大学出版社,1990.

[3] 耿素云,屈婉玲.离散数学(修订版)[M]. 北京:高等教育出版社,2004.

[4] 屈婉玲,耿素云,张立昂.离散数学学习指导与习题解析[M].高等教育出版社,2008.

[5] Wodcock J,Loomes M.Software Engineering Matheatics[M].Pitman Publishiing,1988.

[6] Cormen T H,Leiserson C E,Rivest R L,Clifford Stein.Introduction to Algorithms[M].Second Edition(影印版).北京:高等教育出版社,2002.

(责任编辑:郝安林)

(上接 68 页)

当$\chi^2(n+2a)$分布的自由度 $n+2a$ 不是自然数时,可由线性内插法求得$\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}{}^2(n+2a)$和$\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n+2a)$的近似值,如 $n+2a=8.9$,则可查$\chi^2_{0.025}(8)=2.18$,$\chi^2_{0.025}(9)=2.7$,计算公式$\dfrac{\chi^2_{0.025}(8.9)-2.7}{8.9-9}=\dfrac{2.7-2.18}{9-8}$,得到$\chi^2_{0.025}(8.9)=2.684$。

4 总结

本文指出了贝叶斯可信区间与经典置信区间的不同。推出了正态总体方差的贝叶斯可信区间,数值分析表明:因为先验信息的引入,在相同的样本下,贝叶斯可信区间比置信区间更精确。但值得注意的是,先验分布是由人们长期的生产生活经验的总结,它的确定带有一定风险。

参考文献:

[1] 茆诗松.贝叶斯统计[M].北京:中国统计出版社,1999.

[2] 魏宗舒.概率论与数理统计教程[M].北京:高等教育出版社,1999.

[3] 茆诗松.统计手册[M].北京:科学出版社,2006.

Normal Population Variance of the Bayesian Interval Estimation

WANG Yi-jing ,HUA Shou-liang

(Anyang Institute of Technology, the department of mathematics and physics, Anyang 455000 Ghina)

Abstract: interval estimation is an important mathematical statistics content, this paper Bayesian interval estimation and interval estimation of the difference between classic, introduced the normal population variance of the Bayesian confidence interval, numerical analysis shows that CI Confidence interval more accurate.

Key words: interval estimation; prior distribution; posterior distribution.

(责任编辑:郝安林)