基本可行解的性质

- 引理1 Ax=b 的解α 是基本解 ⇔ α 中非零分量对应的列向量线性无关。

- 定理1 如果标准形有可行解, 则必有基本可行解。
  - 基本可行解的几何意义：超多面体$\{x : Ax = b,\ x \geq 0\}$的顶点/极点

- 定理2 如果标准形有最优解, 则必存在一个基本可行解是最优解。
  - A有m行n列，至多有C_n^m个基，故至多有C_n^m个基本解

6.3 单纯形法

基本步骤

(1) 确定初始基本可行解.

(2) 检查当前的基本可行解.

若是最优解或无最优解, 计算结束;

否则作基变换, 用一个非基变量替换一个基变量, 得到一个新的可行基和对应的基本可行解, 且使目标函数值下降 (至少不升).

(3) 重复 (2).

确定初始基本可行解

先考虑最简单的情况, 设约束条件为

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \le b_i\ ,\ b_i \ge 0,\ \ i = 1,2,\dots,m$$

引入 m 个松弛变量 $x_{n+i} \ge 0\ \ (i = 1, 2, \dots, m)$,

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n + x_{n+i} = b_i\ , \quad i=1,2,\dots,m$$

取 x_{n+i} ($i = 1, 2, \dots, m$) 作为基变量, 初始基本可行解为

$$x^{(0)} = (0, 0, \dots, 0, b_1, b_2, \dots, b_m)^T$$

$$\begin{aligned}
\min\ & z' = -12x_1 - 15x_2 \\
\text{s.t.}\ & 0.25x_1 + 0.50x_2 + x_3 = 120 \\
& 0.50x_1 + 0.50x_2 + x_4 = 150 \\
& 0.25x_1 + x_5 = 50 \\
& x_j \ge 0,\quad i = 1,2,\dots,5
\end{aligned}$$

例 $\max\ z = 12x + 15y$

$$\begin{aligned}
\text{s.t.}\ & 0.25x + 0.50y \le 120 \\
& 0.50x + 0.50y \le 150 \\
& 0.25x \le 50 \\
& x \ge 0,\ y \ge 0
\end{aligned}$$

取 x_3, x_4, x_5作为基变量, $x^{(0)}=(0,0,120,150,50)^T$

最优性检验

给定可行基 $B=(P_{\pi(1)}, P_{\pi(2)},\dots, P_{\pi(m)})$, $Ax=b$ 两边同乘B^{-1}, 得 $B^{-1}Ax = B^{-1}b$. 记 A中对应非基变量的列构成的矩阵为 N,

$$x_B + B^{-1}Nx_N = B^{-1}b$$

解得

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$$

代入目标函数

$$\begin{aligned} z &= c^T x = c_B^T x_B + c_N^T x_N \\ &= c_B^T (B^{-1}b - B^{-1}Nx_N) + c_N^T x_N \\ &= c_B^T B^{-1}b + (c_N^T - c_B^T B^{-1}N) x_N \end{aligned}$$

基本可行解 $x_B^{(0)} = B^{-1}b$, $x_N^{(0)} = 0$, 目标函数值 $z_0 = c_B^T B^{-1}b$

最优性检验

$$z = c^T x$$

$$= z_0 + (c_N^T - c_B^T B^{-1} N) x_N$$

$$= z_0 + (c_B^T - c_B^T B^{-1} B) x_B + (c_N^T - c_B^T B^{-1} N) x_N$$

$$= z_0 + (c^T - c_B^T B^{-1} A) x$$

记 $\lambda^T = c^T - c_B^T B^{-1} A$　　检验数

$$z = z_0 + \lambda^T x$$　　简化的目标函数

最优性检验

$$z = z_0 + \lambda^T x$$
$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$$

记 $B^{-1}A = (\alpha_{ij})_{m\times n}$, $P_j'=B^{-1}P_j$ $(1\le j \le n)$, $\beta=B^{-1}b$.

定理 3 给定基本可行解 $x^{(0)}$,

(1) 若所有检验数大于等于0, 则 $x^{(0)}$是最优解.

(2) 若存在检验数 $\lambda_k< 0$且所有$\alpha_{ik} \le 0$ $(1\le i \le m)$, 则无最优解.

证 (1) 如果 $\lambda \ge 0$, 则对任意可行解, $x \ge 0$, $z \ge z_0$,
故 $x^{(0)}$是最优解.

(2) 若存在$\lambda_k< 0$ (λ_k必对应非基变量) 且所有$\alpha_{ik} \le 0$ $(1\le i \le m)$,
取 $x_k = M > 0$, 其余非基变量 $x_j = 0$, 解得

$$x_{\pi(i)} = \beta_i - \alpha_{ik} M \ge 0, \qquad 1 \le i \le m$$

这是一个可行解, 其目标函数值为

$$z = z_0 + \lambda_k M$$

当 $M \to +\infty$ 时, $z \to -\infty$. 得证无最优解.

问题 存在检验数 $\lambda_k< 0$且有$\alpha_{lk} > 0$, 做基变换.

基变换

给定可行基 $B=(P_{\pi(1)},P_{\pi(2)},\ldots,P_{\pi(m)})$, 设 $\lambda_k<0$且$\alpha_{lk}>0$, x_k 必是非基变量.

基变换: 用非基变量 x_k 替换基变量 $x_{\pi(l)}$, 用P_k替换 B 中的 $P_{\pi(l)}$, 新的基为 $B'=(P_{\pi(1)},\ldots,P_{\pi(l-1)},P_k,P_{\pi(l+1)},\ldots,P_{\pi(m)})$.

称 x_k 为换入变量, $x_{\pi(l)}$ 为换出变量.

基变换

计算公式

$$\alpha_{lj}' = \alpha_{lj}/\alpha_{lk}, \quad 1 \le j \le n$$
$$\alpha_{ij}' = \alpha_{ij} - \alpha_{ik}\alpha_{lj}/\alpha_{lk}, \quad 1 \le i \le m \text{且 } i \ne l, 1 \le j \le n$$
$$\beta_l' = \beta_l/\alpha_{lk}$$
$$\beta_i' = \beta_i - \alpha_{ik}\beta_l/\alpha_{lk}, \quad 1 \le i \le m \text{ 且 } i \ne l$$

为保证 B'是可行的, 只需

$$\beta_i' = \beta_i - \alpha_{ik}\beta_l/\alpha_{lk} \ge 0, \quad 1 \le i \le m \text{且 } i \ne l$$

$\beta_i \ge 0$, $\beta_l \ge 0$, $\alpha_{lk} > 0$. $\alpha_{ik} \le 0$时不等式成立；$\alpha_{ik} > 0$时$\beta_l/\alpha_{lk} \le \beta_i/\alpha_{ik}$

取 l 使得 $\beta_l/\alpha_{lk} = \min\{ \beta_i/\alpha_{ik} \mid \alpha_{ik} > 0, \ 1 \le i \le m \}$

用第 l 个方程消去简化的目标函数中的 x_k,

$$\lambda_j' = \lambda_j - \lambda_k\alpha_{lj}/\alpha_{lk}, \quad 1 \le j \le m$$
$$z_0' = z_0 + \lambda_k\beta_l/\alpha_{lk}$$

单纯形法

算法 单纯形法 (针对最小化)

1. 设初始可行基 $B=(P_{\pi(1)}, P_{\pi(2)},\ldots, P_{\pi(m)})$, $\alpha = B^{-1}A$, $\beta = B^{-1}b$,
   $\lambda^T = c^T - c_B^T B^{-1}A$, $z_0 = B^{-1}b$.
2. 若所有$\lambda_j \geq 0$ $(1\leq j\leq n)$, 则 $x_B=\beta$, $x_N=0$是最优解, 计算结束.
3. 取$\lambda_k < 0$. 若所有$\alpha_{ik} \leq 0$ $(1\leq i \leq m)$, 则无最优解, 计算结束.
4. 取 l 使得

$$\beta_l/\alpha_{lk} = \min\{ \beta_i/\alpha_{ik} \mid \alpha_{ik} > 0,\ 1\leq i \leq m \}$$

5. 以 x_k为换入变量、$x_{\pi(l)}$ 为换出变量做基变换.
6. 转 2.

对最大化, 2中$\lambda_j \geq 0$ 改为 $\lambda_j \leq 0$, 3中 $\lambda_k < 0$ 改为 $\lambda_k > 0$.

单纯形表

			c_1	c_2	$\ldots$	c_n	
c_B	x_B	b	x_1	x_2	$\ldots$	x_n	θ
$c_{\pi(1)}$	$x_{\pi(1)}$	β_1	α_{11}	α_{12}	$\ldots$	α_{1n}	
$c_{\pi(2)}$	$x_{\pi(2)}$	β_2	α_{21}	α_{22}	$\ldots$	α_{2n}	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ldots$	$\vdots$	
$c_{\pi(m)}$	$x_{\pi(m)}$	β_m	α_{m1}	α_{m2}	$\ldots$	α_{mn}	
	$-z$	$-z_0$	λ_1	λ_2	$\ldots$	λ_n	

$$-z + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n = -z_0$$

例1

$$\min z = -12x_1 - 15x_2$$
$$\text{s.t.}\quad \begin{aligned} 0.25x_1+0.50x_2+x_3 &= 120 \\ 0.50x_1+0.50x_2+x_4 &= 150 \\ 0.25x_1+x_5 &= 50 \end{aligned}$$

			-12	-15	0	0	0	
c_B	x_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	θ
0	x_3	120	0.25	0.50	1	0	0	240
0	x_4	150	0.50	0.50	0	1	0	300
0	x_5	50	0.25	0	0	0	1	
	$-z$	0	-12	-15	0	0	0	
-15	x_2	240	0.50	1	2	0	0	480
0	x_4	30	0.25	0	-1	1	0	120
0	x_5	50	0.25	0	0	0	1	200
	$-z$	3600	-4.5	0	30	0	0	
-15	x_2	180	0	1	4	-2	0	
-12	x_1	120	1	0	-4	4	0	
0	x_5	20	0	0	1	- 1	1	
	$-z$	4140	0	0	12	18	0	

例 2

用单纯形法解下述线性规划

$$\min z = x_1 - 2x_2$$
$$\text{s.t.}\quad x_1 - x_2 \le 1$$
$$-2x_1 + x_2 \le 4$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

解 引入2个松弛变量 x_3, x_4, 得到标准形

$$\min z = x_1 - 2x_2$$
$$\text{s.t.}\quad x_1 - x_2 + x_3 \qquad = 1$$
$$-2x_1 + x_2 \qquad + x_4 = 4$$
$$x_j \ge 0,\quad j = 1,2,3,4$$

例2的单纯形表

c_B	x_B	b	1	-2	0	0	
c_B	x_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	θ
0	x_3	1	1	-1	1	0	
0	x_4	4	-2	1	0	1	4
	$-z$	0	1	-2	0	0	
0	x_3	5	-1	0	1	1	
-2	x_2	4	-2	1	0	1	
	$-z$	8	-3	0	0	2	

目标函数值没有下界, 无最优解

其他约束条件的情况

现考虑剩余的两种情况:

(1) $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i$

(2) $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i$

其中 $b_i \ge 0$. 对于(1), 引入剩余变量转化成 (2).

对(2)引入人工变量 $y_j \ge 0$,

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + y_j = b_i$$

取所有松弛变量和人工变量作为基变量, 得到初始可行基.
根据辅助问题的解判断原始问题是否存在基本可行解.
方法: 两阶段法.

6.4 对偶性

例3　公司甲用 3 种原料混合成 2 种清洁剂.

问：这 2 种清洁剂应各配制多少才能使总价值最大?

	原料1	原料2	原料3	售价(万元/吨)
清洁剂A	0.25	0.50	0.25	12
清洁剂B	0.50	0.50		15
存量 (吨)	120	150	50	

公司乙急需这 3 种原料, 打算向公司甲购买, 应出什么价钱?

例3（续）

公司甲：

设清洁剂 A和 B分别配制 x_1和 x_2

$$\max z = 12x_1 + 15x_2$$

$$\begin{aligned} \text{s.t.}\quad & 0.25x_1 + 0.50x_2 \le 120 \\ & 0.50x_1 + 0.50x_2 \le 150 \\ & 0.25x_1 \le 50 \\ & x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

公司乙向甲买3种原料存量，出价每吨分别为 y_1, y_2, y_3万元. 希望总价尽可能的小, 但又不能低于公司甲用这些原料生产清洁剂所产生的价值

$$\min w = 120y_1 + 150y_2 + 50y_3$$

$$\begin{aligned} \text{s.t.}\quad & 0.25y_1 + 0.50y_2 + 0.25y_3 \ge 12 \\ & 0.50y_1 + 0.50y_2 \ge 15 \\ & y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0,\ y_3 \ge 0 \end{aligned}$$

对偶线性规划

定义 原始线性规划 (P)

$$\begin{aligned} &\max\ c^T x \\ &\text{s.t. } Ax \le b \\ &\quad x \ge 0 \end{aligned}$$

对偶线性规划 (D)

$$\begin{aligned} &\min\ b^T y \\ &\text{s.t. } A^T y \ge c \\ &\quad y \ge 0 \end{aligned}$$

定理4 对偶的对偶是原始线性规划.

证 (D)可改写成 (D′)

$$\begin{aligned} &\max\ -b^T y \\ &\text{s.t. } -A^T y \le -c \\ &\quad y \ge 0 \end{aligned}$$

(D′) 的对偶为

$$\begin{aligned} &\min\ -c^T x \\ &\text{s.t. } (-A^T)^T x \ge -b \\ &\quad x \ge 0 \end{aligned}$$

北京大學

对偶线性规划

- 原始线性规划
  - $$\begin{aligned} \max \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax \le b \\ & x \ge 0 \end{aligned}$$ 其中可行域 $Q_P = \{x : Ax \le b, x \ge 0\}$
- 拉格朗日函数
  - $L(x; y, \lambda) = c^T x + y^T(b - Ax) + \lambda^T x$，其中乘子$y, \lambda \ge 0$
- 原始线性规划等价于
  - $$\max_x \min_{y,\lambda \ge 0} L(x; y, \lambda) = \begin{cases} \max_x\{c^T x\} & x \in Q_P \\ -\infty & x \notin Q_P \end{cases}$$
- 对偶线性规划等价于
  - $$\min_{y,\lambda \ge 0} \max_x L(x; y, \lambda)$$

北京大学

对偶线性规划

- 原始线性规划
  - $$\begin{array}{ll} \max & c^T x \\ \text{s.t.} & Ax \le b,\ \ x \ge 0 \end{array}$$
- 拉格朗日函数
  - $L(x; y, \lambda) = x^T\left(c - A^T y + \lambda\right) + b^T y$，其中乘子$y, \lambda \ge 0$
- 对偶线性规划等价于
  - $$\min_{y,\lambda \ge 0} \max_x L(x; y, \lambda) = \begin{cases} \min_y\{b^T y\} & y \in Q_D \\ +\infty & y \notin Q_D \end{cases}$$
  - 其中对偶可行域 $Q_D = \{y \ :\ c - A^T y + \lambda = 0,\ y \ge 0,\ \lambda \ge 0\} = \{y \ :\ A^T y \ge c,\ y \ge 0\}$
- 对偶线性规划
  - $$\begin{array}{ll} \min & b^T y \\ \text{s.t.} & A^T y \ge c,\ \ y \ge 0 \end{array}$$

例4

写出下述线性规划的对偶

$$\max\ 2x_1-x_2+3x_3$$

$$\text{s.t.}\ \ x_1+3x_2-2x_3\le 5$$

$$-x_1-2x_2+x_3=8$$

$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0,\ x_3\ \text{任意}$$

对偶规划为

$$\min\ 5y_1+8y_2'-8y_2''$$

$$\text{s.t.}\ \ y_1-y_2'+y_2''\ge 2$$

$$3y_1-2y_2'+2y_2''\ge -1$$

$$-2y_1+y_2'-y_2''\ge 3$$

$$2y_1-y_2'+y_2''\ge -3$$

$$y_1\ge 0,\ y_2'\ge 0,\ y_2''\ge 0$$

令 $x_3=x_3'-x_3''$,

$A=B$ 等价于 $A\le B$ 和 $-A\le -B$,

$$\max\ 2x_1-x_2+3x_3'-3x_3''$$

$$\text{s.t.}\ \ x_1+3x_2-2x_3'+2x_3''\le 5$$

$$-x_1-2x_2+x_3'-x_3''\le 8$$

$$x_1+2x_2-x_3'+x_3''\le -8$$

$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0,\ x_3'\ge 0,\ x_3''\ge 0$$

令 $y_2=y_2'-y_2''$, 合并后2个不等式

$$\min\ 5y_1+8y_2$$

$$\text{s.t.}\ \ y_1-y_2\ge 2$$

$$3y_1-2y_2\ge -1$$

$$-2y_1+y_2=3$$

$$y_1\ge 0,\ y_2\ \text{任意}$$

对偶规划的一般形式

原始规划	对偶规划
$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$	$\min \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$
$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i,\ 1 \le i \le s$	$y_i \ge 0,\ 1 \le i \le s$
$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,\ s+1 \le i \le m$	y_i 任意, $s+1 \le i \le m$
$x_j \ge 0,\ 1 \le j \le t$	$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \le c_j,\ 1 \le j \le t$
x_j 任意, $t+1 \le j \le n$	$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = c_j,\ t+1 \le j \le n$

性质

定理5 设 x 是原始规划 (P) 的可行解, y是对偶规划 (D) 的可行解, 则恒有

$$c^Tx \le b^Ty$$

证 $$c^Tx \le (A^Ty)^Tx = y^T(Ax) \le y^Tb = b^Ty$$

定理6 如果 x 和 y 分别是原始规划(P)和对偶规划(D)的可行解, 且 $c^Tx = b^Ty$, 则 x 和 y 分别是它们的最优解.

定理7 如果原始规划(P)有最优解, 则对偶规划(D)也有最优解, 且它们的最优值相等. 反之亦然.

原始规划和对偶规划的解

(1) 都有最优解, 且最优值相等.

(2) 一个有可行解且目标函数值无界, 而另一个无可行解.

(3) 都没有可行解.

		对偶规划		
		有最优解	有可行解且无界	无可行解
原始规划	有最优解	（1）	×	×
	有可行解且无界	×	×	（2）
	无可行解	×	（2）	（3）

整数线性规划的分支限界算法

整数线性规划 在线性规划上对变量增添整数的要求

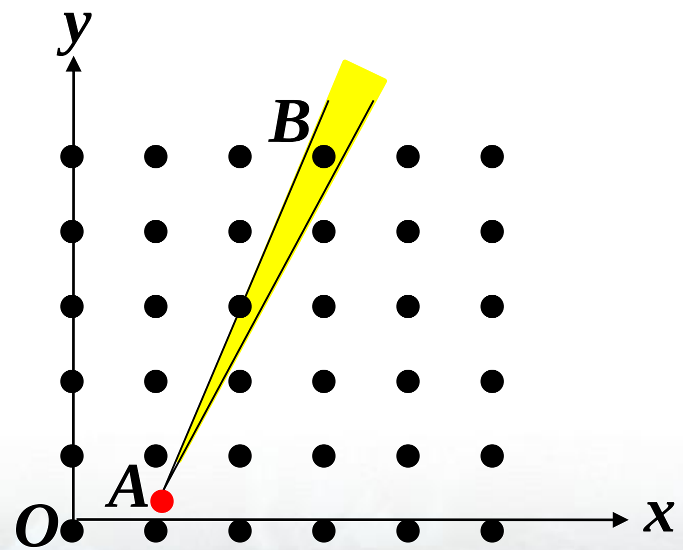
纯整数线性规划(全整数线性规划) 要求所有变量是整数

混合整数线性规划 只要求部分变量是整数

0-1型整数线性规划 要求所有变量是0或1

松弛规划(简称松弛) 删去整数要求后得到的线性规划

松弛规划的最优值是原整数规划的最优值的界限(最小化的下界,最大化的上界), 但通常不是原整数规划的最优解



分支限界法

记整数线性规划为 ILP, 其松弛为 LP. 如果 LP 的最优解α满足整数要求, 则α是 ILP 的最优解.

否则, 设α_1不满足整数要求, 在 LP 上分别添加

$$x_1 \le \lfloor \alpha_1 \rfloor \quad \text{和} \quad x_1 \ge \lfloor \alpha_1 \rfloor + 1,$$

记作 LP_1 和 LP_2. 如果 LP_1 或 LP_2 的最优解符合整数要求, 那么这个解也是 ILP 的可行解, 得到 ILP 的最优值的一个界限 (最小化上界, 最大化下界), 该子问题的计算结束.

如果子问题的最优解不满足整数要求, 则继续分支计算.

如果子问题的最优值超过界限 (最小化大于界限, 最大化小于界限), 则往下计算不可能得到ILP的最优解, 计算结束.

当没有待计算的子问题时, 所有可行解中最好的是 ILP 的最优解.

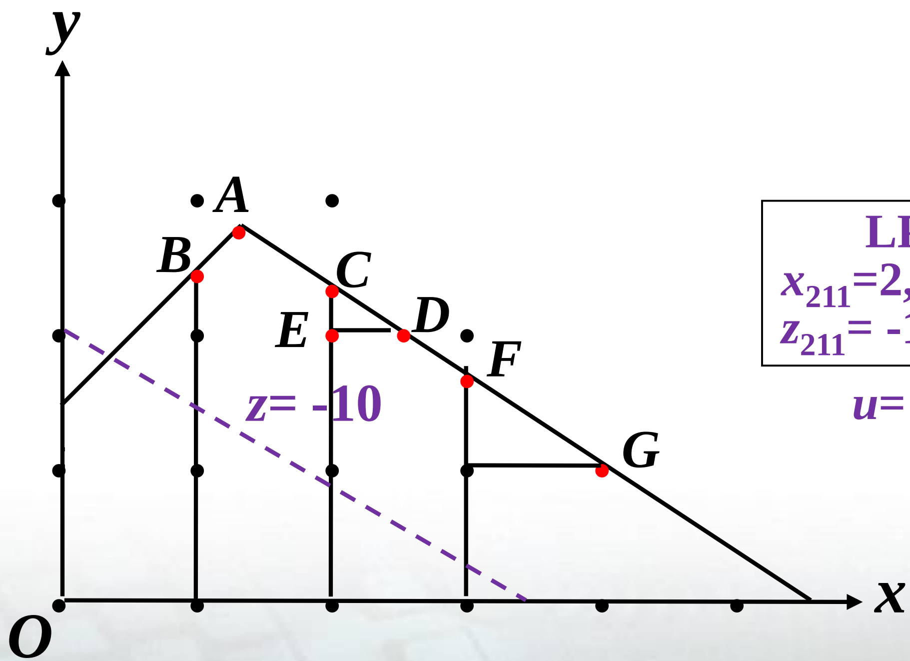
例5

$\min z = -3x-5y$

s.t. $-x + y \le 3/2$

$2x + 3y \le 11$

$x, y \ge 0$, 整数



LP: $x=13/10, y=14/5$, $z= -179/10$ A

$x\le 1$ → **LP$_1$**: $x_1=1, y_1=5/2$, $z_1= -31/2$ B

$x\ge 2$ → **LP$_2$**: $x_2=2, y_2=7/3$, $z_2= -53/3$ C

LP$_2$, $y\le 2$ → **LP$_{21}$**: $x_{21}=5/2, y_{21}=2$, $z_{21}= -35/2$ D

LP$_2$, $y\ge 3$ → **LP$_{22}$**: 无可行解

LP$_{21}$, $x\le 2$ → **LP$_{211}$**: $x_{211}=2, y_{211}=2$, $z_{211}= -16$ E

$u= -16$

LP$_{21}$, $x\ge 3$ → **LP$_{212}$**: $x_{212}=3, y_{212}=5/3$, $z_{212}= -52/3$ F

LP$_{212}$, $y\le 1$ → **LP$_{2121}$**: $x_{2121}=4, y_{2121}=1$, $z_{2121}= -17$ G

$u= -17$

LP$_{212}$, $y\ge 2$ → **LP$_{2122}$**: 无可行解

应用：最小顶点覆盖

- **顶点覆盖问题**

  给定图 $G = (V,E)$，G 的顶点覆盖是顶点子集 $S \subseteq V$, 使得每条边至少有一个端点属于S. 求G的最小的顶点覆盖.

- **转化为线性规划问题**

  令 $V=\{1, 2, \ldots, n\}$，$\forall e \in E$，存在 $i, j \in V$，使得 $e = (i, j)$

  $\forall i \in V$，定义变量 $x_i = 0,1$，且 $x_i = 1 \Leftrightarrow i \in S$

  $\forall e = (i, j) \in E$, $x_i + x_j \geq 1$

$$
\begin{aligned}
&\min \sum_{i \in V} x_i \\
&\text{s.t.} \quad x_i + x_j \geq 1 \qquad (i, j) \in E \\
&\qquad\quad x_i = 0,1 \qquad\quad i \in V
\end{aligned}
$$

北京大学

设计算法

- 顶点覆盖是整数规划问题，属于NP难问题.
- 近似算法的设计思想:

  1. 放松 $x_i = 0,1$的约束条件，令 x_i 为[0,1]区间任意实数，转化为线性规划问题.

  2. 用线性规划算法找到一组 $x_i \in [0,1]$，$i = 1,2,\ldots,n$，使得其和达到最小.

  3. 令 $S = \{ i \mid x_i \geq 1/2 \}$.

- 算法分析

  可以证明上述 S 是 G 的顶点覆盖，且 $|S| \leq 2|S^*|$，其中 S^*为最优解.

应用：负载均衡问题

- 负载均衡问题

给定作业集合$J=\{1, 2, \ldots, n\}$，作业 j 加工时间为 t_j，$j = 1, 2, \ldots, n$. 机器集合 $M =\{1, 2, \ldots, m\}$，对每个作业分配一台机器，作业 j 可分配的机器集合为M_j. J_i是分配到机器 i上的作业集合. 机器 i 的负载是 L_i。设分配方案的负载为L，其中

问题： 求分配方案 使得 L 达到最小。

$$L = \max_{i\in\{1,2,\ldots,m\}} L_i \,, \qquad L_i = \sum_{j\in J_i} t_j$$

转变为线性规划

x_{ij}：任务 j 在机器 i 上的负载

min L

s.t. $\sum_i x_{ij} = t_j \quad \forall j \in J$ 任务j在各机器的负载之和等于加工时间

$\sum_j x_{ij} \le L \quad \forall i \in M$ 任何机器的负载总量不超过 L

$x_{ij} \ge 0 \qquad \forall j \in J, i \in M_j$

- 如果上述线性规划有值不超过 L 的解，那么最优负载的值至少是 L.
- 线性规划的最优解有可能把一个作业分配到多台机器上，即负载是分数. 需要调整这个解，以满足原问题的需求：每个作业只能分配到一台机器上.