北京大学信息科学技术学院考试试卷

考试科目： 集合论与图论 **姓名：** ________ **学号：** ________

得分

一、名词解释（共 20 分，每小题 5 分）

(1) 容斥原理

(2) 皮亚诺系统

(3) 欧拉公式

(4) 中国邮递员问题

得分

二、单项选择题（共 20 分，每小题 2 分）

(1) 设 A,B,C 是集合，则 $B\cap C\subseteq A$ 是 $(A\cup B)\cap C=A$ 的 （　　）

A. 充分条件　　B. 必要条件　　C. 充要条件　　D. 都不对

(2) {a,b,c}上既是等价关系又是偏序关系的二元关系有 （　　）

A. 0 个　　B. 1 个　　C. 2 个　　D. 都不对

(3) 设 A={a,b}，B={1,2}，则{<a,1>,<b,1>}是 A 到 B 的 （　　）

A. 单射　　B. 满射　　C. 双射　　D. 都不对

(4) 下列集合中表示某个自然数的是 （　　）

A. $\{\{\{\varnothing\}\}\}$　　B. $\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\}\}$　　C. $\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$　　D. 都不对

(5) 自然数集不是 （　　）

A. 归纳集　　B. 传递集　　C. 无穷集　　D. 都不对

(6) 竞赛图一定是 （　　）

A. 哈密顿图　　B. 单向连通的　　C. 强连通的　　D. 都不对

(7) n 阶 m 条边的无向连通简单图的基本回路的个数为 （　　）

A. n-1 个　　B. m-n+1 个　　C. m-1 个　　D. 都不对

(8) 互不同构的 3 阶简单有向图有　　　　　　　　　　　　　　　　　　（　　）

A. 15 种　　　　B. 16 种　　　　C. 17 种　　　　D. 都不对

(9) 非平凡的自补的自对偶简单平面图一定不是　　　　　　　　　　　（　　）

A. 欧拉图　　　　B. 哈密顿图　　　　C. 平面图　　　　D. 都不对

(10) 彼得森图是　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（　　）

A. 欧拉图　　　　B. 哈密顿图　　　　C. 平面图　　　　D. 都不对

得分

三、判断题 （共 20 分，每小题 2 分）

(1) 存在唯一的一个最大的集合，称为全集。　　　　　　　　　　（　　）

(2) 空集的广义交集不存在。　　　　　　　　　　　　　　　　　（　　）

(3) 反自反和传递的二元关系一定是反对称的。　　　　　　　　　（　　）

(4) 传递集的后继还是传递集。　　　　　　　　　　　　　　　　（　　）

(5) 图与图之间的同胚关系是等价关系。　　　　　　　　　　　　（　　）

(6) 3-正则简单图的点连通度一定等于边连通度。　　　　　　　　（　　）

(7) 无桥 3-正则简单图一定有完美匹配。　　　　　　　　　　　（　　）

(8) 任何两个奇数长度回路都有公共顶点的简单图，其点色数不超过 5。（　　）

(9) 外平面图的充要条件是不含有同胚或可边收缩到 K_4 和 $K_{2,3}$ 的子图。　（　　）

(10) 无孤立点简单图的顶点覆盖一定是支配集。　　　　　　　　（　　）

得分

四、填空题（共 10 分，每空 2 分）

(1) 自然数 2 的集合表示是______________________________。

(2) 良序关系是______________________________。

(3) 无向欧拉图的充要条件是______________________________。

(4) 简单图有完美匹配的塔特条件是______________________________。

(5) 二部图有完备匹配的霍尔条件是______________________________。

得分

五、（10 分）从自然数集删除有穷个自然数后得到的集合称为补有穷集。试确定全体补有穷集组成的集合的基数，并给出证明。

得分

六、（10 分）用 k 种颜色对 n 阶简单图 G 进行顶点着色，不同着色方法的总数记作 $f(G,k)$。可对 G 的边数 m 进行归纳，来证明 $f(G,k)$是变元 k 的 n 次多项式（称为色多项式），且系数正负交替出现，首项系数为 1，次高项系数为$-m$。试完成以下证明。

(1) 基础步骤

设 m=0，则 $f(G,k)$=

(2) 归纳步骤

任选 G 中一条边 e，删除边 e 后得到的图 $G-e$ 是 n 阶 m-1 条边的简单图，收缩边 e 后得到的图 $G\backslash e$ 是 n-1 阶不超过 m-1 条边的简单图。由归纳假设，可令

$f(G-e,k)$=

$f(G\backslash e,k)$=

其中，

则 $f(G,k)= f(G-e,k) - f(G\backslash e,k)$=

由于

所以系数是正负交替出现的。

由于

所以最高项是 n 次的且系数是 1。

由于

所以次高项系数是$-m$。　证毕。

得分

七、（10 分）证明：设某人群有 9 人，如果其中任意 3 人中至少有 2 人互相认识，则该人群中至少有 4 人互相认识。