音乐与随机过程

Music and Stochastic Process

王 杰

北京大学数学科学学院

2017 – 2018 学年 • 第二学期

教学课件
严禁复制传播

目录

教学课件 严禁复制传播

内容提要

教学课件
严禁复制传播

音乐骰子游戏

Johann Philipp Kirnberger

1721.4.24 – 1783.7.27

德国作曲家，音乐理论家，老巴赫的学生.

教学课件 严禁复制传播

音乐骰子游戏

1757年, 克恩伯格出版了一本名为《小步舞曲和波洛涅兹作曲常备》(*Der allezeit fertige Polonaisen und Menuettencomponist*) 的书. 这大概是最早涉及音乐骰子游戏 (*Musikalisches Würfelspiel*) 的著作.

音乐骰子游戏: 预先准备好若干编了号的音乐片段, 演奏时通过掷骰子来确定选用哪个音乐片段.

教学课件 严禁复制传播

音乐骰子游戏

一段波洛涅兹舞曲共有 14 小节. 克恩伯格为每一个小节写了 11 种不同的旋律. 演奏者一次同时掷两个骰子, 得到 2∼12 之间的一个数字 x_1, 对应于选取第一小节的第 x_1-1 种旋律. 然后用骰子掷出第二个数字 x_2, 选取第二小节的第 x_2-1 种旋律. 以此类推, 直到 14 小节旋律全部确定. 游戏的关键在于克恩伯格精心的设计, 使得后一个小节的 11 种不同旋律都能够很好地与前一小节的任何一种旋律衔接, 才能保证最终得到的乐曲流畅动听.

数学课件 严禁复制传播

音乐骰子游戏

这种音乐骰子游戏在 18 世纪后期的欧洲很流行. 莫扎特、海顿、小巴赫 (C. P. E. Bach) 等都加入其中.

《和声游戏: 无需对位知识便可创作出无穷多小步舞曲和三声中部的简易方法》(Gioco filarmonico o sia maniera facile per comporre un infinito numero de minuetti e trio anche senza sapere il contrapunto), 据说出自海顿之手.

教学课件 严禁复制传播

小步舞曲的三声中部 (海顿？)

数学课件
严禁复制传播

小步舞曲通常采用 A、B、A 曲式, B 段经常使用两支双簧管和一支大管 (basson), 故名“三声中部 (trio)”. 三声中部本身由两部分组成, 每个部分 8 小节.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	72	6	59	25	81	41	89	13
2	56	82	42	74	14	7	26	71
3	75	39	54	1	65	43	15	80
4	40	73	16	68	29	55	2	61
5	83	3	28	53	37	17	44	70
6	18	45	62	38	4	27	52	94

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	36	5	46	79	30	95	19	66
2	76	20	64	84	8	35	47	88
3	9	34	93	48	69	58	90	21
4	22	67	49	77	57	87	33	10
5	63	85	32	96	12	23	50	91
6	11	92	24	86	51	60	78	31

教学课件 严禁复制传播

无穷多?

每一小节有 6 种可能性, 两部分一共 16 小节, 共产生

$$6^{16} = 2,821,109,907,456$$

种不同的乐曲! 如此巨大数目的乐曲都是由区区 96 小节的乐谱产生出来的.

教学课件
严禁复制传播

谁偷了懒?

两部分的第 8 小节所对应的旋律是有重复的:

第一部分 H 列所对应的 6 小节旋律有 3 个是相同的; 第二部分的 H 列有 4 个是相同的. 因此实际可能产生

$$6^{14} \times 4 \times 3 = 940,369,969,152$$

种不同的乐曲. 这仍然是一个巨大的数目.

数学课件
严禁复制传播

不同的概率

对正整数 k: $1 \le k \le 6$, 均匀骰子每次掷出 k 的概率等于 $1/6$.

如果假定海顿给出的 96 小节旋律没有重复, 则最终得到每一种可能的乐曲的概率都等于

$$\frac{1}{6^{16}} = 6^{-16} \approx 0.0000000000003545.$$

数学课件
严禁复制传播

不同的概率

克思伯格的波洛涅兹舞曲共有 14 小节，每一个小节都有 11 种不同的旋律可供选取，因此总共可以产生出

$$11^{14} = 379749833583241$$

种不同的结果.

但是现在需要掷 2 个骰子才能从预先写好的 11 种旋律中确定选取哪一种. 对于正整数 k: $2 \le k \le 12$, 同时掷 2 个骰子产生 k 的概率并非等于$1/11$.

教学课件 严禁复制传播

不同的概率

例如: 只有当两个骰子都是 1 的时候才能得到结果 2, 因此掷出 2 的概率等于 $1/6^2 = 1/36$. 而当两个骰子分别掷出 $(1,3)$, $(3,1)$, $(2,2)$ 时, 最终结果都是 4, 因此掷出 4 的概率等于

$$\frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36}=\frac{1}{12}.$$

换言之, 对于每一个小节, 选取第 3 种旋律的概率比选取第 1 种的要大.

教学课件
严禁复制传播

随机变量与随机事件

当我们掷一个骰子时, 设掷出的点数为 ξ, 则每次得到的 ξ 的值是随机的. 称 ξ 为一个 **随机变量** (random variable). ξ 的取值范围为 $\Omega = \{1, 2, \ldots, 6\}$.

一个随机变量称为 **离散型的**, 如果其可能的取值只有有限多个或者至多可数无穷多个. 例如我们这里的 ξ 就是一个离散型的随机变量.

数学课件 严禁复制传播

随机变量与随机事件

假定骰子是均匀的, 则对任一 $k \in \Omega$, **随机事件** $\xi = k$ 发生的概率都等于 1/6, 记作 $\boldsymbol{P}\{\xi = k\} = 1/6$. 把 ξ 在取值范围内的所有概率列成表

k	1	2	3	4	5	6
$\boldsymbol{P}\{\xi = k\}$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

称为随机变量 ξ 的 **概率分布** (probability distribution).

数学课件 严禁复制传播

随机变量与随机事件

一般地, 对取值范围内任意 $k \in \Omega$, 记随机事件 $\{\xi = k\}$ 发生的概率 $\boldsymbol{P}\{\xi = k\} = p_k$, 则随机变量 ξ 的概率分布满足

(1) $p_k \geq 0,\ \forall k \in \Omega$;

(2) $\displaystyle\sum_{k \in \Omega} p_k = 1.$

数学课件 严禁复制传播

连续型随机变量

如果一个随机变量 ξ 的取值范围 Ω 是实数轴上的一个区间, 则称其为 **连续型的** 随机变量. 这时对于任意一点 $x \in \Omega$, 总有概率 $\boldsymbol{P}\{\xi = x\} = 0$.

对于连续型的随机变量, 其概率分布是由其 **分布函数** 所刻画的. 假设随机变量 ξ 的取值范围是整个实数轴: $\Omega = (-\infty, \infty)$, 则其分布函数 $F(x)$ 定义为

$$F(x) = \boldsymbol{P}\{\xi \le x\}, \ -\infty < x < \infty.$$

数学课件 严禁复制传播

连续型随机变量

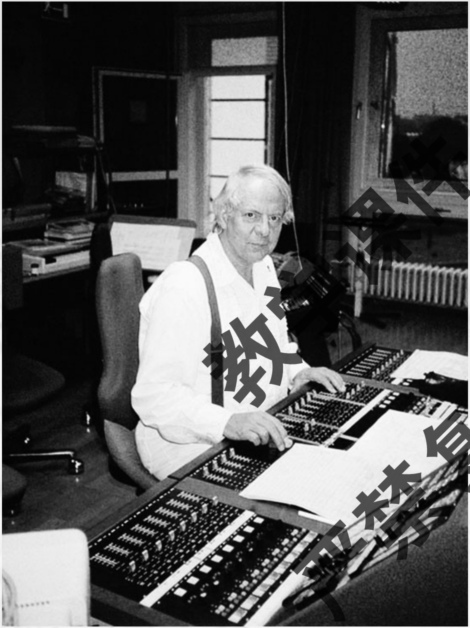
设 ξ 是 $\Omega = (-\infty, \infty)$ 上的连续型随机变量, $F(x)$ 是其分布函数. 如果存在非负函数 $f(x)$ 满足

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt, \quad \forall x \in \Omega,$$

就称 $f(x)$ 是连续型随机变量 ξ 的 **概率密度函数** (probability density function). 这时对于任意实数 $a \le b$, 随机事件 "ξ 的取值落入区间 $[a,b]$" 的概率

$$\boldsymbol{P}\{a \le \xi \le b\} = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\,dt.$$

数学课件 严禁复制传播



Karlheinz Stockhausen

1928.8.22 – 2007.12.5

德国先锋派

(*Avant-garde*) 音乐家

教学课件 严禁复制传播

音乐骰子游戏

Stockhausen 的第 11 钢琴曲 (*Klavierstück XI*, 1956) 是由单独的一张大纸上的 19 个音乐片段构成. 每个片段的末尾标有速度、力度等记号, 但那是对下一个片段的指示. 演奏者可以从任何一个片段开始, 然后选择不同的片段继续演奏下去, 直到某一个片段第三次被选中演奏, 即告曲终.

数学课件
严禁复制传播

组合数学问题

给定正整数 n, r. 包含 k 个片段的演奏可以表示为集合 $\{1, 2, \ldots, n\}$ 上的一个长度为 k 的 **串 (string)**

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_k,\quad x_i \in \{1, 2, \ldots, n\},$$

满足下述条件:

1. 对任意 i: $1 \le i \le k-1$, $x_{i+1} \neq x_i$;
2. 对任意 i: $1 \le i \le k-1$, x_i 出现的次数不超过 r;
3. 最后一个符号 x_k 在串中总共出现 $r+1$ 次.

问一共有多少不同的串以及它们长度 k 的平均值.

数学课件
严禁复制传播

组合数学问题

利用 **生成函数 (generating function)** 的方法可以给出上述问题的一般解. 特别地, 当 $n = 19, r = 2$ 时, 总共有

$$17,423,935,148,332,958,167,310,127,282,862,901,334,594$$

种不同的演奏方式! 其平均长度为 38.0045857, 而 k 的最大值显然等于39.

R. C. Read, Combinatorial problems in the theory of music, *Discrete Mathematics*, **167/168** (1997), 543–551.

数学课件
严禁复制传播

内容提要

教学课件 严禁复制传播

Illiac 组曲

1956～1957 年，美国作曲家 Lejaren Arthur Hiller (1924.2.23 – 1994.1.26) 和化学家 Leonard M. Isaacson 借助 ILLIAC I 计算机完成了一首弦乐四重奏，并将其冠名为伊利亚克组曲 (Illiac Suite for String Quartet). 他们采用了一个包含两个半八度、31 个音级的集合，由计算机产生均匀分布的随机数，进而在集合中随机选取音符，最终完成创作.

ILLIAC = Illinois Automatic Computer

教学课件 严禁复制传播

随机音乐

随机音乐 (stochastic music) 这个词是希腊裔法国作曲家、建筑工程师克赛纳基斯最先使用的. 由于其特殊的教育背景, 克赛纳基斯一直热衷于将数学、物理、建筑等领域的专业知识引入音乐创作.

数学课件
严禁复制传播

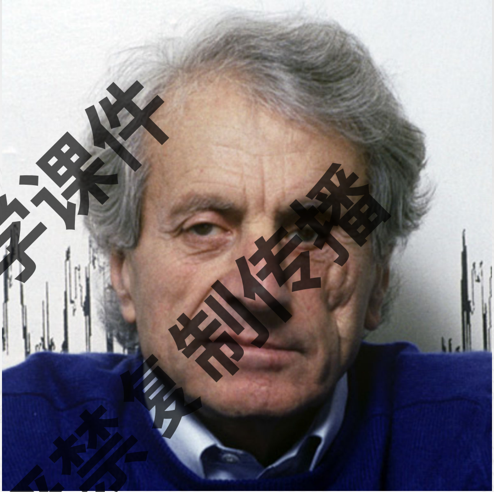
伊阿尼斯·克赛纳基斯

Iannis Xenakis

1922.5.29 –

2001.2.4

希腊裔法国作曲家、建筑工程师



教学课件 严禁复制传播

克赛纳基斯 1922 年出生于罗马尼亚 Braila. 1932 年进入希腊一所寄宿学校. 1938 年毕业后进入国立雅典技术大学学习建筑与工程, 同时学习音乐. 1940 年意大利入侵希腊, 中断了克赛纳基斯的学业. 他加入了左翼的国民解放阵线 (National Liberation Front, EAM), 反抗德国和意大利占领, 后加入希腊人民解放军.

1944 年 12 月在战斗中受重伤, 左眼失明. 1947 年从技术大学毕业. 但是由于右翼势力掌权, 克赛纳基斯被迫逃亡巴黎. 此后他被右翼政权缺席判处死刑.

在巴黎, 克赛纳基斯为 Le Corbusier 的建筑设计室做工程助理, 同时希望继续学习音乐.

教学课件 严禁复制传播

教学课件
严禁复制传播

梅西安 (Olivier Messiaen, 1908.12.10 – 1992.4.27), 法国作曲家.

梅西安

You have the good fortune of being Greek, of being an architect and having studied special mathematics. Take advantage of these things. Do them in your music.

1959 年, 克赛纳基斯离开了 Le Corbusier 的建筑设计室, 专门从事作曲和教学.

教学课件 严禁复制传播

The Crisis of Serial Music

线性的复调音乐被其自身高度发达的复杂性毁掉了，人们实际听到的只是不同音区的一大堆音符. 对于听众, 巨大的复杂性使得他们无法理解声线之间的缠绕, 最终的宏观效果就变成了分散在整个声音谱系上的、毫无逻辑的偶发声响. 这就是复调线性系统与实际听到的结果之间的矛盾.

数学课件
严禁复制传播

The Crisis of Serial Music

但是如果把互不相干的声音整合起来，复调音乐固有的这个矛盾就不复存在了. 事实上，当多声部的线性组合与叠加不再起作用时，在每一个给定时刻的孤立状态和声音成分的变换就变得不重要了，起作用的将是它们的统计均值. 我们可以通过选取音乐进程的均值来控制其微观效果. 于是需要引入概率论和组合计算的思想. 这也是在音乐思想上逃离“线性范畴 (linear category)”的可能路径.

Gravesaner Blätter **1** (1955), 2–4.

教学课件 严禁复制传播

《变形》 (*Metastasis*, 1953 – 1954)

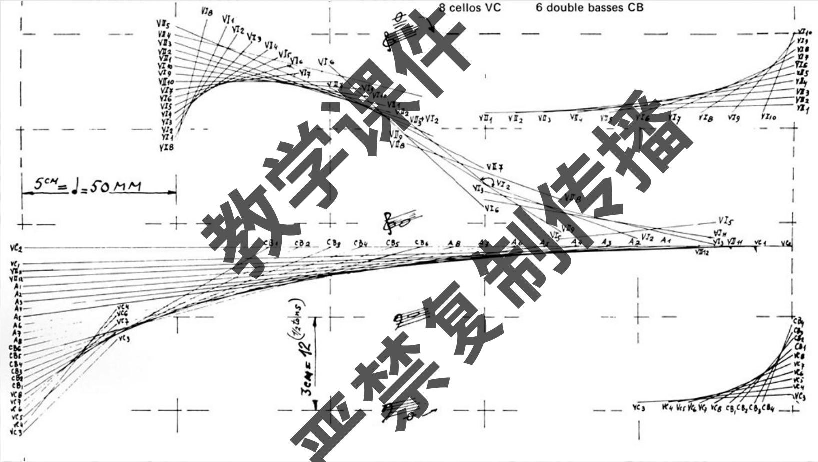
管弦乐《变形》 (*Metastasis*) 由 61 人演奏, 其中有 46 件弦乐器. 每一件弦乐器演奏一个不同的声部.

在弦乐和铜管乐部分有大量的滑奏 (*glissandi*), 要求演奏者从某一音级出发, 滑过所有经过的频率, 直到另一个音级. 这样就把通常离散的乐音体系扩展成包含若干频率段的无限集合.

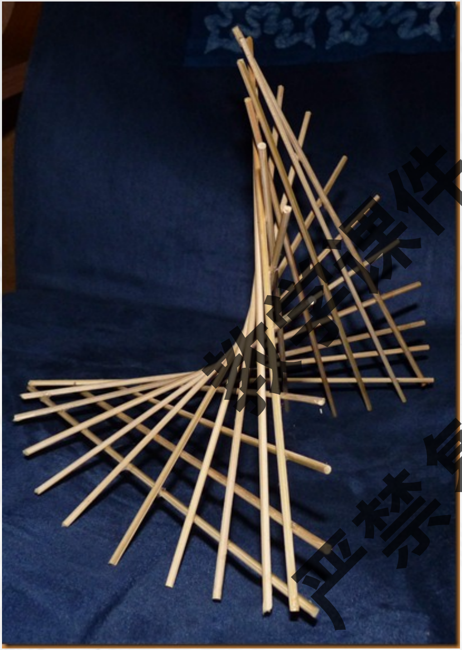
在乐谱上, 表示滑奏的这些直线可以构成 **直纹面**. 直线的斜率反映了滑奏时频率变化的速度.

数学课件 严禁复制传播

《变形》



教学课件
严禁复制传播



双曲抛物面

Hyperbolic paraboloid

直纹面

ruled surface

数院课件 严禁复制传播

Philips Pavilion

1958

Brussels

World

Fair

教学课件
严禁复制传播

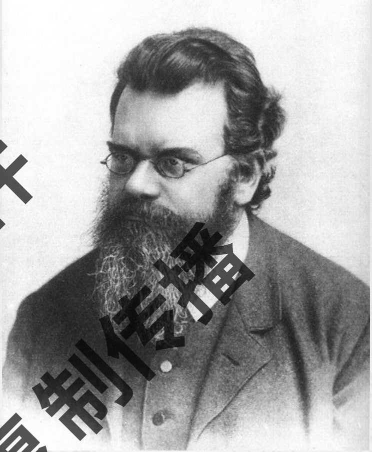
气体分子运动理论

在完成 *Metastasis* 之后，克赛纳基斯开始致力于发展随机音乐.

气体分子运动理论 (kinetic theory of gases)：在一个固定容器内的理想气体包含大量的气体分子，每个分子都在不停地做无规则的运动，即某一个分子在任意一个时刻的速度都是随机的．但是容器中气体分子总体的速度分布遵循 Maxwell-Boltzmann 分布.

气体的压力、温度等宏观特性是由大量分子独立的随机运动产生的．例如，气体的温度反映了分子运动总体的剧烈程度.

数学课件 严禁复制传播



James Clerk Maxwell

1831.6.13 – 1879.11.5

苏格兰科学家

Ludwig Eduard Boltzmann

1844.2.20 – 1906.11.5

奥地利物理学家

教学课件 严禁复制传播

《概率之动》

克赛纳基斯把这个理论模型平移到音乐创作中. 1955～1956 年, 他创作了《概率之动》(*Pithoprakta*, actions through probability). 乐曲使用了 46 件弦乐器, 每一件弦乐器演奏一个不同的声部; 2 支长号, 木琴, 木鱼 (wood block).

克赛纳基斯把每一件弦乐器当作一个气体分子, 把弦乐器在一定音区内的滑奏当作是分子的随机运动. 他事先给出了对声音效果的三个整体要求: 弦乐器滑奏的速度应该是均匀分布的; 其速度的密度应该等于常数; 在任何一个音域内, 上升和下降的声音数目应该相等.

数学课件
严禁复制传播

This chain of reasoning borrowed from Paul Lévy was established after Maxwell, who, with Boltzmann, was responsible for the kinetic theory of gases. The function $f(v)$ gives the probability of the speed v; the constant a defines the "temperature" of this sonic atmosphere. The arithmetic mean of v is equal to $a/\sqrt{\pi}$, and the standard deviation is $a/\sqrt{2}$.

We offer as an example several bars from the work *Pithoprakta* for string orchestra (Fig. I–6), written in 1955–56, and performed by Prof. Hermann Scherchen in Munich in March 1957.[4] The graph (Fig. I–7) represents a set of speeds of temperature proportional to $a = 35$. The abscissa represents time in units of 5 cm = 26 MM (Mälzel Metronome). This unit is subdivided into three, four, and five equal parts, which allow very slight differences of duration. The pitches are drawn as the ordinates, with the unit 1 semitone = 0.25 cm. 1 cm on the vertical scale corresponds to a major third. There are 46 stringed instruments, each represented by a jagged line. Each of the lines represents a speed taken from the table of probabilities calculated with the formula

$$f(v) = \frac{2}{a\sqrt{\pi}} e^{-v^2/a^2}.$$

A total of 1148 speeds, distributed in 58 distinct values according to Gauss's law, have been calculated and traced for this passage (measures 52–60), with a duration of 18.5 sec.). The distribution being Gaussian, the macroscopic configuration is a plastic modulation of the sonic material. The same passage was transcribed into traditional notation. To sum up we have a sonic compound in which:

1. The durations do not vary.
2. The mass of pitches is freely modulated.
3. The density of sounds at each moment is constant.
4. The dynamic is *ff* without variation.
5. The timbre is constant.
6. The speeds determine a "temperature" which is subject to local fluctuations. Their distribution is Gaussian.

As we have already had occasion to remark, we can establish more or less strict relationships between the component parts of sounds.[5] The most useful coefficient which measures the degree of correlation between two variables x and y is

$$r = \frac{\sum (x - \bar{x})(y - \bar{y})}{\sqrt{\sum (x - \bar{x})^2}\sqrt{\sum (y - \bar{y})^2}},$$

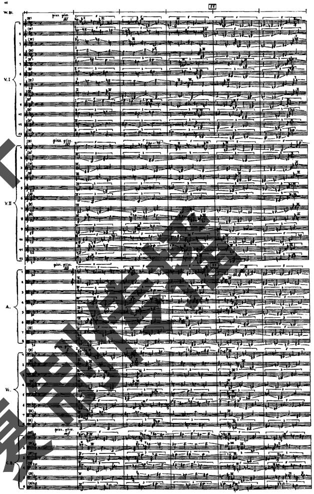


Fig. I–6. Bars 52–57 of *Pithoprakta*

Formalized Music: Thought and mathematics in composition (Revised Edition), 1992, Pendragon Press, Stuyvesant, NY

数学课件 严禁复制传播

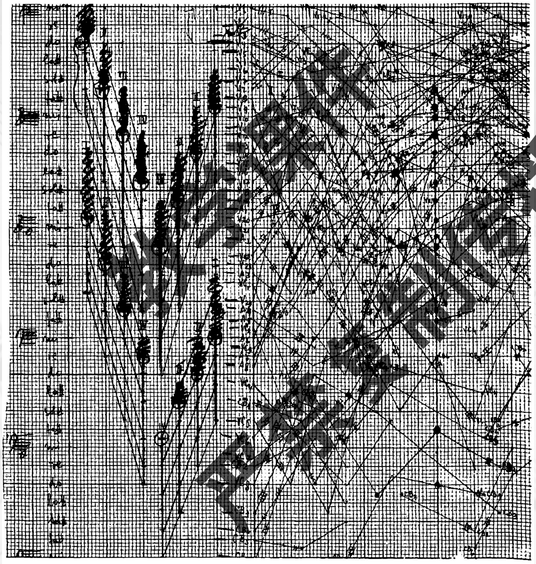
《概率之动》

在上述三个条件下, 克赛纳基斯推导出每个分子运动 (弦乐器滑奏) 速度 v 的分布满足 Gauss 正态分布 (normal distribution) 的概率密度函数. 他假定 "温度" $a = 35$, 为每一个 "分子" 设计随机运动的轨迹, 最终得到的乐曲就从整体上满足预设的条件.

乐曲的第 52-60 小节历时 18.5 秒, 克赛纳基斯为此从 58 个不同的值出发, 计算了 1148 个速度. 他把用这种方法产生的声音复合体称作 "音云" (clouds of sounds).

数学课件 严禁复制传播

《概率之动》中的随机运动



北大课件 严禁复制传播

UPIC 系统 (1970 年代中期)

UPIC 是一个计算机辅助作曲系统. 与众不同的是, 它不是通过输入音符, 而是通过输入图像来作曲的.

数学课件
严禁复制传播


Upic
File Page Edit Draw View Change Sound Window Help
~page1
wavetb
envelope
freqtb
seq
00:00:07.66
1790.49 Hz

教学课件
严禁复制传播

机器作曲・人工智能

1 音乐骰子游戏

2 随机音乐

3 机器作曲・人工智能

- 马尔科夫链
- 遗传算法

4 有色彩的噪声、$1/f$ 音乐

教学课件
严禁复制传播

马尔科夫链

从概率论的角度，可以把音乐看作是一个随机过程.

假设 $\{\xi_t \mid t = 0, 1, 2, \ldots\}$ 是一个离散型随机变量的序列，每个随机变量 ξ_t 都具有相同的取值范围 Ω. 这个随机变量的序列就构成一个 **随机过程** (stochastic process).

通常把 Ω 称作 ξ_t 的 **状态空间**.

数学课件 严禁复制传播

Андре́й

Андре́евич

Ма́рков

Andrey Andreyevich

Markov

1856.6.14 – 1922.7.20

俄罗斯数学家

数学课件
严禁复制传播

定　义

设 $\{\xi_t \mid t=0,1,2,\ldots\}$ 是一个随机过程, Ω 是其状态空间. 如果对于任意正整数 n 和 $n+2$ 个状态 $k_0, k_1, \ldots, k_{n-1}, x, y \in \Omega$, 总有 **条件概率** (conditional probability)

$$\boldsymbol{P}\{\xi_{n+1}=y \mid \xi_0=k_0, \xi_1=k_1, \ldots, \xi_{n-1}=k_{n-1}, \xi_n=x\}$$

$$=\boldsymbol{P}\{\xi_{n+1}=y \mid \xi_n=x\},$$

就称这个随机过程具有 **马尔科夫性质** (Markov property).

数学课件
严禁复制传播

马尔科夫链

具有马尔科夫性质的随机过程称为 **马尔科夫链** (Markov chain).

马尔科夫性质说明, 移动到下一个状态 $\{\xi_{n+1} = y\}$ 的概率只与当前状态 $\{\xi_n = x\}$ 有关, 与所有过去的状态

$$\{\xi_t = k_t \mid 0 \leq t \leq n-1\}$$

都没有关系 — **无记忆性** (memorylessness):

遗忘过去, 把握现在, 影响将来

数学课件 严禁复制传播

时齐马尔科夫链

一个马尔科夫链称为是 **时间齐次的** (time-homogeneous), 如果对任意 $x, y \in \Omega$, 相应的条件概率不随时间变化, 即对任意 $t > 0$, 总有

$$\boldsymbol{P}(\,\xi_{t+1} = y \mid \xi_t = x\,) = \boldsymbol{P}(\,\xi_t = y \mid \xi_{t-1} = x\,).$$

这时可以用一个矩阵来刻画马尔科夫链的行为.

数学课件
严禁复制传播

设状态空间 Ω 是一个有限集合. 对于意 $k_i, k_j \in \Omega$, 记条件概率

$$\boldsymbol{P}\{\, \xi_{t+1} = k_j \mid \xi_t = k_i \,\} = p_{ij},$$

称作从状态 $\{\, \xi_t = k_i \,\}$ 到 $\{\, \xi_{t+1} = k_j \,\}$ 的 **转移概率** (transition probability). $n \times n$ 级方阵

$$P = (p_{ij}) = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ & \cdots & \cdots & \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix},$$

称为这个马尔科夫链的 **转移概率矩阵**.

教学课件 严禁复制传播

对任意 i: $1 \le i \le n$, 矩阵 P 的第 i 行元素

$$p_{i1}, \ p_{i2}, \ \cdots, \ p_{in}$$

分别为事件 $\{\xi_t = k_i\}$ 条件下状态 $\{\xi_{t+1} = k_j\}$ $(1 \le j \le n)$ 出现的概率, 因此有

$$\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1,$$

即转移概率矩阵 P 的每一行元素之和都等于 1.

有了转移概率矩阵 P, 只要给定当前状态 $\{\xi_t = k_i\}$, 下一个状态 ξ_{t+1} 的概率分布就确定了, 就等于 P 的第 i 行.

数学课件
严禁复制传播

马尔科夫链

给定包含 n 个音级的有限集合 Ω 和一个转移概率矩阵 P. 从任意一个初始音级 $\xi_0 = k_0 \in \Omega$ 出发. 这时尽管下一个音级 ξ_1 不确定, 但是其概率分布已经由 P 确定了, 从而可以根据这个概率分布随机地选定下一个音级 $\xi_1 = k_1$. 而一旦选定了 k_1, 再下一个音级 ξ_2 的概率分布又确定了, 便可依照这个概率分布随机选定第三个音级 $\xi_2 = k_2$. 依此做下去, 就可以得到一段随机旋律了.

教学课件
严禁复制传播

《鸿雁》

其中总共出现了 8 个音级. 假定我们只考虑音高, 不区分相同音高但时值不同的音符, 就得到状态空间

$$\Omega = \{\mathrm{D},\ \mathrm{E},\ \mathrm{G},\ \mathrm{A},\ \mathrm{B},\ \mathrm{D}',\ \mathrm{E}',\ \mathrm{G}'\}.$$

教学课件 严禁复制传播

在乐谱中, 第一个音级是 B. 紧跟在 B 后面的音级共有 4 个 G, 1 个 A, 1 个 E. 把这个统计结果排成一行, 就得到

	D	E	G	A	B	D′	E′	G′
B	0	1	4	1	0	0	0	0

由于 B 一共出现了 6 次, 把跟随其后出现的各个音级的次数分别除以 6, 就得到在状态 B 条件下转移到下一个状态的概率分布

	D	E	G	A	B	D′	E′	G′
B	0	1/6	2/3	1/6	0	0	0	0

数学课件严禁复制传播

统计出在其他 7 个状态下的转移概率分布, 得到下述结果

	D	E	G	A	B	D′	E′	G′
D	0	2/3	0	0	0	1/3	0	0
E	3/5	0	0	0	2/5	0	0	0
G	0	3/4	0	1/4	0	0	0	0
A	0	0	0	0	1/3	2/3	0	0
B	0	1/6	2/3	1/6	0	0	0	0
D′	0	0	0	0	1/2	0	1/2	0
E′	0	0	0	1/5	0	1/5	1/5	2/5
G′	0	0	0	0	0	0	1	0

数学课件 严禁复制传播

进而得到所求的转移概率矩阵

$$P=\begin{pmatrix} 0 & 2/3 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 3/5 & 0 & 0 & 0 & 2/5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3/4 & 0 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/6 & 2/3 & 1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/5 & 0 & 1/5 & 1/5 & 2/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

数学课件
严禁复制传播

Frederick Phillips

Brooks

1931.4.19 –

美国计算机科学家

1999 年图灵奖

(Turing Award)

得主

教学课件

马尔科夫链

Brooks 和他在 Harvard 的同事选取了 37 首 4/4 拍的赞美诗 (common meter hymn tunes), 建立起 4 个八度的乐音体系, 同时把每首曲子分成若干个八分音符的单位, 统计不同音级之间的转移概率, 在此基础上构造出转移概率矩阵. 然后运用由这些统计结果确定的 Markov 链来生成新的乐曲.

F. Brooks, A. Hopkins, P. Neumann, W. Wright, An Experiment in Musical Composition, *IRE Transactions on Electronic Computers*, **Vol. EC-6** (1957), 175 – 182.

数学课件
严禁复制传播

高阶马尔科夫链

设 m 是一个正整数, 如果把马尔科夫性质放宽为对任意 $n > m$

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{P}\{\,\xi_{n+1} = y \mid \xi_0 = k_0, \xi_1 = k_1, \ldots, \xi_{n-1} = k_{n-1}, \xi_n = x\,\} \\
&= \boldsymbol{P}\{\,\xi_{n+1} = y \mid \xi_{n-m+1} = k_{n-m+1}, \ldots, \xi_{n-1} = k_{n-1}, \xi_n = x\,\},
\end{aligned}
$$

即移动到下一个状态 $\{\,\xi_{n+1} = y\,\}$ 的概率只与过去的 m 个状态有关, 就称相应的随机过程是一个 **m 阶的**马尔科夫链 (Markov chain of order m).

教学课件
严禁复制传播

高阶马尔科夫链

用 2 阶马尔科夫链分析乐曲, 就是要考虑先后出现两个音级之后, 转移到第三个音级的概率分布. 布鲁克斯等人在其实验中曾经采用过高达 8 阶的马尔科夫链.

F. Brooks, A. Hopkins, P. Neumann, W. Wright, An Experiment in Musical Composition, *IRE Transactions on Electronic Computers*, **Vol. EC-6** (1957), 175 – 182.

Gareth Loy, *Musimathics: The Mathematical Foundations of Music*, Volume I, The MIT Press, Cambridge, 2006, §9.19.

教学课件 严禁复制传播

《鸿雁》的 Markov 链

教学课件 严禁复制传播

机器作曲·人工智能

1. 音乐骰子游戏
2. 随机音乐
3. 机器作曲·人工智能
    - 马尔科夫链
    - 遗传算法
4. 有色彩的噪声、$1/f$ 音乐

教学课件
严禁复制传播

遗传算法

遗传算法 (Genetic algorithm) 是模拟生物进化中的遗传、变异和自然选择过程的一种搜索全局最优解的方法.

遗传算法的出发点是由若干 **个体 (individuals)** 组成的 **种群 (population)**. 例如由若干乐曲片段构成的种群.

教学课件
严禁复制传播

遗传算法

遗传算法要对这些个体进行 **交叉 (crossover, 交换)**, 变异 **(mutation, 突变)** 等操作, 使它们“进化”, 产生下一代种群.

根据音乐本身的性质要求事先设定 **适应度函数 (fitness function)**, 用以衡量进化结果.

遗传算法不断迭代, 直到产生需要的进化结果 (令人满意的乐曲片段), 或者达到预设的迭代次数.

数学课件 严禁复制传播

基因编码

考虑两个八度的乐音体系 C_4 —C_6, 共 25 个音级. 将其分别用 1, 2, ..., 25 编号.

再假定乐曲乐曲中时值最短的是十六分音符, 则可将音符的时值编码为

	全音符	二分音符	四分音符	八分音符	十六分音符
编码	16	8	4	2	1

教学课件
严禁复制传播

《鸿雁》的数字基因 (digital genome)

C_4	D_4	E_4	F_4	G_4	A_4	B_4	C_5	D_5	E_5	F_5	G_5	A_5	B_5	C_6
1	3	5	6	8	10	12	13	15	17	18	20	22	24	25

[12,4], [8,2], [5,2], [3,8], [15,4], [17,2], [20,2], [17,8],

[17,4], [15,2], [12,2], [8,2], [10,2], [15,2], [12,2], [10,16],

[15,4], [17,2], [20,2], [17,8], [10,2], [12,2], [8,2], [5,2], [3,6], [5,2],

[12,4], [8,2], [5,2], [3,2], [5,2], [12,4], [5,16].

数学课件 严禁复制传播

进化操作

假定一个小节为一个个体 (individual).

交叉 (crossover): 交换两个个体的基因片段, 产生两个新的个体

[17,4],[15,2],[12,2],[8,2],[10,2],[15,2],[12,2] [12,4],[8,2],[5,2],[3,2],[5,2],[12,4]

$\Downarrow$

[12,4],[8,2],[12,2],[8,2],[10,2],[15,2],[12,2] [17,4],[15,2],[5,2],[3,2],[5,2],[12,4]

数学课件 严禁复制传播

进化操作

变异 (**mutation**): 随机改变一个个体的某一点基因, 产生一个新的个体

[17,4],[15,2],[12,2],[8,2],[10,2],[15,2],[12,2]

$$\Downarrow$$

[17,4],[15,2],[12,2],[7,4],[10,2],[15,2],[12,2]

问题: 时值 (节奏) 调整

数学课件 严禁复制传播

适应度函数

对于每一个可能的个体 i, 定义一个说明其“好坏”的值 (适应度, fitness) $f(i)$. 算法根据每个个体的适应度来选取产生下一代的亲本.

难题: 如何度量一段音乐的好坏?

人机交互、机器学习 ………

数学课件 严禁复制传播

进化策略

- 部分适应度高的个体直接进入下一代;
- 进化操作中交叉和变异各自所占比例预先给定;
- 增加进化操作的种类: 移调、倒影、逆行 ·········

Gerhard Nierhaus, Algorithmic Composition: Paradigms of automated music generation, Springer-Verlag, Wien, 2009

教学课件
严禁复制传播

内容提要

教学课件 严禁复制传播

有色彩的噪声、$1/f$ 音乐

音符的高低起伏形成了无数美妙的旋律，海水潮涨潮落是人们熟知的自然现象，股票价格的涨跌则是社会经济形势的一个重要指标. 这三件看似毫无关联的事情有一个共同点，它们都可以产生上下波动的数量序列. 如果把潮位、股价、音高都看作是随机变量的取值，那么三者都可以被看做是一个 **随机序列 (stochastic sequence)**.

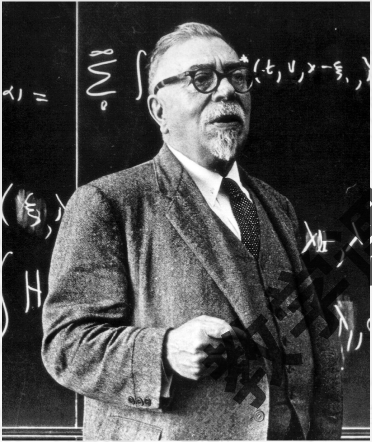
教学课件
严禁复制传播

有色彩的噪声、$1/f$ 音乐

乐音可以通过傅里叶级数分解成泛音列. 但如果把乐曲当作一个随机序列, 则其样本函数通常并不满足绝对可积条件, 从而无法通过求它的傅里叶级数对其进行频谱分解.

随机序列的平均功率一般总是有限的, 因此我们可以分析它的 **功率谱**, 即随机序列的平均功率沿频率轴的分布.

教学课件
严禁复制传播



Norbert Wiener (1894.11.26 – 1964.3.18), 美国数学家、哲学家

Александр Яковлевич Хинчин (1894.7.19 – 1959.11.18), 苏联数学家

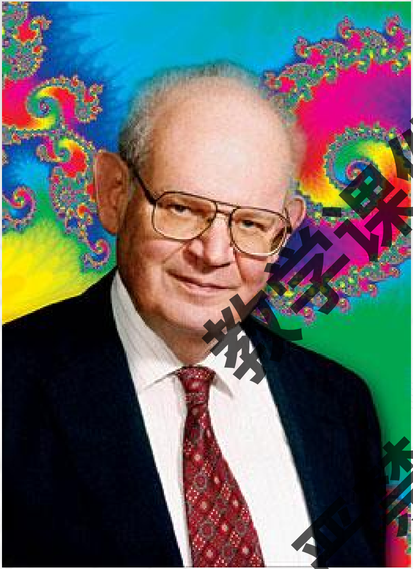
严禁复制传播

维纳—辛钦定理

序列的功率谱等于随机序列 **自相关函数** (autocorrelation function) 的傅里叶变换.

自相关函数反映了随机序列的 **自相似性** (self-similarity).

教学课件 严禁复制传播



Benoit B. Mandelbrot

1924.11.20 – 2010.10.14

出生于波兰华沙

数学家

首先提出分形 (fractle)

的概念

教学课件
严禁复制传播

无标度 (scaling)

如果用录音机录制了一段小提琴曲, 然后用更快或者更慢的速度回放 (scaling) 这段乐曲, 小提琴的声音就会变得不像小提琴了. 然而还有一种声音, 用不同的速度回放其录音, 听上去与原来的声音完全一样, 除非必要时调节一下音量.

无标度与自相似性紧密相连.

巴赫: Toccata and Fugue in D minor, BWV 565 (管风琴)

数学课件
严禁复制传播

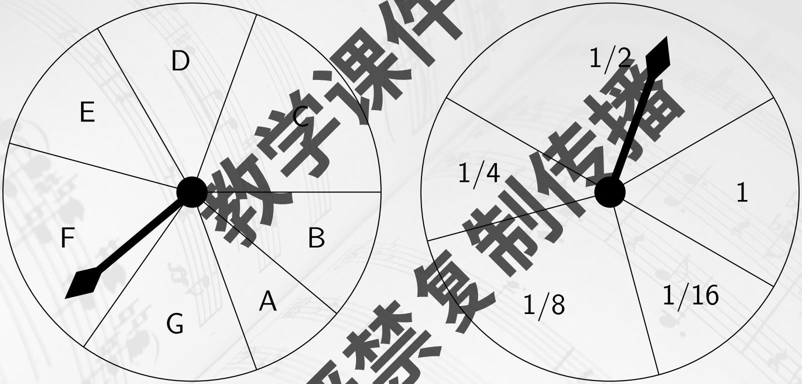
有色彩的噪声、$1/f$ 音乐

无标度噪声 的数学特征就是其功率谱等于常数，即这种声音在各个频率上的平均功率都相等.

白噪声 (white noise) 是一种无标度噪声，其自相关函数除去原点以外总是等于 0. 换言之，在任一时刻，随机变量取值的涨落与前一个状态无关.

数学课件
严禁复制传播

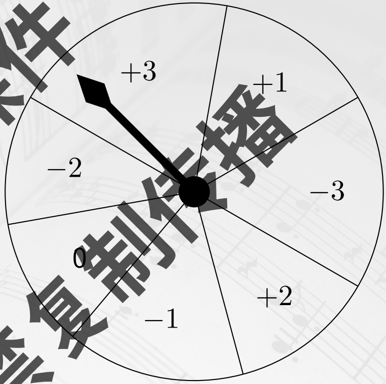
White Music



数学课件 严禁复制传播

Brown Noise

这个方法的关键在于每次转动指针都是一次 **独立事件**, 所得到的结果与前一次转出的结果没有任何关系, 故其自相关函数的值等于 0. 右图的圆盘就不同了.



产生棕色噪声的圆盘

数学课件
严禁复制传播

布朗运动

Robert Brown

1773.12.21 – 1858.6.10

苏格兰植物学家

教学课件 严禁复制传播

有色彩的噪声、$1/f$ 音乐

白噪声的功率谱密度在频率 f 轴上是一个常数, 即等于

$$\frac{1}{f^0},$$

棕色噪声具有较强的自相关性, 其功率谱密度反比于频率的平方

$$\frac{1}{f^2}.$$

数学课件 严禁复制传播

有色彩的噪声、$1/f$ 音乐

美国物理学家 Richard F. Voss 和 J. Clarke 对各种音乐和语言信号进行了分析研究.

Richard F. Voss, J. Clarke, $1/f$ noise in music and speech, *Nature* **258** (1975), 317–318.

Richard F. Voss, J. Clarke, $1/f$ noise in music: Music from $1/f$ noise, *Journal of the Acoustical Society of America*, **63 (1)** (1978), 258–263.

数学课件 严禁复制传播

有色彩的噪声、$1/f$ 音乐

他们发现了一个有趣的现象：不论是包括巴赫的勃兰登堡协奏曲 (Brandenburg Concerto) 在内的古典音乐，还是爵士、布鲁斯 (blues, 蓝调)、摇滚，甚至是播报新闻和谈话类节目，其信号的功率谱密度均在下述范围内变动

$$\frac{1}{f^\gamma}, \qquad 0.5 \lesssim \gamma \lesssim 1.5.$$

教学课件
严禁复制传播

有色彩的噪声、$1/f$ 音乐

自然界有大量的现象呈现出 $1/f$ 规律: 太阳黑子的变化, 每年泛滥时节的洪水水位, 股票价格指数的涨跌, 心跳等等.

Benoit B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature*, W. H. Freeman, New York, 1977.

$1/f$ 噪声称作 **粉噪声 (pink noise)**.

教学课件 严禁复制传播

如何产生 $1/f$ 音乐？

假定要从 16 个音级中随机选取 8 个音符. 不妨设这 16 个音级为

$$\mathrm{C},\ \sharp\mathrm{C},\ \ldots,\ \mathrm{C}',\ \sharp\mathrm{C}',\ \mathrm{D}',\ \sharp\mathrm{D}'.$$

现在需要用红、绿、蓝三个骰子，它们掷出的点数范围为 3～18，分别对应于上述 16 个音级. 第一步先把 0 — 7 表成二进制，给每一列分配一种颜色

	蓝	绿	红
0	0	0	0
1	0	0	1
2	0	1	0
3	0	1	1
4	1	0	0
5	1	0	1
6	1	1	0
7	1	1	1

数学课件
严禁复制传播

如何产生 $1/f$ 音乐？

开始时，同时掷三个骰子，按照得到的点数之和选取相应的音符.

选取第二个音符时，因为从 0 到 1 的二进制只改变了最低比特，所以保持蓝色和绿色的骰子不动，只掷红色骰子，将得到的点数与其他两个骰子原来的点数相加，得到相应的第二个音符.

教学课件 严禁复制传播

如何产生 $1/f$ 音乐?

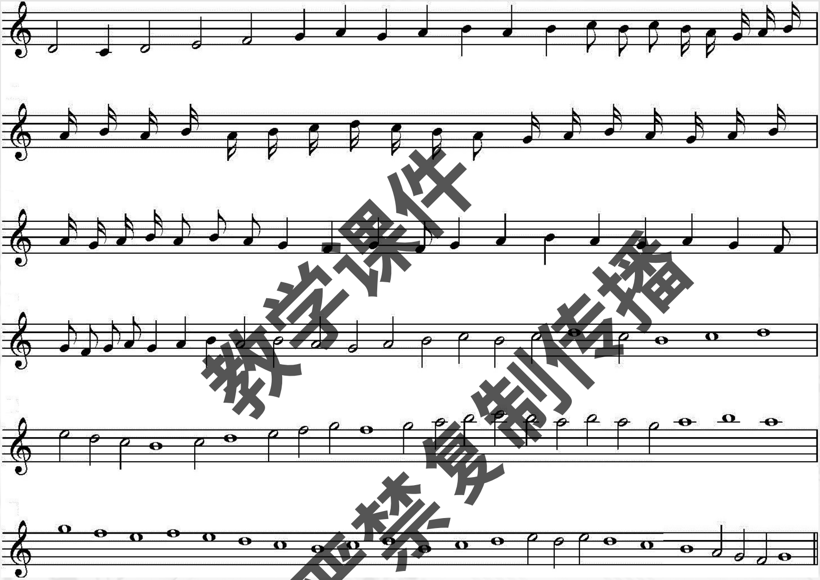
选取第三音符时, 从 1 到 2 的二进制改变了两比特, 因此仍旧保持蓝色骰子不动, 掷绿色和红色骰子, 将得到的结果与蓝色骰子一直没有变过的点数相加, 得到相应的第三个音符.

一直这样做下去, 直到 8 个音符全都选定. 例如选取第五个音符时, 因为从 3 到 4 的二进制三个比特都改变了, 所以需要掷三个骰子.

数学课件
严禁复制传播

白色音乐

数学课件 严禁复制传播



棕色音乐

教学课件 严禁复制传播

粉色音乐 (1/f 音乐)

数学课件 严禁复制传播