引理5

定义 设 f 是N上的一个可行流, g是$N(f)$上的一个可行流, 定义 $f' = f + g$ 如下: $\forall <i,j> \in E$,

$$f'(i,j) = f(i,j) + g(i,j) - g(j,i)$$

规定 $<i,j> \notin E(f)$时, $g(i,j) = 0$.

引理5 设 f 是N上的一个可行流, g是$N(f)$上的一个可行流, 则 $f + g$是 N上的可行流, 且$v(f+g) = v(f) + v(g)$.

证 容量限制. $\forall <i,j> \in E$,

$$0 \le g(i,j) \le c(i,j) - f(i,j) \qquad (1)$$

$$0 \le g(j,i) \le f(i,j) \Rightarrow -f(i,j) \le -g(j,i) \le 0 \qquad (2)$$

(1)+(2) $\quad -f(i,j) \le g(i,j) - g(j,i) \le c(i,j) - f(i,j)$

$+f(i,j)$ $\quad 0 \le f'(i,j) = f(i,j) + g(i,j) - g(j,i) \le c(i,j)$

引理5（续）

平衡条件 $\forall i \in E-\{s,t\}$,

$$\sum_{<j,i>\in E} f'(j,i) = \sum_{<j,i>\in E} \{f(j,i)+g(j,i)-g(i,j)\}$$

$$= \sum_{<j,i>\in E} f(j,i) + \underline{\sum_{\substack{<j,i>\in E(f)\\ \wedge <j,i>\in E}} g(j,i) - \sum_{\substack{<i,j>\in E(f)\\ \wedge <j,i>\in E}} g(i,j)}$$

流入 i

$$\sum_{<i,j>\in E} f'(i,j) = \sum_{<i,j>\in E} \{f(i,j)+g(i,j)-g(j,i)\}$$

$$= \sum_{<i,j>\in E} f(i,j) + \underline{\sum_{\substack{<i,j>\in E(f)\\ \wedge <i,j>\in E}} g(i,j) - \sum_{\substack{<j,i>\in E(f)\\ \wedge <i,j>\in E}} g(j,i)}$$

从 i 流出

而

$$\sum_{\substack{<j,i>\in E(f)\\ \wedge <j,i>\in E}} g(j,i) - \sum_{\substack{<i,j>\in E(f)\\ \wedge <j,i>\in E}} g(i,j) - \sum_{\substack{<i,j>\in E(f)\\ \wedge <i,j>\in E}} g(i,j) + \sum_{\substack{<j,i>\in E(f)\\ \wedge <i,j>\in E}} g(j,i)$$

$$= \sum_{<j,i>\in E(f)} g(j,i) - \sum_{<i,j>\in E(f)} g(i,j) = 0$$

$$\sum_{<j,i>\in E} f'(j,i) - \sum_{<i,j>\in E} f'(i,j) = 0$$

$f' = f+g$是N的可行流

引理5（续）

$$v(f') = \sum_{<s,j>\in E}\{f(s,j)+g(s,j)-g(j,s)\}$$

$$- \sum_{<j,s>\in E}\{f(j,s)+g(j,s)-g(s,j)\}$$

$$= \sum_{<s,j>\in E} f(s,j) + \sum_{\substack{<s,j>\in E(f)\\ \wedge <s,j>\in E}} g(s,j) - \sum_{\substack{<j,s>\in E(f)\\ \wedge <s,j>\in E}} g(j,s)$$

$$- \sum_{<j,s>\in E} f(j,s) - \sum_{\substack{<j,s>\in E(f)\\ \wedge <j,s>\in E}} g(j,s) + \sum_{\substack{<s,j>\in E(f)\\ \wedge <j,s>\in E}} g(s,j)$$

$$= \{ \sum_{<s,j>\in E} f(s,j) - \sum_{<j,s>\in E} f(j,s)\} + \{ \sum_{<s,j>\in E(f)} g(s,j) - \sum_{<j,s>\in E(f)} g(j,s)\}$$

$$= v(f) + v(g)$$

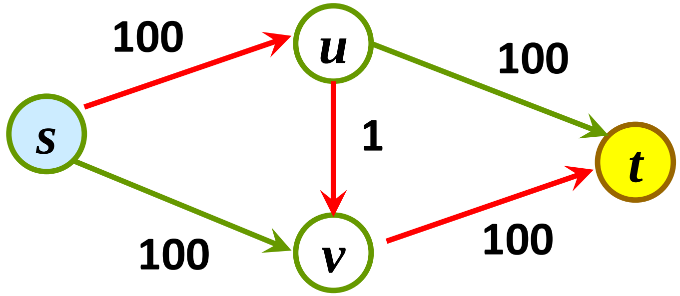
算法实现

算法：

- 给出初始流
- 通过辅助网络选择增广路径以增加流值

问题：在存在多条增广路径情况下，如何选择 g？

一个坏的例子：



可能执行200次增广操作

解决方案：通过分层辅助网络，每次增广都选辅助网络中的极大流

分层辅助网络

分层辅助网络

按广度优先搜索$N(f)$中 s-t 最短路，按到s距离d 对顶点分层

$AN(f) = <V(f), AE(f), ac, s, t>$，其中

$$V(f)=\bigcup_{k=0}^{d} V_k(f)$$

$$AE(f)=\bigcup_{k=0}^{d-1}\{<i,j> \mid <i,j>\in E(f)\wedge i\in V_k(f), j\in V_{k+1}(f)\}$$

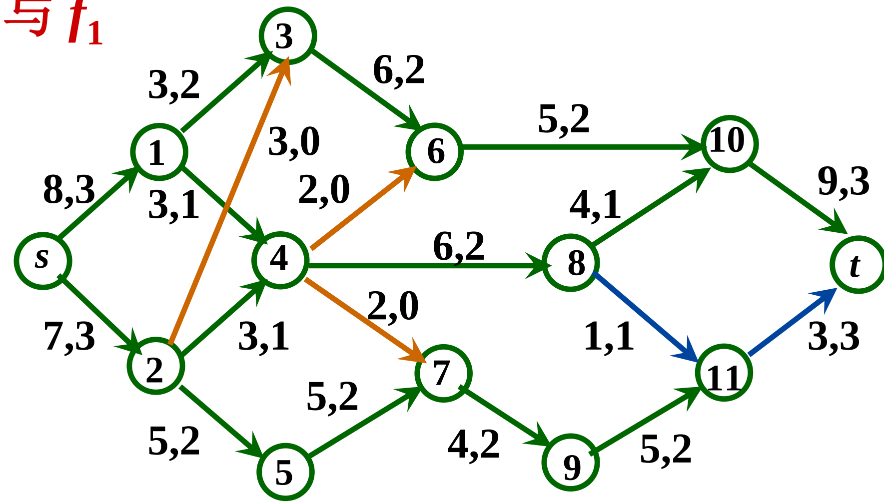
$$V_k(f) = \{\, i\in V \mid d(i) = k \,\},\quad 0 \le k \le d-1$$

$$V_d(f) = \{\, t \,\}$$

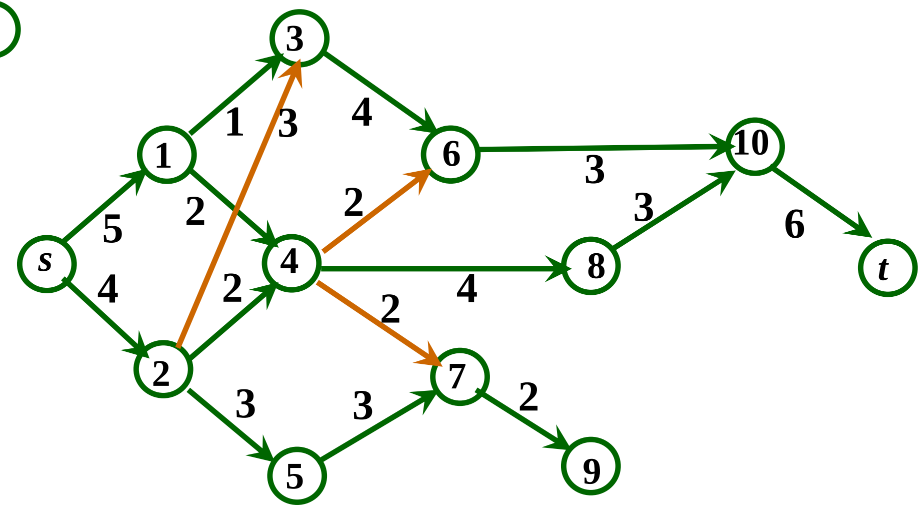
北京大学

例2

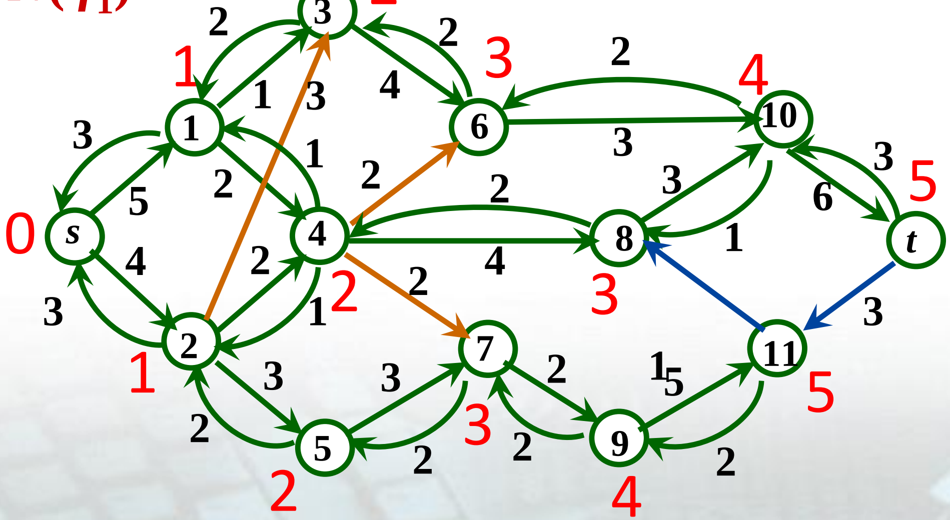
*N*与 f_1



AN(f_1)

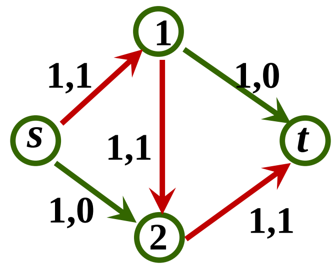


N(f_1)



删除*N*(f_1)中*s*-*t*最短路径外的顶点和边

Dinic算法



有关概念:

(1) **前向增广链**: 关于f 的不含后向边的增广链.

(2) **极大流**: 不存在前向增广链的可行流.
最大流必是极大流, 但极大流不一定是最大流.

(3) **中间点 i 的流通量 $th(i)$**: 以 i 为终点的边的容量之和与以 i 为始点的边的容量之和中的小者.

Dinic算法 （关键：求 $AN(f)$中的极大流）

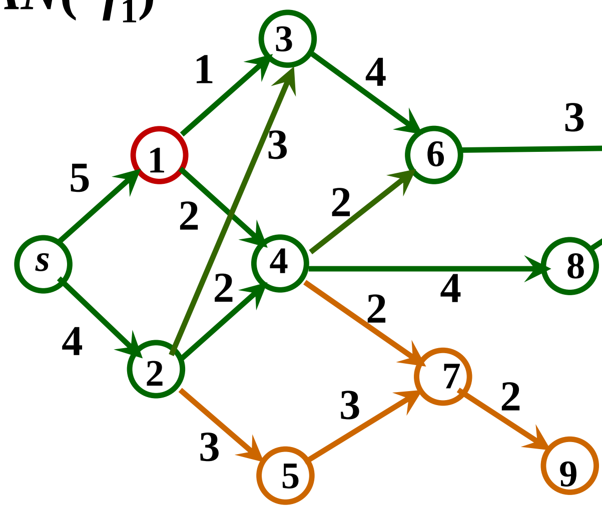
1. 在 $AN(f)$中找尽可能多的从 s 到 t 的最短路径并给出这些路径上的流量.

2. 删去流通量为0的顶点及关联的边. 找到流通量最小的顶点 k, 从k开始向后和向前安排流量 $th(k)$, 直到 t 和 s 为止. 修改相关边的容量.

3. 重复进行, 直到 s 和 t 不连通为止. 得到$AN(f)$的极大流 g.
令$f'=f+g$.

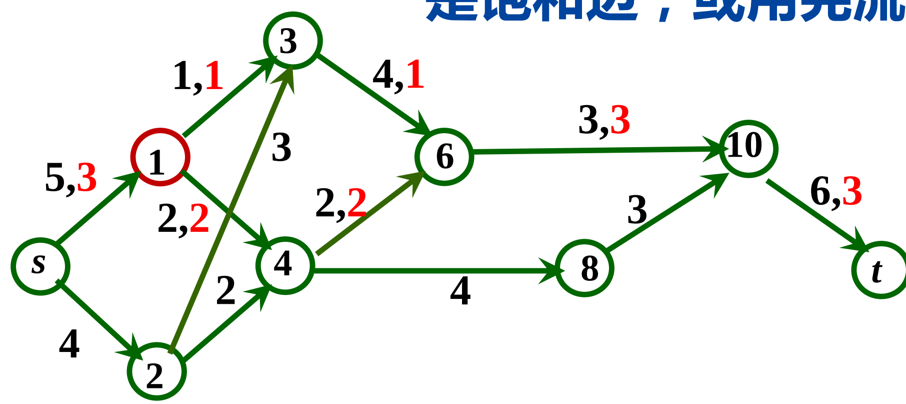
例2(续)

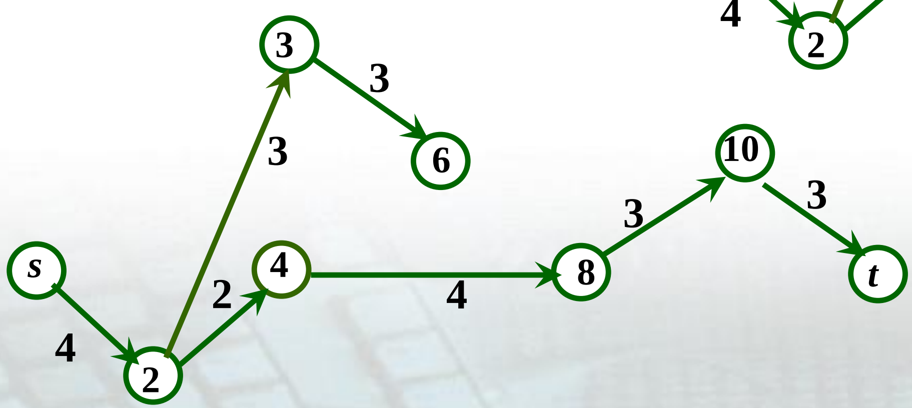
$AN(f_1)$



去掉0流通量顶点及边
找最小流通量顶点1

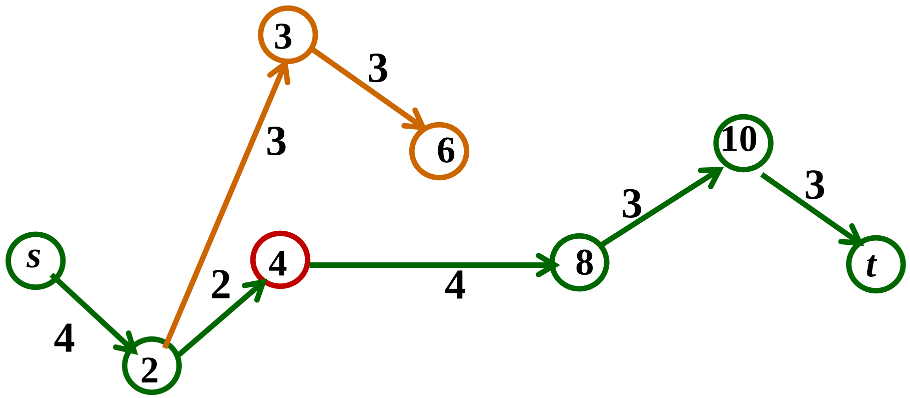
从1向前后推送3单位流
安排原则：得到流的边或是饱和边，或用完流量



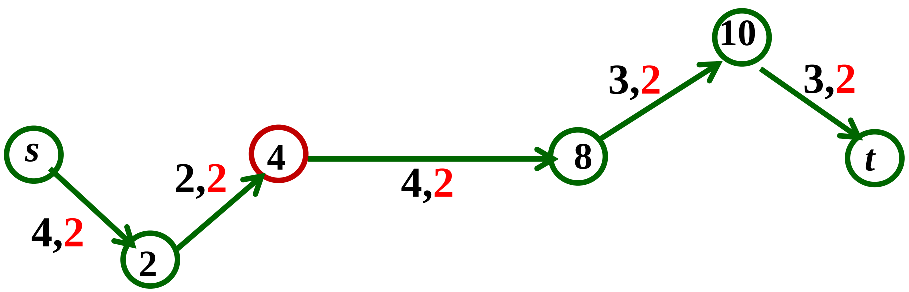


删流通量最小顶点1及关联边
删饱和边
修改剩余容量

例2(续)



去掉0流通量顶点及边
找最小流通量顶点4

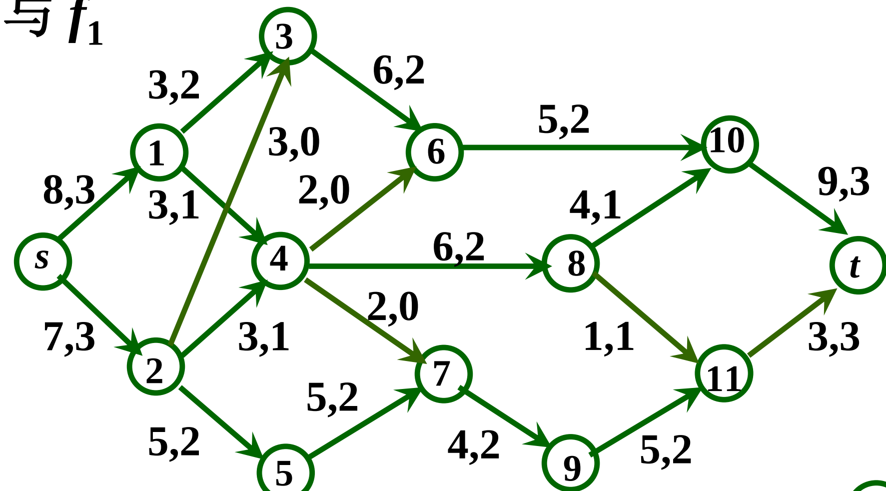


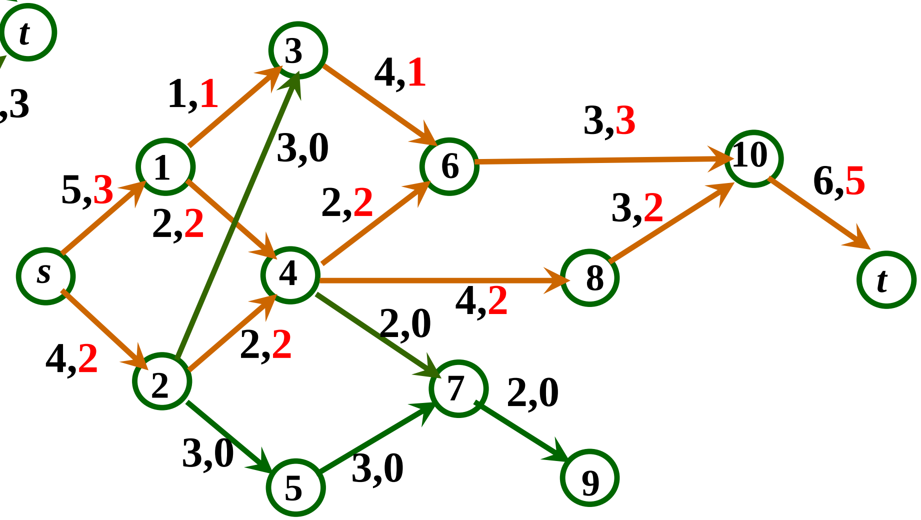
从4向前后推送2单位流

删流通量为0顶点
得到极大流 g

例2(续)

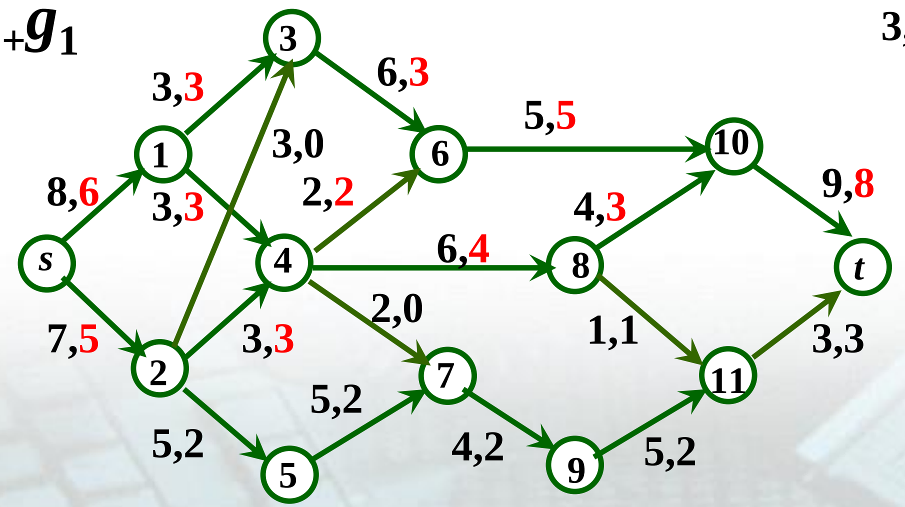
N与 f_1





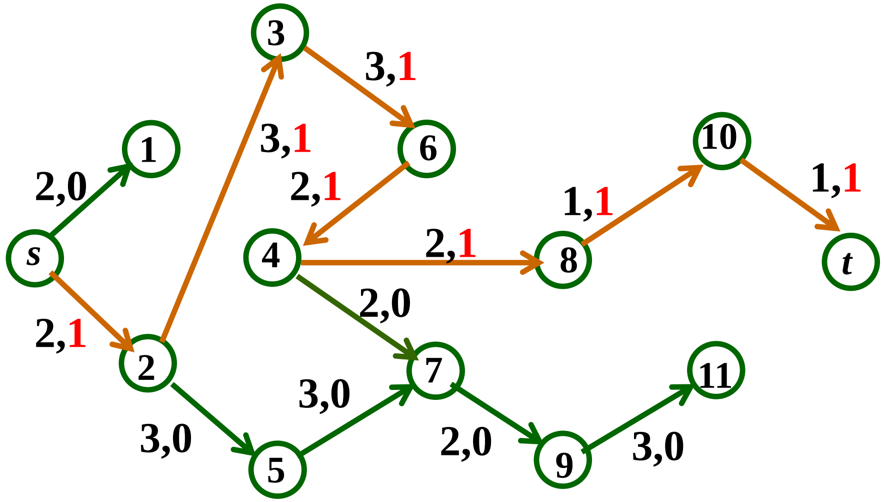
$AN(f_1)$与极大流 g_1

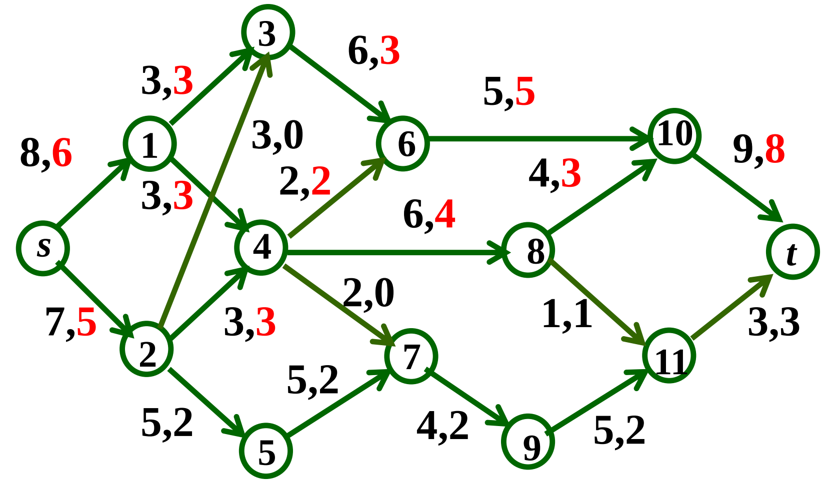
$f_2= f_{1+}g_1$



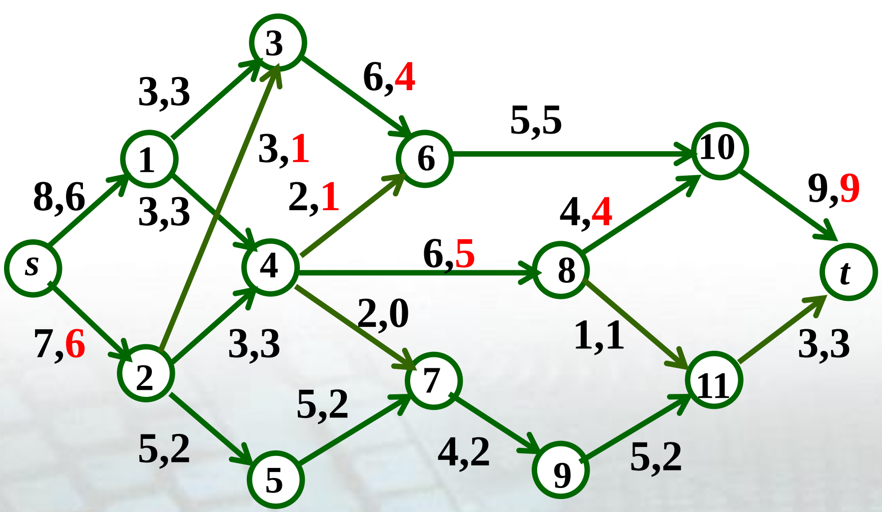
例2(续)

$AN(f_2)$与极大流 g_2





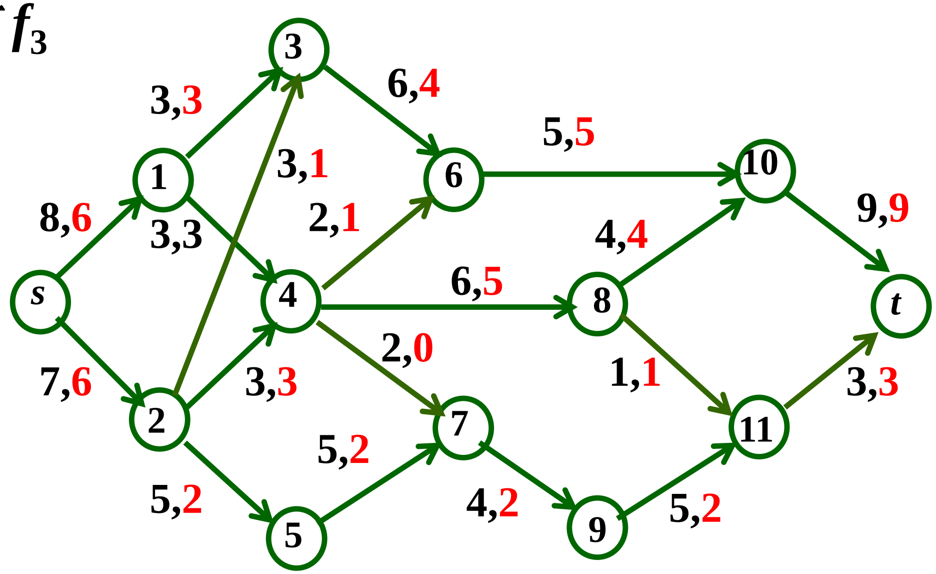
N与 f_2



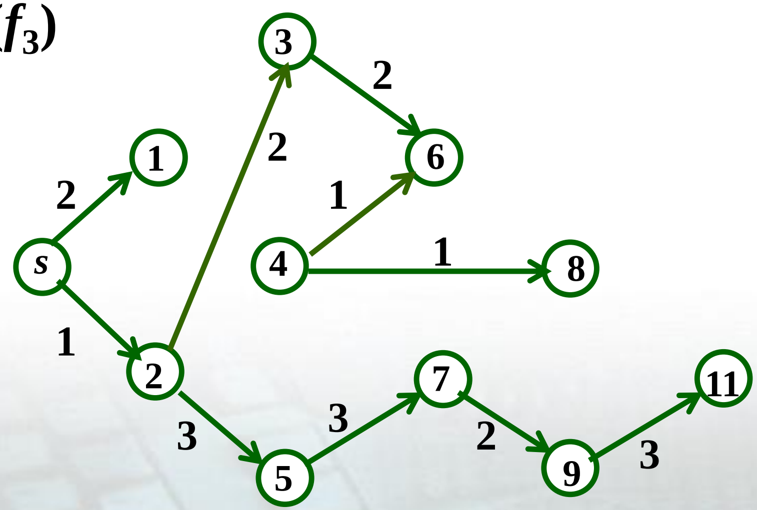
N与f_3

例2(续)

*N*与 f_3



$AN(f_3)$



$AN(f_3)$中没有 *s*-*t* 路径
算法结束，输出：
$f = f_3$, $v(f_3)=12$

Dinic算法

Dinic算法

1. $f \leftarrow 0$ //取零流作初始可行流
2. 构造$AN(f)$
3. if $AN(f)$不存在从s到t的路径
   then return f //计算结束
4. $g \leftarrow 0$
5. if $AN(f)$中存在 $th(i)=0$ then
6. if $i=s \vee i=t$ then goto 15
7. else 删去 i 及其关联的边
8. 找到流通量最小顶点k, 从k
   将$th(k)$个单位流向前送到 t,
   向后推到 s, 并加到g上. //$th(k)>0$
9. 删去k及其关联的边
10. for $\langle i,j \rangle \in AE(f)$ do
11. if $g(i,j)= ac(i,j)$ then
12. 删去$\langle i,j \rangle$
13. else $ac(i,j) \leftarrow ac(i,j)-g(i,j)$
14. goto 5
15. $f \leftarrow f+g$
16. goto 2

Dinic算法的正确性

引理6 在每个阶段结束时，g是$AN(f)$中的极大流.

引理7 在每个阶段, $AN(f+g)$中s-t 距离大于前一个阶段$AN(f)$中s-t 距离. 约定, 当不存在 s-t 最短路径时, 规定其距离为$+\infty$.

定理3 Dinic算法得到的 f 是最大流, 且算法在 $O(n^3)$步内终止.

证 f 是最大流.

当算法终止时, $AN(f)$中不存在从 s 到 t 的路径, 因此 $N(f)$中也不存在从 s 到 t 的路径,它的最大流为零流, 最大流量为 0.

根据引理4, $v^*-v(f)=0$, 其中v^*是最大流量. $v(f)=v^*$, f 是最大流.

算法时间$O(n^3)$

阶段数$\leq n$：由引理7, $AN(f)$中s-t距离每阶段至少加1，s-t距离$\leq n-1$, 至多n个阶段.

每阶段工作量$O(n^2)$

- 构造$AN(f)$可在$O(m)$步内完成
- 计算顶点的流通量需$O(m)$步
- 在生成 g 的过程中, 找一个流通量最小的顶点需$O(n)$步, 至多找 n 次, 至多需$O(n^2)$步.
- 边操作1：修改容量后删去饱和边，至多$O(m)$次.
- 边操作2：修改容量后不删. 从同一顶点出发边中至多保留1条非饱和边. 从流通量最小顶点安排流，至多保留n条边, 上述过程至多n次, 共有$O(n^2)$次.

总计： $O(m)+O(m)+O(n^2)+O(m)+O(n^2)=O(n^2)$

简单容量网络 边容量为1, 中间点入度为1或出度为 1

Dinic算法时间为$O(n^{1/2}m)$

7.2 最小费用流

定义

(1) 在容量网络$N=<V,E,c,s,t>$中添加单位费用 $w:E\to R^*$, 称作容量-费用网络, 记作$N=<V,E,c,w,s,t>$.

(2) 设 f 是N上的一个可行流, 称

$$w(f)=\sum_{<i,j>\in E} w(i,j)f(i,j)$$

为 f 的费用.

(3) 所有流量为 v_0的可行流中费用最小的称作流量v_0的最小费用流.

最小费用流问题

给定容量-费用网络 N 和流量 v_0, 求流量 v_0 的最小费用流.

最短路径与负回路

求带负权的最短路径和检测负回路的算法

负回路　赋权有向图 $D=\langle V,E,w\rangle$ 中权为负数的回路

命题1　赋权有向图 D中任意两点之间都有最短路径或不存在路径当且仅当 D 中不含负回路.

证　假设D中有负回路C, i 是C上的一个顶点, 那么从 i 到 j 的路径可以先重复走C若干次再到 j, 因而 i 到 j 的路径的权可以任意小.

假设D中不存在负回路C. 对任意两点 i 和 j, 如果从 i 到 j 的路径中有两个相同顶点, 删去它们之间的路径(回路)仍是从 i 到 j 的路径, 其权不增加. 只需考虑从 i 到 j 顶点都不相同的路径. 而从 i 到 j 顶点都不相同的路径只有有限条, 故一定存在最短路径.

最短路径的Floyd算法

动态规划方法.

$d^{(k)}(i,j)$: 从i 到 j 经过号码不大于 k 的最短路径的长度.

递推方程

$$d^{(0)}(i,j) = w(i,j), \quad 1 \le i,j \le n$$

$$d^{(k)}(i,j) = \min\{d^{(k-1)}(i,j),\ d^{(k-1)}(i,k)+d^{(k-1)}(k,j)\},$$

$$1 \le i,j \le n \text{ 且 } i,j \ne k,\ 1 \le k \le n$$

规定: $\forall i \in V,\ w(i,i)=0$; $\forall \langle i,j \rangle \notin E,\ w(i,j)=+\infty$.

当D中不存在负回路时, i 到 j 的距离 $d(i,j) = d^{(n)}(i,j)$.

当D中存在负回路时, 设负回路C 经过 i, 除 i 外顶点的最大号码是 k, 则必有 $d^{(k)}(i,i) < 0$.

Floyd算法

$h^{(k)}(i, j)$: 从 i 到 j 经过号码不大于k 的最短路径中 i 的下一顶点

递推关系

$$h^{(0)}(i,j) = \begin{cases} j, & 若 < i, j > \in E \\ 0, & 否则 \end{cases}, \qquad 1 \le i, j \le n$$

$$h^{(k)}(i,j) = \begin{cases} h^{(k-1)}(i,j), 若 d^{(k-1)}(i,j) \le d^{(k-1)}(i,k) + d^{(k-1)}(k,j), \\ h^{(k-1)}(i,k), 否则 \end{cases}$$

$1 \le i, j \le n$ 且 $i, j \ne k$, $1 \le k \le n$

算法：利用递推公式迭代计算 $d^{(k)}(i, j)$ 和 $h^{(k)}(i, j)$,

$i, j, k = 1,2,\ldots,n$

$d^{(n)}(i, j)$ 是 i 到 j 的最短路长度

$h^{(n)}(i, j)$ 用于追踪从 i 到 j 的路径

容量-费用网络的辅助网络

设容量-费用网络 $N=<V, E, c, w, s, t>$, 关于可行流 f 的辅助网络 $N(f)= <V, E(f), ac, aw, s, t>$, 其中辅助费用

$$aw(i,j)=\begin{cases} w(i,j), & 若 <i,j>\in E^{+}(f) \\ -w(j,i), & 若 <i,j>\in E^{-}(f) \end{cases}$$

把引理5 推广到容量-费用网络

引理9 设 f 是容量-费用网络N上的可行流, g是辅助网络$N(f)$上的可行流, $f'=f+g$, 则

$$w(f') = w(f) + aw(g)$$

圈流及其性质

定义 设C是N中边不重复的回路, C上的圈流 h^C 定义如下:

(1) $\forall \langle i, j \rangle \in E(C)$, $h^C(i, j)=\delta$;

(2) $\forall \langle i, j \rangle \in E-E(C)$, $h^C(i, j) = 0$,

其中$\delta > 0$是 h^C 的 环流量.

性质

(1) h^C为可行流，且 $v(h^C) = 0$, $w(h^C) = \delta \cdot w(C)$

(2) 设 f 是N上的一个可行流, h^C是$N(f)$上的一个圈流,

$f' = f + h^C$ 是 N上的可行流, 且

$$v(f') = v(f),\quad w(f') = w(f) + \delta \cdot aw(C)$$

如果 $aw(C)< 0$, 则 $w(f') < w(f)$.

最小费用流的负回路算法

问题　容量-费用网络 $N=<V, E,c,w,s,t>$, 求N中流量为 v_0的最小费用流.

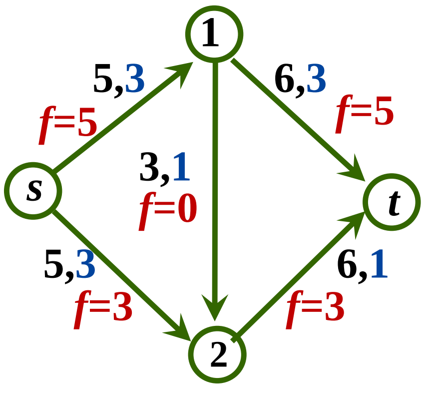
负回路算法的设计思想

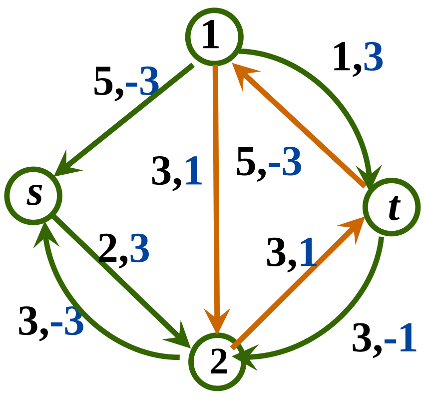
1. 首先求一个流量 v_0 的可行流 f
2. 如果 $N(f)$ 中存在权 aw 的负回路 C, 令 $f' \leftarrow f + h^C$
3. 重复进行, 直至辅助网络中不存在权 aw 的负回路为止.

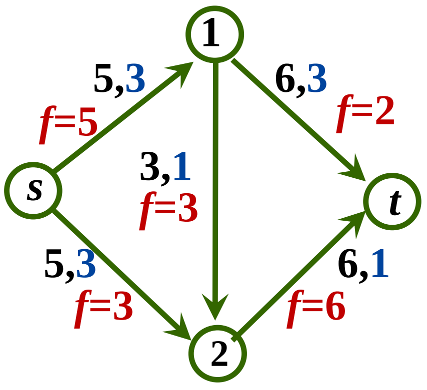
可证明：当$N(f)$中不存在权 aw 的负回路时, f 是最小费用流.

实例

例4 容量费用网络N，可行流 f，容量、费用、流值如下：







N与 f

v_0=8, $w(f)$=42.

$N(f)$与C

$aw(C)$= -1,δ =3

$aw(h^C)$= -3

$f_1 = f + h^C$

$w(f_1)$=42-3=39

算法伪码

算法4 最小费用流的负回路算法

1. 调用最大流算法, 若求得流量v_0的可行流 f, 则转2; 若最大流量小于v_0, 则输出“无流量v_0的可行流”, 计算结束.
2. 构造 $N(f)$.
3. 用Floyd算法检测$N(f)$中是否存在权aw的负回路. 若存在负回路C, 则转4; 若不存在负回路, 则输出 f, 计算结束.
4. 令$\delta \leftarrow \min\{ ac(i, j) \mid \langle i, j\rangle \in E(C) \}$ // h^C的环流量为δ
5. $\forall \langle i, j\rangle \in E(C)$, 若$\langle i, j\rangle \in E$, 令 $f(i, j) \leftarrow f(i, j)+\delta$;
   若$\langle j, i\rangle \in E$, 令 $f(j, i) \leftarrow f(j, i)-\delta$. // $f \leftarrow f + h^C$
6. 转2

其他算法

最短路径算法

设计思想：

1. 从一个初始的最小费用流 f (如零流)开始,
2. 如果 $v(f)<v_0$, 找一条费用最少的 s-t 增广链 P, 修改 P上的流量，得到新的可行流 f'.
3. 重复进行, 直至流量等于v_0为止.

若存在负回路，用 Floyd 算法计算最短路径；

若不存在负回路，可以用 FF 算法.