数 学 年 刊
8A (2) 1987

集论公理的简约与基数的方幂

莫 绍 揆
(南京大学)

提 要

如命 $\mathrm{tran}_R\, m$ 指 $\forall u \forall v(uRv \wedge v\varepsilon m \to \cdot u\varepsilon m)$，而 $xR_* y$ 指 $\forall m(\mathrm{tran}_R m \wedge y\varepsilon m \to \cdot x\varepsilon m)$，则集论的六条公理(对偶、联集、幂集、分出、替换、无穷)可合并为一条：$\forall x \exists ! y \phi(x, y) \to \exists z \forall y(y\varepsilon z \leftrightarrow \exists x(x\varepsilon_* a \vee xp_* b \cdot \wedge \phi(x, y))$，这里"$\exists ! y$"指"最多只有一个 y"，而 xpb 指"x 为 b 的幂集"。

给定无穷基数 α 后，可定义：$f_0(\alpha)=\mu\beta(\alpha^\beta>\alpha)$，$\sigma_0(\alpha)=\mu\gamma(\gamma^{f_0(\alpha)}>\alpha)$；$f_{k+1}(\alpha)=\mu\beta(\exists\gamma<\sigma_k(\alpha))\gamma^\beta>\alpha$，$\sigma_{k+1}(\alpha)=\mu\gamma(\gamma^{f_{k+1}(\alpha)}>\alpha)$．则有定理：当 $1\leqslant\beta<f_0(\alpha)$ 时 $\alpha^\beta=\alpha$；当 $f_k(\alpha)\leqslant\beta<f_{k+1}(\alpha)$ 时，$\alpha^\beta=\aleph(\sigma_k(\alpha))=\alpha^{f_k(k)}$；当 $f_s(\alpha)\leqslant\beta$ 而 $\sigma_s(\alpha)=2$ 时，$\alpha^\beta=2^\beta$．

给定无穷基数 β 后，可定义：$g(0)=2$，$g(\alpha)=\mu\gamma(\forall\delta<\alpha)g(\delta)^\beta<\gamma\wedge\gamma^\beta>\gamma$，则有：当 $g(\delta)\leqslant\alpha\leqslant g(\delta)^\beta$ 时 $\alpha^\beta=g(\delta)^\beta$，对此外的 α，则必 $\alpha^\beta=\alpha$．

本文分成两个彼此无关的部分．

第一部分是文[1]的继续，进一步把集论公理加以简约，结果是：集论中的对偶、联集、幂集、分出、替换与无穷公理(共六条)都可以极自然地合并成为一条，于是整个 ZFC 系统可只由这条公理与外延、正规、选择公理而组成，可算归约到最简的了．

第二部分讨论基数的方幂运算，在只使用选择公理但不使用 Gimel 数假设及广义连续统假设的情况下，将方幂详细讨论了．对将基底当作常数(指数函数)或将指数作为常数(幂函数)两情况都作了探讨．对以前讨论时含糊不清的地方都给以澄清，从而初步对方幂运算作了系统的总结．文中最重要的结果是引入两有限数列 σ_k 与 f_k，由它们刻划了方幂运算的本质．

§1. 集论公理的简约

现在集论公理一般以 ZFC 为准．这公理系统共有九条公理：对(对偶公理)联(联集公理)幂(幂集公理)分(分出公理)替(替代公理)无穷(无穷公理)正(正规公理)选(选择公理)与延(外延公理)．我们将证明前六条公理可以很简易地归约为一条公理(叫做强替代公理、简写为替*)．为此，先引入下列记号．

定义 $\mathrm{tran}_R m$(m 为 R 遗传)指

$$\forall u \forall v(uRv \wedge v\varepsilon m \cdot \to u\varepsilon m).$$

$xR_* y$ 指：$\forall m(\mathrm{tran}_R\, m \wedge y\varepsilon m \cdot \to x\varepsilon m)$

本文 1984 年 10 月 15 日收到．

在直觉上可以说：xR_*y 当且仅当有一个有限序列 $a_1, \cdots, a_n$ 使得 $x=a_1$, $y=a_n$ 且 $\forall_i(a_iRa_{i+1})$. 这个关系是罗素用以发展自然数论时的最重要的概念. 有关 R_* 的最重要性质是：

1.1) $xRy \to xR_*y$,

1.2) $xR_*y \wedge yR_*z \cdot \to xR_*z$($R_*$ 是可传的).

下文用到的是 ε_* 以及 p_*, 这里 xpy 指：$x=\mathscr{P}y$ 而 $\mathscr{P}y$ 表示 y 的幂集. xp_*y 实际上是：$\exists n(x=\mathscr{P}^ny)$.

暂时将 $x\varepsilon_*a \vee xp_*b$ 记为 $\langle a, b, x\rangle$.

由定义易证得

1.3) $x\varepsilon a \to x\varepsilon_*a$,

1.4) $x=a \to x\varepsilon_*a$,

1.5) $x\subseteq a \to \exists y(x\varepsilon y \wedge yp_*a)$,

1.6) $\exists y(x\varepsilon y \wedge y\varepsilon a) \to x\varepsilon_*a$(须利用(1.2)而证明). 此外，如众所周知，我们有：

1.7) 如 $p\to q$ 则 $p \leftrightarrow \cdot p\wedge q$.

定理1　公理对、联、幂、分、替、无穷(在谓词演算之上)与下列的公理相等价：

替*：$\forall x\exists!y\phi(x, y) \to \exists z\forall y(y\varepsilon z \leftrightarrow \exists x(\langle a, b, x\rangle \wedge \phi(x, y)))$. 这里“$\exists!y$”指“至多有一个 y”.

证　必要性　已有上述六条公理，正如通常的集合论那样，可以发展自然数论，从而易证(比较详细些的集合论均本质上给了证明)：

$$x\varepsilon_*a \leftrightarrow x\varepsilon \bigcup_{n\varepsilon\omega} U^na(U^n \text{ 指 } UU\cdots Ua(n\text{ 个 }U)),$$

$$xp_*a \leftrightarrow x\varepsilon \bigcup_{n\varepsilon\omega} \mathscr{P}^na(\mathscr{P}^n \text{ 指 } \mathscr{P}\mathscr{P}\cdots\mathscr{P}a(n\text{ 个 }\mathscr{P})).$$

故得

$$\langle a, b, x\rangle \leftrightarrow x\varepsilon \bigcup_{n\varepsilon\omega} U^na \cup \bigcup_{n\varepsilon\omega} \mathscr{P}^nb(\text{暂记为 } x\varepsilon B).$$

由原来的替换定理知替*成立(因 $\langle a, b, x\rangle \leftrightarrow x\varepsilon B$)而必要性得证.

充分性　设替*公理成立，有

$$x\varepsilon a \to x\varepsilon_*a \to x\varepsilon_*a \vee xp_*b \to \langle a, b, x\rangle.$$

$$x\varepsilon a \leftrightarrow \cdot \langle a, b, x\rangle \wedge x\varepsilon a. \tag{甲}$$

此外显然有

$$\forall x\exists!y\phi(x, y) \to \forall x\exists!y(\phi(x, y) \wedge x\varepsilon a). \tag{乙}$$

今由替*公理先得

$$\forall x\exists!y(\phi(x, y) \wedge x\varepsilon a) \to \exists z\forall y(y\varepsilon z \leftrightarrow \cdot \exists x(\langle a, b, x\rangle \wedge \phi(x, y) \wedge x\varepsilon a)). \tag{丙}$$

根据(甲)(乙)对(丙)作替换即得

$$\forall x\exists!y\phi(x, y) \to \exists z\forall y(y\varepsilon z \leftrightarrow \exists x(x\varepsilon a \wedge \phi(x, y))$$

这便是通常的替换公理. 由通常的替换公理即得通常的分出公理.

在替*公理中，如命 $\phi(x, y)$ 为 $x=y$. 显然有 $\forall x\exists!y(x=y)$, 故替*公理这时变成

$$\exists z\forall y(y\varepsilon z \leftrightarrow \exists x(\langle a, b, x\rangle \wedge, x=y),$$

再变成

$$\exists z\forall y(y\varepsilon z \leftrightarrow \langle a, b, y\rangle), \tag{丁}$$

这集合暂记为$[a, b]$．由(1.4)(1.5)(1.6)可知

$$x=a\vee x=b\cdot\rightarrow x\varepsilon[a, b],$$

$$x\subseteq a\rightarrow x\varepsilon[[a, a], b],$$

$$\exists y(x\varepsilon y\wedge y\varepsilon a)\rightarrow x\varepsilon[a, b].$$

因此根据已得出的分出原理即可保证对、联、幂三公理的成立．

最后由$[a, b]$可以保证 $\bigcup\limits_{n\varepsilon\omega}\mathscr{P}^n b(\equiv C)$的存在．由于 $m=n\leftrightarrow\mathscr{P}^m b=\mathscr{P}^n b$，显见 C 为无穷集而且是 $\mathscr{P}$ 归纳集(即 $x\varepsilon C\rightarrow\mathscr{P}x\varepsilon C$)．只要有一个无穷集的存在便足以尽无穷公理的作用了．同时还可以很快地推出无穷公理如下．

试命 Sx 表 $\{x\}$(Zermelo 方式)或表 $x\cup\{x\}$(von Neumann 方式)，再用 $\phi(x, y)$表

$$\exists n(x=\mathscr{P}^n b\wedge y=S^n\phi)\quad\text{(这里方幂表示迭置次数)}.$$

这时显然有 $\forall x\exists! y\phi(x, y)$，于是由集合 C 及推出的替换公理立即得出无穷公理所要求的集合存在．

这样一来，整个集论公理系统(ZFC)可仅由下列公理组成：替*，正，选，延．通常很多书中不提正规公理，认为不用它亦可推出全部数学，那末只使用替*、选、延也就够了．一般还认为选择公理疑问极多，大家争论得极厉害，凡用到选择公理之处都应标明作为前提，至于选择公理本身则不必假定，那末只使用替*、延也就够了．替*是肯定某些集合必然存在，肯定集合至少应该有些什么，而外延性公理则肯定在什么场合之下两集合应该看作一个，不能多算，是从广的方面加以限制，两者性质不同，看来无法再归约为一了．可见在一定意义上，本公理系统已简到无可再简了．

但是一般人又往往想将公理尽量的分析，以便详细地讨论"当我们不承认某某公理时会有什么结果"，从而把集合论彼此的联系分析得更清楚．在这种讨论之下，使用这里的公理系统也极有好处．

不用选择公理的系统叫做 ZF，不用正规公理的系统记为 ZF^+(ZFC^+ 等)，由于我们的公理系统没有改动选与正，所以这时可同法讨论．

如讨论不用无穷公理的系统，可把 $\langle a, b, x\rangle$ 改为

$$x\varepsilon_* a\vee x\subseteq b.$$

如讨论不用替换公理(只使用分出公理)的系统，则可改用

$$\exists z\forall x(x\varepsilon z\leftrightarrow\cdot\langle a, b, x\rangle\wedge\phi(x)).$$

如不想在无穷公理之前讨论 ε_*(这是讨论正规公理的推广时必须讨论的)，可把 $\langle a, b, x\rangle$ 改为

$$\exists y(x\varepsilon y\wedge y\varepsilon a)\vee x\subseteq b.$$

这时要证明对偶集公理，比较麻烦一些．须先证么元集 $\{b\}$ 的存在，然后根据

$$x=a\vee x=b\rightarrow\cdot\exists y(x\varepsilon y\wedge y\varepsilon\{\{a\}\})\vee x\subseteq b$$

证明对偶集的存在．

总之，集论公理可有种种归约，随各人的使用情况而异．以前人们只知道由替换公理与幂集公理推出(分出公理与)对偶公理，其实归约的办法是很多的，它们都比后面这个方法好．

§2. 基数的方幂

这里我们永远使用选择公理(否则成果极少), 但不使用(广义)连续统假设或 Gimel 假设.

对于基数的方幂,现在已有相当深入的讨论(见[2, 3]等书), 但目前的研究基本上基于共尾数理论,从而未能得出完整的结果而且亦没有系统. 现在从头讨论这个问题,根本撇开共尾数的讨论而把整个问题解决了.

定义 对于一个已给的无穷基数 α, 我们(联立)递归地定义两个数列如下, 其中 $\mu\beta$ 为最小数运算.

$$f_0(\alpha)=\mu\beta(\alpha^\beta>\alpha);\quad \sigma_0(\alpha)=\mu\gamma(\gamma^{f_0(\alpha)}>\alpha);$$

设 $f_k(\alpha)$ 与 $\sigma_k(\alpha)$ 已经定义,则

$$f_{k+1}(\alpha)=\mu\beta(\exists\gamma<\sigma_k(\alpha))\gamma^\beta>\alpha;\quad \sigma_{k+1}(\alpha)=\mu\gamma(\gamma^{f_{k+1}}(\alpha)>\alpha).$$

根据定义,有下列的简单性质:

(2.1) 当 $\sigma_k(\alpha)>2$ 时, $f_{k+1}(\alpha)$, $\sigma_{k+1}(\alpha)$永有定义, 当 $\sigma_k(\alpha)\leqslant 2$ 时, $f_{k+1}(\alpha)$ 与 $\sigma_{k+1}(\alpha)$必无定义.

(2.2) σ_k 对 k 严格下降, f_k 对 k 严格上升, 即

$$\sigma_{k+1}(\alpha)<\sigma_k(\alpha),\quad f_{k+1}(\alpha)>f_k(\alpha),$$

且易见 $2\leqslant\sigma_k(\alpha)\leqslant\alpha$, $f_k(\alpha)\leqslant\alpha$(一切 k).

要看出最后一点只须注意 $2^\alpha>\alpha$ 即可.

(2.3) 从而, 任给无穷基数 α, 只能有有穷多项 σ 与 f, 即只能有 $\sigma_0(\alpha)$, $\sigma_1(\alpha)$, $\cdots$, $\sigma_s(\alpha)$及 $f_0(\alpha)$, $f_1(\alpha)$, $\cdots$, $f_s(\alpha)$, 而且最后一个 σ 必满足 $\sigma_s(\alpha)=2$.

(2.4) $\sigma_k(\alpha)^{f_k(\alpha)}>\alpha$(一切 k).

(2.5) 如果 $\beta\geqslant f_k(\alpha)$则有 $\alpha^\beta=(\sigma_k(\alpha))^\beta$.

证 因为 $\alpha^\beta\geqslant(\sigma_k(\alpha))^\beta\geqslant(\sigma_k(\alpha))^{\beta\cdot\beta}\geqslant(\sigma_k(\alpha))^{f_k(\alpha)\cdot\beta}\geqslant\alpha^\beta$.

(2.6) 如果 $\beta<f_{k+1}(\alpha)$, 则 $\forall\gamma<\sigma_k(\alpha)(\gamma^\beta\leqslant\sigma_k(\alpha))$.

证 根据 $f_{k+1}(\alpha)$的定义, 可知对任何 β, 只要 $\beta<f_{k+1}(\alpha)$便有 $\neg(\exists\gamma<\sigma_k(\alpha))(\gamma^\beta>\alpha)$, 即$(\forall\gamma<\sigma_k(\alpha))\gamma^\beta\leqslant\alpha$(甲).

反设本性质不成立, 则应有 β_0 使得 $\beta_0<f_{k+1}(\alpha)$且 $\exists\gamma<\sigma_k(\alpha)(\gamma^{\beta_0}>\sigma_k(\alpha))$. 取最小的这样的 γ 记为 δ, 则应有 $\delta<\sigma_k(\alpha)$且 $\delta^{\beta_0}>\sigma_k(\alpha)$, 这时

$$\delta^{\beta_0\cdot f_k(\alpha)}=(\delta^{\beta_0})^{f_k(\alpha)}\geqslant(\sigma_k(\alpha))^{f_k(\alpha)}>\alpha,$$

但因 $\beta_0\cdot f_k(\alpha)=\max(\beta_0, f_k(\alpha))<f_{k+1}(\alpha)$, 这与(甲)式冲突. 故知反设不成立.

定义 设有 β 项的序列 $\{\tau_\mu\}_{\mu<\beta}$, 如果各项均小于 γ, 则叫做(β, γ)序列.

(2.7) 必有$(f_k(\alpha), \sigma_k(\alpha))$序列 $\{\tau_\mu\}$ 使得 $\sum\limits_{\mu\in f_k(\alpha)}\tau_\mu=\sigma_k(\alpha)$. 亦即, 有一个 $f_k(\alpha)$项的序列其各项均小于 $\sigma_k(\alpha)$, 但各项之和为 $\sigma_k(\alpha)$.

证 用反证法. 设任何$(f_k(\alpha), \sigma_k(\alpha))$序列其各项的和均小于 $\sigma_k(\alpha)$. (下文将 $f_k(\alpha)$, $\sigma_k(\alpha)$省写为 β 及 γ). 那末由 β 射入 γ 内的函数必是由 β 射入某个 $\varkappa(k<\gamma)$内的函数. 换言之, 如用$[\gamma^\beta]$表示由 β 射入 γ 内的全体函数的集合(故$[\gamma^\beta]^==\gamma^\beta$), 则有

$[\gamma^\beta]=\bigcup_{\varkappa\in\gamma}[\varkappa^\beta]$，故得$[\gamma^\beta]^==(\bigcup_{\varkappa\in\gamma}[\varkappa^\beta])^=$ 此外由(2.6)知$[\varkappa^\beta]^=\leqslant\sigma_k$即$\gamma$，故

$$\gamma^\beta\leqslant\sum_{\varkappa\in\gamma}[\varkappa^\beta]^=\leqslant\sum_{\varkappa\in\gamma}\gamma\leqslant\gamma\cdot\gamma=\gamma,$$

但由(2.4)我们有$\gamma^\beta=(\sigma_k(\alpha))^{f_k(\alpha)}>\alpha\geqslant\gamma$两者互相冲突．故(2.7)得证．

注意．当α, β均有穷基数时α^β性质已熟知．故下文假定α, β至少有一为无穷，而且$\alpha^0(=1)$, $0^\beta(=0)$, $1^\beta(=1)$又均已知．故还假定$\beta>0$, $\alpha>1$.

定理3　设$\beta>0$, $\alpha>1$且α, β至少有一为无穷，则有：

(1) 当$1\leqslant\beta<f_0(\alpha)$时，$\alpha^\beta=\alpha$,

(2) 当$f_k(\alpha)\leqslant\beta<f_{k+1}(\alpha)$且$\sigma_k(\alpha)\neq2$时，$\alpha^\beta=(\sigma_k(\alpha))^{f_k(\alpha)}=\alpha^{f_k(\alpha)}$,

(3) 当$f_s(\alpha)\leqslant\beta$　(且$\sigma_s(\alpha)=2$)时，$\alpha^\beta=2^\beta$.

因此，基数的方幂已彻底算出．

证　由方幂函数的单调性与$f_0(\alpha)$的定义立即得(1)．

要证(2)，设$f_k\leqslant\beta<f_{k+1}$. 任取满足下条件的$\eta$: $\forall\mu\in\eta(\tau_\mu<\sigma_k)(a)$且$\sum_{\mu\in\eta}\tau_\mu=\sigma_k(b)$，根据(2.7)这样的$\eta$是存在的，$f_k$便是其一．由$(a)$及(2.6)可知有$\forall\mu\in\eta((\tau_\mu)^\beta<\sigma_k)(c)$，故有，(取最小的$\eta$)

$$\alpha^\beta=(2.5)\sigma_k^\beta=(b)(\sum_{\mu\in\eta}\tau_\mu)^\beta\leqslant\prod_{\mu\in\eta}(\tau_\mu)^\beta\leqslant(c)\prod_{\mu\in\eta}\sigma_k=\sigma_k^\eta\leqslant\sigma_k^{f_k}\leqslant\alpha^{f_k}\leqslant\alpha^\beta.$$

故得$\alpha^\beta=\sigma_k^\eta=\sigma_k^{f_k}=\alpha^{f_k}$. 故(2)得证．

要证(3)，设$\beta\geqslant f_s$而$\sigma_s=2$. 注意$\sigma_s^{f_s}(=2^{f_s})>\alpha$，故

$2^\beta\leqslant\alpha^\beta\leqslant(2^{f_s})^\beta\leqslant2^{\beta\cdot\beta}=2^\beta$，故$\alpha^\beta=2^\beta$，(3)得证．

我们所区别的各情况是既穷尽又不可兼的，因此所给条件是既充分又必要的，即有

$$1\leqslant\beta<f_0(\alpha)\Leftrightarrow\alpha^\beta=\alpha\text{ 且 }f_k(\alpha)\leqslant\beta<f_{k+1}(\alpha)\Leftrightarrow\alpha^\beta=\alpha^{f_k(\alpha)},$$

且

$$f_s(\alpha)\leqslant\beta\wedge\sigma_s(\alpha)=2\Leftrightarrow\alpha^\beta=2^\beta.\qquad(*)$$

在上面讨论中，我们丝毫没有讨论到共尾数．如果引入共尾数，可把上面结果表述成另一形式．

给定γ，满足下列条件的最小的β叫做γ的共尾数，记为$cf(\gamma)$，即(对某一序列$\{\tau_\mu\}$)

$$cf(\gamma)\text{ 指 }\mu\beta(\forall\mu\in\beta(\tau_\mu<\gamma)\wedge(\sum_{\mu\in\beta}\tau_\mu=\gamma)).$$

由这定义，可知在证明(2)时所引入的最小的η便是$cf(\sigma_k)$，从而由(2.7)可知$f_k\geqslant cf(\sigma_k)$.

定理4　上定义中的f_k即$cf(\sigma_k)$，从而上定理中的(2)又可写成另一形式

当$f_k(\alpha)\leqslant\beta<f_{k+1}(\alpha)$(且$\sigma_k(\alpha)\neq2$)时，$\alpha^\beta=\sigma_k^{cf(\sigma_k)}=\alpha^{cf(\sigma_k)}$.

证　上面说过我们有

$$\alpha^\beta=\alpha^{f_k(\alpha)}\Leftrightarrow f_k(\alpha)\leqslant\beta<f_{k+1}(\alpha).\qquad(\text{甲})$$

但由上定理的证明知道对最小η而言($\eta=cf(\sigma_k)$)有

$$\alpha^\eta\geqslant\sigma_k^\eta=\alpha^{f_k}\geqslant\alpha^\eta\quad\text{故有}\quad\alpha^\eta=\alpha^{f_k(\alpha)}.$$

从而再由(甲)得$f_k\leqslant\eta$. 但$f_k\geqslant\eta$故得$\eta=f_k$即$f_k(\alpha)=cf(\sigma_k)$. 而定理得证．

一般把$\alpha^{cf(\alpha)}$记为$\aleph(\alpha)$. 故知α^β的值共有：$1(=\alpha^0)$, $\alpha(=\alpha^1)$, $\aleph(\sigma_0)$, $\aleph(\sigma_1)$, …,

$\aleph(\sigma_{s-1})$及2^β诸值．值得强调指出，其中并不出现$cf(\alpha)$或$\aleph(\alpha)$．对此我们有：

定理 5 $\forall\alpha(cf(\alpha)=f_0(\alpha))$成立的充要条件是广义连续统假设 GCH 成立．

证 设$cf(\alpha)=f_0(\alpha)$，则只要$\beta<cf(\alpha)$便有$\alpha^\beta=\alpha$． 任取基数β，由于$cf(\beta^+)=\beta^+>\beta$($\beta^+$指$\beta$的后继基数)，故有$(\beta^+)^\beta=\beta^+$． 故$2^\beta\geqslant\beta^+=(\beta^+)^\beta\geqslant2^\beta$，故$2^\beta=\beta^+$即 GCH．

反之，在 GCH 的下应有：只要$\beta<cf(\alpha)$便有$\alpha^\beta=\alpha$，但$\alpha^{cf(\alpha)}>\alpha$，故知$cf(\alpha)=f_0(\alpha)$．定理得证．

利用定理 3，我们得出下列的结果．

如果固定α而得α^β看作β的函数时，α^β的取值情况如下． ($M_k(\alpha)$表示$(\sigma_k(\alpha))^{f_k(\alpha)}$或$\alpha^{f_k(\alpha)}$或$\aleph(\sigma_k)$)，

β	0	1		f_0		f_1		f_2		f_3	$\cdots$	f_s	
α^β	1		α		$M_0(\alpha)$		$M_1(\alpha)$		$M_2(\alpha)$				2^β

这里取左闭区间，即在$[f_k, f_{k+1})$内α^β取值$M_k(\alpha)$．

其次，如果固定β而将α^β看作α的函数时．我们先定义一数列(依赖于β)如下：

$$g(0)=2,$$

$$g(\eta)=\mu\gamma(\forall\delta<\eta(g(\delta))^\beta<\gamma\wedge\gamma^\beta>\gamma).$$

这是超穷递归式，易见：

α在$[g(\eta),\ (g(\eta))^\beta]$内$\alpha^\beta$取值$(g(\eta))^\beta$(即右端点之值)．

α在任何$[g(\eta),\ (g(\eta))^\beta]$之外时$\alpha^\beta=\alpha$．

α	$\cdots$	$[2-2^\beta]$	$\cdots$	$[g(1)-(g(1))^\beta]$	$\cdots$	$[g(2)-(g(2))^\beta]$	$\cdots$
α^β	$\cdots$	2^β	$\cdots$	$(g(1))^\beta$	$\cdots$	$(g(2))^\beta$	$\cdots$

在区间之外亦即在虚点处均有$\alpha^\beta=\alpha$．在特例，当$\alpha=0, 1$时$0^\beta=0, 1^\beta=1$等等．

这两情形有一重大区别点如下． 当α固定时，α^β的值可分成$s+3$段，$1, \alpha, M_0(\alpha), \cdots, M_{s-1}(\alpha), 2^\beta$． 前面的$s+2$段是常值，最后一段($2^\beta$)才与$\beta$有关．

在后面的情形(将β固定)，则区间个数及区间外的变目个数都无上界(可以说与全体序数同个数)．因为对任何大于β的后继基数α而言，$\alpha^\beta=\alpha$，故区间外的变目无上界．其次设$g(\xi)$对$\xi<\eta$已有定义，可作$\bigcup\limits_{\xi<\eta}(g(\xi))^\beta$，在其后第一个极限基数命为$\delta$，显有$cf(\delta)=\omega\leqslant\beta$且$\forall\gamma<\delta(\gamma^\beta\leqslant\delta)$，故由已知定理有$\delta^\beta\geqslant\delta^{cf(\delta)}>\delta$，且显然$\forall\xi<\eta(g(\xi))^\beta<\delta)$，于是满足这条件的最小$\delta$便是$g(\eta)$． 因此$g$对每个序数$\eta$均有定义，即所讨论的区间的个数是没有上界的．故这里的情况与上面情况便有本质的区别．

参 考 文 献

[1] 莫绍揆，集合论的一些新公理系统，数学年刊，1:2(1980)，309—316.

[2] Levy, A., Basic Set Theory, Springer-Verlag, 1979.

[3] Jech, T., Set Theory, Academic Press, 1978.