贪心法(Greedy Approach)

- 基本思想
- 算法设计
  - 设计要素
  - 与动态规划法的比较
  - 正确性证明
- 得不到最优解的处理办法
- 应用实例

活动选择问题

输入：$S=\{1, 2, \ldots, n\}$为n 项活动的集合

s_i, f_i 分别为活动 i 的开始和结束时间

活动 i 与 j 相容 当且仅当 $s_i \geq f_j$ 或 $s_j \geq f_i$

求最大的两两相容的活动集

策略1：排序使得 $s_1 \leq s_2 \leq \ldots \leq s_n$，从前向后挑选

策略2：排序使得 $f_1 - s_1 \leq f_2 - s_2 \leq \ldots \leq f_n - s_n$，从前向后挑选

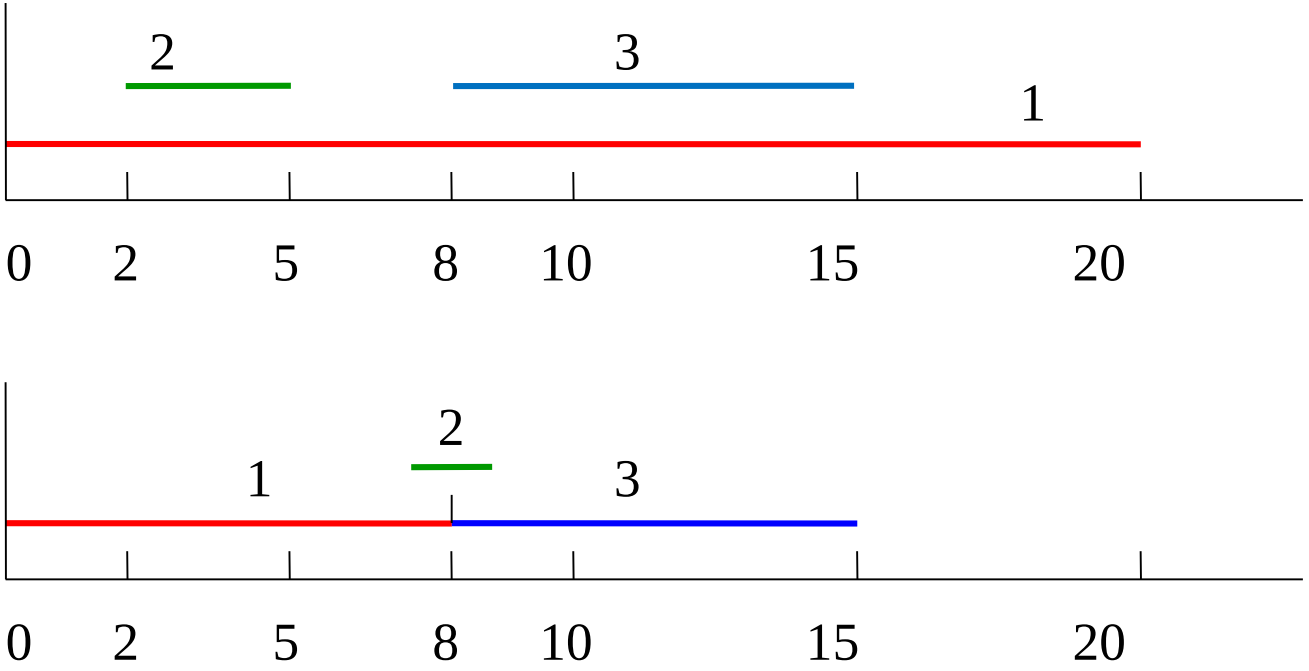
策略3：排序使得 $f_1 \leq f_2 \leq \ldots \leq f_n$，从前向后挑选

以上策略中的挑选都要注意满足相容性条件

两个反例

策略1：$S=\{1,2,3\}$，$s_1=0$，$f_1=20$，$s_2=2$，$f_2=5$，$s_3=8$，$f_3=15$

策略2：$S=\{1,2,3\}$，$s_1=0$，$f_1=8$，$s_2=7$，$f_2=9$，$s_3=8$，$f_3=15$



贪心算法：按截止时间排序

算法 **Greedy Select**

1. $n \leftarrow length[S]$;
2. $A \leftarrow \{1\}$;
3. $j \leftarrow 1$;
4. for $i \leftarrow 2$ to n
5. do if $s_i \geq f_j$
6. then $A \leftarrow A \cup \{i\}$;
7. $j \leftarrow i$;
8. return A.

最后完成时间 $t = \max \{ f_k : k \in A \}$.

实例

输入

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
s_i	1	3	0	5	3	5	6	8	8	2	12
f_i	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

解为　$A = \{1, 4, 8, 11\}$　　$t = 14$

正确性证明

证明方法：

(1) 归纳法：证明贪心法得到最优解

叙述一个描述正确性的命题

对算法步数归纳或者对问题规模归纳

(2) 交换论证：在保证最优性不变的前提下，从一个最优解进行逐步替换，最终得到贪心法的解

定理1　算法Select 执行到第 k 步, 选择 k 项活动 $i_1 = 1$, i_2, …, i_k, 那么存在最优解 A 包含 $i_1=1, i_2, \ldots, i_k$

根据定理：算法至多到第 n 步得到最优解

归纳证明

归纳基础：证明存在最优解包含活动 1
归纳步骤：假设按照算法前 k 步选择都导致最优解，证明第k+1步选择也导致最优解

归纳步骤的证明思路

1. 算法第 k 步选择活动 $i_1=1, i_2, \ldots, i_k$，根据归纳假设，存在最优解

$$A=\{ i_1=1, i_2, \ldots, i_k \}\cup B$$

B是剩下的待选活动集 S'的一个最优解

2. 由归纳基础，存在S'的最优解 B' 包含i_{k+1}
3. 由 $|B'|=|B|$ 知 $A'=\{i_1=1, i_2, \ldots, i_k\}\cup B'$ 最优
4. $A'=\{i_1=1, i_2, \ldots, i_k, i_{k+1}\}\cup(B' -\{i_{k+1}\})$最优.

证明：归纳基础

设$S=\{1,2,\ldots,n\}$是活动集，活动按截止时间递增顺序排序.

$k=1$, 证明存在最优解包含活动1.

任取最优解A, A中的活动按照截止时间递增的

顺序排列. 如果A的第一个活动为 j，$j\neq 1$, 令

$$A'=(A-\{j\})\cup\{1\},$$

由于 $f_1\leq f_j$, A'也是最优解，且含有1.

证明：归纳步骤

假设命题对 k 为真,证明对 $k+1$ 也为真.

算法执行到第 k 步, 选择了活动 $i_1=1, i_2, \ldots, i_k$, 根据归纳假设存在最优解 A 包含 $i_1=1, i_2, \ldots, i_k$,

A中剩下的活动选自集合$S'=\{ i \mid i \in S, s_i \geq f_k\}$,且

$$A = \{ i_1, i_2, \ldots, i_k \} \cup B$$

B是S'的最优解.（若不然, S'的最优解为B^*, B^*的活动比 B 多，那么$B^* \cup \{1, i_2, \ldots, i_k\}$是 S 的最优解，且比 A的活动多, 与 A 的最优性矛盾.）

根据归纳基础，存在 S'的最优解B'含有S'中的第一个活动, 设为i_{k+1}, 且$|B'|=|B|$, 于是

$$\{i_1, i_2, \ldots, i_k\} \cup B' = \{i_1, i_2, \ldots i_k, i_{k+1}\} \cup (B' - \{i_{k+1}\})$$

也是原问题的最优解.

贪心算法设计要素

- 适用：

  问题求解表示成多步判断

  整个判断序列对应问题的解，子序列对应子问题的解
- 判断的依据——贪心选择：短视的优化策略
- 正确性证明：归纳法(算法步数、问题规模)，交换论证
- 自顶向下计算：通过贪心选择，将原问题规约为子问题
- 线性表记录选择的结果
- 时间复杂度：取决于判断步数与每步的工作量

最优装载 Loading

n 个集装箱1,2,…,n 装上轮船，集装箱 i 的重量 w_i, 轮船装载重量限制为c， 无体积限制. 问如何装使得上船的集装箱最多？不妨设 $w_i \le c$.

$$\max \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} w_i x_i \le c$$

$$x_i = 0,1 \quad i = 1,2,...,n$$

贪心法：将集装箱按照从轻到重排序，轻者先装

贪心选择性质证明

命题：对任何规模为n (n是正整数) 的输入，上述贪心法都得到最优解.

证明思路　对规模的归纳

- 设集装箱标号按照从轻到重记为1, 2, … , n
- n=1,贪心选择得到最优解（只有1个箱子，不证）
- 假设对于规模为 n–1 的输入得到最优解，证明对规模为 n 的输入也得到最优解

归纳步骤

假设对于 $n-1$ 个集装箱的输入，贪心法都可以得到最优解，考虑 n 个集装箱的输入 $N = \{1, 2, \ldots, n\}$, 其中

$$w_1 \le w_2 \le \ldots \le w_n.$$

由归纳假设，对于$N' = \{2,3,\ldots,n\}$，$c' = c - w_1$, 贪心法 得到最优解 I'. 令 $I = \{1\} \cup I'$，则 I 是关于 N 的最优解.

若不然，存在包含 1 的关于 N 的最优解 I^*（如果 I^* 中没有1，用 1 替换 I^* 中的第一个元素得到的解也是最优解），且且$|I^*| > |I|$； 那么 $I^* - \{1\}$是 N' 的解且

$$|I^* - \{1\}| > |I - \{1\}| = |I'|$$

与 I' 的最优性矛盾.

说明

- Loading 算法

  复杂性　$T(n)=O(n\log n)$

- Loading 问题 是 0-1背包问题 的特例：

  即$v_i=1$, i=1,2,…,n.

  该问题是 $O(n\log n)$ 时间可解的

  0-1背包问题是NP难的

最小延迟调度

问题：

任务集合S，$\forall i \in S$，d_i为截止时间，t_i为加工时间，

d_i, t_i为正整数.

一个调度 $f: S \to N$，$f(i)$为任务 i 的开始时间. 求最大延迟达到最小的调度，即求 f 使得

$$\min_{f}\{\max_{i \in S}\{f(i)+t_i-d_i\}\}$$

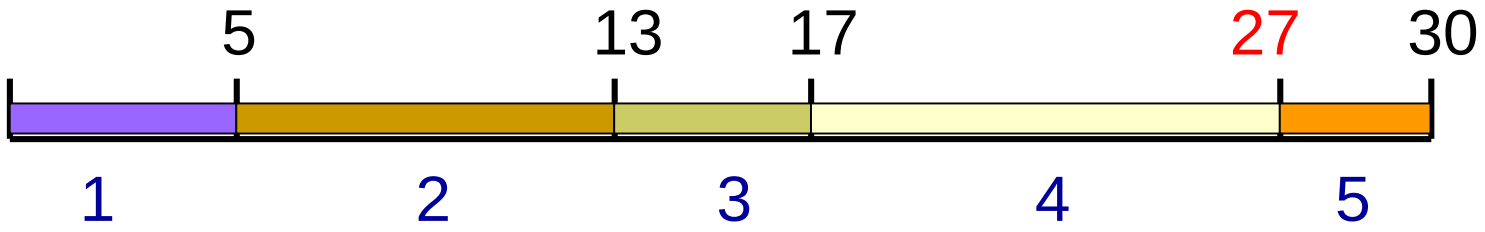
$$\forall i, j \in S, i \neq j, f(i)+t_i \leq f(j) \text{ or } f(j)+t_j \leq f(i)$$

实例

S={1, 2, 3, 4, 5}, d=<10, 12, 15, 11, 20>, t=<5, 8, 4, 10, 3>

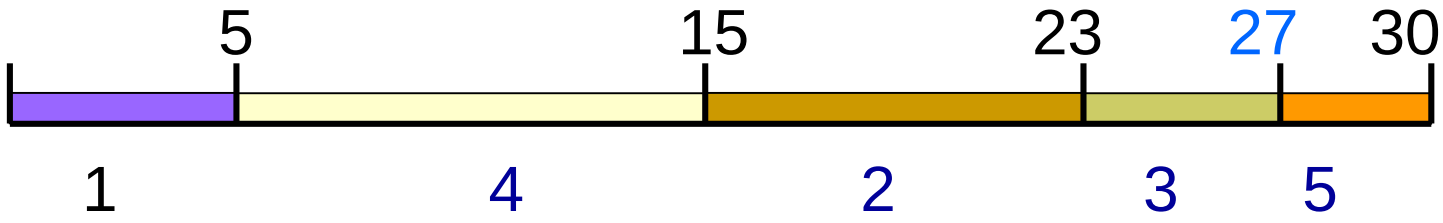
调度1： $f_1(1)=0, f_1(2)=5, f_1(3)=13, f_1(4)=17, f_1(5)=27$

各任务延迟：0, 1, 2, 16, 10； 最大延迟：16



调度2： $f_2(1)=0, f_2(2)=15, f_2(3)=23, f_2(4)=5, f_2(5)=27$

各任务延迟：0, 11, 12, 4, 10；最大延迟：12



贪心策略选择

贪心策略1：按照 t_i 从小到大安排任务

贪心策略2：按照 $d_i - t_i$ 从小到大安排任务

贪心策略3：按照 d_i 从小到大安排任务

策略1 对某些实例得不到最优解.

反例：$t_1=1, d_1=100, t_2=10, d_2=10$

策略2 对某些实例得不到最优解.

反例：$t_1=1, d_1=2, t_2=10, d_2=10$

算法设计

算法思想：

按照截止时间 d_i 从小到大选择任务

安排时不留空闲时间

算法

1. Sort(S) 使得 $d_1 \le d_2 \le \ldots \le d_n$
2. $f(1) \leftarrow 0$，$i \leftarrow 2$
3. while $i \le n$ do
4. $\quad f(i) \leftarrow f(i-1)+t_{i-1}$
5. $\quad i \leftarrow i+1$

交换论证：正确性证明

算法的解的性质：

没有空闲时间，没有逆序.

逆序 (i, j): $f(i) < f(j)$ and $d_i > d_j$

命题1 所有没有逆序、没有空闲时间的调度具有相同的最大延迟.

证： 因为 f_1 与 f_2 都没有逆序，具有相同截止时间的任务必须被连续安排. 在这些连续安排的任务中最大延迟是最后一个任务，被延迟的时间只与已安排任务加工时间之和有关，与任务标号无关.

交换论证

证明思想：从一个没有空闲时间的最优解出发，在不改变最优性的条件下，转变成没有逆序的解.

(1) 如果一个最优调度存在逆序，那么存在 $i < n$ 使得 $(i, i+1)$ 构成一个逆序.

(2) 存在逆序 (i, j)，$j=i+1$，那么交换 i 和 j 得到的解的逆序数减1，后面证明这个新的调度仍旧最优.

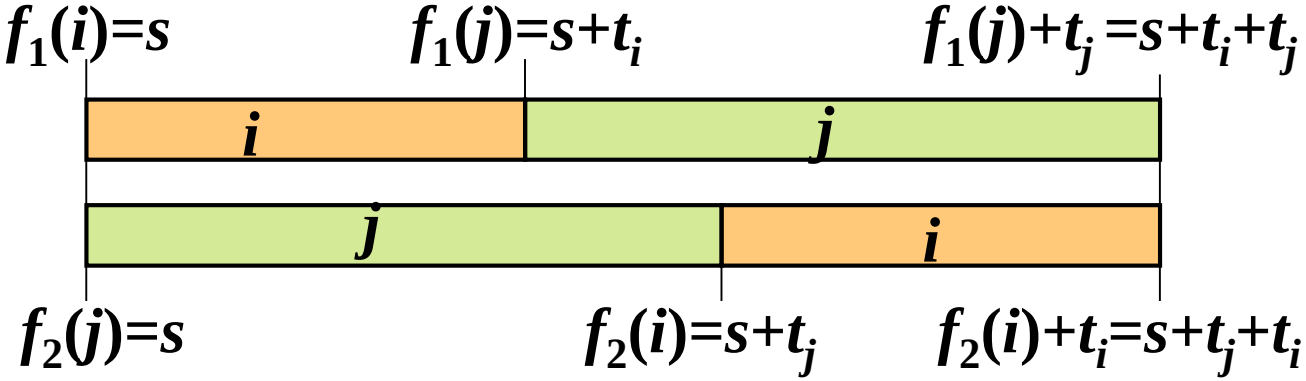
(3) 至多经过 $n(n-1)/2$ 次交换得到一个没有逆序的最优调度.

交换相邻逆序任务(i, j)不影响最优性

(1) 交换 i, j 对其他任务的延迟时间没影响

(2) 交换后不增加 j 的延迟

(3) 任务 i 在 f_2 的延迟 L_{2i} 小于任务 j 在 f_1 的延迟 L_{1j}，因此小于f_1的最大延迟



i 在 f_2 结束时间 = j 在 f_1 的结束时间 = $s+t_i+t_j$

i 在 f_2 的延迟: $L_{2i} = (s+t_i+t_j)-d_i$

j 在 f_1 的延迟: $L_{1j} = (s+t_i+t_j)-d_j$

$d_j < d_i \Rightarrow L_{2i} < L_{1j}$