2002年第4卷第3期
总第56期
《巢湖学院学报》(自然科学版)
Journal of Chaohu college(Natural Science)
No.3.,Vol.4.2002
General Serial No.56

# 浅谈基数的概念

王池社

(巢湖学院数学系, 巢湖 238000)

**摘要:**本文通过归纳法将自然数定义为集合,再应用函数一一对应的概念对无穷集合的基数进行研究。

**关键词:**基数, 可数集, 不可数集, 连续统

**中图分类号:**O144 **文献标识码:**A **文章编号:**1009-0835(2002)03-0018-02

基数也叫做势,是《离散数学》集合论中一个重要的概念,对于学习《离散数学》的学生而言,基数又是一个令人困惑的概念,本文藉希望通过对其定义的全过程进行研究,以便得出对基数概念的一个全面了解。

集合论是数学中的一个重要分支,其中最基本的要素就是集合,对于集合的研究,人们又关注其所包含的元素的个数。基数就是应此需要而加以定义的,但集合的基数又不可简单的认为是集合中元素的个数。因为我们知道集合可以分为无穷集合与有穷集合,对于有穷集合而言,我们当然的可以直接将基数定义为其所包含的元素的个数,这就是日常生活中的"数数"的概念,但对于无穷集合,其元素的个数显然是不可度量的。为此我们首先引用意大利数学家皮亚诺的G.Peano公理:

1) $0\in N$(其中 $0=\phi$)。

2) 如果 $n\in N$,那么 $n^{+}\in N$(其中 $n^{+}=n\cup\{n\}$)

3) 如果一个子集 $S\subseteq N$ 具有性质:

i) $0\in S$。

ii) 如果 $n\in S$,有 $n^{+}\in S$,则 $S=N$。

对自然数集合加以定义,从上述定义可以看出任意一个自然数可看作是一个集合的名,例如3这个概念是从观察许多只含三个元素的集合的共同特点而加以抽象概括出来的,这个共同特点就是体现于这些被观察的任意一个集合的元素都可与集合 $\{\phi,\{\phi\},\{\phi,\{\phi\}\}\}$ 中的元素存在一一对应,且其任意两个集合的元素之间也存在一一对应。

当我们将自然数集合作出如上定义以后,我们先还是来看一下有穷集合基数,例如包含3个元素的有穷集合 $\{a,b,c\}$,按上述定义其基数应为3,可以与自然数3的形式定义 $\{\phi,\{\phi\},\{\phi,\{\phi\}\}\}$ 形成一一对应,故而我们作出推想:能否将有穷集合的这种特征推而广之呢?

我们作以下定义,若两个集合A与集合B之间存在着一个双射函数,则称这两个集合是基数

**收稿日期:**2002-02-14

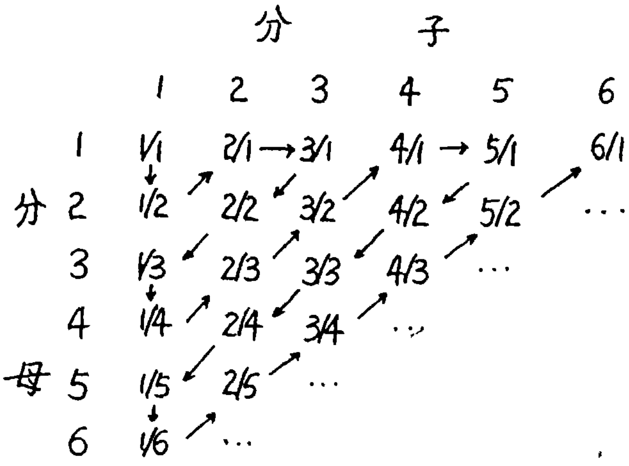
**作者简介:**王池社(1974-),男,池州市人,巢湖学院数学系助教。

相等的(也称作是等势的)。再选取一些新的"标准集合",以建立无穷集合的基数的概念。

无穷集合一般分为两类,一类是可数无限集,另一类是不可数无限集,下面对这两种无限集加以讨论:

对可数无限集选取 N 为"标准集合",凡等势于 N 集合的无限集都是可数无限集,也叫做可列集,通常其基数记为希伯莱文$\aleph$并且可以证明$\aleph_0$为最小的无限集基数。以正有理数 $Q^+$ 是可列集为例来研究此类集合所具有的共同特征:

任一正有理数可以写成分数形式,根据分数的分子分母情况列表排列如下:




在上述元素的排列中,由左上端开始,其每一斜线上的每一元素的分子与分母之和都相同,依次为 2,3,4,…,各斜线上元素的个数依次为 1,2,3,…,可与 N 建立一一对应的关系,故由此得出结论。

对于不可数无限集,我们选取以[0,1]为"标准集合"的一类不可数无限集,通常记其基数为$\aleph$,下面采用康托提供的"康托对角线法"对这一类不可数无限集进行研究,以区别于可数无限集:

记 $S=\{S_1,S_2,\cdots\}$,其中 $S_i$ 是[0,1]中的任何一个元素,假设此时[0,1]与 N 等势,则 S 可表示为

$S_1=0.a_{11}a_{12}a_{13}\cdots a_{1n}\cdots$

$S_2=0.a_{21}a_{22}a_{23}\cdots a_{2n}\cdots$

$S_3=0.a_{31}a_{32}a_{33}\cdots a_{3n}\cdots$

……

其次,我们构造一个实数 $r=0.b_1b_2b_3\cdots$,使

$b_j=1 \quad a_{jj}\neq 1$

$b_j=2 \quad a_{jj}=1 \ (j=1,2,\ \cdots\cdots)$

这样,r 与所有实数 $S_1,S_2,\cdots,S_n,\cdots$不同,因它与 $S_1$ 在位置 1 不同,与 $S_2$ 在位置 2 不同,……,等等,这就证明了 $r\notin S$,产生矛盾,因此 S 是不可数的。

按照著名的连续统假设,不存在任何基数 K[S],使($\aleph_0<K[S]<\aleph$成立,同时有定理保证无最大的基数和最大集合,故除去$\aleph$和$\aleph_0$外还可以有其他不可数无限集的基数。

**参考文献:**

[1]耿素云,集合论与图论[M],北京:北京大学出版社

[2]黄天发,离散数学[M],电子科技大学出版社

[3]方世昌,离散数学[M],西安:西安电子科技大学出版社

[4]左孝凌、刘永才,离散数学[M],上海:上海科技文献出版社

[5]李盘林、李丽双,离散数学[M],北京:高等教育出版社

责任编辑:开斌