算分回顾03-14

黄道吉-1600017857

元培学院

March 15, 2018

目录

recap

- 最近点对
  - 预处理降低计算复杂度
  - 设计相应的数据结构
- 分治选择算法及其复杂度估计

vector operation

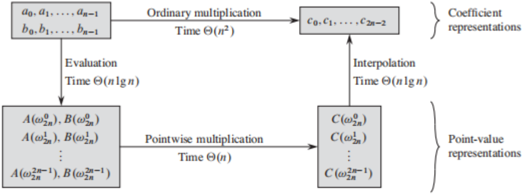
- 向量和$a + b = (a_0 + b_0, ..., a_{n-1} + b_{n-1})$
- 内积$ab = (a_0 b_0 + ... + a_{n-1} b_{n-1})$
- 卷积$ab = (c_0, ..., c_{2n-2})$ 其中$c_k = \sum_{i+j=k,i,j<n} a_i b_j$
- $$\begin{pmatrix} a_0 b_0 & a_0 b_1 & \cdots & a_0 b_{n-2} & a_0 b_{n-1} \\ a_1 b_0 & a_1 b_1 & \cdots & a_1 b_{n-2} & a_1 b_{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1} b_0 & a_{n-1} b_1 & \cdots & a_{n-1} b_{n-2} & a_{n-1} b_{n-1} \end{pmatrix}$$
- 可以看作两个多项式相乘之后的各项系数

$$C(x) = A(x)B(x)$$

$$A(x) = \sum_0^{m-1} a_i x^i \quad B(x) = \sum_0^{n-1} b_i x_i$$

convolution computation

- 直接计算: $O(n^2)$
- 快速算法
  - 选择$x_1, ..., x_{2n}$, 求出$A(x_j)$和$B(x_j)$
  - 计算$C(x_j) = A(x_j)B(x_j)$
  - 利用插值算法, 求出$C(x)$
  - 下面只需要说明可以在$\Theta(n \log n)$时间内对多项式求值, 反解出多项式



interpolation

- 可以用点值对表示多项式：给定$n-1$次多项式在n个点的取值，可以唯一确定这个多项式，反解出系数只需计算$a = V(x_0, \dots, x_{n-1})^{-1}y$即可，但这是$O(n^3)$的算法

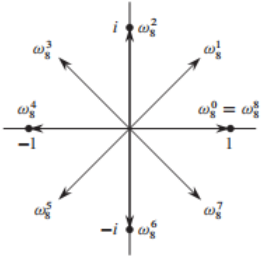
$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^{n-1} \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \cdots & x_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix}.$$

- 拉格朗日插值可以做到用$\Theta(n^2)$的时间计算系数向量.

$$A(x) = \sum_{k=0}^{n-1} y_k \frac{\prod_{j\neq k}(x - x_j)}{\prod_{j\neq k}(x_k - x_j)}$$

complex roots of unity

- 1的单位根表示为$\omega^n = 1$
- 在复平面上的表示



- 2n次方根的平方是n次方根，即$(\omega_{2n}^k)^2 = \omega_n^k$

DFT and FFT

- 假定一个多项式$A(x) = \sum_{i=0}^{m-1} a_i x^i$以系数向量的形式给出$a = (a_0, ..., a_{n-1})$, 定义

$$y_k = A(\omega_n^k) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j \omega_n^{kj}$$

则$y = (y_0, ..., y_{n-1}) = DFT_n(a)$称为系数向量的离散傅里叶变换

DFT and FFT

- 通过FFT可以在$\Theta(n \log n)$时间内计算出DFT, 反解出系数向量
- 将多项式按照奇偶项分成两个n / 2次多项式

$$A^{[0]}(x) = a_0 + ... + a_{n-2}x^{n/2-1},$$
$$A^{[1]}(x) = a_1 + ... + a_{n-1}x^{n/2-1}.$$

则有

$$A(x) = A^{[0]}(x^2) + xA^{[1]}(x^2)$$

DFT and FFT

- 这样对n次多项式的求值转化为对两个n / 2次多项式的求值
- 并且$(\omega_n^0)^2, ..., (\omega_n^{n-1})^2$正好是1的n / 2次方根, 正好得到规模减小的原问题
- 合并子问题解的过程可以在$O(n)$时间内完成, 也可以利用单位根的性质做优化.

FFT pseudo-code

Algorithm 1 Recursive-FFT(a)

n = a.*length*
if n == 1 **then return** a
end if
$\omega_n = e^{2\phi i/n} \qquad \omega = 1$
$a^{[0]} = (a_0, ..., a_{n-2}) \quad a^{[1]} = (a_1, ..., a_{n-1})$
$y^{[0]} = Recursive - FFT(a^{[0]}) \quad y^{[1]} = Recursive - FFT(a^{[1]})$
for $k = 0 \to n/2 - 1$ **do**
    $y_k = y_k^{[0]} + \omega y_k^{[1]}$
    $y_{k+n/2} = y_k^{[0]} - \omega y_k^{[1]}$
    $\omega = \omega \omega_n$
end for
return y

DFT^{-1}

- 上页中算法是$\Theta(n\log n)$的算法
- 求DFT的过程等价于进行如下运算

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega_n & \omega_n^2 & \omega_n^3 & \cdots & \omega_n^{n-1} \\ 1 & \omega_n^2 & \omega_n^4 & \omega_n^6 & \cdots & \omega_n^{2(n-1)} \\ 1 & \omega_n^3 & \omega_n^6 & \omega_n^9 & \cdots & \omega_n^{3(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega_n^{n-1} & \omega_n^{2(n-1)} & \omega_n^{3(n-1)} & \cdots & \omega_n^{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix}$$

  可验证, 上述矩阵的逆为$A_{i,j}^{-1} = \omega_n^{-ij}/n$
- DFT的逆运算为$a_j = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} y_k\omega_n^{-kj}$, 这也是多项式求值的形式, 也可以用$\Theta(n\log n)$的时间完成.
- 算法导论中还介绍了一种常数更低的实现方式.

convex hull-intro. and algo.

- 问题给定点集, 求最小的凸多边形包含所有点

convex hull-intro. and algo.

- 问题给定点集, 求最小的凸多边形包含所有点
- 算法
  - 以y_{max}, y_{min}的连线分成两个点集
  - $deal(L)$
    - 将距离分界线最远点加入凸包, 连接两条新分界线
    - 考虑用新分界线划分成的两个新子问题
  - $deal(R)$

algorithm analysis

- 初始用直线分割O(n)
- $deal(n)$的复杂度$W(n) \leq W(n-1) + O(n)$
  - 找距离最远点$O(n)$
  - 找三角形外面的点$O(n)$
  - 新的子问题至多只有$n-1$个点
- $T(n) = O(n) + W(n) = O(n^2)$

other problems

- 二分查找 $T(n) = T(n/2) + \Theta(1)$
- 棋盘覆盖

$$T(n) = \begin{cases} O(1) & k = 0 \\ 4T(k-1) + O(1) & k > 0 \end{cases}$$

- 幂的和 $T(n) = T(n/2) + \Theta(1)$