1 Q1

$\mathcal{C}_1 = \phi$ 是开集, 闭集, 有界集, 紧集, 它的内点集, 闭包, 边界和聚点集都是ϕ.

$\mathcal{C}_2 = \mathcal{R}^n$ 是开集, 闭集, 无界集, 不是紧集, 它的内点集, 闭包, 边界和聚点集都是$\mathcal{R}^n$.

$\mathcal{C}_3 = [0,1) \cup [2,3] \cup (4,5]$ 不是开集, 不是闭集, 有界, 不紧, 它的内点集是 $(0,1) \cup (2,3) \cup (4,5)$, 它的闭包是 $[0,1] \cup [2,3] \cup [4,5]$, 它的边界是 $\{0,1,2,3,4,5\}$, 它的聚点集是 $[0,1] \cup [2,3] \cup [4,5]$.

$\mathcal{C}_4 = \{(x,y)^T |\ x \geq 0, y > 0\}$ 不开, 不闭, 无界, 不紧, 它的内点集是 $\{(x,y)^T |\ x > 0, y > 0\}$, 它的闭包是 $\{(x,y)^T |\ x \geq 0, y \geq 0\}$, 它的边界是 $\{(0,y)^T | y \geq 0\} \cup \{(x,0)^T |\ x \geq 0\}$, 它的聚点集是 $\{(x,y)^T |\ x \geq 0, y \geq 0\}$.

$\mathcal{C}_5 = \{k |\ k \in \mathcal{Z}\}$ 不是开集, 是闭集, 无界, 不紧, 它的内点集是 ϕ, 它的闭包和边界集都是它自身, 也就是 $\{k |\ k \in \mathcal{Z}\}$, 它的聚点集是它自身(按讲义中定义, 孤立点算作聚点).

$\mathcal{C}_6 = \{k^{-1} |\ k \in \mathcal{Z}\}$ 不开, 不闭, 有界, 不紧, 它的内点集是 ϕ, 它的闭包和边界集都是 $\{k^{-1} |\ k \in \mathcal{Z}\} \cup \{0\}$, 它的聚点集是 $\mathcal{C}_6 \cup \{0\}$.

$\mathcal{C}_7 = \{(1/k, \sin k)^T |\ k \in \mathcal{Z}\}$ 不开, 不闭, 有界, 但不紧, 它的内点集是 ϕ, 它的闭包和边界集都是 $\{(1/k, \sin k)^T |\ k \in \mathcal{Z}\} \cup \{(0,y) |\ -1 \leq y \leq 1\}$, 它的聚点集是 $\mathcal{C}_7 \cup \{(0,y) |\ -1 \leq y \leq 1\}$.

2 Q2

1. 若 $\mathcal{C}$ 是闭集, 如果存在 x^* 是 $\mathcal{C}$ 中一个收敛序列的极限点, 但 $x^* \notin \mathcal{C}$, 所以有 $x^* \in \mathcal{C}^c$, 而 $\mathcal{C}^c$ 是一个开集, 所以有

$$\exists \epsilon\ s.t.\ (\cup(x^*, \epsilon)) \cap \mathcal{C} = \phi \tag{1}$$

因为 $\cup(x^*, \epsilon) \subseteq \mathcal{C}^c$. 但存在 $\{x_k\}_1^\infty \subseteq \mathcal{C}$ 也即 $\lim_{k\to\infty} x_k = x^*$, 也就是说,

$$\forall \epsilon \quad (\cup(x^*, \epsilon)) \cap \mathcal{C} \neq \phi \tag{2}$$

矛盾! 所以对于所有 x^* 是 $\mathcal{C}$ 中一个收敛序列的极限点, 都有 $x^* \in \mathcal{C}$.

2. 如果 $\mathcal{C}$ 包含其中所有收敛序列的极限点, 但 $\mathcal{C}$ 并不是闭集, $i.e.$ $\mathcal{C}^c$ 不是开集, 也就是,

$$\exists x^* \in \mathcal{C}^c\ , s.t.\ \forall\ \epsilon > 0\ (\cup(x^*, \epsilon)) \cap \mathcal{C} \neq \phi \tag{3}$$

因为 $(\mathcal{C}^c)^c = \mathcal{C}$. 选定一列 $\epsilon_k \to 0$ 并选取 $x_k \in (\cup(x^*, \epsilon_k)) \cap \mathcal{C}$, 有 $\lim_{k\to\infty} x_k = x^*$, 由假设得到 $x^* \in \mathcal{C}$, 矛盾! 所以 $\mathcal{C}$ 是闭集.

3. 由1和2, 我们证明了 $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{R}^n$ 是闭集 $\iff$ $\mathcal{C}$ 包含其中所有收敛序列的极限点.

3 Q3

$x \in \partial\mathcal{C} = \bar{\mathcal{C}} \setminus \mathcal{C}^o = ((\mathcal{C}^c)^o)^c \setminus \mathcal{C}^o = ((\mathcal{C}^c)^o)^c \cap (\mathcal{C}^o)^c$

由定义, $x \in \mathcal{C}^o \iff \exists \epsilon > 0\ \cup(x, \epsilon) \subseteq \mathcal{C}$, 所以

$$x \in (\mathcal{C}^o)^c \iff \forall \epsilon > 0\ \exists z \notin \mathcal{C}\ |z - x|_2 < \epsilon \tag{4}$$

把等式(4)中 $\mathcal{C}$ 替换成 $\mathcal{C}^c$, 得到

$$x \in ((\mathcal{C}^c)^o)^c \iff \forall \epsilon > 0\ \exists y \in \mathcal{C}\ |y - x|_2 < \epsilon \tag{5}$$

合并两个等式, 所以 $x \in \partial\mathcal{C} = ((\mathcal{C}^c)^o)^c \cap (\mathcal{C}^o)^c \iff \forall\epsilon > 0\ \exists y \in \mathcal{C}\ |y-x|_2 < \epsilon\ \exists z \notin \mathcal{C}\ |z-x|_2 < \epsilon$

4 Q4

1.1 如果 $\mathcal{C}$ 是闭集, 那么 $\forall x^* \in \partial\mathcal{C}$, 由 $Q3$, 得到 $\forall\epsilon > 0\ \exists y \in \mathcal{C}\ |y-x^*|_2 < \epsilon$, 那么 x^* 一定是 $\mathcal{C}$ 中一个收敛序列的极限点, 又由 $Q2$, 得到 $x^* \in \mathcal{C}$, 所以 $\mathcal{C} \supseteq \partial\mathcal{C}$.

1.2 如果 $\mathcal{C} \supseteq \partial\mathcal{C}$, 但 $\mathcal{C}$ 并不是闭集, 由 $Q2$ 的逆否命题, 至少存在一个点 x^* 是 $\mathcal{C}$ 中一个收敛序列的极限点, 但 $x^* \notin \mathcal{C}$, 所以有

$$\forall\epsilon > 0\ \exists y \in \mathcal{C}\ |y-x^*|_2 < \epsilon\ \exists z \notin \mathcal{C}\ |z-x^*|_2 < \epsilon, \tag{6}$$

只需再等式(6)中选择 $z = x^*$, 那由 $Q3$, $x^* \in \partial\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}$, 矛盾! 所以 $\mathcal{C}$ 是一个闭集.

2.1 如果 $\mathcal{C}$ 是开集, 假设存在 $x^* \in \mathcal{C} \cap \partial\mathcal{C}$, 那么 $\exists\epsilon > 0\ \cup(x^*, \epsilon) \subseteq \mathcal{C}$(这是因为$\mathcal{C}$是一个开集) 并且 $\forall\epsilon > 0\ \exists z \notin \mathcal{C}\ |z-x^*|_2 < \epsilon$ (因为x^*在边界上), 矛盾! 所以 $\mathcal{C} \cap \partial\mathcal{C} = \phi$.

2.2 如果 $\mathcal{C} \cap \partial\mathcal{C} = \phi$, 假设 $\mathcal{C}$ 不是开集, *i.e.* $\exists x^* \in \mathcal{C}\ \forall\epsilon > 0\ \exists z \notin \mathcal{C}\ |z-x^*|_2 < \epsilon$, 那么类似的, 在等式(6)中取$y = x^*$, 由 $Q3$, $x^* \in \partial\mathcal{C}$, 矛盾! 所以 $\mathcal{C}$ 是开集.

5 Q5

a.1

$$\begin{aligned}
\overline{\mathcal{A} \cup \mathcal{B}} &= (((\mathcal{A} \cup \mathcal{B})^c)^o)^c \\
&= ((\mathcal{A}^c \cap \mathcal{B}^c)^o)^c \quad (De\ Morgan) \\
&= ((\mathcal{A}^c)^o \cap (\mathcal{B}^c)^o)^c \quad (*) \\
&= ((\mathcal{A}^c)^o)^c \cup ((\mathcal{B}^c)^o)^c \quad (De\ Morgan) \\
&= \overline{\mathcal{A}} \cup \overline{\mathcal{B}}
\end{aligned} \tag{7}$$

下证(*)式, 只需证明 $(P \cap Q)^o = P^o \cap Q^o$

$$\begin{aligned}
&\forall x \in \mathcal{R}^n \\
&x \in (P \cap Q)^o \\
\iff &\exists\epsilon\ \cup(x, \epsilon) \subseteq P \cap Q \\
\iff &\exists\epsilon\ \cup(x, \epsilon) \subseteq P\ \wedge\ \exists\epsilon\quad \cup(x, \epsilon) \subseteq Q \\
\iff &x \in P^o\ \wedge\ x \in Q^o
\end{aligned} \tag{8}$$

所以 $(P \cap Q)^o = P^o \cap Q^o$.

a.2 $\forall x \in \overline{\mathcal{A} \cap \mathcal{B}}$, 存在 $\{x_k\}_1^\infty \subseteq \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$, 并且 $\lim_{k\to\infty} x_k = x$ (为得到这个式子, 只需证明$\overline{\mathcal{C}} = \mathcal{C} \cup \mathcal{C}'$, 其中, $\mathcal{C}'$是导集(聚点集), 由$Q2$, $\mathcal{C} \cup \mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$, 即一个集合的闭包必然包含其导集(收敛点的集合), 又$\mathcal{C} \cup \mathcal{C}'$是闭集(下证它是闭集$\forall x \in (\mathcal{C} \cup \mathcal{C}')^c$, 若$\forall\epsilon > 0$ 都有 $(\cup(x, \epsilon)) \cap (\mathcal{C} \cup \mathcal{C}') \neq \phi$ 则可以构造一列$x_k \in \mathcal{C}$(构造方法: 如果$x_k \in \mathcal{C}$, 直接选取它, 如果在导集中, 可以选取离他足够近的$\mathcal{C}$中的点), $\lim_{k\to\infty} x_k = x$, 即 $x \in \mathcal{C}'$, 矛盾!) 所以$\overline{\mathcal{C}} = \mathcal{C} \cup \mathcal{C}'$, 这是因为闭包是最小闭集, 证毕)

所以 $\exists\{x_k\} \subseteq \mathcal{A}$, $\lim_{k\to\infty} x_k = x$, $\exists\{y_k\} \subseteq \mathcal{B}$, $\lim_{k\to\infty} y_k = x$,

所以 $x \in \mathcal{A}' \subseteq \overline{\mathcal{A}}, x \in \mathcal{B}' \subseteq \overline{\mathcal{B}}$, 即$x \in \overline{\mathcal{A}} \cap \overline{\mathcal{B}}$, 即 $\overline{\mathcal{A} \cap \mathcal{B}} \subseteq \overline{\mathcal{A}} \cap \overline{\mathcal{B}}$

例子: $\mathcal{R}$ 中, $\mathcal{A} = \{x|\ x < 0\}$, $\mathcal{B} = \{x|\ x > 0\}$, 则 $\overline{\mathcal{A} \cap \mathcal{B}} = \phi$, 但 $\overline{\mathcal{A}} \cap \overline{\mathcal{B}} = \{0\}$.

b.1 在$Q5.a.1$中已经证过

$$\begin{aligned}
&\forall x \in \mathcal{R}^n \\
&x \in (P \cap Q)^o \\
\Longleftrightarrow\ &\exists \epsilon\ \cup(x,\epsilon) \subseteq P \cap Q \\
\Longleftrightarrow\ &\exists \epsilon\ \cup(x,\epsilon) \subseteq P\ \wedge\ \exists \epsilon\quad \cup(x,\epsilon) \subseteq Q \\
\Longleftrightarrow\ &x \in P^o\ \wedge\ x \in Q^o
\end{aligned} \tag{9}$$

将P, Q替换成$\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 即为本题所求

b.2 类似的

$$\begin{aligned}
&\forall x \in \mathcal{R}^n \\
&x \in \mathcal{A}^o \cup \mathcal{B}^o \\
\Longleftrightarrow\ &\exists \epsilon\ \cup(x,\epsilon) \subseteq \mathcal{A} \vee \cup(x,\epsilon) \subseteq \mathcal{B} \\
\Longrightarrow &\exists \epsilon\ \cup(x,\epsilon) \subseteq \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \\
\Longleftrightarrow\ &x \in (\mathcal{A} \cup \mathcal{B})^o
\end{aligned} \tag{10}$$

取$\mathcal{A} = [0,1),\ \mathcal{B} = [1,2]$, 则有 $(\mathcal{A} \cup \mathcal{B})^o = (0,2)$, 但是 $\mathcal{A}^o \cup \mathcal{B}^o = (0,1) \cup (1,2)$.

6 Q6

a $\lim_{k\to\infty} x_k = 0$, 又 $\frac{|e_{k+1}|}{|e_k|} = 0.5 < +\infty$, 所以$r = 1, c = 0.5$

b $\lim_{k\to\infty} x_k = 1$, 又 $\frac{|e_{k+1}|}{|e_k|} = 0.01 < +\infty$, 所以$r = 1, c = 0.01$

c $\lim_{k\to\infty} x_k = 0$, 又 $\frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^2} = 1 < +\infty$, 所以$r = 2, c = 1$

d $\lim_{k\to\infty} x_k = 0$, 又 $\frac{|e_{k+1}|}{|e_k|} = 3^{-2k-1} \to 0 < +\infty$, 所以$r = 1, c = 0$

e $\forall k, |e_k| \leq 2^{-k}$, 由$Q6.a$得 $r = 1, c = 0.5$.

7 Q7

可以确定

不妨设 $\lim_{k\to\infty} x_k = x^*$, 类似的, 约定 $y^*, r_y, c_y, r_x, r_c, c_x, c_c$

$$\begin{aligned}
\frac{|y_{k+1} - y^*|}{|y_k - y^*|^{r_y}} &= \frac{|c_{k+1}x_{k+1} - c_{k+1}x^* + c_{k+1}x^* - cx^*|}{|c_k x_k - c_k x^* + c_k x^* - cx^*|^{r_y}} \\
&= \frac{|c_{k+1}e_{x,k+1} + e_{c,k+1}x^*|}{|c_k e_{x,k} + e_{c,k}x^*|^{r_y}} \\
&= \frac{|ce_{x,k+1} + e_{c,k+1}x^*|}{|ce_{x,k} + e_{c,k}x^*|^{r_y}} \quad (c_k = c + e_{c,k} = c + o(c))
\end{aligned} \tag{11}$$

$x^* = 0$时, 上式等于$|e_{x,k+1}|/|e_{x,k}|^{r_y}$, 则有 $r_y = r_x, c_y = c_x$.

$x^* \neq 0$时, 分析各项的阶, r越大则对应变量的阶越小, 则成为可以忽略的无穷小量, 所以

$$r_y = min\{r_x, r_c\}, \quad c_y = \begin{cases} c_x, \ r_x < r_c \\ c_c, \ r_c < r_x \end{cases} \tag{12}$$

而当$r_c = r_x$时, c越大, 它的阶越大($e_{k+1} \approx c|e_k|^r$)

$$c_y = max\{c_x, c_c\} \ (when \ r_x = r_c) \tag{13}$$

综上所述 $x^* = 0$时

$$r_y = r_x, \ c_y = c_x \tag{14}$$

$x^* \neq 0$时

$$r_y = min\{r_x, r_c\}, \quad c_y = \begin{cases} c_x \quad (r_x < r_c) \\ c_c \quad (r_c < r_x) \\ max\{c_x, c_c\} \quad (r_x = r_c) \end{cases} \tag{15}$$