

论欧拉图、哈密顿图的判定及应用

◆ 文 / 伍庆成

【摘要】 图论在现实生活中有着较为广泛的应用。欧拉图、哈密顿图的判定方法有多种,主要应用于解决中国邮路问题、旅行售货员问题、排座位问题、判定图是否可一笔画等。

【关键词】 欧拉图 哈密顿图 回路 应用

用图形可描述现实世界中许多状态变化。图形表达事物是现代科学技术中的一种重要手段。图形不仅形象直观,而且可以结合数据,可以数形结合便于计算。因此图论内容是相当现实和必需的,欧拉图、哈密顿图在现实生活中有着较为广泛的应用。

一、欧拉图的判定方法

1、用欧拉图的定义来判定

定义 1 经过图 G 的每条边一次且仅一次的路径,称为欧拉路径,经过图 G 的每条边一次且仅一次的回路,称为欧拉回路。具有欧拉回路的图称为欧拉图。

如下图可用定义判定为欧拉图:

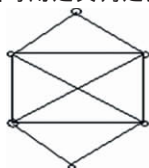


图 1



图 2

2、用定理来判定

定理 1 一个无向连通图是欧拉图的充分必要条件是图中各点的度数为偶数。

图 1 用定理 1 判定比较简单。

定理 2 设图 G 是有向连通图,图 G 是欧拉图的充分必要条件是图中每个顶点的入度和出度相等。

如图 3 用定理 2 可判定为欧拉图。

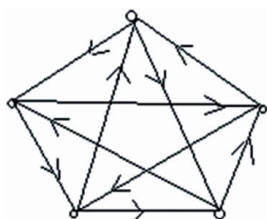


图 3

欧拉路径的条件是经过图中的每条边一次且仅一次,与此非常类似的是哈密顿图,这个条件看起来很类似,但实际要求苛刻许多。

二、哈密顿图的判定方法

1、用哈密顿图的定义来判定

定义 2 如果图 G 中存在一条通过图 G 中各个顶点一次且仅一次的回路,则称此回路为图 G 的哈密顿回路。具有哈密顿回路的图称为哈密顿图。

如下图可用定义判定为为哈密顿图。

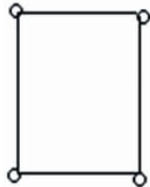


图 4

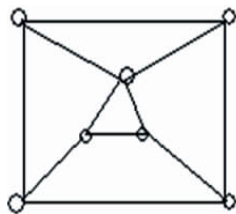


图 5

2、用定理来判定

定理 3 设图 G 是具有 n 个顶点的无向连通图,如果 G 中任意两个不同顶点的度数之和大于等于 n ,则 G 具有哈密顿回路,即 G 是哈密顿图。

容易用定理 3 判定图 5 为哈密顿图。

定理 3 是判断哈密顿图的充分条件,即不满足定理条件时,也可能存在哈密顿回路,图 G 也可能是哈密顿图。

哈密顿图的判定比欧拉图要复杂。

定理 4 设图 $G = \langle V, E \rangle$ 是哈密顿图,则对于 V 的任意一个非空子集 S ,若以 $|S|$ 表示 S 中元素的数目, $G - S$ 表示 G 中删去了 S 中的点以及这些点所关联的边后得到的子图,则 $w(G - S) \leq |S|$ 成立。其中 $w(G - S)$ 是 $G - S$ 中连通分支数。^[1]

定理 4 是哈密顿图的必要条件。用它可证明某些图不是哈密顿图。

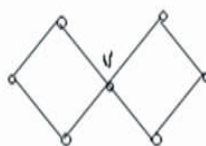


图 6



图 7

图 6 中删去 v 成为具有 2 个连通分支的图,图 7 中删去 a, b 成为具有 3 个连通分支的图,即图 6 和图 7 都不是哈密顿图。

三、欧拉图、哈密顿图的应用

1、中国邮路问题

我国数学家管梅谷教授首先提出一个问题:一个邮递员在投送邮件时,每次要走遍负责投递范围内的各条街道,然后再回到邮局,他应该按什么样的路线走,使所走的路程最短?这就是中国邮路问题。如果将投递地点用点来表示,邮递员可供选择的路线用边来表示,每条边上的权表示两相邻地点的距离,这样就构成了一个赋权图 G 。

易看到,中国邮路问题实际就是在赋权图 G 上找到一条通过各边的回路,且各边的权和最小,称这样的回路为最优回路。如果邮递员所走街道的图形是一个欧拉图,则中国邮路问题容易解决,因为图 G 中任何一条欧拉回路都是最优回路。^[1] 但如果图 G 不是欧拉图,则问题就复杂,则图 G 的最优回路将通过图中有些边超过一次。如在设计公园景区路径,要考虑两个主要影响因素,一是尽可能观全部景点,同时尽量少走重复路径,以节省体力。如何设计各景点之间的路径连接才能科学合理地便于游客的浏览,也可用欧拉图的知识来解决。

2、判断一个图是否可以一笔画出

一个无向图 G 可一笔画出的两种情况是从图的一点出发经过每条边一次且只一次到达图的另一点和从图的一点出发通过每边一次且一次又回到该点。^[2] 判断图形是否可以一笔画出,实际上即判断是否含有包含所有边的欧拉路,即一个图全为偶数度结点或恰有两个结点是奇数其余都为偶数。

例 1、判定下图是否可一笔画连续画出而不在任一边上重复画过。



图 8

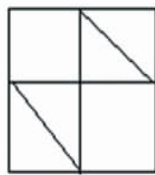


图 9

图 8 不可以一笔画出,有 4 个奇度结点。图 9 可以一笔画出,每个结点的度数均为偶数。

3、旅行售货员问题

售货员从某城市方出发到各个城市去一次并且只去一次,然后回到出发城市,要求出一条巡回路线,使得该巡回路线的总和最小,这就是旅行售货员问题。

旅行售货员问题实质上是在一个边赋权的无向完全图上找到一条哈密顿回路,使得回路上各边的权之和最小,边上的权即为连接两城市交通线路的长度。

求解旅行售货员问题的有效算法至今尚未成功,有一种近似算法最邻近算法,它的基本思想非常简单:当售货员在某一城市时,下一步就选择与这个城市最邻近的、还没有去过的城市作为下一站,如此进行直到走完所有城市为止。

最邻近算法:

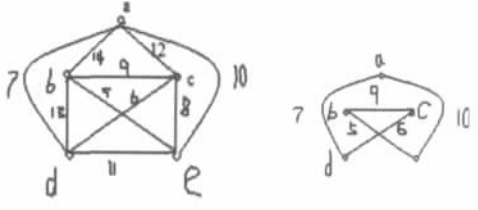
步骤 0 在完全图中任选一点作为起始点,找出一个与始点最近的点,形成一条边的初始路,然后用步骤 1 逐点扩充这条路。

步骤 1 设 x 表示最新加入到这条路上的顶点,从不在路上的所有顶点中,选一个与 x 最邻近的点,把连接 x 与此点的边加到这条路上。重复这一步,直到完全图中所有顶点都包含在路中。

步骤 2 把起始点和最后加入的顶点间的边放入,得到回路。

[3]

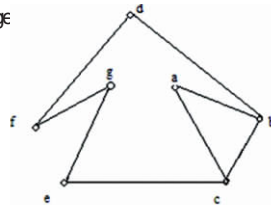
例 2 在下图中以点 a 为起点,根据最邻近算法逐点构造出一条哈密顿回路。^[4]



4、座位安排问题

例设已知下列事实: a 会讲英语, b 会讲英语和汉语, c 会讲英语、意大利语和俄语, d 会讲日语和汉语, e 会讲德语和意大利语, f 会讲法语、日语和俄语, g 会讲法语、德语。问这 7 个人应如何排座位,才能使每个人和他身边的人交谈?^[5]

解:设无向图 $G=(V, E)$ 。其中, $V=\{a, b, c, d, e, f, g\}$, $E=\{ \langle u, v \rangle | u, v \in V \text{ 且 } u \text{ 和 } v \text{ 有共同语言} \}$,如下图所示,图 G 是连通图,将这七个人排座围圆桌而坐,使得每个人能与两边交谈,即在图 G 中找哈密顿回路,经观察,该回路是 $abdfgc$ 。



例 某次会议有 20 人参加,其中每人都至少有 10 个朋友,这 20 人围成一圆桌入席,要想使每人相邻的两位都是朋友是否可能?根据是什么?

解 用结点表示人,根据题意,两人是朋友时相应结点间连一条边,则得到一个无向图 $G=(V, E)$,可转化为求哈密顿回路问题。由于对任意结点 $u, v \in V$,有 $\deg(u) \geq 10$, $\deg(v) \geq 10$,因而 $\deg(u) + \deg(v) \geq 20$ 。根据求哈密顿回路的充分条件定理,可知图 G 是哈密顿图,图 G 中存在哈密顿回路,按此回路各点位置入席即为所求。

参考文献

- [1] 马叔良、顾豫;离散数学;电子工业出版社;1997
- [2] 朱怀宏;离散数学自考应试指导;南京大学出版社;2003
- [3] 邵学才、蒋强荣、石嘉明等;离散数学;清华大学出版社;2001
- [4] 张忠志、李立明、何伟;离散数学;高等教育出版社;2004
- [5] 左孝凌;离散数学;经济科学出版社;2000

(作者单位系贵州省安顺职业技术学院)

(上接 206 页)

据主要地位。我国一位著名的经济学家曾经说过:从美国回来,不敢言经济。意思是指没有较为扎实的数学基础,连看懂别人的论文都是困难的,更不用说参与讨论。第三,计算机与数学模型相结合。计算机发展的一个重要特征是快速转向。需要花费几天才能解决的问题可减少到只要花几分钟或更短的时间就能解决。这对经济计量研究有巨大的影响。随着信息处理技术的发展,面对复杂的经济现象,我们可以轻松自如地通过一个规模宏大的经济计量模型分析经济理论和制定经济政策。系统估计、非线性估计、大型数学模型的模拟以及许多其他经济变量的计算,现在都可以在微机上进行,这促进了经济理论的发展和科学决策的科学性。目前,数学与经济学结合主要集中在非均衡理论与模型、非线性经济理论与模型、非参数估计等领域。可以预见,将来数学理论的每一次革命都将引起经济学的革命。

二、数学方法对经济研究的重要性

简短的历史回顾,使我们清晰地认识到:经济学的发展需要数学,数学的发展促进了经济学的成熟。运用数学方法研究经济学得到了世界的肯定。事实上,从 1969 年到 1998 年的 30 年中,有 19 位

诺贝尔经济学奖的获得者以数学作为主要研究方法,占总人数的 63.3%,而几乎所有的获奖者都运用数学方法来研究经济理论。数学能使经济学走向成熟和科学。数学方法使经济理论不断丰富和深化,并具有可证伪性,同时增强了经济政策的有效性,现代经济学离不开数学,数学即是经济学理论的重要说明工具,也深深的影响了现代经济学的发展方向。

参考文献

- [1] 罗汉.诺贝尔奖获得者演说文集—经济学奖(上)[M].上海:人民出版社,1999.
- [2] 许纯祯.试析西方经济学发展的趋势[J].吉林大学社会科学学报,1995,(5):41.
- [3] 许纯祯.试析西方经济学发展的趋势[J].吉林大学社会科学学报,1995,(5):41.
- [4] 王文华.经济学研究中数学模型的运用[J].中州学刊,1997,(4):39~40.

(作者单位系西南科技大学经济管理学院)