音乐与数学

毕达哥拉斯: 万物皆数, 最和谐的音程 同度(1:1), 八度(1:2), 纯五度(3:2), 纯四度(4:3)

音乐的时间形式 - 节奏

音乐的三大要素: 节奏, 旋律, 和声

节奏是乐音时值的有组织的顺序

固定节奏型: 无变化反复出现的节奏模式

不妨把时值最短的作为单位, 把起拍表示为1, 其余都是0, 这样就是组合问题了

什么是好节奏?

极大均衡原则: 起拍尽可能均衡的分布, 同样的16拍有5个起拍就画一条直线, 找最近的整点, 可能会有2^n种, 但很多只是相位不同

节奏奇性: 在节奏型的圆周表示中, 每一个起拍的对径点都不是起拍; 有奇性的有节奏感, 活力

影子和轮廓

每一个起拍间隔的中点形成一个对偶的节奏, 叫原节奏型的影子

距离序列: 相邻起拍点之间的距离构成的序列(从零点顺时针的第一个起点开始算); 反应了相邻起拍的相对长度

轮廓: 提取距离序列的变化特征, 形如[0, +, 0, -, -]; 轮廓同构, 轮廓只差一个轮换

旋律与对称

不同音高的音符组合; 重复原则;

移调: 移动音高; 严格移调, 调性移调(保持移调之后还在调式音阶中)

逆行: 把旋律从尾到头重复一遍

倒影: 旋律上下颠倒

音乐基础知识

声音是音乐的载体, 物体振动引起声音, 声音是纵波

压力的单位是帕斯卡, 人耳的听力下线阈值是2e-5Pa; 声压水平$L_p = 20\log_{10}(\frac{p}{p_0})$ 单位是分贝; 人耳对不同频率的声音有不同的听觉下限阈值

音色: 声音的波形不同; 傅里叶变换, 时域频域分解

声音分成乐音和噪音, 区别是物体振动规律不同; 音乐也利用噪音, 打击乐器(固定音高的: 木琴, 定音鼓; 无固定音高的: 小军鼓, 大镲)

乐音体系: 全体乐音的集合, 乐音叫做音级; 音级排序叫音列, 相邻的两个音级差一个半音, 一个全音是两个半音; 每一个音级的名字, 音名; 按照八度把音级分成若干音组; 基本音级, 加升降号成为变化音级, 变音记号♯, ♭, ♮, 重升号类似x, 重降号♭♭; 异名同音, 等音的(音高相同)

唱名法: do re mi af sol la si; 固定唱名法: do = C, 首调唱名法: do可以是任何一个音级, mi fa, si do之间是半音

五线谱

```
--五线--

--四线--

----
二间
----

--一线--
下加一间
-下加一线-
```

音符代表相对长度, 全音符中空, 二分音符加一竖线, 四分音符填满, 八分音符加尾巴

拍号: m/n 以n分音符为一拍, 每小节m拍; 速度: 四分音符 = 60, 每分钟60个四分音符

谱号: 高音谱号的圆圈位于二线, 表明中央C上方的G的位置; 低音谱号中心位于四线, 表明中央C下方的F的位置; 中音谱号中心位于三线, 放到四线叫次中音谱号, 表明中央C的位置

音程: 两个音级的距离; 高的叫冠音, 低的跟音; 先后发声旋律音程, 同时和声音程; 通过度数和音程同时确定音程

半音数	音数	一度	举例	二度	举例	三度	举例	四度	举例	五度	举例	六度	举例	七度	举例	八度	举例
0	0[a]	纯	C-C	减	E-F♭												
1	½	增	C-C♯	小	E-F	倍减	Dx-F										
2	1	倍增	D♭-D♯	大	C-D	减	D♯-F										
3	1½			增	C-D♯	小	D-F	倍减	D♯-G♭								
4	2			倍增	G♭-A♯	大	C-E	减	D♯-G								
5	2½					增	F-A♯	纯	C-F	倍减	C♯-G♭						
6	3					倍增	F-Ax	增	F-B	减	B-F	倍减	C♯-A♭♭				
7	3½							倍增	F-B♯	纯	C-G	减	C♯-A♭				
8	4									增	C-G♯	小	E-C	倍减	Dx-C		
9	4½									倍增	D♭-A♯	大	C-A	减	D♯-C		
10	5											增	C-A♯	小	D-C	倍减	G♯-G'♭
11	5½											倍增	C-Ax	大	C-B	减	G-G'♭
12	6													增	C-B♯	纯	C-C'
13	6½													倍增	C-Bx	增	C-C'♯
14	7															倍增	C-C'x

基本音级之间的音程叫自然音程, 改变半音数叫变化音程

	减音程	小音程	纯音程	大音程	增音程
一度			C - C (0)		C - ♯C (1)
二度	♯C - ♭D (0)	C - ♭D (1)		C - D (2)	C - ♯D (3)
三度	♯C - ♭E (2)	C - ♭E (3)		C - E (4)	C - ♯E (5)
四度	♯C - F (4)		C - F (5)		C - ♯F (6)
五度	♯C - G (6)		C - G (7)		C - ♯G (8)
六度	♯C - ♭A (7)	C - ♭A (8)		C - A (9)	C - ♯A (10)
七度	♯C - ♭B (9)	C - ♭B (10)		C - B (11)	C - ♯B (12)
八度	♯C - C′ (11)		C - C′ (12)		C - ♯C′ (13)

通常认为, 纯四度, 纯五度, 纯八度, 大小三度, 大小六度属于协和音程; 二度, 七度, 所有增减音程都不协和. 进一步的, 纯*的音程叫完全协和音程, 大小三六度叫不完全协和音程

毕达哥拉斯: 声音震动频率的比越简单, 音程越协和

泛音列理论: 写音的傅里叶展开, 泛音列重合的越多, 越协和

```
f  2f  3f  4f
2f 4f  8f 16f
```

拍音理论

$\sin(2\pi(\omega+\delta)t)+\sin(2\pi\omega t)=2\sin(2\pi(\omega+\frac{\delta}{2})t)\cdot\cos(\pi\delta t)$

所以两个声音叠加, 产生了拍的感觉, 44Hz和50Hz的叠加, 仿佛有6拍

赫尔姆霍兹认为拍音小于6或多于120的协和, 中间的, 特别是33的不协和, 但是C_4D_4 C_6D_6之间的拍音是变化的

心理学检验说明协和音程确实听起来协和

弦外之音

乐器分类

- 气鸣乐器: 唇鸣, 簧鸣
- 弦鸣乐器: 弓弦, 弹拨, 击打
- 电鸣乐器
- 体鸣乐器: 打击乐, 木琴
- 膜鸣乐器: 鼓, 卡祖笛

弦的一维震动方程$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, c=\sqrt{T/\rho}$, 边值条件$u(0,t)=u(L,t)=0, \forall t\geq 0$

最终得到完整解$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sin(\frac{n\pi}{L}x)(a_n\cos\frac{n\pi c}{L}t+b_n\sin\frac{n\pi c}{L}t)$.

进一步化简, 得到$u_n(x,t)=\sqrt{a_n^2+b_n^2}\sin(\frac{n\pi c}{L}t+\theta_n)\sin(\frac{n\pi}{L}x)$.

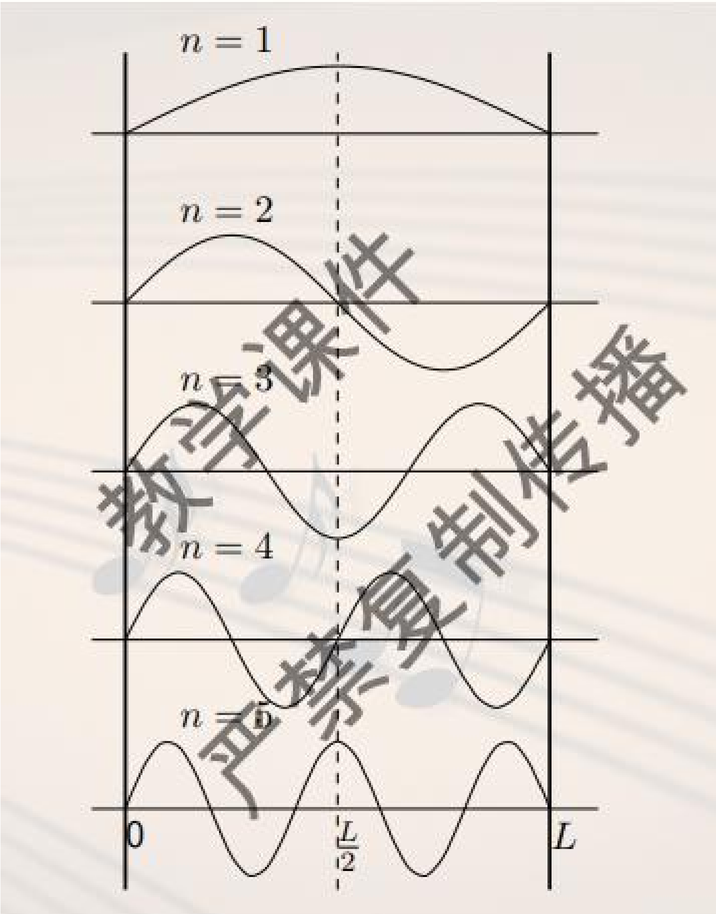
得到$f_1=\frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\rho}}$(Mersenne 梅森素数$2^p-1$)

$f_n=nf_1$, 称为第n个震动模态, $\{f_1,f_2,f_3,...\}$称为固有频率, f_1称为基频, 相应的声音叫基音, $f_n\ (n>1)$统称为泛音, f_2,f_3分别为第一泛音, 第二泛音, 泛音列.

驻波:两个频率振幅相同的波叠加, 波节(振幅为零), 波腹(振幅最大)

傅里叶级数: $f(x)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n\cos nx+\beta_n\sin nx),\ \forall x\in[-L,L]$

求一个傅里叶级数, 发现在中间拨弦, 只有可能出现奇数项(对称性)



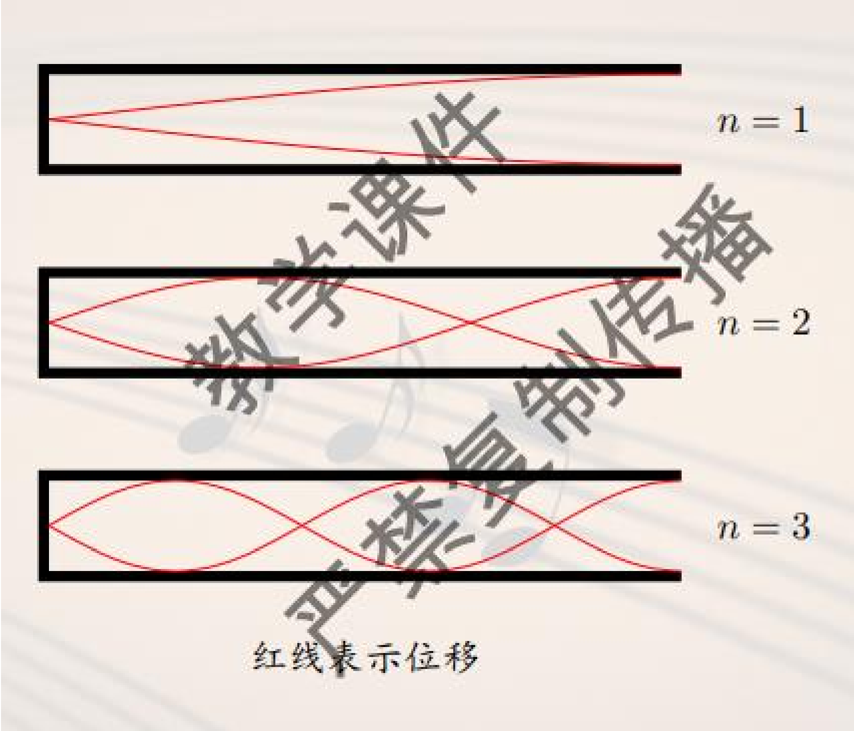
高维的情形$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\nabla^2 u.$, 初值条件$u|_{\partial\Omega}=0.$

管乐器: 震动的空气柱会超过管口, 需要对频率进行管口矫正

不计管口矫正, 开口总是处于波腹, 闭口总是处于波节

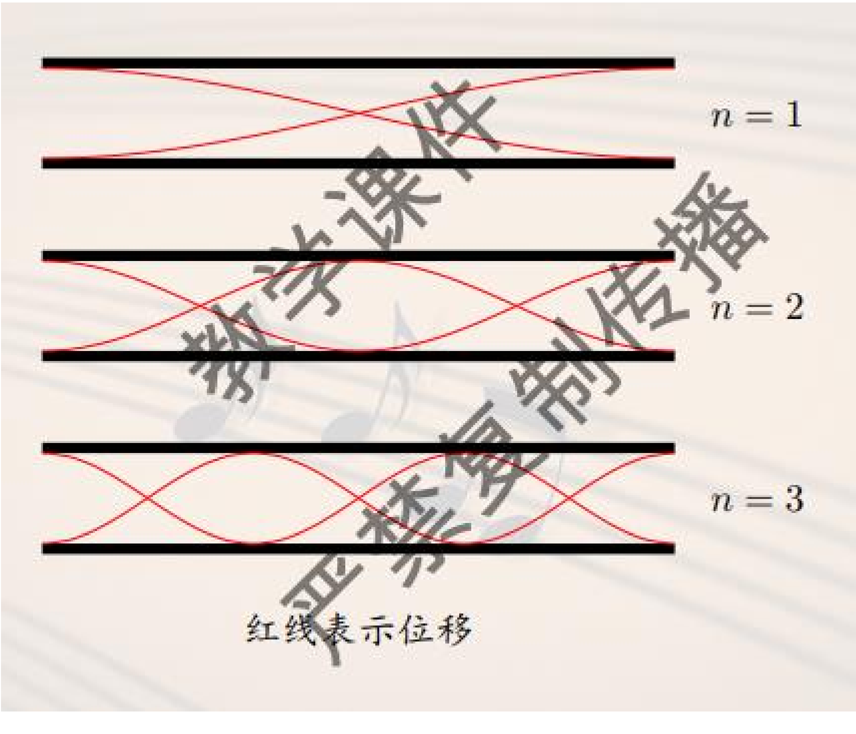
设声速v, 频率f, 波长λ, 有$f=\frac{v}{\lambda}$

闭管的震动



总有$\lambda_n = 4L/n$, n奇, 只有偶次泛音

开管的震动



有所有泛音列

长笛算开管, 单簧管算闭管; 超吹

乐音体系的生成

律学解决两个问题: 每一个音级对应的震动频率, 确定同一个八度内不同音级的相对音高

三分损益

```
宫(81) --三分益一--> 徵 --三分损一--> 商 --三分益一--> 羽 --三分损一--> 角
```

这里的长度是指长度, 所以数字越大, 频率越低

徵-宫 刚好是纯四度; 宫-高八度的商 刚好是纯五度

再加上变徵(变宫三分损一), 变宫(角三分益一), 七声音阶

```
徵   羽   变宫   宫  商   角   变徵
108  96  256/3  81  72   64  512/9
```

吕氏春秋记载了十二律的相生关系

旋宫不归: 对仲吕做三分损一, $\frac{2^{18}}{3^8}$, 期望得到清宫, 但是实际上会高一点, 旋宫不归了

五度相生

采用3:2作为生律元素, 不断乘1.5, 超出这个八度就除2. 相当于每一次增加7个半音

```
C -> G -> D -> A -> E -> B -> #F -> #C -> #G -> #D -> #A -> F
```

这样所有的纯五度都是3:2, 所有的纯四度都是4:3, 但是三度音程之间不统一; 同样的, F再升一个五度得到 $\frac{3^{12}}{2^{19}} \approx 1.013643$, 叫毕达哥拉斯音差

纯律

再添加一个生律元素, 5:4理想大三度的比例; 总之最终得到

```
C    D    E    F    G    A     B    C'
1   9/8  5/4  4/3  3/2  5/3  15/8   2
```

这样, 基本的三和弦CEG, FAC, GBD都符合理想的4:5:6, 非常理想, 非常悦耳

同样的, 从C出升7个纯五度, 降两个八度, 一个大三度, $(\frac{3}{2})^4 \times (\frac{1}{2})^2 \times \frac{4}{5} = \frac{81}{80} = 1.0125$, 还是比C高一点, 这个音差叫谐调音差

其他探索

京房六十律; 三百六十律

中庸全音律

把D插到CE的几何平均值里面, 之后再做微调, 相当于有$\frac{\sqrt{5}}{2}$和$\frac{8}{5^{\frac{5}{4}}}$两个生律元素

但是牺牲了纯五度的比例

平均律

只用一个生律元素$2^{\frac{1}{12}}$, 无脑乘就好了; 朱载堉:"凡学开方, 需造大算盘", 古中国分子叫实, 分母叫法

巴赫的音乐的奉献, 升12次调, 就又回去了

音分

$1200\log_2(\frac{f_2}{f_1})$, 十二平均律的一个半音正好是100音分

$r = 2^{\frac{c}{1200}}, c = 1200\log_2 r$, 分别是频率的比c和音分的换算式

理想大三度386音分, 平均律高了14音分; 理想大六度5:3, 884音分, 平均律高了16音分

八度循环2:1; 五度纯正3:2; 和弦协和5:4

历史上并没有标准的绝对音高, 19世纪的欧洲和北美趋向于不断提高绝对音高

1939国际标准化协会确定A = 440Hz

理论上纯五度3:2, 跨7个半音, 这样就应该有12个纯五度音程等于7个八度音程, 但是$(\frac{3}{2})^{12} \neq 2^7$, 但是差不太多

为了表示无理数, 可以利用连分数

$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}}$

简记为$[a_0, a_1, a_2, a_3, \dots]$

取前n + 1项就得到连分数的N次渐进, 这是一个有理数, 利用ceil和floor可以计算任意数的连分数表示, 连分数是分母有限的有理数中最接近的, 最佳有理逼近

利用连分数逼近$\log_2(\frac{3}{2}) = [0, 1, 1, 2, 2, 3, 1, 5, \dots]$

得到$1, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{7}{12}, \ldots$, 每一个分数都可以建立一个平均律, 把一个八度分成分母分, 每一份一个半音, 用分子个半音定义纯五度

音乐与随机过程

音乐骰子游戏: 波格涅茨舞曲共14节, 每节有11种不同的旋律, 演奏者每一次掷两个骰子, 得到的点数之和减一, 就是这一个小节的旋律, 掷14次, 做完了, 但是每次选到11种旋律的某一个概率是不相同的

海顿小步舞曲, 中间16小节, 每一个小节掷一个骰子

随机变量, 随机事件, 概率分布(课件中用表格表示)

$p_k \geq 0, \forall k \in \Omega$
$\sum_{k\in\Omega} p_k = 1$

连续性随机变量, 取值范围是实轴上的一个区间, 每一点上的概率是0, 由分布函数刻画, 概率密度函数, 微分形式

第十一钢琴曲, 从19个片段中随机取一个, 直到某一个片段被取了三次, 结束

建模

$\forall i, 1 \leq i \leq k-1, x_{i+1} \neq x_i$

$\forall i, 1 \leq i \leq k-1, x_i 出现的次数不超过 r$

x_k出现$r+1$次

利用生成函数可以解决, 一共有1.7e41种演奏方式, 平均长38, 而k的最大值为39

随机音乐: 克赛纳基斯, 梅西安. 用音乐的统计均值控制微观效果. 变形, 大量的滑奏, 构成直纹面. 气体分子总体的速度分布满足maxwell-boltzmann分布, 概率之动: 把每一个弦乐器当成一个气体分子, 滑奏是分子的的随机运动, 要求滑奏速度均匀分布, 速度的密度等于常数, 任何一个音域内, 上升和下降的声音数相等; 得到每一个分子的运动满足正态分布

UPIC: 输入图像作曲

可以把音乐当成一个随机过程, 一个序列中的每一个元素都来自相同的范围, 状态空间; 马尔科夫性质: 只和前一个有关, 满足这一性质叫马尔科夫链, 无记忆性; 如果条件概率和时间没有关系, 时间齐次的, 可以用矩阵刻画
$P = (p_{ij}) = (P(\epsilon_{t+1} = k_j | \epsilon_t = k_i))$, 转移概率/转移概率矩阵

高阶马尔科夫链, 每一个状态只和前m个状态有关, 叫m阶的马尔科夫链

遗传算法: 对由个体构成的种群, 进行交叉, 变异, 进化产生下一代种群; 事先设定适应度函数衡量进化结果.

音乐片段的编码: 可以是[pc, duration], 这样交叉就是交换两个个体的基因片段, 变异就改变某一点的基因(当然要考虑时值如何调整); 适应度函数如何选取? 人机交互, 机器学习; 进化策略: 部分适应度高的个体进入下一代; 预先给定交叉和变异的比例; 增加进化操作的种类(移调, 倒影, 逆行)

把音乐看成一个随机序列, 分析它的功率谱, 它等于自相关函数的傅里叶变换, 反映了随机序列的自相似性.

无标度: 用不同的速度播放一种乐曲, 听起来声音完全一样, 它和自相似性紧密相连

无标度噪声的数学特征就是功率谱等于常数, 在各个频率上的平均功率都相等. 白噪声是一种无标度噪声, 自相关函数除原点都是0, 也就是随机变量的取值和前一个状态无关, 可以用独立同分布随机事件生成.

棕色噪声是和之前的状态完全相关的序列, 可以用iid变量的前缀和生成,

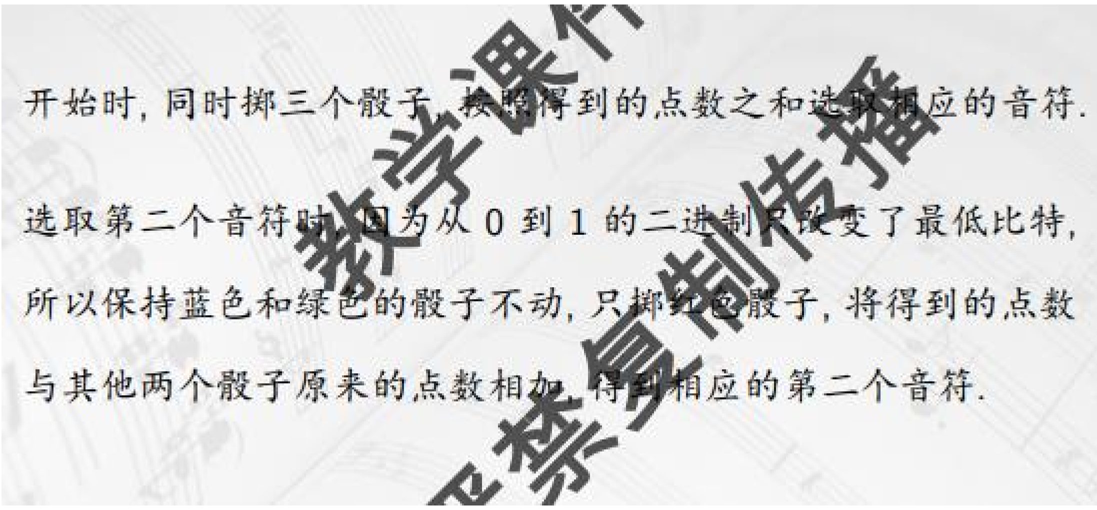
白噪声功率谱密度在f轴上是一个常数, 等于1/f^{0}, 但是棕色噪声功率谱密度反比于f的平方, 1/f^{2}.

对各种音乐和语言信号分析得到, 信号的功率谱密度均在下述范围变动

$\frac{1}{f^{\gamma}}, \quad 0.5 \leq \gamma \leq 1.5$

太阳黑子, 洪水水位, 股票涨跌, 大致呈1/f规律, 1/f噪声叫粉噪声

产生粉噪声



调式音阶与和弦

调式

若干音级围绕着一个稳定的中心音级, 中心音级叫主音

从主音开始直到高八度的主音, 叫调式音阶.

自然大调 是CDEFGABC'的序列, 135认为是稳定音级, 2467是不稳定音级, 从1到7分别是主音, 上主音, 中音, 下属音, 属音, 下中音, 导音

自然小调 是从A开始的序列, 也是135稳定, 2467不稳定; 但是导音和主音差一个大二度, 导不上去, 所以把导音升一个半音, 得到和声小调; 但这样56之间差一个增二度, 把5也升一个半音, 得到旋律小调

调式音阶的主音可以在任何一个音级; 按照五度相生的规律, 大调音阶, CGDAEB#F#C每一个比上一个多一个升号, 反方向的五度循环, 每一个需要多一个降号; 把变音记号统一下载五线谱谱号的右边, 叫调号

等音调: 每一个音级都等音, 比方说B和降C, 自然大调只有15个(五度上升8个, 下降8个)

小调式音阶, 关系大小调(小调+三个半音就是大调(C - A)), 主音相同的叫平行大小调(C大调和c小调)

和弦

三个或更多音高的乐音, 结合起来叫和弦

三和弦, 下面的音叫根音, 和中间的音(三音)成三度关系, 和最上面的音(五音)成五度关系

大三和弦(4 + 3), 小三和弦(3 + 3), 增三和弦(4 + 4), 减三和弦(3 + 3)

大三度(4), 小三度(3), 纯五度(7), 增五度(8), 减五度(6)

大小三和弦式协和和弦, 大小三度和纯五度都是协和音程; 增减三和弦是不协和和弦

七和弦: 减七和弦(3 + 3 + 3); 半减七和弦(3 + 3 + 4); 小七和弦(3 + 4 + 3); 小大七和弦(3 + 4 + 4); 大小七和弦/属七和弦(4 + 3 + 3); 大七和弦(4 + 3 + 4); 增大七和弦(4 + 4 + 3); 所有七和弦都是不和谐的.

转位: 以跟音为低音的和弦叫原位和弦, 三音五音为低音的和弦叫转位和弦; 以三音为低音的和弦叫第一转位, 也叫六合弦, 以五音为低音的三和弦叫第二转位, 也叫四六和弦; 七和弦的转位类似, 三音为低音的叫第一转位, 也叫五六和弦; 五音为低音的叫第二转位, 也叫三四和弦; 七音为低音的叫第三转位, 也叫二和弦.

调式中的和弦

- 跟音到三音为大三度的用大写字母, 小三度的用小写字母;
- 用上标o, +表示减三和弦和增三和弦; 用上标o, \phi(空集), M, +分别表示减七和弦, 半减七和弦, 大七和弦/小大七和弦, 增大七和弦; 属七和弦和小七和弦不加上标
- 用下标6, 64表示三和弦的第一转位和第二转位; 下标7, 65, 43, 2表示七和弦的原位, 第一转位, 第二转位, 第三转位

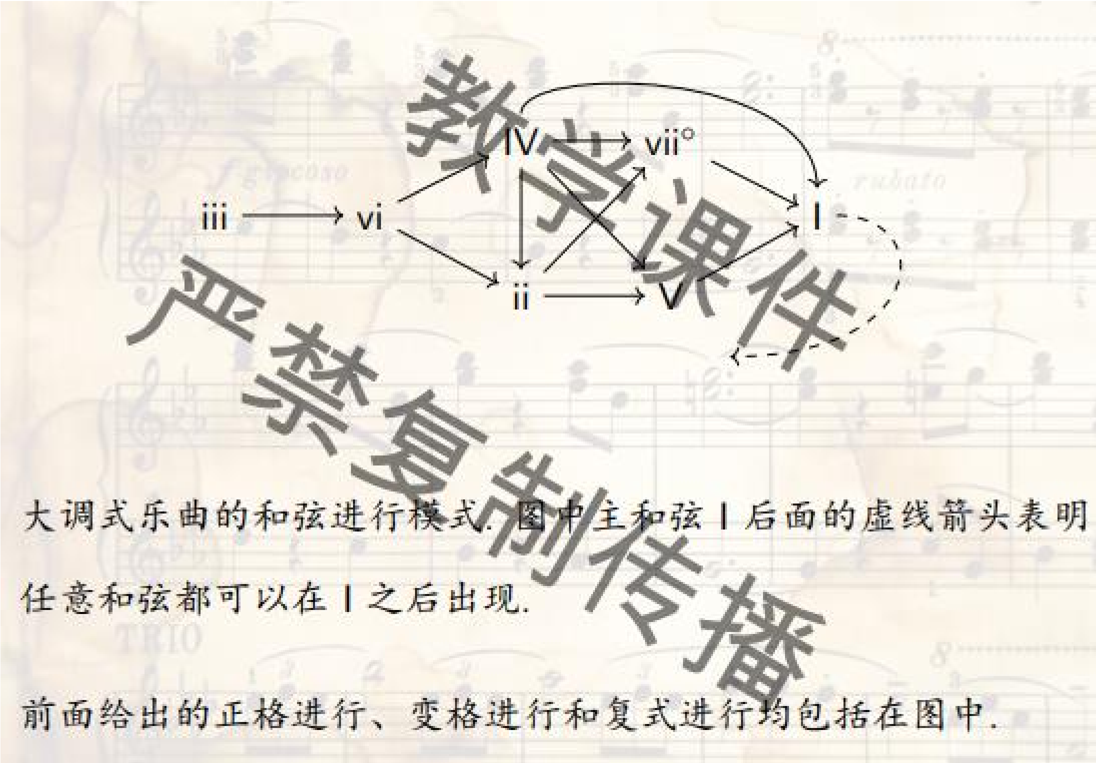
调式的主音, 下属音, 属音上构成的和弦分别称为主和弦, 下属和弦, 属和弦, 统称为正和弦; 主和弦起主功能(T), 属和弦起属功能(D), 下属和弦起下属功能(S), 主功能是稳定的, 属/下属功能是不稳定的.

和声的连接叫和声进行; 正和弦的连接

- 正格进行: T -> D -> T (151)
- 变格进行: T -> S -> T (141)
- 复式进行: T -> S -> D -> T (1451)

大调式的和声进行

1 -> all; 2 -> 57; 3 -> 5; 4 -> 157; 5 -> 1; 6 -> 24; 7 -> 1;



在不协和和弦之后随之以协和和弦和较为协和的和弦, 这样的和声进行叫解决, 调性音乐中, 所有的和声都趋向于解决到主和弦I; 小调式的乐曲的进行和之前的图片基本一致

特里斯坦和弦: {F, B, #D, #G}, 其实就是{F, 降C, 降E, 降A}, 一个半减七和弦; 随后的和弦是{E, #G, D, #A}, 随后变成了{E, #G, D, B}, 一个属七和弦; 突破的传统调性的和弦功能的束缚; 剧中的和弦直到完成爱情之死之后全局才终止于B大调主三和弦, 强调和弦的声音效果, 而不是和声功能; 特里斯坦和弦特别的是和声的进行方式, 应该视其为一系列的和弦.

蓝调, 布鲁斯; 有特别的和声进行, 12小节, 基本的和声进行是1111 4411 5411, 各级和弦可以是三和弦, 七和弦或者他们的转位; 为了便于和声的连接, 返回到第一小节, 和声进行变成1111 4411 5414;

怒吼吧黄河, 和声连接I (i) (大三) (小七) V_7 I

旋律与对称

对旋律做变换, 譬如说移调; 严格移调, 调性移调

把乐音体系数字化$C_0 \iff 0, \ldots, C_8 \iff 96$

移调变换: $T_z(x) = x + z$, 变换的复合$T_n \times T_m = T_{m+n}$, 移调变换都成一个交换群(结合, 单位元, 逆变换, 交换), 实际上是循环群

倒影变换: 用I表示关于$C_4 = 48$所在直线的倒影变换, 即$I(x) = 96 - x$, 得$I^2 = T_0$, $T_n * I = I * T_{-n}$

逆行: $R(x_1 x_2 \ldots x_k) = x_k x_{k-1} \ldots x_2 x_1$, R和T, I可交换

八度关系, 两个音相等或者相差若干个八度, 等音的也视为相等; 这是一个等价关系(自反对称传递); 等价, 等价类; 任两个等价类不相交, S表示为若干不相交的等价类的并, 得到S中元素的一个分类, 等价类叫音类; 音类空间$\mathcal{PC} = \{\bar{C}, \ldots, \bar{B}\}$

带余除法; 同余; 同余类; 模12加法; $\mathcal{PC} \iff Z_{12}$同构; 这样移调变换变成PC到自身的映射;

群, 二面体群(保持二面体形状不变的变换的集合, 旋转和对称变换, 正n边形就是2n阶的群, 叫D_{2n}), 对称群(n元置换的集合), 群的阶

同态, 同构$(\mathcal{T}, *) \cong (Z_{12}, +)$

倒影变换作用在音类空间上可以认为是取负号, 记D = <I, T>, 则有D同构于D_{24}, 即正12边形变换群, 再加入R, 可以证明<T, I, R>的阶为48

调性音乐总有一个主音, 使得严格的移调和倒影变换受限制

勋伯格: 十二音技术, 出发点是十二音序列, 一个音列是十二个音类的排列; 令初始音列(P)*0的第一个音对应Z*{12}中的0, 其他的音类类似. 对初始音列进行移调变换, 得到P{*n}; 对P*{n}做关于第一个音类的倒影变换, 得到倒影音列, 叫I{*n}, 对P*{n}做逆行变换, 得到R{*n}, 对I*{n}做逆行变换, 得到RI_{n}. 得到48个音列, 构成一个音列矩阵(先写P0, 再写I0, 之后就都好了); 作曲时, 只指定音类, 至于选取哪一个八度的音符, 作曲家自由决定

	I_0	I_7	I_{11}	I_2	I_1	I_9	I_3	I_5	I_{10}	I_6	I_8	I_4	
P_0	♭E	♯A	D	F	E	C	♯F	♯G	♯C	A	B	G	R_0
P_5	♯G	♭E	G	♯A	A	F	B	♯C	♯F	D	E	C	R_5
P_1	E	B	♭E	♯F	F	♯C	G	A	D	♯A	C	♯G	R_1
P_{10}	♯C	♯G	C	♭E	D	♯A	E	♯F	B	G	A	F	R_{10}
P_{11}	D	A	♯C	E	♭E	B	F	G	C	♯G	♯A	♯F	R_{11}
P_3	♯F	♯C	F	♯G	G	♭E	A	B	E	C	D	♯A	R_3
P_9	C	G	B	D	♯C	A	♭E	F	♯A	♯F	♯G	E	R_9
P_7	♯A	F	A	C	B	G	♯C	♭E	♯G	E	♯F	D	R_7
P_2	F	C	E	G	♯F	D	♯G	♯A	♭E	B	♯C	A	R_2
P_6	A	E	♯G	B	♯A	♯F	C	D	G	♭E	F	♯C	R_6
P_4	G	D	♯F	A	♯G	E	♯A	C	F	♯C	♭E	B	R_4
P_8	B	♯F	♯A	♯C	C	♯G	D	E	A	F	G	♭E	R_8
	RI_0	RI_7	RI_{11}	RI_2	RI_1	RI_9	RI_3	RI_5	RI_{10}	RI_6	RI_8	RI_4	


```
定理A
给定P_{0} = 0, a_1, ..., a_11
存在I_k = R_0的充要条件是
0 + a_11 = ... = a_5 + a_6 = k, 其中k必为奇数
```

有多少满足定理A的音列? 首项有12种取法, k有6种取法, k给定之后, a_11也给定了; 之后选取a_1, ..., a_5, 共有12 * 6 * 10 * 8 * 6 * 4 * 2 = 276480种

```
定理B
给定音列P_{0} = 0, a_1, ..., a_11
存在k使得, P_0 = R_k的充分必要条件是k = 6
并且a_6 = a_5 + 6, ..., a_11 = a_0 + 6
```

满足定理B的音列共有: 首项12种取法, a_1有10种, ..., a_5两种, 共有12 * 10 * 8 * 6 * 4 * 2 = 46080种

记T为全体音列的集合, 则|T| = 12! = 479001600; 定义二元关系, X~Y \iff Y在X的音列矩阵中, 则这是一个等价关系, 划分等价类

```
共有9985920 = (12! - A - B) / 48 + (A + B) / 24个等价类
```

勋伯格的音乐需要哲学反思

和弦与音网

19世纪, 黎曼等在纯律框架内发展音网理论; 20世纪, 后人在平均律下形成新黎曼理论

一个n-和弦就是PC中的一个n元子集, 在音类圆周中的一个n边形;

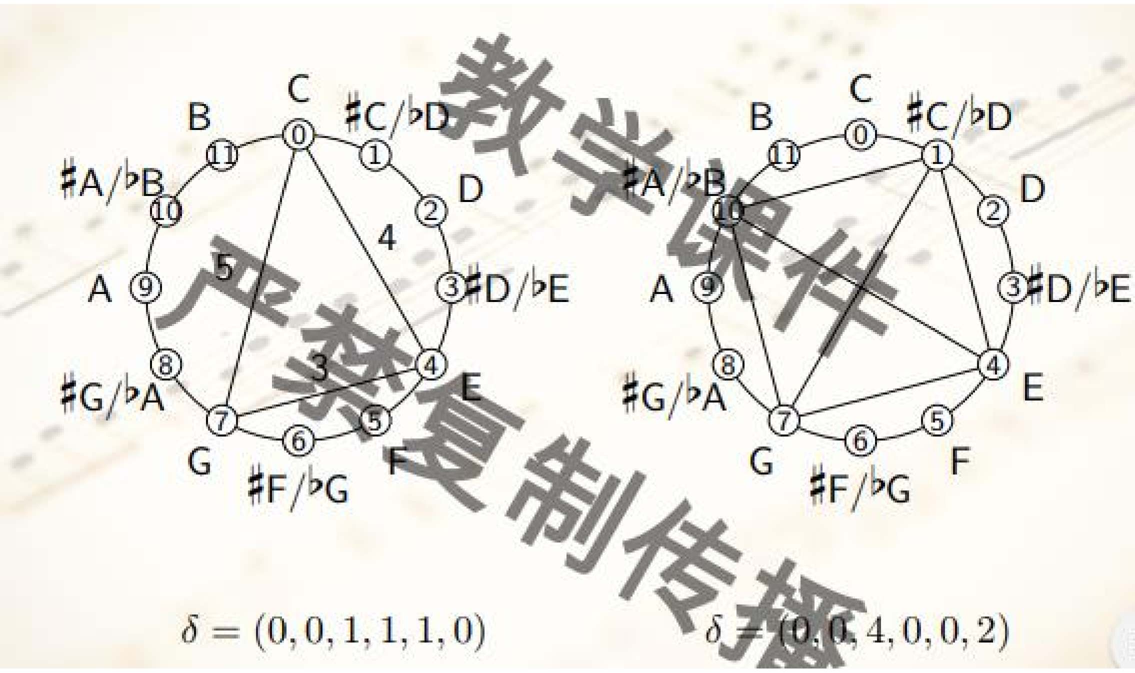
把一个和弦进行移调变换就是进行旋转; 倒影变换就是进行左右的轴对称, 大三和弦进行倒影变换就得到一个小三和弦

$\Omega = \{1, \ldots, n\}, \Omega$到自身的可逆变换构成n次对阵群$S_n$, 它的子群称为置换群, 任给一个置换群, 得到它导出的一个等价关系. 任给$\alpha \in \Omega, \mathrm{Orb}(\alpha) = \{\beta \in \Omega | \beta \ \alpha\}$, 称为包含α的轨道, $G_\alpha = \{g \in G | g(\alpha) = \alpha\}$称为α的稳定化子.

```
Orb(α) = {g(α) | \forall g \in G}
G_{\alpha}是G的子群
g(α) = β, 则有G_{β} = gG_{α}g^{-1}
g(α) = h(α) \iff h^{-1}g \in G_{α}
|Orb(a)| = |G : G_a| = |G| / |G_a|
```

这样, 三和弦就分成了12条轨道; 每一个等价类中找一个音类做代表, 大小三和弦的等价类是3-11

距离向量: 音类圆周上, C_n^2条连线的长度的counter



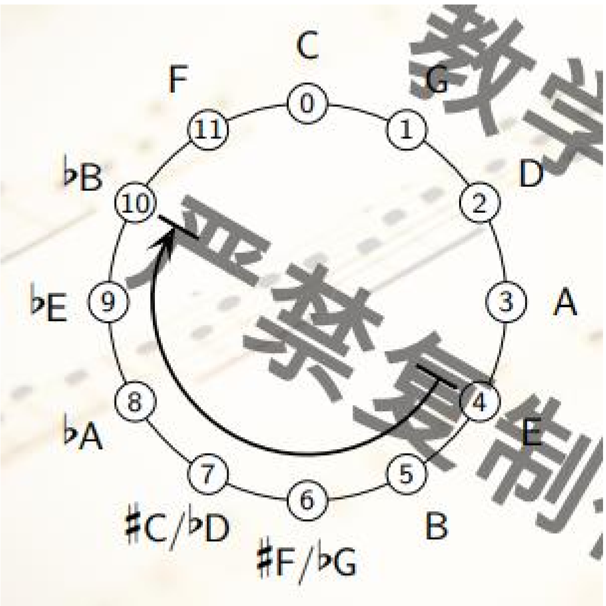
则有X与T^k(X)的交有d_k个元素; 特别的, 当k = 6时, X交T^6(X) = 2d_6

减七和弦的稳定化子有8个(n = 4的二面体群), 轨道就长3(24 / 8), 在音类集合中的标号为4-28; 但是大小七和弦稳定化子就是平凡的;

全音程和弦, 距离向量为(1, 1, 1, 1, 1, 1), {B, C, D, #F}, {C, #C, E, #F}就是两个例子, 不是传统七和弦, 在无调性音乐中地位重要; 互不等价的全音程和弦只有上述两种(4-Z29, 4-Z15)

定义音阶: 音列圆周上若干顶点按顺时针方向排序的有序集合, [#F, #G, #a, #C, #D]叫五声音阶, [C, D, E, #F, #G, #A]叫全音音阶, [C, #C, D, ..., #A, B]叫半音音阶. 对自然大调音阶C做移调得到12个大调音阶, 倒影不会得到新的大调音阶, 因为大调本身有对称轴.

从任一个音类出发, 每一次升高5个半音, 得到五度圆周, 每一个半圆弧对应一个自然大调音阶, 其主音是半圆弧顺时针方向的第二个音类

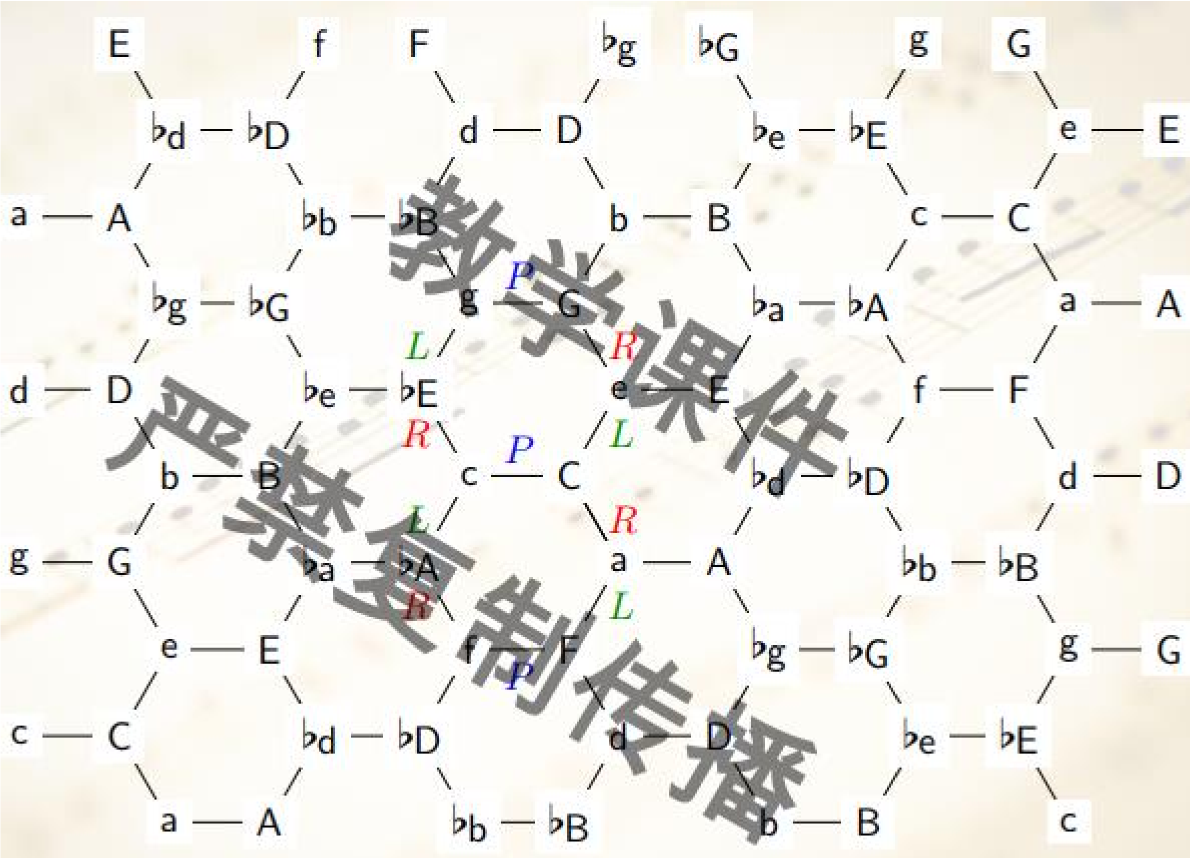


并且很容易得到两个大调共享哪些音类, 某一个音类在哪些大调音阶中, 和弦出现在哪些大调音阶中的话筛法即可.

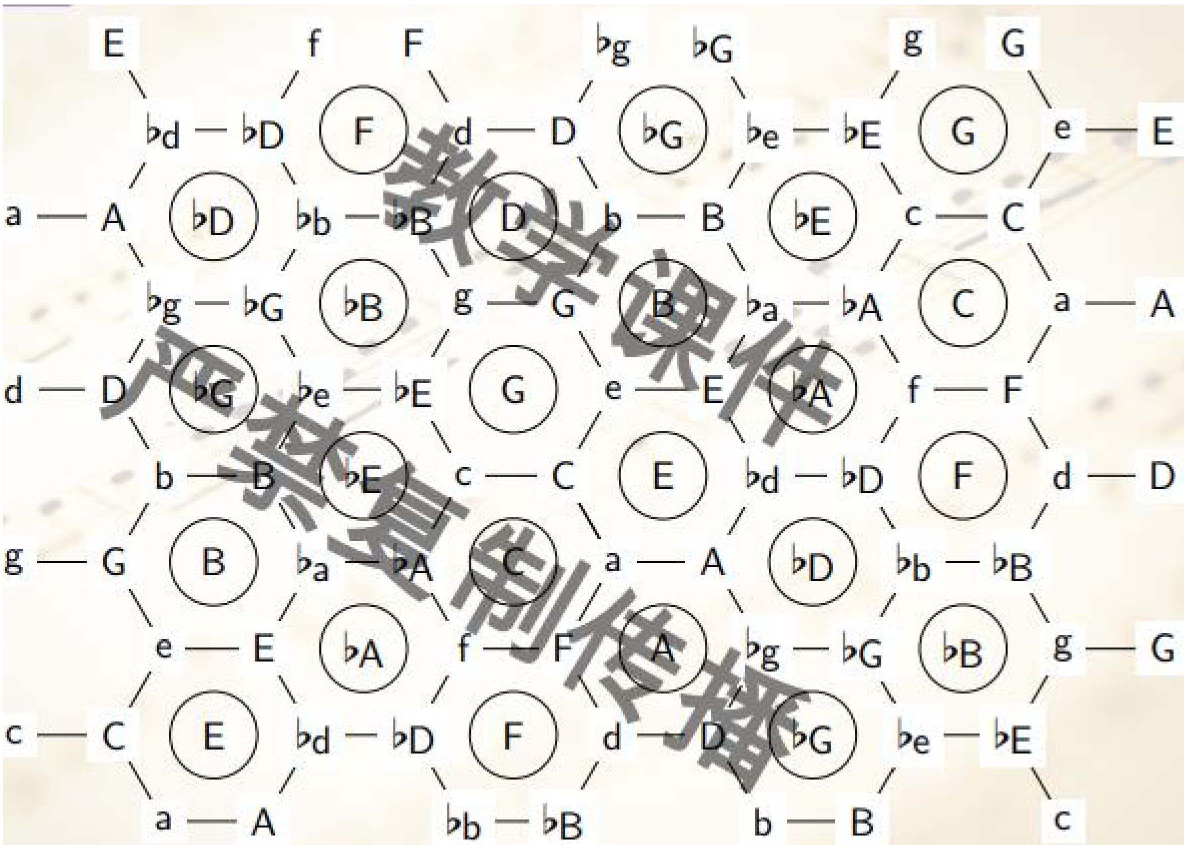
用三个数字的集合表示大小三和弦C = {0, 4, 7}, c = {0, 3, 7}, 定义平行变换: 某一个三和弦变成和它平行的三和弦(改变三音); 关系变换: 定义C和a有关系, 其余类似; 导音变换: 大三和弦的跟音降一个半音, 小三和弦的冠音升一个半音.

小三和弦进行关系变换升高的三音也叫Picardy三度

任一个三和弦进行PRLPRL变换, 都会回到原来的和弦, 构成一个六边形, 12个六边形叠置, 得到音网

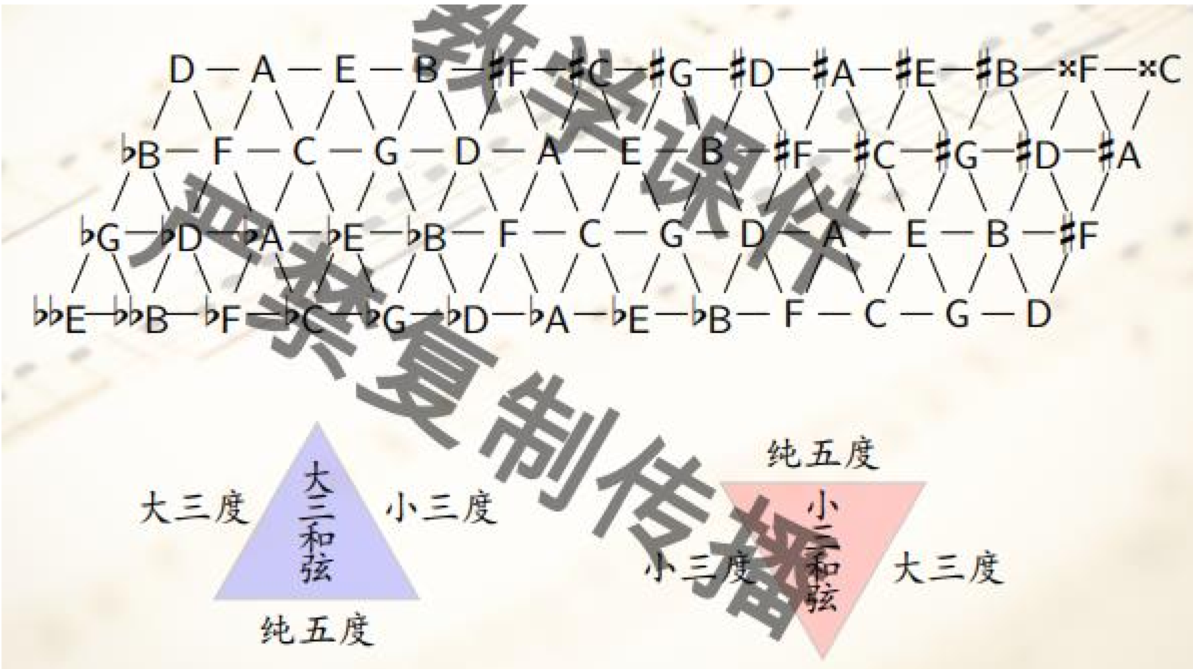


发现PRLPRL变换的三和弦都包含用一个音类, 把它标在音网的中间



发现, 和C相邻的正六边形的标号音级都和C构成协和音程

也可以做音网的对偶形式(平面图的对偶图)



音网在两个方向上都有周期, 双环面, 同胚于甜甜圈; 标出音阶的位置, 就可以找它们围成的三角形, 也就是音阶包含的三和弦; 在对偶图中, P就是底边重叠的两个三角形的变换, R是下三角-上三角之间的变换, L是上三角-下三角之间的变换.

N = 关于变换的复合构成新黎曼群, 当然RLRLRLR = P, N = , 可以证明, N同构于24阶二面体群(正十二边形变换群).

和弦的进行就相当于从初始和弦不断进行变换, 群中的字是形如$\prod s_i^{\epsilon_i}$, 譬如RPRLR, LRLRLRLRLR都是群中的字. 新黎曼群中的字, 和弦序列, 音网上的路径. 元素LR是12阶的, 所以可以不断LR遍历24个大小和弦, Hamilton回路, PRL都是只变化一个音, 所以可以平滑的遍历所有协和三和弦.

D = (移调变换和倒影变换的群), 和N = 是相对偶的, 互为在S_{24}中的中心化子

节奏与几何

节奏是乐音时值的有组织的顺序, 节拍重音休止的结合. 固定节奏型是在乐曲中无变化反复出现的节奏模式. 节奏型划分成基本的单位, 每一个单位叫一个拍. 节奏型用01序列表示, 1代表起拍. 极大均衡, 相位差, 节奏奇性(对径点不是起拍), 影子(起拍的中点), 距离序列(从原点之后的第一个顶点计数), 轮廓(第一个是d_2 - d_1), 轮廓同构(差一个轮换).

极大均衡原则: Bjorklund算法, 本质上是euclid算法, 只有一列比较短的时候, 算法就终止, 所以并不会求到最后

```
1111100000000

11111
00000
000

111
000
000
11
00


1001010010100
```

所以得到的节奏型也叫euclidean节奏, 打后半拍(backbeat)

如果不互素的话, 得到的是由一些子节奏组合的节奏型

时值序列: 把连在一起的音符算到一起, 对时值序列也可以移调, 倒影, 逆行

<为十二件乐器而作>, 把音列, 时值序列和力度音区音色结合到一起, 形成了整体上的序列音乐

把音列拓展成数对的序列(i, d_i), 再把d_i解释成时值长度, 特别的, 0对应12, 这样一个音列就变成了带有时值的旋律

计数: 12拍, 4个休止符, 休止符不连续出现(第一个不是休止符C_8^4, 第一个是休止符C_7^3), 共有105种, 但是在循环左移位下有重复的

Burnside引理 $t = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|\mathrm{fix}(g)|$

经过一些枚举数数, 得到一共有10种不同的节奏形(其实就是第二类斯特林数$\{\frac{8}{4}\}$)

极简主义: 采用简单的和声语言, 重复短小的音乐动机, 使用较少的音乐材料得到尽可能大的效果. 将转瞬即逝的音响反复呈现才能给听众留下深刻印象; 必须要有足够的冗余信息使得能够重建缺失的部分, 整体序列音乐呈现极少的内在冗余, 实验音乐并非有待聆听的音乐, 而是研究的对象; 音乐几乎无法从听觉上进行核查和纠正; 先锋音乐作曲技术冗余/内部荣誉非常低, 人们无法将有序, 持久的关系内化; 有些先锋音乐写作时指定了明确冗余的计划, 但是作品的感知冗余非常低; 间歇性聆听应该提供足够的冗余; 简约主义者的冗余带有侵略性; 先锋派音乐历史意义是使音乐探索走到极限.