第6章 线性规划

6.1 线性规划模型

6.2 标准形

6.3 单纯形法

6.4 对偶性

6.5 整数线性规划的分支限界算法

6.1 线性规划模型

例1 生产计划问题 用 3 种原料混合配制 2 种清洁剂

	原料1	原料2	原料3	售价(万元/吨)
清洁剂 A	0.25	0.50	0.25	12
清洁剂 B	0.50	0.50		15
存量 (吨)	120	150	50	

这 2 种清洁剂应各配制多少才能使总价值最大?

设清洁剂 A 和 B 分别配制 x 和 y 吨

$$\max z = 12x + 15y$$

$$\text{s.t.}\quad \begin{aligned} 0.25x + 0.50y &\le 120 \\ 0.50x + 0.50y &\le 150 \\ 0.25x \qquad\qquad &\le 50 \\ x \ge 0,\ y \ge 0 & \end{aligned}$$

例2 投资组合问题

投资方向	高新技术		基础工业		债券
项目	1	2	3	4	5
年收益	8.1	10.5	6.4	7.5	5.0

- 每个项目不超3亿
- 高新技术不超5亿
- 项目2不超高新技术的一半
- 债券不少于基础工业的40%

投资10亿，如何分配，使得收益最大?

设项目 i 的投资额为 x_i 亿元，i =1,2,3,4,5.

$$\max z = 8.1x_1 + 10.5x_2 + 6.4x_3 + 7.5x_4 + 5.0x_5$$

s.t. $x_1 \le 3,\ x_2 \le 3,\ x_3 \le 3,\ x_4 \le 3,\ x_5 \le 3$

$x_1 + x_2 \le 5$

$x_2 \le 0.5(x_1+x_2)$，即 $x_1 - x_2 \ge 0$

$x_5 \ge 0.4(x_3+x_4)$，即 $0.4x_3+0.4x_4 - x_5 \le 0$

$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 = 10$

$x_i \ge 0,\ i = 1,2,3,4,5$

北京大学

例3 运输问题

	分销中心1	分销中心2	分销中心3	产量
工厂1	3	2	7	5000
工厂2	7	5	2	6000
需求量	6000	4000	1000	11000

产销平衡. 试制定供销方案, 使总运费最小.

设工厂 i 供应分销中心 j 的数量为 x_{ij}, $i=1,2;\ j=1,2,3.$

$$\min\ z = 3x_{11}+2x_{12}+7x_{13}+7x_{21}+5x_{22}+2x_{23}$$

$$\begin{aligned}
\text{s.t.}\quad & x_{11}+x_{12}+x_{13} = 5000 \\
& x_{21}+x_{22}+x_{23} = 6000 \\
& x_{11}+x_{21} = 6000 \\
& x_{12}+x_{22} = 4000 \\
& x_{13}+x_{23} = 1000 \\
& x_{ij} \geq 0,\quad i=1,2;\ j=1,2,3
\end{aligned}$$

线性规划的一般形式

$$\min(\max)\ z=\sum_{j=1}^{n}c_j x_j$$ 目标函数

$$\text{s.t.}\quad \sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j \le (=,\ge) b_i,\quad i=1,2,\ldots,m$$ 约束条件

$$x_j \ge 0,\quad j\in J\subseteq\{1,2,\ldots,n\}$$ 非负条件

x_j 任意, $j\in\{1,2,\ldots,n\}-J$ 自由变量

可行解 满足约束条件和非负条件的变量

可行域 全体可行解

最优解 目标函数值最小(最大)的可行解

最优值 最优解的目标函数值

线性规划求解工具

- IBM ILOG CPLEX
- COIN-OR Linear Programming (CLP)

Problem Set	CPLEX	CLP	GLPK	lp_solve[3]	MINOS[4]
Small CCO	0.0	0.1	1.3	19.0	3.1
Infeasible	0.2[1]	3.6	0.7	43.8	16.3
Netlib	9.1	29.5	52.5	14,975.1	3,198.7
Kennington	12.9	16.1	624.3	19,417.5	10,123.8
Large CCO	13.0	19.0	108.4	3,175.8	41,976.1
FOME	54.5	182.7	6,061.4	33,544.5	59,301.9
Rail	152.5	212.9	N/A[2]	29,012.2	28,899.9
PDS	179.6	224.5	34,118.3	115,200.0	115,200.0
Grand Total	**421.8**	**688.4**	**40,966.9**	**215,387.9**	**258,719.8**

[1]Infeasible problem set solution time for CPLEX does not include CPLEX2.mps in summation.
[2]None of the Rail problems for GLPK could be solved due to read error.
[3]lp_solve included 1 Netlib time out, 1 Kennington time out, 1 FOME time out, 2 Rail time outs, and 8 PDS time outs.
[4]MINOS included 3 FOME time outs, 2 Rail time outs, and 8 PDS time outs, 8 solve Small COO solve errors and 8 Large OCC solve errors.

source: Gearhart, "Comparison of Open-Source Linear Programming Solvers," SANDIA REPORT 2013

求解工具：CPLEX例子

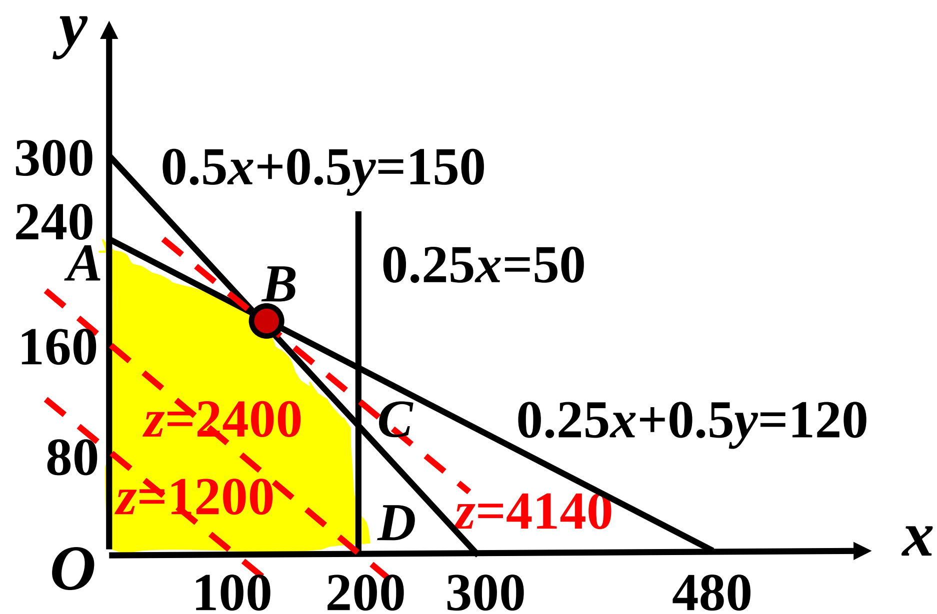
```
IloNumVarArray x(env);
x.add(IloNumVar(env, 0.0, IloInfinity));
x[0].setName("x");
x.add(IloNumVar(env, 0.0, IloInfinity));
x[1].setName("y");

IloObjective obj = IloMinimize(env);
obj.setLinearCoef(x[0], 12);
obj.setLinearCoef(x[1], 15);

IloRangeArray c(env);
c.add(IloRange(env, -IloInfinity, 120));
c[0].setLinearCoef(x[0], 0.25);
c[0].setLinearCoef(x[1], 0.50);
c.add(IloRange(env, -IloInfinity, 150));
c[1].setLinearCoef(x[0], 0.50);
c[1].setLinearCoef(x[1], 0.50);
c.add(IloRange(env, -IloInfinitty, 50));
c[2].setLinearCoef(x[0], 0.25);
```

```
IloEnv env;

…

IloModel model(env);
model.add(obj);
model.add(c);

IloCplex cplex(model);
cplex.solve();

IloNumArray vals(env);
cplex.getValues(vals, x);
```

二维线性规划图解法

例4 $\max z = 12x + 15y$

$$\begin{aligned} \text{s.t.}\quad & 0.25x + 0.50y \le 120 \\ & 0.50x + 0.50y \le 150 \\ & 0.25x \qquad\qquad \le 50 \\ & x \ge 0,\ y \ge 0 \end{aligned}$$



$O(0,0)$, $A(0,240)$, $B(120,180)$, $C(200,100)$, $D(200,0)$

最优解 $x^*=120$, $y^*=180$ (点B) 最优值 $z^* = 4140$.

目标函数改为 $\max z = 12x + 12y$

最优解 $x^* = 120t + 200(1-t) = 200-80t$ ($0 \le t \le 1$，线段BC)

$y^* = 180t + 100(1-t) = 100 + 80t$,

$z^*=3600$ 最优值

例 5

$\min z = x - 2y$

s.t. $2x + y \geq 2$

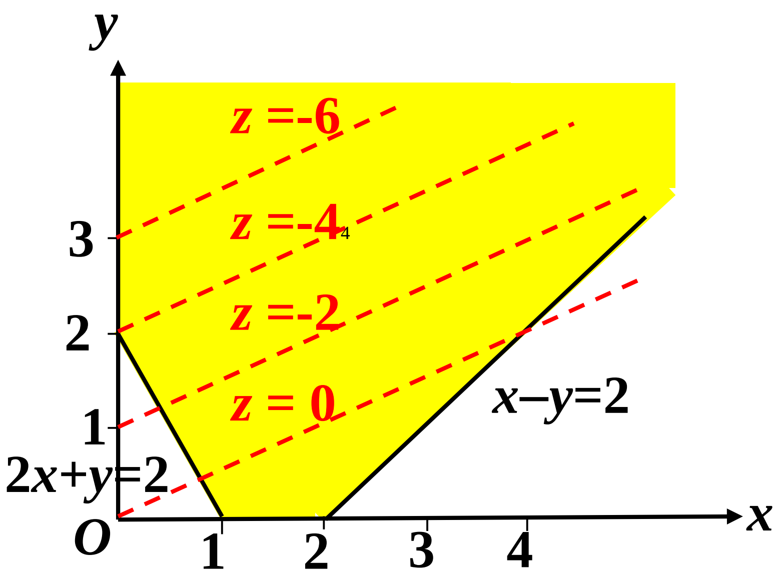
$x - y \leq 2$

$x \geq 0, y \geq 0$

有可行解

目标函数值可以任意小

无最优解.



$2x + y \geq 2$ 改为 $2x + y \leq 2$,

$x - y \leq 2$ 改为 $x - y \geq 2$

则可行域为空集, 无可行解

几种解的情况

(1) 解有4种可能

(a) 有唯一的最优解.

(b) 有无穷多个最优解.

(c) 有可行解, 但无最优解 (目标函数值无界).

(d) 无可行解, 更无最优解.

(2) 可行域是一个凸多边形 (可能无界, 也可能是空集).
如果有最优解, 则一定可以在凸多边形的顶点取到.

一般的 n 维线性规划也是如此

6.2 标准形

标准形

$$\min z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \geq 0, \quad i = 1,2,\ldots,m$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1,2,\ldots,n$$

特点

目标函数：最小化

约束条件：大于等于0

化成标准形

(1) 把 $\max z$ 替换成 $\min z' = -z$, 即取 $c_j' = -c_j$.

(2) $b_i < 0$. 两边同时变号, $\leq$ 改变成 $\geq$, $\geq$ 改变成 $\leq$.

(3) $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i$. 引入松弛变量 $y_i \geq 0$, 替换成

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + y_i = b_i$$

(4) $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i$. 引入剩余变量 $y_i \geq 0$, 替换成

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - y_i = b_i$$

(5) 自由变量 x_j 替换成 $x_j' - x_j''$, $x_j' \geq 0$, $x_j'' \geq 0$

北京大学

例 6

写出下述线性规划的标准形

$$
\begin{aligned}
\max z &= 3x_1 - 2x_2 + x_3 \\
\text{s.t.}\quad & x_1 + 3x_2 - 3x_3 \le 10 \\
& 4x_1 - x_2 - 5x_3 \le -30 \\
& x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \text{ 任意}
\end{aligned}
$$

解

$$
\begin{aligned}
\min z' &= -3x_1 + 2x_2 - x_3' + x_3'' \\
\text{s.t.}\quad & x_1 + 3x_2 - 3x_3' + 3x_3'' + x_4 = 10 \\
& -4x_1 + x_2 + 5x_3' - 5x_3'' - x_5 = 30 \\
& x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3' \ge 0,\ x_3'' \ge 0,\ x_4 \ge 0,\ x_5 \ge 0
\end{aligned}
$$

标准形的其他形式

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots\cdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad b=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \quad c=\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \quad x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

矩阵形式

$$\begin{aligned} &\min z = c^T x \\ &\text{s.t. } Ax = b \\ &\qquad x \geq 0 \end{aligned}$$

向量形式

$$\begin{aligned} &\min z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ &\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} P_j x_j = b \\ &\qquad x_j \geq 0,\ j = 1,2,\ldots,n \end{aligned}$$

$$P_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$$

北京大学

标准形的可行解的性质

定义 设 A 的秩为 m,

A的 m 个线性无关的列向量称作标准形的基.

给定基 $B = (P_{i_1}, P_{i_2}, \cdots, P_{i_m})$,

对应基中列向量的变量 $x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_m}$ 称作基变量,

其余的变量称作非基变量.

基变量构成的向量记作 x_B, 非基变量构成的向量记作 x_N.

令 $x_N = 0$, 等式约束变成

$$B x_B = b$$

解得 $x_B = B^{-1}b$. 向量 x 满足约束 $Ax = b$且非基变量全为 0, 称作关于基 B 的基本解 .

x是一个基本解且 $x \geq 0$, 则称 x是基本可行解, 对应的基 B 为可行基.

例 7

$$\min z = -12x_1 - 15x_2$$

$$\text{s.t.}\quad \begin{aligned} 0.25x_1+0.50x_2+x_3 \quad\quad &=120 \\ 0.50x_1+0.50x_2 \quad +x_4 \quad &=150 \\ 0.25x_1 \quad\quad\quad\quad +x_5 &=50 \\ x_i\ge 0, \quad i=1,2,\ldots,5 & \end{aligned}$$

$$A=\begin{bmatrix} 0.25 & 0.50 & 1 & 0 & 0 \\ 0.50 & 0.50 & 0 & 1 & 0 \\ 0.25 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

基 $B_1=(P_1,P_2,P_3)$. 基变量 x_1, x_2, x_3, 非基变量 x_4, x_5.

令 $x_4= 0, x_5 = 0$, 得

$$\begin{aligned} 0.25x_1 + 0.50x_2 + x_3 &=120 \\ 0.50x_1+ 0.50x_2 \quad &=150 \\ 0.25x_1 \quad\quad &=50 \end{aligned}$$

解得 $x_1 = 200,\ x_2 = 100,\ x_3 = 20$.

$x^{(1)} = (200,100,20,0,0)^T$ 是基本可行解, B_1是可行基.

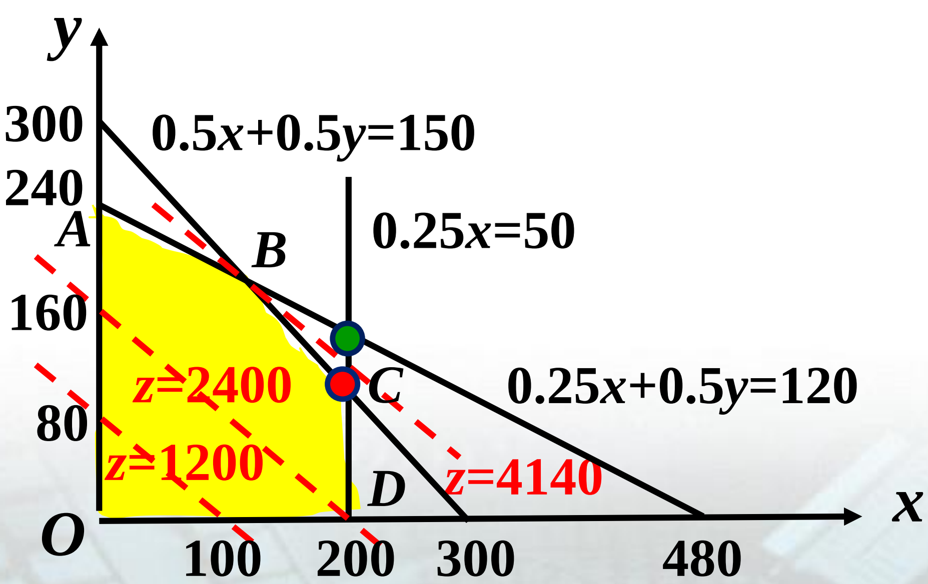
例7 (续)

取基 $B_2=(P_1,P_2,P_4)$. 基变量 x_1, x_2, x_4, 非基变量 x_3, x_5. 令 $x_3=0, x_5=0$, 由

$$\begin{aligned} 0.25x_1 + 0.50x_2 \quad &= 120 \\ 0.50x_1 + 0.50x_2 + x_4 &= 150 \\ 0.25x_1 \quad &= 50 \end{aligned}$$

解得 $x_1=200$, $x_2=140$, $x_4=-20$.

$x^{(2)} = (200, 140, 0, -20, 0)^T$ 是基本解, 不是基本可行解.



基本可行解的性质

引理1 $Ax=b$ 的解α是基本解$\Leftrightarrow$ α中非零分量对应的列向量线性无关.

定理1 如果标准形有可行解, 则必有基本可行解.

定理2 如果标准形有最优解, 则必存在一个基本可行解是最优解.

本课小结

- 线性规划模型
  - 目标函数、约束条件、非负条件、自由变量
  - 可行解、可行域、最优解、最优值
- 二维线性规划图解法
  - 唯一/无穷多最优解、目标函数无解、无可行解
  - 可行域是凸多边形（可能无界, 也可能是空集）
  - 如果有最优解，则一定可以在凸多边形的顶点取到
- 标准形
  - 可行解的性质
  - 基本可行解的性质