乐音体系的生成

Temperament

王 杰

北京大学数学科学学院

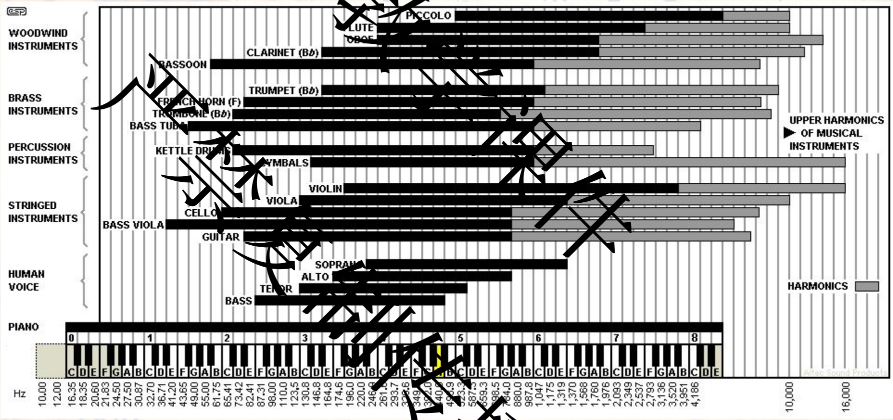
2017 – 2018 学年 • 第二学期

数学课件
严禁复制传播

目录

数学课件
严禁复制传播

乐音体系的生成


WOODWIND INSTRUMENTS
PICCOLO
FLUTE
OBOE
CLARINET (B♭)
BASSOON
BRASS INSTRUMENTS
TRUMPET (B♭)
FRENCH HORN (F)
TROMBONE (B♭)
BASS TUBA
PERCUSSION INSTRUMENTS
KETTLE DRUMS
CYMBALS
STRINGED INSTRUMENTS
VIOLIN
VIOLA
CELLO
BASS VIOLA
GUITAR
HUMAN VOICE
SOPRANO
ALTO
TENOR
BASS
PIANO
UPPER HARMONICS OF MUSICAL INSTRUMENTS
HARMONICS
0
1
2
3
5
6
7
8
Hz
10.00
12.00
10,000
16,000

乐音体系的生成

乐音体系是有限多个音级构成的集合. 这个集合中的元素是如何确定的? 12 个音名 C, ♯C, . . . , A, ♯A, B 各自对应什么音高呢? 这就是 **律学 (temperament)** 要解决的问题.

这里实际上涉及两个问题:

1. 确定 **绝对音高 (absolute pitch)**. 就是要确定每个音级所对应的振动频率.

数学课件
严禁复制传播

乐音体系的生成

2. 确定同一个八度内不同音级的 相对音高 (**relative pitch**).

从一定意义上说, 相对音高更为重要. 因为八度音程对应的频率之比为 1:2. 如果同一个八度内的 12 个音级之间的频率比值确定了, 那么只要再确定其中任何一个音级的振动频率, 这个八度内其他音级的频率也就都随之确定了. 然后就可以得到其他八度内各个音级所对应的振动频率了.

数学课件
严禁复制传播

内容提要

数学课件
严禁复制传播

管仲 (约公元前 723 年–公元前 645 年), 姬姓, 管氏, 名夷吾, 字仲, 颍上 (今安徽颍上) 人. 春秋时期政治家、军事家.

数学课件
严禁复制传播

三分损益

《管子》一书大约完成于春秋战国时期 (公元前 770 – 公元前 221), 在其“地员”篇中记载:

凡将起五音，凡首，先主一而三之，四开以合九九，以是生黄鐘小素之首，以成宫。三分而益之以一，為百有八，為徵(zhǐ)。不無有三分而去其乘，適足，以是生商。有三分，而复于其所，以是成羽。有三分，去其乘，適足，以是成角(jué)。

徵	羽	宫	商	角
108	96	81	72	64

三分损益

因为弦的长度与其发出声音的频率成反比, 所以数字越大的音级其频率越低.

音程"徵—宫"的频率之比为 108/81=4:3, 是纯四度. 高八度的徵音应该为 108/2=54, 宫音与它的比例为 81/54=3:2, 恰为纯五度. 音程"宫—商"的比例为 81/72=9:8, 等于大二度. 不仅如此, 音程"徵—羽"和"商—角"的比例也都符合大二度. 而音程"宫—角"的比例是 $81/64 = 1.265625$, 与大三度的比例 5:4=1.25 相差无几.

数学课件 严禁复制传播

中国古代早就有了七声音阶，即在宫商角徵羽之外再加上“变宫”和“变徵”两个音级.《史记卷八十六·刺客列传第二十六》：荆轲刺秦王，临行前“高渐离击筑，荆轲和而歌，为变徵之声，士皆垂泪涕泣”.

三分损益

按照三分损益法继续做下去. 因为角是通过三分损一得到的, 所以现在应该先做三分益一, 得到 $64 \times 4/3 = 256/3 \approx 85$, 应该位于羽和宫之间, 就得到了变宫. 再做三分损一, 得到

$$256/3 \times 2/3 = 512/9 \approx 57,$$

应该列在角之后, 即为变徵.

教学课件
严禁复制传播

三分损益

现在新的音列成为

徵	羽	变宫	宫	商	角	变徵
108	96	$\frac{256}{3}$	81	72	64	$\frac{512}{9}$

古代把高八度的音冠以“清”字. 因此“清宫”就是比宫音高八度的音级. 假定宫音对应于中央 C, 则三分损益法得到的七声音阶为

数学课件 严禁复制传播

吕不韦 (约公元前 292 年 – 公元前 235 年), 卫国濮阳 (今河南省安阳市滑县) 人. 战国末年政治家、思想家、商人, 曾任秦国丞相.

数学课件 严禁复制传播

《吕氏春秋》

《吕氏春秋》是其主编的一部中国古代的百科全书, 包括八览、六论、十二纪, 共二十万言. 在"季夏纪第六"中记载了十二律的名称及其相生关系:

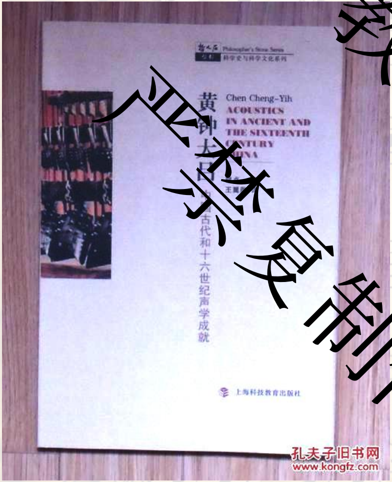
黄鐘生林鐘，林鐘生太蔟 (cù)，太蔟生南呂，南呂生姑洗 (xiǎn)，姑洗生應鐘，應鐘生蕤 (ruí) 賓，蕤賓生大呂，大呂生夷則，夷則生夾鐘，夾鐘生無射 (yì)，無射生仲呂。三分所生，益之一分以上生。三分所生，去其一分以下生。黄鐘、大呂、太蔟、夾鐘、姑洗、仲呂、蕤賓為上，林鐘、夷則、南呂、無射、應鐘為下。 十二律图

《吕氏春秋》

这段话不仅说明了十二律产生的先后顺序，并且指明了每一步是“上生”（益之一分）还是“下生”（去其一分）。

数学课件
严禁复制传播

《黄钟大吕》



教学课件
严禁复制传播

《黄钟大吕》

借用程贞一先生《黄钟大吕》书中第 42 页图 3.5.1 来说明整个的生律过程.

仍然假定宫音对应于中央 C, 同时也对应于我国传统十二律中的黄钟.

为了与前面的表述相对照, 我们保留了宫音的初值 81. 为了更清楚地显示数字规律, 我们把原图中分数的分子和分母分别改用 2 和 3 的方幂表示, 进而得到

数学课件
严禁复制传播

$$81 \xrightarrow{\frac{2}{3}} 54 \xrightarrow{\frac{4}{3}} 72 \xrightarrow{\frac{2}{3}} 48 \xrightarrow{\frac{4}{3}} 64 \xrightarrow{\frac{2}{3}} \frac{2^7}{3} \xrightarrow{\frac{4}{3}} \frac{2^9}{3^2} \xrightarrow{\frac{4}{3}} \frac{2^{11}}{3^3} \xrightarrow{\frac{2}{3}} \frac{2^{12}}{3^4} \xrightarrow{\frac{4}{3}} \frac{2^{14}}{3^5} \xrightarrow{\frac{2}{3}} \frac{2^{15}}{3^6} \xrightarrow{\frac{4}{3}} \frac{2^{17}}{3^7}$$

C	G	D	A	E	B	♯F	♯C	♯G	♯D	♯A	F
黄钟	林钟	太蔟	南吕	姑洗	应钟	蕤宾	大吕	夷则	夹钟	无射	仲吕

▸ 《吕氏春秋》

数学课件
严禁复制传播

三分损益

音高与弦的长度是成反比的. 把十二律对应的数值从大到小排列起来, 就得到它们从低音到高音的排列, 进而得到三分损益法所得到的十二律之间的频率比例, 以及与宫商角徵羽“五音”之间的对应关系.

其结果也恰合《後漢書·律曆志上》所说: “以黄鍾為宫, 太蔟為商, 姑洗為角, 林鍾為徵, 南呂為羽, 應鍾為變宫, 蕤賓為變徵.”

数学课件
复制传播

81	$\frac{2^{11}}{3^3}$	72	$\frac{2^{14}}{3^5}$	64	$\frac{2^{17}}{3^7}$	$\frac{2^9}{3^2}$	54	$\frac{2^{12}}{3^4}$	48	$\frac{2^{15}}{3^6}$	$\frac{2^7}{3}$
黄钟	大吕	太簇	夹钟	姑洗	仲吕	蕤宾	林钟	夷则	南吕	无射	应钟
C	♯C	D	♯D	E	F	♯F	G	♯G	A	♯A	B
宫		商		角		变徵	徵		羽		变宫

数学课件
严禁复制传播

“旋宫不归”

在得到仲吕（F）对应的数值 $\frac{2^{17}}{3^{7}}$ 之后，继续做三分损一，得到

$$\alpha = \frac{2^{17}}{3^{7}} \times \frac{2}{3} = \frac{2^{18}}{3^{8}}.$$

这本应该是“清宫”（高八度的 C′）对应的数值. 但实际上

$$\alpha = \frac{2^{18}}{3^{8}} = \frac{2^{18}}{3^{12}} \times 81 \approx 0.49327 \times 81 < \frac{1}{2} \times 81,$$

这说明对仲吕再做三分损一，得到的音会比“清宫”略高一点，形成了“旋宫不归”的问题.

数学课件 严禁复制传播

南宋著名理学家、律吕学家蔡元定 (1135.12.17 – 1198.9.11) 在《律吕新书》中指出:

世之论律者, 皆以十二律为循环相生, 不知三分损益之数往而不返. 仲吕再生黄钟, 止得八寸七分有奇, 不成黄钟正声. 京房觉其如此, 故仲吕再生别名执始.

京房 (公元前 77 年—公元前 37 年), 本姓李, 字君明, 东郡顿丘 (今河南清丰县) 人, 西汉学者.

可见早在西汉时期, 京房就已经发现了这个问题, 并且给仲吕上生所得的音级命名为“执始”. 这也是他钻研发展六十律的出发点.

数学课件
严禁复制传播

内容提要

教学课件
严禁复制传播

五度相生

毕达哥拉斯认为音的协和来源于自然数的简单比值. 除了同度音程 (1:1) 和八度音程 (2:1) 之外, 纯五度音程对应的比例 3:2 是最简单的, 毕达哥拉斯就采用 3:2 作为其生律的元素. 假定音名 C 对应的频率为 1, 则其上方五度的 G 对应的频率应为 $\frac{3}{2}$. 而 G 上方五度音的频率应该是 $\frac{9}{4} > 2$, 超出了同一个八度. 因此将其降低一个八度, 得到音名 D 对应的频率为 $\frac{9}{8}$.

教学课件
严禁复制传播

继续按照上面的做法，每次用 3/2 去乘；如果得到的数大于 2，超出了同一个八度，就再多乘一个 1/2，直到产生全部十二个音名.

$$\mathrm{C} \xrightarrow{\frac{3}{2}} \mathrm{G} \xrightarrow{\frac{3}{4}} \mathrm{D} \xrightarrow{\frac{3}{2}} \mathrm{A} \xrightarrow{\frac{3}{4}} \mathrm{E} \xrightarrow{\frac{3}{2}} \mathrm{B} \xrightarrow{\frac{3}{4}} \sharp\mathrm{F} \xrightarrow{\frac{3}{4}} \sharp\mathrm{C} \xrightarrow{\frac{3}{2}} \sharp\mathrm{G} \xrightarrow{\frac{3}{4}} \sharp\mathrm{D} \xrightarrow{\frac{3}{2}} \sharp\mathrm{A} \xrightarrow{\frac{3}{4}} \mathrm{F}$$

$$1 \quad \frac{3}{2} \quad \frac{3^2}{2^3} \quad \frac{3^3}{2^4} \quad \frac{3^4}{2^6} \quad \frac{3^5}{2^7} \quad \frac{3^6}{2^9} \quad \frac{3^7}{2^{11}} \quad \frac{3^8}{2^{12}} \quad \frac{3^9}{2^{14}} \quad \frac{3^{10}}{2^{15}} \quad \frac{3^{11}}{2^{17}}$$

数学课件 严禁复制传播

五度相生

五度相生产生的各个音级，纯五度音程的频率比例无疑都是 3:2.

纯四度音程的比例也是相等的，都是 4:3. 例如 D − G，其频率之比为

$$\frac{3}{2}:\frac{3^2}{2^3}=\frac{3}{2}\times\frac{2^3}{3^2}=\frac{4}{3}$$

数学课件
严禁复制传播

但是看三度音程就会发现问题了：音程 C — E 的频率之比为

$$\frac{3^4}{2^6} : 1 = \frac{81}{64} = 1.265625,$$

大于理想的大三度比例 5:4=1.25. 而对同样是大三度音程的 F — A, 其频率之比为

$$\frac{3^3}{2^4} : \frac{3^{11}}{2^{17}} = \frac{3^3}{2^4} \times \frac{2^{17}}{3^{11}} = \frac{2^{13}}{3^8} \approx 1.24859,$$

又小于 5:4！大六度音程 C — A, D — B 的频率之比都是 27/16=1.6875, 大于理想的比例 5:3.

数学课件
严禁复制传播

毕达哥拉斯音差

在得到音级 F 之后，可以继续考虑其上方纯五度音的频率，

$$\frac{3^{11}}{2^{17}} \times \frac{3}{2} = \frac{3^{12}}{2^{18}} > 2,$$

将其降低一个八度，得到这个音的频率为

$$\frac{3^{12}}{2^{19}} = \frac{531441}{524288} \approx 1.013643. \qquad (*)$$

另一方面，F 上方五度是高八度的 c，降低八度得到的应该就是起始音级 C. 换言之，(*) 式应该等于 1！这个略大于 1 的数就是著名的 **毕达哥拉斯音差 (Pythagorean comma)**.

教学课件
严禁复制传播

毕达哥拉斯音差

把 (*) 式改写为

$$\frac{3^{12}}{2^{19}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{12}\left(\frac{1}{2}\right)^{7}.$$

从 C 出发连续做 12 次上方纯五度, 得到一个音级 X. 然后从 X 出发, 连续降低 7 个八度. 一个纯五度有 7 个半音, 连续 12 次等于上升了 84 个半音. 而一个八度有 12 个半音, 连续下降 7 次相当于下降了 84 个半音. 因此做完上述两组变换后, 应该回到出发点 C. 但是按照毕达哥拉斯五度相生律, 最终回到的是比 C 略高一点的地方.

数学课件
严禁复制传播

数学课件
严禁复制传播

格里高利圣歌

(Gregorian Chant)

《赞美圣母》

(Hail Holy Queen)

五度相生

大约在公元 9 世纪前后出现了奥尔加农 (**Organum**) 这种音乐样式，它是多声部音乐的雏形.

多声部音乐可分为

(a) **复调音乐 (polyphony)**: 不同声部具有各自的相对独立性，按照对位法 (**counterpoint**) 结合在一起;

(b) **主调音乐 (homophony)**: 以一个声部为主要旋律声部，其余声部相对缺少独立性，对主要旋律声部起伴奏、烘托的作用.

数学课件

内容提要

数学课件
严禁复制传播

从文艺复兴时期开始, 西方音乐中越来越多地重视和使用三度和六度音程, 于是人们探索在五度相生法中添加一个生律元素: 理想大三度的比例 5:4, 形成了**纯律 (just intonation)**.

因为四度音程与五度音程合起来得到八度音程, 所以四度音程的频率比应该等于

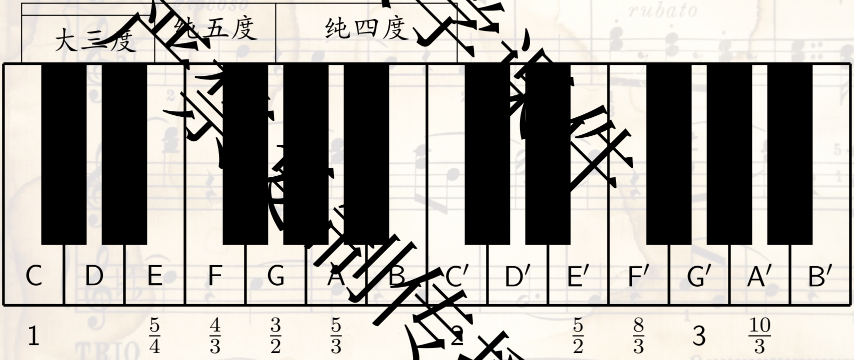
$$2 \div \frac{3}{2} = 4 : 3,$$

从而得到音名 F 对应的频率为 4/3. 再由大三度音程 F — A 得到音名 A 所对应的频率应该等于

$$\frac{4}{3} \times \frac{5}{4} = \frac{5}{3}.$$

数学课件 严禁复制传播

纯 律



纯律

再根据纯五度音程 E — B 和 G — D′ 分别确定 B，D 的相对频率

假定音名 B 的频率为 x. 则由纯五度音程 E — B 得到关系式

$$x : \frac{5}{4} = 3 : 2,$$

于是得出 $x = 15/8$. 这时，大三度音程 G — B、纯四度音程 B — E′ 等也都满足理想的频率比.

数学课件
严禁复制传播

纯 律

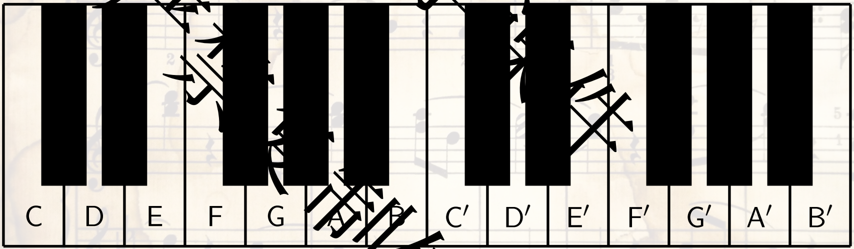
最后来确定 D. 假定其高八度的音级 d 对应频率为 y. 由纯五度音程 G — d 得到关系式

$$y : \frac{3}{2} = 3 : 2,$$

进而得到 $y = 9/4$. 这样我们就得到了完整的纯律中各个音名的相对音高了.

数学课件
严禁复制传播

纯 律



1	$\frac{9}{8}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{15}{8}$	2	$\frac{9}{4}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{8}{3}$	3	$\frac{10}{3}$	$\frac{15}{4}$

纯 律

按照纯律, 基本的三和弦 C — E — G, F — A — C′, G — B — D′ 的比例都符合理想的 4:5:6, 比五度相生律更加悦耳. 这对于复调音乐具有重要意义.

数学课件
严禁复制传播

重返《查拉图斯特拉如是说》

先后出现的音级为 C_3, C_4, G_4, C_5, E_5, $\flat\mathrm{E}_5$. 假定 C_3 的频率为 f, 则按照纯律, 音级 C_3, C_4, G_4, C_5, E_5 的频率分别为

$$f,\ 2f,\ 3f,\ 4f,\ 5f,$$

恰好是根音 C_3 的泛音列 的前几项!

教学课件 严禁复制传播

纯 律

纯律的缺点: 一是五度音程 D — A 不协和, 其比例为

$$\frac{5}{3} : \frac{9}{8} = \frac{40}{27} = \frac{80}{54}$$

不等于理想的 3:2=81/54.

二是有两种不同的大二度(全音) 音程 C — D, F — G, A — B 的比例为 9/8, 而音程 D — E, G — A 的比例为 10/9.

数学课件
严禁复制传播

Syntonic comma

按照纯律, 从 C 出发连续升高 4 个纯五度, 然后降低 2 个八度和 1 个大三度, 得到

$$\left(\frac{3}{2}\right)^4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \frac{4}{5} = \frac{81}{80} = 1.0125,$$

即回到比 C 略高一点的地方.

数值 $81/80 = 1.0125$ 被称为 谐调音差 **(syntonic comma)**

缪天瑞《律学》(修订第三版)

Giovanni Pierluigi da Palestrina

约 1525 – 1594.2.2

文艺复兴时期具有代表性的意大利作曲家

牧歌 (Madrigal)

数学课件
不要复制传播

路漫漫其修远兮，吾将上下而求索

不论是三分损益 (五度相生) 还是纯律, 在不同的历史时期都发挥了重要的作用.

另一方面, 不论在理论上还是在实践中, 根据这些生律方法产生的乐音体系都存在这样那样的缺陷. 为了弥补这些缺陷, 后人发明了许多新的生律方法.

数学课件
个人禁复制传播

路漫漫其修远兮，吾将上下而求索

我国古代就先后出现过京房的六十律；律历学家、曾任南朝宋(420年– 479年) 太史令的钱乐之提出的 三百六十律 (《隋书》卷十一·律历志)；以及蔡元定的 十八律 等.

童忠良，谷杰，周耘，孙晓辉，《中国传统乐学》，福建教育出版社，福州，2004，第七章.

在西方同样有许多人做了各种各样的探索，参看文献

David J. Benson. Music: A Mathematical Offering. Cambridge University Press, Cambridge, 2007, 第五、第六章.

内容提要

1. 三分损益
2. 五度相生
3. 纯 律
4. “中庸全音律”(mean-tone temperaments)
5. 平均律
6. 音 分
7. 一个八度为什么有 12 个半音?

数学课件
严禁复制传播

无解的方程

假定音名 C 的频率为 f, 则高八度的 C′ 对应频率为 $2f$, 再高一个八度的 C″ 对应频率为 $4f$. 如果 C 上方五度的频率为 $\frac{3}{2}f$, 则再高五度的音级所对应的频率等于

$$\left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot f,$$

按照五度相生法继续做下去, 经过 n 次后, 希望能够达到比 C 高 m 个八度的音级. 这时对应的频率须满足

$$\left(\frac{3}{2}\right)^n \cdot f = 2^m \cdot f.$$

数学课件
严禁复制传播

无解的方程

上式等价于

$$3^n = 2^{m+n},$$

其左端是一个奇数，而右端是一个偶数，等式不可能成立.

数学课件
严禁复制传播

数的扩充

- 实数
  - 有理数
    - 整数
    - 分数
  - 无理数

数学课件
严禁复制传播

有理数 vs 无理数

有理数 (rational number) 意为"成比例的数". 任一有理数 r 总可以表成两个整数之比

$$r = \frac{p}{q}, \quad p, q \in \mathbb{Z}$$

当 p, q 互素时, 称 r 是一个 **既约分数**.

公元前 5 世纪, 毕达哥拉斯学派弟子西帕索斯 (Hippasus of Metapontum) 发现了"不成比例的数": 边长为 1 的正方形, 其对角线的长度不是有理数!

数学课件 严禁复制传播

西帕索斯的发现动摇了毕达哥拉斯学派“万物皆 (有理) 数”的理论根基, 引发了第一次“数学危机”. 西帕索斯被囚禁, 最终被丢进大海处死!

数学课件
严禁复制传播

$\sqrt{2}$ 不是有理数

反证法. 假设

$$\sqrt{2} = p/q \qquad (*)$$

是有理数, 其中 $p, q \in \mathbb{Z}$, 二者的最大公因式 $(p, q) = 1$. 将 (*) 式两端分别平方, 整理后可得

$$2q^2 = p^2.$$

$\Rightarrow 2 \mid p$, $\therefore\ 4 \mid 2q^2$, $\Rightarrow 2 \mid q^2$. $\therefore\ 2 \mid (p, q)$ 矛盾. $\square$

数学课件
严禁复制传播

等差数列 vs 等比数列

如何把音差尽可能平均地分配给一个八度中不同音级之间形成的各个音程?

南朝宋人、天文学家，乐律学家何承天 (370 – 447) 所发明的“新律”，就是把三分损益产生的音差平分成 12 份，然后把这个平均数累加到十二律上，使得十二律在音差部分形成一个等差数列.

然而音程关系是相乘而非相加，用等差数列是不能解决根本问题的，我们需要的是等比数列.

数学课件 严禁复制传播

等比数列

一个数列

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$$

称为是 **等比数列**, 如果其相邻的项之比为常数. 换言之, 存在一个常数 r, 使得

$$a_i/a_{i-1} = r, \quad i = 1, 2, \ldots.$$

这个常数 r 称作等比数列的 **公比 (common ratio)**.

数学课件 严禁复制传播

“中庸全音律” (mean-tone temperaments)

不论是五度相生还是纯律，都存在相同的音程但其频率比不同的问题.

五度相生律中，音程 C − E 的频率之比为

$$\frac{3^4}{2^6} : 1 = \frac{81}{64} = 1.265625,$$

而同样是大三度音程的 F − A，其频率之比为

$$\frac{3^3}{2^4} : \frac{3^{11}}{2^{17}} = \frac{3^3}{2^4} \times \frac{2^{17}}{3^{11}} = \frac{2^{13}}{3^8} \approx 1.24859,$$

数学课件
严禁复制传播

“中庸全音律” (mean-tone temperaments)

在纯律中，存在两种不同的大二度 (全音):

音程 C — D, F — G, A — B 的比例为 $9:8$,

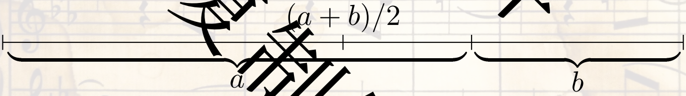
音程 D — E, G — A 的比例为 $10:9$.

数学课件
禁止复制传播

算术平均 vs 几何平均

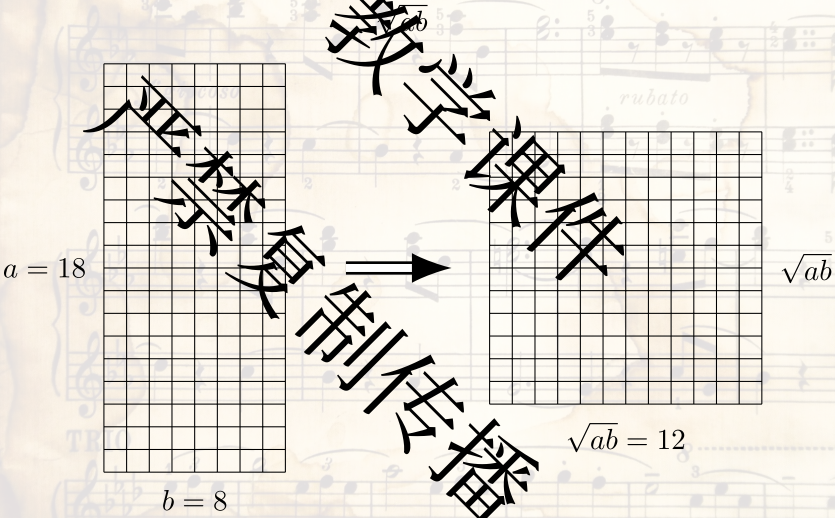
算术平均:

$$\frac{a+b}{2}$$



数学课件 严禁复制传播

几何平均:



数学课件
严禁复制传播

“中庸全音律” (mean-tone temperaments)

对于纯律中音程 C — D 的比例 9 : 8 和音程 D — E 的比例 10 : 9 做几何平均, 得到

$$\sqrt{\frac{9}{8}\times\frac{10}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

这说明在大三度音程 C — E 的 中点 插入音级 D, 就应有

$$\mathsf{E}:\mathsf{D} = \mathsf{D}:\mathsf{C} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

数学课件
严禁复制传播

“中庸全音律” (mean-tone temperaments)

这样仍然保持了大三度音程 C — E 的理想比例 5:4.

大二度音程 C — D 和 D — E 之间的比例也相等了.

还需要确定两个半音音程的比例.

数学课件
严禁复制传播

“中庸全音律” (mean-tone temperaments)

自然的想法是再去求大二度音程的中点，就得到

$$\sqrt{\frac{\sqrt{5}}{2}} = \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{4}}$$

但是从 C 出发，以此作为半音程上升 12 次，得到

$$\left(\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^{12} = \left(\frac{5}{4}\right)^{3} = \frac{125}{64} = 1.953125 < 2 = \frac{128}{64},$$

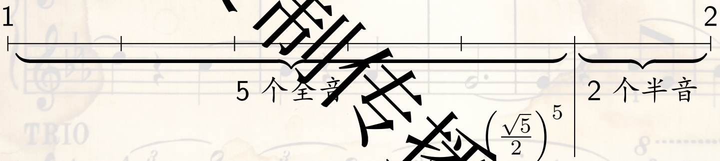
仍然是一条“不归”路.

数学课件
严禁复制传播

“中庸全音律” (mean-tone temperaments)

另一方面，一个八度音程可以由 5 个全音和 2 个半音构成. 于是 2 个半音的音程值 X 应该等于

$$X = \frac{2}{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^5} = \frac{64}{125}\sqrt{5} > \frac{\sqrt{5}}{2}$$



数学课件 严禁复制传播

“中庸全音律” (mean-tone temperaments)

而一个半音对应的比值即为 X 的几何平均，等于

$$\sqrt{X} = \sqrt{\frac{64}{125}\sqrt{5}} = \frac{8}{5\sqrt[4]{5}} = 8\cdot 5^{-\frac{5}{4}}$$

故中庸律也可以视为有两个生律因素:

$$\frac{\sqrt{5}}{2} \text{ 和 } \frac{8}{5\sqrt[4]{5}}.$$

数学课件 严禁复制传播

“中庸全音律” (mean-tone temperaments)

C	D	E	F	G	A	B	C′
1	$\frac{\sqrt{5}}{2}$	$\frac{5}{4}$	$2/5^{\frac{1}{4}}$	$5^{\frac{1}{4}}$	$5^{\frac{3}{4}}/2$	$5^{\frac{5}{4}}/4$	2

C–D	D–E	E–F	F–G	G–A	A–B	B–C′
$\frac{\sqrt{5}}{2}$	$\frac{\sqrt{5}}{2}$	$8/5^{\frac{5}{4}}$	$\frac{\sqrt{5}}{2}$	$\frac{\sqrt{5}}{2}$	$\frac{\sqrt{5}}{2}$	$8/5^{\frac{5}{4}}$

数学课件
严禁复制传播

“中庸全音律” (mean-tone temperaments)

这时, 其余两个大三度音程 F — G — A 和 G — A — B 之间的频率比也都是一致的.

进一步, 按照中庸律从 C 出发连续升高 4 个纯五度, 然后降低 2 个八度和 1 个大三度, 得到

$$\left(\sqrt[4]{5}\right)^4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \frac{4}{5} = 1,$$

消灭了 syntonic comma.

数学课件
北大禁止复制传播

“中庸全音律” (mean-tone temperaments)

但是中庸律牺牲了纯五度的理想比例. 现在纯五度音程 C − G 的比例等于

$$\sqrt[4]{5} \approx 1.49534878 < \frac{3}{2}$$

数学课件
严禁复制传播

内容提要

数学课件

严禁复制传播

一个八度之间的频率比是 2:1, 要平均分配给 12 个半音, 需要用等比数列.

设一个八度之间有 12 个半音, 相应的音级分别对应频率

$$f_0,\ f_1,\ f_2,\ \ldots,\ f_{11},\ f_{12} = 2f_0,$$

构成一个等比数列, 则其公比 r 满足

$$\frac{f_1}{f_0} = \frac{f_2}{f_1} = \cdots = \frac{f_{11}}{f_{10}} = \frac{f_{12}}{f_{11}} = r.$$

这说明 $f_0 \cdot r^{12} = f_{12} = 2f_0$, 即得

$$r = \sqrt[12]{2} \approx 1.0594630943592952645618252949463\cdots$$

数学课件
严禁复制传播

平均律

于是 ♯C 与 C 的频率比 $r : 1 = \sqrt[12]{2} : 1$, D 与 C 的频率比 $r^2 : 1 = \sqrt[6]{2} : 1, \ldots$, B 与 C 的频率比 $r^{11} : 1 = \sqrt[12]{2^{11}}$. 这就构成了 平均律 (**equal temperament**).

世界上第一个通过准确的计算提出平均律的人是朱载堉. 他在《乐律全书》中计算出了具有 25 位有效数字的结果

$$\sqrt[12]{2} \approx 1.059463094359295264561825$$

数学课件 严禁复制传播

朱载堉 (1536 – 1611)，字伯勤，河南怀庆（今沁阳）人，明代著名的律学家、历学家、音乐家，明太祖朱元璋九世孙。

数学课件
严禁复制传播

新法密律

朱载堉将其创建的平均律称作“新法密率”.

为了解决旋宫不归的问题, 经过长年的研究琢磨, 朱载堉提出了“不用三分损益之法, 创立新法. 置一尺为实, 以密率除之, 凡十二遍, 所求律吕真数, 比古四种术尤简洁而精密”(《律学新说》, p. 19). 这里的“密率”就是朱载堉在世界上首次计算出来的、具有 25 位精度的 $\sqrt[12]{2}$, 时间不晚于 1581 年.

朱载堉首先提出“不宗黄钟九寸之说”，“度本起于黄钟之长，则黄钟之长即度法一尺”(《律吕精义》, p. 9). 就是认识到了律吕所定实际上是相对比例，而非绝对音高.

同时，朱载堉也明确认识到八度音程的比值是 2:1，因此取十二律之首的黄钟正律为 1，黄钟倍律为 2，黄钟半律为 0.5. 各律数值指的是弦长，因此黄钟倍律比黄钟正律低八度，黄钟半律比正律高八度. 将各律依照其音高从低到高排列，形成“倍黄钟—正黄钟—半黄钟”两个八度，相应的数值则是从大到小“2—1—0.5”.

数学课件
严禁复制传播

在黄钟倍律和黄钟正律之间共有十一律, 居中的是蕤宾倍律. 设倍蕤宾的值为X, 则等比数列"倍黄钟、倍蕤宾、正黄钟"满足

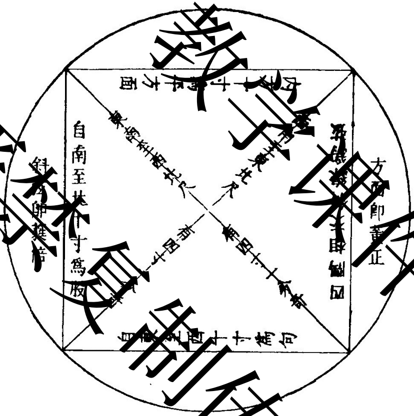
$$2 : X = X : 1$$

即得$X^2 = 2$, $X = \sqrt{2}$.

倍	倍	倍	倍	倍	倍	倍	倍	倍	倍	倍	倍	正
黄	大	太	夹	姑	仲	蕤	林	夷	南	无	应	黄
钟	吕	蔟	钟	洗	吕	宾	钟	则	吕	射	钟	钟
C	♯C	D	♯D	E	F	♯F	G	♯G	A	♯A	B	C′

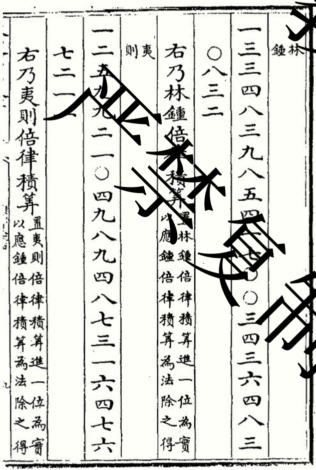
数学课件
严禁复制传播

密率源流



密率源流出於周禮考工記㮚氏爲量內方尺而圓其外詳見第十卷嘉量篇

新法密律


林鍾
一三三四八三九八五四一七〇〇三四三六四八三
〇八三二
右乃林鍾倍律積算 置林鍾倍律積算進一位為實以應鍾倍律積算為法除之得
夷則
一二五九二一〇四九八九四八七三一六四七六
七二一
右乃夷則倍律積算 置夷則倍律積算進一位為實以應鍾倍律積算為法除之得

朱载堉在其《律吕精义》、《乐律全书》中最先计算出 $\sqrt[12]{2} \approx 1.059463094359295264561825$，时间不晚于 1581 年。

数学课件 限制传播

新法密律

命平方一尺为黄钟之率. 东西十寸为句(勾), 自乘得百寸为句幂; 南北十寸为股, 自乘得百寸为股幂; 相并共得二百寸为弦幂. 乃置弦幂为实, 开平方法除之, 得弦一尺四寸一分四厘二毫一丝三忽五微六纤二三七三〇九五〇四八八〇一六八九为方之斜, 即圆之径, 亦即蕤宾倍律之率. 《律吕精义》内篇卷一

数学课件 禁止复制传播

黄钟正律长为 1 尺 (=10寸); 黄钟正律之率为 1 平方尺 (=100平方寸); 其正方形的边 (勾、股) $a = b$ =10寸;

勾幂、股幂 $a^2 = b^2 = 100$ (平方寸), 弦幂 $a^2 + b^2 = 200$ (平方寸);

弦长 $= \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{200} = 14.14213562373095\ldots$ (寸), 等于正方形对角线长度 (方之斜), 也等于其外接圆的直径, 这就是蕤宾倍律与黄钟正律之比.

数学课件
严禁复制传播

在倍蕤宾和正黄钟之间共有 5 律, 倍南吕居中. 设倍南吕的值为 Y, 则等比数列“倍蕤宾、倍南吕、正黄钟”满足

$$\sqrt{2} : Y = Y : 1,$$

即得 $Y^2 = \sqrt{2}$, 于是得到

$$Y = \sqrt{\sqrt{2}} = \sqrt[4]{2}.$$

同样采用勾股术, 朱载堉对 $\sqrt{2}$ 再开平方, 得到

$$\sqrt{\sqrt{2}} = \sqrt[4]{2} \approx 1.18920711500272106671\text{75},$$

这就是南吕倍律与黄钟正律之比.

数学课件 严禁复制传播

在南吕倍律到黄钟正律之间尚有无射、应钟两个倍律. 设倍无射的值为 Z, 倍应钟的值为 R, 则它们满足等比数列的条件

$$\sqrt[4]{2} : Z = Z : R = R : 1.$$

由此可得 $Z = R^2$, $\sqrt[4]{2}R = Z^2$, 最终得出 $R = \sqrt[3]{\sqrt[4]{2}}$.

倍黄钟	倍大吕	倍太蔟	倍夹钟	倍姑洗	倍仲吕	倍蕤宾	倍林钟	倍夷则	倍南吕	倍无射	倍应钟	正黄钟
2						$\sqrt{2}$			$\sqrt{\sqrt{2}}$		$\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt{2}}}$	1

数学课件
严禁复制传播

对 $\sqrt[4]{2}$ 开立方, 得到

$$\sqrt[3]{\sqrt[4]{2}} = \sqrt[12]{2} \approx 1.059463094359295264561825,$$

“即应钟倍律之率”. 这就是史载增在世界上首次算出的十二平均律的关键参数: “密率”.

因为

$$\frac{\text{应钟倍律}}{\text{黄钟正律}} = \sqrt[12]{2}$$

所以等比数列的公比为

$$\frac{\text{黄钟正律}}{\text{应钟倍律}} = \frac{1}{\sqrt[12]{2}}$$

数学课件
严禁复制传播

《律吕精义》

“盖十二律黄钟为始, 应钟为终, 终而复始, 循环无端, 此自然真理, 犹贞后元生, 坤尽复来也. 是故各律皆以黄钟正数十寸乘之为实, 皆以应钟倍数十寸〇五分九厘四毫六丝三忽〇九纤四三五九二九五二六四五六一二五为法除之, 即得其次律也. 安有往而不返之理哉!”

中国古代将被除数 (分子) 称作“实”, 除数 (分母) 称作“法”.

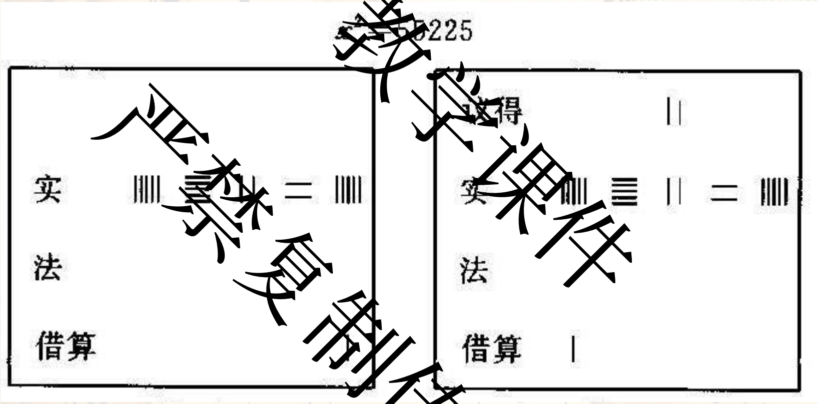
数学课件 严禁复制传播

《九章算术》

中国古代很早就已有开平方、立方的方法. 大约成书于公元一世纪的《九章算术》少广章中就记载了利用筹算开平方和开立方的算法.

数学课件
严禁复制传播

《九章算术》少广章第12题



钱宝琮, 《中国数学史》, 科学出版社, 北京, 1981

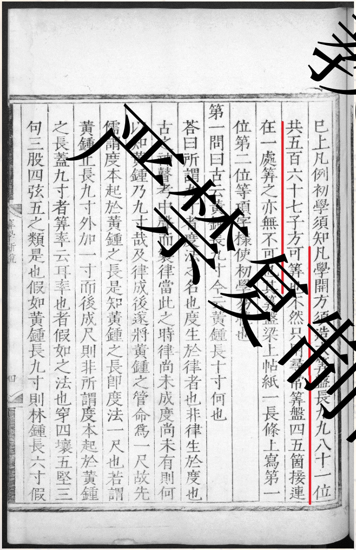
教学课件 严禁复制传播

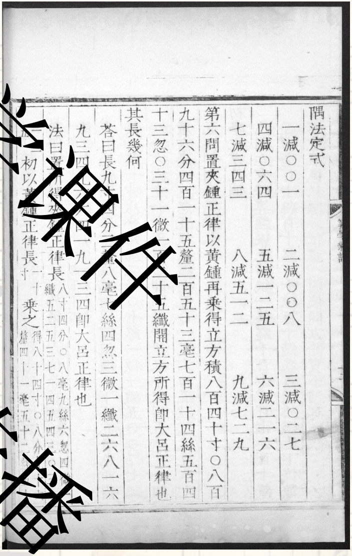
《算学新说》

朱载堉在继承前人智慧的基础上，发展了珠算开平方、开立方方法，专门设计制作了八十一位的大算盘，编制了专门的珠算口诀，经过长年潜心钻研和艰苦耐心的计算检验，才最终得出了大量具有 25 位有效数字的计算结果。

数学课件
严禁复制传播

《算学新说》


巳上凡例初學須知凡學開方須[illegible]盤長九九八十一位
共五百六十七子方可算[illegible]不然只[illegible]算盤四五箇接連
在一處算之亦無不可[illegible]盤梁上帖紙一長條上寫第一
位第二位等項字樣使初學[illegible]也
第一問曰古云黃鍾長九寸今云黃鍾長十寸何也
荅曰所謂[illegible]也度生於律者也非律生於度也
古[illegible]律當此之時律尚未成度尚未有則何
以[illegible]鍾乃九寸哉及律成後遂將黃鍾之管命爲一尺故先
儒[illegible]度本起於黃鍾之長是知黃鍾之長卽度法一尺也若謂
黃鍾[illegible]長九寸外加一寸而後成尺則非所謂度本起於黃鍾
之長蓋九寸者筭率云耳率也者假如之法也穿四壤五堅三
句三股四弦五之類是也假如黃鍾長九寸則林鍾長六寸假


隅法定式
一減○○一　二減○○八　三減○二七
四減○六四　五減一二五　六減二一六
七減三四三　八減五一二　九減七二九
第六問置夾鍾正律以黃鍾再乘得立方積八百四十寸○八百
九十六分四百一十五釐二百五十三毫七百一十四絲五百四
十三忽○三十一微[illegible]十五纖開立方所得卽大呂正律也
其長幾何
荅曰長九寸[illegible]
九三四[illegible]
法曰置[illegible]正律長[illegible]
[illegible]

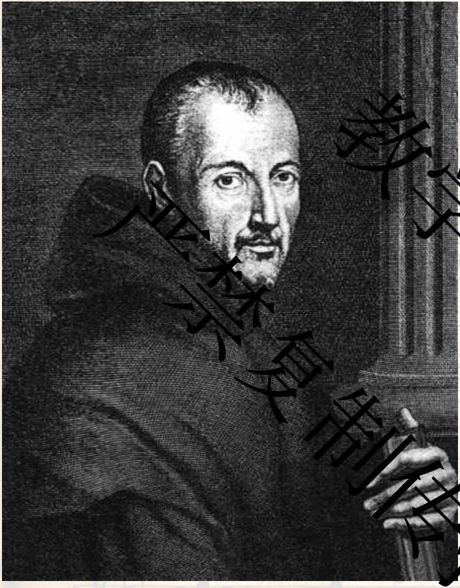
数学课件 严禁复制传播

律名	比率
正黄钟	1.000000000000000000000000
倍应锺	1.059463094359295264561825
倍无射	1.122462048309372981433533
倍南吕	1.189207115002721066717500
倍夷则	1.259921049894873164767211
倍林锺	1.334839854170034364830832
倍蕤宾	1.414213562373095048801689
倍仲吕	1.498307076876681498799281
倍姑洗	1.587401051968199474751706
倍夹锺	1.681792830507429086062251
倍太蔟	1.781797436280678609480452
倍大吕	1.887748625363386993283826
倍黄钟	2.000000000000000000000000

平均律

经专家研究考证，朱载堉创立平均律的时间应不晚于1581年.

在大约写于 1605 年的手稿“论歌唱艺术的理论”（*Van de Spiegheling der singconst*）中，佛拉芒数学家、物理学家 Simon Stevin (1548 – 1620) 给出了以 $\sqrt[12]{2}$ 为公比的平均律概念，并试图计算这个等比数列中的各项. 但是这份手稿并未完成，而且一直到 1884 年才得以公开发表. 手稿中的计算结果误差很大.



1636 年法国科学家梅森（Marin Mersenne, 1588.9.8 – 1648.9.1）出版《和声学通论》(Harmonie Universelle)，至此在西方世界的书中才第一次出现 1.059463 这个数字。

数学课件
严禁复制传播

十二平均律

十九世纪德国物理学家赫尔曼 · 冯 · 亥姆霍兹曾经写道: “中国有一位王子名叫载堉, 力排众议, 创导七声音阶. 而将八度分成十二个半音的方法, 也是这个富有天才和智巧的国家发明的”.

(Herman Helmholz, *On the Sensations of Tone as a Physiological basis for the theory of music*, 3rd ed., Longmans, Green and Co, London, 1895, p 258)

英国科学技术史专家李约瑟 (Joseph Terence Montgomery Needham, 1900.12.9 – 1995.3.24) 指出: “朱载堉对人类的贡献是发现了以相等的音程来调音阶的数学方法”. “首先给出平均律数学公式的荣誉无疑应当归之于中国”.

《中国科学技术史》第4卷

数学课件 严禁复制传播

巴　赫

Johann Sebastian Bach (1685.3.31 – 1750.7.28), 德国作曲家，巴洛克时代音乐大师

数学课件
严禁复制传播

Harpsichord

羽管键琴

(大键琴)

巴赫: $\flat$E 大调前奏曲

(BWV 998)

数学课件
严禁复制传播

Bartolomeo Cristofori

1655.5.4 – 1731.1.27

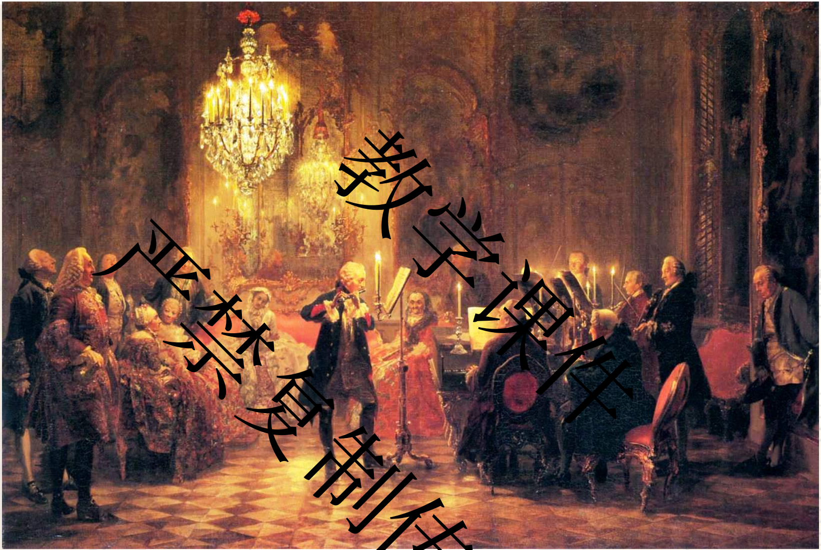
Gottfried Silbermann

1683.1.14 – 1753.8.4

严禁复制传播 数学课件

Fortepiano (1720)

教学课件
严禁复制传播



A Flute Concert of Frederick the Great at Sanssouci (1852)

Adolph von Menzel

数学课件
严禁复制传播

音乐的奉献

巴赫的名作《音乐的奉献》(Das Musikalische Opfer, BWV 1079) 始于 1747 年 5 月 7 日在波茨坦觐见普鲁士国王腓特烈二世 (Friedrick II). 在完成的作品中包含了十首卡农 (canon), 其中的一首标明 “canon per tonos”, 即“经由种种调性的卡农”.

教学课件
严禁复制传播

音乐的奉献

巴赫的“canon per tonos”有三个声部. 最高的声部是国王主题的变奏. 下面的两个声部是基于第二主题的卡农. 其中的低声部用 C 小调呈现主题, 而高声部在上方五度呈现同一主题.

当卡农似乎要结束时, 它已经转成 D 小调了. 就这样连续变调, 上升六次后又回到了最初的 C 小调.

巴赫在乐谱的边空上写下“随着转调升高, 国王的荣耀也升高”(as the modulation rises, so may the King’s glory).

教学课件
严禁复制传播

荷兰艺术家埃舍尔的

《瀑布 (Waterfall)》

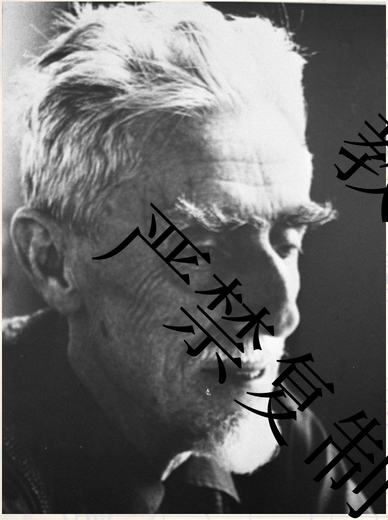
Maurits Cornelis Escher

1898.6.17 – 1972.3.27

数学课件
严禁复制传播

Ascending and Descending

教学课件
严禁复制传播



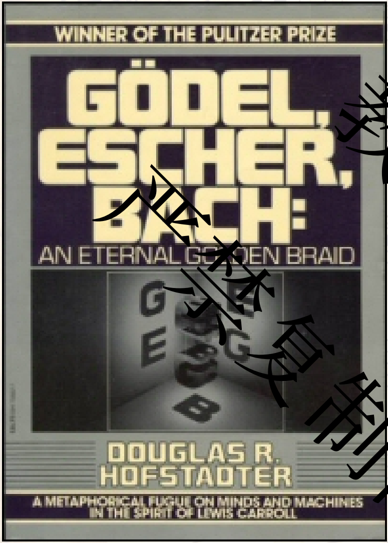
Maurits Cornelis Escher

1898.6.17 – 1972.3.27

Kurt Friedrich Gödel

1906.4.28 – 1978.1.14

数学课件
严禁复制传播


WINNER OF THE PULITZER PRIZE
GÖDEL, ESCHER, BACH:
DOUGLAS R. HOFSTADTER
A METAPHORICAL FUGUE ON MINDS AND MACHINES IN THE SPIRIT OF LEWIS CARROLL


GÖDEL ESCHER BACH
哥德尔
巴赫
〔美〕侯世达 著
商 务 印 书 馆

Das Wohltemperierte Klavier (BWV 846 – 893)

《平均律钢琴曲集》包括两卷, 每一卷各有 24 首前奏曲与赋格, 用遍了 24 个大小调. Well-tempered = 平均律?

mean temperament = 平均律; equal temperament = 等程律.

戴念祖, 李一俊, 消亡了的平均律 — 兼谈巴赫《平均律钢琴曲集》的律制, 星海音乐学院学报, 2015 no. 2, 35 – 39.

Prelude and Fugue 11 in F major (BWV 856)

平均律

One must remember that the voluminous literature about tuning systems in the past comes from people who were of no musical importance. — E. Michael Frederick

转引自: Ross W. Duffin, *How Equal Temperament Ruined Harmony*, W. W. Norton & Company, New York, 2007, p. 15.

数学课件 严禁复制传播

内容提要

1. 三分损益
2. 五度相生
3. 纯 律
4. “中庸全音律”(mean-tone temperaments)
5. 平均律
6. 音 分
7. 一个八度为什么有 12 个半音?

数学课件
严禁复制传播

精确度量音程的科学单位是

音分 (cents)

它是英国数学家、语言学家

Alexander John Ellis

(1814.6.14 – 1890.10.28)

提出的

数学课件
北京大学制作传播

音　分

音分是度量不同声音的频率之比的单位. 设两个声音的频率分别为 $f_1 < f_2$, 则这两个声音之间的音分数等于

$$\boxed{1200 \log_2 \left(\frac{f_2}{f_1} \right).}$$

对于平均律, 半音之间的频率比为 $\sqrt[12]{2}$, 换算成音分就等于

$$1200 \log_2 \left(2^{1/12} \right) = 1200 \cdot \frac{1}{12} = 100 \text{ 音分}.$$

数学课件
严禁复制传播

换 算

设两个音级之间的频率比为 r, 相应的音分为 c, 则有关系式:

$$r = 2^{\frac{c}{1200}}, \qquad c = 1200 \cdot \log_2 r$$

把音级 C 的频率记作 f. 在十二平均律中, 因为音级 G 比 C 高 7 个半音, 等于 700 音分, 所以其频率与 f 之比为

$$2^{\frac{700}{1200}} = 2^{\frac{7}{12}} \approx 1.4983,$$

于是, 音级 G 的频率应等于 $1.4983f$.

数学课件 严禁复制传播

换 算

仍然把音级 C 的频率记作 f. 根据三分损益或者五度相生法，音级 G 的频率为 $1.5f$, 即 $r = 1.5$. 相应的音分就等于

$$c = 1200 \cdot \log_2 r = 1200 \cdot \log_2(3/2) = 1200 \cdot (\log_2 3 - 1).$$

已知 $\log_2 3 \approx 1.585$, 则

$$c = 1200 \times 0.585 = 702 \text{ 音分}.$$

数学课件
严禁复制传播

人耳的分辨能力

普通人通常能够分辨出 4 — 6 音分的频率差.

1 音分:

6 音分:

10 音分:

数学课件
严禁复制传播

不同律制的音分值对照表

	C	D	E	F	G	A	B	C′
十二平均律	0	200	400	500	700	900	1100	1200
三分损益	0	204	408	498	702	906	1110	1200
纯律	0	204	386	498	702	884	1088	1200
中庸律	0	193	386	503	697	890	1083	1200

C 大调音阶

五度相生 vs 纯律

	C	D	E	F	G	A	B	C′
五度相生	0	204	408	498	702	906	1110	1200
纯律	0	204	386	498	702	884	1088	1200

数学课件
严禁复制传播

C 大调音阶

五度相生 vs 平均律

	C	D	E	F	G	A	B	C′
五度相生	0	204	408	498	702	906	1110	1200
平均律	0	200	400	500	700	900	1100	1200

数学课件
严禁复制传播

C 大调音阶

纯律 vs 平均律

	C	D	E	F	G	A	B	C′
纯律	0	204	386	498	702	884	1088	1200
平均律	0	200	400	500	700	900	1100	1200

数学课件
严禁复制传播

“平” vs “不平”

理想大三度音程的频率比为 5:4, 对应于 386 音分, 平均律比其高出 14 个音分;

大六度音程的频率比为 5:3, 对应于 884 音分, 而平均律比其高出 16 个音分.

数学课件 严禁复制传播

“三条彩线”

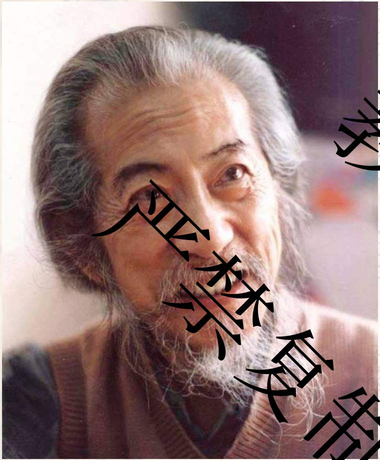
八度循环　2 : 1　　五度纯正　3 : 2　　和弦协和　5 : 4

两千余年来，这三条比例的彩线，使人们眼花缭乱，并且相互间“纠缠不清”…………

我曾对黄翔鹏同志感叹说：“天公不作美”．翔鹏补充并纠正我说：“美就美在天公不作美”．

—冯文慈，略论我国当前的律制问题，音乐研究，1985 年第 3 期，p. 62

数学课件
北京大学 严禁复制传播



黄翔鹏

1927.12.26 – 1997.5.8

冯文慈

1926.4.22 – 2015.8.4

教学课件
严禁复制传播

绝对音高

历史上, 并无标准的绝对音高. 不同国度、不同地区、不同时代有不同的"标准".

对欧洲保留下来的管风琴做测定, 中央 C 上方 A 的频率范围为 377 Hz – 567 Hz.

数学课件
严禁复制传播

George Frideric Handel

Georg Friedrich Händel

1685.3.5 – 1759.4.14

英籍德国作曲家

A = 423 Hz

数学课件 严禁复制传播

绝对音高

在 19 世纪的欧洲和北美, 人们趋向于不断提高绝对音高 (A 的频率).

- 音乐厅的建造、听众人数
- 乐器制造 (管乐器、琴弦)

数学课件
严禁复制传播

绝对音高标准

1834 年召开的斯图加特 (Stuttgart) 会议推荐以 C = 264 Hz (A = 440 Hz) 作为标准音高.

1859 年 2 月 6 日, 法国政府通过法律, 确定 A = 435 Hz.

1896 年, 伦敦的皇家爱乐协会 (Royal Philharmonic Society) 确定 A = 439 Hz.

数学课件
严禁复制传播

绝对音高标准

进入 20 世纪之后，随着广播、录音等产业的发展，日益需要制定一个国际通行的绝对音高标准.

1939 年 5 月国际标准化协会 (ISA) 在伦敦召开会议，正式确立 A = 440 Hz 为 “音乐会音高” **(concert pitch)**.

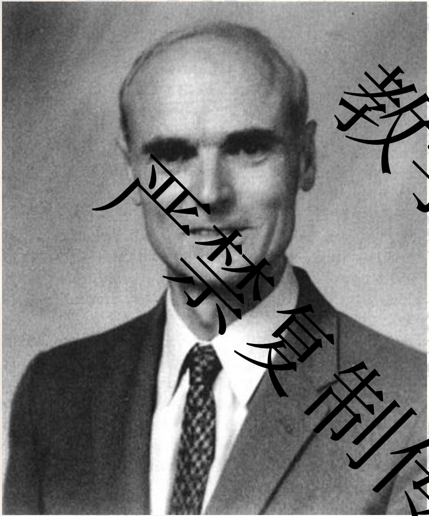
1955 年，国际标准化组织 (IOS — International Organization for Standardization) 接受 A = 440 Hz 为其技术标准，此后一直沿用至今.

What do you mean?

With all the work I have to do, I must be at concert pitch.

It is hard to keep one's concentration up to concert pitch in this sort of scene.

严禁复制传播
数学课件



Harold Scott MacDonald

Coxeter

1907.2.9 – 2003.3.31

加拿大数学家

数学课件 严禁复制传播

Coxeter

$426\frac{2}{3}$ is approximately the standard pitch of Beethoven's time. But concert pitch used today is not A $=$ 427 but A $=$ 440, which makes life miserable for the sopranos who, in the choral movement of the Ninth Symphony, have to sustain a high A for twelve bars while all the other voices are singing about joy.

Music and Mathematics, *The Mathematics Teacher*, **61** (1968), 312–320.

内容提要

1. 三分损益
2. 五度相生
3. 纯　律
4. “中庸全音律”(mean-tone temperaments)
5. 平均律
6. 音　分
7. 一个八度为什么有 12 个半音?

数学课件
严禁复制传播

一个八度为什么有 12 个半音?

答: 音阶 C D E F G A B C′ 中 E − F, B − C′ 之间是半音, 其余音阶之间是全音, 一共 12 个半音.

纯八度音程包含 12 个半音, 纯五度音程包含 7 个半音. 所以

$$12 \text{ 个纯五度音程} = 7 \text{ 个八度音程}.$$

理想纯五度音程的频率比为 3:2, 而八度音程的频率比是 2:1, 故应该有

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{12} \stackrel{?}{=} 2^7.$$

数学课件 严禁复制传播

一个八度为什么有 12 个半音?

命　题

$$\left(\tfrac{3}{2}\right)^{12} \neq 2^7.$$

证明: 反证法. 如果等式成立, 就有 $3/2 = 2^{7/12}$, 即得

$$\log_2\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{7}{12},$$

这说明 $\log_2(3/2)$ 是有理数, 与 $\log_2(3/2)$ 是无理数相矛盾. $\square$

但是, 有理数 $7/12 = 0.58\dot{3}$ 与无理数 $\log_2(3/2) = 0.5849625\cdots$

相差不多. 换言之, 可以用有理数来**近似地**表示无理数.

数学课件
严禁复制传播

用有理数逼近无理数的一个重要途径是 **连分数 (continued fraction)**. 一个连分数是如下形式的表达式

$$a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cfrac{1}{a_4+\cdots}}}}$$

其中 $a_0, a_1, a_2, \ldots$ 均为整数. 通常把这个无限连分数简记为 $[a_0, a_1, a_2, \ldots]$.

数学课件 严禁复制传播

如果截取连分数的前$N+1$项

$$a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cfrac{1}{\cdots+a_N}}}}$$

就得到一个有限连分数, 称作原来连分数的 N **次渐进**, 记作

$c_N=[a_0,a_1,\ldots,a_N]$. 显然这是一个有理数, 从而可以把 c_N 写成

既约分数的形式

$$c_N=\frac{p_N}{q_N},\quad (p_N,q_N)=1,$$

严禁复制传播 数学课件

连分数

无限连分数

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \cdots}}}}$$

的值 c 定义为其渐进的极限值

$$c = \lim_{N\to\infty} c_N.$$

数学课件 严禁复制传播

定　义

设 A 是任一实数,

$$\lfloor A \rfloor = \max\{\, m \in \mathbb{Z} \mid m \le A \,\}$$

$$\lceil A \rceil = \min\{\, m \in \mathbb{Z} \mid m \ge A \,\}$$

教学课件
严禁复制传播

$\lfloor A \rfloor$ 称为 A 的 **地板函数 (floor function)**, 它是不超过 A 的最大整数; $\lceil A \rceil$ 称为 A 的 **天花板函数 (ceiling function)**, 它是不小于 A 的最小整数.

地板函数 vs 天花板函数

例如,

$$\lfloor 3.99 \rfloor = 3, \qquad \lceil 3.99 \rceil = 4;$$

$$\lfloor -3.99 \rfloor = -4 \qquad \lceil -3.99 \rceil = -3$$

对于任意实数 A, 总有

$$A - 1 < \lfloor A \rfloor \le A \le \lceil A \rceil < A + 1.$$

数学课件
严禁复制传播

给定实数 A, 首先令 $a_0 = \lfloor A \rfloor$, 得到 $x_0 = A - a_0$, 满足

$0 \le x_0 < 1$. 再计算 $a_1 = \lfloor 1/x_0 \rfloor$, 得到

$$x_1 = \frac{1}{x_0} - a_1,$$

满足 $0 \le x_1 < 1$. 再计算 $a_2 = \lfloor 1/x_1 \rfloor$, 得到

$$x_2 = \frac{1}{x_1} - a_2,$$

满足 $0 \le x_2 < 1$, ... 依此一直做下去. 如果到第 N 步得到 $x_N = 0$, 则 $A = [a_0, a_1, \ldots, a_N]$ 是一个有理数. 反之, 如果 A 是无理数, 则这个算法将永不终止, 得到的是一个无限连分数.

数学课件 严禁复制传播

求 A 的连分数的“算法”

Input: 实数 A;

Output: 序列 $[a_0, a_1, a_2, \cdots]$.

$i := 0; \quad a_0 := \lfloor A \rfloor; \quad x_0 := A - a_0;$

repeat $i := i + 1;$

$$a_i := \left\lfloor \frac{1}{x_{i-1}} \right\rfloor; \quad x_i := \frac{1}{x_{i-1}} - a_i;$$

until $x_i = 0$.

数学课件
严禁复制传播

将有理数 $A = 15/11$ 表示成连分数.

$$a_0 = \lfloor A \rfloor = 1, \qquad x_0 = A - a_0 = \frac{4}{11};$$

$$a_1 = \left\lfloor \frac{11}{4} \right\rfloor = 2, \qquad x_1 = \frac{11}{4} - a_1 = \frac{3}{4};$$

$$a_2 = \left\lfloor \frac{4}{3} \right\rfloor = 1, \qquad x_2 = \frac{4}{3} - a_2 = \frac{1}{3};$$

$$a_3 = \left\lfloor \frac{3}{1} \right\rfloor = 3, \qquad x_3 = \frac{3}{1} - a_3 = 0.$$

即得

$$A = \frac{15}{11} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3}}}$$

数学课件 严禁复制传播

连分数的意义

定理: 设 A 是无理数, $N \geq 1$, p_N/q_N 是 A 的连分数的 N 次渐进. 如果整数 p, q 满足 $0 < q \leq q_N$, 且 $p/q \neq p_N/q_N$, 则

$$\left|A - \frac{p_N}{q_N}\right| < \left|A - \frac{p}{q}\right|.$$

华罗庚, 《数论导引》, 科学出版社, 北京, 1957, p. 271.

根据这个定理, A 的 N 次渐进是所有分母不超过 q_N 的有理数中最近似于 A 的. 一个有理数的"复杂度"通常用其分母的大小来刻画. 从这个意义上讲, 对于给定的复杂度, N 次渐进是 A 的**最佳有理逼近**.

数学课件 严禁复制传播

利用连分数来逼近无理数 $\log_2(3/2) = 0.5849625\cdots$，可得

$$[0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 3,\ 1,\ 5,\ \cdots] = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5+\cdots}}}}}}}$$

数学课件
严禁复制传播

$\log_2(3/2)$ 的 N 次渐进

$$1, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{7}{12}, \frac{24}{41}, \frac{31}{53}, \frac{179}{306}, \cdots$$

对于序列中的每个分数 p/q, 都可以建立一个 q-平均律, 把一个八度音程平均划分为 q 等分, 把每一个等分作为一个“半音”. 以 p 个半音作为纯五度. 这样的调律都是对 $\log_2(3/2)$ 的最佳近似.

数学课件
严禁复制传播

一个八度为什么有 12 个半音?

十二平均律就是对应于 7/12 的平均律. 类似地, 对应于 24/41 可以建立 41-平均律, 把一个八度细分成 41 等分 (半音), 取 24 个半音处为纯五度.

十九世纪英国科学家 Bosanquet 根据 53-平均律设计了一个他称为的“扩展键盘” (generalised keyboard), 每个八度包含 53 个半音, 在 31 个半音处为纯五度.

数学课件 严禁复制传播

Robert Holford

Macdowall Bosanquet

1841.7.31 – 1912.8.7

英国科学家、音乐理论家

教学课件 严禁复制传播

《π之歌》(Song from π)

a 和声小调

数学课件
严禁复制传播