幂集 P(A)的基数定理及几种证法

戴红兵
(思茅师范高等专科学校数学系，云南 普洱 665000)

[摘 要] 用组合论、二进制编码、建立一一对应、数学归纳法、ω的归纳原理等知识，对 n元有限集合的幂集 P(A)的基数定理给出了六种证法。

[关键词] 幂集基数定理；组合论；二进制编码；一一对应；ω归纳原理
[中图分类号] O144 [文献标识码] A [文章编号] 1008－8059(2008)06－0038－02

集合论是数学中最基本的内容，也是离散数学的基础。本文用到离散数学多个章节的知识对幂集的基数定理进行证明。从多个视角对这一问题剖析，揭示问题的本质及各部分知识间的内在联系。

定理 若 A为 n元的有限集合，A的所有子集构成集合 P(A)，则 P(A)的基数为 2^n。

证法一：由幂集的定义：$P(A)=\{x \mid x\subseteq A\}$，我们自然想到直接计算 A的子集的个数，即从 $A=\{a_1, a_2, \cdots a_n\}$中抽出 0个元数的集合 ϕ 共 C_n^0个，抽出一个元素的集合如 $\{a_1\}$，$\{a_2\}$等共 C_n^1个，…抽出 n个元素的集合 $\{a_1, a_2, \cdots a_n\}$共 C_n^n个，于是 $|P(A)|=C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^n=(1+1)^n=2^n$。

证法二：由上面的证明我们确信 $|P(A)|=2^n$，既然基数为 2^n，那么，我们能否用组合的乘法原理直接构造 $|P(A)|=2\times2\times\cdots\times2=2^n$ 来证明之？

由 $P(A)=\{x \mid x\subseteq A\}$，x是 P(A)的任意元素，x又是 A的任一个子集。于是有 $a_i\in x$，或 $a_i\notin x$ ($i=1, 2, \cdots, n$)，两种情况，由乘法原理 $|P(A)|=2\times2\times\cdots\times2=2^n$。

证法三：在证法二中用到 a_i是否属于集合 x，若 $a_i\in x$，则可在相应的位置用 1表示，若 $a_i\notin x$ 则可相应的位置用 0表示，记 $\Phi=B_{\underbrace{0\cdots0}_{n个0}}$，$\{a_1\}=B_{\underbrace{0\cdots0}_{n-1个0}1}$，$\{a_2\}=B_{\underbrace{0\cdots0}_{n-2个0}10}$，$\{a_2, a_1\}=B_{\underbrace{00\cdots0}_{n+2个0}11}$，…$\{a_n, \cdots a_2, a_1\}=B_{\underbrace{11\cdots1}_{n个1}}$

于是 $|P(A)|=(11\cdots11)_{2进制数}+1=2^{n-1}+2^{n-2}+\cdots+2^0+1=\dfrac{1-2^n}{1-2}+1=2^n$

幂集可表示为 $P(A)=\{B_i \mid$ 提二进制数，$0\leqslant i\leqslant 1\cdots1\}$

证法四：由 $A=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$考虑全体 n位二进制串组成的集合 B_0 $B=\{i_1 i_2 \cdots i_n \mid i_k=0$ 或 1，$k=1, 2, \cdots, n\}$由乘法原理 $|B|=2^n$，当然也由证法三可得 $|B|=2^n$，另外，可在 P(A)与 B间

* 【收稿日期】2008－11－10
【作者简介】戴红兵(1966～)，男，湖南祁东人，思茅师范高等专科学校数学系讲师，主要从事数学教学及研究工作。

建立一一对应：$i_1 i_2 \cdots i_n \leftrightarrow x$，$x \in P(A)$，$a_k \in x \leftrightarrow i_k = 1$，$a_k \notin x \leftrightarrow i_k = 0$

如约定 $\underbrace{000\cdots0}_{n-4个0}1010 \leftrightarrow \{a_{n-3}, a_{n-1}\}$，

有 $|P(A)|=2^n$。

证法五：由 $|A|=n$，n为自然数，我们理所当然的想到用数学归纳法证之。

引理 若 A是一个 n元集合，且 $b \notin A$，令 $C=A\cup\{b\}$，则 $|P(C)|=2|P(A)|$。

证明：把 A的每一个子集都添入一个 b元素，这样得到的所有新集合的个数恰为 $P(A)$的个数。而 C的所有子集就是由 A的所有子集及在 A每一个子集中都添入 b元素的集合构成，

即 $|P(C)|=2|P(A)|$。

原命题的证明：(1)当 $n=0$时，令 $A_0=\Phi$，$P(A_0)=\{\Phi\}$，

即 $2^0=1$，故命题成立；

(2)当时 $n=k$时，令 $A_k=\{a_1, \cdots, a_k\}$，$|P(A_k)|=2^k$；

(3)当时 $n=k+1$时，令 $A_{k+1}=\{a_1, \cdots, a_k, b\}$

由引理知 $|P(A_{k+1})|=2|P(A_k)|=2 \cdot 2^k=2^{k+1}$。

由(1)、(2)、(3)知 n为全体自然数都成立。

即 $|P(A)|=2^n$

证法六：

证：用 ω 的归纳原理证明之。

对于 n，设 $\varphi(n)$是命题：对任意集合 A，若 A有 n个元，则 $P(A)$有 2^n个元。本定理证明化为：$(\forall n)(n\in\omega \rightarrow \varphi(n))$，也即要证：

$T=\{n \mid n\in\omega \wedge \varphi(n)\}$是个归纳集。

因此，(1)证 $\varphi(0)$，令 $A=\Phi$，则 $P(A)=\{\Phi\}$即 $2^0=1$故有 $\varphi(0)$成立。

(2)证 $(\forall k)(k\in\omega \wedge \varphi(k) \rightarrow \varphi(k+1))$，设 $k\in\omega$，且 $\varphi(k)$即若 A有 k个元，则知 $P(A)$有 2^k个元。

今证 $\varphi(k+1)$，设 B有 $k+1$个元的集合，$c\in B$且 $A=B-\{c\}$，则 A有 k个元，故 $P(A)$有 2^k个子集，由引理知 $P(B)$的子集个数是 $P(A)$的子集个数的二倍，即有 $P(B)$有 $2\times 2^k=2^{k+1}$个子集。

证毕。

[参考文献]

[1] 耿素云，屈婉玲. 离散数学（第二版）[M]. 北京. 高等教育出版社，2004.