1 Koder

1.1 Intro

Rätta till mottagna meddelanden

NASA ville skicka en sond till mars. Skicka data väldigt långt. En tredjedel av bilden var fel. Man kan inte skicka samma bild 8 ggr. Man vill ha små signaler.

2 Kodning

x binär sträng.

$$x = 01100 = x_1x_2x_3x_4x_5 = (x_1, x_2, \cdots, x_5)$$

$C = \{\text{kodord}\} =$ binära tal av samma längd

2.1 Binär addition

$$0 + 0 = 0$$
$$0 + 1 = 1 + 0 = 1$$
$$1 + 1 = 0$$

2.2 Summa av kodord

$$0110 + 1010 = (0110)^T + (1010)^T = (1100)^T = 1100$$

Obs $x - y = x + y$, $x + x = 0$

2.3 Exempel

$$C = \{0, 1\}$$
$$x \to 1$$

2.4 Exempel

$$C = \{00, 11\}$$
$$x \to 10$$

Fel! Vi kan ej veta om x skulle vara 1 eller 0.

2.5 Exempel

$$C = \{000, 111\}$$
$$x \to 001$$

Rättat felet. Det är större sannolikhet att x är 0. Närmsta granne rätt.

2.6 Exempel

$$C = \{00, 10, 01, 11\}$$
$$x \to 10$$

Vi kan ej veta vilket det menade meddelandet var om något gick fel.

2.7 Definition

Hammingavståndet mellan två kodord x och y är $d(x, y)$ = antalet positioner där x och y är olika. Kodens separation (minsta avstånd).

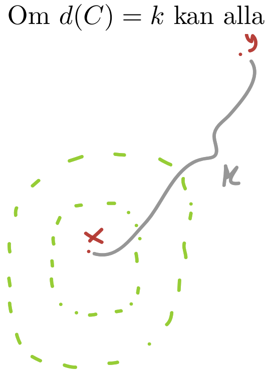
$$d(C) = \min\{d(x, y); x, y \in C\}$$

2.8 Exempel

$$C = \{010101, 101010, 111000, 000111\}$$
$$d(101010, 000111) = 4$$
$$d(C) = d(101010, 111000) = 2$$

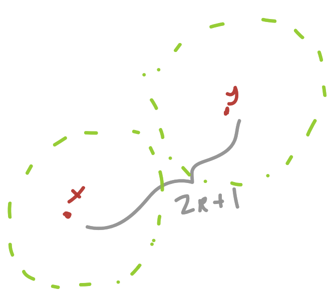
2.9 Sats

Om $d(C) = k$ kan alla fel som påverkar $k - 1$ bitar upptäckas



2.10 Sats

Om $d(C) \geq 2k + 1$ kan man rätta k stycken fel.



2.11 Linjära koder

C är en linjärkod om

$$x + y \in C, \forall x, y \in C$$

2.11.1 Exempel

$$(1011)^T + (0110)^T = (1101)^T$$

är kodord $0 = x + x \in C$ $d(x, 0) =$ antal ettor i x $d(C) =$ minsta antalet ettor som förekommer i ett kodord $\neq 0$.

2.12 Konstruktion av kod med 4 meddelanden (fem bitar)

Välj alla binära tal $x = x_1x_2x_3x_4x_5$ så att

$$H \begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + x_3 + x_5 = 0 \\ x_1 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$C =$ nollrummet till matrisen H kontrollmatris

2.13 Eliminera (binärt)

$$\begin{cases} x_1 = x_3 + x_5 \\ x_2 = x_3 + x_5 \\ x_4 =_4 \end{cases}$$

x_3	x_5	x_1	x_2	x_4	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	0	1	1
1	0	1	1	0	1	1	1	0	0
1	1	0	0	1	0	0	1	1	1

$$d(C) = 3 = 2 \times 1 + 1$$

2 fel upptäcks
1 fel kan rättas

2.14

$$x \to y, Hy = 0$$

$$Hy \neq 0$$

Om fel $y = x + e$, där e är felvekorn.

$$x = 01101 \to 01111 = y = x + e = 01101 + 00010$$

$$Hy = H(x+e) = Hx + He = He$$

$$H(0010)^T = (101)^T \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} (00010)^T = (101)^T$$

2.15 Exempel

Normalform för H

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} (x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_5 x_6)^T = (000)^T =$$

$$C = \{000000, 01101, 101010, 110011, 110100, 101101, 011110, 000111\}$$

$$d(C) = 3$$

Upptäck 2 fel. Rätta 1 fel.

2.16 Sats

C_1, C_2 linjära koder. Då är

$$C = \{(x, x+y); x \in C, y \in C_2\}$$

en linjär kod. Vidare $d(C) =$ minsta av $2 \times d(C_1)$ och $d(C_2)$

2.17 Exempel

$$C_1 = \{00, 01, 10, 11\}, C_2 = \{00, 11\}$$

$$d(C_1) = 1, d(C_2) = 2$$

$$C = \{0000, 0011, 0100, 0111, 1000, 1011, 1100, 1111\}$$

$$d(C) = 2$$

2.18 Exempel

Mariner 9 (1971). $C_1 = \{$ alla $x = x_1 x_2 x_3 x_4$så att$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$

$$C_1 = \{0000, 1111\}$$

$$d(C_1) = 2, d(C_2) = 4$$

Satsen ger C_1' med $d(C_1') = 4$
Med $C_2' = \{00000000, 11111111\}, d(C_2') = 8$
Satsen ger C_1'' med $d(C_2'') = 8, C_2'' = \{0000000000000000, 1111111111111111\}$
ger C med $d(C) = 16 \geq 15 = 2 \times 7 + 1$

2.19

$$7 \times 9 = 63 = 5 \times 11 + 8 \equiv 8$$

Bilda koder $x_1 x_2 \ldots x_1, 11^{10}$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{10} = 0 \ (mod\ 11) \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \cdots + 10x_{10} = 0 \ (mod\ 11) \end{cases}$$

ger 82644629 koder utan 10. rättar ett fel.