1 TATA41 - Föreläsning 2

2 Kontinuitet

Ordet används i vardagligt tal, utan hopp. Rita en graf utan att lyfta på pennan.

2.1 Definition

Låt $a \in D_f$. Funktionen f sägs vara kontinuerlig i punkten a ifall $f(x) \to f(a)$ då $x \to a$ (eller, som ett specialfall, om a är en så kallad isolerad punkt i D_f.)

2.1.1 Isolerad punkt

Vad är en isolerad punkt? Man skulle kunna säga att det är en punkt i en mängd där en punkt inte har några "grannar".

2.1.2 Ekvivalent

Låt $a \in D_f$. Funktionen f sägs vara kontinuerlig i punkten a ifall det för varje $\epsilon > 0$ finns ett $\delta > 0$ sådant att $|f(x) - f(a)| < \epsilon$ om $x \in D_f$ och $|x - a| < \delta$.

Annars sägs f vara diskontinuerlig i punkten a.

2.1.3 Anmärkning

Om $x \notin D_f$ så är det inte meningsfullt att tala om kontinuitet eller diskontinuitet för f i den punkten.

2.2 Exempel

Låt

$$f(x) = \begin{cases} 5, x \neq 3, \\ 6, x = 3, \end{cases}$$

Vilkoret för kontinuitet i punkten $x = 3$ är att $f(x) \to f(3)$ då $x \to 3$. Men detta är inte uppfyllt för vi vet från förra gången att $f(x) \to 5$ då $x \to 3$. Alltså är f diskontinuerlig i punkten $x = 3$.

2.3 Extra teori

Låt

$$f(x) = \begin{cases} x, x \in \mathbb{Q} \\ 0 \end{cases}$$

Kontinuerlig i $x = 0$ (enbart).

2.4 Definition av kontinuerlig

En funktion kallas kontinuerlig (rätt och slätt) om den är kontinuerlig i varje punkt i sin definionsmängd.

2.5 Extra teori

Låt

$$f(x) = \begin{cases} x \times \sin \frac{1}{x}, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$$

2.6 Sats (Mellanliggande värde)

En kontinuerlig funktion på ett intervall i $\mathbb{R}$ antar alla mellanliggande värden, dvs om f är kontinuerlig på $[a, b]$ och $f(a) < C < f(b)$ eller $f(a) > C > f(b)$ så finns det (minst) ett reellt tal $\xi \in [a, b]$ sådant att $f(\xi) = C$.

2.7 Bevis

Lokalisera ξ genom intervallhalvering (likt binärsökning). Fullständigheten hos de reella talsystemet behövs för att visa att processen verkligen konvergerar mot något tal $\xi \in \mathbb{R}$. Se Appendix A i boken.

2.8 Sats

Om f och g är kontinuerliga så är följande funktioner kontinuerliga (i de punkter där de är definerade):
$f + g, f - g, fg, \frac{f}{g}, f \circ g$

2.8.1 Definition av $f \circ g$

$(f \circ g)(x) = f(g(x))$

2.9 Sats

De elementära funktionerna är kontinuerliga.

2.10 Bevis

Se boken

2.11 Anmärkning

Därmed har vi motiverat ”$\sqrt{1 + \frac{1}{x}} \to \sqrt{1 + 0}$ då $x \to \infty$” från förra gången.

2.12 Exempel (Styckvis definerad funktion)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, x/le0, \\ e^x, x > 0, \end{cases}$$

är kontinuerlig för $x < 0$ och för $x > 0$ enligt föregående sats (elementära funktioner). Funktionen är diskontinuerlig i punkten $x = 0$ (eftersom den saknar gränsvärde där).

2.13 Exempel

Funktionen $f : \mathbb{R}/\ \{0\} \to \mathbb{R}$ som ges av $f(x) = \frac{1}{x}$ är kontinuerlig.

2.14 Exempel

Visa att polynomet $p(x) = x^3 + x - 3$ har exakt ett reellt nollställe, och att det ligger i öppna intervallet $]1, 2[$. Lösning:

$$\begin{cases} p(1) = -1, \\ p(2) = 7 \end{cases}$$

Eftersom $-1 < 0 < 7$ och alla polynom är kontinuerliga, så säger satsen om mellanliggande värde att det finns minst ett tal $\xi \in]1, 2[$ sådant att $p(\xi) = 0$. Vidare är p strängt växande (ty summa av strängt växande funktioner $g(x) = x^3$ och $h(x) = x - 3$), vilket visar att $p(x) < 0$ om $x < \xi$, och $p(x) > 0$ om $x > \xi$. Alltså är ξ det enda nollstället.

2.15 Sats (Största och minsta värde)

En kontinuerlig funktion på ett kompakt (dvs slutet och begränsat) intervall har ett största och ett minsta värde, dvs om f är kontinuerlig på $[a, b]$ så finns det punkter $c \in [a, b]$ och $b \in [a, b]$ sådana att $f(c) \leq f(x) \leq f(d), \forall x \in [a, b]$.

2.16 Bevis

Se boken (appendix A).

2.17 Exempel

På det kompakta intervallet [-3,2] har den kontinuerliga funktion $f(x) = x^2$ största värdet $f(-3) = 9$ och minsta värdet $f(0) = 0$. Alla förutsättningarna är nödvändiga för att det garanterat ska finnas största och minsta värde, vilket följande tre exempel visar.

2.17.1 Exempel (Ej slutet intervall)

Funktionen $f(x) = x^3$ saknar största och minsta värde på intervallet $]0, 2[$. (Men infimum är 0 och supremum är 4).

2.17.2 Exempel (Obegänsat intervall)

Funktionen $f(x) = \frac{1}{x}$ saknar minsta värde på intervallet $[1, \infty]$. (”Råkar” dock har strörsta värde $f(x) = 1$).

2.17.3 Exempel (Diskontinuerlig funktionen)

”Bråkdelsfunktionen” $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$ saknar största värde intervallet $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$