1 Primitiv funktion

Det är inte lika lätt att integrera som att derivara.

1.1 Definition

F sägs vara en primitiv funktion (eller bara en primitiv, eller ibland obestämd integral) till f på intervallet I om $F' = f$ på I.

1.2 Exempel

$F_1(x) = x^2$ är en primitiv till $f(x) = 2x$. Även $F_2(x) = x^2 + 5$ är en primitiv till f.

1.3 Sats

Om F_1 och F_2 båda är primitiver till f på något intervall I så är $F_2 = F_1 + C$ på I, för någon konstant C.

1.4 Bevis

$(F_2 - F_1)' = F_2' - F_1' = f - f = 0$ på I, så $F_2 - F_1$ är konstant på I.

1.5 Skrivsätt

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

1.6 Exempel

Bestäm alla primitiver till $f(x) = \frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$.

$$D_f =]-\infty, 0[\cup]0, \infty[$$

På vardera intervallet är $\ln|x|$ en primitiv, så den mest allmänna primitiven till f har formen.

$$F(x) = \begin{cases} \ln|x| + C_1, x < 0 \\ \ln|x| + C_2, x > 0 \end{cases} \quad \left(= \begin{cases} \ln(-x) + C_1, x < 0 \\ \ln(x) + C_2, x > 0 \end{cases} \right)$$

Oftast skriver man dock helt enkelt

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

där det är underförstått att det kan vara olika konstanter i de två intervallen

1.7 Grundläggande metod för beräkning av primitiv

Känna igen derivator man sett! (Se lista med ”standardprimitiver” i boken, avsnitt 5.1)

1.8 Exempel

$$D(x^5) = 5x^4 \implies D\left(\frac{1}{5}x^5\right) = x^4 \implies \int x^4 dx = \frac{1}{5}x^5 + C$$

(Allmänt: $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C$ $(a \neq -1)$)

1.9 Exempel

$$D(\cos x) = -(-\sin x) = \sin x \implies \int \sin x dx = -\cos x + C$$

1.10 Exempel

$$D(e^{x^2}) = 2x \times e^{x^2} \implies \int x e^{x^2} dx = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$$

(VARNING!! $\int e^{x^2} dx \neq \frac{e^{x^2}}{2x} + C$ (vanligt nybörjarfel)).
$\int e^{x^2} dx$ går ej att uttrycka med elementära funktioner.

1.11 Exempel

$$D(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \implies \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$$

1.11.1 Övning P4.3f

$$D\left(\ln(x + \sqrt{1+x^2})\right) = \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} \times \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right) = \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} \times \frac{\sqrt{1+x^2}+x}{1+x^2}$$

Alltså:

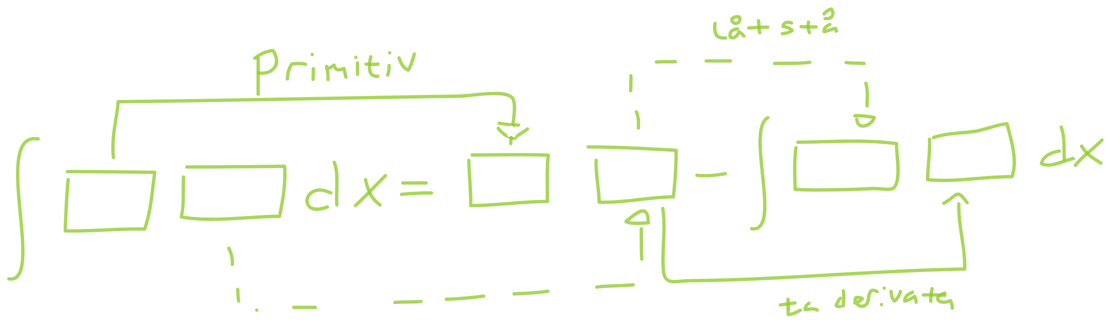
$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) + C$$

1.12 Partiell integration (=produktregeln baklänges)

Låt $F' = f$. Produktregeln ger:

$$(Fg)' = F'g + Fg' \implies (Fg)' = fg + Fg' \implies fg = (Fg)' - Fg' \implies$$

$$\int f(x)g(x)dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)dx$$



1.13 Exempel (Skjut in en etta)

$$\int \ln|x|dx = \int 1 \times \ln|x|dx = x \times \ln|x| - \int x \times \frac{1}{x}dx = x\ln|x| - x + C$$

1.14 Exempel (Upprepad partiell integration)

$$\int x^3 e^{-2x}dx = \int e^{-2x}x^3dx = \frac{e^{-2x}}{-2}\times x^3 - \int \frac{e^{-2x}}{-2}3x^2dx = \frac{e^{-2x}}{-2}\times x^3 - \left(\frac{e^{-2x}}{(-2)^2}\times 3x^2 - \int \frac{e^{-2x}}{(-2)^2}6xdx\right) =$$

$$= \frac{e^{-2x}}{-2}x^3 - \frac{e^{-2x}}{(-2)^2}3x^2 + \frac{e^{-2x}}{(-2)^3}6x - \int \frac{e^{-2x}}{(-2)^3}6dx =$$

$$= \frac{e^{-2x}}{-2}x^3 - \frac{e^{-2x}}{(-2)^2}3x^2 + \frac{e^{-2x}}{(-2)^3}6x - \frac{e^{-2x}}{(-2)^4}\times 6 + C =$$

$$e^{-2x}\left(\frac{x^3}{2} + \frac{3x^2}{4} + \frac{3x}{4} + \frac{3}{8} + C\right)$$

Eller ta allt i ett steg, om man så vill:

Primitiv

$$\int \boxed{e^{-2x}}\,\boxed{x^3}\,dx = \boxed{\frac{e^{-2x}}{-2}}\,\boxed{x^3} - \boxed{\frac{e^{-2x}}{(-2)^2}}\,\boxed{3x^2} + \boxed{\frac{e^{-2x}}{(-2)^3}}\,\boxed{6x} - \boxed{\frac{e^{-2x}}{(-2)^4}}\,\boxed{6} + C$$

Låt stå derivata nästa blir noll

2 Variabelbyte (= kedjeregeln baklänges)

Uträkningen $\int \cos(x^3+1)3x^2dx = \sin x^3 + 1 + C$ innefattar två steg:

- Känna igen att $3x^2$ är derivatan av x^3+1
- Beräkna primitiv till cosinusfunktionen (dvs $\int \cos t dt = \sin t + C$)

2.1 Praktiskt skrivsätt

$$\int \cos(x^3+1)3x^2dx = \begin{bmatrix} t = x^3+1 \\ \frac{dt}{dx} = 3x^2 \\ dt = 3x^2dx \end{bmatrix} = \int \cos t dt = \sin t + C = \sin(x^3+1) + C$$

2.2 Exempel

$$\int \frac{dx}{1+e^x} = \begin{bmatrix} x = \ln t \ (t>0) \\ \frac{dx}{dt} = \frac{1}{t} \\ dx = \frac{dx}{t} \end{bmatrix} = \int \frac{dt}{(1+t)t} = \int \frac{(1+t)-t}{(1+t)t}dt =$$

$$= \int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{1+t}\right) dt = \ln|t| - \ln|1+t| + C = \ln t - \ln(1+t) + C = x - \ln 1 + e^x$$

2.3 Exempel

$$\int \frac{x}{x^2+6x+13}dx = \int \frac{x}{(x+3)^2+4}dx = \begin{bmatrix} t = x+3 \\ \frac{dt}{dx} = 1 \\ dt = dx \end{bmatrix} = \int \frac{t-3}{t^2+4}dt = \int \frac{t}{t^2+4}dt - 3\int \frac{1}{t^2+4}dt$$

$$A = \int \frac{t}{t^2+4}dt$$

$$B = 3\int \frac{1}{t^2+4}dt$$

$$A = \begin{bmatrix} u = t^2+4 \\ \frac{du}{dt} = 2t \\ du = 2t\ dt \end{bmatrix} = \int \frac{\frac{1}{2}du}{u} = \frac{1}{2}\ln|u| + C = \frac{1}{2}\ln\left(t^2+4\right) + C_1 = \frac{1}{2}\ln\left((x+3)^2+4\right) + C_1 =$$

$$B = \int \frac{1}{4(\frac{t^2}{4}+1)dt} = \frac{1}{4}\int \frac{1}{\left(\frac{t}{2}\right)^2+1}dt = \begin{bmatrix} v = \frac{t}{2} \\ \frac{dv}{dt} \\ dt = 2v \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\int \frac{1}{v^2+1}2v =$$

$$= \frac{1}{2}\arctan v + C_2 = \frac{1}{2}\arctan\frac{t}{2} + C_2 = \frac{1}{2}\arctan\frac{x+3}{2} + C_2$$