Ny föreläsare Mikael Langer.

1 Integration av rationella funktioner

1.1

Vi vill bestämma $\int \frac{p(x)}{q(x)}dx$ där p och q är polynom med reella kofficienter. Kan alltid göras! (I teorin, i praktiken kan det vara svårt) Tre steg:

1.1.1 Steg 1

Om $grad\ p \geq grad\ q$: gör en polynomdivision.

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \cdots = k(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$$

$k(x)$, $r(x)$ och $q(x)$ är alla polynom.

$$grad\ r \geq grad\ q$$

$\int \frac{p(x)}{q(x)}dx = \int k(x) + \int \frac{r(x)}{q(x)}$
$\int k(x)$ är enkelt.
$\int \frac{r(x)}{q(x)}$ vidare till steg 2 och 3.

1.1.2 Steg 2

Faktorisera q så långt som möjligt i reella faktorer. q reella kofficienter ger att faktorerna har gradtal ≤ 2

- $x - a$
- $x^2 + ax + b^2$ saknar reella nollställen

1.1.3 Steg 3

Gör en partialbråksuppdelning (PBU) av $\frac{r(x)}{q(x)}$.(Används i elektriska kretsar).

Att sätta på gemensam nämnare:

$$\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} = \frac{x+1-(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{2}{(x-1)(x+1)}$$

Partialbråksuppdelning är motsatsen:

$$\frac{2}{(x-1)(x+1)} = \cdots = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}$$

dvs att bryta upp $\frac{r(x)}{q(x)}$ i småbitar - partialbråk - som är lätta att integrera.

$$\int \frac{2}{(x-1)(x+1)}dx = \int \frac{1}{x-1}dx - \int \frac{1}{x+1}dx = \ln|x-1| - \ln|x+1| + C$$

$\frac{r(x)}{q(x)}$ blir en summa av partialbråk enligt en ansats

Faktor i q	ger
$x - a$	$\frac{A}{x-a}$
$(x-a)^n$	$\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_n}{(x-a)^n}$
$x^2 + ax + b^2$	$\frac{Ax+B}{x^2+ax+b^2}$
$(x^2 + ax + b^2)^n$	$\frac{A_1x+B_1}{x^2+ax+b^2} + \cdots + \frac{A_nx+B_n}{(x^2+ax+b^2)^n}$

1.2 Exempel

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{6x^3 - 8x + 4}{x^4 + 4x^2}$$

Steg 1 klart ty $grad\ p < grad\ q$.

$$q(x) = x^4 + 4x^2 = x^2(x^2 + 4) = (x - 0)^2(x^2 + 4)$$

Partialbråksuppdelning-ansats:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{6x^3 - 8x + 4}{x^2(x^2 + 4)} = \frac{A}{x} + \frac{A}{x^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 4} \ (*)$$

A, B, C, D? Multiplicera $(*)$ med $q(x)$ på bägge sidor.

$$6x^3 - 8x + 4 = Ax(x^2 + 4) + B(x^2 + 4) + (Cx + D)x^2 =$$

Samla alla x termer:

$$= (\cdots)x^3 + (\cdots)x^2 + (\cdots)x + (\cdots) =$$

$$= (A + C)x^3 + (B + D)x^2 + (4A)x + (4B)$$

Lika för alla x $\Leftrightarrow$ kofficienter lika.

$$\begin{cases} A + C = 6 \ (x^3) \\ B + D = 0 \\ 4A = -8 \\ 4B = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -2 \\ B = 1 \\ C = 8 \\ D = -1 \end{cases}$$

$$\frac{p(x)}{q(x)} = -\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{8x - 1}{x^2 + 4}$$

1.3 Exempel

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{-3}{(x - 17)^{40}}$$

Är redan ett partialbråk så klar!

1.4 Exempel

$$q(x) = x(x-1)^3(x^2+2x+2)(x^2-4x+10)^2$$

$grad\ q = 10$

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A}{x} + \frac{B_1}{x-1} + \frac{B_2}{(x-1)^2} + \frac{B_3}{(x-1)^3} + \frac{Cx+D}{x^2+2x+2} + \frac{E_1x+F_1}{x^2-4x+10} + \frac{E_2x+F_2}{(x^2-4x+10)^2}$$

Om $grad\ p < 10$

2 Primitiver av partialbråk

1. $\int \frac{A}{x-a} dx + A \ln|x-a| + C$
2. $\int \frac{A}{(x-a)^n} dx + A \int (x-a)^{-n} dx = \frac{A}{1-n}(x-a)^{1-n} + C$
3. $\int \frac{Ax+B}{x^2+ax+b^2} = \begin{bmatrix} x^2+ax+b^2 = (x+\frac{a}{2})^2 - \frac{a^2}{4} + b \\ t = x + \frac{a}{2} \end{bmatrix} = \int \frac{Dt+E}{t^2+\alpha^2} dt = \int \frac{Dt}{t^2+\alpha^2} dt =$ $\frac{D}{2} \ln(t^2+\alpha^2) + C$
4. $\int \frac{E}{t^2+\alpha^2} dt = \frac{E}{\alpha} \arctan \frac{t}{\alpha} + C \quad \left(\int \frac{1}{t^2+\alpha^2} = \frac{1}{\alpha^2} \int \frac{1}{\left(\frac{t}{\alpha}\right)^2+1} dt = \left[s = \frac{t}{\alpha}\right] \right)$
5. $\int \frac{Ax+B}{(x^2+ax+b^2)^n dx} = \int \frac{Dt+E}{(t^2+\alpha^2)^n} dt$

   $\int \frac{Dt}{(t^2+\alpha^2)^n} = \begin{bmatrix} s = t^2+\alpha^2 \\ \frac{ds}{dt} = 2t \\ tdt = \frac{1}{2} ds \end{bmatrix} = \ldots$

   $\int \frac{E}{(t^2+\alpha^2)^n} dt$ Knepig. Man partialintegrerar successivt $\int 1 \times \frac{1}{t^2+\alpha^2} dt$

3 Genväg: handpåläggning

3.1 Exempel

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{x+2}{x^2(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1}$$

Handpåläggning ger: C=3, B=-2

$$(x-1)f(x) = \frac{x+2}{x^2} = (x-1)\left(\frac{A}{x} + \frac{B}{x^2}\right) + C$$

Låt $x \to 1$

$$\frac{x+2}{x^2} \to 3$$

$$(x-1)\left(\frac{A}{x} + \frac{B}{x^2}\right) \to 0(A+B)$$

dvs $3 = 0 + C$

$$x^2 f(x) = \frac{x+2}{x-1} = Ax + B + \frac{Cx^2}{x-1}$$

Låt $x \to 0$

$$\frac{x+2}{x-1} \to -2$$

$$Ax \to 0$$

$$\frac{Cx^2}{x-1} \to 0$$

dvs $-2 = 0 + B + 0$ A kan ej fås på detta sätt - pröva!

3.1.1 Kan ges av handpåläggning

Faktor i q	ger
$x - a$	$\frac{A}{x-a}$
$(x-a)^n$	$\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_n}{(x-a)^n}$
$x^2 + ax + b^2$	$\frac{Ax+B}{x^2+ax+b^2}$
$(x^2 + ax + b^2)^n$	$\frac{A_1x+B_1}{x^2+ax+b^2} + \cdots + \frac{A_nx+B_n}{(x^2+ax+b^2)^n}$

3.1.2

$$\frac{x+2}{x^2(x-1)} = \frac{A}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x-1} \quad (*)$$

3.1.3 Alt 1

Mult med $q = x^2(x-1)$ på bägge sidor om $(*)$ som förut. Jämför kofficienter. Bara en obekant

3.1.4 Alt 2

Stoppa in ett smart x i $(*)$. T.ex. x=-1 (eller t.ex. x=2):

$$\frac{-1+2}{(-1)^2(-2)} = -\frac{1}{2} = -A - 2 - \frac{3}{2}$$

Så $A = -3$.

3.1.5 Alt 3

Mult $(*)$ med x och låt $x \to \infty$

$$\frac{x+2}{x(x-1)} = A - \frac{2}{x} + \frac{3x}{x-1}$$

Låt $x \to \infty$

$$\frac{x+2}{x(x-1)} \to 0$$

$$\frac{2}{x} \to 0$$

$$\frac{3x}{x-1} \to 3$$

dvs $x = A + 3$