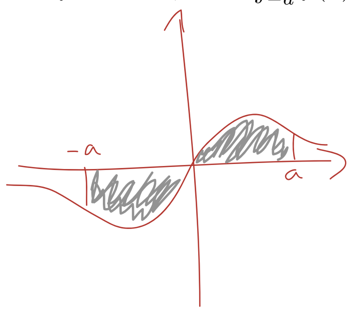
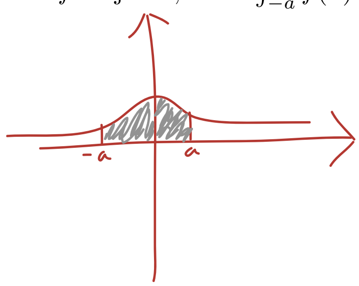
1 Sats (integraler och symmetri)

Antar f integrerbar

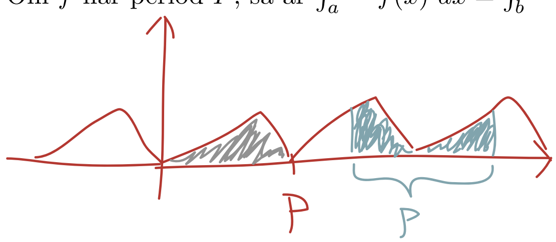
- Om f är udda, så är $\int_{-a}^{a} f(x)\ dx = 0$



- Om f är jämn, så är $\int_{-a}^{a} f(x)\ dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\ dx$



- Om f har period P, så är $\int_{a}^{a+p} f(x)\ dx = \int_{b}^{b+p} f(x)\ dx$ för alla a och b.

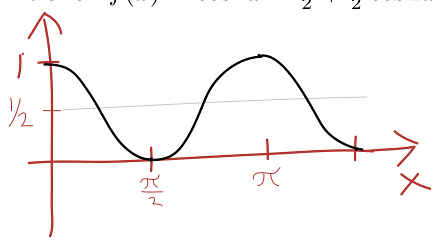


2 Exempel

$$\int_{\frac{3\pi}{8}}^{\frac{5\pi}{8}} \cos^3 x\ dx = \begin{bmatrix} t = x - \frac{\pi}{2} \\ x = \frac{5\pi}{8} \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{8} \\ x = \frac{3\pi}{8} \Leftrightarrow t = -\frac{\pi}{8} \\ dt = dx \\ \cos x = \cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin t \end{bmatrix} = \int_{\frac{-\pi}{8}}^{\frac{\pi}{8}} \sin^3 t\ dt = 0$$

3 Exempel

Funktionen $f(x) = \cos^3 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$ har perioden π



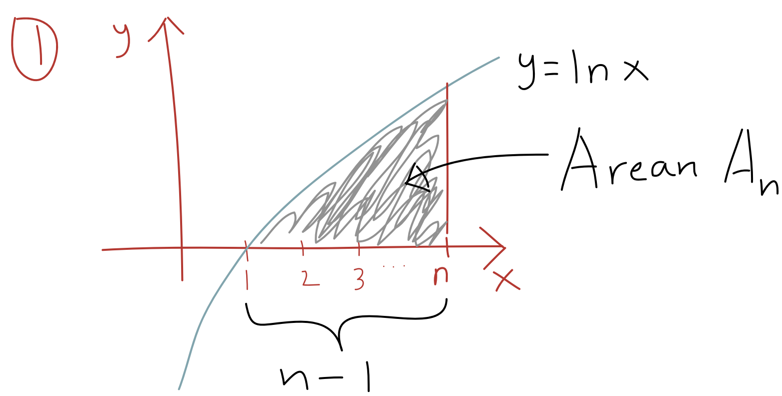
Integralen av $cos 2x$ över en period är noll.
Ifall man integrerar över ett helt antal perioder, dvs om $b - a = (heltal)\pi$, så är alltså

$$\int_a^b \cos^2 x \, dx = \int_a^b \frac{1}{2} \, dx + \int_a^b \frac{1}{2}\cos 2x \, dx = \frac{1}{2}(b-a)$$

4 Exempel (Summauppskattning med integraler)

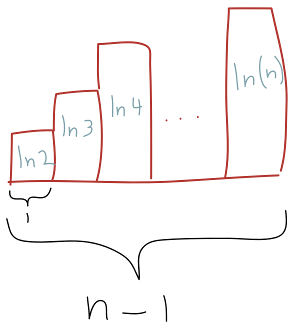
Vi ska uppskatta hur stor $n!$ är. Låt $S_n = \ln(n!) = \ln(1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n) = \ln 1 + \ln 2 + \ln 3 + \cdots + \ln n$

Jämför följande tre figurer:

1. 

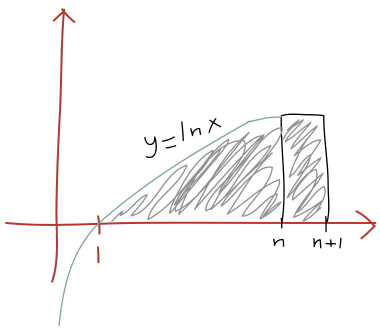
$$A_n = \int_1^n \ln x \, dx = \left[x \ln x - x\right]_1^n = (n \ln n - n) - (0 - 1) = \ln(n^n) + (1 - n)$$

2.



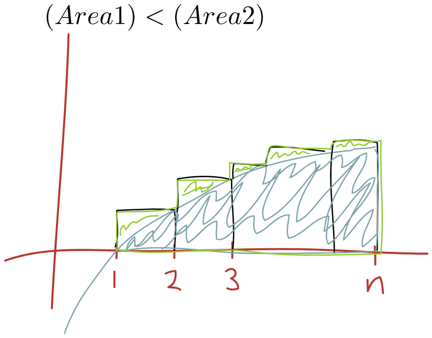
$$Area = \ln 2 + \cdots + \ln n = S_n$$

3.

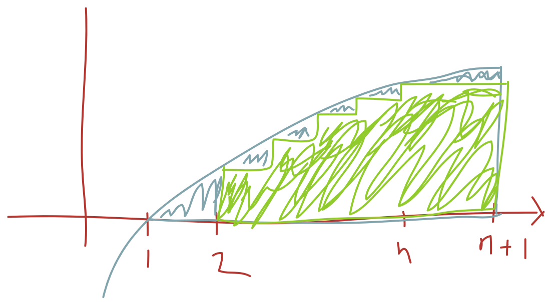


$$Area = A_n + \ln n$$

$(Area1) < (Area2)$



$(Area2) < (Area3)$



Alltså:

$$A_n < S_n < A_n + \ln n$$

(exp är växande)

$$\implies e^{A_n} < e^{S_n} < e^{An + \ln n}$$

$$\implies e^{ln(n^n)+(1-n)} < e^{ln(n!)} < e^{ln(n^n)} + (1-n) + \ln n$$

$$\implies n^n e^{1-n} < n! < n^{n+1} e^{1-n}$$

5 Generaliserade integraler

Riemanns def av besämd integral kräver begränsat intervall $[a, b]$ och begränsad integrand $f(x)$.

5.1 Definition

Om f är integrerbar på intervallet $[a, \omega]$ för alla $\omega > a$ Så definierar vi den generaliserade integralen

$$\int_a^\infty f(x)\ dx = \lim_{\omega \to \infty} \int_a^\omega f(x)\ dx$$

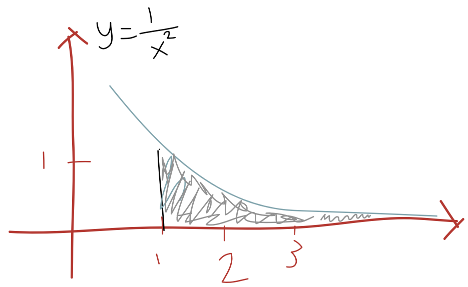
om gränsvärdet existerar ändligt (då sägs integralen vara konvergent; annars divergent).

5.2 Exempel

$$\int_1^\omega \frac{dx}{x^2} = \left[-\tfrac{1}{x}\right]_1^\omega = 1 - \frac{1}{\omega} \to 1, \omega \to \infty$$

så

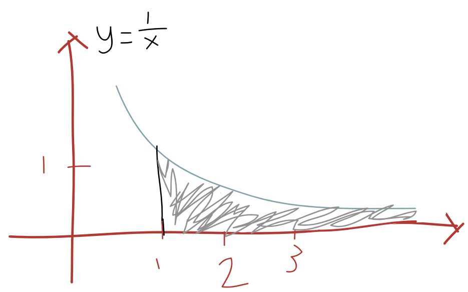
$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = 1$$



5.3 Exempel

$$\int_1^\omega \frac{dx}{x} = \ln x \to \infty, \omega \to \infty$$

så $\int_1^\infty \frac{dx}{x}$ är divergent



5.4 Exempel

$$\int_2^\omega \frac{dx}{x^2 - 1} = \cdots = \left[\tfrac{1}{2}\left(\ln|x-1| - \ln|x+1|\right)\right]_2^\omega =$$

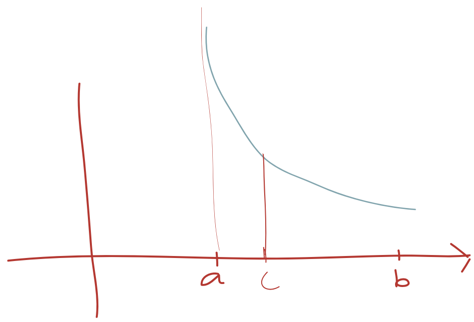
$$\frac{1}{2}\left(\ln|\frac{x-1}{x+1}| - \ln\frac{1}{3}\right) =$$

$$\frac{1}{2}\left(\ln|\frac{1-\frac{1}{\omega}}{1+\frac{1}{\omega}}| + \ln 3\right) \to \frac{1}{2}(\ln 1 + \ln 3) = \frac{\ln 3}{2}, \omega \to \infty$$

Alltså $\int_2^\infty \frac{dx}{x^2-1} = \frac{\ln 3}{2}$

5.5 Definition

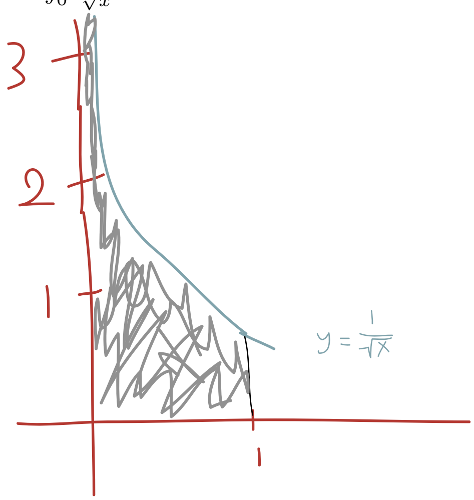
Antag att f är obegränsad på intervallet $[a, b]$ (eller $]a, b]$) men begränsad och integrerbar på varje delintervall av typen $[c, b]$ där $a < b \leq b$



Då sätter vi $\int_a^b f(x)\ dx = \lim_{c\to a^+} \int_a^b f(x)\ dx$ (om gränsvärde existerar (ändligt))

5.6 Exempel

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ är obegränsat på intervallet $]0,1]$
För $0 < c \leq 1$ är $\int_c^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \left[2\sqrt{x}\right]_c^1 = 2 - 2\sqrt{c} \to 2, c \to 0^+$
Så $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2$



5.7

Om integralen är generaliserad på flera sätt måste man dela upp den i delar som var och en är generaliserade på vara ett sätt.

5.8 Exempel

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2} = \int_0^1 \frac{dx}{x^2} + \int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$$

är <u>divergent</u>.

5.9 Exempel

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x} = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{x} + \int_{0}^{1} \frac{dx}{x}$$

är <u>divergent</u>.
Inte såhär:

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x} = (fel!) = \Big[\ln|x|\Big]_{-1}^{1} = \ln 1 - \ln 1 = 0$$