

# 1 Primitiv funktion

Det är inte lika lätt att integrera som att derivara.

## 1.1 Definition

$F$  sägs vara en primitiv funktion (eller bara en primitiv, eller ibland obestämd integral) till  $f$  på intervallet  $I$  om  $F' = f$  på  $I$ .

## 1.2 Exempel

$F_1(x) = x^2$  är en primitiv till  $f(x) = 2x$ . Även  $F_2(x) = x^2 + 5$  är en primitiv till  $f$ .

## 1.3 Sats

Om  $F_1$  och  $F_2$  båda är primitiver till  $f$  på något intervall  $I$  så är  $F_2 = F_1 + C$  på  $I$ , för någon konstant  $C$ .

## 1.4 Bevis

$(F_2 - F_1)' = F_2' - F_1' = f - f = 0$  på  $I$ , så  $F_2 - F_1$  är konstant på  $I$ .

## 1.5 Skrivsätt

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

## 1.6 Exempel

Bestäm alla primitiver till  $f(x) = \frac{1}{x}$  ( $x \neq 0$ ).

$$D_f = ]-\infty, 0[ \cup ]0, \infty[$$

På vardera intervallet är  $\ln|x|$  en primitiv, så den mest allmänna primitiven till  $f$  har formen.

$$F(x) = \begin{cases} \ln|x| + C_1, & x < 0 \\ \ln|x| + C_2, & x > 0 \end{cases} \quad \left( = \begin{cases} \ln(-x) + C_1, & x < 0 \\ \ln(x) + C_2, & x > 0 \end{cases} \right)$$

Oftast skriver man dock helt enkelt

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

där det är underförstått att det kan vara olika konstanter i de två intervallen

## 1.7 Grundläggande metod för beräkning av primitiv

Känna igen derivator man sett! (Se lista med "standardprimitiver" i boken, avsnitt 5.1)

## 1.8 Exempel

$$D(x^5) = 5x^4 \implies D\left(\frac{1}{5}x^5\right) = x^4 \implies \int x^4 dx = \frac{1}{5}x^5 + C$$

(Allmänt:  $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C$  ( $a \neq -1$ ))

## 1.9 Exempel

$$D(\cos x) = -(-\sin x) = \sin x \implies \int \sin x dx = -\cos x + C$$

## 1.10 Exempel

$$D(e^{x^2}) = 2x \times e^{x^2} \implies \int x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} e^{x^2} + C$$

(VARNING!!  $\int e^{x^2} dx \neq \frac{e^{x^2}}{2x} + C$  (vanligt nybörjarfel)).  
 $\int e^{x^2} dx$  går ej att uttrycka med elementära funktioner.

## 1.11 Exempel

$$D(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \implies \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$$

### 1.11.1 Övning P4.3f

$$D\left(\ln(x + \sqrt{1+x^2})\right) = \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \times \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right) = \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \times \frac{\sqrt{1+x^2} + x}{1+x^2}$$

Alltså:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C$$

## 1.12 Partiell integration (=produktregeln baklänges)

Låt  $F' = f$ . Produktregeln ger:

$$(Fg)' = F'g + Fg' \implies (Fg)' = fg + Fg' \implies fg = (Fg)' - Fg' \implies$$

$$\int f(x)g(x)dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)dx$$

$$\int \boxed{\phantom{x}} \boxed{\phantom{x}} dx = \boxed{\phantom{x}} \boxed{\phantom{x}} - \int \boxed{\phantom{x}} \boxed{\phantom{x}} dx$$

Labels: *Primitiv*, *Låt s+2*, *derivative*

### 1.13 Exempel (Skjut in en etta)

$$\int \ln|x| dx = \int 1 \times \ln|x| dx = x \times \ln|x| - \int x \times \frac{1}{x} dx = x \ln|x| - x + C$$

### 1.14 Exempel (Upprepad partiell integration)

$$\begin{aligned} \int x^3 e^{-2x} dx &= \int e^{-2x} x^3 dx = \frac{e^{-2x}}{-2} \times x^3 - \int \frac{e^{-2x}}{-2} 3x^2 dx = \frac{e^{-2x}}{-2} \times x^3 - \left( \frac{e^{-2x}}{(-2)^2} \times 3x^2 - \int \frac{e^{-2x}}{(-2)^2} 6x dx \right) = \\ &= \frac{e^{-2x}}{-2} x^3 - \frac{e^{-2x}}{(-2)^2} 3x^2 + \frac{e^{-2x}}{(-2)^3} 6x - \int \frac{e^{-2x}}{(-2)^3} 6 dx = \\ &= \frac{e^{-2x}}{-2} x^3 - \frac{e^{-2x}}{(-2)^2} 3x^2 + \frac{e^{-2x}}{(-2)^3} 6x - \frac{e^{-2x}}{(-2)^4} \times 6 + C = \\ &= e^{-2x} \left( \frac{x^3}{2} + \frac{3x^2}{4} + \frac{3x}{4} + \frac{3}{8} + C \right) \end{aligned}$$

Eller ta allt i ett steg, om man så vill:

$$\int \boxed{e^{-2x}} \boxed{x^3} dx = \boxed{\frac{e^{-2x}}{-2}} \boxed{x^3} - \boxed{\frac{e^{-2x}}{(-2)^2}} \boxed{3x^2} + \boxed{\frac{e^{-2x}}{(-2)^3}} \boxed{6x} - \boxed{\frac{e^{-2x}}{(-2)^4}} \boxed{6} + C$$

Labels: *Primitiv*, *derivative*, *nästa blir noll*

## 2 Variabelbyte (= kedjeregeln baklänges)

Uträkningen  $\int \cos(x^3 + 1) 3x^2 dx = \sin x^3 + 1 + C$  innefattar två steg:

- Känna igen att  $3x^2$  är derivatan av  $x^3 + 1$
- Beräkna primitiv till cosinusfunktionen (dvs  $\int \cos t dt = \sin t + C$ )

## 2.1 Praktiskt skrivsätt

$$\int \cos(x^3 + 1)3x^2 dx = \left[ \begin{array}{l} t = x^3 + 1 \\ \frac{dt}{dx} = 3x^2 \\ dt = 3x^2 dx \end{array} \right] = \int \cos t dt = \sin t + C = \sin(x^3 + 1) + C$$

## 2.2 Exempel

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{1 + e^x} &= \left[ \begin{array}{l} x = \ln t \ (t > 0) \\ \frac{dx}{dt} = \frac{1}{t} \\ dx = \frac{dt}{t} \end{array} \right] = \int \frac{dt}{(1+t)t} = \int \frac{(1+t) - t}{(1+t)t} dt = \\ &= \int \left( \frac{1}{t} - \frac{1}{1+t} \right) dt = \ln|t| - \ln|1+t| + C = \ln t - \ln(1+t) + C = x - \ln 1 + e^x \end{aligned}$$

## 2.3 Exempel

$$\int \frac{x}{x^2 + 6x + 13} dx = \int \frac{x}{(x+3)^2 + 4} dx = \left[ \begin{array}{l} t = x + 3 \\ \frac{dt}{dx} = 1 \\ dt = dx \end{array} \right] = \int \frac{t-3}{t^2+4} dt = \int \frac{t}{t^2+4} dt - 3 \int \frac{1}{t^2+4} dt$$

$$A = \int \frac{t}{t^2+4} dt$$

$$B = 3 \int \frac{1}{t^2+4} dt$$

$$A = \left[ \begin{array}{l} u = t^2 + 4 \\ \frac{du}{dt} = 2t \\ du = 2t dt \end{array} \right] = \int \frac{\frac{1}{2} du}{u} = \frac{1}{2} \ln|u| + C = \frac{1}{2} \ln(t^2 + 4) + C_1 = \frac{1}{2} \ln((x+3)^2 + 4) + C_1 =$$

$$\begin{aligned} B &= \int \frac{1}{4(\frac{t^2}{4} + 1)} dt = \frac{1}{4} \int \frac{1}{(\frac{t}{2})^2 + 1} dt = \left[ \begin{array}{l} v = \frac{t}{2} \\ \frac{dv}{dt} = \frac{1}{2} \\ dt = 2dv \end{array} \right] = \frac{1}{4} \int \frac{1}{v^2 + 1} 2v dv = \\ &= \frac{1}{2} \arctan v + C_2 = \frac{1}{2} \arctan \frac{t}{2} + C_2 = \frac{1}{2} \arctan \frac{x+3}{2} + C_2 \end{aligned}$$