1 Egenskaper hos deriverbara funktioner

Vad talar derivatan om för oss om funktionens egenskaper? Derivatans tecken visar funktionens lutningskoefficient. Om derivatan är positiv i varje punkt så är funktionen strikt växande.

1.1 Exempel

"För vilka x är $f(x) = x^2$ strängt växande?"

$$f(x) = x^2$$

$$f'(x) = 2x$$

$x > 0$? $x <= 0$? Räknas $x = 0$ med?

1.2 Notera definitionen (strängt växande)

f är strängt växande på ett intervall I om $f(x) < f(y)$ gäller då $x, y \in I$ och $x < y$.

Observera:

- Definitionen av växande nämner inte begeppet derivata.
- Det handlar bara om jämförelse mellan funktionsvärden i olika punkter.
- "Strängt växande i en enstaka punkt" är inte ett meningsfullt begrepp!

Frågan ovan är alltså dåligt formulerad! En bättre fråga: "Vilket är det största intervallet där $f(x) = x^2$ är strängt växande?"
Svar: $[0, \infty[$ ($x \leq 0$, alltså)

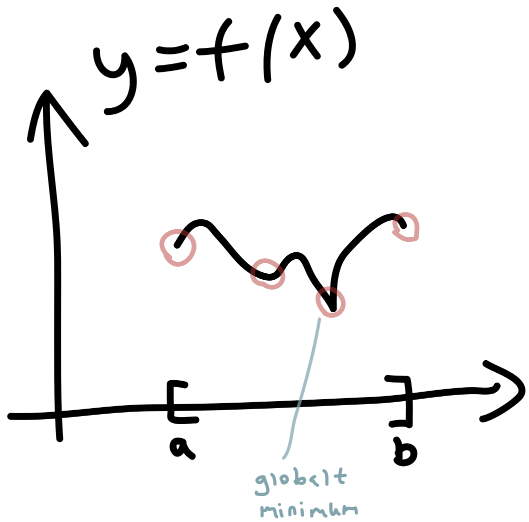
1.3 Definition (lokalt minimum)

Funktionen f har lokalt minimum (respektive strängt lokalt minimum) i punkten $a \in D_f$ om det finns ett öppet intervall I kring a sådant att $f(a) \leq f(x)$ (respektive $f(a) < f(x)$) när $a \neq x \in I \cap D_f$.
(För (strängt) lokalt maximum, vänd på olikheterna.)

1.3.1 Terminologi

Lokalt maximi- och minimipunkter kallas kollektivt för lokala extrempunkter.

1.4 Exempel



f har 4st lokala minima.

1.5 Sats

Om a är en lokal extrempunkt för f, och $f'(a)$ existerar, så är $f'(a) = 0$.

1.6 Bevis

Om a är en lokal minimipunkt så är $f(a+h) - f(a) \geq 0$ för h nära 0. Om $f'(a)$ existerar så är alltså

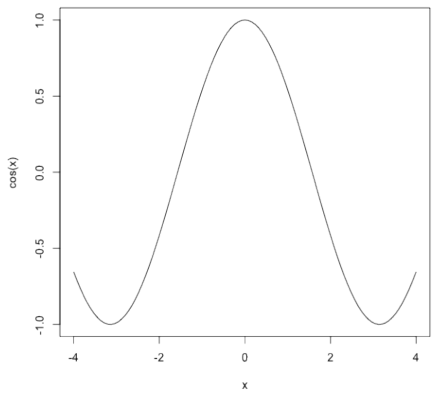
$$\begin{cases} f'(a) = f'_{+}(a) = \lim\limits_{h \to 0^{+}} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} \geq 0 \\ f'(a) = f'_{-}(a) = \lim\limits_{h \to 0^{-}} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} \leq 0 \end{cases} \implies f'(a) = 0$$

(lokalmaximi på samma sätt) ∎

1.7 Definition

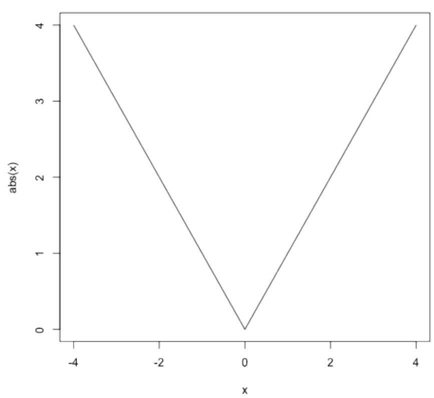
En punkt där $f'(a) = 0$ kallas för en stationär punkt för f.

1.8 Exempel



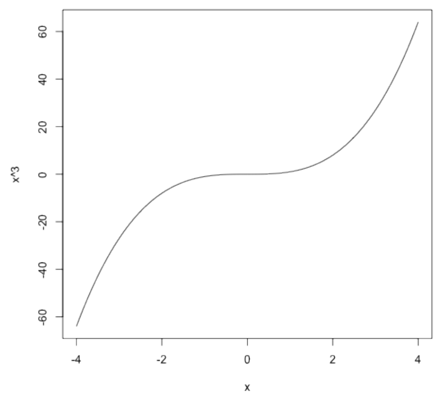
$f(x) = \cos x$ har (globalt) minimum i $x = \pi$ och är även deriverbar där. Enligt satsen (1.5) ovan måste därmed $f'(\pi)$ vara noll, och så är det ju: $f'(x) = -\sin x \implies f'(\pi) = 0$.

1.9 Exempel



$f(x) = |x|$ har minimum i $x = 0$, men $x = 0$ är inte en stationär punkt eftersom f inte är deriverbar där.

1.10 Exempel



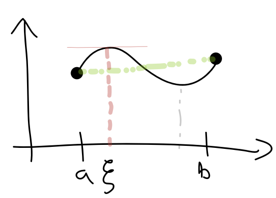
$x = 0$ är en stationär punkt för $f(x) = x^3$ ($f'(x) = 3x^2 \implies f(0) = 0$), men det är inte en lokal extrempunkt (utanen terrasspunkt).

2 Medelvärdessatsen och dess konsekvenser

2.1 Sats

Antag att f är kontinuerlig på $[a, b]$ och deriverbar på $]a, b[$.

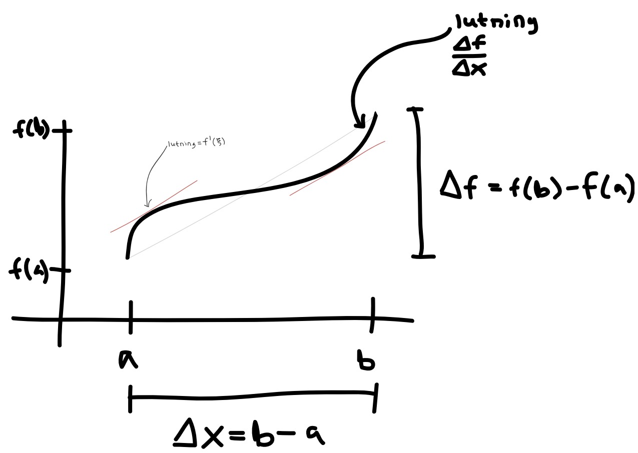
2.1.1 (a) Rolles sats



Om $f(a) = f(b)$ så finns (minst) en punkt $\xi \in]a, b[$ där $f'(\xi) = 0$

2.1.2 (b) Medelvärdessatsen för derivator

Det finns (minst) en punkt $\xi \in]a,b[$ där $f(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ (dvs $\frac{\mathrm{df}}{\mathrm{dx}}(\xi) = \frac{\Delta f}{\Delta x}$)



2.1.3 (c) Derivatatestet

Om $f' > 0$, för alla x, (respektive $f' = 0$ respektive $f' < 0$) på $]a,b[$ så är f strängt växande (respektive konstant respektive strängt avtagande) på $[a,b]$

(Om $f' \geq 0$, för alla x, (respektive $f' \leq 0$) så är f växande (respektive avtagande), men inte nödvändigtvis strängt)

2.1.4 Anmärkning

Observera att en strängt växande funktion inte måste ha en positiv derivata överallt! Derivatan kan vara noll i enstaka punkter. (Kom ihåg exemplet $f(x) = x^3$.)

2.2 Bevis

2.2.1 (a)

Intervallet $[a,b]$ är kompakt (dvs slutet och begränsat), och f är kontinuerligt på $[a,b]$ enligt föruts., så f har ett största och ett minsta värde. Såvida inte f är konstant på $[a,b]$ så måste minst en av de extrempunkterna ligga i det inre av intervallet, alltså i $]a,b[$, där f enligt föruts. är deriverbar, och enligt tidigare sats så är $f'(\xi) = 0$ i en sådan punkt ξ. (Och om f är konstant på $[a,b]$ så är $f'(\xi) = 0$ för alla $\xi \in]a,b[$)

2.2.2 (b) (skiss, se boken)

Sätt $g(x) = f(x) - \frac{\Delta f}{\Delta x} \times (x - a)$. Då är

$$g(a) = \cdots = g(b)$$

och

$$g'(x) = f'(x) - \frac{\Delta f}{\Delta x} \times 1$$

Del (a) ger oss ξ så att $g'(\xi) = 0$, dvs $f'(\xi) = \frac{\Delta f}{\Delta x}$

2.2.3 (c)

Ta två godtyckliga punkter $x_1 < x_2$ i $[a, b]$ och tillämpa del (b) på intervallet $[x_1, x_2]$:

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

för något $\xi \in]x_1, x_2[$

dvs $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi) \times (x_2 - x_1)$ för något $\xi \in]x_1, x_2[$.

Om nu $f' > 0$ överallt så vet vi att $f'(\xi) > 0$ så att $f(x_2) - f(x_1) > 0$, dvs f är strängt växande.
Om nu $f' = 0$ överallt så vet vi att $f'(\xi) = 0$ så att $f(x_2) - f(x_1) = 0$, dvs f är konstant.
Om nu $f' < 0$ överallt så vet vi att $f'(\xi) < 0$ så att $f(x_2) - f(x_1) < 0$, dvs f är strängt avtagande.

2.3 Exempel

Rita grafen för $f(x) = x^2 \times e^{-x}, (x \in \mathbb{R})$.
Gränsvärden:

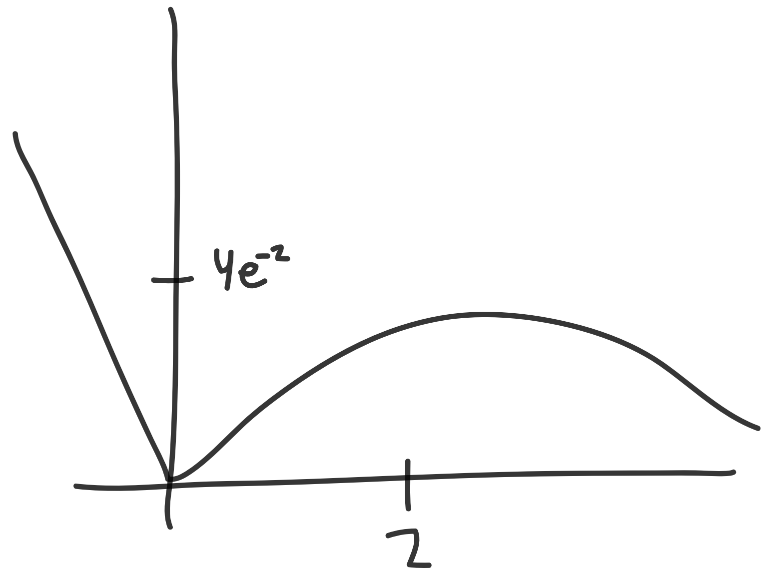
$$f(x) \to 0, x \to \infty, \left(\frac{x^2}{e^x} \to 0\right)$$

$$f(x) \to \infty, x \to -\infty$$

Obs även att $f(x) \geq 0$ för alla x, och att $f(x) \approx x^2 \times 1$ då $x \approx 0$.

$$f'(x) = 2xe^{-x} + x^2(-e^{-x}) = (2x - x^2)e^{-x} = x(2 - x)e^{-x}$$

		0		2	
x	-	0	+	+	+
$2 - x$	+	+	+	0	-
e^{-x}	+	+	+	+	+
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\searrow$	lok. min.	$\nwarrow$	lok. max.	$\searrow$


4e^{-2}
2