1 TAMS27

1.1 Kombinatorik

Hur många möjligheter finns?

1.2 Definition

1.2.1 Permutation

En permutation är ett arrangemang av ett antal objekt med hänsyn till deras ordning.

1.2.2 Kombination

En kombination är ett val at ett antal objekt utan hänsyn till deras ordning.

1.3 Ex

Alla permutationer av objekten A, B, C:

$$ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA$$

Alla kombinationer:

$$ABC$$

1.4 Ex

Vi har 3 objekt A, B, C. Vi ska välja ut 2 st och ordna dem. Vi får följande möjligheter:

$$AB, BA, AC, CA, BC, CB$$

Vi ska välja 2 st utan att ordna dem.

$$AB, BC, AC$$

1.5 Multiplikationsprincipen

Betrakta ett experiment som utförs i k steg. Låt för $i = 1, \cdots, k$ och n_i vara antalet sätt som steg i kan utföras på. Det totala antalet sätt som experimentet kan utföras på blir då.

$$n = n_i * \cdots * n_k$$

1.6 Beteckning

$$n! = 1 * 2 * \cdots * n$$

$$0! = 1$$

1.7 Sats

1.7.1 A

Antalet sätt att arrangera i ordning (d.v.s. permutera) r olika objekt valda ur en mängd med n stycken är:

$$\frac{n!}{(n-r)!} = n*(n-1)*\cdots*(n-r+1)$$

1.7.2 B

Antalet sätt att välja r olika objekt utan återläggning ur en mängd med n stycken utan hänsyn till deras inbörda ordning.

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!} = \frac{n*(n-1)*\cdots*(n-r+1)}{r!}$$

1.8 Beviset

1.8.1 A

Beviset av A delen med multiplikationsprincipen.

1.8.2 B

Beviset av B följer ifrån observationenn $\#permutationer = \#kombinationer{*}r!$

1.9 Exempel

5 bilar anländer till en parkeringsplats med 7 enskilda platser. På hur många sätt kan bilarna placeras? Svar: Sats A:

$$\frac{7!}{(7-5)!} = 2520$$

1.10 Exempel

Man har 20 motorer av vilka 5 är defekta. Man väljer ut 3 st för kontroll. Vad är antalet sätt att välja ut 3 felfria? Svar: Sats B ger:

$$\binom{15}{3} = 455$$

Vad är antalet sätt att få 2 felfria och 1 defekt? Svar: Sats B och multiplikationsprincipen ger:

$$\binom{15}{2} * \binom{5}{1} = 105 * 5 = 525$$

1.11 Permutationer med upprepningar

Man har k grupper som består av resketive $n_1, n_2, \ldots, n_k$ lika objekt. Låt $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$

1.12 Sats

Antalet sätt att arrangera i ordning (d.v.s. permutera) de n st objekten är

$$\frac{n!}{n_1! * n_2! * \cdots * n_k!}$$

1.12.1 Sats

Hur många permutationer av ordet ABRAKADABRA finns? 5 grupper. A, B, R, K, D.

$$n_1 = 5\ (\#A)$$

$$n_2 = 2\ (\#B)$$

$$n_3 = 2\ (\#R)$$

$$n_4 = 1\ (\#R)$$

$$n_5 = 1\ (\#D)$$

Svaret:

$$\frac{11!}{5! * 2! * 2! * 1! * 1!} = 83160$$

2 Händelse och utfallsrum

2.1 Definition A

Varje möjligt resultat av ett slumpförsök kallas ett utfall eller elementärhändelse.

2.2 Definition B

Mängden av alla utfall eller resultat kallar vi utfallsrum och betecknar det med S eller Ω.

2.3 Definition C

En händelse A är en mängd av utfall, d.v.s. en delmängd av Ω.

2.4 Grundläggande operationer med händelser

Bilder på venn-diagramm ej ritade, se boken

- A uttalas “A inträffar”.

- $A \cap B$ eller AB uttalas “A och B inträffar” eller “A snitt B”.

- $A \cup B$ eller $A + B$ uttalas “A eller B inträffar” eller “A union B”.

- A^{C} eller $\overline{A}$ uttalas “komplement till A”.

2.5 Räkneregler

Kommutativa lagar

$$E \cup F = F \cup E$$
$$EF = FE$$

Associativa lagar

$$(E \cup F) \cup G = E \cup (F \cup G)$$
$$(EF)G = E(FG)$$

Distributiva lagar

$$(E \cup F)G = EG \cup FG$$
$$EF \cup G = (E \cup G)(F \cup G)$$

De Morgans lagar

$$(E \cup F)^{\mathsf{C}} = E^{\mathsf{C}} F^{\mathsf{C}}$$
$$(EF)^{\mathsf{C}} = E^{\mathsf{C}} \cup F^{\mathsf{C}}$$

2.6 Räkneregler

Om både mamman och pappan är av genotypen (blå, brun) (d.v.s. har ett blått och ett brunt anlag), så är avkommans gensuppsättning en av följande fyra: (blå, blå), (blå, brun), (brun, blå), (brun, brun), vilket också är utfallsrummet. Intressant skulle vara att studera händelsen B={ (blå, blå), (blå, brun), (brun, blå) } (minst ett blå anlag). och händelsen A={ (blå, brun), (brun, blå), (brun, brun) } (minst ett brun anlag).
Beskriv (med ord):

- $A \cap B$ ”precis ett blå och ett brunt anlag”
- $A \cup B$ ”hela utfallsrummet”