1 Tillämpningar av Lagranges form på resttermen

Om $f, f', f'', \ldots, f^{(n+1)}$ är kontinuerliga.

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \cdots + \frac{f^n(0)}{n!}x^n + \mathcal{O}(x^{n+1})$$

$$r(x) = \mathcal{O}(x^{n+1}) \Leftrightarrow r(x) = b(x)x^{n+1}, |b(x)| \leq C$$

1.1 Sats

Om $f, f', f'', \ldots, f^n$ är kontinuerliga i $[\alpha, \beta]$. och $0 \in [\alpha, \beta]$, så

$$p_n(x) + r(x)$$

där

$$r(x) = \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

c ligger mellan 0 och x.

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \cdots + \frac{f^n(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

1.2 Taylor utveckling med restterm i Lagranges form

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

där c ligger mellan x och a.

1.3 Ex 1

Approximera $\sin 0.1$ med ett rationellt tal så att felet är mindre än 10^{-7} $x = 0.1, f(x) = \sin x$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + r(x), r(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}, 0 < c < 0.1, x = 10^{-1}$$

$$|r(x)| \leq \frac{1}{(n+1)!}\left(10^{-1}\right)^{n+1}$$

$$n = 4 \implies |r(x)| \leq \frac{1}{5!}10^{-5} = \frac{10^{-}5}{120} < \frac{1}{100}10^{-5} = 10^{-7}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + r(x), |r(x)| = |\frac{f^{(5)}(x)}{5!}x^5| \leq \frac{10^{-5}}{120} < 10^{-7}$$

$$\sin 0.1 \approx 0.1 - \frac{0.1^3}{3!} \approx 0.099833$$

1.4 Ex 2

Approximera $\sqrt{1.1}$ så att felet är mindre än 10^{-4}

$$(1+x)^{\frac{1}{2}}; x = 0.1 = 10^{-1}$$

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{f12(\frac{1}{2}-1)}{2}x^2 + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{3!}x^3 + r(x)$$

$$r_4(x) = \frac{f^{(4)}(x)}{4!}x^4$$

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{f12(\frac{1}{2}-1)}{2}x^2 + r_3(x)$$

$$r_3(x) = \frac{f'''(c)}{3!}x^3$$

$$f(x) = (1+x)^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{\frac{-}{1}2}$$

$$f''(x) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(1+x)^{\frac{1}{2}-2}$$

$$f'''(x) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)(1+x)^{\frac{1}{2}-3}$$

$$|r_3(x)| = |\frac{3}{2^3(1+c)^{\frac{5}{2}}}\frac{x^3}{3!}| = \frac{|x|^3}{2^4}\frac{1}{(1+c)^{\frac{5}{2}}}$$

där $0 < c < 0.1$

$$|r_3(0.1)| = \frac{10^{-3}}{16}\frac{1}{(1+c)^{\frac{5}{2}}} \leq \frac{10^{-3}}{10} = 10^{-4}$$

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2}x^2$$

med $|r(x)| < 10^{-4}$

$$x = 0.1, \sqrt{1.1} \approx 1 + \frac{1}{2}0.1 - \frac{1}{8}0.1^2 = 1.04875$$

1.5 Ex 3

Använd Maclaurinutveckling av ordning 4 av $\cos x$ för att approximera

$$I = \int_0^1 \frac{1 - \cos x}{x^2} dx$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + r(x)$$

$$r(x) = \frac{f^{(6)}(c)}{6!} x^6$$

$$\frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} - \frac{x^2}{4!} - \frac{r(x)}{x^2}$$

$$I = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - \frac{x^2}{4!} - \frac{r(x)}{x^2} \right) dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - \frac{x^2}{4!} \right) dx + R$$

$$I \approx \left(\frac{1}{2} x - \frac{x^3}{3 * 4!} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3 * 4!}$$

$$|R| = |- \int_0^1 \frac{f^6(c)}{6!} x^4 dx| \leq \int_0^1 |\frac{f^{(6)} 6!}{|} dx$$

$$|\frac{f^{(6)} 6!}{|} = \frac{|f^{(6)}(c)|}{6!} |x^4| \leq \frac{x^4}{6!}$$

$$R \leq \int_0^1 |\frac{f^6(c)}{6!} x^4| dx \leq \int_0^1 |\frac{x^4}{6!} x^4| dx = \frac{1}{3600} < \frac{1}{1000} = 10^{-3}$$

$$I \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{3 * 4!}$$

med

$$|R| < 10^{-3}$$

1.6 Ex 4