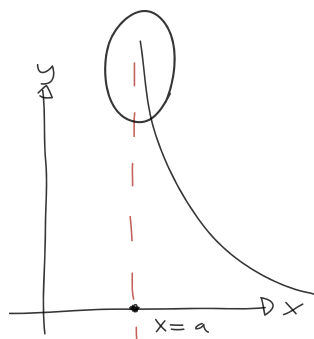


1 Funktionsundersökning

Givet: en funktion $f(x)$

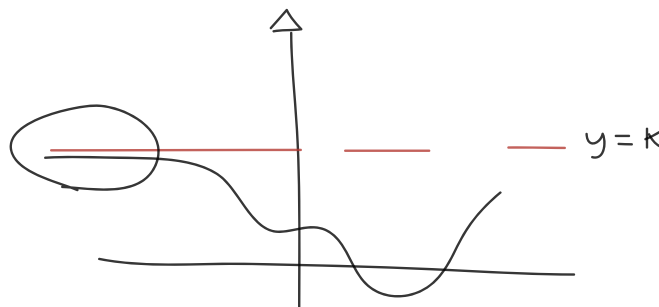
Mål: undersök de väsentliga aspekterna av f :s beteende och rita grafen $y = f(x)$

1. Bestäm definitionsmängden D_f (om den inte redan är given): man måste undvika division med noll, roten ur negativa tal, etc. Se up med skillnaden mellan $\ln(\dots)$ och $\ln|\dots|$.
2. Innan du börjar räkna, tänk efter om det finns några uppenbara egenskaper som man kan se direkt. (Är funktionen alltid positiv? Jämn/udda (potenser)? Kan man se var den har nollställan? Approximationer $f(x) = (??)$, $x \approx 0$ eller då $|x|$ är stort?) Räkna eventuellt ut några funktionsvärden.
3. Undersök relevanta gränsvärden för att avgöra om kurva $y = f(x)$ har några asymptoter:
 - Linjen $x = a$ är en lodrät asymptot om $f(x) \rightarrow \infty$ eller $f(x) \rightarrow -\infty$ då $x \rightarrow a^+$ och/eller $x \rightarrow a^-$.
T.ex.

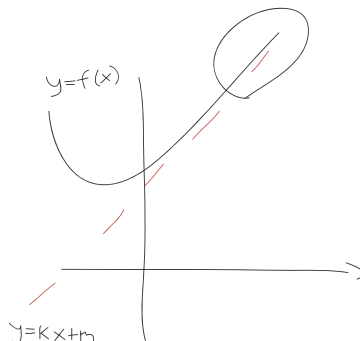


(Kan bara hända om f är diskontinuerlig eller odefinierad i punkten a .)

- Linjen $y = k$ är en vågrät asymptot om $f(x) \rightarrow k$, $x \rightarrow \infty$ och/eller då $x \rightarrow -\infty$
T.ex.

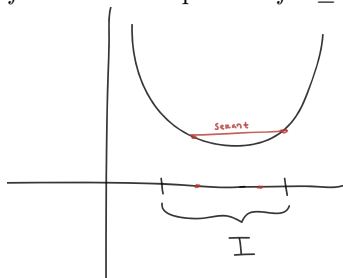


- (Överkurs) $y = kx + m$ är en sned asymptot om $f(x) - (kx + m) \rightarrow 0, x \rightarrow \text{infly}$ och/eller $x \rightarrow -\infty$
T.ex.



(Undersök $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$ för att hitta k , sedan $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx)$ för att hitta m .)

4. Räkna ut derivatan $f'(x)$, faktorisera så långt som möjligt, och gör sedan en teckentabell för att avgöra var f' är positiv/negativ/noll/(odef.) (så att man ser var f är växande/avtagande respektive har lokal max/min eller terrasspunkter).
5. (Överkurs) Gör en funktionsundersökning av f' för att avgöra var funktionen f är konvex eller konkav.
 f är konvex på ett intervall $I \Leftrightarrow$ varje sekant i I ligger ovanför grafen $\Leftrightarrow f'$ är växande på $I \Leftrightarrow f'' \geq 0$ på I . (Konkav: tvärtom (f' avtagande))



6. Rita grafen $y = f(x)$ med hjälp av ovanstående information. (Tänk tillbaka på vad D_f var, så att du inte glömmmer att rita någon del av grafen, eller ritar någonting där f är odefinierad.)
7. MYCKET VIKTIGT: Kontrollera att allt hänger ihop! (Inga motsägelser får finnas.)
8. Skriv ett svar där det som efterfrågas i uppgiften klart framgår. (Det kan gälla asymptoter, lokala extrempunkter, antalet lösningar till ekvationen $f(x) = 0$, värdemängden för f , etc)

2 Exempel

Undersök $f(x) = \frac{x-1}{x+1}e^{-1/x}$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \neq -1, x \neq 0\}$$

f :s enda nollställe är $x = 1$, och man kan se f :s tecken med en teckentabell.

x	-1	0	1
$x-1$	-	-	0
$x+1$	-	+	+
$e^{-1/x}$	+	+	+
$f(x)$	+	-	0

2.1 Relevanta gränsvärden

- $f(x) = \frac{1-1/x}{1+1/x}e^{-1/x} \rightarrow \frac{1}{1}e^0 = 1, x \rightarrow \pm\infty$ så linjen $y = 1$ är en vågrät asymptot.
- $f(x) = \frac{1-x}{1+x}e^{-1/x} \rightarrow 0, x \rightarrow 0^+$
- $f(x) = \frac{1-x}{1+x}e^{-1/x} \rightarrow -\infty, x \rightarrow 0^-$, så linjen $x = 0$ är en lodrät asymptot.
- $f(x) = \frac{1}{x+1}(x-1)e^{-1/x} \rightarrow \pm\infty, x \rightarrow (-1)^\pm$, så linjen $x = -1$ är en lodrät asymptot.

2.2 Derivata

$$f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}e^{-1/x} + \frac{x-1}{x+1}e^{-1/x} \frac{1}{x^2} = \frac{2x^2 + (x-1)(x+1)}{x^2(x+1)^2}e^{-1/x} =$$

$$\frac{3x^2-1}{x^2(x+1)^2}e^{-1/x} = \frac{3(x+\frac{1}{\sqrt{3}})(x-\frac{1}{\sqrt{3}})}{x^2(x+1)^2}e^{-1/x}$$

2.3 Teckentabell över derivatan

x	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$3e^{-1/x}$	+	+	+	+
$x + \frac{1}{\sqrt{3}}$	-	0	+	+
$x - \frac{1}{\sqrt{3}}$	-	-	-	0
$x^2(x+1)^2$	+	+	+	+
$f(x)$	+	0	-	0
$f'(x)$	↗	↗	lok. max	↘

2.4 Lokalt maximum

$$f\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\sqrt{3}+1}{-\sqrt{3}-1}e^{\sqrt{3}} \approx 21.09$$

2.5 Lokalt minimum

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}e^{-\sqrt{3}} \approx -0.047$$

2.6 Graf

