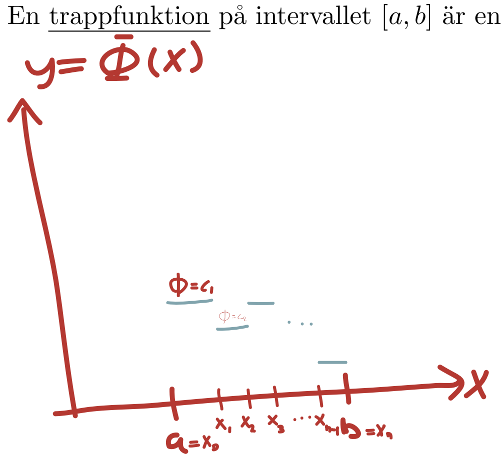
1 Riemannintegralen

Om man åker bil så har man en harstigetsmätare som mäter ens hastighet vid varje sekund. Om man vill beräkna hur långt man har åkt, när hastigheten ej är konstant.

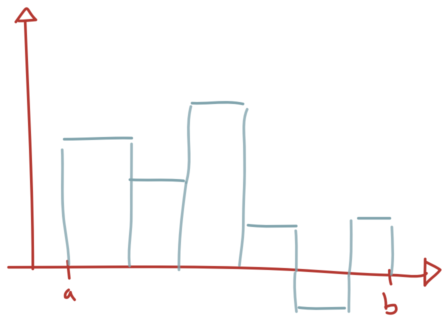
```
Uppkom när man ville precicera definitionen av integraler
när fourier skapade fourier transformer
```

1.1 Definition

En trappfunktion på intervallet $[a, b]$ är en styckvis konstant funktion:



Beteckna motsvarande trappsumma med $T(\Phi) = \sum_{k=1}^{n} c_k(x_k - x_{k-1})$

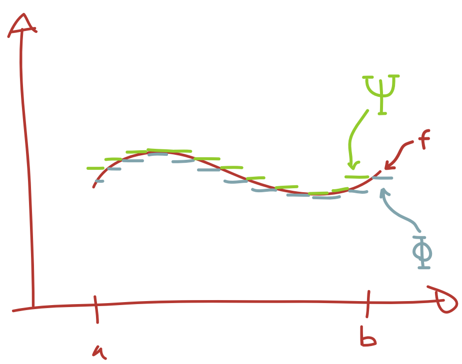


Summa av rektangelareor ("med tecken").

1.2 Definition

En funktion f sägs vara (Riemann)integrerbar på intervallet $[a, b]$ om:

- f är deifinerad på $[a, b]$
- f är begränsad på $[a, b]$ (dvs $|f(x)| \leq M$ för någon konstant M och alla $x \in [a, b]$)
- f kan approximeras godtyckligt väl med trappfunktioner i den meningen att det för varje $\epsilon > 0$ finns trappfunktionen Φ och Ψ på $[a, b]$ sådana att $\Phi \leq f \leq \Psi$ och $T(\Psi) - T(\Phi) < \epsilon$.
  Φ = undertrappa (till f), Ψ = övertrappa, $T(\Psi)$ = översumma, $T(\Phi)$ = översumma.



I så fall är

$$\sup\{T(\Phi) : \Phi \leq f\} = \inf\{T(\Psi) : f \leq \Psi\}$$

och detta tal kallas för (Riemann)integralen för f över intervallet $[a, b]$ och betecknas $\int_a^b f(x)\, dx$ (eller $\int_a^b f(t)\, dt$ etc)

1.3 Sats

Styckvis kontinuerliga funktioner är integrerbara, och även styckvis monotona funktioner. (Bevis: Se boken)

Följande räknelagar bevis med hjälp av motsvarande egenskaper för trappsummor:

1.4 Sats

Antag f och g integrerbara och $a < b < c$

- Linearaitet $\int_a^b (k_1 f(x) + k_2 g(x))\, dx = k_1 \int_a^b f(x)\ dx + k_2 \int_a^b g(x)\ dx$
- Monotonicitet $f \leq g$ på $[a, b] \implies \int_a^b f(x)\ dx \leq \int_a^b g(x)\ dx$
  (Notera speciellt integralen av en positiv funktion kan <u>inte</u> bli negativ!)
- $|\int_a^b f(x)\ dx| \leq \int_a^b |f(x)|\ dx$ (jfr triangelolikheten $|a+b| \leq |a|+|b|, |\sum a_k| \leq \sum |a_k|$)
- $\int_a^c f(x) = \int_a^b f(x)\ dx + \int_b^c f(x) dx$

1.5 Anmärkning

Den sista räknelagen gäller för alla a, b, c (oavsett ordning) ifall man deifinerar

$$\int_a^a f(x)\ dx = 0$$

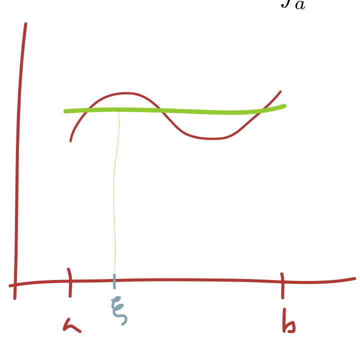
och

$$\int_b^a f(x)\ dx \int_a^b f(x)\ dx$$

1.6 Sats (Medelvärdessatsen för integraler)

Om f är kontinuerlig på $[a, b]$ så finns $\xi \in]a, b[$ så att

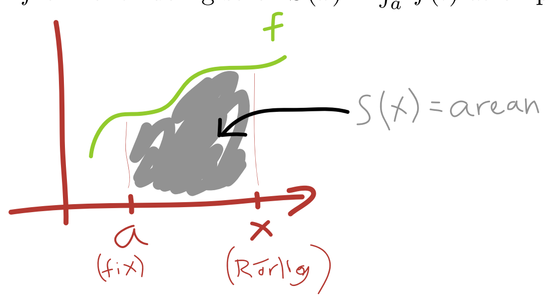
$$\int_a^b f(x)\ dx = f(\xi)(b - a)$$



$(f(\xi) = \text{medelvärdet för } f \text{ i } [a, b])$ (Bevis: Se boken)

1.7 Analysesns huvudsats

Om f är kontinuerlig så är $S(x) = \int_a^x f(t)\ dt$ en primitiv funktion till f.



1.8 Bevis

$$\frac{S(x+h) - S(x)}{h} = \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(t)\ dt - \int_a^x f(t)\ dt\right)$$

$$\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\ dt = \frac{1}{h} f(\xi)h \to f(x), h \to 0$$

1.9 Följdsats

Varje kontinuerlig funktion har en primitiv funktion.

1.10 Följdsats (insättningsformeln)

Om f är kontinuerlig och F är en primitiv till f så är $\int_a^b f(x)\ dx = F(b) - F(a)$. $F(b) - F(a)$ skrivs ofta $[F(x)]_a^b$.

1.11 Bevis

Sant enligt huvudsatsen ifall man tar $F(x) = S(x) = \int_a^x f(x)\ dt$ som primitiv. Tar man en annan primitiv $F(x) = S(x) + C$ så försvinner C i subtraktionen $F(b) - F(a)$, så resultatet blir samma.

1.12 Exempel

Arean för $\int_1^2 x^2\ dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$