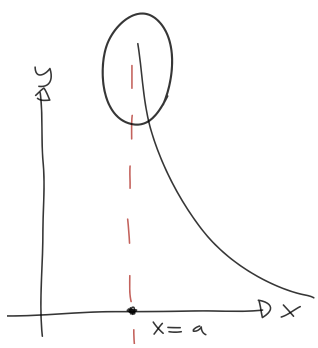
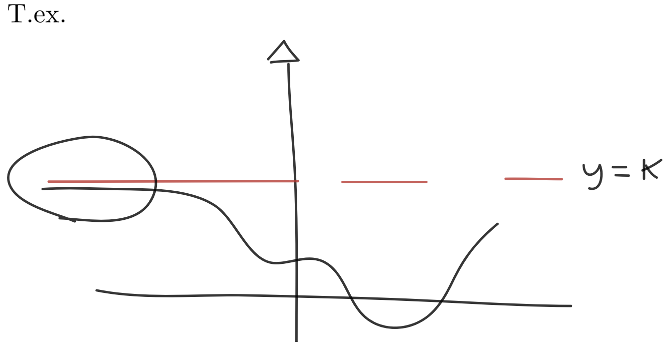
1 Funktionsundersökning

Givet: en funktion $f(x)$
Mål: undersök de väsentliga aspekterna av f:s beteende och rita grafen $y = f(x)$

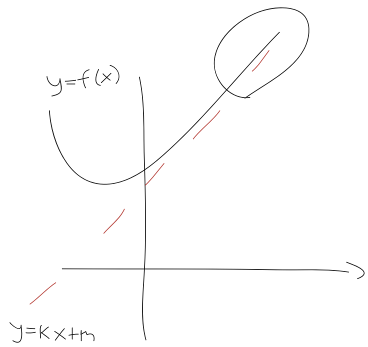
1. Bestäm definitionsmängden D_f (om den inte redan är given): man måste undvika division med noll, roten ur negativa tal, etc. Se up med skillnaden mellan $ln(\cdots)$ och $ln|\cdots|$.
2. Innan du börjar räkna, tänk efter om det finns några uppenbara egenskaper som man kan se direkt. (Är funktionen alltid positiv? Jämn/udda (potenser)? Kan man se var den har nollställen? Approximationer $f(x) = (???), x \approx 0$ eller då $|x|$ är stort?) Räkna eventuellt ut några funktionsvärden.
3. Undersök relevanta gränsvärden för att avgöra om kurva $y = f(x)$ har några asymptoter:
   - Linjen $x = a$ är en lodrät asymptot om $f(x) \to \infty$ eller $f(x) \to -\infty$ då $x \to a^+$ och/eller $x \to a^{-1}$.
     T.ex.

     (Kan bara hända om f är diskontinuerlig eller odefinerad i punkten a.)
   - Linjen $y = k$ är en vågrät asymptot om $f(x) \to k, x \to \infty$ och/eller då $x \to -\infty$
     T.ex.

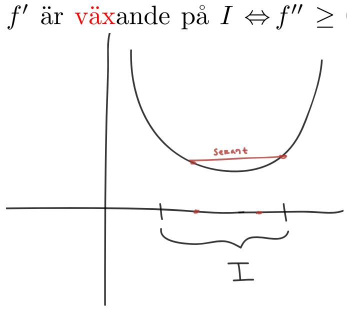
- (Överkurs) $y = kx + m$ är en sned asymptot om $f(x) - (kx + m) \to 0, x \to infty$ och/eller $x \to -\infty$
  T.ex.

  (Undersök lim $\frac{f(x)}{x}$ för att hitta k, sedan lim $(f(x) - kx)$ för att hitta m.)

4. Räkna ut derivatan $f'(x)$, faktorisera så långt som möjligt, och gör sedan en teckentabell för att avgöra var f' är positiv/negativ/noll/(odef.) (så att man ser var f är växande/avtagande respektive har lokal max/min eller terrasspunkter).

5. (Överkurs) Gör en funktionsundersökning av f' för att avgöra var funktionen f är konvex eller konkav.
   f är konvex på ett intervall $I \Leftrightarrow$ varje sekand i I ligger ovanför grafen $\Leftrightarrow$ f' är växande på $I \Leftrightarrow f'' \geq 0$ på I. (Konkav: tvärtom (f' avtagande))

6. Rita grafen $y = f(x)$ med hjälp av ovanstående information. (Tänk tillbaka på vad D_f var, så att du inte glömmer att rita någon del av grafen, eller ritar någonting där f är odefinerad.)

7. MYCKET VIKTIGT: Kontrollera att allt hänger ihop! (Inga motsägelser får finnas.)

8. Skriv ett svar där det som efterfrågas i uppgiften klart framgår. (Det kan gälla asymptoter, lokala extrempunkter, antalet lösningar till ekvationen $f(x) = 0$, värdemängden för f, etc)

2 Exempel

Undersök $f(x) = \frac{x-1}{x+1}e^{-1/x}$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \neq -1, x \neq 0\}$$

f:s enda nollställe är $x = 1$, och man kan se f:s tecken med en teckentabell.

x		-1		0		1	
$x-1$	-		-		-	0	+
$x+1$	-	0	+		+		+
$e^{-1/x}$	+		+		+		+
$f(x)$	+		-		-	0	+

2.1 Relevanta gränsvärden

- $f(x) = \frac{1-1/x}{1+1/x}e^{-1/x} \to \frac{1}{1}e^0 = 1, x \to \pm\infty$ så linjen $y = 1$ är en vågrät asymptot.
- $f(x) = \frac{1-x}{1+x}e^{-1/x} \to 0, x \to 0^+$
- $f(x) = \frac{1-x}{1+x}e^{-1/x} \to -\infty, x \to 0^-$, så linjen $x = 0$ är en lodrät asymptot.
- $f(x) = \frac{1}{x+1}(x-1)e^{-1/x} \to \pm\infty, x \to (-1)^\pm$, så linjen $x = 0$ är en lodrät asymptot.

2.2 Derivata

$$f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}e^{-1/x} + \frac{x-1}{x+1}e^{-1/x}\frac{1}{x^2} = \frac{2x^2 + (x-1)(x+1)}{x^2(x+1)^2}e^{-1/x} =$$

$$\frac{3x^2-1}{x^2(x+1)^2}e^{-1/x} = \frac{3(x+\frac{1}{\sqrt{3}})(x-\frac{1}{\sqrt{3}})}{x^2(x+1)^2}e^{-1/x}$$

2.3 Teckentabell över derivatan

x		-1		$\frac{-1}{\sqrt{3}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$	
$3e^{-1/x}$	+		+		+	$\nexists$	+		+
$x+\frac{1}{\sqrt{3}}$	-		-	0	+		+		+
$x-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-		-		-		-	0	+
$x^2(x+1)^2$	+	0	+		+	0	+		+
$f(x)$	+	$\nexists$	+	0	-	$\nexists$	-	0	+
$f'(x)$	$\nearrow$	$\nexists$	$\nearrow$	lok. max	$\searrow$	$\nexists$	$\searrow$	lok. min	$\nearrow$

2.4 Lokalt maximum

$$f(\frac{-1}{\sqrt{3}}) = \frac{\sqrt{3}+1}{-\sqrt{3}-1}e^{\sqrt{3}} \approx 21.09$$

2.5 Lokalt minimum

$$f(\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}e^{-\sqrt{3}} \approx -0.047$$

2.6 Graf