1 TATA41 - Föreläsning 3

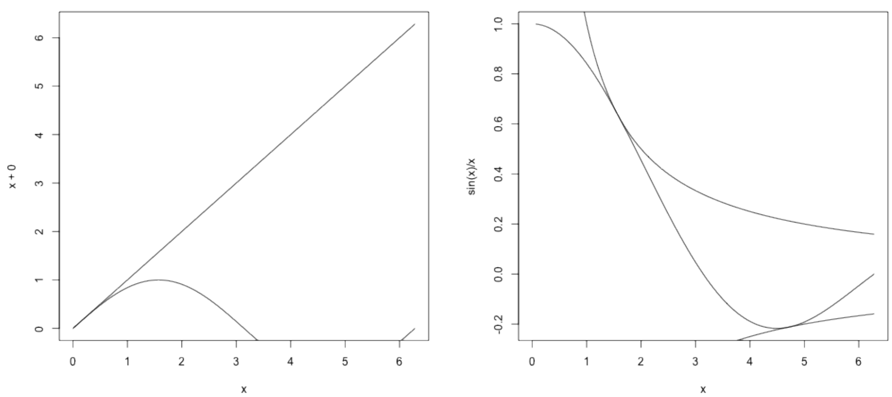
2 Standardgränsvärden

2.1 Exempel

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x}, x \neq 0$$

$$f(-x) = \frac{\sin(-x)}{-x} = f(x), x \neq 0$$

(f är en jämn funktion (spegelsymmetri).)



2.2 Sats

Om $c > 0$ och $a > 1$ så gäller följande:

2.2.1 a

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

2.2.2 b

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

2.2.3 c

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

2.2.4 d

$$\lim_{x\to 0^+} x^c \times \ln(x) = 0$$

2.2.5 e

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^c}{\ln x} = \infty$$

och därmed

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^c} = 0$$

2.2.6 f

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a^x}{x^c} = \infty$$

2.3 Bevis

2.3.1 a

Antag först att $0 < x < \frac{\pi}{x}$. Från grunken vet vi då att

$$0 < \sin x < x < \tan x$$

Division med $\sin x$ (positivt) ger $= \frac{\sin x}{\cos x}$

$$0 < 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

alltså (eftersom $0 < a < b \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$):

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

Vi vet att:

$$\cos x \to 1, x \to 0$$

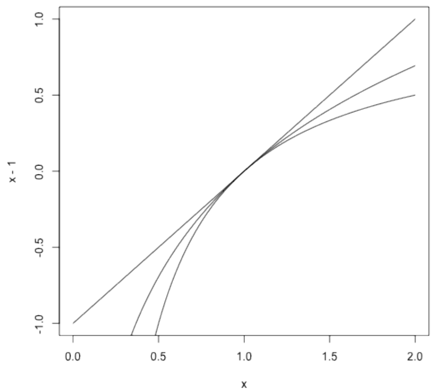
Enligt instängningsregeln ger

$$\frac{\sin x}{x} \to 1, x \to 0^+$$

2.3.2 b

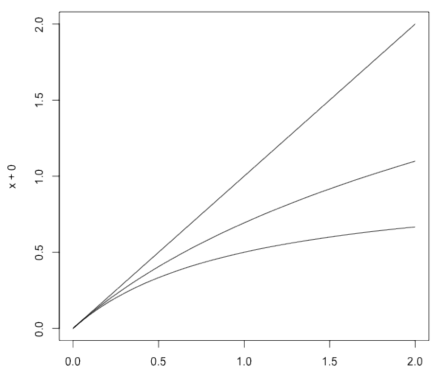
Från grunken:

$$\frac{t-1}{t} \leq \ln t \leq t - 1, t > 0$$



Alltså, med $t = 1 + x$

$$\frac{x}{x+1} \leq \ln(1+x) \leq x, x > -1$$



För $x > 0$

$$\frac{1}{1+x} \leq \frac{\ln(1+x)}{x} \leq 1 \implies \frac{\ln(1+x)}{x} \to 1, x \to 0^+$$

För $x < 0$

$$\frac{1}{1+x} \geq \frac{\ln(1+x)}{x} \geq 1 \implies \frac{\ln(1+x)}{x} \to 1, x \to 0^-$$

2.3.3 c-f

Se boken.

2.4 Exempel

$$\frac{\sin 4x}{\sin 3x} = \frac{\sin 4x}{4x} \times \frac{3x}{\sin 3x} \times \frac{4}{3} \to 1 \times 1 \times \frac{4}{3} = \frac{4}{3}, x \to 0$$

(enligt standardgränsvärden)

2.5 Exempel

$$\frac{\ln x + 7}{e^x - 5} = \frac{\ln x \times (1 + \frac{7}{\ln x})}{e^x \times (1 - \frac{5}{e^x})} = \frac{\ln x}{x} \times \frac{x}{e^x} \times \frac{(1 + \frac{7}{\ln x})}{(1 - \frac{5}{e^x})} \to 0, x \to \infty$$

2.6 Exempel

Undersök

$$\lim_{x \to 1} \frac{e^{\cos(\frac{x\pi}{2}) - x}}{\ln x}$$

Lösning: Sätt $x = 1 + t$ (obs att $x \to 1 \Leftrightarrow t \to 0$).
Då blir $\cos(\frac{x\pi}{2}) = \cos(\frac{\pi(1+t)}{2}) = \cos(\frac{\pi}{2} + \frac{t\pi}{2}) = -\sin(\frac{t\pi}{2})$
Så

$$\frac{e^{\cos(\frac{x\pi}{2})} - x}{\ln x} = \frac{e^{-\sin(\frac{t\pi}{2})} - (1+t)}{\ln(1+t)} =$$

$$\frac{e^{-\sin(\frac{t\pi}{2})} - 1}{\ln(1+t)} - \frac{t}{\ln(1+t)} =$$

$$\frac{e^{-\sin(\frac{t\pi}{2})} - 1}{-\sin\frac{t\pi}{2}} \times \frac{-\sin t\pi 2}{\frac{t\pi}{2}} \times \frac{\frac{t\pi}{2}}{\ln(1+t)} - \frac{t}{\ln(1+t)} \to$$

$$1 \times (-1) \times \frac{\pi}{2} \times 1 = -\frac{\pi}{2} - 1, t \to 0, (x \to 1)$$

3 Talföljder

3.1 Notation

$$(a_n)_{n=0}^{\infty} = (a_0, a_1, a_2, \cdots)$$

3.2 Definition

Om $\lim_{n \to \infty} a_n$ existerar (ändligt) så kallas följden konvergent, annars divergent.

3.3 Sats

3.3.1 a

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$$

3.3.2 b

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$$

3.3.3 c

$$\lim_{n\to\infty} n^{1/n} = 1$$

3.4 Bevis

3.4.1 a och b

Se boken.

$$a^n = a \times a \times a \times \cdots \times a$$
$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$$
$$n^n = n \times n \times n \times \cdots \times n$$

3.4.2 c

$$n^{1/n} = (e^{\ln n \times n})^{1/n} = e^{\ln n \times \frac{1}{n}} = e^{\frac{\ln n}{n} \to e^0 = 1, n\to\infty}$$

3.5 Kluring/övning

Visa

$$\lim_{n\to\infty} (n!)^{1/n} = \infty$$

3.6 Anmärkning

Stirlings approximation säger

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \times (\frac{n}{e})^n \times e^{\frac{1}{12n}}$$

3.7 Sats

Antag att följden $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ är växande och uppåt begränsad, dvs

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots \leq C$$

För någon konstatn C.
Då existerar $A = \lim_{n\to\infty} a_n$ (ändligt)

3.8 Bevis

Appendix A