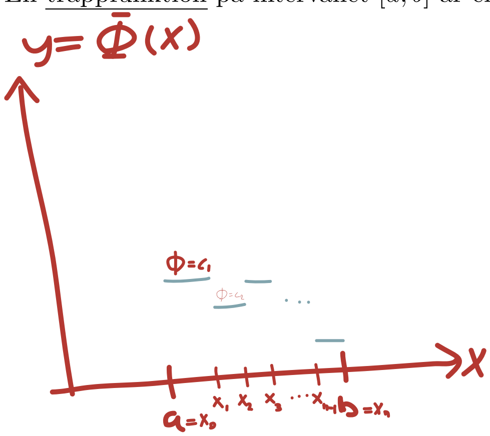
1 Riemannintegralen

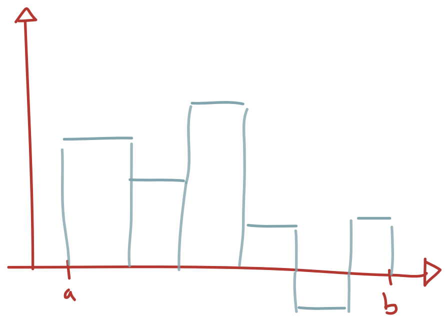
`Uppkom när man ville precicera definitionen av integraler`
`när fourier skapade fourier transformer`

1.1 Definition

En trappfunktion på intervallet $[a, b]$ är en styckvis konstant funktion:



Beteckna motsvarande trappsumma med $T(\Phi) = \sum_{k=1}^{n} c_k(x_k - x_{k-1})$

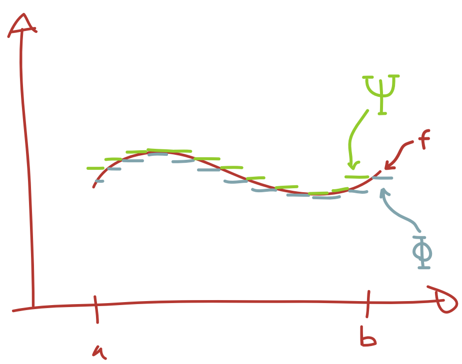


Summa av rektangelareor (”med tecken”).

1.2 Definition

En funktion f sägs vara <u>(Riemann)integrerbar</u> på intervallet $[a,b]$ om:

- f är deifinerad på $[a,b]$
- f är begränsad på $[a,b]$ (dvs $|f(x)| \leq M$ för någon konstant M och alla $x \in [a,b]$)
- f kan <u>approximeras godtyckligt väl med trappfunktioner</u> i den meningen att det för varje $\epsilon > 0$ finns trappfunktionen Φ och Ψ på $[a,b]$ sådana att $\Phi \leq f \leq \Psi$ och $T(\Psi) - T(\Phi) < \epsilon$.
  Φ = undertrappa (till f), Ψ = övertrappa, $T(\Psi)$ = översumma, $T(\Phi)$ = översumma.



I så fall är

$$\sup\{T(\Phi) : \Phi \leq f\} = \inf\{T(\Psi) : f \leq \Psi\}$$

och detta tal kallas för (Riemann)integralen för f över intervallet $[a,b]$ och betecknas $\int_a^b f(x)\,dx$ (eller $\int_a^b f(t)\,dt$ etc)

1.3 Sats

Styckvis kontinuerliga funktioner är integrerbara, och även styckvis monotona funktioner. (Bevis: Se boken)

Följande räknelagar bevis med hjälp av motsvarande egenskaper för trappsummor:

1.4 Sats

Antag f och g integrerbara och $a < b < c$

- Lineraitet $\int_a^b (k_1 f(x) + k_2 g(x))\, dx = k_1 \int_a^b f(x)\ dx + k_2 \int_a^b g(x)\ dx$
- Monotonicitet $f \leq g$ på $[a, b] \implies \int_a^b f(x)\ dx \leq \int_a^b g(x)\ dx$
  (Notera speciellt integralen av en positiv funktion kan inte bli negativ!)
- $|\int_a^b f(x)\ dx| \leq \int_a^b |f(x)|\ dx$ (jfr triangelolikheten $|a+b| \leq |a|+|b|, |\sum a_k| \leq \sum |a_k|$)
- $\int_a^c f(x) = \int_a^b f(x)\ dx + \int_b^c f(x) dx$

1.5 Anmärkning

Den sista räknelagen gäller för alla a, b, c (oavsett ordning) ifall man deifinerar

$$\int_a^a f(x)\ dx = 0$$

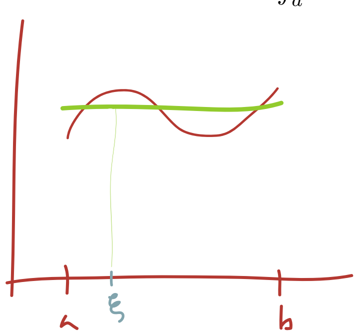
och

$$\int_b^a f(x)\ dx \int_a^b f(x)\ dx$$

1.6 Sats (Medelvärdessatsen för integraler)

Om f är kontinuerlig på $[a, b]$ så finns $\xi \in]a, b[$ så att

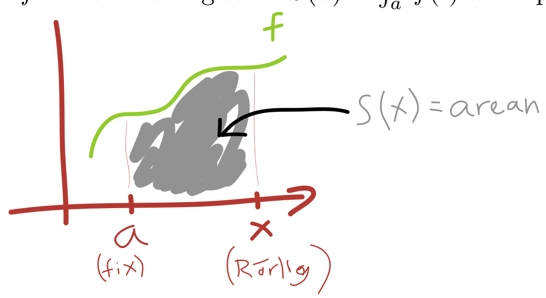
$$\int_a^b f(x)\ dx = f(\xi)(b - a)$$



($f(\xi) =$ medelvärdet för f i $[a, b]$) (Bevis: Se boken)

1.7 Analysesns huvudsats

Om f är kontinuerlig så är $S(x) = \int_a^x f(t)\ dt$ en primitiv funktion till f.



1.8 Bevis

$$\frac{S(x+h) - S(x)}{h} = \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(t)\ dt - \int_a^x f(t)\ dt\right)$$

$$\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\ dt = \frac{1}{h} f(\xi) h \to f(x), h \to 0$$

1.9 Följdsats

Varje kontinuerlig funktion har en primitiv funktion.

1.10 Följdsats (insättningsformeln)

Om f är kontinuerlig och F är en primitiv till f så är $\int_a^b f(x)\ dx = F(b) - F(a)$. $F(b) - F(a)$ skrivs ofta $[F(x)]_a^b$.

1.11 Bevis

Sant enligt huvudsatsen ifall man tar $F(x) = S(x) = \int_a^x f(x)\ dt$ som primitiv. Tar man en annan primitiv $F(x) = S(x) + C$ så försvinner C i subtraktionen $F(b) - F(a)$, så resultatet blir samma.

1.12 Exempel

Arean för $\int_1^2 x^2\ dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$