

Departamento de Computação

Curso: Bacharelado em Engenharia da Computação **Semestre:** 9

Curso: Bacharelado em Engenharia de Controle e Automação **Semestre:** Optativa

Disciplina: Processamento Digital de Imagens.

Professor: Esp. Giuliano Robledo Zucoloto Moreira.

Cuiabá-MT, 28 de julho de 2022.

NOTA EXPLICATIVA: Operações bidimensionais de correlação e convolução

Esta nota trata das operações bidimensionais de correlação e convolução aplicadas ao processamento digital de imagens. O conteúdo apresentado não esgota o assunto e nem dispensa o estudo do livro texto e acesso e consulta a outras referências e fontes do conhecimento. O intuito é desenvolver uma linha de raciocínio que sirva como uma base capaz de facilitar e dar celeridade à compreensão do assunto. Além da teoria são apresentados exemplos e também a codificação em linguagem *GNU Octave 7.1.0* da operação bidimensional de convolução tanto na forma de programação estruturada tradicional quanto otimizada por desfazimento de laço através de programação vetorizada. Nem tudo está explícito! caberá aos(as) leitores(as) identificar algumas informações como enigmas em dados momentos para forçar o raciocínio e tornar a leitura ainda mais interessante. Sem mais apresentações, vamos ao que interessa, o conteúdo!

Dada uma imagem I representada pela função $f(x, y)$ de dimensões $M \times N$ e um operador de transformação T , de dimensões $A \times A$, A ímpar e $A > 1$, o processo de soma do produto entre os *pixels* da imagem e os elementos do operador pode ser expresso pela função 1:

$$g(x, y) = \sum_{s=-\frac{A-1}{2}}^{\frac{A-1}{2}} \sum_{t=-\frac{A-1}{2}}^{\frac{A-1}{2}} f(x+s, y+t) T\left(A - \frac{A-1}{2} + s, A - \frac{A-1}{2} + t\right); \quad (1)$$

Para fins computacionais normalmente há necessidade de uma pequena alteração na função 1, pois o processamento é indexado pelo índice da linha e índice da coluna, então temos a função 2:

$$g(x, y) = \sum_{t=-\frac{A-1}{2}}^{\frac{A-1}{2}} \sum_{s=-\frac{A-1}{2}}^{\frac{A-1}{2}} f(y+s, x+t) T\left(A - \frac{A-1}{2} + s, A - \frac{A-1}{2} + t\right); \quad (2)$$

Cabe uma análise do segundo termo do somatório da função 2, o operador de transformação, pois este terá utilidade além da soma de produtos:

$$\sum_{t=-\frac{A-1}{2}}^{\frac{A-1}{2}} \sum_{s=-\frac{A-1}{2}}^{\frac{A-1}{2}} T\left(A - \frac{A-1}{2} + s, A - \frac{A-1}{2} + t\right); \quad (3)$$

Como o termo:

$$A - \frac{A-1}{2};$$

é constante, podemos chamá-lo de uma constante k :

$$k = A - \frac{A-1}{2};$$

e reescrever a função 3 como:

$$\sum_{t=-\frac{A-1}{2}}^{\frac{A-1}{2}} \sum_{s=-\frac{A-1}{2}}^{\frac{A-1}{2}} T(k+t, k+s); \quad (4)$$

Substituindo a função 4 na função 3, temos:

$$g(x, y) = \sum_{t=-\frac{A-1}{2}}^{\frac{A-1}{2}} \sum_{s=-\frac{A-1}{2}}^{\frac{A-1}{2}} f(y+s, x+t) T(k+s, k+t); \quad (5)$$

A função 5 é conhecida como função de correlação e a convolução é outra função, amplamente utilizada, semelhante à convolução, exceto que há uma rotação do filtro em 180º (cento e oitenta graus) [1, p. 96] e pode ser escrita como a função 6:

$$g(x, y) = \sum_{t=-\frac{A-1}{2}}^{\frac{A-1}{2}} \sum_{s=-\frac{A-1}{2}}^{\frac{A-1}{2}} f(y+s, x+t) T(k-s, k-t); \quad (6)$$

A simples inversão de sinal no argumento variável do operador T na função 6 promove a rotação de 180º [1, p. 96]. A alteração também poderia ter ocorrido no argumento variável do somatório na função $f(x, y)$, resultando na função 7:

$$g(x, y) = \sum_{t=-\frac{A-1}{2}}^{\frac{A-1}{2}} \sum_{s=-\frac{A-1}{2}}^{\frac{A-1}{2}} f(y-s, x-t) T(k+s, k+t); \quad (7)$$

As tabelas 1 e 2 representam respectivamente o resultados da operação de correlação (função 5) e convolução (função 6) para um ponto $f(x, y)$ qualquer, supondo $A = 3$. Nestas condições procede-se ao cálculo da variável k para ambas funções:

$$k = A - \frac{A-1}{2}; \quad (8)$$

Onde A é a dimensão simétrica do filtro.

Logo

$$k = A - \frac{A-1}{2} = 3 - \frac{3-1}{2} = 3 - \frac{2}{2} = 3 - 1 = 2;$$

e então temos as referidas tabelas supracitadas:

É possível observar na última coluna das tabelas 1 e 2 que houve uma rotação de 180º nos índices do operador T .

Tabela 1: Desenvolvimento da função 5 para $A=3$

s	t	$f(y+s,x+t)$	k+s	k+t	T	$f(y+s,x+t)T(s,t)$
-1	-1	$f(y-1,x-1)$	1	1	$T(1,1)$	$f(y-1,x-1)T(1,1)$
-1	0	$f(y-1,x)$	1	2	$T(1,2)$	$f(y-1,x)T(1,2)$
-1	1	$f(y-1,x+1)$	1	3	$T(1,3)$	$f(y-1,x+1)T(1,3)$
0	-1	$f(y,x-1)$	2	1	$T(2,1)$	$f(y,x-1)T(2,1)$
0	0	$f(y,x)$	2	2	$T(2,2)$	$f(y,x)T(2,2)$
0	1	$f(y,x+1)$	2	3	$T(2,3)$	$f(y,x+1)T(2,3)$
1	-1	$f(y+1,x-1)$	3	1	$T(3,1)$	$f(y+1,x-1)T(3,1)$
1	0	$f(y+1,x)$	3	2	$T(3,2)$	$f(y+1,x)T(3,2)$
1	1	$f(y+1,x+1)$	3	3	$T(3,3)$	$f(y+1,x+1)T(3,3)$

Fonte: Do Autor (2020).

Tabela 2: Desenvolvimento da função 6 para $A=3$

s	t	$f(y+s,x+t)$	k-s	k-t	T	$f(y+s,x+t)T(s,t)$
-1	-1	$f(y-1,x-1)$	3	3	$T(3,3)$	$f(y-1,x-1)T(3,3)$
-1	0	$f(y-1,x)$	3	2	$T(3,2)$	$f(y-1,x)T(3,2)$
-1	1	$f(y-1,x+1)$	3	1	$T(3,1)$	$f(y-1,x+1)T(3,1)$
0	-1	$f(y,x-1)$	2	3	$T(2,3)$	$f(y,x-1)T(2,3)$
0	0	$f(y,x)$	2	2	$T(2,2)$	$f(y,x)T(2,2)$
0	1	$f(y,x+1)$	2	1	$T(2,1)$	$f(y,x+1)T(2,1)$
1	-1	$f(y+1,x-1)$	1	3	$T(1,3)$	$f(y+1,x-1)T(1,3)$
1	0	$f(y+1,x)$	1	2	$T(1,2)$	$f(y+1,x)T(1,2)$
1	1	$f(y+1,x+1)$	1	1	$T(1,1)$	$f(y+1,x+1)T(1,1)$

Fonte: Do Autor (2020).

A constante k deve ser calculada conforme a Equação 8 dada a possibilidade de variação do tamanho do filtro (A) a ser convoluído com a imagem. Este caso será analisado para que não se suponha indevidamente que no contexto da nota k seja calculado por meio de uma expressão inválida como $k = A - 1$. Considere as imagens presentes nas Figuras 1, 2 e 3 onde a área sombreada representa a imagem de entrada $f(x)$ e o contorno em destaque a área do filtro, respectivamente com os tamanhos 3×3 , 5×5 e 7×7 produzindo os seguintes valores de A : $A = 3$, $A = 5$ e $A = 7$, conforme ilustra a Tabela 4:

Tabela 3: k produzido pela variação do tamanho de A

A	k
3	2
5	3
7	4

Fonte: Do Autor (2022).

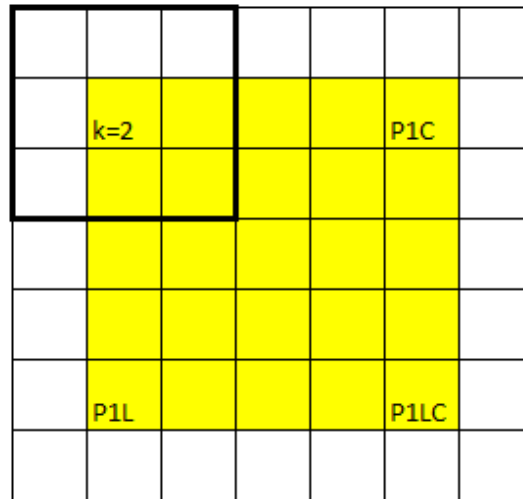
Para cada uma das Figuras 1, 2 e 3 o seguinte conjunto de propriedades será analisado e, ou, calculado:

$$\begin{aligned}
 A & & k &= A - \frac{A-1}{2}; \\
 M & & N & \\
 M_1 &= M + A - 1; & N_1 &= N + A - 1; \\
 P1C &= N + \frac{A-1}{2}; & P1L &= M + \frac{A-1}{2}; e \\
 P1LC &=;
 \end{aligned}$$

Sendo A , M e N obtidos por meio das propriedades da imagem, sendo respectivamente estes: as dimensões do filtro, o número de linhas e de colunas de cada imagem.

Análise das propriedades da Figura 1

Figura 1: Análise com filtro 3x3



$$\begin{aligned}
 A &= 3; & k &= A - \frac{A-1}{2} = 2; \\
 M &= 5; & N &= 5; \\
 M_1 &= M + A - 1 = 7; & N_1 &= N + A - 1 = 7; \\
 P1C &= N + \frac{A-1}{2} = 6; & P1L &= M + \frac{A-1}{2} = 6; e \\
 P1LC &= (P1L, P1C);
 \end{aligned}$$

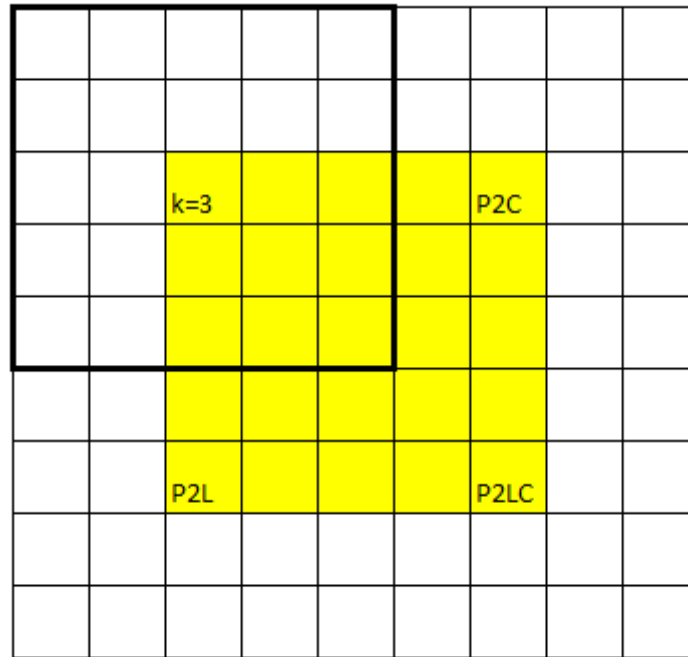
Tabela 4: **Propriedades da imagem da Figura 1**

A	k	M	N	M_1	N_1	P1C	P1L	P1LC
3	2	5	5	7	7	6	6	(6,6)

Fonte: Do Autor (2022).

Análise das propriedades da Figura 2

Figura 2: Análise com filtro 5x5



$$A = 5;$$

$$k = A - \frac{A-1}{2} = 3;$$

$$M = 5;$$

$$N = 5;$$

$$M_1 = M + A - 1 = 9;$$

$$N_1 = N + A - 1 = 9;$$

$$P2C = N + \frac{A-1}{2} = 7;$$

$$P2L = M + \frac{A-1}{2} = 7; e$$

$$P2LC = (P2L, P2C);$$

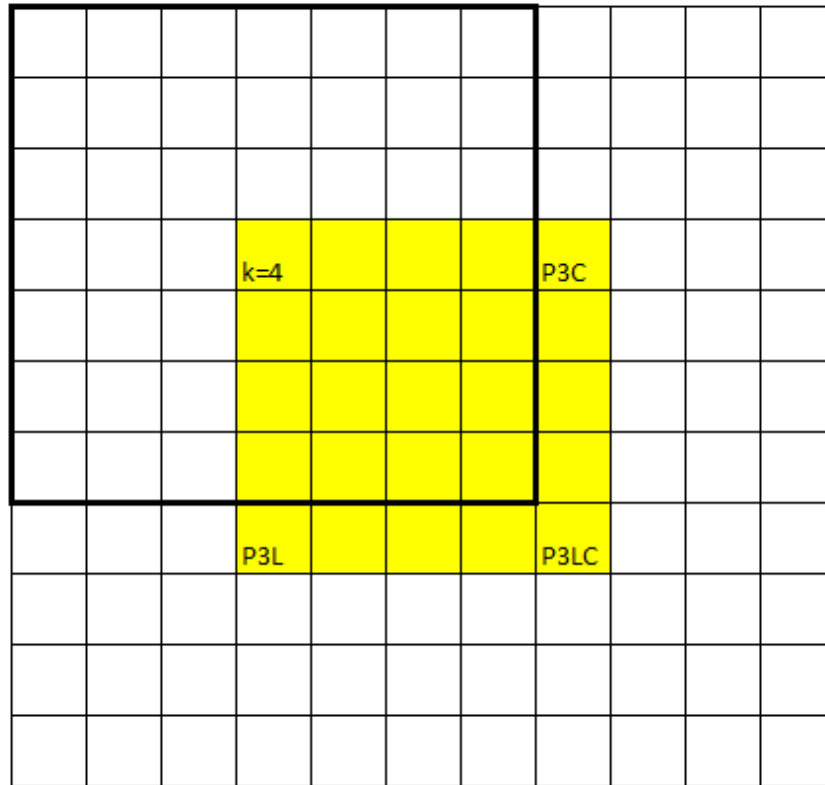
Tabela 5: Propriedades da imagem da Figura 2

A	k	M	N	M_1	N_1	P2C	P2L	P2LC
5	3	5	5	9	9	7	7	(7,7)

Fonte: Do Autor (2022).

Análise das propriedades da Figura 3

Figura 3: Análise com filtro 7x7



$$A = 7;$$

$$k = A - \frac{A-1}{2} = 4;$$

$$M = 5;$$

$$N = 5;$$

$$M_1 = M + A - 1 = 11;$$

$$N_1 = N + A - 1 = 11;$$

$$P3C = N + \frac{A-1}{2} = 8;$$

$$P3L = M + \frac{A-1}{2} = 8; e$$

$$P3LC = (P3L, P3C);$$

Tabela 6: **Propriedades da imagem da Figura 3**

A	k	M	N	M_1	N_1	P3C	P3L	P3LC
7	4	5	5	11	11	8	8	(8,8)

Fonte: Do Autor (2022).

A compilação das propriedades das imagens das Figuras 1, 2 e 3 está registrada na Tabela 7.

Sendo Δ utilizado para representar o índice de cada imagem no cabeçalho da Tabela 7.

Na Tabela 7 é possível observar que A cresce de duas em duas unidades na sequência, enquanto k cresce de uma em uma como da mesma forma a diferença implícita $A - k$.

Esta análise foi realizada para que se compreenda a reescrita da Equação 5 na Equação 9.

Tabela 7: Propriedades das imagens das Figuras 1, 2 e 3

Figura	A	k	M	N	M_1	N_1	PΔC	PΔL	PΔLC
1	3	2	5	5	7	7	6	6	(6,6)
2	5	3	5	5	9	9	7	7	(7,7)
3	7	4	5	5	11	11	8	8	(8,8)

Fonte: Do Autor (2022).

$$g = \sum_{x=k}^{N+\frac{A-1}{2}} \sum_{y=k}^{M+\frac{A-1}{2}} \sum_{t=-\frac{A-1}{2}}^{\frac{A-1}{2}} \sum_{s=-\frac{A-1}{2}}^{\frac{A-1}{2}} f(y+s, x+t) T(k+s, k+t); \quad (9)$$

E também a reescrita da Equação 7 na Equação 10.

$$g = \sum_{x=k}^{N+\frac{A-1}{2}} \sum_{y=k}^{M+\frac{A-1}{2}} \sum_{t=-\frac{A-1}{2}}^{\frac{A-1}{2}} \sum_{s=-\frac{A-1}{2}}^{\frac{A-1}{2}} f(y-s, x-t) T(k+s, k+t); \quad (10)$$

O surgimento das variáveis M_1 e N_1 não é por acaso, são as dimensões da imagem de entrada com as bordas acrescidas para processamento do processo de correlação e, ou, convolução. Após o processamento da operação a borda deve ser corretamente removida e a imagem retorna às dimensões originais M e N . As bordas podem ser adicionadas à imagem original de entrada ou ser criada uma **imagem auxiliar** (I_{aux}) preenchida inicialmente com valores **zero** onde será escrita uma cópia centralizada da imagem de entrada. Esta I_{aux} ocupará o lugar da $f(x, y)$ nas Equações 9 e 10.

Como neste momento o(a) leitor(a) deve estar familiarizado(a) com o termo $\frac{A-1}{2}$ este será reescrito como a conforme explicita a Equação 11

$$a = \frac{A-1}{2}; \quad (11)$$

Logo as Equações 9 e 10 passam a ter nova redação conforme Equações 12 e 13 respectivamente.

$$g = \sum_{x=k}^{N+a} \sum_{y=k}^{M+a} \sum_{t=-a}^a \sum_{s=-a}^a f(y+s, x+t) T(k+s, k+t); \quad (12)$$

$$g = \sum_{x=k}^{N+a} \sum_{y=k}^{M+a} \sum_{t=-a}^a \sum_{s=-a}^a f(y-s, x-t) T(k+s, k+t); \quad (13)$$

Códigos-fonte

Dada a similaridade entre as operações, são apresentados apenas códigos-fonte para a operação bidimensional de convolução.

Programação estruturada

```
1  clc;
2  clear all;
3  I=[ 1 5 15 1 0;
4      14 12 10 8 2;
5      12 10 14 7 7;
6      8 9 0 10 11;
7      3 7 4 9 2];
8  [M N] = size(I);
9  T=[0 1 0; 1 -4 1; 0 1 0];
10
11  %Para testes: filtros com outros tamanhos.
12  %T=[0 0 1 0 0;
13  %   0 1 1 1 0;
14  %   1 2 -14 2 1;
15  %   0 1 1 1 0;
16  %   0 0 1 0 0];
17
18  %T=[0 0 0 0 0 0 0;
19  %   0 0 0 1 0 0 0;
20  %   0 0 1 1 1 0 0;
21  %   0 1 2 -14 2 1 0;
22  %   0 0 1 1 1 0 0;
23  %   0 0 0 1 0 0 0;
24  %   0 0 0 0 0 0 0];
25
26  A=size(T,1);
27  k=A-((A-1)/2);
28  a=(A-1)/2;
29  Iaux = zeros(M+A-1,N+A-1);
30  g=Iaux;
31  Iaux(k:M+a,k:N+a)=I;
32
33  for (x=k:1:N+a)
34      for (y=k:1:M+a)
35          soma=0;
36          for(t=-a:1:a)
37              for(s=-a:1:a)
38                  soma+=Iaux(y-s,x-t)*T(k+s,k+t);
39              endfor
40          endfor
41          g(y,x)=soma;
42      endfor
43  endfor
44
45  disp("\nImagem de entrada:\n");
46  I
47  disp("\nImagem auxiliar:\n");
```



```

48 Iaux
49 disp("\nImagem de saída calculada manualmente:\n");
50 g(k:M+a,k:N+a) %imprime o intervalo sob a área da imagem de
    ↳ entrada
51 disp("\nImagem de saída calculada com a função conv2:\n");
52 conv2(T,I)(k:M+a,k:N+a) %imprime o intervalo sob a área da imagem
    ↳ de entrada

```

Fonte: Elaborado pelo Autor (2022).

Otimizado por desfazimento de laço e vetorização

```

1  clc;
2  clear all;
3  I=[ 1 5 15 1 0; %Imagem sintética para testes
4      14 12 10 8 2;
5      12 10 14 7 7;
6      8 9 0 10 11;
7      3 7 4 9 2];
8  [M N] = size(I);
9  T=[0 1 0; 1 -4 1; 0 1 0]; %Filtro 3x3 (A=3)
10
11 %Para testes: filtros com outros tamanhos.
12 %T=[0 0 1 0 0;
13 %   0 1 1 1 0;
14 %   1 2 -14 2 1;
15 %   0 1 1 1 0;
16 %   0 0 1 0 0];
17
18 %T=[0 0 0 0 0 0 0;
19 %   0 0 0 1 0 0 0;
20 %   0 0 1 1 1 0 0;
21 %   0 1 2 -14 2 1 0;
22 %   0 0 1 1 1 0 0;
23 %   0 0 0 1 0 0 0;
24 %   0 0 0 0 0 0 0];
25
26 A=size(T,1);
27 k=A-((A-1)/2);
28 a=(A-1)/2;
29 Iaux = zeros(M+A-1,N+A-1);
30 g=Iaux;
31 Iaux(k:M+a,k:N+a)=I;
32
33 for (x=k:1:N+a)
34     for (y=k:1:M+a)
35         g(y,x)=Iaux(y-a:y+k,x-a:x+k)*T(1:A,1:A);
36     endfor
37 endfor
38
39 disp("\nImagem de entrada:\n");

```

```
40 I
41 disp("\nImagem auxiliar:\n");
42 Iaux
43 disp("\nImagem de saída calculada manualmente:\n");
44 g(k:M+a,k:N+a) %imprime o intervalo sob a área da imagem de entrada
45 disp("\nImagem de saída calculada com a função conv2:\n");
46 conv2(T,I)(k:M+a,k:N+a) %imprime o intervalo sob a área da imagem de
    ↪ entrada
```

Fonte: Elaborado pelo Autor (2022).

Referências

- [1] R. E. GONZALEZ, Rafael C.; WOODS, *Processamento Digital de Imagens*. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 3 ed., 2010. Revisão técnica: Marcelo Vieira e Maurício Escarpinati; [tradução Cristina Yamagami e Leonardo Piamonte].