INSTITUTO FEDERAL
Mato Grosso
Campus Cuiabá
Cel. Octayde
Jorge da Silva

Departamento da Área de Informática
**Curso:** Bacharelado em Engenharia da Computação **Semestre:** 9
**Curso:** Bacharelado em Engenharia de Controle e Automação **Semestre:** Optativa
**Disciplina:** Processamento Digital de Imagens.
**Professor:** Esp. Giuliano Robledo Zucoloto Moreira.

Cuiabá-MT, 28 de julho de 2022.

**NOTA EXPLICATIVA**

**Modelagem matemática de imagens digitais**
Processamento de histograma

Está fora do escopo desta nota esgotar conteúdos da ementa. Nela são apresentados os passos iniciais necessários ao caminho do estudo da disciplina de processamento digital de imagens (PDI). A nota muitas vezes pode ser objetiva pois considera-se que o estudante tenha conhecimentos prévios de programação dada a evolução no curso até à disciplina de PDI. O *software* utilizado no desenvolvimento dos exemplos foi o *GNU Octave* (modo gráfico) versão 6.3.0. Chama-se a atenção para a indexação de elementos de variáveis, que na linguagem utilizada pelo *software* inicia-se pelo índice 1 (um), motivo pelo qual se faz necessário que os índices utilizados nas equações presentes nesta ***nota explicativa*** sejam inicializados por 1 (um).

# 1 Introdução

Histograma $(H)$ é o conjunto que contém a contagem distinta das intensidades presentes na imagem digital; sua representação geralmente é um gráfico de raias.

$H$ contém a mesma quantidade de elementos da faixa dinâmica $(L)$ do sistema que representa a imagem digital. A associação entre os elementos de $H$ e $L$ é ortogonal, ou seja, o primeiro elemento de $H$ está associado ao primeiro elemento de $L$ e assim sucessivamente.

Como uma imagem digital pode conter um número menor de intensidades que as intensidades disponíveis em $L$, caso haja intensidade presente em $L$ que não esteja presente na imagem, na contagem de $H$ tal intensidade é registrada como ***zero***.

$H$ é uma medida muito útil no processamento digital de imagens, porém dadas as naturezas da probabilidade e da estatística, é comum $H$ ser representado na forma normalizada $H_n$, sendo $H_n$ uma cópia de $H_n$ dividida elemento a elemento pelo valor máximo de $L$. Por consequência $H_n$ é a medida da probabilidade das intensidades da imagem digital.

Uma outra variação de $H$ é o histograma equalizado $(H_e)$, que é uma função utilizada para a ***distribuição coerente das intensidades*** na operação de transformação de intensidades da imagem. A ***densidade de probabilidade*** é uma medida de $H_n$ que se torna a função de transformação de intensidades $(T_i)$ da imagem aplicada à equalização do histograma. Como no campo das imagens digitais as intensidades são representadas por números discretos, para fiel apresentação da teoria, a medida da densidade de probabilidade é calculada por meio da função de distribuição cumulativa ***CDF - cumulative distribution function***.

A *CDF* ($T_i$) é uma operação de natureza monotonicamente crescente, ou seja, o valor atual é sempre maior que o valor anterior, o que pode ser representado de outra forma como $T_i(l-1) < T_i(l)$; $-\infty \leq l \leq +\infty$, onde $T_i(l)$ é a soma de todos os elementos de $H_n$ até o índice $l$. Uma vez calculada $T_i$ é possível então calcular-se $H_e$ como se pode observar nos desdobramentos desta nota, o que se faz também com os demais cálculos apresentados nesta Introdução.

No processamento de imagens digitais é comum a aplicação de uma operação sobre múltiplos dados, e o caso de $H$ e suas demais variações se enquadram nesta situação. Posto isto rememora-se da disciplina de ***Arquitetura e organização de computadores*** que para este tipo de situação há possibilidade de processamento vetorizado caso a arquitetura da estação de processamento disponha de instruções *SIMD - single instruction multiple data* (Taxonomia de Flynn) que possibilitam a aplicação simultânea de uma instrução sobre múltiplos dados.

Sobre a utilização de $H$ e suas variações, o capo de aplicação é amplo, o que poderá ser percebido no decorrer desta disciplina, inclusive no estudo de outros tópicos da ementa e também há possibilidade de aproveitamento na disciplina de Inteligência artificial neste Curso.

# 2 Histograma

Uma imagem digital ($I$) é formada por ***elementos pictóricos*** também conhecidos como ***pixels***. Considerando uma ***imagem monocromática*** digital de dimensões de $M$ linhas e $N$ colunas, a cada ***pixel*** desta estão associadas as coordenadas da posição deste na imagem e a intensidade que ele representa. A ***quantidade de pixels*** ($Q$) da imagem é calculada por meio da Equação 1.

$$Q = MN; \qquad Q,\ M\ e\ N \in \mathbb{Z} \tag{1}$$

Considerando a imagem $I$ como um espaço amostral, $Q$ é a quantidade total de elementos contidos neste espaço amostral.

A capacidade de representação das intensidades está limitada à quantidade de *bits* ($k$) disponíveis no sistema computacional para representá-las. A ***quantidade de intensidades*** ($q$) que pode ser representada por um sistema de $k$ *bits* é calculada por meio da Equação 2.

$$q = 2^k; \qquad k\ e\ q \in \mathbb{Z}. \tag{2}$$

Costumeiramente representa-se o número de *bits* em computação por meio da variável $n$, contudo esta será utilizada para outra finalidade nesta ***nota explicativa***, por este motivo utiliza-se a variável $k$ minúscula para representar o número de *bits*.

As $q$ intensidades que podem ser representadas pelo sistema formam um conjunto ordenado e monotonicamente crescente de elementos, que no caso de imagens monocromáticas, é conhecido como ***faixa dinâmica*** ($L$). Cada elemento ($l$) da faixa dinâmica representa uma intensidade do conjunto. A intensidade pode ser um valor inteiro ou um valor normalizado. Independentemente de ser um valor inteiro ou normalizado, cada tom de intensidade representa uma certa quantidade $\Delta i$ dependente da característica $q$ do sistema computacional, que no caso de valores inteiros geralmente é uma unidade ($\Delta i = 1$) e para o caso de valores normalizados:

$$\Delta i = \frac{1}{q-1}; \tag{3}$$

O conjunto $L$ é formado conforme a regra dada pela Equação 4.

$$L = \{l \in \mathbb{Z} \mid 0 \leq l\Delta i < q\Delta i\}; \tag{4}$$

Ou alteradas as condições de desigualdade na regra de formação do conjunto:

$$L = \{l \in \mathbb{Z} \mid 0 \leq l\Delta i \leq (q-1)\Delta i\}; \tag{5}$$

A utilização dos índices das intensidades permite propor um modelo genérico independentemente do tipo numérico que represente a quantidade de cada nível de intensidade. Chama-se a atenção, especificamente neste momento para o fato de que nas Equações 4 e 5 $l$ foi inicializado com o valor 0 por estar representando um valor de intensidade e não um índice.

A Equação 6 modela o conjunto que forma uma imagem digital $I$ monocromática genérica:

$$I = \{I(m,n) \mid 1 \leq m \leq M;\ 1 \leq n \leq N\} \qquad m,\ n,\ M\ e\ N \in \mathbb{Z}; \tag{6}$$

A Equação 7 apresenta a função que faz a associação entre os elementos da faixa dinâmica ($L$) e os elementos da imagem ($I$). Observa-se que deste ponto em diante do texto, exceto na representação de elementos (intensidades) da ***faixa dinâmica***, $l$ atua como índice nas equações.

$$I(m,n) = L(l); \qquad \{l \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq l \leq q\}. \tag{7}$$

Comprova-se que cada elemento da imagem tem uma relação direta com um elemento da ***faixa dinâmica***. Este informação é relevante pois garante que a lei formação da imagem $I$ é dependente de $L$. Em outras palavras, para o contexto, estabelece-se que só é possível existir na imagem intensidade que esteja presente na ***faixa dinâmica***, até mesmo por que na modelagem do sistema computacional a intensidade máxima que pode ser representada está vinculada à quantidade de *bits* ($k$) que estabelece o valor máximo da ***faixa dinâmica*** $\big((q-1)\Delta i\big)$. Com estas garantias firmadas é possível propor técnicas de processamento de imagens digitais, dentre elas e muitas outras, técnicas para efetuar contagens, calcular estatísticas e probabilidades. Este argumento sustenta a proposta desta ***nota explicativa*** para se efetuar o processamento de histograma.

Como o histograma é a apresentação gráfica da contagem das ocorrências das intensidades na imagem, é necessário prover o mecanismo capaz de realizar a contagem no espaço amostral da imagem e que haja de acordo com as garantias. A função ***Delta de Dirac*** ($\delta$), dada sua capacidade de ***peneiramento***, é uma das peças do mecanismo de contagem, cuja a apresentação é fundamental para a compreensão do funcionamento da técnica de contagem aqui proposta para o histograma. A Equação 8 apresenta, ***por definição***, a função para uma variável:

$$\delta(x) = \begin{cases} 1: & x = 0 \\ 0: & x \neq 0 \end{cases}; \tag{8}$$

Em poucas palavras a função vale 1 (um) no ponto 0 (zero) e vale zero em qualquer outro ponto. Para seu uso fazer sentido no processo de contagem um ajuste é necessário: aplicar um deslocamento no argumento da função (Equação 9):

$$\delta(x-a) = \begin{cases} 1: & x = a \\ 0: & x \neq a \end{cases}; \tag{9}$$

De forma análoga, a função valerá 1 (um) no ponto $a$ e zero nos demais pontos.

$$h(l) = \sum_{m=1}^{M} \sum_{n=1}^{N} \delta(I(m,n) - L(l)); \tag{10}$$

A contagem ocorrerá apenas onde a intensidade da imagem ($I(m,n)$) seja igual à intensidade da faixa dinâmica ($L$), pois a diferença entre as intensidades é zero, condição de parâmetro para que a função ***Delta de Dirac*** retorne 1 (um).

O conjunto formado por todos os elementos de $h(l)$ é a contagem que contém o conteúdo do histograma. Uma modelagem matemática da Equação 10 mais significativa para o processo computacional é apresentada na Equação 11.

$$H = \sum_{l=1}^{L} \sum_{m=1}^{M} \sum_{n=1}^{N} \delta(I(m,n) - L(l)); \tag{11}$$

Onde $H$ forma um conjunto contendo todas as contagens $h(l)$. Uma definição formal para este conjunto é apresentada na Equação 12:

$$H = \{h(l) \mid 1 \leq l \leq q\}; \tag{12}$$

O ***histograma*** é a representação gráfica da contagem $H$ (Equações 11 e, ou 12). Normalmente este tipo de representação gráfica se faz por gráfico do tipo colunas ou tipo raias.

Para o estudo estatístico e probabilístico da imagem baseado no histograma é útil ***normalizar*** o histograma. O ato de normalizar significa distribuir toda a representação da informação em uma unidade. Esta distribuição contém a probabilidade... A ***normalização*** se faz para o conjunto da coleção de eventos, dividindo-se cada evento da coleção pelo número total de elementos do espaço amostral. A normalização para o escopo do histograma é dada pela Equação 13:

$$h'(l) = \frac{1}{Q} h(l); \qquad 1 \leq l \leq q; \tag{13}$$

Onde cada termo $h'(l)$ representa a probabilidade de cada intensidade $l$ ocorrer na imagem $I$. A Equação 13 pode ser reescrita como a Equação 14:

$$H' = \frac{1}{Q} H; \tag{14}$$

Uma forma alternativa de representar $H'$ é apresentada na Equação 15.

$$H' = \{h'(l) \mid 1 \leq l \leq q\}; \tag{15}$$

À representação gráfica da contagem normalizada $H'$ chama-se ***histograma normalizado***.

A esta hora o leitor pode estar se perguntando "qual é o motivo de usar a representação em notação de conjunto?", o motivo é simples: especificar que a informação está contida em uma variável, vetor ou matriz, suas dimensões e tipo numérico demandado pelo dado, o que facilita o entendimento do domínio do problema e da proposta de solução para a reprodução em sistemas computacionais.

O histograma ou sua norma representa a distribuição das intensidades presentes na imagem. Uma forma de alterar a distribuição de intensidades da imagem é aplicar a ela uma operação de ***transformação de intensidade*** ($T$) baseada nos dados do histograma, a técnica é conhecida como ***equalização de histograma***. Na aplicação desta técncia a regra que cria a transformação $T$ é uma ***função de densidade de probabilidade*** (*PDF* - probability density function).

A Equação 16 apresenta a *PDF* utilizada como regra para o protótipo ($t(l)$) da função de transformação $T$:

$$t(l) = \sum_{r=1}^{l} h'(r); \qquad \{l,\ r\ e\ T \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq l \leq q\}. \tag{16}$$

A saída desta função depende do número de ocorrências de cada intensidade na imagem e de sua acumulação a cada intensidade, dai o nome de ***função de densidade de probabilidade***, onde a densidade aumenta conforme a acumulação da probabilidade da intensidade atual e da(s) probabilidade(s) anterior(es).

A acumulação das probabilidades também é uma probabilidade, porém acumulada como já explicitado no parágrafo anterior, contudo a transformação de intensidades, como o próprio nome diz, necessita devolver à imagem valores de intensidades. Realiza-se o processo de reversão para que os valores devolvidos sejam as intensidades calculadas pela transformação, para realizar este processo reescreve-se a Equação 16 como e Equação 17, que será adotada neste material como a *PDF* para cálculo do ***histograma equalizado***. A necessidade do ***arredondamento*** se faz apenas sistemas que representem as ***intensidades como números inteiros***. Dependendo da necessidade pode ser feita opção por truncamento (função *truncar*) no caso de sistemas que representem os valores de intensidades normalizados.

$$t(l) = arredondar\left((q-1)\sum_{r=1}^{l} h'(r)\right); \qquad \{l,\ q,\ r\ e\ T \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq l \leq q\}. \tag{17}$$

$t(l)$ é a função que forma um conjunto ordenado de novas intensidades com a mesma quantidade de elementos da faixa dinâmica, porém com a possibilidade de intensidades repetidas. Quando as intensidades repetidas ocorrem, elas ocorrem de forma coerente a ocupar a mesma posição em $T$, $L$ e $H$, essa reciprocidade é utilizada para aplicar a transformação de intensidade na imagem $I$, o que será explicado adiante em momento adequado. Chama-se $T$ conjunto formado por $t(l)$, que pode ser representado pela Equação 18:

$$T = \{t(l) \mid 1 \leq l \leq q\}; \tag{18}$$

Este conjunto $T$ na forma como está, contendo inclusive possivelmente valores repetidos de intensidade, pode ser utilizado no processo de transformação de intensidade, isto se as transformações ocorrem de acordo com os índices para referenciar as intensidades. A transformação de intensidade correlaciona os conjuntos $T$ e $L$ por meio dos índices de seus elementos para apresentar as novas intensidades na imagem.

O processo de equalização do histograma pode ocorrer de duas formas: a primeira delas sem alterar as intensidades da imagem $I$, apenas como um dado estatístico e a segunda, ser gerado a partir da imagem cujas transformações de intensidades foram aplicadas de acordo com a *PDF*.

Por questões de se manter a formalidade no desenvolvimento de raciocínio matemático será desenvolvido primeiro o raciocínio para apenas calcular o histograma equalizado sem a aplicação da transformação de intensidade à imagem $I$ (primeira forma).

Na primeira forma a equalização do histograma realiza-se uma nova contagem para as intensidades baseadas em $H$ e $T$, com um novo mapeamento dos índices a esta contagem $he(l)$ tem as mesmas dimensões de $H$ e $T$, conforme Equação 19:

$$he(l) = \sum_{r=1}^{q} \delta\big(L(l) - T(r)\big)h(r); \tag{19}$$

$he(l)$ fornece os elementos que formam o conjunto $He$ (Equação 20) que representa numericamente o histograma equalizado independentemente da transformação de intensidades da imagem $I$.

$$He = \{he(l) \mid 1 \leq l \leq q\}; \tag{20}$$

A equalização de histograma é um processo irreversível se a entrada do sistema for perdida, pois poderão ocorrer mapeamentos de múltiplas intensidades da entrada em um único valor de saída.

A Equação 21 fornece a ***imagem equalizada*** ($I'$):

$$I' = \sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N}\sum_{l=1}^{q} \delta(I(m,n) - L(l))T(l); \tag{21}$$

A respeito dos intervalos utilizados nos conjuntos, estes também podem ser modelados pela função matemática conhecida como ***Degrau unitário*** (Equação 22).

$$U(x) = \begin{cases} 0: & x < 0; \\ 1: & x \geq 0; \end{cases} \tag{22}$$

De forma análoga à função ***Delta de Dirac*** o deslocamento no parâmetro possibilita...

$$U(x-a) = \begin{cases} 0: & x < a; \\ 1: & x \geq a; \end{cases} \tag{23}$$

A diferença entre dois ***degrais unitários*** pode ser utilizada como um intervalo:

$$U = U(x-a) - U(x-b) \begin{cases} 1: a \leq x \leq b; \\ 0: valor\, fora\, do\, intervalo\, [a,b]; \end{cases} \tag{24}$$

## 2.1 Exemplos

### 2.1.1 Exemplo rápido

Exemplo apenas com figuras para prover celeridade na interpretação em sala de aula e criar a linha de raciocínio para a pormenorização matemática. Este exemplo é apresentado na Figura 1.

Figura 1: Imagem e saídas das etapas do processamento

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 2 | 3 | 1 | 5 |
| 2 | 7 | 5 | 4 | 1 |
| 4 | 4 | 3 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 2 | 2 | 0 |

(a) Imagem de entrada

**Faixa dinâmica (L):**

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |

(b) $k = 3$ e $q = 8$

**Histograma (H):**

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 3 | 5 | 4 | 2 | 3 | 2 | 0 | 1 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |

(c)

**Histograma normalizado (Hn):**

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 0,15 | 0,25 | 0,20 | 0,10 | 0,15 | 0,10 | 0,00 | 0,05 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |

(d)

**Função de densidade de probabilidade (PDF):**

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 0,15 | 0,40 | 0,60 | 0,70 | 0,85 | 0,95 | 0,95 | 1,00 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |

(e)

**Função parcial de transformação (T=q*PDF)**

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 1,05 | 2,80 | 4,20 | 4,90 | 5,95 | 6,65 | 6,65 | 7,00 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |

(f)

**Função de transformação (T=arred(q*PDF))**

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 1 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 7 | 7 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |

(g)

**Histograma equalizado (He):**

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 0 | 3 | 0 | 5 | 4 | 2 | 3 | 3 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |

(h)

**Histograma equalizado normalizado (Hen):**

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 0,00 | 0,15 | 0,00 | 0,25 | 0,20 | 0,10 | 0,15 | 0,15 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |

(i)

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $1^{0}$ | $4^{2}$ | $5^{3}$ | $3^{1}$ | $7^{5}$ |
| $4^{2}$ | $7^{7}$ | $7^{5}$ | $6^{4}$ | $3^{1}$ |
| $6^{4}$ | $6^{4}$ | $5^{3}$ | $1^{0}$ | $3^{1}$ |
| $3^{1}$ | $3^{1}$ | $4^{2}$ | $4^{2}$ | $1^{0}$ |

(j) Imagem de saída equalizada

Fonte: Elaborado pelo Autor (2022).

### 2.1.2 Exemplo detalhado

A Equação 2.2 apresenta o conjunto $I$ que é a reprodução das intensidades de uma imagem sintética. Foram considerados os seguintes parâmetros para sintetizar a imagem: $M = 5$, $N = 6$, $k = 2$ e $\Delta i = 1$.

$$I = I(m,n) = \begin{matrix} 0 & 0 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 & 3 \end{matrix} \tag{25}$$

Com base nos parâmetros apresentados é possível calcular imediatamente $Q$, $q$ e $L$:

$$Q = MN;$$
$$Q = 5 * 6;$$
$$Q = 30;$$

$$q = 2^k;$$
$$q = 2^2;$$
$$q = 4;$$

$$L = \{l \in \mathbb{Z} \mid 0 \leq l\Delta i < q\Delta i\};$$
$$ou$$
$$L = \{l \in \mathbb{Z} \mid 0 \leq l\Delta i \leq (q-1)\Delta i\};$$

$$L = \{0,\ 1,\ 2,\ 3\};$$

Para obter os dados para o ***histograma*** aplica-se a Equação 11:

$$H = \sum_{l=1}^{q} \sum_{m=1}^{M} \sum_{n=1}^{N} \delta(I(m,n) - L(l));$$

$$H = \sum_{l=1}^{4} \sum_{m=1}^{5} \sum_{n=1}^{6} \delta(I(m,n) - L(l));$$

Aqui se faz uma pausa nos cálculos para rememorar que o processamento ocorre a nível de índices, ou seja, cada intensidade é representada por seu índice. Como já avisado previamente no início desta ***nota explicativa***, considera-se que a linguagem de programação utilizada para o desenvolvimento deste exemplo indexa seus elementos de variáveis por índice inicial 1 (um). Para outros casos basta adequar corretamente os índices.

O ***histograma*** $H$ da imagem $I$, numericamente é, então:

$$H = \{9,\ 12,\ 6,\ 3\};$$

Aplicando-se a Equação 14 ao ***histograma*** $H$ calculado obtém-se o ***histograma normalizado*** $H'$.

$$H' = \frac{1}{Q}H;$$

$$H' = \frac{1}{30}\{9,\ 12,\ 6,\ 3\};$$

$$H' = \{0,3,\ 0,4,\ 0,2,\ 0,1\};$$

Para fins da aplicação da Equação 17 e formação do conjunto $T$ rememora-se que cada elemento do conjunto $H'$ é formado por $h'(l)$ (Equações 13 e 15). Como as intensidades são representadas por números inteiros a função de arredondamento será utilizada nos cálculos.

$$t(l) = arredondar\left((q-1)\sum_{r=1}^{l} h'(r)\right); \qquad \{l,\ q,\ r\ e\ T \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq l \leq q\}.$$

Dada a simplicidade da equação, será apresentado o desenvolvimento parcial de seu cálculo:

$$t(1) = arredondar\left((3)h'(1)\right) = arredondar\left(3 * 0,3\right) = 1;$$

$$t(2) = arredondar\left((3)(h'(1) + h'(2))\right) = arredondar\left(3 * (0,3 + 0,4)\right) = 2;$$

$$t(3) = arredondar\left((3)(h'(1) + h'(2) + h'(3))\right) = arredondar\left(3 * (0,3 + 0,4 + 0,2)\right) = 3;$$

$$t(4) = arredondar\left((3)(h'(1)+h'(2)+h'(3)+h'(4))\right) = arredondar\left(3*(0,3+0,4+0,2+0,1)\right) = 3;$$

Calculados os valores de $t(l)$ para a faixa dinâmica da imagem, tem-se os elementos do conjunto $T$:

$$T = \{1,\ 2,\ 3,\ 3\};$$

Conhecidos o histograma $H$ e a *PDF* $T$ é possível calcular previamente o histograma equalizado mesmo sem se aplicar a transformação de intensidades na imagem (Equações 19 e 20).

$$he(l) = \sum_{r=1}^{q} \delta\big(L(l) - T(r)\big)h(r);$$

$$he(1) = \delta\big(L(1) - T(1)\big)h(1) + \delta\big(L(1) - T(2)\big)h(2) + \delta\big(L(1) - T(3)\big)h(3) + \delta\big(L(1) - T(4)\big)h(4);$$

$$he(1) = \delta\big(0-1\big)9 + \delta\big(0-2\big)12 + \delta\big(0-3\big)6 + \delta\big(0-3\big)3;$$

$$he(1) = \big(0\big)9 + \big(0\big)12 + \big(0\big)6 + \big(0\big)3 = 0;$$

$$he(2) = \delta\big(L(2) - T(1)\big)h(1) + \delta\big(L(2) - T(2)\big)h(2) + \delta\big(L(2) - T(3)\big)h(3) + \delta\big(L(2) - T(4)\big)h(4);$$

$$he(2) = \delta\big(1-1\big)9 + \delta\big(1-2\big)12 + \delta\big(1-3\big)6 + \delta\big(1-3\big)3;$$

$$he(2) = \big(1\big)9 + \big(0\big)12 + \big(0\big)6 + \big(0\big)3 = 9;$$

$$he(3) = \delta\big(L(3) - T(1)\big)h(1) + \delta\big(L(3) - T(2)\big)h(2) + \delta\big(L(3) - T(3)\big)h(3) + \delta\big(L(3) - T(4)\big)h(4);$$

$$he(3) = \delta\big(2-1\big)9 + \delta\big(2-2\big)12 + \delta\big(2-3\big)6 + \delta\big(2-3\big)3;$$

$$he(3) = \big(0\big)9 + \big(1\big)12 + \big(0\big)6 + \big(0\big)3 = 12;$$

$$he(4) = \delta\big(L(4) - T(1)\big)h(1) + \delta\big(L(4) - T(2)\big)h(2) + \delta\big(L(4) - T(3)\big)h(3) + \delta\big(L(4) - T(4)\big)h(4);$$

$$he(4) = \delta\big(3 - 1\big)9 + \delta\big(3 - 2\big)12 + \delta\big(3 - 3\big)6 + \delta\big(3 - 3\big)3;$$

$$he(4) = \big(0\big)9 + \big(0\big)12 + \big(1\big)6 + \big(1\big)3 = 9;$$

Calculados os elementos $he(l)$ é possível formar o conjunto $He$, que é numericamente o ***histograma equalizado***:

$$He = \{0,\ 9,\ 12\ ,9\};$$

Observa-se que foi possível calcular previamente $He$ sem a necessidade de se realizar a transformação de intensidades na imagem $I$. Neste caso o ***histograma equalizado*** foi calculado como uma "estimativa".

A segunda forma de se obter o ***histograma equalizado*** é aplicar a operação de ***transformação de intensidade*** à imagem $I$, que gerará uma imagem de saída $I'$ equalizada, da qual se calcula o ***histograma***, onde a equalização da imagem provida pela ***transformação de intensidades*** será refletida no ***histograma***, que neste caso será o ***histograma equalizado***. Aplicando-se a função de ***transformação de intensidades*** (Equação 21) à imagem $I$ produz-se a ***imagem equalizada*** $I'$:

$$I' = \sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N}\sum_{l=1}^{q} \delta(I(m,n) - L(l))T(l);$$

Após a operação de ***transformação de intensidades*** a ***imagem equalizada*** $I'$ será:

$$I' = I'(m,n) = \begin{matrix} 1 & 1 & 3 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 2 & 3 & 3 \end{matrix} \qquad (26)$$

Neste caso, como a imagem a se calcular o ***histograma equalizado*** é a ***imagem equalizada***, para se obter os dados para o ***histograma equalizado*** $He$ aplica-se a Equação 11, porém aplicada à imagem $I'$:

$$H = \sum_{l=1}^{q}\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N} \delta(I'(m,n) - L(l));$$

$$H = \sum_{l=1}^{4}\sum_{m=1}^{5}\sum_{n=1}^{6} \delta(I(m,n) - L(l));$$

Após as contas o conjunto $H$ será formado por:

$$H = \{0,\ 9,\ 12\ ,9\};$$

Que é exatamente o conjunto $He$ calculado previamente:

$$He = \{0,\ 9,\ 12\ ,9\};$$

Por meio deste exemplo calculou-se o ***histograma***, o ***histograma normalizado*** e o **histograma equalizado** e comprovou-se que as duas formas propostas para o cálculo do ***histograma equalizado*** atingem os mesmos resultados, porém uma é estimativa sem alteração da imagem $I$ e a outra é resultado da imagem transformada $I'$.

## 2.2 Modelagem lógico-matemático

Do modelo matemático ao *script*.

A materialização de um software para a implementação do processamento de histogramas depende da tradução das equações matemáticas para comandos de linguagem de programação.

A tradução será desenvolvida passo-a-passo.

Os parâmetros sistemáticos serão informados de maneira arbitrária, seguindo o exemplo:

$$\begin{gathered} M = 5; \\ N = 6; \\ Q = M * N; \\ k = 2; \\ q = 2^k; \\ Deltai = 1; \\ l = 0:1:q-1; \\ L = l; \\ l = 1:1:q; \end{gathered}$$

$$I = \begin{matrix} [0 & 0 & 2 & 1 & 3 & 2; \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2; \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1; \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 & 2; \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 & 3] \end{matrix}$$

A função ***Delta de Dirac*** funciona como um comando condicional ***if***, podendo ser modelada para as condições lógicas de igualdade e desigualdade.

$$\delta(x-a) = \begin{cases} 1: & x = a; \quad resposta\,verdadeira; \\ 0: & x \neq a; \quad resposta\,falsa; \end{cases} \tag{27}$$

```
if(x==a)
    resposta verdadeira;
    else
        resposta falsa;
endif
```

Ou:

```
if(x!=a)
    resposta falsa;
    else
        resposta verdadeira;
endif
```

Outros testes lógicos podem envolver intervalos de valores, neste caso são apresentados dois exemplos que podem ser adaptados para formar outros testes, porém estes são suficientes para a compreensão dos testes de um intervalo.

No primeiro caso a função pode ser utilizada para a checagem das condições de um valor ser igual ou maior que um valor do intervalo ou se é menor. A matemática consiste basicamente da função ***Degrau unitário***, repetida aqui para fins de simplificação da interpretação:

$$U(x-a) = \begin{cases} 1 : x \geq a; & resposta\, verdadeira; \\ 0 : x < a; & resposta\, falsa; \end{cases}$$

A implementação da função para as condições estabelecidas pode ser realizada por meio do teste lógico:

```
if(x>=a)
    resposta verdadeira;
    else
        resposta falsa;
endif
```

Ou:

```
if(x<a)
    resposta falsa;
    else
        resposta verdadeira;
endif
```

Um outro teste lógico para ... testa valor em uma faixa de um intervalo:

$$U(x-a) - U(x-b) = \begin{cases} 1 : a \leq x < b; & resposta\, verdadeira; \\ 0 : fora\, do\, intervalo\, [a, b); & resposta\, falsa; \end{cases}$$

```
if((x>=a)&&(x<b))
    resposta verdadeira;
    else
        resposta falsa;
endif
```

Aplicando-se o conceito de limites um outro teste lógico pode ser realizado com uma pequena mudança de parâmetro para testar um valor em uma faixa de um intervalo.

$$\Delta b = \lim_{\Delta x \to b+} ((x + \Delta x) - x);$$

Com esta pequena diferença $\Delta b$ inserida corretamente no parâmetro da função como segue é possível limitar por igualdade ambos os lados do intervalo.

$$U(x-a) - U(x-(b+\Delta b)) = \begin{cases} 1 : a \leq x \leq b; & resposta\, verdadeira; \\ 0 : fora\, do\, intervalo\, [a, b]; & resposta\, falsa; \end{cases}$$

Esta pequena alteração no parâmetro da função reflete em pequena alteração no código e inclui o intervalo até o limite:

```
if((x>=a)&&(x<=b))
    resposta verdadeira;
    else
        resposta falsa;
endif
```

O comando de somatório pode ser representado pelo comando condicional de repetição *for* e as variáveis de contexto. O termo *operação* nos somatórios equivale a uma ou mais operações que sejam realizadas no somatório.

$$resposta = \sum_{valor\ inicial}^{valor\ final} operacao; \tag{28}$$

```
for(valorinicial=1:1:valorfinal)
    resposta+=operacao;
endfor
```

$$resposta = \sum_{A1}^{A2} \sum_{B1}^{B2} operacao; \tag{29}$$

```
for(A1=1:A2)
    for(B1=1:B2)
        resposta+=operacao;
    endfor
endfor
```

$$resposta = \sum_{A1}^{A2} \sum_{B1}^{B2} \sum_{C1}^{C2} operacao; \tag{30}$$

```
for(A1=1:A2)
    for(B1=1:B2)
        for(C1=1:C2)
            resposta+=operacao;
        endfor
    endfor
endfor
```

Apresentada a modelagem lógico-matemática procede-se na próxima seção à apresentação do código-fonte de um ***script*** que implementa o processamento do histograma.

## 2.3 Código-fonte

**Quadro 2.3 - Código-fonte do *script* estruturado para processamento de histograma**

```
clc;
clear all;
k=2;
q=2^k;
L=0:q-1;
M=5;
N=6;
Q=M*N;
h = 0; %inicialização da variável para uso posterior.
I = [0   0   2   1   3   2;
     0   0   0   1   1   2;
     0   0   1   1   1   1;
     0   1   3   1   1   2;
     0   2   1   1   2   3];

%Processamento do histograma
for(l=1:q)
  for(m=1:M)
    for(n=1:N)
      % Nesta comparação observa-se que a intensidade presente em I(m,n) é comparada à intensidade presente em L(l). Implementação da função Delta de Dirac com o deslocamento (l):
      if(I(m,n)==L(l))
        %Contagem dos elementos h(l) do conjunto H que representa numericamente o histograma:
        h(l)++;
      endif
    endfor
  endfor
endfor

%Formação do conjunto H que representa numericamente o histograma
H=h;

%Processamento do histograma normalizado
Hlinha = (1/Q)*H;

%Processamento do histograma equalizado
t = 0;

for(l=1:q)
  for(j=1:l)
   t(l)+=histograma(j);
```

```
    endfor
endfor

t = round((q-1)/(Q*t)); %Equação 3.3-8 p. 82.
%Equação 3.3-2 p. 80

Ilinha = zeros(M,N);
for(l=1:q)
  for(m=1:M)
    for(n=1:N)
      if(I(m,n)==L(l))
        Ilinha(m,n)=t(l);
      endif
    endfor
  endfor
endfor

he=0;

for(l=1:q)
  for(m=1:M)
    for(n=1:N)
      if(Ilinha(y,x)==L(l))
        he(l)++;
      endif
    endfor
  endfor
endfor

He=he;

a=2;
b=3;
subplot(a,b,1)
imshow(I,[])
title("Entrada");
subplot(a,b,2)
stem(H)
title("Histograma")
subplot(a,b,3)
stem(Hlinha)
title("Histograma normalizado")
subplot(a,b,4)
stem(t)
title("Curva de transformação")
subplot(a,b,5)
imshow(Ilinha,[])
title("Imagem equalizada")
subplot(a,b,6)
```

```
stem(He)
title("Histograma equalizado")
```

Fonte: Elaborado pelo Autor (2021).

**Quadro 2.3 - Código-fonte do *script* otimizado com vetorização *SIMD* para processamento de histograma**

```
clc;
clear all;

[arq cam] = uigetfile();

te=time;
printf("\nInstante de tempo inicial: %d.\n",te);

pathImagem = strcat(cam, arq);
prop=imfinfo(pathImagem);
k=prop.BitDepth;    %número de bits das intensidades da imagem
Imin=0;             %Intensidade mínima
Imax=(2^k)-1;       %Intensidade máxima
IMAX=Imax+1;
L=[Imin:1:Imax];    %L = faixa dinâmica do sistema (Atenção aos números
↪  inteiros)
M=prop.Height;
N=prop.Width;
I=imread(pathImagem);

H=zeros(1,IMAX);    % Histograma.
He=zeros(1,IMAX);  % Histograma equalizado.
PDF=zeros(1,IMAX); % Função de densidade de probabilidade (Do Inglês
↪  PDF).

for(l=1:IMAX)
  H(l)=sum(sum((L(l)==I(1:M,1:N))));
endfor
Hn=(1/(M*N))*H;     % Histograma normalizado. A ideia é calcular o
↪  percentual de
                    % contribuição de cada intensidade no todo da
                    ↪  imagem.

% Cálculo da função de densidade de probabilidade.
acum=0;
for(l=1:1:IMAX)
  PDF(l)=Hn(l)+acum;
  acum+=Hn(l);
endfor

% Função de transformação
T=ceil(Imax*PDF);
```

```

% Histograma equalizado, uma forma:
%for(l=1:1:IMAX)
%  for(r=1:1:IMAX)
%      He(l)+=(L(l)==T(r))*H(r);
%  endfor
%endfor

% Histograma equalizado, outra forma:
l=[1:IMAX];
for(r=1:1:IMAX)
  He(l)+=(L(l)==T(r))*H(r);
endfor

m=[1:M];
n=[1:N];
% Imagem de saída equalizada, uma forma:
% Ieq=zeros(M,N);
%  for(l=1:1:IMAX)
%      Ieq(m,n)=((I(m,n)==L(l))*T(l));
%  endfor

% Imagem de saída equalizada, outra forma:
Ieq(m,n)=T(I(m,n)+1);

tf=time;
printf("\nInstante de tempo final: %d.\nTempo decorrido:
 ↪  %d.\n",tf,tf-te);

figure(1,"name","Visão geral");
subplot(4,2,1)
imshow(I,[])
title("Imagem de entrada");

subplot(4,2,2)
imshow(Ieq,[])
grid("on");
title("Imagem equalizada");

subplot(4,2,3)
imshow(Ieq.-I,[])
grid("on");
title("Diferença I e Ieq");

subplot(4,2,4)
stem(H,".")
title("Histograma");
grid("on");
xlabel("Intensidades");
ylabel("Cômputo");
axis([0 Imax]);
xticks([0 floor(Imax/4) floor(Imax/2) floor(3*Imax/4) Imax]);
```

```


subplot(4,2,5)
stem(Hn,".")
grid("on");
title("Histograma normalizado");
xlabel("Intensidades");
ylabel("Cômputo");
axis([0 Imax]);
xticks([0 floor(Imax/4) floor(Imax/2) floor(3*Imax/4) Imax]);

subplot(4,2,6)
stem(PDF,".")
grid("on");
title("PDF - Função de densidade de probabilidade");
xlabel("Intensidades");
ylabel("Cômputo");
axis([0 Imax 0 1.05]);
xticks([0 floor(Imax/4) floor(Imax/2) floor(3*Imax/4) Imax]);

subplot(4,2,7)
stem(T,".")
grid("on");
title("Função de transformação");
xlabel("Intensidades");
ylabel("Cômputo");
axis([0 Imax 0 Imax]);
xticks([0 floor(Imax/4) floor(Imax/2) floor(3*Imax/4) Imax]);

subplot(4,2,8)
stem(He,".")
grid("on");
title("Histograma equalizado");
xlabel("Intensidades");
ylabel("Cômputo");
axis([0 Imax]);
xticks([0 floor(Imax/4) floor(Imax/2) floor(3*Imax/4) Imax]);


figure(2,"name","Comparativo E/S");

subplot(2,2,1)
imshow(I,[])
title("Imagem de entrada (I)");

subplot(2,2,2)
imshow(Ieq,[])
title("Imagem equalizada (Ieq)");

subplot(2,2,3)
imshow(Ieq.-I,[])
title("Diferença entre Ieq e I");
```

```

figure(3,"name","Entrada");
imshow(I,[])
title("Imagem de entrada (I)");

figure(4,"name","Saída");
imshow(Ieq,[])
title("Imagem equalizada (Ieq)");

figure(5,"name","Diferença entre Saída e Entrada");
imshow(Ieq.-I,[])
title("Diferença entre Ieq e I");
```

Fonte: Elaborado pelo Autor.

Espera-se que a abordagem desta ***nota explicativa*** tenha sido suficiente para iniciar o processo de estudo de processamento de histograma de imagens. Para amplo e completo entendimento do assunto recomenda-se realizar o acesso ao tópico ***Representação e modelagem matemática de imagens digitais*** disponível na sala virtual da disciplina e também a leitura da seção ***3.3 Processamento de histograma*** do ***Capítulo 3*** do livro texto da disciplina [1].

# Referências

[1] R. C. GONZALEZ and R. E. WOODS, ***Processamento Digital de Imagens***. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 3 ed., 2010. Revisão técnica: Marcelo Vieira e Maurício Escarpinati; [tradução Cristina Yamagami e Leonardo Piamonte].