

Departamento da Área de Informática

**Curso:** Bacharelado em Engenharia da Computação **Semestre:** 9

**Curso:** Bacharelado em Engenharia de Controle e Automação **Semestre:** Optativa

**Disciplina:** Processamento Digital de Imagens.

**Professor:** Esp. Giuliano Robledo Zucoloto Moreira.

Cuiabá-MT, 28 de julho de 2022.

### NOTA EXPLICATIVA

**Tópico: Representação e modelagem matemática de imagens digitais**

## Introdução

Esta nota foi redigida para servir de instrumento norteador para os estudos referentes ao tópico representação e modelagem matemática de imagens digitais da ementa da disciplina; o escopo não esgota o conteúdo sobre o tópico da ementa, apenas orienta.

Esta nota foi aproveitada para além de apresentar a modelagem matemática, tratar da modelagem das probabilidades e estatísticas da imagem. Desta forma ora considera-se a imagem como uma imagem ora como um espaço amostral.

A modelagem apresentada nesta nota está direcionada à implementação computacional. Os modelos são geralmente desenvolvidos para duas situações: utilização nas linguagens que permitem *indexação de variáveis* por **0** (zero) e nas que permitem indexação por **1** (um). Salvo exceções, a abordagem apresenta primeiro o desenvolvimento de raciocínio que atua na indexação por **0** (zero), seguido do desenvolvimento para indexação por **1** (um).

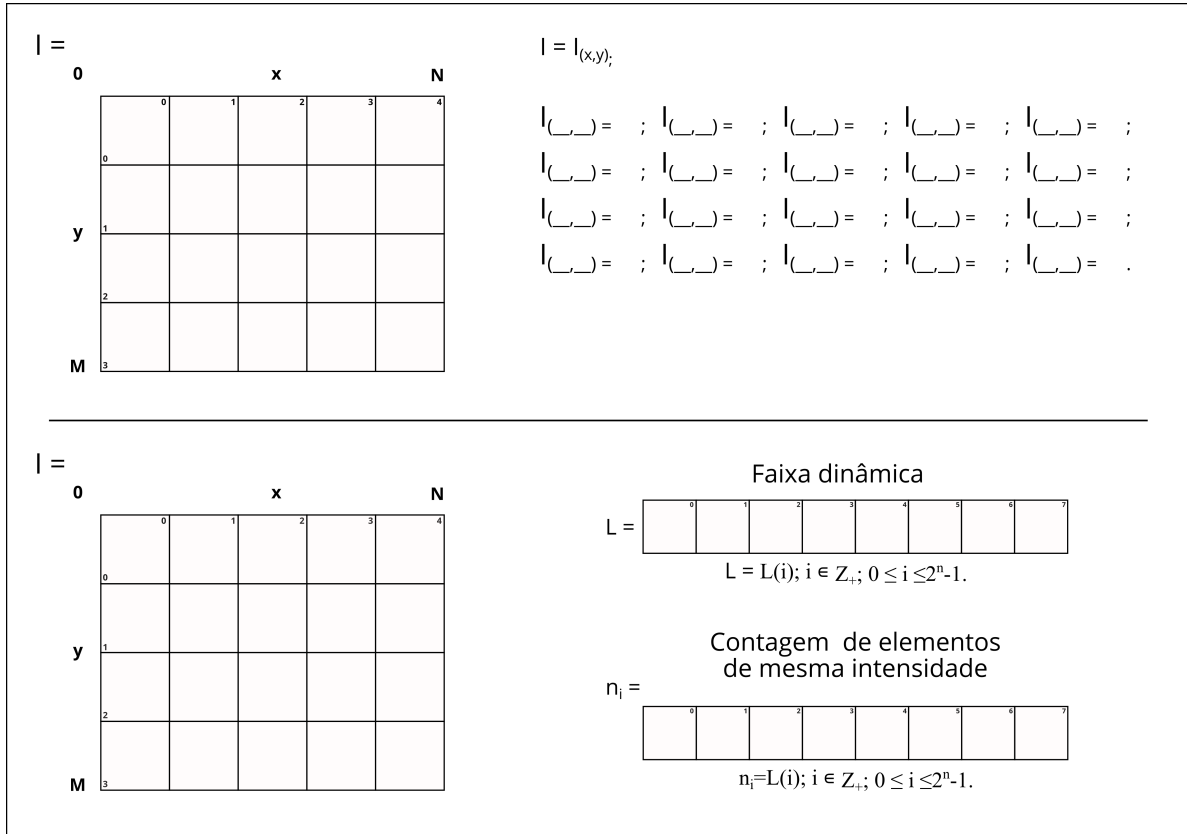
Além da leitura desta nota explicativa, recomenda-se a leitura do livro utilizado como texto na disciplina [1], conforme estabelecido na bibliografia básica no Projeto Pedagógico do Curso (PPC).

Para desenvolvimento do conteúdo são apresentadas subseções que tem interseção com atividades interativas com o Professor da disciplina via meio eletrônico.

# 1 Modelo matemático básico de uma imagem digital

## 1.1 Explicações interativas síncronas/assíncronas

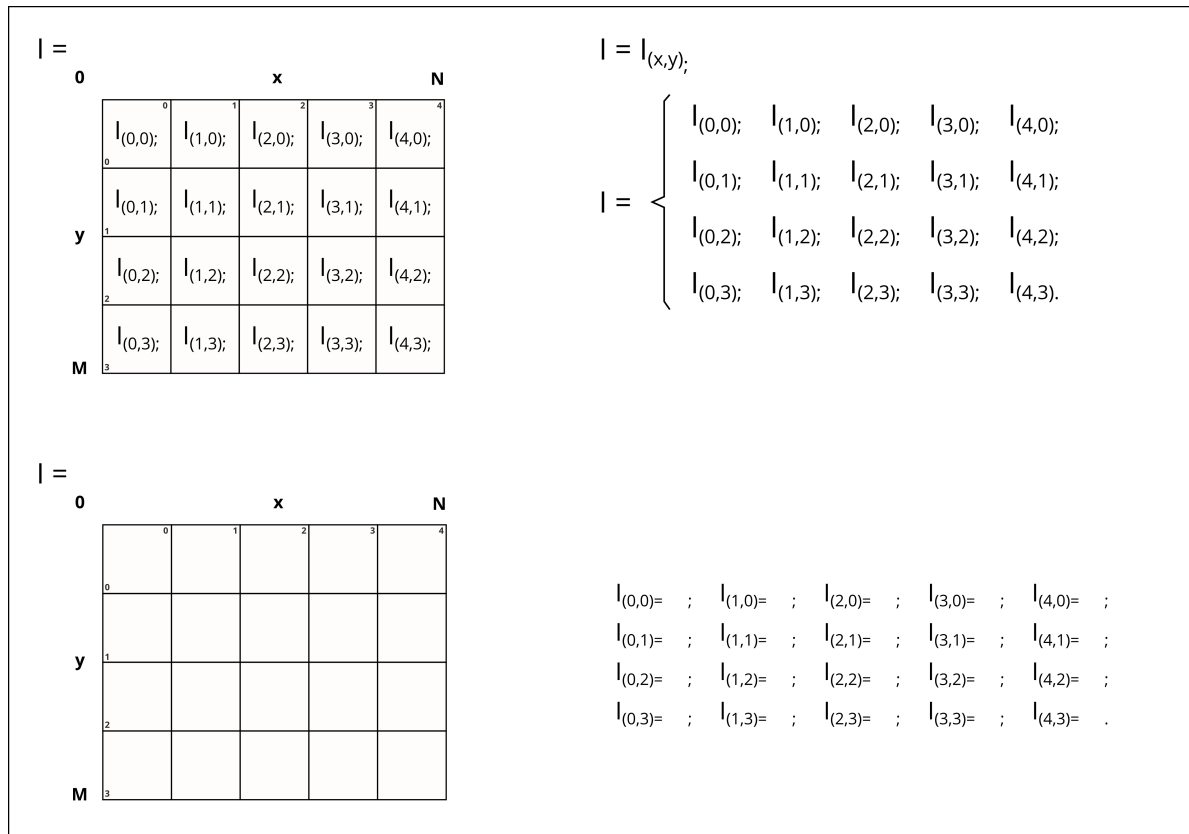
Figura 1: Explicação interativa 01



Fonte: Elaborado pelo Autor.

Anotações:

Figura 2: Explicação interativa 02



Fonte: Elaborado pelo Autor.

Anotações:

## 1.2 Base teórica

Uma imagem digital  $I$  pode ser interpretada como **um conjunto finito de elementos pictóricos indexados**. Para o contexto do estudo da disciplina, se a imagem possuir apenas uma camada de elementos pictóricos o modelo se restringe a apenas três variáveis: as coordenadas cartesianas e o nível de intensidade, conforme Equação 1. Para imagens com mais de uma camada, além das coordenadas cartesianas dos elementos pictóricos, há necessidade de se mapear a intensidade e o índice da camada a que estão associados entre outras informações. A Equação 2 generaliza a modelagem.

$$I = I(x, y) \mid \{x \in \mathbb{Z}_+; 0 \leq x \leq N - 1; y \in \mathbb{Z}_+; 0 \leq y \leq M - 1\}; \quad (1)$$

$$I = I(x, y, a, b, c, \dots) \mid \{x \in \mathbb{Z}_+; 0 \leq x \leq N - 1; y \in \mathbb{Z}_+; 0 \leq y \leq M - 1; \dots\}; \quad (2)$$

Em ambas Equações (1 e 2), os índices foram ajustados para indexação por **0** (zero),  $x$  e  $y$  representam as coordenadas cartesianas dos elementos pictóricos e  $M$  e  $N$  representam respectivamente o número de elementos pictóricos que compõem as linhas e as colunas da imagem, o que grosseiramente interpreta-se como “as dimensões” da imagem.

As Equações 3 e 4 apresentam o modelo para indexação por **1** (um).

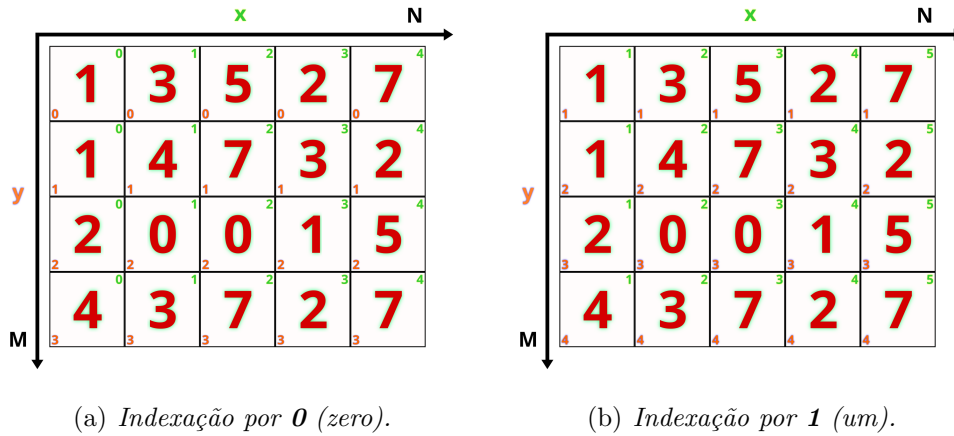
$$I = I(x, y) \mid \{x \in \mathbb{Z}_+; 1 \leq x \leq N; y \in \mathbb{Z}_+; 1 \leq y \leq M\}; \quad (3)$$

$$I = I(x, y, a, b, c, \dots) \mid \{x \in \mathbb{Z}_+; 1 \leq x \leq N; y \in \mathbb{Z}_+; 1 \leq y \leq M; \dots\}; \quad (4)$$

O valor da intensidade ou tom ( $I(x, y)$ ), que geralmente pode ser um valor binário, inteiro ou decimal, é mapeado no processo de aquisição ou sintetização da imagem dentro de um intervalo previamente determinado, intervalo que pode ser chamado de **faixa dinâmica**. Detalhes sobre a **faixa dinâmica** são apresentados na Subseção 2.2.

A Figura 6 apresenta uma imagem mapeada como um espaço amostral indexado por **0** (zero) 3(a) e por **1** (um) 3(b).

Figura 3: Imagem como espaço amostral



Fonte: Elaborado pelo Autor.

Respectivamente, nos quadros 1 e 2 são apresentadas a aplicação das equações 1 e 3 no mapeamento das intensidades dos pixels contidos nas imagens 3(a) e 3(b).

**Quadro 1: Aplicação da Equação 1 ao espaço amostral apresentado na Figura 3(a).**

$$\begin{aligned} I(0,0) &= 1; & I(1,0) &= 3; & I(2,0) &= 5; & I(3,0) &= 2; & I(4,0) &= 7; \\ I(0,1) &= 1; & I(1,1) &= 4; & I(2,1) &= 7; & I(3,1) &= 3; & I(4,1) &= 2; \\ I(0,2) &= 2; & I(1,2) &= 0; & I(2,2) &= 0; & I(3,2) &= 1; & I(4,2) &= 5; \\ I(0,3) &= 4; & I(1,3) &= 3; & I(2,3) &= 7; & I(3,3) &= 2; & I(4,3) &= 7. \end{aligned}$$

Fonte: Elaborado pelo Autor.

**Quadro 2: Aplicação da Equação 3 ao espaço amostral apresentado na Figura 3(b).**

$$\begin{aligned} I(1,1) &= 1; & I(2,1) &= 3; & I(3,1) &= 5; & I(4,1) &= 2; & I(5,1) &= 7; \\ I(1,2) &= 1; & I(2,2) &= 4; & I(3,2) &= 7; & I(4,2) &= 3; & I(5,2) &= 2; \\ I(1,3) &= 2; & I(2,3) &= 0; & I(3,3) &= 0; & I(4,3) &= 1; & I(5,3) &= 5; \\ I(1,4) &= 4; & I(2,4) &= 3; & I(3,4) &= 7; & I(4,4) &= 2; & I(5,4) &= 7. \end{aligned}$$

Fonte: Elaborado pelo Autor.

## 2 Métodos probabilísticos, estatísticos e imagens digitais

Um caminho para geração de estatísticas de uma imagem é interpreta-la como um espaço amostral de acordo com o modelo matemático bidimensional genérico, representado graficamente nas Figuras 3(a) e 3(b). Cada elemento do espaço amostral representa um píxel da imagem. O número em destaque na cor vermelho apresentado no centro de cada elemento representa a intensidade mapeada no píxel da imagem, os índices subscritos na cor verde estão relacionados ao *eixo x* e os índices subscritos na cor laranja ao *eixo y*. As dimensões do espaço amostral são respectivamente  $N$  e  $M$ , ambos números inteiros positivos, onde neste caso  $N = 5$  e  $M = 4$ .

Tomando por base o sistema de indexação iniciado por 0 (zero), aplicar a Equação 1 ao espaço amostral apresentado na Figura 3(a) resulta em efetuar o mapeamento apresentado no Quadro 1. Este mapeamento auxilia na rápida interpretação cartesiana dos elementos do espaço amostral, o que é útil para facilitar a compreensão das operações computacionais de processamento da imagem.

### 2.1 Contagem dos elementos do espaço amostral

A primeira informação de interesse probabilístico e estatístico é a contagem geral de elementos ( $K$ ) do espaço amostral, pois está é a base para a realização de diversas operações de probabilidade e estatística.

A contagem geral de elementos ( $K$ ) do espaço amostral pode ser obtida pela contagem dos elementos, elemento a elemento, ou facilmente pelo cálculo do produto das dimensões da imagem, conforme apresentado na Equação 5:

$$K = MN; \quad M \in \mathbb{Z}_+; \quad N \in \mathbb{Z}_+; \quad (5)$$

Esta contagem está relacionada às probabilidades e estatísticas **globais** da imagem, porém há situações em que se faz necessária a contagem de apenas um segmento de elementos da imagem numa região de interesse, neste caso  $K$  está relacionada às dimensões do processamento **local**. Para distinguir entre as contagens, faz-se referência à contagem **local** como:

$$K_{local} = M_{local}N_{local}; \quad M_{Local} \in \mathbb{Z}_+; \quad N_{Local} \in \mathbb{Z}_+; \quad (6)$$

Onde:

$K_{local}$ : é a contagem **local** de elementos e

$M_{local}$  e  $N_{local}$  respectivamente as dimensões da região de interesse **local**.

## 2.2 Contagem de elementos de mesma intensidade ( $n_i$ ) no espaço amostral

A contagem de elementos de mesma intensidade ( $n_i$ ) no espaço amostral, além de outras, permite a computação de um poderoso descritor de imagem, o histograma, porém esta seção trata da modelagem do processo de contagem discriminada dos elementos de mesma intensidade presentes na amostra.

Na contagem das intensidades deve ser levada em conta a **faixa dinâmica** ( $L$ ) da imagem, que é o **intervalo** onde as intensidades são mapeadas geralmente de **forma monotonicamente crescente**, onde cada tom de cor tem seu **índice inteiro**  $i$  correspondente. A **quantidade de tons** ( $Q$ ) presentes na **faixa dinâmica** é limitada pela quantidade de **bits** ( $n$ ) utilizada para representar o índice de cada tom ( $i$ ). Há casos em que o próprio índice do tom representa o tom. Atenção para não haver conflito de informação entre  $n$ , que é o número de bits da faixa dinâmica, e  $n_i$ , que é a contagem indexada dos elementos de mesma intensidade na imagem. A Figura 4 apresenta uma modelagem como vetor computacional para a **faixa dinâmica** de uma imagem mapeada em 8 **bits** ( $n$ ) e indexada por **0** (zero).

A **quantidade de tons** é calculada conforme a Equação 7:

$$Q = 2^n; \quad Q \in \mathbb{Z}_+; \quad n \in \mathbb{Z}_+; \quad (7)$$

Sabendo-se a **quantidade de tons** que se pode mapear, levando em conta o tom 0 (**zero**) e o tom de **fundo de escala**, divide-se o **valor** ( $V_L$ ) que representa o tom de **fundo de escala** pela quantidade de tons ( $Q$ ) que pode ser representada na **faixa dinâmica** subtraída de uma unidade. Tal operação retorna o **degrau** ( $\Delta_L$ ) da **faixa dinâmica**. O cálculo deste degrau é realizado conforme a Equação 8:

$$\Delta_L = \frac{V_L}{Q - 1}; \quad (8)$$

Figura 4: Faixa dinâmica (L) indexada por 0 (zero)

$$L$$

$i\Delta_L$	$i\Delta_L$	$i\Delta_L$	$i\Delta_L$	...	$i\Delta_L$
$i=0$	$i=1$	$i=2$	$i=3$		$i=2^n-1$

(a) Notação geral

$$L$$

$0\Delta_L$	$1\Delta_L$	$2\Delta_L$	$3\Delta_L$	...	$(2^n-1)\Delta_L$
0	1	2	3		$2^n-1$

(b) Substituição ( $i$ )

$$L$$

0	1	2	3	...	255
0	1	2	3		255

$$\Delta_L=1;$$

(c) Intensidades ( $\mathbb{Z}_+$ )

$$L$$

0	0,00392	0,00784	0,01176	...	1
0	1	2	3		255

$$\Delta_L \approx 0,00392;$$

(d) Intensidades ( $\mathbb{Q}_+$ )

Considerando a **faixa dinâmica** como um vetor, o **mapeamento dos índices** pode ser realizado de duas formas, considerando o índice inicial como 0 (**zero**) ou considerando o índice inicial como 1 (**um**), o que depende geralmente da linguagem de programação utilizada. As Equações 9 e 10 apresentam as respectivas formas.

$$L = 0 \leq i \leq Q - 1; \quad i \in \mathbb{Z}_+; \quad Q \in \mathbb{Z}_+; \quad (9)$$

$$L = 1 \leq i \leq Q; \quad i \in \mathbb{Z}_+; \quad Q \in \mathbb{Z}_+; \quad (10)$$

Estabelecido o conjunto de índices da **faixa dinâmica**, procede-se à associação entre os índices e os tons, de acordo com peculiaridade da linguagem de programação. Para indexação por 0 (**zero**) o mapeamento pode ser realizado de acordo com a Equação 11, e para indexação por 1 (**um**), conforme Equação 12.

$$L(i) = i\Delta_L; \quad i \in \mathbb{Z}_+; \quad 0 \leq i \leq Q - 1; \quad (11)$$

$$L(i) = \Delta_L(i - 1); \quad i \in \mathbb{Z}_+; \quad 1 \leq i \leq Q; \quad (12)$$

Esta abordagem sobre a **faixa dinâmica** se fez necessária para que quem lê compreenda a aplicação da mesma no modelo de contagem de elementos de mesma intensidade.

A base da modelagem da contagem é a função **Delta de Dirac** ( $\delta$ ), que possibilita a captura seletiva de amostras. **Por definição** a função **Delta de Dirac** só existe onde na coordenada **zero**, tem **amplitude** infinita e **área** igual à unidade (um). Fora da coordenada **zero** a função

**Delta de Dirac** vale **zero**. A função é apresentada na Equação 13:

$$\delta(x) = \begin{cases} 1 : & x = 0 \\ 0 : & x \neq 0 \end{cases}; \quad (13)$$

Com pequena modificação no argumento a função **Delta de Dirac** pode ser deslocada ao longo do intervalo em que está aplicada, passando a valer uma unidade de área no ponto onde ocorreu o deslocamento, e zero em qualquer outro ponto. A Equação 14 apresenta a função **Delta de Dirac** modificada pela operação de **deslocamento**:

$$\delta(x - a) = \begin{cases} 1 : & x = a \\ 0 : & x \neq a \end{cases}; \quad (14)$$

O deslocamento funciona pelo fato de no ponto em que  $x = a$  o argumento  $x - a$  se torna *zero*, condição necessária **por definição** para a função ter área igual à unidade.

A extensão da função **Delta de Dirac** para **duas variáveis** implica a aplicação de sua **definição** também em **duas variáveis**, ou seja, a função será igual à **unidade** quando as **duas variáveis** forem iguais a **zero** no argumento da função, e **zero** em qualquer outra situação. A Equação 15 apresenta a expansão da função para **duas variáveis**.

$$\delta(x, y) = \begin{cases} 1 : & x = 0 \text{ e } y = 0 \\ 0 : & x \neq 0 \text{ ou } y \neq 0 \end{cases}; \quad (15)$$

Na Equação 16 é apresentado o modelo da função **Delta de Dirac** expandida para **duas variáveis** com os argumentos modificados para implementar a operação de **deslocamento**:

$$\delta(x - a, y - b) = \begin{cases} 1 : & x = a \text{ e } y = b \\ 0 : & x \neq a \text{ ou } y \neq b \end{cases}; \quad (16)$$

A contagem de elementos de mesma intensidade ( $n_i$ ) no espaço amostral é realizada por meio de uma associação entre as dimensões do espaço amostral, os índices dos tons da **faixa dinâmica** utilizada e a função **Delta de Dirac**. As dimensões do espaço amostral são utilizadas nos índices dos somatórios de forma a limitar a varredura nas amostras; os índices de tons são utilizados para localizar na faixa dinâmica o tom a ser comparado e a função **Delta de Dirac** para selecionar apenas amostras cuja intensidade  $I(x, y)$  sejam iguais ao tom apontado pela intensidade  $L(i)$  sob análise.

No aspecto **global**, a função que implementa a contagem geral de elementos de mesma intensidade ( $n_i$ ) pode ser escrita conforme apresentam as Equações 17 e 18, de acordo com as restrições de indexação das linguagens de programação:

$$n_i = \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{M-1} \delta(I(x, y) - L(i)); \quad \text{para } i \in \mathbb{Z}_+; \quad 0 \leq i \leq Q - 1; \quad (17)$$

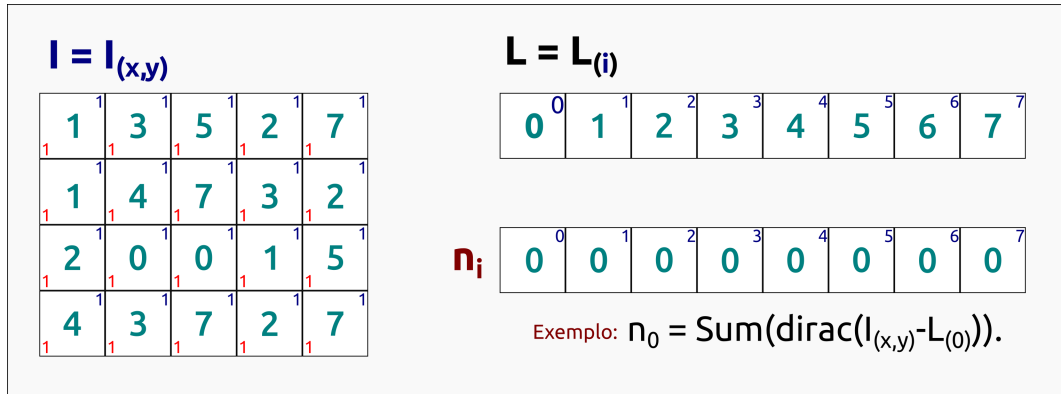
$$n_i = \sum_{x=1}^N \sum_{y=1}^M \delta(I(x, y) - L(i)); \quad \text{para } i \in \mathbb{Z}_+; \quad 1 \leq i \leq Q; \quad (18)$$

A variável  $i$  nos argumentos da Equações 17 e 18 faz referência ao **índice** da intensidade que se deseja mapear. Reforça-se que utilizar o índice da intensidade permite a varredura para qualquer tipo de representação intensidade. Em linguagens de programação que permitem a indexação por índice **1** é necessário alterar os limites do conjunto que representa a variável  $i$ , que passa a ser representado como  $i \in \mathbb{Z}_+ \mid 1 \leq i \leq Q$ . A Figura 5 exemplifica a contagem de ocorrências de uma intensidade ( $L_{(0)}$ ) para uma imagem indexada por índice 0 (zero) e aponta os pontos onde ocorre processamento por índices.

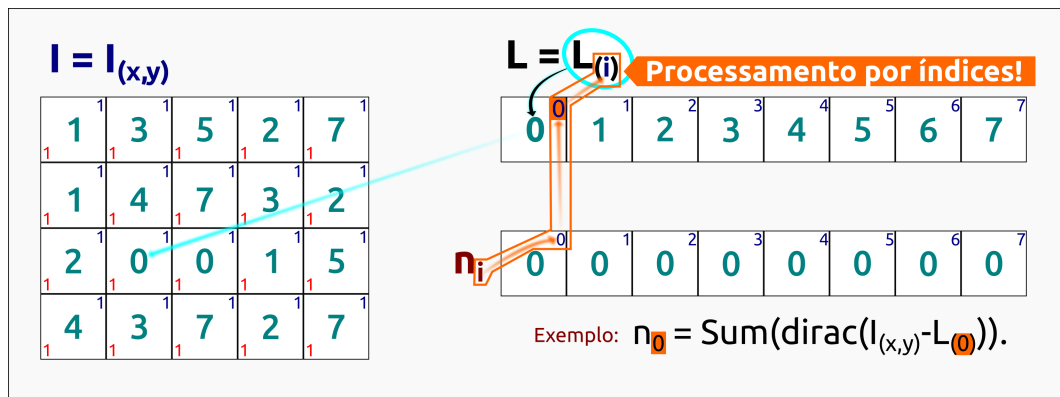
O resultado da aplicação da Equação 17 é apresentado no Quadro 3. A Figura 3(a) é repetida no interior do quadro para simplificar o entendimento. Caso tenha interesse, para fins de demonstração, a aplicação passo-a-passo da Equação 17 ao espaço amostral da Figura 3(a) foi disponibilizada no **Apêndice**. A aplicação da Equação 18 à Figura 3(b) é uma operação análoga conforme apresenta o Quadro 4.



Figura 5: Contagem de elementos  $n_i$  com indexação por 0 (zero)



(a) Primeira vista do cenário da contagem de elementos  $n_i$ .



(b) Detalhamento da operação sobre índices e sobre os valores das intensidades

**Quadro 3: Aplicação da Equação 17 ao espaço amostral apresentado na Figura 3(a).**

$$n(0) = 2;$$

$$n(1) = 3;$$

$$n(2) = 4;$$

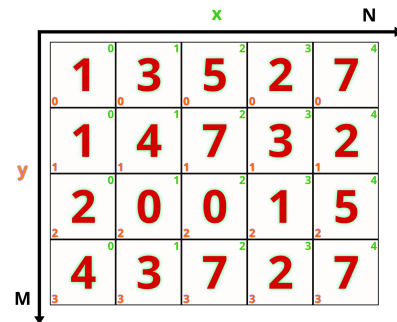
$$n(3) = 3;$$

$$n(4) = 2;$$

$$n(5) = 2;$$

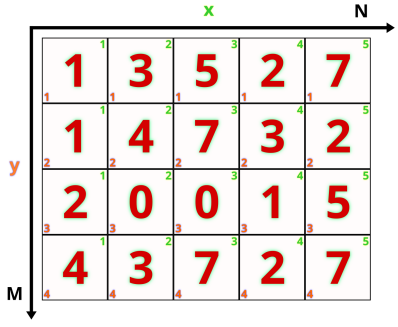
$$n(6) = 0;$$

$$n(7) = 4.$$



Observe que em  $n_i$ , o  $i$  refere-se ao índice do tom na **faixa dinâmica** e não o valor da intensidade.

Fonte: Elaborado pelo Autor.

Quadro 4: Aplicação da Equação 18 ao espaço amostral apresentado na Figura 3(b).	
$n(1) = 2;$ $n(2) = 3;$ $n(3) = 4;$ $n(4) = 3;$ $n(5) = 2;$ $n(6) = 2;$ $n(7) = 0;$ $n(8) = 4.$	 <p>Observe que em <math>n_i</math>, o <math>i</math> refere-se ao índice do tom na <b>faixa dinâmica</b> e não o valor da intensidade.</p>

Fonte: Elaborado pelo Autor.

Trazendo a abordagem para o aspecto computacional de forma a generalizar o modelo, para fins de entendimento rápido,  $n_i$  é uma **matriz bidimensional**, de duas colunas distintas, onde na primeira coluna se armazena o tom da imagem e na segunda, a contagem geral dos elementos preenchidos com a intensidade relacionada ao tom. Quando o tom é representado por número de ponto flutuante é possível fazer um mapeamento indexando os tons a números inteiros.

É comum que hajam imagens preenchidas sem a utilização de todos os tons presentes na **faixa dinâmica**. Neste caso o uso de **matrizes** não é recomendado pelo fato de haver reserva estática de memória. É uma situação onde cabe o uso do recurso computacional **lista**, pois possibilita a alocação de memória de forma dinâmica, o que pode evitar a ocupação de memória para contagens nulas, e sua estrutura pode ser construída e visualizada de forma análoga a uma **matriz**.

Dependendo a forma com que a estrutura da **lista** é construída é possível produzir “imediatamente” o histograma da imagem e obter de forma rápida probabilidades e estatísticas e realizar de forma praticamente instantânea operações de transformação de intensidade.

## 2.3 Probabilidade

A probabilidade é uma possibilidade de algo acontecer dentro de um dado contexto, ou não. No **PDI** o interesse está em aferir a probabilidade de uma intensidade ( $P_i$ ) presente na **faixa dinâmica** ocorrer no **espaço amostral** da imagem. Esta probabilidade segue a regra geral de cálculo de probabilidade, que foi adaptada ao contexto, e é apresentada nas Equações 19 e 20, sendo  $i$  o **índice** da intensidade na **faixa dinâmica**, conforme cada variação de linguagem de programação:

$$P_i = \frac{n_i}{MN}; \quad n_i \in \mathbb{Z}_+; \quad 0 \leq i \leq Q - 1; \quad (19)$$

$$P_i = \frac{n_i}{MN}; \quad n_i \in \mathbb{Z}_+; \quad 1 \leq i \leq Q; \quad (20)$$

Como regra geral de probabilidade, a soma de todas as probabilidades é igual a 1 (um), conforme as Equações 21 e 22, considerando a indexação de cada linguagem de programação:

$$\sum_{i=0}^{Q-1} P_i = 1; \quad i \in \mathbb{Z}_+; \quad (21)$$

$$\sum_{i=1}^Q P_i = 1; \quad i \in \mathbb{Z}_+; \quad (22)$$

## 2.4 Estatística e imagens digitais

A estatística é uma ferramenta que permite retratar dados e realizar inferências sobre estes indo além de um simples olhar numérico. O estudo inicia pelo cálculo da função de **média aritmética simples**, que possibilita facilmente a obtenção de outros dois parâmetros estatísticos, o **desvio padrão** e a **variância**, e prossegue com outras funções, algumas lineares, outras não.

Quando se trata de processamento local geralmente os cálculos são realizados com base no **pixel central** do espaço onde se realiza o cálculo e este por sua vez corriqueiramente é realizado por operação de convolução entre o espaço da imagem e um elemento chamado de **kernel**, que normalmente tem dimensões ímpares inteiras ( $\mathbb{Z}_+$ ). As dimensões do **kernel** são representadas por meio das variáveis  $S$ , para o sentido de  $x$  e  $T$  para o sentido de  $y$ . Nota específica trata da operação de convolução.

## 2.5 Média aritmética simples global

A **média aritmética simples global** ( $M_{ASG}$ ) pode ser calculada por meio da Equação 23 (ou 24):

$$M_{ASG} = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} I(x, y); \quad (23)$$

$$M_{ASG} = \frac{1}{MN} \sum_{x=1}^M \sum_{y=1}^N I(x, y); \quad (24)$$

## 2.6 Média aritmética simples local

A **média aritmética simples local** ( $M_{ASL(x,y)}$ ) pode ser calculada por meio da Equação 25:

$$M_{ASL(x,y)} = \frac{1}{ST} \sum_{s=-\frac{(S-1)}{2}}^{\frac{(S-1)}{2}} \sum_{t=-\frac{(T-1)}{2}}^{\frac{(T-1)}{2}} I(x+s, y+t); \quad S \in \mathbb{Z}_+; \quad T \in \mathbb{Z}_+; \quad (25)$$

Onde  $S$  e  $T$  são as dimensões da região onde a média é calculada.

## 2.7 Exercício

Figura 6: Exercício de fixação 01

### Exercício de fixação

Preencha a faixa dinâmica (L) com valores inteiros de intensidade monotonicamente crescentes entre 0 e 7 inclusive. Arbitre aleatoriamente um valor de intensidade da faixa dinâmica para cada píxel da matriz I; o preenchimento aleatório deve incluir menos três tons diferentes na matriz I; mapeie os píxels da matriz I na função  $I_{(x,y)}$ ; registre no vetor  $n_i$  a contagem de elementos de mesma intensidade mapeados na matriz I de acordo com o índice da faixa dinâmica; realizados estes procedimentos, responda às perguntas do exercício.

$I =$

<b>0</b>	<b>x</b>	<b>N</b>
	0    1    2    3    4	
<b>y</b>	1	
	2	
<b>M</b>	3	

$I = I_{(x,y)}$

$I_{(\_)} = \_ ; I_{(\_)} = \_ ; I_{(\_)} = \_ ; I_{(\_)} = \_ ; I_{(\_)} = \_ ;$   
 $I_{(\_)} = \_ ; I_{(\_)} = \_ ; I_{(\_)} = \_ ; I_{(\_)} = \_ ; I_{(\_)} = \_ ;$   
 $I_{(\_)} = \_ ; I_{(\_)} = \_ ; I_{(\_)} = \_ ; I_{(\_)} = \_ ; I_{(\_)} = \_ ;$   
 $I_{(\_)} = \_ ; I_{(\_)} = \_ ; I_{(\_)} = \_ ; I_{(\_)} = \_ ; I_{(\_)} = \_ .$

$L =$

0	1	2	3	4	5	6	7
---	---	---	---	---	---	---	---

$L = L(i); i \in \mathbb{Z}_+; 0 \leq i \leq 2^n - 1.$

$n_i =$

0	1	2	3	4	5	6	7
---	---	---	---	---	---	---	---

$i \in \mathbb{Z}_+; 0 \leq i \leq 2^n - 1.$

Quais são as dimensões da imagem?  
 Qual a maior intensidade presente na imagem?  
 Quantos bits são necessários para representar a maior intensidade presente na imagem?  
 Qual a menor intensidade presente na imagem?  
 Qual a intensidade média da imagem?  
 Qual(is) a(s) coordenada(s) do(s) píxel(s) de maior intensidade presente(s) na imagem?  
 Qual(is) a(s) coordenada(s) do(s) píxel(s) de menor intensidade presente(s) na imagem?

Fonte: Elaborado pelo Autor.

## Referências

- [1] R. E. GONZALEZ, Rafael C.; WOODS, *Processamento Digital de Imagens*. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 3 ed., 2010. Revisão técnica: Marcelo Vieira e Maurício Escarpinati; [tradução Cristina Yamagami e Leonardo Piamonte].

### 3 Apêndice

Apresentação da aplicação da Equação 17 ao espaço amostral apresentado na Figura 3(a).

$$n(0) =$$

$$\begin{aligned} &\delta(I(1,1) - L(0)) + \delta(I(2,1) - L(0)) + \delta(I(3,1) - L(0)) + \delta(I(4,1) - L(0)) + \delta(I(5,1) - L(0)) + \\ &\delta(I(1,2) - L(0)) + \delta(I(2,2) - L(0)) + \delta(I(3,2) - L(0)) + \delta(I(4,2) - L(0)) + \delta(I(5,2) - L(0)) + \\ &\delta(I(1,3) - L(0)) + \delta(I(2,3) - L(0)) + \delta(I(3,3) - L(0)) + \delta(I(4,3) - L(0)) + \delta(I(5,3) - L(0)) + \\ &\delta(I(1,4) - L(0)) + \delta(I(2,4) - L(0)) + \delta(I(3,4) - L(0)) + \delta(I(4,4) - L(0)) + \delta(I(5,4) - L(0)); \end{aligned}$$

$$n(1) =$$

$$\begin{aligned} &\delta(I(1,1) - L(1)) + \delta(I(2,1) - L(1)) + \delta(I(3,1) - L(1)) + \delta(I(4,1) - L(1)) + \delta(I(5,1) - L(1)) + \\ &\delta(I(1,2) - L(1)) + \delta(I(2,2) - L(1)) + \delta(I(3,2) - L(1)) + \delta(I(4,2) - L(1)) + \delta(I(5,2) - L(1)) + \\ &\delta(I(1,3) - L(1)) + \delta(I(2,3) - L(1)) + \delta(I(3,3) - L(1)) + \delta(I(4,3) - L(1)) + \delta(I(5,3) - L(1)) + \\ &\delta(I(1,4) - L(1)) + \delta(I(2,4) - L(1)) + \delta(I(3,4) - L(1)) + \delta(I(4,4) - L(1)) + \delta(I(5,4) - L(1)); \end{aligned}$$

$$n(2) =$$

$$\begin{aligned} &\delta(I(1,1) - L(2)) + \delta(I(2,1) - L(2)) + \delta(I(3,1) - L(2)) + \delta(I(4,1) - L(2)) + \delta(I(5,1) - L(2)) + \\ &\delta(I(1,2) - L(2)) + \delta(I(2,2) - L(2)) + \delta(I(3,2) - L(2)) + \delta(I(4,2) - L(2)) + \delta(I(5,2) - L(2)) + \\ &\delta(I(1,3) - L(2)) + \delta(I(2,3) - L(2)) + \delta(I(3,3) - L(2)) + \delta(I(4,3) - L(2)) + \delta(I(5,3) - L(2)) + \\ &\delta(I(1,4) - L(2)) + \delta(I(2,4) - L(2)) + \delta(I(3,4) - L(2)) + \delta(I(4,4) - L(2)) + \delta(I(5,4) - L(2)); \end{aligned}$$

$$n(3) =$$

$$\begin{aligned} &\delta(I(1,1) - L(3)) + \delta(I(2,1) - L(3)) + \delta(I(3,1) - L(3)) + \delta(I(4,1) - L(3)) + \delta(I(5,1) - L(3)) + \\ &\delta(I(1,2) - L(3)) + \delta(I(2,2) - L(3)) + \delta(I(3,2) - L(3)) + \delta(I(4,2) - L(3)) + \delta(I(5,2) - L(3)) + \\ &\delta(I(1,3) - L(3)) + \delta(I(2,3) - L(3)) + \delta(I(3,3) - L(3)) + \delta(I(4,3) - L(3)) + \delta(I(5,3) - L(3)) + \\ &\delta(I(1,4) - L(3)) + \delta(I(2,4) - L(3)) + \delta(I(3,4) - L(3)) + \delta(I(4,4) - L(3)) + \delta(I(5,4) - L(3)); \end{aligned}$$

$$n(4) =$$

$$\begin{aligned} &\delta(I(1,1) - L(4)) + \delta(I(2,1) - L(4)) + \delta(I(3,1) - L(4)) + \delta(I(4,1) - L(4)) + \delta(I(5,1) - L(4)) + \\ &\delta(I(1,2) - L(4)) + \delta(I(2,2) - L(4)) + \delta(I(3,2) - L(4)) + \delta(I(4,2) - L(4)) + \delta(I(5,2) - L(4)) + \\ &\delta(I(1,3) - L(4)) + \delta(I(2,3) - L(4)) + \delta(I(3,3) - L(4)) + \delta(I(4,3) - L(4)) + \delta(I(5,3) - L(4)) + \\ &\delta(I(1,4) - L(4)) + \delta(I(2,4) - L(4)) + \delta(I(3,4) - L(4)) + \delta(I(4,4) - L(4)) + \delta(I(5,4) - L(4)); \end{aligned}$$

$$n(5) =$$

$$\begin{aligned} &\delta(I(1,1) - L(5)) + \delta(I(2,1) - L(5)) + \delta(I(3,1) - L(5)) + \delta(I(4,1) - L(5)) + \delta(I(5,1) - L(5)) + \\ &\delta(I(1,2) - L(5)) + \delta(I(2,2) - L(5)) + \delta(I(3,2) - L(5)) + \delta(I(4,2) - L(5)) + \delta(I(5,2) - L(5)) + \\ &\delta(I(1,3) - L(5)) + \delta(I(2,3) - L(5)) + \delta(I(3,3) - L(5)) + \delta(I(4,3) - L(5)) + \delta(I(5,3) - L(5)) + \\ &\delta(I(1,4) - L(5)) + \delta(I(2,4) - L(5)) + \delta(I(3,4) - L(5)) + \delta(I(4,4) - L(5)) + \delta(I(5,4) - L(5)); \end{aligned}$$

$$n(6) =$$

$$\begin{aligned} &\delta(I(1,1) - L(6)) + \delta(I(2,1) - L(6)) + \delta(I(3,1) - L(6)) + \delta(I(4,1) - L(6)) + \delta(I(5,1) - L(6)) + \\ &\delta(I(1,2) - L(6)) + \delta(I(2,2) - L(6)) + \delta(I(3,2) - L(6)) + \delta(I(4,2) - L(6)) + \delta(I(5,2) - L(6)) + \\ &\delta(I(1,3) - L(6)) + \delta(I(2,3) - L(6)) + \delta(I(3,3) - L(6)) + \delta(I(4,3) - L(6)) + \delta(I(5,3) - L(6)) + \\ &\delta(I(1,4) - L(6)) + \delta(I(2,4) - L(6)) + \delta(I(3,4) - L(6)) + \delta(I(4,4) - L(6)) + \delta(I(5,4) - L(6)); \end{aligned}$$

$$n(7) =$$

$$\begin{aligned} &\delta(I(1,1) - L(7)) + \delta(I(2,1) - L(7)) + \delta(I(3,1) - L(7)) + \delta(I(4,1) - L(7)) + \delta(I(5,1) - L(7)) + \\ &\delta(I(1,2) - L(7)) + \delta(I(2,2) - L(7)) + \delta(I(3,2) - L(7)) + \delta(I(4,2) - L(7)) + \delta(I(5,2) - L(7)) + \\ &\delta(I(1,3) - L(7)) + \delta(I(2,3) - L(7)) + \delta(I(3,3) - L(7)) + \delta(I(4,3) - L(7)) + \delta(I(5,3) - L(7)) + \\ &\delta(I(1,4) - L(7)) + \delta(I(2,4) - L(7)) + \delta(I(3,4) - L(7)) + \delta(I(4,4) - L(7)) + \delta(I(5,4) - L(7)). \end{aligned}$$

$$n(0) = \begin{aligned} &\delta(1-0) + \delta(3-0) + \delta(5-0) + \delta(2-0) + \delta(7-0) + \\ &\delta(1-0) + \delta(4-0) + \delta(7-0) + \delta(3-0) + \delta(2-0) + \\ &\delta(2-0) + \delta(0-0) + \delta(0-0) + \delta(1-0) + \delta(5-0) + \\ &\delta(4-0) + \delta(3-0) + \delta(7-0) + \delta(2-0) + \delta(7-0); \end{aligned}$$

$$n(1) = \begin{aligned} &\delta(1-1) + \delta(3-1) + \delta(5-1) + \delta(2-1) + \delta(7-1) + \\ &\delta(1-1) + \delta(4-1) + \delta(7-1) + \delta(3-1) + \delta(2-1) + \\ &\delta(2-1) + \delta(0-1) + \delta(0-1) + \delta(1-1) + \delta(5-1) + \\ &\delta(4-1) + \delta(3-1) + \delta(7-1) + \delta(2-1) + \delta(7-1); \end{aligned}$$

$$n(2) = \begin{aligned} &\delta(1-2) + \delta(3-2) + \delta(5-2) + \delta(2-2) + \delta(7-2) + \\ &\delta(1-2) + \delta(4-2) + \delta(7-2) + \delta(3-2) + \delta(2-2) + \\ &\delta(2-2) + \delta(0-2) + \delta(0-2) + \delta(1-2) + \delta(5-2) + \\ &\delta(4-2) + \delta(3-2) + \delta(7-2) + \delta(2-2) + \delta(7-2); \end{aligned}$$

$$n(3) = \begin{aligned} &\delta(1-3) + \delta(3-3) + \delta(5-3) + \delta(2-3) + \delta(7-3) + \\ &\delta(1-3) + \delta(4-3) + \delta(7-3) + \delta(3-3) + \delta(2-3) + \\ &\delta(2-3) + \delta(0-3) + \delta(0-3) + \delta(1-3) + \delta(5-3) + \\ &\delta(4-3) + \delta(3-3) + \delta(7-3) + \delta(2-3) + \delta(7-3); \end{aligned}$$

$$n(4) = \begin{aligned} &\delta(1-4) + \delta(3-4) + \delta(5-4) + \delta(2-4) + \delta(7-4) + \\ &\delta(1-4) + \delta(4-4) + \delta(7-4) + \delta(3-4) + \delta(2-4) + \\ &\delta(2-4) + \delta(0-4) + \delta(0-4) + \delta(1-4) + \delta(5-4) + \\ &\delta(4-4) + \delta(3-4) + \delta(7-4) + \delta(2-4) + \delta(7-4); \end{aligned}$$

$$n(5) = \begin{aligned} &\delta(1-5) + \delta(3-5) + \delta(5-5) + \delta(2-5) + \delta(7-5) + \\ &\delta(1-5) + \delta(4-5) + \delta(7-5) + \delta(3-5) + \delta(2-5) + \\ &\delta(2-5) + \delta(0-5) + \delta(0-5) + \delta(1-5) + \delta(5-5) + \\ &\delta(4-5) + \delta(3-5) + \delta(7-5) + \delta(2-5) + \delta(7-5); \end{aligned}$$

$$n(6) = \begin{aligned} &\delta(1-6) + \delta(3-6) + \delta(5-6) + \delta(2-6) + \delta(7-6) + \\ &\delta(1-6) + \delta(4-6) + \delta(7-6) + \delta(3-6) + \delta(2-6) + \\ &\delta(2-6) + \delta(0-6) + \delta(0-6) + \delta(1-6) + \delta(5-6) + \\ &\delta(4-6) + \delta(3-6) + \delta(7-6) + \delta(2-6) + \delta(7-6); \end{aligned}$$

$$n(7) = \begin{aligned} &\delta(1-7) + \delta(3-7) + \delta(5-7) + \delta(2-7) + \delta(7-7) + \\ &\delta(1-7) + \delta(4-7) + \delta(7-7) + \delta(3-7) + \delta(2-7) + \\ &\delta(2-7) + \delta(0-7) + \delta(0-7) + \delta(1-7) + \delta(5-7) + \\ &\delta(4-7) + \delta(3-7) + \delta(7-7) + \delta(2-7) + \delta(7-7). \end{aligned}$$

$$n(0) = \frac{\delta(1) + \delta(3) + \delta(5) + \delta(2) + \delta(7) + \delta(1) + \delta(4) + \delta(7) + \delta(3) + \delta(2) + \delta(2) + \delta(0) + \delta(0) + \delta(1) + \delta(5) + \delta(4) + \delta(3) + \delta(7) + \delta(2) + \delta(7)}{20};$$

$$n(1) = \frac{\delta(0) + \delta(2) + \delta(4) + \delta(1) + \delta(6) + \delta(0) + \delta(3) + \delta(6) + \delta(2) + \delta(1) + \delta(1) + \delta(-1) + \delta(-1) + \delta(0) + \delta(4) + \delta(3) + \delta(2) + \delta(6) + \delta(1) + \delta(6)}{20};$$

$$n(2) = \frac{\delta(-1) + \delta(1) + \delta(3) + \delta(0) + \delta(5) + \delta(-1) + \delta(2) + \delta(5) + \delta(1) + \delta(0) + \delta(0) + \delta(-2) + \delta(-2) + \delta(-1) + \delta(3) + \delta(2) + \delta(1) + \delta(5) + \delta(0) + \delta(5)}{20};$$

$$n(3) = \frac{\delta(-2) + \delta(0) + \delta(2) + \delta(-1) + \delta(4) + \delta(-2) + \delta(1) + \delta(4) + \delta(0) + \delta(-1) + \delta(-1) + \delta(-3) + \delta(-3) + \delta(-2) + \delta(2) + \delta(1) + \delta(0) + \delta(4) + \delta(-1) + \delta(4)}{20};$$

$$n(4) = \frac{\delta(-3) + \delta(-1) + \delta(1) + \delta(-2) + \delta(3) + \delta(-3) + \delta(0) + \delta(3) + \delta(-1) + \delta(-2) + \delta(-2) + \delta(-4) + \delta(-4) + \delta(-3) + \delta(1) + \delta(0) + \delta(-1) + \delta(3) + \delta(-2) + \delta(3)}{20};$$

$$n(5) = \frac{\delta(-4) + \delta(-2) + \delta(0) + \delta(-3) + \delta(2) + \delta(-4) + \delta(-1) + \delta(2) + \delta(-2) + \delta(-3) + \delta(-3) + \delta(-5) + \delta(-5) + \delta(-4) + \delta(0) + \delta(-1) + \delta(-2) + \delta(2) + \delta(-3) + \delta(2)}{20};$$

$$n(6) = \frac{\delta(-5) + \delta(-3) + \delta(-1) + \delta(-4) + \delta(1) + \delta(-5) + \delta(-2) + \delta(1) + \delta(-3) + \delta(-4) + \delta(-4) + \delta(-6) + \delta(-6) + \delta(-5) + \delta(-1) + \delta(-2) + \delta(-3) + \delta(1) + \delta(-4) + \delta(1)}{20};$$

$$n(7) = \frac{\delta(-6) + \delta(-4) + \delta(-2) + \delta(-5) + \delta(0) + \delta(-6) + \delta(-3) + \delta(0) + \delta(-4) + \delta(-5) + \delta(-5) + \delta(-7) + \delta(-7) + \delta(-6) + \delta(-2) + \delta(-3) + \delta(-4) + \delta(0) + \delta(-5) + \delta(0)}{20}.$$

$$\begin{aligned} & 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + \\ n(0) = & 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + \\ & 0 + \mathbf{1} + \mathbf{1} + 0 + 0 + \\ & 0 + 0 + 0 + 0 + 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \mathbf{1} + 0 + 0 + 0 + 0 + \\ n(1) = & \mathbf{1} + 0 + 0 + 0 + 0 + \\ & 0 + 0 + 0 + \mathbf{1} + 0 + \\ & 0 + 0 + 0 + 0 + 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 0 + 0 + 0 + \mathbf{1} + 0 + \\ n(2) = & 0 + 0 + 0 + 0 + \mathbf{1} + \\ & \mathbf{1} + 0 + 0 + 0 + 0 + \\ & 0 + 0 + 0 + \mathbf{1} + 0; \end{aligned}$$

$$n(0) = 2;$$

$$n(1) = 3;$$

$$\begin{aligned} & 0 + \mathbf{1} + 0 + 0 + 0 + \\ n(3) = & 0 + 0 + 0 + \mathbf{1} + 0 + \\ & 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + \\ & 0 + \mathbf{1} + 0 + 0 + 0; \end{aligned}$$

$$n(2) = 4;$$

$$n(3) = 3;$$

$$n(4) = 2;$$

$$\begin{aligned} & 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + \\ n(4) = & 0 + \mathbf{1} + 0 + 0 + 0 + \\ & 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + \\ & \mathbf{1} + 0 + 0 + 0 + 0; \end{aligned}$$

$$n(5) = 2;$$

$$n(6) = 0;$$

$$\begin{aligned} & 0 + 0 + \mathbf{1} + 0 + 0 + \\ n(5) = & 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + \\ & 0 + 0 + 0 + 0 + \mathbf{1} + \\ & 0 + 0 + 0 + 0 + 0; \end{aligned}$$

$$n(7) = 4.$$

$$\begin{aligned} & 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + \\ n(6) = & 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + \\ & 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + \\ & 0 + 0 + 0 + 0 + 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 0 + 0 + 0 + 0 + \mathbf{1} + \\ n(7) = & 0 + 0 + \mathbf{1} + 0 + 0 + \\ & 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + \\ & 0 + 0 + \mathbf{1} + 0 + \mathbf{1}. \end{aligned}$$