INSTITUTO FEDERAL
Mato Grosso
Campus Cuiabá
Cel. Octayde
Jorge da Silva

Departamento da Área de Informática
Curso: Bacharelado em Engenharia da Computação **Semestre:** 9
Curso: Bacharelado em Engenharia de Controle e Automação **Semestre:** Optativa
Disciplina: Processamento Digital de Imagens.
Professor: Esp. Giuliano Robledo Zucoloto Moreira.

Cuiabá-MT, 28 de julho de 2022.

NOTA EXPLICATIVA
Tópico: Representação e modelagem matemática de imagens digitais

Introdução

Esta nota foi redigida para servir de instrumento norteador para os estudos referentes ao tópico representação e modelagem matemática de imagens digitais da ementa da disciplina; o escopo não esgota o conteúdo sobre o tópico da ementa, apenas orienta.

Esta nota foi aproveitada para além de apresentar a modelagem matemática, tratar da modelagem das probabilidades e estatísticas da imagem. Desta forma ora considera-se a imagem como uma imagem ora como um espaço amostral.

A modelagem apresentada nesta nota está direcionada à implementação computacional. Os modelos são geralmente desenvolvidos para duas situações: utilização nas linguagens que permitem ***indexação de variáveis*** por ***0*** (zero) e nas que permitem indexação por ***1*** (um). Salvo exceções, a abordagem apresenta primeiro o desenvolvimento de raciocínio que atua na indexação por ***0*** (zero), seguido do desenvolvimento para indexação por ***1*** (um).

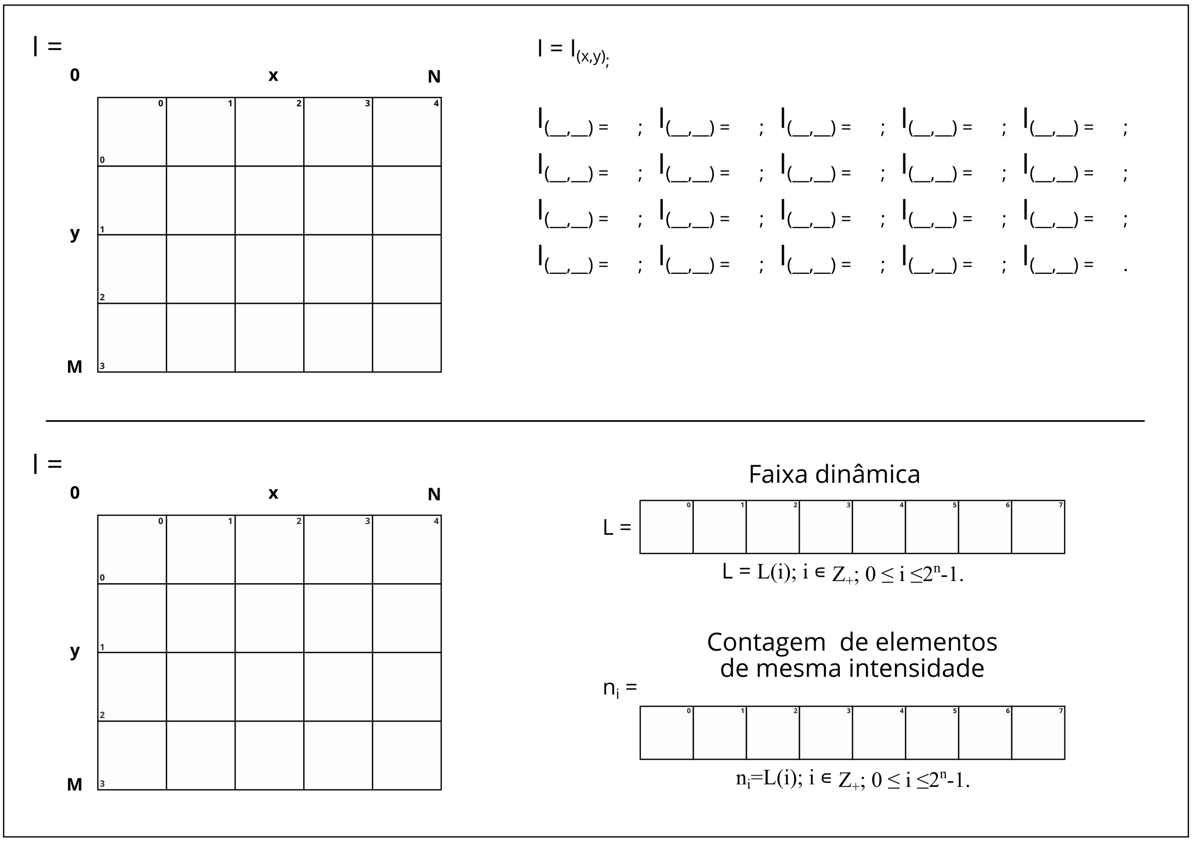
Além da leitura desta nota explicativa, recomenda-se a leitura do livro utilizado como texto na disciplina [1], conforme estabelecido na bibliografia básica no Projeto Pedagógico do Curso (PPC).

Para desenvolvimento do conteúdo são apresentadas subseções que tem interseção com atividades interativas com o Professor da disciplina via meio eletrônico.

1 Modelo matemático básico de uma imagem digital

1.1 Explicações interativas síncronas/assíncronas

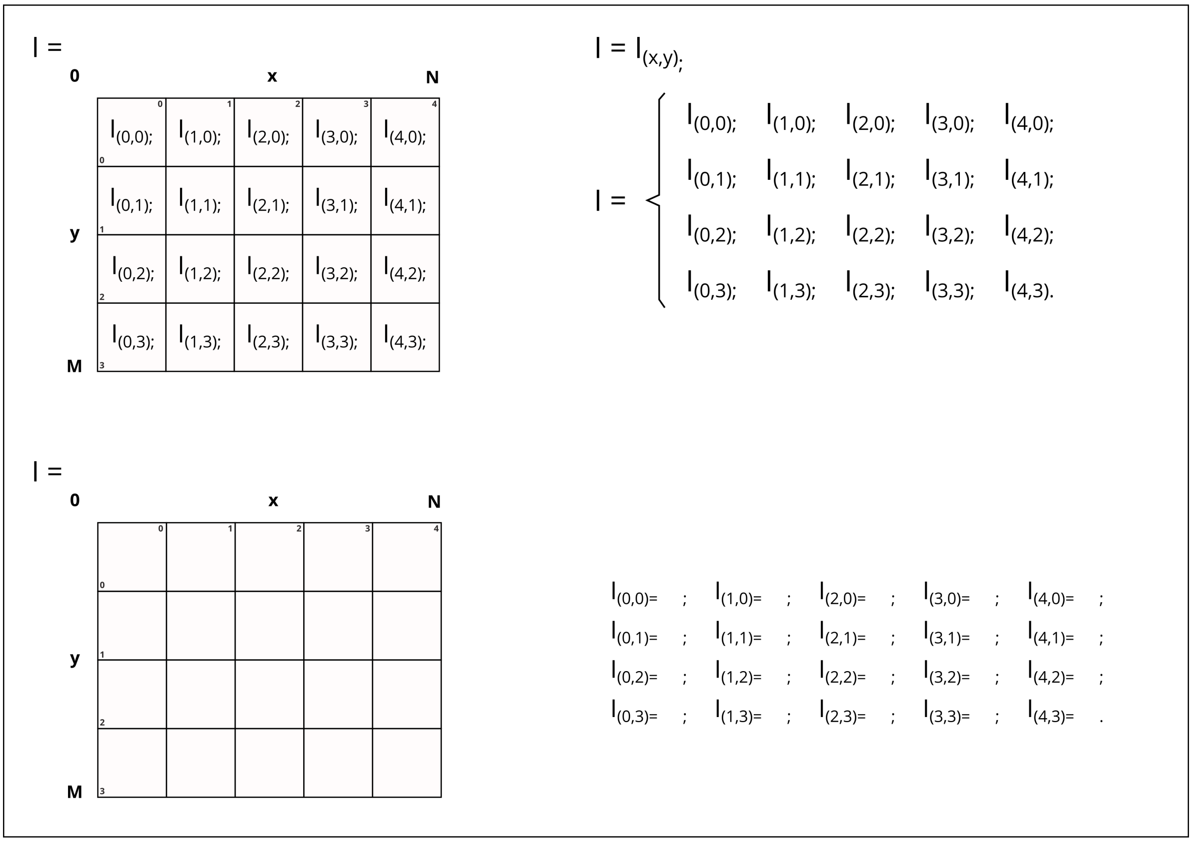
Figura 1: Explicação interativa 01



Fonte: Elaborado pelo Autor.

Anotações:

Figura 2: Explicação interativa 02



Fonte: Elaborado pelo Autor.

Anotações:

1.2 Base teórica

Uma imagem digital $\boldsymbol{I}$ pode ser interpretada como ***um conjunto finito de elementos pictóricos indexados***. Para o contexto do estudo da disciplina, se a imagem possuir apenas uma camada de elementos pictóricos o modelo se restringe a apenas três variáveis: as coordenadas cartesianas e o nível de intensidade, conforme Equação 1. Para imagens com mais de uma camada, além das coordenadas cartesianas dos elementos pictóricos, há necessidade de se mapear a intensidade e o índice da camada a que estão associados entre outras informações. A Equação 2 generaliza a modelagem.

$$I = I(x, y) \mid \{x \in \mathbb{Z}_{+}; 0 \leq x \leq N-1;\ y \in \mathbb{Z}_{+}; 0 \leq y \leq M-1\}; \tag{1}$$

$$I = I(x, y, a, b, c...) \mid \{x \in \mathbb{Z}_{+}; 0 \leq x \leq N-1;\ y \in \mathbb{Z}_{+}; 0 \leq y \leq M-1; ...\}; \tag{2}$$

Em ambas Equações (1 e 2), os índices foram ajustados para indexação por $\boldsymbol{0}$ (zero), $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ representam as coordenadas cartesianas dos elementos pictóricos e $\boldsymbol{M}$ e $\boldsymbol{N}$ representam respectivamente o número de elementos pictóricos que compõem as linhas e as colunas da imagem, o que grosseiramente interpreta-se como "as dimensões"da imagem.

As Equações 3 e 4 apresentam o modelo para indexação por $\boldsymbol{1}$ (um).

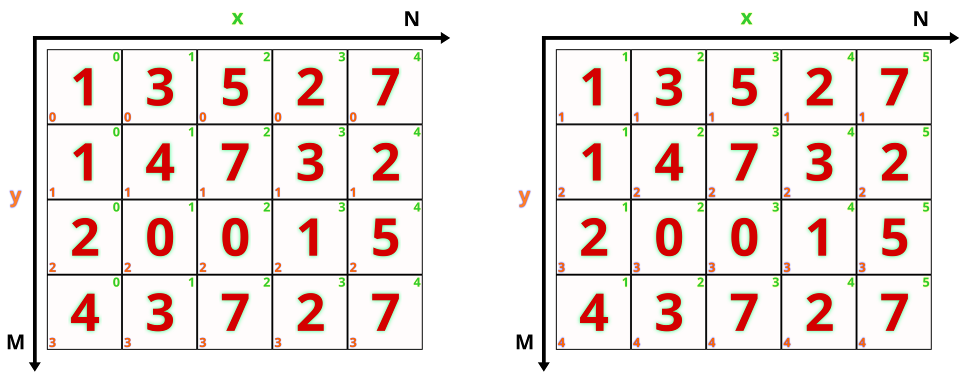
$$I = I(x, y) \mid \{x \in \mathbb{Z}_{+}; 1 \leq x \leq N;\ y \in \mathbb{Z}_{+}; 1 \leq y \leq M\}; \tag{3}$$

$$I = I(x, y, a, b, c...) \mid \{x \in \mathbb{Z}_{+}; 1 \leq x \leq N;\ y \in \mathbb{Z}_{+}; 1 \leq y \leq M; ...\}; \tag{4}$$

O valor da intensidade ou tom ($I(x, y)$), que geralmente pode ser um valor binário, inteiro ou decimal, é mapeado no processo de aquisição ou sintetização da imagem dentro de um intervalo previamente determinado, intervalo que pode ser chamado de ***faixa dinâmica***. Detalhes sobre a ***faixa dinâmica*** são apresentados na Subseção 2.2.

A Figura 5 apresenta uma imagem mapeada como um espaço amostral indexado por $\boldsymbol{0}$ (zero) 3(a) e por $\boldsymbol{1}$ (um) 3(b).

Figura 3: Imagem como espaço amostral



(a) *Indexação por **0** (zero).* (b) *Indexação por **1** (um).*

Fonte: Elaborado pelo Autor.

Respectivamente, nos quadros 1 e 2 são apresentadas a aplicação das equações 1 e 3 no mapeamento das intensidades dos pixels contidos nas imagens 3(a) e 3(b).

Quadro 1: Aplicação da Equação 1 ao espaço amostral apresentado na Figura 3(a).

$I(0,0) = 1;\quad I(1,0) = 3;\quad I(2,0) = 5;\quad I(3,0) = 2;\quad I(4,0) = 7;$

$I(0,1) = 1;\quad I(1,1) = 4;\quad I(2,1) = 7;\quad I(3,1) = 3;\quad I(4,1) = 2;$

$I(0,2) = 2;\quad I(1,2) = 0;\quad I(2,2) = 0;\quad I(3,2) = 1;\quad I(4,2) = 5;$

$I(0,3) = 4;\quad I(1,3) = 3;\quad I(2,3) = 7;\quad I(3,3) = 2;\quad I(4,3) = 7.$

Fonte: Elaborado pelo Autor.

Quadro 2: Aplicação da Equação 3 ao espaço amostral apresentado na Figura 3(b).

$I(1,1) = 1;\quad I(2,1) = 3;\quad I(3,1) = 5;\quad I(4,1) = 2;\quad I(5,1) = 7;$

$I(1,2) = 1;\quad I(2,2) = 4;\quad I(3,2) = 7;\quad I(4,2) = 3;\quad I(5,2) = 2;$

$I(1,3) = 2;\quad I(2,3) = 0;\quad I(3,3) = 0;\quad I(4,3) = 1;\quad I(5,3) = 5;$

$I(1,4) = 4;\quad I(2,4) = 3;\quad I(3,4) = 7;\quad I(4,4) = 2;\quad I(5,4) = 7.$

Fonte: Elaborado pelo Autor.

2 Métodos probabilísticos, estatísticos e imagens digitais

Um caminho para geração de estatísticas de uma imagem é interpreta-la como um espaço amostral de acordo com o modelo matemático bidimensional genérico, representado graficamente nas Figuras 3(a) e 3(b). Cada elemento do espaço amostral representa um píxel da imagem. O número em destaque na cor vermelho apresentado no centro de cada elemento representa a intensidade mapeada no píxel da imagem, os índices subscritos na cor verde estão relacionados ao ***eixo x*** e os índices subscritos na cor laranja ao ***eixo y***. As dimensões do espaço amostral são respectivamente N e M, ambos números inteiros positivos, onde neste caso $N = 5$ e $M = 4$.

Tomando por base o sistema de indexação iniciado por 0 (zero), aplicar a Equação 1 ao espaço amostral apresentado na Figura 3(a) resulta em efetuar o mapeamento apresentado no Quadro 1. Este mapeamento auxilia na rápida interpretação cartesiana dos elementos do espaço amostral, o que é útil para facilitar a compreensão das operações computacionais de processamento da imagem.

2.1 Contagem dos elementos do espaço amostral

A primeira informação de interesse probabilístico e estatístico é a contagem geral de elementos (K) do espaço amostral, pois está é a base para a realização de diversas operações de probabilidade e estatística.

A contagem geral de elementos (K) do espaço amostral pode ser obtida pela contagem dos elementos, elemento a elemento, ou facilmente pelo cálculo do produto das dimensões da imagem, conforme apresentado na Equação 5:

$$K = MN; \quad M \in \mathbb{Z}_+; \ N \in \mathbb{Z}_+; \tag{5}$$

Esta contagem está relacionada às probabilidades e estatísticas ***globais*** da imagem, porém há situações em que se faz necessária a contagem de apenas um segmento de elementos da imagem numa região de interesse, neste caso K está relacionada às dimensões do processamento ***local***. Para distinguir entre as contagens, faz-se referência à contagem ***local*** como:

$$K_{local} = M_{local}N_{local}; \quad M_{Local} \in \mathbb{Z}_+; \ N_{Local} \in \mathbb{Z}_+; \tag{6}$$

Onde:
K_{local}: é a contagem ***local*** de elementos e
M_{local} e N_{local} respectivamente as dimensões da região de interesse ***local***.

2.2 Contagem de elementos de mesma intensidade (n_i) no espaço amostral

A contagem de elementos de mesma intensidade (n_i) no espaço amostral, além de outras, permite a computação de um poderoso descritor de imagem, o histograma, porém esta seção trata da modelagem do processo de contagem discriminada dos elementos de mesma intensidade presentes na amostra.

Na contagem das intensidades deve ser levada em conta a ***faixa dinâmica*** (L) da imagem, que é o ***intervalo*** onde as intensidades são mapeadas geralmente de ***forma monotonicamente crescente***, onde cada tom de cor tem seu ***índice inteiro*** i correspondente. A ***quantidade de tons*** (Q) presentes na ***faixa dinâmica*** é limitada pela quantidade de ***bits*** (n) utilizada para representar o índice de cada tom (i). Há casos em que o próprio índice do tom representa o tom. Atenção para não haver conflito de informação entre n, que é o número de bits da faixa dinâmica, e n_i, que é a contagem indexada dos elementos de mesma intensidade na imagem. A Figura 4 apresenta uma modelagem como vetor computacional para a ***faixa dinâmica*** de uma imagem mapeada em 8 *bits* (n) e indexada por ***0*** (zero).

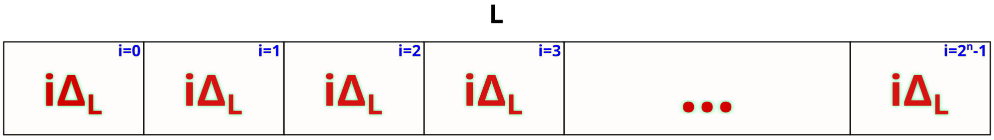
A ***quantidade de tons*** é calculada conforme a Equação 7:

$$Q = 2^n; \quad Q \in \mathbb{Z}_+; \ n \in \mathbb{Z}_+; \tag{7}$$

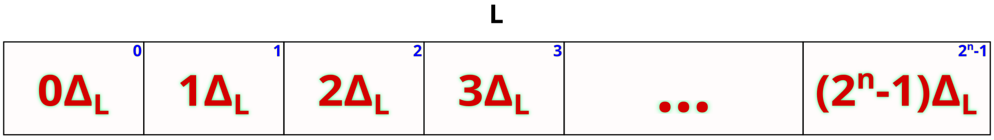
Sabendo-se a ***quantidade de tons*** que se pode mapear, levando em conta o tom 0 (***zero***) e o tom de ***fundo de escala***, divide-se o ***valor*** (V_L) que representa o tom de ***fundo de escala*** pela quantidade de tons (Q) que pode ser representada na ***faixa dinâmica*** subtraída de uma unidade. Tal operação retorna o ***degrau*** (Δ_L) da ***faixa dinâmica***. O cálculo deste degrau é realizado conforme a Equação 8:

$$\Delta_L = \frac{V_L}{Q-1}; \tag{8}$$

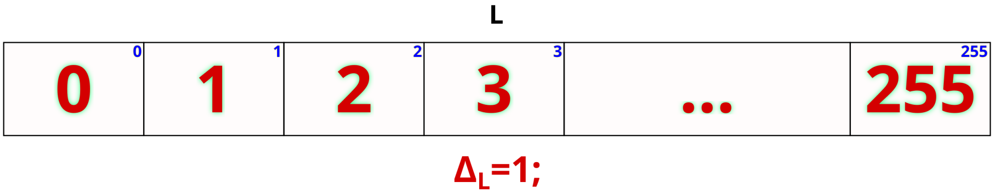
Figura 4: Faixa dinâmica (L) indexada por 0 (zero)



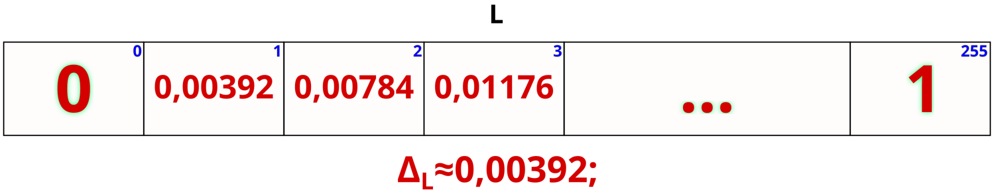
(a) Notação geral



(b) Substituição (i)



(c) Intensidades ($\mathbb{Z}_+$)



(d) Intensidades ($\mathbb{Q}_+$)

Considerando a ***faixa dinâmica*** como um vetor, o ***mapeamento dos índices*** pode ser realizado de duas formas, considerando o índice inicial como 0 (***zero***) ou considerando o índice inicial como 1 ***um***, o que depende geralmente da linguagem de programação utilizada. As Equações 9 e 10 apresentam as respectivas formas.

$$L = 0 \leq i \leq Q - 1; \quad i \in \mathbb{Z}_+; \;\; Q \in \mathbb{Z}_+; \tag{9}$$

$$L = 1 \leq i \leq Q; \quad i \in \mathbb{Z}_+; \;\; Q \in \mathbb{Z}_+; \tag{10}$$

Estabelecido o conjunto de índices da ***faixa dinâmica***, procede-se à associação entre os índices e os tons, de acordo com peculiaridade da linguagem de programação. Para indexação por 0 (***zero***) o mapeamento pode ser realizado de acordo com a Equação 11, e para indexação por 1 (***um***), conforme Equação 12.

$$L(i) = i\Delta_L; \qquad i \in \mathbb{Z}_+; \;\; 0 \leq i \leq Q - 1; \tag{11}$$

$$L(i) = \Delta_L(i - 1); \quad i \in \mathbb{Z}_+; \;\; 1 \leq i \leq Q; \tag{12}$$

Esta abordagem sobre a ***faixa dinâmica*** se fez necessária para que quem lê compreenda a aplicação da mesma no modelo de contagem de elementos de mesma intensidade.

A base da modelagem da contagem é a função ***Delta de Dirac (δ)***, que possibilita a captura seletiva de amostras. ***Por definição*** a função ***Delta de Dirac*** só existe onde na coordenada *zero*, tem ***amplitude*** infinita e ***área*** igual à unidade (um). Fora da coordenada *zero* a função

Delta de Dirac vale ***zero***. A função é apresentada na Equação 13:

$$\delta(x) = \begin{cases} 1: & x = 0 \\ 0: & x \neq 0 \end{cases}; \tag{13}$$

Com pequena modificação no argumento a função ***Delta de Dirac*** pode ser deslocada ao longo do intervalo em que está aplicada, passando a valer uma unidade de área no ponto onde ocorreu o deslocamento, e zero em qualquer outro ponto. A Equação 14 apresenta a função ***Delta de Dirac*** modificada pela operação de ***deslocamento***:

$$\delta(x - a) = \begin{cases} 1: & x = a \\ 0: & x \neq a \end{cases}; \tag{14}$$

O deslocamento funciona pelo fato de no ponto em que $x = a$ o argumento $x - a$ se torna $zero$, condição necessária ***por definição*** para a função ter área igual à unidade.

A extensão da função ***Delta de Dirac*** para ***duas variáveis*** implica a aplicação de sua ***definição*** também em ***duas variáveis***, ou seja, a função será igual à ***unidade*** quando as ***duas variáveis*** forem iguais a ***zero*** no argumento da função, e ***zero*** em qualquer outra situação. A Equação 15 apresenta a expansão da função para ***duas variáveis***.

$$\delta(x, y) = \begin{cases} 1: & x = 0 \;\; e \;\; y = 0 \\ 0: & x \neq 0 \;\; ou \;\; y \neq 0 \end{cases}; \tag{15}$$

Na Equação 16 é apresentado o modelo da função ***Delta de Dirac*** expandida para ***duas variáveis*** com os argumentos modificados para implementar a operação de ***deslocamento***:

$$\delta(x - a, y - b) = \begin{cases} 1: & x = a \;\; e \;\; y = b \\ 0: & x \neq a \;\; ou \;\; y \neq b \end{cases}; \tag{16}$$

A contagem de elementos de mesma intensidade (n_i) no espaço amostral é realizada por meio de uma associação entre as dimensões do espaço amostral, os índices dos tons da ***faixa dinâmica*** utilizada e a função ***Delta de Dirac***. As dimensões do espaço amostral são utilizadas nos índices dos somatórios de forma a limitar a varredura nas amostras; os índices de tons são utilizados para localizar na faixa dinâmica o tom a ser comparado e a função ***Delta de Dirac*** para selecionar apenas amostras cuja intensidade $I(x, y)$ sejam iguais ao tom apontado pela intensidade $L(i)$ sob análise.

No aspecto ***global***, a função que implementa a contagem geral de elementos de mesma intensidade (n_i) pode ser escrita conforme apresentam as Equações 17 e 18, de acordo com as restrições de indexação das linguagens de programação:

$$n_i = \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{M-1} \delta(I(x, y) - L(i)); \qquad para \;\; i \; \in \; \mathbb{Z}_+; \;\; 0 \leq \;\; i \leq \;\; Q - 1; \tag{17}$$

$$n_i = \sum_{x=1}^{N} \sum_{y=1}^{M} \delta(I(x, y) - L(i)); \qquad para \;\; i \; \in \; \mathbb{Z}_+; \;\; 1 \leq \;\; i \leq \;\; Q; \tag{18}$$

A variável i nos argumentos da Equações 17 e 18 faz referência ao ***índice*** da intensidade que se deseja mapear. Reforça-e que utilizar o índice da intensidade permite a varredura para qualquer tipo de representação intensidade. Em linguagens de programação que permitem a indexação por índice ***1*** é necessário alterar os limites do conjunto que representa a variável i, que passa a ser representado como $i \in \mathbb{Z}_+ \mid 1 \leq i \leq Q$.

O resultado da aplicação da Equação 17 é apresentado no Quadro 3. A Figura 3(a) é repetida no interior do quadro para simplificar o entendimento. Caso tenha interesse, para fins de demonstração, a aplicação passo-a-passo da Equação 17 ao espaço amostral da Figura 3(a) foi disponibilizada no ***Apêndice***. A aplicação da Equação 18 à Figura 3(b) é uma operação análoga conforme apresenta o Quadro 4.

Quadro 3: Aplicação da Equação 17 ao espaço amostral apresentado na Figura 3(a).

$n(0) = 2;$

$n(1) = 3;$

$n(2) = 4;$

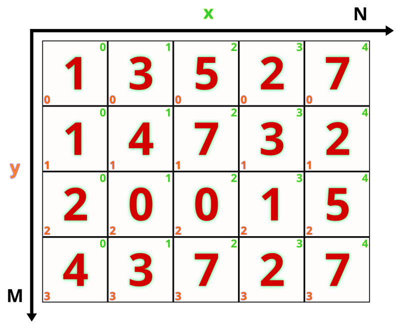
$n(3) = 3;$

$n(4) = 2;$

$n(5) = 2;$

$n(6) = 0;$

$n(7) = 4.$



Observe que em n_i, o i refere-se ao índice do tom na ***faixa dinâmica*** e não o valor da intensidade.

Fonte: Elaborado pelo Autor.

Quadro 4: Aplicação da Equação 18 ao espaço amostral apresentado na Figura 3(b).

$n(1) = 2;$

$n(2) = 3;$

$n(3) = 4;$

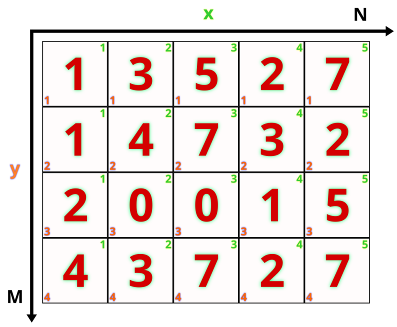
$n(4) = 3;$

$n(5) = 2;$

$n(6) = 2;$

$n(7) = 0;$

$n(8) = 4.$



Observe que em n_i, o i refere-se ao índice do tom na ***faixa dinâmica*** e não o valor da intensidade.

Fonte: Elaborado pelo Autor.

Trazendo a abordagem para o aspecto computacional de forma a generalizar o modelo, para fins de entendimento rápido, n_i é uma ***matriz bidimensional***, de duas colunas distintas, onde na primeira coluna se armazena o tom da imagem e na segunda, a contagem geral dos elementos preenchidos com a intensidade relacionada ao tom. Quando o tom é representado por número de ponto flutuante é possível fazer um mapeamento indexando os tons a números inteiros.

É comum que hajam imagens preenchidas sem a utilização do todos os tons presentes na ***faixa dinâmica***. Neste caso o uso de ***matrizes*** não é recomendado pelo fato de haver reserva estática de memória. É uma situação onde cabe o uso do recurso computacional ***lista***, pois possibilita a alocação de memória de forma dinâmica, o que pode evitar a ocupação de memória para contagens nulas, e sua estrutura pode ser construída e visualizada de forma análoga a uma ***matriz***.

Dependendo a forma com que a estrutura da ***lista*** é construída é possível produzir "imediatamente"o histograma da imagem e obter de forma rápida probabilidades e estatísticas e realizar de forma praticamente instantânea operações de transformação de intensidade.

2.3 Probabilidade

A probabilidade é uma possibilidade de algo acontecer dentro de um dado contexto, ou não. No ***PDI*** o interesse está em aferir a probabilidade de uma intensidade (P_i) presente na ***faixa dinâmica*** ocorrer no ***espaço amostral*** da imagem. Esta probabilidade segue a regra geral de cálculo de probabilidade, que foi adaptada ao contexto, e é apresentada nas Equações 19 e 20, sendo i o ***índice*** da intensidade na ***faixa dinâmica***, conforme cada variação de linguagem de programação:

$$P_i = \frac{n_i}{MN}; \qquad n_i \in \mathbb{Z}_+; \quad 0 \leq i \leq Q-1; \tag{19}$$

$$P_i = \frac{n_i}{MN}; \qquad n_i \in \mathbb{Z}_+; \quad 1 \leq i \leq Q; \tag{20}$$

Como regra geral de probabilidade, a soma de todas as probabilidades é igual a 1 (um), conforme as Equações 21 e 22, considerando a indexação de cada linguagem de programação:

$$\sum_{i=0}^{Q-1} P_i = 1; \qquad i \in \mathbb{Z}_+; \tag{21}$$

$$\sum_{i=1}^{Q} P_i = 1; \qquad i \in \mathbb{Z}_+; \tag{22}$$

2.4 Estatística e imagens digitais

A estatística é uma ferramenta que permite retratar dados e realizar inferências sobre estes indo além de um simples olhar numérico. O estudo inicia pelo cálculo da função de ***média aritmética simples***, que possibilita facilmente a obtenção de outros dois parâmetros estatísticos, o ***desvio padrão*** e a ***variância***, e prossegue com outras funções, algumas lineares, outras não.

Quando se trata de processamento local geralmente os cálculos são realizados com base no ***píxel central*** do espaço onde se realiza o cálculo e este por sua vez corriqueiramente é realizado por operação de convolução entre o espaço da imagem e um elemento chamado de ***kernel***, que normalmente tem dimensões ímpares inteiras ($\mathbb{Z}_+$). As dimensões do ***kernel*** são representadas por meio das variáveis S, para o sentido de x e T para o sentido de y. Nota específica trata da operação de convolução.

2.5 Média aritmética simples global

A ***média aritmética simples global*** (M_{ASG}) pode ser calculada por meio da Equação 23 (ou 24):

$$M_{ASG} = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} I(x,y); \tag{23}$$

$$M_{ASG} = \frac{1}{MN} \sum_{x=1}^{M} \sum_{y=1}^{N} I(x,y); \tag{24}$$

2.6 Média aritmética simples local

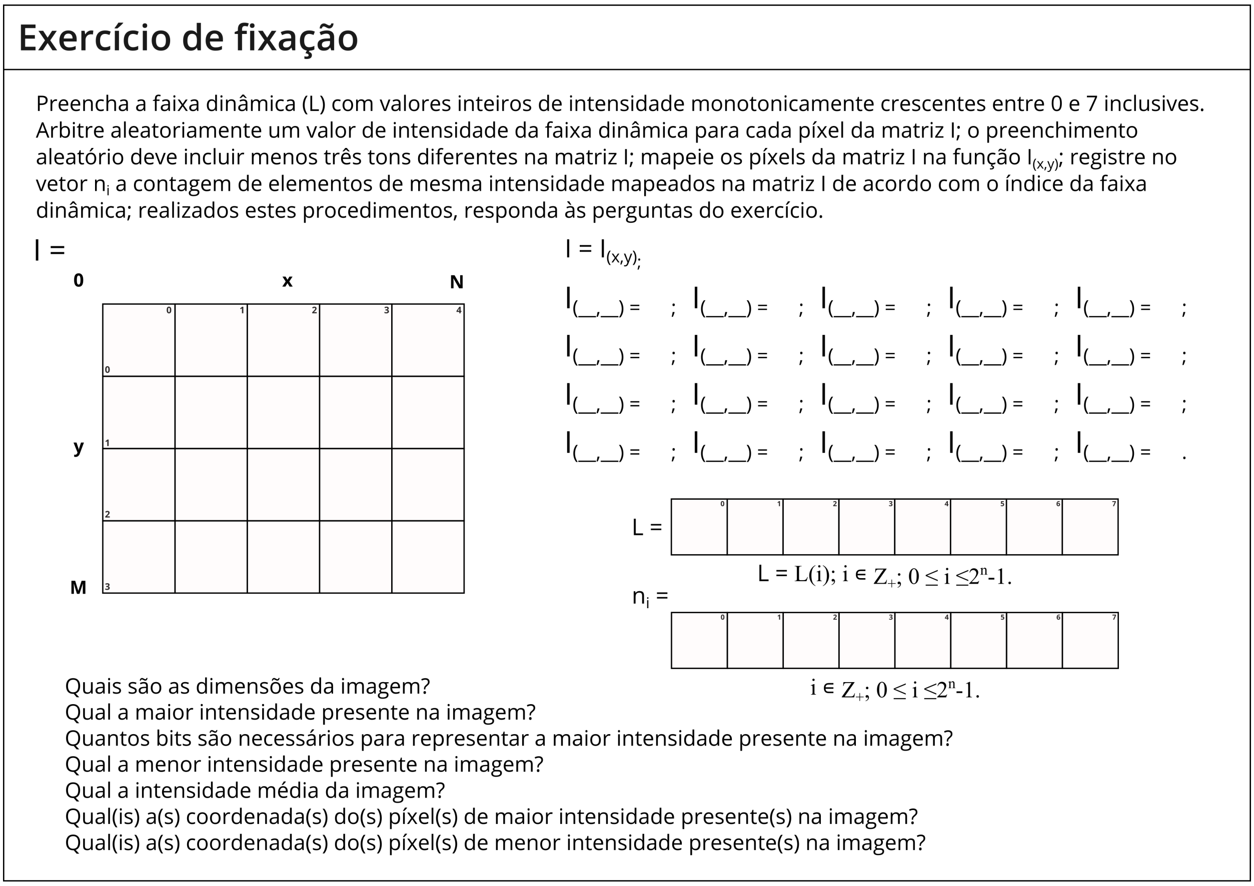
A ***média aritmética simples local*** ($M_{ASL_{(x,y)}}$) pode ser calculada por meio da Equação 25:

$$M_{ASL_{(x,y)}} = \frac{1}{ST} \sum_{s=-\frac{(S-1)}{2}}^{\frac{(S-1)}{2}} \sum_{t=-\frac{(T-1)}{2}}^{\frac{(T-1)}{2}} I(x+s, y+t); \qquad S \in \mathbb{Z}_+; \qquad T \in \mathbb{Z}_+; \tag{25}$$

Onde S e T são as dimensões da região onde a média é calculada.

2.7 Exercício

Figura 5: Exercício de fixação 01



Fonte: Elaborado pelo Autor.

Referências

[1] R. E. GONZALEZ, Rafael C.; WOODS, ***Processamento Digital de Imagens***. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 3 ed., 2010. Revisão técnica: Marcelo Vieira e Maurício Escarpinati; [tradução Cristina Yamagami e Leonardo Piamonte].

3 Apêndice

Apresentação da aplicação da Equação 17 ao espaço amostral apresentado na Figura 3(a).

$$n(0) =$$

$$\begin{gathered}\delta(I(1,1)-L(0))+\delta(I(2,1)-L(0))+\delta(I(3,1)-L(0))+\delta(I(4,1)-L(0))+\delta(I(5,1)-L(0))+\\ \delta(I(1,2)-L(0))+\delta(I(2,2)-L(0))+\delta(I(3,2)-L(0))+\delta(I(4,2)-L(0))+\delta(I(5,2)-L(0))+\\ \delta(I(1,3)-L(0))+\delta(I(2,3)-L(0))+\delta(I(3,3)-L(0))+\delta(I(4,3)-L(0))+\delta(I(5,3)-L(0))+\\ \delta(I(1,4)-L(0))+\delta(I(2,4)-L(0))+\delta(I(3,4)-L(0))+\delta(I(4,4)-L(0))+\delta(I(5,4)-L(0));\end{gathered}$$

n(1)=

$$\begin{gathered}\delta(I(1,1)-L(1))+\delta(I(2,1)-L(1))+\delta(I(3,1)-L(1))+\delta(I(4,1)-L(1))+\delta(I(5,1)-L(1))+\\ \delta(I(1,2)-L(1))+\delta(I(2,2)-L(1))+\delta(I(3,2)-L(1))+\delta(I(4,2)-L(1))+\delta(I(5,2)-L(1))+\\ \delta(I(1,3)-L(1))+\delta(I(2,3)-L(1))+\delta(I(3,3)-L(1))+\delta(I(4,3)-L(1))+\delta(I(5,3)-L(1))+\\ \delta(I(1,4)-L(1))+\delta(I(2,4)-L(1))+\delta(I(3,4)-L(1))+\delta(I(4,4)-L(1))+\delta(I(5,4)-L(1));\end{gathered}$$

n(2)=

$$\begin{gathered}\delta(I(1,1)-L(2))+\delta(I(2,1)-L(2))+\delta(I(3,1)-L(2))+\delta(I(4,1)-L(2))+\delta(I(5,1)-L(2))+\\ \delta(I(1,2)-L(2))+\delta(I(2,2)-L(2))+\delta(I(3,2)-L(2))+\delta(I(4,2)-L(2))+\delta(I(5,2)-L(2))+\\ \delta(I(1,3)-L(2))+\delta(I(2,3)-L(2))+\delta(I(3,3)-L(2))+\delta(I(4,3)-L(2))+\delta(I(5,3)-L(2))+\\ \delta(I(1,4)-L(2))+\delta(I(2,4)-L(2))+\delta(I(3,4)-L(2))+\delta(I(4,4)-L(2))+\delta(I(5,4)-L(2));\end{gathered}$$

n(3)=

$$\begin{gathered}\delta(I(1,1)-L(3))+\delta(I(2,1)-L(3))+\delta(I(3,1)-L(3))+\delta(I(4,1)-L(3))+\delta(I(5,1)-L(3))+\\ \delta(I(1,2)-L(3))+\delta(I(2,2)-L(3))+\delta(I(3,2)-L(3))+\delta(I(4,2)-L(3))+\delta(I(5,2)-L(3))+\\ \delta(I(1,3)-L(3))+\delta(I(2,3)-L(3))+\delta(I(3,3)-L(3))+\delta(I(4,3)-L(3))+\delta(I(5,3)-L(3))+\\ \delta(I(1,4)-L(3))+\delta(I(2,4)-L(3))+\delta(I(3,4)-L(3))+\delta(I(4,4)-L(3))+\delta(I(5,4)-L(3));\end{gathered}$$

n(4)=

$$\begin{gathered}\delta(I(1,1)-L(4))+\delta(I(2,1)-L(4))+\delta(I(3,1)-L(4))+\delta(I(4,1)-L(4))+\delta(I(5,1)-L(4))+\\ \delta(I(1,2)-L(4))+\delta(I(2,2)-L(4))+\delta(I(3,2)-L(4))+\delta(I(4,2)-L(4))+\delta(I(5,2)-L(4))+\\ \delta(I(1,3)-L(4))+\delta(I(2,3)-L(4))+\delta(I(3,3)-L(4))+\delta(I(4,3)-L(4))+\delta(I(5,3)-L(4))+\\ \delta(I(1,4)-L(4))+\delta(I(2,4)-L(4))+\delta(I(3,4)-L(4))+\delta(I(4,4)-L(4))+\delta(I(5,4)-L(4));\end{gathered}$$

n(5)=

$$\begin{gathered}\delta(I(1,1)-L(5))+\delta(I(2,1)-L(5))+\delta(I(3,1)-L(5))+\delta(I(4,1)-L(5))+\delta(I(5,1)-L(5))+\\ \delta(I(1,2)-L(5))+\delta(I(2,2)-L(5))+\delta(I(3,2)-L(5))+\delta(I(4,2)-L(5))+\delta(I(5,2)-L(5))+\\ \delta(I(1,3)-L(5))+\delta(I(2,3)-L(5))+\delta(I(3,3)-L(5))+\delta(I(4,3)-L(5))+\delta(I(5,3)-L(5))+\\ \delta(I(1,4)-L(5))+\delta(I(2,4)-L(5))+\delta(I(3,4)-L(5))+\delta(I(4,4)-L(5))+\delta(I(5,4)-L(5));\end{gathered}$$

n(6)=

$$\begin{gathered}\delta(I(1,1)-L(6))+\delta(I(2,1)-L(6))+\delta(I(3,1)-L(6))+\delta(I(4,1)-L(6))+\delta(I(5,1)-L(6))+\\ \delta(I(1,2)-L(6))+\delta(I(2,2)-L(6))+\delta(I(3,2)-L(6))+\delta(I(4,2)-L(6))+\delta(I(5,2)-L(6))+\\ \delta(I(1,3)-L(6))+\delta(I(2,3)-L(6))+\delta(I(3,3)-L(6))+\delta(I(4,3)-L(6))+\delta(I(5,3)-L(6))+\\ \delta(I(1,4)-L(6))+\delta(I(2,4)-L(6))+\delta(I(3,4)-L(6))+\delta(I(4,4)-L(6))+\delta(I(5,4)-L(6));\end{gathered}$$

n(7)=

$$\begin{gathered}\delta(I(1,1)-L(7))+\delta(I(2,1)-L(7))+\delta(I(3,1)-L(7))+\delta(I(4,1)-L(7))+\delta(I(5,1)-L(7))+\\ \delta(I(1,2)-L(7))+\delta(I(2,2)-L(7))+\delta(I(3,2)-L(7))+\delta(I(4,2)-L(7))+\delta(I(5,2)-L(7))+\\ \delta(I(1,3)-L(7))+\delta(I(2,3)-L(7))+\delta(I(3,3)-L(7))+\delta(I(4,3)-L(7))+\delta(I(5,3)-L(7))+\\ \delta(I(1,4)-L(7))+\delta(I(2,4)-L(7))+\delta(I(3,4)-L(7))+\delta(I(4,4)-L(7))+\delta(I(5,4)-L(7)).\end{gathered}$$

$$n(0) = \begin{array}{c} \delta(1-0)+\delta(3-0)+\delta(5-0)+\delta(2-0)+\delta(7-0)+ \\ \delta(1-0)+\delta(4-0)+\delta(7-0)+\delta(3-0)+\delta(2-0)+ \\ \delta(2-0)+\delta(0-0)+\delta(0-0)+\delta(1-0)+\delta(5-0)+ \\ \delta(4-0)+\delta(3-0)+\delta(7-0)+\delta(2-0)+\delta(7-0); \end{array}$$

$$\text{n(1)=} \begin{array}{c} \delta(1-1)+\delta(3-1)+\delta(5-1)+\delta(2-1)+\delta(7-1)+ \\ \delta(1-1)+\delta(4-1)+\delta(7-1)+\delta(3-1)+\delta(2-1)+ \\ \delta(2-1)+\delta(0-1)+\delta(0-1)+\delta(1-1)+\delta(5-1)+ \\ \delta(4-1)+\delta(3-1)+\delta(7-1)+\delta(2-1)+\delta(7-1); \end{array}$$

$$\text{n(2)=} \begin{array}{c} \delta(1-2)+\delta(3-2)+\delta(5-2)+\delta(2-2)+\delta(7-2)+ \\ \delta(1-2)+\delta(4-2)+\delta(7-2)+\delta(3-2)+\delta(2-2)+ \\ \delta(2-2)+\delta(0-2)+\delta(0-2)+\delta(1-2)+\delta(5-2)+ \\ \delta(4-2)+\delta(3-2)+\delta(7-2)+\delta(2-2)+\delta(7-2); \end{array}$$

$$\text{n(3)=} \begin{array}{c} \delta(1-3)+\delta(3-3)+\delta(5-3)+\delta(2-3)+\delta(7-3)+ \\ \delta(1-3)+\delta(4-3)+\delta(7-3)+\delta(3-3)+\delta(2-3)+ \\ \delta(2-3)+\delta(0-3)+\delta(0-3)+\delta(1-3)+\delta(5-3)+ \\ \delta(4-3)+\delta(3-3)+\delta(7-3)+\delta(2-3)+\delta(7-3); \end{array}$$

$$\text{n(4)=} \begin{array}{c} \delta(1-4)+\delta(3-4)+\delta(5-4)+\delta(2-4)+\delta(7-4)+ \\ \delta(1-4)+\delta(4-4)+\delta(7-4)+\delta(3-4)+\delta(2-4)+ \\ \delta(2-4)+\delta(0-4)+\delta(0-4)+\delta(1-4)+\delta(5-4)+ \\ \delta(4-4)+\delta(3-4)+\delta(7-4)+\delta(2-4)+\delta(7-4); \end{array}$$

$$\text{n(5)=} \begin{array}{c} \delta(1-5)+\delta(3-5)+\delta(5-5)+\delta(2-5)+\delta(7-5)+ \\ \delta(1-5)+\delta(4-5)+\delta(7-5)+\delta(3-5)+\delta(2-5)+ \\ \delta(2-5)+\delta(0-5)+\delta(0-5)+\delta(1-5)+\delta(5-5)+ \\ \delta(4-5)+\delta(3-5)+\delta(7-5)+\delta(2-5)+\delta(7-5); \end{array}$$

$$\text{n(6)=} \begin{array}{c} \delta(1-6)+\delta(3-6)+\delta(5-6)+\delta(2-6)+\delta(7-6)+ \\ \delta(1-6)+\delta(4-6)+\delta(7-6)+\delta(3-6)+\delta(2-6)+ \\ \delta(2-6)+\delta(0-6)+\delta(0-6)+\delta(1-6)+\delta(5-6)+ \\ \delta(4-6)+\delta(3-6)+\delta(7-6)+\delta(2-6)+\delta(7-6); \end{array}$$

$$\text{n(7)=} \begin{array}{c} \delta(1-7)+\delta(3-7)+\delta(5-7)+\delta(2-7)+\delta(7-7)+ \\ \delta(1-7)+\delta(4-7)+\delta(7-7)+\delta(3-7)+\delta(2-7)+ \\ \delta(2-7)+\delta(0-7)+\delta(0-7)+\delta(1-7)+\delta(5-7)+ \\ \delta(4-7)+\delta(3-7)+\delta(7-7)+\delta(2-7)+\delta(7-7). \end{array}$$

$$\text{n(0)=}\begin{array}{c}\delta(1)+\delta(3)+\delta(5)+\delta(2)+\delta(7)+\\ \delta(1)+\delta(4)+\delta(7)+\delta(3)+\delta(2)+\\ \delta(2)+\delta(0)+\delta(0)+\delta(1)+\delta(5)+\\ \delta(4)+\delta(3)+\delta(7)+\delta(2)+\delta(7);\end{array}$$

$$\text{n(1)=}\begin{array}{c}\delta(0)+\delta(2)+\delta(4)+\delta(1)+\delta(6)+\\ \delta(0)+\delta(3)+\delta(6)+\delta(2)+\delta(1)+\\ \delta(1)+\delta(-1)+\delta(-1)+\delta(0)+\delta(4)+\\ \delta(3)+\delta(2)+\delta(6)+\delta(1)+\delta(6);\end{array}$$

$$\text{n(2)=}\begin{array}{c}\delta(-1)+\delta(1)+\delta(3)+\delta(0)+\delta(5)+\\ \delta(-1)+\delta(2)+\delta(5)+\delta(1)+\delta(0)+\\ \delta(0)+\delta(-2)+\delta(-2)+\delta(-1)+\delta(3)+\\ \delta(2)+\delta(1)+\delta(5)+\delta(0)+\delta(5);\end{array}$$

$$\text{n(3)=}\begin{array}{c}\delta(-2)+\delta(0)+\delta(2)+\delta(-1)+\delta(4)+\\ \delta(-2)+\delta(1)+\delta(4)+\delta(0)+\delta(-1)+\\ \delta(-1)+\delta(-3)+\delta(-3)+\delta(-2)+\delta(2)+\\ \delta(1)+\delta(0)+\delta(4)+\delta(-1)+\delta(4);\end{array}$$

$$\text{n(4)=}\begin{array}{c}\delta(-3)+\delta(-1)+\delta(1)+\delta(-2)+\delta(3)+\\ \delta(-3)+\delta(0)+\delta(3)+\delta(-1)+\delta(-2)+\\ \delta(-2)+\delta(-4)+\delta(-4)+\delta(-3)+\delta(1)+\\ \delta(0)+\delta(-1)+\delta(3)+\delta(-2)+\delta(3);\end{array}$$

$$\text{n(5)=}\begin{array}{c}\delta(-4)+\delta(-2)+\delta(0)+\delta(-3)+\delta(2)+\\ \delta(-4)+\delta(-1)+\delta(2)+\delta(-2)+\delta(-3)+\\ \delta(-3)+\delta(-5)+\delta(-5)+\delta(-4)+\delta(0)+\\ \delta(-1)+\delta(-2)+\delta(2)+\delta(-3)+\delta(2);\end{array}$$

$$\text{n(6)=}\begin{array}{c}\delta(-5)+\delta(-3)+\delta(-1)+\delta(-4)+\delta(1)+\\ \delta(-5)+\delta(-2)+\delta(1)+\delta(-3)+\delta(-4)+\\ \delta(-4)+\delta(-6)+\delta(-6)+\delta(-5)+\delta(-1)+\\ \delta(-2)+\delta(-3)+\delta(1)+\delta(-4)+\delta(1);\end{array}$$

$$\text{n(7)=}\begin{array}{c}\delta(-6)+\delta(-4)+\delta(-2)+\delta(-5)+\delta(0)+\\ \delta(-6)+\delta(-3)+\delta(0)+\delta(-4)+\delta(-5)+\\ \delta(-5)+\delta(-7)+\delta(-7)+\delta(-6)+\delta(-2)+\\ \delta(-3)+\delta(-4)+\delta(0)+\delta(-5)+\delta(0).\end{array}$$

$$\text{n(0)=}\begin{array}{c}0+0+0+0+0+\\0+0+0+0+0+\\0+\mathbf{1}+\mathbf{1}+0+0+\\0+0+0+0+0;\end{array}$$

$$\text{n(1)=}\begin{array}{c}\mathbf{1}+0+0+0+0+\\\mathbf{1}+0+0+0+0+\\0+0+0+\mathbf{1}+0+\\0+0+0+0+0;\end{array}$$

$$\text{n(2)=}\begin{array}{c}0+0+0+\mathbf{1}+0+\\0+0+0+0+\mathbf{1}+\\\mathbf{1}+0+0+0+0+\\0+0+0+\mathbf{1}+0;\end{array}$$

$$\text{n(3)=}\begin{array}{c}0+\mathbf{1}+0+0+0+\\0+0+0+\mathbf{1}+0+\\0+0+0+0+0+\\0+\mathbf{1}+0+0+0;\end{array}$$

$$\text{n(4)=}\begin{array}{c}0+0+0+0+0+\\0+\mathbf{1}+0+0+0+\\0+0+0+0+0+\\\mathbf{1}+0+0+0+0;\end{array}$$

$$\text{n(5)=}\begin{array}{c}0+0+\mathbf{1}+0+0+\\0+0+0+0+0+\\0+0+0+0+\mathbf{1}+\\0+0+0+0+0;\end{array}$$

$$\text{n(6)=}\begin{array}{c}0+0+0+0+0+\\0+0+0+0+0+\\0+0+0+0+0+\\0+0+0+0+0;\end{array}$$

$$\text{n(7)=}\begin{array}{c}0+0+0+0+\mathbf{1}+\\0+0+\mathbf{1}+0+0+\\0+0+0+0+0+\\0+0+\mathbf{1}+0+\mathbf{1}.\end{array}$$

$n(0) = 2;$

$n(1) = 3;$

$n(2) = 4;$

$n(3) = 3;$

$n(4) = 2;$

$n(5) = 2;$

$n(6) = 0;$

$n(7) = 4.$