

**“ALGORITMI E COMPLESSITÀ”**  
**CORSO DI LAUREA MAGISTRALE IN INFORMATICA**  
**UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA**  
**ANNO ACCADEMICO 2020/21**

Prima Sessione – Secondo Appello – 9 febbraio 2021

Si svolgano i seguenti esercizi, argomentando adeguatamente le risposte.

**ESERCIZIO 1**

- (a) Si definiscano le *reti di flusso* e si fornisca una caratterizzazione diretta di *flusso netto* (cioè senza fare riferimento a flussi reali).
- (b) Sia  $G = (V, E, s, t)$  una rete di flusso e siano inoltre  $f_1, f_2, f_3: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  tre flussi netti in  $G$  e  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}^+$ . Si consideri la funzione  $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3$  definita su  $V \times V$  da:

$$(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3)(u, v) := \lambda_1 \cdot f_1(u, v) + \lambda_2 \cdot f_2(u, v) + \lambda_3 \cdot f_3(u, v), \quad \text{per ogni } (u, v) \in V \times V.$$

Si dimostri che se  $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \leq 1$ , allora la funzione  $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3$  è un flusso netto nella rete  $G = (V, E, s, t)$ .

**ESERCIZIO 2**

- (a) Si illustri l'algoritmo di Kruskal (con pseudo-codice e complessità).
- (b) Si descrivano i “passi blu” e i “passi rossi” negli algoritmi per il calcolo del *minimum spanning tree* e si enunci l'*invariante del colore*. Quindi si dimostri la correttezza dell'algoritmo di Kruskal.

**ESERCIZIO 3**

Dati un grafo pesato  $(G, w)$ , con  $G = (V, E)$  e  $w: E \rightarrow \mathbb{R}$ , e due vertici  $s_1, s_2 \in V$ , si illustri un algoritmo efficiente, valutandone anche la complessità computazionale, per determinare se il grafo  $(G, w)$  contenga cicli di peso negativo raggiungibili da  $s_1$  oppure da  $s_2$ .

**ESERCIZIO 4**

Utilizzando i tre metodi dell'analisi ammortizzata (aggregazione, potenziale e accantonamenti), si determini il costo ammortizzato per operazione di una sequenza di  $n$  operazioni, ove il costo  $c_i$  dell' $i$ -esima operazione sia dato da:

$$c_i = \begin{cases} 18 \cdot i & \text{se } i \text{ è potenza esatta di } 7 \\ 4 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

**ESERCIZIO 5**

- (a) Si definiscano gli *alberi binomiali* e si enuncino le loro principali proprietà, dimostrandole adeguatamente.
- (b) Si definiscano gli *heap binomiali* e si fornisca una maggiorazione al grado massimo di ciascun nodo in uno heap binomiale con  $n$  nodi.