ESERCIZIO 1

Sia $G = (V, E, s, t, c)$ una rete di flusso (con sorgente s, pozzo t e capacità c) e siano $f_1, f_2 : V \times V \to \mathbb{R}$ due flussi netti in G. Si consideri la funzione $f_1 + f_2$ definita da:

$$(f_1 + f_2)(u, v) =_{Def} f_1(u, v) + f_2(u, v)\,, \qquad \text{per ogni } (u, v) \in V \times V\,.$$

(a) Si stabilisca quali proprietà dei flussi netti sono necessariamente vere per $f_1 + f_2$ e quali no.

(b) Si risponda ai medesimi quesiti per la funzione $\lambda f_1 + \mu f_2$ definita da

$$(\lambda f_1 + \mu f_2)(u, v) =_{Def} \lambda f_1(u, v) + \mu f_2(u, v)\,, \qquad \text{per ogni } (u, v) \in V \times V\,,$$

dove $0 \leq \lambda, \mu \leq 1$ e $\lambda + \mu = 1$.

✓ Antisimmetria $\quad \boxed{(f_1+f_2)(u,v) = -(f_1+f_2)(v,u)} \quad \forall\, u,v \in V$

$$\begin{aligned}(f_1+f_2)(u,v) &= f_1(u,v) + f_2(u,v)\\ &= -f_1(v,u) - f_2(v,u)\\ &= -\big(f_1(v,u) + f_2(v,u)\big)\\ &= -(f_1+f_2)(v,u)\end{aligned}$$

✓ Legge di conservazione $\quad \boxed{\sum_{v\in V} (f_1+f_2)(u,v) = 0 \quad \forall\, u \in V \setminus \{s,t\}}$

$u \in V \setminus \{s,t\}$

$$\begin{aligned}\sum_{v\in V} (f_1+f_2)(u,v) &= \sum_{v\in V} \big(f_1(u,v) + f_2(u,v)\big)\\ &= \cancel{\sum_{v\in V} f_1(u,v)} + \cancel{\sum_{v\in V} f_2(u,v)}\\ &= 0 + 0\\ &= 0\end{aligned}$$

Vincolo di capacità : $\quad (f_1+f_2)(u,v) \leq c(u,v) \quad \forall\, (u,v) \in V\times V$

$$\begin{aligned}(f_1+f_2)(u,v) &= f_1(u,v) + f_2(u,v)\\ &\leq c(u,v) + c(u,v)\\ &= 2\,c(u,v)\end{aligned}$$

$$s \xrightarrow{1} t$$

$f_1(s,t) = 1 \quad , \quad f_1(t,s) = -1$

$f_2(s,t) = 1 \quad , \quad f_2(t,s) = -1$

$$(f_1+f_2)(s,t) = f_1(s,t) + f_2(s,t) = 2 \not\leq 1 = c(s,t)$$

$\lambda f_1 + \mu f_2$

✓ Vincolo di capacità

$0 \leq \lambda, \mu \leq 1 \quad , \quad \lambda + \mu = 1 \quad\quad \lambda + \mu \leq 1 \leftarrow$

$f_1(u,v) \leq c(u,v)$

$f_2(u,v) \leq c(u,v)$

$$\begin{aligned}(\lambda f_1 + \mu f_2)(u,v) &= \lambda f_1(u,v) + \mu f_2(u,v) \\ &\leq \lambda c(u,v) + \mu c(u,v) \\ &= (\lambda+\mu)\, c(u,v) \\ &= c(u,v)\end{aligned}$$

✓ Antisimmetria $\quad \boxed{(\lambda f_1 + \mu f_2)(u,v) = -(\lambda f_1 + \mu f_2)(v,u)} \quad \forall\, u,v \in V$

$$\begin{aligned}(\lambda f_1 + \mu f_2)(u,v) &= \lambda f_1(u,v) + \mu f_2(u,v) \\ &= -\lambda f_1(v,u) - \mu f_2(v,u) \\ &= -\underline{(\lambda f_1(v,u) + \mu f_2(v,u))} \\ &= -\underline{(\lambda f_1 + \mu f_2)(v,u)}\end{aligned}$$

✓ Legge di conservazione $\quad \boxed{\sum_{v\in V} (\lambda f_1 + \mu f_2)(u,v) = 0 \quad \forall\, u \in V \setminus \{s,t\}}$

$u \in V \setminus \{s,t\}$

$$\begin{aligned}\sum_{v\in V} (\lambda f_1 + \mu f_2)(u,v) &= \sum_{v\in V} (\lambda f_1(u,v) + \mu f_2(u,v)) \\ &= \sum_{v\in V} \lambda f_1(u,v) + \sum_{v\in V} \mu f_2(u,v)\end{aligned}$$

$$= \lambda \cancel{\sum_{v \in V} f_1(u,v)} + \mu \cancel{\sum_{v \in V} f_2(u,v)}$$

$$= 0 + 0$$

$$= 0$$

$\lambda f_1 + \mu f_2$ è un flusso netto

ESERCIZIO 2

Sia $f : V \times V \to \mathbb{R}$ una funzione assegnata sulle coppie ordinate dei vertici di una rete di flusso $G = (V, E)$ con funzione capacità $c : E \to \mathbb{R}_0^+$, sorgente s e pozzo t.

Si proponga un algoritmo efficiente per stabilire se

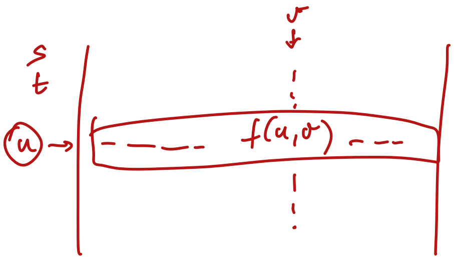
(a) f è un flusso in (G, c, s, t);

(b) f è un flusso *massimo* in (G, c, s, t)

e se ne valuti la complessità computazionale.

$O(VE^2) = O(V^5)$

$|f^*| = |f|$



$V \times V$

- antisimmetria $\quad \forall (u,v) \quad f(u,v) = -f(v,u)$ $\quad \Theta(V^2)$

- vincolo di capacità $\quad \forall (u,v) \quad f(u,v) \leq c(u,v)$ $\quad \Theta(V^2)$

- legge di conservazione $\quad \forall u \in V \setminus \{s,t\} \quad \sum_{v \in V} f(u,v) = 0$ $\quad \Theta(V)$

$\Theta(V) \to \Theta(V^2)$

$\Theta(V^2)$

$(V^2), \ |V|, O(|V|^2) \to O(|V|^2)$

k

ESERCIZIO 3

Dopo aver definito le nozioni di *rete di flusso*, *flusso*, *taglio*, *flusso attraverso un taglio*, *capacità di un taglio*, si enunci e si dimostri il teorema del "massimo flusso/minimo taglio".

ESERCIZIO 3

Si enunci e si dimostri il teorema del *massimo flusso/minimo taglio* e se ne illustri un'applicazione.

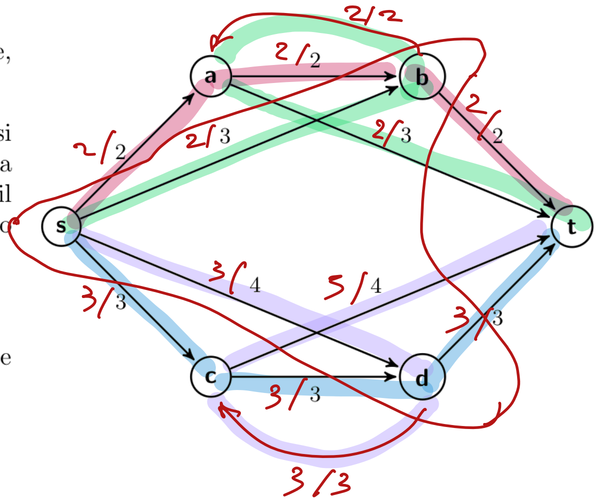
ESERCIZIO 1 (Reti di flusso)

(a) Si definiscano le nozioni di rete di flusso, flusso e suo valore, cammino aumentante, taglio e sua capacità.

(b) Quindi si illustri il procedimento di Ford-Fulkerson e lo si applichi alla rete G a lato utilizzando come criterio di scelta dei cammini aumentanti quello *lessicografico* (secondo il quale, ad es., il cammino (s, a, b, t) precede il cammino (s, c, d, t)).

(c) Qual è il valore di un flusso massimo in G?

(d) Si determini inoltre un taglio in G di capacità minima e se ne calcoli la capacità.



$(s,a,b,t) \longrightarrow 2$

$(s,b,a,t) \longrightarrow 2$

$(s,c,d,t) \longrightarrow 3$

$(s,d,c,t) \longrightarrow 3$

10

$V_1 = \{s, b, d\}$

$V_2 = \{a, c, t\}$

$\boxed{c(V_1, V_2) = 10}$

$c(s,a) = 2$

$c(s,c) = 3$

$c(s,t) = 0$

$c(b,a) = 0$

$c(b,c) = 0$

$c(b,t) = 2$

$c(d,a) = 0$

$c(d,c) = 0$

$c(d,t) = 3$

$\sum_{u \in V_1, v \in V_2} c(u,v) = 10$

ESERCIZIO 3 (Massimo flusso)

Sia dato un flusso f in una rete di flusso $\mathcal{G}$. Si descriva un algoritmo efficiente per stabilire se f è un flusso massimo in $\mathcal{G}$, dimostrandone la correttezza.

N.B.: Si definiscano/enuncino le nozioni e i risultati utilizzati.

ESERCIZIO 2

Definizione Dato un grafo non orientato $G = (V, E)$ con funzione peso $w : E \to \mathbb{R}$ e dato un sottoinsieme U di V, il sottografo di (G, w) INDOTTO DA U è il grafo pesato ottenuto rimuovendo da G tutti i nodi non appartenenti a U e tutti gli archi che toccano qualche nodo non appartenente a U.

Sia quindi $G = (V, E)$ un grafo connesso non orientato con funzione peso $w : E \to \mathbb{R}$.

Per ciascuna delle seguenti asserzioni, stabilire se è necessariamente vera oppure no, motivando adeguatamente le risposte.

(A) Sia $\mathcal{T} = (V, T)$ un albero ricoprente minimo di (G, w) e sia $e \in T$ un suo arco. Rimuovendo e da $\mathcal{T}$ si formano due alberi $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$ insistenti rispettivamente sugli insiemi di nodi V_1 e V_2. Allora,

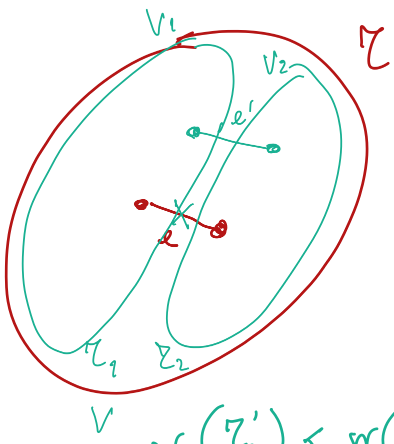
- e è un arco di peso minimo che attraversa il taglio (V_1, V_2) di G;
- $\mathcal{T}_i$ è un albero ricoprente minimo del sottografo di (G, w) indotto da V_i, per $i = 1, 2$.

tale che i sottografi di G indotti da V1 e da V2 siano connessi

(B) Sia (V_1, V_2) un taglio di G, sia e un arco di peso minimo che attraversa il taglio (V_1, V_2), e sia $\mathcal{T}_i = (V_i, T_i)$ un albero ricoprente minimo del sottografo di (G, w) indotto da V_i, per $i = 1, 2$. Allora, il grafo $(V, T_1 \cup T_2 \cup \{e\})$ è un albero ricoprente minimo di (G, w).

✓ (A) Sia $\mathcal{T} = (V, T)$ un albero ricoprente minimo di (G, w) e sia $e \in T$ un suo arco. Rimuovendo e da $\mathcal{T}$ si formano due alberi $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$ insistenti rispettivamente sugli insiemi di nodi V_1 e V_2. Allora,

- e è un arco di peso minimo che attraversa il taglio (V_1, V_2) di G;
- $\mathcal{T}_i$ è un albero ricoprente minimo del sottografo di (G, w) indotto da V_i, per $i = 1, 2$.



$w(e') < w(e)$

$$w(T) \le \underbrace{w((T \setminus \{e\}) \cup \{e'\})} < \underline{w(T)}$$

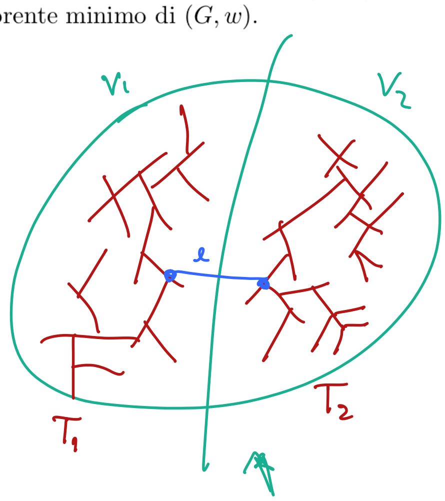
assurdo

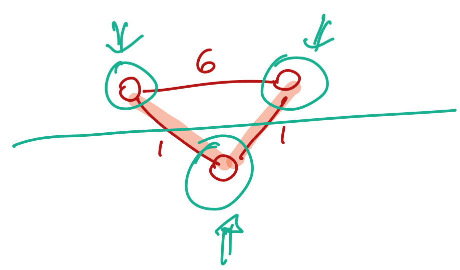
$$w(\mathcal{T}_2') < w(\mathcal{T}_2)$$

$$\begin{aligned} w(\mathcal{T}) \le w(\mathcal{T}_2' \cup \{e\} \cup \mathcal{T}_1) &= w(\mathcal{T}_2') + w(e) + w(\mathcal{T}_1) \\ &< w(\mathcal{T}_2) + w(e) + w(\mathcal{T}_1) \\ &= w(\mathcal{T}_2 \cup \{e\} \cup \mathcal{T}_1) \\ &= w(\mathcal{T}) \end{aligned}$$

assurdo

(B) Sia (V_1, V_2) un taglio di G [tale che i sottografi di G indotti da V1 e da V2 siano connessi], sia e un arco di peso minimo che attraversa il taglio (V_1, V_2), e sia $\mathcal{T}_i = (V_i, T_i)$ un albero ricoprente minimo del sottografo di (G, w) indotto da V_i, per $i = 1, 2$. Allora, il grafo $\underline{(V, T_1 \cup T_2 \cup \{e\})}$ è un albero ricoprente minimo di (G, w).





$T_1 \cup T_2 \cup \{e\}$ è uno ST di G

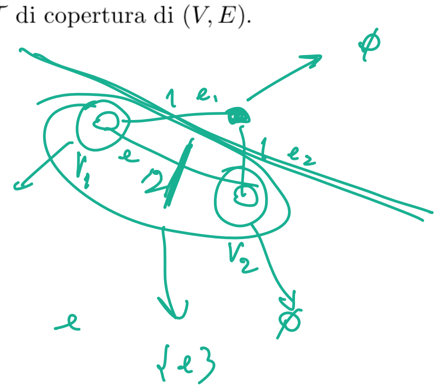
ESERCIZIO 1

Dato un grafo $G = (V, E)$ non orientato e connesso, con funzione peso $w : E \to \mathbb{R}$, si consideri la seguente procedura ricorsiva:

> **procedure** Quick_Something(V, E)
>   **if** $|V| \leq 1$ **then**
>   **return** $\emptyset$
>   **else**
>   - sia (V_1, V_2) un taglio di (V, E) tale che i sottografi (V_1, E_1) e (V_2, E_2) risultino connessi, dove
>   · E_1 := insieme degli archi in E i cui estremi sono in V_1,
>   · E_2 := insieme degli archi in E i cui estremi sono in V_2;
>   - sia ~~e un arco di peso~~ minimo (rispetto alla funzione peso w) che attraversa il taglio (V_1, V_2);
> E_1 := Quick_Something(V_1, E_1);
> E_2 := Quick_Something(V_2, E_2);
>   **endif**
>   **return** $E_1 \cup E_2 \cup \{e\}$;
> **end** Quick_Something;

(a) Si dimostri che la procedura Quick_Something(V, E) calcola un albero $\mathcal{T}$ di copertura di (V, E).

(b) $\mathcal{T}$ è necessariamente un minimo albero di copertura per (V, E) ? NO



$w(\{e, e_1\}) > w(\{e_1, e_2\})$

non è un MST

Induzione su $|V|$.

- caso base $|V| = 1$ → $(V, \emptyset)$ è un albero!

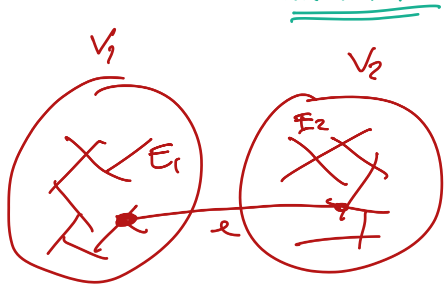
- passo induttivo, $|V| > 1$
  supponiamo che la tesi sia vera per tutti i grafi connessi pesati $G' = (V', E')$ tali che $|V'| < |V|$.

(V_1, V_2) taglio di (V, E)

$|V_1| < |V|$, $|V_2| < |V|$

E_1 ST di V_1

E_2 ST di V_2



$E_1 \cup E_2 \cup \{e\}$ connesso, aciclico → ST

ESERCIZIO 1

Siano T_1 e T_2 due MST distinti di un dato grafo non-orientato connesso e pesato (G, w). Si verifichi che:

(a) $\min_{e \in T_1} w(e) = \min_{e' \in T_2} w(e')$,

(b) (**facoltativo**) $\max_{e \in T_1} w(e) = \max_{e' \in T_2} w(e')$.

(a) Per contraddizione. Supponiamo $\min_{e\in T_1} w(e) \neq \min_{e'\in T_2} w(e')$,

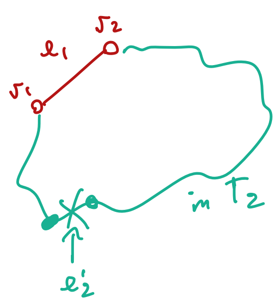
e senza perdita di generalità supponiamo che

$$\min_{e\in T_1} w(e) < \min_{e'\in T_2} w(e').$$

Sia $e_1 \in T_1$ tale che $w(e_1) = \min_{e\in T_1} w(e)$.

Domanda: $e_1 \in T_2$? Ovviamente NO, perché

$$w(e_1) < \min_{e'\in T_2} w(e').$$



v_1 e v_2 sono connessi in T_2

$w(e_1) < w(e'_2)$

$(T_2 \setminus \{e'_2\}) \cup \{e_1\} \leftarrow$ ST

$$w(T_2) \leq w((T_2 \setminus \{e'_2\}) \cup \{e_1\}) < w(T_2) \quad (\text{è un MST})$$

ASSURDO

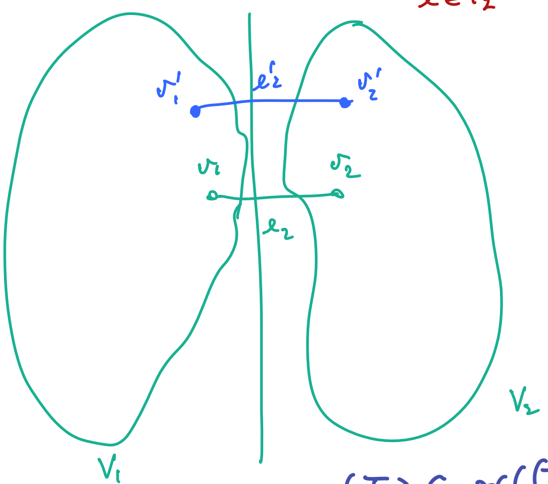
(b) (**facoltativo**) $\max_{e\in T_1} w(e) = \max_{e'\in T_2} w(e')$.

Per assurdo.

Senza perdere di generalità, supponiamo che

$$\max_{e\in T_1} w(e) < \max_{e'\in T_2} w(e')$$

Sia $e_2 \in T_2$ tale che $w(e_2) = \max_{e'\in T_2} w(e')$.



$e_2' \in T_1$

$w(e_2') < w(e_2)$

$(T_2 \setminus \{e_2\}) \cup \{e_2'\}$ - ST ?

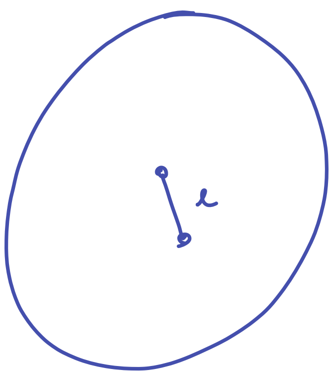
$$w(T_2) \le w((T_2 \setminus \{e_2\}) \cup \{e_2'\}) < w(T_2)$$

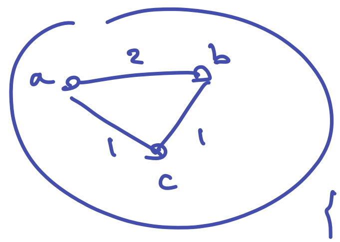
assurdo.

ESERCIZIO 1

Sia $G = (V, E)$ un grafo non orientato connesso e sia $w : E \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione peso su G. Sia inoltre $e \in E$ un arco di G.

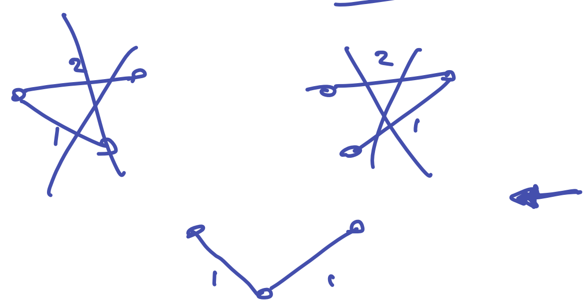
Si descriva un algoritmo per stabilire se l'arco e è contenuto in qualche MST di (G, w) e se ne valuti la complessità computazionale.





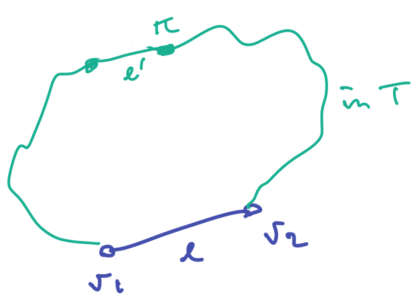
(a, b)

$\{(a, c), (c, b)\}$



Costruiamo un MST T di $G = (V, E)$.

$e \in T$?
- in caso di risposta affermativa, e ovviamente appartiene a qualche MST
- in caso di risposta negativa



- se π contiene un arco e' tale che $w(e') = w(e)$, allora $(T \setminus \{e'\}) \cup \{e\}$ sarebbe un MST che contiene e,
- altrimenti, se π non contiene alcun arco di peso uguale a $w(e)$, allora per ogni $e' \in \pi$ $w(e') < w(e)$

C

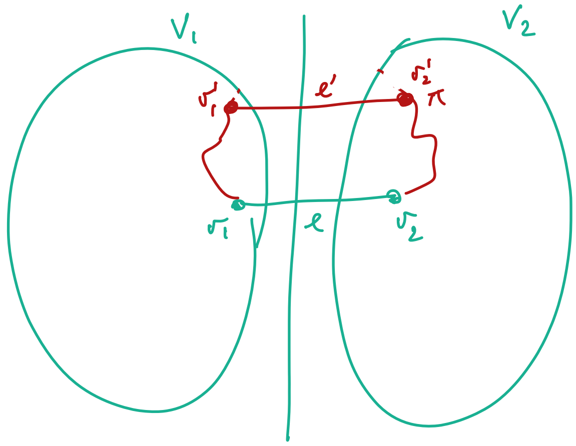
→ esiste un cammino da v_1 a v_2 i cui archi hanno peso strettamente minore del peso $w(e)$.

$\Downarrow$

'e' non appartiene ad alcun MST

Per assurdo, supponiamo che $\exists$ MST T' di G tale che $e \in T'$.

Togliendo 'e' da T' si produce un taglio in G



$w(e') < w(e)$,

ma allora

$(T' \setminus \{e\}) \cup \{e'\}$ è ST

$w(T') \le w((T' \setminus \{e\}) \cup \{e'\}) < w(T')$

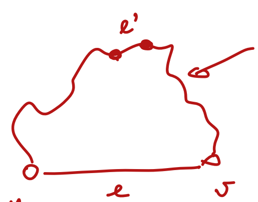
assurdo.

C è necessaria perché l'arco 'e' non appartiene a nessun MST.

'e' non appartiene a nessun MST $\longrightarrow$ vale C

se C è falsa $\longrightarrow$ 'e' appartiene a qualche MST

T un MST,



in T

$\exists e' : w(e') \ge w(e)$,

$w(T) \le w((T \setminus \{e'\}) \cup \{e\}) \le w(T)$

$\longrightarrow w((T \setminus \{e'\}) \cup \{e\}) = w(T) \longrightarrow$

$(T \setminus \{e'\}) \cup \{e\}$ è un MST

La condizione C è necessaria e sufficiente affinché l'arco 'e' appartenga a qualche MST.

$w(e)$

$E' = \{ f \in E \mid w(f) < w(e) \}$,

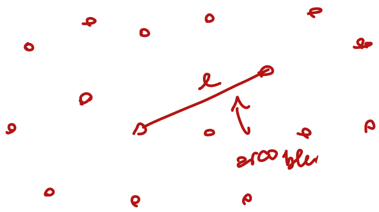
$G' = (V, E')$ esiste un cammino da u a v in G'.

Dato $e \in E$,

- si costruisca $G' = (V, E')$ ← $O(E)$
- si effettui una visita BFS da u in G'. $O(E)$

Se v viene raggiunto ⟶ return NO
Se v non viene raggiunto ⟶ return YES

$O(E) = O(V+E)$.



Kruskal,
ordiniamo $E \setminus \{e\}$,
seguendo l'ordinamento di $E - \{e\}$,
— — —

uno ST T che contiene 'e'.

Affermo: T è un albero ricoprente di peso minimo tra tutti quelli che contengono l'arco 'e'.

$\text{Kruskal}(G, w) \longrightarrow T'$ (MST)

$w(T) \stackrel{?}{=} w(T')$

- SI: T è un MST che contiene 'e'
- NO: 'e' non è contenuto in alcun MST

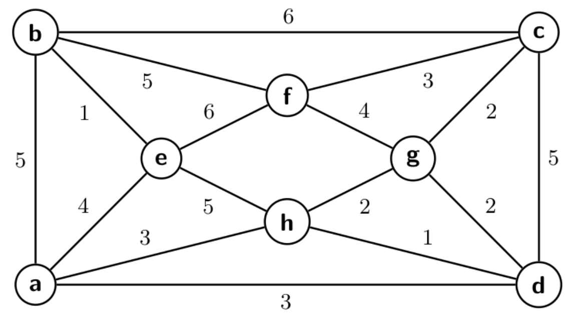
2 chiamate di Kruskal

ESERCIZIO 2 (Alberi ricoprenti minimi)

(a) Si descriva l'algoritmo di Kruskal e lo si applichi al grafo a lato.

(b) Ci sono altri alberi ricoprenti minimi?

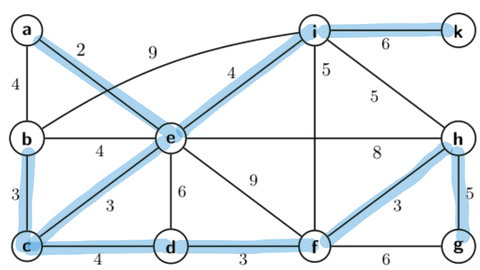
(c) Sia $G = (V, E)$ un grafo non orientato, pesato e connesso, e sia $w : E \to \mathbb{N}$ una funzione peso per G. Si supponga che G contenga *esattamente* 7 archi di peso unitario e nessun arco di peso strettamente inferiore ad 1. Quanti archi di peso unitario dovrà necessariamente contenere un albero ricoprente minimo per G? Perché?



ESERCIZIO 2 (Minimum spanning trees)

(a) Si descriva l'algoritmo di Kruskal dimostrandone anche la correttezza.

(b) Si applichino l'algoritmo di Kruskal e l'algoritmo di Prim al grafo a lato.



$\overset{2}{(a,e)}$ $\overset{3}{(b,c)}$ $\overset{3}{(c,e)}$ $\overset{3}{(d,f)}$ $\overset{3}{(f,h)}$ $\cancel{\overset{4}{(a,b)}}$ $\overset{4}{(c,d)}$ $\overset{4}{(e,i)}$ $\cancel{\overset{4}{(b,e)}}$ $\overset{5}{(g,h)}$ $\cancel{\overset{5}{(h,i)}}$ $\cancel{\overset{5}{(f,i)}}$ $\cancel{\overset{6}{(d,e)}}$

$\cancel{\overset{6}{(f,g)}}$ $\overset{6}{(i,k)}$ $\cancel{\overset{8}{(e,h)}}$ $\cancel{\overset{9}{(b,i)}}$ $\cancel{\overset{9}{(e,f)}}$

$\overset{2}{(a,e)}$ $\overset{3}{(b,c)}$ $\overset{3}{(c,e)}$ $\overset{3}{(d,f)}$ $\overset{3}{(f,h)}$ $\cancel{\overset{4}{(a,b)}}$ $\overset{4}{(c,d)}$ $\overset{4}{(e,i)}$ $\cancel{\overset{4}{(b,e)}}$ $\overset{5}{(g,h)}$ $\cancel{\overset{5}{(h,i)}}$ $\cancel{\overset{5}{(f,i)}}$ $\cancel{\overset{6}{(d,e)}}$

$\cancel{\overset{6}{(f,g)}}$ $\overset{6}{(i,k)}$ $\cancel{\overset{8}{(e,h)}}$ $\cancel{\overset{9}{(b,i)}}$ $\cancel{\overset{9}{(e,f)}}$