ESERCIZIO 4 (Reti di flusso)

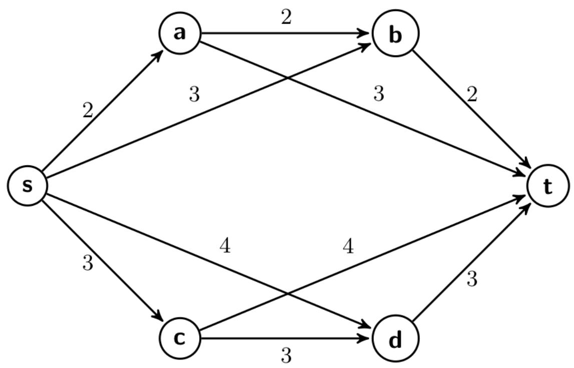
FATTO

(a) Si definiscano le nozioni di rete di flusso, flusso e suo valore, cammino aumentante, taglio e sua capacità.

(b) Quindi si illustri il procedimento di Ford-Fulkerson e lo si applichi alla rete G a lato utilizzando come criterio di scelta dei cammini aumentanti quello *lessicografico* (secondo il quale, ad es., il cammino (s, a, b, t) precede il cammino (s, c, d, t)).

(c) Qual è il valore di un flusso massimo in G?

(d) Si determini inoltre un taglio in G di capacità minima e se ne calcoli la capacità.



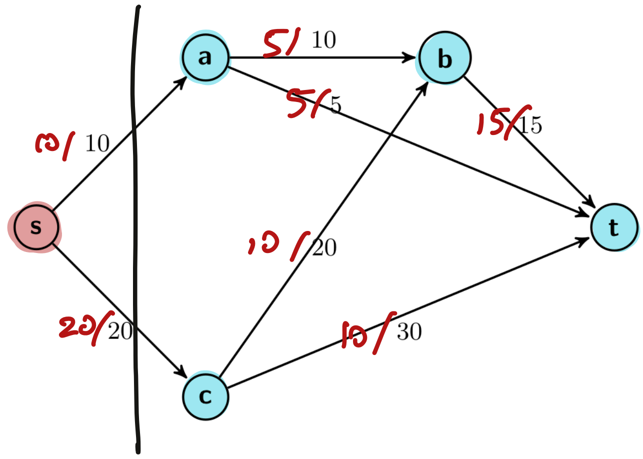
ESERCIZIO 3 **(Reti di flusso)** FATTO

(a) Si definiscano le nozioni di rete di flusso, flusso e suo valore, cammino aumentante, taglio e sua capacità.

(b) Si illustri il procedimento di Ford-Fulkerson e lo si applichi alla rete G a lato utilizzando come criterio di scelta dei cammini aumentanti quello *lessicografico* (secondo il quale, ad es., il cammino (**s**, **a**, **b**, **t**) precede il cammino (**s**, **a**, **t**) che a sua volta precede il cammino (**s**, **c**, **b**, **t**), ecc.).

(c) Qual è il valore di un flusso massimo in G?

(d) Si determini inoltre un taglio in G di capacità minima calcolandone la capacità.



(s, a, b, t) $\longrightarrow$ 10

(s, c, b, a, t) $\longrightarrow$ 5

(s, c, b, t) $\longrightarrow$ 5

(s, c, t) $\longrightarrow$ 10

30

TAGLIO ({s}, {a, b, c, t})

c({s}, {a, b, c, t}) = 30

ESERCIZIO 3 **(Reti di flusso)**

(a) Si definiscano le nozioni di rete di flusso, flusso netto e suo valore, cammino aumentante, rete residua, taglio e sua capacità.

(b) Sia G una rete di flusso e sia V l'insieme dei suoi vertici. Siano inoltre $f_1, f_2 : V \times V \to \mathbb{R}$ due flussi netti in G. Si consideri la funzione $f_1 + f_2$ definita da:

$$(f_1 + f_2)(u, v) =_{Def} f_1(u, v) + f_2(u, v)\,, \qquad \text{per ogni } (u, v) \in V \times V\,.$$

Si stabilisca quali proprietà dei flussi netti sono necessariamente vere per $f_1 + f_2$ e quali no.

<u>antisimmetria</u> ✓

$$\begin{aligned}(f_1+f_2)(u,v) &= f_1(u,v) + f_2(u,v)\\ &= -f_1(v,u) - f_2(v,u)\\ &= -(f_1(v,u) + f_2(v,u))\\ &= -(f_1+f_2)(v,u)\end{aligned}$$

<u>conservazione del flusso</u> ✓

$u \in V \setminus \{s,t\}$

$$\begin{aligned}\sum_{v\in V}(f_1+f_2)(u,v) &= \sum_{v\in V}\left(f_1(u,v) + f_2(u,v)\right)\\ &= \sum_{v\in V} f_1(u,v) + \sum_{v\in V} f_2(u,v)\\ &= 0 + 0\\ &= 0\end{aligned}$$

$$\underline{(f_1+f_2)(u,v)} = f_1(u,v) + f_2(u,v)$$

$$\leq c(u,v) + c(u,v)$$

$$= 2c(u,v) \overset{?}{\cancel{\leq}} \underline{c(u,v)} \quad ?$$

$$s \xrightarrow{1} t$$

$f_1(s,t)=1$

$f_2(s,t)=1$

$(f_1+f_2)(s,t) = 2 > c(s,t)$!

ESERCIZIO 4

Sia $G = (V, E, s, t, c)$ una rete di flusso (con sorgente s, pozzo t e capacità c) e siano $f_1, f_2 \colon V \times V \to \mathbb{R}$ due flussi in G.

(a) Si definiscano con precisione le nozioni di *rete di flusso* e di *flusso*.

(b) Si stabilisca quali proprietà dei flussi sono necessariamente vere e quali no per la funzione $f_1 + f_2$ definita da

$$(f_1 + f_2)(u, v) \coloneqq f_1(u, v) + f_2(u, v)\,, \qquad \text{per ogni } (u, v) \in V \times V\,.$$

(c) Si risponda al medesimo quesito per la funzione $\lambda f_1 + \mu f_2$ definita da

$$(\lambda f_1 + \mu f_2)(u, v) \coloneqq \lambda f_1(u, v) + \mu f_2(u, v)\,, \qquad \text{per ogni } (u, v) \in V \times V\,,$$

con $0 \leq \lambda, \mu \leq 1$ e $\lambda + \mu = 1$.

<u>antisimmetria</u>

$$\begin{aligned}
(\lambda f_1 + \mu f_2)(u,v) &= \lambda f_1(u,v) + \mu f_2(u,v) \\
&= -\lambda f_1(v,u) - \mu f_2(v,u) \\
&= -(\lambda f_1(v,u) + \mu f_2(v,u)) \\
&= -(\lambda f_1 + \mu f_2)(v,u)
\end{aligned}$$

<u>conservazione del flusso</u> ✓

$u \in V \setminus \{s,t\}$

$$\begin{aligned}
\sum_{v \in V} (\lambda f_1 + \mu f_2)(u,v) &= \sum_{v \in V} (\lambda f_1(u,v) + \mu f_2(u,v)) \\
&= \lambda \sum_{v \in V} f_1(u,v) + \mu \sum_{v \in V} f_2(u,v) \\
&= \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

VINCOLO DI CAPACITA'

$$(\lambda f_1 + \mu f_2)(u,v) = \lambda f_1(u,v) + \mu f_2(u,v)$$

$$\leq \lambda c(u,v) + \mu c(u,v)$$

$$= (\lambda + \mu) \cdot c(u,v)$$

$$= c(u,v)$$

ESERCIZIO 5

(a) Si definiscano le nozioni di rete di flusso, flusso e suo valore, cammino aumentante, taglio e sua capacità.

(b) Si enunci e si dimostri il Teorema del Massimo Flusso/Minimo Taglio, discutendone anche un'applicazione.

ESERCIZIO 3

Dopo aver definito le nozioni di *rete di flusso*, *flusso*, *taglio*, *flusso attraverso un taglio*, *capacità di un taglio*, si enunci e si dimostri il teorema del "massimo flusso/minimo taglio".

ESERCIZIO 3 (Reti di flusso)

Si enunci e si dimostri il teorema del flusso massimo/taglio minimo, definendo preliminarmente tutte le nozioni sulle reti di flusso rilevanti per enunciare e dimostrare tale teorema.

ESERCIZIO 4

(a) Si illustri il metodo di Ford-Fulkerson.

(b) Si enunci e si dimostri il teorema del *massimo flusso/minimo taglio* e se ne illustri un'applicazione.

ESERCIZIO 4

(a) Si definiscano le nozioni di: rete di flusso, flusso (in una rete di flusso) e suo valore, taglio e sua capacità.

(b) Si enunci e si dimostri il teorema del *massimo flusso/minimo taglio.*

(c) Si proponga un algoritmo efficiente, valutandone anche la complessità, per determinare un taglio minimo in una rete di flusso di cui sia noto un flusso massimo.

ESERCIZIO 3 (Massimo flusso)

Sia dato un flusso f in una rete di flusso $\mathcal{G}$. Si descriva un algoritmo efficiente per stabilire se f è un flusso massimo in $\mathcal{G}$, dimostrandone la correttezza.
N.B.: Si definiscano/enuncino le nozioni e i risultati utilizzati.

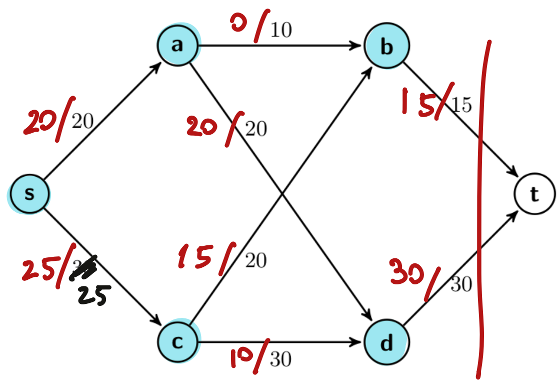
ESERCIZIO 3 (Reti di flusso)

(a) Si definiscano le nozioni di rete di flusso, flusso e suo valore, cammino aumentante, taglio e sua capacità.

(b) Si illustri il procedimento di Ford-Fulkerson e lo si applichi alla rete G a lato utilizzando come criterio di scelta dei cammini aumentanti quello *lessicografico* (secondo il quale, ad es., il cammino (**s**, **a**, **b**, **t**) precede il cammino (**s**, **a**, **d**, **t**) che a sua volta precede il cammino (**s**, **c**, **b**, **t**)).

(c) Qual è il valore di un flusso massimo in G?

(d) Si determini inoltre un taglio in G di capacità minima calcolandone la capacità.



(s, a, b, t) → 10

(s, a, d, t) → 10

(s, c, b, a, d, t) → 10

(s, c, b, t) → 5

(s, c, d, t) → 10

valore flusso massimo = 45

Taglio

$c(\{s, a, b, c, d\}, \{t\}) = 45$

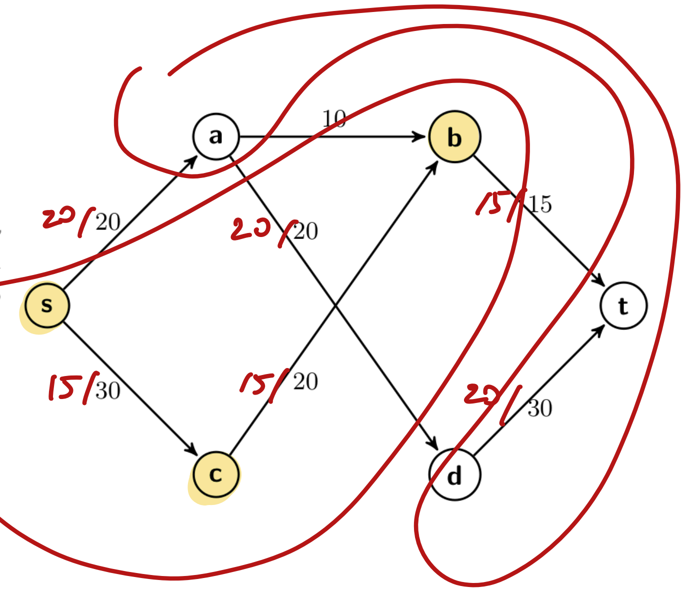
ESERCIZIO 5 (Reti di flusso)

(a) Si definiscano le nozioni di rete di flusso, flusso e suo valore, cammino aumentante, taglio e sua capacità.

(b) Si illustri il procedimento di Ford-Fulkerson e lo si applichi alla rete G a lato utilizzando come criterio di scelta dei cammini aumentanti quello *lessicografico* (secondo il quale, ad es., il cammino (**s**, **a**, **b**, **t**) precede il cammino (**s**, **a**, **d**, **t**) che a sua volta precede il cammino (**s**, **c**, **b**, **t**)).

(c) Qual è il valore di un flusso massimo in G?

(d) Si determini inoltre un taglio in G di capacità minima, calcolandone la capacità.



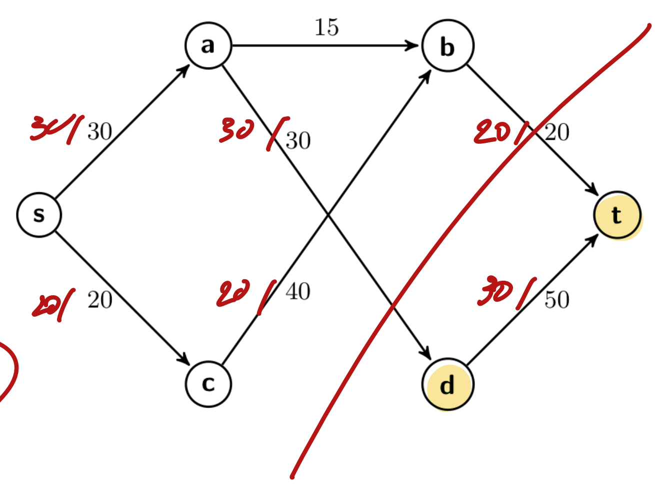
ESERCIZIO 2 (Reti di flusso)

(a) Si definiscano le nozioni di rete di flusso, flusso e suo valore, cammino aumentante, taglio e sua capacità.

(b) Si illustri il procedimento di Ford-Fulkerson e lo si applichi alla rete G a lato utilizzando come criterio di scelta dei cammini aumentanti quello *lessicografico* (secondo il quale, ad es., il cammino (**s**, **a**, **b**, **t**) precede il cammino (**s**, **a**, **d**, **t**) che a sua volta precede il cammino (**s**, **c**, **b**, **t**)).

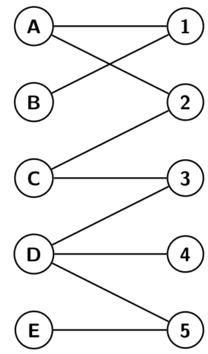
(c) Qual è il valore di un flusso massimo in G?

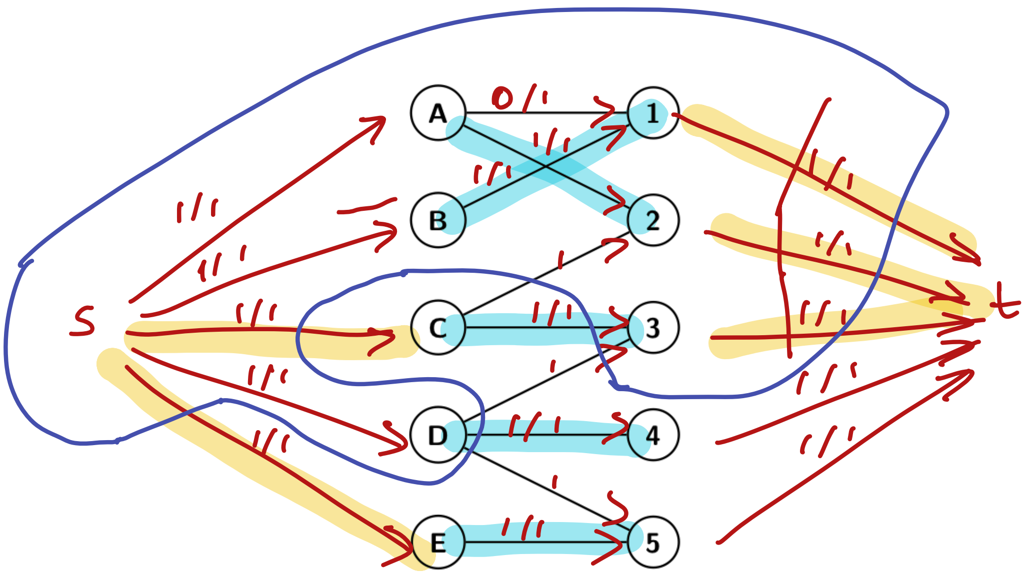
(d) Si determini inoltre un taglio in G di capacità minima calcolandone la capacità.



ESERCIZIO 3 (Applicazioni reti di flusso)

Si definiscano le nozioni di *grafo bipartito*, di *abbinamento* e di *abbinamento massimo* in un grafo bipartito. Quindi si determini un abbinamento massimo nel grafo bipartito a lato, illustrando il metodo utilizzato.





({s, 1, 2, 3}, {t, C, E})
A, B, D
A, B, C, D, 4, 5

(s, A, 1, t)

(s, B, 1, A, 2, t)

(s, C, 3, t)

(s, D, 4, t)

(s, E, 5, t)

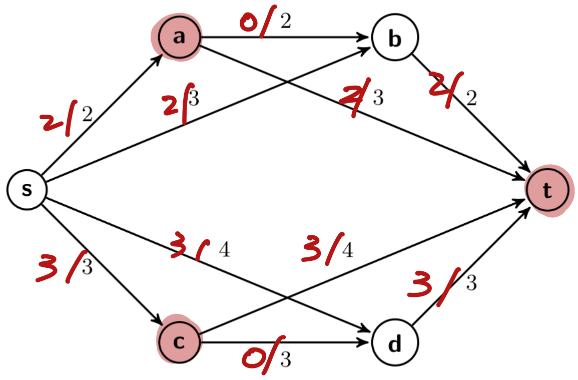
ESERCIZIO 4 (Reti di flusso)

(a) Si definiscano le nozioni di rete di flusso, flusso e suo valore, cammino aumentante, taglio e sua capacità.

(b) Quindi si illustri il procedimento di Ford-Fulkerson e lo si applichi alla rete G a lato utilizzando come criterio di scelta dei cammini aumentanti quello *lessicografico* (secondo il quale, ad es., il cammino (s, a, b, t) precede il cammino (s, c, d, t)).

(c) Qual è il valore di un flusso massimo in G?

(d) Si determini inoltre un taglio in G di capacità minima e se ne calcoli la capacità.



$(s, a, b, t) \longrightarrow 2$

$(s, b, a, t) \longrightarrow 2$

$(s, c, d, t) \longrightarrow 3$

$(s, d, c, t) \longrightarrow 3$

$\overline{}$ 10

$$c(\underbrace{\{s, b, d\}}_{S}, \underbrace{\{a, c, t\}}_{T}) = 10$$

$$c(S,T) = \sum_{\substack{u \in S \\ v \in T}} c(u,v)$$

ESERCIZIO 3

(a) Si definiscano le nozioni di rete di flusso, flusso e suo valore, cammino aumentante, taglio e sua capacità.

(b) Si illustri il procedimento di Ford-Fulkerson e lo si applichi alla rete G a lato utilizzando come criterio di scelta dei cammini aumentanti quello *lessicografico* (secondo il quale, ad es., il cammino $(\mathbf{s}, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{t})$ precede il cammino $(\mathbf{s}, \mathbf{a}, \mathbf{d}, \mathbf{t})$ che a sua volta precede il cammino $(\mathbf{s}, \mathbf{c}, \mathbf{b}, \mathbf{t})$).

(c) Qual è il valore di un flusso massimo in G?

(d) Si determini inoltre un taglio di capacità minima in G calcolandone la capacità. Esiste qualche altro taglio di capacità minima in G? Se sì, quale?