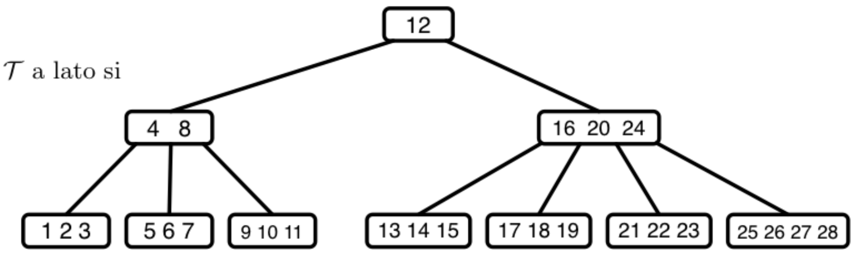
ESERCIZIO 2 (B-trees)

Dopo aver definito in maniera dettagliata la struttura dati dei B-tree, si determini il numero massimo e il numero minimo di *nodi* che può essere contenuto in un B-tree di data altezza h e grado minimo 2.

ESERCIZIO 5 (B-tree)

1. Si **definisca** la struttura dati dei B-tree.
2. Dopo aver **determinato** il grado minimo del B-tree $\mathcal{T}$ a lato si **illustri** l'esecuzione delle seguenti operazioni su $\mathcal{T}$:

   (1) DELETE(2) (5) DELETE(11)
   (2) DELETE(18) (6) DELETE(28)
   (3) DELETE(7) (7) DELETE(3)
   (4) DELETE(23)



3. Sia $\mathcal{T}'$ un B-tree con 4500 chiavi, il cui grado minimo è il medesimo di quello in figura. Qual è la massima altezza possibile per $\mathcal{T}'$?

ESERCIZIO 3 (B-trees)

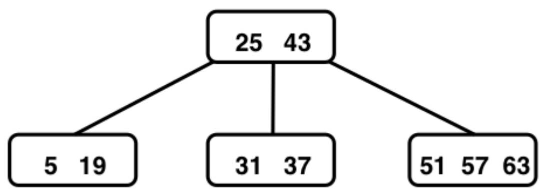
Dopo aver definito in maniera dettagliata la struttura dati dei B-tree, si determini il numero massimo e il numero minimo di *chiavi* che può essere contenuto in un B-tree di data altezza h e grado minimo 3.

ESERCIZIO 1 (B-trees)

(a) Si definisca la struttura dati dei B-tree.

(b) Sia T l'insieme dei valori $t \in \mathbb{N}$ per i quali l'albero $\mathcal{T}$ in figura possa essere considerato un B-tree di grado minimo t e si ponga

$$m = \min T \,, \qquad M = \max T \,.$$



(b.1) Quanto valgono m ed M? (Motivare la risposta.)

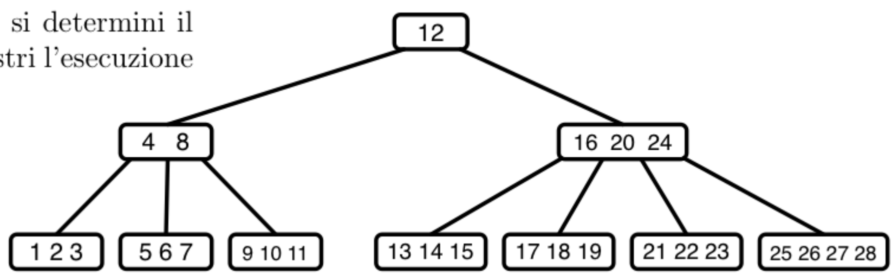
(b.2) Si illustri l'inserimento delle chiavi 54, 52 e 53 in $\mathcal{T}$, considerato come B-tree di grado minimo m.

(b.3) Si illustri la cancellazione delle chiavi 37, 43 e 57 da $\mathcal{T}$, considerato come B-tree di grado minimo M.

ESERCIZIO 3

Dopo aver definito la struttura dati dei B-tree, si determini il grado minimo del B-tree $\mathcal{T}$ a lato. Quindi si illustri l'esecuzione delle seguenti operazioni su $\mathcal{T}$, nell'ordine dato:

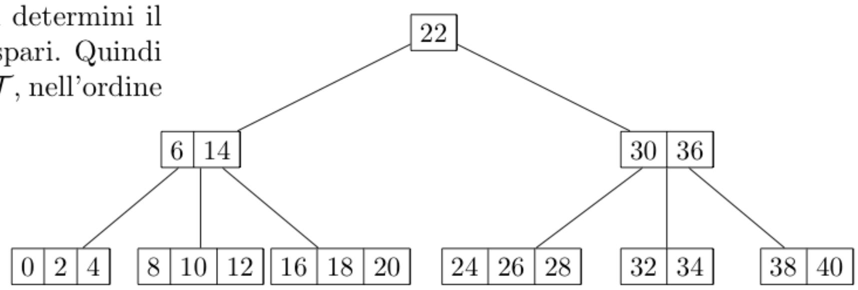
(1) DELETE(9) (5) INSERT(29)
(2) DELETE(10) (6) INSERT(30)
(3) DELETE(11) (7) INSERT(31)
(4) DELETE(7) (8) INSERT(32)



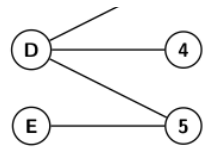
ESERCIZIO 1 (B-trees)

Dopo aver definito la struttura dati dei B-tree, si determini il grado minimo del B-tree $\mathcal{T}$ a lato sapendo che è dispari. Quindi si **illustri** l'esecuzione delle seguenti operazioni su $\mathcal{T}$, nell'ordine indicato:

(1) Delete(40)
(2) Delete(0)
(3) Delete(10)
(4) Delete(6)
(5) Delete(18)
(6) Delete(20)
(7) Insert(40)
(8) Insert(39)

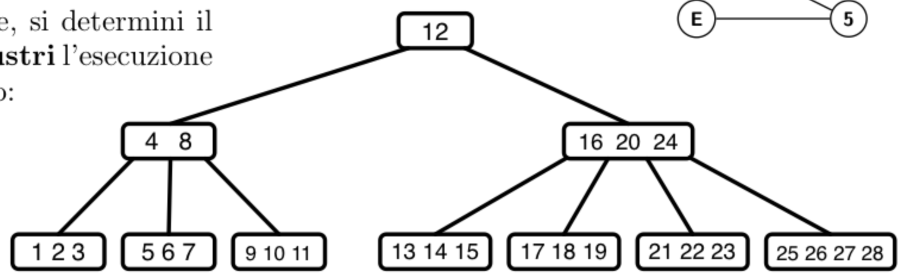


ESERCIZIO 4 (B-trees)



Dopo aver definito la struttura dati dei B-tree, si determini il grado minimo del B-tree $\mathcal{T}$ a lato. Quindi si **illustri** l'esecuzione delle seguenti operazioni su $\mathcal{T}$, nell'ordine dato:

(1) Delete(16)
(2) Delete(15)
(3) Delete(14)
(4) Delete(13)
(5) Insert(16)
(6) Insert(15)
(7) Insert(14)
(8) Insert(13)

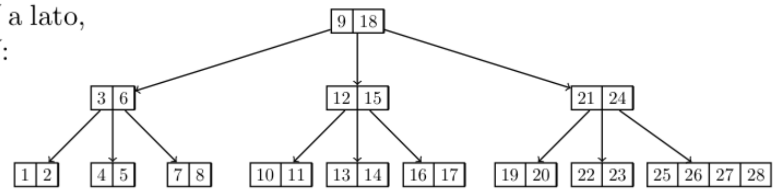


ESERCIZIO 5

(a) Si definisca la struttura dati dei *B-tree*.

(b) Dopo aver determinato il grado minimo del B-tree $\mathcal{T}$ a lato, si illustri l'esecuzione delle seguenti operazioni su $\mathcal{T}$:

(1) INSERT(29)
(2) INSERT(30)
(3) INSERT(31)
(4) DELETE(1)
(5) DELETE(19)

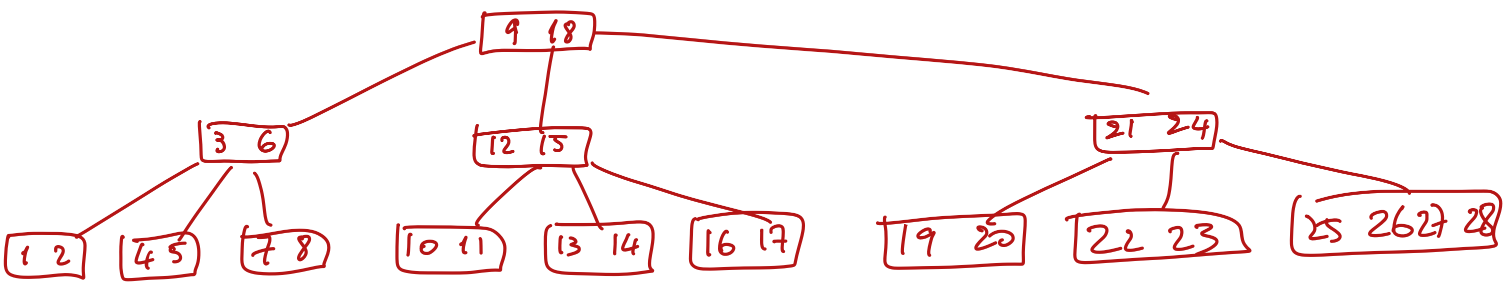


(c) Si forniscano un limite inferiore e un limite superiore per il numero di chiavi n in un B-tree di altezza h e di grado minimo uguale a quello del B-tree $\mathcal{T}$.

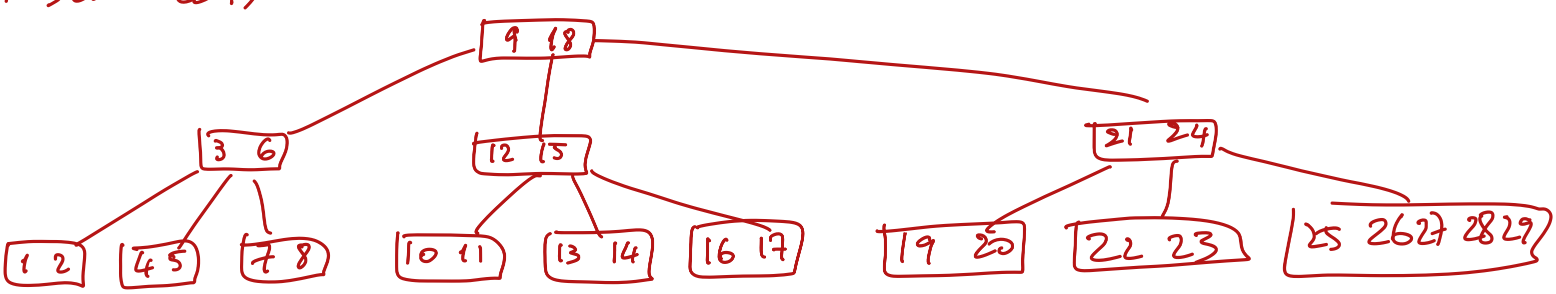
$$\boxed{t-1 \leq 2, \quad 4 \leq 2t-1}$$

$$\begin{cases} t-1 \leq 2 & \longrightarrow \quad t \leq 3 \\ 4 \leq 2t-1 & \longrightarrow \quad 2t \geq 5 \longrightarrow t \geq \left\lceil \frac{5}{2} \right\rceil = 3 \end{cases}$$

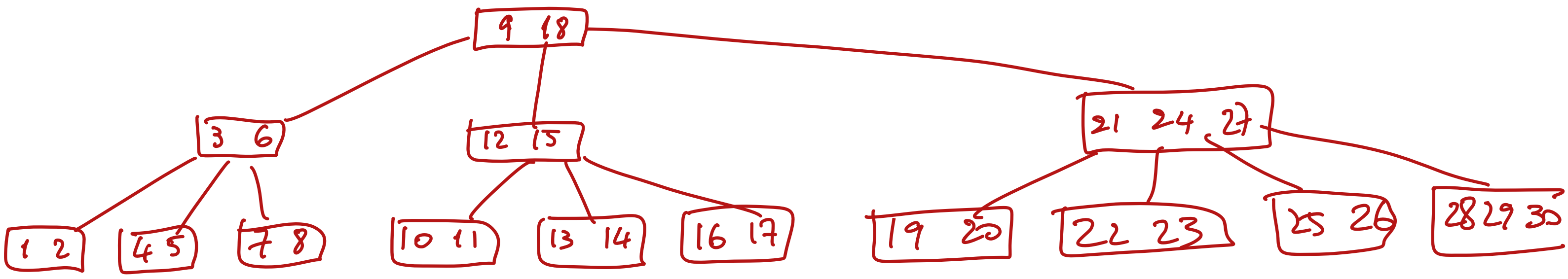
$$\boxed{t = 3}$$



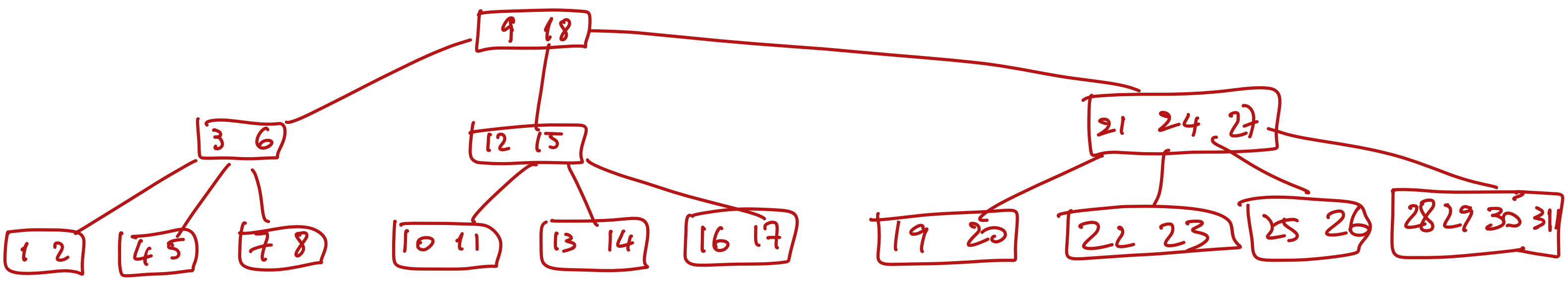
INSERT (29)



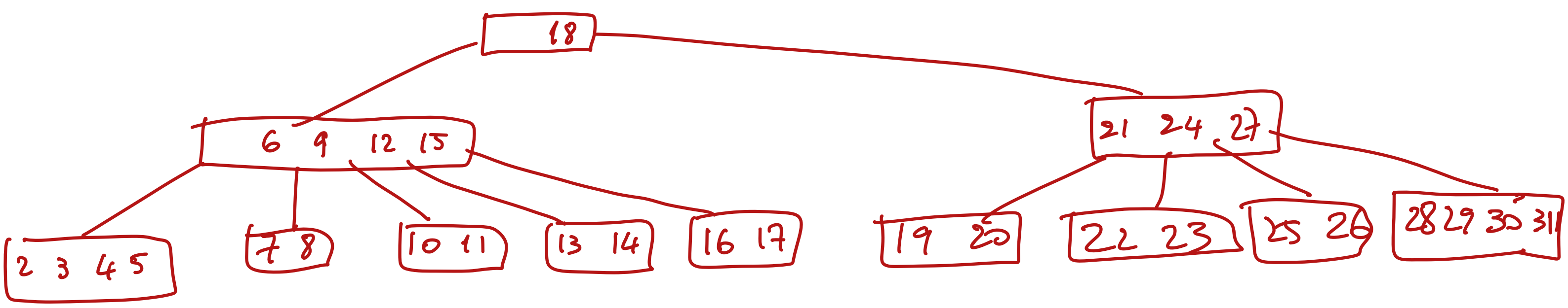
INSERT (30)



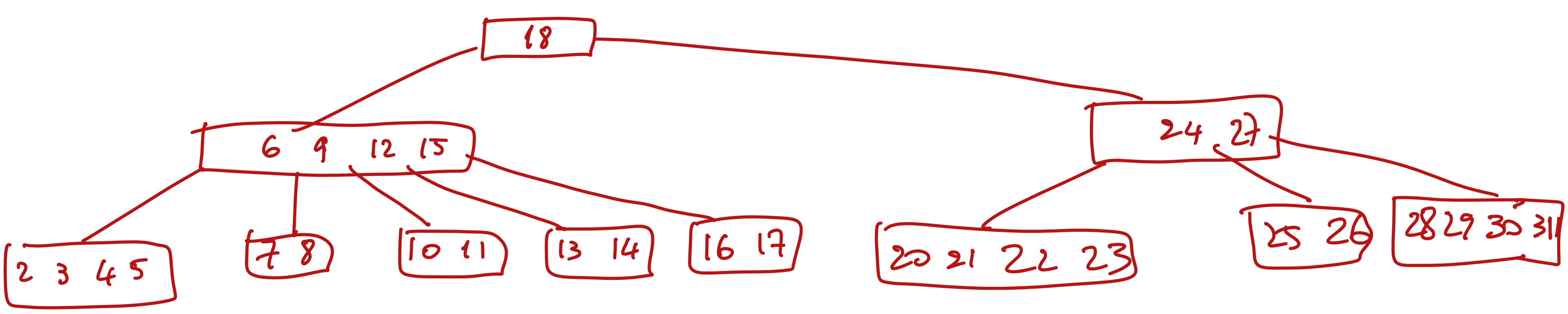
INSERT (31)



DELETE (1)



DELETE (19)

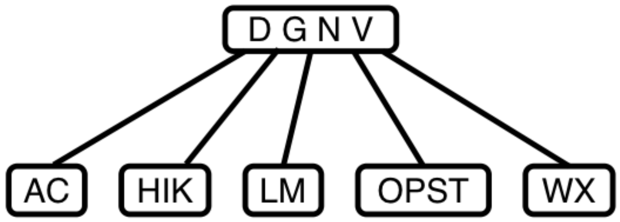


ESERCIZIO 2

(a) Si definisca la struttura dati dei B-tree.

(b) Si determini il grado minimo del B-tree $\mathcal{T}$ a lato e si illustri l'esecuzione delle seguenti operazioni su $\mathcal{T}$:

(1) DELETE(N) (4) DELETE(G)
(2) DELETE(V) (5) INSERT(U)
(3) DELETE(D) (6) INSERT(D)

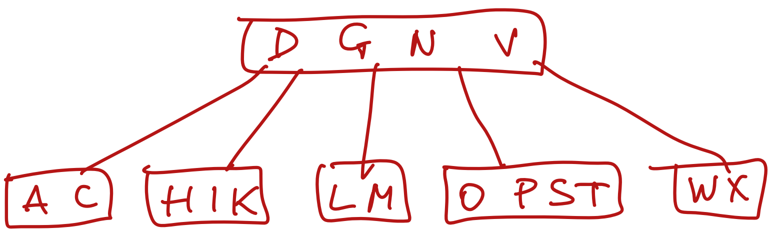


(c) Si determinino una minorazione ed una maggiorazione del numero di nodi a profondità $i = 0, 1, \ldots, h$ in un B-tree di grado minimo t e altezza h.

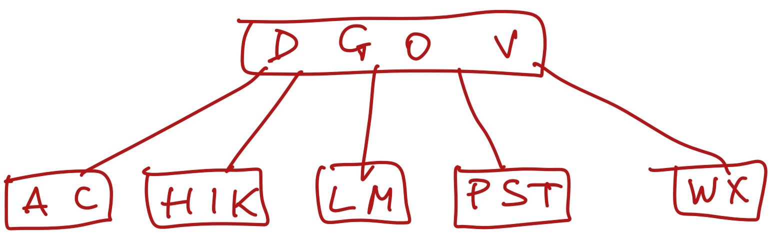
$$t-1 \le 2,3,4 \le 2t-1$$

$$\begin{cases} t-1 \le 2 \longrightarrow t \le 3 \\ 4 \le 2t-1 \longrightarrow 2t \ge 5 \longrightarrow t \ge \left\lceil \frac{5}{2} \right\rceil = 3 \end{cases}$$

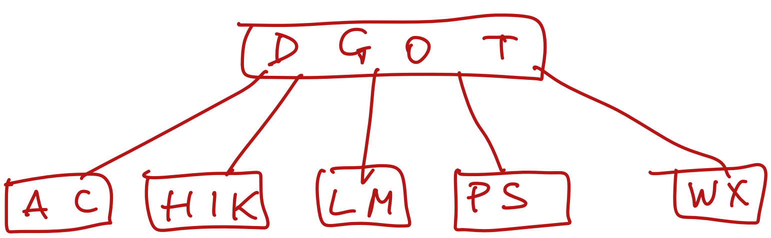
$$\longrightarrow t = 3$$



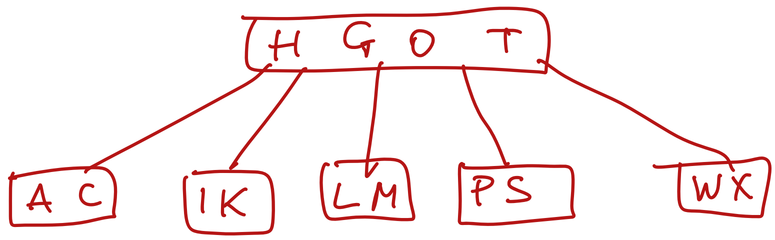
DELETE (N)



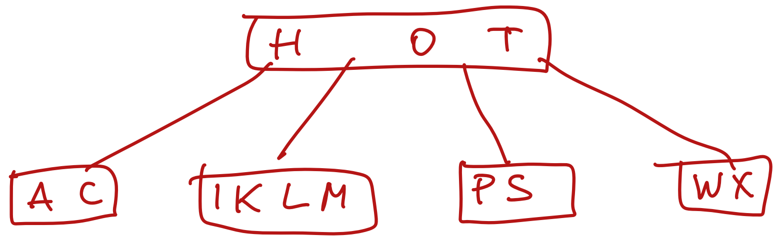
DELETE (V)



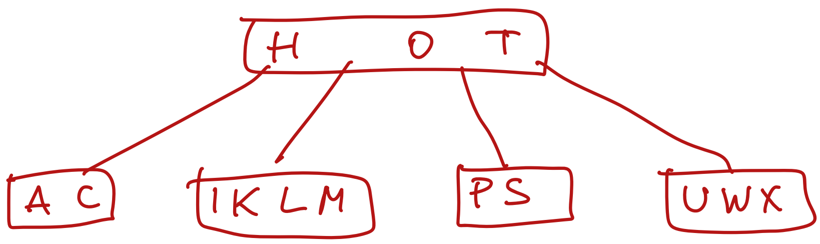
DELETE (D)



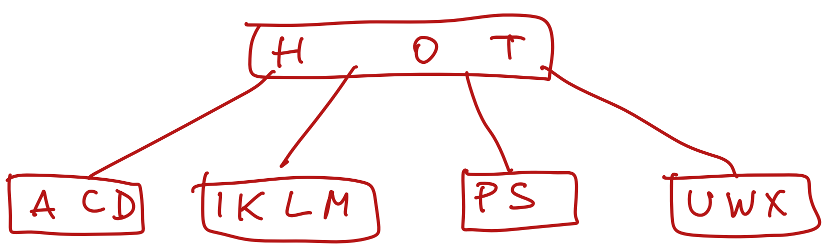
DELETE (G)



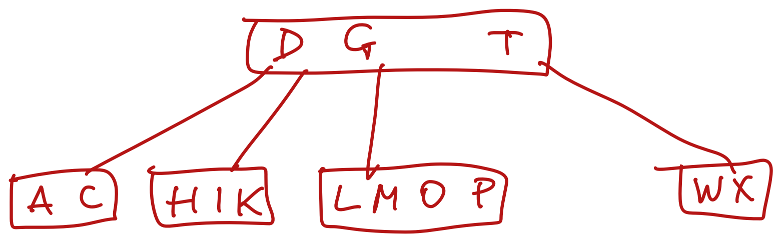
INSERT (U)



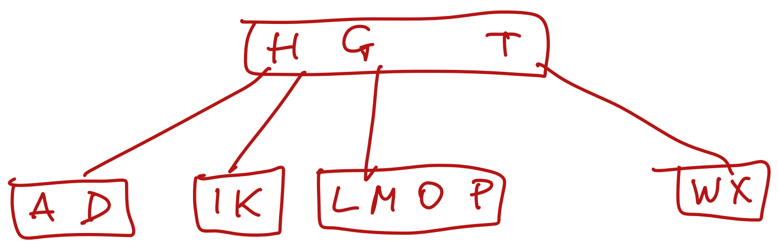
INSERT (D)



DELETE (S)



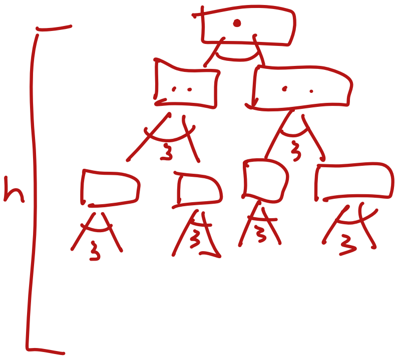
DELETE (C)



ESERCIZIO 4 (B-trees)

Dopo aver definito in maniera dettagliata la struttura dati dei B-tree, si determini il numero massimo e il numero minimo di *nodi* che può essere contenuto in un B-tree di data altezza h e grado minimo 3.

MAGRO

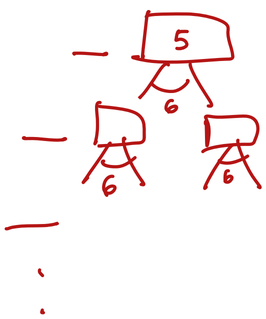


$\rightarrow$	1	0
$\rightarrow$	2	1
$\rightarrow$	$2 \cdot 3$	2
$\rightarrow$	$2 \cdot 3^2$	3
$\rightarrow$	$2 \cdot 3^{h-1}$	

$$1 + 2 \sum_{i=0}^{h-1} 3^i = 1 + \cancel{2} \cdot \frac{3^h - 1}{\cancel{3-1}}$$

$$= 1 + 3^h - 1 = \boxed{3^h}$$

PIENO



$\rightarrow$	1
$\rightarrow$	6
$\rightarrow$	6^2
$\vdots$	
$\rightarrow$	6^h

$$\sum_{i=0}^{h} 6^i = \boxed{\frac{6^{h+1} - 1}{5}}$$

$$\boxed{3^h \le \#\, nodi \le \frac{6^{h+1}-1}{5}}$$

ESERCIZIO 2

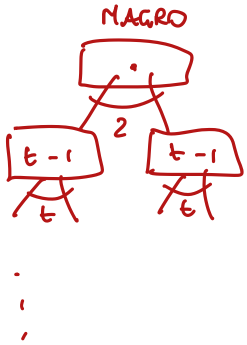
(a) Si definisca la struttura dati dei *B-tree*.

(b) Si forniscano un limite inferiore e un limite superiore (quest'ultimo con dimostrazione) al numero di chiavi in un B-tree di grado minimo t e altezza h.

Da questi si deducano

(b_1) un limite inferiore e un limite superiore all'altezza di un B-tree di grado minimo t contenente n chiavi;

(b_2) un limite inferiore e un limite superiore al grado minimo di un B-tree di altezza h contenente n chiavi.



$$1$$

$$2(t-1)$$

$$2t(t-1)$$

$$2t^2(t-1)$$

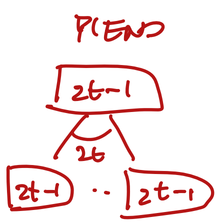
$$\vdots$$

$$2t^{h-1}(t-1)$$

$$1 + 2(t-1) \cdot \sum_{i=0}^{h-1} t^i = 1 + 2\cancel{(t-1)} \frac{t^h - 1}{\cancel{t-1}}$$

$$= 1 + 2t^h - 2$$

$$= 2t^h - 1$$



$$2t-1$$

$$2t(2t-1)$$

$$(2t)^2(2t-1)$$

$$\vdots$$

$$(2t)^h(2t-1)$$

$$(2t-1) \cdot \sum_{i=0}^{h} (2t)^i = (2t-1) \cdot \frac{(2t)^{h+1} - 1}{2t-1} = (2t)^{h+1} - 1$$

$$2t^h - 1 \leq \#\text{chiavi} \leq (2t)^{h+1} - 1$$

(b_1) un limite inferiore e un limite superiore all'altezza di un B-tree di grado minimo t contenente n chiavi;
(b_2) un limite inferiore e un limite superiore al grado minimo di un B-tree di altezza h contenente n chiavi.

$$2t^h - 1 \leq n \leq (2t)^{h+1} - 1$$

$$2t^h \leq n+1 \qquad\qquad n+1 \leq (2t)^{h+1}$$

$$t^h \leq \frac{n+1}{2} \qquad\qquad h+1 \geq \log_{2t}(n+1)$$

$$h \leq \log_t \frac{n+1}{2} \qquad\qquad h \geq \log_{2t} \frac{n+1}{2t}$$

$$\log_{2t} \frac{n+1}{2t} \leq h \leq \log_t \frac{n+1}{2}$$

$$\log_{2t} n+1 - \log_{2t} 2t$$

$$2t^h \leq n+1 \qquad\qquad n+1 \leq (2t)^{h+1}$$

$$t^h \leq \frac{n+1}{2} \qquad\qquad \sqrt[h+1]{n+1} \leq 2t$$

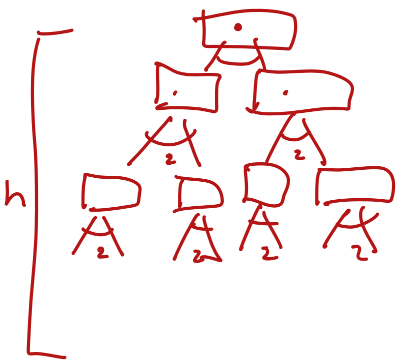
$$t \leq \sqrt[h]{\frac{n+1}{2}} \qquad\qquad t \geq \frac{\sqrt[h+1]{n+1}}{2}$$

$$\sqrt{\frac{n+1}{2^{h+1}}} = \frac{\sqrt[h+1]{n+1}}{2} \leq t \leq \sqrt[h]{\frac{n+1}{2}}$$

ESERCIZIO 2 **(B-trees)**

Dopo aver definito in maniera dettagliata la struttura dati dei B-tree, si determini il numero massimo e il numero minimo di *nodi* che può essere contenuto in un B-tree di data altezza h e grado minimo 2.

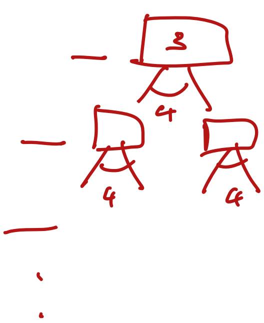
MAGRO



$$\to 1 \qquad 0$$
$$\to 2 \qquad 1$$
$$\to 2 \cdot 2 = 2^2 \qquad 2$$
$$\to 2 \cdot 2^2 = 2^3 \qquad 3$$
$$\vdots$$
$$\to 2 \cdot 2^{h-1} = 2^h$$

$$\sum_{i=0}^{h} 2^i = 2^{h+1} - 1$$

PIENO



$$\to 1$$
$$\to 4$$
$$\to 4^2$$
$$\vdots$$
$$\to 4^h$$

$$\sum_{i=0}^{h} 4^i = \frac{4^{h+1}-1}{3}$$

$$\boxed{2^{h+1} - 1 \leq \#\,\text{nodi} \leq \frac{4^{h+1}-1}{3}}$$

ESERCIZIO 2

(a) Si definisca la struttura dati dei *B-tree*.

(b) Sia $\mathcal{T}$ un B-tree contenente esattamente le 11 chiavi $\{2i : 1 \leq i \leq 11\}$ e tale che la sua radice contenga le due chiavi 6 e 12.

Dopo aver determinato il grado minimo t del B-tree $\mathcal{T}$, si illustri l'esecuzione delle seguenti operazioni su $\mathcal{T}$:

(1) Insert(24) (4) Delete(22)
(2) Delete(16) (5) Delete(2)
(3) Delete(24) (6) Delete(10)

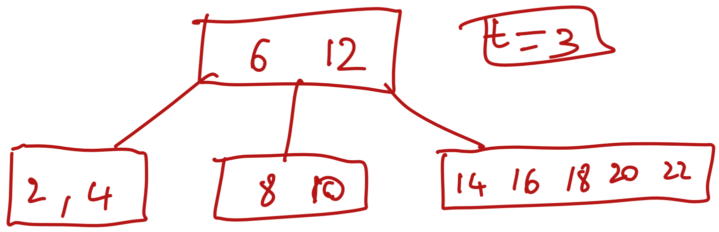
(c) Si determinino il minimo e il massimo numero di chiavi che possono essere contenute in un B-tree di altezza $h = t$ e grado minimo $t' = t + 1$, dove t è il grado minimo del B-tree di cui al punto (b) precedente.

$\boxed{t = 3}$

$5 \leq 2t - 1$

$\boxed{t \geq 3}$

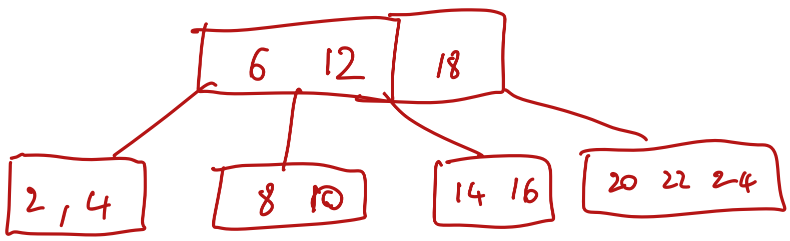
$h = 1$



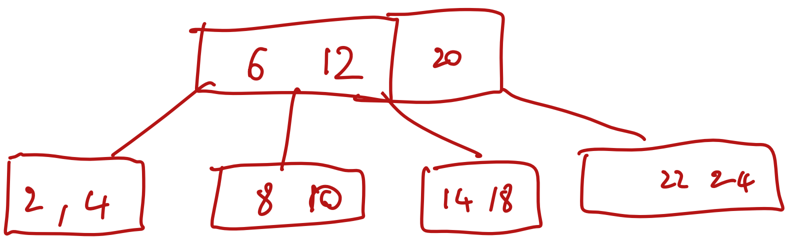
$t - 1 \leq 2$

$\boxed{t \leq 3}$

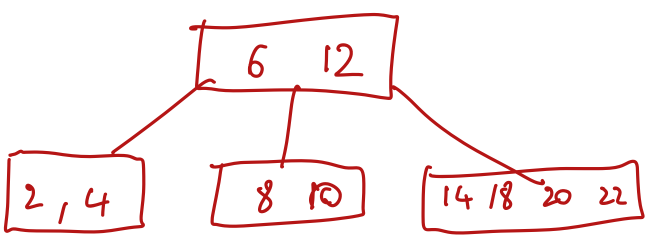
INSERT (24)



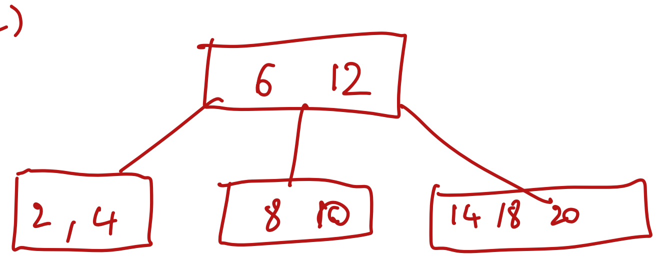
DELETE (16)



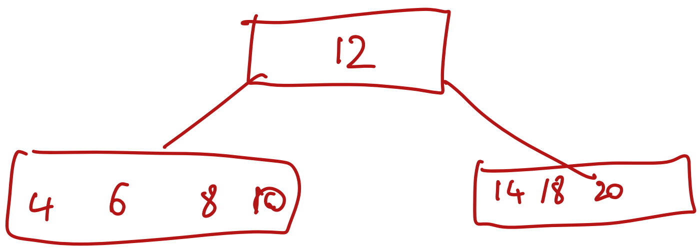
DELETE (24)



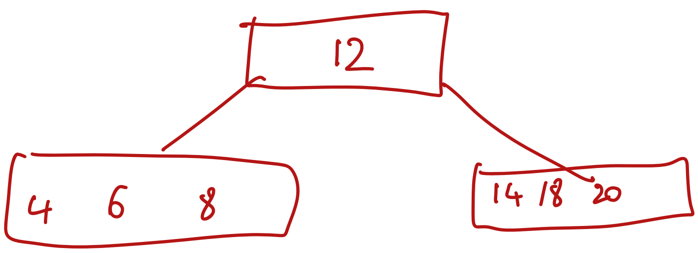
DELETE (22)



DELETE (2)



DELETE (10)

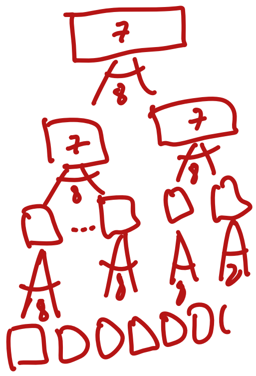


(c) Si determinino il minimo e il massimo numero di chiavi che possono essere contenute in un B-tree di altezza $h = t$ e grado minimo $t' = t + 1$, dove t è il grado minimo del B-tree di cui al punto (b) precedente.

(c) $h = 3$, $t' = 4$ COMPLETARE

# nodi	# chiavi
1	1
2	$2 \cdot 3$
$2 \cdot 4$	$2 \cdot 4 \cdot 3$
$2 \cdot 4^2$	$2 \cdot 4^2 \cdot 3$

$$\min = 1 + 2 \cdot 3 (1 + 4 + 4^2) = 1 + 6 \cdot 21 = 126 + 1 = 127$$



	# nodi	# chiavi
$h=0$	1	7
$h=1$	8	$7\cdot 8$
$h=2$	8^2	$7\cdot 8^2$
$h=3$	8^3	$7\cdot 8^3$

$(2^3)^4 = 2^{12}$

1024
2048
4096

$$max = 7(1+8+8^2+8^3) = 7\cdot\frac{8^4-1}{8-1} = 8^4-1 = 4095$$

$$127 \le \#\ chiavi \le 4095$$