

### ESERCIZIO 5 (Heap binomiali)

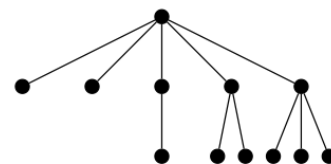
- (a) Si definiscano gli *alberi binomiali* e si enuncino le loro principali proprietà, dimostrandole adeguatamente.
- (b) Si definiscano gli *heap binomiali* e si fornisca una maggiorazione al grado massimo di un nodo in uno heap binomiale contenente  $n$  nodi.

### ESERCIZIO 5 (Heap di Fibonacci)

- (a) Si definiscano gli alberi binomiali non ordinati, enunciando e dimostrando le loro più importanti proprietà.
- (b) Si indichino le operazioni supportate dagli heap di Fibonacci e con quale complessità.
- (c) Sia  $x$  un nodo di grado  $k$  in un heap di Fibonacci e siano  $y_1, \dots, y_k$  i figli di  $x$  nell'ordine in cui sono stati innestati in  $x$ . Quale limitazione inferiore è possibile dare per  $\text{degree}(y_i)$ ? Perché?

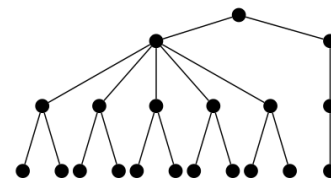
### ESERCIZIO 3

- (a) Si enunci e si dimostri un lemma che fornisca una minorazione dei gradi dei figli di ciascun nodo in un heap di Fibonacci.
- (b) Si stabilisca se possa esistere un heap di Fibonacci avente la struttura dell'albero a lato.



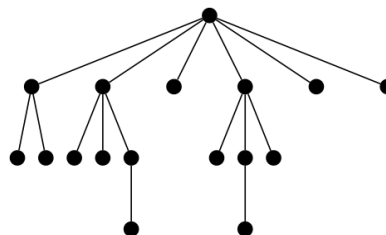
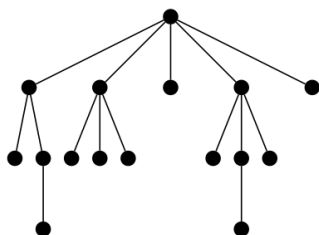
### ESERCIZIO 3

- (a) Si enunci e si dimostri un lemma che fornisca una minorazione dei gradi dei figli di ciascun nodo in un heap di Fibonacci.
- (b) Si stabilisca se possa esistere un heap di Fibonacci avente la struttura dell'albero a lato.



### ESERCIZIO 4 (Heap di Fibonacci)

- (a) Si enunci e si dimostri un lemma che fornisca una minorazione dei gradi dei figli di ciascun nodo in un heap di Fibonacci.
- (b) Si stabilisca, giustificando le risposte, se possano esistere degli heap di Fibonacci aventi la struttura dei seguenti alberi:



## ESERCIZIO 1

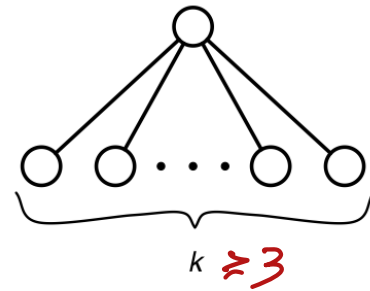
Si eseguano nell'ordine dato le seguenti operazioni su un heap di Fibonacci inizialmente vuoto:

- INSERT 27, 17, 19, 20, 24, 12, 11, 10, 14, 18
- EXTRACT-MIN
- DECREASE-KEY(19,7)<sup>1</sup>
- DELETE(17)
- DECREASE-KEY(24,5)<sup>1</sup>
- EXTRACT-MIN

Dopo ciascuna operazione, si disegni l'heap di Fibonacci risultante, tenendo conto che nella lista delle radici i nuovi elementi vanno inseriti a ~~destra~~ <sup>sinistra</sup> del minimo corrente e che il consolidamento della lista delle radici ha sempre inizio nel nodo a destra del minimo appena cancellato.

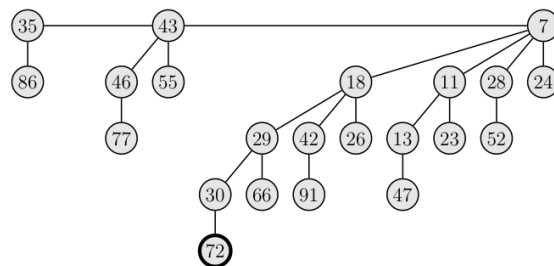
## ESERCIZIO 4

Per ogni  $k \geq \underline{3}$  trovare una sequenza di operazioni sugli heap di Fibonacci che, a partire da una famiglia vuota di heap, ne costruisca uno formato da un *solo* albero avente la forma riportata nella figura a lato, oppure stabilire che una siffatta sequenza non esiste.



### ESERCIZIO 3 (Heap binomiali)

(a) Si definiscano gli *heap binomiali* e si descrivano le operazioni DECREASEKEY, EXTRACTMIN, DELETE e INSERT. Quindi si cancelli il nodo evidenziato (contenente la chiave 72) dall'heap binomiale a lato e poi si inseriscano in successione le chiavi 10, 30 e 5.

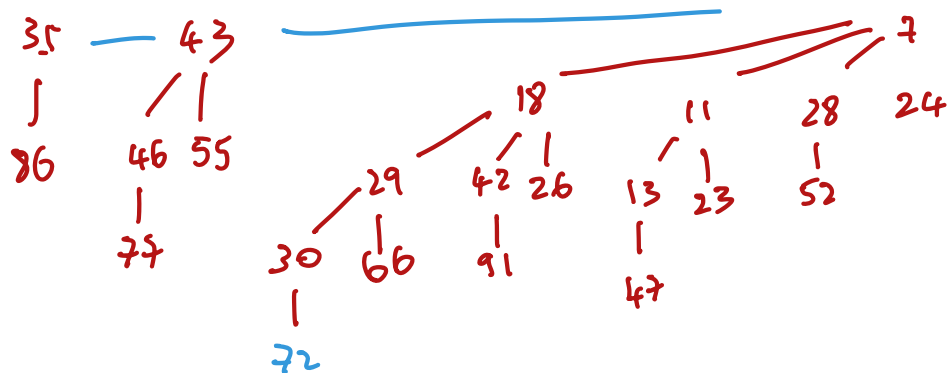


(b) Si determinino un limite superiore ed un limite inferiore per il numero di alberi binomiali in un heap binomiale con  $n$  chiavi.

$$1 \leq \# \text{alberi} \leq \lfloor \lg n \rfloor + 1$$

(c) Nel caso degli heap binomiali, è richiesto che gli alberi binomiali nella lista delle radici siano *ordinati* per grado. Perché?

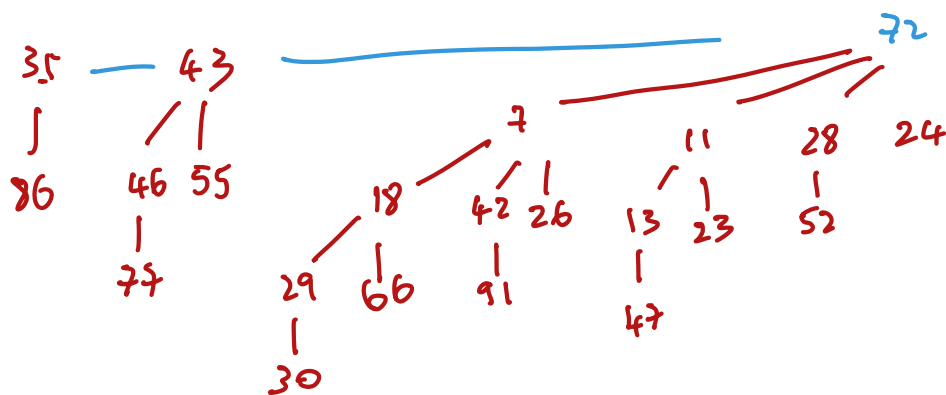
DELETE (72)



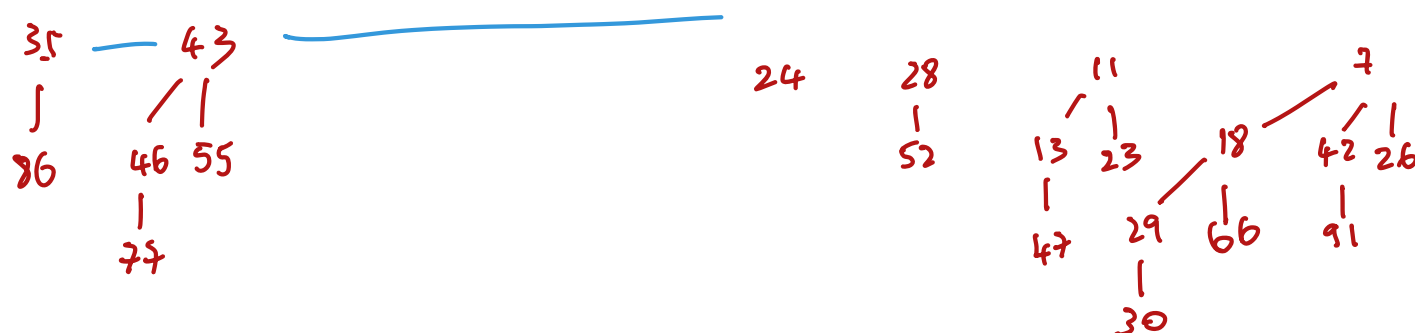
$$1041 = 1 + 2^4 + 2^{10}$$

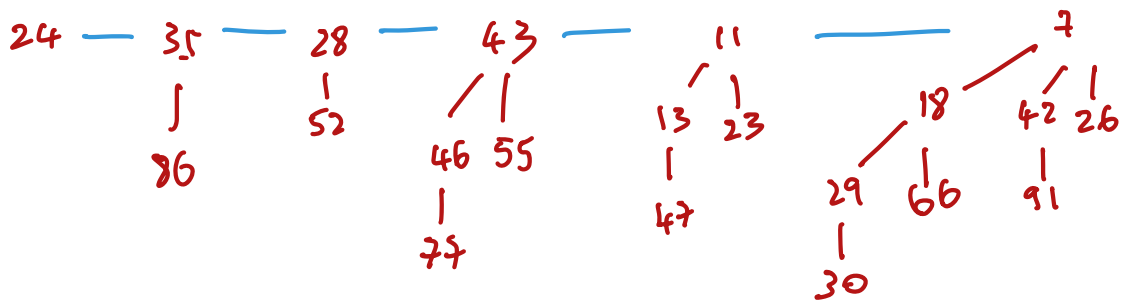
$$1024 = 2^{10}$$

$$17 = 1 + 16 \\ = 1 + 2^4$$

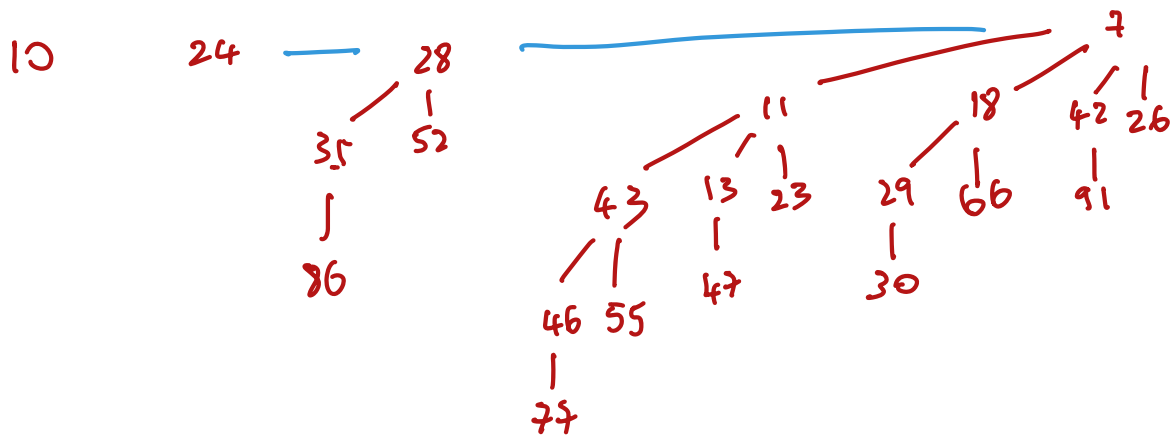


72

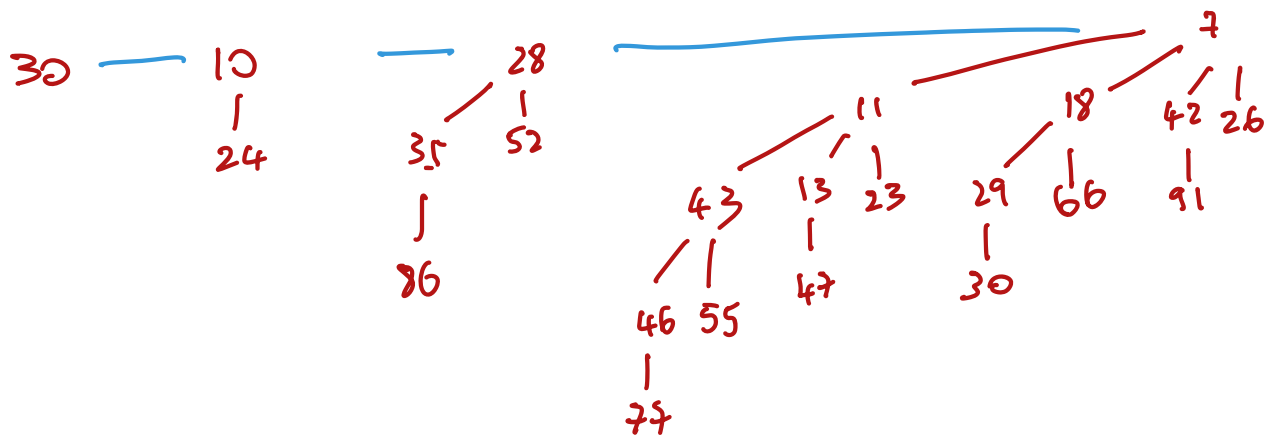




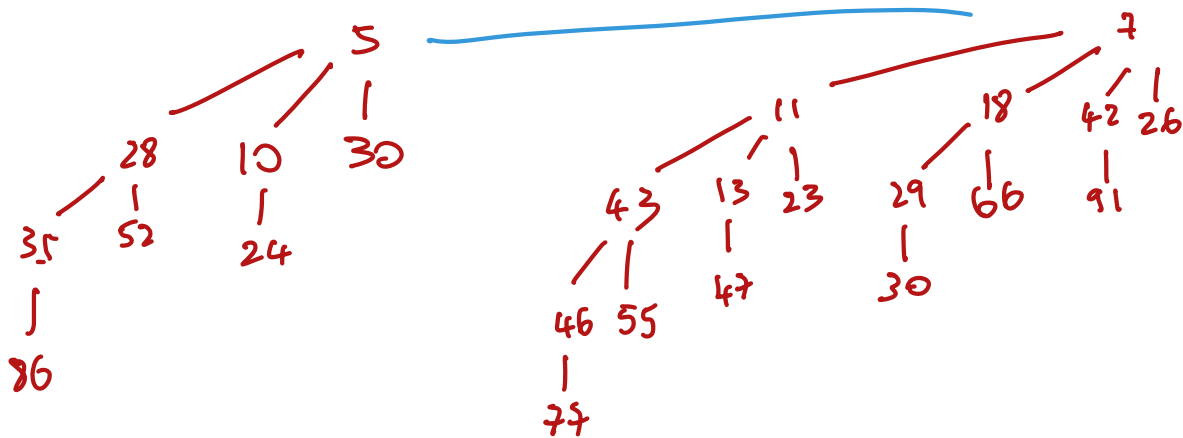
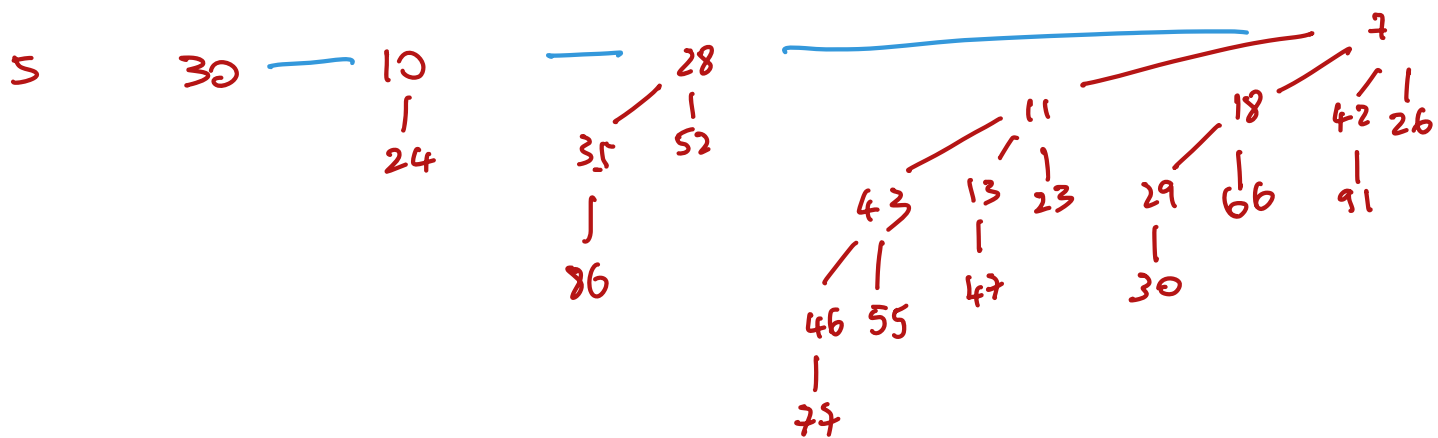
INSERT (10)



INSERT (30)

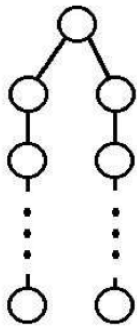


INSERT (5)

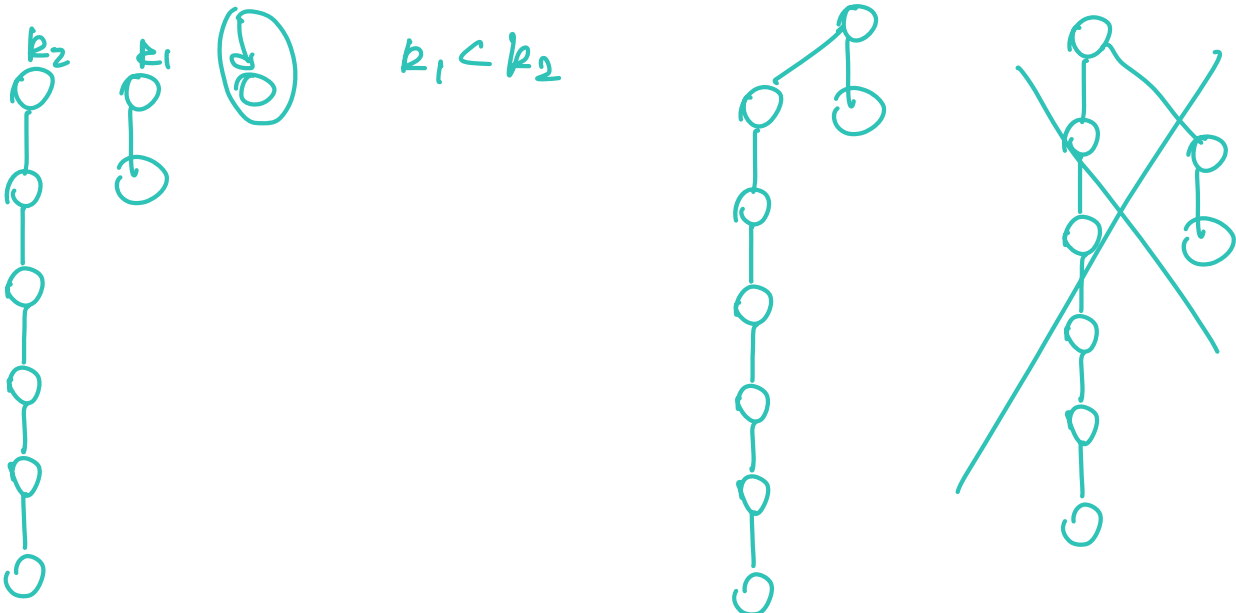
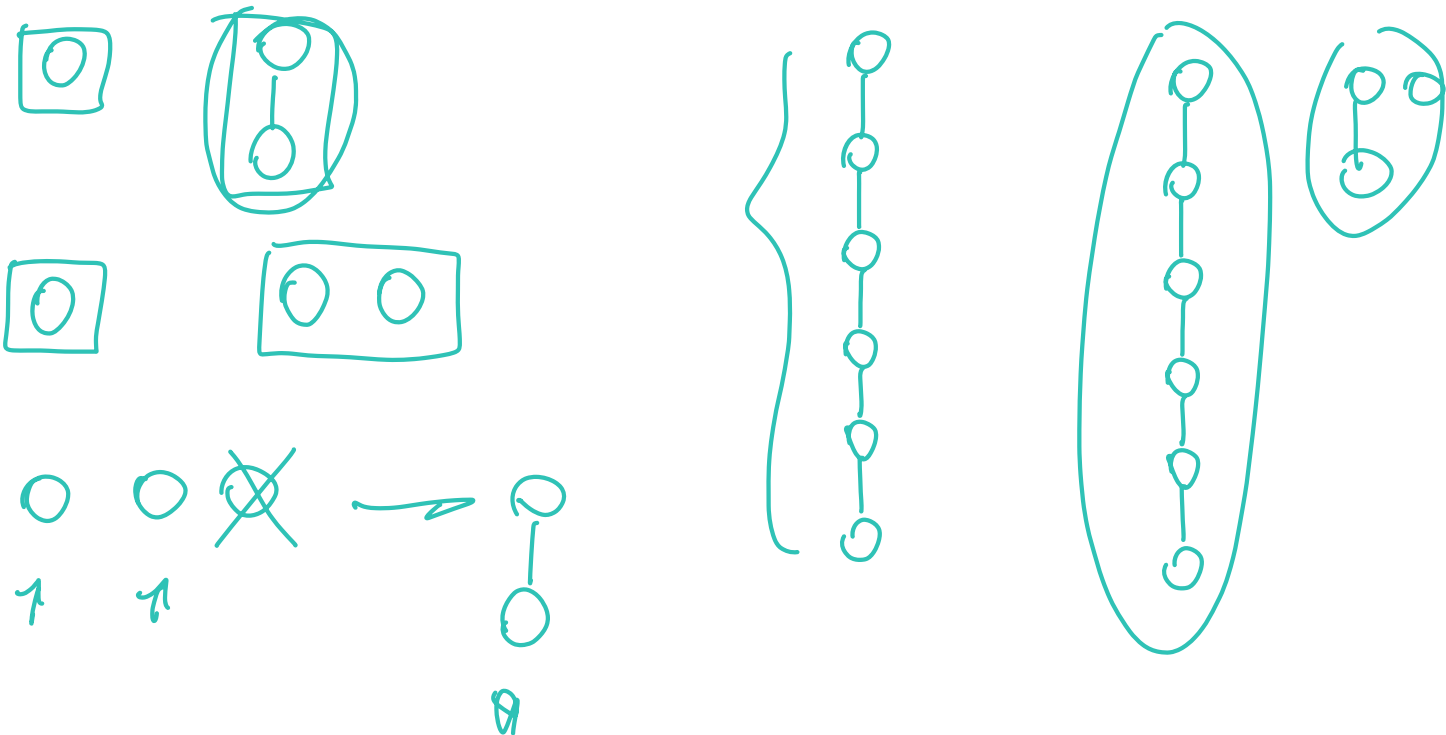


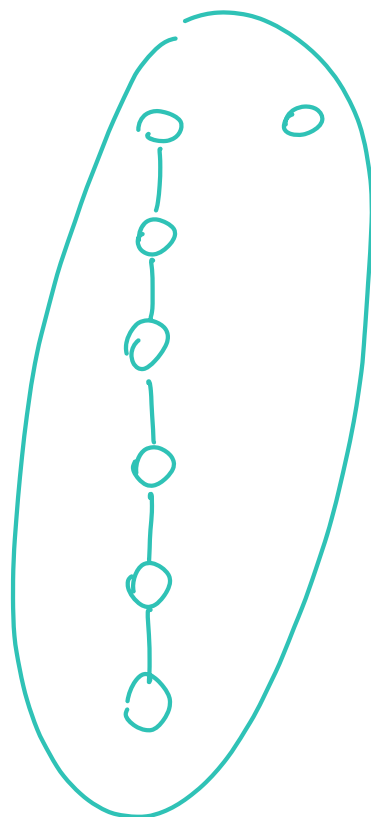
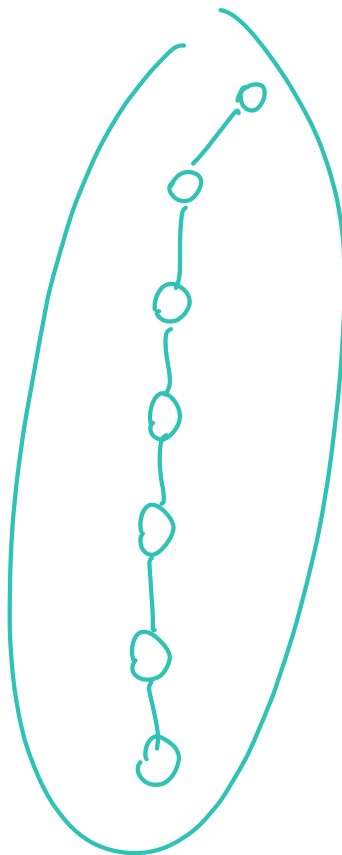
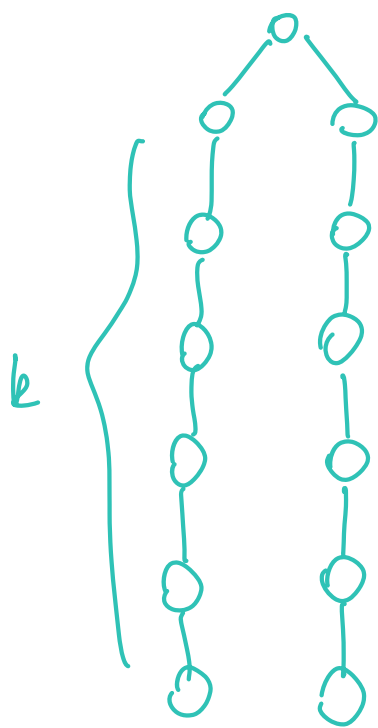
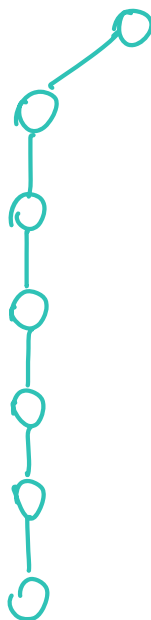
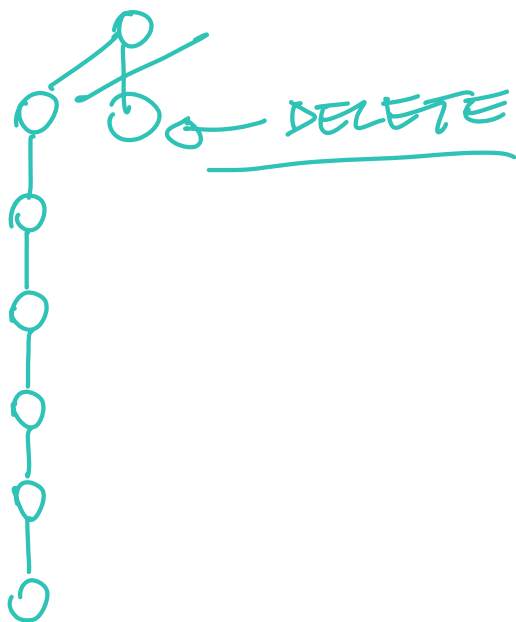
ESERCIZIO 1

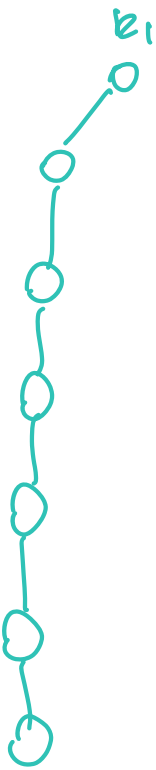
Trovare una sequenza di operazioni sugli heap di Fibonacci che a partire da una famiglia vuota di heap costruisca un heap formato da un solo albero avente la seguente forma



oppure stabilire che una siffatta sequenza di operazioni non esiste.



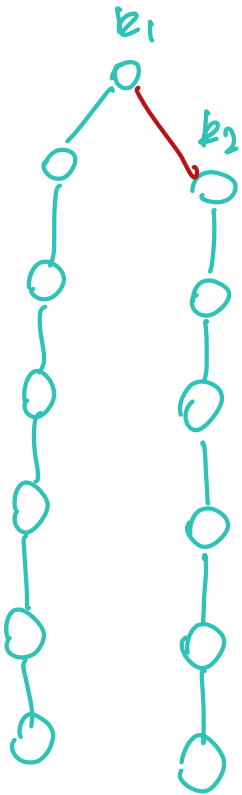




min.  
↓  
○

$$k_1 < k_2$$

EXTRACT-MIN



min.  
~~↓~~  
~~○~~

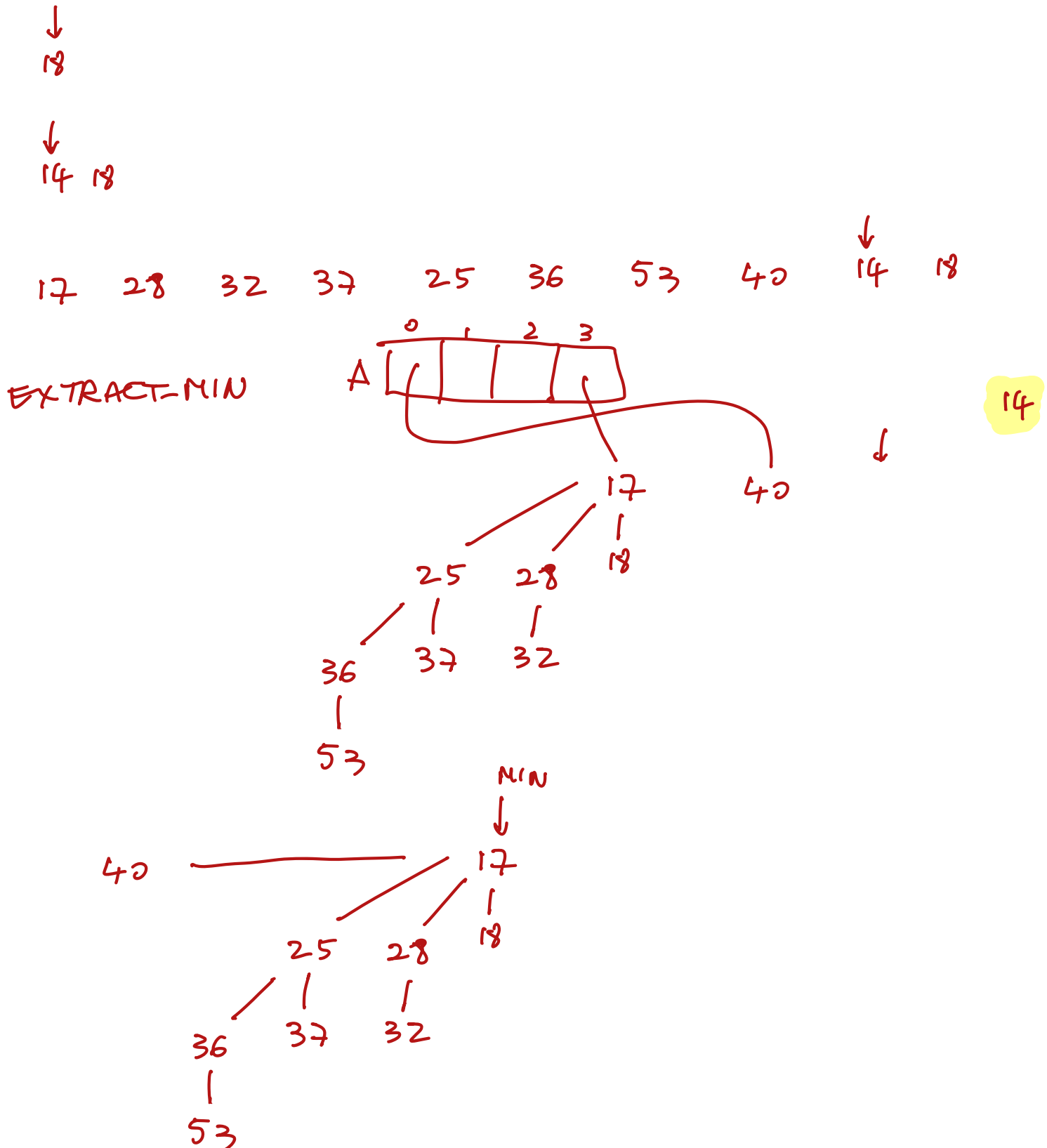
$$k_1 < k_2$$



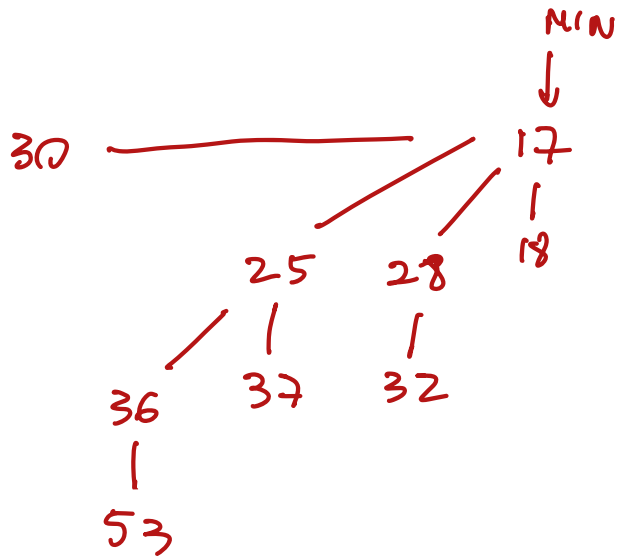
## ESERCIZIO 2 (Heap di Fibonacci)

Si eseguano, nell'ordine dato, le seguenti operazioni su un heap di Fibonacci inizialmente vuoto:

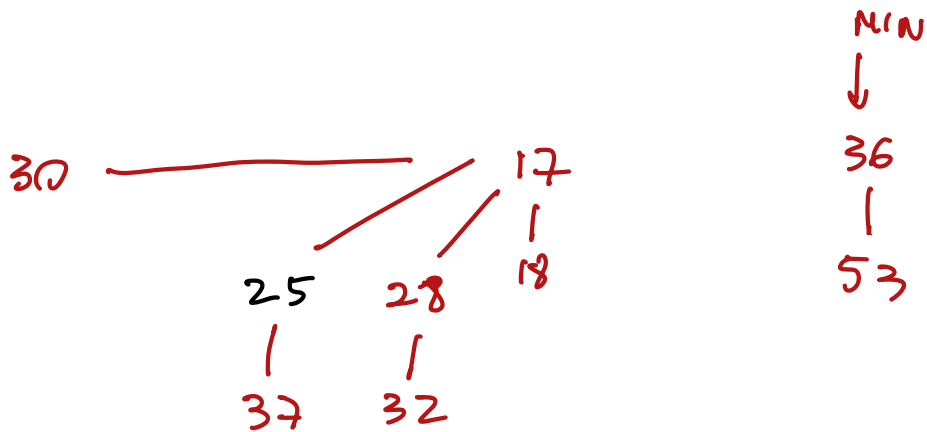
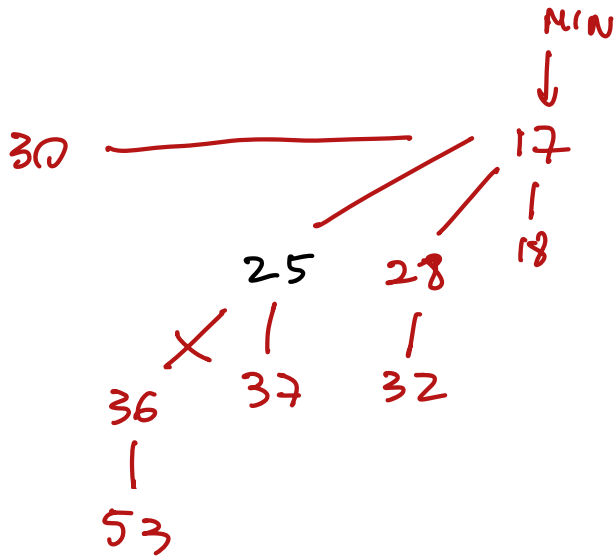
- INSERT 18, 14, 17, 28, 32, 37, 25, 36, 53, 40
- EXTRACT-MIN
- DECREASE-KEY(40,30)
- DELETE(36)
- EXTRACT-MIN

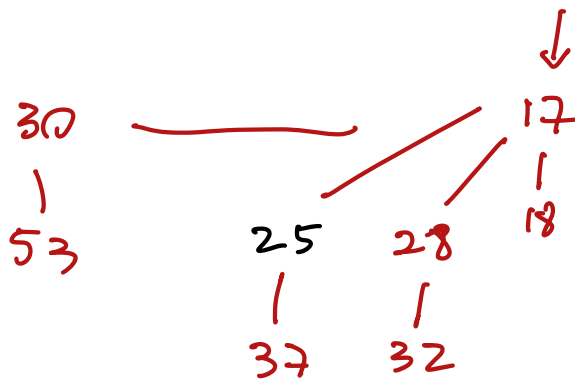
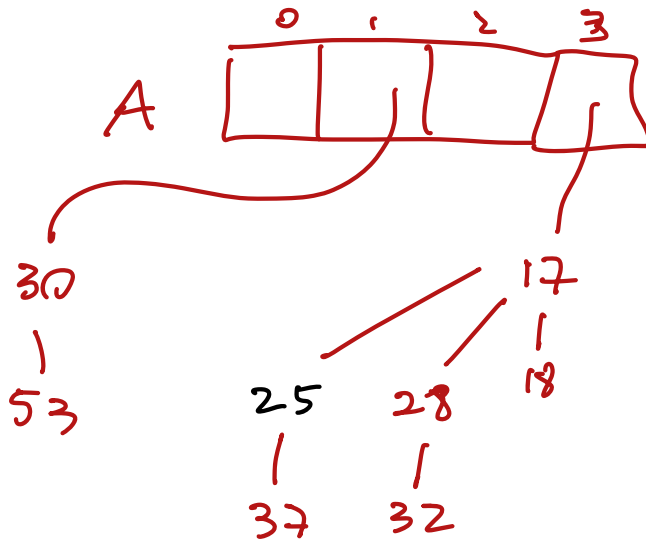
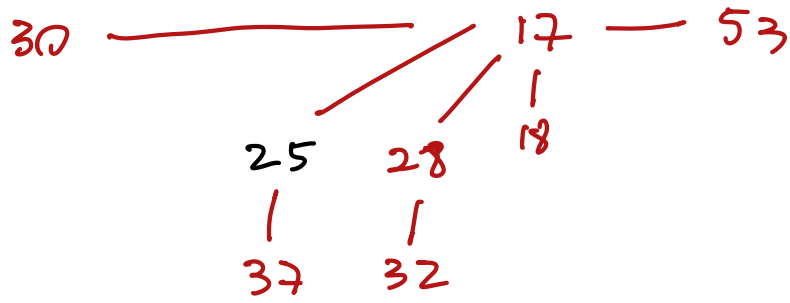


DECREASE-KEY (40, 30)



DELETE (36)





# EXTRACT-MIN

17

