ESEMPI DI ESERCIZI ASSEGNATI AGLI ESAMI DI "ALGORITMI E COMPLESSITÀ"

CORSO DI LAUREA MAGISTRALE IN INFORMATICA

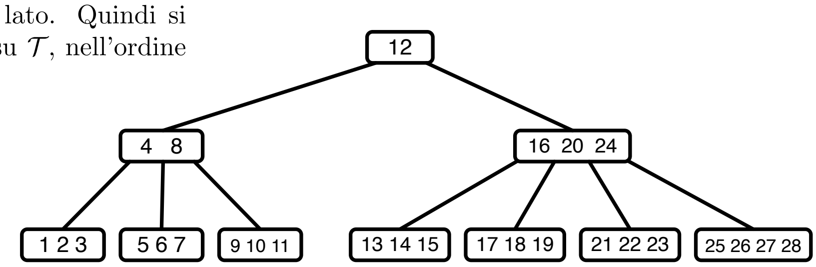
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA

Si svolgano i seguenti esercizi, argomentando adeguatamente le risposte.

ESERCIZIO 1 (B-trees)

Si determini il grado minimo del B-tree $\mathcal{T}$ a lato. Quindi si **illustri** l'esecuzione delle seguenti operazioni su $\mathcal{T}$, nell'ordine dato:

(1) DELETE(1)	(6) INSERT(1)
(2) DELETE(2)	(7) INSERT(2)
(3) DELETE(3)	(8) INSERT(3)
(4) DELETE(4)	(9) INSERT(4)
(5) DELETE(5)	(10) INSERT(5)



ESERCIZIO 2 (B-trees)

Dopo aver definito in maniera dettagliata la struttura dati dei B-tree, si determini il numero massimo e il numero minimo di *nodi* che può essere contenuto in un B-tree di data altezza h e grado minimo 2.

ESERCIZIO 3 (Cammini minimi)

Si illustri un algoritmo efficiente (anche mediante pseudo-codice) per determinare i cammini minimi da una sorgente assegnata a tutti i nodi da essa raggiungibili in un grafo orientato aciclico con funzione peso a valori reali.

ESERCIZIO 4 (Cammini minimi)

Sia $G = (V, E)$ un grafo orientato con funzione peso $w : E \longrightarrow \mathbf{R}^+$ e sorgente $s \in V$, i cui nodi sono tutti raggiungibili da s.

(a) Si definisca il *grafo* $G'_s = (V, E'_s)$ *dei cammini minimi da* s *in* G (rispetto alla funzione peso w).

(b) Dato un arco $(u, v) \in E$, si dimostri che (u, v) appartiene al grafo G'_s se e solo se $\delta(s, v) = \delta(s, u) + w(u, v)$, dove δ è la funzione distanza su G indotta da w.

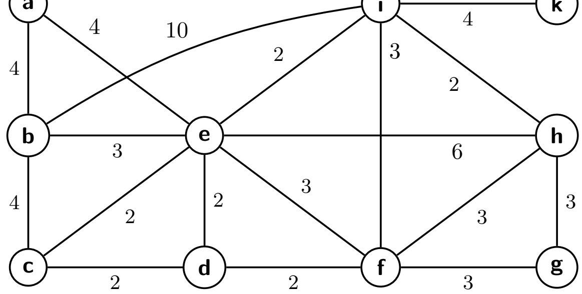
(c) Alla luce della proprietà (b), si illustri un algoritmo efficiente per calcolare il grafo G'_s dei cammini minimi.

ESERCIZIO 5 (Minimum spanning trees)

(a) Si descriva l'algoritmo di Prim (anche mediante il suo pseudo-codice) e lo si applichi al grafo a lato, iniziando dal nodo **a**.

(b) Per ciascuno dei seguenti archi si stabilisca se possa fare parte di un *minimum spanning tree* del grafo a lato:
$(\mathbf{c}, \mathbf{d})$, $(\mathbf{f}, \mathbf{h})$, $(\mathbf{f}, \mathbf{g})$, $(\mathbf{e}, \mathbf{f})$.

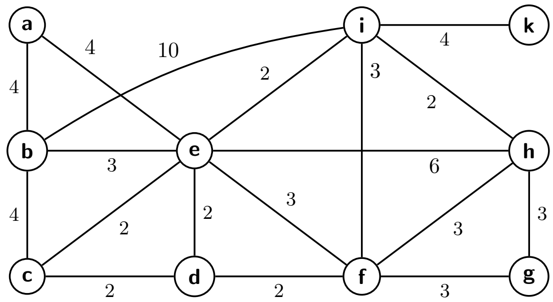
(c) Si descrivano i cosiddetti "passi blu" e "passi rossi" negli algoritmi per il calcolo del *minimum spanning tree*. Quindi si enunci l'*invariante del colore* e lo si dimostri limitatamente ai passi blu.



ESERCIZIO 6 (Minimum spanning trees)

(a) Si descriva l'algoritmo di Prim, fornendone anche lo pseudo-codice, e lo si applichi al grafo a lato a partire dal nodo e.

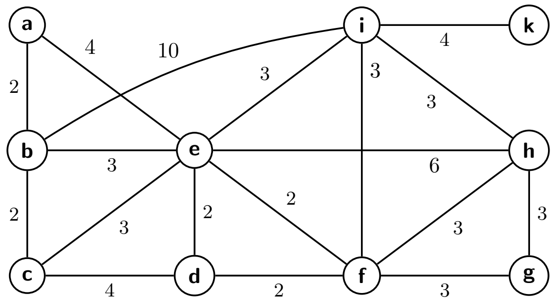
(b) Si descrivano i "passi blu" e "passi rossi" negli algoritmi per il calcolo del *minimum spanning tree* e si enunci l'*invariante del colore*.
Quindi si dimostri che se dopo un certo numero di passi di colorazione il sottografo degli archi blu non forma ancora uno spanning tree, allora è possibile eseguire un passo blu.



ESERCIZIO 7 (Minimum spanning trees)

(a) Si descriva l'algoritmo di Kruskal, fornendone anche lo pseudo-codice, e lo si applichi al grafo a lato.

(b) Si descrivano i "passi blu" e "passi rossi" negli algoritmi per il calcolo del *minimum spanning tree* e si enunci l'*invariante del colore*.
Quindi si dimostri l'invariante del coloro limitatamente agli archi blu.



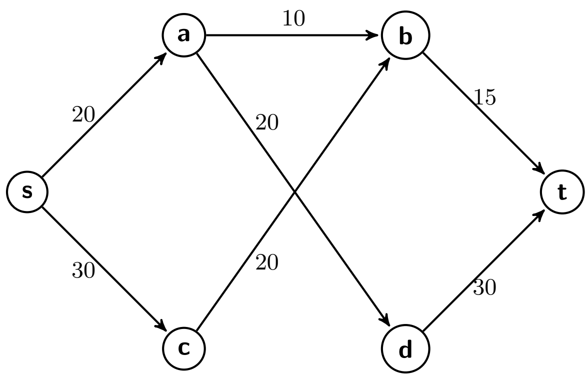
ESERCIZIO 8 (Reti di flusso)

(a) Si definiscano le nozioni di rete di flusso, flusso e suo valore, cammino aumentante, taglio e sua capacità.

(b) Si illustri il procedimento di Ford-Fulkerson e lo si applichi alla rete G a lato utilizzando come criterio di scelta dei cammini aumentanti quello *lessicografico* (secondo il quale, ad es., il cammino $(\mathbf{s}, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{t})$ precede il cammino $(\mathbf{s}, \mathbf{a}, \mathbf{d}, \mathbf{t})$ che a sua volta precede il cammino $(\mathbf{s}, \mathbf{c}, \mathbf{b}, \mathbf{t})$).

(c) Qual è il valore di un flusso massimo in G?

(d) Si determini inoltre un taglio in G di capacità minima calcolandone la capacità.



ESERCIZIO 9 (Reti di flusso)

(a) Si definiscano le nozioni di rete di flusso, flusso netto e suo valore, cammino aumentante, rete residua, taglio e sua capacità.

(b) Sia G una rete di flusso e sia V l'insieme dei suoi vertici. Siano inoltre $f_1, f_2 : V \times V \to \mathbb{R}$ due flussi netti in G. Si consideri la funzione $f_1 + f_2$ definita da:

$$(f_1 + f_2)(u, v) =_{Def} f_1(u, v) + f_2(u, v), \quad \text{per ogni } (u, v) \in V \times V.$$

Si stabilisca quali proprietà dei flussi netti sono necessariamente vere per $f_1 + f_2$ e quali no.

ESERCIZIO 10 (Reti di flusso)

Si enunci e si dimostri il teorema del flusso massimo/taglio minimo, definendo preliminarmente le nozioni sulle reti di flusso rilevanti per enunciare e dimostrare tale teorema.

ESERCIZIO 11 (Analisi ammortizzata)

Avendo a disposizione due stack, si illustri come simulare in maniera efficiente le operazioni di Enqueue e Dequeue su una coda e si analizzi la simulazione fornita mediante analisi ammortizzata (con almeno il metodo del potenziale).

ESERCIZIO 12 (Analisi ammortizzata)

Utilizzando i metodi dell'aggregazione e del potenziale, si determini il costo ammortizzato per operazione di una sequenza di n operazioni, ove il costo c_i dell'i-esima operazione sia dato da

$$c_i = \begin{cases} 4 \cdot i & \text{se } i \text{ è potenza esatta di } 5 \\ 10 & \text{altrimenti}\,. \end{cases}$$

ESERCIZIO 13 (Analisi ammortizzata)

Utilizzando i metodi dell'aggregazione e del potenziale, si determini il costo ammortizzato per operazione di una sequenza di n operazioni, ove il costo c_i dell'i-esima operazione sia dato da

$$c_i = \begin{cases} 8 \cdot i & \text{se } i \text{ è potenza esatta di } 3 \\ 3 & \text{altrimenti}\,. \end{cases}$$

ESERCIZIO 14 (Heap binomiali)

(a) Si definiscano gli *alberi binomiali* e si enuncino le loro principali proprietà, dimostrandole adeguatamente.

(b) Si definiscano gli *heap binomiali* e si fornisca una maggiorazione al grado massimo di un un nodo in uno heap binomiale contenente n nodi.

ESERCIZIO 15 (Heap binomiali)

(a) Si definiscano gli *alberi binomiali* e si dimostri che un albero binomiale di grado k ha altezza k e contiene esattamente 2^k nodi.

(b) Si definiscano gli *heap binomiali*. Quindi si fornisca un esempio di heap binomiale contenente esattamente 8 chiavi e si effettui su di esso l'operazione di estrazione del minimo.

ESERCIZIO 16 (Heap di Fibonacci)

(a) Si enunci e si dimostri un lemma che fornisca una minorazione dei gradi dei figli di ciascun nodo in un heap di Fibonacci.

(b) Si stabilisca se possa esistere un heap di Fibonacci avente la struttura dell'albero a lato.