

“ALGORITMI E COMPLESSITÀ”
CORSO DI LAUREA MAGISTRALE IN INFORMATICA
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA
ANNO ACCADEMICO 2014/15

1^a prova in itinere – 18 dicembre 2015

Si svolgano i seguenti esercizi, argomentando adeguatamente le risposte.

ESERCIZIO 1

Utilizzando i metodi dell'**aggregazione** e del **potenziale**, si determini il costo ammortizzato per operazione di una sequenza di n operazioni, ove il costo c_i dell' i -esima operazione sia dato da

$$c_i = \begin{cases} 6i & \text{se } i \text{ è potenza esatta di 4} \\ 4 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

ESERCIZIO 2

- (a) Si definisca la struttura dati dei *B-tree*.
- (b) Sia \mathcal{T} un B-tree contenente esattamente le 11 chiavi $\{2i : 1 \leq i \leq 11\}$ e tale che la sua radice contenga le due chiavi 6 e 12.

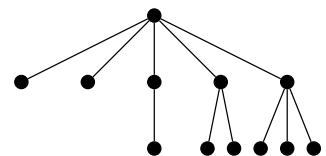
Dopo aver determinato il grado minimo t del B-tree \mathcal{T} , si illustri l'esecuzione delle seguenti operazioni su \mathcal{T} :

- | | |
|----------------|----------------|
| (1) INSERT(24) | (4) DELETE(22) |
| (2) DELETE(16) | (5) DELETE(2) |
| (3) DELETE(24) | (6) DELETE(10) |

- (c) Si determinino il minimo e il massimo numero di chiavi che possono essere contenute in un B-tree di altezza $h = t$ e grado minimo $t' = t + 1$, dove t è il grado minimo del B-tree di cui al punto (b) precedente.

ESERCIZIO 3

- (a) Si enunci e si dimostri un lemma che fornisce una minorazione dei gradi dei figli di ciascun nodo in un heap di Fibonacci.
- (b) Si stabilisca se possa esistere un heap di Fibonacci avente la struttura dell'albero a lato.



ESERCIZIO 4

Si descrivano le operazioni di *zig-zag*, *zig-zig* e *zig* in uno splay tree di tipo bottom-up. Quindi si eseguano nell'ordine dato le seguenti operazioni su uno splay tree la cui configurazione iniziale è quella di un albero binario completo contenente le chiavi $\{2i : 5 \leq i \leq 11\}$:

- SEARCH 14, 18, 16
- INSERT 19
- DELETE 20
- SEARCH 10

“ALGORITMI E COMPLESSITÀ”
CORSO DI LAUREA MAGISTRALE IN INFORMATICA
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA
ANNO ACCADEMICO 2016/17

1^a prova in itinere – 14 dicembre 2016

Si svolgano i seguenti esercizi, argomentando adeguatamente le risposte.

ESERCIZIO 1

Utilizzando i metodi dell'**aggregazione** e del **potenziale**, si determini il costo ammortizzato per operazione di una sequenza di n operazioni, ove il costo dell' i -esima operazione sia dato da

$$(a) \quad c_i = \begin{cases} 8 \cdot i & \text{se } i \text{ è potenza esatta di } 5 \\ 7 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

oppure da

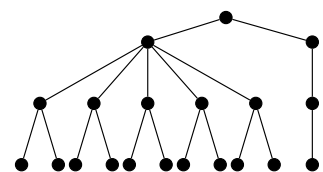
$$(b) \quad (Facoltativo) \quad c'_i = \begin{cases} 8 \cdot i + 3 & \text{se } i \text{ è potenza esatta di } 5 \\ 10 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

ESERCIZIO 2

- (a) Si definisca la struttura dati dei *B-tree*.
- (b) Si forniscano un limite inferiore e un limite superiore (quest'ultimo con dimostrazione) al numero di chiavi in un B-tree di grado minimo t e altezza h .
Da questi si deducano
- (b.1) un limite inferiore e un limite superiore all'altezza di un B-tree di grado minimo t contenente n chiavi;
 - (b.2) un limite inferiore e un limite superiore al grado minimo di un B-tree di altezza h contenente n chiavi.

ESERCIZIO 3

- (a) Si enunci e si dimostri un lemma che fornisca una minorazione dei gradi dei figli di ciascun nodo in un heap di Fibonacci.
- (b) Si stabilisca se possa esistere un heap di Fibonacci avente la struttura dell'albero a lato.



ESERCIZIO 4

Si descrivano le operazioni di *zig-zag*, *zig-zig* e *zig* in uno splay tree di tipo bottom-up.

Quindi si eseguano nell'ordine dato le seguenti operazioni su uno splay tree la cui configurazione iniziale è quella di un albero binario completo contenente le 9 chiavi $\{3i : 1 \leq i \leq 9\}$:

- SEARCH 3, 9, 21
- INSERT 16
- DELETE 12
- SEARCH 27

Nota bene: Si ricorda che un albero binario si dice *completo* quando tutti i suoi livelli, con al più l'eccezione dell'ultimo, sono completi e tutti i nodi nell'ultimo livello si trovano il più a sinistra possibile.

“ALGORITMI E COMPLESSITÀ”
CORSO DI LAUREA MAGISTRALE IN INFORMATICA
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA
ANNO ACCADEMICO 2017/18

Prima prova in itinere – 13 dicembre 2017

Si svolgano i seguenti esercizi, argomentando adeguatamente le risposte.

ESERCIZIO 1 (Analisi ammortizzata)

Utilizzando i metodi dell'aggregazione e del potenziale, si determini il costo ammortizzato per operazione di una sequenza di n operazioni, ove il costo c_i dell' i -esima operazione sia dato da

$$c_i = \begin{cases} 12 \cdot i & \text{se } i \text{ è potenza esatta di } 5 \\ 7 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

ESERCIZIO 2 (Splay trees)

Si descrivano le operazioni di *zig-zag*, *zig-zig* e *zig* in uno splay tree di tipo bottom-up.

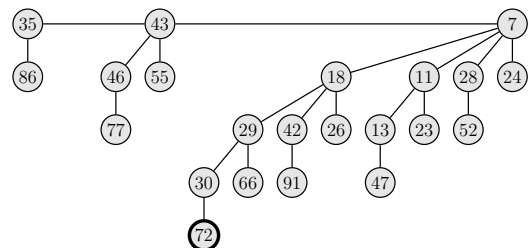
Quindi si eseguano nell'ordine dato le seguenti operazioni su uno splay tree la cui configurazione iniziale è quella di un albero binario completo contenente le 10 chiavi $\{4i : 1 \leq i \leq 10\}$:

- SEARCH 20, 40
- DELETE 24
- INSERT 30

Nota bene: Si ricorda che un albero binario si dice *completo* quando tutti i suoi livelli, con al più l'eccezione dell'ultimo, sono completi e tutti i nodi nell'ultimo livello si trovano il più a sinistra possibile.

ESERCIZIO 3 (Heap binomiali)

- (a) Si definiscano gli *heap binomiali* e si descrivano le operazioni DECREASEKEY, EXTRACTMIN, DELETE e INSERT. Quindi si cancelli il nodo evidenziato (contenente la chiave 72) dall'heap binomiale a lato e poi si inseriscano in successione le chiavi 10, 30 e 5.



- (b) Si determinino un limite superiore ed un limite inferiore per il numero di alberi binomiali in un heap binomiale con n chiavi.
- (c) Nel caso degli heap binomiali, è richiesto che gli alberi binomiali nella lista delle radici siano *ordinati* per grado. Perché?

ESERCIZIO 4 (B-trees)

Si definisca la struttura dati dei *B-tree*.

“ALGORITMI E COMPLESSITÀ”
CORSO DI LAUREA MAGISTRALE IN INFORMATICA
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA
ANNO ACCADEMICO 2018/19

Prima prova in itinere – 12 dicembre 2018

Si svolgano i seguenti esercizi, argomentando adeguatamente le risposte.

ESERCIZIO 1

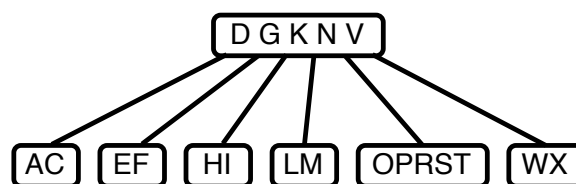
Utilizzando i metodi dell'aggregazione e del potenziale, si determini il costo ammortizzato per operazione di una sequenza di n operazioni, ove il costo c_i dell' i -esima operazione sia dato da

$$c_i = \begin{cases} 12 \cdot i & \text{se } i \text{ è potenza esatta di } 7 \\ 6 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

ESERCIZIO 2

- (a) Si **definisca** la struttura dati dei *B-tree*.
- (b) Dopo aver **determinato** il grado minimo del B-tree \mathcal{T} a lato, si **illustri** l'esecuzione delle seguenti operazioni su \mathcal{T} :

- | | |
|---------------|---------------|
| (1) DELETE(E) | (5) INSERT(U) |
| (2) DELETE(H) | (6) INSERT(B) |
| (3) DELETE(F) | (7) INSERT(D) |
| (4) DELETE(G) | (8) DELETE(D) |



- (c) Si fornisca (con dimostrazione) un limite superiore per l'altezza di un B-tree di grado minimo t con n chiavi.

ESERCIZIO 3

Si descrivano le operazioni di *zig-zag*, *zig-zig* e *zig* in uno splay tree di tipo bottom-up.

Quindi si eseguano nell'ordine dato le seguenti operazioni su uno splay tree la cui configurazione iniziale è quella di un albero binario completo contenente le 9 chiavi $\{4i : 1 \leq i \leq 9\}$:

- SEARCH 12, 28, 20
- INSERT 5
- DELETE 16
- SEARCH 36

Nota bene: Si ricorda che un albero binario si dice *completo* quando tutti i suoi livelli, con al più l'eccezione dell'ultimo, sono completi e tutti i nodi nell'ultimo livello si trovano il più a sinistra possibile.

ESERCIZIO 4

- (a) Si definiscano gli *alberi binomiali* e si enuncino le loro principali proprietà, dimostrandole adeguatamente.
- (b) Si definiscano gli *heap binomiali* e si fornisca una maggiorazione al grado massimo di un nodo in uno heap binomiale contenente n nodi.

“ALGORITMI E COMPLESSITÀ”
CORSO DI LAUREA MAGISTRALE IN INFORMATICA
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA
ANNO ACCADEMICO 2018/19

Prima prova in itinere – 11 dicembre 2019

Si svolgano i seguenti esercizi, argomentando adeguatamente le risposte.

ESERCIZIO 1

Utilizzando i metodi dell'aggregazione e del potenziale, si determini il costo ammortizzato per operazione di una sequenza di n operazioni, ove il costo c_i dell' i -esima operazione sia dato da

$$c_i = \begin{cases} 2 \cdot i & \text{se } i \text{ è potenza esatta di } 5 \\ \frac{15}{2} & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

ESERCIZIO 2

Si descrivano le operazioni di *zig-zag*, *zig-zig* e *zig* in uno splay tree di tipo bottom-up.

Quindi si eseguano nell'ordine dato le seguenti operazioni su uno splay tree la cui configurazione iniziale è quella di un albero binario completo contenente le 9 chiavi $\{3i : 1 \leq i \leq 9\}$:

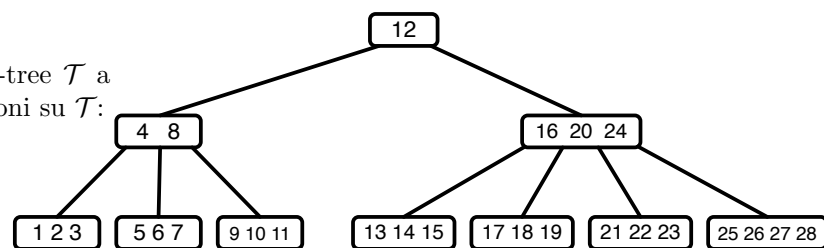
- SEARCH 9, 21, 15
- INSERT 20
- DELETE 12
- SEARCH 27

Nota bene: Si ricorda che un albero binario si dice *completo* quando (a) tutti i suoi livelli, con al più l'eccezione dell'ultimo, sono completi e (b) tutti i nodi nell'ultimo livello si trovano il più a sinistra possibile.

ESERCIZIO 3 (B-tree)

1. Si **definisca** la struttura dati dei B-tree.
2. Dopo aver **determinato** il grado minimo del B-tree \mathcal{T} a lato si **illustri** l'esecuzione delle seguenti operazioni su \mathcal{T} :

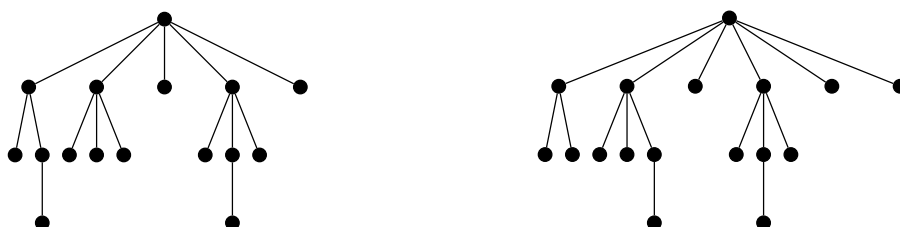
- | | |
|----------------|----------------|
| (1) DELETE(3) | (5) DELETE(9) |
| (2) DELETE(19) | (6) DELETE(25) |
| (3) DELETE(5) | (7) DELETE(1) |
| (4) DELETE(21) | |



3. Sia \mathcal{T}' un B-tree con 6000 chiavi, il cui grado minimo è il medesimo di quello in figura. Qual è la massima altezza possibile per \mathcal{T}' ?

ESERCIZIO 4 (Heap di Fibonacci)

- (a) Si enunci e si dimostri un lemma che fornisca una minorazione dei gradi dei figli di ciascun nodo in un heap di Fibonacci.
- (b) Si stabilisca, giustificando le risposte, se possano esistere degli heap di Fibonacci aventi la struttura dei seguenti alberi:



“ALGORITMI E COMPLESSITÀ”
CORSO DI LAUREA MAGISTRALE IN INFORMATICA
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA
ANNO ACCADEMICO 2020/21

Prima prova in itinere – 22 dicembre 2020

Si svolgano i seguenti esercizi, argomentando adeguatamente le risposte.

ESERCIZIO 1

Utilizzando i metodi dell'aggregazione, del potenziale e degli accantonamenti, si determini il costo ammortizzato per operazione di una sequenza di n operazioni, ove il costo c_i dell' i -esima operazione sia dato da

$$c_i = \begin{cases} 10 \cdot i & \text{se } i \text{ è potenza esatta di 4} \\ \frac{8}{3} & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

ESERCIZIO 2

1. Si definisca la struttura dati dei B-tree.
2. Sia \mathcal{T} un B-tree contenente esattamente le chiavi in $\{3i \mid 1 \leq i \leq 11\}$ e tale che la sua radice contenga le chiavi 9 e 18. Si determini il grado minimo di \mathcal{T} e si illustri l'esecuzione delle seguenti operazioni su \mathcal{T} :
- INSERT 34 - DELETE 21, 3 - INSERT 35, 36, 37, - DELETE 9, 12
3. Sia \mathcal{T}' un B-tree con 999 chiavi, il cui grado minimo è il uguale a quello di \mathcal{T} . Quali sono i possibili valori per l'altezza di \mathcal{T}' ?

ESERCIZIO 3

Si descrivano le operazioni di *zig-zag*, *zig-zig* e *zig* in uno splay tree di tipo bottom-up.

Quindi si eseguano nell'ordine dato le seguenti operazioni su uno splay tree la cui configurazione iniziale è quella di un albero binario completo contenente le 7 chiavi in $\{i : 9 \leq i \leq 15\}$:

- INSERT 8 - DELETE 11 - SEARCH 10, 13 - INSERT 11