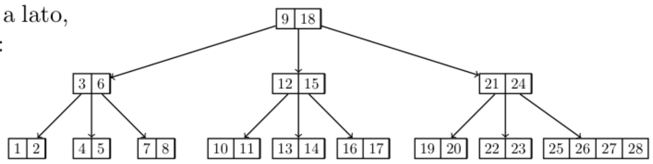
ESERCIZIO 5

(a) Si definisca la struttura dati dei *B-tree*.

(b) Dopo aver determinato il grado minimo del B-tree $\mathcal{T}$ a lato, si illustri l'esecuzione delle seguenti operazioni su $\mathcal{T}$:



(1) Insert(29)
(2) Insert(30)
(3) Insert(31)
(4) Delete(1)
(5) Delete(19)

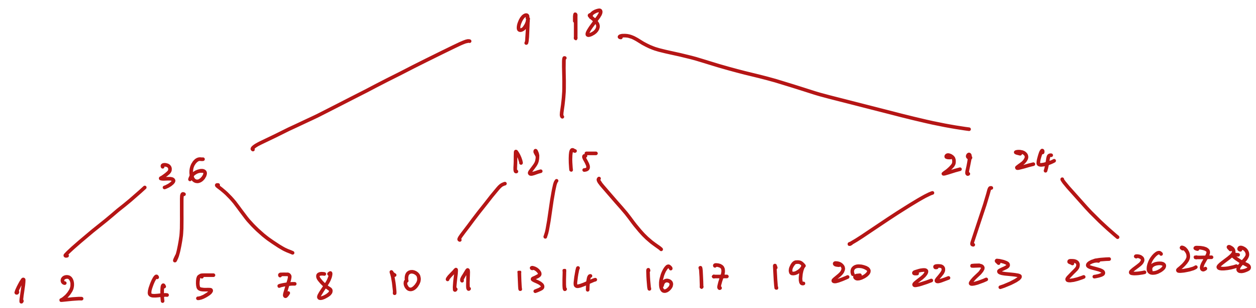
DELETE(25, 12, 15, 16, 8)

(c) Si forniscano un limite inferiore e un limite superiore per il numero di chiavi n in un B-tree di altezza h e di grado minimo uguale a quello del B-tree $\mathcal{T}$.

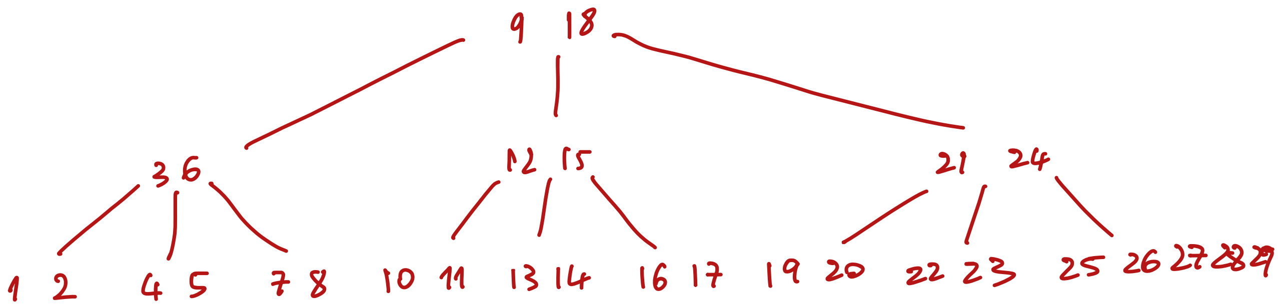
$t-1 \leq 2 \qquad 4 \leq 2t-1$

$\underline{t \leq 3} \qquad t \geq \frac{5}{2} \longrightarrow \underline{t \geq 3}$

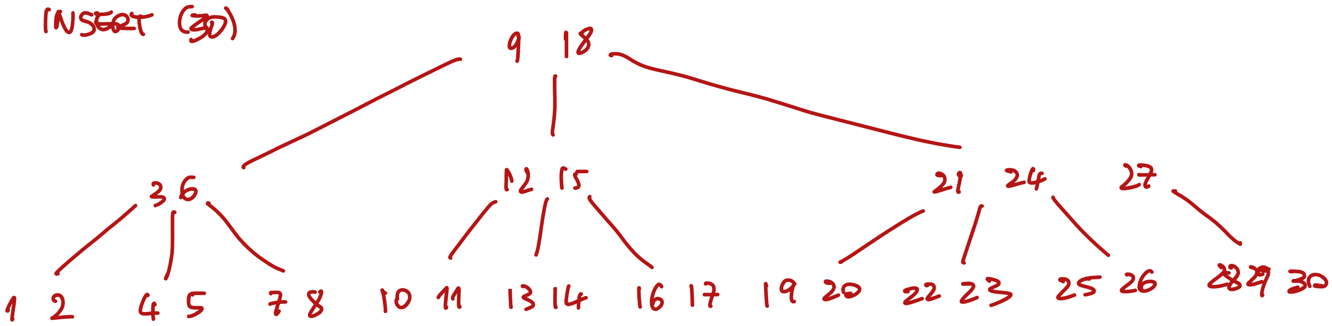
$t = 3$



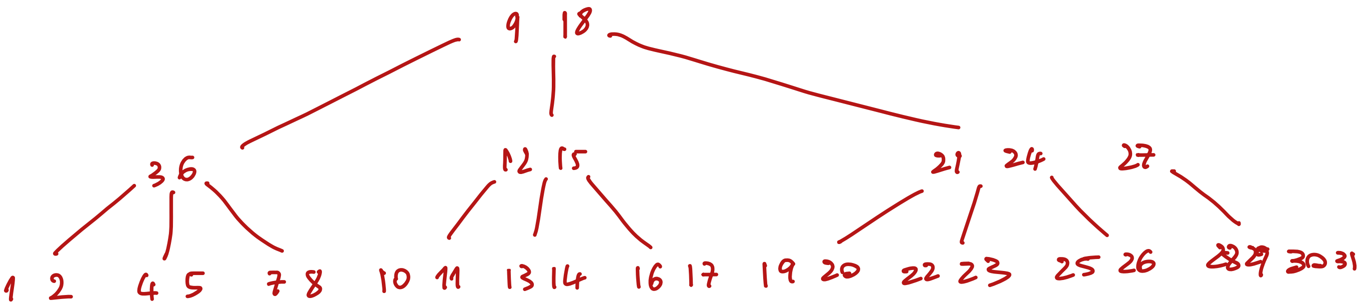
INSERT (29)



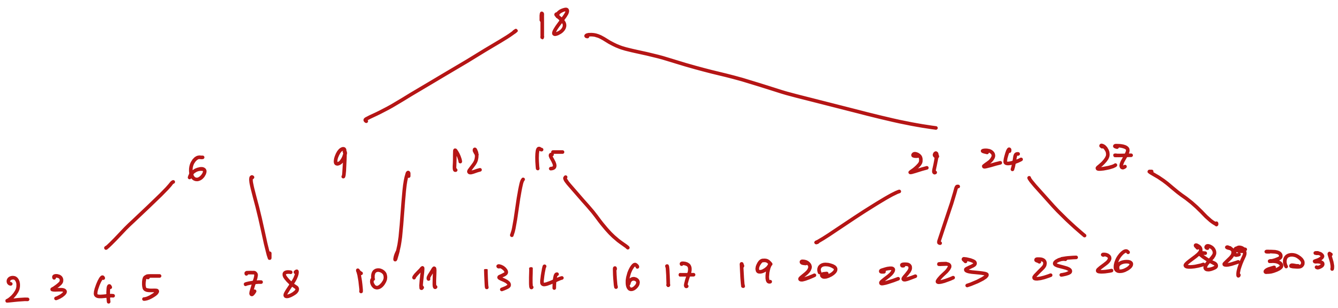
INSERT (30)



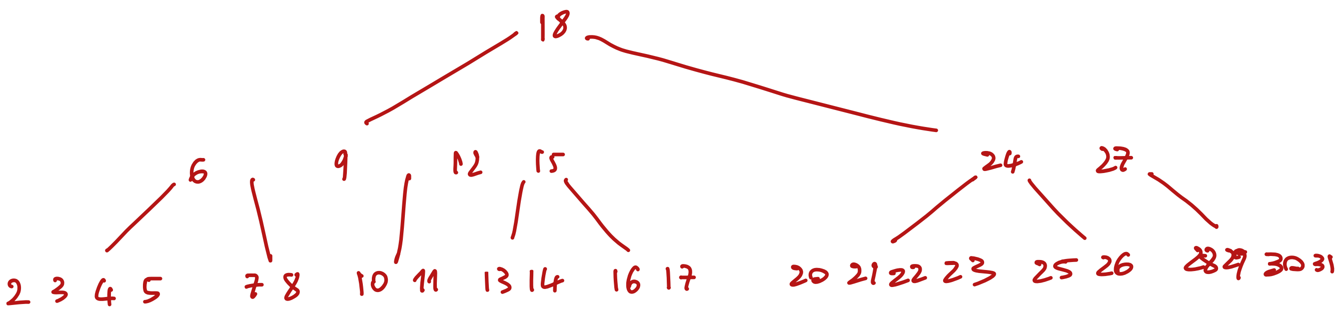
INSERT (31)



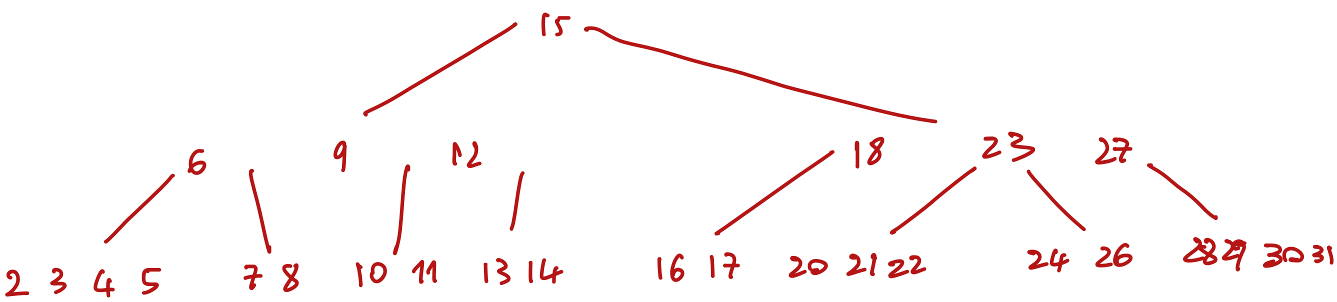
DELETE (1)



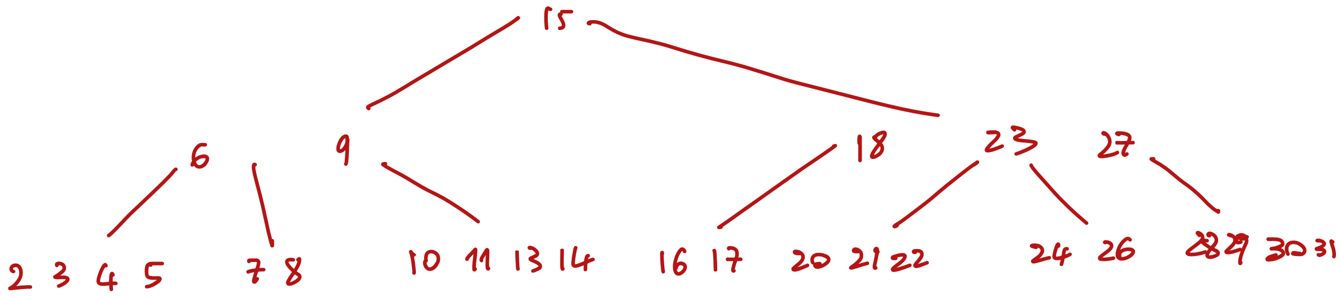
DELETE (19)



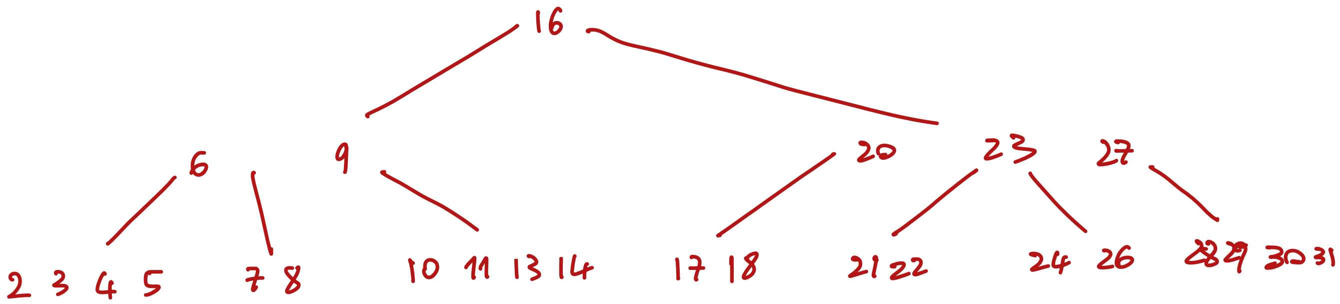
DELETE (25)



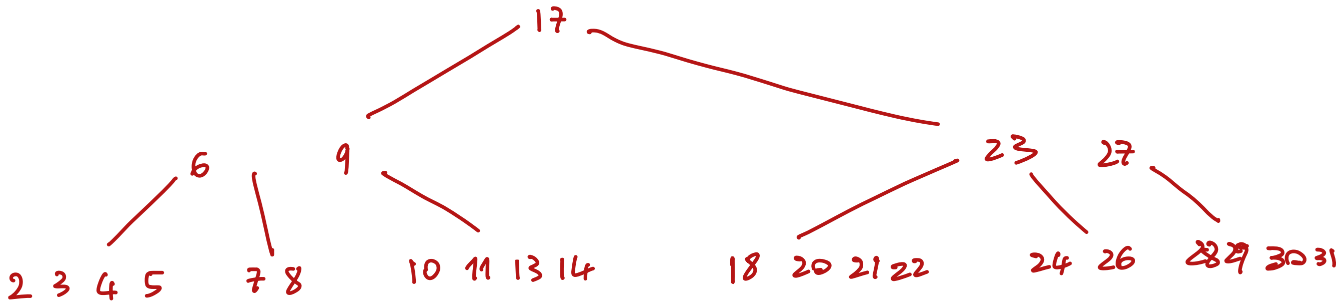
DELETE (12)



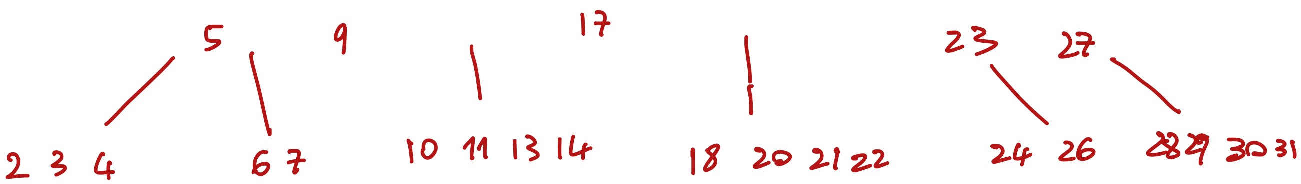
DELETE (15)



DELETE (16)

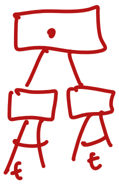


DELETE (8)



(c) Si forniscano un limite inferiore e un limite superiore per il numero di chiavi n in un B-tree di altezza h e di grado minimo uguale a quello del B-tree $\mathcal{T}$.

$n_{t,h}$



	# nodi	# chiavi
0	1	1
1	2	$2(t-1)$
2	$2t$	$2t(t-1)$
3	$2t^2$	$2t^2(t-1)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$h-1$	$2t^{h-2}$	$2t^{h-2}(t-1)$
h	$2t^{h-1}$	$2t^{h-1}(t-1)$
	$1+2\sum_{i=0}^{h-1} t^i$	$1+2(t-1)\sum_{i=0}^{h-1} t^i$

$$n_{t,h} = 1 + 2\sum_{i=0}^{h-1} t^i = 1 + 2\,\frac{t^h - 1}{t-1}$$

$$k_{t,h} = 1 + 2(t-1)\sum_{i=0}^{h-1} t^i = 1 + 2(t-1)\,\frac{t^h-1}{t-1} = 1 + 2t^h - 2$$

$$= 2t^h - 1$$

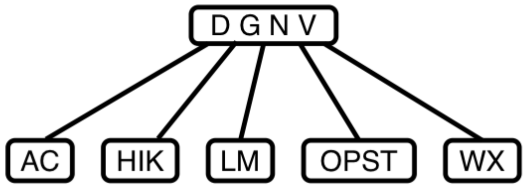
$$n_{3,h} = 1 + 2\,\frac{3^h - 1}{2} = 1 + 3^h - 1 = 3^h.$$

ESERCIZIO 2

(a) Si definisca la struttura dati dei B-tree.

(b) Si determini il grado minimo del B-tree $\mathcal{T}$ a lato e si illustri l'esecuzione delle seguenti operazioni su $\mathcal{T}$:

(1) Delete(N)	(4) Delete(G)
(2) Delete(V)	(5) Insert(U)
(3) Delete(D)	(6) Insert(D)



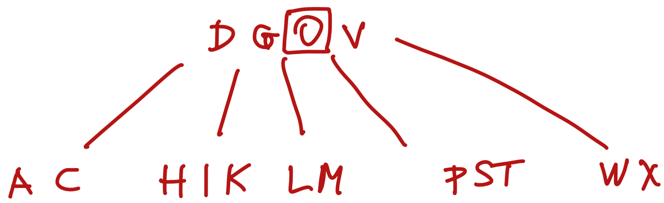
(c) Si determinino una minorazione ed una maggiorazione del numero di nodi a profondità $i = 0, 1, \ldots, h$ in un B-tree di grado minimo t e altezza h.

$$t-1 \leq 2 \qquad 4 \leq 2t-1$$

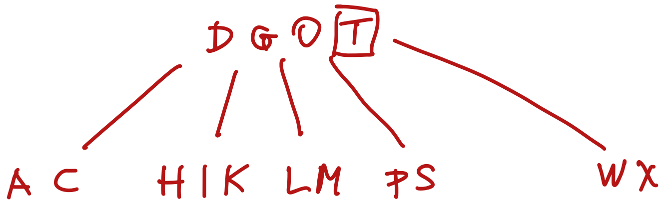
$$t \leq 3 \quad \& \quad t \geq \left\lceil \frac{5}{2} \right\rceil = 3$$

$$t = 3$$

DELETE(N)

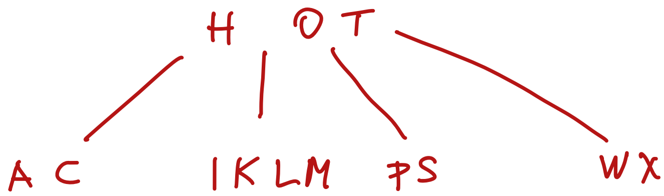


DELETE(V)

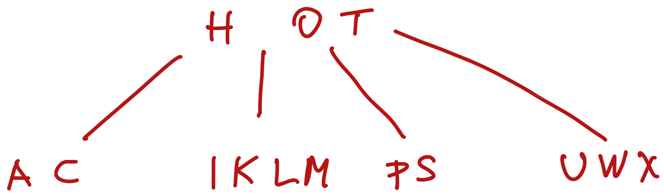


DELETE (D)

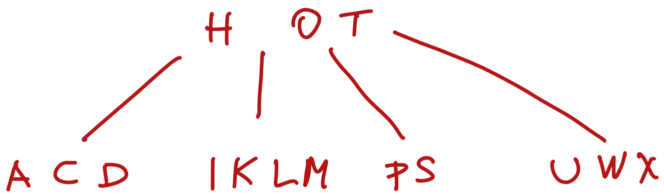
DELETE (G)



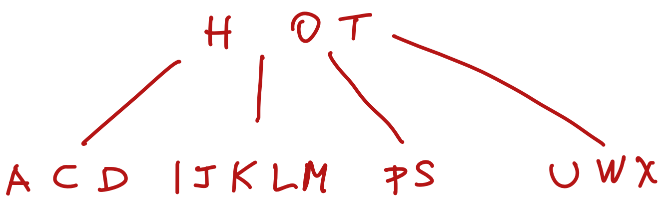
INSERT (U)



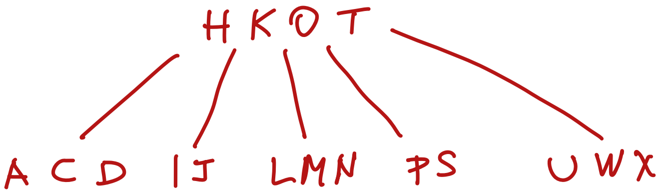
INSERT (D)



INSERT (J)



INSERT (N)



(c) Si determinino una minorazione ed una maggiorazione del numero di nodi a profondità $i = 0, 1, \ldots, h$ in un B-tree di grado minimo t e altezza h.

$\boxed{2t-1}$ $2t$

$N_{t,h}$

	# nodi	# chiavi
0	1	$(2t-1)$
1	$2t$	$2t(2t-1)$
2	$(2t)^2$	$(2t)^2(2t-1)$
3	$(2t)^3$	$(2t)^3(2t-1)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
h	$(2t)^h$	$(2t)^h(2t-1)$
	$\sum_{i=0}^{h}(2t)^i$	$(2t-1)\sum_{i=0}^{h}(2t)^i$

$$N_{t,h} = \sum_{i=0}^{h}(2t)^i = \frac{(2t)^{h+1}-1}{2t-1}$$

$$K_{t,h} = (2t-1)\sum_{i=0}^{h}(2t)^i = (2t-1)\frac{(2t)^{h+1}-1}{2t-1} = (2t)^{h+1}-1$$

$$n_{t,i} \leq \text{\# nodi a profondità } i \leq N_{t,i}$$

$$1 + 2\,\frac{t^i-1}{t-1} \leq \text{\# nodi a profondità } i \leq \frac{(2t)^{i+1}-1}{2t-1}$$

ESERCIZIO 4 (B-trees)

Dopo aver definito in maniera dettagliata la struttura dati dei B-tree, si determini il numero massimo e il numero minimo di *nodi* che può essere contenuto in un B-tree di data altezza h e grado minimo 3.

$$n_{3,h} \leq \# \text{nodi} \leq N_{3,h}$$

$$3^h = 1 + 2\,\frac{3^h - 1}{3-1} \leq \# \text{nodi} \leq \frac{(2\cdot 3)^{h+1} - 1}{2\cdot 3 - 1} = \frac{6^{h+1} - 1}{5}$$

$$3^h \leq \# \text{nodi} \leq \frac{6^{h+1} - 1}{5}$$

ESERCIZIO 2

(a) Si definisca la struttura dati dei *B-tree*.

(b) Si forniscano un limite inferiore e un limite superiore (quest'ultimo con dimostrazione) al numero di chiavi in un B-tree di grado minimo t e altezza h.

Da questi si deducano

(b_1) un limite inferiore e un limite superiore all'altezza di un B-tree di grado minimo t contenente n chiavi;

(b_2) un limite inferiore e un limite superiore al grado minimo di un B-tree di altezza h contenente n chiavi.

$$k_{t,h} = 2t^h - 1$$

$$K_{t,h} = (2t)^{h+1} - 1$$

$$2t^h - 1 \le n \le (2t)^{h+1} - 1$$

$$2t^h \le n+1 \qquad\qquad n+1 \le (2t)^{h+1}$$

$$t^h \le \frac{n+1}{2} \qquad\qquad \log_{2t}(n+1) \le h+1$$

$$h \le \log_t \frac{n+1}{2} \qquad\qquad \log_{2t}(n+1) - 1 \le h$$

$$\log_{2t}(n+1) - 1 = \log_{2t}\frac{n+1}{2t}$$

(b1)

$$\log_{2t}\frac{n+1}{2t} \le h \le \log_t \frac{n+1}{2}$$

$$2t^h - 1 \le n \le (2t)^{h+1} - 1$$

$$2t^h \le n+1 \qquad\qquad n+1 \le (2t)^{h+1}$$

$$t^h \le \frac{n+1}{2} \qquad\qquad \sqrt[h+1]{n+1} \le 2t$$

$$t \le \sqrt[n]{\frac{n+1}{2}} \qquad \frac{\sqrt[n+1]{n+1}}{2} \le t$$

(b_2)

$$\frac{\sqrt[n+1]{n+1}}{2} \le t \le \sqrt[n]{\frac{n+1}{2}}$$

ESERCIZIO 2 (B-trees)

Dopo aver definito in maniera dettagliata la struttura dati dei B-tree, si determini il numero massimo e il numero minimo di *nodi* che può essere contenuto in un B-tree di data altezza h e grado minimo 2.

$$n_{2,h} \leq n \leq N_{2,h}$$

$$n_{2,h} = 1 + 2\,\frac{2^h - 1}{2 - 1} = 1 + 2^{h+1} - 2 = 2^{h+1} - 1$$

$$N_{2,h} = \frac{(2 \cdot 2)^{h+1} - 1}{2 \cdot 2 - 1} = \frac{4^{h+1} - 1}{3}$$

ESERCIZIO 2

Dopo aver definito la struttura dati dei B-tree, si determini il rapporto

$$\frac{N_{2,h}+1}{n_{4,h}+1},$$

dove $n_{t,h}$ e $N_{t,h}$ sono rispettivamente il numero minimo e il numero massimo di nodi in un B-tree di altezza h, avente grado minimo t.

$$N_{2,h} = \frac{(2\cdot 2)^{h+1}-1}{2\cdot 2-1} = \frac{4^{h+1}-1}{3}$$

$$n_{4,h} = 1 + 2\,\frac{4^h-1}{4-1} = 1 + 2\cdot\frac{4^h-1}{3} = \frac{2\cdot 4^h-2+3}{3} = \frac{2\cdot 4^h+1}{3}$$

$$\frac{N_{2,h}+1}{n_{4,h}+1} = \frac{\frac{4^{h+1}-1}{3}+1}{\frac{2\cdot 4^h+1}{3}+1} = \frac{\frac{4^{h+1}-1+3}{\cancel{3}}}{\frac{2\cdot 4^h+1+3}{\cancel{3}}}$$

$$= \frac{4^{h+1}+2}{2\cdot 4^h+4} = \frac{4\cdot 4^h+2}{2(4^h+2)} = \frac{2\cdot 4^h+1}{4^h+2}$$

ESERCIZIO 2

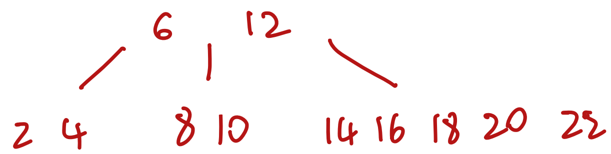
(a) Si definisca la struttura dati dei *B-tree*.

(b) Sia $\mathcal{T}$ un B-tree contenente esattamente le 11 chiavi $\{2i : 1 \leq i \leq 11\}$ e tale che la sua radice contenga le due chiavi 6 e 12.

Dopo aver determinato il grado minimo t del B-tree $\mathcal{T}$, si illustri l'esecuzione delle seguenti operazioni su $\mathcal{T}$:

(1) Insert(24)	(4) Delete(22)
(2) Delete(16)	(5) Delete(2)
(3) Delete(24)	(6) Delete(10)

(c) Si determinino il minimo e il massimo numero di chiavi che possono essere contenute in un B-tree di altezza $h = t$ e grado minimo $t' = t + 1$, dove t è il grado minimo del B-tree di cui al punto (b) precedente.



$t \leq 3$ $\quad t-1 \leq 2 \qquad 2t-1 \geq 5, \quad 2t \geq 6 \quad t \geq 3$

$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$

$t = 3$

(c) Si determinino il minimo e il massimo numero di chiavi che possono essere contenute in un B-tree di altezza $h = t$ e grado minimo $t' = t + 1$, dove t è il grado minimo del B-tree di cui al punto (b) precedente.

$h = 3$

$t' = t+1 = 4$

$k_{t,h} = 2t^h - 1$

$K_{t,h} = (2t)^{h+1} - 1$

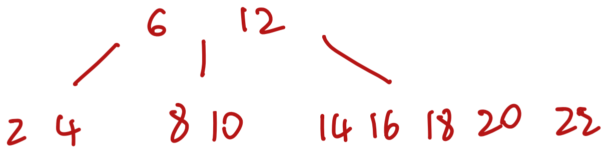
$K_{4,3}$

$k_{4,3} = 2 \cdot 4^3 - 1 = 2 \cdot (2^2)^3 - 1 = 2^7 - 1 = 128 - 1 = 127$

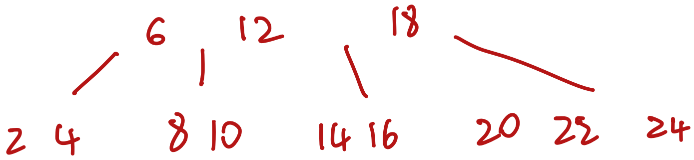
$K_{4,3} = (2 \cdot 4)^{3+1} - 1 = 8^4 - 1 = (2^3)^4 - 1 = 2^{12} - 1 = 1024 \cdot 4 - 1$

$= 4096 - 1$

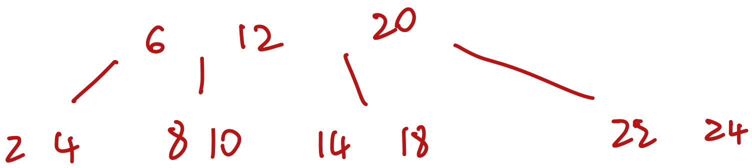
$= 4095$



INSERT (24)

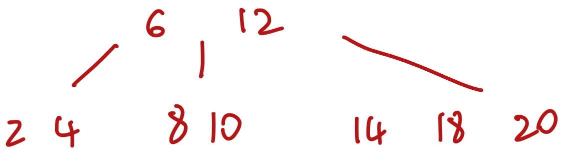


DELETE (16)

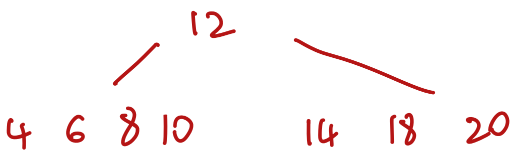


DELETE (24)

DELETE (22)



DELETE (2)



DELETE (10)